

6. MECHANIKA TEKUTÍN

Učebné ciele

Študent by mal vedieť definovať veličiny tlak, hydrostatický tlak, Archimedova sila. Mal by vedieť matematicky zapísať základnú rovnicu hydrostatiky, vedieť ju fyzikálne interpretovať a aplikovať ju pri riešení príkladov. Študent by mal vedieť formulovať Archimedov zákon a vedieť ho využiť pri riešení problémov plávajúcich telies.

Študent by mal tiež vedieť definovať prúdnicu, prietok, výtok. Mal by vedieť matematicky zapísať a vysvetliť rovnicu kontinuity. Mal by vedieť formulovať Bernoulliho rovnicu a vedieť ju fyzikálne interpretovať a aplikovať ju pri riešení príkladov. Študent by mal vedieť vypočítať výtokovú rýchlosť a aplikovať Toricelliho vzťah.

Kvapaliny a plyny, vzhľadom na ich niektoré podobné fyzikálne vlastnosti súborne označujeme ako **tekutiny**. Od tuhých látok sa podstatne odlišujú pohyblivosťou častíc. Častice kvapalín a plynov nemajú usporiadané polohy a môžu sa navzájom relatívne voľne pohybovať. Nemajú na rozdiel od tuhých látok tvarovú pružnosť. Pohyb molekúl kvapaliny môže byť štatisticky neusporiadaný, alebo usporiadaný. Štatisticky neusporiadaný pohyb je tepelný pohyb, pod štatisticky usporiadaným pohybom rozumieme prúdenie.

Ak odhliadneme od povrchových javov, kvapalina je látka, ktorá má určitý objem, ale nemá určitý tvar. Plyn je rozpínavý a zaujme vždy objem nádoby. Makroskopicky sa plyn líši od kvapaliny ďalej tým, že je podstatne stlačiteľnejší a nemôže vytvárať povrch. Pri mikroskopickom pohľade nachádzame v kvapalinách na rozdiel od plynov určité usporiadanie častíc, a to v najbližšom okolí zvolenej „centrálnej“ častice. Toto usporiadanie „na blízko“ je spôsobené medzimolekulovými silami. Odpudivý charakter medzimolekulových síl pri malých vzdialenostiach molekúl je príčinou malej stlačiteľnosti kvapalín. V plynoch, hlavne pri nízkych tlakoch, sú vzdialenosti molekúl oveľa väčšie ako v kvapalinách a vplyv interakcií molekúl je ďaleko menej významný. Každá molekula plynu sa medzi zrážkami pohybuje prakticky voľne a nezávisle od ostatných molekúl. Stlačiteľnosť plynov je omnoho väčšia ako stlačiteľnosť kvapalín. Často používame pri štúdiu kvapalín predstavu nestlačiteľnej kvapaliny. Účel je rovnaký, ako predstava dokonale tuhého telesa. Slúži na zjednodušenie procesov.

Pri kvapalinách pozorujeme, že ich pohyblivosť, t.j. reakcia na pôsobenie sily je rôzna. Príčinou týchto rozdielov je vnútorné trenie – viskozita kvapalín. Ako príklad môžeme uviesť rozdiely medzi tekutosťou benzínu a oleja.

Dôležitou aproximáciou pri štúdiu kvapalín je ideálna kvapalina. Ideálna kvapalina je nestlačiteľná a bez vnútorného trenia. Reálna kvapalina je stlačiteľná a medzimolekulové sily sa v nej prejavujú vnútorným trením – viskozitou.

V ďalšom sa budeme zaoberať len kvapalinami. Fyzikálne zákonitosti v plynach sú totiž rovnaké.

Dôležitou aproximáciou pri štúdiu kvapalín je **ideálna kvapalina**. Je to kvapalina nestlačiteľná a bez vnútorného trenia. Reálna kvapalina je stlačiteľná a medzimolekulové sily sa v nej prejavujú vnútorným trením – viskozitou.

6.1 HYDROSTATIKA

Zaoberá sa štúdiom kvapalín v pokoji.

Pascalov zákon : Tlak prenesený kvapalinou je vo všetkých miestach kvapaliny rovnako veľký a nezávisí od jeho pôvodného smeru.

Na princípe Pascalovho zákona sú založené napr. Spojené nádoby, U- trubice, hydraulické lisy a pod.

Hydrostatický tlak kvapaliny je tlak, spôsobený tiažou kvapaliny v hĺbke h pod hladinou. Je daný vzťahom

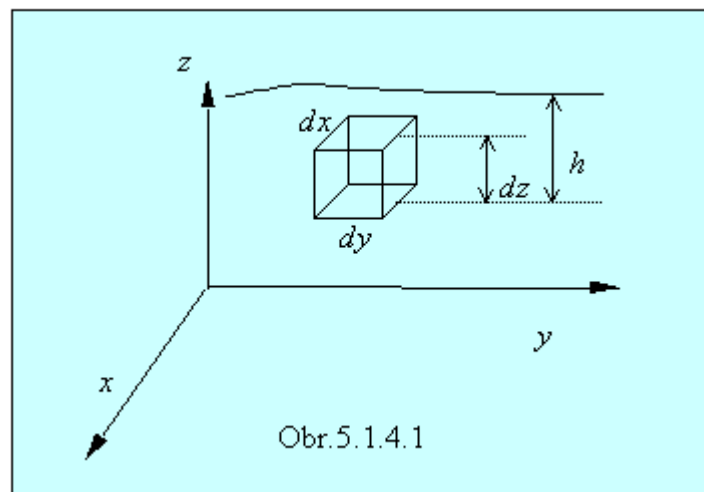
$$p = h \rho g ,$$

kde h je hĺbka kvapaliny, ρ je jej hustota a g je tiažové zrýchlenie.

6.2 HYDRODYNAMIKA

Zaoberá sa silovými účinkami v kvapalinách a štúdiom pohybov prúdiacich kvapalín, resp. pohybov telies v kvapalinách.

6.2.1 Archimedov zákon



Dôsledkom hydrostatického tlaku je Archimedova vztlačová sila. Majme v kvapaline hustoty ρ úplne ponorené teleso rozmerov dx , dy , dz (obr.5.1.4.1).

Hydrostatický tlak je iba funkciou súradnice z , v dôsledku čoho sa rušia zložky tlakových síl pôsobiacich na element dV v smere osí x a y . Zložka tlakových síl v smere osi z sa rovná rozdielu tlakových síl pôsobiacich na dolnú a hornú základňu:

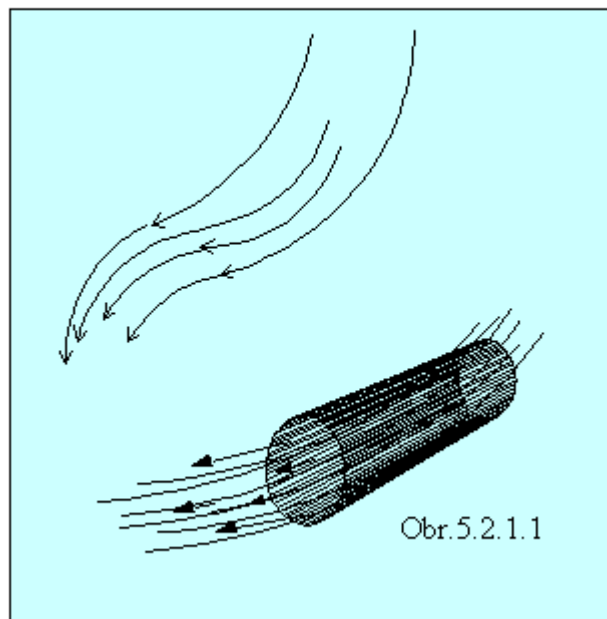
$$dF_z = \rho g h \, dx \, dy - \rho g (h - dz) \, dx \, dy = \rho g \, dV.$$

Na teleso objemu dV bude pôsobiť smerom nahor sila, ktorej veľkosť sa rovná tiaži kvapaliny telesom vytlačenej.

Archimedov zákon: *Teleso je nadľahčované silou, ktorá sa rovná tiaži telesom vytlačenej kvapaliny.*

6.2.2 Popis prúdenia kvapalín

Vyjadrovať pohyb kvapaliny ako pohyb jej jednotlivých častíc je ťažko možné a tiež neúčelné. Vhodnejší je spôsob, pri ktorom prúdiacu kvapalinu považujeme za spojité prostredie. Každému bodu v tomto prostredí priradíme vektor rýchlosti $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, t)$. Podľa rýchlosti hovoríme o hydrostatike, ak v každom bode $\mathbf{v} = 0$, a hydrodynamike, ak $\mathbf{v} \neq 0$. Ak pole vektora rýchlosti nezávisí od času, t.j. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r)$, prúdenie je stacionárne.

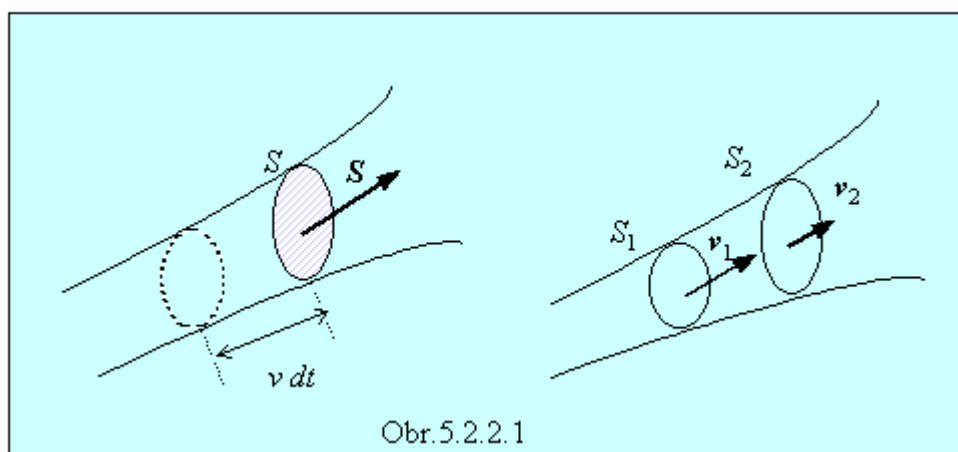


Na znázornenie prúdenia je vhodné zaviesť prúdnice. **Prúdnice** sú orientované krivky, ktorých dotyčnica v každom bode má smer vektora rýchlosti. Prúdnice ďalej zavádzame tak, aby ich hustota, t.j. počet čiar prechádzajúcich plochou S , ktorá je na ne kolmá, bol úmerný

veľkosti rýchlosti v danom mieste. Prúdnice, alebo inak povedané prúdové čiary, nám potom poskytnú informáciu nielen o smere prúdenia, ale aj o jeho rýchlosti.

Plocha preložená prúdniciami na obvodu krivky kolmej na smer prúdiacej kvapaliny vytvára prúdovú trubicu (obr.5.2.1.1). Plášťom takejto prúdovej trubice kvapalina neprechádza.

6.2.3 Rovnica spojitosti (kontinuity)



Majme prúdovú trubicu, ktorej prierez kolmý na smer rýchlosti je S . Predpokladajme, že rýchlosť častíc kvapaliny vo všetkých bodoch tohto prierezu je rovnaká. Za časový interval Δt cez prierez trubice prejdú všetky častice, ktorých vzdialenosť od tohto prierezu nebola väčšia ako $v \Delta t$. Za interval Δt cez S pretečie hmotnosť kvapaliny $\rho S v \Delta t$ a za časovú jednotku teda hmotnosť $\rho S v$ (hmotnostný prietok) a objem $S v$ (objemový prietok). Ak je prúdenie stacionárne, potom taká istá hmotnosť kvapaliny ako prierezom S_1 musí prechádzať prierezom S_2 (obr.5.2.2.1).

Zákon zachovania hmotnosti pri stacionárnom prúdení potom vyjadruje rovnica:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 . \quad (6.2.3.1)$$

Ak hustota kvapaliny je konštantná, teda $\rho_1 = \rho_2$, potom platí:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 . \quad (6.2.3.2)$$

a objem pretečený za časovú jednotku prierezom S_1 sa musí rovnať objemu pretečenému prierezom S_2 (cez plášť trubice kvapalina neprechádza). Pre nestlačiteľnú kvapalinu potom v ktoromkoľvek priereze platí:

$$S v = \text{konšt.} \quad (6.2.3.3)$$

Túto rovnicu nazývame **rovnica kontinuity** pre nestlačiteľné kvapaliny. Objem kvapaliny, ktorý pretečie prierezom prúdovej trubice, alebo potrubia za časovú jednotku nazývame objemový prietok, alebo jednoducho **prietok** Q . Ak je rýchlosť prúdenia v každom bode

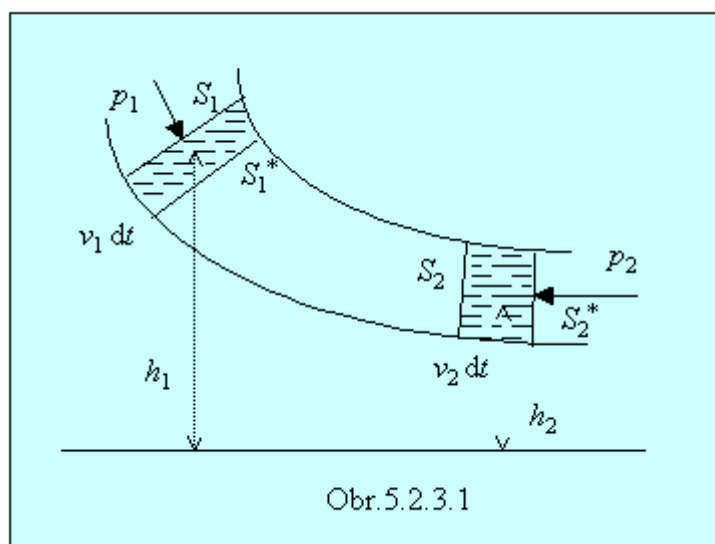
uvažovaného prierezu rovnaká, prietok $Q = S v$. V prípade, že v uvažovanom priereze rýchlosť nie je rovnaká, potom prietok je určený vzťahom

$$Q = \iint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

6.2.4 Bernoulliho rovnica

Z rovnice kontinuity vyplýva, že pri prúdení kvapaliny v potrubí meniaceho sa prierezu sa kvapalina pohybuje so zrýchlením. Zväčšovanie rýchlosti prúdenia kvapaliny vo vodorovnej trubici môže spôsobiť len rozdielny tlak. Z tejto jednoduchéj úvahy vyplýva, že v miestach s väčšou rýchlosťou kvapaliny musí byť tlak menší.

Pre kvantitatívnu formuláciu týchto zmien budeme skúmať prúdenie ideálnej kvapaliny hustoty ρ . Zvoľme si v prúdiacej kvapaline dostatočne úzku prúdovú trubicu a sledujme energiu objemového elementu kvapaliny prechádzajúceho najprv miestom 1 a potom 2. (obr.5.2.3.1). Hmotnostný stred elementu kvapaliny v mieste 1 je o $h = h_1 - h_2$ vyššie ako v mieste 2. Ak prierez S_1 je väčší ako S_2 , podľa rovnice kontinuity musí byť rýchlosť $v_2 > v_1$. Prúdová trubica je dostatočne úzka, t.j. rýchlosť môžeme v celom priereze S_1 a S_2 považovať za konštantnú. Za časový interval Δt miestom 1 prešiel objem $\Delta V = v_1 \Delta t S_1$ a častice kvapaliny, ktoré sa nachádzali v priereze S_1 sú teraz v priereze S_1^* . Miestom 2 prešiel taký istý objem, lebo kvapalina je nestlačiteľná $\Delta V = v_2 \Delta t S_2$ a častice kvapaliny prešli z prierezu S_2 do S_2^* . Pri stacionárnom prúdení v objeme medzi S_1^* a S_2 nedochádza k žiadnym zmenám, iba jedny častice sa zamieňajú druhými. Potrebné je preto sledovať iba zmeny medzi S_1, S_1^* a S_2, S_2^* .



Práca výslednice síl sa rovná prírastku kinetickej energie hmotnostného elementu $\Delta m = \rho \Delta V$. Prácu koná tlaková sila a gravitačná sila. Tlakové sily pôsobiace z bočných strán prúdovej

trubice sa navzájom rušia. Tangenciálne sily nie sú, pretože kvapalina je ideálna a nemá vnútorné trenie. Práce tlakových síl sú $W_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t$ a $W_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t$. Celková práca tlakových síl je $W_p = (p_1 - p_2) \Delta V$. Práca gravitačnej sily sa rovná úbytku potenciálnej energie. Ak hmotnostné stredy objemových elementov sú vo výškach h_1 a h_2 nad vzt'aznou rovinou, potom práca gravitačnej sily $W_g = \rho \Delta V g (h_1 - h_2)$. Platí teda rovnica:

$$\frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) = (p_1 - p_2) \Delta V + \rho \Delta V (h_1 - h_2) \quad (6.2.4.1)$$

Môžeme ju upraviť na tvar:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 \quad (6.2.4.2)$$

Prierezy S_1 a S_2 sme volili ľubovoľne, preto výraz

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p$$

v ktorom prvý člen vyjadruje kinetickú energiu objemovej jednotky, druhý člen potenciálnu energiu objemovej jednotky a p je tlak, musí mať rovnakú hodnotu v ľubovoľnom mieste danej prúdovej trubice. Podľa predpokladov o malosti prierezov S_1 a S_2 a intervalu Δt rovnica (5.2.3.2) bude platiť tým presnejšie, čím bude prierez prúdovej trubice menší. Rýchlosť, výšku h a tlak na pravej a ľavej strane rovnice (6.2.4.2) budeme preto vzťahovať na určitú prúdovú čiaru. Z odvodenia rovnice a rozmerov jej členov vyplýva jej nasledovná fyzikálna interpretácia:

Pri ustálenom prúdení ideálnej kvapaliny v gravitačnom poli je súčet kinetickej a potenciálnej energie objemovej jednotky a tlaku pozdĺž prúdovej čiary konštantný.

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p = \text{konšt.} \quad (6.2.4.3)$$

Táto rovnica sa volá **Bernoulliho rovnica**. (Daniel Bernoulli, 1700 – 1782). Vyjadruje **zákon zachovania mechanickej energie pri ustálenom prúdení ideálnej kvapaliny**.

Poznámka 1. Konštanta v rovnici (6.2.4.3) je rovnaká pozdĺž určitej prúdovej čiary. Vo všeobecnosti sa môže meniť pri prechode od jednej prúdovej čiary k druhej. Môžeme sa stretnúť s prípadmi, keď je táto konštanta rovnaká pre všetky prúdové čiary. Je to napríklad vtedy, keď všetky prúdové čiary sa začínajú, alebo končia v takej oblasti, kde $v = 0$.

Poznámka 2. O tlaku hovoríme, že je hydrostatický v tých miestach, kde je kvapalina v pokoji. Z Bernoulliho rovnice potom platí $p_0 = \text{konšt.} - \rho g h$. V rovnakej výške je pri prúdení kvapaliny hydrodynamický tlak

$$p = \text{konšt.} - \rho g h - \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2.$$

Hydrodynamický tlak je za inak rovnakých podmienok o kinetickú energiu objemovej jednotky menší ako hydrostatický tlak.

Poznámka 3. Čím je rýchlosť kvapaliny väčšia, tým je v danom mieste za rovnakých ostatných podmienok tlak menší. Tento fakt, ktorý sa laickému pozorovateľovi zdá nepochopiteľný má názov „**hydrodynamický paradox**“.

6.2.5 Výtok kvapaliny otvorom malého prierezu

Majme kvapalinu hustoty ρ v širokej otvorenej nádobe, na dne ktorej je malý otvor (obr.5.2.4.1).

Tlak v prierezoch S_1 aj S_2 je rovnaký a rovná sa atmosférickému tlaku. Bernoulliho rovnica pre miesta 1 a 2 má tvar:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_A = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_A \quad (6.2.5.1)$$

Platí $S_1 \gg S_2$, preto $v_1 \ll v_2$ a kinetickú energiu objemovej jednotky v mieste 1 môžeme zanedbať oproti kinetickej energii v mieste 2. Pre rýchlosť výtoku kvapaliny dostávame:

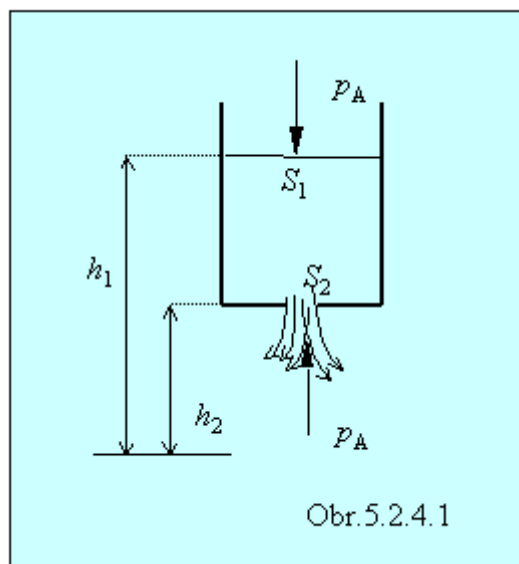
$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (6.2.5.2)$$

Rozdiel $h_1 - h_2 = h$ je výška kvapaliny nad otvorom. Vzťah, ktorý sme odvodili pre rýchlosť výtoku ideálnej kvapaliny otvorom malého prierezu

$$v = \sqrt{2gh} \quad (6.2.5.3)$$

sa volá **Toricelliho vzťah**.

Poznámka: Všimnite si, že rýchlosť výtoku ideálnej kvapaliny je taká istá, ako by bola rýchlosť telesa padajúceho z rovnakej výšky. Rýchlosť výtoku reálnych kvapalín bude v dôsledku viskozity menšia.



Príklad 6.1 Vážením sme zistili, že hmotnosť koruny na vzduchu je 1,47 kg. Keď korunu celú ponoríme do vody, zistíme, že jej „zdanlivá“ hmotnosť je 1,34 kg. Zistite, či je koruna zhotovená zo zlata!

Riešenie: Hustota koruny s hmotnosťou m_k a objemom V_k je

$$\rho_k = \frac{m_k}{V_k}.$$

Ak ju úplne ponoríme do vody, bude na ňu pôsobiť výsledná sila (zdanlivá tiaž) vo vode: $F = G - F_v$, kde $G = m_k g$ je tiažová sila na vzduchu, vztlaková sila

$$F_p = \rho_{H_2O} V_{H_2O} g,$$

kde V_{H_2O}

je objem vytlačenej vody. Ak je teleso úplne ponorené, platí

$$V_{H_2O} = V_k.$$

Potom:

$$m_v g = m_k g - \rho_{H_2O} V_k g \Rightarrow m_v = m_k - \rho_{H_2O} \frac{m_k}{\rho_k}.$$

Odtiaľ pre hustotu koruny dostaneme:

$$\rho_k = \frac{\rho_{H_2O} m_k}{m_k - m_v} = \frac{10^3 \cdot 1,47}{1,47 - 1,34} = 11,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Keďže

$$\rho_{Au} = 19,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

koruna nie je vyrobená zo zlata, ale podľa tabuliek je olovená.

Příklad 6.2 V mori pláva ľadová kryha. Vypočítajte celkový objem kryhy, keď nad vodu vyčnievajúca časť kryhy má objem $V_1 = 180 \text{ m}^3$.

Riešenie: Celkový objem kryhy je $V = V_1 + V_2$ kde V_2 je objem ponorenej časti kryhy. Ak kryha pláva na povrchu, musí platiť rovnováha síl: $\mathbf{G} + \mathbf{F}_v = 0$,

pričom tiažová sila $G = m_r g = \rho_r V g = \rho_r (V_1 + V_2) g$, vztlaková sila

$$F_v = m_{H_2O} g = V_2 g \rho_{H_2O}$$

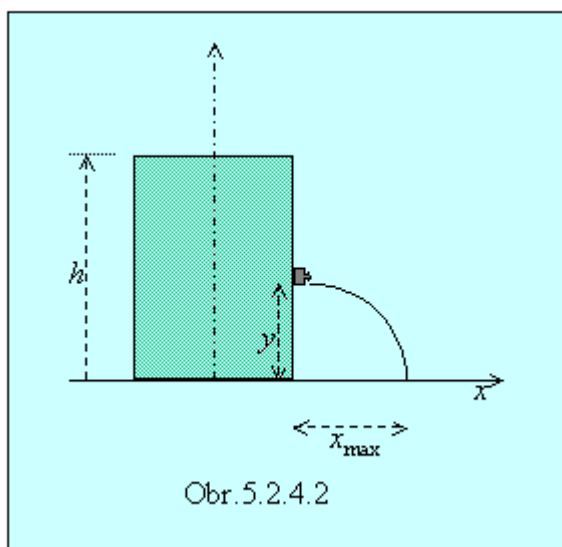
Za rovnováhy sa budú veľkosti síl rovnat' (smery sú opačné):

$$\rho_r (V_1 + V_2) g = \rho_{H_2O} V_2 g \Rightarrow \rho_r V = \rho_{H_2O} (V - V_1) \Rightarrow V = \frac{\rho_{H_2O} V_1}{\rho_{H_2O} - \rho_r} \cong 1705 \text{ m}^3,$$

pričom sme dosadili z tabuliek hustotu morskej vody a hustotu ľadu:

$$\rho_{H_2O} = 1,025 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad \rho_r = 916,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Príklad 6.3 Nádobu postavenú na vodorovnej rovine je naplnená vodou do výšky $h = 0,4$ m a udržuje sa na tejto hladine. Ako vysoko nad dnom musíme urobiť v stene nádoby otvor, aby voda striekala čo najďalej na vodorovnú rovinu? (obr.5.2.4.2)



Riešenie: Pre jednotlivé častice kvapaliny pri vytekaní z otvoru platia kinematické rovnice opisujúce vodorovný vrh:

$$x = vt, \quad y = \frac{1}{2}gt^2$$

pričom pre výtokovú rýchlosť platí Torricelliho vzťah:

$$v = \sqrt{2g(h-y)}$$

Po dosadení rýchlosti v a času t , pre súradnicu x dostaneme:

$$x = \sqrt{2g(h-y)} \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{(h-y)y}$$

Hľadáme extrém tejto funkcie, teda:

$$\frac{dx}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad h - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{h}{2} = 0,2 \text{ m}$$

Príklad 6.4 Rozdiel tlakov v hlavnom potrubí a v zúženej časti vodomeru je $\Delta p = 1 \cdot 10^5$ Pa. Aký je objemový prietok vody vodomermom, ak priečne prierezy hlavného potrubia a zúženej časti sú $S_1 = 0,1 \text{ m}^2$, $S_2 = 0,05 \text{ m}^2$?

Riešenie: Pre vodorovnú trubicu môžeme písať zjednodušený tvar Bernoulliho rovnice:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$$

Po vyjadrení rýchlosti v_2 z rovnice kontinuity: $S_1 v_1 = S_2 v_2$

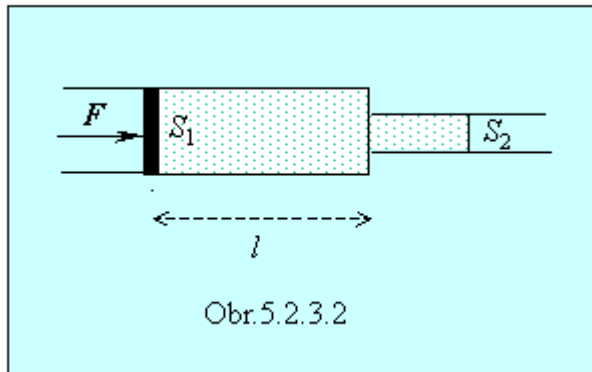
a pretože $p_1 - p_2 = \Delta p$, dostaneme:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \Delta p = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{S_1 v_1}{S_2} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}}$$

Hľadaný objemový prietok:

$$Q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} = 0,8 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Příklad 6.5 Injekčná striekačka (obr. 5.2.3.2) dĺžky $l = 4 \text{ cm}$ má prierez piesta $S_1 = 120 \text{ mm}^2$ a otvor ihly má prierez $S_2 = 1 \text{ mm}^2$. Ako dlho bude vytekať kvapalina hustoty $\rho = 1050 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ zo striekačky, ak je uložená vo vodorovnej rovine a na piest pôsobíme silou $F = 5 \text{ N}$?



Riešenie: Bernoulliho rovnica bude mať tvar :

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \left(p_A + \frac{F}{S_1} \right) = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_A$$

Pre rýchlosť v_2 z rovnice kontinuity platí:

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

Po dosadení do predošlej rovnice a úprave, dostaneme pre rýchlosť pohybu piesta v_1 :

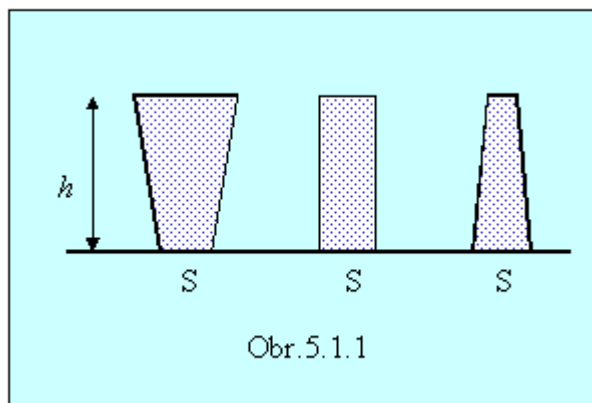
$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1 (S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Pri rovnomernom pohybe piesta bude čas vytekania:

$$t = \frac{\ell}{v_1} = \frac{\ell}{S_2} \sqrt{\frac{\rho S_1 (S_1^2 - S_2^2)}{2F}} = 0,5 \text{ s}.$$

Kontrolné otázky

1. Aký je rozdiel medzi kvapalinou a plynom?
2. Aký je rozdiel medzi tuhou látkou a kvapalinou?
3. Čo rozumiete pod ideálnou kvapalinou?
4. Čo je príčinou hydrostatického tlaku?
5. Čo tvrdí Pascalov zákon?
6. Ako určíte hustotu svojho tela, ak nepoznáte jeho objem, ale máte k dispozícii váhy a bazén s vodou?
7. Prečo sa v morskej vode ľahšie udržíte na povrchu ako v bazéne?
8. Tri rôzne nádoby ale s rovnakou plochou dna sú naplnené vodou do rovnakej výšky. Aký bude tlak vody na dno každej nádoby? Aké budú hmotnosti vody v jednotlivých nádobách? (obr. 5.1.1)



9. Loď naplnená kameňmi nemôže prejsť pod nízkym mostom. Čo musíme urobiť - vyložiť časť nákladu alebo naopak loď viac zaťažiť, aby pod mostom preplávala?
10. Kocka ľadu pláva v pohári naplnenom po okraj vodou. Preleje sa voda, ak sa ľad roztopí?