STU MTF
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
MATERIÁLOVOTECHNOLOGICKÁ FAKULTA SO SÍDLOM V TRNAVE

Fyzika

Časť: Laboratórne cvičenie

Laboratórna úloha č. 4:
MERANIE TEPLOTNÉHO KOEFICIENTU ELEKTRICKÉHO ODPORU

Akademický rok: 2023/2024

Vypracovala: doc. PaedDr. Žaneta Gerhátová, PhD.

Laboratórna úloha č. 4:
MERANIE TEPLOTNÉHO KOEFICIENTU ELEKTRICKÉHO ODPORU

Naštudujte si uvedenú tému zo skrípt:
Kubliha, M. a kol. *Metodológia technického experimentu*. STU v Bratislave, MTF so sídlom v Trnave, 2007, ISBN 978-80-8096-00, **str. 98 - 102**.

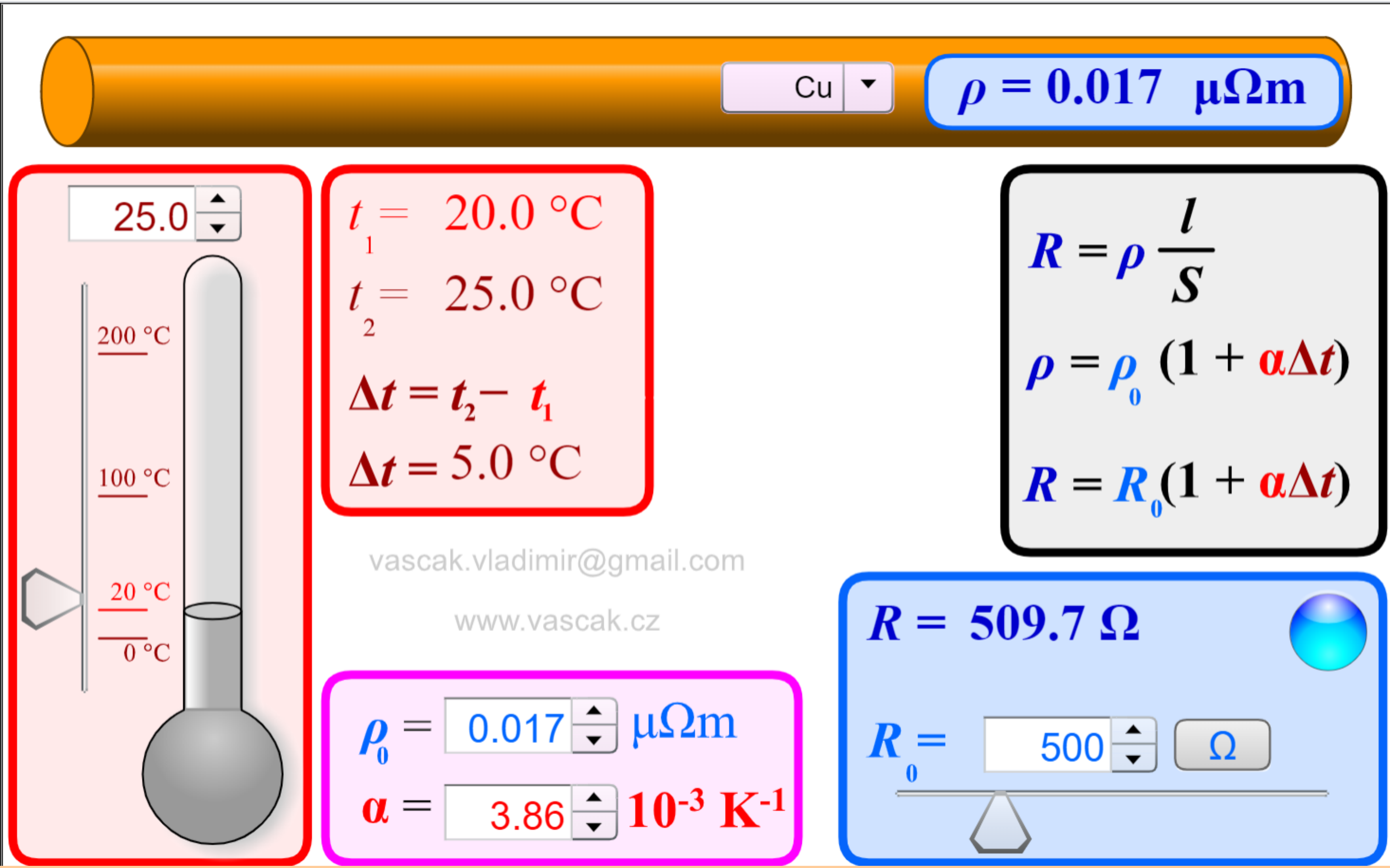
K uvedenej problematike si môžete pozrieť aj videá v českom jazyku *„Závislost R na teplotě“* **dostupné na:**

https://www.youtube.com/watch?v=vOjPCYrwi34,

„Závislost odporu na teplotě“ **dostupné na:**
https://www.youtube.com/watch?v=V6dOSGFEDbw.

Laboratórna úloha č. 4:
MERANIE TEPLOTNÉHO KOEFICIENTU ELEKTRICKÉHO ODPORU

Uvedenú problematiku môžete lepšie pochopiť experimentovaním s interaktívnou simuláciou: *„Meranie teplotného koeficientu elektrického odporu“* **dostupné na:** https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=ele_odpor_teplota&l=sk (pozri obr. 1).



Obr. 1 Meranie teplotného koeficientu elektrického odporu

(Zdroj obr.: https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=ele_odpor_teplota&l=sk)

OBSAH

Cieľ

Určiť hodnotu teplotného koeficientu elektrického odporu vybraného kovu a stanoviť veľkosť neistoty merania.

Teoretický úvod

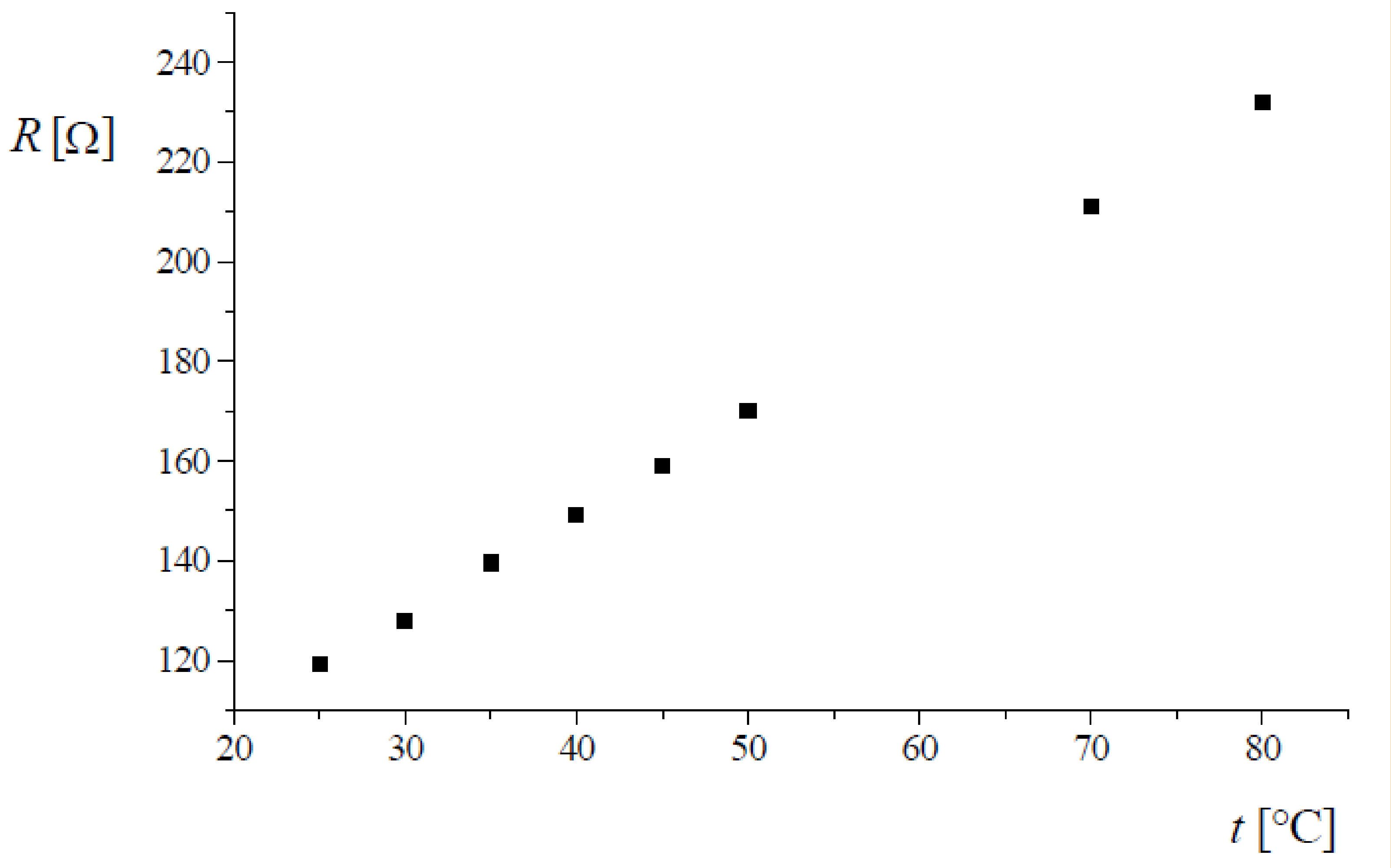
Podľa vzťahu

$$R = R_0\left(1 + \alpha t\right), \qquad (1)$$

kde R je veľkosť elektrického odporu vodiča pri teplote t, R_0 je veľkosť elektrického odporu vodiča pri 0 °C a α je koeficient teplotného nárastu elektrického odporu vodiča (teplotný koeficient elektrického odporu vodiča).

Zo vzťahu (1) vyplýva, že namerané hodnoty odporu R by mali byť lineárne závislé od t, čo potvrdzuje aj obr. 2.

Teoretický úvod



Obr. 2 Závislosť elektrického odporu vodiča od jeho teploty

Teoretický úvod

- Pri určení koeficientu α sa vychádza z upraveného vzťahu:

$$R = R_0 + R_0 \alpha t = b + at \,. \qquad (2)$$

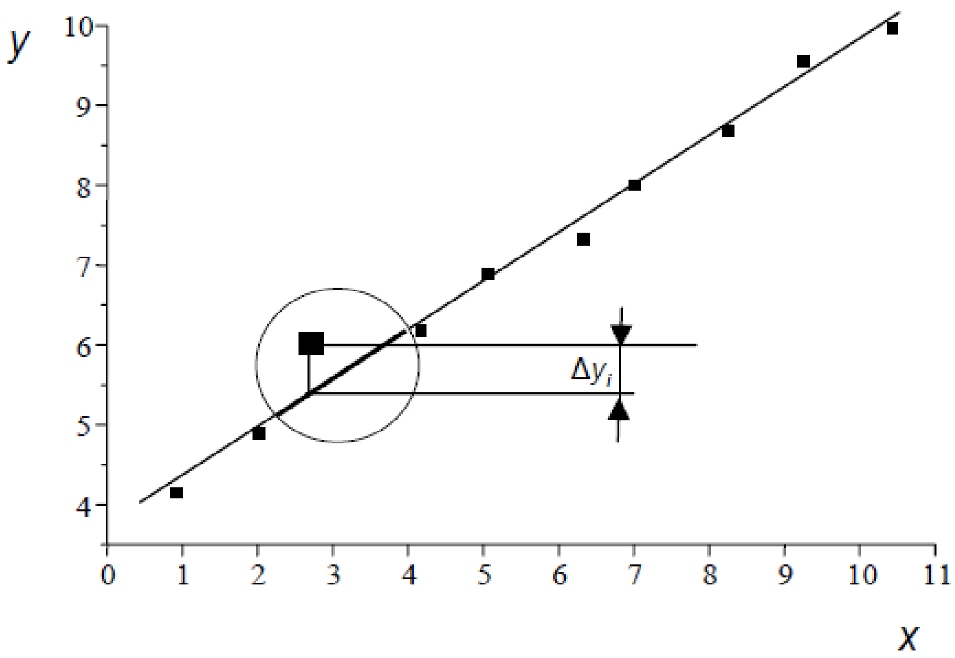
- Ak sú známe veľkosti a a b koeficientov lineárnej závislosti, možno koeficient teplotného nárastu určiť na základe vzťahu:

$$\alpha = \frac{a}{b} \,. \qquad (3)$$

- Veľkosť koeficientov a a b sa určí pomocou **metódy najmenších štvorcov**.

Teoretický úvod

- Pri určovaní pomocou **metódy najmenších štvorcov** sa vychádza z odchýlky Δy_i medzi nameranou hodnotou veličiny a hodnotou stanovenou z funkčnej závislosti (obr. 3).



Obr. 3 Experimentálne namerané hodnoty funkčnej závislosti $y = f(x)$ s lineárnym fitom

Teoretický úvod

- Ako kritérium platí podmienka, že súčet druhých mocnín všetkých odchýlok daného merania je minimálny:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = min \,, \qquad (4)$$

- teda

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 = min \,, \qquad (5)$$

- kde y_i sú namerané hodnoty veličiny a $f(x_i)$ sú namerané hodnoty predpokladanej funkčnej závislosti.

Teoretický úvod

Po dosadení funkčnej závislosti pre priamku v tvare

$$y = f(x) = ax + b$$

do vzťahu (5) dostaneme $S = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2 = min\,,$ (6)

kde pre hľadané koeficienty *a* a *b* vyplývajú z podmienky (6) vzťahy:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0\,, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0\,,$$

ktoré je možné zapísať v tvare:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ 2\left[y_i - (ax_i + b) \right](-x_i) \right\} = 0\,, \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ 2\left[y_i - (ax_i + b) \right](-1) \right\} = 0\,. \qquad (8)$$

Teoretický úvod

Po vynásobení:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i - x_i y_i\right) = 0\,, \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right) = 0 \qquad (10)$$

a úprave

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0\,, \qquad (11)$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0\,, \qquad (12)$$

Teoretický úvod

možno stanoviť hodnoty koeficientov priamky

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad (13)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad (14)$$

Pri meniacej sa veličine y je niekedy zložité určiť veľkosť jej neistoty δ. Nasledujúci vzťah dovoľuje určiť veľkosť tejto neistoty priamo z metódy najmenších štvorcov.

STANOVENIE NEISTOTY OPTIMÁLNYCH HODNÔT KOEFICIENTOV PRIAMKY

- Ak sa merané veličiny *x* a *y* nemenia vo väčšom intervale ako dva rády a relatívna neistota merania veličiny *y* je väčšia ako relatívna neistota merania veličiny *x*, možno na základe známej hodnoty neistoty veličiny *y* označenej ako δ*y* určiť neistoty optimálnych koeficientov priamky *a* a *b*.

$$(\delta a)^2 = \frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} (\delta y)^2, \qquad (15)$$

$$(\delta b)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} (\delta y)^2. \qquad (16)$$

STANOVENIE NEISTOTY OPTIMÁLNYCH HODNÔT KOEFICIENTOV PRIAMKY

Pri meniacej sa veličine *y* je niekedy zložité určiť veľkosť jej neistoty *δ*. Nasledujúci vzťah dovoľuje určiť veľkosť tejto neistoty priamo z metódy najmenších štvorcov:

$$(\delta y)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2}{n-2}. \qquad (17)$$

Hodnoty optimálnych koeficientov *a* a *b* priamky sú zvyčajne navzájom výrazne závislé, a preto pri ich použití vo výpočtoch neistôt iných veličín má význam poznať aj ich korelačný koeficient:

$$r_{ab} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}. \qquad (18)$$

Teoretický úvod

- Pre závislosť: $R = b + at$ (19)
- sa vzťahy (13) a (14) upravia na tvar $t_i \to x_i$, $R_i \to y_i$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} t_i R_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} R_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}, \quad (20) \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \sum_{i=1}^{n} R_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} R_i t_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}. \quad (21)$$

- Na ďalší výpočet je dôležité stanoviť veľkosť jednotlivých súm.

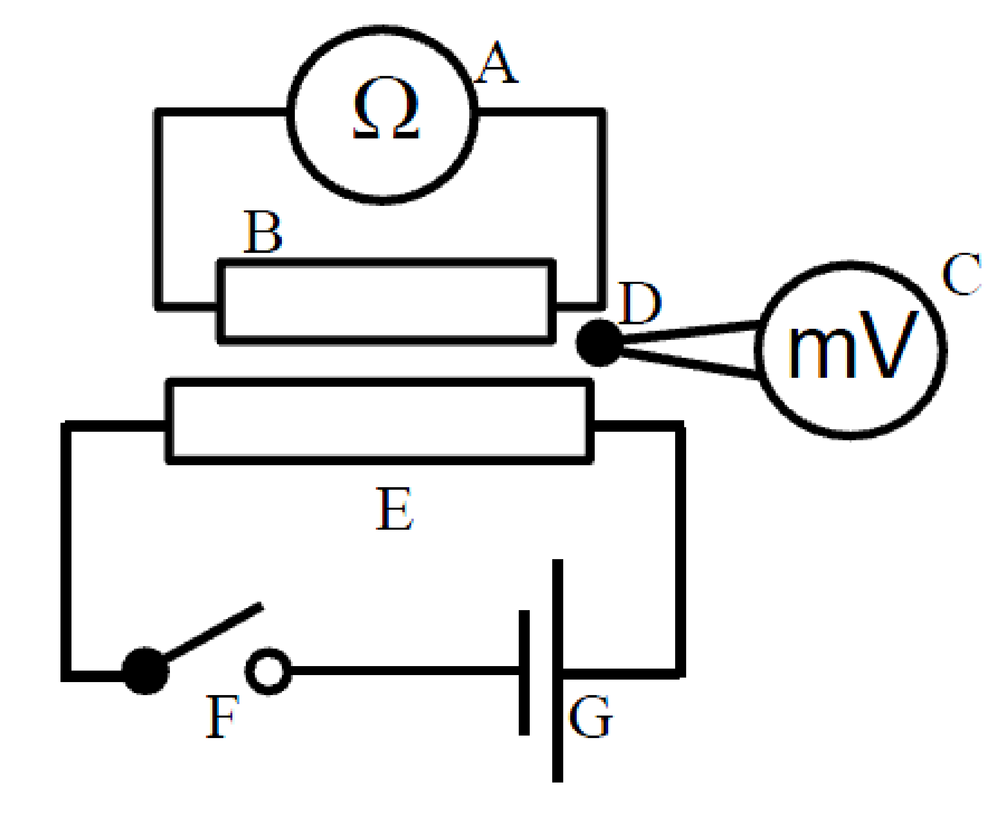
EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky: meraná látka – drôt navinutý na nevodivom valci, digitálny ohmmeter - presnosť merania ±(1 % + 1 digit), termočlánok pripojený k nevodivému valcu, milivoltmeter (teplomer) presnosť merania 0 ° C až 500 ° C: + (0,75% + 1 ° C); 500 ° C až 750 ° C: + (1% + 1 ° C), vyhrievací rezistor umiestnený vo vnútri valca, spínač, elektrický zdroj vyhrievania.

Postup práce

1. Prístroje a zariadenia zapojte podľa schémy na obr. 4.
2. Spínačom zapnite vyhrievanie valca.
3. V pravidelných intervaloch merajte a do tabuľky 1 zapisujte hodnotu elektrického odporu medeného vodiča *R* a jeho teplotu *t.*
4. Pri meraní sa snažte striedavým vypínaním a zapínaním spínača udržať mierny rovnomerný nárast teploty.
5. Po ukončení merania vypnite spínač a zaznamenajte si presnosť merania použitých meracích prístrojov.
6. Vyplňte ostatné stĺpce tabuľky 1.
7. Na ďalšie výpočty stanovte v tab. 1 veľkosti jednotlivých súm.

Postup práce



Obr. 4 Schéma zapojenia pri meraní koeficientu teplotného nárastu elektrického odporu: A – ohmmeter, B – meraná látka, C – milivoltmeter (teplomer), D – termočlánok, E – vyhrievací rezistor, F – spínač, G – elektrický zdroj vyhrievania

Postup práce

8. S využitím vzťahov (20) a (21) vypočítajte koeficienty priamky *a, b.*
9. Vypočítané koeficienty *a, b* dosaďte do vzťahu (3) a vypočítajte koeficient teplotného nárastu elektrického odporu vodiča α a vyjadrite ho v jednotke $[\alpha] = K^{-1}$.
10. Zo vzťahu (22) vypočítajte neistotu merania koeficientu α:

$$\delta\alpha = \delta\frac{a}{b} = \frac{1}{b^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left[a\cdot x_i+b\right]\right)^2}{(n-2)}\right)\cdot\left(\frac{n\cdot b^2+a^2\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\cdot a\cdot b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\right)}\cdot$$

v jednotke $[\delta\alpha] = K^{-1}$. Vo vzťahu (22) je $t_i \to x_i$, $R_i \to y_i$

Postup práce

11. Zo vzťahu (23) vypočítajte relatívnu neistotu merania:

$$\delta\alpha_{\mathrm{rel}} = \frac{\delta\alpha}{\alpha}.100\,\% \qquad (23)$$

12. Zo vzťahu (24) vypočítajte relatívnu chybu merania:

$$\Delta\alpha_{\mathrm{rel}} = \frac{|\alpha_n - \alpha_s|}{\alpha_s}.100\,\%, \qquad (24)$$

v ktorom α_n je vypočítaná (teda nepriamo nameraná) hodnota koeficientu α medi a α_s je skutočná (teda „tabuľková“) hodnota koeficientu α (α_s = 3,86.10^{-3} K^{-1}).

Postup práce

13. Výsledok merania správne zaokrúhlite a zapíšte v tvare:

$\alpha = (\alpha \pm \delta\alpha)\,\mathrm{K}^{-1}$ a $\delta\alpha_{\mathrm{rel}}$ v %.

Relatívna chyba merania $\Delta\alpha_{rel}$ v %.

Poznámka: Neistoty $\delta\alpha$, $\delta\alpha_{rel}$ a relat. chybu $\Delta\alpha_{rel}$ merania zaokrúhlite na dve platné číslice!!!

Postup práce

14. V programe EXCEL (príp. ORIGIN) alebo na milimetrovom papieri zostrojte graf závislosti veľkosti odporu medeného vodiča od jeho rastúcej teploty (pozri obr. 2).
15. V tabuľke 2 vypočítajte body *A*, *B* z funkčnej závislosti $R = b + at_i$ pre zvolené dve teploty (pozri tab. 2).
16. Body A, B vyznačte do grafu a preložte nimi priamku (lineárny fit).
17. Diskutujte o výsledkoch merania a formulujte záver.
18. Z merania vypracujte laboratórny protokol.
19. Vypracovaný lab. protokol odovzdajte svojmu vyučujúcemu na nasledujúcej hodine.

Pozor!!! Hodnoty na osi *x* a *y* v grafe na obr. 2 a 5 slúžia len ako ukážka tvorby grafov a znázornenia lineárneho fitu.

Vyhodnotenie výsledkov

Tabuľka 1 Namerané hodnoty odporu vodiča v závislosti od rastúcej teploty

i	t_i [°C]	R_i [Ω]	$(t_i)^2$ [°C]^2	$R_i t_i$ [Ω . °C]	$(R_i - [a t_i + b])^2$ [Ω]
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
Σ					

Vyhodnotenie výsledkov

Výpočet koeficientov priamky *a, b:*

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} t_i R_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} R_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}$$

$[a] = \Omega.K^{-1}$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \sum_{i=1}^{n} R_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} R_i t_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}$$

$[b] = \Omega$

Vyhodnotenie výsledkov

Výpočet koeficientu teplotného nárastu elektrického odporu:

$$\alpha = \frac{a}{b}$$

$[\alpha] = K^{-1}$

Vyhodnotenie výsledkov

Výpočet neistoty merania α:

$$\delta\frac{a}{b}=\frac{1}{b^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-[a\cdot x_i+b]\right)^2}{(n-2)}\right)\cdot\left(\frac{n\cdot b^2+a^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\cdot a\cdot b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\right)}\ . \qquad (22)$$

$$t_i \rightarrow x_i\ ,\ R_i \rightarrow y_i$$

Vyhodnotenie výsledkov

Výpočet relatívnej neistoty merania α:

$$\delta\alpha_{\mathrm{rel}} = \frac{\delta\alpha}{\alpha}.100\%$$

Výpočet relatívnej chyby merania α:

$$\Delta\alpha_{\mathrm{rel}} = \frac{|\alpha_n - \alpha_s|}{\alpha_s}.100\%$$

Výsledok správne zaokrúhlite a zapíšte v tvare:

$\alpha = (\alpha \pm \delta\alpha).\mathrm{K}^{-1}$ a $\delta\alpha_{\mathrm{rel}}$ v %.

Relatívna chyba merania $\Delta\alpha_{\mathrm{rel}}$ v %.

Vyhodnotenie výsledkov

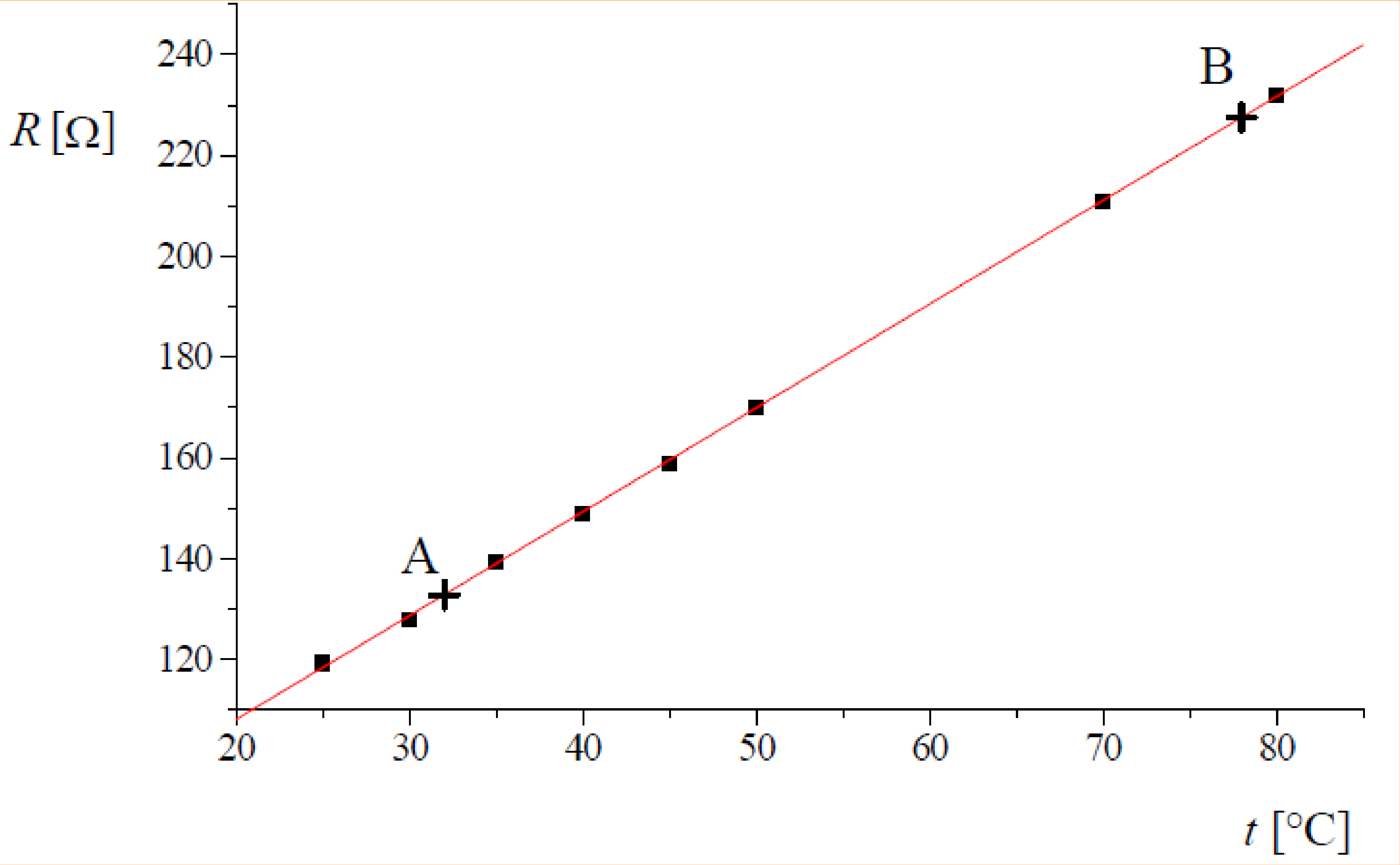
- Priamka je jednoznačne určená dvoma ľubovoľne zvolenými bodmi. Pre každý bod (A, B) jednu súradnicu zvolíme (v našom prípade teplotu t_i) a druhú (v našom prípade odpor R) určíme na základe vypočítanej funkčnej zvislosti $R = b + at_i$.

Tabuľka 2 Výpočet bodov A, B z funkčnej závislosti

Bod	t_i [°C]	$R = b + at_i$ [Ω]
A	32	
B	64	

Vyhodnotenie výsledkov

Závislosť elektrického odporu vodiča od jeho teploty



Obr. 5 Experimentálne namerané hodnoty funkčnej závislosti $R = f(t)$ s lineárnym fitom

Záver

- Pri hodnotení kvalitatívnej stránky merania je dôležitá nízka hodnota elektrického odporu prívodných vodičov k meranému drôtu.
- Z tohto dôvodu sa zvyčajne volí čo najväčšia dĺžka a čo možno najmenší prierez meraného drôtu.
- Pri meraní je tiež dôležité, aby celý meraný drôt mal rovnakú teplotu a aby táto bola korektne meraná.

Literatúra

1. Kubliha, M. a kol. (2007) *Metodológia technického experimentu*. STU v Bratislave, MTF so sídlom v Trnave, ISBN 978-80-8096-00, str. 98 - 102.

2. Vaščák, V. *Meranie teplotného koeficientu elektrického odporu*, (interaktívna simulácia), [online] dostupné na: <https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=ele_odpor_teplota&l=sk> citované dňa 08.02.2024).

Literatúra

3. *Závislost odporu na teplotě*, (video), [online] dostupné na: <https://www.youtube.com/watch?v=V6dOSGFEDbw> citované dňa 08.02.2024).

4. *Závislost R na teplotě*, (video), [online] dostupné na: <https://www.youtube.com/watch?v=vOjPCYrwi34> citované dňa 08.02.2024).

Ďakujem za pozornosť!