2.2 DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

Dynamika skúma pohyb telies, ich vzájomné pôsobenie a hľadá príčiny pohybu. Ústrednou veličinou dynamiky je sila. Silu považujeme za príčinu zmien pohybového stavu telies. Z metodického hľadiska sa dynamika rozdeľuje na dynamiku hmotného bodu a na dynamiku sústavy hmotných bodov a telesa.

Učebné ciele

Študent po preštudovaní podkapitoly by mal vedieť definovať základné veličiny dynamiky: hmotnosť, sila, hybnosť, práca, energia, výkon , vysloviť a matematicky sformulovať Newtonove pohybové zákony a vedieť ich aplikovať pre rôzne prípady pohybov hmotného bodu. Na základe týchto vedomostí študent by mal poznať vzájomné súvislosti medzi jednotlivými dynamickými veličinami a vedieť ich aplikovať pri rôznorodých fyzikálnych úlohách. Dôležitou súčasťou je, aby študent bol schopný získať schopnosť matematicky formulovať zvolený fyzikálny problém. Študent by mal vedieť zvážiť podmienky a všetky sily, ktoré v skúmanom systéme pôsobia a na základe správneho zostavenia pohybovej rovnice by mal vedieť riešiť fyzikálne úlohy, hľadajúce rýchlosť, zrýchlenie, dĺžku ubehnutej dráhy a výslednú silu pôsobiacu na hmotný bod.
Študent by mal vedieť zostaviť a riešiť pohybové rovnice aj pre neinerciálne vzťažné sústavy.

2.2.1 Newtonove zákony dynamiky

Sú to tri zákony, na ktorých stojí celá stavba klasickej mechaniky.

Prvý Newtonov zákon - ***zákon zotrvačnosti*** - hovorí o zotrvačnosti pohybujúcich sa telies. *V zjednodušenej podobe hovorí, že teleso zotrváva v pokoji, alebo priamočiarom rovnomernom pohybe, pokiaľ naň nepôsobí vonkajšia sila.*

Druhý Newtonov zákon - ***zákon sily*** - vyjadruje vzťah medzi silou pôsobiacou na teleso a zrýchlením, ktoré mu táto sila udeľuje (ak naň pôsobí vonkajšia sila) :

Sila f, pôsobiaca na teleso,je priamo úmerná jeho hmotnosti m a udelenému zrýchleniu a

$$\boldsymbol{f} = m\,\boldsymbol{a}. \qquad (2.2.1.1)$$

Tretí Newtonov zákon dynamiky - ***zákon akcie a reakcie*** - hovorí :

Ak na seba pôsobia dve telesá, tak rovnakými silami, opačného smeru, pričom pôsobia v jednej priamke.

Ak silu pôsobiacu na jedno teleso nazývame ***akcia*** , silu opačného smeru, pôsobiacu na druhé teleso, nazývame ***reakcia***.

Princíp superpozície síl dopĺňa tri Newtonove zákony. Hovorí, že ak na časticu s hmotnosťou m pôsobí súčasne viac síl - $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ... a tieto sily pôsobia na časticu samostatne, jej udelia zrýchlenia $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{f}_1/m$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{f}_2/m$, ... , potom pri súčasnom pôsobení síl častica sa bude pohybovať so zrýchlením

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots = (\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \ldots)/m \,. \qquad (2.2.1.5)$$

2.2.3 Impulz sily a hybnosť častice, moment hybnosti a moment sily

2. 2.3.1 *Impulz sily a hybnosť častice*

Pod impulzom sily rozumieme časový účinok sily, zjednodušene povedané súčin pôsobiacej sily a časového intervalu jej pôsobenia. Všeobecná *definícia impulzu sily* ako *vektorovej* veličiny má tvar :

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}t \,, \qquad (2.2.3.2)$$

kde t_1 a t_2 predstavujú začiatok a koniec časového intervalu pôsobenia sily.

Impulz sily pôsobiaci na voľnú časticu (hmotný bod) s hmotnosťou m vyvolá zmenu jej rýchlosti, lebo pri pôsobení sily $\boldsymbol{f}$, častica sa pohybuje zrýchlením $\boldsymbol{a}$. Namiesto sily $\boldsymbol{f}$ môžeme do vzorca (2.2.3.2) dosadiť súčin $m\boldsymbol{a}$ a integrál upraviť :

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} m\boldsymbol{a}\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t = \int_{v(t_1)}^{v(t_2)} m\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 \,. \qquad (2.2.3.3)$$

Súčin $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ hmotnosti m častice a jej rýchlosti $\boldsymbol{v}$ nazývame **hybnosť častice** (hmotného bodu). *Hybnosť je vektorová veličina* a v našej fyzikálnej literatúre sa často označuje písmenom $\boldsymbol{H}$. Z predošlého vzorca vyplýva, že impulz sily pôsobiaci na časticu má za následok zmenu jej hybnosti - z hybnosti $m\,\boldsymbol{v}_1$ v časovom okamihu t_1 na hybnosť $m\,\boldsymbol{v}_2$ v okamihu t_2 .

Jednotkou impulzu sily, ale aj hybnosti v SI je N.s (newton sekunda). Rovnicu (2.2.3.3) možno upraviť z integrálneho do diferenciálneho tvaru. Pre elementárny impulz platí

$$\mathrm{d}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}t = m\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t = m\,(\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathrm{d}\,(m\mathbf{v}) = \mathrm{d}\boldsymbol{p} \quad ,$$

odkiaľ získame vzťah

$$\boldsymbol{f} = (\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t), \qquad (2.2.3.4)$$

čiže : ***sila pôsobiaca na časticu sa rovná derivácii jej hybnosti podľa času .***

Rovnica v tvare (2.2.3.4) vyjadruje druhý Newtonov pohybový zákon. Po úprave a integrovaní rovnice (2.2.3.4) dostaneme

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f \mathrm{d}t = p_2 - p_1$$

(2.2.3.5)

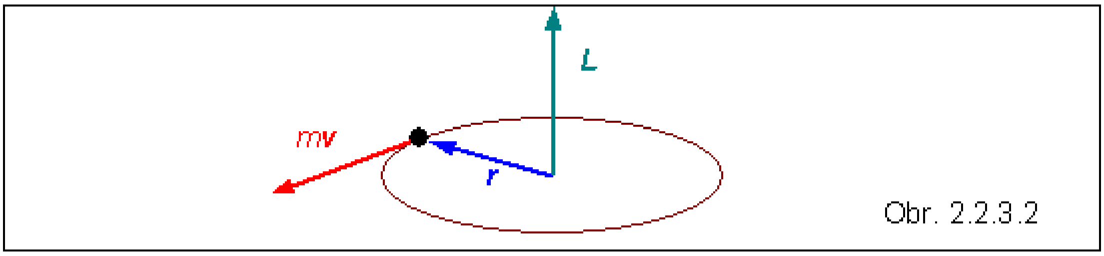
ktorý možno slovne vysloviť: Impulz sily pôsobiacej na voľný hmotný bod sa rovná zmene hybnosti hmotného bodu. Rovnicu (2.2.3.5) nazývame tiež *prvá veta impulzová* pre hmotný bod.

2.2.3.2 Moment hybnosti a moment sily

Pri pohybe častice po kružnici, namiesto hybnosti má praktický význam používať veličinu ***moment hybnosti*** , označovanú písmenom $\boldsymbol{L}$, ktorá sa zavádza vzťahom

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \quad . \qquad (2.2.3.6)$$

Ako vidno aj na obrázku, takto zavedený vektor momentu hybnosti je kolmý na rovinu kružnice.



Obr. 2.2.3.2

Praktický význam tejto veličiny si možno priblížiť prípadom otáčajúcej sa dvojice hmotných bodov - symetricky umiestnených na opačných koncoch priemeru kružnice (činka otáčajúca sa okolo osi prechádzajúcej jej geometrickým stredom). Súčet vektorov hybnosti týchto dvoch bodov sa rovná nule, ale ako sa ľahko sami presvedčíte, vektorový súčet ich momentov hybnosti sa nerovná nule. Preto je táto veličina vhodná na opis otáčajúcich sa sústav (zotrvačníkov a pod.).

Derivácia momentu hybnosti podľa času sa rovná ďalšej významnej veličine – ***momentu sily*** $\boldsymbol{M}$ (niekedy sa označuje aj písmenom $\boldsymbol{D}$) :

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}, \qquad (2.2.3.7)$$

čo vidno z nasledujúceho postupu :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}) = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times m\boldsymbol{v}\right) + \left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right) = (\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{M}, \qquad (2.2.3.8)$$

pričom sme využili skutočnosť, že vektory $\boldsymbol{v}$ a $m\boldsymbol{v}$ sú rovnobežné, takže ich vektorový súčin sa rovná nule. Rovnicu (2.2.3.8) možno vysloviť : Moment sily pôsobiaci na hmotný bod sa rovná časovej zmene momentu hybnosti. (Inými slovami: Moment sily pôsobiaci na hmotný bod sa rovná zmene momentu hybnosti za jednotku času). Úpravou rovnice (2.2.3.8) do tvaru

$$\int_{L_1}^{L_2} \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^t \boldsymbol{M}\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1 = \int_0^t \boldsymbol{M}\mathrm{d}t \quad , \qquad (2.2.3.9)$$

dostaneme II. vetu impulzovú pre hmotný bod. Pre izolovanú sústavu, v ktorej nepôsobia vonkajšie sily, je moment vonkajších síl nulový a následne zmena momentu hybnosti častice je nulová. Znamená to, že pre izolovaný systém moment hybnosti sa zachováva, takže platí $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2$.

2.2.4 Práca a výkon

Pod ***prácou*** rozumieme pôsobenie sily po dráhe. V zjednodušenom vyjadrení pod prácou rozumieme súčin sily a posunutia častice (telesa), na ktoré sila pôsobí. Nech pôsobením sily $\boldsymbol{F}$ na hmotný bod sa tento hmotný bod posunie po určitej dráhe z bodu A_1 o polohovom vektore $\boldsymbol{r}_1$ do bodu A_2 o polohovom vektore $\boldsymbol{r}_2$ **.** V tomto prípade hovoríme o dráhovom účinku sily, resp. o práci sily $\boldsymbol{F}$ po uvažovanej krivke (obr. 2.2.4.1), ktorú definujeme pomocou integrálu

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}.\, d\boldsymbol{r} \quad . \qquad (2.2.4.1)$$

V definícii vystupuje skalárny súčin sily a elementárneho posunutia, čo znamena, že v skalárnom tvare vystupuje kosínus uhla, ktorý zvierajú vektory $\boldsymbol{F}$ a d$\boldsymbol{r}$. Z uvedeného vzťahu vidíme, že práca sily $\boldsymbol{F}$ závisí nielen od pôsobiacej sily, od počiatočného a koncového bodu trajektórie, po ktorej sa pôsobisko sily pohybuje, ale aj na vzájomnej orientácii vektora sily $\boldsymbol{F}$ a vektora posunutia d$\boldsymbol{r}$. To znamená, *že ak vektory sily a posunutia sú na seba kolmé, sila prácu nekoná.* Sila sa efektívne využíva na konanie práce vtedy, ak má smer posunutia.

Práca je skalárna fyzikálna veličina. Jednotkou práce v sústave SI je 1 J (joule).

1 J = 1 N.m = 1 kg.m^2.s^{-2}. *Joule (1 J) je práca , ktorú vykoná konštantná sila 1 N pôsobiaca po dráhe 1 m v smere sily.* V molekulovej a atómovej fyzike sa používa často jednotka 1 eV (elektronvolt), 1 eV = 1,602. 10^{-19} J. V elektrotechnike sa stretávame s ďalšou jednotkou práce 1 kWh (kilowatthodina), ktorá vyplýva z definície výkonu , o ktorom ešte pojednáme 1 kWh = 3,6. 10^6 J.

Ak práca sily nezávisí na trajektórii, ale len na počiatočnom a koncovom bode trajektórie, nazývame túto *silu konzervatívnou.* Práca konzervatívnych síl po uzavretej krivke je nulová. Príkladom konzervatívnych síl sú sila tiažová a sila gravitačná, ktorým sa budeme venovať v osobitných paragrafoch tretej kapitoly. V prípade, že práca sily závisí na trajektórii, hovoríme o silách nekonzervatívnych resp. *disipatívnych.* Príkladom disipatívnych síl je sila trenia a sila odporu prostredia.

Výkon definujeme ako prácu vykonanú za jednotku času. Výkon je preto podiel vykonanej práce ΔW *a* príslušného časového intervalu Δt : $P = \Delta W / \Delta t$. (Hovoríme o strednom alebo priemernom výkone.) V rovnakých časových intervaloch nasledujúcich za sebou, môže byť vykonaná práca rôzna, výkon sa môže od okamihu k okamihu meniť. Preto presná definícia okamžitého výkonu sa zavádza ako limita vyššie uvedeného podielu :

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}. \qquad (2.2.4.5)$$

Modifikáciou tohto vzorca možno získať vzťah medzi pôsobiacou silou (napríklad ťažnou silou motora dopravného prostriedku) a rýchlosťou pohybu pôsobiska sily :

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{f} \cdot \Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\boldsymbol{f} \cdot \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \right) = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \qquad (2.2.4.6)$$

Z výsledku vyplýva, že pri danom výkone motora dopravného prostriedku s rastúcou rýchlosťou klesá jeho ťažná sila.

Jednotkou výkonu v SI je watt (W), pričom 1 W = 1 J/s (joule za sekundu). V praxi sa často používajú dekadické násobky a diely tejto jednotky - kilowatt (kW), megawatt (MW), a gigawatt (GW), najmä v energetike. V elektronike sa používajú diely - miliwatt (mW), a mikrowatt (μW).

Pri vyjadrovaní práce v SI sústave rovnocennou jednotkou joulu je wattsekunda,

1 J = 1 Ws . V energetike je však frekventovanejšie používanie väčších jednotiek :

1 Wh (watthodina) = 3600 Ws = 3,6 . 10^3 Ws

1 kWh (kilowatthodina) = 1000 Wh = 3,6 . 10^6 Ws

1 MWh (megawatthodina) = 3,6 . 10^9 Ws

Pri dodávaní elektrickej, alebo aj inej energie do pracujúceho stroja sa hovorí o ***príkone*** , čím sa rozumie energia dodávaná za jednu sekundu. Aj príkon sa meria vo wattoch. Nie všetku dodanú energiu stroj zúžitkuje - práca za sekundu, ktorú vykoná - jeho výkon, je menší ako príkon. Podiel odvádzaného výkonu a stroju dodávaného príkonu je ***účinnosť*** stroja. Udáva sa buď priamo ako zlomok, alebo v percentách. Účinnosť stroja nikdy nemôže dosiahnuť 100 %, musel by pracovať bez akýchkoľvek strát.

2.2.5 Energia

V mechanike pod energiou rozumieme veličinu charakterizujúcu pohybový, alebo polohový stav mechanickej sústavy (pod mechanickou sústavou rozumieme časticu (hmotný bod), sústavu častíc, alebo teleso) s ohľadom na možnosť vykonania práce. Čím viac práce je schopná mechanická sústava vykonať, tým má väčšiu (mechanickú) energiu. Zmena energie sústavy - jej úbytok aj prírastok - sa vyjadruje prácou, ktorú sústava vykoná, resp. ktorú sústave dodáme. *Energia je stavová veličina,* sústava má energiu, aj keď sa jej stav nemení. *O práci možno hovoriť iba vtedy, ak sa stav sústavy mení, s čím súvisí aj zmena jej energia.* Vonkajšie sily vykonaním práce môžu napríklad zväčšiť rýchlosť telesa, zodvihnúť ho vyššie, alebo teleso zdeformovať (stlačiť, natiahnuť pružinu) čím teleso získa väčšiu energiu, ktorú potom môžeme využiť na vykonanie práce. Populárnejšie to možno vyjadriť tak, že energia je v sústave "našetrená" práca. Uvedené skutočnosti vyjadrujeme kvantitatívne vzťahom

$$W = k\,(E_2 - E_1), \qquad (2.2.5.1)$$

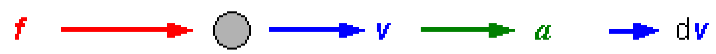
kde W predstavuje sústave dodanú prácu, E_2 a E_1 energie konečného resp. začiatočného stavu a k je konštanta, ktorá závisí od voľby jednotiek práce a energie. V sústave SI sa pre tieto dve veličiny používa rovnaká jednotka - joule. Preto konštanta k sa rovná jednotke. Podľa vzorca (2.2.5.1) potom práca dodaná sústave sa číselne rovná zmene energie sústavy.

Uvedieme tri špeciálne prípady mechanickej energie a ich súvislosť s prácou.

A / Kinetická energia

Zo skúsenosti vieme, že keď na voľnú časticu pôsobí sila, urýchľuje ju, zväčšuje jej rýchlosť, alebo mení smer rýchlosti. Ak pohybujúca sa častica zmenila svoju rýchlosť vzhľadom k zvolenej inerciálnej sústave, musela byť vykonaná práca iným telesom. Hovoríme, že práca na častici bola vykonaná inou silou, výsledkom ktorej je zmena pohybu častice. *Dynamická veličina, ktorá súvisí s pohybom a ktorá sa v dôsledku vykonania práce zmenila sa nazýva kinetickou energiou.*

Uvážime prípad, keď pôsobiaca sila $\boldsymbol{f}$ má smer rýchlosti častice. Vtedy aj zrýchlenie $\boldsymbol{a}$, ktoré sila častici udelí, má smer rýchlosti. Preto aj elementárna zmena rýchlosti $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ je rovnobežná s vektorom rýchlosti, takže pre skalárny súčin $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}$ platí rovnosť $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = v\,\mathrm{d}v$.



Obr. 2.2.5.1

Potom môžeme písať

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{f} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\boldsymbol{a} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{v_1}^{v_2} m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{v_1}^{v_2} m\boldsymbol{v} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_{v_1}^{v_2} mv \,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2}$$

(2.2.5.2)

Súčasne, podľa vzorca (2.2.5.1), platí $W = E_2 - E_1$, takže porovnaním získame vzťah pre kinetickú (pohybovú) energiu :

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad . \qquad (2.2.5.3)$$

Rovnicu (2.2.5.2) s využitím vzťahu (2.2.5.3) možno prepísať do tvaru:

$$W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} \,, \qquad (2.2.5.4)$$

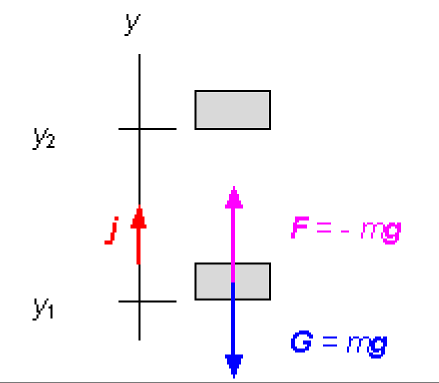
ktorá má názov „ veta o kinetickej energii pre hmotný bod“ , alebo teoréma práce. Vzťah (2.2.5.4) hovorí:

Zmena kinetickej energie hmotného bodu sa rovná práci vykonanej výslednicou pôsobiacich síl pri premiestnení hmotného bodu z počiatočnej polohy do konečnej polohy.

Jednotkou kinetickej energie v sústave SI je rovnako ako pre prácu 1 J = 1 N.m = 1 kg. m^2. s^{-2}.

B / Potenciálna energia

Súvisí s polohou častice vo vzťažnej sústave, preto sa pre ňu používa aj názov polohová energia . Ide o polohu vzhľadom na iné teleso (alebo časticu), pričom medzi časticou a telesom existuje vzájomné silové pôsobenie. Hovoríme, že častica sa nachádza v silovom poli (telesa), čo znamená, že v každom bode silového poľa na časticu pôsobí určitá sila, ktorej veľkosť aj smer sa s polohou častice môže meniť. Najjednoduchším prípadom je *homogénne silové pole*, v ktorom veľkosť aj smer sily sú v každom bode poľa rovnaké. V istom priblížení takýmto poľom je gravitačné pole Zeme, ak sa obmedzíme na oblasť blízko zemského povrchu.



Obr. 2.2.5.2

V takomto poli budeme dvíhať teleso s hmotnosťou m z východiskovej polohy, ktorej zodpovedá výšková súradnica y_1 do konečnej polohy so súradnicou y_2 . Tiaž $\boldsymbol{G}$ telesa ako vektorová veličina smeruje nadol, proti jednotkovému vektoru $\boldsymbol{j}$ zatiaľ čo sila $\boldsymbol{F}$, ktorou dvíhame teleso (bez zrýchlenia !), má rovnakú veľkosť, ale smeruje nahor. Prácu na zodvihnutie telesa vypočítame integrálom

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} (-m\boldsymbol{g}) .\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \,.$$

Do integrálu dosadíme $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{j}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}y$, a integračné medze zameníme na y_1 a y_2 :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} (-m\boldsymbol{g}) .\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{y_1}^{y_2} [-m(-g\boldsymbol{j})] \,.\, \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}y = mg \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y = mgy_2 - mgy_1 \,. \qquad (2.2.5.6)$$

Vykonaná práca sa rovná rozdielu hodnôt potenciálnej energie telesa v dvoch polohách, preto za potenciálnu energiu v tomto prípade považujeme výraz

$$E_p = mgy \,. \qquad (2.2.5.7)$$

Práca konzervatívnych síl nezávisí od trajektórie. Pritom veľkosť tejto práce sa rovná **úbytku** potenciálnej energie systému E_p.

2.2.6 Zákon zachovania energie

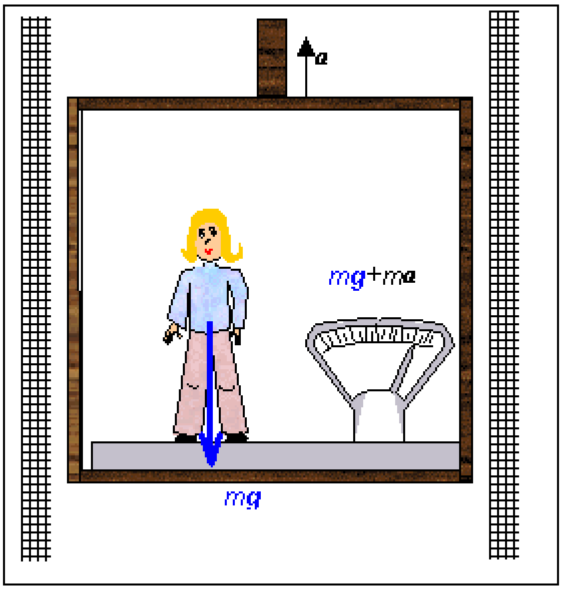
Ak na mechanickú sústavu nepôsobia vonkajšie sily a teda podľa zákona o akcii a reakcii ani sústava nepôsobí silami na okolité telesá, sústave sa nedodáva, ani z nej neodoberá práca. Preto sa energia sústavy nemení. Túto skutočnosť vyjadrujeme formuláciou - energia izolovanej sústavy sa nemení. Je to formulácia zákona zachovania energie mechanickej sústavy.

$$\boxed{E_k + E_p = \text{konšt.}} \qquad (2.2.6.1)$$

Súčet kinetickej a potenciálnej energie častice sa s časom nemení. To znamená, že ak v časovom okamihu t_1 má častica energie E_{k1} a E_{p1}, a v časovom okamihu t_2 energie E_{k2} a E_{p2}, potom platí rovnosť

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \qquad (2.2.6.2)$$

Príklad 2.2.2.1: Dievča s hmotnosťou m stojí na váhach, ktoré sú umiestnené v kabíne výťahu. Rozhodnite, či váha ukážu rovnakú výchylku, ak výťah a) je v kľude, b) rozbieha sa so zrýchlením $\boldsymbol{a}$ smerom nahor c) pohybuje sa so spomalením $\boldsymbol{a}$ smerom nahor, d) pohybuje sa so zrýchlením $\boldsymbol{a}$ smerom nadol, e) so spomalením $\boldsymbol{a}$ smerom nadol. Kedy bude dievča relatívne najspokojnešie so svojou hmotnosťou, ak dbá o svoju štíhlu líniu?



Riešenie:

a) Výťah v pokoji predstavuje inerciálny systém, v ktorom jedinou pôsobiacou silou je tiažová sila . Ak si zvolíme súradnicovú sústavu s osou z orientovanou smerom nadol, pôsobiaca tiaž v tejto sústave je určená $\boldsymbol{G} = (0,0,G)$. Váhy v pokoji ukážu výchylku, odpovedajúcu tiaži dievčaťa $G = mg$.

b) Ak sa výťah pohybuje so zrýchlením $\boldsymbol{a}$, jedná sa o neinerciálny vzťažný systém. Ak v ňom chceme uplatniť Newtonovu pohybovú rovnicu musíme k skutočnej tiažovej sile pripočítať sily zotrvačné. Počas pohybu výťahu so zrýchlením $\boldsymbol{a}$ vzniká dodatočná príťažlivá sila smerom opačným ako zrýchlenie, ktoré ju vyvolalo. Pohybová rovnica vo vektorovom tvare pre neinerciálny systém bude $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F_0}$ Sila zotrvačnosti (dodatočná príťažlivá sila) a zemská príťažlivosť majú smer v jednej priamke. V prípade pohybu výťahu so zrýchlením $\boldsymbol{a}$ smerom nahor, bude zotrvačná sila smerom nadol $\boldsymbol{F_0} = (0,0,\ a\ )$. Vektorová pohybová rovnica prejde na skalárny tvar $m\ a' = mg + ma = m(g + a)$ .Váha ukáže väčšiu výchylku, zväčšenú práve o súčin ma.

c) V prípade pohybu so spomalením $\boldsymbol{a}$ smerom nahor, vektor zrýchlenia neinerciálnej sústavy má smer nadol, takže $\boldsymbol{F_0} = (0,0,\ -\ ma\ )$, a pohybová rovnica prejde na tvar $m\ a = mg\ -\ m\ a = m(\ g\ -\ a)$ .Váha ukáže menšiu výchylku práve o súčin ma vzhľadom na výchylku váh v stave, keď výťah je v kľude.

d) V prípade keď výťah sa pohybuje so zrýchlením $\boldsymbol{a}$ smerom nadol, dodatočná príťažlivá sila zotrvačnosti

má smer opačný t.j. $\boldsymbol{F_0} = (0,0,\ -\ m\ a)$ a pohybová rovnica bude $m\ a = m\ a\ -\ m\ a = m(\ g\ -\ a)$. Váha ukáže

opäť menšiu výchylku práve o súčin $m\ a$..

d) V prípade pohybu výťahu so spomalením $\boldsymbol{a}$ smerom nadol, vektor zrýchlenia neinerciálnej sústavy má smer nahor, takže dodatočná príťažlivá sila zotrvačnosti je $\boldsymbol{F_0} = (0,0,\ m\ a)$. Pohybová rovnica má tvar $m\ a = mg\ + ma = m(\ g\ +\ a)$ ..Váha ukáže väčšiu výchylku odpovedajúcu práve súčinu $m\ a$.. Dievča, ktoré dbá o svoju štíhlu líniu, bude „ relatívne“ najspokojnejšie so svojou hmotnosťou m, ak sa bude vážiť buď v brzdiacom výťahu smerom nahor resp. v rozbiehajúcom sa výťahu smerom nadol. V obidvoch prípadoch váhy ukážu menšiu hodnotu, ktorá od skutočnej tiaže mg sa zmenší o dodatočnú tiaž $m\ a$. V týchto prípadoch všetky telesá, ktoré sú vo výťahu, akoby boli ľahšie. Čím väčšie je zrýchlenie výťahu, tým väčšia je strata tiaži.

Príklad 2.2.2.2: Rozhodnite, či tiaž telesa na póle a na rovníku je rovnaká. Svoje tvrdenie fyzikálne zdôvodnite. Určite o koľko je ľahšie kilogramové závažie na rovníku ako na póle za predpokladu, že Zem má presne tvar gule o polomere R.

Riešenie: Telesá nachádzajúce sa na rôznych miestach zemského povrchu sa nachádzajú v rôznych vzdialenostiach od osi Zeme, čo závisí od jeho zemepisnej šírky. Pri prechode od pólu k rovníku sa táto vzdialenosť zväčšuje.

Ak si vyjadríme uhlovú rýchlosť otáčania Zeme ω pomocou počtu otáčok za jednotku času f, pre veľkosť odstredivého zrýchlenia platí vzťah

$a_{od} = 4\ \pi^2 f^2\ r'$.

Teleso na póle je na osi otáčania, takže $\boldsymbol{r'} = 0$ a odstredivé zrýchlenie je rovné nule. **Na póle zotrvačná odstredivá sila nepôsobí**. Tiaž telesa na póle je určená len silou mg. Odstredivá zotrvačná sila sa pri prechode od pólu k rovníku zväčšuje, pretože sa zväčšuje vzdialenosť telesa od osi rotácie. Na rovníku je odstredivá sila maximálna. Odstredivá sila má smer pozdĺž polohového vektora $\boldsymbol{r'}$. Označme si $\boldsymbol{G_r}$ tiaž, ktorú nameriame na rovníku.

$G_r = mg_r = m\,(g - a_{od}) = m\,(g - 4\,\pi^2 f^2\,R).$

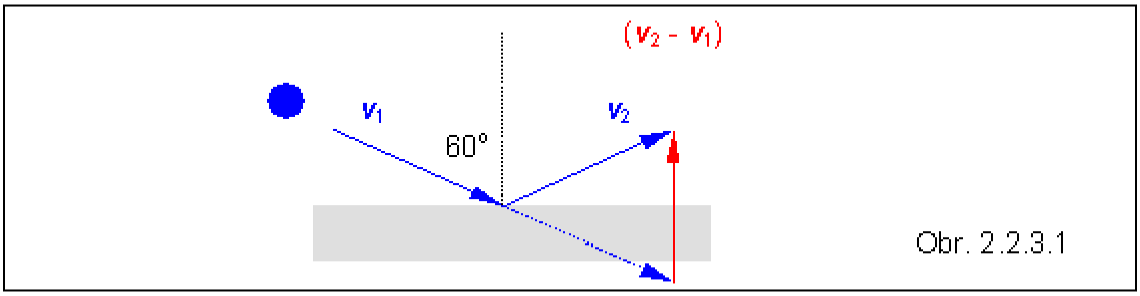
Zmena tiaže na rovníku bude pre teleso o hmotnosti m

$$D\ G = G - G_r = m\ 4\ p^2 f^2\ R.$$

Po číselnom vyjadrení dostaneme pre zmenu tiaže kilogramového závažia D G = 0,033778 N

Pozn. V skutočnosti stráca kilogramové závažie ešte viac, pretože Zem je elipsoid (sploštená guľa). Vzdialenosť od pólu do stredu Zeme je menšia ako polomer Zeme na rovníku, priemerne o 1/300 jeho veľkosti.

Príklad 2.2.2.3. Lopta s hmotnosťou $m = 0{,}2$ kg narazila na stenu pod uhlom dopadu 60° a odrazila sa pod rovnakým uhlom, pričom veľkosť jej rýchlosti sa nezmenila. Určite strednú silu $\boldsymbol{f}_{str}$ pôsobiacu na loptu počas nárazu, ktorý trval $\Delta t = 0{,}05$ s , keď rýchlosť lopty bola v = 5 m/s.



Obr. 2.2.3.1

Riešenie : $f_{str}\,\Delta t = m\,(v_2 - v_1) \Rightarrow f_{str} = (1/\Delta t)\,m\,|(v_2 - v_1)|.$

$|(v_2 - v_1)| = 2v\cos(60^o) = 2\ v\ .\ (1/2) = v = 5$ m/s.

Pre veľkosť sily pôsobiacej na loptu tak dostaneme : $f_{str} = (1/\ 0{,}05)\ .\ 0{,}2\ .\ 5 = 20$ N .

Smer sily je zhodný so smerom rozdielu vektorov $(v_2 - v_1)$.

Príklad 2.2.2.4 Vypočítajte akú veľkú prácu vykonal elektromotor výťahu, ktorý zdvihol obsadenú kabínu (500 kg) z prízemia na piate poschodie (t.j. 15 m) .

Riešenie : Na dvíhanie kabíny s hmotnosťou $m = 500$ kg je potrebná sila $F = mg$, kde $g = 9{,}81\ ms^{-2}$ je tiažové zrýchlenie. Takáto sila musí pôsobiť po dráhe $s = 15$ m. Práca vykonaná elektromotorom je

$$W = mgs = 500\ kg\ .\ 9{,}81\ ms^{-2}\ .\ 15\ m = 73\,575\ kg.m^2.s^{-2} = 73575\ J\ .$$

Príklad 2.2.2.5 Aký musí byť príkon elektromotora z príkladu 2.2.4.2 , keď má dopraviť kabínu výťahu na piate poschodie za 15 sekúnd ? Účinnosť elektromotora je 80%.

Riešenie : Elektromotor musel vykonať prácu $W = 73575$ J za $\Delta t = 15$ s, musel teda pracovať s výkonom

$$P_v = W / \Delta t = 4\,905\ J/s = 4\,905\ W \cong 4{,}9\ kW\ .$$

Tento výkon predstavuje 80% príkonu, t.j.

$$P_v = 0{,}8\ P_p\ ,\ \text{takže}\ P_p = P_v / 0{,}8 \cong 6{,}13\ kW$$

Príklad 2.2.2.6 Akú prácu treba vykonať na zvýšenie rýchlosti automobilu z 36 km/h na 72 km/h ? Za aký časový interval to možno dosiahnuť, ak motor automobilu má výkon 50 kW ? Hmotnosť automobilu m = 1200 kg.

Riešenie : Potrebnú prácu vypočítame ako rozdiel kinetických energií

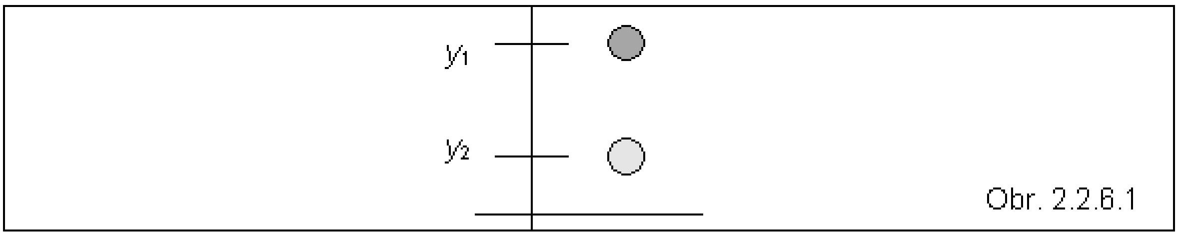
$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 600\,\mathrm{kg}(20^2 - 10^2)\,\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2} = 180\,000\,\mathrm{J}.$$

Pre porovnanie si všimnime, že pôvodná kinetická energia auta bola 600 kg 10^2 $\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}$ = 60 000 J. Ak má motor výkon P = 50 000 W, prácu W = 180 000 Ws vykoná za časový interval

$\Delta t = W / P = 3{,}6$ s .

Reálne to však trvá dlhšie, lebo značná časť práce vykonanej motorom sa vynaloží na prekonávanie odporu prostredia.

Príklad 2.2.2.7 Pomocou zákona zachovania mechanickej energie vypočítajte, akou rýchlosťou dopadne teleso padajúce voľným pádom z výšky h . Hmotnosť telesa je m .



Obr. 2.2.6.1

Riešenie: Nech $h = y_1 - y_2$. Vo výške označenej súradnicou y_1 nech má teleso nulovú kinetickú energiu, E_{k1} = 0, a potenciálnu energiu $E_{p1} = mgy_1$. Voľným pádom teleso padá nadol a v polohe označenej súradnicou y_2 má menšiu potenciálnu energiu $E_{p2} = mgy_2$ a neznámu kinetickú energiu $mv_2^2/2$. Podľa vzorca (2.2.6.2 platí rovnosť

$0 + mgy_1 = mv_2^2/2 + mgy_2$,

odkiaľ najprv osamostatníme kinetickú energiu :

$mv_2^2/2 = mg(y_1 - y_2) = mgh$,

a vypočítame rýchlosť $v_2 = (2gh)^{1/2}$

Poznámka: Rovnaký výsledok dostaneme pre rýchlosť vody prichádzajúcej do turbíny po prekonaní výškového rozdielu h . Ak poznáme prierez potrubia, pomocou vypočítanej rýchlosti môžeme zistiť, koľko mechanickej energie za sekundu voda prináša do turbíny.

Príklad 2.2.2.8 Akú rýchlosť v treba udeliť guli smerom nahor po naklonenej rovine s uhlom $\alpha = 30^0$, aby prebehla dráhu s = 5 m ? (Nebudeme uvažovať trenie, ani odpor prostredia.)

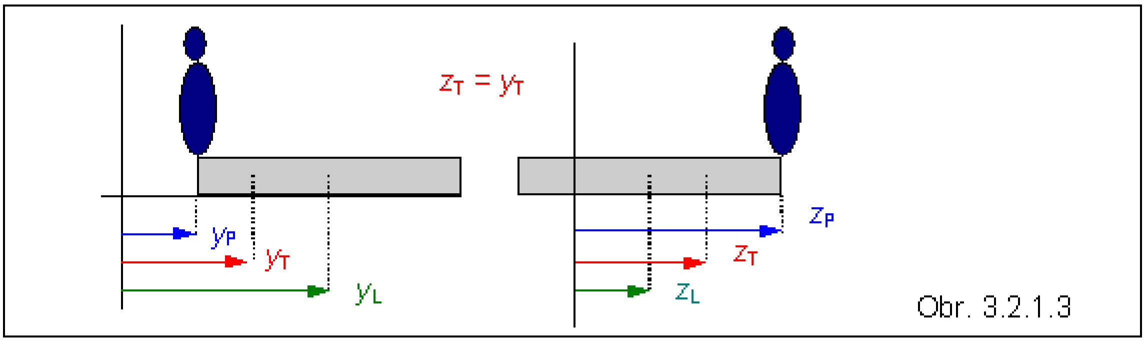
Riešenie: Dohodneme sa, že na začiatku má guľa nulovú potenciálnu energiu, $E_{p1} = 0$. Jej začiatočná kinetická energia $E_{k1} = mv^2/2$. Pri pohybe nahor po naklonenej rovine postupne nadobúda výšku a stráca rýchlosť. Na konci dráhy s bude mať nulovú kinetickú energiu $E_{k2} = 0$, pričom jej potenciálna energia bude $E_{p2} = mgh = mgs \sin(30^o)$. Použijeme vzorec (2.2.6.2) , pomocou ktorého získame vzťah

$mv^2/2 + 0 = 0 + mgs \sin(30^o)$,

z ktorého vypočítame začiatočnú rýchlosť :

$v = (gs)^{1/2} \cong (10 \text{ ms}^{-2} \,.\, 5 \text{ m})^{1/2} = (50 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2})^{1/2} \cong 7 \text{ ms}^{-1}$

Príklad 2.2.2.9 Na pokojnej hladine jazera sa nachádza v pokoji loďka s hmotnosťou M a dĺžkou L, na jej jednom konci stojí plavčík s hmotnosťou m . Vypočítajte o koľko sa posunie ťažisko loďky vzhľadom na breh, ak plavčík prejde na druhý koniec loďky.



Riešenie Loďka a plavčík sú na začiatku v pokoji, preto v pokoji je aj ich ťažisko vzhľadom na vzťažnú sústavu viazanú na breh. Nulové je aj zrýchlenie ťažiska, čo podľa vety o ťažisku znamená, že výsledná je aj vonkajšia sila, ktorá na sústavu loď - plavčík pôsobí. Keď sa plavčík začne pohybovať, začnú v sústave pôsobiť vnútorné sily, vonkajšia zostáva nulová. Preto zrýchlenie ťažiska sústavy bude naďalej nulové, ťažisko nezmení svoju polohu. Na obrázku 3.2.1.3 sú vyznačené začiatočné súradnice plavčíka y_P , stredu (ťažiska) loďky y_L a ťažiska sústavy y_T a súradnice po presunutí plavčíka, označené pre ľahšie rozlíšenie písmenami z . Na začiatku pre súradnicu ťažiska sústavy platí

$y_T = (my_P + My_L) / (m + M)$.

Výpočet si zjednodušíme, ak začiatok na súradnicovej osi zvolíme tak, aby $y_P = 0$. Potom sa zjednoduší aj vyjadrenie polohy stredu loďky : $y_L = L / 2$, takže

$y_T = M (L/2) / (m + M)$.

Po presunutí plavčíka $z_P = z_L + L/2$, takže

$z_T = (mz_P + Mz_L) / (m + M) = [m(z_L + L/2) + Mz_L] / (m + M)$.

Teraz využijeme podmienku $z_T = y_T$, dosadíme na ľavú stranu rovnice, čím vznikne rovnica

$[m(z_L + L/2) + Mz_L] = M (L/2)$,

v ktorej jedinou neznámou hodnotou je z_L , pre ktorú dostaneme výsledok

$z_L = [(M - m)(L/2)] / (m + M)$.

Rozdiel $y_L - z_L$ predstavuje hľadané posunutie ťažiska loďky.