

Druhé laboratórne cvičenie

Princíp merania:

Na guľku pohybujúcu sa v kvapaline budú pôsobiť 3 sily:

1. Tiažová sila $F_g = mg$,

m -hmotnosť guľky a

g - tiažové zrýchlenie(9,81 m.s⁻²)

2. Vztlaková sila $F_{vz} = V\rho g$,

V -objem guľky a

ρ - hustota kvapaliny;

3. Odporová sila $F_o = 6\pi\eta r v$,

η -koeficient vnútorného trenia kvapaliny,

r -polomer guľky

v - rýchlosť guľky

Po vhození guľku do kvapaliny, začne rovnomerne zrýchľovať, až kým nedosiahne určitú kritickú rýchlosť v_0 . Po dosiahnutí tejto rýchlosti bude výslednica síl nulová a guľka sa bude ďalej pohybovať už len rovnomernou rýchlosťou. Pre veľkosti síl bude platiť:

$$F_g = F_{vz} + F_o$$

po dosadení:

$$mg = V\rho g + 6\pi\eta r v_0$$

Odtiaľ pre koeficient vnútorného trenia platí:

$$\eta = ((m - \rho V)/g) (6\pi r v_0)$$

v_0 - vypočítame ako podiel dráhy h a času t za ktorý guľka prejde danú dráhu.

V prípade, že sa guľka pohybuje vo valci s vnútorným polomerom R , je potrebné použiť v menovateli korekčný člen $(1 + 2,4(r/R))$. Po dosadení a pridaní korekčného člena:

$$\eta = \frac{(m - \rho V)gt}{6\pi r h \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)}$$

Prístroje a pomôcky:

guľky,

vysoký sklenený valec s kvapalinou,

meter	(presnosť	1 mm),
hustomer	(presnosť	5 kg.m-3),
váhy	(presnosť	0,01 g),
mikrometer	(presnosť	0,001 mm),
posuvné meradlo	(presnosť	0,2 mm),
stopky	(presnosť	0,005 s)

Postup:

1. Pomocou hustomera určíme hustotu kvapaliny a jej neistotu merania typu B.
2. Pomocou metra odmeriame dráhu pádu guľôčky a jeho neistotu merania typu B.
3. Vyberieme viacero približne rovnakých guľiek. Odmeriame hmotnosť všetkých guľiek naraz a nameranú hodnotu vydelíme ich počtom. Určíme neistotu merania typu B pre hmotnosť a vydelíme ju počtom guľiek.
4. Pomocou mikrometra určíme priemer jednotlivých guľiek. Vypočítame priemernú hodnotu priemeru guľiek a jeho neistotu merania typu A. Vydelením týchto hodnôt dvomi dostaneme priemernú hodnotu polomeru guľiek r a jeho neistotu.
5. Pomocou posuvného meradla odmeriame vnútorný priemer valca a určíme jeho hodnotu a neistotu typu B. Vydelením tejto hodnoty dvomi dostaneme hodnotu vnútorného polomeru valca R a jeho neistotu.
6. Jednotlivo púšťame guľky do valca a pomocou stopiek meriame dobu t , za ktorú prejde guľka dráhu h . Vypočítame neistotu merania typu A pre čas.
7. Určíme koeficient vnútorného trenia kvapaliny a metódou linearizácie vypočítame jeho neistotu.

Tabuľky nameraných a vypočítaných hodnôt:

priemer:

i	d_i [mm]	$(d_i - \bar{d})$ [mm]	$(d_i - \bar{d})^2 \cdot 10^2$ [mm ²]
1	4,16	-0,673	0,453
2	4,36	-2,673	7,143
3	4,46	-3,673	13,489
4	4,02	0,727	0,529
5	3,97	1,227	1,506
6	4,04	0,527	0,278
7	3,97	1,227	1,506
8	4,01	0,827	0,684
9	4,03	0,627	0,393
10	3,99	1,027	1,055
11	4,01	0,827	0,684
$\Sigma = 45,02$		$\Sigma = 27,72$	

$$\bar{d} = \frac{\sum_{d=i}^{11} d_i}{11} = \frac{45,02 \text{ mm}}{11} = 4,093 \text{ mm}$$

$$d_{11} = 4,093 \text{ mm}$$

pre i=8:

$$\bar{d} - d_8 = 4,093 \text{ mm} - 4,01 \text{ mm} = 0,827 \text{ mm}$$

pre i=8:

$$(\bar{d} - d_8)^2 = (4,093 \text{ mm} - 4,01 \text{ mm})^2 = 0,684 \text{ mm}^2$$

čas:

i	t_i [s]	$(t_i - \bar{t})$ [s]	$(t_i - \bar{t})^2$ [s ²]
1	4,54	1,12	1,25
2	4,63	1,03	1,05
3	5,13	0,53	0,28
4	4,63	1,03	1,05
5	6,06	-0,40	0,16
6	6,28	-0,62	0,39
7	6,1	-0,44	0,20
8	6,34	-0,68	0,47
9	6,12	-0,46	0,21
10	6,22	-0,56	0,32
11	6,17	-0,51	0,26
$\Sigma =$	62,22s		$\Sigma = 5,64 \text{ s}$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=0}^{11} t_i}{11} = \frac{62,22s}{11} = 5,66s$$

$$t_{11}=5,66 \text{ s}$$

pre i=3:

$$\bar{t} - t_3 = 5,66s - 5,13s = 0,53s$$

pre i=3:

$$(\bar{t} - t_3)^2 = (5,66s - 5,13s)^2 = 0,28 \text{ s}^2$$

$$\rho = 920 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$h = 0,8 \text{ m}$$

$$m = \frac{m_{11}}{11} = \frac{1,138g}{11} = 0,103g \Rightarrow 0,103 \cdot 10^{-3}kg$$

$$r = \frac{\bar{d}}{2} = \frac{4,09mm}{2} = 2,045 \text{ mm} \Rightarrow 0,002045m$$

$$R = \frac{D}{2} = \frac{30,2}{2} = 15,1 \text{ mm} \Rightarrow 0,0151 \text{ m}$$

$$\bar{t} = 5,66 \text{ s}$$

Výpočet neistôt merania nameraných veličín:

$$\delta\rho_B = \pm 5 \text{ kg/m}^3$$

$$\delta h_B = \pm 0,2 \text{ mm} \rightarrow 0,0002 \text{ m}$$

$$\delta m = \frac{\delta m_{11}}{11} = \frac{0,01g}{11} = 0,0009 \text{ g} \Rightarrow 0,0000009 \text{ kg}$$

$$\delta d_A = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{11} (\bar{d} - d_i)^2}{n(n-1)}}$$

$$\delta d_A = \pm 0,05 \text{ mm}$$

$$\delta d_A = \pm \sqrt{\frac{0,2772 \text{ mm}^2}{11 \cdot (11-1)}}$$

$$\delta d_B = \pm 0,001 \text{ mm}$$

$$\delta d = \pm \sqrt{\delta h_A^2 + \delta h_B^2}$$

$$\delta d = \pm 0,05 \text{ mm} \Rightarrow 0,00005 \text{ m}$$

$$\delta d = \pm \sqrt{0,05^2 \text{ mm}^2 + 0,001^2 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{d} = (4,09 \pm 0,05) \text{ mm}$$

$$\delta r = \frac{\delta d}{2} = \frac{0,05 \text{ mm}}{2} = 0,025 \text{ mm} \Rightarrow 0,000025 \text{ m}$$

$$\delta t_A = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{11} (\bar{t} - t_i)^2}{n(n-1)}}$$

$$\delta t_A = \pm 0,226 \text{ s}$$

$$\delta t_A = \pm \sqrt{\frac{5,64 \text{ s}}{11 \cdot (11-1)}}$$

$$\delta t_B = \pm 0,005 \text{ s}$$

$$\delta t = \pm \sqrt{\delta t_A^2 + \delta t_B^2}$$

$$\delta t = \pm 0,226 \text{ s}$$

$$\delta t = \pm \sqrt{0,226^2 \text{ s} + 0,005^2 \text{ s}}$$

$$\bar{t} = (5,66 \pm 0,23) \text{ s}$$

$$\delta D_B = 0,2 \text{ mm}$$

$$\delta R = \frac{\delta D}{2} = \frac{0,2 \text{ mm}}{2} = 0,1 \text{ mm} \Rightarrow 0,0001 \text{ m}$$

Výpočet koeficientu vnútorného trenia kvapaliny a jeho neistoty:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,002045^3 m^3 = 3,582 \cdot 10^{-8} m^3$$

$$\eta = \frac{(m - \rho V)gt}{6\pi rh \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)} = \frac{(0,103 \cdot 10^{-3} kg - 920 kg \cdot m^{-3} \cdot 3,582 \cdot 10^{-8} m^3) 9,81 m \cdot s^{-2} \cdot 5,66 s}{6 \cdot \pi \cdot 0,002045 m \cdot 0,8 m \left(1 + 2,4 \frac{0,002045 m}{0,0151 m}\right)} = 0,09518 kg/m \cdot s$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial h} = \frac{-(m - \rho V)gt}{6\pi rh^2 \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)} = \frac{-(0,103 \cdot 10^{-3} kg - 920 kg \cdot m^{-3} \cdot 3,582 \cdot 10^{-8} m^3) 9,81 m \cdot s^{-2} \cdot 5,66 s}{6 \cdot \pi \cdot 0,002045 m \cdot 0,8^2 m^2 \left(1 + 2,4 \frac{0,002045 m}{0,0151 m}\right)} = -0,119 kg m^{-2} s$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} = \frac{-Vgt}{6\pi rh \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)} = \frac{-3,582 \cdot 10^{-8} m^3 \cdot 9,81 m \cdot s^{-2} \cdot 5,66 s}{6 \cdot \pi \cdot 0,002045 m \cdot 0,8 m \left(1 + 2,4 \frac{0,002045 m}{0,0151 m}\right)} = -4,87 \cdot 10^{-5} m^2/s$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial m} = \frac{gt}{6\pi rh \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)} = \frac{9,81 m \cdot s^{-2} \cdot 5,66 s}{6 \cdot \pi \cdot 0,002045 m \cdot 0,8 m \left(1 + 2,4 \frac{0,002045 m}{0,0151 m}\right)} = 1358,86 s^{-1} m^{-1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{-gt}{6\pi h} \left[\frac{4\pi \rho r^3 \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right) + (m - \rho V) \left(1 + 4,8 \frac{r}{R}\right)}{r^2 \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{-9,81 m \cdot s^{-2} \cdot 5,66 s}{6 \cdot \pi \cdot 0,8 m} \left[\frac{4 \cdot \pi \cdot 920 kg \cdot m^{-3} \cdot 0,002045^3 m^3 \cdot \left(1 + 2,4 \frac{0,002045 m}{0,0151 m}\right) + (0,103 \cdot 10^{-3} kg - 920 kg \cdot m^{-3} \cdot 3,582 \cdot 10^{-8} m^3) \cdot \left(1 + 4,8 \frac{0,002045 m}{0,0151 m}\right)}{0,002045^2 m^2 \left(1 + 2,4 \frac{0,002045 m}{0,0151 m}\right)^2} \right]$$

$$= -74,08 kg m s$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial R} = \frac{2,4(m - \rho V)gt}{6\pi h R^2 \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)^2} = \frac{2,4(0,103 \cdot 10^{-3} kg - 920 kg \cdot m^{-3} \cdot 3,582 \cdot 10^{-8} m^3) 9,81 m \cdot s^{-2} \cdot 5,66 s}{6 \cdot \pi \cdot 0,8 m \cdot 0,0151^2 m^2 \left(1 + 2,4 \frac{0,002045 m}{0,0151 m}\right)^2} = 1,55 kg m^{-2} s^{-1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{(m - \rho V)g}{6\pi r h \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)} = \frac{(0,103 \cdot 10^{-3} kg - 920 kg \cdot m^{-3} \cdot 3,582 \cdot 10^{-8} m^3) 9,81 m \cdot s^{-2}}{6 \cdot \pi \cdot 0,002045 m \cdot 0,8 m \left(1 + 2,4 \frac{0,002045 m}{0,0151 m}\right)} = 0,017 kg m^{-1} s^{-2}$$

$$\delta \eta = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial h} \delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \delta \rho\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial m} \delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial R} \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \delta t\right)^2} =$$

$$\pm \sqrt{(-0,119 kg m^{-2} s \cdot 0,0002 m)^2 + (-4,87 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-1} \cdot 5 kg \cdot m^{-3})^2 + (1358,86 s^{-1} m^{-1} \cdot 0,0000009 kg)^2}$$

$$+ (-74,08 kg m s \cdot 0,000025 m)^2 + (1,55 kg m^{-2} s^{-1} \cdot 0,0001 m)^2 + (0,017 kg m^{-1} s^{-2} \cdot 0,226 s)^2$$

$$= 0,0044 kg/m \cdot s$$

$$\delta \eta_{rel} = \frac{\delta \eta}{\eta} = \frac{0,0044 kg/m \cdot s}{0,0952 kg/m \cdot s} = 0,046 \dots \dots 4,6\%$$

Záver:

Počas laboratórneho cvičenia sme namerali a vypočítali hustotu kvapaliny, hmotnosť guľiek a ich polomer, vnútorný polomer valca, v ktorom sa nachádza neznáma kvapalina a čas, za ktorý prejde guľka dráhu h rovnomerným pohybom. Ich hodnoty zapísané na počet významných čísiel sú:

$$h = 0,8000 \text{ m}$$

$$\rho = 5,0000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$m = 0,0001 \text{ kg}$$

$$r = 0,0020 \text{ m}$$

$$R = 0,0151 \text{ m}$$

$$t = 5,6600 \text{ s}$$

Z týchto hodnôt sme nepriamo určili koeficient vnútorného trenia kvapaliny. Chyba merania bola približne 4,6%. Jeho hodnota zaokrúhlená na najmenší počet významných čísiel nameraných veličín je:

$$\eta = (0,0952 \pm 0,0044) \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$