2 GAUSSOV ZÁKON PRE ELEKTRICKÉ POLE. KONDENZÁTORY

Teoretický úvod

Tok Ψ_E intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ je integrál intenzity $\boldsymbol{E}$ po orientovanej ploche S

$$\Psi_{\mathrm{E}} = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.1}$$

Jednotkou toku intenzity je 1 V.1m. Z Coulombovho zákona pre náboje vo vákuu vyplýva ***Gaussov zákon*** pre elektrické pole vo vákuu: **Tok intenzity elektrického poľa cez uzavretú orientovanú plochu sa rovná podielu voľného elektrického náboja Q v objeme ohraničenom touto plochou a permitivity vákua ε_0**

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.2}$$

Gaussov zákon platí aj pre elektrické pole v dielektriku (v izolante) s tým rozdielom, že vo vzťahu (2.2) zameníme permitivitu vákua ε_0 permitivitou dielektrika $\varepsilon_0\varepsilon_r$

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}}} \tag{2.3}$$

Voľný náboj Q sa nachádza na vodičoch v objeme ohraničenom uzavretou plochou. Relatívna permitivita dielektrika $\varepsilon_r > 1$ zohľadňuje redukčný vplyv polarizačného viazaného náboja $-Q_P$ v tej časti dielektrika, ktorá sa nachádza v objeme ohraničenom uzavretou plochou

$$\frac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{r}}} = Q - Q_{\mathrm{P}} \tag{2.4}$$

Rôzne dielektriká majú rôznu relatívnu permitivitu ε_r, preto je vhodné definovať veličinu elektrická indukcia $\boldsymbol{D}$ materiálovým vzťahom

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \boldsymbol{E} \tag{2.5}$$

Vzťahy (2.2), (2.3) môžeme potom zapísať v jednotnom tvare (pre vákuum $\varepsilon_r = 1$)

$$\oint_S \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \quad \Rightarrow \quad \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \tag{2.6}$$

Zo vzťahu (2.6) vidno, že jednotkou elektrickej indukcie $\boldsymbol{D}$ je 1 C.1 m^{-2}.
Elektrický indukčný tok Ψ je integrál elektrickej indukcie $\boldsymbol{D}$ po orientovanej ploche S

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.7}$$

Jednotkou elektrického indukčného toku je 1 C (coulomb). Vzťah (2.6) je ***Gaussov zákon*** pre elektrické pole v ľubovoľnom prostredí: **Elektrický indukčný tok cez uzavretú orientovanú plochu sa rovná voľnému elektrickému náboju Q v objeme ohraničenom touto plochou.**
Vo vzťahoch (2.2), (2.3), (2.6) je vektor d$\boldsymbol{S}$ kolmý na elementárnu plochu dS a vychádza von z objemu ohraničeného uzavretou plochou.
Voľný náboj Q nabitého vodiča V sa rozloží po vonkajšom povrchu vodiča tak, že elektrické pole vnútri vodiča aj v jeho dielektrických dutinách bude nulové (vytienené) a v nevodivom okolí nabitého vodiča vznikne elektrické pole intenzity $\boldsymbol{E}$ so siločiarami kolmými na povrch vodiča. Veľkosť E tejto intenzity v tesnej blízkosti povrchu nabitého vodiča určíme pomocou ***Coulombovej vety***

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}}} \tag{2.8}$$

kde $\sigma = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}S$ je plošná hustota náboja na povrchu vodiča.
Porovnaním (1.16), (1.17) pre rozdiel potenciálov v miestach 1 a 2 vyplýva

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (2.9)$$

Ak považujeme miesto 2 za referenčné miesto nulovým potenciálom (2 = RM, $\varphi_2 = 0$), potom pre potenciál φ_A v ľubovoľnom mieste A (1=A) platí

$$\varphi_A = \int_A^{RM} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (2.10)$$

Ak referenčné miesto nie je zjavne zadané, volíme jeho polohu podľa uváženia, často v nekonečnej vzdialenosti od nabitých vodičov (RM = ∞). Elektrický potenciál φ nabitého vodiča v nevodivom okolí je potom definovaný vzťahom

$$\varphi = \int_{Vl}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (2.11)$$

kde orientovaná integračná krivka l začína v ľubovoľnom bode V nabitého vodiča a končí v nekonečnej vzdialenosti od vodiča. Vnútri vodiča $\boldsymbol{E} = 0$, preto je elektrický potenciál v každom bode vodiča vrátane jeho dielektrických dutín rovnaký a orientovaná integračná krivka l vo vzťahu (2.11) môže začínať v bode V na povrchu nabitého vodiča.
Ak volíme referenčné miesto RM v nekonečnej vzdialenosti od nabitého vodiča (RM = ∞), potom je elektrický potenciál φ_A nejakého bodu A v nevodivom okolí nabitého vodiča definovaný vzťahom

$$\varphi_A = \int_{Al}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (2.12)$$

kde orientovaná integračná krivka l začína v bode A a končí v nekonečnej vzdialenosti od nabitého vodiča.
Elektrická kapacita C osamoteného vodiča je podiel jeho voľného náboja Q a jeho elektrického potenciálu φ

$$C = \frac{Q}{\varphi} \qquad (2.13)$$

Jednotkou elektrickej kapacity je farad (1 F = 1 C/ 1 V).
Kondenzátor je systém dvoch vodičov (elektród) oddelených dielektrikom. Po nabití kondenzátora je jeden vodič nabitý kladným voľným nábojom Q, druhý je nabitý záporným voľným nábojom $-Q$. V nevodivom okolí oboch vodičov vznikne elektrické pole so siločiarami vychádzajúcimi kolmo z povrchu kladne nabitého vodiča a vchádzajúcimi kolmo na povrch záporne nabitého vodiča. Napätie U nabitého kondenzátora je definované vzťahom

$$U = \int_{+l}^{-} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \qquad (2.14)$$

kde orientovaná integračná krivka l začína na povrchu kladne nabitého vodiča s potenciálom φ_1 a končí na povrchu záporne nabitého vodiča s potenciálom φ_2.
Elektrická kapacita kondenzátora je podiel jeho kladného voľného náboja Q na kladne nabitej elektróde a napätia U medzi kladne nabitou a záporne nabitou elektródou

$$C = \frac{Q}{U} \qquad (2.15)$$

Pri nabíjaní kondenzátora prenáša vonkajšia sila nekonečne malý kladný náboj dQ' zo záporne nabíjanej elektródy na kladne nabíjanú elektródu, medzi ktorými je napätie $U' = Q'/C$, kde Q' je priebežný náboj na kladne nabíjanej elektróde, pričom podľa vzťahu (1.19) táto vonkajšia sila vykoná elementárnu prácu dW_{ext}

$$\mathrm{d}W_{ext} = \mathrm{d}Q' \cdot U' = \frac{\mathrm{d}Q' \cdot Q'}{C} \qquad (2.16)$$

Prácu W_{ext} potrebnú na prenesenie celkového náboja Q z jedného vodiča na druhý získame integráciou vzťahu (2.16) s využitím vzťahu (2.15)

$$W_{\mathrm{ext}} = \int_0^Q \frac{\mathrm{d}Q'\cdot Q'}{C} = \frac{1}{C}\int_0^Q \mathrm{d}Q'\cdot Q' = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} \tag{2.17}$$

Energia E_{E} elektrického poľa medzi elektródami nabitého kondenzátora sa rovná tejto práci

$$E_{\mathrm{E}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} \tag{2.18}$$

Predstavme si nabitý doskový (rovinný) kondenzátor tvorený rovnobežnými vodivými elektródami tvaru rovnakých dosiek určitej hrúbky vo vzdialenosti d od seba. Voľné náboje opačného znamienka sú lokalizované na priľahlých stenách vodivých elektród s rovnakým plošným obsahom S a v dielektriku medzi elektródami vytvárajú homogénne elektrické pole s elektrickou indukciou $\boldsymbol{D}$ a s intenzitou elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ orientovanými od kladnej elektródy k zápornej. Vnútri vodivých elektród a v okolí kondenzátora niet elektrického poľa. Z Gaussovho zákona (2.6) vzhľadom k uzavretej abstraktnej ploche obklopujúcej iba kladný voľný náboj Q tak, že jedna zo stien tejto uzavretej plochy leží v dielektriku, je rovnobežná s priľahlými stenami elektród a má taký istý plošný obsah S ako priľahlé steny elektród, vyplýva

$$Q = \oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = DS \tag{2.19}$$

Napätie medzi elektródami doskového kondenzátora je určené vzťahom (2.14)

$$U = \int_{+l}^{-} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^d E\cdot\mathrm{d}r = Ed \tag{2.20}$$

pričom sme využili súhlasnú orientáciu vektorov $\boldsymbol{D}$ a d$\boldsymbol{S}$, resp $\boldsymbol{E}$ a d$\boldsymbol{r}$. Dosadením vzťahov (2.19), (2.20), (2.5) do vzťahu (2.15) pre kapacitu doskového kondenzátora dostaneme

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{DS}{Ed} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}ES}{Ed} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}S}{d} \tag{2.21}$$

Homogénne elektrické pole nabitého doskového kondenzátora sa nachádza v objeme $V = S.d$, takže pomocou vzťahov (2.18) až (2.20) môžeme definovať hustotu energie elektrického poľa w_{E}

$$w_{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{E}}}{\mathrm{d}V} = \frac{E_{\mathrm{E}}}{V} = \frac{QU}{2Sd} = \frac{DSEd}{2Sd} = \frac{DE}{2} = \frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2} \tag{2.22}$$

Vo vákuu $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$ a dosadením do (2.22) dostaneme hustotu energie elektrického poľa w_{E} vo vákuu

$$w_{\mathrm{E}} = \frac{\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}}{2} = \frac{\varepsilon_0E^2}{2} \tag{2.23}$$

Ak má elektrostatická úloha rovinnú, valcovú alebo guľovú symetriu, určujeme najprv intenzitu elektrického poľa E z Gaussovho zákona (2.2), (2.3), ***potom elektrický potenciál φ resp. napätie U vzťahmi*** (2.11), (2.14), ***nakoniec elektrickú kapacitu C vzťahmi*** (2.13), (2.15).

Pri ***sériovom zapojení kondenzátorov*** sa kondenzátory nabíjajú rovnakým nábojom Q a výsledné napätie U je súčtom napätí na jednotlivých kondenzátoroch, preto po úprave dostaneme, že ***prevrátená hodnota výslednej elektrickej kapacity sériového zapojenia sa rovná súčtu prevrátených hodnôt elektrických kapacít jednotlivých kondenzátorov***

$$U = \sum_k U_k \quad\Rightarrow\quad \frac{Q}{C} = \sum_k \frac{Q}{C_k} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k} \tag{2.24}$$

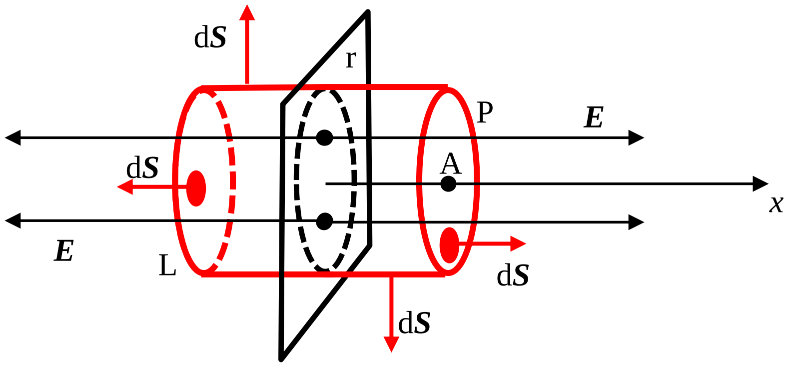
Pri ***paralelnom zapojení kondenzátorov*** sa kondenzátory nabíjajú na rovnaké napätie U a výsledný elektrický náboj Q je súčtom elektrických nábojov na jednotlivých kondenzátoroch, preto po úprave dostaneme, že ***výsledná elektrická kapacita paralelného zapojenia sa rovná súčtu elektrických kapacít jednotlivých kondenzátorov***

$$Q = \sum_k Q_k \quad \Rightarrow \quad CU = \sum_k C_k U \quad \Rightarrow \quad C = \sum_k C_k \tag{2.25}$$

Príklady

2.1 Bod A sa nachádza vo vzdialenosti d = 10 m od nekonečnej roviny homogénne nabitej s plošnou hustotou σ = 2 nC.m^{-2} vo vákuu. Nájdite veľkosť E intenzity elektrického poľa a elektrický potenciál φ_A v bode A, ak elektrický potenciál roviny je nulový ($\varphi_r = 0$).

Riešenie:
Úloha má zjavnú rovinnú symetriu, preto určíme najprv veľkosť E intenzity elektrického poľa z Gaussovho zákona (2.2), potom elektrický potenciál φ_A vzťahom (2.10). Kolmo z nabitej roviny vychádzajú elektrické siločiary a končia v nekonečnej vzdialenosti od roviny. Nech Gaussova uzavretá plocha pozostáva z dvoch podstáv vo vzdialenosti d od roviny s rovnakým plošným obsahom S rovnobežných s nabitou rovinou a z plášťa spájajúceho okraje podstáv, pozri obr. 1. Plášť vysekáva z roviny elektrický náboj $Q = \sigma.S$.



Obr. 2.1 Nabitá rovina a Gaussova uzavretá plocha

Na pravej podstave sa nachádza bod A. Na ľavej (L) i pravej (P) podstave je elementárny vektor d**S** súhlasne orientovaný s intenzitou **E**, na plášti je elementárny vektor d**S** kolmý na intenzitu **E**. Z Gaussovho zákona (2.2) vyplýva

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \int_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_P \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2ES = \frac{|Q|}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{|Q|}{2S\varepsilon_0} = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} \tag{a}$$

pričom sme zohľadnili, že toky intenzity cez obe podstavy sú rovnaké a tok intenzity cez plášť je nulový (**E**. d**S** = 0). Elektrický potenciál v bode A určíme dosadením vzťahu (a) do vzťahu (2.10) a úpravou

$$\varphi_A = \int_A^{RM} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{RM}^{A} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_0^d E\cdot \mathrm{d}x = -\int_0^d \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\cdot \mathrm{d}x = -\frac{|\sigma| d}{2\varepsilon_0} \tag{b}$$

pričom sme zohľadnili, že referenčným miestom RM je samotná nabitá rovina a výmenu hraníc integrovania sme urobili preto, aby sa integrovanie konalo v kladnom smere osi x. Dosadením zadaných hodnôt do vzťahov (a) a (b) dostaneme

$$E=\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}=\frac{2\cdot 10^{-9}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}}{2\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}}=112{,}9\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$$

$$\varphi_\mathrm{A}=-\frac{|\sigma|d}{2\varepsilon_0}=-\frac{2\cdot 10^{-9}\cdot 10\ \mathrm{V}}{2\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}}=-1129\ \mathrm{V}$$

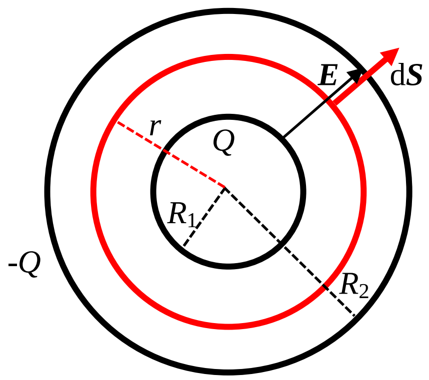
Veľkosť intenzity elektrického poľa v bode A aj v celom priestore je 112,9 V.m^{-1}. Elektrický potenciál v bode A má hodnotu -1129 V a lineárne klesá s rastom vzdialenosti od roviny.

2.2 Odvoďte vzťah a vypočítajte elektrickú kapacitu C guľového kondenzátora, ktorý tvoria dve sústredné (koncentrické) sférické elektródy s polomermi R_1 = 3 cm, R_2 = 4 cm. Medzi elektródami je dielektrikum s relatívnou permitivitou ε_r = 5. Vypočítajte energiu elektrického poľa E_E kondenzátora, ak je nabitý na napätie U = 100 V.

Riešenie:

Úloha má zjavnú guľovú symetriu, preto určíme najprv veľkosť E intenzity elektrického poľa z Gaussovho zákona (2.3), potom napätie U medzi elektródami vzťahom (2.14) a nakoniec elektrickú kapacitu C vzťahom (2.15).

Nech vnútorná elektróda je nabitá kladným voľným nábojom Q a vonkajšia elektróda je nabitá záporným voľným nábojom –Q. Náboje sa na povrchu elektród rozložia rovnomerne. V dielektriku medzi elektródami vznikne elektrické pole s radiálnymi siločiarami vychádzajúcimi kolmo z povrchu kladne nabitej elektródy a vchádzajúcimi kolmo na povrch záporne nabitej elektródy. Nech Gaussova uzavretá plocha je povrchom abstraktnej koncentrickej gule polomeru r, ($R_1 < r < R_2$). Prierez kondenzátora rovinou nákresne je na obr. 2.2.



Obr. 2.2 Guľový kondenzátor a Gaussova uzavretá plocha

Z Gausovho zákona (2.3) pre veľkosť E intenzity elektrického poľa v dielektriku dostaneme

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\quad\Rightarrow\quad \oint_S E\cdot \mathrm{d}S=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\quad\Rightarrow\quad E\,4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\quad\Rightarrow\quad E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} r^2}\qquad\text{(a)}$$

pričom sme využili súhlasnú orientáciu intenzity $\boldsymbol{E}$ a elementárneho vektora d$\boldsymbol{S}$ Gaussovej uzavretej plochy. Dosadením vzťahu (a) do vzťahu (2.14) pre napätie U dostaneme

$$U=\int_{+l}^{-}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{+l}^{-}E\cdot \mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\cdot \mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\qquad\text{(b)}$$

pričom sme využili súhlasnú orientáciu intenzity $\boldsymbol{E}$ a elementárneho vektora d$\boldsymbol{r}$ na radiálnej orientovanej integračnej úsečke. Dosadením vzťahu (b) do vzťahu (2.12) pre elektrickú kapacitu C dostaneme

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}} \qquad \text{(c)}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (c) dostaneme

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}}=\frac{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 5}{\frac{1}{0{,}03}-\frac{1}{0{,}04}}\ \mathrm{F}=66{,}76\ \mathrm{pF}$$

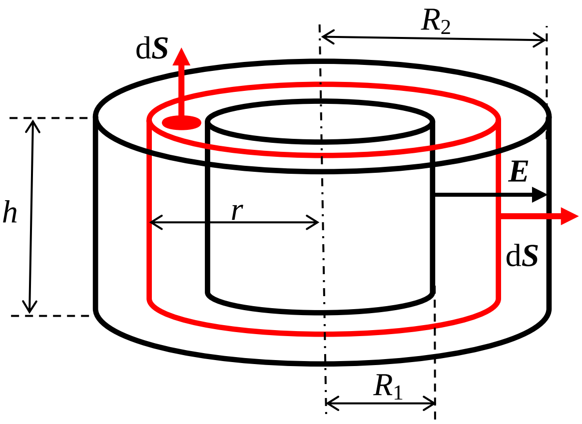
Dosadením vypočítaných a zadaných hodnôt do vzťahu (2.15) dostaneme

$$E_E=\frac{CU^2}{2}=\frac{66{,}76\cdot 10^{-12}\cdot 100^2}{2}\ \mathrm{J}=33{,}38\cdot 10^{-8}\ \mathrm{J}=333{,}8\ \mathrm{nJ}$$

Elektrická kapacita guľového kondenzátora je 66,76 pF, pri napätí 100 V sa energia elektrického poľa kondenzátora rovná 333,8 nJ.

2.3 Odvoďte vzťah a vypočítajte elektrickú kapacitu C vzduchového valcového kondenzátora výšky h = 1cm, s polomermi súosých (koaxiálnych) elektród R_1 = 2 mm, R_2 = 4 mm. Vypočítajte energiu elektrického poľa kondenzátora, ak je nabitý na napätie U = 100 V.

Riešenie:
Úloha má zjavnú valcovú symetriu, preto určíme najprv veľkosť E intenzity elektrického poľa z Gaussovho zákona (2.2), potom napätie U medzi elektródami vzťahom (2.14) a nakoniec elektrickú kapacitu C vzťahom (2.15).
Nech vnútorná elektróda je nabitá kladným voľným nábojom Q a vonkajšia elektróda je nabitá záporným voľným nábojom $-Q$. V dielektriku medzi elektródami vznikne elektrické pole s radiálnymi siločiarami vychádzajúcimi kolmo z povrchu kladne nabitej elektródy a vchádzajúcimi kolmo na povrch záporne nabitej elektródy. Nech Gaussovu uzavretú plochu tvoria dve podstavy a plášť abstraktného koaxiálneho valca výšky h a polomeru r, ($R_1 < r < R_2$), pozri obr. 2.3.



Obr. 2.3 Valcový kondenzátor a Gaussova uzavretá plocha

Z Gausovho zákona (2.2) pre veľkosť E intenzity elektrického poľa vo vzduchu medzi elektródami dostaneme

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ \int_{\mathrm{Pl}} E\cdot \mathrm{d}S=\frac{Q}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ E\,2\pi rh=\frac{Q}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 hr} \qquad \text{(a)}$$

pričom sme zohľadnili, že toky intenzity cez podstavy sú nulové ($\boldsymbol{E}.\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$) a orientácia intenzity $\boldsymbol{E}$ a elementárneho vektora d$\boldsymbol{S}$ na plášti Pl Gaussovej plochy je súhlasná. Dosadením vzťahu (a) do vzťahu (2.14) pre napätie U dostaneme

$$U = \int_{+l}^{-} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{+l}^{-} E \cdot \mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \cdot \mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \left[\ln|r|\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{(b)}$$

pričom sme využili súhlasnú orientáciu intenzity $\boldsymbol{E}$ a elementárneho vektora d$\boldsymbol{r}$ na radiálnej orientovanej integračnej úsečke. Dosadením vzťahu (b) do vzťahu (2.15) pre elektrickú kapacitu C dostaneme

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln \dfrac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}} \qquad \text{(c)}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (c) dostaneme

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}01}{\ln \dfrac{4}{2}} \ \mathrm{F} = 802{,}6 \ \mathrm{nF}$$

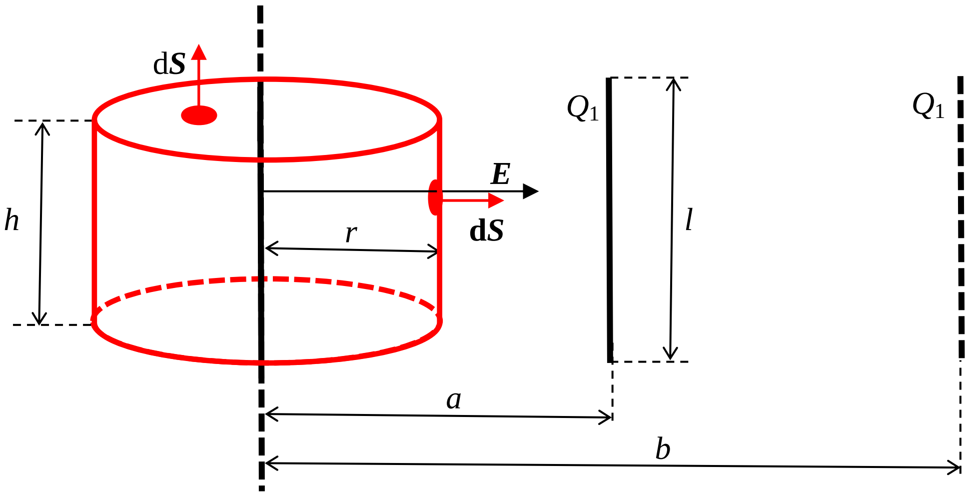
Dosadením vypočítaných a zadaných hodnôt do vzťahu (2.15) dostaneme

$$E_{\mathrm{E}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{802{,}6 \cdot 10^{-9} \cdot 100^2}{2} \ \mathrm{J} = 401{,}3 \cdot 10^{-5} \ \mathrm{J} = 4{,}013 \ \mathrm{mJ}$$

Elektrická kapacita valcového kondenzátora je 802,6 nF, pri napätí 100 V sa energia elektrického poľa kondenzátora rovná 4,013 mJ.

2.4 Akú prácu W vykoná elektrické pole nekonečne dlhého priameho vodiča vo vákuu, ak presunie vodič dĺžky l = 1 m zo vzdialenosti a = 2 m do vzdialenosti b = 20 m mezi vodičmi? Oba vodiče sú nabité s rovnakou lineárnou hustotou náboja λ = 10 mC.m^{-1} a pri presúvaní sú neustále rovnobežné.

Riešenie:
Úloha má zjavnú valcovú symetriu, preto určíme najprv veľkosť E intenzity elektrického poľa v okolí nekonečne dlhého nabitého vodiča z Gaussovho zákona (2.2), potom veľkosť F elektrickej sily $\boldsymbol{F}$, ktorou pole pôsobí na nabitý vodič dĺžky l a nakoniec prácu W elektrickej sily pri presunutí vodiča dĺžky l zo vzdialenosti a do vzdialenosti b.



Obr. 2.4 Nabitý nekonečne dlhý vodič a Gaussova uzavretá plocha

V okolí nekonečne dlhého nabitého vodiča sa vytvorí elektrické pole s radiálnymi siločiarami vychádzajúcimi kolmo z vodiča a končiacimi v nekonečnej vzdialenosti od neho. Nech Gaussovu uzavretú plochu tvoria dve podstavy a plášť abstraktného valca výšky h a polomeru r, osou súmernosti ktorého je nekonečne dlhý vodič, pozri obr. 2.4. Gaussova uzavretá plocha ohraničuje elektrický náboj $Q = \lambda.h$.
Z Gausovho zákona (2.2) pre veľkosť E intenzity elektrického poľa v okolí nabitého vodiča vo vákuu dostaneme

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathrm{Pl}} E \cdot \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E\, 2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(a)}$$

pričom sme zohľadnili, že toky intenzity cez podstavy sú nulové ($\boldsymbol{E}.\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$) a orientácia intenzity $\boldsymbol{E}$ a elementárneho vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ na plášti Pl Gaussovej plochy je súhlasná.
Na presúvanom vodiči dĺžky l je zrejme rozložený elektrický náboj $Q_1 = \lambda l$. Vzhľadom na rovnobežnosť oboch vodičov je v danom okamihu každá časť náboja Q_1 rovnako vzdialená od nekonečne dlhého vodiča. Preto zo vzťahu (1.5) po dosadení vzťahu (a) pre veľkosť F elektrickej sily vyplýva

$$F = Q_1 E = \lambda l \cdot \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda^2 l}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(b)}$$

Pre prácu W elektrickej sily $\boldsymbol{F}$ dostaneme

$$W = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b F \cdot |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \cos\alpha = \int_a^b F \cdot \mathrm{d}r = \frac{\lambda^2 l}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r} \cdot \mathrm{d}r = \frac{\lambda^2 l}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a} \qquad \text{(c)}$$

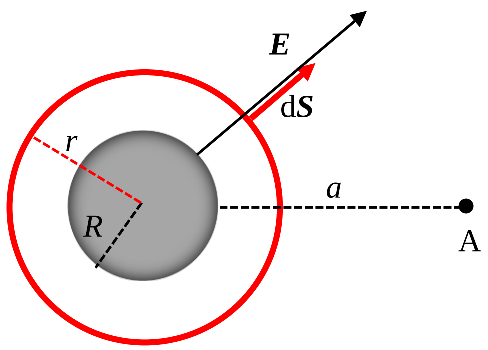
kde dr je elementárna zmena vzdialenosti medzi vodičmi a zohľadnili sme aj vzťah (b). Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (c) dostaneme

$$W = \frac{\lambda^2 l}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a} = \frac{\left(10 \cdot 10^{-6}\right)^2 \cdot 1}{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} \ln\frac{20}{2} = 4{,}139 \text{ J}$$

Elektrické pole vykoná prácu 4,139 J.

2.5 Vypočítajte veľkosť E intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ a elektrický potenciál φ vo vzdialenosti a = 10 cm od povrchu vodivej gule polomeru R = 5 cm vo vákuu, keď je na nej elektrický náboj Q = 0,2 μC. Permitivita vákua je $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ F.m^{-1}.

Riešenie:
Úloha má zjavnú guľovú symetriu, preto určíme najprv veľkosť E intenzity elektrického poľa z Gaussovho zákona (2.2), potom elektrický potenciál φ vzťahom (2.12). Elektrický náboj Q sa rozloží po povrchu vodivej gule tak, že intenzita vnútri gule je nulová a v nevodivom okolí vznikne elektrické pole s radiálnymi siločiarami vychádzajúcimi kolmo z povrchu kladne nabitej gule a končiacimi v nekonečnej vzdialenosti od gule.



Obr. 2.5 Nabitá vodivá guľa a Gaussova uzavretá plocha

Nech Gaussova uzavretá plocha je povrchom abstraktnej koncentrickej gule polomeru r, ($r > R$). Prierez nabitej gule a koncentrickej Gaussovej uzavretej plochy rovinou nákresne je na obr. 2.5. Z Gausovho zákona (2.2) pre veľkosť E intenzity elektrického poľa vo vákuu dostaneme

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \oint_S E \cdot \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{(a)}$$

pričom sme využili súhlasnú orientáciu intenzity $\boldsymbol{E}$ a elementárneho vektora d$\boldsymbol{S}$ Gaussovej plochy, pretože náboj Q je kladný. Dosadením vzťahu (a) do vzťahu (2.12) pre potenciál φ vo vzdialenosti a od povrchu gule dostaneme

$$\varphi = \int_{\mathrm{A}}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{R+a}^{\infty} E \cdot \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R+a}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R+a}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R+a)} \qquad \text{(b)}$$

pričom sme využili súhlasnú orientáciu intenzity $\boldsymbol{E}$ a elementárneho vektora d$\boldsymbol{r}$ na radiálnej integračnej polpriamke s počiatkom v bode A. Dosadením zadaných hodnôt do vzťahov (a, b) dostaneme

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R+a)^2} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}05 + 0{,}1)^2} = 79891\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R+a)} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}05 + 0{,}1)} = 11984\ \mathrm{V}$$

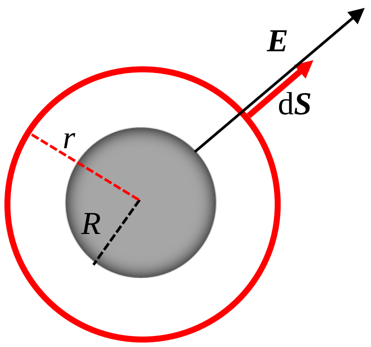
V danej vzdialenosti od povrchu nabitej gule je veľkosť intenzity elektrického poľa 79891 V/m elektrický potenciál je tam rovný 11984 V.

Poznámka: Prejavom guľovej symetrie je, že vzťahy (a, b) dávajú pre okolie nabitej gule rovnaké výsledky ako v prípade, keby bol elektrický náboj sústredený v strede gule, pozri vzťahy (1.7), (1.10).

2.6 Odvoďte vzťah a vypočítajte elektrickú kapacitu C vodivej gule polomeru R = 10 cm vo vákuu. Permitivita vákua je ε_0 = 8,854.10^{-12} F.m^{-1}. Vypočítajte energiu E_{E} elektrického poľa, ak je vodivá guľa nabitá elektrickým nábojom Q = 4 μC.

Riešenie:

Úloha má zjavnú guľovú symetriu, preto určíme najprv z Gaussovho zákona (2.2) veľkosť E intenzity elektrického poľa v okolí vodivej gule nabitej kladným nábojom Q, potom elektrický potenciál φ nabitej vodivej gule vzťahom (2.11) a nakoniec elektrickú kapacitu vodivej gule vzťahom (2.13). Elektrický náboj Q sa rozloží po povrchu vodivej gule tak, že intenzita vnútri gule je nulová a v nevodivom okolí vznikne elektrické pole s radiálnymi siločiarami vychádzajúcimi kolmo z povrchu kladne nabitej gule a končiacimi v nekonečnej vzdialenosti od gule.



Obr. 2.6 Nabitá vodivá guľa a Gaussova uzavretá plocha

Nech Gaussova uzavretá plocha je povrchom abstraktnej koncentrickej gule polomeru r, ($r > R$). Prierez nabitej gule a koncentrickej Gaussovej uzavretej plochy rovinou nákresne je na obr. 2.6. Z Gausovho zákona (2.2) pre veľkosť E intenzity elektrického poľa vo vákuu dostaneme

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad \oint_S E\cdot \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{a}$$

pričom sme využili súhlasnú orientáciu intenzity $\boldsymbol{E}$ a elementárneho vektora d$\boldsymbol{S}$ Gaussovej plochy, pretože náboj Q je kladný. Dosadením vzťahu (a) do vzťahu (2.11) pre potenciál φ vodivej nabitej gule dostaneme

$$\varphi = \int_V^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_R^{\infty} E\cdot \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{1}{r^2}\cdot \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{b}$$

pričom sme využili súhlasnú orientáciu intenzity $\boldsymbol{E}$ a elementárneho vektora d$\boldsymbol{r}$ na integračnej polpriamke začínajúcej na povrchu nabitej gule. Dosadením vzťahu (b) do vzťahu (2.13) dostaneme

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}} = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{c}$$

Použitím vzťahu (2.22) pre energiu E_{E} elektrického poľa dostaneme

$$w_{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{E}}}{\mathrm{d}V} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}E_{\mathrm{E}} = w_{\mathrm{E}}\mathrm{d}V \quad\Rightarrow\quad E_{\mathrm{E}} = \int_V w_{\mathrm{E}}\mathrm{d}V \tag{d}$$

Elektrické pole je len v nevodivom vákuu okolo nabitej vodivej gule, elementárny objem dV nech je objem tenkej guľovej vrstvy hrúbky dr (dV = $4\pi r^2$dr), preto dosadením vzťahov (2.23, a) do vzťahu (d) dostaneme

$$E_{\mathrm{E}} = \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\mathrm{d}V = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{\infty}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{\infty} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \tag{e}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahov (c, e) dostaneme

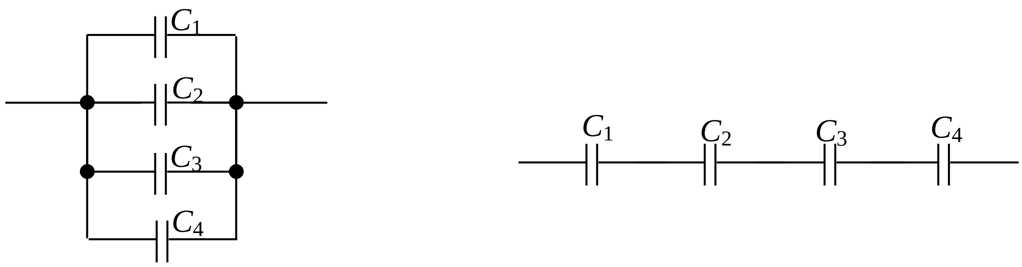
$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1\ \mathrm{F} = 11{,}126\ \mathrm{pF}$$

$$E_{\mathrm{E}} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\left(4\cdot 10^{-6}\right)^2}{8\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1}\ \mathrm{J} = 0{,}719\ \mathrm{J} = 719\ \mathrm{mJ}$$

Daná vodivá guľa má kapacitu 11,126 pF, energia elektrického poľa v okolí gule s daným nábojom je 719 mJ.

Poznámka: Vzťah (e) môžeme získať bez integrovania dosadením vzťahov (b, c) do ľubovoľného výrazu vo vzťahu (2.18). Miesto napätia U dosadzujeme potenciál φ, pretože potenciál nabitého vodiča je rovný napätiu medzi vodičom a referenčným miestom.

2.7 Štyri kondenzátory s elektrickými kapacitami C_1 = 1 pF, C_2 = 2 pF, C_3 = 3 pF, C_4 = 4 pF zapojíme najprv paralelne (vedľa seba), pozri schému na obr. 2.7a potom sériovo (za sebou), pozri schému na obr. 2.7b. Aké sú výsledné elektrické kapacity C_{p} paralelného zapojenia a C_{s} sérového zapojenia? Akú energiu E_{Ep} a akú energiu E_{Es} elektrického poľa majú paralelné a sériové zapojenie, ak ich pripojíme k zdroju s napätím U = 100 V? Aké sú energie elektrického poľa jednotlivých kondenzátorov pri ich paralelnom, resp. sériovom zapojení k zdroju s napätím U = 100 V?



a) paralelné zapojenie b) sériové zapojenie

Obr. 2.7. Schémy a) paralelného a b) sériového zapojenia kondenzátorov

Riešenie:
Podľa vzťahu (2.25) výsledná elektrická kapacita paralelného zapojenia sa rovná súčtu elektrických kapacít jednotlivých kondenzátorov, preto dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (2.25) dostaneme

$$C_{\mathrm{p}} = \sum_k C_k = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1\ \mathrm{pF} + 2\ \mathrm{pF} + 3\ \mathrm{pF} + 4\ \mathrm{pF} = 10\ \mathrm{pF} \qquad \text{(a)}$$

Podľa vzťahu (2.24) prevrátená hodnota výslednej elektrickej kapacity sériového zapojenia sa rovná súčtu prevrátených hodnôt elektrických kapacít jednotlivých kondenzátorov, preto dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (2.24) dostaneme

$$\frac{1}{C_{\mathrm{s}}} = \sum_k \frac{1}{C_k} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{1\ \mathrm{pF}} + \frac{1}{2\ \mathrm{pF}} + \frac{1}{3\ \mathrm{pF}} + \frac{1}{4\ \mathrm{pF}} = \frac{12 + 6 + 4 + 3}{12\ \mathrm{pF}} = \frac{25}{12\ \mathrm{pF}}$$

a výsledná elektrická kapacita sériového zapojenia daných kondenzátorov bude

$$C_{\mathrm{s}} = \frac{12\ \mathrm{pF}}{25} = 0{,}48\ \mathrm{pF} \qquad \text{(b)}$$

Energie E_{Ep} a E_{Es} elektrického poľa paralelného a sériového zapojenia po ich pripojení k zdroju s daným napätím U dostaneme postupným dosadením výsledkov (a, b) do vzťahu (2.18)

$$E_{\mathrm{Ep}} = \frac{C_{\mathrm{p}}U^2}{2} = \frac{10 \cdot 10^{-12} \cdot 100^2}{2}\ \mathrm{J} = 5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{J} = 50\ \mathrm{nJ}$$

$$E_{\mathrm{Es}} = \frac{C_{\mathrm{s}}U^2}{2} = \frac{0{,}48 \cdot 10^{-12} \cdot 100^2}{2}\ \mathrm{J} = 0{,}24 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{J} = 2{,}4\ \mathrm{nJ}$$

Po pripojení paralelného zapojenia na zdroj sa jednotlivé kondenzátory nabijú na rovnaké napätie U ako má zdroj, preto podľa (2.18) pre energie E_{Ep1} až E_{Ep4} elektrického poľa v jednotlivých kondenzátoroch dostaneme

$$E_{\mathrm{Ep1}} = \frac{C_1U^2}{2} = \frac{1 \cdot 10^{-12} \cdot 100^2}{2}\ \mathrm{J} = 0{,}5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{J} = 5\ \mathrm{nJ}$$

$$E_{\mathrm{Ep2}} = \frac{C_2U^2}{2} = \frac{2 \cdot 10^{-12} \cdot 100^2}{2}\ \mathrm{J} = 1 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{J} = 10\ \mathrm{nJ}$$

$$E_{\mathrm{Ep3}} = \frac{C_3U^2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-12} \cdot 100^2}{2}\ \mathrm{J} = 1{,}5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{J} = 15\ \mathrm{nJ}$$

$$E_{\mathrm{Ep4}} = \frac{C_4U^2}{2} = \frac{4 \cdot 10^{-12} \cdot 100^2}{2}\ \mathrm{J} = 2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{J} = 20\ \mathrm{nJ}$$

Ich súčet je 50 nJ.

Po pripojení sériového zapojenia na zdroj sa jednotlivé kondenzátory nabijú rovnakým nábojom Q ako náhradný kondenzátor s kapacitou C_s. Náboj určíme zo vzťahu (2.15)

$$C_s = \frac{Q}{U} \quad \Rightarrow \quad Q = C_s U$$

Podľa (2.18) pre energie E_{Es1} až E_{Es4} elektrického poľa v jednotlivých kondenzátoroch dostaneme

$$E_{Es1} = \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{(C_s U)^2}{2C_1} = \frac{\left(0{,}48 \cdot 10^{-12} \cdot 100\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-12}}\ \mathrm{J} = 1152 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 1{,}152\ \mathrm{nJ}$$

$$E_{Es2} = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{(C_s U)^2}{2C_2} = \frac{\left(0{,}48 \cdot 10^{-12} \cdot 100\right)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-12}}\ \mathrm{J} = 576 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 0{,}576\ \mathrm{nJ}$$

$$E_{Es3} = \frac{Q^2}{2C_3} = \frac{(C_s U)^2}{2C_3} = \frac{\left(0{,}48 \cdot 10^{-12} \cdot 100\right)^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-12}}\ \mathrm{J} = 384 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 0{,}384\ \mathrm{nJ}$$

$$E_{Es4} = \frac{Q^2}{2C_4} = \frac{(C_s U)^2}{2C_4} = \frac{\left(0{,}48 \cdot 10^{-12} \cdot 100\right)^2}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-12}}\ \mathrm{J} = 288 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 0{,}288\ \mathrm{nJ}$$

Ich súčet je 2,4 nJ.
Paralelné zapojenie daných kondenzátorov má elektrickú kapacitu 10 pF, sériové zapojenie daných kondenzátorov má elektrickú kapacitu 0,48 pF. Po pripojení k zdroju s daným napätím má elektrické pole paralelného zapojenia energiu 50 nJ s adekvátnymi energiami 5 nJ, 10 nJ, 15 nJ a 20 nJ v jednotlivých kondenzátoroch. Elektrické pole sériového zapojenia má energiu 2,4 nJ s adekvátnymi energiami 1,152 nJ, 0,576 nJ, 0,348 nJ a 0,288 nJ v jednotlivých kondenzátoroch.

2.8 Doskový vzduchový kondenzátor s elektrickou kapacitou C = 10 nF bol pripojený k zdroju s napätím U = 100 V. Akú prácu W_{ext} vykonáme pri n = 5-násobnom zväčšení pôvodnej vzdialenosti d medzi doskami, ak
a) kondenzátor pred vzďaľovaním dosiek odpojíme od zdroja,
b) kondenzátor je stále pripojený k zdroju?

Riešenie:
a) Pripojením pôvodného kondenzátora k zdroju s napätím U sa jedna doska nabije nábojom Q, druhá doska nábojom $-Q$, pričom podľa (2.15)

$$C = \frac{Q}{U} \quad \Rightarrow \quad Q = CU \tag{a}$$

Po odpojení kondenzátora od zdroja zväčšíme n-krát vzdialenosť medzi doskami. Pri tomto úkone sa náboj na doskách nemení, pretože dosky sú galvanicky oddelené od zdroja i od seba. Podľa vzťahu (2.21) sa však pritom n-krát zmenší kapacita doskového kondenzátora (ε_r = 1)

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{nd} = \frac{C}{n} \tag{b}$$

a podľa vzťahu (a) sa napätie kondenzátora n-krát zväčší ($U' = nU$). Vykonaná práca W_{ext} sa rovná zmene energie elektrického poľa doskového kondenzátora

$$W_{ext} = E'_E - E_E = \frac{Q^2}{2C'} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 n}{2C} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}(n-1) = \frac{CU^2}{2}(n-1) \tag{c}$$

pričom sme z výrazov vo vzťahu (2.18) pre energiu použili ten, ktorý obsahuje invariantný náboj Q a deterministicky zmenenú elektrickú kapacitu C podľa vzťahu (b). Až na konci

úpravy sme použili vzťah (a), ktorý viaže nezadaný invariantný náboj Q s pôvodnou zadanou kapacitou C a so zadaným napätím zdroja U .
Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (c) dostaneme

$$W_{\mathrm{ext}} = \frac{CU^2}{2}(n-1) = \frac{10\cdot 10^{-9}\cdot 100^2}{2}(5-1)\,\mathrm{J} = 200\ \mu\mathrm{J}$$

b) Pripojením pôvodného kondenzátora k zdroju s napätím U sa jedna doska nabije nábojom Q, druhá doska nábojom $-Q$, pričom podľa (2.15)

$$C = \frac{Q}{U} \quad \Rightarrow \quad Q = CU \tag{d}$$

Zväčšíme n-krát vzdialenosť medzi doskami. Pri tomto úkone sa napätie U medzi doskami kondenzátora nezmení, pretože dosky sú galvanicky pripojené k svorkám zdroja. Podľa vzťahu (2.21) sa však pritom n-krát zmenší kapacita doskového kondenzátora ($\varepsilon_r = 1$)

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{nd} = \frac{C}{n} \tag{e}$$

a podľa vzťahu (d) sa elektrický náboj na kladnej doske n-krát zmenší

$$Q' = \frac{Q}{n} \tag{f}$$

Vykonaná práca W_{ext} sa rovná súčtu zmeny ΔE_{E} energie elektrického poľa doskového kondenzátora a práce ΔW_{ext} potrebnej na presun kladného náboja ΔQ z kladnej dosky kondenzátora cez zdroj proti sile zdroja na zápornú dosku

$$W_{\mathrm{ext}} = \Delta E_{\mathrm{E}} + \Delta W_{\mathrm{ext}} = E'_{\mathrm{E}} - E_{\mathrm{E}} + \Delta Q\cdot U = \frac{C'U^2}{2} - \frac{CU^2}{2} + (Q - Q')U \tag{g}$$

Dosadením vzťahov (e, f, d) do vzťahu (g) a úpravou dostaneme

$$W_{\mathrm{ext}} = \frac{CU^2}{2n} - \frac{CU^2}{2} + \left(CU^2 - \frac{CU^2}{n}\right) = \frac{CU^2}{2} - \frac{CU^2}{2n} = \frac{CU^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{h}$$

a hoci došlo k poklesu energie elektrického poľa kondenzátora ($\Delta E_{\mathrm{E}} < 0$), je celková práca W_{ext} kladná. Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (h) dostaneme

$$W_{\mathrm{ext}} = \frac{CU^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{10\cdot 10^{-9}\cdot 100^2}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right)\mathrm{J} = 40\ \mu\mathrm{J}$$

Hoci sa v prípade b) konala prídavná práca na presun kladného náboja ΔQ z kladnej dosky kondenzátora cez zdroj proti sile zdroja na zápornú dosku, je práca $W_{\mathrm{ext}} = 200\ \mu\mathrm{J}$ v prípade a) s odpojeným zdrojom $n = 5$-krát väčšia než práca $W_{\mathrm{ext}} = 40\ \mu\mathrm{J}$ v prípade b) s pripojeným zdrojom. Príčina spočíva v tom, že energia E_{E} elektrického poľa kondenzátora závisí od kapacity C lineárne avšak od napätia U kvadraticky. V oboch prípadoch kapacita kondenzátora $n = 5$-krát poklesla, napätie v prípade a) však $n = 5$-krát vzrástlo. Faktor (n - 1) vo vzťahu (c) je $n = 5$-krát väčší než faktor (1- 1/n) vo vzťahu (h).

2.9 Elektródy doskového kondenzátora majú tvar obdĺžnika so stranami a =10 cm, b = 5 cm. Vzdialenosť medzi elektródami je d = 1 cm a relatívna permitivita dielektrika je $\varepsilon_r = 6$. Kondenzátor je neustále pripojený k zdroju s napätím U = 100 V. Aká je veľkosť F_{ext} externej sily potrebnej na vytiahnutie dielektrika v smere strany a? Akú prácu W_{ext} externá sila vytiahnutím dielektrika vykoná?

Riešenie:
Ak dielektrikum posunieme o hodnotu x v smere strany a, potom kapacitu C určíme vzťahom (2.25) pre paralelné zapojenie vzduchového doskového kondenzátora s rozmermi dosiek x, b a

doskového kondenzátora s dielektrikom s rozmermi dosiek *a* - *x*, *b* s rovnakou vzdialenosťou *d* medzi doskami. S využitím vzťahu (2.21) dostaneme

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 xb}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r (a - x)b}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ab}{d} - \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)b}{d} x = C_0 - \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)b}{d} x \qquad \text{(a)}$$

pričom

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ab}{d} \qquad \text{(b)}$$

je kapacita kondenzátora s neposunutým dielektrikom ($x = 0$). Podľa vzťahu (a) kapacita C pri vysúvaní dielektrika klesá ($\varepsilon_r > 1$). Úpravou vzťahu (2.15) dostaneme

$$C = \frac{Q}{U} \quad \Rightarrow \quad Q = CU \qquad \text{(c)}$$

a keďže sa napätie U na kondenzátore nemení z dôvodu jeho trvalého pripojenia k zdroju, bude podľa vzťahu (c) pri vysúvaní dielektrika klesať aj náboj Q na kladne nabitej doske kondenzátora. To ale znamená, že v priebehu posunutia dielektrika o hodnotu x sa z kladnej elektródy na zápornú elektródu presunie cez zdroj proti silám zdroja náboj q

$$q = Q_0 - Q = C_0 U - CU = \left\{ C_0 - \left[C_0 - \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)b}{d} x \right] \right\} U = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)bU}{d} x \qquad \text{(d)}$$

pričom sme zohľadnili vzťah (a) a zrejme

$$Q_0 = C_0 U \qquad \text{(e)}$$

je náboj na kladnej elektróde kondenzátora s neposunutým dielektrikom ($x = 0$).
S využitím vzťahu (a) pre energiu E_E elektrického poľa kondenzátora podľa (2.18) platí

$$E_E = \frac{CU^2}{2} = \frac{C_0 U^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)bU^2}{2d} x \qquad \text{(f)}$$

Vykonaná práca W_{ext} sa rovná súčtu zmeny ΔE_E energie elektrického poľa doskového kondenzátora a práce ΔW_{ext} potrebnej na presun kladného náboja q z kladnej dosky kondenzátora cez zdroj proti sile zdroja na zápornú dosku

$$W_{ext} = \Delta E_E + \Delta W_{ext} = \Delta E_E + q \cdot U \qquad \text{(g)}$$

a v diferenciálnom tvare (U = konšt)

$$\mathrm{d}W_{ext} = \mathrm{d}E_E + \mathrm{d}q \cdot U \qquad \text{(h)}$$

Veľkosť F_{ext} externej sily dostaneme, ak každý diferenciál vo vzťahu (h) vyjadríme pomocou elementárneho posunutia dx

$$F_{ext} \cdot \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}E_E}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \cdot U \qquad \text{(i)}$$

Po úprave s využitím derivácií vzťahov (d, f) podľa premennej x dostaneme

$$F_{ext} = \frac{\mathrm{d}E_E}{\mathrm{d}x} + U\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = -\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)bU^2}{2d} + U\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)bU}{d} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)bU^2}{2d} \qquad \text{(j)}$$

Výraz na pravej strane vzťahu (j) je kladný a konštantný, to znamená, že externá sila $\boldsymbol{F}_{ext}$ je súhlasne orientovaná s posunutím dielektrika (dx > 0) a prekonáva silu $\boldsymbol{F}$, ktorou je dielektrikum vťahované dovnútra kondenzátora podobne ako externá sila $\boldsymbol{F}_{ext}$ prekonáva tiažovú silu $\boldsymbol{F}$ pri dvíhaní bremena v tiažovom poli Zeme.
Externá sila vytiahnutím dielektrika v smere strany a vykoná prácu W_{ext}

$$W_{ext} = F_{ext} \cdot a = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)bU^2}{2d} \cdot a = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)abU^2}{2d} \qquad \text{(k)}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahov (j, k) dostaneme

$$F_{ext} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)bU^2}{2d} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (6-1) \cdot 0{,}05 \cdot 100^2}{2 \cdot 0{,}01}\ \mathrm{N} = 110{,}675 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{N} = 1106{,}75\ \mathrm{nN}$$

$$W_{\text{ext}} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)abU^2}{2d} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (6-1) \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 100^2}{2 \cdot 0{,}01}\ \text{J} = 11{,}0675 \cdot 10^{-8}\ \text{J} = 110{,}675\ \text{nJ}$$

Poznámka: Vo vzťahu (k) je $ab = S$ plošný obsah dosky kondenzátora, preto práca W_{ext} externej sily $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ nezávisí od smeru vyťahovania dielektrika. Veľkosť F_{ext} externej sily však závisí od smeru vyťahovania dielektrika. Pri vyťahovaní dielektrika v smere strany b by v čitateli vzťahu (j) miesto strany b bola strana a.

2.10 Rozhodnite, či sa objaví sršanie elektriny v okolí vodivej guľôčky polomeru R = 1 cm nabitej elektrickým nábojom Q = 0,1 μC. Okolím je vzduch (ε_r = 1) s prierazovou intenzitou E_p = 3 MV/m.

Riešenie:
K sršaniu elektriny dochádza, ak je veľkosť E intenzity elektrického poľa v okolí nabitých vodičov väčšia než prierazová intenzita (elektrická pevnosť) E_p dielektrického okolia. Vtedy sa poľom polarizované neutrálne atómy, resp. molekuly okolia ionizujú, voľné záporné elektróny sa poľom urýchľujú a pri zrážkach s opačne urýchlenými katiónmi vzniká v okolí nabitých telies svetelný úkaz (sršanie elektriny, koróna).
Voľný náboj Q sa rozloží rovnomerne po vonkajšom povrchu vodivej guľôčky s plošnou hustotou σ

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} \tag{a}$$

Veľkosť E intenzity elektrického poľa vo vzduchu v tesnej blízkosti povrchu nabitej vodivej guľôčky určíme dosadením vzťahu (a) do Coulombovej vety (2.8)

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{b}$$

Po dosadení zadaných hodnôt do vzťahu (b) dostaneme

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}01^2}\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1} = 8{,}99\ \text{MV} \cdot \text{m}^{-1}$$

To je väčšia hodnota než 3 MV/m, preto sa koróna v okolí guľôčky objaví.
Poznámka: Najväčšia plošná hustota voľného náboja na povrchu nabitého vodiča je v mieste s najmenším polomerom krivosti povrchu vodiča, preto podľa vzťahu (b) práve tam sú vhodné podmienky na vznik koróny. Koróny vznikajúce na hrotoch sťažňov lodí nazývali námorníci „ohňami svätého Eliáša“.

Trnava, 1. 10. 2014 Vypracoval: RNDr. Igor Jančuška, PhD.