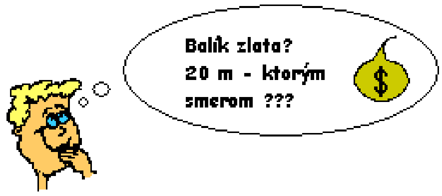
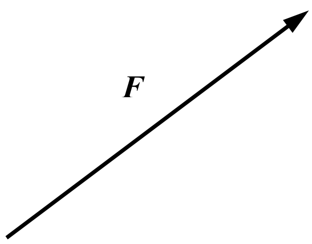
1 VEKTORY



Teoretický úvod

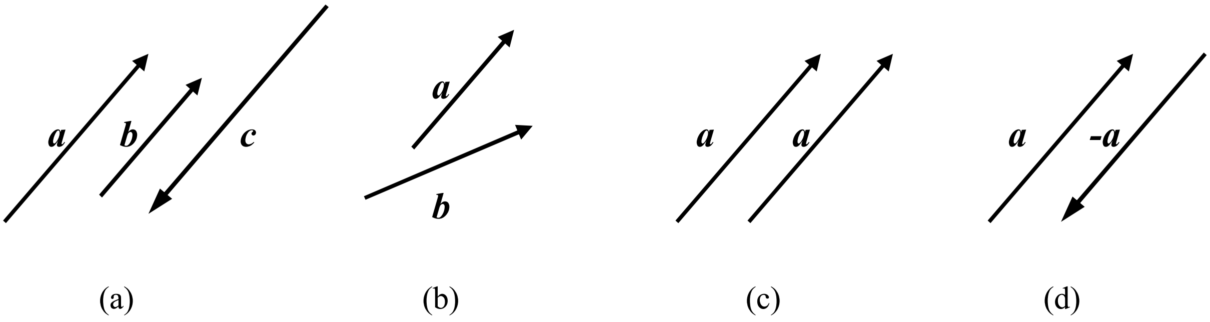
Fyzikálne veličiny môžeme rozdeliť na dve základné skupiny. Na skaláry a na vektory. **Skalárna veličina** je taká, ktorá nemá smer a je zadaná len jediným číslom určujúcim jej veľkosť, ako napr. teplota, tlak, objem, hmotnosť, energia a iné. **Vektorová veličina** má na rozdiel od skalárnej veličiny nielen svoju veľkosť, ale aj smer. Medzi vektorové veličiny patrí napr. rýchlosť, zrýchlenie, sila a iné. Aby sa odlíšili skalárne veličiny od vektorových veličín, píše sa nad vektorové veličiny šípka (napr. $\vec{F}$), ktorá zdôrazňuje, že tieto veličiny majú nielen veľkosť, ale aj smer. V literatúre sa však z praktických dôvodov častokrát označujú vektory namiesto šípky tučným písmom (napr. ***F***). Tento prístup budeme používať aj v tejto učebnej pomôcke. Veľkosť vektora budeme označovať symbolom vektora v absolútnej hodnote (napr. $|\boldsymbol{F}|$), alebo symbolom vektora bez šípky, resp. nie tučným písmom (napr. *F*). Veľkosť vektora je vždy kladné číslo.

Graficky môžeme vektory znázorniť orientovanými úsečkami – šípkami. Smer šípky predstavuje smer vektora a dĺžka úsečky vyjadruje jeho veľkosť. Miesto, odkiaľ šípka vychádza sa nazýva začiatok vektora (alebo tiež aj pôsobisko vektora) a miesto, kde vektor končí sa nazýva koniec vektora (obr. 1.1).



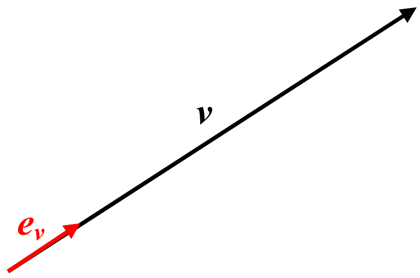
Obr. 1.1

Vektory, ktoré sú navzájom rovnobežné, sa nazývajú **kolineárne vektory** (obr. 1.2 a). Vektory, ktoré nie sú navzájom rovnobežné, ale ležia v jednej rovine nazývame **komplanárne vektory** (obr. 1.2 b). Vektory, ktoré sú kolineárne (navzájom rovnobežné) a majú rovnakú veľkosť aj smer, sa nazývajú **rovnaké vektory** (obr. 1.2 c). Vektory, ktoré sú kolineárne (navzájom rovnobežné) a majú rovnakú veľkosť, ale opačný smer, sa nazývajú **opačné vektory**. Navzájom opačné vektory sa budú od seba odlišovať znamienkom, ktoré píšeme pred vektor. Napríklad vektor $-\boldsymbol{a}$ je opačný k vektoru $\boldsymbol{a}$ (obr. 1.2 d). V oboch prípadoch však zostáva veľkosť vektora kladným číslom.



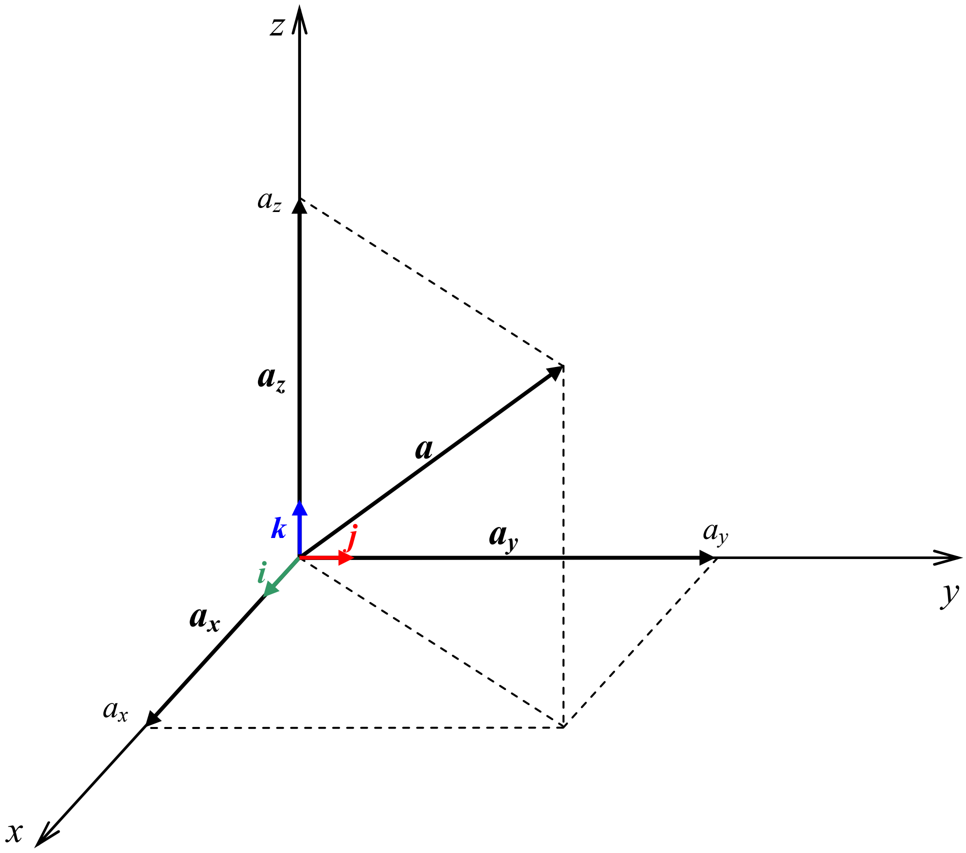
Obr. 1.2

Vektor, ktorého veľkosť je jedna, sa nazýva **jednotkový vektor** a vektor, ktorého veľkosť je rovná nule sa nazýva **nulový vektor**. Každý vektor môžeme vyjadriť ako súčin veľkosti daného vektora a jednotkového vektora, ktorého smer je rovnaký ako smer daného vektora. Napr. $\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|.\boldsymbol{e}_v = v.\boldsymbol{e}_v$ (obr. 1.3), kde $\boldsymbol{e}_v$ je jednotkový vektor v smere vektora $\boldsymbol{v}$ a $|\boldsymbol{v}|$, resp. v je veľkosť vektora $\boldsymbol{v}$. Odtiaľ vyplýva, že každý jednotkový vektor $\boldsymbol{e}_v$ v smere vektora $\boldsymbol{v}$ vieme napísať ako podiel vektora $\boldsymbol{v}$ a jeho veľkosti v, t.j.: $\boldsymbol{e}_v = \frac{\boldsymbol{v}}{v}$.



Obr. 1.3

Pre popis vektorových veličín vo fyzike je často potrebné zaviesť súradnicovú sústavu. Poznáme viacero druhov súradnicových sústav, ale najpoužívanejšou je pravotočivá kartézska súradnicová sústava. Táto sústava pozostáva z troch navzájom kolmých osí x, y a z, ktorých smery sú popísané tromi jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$. Každý ľubovoľný vektor $\boldsymbol{a}$, ktorého začiatok umiestnime do počiatku súradnicovej sústavy, vieme rozložiť na tri navzájom kolmé vektory $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ a $\boldsymbol{a}_z$ ležiace na osiach x, y a z, ktoré nazývame zložky vektora $\boldsymbol{a}$ alebo tiež aj priemety vektora $\boldsymbol{a}$ do osí x, y a z (obr. 1.4). Každú zložku $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ a $\boldsymbol{a}_z$ vieme vyjadriť pomocou jednotkových vektorov $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$, ktorých smery sú výlučne v smere osí x, y a z, ako: $\boldsymbol{a}_x = a_x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{a}_y = a_y\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a}_z = a_z\boldsymbol{k}$. Skalárne veličiny a_x, a_y a a_z, ktoré môžu mať kladné aj záporné hodnoty podľa toho, či zložky $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ a $\boldsymbol{a}_z$ majú rovnaký alebo opačný smer ako jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$, sa nazývajú súradnice vektora $\boldsymbol{a}$. Pomocou súradníc vieme každý vektor $\boldsymbol{a}$ napísať ako $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ a jeho veľkosť vyjadriť ako $|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.



Obr. 1.4

Operácie s vektormi:

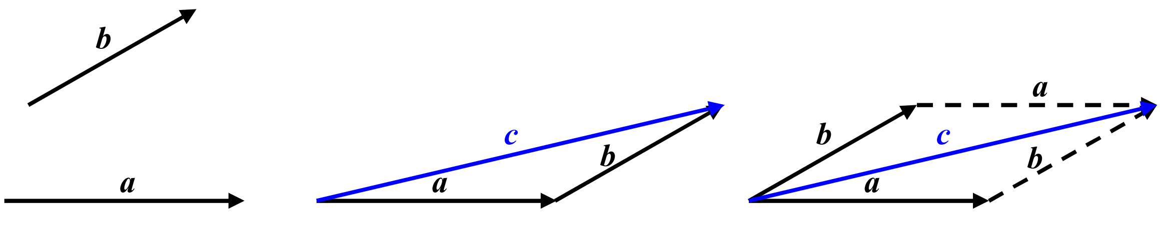
a) Súčet vektorov

Súčet dvoch vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je operácia, ktorej výsledkom je vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Graficky môžeme súčet dvoch vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ určiť niektorým z nasledujúcich postupov:

- Ku koncu vektora $\boldsymbol{a}$ pripojíme začiatok vektora $\boldsymbol{b}$. Súčtom vektorov $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ bude vektor $\boldsymbol{c}$, ktorého začiatok je zhodný so začiatkom vektora $\boldsymbol{a}$ a koniec s koncom vektora $\boldsymbol{b}$ (obr. 1.5 a).

- Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ upravíme na rovnobežník tak, aby tieto vektory tvorili strany rovnobežníka. Súčtom vektorov $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ bude vektor $\boldsymbol{c}$ určený uhlopriečkou rovnobežníka, ktorej začiatok je totožný so začiatkom vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (obr. 1.5 b).

Algebraicky určíme súčet vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ nasledovne: nech vektor $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ a vektor $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$. Potom súčtom vektorov $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ bude vektor $\boldsymbol{c} = (a_x+\mathrm{b}_x)\boldsymbol{i} + (a_y+\mathrm{b}_y)\boldsymbol{j} + (a_z+\mathrm{b}_z)\boldsymbol{k}$.



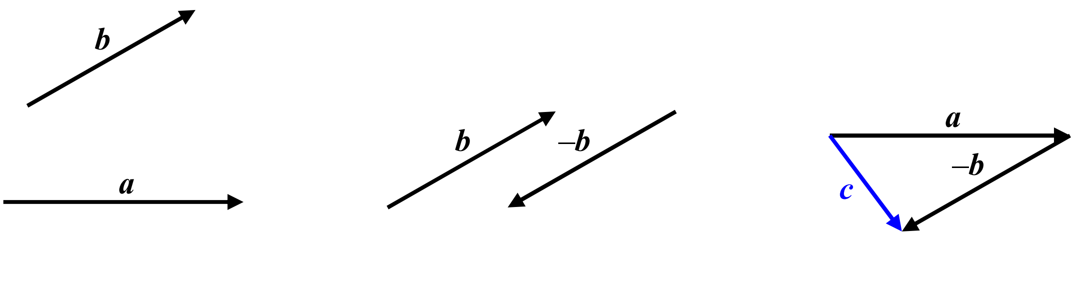
(a) (b)

Obr. 1.5

b) *Rozdiel vektorov*

Rozdiel dvoch vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je operácia, ktorej výsledkom je vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}–\boldsymbol{b}$. Pri grafickom určovaní rozdielu dvoch vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ postupujeme podobne ako pri súčte vektorov, pričom najskôr nájdeme opačný vektor k vektoru $\boldsymbol{b}$, t.j. vektor $–\boldsymbol{b}$ (obr. 1.6 a) a pripočítame ho k vektoru $\boldsymbol{a}$ (obr. 1.6 b).

Algebraicky určíme rozdiel vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ nasledovne: nech vektor $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ a vektor $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$. Potom rozdielom vektorov $\boldsymbol{a}–\boldsymbol{b}$ bude vektor $\boldsymbol{c} = (a_x–\mathrm{b}_x)\ \boldsymbol{i} + (a_y–\mathrm{b}_y)\boldsymbol{j} + (a_z–\mathrm{b}_z)\boldsymbol{k}$



(a) (b)

Obr. 1.6

c) *Násobenie vektora skalárom (číslom)*

Výsledkom násobenia vektora $\boldsymbol{a}$ skalárom (číslom) s je vektor $\boldsymbol{c} = s\boldsymbol{a}$, ktorý má rovnaký smer ako vektor $\boldsymbol{a}$, ak s je kladné číslo alebo opačný smer ako vektor $\boldsymbol{a}$, ak s je záporné číslo. Vektor $\boldsymbol{c} = s\boldsymbol{a}$ je $|s|$ -krát dlhší ako vektor $\boldsymbol{a}$, ak $|s| > 1$ alebo $|s|$ -krát kratší ako vektor $\boldsymbol{a}$, ak $|s| < 1$.

Algebraicky určíme násobenie vektora $\boldsymbol{a}$ skalárom s nasledovne: Nech vektor $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$. Potom násobením vektora $\boldsymbol{a}$ skalárom s vznikne vektor $\boldsymbol{c} = sa_x\boldsymbol{i} + sa_y\boldsymbol{j} + sa_z\boldsymbol{k}$.

d) *Skalárny súčin*

Skalárny súčin dvoch vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je súčin, ktorého výsledkom je skalár (číslo). Skalárny súčin dvoch vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ zapisujeme ako $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$ a môžeme ho vypočítať dvomi spôsobmi.

- Ak poznáme súradnice vektora $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ a vektora $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$, vypočítame skalárny súčin týchto dvoch vektorov ako: $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.
- Ak poznáme veľkosti vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a uhol ϕ medzi nimi, potom $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}|\cos\phi$. Tento vzťah môžeme použiť aj opačne, t.j. ak poznáme veľkosti vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a ich súradnice v kartézskej súradnicovej sústave, môžeme vypočítať uhol medzi nimi. Geometricky predstavuje skalárny súčin dvoch vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ medzi ktorými nie je väčší uhol ako 90° súčin veľkosti priemetu vektora $\boldsymbol{a}$ do smeru vektora $\boldsymbol{b}$ a veľkosti vektora $\boldsymbol{b}$, čo má vo fyzike mnohokrát veľký význam.

e) *Vektorový súčin*

Vektorový súčin dvoch vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je súčin, ktorého výsledkom je vektor. Vektorový súčin dvoch vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ zapisujeme ako $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ a môžeme ho vypočítať nasledujúcim spôsobom: Nech vektor $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ a vektor $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$. Potom:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_yb_z - a_zb_y)\boldsymbol{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\boldsymbol{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

Pre vektorový súčin dvoch vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ platí: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$. Vektor, ktorý je výsledkom vektorového súčinu vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je vždy kolmý na oba vektory a jeho smer určíme pomocou pravidla pravej ruky: „ak pravú ruku natočíme tak, aby ukazovák mal smer vektora $\boldsymbol{a}$ a prostredník smer vektora $\boldsymbol{b}$, potom nám palec ukazuje smer vektora $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$“. Ak poznáme veľkosti vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a uhol ϕ medzi nimi, môžeme vypočítať veľkosť vektora $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ako $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}|\sin\phi$. Geometricky predstavuje veľkosť vektora $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ plochu rovnobežníka, ktorého strany sú určené vektormi $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

f) Zmiešaný súčin

Zmiešaný skalárny a vektorový súčin troch vektorov ***a***, ***b*** a ***c*** vypočítame nasledovne:

$$\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

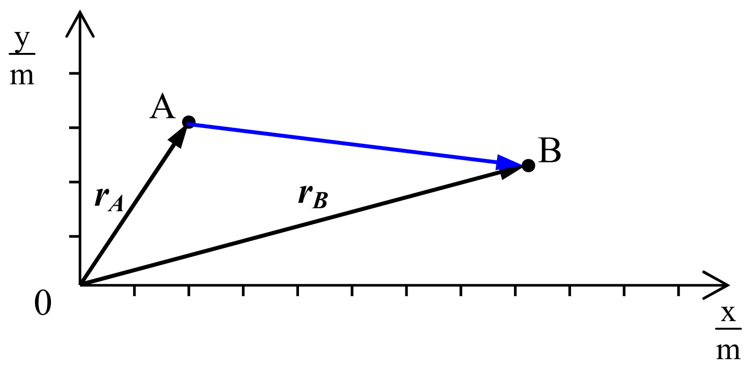
Geometricky predstavuje zmiešaný súčin objem rovnobežnostena, ktorého strany sú určené vektormi ***a***, ***b***, ***c***.

g) Dvojnásobný vektorový súčin

Dvojnásobný vektorový súčin troch vektorov ***a***, ***b*** a ***c*** vypočítame nasledovne:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}).$$

Najjednoduchším príkladom vektorovej veličiny je posunutie, resp. vektor posunutia. Tento vektor opisuje zmenu polohy nejakého telesa alebo častice. Ak prejde nejaká častica z bodu A do bodu B, môžeme posunutie tejto častice znázorniť vektorom, ktorého začiatok je v bode A a koniec v bode B a označiť ho ako ***AB***. Vektor posunutia nepopisuje detaily pohybu, ale len celkový výsledok pohybu. Polohu bodu A, resp. bodu B vzhľadom na počiatok nejakej vopred zvolenej súradnicovej sústavy určuje polohový vektor ***r***. Je to vlastne vektor posunutia z počiatku súradnicovej sústavy O do bodu A, resp. do bodu B. Platí teda: $\boldsymbol{r_A} = \boldsymbol{OA}$ a $\boldsymbol{r_B} = \boldsymbol{OB}$. Pre súradnice polohového vektora ***r*** platí: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Pomocou polohových vektorov $\boldsymbol{r_A}$ a $\boldsymbol{r_B}$ môžeme vektor posunutia ***AB*** vyjadriť ako: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{r_B} - \boldsymbol{r_A} = (x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} + (z_B - z_A)\boldsymbol{k}$, kde x_A, y_A a z_A predstavujú nielen súradnice vektora $\boldsymbol{r_A}$, ale aj bodu A a x_B, y_B a z_B súradnice bodu B. Na obr. 1.7 je znázornený vektor posunutia ***AB*** a polohové vektory $\boldsymbol{r_A}$ a $\boldsymbol{r_B}$ v prípade, že sa pohyb udial v rovine (x, y).



Obr. 1.7

Príklady

1.1 Daný je vektor $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$ a vektor $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$.

a) graficky aj algebraicky nájdite vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

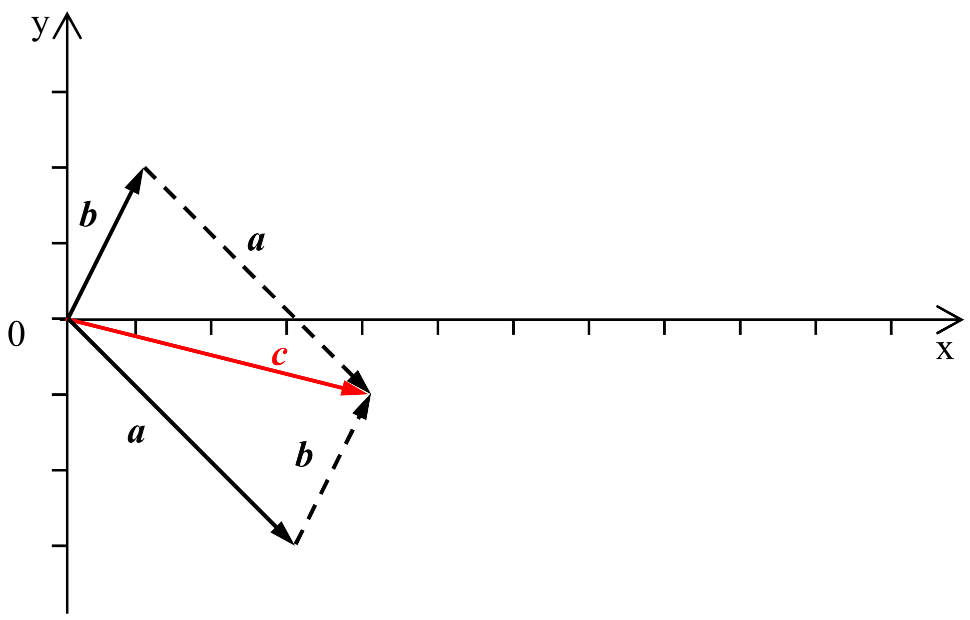
b) graficky aj algebraicky nájdite vektor $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

c) nájdite veľkosti vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$.

Riešenie

Ide o dvojrozmerný prípad, t.j. *z*-ová zložka vektorov je nulová a preto ju neuvažujeme.

a) <u>grafické riešenie</u>: buď môžeme použiť metódu, pri ktorej ku koncu vektora $\boldsymbol{a}$ pripojíme začiatok vektora $\boldsymbol{b}$ a súčtom vektorov $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ bude vektor $\boldsymbol{c}$, ktorého začiatok je zhodný so začiatkom vektora $\boldsymbol{a}$ a koniec s koncom vektora $\boldsymbol{b}$, alebo doplníme vektory na rovnobežník a súčtom vektorov $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ bude vektor $\boldsymbol{c}$ určený uhlopriečkou rovnobežníka, ktorej začiatok je totožný so začiatkom vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Na obr. 1.8 je znázornené riešenie pomocou rovnobežníkovej metódy, ktorú použijeme aj pri riešení časti b) tejto úlohy.

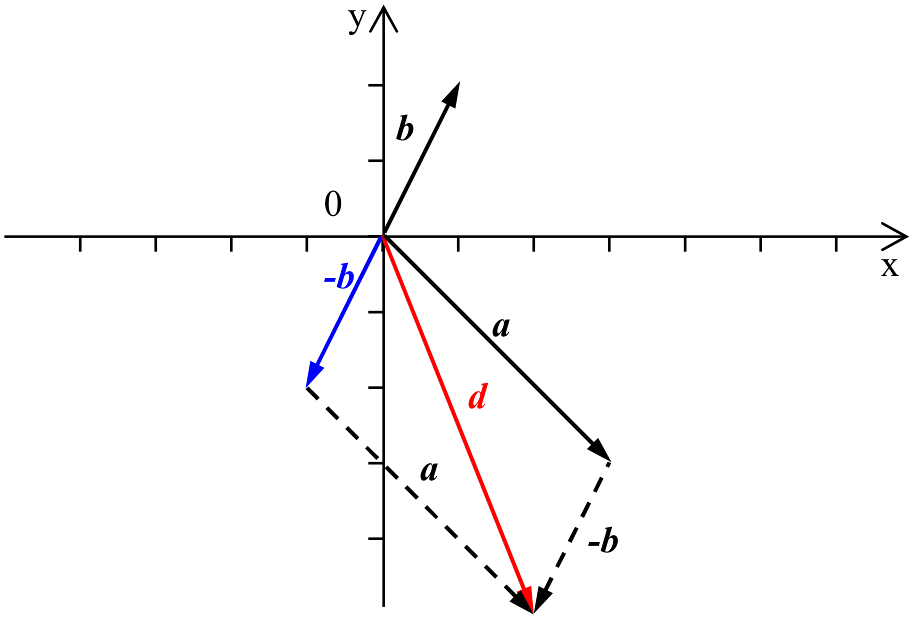


Obr. 1.8

<u>algebraické riešenie:</u>

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (a_x+\mathrm{b_x})\,\boldsymbol{i} + (a_y+\mathrm{b_y})\boldsymbol{j} = (3+1)\boldsymbol{i} + (-3+2)\boldsymbol{j} = (4)\boldsymbol{i} + (-1)\boldsymbol{j} = \underline{\underline{4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}}}$

b) <u>grafické riešenie</u>: nájdeme vektor $-\boldsymbol{b}$ a doplníme vektory $\boldsymbol{a}$ a $-\boldsymbol{b}$ na rovnobežník. Vektor $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ bude určený uhlopriečkou rovnobežníka, ktorej začiatok je totožný so začiatkom vektorov $\boldsymbol{a}$ a $-\boldsymbol{b}$ (obr. 1.9).



Obr. 1.9

<u>algebraické riešenie:</u>

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = (a_x-b_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y-b_y)\boldsymbol{j} = (3-1)\boldsymbol{i} + (-3-2)\boldsymbol{j} = (2)\boldsymbol{i} + (-5)\boldsymbol{j} = \underline{\underline{2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}}}$

c) Použijeme vzťah na výpočet veľkosti vektorov

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \underline{\underline{\sqrt{18}}}$$

$$|\boldsymbol{b}| = b = \sqrt{b_x^{\,2} + b_y^{\,2}} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

$$|\boldsymbol{c}| = c = \sqrt{c_x^{\,2} + c_y^{\,2}} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \underline{\underline{\sqrt{17}}}$$

$$|\boldsymbol{d}| = d = \sqrt{d_x^{\,2} + d_y^{\,2}} = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+25} = \underline{\underline{\sqrt{29}}}$$

1.2 Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$

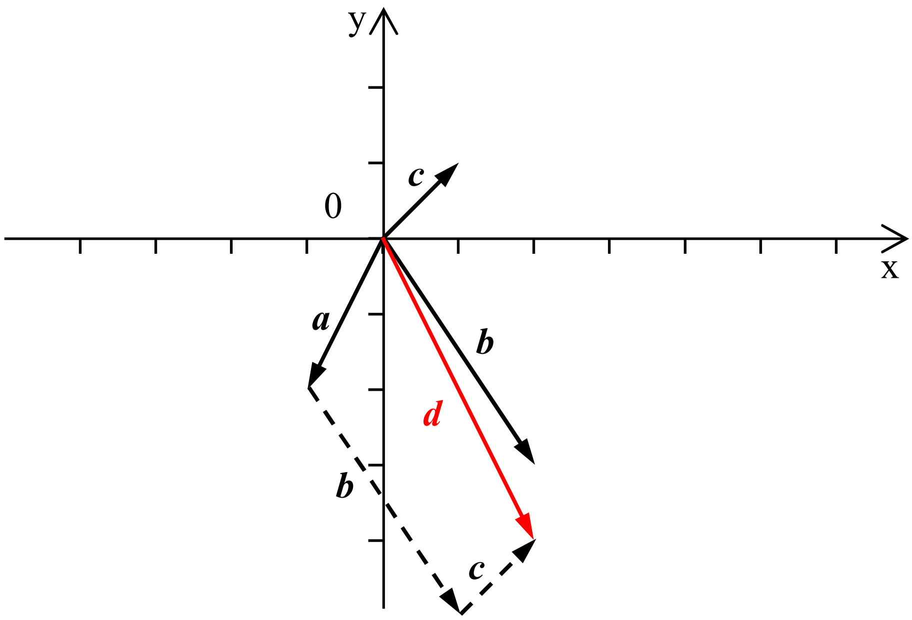
a) graficky aj algebraicky nájdite vektor $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

b) nájdite jednotkový vektor v smere vektora $\boldsymbol{d}$.

Riešenie

Opäť ide o dvojrozmerný prípad a preto *z*-ovú zložku neuvažujeme.

a) <u>grafické riešenie</u>: použijeme metódu, pri ktorej ku koncu vektora ***a*** pripojíme začiatok vektora ***b*** a koncu vektora ***b*** pripojíme začiatok vektora ***c***. Súčtom vektorov ***a***+***b***+***c*** bude vektor ***d***, ktorého začiatok je zhodný so začiatkom vektora ***a*** a koniec s koncom vektora ***c*** (obr. 1.10).



Obr. 1.10

<u>algebraické riešenie:</u>

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = (a_x+b_x+c_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y+b_y+c_y)\boldsymbol{j} = (-1+2+1)\boldsymbol{i} + (-2-3+1)\boldsymbol{j} = \underline{\underline{2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}}}$

b) jednotkový vektor v smere vektora ***d*** môžeme vyjadriť ako: $\boldsymbol{e_d} = \dfrac{\boldsymbol{d}}{d}$.

Aby sme našli súradnice vektora $\boldsymbol{e_d}$, potrebujeme poznať veľkosť vektora ***d***. Pre veľkosť vektora ***d*** platí:

$$|\boldsymbol{d}| = d = \sqrt{d_x{}^2 + d_y{}^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

Pre jednotkový vektor $\boldsymbol{e_d}$ potom platí: $\boldsymbol{e_d} = \dfrac{\boldsymbol{d}}{d} = \dfrac{d_x}{d}\boldsymbol{i} + \dfrac{d_y}{d}\boldsymbol{j} = \underline{\underline{\dfrac{2}{\sqrt{20}}\boldsymbol{i} - \dfrac{4}{\sqrt{20}}\boldsymbol{j}}}$.

1.3 Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$. Algebraicky vypočítajte: $\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}$.

Riešenie

Na tejto úlohe si ukážeme dva ekvivalentné spôsoby algebraického výpočtu:

1. spôsob:

$\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c} = (2a_x - 4b_x + 3c_x)\boldsymbol{i} + (2a_y - 4b_y + 3c_y)\boldsymbol{j} + (2a_z - 4b_z + 3c_z)\boldsymbol{k} = (2.2 - 4.(-1) + 3.(-2))\boldsymbol{i} + (2.2 - 4.(-2) + 3.1)\boldsymbol{j} + (2.(-1) - 4.5 + 3.(-2))\boldsymbol{k} = (4 + 4 - 6)\boldsymbol{i} + (4 + 8 + 3)\boldsymbol{j} + (-2 - 20 - 6)\boldsymbol{k} = \underline{\underline{2\boldsymbol{i} + 15\boldsymbol{j} - 28\boldsymbol{k}}}$

2. spôsob:

$\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c} = 2(2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) - 4(-\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}) + 3(-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}) = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} + 4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} - 20\boldsymbol{k} - 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k} = \underline{\underline{2\boldsymbol{i} + 15\boldsymbol{j} - 28\boldsymbol{k}.}}$

1.4 Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Nájdite vektor $\boldsymbol{d}$ tak, aby platilo:

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}$

Riešenie

Na vyriešenie tejto úlohy využijeme sčítavanie a odčítavanie vektorov algebraickou metódou. Najskôr si túto rovnicu upravíme:

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$ (k obidvom stranám rovnice pripočítame vektor opačný k vektoru $-\boldsymbol{d}$).

Potom pre súradnice vektora $\boldsymbol{d}$ dostávame:

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} = (a_x+b_x-c_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y+b_y-c_y)\boldsymbol{j} + (a_z+b_z-c_z)\boldsymbol{k} = (3+1+2)\boldsymbol{i} + (-4-3-5)\boldsymbol{j} + (1-7-1)\boldsymbol{k} = \underline{\underline{6\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}.}}$

1.5 Kváder leží na šikmej rovine, ktorej sklon vzhľadom na vodorovnú rovinu je 30°. Nájdite veľkosti zložiek vektora tiažovej sily v smere rovnobežnom s podložkou a v smere kolmom na podložku, ak hmotnosť kvádra je 20 kg.

Riešenie

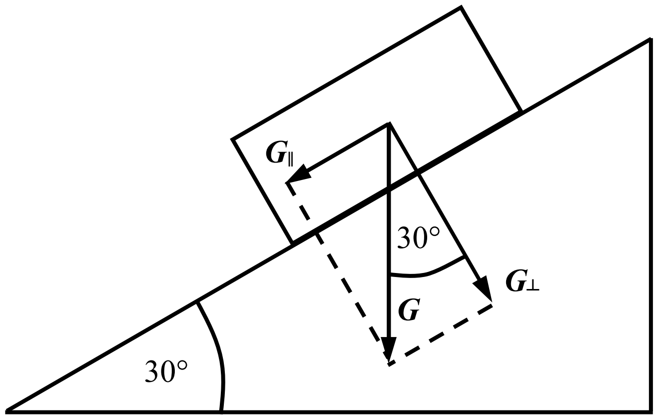
Tiažová sila je vektorová veličina a smeruje zvislo nadol. Jej veľkosť vypočítame podľa vzťahu:

$G = m.g.$

V našom prípade je:

$G = m.g = 20\ \text{kg}.10\ \text{m/s}^2 = 200\ \text{N}.$

Túto tiažovú silu môžeme rozložiť na zložku rovnobežnú s naklonenou rovinou $\boldsymbol{G}_{\parallel}$ (spôsobuje pohyb kvádra po naklonenej rovine) a na zložku kolmú na naklonenú rovinu $\boldsymbol{G}_{\perp}$ (pritláča kváder k naklonenej rovine). Celá situácia je znázornená na obr. 1.11.



Obr. 1.11

Z podobnosti trojuholníka vytvoreného z vektorov $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}_{\parallel}$ a $\boldsymbol{G}_{\perp}$ s trojuholníkom, ktorý vytvára naklonenú rovinu vyplýva, že medzi kolmou zložkou tiažovej sily $\boldsymbol{G}_{\perp}$ a tiažovou silou $\boldsymbol{G}$ je tiež uhol 30°. Pre veľkosť kolmej zložky tiažovej sily $\boldsymbol{G}_{\perp}$ preto platí:

$G_{\perp} = G \cos 30° = 200\ \text{N}.0{,}866 = \underline{\underline{173{,}2\ \text{N}}}.$

Pre veľkosť rovnobežnej zložky tiažovej sily $\boldsymbol{G}_{\parallel}$ platí:

$G_{\parallel} = G \sin 30° = 200\ \text{N}.0{,}5 = \underline{\underline{100\ \text{N}}}.$

1.6 Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$. Zistite, či sú vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ na seba kolmé, a ak nie, nájdite uhol medzi nimi.

Riešenie

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ budú na seba kolmé, ak ich skalárny súčin bude rovný nule, lebo $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}| \cos \phi$ a keď $\phi = 90°$, potom $\cos 90° = 0$ a $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = 0$.

Vypočítajme teda skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$:

$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 3.1 + (-2).3 + 1.(-6) = 3 - 6 - 6 = -9 \neq 0,$

teda vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ nie sú na seba kolmé. Aby sme vypočítali uhol medzi nimi, použijeme vzťah:

$$\cos\phi = \frac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}|}.$$

K tomu potrebujeme vypočítať veľkosti vektorov ***a*** a ***b***.

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$|\boldsymbol{b}| = b = \sqrt{b_x^{\ 2} + b_y^{\ 2} + b_z^{\ 2}} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+9+36} = \sqrt{46}\,.$$

Potom:

$$\cos\phi = \frac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}|} = \frac{-9}{\sqrt{14}.\sqrt{46}} = -0{,}35465\,.$$

Odtiaľ:

$$\phi = \arccos(-0{,}35465) = \underline{\underline{110{,}77°}}\,.$$

1.7 Dokážte, že v pravotočivej kartézskej súradnicovej sústave platí:

a) $\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = 1$

b) $\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i} = 0$

c) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$

d) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$

Riešenie

Pri dôkazoch je potrebné si uvedomiť, že:

$\boldsymbol{i} = 1\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{j} = 0\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}$

a) Dôkaz urobíme len pre $\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i}$. Dôkaz pre $\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{k}$ by sme urobili analogicky.

$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i} = 1.1 + 0.0 + 0.0 = 1+0+0 = \underline{\underline{1}}$

b) Opäť urobíme dôkaz len pre $\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j}$. Dôkaz pre $\boldsymbol{j}.\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{i}$ by sme urobili analogicky.

$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j} = 1.0 + 0.1 + 0.0 = 0+0+0 = \underline{\underline{0}}$

c) Aj tentoraz urobíme dôkaz len pre $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}$. Dôkaz pre $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}$ by sme urobili analogicky.

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0.0 - 0.0)\boldsymbol{i} + (0.1 - 1.0)\boldsymbol{j} + (1.0 - 0.1)\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \underline{\underline{\boldsymbol{0}}}\,.$$

d) Aj v tomto poslednom prípade urobíme dôkaz len pre $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$. Dôkaz pre $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}$ by sme urobili analogicky.

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0.0-0.1)\boldsymbol{i}+(0.0-1.0)\boldsymbol{j}+(1.1-0.0)\boldsymbol{k}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+1\boldsymbol{k}=\underline{\underline{\boldsymbol{k}}}\,.$$

1.8 Dané sú vektory $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$. Nájdite vektor kolmý na obidva vektory.

Riešenie

Pri riešení tejto úlohy využijeme vlastnosť vektorového súčinu, že vektor, ktorý vznikne vektorovým súčinom dvoch vektorov je kolmý na obidva tieto vektory. Aby sme teda našli vektor kolmý na vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, musíme urobiť ich vektorový súčin. Na poradí vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ vo vektorovom súčine pritom tentoraz nezáleží, lebo aj vektor opačný k vektoru, ktorý vznikne vektorovým súčinom vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, je vektor kolmý na tieto vektory.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 5 & -1 & -1\\ -4 & 2 & -6\end{vmatrix}=[(-1).(-6)-(-1).2]\boldsymbol{i}+[(-1).(-4)-5.(-6)]\boldsymbol{j}+[5.2-(-1).(-4)]\boldsymbol{k}=(6+2)\boldsymbol{i}+(4+30)\boldsymbol{j}+(10-4)\boldsymbol{k}=\underline{\underline{8\boldsymbol{i}+34\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}}}$$

1.9 Dané sú vektory $\boldsymbol{a}=-5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$. Vypočítajte $\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

Riešenie

Túto úlohu môžeme riešiť dvomi spôsobmi:

<u>1. spôsob:</u> (bez použitia vzťahu pre zmiešaný súčin).

Najskôr nájdeme súradnice vektora $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -2 & 1 & 6\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=[1.(-4)-6.0]\boldsymbol{i}+[6.1-(-2).(-4)]\boldsymbol{j}+[(-2).0-1.1]\boldsymbol{k}=(-4-0)\boldsymbol{i}+(6-8)\boldsymbol{j}+(0-1)\boldsymbol{k}=-4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

Teraz vypočítame skalárny súčin $\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

$$\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_x.(b\times c)_x+a_y.(b\times c)_y+a_z.(b\times c)_z=(-5).(-4)+3.(-2)+(-3).(-1)=20-6+3=\underline{\underline{17}}$$

<u>2. spôsob:</u> (s použitím vzťahu pre zmiešaný súčin troch vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$).

$$\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-5).1.(-4) + (-2).0.(-3) + 1.3.6 - [(-3).1.1] -$$

$[6.0.\,(-5)] - [(-4).3.(-2)] = 20+0+18+3-0-24 = \underline{\underline{17}}$

1.10 Dané sú vektory $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Vypočítajte $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

Riešenie

Pri riešení tejto úlohy využijeme vzťah pre dvojnásobný vektorový súčin:

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})$

Najskôr vypočítame skalárne súčiny $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$:

$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c} = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 4.2 + 4.1 + 0.1 = 8+4+0 = 12$

$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 4.(-2) + 4.3 + 0.(-4) = -8+12+0 = 4$

Výsledky dosadíme do vzťahu pre dvojnásobný vektorový súčin:

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}) = 12\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{c} = 12.(-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) - 4(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = -24\boldsymbol{i} + 36\boldsymbol{j}$
$- 48\boldsymbol{k} - 8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} = \underline{\underline{-32\boldsymbol{i} + 32\boldsymbol{j} - 52\boldsymbol{k}}}$

1.11 Nástenné hodiny ukazujú štvrť na päť. Aký bude vektor posunutia špičky minútovej ručičky o 15 minút, ak dĺžka minútovej ručičky od osi otáčania po špičku je 10 cm?

Riešenie

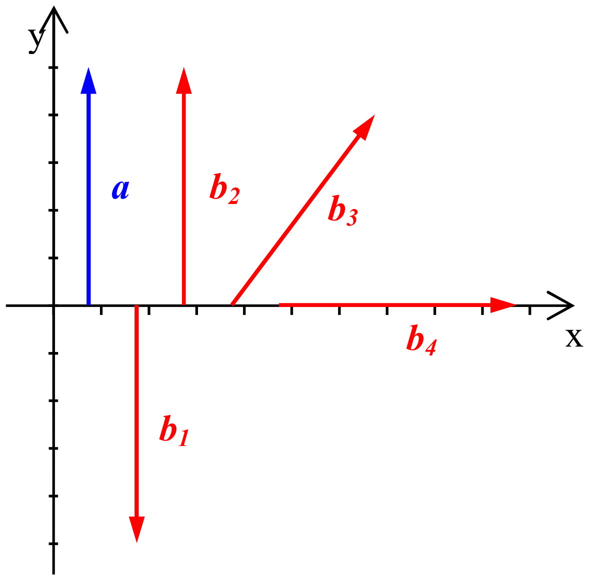
Zvolíme si najskôr súradnicovú sústavu, ktorej stred bude ležať na osi otáčania ručičiek. Nazvime vektor určený minútovou ručičkou ako $\boldsymbol{r_m}$. Tento vektor je zároveň polohovým vektorom špičky minútovej ručičky. Na začiatku (štvrť na päť) je minútová ručička na trojke a polohový vektor špičky minútovej ručičky vo zvolenej súradnicovej sústave je $\boldsymbol{r_{m1}} = (10\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j})$ cm = $10\boldsymbol{i}$ cm. Po 15-tich minútach je minútová ručička na šestke a polohový vektor špičky minútovej ručičky vo zvolenej súradnicovej sústave je $\boldsymbol{r_{m2}} = (0\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j})$ cm = $-10\boldsymbol{j}$ cm. Pre vektor posunutia špičky minútovej ručičky zo štvrť na päť na pol piatu platí:

$\boldsymbol{r_{m2}} - \boldsymbol{r_{m1}} = (-10\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{i})$ cm $= \underline{\underline{(-10\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j})\text{ cm.}}}$

1.12 Na obrázku 1.12 je nakreslený vektor $\boldsymbol{a}$ a štyri rôzne možnosti voľby vektora $\boldsymbol{b}$. Zoraďte:

a) skalárne súčiny $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_3$ a $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_4$ od najmenšieho po najväčší

b) veľkosti vektorových súčinov $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_3$ a $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_4$ od najmenšej po najväčšiu



Obr. 1.12

Riešenie

a) Pre skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ platí: $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}|\cos\phi$. Vidíme na základe tohto vzťahu, že skalárny súčin závisí od veľkosti vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a od uhla medzi nimi. Keďže vektory $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ a $\boldsymbol{b}_4$ sú rovnako veľké, budú veľkosti skalárneho súčinu $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_3$ a $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_4$, závisieť len od uhla medzi vektorom $\boldsymbol{a}$ a vektormi $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ a $\boldsymbol{b}_4$. Uhol medzi $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}_1$ je 180° a keďže cos 180° = –1, tak $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_1 = -\,a.b_1 = -\,a.b$. Uhol medzi $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}_2$ je 0° a keďže cos 0° = 1, tak $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_2 = a.b_2 = a.b$. Uhol medzi $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}_3$ je uhol medzi 0° a 90° a keďže cos 0° = 1 a cos 90° = 0, tak platí $0 < \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_3 < a.b$. A nakoniec uhol medzi $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}_4$ je 90° a keďže cos 90° = 0, tak $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_4 = a.b_4.0 = 0$. Porovnaním jednotlivých skalárnych súčinov dostávame:

$\underline{\underline{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_1 < \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_4 < \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_3 < \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}_2}}$

b) Pre veľkosť vektorového súčinu vektorov $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ platí: $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}|\sin\phi$. Ako vidíme, aj v tomto prípade závisí veľkosť vektorového súčinu len od uhla medzi vektorom $\boldsymbol{a}$ a vektormi $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ a $\boldsymbol{b}_4$. Uhol medzi $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}_1$ je 180° a keďže sin 180° = 0, tak $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1| = a.b_1.\sin 0° = 0$. Uhol medzi $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}_2$ je 0° a keďže sin 0° = 0, tak $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2| = a.b_2.\sin 0° = 0$. Uhol medzi $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}_3$ je uhol medzi 0° a 90° a keďže sin 0° = 0 a sin 90° = 1, tak platí $0 < |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_3| <$

$a.b$. A nakoniec uhol medzi $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b_4}$ je 90° a keďže sin 90° = 1, tak $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_4| =$ $a.b_4.sin\ 90° = a.b$.

Porovnaním jednotlivých vektorových súčinov dostávame:

$$\underline{\underline{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_1| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_2| < |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_3| < |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_4|}}$$

1.13 Motorový čln sa pohybuje po rieke rovnomerným priamočiarym pohybom rýchlosťou $\boldsymbol{w}$ vzhľadom na vodu. Rýchlosť toku rieky, ktorá tiež tečie rovnomerným priamočiarym pohybom, je $\boldsymbol{u}$. Najskôr čln pláva proti prúdu do vzdialenosti d od prístavu a vracia sa späť. Potom pláva do miesta na druhom brehu oproti prístavu a tiež sa vracia späť. Šírka rieky je tiež d. Určite, čomu je rovný pomer t_V/t_A, ak t_V je čas pohybu člna pozdĺž rieky a t_A čas pohybu člna naprieč riekou.

Riešenie

Označme si čas pohybu člna pozdĺž rieky jedným smerom ako t_{V1} a čas pohybu člna pozdĺž rieky opačným smerom ako t_{V2}. Potom $t_V = t_{V1} + t_{V2}$. Podobne si označme aj čas pohybu člna naprieč riekou jedným smerom ako t_{A1} a čas pohybu člna naprieč riekou opačným smerom ako t_{A2}. Potom $t_A = t_{A1} + t_{A2}$. Vyjadrime si teraz jednotlivé časy t_{V1}, t_{V2}, t_{A1} a t_{A2} pomocou vzťahu pre čas rovnomerného priamočiareho pohybu telesa: $t = \dfrac{s}{v}$, kde s je prejdená dráha a v je veľkosť rýchlosti telesa.

Zaveďme si dvojrozmernú kartézsku súradnicovú sústavu, ktorej začiatok zvolíme v mieste prístavu P. Smer osi x bude smer toku rieky a smer osi y bude smer naprieč riekou od prístavu na druhý breh (obr. 1.13). Uvažujme teraz jednotlivé prípady:

a) Čln pláva proti prúdu od prístavu P po vzdialenosť d. Jeho rýchlosťou vzhľadom na vodu je $\boldsymbol{w} = -w\boldsymbol{i}$, lebo má opačný smer ako je nami zvolený smer osi x. Rýchlosť toku rieky je $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{i}$, lebo má taký istý smer ako je nami zvolený smer osi x (obr. 1.13a). Výsledná rýchlosť člna bude potom:

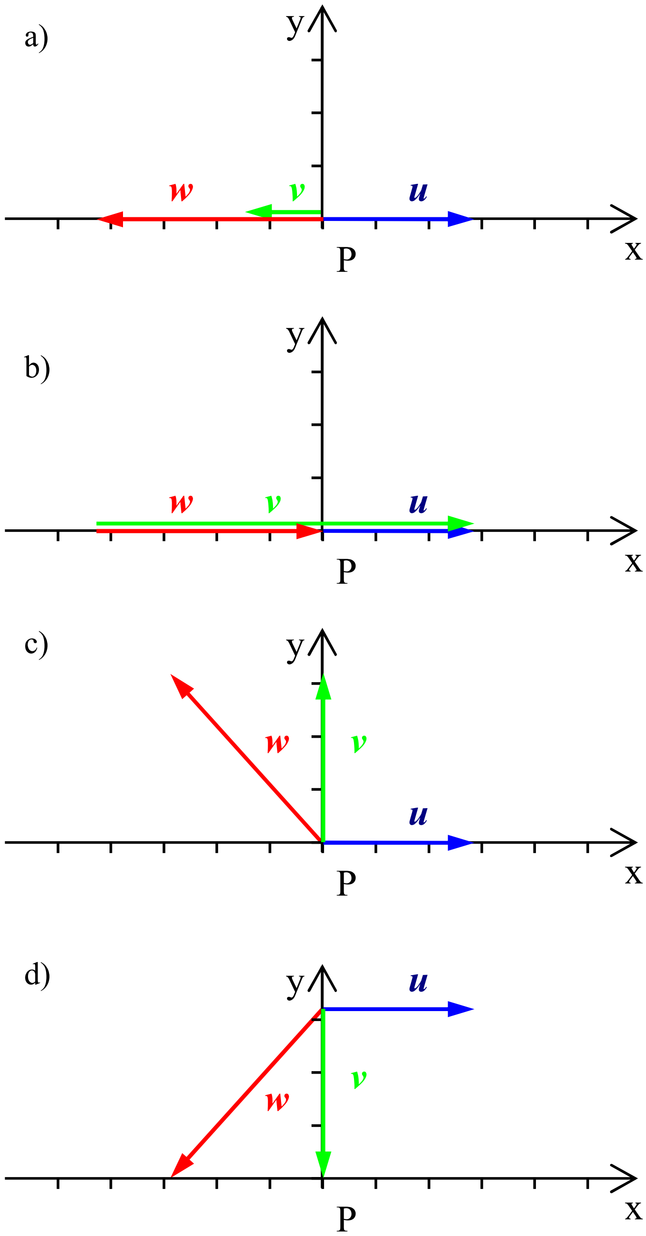
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} = -w\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{i} = (-w+u)\boldsymbol{i} = -(w-u)\boldsymbol{i}$$

a bude mať opačný smer ako je smer osi x. Veľkosť tejto rýchlosti je:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-(w-u))^2 + 0 + 0} = \sqrt{(w-u)^2} = (w-u)$$

Pre čas t_{v1} potom platí:

$$t_{V1} = \frac{d}{v} = \frac{d}{w-u}$$



Obr. 1.13

b) Čln pláva v smere prúdu do prístavu P. Jeho rýchlosťou vzhľadom na vodu je $\boldsymbol{w} = w\boldsymbol{i}$, lebo má smer ako je nami zvolený smer osi x. Rýchlosť toku rieky sa nemení a je stále $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{i}$ (obr. 1.13b). Výsledná rýchlosť člna bude potom:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} = w\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{i} = (w+u)\boldsymbol{i}$$

a bude mať taký istý smer ako je smer osi x. Veľkosť tejto rýchlosti je:

$$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}} = \sqrt{(w+u)^2} = (w+u)$$

Pre čas t_{v2} potom platí:

$$t_{V2} = \frac{d}{v} = \frac{d}{w+u}$$

c) Čln pláva naprieč riekou oproti prístavu P. Jeho rýchlosťou vzhľadom na vodu je:

$$\boldsymbol{w} = -w_x\boldsymbol{i} + w_y\boldsymbol{j} = -u\boldsymbol{i} + w_y\boldsymbol{j}$$

lebo čln musí plávať nielen naprieč riekou, ale aj mierne proti prúdu takou istou rýchlosťou ako je rýchlosť prúdu. Rýchlosť toku rieky sa nemení a je stále $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{i}$ (obr. 1.13c). Výsledná rýchlosť člna bude potom:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} = -u\boldsymbol{i} + w_y\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{i} = (-u+u)\boldsymbol{i} + w_y\boldsymbol{j} = w_y\boldsymbol{j}$$

a bude mať taký istý smer ako je smer osi y. Veľkosť tejto rýchlosti je

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{{w_y}^2} = w_y$$

Pomocou Pytagorovej vety vieme w_y napísať ako:

$$w_y = \sqrt{w^2 - u^2}$$

Pre čas t_{A1} potom platí:

$$t_{A1} = \frac{d}{v} = \frac{d}{w_y} = \frac{d}{\sqrt{w^2 - u^2}}$$

d) Čln pláva naprieč riekou k prístavu P. Jeho rýchlosťou vzhľadom na vodu je:

$$\boldsymbol{w} = -w_x\boldsymbol{i} - w_y\boldsymbol{j} = -u\boldsymbol{i} - w_y\boldsymbol{j}$$

lebo čln musí opäť plávať nielen naprieč riekou, ale aj mierne proti prúdu takou istou rýchlosťou ako je rýchlosť prúdu. Rýchlosť toku rieky sa nemení a je stále $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{i}$ (obr. 1.13d). Výsledná rýchlosť člna bude potom:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} = -u\boldsymbol{i} - w_y\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{i} = (-u+u)\boldsymbol{i} - w_y\boldsymbol{j} = -w_y\boldsymbol{j}$$

a bude mať opačný smer ako je smer osi y. Veľkosť tejto rýchlosti je:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{(-w_y)^2} = w_y = \sqrt{w^2 - u^2}$$

Pre čas t_{A2} potom platí:

$$t_{A2} = \frac{d}{v} = \frac{d}{w_y} = \frac{d}{\sqrt{w^2 - u^2}}$$

Pre t_v platí:

$$t_V = t_{V1} + t_{V2} = \frac{d}{w-u} + \frac{d}{w+u} = \frac{d(w+u) + d(w-u)}{w^2 - u^2} = \frac{dw + du + dw - du}{w^2 - u^2} = \frac{2dw}{w^2 - u^2}$$

Pre t_A platí:

$$t_A = t_{A1} + t_{A2} = \frac{d}{\sqrt{w^2 - u^2}} + \frac{d}{\sqrt{w^2 - u^2}} = \frac{2d}{\sqrt{w^2 - u^2}}$$

Potom:

$$\frac{t_V}{t_A} = \frac{\dfrac{2dw}{w^2-u^2}}{\dfrac{2d}{\sqrt{w^2-u^2}}} = \frac{2dw\sqrt{w^2-u^2}}{2d(w^2-u^2)} = \frac{w\sqrt{w^2-u^2}}{w^2-u^2} = \frac{w\sqrt{w^2-u^2}}{\sqrt{w^2-u^2}\sqrt{w^2-u^2}} = \underline{\underline{\frac{w}{\sqrt{w^2-u^2}}}}$$

2 KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

Teoretický úvod

Pri pohybe hmotného bodu *polohový vektor* $\boldsymbol{r}(t)$ určuje polohu hmotného bodu vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy. Krivka opísaná koncovým bodom polohového vektora je *trajektória* hmotného bodu

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} .$$

Fyzikálnu veličinu číselne vyjadrujúcu dĺžku trajektórie nazývame *dráha* pohybu s.

Časovou deriváciou polohového vektora získame *vektor okamžitej rýchlosti*

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} .$$

Polohový vektor hmotného bodu v ľubovoľnom čase t získame časovou integráciou rýchlosti podľa vzťahu

$$\boldsymbol{r}(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{r}_0 ,$$

kde $\boldsymbol{r}_0$ je polohový vektor hmotného bodu na počiatku, teda v čase $t = 0$.

Priemerná rýchlosť je definovaná vzťahom

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

je to podiel hmotným bodom prejdeného dráhového úseku Δs a doby Δt, ktorú na to potreboval.

Vektor okamžitého zrýchlenia je časová derivácia vektora rýchlosti

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} .$$

Analogicky pre určenie rýchlosti platí

$$\boldsymbol{v}(t) = \int_0^t \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{v}_0 ,$$

kde $\boldsymbol{v}_0$ je počiatočná rýchlosť. Pre polohový vektor

$$\boldsymbol{r}(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{r}_0 = \int_0^t \left[\int_0^t \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{v}_0 \right] \mathrm{d}t + \boldsymbol{r}_0$$

Podľa tvaru trajektórie delíme pohyby na *priamočiare* a *krivočiare*. Trajektóriou pri priamočiarom pohybe je *priamka*.

Ak je pohyb priamočiary, potom na jeho bližšie určenie postačujú súradnice rýchlosti v a zrýchlenia a vzhľadom na dráhovú os orientovanú zvyčajne v smere vektora počiatočnej rýchlosti

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}; \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2},$$

kde s je súradnica polohy hmotného bodu na dráhovej osi.

Priamočiare pohyby rozdeľujeme na :

a) rovnomerné - v = konštanta rôzna od nuly; $a = 0$

$$s = \int_0^t v\mathrm{d}t + s_0 = vt + s_0,$$

b) rovnomerne zrýchlené (spomalené) - a = konštanta rôzna od nuly

$$v = \int_0^t a\mathrm{d}t + v_0 = at + v_0$$

$$s = \int_0^t v\mathrm{d}t + s_0 = \int_0^t (at + v_0)\mathrm{d}t + s_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0,$$

kde s_0, v_0 sú počiatočné súradnice dráhy (polohy) a rýchlosti. Ak $a < 0$, je pohyb *rovnomerne spomalený.*

Špeciálnymi prípadmi priamočiarych rovnomerne zrýchlených pohybov sú *voľný pád, zvislý vrh nadol a zvislý vrh nahor*. Pre tieto pohyby platí:

b_1) voľný pád - $a = g$; $v_0 = 0$

$$v = gt$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

b_2) zvislý vrh nadol - $a = g$; $v_0 \neq 0$

$$v = v_0 + gt$$

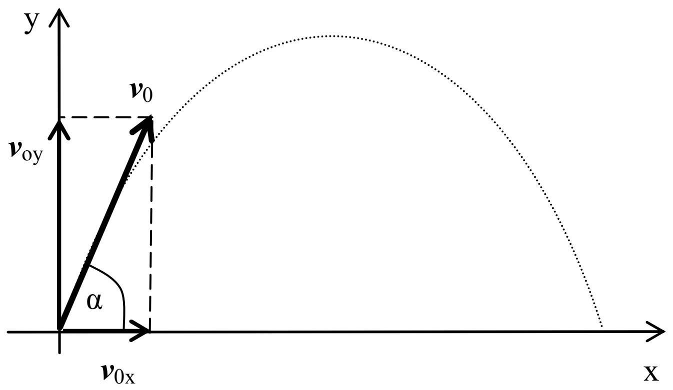
$$s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

b_3) zvislý vrh nahor - $a = -g$; $v_0 \neq 0$

$$v = v_0 - gt$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Špeciálnymi prípadmi krivočiarych rovnomerne zrýchlených pohybov sú *vodorovný vrh* a *šikmý vrh*. Pohyby sú charakteristické tým, že ich zrýchlenie je konštantné ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$), ale sa nejedná o pohyb priamočiary. Vektor počiatočnej rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ neleží v jednej priamke s vektorom zrýchlenia $\boldsymbol{g}$. Ak sa pohyby dejú v rovine (x, y), vektor $\boldsymbol{v}_0$ zviera s osou x uhol α, pri vodorovnom vrhu $\alpha = 0°$, pozri obr. 2.1.



Obr. 2.1

Pre tieto pohyby platí:

b3) vodorovný vrh – $a_x = 0\,;\, a_y = -\,g$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \qquad\qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -g\,t$$

$$x = v_x t = v_0\, t \qquad\qquad y = h_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

b4) šikmý vrh – $a_x = 0;\, a_y = -\,g$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \qquad\qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_{0y} - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

$$x = v_{0x} t = v_0 t \cos(\alpha) \qquad\qquad y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2\,,$$

kde h_0 je počiatočná výška hmotného bodu.

c) nerovnomerné – $a = a(t)$

$$v(t) = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t + v_0$$

$$s(t) = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t + s_0$$

Príklady

2.1 Vlak išiel z mesta A do mesta B, pričom prvú polovicu svojho času pohybu prešiel rýchlosťou 120 km·h^{-1} a druhú polovicu rýchlosťou 72 km·h^{-1}. Späť, teda z mesta B do mesta A išiel tak, že prvú polovicu z celkovej svojej dráhy prešiel rýchlosťou 120 km·h^{-1} a druhú polovicu rýchlosťou 72 km·h^{-1}. Aká bola priemerná rýchlosť vlaku pri jazde do mesta B a z mesta B? Výslednú rýchlosť vyjadrite aj v jednotkách m·s^{-1}.

Riešenie

Označme v_1 = 120 km·h^{-1}, v_2 = 72 km·h^{-1}, priemernú rýchlosť vlaku do mesta B $v_{\text{pA-B}}$ a z mesta B $v_{\text{pB-A}}$.

Priemerná rýchlosť je definovaná ako podiel celkovej ubehnutej dráhy a doby, počas ktorej sa sledovaný pohyb dial

$$v_{\text{p}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

V prvom prípade sa celková ubehnutá dráha skladá z dvoch nerovnakých úsekov s_1 a s_2, ale celkový čas z dvoch rovnakých intervalov t'. Pre pohyb z A do B platí

$$v_{\text{pA-B}} = \frac{s_1 + s_2}{\Delta t} = \frac{v_1 t' + v_2 t'}{2t'} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$v_{\text{pA-B}} = \frac{120\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1} + 72\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}}{2} = 96\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1} \cong \underline{\underline{26{,}67\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}}\,.$$

Pri jazde späť sú dráhové úseky rovnako dlhé $s_1 = s_2 = s'$, ale časové intervaly t_1, t_2 sú nerovnaké. Preto pri nezmenenom označení

$$v_{\text{pB-A}} = \frac{2s'}{t_1 + t_2} = \frac{2s'}{\frac{s'}{v_1} + \frac{s'}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

$$v_{\text{pB-A}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2\cdot 120\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}\cdot 72\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}}{120\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1} + 72\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}} = 90\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1} = \underline{\underline{25\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}}\,.$$

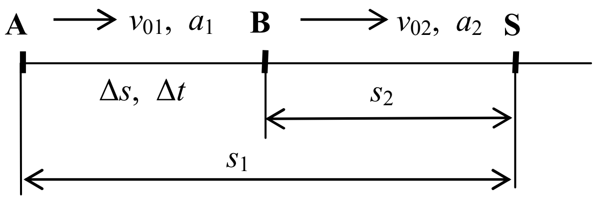
Priemerná rýchlosť vlaku pri jazde do mesta B bola 96 km·h^{-1} ≅ 26,67 m·s^{-1}, z mesta B do A bola 90 km·h^{-1} = 25 m·s^{-1}.

2.2 Po priamej ceste sa pohybujúci osobný automobil prechádzal miestom A rýchlosťou v_{01} = 90 km·h^{-1} a mal konštantné zrýchlenie a_1 = – 0,5 m·s^{-2}. O jednu minútu neskôr sme začali sledovať nákladný automobil, ktorý prešiel miestom B, vzdialeným 0,5 km od miesta

A, v smere jazdy osobného automobilu. Rýchlosť nákladného automobilu v okamihu, keď prechádzal miestom B bola v_{02} = 50,4 km·h^{-1}. Zrýchlenie jeho pohybu bolo konštantné a_2 = 1,5 m·s^{-2}. V akej vzdialenosti od miesta A sa obe autá stretnú?

Riešenie

Označme Δs = 0,5 km = 500 m vzdialenosť medzi miestami A a B, Δt = 1 min = 60 s dobu oneskoreného prechodu nákladného automobilu miestom B, zároveň v_{01} = 90 km·h^{-1} = 25 m·s^{-1}, v_{02} = 50,4 km·h^{-1} = 14 m·s^{-1}. Pre ľahšie vytvorenie predstavy o celej situácii si môžeme celý proces schematicky nakresliť, obr. 2.2 .



Obr. 2.2

Miesto stretnutia sme označili S. V oboch prípadoch sa jedná o rovnomerne zrýchlený (spomalený) pohyb, teda dráhu s_1 prejdenú osobným automobilom za dobu t_1 , resp. dráhu s_2 prejdenú nákladným automobilom za dobu $t_2 = (t_1 - \Delta t)$ vyjadríme rovnicami

$$s_1 = v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 \qquad \text{(a)}$$

$$s_2 = v_{02}t_2 + \frac{1}{2}a_2t_2^2 = v_{02}(t_1 - \Delta t) + \frac{1}{2}a_2(t_1 - \Delta t)^2, \qquad \text{(b)}$$

Dráhu s_1 prejdenú osobným automobilom môžeme vyjadriť aj

$$s_1 = s_2 + \Delta s \qquad \text{(c)}$$

Pravé strany rovníc (a, b) dosadíme do rovnice (c)

$$v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 = v_{02}(t_1 - \Delta t) + \frac{1}{2}a_2(t_1 - \Delta t)^2 + \Delta s,$$

upravíme

$$t_1^2\left(\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2\right) + t_1(v_{01} - v_{02} + a_2\Delta t) + v_{02}\Delta t - \frac{1}{2}a_2(\Delta t)^2 - \Delta s = 0.$$

V získanej kvadratickej rovnici

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$$

určíme hodnoty konštánt a, b, c

$$a = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 = \left(\frac{1}{2}\cdot(-0{,}5) - \frac{1}{2}\cdot 1{,}5\right)\mathrm{m\cdot s^{-2}} = -1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$b = v_{01} - v_{02} + a_2\Delta t = (25 - 14 + 1{,}5\cdot 60)\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 101\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$c = v_{02}\Delta t - 0{,}5\cdot a_2(\Delta t)^2 - \Delta s = (14\cdot 60 - 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 60^2 - 500)\mathrm{m} = -2360\,\mathrm{m}$$

a rovnicu vyriešime:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \{36{,}707\,\mathrm{s},\quad 64{,}293\,\mathrm{s}\}$$

Koreň x_1 = 36,707 s nevyhovuje zadaniu, lebo nákladný automobil cez miesto B neprešiel. Koreň x_2 = 64,293 s je fyzikálny a osobný automobil z miesta A do miesta S dôjde za dobu t_1= 64,293 s. Vypočítanú hodnotu času t_1 dosadíme do rovnice (a)

$$s_1 = v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 = 25\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\cdot 64{,}293\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}\cdot\left(-0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)\cdot(64{,}293\,\mathrm{s})^2 \cong \underline{\underline{573{,}9\,\mathrm{m}}}\,.$$

Automobily sa stretnú vo vzdialenosti 573,9 m od miesta A.

2.3 Automobil a cyklista idú po priamej ceste, pričom sa pohybujú proti sebe. V istom časovom okamihu sa nachádzajú vo vzájomnej vzdialenosti 300 m. Cyklista sa pohybuje konštantnou rýchlosťou 5 m·s^{-1} a automobil rovnomerne zrýchlene s počiatočnou rýchlosťou 7 m·s^{-1} a zrýchlením 4 m·s^{-2}.

a) Po akom čase sa automobil a cyklista stretnú?

b) Akú dráhu pritom prejde automobil?

Riešenie

Označme počiatočnú vzájomnú vzdialenosť automobilu a cyklistu s = 300 m, rýchlosť cyklistu v_{0C} = 5 m·s^{-1}, počiatočnú rýchlosť automobilu v_{0A} = 7 m·s^{-1}, zrýchlenie automobilu a_A = 4 m·s^{-2}, dráhu automobilu s_A a dráhu cyklistu s_C.

a) Zo zadania vieme

$$s = s_A + s_C$$

$$s = v_{0A}t + \frac{1}{2}a_At^2 + v_{0C}t\,.$$

Získali sme kvadratickú rovnicu, ktorú upravíme

$$\frac{1}{2}a_At^2 + (v_{0A} + v_{0C})t - s = 0\,.$$

V získanej kvadratickej rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0$$

určíme hodnoty konštánt a, b, c

$$a = \frac{1}{2}a_A = \frac{1}{2}\cdot 4\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}, \qquad b = v_{0A} + v_{0C} = (5+7)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$c = -s = -300\,\mathrm{m}$$

a rovnicu vyriešime

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \{9{,}61\,\mathrm{s}, \quad -15{,}61\,\mathrm{s}\}.$$

Záporný koreň x_2 = -15,61 s nie je fyzikálny. Koreň x_1 = 9,61 s je fyzikálny, takže cyklista sa s automobilom stretne po čase t = 9,61 s.

b) Dráhu prejdenú automobilom za tento čas určíme dosadením do rovnice opisujúcej rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb automobilu

$$s_A = v_{0A}t + \frac{1}{2}a_A t^2$$

$$s_A = 7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\cdot 9{,}61\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}\cdot 4\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot (9{,}61\,\mathrm{s})^2 = \underline{\underline{251{,}97\,\mathrm{m}}}.$$

Automobil prejde dráhu 251,97 m.

2.4 Pri posúvaní vagónov na železničnej stanici pracovníci spomalili posúvaný vagón z pôvodnej rýchlosti 15 m·s^{-1} na rýchlosť 10 m·s^{-1} na dráhe 0,1 km. Aké bolo zrýchlenie vagóna počas zmeny rýchlosti ak vieme, že pohyb bol rovnomerne spomalený?

Riešenie

Označme počiatočnú rýchlosť vagóna v_0 = 15 m·s^{-1}, konečnú v_1 = 10 m·s^{-1} a dráhu, na ktorej sa proces zmeny rýchlosti uskutočnil s_1 = 0,1 km = 100 m po dobu t. Pri rovnomerne zrýchlenom pohybe udávajú súvis medzi dráhou, rýchlosťou, zrýchlením a časom dve rovnice

$$s_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \qquad v_1 = v_0 + at \qquad \text{(a, b)}$$

s dvomi neznámymi a a t. Pri riešení použijeme substitučnú metódu. Z rovnice (b) vyjadríme dobu spomaľovania vagóna t

$$v_1 = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_1 - v_0}{a}.$$

Dosadením ostatného výrazu do rovnice (a) získame rovnicu s jedinou neznámou a. Úpravami dostaneme

$$s_1 = v_0 \frac{v_1 - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v_1 - v_0}{a} \right)^2$$

$$s_1 = \frac{v_1 v_0 - v_0^2}{a} + \frac{v_1^2 - 2v_1 v_0 + v_0^2}{2a} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}$$

$$a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2s_1} = \frac{(10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})^2 - (15\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})^2}{2 \cdot 100\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{-\,0{,}625\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}}}\ .$$

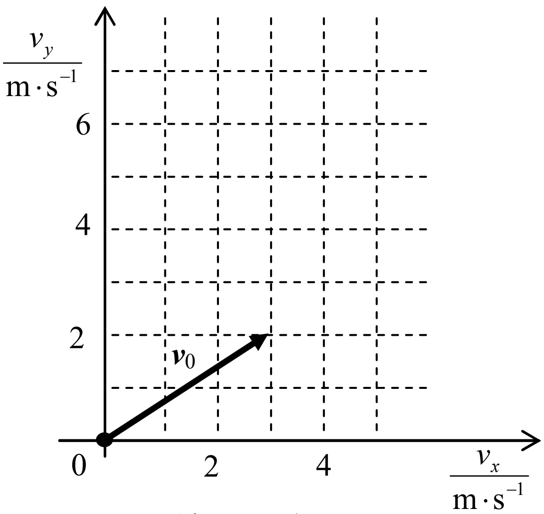
Počas zmeny rýchlosti vagóna bolo jeho zrýchlenie $a = -0{,}625\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Zrýchlenie má zápornú hodnotu, jednalo sa teda o rovnomerne spomalený pohyb.

2.5 Pomocou obrázka 2.3 znázorňujúceho počiatočný pohybový a polohový stav hmotného bodu pohybujúceho sa rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením $\boldsymbol{a} = -\,2\boldsymbol{j}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ určite:

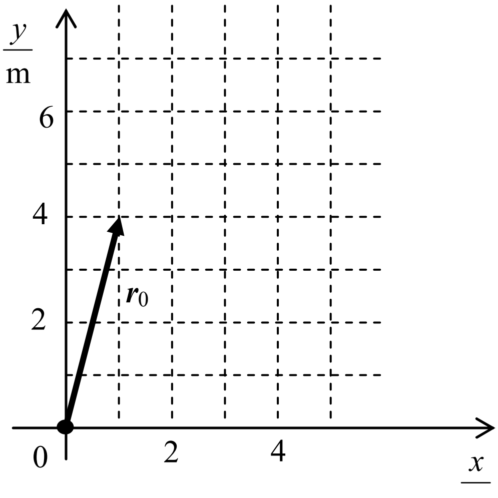
a) polohový vektor hmotného bodu v čase 3 s,

b) vektor rýchlosti v čase 3 s,

c) veľkosť rýchlosti v čase 3 s.



Obr. 2.3 a)



Obr. 2.3 b)

Riešenie

Z obrázka 2.3 a) určíme vektor počiatočnej rýchlosti $\boldsymbol{v}_0 = (3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a podľa 2.3 b) určíme počiatočný polohový vektor hmotného bodu $\boldsymbol{r}_0 = (\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\,\mathrm{m}$ v čase $t_0 = 0$. Ďalej označíme $t = 3$ s.

a) Závislosť polohového vektora $\boldsymbol{r}$ od času pri rovnomerne zrýchlenom pohybe vyjadruje rovnica

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 .$$

Po dosadení

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\mathrm{m} + (3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot 3\mathrm{s} + \frac{1}{2}\cdot\left(-2\boldsymbol{j}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)\cdot(3\,\mathrm{s})^2$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{r} = (10\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\mathrm{m}}} .$$

Polohový vektor hmotného bodu v čase 3 s je $\boldsymbol{r} = (10\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\mathrm{m}$.

b) Závislosť vektora rýchlosti od času vyjadruje rovnica

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t .$$

Po dosadení

$$\boldsymbol{v} = (3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} + \left(-2\boldsymbol{j}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)\cdot 3\,\mathrm{s}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{v} = (3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}} .$$

Vektor rýchlosti hmotného bodu v čase 3 s je $\boldsymbol{v} = (3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

c) Veľkosť rýchlosti v čase 3 s určíme ako veľkosť vektora rýchlosti v tomto časovom okamihu

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)^2 + \left(-4\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)^2} = \underline{\underline{5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}} .$$

Veľkosť rýchlosti hmotného bodu v čase 3 s je $v = 5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

2.6 Vypočítajte zrýchlenie hmotného bodu, ktorý sa pohybuje rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom. Vieme, že za čas t prešiel dráhu s a jeho rýchlosť sa zväčšila n - násobne.

Riešenie

Označme $v = nv_0$, kde v_0 je počiatočná a v konečná rýchlosť, s dráha hmotného bodu prejdená za čas t. Rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb môžeme opísať rovnicami

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$

a v súlade so zadaním aj

$$v = nv_0 .$$

Porovnáme pravé strany rovníc opisujúcich rýchlosť pohybu

$$nv_0 = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{at}{n-1}.$$

Vzťah vyjadrujúci počiatočnú rýchlosť dosadíme do vzťahu pre dráhu a osamostatníme zrýchlenie

$$s = \frac{at}{n-1}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$s = at^2\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\right)$$

$$s = \frac{at^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n-1}$$

$$\underline{\underline{a = \frac{2s}{t^2} \cdot \frac{n-1}{n+1}}}.$$

Hmotný bod sa pohyboval so zrýchlením $a = \frac{2s}{t^2} \cdot \frac{n-1}{n+1}$.

2.7 Zo skalného brala nad riekou sa uvoľnil kameň, ktorý padal voľným pádom do rieky. V mieste uvoľnenia kameňa bolo jeho dopad na hladinu počuť o 10 sekúnd. Ako vysoko nad hladinou sa kameň uvoľnil? Rýchlosť zvuku vo vzduchu uvažujme 330 m·s^{-1}, hodnotu tiažového zrýchlenia g = 9,81 m·s^{-2}.

Riešenie

Sledovaný pohyb môžeme rozdeliť na dve časti. Prvou je voľný pád kameňa na hladinu, druhou rovnomerný pohyb zvukového impulzu (čľupnutie) od hladiny smerom nahor po miesto uvoľnenie kameňa. Výšku h miesta uvoľnenia kameňa vzhľadom na hladinu, môžeme vyjadriť

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 \qquad\qquad h = v_2 t_2, \qquad\qquad \text{(a, b)}$$

kde v_2 = 330 m·s^{-1} je rýchlosť zvuku vo vzduchu, t_1 je doba voľného pádu kameňa a t_2 je doba šírenia zvukového impulzu od hladiny k miestu uvoľnenia kameňa. Pritom vieme, že

$$t_1 + t_2 = t = 10\ \text{s} \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = t - t_1\ .$$

Porovnáme pravé strany rovníc (a, b), dosadíme ostatnú rovnicu a matematicky upravíme

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = v_2 t_2$$

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = v_2(t - t_1)$$

$$gt_1^2 + 2v_2t_1 - 2v_2t = 0\,.$$

V získanej kvadratickej rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0$$

určíme hodnoty konštánt a, b, c

$$a = g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}, \qquad b = 2v_2 = 2 \cdot 330\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 660\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \;,$$

$$c = -2v_2t = -2 \cdot 330 \cdot 10\,\mathrm{m} = -6600\,\mathrm{m}$$

a rovnicu vyriešime

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \{8{,}83879\,\mathrm{s}, \quad -76{,}117\,\mathrm{s}\}.$$

Záporný koreň $x_2 = -76{,}117$ s nie je fyzikálny. Koreň $x_1 = 8{,}83879$ s je fyzikálny, takže doba voľného pádu kameňa je $t_1 = 9{,}61$ s. Dosadením do rovnice (a) vypočítame výšku h

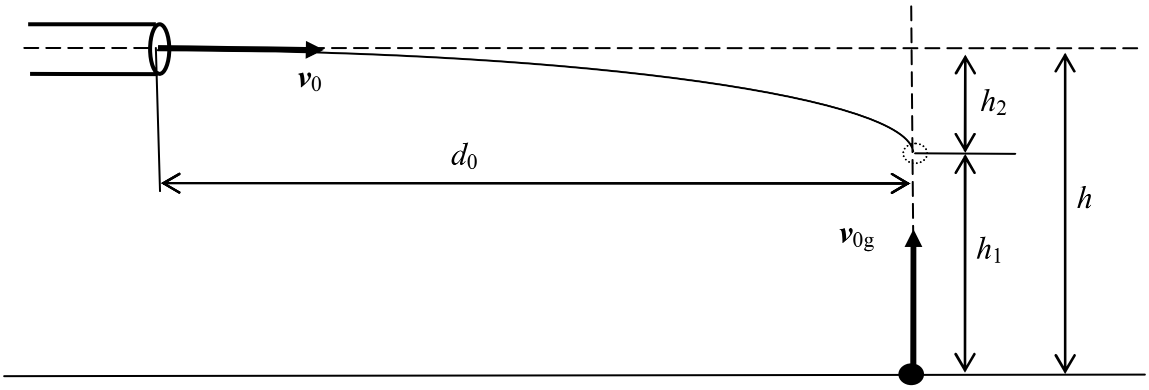
$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot (8{,}83879\,\mathrm{s})^2 \cong \underline{\underline{383{,}199\,\mathrm{m}}}\,.$$

Kameň sa uvoľnil vo výške 383,199 m nad hladinou rieky.

2.8 Akou rýchlosťou musíme vymrštiť guľôčku zanedbateľného priemeru v smere zvislom nahor tak, aby bola zasiahnutá projektilom vystreleným z pušky v smere vodorovnom. Ústie hlavne je vo výške h nad vodorovnou rovinou prechádzajúcou guľôčkou a je od zvislice prechádzajúcej stredom guľôčky vzdialené d_0. Guľôčke udelíme rýchlosť v_{0g} v tom istom okamihu, v ktorom projektil opúšťa ústie hlavne rýchlosťou v_0.

Riešenie

Projektil vykonáva pohyb - vodorovný vrh, ktorý sa skladá z pohybu v smere vodorovnom a z voľného pádu. Vo vodorovnom smere projektil preletí rovnomerným pohybom od ústia hlavne po zvislicu prechádzajúcu guľôčkou a súčasne pôsobením tiažového zrýchlenia získa nenulovú rýchlosť v smere zvislom nadol, teda poklesne o výšku h_2
(obr. 2.4).



Obr. 2.4

Spoločnú dobu pohybu projektilu a guľôčky môžeme vyjadriť aj ako

$$t_0 = \frac{d_0}{v_0}$$

a výšku h_2

$$h_2 = \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{d_0}{v_0} \right)^2 .$$

Guľôčka vykonáva zvislý vrh nahor. Ak má byť guľôčka zasiahnutá projektilom, musí vystúpiť do výšky h_1 za čas t_0, čiže

$$h_1 = v_{0g} t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2 = v_{0g} \frac{d_0}{v_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{d_0}{v_0} \right)^2 .$$

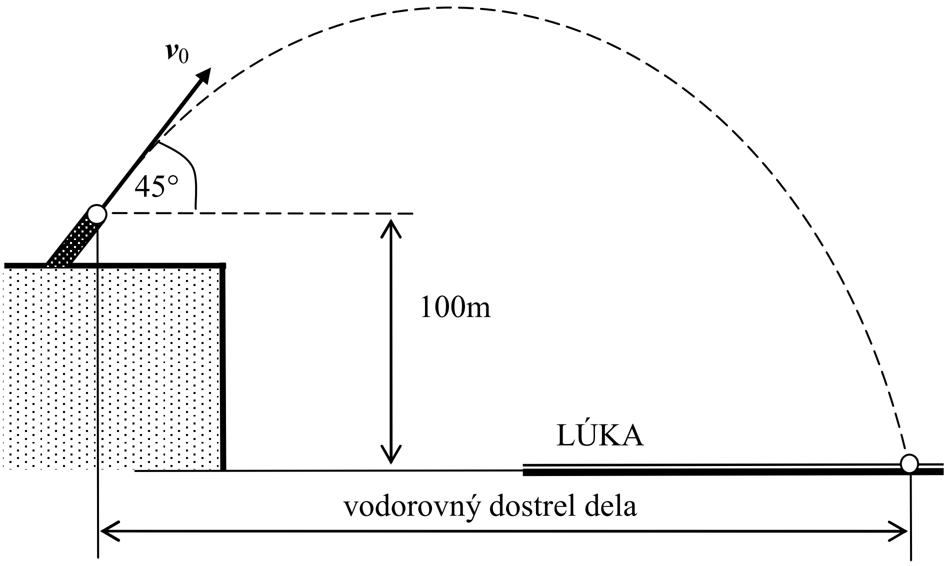
Z obrázka 2.4 je zrejmé, že $h = h_1 + h_2 \quad \Rightarrow \quad h_1 = h - h_2$. Do rovnice dosadíme a upravíme

$$v_{0g} \frac{d_0}{v_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{d_0}{v_0} \right)^2 = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{d_0}{v_0} \right)^2$$

$$\underline{\underline{v_{0g} = v_0 \frac{h}{d_0}}} .$$

Projektil zasiahne guľôčku vtedy, keď jej počiatočná rýchlosť bude $v_{0g} = v_0 \dfrac{h}{d_0}$.

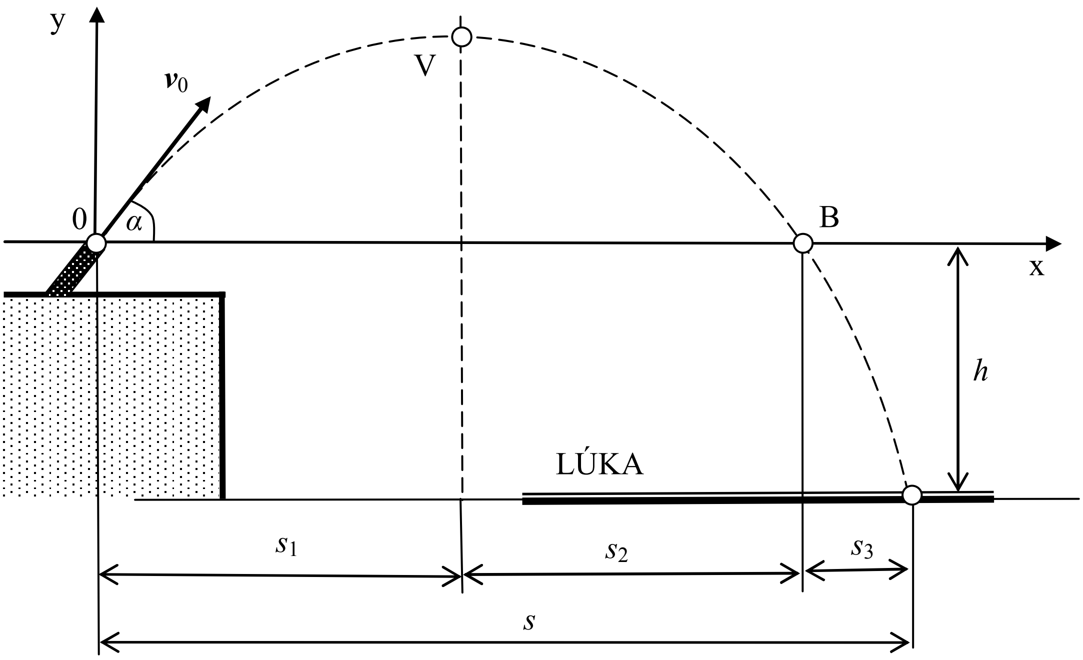
2.9 Z historického dela umiestneného na hrade bola vystrelená delová guľa rýchlosťou v_0=500 m·s^{-1} pod elevačným uhlom 45°. Ako ďaleko, vo vodorovnom smere od ústia hlavne na vodorovnej lúke nachádzajúcej sa v nadmorskej výške o 100 m nižšie od ústia hlavne, dopadne strela (obr. 2.5)? Odpor vzduchu môžeme zanedbať. Uvažujte hodnotu tiažového zrýchlenia g = 9,81 m·s^{-2}.



Obr. 2.5

Riešenie

Pohyb gule je šikmý vrh. Označme výšku ústia hlavne voči lúke h = 100 m, vodorovnú vzdialenosť od ústia hlavne po miesto dopadu gule na lúke s a elevačný uhol α. Dráhu pohybu gule v smere osi x môžeme rozdeliť na úseky s_1, s_2, s_3, ako na obr. 2.6.



Obr. 2.6

Rýchlosť gule vo vodorovnom smere je konštantná, je to x-ová súradnica vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

Časové intervaly t_1, t_2, t_3 zodpovedajúce pohybu gule na úsekoch s_1, s_2, s_3 určíme nasledovne.

Počas pohybu z bodu 0 do bodu V koná guľa súčasne pohyb v smere vodorovnom - po dráhe s_1 a guľa zároveň stúpa do maximálnej výšky. Dobu jej stúpania určíme ako extrém funkcie opisujúcej závislosť súradnice y od času

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0 .$$

Pohyb v smere osi y môžeme označiť ako zvislý vrh nahor a vyjadriť rovnicou

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Dosadíme a vykonáme predpísané úpravy

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \right] = 0$$

$$v_0 \sin(\alpha) - g t = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} = t_1 .$$

Vodorovnú dráhu pohybu s_1 určíme

$$s_1 = v_x t_1 = v_0 \cos(\alpha) \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha) .$$

Doba, za ktorú sa guľa premiestni z bodu 0 do bodu V je rovnaká, ako doba jej pohybu z bodu V do bodu B (trajektória pohybu je parabola), preto

$$t_1 = t_2 \quad \Rightarrow \quad s_1 = s_2 .$$

Veľkosti y-ovej súradnice rýchlosti gule v bodoch 0 a B sú zrejme rovnaké, preto dobu t_3, za ktorú guľa prekoná výšku h určíme z rovnice opisujúcej zvislý vrh nadol s počiatočnou rýchlosťou v_{0y}

$$h = v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin(\alpha) t + \frac{1}{2} g t^2 ,$$

kde $v_{0y} = v_0 \sin(\alpha)$. Rovnicu ďalej upravíme a určíme dobu t_3

$$\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) t - h = 0$$

V získanej kvadratickej rovnici

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$$

určíme hodnoty konštánt a, b, c

$$\mathrm{a} = \frac{1}{2} g = 4{,}905\, \mathrm{m \cdot s^{-2}} , \qquad \mathrm{b} = v_0 \sin(\alpha) = 353{,}55\, \mathrm{m \cdot s^{-1}} , \qquad \mathrm{c} = -h = -100\, \mathrm{m}$$

a rovnicu vyriešime

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \{0{,}282\,\mathrm{s}, \quad -72{,}361\,\mathrm{s}\}.$$

Záporný koreň x_2 = -72,361 s nie je fyzikálny. Koreň x_1 = 0,282 s je fyzikálny, takže doba, za ktorú sa dostane guľa z bodu B na lúku je t_3 = 0,282 s. Dráhu s_3 vyjadríme

$$s_3 = v_{0x} t_3 = v_0 \cos(\alpha) t_3 .$$

Celkovú vzdialenosť s získame spočítaním jednotlivých úsekov

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 2\frac{v_0^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha) + v_0\cos(\alpha)t_3$$

$$s = 2 \cdot \frac{\left(500\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)^2}{9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}} \cdot \sin(45°)\cdot\cos(45°) + 500\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\cos(45°)\cdot 0{,}282\,\mathrm{s} = \underline{\underline{25\,583{,}9\,\mathrm{m}}}.$$

Delová guľa dopadne od dela vo vodorovnej vzdialenosti 25 583,9 m.

2.10 Majme hmotný bod, ktorý sa pohybuje v rovine (x, y). Jeho pohyb v smere osí opisujú rovnice $x = At^2 - B$, $y = C - Dt^2$, kde A = 1 m·s^{-2}, B = –2 m, C = 3 m, D = 2 m·s^{-2}.

a) Určite vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ hmotného bodu a veľkosť rýchlosti v desiatej sekunde pohybu.

b) Určite vektor zrýchlenia $\boldsymbol{a}$ hmotného bodu a veľkosť zrýchlenia v piatej sekunde pohybu.

c) Určite tvar trajektórie pohybu.

d) Aký uhol zviera vektor rýchlosti s kladným smerom osi x?

Riešenie

a) Vektor okamžitej rýchlosti je definovaný vzťahom

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} .$$

Pohyb sa deje v rovine (x, y), čiže v_z = 0. Potom

$$v_x\boldsymbol{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(At^2 - B\right)\boldsymbol{i} = 2At\boldsymbol{i}$$

$$v_y\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C - Dt^2\right)\boldsymbol{j} = -2Dt\boldsymbol{j}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{v} = 2At\boldsymbol{i} - 2Dt\boldsymbol{j}}}.$$

Veľkosť rýchlosti určíme ako veľkosť vektora $\boldsymbol{v}$

$$|\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2At)^2 + (-2Dt)^2} .$$

Veľkosť rýchlosti v čase t_1 = 10 s určíme dosadením

$$v_1 = \sqrt{(2At_1)^2 + (-2Dt_1)^2} = \sqrt{(2\cdot 1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot 10\,\mathrm{s})^2 + (-2\cdot 2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot 10\,\mathrm{s})^2} \cong \underline{\underline{44{,}72\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}}\,.$$

Vektor rýchlosti hmotného bodu je daný vzťahom $\boldsymbol{v} = 2At\boldsymbol{i} - 2Dt\boldsymbol{j}$, jeho veľkosť v čase t_1 je $v_1 = 44{,}72\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

b) Vektor zrýchlenia hmotného bodu je definovaný vzťahom

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\,.$$

Pohyb sa deje v rovine (x,y), čiže $a_z = 0$. Potom

$$a_x\boldsymbol{i} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2At)\boldsymbol{i} = 2A\boldsymbol{i}$$

$$a_y\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-2Dt)\boldsymbol{j} = -2D\boldsymbol{j}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{a} = 2A\boldsymbol{i} - 2D\boldsymbol{j}}}\,.$$

Veľkosť zrýchlenia určíme ako veľkosť vektora $\boldsymbol{a}$

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2A)^2 + (-2D)^2}\,.$$

Pri tomto pohybe je zrýchlenie konštantné, preto zrýchlenie v ľubovoľnom časovom okamihu má veľkosť

$$a = \sqrt{(2\cdot 1\mathrm{m\cdot s^{-2}})^2 + (-2\cdot 2\mathrm{m\cdot s^{-2}})^2} \cong \underline{\underline{4{,}47\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}}\,.$$

Vektor zrýchlenia hmotného bodu je daný vzťahom $\boldsymbol{a} = 2A\boldsymbol{i} - 2D\boldsymbol{j}$, jeho veľkosť je približne $4{,}47\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

c) Tvar trajektórie určuje koncový bod vektora $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$. Rovnicu trajektórie pohybu určíme elimináciou času zo sústavy rovníc opisujúcich jeho pohyb v smere osí

$$x = At^2 - B; \quad y = C - Dt^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{x+B}{A}$$

$$y = C - D\left(\frac{x+B}{A}\right)$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{D}{A}x + C - \frac{DB}{A}}}\,.$$

Trajektória pohybu je priamka.

d) Vektor rýchlosti $\underline{\underline{\boldsymbol{v} = 2At\boldsymbol{i} - 2Dt\boldsymbol{j}}}$ v okamihu t zviera s osou x uhol α, pre ktorý platí

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{2Dt}{2At} = -\frac{D}{A} = -\frac{2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}} = -2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = \mathrm{arctg}(-2) = -63{,}4°}}\,.$$

Výsledok nezávisí od času t, preto vektor rýchlosti zviera s kladným smerom osi x neustále uhol $\alpha = -\,63{,}4°$.

2.11 Vyjadrite rovnicu trajektórie pohybu a závislosť veľkosti rýchlosti pohybu hmotného bodu od času. Jeho pohyb je v polárnych súradniciach daný rovnicami $r = nt$; $\varphi = bt$, kde n a b sú konštanty, r je dĺžka sprievodiča, φ je polárny uhol, t je čas.

Riešenie

Rovnicu trajektórie pohybu určíme elimináciou času t z rovníc zadania

$$r = nt; \quad \varphi = bt \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r = \frac{n}{b}\varphi}}\,.$$

Trajektória pohybu je Archimedova špirála.

Veľkosť rýchlosti určuje vzťah

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,.$$

Transformačné rovnice polárnych súradníc na kartézske sú

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

dosadíme do posledného vzťahu

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}(r\cos\varphi)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}(r\sin\varphi)}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}[nt\cos(bt)]}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}[nt\sin(bt)]}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,.$$

Vykonáme predpísané operácie a získaný vzťah upravíme do základného tvaru

$$v = \sqrt{\{n\cos(bt) + nt[-\sin(bt)]\cdot b\}^2 + [n\sin(bt) + nt\cos(bt)\cdot b]^2}$$

$$v = n\sqrt{\cos^2(bt) - 2bt\cos(bt)\sin(bt) + b^2t^2\sin^2(bt) + \sin^2(bt) + 2bt\sin(bt)\cos(bt) + b^2t^2\cos^2(bt)}$$

$$v = n\sqrt{1 + b^2t^2\left[\sin^2(bt) + \cos^2(bt)\right]}, \qquad \text{lebo } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\underline{\underline{v = n\sqrt{1 + b^2t^2}}}\,.$$

Závislosť veľkosti rýchlosti hmotného bodu od času vyjadruje rovnica $v = n\sqrt{1 + b^2t^2}$.

2.12 Zrýchlenie hmotného bodu, ktorý bol na začiatku v pokoji, pri jeho priamočiarom pohybe rovnomerne klesalo z počiatočnej hodnoty a_0 = 12 m·s^{-2} na hodnotu a_1 = 2 m·s^{-2} počas doby t_1 = 20 s.

a) Akú rýchlosť mal hmotný bod v čase t_2 = 15 s?

b) Akú dráhu prešiel počas doby t_1?

c) Akú dráhu prešiel v priebehu prvej sekundy svojho pohybu?

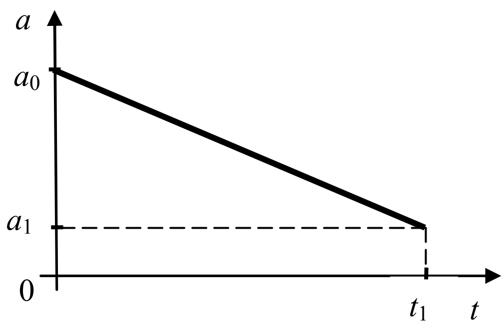
d) Akú dráhu prešiel v priebehu dvadsiatej sekundy svojho pohybu?

Riešenie

a) Ak chceme určiť okamžitú rýchlosť hmotného bodu, najskôr musíme určiť rovnicu opisujúcu závislosť jeho zrýchlenia od času, lebo zrýchlenie v čase nie je konštantné. Rovnomernú zmenu zrýchlenia zapíšeme

$$a(t) = kt + q \, , \qquad \text{(a)}$$

čo je rovnica priamky, kde k, q sú konštanty.



Obr. 2.7

Ich hodnotu určíme zo známych podmienok zadania (obr. 2.7).

$$a(0) = a_0, \qquad a_0 = k\cdot 0 + q, \qquad a_0 = q,$$

$$a(t_1) = a_1, \qquad a_1 = k\cdot t_1 + a_0, \qquad k = \frac{a_1 - a_0}{t_1} \, ,$$

dosadíme do rovnice (a)

$$a(t) = \frac{a_1 - a_0}{t_1} t + a_0 \, .$$

Rýchlosť hmotného bodu určíme zo vzťahu

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$v(t)=\int_0^t a(t)\mathrm{d}t+v_0=\int_0^t\left(\frac{a_1-a_0}{t_1}t+a_0\right)\mathrm{d}t+v_0=\frac{a_1-a_0}{2t_1}t^2+a_0t+v_0\,. \qquad \text{(b)}$$

Rovnica vyjadruje všeobecnú závislosť rýchlosti od času. V čase $t = 0$ bola hodnota konštanty $v_0 = 0$. Rýchlosť, ktorú nadobudol hmotný bod v čase t_2 potom získame dosadením konkrétnych hodnôt do (b)

$$v_2=\frac{a_1-a_0}{2t_1}t_2^2+a_0t_2$$

$$v_2=\frac{2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}-12\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{2\cdot 20\,\mathrm{s}}(15\,\mathrm{s})^2+12\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot 15\,\mathrm{s}=\underline{\underline{123{,}75\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}}\,.$$

V čase $t_2 = 15$ s mal hmotný bod rýchlosť 123,75 m·s^{-1} .

b) Dráhu určíme pomocou vzťahu

$$s(t)=\int_0^t v(t)\mathrm{d}t+s_0$$

dosadíme vzťah (b)

$$s(t)=\int_0^t\left(\frac{a_1-a_0}{2t_1}t^2+a_0t+v_0\right)\mathrm{d}t+s_0=\frac{a_1-a_0}{6t_1}t^3+\frac{a_0}{2}t^2+v_0t+s_0\,. \qquad \text{(c)}$$

Rovnica vyjadruje všeobecnú závislosť dráhy od času. V čase $t = 0$ boli počiatočné hodnoty $v_0=s_0=0$. Dráhu prejdenú za dobu t_1 potom získame dosadením do posledného vzťahu a následnou matematickou úpravou dostaneme

$$s_1=\frac{1}{6}t_1^2(a_1+2a_0)$$

$$s_1=\frac{1}{6}\cdot(20\,\mathrm{s})^2\cdot\left(2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}+2\cdot 12\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)\cong\underline{\underline{1733{,}33\,\mathrm{m}}}\,.$$

Hmotný bod prešiel počas dvadsiatich sekúnd dráhu približne 1733,33 m.

c) Dráhu prejdenú hmotným bodom počas prvej sekundy určíme dosadením za $t=t_3^*=1s$ do rovnice (c)

$$s_3^*=\frac{a_1-a_0}{6t_1}\left(t_3^*\right)^3+\frac{a_0}{2}\left(t_3^*\right)^2$$

$$s_3^*=\frac{2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}-12\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{6\cdot 20\,\mathrm{s}}(1\,\mathrm{s})^3+\frac{12\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{2}(1\,\mathrm{s})^2=\underline{\underline{\frac{71}{12}\mathrm{m}}}\,.$$

Hmotný bod prešiel počas prvej sekundy dráhu (71/12) m.

d) Dráhu prejdenú počas dvadsiatej sekundy určíme tak, že od dráhy prejdenej hmotným bodom za $t_1 = 20$ s odpočítame dráhu, ktorú prešiel za $t_{19} = 19$ s, využijeme vzťah (c)

$$s_4^* = s_{20} - s_{19}$$

$$s_4^* = \left[\frac{a_1 - a_0}{6t_1}t_1^3 + \frac{a_0}{2}t_1^2\right] - \left[\frac{a_1 - a_0}{6t_1}t_{19}^3 + \frac{a_0}{2}t_{19}^2\right]$$

$$s_4^* = \frac{1}{3}t_1^2\left(\frac{a_1}{2} + a_0\right) - \frac{1}{2}t_{19}^2\left(\frac{a_1 - a_0}{3t_1}t_{19} + a_0\right)$$

$$s_4^* = \frac{1}{3}(20\,\mathrm{s})^2 \cdot \left(\frac{2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{2} + 12\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right) - \frac{1}{2}(19\,\mathrm{s})^2 \cdot \left(\frac{2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} - 12\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{3\cdot 20\,\mathrm{s}} \cdot 19\,\mathrm{s} + 12\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)$$

$$s_4^* \cong \underline{\underline{138{,}9\,\mathrm{m}}}\,.$$

Hmotný bod prešiel počas dvadsiatej sekundy dráhu približne 138,9 m.

2.13 Hmotný bod vykonáva priamočiary pohyb v smere osi x so zrýchlením, ktoré je dané vzťahom $a = A–Bv$, kde A, B sú konštanty a v je rýchlosť hmotného bodu. Nájdite časovú závislosť rýchlosti, polohy a zrýchlenia hmotného bodu, ak v čase $t = 0$ bol v pokoji.

Riešenie

Časovú závislosť rýchlosti určíme pomocou definičného vzťahu pre výpočet zrýchlenia

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad A - Bv = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,.$$

Po separácii premenných t a v diferenciálnu rovnicu integrujeme

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{A - Bv} = \int_0^t \mathrm{d}t\,.$$

Vykonáme substitúciu

$$A - Bv = z, \quad -B\mathrm{d}v = \mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}z}{B}\,,$$

Dolná hranica pre $z : A - B\cdot 0 = A$, horná hranica pre $z : A - Bv$. Dosadíme

$$\int_A^{A\text{-}Bv} \frac{-\mathrm{d}z}{Bz} = \int_0^t \mathrm{d}t\,, \qquad \int_A^{A\text{-}Bv} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -B\int_0^t \mathrm{d}t\,, \qquad \left[\ln|z|\right]_A^{A-Bv} = -B[t]_0^t\,,$$

$$\ln|A - Bv| - \ln|A| = -B[t - 0], \qquad \ln\left|\frac{A - Bv}{A}\right| = -Bt\,,$$

$$\frac{A - Bv}{A} = e^{-Bt}\,, \qquad -Bv = Ae^{-Bt} - A\,,$$

$$\underline{\underline{v = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)}}. \qquad \text{(a)}$$

Časovú závislosť rýchlosti vyjadruje rovnica $v = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)$.

Časovú závislosť polohy určíme pomocou definičného vzťahu pre výpočet rýchlosti

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t = \left(\frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)\right)\mathrm{d}t\,.$$

Za rýchlosť sme dosadili získaný vzťah (a). Integráciou dostaneme

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \left(\frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)\right)\mathrm{d}t\,,$$

$$[x]_0^x = \frac{A}{B}\left\{\int_0^t \mathrm{d}t - \int_0^t e^{-Bt}\mathrm{d}t\right\}.$$

V druhom integráli na pravej strane vykonáme substitúciu

$$-Bt = z, \quad -B\mathrm{d}t = \mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}z}{B}.$$

Dolná hranica pre $z : -B \cdot 0 = 0$, horná hranica pre $z : -Bt$. Dosadíme

$$[x - 0] = \frac{A}{B}\left\{[t]_0^t - \int_0^{-Bt} e^z\left(-\frac{\mathrm{d}z}{B}\right)\right\},$$

$$x = \frac{A}{B}\left\{t + \frac{1}{B}\left[e^z\right]_0^{-Bt}\right\},$$

$$\underline{\underline{x = \frac{A}{B}\left[t + \frac{1}{B}\left(e^{-Bt} - 1\right)\right]}}.$$

Časovú závislosť polohy vyjadruje rovnica $x = \frac{A}{B}\left[t + \frac{1}{B}\left(e^{-Bt} - 1\right)\right]$.

Časovú závislosť zrýchlenia určíme pomocou jeho definičného vzťahu

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)\right],$$

kde sme rýchlosť vyjadrili pomocou vzťahu (a). Vykonáme predpísanú deriváciu a vzťah upravíme

$$a = -\frac{A}{B}e^{-Bt} \cdot (-B)$$

$$\underline{\underline{a = Ae^{-Bt}}}\,.$$

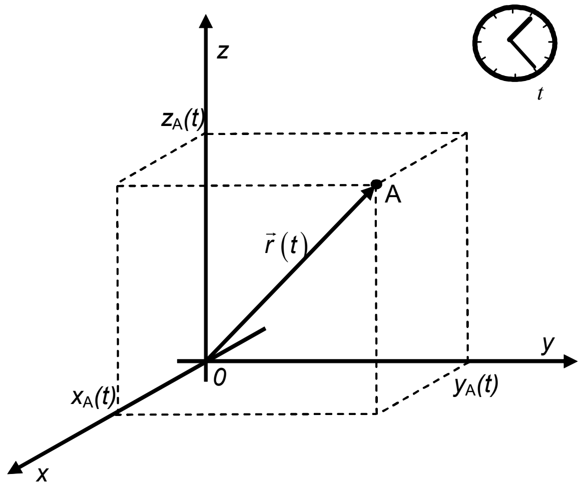
Časovú závislosť zrýchlenia vyjadruje rovnica $a = Ae^{-Bt}$.

3 KRIVOČIARY POHYB

Teoretický úvod

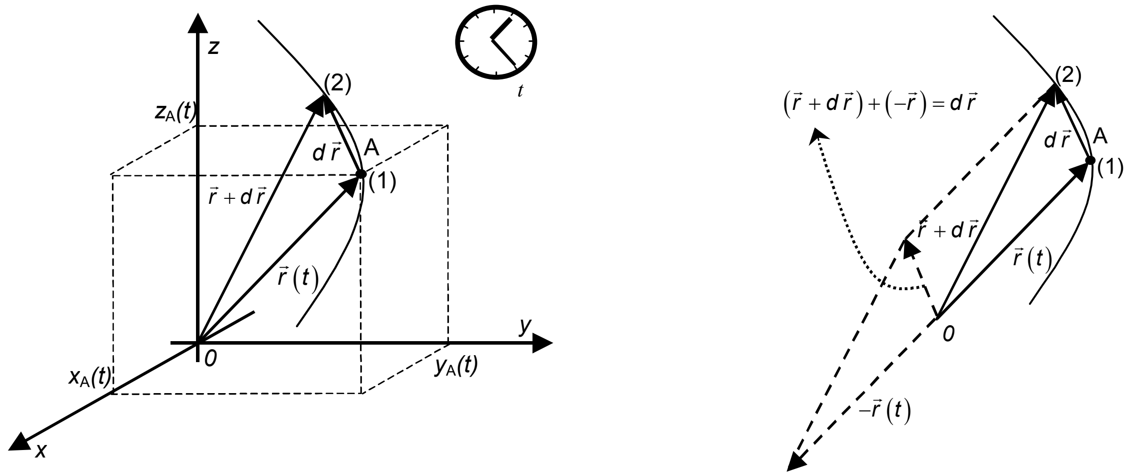
Základné kinematické veličiny

1. Polohový vektor $\vec{r}$



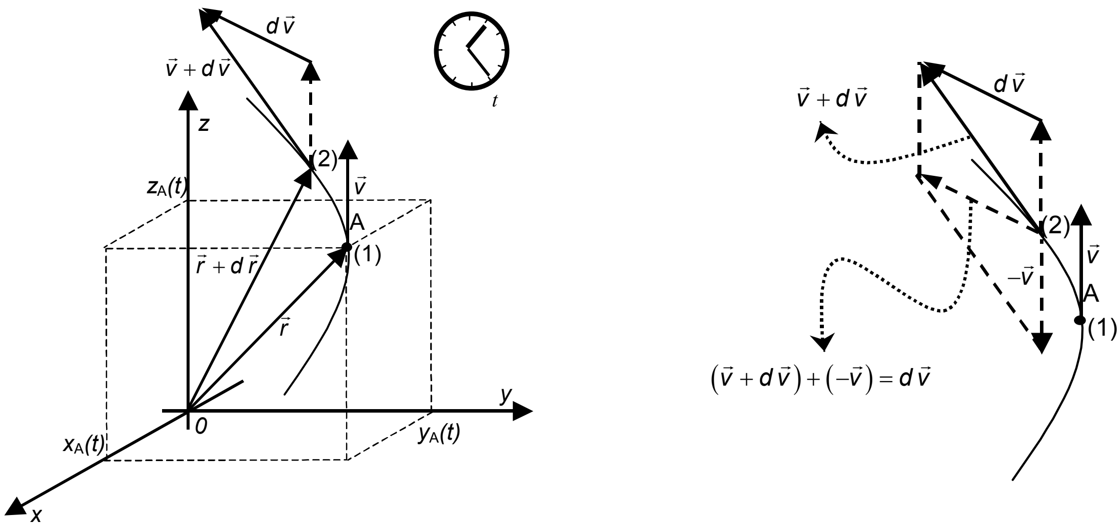
Obr. 3.1

2. Vektor rýchlosti: $\vec{v} = \dfrac{d\,\vec{r}}{d\,t}$



Obr. 3.2

3. Vektor zrýchlenia: $\vec{a} = \dfrac{d\,\vec{v}}{d\,t}$



Obr. 3.3

Pri opise mechanického pohybu hmotného bodu sa vo všeobecnosti môžu v závislosti od času meniť všetky tri vektory základných kinematických veličín $\vec{r}$, $\vec{v}$ a $\vec{a}$. Môže sa pritom meniť veľkosť aj smer týchto vektorov. Trajektória hmotného bodu konajúceho mechanický pohyb je množina bodov, v ktorých sa uvedený hmotný bod nachádza v rôznych časových okamihoch. Pri krivočiarom pohybe je trajektória ľubovoľná krivka.

Derivácia jednotkového vektora podľa času

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{b}$$

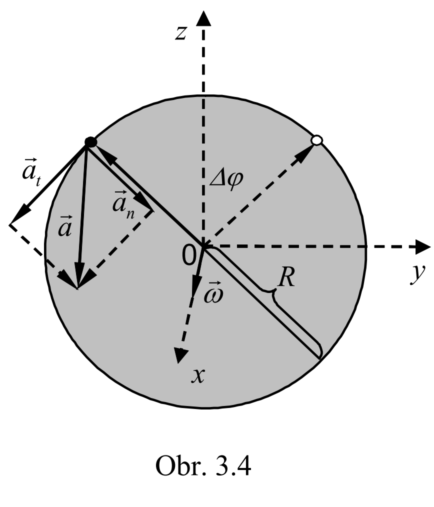
$$\vec{\omega} = \vec{b} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Pohyb po kružnici

Uhlová rýchlosť: $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

Uhlové zrýchlenie: $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$

Tangenciálne zrýchlenie: $a_t = \dfrac{d\,v}{d\,t}$

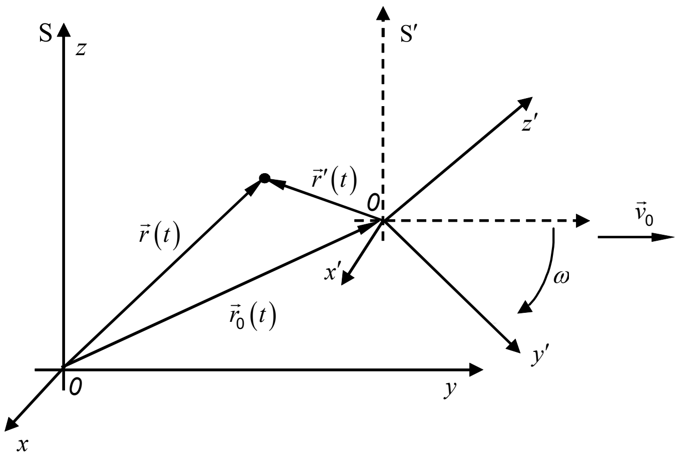


Obr. 3.4

Normálové zrýchlenie: $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

Celkové zrýchlenie: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

Zložený pohyb



Obr. 3.5

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0 - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}' \right)$$

Príklady

3.1 Hmotný bod koná krivočiary pohyb. Časová závislosť polohového vektora uvedeného hmotného bodu v zavedenej vzťažnej sústave je $\vec{r}(t)$. Nech veľkosť (absolútna hodnota) polohového vektora *r* sa mení v závislosti od času. Ukážte, že platí:

$$\frac{d\,r}{d\,t} = \vec{\rho} \cdot \vec{v},$$

kde $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor v smere polohového vektora hmotného bodu a $\vec{v}$ je vektor rýchlosti jeho pohybu.

Riešenie

Jednotkový vektor v smere polohového vektora $\vec{r}$ pohybujúceho sa hmotného bodu označme $\vec{\rho}$ (pozri obr.3.1). Uvedený vektor je určený nasledovným vzťahom:

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{r}. \tag{3.1.1}$$

Jednotkový vektor $\vec{\rho}$ má konštantnú veľkosť ale jeho smer sa pri mechanickom pohybe hmotného bodu môže meniť. Z rovnice (3.1.1) vyplýva, že polohový vektor $\vec{r}$ možno vyjadriť ako súčin veľkosti (absolútnej hodnoty) polohového vektora a jednotkového vektora v smere polohového vektora:

$$\vec{r} = r\vec{\rho}. \tag{3.1.2}$$

Keďže pri mechanickom pohybe sa smer vektora $\vec{\rho}$ môže meniť, uvedený vektor môže byť funkciou času. Zmena veľkosti vektora $\vec{r}$ je vyjadrená časovou závislosťou jeho absolútnej hodnoty $r = r(t)$. Pri určovaní vektora rýchlosti je preto potrebné výraz (3.1.2) derivovať podľa pravidla pre derivovanie súčinu dvoch funkcií:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{\rho})}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{\rho} + r\frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{3.1.3}$$

Po zavedení ľubovoľnej vzťažnej sústavy je možné polohový vektor pohybujúceho sa hmotného bodu vyjadriť v súradnicovom tvare $\vec{r} = [x;y;z]$. Veľkosť (absolútna hodnota) polohového vektora $\vec{r}$ je potom určená výrazom:

$$r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \tag{3.1.4}$$

Uvedená veľkosť polohového vektora sa môže v závislosti od času vo všeobecnosti meniť a preto súradnice uvedeného vektora x, y a z môžu byť funkciami času:

$$x = x(t)\quad,\quad y = \mathrm{y}(t)\quad,\quad z = z(t) \tag{3.1.5}$$

Zmena veľkosti polohového vektora $\vec{r}$ pohybujúceho sa hmotného bodu je určená deriváciou jeho absolútnej hodnoty r podľa času. Časová závislosť veľkosti polohového vektora hmotného bodu je však určená časovou závislosťou jeho súradníc (3.1.5). Deriváciu veľkosti polohového vektora r určenú výrazom (3.1.4) musíme derivovať podľa pravidla pre derivovanie zloženej funkcie:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r(x,y,z)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial r(x,y,z)}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{\partial r(x,y,z)}{\partial z}\frac{dz(t)}{dt}, \tag{3.1.6}$$

kde je potrebné za $r(x,y,z)$ dosadiť pravú stranu výrazu (3.1.4). Čitateľ sa ľahko presvedčí, že platí:

$$\frac{\partial r(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{3.1.7}$$

$$\frac{\partial r(x,y,z)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{3.1.8}$$

$$\frac{\partial r(x,y,z)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{3.1.9}$$

Po dosadení pravých strán výrazov (3.1.7), (3.1.8) a (3.1.9) do rovnice (3.1.6) dostaneme:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{dy}{dt}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{dz}{dt}\,. \tag{3.1.10}$$

Ak zohľadníme skutočnosť, že platí:

$$\frac{dx}{dt}=v_x\,.\quad \frac{dy}{dt}=v_y\,.\quad \frac{dz}{dt}=v_z\ , \tag{3.1.11}$$

môžeme vzťah (3.11) prepísať do tvaru:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{xv_x}{r}+\frac{yv_y}{r}+\frac{zv_z}{r}=\frac{xv_x+yv_y+zv_z}{r}\,. \tag{3.1.12}$$

Výraz v čitateli zlomku na pravej strane výrazu (3.1.12) možno napísať ako skalárny súčin vektorov $\vec{r}$ a $\vec{v}$. Vzhľadom k tomu, že platí:

$$xv_x+yv_y+zv_z=\vec{r}\cdot\vec{v}\ , \tag{3.1.13}$$

je možné deriváciu veľkosti polohového vektora pohybujúceho sa hmotného bodu vyjadriť nasledovne:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{r}=\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\vec{v}=\vec{\rho}\cdot\vec{v}\ , \tag{3.1.14}$$

kde $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor v smere polohového vektora pohybujúceho sa hmotného bodu.

3.2 Uvažujme hmotný bod konajúci mechanický pohyb. Nech $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor orientovaný v smere polohového vektora uvedeného hmotného bodu. Ukážte, že platí:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt}\perp\vec{\rho}\,.$$

Riešenie

Ak pravú stranu predchádzajúceho výrazu (3.1.14) dosadíme do rovnice (3.1.3), vyjadríme vektor rýchlosti hmotného bodu konajúceho mechanický pohyb nasledovne:

$$\vec{v} = (\vec{\rho}.\vec{v})\vec{\rho} + r\frac{d\vec{\rho}}{dt} \,. \tag{3.2.1}$$

Z rovnice (3.2.1) je možné ľahko určiť deriváciu jednotkového vektora $\vec{\rho}$ podľa času:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\vec{v} - (\vec{\rho}\cdot\vec{v})\vec{\rho}}{r} \,. \tag{3.2.2}$$

Rovnicu (3.2.2) skalárne vynásobíme jednotkovým vektorom $\vec{\rho}$ a dostaneme:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\vec{\rho} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{\rho} - (\vec{\rho}\cdot\vec{v})(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho})}{r} \,. \tag{3.2.3}$$

Vzhľadom ku skutočnosti, že $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor je zrejmé, že platí:

$$\vec{\rho}\cdot\vec{\rho} = \rho^2 = 1 \tag{3.2.4}$$

a rovnica (3.2.3) prejde do tvaru:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\vec{\rho} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{\rho} - (\vec{\rho}\cdot\vec{v})}{r} = 0 \,. \tag{3.2.5}$$

Využili sme pritom skutočnosť, že skalárny súčin vektorov je komutatívny a preto v čitateli zlomku na pravej strane rovnice (3.2.5) je rozdiel rovnakých výrazov. Z uvedeného výsledku vyplýva, že skalárny súčin vektorov $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ a $\vec{\rho}$ je rovný nule:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt}\cdot\vec{\rho} = 0 \,. \tag{3.2.6}$$

Rovnica (3.2.6) je splnená vtedy ak derivácia jednotkového vektora $\vec{\rho}$ podľa času je rovná nule:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{0} \,,$$

t.j. smer polohového vektora $\vec{r}$ pohybujúceho sa hmotného bodu sa v závislosti od času nemení. Vo všeobecnosti sa však pri krivočiarom pohybe smer polohového vektora pohybujúceho sa hmotného bodu v závislosti od času mení. V takom prípade platí:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} \neq \vec{0}$$

a z rovnice (3.2.6) vyplýva, že vektory $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ a $\vec{\rho}$ musia byť na seba navzájom kolmé (skalárny súčin dvoch kolmých vektorov je rovný nule). Derivácia jednotkového vektora v smere polohového vektora pohybujúceho sa hmotného bodu podľa času je v každom časovom okamihu kolmá na tento jednotkový vektor.

3.3 Uvažujme hmotný bod konajúci krivočiary pohyb. Polohový vektor uvedeného hmotného bodu je $\vec{r}$ a vektor jeho rýchlosti je $\vec{v}$. Smer polohového vektora $\vec{r}$ sa pohybe uvedeného hmotného bodu mení. Nájdite vzťah pre určenie vektora uhlovej rýchlosti polohového vektora.

Riešenie

Ak uvážime výraz (2.2.4), je možné rovnicu (3.2.2) prepísať do nasledovného tvaru:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\vec{v}1 - (\vec{\rho}\cdot\vec{v})\vec{\rho}}{r} = \frac{\vec{v}(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}) - (\vec{\rho}\cdot\vec{v})\vec{\rho}}{r}. \qquad (3.3.1)$$

Využijeme pravidlo pre výpočet dvojnásobného vektorového súčinu známe z vektorovej algebry a čitateľa zlomku na pravej strane rovnice (3.3.1) prepíšeme do tvaru:

$$\vec{v}(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}) - (\vec{\rho}\cdot\vec{v})\vec{\rho} = \vec{\rho}\times(\vec{v}\times\vec{\rho}). \qquad (3.3.2)$$

Vektorový súčin vo všeobecnosti nie je komutatívny. Pri zámene poradia súčiniteľov vo vektorovom súčine je potrebné zmeniť znamienko súčinu. V dvojnásobnom vektorovom súčine na pravej strane výrazu (3.3.2) najskôr vymeníme poradie súčiniteľov v zátvorke a následne vymeníme poradie vektora určeného zátvorkou a jednotkového vektora $\vec{\rho}$, ktorý je mimo zátvorky. Výraz (3.3.2) je možné prepísať nasledovne:

$$\vec{\rho}\times(\vec{v}\times\vec{\rho}) = -\vec{\rho}\times(\vec{\rho}\times\vec{v}) = -[-(\vec{\rho}\times\vec{v})\times\vec{\rho}] = (\vec{\rho}\times\vec{v})\times\vec{\rho}\ . \qquad (3.3.3)$$

Pravú stranu predchádzajúceho výrazu (3.3.3) dosadíme do (3.3.2):

$$\vec{v}(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}) - (\vec{\rho}\cdot\vec{v})\vec{\rho} = (\vec{\rho}\times\vec{v})\times\vec{\rho} \qquad (3.3.4)$$

a následne výsledok (3.3.4) dosadíme do rovnice (3.3.1). Deriváciu jednotkového vektora $\vec{\rho}$ podľa času vyjadríme nasledovne:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{(\vec{\rho}\times\vec{v})\times\vec{\rho}}{r} = \left(\vec{\rho}\times\frac{\vec{v}}{r}\right)\times\vec{\rho}. \qquad (3.3.5)$$

Vektor v zátvorke na pravej strane (3.3.5) určuje uhlovú rýchlosť $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \vec{\rho}\times\frac{\vec{v}}{r}\ , \qquad (3.3.6)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\rho}\times\frac{\vec{v}}{r} = \vec{\rho}\times\frac{1}{r}\left\{(\vec{\rho}.\vec{v})\vec{\rho} + r\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right\} = \frac{1}{r}(\vec{\rho}.\vec{v})\vec{\rho}\times\vec{\rho} + \frac{r}{r}\vec{\rho}\times\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{0} + \vec{\rho}\times\frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

potom deriváciu jednotkového vektora $\vec{\rho}$ podľa času môžeme vyjadriť v tvare:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}\,. \tag{3.3.7}$$

Jednotkový vektor $\vec{\rho}$ má konštantnú veľkosť $|\vec{\rho}| = 1$ a pri pohybe hmotného bodu sa mení iba smer uvedeného vektora. V uvedenom výraze je možné jednotkový vektor $\vec{\rho}$ nahradiť pravou stranou vzťahu (3.1.1) a výraz upraviť do nasledovného tvaru:

$$\vec{\omega} = \vec{\rho} \times \frac{\vec{v}}{r} = \frac{\vec{r}}{r} \times \frac{\vec{v}}{r} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}\,. \tag{3.3.8}$$

Z uvedeného výrazu vyplýva, že vektor $\vec{\omega}$ je kolmý na polohový vektor pohybujúceho sa hmotného bodu $\vec{r}$ a zároveň je kolmý aj na vektor rýchlosti tohto hmotného bodu $\vec{v}$.

3.4 Hmotný bod koná pohyb po kružnici. Polohový vektor hmotného bodu v zavedenej vzťažnej sústave má súradnice $\vec{r} = [3; 2; -4]$ m a vektor jeho rýchlosti $\vec{v} = [-2; 3; -1]$ m.s^{-1}. Určite súradnice vektora uhlovej rýchlosti uvedeného hmotného bodu v zavedenej vzťažnej sústave.

Riešenie

Využijeme výsledok z predchádzajúceho príkladu 3.3. Dosadíme konkrétne vektory do výsledku (3.3.8):

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$$

t.j.:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = [10, 11, 13]\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}\,.$$

Platí:

$$r^2 = (9 + 4 + 16)\,\text{m}^2 = 29\ \text{m}^2$$

Po dosadení dostávame vektor uhlovej rýchlosti:

$$\vec{\omega} = \left[\frac{10}{29}, \frac{11}{29}, \frac{13}{29}\right] \text{s}^{-1} = [0{,}345; 0{,}379; 0{,}448]\,\text{s}^{-1}$$

3.5 Uvažujme hmotný bod konajúci krivočiary pohyb. Polohový vektor uvedeného hmotného bodu je $\vec{r}$ a vektor jeho rýchlosti je $\vec{v}$. Určite vzťah pre longitudinálnu a transverzálnu zložku vektora rýchlosti.

Poznámka: Longitudinálna zložka $\vec{v}_L$ je v každom časovom okamihu rovnobežná s polohovým vektorom a transverzákna $\vec{v}_T$ zložka je v každom okamihu na polohový vektor kolmá.

Riešenie

Vyjadríme vektor rýchlosti v tvare (3.1.3) a zohľadníme výsledky (3.1.14) a (3.3.7):

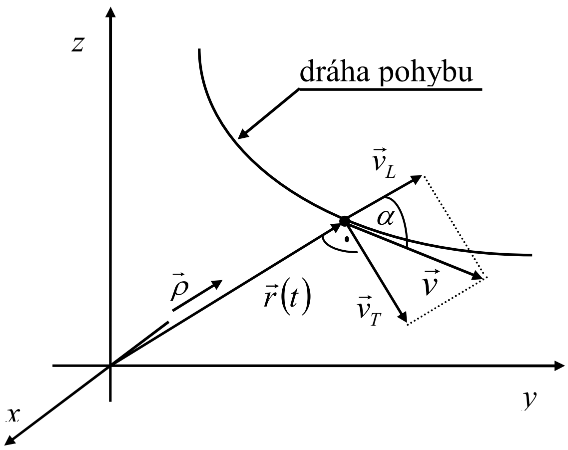
$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{\rho} + r(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = \frac{dr}{dt}\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{\rho}r) = \frac{dr}{dt}\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{v}_L + \vec{v}_T\,. \qquad (3.5.1)$$

Vektor rýchlosti $\vec{v}$ hmotného bodu konajúceho mechanický pohyb je možné rozložiť na zložku, ktorá je rovnobežná s polohovým vektorom $\vec{r}$ tohto bodu:

$$\vec{v}_L = \frac{dr}{dt}\vec{\rho} \qquad (3.5.2)$$

a zložku, ktorá je na polohový vektor $\vec{r}$ kolmá:

$$\vec{v}_T = \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (3.5.3)$$

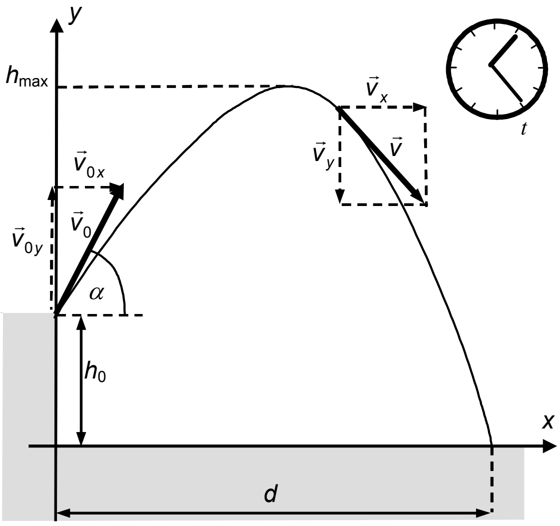


Obr. 3.6 Zmena veľkosti a smeru polohového vektora pohybujúceho sa hmotného bodu

3.6 Telesu udelíme v počiatočnej výške h_0 nad povrchom Zeme počiatočnú rýchlosť $\vec{v}_0$. Vektor počiatočnej rýchlosti $\vec{v}_0$ je orientovaný tak, že zviera uhol α s vodorovným povrchom Zeme. Určite čas, za ktorý dosiahne teleso najvyšší bod svojej trajektórie.

Riešenie

Pohyb uvedeného telesa je rovinný, t.j. uskutočňuje sa v jednej rovine. Pri jeho opise preto stačí zaviesť vzťažnú sústavu v rovine.



Obr. 3.7

Pri opise mechanického pohybu uvedeného telesa v tiažovom poli Zeme zavedieme vzťažnú sústavu tak, že súradnicová os *x* je totožná s povrchom Zeme a súradnicová os *y* je na povrch Zeme kolmá. Tiažové pole udeľuje telesu tiažové zrýchlenie, ktorého vektor v takto zvolenej vzťažnej sústave možno vyjadriť v súradnicovom tvare nasledovne:

$$\vec{a} = [0; -g]. \tag{3.6.1}$$

Vektor rýchlosti a polohový vektor pohybujúceho sa telesa je po zavedení vzťažnej sústavy tiež možné vyjadriť pomocou súradníc:

$$\vec{v} = [v_x; v_y] \ ; \ \ \vec{r} = [x; y] \ . \tag{3.6.2}$$

Vektor počiatočnej rýchlosti $\vec{v}_0$ zviera so súradnicovou rovinou *x* uhol α a možno ho rozložiť na dve navzájom kolmé zložky - zložku v_{0x} rovnobežnú so súradnicovou osou *x* a zložku v_{oy} rovnobežnú so súradnicovou osou *y*. Pre veľkosti uvedených zložiek platí:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \tag{3.6.3}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha \tag{3.6.4}$$

V smere súradnicovej osi *x* teleso koná rovnomerný priamočiary pohyb s konštantnou rýchlosťou v_{0x}, ktorá sa v závislosti od času nemení a jej hodnota je určená vzťahom (3.6.3):

$$v_x = v_0 \cos\alpha \tag{3.6.5}$$

V smere súradnicovej osi *y* teleso koná rovnomerne zrýchlený pohyb so zrýchlením -*g*. Veľkosť zložky v_y sa v závislosti od času mení a jej časovú závislosť je možné vyjadriť podľa vzťahu pre časovú závislosť rýchlosti rovnomerne zrýchleného pohybu. Ak do uvedeného vzťahu dosadíme za počiatočnú rýchlosť hodnotu v_{0y} určené vzťahom (3.6.4) a za zrýchlenie dosadíme -*g* dostávame:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \quad . \tag{3.6.6}$$

x-ová zložka polohového vektora $\vec{r}$ uvedeného hmotného bodu v ľubovoľnom časovom okamihu t je určená veľkosťou dráhy, ktorú hmotný bod prejde v smere súradnicovej osi x za čas t. V smere osi x sa teleso pohybuje konštantnou rýchlosťou určenou vzťahom (3.6.5). Zo vzťahu pre časovú závislosť veľkosti dráhy prejdenej telesom konajúcim rovnomerný priamočiary pohyb pre x-ovú zložku polohového vektora vyplýva:

$$x = v_0 t \cos\alpha \, . \tag{3.6.7}$$

y-ová zložka polohového vektora $\vec{r}$ v ľubovoľnom časovom okamihu t je určená veľkosťou dráhy, ktorú hmotný bod prejde v smere súradnicovej osi y za čas t. V smere osi y sa teleso pohybuje rovnomerne zrýchlene (keď stúpa nahor t.j. pohybuje v kladnom smere osi y) resp. spomalene (keď klesá nadol t.j. pohybuje v zápornom smere osi y). Zo vzťahu pre rovnomerne zrýchlený pohyb pre časovú závislosť súradnice y vyplýva:

$$y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \quad . \tag{3.6.8}$$

V zavedenej vzťažnej sústave je pohyb telesa vrhnutého z počiatočnej výšky h_0 nad povrchom Zeme pod uhlom α vzhľadom na tento povrch určený rovnicami (3.6.5), (3.6.6), (3.6.7) a (3.6.8). Podotýkame, že uvedené rovnice nezohľadňujú odpor vzduchu, ktorý môže mať v reálnych prípadoch na pohyb telesa značný vplyv. Uvedené rovnice vyplývajú z charakteru pohybu telesa v smere jednotlivých súradnicových osí vhodne zavedenej vzťažnej sústavy . Pohyby v smere jednotlivých súradnicových osí x a y sú navzájom nezávislé a výsledný pohyb telesa dostaneme ako superpozíciu týchto pohybov. Všetko, čo potrebujeme o mechanickom pohybe takéhoto telesa vedieť, môžeme „vydolovať“ z rovníc (3.6.5) až (3.6.8). Teleso, ktoré je vrhnuté z výšky h_0 nad zemským povrchom počiatočnou rýchlosťou $\vec{v}_0$ pod uhlom α najskôr stúpa nahor. Výška telesa (t.j. jeho súradnica y) sa zväčšuje, dosiahne maximum (tzv. kulminačnú polohu) a potom teleso klesá smerom k zemskému povrchu. Jedným z možných problémov môže byť napr. určiť čas, za ktorý teleso dosiahne kulminačnú polohu, tzv. čas výstupu t_v. Vychádzajme z charakteru pohybu telesa v smere osi y. Bezprostredne po vrhnutí telesa v čase t =0 sa jeho súradnica y reprezentujúca okamžitú výšku telesa nad zemským povrchom zväčšuje. Rýchlosť telesa v smere súradnicovej osi y postupne klesá. V okamihu, keď teleso dosiahne kulminačnú polohu, t.j. v čase t_v, sa pohyb telesa v smere osi y zastaví, t.j. jeho rýchlosť v smere osi y sa rovná nule. Rýchlosť telesa v smere súradnicovej osi y je rovná nule:

$$v_y(t = t_v) = 0 \, . \tag{3.6.9}$$

Ak do vzťahu (3.6.6) dosadíme za čas t čas výstupu t_v, musí sa uvedený výraz rovnať nule:

$$v_0 \sin\alpha - g t_v = 0 \quad . \tag{3.6.10}$$

Z rovnice (3.6.10) je možné určiť čas výstupu telesa do kulminačnej polohy:

$$t_v = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad . \tag{3.6.11}$$

3.7 Telesu udelíme v počiatočnej výške h_0 nad povrchom Zeme počiatočnú rýchlosť $\vec{v}_0$. Vektor počiatočnej rýchlosti $\vec{v}_0$ je orientovaný tak, že zviera uhol α s vodorovným povrchom Zeme. Určite, akú maximálnu výšku teleso pri vojom pohybe dosiahne.

Riešenie

Maximálna výška, ktorú pri svojom pohybe teleso dosiahne je určená y-ovou súradnicou telesa v čase výstupu t_v:

$$h_{\max} = y(t = t_v) \quad . \tag{3.7.1}$$

Z toho je zrejmé, že keď dosadíme do vzťahu (3.6.8) za čas t čas výstupu t_v, uvedený výraz určuje $h_{\max}$.. Za čas t dosadíme do výrazu (3.6.8) pravú stranu (3.6.11) a dostaneme:

$$h_{\max} = h_0 + v_0\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)\sin\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad . \tag{3.7.2}$$

Úpravou rovnice (13) určíme maximálnu výšku telesa nasledovne:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + h_0 \quad . \tag{3.7.3}$$

3.8 Telesu udelíme v počiatočnej výške h_0 nad povrchom Zeme počiatočnú rýchlosť $\vec{v}_0$. Vektor počiatočnej rýchlosti $\vec{v}_0$ je orientovaný tak, že zviera uhol α s vodorovným povrchom Zeme. Určite, za aký čas dopadne teleso na zemský povrch.

Riešenie

Po dosiahnutí kulminačnej polohy výška telesa nad zemským povrchom (t.j. jeho súradnica y) klesá až do okamihu, keď teleso dopadne na zemský povrch. Zaujíma nás, za aký čas od začiatku pohybu teleso dopadne na zemský povrch, t.j. aký je čas dopadu t_d. Ak teleso dopadlo na povrch Zeme, jeho výška h nad týmto povrchom je rovná nule. Vo vzťažnej sústave zavedenej tak ako je to znázornené na obr.3.7, je výška telesa nad povrchom Zeme reprezentovaná súradnicou y. Skutočnosť, že teleso dopadlo na zemský povrch preto môžeme v rovnici (3.6.8) zohľadniť tak, že za súradnicu y dosadíme nulu. V čase dopadu na zemský povrch je y-ová súradnica pohybujúceho sa telesa rovná nule:

$$y(t = t_d) = 0 \quad . \tag{3.8.1}$$

Z uvedenej skutočnosti vyplýva, že ak dosadíme do vzťahu (3.6.8) za čas t čas dopadu t_{d}, uvedený vzťah sa musí rovnať nule:

$$h_0 + v_0 t_d \sin\alpha - \frac{g t_d^2}{2} = 0 \quad . \tag{3.8.2}$$

Rovnica (3.8.2) je vzhľadom na neznámu t_{d} kvadratickou rovnicou, ktorú ľahko upravíme do tvaru:

$$\left(\frac{g}{2}\right) t_d^2 - (v_0 \sin\alpha) t_d - h_0 = 0 \ . \tag{3.8.3}$$

Kvadratická rovnica (3.8.3) má vo všeobecnosti dve riešenia, ktoré možno zapísať nasledovne:

$$t_{d1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 4\left(\frac{g}{2}\right) h_0}}{2\left(\frac{g}{2}\right)} \quad . \tag{3.8.4}$$

Ako vyplýva z výrazu (3.8.4), riešenie so znamienkom mínus v čitateli je záporné. Nakoľko čas dopadu t_{d} môže mať iba kladnú hodnotu, uvedené záporné riešenie (aj keď je matematicky správne) nemá fyzikálny význam a hľadaný čas dopadu telesa určuje riešenie s kladným znamienkom v čitateli výrazu (3.8.4). Po dosadení kladného znamienka do čitateľa výrazu (3.8.4) a po jeho úprave je možné určiť čas dopadu telesa na zemský povrch v tvare:

$$t_d = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2 g h_0}}{g} \ , \tag{3.8.5}$$

resp. v tvare:

$$t_d = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}} \tag{3.8.6}$$

3.9 Telesu udelíme v počiatočnej výške h_0 nad povrchom Zeme počiatočnú rýchlosť $\vec{v}_0$. Vektor počiatočnej rýchlosti $\vec{v}_0$ je orientovaný tak, že zviera uhol α s vodorovným povrchom Zeme. Určite vodorovnú vzdialenosť miesta dopadu od miesta vrhu (vodorovný dostrel).

Riešenie

Veľmi často je potrebné určiť vodorovnú vzdialenosť d medzi miestom dopadu telesa a miestom vrhu. Vzdialenosť dopadu telesa d je určená jeho x-ovou súradnicou v čase dopadu t_d. Vzdialenosť dopadu určíme tak, že do vzťahu (3.6.7) dosadíme za čas t čas dopadu t_d:

$$d = x(t = t_d) = v_0\left[\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}\right]\cos\alpha \quad . \tag{3.9.1}$$

Predchádzajúci vzťah je možné upraviť do tvaru:

$$d = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2v_0^2 h_0 \cos^2\alpha}{g}} \tag{3.9.2}$$

a ak uvážime skutočnosť, že platí:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad , \tag{3.9.3}$$

potom výraz pre určenie vodorovnej vzdialenosti d dopadu telesa určíme nasledovne:

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}\right)^2 + \frac{2v_0^2 h_0 \cos^2\alpha}{g}} \quad . \tag{3.9.4}$$

3.10 Uvažujme ľubovoľný krivočiary pohyb hmotného bodu v priestore, ktorý je opísaný časovou závislosťou polohového vektora $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Na základe známeho vzťahu medzi polohovým vektorom a vektorom rýchlosti:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ukážte, že dĺžka trajektórie, ktorú prejde hmotný bod počas svojho pohybu v časovom intervale $\langle t_1; t_2 \rangle$ je určená výrazom :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

kde $v(t)$ je okamžitá veľkosť (absolútna hodnota) vektora rýchlosti hmotného bodu v čase t.

Riešenie

Uvažujme vo všeobecnosti pohyb hmotného bodu v priestore. Po zavedení vzťažnej sústavy je možné polohový vektor bodu v každom časovom okamihu t vyjadriť pomocou troch súradníc:

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \ . \tag{3.10.1}$$

Budeme predpokladať, že funkcie $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ sú v uvažovanom časovom intervale derivovateľné (diferencovateľné). Trajektóriu hmotného bodu potom možno z hľadiska matematického považovať za dokonale hladkú krivku, ktorej parametrické vyjadrenie je určené práve rovnicou (3.10.1). Vzťah pre výpočet dráhy prejdenej hmotným bodom určíme nasledovne.

Nech v časovom okamihu t je pohybujúci sa hmotný bod v polohe A, ktorého polohový vektor je $\vec{r}(t)$ (pozri obr. 3.8). Po uplynutí nekonečne malého časového intervalu dt sa daný hmotný bod presunie pozdĺž trajektórie pohybu do bodu B, ktorého polohový vektor označíme $\vec{r}(t+dt)$. Za časový interval $\langle t; t+dt \rangle$ teda hmotný bod prejde dráhu ds. Vzhľadom k tomu, že dráha ds je nekonečne malá (elementárna), je možné ju za daných predpokladov v limitnom prípade považovať za dĺžku úsečky AB. Dráhu ds je možné podľa obr. 3.8 vyjadriť pomocou Pytagorovej vety:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \tag{3.10.2}$$

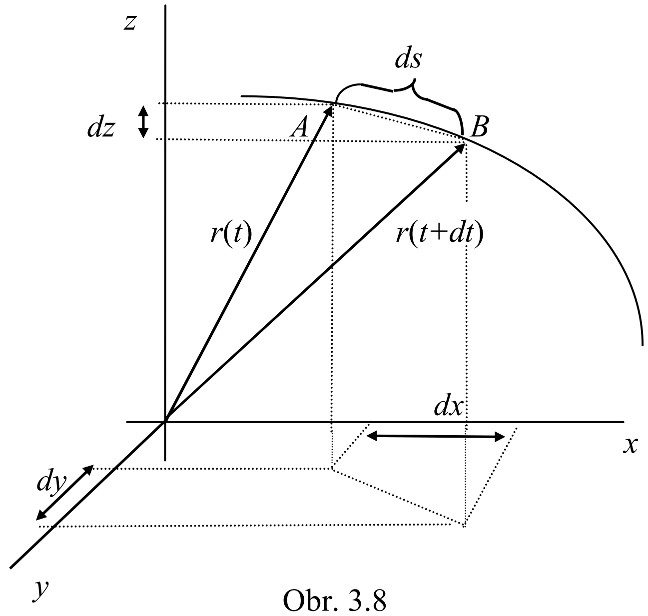
kde dx, dy a dz sú nekonečne malé zmeny (diferenciály) súradníc hmotného bodu pri jeho presune z bodu A do bodu B za časový interval $\langle t, t+dt \rangle$.

Keďže súradnice hmotného bodu sú funkciami času:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{3.10.3}$$

diferenciály (nekonečne malé zmeny) súradníc v rovnici (3.10.2) možno vyjadriť podľa vety o prírastku funkcie známej z matematiky nasledovne :

$$dx = \frac{dx}{dt}dt\,, \quad dy = \frac{dy}{dt}dt\,, \quad dz = \frac{dz}{dt}dt \tag{3.10.4}$$



Obr. 3.8

Ak vzťahy (3.10.4) dosadíme do rovnice (3.10.2), pre elementárnu dráhu ds dostávame:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.10.5}$$

Vektor rýchlosti hmotného bodu $\vec{v}$ je časová derivácia polohového vektora $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{3.10.6}$$

Z výrazu (3.10.6) je zrejmé, že pre súradnice vektora rýchlosti bodu v_x, v_y a v_z v každom časovom okamihu platí:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z \tag{3.10.7}$$

Ak uvážime vzťahy (3.10.7) v rovnici (3.10.5), môžme pre dráhu ds písať:

$$ds = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,dt \tag{3.10.8}$$

Odmocnina na pravej strane predchádzajúceho vzťahu (3.10.8) predstavuje okamžitú veľkosť (absolútnu hodnotu) vektora rýchlosti hmotného bodu v :

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = |\vec{v}| = v \tag{3.10.9}$$

Vzťah (3.10.8) môžme preto prepísať do tvaru:

$$ds = v(t)dt \tag{3.10.10}$$

Dráha ds je elementárna dráha, ktorú prejde hmotný bod za nekonečne malý časový interval $\langle t; t + dt \rangle$, a preto je tiež nekonečne malá. Konečnú dráhu, ktorú prejde pohybujúci sa hmotný bod za časový interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ dostaneme ako limitný súčet elementárnych dráh určených rovnicou (3.10.10). Keďže pri hľadaní uvedeného súčtu sčítavame nekonečne veľa nekonečne malých príspevkov ds, robíme to formou integrálu:

$$s = \int_{(l)} ds \tag{3.10.11}$$

Z hľadiska matematického je na pravej strane výrazu (3.10.11) tzv. krivkový integrál po krivke určenej parametricky rovnicou (3.10.1), kde parametrom je čas t. Uvedený integrál pretransformujeme na určitý dosadením pravej strany rovnice (3.10.10) do výrazu (3.10.11). Dostaneme tak vzťah pre výpočet dráhy prejdenej hmotným bodom v danom časovom intervale:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \tag{3.10.12}$$

ktorý sme mali dokázať.

3.11 Polohový vektor hmotného bodu pohybujúceho sa v rovine je možné v zavedenej vzťažnej sústave vyjadriť vzťahom:

$$\vec{r}(t) = \left[3t^2 + 5t + 1, 20t - 4\right]$$

kde t je čas v sekundách a súradnice vektora $\vec{r}$ sú v metroch. Určite dráhu, ktorú prejde hmotný bod počas svojho pohybu v časovom intervale $\langle 2, 5 \rangle$ s.

Riešenie

Využijeme výsledok predchádzajúceho príkladu ***3.10***. Vektor rýchlosti $\vec{v}$ hmotného bodu dostaneme ako deriváciu polohového vektora $\vec{r}$ podľa času:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.11.1}$$

Vychádzajúc zo vzťahu (3.11.1) možno vektor rýchlosti daného bodu v čase t vyjadriť v súradnicovom tvare nasledovne:

$$\vec{v}(t) = \left[6t + 5, 20\right] . \tag{3.11.2}$$

Súradnice vektora rýchlosti sú v jednotkách m.s^{-1}. Veľkosť (absolútna hodnota) vektora rýchlosti v v ľubovoľnom časovom okamihu potom bude:

$$v(t) = \sqrt{(6t+5)^2 + 20^2} \tag{3.11.3}$$

Podľa rovnice (3.10.12) z predchádzajúceho príkladu ***3.10*** je veľkosť dráhy, ktorú prejde hmotný bod v časovom intervale $\langle 2,5\rangle$ určená vzťahom:

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt=\int_2^5\sqrt{20^2+(6t+5)^2}\,dt=20\int_2^5\sqrt{1+\left(\frac{6t+5}{20}\right)^2}\,dt\ . \qquad (3.11.4)$$

Problém určenia veľkosti dráhy s je teraz už čisto matematického charakteru a súvisí s výpočtom integrálu na pravej strane výrazu (3.11.4). Ukážeme postup pri jeho výpočte. Pri výpočte integrálu (3.11.4) sa ukazuje vhodné zaviesť substitúciu :

$$\frac{6t+5}{20}=u \quad\Rightarrow\quad dt=\frac{20}{6}du \qquad (3.11.5)$$

kde u je bezrozmerná premenná. Zavedením substitúcie (3.11.4) prejde integrál do tvaru:

$$s=\frac{400}{6}\int_{0,85}^{1,75}\sqrt{1+u^2}\,du \qquad (3.11.6)$$

Spočítajme najskôr neurčitý integrál:

$$I=\int\sqrt{1+u^2}\,du \qquad (3.11.7)$$

Ako je známe z matematiky, integrály uvedeného typu je možné počítať zavedením tzv. Eulerovej substitúcie, ktorá môže mať v danom prípade tvar:

$$1+u^2=(w+u)^2 \quad\Rightarrow\quad w=\sqrt{1+u^2}-u \qquad (3.11.8)$$

kde sme zaviedli novú bezrozmernú premennú w. Z rovnice (3.11.8) je zrejmé, že platí:

$$1+u^2=w^2+2wu+u^2 \qquad (3.11.9)$$

resp.:

$$u=\frac{1-w^2}{2w} \quad\Rightarrow\quad du=-\frac{w^2+1}{2w^2}dw \qquad (3.11.10)$$

Ak uvážime prvý zo vzťahov (3.11.10) vo výraze (3.11.8) a následne dosadíme (3.11.8) a (3.11.10) do integrálu (3.11.7), dostávame:

$$I=-\frac{1}{2}\int\left(w+\frac{1-w^2}{2w}\right)\frac{w^2+1}{w^2}dw=-\frac{1}{4}\int\frac{w^4+2w^2+1}{w^3}dw=-\frac{1}{4}\left[\int w\,dw+2\int\frac{dw}{w}+\int\frac{dw}{w^3}\right]$$

(3.11.11)

Po zavedení spätnej substitúcie (3.11.8) možno integrál (3.11.7) vyjadriť nasledovne:

$$I=-\frac{1}{4}\left[\frac{w^2}{2}+2\ln(w)-\frac{1}{2w^2}\right]=-\frac{1}{4}\left[\frac{\left(\sqrt{1+u^2}-u\right)^2}{2}+2\ln\left|\sqrt{1+u^2}-u\right|-\frac{1}{2\left(\sqrt{1+u^2}-u\right)^2}\right]$$

(3.11.12)

Pravú stranu výrazu (3.11.12) dosadíme do určitého integrálu (3.11.6) a pre hľadanú dráhu dostávame:

$$s = -\frac{100}{6}\left[\frac{\left(\sqrt{1+u^2}-u\right)^2}{2} + 2\ln\left|\sqrt{1+u^2}-u\right| - \frac{1}{2\left(\sqrt{1+u^2}-u\right)^2}\right]_{0,85}^{1,75} . \qquad (3.11.13)$$

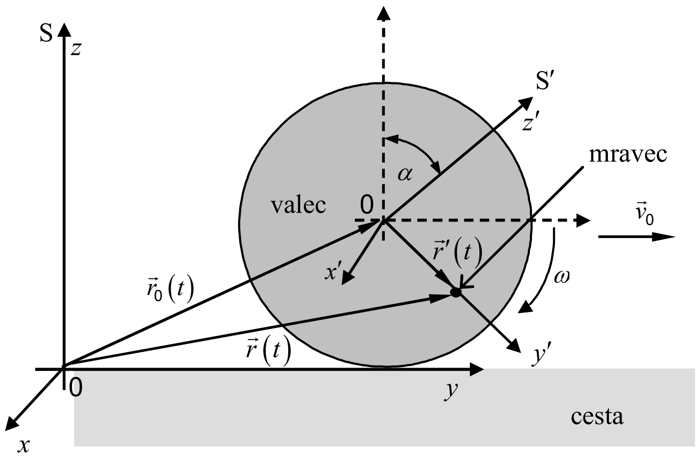
Teraz zostáva už iba dosadiť hranice integrálu do daného výrazu (3.11.13) a tak vypočítať dráhu s prejdenú hmotným bodom, čo prenechávame čitateľovi. Konečným výsledkom v uvedenom prípade je dráha

$$s = 98{,}877573 \text{ m} . \qquad (3.11.14)$$

3.12 Valec s polomerom podstavy 60 cm sa pomaly kotúľa bez šmýkania po vodorovnej priamej ceste konštantnou rýchlosťou 18 cm.s^{-1}. Počas pohybu valca zo stredu jednej jeho podstavy priamo k jej okraju začal liezť mravec. Mravec sa pohybuje konštantou rýchlosťou 3 cm.s^{-1} vzhľadom na povrch podstavy. Aká je rýchlosť a zrýchlenie mravca vzhľadom na povrch cesty v čase 10 sekúnd od okamihu, keď sa v strede podstavy dal do pohybu ? Mravec začal liezť v smere pohybu valca.

Riešenie

Problém budeme riešiť ako zložený pohyb. Zavedieme vzťažné sústavy tak, ako je to na obr.3.9. Označme R = 60 cm, v_0 = 18 cm.s^{-1}, v' = 3 cm.s^{-1}, t_1 = 10 s.



Obr. 3.9

Platí:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

Určíme súradnice vektorov vo vzťažnej sústave S:

$$\vec{v}_0 = \left[0; v_0; 0\right]$$

$$\vec{v}' = \left[0; v' \cos\alpha; -v' \sin\alpha\right]$$

$$\vec{\omega} = \left[-\frac{v_0}{R}; 0; 0\right]$$

$$\alpha = \omega t = \frac{v_0}{R} t$$

$$\vec{r}' = \vec{v}' t = \left[0; v't \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right); -v't \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right)\right]$$

$$\vec{v}' = \left[0; v' \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right); -v' \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right)\right]$$

Ľahko zistíme, že platí:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{v_0}{R} & 0 & 0 \\ 0 & v't \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right) & -v't \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right) \end{vmatrix} = \left[0; -\frac{v_0 v'}{R} t \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right); -\frac{v_0 v'}{R} t \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right)\right]$$

a po dosadení dostávame:

$$\vec{v} = \left[0; v' \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right); -v' \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right)\right] + \left[0; v_0; 0\right] + \left[0; -\frac{v_0 v'}{R} t \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right); -\frac{v_0 v'}{R} t \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right)\right]$$

$$\vec{v} = \left[0; v' \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right) + v_0 - \frac{v_0 v'}{R} t \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right); -v' \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right) - \frac{v_0 v'}{R} t \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right)\right]$$

Veľkosť rýchlosti mravca je určená absolútnou hodnotou uvedeného vektora:

$$v = \sqrt{\left\{v' \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right) + v_0 - \frac{v_0 v'}{R} t \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right)\right\}^2 + \left\{-v' \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right) - \frac{v_0 v'}{R} t \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right)\right\}^2}$$

Resp. po úprave:

$$v = v' \sqrt{\left\{\cos\left(\frac{v_0}{R} t\right) + \frac{v_0}{v'} - \frac{v_0}{R} t \sin\left(\frac{v_0}{R} t\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\frac{v_0}{R} t\right) + \frac{v_0}{R} t \cos\left(\frac{v_0}{R} t\right)\right\}^2}$$

Rýchlosť mravca vzhľadom na cestu je určená vzťahom:

$$v = v'\sqrt{1+\left(\frac{v_0 t}{R}\right)^2+\left(\frac{v_0}{v'}\right)^2+2\left(\frac{v_0}{v'}\right)\left\{\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)-\frac{v_0 t}{R}\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right\}} = 16{,}17\ \text{cm/s}.$$

Pri určovaní zrýchlenia uvážime:

$\vec{a}' = \vec{0}$, $\vec{a}_0 = \vec{0}$, $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$

t.j. platí: $\vec{a} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$.

Určíme súradnice vektorových súčinov v zavedenej sústave:

$$\vec{\omega}\times\vec{v}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{v_0}{R} & 0 & 0 \\ 0 & v'\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) & -v'\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right) \end{vmatrix} = \left[0; -\frac{v_0 v'}{R}\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right); -\frac{v_0 v'}{R}\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right]$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{v_0}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v_0 v'}{R}t\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right) & -\frac{v_0 v'}{R}t\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) \end{vmatrix} = \left[0; -\frac{v_0^2 v'}{R^2}t\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right); \frac{v_0^2 v'}{R^2}t\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right]$$

a dosadíme do vzťahu pre absolútne zrýchlenie:

$$\vec{a} = 2\left[0; -\frac{v_0 v'}{R}\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right); -\frac{v_0 v'}{R}\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right] + \left[0; -\frac{v_0^2 v'}{R^2}t\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right); \frac{v_0^2 v'}{R^2}t\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right]$$

resp.:

$$\vec{a} = \left[0; -2\frac{v_0 v'}{R}\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right) - \frac{v_0^2 v'}{R^2}t\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right); -2\frac{v_0 v'}{R}\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) + \frac{v_0^2 v'}{R^2}t\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right].$$

Veľkosť uvedeného vektora určuje zrýchlenie mravca vzhľadom na cestu:

$$a = \sqrt{\left\{-2\frac{v_0 v'}{R}\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right) - \frac{v_0^2 v'}{R^2}t\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right\}^2 + \left\{-2\frac{v_0 v'}{R}\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) + \frac{v_0^2 v'}{R^2}t\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right\}^2}\ .$$

Po úprave:

$$a = \frac{v_0 v'}{R}\sqrt{4+\left(\frac{v_0 t}{R}\right)^2} = 3{,}245\ \text{cm/s}^2.$$

3.13 Koleso s polomerom 40 cm sa otáča tak, že bod na jeho obvode má počas pohybu rovnako veľké tangenciálne a normálové zrýchlenie. Za aký čas dosiahne rýchlosť tohto bodu hodnotu 15 cm.s^{-1}, keď na začiatku mala jeho rýchlosť veľkosť 5 cm.s^{-1} ?

Riešenie

Označme R = 40 cm, v_0 = 5 cm.s^{-1} , v_1 = 15 cm.s^{-1} , Vychádzame zo skutočnosti, že platí:

$$a_t = a_n .$$

Podľa definície $\qquad a_t = \frac{d\,v}{d\,t}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}.$

Dosadíme do prvej rovnice

$$\frac{d\,v}{d\,t} = \frac{v^2}{R},$$

separujeme premenné

$$\frac{d\,v}{v^2} = \frac{d\,t}{R}$$

a následne integrujeme:

$$\int \frac{d\,v}{v^2} = \int \frac{d\,t}{R}.$$

Po integrácii dostávame nasledovnú rovnicu:

$$-\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + K .$$

Integračnú premennú K určíme z počiatočných podmienok:

$$-\frac{1}{v_0} = \frac{0}{R} + K \text{, t.j.} \qquad K = -\frac{1}{v_0}.$$

Po jej dosadení dostávame rovnicu:

$$-\frac{1}{v} = \frac{t}{R} - \frac{1}{v_0}.$$

Nech t_1 je čas, za ktorý bod dosiahne rýchlosť v_1. Podľa predchádzajúcej rovnice platí:

$$-\frac{1}{v_1} = \frac{t_1}{R} - \frac{1}{v_0}.$$

Z uvedenej rovnice vyjadríme neznámy čas t_1:

$$\frac{t_1}{R} = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}, \text{ resp. } \quad t_1 = R\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}\right).$$

Uvedenú rýchlosť dosiahne bod za čas:

$$t_1 = 40.\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15}\right)\mathrm{s} = 5{,}333\,\mathrm{s}.$$

3.14 Je dvanásť hodín. Koľko bude hodín, keď sa budú veľká a malá ručička znovu prekrývať?

Riešenie

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T_m}, \qquad T_m = 12.3600\ \mathrm{s} = 43200\ \mathrm{s}, \qquad \omega_v = \frac{2\pi}{T_v}, \qquad T_v = 3600\,\mathrm{s}$$

$$\alpha_v = \omega_v t, \qquad \alpha_m = \omega_m t$$

$$\alpha_v = 2\pi + \alpha_m, \qquad \omega_v t = \omega_m t + 2\pi$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega_v - \omega_m} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3600} - \frac{2\pi}{12.3600}}\ \mathrm{s}$$

t = 3927 s = 1 hod 5 min 27 s.

Bude 1 hod 5 min 27 s.

3.15 Rotor elektromotora rotujúci s frekvenciou otáčania 4000 ot.min^{-1} sa počas 8 s celkom zastaví. Koľko otáčok pritom vykoná, ak jeho pohyb je rovnomerne spomalený ?

Riešenie

$$0 = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad \omega_0 = 2\pi f, \qquad \varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\left(-\frac{\omega_0}{t}\right)t^2}{2} = \omega_0 t - \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}$$

$$\varphi = \frac{2\pi f t}{2}$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\pi f t}{2\pi} = \frac{ft}{2}$$

$$f = \frac{4000}{60} \text{ ot/s} = 66{,}66 \text{ ot/s}$$

$$n = \frac{66{,}66.8}{2} = 266{,}66 \text{ ot.}$$

Rotor vykoná 266,66 otáčok.

3.16 Frekvencia otáčania brúsneho kotúča sa počas 10 sekúnd pribrzdí z hodnoty 3000 ot/min na 2000 ot/min. Koľko otáčok vykoná kotúč v uvedenom čase? Považujte pohyb kotúča za rovnomerne spomalený.

Riešenie

$t = 10$ s, $f_0 = 3000$ ot.min^{-1}, $f_1 = 2000$ ot.min^{-1},

$$\omega_1 = 2\pi f_1, \quad \omega_0 = 2\pi f_0, \quad \omega = \omega_0 - \varepsilon t, \quad 2\pi f_1 = 2\pi f_0 - \varepsilon t, \quad \varepsilon = \frac{2\pi\left(f_0 - f_1\right)}{t},$$

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 2\pi n, \quad \varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad 2\pi n = 2\pi f_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$n = f_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}, \quad n = f_0 t - \frac{\left[\frac{2\pi\left(f_0 - f_1\right)}{t}\right] t^2}{4\pi}, \quad n = \frac{\left(f_0 + f_1\right)t}{2}$$

$$f_0 = \frac{3000}{60} \text{ ot/s} = 50 \text{ ot/s} \quad , \quad f_1 = \frac{2000}{60} \text{ ot/s} = 33{,}3333 \text{ ot/s}$$

$$n = \frac{\left(50 + 33{,}3333\right).10}{2} \text{ ot} = 416{,}67 \text{ ot}$$

Kotúč vykoná 416,67 otáčok.

4 DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

Teoretický úvod

Dynamika skúma pohyb telies, ich vzájomné pôsobenie a hľadá príčiny pohybu. Ústrednou veličinou dynamiky je sila. Sila je príčinou zmien pohybového stavu telies. Vlastnosť telesa zotrvávať v pohybovom stave nazývame zotrvačnosť (inercia). Hmotnosť m telesa je mierou jeho zotrvačnosti a je tiež mierou jeho gravitačných účinkov. Ak pri pohybe telesa môžeme jeho rozmery zanedbať, hovoríme o hmotnom bode. Hybnosť hmotného bodu (telesa) je súčin jeho hmotnosti m a jeho rýchlosti $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}\,. \tag{4.1}$$

Newtonove zákony dynamiky

Sú to tri zákony, na ktorých stojí celá stavba klasickej mechaniky.

1. Prvý Newtonov zákon - ***zákon zotrvačnosti*** - hovorí, že **teleso zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe pokiaľ naň nepôsobí vonkajšia sila.**

2. Druhý Newtonov zákon **-** ***zákon sily*** – hovorí, že **výslednica vonkajších síl pôsobiacich na teleso sa rovná časovej derivácii (časovej zmene) hybnosti telesa**:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}, \tag{4.2}$$

kde $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ je hybnosť telesa a $\boldsymbol{F}$ je výslednica vonkajších síl pôsobiacich na teleso.

Ak hmotnosť považujeme za konštantnú, môžeme vzťah (4.1) prepísať do tvaru:

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}\,, \tag{4.3}$$

kde derivácia rýchlosti podľa času je zrýchlenie $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$**.** Vtedy druhý Newtonov zákon vyjadruje aj vzťah medzi silou pôsobiacou na teleso a zrýchlením, ktoré mu táto sila udeľuje: **Sila $\boldsymbol{F}$ pôsobiaca na teleso sa rovná súčinu hmotnosti m a zrýchlenia $\boldsymbol{a}$ telesa**. Jednotkou sily v sústave SI je newton (1N = 1 kg·m·s^{-2}).

Pre tiaž (tiažovú silu) telesa platí:

$$\boldsymbol{G} = m\,\boldsymbol{g}\,, \tag{4.4}$$

kde $\boldsymbol{g}$ je zrýchlenie voľného pádu – tiažové zrýchlenie. Tiažové zrýchlenie pri povrchu Zeme je g = 9,81 m·s^{-2}.

3. Tretí Newtonov zákon - ***zákon akcie a reakcie*** – hovorí, že **sily, ktorými na seba navzájom pôsobia dva hmotné body (dve telesá), sú rovnako veľké, opačného smeru,**

pričom pôsobia v jednej vektorovej priamke prechádzajúcej cez oba hmotné body. Ak silu pôsobiacu na jedno teleso nazývame ***akcia***, silu opačného smeru pôsobiacu na druhé teleso, nazývame ***reakcia***.

Princíp superpozície síl dopĺňa tri Newtonove zákony. Hovorí, že ak častici s hmotnosťou m samostatne pôsobiace sily $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ... udeľujú v adekvátnom poradí zrýchlenia $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}_1/m$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_2/m$, ... , potom pri súčasnom pôsobení síl sa častica bude pohybovať so zrýchlením $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + ... = (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + ...)/m$.

Ak sa na podložke nachádza nehybné nevalivé teleso, na ktoré pôsobí rovnobežne s dotykovou rovinou ťažná sila, musí podľa zákona zotrvačnosti na teleso súčasne pôsobiť v opačnom smere rovnako veľká sila statického trenia $\boldsymbol{F}_{TS}$. Tá zabraňuje šmyku telesa po podložke v smere ťažnej sily pokiaľ veľkosť sily statického trenia F_{TS} (veľkosť ťažnej sily) nepresiahne kritickú hodnotu $\mu_S F_N$

$$F_{TS} \leq \mu_S F_N\,, \qquad (4.5)$$

kde μ_S je faktor adhézie (faktor statického trenia) a F_N je veľkosť normálovej zložky sily, ktorou teleso pôsobí kolmo na podložku. Ak ťažná sila prekročí kritickú hodnotu $\mu_S F_N$, začne sa teleso šmýkať v smere ťažnej sily a vtedy proti smeru rýchlosti na teleso pôsobí sila šmykového trenia $\boldsymbol{F}_T$ veľkosti

$$F_T = \mu F_N\,, \qquad (4.6)$$

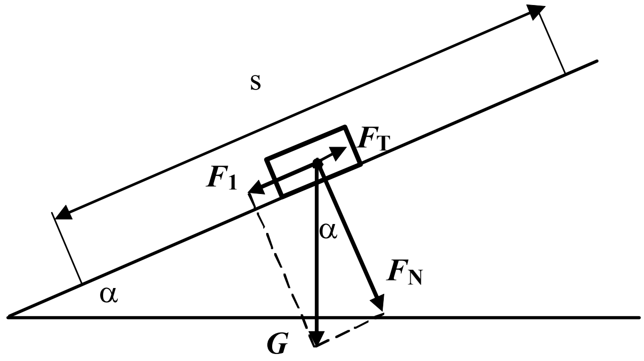
kde μ je faktor šmykového trenia, ktorý je pre ľubovoľnú dvojicu kontaktných povrchov vždy menší než faktor statického trenia μ_S.

Príklady

4.1 Teleso kĺže dolu po naklonenej rovine , ktorá zviera s vodorovnou rovinou uhol $\alpha = 45°$ za pôsobenia trecích síl so zrýchlením $a = 2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Pod akým uhlom β musí byť naklonená táto rovina, aby sa teleso po nej kĺzalo po malom postrčení konštantnou rýchlosťou?

Riešenie

$\alpha = 45°$, $\qquad a = 2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\qquad \beta = ?$



Obr. 4.1

Tiažovú silu $\boldsymbol{G}$ rozložíme na dve kolmé zložky, pozri obr. 4.1. Zložka $\boldsymbol{F}_1$ orientovaná dole naklonenou rovinou spôsobuje pohyb telesa po naklonenej rovine. Druhá zložka $\boldsymbol{F}_N$, kolmá na naklonenú rovinu spôsobuje vznik trecej sily $\boldsymbol{F}_T$ orientovanej proti pohybu telesa. Podľa obr. 4.1 platí:

$F_1 = G \sin\alpha = m\,g \sin\alpha$,

$F_N = G \cos\alpha = m\,g \cos\alpha$,

kde $G = m\,g$. Veľkosť trecej sily je daná vzťahom

$F_T = \mu F_N = \mu m\,g \cos\alpha$,

kde μ je faktor šmykového trenia.

Sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_T$ sú opačne orientované a ležia na jednej vektorovej priamke. Preto podľa 2. Newtonovho zákona pre pohyb telesa dolu po naklonenej rovine platí.

$m\,a = m\,g \sin\alpha - \mu\, m\,g \cos\alpha$

a po úprave pre zrýchlenie a, ktorým sa teleso pohybuje dolu po naklonenej rovine dostaneme

$a = g \sin\alpha - \mu g \cos\alpha$. (a)

Keď je naklonená rovina sklonená pod uhlom β, teleso sa pohybuje rovnomerne, teda zrýchlenie je nulové. Potom pre pohyb telesa platí:

$0 = mg \sin\beta - \mu mg \cos\beta$

$0 = \sin\beta - \mu \cos\beta$ odtiaľ faktor trenia

$$\mu = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} .$$

Dosadením do rovnice (a) bude zrýchlenie

$$a = g\sin\alpha - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}g\cos\alpha\,,$$

$$a = g\sin\alpha - tg\beta\, g\cos\alpha\,.$$

Úpravou pre uhol β ďalej dostaneme

$$\frac{a}{g\cos\alpha} = \frac{g\sin\alpha}{g\cos\alpha} - tg\beta\frac{g\cos\alpha}{g\cos\alpha}$$

$$tg\beta = \frac{g\sin\alpha}{g\cos\alpha} - \frac{a}{g\cos\alpha} = tg\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha}$$

$$tg\beta = tg\,45° - \frac{2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\cos 45°}$$

$$\beta = 32{,}6°\,.$$

4.2 Po malom postrčení sa dolu naklonenou rovinou šmýka teleso. Naklonená rovina sklonená pod uhlom α = 30° má dĺžku s = 3 m. Za akú dobu prejde teleso uvažovanú dráhu s, keď faktor šmykového trenia μ = 0,5?

Riešenie

Pre pohyb telesa po naklonenej rovine môžeme písať, pozri obr. 4.1:

$$F = F_1 - F_\mathrm{T}\,.$$

Výsledná sila sa podľa 2. Newtonovho zákona dá vyjadriť $F = m\,a$.

Zložka tiažovej sily rovnobežná s naklonenou rovinou, pozri obr. 4. 1

$$F_1 = m\,g\sin\alpha\,.$$

Veľkosť trecej sily $F_\mathrm{T} = \mu F_N$, kde zložka tiaže kolmá na naklonenú rovinu $F_\mathrm{N} = mg\cos\alpha$.

Potom $F_\mathrm{T} = \mu\, m\, g\cos\alpha$.

Pohybová rovnica pre pohyb telesa po naklonenej rovine potom bude:

$m\,a = m\,g\sin\alpha - \mu\, m\, g\cos\alpha$, odtiaľ zrýchlenie

$$a = g\sin\alpha - \mu\, g\cos\alpha\,. \qquad \text{(a)}$$

Keďže zrýchlenie je konštantné, pohyb je rovnomerne zrýchlený a začína z pokoja (v_0 = 0), potom pre takýto pohyb pre veľkosť dráhy platí

$$s = \frac{1}{2}a\,t^2\,. \qquad \text{(b)}$$

Dosadením (a) do (b) pre zrýchlenie a dostaneme

$$s = \frac{1}{2}(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)t^2 \quad ,$$

odkiaľ doba t, za ktorú teleso prejde uvažovanú dráhu s je

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} .$$

Číselne doba t je

$$t = \sqrt{\frac{2\cdot 3\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}(\sin 30^\circ - 0{,}5\cos 30^\circ)}}$$

$t = 3{,}02$ s.

4.3 Teleso hmotnosti m sa kĺže dolu po naklonenej rovine s uhlom sklonu α. Keď sa teleso posunulo po dráhe s, jeho rýchlosť sa zväčšila zo začiatočnej hodnoty v_0 na hodnotu v_1. Vypočítajte faktor šmykového trenia μ..

Riešenie

Pre pohyb telesa po naklonenej rovine môžeme napísať, tak ako v predchádzajúcom príklade (podľa obr.4.1)

$$F_1 = m g \sin\alpha$$

$$F_\mathrm{N} = mg\cos\alpha$$

$F_\mathrm{T} = \mu F_N$, potom $F_\mathrm{T} = \mu m g \cos\alpha$

Pohybová rovnica má teda tvar:

$$m a = F_1 - F_\mathrm{T}$$

$$m a = m g \sin\alpha - \mu m g \cos\alpha$$

$$a = g\sin\alpha - \mu g \cos\alpha$$

$\mu g \cos\alpha = g\sin\alpha - a$ odkiaľ faktor trenia

$$\mu = \frac{g\sin\alpha}{g\cos\alpha} - \frac{a}{g\cos\alpha} = tg\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha} .$$

Zrýchlenie v rovnici nepoznáme ale vieme, že je konštantné, potom pre rýchlosť a dráhu platí:

$$v = v_0 + a t$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t .$$

Z týchto dvoch rovníc pre zrýchlenie a vyplýva vzťah:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} \quad .$$

Potom pre hľadaný faktor trenia dostávame:

$$\mu = tg\alpha - \frac{v^2 - v_0^2}{2s\,g\cos\alpha} .$$

4.4 Lyžiar zišiel zo svahu na vodorovnú rovinu. Na začiatku tejto roviny má lyžiar rýchlosť v_0 = 19 m·s^{-1} a zotrvačnosťou priamo došiel do vzdialenosti s = 200 m. Vypočítajte faktor šmykového trenia μ lyží na snehu.

Riešenie

v_0 = 19 m·s^{-1}, s = 200 m, μ=?

Brzdiaca sila je trecia sila, ktorej veľkosť na vodorovnej rovine je daná vzťahom:

$F_{\mathrm{T}} = \mu m g$, kde μ je faktor trenia.

Vzhľadom na kladný smer pohybu lyžiara má pohybová rovnica tvar:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu m g .$$

Riešením dostaneme vzťahy pre rýchlosť a dráhu.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu g$$

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = -\mu g \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$v = v_0 - \mu g t . \tag{a}$$

Rýchlosť $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, potom z predchádzajúcej rovnice dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - \mu g t$$

$\mathrm{d}s = (v_0 - \mu g t)\mathrm{d}t$, z toho pre dráhu vyplýva rovnica:

$$s = v_0 t - \frac{\mu g t^2}{2} . \tag{b}$$

Čas v rovnici pre dráhu nepoznáme, ale vieme, že keď sa lyžiar zastaví, jeho okamžitá rýchlosť bude nulová, teda $v = 0$ a rovnica (a) bude:

$0 = v_0 - \mu g t$ a čas zastavenia je: $t = \dfrac{v_0}{\mu g}$.

Dosadením do rovnice (b) pre dráhu dostaneme

$$s = v_0 \frac{v_0}{\mu g} - \frac{\mu g v_0^2}{2\mu^2 g^2} = \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$ odtiaľ faktor trenia

$$\mu = \frac{v_0^2}{2 s g}.$$

Číselným dosadením pre faktor trenia lyží na snehu dostaneme:

$$\mu = \frac{19^2 \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}}{2 \cdot 200\mathrm{m} \cdot 9{,}81\mathrm{m.s}^{-2}} = 0{,}09199 .$$

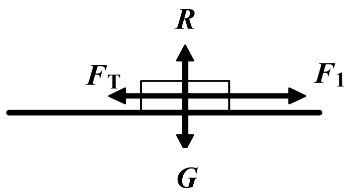
4.5 Po vodorovnej podložke je vodorovným lanom ťahané teleso hmotnosti 50 kg silou 150 N. Faktor šmykového trenia je 0,2.Vypočítajte:

a) veľkosť a smer výslednej sily, ktorá pôsobí na teleso

b) zrýchlenie telesa, ktoré mu výsledná sila udeľuje

Riešenie

m = 50 kg, F_1 = 150 N, μ = 0,2



Obr. 4.2

a) Výslednú silu $\boldsymbol{F}$ vypočítame vektorovým súčtom pôsobiacich síl

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_T + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{R}$

kde $\boldsymbol{R}$ je reakcia od podložky. Pretože $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{G}$, výsledná sila potom je

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_T$.

Veľkosť trecej sily $F_T = \mu m g$.

Pretože sila trenia pôsobí proti smeru pohybu a so silou $\boldsymbol{F}_1$ je na jednej vektorovej priamke, môžeme veľkosť výslednej sily vyjadriť rovnicou.

$F = F_1 - \mu m g$.

Číselne výsledná sila bude

F = 150 N – 0,2. 50 kg . 9,81 m.s^{-2}

F = 51,9 N

a je v smere sily $\boldsymbol{F}_1$, ktorou je ťahané teleso.

b) Zrýchlenie vypočítame zo zákona sily

$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$,

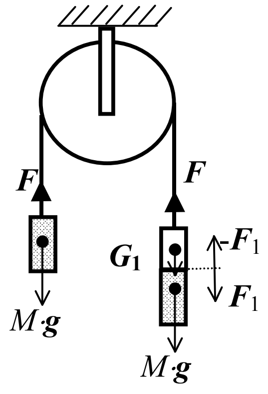
kde $\boldsymbol{F}$ je výsledná sila pôsobiaca na teleso (F = 51,9 N) a $\boldsymbol{a}$ je zrýchlenie, ktoré táto sila telesu udeľuje.

$$a = \frac{F}{m} .$$

Po číselnom dosadení zrýchlenie

$$a = \frac{51{,}9\mathrm{N}}{50\mathrm{kg}} = 1{,}038\mathrm{m.s}^{-2} .$$

4.6 Na koncoch nite zanedbateľnej hmotnosti prevesenej cez kladku visia rovnaké závažia hmotnosti M. K jednému závažiu pridáme prívažok hmotnosti m, pozri obr. 4.3. Vypočítajte rýchlosť v a dráhu s, ktorú prejde závažie s prívažkom za čas t po uvoľnení, keď trenie a odpor vzduchu zanedbávame.



Obr. 4.3

Riešenie

Označenie na obrázku (4. 3) znamená:

$\boldsymbol{F}$ – sila, ktorou niť pôsobí na závažia hmotnosti M

$\boldsymbol{F}_1$ – prítlačná sila prívažku

$\boldsymbol{G} = M\boldsymbol{g}$ – tiažová sila závažia

$\boldsymbol{G}_1 = m\boldsymbol{g}$ – tiažová sila prívažku

Vzhľadom na os s kladným smerom v smere nadol má pohybová rovnica pre ľavé závažie tvar

$$-M\,a = -F + M\,g\,,$$

pre pravé závažie má tvar

$$M\,a = M\,g - F + F_1$$

a pre prívažok má pohybová rovnica tvar

$m\,a = m\,g - F_1$, takže $F_1 = m\,g - m\,a$.

Pridaním prívažku sa celá sústava dá do pohybu, ľavé závažie smerom nahor, pravé s prívažkom smerom nadol.

Z prvých dvoch rovníc dosadením za F_1 dostaneme:

$$2M\,a = m\,g - m\,a$$

$2M\,a + m\,a = m\,g$ odkiaľ zrýchlenie

$$a = \frac{m\,g}{2M + m}\quad .$$

Zrýchlenie je definované ako $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, potom

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{m\,g}{2M + m}$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \frac{m\,g}{2M + m}\mathrm{d}t\,.$$

Rýchlosť bude:

$$v = \frac{m\,g\,t}{2M + m}\,.$$

Dráhu nájdeme vyjadrením rýchlosti ako: $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{m\,g\,t}{2M + m}\quad .$$

Riešením rovnice

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{m g t}{2M + m}\mathrm{d}t \qquad \text{pre dráhu vyplýva}$$

$$s = \frac{m g}{2(2M + m)} t^2 .$$

4.7 V silovom poli sa pohybuje častica hmotnosti m = 5 kg po krivke, ktorej polohový vektor $\boldsymbol{r} = t^3\boldsymbol{i} + 5t\,\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

a) Vypočítajte hybnosť častice a silu, ktorá urýchľuje časticu v čase t.

b) Vypočítajte veľkosť hybnosti a sily v čase t = 2 s.

Riešenie

m = 5 kg, t = 2 s.

a) Hybnosť častice je určená vzťahom: $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Derivovaním polohového vektora dostaneme:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 5\left(3t^2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}\right), \qquad \text{teda}$$

$$\boldsymbol{p} = 15t^2\boldsymbol{i} + 25\boldsymbol{j} . \qquad [\mathrm{m{\cdot}kg{\cdot}s^{-1}}]$$

V čase t = 2s hybnosť častice bude.

$$\boldsymbol{p} = 60\,\boldsymbol{i} + 25\boldsymbol{j} . \quad [\mathrm{m{\cdot}kg{\cdot}s^{-1}}]$$

Sila urýchľujúca časticu podľa 2. Newtonovho zákona je

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} .$$

Keďže $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 3t^2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$,

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\left(3t^2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}\right)}{\mathrm{d}t} = m\,6t\,\boldsymbol{i} = 30t\,\boldsymbol{i} .$$

V čase t = 2s $\quad \boldsymbol{F} = 60\,\boldsymbol{i} \quad$ [N].

b) Veľkosť hybnosti v čase t =2s je

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{60^2 + 25^2}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} = 65\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} ,$$

kde p_x a p_y sú súradnice vektora hybnosti $\boldsymbol{p}$.

Veľkosť sily v čase t =2s bude:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{60^2}\ \mathrm{N} = 60\ \mathrm{N},$$

kde F_x a F_y sú súradnice vektora sily $\boldsymbol{F}$.

4.8 Loďke bola udelená začiatočná rýchlosť v_0. Pri svojom pohybe loďka prekonáva odpor vody úmerný druhej mocnine jej rýchlosti, pričom konštanta úmernosti je k. Hmotnosť loďky je m. Vypočítajte čas t, za ktorý klesne rýchlosť loďky na tretinu pôvodnej hodnoty.

Riešenie

Pohybová rovnica má tvar

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \ ,$$

pričom $F = -k\,v^2$, kde znamienko mínus znamená, že sila pôsobí proti pohybu loďky. Teda

$$-k\,v^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Separáciou premenných t, v a následnou integráciou ďalej dostaneme

$$-\frac{k}{m}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{v^2},$$

$$-\frac{k}{m}\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{\frac{v_0}{3}} \frac{d\,v}{v^2},$$

$$\frac{k}{m}t = -\left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{\frac{v_0}{3}} = \frac{3}{v_0} - \frac{1}{v_0} = \frac{2}{v_0}.$$

Pre čas t potom vyplýva:

$$t = \frac{2m}{v_0 k}.$$

4.9 Na časticu pôsobí sila, ktorá pôsobí stále v tom istom smere a jej hodnota závisí od času t podľa vzťahu $F = F_0 - k\ t$, kde F_0 = 36 N a k = 6 N·s^{-1}. Na začiatku bola častica v pokoji. Počas prvých 10 s prešla častica 100 m. Vypočítajte hmotnosť častice, ak žiadna iná sila na časticu nepôsobí.

Riešenie

$F_0 = 36$ N, $k = 6$ N·s^{-1}, $t_1 = 10$ s, $s_1 = 100$ m, $m = ?$

Pohybová rovnica má tvar.

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_0 - k\,t\,.$$

Separáciou premenných t, v a následnou integráciou ďalej dostaneme

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{m}\left(F_0 - k\,t\right)\mathrm{d}t\,,$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \frac{1}{m}\int_0^t \left(F_0 - k\,t\right)\mathrm{d}t\,,$$ v čase $t = 0$, $v_0 = 0$, preto

$$v = \frac{1}{m}\left(F_0\,t - \frac{k\,t^2}{2}\right).$$

Zo vzťahu $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ si nájdeme závislosť dráhy na čase

$$\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m}\left(F_0\,t - \frac{k\,t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\,,$$

$$\int_0^{s_1} \mathrm{d}s = \frac{1}{m}\int_0^{t_1}\left(F_0 t - \frac{k\,t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\,,$$

$$s_1 = \frac{1}{m}\left(\frac{F_0\,t_1^2}{2} - \frac{k\,t_1^3}{6}\right),$$ odtiaľ hmotnosť častice

$$m = \frac{3F_0\,t_1^2 - k\,t_1^3}{6}\,,$$

$$m = \frac{3\cdot 36\,\mathrm{N}\cdot 10^2\,\mathrm{s}^2 - 6\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot 10^3\,\mathrm{s}^3}{6\cdot 100\,\mathrm{m}} = 8\,\mathrm{kg}\,.$$

4.10 Častica s hmotnosťou m, ktorej bola udelená začiatočná rýchlosť v_0 sa pohybuje v prostredí, ktorého veľkosť odporu F proti pohybu sa mení lineárne s veľkosťou rýchlosti v častice, pričom konštanta úmernosti je k. Akú dráhu s_1 prejde častica až do zastavenia, keď okrem odporu prostredia nepôsobí na ňu žiadna iná sila?

Riešenie

Vzhľadom na kladný smer pohybu má pohybová rovnica častice tvar

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -k\,v\,,$$

$$m\,\mathrm{d}v = -k\,v\,\mathrm{d}t\,.$$

Cieľom je vypočítať dráhu, avšak nie dobu. Preto je potrebné v ostatnej rovnici čas t vylúčiť a zaviesť do nej dráhu s. Vieme, že $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, teda $v\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}s$, potom

$$m\,\mathrm{d}v = -k\,\mathrm{d}s\,,$$

$$\int_{v_0}^{0} m\,\mathrm{d}v = -k\int_{0}^{s_1}\mathrm{d}s\,,$$

$$-m\,v_0 = -k\,s_1\,.$$

Dráha, ktorú prejde častica do zastavenia bude:

$$s_1 = \frac{m\,v_0}{k}\,.$$

4.11 Vagón sa pohybuje po vodorovnej priamej trati a brzdíme ho silou, ktorá sa rovná 0,1 tiaže vagóna. Vypočítajte dobu brzdenia t_1 ako aj dráhu s_1, ktorú od začiatku brzdenia až do zastavenia prejde, ak v okamihu, keď sa začalo brzdiť, mal vagón rýchlosť v_0 = 72 km/hod.

Riešenie

v_0 = 72 km/hod = 20 m/s, $F = 0{,}1\,G = 0{,}1\,mg$, $t_1 = ?$, $s_1 = ?$

Vzhľadom na kladný smer pohybu bude mať pohybová rovnica tvar

$m\,a = -0{,}1\,m\,g$, preto $a = -0{,}1\,g$.

Závislosť rýchlosti od času nájdeme riešením pohybovej rovnice:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -0{,}1\,m\,g\,,$$

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = -\int_{0}^{t} 0{,}1\,g\,\mathrm{d}t\,,$$

$v - v_0 = -0{,}1\,g\,t$ alebo $v = v_0 - 0{,}1\,g\,t$.

V okamihu zastavenia vagóna $v = 0$, preto doba brzdenia bude

$$t_1 = \frac{v_0}{0{,}1\,g} = \frac{20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{0{,}1\cdot 9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}} = 20{,}387\ \mathrm{s}.$$

Závislosť dráhy od času si nájdeme z definície rýchlosti

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\ \text{, teda}\quad v\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}s\,,$$

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \int_0^t (-0{,}1gt + v_0)\mathrm{d}t$$

$$s = -0{,}1\,g\,\frac{t^2}{2} + v_0\,t\,.$$

Dráha, ktorú prejde vagón od začiatku brzdenia až do zastavenia bude:

$$s_1 = -0{,}1\cdot 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot\frac{(20{,}387\mathrm{s})^2}{2} + 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\cdot 20{,}387\mathrm{s} = 203{,}87\ \mathrm{m}\,.$$

4.12 Dve sily, z ktorých jedna je dvakrát väčšia ako druhá, pôsobia v tom istom smere na teleso hmotnosti 10 kg a udelia telesu zrýchlenie 3 m·s^{-2}.

a) Aké sú veľkosti týchto síl?
b) Ak menšiu silu odstránime, aké bude potom zrýchlenie tohto telesa?

Riešenie

m =10 kg, a = 3 m·s^{-2}, $F_1 = 2\,F_2$, F_2 = ? a_1 = ?

a) Pretože sily pôsobia v tom istom smere a zrýchlenie je konštantné môžeme podľa 2. Newtonovho zákona písať

$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ alebo $F = ma$, kde $F = F_1 + F_2 = 2F_2 + F_2 = 3F_2$ je výsledná sila pôsobiaca na teleso, lebo podľa zadania $F_1 = 2\,F_2$. Táto výsledná sila $3F_2$ udelí telesu zrýchlenie a, pričom podľa 2 Newtonovho zákona môžeme ďalej písať

$$3\,F_2 = m\,a\,,$$

$$F_2 = \frac{m\,a}{3}\,.$$

Číselne: $F_2 = \dfrac{10\mathrm{kg}\cdot 3\mathrm{m.s^{-2}}}{3} = 10\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m.s^{-2}} = 10\mathrm{N}$.

Sila $F_1 = 2\,F_2$, preto F_1 = 20 N = 20 kg·m·s^{-2}.

b) Na teleso bude pôsobiť len väčšia sila F_1 = 20 N. Takže zrýchlenie telesa podľa 2. Newtonovho zákona bude

$$a = \frac{F_1}{m} = \frac{20\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{kg}} = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

4.13 Dve geometricky rovnaké telesá guľovitého tvaru zhotovené z dvoch rôznych materiálov hustoty ρ_1 a ρ_2 padajú vo vzduchu. Predpokladáme, že veľkosť odporu vzduchu je úmerná druhej mocnine veľkosti rýchlosti. Určte v akom pomere sú maximálne veľkosti rýchlosti, ktoré telesá dosiahnu pri svojom pohybe.

Riešenie

Telesá sa pohybujú v smere tiažovej sily. Odpor vzduchu má opačný smer. Vzhľadom na kladný smer pohybu má pohybová rovnica telesa tvar

$$m\,a = m\,g - k\,v^2 ,$$

Pričom veľkosť tiažovej sily

$$G = m\,g = V\rho\,g .$$

Keď telesá dosiahnu maximálne rýchlosti, pohyb týchto dvoch telies bude rovnomerný, teda zrýchlenie bude nulové ($F = ma = 0$). Potom pohybové rovnice pre tieto dve telesá, ktoré sú zhotovené z rôznych materiálov ale sú geometricky rovnaké budú v tvare:

$$V\rho_1\,g - k\,v_{1\max}^2 = 0 \text{ alebo } V\rho_1\,g = k\,v_{1\max}^2 , \tag{a}$$

$$V\rho_2\,g - k\,v_{2\max}^2 = 0 \text{ alebo } V\rho_1\,g = k\,v_{1\max}^2 . \tag{b}$$

Ak rovnice (a) a (b) dáme do pomeru, potom

$$\frac{V\,\rho_1\,g}{V\,\rho_2\,g} = \frac{v_{1\max}^2}{v_{2\max}^2} .$$

Úpravou pre pomer maximálnych rýchlostí, ktoré telesá dosiahnu pri svojom pohybe dostávame:

$$\frac{v_{1\max}}{v_{2\max}} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} .$$

5 HYBNOSŤ, IMPULZ SILY, MOMENT HYBNOSTI
PRÁCA, ENERGIA, VÝKON

Teoretický úvod

5.1 Hybnosť

Hybnosť $\boldsymbol{p}$ telesa (častice, hmotného bodu) je vektorová veličina definovaná vzťahom

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{5.1}$$

kde m je hmotnosť telesa a $\boldsymbol{v}$ je jeho rýchlosť. Hmotnosť telesa je kladná skalárna veličina. Vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{v}$ sú teda súhlasne rovnobežné. Z rovnice je zrejmé, že jednotkou hybnosti v sústave jednotiek SI je kg.m.s^{-1}. Pôvodná Newtonova formulácia druhého zákona dynamiky už pojem hybnosti obsahovala:

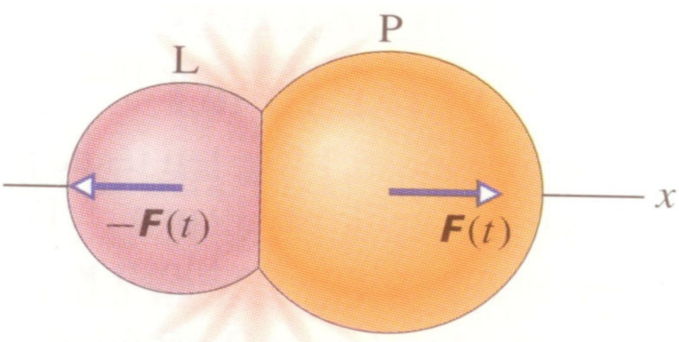
Časová zmena hybnosti telesa je rovná výslednici síl, ktoré na teleso pôsobia. Matematické vyjadrenie tohto zákona má tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{5.2}$$

Predpokladajme, že hmotnosť telesa je konštantná. Dosadením (5.1) do definičného vzťahu (5.2) a úpravou dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{m}\boldsymbol{v}) = \mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{m}\boldsymbol{a} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

5.2 Impulz sily a hybnosť



Obr. 5.1 Zrážka dvoch telies L a P

Na obr. 5.1 sú nakreslené dve rovnako veľké opačne orientované sily $\boldsymbol{F}(t)$ a $-\boldsymbol{F}(t)$, ktorými na seba pôsobia dve telesá počas jednoduchej priamej zrážky. Pred zrážkou a po zrážke telesá na seba žiadnymi silami nepôsobia. Vplyvom vzájomného silového pôsobenia telies dôjde ku zmene hybnosti každého z nich. Táto zmena závisí nielen od síl, ale aj od doby ich pôsobenia Δt. Odpovedajúci vzťah získame pomocou druhého Newtonovho zákona napríklad pre teleso P na obr. 5.1, ak ho napíšeme v tvare

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} .$$

Potom

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t , \tag{5.3}$$

kde $\boldsymbol{F}(t)$ je časovo premenná sila. Integráciou rovnice (5.3) v medziach od t_1 (bezprostredne pred zrážkou) po t_2 (bezprostredne po zrážke), ktoré určujú časový interval $\Delta t,$ v ktorom zrážka prebehla, dostávame

$$\int_{p1}^{p2} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{t1}^{t2} \boldsymbol{F}(\mathrm{t})\, \mathrm{d}t . \tag{5.4}$$

Integráciou ľavej strany rovnice (5.4) dostávame zmenu hybnosti $\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1$ telesa P, ku ktorej pri zrážke došlo. Výraz na pravej strane závisí od časového priebehu interakčných síl pri zrážke a nazývame ho **impulzom sily** $\boldsymbol{I}$ (časovým účinkom sily)

$$\boldsymbol{I} = \int_{t1}^{t2} \boldsymbol{F}(\mathrm{t})\, \mathrm{d}t = \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t_2 - t_1) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}\Delta t , \tag{5.5}$$

kde $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$ je stredná (priemerná) sila pôsobiaca na teleso. Ak na teleso pôsobí viacero síl, potom vo vzťahoch (5.4) a (5.5) je $\boldsymbol{F}$ výslednica síl, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$ je stredná výslednica síl. Zmena hybnosti telesa pri zrážke je daná impulzom výslednice síl, ktoré na toto teleso pôsobia

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{I} . \tag{5.6}$$

Impulz a hybnosť je možné veľmi dobre aplikovať na prípad zrážok telies. Najjednoduchším prípadom je priama zrážka (tiež nazývaná čelná alebo stredová). Pri nej ležia počiatočné aj konečné rýchlosti telies v jednej priamke. Uvažujme priamu zrážku dvoch telies o hmotnostiach m_1 a m_2 a pre jednoduchosť predpokladajme, že teleso hmotnosti m_2 je pred zrážkou v pokoji, t.j. $v_{2,1} = 0$. Toto teleso budeme nazývať "terčom". Teleso hmotnosti m_1 s počiatočnou rýchlosťou $v_{1,1}$ bude predstavovať "strelu". Ďalej predpokladajme, že sústava tvorená uvažovanými dvomi telesami je uzatvorená, t.j. žiadne ďalšie častice do sústavy nevstupujú, a je izolovaná (na sústavu nepôsobia vonkajšie sily). V izolovanej sústave platí zákon zachovania hybnosti sústavy (pozri kapitolu 8), celková hybnosť izolovanej sústavy ostáva rovnaká bez ohľadu na charakter zrážky. Predpokladajme ďalej, že zrážka nezmenila celkovú kinetickú energiu sústavy (pozri vzťah (5.21)). Takáto zrážka sa nazýva **pružná** alebo **elastická**. Pri pružnej zrážke telies sa vo všeobecnosti mení kinetická energia jednotlivých telies podobne, ako sa mení aj hybnosť jednotlivých telies, ale celková kinetická energia sústavy sa pri pružných zrážkach nemení. Zo zákona zachovania hybnosti izolovanej sústavy a zo zachovania kinetickej energie sústavy pri pružnej priamej zrážke dostaneme dve rovnice

$$m_1 v_{1,1} = m_1 v_{1,2} + m_2 v_{2,2} \tag{5.7}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,1}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,2}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,2}^2 \tag{5.8}$$

kde $v_{1,1}$ je súradnica počiatočnej rýchlosti a $v_{1,2}$ je súradnica konečnej rýchlosti telesa hmotnosti m_1 („strely“) a $v_{2,2}$ je súradnica konečnej rýchlosti telesa hmotnosti m_2 („terča“) vzhľadom na os, po ktorej sa obe telesá pohybujú.

5.3 Moment hybnosti

Celý rad veličín popisujúcich posuvný pohyb telesa má svoje analógie vzťahujúce sa k otáčavému pohybu. Hybnosť má tiež takúto analógiu vo veličine, ktorá má pre popis otáčavého pohybu podobný význam, ako hybnosť pre popis posuvného pohybu. Je ňou **moment hybnosti**. Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ hmotného bodu s hybnosťou $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ vzhľadom k počiatku súradnicovej sústavy O je vektorová veličina definovaná vzťahom

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \ , \tag{5.9}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor hmotného bodu vzhľadom k bodu O. Smer momentu hybnosti určíme pomocou pravidla pravej ruky: ak zahnuté prsty ukazujú natočenie vektora $\boldsymbol{r}$ do smeru vektora $\boldsymbol{p}$, potom vystretý palec ukazuje smer vektora $\boldsymbol{L}$. Jednotkou momentu hybnosti je kg.m^2.s^{-1}. Veľkosť vektora $\boldsymbol{L}$ určíme pomocou vzťahu

$$L = r\, p \sin \varphi = pd \ , \tag{5.10}$$

kde φ je uhol medzi vektormi $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$ a $d = r \sin \varphi$ je vzdialenosť vektorovej priamky hybnosti $\boldsymbol{p}$ od bodu O.

Analógiou sily $\boldsymbol{F}$ pri prechode k otáčavému pohybu je moment sily $\boldsymbol{M}$ definovaný vzťahom

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \ , \tag{5.11}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor hmotného bodu vzhľadom k bodu O. Ak zahnuté prsty pravej ruky ukazujú natočenie vektora $\boldsymbol{r}$ do smeru vektora $\boldsymbol{F}$, potom vystretý palec ukazuje smer vektora $\boldsymbol{M}$. Jednotkou momentu sily je N.m (newtonmeter). Veľkosť vektora $\boldsymbol{M}$ určíme pomocou vzťahu

$$M = r\,F \ \sin\varphi,$$

kde φ je uhol medzi vektormi $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$.

Ako bolo povedané, veličiny popisujúce posuvný pohyb majú svoje analógie v otáčavom pohybe. Môžeme preto prirodzene predpokladať, že pre časovú zmenu momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ hmotného bodu a výsledný moment $\boldsymbol{M}$ všetkých síl, ktoré na hmotný bod pôsobia, bude platiť obdoba druhého Newtonovho zákona. Druhý Newtonov zákon (5.2) vyjadruje súvislosť časovej zmeny hybnosti hmotného bodu a výslednice síl, ktoré na hmotný bod pôsobia. Zrejme hľadaná analógia druhého Newtonovho zákona bude mať obdobný tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{M}_i \ . \qquad (5.12)$$

Časová zmena momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ hmotného bodu sa rovná súčtu $\boldsymbol{M}$ momentov všetkých síl, ktoré na hmotný bod pôsobia.

5.4 Práca, energia, výkon

Pri presune telesa v smere elementárneho vektora d$\boldsymbol{r}$ vykoná sila $\boldsymbol{F}$ pôsobiaca na toto teleso elementárnu prácu, ktorá je skalárnym súčinom vektora $\boldsymbol{F}$ a vektora d$\boldsymbol{r}$

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \ . \qquad (5.13)$$

Fyzikálnou jednotkou práce je joule (J = N.m). Pri presune telesa z bodu 1 s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_1$ do bodu 2 s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_2$ po nejakej trajektórii vykoná sila $\boldsymbol{F}$ pôsobiaca na toto teleso prácu (dráhový účinok sily)

$$W = \int_{r1}^{r2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (5.14)$$

Ak práca W sily $\boldsymbol{F}$ nezávisí od tvaru trajektórie pri presune telesa z bodu 1 do bodu 2, potom sa sila $\boldsymbol{F}$ nazýva *konzervatívna*. Konštantná sila $\boldsymbol{F}$ nezávisiaca od polohy presúvaného telesa na trajektórii vykoná zrejme prácu

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \int_{r1}^{r2} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot \left(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\right) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d} = F\, d \cos\varphi \ , \qquad (5.15)$$

kde $\boldsymbol{d}$ je vektor posunutia telesa so začiatkom v bode 1 a s koncom v bode 2, d je veľkosť vektora $\boldsymbol{d}$ a uhol φ je uhol medzi smerom sily $\boldsymbol{F}$ a vektorom posunutia $\boldsymbol{d}$ telesa.

Na základe vzťahu (5.15) môžeme určiť prácu W_g konštantnej tiažovej sily $m\boldsymbol{g}$ pri presune telesa v homogénnom tiažovom poli z bodu 1 vo výške h_1 nad povrchom Zeme do bodu 2 vo výške h_2 nad povrchom Zeme

$$W_g = mg\, d \cos\varphi = mgh_1 - mgh_2 \ . \qquad (5.16)$$

Pri poklese telesa $h_2 < h_1$, uhol φ je ostrý a práca W_g tiažovej sily je kladná. Pri stúpaní telesa $h_2 > h_1$, uhol φ je tupý a práca W_g tiažovej sily je záporná. Práca W_g tiažovej sily $m\boldsymbol{g}$ nezávisí od tvaru trajektórie pri presune telesa z bodu 1 do bodu 2, preto je tiažová sila $m\boldsymbol{g}$ konzervatívna.

Ak pri presune telesa z povrchu Zeme do výšky h pôsobí na teleso vonkajšia sila $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, ktorá tiažovú silu prekonáva ($\boldsymbol{F}_{\text{ext}} = -\, m\boldsymbol{g}$), potom podľa (5.15) taká vonkajšia sila vykoná prácu

$$W_{\text{ext}} = F_{\text{ext}}\, d \cos\varphi = mgh\ . \tag{5.17}$$

Práca takej externej sily sa v procese presunu telesa z povrchu Zeme do výšky h mení na tzv. potenciálnu energiu E_{p} telesa v tiažovom poli Zeme

$$E_{\text{p}} = mgh\ . \tag{5.18}$$

V mechanike pojem „energia“ telesa označuje schopnosť telesa konať prácu. Potenciálnu energiu má napr. závažie vo výške h nad povrchom Zeme, pretože ak ho spojíme lanom cez pevnú kladku s výťahom rovnakej hmotnosti, ktorý je na povrchu Zeme a udelíme závažiu nejakú počiatočnú rýchlosť smerom k povrchu Zeme, závažie touto rýchlosťou vytiahne výťah do výšky h (vykoná prácu).

Pomocou definície (5.18) môžeme rovnicu (5.16) zapísať v tvare

$$W_g = E_{\text{p}1} - E_{\text{p}2} = -\,(E_{\text{p}2} - E_{\text{p}1}) = -\,\Delta E_{\text{p}}\ . \tag{5.19}$$

Práca W_g konzervatívnej tiažovej sily sa teda rovná zápornej zmene (úbytku) potenciálnej energie telesa.

Ak do vzťahu (5.14) dosadíme výslednicu síl určenú vzťahom (5.2), po úprave dostaneme

$$W = \int_{r1}^{r2} \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r1}^{r2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = m\int_{r1}^{r2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = m\int_{v1}^{v2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = m\int_{v1}^{v2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = m\int_{v1}^{v2} v\mathrm{d}v = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}\ . \tag{5.20}$$

Ak definujeme kinetickú energiu telesa vzťahom

$$E_{\text{k}} = \frac{mv^2}{2}\ . \tag{5.21}$$

potom môžeme prácu W výslednice síl danú rovnicou (5.20) zapísať v tvare

$$W = E_{\text{k}2} - E_{\text{k}1} = \Delta E_{\text{k}}\ . \tag{5.22}$$

Práca W výslednice síl sa teda rovná zmene kinetickej energie telesa. Výslednica síl vykoná kladnú prácu ak zväčší kinetickú energiu telesa ($\Delta E_{\text{k}} > 0$), vykoná zápornú prácu ak zmenší kinetickú energiu telesa ($\Delta E_{\text{k}} < 0$) a nevykoná žiadnu prácu ak nezmení kinetickú energiu telesa ($\Delta E_{\text{k}} = 0$). Práca, potenciálna energia a kinetická energia sú skalárne veličiny. Ich fyzikálna jednotka je joule (1 J = 1N.m). V mechanike pojem „energia“ telesa označuje schopnosť telesa konať prácu. Kinetickú energiu má napr. letiaca strela, pretože je schopná nárazom do prekážky urobiť dieru do prekážky. Hodnota energie je určená stavom telesa (sústavy telies). *Stav* je súbor podmienok, v ktorých sa teleso nachádza, t.j. súbor hodnôt veličín (parametrov), ktorými je charakterizovaný. Kinetická energia E_k závisí od pohybového stavu telesa. Ak sa pohybuje teleso rýchlejšie, má väčšiu kinetickú energiu, ak je teleso v pokoji, jeho kinetická energia je nulová, pozri definíciu (5.21). Táto definícia je platná v prípade, že rýchlosť telesa je omnoho menšia než rýchlosť šírenia svetla vo vákuu.

Mechanická energia E telesa je súčet kinetickej a potenciálnej energie telesa

$$E = E_k + E_p \; . \qquad (5.23)$$

Ak by na teleso pri jeho pohybe pôsobila iba konzervatívna tiažová sila $m\boldsymbol{g}$ (voľný pád, vrhy), potom z rovnosti pravých strán rovníc (5.19) a (5.22) vyplýva

$$\Delta E_k = - \Delta E_p \, , \text{ t.j.} \qquad E_{k2} - E_{k1} = - (E_{p2} - E_{p1}) \qquad (5.24)$$

a po úprave dostaneme

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1} \, , \text{ t.j.} \qquad E_2 = E_1 = \text{konšt} \; . \qquad (5.25)$$

To znamená, že mechanická energia telesa, na ktoré pôsobí iba konzervatívna tiažová sila, sa pri pohybe telesa nemení. Je to dôsledok **zákona zachovania mechanickej energie:** *Ak na telesá izolovanej sústavy pôsobia iba konzervatívne vnútorné sily, potom sa celková mechanická energia izolovanej sústavy zachováva.* Celková práca W konzervatívnych vnútorných síl sa totiž rovná zmene ΔE_k celkovej kinetickej energie a zároveň sa rovná zápornej zmene (úbytku) $-\Delta E_p$ celkovej potenciálnej energie izolovanej sústavy pri jej prechode zo stavu 1 do stavu 2. Celková potenciálna energia izolovanej sústavy závisí od povahy konzervatívnych síl, v konečnom dôsledku závisí od polohy telies izolovanej sústavy a vyjadruje sa iným vzťahom, než je vzťah (5.18), pozri kapitolu 6. V izolovanej sústave s konzervatívnymi vnútornými silami je teda možná len premena potenciálnej energie na kinetickú a naopak, celková mechanická energia sa meniť nemôže

$$E = E_k + E_p = \text{konšt} \; . \qquad (5.26)$$

Okrem konzervatívnych síl existujú aj tzv. *disipatívne sily* (napr. odpor prostredia, trecia sila,...), ktorá pri pohybe telesa mení mechanickú energiu na inú formu energie (teplo,...), a preto sa mechanická energia telesa zmenšuje. Práca W_d výslednice disipatívnych síl je záporná a je rovná zmene mechanickej energie telesa

$$W_d = E_2 - E_1 < 0 \; . \qquad (5.27)$$

Vzťah (5.27) platí aj pre izolovanú sústavu, v ktorej okrem konzervatívnych vnútorných síl pôsobia aj disipatívne vnútorné sily. W_d je vtedy celková práca disipatívnych síl, E_2 je celková mechanická energia v konečnom stave 2, E_1 je celková mechanická energia sústavy v počiatočnom stave 1.

Mierou toho, ako rýchlo koná určitá sila prácu, je ***výkon***. Ak sila $\boldsymbol{F}$ vykoná prácu ΔW za dobu Δt, je jej priemerný výkon v danom časovom intervale definovaný pomerom

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} . \tag{5.28}$$

Okamžitý výkon P odpovedá okamžitej rýchlosti konania práce a je teda limitným prípadom priemerného výkonu pre $\Delta t \rightarrow 0$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} . \tag{5.29}$$

Jednotkou výkonu je watt (1 W = 1 J.s^{-1}). Ak do vzťahu (5.29) dosadíme vzťah (5.13), potom môžeme okamžitý výkon P vyjadriť aj pomocou sily $\boldsymbol{F}$ pôsobiacej na teleso a rýchlosťou telesa $\boldsymbol{v}$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = Fv \cos \varphi , \tag{5.30}$$

kde φ je uhol medzi vektorom $\boldsymbol{F}$ a vektorom $\boldsymbol{v}$.

Príklady

5.1 Futbalová lopta s hmotnosťou m = 140 g letí tesne pred odkopnutím nohou hráča vodorovne rýchlosťou $\boldsymbol{v}_1$ veľkosti v_1 = 39 m.s^{-1}. Po odkopnutí letí lopta opačným smerom rovnako veľkou rýchlosťou $\boldsymbol{v}_2$. Zrážka lopty s nohou hráča prebehla za dobu Δt = 1,2 ms.

a) Určite impulz $\boldsymbol{I}$ sily, ktorá na loptu pôsobila.

b) Určite priemernú silu $\boldsymbol{F}_s$, ktorá pri zrážke pôsobila na loptu.

Riešenie

a) Impulz sily vypočítame zo vzťahu (5.6) $\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{I}$, upraveného pre jednorozmerný prípad pohybu po osi x . Za kladný smer osi x zvolíme smer rýchlosti $\boldsymbol{v}_2$.

$I = \Delta p = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 =$ 0,14 kg.39 m.s^{-1} - 0,14 kg.(-39 m.s^{-1}) = 10,92 kg.m.s^{-1}.

b) Zo vzťahov (5.5), (5.6) dostávame

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}_\mathrm{s}\Delta t \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{s} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{10{,}92\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{0{,}0012\,\mathrm{s}} = 9100\,\mathrm{N} .$$

Súradnice impulzu aj priemernej sily sú kladné, preto impulz aj priemerná sila pôsobili na loptu v smere rýchlosti $\boldsymbol{v}_2$. Treba si uvedomiť, že sila je obrovská. Jej veľkosť sa približne rovná tiaži telesa o hmotnosti jednej tony!

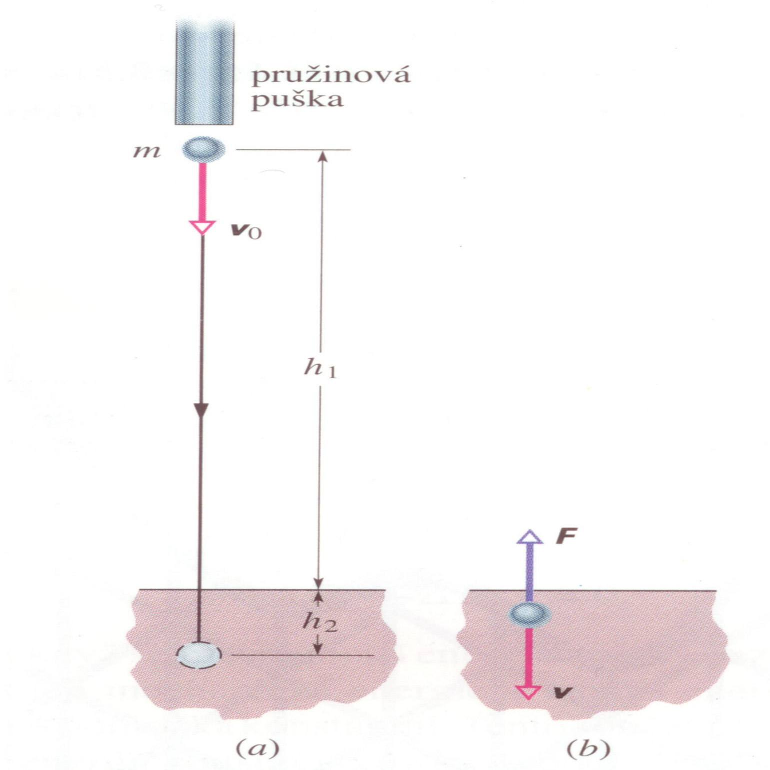
5.2 Gulečníkové tágo udrie do stojacej gule priemernou silou veľkosti $F_s = 50$ N. Úder trvá dobu $\Delta t = 1$ ms. Akú rýchlosť v získa guľa, ak jej hmotnosť je $m = 0{,}2$ kg?

Riešenie

Z rovníc (5.6) a (5.5) získame vzťahy vzhľadom na os orientovanú v smere rýchlosti gule

$$p_2 - p_1 = mv - 0 = F_s\,\Delta t, \qquad v = \frac{F_s \Delta t}{m} = \frac{50\,\mathrm{N}\cdot 0{,}001\,\mathrm{s}}{0{,}2\,\mathrm{kg}} = 0{,}25\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\ .$$

5.3 Oceľová guľôčka s hmotnosťou m = 5,2 g je vystrelená zvisle dole z výšky $h_1 = 18$ m. Jej počiatočná rýchlosť má veľkosť $v_0 = 14$ m/s (obr. 5.2 a). Guľôčka sa zaryje do piesku a zastaví sa v hĺbke $h_2 = 21$ cm. K akej zmene mechanickej energie guľôčky pritom došlo?



Obr. 5.2

Riešenie

V mieste 2, kde sa guľôčka zastavila, je podľa vzťahu (5.21) jej kinetická energia E_{k2} nulová a podľa vzťahu (5.18) je jej potenciálna energia $E_{p2} = - mgh_2$ (guľôčka uviazla pod povrchom Zeme v hĺbke h_2). V mieste 1 vo výške h_1 nad povrchom Zeme mala guľôčka podľa vzťahu (5.18) potenciálnu energiu $E_{p1} = mgh_1$ a podľa vzťahu (5.21) mala kinetickú energiu $E_{k1} = \frac{1}{2} m v_0^2$. Použitím vzťahu (5.27) dostávame

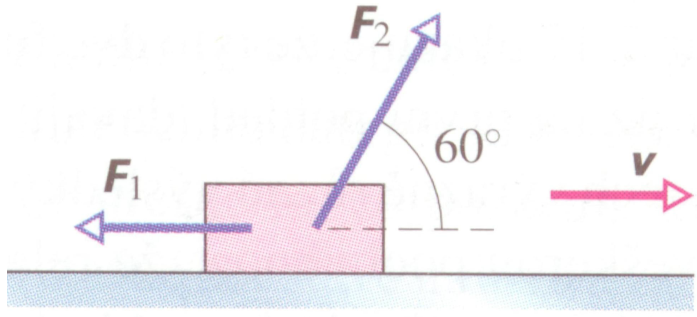
$$W_d = \Delta E = E_2 - E_1 = E_{k2} + E_{p2} - \left(E_{k1} + E_{p1}\right) = \left(0 - mgh_2\right) - \left(\frac{mv_0^2}{2} + mgh_1\right).$$

Po úprave a dosadení dostaneme

$$W_d = \Delta E = -m\left(\frac{v_0^2}{2} + g\left(h_1 + h_2\right)\right) = -5{,}2 \cdot 10^{-3}\left(\frac{14^2}{2} + 9{,}81(18 + 0{,}21)\right)\mathrm{J} = \text{-}1{,}439\,\mathrm{J}\,,$$

kde $(h_1 + h_2)$ je celkové posunutie guľôčky. Pri zvislom vrhu nadol sa mechanická energia guľôčky nemenila. Zmena mechanickej energie sa rovná práci disipatívnej sily $\boldsymbol{F}$, ktorou piesok pôsobil na guľôčku v priebehu zarývania sa guľôčky do piesku (obr. 5.2 b).

5.4 Na obr. 5.3 sú vyznačené sily $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ pôsobiace na krabicu, ktorá sa kĺže po dokonale hladkej vodorovnej podlahe (bez trenia) smerom vpravo. Sila $\boldsymbol{F}_1$ je vodorovná a má veľkosť 2,0 N a sila $\boldsymbol{F}_2$ je od podlahy odklonená o 60° a jej veľkosť je 4,0 N. Rýchlosť krabice v určitom okamihu má veľkosť $v = 3{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$.
Aký je výkon každej z obidvoch síl v tomto okamihu? Aký je ich celkový výkon?



Obr. 5.3

Riešenie

Výkon jednotlivých síl zistíme pomocou vzťahu (5.30). Sila $\boldsymbol{F}_1$ zviera s rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ uhol $\varphi = 180^{\circ}$, takže jej okamžitý výkon je

$P_1 = F_1\, v\cos\varphi = 2{,}0\ \mathrm{N}.3{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}.\cos 180^{\circ} = -6{,}0\ \mathrm{J.s^{-1}} = -6{,}0\ \mathrm{W}$.

Záporný výsledok ukazuje, že sila $\boldsymbol{F}_1$ *spotrebováva* prácu s rýchlosťou 6 J za 1 s, resp. s výkonom 6 W. Uhol medzi silou $\boldsymbol{F}_2$ a rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ je $\varphi = 60^{\circ}$, platí teda

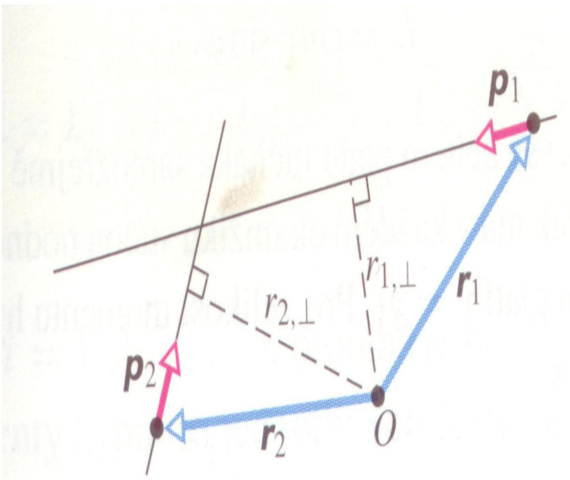
$P_2 = F_2\, v\cos\varphi = 4{,}0\ \mathrm{N}.3{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}.\cos 60^{\circ} = 6{,}0\ \mathrm{W}$

Z kladného výsledku vyplýva. že sila $\boldsymbol{F}_2$ *koná* (kladnú) prácu rýchlosťou 6 J za 1 s, resp. s výkonom 6 W. Celkový výkon je súčtom oboch získaných hodnôt

$P_c = P_1 + P_2 = -6{,}0\ \mathrm{W} + 6{,}0\ \mathrm{W} = 0$

Celkový okamžitý výkon síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je v danom okamihu nulový.

5.5 Na obr. 5.4 je pohľad zhora na dve častice pohybujúce sa s konštantnými hybnosťami po vodorovnej rovine. Častica 1, ktorej hybnosť má veľkosť $p_1 = 5{,}0\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$, je práve v mieste s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_1$ a minie bod O (ležiaci v rovine) vo vzdialenosti $d_1 = 2{,}0$ m. Veľkosť hybnosti častice 2 je v danom okamihu $p_2 = 2{,}0\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$ s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_2$. Častica 2 minie bod O vo vzdialenosti $d_2 = 4{,}0$ m. Vypočítajte výsledný moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ tejto dvojčasticovej sústavy vzhľadom k bodu O.



Obr. 5.4

Riešenie

Najprv vypočítame momenty hybnosti $\boldsymbol{L}_1$ a $\boldsymbol{L}_2$ jednotlivých častíc. Veľkosť L_1 vektora $\boldsymbol{L}_1$ určíme vzťahom (5.10), do ktorého dosadíme $d_1 = 2{,}0$ m a $p_1 = 5{,}0\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$,

$L_1 = p_1 d_1 = 5{,}0\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}.\ 2{,}0\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$.

Smer vektora $\boldsymbol{L}_1$ je podľa pravidla pravej ruky pre vektorový súčin $\boldsymbol{r_1}$ x $\boldsymbol{p_1}$ kolmý k rovine obrázku a smeruje k pozorovateľovi (nad rovinu). Tento smer označíme za kladný v súlade so smerom otáčania vektora $\boldsymbol{r}_1$ proti smeru chodu hodinových ručičiek. Podobne určíme veľkosť L_2 momentu hybnosti $\boldsymbol{L_2}$ častice 2:

$L_2 = p_2 d_2 = 2{,}0\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}.\ 4{,}0\ \mathrm{m} = 8{,}0\ \mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$.

Vektorový súčin $\boldsymbol{r}_2$ x $\boldsymbol{p}_2$ je podľa pravidla pravej ruky opäť kolmý k rovine obrázku, ale teraz smeruje od pozorovateľa (za rovinu). Tento smer je záporný, lebo odpovedá otáčaniu vektora $\boldsymbol{r}_2$ v smere chodu hodinových ručičiek.

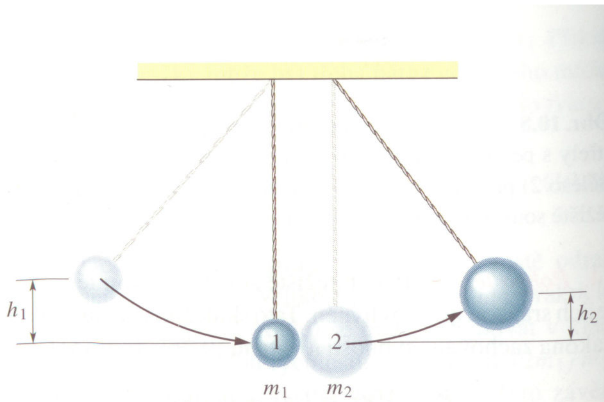
Výsledný moment hybnosti sústavy má teda veľkosť

$L = L_1 - L_2 = (10 - 8)\ \mathrm{kg.m^2.s^{-1}} = 2\ \mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$.

Kladné znamienko získanej hodnoty odpovedá skutočnosti, že výsledný moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ je kolmý na rovinu obrázku a smeruje k pozorovateľovi (nad rovinu).

5.6 Dve kovové gule sú zavesené na zvislých závesoch tak, že sa práve dotýkajú (pozri obr. 5.5). Guľa 1 má hmotnosť $m_1 = 30$ g, hmotnosť gule 2 je $m_2 = 75$ g. Guľu 1 vychýlime vľavo do výšky $h_1 = 8{,}0$ cm a uvoľníme.

Určite rýchlosť $\boldsymbol{v}_{1,2}$ gule 1 tesne po pružnej priamej zrážke s guľou 2.



Obr. 5.5

Riešenie

Označíme $\boldsymbol{v}_{1,1}$ rýchlosť gule 1 tesne pred zrážkou. Pri pohybe gule 1 z ľavej úvrate do miesta zrážky s guľou 2 pôsobia na guľu 1 dve sily. Prvou silou je dostredivá sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ závesu, ktorá zakrivuje trajektóriu gule 1 do tvaru časti kružnice (do oblúka), avšak podľa vzťahu

(5.13) prácu nekoná, lebo je kolmá k vektoru elementárneho posunutia d$\boldsymbol{r}$ gule 1. Druhou silou je konzervatívna tiažová sila $m_1\boldsymbol{g}$, ktorá mechanickú energiu gule 1 nemení, avšak mení jej potenciálnu energiu na energiu kinetickú. Ak hladinou nulovej potenciálnej energie bude vodorovná rovina prechádzajúca miestom zrážky, potom bezprostredne po uvoľnení gule 1 je jej kinetická energia nulová a jej potenciálna energia má podľa vzťahu (5.18) hodnotu m_1gh_1. Tesne pred zrážkou je kinetická energia gule 1 rovná potenciálnej energii gule 1 v ľavej úvrati

$$\frac{m_1 v_{1,1}^2}{2} = mgh_1 \quad \Rightarrow \quad v_{1,1} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}08}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 1{,}253\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Rýchlosť gule 1 tesne pred zrážkou je teda 1,253 m.s^{-1}.

Guľa 1 sa síce pohybuje po oblúku, avšak v okamihu zrážky je vektor jej rýchlosti vodorovný. Sústavu gúľ pri zrážke môžeme považovať za izolovanú, pretože vonkajšie tiažové sily sú kompenzované vonkajšími reakciami závesov. Pri pružnej priamej zrážke „strely“ s „terčom“ sa celková kinetická energia sústavy nemení. Platia teda vzťahy (5.7) a (5.8) pre súradnice rýchlostí gúľ vzhľadom na os orientovanú doprava. Ich vhodnými úpravami môžeme pomerne rýchlo vylúčiť irelevantnú neznámu $v_{2,2}$:

$$m_2 v_{2,2} = m_1 (v_{1,1} - v_{1,2}) \qquad \text{(a)}$$

$$m_2 v_{2,2}^2 = m_1 (v_{1,1}^2 - v_{1,2}^2) \qquad \text{(b)}$$

Ak rovnicu (a) umocníme a adekvátne strany podelíme adekvátnymi stranami rovnice (b), potom dostaneme

$$m_2 = \frac{m_1(v_{1,1} - v_{1,2})}{v_{1,1} + v_{1,2}} \quad \Rightarrow \quad v_{1,2} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,1}}{m_1 + m_2} = \frac{(0{,}03 - 0{,}075)\cdot 1{,}253}{0{,}03 + 0{,}075}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = -0{,}537\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Súradnica rýchlosti gule 1 tesne po zrážke je záporná, preto sa guľa 1 pohybuje po zrážke doľava. Ak by guľa 1 mala väčšiu hmotnosť než guľa 2, pohybovala by sa po zrážke doprava.

5.7 V obrázku 5.5 určite, do akej výšky h'_1 vystúpi guľa 1 po zrážke.

Riešenie

Na začiatku spätného pohybu má guľa 1 kinetickú energiu $\frac{1}{2} m_1 v_{1,2}^2$ a tiažová potenciálna energia je nulová. Pohyb gule sa obracia v najvyššom bode trajektórie, t.j. vo výške h'_1 . Tu je jej kinetická energia nulová a potenciálna energia má hodnotu $m_1gh'_1$. Zo zákona zachovania mechanickej energie dostávame

$$m_1 g h_1' = \frac{m_1 v_{1,2}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h_1' = \frac{v_{1,2}^2}{2g} = \frac{(-0{,}537\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}} = 0{,}0147\,\mathrm{m} = 1{,}47\,\mathrm{cm}.$$

5.8 Lopta hmotnosti m = 200 g narazila na stenu v smere, ktorý zviera s normálou k stene uhol $\alpha = 60^{\circ}$ a bez straty rýchlosti sa od steny odrazila pod rovnakým uhlom (obr. 5.6). Vypočítajte veľkosť F_s strednej sily $\boldsymbol{F}_s$ pôsobiacej na loptu pri náraze, ak rýchlosť lopty bola pred nárazom v = 5 m.s^{-1} a náraz trval Δt = 0,05 s.

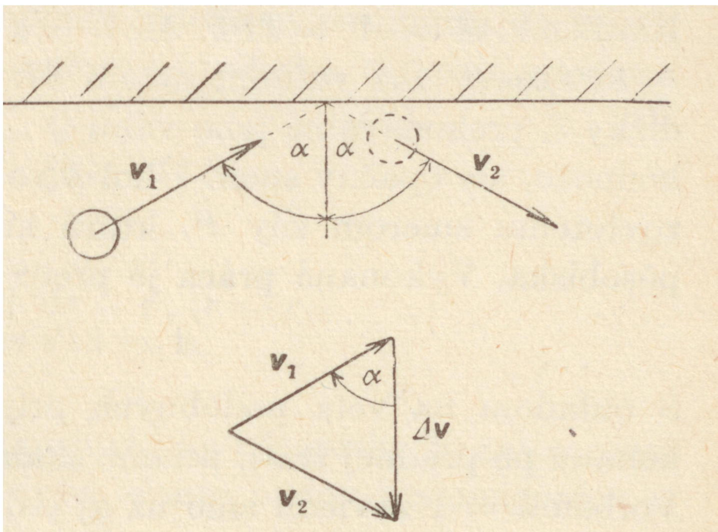
Riešenie

Podľa obr. 5.6 je zmena rýchlosti $\Delta \boldsymbol{v}$ (zmena hybnosti $\Delta \boldsymbol{p}$) lopty a tým aj stredná sila $\boldsymbol{F}_s$ orientovaná kolmo od steny. Pre veľkosť zmeny rýchlosti platí

$$\Delta v = \left|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\right| = 2v\cos\alpha \,.$$

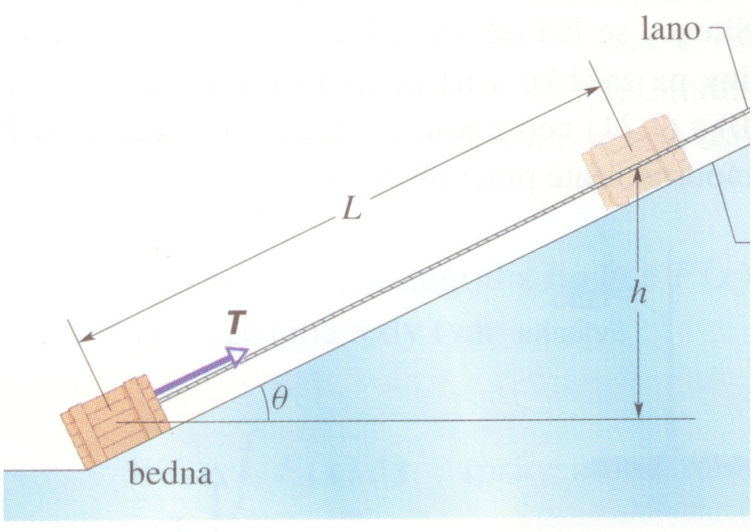
Zo vzťahov (5.5), (5.6) dostávame

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}_s \Delta t \quad \Rightarrow \quad F_s = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} = \frac{2\cdot 0{,}2\,\mathrm{kg}\cdot 5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\cos 60^{\circ}}{0{,}05\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{N}\,.$$



Obr. 5.6

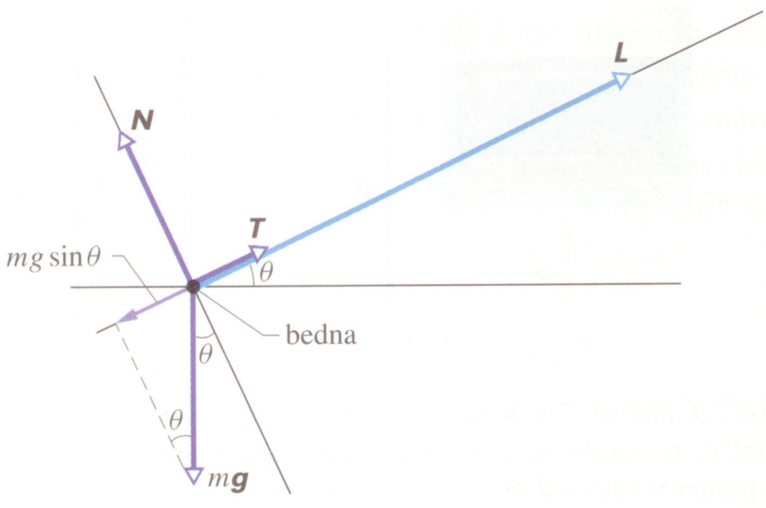
5.9 Debna, ktorá bola na začiatku v pokoji, je ťahaná lanom smerom hore po dokonale hladkej šikmej rampe. Pohyb ťažného lana sa zastavil keď debna prešla vzdialenosť L = 5,70 m a zdvihla sa tak do výšky h = 2,50 m nad počiatočnú úroveň (obr. 5.7). Akú prácu W_g pritom vykonala tiažová sila $m\boldsymbol{g}$?



Obr. 5.7

Riešenie

Hľadanú prácu vypočítame podľa vzťahu (5.15) pre veľkosť posunutia $d = L$. Uhol φ medzi tiažovou silou $\boldsymbol{mg}$ a posunutím $\boldsymbol{L}$ je $\theta + 90^{o}$ (pozri obr. 5.8) . Dostávame
$W_g = m\, g\, L \cos(\theta + 90^{o}) = -\ mgL \sin\theta$.



Obr. 5.8

Z obrázka 5.7 vidíme, že $L \sin\theta$ je práve výška h, o ktorú sa debna zdvihla. Preto
$W_g = -\ mgh$.

Znamená to, že práca vykonaná tiažovou silou $\boldsymbol{mg}$ závisí iba na posunutí debny v zvislom smere, zatiaľ čo vodorovné posunutie nie je rozhodujúce. Po dosadení

$W_g = -15{,}0\ \text{kg}.\ 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}\ .2{,}5\ \text{m} = -368\ \text{J}$.

5.10 Z predchádzajúceho príkladu vypočítajte, akú prácu vykonala ťažná sila lana $\boldsymbol{T}$.

Riešenie

Podľa vzťahu (5.22) je zmena ΔE_k kinetickej energie telesa rovná práci výslednice všetkých síl, resp. súčtu prác jednotlivých síl, ktoré na teleso pôsobia

$$\Delta E_\mathrm{k} = E_{\mathrm{k},2} - E_{\mathrm{k},1} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \quad . \qquad \text{(a)}$$

Debna je na začiatku i na konci posunutia v pokoji, zmena jej kinetickej energie ΔE_k je nulová, a preto podľa (a) musí byť súčet prác jednotlivých síl pôsobiacich na debnu nulový. Okrem tiažovej sily $\boldsymbol{mg}$ pôsobia na debnu iba dve ďalšie sily: ťažná sila lana $\boldsymbol{T}$ a normálová sila podložky $\boldsymbol{N}$. Sila $\boldsymbol{N}$ je kolmá na posunutie $\boldsymbol{L}$, a preto nekoná prácu. Ak označíme W_T prácu ťažnej sily lana, dostaneme zo vzťahu (a) rovnicu

$0 = W_\mathrm{g} + W_\mathrm{T}$.

Po úprave a dosadení výsledku príkladu 5.9 získame prácu W_T ťažnej sily $\boldsymbol{T}$

$W_\mathrm{T} = -W_g = 368\ \text{J}$.

5.11 Akú prácu W treba vykonať pri stlačení nárazníkovej pružiny vagóna o $x_0 = 5$ cm, keď na jej stlačenie o $x_1 = 1$ cm treba silu $F_1 = 30\,000$ N a keď platí, že veľkosť sily F je priamo úmerná skráteniu x pružiny?

Riešenie

Zrejme $F = kx$, kde $k = \dfrac{F_1}{x_1}$ je tzv. tuhosť pružiny. (a, b)

Keďže sila $\boldsymbol{F}$ stláčajúca pružinu a elementárne posunutie d$\boldsymbol{r}$ pôsobiska sily $\boldsymbol{F}$ sú súhlasne orientované vektory, možno na základe vzťahu (5.14) pre prácu W písať

$$W = \int_{r1}^{r2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{x0} F \cdot \mathrm{d}x \ . \qquad \text{(c)}$$

Dosadením (a, b) do (c) dostaneme

$$W = \int_0^{x0} F \cdot \mathrm{d}x = k \int_0^{x0} x \cdot \mathrm{d}x = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{F_1 x_0^2}{2x_1} = \frac{30000\,\mathrm{N} \cdot 0{,}05^2\,\mathrm{m}^2}{2 \cdot 0{,}01\,\mathrm{m}} = 3750\,\mathrm{J} \ .$$

5.12 Aký je výkon motora automobilu hmotnosti m = 750 kg, keď sa pohybuje po vodorovnej ceste rýchlosťou v = 60 km/h a keď faktor trenia je μ =0,07?

Riešenie

Výkon motora možno vyjadriť vzťahom (5.30)

$$P = Fv\cos\varphi \ , \qquad \text{(a)}$$

kde F je veľkosť ťažnej sily motora a φ = 0° je uhol zvieraný ťažnou silou a vektorom rýchlosti auta. Auto ide rovnomerne priamočiaro, preto je výslednica síl nulová. Tiaž $\boldsymbol{mg}$ auta je kompenzovaná reakciou $\boldsymbol{R}$ cesty. Trecia sila $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$ je prekonávaná ťažnou silou $\boldsymbol{F}$, preto sa veľkosti týchto síl rovnajú

$$F = F_{\mathrm{t}} = \mu mg \ . \qquad \text{(b)}$$

Po dosadení (b) do (a) pre hľadaný výkon dostaneme

$$P = \mu mgv \cos 0° = 0{,}07.750 \text{ kg}.9{,}81\text{m.s}^{-2}.\frac{60.10^3\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 8583{,}75\text{W} \ .$$

5.13 Na akej dráhe s zväčší stála sila $\boldsymbol{F}$, pôsobiaca na teleso hmotnosti m, rýchlosť telesa na n-násobok počiatočnej rýchlosti v_{o}, ktorú malo teleso na začiatku dráhy s ?

Riešenie

Prácu W jedinej sily $\boldsymbol{F}$ orientovanej v smere posunutia $\boldsymbol{s}$ určíme vzťahom (5.15)

$$W = Fs \cos 0° = Fs \qquad \text{(a)}$$

Podľa vzťahu (5.22) sa práca W výslednice všetkých síl rovná zmene ΔE_{k} kinetickej energie telesa. Po dosadení (a) do (5.22) dostaneme

$$F \cdot s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mn^2v_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(n^2 - 1\right) \ .$$

Úpravou pre hľadanú dráhu získame

$$s = \frac{mv_0^2\left(n^2 - 1\right)}{2F} \ .$$

6 GRAVITAČNÉ POLE

Teoretický úvod

Podľa všeobecného gravitačného Newtonovho zákona pôsobia na seba dva hmotné body s hmotnosťami m_1 a m_2 navzájom silou s veľkosťou

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

kde r je vzájomná vzdialenosť hmotných bodov a G = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2} je všeobecná gravitačná konštanta.

Predpokladajme, že zdrojom gravitačného poľa je hmotný bod s hmotnosťou M. Veľkosť vektora intenzity $\boldsymbol{K}$ tohto gravitačného poľa v určitom mieste poľa je rovná podielu veľkosti sily $\boldsymbol{F}$, ktorá v danom mieste pôsobí na ľubovoľný hmotný bod s hmotnosťou m, a hmotnosti m, t.j. (obmedzíme sa na skalárne vyjadrenia)

$$K = \frac{F}{m}.$$

V okolí jediného hmotného bodu s hmotnosťou M pre intenzitu gravitačného poľa platí:

$$K = G\frac{M}{r^2},$$

kde r je vzdialenosť miesta, v ktorom intenzitu poľa hľadáme, od silového centra, t.j. od hmotného bodu s hmotnosťou M.

V okolí viacerých hmotných bodov s hmotnosťami M_1, M_2, ..., M_n počítame intenzitu gravitačného poľa v určitom mieste ako vektorový súčet intenzít poľa v danom mieste od jednotlivých hmotných bodov.

Potenciálna energia E_p hmotného bodu s hmotnosťou m v určitom mieste gravitačného poľa, vytvoreného hmotným bodom hmotnosti M je -vzhľadom na nejaký vzťažný bod - daná prácou, ktorú vykonajú sily poľa pri premiestnení tohto hmotného bodu z miesta, v ktorom potenciálnu energiu určujeme, na miesto vzťažné. Teoreticky za takéto vzťažné miesto väčšinou považujeme nekonečno. Príslušné vyjadrenie je

$$E_p = -GmM\frac{1}{r},$$

kde r je znovu vzdialenosť hmotného bodu m od silového centra.

Potenciál hmotného bodu s hmotnosťou m v určitom mieste gravitačného poľa je daný podielom jeho potenciálnej energie E_p v danom mieste, a hmotnosti m, t.j.

$$\varphi = \frac{E_p}{m}.$$

Dosadením predchádzajúceho vzťahu pre potenciálnu energiu môžeme gravitačný potenciál v okolí jediného hmotného bodu M vzhľadom na nekonečno vyjadriť vzťahom

$$\varphi = -G\frac{M}{r}.$$

V okolí viacerých hmotných bodov M_1, M_2, ..., M_n počítame gravitačný potenciál v určitom mieste ako súčet potenciálov od jednotlivých hmotných bodov.

Medzi intenzitou $\boldsymbol{K}$ a potenciálom φ v ľubovoľnom mieste gravitačného poľa platí vzťah

$$\boldsymbol{K} = -grad\ \varphi,$$

kde

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Zákon o zachovaní celkovej mechanickej energie hovorí, že pri mechanickom pohybe hmotného bodu v gravitačnom poli Zeme je súčet jeho potenciálnej a kinetickej energie konštantný:

$$E_k + E_p = \text{konst.},$$

resp.

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_Z.m}{r} = \text{konst.}$$

Ak ide o pohyb hmotného bodu v zemskom gravitačnom poli v blízkosti zemského povrchu, potom možno uvedený zákon vyjadriť vzťahom

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \text{konst.},$$

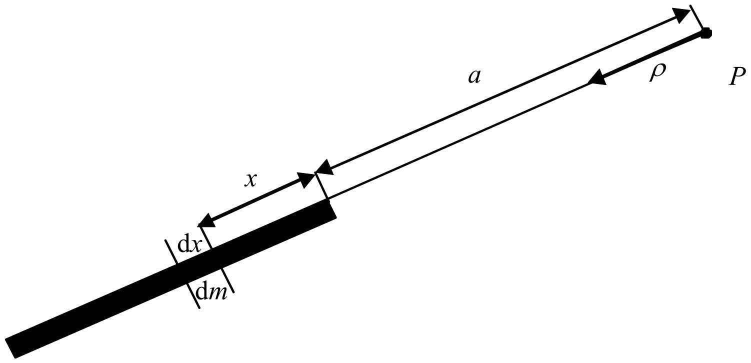
kde h je výška hmotného bodu nad vodorovnou rovinou, vzhľadom na ktorú vzťahujeme potenciálnu energiu hmotného bodu. (Odvodenie použitého výrazu pre potenciálnu energiu $E_p = mgh$ je prezentované v Príklade *6.10*).

Príklady

6.1 Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa hmotnej úsečky dĺžky l a hmotnosti m v mieste P, ležiacom v predĺžení úsečky vo vzdialenosti a od jej konca!

Riešenie

Príspevok hmotného elementu dm tyče (obr. 6.1) k celkovému potenciálu v mieste P je



Obr. 6.1

$$\mathrm{d}\varphi = -G\frac{\mathrm{d}m}{x+a} = -G\frac{m}{l}\frac{\mathrm{d}x}{x+a},$$

kde

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}x.$$

Pre potenciál φ integráciou cez celú tyč dostaneme:

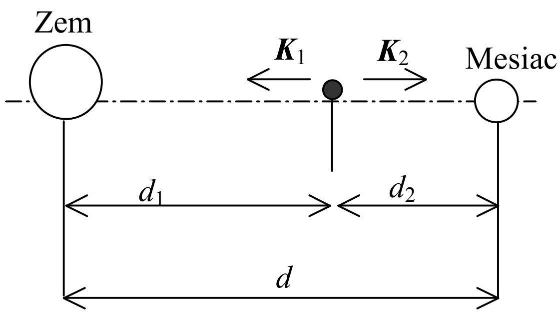
$$\varphi = -G\frac{m}{l}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = -G\frac{m}{l}\left[\ln(x+a)\right]_0^1 = -G\frac{m}{l}\ln\frac{l+a}{a}.$$

Intenzitu gravitačného poľa určíme zo súvisu potenciálu a intenzity, vyjadreného vzťahom $\boldsymbol{K}$ = - grad φ. V našom prípade možno túto rovnicu písať v tvare

$$\boldsymbol{K} = -\frac{d\varphi}{da}\boldsymbol{\rho} = -G\frac{m}{l}.\frac{a}{l+a}.\frac{a-l-a}{a^2}\boldsymbol{\rho} = G\frac{m}{a(l+a)}\boldsymbol{\rho},$$

kde $\boldsymbol{\rho}$ je jednotkový vektor v smere vyznačenom na obr. 6.1.

6.2 V ktorom mieste na vzájomnej spojnici Zeme a Mesiaca nastane rovnosť intenzít ich gravitačných polí, keď hmotnosť Mesiaca M_M je približne 1/81 hmotnosti Zeme M_Z a stredná vzdialenosť stredov oboch telies je d = 384 000 km?



Obr. 6.2

Riešenie

Rovnosť intenzít nastane v mieste vo vzdialenosti d_1 od stredu Zeme a $d_2 = d - d_1$ od stredu Mesiaca (obr.6.2). V tomto mieste by napr. voľne umiestnený kameň nepadal ani k Zemi ani k Mesiacu, pretože by sa tu rovnali gravitačné sily, a teda aj intenzity polí oboch nebeských telies.

Zo zadania príkladu vyplýva

$\boldsymbol{K}_1 = -\boldsymbol{K}_2$, resp. v skalárnom vyjadrení $K_1 = K_2$,

t.j.

$$G\frac{M_Z}{d_1^2} = G\frac{\frac{1}{81}M_Z}{(d-d_1)^2} \quad ,$$

z čoho po úprave vyplynie

$d_1 = 9\,(d - d_1)$,

takže

$$d_1 = \frac{9}{10}d = 345\ 600\ \text{km}\,.$$

6.3 Aký je pomer gravitačných síl, ktorými je priťahované teleso hmotnosti m na povrchu Zeme a Mesiaca, keď polomer Zeme R_Z je rovný 3,66 - násobku polomeru Mesiaca R_M a hmotnosť Zeme M_Z je rovná 81,25 - násobku hmotnosti Mesiaca M_M ?

Riešenie

Hľadaný pomer gravitačných síl (a teda aj pomer tiaží telesa na povrchoch – ak odhliadneme od rotácií oboch nebeských telies) je

$$\frac{F_{gZ}}{F_{gM}}=\frac{G\dfrac{M_{\mathrm{Z}}.m}{R_{\mathrm{Z}}^{2}}}{G\dfrac{M_{\mathrm{M}}.m}{R_{\mathrm{M}}^{2}}}=\frac{M_{\mathrm{Z}}.R_{\mathrm{M}}^{2}}{M_{\mathrm{M}}.R_{\mathrm{Z}}^{2}}=\frac{81{,}25M_{\mathrm{M}}.R_{\mathrm{M}}^{2}}{M_{\mathrm{M}}.(3{,}66)^{2}R_{\mathrm{M}}^{2}}=\frac{81{,}25}{3{,}66^{2}}\doteq 6\ .$$

Tiaž telesa na Mesiaci je teda asi 6-násobne menšia ako na Zemi (preto aj kozmonautom na Mesiaci sa zdá, že sú asi 6-násobne ľahší ako na Zemi).

6.3 Odvoďte, ako je možné zo známych hodnôt gravitačnej konštanty G, vzdialenosti Mesiaca od Zeme d_{M} a obežnej doby Mesiaca okolo Zeme T_{M} určiť hmotnosť Zeme M_{Z}.

Riešenie

Práve takýmto spôsobom určil aj Cavendish ako prvý hmotnosť Zeme. Pri svojom experimente s guľami na pružných vláknach určil hodnotu všeobecnej gravitačnej konštanty $G = 6{,}67 \,.\, 10\text{-}11$ N. m^2. kg^{-2}. Veličiny d_{M} a T_{M} boli už známe: $d_{\mathrm{M}} = 3{,}84 \,.\, 10^8$ km, $T_{\mathrm{M}} = 27{,}32$ dňa = 2,36 . 10^6 s. Ak vychádzame zo skutočnosti, že dostredivá sila je realizovaná príťažlivou gravitačnou silou medzi Zemou a Mesiacom (s hmotnosťou M_M) danou Newtonovým zákonom, t.j.

$F_{\mathrm{d}} = F_{\mathrm{g}}$, resp.

$$\frac{M_{\mathrm{M}}v^{2}}{d_{\mathrm{M}}}=G\frac{M_{\mathrm{Z}}M_{\mathrm{M}}}{d_{\mathrm{M}}^{2}}$$

a výrazu pre rýchlosť v jeho obiehania okolo Zeme (pri predpoklade kruhovej dráhy s polomerom d_{M})

$$v=\frac{2\pi\, d_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{M}}}\quad ,$$

dostaneme

$$M_{\mathrm{Z}}=\frac{4\pi^{2}d_{\mathrm{M}}^{\ 3}}{G\,T_{\mathrm{M}}^{2}}\quad .$$

Po dosadení číselných hodnôt vyjde pre hmotnosť Zeme hodnota

$M_{\mathrm{Z}} = 5,98 \,.\, 10^{24}$ kg $\doteq 6 \,.\, 10^{24}$ kg.

6.5 Aká je hodnota gravitačného zrýchlenia g' vo výške h = 100 km nad povrchom Zeme?

Riešenie

Veľkosť gravitačného zrýchlenia g' v danom mieste poľa je rovné veľkosti intenzity poľa

$$K = g' = \frac{GM_Z}{(R_Z + h)^2}$$

Číselne pre danú výšku dostaneme

$$g' = 6{,}67.10^{-11}\,\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}\,\frac{6.10^{24}\,\mathrm{kg}}{[\,(6378+100).10^3\,]^2\,\mathrm{m^2}} = 9{,}537\,\mathrm{m.s^{-2}}\,.$$

Vypočítaná hodnota sa líši od tabuľkovej hodnoty zrýchlenia na povrchu Zeme menej ako o 3 %. Gravitačné pole po úroveň takýchto relatívne „malých“ výšok môžeme pokladať za homogénne, s konštantnou hodnotou intenzity (resp. zrýchlenia) 9,81 m.s^{-2}.

6.6 Určite číselne rozdiel medzi hodnotami gravitačného a tiažového zrýchlenia na povrchu Zeme.

Riešenie

Urobíme výpočet pre rovník, kde je uvedený rozdiel najmarkantnejší. Budeme uvažovať nulovú nadmorskú výšku. Výpočet bude jednoduchší aj z toho dôvodu, že smery vektorov gravitačnej a odstredivej sily sú opačne orientované, takže vektorové úkony, týkajúce sa síl, resp. príslušných zrýchlení, sa zredukujú na obyčajný aritmetický rozdiel.

Gravitačné zrýchlenie tu má na hodnotu

$$g' = G\frac{M_Z}{R_Z^{\,2}} = 6{,}67.10^{-11}.\frac{6.10^{24}}{(6{,}378.10^6)^2}\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 9{,}938\,\mathrm{m\,s^{-2}}\quad ,$$

odstredivé zrýchlenie je

$$a_{ods} = \frac{v^2}{R_Z},$$

kde

$$v = \frac{2\pi\,R_Z}{T}$$

je obvodová rýchlosť rotácie miest na rovníku a T je perióda rotácie, t. j. 23 hod. 56 min. = 86 160 s. Po dosadení

$$a_{\mathrm{ods}} = \frac{4\pi^2 R_Z}{T^2} = \frac{4\pi^2.6{,}378.10^6}{86\,160^2}\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 0{,}034\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Výsledné – t. j. tiažové - zrýchlenie g sa na rovníku rovná rozdielu týchto dvoch hodnôt (vektory oboch uvažovaných zrýchlení sú orientované nesúhlasne), t. j.

$$g = g' - a_{\mathrm{ods}} = (9{,}838 - 0{,}034)\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 9{,}804\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Hodnota odstredivého zrýchlenia tvorí len asi 0,3 % z hodnoty gravitačného zrýchlenia (v oblastiach mimo rovníka to bude ešte menej). Môžeme ju preto zanedbať a pojmy gravitačné zrýchlenie a tiažové zrýchlenie, resp. gravitačná sila a tiaž môžeme teda prakticky stotožniť.

6.7 Športovec – diskár vrhol disk na atletickej súťaži v prímorskom meste (t. j. s nulovou nadmorskou výškou, kde predpokladáme, že tiažové zrýchlenie má štandardnú hodnotu g = 9,81 m.s^{-2}) do vzdialenosti d_1 = 70 m. Do akej vzdialenosti d_2 by disk doletel vo vysokohorskom prostredí v nadmorskej výške h = 4000 m, keď by ho diskár vrhol rovnakou počiatočnou rýchlosťou a pod rovnakým uhlom? (Odpor vzduchu zanedbáme, predpokladáme rovnakú zemepisnú šírku).

Riešenie

Pre dĺžky vrhov v oboch prípadoch platí (pozri kapitolu o šikmých vrhoch v kinematike)

$$d_1 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

a

$$d_2 = \frac{v_0^2}{g'}\sin 2\alpha \quad ,$$

pričom g' je tiažové zrýchlenie v nadmorskej výške h. Jeho hodnotu určíme rovnako ako v príklade *6.5* zo vzťahu

$$g' = \frac{GM_Z}{(R_Z + h)^2} = \frac{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}}{\left[(6378 + 4).10^3\right]^2}\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 9{,}793\,\mathrm{m\,s^{-2}} \quad .$$

Dosadením do predchádzajúcej rovnice a vzájomných vydelením prvých dvoch rovníc dostaneme

$$d_2 = \frac{g}{g'}d_1 = \frac{9{,}81}{9{,}793}.70\,\mathrm{m},$$
$$d_2 = 70{,}12\,\mathrm{m} \ .$$

Diskár by za takýchto podmienok dosiahol asi o 12 cm väčšiu dĺžku vrhu ako v nížinnom stredisku.

6.8 Určite číselne hodnotu I. kozmickej rýchlosti.

Riešenie

I. kozmická rýchlosť v_{I} je definovaná ako minimálna rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu v horizontálnom smere tesne nad povrchom Zeme, aby obiehalo okolo nej po kruhovej trajektórii ako umelá družica Zeme. Je to teda v podstate akýsi „nekonečne dlhý vodorovný vrh" zo zemského povrchu, s kruhovo uzavretou trajektóriou letu.

Pri výpočte vychádzame z dynamickej podmienky nášho pohybu po kružnici, že dostredivá sila, zakrivujúca trajektóriu letu telesa sa rovná gravitačnej sile, ktorou pôsobí Zem na na teleso. Gravitačnú silu môžeme vyjadriť pomocou Newtonovho gravitačného zákona; pre povrch Zeme ju však môžeme vyjadriť jednoduchšie výrazom pre tiaž gm.

Potom

$$\frac{m{v_I}^2}{R_Z} = gm \qquad ,$$

resp.

$$v_I = \sqrt{g.R_Z} = \sqrt{9{,}81.6378.10^3} = 7900\,m.s^{-1} \quad .$$

Hodnota I. kozmickej rýchlosti teda je 7,9 km.s^{-1}.

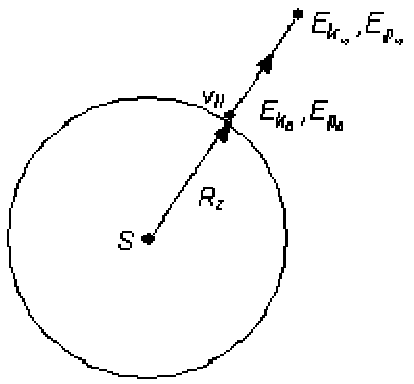
6.9 Určite číselne hodnotu II. kozmickej rýchlosti.

Riešenie

II. kozmická rýchlosť v_{II} predstavuje tzv. „únikovú" rýchlosť z povrchu Zeme. Je to minimálna rýchlosť, ktorou musíme vrhnúť teleso zo zemského povrchu zvislo nahor, aby natrvalo opustilo gravitačné pole Zeme.

Pri výpočte vychádzame zo zákona zachovania celkovej mechanickej energie, danej súčtom kinetickej a potenciálnej energie. Celková energia v bode vrhu na povrchu Zeme sa rovná celkovej energii v nekonečne (pozri obr. 6.3), takže

$$E_{ko} + E_{po} = E_{k\infty} + E_{p\infty} \quad .$$



Obr. 6.3

Ak uvážime, že $E_{k\infty}$ aj $E_{p\infty}$ sa rovnajú nule, posledná rovnosť sa zjednoduší na tvar

$$E_{ko} = - E_{po} \quad ,$$

resp.

$$\frac{m v_{II}^2}{2} = G \frac{M_Z . m}{R_Z} \quad .$$

Ak využijeme skutočnosť, že výraz $G \frac{M_Z}{R_Z^2}$ je rovný gravitačnému zrýchleniu na povrchu Zeme g, dostaneme pre II. kozmickú rýchlosť konečné vyjadrenie

$$v_{II} = \sqrt{2g.R_Z} = \sqrt{2.9{,}81.6378.10^3} = 11200 \ m.s^{-1} \quad .$$

Číselná hodnota II. kozmickej rýchlosti je teda 11,2 km.s^{-1}.

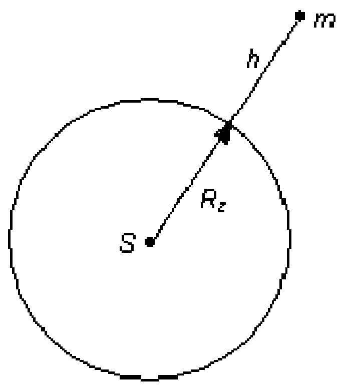
6.10 Všeobecný výraz pre potenciálnu energiu telesa hmotnosti *m*, nachádzajúceho sa v gravitačnom poli Zeme vo výške *h* nad povrchom Zeme, t.j. vo vzdialenosti $r = R_z + h$ od stredu Zeme, je

$$E_p = -G\frac{M_Z}{R_Z + h} \quad .$$

Tento vzťah vyplýva z Newtonovho gravitačného zákona a vzťahuje sa voči nekonečnu. V praxi je však mnohokrát vhodnejšie vzťahovať potenciálnu energiu voči zemskému povrchu.

Úloha: Ukážte, že pre relatívne malé výšky *h* nad povrchom Zeme, kde môžeme hodnotu gravitačného zrýchlenia považovať za konštantnú, sa uvedený vzťah zjednoduší na tvar $E_p = mgh$, známy z dynamiky.

Riešenie



Obr. 6.4

Ako je zrejmé z obr. 6.4 , potenciálnu energiu v určitom bode vo výške *h* vzťahovanú na povrch Zeme môžeme vyjadriť ako rozdiel energií v danom bode a na zemskom povrchu (obe voči nekonečnu)

$$E_p = -G\frac{M_Z m}{R_Z + h} - \left(-G\frac{M_Z m}{R_Z}\right) = GM_Z m\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_Z + h}\right) = GM_Z m\frac{R_Z + h - R_Z}{R_Z(R_Z + h)} \quad .$$

Ak uvážime, že $h << R_Z$, dostaneme

$$E_{\mathrm{p}} = G\frac{M_{\mathrm{Z}}.m.h}{R_{\mathrm{Z}}^2} \quad .$$

Keď aplikujeme vzťah pre gravitačné zrýchlenie na povrchu Zeme $g = G\frac{M_Z}{R_Z{}^2}$,

dospejeme k výsledku

$E_{\mathrm{p}} = m\,g\,h$,

čo sme chceli dokázať.

6.11 *A*ký počet obehov vykoná za jeden deň družica, obiehajúca po kruhovej trajektórii vo výške h = 1000 km nad povrchom Zeme ?

Riešenie

Najskôr určíme dobu jedného obehu T. Zo vzťahu pre rovnomerný pohyb po kružnici vyplýva

$$T = \frac{2\pi\left(R_z + h\right)}{v} \quad ,$$

kde v je obvodová rýchlosť obiehania družice (vzhľadom na stred Zeme). Túto určíme zo známej podmienky pre družicový pohyb, t.j. rovnosti dostredivej a gravitačnej sily. Pre družicu hmotnosti m vo výške h to je

$$\frac{mv^2}{R_{\mathrm{Z}} + h} = G\frac{M_{\mathrm{Z}}.m}{\left(R_{\mathrm{Z}} + h\right)^2} \quad .$$

Pre rýchlosť v z toho vyplýva

$$v = \sqrt{G\frac{M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}} + h}} \quad .$$

Po dosadení číselných hodnôt G = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}, M_Z = 6.10^{24} kg, R_Z = 6.378.10^6 m dostaneme pre rýchlosť hodnotu v = 7,35 km.h^{-1}. Po jej ďalšom dosadení do vzťahu pre dobu jedného obehu (prvý vzťah v príklade) nám vyjde

T = 6 304 s = 105 min. = 1,75 hod.

Záverečným krokom je určenie, koľkokrát sa táto hodnota „vojde“ do jedného dňa, t.j. času t = 86 400 s. Vyjde nám

$$n = \frac{t}{T} = \frac{86\,400}{6\,304} = 13{,}7 \text{ obehov/deň} .$$

6.12 Určite výšku h nad povrchom Zeme, v akej obiehajú stacionárne družice.

Riešenie

Stacionárne družice Zeme sú také umelé družice, ktoré obiehajú nad zemským rovníkom v smere od západu na východ, pričom doba ich obehu je zhodná s dobou jedného otočenia Zeme okolo svojej osi, t.j. T = 24 hod.= 86400 s. Takáto družica sa potom zdá akoby „zavesená“ nad jedným miestom zemského povrchu. Stacionárne družice sú preto veľmi vhodné najmä na telekomunikačné účely, t.j. na prenos rozhlasových a televíznych programov, medzikontinentálnych telefonických hovorov a pod.

Pri výpočte výšky h vychádzame z faktu, že dostredivá sila je realizovaná gravitačnou silou

$$\frac{mv^2}{R_Z + h} = G\frac{M_Z m}{(R_Z + h)^2} ,$$

kde rýchlosť obiehania v určíme ako podiel dráhy a času pri jednom obehu

$$v = \frac{2\pi(R_Z + h)}{T} .$$

Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu a vykrátení hmotnosti m na oboch stranách rovnice dostaneme

$$\frac{4\pi^2(R_Z + h)^2}{(R_Z + h)T^2} = G\frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} .$$

Po úpravách

$$4\pi^2(R_Z + h)^3 = GM_Z T^2 ,$$

$$R_Z + h = \sqrt[3]{\frac{GM_Z T^2}{4\pi^2}} ,$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_Z T^2}{4\pi^2}} - R_Z ,$$

číselne

$$h = \sqrt[3]{\frac{6{,}67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}.6.10^{24} kg.86400^2 s^2}{4\pi^2}} - 6{,}378.10^6 m \; ,$$

h = 35 900 km.

Poznámka: Dostredivú silu môžeme vyjadriť aj pomocou uhlovej rýchlosti ω. Vychádzame tu zo skutočnosti, že uhlová rýchlosť obiehania družice je rovnaká ako u bodov na zemskom povrchu. Tento spôsob riešenia prenechávame na čitateľa.

6.13 Kyvadlové hodiny, umiestnené v prízemí mrakodrapu na úrovni hladiny mora, sa kývajú v časových intervaloch T_1 = 1 s. O aký čas ΔT sa budú tieto hodiny oneskorovať za jeden deň, keď ich vynesieme na najvyššie poschodie budovy vo výške h = 400 m? (Pozn.: Takáto výška približne zodpovedá výške už neexistujúcich „dvojičiek“ Svetového obchodného centra v New Yorku).

Riešenie

„Pomalší“ chod hodín vo väčšej výške je spôsobený menšou hodnotou tiažového zrýchlenia. Ak zasa odhliadneme od zanedbateľného vplyvu rotačného pohybu Zeme a tiažové zrýchlenie stotožníme s gravitačným zrýchlením Zeme, potom východiskové vzťahy v našom príklade sú:

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{J}{mg_1a}} \quad ,$$

$$T_2 = \pi\sqrt{\frac{J}{mg_2a}} \quad ,$$

$$g_1 = G\frac{M_Z}{R_Z^2} \quad ,$$

$$g_2 = G\frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} \quad .$$

T_2 je doba kyvu kyvadla vo výške h = 400 m, J je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os kyvov, m je hmotnosť kyvadla, M_Z je hmotnosť Zeme a a je vzdialenosť osi kyvov od ťažiskovej osi. Po dosadení posledných dvoch vzťahov do prvých dvoch a ich následným vzájomným predelením dostaneme

$$T_2 = \frac{R_Z + h}{R_Z} T_1 \; ,$$

číselne

$$T_2 = \frac{(6378 + 0{,}4)\,\text{km}}{6378\,\text{km}} .1\,s = 1{,}000062716 \text{ s} \quad .$$

Časový rozdiel medzi T_2 a T_1, vynásobený počtom sekúnd za jeden deň, dá hľadaný celkový časový rozdiel

$\Delta T = T_2 - T_1 = 0{,}000062716 \,.\, 86400 = 5{,}42$ s .

Pozn.: Použité vzťahy pre doby kyvov fyzikálneho kyvadla vyplývajú z kapitoly „Mechanika tuhého telesa“.

Literatúra:

Hajko, V. a kol. *Fyzika v príkladoch*. Bratislava: Alfa, 1983.