Kapitola 5

MECHANIKA TUHÉHO TELESA

Učebné ciele

Mechanika tuhého telesa popisuje pohyb telesa s šiestimi stupňami voľnosti. Vychádza z mechaniky hmotného bodu a sústavy hmotných bodov. Preto v popise kinematiky i dynamiky opakuje a rozvíja už známe skutočnosti. Cieľom kapitoly je nájsť kinematické veličiny popisujúce pohyb dokonale tuhého telesa, zostaviť pohybové rovnice dokonale tuhého telesa, vyjadriť zákony zachovania pre toto teleso a uviesť jednoduché aplikácie na pohyb dokonale tuhého telesa.

Mechanika tuhého telesa je jedným zo základných pilierov mechatroniky, základom špičkovej technológie umelou inteligenciou riadeného pohybu, premeny energie. Je základom pre navrhovanie prvkov, strojov a strojných zariadení, ktoré sa vyznačujú vysokou funkčnosťou, manipulačnou presnosťou a vysokou rýchlosťou. Je základom navrhovania inteligentných samo riadených dopravných prostriedkov kozmického výskumu.

5.1Kinematika dokonale tuhého telesa

5.1.1 Dokonale tuhé teleso

Dokonale tuhé teleso je teleso, ktoré sa pôsobením síl nedeformuje, t. j. vzdialenosti medzi jeho jednotlivými časťami sa zachovávajú. Pretože v tejto kapitole sa budeme zaoberať len dokonale tuhým telesom, budeme používať skrátený názov tuhé teleso. Môžeme si ho predstaviť ako sústavu veľkého počtu bodov, ktoré sa z hľadiska makroskopického javia ako teleso so spojito rozloženou hmotnosťou s hustotou (objemovou hmotnosťou) ρ, definovanou všeobecne pre nehomogénne teleso ako funkcia miesta daná podielom hmotnosti veľmi malej časti objemu a tohoto objemu:

$$\rho\left(x,y,z\right)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta\tau}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} \qquad (5.1.1.1)$$

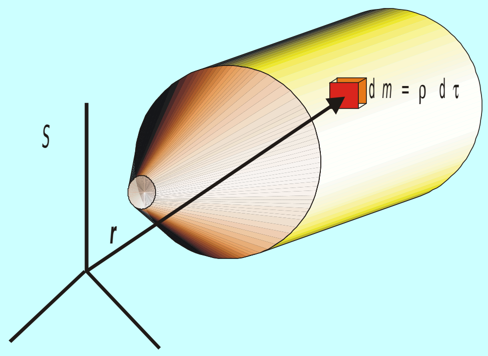
Počet stupňov voľnosti 3N pre N hmotných bodov sa pre teleso znižuje počtom väzieb. Tuhé teleso má najviac 6 stupňov voľnosti, jeho poloha je určená polohou troch bodov neležiacich na jednej priamke, pričom ich vzdialenosti sú pevne dané.
Dôležitým bodom tuhého telesa je jeho hmotný stred. Jeho definícia vychádza z definície hmotného stredu sústavy hmotných bodov, len ich hmotnosti sú nahradené hmotným elementom dm a sumácie integrálom. Polohový vektor hmotného stredu je preto daný vzťahmi:

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\int_m \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{\int_m \mathrm{d}m} = \frac{\int_\tau \rho\,\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\tau}{\int_\tau \rho\,\mathrm{d}\tau} \qquad (5.1.1.2)$$

Hmotný stred je totožný s ťažiskom telesa, ktoré je definované ako pôsobisko tiažovej sily v homogénnom tiažovom poli pri ľubovolnom otočení telesa. V prípadoch zaoberajúcimi sa pohybom telies (veľmi malými v porovnaní s rozmermi Zeme) v tiažovom poli, je táto totožnosť zaručená.

5.1.2 Rozklad pohybu tuhého telesa

Tuhé teleso môže vo všeobecnosti vykonávať veľmi zložitý pohyb. Tento pohyb môžeme chápať ako zložený pohyb tuhého telesa a možno ho redukovať na súčasne vykonávané jednoduchšie pohyby a to pohyb translačný a pohyb rotačný.
Translačný (posuvný) pohyb telesa je pohyb, *pre ktorý rýchlosti všetkých bodov telesa sú v každom okamihu rovnaké; všetky body telesa sa pohybujú po trajektóriach, ktorých tvar je rovnaký, sú len posunuté v priestore, podľa voľby bodu telesa*. Pri translačnom pohybe telesa ľubovoľná priamka pevne spojená s telesom zaujíma počas pohybu polohy, ktoré sú rovnobežné s touto priamkou v začiatočnej polohe.
Kinematika translačného pohyby je preto opísaná kinematickými veličinami hmotného bodu: polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$, rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ a zrýchlením $\boldsymbol{a}$ ľubovolného bodu telesa. Často je vhodné za tento bod zvoliť hmotný stred telesa.
Rotačný (otáčavý) pohyb telesa je pohyb, v ktorom každý bod telesa vykonáva pohyb po kružnici a stredy týchto kružníc ležia na jednej priamke, ktorú voláme os rotácie. Pretože v dokonale tuhom telese vzdialenosti bodov sa nemenia, ak si zvolíme priamku pevne spojenú s telesom, ostatné body telesa môžu vykonávať okolo tejto priamky len rotačný pohybom. Rotačný pohyb je podobne ako pohyb po kružnici určený uhlom otočenia φ, vektorom uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$, a vektorom uhlového zrýchlenia $\boldsymbol{\alpha}$. Vo zvolenom bode telesa os rotácie určuje vektor uhlovej rýchlosti.
Na základe doteraz odvodených rovníc pre hmotný bod a sústavu hmotných bodov možno odvodiť pre tuhé teleso druhú pohybovú rovnicu a zákon zachovania momentu hybnosti.
Vyjadrime teraz pohybové rovnice tuhého telesa tak, že predeme od sústavy hmotných bodov k spojito rozloženej hmotnosti v telese. Teleso si môžeme predstaviť ako sústavu nekonečného počtu častí, ktoré spojito vyplňujú objem telesa. Objem každej časti telesa je elementárny objem $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ a jeho hmotnosť je daná súčinom hustoty (objemovej hmotnosti) v danom mieste telesa $\rho\,(x,y,z)$ a elementu objemu $\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau$. Pohybové rovnice sústavy častíc sú pohybové rovnice aj pre dokonale tuhé teleso, s tým rozdielom, že v definíciách veličín vystupujúcich v týchto rovniciach je sumácia nahradená integrálom. Stručne ich zhrňme:



Obr. 5.8 Polohový vektor hmotného elementu telesa.

Hmotnosť telesa m :

$$m = \int_m \mathrm{d}m = \int_\tau \rho\,\mathrm{d}\tau = \iiint_\tau \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \ .$$

Hmotný stred:

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\int_m \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{\int_m \mathrm{d}m} = \frac{\int_\tau \boldsymbol{r}\rho\,\mathrm{d}\tau}{\int_\tau \rho\,\mathrm{d}\tau} \ ,$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor hmotného elementu dm (Význam veličín vyplýva z Obr. 5.8.)

Hybnosť telesa:

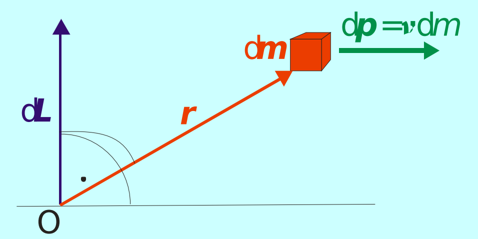
$$\mathbf{p} = \int_m \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \int_\tau \boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}\tau = \iiint_\tau \boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z,$$

kde $\boldsymbol{v}$ je rýchlosť hmotného elementu dm.

Hybnosť hmotného stredu:

$\boldsymbol{p}^* = m\boldsymbol{v}^*$, kde $\boldsymbol{v}^*$

je rýchlosť hmotného stredu.



Obr. 5.9 Element momentu hybnosti

Moment hybnosti tuhého telesa:

$$\boldsymbol{L} = \int_p \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_m \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}m = \int_\tau \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}\tau,$$

vzťažný bod je začiatok polohového vektora $\boldsymbol{r}$, ktorý určuje polohu hmotného elementu dm pohybujúceho sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ (Obr. 5.9).
Pre takto definované veličiny charakterizujúce tuhé teleso, platia rovnaké rovnice, ako pre pohyb sústavy častíc.

Prvá pohybová rovnica pre dokonale tuhé teleso:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}}, \tag{5.1.1.4}$$

časová zmena celkovej hybnosti tuhého telesa sa rovná výslednici vonkajších síl.

Veta o pohybe hmotného stredu (ťažiska):

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}^*}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}}, \tag{5.1.1.5}$$

časová zmena hybnosti hmotného stredu sa rovná výslednici vonkajších síl, hmotný stred sa pohybuje tak, ako keby v ňom bola sústredená celá hmotnosť a pôsobila naň výslednica vonkajších síl.

Druhá pohybová rovnica pre dokonale tuhé teleso:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}}, \tag{5.1.1.6}$$

časová zmena celkového momentu hybnosti sa rovná výslednici momentu vonkajších síl vzhľadom na ten istý vzťažný bod.

Formálne sa zdá, že druhá pohybová rovnica vznikne z prvej len vektorovým prenásobením polohovým vektorom a obe tieto rovnice by nemali byť nezávislé. V skutočnosti prenásobením vektora sily polohovým vektorom vzhľadom na zvolený vzťažný bod dostávame moment sily, čo je iná fyzikálna veličina ako sila.

Integráciou cez časový interval dostávame tzv. impulzové vety.

Prvá impulzová veta:

$$\boxed{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=\int_0^t \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t}\,, \qquad (5.1.1.7)$$

kde $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_0$ sú celkové hybnosti telesa na konci resp. začiatku časového intervalu.

Druhá impulzová veta:

$$\boxed{\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}_0=\int_0^t \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t}\,, \qquad (5.1.1.8)$$

kde $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{L}_0$ sú celkové momenty hybnosti telesa na konci resp. začiatku časového intervalu. Základnými rovnicami sú pohybové rovnice. Impulzové vety majú význam hlavne pre úlohy, kde sila (moment sily) pôsobí len počas daného časového intervalu, t.j. pred týmto intervalom je hybnosť (moment hybnosti) konštantná a konečná hodnota po skončení vonkajšieho pôsobenia sa ďalej nemení.

Pre neizolovanú časticu platí pohybová rovnica

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}.$$

Vynásobením tejto rovnice zľava vektorovo polohovým vektorom a analogickou úpravou ľavej strany ako v rovnici (2) dostávame iné vyjadrenie tejto pohybovej rovnice. (V analógii s rovnicou, ktorú odvodíme pre sústavu častíc alebo teleso, ju môžeme nazvať druhou pohybovou rovnicou pre časticu.) Platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}\,, \qquad (5.1.1.9)$$

kde moment sily $\boldsymbol{M}$ a moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ sú momenty vzhľadom na ten istý vzťažný bod.

Zákon zachovania momentu hybnosti pre izolovanú sústavu častíc:
V izolovanej sústave častíc sa celkový moment hybnosti zachováva:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=0\,,\ \text{resp. } \boldsymbol{L}=\text{konst}}\,.$$

Druhá pohybová rovnica sústavy častíc je:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}}\,, \qquad (5.1.1.10)$$

t.j. časová zmena celkového momentu hybnosti sústavy sa rovná celkovému momentu vonkajších síl pôsobiacich na túto sústavu.

5.1.3 Rovnováha tuhého telesa.

Z pohybových rovníc (1) a (3) v kapitole 5.2.2 - Zákony zachovania, pohybové rovnice - vyplývajú aj podmienky rovnováhy tuhého telesa. Ak má byť teleso v pokoji, potom jeho hybnosť a moment hybnosti musia byť nulové (t.j. nezávislé od času).
Podmienky rovnováhy tuhého telesa sú teda vyjadrené vzťahmi:

$$\boxed{\sum_i \boldsymbol{F}_i = 0 \quad , \quad \sum_i \boldsymbol{M}_i = 0}$$

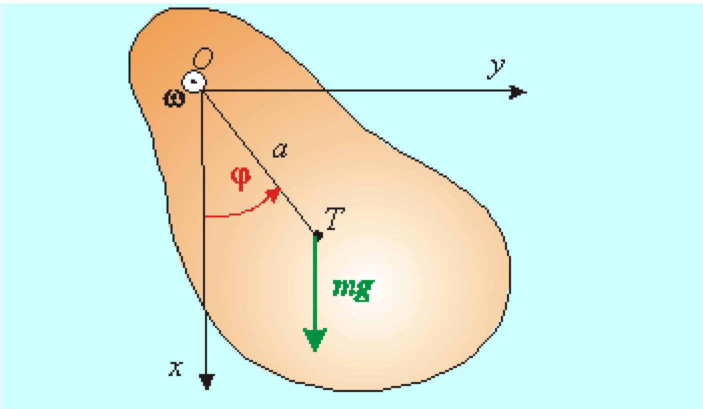
(6)

Podmienkou rovnováhy je súčasná platnosť toho, že ***súčet všetkých vonkajších síl a súčet všetkých momentov týchto síl vzhľadom na jeden ľubovoľne zvolený vzťažný bod sa rovná nule***.

Pr.5.1.3.1 Popíšte z dynamického hľadiska pohyb fyzikálneho a matematického kyvadla.

Riešenie:

Fyzikálne kyvadlo je každé teleso, ktoré sa môže otáčať bez trenia okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom. Jeho pohyb sa riadi pohybovou rovnicou (4.2.4.3), ktorá vyjadruje otáčanie tohoto telesa okolo osi. Obr. 4.3.1.1 zobrazuje stav telesa v danom okamihu, súradnicová sústava je volená tak, že *x*-ová os smeruje zvisle dole, *y*-ová leží v rovine kývania, *z*-ová má smer osi otáčania, vyznačený uhol je kladný. Moment sily vzhľadom na os je vektorová veličina



Obr. 4.3.1.1. Fyzikálne kyvadlo vychýlené z rovnovážnej polohy

$$\boldsymbol{M}_\rho = (\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\rho} = ((\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\rho} = -mga\sin\varphi\boldsymbol{\rho} \quad , \qquad (4.3.1.1)$$

kde jednotkový vektor $\boldsymbol{\rho}$ v smere osi otáčania sme volili orientovaný v kladnom smere osi *z*, vektor momentu tiažovej sily $\boldsymbol{M}$ má opačný smer ako vektor $\boldsymbol{\rho}$ (skalárny súčin vo vzťahu (4.3.1.1) je záporný), *a* je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania, *mg* veľkosť tiažovej sily. Pretože uhlové zrýchlenie je

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\boldsymbol{\rho} \quad ,$$

pohybová rovnica (4.3.1.1) má tvar

$$-mga\sin\varphi\,\boldsymbol{\rho}=J\frac{d^2\varphi}{dt^2}\boldsymbol{\rho}\ .$$

Rovnosť vektorov znamená aj rovnosť ich súradníc, t. j.

$$-mga\sin\varphi=J\frac{d^2\varphi}{dt^2}\ .$$

Znamienko mínus v rovnici nie je dôsledkom voľby súradnicovej sústavy, vyjadruje skutočnosť, že moment sily stáča teleso do rovnovážnej polohy s nulovým uhlom výchylky. Z hľadiska matematiky, ide o diferenciálnu rovnicu druhého rádu (najvyšší rád derivácie je druhý), s trigoniometrickou funkciou, kde analytické riešenie pre premennú φ, možno vyjadriť len po rozvoji sínusovej funkcie do radu. Pre veľmi malé výchylky nahradíme sínusovú funkciu uhlom:

$$\sin\varphi\approx\varphi$$

(„veľmi malé“ sa vzťahuje na presnosti merania výchylky a času, t. j. nepresnosti výpočtu sú podstatne menšie ako nepresnosti merania). Pohybová rovnica v tomto priblížení má tvar diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientmi bez pravej strany

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0,\qquad \text{kde}\quad \omega=\sqrt{\frac{mga}{J}}\ . \qquad (4.3.1.2)$$

Riešením tejto rovnice je harmonická funkcia

$$\boxed{\varphi=\phi\sin(\omega t+\alpha)}, \qquad (4.3.1.3)$$

kde integračná konštanta Φ má význam amplitúdy - maximálnej výchylky uhla , a α je fázové posunutie, ktoré určuje počiatočnú výchylku (v čase $t = 0$):

$$\varphi_0=\phi\sin\alpha\ .$$

Pozn.: Riešenie možno vyjadriť aj pomocou kosínusovej funkcie, potom fázové posunutie malo inú veľkosť.

Periódou periodickej funkcie je minimálny časový interval T po ktorom sa pohybový stav opakuje t. j. platí

$$\varphi(t+T)=\varphi(t)\ ,$$

z čoho pre funkciu (4.3.1.3) plynie:

$$\omega T=2\pi\ .$$

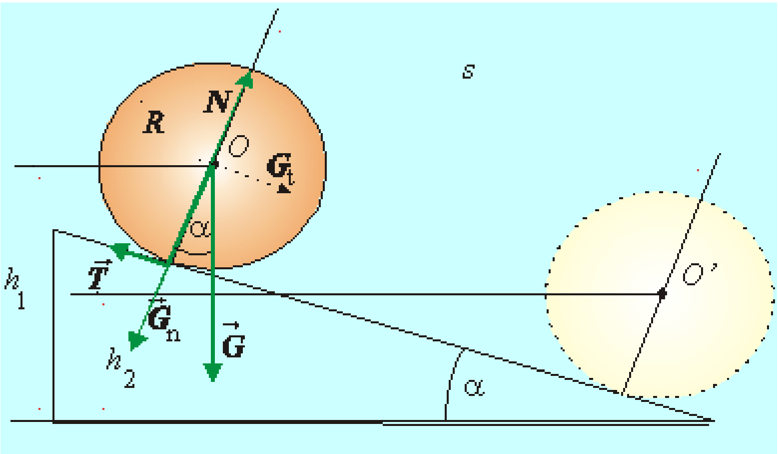
Perióda (doba kmitu) fyzikálneho kyvadla je:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}\ . \qquad (4.3.1.4)$$

Matematické kyvadlo je model fyzikálneho kyvadla, kde kmitajúce teleso je nahradené hmotným bodom s hmotnosťou *m,* viazaným v pevnej vzdialenosti *a* od bodu upevnenia. Prakticky je to teleso s malými rozmermi (vzhľadom na vzdialenosť od osi) zavesené na pevnom vlákne zanedbateľnej hmotnosti. Je to teda fyzikálne kyvadlo s momentom zotrvačnosti ma^2. Jeho doba kmitu po dosadení do vzťahu (2.4.25) je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\ .$$

Pr. 5.1.3.2 Popíšte valivý pohyb telesa z obr. 4.3.3.1 z hľadiska dynamiky rotačných pohybov.



Obr. 4.3.3.1 Valenie telesa po naklonenej rovine

Riešenie:

Valenie je taký pohyb telesa pozdĺž povrchu druhého telesa, pri ktorom sa obe telesá neustále dotýkajú a valiace teleso sa otáča okolo okamžitej osi danej dotykovou priamkou v povrchu druhého telesa. Dynamicky ho objasníme na pohybe rotačného telesa - valec, guľa po naklonenej rovine. Problém riešime ako rovinný pohyb v rovine preloženej zvislicou a kolmicou na naklonenú rovinu. Teleso s polomerom R má moment zotrvačnosti vzhľadom na svoju geometrickú os *J**. Geometrická os je rovnobežná s dotykovou priamkou, uhol sklonu roviny je α (Obr. 4.3.3.1). Na teleso pôsobia tieto sily: tiaž ***G*** v ťažisku telesa, trenie ***T*** a tlaková sila od podložky ***N*** v bode dotyku telesa s podložkou. Tlaková sila je taká veľká, ako normálová zložka tiaže, ležia na jednej priamke a navzájom sa rušia. Vyjadruje to skutočnosť, že v smere kolmom na podložku je ťažisko telesa v pokoji a tento stav sa nemení.

Úlohu možno riešiť ako otáčanie telesa okolo svojej geometrickej osi: potom pohybová rovnica rotačného pohybu

$$\boldsymbol{M}_g = J\varepsilon$$

má tvar:

$$RT = J^{*}\varepsilon\ .$$

Riešenie nájdeme riešením sústavy rovníc:

$$G\sin\alpha - T = ma^{*}\ ,\quad a^{*} = R\varepsilon\ ,\quad RT = J^{*}\varepsilon\ .$$

Ďalšou rovnicou, z ktorej môžeme určiť hľadané veličiny, napr. rýchlosť po prejdení dráhy *s* je zákon zachovania energie (4.2.5.6):

$$\frac{1}{2}mv^{*2} + \frac{1}{2}J^{*}\omega^{2} + mgh = konst$$

Kontrolné otázky

1. ***Definujte moment hybnosti častice. Vzhľadom na ktoré body moment hybnosti častice (s nenulovou hybnosťou) je nulový?***
2. ***Čo platí pre silu pôsobiacu na teleso, ak moment hybnosti telesa sa v počas jej pôsobenia nemení?***
3. ***Aký je rozdiel medzi veličinami vystupujúcimi vo formálne zhodnej pohybovej rovnice pre časticu a pre teleso?***
4. ***Závisí moment zotrvačnosti vzhľadom na danú os od pohybového stavu telesa?***
5. ***Prečo pre popísanie pohybu telesa potrebujeme dve pohybové rovnice a pre časticu len jednu?***
6. ***Je hybnosť telesa rovnaká ako hybnosť hmotného stredu? Porovnajte ich z definície týchto veličín!***
7. ***Guľa a valec rovnakého polomeru rovnakej hmotnosti sú roztočené s rovnakou uhlovou rýchlosťou otáčania. Ktoré má väčšiu kinetickú energiu?***
8. ***Nakreslite časovú závislosť uhla vychýlenia fyzikálneho kyvadla, ktoré na začiatku odčítania času bolo vychýlené o uhol Φ_0 !***