8 SÚSTAVA HMOTNÝCH BODOV

Teoretický úvod

Moment $\boldsymbol{M}$ sily $\boldsymbol{F}$ vzhľadom na vzťažný bod je vektorový súčin

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} , \qquad (8.1)$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily vzhľadom na vzťažný bod. Fyzikálna jednotka momentu sily $\boldsymbol{M}$ je 1 m.1 N = 1 Nm (newtonmeter). Veľkosť M momentu sily udáva vzťah

$$M = Fr\sin\alpha = Fd ,$$

kde α je uhol zvieraný vektormi $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$, ($0 \le \alpha \le \pi$) a $d = r\sin\alpha$ je vzdialenosť vektorovej priamky sily od vzťažného bodu (rameno sily).

Moment $\boldsymbol{L}$ hybnosti $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ hmotného bodu vzhľadom na vzťažný bod je vektorový súčin

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} , \qquad (8.2)$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor hmotného bodu vzhľadom na vzťažný bod. Fyzikálna jednotka momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je 1 m.1 kg.m/s = 1 kg.m^2/s. Veľkosť L momentu hybnosti udáva vzťah

$$L = pr\sin\alpha = pd ,$$

kde α je uhol zvieraný vektormi $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$, ($0 \le \alpha \le \pi$) a $d = r\sin\alpha$ je vzdialenosť vektorovej priamky hybnosti od vzťažného bodu (rameno hybnosti).

Sústava n hmotných bodov je množina takých n hmotných bodov, ktoré pozorujeme a charakterizujeme ako jeden celok.

Nech $\boldsymbol{F}_i$ je vonkajšia sila pôsobiaca na i-ty hmotný bod hmotnosti m_i (i = 1, 2,...., n). Nech $\boldsymbol{F}_{ji}$ je vnútorná sila, ktorou pôsobí j-ty hmotný bod sústavy ($j \neq i$) na i-ty hmotný bod (i = 1, 2,...., n). Podľa 2. Newtonovho zákona (zákona sily) sa časová derivácia hybnosti i-teho hmotného bodu rovná súčtu všetkých síl pôsobiacich na i-ty hmotný bod

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} , \quad i = 1, 2, ..., n., \qquad (8.3)$$

Vnútorné sily eliminujeme sčítaním všetkých n rovníc, pričom využijeme 3. Newtonov zákon (zákon akcie a reakcie), podľa ktorého $\boldsymbol{F}_{ji}$ = - $\boldsymbol{F}_{ij}$, resp. $\boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_{ij} = \boldsymbol{0}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} , \qquad (8.4)$$

Dvojitá suma na pravej strane (8.4) sa rovná nule, pretože pozostáva zo súčtov dvojíc vnútorných síl s opačným poradím indexov a každý taký súčet sa podľa zákona akcie a reakcie rovná nule. Zároveň môžeme na ľavej strane (8.4) súčet derivácií nahradiť deriváciou súčtu hybností hmotných bodov:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i . \tag{8.5}$$

Súčet hybností hmotných bodov je celková hybnosť sústavy $\boldsymbol{p}$, súčet vonkajších síl označíme symbolom $\boldsymbol{F}$, a preto pre sústavu hmotných bodov platí **1. veta impulzová**: *Derivácia celkovej hybnosti sústavy podľa času sa rovná súčtu vonkajších síl pôsobiacich na jednotlivé hmotné body sústavy*:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}. \tag{8.6}$$

Keďže celkovú hybnosť sústavy môžeme vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n}m_i \frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i} = m\boldsymbol{v}^*, \tag{8.7}$$

kde m je celková hmotnosť sústavy, môžeme rovnicu (8.6) zapísať v tvare

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v}^*)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}. \tag{8.8}$$

To však znamená, že existuje geometrický bod, ktorý sa pohybuje okamžitou rýchlosťou $\boldsymbol{v}^*$ tak, ako keby celá hmotnosť sústavy bola v ňom sústredená a pôsobili by v tomto bode všetky vonkajšie sily. Tento bod sa nazýva *hmotný stred sústavy*. Jeho okamžitá rýchlosť $\boldsymbol{v}^*$ je teda

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}, \tag{8.9}$$

ktorá sa za predpokladu, že sa hmotnosti hmotných bodov nemenia, dá získať časovou deriváciou polohového vektora $\boldsymbol{r}^*$ hmotného stredu sústavy

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}, \tag{8.10}$$

s karteziánskymi súradnicami

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}, \quad y^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}, \quad z^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}. \tag{8.11,12,13}$$

Vzťahy (8.10) až (8.13) sa môžu použiť na určenie polohy hmotného stredu takého telesa, ktoré je možné rozdeliť na n častí so známymi hmotnosťami a známymi polohami hmotných stredov jednotlivých častí. V princípe si každé teleso hmotnosti m môžeme predstaviť ako systém nekonečného počtu spojite (kontinuálne) rozložených elementárnych hmotností dm. Polohový vektor $\boldsymbol{r}^*$ hmotného stredu telesa a jeho karteziánske súradnice určíme vzťahmi

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\int_m \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{m}, \qquad x^* = \frac{\int_m x\,\mathrm{d}m}{m}, \qquad y^* = \frac{\int_m y\,\mathrm{d}m}{m}, \qquad z^* = \frac{\int_m z\,\mathrm{d}m}{m}. \tag{8.14,15,16,17}$$

Ak sa sústava hmotných bodov, resp. teleso nachádza v homogénnom tiažovom poli, tak sa poloha hmotného stredu zhoduje s polohou tzv. *ťažiska*, v ktorom by sa malo nachádzať pôsobisko výslednice tiažových síl. V nehomogénnom tiažovom poli je však poloha ťažiska vzhľadom na polohu hmotného stredu posunutá na stranu silnejšieho tiažového poľa.

Ak vytvoríme vektorový súčin polohového vektora $\boldsymbol{r}_i$ i-teho hmotného bodu sústavy so stranami rovnice (8.3), získame rovnicu

$$\boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.18}$$

Hodnota ľavej strany (8.18) sa nezmení, ak časovú deriváciu vykonáme až po vytvorení momentu hybnosti $\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ i-teho hmotného bodu

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i\right) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t},$$

lebo vektorový súčin $\boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$ dvoch súhlasne orientovaných vektorov sa rovná nule. Prvý sčítanec na pravej strane rovnice (8.18) je moment $\boldsymbol{M}_i$ vonkajšej sily $\boldsymbol{F}_i$ pôsobiacej na i-ty hmotný bod, preto rovnicu (8.18) zapíšeme v jednoduchšom tvare

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_i + \boldsymbol{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.19}$$

Krútiace momenty vnútorných síl eliminujeme sčítaním všetkých n rovníc (8.19), pričom využijeme 3. Newtonov zákon (zákon akcie a reakcie) a to, že súčet každej dvojice momentov vnútorných síl s opačným poradím indexov sa rovná nule, lebo ho možno vyjadriť vektorovým súčinom rozdielu polohových vektorov dvojice hmotných bodov a sily, ktorou prvý hmotný bod dvojice pôsobí na druhý hmotný bod dvojice. Uvedené dva vektory ležia na spoločnej vektorovej priamke, preto sa ich vektorový súčin rovná nule:

$$\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{sk} + \boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{F}_{ks} = \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{sk} - \boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{F}_{sk} = \left(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_s\right) \times \boldsymbol{F}_{sk} = \boldsymbol{0}.$$

Súčet derivácií môžeme nahradiť deriváciou súčtu momentov hybností hmotných bodov, preto po sčítaní všetkých n rovníc (8.19) dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{L}_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_i. \tag{8.20}$$

Súčet momentov hybností hmotných bodov je celkový moment hybnosti sústavy $\boldsymbol{L}$, súčet momentov vonkajších síl označíme symbolom $\boldsymbol{M}$, a preto pre sústavu hmotných bodov platí **2. veta impulzová**: *Derivácia celkového momentu hybnosti sústavy podľa času sa rovná súčtu momentov vonkajších síl pôsobiacich na jednotlivé hmotné body sústavy*:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}. \tag{8.21}$$

Izolovaná sústava hmotných bodov je sústava, na hmotné body ktorej pôsobia len vnútorné sily. Pre izolovanú sústavu sa pravé strany rovníc (8.6) a (8.21) rovnajú nule, a preto pre izolovanú sústavu vyplývajú z 1. a 2. vety impulzovej dva zákony zachovania:

Zákon zachovania hybnosti: *Celková hybnosť izolovanej sústavy je konštantná*

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{konšt}. \tag{8.22}$$

Zákon zachovania momentu hybnosti: *Celkový moment hybnosti izolovanej sústavy je konštantný*

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{L}_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{konšt}. \tag{8.23}$$

Hovoríme, že teleso je v *rovnováhe*, ak sú splnené dve podmienky:

1. Súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso sa rovná nule (silová podmienka)

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}. \tag{8.24}$$

2. Súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso vzhľadom na ľubovoľný bod sa rovná nule (momentová podmienka)

$$\sum_i \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0}. \tag{8.25}$$

Príklady

8.1 Nájdite polohu hmotného stredu sústavy štyroch hmotných bodov s hmotnosťami $m_1 = 10$ g, $m_2 = 7$ g, $m_3 = 2$ g, $m_4 = 5$ g, ktoré sa v adekvátnom poradí nachádzajú v bodoch karteziánskeho priestoru s polohovými vektormi $\boldsymbol{r}_1 = (-2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})$ cm, $\boldsymbol{r}_2 = (-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k})$ cm, $\boldsymbol{r}_3 = (\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k})$ cm, $\boldsymbol{r}_4 = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k})$ cm!

Riešenie

Zrejme karteziánske súradnice hmotných bodov sú x_1 = -2 cm, y_1 = -3 cm, z_1 = -4 cm, x_2 = -4 cm, y_2 = 2 cm, z_2 = 7 cm, x_3 =1 cm, y_3 = -4 cm, z_3 = -6 cm, x_4 = 3 cm, y_4 = 4 cm, z_4 = 5 cm. Súradnice x^*, y^*, z^* polohového vektora $\boldsymbol{r}^*$ hmotného stredu sústavy získame priamym dosadením do vzťahov (8.11,12,13)

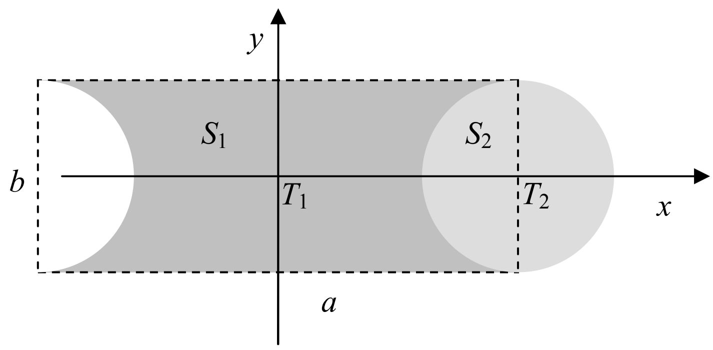
$$x^* = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{[10(-2) + 7(-4) + 2\cdot 1 + 5\cdot 3]\,\mathrm{g\cdot cm}}{[10 + 7 + 2 + 5]\,\mathrm{g}} = \frac{-31\,\mathrm{cm}}{24} = -1{,}29\,\mathrm{cm},$$

$$y^* = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{[10(-3) + 7\cdot 2 + 2(-4) + 5\cdot 4]\,\mathrm{g\cdot cm}}{[10 + 7 + 2 + 5]\,\mathrm{g}} = \frac{-4\,\mathrm{cm}}{24} = -0{,}167\,\mathrm{cm},$$

$$z^* = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + m_4z_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{[10(-4) + 7\cdot 7 + 2(-6) + 5\cdot 5]\,\mathrm{g\cdot cm}}{[10 + 7 + 2 + 5]\,\mathrm{g}} = \frac{22\,\mathrm{cm}}{24} = 0{,}917\,\mathrm{cm}.$$

Polohový vektor hmotného stredu sústavy je $\boldsymbol{r}^* = (-1{,}29\boldsymbol{i} - 0{,}167\boldsymbol{j} + 0{,}917\boldsymbol{k})$ cm.

8.2 Nájdite polohu hmotného stredu homogénneho plošného útvaru, ktorý vznikol tak, že sa z obdĺžnika so zvislou stranou b a s vodorovnou stranou a vyrezal na ľavej strane polkruh s priemerom b a priložil sa na pravú stranu obdĺžnika, pozri obr. 8.1!



Obr. 8.1 Rozloženie plošného útvaru na časti

Riešenie

Hmotnosť m homogénneho plošného útvaru s plošným obsahom S sa určuje vzťahom $m = \rho_A S$, kde plošná hustota ρ_A je v každom bode plochy útvaru rovnaká. Zrejme karteziánske súradnice hmotného stredu pôvodného obdĺžnika a tiež vzniknutého plošného útvaru závisia od voľby súradnicových osí. Ak sú osi orientované ako na obr. 8.1, potom sú obe súradnice hmotného stredu pôvodného obdĺžnika nulové. Vzniknutý útvar dokážeme rozdeliť na n = 2 časti zobrazené rôznymi odtieňmi sivej farby so známymi plošnými obsahmi S_1, S_2 a známymi polohami hmotných stredov T_1, T_2 jednotlivých častí, pričom

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{a}{2}, \quad y_1 = y_2 = 0, \quad S_1 + S_2 = ab, \quad S_2 = \frac{\pi b^2}{4}, \quad S_1 = ab - \frac{\pi b^2}{4}.$$

Súradnice x^*, y^* hmotného stredu vzniknutého plošného útvaru určíme podľa vzťahov (8.11,12):

$$x^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_A S_1 x_1 + \rho_A S_2 x_2}{\rho_A S_1 + \rho_A S_2} = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = \frac{S_2 x_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{\pi b^2}{4} \cdot \frac{a}{2}}{ab} = \frac{\pi b}{8},$$

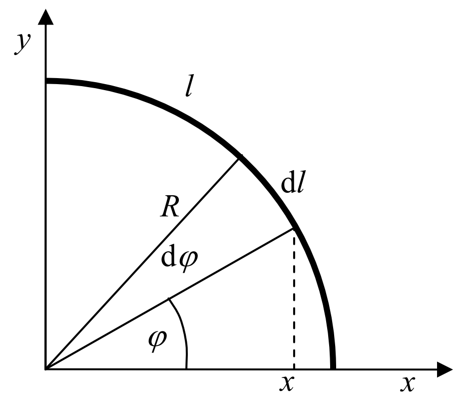
$$y^* = \frac{m_1 y_1 + y_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_A S_1 y_1 + \rho_A S_2 y_2}{\rho_A S_1 + \rho_A S_2} = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2} = 0.$$

Naznačenými úkonmi sa teda hmotný stred posunul o hodnotu $\pi b/8$ doprava.

8.3 Nájdite polohu hmotného stredu homogénneho drôtu ohnutého do tvaru štvrťkružnice polomeru R = 100 cm!

Riešenie

Nekonečne malá hmotnosť dm elementárneho lineárneho útvaru dĺžky dl sa určuje vzťahom dm = ρ_ldl, kde ρ_l je dĺžková hustota. V homogénnom drôte je ρ_l v každom bode drôtu rovnaká. Štvrťkružnica dĺžky l nech je tou časťou kružnice polomeru R so stredom v počiatku karteziánskeho súradnicového systému, ktorá leží v jeho 1. kvadrante, pozri obr. 8.2.



Obr. 8.2 Štvrťkružnica v 1. kvadrante karteziánskeho systému

Súradnice x^* a y^* hmotného stredu sú zrejme kvôli symetrii úlohy rovnaké a určíme ich podľa vzťahu (8.15) s využitím postupnej zámeny premenných pomocou polárnych súradníc R, φ

$x = R\cos\varphi$, dm = ρ_ldl, dl = Rdφ , pričom $0 \le \varphi \le \pi/2$.

$$x^* = y^* = \frac{\int\limits_m x\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int\limits_l R\cos\varphi\cdot\rho_l\mathrm{d}l}{\rho_l l} = \frac{\rho_l\int\limits_0^{\pi/2} R\cos\varphi\cdot R\mathrm{d}\varphi}{\rho_l l} = \frac{R^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot\mathrm{d}\varphi}{\frac{2\pi R}{4}} = \frac{2R}{\pi}\left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{2R}{\pi}.$$

Dosadením zadanej hodnoty vypočítame

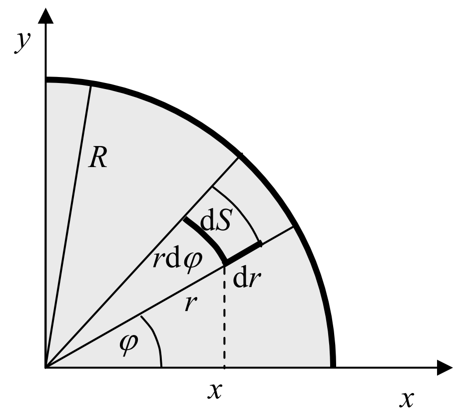
$$x^* = y^* = \frac{2R}{\pi} = \frac{2\cdot 100\,\mathrm{cm}}{\pi} = 63{,}7\,\mathrm{cm}.$$

Hmotný stred štvrťkružnice leží zrejme mimo nej.

8.4 Nájdite polohu hmotného stredu homogénneho plechu v tvare štvrťkruhu s polomerom R= 100 cm!

Riešenie

Nekonečne malá hmotnosť dm elementárneho plošného útvaru s plošným obsahom dS sa určuje vzťahom dm = ρ_AdS, kde ρ_A je plošná hustota. V homogénnom plechu je ρ_A v každom bode plechu rovnaká. Štvrťkruh s plošným obsahom S nech je tou časťou kruhu polomeru R so stredom v počiatku karteziánskeho súradnicového systému, ktorá leží v 1. kvadrante tohoto systému, pozri obr. 8.3.



Obr. 8.3 Štvrťkruh v 1. kvadrante karteziánskeho systému

Súradnice x^* a y^* hmotného stredu sú zrejme kvôli symetrii úlohy rovnaké a určíme ich podľa vzťahu (8.15) s využitím postupnej zámeny premenných pomocou polárnych súradníc r, φ

$x = r\cos\varphi$, dm = ρ_AdS, dS = rdφ dr , pričom $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le r \le R$.

$$x^* = y^* = \frac{\int\limits_m x\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int\limits_S r\cos\varphi \cdot \rho_A \mathrm{d}S}{\rho_A S} = \frac{\rho_A \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{\pi/2} r\cos\varphi \cdot r\mathrm{d}\varphi \right)\mathrm{d}r}{\rho_A S} = \frac{\int\limits_0^R r^2 \mathrm{d}r \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi}{\frac{\pi R^2}{4}} =$$

$$= \frac{4}{\pi R^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [\sin\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi R^2}\frac{R^3}{3}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Dosadením zadanej hodnoty vypočítame

$$x^* = y^* = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 100\,\mathrm{cm}}{3\pi} = 42{,}44\,\mathrm{cm}.$$

Hmotný stred štvrťkruhu leží vnútri štvrťkruhu.

8.5 Nájdite rovnicu trajektórie a časovú závislosť veľkosti rýchlosti hmotného stredu sústavy dvoch hmotných bodov, pričom prvý má hmotnosť m_1 = 2 kg a pohybuje sa v kladnom smere po osi x rýchlosťou v_1 = 10 m/s, druhý má hmotnosť m_2 = 8 kg a pohybuje sa v kladnom smere po osi y so zrýchlením a_2 = 1 m/s^2. V okamihu t = 0 s boli oba hmotné body v počiatku karteziánskeho súradnicového systému a druhý bod sa nepohyboval.

Riešenie

Zrejme časové závislosti karteziánskych súradníc polohy hmotných bodov sú

$$x_1 = v_1 t, \qquad y_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad y_2 = \frac{a_2 t^2}{2}.$$

Časovú závislosť súradníc x^*, y^* hmotného stredu určíme podľa vzťahov (8.11,12):

$$x^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 t}{m_1 + m_2}, \qquad y^* = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 a_2 t^2}{2(m_1 + m_2)}, \tag{a, b}$$

a to sú parametrické rovnice trajektórie hmotného stredu s parametrom t (čas). Rovnicu trajektórie hmotného stredu dostaneme elimináciou parametra t. Stačí vyjadriť parameter t z rovnice (a) a dosadiť získaný výraz do rovnice (b):

$$t = \frac{(m_1 + m_2)x^*}{m_1 v_1},$$

$$y^* = \frac{m_2 a_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot \frac{(m_1 + m_2)^2 x^{*2}}{m_1^2 v_1^2} = \frac{m_2 a_2 (m_1 + m_2)}{2 m_1^2 v_1^2} x^{*2}. \tag{c}$$

To je rovnica paraboly, preto má trajektória hmotného stredu tvar paraboly. Karteziánske súradnice rýchlosti hmotného stredu získame deriváciou rovníc (a) a (b) podľa času

$$v_x^* = \frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \qquad v_y^* = \frac{m_2 a_2 t}{m_1 + m_2}.$$

Veľkosť rýchlosti v^* hmotného stredu dostaneme dosadením súradníc rýchlosti do vzťahu

$$v^* = \sqrt{v_x^{*2} + v_y^{*2}} = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 a_2^2 t^2}}{m_1 + m_2}. \qquad \text{(d)}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahov (c) a (d)získame

$$y^* = \frac{m_2 a_2 (m_1 + m_2)}{2 m_1^2 v_1^2} x^{*2} = \frac{8\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot (2+8)\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 2^2\,\mathrm{kg}^2 \cdot 10^2\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}} x^{*2} = \frac{80}{800\,\mathrm{m}} x^{*2} = \frac{1}{10\,\mathrm{m}} x^{*2},$$

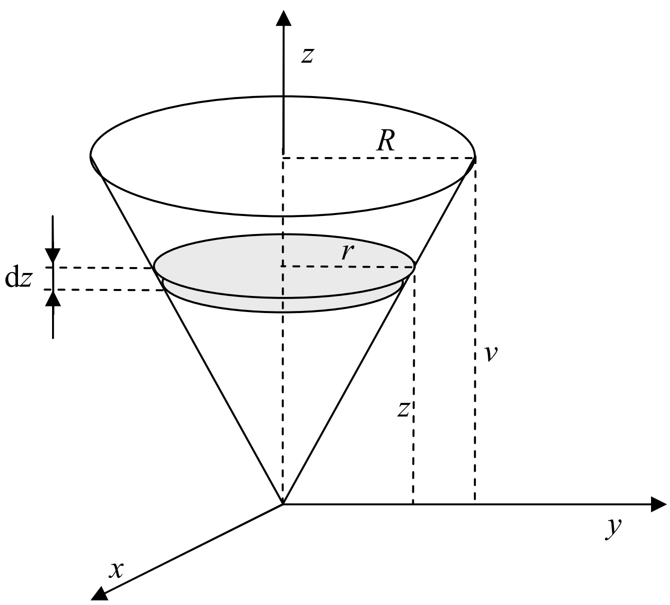
$$v^* = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 a_2^2 t^2}}{m_1 + m_2} = \frac{\sqrt{2^2\,\mathrm{kg}^2 \cdot 10^2\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} + 8^2\,\mathrm{kg}^2 \cdot 1^2\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-4} t^2}}{(2+8)\,\mathrm{kg}} = \sqrt{4 + 0{,}64\,\mathrm{s}^{-2} t^2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Rovnica trajektórie hmotného stredu je $y^* = (0{,}1\ \mathrm{m}^{-1})x^{*2}$, časová závislosť veľkosti rýchlosti hmotného stredu je $v^* = (4 + 0{,}64\ \mathrm{s}^{-2}\ t^2)^{1/2}$ m/s.

8.6 Nájdite polohu hmotného stredu homogénneho kužeľa výšky $v = 100$ cm!

Riešenie

Nekonečne malá hmotnosť dm elementárneho objemového útvaru s objemom dV sa určuje vzťahom d$m = \rho$dV, kde ρ je hustota. V homogénnom kuželi je ρ v každom bode kužeľa rovnaká. Uložme kužeľ do karteziánskeho systému súradníc tak, aby vrchol kužeľa ležal v počiatku systému a telesová os kužeľa ležala na osi z systému, pozri obr. 8.4.



Obr. 8.4 Rozloženie kužeľa na elementárne valce

Kužeľ môžeme vodorovnými rezmi rozložiť na nekonečne veľa elementárnych valcov výšky dz s postupne rastúcim polomerom r, pričom z podobnosti pravouhlých trojuholníkov so zvislými odvesnami z a v a zo vzťahu pre objem dV elementárneho valca vyplýva

$$\frac{r}{z}=\frac{R}{v}, \qquad r=\frac{Rz}{v}, \qquad \mathrm{d}V=\pi r^2\mathrm{d}z=\frac{\pi R^2 z^2\mathrm{d}z}{v^2}. \qquad \text{(a, b, c)}$$

Objem kužeľa určíme integráciou vzťahu (c)

$$V=\int_V \mathrm{d}V=\int_0^v \frac{\pi R^2 z^2\mathrm{d}z}{v^2}=\frac{\pi R^2}{v^2}\int_0^v z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi R^2}{v^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^v=\frac{\pi R^2}{v^2}\cdot\frac{v^3}{3}=\frac{\pi R^2 v}{3}. \qquad \text{(d)}$$

Súradnice x^* a y^* hmotného stredu kužeľa sú zrejme kvôli symetrii úlohy nulové. Súradnicu z^* určíme podľa vzťahu (8.17) s využitím postupnej zámeny premenných pomocou vzťahov d$m = \rho$dV, (c) a (d), pričom $0 \le z \le v$.

$$z^*=\frac{\int_m z\mathrm{d}m}{m}=\frac{\int_V z\rho\mathrm{d}V}{\rho V}=\frac{\rho\int_0^v z\frac{\pi R^2 z^2\mathrm{d}z}{v^2}}{\rho\frac{\pi R^2 v}{3}}=\frac{3}{v^3}\int_0^v z^3\mathrm{d}z=\frac{3}{v^3}\cdot\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^v=\frac{3}{v^3}\cdot\frac{v^4}{4}=\frac{3v}{4}.$$

Hmotný stred sa nachádza v troch štvrtinách výšky od vrcholu kužeľa. Dosadením zadanej hodnoty vypočítame

$$z^*=\frac{3v}{4}=\frac{3\cdot 100\,\mathrm{cm}}{4}=75\,\mathrm{cm}.$$

Hmotný stred sa nachádza na telesovej osi kužeľa vo vzdialenosti 75 cm od vrcholu kužeľa.

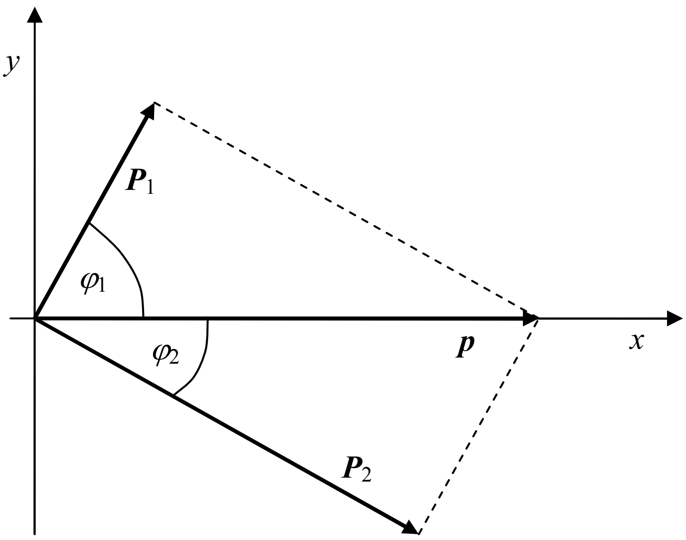
8.7 Meteor hmotnosti m = 100 ton sa pohyboval rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v = 10 km/s. Hybnosť $\boldsymbol{p}$ meteoru smerovala k Zemi, preto bol meteor odpálením nálože roztrhnutý na dve časti, ktoré sa po výbuchu pohybujú rovnomerne priamočiaro v iných smeroch. Rýchlosť $\boldsymbol{v}_1$ prvej časti zviera uhol φ_1 = 60° s pôvodnou hybnosťou $\boldsymbol{p}$ a má veľkosť v_1 = 8 km/s. Rýchlosť $\boldsymbol{v}_2$ druhej časti zviera uhol φ_2 = 30° s pôvodnou hybnosťou $\boldsymbol{p}$. Nájdite hmotnosti m_1, m_2 oboch častí a nájdite veľkosť rýchlosti v_2 druhej časti! Hmotnosť nálože, resp. hmotnosť spalín po jej odpálení je zanedbateľná v porovnaní s hmotnosťou meteoru.

Riešenie

Ak sa meteor pred výbuchom nálože pohyboval rovnomerne priamočiaro, potom podľa 1. Newtonovho zákona (zákona zotrvačnosti) na meteor nepôsobila žiadna vonkajšia sila a je zrejmé, že žiadna vonkajšia sila nepôsobí na časti meteoru ani počas výbuchu, ani po výbuchu nálože. Ide teda o proces v izolovanej sústave a pre ňu platí *zákon zachovania* *hybnosti*: celková hybnosť izolovanej sústavy po výbuchu ($\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$) sa rovná celkovej hybnosti izolovanej sústavy pred výbuchom ($\boldsymbol{p}$)

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}. \tag{a}$$

Nech os x karteziánskeho systému je súhlasne orientovanou vektorovou priamkou vektora $\boldsymbol{p}$. Os y nech je kolmá k osi x a nech je komplanárna s vektormi $\boldsymbol{p}_1$ a $\boldsymbol{p}_2$, pozri obr. 8.5.



Obr. 8.5 Zákon zachovania hybnosti v izolovanej sústave

Vektorovú rovnicu (a) môžeme zapísať ako dve skalárne rovnice vzhľadom na x-ové a na y-ové súradnice vektorov

$$p_{1x} + p_{2x} = p_x, \qquad p_{1y} + p_{2y} = p_y,$$

pričom $p_{1x} = m_1 v_1 \cos\varphi_1$, $p_{2x} = m_2 v_2 \cos\varphi_2$, $p_x = mv$, $p_{1y} = m_1 v_1 \sin\varphi_1$, $p_{2y} = - m_2 v_2 \sin\varphi_2$, $p_y = 0$, preto

$$m_1 v_1 \cos\varphi_1 + m_2 v_2 \cos\varphi_2 = mv, \tag{b}$$

$$m_1 v_1 \sin\varphi_1 - m_2 v_2 \sin\varphi_2 = 0. \tag{c}$$

Rovnice (b, c) spolu s rovnicou

$$m_1 + m_2 = m \tag{d}$$

tvoria algebraický systém troch rovníc s tromi neznámymi m_1, m_2, v_2 a ten je zrejme riešiteľný bežnými algebraickými metódami. Efektívny spôsob bez matematických komplikácií spočíva v použití Cramerovej metódy k systému dvoch rovníc (b, c) na vyjadrenie neznámych m_1, v_2 pomocou neznámej veličiny m_2 a známych veličín s následným využitím rovnice (d):

$$D = \begin{vmatrix} v_1 \cos\varphi_1 & m_2 \cos\varphi_2 \\ v_1 \sin\varphi_1 & -m_2 \sin\varphi_2 \end{vmatrix} = -v_1 m_2 \left(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1\right) = -v_1 m_2 \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right),$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} mv & m_2 \cos\varphi_2 \\ 0 & -m_2 \sin\varphi_2 \end{vmatrix} = -mvm_2 \sin\varphi_2, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} v_1 \cos\varphi_1 & mv \\ v_1 \sin\varphi_1 & 0 \end{vmatrix} = -mvv_1 \sin\varphi_1.$$

Podľa Cramerovho pravidla

$$m_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-mvm_2 \sin\varphi_2}{-v_1 m_2 \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)} = \frac{mv \sin\varphi_2}{v_1 \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}, \tag{e}$$

$$v_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-mvv_1 \sin\varphi_1}{-v_1 m_2 \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)} = \frac{mv \sin\varphi_1}{m_2 \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}, \tag{f}$$

pričom

$$m_2 = m - m_1. \tag{g}$$

Efektivita riešenia spočíva v tom, že sme lineárnu závislosť determinantov D a D_1 od neznámej veličiny m_2 úmyselne využili na elimináciu neznámej veličiny m_2 jej vykrátením vo vzťahu (e). To, že neznáma veličina m_2 figuruje vo vzťahu (f) nám už neprekáža, pretože si jej hodnotu môžeme vopred určiť zo vzťahu (g). Postupným dosadzovaním zadaných hodnôt do rovníc v poradí (e, g, f) dostaneme

$$m_1 = \frac{mv \sin\varphi_2}{v_1 \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)} = \frac{100\,\mathrm{t} \cdot 10\,\mathrm{km/s} \cdot \sin 30°}{8\,\mathrm{km/s} \cdot \sin\left(60° + 30°\right)} = \frac{100\,\mathrm{t} \cdot 10 \cdot 0{,}5}{8 \cdot 1} = 62{,}5\,\mathrm{t},$$

$$m_2 = m - m_1 = 100\,\mathrm{t} - 62{,}5\,\mathrm{t} = 37{,}5\,\mathrm{t},$$

$$v_2 = \frac{mv \sin\varphi_1}{m_2 \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)} = \frac{100\,\mathrm{t} \cdot 10\,\mathrm{km/s} \cdot \sin 60°}{37{,}5\,\mathrm{t} \cdot \sin\left(60° + 30°\right)} = \frac{1000 \cdot \sqrt{3}\,\mathrm{km/s}}{2 \cdot 37{,}5 \cdot 1} = 23{,}09\,\mathrm{km/s}.$$

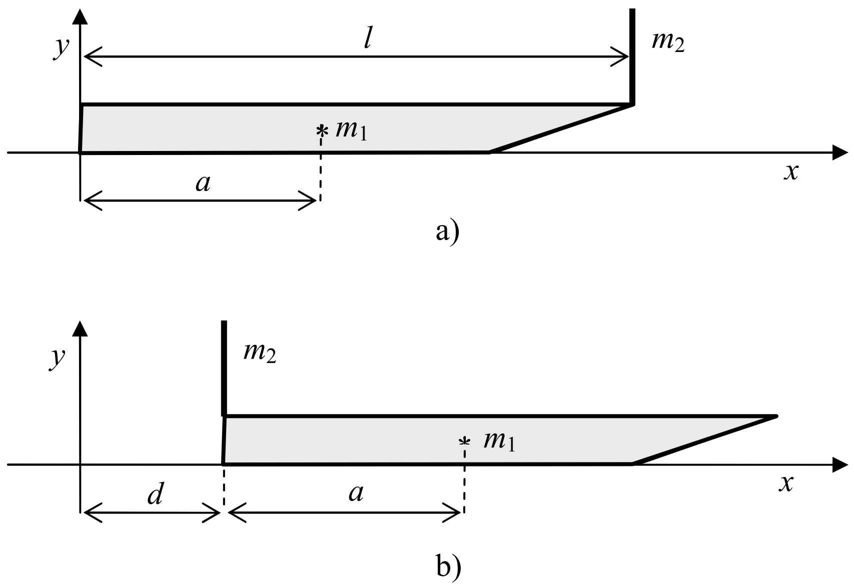
Hmotnosť prvej časti je 62,5 tony, hmotnosť druhej časti je 37,5 tony, veľkosť rýchlosti druhej časti je 23,09 km/s.

Poznámka: Z rovnice (c) môžeme odvodiť vzťah pre výpočet veľkosti rýchlosti v_2, ktorý je ekvivalentný so vzťahom (f). Študent sa o tom môže presvedčiť dosadením hodnôt.

8.8 Na pokojnej hladine jazera je nehybná loďka dĺžky l = 5 m, hmotnosti m_1 = 100 kg. Na prove loďky sedí chlapec hmotnosti m_2 = 40 kg. Chlapec prešiel po loďke z provy na kormu. O akú vzdialenosť d sa loďka pritom posunula? Odporové sily zanedbajte.

Riešenie

Keďže ani vzduch ani voda pri premiestňovaní chlapca nepôsobili ani na chlapca ani na loďku žiadnou vonkajšou odporovou silou, môžeme sústavu „loďka – chlapec“ považovať za izolovanú, pre ktorú platí zákon zachovania hybnosti. Celková hybnosť sústavy bola na začiatku procesu nulová, nulovou ostáva aj počas pohybu chlapca vzhľadom na loďku a nulovou ostane aj po prechode chlapca z provy na kormu loďky. Vtedy zo vzťahu (8.9) vyplýva $\boldsymbol{v^*} = \boldsymbol{0}$, to ale znamená, že sa hmotný stred sústavy „loďka – chlapec“ nepohybuje. Nech vodorovná os x karteziánskeho systému je orientovaná od kormy k prove s počiatkom v polohe kormy pred presunom chlapca, pozri obr. 8.6a). Nech a je vzdialenosť hmotného stredu loďky od kormy. Po prechode chlapca z provy na kormu sa loďka posunie o hodnotu d v smere osi x , pozri obr. 8.6b).



Obr. 8.6 Poloha loďky a) pred prechodom b) po prechode chlapca z provy na kormu

Hmotný stred sústavy sa pritom neposunul, preto podľa vzťahu (8.11) dostaneme pre obe polohy loďky

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 a + m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(d+a) + m_2 d}{m_1 + m_2} . \tag{a}$$

Postupnými úpravami rovnice (a) získame

$m_1 a + m_2 l = m_1(d+a) + m_2 d$,

$m_1 a + m_2 l = m_1 d + m_1 a + m_2 d$,

$m_2 l = d(m_1 + m_2)$,

$$d = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Dosadením zadaných hodnôt dostaneme

$$d = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{40\,\mathrm{kg} \cdot 5\,\mathrm{m}}{(100 + 40)\,\mathrm{kg}} = \frac{200\,\mathrm{m}}{140} = 1{,}43\,\mathrm{m}.$$

Prechodom chlapca z provy na kormu sa loďka posunula o 1,43 m.

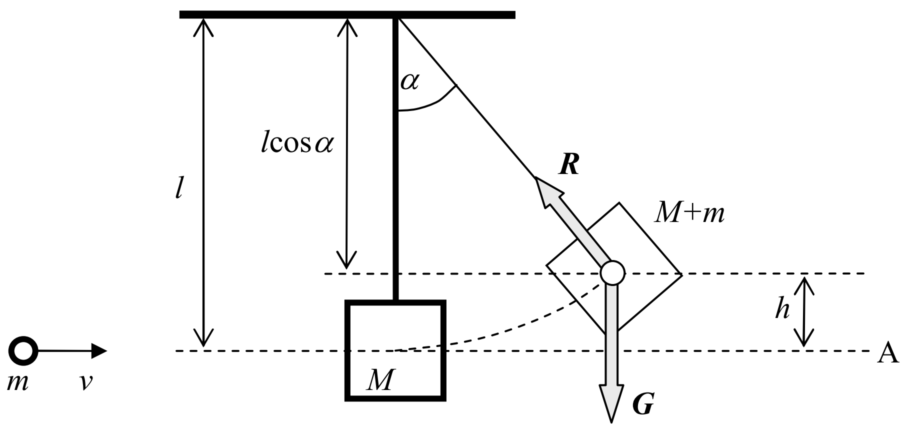
8.9 Aká je úsťová rýchlosť *v* strely hmotnosti *m* = 12 g pri výstrele zo samopalu Sa vzor 58, ak sa po jej vodorovnom uviaznutí v hmotnom strede balistického kyvadla hmotnosti *M* = 5kg záves kyvadla odklonil o uhol α = 31° od zvislého smeru? Vzdialenosť hmotného stredu kyvadla od čapu závesu je *l* = 1 m Odpor vzduchu a trenie v čape závesu zanedbajte.

Riešenie

Celý dej pozostáva z postupnosti dvoch procesov - procesu viaznutia strely v kyvadle a procesu odkláňania závesu od zvislého smeru do úvrate, pozri obr. 8.7.

Proces viaznutia strely v kyvadle sprevádzaný trením (zákon zachovania mechanickej energie neplatí) považujme za proces v izolovanej sústave strela – kyvadlo. Na začiatku tohto procesu mala strela rýchlosť *v* a kyvadlo bolo v pokoji. Rýchlosť *v*′ sústavy strela – kyvadlo po uviaznutí strely v kyvadle v spodnej polohe vyjadríme zo zákona zachovania hybnosti izolovanej sústavy

$$(M + m)v' = mv, \qquad v' = \frac{mv}{M + m}. \qquad \text{(a, b)}$$



Obr. 8.7 Princíp merania rýchlosti strely balistickým kyvadlom

V procese odkláňania závesu balistického kyvadla s uviaznutou strelou od zvislého smeru pôsobia na sústavu strela – kyvadlo len dve konzervatívne sily – tiažová sila $\boldsymbol{G}$ a reakcia $\boldsymbol{R}$ závesu, pozri obr. 8.7. Konzervatívne sily nedokážu zmeniť mechanickú energiu sústavy, preto pre tento proces platí zákon zachovania mechanickej energie. V spodnej polohe sa hmotný stred sústavy nachádza na hladine A nulovej potenciálnej energie, avšak sústava má kinetickú energiu. V úvrati je okamžitá rýchlosť sústavy nulová, avšak hmotný stred sústavy je vo výške h nad hladinou A nulovej potenciálnej energie. Mechanická energia sústavy v spodnej polohe sa rovná mechanickej energii sústavy v úvrati, preto úpravou získame

$$\frac{(M+m)v'^2}{2} = (M+m)gh\,, \qquad v'^2 = 2g(l - l\cos\alpha)\,. \tag{c, d}$$

Po dosadení výrazu na pravej strane rovnice (b) do ľavej strany rovnice (d) a úpravami dostaneme

$$\frac{m^2v^2}{(M+m)^2} = 2g(l - l\cos\alpha)\,,$$

$$v = \frac{(M+m)\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}}{m}\,. \tag{e}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (e) dostaneme

$$v = \frac{(M+m)\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}}{m} = \frac{(5+0{,}012)\,\mathrm{kg}\sqrt{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot(1-\cos 31°)}}{0{,}012\,\mathrm{kg}} = 699\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Úsťová rýchlosť strely zo samopalu Sa vzor 58 je 699 m/s.

8.10 Štartovacia hmotnosť dvojstupňovej rakety je m_0 = 160 ton, relatívna výtoková rýchlosť spalných plynov vzhľadom na raketu je v_r = 4 km/s. Po spálení m_1 = 90 ton paliva raketa uvoľní prvý stupeň hmotnosti m_2 = 30 ton. Potom sa spáli ešte m_3 = 28 ton paliva, ktoré bolo uložené v druhom stupni. Aká je konečná rýchlosť v_{k2} druhého stupňa? Aká by bola konečná rýchlosť v_k jednostupňovej rakety s takou istou štartovacou hmotnosťou a s takou istou hmotnosťou paliva? Gravitačné polia vesmírnych telies zanedbajte.

Riešenie

Vonkajšie sily zanedbávame, preto považujeme sústavu „raketa – spalné plyny“ za izolovanú, pre ktorú platí zákon zachovania hybnosti: hybnosť rakety s okamžitou hmotnosťou m a okamžitou rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ v okamihu t sa rovná hybnosti sústavy „raketa – spalné plyny vytečené za dobu dt“ v okamihu t + dt, v ktorom má raketa okamžitú hmotnosť

m+dm (dm < 0), okamžitú rýchlosť $\boldsymbol{v}$ + d$\boldsymbol{v}$ a spalné plyny vytečené za dobu dt majú hmotnosť –dm (-dm > 0) a okamžitú rýchlosť $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(t + \mathrm{d}t), \qquad m\boldsymbol{v} = (m + \mathrm{d}m)(\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}) + (-\,\mathrm{d}m)\boldsymbol{u}. \tag{a, b}$$

Po úprave rovnice (b) dostaneme

$$\boldsymbol{0} = m\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\mathrm{d}m + \mathrm{d}m\mathrm{d}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\mathrm{d}m. \tag{c}$$

Zrejme rýchlosť $\boldsymbol{u}$ spalných plynov v danom vzťažnom systéme v okamihu t + dt bude

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_\mathrm{r}, \tag{d}$$

kde $\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$ je relatívna výtoková rýchlosť spalných plynov vzhľadom na raketu. Ak výraz na pravej strane rovnice (d) dosadíme do rovnice (c) a zároveň zanedbáme „príliš malý“ súčin diferenciálov dmd$\boldsymbol{v}$, úpravami dostaneme

$$\boldsymbol{0} = m\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\mathrm{d}m - (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_\mathrm{r})\mathrm{d}m,$$

$$\boldsymbol{0} = m\mathrm{d}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\mathrm{r}\mathrm{d}m. \tag{e}$$

Vektorovú rovnicu (e) zapíšme v skalárnom tvare vzhľadom na os orientovanú v smere pohybu rakety

$$0 = m\mathrm{d}v + v_\mathrm{r}\mathrm{d}m.$$

Po separácii premenných v, m dostaneme

$$\mathrm{d}v = -v_\mathrm{r}\frac{\mathrm{d}m}{m}. \tag{f}$$

Integráciou rovnice (f) v uvedených hraniciach určíme najprv konečnú rýchlosť v_{k1} rakety po spálení paliva hmotnosti m_1 v prvom stupni

$$\int_0^{v_{k1}} \mathrm{d}v = -v_\mathrm{r}\int_{m_0}^{m_0-m_1} \frac{\mathrm{d}m}{m}, \qquad v_{k1} = v_\mathrm{r}\ln\frac{m_0}{m_0 - m_1}. \tag{g, h}$$

Rýchlosť v_{k1} je počiatočná rýchlosť rakety v okamihu uvoľnenia vyprázdneného prvého stupňa hmotnosti m_2, preto integráciou rovnice (f) v uvedených hraniciach dostaneme pre konečnú rýchlosť v_{k2} rakety po spálení paliva hmotnosti m_3 v druhom stupni vzťah

$$\int_{v_{k1}}^{v_{k2}} \mathrm{d}v = -v_\mathrm{r}\int_{m_0-m_1-m_2}^{m_0-m_1-m_2-m_3} \frac{\mathrm{d}m}{m}, \qquad v_{k2} - v_{k1} = v_\mathrm{r}\ln\frac{m_0 - m_1 - m_2}{m_0 - m_1 - m_2 - m_3}. \tag{i, j}$$

Po úprave rovnice (j) s využitím rovnice (h) dostaneme

$$v_{k2} = v_{k1} + v_\mathrm{r}\ln\frac{m_0 - m_1 - m_2}{m_0 - m_1 - m_2 - m_3} = v_\mathrm{r}\ln\frac{m_0}{m_0 - m_1} + v_\mathrm{r}\ln\frac{m_0 - m_1 - m_2}{m_0 - m_1 - m_2 - m_3},$$

$$v_{k2} = v_\mathrm{r}\left(\ln\frac{m_0}{m_0 - m_1} + \ln\frac{m_0 - m_1 - m_2}{m_0 - m_1 - m_2 - m_3}\right) = v_\mathrm{r}\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_1}\cdot\frac{m_0 - m_1 - m_2}{m_0 - m_1 - m_2 - m_3}\right). \tag{k}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (k) dostaneme

$$v_{k2} = 4\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\ln\left(\frac{160\,\mathrm{t}}{(160-90)\mathrm{t}}\cdot\frac{(160-90-30)\mathrm{t}}{(160-90-30-28)\mathrm{t}}\right) = 4\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\ln\left(\frac{160}{70}\cdot\frac{40}{12}\right) = 8{,}12\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

V prípade jednostupňovej rakety by sme integráciou rovnice (f) v uvedených hraniciach spálením paliva hmotnosti $m_1 + m_3$ dostali

$$\int_0^{v_k} \mathrm{d}v = -v_\mathrm{r} \int_{m_0}^{m_0-m_1-m_3} \frac{\mathrm{d}m}{m}, \qquad v_k = v_\mathrm{r} \ln\frac{m_0}{m_0 - m_1 - m_3}. \tag{l, m}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (m) dostaneme

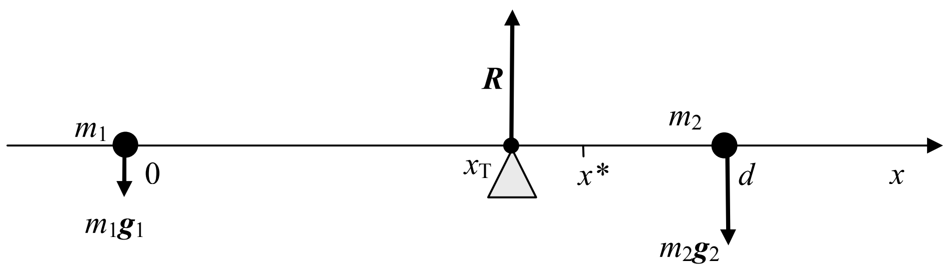
$$v_k = 4\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\ln\frac{160\,\mathrm{t}}{(160-90-28)\mathrm{t}} = 4\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\ln\frac{160}{42} = 5{,}35\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

Dvojstupňová raketa je teda efektívnejšia – pri tej istej hmotnosti paliva umožňuje udeliť kozmickej lodi omnoho väčšiu rýchlosť (8,12 km/s miesto 5,35 km/s).

8.11 Nájdite polohu hmotného stredu a polohu ťažiska sústavy dvoch hmotných bodov s hmotnosťami m_1 = 100 kg, m_2 = 400 kg, vo vzdialenosti d = 10 km od seba. Sústava sa nachádza v nehomogénnom tiažovom poli. Prvý hmotný bod je v mieste s tiažovým zrýchlením g_1 = 12 m/s^2, druhý hmotný bod je v mieste s tiažovým zrýchlením g_2 = 8 m/s^2. Obe zrýchlenia sú súhlasne orientované.

Riešenie

Nech os x je orientovaná priamka prechádzajúca cez oba hmotné body, pričom súradnice hmotných bodov sú $x_1 = 0$, $x_2 = d$ = 10 km, pozri obr. 8.8.



Obr. 8.8 Poloha hmotného stredu a poloha ťažiska sústavy dvoch hmotných bodov

Súradnicu x^* hmotného stredu určíme podľa vzťahu (8.11)

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot d}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2} = \frac{400\,\text{kg} \cdot 10\,\text{km}}{(100 + 400)\text{kg}} = 8\,\text{km}.$$

Ťažisko (pôsobisko výslednice tiažových síl) budeme hľadať na nehmotnej priamke x, na ktorej predpokladáme oba hmotné body upevnené. Polohu ťažiska nájdeme z podmienky, aby sústava ostala v rovnováhe, ak by sme v polohe ťažiska vytvorili oporu, pozri obr. 8.8. Podľa silovej podmienky rovnováhy (8.24) bude reakcia $\boldsymbol{R}$ opory eliminovať výslednicu tiažových síl

$$m_1 \boldsymbol{g}_1 + m_2 \boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$$

a podľa momentovej podmienky rovnováhy (8.25) bude súčet momentov všetkých síl vzhľadom na ľubovoľný bod nulový

$$\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}. \tag{a}$$

Ak za tento ľubovoľný bod zvolíme ťažisko, potom $\boldsymbol{M_R} = \boldsymbol{0}$ (polohový vektor pôsobiska reakcie $\boldsymbol{R}$ vzhľadom na ťažisko je nulový) a rovnica (a) nadobudne tvar

$$\boldsymbol{M}_1 = -\boldsymbol{M}_2,$$

to znamená, že momenty tiažových síl vzhľadom na ťažisko sú rovnako veľké a nesúhlasne orientované. Súradnicu x_T polohy ťažiska hravo nájdeme z rovnice rovnosti veľkostí momentov tiažových síl

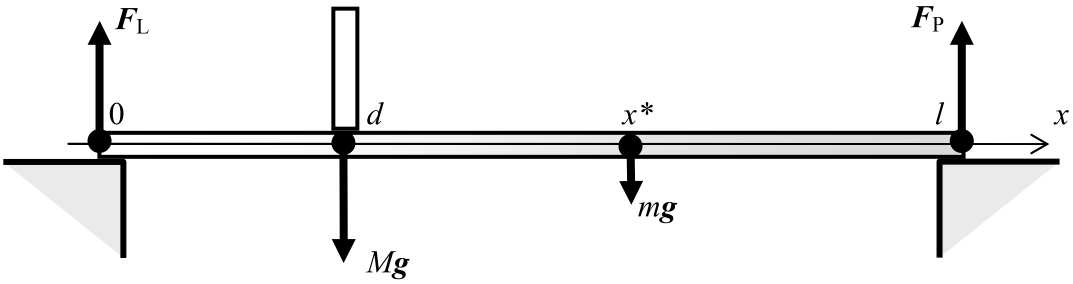
$$M_1 = M_2, \qquad m_1 g_1 x_\text{T} = m_2 g_2 (d - x_\text{T}), \qquad m_1 g_1 x_\text{T} + m_2 g_2 x_\text{T} = m_2 g_2 d,$$

$$x_\text{T}(m_1 g_1 + m_2 g_2) = m_2 g_2 d,$$

$$x_\text{T} = \frac{m_2 g_2 d}{m_1 g_1 + m_2 g_2} = \frac{400\,\text{kg} \cdot 8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 10\,\text{km}}{100\,\text{kg} \cdot 12\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2} + 400\,\text{kg} \cdot 8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{80\,\text{km}}{11} = 7{,}273\,\text{km}.$$

Hmotný stred sústavy je od prvého hmotného bodu vo vzdialenosti 8 km. Ťažisko je od prvého hmotného bodu vo vzdialenosti 7,273 km. Ťažisko je posunuté o 727 m doľava vzhľadom na hmotný stred sústavy.

8.12 Doska tvaru kvádra dĺžky l = 6 m hmotnosti m = 40 kg je na koncoch opretá o protiľahlé brehy potoka. Hustota dosky lineárne rastie od hodnoty ρ_L= 200 kg/m^3 na ľavom konci až po hodnotu ρ_P = 400 kg/m^3 na pravom konci, pozri obr. 8.9. Akými silami pôsobia brehy na konce dosky, ak vo vzdialenosti d = 2 m od ľavého konca stojí človek hmotnosti M = 80 kg?



Obr.8.9 Vonkajšie sily pôsobiace na dosku

Riešenie

Orientujme os x v smere od ľavého konca k pravému koncu dosky, s počiatkom na ľavom konci dosky. Lineárnu závislosť hustoty ρ od vzdialenosti x od ľavého konca vyjadríme rovnicou priamky

$$\rho = kx + q\,, \tag{a}$$

pričom smerový koeficient k a voľný člen q nájdeme z okrajových podmienok

$$x = 0: \quad \rho_L = k \cdot 0 + q \quad \Rightarrow \quad q = \rho_L\,, \tag{b}$$

$$x = l: \quad \rho_P = kl + \rho_L \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\rho_P - \rho_L}{l}\,. \tag{c}$$

Dosadením (b, c) do rovnice (a) dostaneme

$$\rho = \frac{\rho_P - \rho_L}{l} x + \rho_L\,. \tag{d}$$

Tiažové pole je homogénne, preto je poloha ťažiska dosky zhodná s polohou hmotného stredu dosky. Súradnicu x^* polohy hmotného stredu dosky nájdeme podľa vzťahu (8.15)

$$x^* = \frac{\int\limits_m x\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int\limits_V x\rho\mathrm{d}V}{m} = \frac{\int\limits_0^l x\left(\frac{\rho_P - \rho_L}{l} x + \rho_L\right) S\mathrm{d}x}{m} = \frac{(\rho_P - \rho_L)S}{lm}\int\limits_0^l x^2\mathrm{d}x + \frac{\rho_L S}{m}\int\limits_0^l x\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{(\rho_P - \rho_L)S}{lm}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l + \frac{\rho_L S}{m}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{(\rho_P - \rho_L)Sl^2}{3m} + \frac{\rho_L Sl^2}{2m} = \frac{(2\rho_P + \rho_L)Sl^2}{6m}\,, \tag{e}$$

pričom S je plošný obsah priečneho prierezu dosky. Ten zadaný nie je, ale môžeme ho určiť z integrálnej definície hmotnosti dosky

$$m = \int\limits_V \rho\mathrm{d}V = \int\limits_0^l \left(\frac{\rho_P - \rho_L}{l} x + \rho_L\right) S\mathrm{d}x = \frac{(\rho_P - \rho_L)S}{l}\int\limits_0^l x\mathrm{d}x + \rho_L S\int\limits_0^l \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{(\rho_P - \rho_L)S}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l + \rho_L S[x]_0^l = \frac{(\rho_P - \rho_L)Sl}{2} + \rho_L Sl = \frac{(\rho_P + \rho_L)Sl}{2}\,. \tag{f}$$

Z rovnice (f) úpravou získame pre plošný obsah S priečneho prierezu dosky

$$S = \frac{2m}{(\rho_P + \rho_L)l} . \tag{g}$$

Dosadením výrazu na pravej strane rovnice (g) do rovnice (e) dostaneme

$$x^* = \frac{(2\rho_P + \rho_L)Sl^2}{6m} = \frac{(2\rho_P + \rho_L)l^2}{6m} \cdot \frac{2m}{(\rho_P + \rho_L)l} = \frac{(2\rho_P + \rho_L)l}{3(\rho_P + \rho_L)} . \tag{h}$$

Dosadením zadaných hodnôt do rovnice (h) vypočítame

$$x^* = \frac{(2\rho_P + \rho_L)l}{3(\rho_P + \rho_L)} = \frac{(2 \cdot 400 + 200)\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \cdot 6\,\mathrm{m}}{3 \cdot (400 + 200)\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}} = \frac{3000\,\mathrm{m}}{600} = 5\,\mathrm{m} .$$

Pôsobiská a smery všetkých vonkajších síl pôsobiacich na dosku sú na obr. 8.9. Sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{L}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{P}$ pôsobiace na konce dosky sú reakcie vzhľadom k silám, ktorými konce dosky pôsobia na brehy potoka. Doska je v statickej rovnováhe (nekoná ani posuvný ani rotačný pohyb), preto musí platiť silová podmienka (8.24) a momentová podmienka (8.25) rovnováhy dosky

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{L} + M\boldsymbol{g} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_\mathrm{P} = \boldsymbol{0} , \qquad \boldsymbol{M}_\mathrm{L} + \boldsymbol{M}_M + \boldsymbol{M}_m + \boldsymbol{M}_\mathrm{P} = \boldsymbol{0} . \tag{i, j}$$

Momentová podmienka (j) platí vzhľadom na ľubovoľný bod. Ak týmto bodom bude napríklad ľavý koniec dosky, potom moment $\boldsymbol{M}_\mathrm{L} = \boldsymbol{0}$ a rovnice (i, j) môžeme zapísať v skalárnom tvare pomocou veľkostí síl a veľkostí momentov

$$F_\mathrm{L} - Mg - mg + F_\mathrm{P} = 0 , \qquad M_M + M_m - M_\mathrm{P} = 0 , \tag{k, l}$$

Znamienko „-„ v rovnici (l) je preto, lebo vzhľadom na ľavý koniec dosky sú momenty $\boldsymbol{M}_M$ a $\boldsymbol{M}_m$ orientované za rovinu nákresne, avšak moment $\boldsymbol{M}_\mathrm{P}$ je orientovaný pred rovinu nákresne. Po úprave rovníc (k, l) dostaneme systém dvoch rovníc s dvomi neznámymi silami F_P, F_L

$$F_\mathrm{L} + F_\mathrm{P} = Mg + mg , \qquad Mgd + mgx^* = F_\mathrm{P} l . \tag{m, n}$$

Úpravou rovnice (n) a následným dosadením zadaných hodnôt vypočítame

$$F_\mathrm{P} = \frac{Mgd + mgx^*}{l} = \frac{(Md + mx^*)g}{l} = \frac{(80\,\mathrm{kg} \cdot 2\,\mathrm{m} + 40\,\mathrm{kg} \cdot 5\,\mathrm{m}) \cdot 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{6\,\mathrm{m}} = 588{,}6\,\mathrm{N} .$$

Úpravou rovnice (m) a následným dosadením zadaných a vypočítaných hodnôt vypočítame

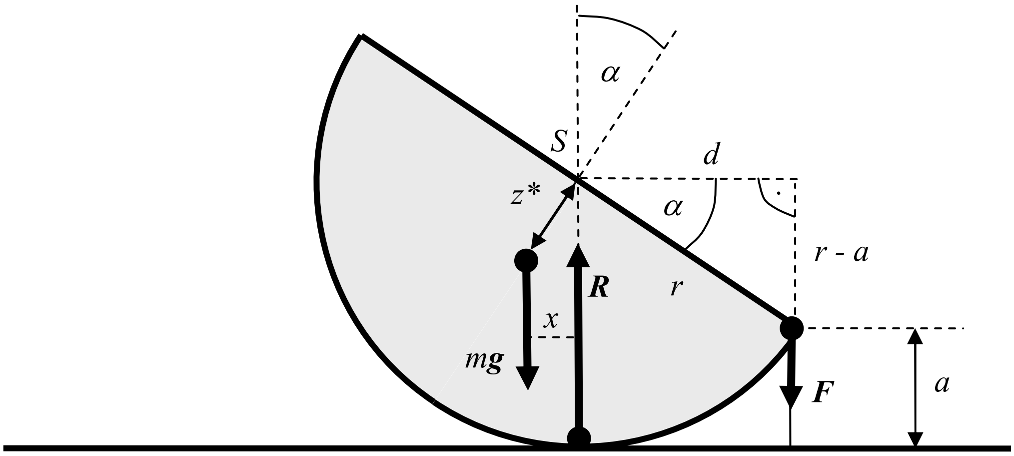
$$F_\mathrm{L} = Mg + mg - F_\mathrm{P} = (M + m)g - F_\mathrm{P} = (80 + 40)\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} - 588{,}6\,\mathrm{N} = 588{,}6\,\mathrm{N} .$$

Zhodou okolností sú sily, ktorými brehy pôsobia na oba konce dosky rovnaké, rovné 588,6 N.

8.13 Homogénna polguľa hmotnosti m = 20 kg polomeru r = 50 cm leží na vodorovnom stole tak, že sa ho dotýka vypuklou plochou a okraj polgule je spojený zvislou nerozťažnou nehmotnou niťou dĺžky a = 30 cm s povrchom stola. Aká je veľkosť F sily, ktorou je napínaná niť?

Riešenie

Pôsobiská a smery všetkých vonkajších síl pôsobiacich na polguľu sú na obr. 8.10.



Obr. 8.10 Vonkajšie sily pôsobiace na polguľu

Sila $\boldsymbol{F}$, ktorou niť pôsobí na okraj polgule je reakciou vzhľadom k sile, ktorou okraj polgule pôsobí na niť. Sila $\boldsymbol{R}$ pôsobiaca na polguľu v dotykovom bode so stolom je reakciou vzhľadom k sile, ktorou polguľa pôsobí na stôl. Tiažové pole je homogénne, preto sa poloha hmotného stredu polgule zhoduje s polohou ťažiska. Tiažová sila $m\boldsymbol{g}$ pôsobí na polguľu v jej hmotnom strede. Polguľa je v statickej rovnováhe (nekoná ani posuvný ani rotačný pohyb), preto musí platiť silová podmienka (8.24) a momentová podmienka (8.25) rovnováhy polgule

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}\,, \qquad \boldsymbol{M}_m + \boldsymbol{M}_F + \boldsymbol{M}_R = \boldsymbol{0}\,, \qquad \text{(a, b)}$$

kde $\boldsymbol{M}_m$ je moment tiažovej sily $m\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{M}_F$ je moment sily $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{M}_R$ je moment sily $\boldsymbol{R}$. Momentová podmienka (b) platí vzhľadom na ľubovoľný bod. Ak týmto bodom bude napríklad stred S kruhového povrchu polgule, potom moment $\boldsymbol{M}_R = \boldsymbol{0}$, lebo zvislá vektorová priamka sily $\boldsymbol{R}$ prechádza cez bod S a rameno tejto sily sa rovná nule. Rovnice (a, b) môžeme vtedy zapísať v skalárnom tvare pomocou veľkostí síl a veľkostí momentov

$$mg + F - R = 0\,, \qquad M_m - M_F = 0\,. \qquad \text{(c, d)}$$

Znamienko „-„ v rovnici (d) je preto, lebo vzhľadom na bod S je moment $\boldsymbol{M}_m$ orientovaný pred rovinu nákresne, avšak moment $\boldsymbol{M}_F$ je orientovaný za rovinu nákresne. Ak veľkosť M_m momentu tiažovej sily $m\boldsymbol{g}$ a veľkosť M_F momentu sily $\boldsymbol{F}$ v rovnici (d) vyjadríme súčinom veľkosti príslušnej sily a jej ramena vzhľadom na bod S, po jednoduchých úpravách dostaneme

$$M_m - M_F = 0\,, \qquad mgx - Fd = 0\,, \qquad mgz^*\sin\alpha - Fr\cos\alpha = 0\,,$$

$$F = \frac{mgz^*\sin\alpha}{r\cos\alpha} = \frac{mgz^*}{r}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{mgz^*}{r}\cdot\frac{r-a}{\sqrt{r^2-(r-a)^2}} = \frac{mgz^*}{r}\cdot\frac{r-a}{\sqrt{2ra-a^2}}\,. \tag{e}$$

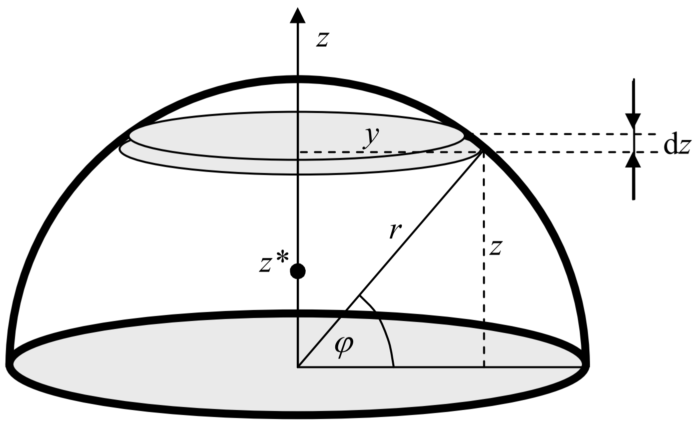
Vo výraze na pravej strane vzťahu (e) jedinou neznámou je vzdialenosť z^* hmotného stredu polgule od stredu S kruhového povrchu polgule. Môžeme ju určiť podľa vzťahu (8.17)

$$z^* = \frac{\int_m z\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_V z\rho\mathrm{d}V}{\rho V} = \frac{\rho\int_0^r z\pi y^2\mathrm{d}z}{\rho\frac{4}{6}\pi r^3} = \frac{3\int_0^r zy^2\mathrm{d}z}{2r^3} = \frac{3\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi(r\cos\varphi)^2 r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{2r^3} =$$

$$= \frac{3r}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{3r}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\cos\varphi = \frac{3r}{2}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{3r}{2}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3r}{8}\,, \tag{f}$$

pričom os z má počiatok v strede S kruhového povrchu polgule a je orientovaná smerom k hmotnému stredu polgule. Rezmi kolmými k osi z sme polguľu rozložili na nekonečne veľa elementárnych valcov výšky dz s postupne klesajúcim polomerom y, pozri obr. 8.11. Pri integrácii sme použili postupné zámeny premenných pomocou vzťahov

$\mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}V = \pi y^2\mathrm{d}z$, $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, $\mathrm{d}z = r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$, $\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}\cos\varphi$, $\cos\varphi = x$.



Obr. 8.11 Určenie polohy hmotného stredu polgule

Dosadením výrazu na pravej strane rovnice (f) do vzťahu (e) s následným dosadením zadaných hodnôt dostaneme

$$F = \frac{mgz^*}{r}\cdot\frac{r-a}{\sqrt{2ra-a^2}} = \frac{3mg(r-a)}{8\sqrt{2ra-a^2}} = \frac{3\cdot 20\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(50-30)\mathrm{cm}}{8\sqrt{2\cdot 50\cdot 30-30^2}\ \mathrm{cm}} = 32{,}11\,\mathrm{N}.$$

Podľa zákona akcie a reakcie je veľkosť F sily, ktorou niť pôsobí na okraj polgule rovnaká ako veľkosť sily, ktorou okraj polgule napína niť a je rovná 32,11 N.

9 TUHÉ TELESO

Teoretický úvod

Ak sa teleso otáča okolo pevnej osi, jeho pohybová rovnica má tvar

$$M = I\varepsilon$$

kde ε je uhlové zrýchlenie, M je veľkosť priemetu celkového momentu vonkajších síl do smeru osi otáčania a I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania, definovaný výrazom

$$I = \sum_i m_i a_i^2$$

kde a_i je vzdialenosť hmotného bodu m_i od osi. Pri telesách spojite vyplnených hmotou platí:

$$I = \int_m a^2 \mathrm{d}m = \int_V \rho a^2 \mathrm{d}V$$

Integráciu treba vykonať cez celý objem telesa.

Steinerova veta hovorí: *Moment zotrvačnosti telesa I vzhľadom na ľubovoľnú priamku sa rovná momentu zotrvačnosti I^* vzhľadom na priamku prechádzajúcu ťažiskom telesa a s danou priamkou rovnobežnú, zväčšenému o príspevok ťažiska s celou hmotnosťou telesa v ňom sústredenou.* Matematicky ju možno vyjadriť vzťahom

$$I = I^* + ma^2$$

kde m je celková hmotnosť telesa a a je vzdialenosť ťažiska od danej priamky.

Kinetickú energiu telesa konajúceho otáčavý pohyb okolo pevnej osi uhlovou rýchlosťou ω možno vyjadriť vzťahom

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$$

kde I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania.

Práca, ktorú vykonajú vonkajšie sily pri otočení telesa o určitý uhol φ, je daná vzťahom

$$W = M\varphi$$

za predpokladu, že hodnota momentu síl M je vzhľadom na os otáčania konštantná. Táto práca sa rovná zvýšeniu kinetickej energie otáčavého pohybu telesa na tomto úseku otočenia.

Vo všeobecnom prípade pohybu telesa je kinetická energia telesa daná súčtom kinetickej energie postupného pohybu ťažiska s hmotnosťou m, rovnajúcou sa celkovej hmotnosti telesa, a kinetickej energie otáčavého pohybu telesa okolo priamky prechádzajúcej ťažiskom. Teda

$$E_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} I^* \omega^2$$

Zákon zachovania mechanickej energie hovorí, že pri mechanickom pohybe telesa je súčet kinetickej a potenciálnej energie konštantný. Ak ide o pohyb telesa v gravitačnom poli v blízkosti zemského povrchu, potom možno uvedený zákon vyjadriť vzťahom

$$E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} I^* \omega^2 + mgh = \text{konšt}$$

kde h je výška ťažiska telesa nad vodorovnou rovinou, vzhľadom na ktorú vzťahujeme potenciálnu energiu telesa.

Fyzikálne kyvadlo je každé teleso upevnené tak, že sa môže vplyvom vlastnej tiaže otáčať okolo vodorovnej osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom. Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla, keď ide o malé uhlové výchylky φ z rovnovážnej polohy, je daná vzťahom

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mga}{I}\varphi$$

kde m je celková hmotnosť kyvadla, a je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania a I je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os otáčania. Riešením tejto diferenciálnej rovnice je výraz vyjadrujúci závislosť uhlovej výchylky φ od času, ktorý má tvar

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}$ je uhlová frekvencia, φ_0 je amplitúda a α je fázová konštanta.

Pre periódu fyzikálneho kyvadla platí vzťah

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$$

Podmienky rovnováhy tuhého telesa. Hovoríme, že teleso je v rovnováhe, keď platí:

a) Výslednica vonkajších síl pôsobiacich na teleso je rovná nule, t.j.

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0$$

b) Výsledný moment vonkajších síl pôsobiacich na teleso je rovný nule, t.j.

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0$$

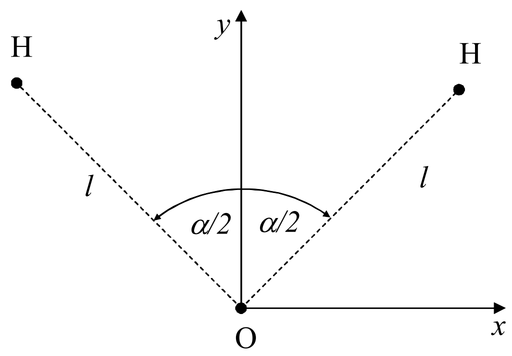
pričom podmienka b) platí pre ľubovoľný bod, vzhľadom ku ktorému momenty vonkajších síl určujeme.

Príklady

9.1 Vypočítajte moment zotrvačnosti molekuly vody vzhľadom na jej os symetrie, ak dĺžka väzby O-H je $9{,}57.10^{-10}$ m, uhol medzi väzbami O-H je 105° a hmotnosť atómu vodíka m_H=$1{,}673.10^{-27}$ kg.

Riešenie

Moment zotrvačnosti molekuly vody vypočítame podľa vzťahu $I = \sum_i m_i a_i^2$.



Obr. 9.1 Molekula vody umiestnená v rovine *xy*.

Molekula vody pozostáva z atómu kyslíka a dvoch atómov vodíka. Osou symetrie molekuly vody na obrázku je os *y*. Atóm kyslíka leží na osi *y* , jeho vzdialenosť od osi *y* je preto $a_O = 0$. Vzdialenosť atómov vodíka od osi *y* je

$$a_H = l \sin\frac{\alpha}{2} = 9{,}57.10^{-10}\,\mathrm{m} \cdot \sin\frac{105^\circ}{2} = 7{,}59.10^{-10}\,\mathrm{m}$$

Moment zotrvačnosti molekuly vody vzhľadom na jej os symetrie potom bude

$$I = \sum_i m_i a_i^2 = m_O a_O^2 + m_H a_H^2 + m_H a_H^2 = 2 \cdot m_H a_H^2 = 2 \cdot 1{,}67.10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(7{,}59.10^{-10}\,\mathrm{m}\right)^2 = 1{,}92.10^{-45}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

9.2 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej tyče dĺžky *l* a hmotnosti *m* vzhľadom na os kolmú na tyč:

a) prechádzajúcu stredom tyče,

b) prechádzajúcu koncovým bodom tyče,

c) prechádzajúcu vo vzdialenosti $\frac{l}{4}$ od konca tyče (l = 45 cm a m = 2,7 kg)

Riešenie

a) Na výpočet momentu zotrvačnosti tyče vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu stredom tyče použijeme vzťah

$$I = \int_m a^2 \mathrm{d}m = \int_V \rho a^2 \mathrm{d}V$$

Zvoľme sústavu súradníc tak, že tyč leží na osi x a počiatok súradnej sústavy je v strede tyče. Hmotnosť elementu tyče môžeme vyjadriť takto, $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \frac{m}{Sl} S\mathrm{d}x = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$, kde S je plošný obsah prierezu tyče. Vzdialenosť hmotného elementu od osi otáčania potom je $a = |x|$. Dosadíme do vzorca a vykonáme integráciu

$$I = \int_m a^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{+l/2} = \frac{m}{l}\frac{l^3}{12} = \frac{1}{12} m l^2$$

Teraz vypočítame hodnotu momentu zotrvačnosti pre tyč s hmotnosťou 2,7 kg a dĺžkou 45 cm.

$$I = \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{12} 2{,}7\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}45\,\mathrm{m})^2 = 0{,}0456\,\mathrm{kg\,m^2}$$

b) Na výpočet momentu zotrvačnosti tyče vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu koncovým bodom tyče použijeme Steinerovu vetu

$$I = I^* + m a^2$$

kde moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je $I^* = \frac{1}{12} m l^2$ a vzdialenosť osi prechádzajúcej koncovým bodom tyče od osi prechádzajúcej ťažiskom je $a = \frac{l}{2}$. Teda

$$I = \frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

Teraz vypočítame hodnotu momentu zotrvačnosti pre tyč s hmotnosťou 2,7 kg a dĺžkou 45 cm.

$$I = \frac{1}{3} m l^2 = \frac{1}{3} 2{,}7\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}45\,\mathrm{m})^2 = 0{,}1823\,\mathrm{kg\,m^2}$$

c) V tomto prípade budeme postupovať rovnako ako v prípade b), pričom $a = \frac{l}{4}$. Po dosadení dostaneme

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{16}ml^2 = \frac{7}{48}ml^2$$

Nakoniec vypočítame hodnotu momentu zotrvačnosti pre tyč s hmotnosťou 2,7 kg a dĺžkou 45 cm.

$$I = \frac{7}{48}ml^2 = \frac{7}{48}2{,}7\,\mathrm{kg}\cdot\left(0{,}45\,\mathrm{m}\right)^2 = 0{,}0797\,\mathrm{kg\,m^2}$$

9.3 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho kvádra s hmotnosťou m a s dĺžkami strán a, b a c vzhľadom na jeho os súmernosti.

Riešenie

Zvoľme sústavu súradníc tak, že os x je rovnobežná so stranou dĺžky a, os y so stranou dĺžky b a os z so stranou dĺžky c a počiatok súradnej sústavy leží v strede kvádra. Osi x, y a z sú v tomto prípade osami súmernosti kvádra. Hmotný element potom možno vyjadriť nasledovne $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \frac{m}{abc}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Urobíme výpočet momentu zotrvačnosti kvádra vzhľadom na os z. Pre vzdialenosť r hmotného elementu od osi z platí $r^2 = x^2 + y^2$. Dosadíme do vzorca pre výpočet momentu zotrvačnosti a vykonáme integráciu cez celý objem kvádra

$$I_z = \int r^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{abc}\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{m}{abc}c\left[\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] =$$

$$= \frac{m}{ab}\left[\left(\frac{a^3}{24}+\frac{a^3}{24}\right)\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{b^3}{24}+\frac{b^3}{24}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)\right] = \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right)$$

Podobne by sme vypočítali momenty zotrvačnosti kvádra vzhľadom na osi x a y

$$I_x = \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right),\ I_y = \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right)$$

Moment zotrvačnosti kvádra vzhľadom na os súmernosti sa rovná

$\frac{m}{12}$ x (súčet štvorcov tých strán, ktoré sú kolmé na os)

9.4 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho valca s hmotnosťou *m*, výškou *l* a polomerom *R* vzhľadom na pozdĺžnu os súmernosti.

Riešenie

Zvoľme cylindrickú sústavu súradníc tak, že os *z* je osou súmernosti valca. Hmotnosť elementu valca v cylindrických súradniciach je $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}z.\mathrm{d}r.r\mathrm{d}\varphi$, kde $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 l}$ a vzdialenosť hmotného elementu d*m* od osi *z* je rovná *r*. Dosadíme do vzorca pre výpočet momentu zotrvačnosti a vykonáme integráciu cez celý objem valca

$$I = \int a^2 \mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R^2 l}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^l r^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{m}{\pi R^2 l}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_0^l = \frac{m}{\pi R^2 l}2\pi l\frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

9.5 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej gule s hmotnosťou *m* a polomerom *R* vzhľadom na os, ktorá prechádza jej stredom.

Riešenie

Zvoľme sférickú sústavu súradníc tak, že stred gule leží v počiatku sústavy. Vypočítame moment zotrvačnosti gule vzhľadom na os *z*. Hmotnosť elementu gule potom možno vyjadriť nasledovne $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}r.r\mathrm{d}\zeta(r\cos\zeta)\mathrm{d}\varphi$, pričom vzdialenosť elementu od osi *z* je $a = r\cos\zeta$. Dosadíme do vzorca pre výpočet momentu zotrvačnosti a vykonáme integráciu cez celý objem gule

$$I = \int a^2 \mathrm{d}m = \int (r\cos\zeta)^2 \rho \mathrm{d}V = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^4\cos^3\zeta \mathrm{d}r\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{3m}{4\pi R^3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R \cdot \left[\sin\zeta - \frac{1}{3}\sin^3\zeta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{3m}{4\pi R^3}\frac{R^5}{5}\frac{4}{3}2\pi = \frac{3m}{2}\frac{R^2}{5}\frac{4}{3} = \frac{2}{5}mR^2.$$

9.6 Homogénny valec hmotnosti $m = 1$ kg, s polomerom $R = 0{,}1$ m sa otáča okolo svojej osi súmernosti s konštantným uhlovým zrýchlením $\varepsilon = 10$ rad.s^{-2}. Aká je jeho kinetická energia za 10 s, keď jeho počiatočná kinetická energia bola 25 J?

Riešenie

Valec vykonáva rovnomerne zrýchlený otáčavý pohyb. Moment zotrvačnosti valca vzhľadom na jeho os súmernosti je $I = \frac{1}{2}mR^2$. Pre uhlovú rýchlosť pri rovnomerne zrýchlenom otáčavom pohybe platí $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. Počiatočná uhlová rýchlosť ω_0 a počiatočná kinetická energia navzájom súvisia nasledovne

$$E_{k_0} = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega_0^2$$

Odkiaľ pre počiatočnú uhlovú rýchlosť dostávame:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4E_{k_0}}{mR^2}}$$

Uhlovú rýchlosť v ľubovoľnom čase t potom môžeme vyjadriť nasledovne

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \sqrt{\frac{4E_{k_0}}{mR^2}} + \varepsilon t\,.$$

Kinetickú energiu v čase t = 10s vypočítame pomocou uhlovej rýchlosti v čase t = 10s

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\sqrt{\frac{4E_{k_0}}{mR^2}} + \varepsilon t\right)^2 = 100\,\mathrm{J}$$

9.7 Koleso pri rovnomerne spomalenom pohybe zmenšilo frekvenciu otáčania z hodnoty 240 min^{-1} na 120 min^{-1} v priebehu 60 s. Moment zotrvačnosti kolesa je I = 2 kg.m^2. Určite uhlové zrýchlenie kolesa, moment síl trenia vzhľadom na os, prácu síl trenia a počet otáčok, ktoré urobilo koleso za uvedených 60 s!

Riešenie:

Pre rovnomerne spomalený pohyb platí $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$. Zo zadania pre počiatočnú a koncovú uhlovú rýchlosť kolesa vyplýva

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi\frac{240\,\mathrm{min}^{-1}}{60} = 2\pi\cdot 4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} = 8\pi\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{120\,\mathrm{min}^{-1}}{60} = 2\pi.2\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} = 4\pi\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

Pre uhlové spomalenie kolesa potom dostaneme:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \frac{4\pi\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}}{60\,\mathrm{s}} = 0{,}209\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}\,.$$

Moment síl trenia M vypočítame z pohybovej rovnice pre otáčavý pohyb okolo pevnej osi:

$M = I\varepsilon = 2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot 0,209\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2} = 0,418\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$

Práca síl trenia sa rovná zmene kinetickej energie:

$$W_{F_\mathrm{T}} = E_\mathrm{k} - E_{\mathrm{k}0} = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{I\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}{2} = \frac{2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\left[(4\pi)^2 - (8\pi)^2\right]\mathrm{rad}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}}{2} = -473{,}7\,\mathrm{J}$$

Počet otáčok sa rovná $N = \dfrac{\varphi}{2\pi}$.

Pri rovnomerne spomalenom pohybe pre uhlovú dráhu φ platí $\varphi = \omega_0 t - \dfrac{1}{2}\varepsilon t^2$.

Po dosadení dostaneme

$$N = \frac{\omega_0 t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2}{2\pi} = \frac{8\pi\cdot 60 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{60}\cdot 60^2}{2\pi} = 240 - 60 = 180 \text{ otáčok.}$$

9.8 Homogénna guľa s polomerom R a hmotnosťou m sa valí vplyvom tiaže po naklonenej rovine, ktorá zviera s vodorovnou rovinou uhol α = 15°. Akú rýchlosť má ťažisko gule po prebehnutí dráhy l = 45 cm, keď počiatočná rýchlosť bola nulová? Akú rýchlosť by malo ťažisko gule pri čistom šmýkaní bez trenia po uvedenej naklonenej rovine?

Riešenie

Na riešenie použijeme zákon zachovania mechanickej energie.

$E_{k,1} + E_{p,1} = E_{k,2} + E_{p,2} = \text{konšt}$

a) Najprv vyriešime prípad, keď sa guľa valí dolu naklonenou rovinou. Valiaca sa guľa vykonáva postupný aj otáčavý pohyb, preto jej kinetická energia je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^{*2} + \frac{1}{2}I^*\omega^2$$

Zo zákona zachovania mechanickej energie dostaneme rovnicu

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^{*2} + \frac{1}{2}I^*\omega^2 + 0$$

Vzťah medzi rýchlosťou ťažiska a uhlovou rýchlosťou gule, ktorá sa valí, je $v^* = \omega R$ a moment zotrvačnosti gule vzhľadom na os prechádzajúcu jej ťažiskom je $I^* = \dfrac{2}{5}mR^2$. Po dosadení dostaneme

$$mgh = \frac{1}{2}mv^{*2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^{*2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}R^2\right)\left(\frac{v^*}{R}\right)^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^{*2} + \frac{2}{10}v^{*2} = \frac{7}{10}v^{*2}$$

odkiaľ pre rýchlosť ťažiska gule dostaneme

$$v^* = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = \sqrt{\frac{10}{7}gl\sin\alpha}$$

$$v^* = \sqrt{\frac{10}{7}9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot 0{,}45\,\mathrm{m}\cdot\sin 15^\circ} = 1{,}28\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

b) V prípade, že sa guľa šmýka dolu naklonenou rovinou, vykonáva iba postupný pohyb, neotáča sa. Jej kinetická energia je

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$ a zo zákona zachovania mechanickej energie dostaneme rovnicu

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

a z nej vyjadríme rýchlosť gule nasledovne

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl\sin\alpha} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot 0{,}45\,\mathrm{m}\cdot\sin 15^\circ} = 1{,}51\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

9.9 Tyč hmotnosti m = 2 kg a dĺžky l = 1 m je otočne upevnená na vodorovnej osi, prechádzajúcej koncovým bodom tyče. a) Akou rýchlosťou prebehne druhý koncový bod tyče svojou najnižšou polohou, keď tyč pustíme z najvyššej polohy? b) Akou silou je namáhaná os v okamihu prechodu tyče najnižšou polohou?

Riešenie

a) Tyč vykonáva otáčavý pohyb okolo pevnej osi. Pri výpočte rýchlosti voľného koncového bodu tyče použijeme zákon zachovania mechanickej energie. Zvoľme potenciálnu energiu ťažiska tyče $E_p = 0$ vtedy, keď sa tyč nachádza vo vodorovnej polohe. Potom platí

$$mg\frac{l}{2} + 0 = mg\left(-\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2}I\omega^2 .$$

Keď prvý člen na pravej strane prenesieme na ľavú stranu rovnice, dostaneme

$$mgl = \frac{1}{2} I\omega^2 .$$

Pre tyč, ktorá sa otáča okolo koncového bodu platí $I = \frac{1}{3} ml^2$ a $\omega = \frac{v}{l}$, kde v je rýchlosť voľného koncového bodu tyče. Po dosadení týchto vzťahov do predchádzajúcej rovnice dostaneme

$$mgl = \frac{1}{6} ml^2 \frac{v^2}{l^2}$$

a odtiaľ dostaneme rýchlosť voľného koncového bodu tyče v okamihu, keď prechádza svojou najnižšou polohou

$$v = \sqrt{6gl} = 7{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

b) Celková sila pôsobiaca na záves sa skladá z odstredivej sily a tiažovej sily

$$F_{\mathrm{celk}} = F_0 + F_G$$

Veľkosť odstredivej sily je funkciou vzdialenosti hmotného elementu dm od osi rotácie

$$\mathrm{d}F_0 = a_m \mathrm{d}m = \omega^2 x \frac{m}{l} \mathrm{d}x \quad ,$$

kde x je vzdialenosť hmotného elementu od osi rotácie a a_m je odstredivé zrýchlenie hmotného elementu

$$a_m = \omega^2 x$$

Integráciou podľa x dostaneme odstredivú silu, ktorá pôsobí na celú tyč

$$F_0 = \omega^2 \frac{m}{l} \int_0^l x dx = \frac{1}{2} \omega^2 ml$$

V okamihu, keď koncový bod tyče prechádza najnižším miestom, je jeho rýchlosť $v = \sqrt{6gl}$ a odstredivá sila sa rovná

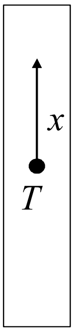
$$F_0 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{l^2} ml = \frac{6glm}{2l} = 3mg$$

Celková sila pôsobiaca na záves potom je

$F_{\mathrm{celk}} = F_0 + F_G = 3\, mg + mg = 4\, mg = 4.2\mathrm{kg}.9{,}81\mathrm{ms}^{-2} = 78{,}48$ N.

9.10 Je daná priama homogénna tyč dĺžky l = 1 m. Treba nájsť vzdialenosť od stredu tyče, v ktorej tyč treba upevniť, aby sa kývala ako fyzikálne kyvadlo s minimálnou periódou.

Riešenie



Perióda fyzikálneho kyvadla je daná vzťahom:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}}$$

kde I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania pri kývaní a x je vzdialenosť ťažiska telesa od osi otáčania.

Moment zotrvačnosti tyče I môžeme podľa Steinerovej vety vyjadriť

$$I = I^* + ma^2$$

kde $a = x$ a moment zotrvačnosti homogénnej tyče vzhľadom na os, ktorá prechádza ťažiskom a je na tyč kolmá je

$$I^* = \frac{1}{12}ml^2 .$$

Po dosadení pre periódu nášho fyzikálneho kyvadla dostaneme:

$$T(x) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ml^2 + mx^2}{mgx}} = 2\pi\sqrt{f(x)} .$$

Ďalej budeme hľadať, pre aké x je perióda $T(x)$ minimálna. Stačí, keď nájdeme minimum funkcie $f(x)$, ktorá sa nachádza pod odmocninou.

Minimum funkcie $f(x)$ nájdeme, keď vyriešime rovnicu $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 0$.

Keď zderivujeme funkciu $f(x)$ dostaneme

$$\frac{2gx^2 - \frac{1}{12}gl^2 - gx^2}{g^2x^2} = 0$$

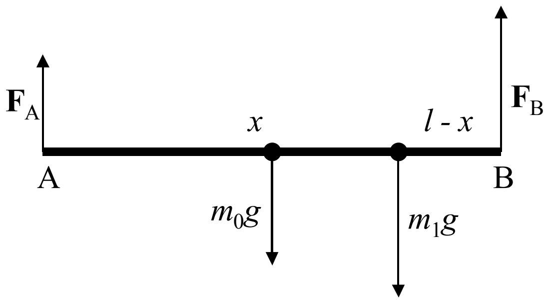
a po úprave dostaneme

$$x^2 = \frac{l^2}{12}$$

odkiaľ získame riešenie rovnice

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}} = 0{,}29 \text{ m}$$

9.11 Muž a chlapec nesú bremeno hmotnosti m_1= 20kg zavesené na tyči hmotnosti m_0=10 kg. Ako ďaleko od chlapcovho konca tyče treba zavesiť bremeno, aby muž niesol trikrát väčšiu váhu ako chlapec?



Obr. 9.2 Sily pôsobiace na tyč

Riešenie

Keď chlapec podopiera tyč v bode A a muž v bode B podľa zadania musí platiť

$$F_A = \frac{1}{3} F_B$$

Najprv zvolíme za momentový bod A. Z podmienky rovnováhy $\sum \boldsymbol{M}_i = 0$ dostaneme

$$-\frac{l}{2} m_0 g - x m_1 g + l F_B = 0,$$

kde l je dĺžka tyče a x je vzdialenosť od bodu A. Podobne pre momentový bod B dostaneme

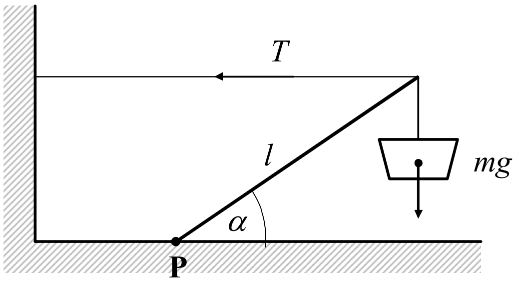
$$\frac{l}{2} m_0 g + (l - x) m_1 g - l F_A = 0.$$

Riešením týchto dvoch rovníc vypočítame vzdialenosť x. Z rovníc vyjadríme sily F_A a F_B. Pretože má platiť $F_B = 3F_A$, dostaneme nasledovnú rovnicu

$$\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2} m_0 g + x m_1 g\right) = 3\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2} m_0 g + (l - x) m_1 g\right), \qquad \text{po úprave dostaneme}$$

$$4 m_1 x = l m_0 + 3 l m_1 \qquad \text{a z toho} \qquad x = \frac{l(m_0 + 3m_1)}{4m_1} = \frac{7}{8} l$$

9.12 Aké maximálne bremeno môže byť zavesené na nosníku, ak ťahadlo uchytené o stenu vydrží ťah T = 1500 N? Nosník zviera s vodorovnou rovinou, na ktorej je otočne upevnený uhol α = 30°, ťahadlo je vodorovne upevnené a tiaž nosníka je nulová.



Obr.9.3 Sily pôsobiace na voľný koniec nosníka

Riešenie

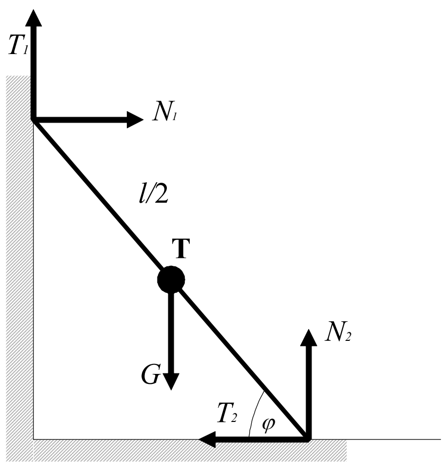
Maximálna hmotnosť bremena m je taká, ktorá spôsobí ťahovú silu práve rovnú 1500N. Nosník sa nepohybuje (je v rovnováhe), a preto musí byť splnená podmienka rovnováhy $\sum \boldsymbol{M}_i = 0$. Vzhľadom na momentový bod P dostaneme

$-mgl\cos\alpha + Tl\sin\alpha = 0$, a riešením tejto rovnice dostaneme maximálnu hmotnosť m

$$m = \frac{T}{g}\operatorname{tg}\alpha = 88{,}28\,\mathrm{kg}$$

9.13 O stenu je opretý rebrík. Faktor trenia rebríka o stenu μ_1 = 0,4, faktor trenia rebríka o vodorovnú podlahu μ_2 = 0,5. Aký najmenší uhol môže zvierať rebrík s vodorovnou podlahou, aby ešte nesklzol, keď predpokladáme, že ťažisko rebríka je v jeho strede?

Riešenie



Z podmienky rovnováhy síl

$$\sum_i \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{G} = 0$$

dostávame:

$N_2 + T_1 = G$ a $T_2 - N_1 = 0$.

Pre sily trenia platí:

$T_1 = \mu_1 N_1$ a $T_2 = \mu_2 N_2 = N_1$.

Z podmienky rovnováhy momentov síl:

$$\sum_i \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{M}_{N1} + \boldsymbol{M}_{T_1} + \boldsymbol{M}_{T_2} + \boldsymbol{M}_{N_2} + \boldsymbol{M}_G = 0\ .$$

Keďže nepoznáme hmotnosť rebríka, zvolíme si ťažisko rebríka za momentový bod, celkovú dĺžku rebríka označíme l a momenty budeme vyjadrovať pre kladný smer otáčania polohového vektora $\boldsymbol{r}$ ($|\boldsymbol{r}| = \frac{l}{2}$ pre všetky sily):

$$T_2 \frac{l}{2}\sin(\pi+\varphi) + T_1 \frac{l}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right) + N_1 \frac{l}{2}\sin(\pi+\varphi) + N_2 \frac{l}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = 0$$

Po úpravách:

$$-T_2 \sin\varphi - T_1 \cos\varphi - N_1 \sin\varphi + N_2 \cos\varphi = 0$$

keďže $N_1 = T_2$:

$$2T_2 \sin\varphi = (N_2 - T_1)\cos\varphi$$

$$2\mu_2 N_2 \sin\varphi = (N_2 - \mu_1 N_1)\cos\varphi = N_2(1-\mu_1\mu_2)\cos\varphi$$

odkiaľ:

$$tg\varphi = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2} = 0{,}8$$

a teda najmenší uhol, ktorý môže rebrík zvierať s vodorovnou rovinou je $\varphi = 38°39'35''$.

Literatúra:

H: HAJKO, V. A KOL.: *Fyzika v príkladoch* . Vydavateľstvo Alfa, Bratislava, 1983.

10 MOLEKULOVÁ FYZIKA

Teoretický úvod

a) Molekulová fyzika: popisuje správanie sa molekúl v látkach. Keďže z makroskopického hľadiska látky obsahujú veľké množstvo molekúl, pri odvodzovaní výsledných vlastností látok sa používajú štatistické metódy.

b) Ideálny plyn: plyn, pri ktorom zanedbávame vzájomné silové pôsobenie medzi molekulami plynu, ako aj veľkosť molekúl plynu. Ideálny plyn považujeme za dokonale stlačiteľný, teda principiálne ho môžeme stlačiť na nulový objem. Vzťahy uvádzané pre plyn v kapitolách 10 a 11 platia len pre ideálny plyn, s výnimkou vzťahov, ktoré sú uvedené v závere tejto kapitoly pre reálny plyn (Van der Waalsova rovnica reálneho plynu).

c) Reálny plyn: plyn, pri ktorom nezanedbávame vzájomné silové pôsobenie medzi molekulami plynu, ani veľkosť molekúl plynu.

d) Tlak plynu: tlak vyvolaný nárazmi molekúl plynu na steny nádoby. Pri predpoklade dokonale pružnej zrážky molekuly so stenou je veľkosť zmeny hybnosti molekuly rovná výrazu $2m^*v_\perp$, kde m^* je hmotnosť molekuly, $v_\perp$ je zložka rýchlosti molekuly v smere kolmom na stenu. Ak uvažujeme, že molekuly plynu sa pohybujú náhodne (teda žiadny smer nie je preferovaný), tlak na steny nádoby je:

$$p = \frac{m}{V}\frac{v_{\mathrm{kv}}^2}{3}$$

kde m je celková hmotnosť plynu v nádobe, V je objem nádoby, v_{kv} je stredná kvadratická rýchlosť molekúl plynu, pre ktorú platí:

$$v_{\mathrm{kv}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

kde R je plynová konštanta (R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}), T je termodynamická teplota, M je molárna hmotnosť plynu. Celziovu teplotu t (v stupňoch Celzia °C) vypočítame z termodynamickej teploty T (v kelvinoch K) podľa vzťahu

$t = T - 273{,}15$ K

e) Maxwellovo rozdelenie molekúl plynu podľa ich rýchlostí:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}},$$

kde v je rýchlosť, $f(v)$ je rozdeľovacia funkcia rýchlostí, definovaná vzťahom:

$$P(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv,$$

kde $P(v_1, v_2)$ je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraná molekula má rýchlosť z intervalu (v_1, v_2), resp. je to tiež relatívny podiel molekúl, ktorých rýchlosti ležia v tomto intervale.

f) Stredná voľná dráha: stredná vzdialenosť, ktorú prejde molekula plynu medzi dvomi po sebe idúcimi zrážkami:

$$\lambda = \frac{V}{\sqrt{2}\pi d^2 N},$$

kde V je objem plynu, d je priemer molekuly, N je počet molekúl plynu.

g) Priemerná frekvencia vzájomných zrážok molekúl:

$$f = \frac{v_{\mathrm{str}}}{\lambda},$$

kde v_{str} je stredná rýchlosť molekúl plynu, určená vzťahom:

$$v_{\mathrm{str}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

h) Teplota je mierou kinetickej energie molekúl. Čím je väčšia kinetická energia pohybujúcich sa častíc, tým je vyššia teplota systému. Základnou jednotkou termodynamickej teploty je kelvin. Vzťah medzi teplotou a kinetickou energiou molekúl ideálneho plynu vyjadruje ekvipartičný teorém:

$$\varepsilon = \frac{i}{2}kT,$$

kde ε je stredná kinetická energia molekuly, i je počet stupňov voľnosti molekúl plynu (i = 3 pre jednoatómové molekuly, i = 5 pre dvojatómové molekuly, i = 6 pre trojatómové a viacatómové molekuly), k je Boltzmannova konštanta (k = $1{,}38.10^{-23}$

$J.K^{-1}$). V tomto vzťahu neuvažujeme vibračnú zložku kinetickej energie molekúl, ktorá sa prejavuje pri vyšších teplotách.

i) Látkové množstvo: je vyjadrené v móloch, kde jeden mól predstavuje $6{,}023.10^{23}$ častíc (molekúl, atómov alebo iónov). Látkové množstvo môžeme vyjadriť pomocou vzťahu:

$$n = \frac{N}{N_{\mathrm{A}}},$$

kde N je počet častíc, N_{A} je Avogadrova konštanta ($N_{\mathrm{A}} = 6{,}023.10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$). Vzťah medzi Avogadrovou konštantou, Boltzmannovou konštantou a plynovou konštantou je

$$R = N_{\mathrm{A}} \cdot k .$$

Látkové množstvo možno tiež vyjadriť pomocou vzťahu:

$$n = \frac{m}{M},$$

kde m je celková hmotnosť častíc, M je molárna hmotnosť (hmotnosť jedného mólu častíc), ktorú možno nájsť v tabuľkách.

j) Stavová rovnica ideálneho plynu:

$$pV = nRT ,$$

kde V je objem plynu, resp. objem nádoby, v ktorej je plyn uzavretý.

Ak látkové množstvo plynu je konštantné, stavovú rovnicu možno písať v tvare:

$$\frac{pV}{T} = konšt.$$

k) Daltonov zákon: ak máme zmes plynov uzavretú v nádobe s objemom V, celkový tlak zmesi plynov je súčtom parciálnych tlakov jednotlivých plynov

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_z ,$$

kde z je počet plynov (zložiek) v zmesi.

Jednotlivé parciálne tlaky možno vypočítať pomocou stavovej rovnice:

$$p_i = \frac{n_i RT}{V} ,$$

kde n_i je látkové množstvo i-tej zložky zmesi, T je teplota zmesi plynov.

l) Van der Waalsova rovnica (stavová rovnica reálneho plynu):

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \, ,$$

kde a, b sú Van der Waalsove parametre reálneho plynu. Parameter a súvisí so vzájomnou interakciou medzi časticami plynu, parameter b súvisí s veľkosťou častíc.

m) Pomocou Van der Waalsovej rovnice možno odvodiť tzv. kritické parametre plynu:

kritická teplota: $T_\mathrm{c} = \dfrac{8a}{27Rb}$,

kritický tlak: $p_\mathrm{c} = \dfrac{a}{27b^2}$,

kritický objem: $V_\mathrm{c} = 3bn$.

V bode so súradnicami (T_c , p_c) končí krivka dvojfázovej rovnováhy medzi plynom a kvapalinou v p-T diagrame. Znamená to, že plyn môžeme skvapalniť stláčaním len vtedy, keď jeho teplota je nižšia, ako je jeho kritická teplota. Nad touto teplotou plyn skvapalniť nemôžeme.

Príklady

10.1 V uzavretej nádobe s objemom 2 litre sa nachádza 5 gramov argónu (Ar), pri teplote 500 °C. Vypočítajte strednú kvadratickú rýchlosť molekúl (atómov) argónu, a tiež tlak Ar v nádobe. Molárna hmotnosť Ar je 40 g.mol^{-1}.

Riešenie

Pre strednú kvadratickú rýchlosť molekúl platí vzťah:

$$v_\mathrm{kv} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \, .$$

Po dosadení dostaneme:

$$v_\mathrm{kv} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot 773{,}15\,\mathrm{K}}{40 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1}}} = \underline{\underline{694{,}3\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}} \, .$$

Tlak plynu v nádobe môžeme teraz vypočítať dosadením vypočítanej strednej kvadratickej rýchlosti molekúl argónu do vzťahu:

$$p = \frac{m}{V}\frac{v_{\mathrm{kv}}^2}{3} = \frac{5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}\frac{\left(694{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)^2}{3} = \underline{\underline{401710\,\mathrm{Pa}}}\,.$$

Odpoveď: Stredná kvadratická rýchlosť molekúl (atómov) argónu pri daných podmienkach je 694,3 m.s^{-1}, tlak argónu v nádobe je 401710 Pa.

Poznámka: tlak môžeme vypočítať aj pomocou stavovej rovnice ideálneho plynu. Dokážte, že aj týmto postupom prídeme k rovnakému výsledku.

10.2 Určite pomery stredných kvadratických rýchlostí molekúl vodíka (H_2) a dusíka (N_2) pri rovnakej teplote. Molárna hmotnosť H_2 je 2 g.mol^{-1}, molárna hmotnosť N_2 je 28 g.mol^{-1}.

Riešenie

Pomer stredných kvadratických rýchlostí molekúl H_2 a N_2:

$$\frac{v_{\mathrm{kv}}(H_2)}{v_{\mathrm{kv}}(N_2)} = \frac{\sqrt{\dfrac{3RT}{M_{\mathrm{H_2}}}}}{\sqrt{\dfrac{3RT}{M_{\mathrm{N_2}}}}} = \sqrt{\frac{M_{\mathrm{N_2}}}{M_{\mathrm{H_2}}}} = \sqrt{\frac{28\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}}{2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}}} = \underline{\underline{3{,}74}}\,.$$

Odpoveď: Pri rovnakej teplote je pomer stredných kvadratických rýchlostí molekúl H_2 a N_2 rovný 3,74.

10.3 Aká je stredná voľná dráha molekúl kyslíka (O_2) pri teplote 150 °C a atmosférickom tlaku a aká je priemerná frekvencia zrážok molekúl? Za priemer molekuly O_2 považujte hodnotu 0,29 nm. Molárna hmotnosť O_2 je 32 g.mol^{-1}.

Riešenie

Pre strednú voľnú dráhu molekúl platí vzťah:

$$\lambda = \frac{V}{\sqrt{2}\pi d^2 N}\,.$$

V tomto vzťahu však nepoznáme veličiny *V* a *N*. Skúsime si ich vyjadriť pomocou stavovej rovnice:

$$pV = nRT\,.$$

V tejto rovnici si vyjadríme látkové množstvo ako $n = \dfrac{N}{N_{\mathrm{A}}}$, takže:

$$pV = \frac{N}{N_\mathrm{A}} RT\,,$$

a z toho si môžeme vyjadriť podiel $\dfrac{V}{N} = \dfrac{RT}{pN_\mathrm{A}}$.

Potom po dosadení tohto výrazu do rovnice pre strednú voľnú dráhu molekúl dostaneme:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2}\frac{RT}{pN_\mathrm{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\left(0{,}29\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}\right)^2}\cdot\frac{8{,}314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot 423{,}15\,K}{101325\,\mathrm{Pa}\cdot 6{,}023\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}} =$$

$$= 1{,}543\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{154{,}3\,\mathrm{nm}}}\,.$$

Keďže stredná rýchlosť molekúl je:

$$v_\mathrm{str} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8\cdot 8{,}314\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot 423{,}15\,\mathrm{K}}{\pi\cdot 32\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}}} = 529{,}1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,,$$

tak priemerná frekvencia zrážok molekúl je:

$$f = \frac{v_\mathrm{str}}{\lambda} = \frac{529{,}1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{1{,}543\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{3{,}43\cdot 10^{9}\,\mathrm{s}^{-1}}}\,.$$

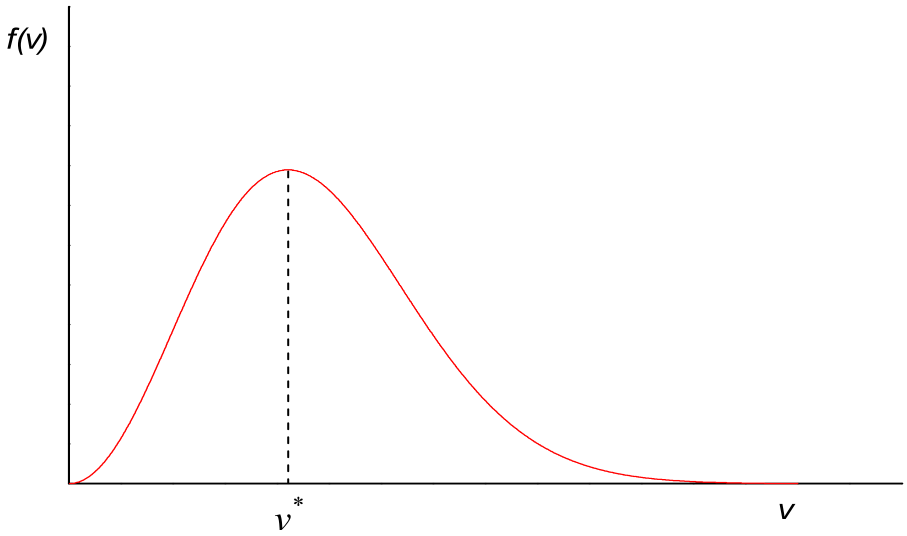
Odpoveď: Stredná voľná dráha molekúl kyslíka pri daných podmienkach je 154,3 nm, a priemerná frekvencia zrážok medzi molekulami je $3{,}43.10^9\ \mathrm{s}^{-1}$.

10.4 Pomocou Maxwellovho rozdelenia molekúl podľa rýchlostí odvoďte vzťah pre najpravdepodobnejšiu rýchlosť molekúl plynu. Posúďte veľkosť tejto rýchlosti vzhľadom na strednú rýchlosť a strednú kvadratickú rýchlosť molekúl plynu.

Riešenie

Na obrázku 10.1 je znázornený tvar Maxwellovho rozdelenia molekúl podľa rýchlostí. Najpravdepodobnejšia rýchlosť v^* je rýchlosť, ktorá zodpovedá maximu uvedenej funkcie. Pre extrémy funkcie $f(v)$ platí:

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 0\,.$$



Obr.10.1 Tvar Maxwellovho rozdelenia molekúl plynu podľa rýchlostí, s vyznačenou najpravdepodobnejšou rýchlosťou v^*

Derivovaním a úpravami postupne dostávame rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\right) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} 2ve^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\left(1-\frac{Mv^2}{2RT}\right) = 0$$

Ľavá strana rovnice je rovná nule, keď aspoň jeden z činiteľov je rovný nule. Napríklad riešeniami sú $v^* = 0$ a $v^* = +\infty$ avšak z tvaru Maxwellovej funkcie na obrázku vidíme, že tieto riešenia určujú polohu lokálnych miním distribučnej funkcie. Správne riešenie úlohy (polohu maxima) preto získame, keď prirovnáme k nule poslednú zátvorku na ľavej strane, teda:

$$\left(1 - \frac{M}{2RT} v^{*2}\right) = 0\,.$$

Postupnými úpravami potom vyjadríme hľadanú rýchlosť v^*

$$\frac{M}{2RT} v^{*2} = 1\,,$$

$$\underline{\underline{v^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}}}}\,.$$

Výrazy pre najpravdepodobnejšiu rýchlosť, strednú rýchlosť a strednú kvadratickú rýchlosť molekúl plynu sú:

najpravdepodobnejšia rýchlosť: $v^* = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$,

stredná rýchlosť: $v_{\mathrm{str}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$,

stredná kvadratická rýchlosť: $v_{\mathrm{kv}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$.

Porovnaním týchto výrazov vidíme, že $v_{\mathrm{kv}} > v_{\mathrm{str}} > v^*$.

Odpoveď: Najpravdepodobnejšia rýchlosť molekúl plynu správajúcich sa podľa Maxwellovho rozdelenia rýchlostí má hodnotu $\sqrt{\frac{2RT}{M}}$. Pri porovnaní veľkostí najpravdepodobnejšej rýchlosti, strednej rýchlosti a strednej kvadratickej rýchlosti molekúl plynu má z nich najväčšiu hodnotu stredná kvadratická rýchlosť, potom nasleduje stredná rýchlosť, najmenšiu hodnotu má najpravdepodobnejšia rýchlosť molekúl plynu.

Poznámka: pri derivovaní funkcie $f(v)$ sme využili výsledok nasledovného postupu derivovania funkcie:

$$f(x) = x^2 e^{-kx^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = x^2\left(-2kxe^{-kx^2}\right) + 2xe^{-kx^2} = -2kx^3e^{-kx^2} + 2xe^{-kx^2} = 2xe^{-kx^2}\left(1 - kx^2\right),$$

kde k je konštanta.

10.5 Meteorologický balón naplnený héliom (He) má na povrchu Zeme pri tlaku 1 atm a teplote 20 °C objem 20 m^3. Aký bude objem balóna, keď vystúpi do výšky, kde je tlak 40 kPa a teplota -15 °C?

Riešenie

Keďže počet molekúl He v balóne je konštantný, tak stavovú rovnicu môžeme písať v tvare:

$$\frac{pV}{T} = konšt.,$$

resp. $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$,

kde dolným indexom „1“ sú označené veličiny prislúchajúce balónu na povrchu Zeme, indexom „2“ sú označené veličiny prislúchajúce balónu v danej výške nad povrchom Zeme. Z tejto rovnice si môžeme priamo vyjadriť neznámy objem V_2:

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1}\frac{T_2}{p_2} = \frac{101325\,\mathrm{Pa}\cdot 20\,\mathrm{m}^3}{293{,}15\,\mathrm{K}}\cdot\frac{258{,}15\,\mathrm{K}}{40\cdot 10^3\,\mathrm{Pa}} = \underline{\underline{44{,}6\,\mathrm{m}^3}}\,.$$

Odpoveď: V danej výške bude mať balón objem 44,6 m^3.

Poznámka: Jednotka „atmosféra“ (atm) je jednotkou tlaku, pričom 1 atm = 101 325 Pa.

10.6 V uzavretej nádobe objemu 1 liter sa nachádza plyn pri tlaku 5 atm a teplote 25 °C. Vplyvom netesnosti začne plyn pomaly unikať, takže po určitom čase tlak klesol na hodnotu 4 atm, pričom jeho teplota sa nemenila. Koľko molekúl plynu uniklo z nádoby?

Riešenie

Na začiatku procesu je stavová rovnica plynu: $p_1 V = n_1 RT$,

na konci procesu je stavová rovnica plynu: $p_2 V = n_2 RT$.

Ak si z týchto rovníc vyjadríme látkové množstvo plynu na začiatku (n_1) a na konci (n_2) procesu, dostaneme:

$$n_1 = \frac{p_1 V}{RT}\,, \qquad n_2 = \frac{p_2 V}{RT}\,.$$

Tieto látkové množstvá prepočítame na počet molekúl, podľa vzťahu: $n = \dfrac{N}{N_\mathrm{A}}$, teda:

$$N_1 = \frac{p_1 V}{RT} N_\mathrm{A}\,, \qquad N_2 = \frac{p_2 V}{RT} N_\mathrm{A}\,.$$

Potom počet molekúl ktoré z nádoby unikli, je:

$$N_1 - N_2 = \frac{p_1 V}{RT} N_\mathrm{A} - \frac{p_2 V}{RT} N_\mathrm{A} = \frac{V}{RT} N_\mathrm{A}\left(p_1 - p_2\right) =$$

$$= \frac{10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}\cdot 298{,}15\,\mathrm{K}}\cdot 6{,}023\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}\cdot\left(5-4\right)\cdot 101325\,\mathrm{Pa} = \underline{\underline{2{,}46\cdot 10^{22}}}\,.$$

Odpoveď: Z nádoby uniklo približne $2{,}46.10^{22}$ molekúl plynu.

10.7 Odhadnite celkovú hmotnosť vzduchu v miestnosti, v ktorej práve ste.

Riešenie

Pre vyriešenie úlohy musíme predpokladať, že poznáme hodnoty niektorých veličín. Ich hodnoty budú nasledovné:

tlak vzduchu v miestnosti: 101325 Pa

teplota vzduchu v miestnosti: 25 °C

objem vzduchu v miestnosti: 90 m^3

zloženie vzduchu: 79 hm.% N_2, 21 hm.% O_2 (v hmotnostných percentách)

molárna hmotnosť dusíka (N_2): 28 $g.mol^{-1}$

molárna hmotnosť kyslíka (O_2): 32 $g.mol^{-1}$

V stavovej rovnici $pV = nRT$ si napíšeme látkové množstvo vzduchu v miestnosti ako súčet látkového množstva dusíka (n_1) a látkového množstva kyslíka (n_2), teda:

$$pV = (n_1 + n_2)RT\ .$$

Ďalej pre n_1 a n_2 použijeme vzťahy $n_1 = \dfrac{m_1}{M_1}$ a $n_2 = \dfrac{m_2}{M_2}$, kde veličiny označené dolným indexom „1“ sa vzťahujú na dusík, veličiny označené dolným indexom „2“ sa vzťahujú na kyslík. Potom:

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT\ .$$

Keď celkovú hmotnosť vzduchu v miestnosti si označíme ako m, podľa uvedeného zloženia vzduchu platí:

$$m_1 = 0{,}79m\ , \qquad m_2 = 0{,}21m\ .$$

Potom predchádzajúci tvar stavovej rovnice môžeme upraviť:

$$pV = \left(\frac{0{,}79m}{M_1} + \frac{0{,}21m}{M_2}\right)RT = mRT\left(\frac{0{,}79}{M_1} + \frac{0{,}21}{M_2}\right) = mRT\frac{0{,}79M_2 + 0{,}21M_1}{M_1M_2}$$

a nakoniec si z toho vyjadríme hľadanú hmotnosť vzduchu:

$$m = \frac{pV}{RT}\frac{M_1M_2}{0{,}79M_2 + 0{,}21M_1} =$$

$$= \frac{101325\mathrm{Pa}\cdot 90\mathrm{m}^3}{8{,}314\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot 298{,}15\mathrm{K}}\cdot\frac{32\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot 28\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}}{\left(0{,}79\cdot 32\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\right)+\left(0{,}21\cdot 28\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\right)} =$$

$$= \underline{\underline{105{,}8\mathrm{kg}}}\ .$$

Odpoveď: Hmotnosť vzduchu v danej miestnosti je približne 105,8 kg.

Poznámka: Na prvý pohľad sa môže zdať zvláštne, že hmotnosť vzduchu v relatívne malej miestnosti je viac ako 100 kg. Pre ilustrovanie hmotnosti vzduchu si však stačí uvedomiť, že normálny atmosférický tlak je okolo 10^5 Pa. Čo to znamená? Že na plochu 1 m^2 zemského povrchu pôsobí sila 100 000 N, ktorá je vyvolaná tiažou stĺpca vzduchu nad touto plochou. A aká je hmotnosť tohto stĺpca? Viac ako 10 ton! Takže vzduch nie je taký ľahký, ako by sa nám mohlo zdať.

10.8 V uzavretej nádobe sa nachádza plyn pri tlaku 20 barov a teplote 20 °C. O koľko sa zvýši tlak v nádobe, keď sa nádoba ohreje na 100 °C? Vypočítajte tiež, aké látkové množstvo plynu pripadá na objem jeden liter.

Riešenie

Stavová rovnica ideálneho plynu na začiatku je:

$$p_1 V = nRT_1,$$

stavová rovnica ideálneho plynu po zvýšení teploty je:

$$p_2 V = nRT_2.$$

Z druhej rovnice si vyjadríme tlak plynu:

$$p_2 = \frac{nRT_2}{V},$$

v tejto rovnici však nepoznáme *n* ani *V*. Z prvej rovnice si však môžeme vyjadriť podiel:

$$\frac{n}{V} = \frac{p_1}{RT_1},$$

čo keď dosadíme do rovnice pre tlak p_2, dostaneme:

$$p_2 = \frac{p_1}{RT_1} RT_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 20\,\text{bar}\,\frac{373{,}15\,\text{K}}{293{,}15\,\text{K}} = \underline{\underline{25{,}5\,\text{bar}}}.$$

Látkové množstvo pripadajúce na objem jeden liter vypočítame dosadením do predtým uvedeného vzťahu:

$$\frac{n}{V} = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{20 \cdot 10^5\,\text{Pa}}{8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 293{,}15\,\text{K}} = 820{,}6\,\text{mol} \cdot \text{m}^{-3} = \underline{\underline{0{,}8206\,\text{mol} \cdot \text{l}^{-1}}}.$$

Odpoveď: Po zohriatí sa za uvedených podmienok zvýši tlak plynu na hodnotu 25,5 baru. Na jeden liter objemu pripadá látkové množstvo 0,8206 molu.

Poznámka: Jednotka „bar“ je jednotka tlaku, pričom platí, že 1 bar = 10^5 Pa.

10.9 Hustota vzduchu za normálnych podmienok (teda pri tlaku 101325 Pa a teplote 25 °C) je asi 1,19 kg.m^{-3}. Hustota vzduchu v istom mieste nad radiátorom je 1 kg.m^{-3}. Aká je v tom mieste teplota, ak predpokladáme, že tlak je stále 101325 Pa?

Riešenie

Je zrejmé, že pri daných podmienkach bude v rovnakom objeme pri rôznych teplotách rôzny počet molekúl vzduchu.

Stavová rovnica vzduchu v tomto objeme *V* bude za normálnych podmienok:

$pV = n_1RT_1$,

stavová rovnica vzduchu v tom istom objeme nad radiátorom, teda pri teplote T_2, bude:

$= \quad {}_2 \quad {}_2.$

Tieto rovnice si upravíme tak, aby v nich vystupovala hustota.

1. rovnica: $pV = \frac{m_1}{M} RT_1$,

po úprave: $\frac{pM}{R} = \frac{m_1}{V} T_1 = \rho_1 T_1$.

2. rovnica: $pV = \frac{m_2}{M} RT_2$,

po úprave: $\frac{pM}{R} = \frac{m_2}{V} T_2 = \rho_2 T_2$.

Týmto dostávame sústavu dvoch rovníc:

$\frac{pM}{R} = \rho_1 T_1$, $\qquad \frac{pM}{R} = \rho_2 T_2$.

Porovnaním týchto rovníc vidíme, že:

$\rho_1 T_1 = \rho_2 T_2$

a z tejto rovnice si už môžeme vyjadriť neznámu teplotu T_2:

$$T_2 = T_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} = 298{,}15\,\mathrm{K} \frac{1{,}19\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}}{1\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}} = 354{,}8\,\mathrm{K} = \underline{\underline{81{,}7\,°\mathrm{C}}}.$$

Odpoveď: Pri daných podmienkach je teplota nad radiátorom 81,7 °C.

10.10 Teplovzdušný balón má guľový tvar, s polomerom 3 m.

a) Koľko mólov vodíka (H_2) treba na jeho nahustenie na tlak 1 atm pri okolitej teplote 25 °C?

b) Akú veľkú užitočnú hmotnosť môže balón uniesť v malých výškach nad povrchom Zeme, ak hustota vzduchu v týchto výškach je približne 1,19 kg.m^{-3}?

c) Ako sa zmení užitočná hmotnosť vypočítaná v predchádzajúcom bode, ak na naplnenie balóna použijeme namiesto vodíka hélium (He)?

Molárna hmotnosť H_2 je 2 g.mol^{-1}, molárna hmotnosť He je 4 g.mol^{-1}.

Riešenie

a) počet mólov vodíka vypočítame pomocou stavovej rovnice:

$pV = nRT$,

teda:

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{p \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{RT} \cdot \frac{101325\,\mathrm{Pa} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (3\,\mathrm{m})^3}{8{,}314\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot 298{,}15\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{4623\,\mathrm{mol}}}\,.$$

b) Maximálnu užitočnú záťaž vypočítame z podmienky, že vtedy sa celková tiažová sila pôsobiaca na balón so záťažou rovná vztlakovej sile:

$G = F_{\mathrm{vz}}$

po dosadení známych vzťahov pre tiažovú a vztlakovú silu a po uvážení, že celková tiažová sila pozostáva z tiažovej sily pôsobiacej na záťaž nesenú balónom (teda užitočnú záťaž) ako aj z tiažovej sily pôsobiacej na plyn uzavretý v balóne, dostaneme:

$mg + nMg = \rho Vg$,

kde m je užitočná záťaž, n je látkové množstvo vodíka v balóne, M je molárna hmotnosť vodíka, ρ je hustota vzduchu, V je objem balóna, g je tiažové zrýchlenie.

Po vyjadrení m z tejto rovnice dostaneme:

$$m = \rho V - nM = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 - nM =$$

$$= 1{,}19\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (3\,\mathrm{m})^3 - 4623\,\mathrm{mol} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1} = \underline{\underline{125{,}3\,\mathrm{kg}}}\,.$$

c) Pri výpočte, ako sa zmení maximálna užitočná záťaž keď v balóne nahradíme vodík héliom stačí uvážiť, ako sa zmení výsledný vzťah z predchádzajúceho bodu. Hmotnosť plynu tu vyjadruje člen nM. Keďže látkové množstvo plynu sa nezmení pri nahradení vodíka héliom (výpočet v bode „a" nezávisí od druhu plynu), tak jediná zmena sa týka molárnej hmotnosti. Po dosadení molárnej hmotnosti hélia dostaneme výsledok:

$$m = \rho V - nM = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 - nM =$$

$$= 1{,}19\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (3\,\mathrm{m})^3 - 4623\,\mathrm{mol} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1} = \underline{\underline{116{,}1\,\mathrm{kg}}}\,.$$

Odpoveď: Na naplnenie daného balóna pri daných podmienkach treba 4623 mólov plynu. Maximálna užitočná záťaž v prípade, že ako plyn použijeme vodík, je 125,3 kg. Maximálna užitočná záťaž v prípade, že ako plyn použijeme hélium, je 116,1 kg.

10.11 V nádobe s objemom 0,5 m^3 sa nachádza zmes dvoch plynov, ktorých látkové množstvá sú 1 mól a 4 móly. Teplota zmesi je 50 °C. Vypočítajte parciálne tlaky jednotlivých plynov a celkový tlak zmesi.

Riešenie

Pre jednotlivé plyny zmesi platí:

$p_1 V = n_1 RT$, $\qquad$ $p_2 V = n_2 RT$.

Z týchto rovníc jednoducho vyjadríme:

$$p_1 = \frac{n_1 RT}{V} = \frac{1\text{mol} \cdot 8{,}314\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 323{,}15\text{K}}{0{,}5\text{m}^3} = \underline{\underline{5373{,}3\text{Pa}}}\,,$$

$$p_2 = \frac{n_2 RT}{V} = \frac{4\text{mol} \cdot 8{,}314\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 323{,}15\text{K}}{0{,}5\text{m}^3} = \underline{\underline{21493{,}3\text{Pa}}}\,.$$

Celkový tlak zmesi plynov je potom:

$$p = p_1 + \text{p}_2 = 5373{,}3\,\text{Pa} + 21493{,}3\,\text{Pa} = \underline{\underline{26866{,}6\,\text{Pa}}}$$

Odpoveď: Parciálne tlaky jednotlivých plynov danej zmesi sú 5373,3 Pa a 21493,3 Pa, celkový tlak zmesi je 26866,6 Pa.

10.12 V tlakovej nádobe s objemom 10 litrov sa nachádza 1 kg oxidu uhličitého (CO_2), pri teplote 10 °C. Molárna hmotnosť CO_2 je 44 g.mol^{-1}. Vypočítajte tlak CO_2:

a) podľa stavovej rovnice ideálneho plynu
b) podľa Van der Waalsovej rovnice reálneho plynu, ak Van der Waalsove parametre pre CO_2 sú:

$$a = 3{,}64\,\text{atm} \cdot \text{l}^2 \cdot \text{mol}^{-2}$$
$$b = 4{,}267 \cdot 10^{-2}\,\text{l} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Riešenie

Látkové množstvo CO_2 je:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1\,\text{kg}}{44 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}} = 22{,}7\,\text{mol}\,.$$

a) Podľa stavovej rovnice ideálneho plynu:

$$pV = nRT$$

je tlak plynu:

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{22{,}7\,\text{mol} \cdot 8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 283{,}15\,\text{K}}{10 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3} = \underline{\underline{5{,}34\,\text{MPa}}}\,.$$

b) Podľa Van der Waalsovej rovnice reálneho plynu:

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

a po úprave :

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right) = \frac{nRT}{(V - nb)}$$

si vyjadríme tlak plynu:

$$p = \frac{nRT}{(V - nb)} - a\frac{n^2}{V^2} = \frac{22{,}7\,\text{mol} \cdot 8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 283{,}15\,\text{K}}{10 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 - 22{,}7\,\text{mol} \cdot 4{,}267 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}} -$$

$$- 0{,}3688\,\text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}\,\frac{(22{,}7\,\text{mol})^2}{\left(10 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3\right)^2} = \underline{\underline{4{,}02\,\text{MPa}}}\,.$$

Odpoveď: Pokiaľ by sa CO_2 správal za uvedených podmienok ako ideálny plyn, jeho tlak by bol 5,34 MPa. Podľa Van der Waalsovej rovnice reálneho plynu je však jeho tlak 4,02 MPa.

Poznámka 1: Vidíme, že hodnoty parametrov a, b boli zadané pomocou jednotiek atmosféra, liter a mol. Samozrejme, pri výpočte sme si museli najskôr previesť jednotky atmosféra a liter na základné jednotky Pascal a meter kubický, takže

$$a = 3{,}64\,\text{atm} \cdot \text{l}^2 \cdot \text{mol}^{-2} = 3{,}64 \cdot 101325\,\text{Pa} \cdot \left(10^{-3}\,\text{m}^3\right)^2 \cdot \text{mol}^{-2} = 0{,}3688\,\text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$$
$$b = 4{,}267 \cdot 10^{-2}\,\text{l} \cdot \text{mol}^{-1} = 4{,}267 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} = 4{,}267 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

Poznámka 2: Z definície ideálneho plynu vyplýva, že akýkoľvek plyn môžeme považovať za ideálny plyn, pokiaľ je dostatočne „zriedený“. Kritériom, dokedy môžeme správanie sa plynu približne aproximovať rovnicou ideálneho plynu, je práve látkové množstvo plynu pripadajúce na jednotku objemu; a táto hodnota by nemala presiahnuť hodnotu asi 1 mol na liter. V tomto príklade je táto hodnota 2,27 molu na liter, a preto vo výsledku je výrazný rozdiel medzi hodnotou tlaku vypočítanou pomocou stavovej rovnice ideálneho plynu, a hodnotou tlaku vypočítanou pomocou Van der Waalsovej rovnice reálneho plynu.

10.13 Vypočítajte kritickú teplotu a kritický tlak pre dusík (N_2), keď jeho Van der Waalsove parametre sú:

$$a = 1{,}408\,\text{atm} \cdot \text{l}^2 \cdot \text{mol}^{-2}$$
$$b = 3{,}913 \cdot 10^{-2}\,\text{l} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Riešenie

Najskôr si opäť prevedieme hodnoty parametrov *a*, *b* na základné jednotky:

$$a = 1{,}408\,\mathrm{atm}\cdot \mathrm{l}^2 \cdot \mathrm{mol}^{-2} = 1{,}408 \cdot 101325\,\mathrm{Pa} \cdot \left(10^{-3}\,\mathrm{m}^3\right)^2 \cdot \mathrm{mol}^{-2} = 0{,}1427\,\mathrm{Pa}\cdot \mathrm{m}^6 \cdot \mathrm{mol}^{-2}$$

$$b = 3{,}913 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{l}\cdot \mathrm{mol}^{-1} = 3{,}913 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{mol}^{-1} = 3{,}913 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{mol}^{-1}$$

Pomocou Van der Waalsových parametrov môžeme určiť kritickú teplotu a kritický tlak plynu podľa nasledovných vzťahov:

$$T_c = \frac{8a}{27Rb} = \frac{8 \cdot 0{,}1427\,\mathrm{Pa}\cdot \mathrm{m}^6 \cdot \mathrm{mol}^{-2}}{27 \cdot 8{,}314\,\mathrm{J}\cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot 3{,}913 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{mol}^{-1}} = 130\,\mathrm{K} = \underline{\underline{-143{,}2\,°\mathrm{C}}}$$

$$p_c = \frac{a}{27b^2} = \frac{0{,}1427\,\mathrm{Pa}\cdot \mathrm{m}^6 \cdot \mathrm{mol}^{-2}}{27 \cdot \left(3{,}913 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{mol}^{-1}\right)^2} = \underline{\underline{3{,}45\,\mathrm{MPa}}}\,.$$

Odpoveď: Kritická teplota pre dusík je -143,5 °C, kritický tlak je asi 3,45 MPa.

11 TERMODYNAMIKA

Teoretický úvod

a) Termodynamika: časť fyziky, ktorá popisuje tepelné procesy prebiehajúce v látkach.

b) Hmotnostná tepelná kapacita: množstvo tepla, ktoré musíme dodať jednému kilogramu látky, aby sa ohrial o jeden kelvin.

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T},$$

kde Q je množstvo tepla dodané látke, m je hmotnosť látky, ΔT je rozdiel medzi konečnou a počiatočnou teplotou látky.

c) Molárna tepelná kapacita: množstvo tepla, ktoré musíme dodať jednému mólu látky, aby sa ohrial o jeden kelvin.

$$C = \frac{Q}{n \cdot \Delta T},$$

kde n je látkové množstvo látky.

d) Uvedené vzťahy pre hmotnostnú a molárnu tepelnú kapacitu platia vtedy, ak v látke neprebieha žiadna fázová premena. Vzťah medzi hmotnostnou a molárnou tepelnou kapacitou je vyjadrený ako:

$$C = M \cdot c,$$

kde M je molárna hmotnosť látky.

e) Pre plyny rozoznávame tepelnú kapacitu pri konštantnom objeme a pri konštantnom tlaku. Vzťah medzi molárnymi tepelnými kapacitami pri konštantnom objeme (C_v) a konštantnom tlaku (C_p) je vyjadrený Mayerovou rovnicou:

$$C_p - C_V = R.$$

f) Pri fázových premenách, ako sú napr. topenie, tuhnutie, vyparovanie, atď., platí vzťah:

$$Q = m \cdot l,$$

kde hmotnostná skupenská tepelná kapacita fázovej premeny l je množstvo tepla, ktoré musíme dodať (odobrať) jednému kilogramu látky, aby v ňom prebehla fázová premena. Podobne môžeme definovať molárnu skupenskú tepelnú kapacitu fázovej premeny L, pomocou vzťahu:

$$Q = n \cdot L .$$

g) Kalorimetrická rovnica: ak dáme do vzájomného tepelného kontaktu dve telesá s rôznymi teplotami, teplo bude prechádzať z teplejšieho telesa na chladnejšie, pričom množstvo tepla Q'_1 ktoré odovzdá teplejšie teleso sa bude rovnať množstvu tepla Q_2, ktoré prijme chladnejšie teleso.

$$Q'_1 = Q_2 ,$$

pričom apostrof pri teple Q'_1 znamená, že je to teplo, ktoré z telesa odchádza.

h) Ďalším javom, ktorý sprevádza zmenu teploty látok, je zmena ich objemu. Teplotnú závislosť objemu látky možno zjednodušene vyjadriť vzťahom:

$$V = V_0 \left(1 + \alpha_V \cdot \Delta T\right),$$

kde V je objem látky pri teplote T, V_0 je počiatočný objem (objem pri teplote T_0), ΔT je rozdiel medzi teplotou T a počiatočnou teplotou T_0, teda $\Delta T = T - T_0$, a α_V je teplotný koeficient objemovej rozťažnosti. Pre tuhé látky sa častejšie určuje závislosť ich dĺžky od teploty, ktorú zjednodušene môžeme vyjadriť vzťahom:

$$l = l_0 \left(1 + \alpha_l \cdot \Delta T\right),$$

kde α_l je teplotný koeficient dĺžkovej rozťažnosti. Vzťah medzi koeficientom objemovej a koeficientom dĺžkovej rozťažnosti je približne $\alpha_V = 3\alpha_l$.

i) Termodynamický systém: časť priestoru (obsahujúca určitý súbor látok) oddelená od okolia skutočným alebo mysleným rozhraním. Podľa vlastností rozhrania rozoznávame systémy:

- otvorené: umožňujú výmenu energie (tepla, práce) aj látky s okolím
- uzavreté: umožňujú výmenu energie, ale nie výmenu látky s okolím
- izolované: neumožňujú výmenu energie ani výmenu látky s okolím

j) Prvá veta termodynamická: teplo Q, ktoré je dodávané z okolia do systému, sa spotrebuje na zvýšenie vnútornej energie ΔU systému a na prácu W', ktorú systém vykoná:

$Q = \Delta U + W'$.

Ak uvažujeme, že proces ktorým sa systém dostáva z počiatočného do konečného stavu je vratný (proces ktorý prebieha nekonečne pomaly, cez sériu rovnovážnych stavov), tak práca ktorú pritom systém vykoná, je daná vzťahom:

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p dV ,$$

kde p je tlak v systéme, V_0 je počiatočný a V_1 konečný objem systému.

Ak ďalej uvažujeme, že systém je tvorený ideálnym plynom, tak zmenu vnútornej energie systému môžeme vyjadriť pomocou vzťahov:

$$\Delta U = \frac{i}{2} nR \cdot \Delta T = mc_V \cdot \Delta T = nC_V \cdot \Delta T ,$$

kde i je počet stupňov voľnosti molekúl plynu.

k) Podľa konvencie kladná hodnota tepla Q znamená, že je to teplo, ktoré prechádza z okolia do systému, záporná hodnota tejto veličiny predstavuje teplo Q', ktoré prechádza zo systému do okolia. Podobne kladná hodnota práce W' predstavuje prácu konanú systémom, záporná hodnota tejto veličiny predstavuje prácu W konanú zvonka na systéme

$Q' = - Q$, $\quad W = - W'$.

l) Základné deje v ideálnom plyne:

- izobarický dej (Gay-Lussacov zákon): $p = konšt.$

  platí: $\frac{V}{T} = konšt.$

- izotermický dej (Boylov-Mariottov zákon): $T = konšt.$

  platí: $pV = konšt.$

- izochorický dej (Charlesov zákon): $V = konšt.$

  platí: $\frac{p}{T} = konšt.$

- adiabatický dej: $Q = 0$, teda pri tomto deji nedochádza k výmene tepla s okolím.

platí: $pV^{\chi} = konšt.$,

kde Poissonova konštanta $\chi = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V}$. Keďže hodnotu Poissonovej konštanty možno tiež vyjadriť pomocou vzťahu:

$$\chi = \frac{i+2}{i},$$

tak možno určiť, že:

$\chi = \frac{5}{3}$ pre plyn tvorený jednoatómovými molekulami,

$\chi = \frac{7}{5}$ pre plyn tvorený dvojatómovými molekulami,

$\chi = \frac{8}{6}$ pre plyn tvorený trojatómovými a viacatómovými molekulami.

m) Druhá veta termodynamická hovorí o entropii. Entropia je veličina, ktorá je mierou neusporiadanosti. Pre zmenu entropie systému vo všeobecnosti platí:

$$\mathrm{d}S \geq \frac{\mathrm{d}Q}{T},$$

pričom znamienko „=“ platí vtedy, ak v systéme prebiehajú len vratné deje, znamienko „>“ platí vtedy, ak v systéme prebiehajú aj nevratné deje. Z tohto vzťahu napríklad vyplýva, že v izolovanom systéme, v ktorom prebiehajú len vratné procesy, sa entropia nemení.

n) Tepelné stroje sú cyklicky pracujúce stroje, ktoré odoberajú teplo z ohrievača, časť tohto tepla menia na prácu, a zvyšok tepla odovzdávajú chladiču. Účinnosť tepelného stroja je všeobecne určená vzťahom:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1},$$

kde Q_1 je teplo prijaté z ohrievača, Q'_2 je teplo odovzdané chladiču. Rozdiel $Q_1 - Q'_2$ predstavuje prácu W' vykonanú tepelným strojom.

Chladiace zariadenia sú taktiež cyklicky pracujúce zariadenia, ktoré odoberajú teplo z chladiča, toto teplo zväčšené o vonkajšiu prácu odovzdávajú ohrievaču. Účinnosť chladiaceho zariadenia je všeobecne určená vzťahom:

$$\eta = \frac{Q'_1 - Q_2}{Q'_1},$$

kde Q'_1 je teplo odovzdané ohrievaču, Q_2 je teplo prijaté z chladiča. Rozdiel $Q'_1 - Q_2$ predstavuje vonkajšiu prácu W vykonanú na chladiacom zariadení.

Najvyššia účinnosť je pri Carnotovom cykle. Tento cyklus pozostáva z dvoch izotermických a dvoch adiabatických dejov. Účinnosť Carnotovho cyklu možno jednoducho vyjadriť tiež pomocou vzťahu:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

kde T_1 je teplota ohrievača, T_2 je teplota chladiča.

o) V termodynamike je dôležité rozumieť rozdielu medzi veličinami, ktoré charakterizujú stav systému (teplota, tlak, objem, látkové množstvo, vnútorná energia, entropia) a veličinami, ktoré do sústavy dodávame alebo odoberáme pri rôznych termodynamických dejoch (teplo, práca). Hodnoty veličín, ktoré patria do prvej skupiny (stavové veličiny) sú jednoznačne určené stavom systému a nezávisia od toho, ako sa systém do tohto stavu dostal. Hodnoty veličín, ktoré patria do druhej skupiny (dejové veličiny) charakterizujú dej, ktorým sa systém dostal z počiatočného stavu do konečného stavu, a nepopisujú stav systému!

Príklady

11.1 Máme 2 litre vody teploty 20 °C. Koľko tepla musíme dodať, aby sme:

a) vodu ohriali na teplotu 90 °C ?

b) vodu priviedli do varu (pri normálnom atmosférickom tlaku) a 5 % z nej odparili?

Viete že hustota vody pri izbovej teplote je približne 1000 kg.m^{-3}, hmotnostná tepelná kapacita vody je 4186 J.kg^{-1}.K^{-1}, a hmotnostné skupenské teplo vyparovania vody je 2,256.10^{6} J.kg^{-1}.

Riešenie

a) Teplo potrebné na ohriatie vody je:

$$Q = mc \cdot \Delta T = mc(T_1 - T_0) = 2\,\mathrm{kg} \cdot 4186\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot (90 - 20)\mathrm{K} = \underline{\underline{586\,\mathrm{kJ}}}\,.$$

b) Tentokrát potrebujeme dodať teplo nielen na ohriatie vody na teplotu varu (100 °C), ale aj na to, aby sme časť vody odparili:

$$Q = mc \cdot \Delta T + 0{,}05m \cdot l = mc(T_2 - T_0) + 0{,}05m \cdot l =$$

$$= 2\,\mathrm{kg} \cdot 4186\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot (100 - 20)\mathrm{K} + \left(0{,}05 \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}256 \cdot 10^6\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1}\right) = 895{,}4\,\mathrm{kJ}\,.$$

Odpoveď: Na ohrev 2 litrov vody z teploty 20 °C na teplotu 90 °C potrebujeme dodať 586 kJ tepla. Ak chceme toto množstvo vody ohriať z teploty 20 °C na teplotu varu a 5 % z nej odpariť, potrebujeme na to dodať teplo 895,4 kJ.

Poznámka 1: Je dobré si pamätať, že keďže hustota vody pri izbovej teplote je približne 1000 kg.m^{-3}, tak hmotnosť 1 litra vody pri tejto teplote je 1 kg.

Poznámka 2: Základnou jednotkou teploty je kelvin. Avšak pri počítaní rozdielu teplôt $\Delta T = (T_2 - T_1)$ si môžeme trochu uľahčiť výpočet využitím toho, že táto hodnota je rovnaká bez ohľadu na to, či teploty T_1 a T_2 predtým prevedieme na hodnoty v kelvinoch, alebo ich necháme v jednotkách °C. Samozrejme, výslednou jednotkou tohto rozdielu teplôt je potom kelvin.

11.2 Do nádrže obsahujúcej 35 kg oleja teploty 30 °C sme pri kalení ponorili ohriaty oceľový predmet hmotnosti 5 kg. Po chvíli sa teplota oleja ustálila na 58 °C. Aká bola teplota oceľového predmetu pred ponorením do oleja? Odparovanie oleja pritom zanedbajte. Merná tepelná kapacita ocele je 460 J.kg^{-1}.K^{-1}, merná tepelná kapacita oleja je 1674 J.kg^{-1}.K^{-1}.

Riešenie

Podľa kalorimetrickej rovnice platí:

$Q'_1 = Q_2$,

kde Q'_1 je teplo odovzdané oceľovým predmetom, Q_2 je teplo prijaté olejom. Po vyjadrení týchto tepiel dostaneme:

$$m_1 c_1 (T_1 - T) = m_2 c_2 (T - T_2),$$

kde T je konečná teplota po dosiahnutí tepelnej rovnováhy medzi predmetom a olejom, m_1 je hmotnosť predmetu, c_1 je hmotnostná tepelná kapacita predmetu, T_1 je počiatočná teplota predmetu. Podobne m_2 je hmotnosť oleja, c_2 je hmotnostná tepelná kapacita oleja, T_2 je počiatočná teplota oleja. Z tejto rovnice si postupnými úpravami vyjadríme hľadanú teplotu T_1:

$$T_1 - T = \frac{m_2 c_2}{m_1 c_1}(T - T_2)$$

$$T_1 = \frac{m_2 c_2}{m_1 c_1}(T - T_2) + T = \frac{35\,\mathrm{kg} \cdot 1674\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}}{5\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}} \cdot (58 - 30)\,\mathrm{K} + 331{,}15\,\mathrm{K} =$$

$$= 1044{,}42\,\mathrm{K} = \underline{\underline{771{,}3\,°\mathrm{C}}}.$$

Odpoveď: Počiatočná teplota daného oceľového predmetu bola 771,3 °C.

11.3 Vypočítajte koľko studenej vody teploty 20 °C musíme naliať do 5 litrov horúcej vody teploty 90 °C, aby sme dostali vodu s teplotou 50 °C. Hustota horúcej vody je pri 90 °C asi 965 kg.m^{-3}, hustota studenej vody pri izbovej teplote je približne 1000 kg.m^{-3}.

Riešenie

Opäť použijeme kalorimetrickú rovnicu:

$Q'_1 = Q_2$,

kde Q'_1 je teplo odovzdané horúcou vodou, Q_2 je teplo prijaté studenou vodou. Konečná teplota je označená ako T, počiatočná teplota horúcej vody je T_1, hmotnosť horúcej vody je m_1, počiatočná teplota studenej vody je T_2, hmotnosť studenej vody je m_2. Po rozpísaní dostaneme:

$$m_1 c (T_1 - T) = m_2 c (T - T_2),$$

kde c je merná tepelná kapacita vody.

Najskôr si určíme hmotnosť horúcej vody:

$$m_1 = \rho_1 V_1 = 965\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3} = 4{,}83\,\mathrm{kg}\,.$$

Potom si z predchádzajúcej rovnice vyjadríme hľadanú hmotnosť studenej vody:

$$m_2 = m_1 \frac{T_1 - T}{T - T_2} = 4{,}83\,\mathrm{kg} \cdot \frac{(90-50)\,\mathrm{K}}{(50-20)\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{6{,}44\,\mathrm{kg}}}\,.$$

Po uvážení hustoty studenej vody to predstavuje objem 6,44 l.

Odpoveď: Za daných podmienok musíme do horúcej vody naliať 6,44 litra studenej vody, aby sa výsledná teplota ustálila na požadovanej hodnote.

11.4 Oceľová tyč má pri teplote 20 °C dĺžku 2 metre. Aký je teplotný koeficient dĺžkovej rozťažnosti ocele, ak pri teplote 600 °C je predĺženie tyče 14 mm vzhľadom na pôvodnú dĺžku pri 20 °C?

Riešenie

Pre dĺžkovú rozťažnosť tyče pri zmene teploty platí:

$$l = l_0 (1 + \alpha_l \cdot \Delta T).$$

Z tejto rovnice si postupne vyjadríme teplotný koeficient dĺžkovej rozťažnosti:

$$l = l_0 + l_0 \alpha_l (T - T_0)$$

$$l - l_0 = l_0 \alpha_l (T - T_0)$$

Keď si výraz na ľavej strane označíme ako predĺženie Δl, tak:

$$\alpha_l = \frac{\Delta l}{l_0 (T - T_0)} = \frac{14 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{m} \cdot (600-20)\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{12{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}}}$$

Odpoveď: Teplotný koeficient dĺžkovej rozťažnosti danej ocele je $12{,}1.10^{-6}$ $\mathrm{K^{-1}}$.

11.5 Vypočítajte o koľko percent sa zvýši objem oleja, keď ho zohrejeme z teploty 25 °C na teplotu 80 °C. Ako sa zmení pritom hustota oleja, ak pri počiatočnej teplote je jeho hustota 900 $\mathrm{kg.m^{-3}}$? Teplotný koeficient objemovej rozťažnosti oleja je 5.10^{-4} $\mathrm{K^{-1}}$.

Riešenie

Pre objemovú rozťažnosť pri zmene teploty platí:

$$V = V_0 (1 + \alpha_V \cdot \Delta T).$$

Túto rovnicu postupne upravíme tak, aby sme z nej vyjadrili relatívnu zmenu objemu:

$$V = V_0 + V_0 \alpha_V \cdot \Delta T$$

$V - V_0 = V_0 \alpha_V \cdot \Delta T$

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha_V \cdot \Delta T = \alpha_V (T_1 - T_0) = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}(80 - 25)\mathrm{K} = 0{,}0275 = \underline{\underline{2{,}75\%}}\,.$$

Keďže pri ohreve sa hmotnosť oleja nemení, platí:

$m = \rho_0 V_0$

$m = \rho_1 V_1$

Z toho vyplýva, že:

$\rho_0 V_0 = \rho_1 V_1$.

Hustotu ρ_1 pri teplote T_1 môžeme teda vyjadriť ako:

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{V_0}{V_1}\,.$$

Ak si za V_1 dosadíme vzťah vyplývajúci z objemovej rozťažnosti oleja, dostaneme:

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{V_0}{V_1} = \rho_0 \frac{V_0}{V_0(1 + \alpha_V \cdot \Delta T)} = \frac{\rho_0}{1 + \alpha_V (T_1 - T_0)} = \frac{900\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}}{1 + 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1} \cdot (80 - 25)\mathrm{K}} =$$
$$= \underline{\underline{876\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}}}$$

Odpoveď: Pri daných podmienkach olej zvýši pri ohreve svoj objem o 2,75%, pričom jeho hustota sa zníži na hodnotu 876 kg.m^{-3}.

11.6 Určte hmotnostné tepelné kapacity c_p a c_v neznámeho plynu, ak viete, že pri teplote 293 K a tlaku 100 kPa je jeho hustota 1,27 kg.m^{-3}. Poissonova konštanta plynu je 1,4.

Riešenie

Budeme vychádzať z Mayerovho vzťahu, ktorý vyjadruje súvis medzi molárnou tepelnou kapacitou plynu za konštantného tlaku a molárnou tepelnou kapacitou plynu za konštantného objemu:

$C_p - C_v = R$.

Z tohto vzťahu teda môžeme písať:

$C_p = C_v + R$

a s využitím vzťahu medzi molárnou a hmotnostnou tepelnou kapacitou ($C = M \cdot c$) môžeme písať:

$M \cdot c_p = M \cdot c_v + R$.

Z tohto vzťahu si vyjadríme c_p:

$$c_p = \frac{M \cdot c_v + R}{M} = c_v + \frac{R}{M}.$$

Keď obidve strany tejto rovnice vydelíme c_v, dostaneme:

$$\frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{M \cdot c_v}.$$

Keďže výraz na ľavej strane predstavuje Poissonovu konštantu, môžeme písať:

$$\chi = 1 + \frac{R}{M \cdot c_v}.$$

Z tejto rovnice si postupne vyjadríme c_v:

$$\frac{R}{M \cdot c_v} = \chi - 1,$$

$$c_v = \frac{R}{M(\chi - 1)}.$$

V tejto rovnici však nepoznáme molárnu hmotnosť plynu M. Skúsime si ju vyjadriť pomocou stavovej rovnice:

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT,$$

potom:

$$M = \frac{mRT}{pV} = \rho \frac{RT}{p},$$

kde ρ je hustota plynu.

Tento výraz potom dosadíme za M do predchádzajúcej rovnice pre c_v:

$$c_v = \frac{R}{M(\chi - 1)} = \frac{R}{(\chi - 1)} \cdot \frac{p}{\rho RT} = \frac{1}{(\chi - 1)} \cdot \frac{p}{\rho T} = \frac{1}{1{,}4 - 1} \cdot \frac{10^5\,\mathrm{Pa}}{1{,}27\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \cdot 293\,\mathrm{K}} =$$

$$= \underline{\underline{671{,}8\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}}}.$$

Hodnotu c_p teraz môžeme určiť zo vzťahu $\chi = \frac{c_p}{c_v}$, teda:

$$c_p = \chi \cdot c_v = 1{,}4 \cdot 671{,}8\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}} = \underline{\underline{940{,}5\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}}}.$$

Odpoveď: Z daných údajov je hmotnostná tepelná kapacita neznámeho plynu za konštantného objemu rovná 671,8 $\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$, jeho hmotnostná tepelná kapacita za konštantného tlaku je 940,5 $\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$.

11.7 Koľko tepla musíme odobrať, ak chceme stlačiť 5 litrov vzduchu na objem 1 liter, a udržiavať pri tom konštantnú teplotu? Počiatočný tlak vzduchu bol 101325 Pa.

Riešenie

Podľa prvej vety termodynamickej platí:

$$Q = \Delta U + W'.$$

Keďže teplota vzduchu sa počas deja nemení, tak $\Delta T = 0$, a teda $\Delta U = 0$. Platí teda rovnosť:

$$Q = W'$$

t.j. plynu dodané teplo Q sa rovná práci W' vykonanej plynom. Pre prácu vykonanú plynom platí:

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p dV .$$

Aby sme mohli vypočítať tento integrál, musíme najskôr určiť, ako sa mení tlak plynu v závislosti od jeho objemu, počas izotermického stláčania. Pre izotermický dej platí:

$$pV = konšt.$$

čo môžeme písať ako:

$$pV = p_0 V_0 ,$$

a z toho vyjadríme tlak p:

$$p = \frac{p_0 V_0}{V} .$$

Po dosadení do vzťahu pre prácu dostaneme:

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p dV = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0}{V} dV = p_0 V_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0} =$$

$$= 101325\,\mathrm{Pa} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot \ln \frac{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = -815{,}4\,\mathrm{J} .$$

Keďže platí $Q = W'$, tak plynu dodané teplo je $Q = \underline{\underline{-815{,}4\,\mathrm{J}}}$. Plynu odobrané teplo je

$Q' = -Q = 815{,}4$ J.

Odpoveď: Pri daných podmienkach musíme počas stláčania vzduchu odobrať 815,4 J tepla.

11.8 Koľko tepla musíme dodať argónu (Ar) objemu 5 litrov, aby pri konštantnom tlaku 0,2 MPa zväčšil svoj objem na dvojnásobný?

Riešenie

Podľa prvej vety termodynamickej platí:

$Q = \Delta U + W'$.

Zmenu vnútornej energie môžeme určiť pomocou vzťahu:

$$\Delta U = \frac{i}{2} nR \cdot \Delta T,$$

kde i = 3 (keďže argón je 1-atómový plyn), ostatné veličiny na pravej strane si vyjadríme pomocou stavovej rovnice

na začiatku deja: $pV_0 = nRT_0$,

na konci deja: $pV_1 = nRT_1$.

Odčítaním týchto rovníc dostaneme:

$nR(T_1 - T_0) = p(V_1 - V_0)$,

čiže:

$nR \cdot \Delta T = p(V_1 - V_0)$.

Dosadením tohto výrazu do vzťahu pre ΔU dostaneme, že zmena vnútornej energie plynu je:

$$\Delta U = \frac{i}{2} nR \cdot \Delta T = \frac{i}{2} p(V_1 - V_0) = \frac{i}{2} p(2V_0 - V_0) = \frac{i}{2} pV_0 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 10^6\,\mathrm{MPa} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 1500\,\mathrm{J}.$$

Práca vykonaná plynom je daná vzťahom:

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p dV.$$

Keďže tlak počas daného deja je konštantný, túto prácu vypočítame ako:

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p dV = p \int_{V_0}^{V_1} dV = p(V_1 - V_0) = p(2V_0 - V_0) = pV_0 = 0{,}2 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{J}.$$

Nakoniec dosadíme vypočítané hodnoty ΔU a W' do vzťahu vyjadrujúceho prvú vetu termodynamickú, čím pre teplo dodané plynu dostaneme hodnotu:

$$Q = \Delta U + W' = 1500\,\mathrm{J} + 1000\,\mathrm{J} = \underline{\underline{2500\,\mathrm{J}}}.$$

Odpoveď: Pri daných podmienkach musíme argónu dodať teplo 2500 J, aby zväčšil svoj objem na dvojnásobný.

11.9 Dusík (N_2) sa nachádza v objeme 500 cm^3 pri tlaku 80 kPa. Vypočítajte prácu ktorú tento plyn vykoná, ak adiabaticky zväčší svoj objem na trojnásobný.

Riešenie

Práca vykonaná plynom je určená vzťahom:

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p dV .$$

Závislosť tlaku od objemu plynu si určíme pomocou rovnice pre adiabatický dej:

$$pV^{\chi} = konšt.$$

Čiže to môžeme písať v tvare:

$$pV^{\chi} = p_0 V_0^{\chi} ,$$

kde Poissonova konštanta pre dusík

$$\chi = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1{,}4 ,$$

keďže dusík je dvojatómový plyn (počet stupňov voľnosti je 5).

Potom môžeme závislosť tlaku od objemu plynu vyjadriť ako:

$$p = \frac{p_0 V_0^{\chi}}{V^{\chi}} .$$

Po dosadení tohto výrazu do vzťahu pre prácu plynu dostaneme:

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p dV = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0^{\chi}}{V^{\chi}} dV = p_0 V_0^{\chi} \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V^{\chi}} dV = p_0 V_0^{\chi} \int_{V_0}^{V_1} V^{-\chi} dV = p_0 V_0^{\chi} \left[\frac{V^{-\chi+1}}{-\chi+1} \right]_{V_0}^{V_1} =$$

$$= \frac{p_0 V_0^{\chi}}{-\chi+1} \left(V_1^{-\chi+1} - V_0^{-\chi+1} \right).$$

Keď dosadíme $V_1 = 3V_0$ a po menších matematických úpravách dostaneme:

$$W' = \frac{p_0 V_0^{\chi}}{-\chi+1} \left[(3V_0)^{-\chi+1} - V_0^{-\chi+1} \right] = \frac{p_0 V_0^{\chi} V_0^{-\chi+1}}{-\chi+1} \left[3^{-\chi+1} - 1 \right] = \frac{p_0 V_0}{\chi - 1} \left(1 - \frac{1}{3^{\chi-1}} \right) =$$

$$= \frac{80 \cdot 10^3 \, \mathrm{Pa} \cdot 500 \cdot 10^{-6} \, \mathrm{m}^3}{1{,}4 - 1} \left(1 - \frac{1}{3^{1{,}4-1}} \right) = \underline{\underline{35{,}6 \, \mathrm{J}}} .$$

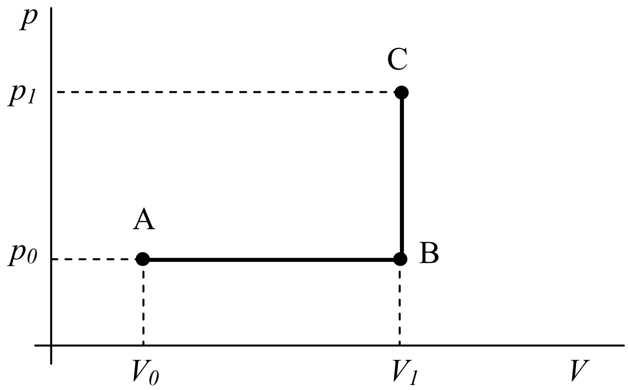
Odpoveď: Dusík pri danom adiabatickom deji vykoná prácu 35,6 J.

11.10 Počiatočný objem kyslíka (O_2) je 5 litrov a jeho tlak 100 kPa. Najskôr ho izobaricky ohrejeme na objem 10 litrov, a následne izochoricky zvýšime jeho tlak na 400 kPa.

Vypočítajte akú prácu plyn vykoná, aké teplo sme mu dodali a ako sa zmenila jeho vnútorná energia.

Riešenie

Na obr. 11.1 je ukázaný *p-V* diagram daného procesu. Najskôr pri izobarickom deji plyn zvyšuje svoj objem a prechádza z bodu A do bodu B, následne počas izochorického deja plyn zvyšuje svoj tlak a prechádza z bodu B do bodu C. Teploty v bodoch A, B, C sú T_0, T_1 a T_2.



Obr. 11.1 Znázornenie izobarického a následne izochorického deja v *p-V* diagrame

Vypočítame si požadované veličiny zvlášť pre izobarický dej a pre izochorický dej.

- izobarický dej:

Prvá veta termodynamická je:

$Q = \Delta U + W'$.

Zmena vnútornej energie je daná vzťahom:

$\Delta U = \frac{i}{2} nR \cdot \Delta T$,

kde počet stupňov voľnosti kyslíka $i = 5$, keďže kyslík je dvojatómový plyn.

Ostatné veličiny na pravej strane si vyjadríme pomocou stavovej rovnice

na začiatku deja: $p_0 V_0 = nRT_0$,

na konci deja: $p_0 V_1 = nRT_1$.

Odčítaním týchto rovníc dostaneme:

$nR(T_1 - T_0) = p_0 (V_1 - V_0)$,

čiže:

$nR \cdot \Delta T = p_0(V_1 - V_0)$.

Dosadením tohto výrazu do vzťahu pre ΔU dostaneme, že zmena vnútornej energie plynu je:

$$\Delta U = \frac{i}{2} p_0 (V_1 - V_0) = \frac{5}{2} \cdot 100 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa} \cdot (10 - 5) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 1250\,\mathrm{J}.$$

Keďže pri izobarickom deji je tlak konštantný, tak práca vykonaná plynom je:

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = p \int_{V_0}^{V_1} dV = p(V_1 - V_0) = 100 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa} \cdot (10 - 5) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 500\,\mathrm{J}.$$

Po dosadení do prvej vety termodynamickej zistíme, aké teplo počas tohto deja bolo dodané kyslíku:

$Q = \Delta U + W' = 1250\,\mathrm{J} + 500\,\mathrm{J} = 1750\,\mathrm{J}$.

- izochorický dej:

Aj teraz budeme postupovať rovnako ako v predchádzajúcom bode.

Prvá veta termodynamická:

$Q = \Delta U + W'$.

Zmena vnútornej energie: $\Delta U = \frac{i}{2} nR \cdot \Delta T$.

Na vyjadrenie veličín na pravej strane opäť použijeme stavovú rovnicu

na začiatku deja: $p_0 V_1 = nRT_1$,

na konci deja: $p_1 V_1 = nRT_2$.

Odčítaním týchto rovníc dostaneme:

$nR(T_2 - T_1) = V_1(p_1 - p_0)$,

čiže:

$nR \cdot \Delta T = V_1(p_1 - p_0)$

Dosadením tohto výrazu do vzťahu pre ΔU dostaneme, že zmena vnútornej energie plynu počas izochorického deja je:

$$\Delta U = \frac{i}{2} V_1 (p_1 - p_0) = \frac{5}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot (400 - 100) \cdot 10^3\,\mathrm{Pa} = 7500\,\mathrm{J}.$$

Práca vykonaná plynom počas izochorického deja je nulová, keďže plyn nemení svoj objem. Preto dodané teplo počas izochorického deja:

$Q = \Delta U = 7500\,\mathrm{J}$.

Celková zmena vnútornej energie plynu teda bude:

$$\Delta U_{celková} = \Delta U_{izobarický} + \Delta U_{izochorický} = 1250\,\mathrm{J} + 7500\,\mathrm{J} = \underline{\underline{8750\,\mathrm{J}}}\,.$$

Celková práca vykonaná plynom:

$$W' = W'_{izobarický} + W'_{izochorický} = 500\,\mathrm{J} + 0\,\mathrm{J} = \underline{\underline{500\,\mathrm{J}}}\,.$$

Celkové teplo dodané plynu:

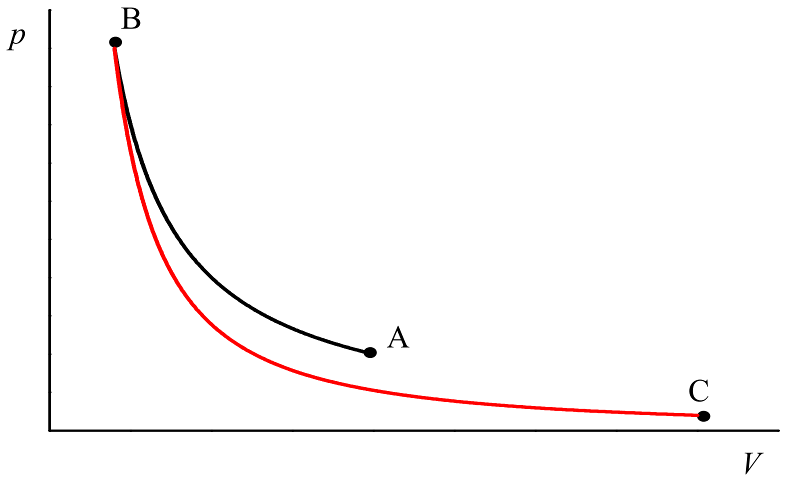
$$Q_{celkové} = Q'_{izobarický} + Q'_{izochorický} = 1750\,\mathrm{J} + 7500\,\mathrm{J} = \underline{\underline{9250\,\mathrm{J}}}\,.$$

Odpoveď: Pri daných podmienkach je celková zmena vnútornej energie plynu 8750 J, celková práca vykonaná plynom je 500 J, a celkové teplo dodané plynu je 9250 J.

11.11 Vzduch s objemom 10 litrov, pri teplote 273 K a tlaku 100 kPa najskôr izotermicky stlačíme na pätinu z pôvodného objemu, a potom necháme adiabaticky rozpínať na dvojnásobok pôvodného objemu. Aká bude výsledná teplota a akú prácu plyn celkovo vykonal?

Riešenie

Na obr. 11.2 je ukázaný *p-V* diagram daného procesu. Najskôr pri izotermickom deji dochádza k stláčaniu plynu pri konštantnej teplote a plyn prechádza z bodu A do bodu B. Následne dochádza k adiabatickému rozpínaniu plynu z bodu B do bodu C.



Obr. 11.2 Znázornenie daného termodynamického procesu v *p-V* diagrame; A-B izotermický dej, B-C adiabatický dej

Hodnoty stavových veličín v naznačených bodoch si označíme nasledovne:

bod A: p_0, V_0, T_0

bod B: p_1, V_1, $T_1 = T_0$

bod C: p_2, V_2, T_2

Je zrejmé, že po prvom deji (izotermickom) ostáva teplota plynu rovnaká ako bola na začiatku, teda T_0. Vypočítame si teraz, ako sa zmenila teplota plynu po druhom (adiabatickom) deji.

Rovnica adiabatického deja je:

$$pV^{\chi} = konšt.$$

alebo ináč napísané:

$$pV^{\chi} = p_1 V_1^{\chi}.$$

Keď si zo stavovej rovnice v tvare:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

vyjadríme tlak p, dostaneme:

$$p = \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{T}{V}.$$

Tento výraz dosadíme za tlak p do predchádzajúcej rovnice pre adiabatický dej, a tým dostaneme:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{T}{V} V^{\chi} = p_1 V_1^{\chi}.$$

Po úprave tejto rovnice dostaneme:

$$\frac{V_1}{T_1} \frac{T}{V} V^{\chi} = V_1^{\chi}$$

a následne:

$$TV^{\chi-1} = T_1 V_1^{\chi-1}$$

Keďže nás zaujíma teplota na konci procesu, na ľavú stranu rovnice dosadíme teplotu a objem v bode C, teda:

$$T_2 V_2^{\chi-1} = T_1 V_1^{\chi-1}.$$

Z tejto rovnice si už jednoducho vyjadríme hľadanú teplotu T_2:

$$T_2 = T_1 \frac{V_1^{\chi-1}}{V_2^{\chi-1}} = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\chi-1}.$$

Po uvážení že $T_1 = T_0$, $V_1 = \frac{V_0}{5}$ a $V_2 = 2V_0$, a keď vieme, že Poissonova konštanta vzduchu $\chi = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$ (vzduch sa skladá najmä z dvojatómových molekúl N_2 a O_2, pre ktoré počet stupňov voľnosti je rovný 5), už môžeme vypočítať teplotu plynu T_2:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\chi-1} = T_0\left(\frac{\frac{V_0}{5}}{2V_0}\right)^{\chi-1} = T_0\left(\frac{1}{10}\right)^{\chi-1} = 273K\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{1{,}4-1} = \underline{\underline{108{,}7K}}\,.$$

Celkovú prácu plynu *W´* vypočítame ako súčet práce plynu počas izotermického deja *W*$_1$*´* a práce plynu počas adiabatického deja *W*$_2$*´*.

Najskôr si určíme prácu vykonanú plynom počas izotermického deja (podobne ako v príklade 11.7):

$$W_1' = \int_{V_0}^{V_1} p dV\,.$$

Z rovnice pre izotermický dej si najskôr určíme, ako závisí tlak plynu od objemu plynu:

$$pV = konšt.$$

resp. $pV = p_0V_0$,

a z tejto rovnice:

$$p = \frac{p_0V_0}{V}\,.$$

Po dosadení do predchádzajúceho integrálu dostaneme:

$$W_1' = \int_{V_0}^{V_1} p dV = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0V_0}{V} dV = p_0V_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = p_0V_0 \ln\frac{V_1}{V_0}\,,$$

a keďže platí $V_1 = \frac{V_0}{5}$, tak:

$$W_1' = p_0V_0 \ln\frac{V_1}{V_0} = p_0V_0 \ln\frac{\frac{V_0}{5}}{V_0} = p_0V_0 \ln\frac{1}{5} = 10^5\,\text{Pa}\cdot 10\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3\cdot\ln\frac{1}{5} =$$

$$= -1609{,}4\,\text{J}\,.$$

Teraz si vypočítame prácu vykonanú plynom počas adiabatického deja (podobne ako v príklade 11.9):

$$W_2' = \int_{V_1}^{V_2} p dV\,.$$

Z rovnice pre adiabatický dej si najskôr určíme, ako závisí tlak plynu od objemu plynu:

$$pV^{\chi} = konšt.$$

resp:

$$pV^{\chi} = p_1 V_1^{\chi}$$

a z tejto rovnice:

$$p = \frac{p_1 V_1^{\chi}}{V^{\chi}}.$$

Po dosadení do predchádzajúceho integrálu dostaneme:

$$W_2' = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^{\chi}}{V^{\chi}} dV = p_1 V_1^{\chi} \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^{\chi}} dV = p_1 V_1^{\chi} \left[\frac{V^{-\chi+1}}{-\chi+1} \right]_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 V_1^{\chi}}{-\chi+1} \left(V_2^{-\chi+1} - V_1^{-\chi+1} \right)$$

Keď dosadíme $V_1 = \frac{V_0}{5}$ a $V_2 = 2V_0$, a z rovnice izotermického deja si vyjadríme:

$$p_1 = \frac{p_0 V_0}{V_1} = \frac{p_0 V_0}{\frac{V_0}{5}} = 5 p_0 ,$$

tak po menších matematických úpravách dostaneme:

$$W_2' = \frac{p_1 V_1^{\chi}}{-\chi+1} \left(V_2^{-\chi+1} - V_1^{-\chi+1} \right) = \frac{5 p_0 \left(\frac{V_0}{5} \right)^{\chi}}{-\chi+1} \left[(2V_0)^{-\chi+1} - \left(\frac{V_0}{5} \right)^{-\chi+1} \right] =$$

$$= \frac{5 p_0 \cdot 5^{-\chi} V_0^{\chi} \cdot V_0^{-\chi+1}}{-\chi+1} \left[2^{-\chi+1} - \left(\frac{1}{5} \right)^{-\chi+1} \right] = \frac{5^{-\chi+1} p_0 V_0}{\chi-1} \left(5^{\chi-1} - \frac{1}{2^{\chi-1}} \right) =$$

$$= \frac{p_0 V_0}{\chi-1} \left(1 - \frac{1}{5^{\chi-1} \cdot 2^{\chi-1}} \right) = \frac{p_0 V_0}{\chi-1} \left(1 - \frac{1}{10^{\chi-1}} \right) =$$

$$= \frac{100 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa} \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{1{,}4-1} \left(1 - \frac{1}{10^{\chi-1}} \right) = 1504{,}7\,\mathrm{J}.$$

Celková práca plynu teda bude:

$$W' = W_1' + W_2' = -1609{,}4\,\mathrm{J} + 1504{,}7\,\mathrm{J} = \underline{\underline{-104{,}7\,\mathrm{J}}}.$$

Záporné znamienko vyjadruje, že celková práca je záporná, a teda viac práce bolo treba vykonať na izotermické stlačenie plynu, ako bola práca vykonaná plynom počas adiabatickej expanzie.

Odpoveď: Po danom termodynamickom procese bola teplota plynu 108,7 K, a celkovo sa na plyne vykonala práca 104,7 J.

11.12 Z uzavretej nádoby, v ktorej sa nachádza hélium (He) pod tlakom 10 MPa, začne poškodeným ventilom plyn pomaly unikať, až tlak klesne na hodnotu atmosférického tlaku 101325 Pa. Celý dej prebieha izotermicky. Určite zmenu entropie pripadajúcej na 1 mol plynu, počas tohto deja.

Riešenie

Budeme uvažovať látkové množstvo 1 mol hélia, ktoré sa nachádza v nádobe. Je zrejmé, že ako plyn uniká z nádoby, bude sa meniť aj molárny objem hélia, teda objem, ktorý pri danom tlaku zaberá 1 mol hélia v nádobe. Pre zmenu entropie jedného mólu plynu môžeme písať:

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}.$$

Teplo dQ si vyjadríme pomocou prvej vety termodynamickej:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{dW}',$$

a po dosadení do predchádzajúceho vzťahu:

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{\mathrm{d}U + \mathrm{dW}'}{T} = \frac{mc_v\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V}{T}.$$

Keďže sa jedná o izotermický dej, platí $\mathrm{d}T = 0$, čiže tiež zmena vnútornej energie je nulová, takže:

$$\mathrm{d}S = \frac{p\mathrm{d}V}{T}.$$

Celková zmena entropie je preto:

$$\Delta S = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p}{T}\mathrm{d}V.$$

Podľa zadania je teplota plynu v nádobe konštantná, ale tlak konštantný nie je, a preto musíme si vyjadriť, ako sa mení v závislosti od molárneho objemu plynu. Použijeme na to stavovú rovnicu v tvare:

$$pV = nRT.$$

Z toho si môžeme vyjadriť podiel:

$$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V},$$

kde n je látkové množstvo 1 mol (nie celkové látkové množstvo plynu v nádobe, ktoré sa samozrejme počas unikania plynu z nádoby mení!).

Po dosadení do predchádzajúceho integrálu pre zmenu entropie jedného mólu plynu (teda molárnej entropie) dostávame:

$$\Delta S = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p}{T} dV = \int_{V_0}^{V_1} \frac{nR}{V} dV = nR \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = nR \ln \frac{V_1}{V_0}.$$

V tomto vzťahu však zatiaľ nepoznáme ani počiatočný (V_0) ani konečný objem (V_1) jedného molu plynu v nádobe. Pomôžeme si rovnicou pre izotermický dej:

$$pV = konšt.$$

čo môžeme napísať tiež v tvare:

$$p_0 V_0 = p_1 V_1,$$

z čoho vyplýva, že:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{p_0}{p_1}.$$

Takže po dosadení pre zmenu entropie jedného molu plynu dostávame:

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_1}{V_0} = nR \ln \frac{p_0}{p_1} = 1\,\mathrm{mol} \cdot 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \cdot \ln \frac{10 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}}{101325\,\mathrm{Pa}} =$$

$$= \underline{\underline{38{,}18\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}}}.$$

Odpoveď: Zmena entropie jedného molu plynu počas daného procesu je 38,18 J.K^{-1}.

11.13 Carnotov stroj pracuje s účinnosťou 40 %. Ako sa musí zmeniť teplota ohrievača, aby účinnosť stroja vzrástla na 50 %? Teplota chladiča je konštantná, rovná 9 °C.

Riešenie

Pre účinnosť Carnotovho stroja platí:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Vyjadríme si teplotu ohrievača T_1:

- pre účinnosť stroja $\eta(\%) = 40\,\%$

postupnou úpravou predchádzajúcej rovnice dostávame:

$$\eta T_1 = T_1 - T_2$$

$$T_1 - \eta T_1 = T_2$$

$$T_1(1 - \eta) = T_2$$

$$T_1 = \frac{T_2}{(1-\eta)} = \frac{282{,}15\,\mathrm{K}}{1-0{,}4} = 470{,}25\,\mathrm{K}$$

- pre účinnosť stroja $\eta^*(\%) = 50\,\%$ máme

$$\eta^* = \frac{T_1^* - T_2}{T_1^*}.$$

Rovnakým postupom ako predtým dostaneme:

$$T_1^* = \frac{T_2}{(1-\eta^*)} = \frac{282{,}15\,\mathrm{K}}{1-0{,}5} = 564{,}3\,\mathrm{K}$$

Preto zmena teploty ohrievača musí byť:

$$\Delta T = T_1^* - T_1 = 564{,}3\,\mathrm{K} - 470{,}25\,\mathrm{K} = 94{,}1\,\mathrm{K} = \underline{\underline{94{,}1\,°\mathrm{C}}}$$

Odpoveď: Pri daných podmienkach musíme pre požadované zvýšenie účinnosti Carnotovho stroja zvýšiť teplotu ohrievača o 94,1 °C.

11.14 Teplota pary privádzanej z parného kotla do parného stroja je 120 °C, teplota chladiča, v ktorom para kondenzuje je 40 °C. Akú prácu by stroj vykonal pri predpoklade Carnotovho cyklu, pri spotrebe 4,2 kJ tepla?

Riešenie

Pre účinnosť tepelného stroja vo všeobecnosti platí:

$$\eta = \frac{W'}{Q},$$

kde W' je práca vykonaná strojom, Q je teplo dodané stroju. Pre účinnosť Carnotovho cyklu tiež platí:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Porovnaním týchto vzťahov dostaneme:

$$\frac{W'}{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Vykonaná práca teda bude:

$$W' = Q\frac{T_1 - T_2}{T_1} = 4{,}2\cdot 10^3\,\mathrm{J}\cdot\frac{393{,}15\,\mathrm{K} - 313{,}15\,\mathrm{K}}{393{,}15\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{854{,}6\,\mathrm{J}}}$$

Odpoveď: Pri predpoklade Carnotovho cyklu by parný stroj vykonal prácu 854,6 J.