5 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

Teoretický úvod

Elektromagnetické pole je forma hmoty, prostredníctvom ktorej sa prenášajú elektrické a magnetické sily medzi časticami, resp. medzi telesami. V elektromagnetickom poli je rozdelenie na pole elektrické a na pole magnetické relatívne, to znamená, že závisí od podmienok, pri ktorých elektromagnetické pole registrujeme pomocou prístrojov. Zároveň sa ukazuje, že ak pozorujeme časové zmeny elektrického poľa, potom nutne pozorujeme aj pole magnetické (pozri ostatný člen na pravej strane v rovnici (4.25)). Naopak, ak pozorujeme časové zmeny magnetického poľa, potom nutne pozorujeme aj pole elektrické, o čom svedčí jav elektromagnetickej indukcie.

Jav elektromagnetickej indukcie objavil anglický fyzik *Michael Faraday*. Pri svojom prvom pokuse navinul na železný prstenec dve cievky, pričom prvú pripojil cez vypínač k batérii a konce druhej cievky spojil dlhším drôtom, vedľa ktorého umiestnil magnetku. V okamihu zapnutia resp. prerušenia elektrického prúdu v prvej cievke pozoroval vychýlenie magnetky, a to v opačných smeroch. V druhom pokuse pri zasúvaní trvalého magnetu do prázdnej cievky pozoroval výchylku magnetky umiestnenej vedľa drôtu spájajúcom konce cievky, pri spätnom pohybe magnetu pozoroval opačnú výchylku magnetky. Akonáhle zastavil pohyb magnetu, magnetka sa vrátila do pôvodnej polohy pred pokusom. V treťom pokuse pri otáčaní medeného kotúča v magnetickom poli Faraday pozoroval výchylku magnetky umiestnenej vedľa drôtu, ktorým bola vodivo spojená kovová os kotúča s klzným kontaktom na obvode kotúča. Pri opačnej rotácii kotúča pozoroval opačnú výchylku magnetky. Výchylku magnetky v každom pokuse spôsobilo magnetické pole *indukovaného elektrického prúdu*. Príčinou vzniku indukovaného elektrického prúdu v uzavretom vodiči bolo zrejme indukované elektromotorické napätie. Na základe svojich experimentov *Faraday* formuloval v roku 1831 **zákon elektromagnetickej indukcie:** ***Indukované elektromotorické napätie*** U_i ***v uzavretom vodiči sa rovná zápornej časovej zmene magnetického toku*** Φ ***cez plochu ohraničenú vodičom***

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{5.1}$$

Zmenu magnetického toku cez plochu ohraničenú uzavretým vodičom (závitom, cievkou) možno dosiahnuť buď zmenou veľkosti B magnetickej indukcie v bodoch plochy, buď zmenou veľkosti S plochy alebo zmenou orientácie plochy vzhľadom na magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$. Ukazuje sa, že vzťah (5.1) platí aj pre neuzavretý (otvorený) vodič. Uvažujme, že sa taký otvorený vodič pohybuje v magnetickom poli s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$. Zrejme podľa (4.2) na nosič elektrického náboja Q vo vodiči pôsobí magnetická sila

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{M} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

kde $\boldsymbol{v}$ je rýchlosť voľného náboja Q vzhľadom na magnetické pole. Ak túto silu podelíme nábojom Q , definujeme tak **intenzitu indukovaného elektrického poľa**

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = \frac{\boldsymbol{F}_\mathrm{M}}{Q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{5.2}$$

ktorá zohráva podobnú úlohu ako cudzia intenzita $\boldsymbol{E}_\mathrm{c}$ v galvanických článkoch. Integráciou po všetkých orientovaných elementoch otvoreného vodiča získame indukované elektromotorické napätie U_i, pričom smer integrovania (z dvoch možných smerov) volíme ľubovoľne

$$U_\mathrm{i} = \int_l \boldsymbol{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_l \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.3}$$

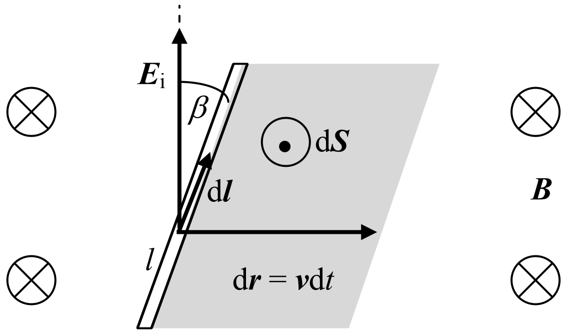
Rýchlosť $\boldsymbol{v}$ sa zrejme zároveň rovná rýchlosti orientovaného elementu d$\boldsymbol{l}$ vodiča, v ktorom sa elektrický náboj Q nachádza. Ten prejde za elementárnu dobu dt elementárne posunutie d$\boldsymbol{r}$ rýchlosťou $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$, preto po dosadení do vzťahu (5.3) a úprave dostaneme

$$U_{\mathrm{i}} = \int_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_l (\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{B} = -\int_l (\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{B} = -\frac{1}{\mathrm{d}t}\int_l \boldsymbol{B} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}) \qquad (5.4)$$

Integrál v ostatnom výraze vzťahu (5.4) je magnetický tok dΦ prechádzajúci plochou s plošným obsahom dS vytvorenou pohybujúcim sa otvoreným vodičom za dobu dt. Preto

$$U_{\mathrm{i}} = -\frac{1}{\mathrm{d}t}\int_l \boldsymbol{B} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}) = -\frac{\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

a to je vzťah (5.1). Na obr. 5.1 je zobrazený prípad, keď sa otvorený priamy vodič pohybuje v rovine nákresne a magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ je orientovaná kolmo k nákresni za rovinu nákresne.



Obr. 5.1 Pohyb otvoreného vodiča v magnetickom poli

Pri danej voľbe smeru integrovania d$\boldsymbol{l}$ je vektor plochy d$\boldsymbol{S}$ opačne orientovaný ako magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$, preto je magnetický tok dΦ = $\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ záporný. Indukované elektromotorické napätie U_{i} je podľa (5.1) kladné, čo znamená, že vrchný koniec vodiča je kladný a spodný koniec vodiča je záporný. Ak rýchlosť $\boldsymbol{v}$ priameho vodiča dĺžky l zviera uhol α s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$, potom indukované elektromotorické napätie určíme zo vzťahu (5.3)

$$U_{\mathrm{i}} = \int_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{l} = Bv \sin\alpha \cdot l \cos\beta$$

kde β je uhol, ktorý zviera vektor d$\boldsymbol{l}$ s vektorovým súčinom $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ (s indukovanou intenzitou $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$). Ak $\alpha = 90°$ a $\beta = 0°$, potom indukované elektromotorické napätie bude

$$U_{\mathrm{i}} = Bvl \qquad (5.5)$$

V r. 1834 ruský fyzik nemeckého pôvodu *Heinrich Friedrich Emil Lenz* formuloval **Lenzov zákon:** ***Indukovaný elektrický prúd tečie takým smerom, že svojimi magnetickými účinkami pôsobí proti zmenám, ktoré ho vyvolali***. V rovnici (5.1) je Lenzov zákon vyjadrený záporným znamienkom na pravej strane rovnice. Pre fyzikálne jednotky zo vzťahu (5.1) vyplýva

$$1\ \mathrm{V} = \frac{1\ \mathrm{Wb}}{1\ \mathrm{s}} \qquad (5.6)$$

Vo všeobecnosti je elektrické pole v priestore superpozíciou indukovaného poľa s intenzitou $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$ a poľa vybudeného elektrickými nábojmi s intenzitou $\boldsymbol{E}_{\mathrm{v}}$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{v}} \qquad (5.7)$$

Pole vybudené elektrickými nábojmi nevykoná žiadnu prácu pri presune jednotkového elektrického náboja po uzavretej krivke, preto je rotácia jeho intenzity nulová a toto pole je nevírové (konzervatívne)

$$0 = \oint_l \boldsymbol{E}_\mathrm{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}_\mathrm{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}_\mathrm{v} = 0 \tag{5.8}$$

V princípe je teda jedno, či budeme indukované napätie U_i na uzavretej krivke definovať integrálom intenzity $\boldsymbol{E}$ výsledného elektrického poľa po uzavretej krivke, alebo integrálom intenzity $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ indukovaného poľa po uzavretej krivke, pretože

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l \left(\boldsymbol{E}_\mathrm{i} + \boldsymbol{E}_\mathrm{v}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l \boldsymbol{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \oint_l \boldsymbol{E}_\mathrm{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l \boldsymbol{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = U_\mathrm{i} \tag{5.9}$$

Zákon elektromagnetickej indukcie (5.1) môžeme teda zapísať v integrálnom tvare

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.10}$$

Ak na ľavú stranu vzťahu (5.10) aplikujeme Stokesovu vetu a na pravej strane vymeníme poradie integrovania a derivovania, získame na oboch stranách integrály po ploche S ohraničenej uzavretou krivkou l

$$\int_S \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Na pravej strane rovnice je teraz integrandom záporná parciálna derivácia magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ podľa času. Parciálna derivácia je tam preto, lebo magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ vo všeobecnosti závisí nielen od času, ale aj od priestorových súradníc. Porovnaním integrandov získame ***tretiu Maxwellovu rovnicu***

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5.11}$$

Z nej vidno, že časová zmena magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ v ľubovoľnom bode priestoru zapríčiní vznik elektrického poľa v tomto bode. Indukované elektrické pole je pole vírové.

V prípade (pozri (4.29)), ak sa v slučke (v cievke) s vlastnou indukčnosťou L mení elektrický prúd I, potom sa mení aj vlastný magnetický tok Φ slučky (cievky) a v slučke (v cievke) podľa zákona elektromagnetickej indukcie (5.1) vzniká samoindukované elektromotorické napätie

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{5.12}$$

V prípade, ak sa v dvoch slučkách (v dvoch cievkach) s vlastnými indukčnosťami L_1, L_2 viazaných vzájomnou indukčnosťou M menia elektrické prúdy I_1, I_2, potom sa podľa vzťahov (4.30, 4.31) menia aj magnetické toky Φ_1, Φ_2 týchto slučiek (cievok) a v slučkách (v cievkach) podľa zákona elektromagnetickej indukcie vznikajú indukované elektromotorické napätia U_i1, U_i2

$$U_\mathrm{i1} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_1 I_1 + M I_2\right) = -L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{5.13}$$

$$U_\mathrm{i2} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M I_1 + L_2 I_2\right) = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{5.14}$$

V prípade, ak nás zaujímajú iba stredné hodnoty U_is indukovaných elektromotorických napätí v časovom intervale Δt, nahradzujeme podiely diferenciálov (derivácie) vo vzťahoch (5.1, 5.12, 5.13, 5.14) podielmi konečných zmien

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \to \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \to \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad \ldots \tag{5.15}$$

V prípade spínania (vypínania) elektrických obvodov obsahujúcich okrem rezistorov a bežných zdrojov elektromotorického napätia aj cievky alebo kondenzátory, dochádza k prechodným javom. Prechodný jav trvá od okamihu spínania (vypínania) elektrického obvodu alebo jeho časti do okamihu vzniku nového ustáleného stavu v elektrickom obvode. Energia E_E elektrického poľa kondenzátora a energia E_M magnetického poľa cievky musia byť spojitými funkciami času t aj v okamihoch spínania (vypínania) elektrických obvodov. Keďže podľa vzťahov (2.18), (4.34)

$$E_E = \frac{CU^2}{2}, \qquad E_M = \frac{LI^2}{2} \tag{5.16}$$

potom musia byť spojitými funkciami času napätie u_C na kondenzátore a elektrický prúd I vo vinutí cievky. Prvková rovnica súčiastky je rovnica vyjadrujúca súvislosť medzi napätím na súčiastke a elektrickým prúdom v súčiastke. Ak sa pri prechodnom jave napätie na súčiastke mení, potom sa zvyčajne označuje malým písmenom „*u*" s príslušným indexom.
Pre rezistor je prvkovou rovnicou Ohmov zákon

$$u_R = RI \tag{5.17}$$

Pre cievku je prvkovou rovnicou rovnica (5.12)

$$u_i = -L\frac{dI}{dt} \tag{5.18}$$

Pre kondenzátor s kapacitou C získame prvkovú rovnicu deriváciou upravenej rovnice (2.15)

$$C = \frac{Q}{U} \;\Rightarrow\; Q = Cu_C \;\Rightarrow\; \frac{dQ}{dt} = C\frac{du_C}{dt} \;\Rightarrow\; I = C\frac{du_C}{dt} \tag{5.19}$$

V elektrických schémach napäťové čítacie šípky na rezistore R, na cievke L a na kondenzátore C kreslíme v smere prúdových čítacích šípok. ***Vo fyzike za zdroje elektromotorického napätia okrem bežných zdrojov EMN (galvanické články, fotovoltaické články, dynamá, ...) považujeme aj cievky (cievka je zdrojom indukovaného elektromotorického napätia) . Za spotrebiče považujeme rezistory a kondenzátory.***
Východiskom pri riešení prechodných javov v elektrických obvodoch sú Kirchhoffove zákony. Použitím prvkových rovníc (5.17), (5.18) a (5.19) sa z Kirchhoffových zákonov snažíme získať diferenciálnu rovnicu vzhľadom na tú fyzikálnu veličinu, ktorá je spojitou funkciou času t. Diferenciálne rovnice so známou počiatočnou podmienkou v okamihu spínania (vypínania) riešime bežnými matematickými metódami (Cauchyho úloha).

Príklady

5.1 Vodič v tvare uzavretej rovinnej slučky ohraničuje plochu s obsahom S = 10 cm^2. Nachádza sa v homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$. Vektor $\boldsymbol{B}$ zviera s normálou na rovinu slučky uhol $\alpha = 30^\circ$. Veľkosť B magnetickej indukcie sa začala s časom lineárne zmenšovať. V čase $t_1 = 0$ bola jej veľkosť $B_1 = 0{,}5$ T , v čase $t_2 = 3$ s už len $B_2 = 0{,}2$ T. Vypočítajte indukované napätie v slučke.

Riešenie:

Využijeme zákon elektromagnetickej indukcie (5.1), pričom magnetický tok je definovaný vzťahom (4.11). Vektor d$\boldsymbol{S}$ nasmerujeme tak, aby zvieral uhol α s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$. Využitím homogenity magnetického poľa na ploche rovinnej slučky získame

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{B}\cdot\int_S d\boldsymbol{S}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}\right) = -\frac{d}{dt}\left(BS\cos\alpha\right) = -S\cos\alpha\,\frac{dB}{dt}$$

Ak sa veľkosť B magnetickej indukcie zmenšuje s časom lineárne, môžeme deriváciu nahradiť podielom zmien veľkosti B magnetickej indukcie a času t

$$U_{\mathrm{i}} = -S\cos\alpha\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -S\cos\alpha\,\frac{\Delta B}{\Delta t} = -S\cos\alpha\,\frac{B_2 - B_1}{t_2 - t_1} = S\cos\alpha\,\frac{B_1 - B_2}{t_2 - t_1}$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$U_{\mathrm{i}} = S\cos\alpha\,\frac{B_1 - B_2}{t_2 - t_1} = 10\cdot 10^{-4}\cdot\cos 30°\cdot\frac{0{,}5 - 0{,}2}{3 - 0}\ \mathrm{V} = 10^{-3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{0{,}3}{3}\ \mathrm{V} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10^{-4}\ \mathrm{V} = 86{,}6\ \mu\mathrm{V}$$

Indukované elektromotorické napätie $U_{\mathrm{i}} = 86{,}6\ \mu\mathrm{V}$ je kladné, preto bude slučkou pretekať indukovaný elektrický prúd v smere zahnutých prstov pravej ruky, ak vychýlený palec ukazuje smer vektora d$\boldsymbol{S}$.

5.2 Aký elektrický prúd I musí tiecť kruhovým závitom polomeru $R = 0{,}5$ m, aby sa v jeho strede vykompenzovalo magnetické pole Zeme? Rovina závitu je kolmá na smer magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}_{\mathrm{Z}}$, ktorá má vo vzduchu pri povrchu Zeme veľkosť $B_{\mathrm{Z}} = 50\ \mu\mathrm{T}$. Aké elektromotorické napätie U_{i} sa indukuje v závite v priebehu lineárneho zániku magnetického poľa Zeme za dobu $t = 2$ min?

Riešenie:

Aby sa magnetické pole Zeme v strede závitu vykompenzovalo, musí byť magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ v strede kruhového závitu s prúdom I rovnako veľká avšak nesúhlasne orientovaná ako magnetická indukcia $\boldsymbol{B}_{\mathrm{Z}}$ vzduchu pri povrchu Zeme

$$B = B_{\mathrm{Z}} \tag{a}$$

Veľkosť B magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ v strede kruhového závitu s elektrickým prúdom I určíme zo zákona Biota-Savarta-Laplacea (4.10)

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi R}\frac{R\,\mathrm{d}l\sin 90°}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \tag{b}$$

Element d$\boldsymbol{l}$ kruhového závitu je orientovaný v smere prúdu I v závite. Vektor $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor stredu závitu vzhľadom na element d$\boldsymbol{l}$ kruhového závitu, preto vektory $\boldsymbol{r}$ a d$\boldsymbol{l}$ zvierajú v každom bode závitu uhol 90°. Dosadením vzťahu (b) do vzťahu (a), úpravou a dosadením zadaných hodnôt dostaneme

$$\frac{\mu_0 I}{2R} = B_{\mathrm{Z}} \quad\Rightarrow\quad I = \frac{2RB_{\mathrm{Z}}}{\mu_0} = \frac{2\cdot 0{,}5\cdot 50\cdot 10^{-6}}{4\pi\cdot 10^{-7}}\ \mathrm{A} = 39{,}79\ \mathrm{A}$$

Indukované elektromotorické napätie U_{i} určíme zo zákona elektromagnetickej indukcie (5.1), pričom magnetický tok je definovaný vzťahom (4.11). Vektor d$\boldsymbol{S}$ nasmerujeme tak, aby zvieral uhol 0° s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}_{\mathrm{Z}}$. Využitím homogenity magnetického poľa na ploche rovinnej slučky získame

$$U_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}_{\mathrm{Z}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{Z}}\cdot\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{S}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B_{\mathrm{Z}}S\cos 0°\right) = -S\frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{Z}}}{\mathrm{d}t}$$

Ak sa veľkosť B_{Z} magnetickej indukcie zmenšuje s časom lineárne, môžeme deriváciu nahradiť podielom zmien veľkosti B_{Z} magnetickej indukcie a času t

$$U_{\mathrm{i}} = -S\frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{Z}}}{\mathrm{d}t} = -S\frac{\Delta B_{\mathrm{Z}}}{\Delta t} = -S\frac{0 - B_{\mathrm{Z}}}{t - 0} = \frac{SB_{\mathrm{Z}}}{t} = \frac{\pi R^2 B_{\mathrm{Z}}}{t} \tag{c}$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$U_i = \frac{\pi R^2 B_Z}{t} = \frac{\pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 60}\ \mathrm{V} = 0{,}327\ \mu\mathrm{V}$$

Indukované elektromotorické napätie U_i = 0,327 μV je kladné, preto bude slučkou pretekať indukovaný elektrický prúd v smere zahnutých prstov pravej ruky, ak vychýlený palec ukazuje smer vektora d$\boldsymbol{S}$.

5.3 Aké je samoindukované elektromotorické napätie v cievke s vlastnou indukčnosťou L = 0,2 H, ak v nej elektrický prúd I rovnomerne rastie o hodnotu ΔI = 300 A za dobu Δt = 20 s?

Riešenie:
Na výpočet samoindukovaného elektromotorického napätia použijeme vzťah (5.12)

$$U_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Ak elektrický prúd I rastie v cievke v závislosti od času lineárne, môžeme deriváciu vo vzťahu (5.12) nahradiť podielom konečných zmien elektrického prúdu I a času t a po dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$U_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -0{,}2 \cdot \frac{300}{20}\ \mathrm{V} = -3\ \mathrm{V}$$

Samoindukované elektromotorické napätie U_i = - 3 V je záporné, preto bude cievkou pretekať indukovaný elektrický prúd I_i proti rastúcemu elektrickému prúdu I.

5.4 Vo vodorovnej rovine kolmej na magnetickú indukciu veľkosti B = 60 mT sa otáčajú listy vrtule vrtuľníka s frekvenciou otáčania n = 4 ot/s. Listy sú vodivé, každý z nich je jedným koncom upevnený k osi otáčania a každý z nich má dĺžku l = 6 m. Odvoďte vzťah a vypočítajte indukované elektromotorické napätie na jednom liste.

Riešenie:
Ak bude indukovaná intenzita $\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ v listoch orientovaná od osi otáčania, potom sa upevnené konce listov nabijú záporne a voľné konce listov sa nabijú kladne, v opačnom prípade bude polarita indukovaného napätia na listoch opačná. Veľkosť v obvodovej rýchlosti dĺžkového elementu dx listu vrtule vo vzdialenosti x od osi otáčania bude

$$v = \omega x = 2\pi n x \tag{a}$$

Ak smer integrácie d$\boldsymbol{l}$ vo vzťahu (5.3) orientujeme v smere indukovanej intenzity $\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, potom na dĺžkovom elemente dx listu vrtule bude elementárne indukované napätie (pozri vzťah (5.5))

$$\mathrm{d}U_i = \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = vB \sin 90° \cdot \mathrm{d}x \cdot \cos 0° = vB \cdot \mathrm{d}x \tag{b}$$

Integráciou vzťahu (b) s využitím vzťahu (a) dostaneme

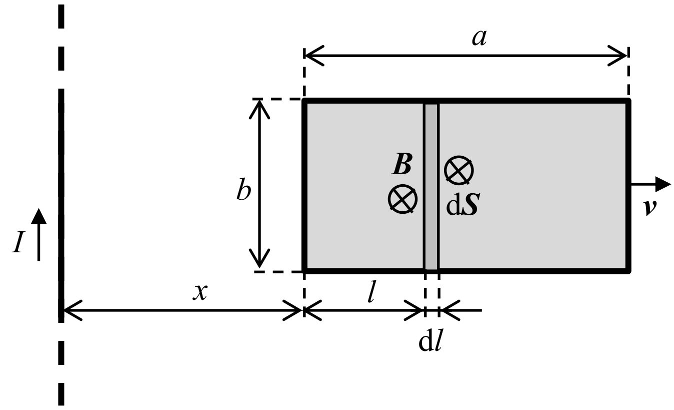
$$U_i = \int_0^l vB \cdot \mathrm{d}x = \int_0^l 2\pi n x B \cdot \mathrm{d}x = 2\pi n B \int_0^l x\,\mathrm{d}x = 2\pi n B\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = 2\pi n B\frac{l^2}{2} = \pi n B l^2 \tag{c}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (c) dostaneme

$$U_i = \pi n B l^2 = \pi \cdot 4 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 6^2\ \mathrm{V} = 27{,}14\ \mathrm{V}$$

Na každom liste vrtule bude indukované elektromotorické napätie 27,14 V.

5.5 Vodivá slučka má tvar obdĺžnika so stranami a = 30 cm, b = 20 cm. V rovine slučky sa nachádza priamy nekonečne dlhý prúdovodič s elektrickým prúdom I = 6 A rovnobežný so stranou b. Slučka sa vzďaľuje od prúdovodiča rýchlosťou v = 4 m/s. Vypočítajte indukované elektromotorické napätie U_i v slučke v okamihu, keď je slučka vo vzdialenosti x = 0,5 km od prúdovodiča, pozri obr. 5.2.



Obr. 5.2 Pohyb uzavretého vodiča (vodivej slučky) v magnetickom poli

Riešenie:
Veľkosť B magnetickej indukcie vo vzdialenosti $x + l$ od priameho nekonečne dlhého prúdovodiča môžeme určiť z Ampérovho zákona celkového prúdu (4.16)

$$\oint_k \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I \quad\Rightarrow\quad \oint_k B\cdot \mathrm{d}l = \mu_0 I \quad\Rightarrow\quad B\,2\pi(x+l) = \mu_0 I \quad\Rightarrow\quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+l)} \qquad \text{(a)}$$

pričom k je abstraktná kružnica (uzavretá krivka) polomeru $x + l$ v rovine kolmej na priamy prúdovodič. Kružnica k je orientovaná v smere indukcie $\boldsymbol{B}$ v bodoch kružnice, takže vektory $\boldsymbol{B}$ a d$\boldsymbol{l}$ sú súhlasne orientované v každom bode kružnice k a prúd I v priamom prúdovodiči je kladne spriahnutý. Sprava od prúdovodiča je podľa Ampérovho pravidla pravej ruky magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ orientovaná kolmo do roviny nákresne a v rovnakom smere orientujeme aj vektor d$\boldsymbol{S}$ elementu plochy vodivej slučky. Potom pre magnetický tok cez plochu vodivej slučky podľa (4.11) dostaneme

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S B\cdot \mathrm{d}S = \int_l \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+l)} b\,\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_0^a \frac{\mathrm{d}l}{x+l} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_x^{x+a}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{x+a}{x} \qquad \text{(b)}$$

Pričom sme použili zámenu premennej $r = x + l$, dr = dl. Indukované EMN vypočítame dosadením vzťahu (b) do zákona elektromagnetickej indukcie (5.1)

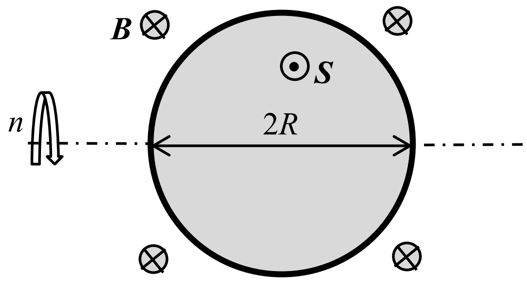
$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\cdot\frac{x}{x+a}\cdot\frac{1\cdot x-(x+a)\cdot 1}{x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\cdot\frac{a}{(x+a)x}\cdot v \qquad \text{(c)}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (c) dostaneme

$$U_\mathrm{i} = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\cdot\frac{a}{(x+a)x}\cdot v = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6\cdot 0{,}2}{2\pi}\cdot\frac{0{,}3}{(500+0{,}3)500}\cdot 4\ \mathrm{V} = 6{,}9\cdot 10^{-12}\ \mathrm{V} = 6{,}9\ \mathrm{pV}$$

Pri danej rýchlosti vzdaľovania sa vodivej slučky od prúdovodiča sa v danej vzdialenosti indukuje vo vodivej slučke EMN 6,9 pV. Indukované EMN je kladné, preto indukovaný prúd bude tiecť vo vodivej slučke v smere zahnutých prstov pravej ruky, ak vychýlený palec ukazuje smer vektora d$\boldsymbol{S}$ a vygeneruje na ploche slučky indukovanú magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}_\mathrm{i}$ orientovanú v smere slabnúcej magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ generovanej priamym nekonečne dlhým prúdovodičom.

5.6 Vypočítajte strednú hodnotu U_{is} indukovaného EMN v rotujúcej Helmholtzovej cievke za dobu polovičnej otáčky. Počet závitov cievky je $N = 30$ a plocha každého závitu je kruh s polomerom $R = 10$ cm. Cievka rotuje v homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou veľkosti $B = 0{,}2$ T s frekvenciou otáčania $n = 1200$ ot/min okolo osi kolmej na magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$. Na osi otáčania leží priemer cievky, pozri obr. 5.3.



Obr. 5.3 Rotujúca Helmholtzova cievka v homogénnom magnetickom poli

Riešenie:
Časová zmena magnetického toku sa v tomto prípade dosahuje zmenou orientácie plochy vzhľadom na magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$. Podľa vzťahu (5.15) strednú hodnotu U_{is} indukovaného napätia dostaneme, ak diferenciály vo vzťahu (5.1) nahradíme konečnými zmenami nestacionárnych fyzikálnych veličín. Ak sú na začiatku polovičnej otáčky v okamihu 1 vektory $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{S}$ súhlasne orientované ($\cos 0° = 1$), potom sú na konci polovičnej otáčky v okamihu 2 (pozri obr. 5.3) vektory $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{S}$ nesúhlasne orientované ($\cos 180° = -1$). Preto

$$U_{is} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -\frac{N(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S})_2 - N(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S})_1}{\Delta t} = -\frac{N(-BS - BS)}{\Delta t} = \frac{2NBS}{\Delta t} \qquad \text{(a)}$$

Zo známeho vzťahu medzi periódou T a frekvenciou n otáčania cievky určíme dobu Δt polovičnej otáčky cievky (polperiódu)

$$T = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2n} \qquad \text{(b)}$$

Dosadením vzťahu (b) do vzťahu (a) s využitím vzťahu $S = \pi R^2$ pre plošný obsah kruhu dostaneme

$$U_{is} = \frac{2NBS}{\Delta t} = 2n\cdot 2NBS = 4nNBS = 4nNB\,\pi R^2 \qquad \text{(c)}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (c) dostaneme

$$U_{is} = 4nNB\,\pi R^2 = 4\cdot\frac{1200}{60}\cdot 30\cdot 0{,}2\cdot\pi\cdot 0{,}1^2\ \text{V} = 15{,}08\ \text{V}$$

Za polovičku periódy otáčania sa v Helmholtzovej cievke indukuje elektromotorické napätie so strednou hodnotou 15,08 V.

5.7 Nájdite časovú závislosť indukovaného napätia U_{i1} v prvej cievke s vlastnou indukčnosťou $L_1 = 5$ H a s elektrickým prúdom $I_1 = I_{m1}\cos(2\pi f_1 t)$, ak sa v okolí prvej cievky nachádza druhá cievka s elektrickým prúdom $I_2 = I_{m2}\cos(2\pi f_2 t)$. Hodnoty prúdových amplitúd sú $I_{m1} = 2$ A, $I_{m2} = 3$ A, hodnoty frekvencií prúdov sú $f_1 = 50$ Hz, $f_2 = 400$ Hz. Vzájomná indukčnosť cievok je $M = 1$ H. Akú maximálnu hodnotu U_{max} môže indukované elektromotorické napätie U_{i1} v prvej cievke dosiahnuť?

Riešenie:
Výsledné indukované elektromotorické napätie v prvej cievke nájdeme podľa vzťahu (5.13)

$$U_{i1} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = L_1 2\pi f_1 I_{m1} \sin(2\pi f_1 t) + M\, 2\pi f_2 I_{m2} \sin(2\pi f_2 t) \qquad \text{(a)}$$

Po dosadení zadaných hodnôt do vzťahu (a) dostaneme

$$\begin{aligned} U_{i1} &= L_1 2\pi f_1 I_{m1} \sin(2\pi f_1 t) + M\, 2\pi f_2 I_{m2} \sin(2\pi f_2 t) = \\ &= \left[5 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 50\, t) + 1 \cdot 2\pi \cdot 400 \cdot 3 \cdot \sin(2\pi \cdot 400\, t)\right] \mathrm{V} = \qquad \text{(b)} \\ &= \left[1000\, \pi \cdot \sin(100\, \pi \cdot t) + 2400\, \pi \cdot \sin(800\, \pi \cdot t)\right] \mathrm{V} \end{aligned}$$

Ak okamih t dosadzujeme do vzťahu (b) v sekundách, potom výsledné indukované elektromotorické napätie je vo voltoch. Maximálna hodnota U_{max} sa dosahuje v okamihoch t^*, pre ktoré platí

$$\sin(100\, \pi \cdot t^*) = \sin(800\, \pi \cdot t^*) = 1 \qquad \text{(c)}$$

a nadobúda hodnotu

$$U_{max} = \left[1000\, \pi + 2400\, \pi\right] \mathrm{V} = 3400\, \pi\ \mathrm{V} = 10681{,}4\ \ \mathrm{V}$$

5.8 V homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou B = 1,5 T sa pohybuje priamy vodič dĺžky l = 40 cm rýchlosťou v = 5 m/s kolmo na magnetické indukčné čiary. Odpor vodiča je R_i = 0,2 Ω. Konce vodiča sú pripojené klznými kontaktami k nehybnému rezistoru s odporom R = 0,7 Ω. Aká je hodnota indukovaného elektrického prúdu I v slučke? S akým výkonom P koná prácu vonkajšia sila $\boldsymbol{F}_{ext}$ pôsobiaca na vodič v smere jeho rýchlosti $\boldsymbol{v}$? Aká je veľkosť F_{ext} vonkajšej sily? Faktor trenia klzných kontaktov zanedbajte.

Riešenie:
Indukovaný prúd I určíme z 2. Kirchhoffovho zákona pre slučku. S využitím vzťahu (5.5) dostaneme

$$R_i I + RI = U_i \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_i}{R_i + R} = \frac{Blv}{R_i + R} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 5}{0{,}7 + 0{,}2}\ \mathrm{A} = 3{,}\bar{3}\ \mathrm{A} \qquad \text{(a)}$$

Indukovaný prúd I je podiel indukovaného napätia U_i a celkového odporu slučky. Zrejme sa výkon P vonkajšej sily rovná výkonu zdroja indukovaného elektromotorického napätia. S využitím vzťahov (a) a (5.5) dostaneme

$$P = U_i I = U_i \frac{U_i}{R_i + R} = \frac{U_i^2}{R_i + R} = \frac{(Blv)^2}{R_i + R} = \frac{(1{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 5)^2}{0{,}7 + 0{,}2}\ \mathrm{W} = 10\ \mathrm{W} \qquad \text{(b)}$$

Pre výkon vonkajšej sily platí

$$P = \frac{dW}{dt} = F_{ext} \frac{ds}{dt} = F_{ext} v \quad \Rightarrow \quad F_{ext} = \frac{P}{v} = \frac{10\ \mathrm{W}}{5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 2\ \mathrm{N} \qquad \text{(c)}$$

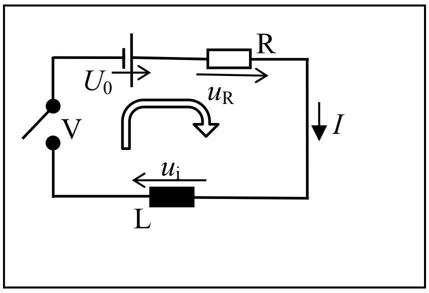
Indukovaný elektrický prúd má hodnotu 3,3 A, výkon vonkajšej sily je 10 W, vonkajšia sila má hodnotu 2 N.

5.9 Vypočítajte hodnotu elektrického prúdu I v slučke s galvanickým článkom, vypínačom a cievkou v okamihu t_1 = 2 s od okamihu zopnutia vypínača. Článok má elektromotorické napätie U_0 = 9 V a vnútorný odpor R_i = 1,2 Ω. Cievka má indukčnosť L = 4 H a ohmický odpor vinutia R_L = 0,8 Ω.

Riešenie:
Výsledný ohmický odpor slučky získame súčtom vnútorného odporu článku a ohmického odporu cievky

$$R = R_i + R_L = (1{,}2 + 0{,}8)\,\Omega = 2\ \Omega \qquad \text{(a)}$$

Náhradná schéma slučky s galvanickým článkom a s cievkou je na obr. 5.4:



Obr. 5.4 Náhradná schéma slučky s galvanickým článkom a s cievkou

Napäťové čítacie šípky na rezistore R, na cievke L (poprípade na kondenzátore C) kreslíme v smere prúdových čítacích šípok. ***Vo fyzike za zdroje elektromotorického napätia okrem bežných zdrojov EMN (galvanické články, fotovoltaické články, dynamá, ...) považujeme aj cievky. Za spotrebiče považujeme rezistory a kondenzátory.*** Po zopnutí vypínača V platí v slučke 2. Kirchhoffov zákon: súčet napätí na spotrebičoch sa rovná súčtu napätí na zdrojoch a pre zvolený smer obehu na obr. 5.4 dostaneme

$$u_R = U_0 + u_i \qquad \text{(b)}$$

Energia magnetického poľa cievky je vždy spojitou funkciou času, preto je spojitou funkciou elektrický prúd I vo vetvách s cievkou. To ale znamená, že v okamihu zopnutia vypínača bol prúd rovný nule, pretože bol rovný nule aj pred zopnutím vypínača. S využitím Ohmovho zákona (5.17) pre rezistor a vzťahu (5.18) pre cievku po úprave dostaneme Cauchyho úlohu

$$RI = U_0 - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = U_0\,, \quad I(0) = 0 \qquad \text{(c)}$$

Riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice (b) je súčet

$$I = I_u + I_h \qquad \text{(d)}$$

ustáleného (partikulárneho) riešenia I_u a riešenia I_h homogénnej rovnice

$$L\frac{\mathrm{d}I_h}{\mathrm{d}t} + RI_h = 0$$

s nulovou pravou stranou, v ktorej sa premenné I_h a t dajú separovať

$$L\frac{\mathrm{d}I_h}{\mathrm{d}t} = -RI_h \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}I_h}{I_h} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \qquad \text{(e)}$$

kde

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{4\ \mathrm{H}}{2\ \Omega} = 2\ \mathrm{s} \qquad \text{(f)}$$

je časová konštanta slučky. Integráciou rovnice (e) dostaneme

$$\int_K^{I_h(t)} \frac{\mathrm{d}I_h}{I_h} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{I_h(t)}{K} = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad I_h(t) = K\cdot\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad \text{(g)}$$

Ustálené riešenie získame hravo z diferenciálnej rovnice (c), ak v nej anulujeme členy s deriváciami (lebo derivácie ustálených riešení sú nulové)

$$RI_u = U_0 \quad \Rightarrow \quad I_u = \frac{U_0}{R} \qquad \text{(h)}$$

Integračnú konštantu K určíme z počiatočnej podmienky Cauchyho úlohy (c), s využitím vzťahov (d, g, h):

$$I(0) = I_{\mathrm{u}} + I_{\mathrm{h}}(0) = \frac{U_0}{R} + K = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{U_0}{R} \tag{i}$$

Po dosadení vzťahov (g, h, i) do vzťahu (d) dostaneme časovú závislosť prúdu v slučke

$$I(t) = I_{\mathrm{u}} + I_{\mathrm{h}}(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Dosadením zadaných hodnôt a výsledkov (a, f) do vzťahu (j) dostaneme

$$I(t_1) = \frac{U_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) = \frac{9}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2}{2}}\right)\mathrm{A} = 2{,}845 \ \mathrm{A}$$

V danom okamihu má elektrický prúd hodnotu 2,845 A. V okamihu zopnutia vypínača mal nulovú hodnotu. Počas prechodného javu monotónne rastie a asymptoticky sa ustáli na hodnote 4,5 A.

Trnava, 10. 12. 2014 Vypracoval: RNDr. Igor Jančuška, PhD.