1 ELEKTROSTATICKÉ POLE VO VÁKUU

Teoretický úvod

Elektrický náboj je jedna z kvantových charakteristík elementárnych častíc

$$Q = ze \tag{1.1}$$

kde z je ľubovoľné celé číslo (0, ±1, ±2, …) a e je tzv. elementárny náboj

$$e = 1{,}602.10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{1.2}$$

Jednotkou elektrického náboja je coulomb (1 C). Mnohé elementárne častice (hadróny) sú zložené z kvarkov (majú kvarkovú štruktúru). Kvarky majú elektrický náboj ±(1/3)e alebo ±(2/3)e, avšak žiadny kvark nebol detegovaný ako voľná (samostatná) častica, ale vždy iba ako súčasť hadrónu.

Pre dva bodové náboje Q_1 a Q vo vzájomnej vzdialenosti r vo vákuu platí ***Coulombov zákon***: **Veľkosť elektrickej sily vzájomného pôsobenia bodových elektrických nábojov je priamoúmerná absolútnej hodnote súčinu nábojov a nepriamoúmerná druhej mocnine (štvorcu) vzdialenosti medzi nimi**

$$F = \frac{|Q_1 Q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1.3}$$

kde ε_0 = 8,854.10^{-12} C^2.N^{-1}.m^{-2} je permitivita vákua. ***Náboje s rovnakými znamienkami sa odpudzujú, náboje s opačnými znamienkami sa priťahujú.*** Preto môžeme silu $\boldsymbol{F}$ (akciu), ktorou pôsobí bodový náboj Q_1 na bodový náboj Q vyjadriť vzťahom

$$\boldsymbol{F} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1.4}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor bodového náboja Q vzhľadom na bodový náboj Q_1. Zrejme podľa zákona akcie a reakcie pôsobí bodový náboj Q na bodový náboj Q_1 silou $-\boldsymbol{F}$ (reakciou). Silové pôsobenie na diaľku môžeme vysvetliť tak, že si náboj v svojom okolí vytvára formu hmoty - vlastné ***elektrické pole***, ktorým pôsobí na iné náboje.

Intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ v určitom mieste je definovaná ako podiel elektrickej sily $\boldsymbol{F}$ a skúšobného náboja Q, na ktorý táto sila v tomto mieste pôsobí

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q} \tag{1.5}$$

Jednotkou intenzity elektrického poľa je 1 N.C^{-1} . Dosadením (1.4) do (1.5) dostaneme vzťah pre intenzitu $\boldsymbol{E}$ v mieste s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ vzhľadom na bodový náboj Q_1

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1.6}$$

ktorá je orientovaná radiálne od kladného náboja Q_1 ***a radiálne do záporného náboja*** Q_1. Veľkosť E intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ vo vzdialenosti r od bodového náboja Q_1 je teda

$$E = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1.7}$$

Potenciálna energia E_P bodového náboja Q vo vzdialenosti r od bodového náboja Q_1 sa rovná práci vykonanej vonkajšou silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ pri presunutí bodového náboja Q z nekonečnej vzdialenosti do vzdialenosti r od bodového náboja Q_1. Pri takom presúvaní vonkajšia sila prekonáva elektrickú silu ($\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ = - $\boldsymbol{F}$), preto

$$E_\mathrm{P} = \int_\infty^r \boldsymbol{F}_\mathrm{ext}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\infty^r \left(-\boldsymbol{F}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_r^\infty \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1.8}$$

kde dr je elementárna zmena vzdialenosti medzi nábojmi.

Elektrický potenciál φ v určitom mieste je definovaný ako podiel potenciálnej energie E_P skúšobného náboja Q v tomto mieste a tohto náboja Q

$$\varphi = \frac{E_P}{Q} \tag{1.9}$$

Jednotkou elektrického potenciálu je volt (1 V = 1 J.C^{-1}). Dosadením (1.8) do (1.9) dostaneme vzťah pre elektrický potenciál φ v mieste vo vzdialenosti r od bodového náboja Q_1

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1.10}$$

pričom elektrický potenciál má rovnaké znamienko ako náboj Q_1 a blíži sa k nule pri neobmedzenom zväčšovaní vzdialenosti r.

Ak je výsledné elektrostatické pole generované systémom n diskrétnych bodových nábojov $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$, potom silu pôsobiacu na bodový náboj Q, intenzitu $\boldsymbol{E}$ výsledného poľa a elektrický potenciál v určitom mieste poľa určíme podľa ***princípu superpozície***:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i \boldsymbol{r}_i}{r_i^3} \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i \boldsymbol{r}_i}{r_i^3} \tag{1.12}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_i} \tag{1.13}$$

kde $\boldsymbol{r}_i$ je polohový vektor bodového náboja Q (miesta) vzhľadom na bodový náboj Q_i,
r_i je vzdialenosť bodového náboja Q (miesta) od bodového náboja Q_i.

Ak náboj Q nie je bodový, ale je spojite rozložený (v priestore, na ploche, resp. na krivke), potom pre elektrický potenciál v určitom mieste poľa generovaného takým nábojom platí

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_Q \frac{\mathrm{d}Q}{r} \tag{1.14}$$

kde r je vzdialenosť miesta od nekonečne malého náboja dQ. Intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ v danom mieste určíme podľa vzťahu

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \right) \tag{1.15}$$

Napätie medzi dvomi miestami v elektrickom poli je definované vzťahom

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.16}$$

Dosadením (1.15) do (1.16) pri zohľadnení vzťahu d$\boldsymbol{r}$ =d$x.\boldsymbol{i}$ + d$y.\boldsymbol{j}$ + d$z.\boldsymbol{k}$ dostaneme

$$U = -\int_1^2 \mathrm{grad}\,\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_1^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathrm{d}z \right) = -\int_1^2 \mathrm{d}\varphi = \int_2^1 \mathrm{d}\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{1.17}$$

Jednotkou napätia je volt (1 V). Zo vzťahu (1.16) vyplýva, že jednotkou intenzity elektrického poľa je tiež 1 V.m^{-1} .

Ak sa v elektrickom poli presúva bodový náboj Q z bodu 1 do bodu 2 iba pôsobením konzervatívnej elektrickej sily $\boldsymbol{F}$, potom táto sila vykoná prácu W

$$W = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_1^2 Q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = Q\int_1^2 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = QU = Q(\varphi_1 - \varphi_2) = E_{P1} - E_{P2} = E_{K2} - E_{K1} \tag{1.18}$$

Ak sa v elektrickom poli presúva bodový náboj Q z bodu 1 do bodu 2 pôsobením elektrickej sily $\boldsymbol{F}$ a vonkajšej sily $\boldsymbol{F}_{ext}$ ktorá elektrickú silu prekonáva ($\boldsymbol{F}_{ext} = -\boldsymbol{F}$), potom vonkajšia sila $\boldsymbol{F}_{ext}$ vykoná prácu W_{ext}

$$W_{\text{ext}} = \int_1^2 \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -Q\int_1^2 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -Q(\varphi_1 - \varphi_2) = Q(\varphi_2 - \varphi_1) = E_{\text{P2}} - E_{\text{P1}} \qquad (1.19)$$

V prípade, ak sa elektrické náboje nenachádzajú vo vákuu, ale v inom prostredí, je potrebné vo vzťahoch (1.1) až (1.19) zameniť permitivitu vákua ε_0 permitivitou prostredia ε, pričom

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{r}} \qquad (1.20)$$

kde ε_{r} je relatívna permitivita prostredia ($\varepsilon_{\text{r}} > 1$).

Príklady

1.1 Vo vzdialenosti l od seba sú pevne uložené dva bodové elektrické náboje Q a $9Q$. V ktorom mieste na myslenej spojnici nábojov vo vákuu je

a) intenzita $\boldsymbol{E}$ výsledného elektrického poľa nulová,

b) elektrický potenciál φ_1 budený nábojom Q rovnaký ako elektrický potenciál φ_2 budený nábojom $9Q$?

Riešenie:

a) Náboje majú rovnaké znamienko, preto sú na ich spojnici intenzity $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$ generované jednotlivými nábojmi Q a $9Q$ nesúhlasne orientované. V mieste s nulovou intenzitou z princípu superpozície (1.12) vyplýva

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_1 = -\boldsymbol{E}_2 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2 \qquad (a)$$

Po dosadení (1.7) do rovnice (a) dostaneme

$$\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{|9Q|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_1^2} = \frac{9}{r_2^2} \qquad (b)$$

Nech x je vzdialenosť hľadaného miesta na spojnici nábojov od náboja Q. Potom

$$r_1 = x, \quad r_2 = l - x \qquad (c)$$

Po dosadení (c) do (b) získame kvadratickú rovnicu

$$\frac{1}{x^2} = \frac{9}{(l-x)^2} \qquad (d)$$

Kvadratickú rovnicu (d) by sme mohli upraviť na tvar

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

a z dvoch vypočítaných koreňov by sme zavrhli ten, ktorý na spojnici nábojov neleží. Jednoduchší spôsob je však odmocniť kvadratickú rovnicu (d) tak, že v novej lineárnej rovnici budú výrazy x a l-x kladné. Tak sa priamo bez výpočtu zbavíme nežiaduceho koreňa, ktorý na spojnici neleží. Nežiaduci koreň by ležal na priamke prechádzajúcej cez oba bodové náboje mimo spojnice na strane menšieho náboja. Nežiaduci koreň síce vyhovuje rovnici (a), ale leží v časti priamky, v ktorej sú intenzity $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$ súhlasne orientované, a tam sa miesto s výslednou nulovou intenzitou nemôže nachádzať. Odmocnením kvadratickej rovnice (d) na lineárnu rovnicu s kladnými výrazmi x a l-x a následnými úpravami dostaneme

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{l-x} \quad \Rightarrow \quad l - x = 3x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{4}$$

Miesto s nulovou intenzitou elektrického poľa je vo vzdialenosti $l/4$ od náboja Q smerom k náboju $9Q$.

b) Na spojnici medzi nábojmi hľadáme miesto, pre ktoré platí

$$\varphi_1 = \varphi_2 \qquad (e)$$

Po dosadení (1.10) do rovnice (e) dostaneme

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \frac{9Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_1} = \frac{9}{r_2} \tag{f}$$

Nech y je vzdialenosť hľadaného miesta na spojnici nábojov od náboja Q. Potom

$$r_1 = y, \quad r_2 = l - y \tag{g}$$

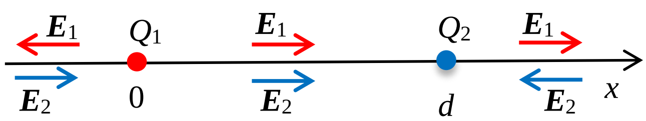
Po dosadení (g) do rovnice (f) a úpravami dostaneme

$$\frac{1}{y} = \frac{9}{l-y} \quad \Rightarrow \quad l - y = 9y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{l}{10}$$

Miesto s rovnakými potenciálmi generovanými jednotlivými nábojmi je vo vzdialenosti $l/10$ od náboja Q smerom k náboju $9Q$.

1.2 Vo vzdialenosti d = 10 cm od seba sú pevne uložené dva bodové elektrické náboje Q_1 = 4 pC a Q_2 = - 9 pC. V ktorom mieste na priamke preloženej cez oba náboje vo vákuu je
a) intenzita $\boldsymbol{E}$ výsledného elektrického poľa nulová,
b) elektrický potenciál φ výsledného elektrického poľa nulový?

Riešenie:
Priamka nech je osou x, náboj Q_1 nech je v počiatku osi, náboj Q_2 nech je na osi x v mieste so súradnicou d = 10 cm.
a) Príslušné miesto budeme hľadať na intervaloch osi x, v ktorých sú intenzity $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$ generované jednotlivými nábojmi Q_1 a Q_2 nesúhlasne orientované, pozri obr.1. To sú intervaly $(-\infty, 0)$ a $(d, +\infty)$.



Obr. 1.1 Umiestnenie bodových nábojov na osi x

V mieste s nulovou intenzitou výsledného elektrického poľa z princípu superpozície (1.12) vyplýva

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_1 = -\boldsymbol{E}_2 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2 \tag{a}$$

Po dosadení (1.7) do rovnice (a) s následným dosadením hodnôt nábojov dostaneme

$$\frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|Q_1|}{r_1^2} = \frac{|Q_2|}{r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{r_1^2} = \frac{9}{r_2^2} \tag{b}$$

kde r_1, r_2 sú vzdialenosti miesta s nulovou intenzitou od nábojov Q_1 a Q_2. Na osi x pre miesto so súradnicou x platí

$$r_1^2 = x^2, \quad r_2^2 = (x-d)^2 \tag{c}$$

Dosadením (c) do (b) získame

$$\frac{4}{x^2} = \frac{9}{(x-d)^2} \tag{d}$$

Kvadratickú rovnicu (d) by sme mohli upraviť na tvar

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a korene by sme mohli nájsť zaužívaným spôsobom pomocou diskriminantu rovnice. Jednoduchší spôsob je odmocnením rovnice (d) získať dve lineárne rovnice

$$\frac{2}{x} = +\frac{3}{x-d}, \quad \frac{2}{x} = -\frac{3}{x-d} \qquad \text{(e, f)}$$

a každú z rovníc (e, f) riešiť zvlášť. Úpravami rovnice (e) dostaneme pre prvý koreň

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{x-d} \quad \Rightarrow \quad 2(x-d) = 3x \quad \Rightarrow \quad 2x - 2d = 3x \quad \Rightarrow \quad x_A = -2d = \text{-}20\,\text{cm}$$

Úpravami rovnice (f) dostaneme pre druhý koreň

$$\frac{2}{x} = -\frac{3}{x-d} \quad \Rightarrow \quad 2(x-d) = -3x \quad \Rightarrow \quad 2x - 2d = -3x \quad \Rightarrow \quad 5x = 2d \quad \Rightarrow \quad x_B = \frac{2d}{5} = 4\,\text{cm}$$

Z koreňov x_{A}, x_B len koreň x_A = -20 cm patrí do intervalu s nesúhlasne orientovanými intenzitami, preto je v tomto mieste intenzita výsledného poľa nulová. V mieste x_B = 4 cm je síce splnená rovnica (a), ale intenzity $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$ sú súhlasne orientované, preto v tomto mieste nemôže byť intenzita výsledného poľa nulová.

b) v hľadanom mieste na osi x podľa princípu superpozície (1.13) platí

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -\varphi_2 \qquad \text{(g)}$$

Po dosadení (1.10) do rovnice (g) s následným dosadením hodnôt nábojov dostaneme

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = -\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{r_1} = -\frac{Q_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{r_1} = \frac{9}{r_2} \qquad \text{(h)}$$

Miesto s nulovým potenciálom budeme hľadať postupne na intervaloch (-∞, 0), (0, d) a (d, +∞). Pre miesto z intervalu (-∞, 0) platí

$$r_1 = 0 - x = -x, \quad r_2 = d - x \qquad \text{(i)}$$

Po dosadení (i) do (h), úprave a dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$\frac{4}{-x} = \frac{9}{d-x} \quad \Rightarrow \quad 4(d-x) = -9x \quad \Rightarrow \quad 4d - 4x = -9x \quad \Rightarrow \quad 5x = -4d$$

$$x_C = \frac{-4d}{5} = \text{-}8\,\text{cm}$$

Koreň x_C je z intervalu (-∞, 0).

Pre miesto z intervalu (0, d) platí

$$r_1 = x - 0 = x, \quad r_2 = d - x \qquad \text{(j)}$$

Po dosadení (j) do (h), úprave a dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$\frac{4}{x} = \frac{9}{d-x} \quad \Rightarrow \quad 4(d-x) = 9x \quad \Rightarrow \quad 4d - 4x = 9x \quad \Rightarrow \quad 13x = 4d$$

$$x_D = \frac{4d}{13} = \frac{40}{13}\,\text{cm} = 3{,}077\,\text{cm}$$

Koreň x_D je z intervalu (0, d).

Pre miesto z intervalu (d, +∞) platí

$$r_1 = x, \quad r_2 = x - d \qquad \text{(k)}$$

Po dosadení (k) do (h), úprave a dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$\frac{4}{x} = \frac{9}{x-d} \quad \Rightarrow \quad 4(x-d) = 9x \quad \Rightarrow \quad 4x - 4d = 9x \quad \Rightarrow \quad 5x = -4d$$

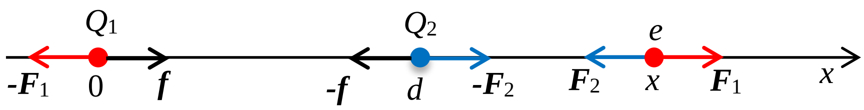
$$x_E = \frac{-4d}{5} = \frac{-40}{5}\,\text{cm} = \text{-}8\,\text{cm}$$

Koreň x_E však nie je z intervalu (d, +∞).

Elektrický potenciál φ je nulový v miestach so súradnicami x_C = -8 cm a x_D = 3,077 cm.

1.3 Vo vzdialenosti $d = 10$ cm od seba sú vo vákuu voľne uložené dva bodové elektrické náboje $Q_1 = 4$ pC a $Q_2 = -9$ pC. V ktorom mieste na priamke preloženej cez oba náboje musí byť voľne uložený
a) protón,
b) elektrón,
aby bol systém všetkých troch nábojov v labilnej statickej rovnováhe?

Riešenie:
Priamka nech je osou x, náboj Q_1 nech je v počiatku osi ($x_1 = 0$ cm), náboj Q_2 nech je na osi x v mieste so súradnicou $x_2 = d = 10$ cm. Náboje majú opačné znamienka, preto sa priťahujú. Na kladný náboj Q_1 pôsobí sila $\boldsymbol{f}$ orientovaná v smere osi x, na záporný náboj Q_2 pôsobí sila $-\boldsymbol{f}$ orientovaná proti smeru osi x.
a) V snahe dosiahnuť labilný rovnovážny stav, musíme protón s kladným nábojom e voľne uložiť na os x tak, aby sily, ktorými protón pôsobí na náboje Q_1 a Q_2 boli nesúhlasne orientované so silami $\boldsymbol{f}$ a $-\boldsymbol{f}$, ktorými na seba pôsobia náboje Q_1 a Q_2 . Je preto zrejmé, že protón s kladným nábojom e budeme voľne ukladať do nejakého miesta z intervalu $(d,+\infty)$, pozri obr. 1.2.



Obr. 1.2 Umiestnenie protónu s kladným nábojom e na osi x

Príslušné miesto z intervalu $(d,+\infty)$ budeme hľadať z podmienky rovnovážneho stavu, t.j. aby výsledná sila $\boldsymbol{F}$ pôsobiaca na protón bola nulová. Z princípu superpozície (1.11) dostaneme

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2 \qquad \text{(a)}$$

Po dosadení (1.3) do rovnice (a) s následným dosadením hodnôt nábojov dostaneme

$$\frac{|Q_1 e|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{|Q_2 e|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|Q_1|}{r_1^2} = \frac{|Q_2|}{r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{r_1^2} = \frac{9}{r_2^2} \qquad \text{(b)}$$

kde r_1 je vzdialenosť protónu od náboja Q_1 a r_2 je vzdialenosť protónu od náboja Q_2. Pre miesto z intervalu $(d,+\infty)$ platí

$$r_1 = x, \quad r_2 = x - d \qquad \text{(c)}$$

Dosadením (c) do (b) získame

$$\frac{4}{x^2} = \frac{9}{(x-d)^2} \qquad \text{(d)}$$

Kvadratickú rovnicu (d) by sme mohli upraviť na tvar

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a korene by sme mohli nájsť zaužívaným spôsobom pomocou diskriminantu. Jednoduchší spôsob je odmocnením rovnice (d) získať dve lineárne rovnice

$$\frac{2}{x} = +\frac{3}{x-d}, \quad \frac{2}{x} = -\frac{3}{x-d} \qquad \text{(e, f)}$$

a každú z rovníc (e, f) riešiť zvlášť. Úpravami rovnice (e) dostaneme pre prvý koreň

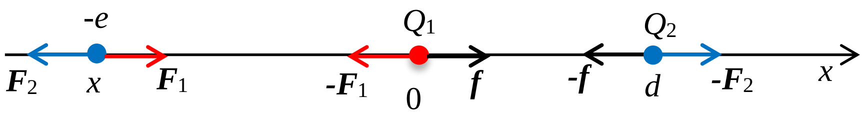
$$\frac{2}{x}=\frac{3}{x-d} \quad \Rightarrow \quad 2(x-d)=3x \quad \Rightarrow \quad 2x-2d=3x \quad \Rightarrow \quad x_A=-2d=\text{-}20\,\text{cm}$$

Úpravami rovnice (f) dostaneme pre druhý koreň

$$\frac{2}{x}=-\frac{3}{x-d} \quad \Rightarrow \quad 2(x-d)=-3x \quad \Rightarrow \quad 2x-2d=-3x \quad \Rightarrow \quad 5x=2d \quad \Rightarrow \quad x_B=\frac{2d}{5}=4\,\text{cm}$$

Ani koreň x_A = -20 cm, ani koreň x_B = 4 cm, však nie je z intervalu $(d, +\infty)$, preto sa pomocou protónu nedá dosiahnuť labilná rovnováha systému.

b) V snahe dosiahnuť labilný rovnovážny stav, musíme elektrón so záporným nábojom *-e* voľne uložiť na os *x* tak, aby sily, ktorými elektrón pôsobí na náboje Q_1 a Q_2 boli nesúhlasne orientované so silami $\boldsymbol{f}$ a $-\boldsymbol{f}$, ktorými na seba pôsobia náboje Q_1 a Q_2 . Je preto zrejmé, že elektrón so záporným nábojom *-e* budeme voľne ukladať do nejakého miesta z intervalu $(-\infty, 0)$, pozri obr. 1.3.



Obr. 1.3 Umiestnenie elektrónu so záporným nábojom *-e* na osi *x*

Príslušné miesto z intervalu $(-\infty, 0)$ budeme hľadať z podmienky rovnovážneho stavu, t.j. aby výsledná sila $\boldsymbol{F}$ pôsobiaca na elektrón bola nulová. Z princípu superpozície (1.11) dostaneme

$$\boldsymbol{F}=\sum_i \boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2 \quad \Rightarrow \quad F_1=F_2 \tag{g}$$

Po dosadení (1.3) do rovnice (g) s následným dosadením hodnôt nábojov dostaneme

$$\frac{|Q_1(-e)|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}=\frac{|Q_2(-e)|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|Q_1|}{r_1^2}=\frac{|Q_2|}{r_2^2} \tag{h}$$

kde r_1 je vzdialenosť elektrónu od náboja Q_1 a r_2 je vzdialenosť elektrónu od náboja Q_2. Pre miesto z intervalu $(-\infty, 0)$ platí

$$r_1=0-x=-x, \quad r_2=d-x \tag{i}$$

Dosadením (i) do (h) získame

$$\frac{4}{(-x)^2}=\frac{9}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{x^2}=\frac{9}{(d-x)^2} \tag{j}$$

Kvadratickú rovnicu (j) by sme mohli upraviť na tvar

$$ax^2+bx+c=0$$

a korene by sme mohli nájsť zaužívaným spôsobom pomocou diskriminantu. Jednoduchší spôsob je odmocnením rovnice (j) získať dve lineárne rovnice

$$\frac{2}{x}=+\frac{3}{d-x}, \quad \frac{2}{x}=-\frac{3}{d-x} \tag{k, l}$$

a každú z rovníc (k, l) riešiť zvlášť. Úpravami rovnice (k) dostaneme pre prvý koreň

$$\frac{2}{x}=\frac{3}{d-x} \quad \Rightarrow \quad 2(d-x)=3x \quad \Rightarrow \quad 2d=5x \quad \Rightarrow \quad x_C=\frac{2d}{5}=4\,\text{cm}$$

Úpravami rovnice (l) dostaneme pre druhý koreň

$$\frac{2}{x}=-\frac{3}{d-x} \quad \Rightarrow \quad 2(d-x)=-3x \quad \Rightarrow \quad 2d-2x=-3x \quad \Rightarrow \quad x_D=-2d=-20\,\text{cm}$$

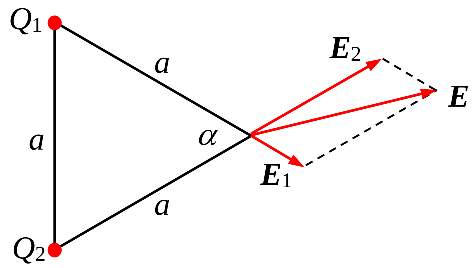
Z koreňov x_C, x_D je koreň x_D = -20 cm z intervalu (-∞, 0), preto sa pomocou elektrónu uloženého voľne do miesta so súradnicou x_D = -20 cm dosiahne labilná statická rovnováha systému.

1.4 V dvoch vrcholoch rovnostranného trojuholníka s dĺžkou strany a = 6 cm sú vo vákuu pevne uložené bodové elektrické náboje Q_1 = 1 μC a Q_2 = 3 μC. Vypočítajte veľkosť E intenzity výsledného elektrického poľa a elektrický potenciál φ v treťom vrchole. Vypočítajte veľkosť F elektrickej sily pôsobiacej na bodový elektrický náboj Q = 5 μC a jeho potenciálnu energiu po jeho umiestnení do tretieho vrchola trojuholníka.

Riešenie:
Podľa princípu superpozície (1.12) pre intenzitu $\boldsymbol{E}$ výsledného elektrického poľa v treťom vrchole platí

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \qquad \text{(a)}$$

pričom intenzity $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$ zvierajú uhol $\alpha = 60°$ pretože sú generované kladnými bodovými nábojmi umiestnenými v prvom a druhom vrchole rovnostranného trojuholníka, pozri obr. 1.4.



Obr. 1.4 Poloha nábojov a smery intenzít v treťom vrchole trojuholníka

Umocnením vektorovej rovnice (a) dostaneme skalárnu rovnicu

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\cdot(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2) = \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{E}_2 + 2\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2$$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha \qquad \text{(b)}$$

Odmocnením rovnice (b) s využitím vzťahu (1.7) pre veľkosť intenzity E v treťom vrchole dostaneme

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha} = \sqrt{\left(\frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right)^2 + \left(\frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right)^2 + 2\left(\frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right)\left(\frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right)\cos\alpha}$$

Po úprave a dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$E = \frac{\sqrt{|Q_1|^2 + |Q_2|^2 + 2|Q_1||Q_2|\cos\alpha}}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\sqrt{1^2+3^2+2\cdot1\cdot3\cdot\cos 60°}\cdot10^{-6}}{4\pi\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot0{,}06^2}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 9\,\frac{\mathrm{MV}}{\mathrm{m}}$$

Podľa princípu superpozície (1.13) pre elektrický potenciál výsledného elektrického poľa v treťom vrchole platí

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{a}+\frac{Q_2}{a}\right) = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1\cdot10^{-6}+3\cdot10^{-6}}{4\pi\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot0{,}06}\,\mathrm{V} = 599{,}18\,\mathrm{kV}$$

Úpravou vzťahu (1.5) dostaneme vzťah pre veľkosť sily F, ktorou elektrické pole pôsobí na náboj Q . Po dosadení získame

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q} \quad \Rightarrow \quad F = |Q|E = 5\cdot 10^{-6}\cdot 9\cdot 10^{6}\ \mathrm{N} = 45\ \mathrm{N}.$$

Úpravou vzťahu (1.9) dostaneme vzťah pre potenciálnu energiu E_P náboja Q v elektrickom poli v mieste s potenciálom φ. Po dosadení získame

$$\varphi = \frac{E_\mathrm{P}}{Q} \quad \Rightarrow \quad E_\mathrm{P} = Q\varphi = 5\cdot 10^{-6}\cdot 599{,}18\cdot 10^{3}\ \mathrm{J} = 2{,}996\ \mathrm{J}.$$

Bodové náboje Q_1 = 1 μC a Q_2 = 3 μC umiestnené v prvých dvoch vrcholoch rovnostranného trojuholníka vytvárajú v treťom vrchole elektrické pole s intenzitou veľkosti 9 MV. m^{-1} a s potenciálom 599,18 kV. Toto pole pôsobí na náboj Q = 5 μC v treťom vrchole silou veľkosti 45 N a tento náboj má potenciálnu energiu 2,996 J.

1.5 Elektrické pole vo vákuu je generované elektrickým bodovým nábojom Q = 0,5 nC. Aké je napätie medzi miestom A vo vzdialenosti r_A = 20 cm od náboja a miestom B vo vzdialenosti r_B = 100 cm od náboja?

Riešenie:
Podľa vzťahu (1.10)

$$\varphi_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}, \quad \varphi_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}.$$

Použitím vzťahu (1.17) a dosadením dostaneme

$$U = \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{0{,}5\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{1}\right)\mathrm{V} = 17{,}975\ \mathrm{V}$$

Napätie medzi miestom A a miestom B je 17,975 V.

1.6 Dva bodové elektrické náboje sú vo vákuu udržiavané v rovnováhe vonkajšou silou veľkosti F vo vzdialenosti a = 20 cm. Aká by bola vzdialenosť x medzi nábojmi, ak by boli udržiavané v rovnováhe vonkajšou silou takej istej veľkosti F po ponorení do kvapaliny s relatívnou permitivitou ε_r = 16?

Riešenie:
Na základe vzťahov (1.3) a (1.20) pre rovnakú silu medzi bodovými nábojmi vo vákuu a v kvapaline platí vzťah

$$\frac{|Q_1 Q|}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{|Q_1 Q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r} x^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}} = \frac{20\ \mathrm{cm}}{\sqrt{16}} = 5\ \mathrm{cm}$$

Vzdialenosť medzi bodovými elektrickými nábojmi v kvapaline by bola 5 cm.

1.7 Vypočítajte elektrický potenciál φ a intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ vo vzdialenosti x = 2 m od stredu kruhovej dosky polomeru R = 50 cm v kolmom smere k rovine dosky. Doska je rovnomerne nabitá elektrickým nábojom Q = 10 μC a v jej okolí je vákuum.

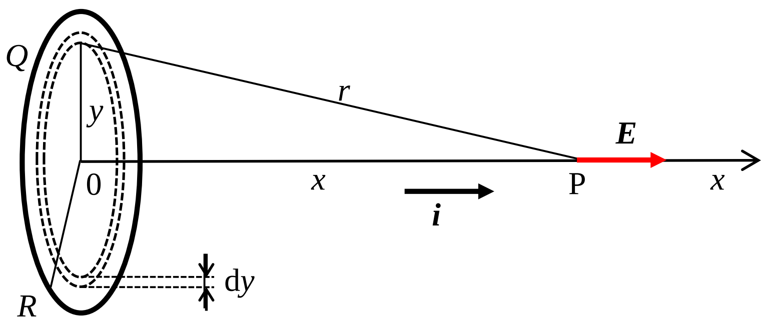
Riešenie:
Nech stred kruhovej dosky je počiatkom osi x kolmej na rovinu dosky a na osi x sa vo vzdialenosti x = 2 m od stredu kruhovej dosky nachádza pozorovateľ P. Elektrický náboj Q nie je bodový, ale je rovnomerne rozložený na kruhovej doske s plošnou hustotou σ

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}Q = \sigma \cdot \mathrm{d}S \qquad \text{(a, b)}$$

preto použijeme na výpočet potenciálu vzťah (1.14) s následným dosadením vzťahu (b)

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_Q \frac{\mathrm{d}Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma \cdot \mathrm{d}S}{r} \qquad \text{(c)}$$

pričom nekonečne malý náboj dQ je rozložený na nekonečne malej (elementárnej) ploche, body ktorej sú rovnako vzdialené od pozorovateľa P, pozri obr. 1.5.



Obr. 1.5 Výber elementárnej plochy na kruhovej doske s rozloženým elektrickým nábojom

Takou elementárnou plochou je zrejme medzikružie polomeru y , šírky dy s plošným obsahom dS, pričom platí

$$\mathrm{d}S = 2\pi y \cdot \mathrm{d}y, \quad r = \sqrt{y^2 + x^2} \qquad \text{(d, e)}$$

Dosadením (a, d, e) do (c), integráciou a dosadením zadaných hodnôt dostaneme

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma \cdot \mathrm{d}S}{r} = \frac{\sigma\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{2y \cdot \mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{z}\right]_{x^2}^{R^2+x^2} = \frac{Q}{2\pi R^2 \varepsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right) =$$

$$= \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} \left(\sqrt{0{,}5^2 + 2^2} - 2\right) \mathrm{V} = 44258\ \mathrm{V}$$

pričom sme pri integrovaní použili zámenu premennej y na premennú z

$$z = y^2 + x^2, \quad \mathrm{d}z = 2y \cdot \mathrm{d}y$$

Intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ v danom mieste určíme podľa vzťahu (1.15)

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \boldsymbol{k}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \boldsymbol{i} = -\frac{Q}{2\pi R^2 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{2}\left(R^2 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x - 1\right) \boldsymbol{i} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi R^2 \varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) \boldsymbol{i} = \frac{Q}{2\pi R^2 \varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) \boldsymbol{i}$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{2\pi R^2 \varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) \boldsymbol{i} = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{0{,}5^2 + 2^2}}\right) \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \boldsymbol{i} = 21468 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \boldsymbol{i}$$

V danom mieste je elektrický potenciál 44258 V a intenzita elektrického poľa veľkosti 21468 V/m je tam orientovaná v kladnom smere osi x.

1.8 Vypočítajte elektrický potenciál φ a intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ vo vzdialenosti x = 2 m od kraja úsečky dĺžky L = 5 m na predĺžení úsečky. Úsečka je rovnomerne nabitá elektrickým nábojom Q = 10 μC a v jej okolí je vákuum.

Riešenie:
Nech úsečka leží na osi x a pravý kraj úsečky je počiatkom osi x. V mieste so súradnicou x = 2 m sa na osi x nachádza pozorovateľ P. Elektrický náboj Q nie je bodový, ale je rovnomerne rozložený na úsečke dĺžky L s lineárnou hustotou λ

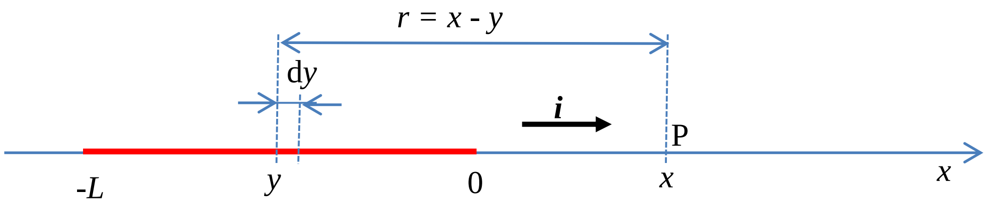
$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}Q = \lambda \cdot \mathrm{d}y \tag{a, b}$$

preto použijeme na výpočet potenciálu vzťahu (1.14) s následným dosadením vzťahu (b)

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q \frac{\mathrm{d}Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda\cdot\mathrm{d}y}{r} \tag{c}$$

pričom nekonečne malý náboj dQ je rozložený na nekonečne malej (elementárnej) úsečke dĺžky dy, ležiacej na osi x v mieste so súradnicou y < 0 vo vzdialenosti r od pozorovateľa P, pozri obr. 1.5, pričom

$$r = x - y \tag{d}$$



Obr. 1.6 Výber elementárnej dĺžky na úsečke s rozloženým elektrickým nábojom

Dosadením (a,d) do (c) a integrovaním dostaneme

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda\cdot\mathrm{d}y}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{0}\frac{\mathrm{d}y}{x-y} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x+L}^{x}\frac{(-\mathrm{d}z)}{z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_{x}^{x+L}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{x+L}{x} \tag{e}$$

pričom sme pri integrovaní použili zámenu premennej y na premennú z

$$z = x - y, \quad \mathrm{d}z = -\mathrm{d}y$$

a znak absolútnej hodnoty vo výsledku nepoužívame, lebo obe hranice ostatného určitého integrálu sú kladné. Dosadením zadaných hodnôt dostaneme

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{x+l}{x} = \frac{10\cdot 10^{-6}}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 5}\ln\frac{2+5}{2}\,\mathrm{V} = 22519\,\mathrm{V}$$

Intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ v danom mieste určíme podľa vzťahu (1.15), pričom podľa (e) elektrický potenciál φ pre pozorovateľa P na osi x závisí len od priestorovej premennej x

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{x+L}{x}\right)\boldsymbol{i} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\cdot\frac{x}{x+L}\cdot\frac{1\cdot x - (x+L)\cdot 1}{x^2}\boldsymbol{i} = \frac{Q\boldsymbol{i}}{4\pi\varepsilon_0 x(x+L)}$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q\boldsymbol{i}}{4\pi\varepsilon_0 x(x+L)} = \frac{10\cdot 10^{-6}}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot(2+5)}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\boldsymbol{i} = 6420\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\boldsymbol{i}$$

V danom mieste je elektrický potenciál 22519 V a intenzita elektrického poľa veľkosti 6420 V/m je tam orientovaná v kladnom smere osi *x*.

1.9 Vypočítajte elektrický potenciál φ a intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ vo vzdialenosti y = 4 m od stredu úsečky dĺžky L = 6 m v kolmom smere k úsečke. Úsečka je rovnomerne nabitá elektrickým nábojom Q = 10 μC a v jej okolí je vákuum.

Riešenie:
Nech úsečka leží na osi *x* a stred úsečky je počiatkom osi *x*. V mieste so súradnicou y = 4 m sa na osi *y* nachádza pozorovateľ P. Elektrický náboj Q nie je bodový, ale je rovnomerne rozložený na úsečke dĺžky L s lineárnou hustotou λ

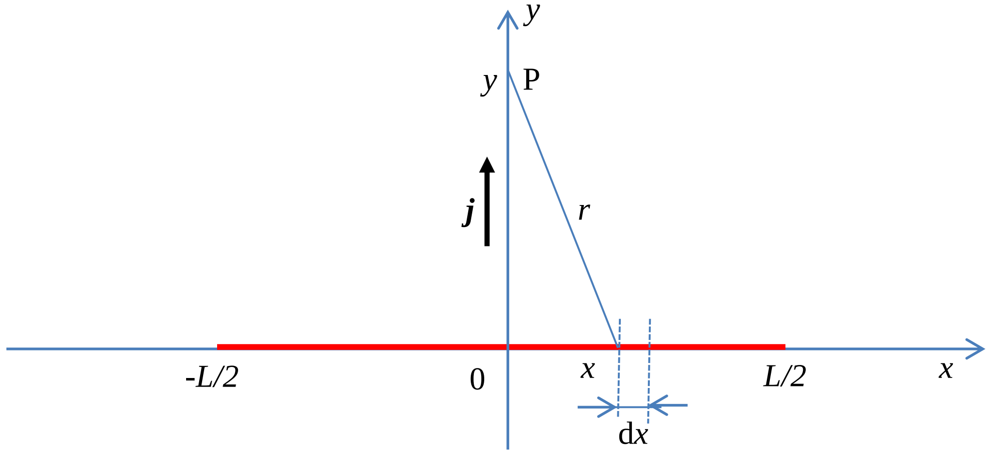
$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}Q = \lambda \cdot \mathrm{d}x \tag{a, b}$$

preto použijeme na výpočet potenciálu vzťah (1.14) s následným dosadením vzťahu (b)

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q \frac{\mathrm{d}Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda \cdot \mathrm{d}x}{r} \tag{c}$$

pričom nekonečne malý náboj dQ je rozložený na nekonečne malej (elementárnej) úsečke dĺžky dx, ležiacej na osi x v mieste so súradnicou x vo vzdialenosti r od pozorovateľa P, pozri obr. 1.7, pričom

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{d}$$



Obr. 1.7 Výber elementárnej dĺžky na úsečke s rozloženým elektrickým nábojom

Dosadením (a,d) do (c) a integrovaním dostaneme

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda \cdot \mathrm{d}x}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathrm{d}x}{z-x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\frac{z^2+y^2}{2z^2}\mathrm{d}z}{z - \frac{z^2-y^2}{2z}} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\frac{z^2+y^2}{2z^2}\mathrm{d}z}{\frac{z^2+y^2}{2z}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln z\right]_a^b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right]_{-L/2}^{L/2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2}}{-\frac{L}{2}+\sqrt{\left(-\frac{L}{2}\right)^2+y^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{L+\sqrt{L^2+4y^2}}{-L+\sqrt{L^2+4y^2}} \qquad \text{(e)}$$

pričom sme pri integrovaní použili Eulerovu zámenu premennej x na premennú z

$$z = x+\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = z-x \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = z^2-2zx+x^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = z^2-2zx \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{z^2-y^2}{2z} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{2z\cdot 2z-\left(z^2-y^2\right)\cdot 2}{4z^2}\mathrm{d}z = \frac{2z^2+2y^2}{4z^2}\mathrm{d}z = \frac{z^2+y^2}{2z^2}\mathrm{d}z$$

a znak absolútnej hodnoty vo výsledku (e) nepoužívame, lebo argument funkcie ln po dosadení oboch hraníc určitého integrálu je kladný. Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (e) dostaneme

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{L+\sqrt{L^2+4y^2}}{-L+\sqrt{L^2+4y^2}} = \frac{10\cdot 10^{-6}}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 6}\ln\frac{6+\sqrt{6^2+4\cdot 4^2}}{-6+\sqrt{6^2+4\cdot 4^2}}\ \mathrm{V} = 20766\ \mathrm{V}$$

Intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ v danom mieste určíme podľa vzťahu (1.15), pričom podľa (e) elektrický potenciál φ pre pozorovateľa P na osi y závisí len od priestorovej premennej y

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{L+\sqrt{L^2+4y^2}}{-L+\sqrt{L^2+4y^2}}\right)\boldsymbol{j} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\cdot\frac{-L+\sqrt{L^2+4y^2}}{L+\sqrt{L^2+4y^2}}\cdot\frac{\frac{8y}{2\sqrt{L^2+4y^2}}\left(-L+\sqrt{L^2+4y^2}\right)-\left(L+\sqrt{L^2+4y^2}\right)\frac{8y}{2\sqrt{L^2+4y^2}}}{\left(-L+\sqrt{L^2+4y^2}\right)^2}\boldsymbol{j} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\cdot\frac{\frac{-8Ly}{\sqrt{L^2+4y^2}}}{\left(L+\sqrt{L^2+4y^2}\right)\left(-L+\sqrt{L^2+4y^2}\right)}\boldsymbol{j} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\frac{-8y}{\sqrt{L^2+4y^2}}}{-L^2+L^2+4y^2}\boldsymbol{j} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{8y}{4y^2\sqrt{L^2+4y^2}}\boldsymbol{j} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 y\sqrt{L^2+4y^2}}\boldsymbol{j}$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostaneme

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 y\sqrt{L^2+4y^2}}\boldsymbol{j} = \frac{10\cdot 10^{-6}}{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 4\cdot\sqrt{6^2+4\cdot 4^2}}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\boldsymbol{j} = 4494\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\boldsymbol{j}$$

V danom mieste je elektrický potenciál 20766 V a intenzita elektrického poľa veľkosti 4494 V/m je tam orientovaná v kladnom smere osi y.

1.10 Elektrické pole vo vákuu je generované nehybným bodovým nábojom Q_1 = 2 nC. Miesto A je vo vzdialenosti r_A = 10 m od náboja Q_1, miesto B je vo vzdialenosti r_B = 2 m od náboja Q_1. Akú prácu W_{ext} vykoná vonkajšia sila $\boldsymbol{F}_{ext}$, ktorá presunie náboj Q = 5 C z miesta A do miesta B?

Riešenie:
Pri presúvaní pôsobia na náboj dve sily: vonkajšia sila $\boldsymbol{F}_{ext}$ a elektrická sila $\boldsymbol{F}$, pozri vzťah (1.4). Práca W_V výslednice oboch síl sa rovná zmene kinetickej energie náboja. Náboj však bol v mieste A v pokoji a bude v pokoji aj po jeho presunutí do miesta B. Preto platí

$$W_V = W_{ext} + W = E_{kB} - E_{kA} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{ext} = -W \tag{a}$$

kde W je práca elektrickej sily $\boldsymbol{F}$ pri presunutí náboja Q z miesta A do miesta B. Dosadením vzťahu (1.4) do rovnice (a) a integrovaním dostaneme

$$W_{ext} = -W = -\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_A^B \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{r\cdot|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cdot\cos\alpha}{r^3} = -\frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} =$$

$$= -\frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \tag{b}$$

Po dosadení zadaných hodnôt do vzťahu (b) dostaneme

$$W_{ext} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \frac{5\cdot 2\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right)\mathrm{J} = 35{,}95\ \mathrm{J}$$

Vonkajšia sila vykoná prácu 35,95 J.

Poznámka: Vzťah (b) môžeme získať aj bez integrovania. Podľa vzťahu (1.19) sa práca W_{ext} vonkajšej sily rovná zmene potenciálnej energie bodového náboja Q pri jeho presune z miesta A do miesta B

$$W_{ext} = E_{PB} - E_{PA} = Q(\varphi_B - \varphi_A) \tag{c}$$

Po dosadení (1.10) do vzťahu (c) dostaneme

$$W_{ext} = Q(\varphi_B - \varphi_A) = Q\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_A}\right) = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right).$$

1.11 Akú prácu W vykonalo homogénne elektrické pole s intenzitou veľkosti E = 200 kV.m^{-1}, ak sa bodový elektrický náboj Q = 5 C posunul po dráhe l = 15 cm, pričom vektor posunutia $\boldsymbol{l}$ zviera s intenzitou $\boldsymbol{E}$ uhol α = 45°?

Riešenie:
Podľa vzťahu (1.18)

$$W = \int_1^2 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_1^2 Q\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = Q\boldsymbol{E}\cdot\int_1^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = Q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{l} = QEl\cos\alpha = 5\cdot 200\cdot 10^3\cdot 0{,}15\cdot\cos 45°\ \mathrm{J} = 106066\ \mathrm{J}$$

Elektrické pole vykonalo prácu 106066 J.

1.12 Akú prácu W_{ext} vykoná vonkajšia sila pri presune bodového elektrického náboja Q = 5 C z miesta s elektrickým potenciálom φ_1 = -5 V do miesta s elektrickým potenciálom φ_2 = 5 V?

Riešenie:
Podľa vzťahu (1.19)

$$W_{ext} = Q(\varphi_2 - \varphi_1) = 5\cdot[5-(-5)]\,\mathrm{J} = 50\ \mathrm{J}$$

Vonkajšia sila vykoná prácu 50 J.

Trnava, 19. 9. 2014 Vypracoval: RNDr. Igor Jančuška, PhD.