Kapitola 4

SÚSTAVA HMOTNÝCH BODOV

Učebné ciele

V kapitole o mechanike hmotného bodu sme zaviedli základné kinematické a dynamické veličiny potrebné k skúmaniu pohybu hmotnej častice, s cieľom sformulovať a riešiť jej pohybovú rovnicu pre konkrétny problém. Cieľom kapitoly je zaviesť mechanické veličiny popisujúce sústavu hmotných bodov, sformulovať a riešiť pohybovú rovnicu pre sústavu hmotných bodov. Definujeme tu základné kinematické a dynamické veličiny, zhrnieme základné pohybové rovnice týkajúce sa sústavy hmotných bodov.

4.1.1 Základné kinematické pojmy, hmotný stred sústavy

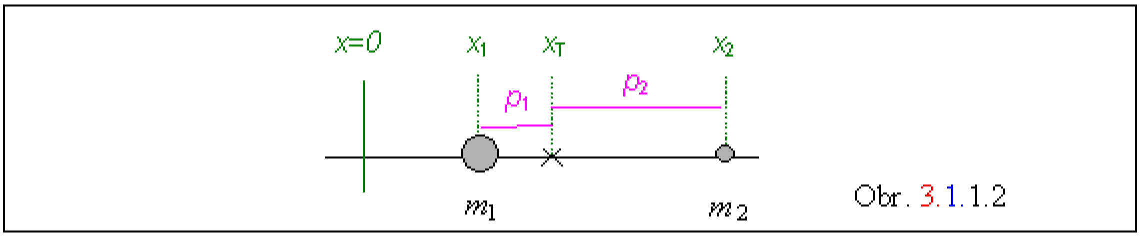
Zaviedli sme si pojem hmotný bod, pod ktorým rozumieme skúmaný objekt, ktorý má z hľadiska vzájomného pôsobenia s inými objektmi všetky vlastnosti skúmaného telesa, avšak neuvažujeme jeho geometrické rozmery.

Konečný počet hmotných bodov, určitým spôsobom vymedzených voči okoliu, ktoré skúmame ako celok a pritom všetky jednotlivé hmotné objekty patriace do sústavy považujeme za hmotné body, nazveme ***sústavou hmotných bodov***. Ich počet závisí od riešenej problematiky. Za sústavu hmotných bodov možno považovať napr. každé makroskopické teleso, alebo vymedzenú sústavu telies.

Pri skúmaní pohybu sústavy hmotných bodov je výhodné zaviesť pojem hmotný stred resp. ťažisko**.** Názov *ťažisko*, je zaužívaný v spojení s telesom. Ťažisko telesa je bod, ktorým prechádza výslednica všetkých tiažových síl, ktoré pôsobia na hmotné body, z ktorých pozostáva teleso, pri jeho ľubovoľnej polohe v priestore.

V prípade sústavy hmotných bodov, ktoré nevytvárajú kompaktné teleso, je vhodnejšie zaviesť **hmotný stred** sústavy, t.j. bod, v ktorom má pôsobisko výslednica všetkých tiažových síl, ktoré pôsobia na hmotné body, z ktorých sústava hmotných bodov pozostáva, pri ich ľubovoľnej polohe v priestore.

Pre dva hmotné body je hmotný stred bod, ležiaci na ich spojnici, deliaci túto spojnicu v nepriamom pomere hmotností bodov . Na obrázku 3.1.1.2 sú znázornené hmotné body s hmotnosťami m_1 a m_2 , nachádzajúce sa v polohách, ktorým priradíme súradnice x_1 a x_2 . Súradnica hmotného stredu je označená symbolom x_T . Na základe definície platí úmera :



Obr. 3.1.1.2

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (4.1.1.1)$$

Vo zvolenej karteziánskej súradnicovej sústave má polohový vektor $\boldsymbol{r}_T$ hmotného stredu súradnice $\boldsymbol{r}_T = [x_T, y_T, z_T]$, pre ktoré platí

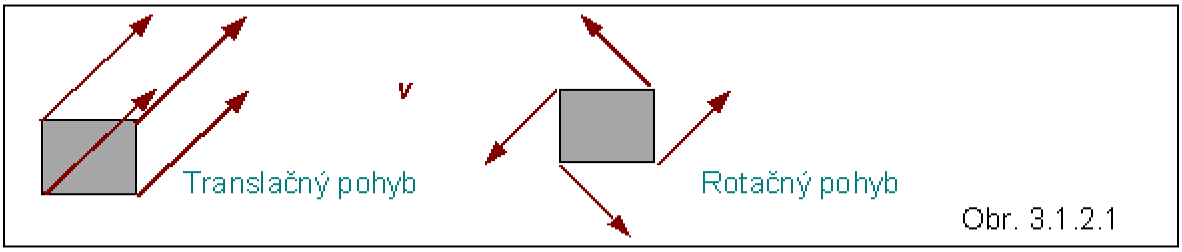
$$x_T = \frac{\sum_{i=1,n} m_i x_i}{\sum_{i=1,n} m_i}, \qquad y_T = \frac{\sum_{i=1,n} m_i y_i}{\sum_{i=1,n} m_i}, \qquad z_T = \frac{\sum_{i=1,n} m_i z_i}{\sum_{i=1,n} m_i}, \qquad (4.1.1.5)$$

kde x_i, y_i, z_i *sú karteziánske súradnice i*-teho bodu umiestneného v trojrozmernom priestore.

Pohyb hmotného stredu často skúmame vzhľadom na sústavu pevne spojenú s hmotným stredom, ktorú nazývame *vzťažnou sústavou hmotného stredu*. Vzťažná sústava hmotného stredu resp. *ťažisková vzťažná sústava, je sústava, ktorej začiatok O je umiestnený do hmotného stredu sústavy hmotných bodov*. Vzťažná sústava hmotného stredu je vo všeobecnosti neinerciálna vzťažná sústava. Ak sa však hmotný stred vzhľadom na ľubovolnú inerciálnu sústavu pohybuje konštantnou rýchlosťou (v_T = *konšt.*)**,** je vzťažná sústava hmotného stredu sústavou inerciálnou.

4.1.2 Dynamika sústavy hmotných bodov - Prvá pohybová rovnica

Pohyby sústav hmotných bodov vo všeobecnosti delíme na *posuvné (translačné)*, pri ktorých sa všetky body za rovnaký čas posunú po priamke o rovnakú vzdialenosť, a *rotačné*, pri ktorých sa všetky body pootočia okolo osi rotácie o rovnaký uhol (obr. 3.1.2.1):



Obr. 3.1.2.1

Rovnica

$$\boxed{M\,\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{F}}$$ (4.1.2.7)

predstavuje ***vetu o pohybe hmotného stredu (ťažiska)*** , ktorú môžeme slovne takto formulovať :

"Ťažisko sústavy hmotných bodov sa pohybuje tak, ako by v ňom bola sústredená hmotnosť celej sústavy a pôsobila naň výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu".

Dôsledkom tejto vety je i skutočnosť:

Ak sa výsledná sila pôsobiaca na sústavu rovná nule, hmotný stred sústavy hmotných bodov zotrváva v pokoji , alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe.

Pohybová rovnica (4.1.2.7), ktorá platí pre ľubovoľný pohyb sústavy hmotných bodov, sa upravuje tak aby v nej vystupovala hybnosť sústavy hmotných bodov, čím sa rozumie vektorový súčet hybností jednotlivých bodov sústavy ($\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 + ... + \boldsymbol{H}_n$) :

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{H}_i = \frac{d\boldsymbol{H}}{dt}. \qquad (4.1.2.8)$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = (d\boldsymbol{H} / dt)}$$

Tak sme dostali významnú rovnicu (4.1.2.8), ktorá sa nazýva ***prvá pohybová rovnica pre sústavu hmotných bodov.*** Jej slovná formulácia hovorí, že:

súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov sa rovná derivácii hybnosti sústavy .

Integráciou tejto pohybovej rovnice získame ***prvú impulzovú vetu*** :

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(t_2) - \boldsymbol{H}(t_1) = \Delta\boldsymbol{H}, \qquad (4.1.2.9)$$

ktorá hovorí, že impulz vonkajšej sily pôsobiaci na sústavu hmotných bodov sa rovná zmene hybnosti sústavy. Táto veta je formálne, ale aj obsahom v priamom vzťahu so vzorcom (2.2.3.5) paragrafu o impulze a hybnosti hmotného bodu.

Ak výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu je nulová (***F*** *= 0)*, hovoríme, že sústava je *izolovaná.* V tomto prípade rovnica (4.1.2.9) prejde na tvar

$\Delta \boldsymbol{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2$, (4.1.2.10)

ktorá vyjadruje *zákon zachovania celkovej hybnosti izolovanej sústavy hmotných bodov* a možno ju vysloviť:

Zmena celkovej hybnosti izolovanej sústavy hmotných bodov je nulová, hybnosť izolovanej sústavy sa nemení.

4.1.3 Druhá pohybová rovnica

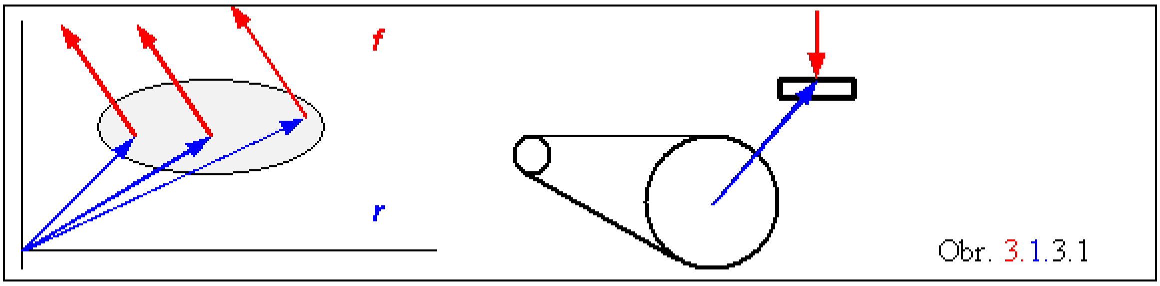
Sústava hmotných bodov vo všeobecnom prípade môže konať i rotačný pohyb. Pri skúmaní rotačného pohybu, obdobne ako pri hmotnom bode, vystupujú veličiny moment sily a moment hybnosti sústavy hmotných bodov, ktoré si zadefinujeme.

4.1.3.1 Moment sily sústavy častíc

Ak na teleso pôsobí vonkajšia sila, z hľadiska jeho otáčania je dôležité, v ktorom bode na teleso pôsobí. Preto sa zavádza veličina ***moment sily*** ($\boldsymbol{M}$) vzhľadom na určitý vzťažný bod, definovaný rovnicou (2.2.3.7), ako vektorový súčin polohového vektora pôsobiska sily a pôsobiacej sily :

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$$

Poznámka: Vektor momentu sily sa v slovenskej fyzikálnej literatúre často označuje písmenom D .



Obr. 3.1.3.1

V ľavej časti obrázku 3.1.3.1 je znázornené teleso s tromi alternatívnymi bodmi pôsobenia rovnakej sily. Ak sila pôsobí v bode na ľavej strane, začne ho (popri posúvaní) otáčať v smere pohybu hodinových ručičiek, pri pôsobení na druhej strane opačným smerom. Ak sila pôsobí priamo v ťažisku, začne teleso iba posúvať. V pravej časti obrázku je schematicky nakreslený prevod bicykla, pri ktorom krútiaci účinok sily závisí od vzájomného uhla polohového vektora $\boldsymbol{r}$ a pôsobiacej sily $\boldsymbol{f}$. Moment sily zavedený vzorcom (2.2.3.7) zohľadňuje uvedené skutočnosti, lebo pre jeho veľkosť platí

$$M = rf \sin \alpha \ , \qquad (4.1.3.1)$$

čiže vo vzorci vystupuje aj uhol medzi polohovým vektorom a vektorom sily. Ak je uhol medzi vektormi nulový, alebo = 180 ^{0} , moment sily je nulový. Zodpovedá to prípadu bicyklového pedálu hornej, alebo dolnej úvrati, kedy zvislé pôsobenie silou na pedál neprináša úžitok.

Poznámka Vektor momentu sily pôsobiacej v istom bode telesa závisí od voľby vzťažného bodu. Zmenou vzťažného bodu sa môže zmeniť ako jeho veľkosť, tak aj smer momentu sily.

V prípade sústavy hmotných bodov, ak na každý pôsobí sila $\boldsymbol{f}_k$, zavádza sa výsledný moment síl $\boldsymbol{M}$ vektorovým súčtom jednotlivých momentov síl $\boldsymbol{M}_i$

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i \qquad (4.1.3.2)$$

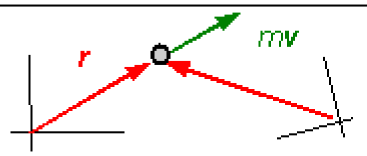
4.1.3.2 Moment hybnosti sústavy častíc

Na opis dynamiky otáčavého pohybu sústavy hmotných bodov a telies sa používa ***moment hybnosti*** ($\boldsymbol{L}$) , ktorý definujme obdobným spôsobom ako bol definovaný moment hybnosti i -tej častice (vzťah 2.2.3.6) vzhľadom na vzťažný bod O, t.j. ako vektorový súčin polohového vektora hmotného bodu a vektora hybnosti hmotného bodu :

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \,, \qquad (4.1.3.4)$$

kde $\boldsymbol{r}_i$ je polohový vektor i -tej častice s hmotnosťou m_i vzhľadom na zvolený vzťažný bod, $\boldsymbol{H}_i$ je hybnosť i -tej častice pohybujúcej sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}_i$. Veľkosť a smer vektora momentu hybnosti pohybujúcej sa častice závisí od voľby vzťažného bodu, podobne ako moment sily. Na obrázku obr. 3.1.3.3 sú znázornené dve vzťažné sústavy. Polohový vektor začínajúci v začiatku sústavy

nakreslenej vľavo, zviera s vektorom hybnosti nulový uhol, preto moment hybnosti vzhľadom na túto sústavu je nulový.



Obr. 3.1.3.3

Deriváciou vzťahu (4.1.3.4) dostaneme vzťah medzi momentom hybnosti a momentom sily

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{V}) = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times m\boldsymbol{V}\right) + \left[\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{V})}{\mathrm{d}t}\right] = (\boldsymbol{V}\times m\boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}) = 0 + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M} \,,$$

čiže pre i -tu časticu platí rovnica (2.2.3.8)

$$\boldsymbol{M}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} \,. \qquad (4.1.3.5)$$

Rovnicu (4.1.3.5) možno vysloviť: *Moment na i -tu časticu pôsobiacej sily sa rovná zmene jej momentu hybnosti za jednotku času*. Obidva momenty (sily a hybnosti) vzťahujeme na ľubovolný, avšak pre obidva momenty ten istý vzťažný bod v inerciálnej sústave. Celkový moment hybnosti sústavy častíc $\boldsymbol{L}$ je definovaný ako vektorový súčet momentov hybnosti jednotlivých častíc, t.j.

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i \qquad (4.1.3.6)$$

Pre výsledný moment síl pôsobiacich na sústavu častíc, definovaný vzťahom (4.1.3.2), vzhľadom na zvolený vzťažný bod, po využití rovnice (4.1.3.6) , dostávame

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \qquad (4.1.3.7)$$

Porovnaním rovníc (2.2.3.8) a (4.1.3.7) vidíme, že aj v tomto prípade platí medzi momentom sily hmotného bodu a vektorovým súčtom momentov síl pôsobiacich na hmotné body sústavy rovnaký vzťah. Rovnica (4.1.3.7) predstavuje **druhú pohybovú rovnicu pre sústavu hmotných bodov** (častíc).

Integráciou druhej pohybovej rovnice dostaneme ***druhú impulzovú vetu pre sústavu hmotných bodov :***

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(t_2) - \boldsymbol{L}(t_1) = \Delta\boldsymbol{L} \qquad (4.1.3.8)$$

Jej slovná formulácia :

"Impulz momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov sa rovná zmene momentu hybnosti sústavy".

3.1.4 Podmienky rovnováhy a zákony zachovania

Hovoria o podmienkach, ktoré treba splniť, aby sústava hmotných bodov v inerciálnej sústave zachovávala svoj pohybový stav. Pod pohybovým stavom sústavy hmotných bodov (telesa) rozumieme údaje o celkovej hybnosti $\boldsymbol{H}$ a o celkovom momente hybnosti $\boldsymbol{L}$ sústavy hmotných bodov (telesa).

Celková hybnosť sústavy hmotných bodov (4.1.2.8) predstavuje vektorový súčet hybností všetkých hmotných bodov sústavy a celkový moment hybnosti (4.1.3.6) vektorový súčet momentov hybnosti všetkých hmotných bodov sústavy :

$$H = \sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \quad , \qquad L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} r_i \times m_i v_i$$

Podľa prvej pohybovej rovnice (4.1.2.10), ktorá má tvar

$\boldsymbol{F} = (\mathrm{d}\boldsymbol{H} / \mathrm{d}t)$,

hybnosť sústavy sa nemení, ak výsledná vonkajšia sila pôsobiaca na sústavu sa rovná nule. Preto rovnosť

$$\boldsymbol{F} = 0 \qquad (4.1.4.1)$$

je prvou podmienkou rovnováhy sústavy hmotných bodov (telesa). Rovnica (4.1.4.1) definuje **izolovanú** sústavu hmotných bodov, t.j. sústavu na ktorú nepôsobia vonkajšie sily, t.j. súčet všetkých vonkajších síl sa rovná nule.

Podľa druhej pohybovej rovnice (4.1.3.7), ktorá má tvar

$\boldsymbol{M} = (\mathrm{d}\boldsymbol{L} / \mathrm{d}t)$,

moment hybnosti sústavy hmotných bodov (telesa) sa nemení, ak výsledný moment vonkajších síl pôsobiacich na sústavu sa rovná nule. Rovnosť

$$\boldsymbol{M} = 0 \qquad (4.1.4.2)$$

je druhou podmienkou rovnováhy sústavy hmotných bodov (telesa).

Pri splnení oboch podmienok rovnováhy, sústava hmotných bodov (teleso) zachováva svoju hybnosť a moment hybnosti (zjednodušene dá sa povedať že zachováva rýchlosť a uhlovú rýchlosť otáčania), čo formulujú nasledovné zákony:

1/ Zákon zachovania hybnosti:

*Ak hmotnosť sústavy sa nemení a výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu je nulová (**F** = 0), celková hybnosť izolovanej sústavy hmotných bodov ostáva konštantná, t.j. platí*

$$\Delta \boldsymbol{H} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2 \quad , \qquad (4.1.4.3\,)$$

kde $\boldsymbol{H}_1$ je hybnosť sústavy v časovom okamihu t_1 (napr. na začiatku skúmania sústavy hmotných bodov) a $\boldsymbol{H}_2$ je hybnosť sústavy hmotných bodov v časovom okamihu t_2 (napr. v okamihu skončenia skúmania sústavy).

Rovnica (3.1.4.3) je vektorová rovnica, ktorá je ekvivalentná trom skalárnym rovniciam. V istých prípadoch, podľa silového pôsobenia na sústavu hmotných bodov, môžu nastať prípady, kedy sa zachováva jedna, alebo dve zložky celkovej hybnosti. V prípade, že len niektorá zo zložiek výslednice vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov je rovná nule, potom sa odpovedajúca zložka celkovej hybnosti sústavy hmotných bodov zachováva. Ako príklad môžeme uviesť skúmanie pohybu letiaceho kameňa v gravitačnom poli Zeme. Ak zanedbávame odpor prostredia, jedinou pôsobiacou silou na kameň je tiažová sila $\boldsymbol{G} = m\mathbf{g}$, ktorá smeruje zvisle nadol ($\boldsymbol{g} = [0,-g,0]$). Zvislá zložka hybnosti letiaceho kameňa H_y sa bude meniť, kým zložky H_x a H_z zostávajú konštantné.

2/ Zákon zachovania momentu hybnosti:

*Ak hmotnosť sústavy sa nemení a výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu je nulová (**F** = 0) , celkový moment hybnosti izolovanej sústavy hmotných bodov ostáva konštantný, t.j. platí*

$$\Delta \boldsymbol{L} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2, \quad (4.1.4.4)$$

kde $\boldsymbol{L}_1$ je moment hybnosti sústavy v ľubovolnom časovom okamihu t_1 a $\boldsymbol{L}_2$ je moment hybnosti sústavy hmotných bodov v časovom okamihu t_2.

Overenie platnosti zákona zachovania momentu hybnosti možno uskutočniť ako pre dve telesá, tak i pre izolovaný systém hmotných bodov. Prvý príklad možno demonštrovať s chlapcom sediacim na stoličke s otáčajúcim sa sedadlom, ktorý drží činky v úplne roztiahnutých rukách. Nech sediaceho chlapca niekto uvedie do pomalého otáčavého pohybu. V prípade, že chlapec nehybne sedí na stoličke, otáčajúca sa stolička v dôsledku trenia bude zmenšovať svoju rýchlosť otáčania sa, až kým sa nezastaví. Stane sa nejaká zmena v tomto pohybe, ak chlapec rýchlo pritiahne činky k hrudi a opätovne ich roztiahne? Ak v otáčajúcom sa systéme chlapec rýchlo pritiahne ruky s činkami na prsia, zistí, že jeho rýchlosť otáčania sa zväčšuje. Ak ich roztiahne pohyb sa spomaľuje. Kým sa stolička trením nezastaví, môže chlapec týmto spôsobom niekoľkokrát meniť svoju rýchlosť otáčania.

Zväčšenie rýchlosti otáčania súvisí so zmenšením vzdialenosti činiek od osi otáčania. Na rovnakom princípe sú založené pohyby akrobatov alebo baletky, ktorá sa rýchlo otáča. Obvykle dostáva baletka začiatočný moment impulzu od svojho partnera. Vtedy je telo baletky naklonené, začína sa pomalé otáčanie, potom nasleduje prekrásny a rýchly pohyb – baletka sa narovnala. V tejto polohe sú všetky časti tela bližšie k rotačnej osi a zákon zachovania momentu hybnosti spôsobí prudké zvýšenie rýchlosti otáčania.

Zmenu celkového momentu hybnosti uzavretej sústavy možno dosiahnuť len pôsobením vonkajších síl. Pôsobením vnútorných síl môžeme dosiahnuť len zmenu hybnosti jednotlivých bodov (častíc) sústavy, avšak nie zmenu celkovej hybnosti sústavy.

Sústava hmotných bodov pri splnení oboch podmienok rovnováhy v inerciálnej sústave nemusí byť v pokoji. Preto sa v takomto prípade hovorí o ***dynamickej rovnováhe*** sústavy hmotných bodov (telesa). V dynamickej rovnováhe je parašutista s padákom, ktorý klesá konštantnou rýchlosťou, alebo elektromotor, ktorý sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou. Popri dynamickej rovnováhe sa najmä v strojárstve a stavebníctve hovorí o ***statickej rovnováhe*** , ktorá navyše vyžaduje, aby teleso v danej vzťažnej sústave bolo v pokoji. Aj v tomto prípade nevyhnutnými podmienkami rovnováhy telies sú rovnice (4.1.4.1) a (4.1.4.2). Pri posudzovaní situácie, či sústava hmotných bodov môže byť v rovnováhe, treba obyčajne nájsť výslednú silu a výsledný moment síl, ktoré pôsobia na sústavu.

Kontrolné otázky

1. Definujte sústavu hmotných bodov.
2. Určite polohu hmotného stredu sústavy troch častíc s rovnakými hmotnosťami, umiestnenými vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka so stranou a.
3. Vyslovte a matematicky formulujte prvú pohybovú rovnicu pre sústavu hmotných bodov.
4. Vyslovte a zapíšte I. vetu impulzovú pre sústavu hmotných bodov.
5. Vyslovte zákon zachovania hybnosti pre izolovanú sústavu hmotných bodov.
6. Uveďte príklad, kde sa aplikuje zákon zachovania hybnosti.
7. Vyslovte podmienky rovnováhy sústavy hmotných bodov.
8. Kedy hovoríme o dynamickej rovnováhe?
9. Vysvetlite pojem statickej rovnováhy.