**1.** Uveďte rozdelenie fyzikálnych veličín v sústave SI do jednotlivých kategórií. Vymenujte základné fyzikálne veličiny v sústave SI, napíšte ich značky a príslušné jednotky. Uveďte predpony sústavy SI od $10^{18}$ po $10^{-18}$. Urobte rozmerovú analýzu príslušných jednotiek nasledujúcich fyzikálnych veličín: hustota, kinetická energia a výkon.

Podľa toho či fyzikálne veličiny vyjadrujú **kvantitu** alebo **stav** skúmaného objektu sú to extenzívne a intenzívne veličiny. Podľa **počtu údajov,** nevyhnutných na ich úplné určenie to sú skalárne, vektorov´a tenzorové veličiny.

| Základné jednotky fyzikálnych veličín | | | |
|---|---|---|---|
| **veličina** | | **jednotka** | |
| **názov** | **značka** | **názov** | **značka** |
| hmotnosť | $m$ | kilogram | kg |
| dĺžka | $l$ | meter | m |
| čas | $t$ | sekunda | s |
| elektrický prúd | $I$ | ampér | A |
| termodynamická teplota | $T$ | kelvin | K |
| látkové množstvo | $n$ | mól | mol |
| svietivosť | $I$ | kandela | cd |

| | |
|---|---|
| exa- | $10^{18}$ |
| peta- | $10^{15}$ |
| tera- | $10^{12}$ |

| | |
|---|---|
| giga- | $10^{9}$ |
| mega- | $10^{6}$ |
| kilo- | $10^{3}$ |
| mili- | $10^{-3}$ |
| mikro- | $10^{-6}$ |
| nano- | $10^{-9}$ |
| piko- | $10^{-12}$ |
| femto- | $10^{-15}$ |
| atto- | $10^{-18}$ |

Kinetická energia rozmerová analýza $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ $[E_k] \Leftrightarrow [m][v]^2$ $[E_k] \Leftrightarrow \mathrm{kg}(\mathrm{m.s}^{-1})^2$ $[E_k] \Leftrightarrow \mathrm{kg.m}^2.\mathrm{s}^{-2}$ $[E_k] \Leftrightarrow \mathrm{J}$

Hustota rozmerová analýza: ρ = m/V ρ = kg/ $m^3$ ρ = kg. $m^{-3}$

Výkon rozmerová analýza: P= W/t P=kg.$m^2$.$s^{-2}$/ s P= kg.$m^2$.$s^{-3}$ P= W

**2.** Vysvetlite rozdiel medzi extenzívnymi a intenzívnymi veličinami a rozdiel medzi skalárnymi a vektorovými veličinami. Zadefinujte algebrické operácie s vektorovými veličinami, na príkladoch ukážte, ako sa s nimi pracuje.

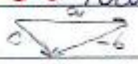
Rozdiel medzi extenzívnymi a intenzívnymi veličinami je v tom , že pri spojení dvoch telies do jedného celku sa hodnoty extenzívnych veličín sčitujú, ale hodnoty intenzívnych veličín nie.

Skalárne veličiny sú fyzikálne veličiny, ktoré sú jednoznačne určené len jedným číselným údajom – čas *t*

Vektorové veličiny sú fyzikálne veličiny, ktoré sa okrem veľkosti vyznačujú aj smerom.

a) Súčet vektorov - súčet dvoch vektorov a a b je oper., kt. výsledkom je vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Algebraicky ich súčet určíme: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ a $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ a súčet bude: $\vec{c} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$


b) Rozdiel vektorov - jej výsledkom je $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Podobný postup ako pri súčte, iba meníme znamienko.




c) Skalárny súčin - výsledkom je skalár (číslo). Zápis: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Výpočet: • Ak poznáme súradnice vektora a, b tak počítame:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

• Ak poznáme veľkosti vektorov a, b a uhol $\phi$ medzi nimi, potom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\phi$$

d) Vektorový súčin - výsledkom je vektor. Zápis: $\vec{a} \times \vec{b}$

Výpočet: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$

Platí: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

3. Objasnite základné vlastnosti skalárneho súčinu dvoch vektorových veličín. Uveďte, za akých podmienok sa skalárny súčin dvoch vektorov rovná súčinu ich veľkostí a za akých podmienok sa rovná nule. Napíšte a objasnite základné vlastnosti vektorového súčinu dvoch vektorov. Uveďte, aký je význam „pravidla pravej ruky“ pri určovaní vektorového súčinu dvoch vektorov.

Skalarny sucin: $a * b$ – vysledkom je cislo

$\bar{a} * \bar{b} = |\bar{a}| * |\bar{b}| * \cos\alpha$

Skalárny súčin dvoch vektorov sa rovná súčinu ich veľkosti len za podmienok že sú vektory nenulové

Skalárny súčin dvoch vektorov sa rovná nule ak sú vektory na seba navzájom kolmé

Vektorový súčin vektorov ***a, b*** (v tomto poradí) je vektor ***a*** X ***b*,** pre ktorý platí:

1. Ak vektory ***a, b*** sú lineárne závislé, tak ***a*** X ***b*** = 0
2. Ak vektory ***a, b*** sú lineárne nezávislé, tak platí:

I***a*** X ***b***I = I***a***II***b***I$\sin\varphi$, kde $\varphi$ je uhol vektorov ***a, b,***

Pravidlo pravej ruky určuje smer výsledného vektora. Ruku položíme tak aby prsty smerovali od prvého vektora k druhému. Vystretý palec určuje smer výsledného vektora.

**4.** Vysvetlite, čo rozumieme pod pojmom mechanický pohyb a akým spôsobom ho skúmame. Uveďte rozdiel medzi kinematikou a dynamikou. Definujte hmotný bod, trajektóriu a dráhu hmotného bodu konajúceho mechanický pohyb.

**Mechanický pohyb =** každá zmena polohy telesa vzhľadom na iné telesá. **Mechanika** časť fyziky, ktorá skúma mechanický pohyb telies.

Dynamika skúma závislosť medzi pohybom telies a silami. Kinematika sa zoberá opisom pohybu a skúmaním vzťahov.

**Hmotný bod-** model telesa, ktorého rozmery zanedbávame, ale jeho hmotnosť sa zachováva**,**

**Trajektória-** množina všetkých bodov, do ktorých sa hmotný bod pri pohybe dostane charakterizujeme ju dĺžkou a tvarom.

Dĺžka trajektórie, ktorú teleso prejde za určitý čas sa nazýva **dráha** – $s$ (m, km).

**5.** Zadefinujte základné kinematické veličiny a vysvetlite postup pri ich určovaní. Uveďte fyzikálne jednotky základných kinematických veličín.

- **Rýchlosť**: Ak $\Delta t \to 0$, priemerná rýchlosť sa blíži k okamžitej rýchlosti: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$
- Ak skrátime časový interval tak, že $\Delta t \to 0$, môžeme napísať, že $\Delta s$ » $\Delta \boldsymbol{r}$, potom platí: $\boldsymbol{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$
- Jednotka $[\boldsymbol{v}] = \mathrm{m.s^{-1}}$
- **Zrýchlenie:** Ak zmenšujeme časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$, limitný prípad $\Delta t \to 0$ určuje okamžité zrýchlenie.

  Okamžité zrýchlenie je prudkosť zmeny okamžitej rýchlosti v čase: $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

  Jednotka $[\boldsymbol{a}] = \mathrm{m.s^{-2}}$

  **Polohový vektor** r

**6.** Klasifikujte pohyby z hľadiska kinematiky.

| | |
|---|---|
| Z hľadiska dráhy | -priamočiary – dráhou je nekonečne dlhá rovná čiara<br>-krivočiary – dráhou je krivka |
| Z hľadiska rýchlosti | - rovnomerný – veľkosť vektora rýchlosti je konštantná<br>- nerovnomerný – veľkosť vektora rýchlosti nie je konštantná<br>-rovnomerne zrýchlený – veľkosť vektora zrýchlenia je konštantná<br>. nerovnomerne zrýchlený - veľkosť vektora zrýchlenia nie je konštantná |

**7.** Zadefinujte priamočiary pohyb a objasnite postup pri jeho opise. Zadefinujte rovnomerný, rovnomerne zrýchlený a nerovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb a uveďte kinematické rovnice pre tieto druhy pohybov.

Priamočiarý pohyb – vykonáva sa pozdĺž priamky, čiže polohový vektor je konštantný. Pri jeho opise zavedieme ľubovoľne vzťažnú sústavu a určíme základné kinematické veličiny

$\vec{r} = [s, 0, 0]$

$\vec{a}$=[a,0,0] = derivácia rýchlosti podľa času

$\vec{v}$=[v,0,0] = derivácia dráhy podľa času

**rovnomerný,** kedy sa teleso (v aproximácii hmotného bodu) pohybuje s nulovým zrýchlením, t. j. $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$;

s= v.t

b) **rovnomerne premenný,** kedy sa hmotný bod pohybuje so zrýchlením, $\boldsymbol{a}$ = konšt.

Pohyb rovnomerne premenný sa nazýva *rovnomerne zrýchlený* pre $\boldsymbol{a} > 0$, (kedy sa znamienko zrýchlenia zhoduje v znamienku s rýchlosťou *v*)

$$v = v_0 + a.t$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a.t^2$$

a *rovnomerne spomalený* pre $\boldsymbol{a} < 0$, (kedy znamienko zrýchlenia je opačné so znamienkom rýchlosti *v*).

$$v = v_0 - a.t$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a.t^2$$

c) Ostatné typy pohybov s ľubovoľnou závislosťou $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ sú

**nerovnomerné.**$v = \int a.dt \; s = \int v.dt$

**8.** Charakterizujte krivočiary pohyb – pohyb po kružnici a definujte fyzikálne veličiny, ktoré sa využívajú pri popise tohto pohybu v kinematike, uveďte príslušné fyzikálne jednotky týchto fyzikálnych veličín. Uveďte vzťahy, ktorými je určená perióda a frekvencia pohybu hmotného bodu po kružnici. Napíšte, v akých fyzikálnych jednotkách sa tieto fyzikálne veličiny vyjadrujú.

Na určenie polohy HB pri jeho pohybe po kružnici potrebujeme poznať len veľkosť uhla $\varphi$ v príslušnom čase

Ak sa $\varphi$ nemení, HB sa nehýbe .Ako prudko sa uhol mení v čase

**Uhlová rýchlosť :** $\boxed{\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}$ $[\omega] = 1\,\mathrm{rad.s^{-1}}$

Uhlová rýchlosť $\omega$ môže byť funkciou času:

**Uhlové zrýchlenie :** $\boxed{\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$ $[\varepsilon] = 1\,\mathrm{rad.s^{-2}}$

**Rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici**

Uhlová rýchlosť: $\omega = \varepsilon t + \omega_0$ $[\omega] = 1\,\mathrm{rad.s^{-1}}$

Uhlová dráha : ak $\varepsilon$ = konšt $\varphi$ = ? $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$ (uhol)

ak , $\omega$ = konšt $\varepsilon$ = 0 rad.s$^{-2}$ $\varphi = \omega t + \varphi_0$ uhol)

**Perióda pohybu** (obežná doba) $T$ - čas jedného obehu HB.

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}}$$ Jednotka ( s )

**Frekvencia *f*** - je prevrátená hodnota periódy.

Určuje počet obehov (kružníc) HB za jednu sekundu.

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\pi f}$$ Jednotka ( Hz )

**9.** Vysvetlite termín dynamika hmotného bodu. Uveďte a charakterizujte sily krátkeho a dlhého dosahu z hľadiska dynamiky.

je časť mechaniky, ktorá skúma závislosť medzi pohybom telies a silami, ktoré na ne pôsobia a vyvolávajú zmeny ich pohybového stavu.

**Sily krátkeho dosahu:**

**Jadrové sily :** silná interakcia - uplatňujú sa medzi nukleónmi v jadre atómu, sú najsilnejšou základnou fyzikálnou interakciou

slabé interakcie - sú zodpovedné za rozpad rádioaktívnych látok.

**Sily dlhého dosahu:**

**Elektromagnetické interakcie:**

- približne 100-krát slabšie ako silné interakcie,
- pôsobia medzi elektricky nabitými telesami, medzi prúdovodičmi, ktorými preteká el. prúd s i.,
- interakcia sa uskutočňujem prostredníctvom kvánt elektromagnetického žiarenia – fotónov.

**Gravitačné sily:**

- sily, ktorými pôsobí planéta na telesá na jej povrchu,
- sú nimi viazané Slnko a planéty v Slnečnej sústave,
- realizujú sa prostredníctvom gravitačného poľa, ktoré obklopuje každý materiálny objekt.

**10.** Formulujte Newtonove pohybové zákony a detailne ich vysvetlite. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

**1. Newtonov pohybový zákon – zákon zotrvačnosti:**

*„Každé teleso v inerciálnej vzťažnej sústave zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ nie je nútené pôsobením vonkajších síl tento svoj pohybový stav zmeniť.*

**2. Newtonov pohybový zákon – zákon sily:**

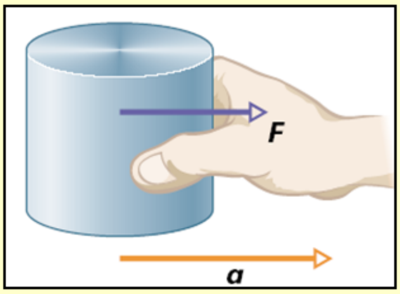
*„Časová zmena hybnosti telesa je priamoúmerná pôsobiacej sile a má s ňou rovnaký smer.“*

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}, \quad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a},$$

Ak hmotnosť nie je premenná veličina ($m$ = konšt.), t. j. nezávisí od rýchlosti pohybujúceho sa objektu.




zrýchlenie

sila - charakteristika pôsobenia okolia (charakteristika interakcie)

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$$

hmotnosť - charakteristika častice (je definovaná týmto zákonom)

princíp superpozíce (súčet všetkých pôsobiacich síl)

Sila spôsobuje zrýchlenie (t. j. zmenu rýchlosti v závislosti od času).

**3. Newtonov pohybový zákon – zákon akcie - reakcie:**

*„Sily, ktorými na seba pôsobia dve telesá, majú vždy rovnakú veľkosť a opačný smer“*

Sila $F_{12}$, ktorou pôsobí jedno teleso na druhé je akcia a sila $F_{21}$, ktorou pôsobí druhé teleso na prvé je reakcia.

Sily akcie – reakcie ležia na jednej priamke (jednej nositeľke).

Podľa 3. NPZ v každom okamihu platí: $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$

**11.** Zadefinujte veličinu hybnosť a vysvetlite jej význam pri skúmaní mechanického pohybu objektu. Uveďte jednotku fyzikálnej veličiny hybnosť. Formulujte a  na príklade objasnite zákon zachovania hybnosti.

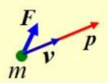
- $\boldsymbol{p}$ je fyzikálna vektorová veličina, ktorá charakterizuje pohybový účinok hmotnosti (závisí od hmotnosti $m$ aj rýchlosti $\boldsymbol{v}$ HB):

$$\boxed{\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v},}$$

- smer vektora $\boldsymbol{p}$ je totožný so smerom vektora $\boldsymbol{v}$,
- jednotka:

$$\boxed{[p] = 1\,\mathrm{kg.m.s^{-1}}}$$

Výsledná sila pôsobiaca na HB: $\boxed{\boldsymbol{F} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}}$




Zo zákona akcie – reakcie vychádza zákon zachovania hybnosti:

Súčet hybností všetkých telies izolovanej sústavy je stály.

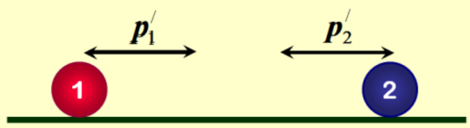
$$\boxed{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_n = \text{konšt.}}$$

*„Hybnosť izolovanej sústavy je konštantná (s časom sa nemení).“*

$$\boxed{\boldsymbol{p} = \text{konšt.}}$$

Zraz biliardových gúľ

2. Gule pohybujúce sa proti sebe na seba narazia.




**pred nárazom:**

$$\boldsymbol{p}_1 = m\boldsymbol{v}_1$$
$$\boldsymbol{p}_2 = m\boldsymbol{v}_2$$
$$\boldsymbol{p}_\mathrm{C} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \; = 0$$

**po náraze:**

$$\boldsymbol{p}_1^{/} = m\boldsymbol{v}_1^{/}$$
$$\boldsymbol{p}_2^{/} = m\boldsymbol{v}_2^{/}$$
$$\boldsymbol{p}_\mathrm{C}^{/} = \boldsymbol{p}_1^{/} + \boldsymbol{p}_2^{/} \; = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{p}_\mathrm{C} = \boldsymbol{p}_\mathrm{C}^{/}}$$

Celková hybnosť sústavy gúľ je nulová.
Celková hybnosť sústavy gúľ sa nárazom nezmení.

**12.** Zaveďte fyzikálnu veličinu moment sily a jej príslušnú jednotku. Ukážte, že výsledný moment akcie a reakcie vzhľadom na ľubovoľný bod je rovný nule. Pomocou obrázka vysvetlite uplatnenie pravidla pravej ruky pri určovaní smeru vektora momentu sily vzhľadom na os otáčania. Formulujte momentovú vetu.

Otáčavý účinok sily na teleso vyjadruje vektorová fyz. veličina: $\boldsymbol{M}$ - moment sily vzhľadom na os otáčania

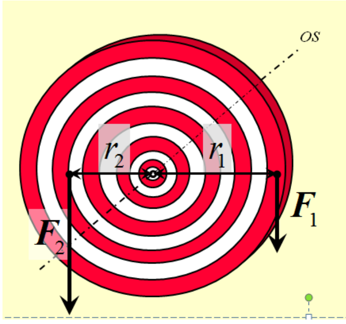
$\boxed{\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}}$ $\boxed{[M] = 1\,\mathrm{N.m}}$

Veľkosť momentu sily vzhľadom na os otáčania, ktorá je kolmá na smer sily určíme ako vektorový súčin ramena sily $\boldsymbol{r}$ a sily $\boldsymbol{F}$ vzhľadom na túto os.

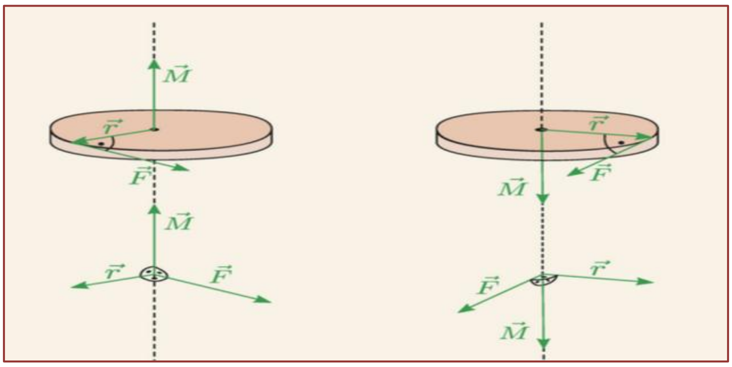
$\boxed{\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1}$ $\boxed{\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2}$ $M_v = M_1 - M_2$

$M_1 = r_1 F_1$ $M_2 = r_2 F_2$ $\boxed{\boldsymbol{M}_v = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_N}$

$\boxed{\boldsymbol{M}_v = 0}$



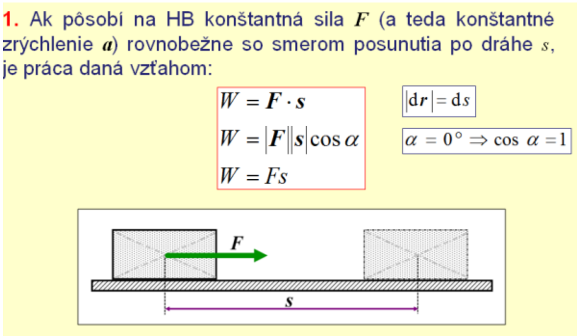

pravidlo pravej ruky :

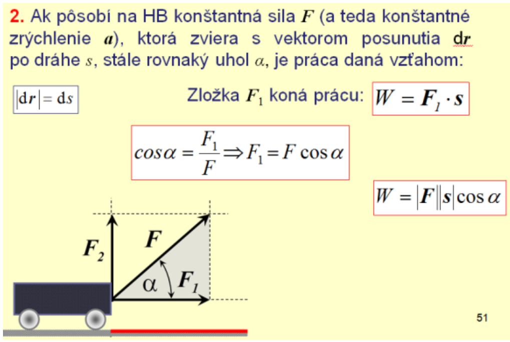


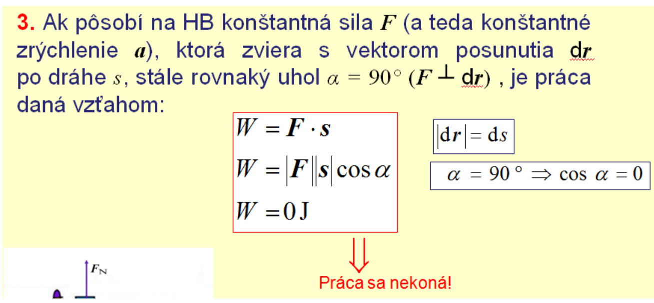

**Momentová veta:** otáčavý účinok síl pôsobiacich na tuhé teleso sa ruší, ak vektorový súčet momentov všetkých síl je nulový vektor momentu sily.

**13.** Zadefinujte pojmy mechanická práca ako dráhový účinok sily, účinnosť a výkon. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

**Mechanická práca:**




Jednotka (J)

**Výkon** je mechanická práca za jednotku času. Pre pôsobenie konštantnej sily možno napísať:

$$\boxed{P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}} \qquad \boxed{[P] = 1\,\mathrm{kg.m^2.s^{-3}} = 1\,\mathrm{W}\ (\mathrm{watt})}$$

**Účinnosť:** Na charakterizovanie hospodárnosti nejakého stroja alebo zariadenia, používame veličinu, ktorá sa nazýva **účinnosť**:

$$\boxed{\eta = \frac{P}{P_p}}$$

kde $P_\mathrm{p}$ je privedený výkon, ktorý sa zvykne nazývať aj **príkon**, $P$ je odovzdaný výkon zariadenia

**14.** Zadefinujte kinetickú energiu hmotného objektu a vysvetlite postup pri jej výpočte. Objasnite pojem potenciálna energia hmotného objektu. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\cdot\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_2}^{r_2} m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{v_1}^{v_2} m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} =$$
$$= m\int_{v_1}^{v_2}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = m\int_{v_1}^{v_2} v\mathrm{d}v = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 =$$
$$= E_{\mathrm{k}2} - E_{\mathrm{k}1} = \Delta E_\mathrm{k}$$

Jednotka kinetickej energie: $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$

$$\boxed{[E_k] = \mathrm{kg.(m.s^{-1})^2} = \mathrm{kg.m^2.s^{-2}} = \mathrm{N.m} = \mathrm{J}}$$ (joule)

kinetická energia → $\boxed{[E_k] = [W]}$ ← mechanická práca

Kinetickú energiu má teleso s hmotnosťou $m$, pohybujúce sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ vzhľadom na zvolenú inerciálnu sústavu.

$E_p = mgh[J]$ - potenciálna energia telesa – práca ktorú treba vykonať, aby sa teleso dostalo z normálového stavu do danej polohy

**15.** Definujte gravitačné pole, napíšte vzťahy pre výpočet gravitačnej sily a intenzity gravitačného poľa hmotného bodu a telesa. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

Príčinou týchto javov je sila, ktorou pôsobí Zem na každé teleso, ktoré je v jej okolí. Táto sila pôsobí na telesá, ktoré sa bezprostredne dotýkajú povrchu Zeme, ale aj na telesá, ktoré sa jej povrchu nedotýkajú. Silové pôsobenie medzi Zemou a telesom je vzájomné. Podľa 3. NPZ pôsobí Zem na teleso a teleso na Zem.

**Gravitačná sila :** $F_{g1,g2} = \kappa\frac{m_1 m_2}{r^2}$ $\boxed{\boldsymbol{F}_{g1,2} = -\kappa\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r}}$ **Jednotka J**

**Intenzita gravitačného poľa:** $F_g = \kappa\frac{M_Z m}{(R_Z + h)^2}$

$$E = \frac{F_g}{m} = \frac{\kappa\frac{M_Z m}{(R_Z+h)^2}}{m}$$

$$\boxed{E = \kappa\frac{M_Z}{(R_Z+h)^2}}$$

**16.** Definujte potenciálnu energiu gravitačného poľa. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

Presuňme HB z miesta s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_1$ do miesta s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_2$.

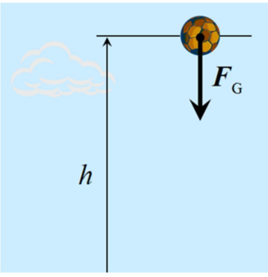
Ak budeme HB posúvať, budeme cítiť odpor. Vykonáme prácu $W$.

Rovnako veľkú prácu vykoná HB, keď sa vráti späť.

Táto práca je potenciálna energia, ktorú HB získal.

$\boxed{E_\mathrm{p} = -\kappa \frac{Mm}{r} + \text{konšt.}}$ Potenciálna energia je daná až na ľubovoľnú konštantu.

Ak $h \langle\langle R$ môžeme pre $E_\mathrm{p}$ napísať:




$\boxed{E_\mathrm{p} = mgh}$

**Rozmerová analýza:**

$$\boxed{\begin{aligned} &[E_\mathrm{p}] \Leftrightarrow [m][g][h] \\ &[E_\mathrm{p}] \Leftrightarrow \mathrm{kg.m.s^{-2}m} \\ &[E_\mathrm{p}] \Leftrightarrow \mathrm{kg.m^2.s^{-2}} \\ &[E_\mathrm{p}] \Leftrightarrow 1\,\mathrm{J\ (joule)} \end{aligned}}$$

**17.** Odvoďte a vysvetlite vzťah medzi intenzitou a potenciálom gravitačného poľa a tiež vzťah medzi silou a potenciálnou energiou gravitačného poľa. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

intenzitou a potenciálom gravitačného poľa

Máme dve rovnice:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}E_\mathrm{p} &= \mathrm{grad}(E_\mathrm{p}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ \mathrm{d}E_\mathrm{p} &= -\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mathrm{grad}(E_\mathrm{p}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}(E_\mathrm{p})}$$

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}(E_\mathrm{p}) / \frac{1}{m}$$

$$\frac{\boldsymbol{F}}{m} = -\frac{1}{m}\mathrm{grad}(E_\mathrm{p})$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi}$$

sila a potencialna energia

$\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = r\,\mathrm{d}r$

Pôsobíme proti sile gravitačného poľa

skalárny súčin

$$W = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}_g\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{r_1}^{r_2}\left(-\kappa\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \kappa Mm\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{r^3}\right) =$$

sila gravitačného poľa

$$= -\kappa Mm\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{r\,\mathrm{d}r}{r^3}\right) = -\kappa Mm\int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\,\mathrm{d}r = -\kappa Mm\left[\frac{r^{-1}}{-1}\right]_{r_1}^{r_2} = \kappa Mm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= \left[-\frac{\kappa Mm}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = -\kappa Mm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -(E_{\mathrm{p}2} - E_{\mathrm{p}1}) = -\Delta E_\mathrm{p}$$

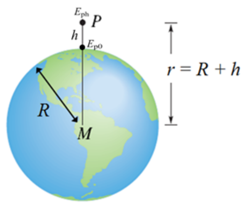
$E_\mathrm{p}$ v danom mieste gravitačného poľa

23

**Práca síl gravitačného poľa závisí len od začiatočnej a konečnej polohy.**

**18.** Odvoďte potenciálnu energiu gravitačného poľa v malých výškach nad Zemou. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

Z povrchu Zeme prenesieme objekt do výšky $h$:




$$E_p = E_{ph} - E_{p0}$$

$$E_p = -\kappa \frac{mM}{(R+h)} - \left(-\kappa \frac{mM}{R}\right)$$

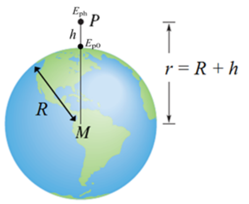
$$E_p = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$E_p = \kappa m M \left(\frac{R+h-R}{R(R+h)}\right)$$

$$E_p = \kappa m M \left(\frac{h}{R^2 + (Rh)}\right)$$

Ak $h \ll R$ člen $Rh$ v menovateli môžeme zanedbať vzhľadom na polomer Zeme.

Z povrchu Zeme prenesieme objekt do výšky $h$:




$$E_p = \left(\boxed{\frac{\kappa M}{R^2}}\right) mh$$

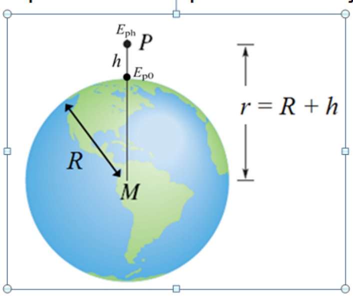
konštanta $g$

$$E_p = gmh$$

$$\boxed{E_p = mgh}$$

Tento vzťah pre výpočet $E_p$ platí pre malé výšky $h \ll R$.

Z povrchu Zeme prenesieme objekt do výšky $h$:




$R$ – polomer Zeme
$M$ – hmotnosť Zeme
$E_{ph}$ – potenciálna energia objektu vo výške $h$
$E_{p0}$ – potenciálna energia objektu na povrchu Zeme

**19.** Vysvetlite, čo rozumieme pod pojmom sústava hmotných bodov a ako pomocou tejto sústavy popisujeme tuhé teleso.

Konečný počet hmotných bodov, určitým spôsobom vymedzených voči okoliu, ktoré skúmame ako celok a pritom všetky jednotlivé hmotné objekty patriace do sústavy považujeme za hmotné body, nazveme *sústavou hmotných bodov*

- **Tuhé teleso** je ideálne teleso, ktorého tvar, ani objem sa nemenia účinkom ľubovoľne veľkých síl.
- Je charakterizované hmotnosťou a geometrickými rozmermi, ktoré vymedzujú určitý objem.
- Je tvorené sústavou vzájomne pevne viazaných hmotných bodov.

**20.** Popíšte pohyb tuhého telesa (1. a 2. veta impulzová). Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

**1. veta impulzová** je zovšeobecnením 2. Newtonovho pohybového zákona pre tuhé teleso.

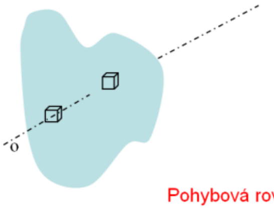
Máme objekt, ktorý má hmotnosť, ale nie je malý (nie je to HB).

Zvonku naň môže pôsobiť viacero síl. Výsledný moment vnútorných gravitačných síl je nulový, aj výsledná sila vnútorných síl je nulová.

Súčet vonkajších síl vedie k zmene hybnosti:

$$F_c = \frac{d\left(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i\right)}{dt}$$

$$\boxed{F_c = \frac{dp}{dt}}$$

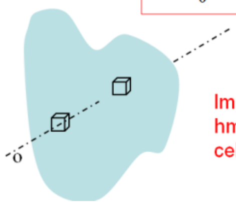


Pohybová rovnica telesa, ktoré sa pohybuje translačne.

Tento vzťah platí za krátky časový interval: $F_c = \dfrac{dp}{dt}$

Ak ho chceme vyjadriť za dlhší časový interval pre celé teleso:

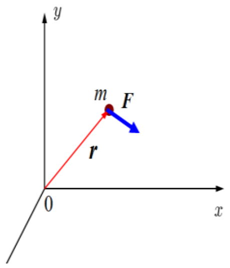
$$\boxed{I = \int_0^t F_c = \int_{p_0}^{p_1} dp = [p]_{p_0}^{p_1} = p_1 - p_0 = \Delta p}$$



Impulz vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov (častíc) sa rovná zväčšeniu celkovej hybnosti sústavy hmotných bodov .

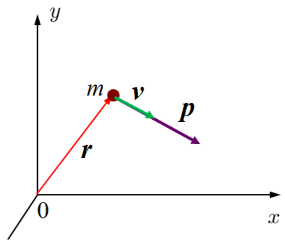
2 veta impulzová

Moment sily charakterizuje otáčavé účinky sily: $M = r \times F$




$r$ - polohový vektor pôsobiska sily, vzhľadom na ktorý moment sily počítame

Máme HB hmotnosti $m$, ktorý sa pohybuje rýchlosťou $v$, má teda hybnosť $p$: $\boxed{p = mv}$




Vzťah $\boxed{L = r \times p}$

vyjadruje moment hybnosti HB

Vyjadrime časový účinok vonkajších síl – impulz sily:

$\boxed{dL = M_c dt}$ vyjadrenie krátkeho časového účinku vonkajších síl

Ak chceme vyjadriť časový účinok vonkajších síl za dlhší časový interval:

$$\int_{L_0}^{L_1} dL = \int_0^t M_c dt$$

$$\int_0^t M_c dt = [L]_{L_0}^{L_1}$$

$$\int_0^t M_c dt = (L_1 - L_0)$$

$$\boxed{\int_0^t M_c dt = \Delta L}$$

vektorový súčet všetkých momentov síl $M$ pôsobiacich na sústavu sa rovná časovej zmene celkového momentu hybnosti sústavy

.

Zmena momentu hybnosti

Pre tuhé teleso: $\boxed{\dfrac{dL}{dt} = M_c}$

**Pohybová rovnica telesa, ktoré rotuje.**

$M_c$ – výsledný moment vonkajších síl

$L$ – moment hybnosti tuhého telesa

**21.** Zadefinujte rovnováhu tuhého telesa a napíšte rovnice pre rovnováhu tuhého telesa. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

Tuhé teleso je v rovnováhe, ak výslednica vonkajších síl $F_c$ a výsledný moment vonkajších síl $M_c$ sú nulové.

1. $\boldsymbol{F}_c = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$

2. $\boldsymbol{M}_c = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0}$

$$\boxed{\boldsymbol{F}_c = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \Rightarrow \int_0^t \boldsymbol{F}_c \, dt = \Delta \boldsymbol{p}}$$

Z tohto vzťahu vyplynula 1. veta impulzová

$$\boxed{\boldsymbol{M}_c = \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \Rightarrow \int_0^t \boldsymbol{M}_c \, dt = \Delta \boldsymbol{L}}$$

Súčet momentov vonkajších síl

Ak máme izolované teleso, tak

$\boxed{\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}}$ Teleso sa nehýbe translačne.

$\boxed{\Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{0}}$ Teleso sa nehýbe rotačne.

**22.** Odvoďte moment zotrvačnosti tuhého telesa pomocou výpočtu kinetickej energie rotujúceho tuhého telesa. Vysvetlite pojem moment zotrvačnosti tuhého telesa. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

Akú $E_k$ má HB?

$$\boldsymbol{E}_{k_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\boldsymbol{E}_{k_i} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega_i^2$$

vzdialenosť od osi rotácie

$$\boldsymbol{E}_{k_i} = \frac{1}{2} J_i \omega_i^2$$

moment zotrvačnosti HB

$$\boldsymbol{E}_{k\,rot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$\boldsymbol{E}_{k\,rot} = \frac{1}{2} \omega^2 \boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$$

$$\boldsymbol{E}_{k\,rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

výsledný moment zotrvačnosti $J$

$m_i$ – hmotnosť i-teho HB

$r_i$ – vzdialenosť i-teho HB od osi rotácie

$$\boxed{J = \int_{(M)} r^2 \mathrm{d}m}$$

$\mathrm{d}m$ – hmotnostný element
$r$ – vzdialenosť hmotnostného elementu
od osi rotácie

Moment zotrvačnosti $J$ vyjadruje, ako je rozložená hmotnosť v telese.

**23.** Formulujte a vysvetlite Steinerovu vetu.

Steinerova veta umožňuje vypočítať moment zotrvačnosti $J$ tuhého telesa vzhľadom na os, ktorá neprechádza hmotným stredom, ak poznáme moment zotrvačnosti tuhého telesa $J_T$ vzhľadom na os, ktorá prechádza hmotným stredom telesa. Podmienkou je, aby obe osi boli rovnobežné.

$$J = J^* + ma^2$$

**24.** Objasnite pojmy hmotný stred a ťažisko tuhého telesa. Napíšte vzťahy pre výpočet ťažiska sústavy hmotných bodov a ťažiska tuhého teleso. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

Ťažisko je bod, do ktorého keď uchopíme teleso, tak výsledný moment tiažových síl je nulový.

Ak by sme tuhé teleso rozsekali na množstvo HB (sústavu HB), pre $x$-ovú súradnicu ťažiska by sme dostali vzťah:

Pozor! Platí za podmienky, že tiažové pole je homogénne t. j.: $g_1 = g_2 = g$

$$\boxed{x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

Vzťah zovšeobecníme aj pre ostatné súradnice ťažiska.

Pre $y$-ovú súradnicu ťažiska by sme dostali vzťah:

$$\boxed{y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

Pre $z$-ovú súradnicu ťažiska by sme dostali vzťah:

$$\boxed{z_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{(m_1 + m_2)}$$

($x_1$ = súradnica bodu $m_1$)
($x_2$ = súradnica bodu $m_2$)
($x$ = súradnica ťažiska $T$)

HMOTNÝ STRED

Hľadajme k tuhému telesu taký bod, do ktorého keď sústredíme hmotnosť celého telesa $M$, tak sa tento bod bude pohybovať rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. Môžeme napísať:

$$\boxed{M\boldsymbol{v}} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i}$$

hybnosť bodu, ktorý hľadáme, jeho hybnosť má nahradiť hybnosť celého telesa – takýto bod sa nazýva **hmotný stred**

hybnosť celého tuhého telesa

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{s} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \boldsymbol{r}_\mathrm{T}$$

**25.** Vysvetlite termín lineárny netlmený harmonický oscilátor. Naznačte postup a uveďte vzťahy na určenie polohy, rýchlosti a zrýchlenia netlmeného harmonického oscilátora. Vo fyzikálnych vzťahoch popíšte jednotlivé fyzikálne veličiny a uveďte ich príslušné fyzikálne jednotky.

## Lineárny harmonický oscilátor

– je každý objekt, ktorý bude v dôsledku pôsobenia sily $F$ konať lineárne harmonické kmity:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}}$$

pôsobiaca návratná sila

sila je opačne orientovaná ako výchylka

tuhosť väzby

výchylka z rovnovážnej polohy

Ak bude výchylka stále rovnaká - **netlmený lineárny harmonický oscilátor**.

- Venujme sa rovnici: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0}$
- Hľadáme $x$, ktoré vyhovuje tejto rovnici.
- Výsledkom riešenia tejto rovnice je (bez dôkazu) vzťah, ktorý vyjadruje polohu kmitajúceho objektu, ktorý kmitá účinkom sily $F$: $\boxed{x(t) = x_0 \sin(\underbrace{\omega_0 t + \varphi}_{\text{fáza}})}$

**Pohybová rovnica harmonického kmitavého pohybu telesa**

maximálna výchylka - amplitúda

fázová konštanta

- **Rýchlosť** kmitavého pohybu vyjadruje vzťah:

$$\boxed{v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)}$$

- **Zrýchlenie** kmitavého pohybu:

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)}$$