Kapitola 1

VEKTORY

Učebné ciele

Študent by mal vedieť označovať vektory, zvládnuť základné algebrické operácie s nimi - súčet, rozdiel, súčin (skalárny a vektorový) dokázať vysvetliť pojmy - jednotkový vektor, veľkosť a absolútna hodnota vektora, rozklad vektora na zložky, súradnice vektora., násobenie vektora číslom (skalárom). Študent by mal vedieť vyjadriť čo znamená záporné znamienko pred vektorom, kedy sa dva vektory považujú za rovnaké, čo je to báza vektorov a čo sú to kolineárne a komplanárne vektory. Študent má zvládnuť sčitovanie vektorov vyjadrených pomocou súradníc.

1.1 ZÁKLADNÉ POJMY

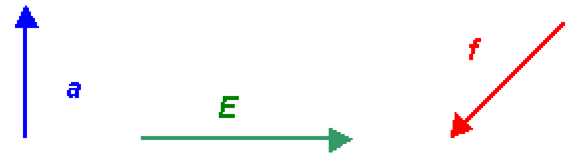
Vo fyzike a technických disciplínach sa stretávame s veličinami, na úplné určenie ktorých postačuje jediná číselná hodnota. Pre takéto veličiny, medzi ktoré patria napr. teplota, hmotnosť, alebo objem, používame názov ***skalárne veličiny*** (stručne ***skaláry***). Často sa však stretávame s veličinami, ktoré charakterizujeme nie iba ich veľkosťou, ale aj smerom v priestore. Nazývame ich ***vektorové veličiny*** (stručne ***vektory***). Navyše je pre ne typický spôsob sčitovania, ktorý geometricky znázorňujeme pomocou skladania úsečiek Medzi vektorové veličiny patrí napríklad *rýchlosť, sila*, alebo *intenzita elektrického poľa*. Cieľom tejto kapitoly je poskytnúť informácie o tom ako s takýmito veličinami narábať, ako ich využiť pri zápise fyzikálnych vzorcov obsahujúcich vektorové veličiny. Vektorový počet má uplatnenie prakticky vo všetkých oblastiach fyziky, ale aj v mnohých technických disciplínach.

1.1.1 Označovanie vektorov

Vektory zapisujeme tučnými písmenami, napr. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\rho}$, alebo ich označujeme šípkou nad písmenom : $\vec{b}, \vec{E}, \vec{f}$. Značky všetkých veličín, teda aj vektorových, sa podľa normy STN ISO 31-0 majú písať ležatým písmom - kurzívou.

Veľkosť vektorových veličín sa zapisuje jednoduchým písmom (nie tučným, resp. bez šípky nad písmenom) : b, E, f , alebo sa vektor vloží medzi značky vyjadrujúce absolútnu hodnotu : $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{E}|$, resp. $|\vec{f}|$. Veľkosť vektora sa nazýva aj ***absolútna hodnota***, je vždy nezáporná.

Graficky sa vektorové veličiny ***znázorňujú*** úsečkou, so šípkou na jednom konci úsečky.



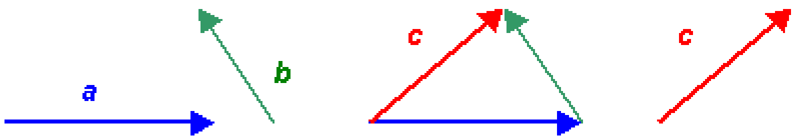
Obr. 1.1.1.1

Miesto na úsečke opatrené šípkou sa považuje za "***koniec vektora***", na opačnej strane úsečky je "***začiatok vektora***".

Vektory rovnobežné s jednou priamkou nazývame ***kolineárne***, vektory rovnobežné s jednou rovinou ***komplanárne***. Kolineárne vektory môžu mať rovnaký, alebo navzájom opačný smer.

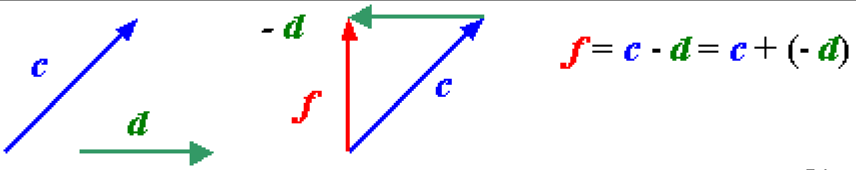
1.1.2 Súčet a rozdiel vektorov

Súčet dvoch vektorov $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ je operácia, ktorej výsledkom je opäť vektor. Graficky sa znázorňuje pomocou úsečiek zobrazujúcich vektory : ku koncu prvého vektora pripojíme druhý vektor, pričom výsledkom ich sčítania je tretí vektor, ktorého začiatok je zhodný so začiatkom prvého vektora a koniec s koncom druhého vektora . V grafickom znázornení :



Obr. 1.1.2.1

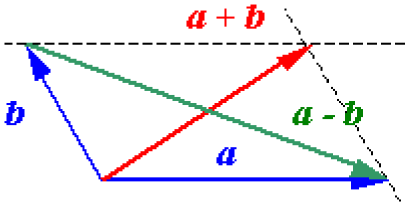
Rozdiel dvoch vektorov $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}$ chápeme ako súčet vektorov $\boldsymbol{c}$ a $(-\boldsymbol{d})$, t.j. $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{d})$. Pritom rovnicu $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}$ možno upraviť rovnako, ako rovnicu s obyčajnými číslami, napríklad vektor $\boldsymbol{d}$ previesť na pravú stranu rovnice : $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{f}$. Takto upravená rovnica môže poslúžiť na overenie správnosti vykonanej operácie.



Obr. 1.1.2.2

Príklad 1.1.2.1 Dva nekolineárne vektory, napr. ***a***, ***b*** , môžeme chápať ako strany rovnobežníka. Graficky ukážte, že ich súčet a rozdiel predstavujú uhlopriečky tohto rovnobežníka.

Riešenie :



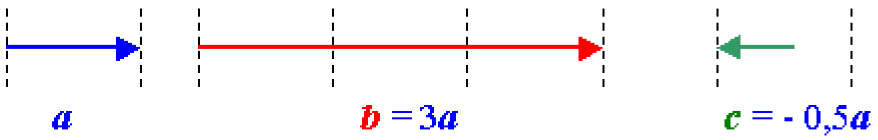
Obr. 1.1.2.3

1.1.3 Skalárny násobok vektora, jednotkový vektor

Násobenie vektora číslom je operácia, ktorá poskytne nový vektor so zmenenou veľkosťou, ale kolineárny s pôvodným vektorom. Napríklad vynásobením vektora $\boldsymbol{a}$ číslom 3 získame vektor $\boldsymbol{b}$ s trojnásobnou veľkosťou a nezmeneným smerom. Ak však vektor $\boldsymbol{a}$ budeme násobiť číslom - 0,5 , dostaneme vektor $\boldsymbol{c}$ s polovičnou veľkosťou, navyše s opačným smerom. Je to ďalšie pravidlo vektorovej algebry. Všeobecne tento vzťah zapisujeme v tvare

$$\boldsymbol{b} = s\boldsymbol{a} \quad , \qquad (1.1.3.1)$$

kde s môže predstavovať nie iba bezrozmerné číslo, ale aj skalárnu veličinu. V literatúre o vektorovom počte sa táto operácia nazýva ***skalárny násobok vektora***.

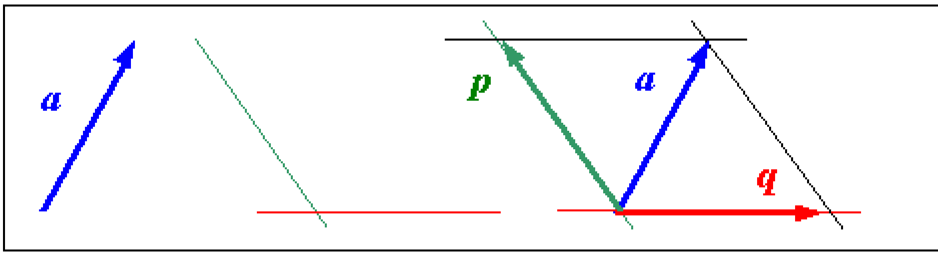


Obr. 1.1.3.1

Jednotkový vektor má veľkosť rovnajúcu sa číslu 1, je bezrozmerný.

1.1.4 Zložky a súradnice vektora

Rozklad vektora na zložky je opačná operácia ako súčet vektorov. V rovine možno vektor rozložiť na dve zložky, t.j. na dva vektory do vopred určených smerov. Sčítaním zložiek vznikne pôvodný vektor. Na obr. 1.1.4.1 je znázornený rozklad vektora $\boldsymbol{a}$ do smerov naznačených dvomi priamkami. Uskutočňuje sa tak, že priamky, do smerov ktorých treba vektor rozložiť, vedieme koncovým aj začiatočným bodom vektora. Tak vznikne rovnobežník, na ktorom už jednoducho vyznačíme zložky $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$.

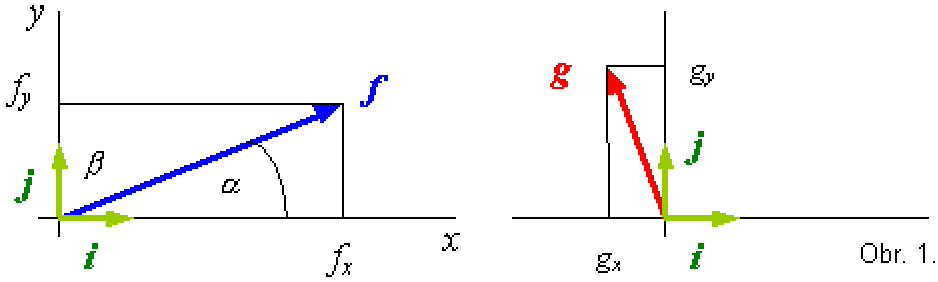


Obr. 1.1.4.1

Najčastejšie sa používa rozklad do troch navzájom kolmých smerov, určených jednotkovými vektormi so zaužívaným označením $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Stotožňujú sa s osami x, y, z karteziánskej súradnicovej sústavy. Ľubovoľný vektor $\boldsymbol{f}$ možno pomocou takejto trojice jednotkových vektorov vyjadriť ako ich lineárnu kombináciu

$$\boldsymbol{f} = f_x \boldsymbol{i} + f_y \boldsymbol{j} + f_z \boldsymbol{k} \quad . \qquad (1.1.4.2)$$

V tomto vyjadrení vektora $\boldsymbol{f}$ sú f_x , f_y a f_z jeho ***súradnice***, ktoré môžu byť kladné, i záporné podľa toho, aký je jeho smer vzhľadom na jednotkové vektory. Na obr. 1.1.4.2 je znázornený dvojrozmerný prípad, pričom vektor $\boldsymbol{g}$ má zápornú súradnicu g_x , ostatné súradnice vektorov $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{g}$ sú kladné.



Obr. 1.1.4.2

Veľkosť vektora $\boldsymbol{f}$ možno v karteziánskej súradnicovej sústave vyjadriť pomocou jeho súradníc, použitím Pythagorovej vety

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \quad . \qquad (1.1.4.3)$$

Vektor $\boldsymbol{f}$ zviera s vektormi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ *smerové uhly* $\alpha, \beta, \gamma,$ pre ktoré platia vzťahy

$$\cos\alpha = \frac{f_x}{f}, \quad \cos\beta = \frac{f_y}{f}, \quad \cos\gamma = \frac{f_z}{f} \quad , \qquad (1.1.4.4)$$

ktoré si možno overiť na dvojrozmernom obrázku 1.1.4.2 .

Zo vzťahov (1.1.4.4) pre kosínusy smerových uhlov (*smerové kosínusy*) bezprostredne vyplýva rovnosť

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (1.1.4.5)$$

Súčet vektorov a skalárny násobok vektora možno výhodne počítať, keď vektory vyjadríme **v zložkovom tvare**. Napríklad ak $\boldsymbol{a} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x\,\boldsymbol{i} + b_y\,\boldsymbol{j} + b_z\,\boldsymbol{k}$ potom môžeme ich súčet uskutočniť po zložkách, na základe platnosti komutatívnosti a asociatívnosti sčítania vektorov :

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\,\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\,\boldsymbol{k} \ , \qquad (1.1.4.6)$$

takže pre súradnice výsledného vektora $\boldsymbol{c}$ platí

$$c_x = (a_x + b_x) \ , \quad c_y = (a_y + b_y) \ , \quad c_z = (a_z + b_z) \ . \qquad (1.1.4.7)$$

Pre **skalárny násobok** vektora vyjadreného v zložkách platí :

$$\boldsymbol{d} = s\boldsymbol{a} = s\,(a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k}) = sa_x\,\boldsymbol{i} + sa_y\,\boldsymbol{j} + sa_z\,\boldsymbol{k} \ ,$$

pričom pre jeho súradnice platí $d_x = sa_x$, $d_y = sa_y$, $d_z = sa_z$. (1.1.4.8)

1.2 SÚČINY MEDZI VEKTORMI

1.2.1 Skalárny súčin vektorov

Vektorová algebra popri násobení vektorov skalármi zavádza aj súčiny medzi vektormi.

Skalárny súčin dvoch vektorov je zavedený ako operácia, ktorej výsledkom je skalárna veličina. Hodnota tejto skalárnej veličiny je určená súčinom veľkostí príslušných vektorov a kosínusu uhla, ktorý tieto vektory zvierajú. Fyzikálny rozmer výslednej skalárnej veličiny sa rovná súčinu rozmerov násobených vektorových veličín. Skalárny súčin sa označuje bodkou medzi vektormi, v strede výšky písmen (nie na úrovni riadku) :

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\alpha \ . \qquad (1.2.1.1)$$

Niektoré **vlastnosti skalárneho súčinu**

- Skalárny súčin je komutatívny, čo vyplýva bezprostredne z jeho definície :

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \qquad (1.2.1.2)$$

- Pre skalárne súčiny medzi jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ karteziánskej súradnicovej sústavy platia vzťahy

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1\,,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1\,,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\,,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0\,,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0 \qquad (1.2.1.3)$$

- Pre skalárny súčin platí distributívny zákon :

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \qquad (1.2.1.4)$$

- Ak sa skalárny súčin dvoch vektorov rovná nule, pričom ani jeden z vektorov nemá nulovú veľkosť, vektory sú na seba kolmé, lebo cos (π/2) = 0.

- Pre skalárny súčin platí distributívny zákon :

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \qquad (1.2.1.5)$$

Skalárny súčin sa často využíva napr. v mechanike. Skalárnym súčinom vektora sily $\boldsymbol{f}$ a vektora elementárneho posunutia $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sa vyjadruje elementárna práca $\mathrm{d}W = \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = f\,\mathrm{d}r \cos\alpha$, lebo smer sily a smer posunutia telesa nemusia byť rovnaké. Vtedy sa na vykonanie práce využíva iba priemet sily do smeru posunutia, vyjadrený ako $f\cos\alpha$.

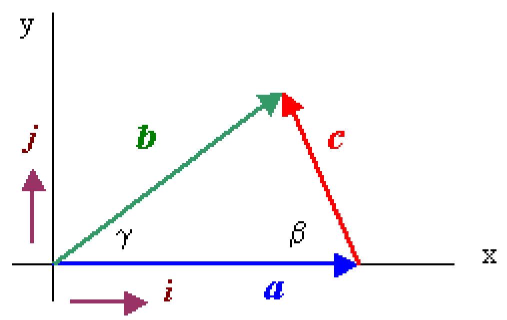
- Z definície skalárneho súčinu vyplýva vzťah

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\alpha = \sqrt{\left(a_x^2+a_y^2+a_z^2\right)\left(b_x^2+b_y^2+b_z^2\right)}\cos\alpha \quad , \qquad (1.2.1.6)$$

takže porovnaním (1.2.5) a (1.2.6) môžeme získať vzorec na výpočet (kosínusu) uhla medzi vektormi :

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{\left(a_x^2+a_y^2+a_z^2\right)\left(b_x^2+b_y^2+b_z^2\right)}} \qquad (1.2.1.7)$$

Príklad 1.2.1.1 Na obr.1.2.1.2 je znázornený trojuholník určený vektormi $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$. Vypočítajte uhly medzi stranami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a stranami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$.



Obr. 1.2.1.2

Riešenie Na výpočet použijeme vzorec (1.2.1.7) :

$$\cos\gamma = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}\sqrt{16+9}} = \frac{20}{5\times 5} = \frac{4}{5}$$

čiže $\gamma = 36{,}9^{\circ}$. Na výpočet uhla β potrebujeme vyjadriť vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ a opäť použiť vzorec (1.2.1.7) .

1.2.2 Vektorový súčin

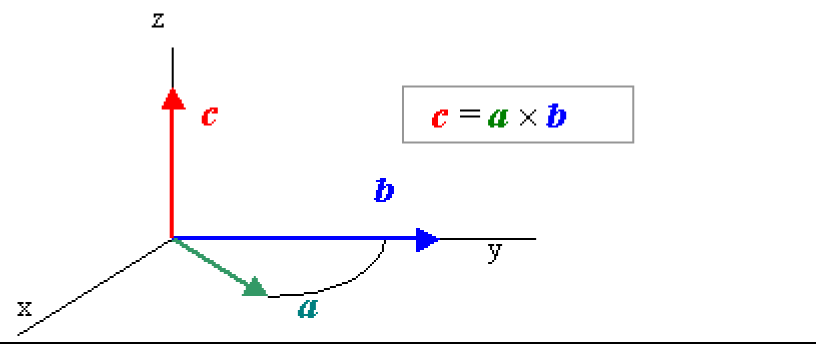
Vektorový súčin dvoch vektorov je zavedený ako operácia, ktorej výsledkom je vektor. Preto treba definovať nie iba **veľkosť** výsledku, ale aj **smer** výsledného vektora. Vektorový súčin sa označuje krížikom medzi vektormi :

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \qquad (1.2.2.1)$$

Veľkosť c výsledného vektora $\boldsymbol{c}$ je definovaná ako súčin veľkostí násobených vektorov a sínusu uhla nimi zovretého :

$$c = ab\sin\alpha \qquad (1.2.2.2)$$

Pre smer vektora $\boldsymbol{c}$ platí definícia, že je kolmý na rovinu násobených vektorov. Jednoznačnosť definície však vyžaduje určiť, na ktorú stranu roviny smeruje. Vektor $\boldsymbol{c}$ má taký smer, že z jeho konca sa stotožnenie prvého vektora zo súčinu (v tomto prípade vektora $\boldsymbol{a}$) s druhým vektorom po kratšom oblúku javí ako pohyb proti chodu hodinových ručičiek. O trojici vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ v danom poradí potom hovoríme, že tvoria ***pravotočivú sústavu vektorov***. Zmena ich poradia jednou permutáciou znamená zmenu z pravotočivej na ľavotočivú sústavu (trojicu).



Obr. 1.2.1.1

Na obr. 1.2.1.1 je trojica vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ znázornená v axonometrickom pohľade. Pre názornosť sú nakreslené aj súradnicové osi karteziánskej sústavy, vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovine (x,y). Vektor $\boldsymbol{a}$ budeme otáčať smerom k vektoru $\boldsymbol{b}$ po kratšom oblúku. Ak rovnako budeme otáčať pravotočivú skrutku, umiestnenú v začiatku súradnicovej sústavy - kolmo na rovinu vektorov ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) - skrutka sa bude posúvať v smere vektora $\boldsymbol{c}$. Aj tento model pomáha pri určovaní smeru vektora, ktorý je výsledkom vektorového súčinu .

Niektoré **vlastnosti vektorového súčinu**

- Vektorový súčin nie je komutatívna operácia, lebo zámena poradia vektorov poskytuje síce vektor rovnako veľký, ale opačného smeru. Táto skutočnosť sa zapisuje v tvare

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \qquad (1.2.2.3)$$

- Pre jednotkové vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, ktoré sú navzájom na seba kolmé, platia vzťahy :

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0 \qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0 \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$$
(1.2.2.4)

- Pre vektorový súčin platí distributívny zákon :

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \qquad (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} \qquad (1.2.2.5)$$

Dva prípady distributívneho zákona sú uvedené preto, lebo vo vektorovom súčine

nemožno zamieňať poradie vektorov bez zmeny znamienka.

Vektorový súčin možno formálne vyjadriť ako determinant :

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1.2.2.7)$$

S vektorovým súčinom sa stretneme napríklad pri vyjadrení momentu sily $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily $\boldsymbol{f}$.

ÚLOHY

Príklad 1 : Vypočítajte súčet vektorov $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

Príklad 2 : Vyjadrite vektor $\boldsymbol{d}$, ktorý má trojnásobnú veľkosť a opačný smer ako vektor $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

Príklad 3 : Vypočítajte skalárny a vektorový súčin vektorov

$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$

Kontrolné otázky

1. *Ako označujeme vektory a ako ich veľkosti ?*
2. *Čo je absolútna hodnota vektora ?*
3. *Dva vektory, ktoré majú rovnakú veľkosť a rovnaký smer, nemajú spoločný začiatočný bod. Sú takéto vektory rovnaké ?*
4. *Dva rovnobežné vektory majú vzájomne opačný smer. Sú kolineárne ?*
5. *Kedy sú vektory komplanárne ?*
6. *Možno o dvoch rovnobežných vektoroch tvrdiť že sú komplanárne ?*
7. *Slovne vyjadrite postup pri grafickom sčítaní dvoch vektorov*
8. *Ovplyvní zámena poradia vektorov pri súčte výsledok ?*
9. *Je sčítanie dvoch vektorov komutatívna operácia ?*
10. *Je sčítanie viacerých vektorov asociatívna operácia ?*
11. *Poznáme veľkosť dvoch vektorov a uhol medzi nimi. Čomu sa rovná ich skalárny súčin?*
12. *Kedy je skalárny súčin dvoch vektorov záporný ?*
13. *Čomu sa rovná skalárny súčin vzájomne kolmých vektorov ?*
14. *Akú veľkosť má vektor, ktorý vznikne ako vektorový súčin dvoch vektorov ?*
15. *Aký smer má vektor, ktorý vznikne ako vektorový súčin dvoch vektorov ?*
16. *Čo znamená, ak trojica vektorov tvorí pravotočivú sústavu ?*