7. MECHANICKÉ KMITY A VLNENIE

Učebné ciele

Študent by mal vedieť vysvetliť kmitanie hmotného bodu v prípadoch, keď pôsobí iba návratná sila, ďalej reálnejší prípad, keď popri návratnej sile pôsobí proti pohybu odpor prostredia a konečne na prípade kmitavej sústavy s nútiacou silou vysvetliť rezonanciu. Vysvetliť premeny mechanickej energie pri kmitavom pohybe. Vedieť skladať kmitavé pohyby rovnakej a rôznej frekvencie, pričom môžu mať rovnaký smer, alebo môžu byť na seba kolmé.

V mechanike hmotného bodu sme sa oboznámili so základnými dynamickými zákonmi pre pohyb hmotného bodu a rôznymi formami energie a jej premien. V tejto kapitole využijeme tieto znalosti pri skúmaní špeciálneho typu pohybu, ktorým je kmitavý pohyb. Kmitavý pohyb je dôležitý pre pochopenie mnohých technických javov ako sú napr. kmity struny, nosníkov, alebo hriadeľov, ale aj kmitov na molekulovej úrovni , ako je napríklad pohyb atómov v kryštálovej mriežke, alebo kmitanie molekúl. Pružné vlastnosti prostredia spôsobujú, že kmity nejakej časti pružného prostredia – kmity zdroja, sa budú šíriť týmto prostredím, čoho dôsledkom je existencia a šírenie vlnenia. Tak, ako sa skladajú kmity hmotného bodu, tak sa budú skladať aj vlnenia, ktoré sa od rôznych zdrojov šíria prostredím. Pozorujeme pritom javy charakteristické pre vlnové procesy, ako sú skladanie (interferencia), lom a ohyb (difrakcia) vlnenia.

7.1 MECHANICKÉ KMITY

7.1.1 Základné charakteristiky kmitania

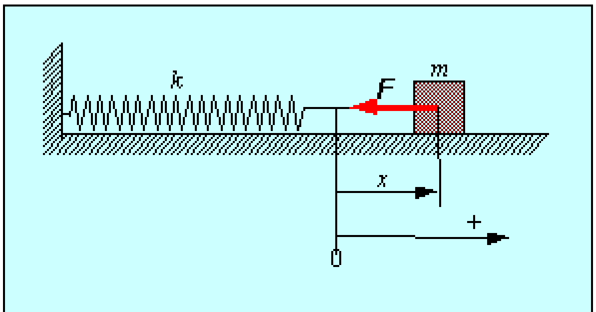
Fyzikálne javy, pri ktorých dochádza k opakujúcim sa zmenám určitej fyzikálnej veličiny nazývame **kmity**. Podľa povahy veličiny hovoríme o kmitoch mechanických, elektrických a pod. Pri mechanických kmitoch meniacou sa veličinou môže byť napr. výchylka gitarovej struny, výchylka fyzikálneho kyvadla, výchylka určitej časti mechanického zariadenia. Kmity nemusia byť viazané iba na pohyb telies. Môžu to byť napríklad aj zmeny intenzity elektrického, alebo magnetického poľa, zmeny elektrického napätia alebo elektrického prúdu.

V mechanike hmotného bodu pod pojmom kmity rozumieme kmitavý pohyb, pri ktorom hmotný bod neprekročí určitú konečnú vzdialenosť od rovnovážnej polohy. **Rovnovážna poloha** je poloha, v ktorej sú sily pôsobiace na daný hmotný bod v rovnováhe (výslednica síl sa rovná nule). Je to poloha, ktorú by hmotný bod zaujal ak by bol v pokoji. **Periodický kmitavý pohyb** je pohyb, pri ktorom sa hmotný bod po uplynutí určitého časového intervalu T (periódy) dostáva do tej istej polohy a má tú istú rýchlosť a zrýchlenie. Kmitavý pohyb nemusí byť len pohyb po priamke. Môže to byť aj pohyb po zložitej, ale vždy tej istej krivke. Ak je kmitavý pohyb matematicky popísateľný jednou harmonickou funkciou, tak je to **harmonický kmitavý pohyb**. Najjednoduchším prípadom harmonického kmitavého pohybu je pohyb po priamke za pôsobenia návratnej sily, ktorá je priamo úmerná výchylke. Takúto kmitajúcu sústavu voláme **lineárny harmonický oscilátor**. Podľa toho, či uvažujeme odpor prostredia (tlmenie) alebo nie, pohyb je tlmený, alebo netlmený. Ak na takýto oscilátor pôsobí nejaká vonkajšia periodická sila, dostávame **nútený lineárny harmonický oscilátor** a **vynútené kmity**.

Kmity sústavy, ktoré prebiehajú bez vplyvu vonkajšej nútiacej sily voláme **vlastné kmity.**

7.1.2 Netlmený harmonický kmitavý pohyb

Uvažujme sústavu, ktorú tvorí ideálna pružina na ktorej je upevnené teleso (hmotný bod) hmotnosti m podľa obr. 6.1.1. V tejto časti a aj v nasledujúcich častiach budeme používať termín teleso len pre názornosť, pri pohybe sa bude chovať ako hmotný bod. Budeme predpokladať, že pre deformáciu pružiny (predĺženie, alebo stlačenie) platí **Hookov zákon** a deformácia pružiny je priamo úmerná pôsobiacej sile. Budeme ďalej predpokladať, že podložka je ideálna a to v tom zmysle, že proti pohybu v horizontálnom smere nepôsobí žiadna sila trenia.



Obr. 6.1.1. Netlmený harmonický oscilátor.

Nech sa teleso pri nedeformovanej pružine nachádza v počiatku súradnicovej osi . V tejto polohe na teleso v smere súradnicovej osi nebude pôsobiť žiadna sila a takúto polohu voláme rovnovážna poloha. Ak ho posunieme o vzdialenosť x, pružinu tým natiahneme a na teleso bude pôsobiť sila v opačnom smere, ako sme pružinu deformovali. Zložku tejto sily v smere osi x vyjadruje rovnica $F = -kx$, kde $k > 0$. Takúto silu voláme **návratná sila** a konštanta k je **silová konštanta** /tiež **tuhosť pružiny**/. Ak teleso uvoľníme, sila mu udelí zrýchlenie a potenciálna energia natiahnutej pružiny sa premení na kinetickú energiu telesa. Po prechode rovnovážnou polohou teleso začne pružinu stláčať. Kinetická energia sa premení na potenciálnu energiu stlačenej pružiny, situácia sa opakuje a teleso začne vykonávať periodický pohyb po priamke. Takáto sústava predstavuje **lineárny harmonický oscilátor**. Ukážeme totiž, že výchylka x z rovnovážnej polohy je harmonickou funkciou času a teda tento lineárny oscilátor je harmonický.

Pohybová rovnica pohybu telesa má tvar

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \ . \qquad (7.1.2.1)$$

Prepíšme ju do tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (7.1.2.2)$$

a zaveďme substitúciu $w_0^2 = k/m$. Dostávame rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \; . \tag{7.1.2.3}$$

Rovnica (6.1.2.3) je lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu. Po vykonaní elementárnych úprav dostávame reálny tvar všeobecného riešenia tejto rovnice

$$x = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \, , \tag{7.1.2.4}$$

kde x predstavuje okamžitú výchylku v čase t, A_0 je maximálna výchylka alebo aj **amplitúda kmitov**, argument ($\omega_0 t + \varphi$) je **fáza kmitu** a φ je **fázová konštanta**. Fázová konštanta je fáza v čase $t = 0$. Obidve konštanty A_0 a φ vyplývajú z počiatočných podmienok, ktorými sú obyčajne výchylka a rýchlosť v čase $t = 0$. Časový priebeh harmonického kmitania je na obr. 6.1.2.

Časový interval T_0 rovný $2\pi / \omega_0$ je doba, za ktorú sa výchylka opakuje, teda je to **perióda kmitov**. Platí

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \, . \tag{7.1.2.5}$$

Frekvencia kmitov f_0 je počet kmitov za časovú jednotku

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.1.2.6}$$

odkiaľ

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{7.1.2.7}$$

Všimnite si, že frekvencia kmitania nijako nezávisí na tom, ako veľmi sme pružinu natiahli a teda aká veľká je amplitúda kmitov. Závisí len od hmotnosti kmitajúceho telesa a silovej konštanty pružiny. Veličinu ω_0 nazývame **uhlová frekvencia** (tiež **kruhová frekvencia**) pohybu; jej jednotka v sústave SI je radián za sekundu, fyzikálny rozmer je s^{-1}.

Riešenie rovnice (6.1.2.2) môžeme rovnako dobre vyjadriť aj v tvare $x = A_0 \sin (\omega_0 t + \varphi^{¥})$. Pri daných počiatočných podmienkach sa pritom len zmení hodnota fázovej konštanty o $\pi/2$.

Časový interval T_0 rovný $2\pi / \omega_0$ je doba, za ktorú sa výchylka opakuje, teda je to **perióda kmitov**. Platí

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \, . \tag{7.1.2.8}$$

Frekvencia kmitov f_0 je počet kmitov za časovú jednotku

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7.1.2.9)$$

odkiaľ

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad (7.1.2.10)$$

Všimnite si, že frekvencia kmitania nijako nezávisí na tom, ako veľmi sme pružinu natiahli a teda aká veľká je amplitúda kmitov. Závisí len od hmotnosti kmitajúceho telesa a silovej konštanty pružiny. Veličinu ω_0 nazývame **uhlová frekvencia** (tiež **kruhová frekvencia**) pohybu; jej jednotka v sústave SI je radián za sekundu, fyzikálny rozmer je s^{-1}.

Riešenie rovnice (6.1.2.2) môžeme rovnako dobre vyjadriť aj v tvare $x = A_0 \sin(\omega_0 t+\varphi^{¥})$. Pri daných počiatočných podmienkach sa pritom len zmení hodnota fázovej konštanty o $\pi/2$.

Príklad 7.1.1

Amplitúda netlmeného harmonického pohybu hmotného bodu je A_0 = 0,02 m a celková energia kmitov E_C = 3.10^{-7} J. Vypočítajte, pri akej výchylke pôsobí na hmotný bod návratná sila veľkosti F = 2,25.10^{-5} N.

Riešenie:

Pre návratnú silu pri netlmenom harmonickom pohybe platí: $F = -k\,x$, kde výchylka x je daná vzťahom $x = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, pričom platí:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Celková energia netlmeného harmonického pohybu je súčet kinetickej a potenciálnej energie. Pri odvodzovaní rovnice (6.1.3.5) sme si ukázali, že celková energia sa rovná $E_c = ½\, k\, A_0^2$. Pre konštantu návratnej sily odtiaľ dostaneme

$$k = \frac{2E_C}{A_0^2}.$$

Dosadením do výrazu pre návratnú silu, dostaneme pre hľadanú výchylku

$$x = -\frac{F}{k} = -\frac{F A_0^2}{2E_C} \cong -1{,}5.10^{-2}\ \mathrm{m}.$$

Príklad 7.1.2.

Pri akej výchylke harmonického oscilátora sa bude jeho kinetická energia rovnať potenciálnej? Čomu sa rovná stredná kinetická a stredná potenciálna energia harmonického oscilátora za jednu periódu?

Riešenie:

Kinetická energia harmonického oscilátora je:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA_0^2\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

a jeho potenciálna energia je:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA_0^2\cos^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2\cos^2(\omega t+\varphi).$$

Má platiť $E_k = E_p$, teda

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2\cos^2(\omega t+\varphi).$$

Riešením tejto trigonometrickej rovnice dostaneme tg $(\omega\, t + \varphi) = 1$, odkiaľ $(\omega\, t + \varphi) = \pi/4$. Výchylka harmonického oscilátora je daná vzťahom: $x = A_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$. Po dosadení fázy dostaneme:

$$x = A_0\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}A_0 = \frac{A_0}{\sqrt{2}}.$$

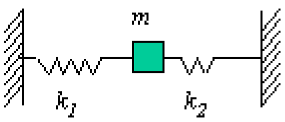
Pri takejto hodnote výchylky sa bude okamžitá kinetická energia rovnať okamžitej potenciálnej energii.

Príklad 7.1.3

Teleso hmotnosti m je upevnené medzi dvoma pružinami, ktoré majú silové konštanty k_1 a k_2 a nachádza sa medzi nimi v rovnovážnej polohe. Vypočítajte periódu kmitov telesa, keď voľné konce pružín sú upevnené podľa obr. 6.1.3.

Riešenie:

Pri vychýlení telesa z rovnovážnej polohy budú naň pôsobiť návratné sily $F_1 = -k_1 x$, $F_2 = -k_2 x$, kde x je výchylka z rovnovážnej polohy. Musíme si uvedomiť, že smer síl od obidvoch pružín je rovnaký. Ak napríklad teleso vychýlime z rovnovážnej polohy do prava, pravú pružinu stláčame, ľavú naťahujeme. Výsledná sila $F = -k\,x$ sa rovná súčtu týchto síl.



Obr. 6.1.3

$F = F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)\,x$, $-k\,x = -(k_1 + k_2)\,x$.

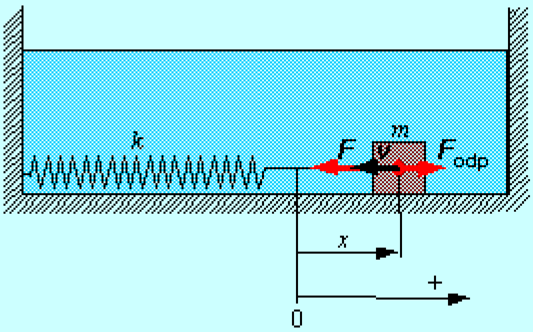
Odtiaľ pre výslednú silovú konštantu pružín platí: $k = (k_1 + k_2)$.

Pre uhlovú frekvenciu kmitavého pohybu a pre jeho periódu dostaneme:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} .$$

7.1.3 Tlmený harmonický pohyb.

Amplitúda ani energia netlmeného harmonického oscilátora od času nezávisia a pohyb takéhoto oscilátora by trval stále. Pri kmitaní reálnych objektov sa vždy viac, alebo menej stretávame s odporom prostredia a s trením. Kmity pri pôsobení trenia postupne zanikajú alebo, ako uvidíme v určitých prípadoch, napriek počiatočnej výchylke, alebo rýchlosti vôbec nevzniknú. Experimentálne môžeme tlmený kmitavý pohyb realizovať napríklad ponorením predchádzajúcej kmitajúcej sústavy – harmonického oscilátora do viskóznej kvapaliny ako je znázornené na obr.6.1.7.



Obr. 6.1.7. Tlmený harmonický oscilátor.

Predpokladajme, že odpor prostredia je priamo úmerný rýchlosti F_{odp}= – *k*¥*v* , kde *k*¥>0. Sila odporu prostredia smeruje proti rýchlosti, čo vyjadruje znamienko mínus v tomto výraze. Ak pôsobiaca návratná sila je priamo úmerná výchylke pohybová rovnica má tvar

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k'\frac{dx}{dt} . \qquad (7.1.3.1)$$

Zaveďme substitúcie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad a \quad 2b = \frac{k'}{m} .$$

Novú konštantu b nazývame **koeficient útlmu**. Konštanta ω_o je vlastná uhlová frekvencia, t.j. uhlová frekvencia netlmeného harmonického oscilátora. Po úprave dostávame pohybovú rovnicu v tvare

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 . \qquad (7.1.3.2)$$

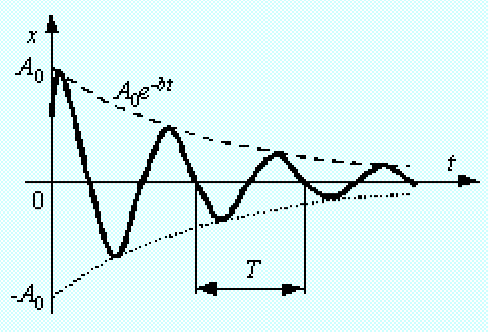
Riešenie tejto rovnice má tvar

$$x = A_0 e^{-bt}\cos(\omega t + \varphi) .$$

Uhlová frekvencia *w* je menšia, ako uhlová frekvencia pri netlmenom kmitaní tej istej sústavy a mení sa aj amplitúda, ktorá s časom exponenciálne klesá:

$$A = A_0 e^{-\delta t} \qquad (7.1.3.3)$$

Priebeh kmitania a zmeny amplitúdy je ukázaný na obr.6.1.9.



Obr. 6.1.9. Tlmené harmonické kmity.

Prísne vzaté nemôžeme tlmený kmitavý pohyb pokladať za periodický pohyb, pretože kmitajúci bod nedosiahne svoju pôvodnú výchylku. Pohyb je kváziperiodický a o perióde T môžeme hovoriť iba ako o časovom intervale, za ktorý hmotný bod prechádza rovnovážnou polohou.

Perióda tlmených kmitov je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}. \qquad (7.1.3.4)$$

Platí $T > T_0$, kde T_0 je perióda vlastných kmitov. Ak je tlmenie malé, perióda sa prakticky rovná perióde netlmených kmitov. Zväčšovaním tlmenia perióda narastá.

Podiel amplitúd dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek označujeme λ a nazývame **útlm**.

$$\lambda = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-bt}}{A_0 e^{-b(t+T)}} = e^{bT} \qquad (7.1.3.5)$$

Prirodzený logaritmus útlmu je **logaritmický dekrement útlmu** λ.

$$\delta = \ln \lambda = bT. \qquad (7.1.3.6)$$

Zo závislosti amplitúdy na čase (7.1.3.3) vidíme, že amplitúda kmitov sa zmenší e-krát za časový interval rovnajúci sa $1/b$. Potom prevrátená hodnota logaritmického dekrementu útlmu vyjadruje počet kmitov, počas ktorých sa amplitúda kmitov zmení e-krát. Čím väčší je logaritmický koeficient útlmu, tým menší je počet kmitov potrebný na určité zníženie amplitúdy.

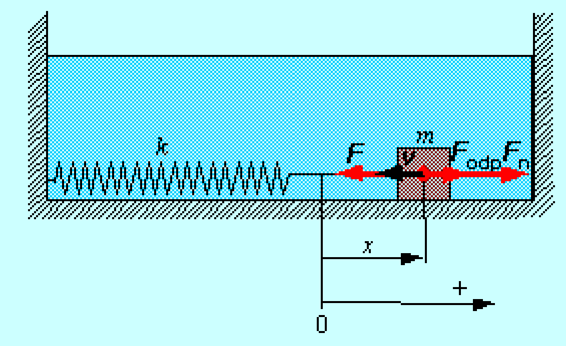
V časti 7.1.2 sme zistili, že celková mechanická energia kmitajúceho oscilátora je úmerná štvorcu amplitúdy. Ak energia oscilátora s tlmením sa v čase $t = 0$ rovnala E_0, potom mechanická energia takéhoto oscilátora bude s rastúcim časom klesať, a to podľa rovnice

$$E = E_0 e^{-2bt} \qquad (7.1.3.7)$$

Vplyvom trenia dochádza k disipácii energie, mechanická energia kmitavého pohybu sa mení na energiu tepelnú a pohyb postupne zaniká. Ak v kmitajúcej sústave chceme pohyb udržať, musíme sústave vhodným spôsobom dodávať energiu. Na druhej strane práve tlmenie využívame v technickej praxi na odstránenie nežiadúcich vibrácií.

7.1.4 Vynútený kmitavý pohyb.

Pod vynúteným kmitaním rozumieme pohyb, ktorý nastane, ak na kmitajúcu sústavu okrem návratnej sily a odporu prostredia pôsobí periodická nútiaca sila. Príklad takejto sústavy je zobrazený na obrázku 6.1.10.



Obr. 6.1.10. Nútený tlmený harmonický oscilátor.

Nech časová závislosť nútiacej sily je $F_n = F_0 \cos(\Omega t)$, kde F_0 je amplitúda nútiacej sily a Ω je jej kruhová frekvencia. Výslednica síl pôsobiacich na hmotný bod hmotnosti m je

$$F = -kx - k'\frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t \ . \qquad (7.1.4.1)$$

Pohybová rovnica má tvar

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k'\frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t \qquad (7.1.4.2)$$

Prepíšeme ju do tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_o \cos \Omega t \ , \qquad (7.1.4.3)$$

kde $f_0 = F_0/m$ a b a ω_0 majú rovnaký význam, ako pri tlmenom kmitavom pohybe. Od rovnice (7.1.3.2) sa táto rovnica líši tým, že pravá strana sa nerovná nule. V matematike sa dokazuje, že všeobecné riešenie tejto rovnice je súčtom riešenia rovnice bez pravej strany, čo je právefunkcia pre tlmené kmity a partikulárneho integrálu pravej strany rovnice (7.1.4.3). Riešením tejto rovnice dostaneme pre amplitúdu vynútených kmitov vzťah

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4b^2\Omega^2}}\,. \qquad (7.1.4.4)$$

Vidíme, že amplitúda vynútených kmitov bude za inak rovnakých podmienok závisieť od uhlovej frekvencie nútiacej sily. Kmity s maximálnou amplitúdou nazývame **rezonančné kmity** a frekvencia pri ktorej dochádza k takýmto kmitom je **rezonančná frekvencia amplitúdy**. Rezonančnú frekvenciu určíme z podmienky extrému funkcie $B(\Omega)$. Rezonancia nastane, keď táto amplitúda bude maximálna. Hľadáme extrém funkcie $B = B(\Omega)$, t.j. splnenie podmienky

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\Omega} = 0$$

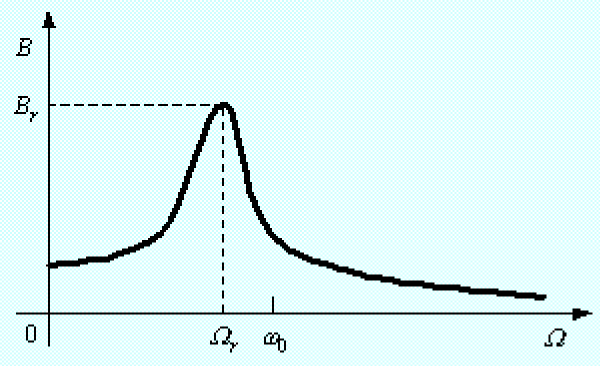
$$\frac{F_0}{m}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4b^2\Omega^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\left(-2\Omega\right) + 8b^2\Omega\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4\Omega\left(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2b^2\right) = 0$$

Pre rezonančnú frekvenciu dostávame:

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}\,. \qquad (7.1.4.5)$$

Priebeh amplitúdy v závislosti od frekvencie nútiacej sily je na obr. 6.1.11.



Obr. 6.1.11. Závislosť amplitúdy nútených kmitov od frekvencie nútiacej sily (rezonančná krivka).

V praxi sa často stretávame s rezonančnými javmi. Na rezonancii v elektrických obvodoch, je založená napríklad prakticky celá rádiokomunikácia. Ak ladíme rádioprijímač, tak iba prispôsobujeme prijímací obvod rádioprijímača frekvencii daného vysielača. Rezonančná absorpcia energie má veľký význam pri určovaní štruktúry molekúl. Ak sú molekuly umiestnené do premenlivého elektrického poľa a niektorá z vlastných frekvencií vibrácii atómov v molekule (vibrácii väzieb) je v rezonancii s meniacim sa vonkajším elektrickým poľom výrazne sa zvýši pre túto frekvenciu absorpcia energie, čo sa dá využiť pri určovaní štruktúry molekúl.

Rezonancia sa využíva tiež v niektorých mechanických meracích prístrojoch. Mechanické rezonancie však môžu mať aj veľké negatívne účinky. Napríklad len pôsobením malej sily môže dôjsť k takým veľkým amplitúdam kmitov, že sa poruší pevnosť materiálov, hriadeľov, mostov a pod. a dôjde k ich deštrukcii.

Príklad 7.1.4

Amplitúda netlmeného harmonického pohybu hmotného bodu je $A_0 = 0{,}02$ m a celková energia kmitov $E_C = 3.10^{-7}$ J. Vypočítajte, pri akej výchylke pôsobí na hmotný bod návratná sila veľkosti $F = 2{,}25.10^{-5}$ N.

Riešenie:

Pre návratnú silu pri netlmenom harmonickom pohybe platí: $F = -k\,x$, kde výchylka x je daná vzťahom $x = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, pričom platí:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\,.$$

Celková energia netlmeného harmonického pohybu je súčet kinetickej a potenciálnej energie. Pri výpočte energie v príklade 7.1.2 sme ukázali, že celková energia sa rovná $E_c = ½\, k\, A_0^2$. Pre konštantu návratnej sily odtiaľ dostaneme

$$k = \frac{2E_C}{A_0^2}\,.$$

Dosadením do výrazu pre návratnú silu, dostaneme pre hľadanú výchylku

$$x = -\frac{F}{k} = -\frac{F\,A_0^2}{2E_C} \cong -1{,}5.10^{-2}\ \mathrm{m}\,.$$

Príklad 7.1.5.

Pri akej výchylke harmonického oscilátora sa bude jeho kinetická energia rovnať potenciálnej? Čomu sa rovná stredná kinetická a stredná potenciálna energia harmonického oscilátora za jednu periódu?

Riešenie:

Kinetická energia harmonického oscilátora je:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA_0^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

a jeho potenciálna energia je:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi).$$

Má platiť $E_k = E_p$, teda

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi).$$

Riešením tejto trigonometrickej rovnice dostaneme tg $(\omega\, t + \varphi) = 1$, odkiaľ $(\omega\, t + \varphi) = \pi/4$. Výchylka harmonického oscilátora je daná vzťahom: $x = A_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$. Po dosadení fázy dostaneme:

$$x = A_0 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}A_0 = \frac{A_0}{\sqrt{2}}.$$

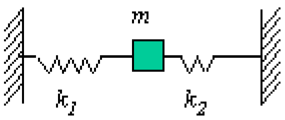
Pri takejto hodnote výchylky sa bude okamžitá kinetická energia rovnať okamžitej potenciálnej energii.

Príklad 7.1.6

Teleso hmotnosti m je upevnené medzi dvoma pružinami, ktoré majú silové konštanty k_1 a k_2 a nachádza sa medzi nimi v rovnovážnej polohe. Vypočítajte periódu kmitov telesa, keď voľné konce pružín sú upevnené podľa obr. 6.1.3.

Riešenie:

Pri vychýlení telesa z rovnovážnej polohy budú naň pôsobiť návratné sily $F_1 = -k_1 x$, $F_2 = -k_2 x$, kde x je výchylka z rovnovážnej polohy. Musíme si uvedomiť, že smer síl od obidvoch pružín je rovnaký. Ak napríklad teleso vychýlime z rovnovážnej polohy do prava, pravú pružinu stláčame, ľavú naťahujeme. Výsledná sila $F = -k\,x$ sa rovná súčtu týchto síl.



Obr. 6.1.3

$F = F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)\,x$, $-k\,x = -(k_1 + k_2)\,x$. Odtiaľ pre výslednú silovú konštantu pružín platí: $k = (k_1 + k_2)$.

Pre uhlovú frekvenciu kmitavého pohybu a pre jeho periódu dostaneme:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Príklad 7.1.7

Logaritmický dekrement tlmeného harmonického pohybu hmotného bodu je $\delta = 0{,}03$. Vypočítajte, akú časť mechanickej energie stratí hmotný bod za 20 s trvania pohybu, keď perióda tlmeného pohybu je
$T = 2$ s.

Riešenie:

Celková mechanická energia na počiatku pohybu je:

$$E_0 = \frac{1}{2} m A_0^2 \omega^2 .$$

Keďže pri tlmenom pohybe sa amplitúda s časom mení podľa vzťahu

$$A(t) = A_0 \, \mathrm{e}^{-\delta t},$$

bude mechanická energia v čase t:

$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2(t) \omega^2 = \frac{1}{2} m A_0^2 \omega^2 \, \mathrm{e}^{-2\delta t} .$$

Pre logaritmický dekrement platí: $\delta = b\,T$ a hmotný bod stratí za čas t energiu:

$$\Delta E = E_0 - E(t) = \frac{1}{2} m A_0^2 \omega^2 (1 - \mathrm{e}^{-2b t}) = E_0 (1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\delta t}{T}}).$$

Relatívna strata energie:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = (1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\delta t}{T}}) \cong 0{,}45.$$

Hmotný bod za 20 s pohybu stratí 45 % energie.

Príklad 7.1.8

Kmitavá sústava koná tlmené kmity s frekvenciou $f = 1000$ Hz. Vypočítajte frekvenciu vlastných kmitov sústavy f_0, keď rezonančná frekvencia pre amplitúdu sústavy je $f_r = 998$ Hz.

Riešenie:

Pre uhlovú frekvenciu tlmených kmitov platí:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2,$$

kde b je koeficient tlmenia a ω_0 je uhlová frekvencia netlmených kmitov. Pri vynútených kmitoch za rezonancie platí podmienka:

$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2b^2 .$$

/pravou týchto dvoch rovníc dostaneme:

$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = 2\omega^2 - \omega_0^2 .$$

Odtiaľ uhlová frekvencia vlastných kmitov sústavy je:

$$\omega_0 = \sqrt{2\omega^2 - \Omega_r^2} .$$

Pretože pre frekvencie platí $\omega_0 = 2p\, f_0$, $\omega = 2p\, f$, $W_r = 2p\, f_r$, hľadaná frekvencia vlastných kmitov sústavy bude:

$$f_0 = \sqrt{2f^2 - f_r^2} \cong 1002 \text{ Hz} .$$

Príklad 7.1.9

Teleso hmotnosti m = 0,1 kg zavesené na pružine s koeficientom tuhosti k_1 = 10 N.m^{-1} koná vynútené harmonické kmity v odporujúcom prostredí s koeficientom odporu k_2 = 0,8 kg.s^{-1}. Vypočítajte koeficient tlmenia, uhlovú frekvenciu vlastných kmitov, rezonančnú amplitúdu a rezonančnú uhlovú frekvenciu, keď amplitúda nútiacej sily $F_o = 1.10^{-1}$ N.

Riešenie:

Pohybová rovnica vynútených kmitov má tvar:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\ t^2} + k_2 \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\ t} + k_1\, x = F_o \cos(\Omega t + \alpha)$$

Pre koeficient tlmenia b platí:

$$b = \frac{k_2}{2m} = 4\, s^{-1}$$

Pre uhlovú frekvenciu vlastných kmitov platí:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 10 \ \text{s}^{-1}.$$

Amplitúda vynútených kmitov má tvar:

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} .$$

Rezonancia pre amplitúdu nastane, keď uhlová frekvencia nútiacej sily sa rovná rezonančnej frekvencii danej vzťahom (7.147.5).

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \cong 8,2\, s^{-1} .$$

Dosadením rezonančnej frekvencie do výrazu pre amplitúdu, dostaneme rezonančnú amplitúdu:

$$B_\Gamma = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega_\Gamma^2)^2+4b^2\Omega_\Gamma^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{4b^4+4b^2\left(\omega_0^2-2b^2\right)}} = \frac{F_0}{2bm\sqrt{\omega_0^2-b^2}} \cong 1{,}4\,\mathrm{cm}$$

Kontrolné otázky

1. *Ktoré fyzikálne javy voláme kmity?*

2. *Čo je rovnovážna poloha?*

3. *Aký význam má amplitúda a čo je fáza kmitu?*

4. *Ako sa mení s časom amplitúda netlmeného kmitavého pohybu?*

5. *V ktorom bode má teleso vykonávajúce harmonický kmitavý pohyb po priamke maximálne zrýchlenie a v ktorom bode maximálnu rýchlosť?*

6. *Ako sa mení s časom amplitúda tlmeného harmonického pohybu?*

7. *Ako sa zmení frekvencia tlmeného pohybu v porovnaní s frekvenciou netlmeného pohybu?*

8. *Aká sila spôsobuje tlmenie pri harmonickom pohybe?*

9. *Teleso s hmotnosťou m, zavesené na pružine s tuhosťou k_1 koná tlmený harmonický pohyb. Odpor prostredia je úmerný rýchlosti $F_R = -k_2 v$. Aký je fyzikálny rozmer konštanty k_2?*

10. *Aký fyzikálny rozmer má koeficient tlmenia?*

Úlohy

7.1 Gumový záves má celkovú dĺžku 45 cm ak je na ňom zavesené závažie hmotnosti 1,8 kg. Ak naň zavesíme závažie hmotnosti 2,5 kg, bude dĺžka závesu 68 cm. Aká je tuhosť takejto gumovej pružiny? Predpokladajte, že deformácia je priamo úmerná pôsobiacej sile.

$$\left(k = \frac{(m_2-m_1)g}{l_2-l_1} \cong 29{,}9\,\mathrm{kg\,s^{-2}}\right)$$

7.2 Ak je na pružine zavesená hmotnosť 0,8 kg, kmitá s frekvenciou 2,4 Hz. Aká bude frekvencia kmitov, ak na pružinu zavesíme záťaž hmotnosti 0,5 kg?

$$\left(f_2 = f\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = 3{,}0\ \mathrm{Hz}\right)$$

7.3 Výchylka harmonického oscilátora v závislosti od času je $x(t) = 2\cos[(5/4)\pi t + \pi/6]$ m. Akáje perióda a frekvencia kmitov? Aká je výchylka a rýchlosť kmitavého pohybu v čase $t = 0$ s ?

$$\left(f = \frac{2\pi}{\omega} \cong 0{,}625\,\mathrm{Hz},\ T = \frac{1}{f} \cong 1{,}6s,\ x(0) = 1{,}73\,\mathrm{m},\ v(0) = -2\omega\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cong -3{,}9\,\mathrm{ms^{-1}}\right)$$

7.4 Netlmený harmonický oscilátor má v určitom čase t_1 okamžitú výchylku $x(t_1) = 5$ cm, rýchlosť $v(t_1) = 0{,}2$ m.s^{-1} a zrýchlenie $a(t_1) = -0{,}8$ m.s^{-2}. Aká je amplitúda A, uhlová frekvencia ω a fázová konštanta tohto pohybu ?

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{a(t_1)}{x(t_1)}} = 4\,s^{-1},\ A = \sqrt{x^2(t_1) + \frac{v^2(t_1)}{\omega^2}} \cong 0{,}07\ \text{m},\ \alpha = arctg\left(-\frac{v(t_1)}{\omega x(t_1)}\right) = 45^0\right)$$

7.5 Vypočítajte frekvenciu netlmeného harmonického pohybu hmotného bodu s hmotnosťou $m = 1$ g, keď amplitúda pohybu $A = 0{,}3$ m a celková energia hmotného bodu pri tomto pohybe je $E_C = 1$ J.

$$\left(f = \frac{1}{2\pi A}\sqrt{\frac{2E_c}{m}} \cong 23{,}7\,\text{Hz}\right)$$

7.6 Akú časť celkovej energie harmonického oscilátora tvorí kinetická a akú potenciálna energia, keď výchylka sa rovná polovici amplitúdy? ($E_p = 25\%$, $E_k = 75\%$)

7.7 Na natiahnutie pružiny o vzdialenosť $y = 5$ cm je potrebná práca $W = 25$ mJ. Vypočítajte, s akou periódou bude kmitať teleso s hmotnosťou $m = 100$ g zavesené na tejto pružine.

$$\left(T = 2\pi y\sqrt{\frac{m}{2W}} \cong 0{,}44\,s\right)$$

7.8 Logaritmický dekrement tlmeného harmonického pohybu hmotného bodu je $\delta = 0{,}07$. Určte, za aký čas bude mechanická energia hmotného bodu 12 krát menšia, keď perióda tlmeného pohybu je $T = 3$s.

$$\left(t = \frac{T\ln 12}{2\,\delta} \cong 53{,}2\,s\right)$$

7.9 Hmotný bod koná tlmený kmitavý pohyb. Za čas $t = 50$ s hmotný bod stratil 60 % svojej mechanickej energie. Vypočítajte koeficient tlmenia kmitavého pohybu.

$$\left(b = \frac{\ln 2{,}5}{2\,t} \cong 0{,}009\,s^{-1}\right)$$

7.10 Logaritmický dekrement tlmeného harmonického pohybu hmotného bodu je $\delta = 0{,}03$. vypočítajte, koľkokrát sa zmenší amplitúda pohybu po 100 kmitoch.

$$\left(n = e^{\delta\,100T} \cong 20\right)$$

7.11 Aký je logaritmický dekrement tlmeného harmonického pohybu hmotného bodu, keď za 10 s trvania pohybu hmotný bod stratí 50 % svojej mechanickej energie a keď perióda tlmeného pohybu je 2 s?

$$\left(\delta = \frac{1}{2}\frac{\ln 2}{t}T \cong 0.069\right)$$

7.12 Pri tlmenom harmonickom pohybe s frekvenciou $f = 1$ s^{-1}, zmenšila sa amplitúda po desiatich kmitoch na polovičnú hodnotu. Vypočítajte koeficient tlmenia.

$$\left(b = \frac{f\ln 2}{n} \cong 0{,}069\,s^{-1}\right)$$