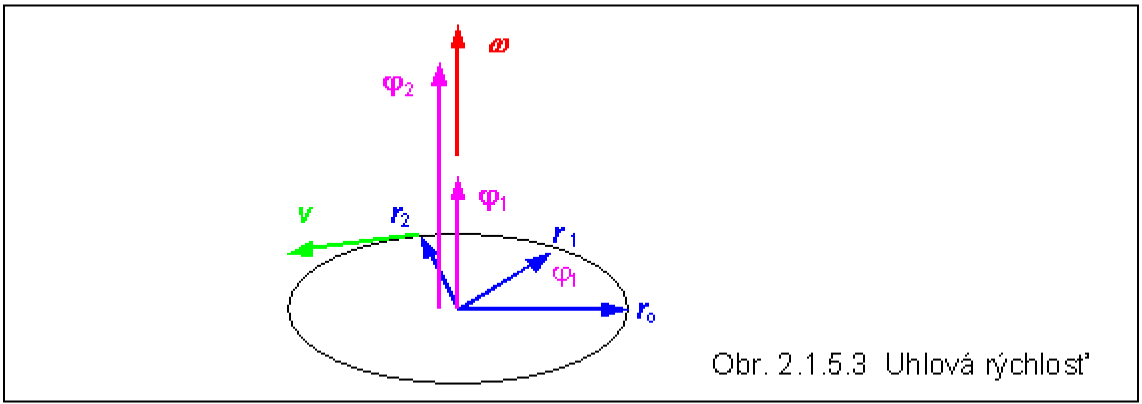
KAPITOLA 2 – pokračovanie

Kinematika krivočiarych a zložených pohybov

2.1.5 Uhlová rýchlosť, uhlové zrýchlenie

Pri opise pohybov, pri ktorých polohový vektor pohybujúcej častice sa otáča, je vhodné zaviesť ďalšie významné pojmy - *uhlovú rýchlosť* a *uhlové zrýchlenie.* Býva zvykom najprv definovať veličinu ***uhlová dráha***. Je to uhol medzi polohovými vektormi - vektorom vyznačujúcim začiatočnú polohu a vektorom v danom okamihu. Jednoduchý prípad nastane, ak sa polohový vektor otáča v jednej rovine. Na obr. 2.1.5.3 je znázornený takýto prípad.



Obr. 2.1.5.3 Uhlová rýchlosť

Medzi veľkosťou dráhy s prejdenej časticou po obvode kružnice a príslušnou uhlovou dráhou φ platí vzťah známy z geometrie

$$s(t) = R\,\varphi(t) \quad . \qquad (2.1.5.2)$$

Prvou deriváciou tohto výrazu podľa času dostaneme súvislosť

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}\,, \qquad (2.1.5.3)$$

v ktorej $ds/dt = v$ vyjadruje obvodovú rýchlosť častice (ako skalárnu veličinu) a výraz

$$d\varphi/dt = \omega\,,$$

uhlovú rýchlosť častice pri pohybe po kružnici (tiež ako skalárnu veličinu), takže :

$$v = R\,\omega. \qquad (2.1.5.4)$$

Uhlová rýchlosť **ω** ako vektorová veličina sa zavádza podobne, ako vektor rýchlosti vzťahom :

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}. \qquad (2.1.5.5)$$

Preto vektor uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ má smer rozdielu vektorov uhlovej dráhy, ktoré sú v čitateli.

Deriváciou rovnice (2.1.5.4) podľa času získame vzťah :

$$a_t = R\alpha \ , \qquad (2.1.5.6)$$

kde α je (skalárne) uhlové zrýchlenie a kde a_t predstavuje (skalárne) ***tangenciálne zrýchlenie*** častice, pričom príslušná vektorová veličina $\boldsymbol{a}_t$ *má smer dotyčnice kružnice určenej jednotkovým vektorom* $\boldsymbol{\tau}$. Celkové zrýchlenie hmotného bodu následne možno rozložiť na tangenciálnu a normálovú zložku, pre ktoré platí

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n \ , \qquad (2.1.5.7)$$

kde $\boldsymbol{\alpha}$ je uhlové zrýchlenie, $\boldsymbol{\omega}$ je uhlová rýchlosť, $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor hmotného bodu a $\boldsymbol{v}$ obvodová rýchlosť, s ktorou sa hmotný bod pohybuje. ***Tangenciálna zložka zrýchlenia určuje nerovnomernosť pohybu*** a je určená vzťahom

$$\boldsymbol{a}_t = \alpha R \boldsymbol{\tau}. \qquad (2.1.5.8)$$

Normálová zložka zrýchlenia spôsobuje zmenu smeru a je určená vzťahom:

$$\boldsymbol{a}_n = -\frac{v^2}{R}\boldsymbol{\rho} \ , \qquad (2.1.5.9)$$

ktoré tiež nazývame *dostredivé zrýchlenie.* *(*$\boldsymbol{\rho}$ je jednotkový vektor so začiatkom v strede kružnice *S.*) Veľkosť celkového zrýchlenia hmotného bodu je určená vzťahom

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \ . \qquad (2.1.5.10)$$

Uhlové zrýchlenie $\boldsymbol{\alpha}$ ako vektorová veličina sa definuje vzťahom

$$\boldsymbol{\alpha} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \ , \qquad (2.1.5.11)$$

a pri pohybe po kružnici je na jej rovinu kolmé. O jeho smere platí podobná poznámka, ako o smere vektora uhlovej rýchlosti.

2.1.6 Pohyb hmotného bodu po kružnici

Pri opise pohybu po kružnici sa s výhodou používajú skalárne veličiny zavedené v časti 2.1.5 . Sú to : *uhlová dráha* s ($s = R\varphi$ (2.1.5.1)) , *obvodová rýchlosť* ($v = R\omega$ (2.1.5.4)) a *tangenciálne zrýchlenie* a_t ($a_t = R\alpha$ (2.1.5.6)) .

Ďalšou významnou veličinou je **doba obehu** (***perióda***) označovaná symbolom T , predstavujúca časový interval potrebný na jeden obeh po kružnici. Prevrátená hodnota doby obehu je **frekvencia** : $f = (1/T)$. *Jednotkou frekvencie je 1 herz (Hz).*

Pohyb s nemeniacou sa uhlovou rýchlosťou sa označuje ako *rovnomerný pohyb* po kružnici. Podľa definície uhlovej rýchlosti (2.1.5.5) platí

$d\varphi = \omega\, dt$ a integráciou tohto vzťahu dostaneme :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \omega\, dt \Rightarrow \varphi_1 = \omega t_1 + \varphi_o$$

Vynechaním indexu "jeden" dostaneme vzorec platný v ľubovoľnom okamihu
$\varphi = \omega t + \varphi_o$.

Ďalším významným prípadom je pohyb s konštantným uhlovým zrýchlením, teda ***rovnomerne zrýchlený pohyb*** po kružnici. Podľa definície uhlového zrýchlenia (2.1.5.11) platí $d\omega = \alpha\, dt$. Integráciou tohto vzťahu dostaneme závislosť uhlovej rýchlosti od času :

$$\int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt \quad \Rightarrow \quad \omega = \alpha t + \omega_0 , \tag{2.1.8.6}$$

kde ω_o je uhlová rýchlosť v čase $t = 0$.

Keďže $d\varphi = \omega\, dt$, závislosť uhlovej dráhy od času pri rovnomerne zrýchlenom pohybe získame ďalšou integráciou :

$$\int_{\varphi_o}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\alpha t + \omega_o) dt = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_o t$$

a po úprave

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_o t + \varphi_o \quad . \tag{2.1.8.7}$$

Pre skalárny tvar rovníc (2.1.8.6) a (2.1.8.7) platia rovnaké poznámky, ako pri rovniciach (2.1.8.1) a (2.1.8.4)

Pri rovnomerne zrýchlenom pohybe po kružnici sa tangenciálne zrýchlenie $a_t = R\,\alpha$ **nemení** . Mení sa uhlová rýchlosť, takže sa mení aj dostredivé zrýchlenie, pre ktoré potom platí $a_d = R\,\omega^2 = R\,(\alpha_\eta t + \omega_o)^2$.

Dostredivé a tangenciálne zrýchlenie sú na seba kolmé, preto veľkosť celkového zrýchlenia vypočítame využitím Pythagorovej vety :

$$a = \sqrt{R^2 \alpha^2 + R^2 (\alpha_\eta t + \omega_o)^4} \quad . \qquad (2.1.8.2)$$

2.1.9 Pohyb hmotného bodu po krivke. Šikmý vrh telesa

V paragrafoch 2.1.4 a 2.1.8 boli opísané pohyby častice po priamke a po kružnici. Sú to špeciálne prípady pohybu. Pohyb po zložitejších čiarach možno na niektorých ich krátkych úsekoch aproximovať pohybom po priamke, alebo pohybom po kružnici.

Najjednoduchším a najznámejším príkladom, ktorý sa takto opisuje, je ***šikmý vrh*** . Ak hodíme kameň, ktorý možno v istom priblížení považovať za hmotný bod, pohybuje sa približne po parabolickej dráhe (považujeme ho za dostatočne malý a tak neuvažujeme jeho rotáciu okolo osi prechádzajúcej jeho ťažiskom). Vo vákuu v zemskom tiažovom poli by sa pohyboval po skutočnej parabole. Takýto prípad, keď neuvažujeme odpor prostredia, sa opisuje pomocou pohybu vo vertikálnej rovine. Vo vodorovnom smere v rovine zvolíme súradnicu x a jednotkový vektor $\boldsymbol{i}$, vo zvislom smere zvolíme súradnicu y a jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$. Pohybu častice (kameňa) vo vodorovnom smere nebráni odpor prostredia, ani iná sila, preto si zachováva príslušnú zložku rýchlosti $v_x = v_{xo}$, ktorou bola hodená. Pohyb v smere osi x je teda pohybom s nemeniacou sa rýchlosťou - pohyb rovnomerný. Vo zvislom smere podlieha častica tiažovému zrýchleniu, takže v smere osi y ide o pohyb s konštantným zrýchlením, čiže o pohyb rovnomerne zrýchlený. Pohyb po parabolickej dráhe v tomto prípade opíšeme pomocou dvoch priamočiarych pohybov, s využitím rovníc (2.1.4.4), (2.1.4.9) a (2.1.4.11) . Kameň hodíme začiatočnou rýchlosťou v_o tak, že s vodorovnou osou zviera uhol α . Potom platia vzťahy

$v_{xo} = v_o \cos\alpha$, $v_{yo} = v_o \sin\alpha$.

Preto môžeme napísať rovnice :

$x(t) = x_o + v_x t \qquad v_x = v_{xo} \qquad a_x = 0$

$y(t) = y_o + v_{yo} t - (1/2) g t^2 \qquad v_y = v_{yo} - gt \qquad a_y = -g$,

ktoré úplne popisujú šikmý vrh. Ich pomocou možno vypočítať napríklad závislosť miesta dopadu (na osi x) od začiatočnej rýchlosti a uhla α , časový interval od okamihu hodu až po dopad, súradnice najvyššieho bodu dráhy, alebo počítať uhol, pri ktorom zaletí kameň najďalej. Rovnice sa zjednodušia, keď predpokladáme, že x_o a y_o sa rovnajú nule.

V najvyššom bode dráhy platí $v_y = 0$, čo sa splní v časovom okamihu t_1 , takže platí

$v_{yo} - g t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = (v_o \sin\alpha)/g$.

Tento vypočítaný čas dosadíme do rovnice pre súradnicu y, čím získame najvyššiu polohu dráhy :

$y_{max} = v_o t_1 \sin\alpha - (1/2) g t_1^{\,2} = (v_o^2 \sin^2\alpha)/(2g)$.

Vodorovnú súradnicu najvyššieho bodu získame, ak čas t_1 dosadíme do vzorca pre x :

$x_{max} = v_x t_1 = (v_o \cos\alpha)(v_o \sin\alpha)/g = (v_o^2 \sin 2\alpha)/2g$.

Okamih t_2 dopadu na os x získame z podmienky

$y_d = 0 \Rightarrow v_o t_2 \sin\alpha - (1/2) g t_2^{\,2} = 0 \Rightarrow t_2 = 2(v_o \sin\alpha)/g$.

Vidno, že platí $t_2 = 2\, t_1$. Dosadením do rovnice pre súradnicu x dostaneme zrejme

$x_d = 2\, x_{max} = (v_o^2 \sin 2\alpha)/g$.

Z posledného výsledku bezprostredne vidno, že pri istej začiatočnej rýchlosti v_o kameňom najďalej dohodíme pri $\sin 2\alpha = 1$, teda pri $\alpha = \pi/4$. Takýto výsledok však platí iba vo vákuu, pri reálnych podmienkach, keď treba vziať do úvahy odpor prostredia, je potrebný uhol o niečo menší ako $\pi/4$.

Že ide v tomto prípade o pohyb po parabole sa presvedčíme, keď spojíme rovnice pre $x(t)$ a $y(t)$ tak, že vylúčime z nich čas, ktorý možno chápať ako parameter. Tak dostaneme :

$y = x (\sin\alpha / \cos\alpha) - x^2\, g/(2\, v_o^2 \cos^2\alpha)$,

čo je rovnica paraboly.

Príklad 2.1.7.1 Po opustení stanice rýchlosť vlaku rovnomerne vzrastá a po troch minútach od opustenia stanice dosahuje na dráhe zakrivenej do tvaru kružnice s polomerom R = 800 m hodnotu 72 km.h^{-1}. Určite hodnotu tangenciálneho, normálového a celkového zrýchlenia po dvoch minútach od okamihu opustenia stanice.

Riešenie: Hodnoty známych veličín: $R = 800$ m, $v_3 = 72$ kmh^{-1} = 20 ms^{-1}, $t_3 = 180$, $t_2 = 120$ s .

Rýchlosť rovnomerne vzrastá z nulovej počiatočnej hodnoty zapíšeme vzťahom

$v = k' t \Rightarrow k = v_3 / t_3$.

Pre tangenciálne zrýchlenie na základe vzťahu (2.1.7.7)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(kt)}{dt} = k = \frac{v_3}{t_3} = 0{,}111\,\mathrm{ms}^{-2} \quad .$$

Pre normálové zrýchlenie na základe vzťahu (2.1.7.5) platí

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(kt_2)^2}{R} = \frac{\left(\frac{v_3}{t_3}t_2\right)^2}{R} = \frac{v_3^2 t_2^2}{t_3^2 R},$$

$$a_n = \frac{20^2.120^2}{180^2.800} = 0{,}222\ \mathrm{ms}^{-2}.$$

Pre veľkosť celkového zrýchlenia dostávame po dosadení hodnotu

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}111^2 + 0{,}222^2} = 0{,}248\ ms^{-2}$$

***Príklad* 2.1.8.4** *Častica sa pohybuje po kružnici s uhlovým spomalením, ktoré s časom rovnomerne rastie podľa vzťahu $\alpha = kt$, kde k je konštanta a t je čas. Začiatočná uhlová rýchlosť bola ω_0. O aký uhol φ sa pootočí sprievodič častice za čas t_1?*

Riešenie: Uhlového zrýchlenie α je definované vzťahom (2.1.5.11), *do ktorého dosadíme časovú závislosť uhlového zrýchlenia , vyjadrenú vzťahom* $-\alpha = k t$

$$\frac{d\omega}{dt} = -kt \Rightarrow \qquad \omega = -\int kt\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}kt^2 + c$$

Integračnú konštantu určíme z počiatočných podmienok: pre $t = 0$, $c = \omega_0$. Hľadaná uhlová rýchlosť je určená vzťahom

$\omega = \omega_0 - kt^2 / 2.$

Uhol, o ktorý sa pootočí sprievodič za čas t_1 určíme na základe úpravy rovnice (2.1.5.5)

$$\varphi = \int_0^{t_1} (\omega_0 - \frac{1}{2}kt^2)\,\mathrm{d}t = \left[\omega_0 t - \frac{1}{6}kt^3\right]_0^{t_1} = \omega_0 t_1 - \frac{1}{6}kt_1^3.$$

***Príklad* 2.1.10.1** Vyjadrite rýchlosť cestujúceho v električke vzhľadom na koľajnice, keď električka sa pohybuje po priamej trati rýchlosťou v_o a cestujúci v električke kráča smerom k zadnej časti električky rýchlosťou v'.

Riešenie Sústavu S viažeme na koľajnice, sústavu Σ na električku. Električka sa neotáča, takže $\omega = 0$. Zo zadania vyplýva, že vektor v' má opačný smer ako vektor v_o , takže rovnica (2.1.10.5) v skalárnom tvare poskytuje vzťah $v = v_o - v'$. Preto rýchlosť cestujúceho vzhľadom na koľajnice je menšia než rýchlosť električky.

Kontrolné otázky

1. Vysvetlite fyzikálny význam normálového(dostredivého) zrýchlenia!
2. Napíšte matematické vyjadrenie pre normálové zrýchlenie hmotného bodu.
3. Vysvetlite fyzikálny význam tangenciálneho zrýchlenia!
4. Napíšte vzťah pre tangenciálne zrýchlenie hmotného bodu.
5. Napíšte vzťah pre celkové zrýchlenie hmotného bodu.
6. Ak sa hmotný bod pohybuje rovnomerným pohybom, je vždy jeho zrýchlenie nulové?
7. Aké je celkové zrýchlenie hmotného bodu pri rovnomernom pohybe po kružnici?
8. Definujte a) rovnomerný, b) nerovnomerný pohyb po kružnici.
9. Vysvetlite fyzikálny význam uhlovej rýchlosti ω.
10. Ak sa častica pohybuje rovnomerným pohybom po kružnici, je nenulové jej zrýchlenie?
11. Napíšte a definujte, ktoré veličiny charakterizujú pohyb po kružnici.
12. Z akých pohybov sa skladá šikmý vrh (ako zložený pohyb)?