

3 ELEKTRICKÝ PRÚD. PRÁCA A VÝKON ELEKTRICKÉHO PRÚDU. ZDROJE NAPĚTIA. ELEKTRICKÉ OBVODY

Teoretický úvod

Elektrický prúd I je mierou usporiadaného pohybu voľných nosičov elektrického náboja (vodivostného náboja) vo vodičoch. Je to skalárna fyzikálna veličina definovaná vzťahom

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (3.1)$$

kde dQ je elektrický náboj, ktorý prešiel prierezom vodiča za dobu dt . Jednotkou elektrického prúdu v sústave SI je ampér ($1 \text{ A} = 1 \text{ C}/1 \text{ s}$).

Hustota elektrického prúdu \mathbf{J} je vektorová fyzikálna veličina orientovaná v smere pohybu kladného náboja a proti smeru pohybu záporného náboja. Jej veľkosť J je absolútna hodnota elektrického náboja, ktorý prejde za jednotku času jednotkovým prierezom postaveným kolmo na smer pohybu náboja. Jej jednotkou je $1 \text{ A}/1 \text{ m}^2$. Pre elektrický prúd I prechádzajúci orientovanou plochou (prierezom vodiča) S platí

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.2)$$

Okrem elektrického prúdu vyvolaného transportom nosičov elektrického náboja existuje tzv. Maxwellov posuvný prúd I_p generovaný časovou zmenou elektrického indukčného toku Ψ na orientovanej ploche S , cez ktorú posuvný prúd I_p prechádza

$$I_p = \frac{d\Psi}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.3)$$

Porovnaním integrandov vo vzťahoch (3.2) a (3.3) pre hustotu posuvného prúdu \mathbf{J}_p vyplýva

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.4)$$

kde \mathbf{D} je elektrická indukcia v bodoch plochy S . Zo vzťahu (3.3) vyplýva, že posuvný prúd nemôže vzniknúť v elektrostatických poliach. Avšak v nestacionárnych elektrických poliach posuvný prúd existuje aj vo vákuu, aj v dielektrikách.

Pre hustotu elektrického prúdu \mathbf{J} vo vodičoch platí materiálový vzťah (Ohmov zákon v diferenciálnom, resp. vektorovom tvare)

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (3.5)$$

kde γ je konduktivita vodiča, \mathbf{E} je intenzita elektrického poľa vnútri vodiča. V homogénnom vodiči dĺžky l rovnakého prierezu S , s prúdom I a s napätím U medzi jeho koncami platí

$$J = \frac{I}{S}, \quad E = \frac{U}{l} \quad (3.6)$$

Dosadením vzťahov (3.6) do skalárneho tvaru rovnice (3.5) a úpravou dostaneme

$$J = \gamma E \Rightarrow \frac{I}{S} = \gamma \frac{U}{l} \Rightarrow U = \frac{l}{\gamma S} I \Rightarrow U = RI \quad (3.7)$$

Pričom

$$R = \frac{l}{\gamma S} = \frac{\rho l}{S} \quad (3.8)$$

je elektrický odpor vodiča a $\rho = 1/\gamma$ je rezistivita vodiča.

Vzťah (3.7) je **Ohmov zákon: Napätie U na koncoch vodiča sa rovná súčinu odporu R vodiča a elektrického prúdu I , ktorý vodičom preteká.**

Jednotkou elektrického odporu R je ohm ($1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$), jednotkou rezistivity ρ je $1 \Omega \cdot \text{m}$.

Podľa vzťahu (3.8) je elektrický odpor R priamoúmerný súčinu rezistivity ρ a dĺžky l vodiča a nepriamoúmerný prierezu S vodiča. Elektrická vodivosť G je prevrátená hodnota elektrického odporu R vodiča

$$G = \frac{1}{R} = \frac{\gamma S}{l} \quad (3.9)$$

Jednotkou elektrickej vodivosti G je siemens ($1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1} = 1 \text{ A/V}$), jednotkou konduktivity γ je 1 S/m . Ohmov zákon (3.7) môžeme zapísať v tvare

$$I = GU \quad (3.10)$$

Vodič s elektrickým odporom R sa nazýva **rezistor**.

Pri **sériovom zapojení rezistorov** preteká cez rezistory rovnaký prúd I a výsledné napätie U je súčtom napätí na jednotlivých rezistoroch, preto po úprave dostaneme, že **výsledný elektrický odpor sériového zapojenia sa rovná súčtu elektrických odporov jednotlivých rezistorov**

$$U = \sum_k U_k \Rightarrow RI = \sum_k R_k I \Rightarrow R = \sum_k R_k \quad (3.11)$$

Pri **paralelnom zapojení rezistorov** je na rezistoroch rovnaké napätie U a výsledný elektrický prúd I je súčtom elektrických prúdov v jednotlivých rezistoroch, preto po úprave dostaneme, že **výsledná elektrická vodivosť paralelného zapojenia sa rovná súčtu elektrických vodivostí jednotlivých rezistorov, resp. prevrátená hodnota výsledného elektrického odporu paralelného zapojenia sa rovná súčtu prevrátených hodnôt elektrických odporov jednotlivých rezistorov**

$$I = \sum_k I_k \Rightarrow GU = \sum_k G_k U \Rightarrow G = \sum_k G_k \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad (3.12)$$

Podľa vzťahu (1.18) elektrická sila pri presune náboja $dQ = Idt$ (pozri (3.1)) z miesta s potenciálom φ_1 do miesta s potenciálom φ_2 vykoná elementárnu prácu (elektrického prúdu)

$$dW = (\varphi_1 - \varphi_2)dQ = UdQ = UIdt \quad (3.13)$$

ktorá sa mení na inú formu energie. Rýchlosť premeny práce elektrického prúdu na inú formu energie je výkon P elektrického prúdu

$$P = \frac{dW}{dt} = UI \quad (3.14)$$

V rezistoroch sa práca W elektrického prúdu mení nevratne na (Jouleovo) teplo Q_T , pretože elektrickou silou urýchlené vodivostné náboje nárazmi časť svojej kinetickej energie odovzdávajú atómom rezistora. Tým sa zvýši vnútorná energia, resp. teplota rezistora. Ten teplo odovzdáva chladnejšiemu okoliu. Dosadením (3.7) do (3.13,3.14) pre elementárne Jouleovo teplo dQ_T a pre výkon P disipácie elektrickej energie na teplo dostaneme

$$dQ_T = UIdt = RI^2 dt = \frac{U^2}{R} dt \quad (3.15)$$

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \quad (3.16)$$

Trvalé elektrické prúdy vo vetvách elektrických obvodov udržujú **zdroje elektromotorického napätia** (EMN). Zdroje EMN vytvárajú stály potenciálový rozdiel medzi dvoma miestami (svorkami), pričom sa v nich mení iná forma energie na elektrickú (akumulátory, fotočlánky, termočlánky, alternátory, dynamá,...). EMN hodnoty U_E sa na nezaťaženom zdroji vytvorí vďaka preskupeniu elektrického náboja na svorkách pod vplyvom cudzej intenzity E_C vnútri zdroja, orientovanej od zápornej svorky ku kladnej svorke zdroja

$$U_E = \int_{-}^{+} E_C \cdot dl = \int_{-}^{+} \frac{F_C}{Q} \cdot dl = \frac{W_Z}{Q} = E_C l \quad (3.17)$$

kde W_Z je práca cudzej sily $F_C = QE_C$ (práca zdroja) pri prenose náboja Q cez zdroj. V nezaťaženom zdroji je cudzia intenzita E_C úplne kompenzovaná nesúhlasne orientovanou

intenzitou E elektrického poľa preskupených nábojov ($E_C + E = 0$), preto v takom zdroji netečie elektrický prúd. Ak medzi svorky zdroja pripojíme spotrebič (vonkajšiu záťaž), potom sa časť preskupených nábojov presúva z jednej svorky zdroja cez vonkajšiu záťaž na svorku zdroja s opačnou polaritou, vnútri zdroja veľkosť E intenzity elektrického poľa preskupených nábojov poklesne, rovnováha intenzít sa poruší a cez zdroj začne pretekať v smere výslednice intenzít elektrický prúd s prúdovou hustotou

$$\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E}_C + \mathbf{E}) \quad (3.18)$$

Ak vzťahy (3.6), (3.17) dosadíme do skalárneho tvaru rovnice (3.18), po úprave dostaneme

$$J = \gamma(E_C - E) \Rightarrow \frac{I}{S} = \gamma \left(\frac{U_E}{l} - \frac{U}{l} \right) \Rightarrow \frac{l}{\gamma S} I = U_E - U \quad (3.19)$$

kde l je dĺžka zdroja, S je prierez zdroja, γ je konduktivita zdroja a U je svorkové napätie zdroja. Ak zohľadníme vzťah (3.8), úpravou (3.19) dostaneme

$$U = U_E - R_i I \quad (3.20)$$

kde R_i je vnútorný odpor zdroja. Vzťah (3.20) je zaťažovacia (prvková) rovnica zdroja.

Ak zdroj nie je zaťažený (stav naprázdno, $I = 0$), potom sa svorkové napätie U rovná elektromotorickému napätiu U_E

$$U = U_E \quad (3.21)$$

Ak svorky zdroja skratujeme (stav nakrátko, $U = 0$), potom cez zdroj tečie prúd nakrátko I_K

$$I_K = \frac{U_E}{R_i} \quad (3.22)$$

Prúdové zaťaženie zdroja I vo vzťahu (3.20) môžeme zväčšovať zmenšovaním elektrického odporu R vonkajšej záťaže (reostatu) pripojenej k zdroju EMN. Vtedy sa mení aj výkon P elektrického prúdu na vonkajšej záťaži. Tento výkon dosahuje maximálnu hodnotu $(U_E I_K)/4$, ak je záťaž prispôbená zdroju ($R = R_i$).

Účinnosť η zdroja je podiel výkonu P elektrického prúdu na vonkajšej záťaži s elektrickým odporom R pripojenej k zdroju a výkonu P_E zdroja EMN, s ktorým zdroj inú formu energie mení na elektrickú

$$\eta = \frac{P}{P_E} = \frac{UI}{U_E I} = \frac{U}{U_E} = \frac{U_E - R_i I}{U_E} = 1 - \frac{R_i}{U_E} \cdot \frac{U_E}{R_i + R} = \frac{R}{R_i + R} \quad (3.23)$$

Pre zdroj skratovaný ($U = R = 0$) je $\eta = 0$, pre nezaťažený ($U = U_E$, $R = \infty$) je $\eta = 1$. Pre zdroj s prispôbenou záťažou ($R = R_i$) je $\eta = 0,5$. Pre zaťažený ideálny zdroj ($R_i = 0$) je $\eta = 1$.

V prípade, ak $R_i \ll R$, potom sa zdroj nazýva tvrdý. V iných prípadoch ide o mäkký zdroj.

Pri **sériovom zapojení zdrojov** sa kladná svorka daného zdroja spája so zápornou svorkou predchádzajúceho zdroja. Vtedy je výsledné elektromotorické napätie U_{ES} súčtom elektromotorických napätí jednotlivých zdrojov a výsledný vnútorný odpor R_{iS} je súčtom vnútorných odporov jednotlivých zdrojov (nový zdroj je mäkkší)

$$U_{ES} = \sum_k U_{Ek} \quad R_{iS} = \sum_k R_{ik} \quad (3.24)$$

Aby pri **paralelnom zapojení zdrojov** netiekli elektrické prúdy cez zdroje ešte pred pripojením vonkajšej záťaže, musia mať jednotlivé zdroje rovnaké elektromotorické napätie a spájajú sa svorky rovnakej polarity. Aby po pripojení vonkajšej záťaže k paralelnej batérii zdrojov boli jednotlivé zdroje namáhané rovnakými prúdmi, musia mať jednotlivé zdroje rovnaké vnútorné odpory. To ale znamená, že pri **paralelnom zapojení n rovnakých zdrojov** je výsledné EMN U_{EP} rovnaké ako EMN jedného zdroja a výsledný vnútorný odpor R_{iP} je n -krát menší než vnútorný odpor jedného zdroja (nový zdroj je tvrdší)

$$U_{EP} = U_{Ek} \quad \frac{1}{R_{iP}} = \sum_k \frac{1}{R_{ik}} = \frac{n}{R_{ik}} \Rightarrow R_{iP} = \frac{R_{ik}}{n} \quad (3.25)$$

Elektrický obvod je systém z elektrotechnických súčiastok (zdroje, rezistory, kondenzátory, ...), ktoré sú vodivo prepojené tak, aby systém plnil požadovanú úlohu. **Uzol** je miesto, v ktorom sú vodivo spojené aspoň tri vodiče. **Vetva** je vodivé prepojenie medzi dvomi susednými uzlami. **Slučka** je uzavretá cesta z vetiev bez vodivého kríženia a bez vodivého opakovania. **Schéma** je výkres, na ktorom je pomocou elektrotechnických značiek a označení znázornený elektrický obvod. Predpokladané smery prúdov vo vetvách znázorňujeme v schéme **prúdovými čítacími šípkami**. Polaritu zdrojov EMN znázorňujeme v schéme **napäťovými čítacími šípkami** orientovanými od zápornej svorky ku kladnej svorke zdroja.

Pre elektrický prúd platí **zákon zachovania elektrického náboja**: Elektrický prúd cez uzavretú orientovanú plochu sa rovná zápornej derivácii voľného elektrického náboja Q v objeme ohraničenom touto plochou

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (3.26)$$

Zo zákona (3.26) s využitím definície (3.2) pre elektrické prúdy vo vetvách so spoločným uzlom elektrického obvodu v ustálenom stave (náboj Q sa v uzle vtedy nemení) vyplýva

1. Kirchhoffov zákon: Súčet elektrických prúdov vo vetvách so spoločným uzlom sa rovná nule

$$\sum_k \pm I_k = 0 \quad (3.27)$$

Znamienko „-“ píšeme pred prúdy s čítacími šípkami orientovanými do uzla, pred ostatné prúdy píšeme znamienko „+“.

V elektrických obvodoch so zdrojmi stálych EMN (jednosmerné elektrické obvody) môžeme odstrániť vetvy s kondenzátormi, pretože podľa (3.3) cez prierez ich dielektrík s elektrostatickým poľom elektrický prúd nemôže prechádzať. Na cievkach pretekaných jednosmernými prúdmi je napätie nulové (pozri kapitolu 5), preto ich môžeme nahradiť skratmi. Do jednosmerných elektrických obvodov sa teda zvyknú zapájať len rezistory. Vzťahy (3.20) a (1.17) môžeme použiť na vyjadrenie napätia U_k medzi začiatkom a koncom k -tej vetvy ľubovoľnej slučky elektrického obvodu, pričom je úplne jedno, či poradie vetiev, resp. uzlov v slučke určujeme v smere alebo proti smeru chodu hodinových ručičiek (smer obehu v slučke volíme ľubovoľne)

$$U_k = U_{Ek} - R_k I_k = \varphi_{k-1} - \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.28)$$

kde U_{Ek} je celkové EMN, R_k je celkový elektrický odpor, I_k je elektrický prúd, φ_{k-1} je potenciál začiatku a φ_k je potenciál konca k -tej vetvy v danej slučke, n je počet vetiev v danej slučke. Pretože $\varphi_n = \varphi_0$, po sčítaní všetkých n rovníc (3.28) získame

$$\sum_k U_k = \sum_k U_{Ek} - \sum_k R_k I_k = 0 \quad (3.29)$$

a po úprave dostaneme **2. Kirchhoffov zákon: V slučke elektrického obvodu sa súčet napätí na spotrebičoch rovná súčtu elektromotorických napätí zdrojov.**

$$\sum_k \pm R_k I_k = \sum_k \pm U_{Ek} \quad (3.30)$$

Znamienko „+“ píšeme pred členy súm, pre ktoré zvolený smer obehu v slučke je zhodný so smerom prúdovej čítacej šípky pri spotrebičoch, resp. so smerom napäťovej čítacej šípky pri zdrojoch EMN. Pred ostatné členy súm píšeme znamienko „-“.

Postup na zostavenie sústavy v lineárnych rovníc na výpočet v elektrických prúdov vo v vetvách jednosmerného elektrického obvodu s u uzlami je nasledujúci:

1. V schéme elektrického obvodu znázorníme predpokladané smery prúdov vo všetkých vetvách prúdovými čítacími šípkami a polaritu všetkých zdrojov EMN znázorníme napäťovými čítacími šípkami orientovanými od zápornej svorky ku kladnej svorke zdroja.

2. Pre ľubovoľných $u-1$ uzlov napíšeme $u-1$ rovníc na základe 1. Kirchhoffovho zákona (3.27). Rovnicu pre u -ty uzol nepíšeme, pretože by bola lineárnou kombináciou predchádzajúcich rovníc.

3. Zvyšné $v-(u-1)$ rovnice úplnej sústavy v rovníc dopíšeme na základe 2. Kirchhoffovho zákona (3.30) pre $v-(u-1)$ nezávislých slučiek vybraných v schéme zakreslením ľubovoľného smeru obehu vo vybranej slučke. Vybraných $v-(u-1)$ slučiek je nezávislých, ak každá vetva je súčasťou aspoň jednej vybranej slučky.

4. Riešením zostavenej sústavy v rovníc vypočítame hodnoty elektrických prúdov vo všetkých vetvách elektrického obvodu. Pri riešení používame zaužívané metódy lineárnej algebry (Gaussova eliminačná metóda, Cramerova metóda, substitučná metóda,...). Ak je vypočítaná hodnota prúdu záporná, potom skutočný prúd tečie v príslušnej vetve opačne (proti príslušnej prúdovej čítacej šípke).

Poznámka: Vo vednom odbore a v predmete „Elektrotechnika a elektronika“ sa v schéme elektrického obvodu polarita zdrojov EMN znázorňuje napäťovými čítacími šípkami orientovanými od kladnej svorky k zápornej svorke zdroja (opačne než v predmete „Fyzika“). Je to z dôvodu **jednoduchšej formulácie 2. Kirchhoffovho zákona** vo vednom odbore „Elektrotechnika a elektronika“: **V slučke elektrického obvodu sa súčet napätí na všetkých súčiastkach v slučke (na spotrebičoch aj na zdrojoch) rovná nule:**

$$\sum_k \pm U_k = 0 \quad (3.31)$$

Znamienková konvencia vo vzťahu (3.31) pre zvolený smer obehu v slučke je rovnaká, ako v predmete „Fyzika“, pričom napäťová čítacia šípka na spotrebičoch (rezistoroch) je orientovaná súhlasne s príslušnou prúdovou šípkou a príslušný úbytok napätia na rezistoroch vyjadrujeme pomocou Ohmovho zákona ($U = RI$). Potom je zrejmé, že po prehodení elektromotorických napätí zdrojov z ľavej strany rovnice (3.31) na pravú stranu získame tie isté rovnice ako pri fyzikálnom prístupe, pozri vzťah (3.30).

Elektrolyty (roztoky kyselín, zásad a solí) sú vodičmi vďaka disociácii (roztrhnutiu) molekúl na kladné kationy a záporné anióny. Pre elektrolýzu (elektrický prúd v elektrolytoch) platia Faradayove zákony elektrolýzy:

1. Hmotnosť m látky vylúčenej na elektróde je súčinom elektrochemického ekvivalentu A látky a elektrického náboja Q , ktorý prešiel cez elektrolyt za dobu t

$$m = AQ = AIt \quad (3.32)$$

2. Ak nie je elektrochemický ekvivalent A známy, môžeme ho vypočítať z druhého Faradayovho zákona

$$M = AzN_A e = AzF \quad (3.33)$$

kde M je molárna hmotnosť vylúčenej látky, z je jej mocenstvo (valencia) a $F = N_A \cdot e$ je Faradayova konštanta

$$F = N_A e = 6,0221367 \cdot 10^{23} \cdot 1,60217653 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1} = 96485 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Príklady

3.1 Prstenec z medi má vnútorný polomer $r_1 = 8 \text{ mm}$, vonkajší polomer $r_2 = 10 \text{ mm}$ a hrúbku $h = 6 \text{ mm}$. Rezistivita medi je $\rho = 0,017 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m}$. Vypočítajte elektrický odpor R prstenca, ak

a) prstenec v jednom mieste radiálne rozrežeme a prívodmi sú rezné plochy

b) prívodmi prstenca bude jeho vnútorný a vonkajší plášť.

Riešenie:

a) Prstenec môžeme považovať za množinu koaxiálnych elementárnych prstencov rovnakej hrúbky h , ktoré sú vzhľadom na príklady zapojené paralelne. Podľa vzťahu (3.8) elektrický odpor dR elementárneho prstenca s vnútorným polomerom r , s vonkajším polomerom $r + dr$ a s hrúbkou h bude

$$dR = \frac{\rho l}{dS} = \frac{\rho 2\pi r}{h dr} \quad (a)$$

pričom sme zanedbali šírku vzduchovej medzery medzi reznými plochami. Elektrická vodivosť dG je podľa (3.9) prevrátenou hodnotou elektrického odporu dR

$$dG = \frac{1}{dR} = \frac{h dr}{\rho 2\pi r} \quad (b)$$

Výsledná elektrická vodivosť G prstenca je integrálom (súčtom) vodivostí jednotlivých paralelne zapojených elementárnych prstencov

$$G = \int_{r_1}^{r_2} \frac{h dr}{\rho 2\pi r} = \frac{h}{\rho 2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (c)$$

Výsledný elektrický odpor prstenca je prevrátená hodnota elektrickej vodivosti

$$R = \frac{\rho 2\pi}{h \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (d)$$

Po dosadení zadaných hodnôt do vzťahu (d) dostaneme

$$R = \frac{\rho 2\pi}{h \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{0,017 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi}{6 \cdot 10^{-3} \ln \frac{10 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-3}}} \Omega = 79,8 \cdot 10^{-6} \Omega$$

b) Prstenec môžeme považovať za množinu koaxiálnych elementárnych prstencov rovnakej hrúbky h , ktoré sú vzhľadom na príklady zapojené sériovo. Podľa vzťahu (3.8) elektrický odpor dR elementárneho prstenca s vnútorným polomerom r , s vonkajším polomerom $r + dr$ a s hrúbkou h bude

$$dR = \frac{\rho dr}{S} = \frac{\rho dr}{h 2\pi r} \quad (e)$$

Výsledný elektrický odpor R prstenca je integrálom (súčtom) odporov jednotlivých sériovo zapojených elementárnych prstencov

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho dr}{h 2\pi r} = \frac{\rho}{h 2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (f)$$

Po dosadení zadaných hodnôt do vzťahu (f) dostaneme

$$R = \frac{\rho}{h 2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{0,017 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi} \ln \frac{10 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-3}} \Omega = 0,1 \cdot 10^{-6} \Omega$$

Elektrický odpor prstenca v prípade a) je $79,8 \mu\Omega$, v prípade b) $0,1 \mu\Omega$.

3.2 Vypočítajte veľkosť J hustoty elektrického prúdu v mosadznom vodiči s rezistivitou $\rho = 8 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$. Dĺžka vodiča je $l = 100 \text{ m}$ a medzi koncami vodiča je napätie $U = 6 \text{ V}$.

Riešenie:

Postupným dosadením vzťahov (3.7), (3.8) do vzťahu (3.6) dostaneme

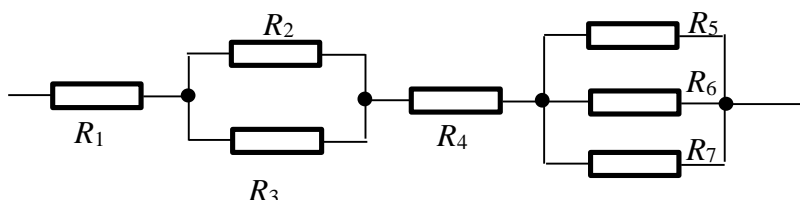
$$J = \frac{I}{S} = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{S} = \frac{US}{\rho l} \cdot \frac{1}{S} = \frac{U}{\rho l} \quad (a)$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (a) dostaneme

$$J = \frac{U}{\rho l} = \frac{6}{8 \cdot 10^{-8} \cdot 100} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} = 7,5 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

Hustota elektrického prúdu v mosadznom vodiči je 750 kA/m^2 .

3.3 Vypočítajte výsledný elektrický odpor zapojenia rezistorov podľa schémy na obr. 3.1, ak $R_1 = R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = R_4 = 200 \Omega$, $R_5 = R_6 = R_7 = 300 \Omega$.



Obr. 3.1 Schéma zapojenia rezistorov

Riešenie:

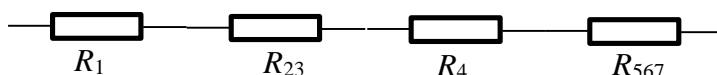
Úlohu vyriešime metódou postupného zjednodušovania. Paralelné zapojenie rezistorov s elektrickými odporami R_2 a R_3 nahradíme jedným rezistorom s elektrickým odporom R_{23} , hodnotu ktorého vypočítame podľa vzťahu (3.12)

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{200} \right) \text{ S} = \frac{11}{200} \text{ S} \Rightarrow R_{23} = \frac{200}{11} \Omega$$

Paralelné zapojenie rezistorov s elektrickými odporami R_5 , R_6 a R_7 nahradíme jedným rezistorom s elektrickým odporom R_{567} , hodnotu ktorého vypočítame podľa vzťahu (3.12)

$$\frac{1}{R_{567}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} = \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{300} + \frac{1}{300} \right) \text{ S} = \frac{3}{300} \text{ S} = \frac{1}{100} \text{ S} \Rightarrow R_{567} = 100 \Omega$$

Schéma zjednodušeného obvodu je na obr. 3.2.



Obr. 3.2 Schéma zjednodušeného obvodu

V schéme na obr. 3.2 sú všetky rezistory zapojené sériovo, preto výsledný elektrický odpor vypočítame podľa vzťahu (3.11). Dosadením zadaných a vypočítaných hodnôt dostaneme

$$R = R_1 + R_{23} + R_4 + R_{567} = \left(20 + \frac{200}{11} + 200 + 100 \right) \Omega = 321,82 \Omega$$

3.4 Odvodte vzťahy a vypočítajte, aký elektrický náboj Q prejde cez vodič a aké teplo Q_T vodič vyvinie za dobu $t_1 = 1 \text{ min}$. Elektrický odpor vodiča je $R = 1 \text{ k}\Omega$ a elektrický prúd prechádzajúci vodičom rastie podľa vzťahu $I = kt^2$ ($k = 10 \text{ mA} \cdot \text{s}^{-2}$).

Riešenie:

Z definície elektrického prúdu (3.1) úpravou dostaneme

$$dQ = Idt$$

(a)

Celkový náboj Q , ktorý prejde cez vodič za dobu t_1 dostaneme integráciou rovnice (a)

$$Q = \int_0^{t_1} I dt = k \int_0^{t_1} t^2 dt = k \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{t_1} = \frac{k t_1^3}{3} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 60^3}{3} \text{ C} = 720 \text{ C}$$

Elementárne Jouleovo teplo dQ_T , ktoré vodič vyvinie za dobu dt udáva vzťah (3.15)

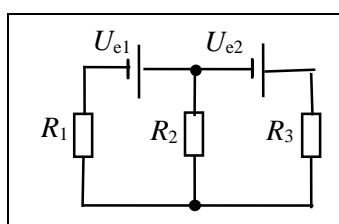
$$dQ_T = UI dt = RI^2 dt \quad (b)$$

Celkové teplo Q_T , ktoré vodič vyvinie za dobu t_1 dostaneme integráciou rovnice (b)

$$Q_T = R \int_0^{t_1} I^2 dt = Rk^2 \int_0^{t_1} t^4 dt = Rk^2 \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^{t_1} = \frac{Rk^2 t_1^5}{5} = \frac{1000 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 60^5}{5} \text{ J} = 15,552 \text{ MJ}$$

Za minútu prejde vodičom elektrický náboj 720 C a vodič vyvinie 15,552 MJ tepla.

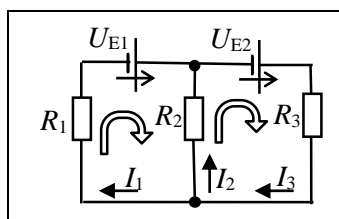
3.5 Vypočítajte elektrické prúdy vo vetvách obvodu zostaveného podľa schémy na obrázku 3.3 pre hodnoty $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $U_{e1} = 1,4 \text{ V}$, $U_{e2} = 3,6 \text{ V}$.



Obr. 3.3 Schéma zapojenia elektrického obvodu

Riešenie:

Zakreslíme smery napäťových čítacích šípiek na zdrojoch EMN podľa fyzikálnej konvencie (z „-“, do „+“). Ľubovoľne zvolíme smery prúdových čítacích šípiek elektrických prúdov I_1, I_2, I_3 vo všetkých troch vetvách



Obr. 3.4 Schéma zapojenia elektrického obvodu s čítacími šípkami a so smermi obehov v slučkách

Napíšeme 1. Kirchhoffov zákon (3.27) pre spodný uzel

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (a)$$

Napíšeme 2. Kirchhoffov zákon (3.30) pre ľavú a pravú slučku schémy na obr. 3.4

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = U_{E1} \quad (b)$$

$$R_2 I_2 + R_3 I_3 = U_{E2} \quad (c)$$

Systém rovníc (a, b, c) vyriešime Gaussovou eliminačnou metódou. Tá spočíva v tom, že rozšírenú maticu systému (a, b, c) z koeficientov pri prúdoch a z voľných členov upravujeme lineárnymi kombináciami riadkov (stĺpcov) dovtedy, kým pod hlavnou uhlopriečkou upravenej matice nebudú nulové hodnoty. Poznamenajme, že do 2. a 3. riadku rozšírenej matice dosadzujeme ako koeficienty „ohmické“ hodnoty odporov rezistorov a „voltaické“ hodnoty

elektromotorických napätí zdrojov. V prípade, ak v rovnici niektorý prúd chýba, je zrejme tento prúd násobený nulovým koeficientom. Na žiadaný tvar je možné rozšírenú maticu upraviť v dvoch krokoch.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1,4 \\ 0 & 1 & 3 & 3,6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1,4 \\ 0 & 1 & 3 & 3,6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1,4 \\ 0 & 0 & 23 & 23 \end{pmatrix}$$

Aby sme na prvej pozícii v druhom riadku získali nulu, v 1. kroku sme násobili prvky v 1. riadku rozšírenej matice číslom -5 a sčítali s adekvátnymi prvkami v jej 2. riadku.

Aby sme na prvých dvoch pozíciách v treťom riadku získali nulu, v 2. kroku sme násobili prvky v 3. riadku priebežnej matice číslom 6 a sčítali s adekvátnymi prvkami v jej 2. riadku.

„Ampérické“ hodnoty neznámych elektrických prúdov odhalíme z konečnej matice v poradí od posledného riadku k prvému:

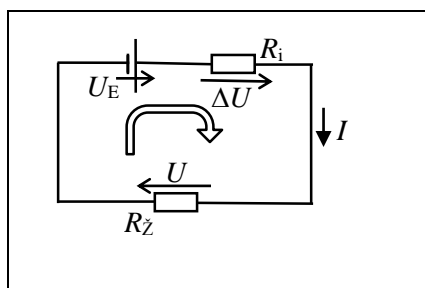
$$23I_3 = 23 \Rightarrow I_3 = 1 \text{ A}$$

$$-6I_2 + 5I_3 = 1,4 \Rightarrow -6I_2 + 5 \cdot 1 = 1,4 \Rightarrow 6I_2 = 3,6 \Rightarrow I_2 = 0,6 \text{ A}$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_1 = I_3 - I_2 = 1 - 0,6 \Rightarrow I_1 = 0,4 \text{ A}$$

Vo vetvách obvodu tečú elektrické prúdy $I_1 = 0,4 \text{ A}$, $I_2 = 0,6 \text{ A}$, $I_3 = 1 \text{ A}$ v smere čítacích šípok.

3.6 Galvanický článok má elektromotorické napätie $U_E = 1,1 \text{ V}$ a vnútorný odpor $R_i = 0,5 \Omega$. Aký elektrický prúd I bude prechádzať žiarovkou so štítkovými (menovitými) hodnotami $1,5 \text{ V}$; $0,3 \text{ A}$ po pripojení žiarovky k článku? Aké bude svorkové napätie U zaťaženého článku a úbytok napätia ΔU na vnútornom odpore článku (pozri schému na obr. 3.5)?



Obr. 3.5 Schéma elektrického obvodu s galvanickým článkom a so žiarovkou

Riešenie:

Elektrický odpor žiarovky vypočítame zo štítkových hodnôt podľa Ohmovho zákona (3.7)

$$R_z = \frac{U_z}{I_z} = \frac{1,5 \text{ V}}{0,3 \text{ A}} = 5 \Omega$$

Z 2. Kirchhoffovho zákona (3.30) pre jedinú slučku elektrického obvodu (pozri schému na obr. 3.5) po úprave určíme elektrický prúd I prechádzajúci galvanickým článkom s vnútorným odporom R_i a zároveň žiarovkou s elektrickým odporom R_z

$$R_i I + R_z I = U_E \Rightarrow I = \frac{U_E}{R_i + R_z} = \frac{1,1 \text{ V}}{0,5 \Omega + 5 \Omega} = 0,2 \text{ A}$$

Svorkové napätie U článku určíme zo zaťažovacej (prvkovej) rovnice zdroja (3.20). Je to vlastne napätie na žiarovke, ktoré môžeme vypočítať podľa Ohmovho zákona (3.7)

$$U = U_E - R_i I = (1,1 - 0,5 \cdot 0,2) \text{ V} = 1 \text{ V}, \quad U = R_z I = 5 \Omega \cdot 0,2 \text{ A} = 1 \text{ V}$$

Úbytok napätia ΔU na vnútornom odpore článku môžeme vypočítať podľa Ohmovho zákona (3.7). Podľa 2. Kirchhoffovho zákona (3.30) je to rozdiel elektromotorického napätia U_E a svorkového napätia U článku.

$$\Delta U = R_i I = 0,5 \Omega \cdot 0,2 \text{ A} = 0,1 \text{ V}, \quad \Delta U = U_E - U = 1,1 \text{ V} - 1 \text{ V} = 0,1 \text{ V}$$

Po pripojení žiarovky k článku bude ňou pretekať elektrický prúd $0,2 \text{ A}$. Svorkové napätie zaťaženého článku bude 1 V a úbytok napätia na vnútornom odpore článku bude $0,1 \text{ V}$.

3.7 Aký elektrický prúd I tečie cez rezistor a s akým výkonom P tento rezistor premieňa elektrickú energiu na teplo, ak elektrický odpor rezistora je $R = 0,4 \Omega$ a je pripojený

a) k batérii z dvoch galvanických článkov zapojených do série, pozri schému na obr. 3.6a

b) k batérii z dvoch galvanických článkov zapojených paralelne, pozri schému na obr. 3.6b.

Oba články ($n = 2$) majú rovnaké elektromotorické napätie $U_{E1} = U_{E2} = 4 \text{ V}$ a rovnaký vnútorný odpor $R_{i1} = R_{i2} = 1,8 \Omega$.



Obr. 3.6 Schémy zapojenia elektrického obvodu
a) so sériovým zapojením článkov b) s paralelným zapojením článkov

Riešenie:

Zjednodušené schémy zapojenia sú na obr. 3.7.



Obr. 3.7 Zjednodušené schémy zapojenia elektrického obvodu
a) so sériovým zapojením článkov b) s paralelným zapojením článkov

a) Pre sériové zapojenie článkov platia vzťahy (3.24)

$$U_{ES} = U_{E1} + U_{E2} = 4 \text{ V} + 4 \text{ V} = 8 \text{ V} \quad R_{iS} = R_{i1} + R_{i2} = 1,8 \Omega + 1,8 \Omega = 3,6 \Omega \quad (\text{a})$$

Z 2. Kirchhoffovho zákona (3.30) pre jedinú slučku v schéme na obr. 3.7a) po úprave a dosadení zadáných a vypočítaných hodnôt (a) určíme elektrický prúd I_S prechádzajúci rezistorom s elektrickým odporom R

$$R_{iS} I_S + R I_S = U_{ES} \Rightarrow I_S = \frac{U_{ES}}{R_{iS} + R} = \frac{8 \text{ V}}{3,6 \Omega + 0,4 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Podľa vzťahu (3.16) rezistor premieňa elektrickú energiu na teplo s výkonom

$$P_s = RI_s^2 = 0,4 \cdot 2^2 \text{ W} = 1,6 \text{ W}$$

b) Pre paralelné zapojenie článkov platia vzťahy (3.25)

$$U_{EP} = U_{E1} = U_{E2} = 4 \text{ V} \quad R_{iP} = \frac{R_{i1}}{2} = \frac{R_{i2}}{2} = \frac{1,8 \Omega}{2} = 0,9 \Omega \quad (\text{b})$$

Z 2. Kirchhoffovho zákona (3.30) pre jedinú slučku v schéme na obr. 3.7b) po úprave a dosadení zadanych a vypočítaných hodnôt (b) určíme elektrický prúd I_P prechádzajúci rezistorom s elektrickým odporom R

$$R_{iP}I_P + RI_P = U_{EP} \Rightarrow I_P = \frac{U_{EP}}{R_{iP} + R} = \frac{4 \text{ V}}{0,9 \Omega + 0,4 \Omega} = 3,077 \text{ A}$$

Podľa vzťahu (3.16) rezistor premieňa elektrickú energiu na teplo s výkonom

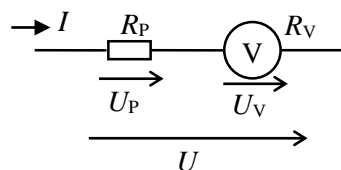
$$P_P = RI_P^2 = 0,4 \cdot 3,077^2 \text{ W} = 3,787 \text{ W}$$

Pri sériovom zapojení článkov tečie cez rezistor elektrický prúd 2 A s výkonom 1,6 W, pri paralelnom zapojení článkov tečie cez rezistor elektrický prúd 3,077 A s výkonom 3,787 W.

3.8 Aký má byť elektrický odpor R_P predradeného rezistora k voltmetru s rozsahom $U_V = 50 \text{ V}$ a s vnútorným odporom $R_V = 200 \Omega$, aby sa rozsah voltmetra rozšíril na hodnotu $U = 300 \text{ V}$?

Riešenie:

Aby merané napätie U bolo väčšie než napätie U_V na voltmetri, je potrebné predradený rezistor (balast) zapojiť s voltmetrom do série, pozri schému na obr. 3.8.



Obr. 3.8 Schéma rozšírenia rozsahu voltmetra predradeným rezistorom

Pri sériovom zapojení rezistorov preteká cez rezistory rovnaký elektrický prúd I , preto po úprave s využitím Ohmovho zákona (3.7) dostaneme

$$I = \frac{U_V}{R_V} = \frac{U_P}{R_P} \Rightarrow R_P = \frac{U_P}{U_V} R_V \quad (\text{a})$$

Pri sériovom zapojení rezistorov je výsledné napätie U súčtom napätí na jednotlivých rezistoroch, preto po úprave dostaneme

$$U = U_P + U_V \Rightarrow U_P = U - U_V \quad (\text{b})$$

Dosadením vzťahu (b) do vzťahu (a) a dosadením zadanych hodnôt dostaneme

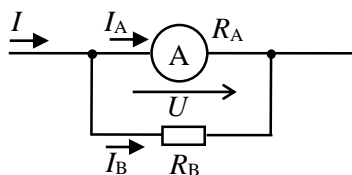
$$R_P = \frac{U_P}{U_V} R_V = \frac{U - U_V}{U_V} R_V = \frac{300 - 50}{50} \cdot 200 \Omega = 1000 \Omega$$

Na zväčšenie rozsahu voltmetra z 50 V na 300 V musíme predradiť pred voltmeter rezistor s elektrickým odporom 1 kΩ.

3.9 Aký má byť elektrický odpor R_B bočnika, aby sa ním rozsah ampérmetra s vnútorným odporom $R_A = 0,4 \Omega$ zväčšil $n = 6$ -krát?

Riešenie:

Aby meraný elektrický prúd I bol n -krát väčší než elektrický prúd I_A tečúci ampérmetrom ($I = nI_A$), je potrebné bočník (šunt) zapojiť k ampérmetru paralelne, pozri schému na obr. 3.9.



Obr. 3.9 Schéma rozšírenia rozsahu ampérmetra bočníkom

Pri paralelnom zapojení rezistorov je na oboch rezistoroch rovnaké napätie U , preto po úprave s využitím Ohmovho zákona (3.7) dostaneme

$$U = R_B I_B = R_A I_A \Rightarrow R_B = \frac{R_A I_A}{I_B} \quad (a)$$

Pri paralelnom zapojení rezistorov je podľa 1. Kirchhoffovho zákona (3.27) pre ľavý uzel v schéme na obr. 3.9 meraný elektrický prúd I súčtom elektrických prúdov v jednotlivých rezistoroch, preto úpravami dostaneme

$$I = I_A + I_B \Rightarrow I_B = I - I_A = nI_A - I_A = (n-1)I_A \quad (b)$$

Dosadením vzťahu (b) do vzťahu (a), úprave a dosadením zadaných hodnôt dostaneme

$$R_B = \frac{R_A I_A}{I_B} = \frac{R_A I_A}{(n-1)I_A} = \frac{R_A}{n-1} = \frac{0,4 \Omega}{6-1} = 0,08 \Omega$$

Pri 6-násobnom zväčšení rozsahu ampérmetra musí mať bočník 5-krát menší elektrický odpor než ampérmeter, t.j. bočník musí mať elektrický odpor $0,08 \Omega$.

3.10 Aký výkon P musí mať elektrický varič, aby zohrial $V = 1,5$ l vody z teploty $t_1 = 15^\circ \text{C}$ na teplotu $t_2 = 100^\circ \text{C}$ za dobu $t = 10$ minút, ak sa na ohrev vody využije len $\eta(\%) = 80\%$ vyvinutého tepla? Hmotnostná tepelná kapacita vody je $c = 4186 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, hustota vody je $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Riešenie:

Zrejme teplo Q_V prijaté vodou tvorí $\eta = 0,8$ celkového tepla Q vyvinutého premenou elektrickej energie na toto teplo za dobu t s výkonom P

$$Q_V = \eta Q \Rightarrow mc(t_2 - t_1) = \eta Pt \Rightarrow \rho V c(t_2 - t_1) = \eta Pt \Rightarrow P = \frac{\rho V c(t_2 - t_1)}{\eta t} \quad (a)$$

Dosadením zadaných hodnôt premenených na hlavné jednotky dostaneme

$$P = \frac{\rho V c(t_2 - t_1)}{\eta t} = \frac{1000 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 4186 \cdot (100 - 15)}{0,8 \cdot 10 \cdot 60} \text{ W} = 1112 \text{ W}$$

Elektrický varič musí mať výkon 1112 W .

3.11 Vypočítajte hmotnosť m medi vylúčenej elektrolyzou z roztoku skalice modrej za dobu $t = 48$ h elektrickým prúdom $I = 80 \text{ A}$. Molárna hmotnosť medi je $M = 63,54 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, katióny medi sú v roztoku skalice modrej (síran meďnatý CuSO_4) dvojmocné ($z = 2$).

Riešenie:

Z druhého Faradayovho zákona elektrolyzy (3.33) pre neznámy elektrochemický ekvivalent A dvojmocnej medi dostaneme úpravou

$$M = AzF \Rightarrow A = \frac{M}{zF} \quad (a)$$

Dosadením vzťahu (a) do prvého Faradayovho zákona elektrolýzy (3.34) a dosadením zadaných hodnôt premenených na hlavné jednotky dostaneme

$$m = AIt = \frac{MIt}{zF} = \frac{63,54 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 48 \cdot 3600}{2 \cdot 96485} \text{ kg} = 4,552 \text{ kg}$$

Za dva dni sa z roztoku skalice modrej elektrolýzou s elektrickým prúdom 80 A vylúči 4,552 kg medi.