

METODOLÓGIA TECHNICKÉHO EXPERIMENTU

**Marián KUBLIHA
Vladimír LABAŠ
Stanislav MINÁRIK
Viera KAŠŠÁKOVÁ
Ondrej BOŠÁK**



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Materiálovotechnologická fakulta so sídlom v Trnave

© Doc. Ing. Marián Kubliha, PhD., doc. RNDr. Vladimír Labaš, PhD.,
Doc. Ing. Stanislav Minárik PhD., Mgr. Viera Kaššáková, PhD.,
Mgr. Ondrej Bošák

Recenzenti : doc. RNDr. Peter Čerňanský, CSc.

Ing. Igor Jančuška, PhD.

Jazyková korektúra : Mgr. Valéria Krahulcová

Schválila Vedecká rada Materiálovotechnologickej fakulty STU ako vysokoškolské skriptá dňa 22. marca 2006 pre študijné programy Technické materiály, Nekomové materiály, Výrobné zariadenia a systémy, Počítačová podpora výrobných technológií, Výrobné technológie, Inžinierstvo životného prostredia, Bezpečnosť a ochrana zdravia pri práci Materiálovotechnologickej fakulty STU v Trnave

ISBN 978-80-8096-005-6

EAN 9788080960056

Autori: Doc. Ing. Marián Kubliha, PhD.,
Doc. RNDr. Vladimír Labaš, PhD., Doc. Ing. Stanislav Minárik, PhD.,
Mgr. Viera Kaššáková, PhD., Mgr. Ondrej Bošák

Názov: METODOLÓGIA TECHNICKÉHO EXPERIMENTU
Miesto vydania: Trnava
Vydavateľ: AlumniPress
Rok vydania: 2007
Vydanie: prvé
Rozsah : 110 strán
Edičné číslo: 6/AP/2007

ISBN 978-80-8096-005-6
EAN 9788080960056

Úvod

Predmet metodológia technického experimentu má za cieľ naučiť študentov pripraviť, uskutočniť a následne vyhodnotiť experiment s využitím ich doterajších teoretických znalostí a praktických zručností. Predkladané skriptá sú učebnou pomôckou na uvedený predmet. Pri zostavovaní skrípt sa autori snažili zakomponovať do textu v súčasnosti platnú terminológiu súvisiacu s vyhodnocovaním experimentálnych dát, pričom hlavný dôraz je kladený najmä na určovanie nepresnosti merania. V skriptách sú však uvedené i informácie o použití vybraných typov meracích prístrojov a tiež zásady písania protokolu z merania. Úlohy na precvičenie by mali umožniť študentom prakticky si osvojiť zásady uvedené v teoretickej časti.

Autori ďakujú recenzentom Doc. RNDr. Petrovi Čerňanskému, PhD. a RNDr. Igorovi Jančuškovi, PhD. za pripomienky, poznámky a diskusiu k obsahu skrípt, ako i za pomoc pri ich kontrole.

Autori

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV

n	počet meraní
x_i	i – te meranie meranej veličiny
x_n	nameraná hodnota meranej veličiny
x_s	skutočná hodnota meranej veličiny
\bar{x}	aritmetický priemer z nameraných hodnôt
δx	chyba alebo neistota meranej veličiny
δx_{rel}	relatívna chyba alebo relatívna neistota meranej veličiny v percentách
Δx_i	odchýlka i – teho merania meranej veličiny
s_n	nameraná hodnota ďalšej veličiny
v_n, z_n	namerané hodnoty ďalších veličín
y_n	hodnota nepriamo meranej veličiny,
δs	neistota ďalšej veličiny
$\delta v, \delta z$	neistoty ďalších veličín
δy	neistota nepriamo meranej veličiny
δy_{rel}	relatívna neistota nepriamo meranej veličiny v percentách
r_{sv}	korelačný koeficient ďalších veličín s a v
y_1, y_2	krajné hodnoty meranej veličiny stanovené z krajných hodnôt meranej ďalšej veličiny
y_{\min}, y_{\max}	krajné hodnoty meranej veličiny stanovené z krajných hodnôt meraných ďalších veličín
a, b	optimálne hodnoty koeficientov priamky
$\delta a, \delta b$	neistoty optimálnych hodnôt koeficientov priamky

1. VÝZNAM A CHARAKTERISTIKA TECHNICKÉHO EXPERIMENTU

Pri kontrole, riadení a regulácii technologických procesov, normalizačnej činnosti, pri laboratórnych prácach má nezastupiteľné miesto technický experiment. Jeho najdôležitejšou úlohou je určovať hodnotu zvolenej veličiny a mieru jej neistoty. **Technický experiment** možno zvyčajne rozdeliť na niekoľko čiastkových úkonov - etáp, ktorých rozsah je určený účelom jeho vykonania. Prvou etapou je **příprava**. Zahŕňa štúdium možných alternatív vykonania technického experimentu, výber metódy, voľbu prístrojového vybavenia a podobne. Druhou etapou je **uskutočnenie merania**. Zahŕňa vykonanie všetkých potrebných prác na získanie relevantných údajov v grafickej, resp. numerickej podobe. Treťou etapou, mnohokrát úzko spojenou s meraním je **zhodnotenie merania**. Okrem vyčíslenia hľadanej hodnoty určovanej veličiny a veľkosti jej neistoty zahŕňa voľbu a použitie rôznych matematických metód pri hľadaní skutočnej hodnoty, resp. skutočnej funkčnej závislosti. Zhodnotenie merania je determinované účelom technického experimentu (kontrola, riadenie, kalibrácia a pod.). Poslednou etapou je **archivácia**, zvyčajne v podobe vypracovania protokolu o uskutočnenom meraní.

Použitá meracia metóda je rozhodujúcim faktorom výrazne ovplyvňujúcim priebeh experimentu. Jej voľba je ovplyvnená požadovanou kvalitou aj rozsahom informácie, ktorú chceme na základe vykonania technického experimentu získať. Jednotlivé meracie metódy možno rozdeliť z hľadiska stanovenia hodnoty meranej veličiny na:

- **priame** – meranú veličinu určujeme priamo v jej jednotkách,
- **nepriame** – meranú veličinu určujeme na základe funkčného vzťahu výpočtom pomocou hodnôt iných veličín, ktoré boli získané meraním.

2. VYPRACOVANIE PROTOKOLU O MERANÍ

Protokol o uskutočnenom meraní je uceleným dokumentom obsahujúcim záznamy o princípe a postupe uskutočneného merania, nameraných hodnotách, spracovaní nameraných hodnôt s určením veľkosti chýb, resp. neistôt o záveroch vyplývajúcich z merania aj z určených hodnôt. Jeho cieľom nie je poskytnúť podrobné informácie o použitej metóde merania a o jej teoretických východiskách. Obsah okrem formálnych údajov (názov, dátum merania, meno merajúceho a pod.) je zvyčajne tvorený nasledujúcimi bodmi:

1. princíp merania,
2. schéma zapojenia,
3. prístroje a pomôcky,
4. postup práce a opis aparatury,
5. tabuľky nameraných a vypočítaných hodnôt,
6. spracovanie nameraných hodnôt,
7. výpočet chyby, resp. neistoty merania,
8. hodnota nameranej veličiny,
9. zhodnotenie,
10. grafy.

2.1 PRINCÍP MERANIA

Stručne uvádza princíp merania, to znamená, fyzikálne zákony alebo vzťahy použité pri určení meranej veličiny. Popisuje veličiny v uvedených vzťahoch. Súčasne uvádza aj podmienky, ktoré pri meraní treba dodržať.

2.2 SCHÉMA ZAPOJENIA

V tomto bode sa v technickej správe schematicky znázorňuje usporiadanie jednotlivých prístrojov a zariadení použitých pri meraní. Pri meraní najmä fyzikálnych veličín je dôležité používať normované označenia prístrojov a zariadení. Pre prehľadnosť a odstránenie možných omylov je vhodné jednotlivé časti schémy prístroje a pomôcky, resp. postup práce a opis aparatury technickej správy označiť aj pomocnými symbolmi uvedenými v bodoch.

2.3 PRÍSTROJE A POMÔCKY

Obsahuje zoznam pomôcok, prístrojov a zariadení použitých pri meraní. Vzhľadom na reprodukovateľnosť merania je vhodné tento zoznam doplniť aj ďalšími charakteristickými údajmi, ako sú trieda presnosti, typ, použitý rozsah a podobne.

Najčastejšie chyby, nedostatky, odporúčania

Pokiaľ sa použije schéma zapojenia, resp. aparatury, je vhodné, aby ste sa v texte odvolávali na najdôležitejšie časti zariadenia zobrazené v schéme zapojenia. Napr. *meraný odpor (4)*.



Prístroje a pomôcky: stabilizovaný zdroj jednosmerného napätia BS 525 (2), voltmeter APPA 109 (5), ampérmeter Metex M 4660 A (3), meraný odpor (4), vypínač (1) , dva uzly a vodiče.

2.4 POSTUP PRÁCE A OPIS APARATÚRY

Obsahuje zvyčajne v bodoch najdôležitejšie postupy a podmienky, ktoré musíme pri meraní dodržať. Opis aparatury je dôležitý najmä v prípade použitia neštandardných zariadení a prístrojov, poprípade pri uskutočňovaní špecifických meraní.

Najčastejšie chyby, nedostatky, odporúčania


1. Pokiaľ sa používa viac prístrojov, z hľadiska prehľadnosti a zrozumiteľnosti je vhodné odvolávať sa na schému zapojenia, uvádzať prístroje a pomôcky s rovnakým označením ako v schéme zapojenia. Napr. Vypínačom (1) *uzatvoríme elektrický obvod*.
2. Neuvádza sa údaj o počte meraní, pokiaľ to nie je podmienkou úspešného merania. Mnohokrát sa v postupe objavuje spojenie „... *zmeriam 10-krát* ...“, čo by znamenalo, že úspešne možno uskutočniť, poprípade vyhodnotiť experiment len v prípade použitia 10 opakovaných meraní. Je jasné, že vo väčšine prípadov je táto informácia zbytočná až zavádzajúca. Čitateľ technickej správy získa informáciu o počte vykonaných meraní z ďalších bodov technickej správy, zvyčajne z tabuliek nameraných hodnôt.

2.5 TABUĽKY NAMERANÝCH A VYPOČÍTANÝCH HODNÔT


Výsledky experimentu sa najčastejšie zapisujú do tabuľky. Tabuľky obsahujú riadky a stĺpce. V hlavičke tabuľky musia byť uvedené značky veličín, ktoré sa merajú a v hranatej zátvorke ich príslušné jednotky. Veľkosti veličín sa udávajú v jednotkách sústavy SI. Číselné hodnoty jednotlivých veličín sa zapisujú do ďalších riadkov príslušného stĺpca tabuľky.


Najčastejšie chyby, nedostatky, odporúčania


1. Pri zápise experimentálnych dát sa používa zápis v SI sústave.

$\rho_i [\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}]$		$\rho_i [\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}]$
1,325		1325
1,328		1328
1,322		1322

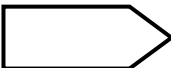
2. Pri zápise experimentálnych dát sa minimalizuje vedecký zápis čísel, extrémne malé, resp. veľké hodnoty veličín v tabuľkách.

$p_i [\text{Pa}]$		$p_i [\text{MPa}]$
11 850 000		11,85
11 880 000		11,88
11 900 000		11,90

$\alpha_i [\text{K}^{-1}]$		$10^6 \cdot \alpha_i [\text{K}^{-1}]$
0,0000021		2,1
0,0000022		2,2
0,0000020		2,0

$v_i [\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$		$10^{-5} \cdot v_i [\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$
$5,62 \cdot 10^5$		5,62
$5,55 \cdot 10^5$		5,55
$5,67 \cdot 10^5$		5,67

3. Pri zápise rozsiahlejšieho súboru experimentálnych dát sa používa odkaz na poradové číslo. Pri výpočte ďalších hodnôt tabuľky sa uvádza pod tabuľkou ich vzorový výpočet len pre jeden riadok tabuľky. Pre ďalšie spracovanie sa môžu uviesť aj riadky uvádzajúce sumu, priemer a pod.

	i	$a_i [\text{m}]$	$S_i [\text{m}^2]$
	1	2,0	4,00
	2	2,1	4,41
	3	2,0	4,00
	4	1,9	3,61
	5	2,2	4,84
	Σ	10,2	11,90

Vzor výpočtu: pre $i = 4$


$$S_i = a_i^2 = (1,9 \text{ m})^2 = 3,61 \text{ m}^2$$

4. Pri zapisovaní číselných hodnôt do tabuľky treba voliť primeraný počet číslic. Údaj v tabuľke „... 1,35474568 ...“ čitateľovi poskytuje zbytočnú informáciu, pretože posledné číslice „... 1,35474568 ...“ zvyčajne nie sú určené meracím zariadením, ale schopnosťou kalkulačky vyčísliť uvedenú hodnotu na veľký počet desatinných miest. Uvedený prípad nastáva najmä vtedy, keď sa meria na prístrojoch, ktoré treba pred meraním očiachovať.

Typickým príkladom je meranie rýchlosti telies s použitím zariadenia zobrazujúceho nameranú rýchlosť v dielikoch, pričom 3 dieliky na stupnici prístroja zodpovedajú rýchlosti $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pri určovaní nameranej hodnoty sa vypočíta konštanta prístroja:

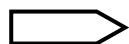
$$1 \text{ dielik} \cong 0,333333333 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Údaj 5 dielikov zodpovedá rýchlosti $1,666666666 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Je jasné, že zápis celého čísla do tabuľky je nevhodný. Počet číslic treba znížiť s ohľadom na veľkosť chyby, resp. neistoty merania, ktorá je určená najmenším dielikom na stupnici prístroja ($0,333333333 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$).

p_i [MPa]		p_i [MPa]
11,1556558154		11,156
11,1785229132		11,179
11,1411532098		11,141

2.6 SPRACOVANIE NAMERANÝCH HODNÔT

V tejto časti sú podrobne uvedené vzťahy a výpočty s hodnotami veličín, ktoré sú použité pri stanovení konečnej hodnoty meranej veličiny. Pre prehľadnosť musí byť vzťah uvedený najskôr pomocou symbolov veličín, potom pomocou hodnôt veličín (v SI sústave) a nakoniec je uvedený výsledok.



$$\alpha = \frac{\Delta l}{\Delta T \cdot l_0} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{50 \text{ K} \cdot 1 \text{ m}} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

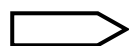
2.7 VÝPOČET CHYBY, RESP. NEISTOTY MERANIA

Na hodnotenie presnosti merania je dôležité stanoviť veľkosť chyby, resp. neistoty merania a veľkosť relatívnej chyby, resp. relatívnej neistoty merania. Tento bod podrobne opisuje postup použitý pri výbere metódy vyhodnotenia presnosti, použitých hodnotách

a úvahách. Podrobnejšie sa touto problematikou zaoberá kapitola 3. Vzťahy musia byť uvedené najskôr pomocou symbolov veličín, potom je potrebné do vzťahov dosadiť ich hodnoty a nakoniec musia byť uvedené výsledky. Podobne ako pri tabuľkách treba hodnoty vhodne zaokrúhľovať.

2.8 HODNOTA MERANEJ VELIČINY

Nameraná hodnota veličiny je vždy zaťažená určitou mierou nepresnosti. Výsledok merania musí byť zapísaný v tvare, z ktorého je zrejmé, aké presné je meranie. V tomto bode sa uvádza zápis hodnoty s chybou, resp. neistotou merania a relatívna chyba, resp. relatívna neistota merania. V zápise výslednej hodnoty veličiny a chyby, resp. neistoty majú byť ich hodnoty v spoločnej zátvorke s rovnakým počtom desatinných miest, pričom chyba, resp. neistota sa zaokrúhľuje na dve platné číslice. Za zátvorkou sa uvedie fyzikálna jednotka meranej veličiny. Relatívna chyba, resp. neistota sa uvádza v percentách zaokrúhlená na dve platné číslice.



$$m = (4,56 \pm 0,11) \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

$$\frac{\delta m}{m} \cdot 100 \% = 2,4 \%$$

Najčastejšie chyby, nedostatky, odporúčania

1. Pri zápise experimentálnych dát sa uprednostňuje zápis pomocou základných jednotiek SI sústavy.

$$\rho = (3,83 \pm 0,18) \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$



$$\rho = (3,83 \pm 0,18) \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

2. Na veľkosti chyby alebo neistoty používame zápis na dve platné číslice (predstavujú celé číslo medzi 10 a 99).

$$v = (343,24645 \pm 0,75818) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



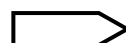
$$v = (343,25 \pm 0,76) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$F = (1506238 \pm 1584) \text{ N}$$



$$F = (1506200 \pm 1600) \text{ N}$$

$$b = (5,4732 \pm 0,00004015) \text{ m}$$



$$b = (5,473200 \pm 0,000040) \text{ m}$$

3. Hodnota nameranej veličiny aj neistoty merania musí byť zapísaná v rovnakom tvare s rovnakým počtom desatinných miest.

$$T = (25,4298 \pm 25 \cdot 10^{-1})^{\circ}\text{C}$$



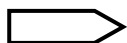
$$T = (25,4 \pm 2,5)^{\circ}\text{C}$$

2.9 ZHODNOTENIE

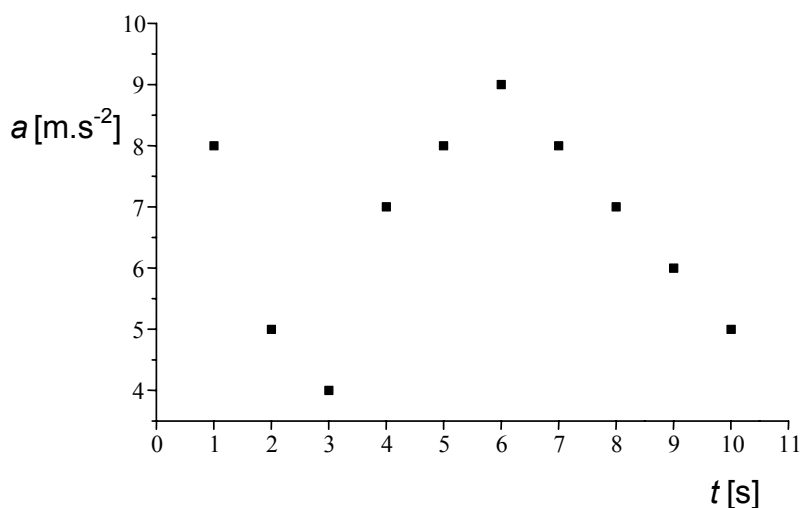
Stručne hodnotí výsledky merania a analyzuje možnosti zvýšenia presnosti merania. Navrhne možnosti úpravy postupu, resp. výmeny meracích prístrojov a zariadení. Hodnotí použitú metódu merania, jej výhody a nedostatky. Predkladá odporúčania na ďalšie merania. Analyzuje možnosti prítomnosti systematickej chyby.

2.10 GRAFY

Súčasťou protokolu o meraní je mnohokrát aj grafické vyjadrenie nameraných závislostí, ktoré poskytuje prehľadné informácie o hodnotách, charaktere závislostí, vlastnostiach závislostí a podobne. Zvyčajne predstavuje dôležitý podklad na hodnotenie merania. Graf obsahuje poradové číslo, ktoré ho jednoznačne identifikuje v texte protokolu, popis zobrazenej závislosti, osi označené symbolmi veličín s jednotkami a hodnotami. Z nameraných, resp. vypočítaných hodnôt je v grafe zaznamenaný jeden alebo viacero vzájomne nezameniteľných priebehov. Veľkosť písma musí byť primeraná veľkosti grafu.

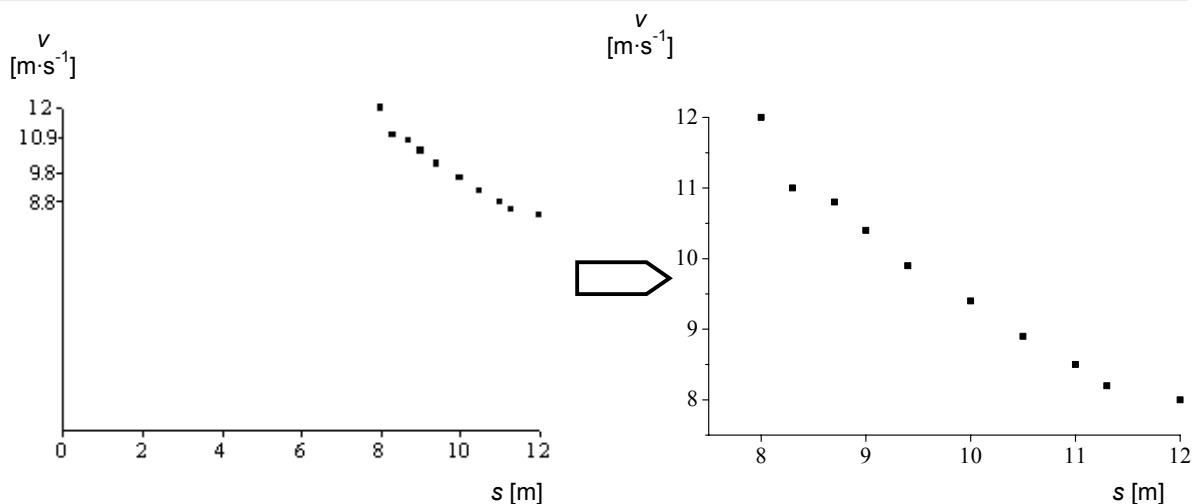


Graf č.1: Závislosť nameraných hodnôt zrýchlenia od času.

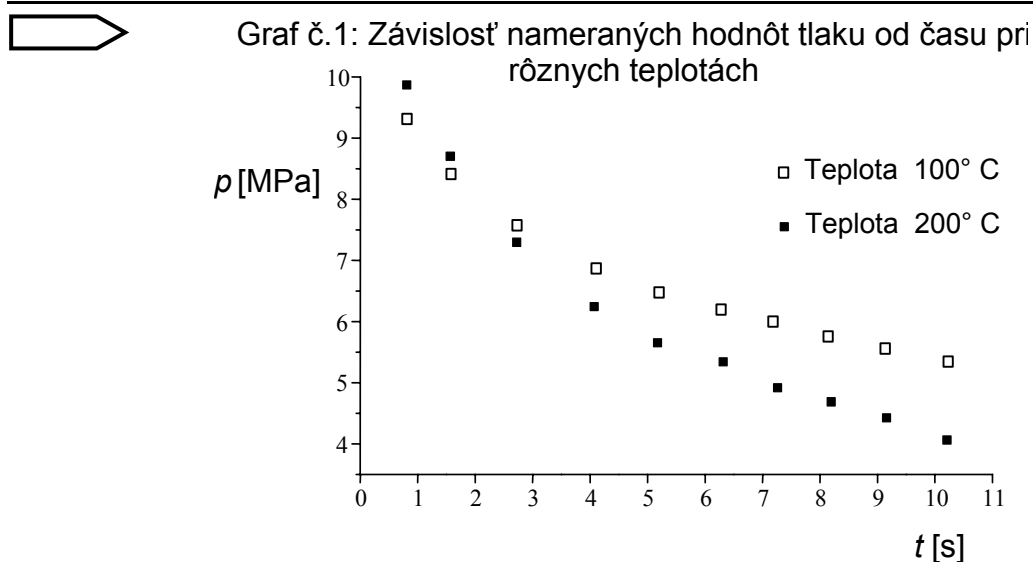


Najčastejšie chyby, nedostatky, odporúčania

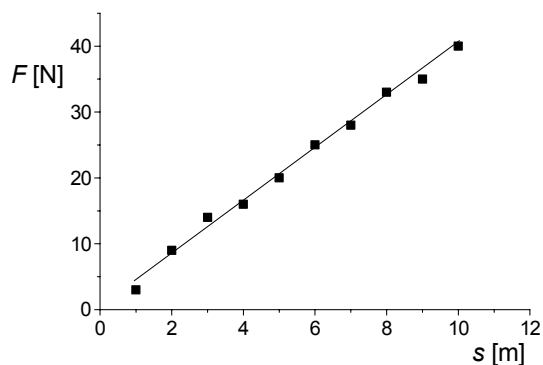
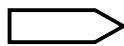
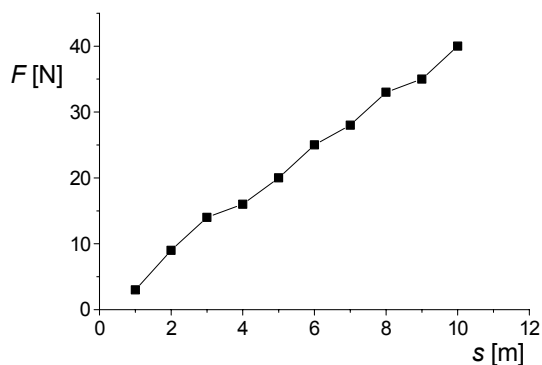
1. Pri grafickom zobrazení je potrebné mierku voliť tak, aby optimálne zobrazovala všetky namerané hodnoty. Zvyčajne volíme rozsah osí na základe intervalu hodnôt jednotlivých zobrazených veličín. Číselné označenie osí volíme tak, aby hodnoty prirodzene narastali (v lineárnej mierke rovnomerne, v logaritmickej exponenciálne).



2. Pri zobrazovaní viacerých závislostí je potrebné jednotlivé závislosti odlíšiť.



3. Pri hľadaní skutočného priebehu závislosti medzi veličinami využívame aproximačné metódy, napr. metódu najmenších štvorcov (podrobnejšie bude popísaná v kapitole 4). Pri nahradzovaní jednotlivých hodnôt charakteristickým priebehom je treba zohľadniť presnosť merania jednotlivých veličín. Ak je presnosť merania nízka, zobrazené body výraznejšie oscilujú okolo charakteristického priebehu a spájanie jednotlivých nameraných bodov v grafe navodzuje dojem o výraznej zmene veličiny.



2.11 PRÍKLAD PROTOKOLU O MERANÍ

Názov : Určovanie veľkosti elektrického odporu rezistora.

Nameral a vypracoval: XXXXXX YYYYYYY

Merané dňa: XX.YY. ZZZZ

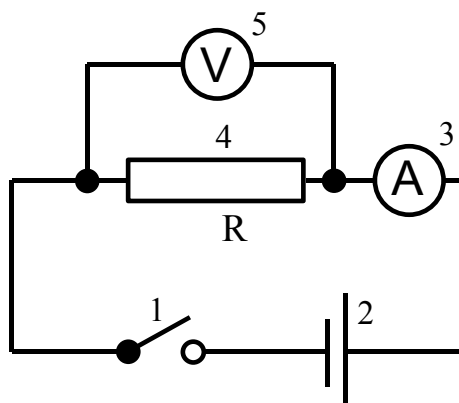
Princíp merania: Využitím Ohmovho zákona možno určiť veľkosť elektrického odporu podľa vzťahu:

$$R = \frac{U}{I},$$

kde R je veľkosť elektrického odporu, U je napätie namerané na rezistore a I je veľkosť elektrického prúdu, ktorý preteká rezistorom. Pri presnom meraní treba uvažovať aj s veľkosťou vnútorného elektrického odporu použitého voltmetra R_V podľa vzťahu:

$$R = \frac{UR_V}{IR_V - U}.$$

Schéma zapojenia



Prístroje a pomôcky: stabilizovaný zdroj jednosmerného napätia BS 525 (2), voltmeter APPA 109 (5), ampérmetr Metex M 4660 A (3), meraný odpor (4), vypínač (1) , dva uzly a vodiče.

Postup práce a opis aparatury

1. Zapojíme elektrický obvod podľa schémy.
2. Na zdroji (2) nastavíme hodnotu napätia v intervale (5-10) V.
3. Vypínačom (1) uzatvoríme elektrický obvod.
4. Pomocou ampérmetra (3) zmeriame veľkosť elektrického prúdu I pretekajúceho obvodom.
5. Pomocou voltmetra (5) zmeriame veľkosť napätia U na meranom rezistore (4).
6. Zistíme veľkosť vnútorného elektrického odporu voltmetra R_V .

Tabuľky nameraných a vypočítaných hodnôt

U [V]	I [A]	R_V [Ω]
15,23	0,021	12000

Spracovanie nameraných hodnôt

$$R = \frac{UR_V}{IR_V - U} = \frac{15,23 \text{ V} \cdot 12000 \text{ } \Omega}{0,021 \text{ A} \cdot 12000 \text{ } \Omega - 15,23 \text{ V}} = 771,9 \text{ } \Omega.$$

Výpočet neistoty merania:

Pomocou stanovených veľkostí neistôt jednotlivých veličín z technickej dokumentácie prístrojov

$$\delta R_V = \pm 1 \text{ } \Omega, \quad \delta I = \pm 5 \cdot 10^{-4} \text{ A}, \quad \delta U = \pm 0,01 \text{ V}$$

určíme veľkosť neistoty a relatívnej neistoty meranej hodnoty elektrického odporu R metódou linearizácie podľa vzťahu

$$\delta R = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_V} \delta R_V\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \delta I\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial U} \delta U\right)^2}.$$

Po úprave predchádzajúceho vzťahu

$$\delta R = \pm \frac{1}{IR_V - U} \sqrt{\left(\left(U - \frac{UR_V I}{IR_V - U}\right) \delta R_V\right)^2 + \left(-\frac{UR_V^2}{(IR_V - U)} \delta I\right)^2 + \left(\left(R_V + \frac{UR_V}{IR_V - U}\right) \delta U\right)^2}$$

a dosadení nameraných hodnôt jednotlivých veličín a hodnôt ich neistôt

$$\delta R = \pm \frac{1}{0,021 \text{ A} \cdot 12000 \Omega - 15,23 \text{ V}} \sqrt{\left(\left[15,23 \text{ V} - \frac{15,23 \text{ V} \cdot 12000 \Omega \cdot 0,021 \text{ A}}{0,021 \text{ A} \cdot 12000 \Omega - 15,23 \text{ V}} \right] 1 \Omega \right)^2 + \left(-\frac{15,23 \text{ V} \cdot (12000 \Omega)^2}{(0,021 \text{ A} \cdot 12000 \Omega - 15,23 \text{ V})} 0,0005 \text{ A} \right)^2 + \left(\left[12000 \Omega + \frac{15,23 \text{ V} \cdot 12000 \Omega}{0,021 \text{ A} \cdot 12000 \Omega - 15,23 \text{ V}} \right] 0,01 \text{ V} \right)^2}$$

$$\delta R = \pm \frac{1}{236,77 \text{ V}} \sqrt{(0,98 \Omega \cdot \text{V})^2 + (-4631,33 \Omega \cdot \text{V})^2 + (127,72 \Omega \cdot \text{V})^2}$$

je veľkosť neistoty meraného elektrického odporu rezistora

$$\delta R = \pm 19,6 \Omega$$

a relatívnej neistoty meraného elektrického odporu rezistora

$$\delta R_{\text{rel}} = \frac{\delta R}{R} \cdot 100 \% = \frac{19,6 \Omega}{771,9 \Omega} \cdot 100 \% = 2,53 \%$$

Hodnota nameranej veličiny

$$R = (772 \pm 20) \Omega, \quad \delta R_{\text{rel}} = 2,5 \%$$

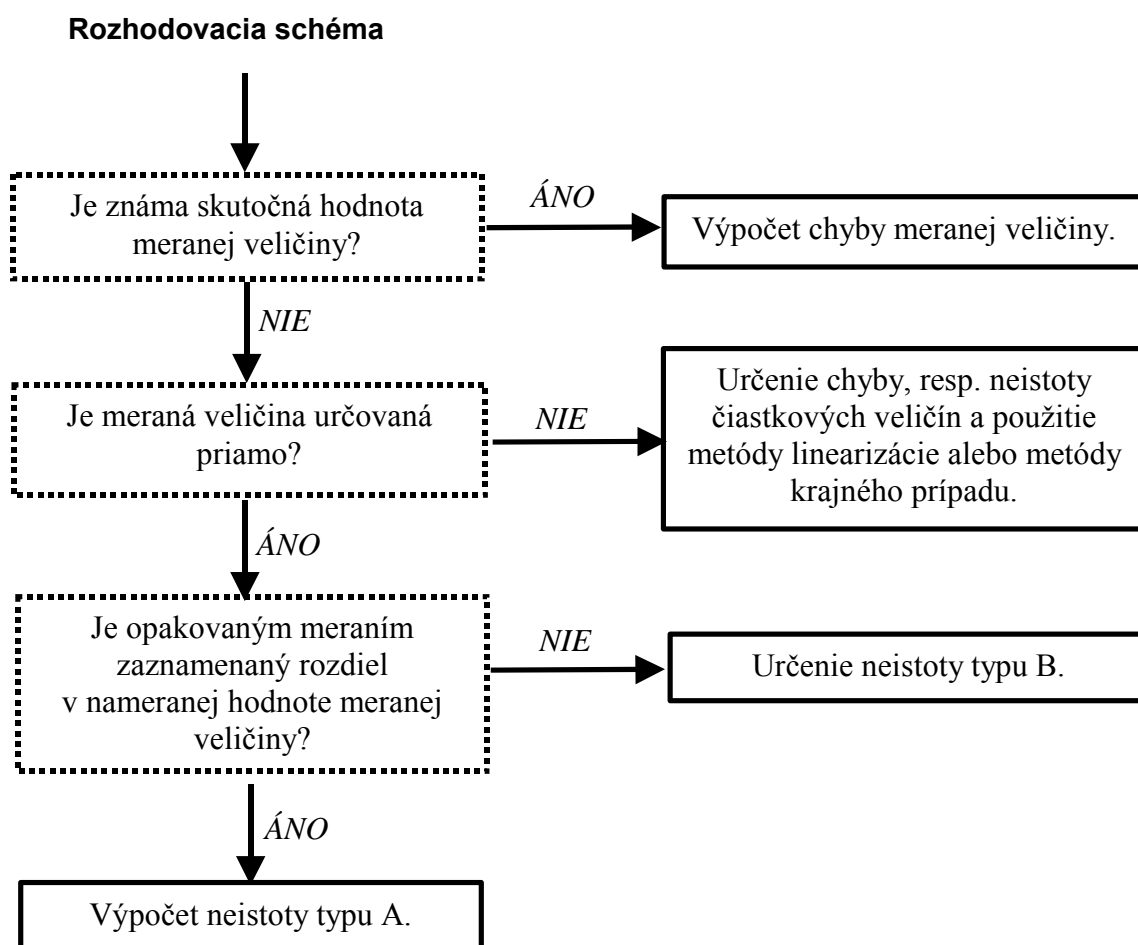
Zhodnotenie: Pri uskutočnenom meraní veľkosti elektrického odporu priamou metódou je veľkosť neistoty ($\delta R_{\text{rel}} = 2,5 \%$) na úrovni bežných meraní. Veľkosť neistoty merania je v rozhodujúcej miere ovplyvnená neistotou stanovenia veľkosti elektrického prúdu pomocou ampérmetra (príslušný člen „ $(-4631,33 \Omega \cdot \text{V})^2$ “ má rádovo väčšiu hodnotu). Na zvýšenie presnosti merania by bolo najvhodnejšie vymeniť použitý ampérmeter za iný, presnejší, s neistotou merania aspoň $\delta I = \pm 5 \cdot 10^{-5} \text{ A}$.

3. URČOVANIE PRESNOSTI MERANIA

Určovanie presnosti merania je neoddeliteľnou súčasťou vyhodnocovania merania. Najjednoduchší spôsob stanovenia presnosti merania je určenie veľkosti chyby merania pomocou znalosti skutočnej hodnoty meranej veličiny. Tento spôsob je však veľmi zriedkavý a používa sa najmä pri ciachovaní a kalibrácii pomocou presných etalónov.

Vo väčšine prípadov skutočná hodnota meranej veličiny nie je známa. Vtedy sa určuje neistota meranej veličiny. Neistota merania je interval hodnôt, v ktorom sa s určitou pravdepodobnosťou nachádza skutočná hodnota meranej veličiny. Veľkosť tohto intervalu je výrazne ovplyvnená voľbou meracích prístrojov, postupov a metód spracovania nameraných hodnôt. Pri jednorazovom meraní sa zvyčajne vychádza z presnosti použitého prístroja (neistota typu B), pri opakovanom meraní zo štatistiky (neistota typu A).

Pri nepriamom meraní, kde sa hodnota meranej veličiny určuje na základe merania ďalších veličín, je presnosť meranej veličiny ovplyvnená presnosťou merania týchto veličín. V týchto prípadoch sa hovorí o šírení neistôt a na hodnotenie presnosti merania možno zvoliť rôzne metódy. Nasledujúca rozhodovacia schéma znázorňuje odporúčaný postup pri vyhodnocovaní presnosti merania.



V nasledujúcich kapitolách je vysvetlený postup pri stanovení chýb a neistôt merania.

3.1 VÝPOČET CHYBY MERANIA

Žiadne meranie nedokáže stanoviť skutočnú hodnotu meranej veličiny presne. Pri stanovení veľkosti chyby merania je potrebné poznať skutočnú hodnotu meranej veličiny. Preto pri meraní možno za **skutočnú hodnotu** meranej veličiny považovať iba hodnotu nameranú pri oveľa presnejšom meraní. V prípade, ak poznáme hodnotu meranej veličiny získanú výrazne presnejším meraním, možno ju považovať za skutočnú hodnotu meranej veličiny. V tomto prípade sa určí chyba a relatívna chyba meranej veličiny pomocou vzťahov:

$$\delta x = x_n - x_s, \quad (3.1)$$

$$\delta x_{\text{rel}} = \frac{|x_n - x_s|}{x_s} \cdot 100\% = \frac{|\delta x|}{x_s} \cdot 100\%, \quad (3.2)$$

kde δx je chyba meranej veličiny, x_n je nameraná hodnota meranej veličiny, x_s je skutočná hodnota meranej veličiny, δx_{rel} je relatívna chyba meranej veličiny v percentách. Výsledok merania sa uvádza v tvare $x = x_n - \delta x$ a δx_{rel} . Výsledok sa zvyčajne zaokrúhľuje na dve platné číslice.



Príklad: Máme stanoviť presnosť merania tiažového zrýchlenia g , ktorého hodnotu sme experimentálne stanovili na $g_n = 9,95323 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Skutočná hodnota tiažového zrýchlenia uvedená v tabuľkách je $g_s = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$\delta g = g_n - g_s = (9,95323 - 9,80665) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,14658 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\delta g_{\text{rel}} = \frac{\delta g}{g_s} \cdot 100\% = \frac{0,14658 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \cdot 100\% = 1,4947\%$$

Zápis výsledku merania

$$g = (9,95 - 0,15) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \delta g_{\text{rel}} = 1,5\%$$

3.2 VÝPOČET NEISTOTY MERANIA - TYP A

V prípade, ak nie je známa skutočná hodnota meranej veličiny, meraná veličina je určovaná priamo a pozorujú sa rozdiely v nameraných hodnotách, môže sa hodnotiť neistota merania typu A. Zo súboru nameraných hodnôt sa určuje aritmetický priemer ako najlepší odhad skutočnej hodnoty meranej veličiny

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (3.3)$$

neistotu tohto odhadu meranej veličiny

$$\delta x = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}, \quad \text{kde} \quad \Delta x_i = x_i - \bar{x} \quad (3.4)$$

a relatívnu neistotu odhadu hodnoty meranej veličiny

$$\delta x_{\text{rel}} = \frac{\delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%, \quad (3.5)$$

kde x_i je i – te meranie, resp. i – ta hodnota meranej veličiny, n je počet meraní, Δx_i je odchýlka i – teho merania meranej veličiny (rozdiel medzi nameranou hodnotou a aritmetickým priemerom nameraných hodnôt meranej veličiny). Výsledok merania sa zapisuje v tvare $x = \bar{x} \pm \delta x$ a δx_{rel} a zaokrúhľuje sa na dve platné číslice.



Príklad: Máme stanoviť presnosť merania dĺžky b súčiastky. Uskutočnili sme súbor meraní, ktorých výsledky sú nasledovné: 11,3 mm; 11,3 mm; 11,4 mm; 11,5 mm; 11,2 mm; 11,4 mm; 11,3 mm; 11,5 mm; 11,3 mm; 11,4 mm. Pre prehľadnosť využijeme zápis do tabuľky, kde symbol \sum predstavuje súčet hodnôt v danom stĺpci.

Aritmetický priemer nameraných hodnôt:

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} = \frac{113,6 \text{ mm}}{10} = 11,36 \text{ mm}.$$

i	b_i [mm]	Δb_i [mm]	$(\Delta b_i)^2$ [mm ²]
1	11,3	-0,06	0,0036
2	11,3	-0,06	0,0036
3	11,4	0,04	0,0016
4	11,5	0,14	0,0196
5	11,2	-0,16	0,0256
6	11,4	0,04	0,0016
7	11,3	-0,06	0,0036
8	11,5	0,14	0,0196
9	11,3	-0,06	0,0036
10	11,4	0,04	0,0016
Σ	113,6	0	0,084

Do druhého stĺpca tabuľky zapíšeme hodnoty $\Delta b_i = b_i - \bar{b}$, napr. pre riadok $i = 5$ bude výpočet nasledovný:

$$\Delta b_i = b_i - \bar{b} = (11,2 - 11,36) \text{ mm} = -0,16 \text{ mm}$$

a v treťom stĺpci

$$(\Delta b_i)^2 = (-0,16 \text{ mm})^2 = 0,0256 \text{ mm}^2.$$

Neistota v stanovení dĺžky bude

$$\delta b = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta b_i)^2}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0,084 \text{ mm}^2}{10(10-1)}} = 0,0306 \text{ mm}$$

a relatívna neistota v stanovení dĺžky bude

$$\delta b_{\text{rel}} = \frac{\delta b}{\bar{b}} \cdot 100\% = \frac{0,0306 \text{ mm}}{11,36 \text{ mm}} \cdot 100\% = 0,27\%$$

Zápis výsledku merania

$$b = (11,360 \pm 0,031) \text{ mm} \quad \delta b_{\text{rel}} = 0,27\% .$$


Poznámka: Zápis výsledku treba prednostne uvádzať v základných jednotkách SI sústavy, hoci v technickej praxi sa uplatňujú aj vyjadrenia v iných jednotkách.

Zápis výsledku merania v SI sústave

$$b = (11,360 \pm 0,031) \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \delta b_{\text{rel}} = 0,27 \% .$$

3.3 STANOVENIE NEISTOTY MERANIA - TYP B

V prípade, ak nie je známa skutočná hodnota meranej veličiny, meraná veličina je určovaná priamo a nepozorujú sa rozdiely v nameraných hodnotách, určí sa neistota merania typu B. Veľkosť neistoty typu B sa určuje aj v prípade uskutočnenia len jediného merania. Veľkosť tohto druhu neistoty sa určuje inými ako štatistickými metódami, zvyčajne zo znalosti presnosti použitých meradiel a prístrojov, veľmi často ako veľkosť najmenšieho dielik. Zápis výsledku je v tvare $x = x_n \pm \delta x$ a δx_{rel} zvyčajne zaokrúhlený na dve platné číslice.

 **Príklad 1:** Máme stanoviť presnosť merania dĺžky súčiastky s . Opakovaným meraním tohto rozmeru sme zistili, že nameraná hodnota je konštanta 56,3 mm. Pri meraní sme použili posuvné meradlo, ktorého najmenší dielik je 0,1 mm.

$$s_n = 56,3 \text{ mm} , \delta s = 0,1 \text{ mm} ,$$

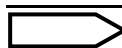
$$\delta s_{\text{rel}} = \frac{\delta s}{s_n} \cdot 100 \% = \frac{0,1 \text{ mm}}{56,3 \text{ mm}} \cdot 100 \% = 0,18 \% .$$

Zápis výsledku merania

$$s = (56,30 \pm 0,10) \text{ mm} \quad \delta s_{\text{rel}} = 0,18 \% .$$

Zápis výsledku merania v SI sústave:

$$s = (56,30 \pm 0,10) \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \delta s_{\text{rel}} = 0,18 \% .$$

 **Príklad 2:** Máme stanoviť presnosť merania času t . Jednorazovým meraním sme ručne zmerali časový interval 158,23 s pomocou stopiek, kde najmenší dielik je 0,01 s.

$$t_n = 158,23 \text{ s} ,$$

$$\delta t \leq 0,01 \text{ s} .$$

Musíme si uvedomiť, že neistota merania je v tomto prípade dominantne ovplyvnená ľudským faktorom, to znamená reakčným časom človeka uskutočňujúceho meranie. Predpokladajme, že tento reakčný čas je okolo 0,3 s. Neistota v tomto prípade bude mať veľkosť

$$\delta t = 0,3 \text{ s},$$

$$\delta t_{\text{rel}} = \frac{\delta t}{t_n} \cdot 100\% = \frac{0,3 \text{ s}}{158,23 \text{ s}} \cdot 100\% = 0,19\%.$$

Zápis výsledku merania

$$t = (158,23 \pm 0,30) \text{ s} \quad \delta t_{\text{rel}} = 0,19\%$$

3.4 VÝPOČET NEISTOTY MERANIA METÓDOU LINEARIZÁCIE

V prípade, ak skutočná hodnota meranej veličiny nie je známa a je určovaná nepriamo výpočtom, možno veľkosť jej neistoty stanoviť na základe meraní ďalších veličín. Pokiaľ derivácie meranej veličiny podľa ďalších veličín sú zložité výrazy, exponenciálne a mocninové závislosti vyšších rádov alebo závislosti silne zakrivené, je vhodnejšie použiť metódu krajného prípadu.

3.4.1 Výpočet neistoty merania metódou linearizácie – jednorozmerný prípad

Meraná veličina y sa určuje pomocou jednej ďalšej veličiny s . Zápis výsledku je v tvare $y = y_n \pm \delta y$ a δy_{rel} zvyčajne zaokrúhlený na dve platné číslice. Na výpočet hodnoty nepriamo meranej veličiny sa používa vzťah

$$y_n = f(s_n). \quad (3.6)$$

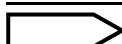
Neistota v stanovení nepriamo meranej veličiny sa určí pomocou vzťahu

$$\delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial s} \right| \delta s \quad (3.7)$$

a relatívna neistota nepriamo meranej veličiny v percentách pomocou vzťahu

$$\delta y_{\text{rel}} = \frac{\delta y}{y_n} \cdot 100\%, \quad (3.8)$$

kde s_n je nameraná hodnota ďalšej veličiny, δs je neistota v stanovení ďalšej veličiny, $\frac{\partial y}{\partial s}$ je parciálna derivácia nepriamo meranej veličiny podľa ďalšej veličiny.

 **Príklad:** Máme stanoviť presnosť merania objemu gule. Pomocou posuvného meradla sme stanovili priemer gule a jeho neistotu $d = (128,3 \pm 0,1) \text{ mm}$. (Objem gule je $V = \frac{1}{6} \pi d^3$).

$$V_n = \frac{1}{6} \pi d_n^3 = \frac{1}{6} \pi (128,3 \text{ mm})^3 = 1105800 \text{ mm}^3,$$

$$\delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial d} \delta d \right| = \left| \frac{1}{2} \pi d_n^2 \delta d \right| = \left| \frac{1}{2} \pi (128,3 \text{ mm})^2 0,1 \text{ mm} \right| = 2600 \text{ mm}^3,$$

$$\delta V_{\text{rel}} = \frac{\delta V}{V_n} \cdot 100\% = \frac{2600 \text{ mm}^3}{1105800 \text{ mm}^3} \cdot 100\% = 0,235\%.$$

Zápis výsledku merania

$$V = (1105800 \pm 2600) \text{ mm}^3 \quad \delta V_{\text{rel}} = 0,235\%.$$

Zápis výsledku merania v SI sústave

$$V = (1105,8 \pm 2,6) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \quad \delta V_{\text{rel}} = 0,235\%.$$

3.4.2 Výpočet neistoty merania metódou linearizácie – viacrozmerný prípad

Meraná veličina y sa určuje nepriamo pomocou viacerých ďalších veličín s, v, z, \dots . Zápis výsledku je v tvare $y = y_n \pm \delta y$ a relatívnu neistotu δy_{rel} zvyčajne zaokrúhľujeme na dve platné číslice. Na výpočet hodnoty a neistoty nepriamo meranej veličiny sa používajú vzťahy:

$$y_n = f(s_n, v_n, z_n, \dots), \quad (3.9)$$

$$\delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial s} \delta s \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \delta v \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \delta z \right)^2 + \dots} \quad (3.10)$$

V prípade, ak sú ľubovoľné dve ďalšie veličiny namerané s neistotami typu A navzájom závislé, to znamená, že ich korelačný koeficient $r_{sv} \neq 0$, treba použiť upravený vzťah pre δy . Korelačný koeficient medzi dvoma ďalšími veličinami, napr. s a v sa určuje pomocou vzťahu

$$r_{sv} = \frac{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}} . \quad (3.11)$$

Po zohľadnení vzájomnej závislosti ďalších veličín s a v sa vzťah rozšíri o nový člen

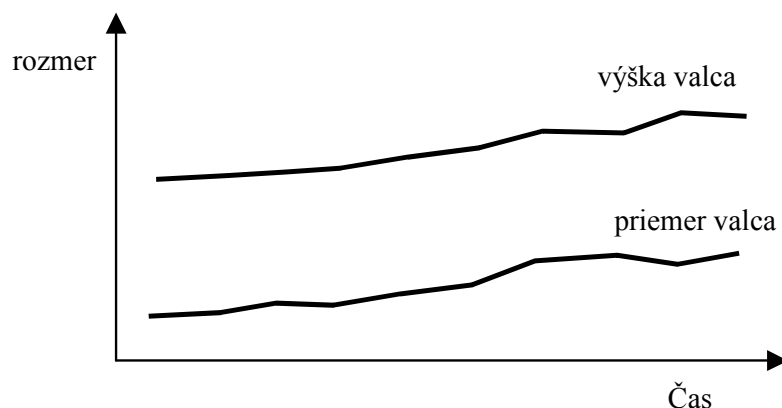
$$\delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial s} \delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \delta v\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \delta z\right)^2 + 2r_{sv} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial v} \delta s \delta v + \dots} . \quad (3.12)$$

Relatívna neistota sa určí pomocou vzťahu

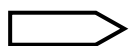
$$\delta y_{\text{rel}} = \frac{\delta y}{y_n} \cdot 100\% , \quad (3.13)$$

kde s_n, v_n, z_n sú namerané hodnoty ďalších veličín, $\delta s, \delta v, \delta z$ sú neistoty ďalších veličín, $\frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial z}$ sú parciálne derivácie nepriamo meranej veličiny podľa ďalších veličín, r_{sv} je korelačný koeficient ďalších veličín s a v .

Závislosť ďalších veličín: Pokiaľ sa uskutočňuje meranie ďalších veličín, pri ktorých sa opakovaným meraním zaznamenali rozdiely v nameraných hodnotách (neistota typu A), môžu mať tieto čiastkové veličiny svoje okamžité odchýlky ovplyvnené určitými spoločnými faktormi. To znamená, že určitý faktor ovplyvňuje hodnotu viacerých ďalších veličín, a teda skresľuje výpočet neistoty konečnej veličiny. Toto skreslenie odstránime uplatnením ďalšieho člena (vzťah 3.12). Typickým príkladom závislosti veličín je určenie objemu kovového valca meraním jeho priemeru a výšky. Ak počas merania dochádza k zvyšovaniu teploty valca dotykom, bude rásť tak priemer valca, ako aj jeho výška. To znamená, že namerané veľkosti odchýliek už nie sú len čisto náhodným javom, ale sú ovplyvnené aj ďalším faktorom.



Vyšetrovanie vzájomnej závislosti dvoch ďalších veličín je zvyčajne komplikovaná úloha, a preto sa obvykle vyjadruje pomocou veľkosti korelačného koeficientu medzi dvoma ďalšími veličinami s neistotami typu A (pre $r = 0$ sú nezávislé).



Príklad: Máme stanoviť presnosť merania hustoty valca meraním jeho hmotnosti, veľkosti výšky a priemeru. Pomocou posuvného meradla sme stanovili priemer valca s neistotou $d = (84,20 \pm 0,05)$ mm a tiež výšku valca s neistotou $h = (105,8 \pm 0,1)$ mm. Pomocou váh sme stanovili hmotnosť valca a jej neistotu $m = (1243,2 \pm 0,3)$ g.

$$\rho_n = \frac{4m_n}{\pi d_n^2 h_n} = \frac{4 \cdot 1243,2 \text{ g}}{\pi (84,2 \text{ mm})^2 105,8 \text{ mm}} = 2,1103 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{mm}^{-3} = 2110,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d} \delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \delta h\right)^2},$$

$$\delta \rho = \frac{1}{\pi d_n^2 h_n} \sqrt{(4 \delta m)^2 + \left(-\frac{8m_m}{d_n} \delta d\right)^2 + \left(-\frac{4m_m}{h_n} \delta h\right)^2},$$

$$\delta \rho = \frac{1}{\pi (84,2 \text{ mm})^2 \cdot 105,8 \text{ mm}} \sqrt{(4 \cdot 0,3 \text{ g})^2 + \left(-\frac{8 \cdot 1243,2 \text{ g}}{84,2 \text{ mm}} 0,05 \text{ mm}\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot 1243,2 \text{ g}}{105,8 \text{ mm}} 0,1 \text{ mm}\right)^2},$$

$$\delta \rho = 3,243 \cdot 10^{-6} \text{ g} \cdot \text{mm}^{-3} = 3,243 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$\delta \rho_{\text{rel}} = \frac{\delta \rho}{\rho_n} \cdot 100\% = \frac{3,243 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{2110,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \cdot 100\% = 0,15\%$$

Zápis výsledku merania

$$\rho = (2110,3 \pm 3,2) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \delta\rho_{\text{rel}} = 0,15\%.$$

3.5 VÝPOČET NEISTOTY MERANIA METÓDOU KRAJNÉHO PRÍPADU

V prípade, ak nie je známa skutočná hodnota meranej veličiny a je určovaná nepriamo na základe nameraných hodnôt ďalších veličín, možno neistotu meranej veličiny stanoviť na základe znalosti veľkosti neistôt ďalších veličín. Prednosťou tejto metódy je jednoduchosť, nevýhodou to, že zahŕňa aj vysoko nepravdepodobné prípady, t. j. môže viesť k veľmi veľkým hodnotám stanovením neistoty δy .

3.5.1 Výpočet neistoty merania metódou krajného prípadu – jednorozmerný prípad

Meraná veličina y sa určuje pomocou jednej ďalšej veličiny s . Zápis výsledku je v tvare $y = y_n \pm \delta y$ a δy_{rel} zvyčajne zaokrúhlený na dve platné číslice. Na výpočet hodnoty sa najprv vypočítajú hodnoty nameranej veličiny zodpovedajúce krajným hodnotám ďalšej veličiny podľa vzťahov

$$y_1 = f(s_n + \delta s) \quad (3.14)$$

a

$$y_2 = f(s_n - \delta s). \quad (3.15)$$

Nameraná hodnota je daná ako aritmetický priemer týchto hodnôt

$$y_n = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (3.16)$$

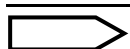
a neistota merania veličiny je určená vzťahom

$$\delta y = \left| \frac{y_1 - y_2}{2} \right|. \quad (3.17)$$

Relatívna neistota merania veličiny je určená vzťahom

$$\delta y_{\text{rel}} = \frac{\delta y}{y_n} \cdot 100\%, \quad (3.18)$$

kde s_n je nameraná hodnota ďalšej veličiny, δs je neistota ďalšej veličiny, y_1, y_2 sú krajné hodnoty meranej veličiny stanovené z krajných hodnôt nameranej veličiny. Zápis výsledku uskutočňujeme v tvare $y = y_n \pm \delta y$ a δy_{rel} zvyčajne zaokrúhlený na dve platné číslice.

 **Príklad:** Máme stanoviť presnosť merania objemu gule. Pomocou posuvného meradla sme stanovili priemer gule a neistotu stanovenia priemeru gule: $d = (128,3 \pm 0,1) \text{ mm}$. (Objem gule je $V = \frac{1}{6}\pi d^3$).

$$V_1 = \frac{1}{6}\pi(d_n + \delta d)^3 = \frac{1}{6}\pi(128,3 \text{ mm} + 0,1 \text{ mm})^3 = 1108393 \text{ mm}^3,$$

$$V_2 = \frac{1}{6}\pi(d_n - \delta d)^3 = \frac{1}{6}\pi(128,3 \text{ mm} - 0,1 \text{ mm})^3 = 1103221 \text{ mm}^3,$$

$$V_n = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{1108393 \text{ mm}^3 + 1103221 \text{ mm}^3}{2} = 1105807 \text{ mm}^3,$$

$$\delta V = \left| \frac{V_1 - V_2}{2} \right| = \left| \frac{1108393 - 1103221}{2} \right| \text{ mm}^3 = 2586 \text{ mm}^3.$$

$$\delta V_{\text{rel}} = \frac{\delta V}{V_n} \cdot 100\% = \frac{2586 \text{ mm}^3}{1105807 \text{ mm}^3} \cdot 100\% = 0,234\%.$$

Zápis výsledku merania

$$V = (1105800 \pm 2600) \text{ mm}^3 \quad \delta V_{\text{rel}} = 0,234\%.$$

Zápis výsledku merania v SI sústave

$$V = (1105,8 \pm 2,6) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \quad \delta V_{\text{rel}} = 0,234\%.$$

3.5.2 Výpočet neistoty merania metódou krajného prípadu – viacrozmerný prípad

Meraná veličina y sa určuje pomocou merania viacerých ďalších veličín s, v, z, \dots . Zápis výsledku je v tvare $y = y_n \pm \delta y$, δy_{rel} a zaokrúhľuje sa na dve platné číslice. Na výpočet hodnoty sa najprv vypočítajú hodnoty nameranej veličiny zodpovedajúce krajným hodnotám ďalších veličín podľa vzťahov

$$y_{111\dots} = f(s_n + \delta s, v_n + \delta v, z_n + \delta z, \dots) \quad (3.19)$$

$$y_{112\dots} = f(s_n + \delta s, v_n + \delta v, z_n - \delta z, \dots)$$

$$y_{212..} = f(s_n - \delta s, v_n + \delta v, z_n - \delta z, \dots),$$

....

$$y_{222..} = f(s_n - \delta s, v_n - \delta v, z_n - \delta z, \dots),$$

Následne sa určia dva krajné prípady nameraných hodnôt veličín

$$y_{\max} = \max(y_{111..}, y_{112..}, \dots, y_{222..}, \dots), \quad (3.20)$$

$$y_{\min} = \min(y_{111..}, y_{112..}, \dots, y_{222..}, \dots). \quad (3.21)$$

Nameraná hodnota je daná ako aritmetický priemer krajných hodnôt

$$y_n = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}. \quad (3.22)$$

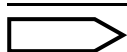
Neistota merania veličiny je určená vzťahom

$$\delta y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \quad (3.23)$$

a relatívna neistota vzťahom

$$\delta y_{\text{rel}} = \frac{\delta y}{y_n} \cdot 100\%, \quad (3.24)$$

kde s_n, v_n, z_n sú namerané hodnoty ďalších veličín, $\delta s, \delta v, \delta z$ sú neistoty čiastkových veličín, y_{\min}, y_{\max} sú krajné hodnoty meranej veličiny stanovené z krajných hodnôt nameraných veličín.



Príklad: Máme stanoviť presnosť merania hustoty valca meraním jeho hmotnosti, veľkosti výšky a priemeru. Pomocou posuvného meradla sme stanovili priemer valca s neistotou $d = (84,20 \pm 0,05)$ mm a tiež výšku valca s neistotou $h = (105,8 \pm 0,1)$ mm. Pomocou váh sme stanovili hmotnosť valca a jej neistotu $m = (1243,2 \pm 0,3)$ g. Je zrejmé, že pre výpočet veľkosti hustoty valca platí

$$\rho_n = \frac{4m}{\pi d^2 h}.$$

$$\rho_{111} = \frac{4(m_n + \delta m)}{\pi(d_n + \delta d)^2(h_n + \delta h)} = \frac{4 \cdot (1243,2 \text{ g} + 0,3 \text{ g})}{\pi(84,2 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm})^2(105,8 \text{ mm} + 0,1 \text{ mm})} = 2106,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{112} = \frac{4(m_n + \delta m)}{\pi(d_n + \delta d)^2(h_n - \delta h)} = \frac{4 \cdot (1243,2 \text{ g} + 0,3 \text{ g})}{\pi(84,2 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm})^2(105,8 \text{ mm} - 0,1 \text{ mm})} = 2110,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{121} = \frac{4(m_n + \delta m)}{\pi(d_n - \delta d)^2(h_n + \delta h)} = \frac{4 \cdot (1243,2\text{g} + 0,3\text{g})}{\pi(84,2\text{mm} - 0,05\text{mm})^2(105,8\text{mm} + 0,1\text{mm})} = 2111,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{122} = \frac{4(m_n + \delta m)}{\pi(d_n - \delta d)^2(h_n - \delta h)} = \frac{4 \cdot (1243,2\text{g} + 0,3\text{g})}{\pi(84,2\text{mm} - 0,05\text{mm})^2(105,8\text{mm} - 0,1\text{mm})} = 2115,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{211} = \frac{4(m_n - \delta m)}{\pi(d_n + \delta d)^2(h_n + \delta h)} = \frac{4 \cdot (1243,2\text{g} - 0,3\text{g})}{\pi(84,2\text{mm} + 0,05\text{mm})^2(105,8\text{mm} + 0,1\text{mm})} = 2105,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{212} = \frac{4(m_n - \delta m)}{\pi(d_n + \delta d)^2(h_n - \delta h)} = \frac{4 \cdot (1243,2\text{g} - 0,3\text{g})}{\pi(84,2\text{mm} + 0,05\text{mm})^2(105,8\text{mm} - 0,1\text{mm})} = 2109,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{221} = \frac{4(m_n - \delta m)}{\pi(d_n - \delta d)^2(h_n + \delta h)} = \frac{4 \cdot (1243,2\text{g} - 0,3\text{g})}{\pi(84,2\text{mm} - 0,05\text{mm})^2(105,8\text{mm} + 0,1\text{mm})} = 2110,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{222} = \frac{4(m_n - \delta m)}{\pi(d_n - \delta d)^2(h_n - \delta h)} = \frac{4 \cdot (1243,2\text{g} - 0,3\text{g})}{\pi(84,2\text{mm} - 0,05\text{mm})^2(105,8\text{mm} - 0,1\text{mm})} = 2114,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{\min} = \min(\rho_{111}, \dots, \rho_{222}) = 2105,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$\rho_{\max} = \max(\rho_{111}, \dots, \rho_{222}) = 2115,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

$$\rho_n = \frac{\rho_{\max} + \rho_{\min}}{2} = \frac{2115,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} + 2105,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{2} = 2110,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$\delta\rho = \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{2} = \frac{2115,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} - 2105,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{2} = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

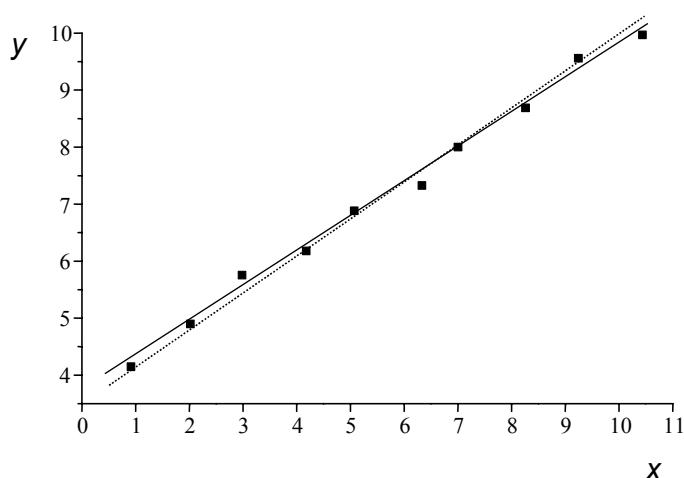
$$\delta\rho_{\text{rel}} = \frac{\delta\rho}{\rho_n} \cdot 100\% = \frac{5,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{2110,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \cdot 100\% = 0,24\%.$$

Zápis výsledku merania

$$\rho = (2110,3 \pm 5,0) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \delta\rho_{\text{rel}} = 0,24\%.$$

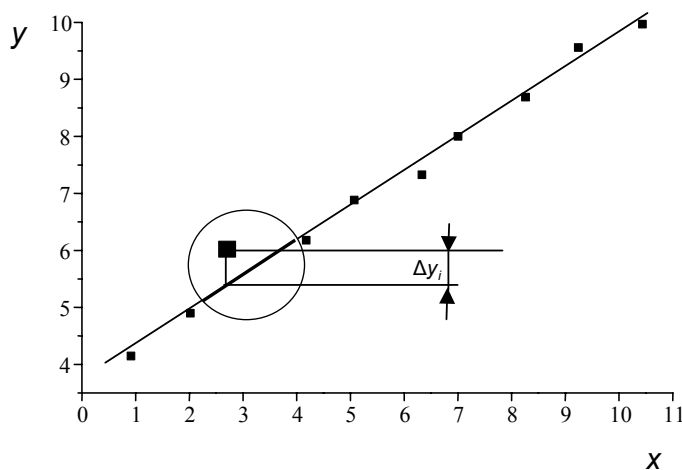
4. METÓDA NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV

Pri určovaní nameranej hodnoty veličiny mnohokrát používame namerané funkčné závislosti iných veličín, zaťažených určitou mierou neistoty. Na nasledujúcom obrázku sú zobrazené namerané hodnoty veličín x a y , ktoré sú vo funkčnej závislosti $y = ax + b$, kde a a b sú konštanty. Namerané hodnoty sme preložili dvoma priamkami, ktoré by mohli byť vyjadrením funkčnej závislosti. Stanovenie priebehu a aj veľkosti koeficientov a , b takýmto hrubým odhadom je nepostačujúcou metódou najmä z hľadiska hodnotenia veľkosti neistoty merania. Pri určení koeficientov a a b je potrebné použiť metódu, ktorá stanoví nielen ich hodnotu, ale aj veľkosti ich neistôt. Medzi najčastejšie používané metódy patrí metóda najmenších štvorcov.



4.1 KRITÉRIUM OPTIMÁLNOTI

Pri hľadaní hodnôt koeficientov a a b je potrebné stanoviť kritérium postupu ich hľadania. Pri určovaní pomocou metódy najmenších štvorcov sa vychádza z odchýlky medzi nameranou hodnotou veličiny a hodnotou stanovenou z funkčnej závislosti Δy_i .



Ako kritérium platí podmienka, že súčet druhých mocnín všetkých odchýlok daného merania je minimálny: $S = \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \min$, teda

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \min, \quad (4.1)$$

kde y_i sú namerané hodnoty veličiny a $f(x_i)$ sú namerané hodnoty predpokladanej funkčnej závislosti.

4.2 VÝPOČET OPTIMÁLNYCH HODNÔT KOEFICIENTOV PRIAMKY

Po dosadení funkčnej závislosti pre priamku v tvare $y = f(x) = ax + b$ do vzťahu 4.1 dostaneme

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min, \quad (4.2)$$

kde pre hľadané koeficienty a a b vyplývajú z podmienky (4.2) vzťahy $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$, ktoré

je možné zapísať v tvare

$$\sum_{i=1}^n \{2[y_i - (ax_i + b)](-x_i)\} = 0, \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^n \{2[y_i - (ax_i + b)](-1)\} = 0. \quad (4.4)$$

Po vynásobení

$$\sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) = 0, \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0 \quad (4.6)$$

a úprave

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0, \quad (4.7)$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + bn - \sum_{i=1}^n y_i = 0, \quad (4.8)$$

možno stanoviť hodnoty koeficientov priamky

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (4.9)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (4.10)$$

Poznámka: Pre iné funkčné závislosti by bol postup rovnaký s tým rozdielom, že do vzťahu (4.2) by sme dosadili požadovanú funkčnú závislosť, napríklad pre kvadratickú závislosť $y = ax^2 + bx + c$ by východiskový vzťah bol: $S = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c) \right]^2 = \min$.

Exponenciálne závislosti typu $y = ce^{qx}$ je vhodné najprv upraviť logaritmovaním na tvar $\ln y = \ln c + qx$, kde $\ln y$ môžeme formálne označiť veličinou z a $\ln c$ konštantou k :

$S = \sum_{i=1}^n \left[z_i - (qx_i + k) \right]^2 = \min$. Po určení hľadaných koeficientov môžeme inverznou transformáciou určiť hodnoty pôvodných koeficientov ($c = e^k$).

4.3 STANOVENIE NEISTOTY OPTIMÁLNYCH HODNÔT KOEFICIENTOV PRIAMKY

Ak sa merané veličiny x a y nemenia vo väčšom intervale ako dva rády a relatívna neistota merania veličiny y je väčšia ako relatívna neistota merania veličiny x , možno na základe známej hodnoty neistoty veličiny y označenej ako δy určiť neistoty optimálnych koeficientov priamky a a b .

$$(\delta a)^2 = \frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} (\delta y)^2, \quad (4.11)$$

$$(\delta b)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} (\delta y)^2. \quad (4.12)$$

Pri meniacej sa veličine y je niekedy zložitá určiť veľkosť jej neistoty δy . Nasledujúci vzťah dovoľuje určiť veľkosť tejto neistoty priamo z metódy najmenších štvorcov.

$$(\delta y)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2}{n - 2}. \quad (4.13)$$

Hodnoty optimálnych koeficientov a a b priamky sú zvyčajne navzájom výrazne závislé, a preto pri ich použití vo výpočtoch neistôt iných veličín má význam poznať aj ich korelačný koeficient

$$r_{ab} = \frac{-\sum_{i=1}^n x_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2}} .$$

(4.14)

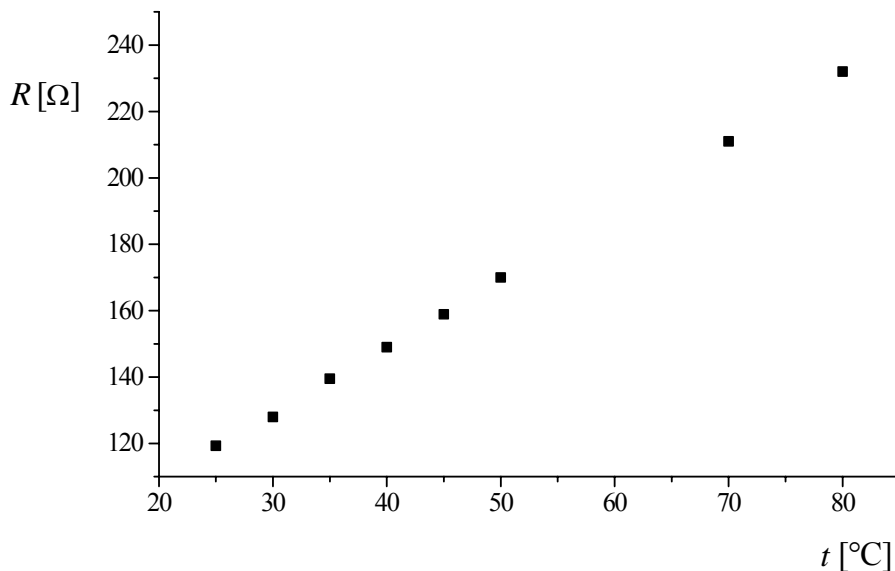
4.4 PRÍKLAD POUŽITIA METÓDY NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV

Príklad: Máme stanoviť hodnotu a neistotu koeficientu teplotného nárastu elektrického odporu, ak bolo uskutočnených viacero meraní teplôt a veľkostí elektrického odporu.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i [°C]	25	30	35	40	45	50	70	80
R_i [Ω]	119,3	128	139,3	149	158,9	170	211	232

Podľa vzťahu $R = R_0 (1 + \alpha t)$, kde R je veľkosť elektrického odporu pri teplote t , R_0 je veľkosť elektrického odporu pri 0 °C a α je koeficient teplotného nárastu elektrického odporu. Z uvedeného vzťahu vyplýva, že namerané hodnoty odporu R by mali byť lineárne závislé od t , čo potvrdzuje aj nasledujúci obrázok.

Závislosť elektrického odporu od teploty.



Pri určení koeficientu α sa vychádza z upraveného vzťahu $R = R_0 + R_0 \alpha t = b + at$. Ak sú známe veľkosti a a b koeficientov lineárnej závislosti, možno koeficient teplotného nárastu určiť na základe vzťahu $\alpha = \frac{a}{b}$.

Veľkosť koeficientov a a b sa určí pomocou metódy najmenších štvorcov. Pre závislosť $R = b + at$ sa vzťahy (4.9) a (4.10) upravujú na tvar $t_i \rightarrow x_i$, $R_i \rightarrow y_i$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n t_i R_i - \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n R_i}{n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 \sum_{i=1}^n R_i - \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n R_i t_i}{n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}.$$

Na ďalší výpočet je dôležité stanoviť veľkosť jednotlivých súm.

i	t_i [°C]	R_i [Ω]	$(t_i)^2$ [°C ²]	$R_i t_i$ [Ω·°C]
1	25	119,3	625	2982,5
2	30	128	900	3840
3	35	139,5	1225	4882,5
4	40	149	1600	5960
5	45	158,9	2025	7150,5
6	50	170	2500	8500
7	70	211	4900	14770
8	80	232	6400	18560
Σ	375	1307,7	20175	66645,5

$$n = 8, \quad \sum_{i=1}^n t_i = 375 \text{ °C}, \quad \sum_{i=1}^n R_i = 1307,7 \text{ Ω}, \quad \sum_{i=1}^n t_i^2 = 20175 (\text{°C})^2, \quad \sum_{i=1}^n t_i R_i = 66645,5 \text{ °C} \cdot \Omega$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n t_i R_i - \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n R_i}{n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2} = \frac{8 \cdot 66645,5 \text{ °C} \cdot \Omega - 375 \text{ °C} \cdot 1307,7 \text{ Ω}}{8 \cdot 20175 (\text{°C})^2 - (375 \text{ °C})^2},$$

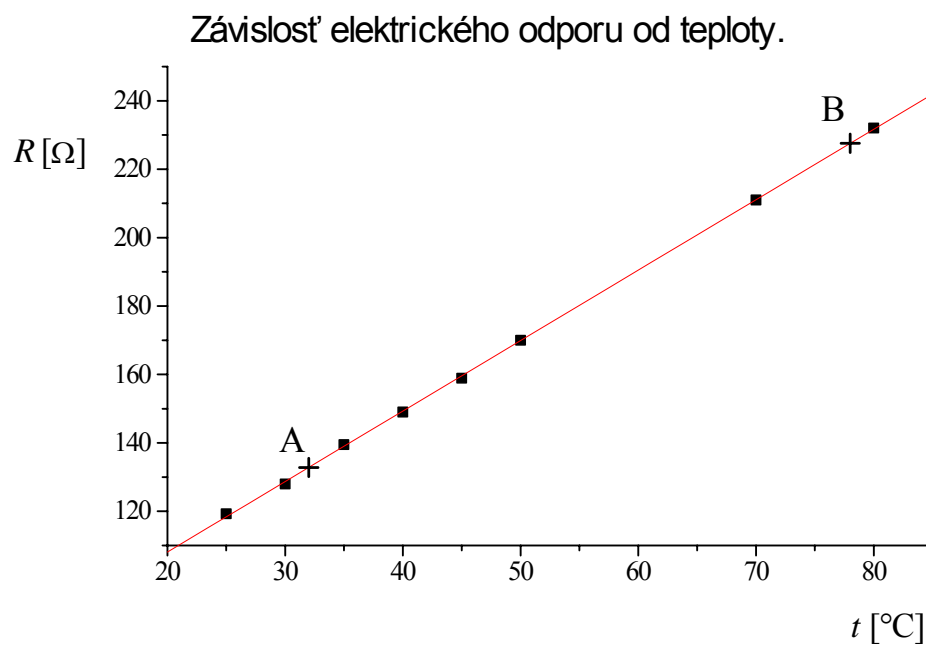
$$a = 2,05904 \text{ Ω} \cdot \text{K}^{-1},$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 \sum_{i=1}^n R_i - \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n R_i t_i}{n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2} = \frac{20175 (\text{°C})^2 \cdot 1307,7 \text{ Ω} - 375 \text{ °C} \cdot 66645,5 \text{ °C} \cdot \Omega}{8 \cdot 20175 (\text{°C})^2 - (375 \text{ °C})^2},$$

$$b = 66,94513 \text{ Ω}.$$

Na overenie správnosti výpočtu koeficientov je vhodné závislosť graficky zobraziť. Priamka je jednoznačne určená dvoma ľubovoľne zvolenými bodmi. Pre každý bod jednu súradnicu zvolíme a druhú určíme na základe vypočítanej závislosti.

Bod	t_i	$\{b + at_i\} = 66,94513 + 2,05904 \cdot \{t_i\}$
A	32	132,83479
B	78	227,55063



Je zrejmé, že vypočítané koeficienty priamky sú správne a zobrazená priamka dobre aproximuje namerané body. Hľadaný koeficient teplotného nárastu elektrického odporu je teda

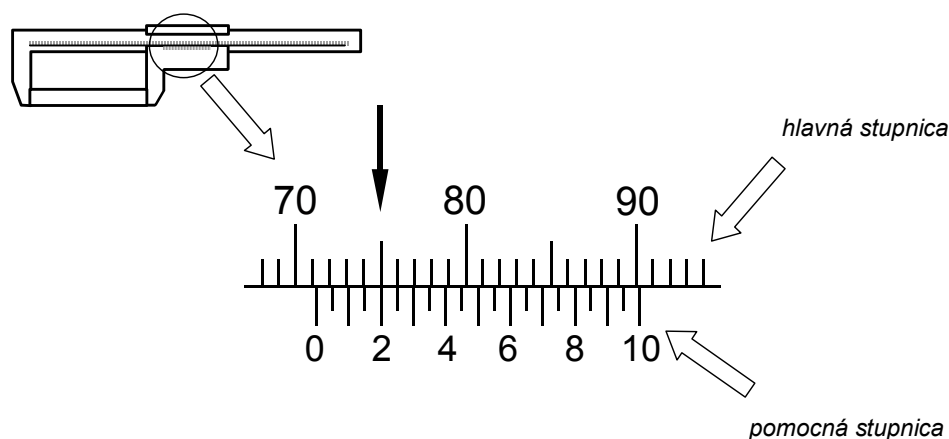
$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2,05904 \, \Omega \cdot \text{K}^{-1}}{66,94513 \, \Omega} = 0,03076 \, \text{K}^{-1}.$$

5. POUŽITIE MERADIEL A MERACÍCH PRÍSTROJOV

5.1 POUŽITIE HLAVNEJ A POMOCNEJ STUPNICE

Pri použití posuvného meradla, mikrometra, presných uhlomerov, mikroskopov a pod. sa stretávame s technickým vyhotovením umožňujúcim zvýšiť presnosť merania použitím pomocnej prídavnej stupnice. Pri meraní je veľkosť neistoty merania daná zvyčajne veľkosťou dielika na pomocnej stupnici, ktorá predstavuje jemnejšie delenie ako stupnica hlavná.

Najznámejšie použitie pomocnej stupnice je pri posuvnom meradle (pozri obrázok 5.1). Hlavná stupnica zobrazuje hodnoty v milimetroch, pričom najmenší dielik je 1 mm. Pomocnú stupnicu tvorí zvyčajne 20 dielikov, pričom hodnota pripadajúca na 1 dielik sa získa podelením hodnoty pripadajúcej na 1 dielik hlavnej stupnice (1 mm) počtom dielikov pomocnej stupnice (20). V tomto prípade 0,05 mm.



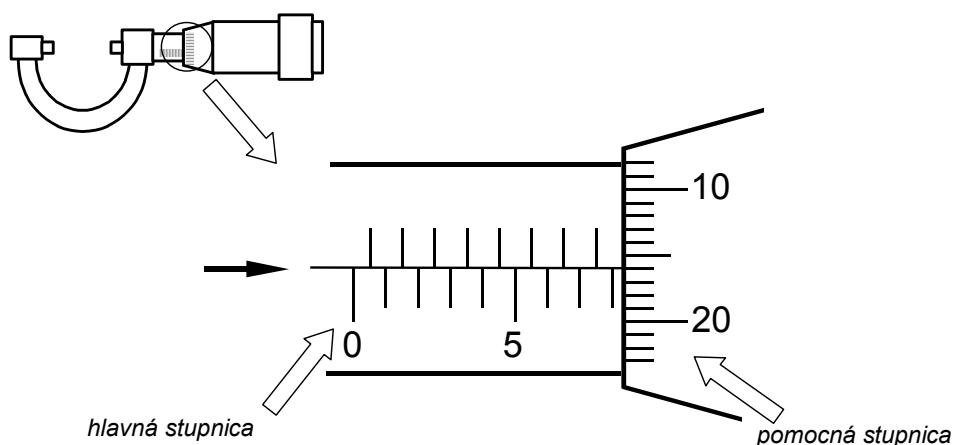
Obr. 5.1 Meranie pomocou posuvného meradla so zobrazením hlavnej a pomocnej stupnice

Veľkosť veličiny sa odčíta nasledovne. Najprv treba stanoviť hodnotu na hlavnej stupnici, ktorá je ohraničená prvou ryskou na pomocnej stupnici označenou ako 0 (v tomto prípade je hodnota 71 mm). Hodnota na pomocnej stupnici je daná zhodnosťou rysiek na hlavnej a pomocnej stupnici (označené čiernou šípku). V tomto prípade sa zhoduje piata ryska pomocnej stupnice (označená 2). Piata ryska určuje 4 dieliky, teda hodnotu $4 \times 0,05 \text{ mm} = 0,2 \text{ mm}$. Výsledná hodnota je daná súčtom hodnôt na hlavnej a pomocnej stupnici, v tomto prípade $(71 + 0,2) \text{ mm} = 71,2 \text{ mm}$.

Pri priečnom usporiadaní ako v prípade mikrometrov sa využíva princíp presnej mikrometrickej skrutky (pozri obrázok 5.2). Hlavná stupnica je priama, tvorená dielikmi, ktorých rysky sú zväčša pre väčšiu prehľadnosť usporiadané striedavo. Veľkosť dielika je v tomto prípade 0,5 mm. Pomocná stupnica je na otočnom bubienku a podľa počtu jej dielikov (zvyčajne 50) vieme na základe znalosti veľkosti jedného dielika hlavnej stupnice

určiť veľkosť dielika pomocnej stupnice. V tomto prípade s uvažovaním 50 dielikov pomocnej stupnice je veľkosť dielika pomocnej stupnice 0,01 mm.

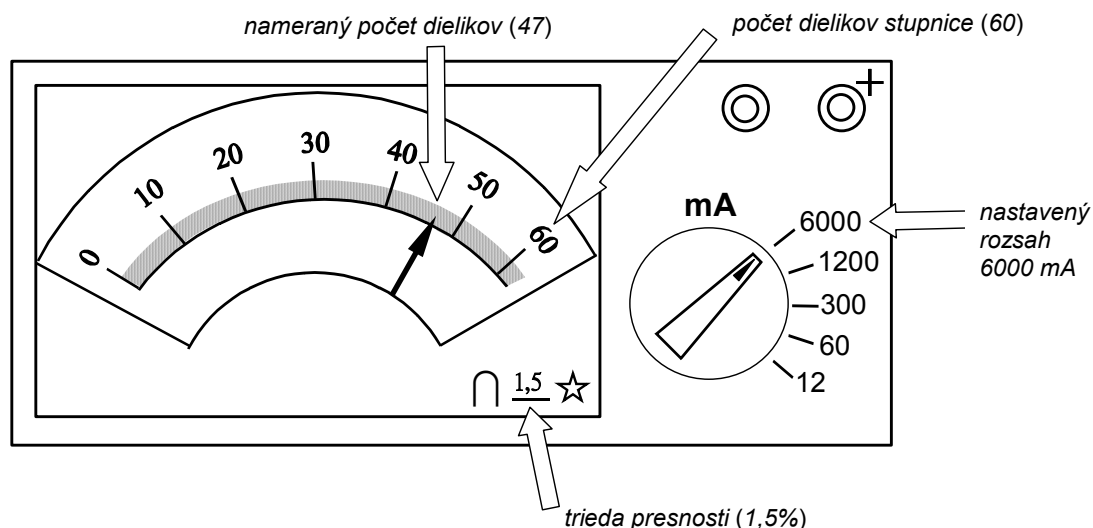
Veľkosť veličiny sa na mikrometri odčíta nasledovne: Najprv treba stanoviť hodnotu na hlavnej stupnici, ktorá je ohraničená poslednou viditeľnou ryskou pred pomocnou stupnicou (v tomto prípade je hodnota 8 mm). Hodnota na pomocnej stupnici je daná zhodnosťou rysiek na pomocnej stupnici a rysky označenej čiernou šípkou. V tomto prípade sa zhoduje ryska určujúca 16 dielikov, teda hodnotu $16 \times 0,01 \text{ mm} = 0,16 \text{ mm}$. Výsledná hodnota je daná súčtom hodnôt na hlavnej a pomocnej stupnici, v tomto prípade $(8 + 0,16) \text{ mm} = 8,16 \text{ mm}$.



Obr. 5.2 Meranie pomocou mikrometra so zobrazením hlavnej a pomocnej stupnice

5.2 MERANIE POMOCOU ANALÓGOVÝCH MERACÍCH PRÍSTROJOV

Pri meraní pomocou analógových meracích prístrojov je dôležité poznať postup odčítania hodnoty. Stupnica je rozdelená na určitý počet dielikov, pričom rozsah stupnice je zvyčajne voliteľný pomocou prepínača. Na obrázku 5.3 je zobrazený príklad analógového ampérmetra, ktorého stupnica je tvorená 60 dielikmi, pričom voliteľný rozsah je 12, 60, 300, 1200 a 6000 mA.



Obr. 5.3 Príklad merania pomocou analógového ampérmetra

Nameranú hodnotu možno určiť pomocou vzťahu

$$\text{nameraná hodnota} = \frac{\text{nastavený rozsah}}{\text{počet dielikov stupnice}} \cdot \text{nameraný počet dielikov}, \quad (5.1)$$

kde hodnota zlomku vyjadruje hodnotu pripadajúcu na 1 dielik stupnice na danom rozsahu – **konštantu meracieho rozsahu** a podľa príkladu v obrázku 5.3 je nameraná hodnota elektrického prúdu

$$I = \frac{47}{60} \cdot 6000 \text{ mA} = 4700 \text{ mA}.$$

Veľkosť neistoty pri meraní je daná veľkosťou triedy presnosti prístroja a hodnotou veličiny pripadajúcou na jeden dielik. Trieda presnosti je veľkosť neistoty vyjadrená ako percentuálny podiel z nastaveného rozsahu na meracom prístroji. Veľkosť neistoty na základe triedy presnosti prístroja zobrazeného na obr. 5.3 možno určiť výpočtom

$$\delta I_1 = \pm \frac{1,5}{100} \cdot 6000 \text{ mA} = \pm 90 \text{ mA}.$$

Veľkosť neistoty merania je ovplyvnená aj odčítaním zo stupnice meracieho prístroja. Táto časť neistoty je zvyčajne veľkosťou zhodná s hodnotou pripadajúcou na jeden dielik stupnice. Preto pri možnosti meniť nastavený rozsah na prístroji treba tento voľiť tak, aby hodnota pripadajúca na jeden dielik stupnice bola čo najmenšia. Pre prístroj zobrazený na obr. 5.3 je táto neistota

$$\delta I_2 = \pm \frac{6000 \text{ mA}}{60} = \pm 100 \text{ mA}.$$

Výsledná neistota pri meraní pomocou analógového prístroja je určená ako súčet oboch neistôt

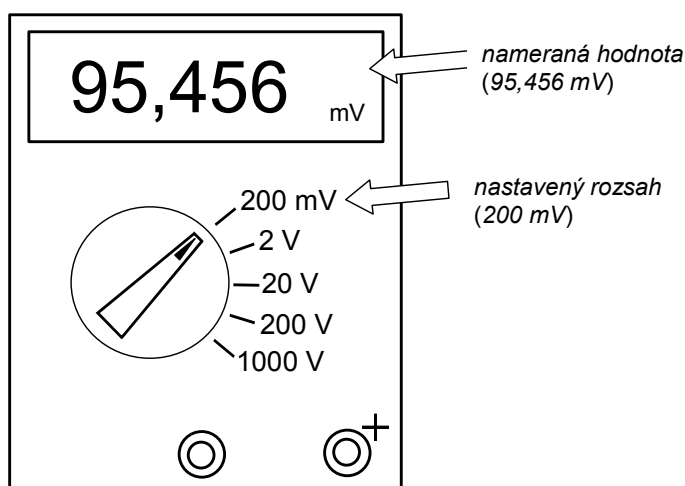
$$\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 = \pm(90 \text{ mA} + 100 \text{ mA}) = \pm 190 \text{ mA}$$

Nameranú hodnotu elektrického prúdu z jedného merania pre prístroj zobrazený na obr. 5.3 možno teda zapísať

$$I = (4700 \pm 190) \text{ mA}.$$

5.3 MERANIE POMOCOU DIGITÁLNYCH MERACÍCH PRÍSTROJOV

Pri meraní pomocou číslicových meracích prístrojov je odčítanie hodnoty meranej veličiny jednoduchšie, pretože sa zobrazuje priamo na displeji. Na obrázku 5.4 je zobrazený príklad číslicového voltmetra s nameranou hodnotou napätia $U = 95,456 \text{ mV}$.



Obr. 5.4 Príklad merania pomocou číslicového voltmetra

Nastavený rozsah vyjadruje maximálnu hodnotu danej veličiny, ktorú je schopný merací prístroj odmerať. Jeho voľbou sa súčasne určuje aj veľkosť neistoty. Veľkosť neistoty pri meraní je opäť daná veľkosťou triedy presnosti prístroja (zvyčajne je jej hodnota rôzna pre jednotlivé rozsahy a určená v príručke pre prístroj) a počtom čísel zobrazených na displeji.

Pre tento prístroj uvažujme pri rozsahu 200 mV s triedou presnosti 0,1 %. Potom veľkosť neistoty na základe triedy presnosti prístroja zobrazeného na obr. 5.4 možno určiť výpočtom

$$\delta U_1 = \pm \frac{0,1}{100} \cdot 200 \text{ mV} = \pm 0,2 \text{ mV} .$$

Veľkosť neistoty merania je ovplyvnená aj odčítaním z displeja meracieho prístroja. Môže byť vyjadrená rôznym spôsobom, ale zvyčajne sa vyjadruje ako násobok hodnoty na poslednom zobrazenom desatinnom mieste. Pre tento prístroj uvažujme s 15 násobkom. Potom veľkosť neistoty na základe odčítania hodnoty z displeja prístroja zobrazeného na obr. 5.4 možno určiť výpočtom

$$\delta U_2 = \pm 15 \cdot 0,001 \text{ mV} = \pm 0,015 \text{ mV} .$$

Výsledná neistota pri meraní pomocou číslicového prístroja je určená ako súčet oboch neistôt

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 = \pm (0,200 \text{ mV} + 0,015 \text{ mV}) = \pm 0,215 \text{ mV} .$$

Nameranú hodnotu elektrického napätia z jedného merania pre prístroj zobrazený na obr. 5.4 možno teda zapísať

$$U = (95,456 \pm 0,215) \text{ mV} .$$

6. ÚLOHY NA PRECVIČENIE

6.1 URČENIE OBJEMU VALCA NA ZÁKLADE MERANIA JEHO ROZMEROV

Cieľ

Oboznámiť sa s metódou nepriameho merania, určiť objem telesa jednoduchého geometrického tvaru (valec) a vypočítať neistoty uskutočneného merania.

Teoretický úvod

Objem valca je možné určiť pomocou známej výšky h a priemeru d valca s využitím jednoduchého vzťahu:

$$V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4}. \quad (1)$$

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky : meraný valec, posuvné meradlo s nóniom, resp. mikrometer (výber meradla je daný meranými rozmermi, konštrukciou samotného meradla a požadovanou presnosťou).

Postup

1. Zmerajte výšku valca h . Výšku je treba zmerať n krát ($n =$ minimálne 10).
2. Zapište namerané výsledky podľa navrhutej tabuľky. Namerané hodnoty výšky h_i (h_i je výška pri i -tom meraní, ktorých je minimálne desať) je možno zapísať do tabuľky:

i	h_i	$\Delta h_i = h_i - \bar{h}$	$(\Delta h_i)^2 = (h_i - \bar{h})^2$
	[mm]	[mm]	[mm ²]
1			
2			
...			
10			
Σ	Σh_i	$\Sigma \Delta h_i$	$\Sigma (\Delta h_i)^2$

Meraná veličina (výška valca h) je určovaná priamo, to znamená je určená priamo odčítaním zo stupnice meradla. Pri opakovanom meraní sa vplyvom nepresností použitých meradiel (v iných situáciách možno povedať vplyvom nepresností „použitých prístrojov“) objavia v tabuľke rozdiely v nameraných hodnotách. Po vyplnení tabuľky je potrebné určiť:

A) aritmetický priemer výšky valca \bar{h}

$$\bar{h} = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{n}, \quad (2)$$

B) odchýlku i – toho merania meranej veličiny (rozdiel medzi nameranou hodnotou a aritmetickým priemerom meranej veličiny)

$$\Delta h_i = h_i - \bar{h}, \quad (3)$$

C) kvadrát odchýlky i – toho merania meranej veličiny

$$(\Delta h_i)^2 = (h_i - \bar{h})^2. \quad (4)$$

Na ďalšie spracovanie merania je vhodné do uvedenej tabuľky vyplniť posledný riadok. V tomto riadku je zvykom uvádzať sumu príslušných veličín uvedených v záhlaví tabuľky.

Na základe údajov z tabuľky je možné určiť neistotu typu A merania výšky valca :

$$\delta h = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta h_i)^2}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}{n(n-1)}}. \quad (5)$$

Relatívna neistota meranej veličiny v percentách je

$$\delta h_{\text{rel}} = \frac{\delta h}{\bar{h}} \cdot 100\%. \quad (6)$$

Výsledok je možné zapísať v tvare $h = \bar{h} \pm \delta h$ a δh_{rel} .

3. Zmerajte priemer valca d . Priemer je treba zmerať n krát ($n =$ minimálne 10). Na určenie hodnoty priemeru valca $d = \bar{d} \pm \delta d$ je možné použiť ekvivalentný postup ako v prípade výšky valca. Tabuľku si pripravte samostatne.

4. Určte hodnotu objemu valca pomocou metódy linearizácie.

Hodnota objemu valca je stanovená pomocou čiastkových veličín: výška valca $h = \bar{h} \pm \delta h$ a priemer valca $d = \bar{d} \pm \delta d$. V tomto prípade nie sú čiastkové veličiny závislé, a tak nie je potrebné určovať korelačný koeficient (pozri kapitola 3.4.2).

Hodnotu výsledného objemu stanovíme dosadením stredných hodnôt výšky valca \bar{h} a priemeru valca \bar{d} priamo do vzťahu (1):

$$\bar{V} = \frac{\pi \cdot \bar{d}^2 \cdot \bar{h}}{4}. \quad (7)$$

Výpočet výslednej neistoty nepriamo určovaného objemu valca je možné stanoviť pomocou vzťahu

$$\delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial h} \delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial d} \delta d\right)^2}. \quad (8)$$

Po vypočítaní príslušných derivácií dostaneme:

$$\begin{aligned} \delta V &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial h} \delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial d} \delta d\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \left(\frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4}\right)}{\partial h} \delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial \left(\frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4}\right)}{\partial d} \delta d\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\left(\frac{\pi \cdot d^2}{4}\right) \delta h\right)^2 + \left(\left(\frac{\pi \cdot d \cdot h}{2}\right) \delta d\right)^2}. \end{aligned}$$

Výsledný objem valca zapíšeme v tvare $V = \bar{V} \pm \delta V$. Uvedieme tiež relatívnu neistotu:

$$\delta V_{\text{rel}} = \frac{\delta V}{\bar{V}} \cdot 100\%.$$

Faktory ovplyvňujúce priebeh merania a vyhodnotenie: Pri experimente je potrebné dbať na správne odčítavanie údajov z posuvného meradla. Výšku i priemer valca je vhodné merať na rôznych miestach. Pri výpočtoch je potrebné používať čísla s dostatočným počtom desatinných miest a treba dbať na správne zaokrúhľovanie.

Otázky a úlohy

1. Závisí presnosť merania len od počtu opakovaných meraní jednej veličiny? (Je možné dosiahnuť ľubovoľnú presnosť meranej veličiny na základe navýšenia počtu meraní?)
2. Na základe jedného ľubovoľného merania výšky valca stanovte neistotu typu B jedného merania.
3. Odvodte vzťah na určenie neistoty určenia objemu kvádra s rozmermi $a = \bar{a} \pm \delta a$, $b = \bar{b} \pm \delta b$, $c = \bar{c} \pm \delta c$ pomocou metódy linearizácie.
4. Odvodte vzťah na určenie neistoty určenia hustoty kvádra s hmotnosťou $m = \bar{m} \pm \delta m$ a s rozmermi $a = \bar{a} \pm \delta a$, $b = \bar{b} \pm \delta b$, $c = \bar{c} \pm \delta c$ pomocou metódy linearizácie.

5. Stanovte neistotu merania objemu valca metódou krajného prípadu. (Pri meraní boli určené nasledovné hodnoty výšky valca $h=(60,01\pm0,02)mm$ a priemeru valca $d=(5,011\pm0,031)mm$.)

6.2 URČENIE TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA POMOCOU REVERZNÉHO KYVADLA

Cieľ

Určiť hodnotu tiažového zrýchlenia s využitím reverzného kyvadla.

Teoretický úvod

Na povrchu Zeme pôsobí na hmotné telesá tiažová sila G , ktorej veľkosť možno určiť pomocou vzťahu

$$G = m \cdot g, \quad (1)$$

kde m je hmotnosť telesa a g je tiažové zrýchlenie. Tiažová sila je vektorovým súčtom gravitačnej sily F_g a sily odstredivej F_o (obr. 1)

$$\vec{G} = \vec{F}_g + \vec{F}_o. \quad (2)$$

Za predpokladu, že Zem považujeme za homogénnu guľu, veľkosť gravitačnej sily môžeme určiť pomocou Newtonovho gravitačného zákona

$$F_g = \tilde{u} \frac{m \cdot M_Z}{R^2}, \quad (3)$$

kde M_Z je hmotnosť Zeme, R je vzdialenosť medzi telesom a stredom Zeme (homogénnu guľu môžeme z hľadiska gravitačného pôsobenia nahradiť hmotným bodom s rovnakou hmotnosťou umiestneným v jej strede), \tilde{u} je gravitačná konštanta ($\tilde{u} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$). Odstredivú silu môžeme určiť pomocou vzťahu

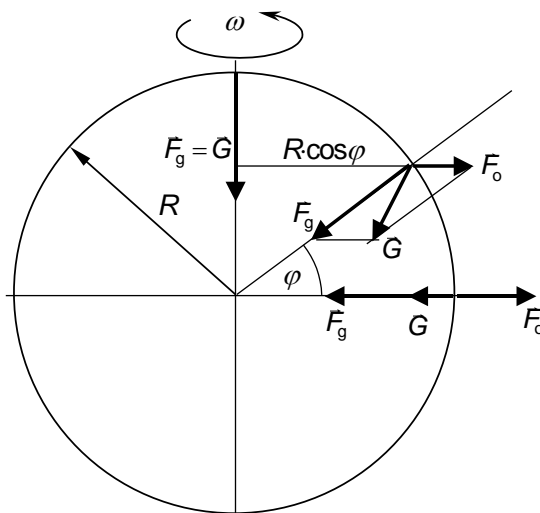
$$F_o = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos \varphi, \quad (4)$$

kde ω je uhlová rýchlosť, s akou sa Zem otáča okolo svojej osi a φ je uhol zhodný so zemepisnou šírkou.

Ako vidno z obrázku 1 je hodnota tiažovej sily závislá od veľkosti uhla φ . Na základe predchádzajúcich vzťahov možno určiť závislosť medzi tiažovým zrýchlením g a uhlom φ vyjadreným v stupňoch nasledovne:

$$g = (9,8324 - 0,034 \cdot \cos \varphi) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (5)$$

Vzťah (5) odvodený na základe teoretických predstáv je približným stanovením veľkosti tiažového zrýchlenia g . V skutočnosti je jeho veľkosť ovplyvnená nepravidelným tvarom Zeme, veľkosťou nadmorskej výšky, gravitačným pôsobením Slnka a Mesiaca.



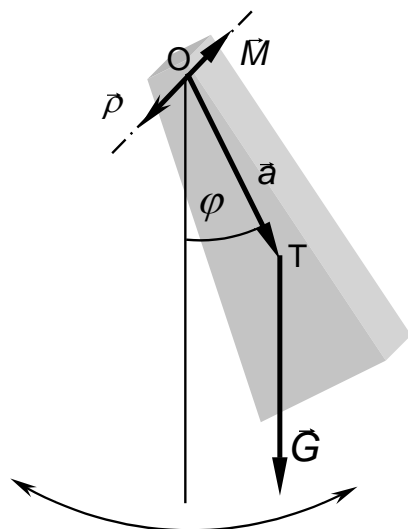
Obr. 1 Určenie tiažovej sily G na povrchu Zeme

Hodnotu tiažového zrýchlenia môžeme určiť pomocou meraní. Jednou z metód na určenie hodnoty tiažového zrýchlenia je meranie pomocou reverzného kyvadla.

Pohyb fyzikálneho kyvadla (každé teleso, ktoré môže vykonávať otáčavý pohyb vplyvom tiažovej sily okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom - obr.2) po jeho vychýlení z rovnovážnej polohy je určený pôsobením otáčavého účinku tiažovej sily, ktorý možno vyjadriť rovnicou

$$\vec{M} = J \cdot \varepsilon, \quad (6)$$

kde \vec{M} je moment tiažovej sily vzhľadom na os otáčania, J je moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania a ε je uhlové zrýchlenie.



Obr. 2 Zobrazenie fyzikálneho kyvadla

Moment tiažovej sily možno stanoviť pomocou vzťahu

$$\vec{M} = \vec{a} \times \vec{G}, \quad (7)$$

kde \vec{a} je polohový vektor ťažiska fyzikálneho T kyvadla vzhľadom na bod O nachádzajúci sa na osi otáčania a \vec{G} je tiažová sila. Výsledkom vektorového súčinu ($\vec{a} \times \vec{G}$) je vektor, ktorého veľkosť možno stanoviť

$$M = a \cdot G \cdot \sin \varphi, \quad (8)$$

kde a a G je veľkosť vektorov \vec{a} a \vec{G} , φ je uhol medzi vektormi \vec{a} a \vec{G} . Tento uhol je zhodný s uhlom vychýlenia kyvadla. Vektor momentu tiažovej sily \vec{M} je orientovaný za rovinu nákresu (obr. 2). Ak teda použijeme na vyjadrenie smeru jednotkový vektor $\vec{\rho}$ orientovaný pred rovinu nákresu, môžeme zapísať

$$\vec{M} = -M\vec{\rho} = -(a \cdot G \cdot \sin \varphi) \vec{\rho} = -(a \cdot mg \cdot \sin \varphi) \vec{\rho}. \quad (9)$$

Pre uhlové zrýchlenie platí

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{\rho}. \quad (10)$$

Ak vzťahy (9) a (10) dosadíme do rovnice (6), získame vektorovú rovnicu

$$-(a \cdot mg \cdot \sin \varphi) \vec{\rho} = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{\rho}. \quad (11)$$

Skalárne vyjadrenie rovnice (11)

$$-a \cdot mg \cdot \sin \varphi = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (12)$$

upravíme tak, že použijeme veľkosť uhlovej frekvencie $\omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot a}{J}}$ a vzťah $\sin \varphi \approx \varphi$ pri malých hodnotách uhla φ (do 5°). Takto získame diferenciálnu pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \cdot \varphi = 0, \quad (13)$$

ktorej riešenie možno zapísať v tvare

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha), \text{ alebo } \varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha), \quad (14)$$

kde φ_0 je amplitúda (maximálna uhlová výchylka kyvadla) a α je fázová konštanta.

Pomocou uhlovej frekvencie môžeme stanoviť dobu kyvu T (čas, ktorý uplynie medzi dvoma za sebou idúcimi prechodmi kyvadla rovnovážnou polohou)

$$T = \pi \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot a}}. \quad (15)$$

Na výpočet tiažového zrýchlenia g by bolo najvýhodnejšie, ak by sme použili model matematického kyvadla (hmotný bod s hmotnosťou m zavesený na niti dĺžky b zanedbateľnej hmotnosti). Moment zotrvačnosti J matematického kyvadla možno vyjadriť pomocou vzťahu

$$J = mb^2. \quad (16)$$

Ak do vzťahu (15) dosadíme $J = mb^2$, získame vzťah

$$T = \pi \sqrt{\frac{b}{g}}, \quad (17)$$

ktorý je veľmi vhodný na určenie tiažového zrýchlenia g . Vzťah (17) možno použiť aj v prípade fyzikálneho kyvadla, ak použijeme redukovanú dĺžku fyzikálneho kyvadla (je to dĺžka matematického kyvadla, ktorého doba kyvu je rovnaká ako doba kyvu fyzikálneho kyvadla)

$$b_{\text{red}} = \frac{J}{m \cdot a}. \quad (18)$$

Vzťah (17) potom možno zapísať v tvare

$$T = \pi \sqrt{\frac{b_{\text{red}}}{g}}. \quad (19)$$

Pomocou vzťahu (19) možno na základe znalosti redukovanej dĺžky fyzikálneho kyvadla b_{red} a doby kyvu T fyzikálneho kyvadla stanoviť veľkosť tiažového zrýchlenia g ,

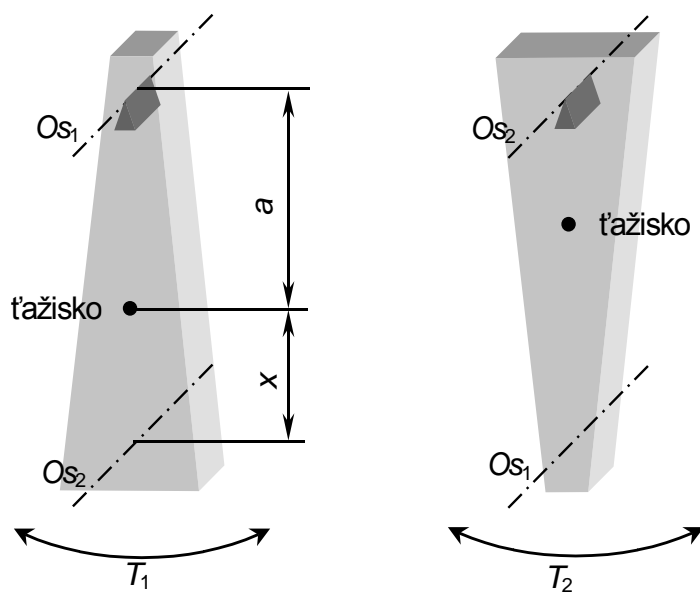
$$g = \pi^2 \cdot \frac{b_{\text{red}}}{T^2}. \quad (20)$$

Dobu kyvu určíme jednoducho meraním. Pri stanovení redukovanej dĺžky použijeme nasledujúcu úvahu. Máme k dispozícii reverzné kyvadlo (teleso, ktoré sa môže kývať ako fyzikálne kyvadlo okolo dvoch vodorovných rovnobežných osí, umiestnených nesúmerne vzhľadom na ťažisko-obr. 3). Predpokladajme, že doby kyvu pre obe osi sú rovnaké,

$$T_1 = T_2. \quad (21)$$

Ukážeme, v akom vzťahu sú vzdialenosti a , x a redukovaná dĺžka tohto kyvadla b_{red} . Do vzťahu (21) dosadíme vzťah (15) a úpravou získame vzťah

$$\frac{J}{m \cdot a} = \frac{J'}{m \cdot x}. \quad (22)$$



Obr. 3 Zobrazenie reverzného kyvadla s dvoma osami otáčania kyvadla

Použijeme Steinerovu vetu (Moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom je rovný súčtu momentu zotrvačnosti vzhľadom na os rovnobežnú a prechádzajúcu ťažiskom J_T a súčinu hmotnosti telesa a štvorca vzdialenosti oboch osí).

$$J = J_T + m \cdot a^2, \quad (23)$$

$$J' = J_T + m \cdot x^2. \quad (24)$$

Pomocou (23) upravíme (24) a dostaneme

$$J' = J + m \cdot x^2 - m \cdot a^2. \quad (25)$$

Po dosadení (25) do vzťahu (22) získame

$$\frac{J}{m \cdot a} = \frac{J + m \cdot x^2 - m \cdot a^2}{m \cdot x}. \quad (26)$$

Predchádzajúci vzťah upravíme pomocou vzťahu (18) a máme

$$b_{\text{red}} = \frac{b_{\text{red}} \cdot m \cdot a + m \cdot x^2 - m \cdot a^2}{m \cdot x}. \quad (30)$$

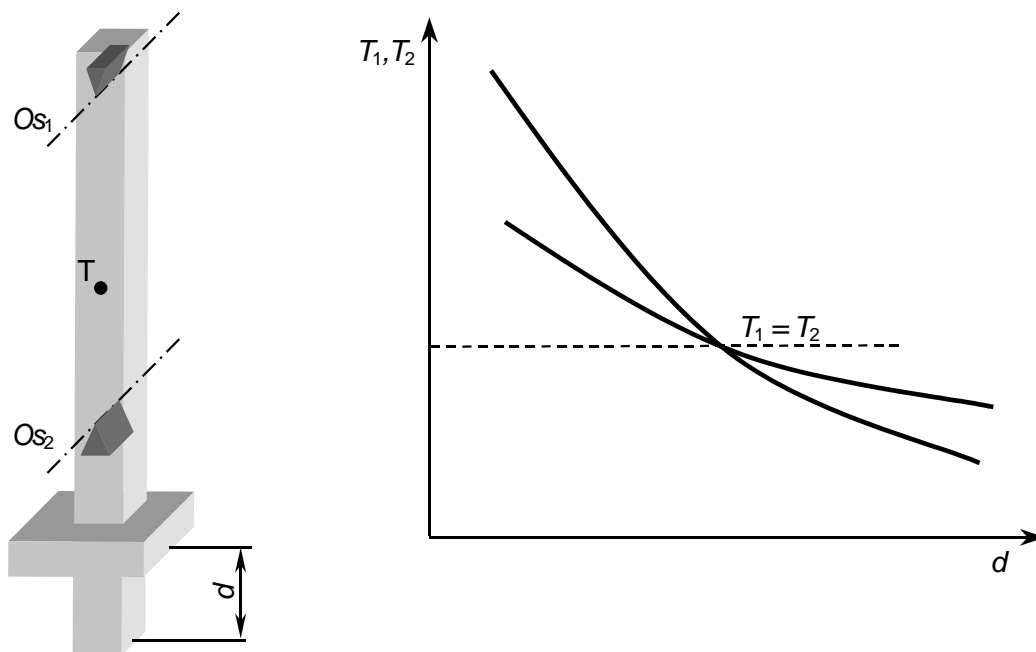
Po úprave získame

$$b_{\text{red}} = a + x. \quad (31)$$

Vzťah (31) znamená, že ak sa reverzné kyvadlo otáča okolo dvoch osí tak, že doby kyvu sú zhodné pre obe osi ($T_1 = T_2$), je vzdialenosť medzi osami otáčania rovná redukovanej dĺžke fyzikálneho (reverzného) kyvadla.

Podstata metódy určenia veľkosti tiažového zrýchlenia pomocou reverzného kyvadla je vo využití vzťahu (20), kde redukovanú dĺžku b_{red} kyvadla možno stanoviť ako vzdialenosť osí otáčania pri rovnakej nameranej dobe kyvu T pre obe osi. Predpokladáme pritom, že maximálna výchylka kyvadla pri meraní neprekračuje 5° ($\sin \varphi \approx \varphi$).

Praktický problém spočíva vo vyrobení reverzného kyvadla, ktoré by sa kývalo okolo dvoch osí s rovnakou dobou kyvu. Preto sa používa kyvadlo, pri ktorom môžeme meniť polohu ťažiska zmenou polohy závažia (obr.4). Ak zmeriame doby kyvu pre obe osi pri rôznych polohách d závažia, môžeme graficky stanoviť rovnakú dobu kyvu pre obidve osi reverzného kyvadla ako priesečník oboch grafov nameraných závislostí dôb kyvu pre jednotlivé osi a použiť vzťah (20).



Obr. 4 Zobrazenie reverzného kyvadla s premenlivou polohou závažia d a určenie rovnakej doby kyvu pre obidve osi reverzného kyvadla

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky: reverzné kyvadlo, osobný počítač (resp. stopky), ocelové meradlá a milimetrový papier.

Postup: Na reverznom kyvadle nastavíme zvolenú polohu závažia d . Reverzné kyvadlo uložíme tak, aby sa mohlo kývať okolo osi 1. Necháme ho kývať v medziach nulových kyvov (uhlová výchylka je do 5°). Dobu kyvu T_1 okolo osi 1 stanovíme tak, že zmeriame dobu viacerých kyvov (napríklad 50-ich) a túto podelíme ich počtom. Následne reverzné kyvadlo otočíme tak, aby sa mohlo kývať okolo osi 2. Podobne ako v prípade doby kyvu T_1 určíme aj dobu kyvu T_2 okolo osi 2 reverzného kyvadla. Uvedený postup opakujeme pre viac polôh závažia. Dôležité je presné stanovenie priesečníka – stavu, keď možno obe doby kyvu považovať za rovnaké, čo kontrolujeme pomocou grafického zobrazenia na milimetrovom papieri. Preto je vhodné voliť vzdialenosť d závažia tak, aby čo najviac meraní bolo uskutočnených v blízkosti predpokladaného priesečníka. Namerané doby kyvu T_1 a T_2 pri rôznych polohách závažia d zapisujeme do tabuľky.

Zmeriame redukovanú dĺžku reverzného kyvadla b_{red} ako vzdialenosť osí 1 a 2. Pomocou presného grafického zobrazenia stanovíme čo najpresnejšie dobu kyvu T rovnakú pre obe osi reverzného kyvadla. S využitím vzťahu (20) stanovíme veľkosť tiažového zrýchlenia, chybu a relatívnu chybu merania .

Faktory ovplyvňujúce priebeh merania a vyhodnotenie: Experiment je pripravený tak, že na meranie doby kyvu sa využíva osobný počítač, čím sa dá významne zvýšiť presnosť merania tejto veličiny. Napriek tomu je vhodné si overiť, či opakované meranie doby kyvu pri nezmenenej polohe závažia dáva tú istú hodnotu. Tiež je potrebné postupovať obozretne pri meraní vzdialenosti osí reverzného kyvadla.

Otázky a úlohy

1. Ukážte, že ak $\varphi < 5^\circ$, potom rozdiel medzi hodnotou φ a hodnotou $\sin\varphi$ je menší ako 1%.
2. Ako budete postupovať pri stanovení neistoty doby kyvu, ktorá je rovnaká pre obidve osi reverzného kyvadla a bola stanovená pomocou priesečníka na grafe?
3. Na základe vzťahu (20) navrhnete spôsob určenia neistoty merania a neistotu merania po uskutočnení experimentu vypočítajte.
4. Pre miesto, kde sa experiment uskutočnil, určte hodnotu tiažového zrýchlenia teoretickým výpočtom a porovnajte túto hodnotu s nameranou hodnotou.

6.3 MERANIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI METÓDOU FYZIKÁLNEHO KYVADLA

Cieľ

Určiť moment zotrvačnosti telesa komplikovaného tvaru a fyzikálneho kyvadla a stanoviť neistotu merania.

Teoretický úvod

Moment zotrvačnosti J telesa vzhľadom na os rotácie je daný výrazom

$$J = \int_{(m)} r^2 dm, \quad (1)$$

kde r je vzdialenosť hmotnostného elementu dm od osi rotácie.

Výpočet momentu zotrvačnosti podľa vzťahu (1) pre telesá nepravidelného tvaru môže byť v praxi dosť obtiažny, a preto sa moment zotrvačnosti často zisťuje experimentálne. Na tento účel je možné použiť metódu fyzikálneho kyvadla.

V prípade metódy fyzikálneho kyvadla upevníme merané teleso tak, že môže vykonávať otáčavý pohyb okolo osi neprechádzajúcej ťažiskom. Po vychýlení z rovnovážnej polohy vykonáva teleso harmonické kmity opísané rovnicou

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \sin \varphi, \quad (2)$$

kde φ je uhol vychýlenia z rovnovážnej polohy, m je hmotnosť telesa (zotrvačníka), a je vzdialenosť osi otáčania od ťažiska, g je tiažové zrýchlenie. Rovnica (2) prejde v prípade malých odchýliek (t.j. $\varphi < 5^\circ$) na tvar

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \varphi. \quad (3)$$

Rovnica (3) je rovnicou, ktorá opisuje harmonický pohyb s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}. \quad (4)$$

Periódou pohybu fyzikálneho kyvadla (t.j. doba kmitu) potom je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (5)$$

Z doby kmitu tohto kyvadla možno určiť moment zotrvačnosti J :

$$J = \frac{mga}{4\pi^2} T^2. \quad (6)$$

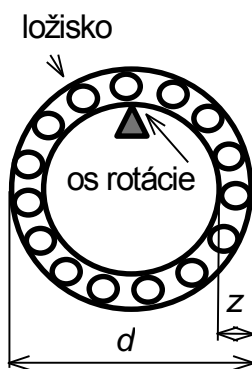
Ak chceme určiť moment zotrvačnosti J^* vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, môžeme použiť Steinerovu vetu, podľa ktorej

$$J^* = J - ma^2. \quad (7)$$

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky: teleso komplikovanejšieho tvaru (napr. ložisko), stopky, váhy, posuvné meradlo.

Postup: Teleso s neznámym momentom zotrvačnosti (guľkové ložisko) upevníme tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi (pozri obr.1).



Obr.1 Ložisko

Vážením zmeriame jeho hmotnosť m . Dobu kmitu určíme tak, že 10 - krát zmeriame dobu 25 kmitov. Na každé z týchto meraní určíme dobu jedného kmitu. Do vzťahu (6) na výpočet momentu zotrvačnosti dosadíme za dobu kmitu aritmetický priemer zo všetkých meraní. Vzdialenosť osi rotácie a od ťažiska nájdeme ako rozdiel polovice vonkajšieho priemeru d ložiska a vzdialenosti z osi rotácie od vonkajšieho obvodu ložiska:

$$a = \frac{d}{2} - z.$$

Pri vychýlení telesa z rovnovážnej polohy dbáme na to, aby výchylky boli malé, pretože vzťah (5) pre dobu kmitu fyzikálneho kyvadla bol odvodený za predpokladu $\varphi < 5^\circ$.

Moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom vypočítame pomocou vzťahu (7).

Otázky a úlohy

1. Ukážte, že ak $\varphi < 5^\circ$, potom rozdiel medzi hodnotou φ a hodnotou $\sin \varphi$ je menší ako 1%.
2. Na základe vzťahu (6) navrhnete spôsob určenia neistoty merania. Neistotu merania momentu zotrvačnosti metódou fyzikálneho kyvadla vypočítajte.
3. Ktorú z veličín vo vzťahu (6) je potrebné merať najpresnejšie? Skúste vysvetliť prečo.

6.4 MERANIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI METÓDOU TORZNÉHO KYVADLA

Cieľ

Určiť moment zotrvačnosti telesa komplikovaného tvaru metódou torzného kyvadla a stanoviť neistotu merania.

Teoretický úvod

Moment zotrvačnosti J telesa vzhľadom na os rotácie je daný výrazom

$$J = \int_{(m)} r^2 dm, \quad (1)$$

kde r je vzdialenosť hmotnostného elementu dm od osi rotácie.

Výpočet momentu zotrvačnosti podľa vzťahu (1) pre telesá nepravidelného tvaru môže byť v praxi dosť obtiažny, a preto sa moment zotrvačnosti často zisťuje experimentálne. Na tento účel je možné použiť metódu torzného kyvadla.

Ak na meranie momentu zotrvačnosti použijeme metódu torzného kyvadla, potom zavesíme zotrvačnú vhodným spôsobom nad ťažiskom na pružné vlákno tak, aby os súmernosti zotrvačníka splývala s vláknom. Polomer vlákna je r , dĺžka vlákna je L a modul torzie materiálu, z ktorého je vlákno vyrobené, je G . Pri otočení zotrvačníka okolo spomínanej osi o uhol α bude na zotrvačnú pôsobiť moment torznej sily M , úmerný uhlu α . Pre veľkosť tohto momentu platí

$$M = D\alpha, \quad (2)$$

kde D je direkčný moment vlákna, pre ktorý platí

$$D = \frac{\pi G r^4}{2L}. \quad (3)$$

Pre tuhé teleso otáčajúce sa okolo pevnej osi platí pohybová rovnica

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \quad (4)$$

kde $\vec{\varepsilon}$ je uhlové zrýchlenie a \vec{M} je moment vonkajšej sily vzhľadom na os otáčania. V prípade torzného kyvadla je to moment torznej sily, ktorý je opačne orientový, ako je orientovaný uhol otočenia zotrvačníka α . Rovnicu (4) možno preto prepísať na tvar

$$-D\alpha = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (5)$$

Rovnica (5) popisuje harmonický pohyb s periódou pohybu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (6)$$

Zo vzťahu (6) vyplýva, že meraním doby kmitu torzných kmitov zotrvačníka sa dá určiť direkčný moment vlákna D , ak je známy moment zotrvačnosti J (vzhľadom na danú os otáčania). Zotrvačníkom so známym momentom zotrvačnosti môže byť teleso pravidelného geometrického tvaru (napr. kruhová platňa), pre ktoré vieme ľahko moment zotrvačnosti vypočítať podľa vzťahu (1). Po zistení direkčného momentu D môžeme na vlákno uchytiť teleso nepravidelného tvaru, zmerať dobu kmitu T a pomocou vzťahu (6) vypočítať moment zotrvačnosti tohto telesa.

Ak neznámy zotrvačník má os súmernosti, a nie je ho možné uchytiť priamo na záves, môžeme postupovať tak, že zotrvačník s neznámym momentom zotrvačnosti J' položíme na zotrvačník so známym momentom zotrvačnosti J . Os súmernosti oboch častí musí splývať s osou vlákna. Doba kmitu tejto sústavy bude vzhľadom na aditívny charakter momentu zotrvačnosti daná vzťahom

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J+J'}{D}} \quad (7)$$

Ak do rovnice (7) dosadíme direkčný moment vlákna určený z rovnice (6), potom pre neznámy moment zotrvačnosti J' dostaneme

$$J' = J \frac{T'^2 - T^2}{T^2} \quad (8)$$

kde J je moment zotrvačnosti telesa pravidelného geometrického tvaru vypočítaný pomocou vzťahu (1), T je doba kmitu zmeraná pre teleso s momentom zotrvačnosti J a T' je doba kmitu zmeraná v prípade, keď na telese pravidelného tvaru bolo položené teleso, ktorého moment zotrvačnosti J' chceme zmerať.

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky: teleso komplikovanejšieho tvaru (napr. ložisko), stopky, váhy, posuvné meradlo.

Postup: Skôr než pristúpime k meraniu dôb kmitu torzného kyvadla, odvážime teleso pravidelného tvaru (napr. kruhová platňa) i teleso, ktorého moment zotrvačnosti chceme zistiť. Pomocou vzťahu (1) odvodíme vzťah na výpočet momentu zotrvačnosti J telesa pravidelného tvaru. Viackrát zmeriame potrebné geometrické rozmery tohto telesa (pre kruhovú platňu je to priemer platne). Do odvodeného vzťahu pre moment zotrvačnosti budeme dosadzovať aritmetické priemery nameraných geometrických rozmerov.

Teleso pravidelného geometrického tvaru upevníme na torzné vlákno a vlákno uchytíme do závesu na stene. Takto pripravené torzné kyvadlo skrútime o uhol približne 180° tak, aby sme nevychýlili vlákno závesu z pôvodnej vertikálnej polohy. Kyvadlo pustíme a

sledujeme torzné kmity. Dobu kmitu určíme metódou postupných meraní tak, že za stáleho chodu stopiek odčítavame čas na konci každého piateho kmitu až do 50-tich kmitov. Namerané hodnoty zapisujeme do nasledujúcej tabuľky.

i	doba i.5 kmitov [s]	doba (i+5).5 kmitov [s]	doba 25 kmitov [s]
1			
2			
3			
4			
5			

Dobu 25 kmitov dostaneme v príslušnom riadku tabuľky ako rozdiel medzi údajom v treťom a údajom v druhom stĺpci. Z hodnôt v poslednom stĺpci tabuľky urobíme aritmetický priemer a po jeho vydelení číslom 25 dostaneme dobu T jedného kmitu.

Po zmeraní doby kmitu telesa pravidelného tvaru položíme naň teleso, ktorého moment zotrvačnosti chceme určiť. Opäť kyvadlo vychýlime z rovnovážnej polohy a analogicky ako v predošlom prípade zmeriame metódou postupných meraní dobu kmitu T' . Po výpočte momentu zotrvačnosti J telesa pravidelného tvaru (podľa vzťahu, ktorý sme odvodili) môžeme dosadením za J , T a T' do vzťahu (8) vypočítať hľadaný moment zotrvačnosti telesa komplikovanejšieho tvaru.

Otázky a úlohy

1. Vychádzajúc zo vzťahu (1) odvodte vzťah na výpočet momentu zotrvačnosti kruhovej platne hmotnosti m a polomeru R vzhľadom na os, ktorá prechádza stredom platne a je na ňu kolmá. Ktoré z veličín vystupujúcich v odvodenom vzťahu je potrebné experimentálne zmerať?
2. Vysvetlite, ako možno experimentálne zistiť direkčný moment vlákna torzného kyvadla.
3. Na základe vzťahov (8) navrhните spôsob určenia neistoty merania. Neistotu merania momentu zotrvačnosti metódou torzného kyvadla vypočítajte.

6.5 MERANIE KOEFICIENTU VNÚTORNÉHO TREŇIA KVAPALÍN STOKESOVOU METÓDOU

Cieľ

Určiť hodnotu koeficientu vnútorného trenia oleja Stokesovou metódou a stanoviť veľkosť neistoty merania.

Teoretický úvod

Pri pozorovaní pohybu všetkých skutočných kvapalín nastáva úkaz, že ich vrstvy nachádzajúce sa v blízkosti obtekaných povrchov sa pohybujú oveľa pomalšie ako vrstvy vzdialenejšie. Toto správanie môžeme vysvetliť výskytom vnútorného trenia medzi pohybujúcimi sa vrstvami kvapaliny, čo spôsobuje plynulú zmenu rýchlosti jednotlivých vrstiev kvapaliny. Ak by toto vnútorné trenie neexistovalo, mohol by nastať aj prípad, že susedné vrstvy kvapaliny by mohli mať výrazne odlišné rýchlosti. Pri skutočných kvapalinách s uvažovaním trenia by prakticky okamžite začali tieto vrstvy na seba pôsobiť, pričom pomalšia vrstva by spomaľovala rýchlejšiu a rýchlejšia vrstva by sa snažila zvýšiť rýchlosť pomalšej. Veľkosť tohto pôsobenia môžeme vyjadriť ako tangenciálne napätie τ medzi vrstvami kvapaliny. Podľa Newtona je veľkosť tohto napätia priamoúmerná veľkosti vnútorného trenia v kvapaline – viskozite (dynamickej viskozite) η a zmene rýchlosti kvapaliny v pripadajúcej na jednotku dĺžky b v smere kolmom na smer pohybu kvapaliny

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{db}. \quad (1)$$

Koeficient vnútorného trenia η pre väčšinu kvapalín nezávisí od rýchlosti ich pohybu. Takéto kvapaliny nazývame newtonovské. V technickej praxi sa môžeme stretnúť aj s anomálnymi kvapalinami (koloidné roztoky, suspenzie, emulzie a pod.), pri ktorých koeficient vnútorného trenia silne závisí od rýchlosti pohybu kvapaliny. Tieto poznáme ako nenewtonovské kvapaliny. Význam znalosti koeficientu vnútorného trenia výrazne vzrastá s použitím technologického postupu využívajúceho jeho závislosť od teploty. Ako príklad možno uviesť tvarovanie skla a plastických látok pri zvýšených teplotách, odlievanie kovov, ich zliatin a podobne. Najmä pri teoretických prácach sa môžeme stretnúť aj s kinematickou viskozitou ν určenou ako podiel koeficientu vnútorného trenia (dynamickej viskozity) η a hustoty ρ kvapaliny,

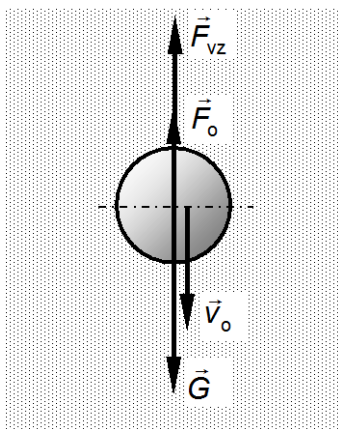
$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (2)$$

Hodnota koeficientu vnútorného trenia kvapalín – viskozity závisí od tlaku a teploty kvapaliny. S jej rastúcou teplotou zvyčajne klesá, s rastúcim tlakom sa mierne zvyšuje. Dôsledkom vnútorného trenia kvapalín je aj odpor kvapalín proti pohybu telies. Pri veľmi malých rýchlostiach a hladkom povrchu telies, keď je obtekanie kvapalinou laminárne, je podľa Stokesa veľkosť sily odporu závislá len od viskozity kvapaliny, od rýchlosti pohybu telesa voči kvapaline a od rozmerov telesa. Vychádzal z myšlienky, že pri tomto pohybe telies vrstva kvapaliny pri povrchu telesa má prakticky rovnakú rýchlosť, ako je rýchlosť telesa. Pre teleso tvaru gule Stokes odvodil vzťah na určenie veľkosti sily odporu F_o v tvare

$$F_o = 6\pi\eta r v, \quad (3)$$

kde v je rýchlosť pohybu gule s polomerom r v kvapaline s koeficientom vnútorného trenia (dynamickou viskozitou) η . Stokes na základe predchádzajúceho vzťahu odvodil aj metódu stanovenia veľkosti koeficientu vnútorného trenia kvapalín z ustáleného padania gúľ v kvapalinách. Pri padaní gúľ uvažoval s pôsobením troch síl:

1. sily odporu F_o , ktorú možno stanoviť pomocou vzťahu (3),
2. sily tiaže $G = mg$, kde m je hmotnosť gule a g tiažové zrýchlenie,
3. vztlakovej (Archimedovej) sily $F_{vz} = V\rho g$, kde V je objem gule, ρ je hustota kvapaliny a g tiažové zrýchlenie.



Obr. 1 Zobrazenie síl pôsobiacich na teleso tvaru gule pri jeho ustálenom padaní v kvapaline rýchlosťou v_0

V súlade s obrázkom č.1 pri ustálenom pohybe gule v kvapaline (rovnomernom pohybe) platí vzťah

$$G = F_o + F_{vz} \quad (4)$$

a po dosadení za jednotlivé sily dostaneme

$$mg = 6\pi\eta r v_0 + V\rho g. \quad (5)$$

Na základe predchádzajúceho vzťahu možno stanoviť veľkosť koeficientu vnútorného trenia kvapaliny

$$\eta = \frac{(m - \rho V)g}{6\pi r v_0} \quad (6)$$

Vzťah (6) bol odvodený na základe myšlienky, že sa guľa pohybuje v neohraničenej kvapaline, čo sa prakticky nedá uskutočniť. Ak guľa padá vo valcovej nádobe s vnútorným polomerom R , treba použiť v menovateli vo vzťahu (6) korekčný člen $\left(1 - 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right)$. Ustálenú rýchlosť padania gule v_0 môžeme určiť ako podiel dráhy h gule a zodpovedajúceho času t ($v_0 = \frac{h}{t}$). Ak uvedené skutočnosti zohľadníme, môžeme zapísať

$$\eta = \frac{(m - \rho V)g}{6\pi r \left(1 - 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right)} \cdot \frac{t}{h} \quad (7)$$

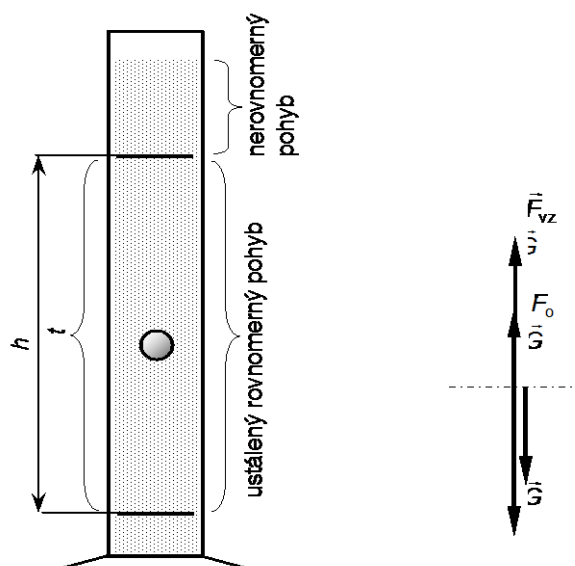
EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky : vysoký sklený valec s kvapalinou, hustomer, mikrometer, stopky, váhy, guľky, oceľové meradlo.

Postup : Na meranie vyberieme viacero (zvyčajne desať) približne rovnakých guľiek. Pomocou mikrometra určíme ich polomery a stanovíme priemernú hodnotu ich polomeru r aj priemernú hodnotu veľkosti ich objemu ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

Priemernú hmotnosť meraných guľiek m určíme tak, že zmeriame pomocou váh hmotnosť všetkých guľiek naraz a nameranú hodnotu podelíme ich počtom. Súčasne určíme aj veľkosť neistoty merania hmotnosti δm (pozri kap. 2.3). Päťkrát zmeriame vnútorný polomer valcovitej nádoby R použitej pri meraní.

Pomocou hustomera určíme hustotu meranej kvapaliny ρ aj veľkosť jej neistoty $\delta \rho$ (pozri kap. 3.3). Zo stupnice na valci odčítame vzdialenosť značiek h (obr. 2), ktorá vymedzuje oblasť už ustáleného padania guľiek v meranej kvapaline. Jednotlivo púšťame guľky do valca a pomocou stopiek meriame dobu t , za ktorú guľka prejde úsek vyznačený značkami.



Obr. 2 Zobrazenie meracieho valca na meranie koeficientu vnútorného trenia kvapalín

Koeficient vnútorného trenia η určíme pomocou vzťahu (7). Pri určení jeho neistoty najprv určíme veľkosť neistoty priemerného polomeru guľiek δr , neistoty priemernej doby pádu guľiek vyznačeným úsekom δt a neistoty priemernej hodnoty vnútorného polomeru valca δR (pozri kap. 3.2).

Neistotu koeficientu vnútorného trenia $\delta \eta$ meranej kvapaliny určíme pomocou znalosti neistôt čiastkových veličín (δr , δR , δm , $\delta \rho$, δt). Vhodné je použiť najmä metódu (pozri kap. 3.4), pri ktorej si musíme uvedomiť, že priemerný objem guľky je funkciou priemerného polomeru guľky ($V = \frac{4}{3} \pi r^3$).

Zápis nameraných výsledkov a ich spracovanie : Pri príprave tabuliek treba uvažovať okrem merania doby padania guľiek t , polomeru guľiek r a vnútorného polomeru valca R aj s následným určením veľkosti neistoty typu A (pozri kap. 3.2). Veľkosť koeficientu stanovíme podľa vzťahu

$$\eta = \frac{(m - \rho V)g}{6\pi r \left(1 - 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right)} \cdot \frac{t}{h} \quad (8)$$

Kde m je hmotnosť pripadajúca na jednu guľku, ρ je hustota kvapaliny, V je objem určený z priemernej hodnoty polomeru r meracích guľiek, g je tiažové zrýchlenie, t je priemerná hodnota doby padania guľiek, R je priemerná hodnota vnútorného priemeru valca a h je dĺžka úseku, na ktorom meracia guľka padá rovnomerným pohybom.

Ako pomôcku pri následnom určení veľkosti neistoty koeficientu vnútorného trenia kvapaliny metódou linearizácie (kap. 3.4.2) je možné využiť nasledujúce vzťahy, pričom význam veličín je rovnaký ako vo vzťahu (8):

$$\frac{\partial \eta}{\partial m} = \frac{g}{6\pi r \left(1 - 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right)} \cdot \frac{t}{h}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} = \frac{-V \cdot g}{6\pi r \left(1 - 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right)} \cdot \frac{t}{h}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{(m - \rho V)g}{6\pi r \left(1 - 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right) \cdot h}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial h} = -\frac{(m - \rho V)g}{6\pi r \left(1 - 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right)} \cdot \frac{t}{h^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial R} = \frac{2,4 (m - \rho V)g}{6\pi \left(1 - 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right)^2 \cdot R^2} \cdot \frac{t}{h}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = -\frac{g \cdot t}{6\pi h} \left[\frac{4\pi \rho r^2 \left(r - 2,4 \cdot \frac{r^2}{R}\right) + \left(m - \rho \frac{4}{3}\pi r^3\right) \cdot \left(1 + 4,8 \cdot \frac{r}{R}\right)}{\left(r - 2,4 \cdot \frac{r^2}{R}\right)^2} \right] \quad (14)$$

Faktory ovplyvňujúce priebeh merania a vyhodnotenie : Presnosť merania môže byť výrazne ovplyvnená výberom guľôčok na meranie. Pri výbere treba zvážiť, či väčší meraný výber rôznorodých guľôčok môže priniesť vyššiu presnosť merania ako menší výber podobných guľôčok. Pred experimentom treba tiež stanoviť postup, ktorý je najvhodnejší na rýchle dosiahnutie rovnomerného pohybu guľôčky pri jej pohybe.

ÚLOHY

1. Aký je rozdiel medzi kinematickou a dynamickou viskozitou kvapaliny?
2. Ako sa menia hodnoty koeficientu vnútorného trenia kvapalín so zmenou tlaku a teploty?
3. Ktoré kvapaliny možno charakterizovať ako newtonovské?
4. Na základe znalosti veľkosti odporovej sily pre pohyb telesa tvaru gule v kvapaline $F_0 = 6\pi\eta r v$ odvodte vzťah na výpočet koeficientu vnútorného trenia neobmedzenej kvapaliny.

5. Aký je rozdiel v použití vzťahov $\eta = \frac{(m - \rho V)g}{6\pi r v_0}$ a $\eta = \frac{(m - \rho V)g}{6\pi r \left(1 - 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right)} \cdot \frac{t}{h}$?

6. Stručne opíšte postup pri určovaní koeficientu vnútorného trenia Stokesovou metódou.
7. Ako by ste stanovili oblasť rovnomerného pohybu guľôčky v kvapaline?
8. Vysvetlite rozdiel pri stanovení neistoty typu A a neistoty typu B.
9. Čo je podstatou metódy linearizácie pri stanovení veľkosti neistôt meraných veličín?
10. Odvodte vzťahy (9) až (14) zo vzťahu (8).

Tabuľka 6.1 Hodnoty koeficientu vnútorného trenia (dynamickej viskozity) vybraných kvapalín pri teplote 20 °C

Látka	$10^3 \cdot \eta$ [Pa·s]	Látka	$10^3 \cdot \eta$ [Pa·s]
Acetón	0,331	Ortuť	1,55
Benzín	0,53	Ricínový olej	987
Etanol	1,2	Terpentínový olej	1,49
Glycerín	1480	Transformátorový olej	31,6
Metanol	0,584	Voda	1

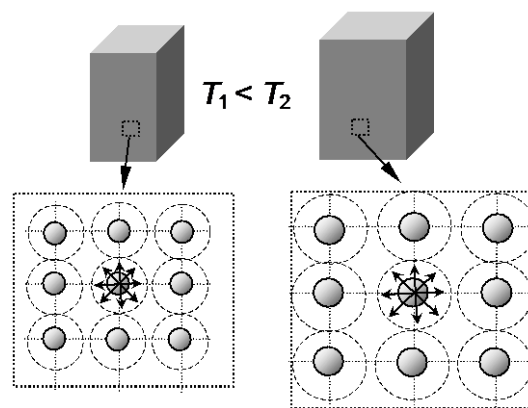
6.6 MERANIE KOEFICIENTU TEPLOTNEJ ROZŤAŽNOSTI EDELMANOVÝM DILATOMETROM

Cieľ

Určiť hodnotu koeficientu teplotnej rozťažnosti vybraného kovu tvaru dlhej tyče a stanoviť veľkosť neistoty merania.

Teoretický úvod

Všetky tuhé látky sa skladajú z častíc, ktoré sú v neustálom pohybe. Zmenou teploty látok je ovplyvňovaná hodnota celkovej energie ich častíc, ktorá je daná súčtom kinetickej a potenciálnej energie. Pri ohrievaní látky zvyšujeme celkovú energiu jej častíc, čo sa prejaví rastom teploty látky. Najčastejším pohybom častíc látky je kmitavý pohyb okolo určitej polohy – rovnovážnej polohy. Ak rastie kinetická energia kmitajúcich častíc, rastie aj amplitúda (maximálna výchylka) ich pohybu. To znamená, že s rastom teploty látky sa zvyšuje aj hodnota amplitúdy kmitavého pohybu častíc látky. So zvyšovaním amplitúd kmitavého pohybu častíc rastie potreba nutného priestoru na pohyb jednotlivých častíc látky (obr. 1). Dôsledkom je teda vzrast vzdialeností medzi rovnovážnymi polohami jednotlivých častíc látky navonok pozorovateľný ako zväčšenie rozmerov látky pri vzraste teploty látky.



Obr. 1 Schematické zobrazenie častíc tuhej látky pri dvoch rôznych hodnotách teploty

Z technickej praxe sú známe aj prípady, pri ktorých dochádza k výraznejším zmenám v usporiadaní jednotlivých častíc látky, čo sa prejavuje náhlymi zmenami ich rozmerov. Pozorovaním a analýzou uvedených prípadov sa zaoberá meracia metóda nazývaná dilatometria. Uplatnenie nachádza najmä pri presnom stanovení teplôt fázových transformácií látok spojených s výraznými rozmerovými zmenami.

Veľkosť dĺžkových zmien tuhých látok v závislosti od teploty možno kvantitatívne hodnotiť pomocou koeficientu teplotnej rozťažnosti α [K⁻¹]. Jeho hodnota vo všeobecnosti udáva veľkosť pomerného predĺženia dĺžky tuhého telesa pri zvýšení teploty o 1 K.

Koeficient teplotnej rozťažnosti α [K⁻¹] je definovaný vzťahom:

$$\alpha = \frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dt}, \quad (2)$$

kde h [m] je dĺžka a pomer $\frac{dh}{dt}$ [m·K⁻¹] vyjadruje podiel zmeny dĺžky pri veľmi malej zmene teploty telesa. Pri látkach, pre ktoré je hodnota koeficientu teplotnej rozťažnosti α [K⁻¹] nezávislá od teploty, možno riešenie rovnice (2) zapísať v tvare

$$h = h_0 \cdot e^{\alpha(t-t_0)}, \quad (3)$$

kde h je dĺžka telesa pri teplote t [K], h_0 [m] je dĺžka telesa pri teplote t_0 [K] a α je koeficient teplotnej rozťažnosti.

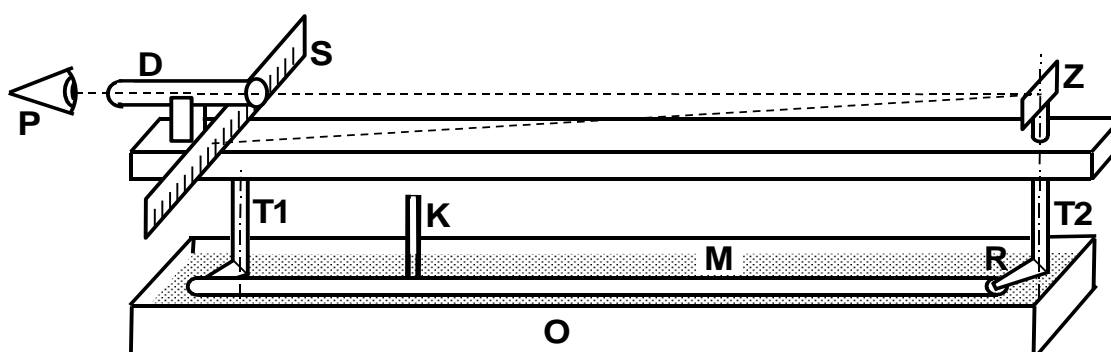
Na popis teplotnej dĺžkovej rozťažnosti sa však oveľa častejšie využíva vzťah, ktorý bol odvodený zo vzťahu (3) za predpokladu, že hodnota α je veľmi malé číslo konštantnej veľkosti. Jeho najčastejšia podoba je v tvare

$$h = h_0 (1 + \alpha \cdot (t - t_0)). \quad (4)$$

Pri stanovení hodnoty koeficientu teplotnej rozťažnosti kovov treba zohľadniť to, že jeho hodnota je zvyčajne veľmi malá a dĺžkové zmeny spôsobené zmenou teploty sú rádovo

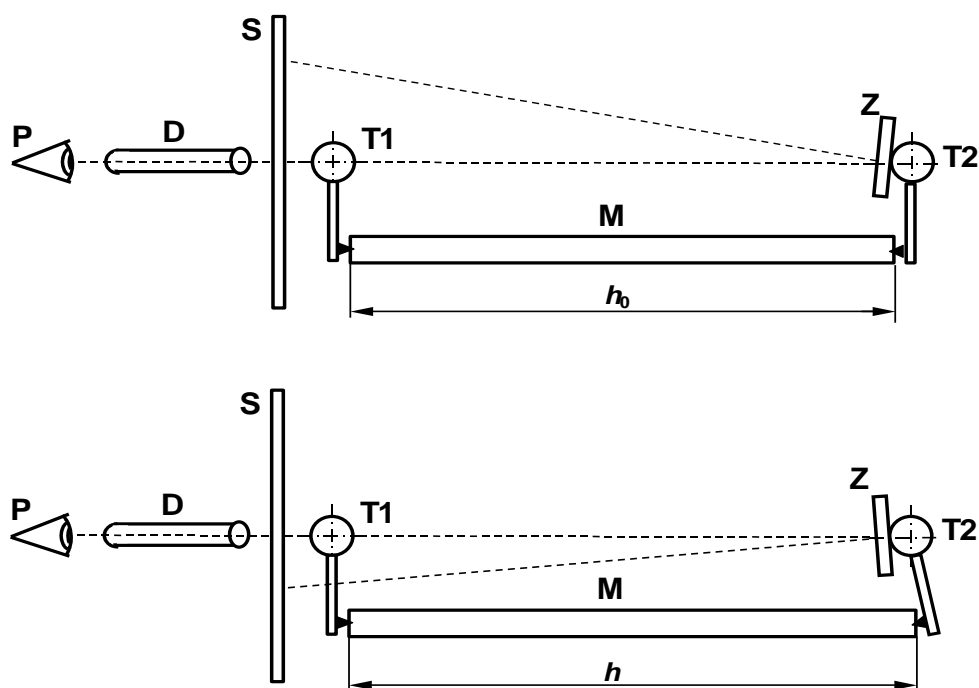
nižšie ako rozmery kovových telies. Meracie zariadenia sa preto upravujú s cieľom zvýšiť citlivosť pomocou zrkadiel, resp. prevodov.

Edelmanov dilatometer (obr. 2) je zariadenie, ktoré na presné meranie predĺženia meranej tyče využíva posun optickej stopy odrazenej zrkadlom. Meraná kovová tyč (M) je pri tomto zariadení uchytená pružne na dvoch hrotoch ramien pripevnených na otočných zvislých kovových tyčiach (T1,T2). Otáčanie prvej tyče (T1) možno riadiť, otáčanie druhej (T2) je dané koncovým bodom meranej tyče. Druhá tyč (T2) je pevne spojená so zrkadlom (Z). Pomocou tohto zrkadla pozorovateľ (P) sleduje v ďalekohľade (D) odraz aktuálneho dielika stupnice (S). Ohrev tyče je zvyčajne zabezpečený použitím vyhrievaného olejového kúpeľa (O) a jeho teplota je určovaná pomocou teplomera (K).



Obr. 2 Schematické zobrazenie jednotlivých častí Edelmanovho dilatometra: M – meraná kovová tyč, R – rameno, T - otočná tyč, Z – zrkadlo, P – pozorovateľ, D – ďalekohľad, S – stupnica, K – teplomer, O - olejový kúpeľ

Pri meraní vplyvom zmeny dĺžky tyče dochádza k rôznemu uhlu natočenia zrkadla, čo pozorovateľ zaznamenáva ako posun optickej stopy po stupnici (obr. 3). To znamená, že pri predlžovaní meranej tyče v dôsledku zvyšovania jej teploty sa posúva optická stopa po stupnici dilatometra. Pozorovateľ teda predlžovanie tyče sleduje v ďalekohľade ako pohyb optickej stopy po stupnici.



Obr. 3 Schematické zobrazenie sledovania zmeny dĺžky meranej tyče z hodnoty h_0 na hodnotu h na stupnici Edelmanovho dilatometra: M – meraná kovová tyč, T - otočná tyč, Z – zrkadlo, P – pozorovateľ, D – ďalekohľad, S – stupnica

Určitý počet nameraných dielikov na stupnici Edelmanovho dilatometra zodpovedá určitej hodnote predĺženia tyče. Na stanovenie skutočného predĺženia tyče v závislosti od počtu dielikov stupnice musíme určiť, akému predĺženiu meranej tyče zodpovedá posunutie o 1 dielik na stupnici. Túto konštantu prístroja určíme nasledovne. Súčasťou Edelmanovho dilatometra je aj mikrometrická skrutka, ktorá umožňuje cielene otáčať tyč T1. Otočením mikrometrickej skrutky o 360° sa posunie hrot podopierajúci meranú tyč o presnú hodnotu d (jej hodnota je uvedená na konštrukcii dilatometra). Pri konštantnej dĺžke tyče sa rovnako posunie aj hrot na ramene tyče T2, čo sa prejaví zmenou polohy optickej stopy na stupnici Edelmanovho dilatometra. Túto mikrometrickú skrutku je potrebné nastaviť tak, aby optická stopa ukazovala na počiatočnú rysku na stupnici dilatometra. Po otočení mikrometrickej skrutky o 360° sa optická stopa posunie na stupnici dilatometra na novú hodnotu b_1 , ktorá zodpovedá predĺženiu tyče o d . Ďalším otočením mikrometrickej skrutky o 360° sa optická stopa posunie ďalej na stupnici dilatometra na novú hodnotu b_2 , ktorá zodpovedá predĺženiu tyče o $2d$. Opakovaním uvedeného postupu je možné získať hodnoty na stupnici dilatometra zodpovedajúce predĺženiu tyče rovnajúce sa celočíselným násobkom vzdialenosti d . Z korešpondujúcich hodnôt predĺženia tyče ($0, d, 2d, \dots$) a hodnôt zaznamenaných na stupnici dilatometra ($0, b_1, b_2, \dots$) je možné stanoviť skutočnú hodnotu predĺženia tyče zodpovedajúcu posunutiu na stupnici dilatometra o jeden dielik – konštantu prístroja.

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky : Edelmanov dilatometer, meraná tyč.

Postup : Zaznamenáme východiskovú dĺžku h_0 meranej kovovej tyče, jej teplotu t_0 a hodnotu d zmeny predĺženia tyče pri pootočení mikrometrickej skrutky Edelmanovho dilatometra o 360° . Otáčaním mikrometrickej skrutky na dilatometri nastavíme optickú stopu sledovanú v ďalekohľade na začiatok stupnice. Mikrometrickú skrutku otáčame vždy o 360° , pričom sledovaním v ďalekohľade zaznamenávame zodpovedajúcu hodnotu b_i optickej stopy na stupnici prístroja. Opätovne otáčaním mikrometrickej skrutky na dilatometri nastavíme optickú stopu sledovanú v ďalekohľade na začiatok stupnice. Zapneme ohrievanie. Aspoň 10-krát zaznamenáme teplotu t_i meranej kovovej tyče a hodnotu a_i optickej stopy na stupnici dilatometra zodpovedajúcu predĺženiu tyče Δh_i . Po skončení merania vypneme ohrievanie meranej tyče.

Pri určení veľkosti koeficientu α , teplotnej rozťažnosti z nameraných hodnôt predĺženia tyče Δh a teploty t [$^\circ\text{C}$] je výhodné využiť metódu najmenších štvorcov. Vzťah (4) treba však upraviť na tvar, pri ktorom uvažujeme

$$t_0 = 0^\circ\text{C},$$

$$h = h_0(1 + \alpha \cdot \Delta t). \quad (5)$$

Ak tento vzťah upravíme do podoby

$$h = h_0 + h_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t, \quad (6)$$

môžeme pomocou metódy najmenších štvorcov určiť hodnotu h_0 a súčinu $h_0 \cdot \alpha$ a následne aj koeficientu α .

To znamená, že už pri zápise experimentu je nutné uvažovať s vyhodnotením pomocou metódy najmenších štvorcov.

Pri stanovení veľkosti neistoty merania je vhodné využiť vzťah (7). Pri stanovení veľkosti koeficientov a , b lineárnej závislosti $y = a \cdot x + b$ z nameraných dvojíc hodnôt veličín $[x_i, y_i]$ pomocou metódy najmenších štvorcov je veľkosť neistoty podielu koeficientov určených z metódy najmenších štvorcov $\frac{a}{b}$ daná vzťahom

$$\delta \frac{a}{b} = \frac{1}{b^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - [a \cdot x_i + b])^2}{(n-2)} \right) \cdot \left(\frac{n \cdot b^2 + a^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \right)}. \quad (7)$$

Faktory ovplyvňujúce priebeh merania a vyhodnotenie: Na dosiahnutú kvalitu merania má rozhodujúci vplyv homogenita teplotného poľa meranej tyče. To znamená, že pri ohreve

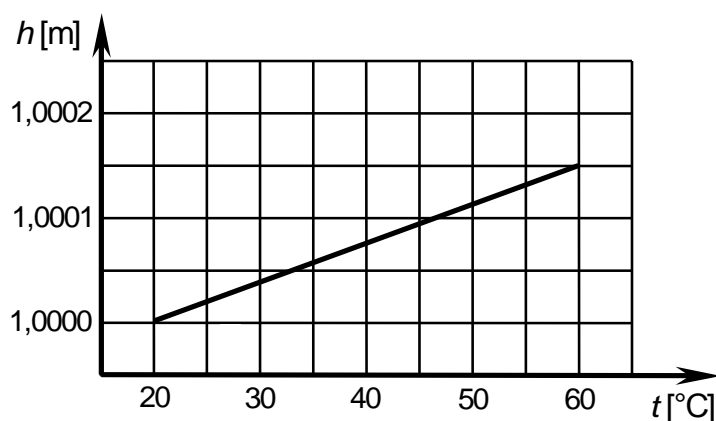
olejového kúpeľa je dôležitý veľmi pozvoľný nárast teploty s možnosťou jej homogenizácie v objeme meranej tyče. Pri sledovaní teploty ako priemernej hodnoty z viacerých miest olejového kúpeľa pomocou jedného teplomera treba zohľadniť aj jeho určité oneskorenie pri zobrazení aktuálnej hodnoty teploty. Presnosť predĺženia tyče je silne ovplyvnená stanovením konštanty prístroja. Pri silne nelineárnom vzťahu medzi nameranými dielikmi stupnice a predĺžením meranej tyče je vhodnejšie použiť priamo funkcionálny vzťah bez použitia konkrétnej hodnoty konštanty prístroja.

ÚLOHY A OTÁZKY

1. Opíšte postup pri stanovení konštanty určujúcej vzťah medzi veľkosťou predĺženia meranej tyče a počtom dielikov na Edelmanovom dilatometri.
2. Pokúste sa odvodiť vzťah (3) na základe znalosti vzťahu (2).
3. Ako možno vysvetliť zmenu rozmerov tuhých látok pri zmene ich teploty?
4. Akým spôsobom Edelmanov dilatometer zvyšuje presnosť merania predĺženia tyče pri zvyšovaní teploty?
5. Popíšte funkciu hlavných častí Edelmanovho dilatometra.
6. S využitím vzťahu (3) a (4) určte, o akú hodnotu v milimetroch by sa predĺžila 2 m dlhá mosadzná tyč pri zvýšení jej teploty z hodnoty 22 °C na 58 °C. Obidva výsledky porovnajte.
7. Skúste vysvetliť podstatu metódy najmenších štvorcov.
8. Môže voľba rozmerov tyče použitej pri meraní ovplyvňovať presnosť merania koeficientu teplotnej rozťažnosti?
9. V nasledujúcej tabuľke sú zaznamenané zodpovedajúce hodnoty dielikov stupnice Edelmanovho dilatometra b_i a predĺženia tyče Δh_i . Určte veľkosť konštanty Edelmanovho dilatometra, t. j. hodnotu predĺženia tyče pripadajúcu na jeden dielik stupnice dilatometra.

i	1	2	3	4
Δh_i [mm]	0	0,5	1	1,5
b_i [1]	0	79	161	240

10. Na nasledujúcom obrázku je záznam merania na dilatometri. Určte veľkosť koeficientu teplotnej rozťažnosti.



Tabuľka: Hodnoty tepelného koeficientu dĺžkovej rozťažnosti vybraných látok pri 20 °C

Látka	$10^6 \cdot \alpha$ [K ⁻¹]	Látka	$10^6 \cdot \alpha$ [K ⁻¹]	Látka	$10^6 \cdot \alpha$ [K ⁻¹]
Cín	27	Mosadz	19	Olovo	29
Hliník	24	Nikel	13	Sklo	10
Meď	17	Oceľ mäkká	12	Volfrám	4

6.7 VERIFIKÁCIA BOYLOVHO – MARIOTTOVHO ZÁKONA MELDEHO TRUBICOU

Cieľ

Overiť platnosť Boylovho-Mariottovho zákona pre vzduch .

Teoretický úvod

Najjednoduchší termodynamický systém je ideálny plyn. Je to súhrn atómov a molekúl, ktoré sú v neustálom neusporiadanom pohybe. V ideálnom plyne možno zanedbať vzájomné silové pôsobenie medzi jeho molekulami a zrážky molekúl považovať za dokonale pružné. Stav ideálneho plynu môžeme charakterizovať pomocou tzv. stavových veličín. Medzi stavové veličiny patrí tlak plynu p (jednotka pascal - Pa), objem plynu V (jednotka meter kubický – m³), termodynamická teplota T (jednotka kelvin - K). Pri ideálnom plyne bolo zistené, že uvedené stavové veličiny navzájom súvisia a možno napísať stavovú rovnicu ideálneho plynu v rovnovážnom stave:

$$p \cdot V = nRT, \quad (1)$$

kde n je látkové množstvo (jednotka mól – mol) a R je plynová konštanta. $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Z rovnice (1) vyplýva, že pri prechode ideálneho plynu z jedného rovnovážneho stavu do druhého (pričom látkové množstvo sa nemení) sa menia jednotlivé stavové veličiny tak, že výraz $\frac{p \cdot V}{T}$ ostáva pre sledovaný plyn konštantný.

Ak by sa hustota plynu zväčšovala, jeho vlastnosti by sa čoraz viac odlišovali od vlastností ideálneho plynu. Potom hovoríme o reálnom plyne a stavová rovnica reálneho plynu musí už rešpektovať vlastný objem molekúl plynu ako i príťažlivé sily, ktoré pôsobia medzi molekulami a ktoré už nemožno zanedbať. Stavová rovnica aproximujúca správanie sa reálneho plynu v rovnováhe má tvar:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad (2)$$

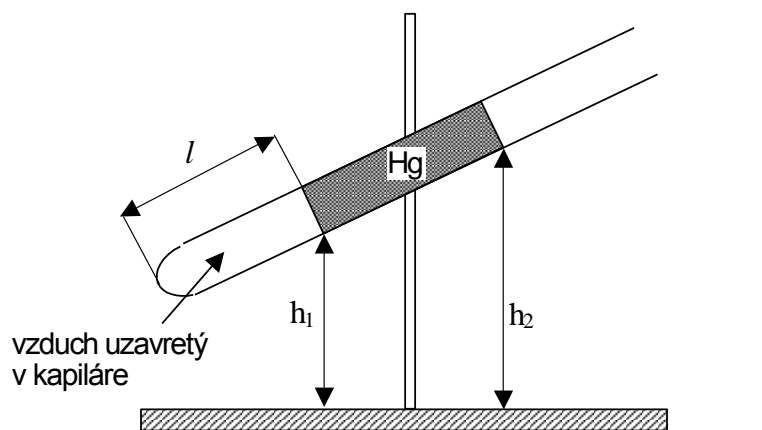
kde a je konštanta charakterizujúca sily vzájomného molekulového pôsobenia konkrétneho reálneho plynu, b je konštanta charakterizujúca vlastný objem molekúl tvoriacich plyn.

Ak je objem plynu dostatočne veľký, možno korekcie na vzájomné silové pôsobenie a vlastný objem zanedbať, čím rovnica (2) prejde na rovnicu ideálneho plynu. Ak sa stav ideálneho plynu mení tak, že teplota zostáva konštantná (izotermický dej), potom je z rovnice (1) zrejmé, že súčin tlaku plynu a jeho objemu je stále rovnaký. Teda platí:

$$p \cdot V = \text{konštanta}. \quad (3)$$

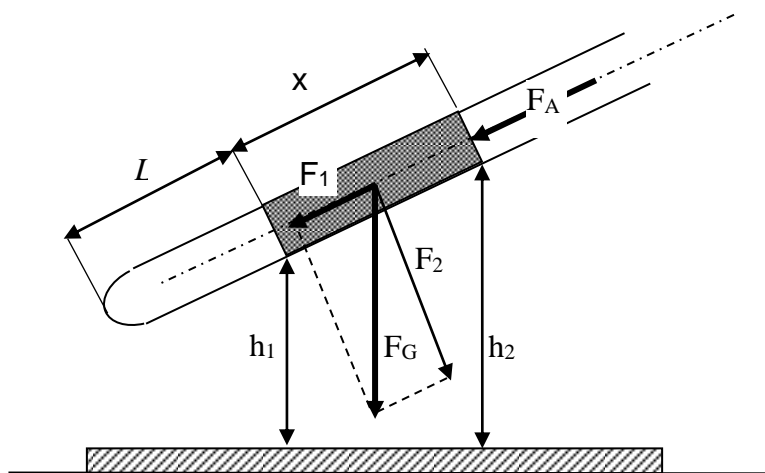
Túto skutočnosť experimentálne zistil v roku 1662 Robert Boyle a neskôr v r. 1667 potvrdil Edme Mariotte. Preto sa rovnica (3) nazýva Boylov-Mariottov zákon.

Na overenie Boylovho-Mariottovho zákona v laboratórnych podmienkach použijeme Meldeho trubicu. Meldeho trubicou nazývame sklenenú hrubostennú kapiláru (kapilárou nazývame taký valec, ktorého pomer medzi vnútorným priemerom a dĺžkou je veľmi malé číslo), ktorá je na jednom konci zatavená. Vnútny priemer je konštantný. V trubici je ortuť, ktorá uzatvára určitý objem vzduchu. Meldeho trubica je prichytená na stojane tak, aby sa mohla voľne otáčať vo vertikálnej rovine.



Obr. 1

Plynom, na ktorom overujeme Boylov-Mariottov zákon, je vzduch, ktorý je v kapiláre uzavretý ortuťou. Keďže má kapilára konštantný prierez, objem vzduchu je priamo úmerný dĺžke vzduchového stĺpca l . Na stĺpec ortuti pôsobí tiažová sila Zeme, ktorú môžeme rozložiť na dve zložky – jedna zložka má smer kapiláry a druhá zložka je kolmá na kapiláru (obr.2.)



Obr. 2

Veľkosť sily F_1 je možné v našom prípade vyjadriť vzťahom

$$F_1 = F_G \sin \alpha, \quad (4)$$

kde $\sin \alpha = \frac{h_2 - h_1}{x}$, x je dĺžka ortuťového stĺpca.

Po vyjadrení tiažovej sily pomocou hustoty ortute, prierezu kapiláry, tiažového zrýchlenia a dĺžky ortuťového stĺpca dostaneme po matematických úpravách:

$$F_g = mg = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot S \cdot x \cdot g, \quad (5)$$

kde S je plošný obsah vnútorného prierezu kapiláry.

Po dosadení (5) do (4) máme:

$$F_1 = \rho \cdot S \cdot x \cdot g \sin \alpha = \rho \cdot S \cdot x \cdot g \cdot \frac{h_2 - h_1}{x} = \rho \cdot S \cdot g(h_2 - h_1).$$

Sila F_1 predstavuje vlastne tlakovú silu, ktorou ortuť pôsobí na uzatvorený plyn. Tlak tejto sily je

$$p_1 = \frac{F_1}{S} = \rho \cdot g(h_2 - h_1).$$

Spolu s týmto hydrostatickým tlakom ortuti pôsobí na uzavretý vzduch i atmosferický tlak b , takže celkový tlak je

$$p = p_1 + b = \rho \cdot g(h_2 - h_1) + b. \quad (6)$$

Ak bude plyn (uzavretý vzduch) v rovnovážnom stave, potom tlak určený vzťahom (6) je taký istý ako tlak vo vnútri uzavretého vzduchu. Predpokladajme, že teplota v laboratóriu bude počas celého experimentu rovnaká, potom po dosadení (6) do (1) dostaneme:

$$\begin{aligned} [\rho \cdot g(h_2 - h_1) + b] \cdot V &= nRT, \\ [\rho \cdot g(h_2 - h_1) + b] \cdot S \cdot L &= nRT, \\ [\rho \cdot g(h_2 - h_1) + b] \cdot L &= \frac{nRT}{S}, \end{aligned} \quad (7)$$

pričom $\frac{nRT}{S}$ je konštanta pre danú kapiláru.

Zo vzťahu (7) vyplýva, že ak platí Boylov-Mariottov zákon, potom na rôzne polohy Meldeho trubice musí ľavá strana rovnice (7) dávať stále rovnakú hodnotu.

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky : Meldeho trubica, dĺžkové meradlo, barometer, teplomer.

Postup : Pri rôznych polohách (natočeniach) Meldeho trubice bude treba merať dĺžku vzduchového stĺpca L ako i výšky h_1 a h_2 od vodorovnej roviny. Meranie budeme viackrát opakovať tak, aby otvorený koniec trubice opísal uhol 2π . Pre každú polohu vypočítajte hodnotu ľavej strany rovnice (7). Na základe analýzy získaných výsledkov skonštatujte, či sa podarilo potvrdiť platnosť Boylovho-Mariottovho zákona. Navrhnite postup na odhad neistoty, ktorou ste potvrdili platnosť Boylovho-Mariottovho zákona.

Pretože platnosť Boylovho-Mariottovho zákona predpokladá konštantnú teplotu plynu, treba pri každej zmene polohy trubice počkať určitý čas, kým sa teplota plynu v trubici nevyrovná s okolím.

Pred začiatkom a po ukončení experimentov s trubicou zmerajte teplotu a tlak v laboratóriu. Kvôli presnejším výsledkom merania musíme do výpočtov dosadiť aj presnejšiu hodnotu hustoty ortuti, t.j. zohľadniť aj vplyv teploty. Táto závislosť je uvedená v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka : Hustota ortuti v závislosti od teploty

$t (^{\circ}\text{C})$	$\rho (\text{kg.m}^{-3})$	$t (^{\circ}\text{C})$	$\rho (\text{kg.m}^{-3})$
10	13 570,4	20	13 545,7
11	13 567,9	21	13 543,3
12	13565,4	22	13 540,8
13	13 563,0	23	13 538,4
14	13 560,5	24	13 535,5
15	13 588,0	25	13 533,5
16	13 555,6	26	13 531,0
17	13 553,1	27	13 528,6
18	13 550,7	28	13 526,1
19	13 548,2	29	13 523,7

Faktory ovplyvňujúce priebeh merania a vyhodnotenie: Treba si uvedomiť, či boli počas experimentu splnené všetky predpoklady, na základe ktorých bol Boylov-Mariottov zákon odvodený.

ÚLOHY A OTÁZKY

1. Je možné úlohu zrealizovať aj nahradením ortuti inou látkou? Svoju odpoveď zdôvodnite.
V prípade kladnej odpovede uveďte názov alternatívneho materiálu k ortuti.
2. Vysvetlite vplyv zmeny teploty v miestnosti na presnosť realizovaného experimentu.
3. Je potrebné výpočet výsledného tlaku upraviť v závislosti od polohy kapiláry?
Konštatovanie zdôvodnite.

6.8 URČENIE POMERU MOLÁRNYCH TEPELNÝCH KAPACÍT PLYNU METÓDOU CLÉMENTOVOU-DESORMESOVOU

Cieľ

Experimentálne zmerať pomer molárnych tepelných kapacít plynu a stanoviť neistotu merania.

Teoretický úvod

Poissonova konštanta je definovaná ako podiel molárnej tepelnej kapacity pri konštantnom tlaku C_p a molárnej tepelnej kapacity pri konštantnom tlaku C_v :

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v}. \quad (1)$$

Molárna tepelná kapacita je množstvo tepla, ktoré je potrebné dodať 1 mólu plynu ($N_A=6,023 \cdot 10^{23}$ častíc), aby sa ohrial o jeden kelvin či už pri konštantnom objeme, resp. pri konštantnom tlaku:

$$C_v = \frac{1}{n} \cdot \frac{dQ}{dT} \Big|_{V=\text{konšt}} \quad \text{resp.} \quad C_p = \frac{1}{n} \cdot \frac{dQ}{dT} \Big|_{p=\text{konšt}}, \quad (2)$$

kde n je tzv. látkové množstvo (počet mólov).

Na pochopenie nasledujúceho textu je potrebné poznať stavovú rovnicu ideálneho plynu a prvú termodynamickú vetu. Stavová rovnica ideálneho plynu sa uvádza v jednom z nasledujúcich tvarov:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T, \quad \text{resp.} \quad p \cdot V = N \cdot k \cdot T, \quad (3)$$

kde p je tlak plynu, V objem, T termodynamická teplota (udávaná v kelvinoch), n látkové množstvo, N počet častíc plynu, R molárna plynová konštanta a k je Boltzmannova konštanta.

Niekedy sa stavová rovnica zapisuje i v nasledovnom tvare:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{konšt}. \quad (4)$$

Stav plynu sa môže meniť za rôznych podmienok. Hovoríme potom o rôznych dejoch v plynch: izochorický dej (nedochádza ku zmenám objemu), izobarický dej (nedochádza ku zmenám tlaku), izotermický dej (nedochádza ku zmenám teploty).

Prvá termodynamická veta hovorí, že teplo dQ dodané plynu sa môže spotrebovať na zvýšenie vnútornej energie o hodnotu dU a (alebo) na vykonanie práce dW .

$$dQ = dU + p \cdot dV \quad (5)$$

Ak nedochádza k výmene tepla s okolím, potom hovoríme, že v plyne prebieha tzv. adiabatický dej ($dQ=0$). Analýzou rovnice (5) je možné prísť k záveru, že pri adiabatickom rozpínaní (expanzii) plyn vykoná prácu a nakoľko nemôže získať teplo z okolia, celá práca sa vykoná na úkor vnútornej energie plynu. Výsledkom je zníženie teploty plynu.

Adiabatický dej je možné popísať rovnicou:

$$p \cdot V^\kappa = \text{konšt}, \quad (6)$$

kde κ je Poissonova konštanta.

Meranie Poissonovej konštanty je možné uskutočniť na základe pomerne jednoduchého experimentu. Podstata metódy vyplýva z nasledujúceho teoretického popisu. Z tepelne neizolovanej nádoby s objemom V , v ktorej bol na začiatku plyn s tlakom p (väčším než atmosferickým) a s termodynamickou teplotou T , náhle uniklo isté množstvo plynu. Následkom toho klesol tlak v nádobe na hodnotu p_0 . Nakoľko únik plynu bol pomerne rýchly, je možné uvedený proces považovať za adiabatický. Je možné skonštatovať, že nestihlo dôjsť k výmene tepla medzi plynom unikajúcim z nádoby a okolitým prostredím.

V dôsledku adiabetickej expanzie došlo k ochladeniu plynu v nádobe. Po krátkom čase, po uzatvorení nádoby cez steny nádoby plyn prijme teplo, následkom čoho sa termodynamická teplota v nádobe ustáli na pôvodnej hodnote T . Nakoľko spomínaný proces prebieha v uzatvorenej nádobe, je možné tento dej považovať za izochorický (nemení sa pri ňom objem). V dôsledku toho tlak v nádobe narastie na hodnotu p_1 .

V popísanom postupe je z hľadiska fyzikálneho možné identifikovať dva deje:

A) adiabatickú expanziu plynu z nádoby:

$$p, V, T \rightarrow p_0, V_0, T_0,$$

kde p, V, T sú stavové veličiny popisujúce stav plynu pred únikom z nádoby

a p_0, V_0, T_0 sú stavové veličiny popisujúce stav plynu po expanzii z nádoby.

Je potrebné si uvedomiť, že objem V_0 je objem, do ktorého sa plyn rozopol a $T_0 < T$.

B) izochorický ohrev plynu cez nezaizolované steny nádoby:

$$p_0, V, T_0 \rightarrow p_1, V, T,$$

kde p_0, V, T_0 sú stavové veličiny popisujúce stav plynu tesne po expanzii z nádoby

a p_1, V, T sú stavové veličiny popisujúce stav plynu po istom čase, keď nastala výmena tepla s okolím. Je potrebné si uvedomiť, že v tomto prípade uvažujeme len o objeme plynu V , teda o plyne, ktorý zostal v nádobe po expanzii a následnom uzatvorení nádoby.

Prvý dej (A) je možné opísať nasledujúcimi rovnicami, a to rovnicou adiabaty a stavovou rovnicou:

$$p \cdot V^\kappa = p_0 \cdot V_0^\kappa, \quad (7)$$

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0}. \quad (8)$$

Druhý dej (B)- izochorický je možné popísať rovnicou

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T}. \quad (9)$$

Vyjadrením teploty T_0 z rovnice (9), dosadením do rovnice (8) je možné vyjadriť objem, do ktorého plyn expanduje:

$$V_0 = \frac{p}{p_1} \cdot V. \quad (10)$$

Po dosadení (10) do rovnice (7) je možné napísať

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{p}{p_1} \right)^\kappa. \quad (11)$$

Resp. po zlogaritmovaní :

$$\kappa = \frac{\ln \frac{p}{p_0}}{\ln \frac{p}{p_1}}. \quad (12)$$

Z výsledku (12) je zrejmé, že hodnotu Poissonovej konštanty je možné určiť na základe merania hodnôt tlakov p , p_0 , p_1 , čiže tlaku v nádobe pred expanziou p , tlaku tesne po expanzii p_0 a tlaku po následnom vyrovnaní teplôt s okolím p_1 . Prakticky expanzia prebieha pomerne rýchlo a je možné predpokladať, že tlak klesne až na hodnotu atmosférického, čiže $p_0 = p_a$.

Hodnoty tlakov p a p_1 , je možné určiť pomocou kvapalinového manometra, ktorý tvorí U-trubica naplnená kvapalinou hustoty ρ . Pomocou manometra je možné určiť hodnoty pretlaku voči barometrickému tlaku

$$\Delta p = p - p_a, \text{ resp. } \Delta p_1 = p_1 - p_a, \quad (13)$$

$$\Delta p = h \cdot \rho \cdot g, \text{ resp. } \Delta p_1 = h_1 \cdot \rho \cdot g, \quad (14)$$

kde h resp. h_1 sú výšky stĺpca kvapaliny v barometri (obr. č.1).

S využitím uvedených skutočností vzťah (12) bude mať tvar

$$\kappa = \frac{\ln \frac{p_a + \Delta p}{p_a}}{\ln \frac{p_a + \Delta p}{p_a + \Delta p_1}} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta p}{p_a} \right)}{\ln \left(1 + \frac{\Delta p}{p_a} \right) - \ln \left(1 + \frac{\Delta p_1}{p_a} \right)}. \quad (15)$$

Pretože $\frac{\Delta p}{p_a} \ll 1$ a $\frac{\Delta p_1}{p_a} \ll 1$, je možné rovnicu (15) po rozvoji do Taylorovho radu napísať v tvare

$$\kappa = \frac{\frac{\Delta p}{\rho_a}}{\frac{\Delta p}{\rho_a} - \frac{\Delta p_1}{\rho_a}} = \frac{\Delta p}{\Delta p - \Delta p_1} = \frac{h \cdot \rho \cdot g}{h \cdot \rho \cdot g - h_1 \cdot \rho \cdot g} = \frac{h}{h - h_1} \quad (16)$$

Z uvedeného riešenia vyplýva výsledný výraz na výpočet Poissonovej konštanty

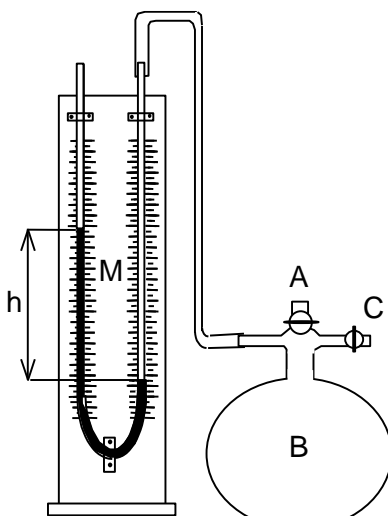
$$\kappa = \frac{h}{h - h_1} \quad (17)$$

Výsledný vzťah (17) je možné prepísať do nasledujúceho tvaru, ktorý umožňuje pracovať s experimentálnymi výsledkami ako s lineárnou závislosťou:

$$h_1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot h \quad (18)$$

Experimentálna časť

Prístroje a pomôcky : sklená banka, manometer, barometer



Obr.1 Zariadenie na experimentálne určenie hodnoty Poissonovej konštanty - sklená banka B napojená na manometer M(U-trubica) s dvomi ventilmi: ventil A – na natlakovanie banky, ventil C na rýchle vypustenie plynu z banky

Postup

Na začiatku a na konci experimentu zmeriame barometrický tlak. Ak sa počas merania zmenil, počítame s priemernou hodnotou. Hustilkou pripojenou k ventilu A nahustíme do banky B vzduch. Počkáme, kým sa hladiny kvapalinového stĺpca v ramenách manometra ustália, a odčítame rozdiel hladín h , potom nakrátko otvoríme ventil C a hneď ho zase

zavrieme. Po vyrovnaní teploty vzduchu v banke s teplotou okolia, čo poznáme z ustálenia kvapalinového stĺpca v ramenách manometra, odčítame nový rozdiel hladín h_1 . Meranie opakujeme 10-krát a namerané hodnoty zapisujeme do pripravenej tabuľky. Ak tieto merania budeme aplikovať na rôzne hodnoty počiatkových tlakov p (tj. rôzne hodnoty h), získame závislosť h_1 od h , ktorá zodpovedá vzťahu (18).

Pre rôzne namerané hodnoty výšok h , h_1 na základe vzťahu (17) je možné určiť hodnoty κ . Výsledné hodnoty je možné ohodnotiť pomocou štatistických metód ako veličinu, ktorá bola určená priamym meraním. To znamená určiť aritmetický priemer hodnôt κ a neistotu typu A (odkaz - kapitola 3.2).

Spracovať experimentálne získané údaje môžeme i pomocou metódy najmenších štvorcov. Pri spracovaní nameraných výsledkov pomocou metódy najmenších štvorcov (pozri kapitola 4. Metóda najmenších štvorcov) je potrebné si uvedomiť, že vzťah (18) vyjadruje lineárnu závislosť medzi výškou h stĺpca v U-trubici pred vypustením vzduchu a výškou h_1 stĺpca po ustálení teploty v sklenej banke. Pri porovnaní vzťahu (18) so závislosťou $y = ax + b$, kde a a b sú konštanty, je možné h_1 stotožniť so závislou y -ovou premenou ($h_1 = y$) a h s nezávislou x -ovou premenou ($h = x$). Na základe tejto úvahy je zrejmé, že parameter $a = \frac{\kappa - 1}{\kappa}$, parameter $b = 0$. Koeficienty priamky a , b je možné určiť na základe vzťahov (4.9) a (4.10).

Faktory ovplyvňujúce priebeh merania a vyhodnotenie: Pri experimentálnom meraní je potrebné si uvedomiť, že počas experimentu môže prísť ku zmene barometrického tlaku. Väčšinou sa považuje za dostatočné, keď je barometrický tlak určený na laboratórnom barometri pred meraním a po meraní. V prípade, že nastala počas experimentu zmena tlakových pomerov, počítame s priemernou hodnotou z týchto meraní. Pri odčítavaní výšok stĺpcov v U-trubici treba počkať na ustálenie hladín s ohľadom na presnosť odčítania.

Úlohy a otázky

1. Skúste vytypovať možné zdroje neistôt Clémentovej-Desormesovej metódy.
2. Vysvetlite dôvod, prečo je potrebné počas experimentu opakovane určiť hodnotu barometrického tlaku s ohľadom na skutočnosť, že vo vzťahu (17) na výpočet Poissonovej konštanty hodnota barometrického tlaku nevystupuje.
3. Porovnajte výsledok určenia Poissonovej konštanty pomocou vzťahu (12) a (17).
4. Vysvetlite fyzikálny význam Poissonovej konštanty.
5. Uvedte, kedy pri našom experimente prebieha adiabatický dej a zdôvodnite to.

6.9 MERANIE HORIZONTÁLNEJ ZLOŽKY VEKTORA INTENZITY MAGNETICKÉHO POĽA ZEME POMOCOU TANGENTOVEJ BUZOLY

Cieľ úlohy

Experimentálne zmerať horizontálnu zložku vektora intenzity magnetického poľa Zeme.

Teoretický úvod

Intenzitu magnetického poľa v okolí ľubovoľného vodiča s prúdom je možné vypočítať pomocou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (1)$$

kde:

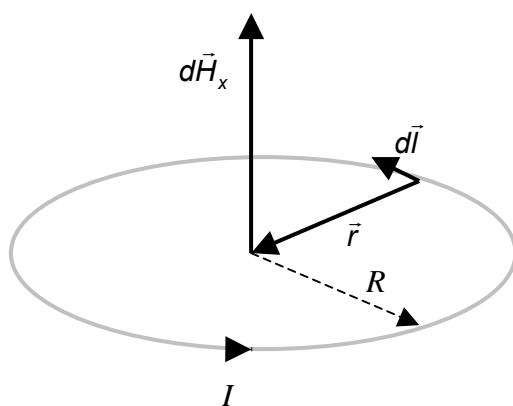
I je prúd prechádzajúci vodičom,

$d\vec{l}$ je dĺžkový element vodiča orientovaný v smere prúdu,

\vec{r} je polohový vektor, ktorý začína v elemente vodiča $d\vec{l}$ a končí v mieste, v ktorom určujeme intenzitu magnetického poľa a

$d\vec{H}$ je príspevok k celkovej intenzite od dĺžkového elementu vodiča $d\vec{l}$.

Pomocou vzťahu (1) vypočítame intenzitu v strede kruhového závitú s polomerom R , ktorým preteká prúd I (Obr. 1).



Obr. 1 Výpočet intenzity magnetického poľa kruhového závitú s polomerom R , ktorým preteká prúd I ($d\vec{H}_x$ je príspevok k výslednej intenzite magnetického poľa budeného pretekajúcim prúdom I cez elementárny úsek vodiča $d\vec{l}$, \vec{r} je polohový vektor začínajúci v elemente vodiča a končiaci v mieste, kde určujeme výsledné magnetické pole, v tomto prípade je ním stred kruhového závitú)

Veľkosť príspevku k celkovej intenzite magnetického poľa kruhového závitu je možné vyjadriť pomocou zákona (1):

$$dH_x = \frac{I \cdot dl \cdot r \cdot \sin \alpha}{4\pi \cdot r^3}, \quad (2)$$

kde α je uhol medzi vektormi \vec{dl} a \vec{r} . Z obr. 1 je zrejmé, že $\alpha = 90^\circ$ a veľkosť vektora \vec{r} je rovná veľkosti polomeru kruhového závitu R .

$$dH_x = \frac{I \cdot dl}{4\pi \cdot R^2}. \quad (3)$$

Výsledkom integrácie cez celú dĺžku kruhového závitú je intenzita magnetického poľa kruhového závitú

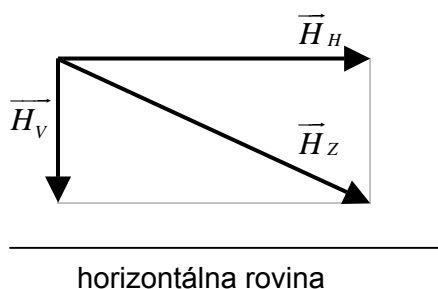
$$H_x = \frac{I}{4\pi \cdot R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{I}{2R}. \quad (4)$$

Pre prípad „tenkej“ cievky, pozostávajúcej z N závitov navinutých na dĺžke výrazne menšej než polomer jej závitov je možné vyjadriť veľkosť intenzity magnetického poľa cievky H_C :

$$H_C = \frac{NI}{2R}. \quad (5)$$

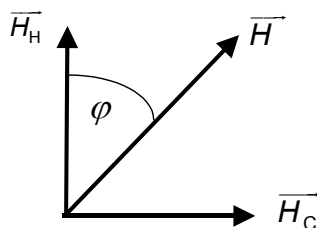
Smer a orientácia vektora intenzity je zrejماً z analýzy vektorového súčinu vo vzťahu (1). Smer vektora magnetického poľa cievky na jej osi bude v smere osi cievky (kolmice na rovinu závitú prechádzajúca stredom kružnice tvoriacej závit). Orientácia vektora intenzity je závislá od smeru prúdu pretekajúceho závitom (Obr. 1).

Zemeguľu možno považovať za permanentný magnet. Smer vektora intenzity zemského magnetického poľa \vec{H}_Z zvierá s horizontálnou (vodorovnou) rovinou určitý uhol. (Pozn. Smer vektora \vec{H}_Z tvorí dotyčnicu k magnetickej indukčnej čiare magnetického poľa Zeme). Vektor intenzity magnetického poľa Zeme je možné rozložiť na horizontálnu \vec{H}_H a vertikálnu zložku \vec{H}_V . (Obr. 2)



Obr. 2. Zobrazenie rozkladu vektora intenzity magnetického poľa Zeme na horizontálnu (vodorovnú) a vertikálnu zložku

V prípade, že „tenkou“ cievkou preteká elektrický prúd a cievka sa nachádza v magnetickom poli Zeme, na strelku magnetky pôsobia súčasne dve magnetické polia. A to magnetické pole cievky \vec{H}_C a spomínané magnetické pole Zeme, ktoré sa s ohľadom na skutočnosť, že magnetka sa môže otáčať len v horizontálnej rovine, prejaví pôsobením horizontálnej zložky vektora intenzity zemského magnetického poľa \vec{H}_H . Pri vhodnom experimentálnom usporiadaní je možné docieľiť stav, keď vektory týchto magnetických polí budú na seba kolmé (Obr.3).



Obr. 3. Ustálenie magnetky tangentovej buzoly do smeru výslednice \vec{H} magnetického poľa cievky \vec{H}_C a horizontálnej zložky magnetického poľa Zeme \vec{H}_H , vektory \vec{H} a \vec{H}_H zvierajú uhol φ

Magnetka sa ustáli do smeru výslednice \vec{H} vektorov magnetického poľa cievky \vec{H}_C a horizontálnej zložky vektora intenzity magnetického poľa Zeme \vec{H}_H :

$$\vec{H} = \vec{H}_H + \vec{H}_C . \quad (6)$$

Pri dodržaní podmienky kolmosti vektorov \vec{H}_C a \vec{H}_H z obr. 3 vyplýva:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H_C}{H_H} . \quad (7)$$

Po dosadení zo vzťahu (5) je možné pre horizontálnu zložku vektora intenzity magnetického poľa Zeme napísať:

$$H_H = \frac{NI}{2R \cdot \operatorname{tg} \varphi} . \quad (8)$$

Vzťah (8) je možné prepísať do tvaru:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{N}{2RH_H} \cdot I , \quad (9)$$

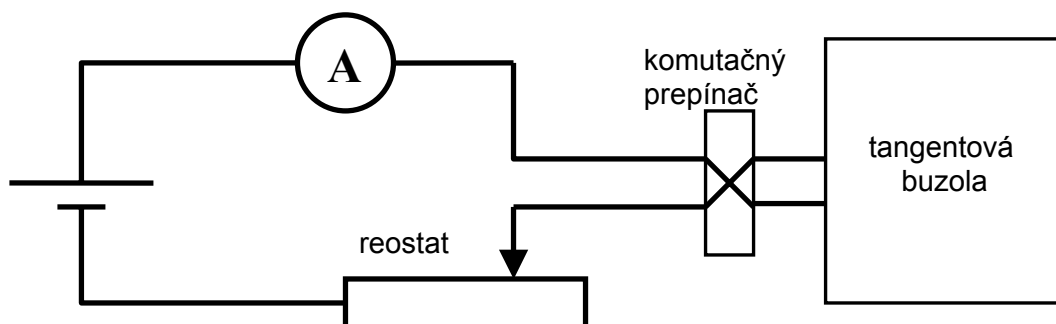
ktorý vyjadruje lineárnu závislosť medzi prúdom I pretekajúcim v cievke a uhlom φ , o ktorý sa cievka vychýli od smeru magnetického meridiánu (smeru sever - juh).

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky : Tangentová buzola (pozostáva z tenkej cievky, ktorej polomer navinutia je ďaleko väčší než dĺžka, na ktorej je navinutá, v jej strede na osi cievky je umiestnená magnetka, strelka magnetky má možnosť sa otáčať okolo vertikálnej osi v horizontálnej rovine), ampérmeter, komutačný prepínač, zdroj jednosmerného napätia, reostat, prepojovacie drôty.

Postup

1. Urobíme zapojenie podľa schémy na obr. 4. Tangentovú buzolu nastavíme tak, aby os cievky bola kolmá na smer magnetického poľa Zeme (kolmá na smer sever - juh podľa strelky magnetky, samozrejme v prípade, ak nebude cievkou pretekať elektrický prúd).



Obr. 4. Schéma elektrického zapojenia na experimentálne meranie určovania veľkosti horizontálnej zložky vektora magnetického poľa Zeme pomocou tangentovej buzoly

2. Vykonáme meranie závislosti uhla odklonu φ strelky magnetky od smeru meridiánu v závislosti od prechádzajúceho elektrického prúdu I . Uhol φ odčítame na stupnici buzoly. Elektrický prúd I určíme meraním na ampérmetri zapojenom v obvode s cieľom dosiahnuť čo najvyššiu presnosť merania (pozri kapitolu 5. Použitie meradiel a meracích prístrojov).

Na zlepšenie presnosti merania je vhodný postup použitím komutačného prepínača meniť smer prúdu prechádzajúceho cievkou, čo má za následok zmenu orientácie magnetického poľa cievky. Takto je možno doceliť výchylky strelky magnetky do opačných strán. Jeden z možných pracovných postupov je ten, že pomocou reostatu sa nastaví výchylka uhla φ_1 na požadovanú hodnotu, určí sa prechádzajúci elektrický prúd a následne po prepnutí komutačného prepínača sa určí výchylka uhla φ_2 do opačnej strany. Výchylka φ sa určí ako aritmetický priemer nameraných hodnôt.
$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

3. Namerané hodnoty uhla odklonu φ strelky magnetky a prúdu I spracujeme na základe vzťahu (9) pomocou metódy najmenších štvorcov (pozri kapitolu 4. Metóda najmenších štvorcov).

Pri spracovaní nameraných výsledkov pomocou metódy najmenších štvorcov je potrebné si uvedomiť, že vzťah

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{N}{2R \cdot H_H} \cdot I,$$

vyjadruje lineárnu závislosť medzi elektrickým prúdom I pretekajúcim v cievke a tangensom uhla φ , o ktorý sa strelka vychýli od smeru magnetického meridiánu. Porovnaním vzťahu (9) so závislosťou $y = ax + b$, kde a a b sú konštanty, je možné $\operatorname{tg} \varphi$ stotožniť so závislou y -ovou premenou ($\operatorname{tg} \varphi = y$) a elektrický prúd I s nezávislou x -ovou premenou ($I = x$). Na základe tejto úvahy je zrejmé, že parameter $a = \frac{N}{2R \cdot H_H}$ a parameter $b = 0$. Koeficienty priamky a , b je možné určiť na základe vzťahov (4.9) a (4.10).

Faktory ovplyvňujúce priebeh merania a vyhodnotenie: Pri experimentálnom meraní je potrebné nastaviť tangentovú buzolu tak, aby os cievky bola kolmá na smer magnetického poľa Zeme. Odčítavanie odchýlky φ strelky magnetky je náročné na pozornosť experimentátora. Je potrebné tiež dbať na správne určenie nameranej hodnoty elektrického prúdu pri odčítaní z ampérmetra. Namerané údaje môžu byť ovplyvnené ďalšími magnetickými poľami.

Otázky a úlohy

1. Vysvetlite dôvod experimentálnej podmienky, aby vektor intenzity magnetického poľa cievky \vec{H}_C a vektor intenzity horizontálnej zložky magnetického poľa Zeme \vec{H}_H zvierali pravý uhol.
Nie je možné i iné usporiadanie experimentu (máme na mysli skutočnosť, že by spomínané vektory neboli kolmé)? Uvedte, akým spôsobom by takáto zmena podmienok experimentu ovplyvnila spracovanie výsledkov.
2. Akú maximálnu výchylku magnetky možno v experimente nastaviť?
3. Ampérmeter, ktorého stupnica je rozdelená na 60 dielikov, ukazuje výchylku 38 dielikov.
Aká je hodnota a neistota elektrického meraného prúdu, ak je rozsah prístroja nastavený na hodnotu 300 mA a trieda presnosti udávaná výrobcom je 1?
4. Uvedte jednotku intenzity magnetického poľa v SI sústave.

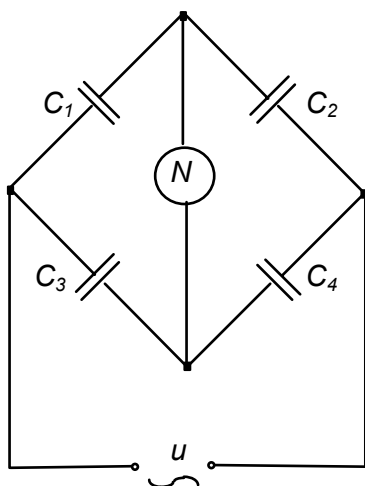
6.10 GRADUÁCIA OTOČNÉHO KONDENZÁTORA KAPACITNÝM MOSTÍKOM

Cieľ úlohy

Uskutočniť kalibráciu otočného kondenzátora pomocou viacerých normálových kondenzátorov.

Teoretický úvod

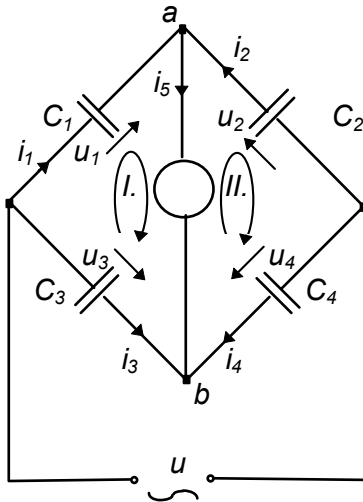
Pri graduácii otočného kondenzátora využijeme elektrický obvod nazývaný kapacitný mostík, zobrazený je na obr.1. Kapacitný mostík je elektrický obvod pozostávajúci zo šiestich vetiev. V štyroch vetvách tohto obvodu sú zaradené kondenzátory C_1 , C_2 , C_3 a C_4 . V jednej vetve je tzv. nulový indikátor N a v poslednej vetve je zdroj napätia u . Napätie je striedavé, a preto kapacitný mostík nazývame striedavý.



Obr.1

Vhodnou kombináciou kondenzátorov možno v uvedenom obvode dosiahnuť taký stav, pri ktorom nulovým indikátorom nepreteká elektrický prúd. Vtedy hovoríme, že mostík je vyrovnaný. Riešením daného obvodu nájdeme podmienku, ktorú musia spĺňať kapacity kondenzátorov C_1 až C_4 , aby mostík bol vyrovnaný.

Pri riešení obvodu znázorneného na obr.1 musíme vychádzať z Kirchhoffových zákonov. Zvolíme smery prúdov pretekajúcich kondenzátormi a nulovým indikátorom a označíme ich i_1 až i_5 (pozri obr.2). Keďže napätie zdroja zaradeného do obvodu závisí od času τ , bude i veľkosť prúdov v jednotlivých vetvách časovo závislá. Napätia na pasívnych prvkoch obvodu (na kondenzátoroch), ktoré sú označené u_1 až u_4 , majú v každom časovom okamihu taký istý smer ako prúdy v príslušných vetvách obvodu.



Obr:2

Z prvého Kirchhoffovho zákona aplikovaného na uzol *a* i uzol *b* (pozri obr.2) vyplýva, že v každom časovom okamihu τ musí platiť:

$$i_1(\tau) + i_2(\tau) - i_5(\tau) = 0 \quad , \quad (1)$$

$$i_3(\tau) + i_4(\tau) + i_5(\tau) = 0 \quad . \quad (2)$$

Ak je mostík vyrovnaný, potom v ľubovoľnom čase τ platí

$$i_5(\tau) = 0 \quad (3)$$

a rovnice (1) a (2) prejdú do tvaru

$$i_1(\tau) + i_2(\tau) = 0 \quad , \quad (4)$$

$$i_3(\tau) + i_4(\tau) = 0 \quad . \quad (5)$$

Pre kapacitu kondenzátora vo všeobecnosti platí

$$C = \frac{Q(t)}{u(t)} \quad , \quad (6)$$

kde $Q(t)$ a $u(t)$ je elektrický náboj na elektródach, resp. napätie medzi elektródami kondenzátora v ľubovoľnom čase t . Z rovnice (6) ľahko vyjadríme napätie medzi elektródami kondenzátora $u(t)$:

$$u(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad . \quad (7)$$

V každom časovom okamihu t pre napätia na elektródach jednotlivých kondenzátorov v obvode znázornenom na obr. 2 platí:

$$u_1(t) = \frac{Q_1(t)}{C_1}, \quad u_2(t) = \frac{Q_2(t)}{C_2}, \quad u_3(t) = \frac{Q_3(t)}{C_3}, \quad u_4(t) = \frac{Q_4(t)}{C_4}. \quad (8)$$

Z druhého Kirchhoffovho zákona aplikovaného na slučky *I.* a *II.* (pozri obr.2) vyplýva, že v ľubovoľnom čase *t* musia byť splnené nasledujúce podmienky:

$$u_1(t) - u_3(t) = 0, \quad (9)$$

$$-u_2(t) + u_4(t) = 0. \quad (10)$$

Dosadením pravých strán vzťahov (8) do rovníc (9) a (10) dostávame nasledovné výrazy:

$$\frac{Q_1(t)}{C_1} - \frac{Q_3(t)}{C_3} = 0, \quad (11)$$

$$-\frac{Q_2(t)}{C_2} + \frac{Q_4(t)}{C_4} = 0, \quad (12)$$

ktoré platia v každom časovom okamihu *t*. Na ľavých stranách rovníc (11) a (12) sú funkcie, ktorých nezávisle premennou je čas *t* a ich funkčné hodnoty sú pre každé *t* rovné nule. Ak uvedené rovnice (11) a (12) zderivujeme podľa *t*, dostaneme:

$$\frac{1}{C_1} \frac{dQ_1}{dt} - \frac{1}{C_3} \frac{dQ_3}{dt} = 0, \quad (13)$$

$$-\frac{1}{C_2} \frac{dQ_2}{dt} + \frac{1}{C_4} \frac{dQ_4}{dt} = 0. \quad (14)$$

Uvážili sme, že kapacity jednotlivých kondenzátorov sú konštantné. Časové zmeny elektrických nábojov *Q*₁ až *Q*₄, reprezentované v predchádzajúcich rovniciach príslušnými deriváciami, predstavujú elektrické prúdy pretekajúce jednotlivými vetvami obvodu znázorneného na obr. 2, t.j. platí:

$$\frac{dQ_1}{dt} = i_1(\tau), \quad \frac{dQ_2}{dt} = i_2(\tau), \quad \frac{dQ_3}{dt} = i_3(\tau), \quad \frac{dQ_4}{dt} = i_4(\tau). \quad (15)$$

Ak dosadíme vzťahy (15) do rovníc (13) a (14) dostaneme výrazy:

$$\frac{i_1(\tau)}{C_1} - \frac{i_3(\tau)}{C_3} = 0, \quad (16)$$

$$-\frac{i_2(\tau)}{C_2} + \frac{i_4(\tau)}{C_4} = 0. \quad (17)$$

Ak je mostík vyrovnaný, potom z rovníc (4) a (5) vyplýva, že pre elektrické prúdy *i*₁ a *i*₃ platí:

$$i_1(\tau) = -i_2(\tau), \quad (18)$$

$$i_3(\tau) = -i_4(\tau). \quad (19)$$

Pravé strany výrazov (18) a (19) dosadíme za elektrické prúdy *i*₁ a *i*₃ do vzťahu (16) a dostávame rovnicu

$$-\frac{i_2(\tau)}{C_1} + \frac{i_4(\tau)}{C_3} = 0, \quad (20)$$

z ktorej vyplýva, že:

$$\frac{i_2(\tau)}{i_4(\tau)} = \frac{C_1}{C_3}. \quad (21)$$

Pri vyrovnanom mostíku teda platí, že pomer veľkostí elektrických prúdov i_2 a i_4 je v každom časovom okamihu rovný pomeru kapacít C_2 a C_4 .

Z rovnice (17) však vyplýva, že platí:

$$\frac{i_2(\tau)}{i_4(\tau)} = \frac{C_2}{C_4}. \quad (22)$$

Keďže sa rovnajú ľavé strany rovníc (21) a (22), musia sa rovnať i pravé strany týchto rovníc, t.j., musí platiť:

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}. \quad (23)$$

Mostík je teda vyrovnaný a nulovým indikátorom nepreteká elektrický prúd práve vtedy, keď kapacity kondenzátorov, zaradených v jednotlivých vetvách kapacitného mostíka, spĺňajú vzťah (23).

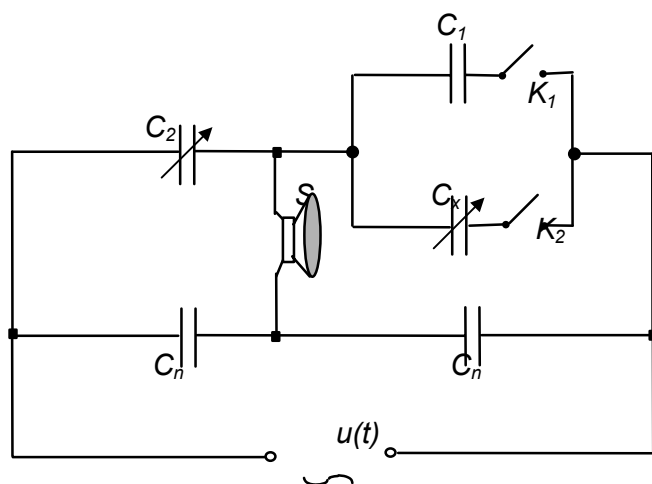
Platnosť vzťahu (23) je možné využiť pri meraní kapacity neznámeho kondenzátora ako i pri kalibrácii otočných kondenzátorov.

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky: normálový kondenzátor známej elektrickej kapacity C_1 , otočný kondenzátor C_2 , graduovaný (kalibrovaný) otočný kondenzátor C_x s uhlomerom, rovnaké kondenzátory C_n , regulovateľný zdroj striedavého napätia, kľúče K_1 a K_2 , slúchadlo, vodiče.

Postup

1. Zapojíme obvod, znázornený na obr.3. Obvod na obr.3 je kapacitný mostík. V dvoch vetvách uvedeného mostíka sa nachádzajú rovnaké kondenzátory s ľubovoľnou elektrickou kapacitou C_n . V tretej vetve je otočný kondenzátor C_2 a vo štvrtej je paralelné zapojenie dvoch kondenzátorov - kondenzátora známej elektrickej kapacity C_1 a graduovaného otočného kondenzátora C_x . Výsledná elektrická kapacita tohto paralelného zapojenia teda bude $C_1 + C_x$.



Obr.3

Nulovým indikátorom v mostíku znázornenom na obr.3 je slúchadlo S. Frekvenciu striedavého zdroja napätia $u(t)$ je možné regulovať, čo spôsobuje zmenu výšky tónu v slúchadle. Ak je mostík vyrovnaný, potom slúchadlom nepreteká elektrický prúd a nie je v ňom počuť žiadny zvuk.

- Po zapojení obvodu nastavíme frekvenciu striedavého zdroja tak, aby zvuk v slúchadle bolo zreteľne počuť. Zapojíme kľúč K_1 , odpojíme kľúč K_2 a následne vyrovnáme mostík otočným kondenzátorom C_2 . Odpojením kľúča K_2 sme vyradili graduovaný kondenzátor z paralelného zapojenia a v danej vetve zostane iba normálový kondenzátor známej elektrickej kapacity C_1 . Podľa vzťahu (23) po vyrovnaní takto zapojeného mostíka platí:

$$\frac{C_2}{C_n} = \frac{C_1}{C_n} ,$$

resp.:

$$C_2 = C_1 .$$

Po vyrovnaní mostíka teda otočný kondenzátor C_2 bude nastavený tak, aby jeho elektrická kapacita bola rovnaká ako známa elektrická kapacita normálového kondenzátora C_1 .

- Odpojíme kľúč K_1 , zapojíme kľúč K_2 a vyrovnáme mostík otočným kondenzátorom C_x . Po vyrovnaní bude podľa (23) hodnota elektrickej kapacity kondenzátora C_x rovnaká ako elektrická kapacita kondenzátora C_2 . Keďže C_2 bol v bode 2 nastavený na hodnotu C_1 , po vyrovnaní kondenzátorom C_x bude platiť:

$$C_x = C_1 .$$

Na uhlomere otočného kondenzátora C_x odčítame uhol α_1 , na ktorý je tento kondenzátor nastavený a zapíšeme ho do tabuľky. Uvedenému uhlu α_1 zodpovedá elektrická kapacita C_1 .

4. Kľúč K_2 necháme zapojený, zapojíme i kľúč K_1 a vyrovnáme mostík kondenzátorom C_2 . Po zapojení oboch kľúčov je výsledná elektrická kapacita paralelného zapojenia kondenzátorov rovná súčtu ich kapacít. V danom prípade je teda rovná $C_x + C_1 = 2C_1$. Po nasledujúcom vyrovnaní mostíka kondenzátorom C_2 bude podľa (23) pre elektrickú kapacitu tohto kondenzátora platiť:

$$C_2 = 2C_1 .$$

5. Odpojíme kľúč K_1 , kľúč K_2 necháme zapojený a mostík vyrovnáme kondenzátorom C_x . Po vyrovnaní bude podľa (23) hodnota elektrickej kapacity kondenzátora C_x opäť rovnaká ako kapacita kondenzátora C_2 . Keďže C_2 bol v bode 4. nastavený na hodnotu $2C_1$, po vyrovnaní kondenzátorom C_x bude platiť:

$$C_x = 2C_1 .$$

Na uhlomere otočného kondenzátora C_x opäť odčítame uhol α_2 , na ktorý je tento kondenzátor nastavený a zapíšeme ho do tabuľky. Uvedenému uhlu α_2 zodpovedá elektrická kapacita $2C_1$.

6. Zapojíme kľúč K_1 , kľúč K_2 necháme zapojený. Paralelná kombinácia kondenzátorov C_1 a C_x bude mať elektrickú kapacitu $C_x + C_1 = 3C_1$. Mostík vyrovnáme kondenzátorom C_2 . Po vyrovnaní bude pre elektrickú kapacitu tohto kondenzátora platiť:

$$C_2 = 3C_1 .$$

7. Odpojíme kľúč K_1 , kľúč K_2 necháme zapojený a mostík vyrovnáme kondenzátorom C_x . Po vyrovnaní bude elektrická kapacita kondenzátora C_x opäť rovnaká ako elektrická kapacita kondenzátora C_2 . Keďže C_2 bol v bode 6 nastavený na hodnotu $3C_1$, po vyrovnaní mostíka kondenzátorom C_x bude platiť:

$$C_x = 3C_1 .$$

Na uhlomere otočného kondenzátora C_x opäť odčítame uhol α_3 , na ktorý je tento kondenzátor nastavený a zapíšeme ho do tabuľky. Uvedenému uhlu α_3 zodpovedá elektrická kapacita $3C_1$.

8. Uvedený postup viackrát opakujeme. Zapojíme oba kľúče, mostík vyrovnáme kondenzátorom C_2 . Potom odpojíme kľúč K_1 a vyrovnáme ho kondenzátorom C_x . Odčítame uhol na uhlomere uvedeného kondenzátora. Po n -tom opakovaní bude uvedenému uhlu zodpovedať elektrická kapacita:

$$C_x = n C_1 .$$

9. Výsledky zapíšte do tabuľky a vynesťe graficky závislosť elektrickej kapacity C_x od uhla α .
10. Meranie opakujte pri rôznych hodnotách elektrickej kapacity C_1 .
11. Výsledky vyhodnoťte metódou najmenších štvorcov a graficky vynesťe závislosť $C_x(\alpha)$.

Otázky a úlohy

1. Definujte elektrickú kapacitu kondenzátora.
2. Určte, od akých parametrov závisí elektrická kapacita rovinného kondenzátora.
3. Napíšte vzťah na výpočet elektrickej kapacity rovinného kondenzátora. Aké predpoklady musia byť splnené, aby bolo možné uvedený vzťah použiť ?
4. Podľa konštrukcie graduovaného kondenzátora určte, aká by mala byť závislosť jeho elektrickej kapacity od uhla pootočenia $C_x(\alpha)$ a porovnajte ju s nameranou závislosťou.
5. Ak do elektrického obvodu znázorneného na obr.1 zaradíme namiesto kondenzátorov rezistory, vznikne tzv. odporový mostík. Pomocou riešenia uvedeného v teoretickom úvode riešte odporový mostík a určte, aký musí byť vzťah medzi odpormi rezistorov, aby bol odporový mostík vyrovnaný.

6.11 MAPOVANIE ELEKTROSTATICKÉHO POĽA

Cieľ

Pomocou vodivej fólie alebo elektrolytickej vane uskutočnite mapovanie elektrostatického poľa.

Teoretický úvod

Zdrojom elektrického poľa je každý elektricky nabitý hmotný objekt (elektrický náboj). Elektrické pole je v každom mieste charakterizované intenzitou \vec{E} a elektrickým potenciálom φ . Množina bodov s rovnakým elektrickým potenciálom sa nazýva ekvipotenciála poľa. Čiaru, ku ktorej dotyčnice v každom bode určujú smer intenzity poľa, nazývame siločiaru poľa. Siločiaru sú v každom mieste kolmé na ekvipotenciály. Mapovať elektrické pole znamená zobraziť ekvipotenciály a siločiaru poľa. Experimentálne nie je možné elektrické pole mapovať priamo. Pri meraní totiž testovací elektrický náboj pôsobí na elektrické náboje, ktoré sú zdrojom mapovaného poľa, elektrickou silou a zapríčiňuje zmenu ich pohybového stavu – uvádza ich napr. zo stavu pokoja do pohybu. Pri mapovaní poľa však môžeme použiť nepriame metódy, ktoré sú založené na nasledujúcich úvahách.

Každý elektrický náboj, ktorý je zdrojom elektrického poľa, pri svojom pohybe generuje i pole magnetické. V okolí pohybujúcich sa elektrických nábojov vzniká tzv.

elektromagnetické pole pozostávajúce z dvoch zložiek - z poľa elektrického a magnetického. Magnetické pole je však relatívne, pretože pohybový stav elektrického náboja jednoznačne závisí od spôsobu voľby vzťažnej sústavy, v ktorej uskutočňujeme pozorovanie. Elektromagnetické pole sa pozorovateľovi javí rôzne v závislosti od jeho pohybového stavu vzhľadom na elektrické náboje. Charakter elektromagnetického poľa vznikajúceho v okolí sústavy elektrických nábojov v danej vzťažnej sústave závisí v každom časovom okamihu od ich aktuálneho priestorového rozloženia a pohybového stavu v tejto sústave.

Vlastnosti elektromagnetického poľa je možné opísať pomocou dvoch základných veličín - intenzity elektrického poľa \vec{E} a magnetickej indukcie \vec{B} . V závislosti od charakteru uvedených veličín je možné všetky makroskopicky pozorovateľné elektromagnetické polia rozdeliť do týchto skupín:

A. Stacionárne elektromagnetické pole - je to také pole, v ktorom sú veličiny \vec{E} a \vec{B} nezávislé od času. Vo všeobecnosti existujú tri typy stacionárnych elektromagnetických polí:

a) *Elektrostatické pole*, t.j. elektrické pole generované elektricky nabitými objektami, ktoré sú voči pozorovateľovi v pokoji. Uvedené pole je charakterizované tým, že intenzita elektrického poľa \vec{E} má v každom mieste uvedeného poľa konštantnú veľkosť i smer ($\vec{E} \neq \vec{0}$) a vo všetkých bodoch poľa je $\vec{B} = \vec{0}$, t.j. magnetické pole sa z hľadiska pozorovateľa v danom prípade neprejavuje.

b) *Magnetostatické pole*, t.j. magnetické pole permanentných magnetov. V takomto poli má magnetická indukcia \vec{B} v každom mieste poľa konštantnú veľkosť i smer ($\vec{B} \neq \vec{0}$) a vo všetkých bodoch poľa je $\vec{E} = \vec{0}$, čiže z hľadiska daného pozorovateľa sa neprejavuje pole elektrické.

c) *Stacionárne elektromagnetické pole prúdové*, t.j. stacionárne elektromagnetické pole generované vodičmi, ktorými preteká konštantný elektrický prúd. V tomto prípade pozorovateľ registruje okrem stacionárneho prúdového elektrického poľa ($\vec{E} \neq \vec{0}$) i stacionárne prúdové pole magnetické ($\vec{B} \neq \vec{0}$). Okrem uvedených dvoch veličín je v tomto poli možné definovať i ďalšiu vektorovú veličinu - hustotu elektrického prúdu \vec{j} .

B. Nestacionárne elektromagnetické pole - je to elektromagnetické pole, v ktorom sa veličiny \vec{E} a \vec{B} menia v závislosti od času.

Všeobecný matematický popis elektromagnetického poľa poskytujú Maxwellove rovnice:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

doplnené materiállovými vzťahmi

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (6)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (7)$$

kde ρ je objemová hustota elektrického náboja, \vec{j} hustota elektrického prúdu, \vec{D} je vektor elektrickej indukcie, \vec{H} je vektor intenzity magnetického poľa, γ je konduktivita prostredia, ε je permitivita prostredia a μ je permeabilita prostredia. Z rovníc (1) a (3) je možné odvodiť rovnicu kontinuity vyjadrujúcu zákon zachovania elektrického náboja:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0. \quad (8)$$

Horeuvedenú klasifikáciu makroskopických elektromagnetických polí možno v rovniciach (1) až (8) zohľadniť jednoduchým spôsobom.

V elektrostatickom poli bez voľných elektrických nábojov je:

$$\rho = 0, \quad \text{resp.} \quad \vec{j} = \vec{0} \quad (9)$$

a rovnice (1) až (4) s uvažovaním rovnice (6) možno v prípade takéhoto poľa prepísať do tvaru:

$$\text{div} \vec{D} = 0, \quad (10)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (12)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{0}, \quad (13)$$

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}. \quad (14)$$

V stacionárnom elektrickom prúdovom poli bez vnútených síl platí:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

čím rovnica kontinuity (8) v uvedenom poli nadobúda tvar:

$$\text{div} \vec{j} = 0. \quad (16)$$

Ako sa možno ľahko presvedčiť, pri formálnej zámene

$$\vec{D} \leftrightarrow \vec{j} \text{ a } \varepsilon \leftrightarrow \gamma, \quad (17)$$

prejde rovnica kontinuity v stacionárnom prúdovom poli (16) na rovnicu (10), ktorá charakterizuje pole elektrostatické. Podobne Ohmov zákon v diferenciálnom tvare (5) nadobudne tvar rovnice (6).

Vzhľadom na tvar uvedených rovníc je možné v rámci elektrostatického a stacionárneho prúdového poľa pozorovať jednoduchú matematickú analógiu. V zmysle uvedenej analógie

je možné poukázať i na formálnu podobnosť vzťahov pre elektrickú vodivosť G a elektrickú kapacitu C :

$$G = \frac{I}{U} \quad \text{a} \quad C = \frac{Q}{U}, \quad (18)$$

kde I je elektrický prúd, U je napätie a Q je elektrický náboj. Na základe uvedenej formálnej analógie je možné modelovať elektrostatické polia pomocou polí prúdových. Takto pripravené modely, založené na formálnej zámene zodpovedajúcich parametrov jednotlivých polí, sú vhodné na experimentálnu analýzu elektrostatických polí.

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky : zdroj jednosmerného napätia, vaňa s elektrolytom (vodivá fólia), kovové elektródy, sonda, jednosmerný voltmeter, vodiče, milimetrový papier.

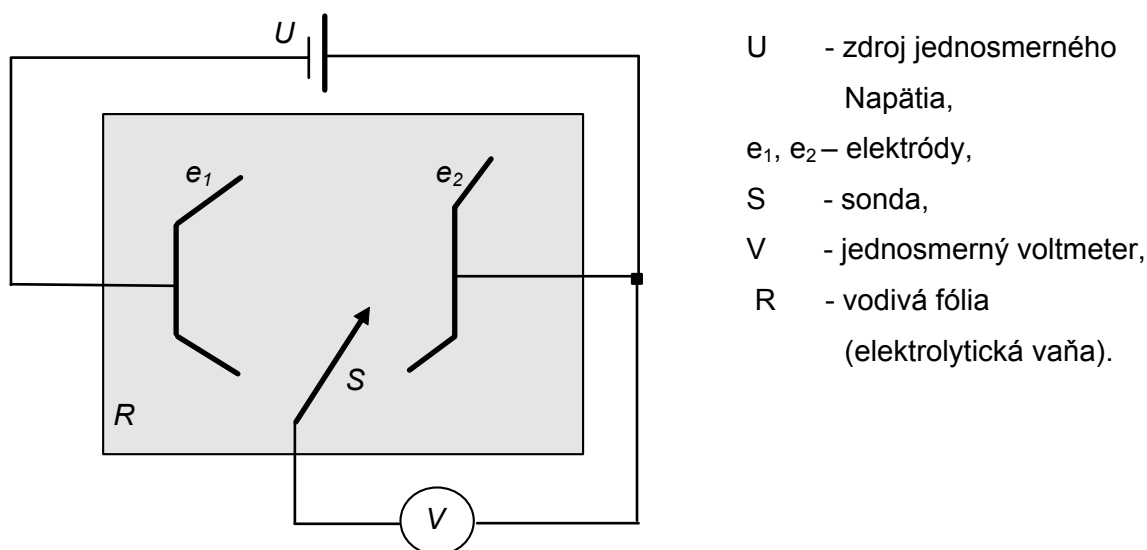
Postup

V elektrolytickej vani alebo na vodivej fólii umiestníme dve kovové elektródy rôzneho tvaru. Elektródy pripojíme do jednosmerného elektrického obvodu podľa schémy na obr.1 (Pozn.: V prípade, že sa používa elektrolytická vaňa, je vhodné v obvode použiť striedavý prúd, aby na povrchu elektród nevznikali zmeny, ktoré môžu ovplyvniť konfiguráciu poľa). Jedna z elektród je uzemnená (je pripojená na elektrický potenciál 0 V) a druhá je pripojená na konštantný, ľubovoľne zvolený, elektrický potenciál (napr. 15 V). Po pripojení napätia začne obvodom pretekať jednosmerný elektrický prúd. Vo vani, resp. na fólii sa vytvorí stacionárne prúdové pole.

Uvedené pole je možné v zmysle matematickej analógie, popísanej v teoretickej časti, považovať za model elektrostatického poľa generovaného dvojicou nabitých elektród daného tvaru.

Hrot sondy pripojenej na voltmeter posúvame v uvedenom poli a hľadáme miesta s rovnakým elektrickým potenciálom (ekvipotenciálne hladiny) nasledovným spôsobom:

- zvolíme hodnotu potenciálu ekvipotenciálnej hladiny, ktorú ideme hľadať.
- hrot sondy vložíme do ľubovoľného miesta v prúdovom poli. Voltmeter ukáže napätie medzi uzemnenou elektródou a daným bodom.



Obr.1

Posúvame hrotom sondy v poli až dovtedy, kým sa na voltmetri neobjaví napätie zodpovedajúce zvolenému potenciálu hľadanej ekvipotenciálnej hladiny. Sondy držíme kolmo na rovinu fólie, resp. hladinu elektrolytu. Ak voltmeter ukazuje zvolený elektrický potenciál, sonda sa nachádza v jednom z bodov danej ekvipotenciálnej hladiny. Pomocou súradníc vo vani zistíme jeho polohu a zaznačíme si ju na milimetrový papier. Celý postup opakujeme, až kým nájdeme dostatočný počet bodov zvolenej ekvipotenciály. Pospájaním zaznačených bodov s rovnakým elektrickým potenciálom zostrojíme na milimetrovom papieri danú ekvipotenciálnu hladinu.

Rovnakým postupom zostrojíme i ďalšie ekvipotenciály daného elektrostatického poľa. Siločiaru poľa zostrojíme ako čiary, ktoré sú v každom bode kolmé na ekvipotenciálne hladiny.

Otázky a úlohy

1. Definujte intenzitu elektrického poľa a elektrický potenciál.
2. Dokážte, že v každom mieste elektrostatického poľa je siločiaru kolmá na ekvipotenciálu.
3. Napíšte vzťah medzi intenzitou elektrického poľa a elektrickým potenciálom.
4. Odvoďte rovnicu kontinuity (8).
5. V akých jednotkách udávame elektrický potenciál a intenzitu elektrického poľa?

6.12 MERANIE VEĽKÝCH ELEKTRICKÝCH ODPOROV SIEMENSOVOU METÓDOU

Cieľ

Meraním určiť hodnotu niekoľkých elektrických odporov veľkosti rádovo 10^9 - $10^{12} \Omega$.

Teoretický úvod

Experimentálne meracie metódy na určovanie elektrických odporov je možné rozdeliť do troch hlavných skupín.

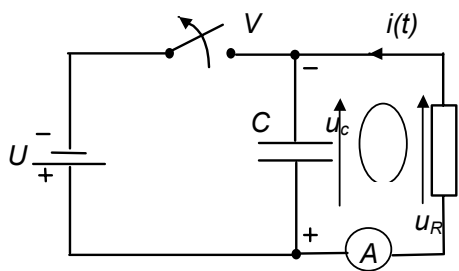
1. Prvú skupinu tvoria najjednoduchšie metódy používané na meranie tzv. stredných elektrických odporov. Pri meraní týchto elektrických odporov využívame tzv. volt-ampérové metódy vychádzajúce z Ohmovho zákona:

$$R = \frac{U}{I}, \quad (1)$$

kde R je elektrický odpor, U je napätie medzi jeho koncami a I je prúd pretekajúci elektrickým odporom.

2. Do druhej skupiny možno zahrnúť metódy na meranie malých elektrických odporov využívajúce mostíkové meracie metódy (s princípom ktorých sa oboznámite na inom mieste).
3. Tretiu skupinu tvoria metódy zamerané na meranie veľkých elektrických odporov, t.j. elektrických odporov hodnoty väčšej ako $10^5 \Omega$. Použitím volt-ampérovej metódy pri meraní takýchto elektrických odporov by bola hodnota napätia U medzi koncami odporu 10^5 -krát väčšia ako hodnota elektrického prúdu I (v ampéroch) pretekajúceho odporom.. Ak necháme takýmto elektrickým odporom pretekať elektrický prúd rádovo niekoľko miliampérov a na meranie prúdu použijeme miliampérmeter, napätie medzi koncami odporu bude rádovo 10^2 V. Z praktického hľadiska meranie takých veľkých napätí môže byť problematické. Pri meraní veľkých elektrických odporov je možné využiť tzv. Siemensovu metódu.

Elektrická schéma Siemensovej metódy merania elektrických odporov je znázornená na obr.1. Metóda je založená na meraní doby, počas ktorej sa nabitý kondenzátor C po vypnutí vypínača V vybije cez meraný rezistor R_x .



- U - zdroj jednosmerného napätia ,
 C - kondenzátor,
 V - vypínač,
 R_x - meraný rezistor,
 A - ampérmeter.

Obr. 1

Pred vypnutím vypínača preteká jednosmerným obvodom v ustálenom stave konštantný elektrický prúd I_0 . Uvedený prúd prechádza vetvou, v ktorej je neznámy odpor a vetvou, v ktorej je jednosmerný zdroj. Dielektrikum kondenzátora predstavuje (v ideálnom prípade) pre jednosmerný elektrický prúd nekonečne veľký odpor. Vetvou, v ktorej je zaradený kondenzátor, neprechádza preto v ustálenom stave elektrický prúd. Kondenzátor sa po zapojení obvodu nabije. Znamená to, že sa na elektródach kondenzátora nahromadí elektrický náboj Q_0 . Elektrický náboj na oboch elektródach je rovnako veľký, ale má opačné znamienko a napätie medzi elektródami je rovnaké ako napätie jednosmerného zdroja U . Pre kapacitu kondenzátora C platí:

$$C = \frac{Q_0}{U}. \quad (1)$$

Vypnutím vypínača V odpojíme od obvodu jednosmerný zdroj napätia a kondenzátor sa začne vybíjať cez meraný rezistor. Veľkosť elektrického náboja na elektródach kondenzátora sa začne znižovať, čím sa, samozrejme, mení i napätie medzi elektródami. Ak v časovom okamihu t , keď náboj na každej z elektród klesne o hodnotu $q(t)$, je napätie medzi elektródami kondenzátora u_c , potom je zrejmé, že platí:

$$C = \frac{Q_0 - q(t)}{u_c}. \quad (2)$$

Elektrický prúd i , pretekajúci meraným rezistorom, bude po vypnutí vypínača závisieť od času. Pokles náboja na elektródach kondenzátora v časovom okamihu t potom možno vyjadriť nasledovne:

$$q(t) = \int_0^t i(\xi) d\xi, \quad (3)$$

kde $i(\xi)$ je veľkosť prúdu v čase ξ . Uvážením vzťahu (3) je možné z rovnice (2) vyjadriť napätie medzi elektródami kondenzátora v ľubovoľnom časovom okamihu:

$$u_c = \frac{Q_0}{C} - \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi . \quad (4)$$

Napätie na meranom rezistore v ľubovoľnom časovom okamihu vyjadríme pomocou Ohmovho zákona:

$$u_R = R_x i(t) . \quad (5)$$

Ak na slučku, znázornenú na obr.1, aplikujeme druhý Kirchhoffov zákon, dostávame rovnicu:

$$u_R - u_c = 0 . \quad (6)$$

Do rovnice (6) dosadíme pravé strany výrazov (4) a (5) a dostaneme integrálnu rovnicu:

$$R_x i(t) - \frac{Q_0}{C} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi = 0 , \quad (7)$$

ktorej riešením je funkcia $i(t)$, t.j. časová závislosť elektrického prúdu pretekajúceho meraným rezistorom po odpojení zdroja. Uvedenú rovnicu pretransformujeme na rovnicu diferenciálnu tak, že ju derivujeme podľa času. Po úprave má táto rovnica tvar:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{R_x C} i(t) = 0 . \quad (8)$$

Uvedená diferenciálna rovnica je separovateľná a možno ju upraviť nasledovne:

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{R_x C} dt . \quad (9)$$

Výraz (9) integrujeme. Ľavú stranu integrujeme podľa premennej i a pravú stranu podľa premennej t :

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{1}{R_x C} \int dt . \quad (10)$$

Po zintegrovaní dostávame nasledovný výraz:

$$\ln(i) = -\frac{t}{R_x C} + K , \quad (11)$$

kde K je integračná konštanta. Zo vzťahu (11) vyplýva:

$$i(t) = e^{-\frac{t}{R_x C} + K} = A e^{-\frac{t}{R_x C}} , \quad (12)$$

kde sme označili:

$$A = e^K . \quad (13)$$

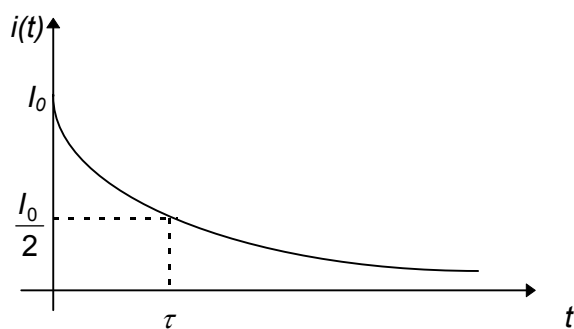
Integračnú konštantu A určíme z počiatočných podmienok. V okamihu odpojenia jednosmerného zdroja (t.j., v čase $t = 0$ s) má prúd pretekajúci neznámym elektrickým odporom hodnotu I_0 , a preto musí platiť:

$$i(t = 0s) = I_0 = A . \quad (14)$$

Časová závislosť elektrického prúdu $i(t)$ pretekajúceho elektrickým odporom po vypnutí vypínača bude mať potom nasledovný tvar:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{R_x C}}. \quad (15)$$

Pri vybíjaní kondenzátora cez meraný rezistor klesá elektrický prúd pretekajúci rezistorom exponenciálne tak, ako je to znázornené na obr.2. Rýchlosť poklesu závisí od veľkosti odporu rezistora a kapacity kondenzátora.



obr.2

Vychádzajúc zo vzťahu (15) zmeraním elektrického prúdu pretekajúceho meraným rezistorom v určitom časovom okamihu po odpojení zdroja je možné pomocou známej kapacity kondenzátora určiť neznámy odpor R_x .

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky : zdroj jednosmerného napätia, vypínač, kondenzátor známej elektrickej kapacity, jednosmerný ampérmeter, stopky, sada meraných rezistorov.

Postup

Zapojíme elektrický obvod podľa schémy zobrazenej na obr.1. Pri meraní použijeme kondenzátor s elektrickou kapacitou väčšou ako 1 μF . Na ampérmetri odčítame začiatočnú hodnotu I_0 jednosmerného elektrického prúdu pretekajúceho meraným rezistorom R_x . Odpojíme jednosmerný zdroj od obvodu a v tom istom časovom okamihu spustíme stopky. Hodnota elektrického prúdu pretekajúceho rezistorom začne klesať. V okamihu, keď táto hodnota klesne na polovicu začiatočnej hodnoty, zastavíme stopky a odčítame z nich čas τ . Podľa rovnice (15) musí platiť:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\frac{\tau}{R_x C}}. \quad (16)$$

Zo vzťahu (16) ľahko určíme neznámy odpor R_x :

$$R_x = \frac{\tau}{C \ln 2}. \quad (17)$$

Dosadením nameraného času τ a známej elektrickej kapacity kondenzátora C do vzťahu (17) určíme hodnotu elektrického odporu meraného rezistora.

Čas, za ktorý meraný elektrický prúd klesne na polovičnú hodnotu počiatočného elektrického prúdu, je tým väčší, čím je väčšia elektrická kapacita použitého kondenzátora. Preto v prípade, že čas τ je veľmi krátky (nemerateľný), zvolte kondenzátor s väčšou elektrickou kapacitou a naopak. Z hľadiska presnosti merania je najvhodnejšie použiť kondenzátor s takou kapacitou, aby nameraný čas τ bol rádovo niekoľko minút.

Pre každý meraný rezistor meranie viackrát opakujeme a výsledky zapíšeme do tabuľky. Výsledky je treba spracovať a vyhodnotiť z hľadiska presnosti merania.

Otázky a úlohy

1. Odvodte vzťah na výpočet neistoty merania.
2. Podľa vzťahu (15) neklesne elektrický prúd v obvode po odpojení zdroja nikdy na nulu. Z experimentálnych meraní však vyplýva, že v skutočnosti to nie je pravda. Dokážete vysvetliť tento rozpor a správne interpretovať vzťah (15)?
3. Určte, za aký čas po odpojení zdroja je možné elektrický prúd považovať teoreticky za nulový.
4. Uskutočnite rozmerovú analýzu vzťahu (17) a dokážte, že veličinu τ udávame skutočne v sekundách.
5. Aký vplyv na výsledok merania má vnútorný odpor použitého zdroja?

6.13 MERANIE TEPLOTNÉHO KOEFICIENTU ELEKTRICKÉHO ODPORU.

Cieľ

Určiť hodnotu teplotného koeficientu elektrického odporu vybraného kovu a stanoviť veľkosť neistoty merania.

Teoretický úvod

Medzi najčastejšie sledované vlastnosti materiálov v technickej praxi patrí hodnota elektrického odporu R [Ω]. Využíva sa fakt, že veľkosť elektrického odporu závisí od rozmerov, ako aj od typu materiálu, a teda charakterizuje materiál. Pre elektrický odpor platí

$$R = \rho \cdot \frac{h}{S}, \quad (1)$$

kde h [m] je dĺžka vodiča, S [m²] je prierez vodiča a ρ [$\Omega \cdot m$] je rezistivita (merný elektrický odpor) materiálu vodiča. Súčiastku pripravenú s určitou charakteristickou hodnotou elektrického odporu nazývame rezistor. Poznáme pomerne široké spektrum rôznych druhov

rezistorov, ktoré sa líšia hodnotou elektrického odporu, možnosťou regulácie tejto hodnoty, teplotným správaním a pod. Je to zapríčinené tým, že najmä v elektrotechnike a elektronike je využitie rezistorov veľmi rôznorodé.

Pri výskume vnútorného usporiadania látok možno s úspechom využiť rezistometriu. Je to metóda založená na meraní veľkosti elektrického odporu látky konštantných rozmerov. Ako príklad možno uviesť sledovanie obsahu fosforu v medi. So vzrastajúcim obsahom fosforu výrazne stúpa hodnota elektrického odporu v medených vodičoch. Pri chalkogenidových látkach (látky na báze sulfidov, selenidov a teluridov) možno veľmi dobre odlíšiť stav látky pomocou rezistometrie. Kryštalický stav týchto látok má rádovo nižšie hodnoty elektrického odporu ako stav sklovitý. Je zrejmé, že pomocou rezistometrie možno sledovať aj zmeny v látkach spôsobené zmenou teploty. Takto získané poznatky sa stávajú podkladom na uplatnenie nových materiálov v moderných aplikáciách (senzory, snímače, spínače, regulátory a pod.) a na zvýšenie úžitkových vlastností výrobkov.

Elektrický odpor väčšiny nevodičov a polovodičov s rastúcou teplotou exponenciálne klesá, pri vodičoch zvyčajne rastie. Pri kovoch, ktoré zaraďujeme medzi vodiče, možno pozorovať približne priamoúmerný nárast veľkosti elektrického odporu s hodnotou teploty. Tento jav možno vysvetliť zväčšovaním pravdepodobnosti zrážok medzi elektrónmi a iónmi kryštálovej mriežky kovov. S rastúcou teplotou sa zrážkami obmedzuje pohyb elektrónov sprostredkujúcich prenos elektrického náboja v kovoch. Pokles množstva elektrického náboja prejdeho prierezom vodiča možno pozorovať ako pokles hodnoty elektrického prúdu pretekajúceho vodičom pri konštantnom napätí, čo sa v súlade s Ohmovým zákonom prejavuje nárastom elektrického odporu látky.

Vo všeobecnosti sa teplotná závislosť elektrického odporu kvantitatívne hodnotí pomocou teplotného koeficientu elektrického odporu α [K^{-1}], ktorý je definovaný vzťahom

$$\alpha = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt}, \quad (2)$$

kde R je elektrický odpor látky a pomer $\frac{dR}{dt}$ [$\Omega \cdot K^{-1}$] vyjadruje podiel zmeny elektrického odporu pri veľmi malej zmene teploty látky. Pre materiály, pri ktorých je hodnota teplotného koeficientu elektrického odporu α nezávislá od teploty látky, možno riešenie rovnice (2) zapísať v tvare

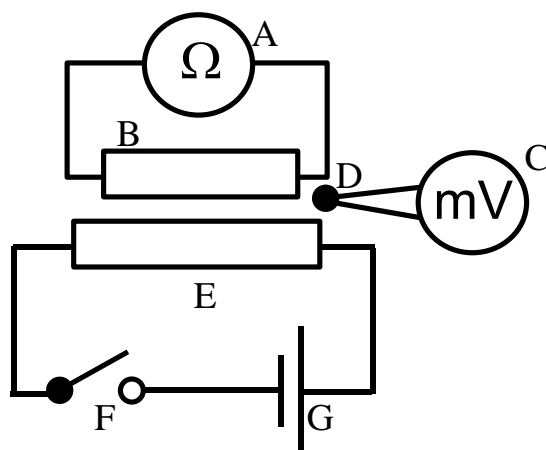
$$R = R_0 \cdot e^{\alpha(t-t_0)}, \quad (3)$$

kde R je elektrický odpor látky pri teplote t , R_0 je elektrický odpor látky pri teplote t_0 a α je teplotný koeficient elektrického odporu.

Na popis teplotného nárastu elektrického odporu kovov sa však oveľa častejšie využíva vzťah, ktorý bol odvodený zo vzťahu (3) za predpokladu, že hodnota α je veľmi malé číslo konštantnej veľkosti. Jeho najčastejšia podoba pre elektrický odpor vodiča je

$$R = R_0 (1 + \alpha \cdot (t - t_0)). \quad (4)$$

Na určenie hodnoty teplotného koeficientu elektrického odporu v súlade so vzťahom (4) stačí zmerať hodnotu elektrického odporu látky pri rôznych hodnotách teploty. Na obrázku 1 je zobrazená schéma zapojenia na určenie teplotného koeficientu elektrického odporu. Meranie elektrického odporu R meranej látky (B) sa uskutočňuje pomocou presného ohmmetra (A). Teplotu meranej látky t určujeme pomocou termočlánku (D), ktorého aktuálna teplota je snímaná pomocou milivoltmetra – teplomera (C). Regulácia nárastu teploty je zaistená spínačom (F) pripojeným na vyhrievací rezistor (E) a elektrický zdroj (G).



Obr. 1 Schéma zapojenia pri meraní koeficientu teplotného nárastu elektrického odporu: A – ohmmeter, B – meraná látka, C – milivoltmeter (teplomer), D – termočlánok, E – vyhrievací rezistor, F – spínač, G – elektrický zdroj vyhrievania.

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky: meraná látka – drôt navinutý na nevodivom valci, digitálny ohmmeter, termočlánok pripojený k nevodivému valcu, milivoltmeter (teplomer), vyhrievací rezistor umiestnený vo vnútri valca, spínač, elektrický zdroj vyhrievania.

Postup

Prístroje a zariadenia zapojíme podľa schémy na obr.1. Spínačom zapneme vyhrievanie valca. V pravidelných intervaloch odčítavame a zapisujeme hodnotu elektrického odporu kovového drôtu R a jeho teploty t . Pri meraní sa snažíme striedavým vypínaním a zapínaním spínača udržať mierny rovnomerný nárast teploty. Po ukončení merania vypneme spínač a zaznamenáme veľkosti neistôt použitých meracích prístrojov.

Pri určení veľkosti teplotného koeficientu elektrického odporu α z nameraných hodnôt elektrického odporu R a teploty t je výhodné využiť metódu najmenších štvorcov. Pri použití vzťah (4) treba však upraviť na tvar, pri ktorom uvažujeme $t_0 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$,

$$R = R_0 (1 + \alpha \cdot \Delta t). \quad (5)$$

Ak tento vzťah upravíme do linearizovanej podoby

$$R = R_0 + R_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t, \quad (6)$$

môžeme pomocou metódy najmenších štvorcov určiť hodnotu R_0 a súčinu $R_0 \cdot \alpha$ a následne aj koeficientu α . To znamená, že už pri zápise experimentu je nutné uvažovať s vyhodnotením pomocou metódy najmenších štvorcov (kap. 4.2).

Pri stanovení veľkosti neistoty merania je možné využiť vzťah (7). Pri stanovení veľkosti koeficientov a, b lineárnej závislosti $y = a \cdot x + b$ z nameraných dvojíc hodnôt veličín $[x_i, y_i]$ pomocou metódy najmenších štvorcov je veľkosť neistoty podielu $\frac{a}{b}$ koeficientov určených z metódy najmenších štvorcov daná vzťahom

$$\delta \frac{a}{b} = \frac{1}{b^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - [a \cdot x_i + b])^2}{(n-2)} \right) \cdot \left(\frac{n \cdot b^2 + a^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \right)}. \quad (7)$$

Faktory ovplyvňujúce priebeh merania a vyhodnotenia : Pri hodnotení kvalitatívnej stránky merania je dôležitá nízka hodnota elektrického odporu prívodných vodičov k meranému drôtu. Z tohto dôvodu sa zvyčajne volí čo najväčšia dĺžka a čo možno najmenší prierez meraného drôtu. Pri meraní je tiež dôležité, aby celý meraný drôt mal rovnakú teplotu a aby táto bola korektne meraná.

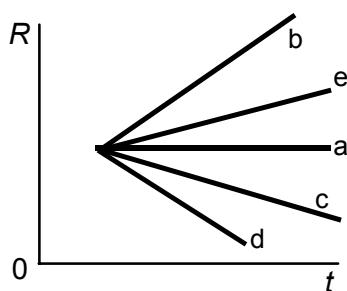
ÚLOHY

1. Ak by ste chceli ohmmeter v meraní nahradiť a na stanovenie odporu využiť Ohmov zákon, aké prístroje by ste zvolili, resp. aké veličiny by ste merali?
2. Pokúste sa odvodiť vzťah (3) na základe znalosti vzťahu (2).
3. Ako možno stanoviť neistotu typu B digitálnych prístrojov?
4. Mohli by ste uskutočniť meranie aj pri klesajúcej teplote kovového drôtu? Zmenila by sa tým presnosť stanovenia teplotného koeficientu elektrického odporu?
5. Ako by sa zmenili vzťahy (3) a (4), ak by teploty boli určené v kelvinoch?
6. V nasledujúcej tabuľke je záznam dvoch meraní veľkosti elektrického odporu drôtu R a jeho teploty t .

$t [^{\circ}\text{C}]$	25	52
$R [\Omega]$	28,8	32,3

S využitím vzťahu (3) a (4) určte veľkosť teplotného koeficientu elektrického odporu a obidva výsledky porovnajte.

7. Skúste vysvetliť podstatu metódy najmenších štvorcov.
8. Na meranie je použitá určitá dĺžka navinutého drôtu na dutom valci pripojená pomocou prídavných vodičov k ohmmetru. Prídavné vodiče veľkosťou svojho elektrického odporu R_v môžu výrazne skresliť meranie veľkosti elektrického odporu navinutého drôtu R . Je možné vhodnou voľbou rozmerov navinutého drôtu výraznejšie znížiť negatívny vplyv veľkosti odporu prídavných vodičov R_v ? Pri riešení využite znalosť vzťahu (1).
9. Krivky a, b, c, d, e znázornené na nasledujúcom obrázku sú teplotné závislosti elektrického odporu piatich rôznych látok. Usporiadajte tieto látky podľa veľkosti teplotného koeficientu elektrického odporu.



Tabuľka 7.1 Hodnoty teplotného koeficientu elektrického odporu vybraných materiálov

Látka	$1000 \cdot \alpha [K^{-1}]$	Látka	$1000 \cdot \alpha [K^{-1}]$	Látka	$1000 \cdot \alpha [K^{-1}]$
Bronz	2,0	Liatina	1,9	Platina	3,9
Cín	4,7	Med'	4,0	Striebro	4,0
Hliník	4,0	Mosadz	1,5	Volfrám	4,8
Kantál	0,06	Nikel	6,7	Zinok	4,0
Konštantán	0,05	Oceľ mäkká	5,0		

6.14 KONTROLA VOLTMETRA NORMÁLOVÝ AMPÉRMETROM

Cieľ

Overiť triedu presnosti voltmetra a zostrojiť jeho korekčnú krivku .

Teoretický úvod

Elektrický merací prístroj je zariadenie, ktoré využíva niektoré fyzikálne zákonitosti a funkčné závislosti na určenie hodnoty niektorej elektrickej veličiny (napätie, elektrický prúd, výkon,.....). Merací prístroj spracuje vstupnú veličinu na základe fyzikálneho princípu použitého na jeho stavbu na veličinu výstupnú. Merací prístroj je obvyčajne pomenovaný podľa vstupnej veličiny (ampérmeter, voltmeter, wattmeter,...). Tvar signálu výstupnej veličiny určuje, či ide o prístroj analógový (so stupnicou a s vychýľujúcim sa ukazovateľom) alebo digitálny (číslícový), ukazovací (magnetická strelka), alebo zapisovací. Princípom elektrických prístrojov je väčšinou silové pôsobenie medzi dvoma magnetickými alebo elektrickými poľami.

Medzi základné meracie prístroje patrí ampérmeter a voltmeter. Obidva prístroje pracujú na rovnakom princípe: výchylka ukazovateľa závisí od veľkosti prúdu, ktorý prechádza meracím systémom prístroja. Podľa Ohmovho zákona sa napätie na svorkách prístroja rovná súčinu jeho vnútorného odporu a pretekajúceho elektrického prúdu. Stupnica prístroja preto môže byť ciachovaná buď v ampéroch, alebo vo voltoch. Ampérmeter - merací prístroj, ktorý meria elektrický prúd prechádzajúci spotrebičom alebo časťou obvodu, do ktorého je zapojený, sa zapája do obvodu sériovo so spotrebičom. Na voltmetri má byť rovnaké napätie ako na svorkách meraného spotrebiča, a preto sa voltmeter pripája paralelne k spotrebiču. Zapojenie meracieho prístroja do elektrického obvodu v dôsledku jeho vlastnej spotreby trochu pozmení hodnoty elektrických veličín v porovnaní s hodnotami, ktoré sú v obvode bez zapojených prístrojov. Vlastná spotreba prístroja je definovaná ako príkon, ktorý musíme dodať meraciemu prístroju, aby sa dosiahla plná výchylka na danom rozsahu. Vlastná spotreba prístroja sa často udáva nepriamo: pre ampérmeter úbytkom napätia pri jeho plnej výchylke, pre voltmeter vnútorným odporom pre určitý rozsah. Aby merací prístroj čo najmenej ovplyvňoval pomery v elektrickom obvode, musí byť jeho spotreba čo najmenšia. Aby vlastná spotreba P_A ampérmetra vyjadrená vzťahom :

$$P_A = I^2 R_A ,$$

(kde I je elektrický prúd prechádzajúci ampérmetrom, R_A je vnútorný elektrický odpor ampérmetra) bola malá, musí byť vnútorný elektrický odpor ampérmetra čo najmenší.

V prípade voltmetra vlastnú spotrebu vyjadríme vzťahom

$$P_V = \frac{U^2}{R_V},$$

kde U je napätie na svorkách spotrebiča a R_V je vnútorný elektrický odpor voltmetra. Je vidno, že na dosiahnutie čo najmenšej vlastnej spotreby musí byť vnútorný elektrický odpor voltmetra čo najväčší.

Pri meracích prístrojoch je potrebné poznať aj ich citlivosť C . Citlivosť meracieho prístroja je vyjadrená počtom dielikov na stupnici pripadajúcich na jednotkovú zmenu meranej veličiny,

$$C = \frac{\text{počet dielikov stupnice}}{\text{merací rozsah prístroja}}.$$

Napr.: ampérmeter s meracím rozsahom 120 mA má stodielikovú stupnicu. Citlivosť uvedeného ampérmetra je

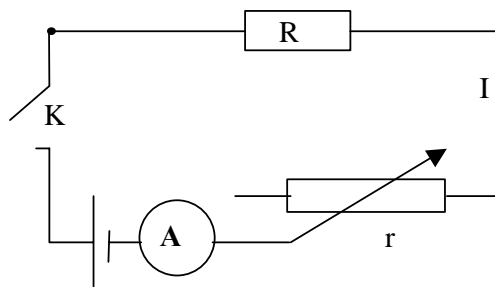
$$C = \frac{100 \text{ dielikov}}{120 \text{ mA}} = 0,83 \text{ dielikov /mA}.$$

Ďalším charakteristickým parametrom meracieho prístroja je presnosť meracieho prístroja. Vyjadruje schopnosť prístroja udávať za stanovených podmienok skutočnú hodnotu meranej veličiny. Presnosť prístroja sa posudzuje podľa triedy presnosti $\delta_{r\max}$ (pozri kapitola 5.2).

Prístroj, ktorý patrí do určitej triedy presnosti, nesmie mať väčšiu relatívnu neistotu merania ako je hodnota $\delta_{r\max}$. Z triedy presnosti môžeme vypočítať neistotu merania, ktorá je konštantná v celom rozsahu stupnice.

Trieda presnosti analógových prístrojov je udaná na stupnici prístroja ako určité číslo z radu: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; a 5,0. V laboratóriu sa najviac používajú prístroje triedy 0,5 a 1,0. Napr. voltmeter triedy presnosti 1,0 s meracím rozsahom 60 V má neistotu merania 0,6 V. Treba si uvedomiť, že relatívna neistota narastá so zmenšujúcou sa výchylkou. Z toho vyplýva, že najpresnejšie meriame pri maximálnej výchylke prístroja. Preto pri meraní treba vždy voliť taký merací rozsah prístroja, aby výchylka bola podľa možností v poslednej tretine stupnice.

Ak chceme overiť presnosť meracieho prístroja, potom treba kontrolu urobiť pomocou meracieho prístroja s vyššou triedou presnosti. Takýto prístroj potom v experimente nazývame normálovým prístrojom. Pri riešení úlohy sa stretneme s problémom, ako vypočítať hodnotu napätia na rezistore. Uvažujme zapojenie podľa schémy na obr. 1.

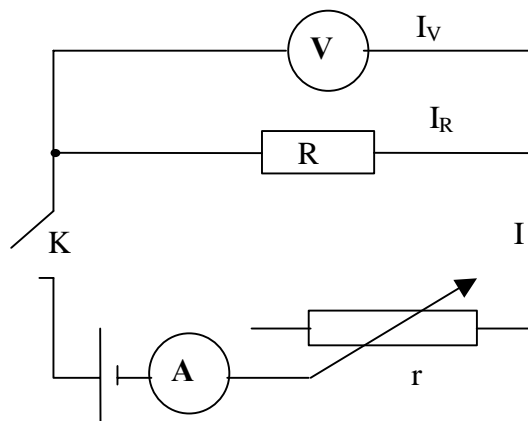


Obr. 1

Pri zapojení podľa obr. 1 bude na koncoch rezistora s elektrickým odporom R potenciálový rozdiel $U = \varphi_1 - \varphi_2$, pričom ním preteká elektrický prúd I . Pri známej hodnote elektrického odporu rezistora môžeme napätie na rezistore vyjadriť pomocou Ohmovho zákona:

$$U = R \cdot I,$$

kde I je elektrický prúd prechádzajúci rezistorom, R je hodnota elektrického odporu rezistora. Hodnotu elektrického prúdu meriame ampérmetrom. Po pripojení voltmetra (obr. 2) k rezistoru sa elektrický prúd rozdelí.



Obr. 2

Rezistorom prechádza elektrický prúd I_R , ktorého veľkosť je

$$I_R = \frac{U}{R}.$$

Voltmetrom prechádza elektrický prúd, ktorého veľkosť je

$$I_V = \frac{U}{R_V},$$

kde R_V je vnútorný odpor voltmetra. Na základe prvého Kirchhoffovho zákona a druhého Kirchhoffovho zákona môžeme napísať:

$$I = I_R + I_V \text{ a } U_R = U_V.$$

Pre celkový prúd prechádzajúci nerozvetvenou časťou máme

$$I = U \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \right).$$

Malou úpravou posledného vzťahu dostaneme pre veľkosť napätia na rezistore vzťah

$$U = \left(\frac{R \cdot R_V}{R + R_V} \right) I.$$

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

Prístroje a pomôcky: kontrolovaný analógový voltmeter, normálový ampérmeter, rezistor, kľúč, reostat, zdroj jednosmerného napätia.

Postup

1. Prístroje zapojíme podľa schémy na obr.2. Na kontrolu voltmetra použijeme normálový ampérmeter.
2. Zapišeme parametre prístrojov použitých pri experimente.
3. Pomocou reostatu postupne zvyšujeme hodnoty napätia U_i , pričom hodnoty napätia volíme v intervale od 0 V až po maximálnu hodnotu napätia, ktorú možno na danom rozsahu merať.
4. Hodnoty napätia U_i zapisujeme do pripravenej tabuľky spolu so zodpovedajúcimi údajmi elektrických prúdov I_{1i} odčítanými z ampérmetra.
5. Po dosiahnutí maximálnej hodnoty meraného napätia začneme napätie znižovať. Pri znižovaní napätia budeme nastavovať tie isté hodnoty ako v bode 3. Po nastavení príslušných napätí zmeriame zodpovedajúce hodnoty elektrických prúdov I_{2i} . Dostaneme tak pre každú hodnotu napätia dve hodnoty elektrického prúdu.
6. Vypočítame aritmetický priemer nameraných hodnôt elektrických prúdov

$$I_i = \frac{I_{1i} + I_{2i}}{2}$$

7. Zmeriame hodnotu vnútorného elektrického odporu kontrolovaného voltmetra R_V
(Vnútorný odpor voltmetra je možné zmerať digitálnym ohmmetrom alebo nepriamou metódou využitím upravenej schémy č.1. Pri použití nepriamej metódy konzultujte navrhnutý spôsob zapojenia s vedúcim cvičenia).

8. Použitím Ohmovho zákona a Kirchhoffových zákonov na obvod znázornený na obr. 2 sme získali na výpočet napätia na rezistore vzťah:

$$U_i^* = \left(\frac{R \cdot R_V}{R + R_V} \right) I_i.$$

Pomocou tohto vzťahu vypočítame hodnotu napätia na rezistore pre jednotlivé aritmetické priemery elektrických prúdov. Túto hodnotu porovnáme s hodnotou napätia, ktoré ukazoval kontrolovaný voltmeter.

9. Hodnotu korekcie vypočítame pomocou vzťahu $\Delta U_i = U_i^* - U_i$.
10. Zo získaných údajov zostrojíme korekčnú krivku kontrolovaného voltmetra. Korekčnú krivku bude tvoriť množina navzájom izolovaných bodov so súradnicami (U_i , ΔU_i). Na grafe je potrebné vyznačiť prípustnú hodnotu neistoty merania ΔU , ktorej hodnota závisí od triedy presnosti voltmetra.
11. Na základe získaných výsledkov rozhodnite, či kontrolovaný voltmeter spĺňa kritériá deklarovanej triedy presnosti.

Faktory ovplyvňujúce priebeh merania a vyhodnotenie

Presnosť merania môže byť výrazne ovplyvnená triedou presnosti použitého analógového voltmetra a ampérmetra a tiež uhlom, pod ktorým odčítavame hodnoty zo stupnice prístroja. Pred experimentom je treba zvoliť najvhodnejší rozsah na meranie veličín.

Úlohy

1. Ampérmeter s meracím rozsahom 0 – 10 A má udanú triedu presnosti prístroja 1%, čo znamená, že ak nameriame v tomto rozsahu elektrický prúd 10A bude absolútna chyba merania $\pm 0,1A$. Aká bude relatívna chyba merania, ak tým istým prístrojom nameriame pri tom istom rozsahu elektrický prúd 1A?
2. Je možné úlohu zrealizovať aj použitím digitálnych meracích prístrojov na testovanie druhého prístroja? Ako sa použitie digitálneho normálového ampérmetra (voltmetra) premietne do presnosti hodnotenia testovaného prístroja?
3. Vysvetlite principiálny rozdiel medzi ampérmetrom a voltmetrom.
4. Navrhňte úpravu analógového voltmetra, ktorým možno odmerať napätie maximálne do hodnoty 24 V, aby bolo možné po realizovaní navrhutej úpravy odmerať napätie 48 V.
5. Môžete použiť ampérmeter s maximálnym rozsahom do 1A na meranie elektrického prúdu 1,7 A? Čo navrhujete urobiť, ak potrebujete zmerať uvedený elektrický prúd, ale k dispozícii máte len uvedený ampérmeter?
6. Čo vyjadruje hodnota triedy presnosti meracieho prístroja ?

7. Na čo slúži prepínač rozsahov meracích prístrojov?
8. Napíšte a stručne charakterizujete význam Kirchoffových zákonov.
9. Vysvetlite, prečo sa ampérmeter zapája do série.
10. Môžeme ampérmetrom odmerať napätie? Vysvetlite.
11. Aký je rozdiel medzi pojmami elektrický odpor, rezistor a rezistivita ?
12. Čo vyjadruje Ohmov zákon? Napíšte jeho definíciu.
13. Môžu podmienky v laboratóriu ovplyvniť presnosť merania veľkosti elektrického prúdu alebo napätia?

OBSAH

Úvod	5
Zoznam použitých symbolov	6
1. Význam a charakteristika technického experimentu	7
2. Vypracovanie protokolu o meraní	8
2.1 Princíp merania	8
2.2 Schéma zapojenia	8
2.3 Prístroje a pomôcky	8
2.4 Postup práce a opis aparatury	9
2.5 Tabuľky nameraných a vypočítaných hodnôt	9
2.6 Spracovanie nameraných hodnôt	11
2.7 Výpočet chyby, resp. neistoty merania	11
2.8 Konečná hodnota nameranej veličiny	12
2.9 Zhodnotenie	13
2.10 Grafy	13
2.11 Príklad protokolu o meraní	15
3. Určovanie presnosti merania	18
3.1 Výpočet chyby merania	19
3.2 Výpočet neistoty merania - typ A	20
3.3 Stanovenie neistoty merania - typ B	22
3.4 Výpočet neistoty merania metódou linearizácie	23
3.4.1 Výpočet neistoty merania metódou linearizácie – jednorozmerný prípad	23
3.4.2 Výpočet neistoty merania metódou linearizácie – viacrozmerný prípad	24
3.5 Výpočet neistoty merania metódou krajného prípadu	27
3.5.1 Výpočet neistoty merania metódou krajného prípadu – jednorozmerný prípad	27
3.5.2 Výpočet neistoty merania metódou krajného prípadu – viacrozmerný prípad	28
4. Metóda najmenších štvorcov	31
4.1 Kritérium optimálnosti	31
4.2 Výpočet optimálnych hodnôt koeficientov priamky	32
4.3 Stanovenie neistoty optimálnych hodnôt koeficientov priamky	33
4.4 Príklad použitia metódy najmenších štvorcov	34
5. Použitie meradiel a meracích prístrojov	37
5.1 Použitie hlavnej a pomocnej stupnice	37
5.2 Meranie pomocou analógových prístrojov	38
5.3 Meranie pomocou digitálnych prístrojov	40
6. Úlohy na precvičenie	42
6.1 Určenie objemu valca na základe merania jeho rozmerov	42
6.2 Určenie tiažového zrýchlenia pomocou reverzného kyvadla	45
6.3 Meranie momentu zotrvačnosti metódou torzného a fyzikálneho kyvadla	52
6.4 Meranie momentu zotrvačnosti metódou torzného kyvadla	54
6.5 Meranie koeficientu vnútorného trenia kvapalín Stokesovou metódou	57
6.6 Meranie koeficientu teplotnej rozťažnosti Edelmanovým dilatometrom	62
6.7 Verifikácia Boylovho – Mariottovho zákona Meldeho trubicou	68
6.8 Určenie pomeru molárnych tepelných kapacít plynu metódou Clémentovou-Desormesovou	72
6.9 Meranie horizontálnej zložky vektora intenzity magnetického poľa Zeme pomocou tangentovej buzoly	78

6.10 Graduácia otočného kondenzátora kapacitným mostíkom	83
6.11 Mapovanie elektrostatického poľa	89
6.12 Meranie veľkých odporov Siemensovou metódou	94
6.13 Meranie teplotného koeficientu elektrického odporu	98
6.14 Kontrola voltmetra normálovým ampérmetrom	103
Obsah	109