MECHANIKA HMOTNÉHO BODU

Učebné ciele

Študent by mal vedieť vymenovať a definovať základné kinematické veličiny a mal by vedieť s nimi pracovať vo zvolenej súradnicovej sústave. Mal by byť schopný poznať ich vzájomné súvislosti a na základe nich by mal vedieť formulovať matematické vyjadrenie základných kinematických veličín. Študent má vedieť vyjadriť vektor rýchlosti a zrýchlenia v sústave pevnej i v sústave, ktorá koná všeobecný pohyb. Po preštudovaní kapitoly by študent mal vedieť aplikovať nadobudnuté znalosti pri úlohách týkajúcich sa pohybov po priamke, po kružnici a tiež pre prípad vybraných pohybov v priestore. Študent by mal vedieť zvolený fyzikálny problém analyzovať, matematicky ho formulovať a nájsť jeho riešenie.

2.1 KINEMATIKATICKÝ POPIS POHYBOV. PRIAMOČIARE POHYBY

2.1.1 Pohyb a poloha hmotného bodu

Pod hmotným bodom resp. časticou rozumieme teleso, ktorého rozmery a tvar môžeme pri riešení danej úlohy zanedbať. Jedno a to isté teleso môžeme, podľa toho akú úlohu chceme riešiť, považovať raz za hmotný bod (časticu), inokedy zase za teleso konečných rozmerov.

Pri skúmaní pohybu, pod ktorým rozumieme premiestňovanie telesa, musíme toto premiestňovanie vzťahovať na určité iné teleso. Teleso, vzhľadom na ktoré budeme pohyb popisovať, nazývame vzťažné teleso. Umiestnime ho do počiatku súradnicovej sústavy.

Mechanický pohyb vo všeobecnosti môže vyzerať veľmi rozmanito. Existujú dva jednoduché typy mechanického pohybu: *translačný pohyb hmotného bodu (častice) po priamke* a rotačný pohyb po kružnici, ktoré majú tú vlastnosť, že akýkoľvek mechanický pohyb možno rozložiť na konečný počet týchto dvoch pohybov. Obidvom venujeme osobitné paragrafy.

Ak chceme popísať pohyb, musíme v každom časovom okamihu poznať polohu bodu. Polohu bodu v trojrozmernom priestore určujeme najčastejšie ***karteziánskymi*** súradnicami x, y, z (bod A na obr. 2.1.1.1). Rovnocenné je určenie polohy polohovým vektorom

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\,, \qquad (2.1.1.1).$$

kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory rovnobežné so súradnicovými osami karteziánskej súradnicovej sústavy a x, y, z príslušné karteziánske súradnice. Vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ tvoria ***bázu*** tejto sústavy. Súradnice polohového vektora, a teda vektor $\boldsymbol{r}$ pri pohybe častice sa postupne menia, sú funkciami času : $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$. Polohový vektor možno rozložiť do zložiek v tvare

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_x + \boldsymbol{r}_y + \boldsymbol{r}_z\,, \qquad (2.1.1.2)$$

kde veľkosť polohového vektora je určená vzťahom

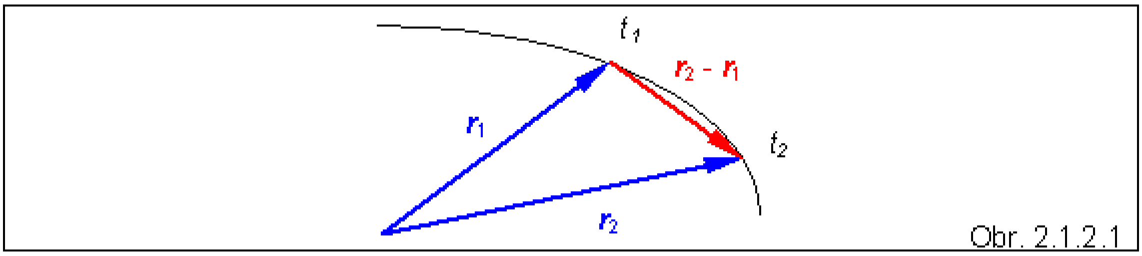
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\;. \qquad (2.1.1.3)$$

2.1.2 Rýchlosť

Pod rýchlosťou bežne rozumieme dráhu ubehnutú za jednotku času. Presnejšia definícia hovorí, že ide o podiel ubehnutej dráhy a príslušného časového intervalu : $\Delta s / \Delta t$. Preto sa rýchlosť meria v jednotkách m/s, alebo km/h . Podielom $v_p = \Delta s / \Delta t$ určujeme ***priemernú rýchlosť*** (napríklad vlak z Trnavy do Žiliny, keď do vzorca dosadzujeme vzdialenosť miest a cestovnú dobu, počas ktorej vlak sa pohyboval rôznou rýchlosťou). V rôznych technických a fyzikálnych aplikáciách je však potrebné poznať rýchlosť v danom okamihu. Okrem toho takouto definíciou by sme nezohľadnili vektorovú povahu rýchlosti. Preto sa rýchlosť zavádza ako derivácia polohového vektora podľa času, čiže ako limita podielu :

$$\boldsymbol{v} = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.1.2.1)$$

V čitateli zlomku je rozdiel polohových vektorov vyjadrujúcich polohu pohybujúcej sa častice v okamihoch t_1 a t_2 (obr. 2.1.2.1). Rozdiel vektorov $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ určuje smer vektora rýchlosti. V limite, keď sa okamihy t_1 a t_2 vzájomne približujú, budú sa k sebe približovať koncové body vektorov $\boldsymbol{r}_2$ a $\boldsymbol{r}_1$, a vektor $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ sa bude približovať k dotyčnici čiary, po ktorej sa častica pohybuje. Tento rozdiel podľa definície ešte násobíme skalárom $1/(t_2 - t_1)$, ktorý už nezmení smer vektora $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, len jeho veľkosť. Preto definícia podľa vzorca (2.1.2.1) určuje veľkosť, tak smer vektora rýchlosti.



Obr. 2.1.2.1

Polohový vektor má tri zložky, $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + y(t)\,\boldsymbol{j}$, takže jeho deriváciu možno vyjadriť ako súčet derivácií jeho zložiek :

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \qquad (2.1.2.2)$$

S vektormi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ pri derivovaní počítame ako s konštantami, lebo v našej súradnicovej sústave sa nemenia. Z posledného vzorca vidno, že

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \qquad (2.1.2.3)$$

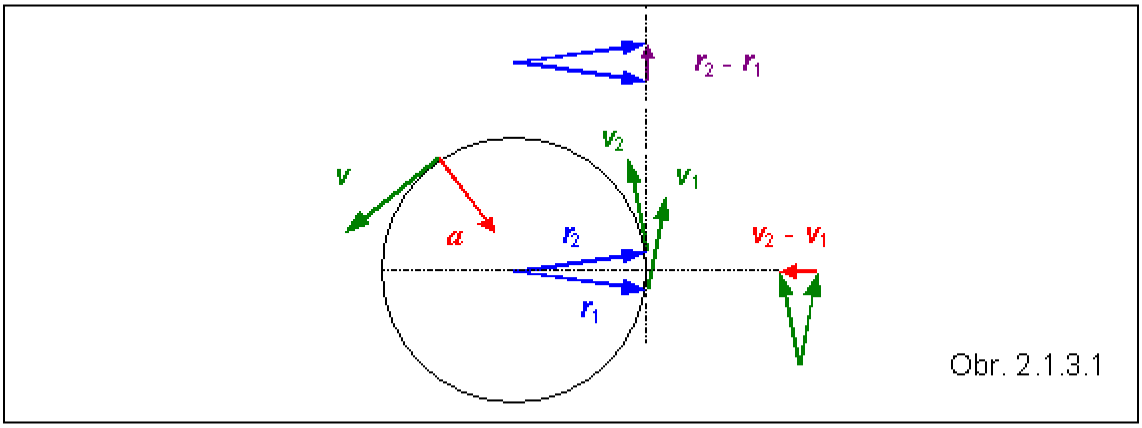
Pre veľkosť vektora rýchlosti platí vzťah :

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\ .$$ (2.1.2.4)

2.1.3 Zrýchlenie

Definícia zrýchlenia je analogická ako pri rýchlosti. Zrýchlenie zavádzame ako deriváciu vektora rýchlosti podľa času, teda ako vektorovú veličinu, ktorá určuje veľkosť, aj smer zmeny vektora rýchlosti:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\ .$$ (2.1.3.1)



Obr. 2.1.3.1

Keďže vektor rýchlosti je prvou deriváciou polohového vektora, vektor zrýchlenia je súčasne druhou deriváciou polohového vektora. Vektor zrýchlenia vo všeobecnosti nemá smer vektora rýchlosti. Napríklad pri pohybe častice po kružnici, ak sa veľkosť jej rýchlosti nemení, mení sa neustále smer vektora rýchlosti, a teda častica má zrýchlenie, ktoré ako vektor, je na vektor rýchlosti v každom okamihu kolmé. Toto si možno overiť na obr. 2.1.3.1, ak si uvedomíme, že časové okamihy t_1 a t_2 sa v limite k sebe približujú. Zatiaľ čo rozdiel vektorov $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ v limite má smer dotyčnice kružnice, teda smer kolmý na polohový vektor, vektor $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ je v limite kolmý na vektor rýchlosti, teda kolmý na dotyčnicu kružnice.
Podobne ako pri rýchlosti, aj pri zrýchlení platia vzťahy :

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\ ,$$ (2.1.3.2)

$$a = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ , \qquad \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{\eta}\ ,$$ (2.1.3.3)

kde $\boldsymbol{\eta}$ je jednotkový vektor vyjadrujúci smer vektora zrýchlenia. Jednotkou zrýchlenia je m/s^2 , pretože ide o druhú deriváciu polohového vektora podľa času .

Príklad 2.1.3.1 Hmotný bod sa pohybuje tak, že jeho polohový vektor závisí na čase podľa vzťahu $\boldsymbol{r}(t) = A\,t^3\,\boldsymbol{i} + Bt\,\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$, kde A = 1 m.s^{-3}, B = 5 m.s^{-1}, C = -3 m. Určite :

a) vektory $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}$ v okamihu $t_1 = 1\ s$ výpočtom a graficky ;

b) veľkosti ***r*, *v* , *a*** v okamihu $t_1 = 1\ s$;

c) smerové uhly ***r*, *v* , *a*** v okamihu $t_1 = 1\ s$;

d) uhol φ, ktorý zvierajú vektor rýchlosti ***v*** a vektor zrýchlenia ***a*** v okamihu $t_2 = 2\ s$;

Riešenie:

a) $\boldsymbol{r}(t) = A\,t^3\,\boldsymbol{i} + Bt\,\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k} = t^3\,\boldsymbol{i} + 5\,t\,\boldsymbol{j} - 3\,\boldsymbol{k},$

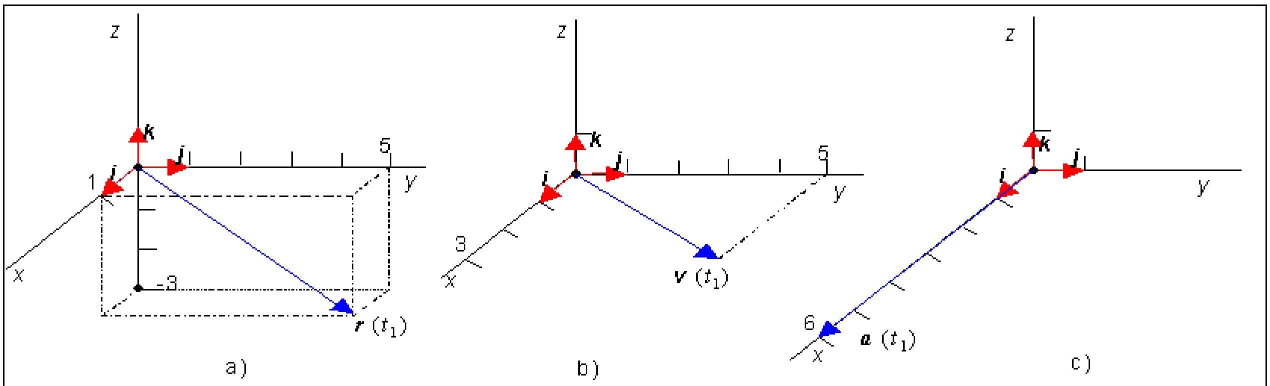
$\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j} - 3\,\boldsymbol{k},$ [m]

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 3t^2\,\boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j}\,[\mathrm{m.s^{-1}}]$$

$\boldsymbol{v}(t_1) = 3\,\boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j}$ $[\mathrm{m.s^{-1}}]$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = 6t\,\boldsymbol{i}\,[\mathrm{m.s^{-2}}]$$

$$\boldsymbol{a}(t_1) = 6\,\boldsymbol{i}\,[\mathrm{m.s^{-2}}]$$



Obr. 2.1.3.2 Grafické znázornenie : a) polohového vektora, b) vektora rýchlosti, c) vektora zrýchlenia

b) $$r(t_1) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 25 + 9} = \sqrt{35}\ [\mathrm{m}]$$

$$v(t_1) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}\ [\mathrm{m.s^{-1}}]$$

$$a(t_1) = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}} = \sqrt{36} = 6 \quad [\mathrm{m.s^{-2}}]$$

c) *smerové kosínusy a smerové uhly polohového vektora **r** (t_1):*

$$\cos\alpha = \frac{r_x}{r} = \frac{1}{\sqrt{35}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 80^o$$

$$\cos\beta = \frac{r_y}{r} = \frac{5}{\sqrt{35}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 32^o$$

$$\cos\ \gamma = \frac{r_z}{r} = \frac{-3}{\sqrt{35}} = \Rightarrow \gamma = 180^o - 59^o = 121^o$$

*smerové kosínusy a smerové uhly vektora rýchlosti **v**(t_1):*

$$\cos\alpha' = \frac{v_x}{v} = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \alpha' = 59°$$

$$\cos\beta' = \frac{v_y}{v} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \beta' = 31°$$

$$\cos\gamma' = \frac{v_z}{v} = \frac{0}{\sqrt{34}} = 0 \Rightarrow \gamma' = 90°$$

*smerové kosínusy a smerové uhly vektora zrýchlenia **a**(t_1):*

$$\cos\alpha'' = \frac{a_x}{a} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \alpha'' = 0°$$

$$\cos\beta'' = \frac{a_y}{a} = \frac{0}{6} = 0 \Rightarrow \beta'' = 90°$$

$$\cos\gamma'' = \frac{a_y}{a} = \frac{0}{6} = 0 \Rightarrow \gamma'' = 90°$$

d) uhol vektorov rýchlosti a zrýchlenia v časovom okamihu $t_2 = 2$ s

Určime vektor rýchlosti v danom okamihu: $\boldsymbol{v}(t_2) = 3.4\,\boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j}$ a vektor zrýchlenia v danom okamihu: $\boldsymbol{a}(t_2) = 6\,\boldsymbol{i}$.
Ich uhol možno vypočítať použitím skalárneho súčinu

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{v}(t_2).\mathbf{a}(t_2)}{va} = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{va} = \frac{12.6 + 5.0 + 0}{\sqrt{144+25}\sqrt{36}} = 0{,}92$$

$$\varphi = 23^{o}$$

2.1.4 Pohyb po priamke

Pri pohybe po priamke rozlišujeme *pohyby* ***s konštantnou rýchlosťou*** *(vektor rýchlosti nemení veľkosť, ani smer)*, *pohyby s konštantným zrýchlením* (nemení sa veľkosť ani smer vektora zrýchlenia) a všeobecné pohyby. Tretí prípad nebudeme rozoberať. V prvom, aj v druhom prípade bude cieľom získať vzťahy vyjadrujúce polohu pohybujúcej sa častice, teda jej karteziánske súradnice, ako funkciu času. V druhom prípade pôjde aj o vyjadrenie závislosti rýchlosti od času.

a) Pri pohybe konštantnou rýchlosťou sa vektor rýchlosti $\mathbf{v}$ nemení, jeho derivácia podľa času sa rovná nule, nulové je teda zrýchlenie : $\mathbf{a} = 0$. Takémuto pohybu sa hovorí ***pohyb rovnomerný***. Ak sa nemení vektor rýchlosti $\mathbf{v}$, nemenia sa ani jeho súradnice v_x , v_y a v_z . Pre každú súradnicu rýchlosti platí vzťah typu $v_y = \Delta y / \Delta t$, takže možno napísať vzťahy $\Delta x = v_x \Delta t$, $\Delta y = v_y \Delta t$, $\Delta z = v_z \Delta t$. Vyjadrujú zmenu súradníc *x, y, z* pri uplynutí časového intervalu Δt . Predpokladajme, že v časovom okamihu t_1 má častica súradnicu x_1 a v okamihu t_2 súradnicu x_2. Časový interval $(t_2 - t_1)$ rozdeľme na mnoho malých intervalov Δt_i (i = 1, 2, ..., n), takže môžeme napísať

$$(\Delta x)_i = v_x (\Delta t)_i \ . \qquad (2.1.4.1)$$

Sčítaním všetkých prírastkov súradnice v časovom intervale $t_2 - t_1$ dostaneme jej celkovú zmenu :

$$x_2 - x_1 = \sum_{i=1}^{n}(\Delta x)_i = \sum_{i=1}^{n} v_x (\Delta t)_i = v_x \sum_{i=1}^{n}(\Delta t)_i = v_x (t_2 - t_1) \ . \qquad (2.1.4.2)$$

Preto polohu častice v okamihu t_2 vyjadríme vzorcom

$$x_2 = x_1 + v_x (t_2 - t_1). \qquad (2.1.4.3)$$

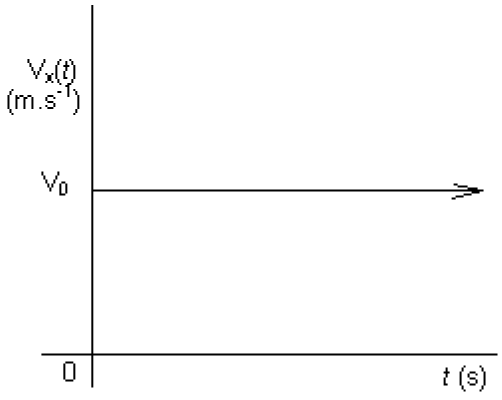
Je zvykom označovať súradnicu na začiatku pohybu ako x_o , nie ako x_1 a príslušný čas (časový okamih) nie ako t_1 , ale ako t_o s tým, že sa zvyčajne považuje za nulový, teda $t_o = 0$. Vzorec (2.1.4.3) zmení potom svoju podobu :

$$x_2 = x_o + v_x t_2 \ ,$$

pričom platí pre ľubovoľný časový okamih t_2 . Preto sa index vynecháva, takže konečná podoba tohto vzorca má tvar

$$x = x_o + v_x t. \qquad (2.1.4.4)$$

Grafickým znázornením závislosti veľkosti rýchlosti $v = v_x(t)$ od času pri rovnomernom pohybe v smere osi x, je vždy priamka, rovnobežná s časovou osou t (obr. 2.1.4.1). Smernica tejto priamky resp. tg α, (α je uhol priamky s osou nezávisle premennej, ktorým je čas t) *je nulová,* nakoľko α = o resp. 180 ^{0}.



Obr. 2.1.4.1 Závislosť rýchlosti od času pri rovnomernom pohybe po osi x

Rovnaké úvahy platia pre obe ďalšie súradnice :

$y = y_o + v_y t,$

$z = z_o + v_z t.$

Tieto rovnice vyjadrujú polohu častice pri rovnomernom pohybe po priamke v ľubovoľnom časovom okamihu t. Tieto tri skalárne rovnice postupne vynásobíme príslušnými jednotkovými vektormi ***i, j, k*** a sčítame ich ľavé a pravé strany :

$(x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}) = (x_o\,\boldsymbol{i} + y_o\,\boldsymbol{j} + z_o\,\boldsymbol{k}) + (v_x\,\boldsymbol{i} + v_y\,\boldsymbol{j} + v_z\,\boldsymbol{k})\,t$,

čo možno prepísať do vektorového tvaru

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{v}\,t \,. \qquad (2.1.4.5)$$

V rovnici (2.1.4.2) namiesto sumácie možno integrovať, keď delenie časového intervalu $(t_2 - t_1)$ budeme zjemňovať, takže počet malých časových intervalov $(\Delta t)_i$ bude rásť nad všetky medze :

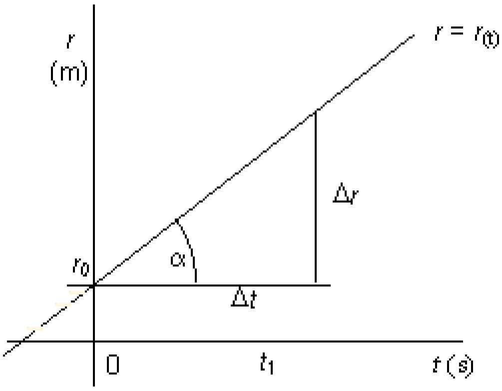
$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} v_x \mathrm{d}t = v_x(t_2 - t_1), \qquad (2.1.4.6)$$

čo nakoniec vedie k rovnakému výsledku, ako je uvedený vo vzorci (2.1.4.4). *Grafickým znázornením závislosti veľkosti dráhy $x = x(t)$ od času pri rovnomernom pohybe, určenom vzťahom* (2.1.4.6) *je* ***priamka*** (obr. 2.1.4.2). Smernica tejto priamky resp. tg α, kde α je uhol priamky s osou nezávisle premennej, ktorým je čas t, udáva veľkosť rýchlosti skúmaného hmotného bodu.

Vo fyzikálnej literatúre je však zvykom podobne ako pri derivácii, integrovať vektorovú funkciu, takže namiesto troch skalárnych rovníc typu (2.1.4.6) sa píše jedna vektorová rovnica :

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}\, dt = \boldsymbol{v}\,(t_2 - t_1), \qquad (2.1.4.7)$$

takže po zmene symboliky, spomenutej pred vzorcom (2.1.4.4), dostaneme rovnaký výsledok ako (2.1.4.5) .



Obr. 2.1.4.2 Graf závislosti veľkosti dráhy od času pri rovnomernom pohybe po priamke

Príklad 2.1.4.4 Raketa sa z pokoja začala pohybovať tak, že jej zrýchlenie pri priamočiarom pohybe rovnomerne rastie s časom. Za prvých 5 s pohybu jej zrýchlenie vzrástlo na hodnotu $a_l = 5$ m.s^{-2}. Za predpokladu, že vplyv prostredia na pohyb rakety zanedbáte určite:

a) funkčnú závislosť zrýchlenia rakety od času pri tomto priamočiarom pohybe a smer, v ktorom pohyb prebieha;

b) funkčnú závislosť jej rýchlosti od času pri tomto pohybe;

c) funkčnú závislosť prebehnutej dráhy od času pri tomto priamočiarom pohybe;

d) akú rýchlosť dosiahla za pol minúty svojho pohybu;

e) akú dráhu za tento čas raketa prebehla.

Riešenie: Zo zadania príkladu si vypíšeme veličiny a ich hodnoty, ktoré príklad udáva :

$v_0 = v(0) = 0$ m.s^{-1}

$t_1 = 5$ s

$a_l = 5$ m.s^{-2}

$t_2 = 0{,}5$ min $= 30$ s

a) Určíme funkčnú závislosť zrýchlenia rakety od času pri tomto priamočiarom pohybe.

Prvá veta príkladu hovorí, že strela sa dáva do pohybu takým spôsobom, že jej zrýchlenie pri priamočiarom pohybe *rovnomerne rastie s časom*. Graficky túto skutočnosť môžeme znázorniť priamkou a matematicky formulovať rovnicou priamky, ktorá je v súradnicovom systéme xy vyjadrená rovnicou $y = kx+q$. V nami skúmanom prípade nezávisle premennou je čas t a závisle premennou zrýchlenie $\boldsymbol{a}$. Preto pri transformácii súradníc $x \rightarrow t$ a $y \rightarrow \boldsymbol{a}$, zvážení, že v okamihu $t_0 = 0$ raketu umiestnime do začiatku súradnicového systému, časová závislosť zrýchlenia bude daná vzťahom

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) = a(t)\,\boldsymbol{i} = kt\boldsymbol{i}$$

Konštantu priamej úmernosti k, resp. smernicu tejto priamky, určíme zo zadaných hodnôt t_1 a zrýchlenia $a_1(t_1)$

$a(t_1) = kt_1 \rightarrow k = a(t_1)/t_1$. Po dosadení číselných hodnôt dostávame $k = 1\ \mathrm{m.s}^{-3}$.

b) Určime funkčnú závislosť rýchlosti od času pri tomto pohybe:

Keďže sa jedná o pohyb po priamke a začiatok nami zvoleného súradnicového systému leží na tejto priamke, počas celého pohybu bude ležať i vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ i polohový vektor strely $\boldsymbol{r}$ v smere vektora zrýchlenia $\boldsymbol{a}$, t.j. v smere určeným jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i}$. Veľkosť rýchlosti určíme

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t \,,$$

$$v - v_0 = k\int_0^t t\,\mathrm{d}t = k\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t = k\frac{t^2}{2} \,.$$

Počiatočná rýchlosť v_0 strely je nulová, takže pre hľadanú funkčnú závislosť veľkosti rýchlosti od času dostávame vzťah $v(t) = k\,t^2/2$.

c) Určime časovú závislosť polohy z definície rýchlosti

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

Pre veľkosť prebehnutej dráhy (dĺžku) dostávame

$$x = \int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\int_0^t t^2\,dt = \frac{kt^3}{6} \,.$$

d) Určime, akú rýchlosť dosiahla strela za pol minúty svojho pohybu:

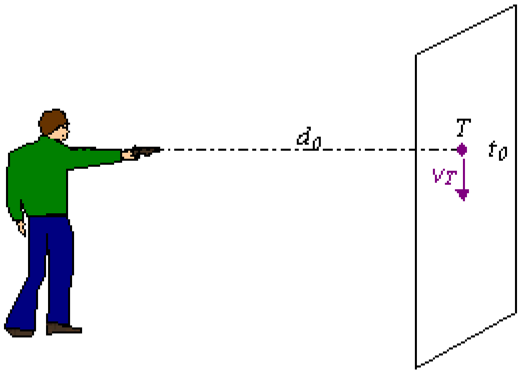
Z vypočítanej závislosti rýchlosti od času $v(t) = k\,t^2/2$ po dosadení uvedených číselných hodnôt dostaneme

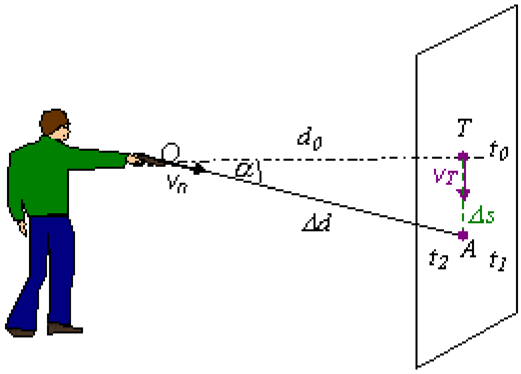
$v(t_2) = k\,t_2^2/2 = 450\ \mathrm{m/s}$

e) Určime, akú dráhu za tento čas strela prešla:

Z vypočítanej závislosti polohy od času $x(t) = kt^3/6$, po dosadení uvedených číselných hodnôt, dostaneme pre dĺžku ubehnutej dráhy $|x-x_0| = 4\,500\ \mathrm{m}$.

Príklad 2.1.4.6 Na strelnici v lunaparku chce strelec zasiahnuť nábojom vystreleným z pušky pohyblivý terč T. Predpokladajme, že náboj sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom s rýchlosťou $v_n = 50\ m.s^{-1}$. Terč v okamihu výstrelu sa nachádza vo vertikálnej rovine v bode T vo vzdialenosti $d_0 = 3$ m od strelca a pohybuje sa kolmo na túto spojnicu rovnomerným priamočiarym pohybom rýchlosťou $v_T = 20\ m.s^{-1}$. Zistite, či strelec zasiahol terč, ak mieril pod uhlom 30^0 od horizontálnej roviny (viď obrázok).





Riešenie: Aby strelec trafil terč, musí sa terč i strela v určitom časovom okamihu t nachádzať na rovnakom mieste, ktoré označíme A. Nech sa terč z bodu T do bodu A dostane za časový interval $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ ($t_0 = 0$) a za tento interval prebehne dĺžku dráhy Δs, určenej rovnicou

$$\Delta s = v_T t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\Delta s}{v_T}.$$

(a)

Z obrázku pre miesto zásahu platí

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\Delta s}{d_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta s = d_0\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

(b)

Dobu letu terču určíme, ak dosadíme rovnicu (b) do (a)

$$t_1 = \frac{d_0}{v_T}\mathrm{tg}\,\alpha$$

Označme t_2 dobu letu náboja z bodu O do bodu A. Za túto dobu náboj preletí dĺžku dráhy Δd, pre ktorú platí

$$\Delta d = v_n t_2.$$

Na základe Pythagorovej vety a po dosadení za Δd, určíme časový interval t_2 potrebný na doletenie náboja do bodu A.

$$(\Delta s)^2 + d_0^{\,2} = (\Delta d)^2 \quad \Rightarrow t_2 = \frac{\sqrt{d_0^2 + (d_0 tg\alpha)^2}}{v_n} = \frac{d_0}{v_n}\sqrt{1+tg^2\alpha}.$$

Ak náboj i terč doletia do bodu A za rovnaký časový interval, strelec trafí terč. Po dosadení číselných hodnôt dostávame pre

$$t_1 = \frac{3\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m.s^{-1}}}\,\mathrm{tg}\,30^\circ = 0{,}086\,\mathrm{s},$$

$$t_2 = \frac{3\,\mathrm{m}}{50\,\mathrm{m}}\sqrt{1+(0{,}577)^2} = 0{,}06\,s.$$

Získané číselné hodnoty sú rôzne, takže strelec nezasiahol pohyblivý terč.

Kontrolné otázky

1. Vyjadrite polohový vektor súradnicovej sústavy v zložkovom tvare.
2. Napíšte vzťah pre veľkosť polohového vektora.
3. Aké základné dva druhy mechanického pohybu rozlišujeme?
4. Definujte priemernú rýchlosť.
5. Definujte okamžitú rýchlosť hmotného bodu.
6. Vyjadrite vektor rýchlosti v zložkovom tvare.
7. Vyslovte definíciu zrýchlenia.
8. Matematicky formulujte definíciu zrýchlenia .
9. Nakreslite grafickú závislosť rýchlosti hmotného bodu ako funkciu času, ak sa hmotný bod pohybuje priamočiaro v smere osi x : a) rovnomerne , b) rovnomerne zrýchlene.
10. Nakreslite grafickú závislosť zrýchlenia hmotného bodu ako funkciu času, ak sa hmotný bod pohybuje priamočiaro v smere osi y : a) rovnomerne , b) rovnomerne zrýchlene.
11. Nakreslite grafickú závislosť polohy hmotného bodu ako funkciu času, ak sa hmotný bod pohybuje priamočiaro v smere osi x : a) rovnomerne , b) rovnomerne zrýchlene.