Vzorka príkladov korešpondujúca s problematikou numerického cvičenia č. 2

1. Študent na skúške z kinematiky opisoval krivočiary pohyb hmotného bodu v priestore. Pri zavedení vektora rýchlosti zabudol označiť polohový vektor šípkou (t.j. zabudol nad písmeno *r* napísať šípku ako symbol vektora). Pri reklamácii výsledkov skúšky argumentoval tým, že zabudol na „bezvýznamný detail". Ukážte, čomu sa rovná výraz:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = ? \quad ,$$

ak derivácia polohového vektora podľa času určuje vektor rýchlosti objektu:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{v} \quad ,$$

t.j. ukážte ako sa zmení výsledok operácie derivovania, ak zabudneme písmeno označiť symbolom vektora.
Poznámka: Písmeno bez šípky označuje veľkosť vektora, ktorej časová derivácia je $\dot{r} = \vec{\rho} \cdot \vec{v}$ *(* $\vec{\rho}$ *je jednotkový vektor v smere polohového vektora). Úloha umožňuje dokumentovať, že dôslednosť pri zápise vektorov nie je len úchylka učiteľa, ale má principiálny význam. Úlohu možno riešiť aj pre časovú deriváciu rýchlosti napr. v rámci zadania.*

2. Hmotný bod sa pohybuje pozdĺž osi *x* tak, že závislosť jeho polohy od času určuje rovnica:
$x = A + Bt + Ct^2$
kde *x* je poloha v metroch, *t* je čas v sekundách a *A*, *B* a *C* sú konštanty $A = 3$ m, $B = 5$ m.s^{-1}, $C = -1$ m.s^{-2} . V čase 3 s určte:
a) polohu hmotného bodu. b) rýchlosť hmotného bodu. c) zrýchlenie hmotného bodu.

3. Pohyb hmotného bodu v rovine je opísaný polohovým vektorom , ktorého časová závislosť je určená rovnicou:

$$\vec{r}(t) = \left[At + B, Ct^2 + D\ln(Et) + Q\right]$$

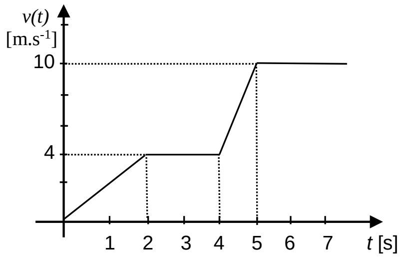
kde *t* je čas v sekundách a *A, B, C, D, E* sú konštanty: $A = 2$ m.s^{-1}, $B = 4$ m, $C = 6$ m.s^{-2}, $D = 8$ m, $E = 1$ s^{-1} , $Q = 1$ m. Súradnice polohového vektora sú v metroch. Určte rovnicu dráhy hmotného bodu.

4. Polohový vektor hmotného bodu pohybujúceho sa v rovine je možné v zavedenej vzťažnej sústave vyjadriť vzťahom:

$$\vec{r}(t) = \left[At^2, Bt + C\right]$$

kde *t* je čas v sekundách a *A*, *B*, *C* sú konštanty: $A = 3$ m.s^{-2}, $B = 20$ m.s^{-1}, $C = -4$ m. Určte veľkosť rýchlosti a zrýchlenia hmotného bodu v čase 4 s. Určte aj dĺžku dráhy, ktorú prejde hmotný bod počas svojho pohybu v časovom intervale $\langle 2, 5 \rangle$ s.

5. Teleso koná priamočiary pohyb, pričom veľkosť jeho rýchlosti sa v závislosti od času mení tak, ako je to znázornené na grafe vpravo. Určte:
c) veľkosť rýchlosti a zrýchlenia v čase 1 s.
d) veľkosť rýchlosti a zrýchlenia v čase 3 s.
a) veľkosť dráhy, ktorú uvedené teleso prejde za 4 sekundy svojho pohybu.
b) veľkosť dráhy, ktorú uvedené teleso prejde za 7 sekúnd svojho pohybu.



Poznámka: Variabilita úlohy je prakticky nekonečná, možno si vymyslieť ľubovoľný graf. V prípade lineárnych závislostí (resp. po častiach lineárnych) je možné hľadať funkčné závislostí v(t) a s(t) a problém riešiť analyticky. So zdatnejšími študentami je možné diskutovať o reálnosti pohybu znázorneného na grafe, t.j. špekulovať o tom ako je to so zrýchlením objektu v časových okamihoch 2s, 4s a 5s.

6. Teleso prešlo tretinu svojej dráhy konštantnou rýchlosťou 36 km.h^{-1}. Určte priemernú rýchlosť telesa na celej dráhe. Zvyšnú časť dráhy dlhú 300 m prešlo za 60 s. Určte jeho priemernú rýchlosť.

7. Teleso prešlo prvú tretinu svojej dráhy konštantnou rýchlosťou 2 m.s^{-1}. Zostávajúce dve tretiny svojej dráhy prešlo konštantnou rýchlosťou 8 m.s^{-1}. Určte jeho priemernú rýchlosť.

8. Zrýchlenie hmotného bodu pri jeho priamočiarom pohybe rovnomerne klesá zo začiatočnej hodnoty $a_0 = 10$ m.s^{-2} v čase $t_0 = 0$ s, na nulovú hodnotu v čase $t_1 = 20$ s. Aká je rýchlosť hmotného bodu v čase $t_2 = 10$ s a akú dráhu za tento čas vykonal, keď v čase $t_0 = 0$ s bol v pokoji?

9. Aká je začiatočná rýchlosť častice, ktorá sa pohybuje priamočiaro tak, že jej zrýchlenie v závislosti od času rovnomerne rastie a za prvých 5 sekúnd vzrástlo z nulovej hodnoty na 3m.s^{-2}, keď po uplynutí 10 sekúnd od začiatku zrýchleného pohybu mala častica rýchlosť 50m.s^{-1}?

10. Teleso koná priamočiary pohyb, pričom jeho zrýchlenie exponenciálne klesá z hodnoty $a_1 = 8$ m.s^{-2} v čase $t_1 = 2$ s na hodnotu $a_2 = 2$ m.s^{-2} v čase $t_2 = 10$ s. Na začiatku pohybu, t.j. v čase $t = 0$ s , bolo teleso v pokoji. Určte:
a) zrýchlenie telesa na začiatku pohybu. b) rýchlosť telesa v čase 20 s od začiatku pohybu.
c) dráhu, ktorú teleso prejde za čas 30 s od začiatku pohybu.
d) dráhu, ktorú teleso prejde v priebehu časového intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.
Pomôcka: Exponenciálny pokles je možné analyticky opísať funkciou $a(t) = Ae^{-Bt}$, kde A a B sú konštanty.

11. Z miesta A vyšli na tú istú trasu v tom istom čase dva nákladné automobily. Prvý šiel rýchlosťou $v_1 = 40$ km/h, druhý rýchlosťou $v_2 = 50$ km.h^{-1}. Po istom čase vyrazilo za nimi osobné auto rýchlosťou v_3=70 km.h^{-1}. Dostihlo pomalšie nákladné auto a o pol hodiny na to i rýchlejšie nákladné auto. O aký čas neskôr vyšlo na trasu osobné auto?

12. Furman s fúrou naloženého dreva sa pohybuje konštantnou rýchlosťou. Počas pohybu zoskočí z kozlíka a ide na koniec fúry niečo skontrolovať. Urobí pritom 10 krokov. Hneď potom sa otočí a vracia späť na začiatok fúry pričom urobí 15 krokov. Koľko krokov je dlhá fúra ?
Poznámka: Príklady 11 a 12 sú venované problematike „zloženého pohybu“. Na numerickom cvičení sa stačí obmedziť na zjednodušený prípad zloženého pohybu v zmysle „princípu nezávislosti pohybov“ (resp. skladania rýchlostí) a ukázať ako vyzerá opis pohybu z hľadiska dvoch rôznych vzťažných sústav. „Skutočný“ zložený pohyb a také pojmy ako Coriolisovo zrýchlenie a pod... bohužiaľ nemôžu byť obsahom prednášky.

13. Ak na hladine vody voľne pustíme guličku, bude klesať ku dnu tak, že jej rýchlosť sa v závislosti od času bude meniť podľa vzťahu:

$$v = v_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

kde $v_0 = 0{,}2$ m.s^{-1} a $\tau = 0{,}1$ s. V akej hĺbke bude mať gulička rýchlosť rovnú 99 % rýchlosti ustáleného pohybu a aké bude v tejto hĺbke jej zrýchlenie ?

14. Hmotný bod koná jednorozmerný pohyb pozdĺž osi x. Okamžitá rýchlosť v hmotného bodu závisí od jeho polohy na osi x. Uvedená závislosť je určená vzťahom $v^2 = k\,x$, kde k je konštanta udávaná v jednotkách m.s^{-2}. Určte závislosť polohy, rýchlosti a zrýchlenia hmotného bodu od času, keď na začiatku, t.j. v čase $t = 0$ s bol hmotný bod v počiatku osi x (t.j. v polohe $x = 0$ m).

15. Pri prejazde zákrutou tvaru kružnice s polomerom 150 m vlak za 15 sekúnd rovnomerne spomalil z rýchlosti 90 km.h^{-1}na 50 km.h^{-1}. Určte veľkosť celkového zrýchlenia vlaku v okamihu, keď dosiahol rýchlosť 50 km.h^{-1}.

16. Rotor elektromotora rotujúci s frekvenciou 4000 ot.min^{-1} sa počas 8 s celkom zastaví. Koľko otáčok pritom vykoná, ak jeho pohyb je rovnomerne spomalený ?

17. Kotúč s polomerom $R = 10$ cm sa roztáča z pokoja tak, že jeho uhlové zrýchlenie s časom rovnomerne vzrastá z hodnoty $\varepsilon_1 = 3$ s^{-2} v čase $t_0 = 0$ s na hodnotu $\varepsilon_2 = 8$ s^{-2} v čase $t_1 = 10$ s. Koľko otáčok urobí kotúč za čas $t = 20$ s svojho pohybu ?

18. Je dvanásť hodín. Koľko bude hodín, keď sa budú veľká a malá ručička znovu prekrývať ?

19. Rotor elektromotora rotujúci s frekvenciou 4000 ot.min^{-1} sa počas 8 s celkom zastaví. Koľko otáčok pritom vykoná, ak jeho pohyb je rovnomerne spomalený ?

20. Koleso s polomerom R sa valí po vodorovnej zablatenej ceste konštantnou rýchlosťou v. Kúsky blata, ktoré sa lepia na povrch kolesa, sú neustále vymršťované zo všetkých bodov na jeho obvode. Určte, do akej maximálnej výšky vyletujú tieto kúsky blata nad povrch cesty.