Mechanika tuhého telesa - pokračovanie

5.2.4Rotačný pohyb tuhého telesa okolo pevnej osi

Z technického hľadiska je dôležitý pohyb tuhého telesa okolo pevnej osi. Predpokladajme, že os je pevná, t. j. sily pôsobiace na teleso sú kompenzované silami upevnenia osi tak, že nedochádza k zmene osi otáčania. Rozložme moment sily pôsobiaci na teleso

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

na dve zložky: do smeru rovnobežného s osou a do smeru ležiaceho v rovine kolmej na os. Jednoduchým pokusom sa môžete presvedčiť, že moment sily ležiaci v rovine kolmej na os (tvorený napr. silou rovnobežnou s osou), namáha os, musí byť kompenzovaný pevnosťou osi a jej uloženia. Moment sily rovnobežný s osou naopak mení pohybový stav telesa. Nemôže byť kompenzovaný momentmi síl pôsobiacimi na os, pretože tie sú kolmé na os - ich polohový vektor vzhľadom na vzťažný bod leží v osi otáčania a moment sily je kolmý na tento vektor.
Zaveďme pojem **moment zotrvačnosti**

$$\boxed{J = \int_m r^2 \mathrm{d}m}$$

***Integrál zo štvorcov kolmej vzdialenosti hmotného elementu od danej osi cez celú hmotnosť telesa (r sme zaviedli ako kolmú vzdialenosť elementu hmotnosti od osi otáčania). Potom úpravou rovnice (1) s využitím veličiny moment zotrvačnosti dostávame** pohybovú rovnicu pre otáčanie telesa okolo osi*

$$\boxed{\mathbf{M}_\rho = J\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = J\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (5.2.4.1)$$

na teleso pôsobiaci moment sily vzhľadom na os sa rovná súčinu momentu zotrvačnosti telesa vzhľadom na túto os a uhlového zrýchlenia.
Ak porovnáme túto rovnicu s rovnicou pohybu hmotného bodu

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \qquad \boldsymbol{M}_\rho = J\boldsymbol{\alpha} = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \quad ,$$

vidíme analógiu pohybov, s tým, že ***moment zotrvačnosti je mierou zotrvačných vlastností rotujúceho telesa***. Moment zotrvačnosti je dôležitou veličinou pre rotáciu telies.
Pri jeho výpočte môžeme využiť niektoré jeho vlastnosti.
Moment zotrvačnosti hmotného bodu hmotnosti m vo vzdialenosti r od osi je

$$J = mr^2 \ .$$

Moment zotrvačnosti sústavy hmotných bodov (i-ty hmotný bod vo vzdialenosti r_i od osi má hmotnosť m_i) je

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \ .$$

Steinerova veta. Telesom, ktorého moment zotrvačnosti určujeme, veďme dve rovnobežné osi, ktorých vzdialenosť je a. Jedna prechádza hmotným stredom telesa a moment zotrvačnosti vzhľadom na ňu je J^*. Potom moment zotrvačnosti J vzhľadom na druhú os je:

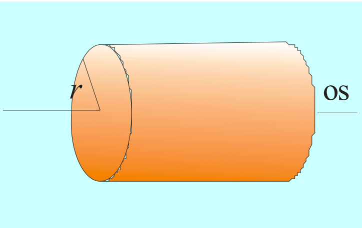
$$J = J^* + ma^2, \qquad (5.2.4.2)$$

(4)

kde m je hmotnosť telesa.

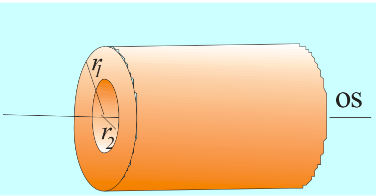
Moment zotrvačnosti vzhľadom na ľubovoľnú os sa rovná momentu zotrvačnosti vzhľadom na os, ktorá je s ňou rovnobežná a prechádza hmotným stredom, zväčšenému o moment zotrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti rovnajúcej sa hmotnosti telesa a nachádzajúceho sa vo vzdialenosti rovnej vzájomnej vzdialenosti osí.

Pre jednoduché homogénne telesá môžeme z definície a Steinerovej vety vypočítať momenty zotrvačnosti



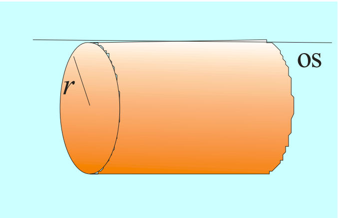
Valec hmotnosti m s polomerom r vzhľadom na geometrickú os

$$J = \frac{1}{2} mr^2$$



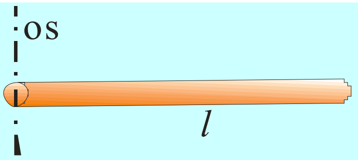
Dutý valec hmotnosti m s vonkajším polomerom r_1 a vnútorným polomerom r_2 vzhľadom na geometrickú os

$$J = \frac{1}{2} m\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$



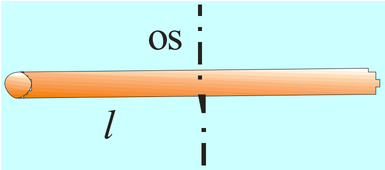
Valec hmotnosti m s polomerom r vzhľadom na os prechádzajúcu povrchovou priamkou valca

$$J = \frac{3}{2} mr^2$$



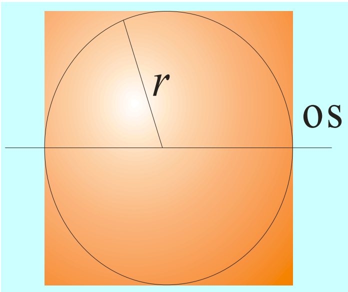
Tyč hmotnosti m a dĺžky l zanedbateľného prierezu vzhľadom na os kolmú na tyč:
prechádzajúcu koncovým bodom tyče

$$J = \frac{1}{3} ml^2$$



Tyč hmotnosti m a dĺžky l zanedbateľného prierezu vzhľadom na os kolmú na tyč: prechádzajúcu stredom tyče

$$J = \frac{1}{12} m l^2$$



Guľa hmotnosti m a polomeru r vzhľadom na os prechádzajúcu jej stredom

$$J = \frac{2}{5} m r^2$$

5.3.5Mechanická energia tuhého telesa

Poznámka: Pretože pre energiu je všeobecne prijatý symbol E ***a intenzita poľa je vektor označený*** $\mathbf{E}$ ***treba pozorne sledovať zápis týchto dvoch veličín: intenzita je označovaná tučným písmom, u energii je vždy index označujúci druh energie.***

Energia je aditívnou veličinou jej častí, t.j. pre sústavu častíc je celková energia súčtom energií jej častíc. Na základe tohoto princípu vyjadrime kinetickú energiu tuhého telesa. Kinetická energia hmotného elementu dm je daná jeho rýchlosťou v:

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} v^2 \mathrm{d}m$$

a celková kinetická energia telesa je integrálom cez celú hmotnosť telesa:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_m v^2 \mathrm{d}m \ .$$

Pre kinetickú energiu telesa všeobecne platí:

$$W_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J^* \omega^2 \ . \qquad (4.2.5.4)$$

Pre teleso, ktoré vykonáva len rotačný pohyb, zvoľme pomocný bod na osi otáčania. Rýchlosť tohoto bodu je nulová a vo vzťahu (4.2.5.2) je nenulový len tretí člen aj v prípade, že vzťažný bod nie je hmotný stred:

$$\boxed{W_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2}$$

Kontrolné otázky . (4.2.5.5)

1. ***Závisí moment zotrvačnosti vzhľadom na danú os od pohybového stavu telesa?***
2. ***Guľa a valec rovnakého polomeru rovnakej hmotnosti sú roztočené s rovnakou uhlovou rýchlosťou otáčania. Ktoré má väčšiu kinetickú energiu?***