3.2 GRAVITAČNÉ POLE

Učebné ciele

Cieľom podkapitoly je podať popis gravitačných síl jako jedného z existujúcich silových pôsobení v prírode. Vychádzajúc z Newtonovho gravitačného zákona – ako základného zákona gravitačných javov – postupne zavádzame základné veličiny a princípy, ako sú intenzita, potenciál, potenciálna energia, princíp superpozície, práca v silovom poli a pod. Vysvetľujeme zákonitosti planetárneho a družicového pohybu: tieto sú aj ťažiskom väčšiny ukážkových príkladov a neriešených úloh.

3.2.1 Typy síl v prírode. Fyzikálne polia

Pojem *pole* je jedným z najzákladnejších pojmov fyziky. Predstavuje - popri látke - druhú základnú formu existencie hmoty.

Látka je forma hmoty, ktorá sa skladá z diskrétnych útvarov (atómy, molekuly).

Pole je forma hmoty, vypĺňajúca priestor, sprostredkujúci silové pôsobenia (tzv. *interakcie)* medzi materiálnymi objektmi. Prejavuje sa silovými účinkami na iné objekty poľa alebo látky. Toto pôsobenie sa nedeje priamo „na diaľku" nekonečne rýchlo, ale prostredníctvom kvánt poľa konečnou rýchlosťou. Mechanizmus pôsobenia je taký, že jeden interagujúci objekt kvantá vysiela, druhý ich prijíma a opačne. Výsledkom je príťažlivá alebo odpudivá sila medzi pôsobiacimi objektmi.

Interagujúce objekty predstavujú v takto opísanej schéme *zdroje poľa.* Samotné pole tu možno chápať ako priestor, ktorý prenáša silové pôsobenia a v ktorom prebieha výmena kvánt. Za určitých podmienok je pole schopné aj samostatnej existencie, t.j. aj vtedy, keď zdroje odstránime (napr. premenné elektromagnetické pole šíriace sa v priestore).

V prírode existujú štyri základné druhy síl. Sú to:

Gravitačné sily

Elektromagnetické sily

Silné (jadrové) sily

Slabé sily

Gravitačné sily existujú medzi všetkými materiálnymi objektmi. Podlieha im všetka hmota bez výnimky, dokonca aj svetlo. Nezávisia od vlastností prostredia, nemožno ich ničím „zatieniť". Sú to sily len príťažlivé (aj v prípade vzájomného pôsobenia častíc a antičastíc, resp. hmoty a antihmoty). Kvantami tohto poľa sú pravdepodobne častice zvané *gravitóny,* ktoré však dosiaľ neboli priamo zaregistrované (súčasná experimentálna technika to ešte neumožňuje). Gravitačné sily spôsobujú napr. príťažlivosť Zeme a iných nebeských telies, udržiavajú planéty na obežných dráhach okolo Slnka, Mesiac a umelé družice na obežných dráhach okolo Zeme a pod.; môžeme povedať, že udržiavajú „poriadok" vo Vesmíre. Sú najslabšie zo všetkých druhov síl, takže sa výraznejšie prejavujú len v makrosvete. Ich dosah je nekonečný.

Elektromagnetické sily pôsobia medzi elektricky nabitými časticami. Majú príťažlivý aj odpudivý charakter, kvantami poľa sú *fotóny.* Tieto sily napr. udržiavajú elektróny na obežných dráhach okolo atómových jadier, vytvárajú väzby medzi atómami a molekulami, zodpovedajú za chemické vlastnosti prvkov a podieľajú sa na chemických reakciách. Ich dosah je nekonečný. Sú to sily, s ktorými najviac prichádzame do styku v každodennom živote. Dokonca aj mechanické silové javy, ako sú napr. deformácia, pružnosť, trenie a pod. sú založené na elektromagnetických interakciách (ide tu o vzájomné pôsobenie medzi elektrónovými obalmi atómov látok).

Silné sily pôsobia medzi tzv. „ťažkými" elementárnymi časticami, ako sú napr. protóny a neutróny. Sú príťažlivého charakteru, avšak s veľmi krátkym dosahom, rádovo 10^{-15} m., takže sa uplatňujú len v mikrosvete. Pretože v oblasti svojho pôsobenia sú oveľa silnejšie ako elektromagnetické sily (rádovo 10^{37}-krát), sú schopné udržať pokope atómové jadrá. Kvantami sú tzv. *mezóny* π.

Slabé sily *(slabé interakcie)* spôsobujú rozpady, resp. vzájomné premeny elementárnych častíc. Kvantami sú tzv. *bozóny W* a *Z.* Vzhľadom na veľmi krátky dosah sa prejavujú len v mikrosvete. Ich dôsledkom sú aj niektoré druhy rádioaktivity, napr. rádioaktivita beta.

V tejto kapitole bližšie popisujeme gravitačné sily; s ostatnými druhmi síl sa oboznámime v iných moduloch.

3.2.2 Gravitačné sily. Newtonov gravitačný zákon

Ako prvý sa skúmaním gravitačných síl vážnejšie zaoberal *Isaac Newton.* Je známa jeho príhoda s padajúcim jablkom, ktorá ho priviedla na myšlienku, že sila nútiaca padať telesá zvislo k Zemi je totožná so silou, ktorá núti obiehať planéty po obežných dráhach okolo Slnka, aj Mesiac okolo Zeme. V tom čase už boli známe zákonitosti pohybu planét, ktoré objavil nemecký astronóm *Johannes Kepler*. Newton v snahe vysvetliť tieto zákonitosti matematicky formuloval *gravitačný zákon*, podľa ktorého dve telesá s hmotnosťami m_1 a m_2 sa navzájom priťahujú silou F, ktorá je úmerná súčinu ich hmotností a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzájomnej vzdialenosti r. Matematicky možno tento zákon zapísať ako

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \ , \qquad (3.2.2.1)$$

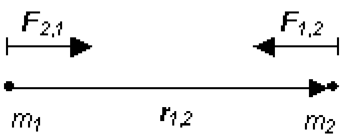
kde $G = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$ je *univerzálna gravitačná konštanta.*

Rovnica 3.2.2.1 platí presne len pre hmotné body a pre homogénne gule, u ktorých za r dosadzujeme vzdialenosť ich stredov. S veľkou presnosťou ho môžeme použiť aj pre objemové telesá, ktorých rozmery sú zanedbateľné voči ich vzájomnej vzdialenosti; za r vtedy dosadzujeme vzdialenosť ich ťažísk. Pokiaľ teda v ďalšom texte na niektorých miestach použijeme miesto pojmu „hmotné body" pojem „telesá" budú sa tu rozumieť práve takéto prípady (napr. pri popise gravitačného poľa Zeme).

Vzťah (3.2.2.1) môžeme prepísať do vektorového tvaru nasledovne:

Nech poloha telesa s hmotnosťou m_2 voči telesu s hmotnosťou m_1 je daná polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_{1,2}$ (obr. 3.2.2.1) a r je absolútna hodnota tohto vektora. Silu $\boldsymbol{F}_{1,2}$, ktorou pôsobí hmotný bod s hmotnosťou m_1 na hmotný bod s hmotnosťou m_2 dostaneme, ak jej absolútnu hodnotu násobíme jednotkovým vektorom v jej smere. Tento jednotkový vektor (vzhľadom na to, že gravitačná sila je príťažlivá a má opačný smer ako vektor $\boldsymbol{r}_{1,2}$) je rovný

$$-\frac{\boldsymbol{r}_{1,2}}{r} \; .$$



Obr. 3.2.2.1 Gravitačné silové pôsobenie medzi dvoma hmotnými bodmi

Pre silu $F_{1,2}$ takto dostávame

$$\boldsymbol{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r}_{1,2} \; . \qquad (3.2.2.2)$$

Obdobne platí, že druhé teleso pôsobí na prvé rovnako veľkou, ale opačne orientovanou silou

$$\boldsymbol{F}_{2,1} = -\boldsymbol{F}_{1,2} \qquad (3.2.2.3)$$

Východiskom pre Newtonove odvodenie boli Keplerove zákony , opisujúce pohyby planét v Slnečnej sústave. Princíp Newtonovho postupu bol pritom taký, že zo známych rovníc dráh planét určil silu, ktorá ich pohyb spôsobuje.

3.2.3 Intenzita gravitačného poľa. Princíp superpozície

Popíšeme si teraz prípad, keď gravitačné pole je vytvorené hmotným bodom s hmotnosťou M. Do vzdialenosti r od neho položme „skúšobný" hmotný bod s menšou hmotnosťou m (jeho polohový vektor vzhľadom na prvý hmotný bod je r). Skúmajme gravitačné účinky bodu M na bod m. Vieme už, že príťažlivá sila je daná vzťahom

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r} \; . \qquad (3.2.3.1)$$

Pretože však v priestore okolo bodu M existuje gravitačné pole aj bez existencie bodu m, je výhodné zaviesť na charakterizovanie poľa takú veličinu, u ktorej hmotnosť m skúšobného hmotného bodu nie je obsiahnutá. Na tento účel je vhodná veličina *intenzita gravitačného poľa* K. Táto je definovaná ako podiel sily pôsobiacej na hmotný bod m, a hmotnosti tohto hmotného bodu, t.j.

$$\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = -G\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r} \quad . \qquad (3.2.3.2)$$

Intenzita sa teda číselne rovná sile, pôsobiacej na hmotný bod o jednotkovej hmotnosti.

Z druhého Newtonovho zákona - zákona sily - vyplýva, že aj zrýchlenie je dané podielom sily a hmotnosti

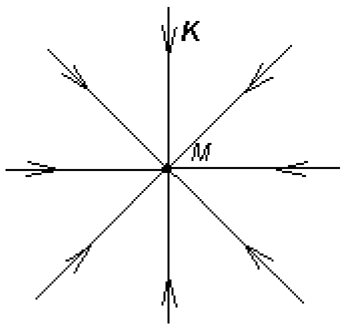
$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \quad , \qquad (3.2.3.3)$$

takže

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} \quad . \qquad (3.2.3.4)$$

Z toho vidíme, že intenzita v každom bode gravitačného poľa je totožná so zrýchlením, ktoré pole hmotnému bodu v tomto mieste udeľuje (za predpokladu, že tu nepôsobia ešte ďalšie sily). Na povrchu Zeme má hodnotu približne 9,81 $N.m^{-1}$ (resp. 9,81 $m.s^{-2}$; presná hodnota závisí od zemepisnej šírky a nadmorskej výšky).

Gravitačné pole môžeme graficky znázorniť pomocou tzv. *gravitačných siločiar*. Sú to krivky, u ktorých dotyčnica v ľubovoľnom bode je totožná so smerom pôsobiacej gravitačnej sily, resp. so smerom vektora intenzity poľa. Gravitačné pole, vytvorené jedným hmotným bodom M, má radiálny charakter; gravitačné siločiary sú priestorovo symetricky rozložené polpriamky, prichádzajúce z nekonečna a vstupujúce do hmotného bodu, ktorý je zdrojom poľa



Obr. 3.2.3.1 Gravitačné pole hmotného bodu s hmotnosťou M

Gravitačné pole, u ktorého má hodnota intenzity v každom mieste rovnakú hodnotu, nazývame *homogénne.* Za takéto môžeme považovať aj pole v relatívne malých výškach (rádovo desiatky, resp. stovky km) nad povrchom Zeme.

Princíp superpozície

Predpokladajme, že gravitačné pole je vytvorené nie jedným, ale viacerými diskrétne rozloženými hmotnými bodmi s hmotnosťami M_1, M_2,... M_n. Každý z nich je takto zdrojom vlastného gravitačného poľa. Nech polohové vektory skúšobného hmotného bodu s hmotnosťami m vzhľadom na body, vytvárajú pole, sú r_1, r_2,..., r_n (obr. 3.2.3.2a). Výsledné gravitačné pôsobenie na skúšobný hmotný bod je dané *princípom superpozície* (vektorového sčítania), ktorý hovorí:

Výsledná sila aj intenzita gravitačného poľa vytvoreného viacerými hmotnými bodmi sú dané súčtom síl, resp. intenzít gravitačných polí jednotlivých hmotných bodov.

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = -G\sum_{i=1}^{n} \frac{mM_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i \, , \qquad (3.2.3.5)$$

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_i = -G\sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i \, . \qquad (3.2.3.6)$$

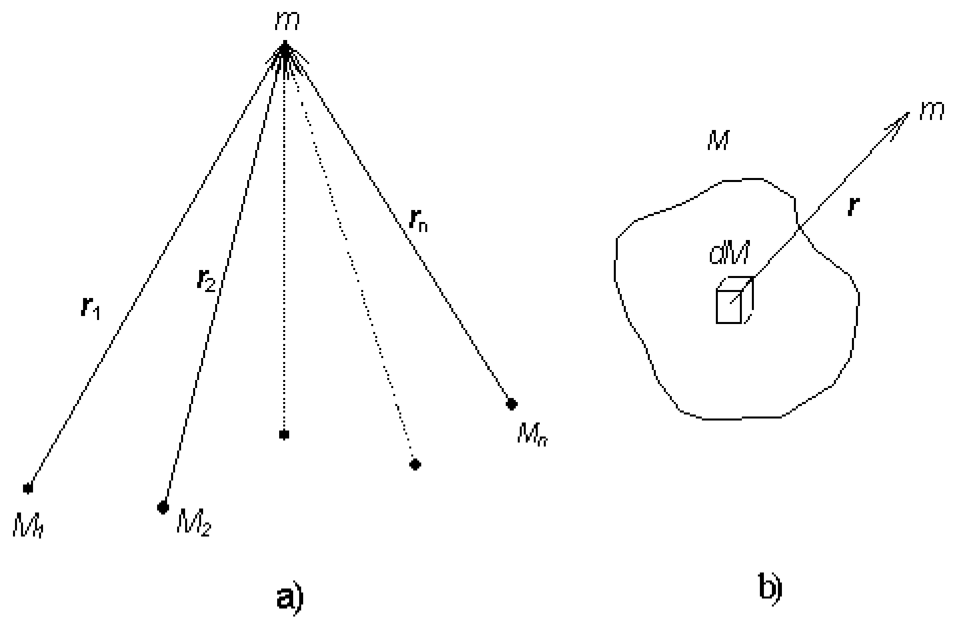
V prípade poľa, vytvoreného spojitou sústavou hmotných bodov, resp. telesom (obr. 3.2.3.2b) o celkovej hmotnosti *M* a objeme *V* prejdú sumácie v predchádzajúcich vzťahoch do integrácií. Dostaneme tak

$$\boldsymbol{F} = -Gm\int_M \frac{dM}{r^3}\boldsymbol{r} = -Gm\int_V \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\rho\, dV \qquad (3.2.3.7)$$

a

$$\boldsymbol{K} = -G\int_M \frac{dM}{r^3}\boldsymbol{r} = -G\int_V \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\rho\, dV \, , \qquad (3.2.3.8)$$

kde *dM* a *dV* sú hmotnostný a objemový element telesa a *r* je jeho hustota.



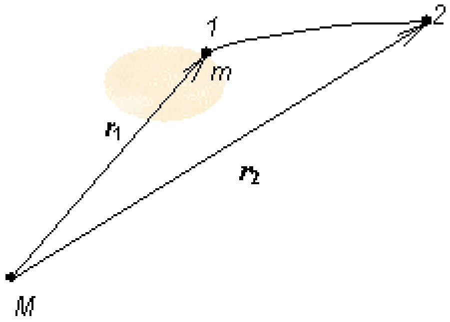
Obr. 3.2.3.2 Princíp superpozície pre prípady
a) diskrétnej sústavy hmotných bodov
b) spojitej sústavy (telesa)

3.2.4 Práca v gravitačnom poli. Potenciálna energia

Predpokladajme, že hmotný bod o hmotnosti M je zdrojom gravitačného poľa. V určitom mieste poľa s polohovým vektorom r vzhľadom na bod M nech sa nachádza iný hmotný bod s hmotnosťou m. Vieme už, že príťažlivá sila, ktorá na tento hmotný bod pôsobí je

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{M.m}{r^3}\boldsymbol{r} \ . \qquad (3.2.4.1)$$

Ak chceme hmotný bod m premiestniť z bodu *1* s polohovým vektorom r_1 do bodu *2* s polohovým vektorom r_2 (obr. 3.2.4.1), musíme túto silu prekonávať silou



Obr. 3.2.4.1 Práca vykonávaná pri premiestnení hmotného bodu *m* v gravitačnom poli bodu *M*

$$\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F} \qquad (3.2.4.2)$$

a vykonáme pritom prácu

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}'.d\boldsymbol{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = G\frac{Mm}{r^3}\,\boldsymbol{r}.d\boldsymbol{r} = GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{\boldsymbol{r}.d\boldsymbol{r}}{r^3} = GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} =$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (3.2.4.3)$$

(r_1, r_2 a dr sú veľkosti príslušných vektorov $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ a d$\boldsymbol{r}$).

Z výsledku vidíme, že práca nezávisí od toho, po akej dráhe sa hmotný bod *m* premiestnil z bodu *1* do bodu *2*. Práca je úplne určená počiatočnou a konečnou vzdialenosťou prenášaného hmotného bodu *m* od nehybného bodu *M*, ktorý je zdrojom poľa.

V uvažovanom prípade sme hmotný bod *m* od zdroja gravitačného poľa vzďaľovali, takže prácu konala určitá vonkajšia sila premáhaním síl gravitačného poľa. Ak sa pohyb deje v opačnom smere, prácu koná gravitačné pole.

Hmotný bod má teda v dôsledku existencie gravitačnej sily schopnosť konať prácu. Hovoríme, že má *polohovú* alebo *potenciálnu energiu*.

Potenciálna energia hmotného bodu s hmotnosťou *m* v polohe určenej polohovým vektorom r_0 v poli hmotného bodu *M* je teda rovná

$$E_p = -GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \qquad (3.2.4.4)$$

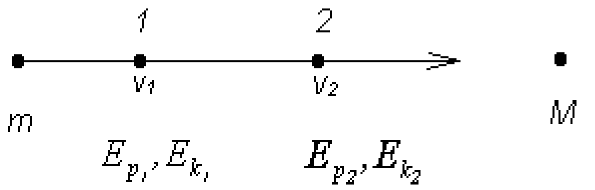
Najvhodnejšie je voliť vzťažnú polohu vo vzdialenosti nekonečne veľkej, t.j. r_0 = ¥. Potenciálna energia vzhľadom na nekonečno je potom daná vzťahom

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} \qquad (3.2.4.5)$$

Číselne sa táto potenciálna energia v zmysle vzťahu (3.2.4.4) rovná práci, ktorú musíme vykonať, aby sme hmotný bod m v poli hmotného bodu M premiestnili z daného bodu do nekonečna.

3.2.5 Zákon zachovania mechanickej energie v gravitačnom poli

Keď hmotný bod m v gravitačnom poli bodu M uvoľníme, dá sa vplyvom pôsobenia gravitačných síl do zrýchleného pohybu smerom k zdroju poľa. Predpokladajme, že pri tomto pohybe má v bode 1 svojej dráhy potenciálnu energiu E_{p1}, v bode 2 potenciálnu energiu E_{p2}. V bode *1* má rýchlosť v_1 a teda kinetickú energiu E_{k1}, v bode *2* je jeho rýchlosť v_2 a kinetická energia E_{k2} (obr. 3.2.5.1)



Obr. 3.2.5.1 Energetická bilancia pri pohybe hmotného bodu m
v gravitačnom poli bodu M smerom k zdroju poľa

V predchádzajúcej časti sme ukázali, že práca potrebná k prenosu hmotného bodu z miesta *1* do miesta *2* je rovná rozdielu potenciálnych energií v týchto miestach, t.j.

$$A = E_{p_1} - E_{p_2} \quad . \qquad (3.2.5.1)$$

Z dynamiky zároveň vieme, že ak sa za účinku sily mení pohybový stav hmotného bodu, sila vykoná prácu rovnú rozdielu kinetických energií v týchto miestach, t.j.

$$A = E_{k_2} - E_{k_1} \quad , \qquad (3.2.5.2)$$

takže

$$E_{p_1} - E_{p_2} = E_{k_2} - E_{k_1} \quad . \qquad (3.2.5.3)$$

Posledný vzťah môžeme prepísať aj do tvaru

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2} \quad , \qquad (3.2.5.4)$$

alebo

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + E_{p_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 + E_{p_2} \quad . \qquad (3.2.5.5)$$

Tento zápis matematicky vyjadruje zákon o zachovaní mechanickej energie: pri pohybe voľného hmotného bodu (resp. telesa) v gravitačnom poli sa jeho celková mechanická energia, daná súčtom kinetickej a potenciálnej energie, nemení.

Príkladom je aj voľný pád telesa (resp. jeho zvislý vrh nadol alebo nahor) v gravitačnom poli Zeme.

3.2.6 Potenciál gravitačného poľa. Vzťah medzi intenzitou a potenciálom

Na charakterizovanie vlastností gravitačného poľa sme už zaviedli vektorovú veličinu - intenzitu. Jej výpočet je však - najmä v prípadoch systémov diskrétne alebo spojito rozložených hmotných bodov - dosť zložitý. Preto je vhodné zaviesť na tento účel aj nejakú skalárnu veličinu, ktorej výpočet sa realizuje jednoduchšie a ktorá je tiež nezávislá od hmotnosti skúšobného hmotného bodu.

Takouto veličinou je *potenciál gravitačného poľa*. Potenciál *j* v určitom mieste poľa je definovaný ako podiel potenciálnej energie hmotného bodu v danom mieste a hmotnosti tohto hmotného bodu

$$\varphi = \frac{E_p}{m} \quad . \qquad (3.2.6.1)$$

Ak potenciálnu energiu vzťahujeme na hladinu v nekonečne (absolútna potenciálna energia), potom na rovnakú hladinu vzťahujeme aj potenciál (absolútny potenciál). Tento je v určitom mieste poľa číselne rovný práci, ktorú je potrebné vykonať pri premiestnení hmotného bodu s jednotkovou hmotnosťou z daného miesta do nekonečna. Je zrejmé, že jeho hodnoty (vyjadrené v jednotkách J. kg^{-1} = m^2. s^{-2}) sú záporné.

Potenciály gravitačného poľa vytvoreného jedným hmotným bodom o hmotnosti M, diskrétnou sústavou hmotných bodov o hmotnostiach M_1, M_2, ... M_n a spojitou sústavou hmotných bodov (telesom) o celkovej hmotnosti M a objeme V sú postupne

$$\varphi = -G\frac{M}{r}, \qquad (3.2.6.2)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = -G\sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{r_i} \quad , \qquad (3.2.6.3)$$

$$\varphi = -G\int_M \frac{dM}{r} = -G\int_V \frac{\rho}{r} dV \quad . \qquad (3.2.6.4)$$

Plochy v gravitačnom poli, na ktorých je potenciál v každom bode rovnaký, nazývame *ekvipotenciálne plochy* alebo *ekvipotenciálne hladiny*. Ak je pole vytvorené len jedným hmotným bodom, ekvipotenciálne plochy majú tvar sústredných guľových plôch, pričom hmotný bod sa nachádza v ich strede. V rovinnom priereze sa zobrazia systémom sústredných kružníc, ako je to znázornené na obr. 3.2.6.1 prerušovanými čiarami.

Pri presune hmotného bodu z miesta s potenciálom j_1 do miesta s potenciálom j_2 sa vykoná práca, rovná rozdielu potenciálnych energií. V zmysle vzťahu (3.2.5.1) môžeme túto prácu zapísať aj ako

$$A = m(\varphi_1 - \varphi_2) \quad . \qquad (3.2.6.5)$$

Je zrejmé, že pri presune hmotného bodu po ekvipotenciálnej hladine, kde $j_1 = j_2$, sa žiadna práca nekoná. Výsledná práca bude nulová pri pohybe v ľubovoľnom smere, keď sa hmotný bod po opustení ekvipotenciálnej hladiny na ňu vráti; podstatné sú potenciály, resp. ich rozdiel vo východzom a koncovom bode dráhy. Takáto situácia nastane aj pri obiehaní telesa okolo zdroja poľa po akejkoľvek uzavretej dráhe, aj eliptickej. Príkladmi takýchto pohybov sú pohyby planét okolo Slnka, pohyby družíc okolo Zeme a pod.

Odvodíme si teraz súvislosť medzi intenzitou a potenciálom v danom mieste gravitačného poľa.

Ak sa hmotný bod hmotnosti m za účinku gravitačnej sily $\boldsymbol{F}$ posunie o d$\boldsymbol{r}$, gravitačná sila na tomto úseku vykoná prácu dA, ktorá sa rovná úbytku potenciálovej energie - dE_p hmotného bodu

$$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\,\mathrm{d}E_p \quad . \qquad (3.2.6.6)$$

Ak túto rovnicu vydelíme hmotnosťou m hmotného bodu, dostaneme

$$\frac{\boldsymbol{F}}{m} . d\boldsymbol{r} = -\frac{dE_p}{m} = -d\left(\frac{E_p}{m}\right) \quad , \qquad (3.2.6.7)$$

čiže

$$\boldsymbol{K} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\,\mathrm{d}j, \qquad \text{resp.} \qquad \mathrm{d}j = -\,\boldsymbol{K} \,.\, \mathrm{d}r. \qquad (3.2.6.8)$$

V gravitačnom poli potenciál j je jednoznačne spojitou funkciou polohy $j = j\ (x, y, z)$, takže pre úplný diferenciál dj môžeme písať

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad . \qquad (3.2.6.9)$$

Takto vyjadrený diferenciál môžeme zapísať aj ako skalárny súčin dvoch vektorov

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right).(dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}) \quad . \qquad (3.2.6.10)$$

Prvý výraz na prvej strane je vektor, ktorý označujeme ako grad φ, druhý výraz vyjadruje element posunutia d$\boldsymbol{r}$, takže

$$\mathrm{d}\,\varphi = grad\,\varphi \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad . \qquad (3.2.6.11)$$

Po dosadení do (3.2.6.7) dostaneme

$\boldsymbol{K}.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\, grad\, \varphi \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, (3.2.6.12)

resp.

$\boldsymbol{K} = -\, grad\, \varphi$. (3.2.6.13)

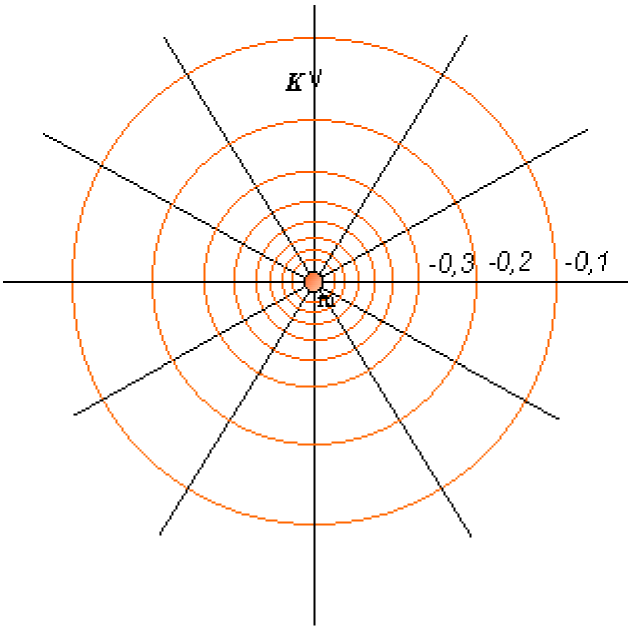
Intenzita v danom mieste poľa sa teda rovná zápornému gradientu potenciálu v tomto mieste.

Gradient potenciálu, vyjadrený výrazom

$$grad\ \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

je vektor, ktorého smer udáva smer najväčšej zmeny potenciálu, a jeho veľkosť sa rovná veľkosti tejto zmeny na jednotku dĺžky. Ak sa hmotný bod posunie po ekvipotenciálnej hladine o d$\boldsymbol{r}$, potenciál sa nemení, takže d $\varphi = 0$. Potom aj $grad\ \varphi\ .\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$. Pretože oba vektory sú nenulové, môže byť tento predpoklad splnený len vtedy, keď oba vektory sú (podľa vlastností skalárneho súčinu) na seba kolmé. Znamená to, že aj vektory intenzity gravitačného poľa sú kolmé na ekvipotenciálne hladiny.

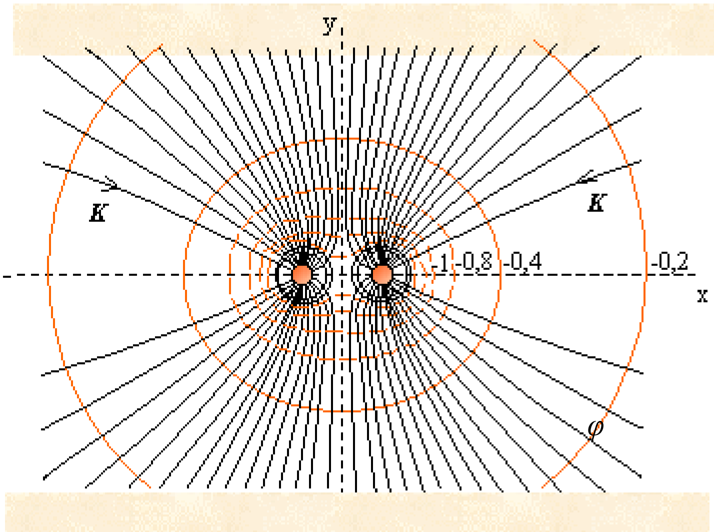
Grafické znázornenie najjednoduchších typov gravitačných polí pomocou siločiar a ekvipotenciálnych hladín sú uvedené na nasledujúcich obrázkoch.



3.2.6.1 Rozloženie siločiar a ekvipotenciálnych hladín v gravitačnom poli jedného hmotného bodu

Na obr. 3.2..6.1 je pole vytvorené jedným hmotným bodom m. Siločiary vstupujú do zdroja poľa, ekvipotenciálne hladiny majú tvar sústredných kružníc okolo neho. Keď ekvipotenciálne hladiny zakreslíme tak, že príslušné hodnoty potenciálu sa odlišujú vždy o rovnaký rozdiel (napr. $\Delta\varphi = 0{,}1$), potom podľa ich hustoty môžeme posúdiť intenzitu poľa. Ľahko takto zistíme, že intenzita je najväčšia v tesnej blízkosti zdroja poľa a jej vektor má smer totožný so smerom ubúdania potenciálu.

Na obr. 3.2.6.2 je podobným spôsobom znázornené gravitačné pole, vytvorené dvoma hmotnými bodmi. Siločiary sú zakreslené plnými čiernymi čiarami, ekvipotenciálne hladiny farebnými prerušovanými.



Obr. 3.2.6.2 Gravitačné pole dvoch hmotných bodov

3.2.7 Gravitačné pole Zeme

Naša planéta Zem tiež vytvára vo svojom okolí gravitačné pole. Môžeme predpokladať, že Zem má tvar homogénnej gule s hmotnosťou $M_z = 6.10^{24}\ kg$, s polomerom $R_z = 6\ 378\ km$. Spomínali sme už, že gravitačné pole v okolí homogénnej gule je rovnaké ako v okolí hmotného bodu s rovnakou hmotnosťou, nachádzajúceho sa v strede gule.

Pod pojmom *tiaž telesa* rozumieme silu, ktorou je teleso o hmotnosti m priťahované k Zemi. Označujeme ju symbolom G a môžeme ju vyjadriť pomocou Newtonovho zákona sily aj pomocou Newtonovho gravitačného zákona. V skalárnom tvare to je

$$F_g = mg \quad ; \quad \text{resp.} \quad F_g = G\frac{M_z m}{r^2} \ , \qquad (3.2.7.1)$$

kde r predstavuje vzdialenosť telesa od stredu Zeme a g je zrýchlenie telesa, ktoré mu udeľuje gravitačná sila – tzv. gr*avitačné* (resp., čo je takmer to isté, *tiažové*) *zrýchlenie*.

Pojmy *gravitačné zrýchlenie* a *tiažové zrýchlenie* sa líšia len v tom, že tiažové zrýchlenie zahrňuje aj vplyv odstredivej sily rotácie Zeme. Je to však slabý príspevok (rádovo desatiny percenta), takže ho môžeme zanedbať a oba pojmy prakticky stotožniť. V ďalšom budeme teda používať bežnejší termín *tiažové zrýchlenie.*

Ako vyplýva z uvedených vzťahov, toto zrýchlenie môžeme vyjadriť ako

$$g = G\frac{M_z}{r^2} \ . \qquad (3.2.7.2)$$

Pre povrch Zeme, kde $r = R_z$, je tiažové zrýchlenie rovné

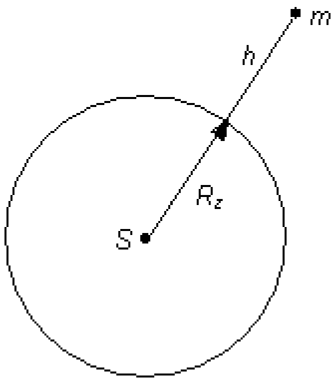
$$g_0 = G\frac{M_z}{R_z^2} \qquad (3.2.7.3)$$

a má hodnotu približne 9,81 m.s^{-2} (presná hodnota závisí od zemepisnej šírky a nadmorskej výšky).

Potenciálna energia telesa, kde *r* je vzdialenosť od silového centra, t.j. od stredu Zeme, je daná vzťahom

$$E_p = -G\frac{M_z.m}{r} \quad . \qquad (3.2.7.4)$$

V praxi je však mnohokrát vhodnejšie vzťahovať ju na zemský povrch. Jednoduchým výpočtom môžeme ukázať, že pre relatívne malé výšky *h* nad povrchom Zeme, kde môžeme hodnotu tiažového zrýchlenia považovať za konštantnú, sa uvedený vzťah zjednoduší na tvar $E_p = mgh$, známy z dynamiky.



Obr. 3.2.7.1 K odvodeniu vzťahu pre potenciálnu energiu v homogénnom gravitačnom poli, vzťahovanú na povrch Zeme

Ako je zrejmé z obr. 3.2.7.1, potenciálnu energiu v určitom bode vo výške *h* vzťahovanú na povrch Zeme môžeme vyjadriť ako rozdiel energií v danom bode a na zemskom povrchu (obe voči nekonečnu)

$$E_p = -G\frac{M_z m}{R_z + h} - \left(-G\frac{M_z m}{R_z}\right) = GM_z m\left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z + h}\right) = GM_z m\frac{R_z + h - R_z}{R_z(R_z + h)} \quad . \qquad (3.2.7.5)$$

Ak uvážime, že $h << R_z$, dostaneme

$$E_p \doteq GM_z m\frac{h}{R_z^2} \quad . \qquad (3.2.7.6)$$

Po aplikovaní vzťahu (3.2.7.2), podľa ktorého

$$G\frac{M_z}{R_z^2} = g \quad ,$$

dospejeme k výsledku

$$E_p = m\,g\,h\,. \qquad (3.2.7.7)$$

Príklad 3.2.7.1 Aká je hodnota tiažového zrýchlenia g vo výške h = 100 km nad povrchom Zeme?

Riešenie: Tiažové zrýchlenie g v danom mieste poľa je rovné intenzite poľa

$$g = K = G\frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}\;. \qquad (3.2.7.8)$$

Číselne pre danú výšku dostaneme

$$g = 6{,}67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}.\frac{6.10^{24} kg}{(6378000 + 100000)^2 m^2} \quad \text{m.s}^{-2} \qquad (3.2.7.9)$$

Vypočítaná hodnota sa líši od hodnoty zrýchlenia na povrchu Zeme menej ako o 3 %. Gravitačné pole po úroveň takýchto relatívne „malých“ výšok môžeme pokladať za homogénne, s konštantnou hodnotou intenzity (resp. zrýchlenia) 9,81 m.s^{-2}.

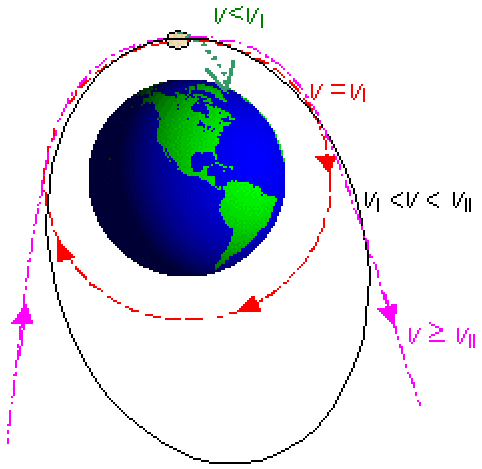
Dôležitými veličinami pre každé väčšie nebeské teleso (Slnko, planéty, mesiace) sú I. a II. kozmická rýchlosť.

Určíme teraz ich hodnoty pre planétu Zem:

I. kozmická rýchlosť v_I je rovná rýchlosti, ktorú musíme udeliť telesu v horizontálnom smere tesne nad povrchom Zeme, aby obiehalo okolo nej po kruhovej dráhe ako umelá družica Zeme.

II. kozmická rýchlosť v_{II} predstavuje tzv. únikovú rýchlosť z povrchu Zeme. Je to minimálna rýchlosť, ktorou musíme vrhnúť teleso zo zemského povrchu zvislo nahor, aby natrvalo opustilo gravitačné

Obrázok – I. a II. kozmická rýchlosť.



Príklad 3.2.7.2: Určte číselne hodnotu I. kozmickej rýchlosti.

Pri výpočte vychádzame z dynamickej podmienky pohybu po kružnici, t.j. fiktívna (zdanlivá) odstredivá sila sa rovná sile dostredivej. Za dostredivú silu považujeme práve gravitačnú silu Zeme, pôsobiacu na teleso. Túto môžeme vyjadriť pomocou Newtonovho gravitačného zákona; jednoduchšie je však vyjadriť ju výrazom pre tiaž *gm*. Potom

$$\frac{mV_I^2}{R_z} = gm \quad . \tag{3.2.7.10}$$

resp.

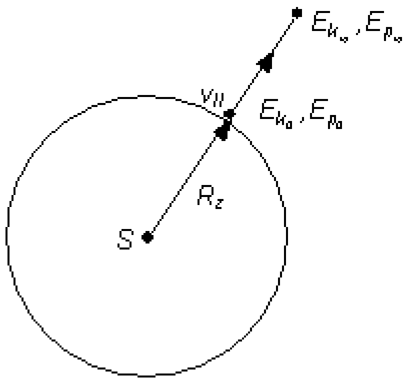
$$V_I = \sqrt{gR_z} \quad , \tag{3.2.7.11}$$

$$V_I = \sqrt{9{,}81\mathrm{ms}^{-2}.6{,}378.10^6\mathrm{m}} = 7900\mathrm{m.s}^{-1} \quad .$$

Hodnota I. kozmickej rýchlosti teda je 7,9 km.s^{-1}.

Príklad 3.2.7.3: Určte číselne hodnotu II.kozmickej rýchlosti.

Pri výpočte vychádzame zo zákona zachovania celkovej mechanickej energie, danej súčtom kinetickej a potenciálovej energie. Celková energia v bode vrhu na povrchu Zeme sa rovná celkovej energii v nekonečne (obr.3.2.7.2), takže



Obr.3.2.7.2 K výpočtu II. kozmickej rýchlosti

(3.2.7.12)

Ak uvážime, že $E_{k\infty}$ aj $E_{p\infty}$ sa rovnajú nule, posledná rovnosť sa zjednoduší na tvar

$$E_{k_0} = -E_{p_0} \qquad (3.2.7.13)$$

alebo

$$\frac{1}{2} m v_{II}^2 = G \frac{M_z m}{R_z} \; . \qquad (3.2.7.14)$$

Ak znovu využijeme vzťah (3.2.7.3), dostaneme konečné vyjadrenie

$$v_{II} = \sqrt{2gR_z} = v_I \sqrt{2} = 11{,}2 km.s^{-1} \; .$$

Je to hodnota II. kozmickej rýchlosti, ktorú sme chceli určiť.

Príklad 3.2.7.4: Určte výšku *h* nad povrchom Zeme, v akej obiehajú stacionárne družice.

Riešenie: Stacionárne družice Zeme sú také umelé družice, ktoré obiehajú nad zemským rovníkom v smere od západu na východ, pričom doba ich obehu je zhodná s dobou jedného otočenia Zeme okolo svojej osi, t.j. $T = 24$ hod.= 86400 s. Takáto družica sa potom zdá akoby „zavesená“ nad jedným miestom zemského povrchu. Stacionárne družice sú preto veľmi vhodné na telekomunikačné účely, t.j. na prenos rozhlasových a televíznych programov, medzikontinentálnych telefonických hovorov a pod.

Pri výpočte výšky h vychádzame z faktu, že dostredivá sila je realizovaná gravitačnou silou

$$\frac{mv^2}{R_z + h} = G \frac{M_z m}{(R_z + h)^2} \; ,$$

kde rýchlosť obiehania *v* určíme ako podiel dráhy a času pri jednom obehu

$$v = \frac{2\pi\left(R_Z + h\right)}{T}$$.

Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu a vykrátení hmotnosti *m* na oboch stranách rovnice dostaneme

$$\frac{4\pi^2(R_z + h)^2}{(R_z + h)T^2} = G\frac{M_z}{(R_z + h)^2}$$.

Po úprave

$$4\pi^2(R_z + h)^3 = GM_zT^2$$

$$R_z + h = \sqrt[3]{\frac{GM_zT^2}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_zT^2}{4\pi^2}} - R_z$$

číselne

$$h = \sqrt[3]{\frac{6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}.6.10^{24}\,kg.86400^2\,s^2}{4\pi^2}} - 6{,}378.10^6\,m$$

h = 35 900 km

Poznámka: Dostredivú silu môžeme vyjadriť aj pomocou uhlovej rýchlosti *w*. Výhodou tohto vyjadrenia je, že uhlová rýchlosť družice je rovnaká ako u bodov na zemskom povrchu. Tento spôsob riešenia prenechávame na čitateľa.

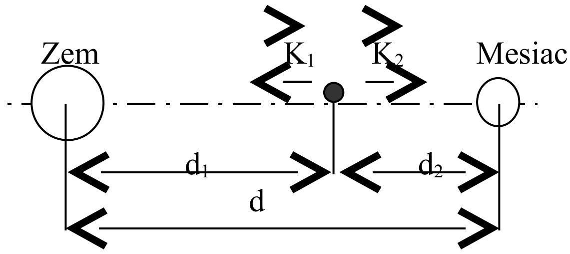
Úloha č. 1.
Odvoďte, ako je možné zo známych hodnôt gravitačnej konštanty G, vzdialenosti Mesiaca od Zeme d_M a obežnej doby Mesiaca okolo Zeme T_M určiť hmotnosť Zeme M_Z.

Úloha č. 2
Určte číselne rozdiel medzi hodnotami gravitačného a tiažového zrýchlenia na povrchu Zeme.

Úloha č. 3
Aký je pomer tiaží telesa hmotnosti m na povrchu Zeme a Mesiaca, keď polomer Zeme R_Z je rovný 3,66 - násobku polomeru Mesiaca R_M a hmotnosť Zeme M_Z je rovná 81,25 - násobku hmotnosti Mesiaca M_M ?

Úloha č.

V ktorom mieste na vzájomnej spojnici zeme a Mesiaca nastane rovnosť intenzít ich gravitačných polí, keď hmotnosť Mesiaca M_M je približne 1/81 hmotnosti Zeme M_Z a stredná vzdialenosť stredov oboch telies je d = 384 000 km?



Zem
K_1
K_2
Mesiac
d_1
d_2
d