4 MAGNETICKÉ POLE VO VÁKUU A V MAGNETIKÁCH

Teoretický úvod

Magnetické pole je forma hmoty, ktorú pozorovateľ registruje, ak je v relatívnom pohybe vzhľadom na elektrický náboj. Elektrické pole je forma hmoty, ktorú pozorovateľ registruje v okolí elektrického náboja bez ohľadu na to, či je v relatívnom pohybe alebo v pokoji vzhľadom na elektrický náboj.

Pomocou elektrickej sily $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}$ pôsobiacej na nehybný elektrický náboj Q pozorovateľ definuje **intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}$**

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}} = Q\boldsymbol{E} \tag{4.1}$$

Pomocou magnetickej sily $\boldsymbol{F}_{\mathrm{M}}$ pôsobiacej na elektrický náboj Q pohybujúci sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ pozorovateľ definuje **magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$**

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{M}} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{4.2}$$

Jednotka magnetickej indukcie tesla (1 T) je pomenovaná podľa amerického fyzika chorvátskeho pôvodu *Nikolu Teslu*. Zo vzťahu (4.2) vyplýva 1T = 1N·1s/(1C·1m). Pre veľkosť F_{M} magnetickej sily platí

$$F_{\mathrm{M}} = |Q| vB \sin\alpha, \tag{4.3}$$

kde α je uhol medzi smermi vektorov $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ s veľkosťami v a B ($0 \le \alpha \le \pi$). Superpozícia elektrickej a magnetickej sily je **Lorentzova sila**

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{E}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{M}} = Q\boldsymbol{E} + Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{4.4}$$

Zo vzťahu (4.2) možno odvodiť elementárnu magnetickú silu $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{M}}$, ktorou magnetické pole s indukciou $\boldsymbol{B}$ pôsobí na element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ prúdovodiča ($\mathrm{d}Q = I\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}l = v\mathrm{d}t$)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{M}} = \mathrm{d}Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = I\mathrm{d}t\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{4.5}$$

pričom element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ je orientovaný v smere elektrického prúdu I. Okrem pravidla pravej ruky (pravotočivej skrutky) môžeme smer sily $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{M}}$ určiť aj **Flemingovým pravidlom ľavej ruky**: *Ak vystreté prsty ľavej ruky ukazujú smer elektrického prúdu I a dlaň je natočená tak, aby do nej vstupovalo čo najviac magnetických indukčných čiar **B**, vychýlený palec ľavej ruky ukáže smer magnetickej sily, pôsobiacej na element prúdovodiča* I**d*l***.

Na celý prúdovodič s elektrickým prúdom I uloženým v magnetickom poli s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$ pôsobí magnetická sila

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{M}} = \int_l (I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}) \tag{4.6}$$

Vzťahy (4.5), (4.6) odvodil a experimentálne potvrdil *André Ampére*.

Ak je magnetické pole vo vákuu vyvolané pohybom bodového elektrického náboja Q, potom je magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ v mieste s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ vzhľadom na elektrický náboj Q pohybujúci sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ daná vzťahom

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4.7}$$

kde ε_0 je permitivita vákua, c je rýchlosť svetla vo vákuu a **magnetická konštanta (permeabilita vákua)** μ_0 je definovaná vzťahom

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}} \tag{4.8}$$

Magnetické pole sa graficky znázorňuje čiarami so šípkami v smere magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$, tzv. **magnetickými indukčnými čiarami**.
Zo vzťahu (4.7) možno odvodiť elementárnu magnetickú indukciu d$\boldsymbol{B}$, budenú elementom $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ prúdovodiča v mieste s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ vzhľadom na element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ ($\mathrm{d}Q = I\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\mathrm{d}t\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4.9}$$

pričom element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ je orientovaný v smere elektrického prúdu I. Smer vektora d$\boldsymbol{B}$ určíme pravidlom pravej ruky (pravotočivej skrutky) pre vektorový súčin $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}$. V okolí slučky s elektrickým prúdom I celkovú magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$ určíme integráciou vzťahu (4.9)

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4.10}$$

Vzťah (4.10) sa nazýva ***Biotov-Savartov-Laplaceov zákon*** (BSL). Formulovali ho francúzski fyzici *Jean Baptiste Biot, Félix Savart* a *Pierre Simon Laplace*.
Magnetický tok Φ je integrál magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ po orientovanej ploche S

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4.11}$$

Jednotka magnetického toku je weber (Wb). Zrejme 1 Wb = 1 T·m^2. Magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ je teda plošnou hustotou magnetického toku Φ. Pre ľubovoľné prostredie platí ***Gaussov zákon*** pre magnetické pole: **Magnetický tok cez ľubovoľnú uzavretú orientovanú plochu sa rovná nule**

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{4.12}$$

To však znamená, že magnetické pole je nežriedlové (div $\boldsymbol{B}$ = 0) a magnetické indukčné čiary nemajú začiatok a nemajú koniec (sú uzavreté). Smer magnetickej indukcie na uzavretých magnetických indukčných čiarach v okolí priameho prúdovodiča určujeme **prvým Ampérovým pravidlom pravej ruky:** *Ak vztýčený palec pravej ruky položený na priamy prúdovodič ukazuje smer elektrického prúdu v priamom prúdovodiči, potom zahnuté prsty pravej ruky ukazujú smer magnetickej indukcie na uzavretých magnetických indukčných čiarach okolo priameho prúdovodiča.* Smer magnetickej indukcie v strede prúdového závitu (v strede prúdovej cievky s viacerými závitmi) určujeme **druhým Ampérovým pravidlom pravej ruky:** *Ak zahnuté prsty pravej ruky položené na závit (na cievku) ukazujú smer elektrického prúdu v závite (v cievke), potom vztýčený palec pravej ruky ukazuje smer magnetickej indukcie v strede prúdového závitu (prúdovej cievky).*
Magnetický moment $\boldsymbol{m}$ prúdovej slučky je súčin elektrického prúdu I v slučke a vektora $\boldsymbol{S}$ slučkou ohraničenej plochy, orientovaného v smere vztýčeného palca pravej ruky, ak zahnuté prsty pravej ruky ukazujú smer elektrického prúdu v slučke

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S} \tag{4.13}$$

Fyzikálnou jednotkou magnetického momentu je 1A·m^2. Magnetické pole s indukciou $\boldsymbol{B}$ pôsobí na prúdovú slučku krútiacim momentom $\boldsymbol{M}_\mathrm{d}$ dvojice síl

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{d} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} = I\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} \tag{4.14}$$

Prúdová slučka má v tomto magnetickom poli potenciálnu energiu

$$E_\mathrm{p} = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B} \tag{4.15}$$

Na určenie magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ vo vákuu v okolí prúdovodičov s jednosmernými elektrickými prúdmi sa v úlohách s valcovou symetriou využíva ***Ampérov zákon celkového prúdu*****: Integrál magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ po ľubovoľnej uzavretej orientovanej krivke l je rovný súčinu magnetickej konštanty μ_0 a celkového elektrického prúdu I_C, ktorý tečie cez plochu S ohraničenú touto krivkou**

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_\mathrm{C} = \mu_0 \sum_k \pm I_k \tag{4.16}$$

Znamienko „+“ píšeme pred taký (kladne spriahnutý) prúd I_k, ktorý tečie cez plochu v smere vztýčeného palca pravej ruky, ak zahnuté prsty pravej ruky ukazujú smer integrácie po uzavretej krivke l, v opačnom prípade píšeme pred prúd I_k znamienko „-“ (záporne spriahnutý prúd).
Magnetické látky (magnetiká) sú látky, ktoré po ich vložení do magnetického poľa toto pole ovplyvňujú. Príčina zmeny spočíva v tom, že magnetiká pozostávajú z atómov, ktoré majú trvalé alebo poľom indukované elementárne magnetické momenty. Tie sú v magnetickom poli čiastočne orientované. Mierou magnetovania látky je **magnetizácia *M***

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}V} \tag{4.17}$$

s fyzikálnou jednotkou 1 A·m^{-1}, kde d$\boldsymbol{m}$ je vektorový súčet elementárnych magnetických momentov v elementárnom objeme dV látky. K celkovému prúdu cez plochu S ohraničenú uzavretou orientovanou krivkou l prispievajú nielen vodivostné prúdy I_k vo vodičoch mimo magnetika, ale tiež elementárne prúdy $I_{\mathrm{E}k}$ v magnetiku, ktoré sú spriahnuté uzavretou krivkou

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_\mathrm{C} = \mu_0 \left(\sum_k \pm I_k + \sum_k \pm I_{\mathrm{E}k} \right) = \mu_0 \left(\sum_k \pm I_k + I_\mathrm{E} \right) \tag{4.18}$$

Ukazuje sa však, že celkový elementárny prúd I_E je integrál od magnetizácie $\boldsymbol{M}$ po uzavretej orientovanej krivke l

$$I_\mathrm{E} = \oint_l \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4.19}$$

Po dosadení (4.19) do (4.18) a úprave dostaneme

$$\oint_l \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_k \pm I_k \tag{4.20}$$

Vektorová veličina v okrúhlej zátvorke je **intenzita magnetického poľa *H***

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{4.21}$$

s fyzikálnou jednotkou 1 A·m^{-1}. Po úprave (4.21) dostaneme

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{4.22}$$

V prípade vákua je zrejme magnetizácia $\boldsymbol{M}$ nulová, preto má jeho materiálový vzťah tvar

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{4.23}$$

Ak zavedieme označenie $\boldsymbol{H}$ do vzťahu (4.20), má ***Ampérov zákon celkového prúdu*** tvar

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_k \pm I_k \tag{4.24}$$

Integrál intenzity magnetického poľa *H* po ľubovoľnej uzavretej orientovanej krivke sa rovná len súčtu vodivostných elektrických prúdov (vo vodičoch), ktoré tečú cez plochu ohraničenú touto uzavretou krivkou. Znamienko plus platí pre kladne spriahnuté prúdy I_k, znamienko mínus platí pre záporne spriahnuté prúdy I_k. V prípade nestacionárnych elektrických polí cez túto plochu tečie aj Maxwellov posuvný prúd I_P= dΨ/dt preto bude mať Ampérov zákon tvar

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \left(\sum_k \pm I_k \right) + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{4.25}$$

V magneticky mäkkých izotropných látkach je magnetizácia $\boldsymbol{M}$ úmerná intenzite $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{M} = \kappa_\mathrm{M} \boldsymbol{H} \tag{4.26}$$

kde faktor κ_M je **magnetická susceptibilita** magnetika. Po dosadení do (4.26) do (4.22) pre magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$ v magnetiku dostaneme materiálový vzťah

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_0(\boldsymbol{H} + \kappa_{\mathrm{M}}\boldsymbol{H}) = \mu_0(1+\kappa_{\mathrm{M}})\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_{\mathrm{r}}\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \tag{4.27}$$

kde faktor $\mu_r = 1 + \kappa_M$ je **relatívna permeabilita** a $\mu = \mu_0\mu_r$ je **permeabilita** prostredia.

V **diamagnetických látkach** dominujú atómy bez magnetického momentu. Vonkajším magnetickým poľom sa v nich indukujú magnetické momenty nasmerované proti intenzite $\boldsymbol{H}$. Preto je magnetizácia $\boldsymbol{M}$ nesúhlasne rovnobežná s vektorom $\boldsymbol{H}$, $\kappa_M < 0$, $\mu_r < 1$, $\mu < \mu_0$ a pri rovnakej intenzite magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ je v diamagnetiku magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ menšia než vo vákuu. Diamagnetickou látkou je napr. bizmut s relatívnou permeabilitou $\mu_r = 0{,}999843$ a meď s relatívnou permeabilitou $\mu_r = 0{,}9999904$. Ak nie je vonkajšie magnetické pole homogénne, je diamagnetická látka vytlačovaná z oblasti s väčšou magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}_{ext}$ do oblasti s menšou magnetickou indukciou (z poľa von).

V **paramagnetických látkach** dominujú atómy s náhodne orientovanými magnetickými momentami, preto magnetizácia $\boldsymbol{M}$ je v nich nulová. Vo vonkajšom magnetickom poli sa tieto momenty orientujú do smeru intenzity $\boldsymbol{H}$. Preto je magnetizácia $\boldsymbol{M}$ súhlasne orientovaná s vektorom $\boldsymbol{H}$, $\kappa_M > 0$, $\mu_r > 1$, $\mu > \mu_0$ a pri rovnakej intenzite magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ je v paramagnetiku magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ väčšia než vo vákuu. Ak nie je vonkajšie magnetické pole homogénne, je paramagnetická látka mierne vťahovaná do oblasti s väčšou magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}_{ext}$ (do poľa).

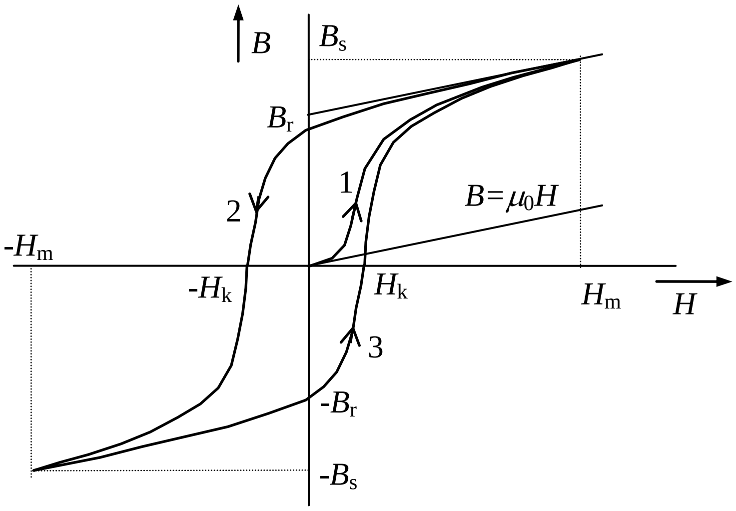
Feromagnetické látky pozostávajú zo spontánne magnetovaných oblastí (domén). V doméne sú magnetické momenty atómov súhlasne rovnobežné a magnetizácia $\boldsymbol{M}$ je v doméne vysoká (železo, kobalt, nikel, gadolínium, oceľ, ferity). Mimo vonkajšieho magnetického poľa nie sú magnetizácie v susedných doménach súhlasne rovnobežné, takže sa ich polia navzájom z väčšej časti rušia. Pri postupnom zvyšovaní intenzity vonkajšieho magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ sa zväčšujú domény s magnetizáciou $\boldsymbol{M}$ viac orientovanou so smerom intenzity $\boldsymbol{H}$ na úkor ostatných domén a jednak sa v rámci jednej domény magnetické momenty orientujú do smeru bližšieho k smeru intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$. Druhý z procesov je nevratný, lebo je sprevádzaný vzájomným trením hraníc susedných domén. Preto je závislosť magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ od intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ iná pri zväčšovaní intenzity než pri jej zmenšovaní. Taká závislosť od histórie magnetovania sa nazýva **hysterézia**. Pri **magnetickej indukcii nasýtenia** $\boldsymbol{B}_s$ sú magnetické momenty vo všetkých doménach orientované v smere intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$. Aby sa pri meraní intenzita magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ vo feromagnetiku určovala jednoznačne z Ampérovho zákona (4.24), má vzorka tvar uzavretého prstenca (anuloid) s budiacim vinutím (toroid). Ak meníme súradnicu H intenzity magnetického poľa vzhľadom na kruhovú os feromagnetického anuloidu elektrickým prúdom v budiacom vinutí tak, aby sa súradnica magnetickej indukcie menila od B_s do $-B_s$ a naopak, získame grafickú závislosť súradnice magnetickej indukcie B od súradnice intenzity magnetického poľa H v tvare **hysteréznej slučky**. Úzku hysteréznu slučku majú **magneticky mäkké feromagnetiká**, ich relatívna permeabilita $\mu_r >> 1$ a závisí od intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$. Širokú hysteréznu slučku majú **magneticky tvrdé feromagnetiká**, v ktorých relatívna permeabilita μ_r mení hodnotu a tiež znamienko v závislosti od histórie magnetovania, pozri obr. 4.1.

Pri nulovej intenzite magnetického poľa majú magneticky tvrdé feromagnetiká **zvyškovú** (**remanentnú**) **magnetickú indukciu** (**remanenciu**) $\boldsymbol{B}_r$. Nulová magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ sa v nich dosiahne pri **koercitívnej intenzite magnetického poľa** (**koercitivite**) $\boldsymbol{H}_k$. Plošný obsah hysteréznej slučky predstavuje objemovú hustotu nevratne stratenej energie v jednom uzavretom cykle premagnetovania feromagnetickej látky.

Feromagnetická látka sa stane paramagnetickou, ak jej teplota prekročí **Curieho teplotu** T_C, pre železo je to asi 770 °C. Závislosť magnetickej susceptibility κ_M od termodynamickej teploty T paramagnetík vyjadruje Curieho zákon $\kappa_M = C/T$, kde C je Curieho konštanta. Pre feromagnetiká s teplotou väčšou než Curieho teplota platí Curieho-Weissov zákon

$$\kappa_{\mathrm{M}} = \frac{C}{T - T_{\mathrm{C}}} \tag{4.28}$$

Ak nie je vonkajšie magnetické pole homogénne, je feromagnetická látka vťahovaná do oblasti s väčšou magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}}$ (do poľa).



Obr. 4.1 Hysterézna slučka 2, 3 a krivka počiatočnej magnetizácie 1

V tabuľke 4.1 je uvedená klasifikácia magnetík podľa hodnôt magnetickej susceptibility κ_{M}, resp. relatívnej permeability $\mu_{\mathrm{r}} = 1 + \kappa_{\mathrm{M}}$.

Tab. 4.1: Klasifikácia magnetík podľa hodnôt magnetickej susceptibility κ_{M}, resp. relatívnej permeability $\mu_{\mathrm{r}} = 1 + \kappa_{\mathrm{M}}$.

Diamagnetiká	$\kappa_{\mathrm{M}} < 0$	$\mu_{\mathrm{r}} < 1$
Paramagnetiká	$\kappa_{\mathrm{M}} > 0$	$\mu_{\mathrm{r}} > 1$
Feromagnetiká	$\kappa_{\mathrm{M}} >> 0$	$\mu_{\mathrm{r}} >> 1$

Slučka s elektrickým prúdom I vytvára vo svojom okolí vlastné magnetické pole s uzavretými magnetickými indukčnými čiarami. Tie pretínajú plochu, ktorú prúdová slučka ohraničuje a vytvárajú tak *vlastný magnetický tok* Φ cez túto plochu. **Vlastná indukčnosť** L je definovaná podielom vlastného magnetického toku Φ a elektrického prúdu I v slučke

$$L = \frac{\Phi}{I} \tag{4.29}$$

Jednotka indukčnosti henry (1 H = 1 Wb/A) je pomenovaná podľa amerického fyzika *Josepha Henryho*.

V prípade, ak sa v priestore nachádzajú dve prúdové slučky s elektrickými prúdmi I_1 a I_2, bude magnetický tok Φ_1 cez plochu ohraničenú prvou slučkou súčtom vlastného toku Φ_{11} a *vzájomného magnetického toku* Φ_{12}, ktorý je na ploche ohraničenej prvou slučkou vytvorený magnetickým poľom generovaným elektrickým prúdom I_2 v druhej slučke

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_{11}I_1 + L_{12}I_2 = L_1I_1 + MI_2 \tag{4.30}$$

kde $L_{11} = L_1$ je vlastná indukčnosť prvej prúdovej slučky a $L_{12} = M$ je **vzájomná indukčnosť** medzi prúdovými slučkami. Podobný vzťah platí pre magnetický tok Φ_2 na ploche ohraničenej druhou prúdovou slučkou

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = L_{21}I_1 + L_{22}I_2 = MI_1 + L_2I_2 \tag{4.31}$$

kde $L_{22} = L_2$ je vlastná indukčnosť druhej slučky a $L_{21} = M$ je *vzájomná indukčnosť* medzi prúdovými slučkami. Vzájomná indukčnosť závisí od geometrických rozmerov, od vzájomnej orientácie slučiek a od permeability prostredia. Z posledných dvoch vzťahov pre vzájomnú indukčnosť $M = L_{12} = L_{21}$ vyplýva

$$M = L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \tag{4.32}$$

Energiu E_M magnetického poľa prúdovej slučky môžeme určiť na základe podobnosti elektrických a magnetických javov: Elektrická kapacita C kondenzátora je podobnou fyzikálnou veličinou ako indukčnosť L prúdovej slučky. Preto porovnaním definičných vzťahov (2.15) a (4.29) získame pravidlá konverzie pre prechod od známych vzťahov elektriny k zatiaľ neznámym vzťahom magnetizmu

$$C = \frac{Q}{U}, \quad L = \frac{\Phi}{I} \quad \Rightarrow \quad C \to L, \quad Q \to \Phi, \quad U \to I \tag{4.33}$$

Aplikáciou pravidiel konverzie (4.33) na vzťahy (2.18) dostaneme vzťahy na určenie energie E_M magnetického poľa prúdovej slučky

$$E_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} \quad \Rightarrow \quad E_M = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi I}{2} \tag{4.34}$$

Je zrejmé, že porovnaním materiálových vzťahov dielektrík (2.5) a magnetík (4.27) získame pravidlá konverzie vektorových veličín a materiálových konštánt

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}, \quad \varepsilon_0\varepsilon_r \to \mu_0\mu_r \tag{4.35}$$

Aplikáciou pravidiel konverzie (4.35) na vzťahy (2.22, 2.23) dostaneme vzťahy na určenie hustoty w_M energie magnetického poľa v magnetikách

$$w_E = \frac{dE_E}{dV} = \frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2} \quad \Rightarrow \quad w_M = \frac{dE_M}{dV} = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2} \tag{4.36}$$

a na určenie hustoty energie magnetického poľa w_M vo vákuu

$$w_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \Rightarrow \quad w_M = \frac{\mu_0 H^2}{2} \tag{4.37}$$

Príklady

4.1 Elektrón bol z pokoja urýchlený napätím $U = 200$ V. Aký je polomer R kružnice po ktorej sa bude elektrón pohybovať po zapnutí homogénneho magnetického poľa s magnetickou indukciou veľkosti $B = 1$ mT vo vákuu? Aká je frekvencia n otáčania elektrónu po kružnici? V okamihu zapnutia poľa bola rýchlosť elektrónu kolmá na magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$. Elektrický náboj elektrónu je $Q = -e = -1{,}602\cdot10^{-19}$ C, hmotnosť elektrónu je $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg. Relativistickú závislosť hmotnosti elektrónu od rýchlosti zanedbajte!

Riešenie:

Práca W elektrického poľa pri urýchľovaní elektrického náboja Q je rovná zmene ΔE_k kinetickej energie náboja, pozri vzťah (1.18). Ak je počiatočná rýchlosť elektrického náboja nulová, potom platí

$$W = E_{K2} - E_{K1} \quad \Rightarrow \quad |Q|U = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2|Q|U}{m}} \tag{a}$$

kde v je zároveň veľkosť obvodovej rýchlosti elektrónu pri jeho pohybe po kružnici po zapnutí magnetického poľa. Uhol α medzi okamžitou rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ a vektorom $\boldsymbol{B}$ je stále 90° (sin 90°

= 1). Magnetická sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{M}$ je totiž kolmá na vektory $\boldsymbol{B}$ aj $\boldsymbol{v}$, a preto zohráva úlohu dostredivej sily $\boldsymbol{F}$. S využitím vzťahov (4.3) a (a) dostaneme

$$F = F_\mathrm{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{R} = |Q| vB \sin 90° \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{|Q|B} = \frac{m}{|Q|B} \cdot \sqrt{\frac{2|Q|U}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{|Q|}} \qquad \text{(b)}$$

Perióda T je doba potrebná na jeden obeh elektrónu po kružnici. Frekvencia n otáčania je prevrátená hodnota periódy T, preto platí

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{mv}{|Q|B} = \frac{2\pi m}{|Q|B} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1}{T} = \frac{|Q|B}{2\pi m} \qquad \text{(c)}$$

Frekvencia n obiehania od rýchlosti v elektrického náboja nezávisí, preto je možné striedavým napätím takejto frekvencie urýchľovať elektrický náboj po rozvíjajúcej sa špirálovitej trajektórii v cyklotróne. Po dosadení zadaných hodnôt do vzťahov (b, c) dostaneme

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{|Q|}} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}} \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 200\,\mathrm{V}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}} = 47{,}69\,\mathrm{mm}$$

$$f = \frac{|Q|B}{2\pi m} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}}{2\pi \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 2{,}799 \cdot 10^{7}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Polomer kružnice je 47,69 mm, frekvencia otáčania je $2{,}799.10^{7}\ \mathrm{s}^{-1}$.

4.2 Aký minimálny elektrický prúd I_min musí pretekať priamym vodičom dĺžky l = 10 m, hmotnosti m = 0,5 kg, aby sa vznášal (levitoval) nad rovníkom Zeme? Magnetická indukcia má nad rovníkom veľkosť B = 40 μT.

Riešenie:
Nad rovníkom je magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ orientovaná na sever a v každom bode priameho prúdovodiča je rovnaká, preto úpravou vťahu (4.6) pre magnetickú silu $\boldsymbol{F}_\mathrm{M}$ dostaneme

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{M} = \int_l \left(I \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}\right) = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{(a)}$$

Prúdovodič bude levitovať, ak je magnetická sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{M}$ rovnako veľká avšak opačne orientovaná ako tiažová sila $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{M} = -\boldsymbol{F} \quad \Rightarrow \quad I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} = -m\boldsymbol{g} \quad \Rightarrow \quad IlB \sin\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad I = \frac{mg}{lB \sin\alpha} \qquad \text{(b)}$$

Podľa Flemingovho pravidla ľavej ruky bude magnetická sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{M}$ orientovaná nahor vtedy, keď elektrický prúd tečie v priamom vodiči vodorovne a koniec prúdovodiča je odklonený na východ od poludníka prechádzajúceho ťažiskom prúdovodiča.. Podľa vzťahu (b) bude elektrický prúd minimálny vtedy, keď je $\sin\alpha$ maximálny ($\sin\alpha = 1$). To je vtedy, keď je uhol α medzi magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$ a smerom elektrického prúdu rovný 90°. Pre minimálny elektrický prúd I_min dostaneme

$$I_\mathrm{min} = \frac{mg}{lB} = \frac{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{10\,\mathrm{m} \cdot 40 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}} = 12263\,\mathrm{A}$$

Aby daný vodič nad rovníkom levitoval, musí ním pretekať elektrický prúd 12263 A smerom od západu na východ.

4.3 Veľmi dlhý priamy vodič vytvára v určitom mieste kruhový závit polomeru R = 0,7 m. Vodič aj závit vodiča ležia v spoločnej rovine vo vákuu. Aká je veľkosť B magnetickej indukcie v strede závitu vodiča, ak vodičom tečie elektrický prúd I = 15 A?

Riešenie:
Nech $\boldsymbol{B}_1$ je magnetická indukcia generovaná priamym prúdovodičom a $\boldsymbol{B}_2$ je magnetická indukcia generovaná prúdom v kruhovom závite. Podľa oboch Ampérových pravidiel pravej ruky sú v strede závitu obe indukcie súhlasne orientované, preto je výsledná veľkosť súčtom jednotlivých veľkostí magnetických indukcií

$$B = B_1 + B_2 \qquad \text{(a)}$$

Vďaka valcovej súmernosti môžeme veľkosť B_1 magnetickej indukcie vo vzdialenosti R od dlhého priameho prúdovodiča určiť z Ampérovho zákona celkového prúdu (4.16)

$$\oint_k \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \oint_k B_1 \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B_1 2\pi R = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad \text{(b)}$$

pričom k je abstraktná kružnica (uzavretá krivka) polomeru R v rovine kolmej na priamy prúdovodič. Kružnica k je orientovaná v smere indukcie $\boldsymbol{B}_1$ v bodoch kružnice, takže vektory $\boldsymbol{B}_1$ a d$\boldsymbol{l}$ sú súhlasne orientované v každom bode kružnice k a prúd I v priamom prúdovodiči je kladne spriahnutý.
Veľkosť B_2 magnetickej indukcie v strede prúdového závitu určíme zo zákona Biota-Savarta-Laplacea (4.10)

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{R \mathrm{d}l \sin 90°}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad \text{(c)}$$

Element d$\boldsymbol{l}$ kruhového závitu je orientovaný v smere prúdu I v závite. Vektor $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor stredu závitu vzhľadom na element d$\boldsymbol{l}$ kruhového závitu, preto vektory $\boldsymbol{r}$ a d$\boldsymbol{l}$ zvierajú v každom bode závitu uhol 90°. Dosadením vzťahov (b, c) do (a) a dosadením zadaných hodnôt dostaneme

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(1+\pi) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 15}{2\pi \cdot 0{,}7}(1+\pi)\,\mathrm{T} = 17{,}75 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

Magnetická indukcia v strede závitu vodiča má veľkosť 17,75 μT.

4.4 Dva kruhové vodiče rovnakého polomeru R = 10 cm majú spoločný stred a ich roviny zvierajú pravý uhol. Prvým vodičom tečie elektrický prúd I_1 = 30 mA, druhým elektrický prúd I_2 = 40 mA. Vypočítajte veľkosť a smer intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ v spoločnom strede kruhových prúdovodičov. Vodiče sú vo vákuu.

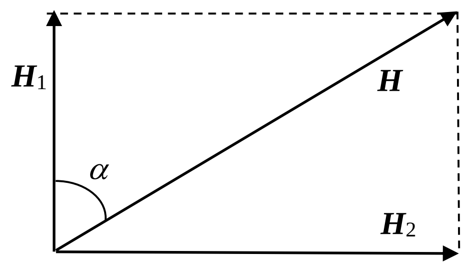
Riešenie:
Veľkosť H_1 intenzity magnetického poľa v strede prvého kruhového prúdovodiča určíme zo zákona Biota-Savarta-Laplacea (4.10) a z materiálového vzťahu (4.23) pre vákuum

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{I_1}{4\pi} \oint_l \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}|}{r^3} = \frac{I_1}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{R \mathrm{d}l \sin 90°}{R^3} = \frac{I_1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} \mathrm{d}l = \frac{I_1}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{I_1}{2R} \qquad \text{(a)}$$

Element d$\boldsymbol{l}$ kruhového vodiča je orientovaný v smere prúdu I_1 vo vodiči. Vektor $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor stredu vodiča vzhľadom na element d$\boldsymbol{l}$ kruhového vodiča, preto vektory $\boldsymbol{r}$ a d$\boldsymbol{l}$ zvierajú v každom bode závitu uhol 90°. Smer intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}_1$ určíme podľa druhého Ampérovho pravidla pravej ruky. Veľkosť H_2 a smer intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}_2$ určíme podobne

$$H_2 = \frac{I_2}{2R} \qquad \text{(b)}$$

Pretože sú roviny kruhových vodičov na seba kolmé, budú na seba kolmé aj intenzity $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$, pozri obr. 4.2



Obr. 4.2 Smery intenzít $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$ v spoločnom strede kruhových prúdovodičov

Zrejme pre veľkosť H výslednej intenzity platí Pytagorova veta. S využitím vzťahov (a, b) a dosadením zadaných hodnôt dostaneme

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \sqrt{\left(\frac{I_1}{2R}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{2R}\right)^2} = \frac{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{2R} = \frac{\sqrt{30^2 + 40^2}\ \text{mA}}{2 \cdot 100\ \text{mm}} = \frac{50\ \text{A}}{200\ \text{m}} = 0{,}25\ \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$$

Z obr. 4.2 pre uhol α dostaneme

$$\text{tg}\alpha = \frac{H_2}{H_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{40\ \text{mA}}{30\ \text{mA}} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{arctg}\frac{4}{3} = 53{,}13\,^\circ$$

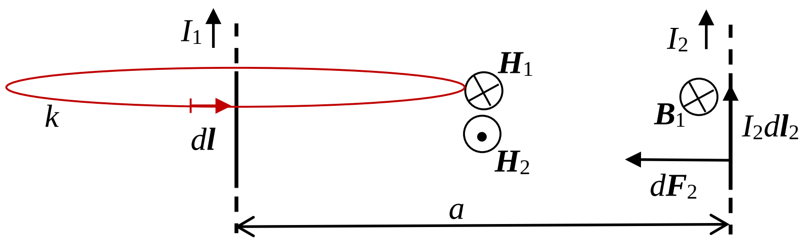
Veľkosť intenzity magnetického poľa je 0,25 A.m^{-1}, výsledná intenzita $\boldsymbol{H}$ zviera s intenzitou $\boldsymbol{H}_1$ uhol 53,13 °.

4.5 Vypočítajte veľkosť H intenzity magnetického poľa v strede medzi dvoma priamymi nekonečne dlhými rovnobežnými vodičmi s elektrickými prúdmi I_1 = 3 A a I_2 = 2 A tečúcimi v rovnakom smere. V ktorom mieste na myslenej spojnici oboch vodičov je intenzita nulová? Aká je veľkosť f sily pôsobiacej na 1 m dĺžky každého vodiča? Vzdialenosť medzi vodičmi je a = 4 m, vodiče sú vo vákuu.

Riešenie:

Podľa prvého Ampérovho pravidla pravej ruky sú intenzity $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$ v strede medzi súhlasne orientovanými prúdovodičmi orientované nesúhlasne (pozri obr. 4.3), preto pre veľkosť H výslednej intenzity dostaneme

$$H = \left|\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2\right| = \left|H_1 - H_2\right| \qquad \text{(a)}$$



Obr. 4.3 Smery intenzít $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$ magnetického poľa medzi prúdovodičmi

Veľkosť H_1 intenzity magnetického poľa vo vzdialenosti x od dlhého priameho prúdovodiča s prúdom I_1 môžeme určiť z Ampérovho zákona celkového prúdu (4.24)

$$\oint_k \boldsymbol{H}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_1 \quad \Rightarrow \quad \oint_k H_1 \cdot \mathrm{d}l = I_1 \quad \Rightarrow \quad H_1 2\pi x = I_1 \quad \Rightarrow \quad H_1 = \frac{I_1}{2\pi x} \tag{b}$$

pričom k je abstraktná kružnica (uzavretá krivka) polomeru x v rovine kolmej na priamy vodič s prúdom I_1. Kružnica k je orientovaná v smere intenzity $\boldsymbol{H}_1$ v bodoch kružnice (kladné spriahnutie s prúdom I_1). Zrejme veľkosť H_2 intenzity magnetického poľa vo vzdialenosti y od dlhého priameho prúdovodiča s prúdom I_2 určíme podobne

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi y} \tag{c}$$

V strede medzi vodičmi

$$x = y = a/2 \tag{d}$$

preto po dosadení (b, c, d) do (a) s následným dosadením zadaných hodnôt dostaneme

$$H = \left|H_1 - H_2\right| = \left|\frac{I_1}{2\pi\frac{a}{2}} - \frac{I_2}{2\pi\frac{a}{2}}\right| = \frac{\left|I_1 - I_2\right|}{\pi a} = \frac{\left|4-3\right|\,\mathrm{A}}{\pi 4\,\mathrm{m}} = 79{,}58\cdot 10^{-3}\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$$

Pre miesto s nulovou výslednou intenzitou zo vzťahu (a) vyplýva

$$H = \left|H_1 - H_2\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = H_2 \tag{e}$$

Zrejme pre miesto na myslenej spojnici prúdovodičov platí

$$y = a - x \tag{f}$$

Dosadením vzťahov (b, c, f) do vzťahu (e) a následnou úpravou dostaneme

$$\frac{I_1}{2\pi x} = \frac{I_2}{2\pi(a-x)} \quad \Rightarrow \quad I_1(a-x) = I_2 x \quad \Rightarrow \quad I_1 a = (I_1 + I_2)x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{I_1 a}{I_1 + I_2} \tag{g}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (g) dostaneme

$$x = \frac{I_1 a}{I_1 + I_2} = \frac{3\,\mathrm{A}\cdot 4\,\mathrm{m}}{(3+2)\,\mathrm{A}} = \frac{12\,\mathrm{m}}{5} = 2{,}4\,\mathrm{m}$$

Druhý vodič s elektrickým prúdom I_2 sa nachádza vo vzdialenosti

$$x = a \tag{h}$$

od prvého vodiča s elektrickým prúdom I_1, ktorý v mieste uloženia druhého vodiča generuje magnetické pole s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}_1$. S využitím vzťahov (4.5), (4.23), (b) a (h) pre veľkosť f sily pôsobiacej na 1 m dĺžky druhého vodiča s elektrickým prúdom I_2 dostaneme

$$f = \frac{\left|\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2\right|}{\left|\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\right|} = \frac{\left|I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{B}_1\right|}{\left|\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\right|} = \frac{I_2 \mathrm{d}l_2 B_1}{\mathrm{d}l_2} = I_2 B_1 = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \tag{i}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (i) dostaneme

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 3\cdot 2\,\mathrm{N}}{2\pi\cdot 4\,\mathrm{m}} = 3\cdot 10^{-7}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

Podľa Flemingovho pravidla ľavej ruky je sila $\boldsymbol{f}$ pôsobiaca na 1 m dĺžky druhého vodiča s elektrickým prúdom I_2 orientovaná doľava, pozri obr. 4.3. Podľa zákona akcie a reakcie pôsobí na 1 m dĺžky prvého vodiča s elektrickým prúdom I_1 rovnako veľká avšak opačne orientovaná reakcia $-\boldsymbol{f}$. Pri súhlasne orientovaných prúdoch sa teda rovnobežné vodiče priťahujú. V strede medzi vodičmi je výsledná intenzita orientovaná za rovinu nákresne a má veľkosť 79,58 mA.m^{-1}. Na myslenej spojnici vodičov je nulová intenzita magnetického poľa vo vzdialenosti 2,4 m od vodiča s prúdom I_1. Na 1 m dĺžky každého vodiča pôsobí sila veľkosti 0,3 μN.

4.6 Vypočítajte veľkosť m magnetického momentu, maximálnu veľkosť M_d krútiaceho momentu dvojice síl a rozdiel medzi maximálnou a minimálnou potenciálnou energiou prúdovej slučky tvaru kružnice polomeru R = 0,1 m s elektrickým prúdom I = 0,1 A v homogénnom magnetickom poli vo vákuu s magnetickou indukciou veľkosti B = 0,1 T.

Riešenie:
Veľkosť m magnetického momentu prúdovej slučky je podľa (4.13)
$$m = IS = I\pi R^2 = 0{,}1 \cdot \pi \cdot 0{,}1^2\ \mathrm{A \cdot m^2} = 3{,}14 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A \cdot m^2}$$
a maximálna veľkosť krútiaceho momentu je podľa (4.14)
$$M_{\mathrm{d,max}} = |\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}|_{\max} = mB = 3{,}14 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A \cdot m^2} \cdot 0{,}1\,\mathrm{T} = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N \cdot m}$$
Potenciálna energia prúdovej slučky v magnetickom poli je
$$E_{\mathrm{p}}(\theta) = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B} = -mB\cos\theta.$$
Maximálna hodnota $E_{\mathrm{p,\,max}} = mB$ sa dosahuje v labilnej rovnovážnej polohe (θ = 180°), minimálna hodnota $E_{\mathrm{p,\,min}} = -\,mB$ sa dosahuje v stabilnej rovnovážnej polohe (θ= 0°). Rozdiel medzi maximálnou a minimálnou potenciálnou energiou prúdovej slučky je
$$\Delta E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p,max}} - E_{\mathrm{p,min}} = 2mB = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A \cdot m^2} \cdot 0{,}1\,\mathrm{T} = 6{,}28 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$$
Veľkosť magnetického momentu prúdovej slučky je $3{,}14.10^{-3}$ A.m^2, maximálna veľkosť krútiaceho momentu dvojice síl je $3{,}14.10^{-4}$ Nm, rozdiel medzi maximálnou a minimálnou potenciálnou energiou prúdovej slučky je $6{,}28.10^{-4}$ J.

4.7 Vinutím tenkej vzduchovej cievky (solenoidu) s N = 5000 závitmi priemeru d = 4 cm a dĺžky l = 30 cm preteká elektrický prúd I = 10 A. Aká je vlastná indukčnosť L solenoidu a aká je energia E_M magnetického poľa vnútri solenoidu?

Riešenie:
Vlastná indukčnosť je podľa (4.29) podielom celkového vlastného magnetického toku Φ a elektrického prúdu I vo vinutí solenoidu
$$L = \frac{\Phi}{I} \qquad \text{(a)}$$
Celkový magnetický tok Φ je súčin počtu závitov N a toku Φ_1 cez plochu jedného závitu cievky
$$\Phi = N\Phi_1 \qquad \text{(b)}$$
Magnetický tok Φ_1 cez plochu jedného závitu cievky počítame vzťahom (4.11)
$$\Phi_1 = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = BS = B\frac{\pi d^2}{4} \qquad \text{(c)}$$
pričom pre jednoduchosť predpokladáme, že veľkosť B magnetickej indukcie je vnútri solenoidu všade rovnaká. Veľkosť B magnetickej indukcie vnútri solenoidu určíme z Ampérovho zákona celkového prúdu (4.16)
$$\oint_{l_1} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\mathrm{C}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^l B\mathrm{d}l = \mu_0 NI \quad \Rightarrow \quad Bl = \mu_0 NI \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 NI}{l} \qquad \text{(d)}$$
pričom l_1 je abstraktná uzavretá krivka zložená z priamej časti dĺžky l vnútri solenoidu a zo zakrivenej časti mimo solenoidu. Orientácia krivky je zhodná so smerom magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ vnútri solenoidu, preto krivka l_1 ohraničuje kladne spriahnutý celkový prúd NI a pre jednoduchosť zanedbávame magnetické pole mimo solenoidu. Pri postupnom dosadení vzťahov (b, c, d) do vzťahu (a) dostaneme
$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N\Phi_1}{I} = \frac{N}{I}B\frac{\pi d^2}{4} = \frac{N}{I} \cdot \frac{\mu_0 NI}{l} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{N^2 \mu_0 \pi d^2}{4l} \qquad \text{(e)}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (e) dostaneme

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \pi d^2}{4l} = \frac{25 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 0.04^2}{4 \cdot 0,3}\,\mathrm{H} = 131,59\ \mathrm{mH}$$

Energiu E_M magnetického poľa vnútri solenoidu vypočítame podľa vzťahu (4.34)

$$E_\mathrm{M} = \frac{LI^2}{2} = \frac{131,59 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{2}\,\mathrm{J} = 6580\ \mathrm{mJ}$$

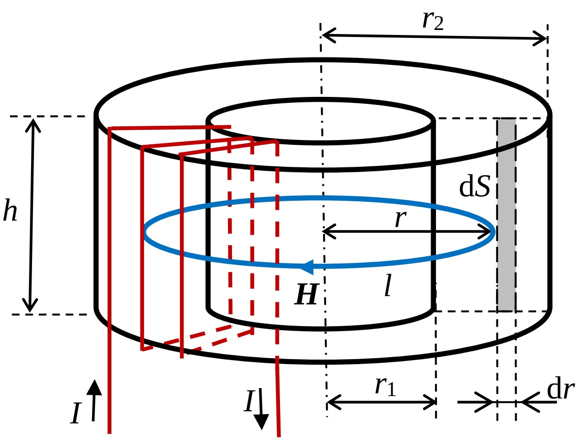
Vlastná indukčnosť solenoidu je 131,59 mH, energia magnetického poľa vnútri solenoidu je 6580 mJ.

4.8 Vinutím cievky s prstencovým železným jadrom (toroid) s N = 6000 závitmi preteká elektrický prúd I = 5 A. Pri tomto prúde má železné jadro relatívnu permeabilitu μ_r = 680. Vnútorný polomer prstenca je r_1 = 2 cm, vonkajší polomer prstenca je r_2 = 4 cm a výška prstenca je h = 3 cm, pozri obr. 4.4. Aká je vlastná indukčnosť L toroidu a aká je energia E_M magnetického poľa v železnom prstenci?

Riešenie:

Vlastnú indukčnosť L získame zo vzťahu (4.29) vtedy, ak postupne určíme:

1. veľkosť H intenzity magnetického poľa a veľkosť B magnetickej indukcie vnútri prstenca vo vzdialenosti r od osi toroidu,
2. magnetický tok Φ_1 cez prierez jadra (cez plochu jedného závitu),
3. celkový magnetický tok Φ toroidu.



Obr. 4.4 Cievka s prstencovým jadrom (toroid)

Veľkosť H intenzity magnetického poľa určíme z Ampérovho zákona celkového prúdu (4.24)

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_k \pm I_k \quad \Rightarrow \quad \oint_l H \cdot \mathrm{d}l = NI \quad \Rightarrow \quad H\,2\pi r = NI \quad \Rightarrow \quad H = \frac{NI}{2\pi r} \qquad \text{(a)}$$

Orientácia abstraktnej kružnice l polomeru r v železnom prstenci je zhodná so smerom intenzity $\boldsymbol{H}$ magnetického poľa vnútri prstenca, preto kružnica l ohraničuje kladne spriahnutý celkový prúd NI. Zároveň predpokladáme, že veľkosť H intenzity magnetického poľa je v každom bode kružnice l rovnaká. Veľkosť B magnetickej indukcie vnútri prstenca vo vzdialenosti r od osi toroidu určíme dosadením vzťahu (a) do materiálového vzťahu (4.27)

$$B = \mu_0 \mu_\mathrm{r} H = \frac{\mu_0 \mu_\mathrm{r} NI}{2\pi r} \qquad \text{(b)}$$

Magnetický tok Φ_1 cez plochu jedného závitu cievky určíme dosadením vzťahu (b) do vzťahu (4.11)

$$\Phi_1 = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S B \cdot \mathrm{d}S = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 \mu_\mathrm{r} NI}{2\pi r} h\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \mu_\mathrm{r} NIh}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 \mu_\mathrm{r} NIh}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad \text{(c)}$$

Celkový magnetický tok Φ je súčin počtu závitov N a toku Φ_1 cez plochu jedného závitu toroidu

$$\Phi = N\Phi_1 = \frac{\mu_0 \mu_\mathrm{r} N^2 Ih}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad \text{(d)}$$

Vlastnú indukčnosť L toroidu získame dosadením vzťahu (d) do vzťahu (4.29) s následným dosadením zadaných hodnôt

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \mu_\mathrm{r} N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 680 \cdot 36 \cdot 10^6 \cdot 0.03}{2\pi} \ln \frac{4}{2}\ \mathrm{H} = 101{,}81\ \mathrm{H} \qquad \text{(e)}$$

Energiu E_M magnetického poľa v železnom prstenci vypočítame dosadením výsledku (e) a zadanej hodnoty elektrického prúdu do vzťahu (4.34)

$$E_\mathrm{M} = \frac{LI^2}{2} = \frac{101{,}81 \cdot 5^2}{2}\ \mathrm{J} = 1273\ \mathrm{J}$$

Vlastná indukčnosť toroidu je 101,81 H, energia magnetického poľa v železnom prstenci je 1273 J.

4.9 Aká je veľkosť F sily, ktorou elektromagnet tvaru podkovy drží kotvu na svojich póloch? Plošný obsah jedného pólového nástavca je S = 100 cm^2 a pri prietoku elektrického prúdu vinutím elektromagnetu je na styčnej ploche nástavca a kotvy magnetická indukcia veľkosti B = 1,3 T.

Riešenie:

Ak pri vzďaľovaní kotvy od pólov elektromagnetu udržiavame v magnetickom obvode rovnaký magnetický tok, potom sa hľadaná veľkosť F sily nemení. Vonkajšia sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ pri odďaľovaní kotvy od pólov elektromagnetu o elementárnu vzdialenosť dx prekonáva prídržnú silu $\boldsymbol{F}$ rovnakej veľkosti a vykoná elementárnu prácu dW, ktorá sa rovná elementárnej zmene dE_M energie magnetického poľa v magnetickom obvode. Táto elementárna zmena je zrejme lokalizovaná vo vzduchových medzerách šírky dx medzi dvomi pólovými nástavcami a kotvou, preto s využitím vzťahu (4.36) a materiálového vzťahu (4.23) pre vzduch dostaneme

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_\mathrm{M} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{ext}\mathrm{d}x = w_\mathrm{M}\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad F\mathrm{d}x = \frac{BH}{2} \cdot 2S\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad F = \frac{B^2 S}{\mu_0} \qquad \text{(a)}$$

Dosadením zadaných hodnôt do vzťahu (a) dostaneme

$$F = \frac{B^2 S}{\mu_0} = \frac{1{,}3^2 \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}}\ \mathrm{N} = 13449\ \mathrm{N}$$

Veľkosť prídržnej magnetickej sily pôsobiacej na kotvu je 13449 N.

Trnava, 4. 11. 2014 Vypracoval: RNDr. Igor Jančuška, PhD.