

Numerické cvičenie č. 1 – Základy vektorovej algebry

1. V kartézskej súradnicovej sústave sú zadané body A[1,2,4], B[4,3,9], C[7,5,0] a D[1,8,3]. Vypočítajte súradnice:
a) polohového vektora bodu A vzhľadom na bod B b) polohového vektora bodu A vzhľadom na bod C
c) polohového vektora bodu A vzhľadom na bod D d) polohového vektora bodu D vzhľadom na bod C
v danej súradnicovej sústave. Uvedené vektory znázorníte graficky. Vypočítajte veľkosti uvedených vektorov.
(súradnice bodov sú v cm)

2. Štvorec ABCD má strany veľkosti $a = 5$ cm. Vypočítajte súradnice polohových vektorov jednotlivých vrcholov štvorca v kartézskej súradnicovej sústave, ktorej stred je v strede štvorca a os x je orientovaná v smere uhlopriečky AC. Vypočítajte súradnice polohového vektora vrcholu B vzhľadom na vrchol C v takto zvolenej súradnicovej sústave. Uvedené vektory znázorníte graficky. (Zvoľte súradnicovú sústavu v rovine)

3. Kocka ABCDEFGH má veľkosť strany $a = 4$ cm. Vypočítajte súradnice polohových vektorov jednotlivých vrcholov kocky v kartézskej súradnicovej sústave, ktorej počiatok je v strede kocky a súradnicová os x je
a) rovnobežná so stranou AB b) rovnobežná s niektorou uhlopriečkou štvorca

4. Polohy bodov sú v kartézskej súradnicovej sústave dané súradnicami A[2,1,-1] a B[1,3,1]. Určte, akým skalárom musíme vynásobiť polohový vektor bodu B, aby vektor daný súčtom polohových vektorov oboch bodov bol na polohový vektor bodu B kolmý!

5. Dané sú vektory $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ a $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Určte veľkosť priemetu vektora \vec{a} do smeru vektora \vec{b} .
(Súradnice vektorov sú v cm)

6. Polohy bodov sú v kartézskej súradnicovej sústave dané súradnicami A[4,2,-1], B[1,2,5] a C[-2,-1,4]. Určte veľkosť plochy trojuholníka ABC. (Súradnice bodov sú v cm.)

7. V priestore sú dané tri body A[2,0,2], B[2,2,0] a C[0,1,1]. Vypočítajte súradnice jednotkových vektorov, ktoré sú kolmé na rovinu určenú bodmi A, B a C. Určte uhol medzi polohovým vektorom bodu A vzhľadom na bod C a polohovým vektorom bodu C vzhľadom na bod B. Súradnice bodov sú v cm.

8. Zistite, pre aké číslo α sú vektory \vec{a} , \vec{b} navzájom kolmé, ak:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\alpha\vec{k}$, $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ b) $\vec{a} = (\alpha^2 - 4)\vec{i} + 8\vec{j} - (4\alpha - 20)\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

9. Sú dané dva vektory: $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$. Určte, akým číslom c musíme vynásobiť vektor \vec{b} , aby vektor daný súčtom $\vec{a} + c\vec{b}$ bol kolmý na vektor \vec{a} .

10. Vektory \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} majú v kartézskej súradnicovej sústave nasledovné súradnice: $\vec{a} = [2,1,-1]$, $\vec{b} = [4,-2,7]$, $\vec{c} = [9,1,3]$ (súradnice sú v cm). Určte súradnice a veľkosti nasledovných vektorov:

a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}$ c) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} (\vec{b} \times \vec{a})$ e) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} (\vec{b} \times \vec{a})$

11. Nech pre vektory \vec{a} , \vec{b} platí:

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Aký uhol musia zvierat vektory \vec{a} , \vec{b} , aby vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ bol jednotkový?

12. Sú dané dva vektory: $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$. Určte, akým číslom c musíme vynásobiť vektor \vec{b} , aby vektor daný súčtom $\vec{a} + c\vec{b}$ bol kolmý na vektor \vec{a} .

13. Na základe pravidiel známych z vektorovej algebry dokážte, že uhlopriečky rovnobežníka sa pretínajú práve v polovici svojich dĺžok.

14. V kartézskej súradnicovej sústave sú dané body A [2,1,3] a B [4,0,6]. Bod A pôsobí na bod B silou $F = 8$ N, ktorej vektor má smer spojnice bodov AB a smeruje od bodu A do bodu B. Vypočítajte súradnice vektora uvedenej sily v danej súradnicovej sústave. Znázorníte graficky.

15. Dva hmotné body umiestnené v polohách A [3,1,8] a B [4,1,5] pôsobia na tretí hmotný bod umiestnený v polohe C [10,0,5] silami s veľkosťou $F_1 = 10 \text{ N}$ a $F_2 = 5 \text{ N}$ v smere spojnic príslušných bodov. Sila F_1 má smer spojnice bodov AC (smeruje do bodu C) a sila F_2 má smer spojnice bodov BC (smeruje do bodu C). Vypočítajte veľkosť celkovej sily pôsobiacej na tretí hmotný bod umiestnený v polohe C i súradnice vektora tejto sily v danej súradnicovej sústave. Aké sú súradnice jednotkových vektorov v smere síl F_1 a F_2 v danej súradnicovej sústave? (Súradnice sú v cm.)

16. Hmotné body umiestnené v dvoch vrcholoch rovnostranného trojuholníka pôsobia na hmotný bod umiestnený v treťom vrchole silami $F_1 = 2 \text{ N}$ a $F_2 = 5 \text{ N}$ orientovanými v smere strán trojuholníka. Vypočítajte veľkosť celkovej sily pôsobiacej na tretí hmotný bod, ak dĺžka strany trojuholníka je $a = 3 \text{ cm}$. Vektory síl smerujú do tretieho vrcholu. Znázornite graficky.

17. Vo vrchole kocky pôsobia sily veľkosti $F_1 = 1 \text{ N}$, $F_2 = 2 \text{ N}$ a $F_3 = 3 \text{ N}$ v smere stenových uhlopriečok idúcich z tohto vrcholu. Nájdite veľkosť výslednice týchto síl. Znázornite graficky.

18. Hmotné body umiestnené vo vrcholoch kvádra so stranami $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ a $c = 5 \text{ cm}$ pôsobia na hmotný bod umiestnený v strede kvádra silami $F_1 = 8 \text{ N}$, $F_2 = 3 \text{ N}$, $F_3 = 6 \text{ N}$, $F_4 = 1 \text{ N}$, $F_5 = 9 \text{ N}$, $F_6 = 7 \text{ N}$, $F_7 = 2 \text{ N}$ a $F_8 = 4 \text{ N}$. Vektory síl sú orientované v smere telesových uhlopriečok a smerujú od vrcholov do stredu kvádra. Vypočítajte veľkosť celkovej sily pôsobiacej na hmotný bod v strede kvádra.

19. Závažie s hmotnosťou $m = 100 \text{ kg}$ je zavesené na dvoch závesoch dĺžky $L_1 = 50 \text{ cm}$ a $L_2 = 80 \text{ cm}$. Závesy sú upevnené v bodoch, ktorých vzájomná vzdialenosť je $a = 1 \text{ m}$. Vypočítajte veľkosti síl F_1 a F_2 , ktorými sú oba závesy napínané.

20. Závažie $m = 200 \text{ kg}$ je zavesené na štyroch závesoch. Akou silou sú napínané závesy, keď dĺžka každého z nich je $L = 5 \text{ m}$ a body upevnenia závesov tvoria obdĺžnik so stranami $a = 1 \text{ m}$ a $b = 2 \text{ m}$?