SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
MATERIÁLOVOTECHNOLOGICKÁ FAKULTA SO SÍDLOM V TRNAVE

Fyzika

Časť: Laboratórne cvičenie

Laboratórna úloha č. 3:
MERANIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI METÓDOU FYZIKÁLNEHO KYVADLA

Akademický rok: 2023/2024

Vypracovala: doc. PaedDr. Žaneta Gerhátová, PhD.

Laboratórna úloha č. 3: MERANIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI METÓDOU FYZIKÁLNEHO KYVADLA

Naštudujte si uvedenú tému zo skrípt:
Kubliha, M. a kol. *Metodológia technického experimentu*. STU v Bratislave, MTF so sídlom v Trnave, 2007, ISBN 978-80-8096-00, **str. 52 - 53**.

Po naštudovaní danej problematiky zo skrípt si pozrite aj nasledujúce videá:

- https://www.youtube.com/watch?v=YiffYEpY6nk,
- https://www.youtube.com/watch?v=h_ZCoAIdIlo.

Cieľ

Určiť moment zotrvačnosti telesa komplikovaného tvaru (napr. ložiska) metódou fyzikálneho kyvadla a stanoviť neistotu merania.

OBSAH

Teoretický úvod

Moment zotrvačnosti J telesa vzhľadom na os rotácie je daný výrazom:

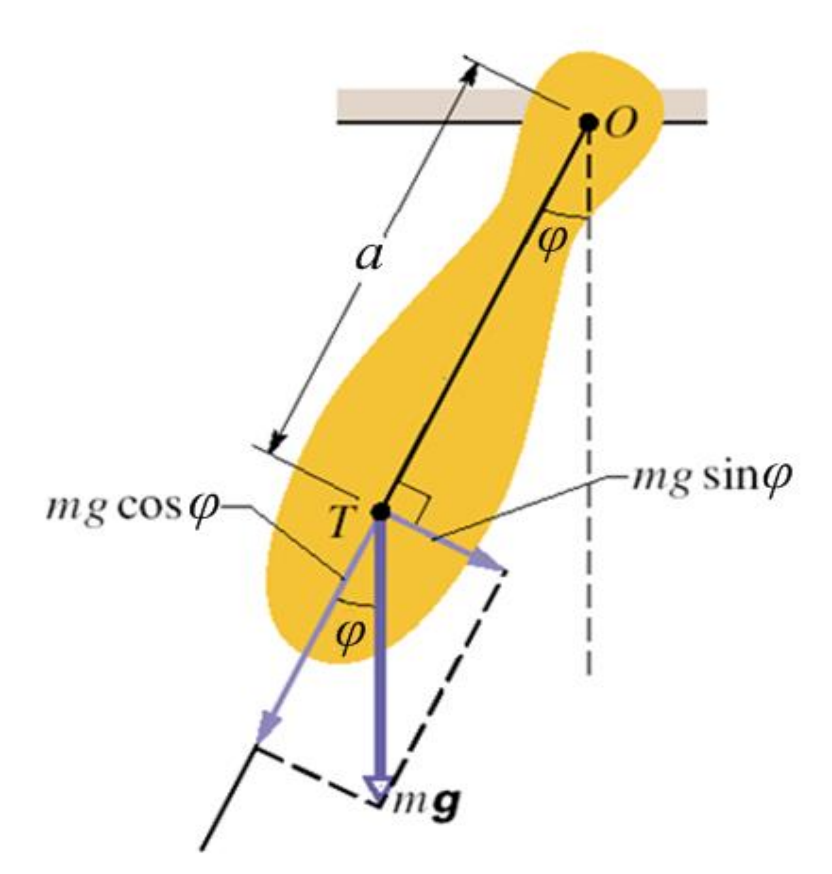
$$J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m, \qquad (1)$$

kde r je vzdialenosť hmotnostného elementu $\mathrm{d}m$ od osi rotácie.

Jednotka momentu zotrvačnosti: $[J] = 1\,\mathrm{kg.m^2}$

Moment zotrvačnosti sa v technickej praxi často zisťuje experimentálne. Na tento účel je možné použiť **metódu fyzikálneho kyvadla**.

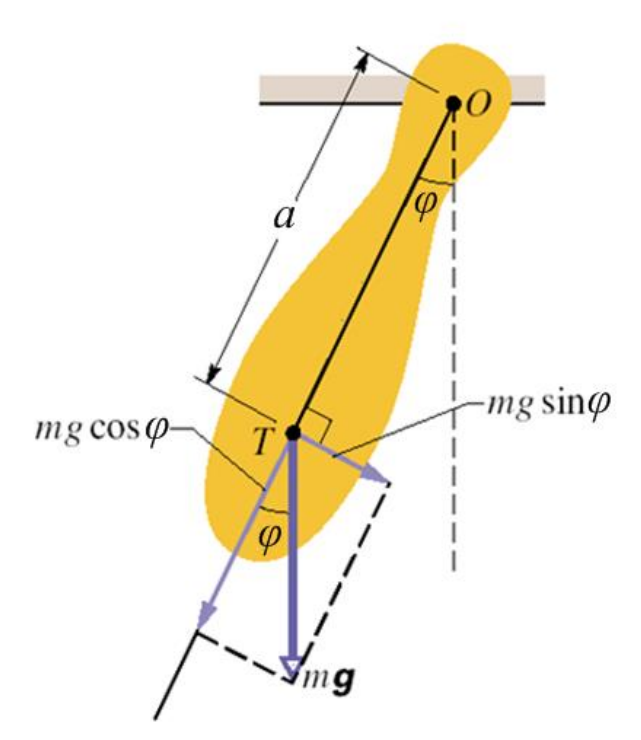
Teoretický úvod



Obr. 1 Fyzikálne kyvadlo

Fyzikálne kyvadlo je ľubovoľné teleso, ktoré vykonáva periodický kmitavý pohyb okolo osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom.

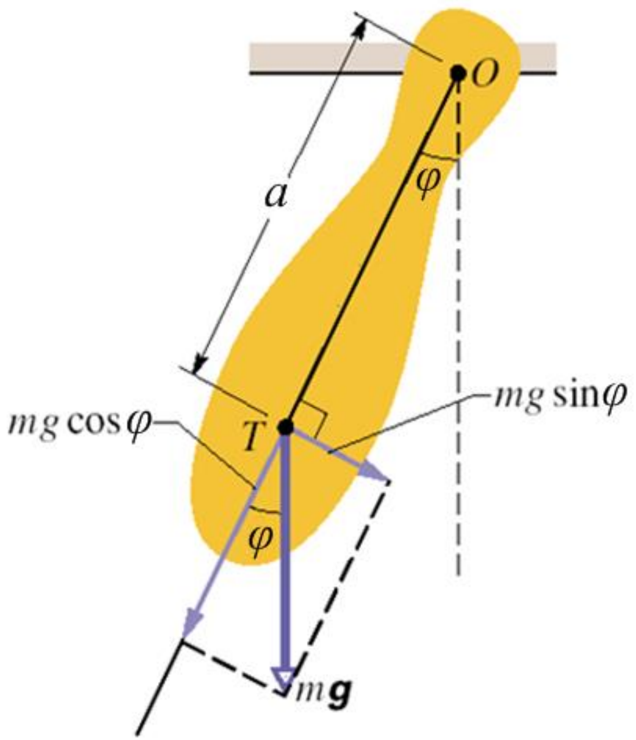
Teoretický úvod



Obr. 1 Fyzikálne kyvadlo

Fyzikálne kyvadlo je teleso konečných rozmerov, a nie hmotný bod konajúci translačný pohyb po oblúku kružnice, preto musíme na popis jeho pohybu použiť pohybovú rovnicu telesa otáčajúceho sa okolo pevnej osi: $\tau_\nu = J\varepsilon,$ (2)
kde τ_ν je priemet momentu sily pôsobiacej na teleso do osi otáčania, J je moment zotrvačnosti a ε je uhlové zrýchlenie určované vzhľadom na os otáčania.

Teoretický úvod



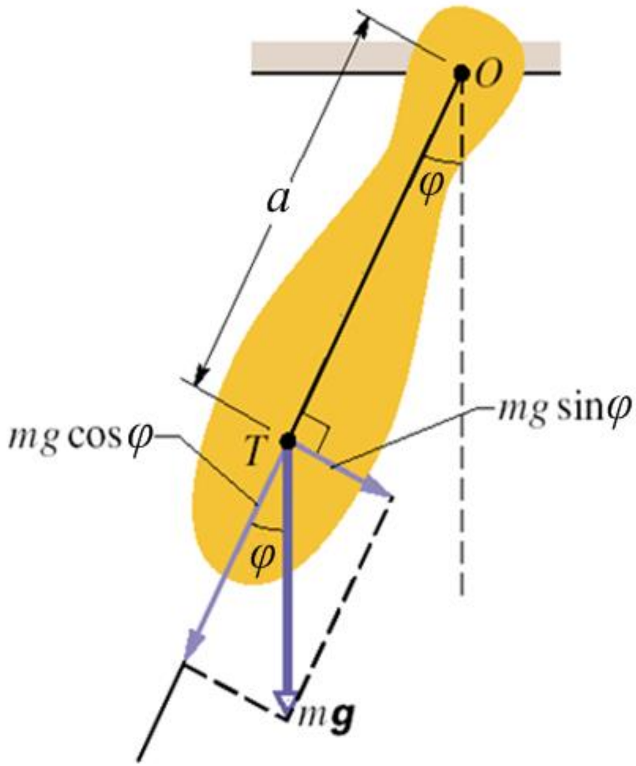
Obr. 1 Fyzikálne kyvadlo

Po vychýlení z rovnovážnej polohy vykonáva teleso harmonické kmity opísané rovnicou:

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mga\sin\varphi, \qquad (3)$$

kde φ je uhol vychýlenia z rovnovážnej polohy, m je hmotnosť telesa (ložiska), a je vzdialenosť osi otáčania od ťažiska, g je tiažové zrýchlenie.

Teoretický úvod



Obr. 1 Fyzikálne kyvadlo

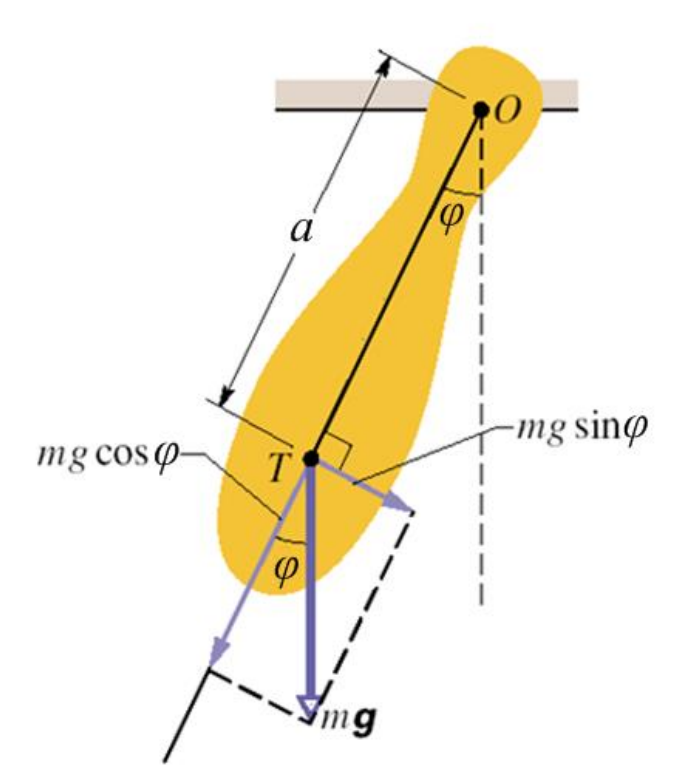
Predchádzajúca rovnica v prípade malých odchýlok (t. j. φ < 5°) prejde na tvar:

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mga\varphi. \qquad (4)$$

Táto rovnica opisuje harmonický pohyb s uhlovou frekvenciou:

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}. \qquad (5)$$

Teoretický úvod



Obr. 1 Fyzikálne kyvadlo

Perióda pohybu fyzikálneho kyvadla (t. j. doba kmitu) potom je:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}. \qquad (6)$$

Z doby kmitu tohto kyvadla možno určiť moment zotrvačnosti J:

$$J = \frac{mga}{4\pi^2}T^2. \qquad (7)$$

Ak chceme určiť moment zotrvačnosti J^* vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, môžeme použiť Steinerovu vetu, podľa ktorej

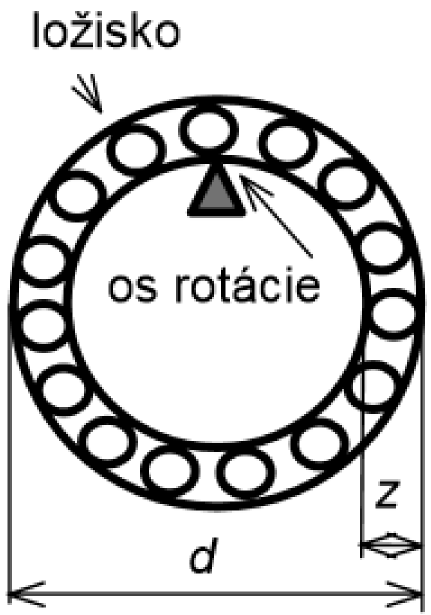
$$J^* = J - ma^2. \qquad (8)$$

EXPERIMENTÁLNA ČASŤ

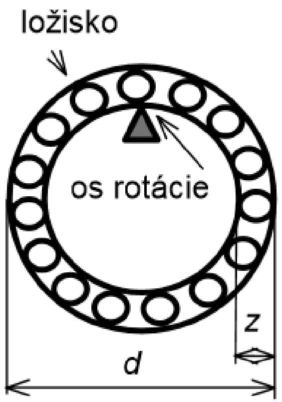
Prístroje a pomôcky: teleso komplikovanejšieho tvaru (napr. ložisko), stopky, váhy, posuvné meradlo, oceľové meradlo.

Postup práce

Teleso s neznámym momentom zotrvačnosti (ložisko) upevníme tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi (obr. 2).



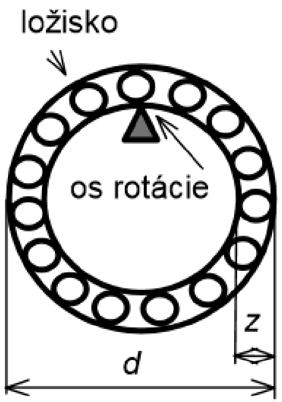
Obr. 2 Ložisko



Postup práce

1. Vážením zistite hmotnosť m telesa (ložiska) a určte δm (neistota typu B).
2. Odmerajte priemer ložiska d (5-krát) a hodnoty zapíšte do tabuľky 1.
3. Vzdialenosť osi rotácie a od ťažiska vypočítajte ako rozdiel polovice vonkajšieho priemeru d ložiska a vzdialenosti z osi rotácie od vonkajšieho obvodu ložiska: $a = \frac{d}{2} - z$

   Výsledky zapíšte do tabuľky 2.
4. Stopkami odmerajte 10-krát dobu 25 kmitov telesa (ložiska) a zapíšte do tabuľky 3.



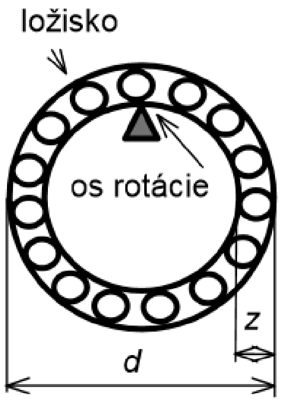
Postup práce

5. Pre každé z týchto meraní určte dobu jedného kmitu telesa: $T = T_{25}/25$ a zapíšte do tab. 3.

6. Do vzťahu na výpočet momentu zotrvačnosti telesa:

$$J = \frac{mga}{4\pi^2}\overline{T}^2.$$

dosaďte za dobu kmitu telesa aritmetický priemer zo všetkých meraní $\overline{T}$.

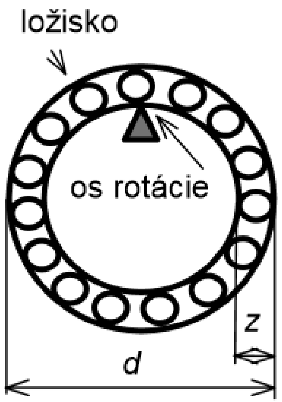


Postup práce

7. Pri vychýlení telesa z rovnovážnej polohy dbajte na to, aby výchylky boli malé, pretože vzťah:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

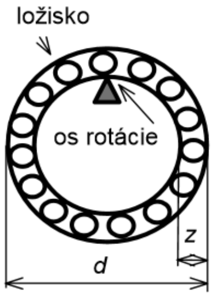
pre dobu kmitu fyzikálneho kyvadla bol odvodený za predpokladu $\varphi < 5°$.



Postup práce

8. Moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom vypočítajte pomocou vzťahu (8):

$$J^* = J - ma^2.$$



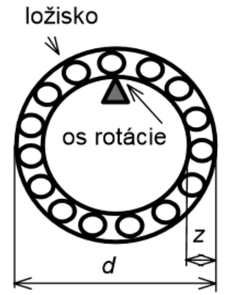
Experimentálna časť

Hmotnosť m telesa (ložiska) určte vážením.
Určte δm (priame meranie - neistota typu B) a relatívnu neistotu merania hmotnosti:

$$\delta m_{\mathrm{rel}} = \frac{\delta m}{m} .100\%$$

Výsledok správne zaokrúhlite a zapíšte v tvare:
$m = m \pm \delta dm$ a δm_{rel}.

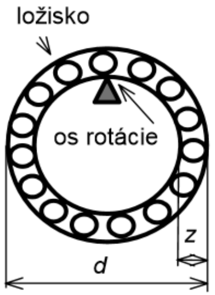
Poznámka: Neistoty zaokrúhlite na dve platné číslice!!!



Experimentálna časť

Tabuľka 1 Namerané hodnoty vonkajšieho priemeru ložiska (δd_B = 1 mm)

i	d_i [mm]	$\Delta d_i = (d_i - \bar{d})$ [mm]	$\Delta d_i^2 = (d_i - \bar{d})^2$ [mm^2]
1. 2. 3. 4. 5.			
Σ			



Experimentálna časť

Výpočty k tabuľke 1:

a) aritmetický priemer priemeru ložiska: $\bar{d}$

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$$

b) odchýlka i-teho merania: $\Delta d_i = d_i - \bar{d}$

c) kvadrát odchýlky i-teho merania: $(\Delta d_i)^2 = (d_i - \bar{d})^2$

d) neistota merania priemeru ložiska – priame meranie – neistota typu A:

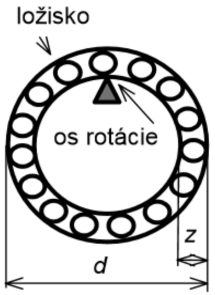
$$\delta d = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta d_i)^2}{n(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}}$$

e) relatívna neistota meranej veličiny v %: $\delta d_{\text{rel}} = \frac{\delta d}{\bar{d}}.100\%$

f) výsledok správne zaokrúhlite a zapíšte v tvare:

$d = \bar{d} \pm \delta d$ a δd_{rel}.

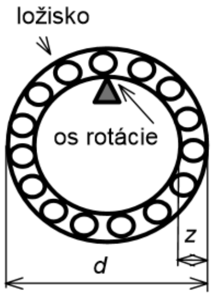
Poznámka: Neistoty zaokrúhlite na dve platné číslice!!!



Experimentálna časť

Tabuľka 2 Namerané hodnoty vzdialenosti z osi rotácie od vonkajšieho obvodu ložiska (δz_B = 0,05 mm)

i	z_i [mm]	$\Delta z_i = (z_i - \bar{z})$ [mm]	$\Delta z_i^2 = (z_i - \bar{z})^2$ [mm^2]
1. 2. 3. 4. 5.			
$\sum$			



Experimentálna časť

Výpočty k tabuľke 2:

a) aritmetický priemer vzdialenosti z :

$$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

b) odchýlka i-teho merania: $\Delta z_i = z_i - \overline{z}$

c) kvadrát odchýlky i-teho merania: $(\Delta z_i)^2 = (z_i - \overline{z})^2$

d) neistota merania vzdialenosti z – priame meranie – neistota typu A:

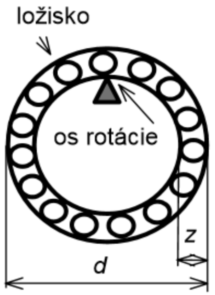
$$\delta z = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta z_i)^2}{n(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})^2}{n(n-1)}}$$

e) relatívna neistota meranej veličiny v %: $\delta z_{\mathrm{rel}} = \frac{\delta z}{\overline{z}}.100\%$

f) výsledok správne zaokrúhlite a zapíšte v tvare:

$z = \overline{z} \pm \delta z$ a δz_{rel}.

Poznámka: Neistoty zaokrúhlite na dve platné číslice!!!



Experimentálna časť

Vypočítajte:

Vzdialenosť osi rotácie a od ťažiska ložiska:

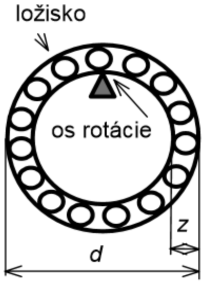
$$a = \frac{\bar{d}}{2} - \bar{z}$$

Neistotu merania vzdialenosti a osi rotácie od ťažiska ložiska δa.

$$\delta a = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial d} \delta d \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial z} \delta z \right)^2}$$

Relatívnu neistotu merania vzdialenosti a osi rotácie od ťažiska ložiska δa_{rel}:

$$\delta a_{\mathrm{rel}} = \frac{\delta a}{\bar{a}} .100\,\%$$

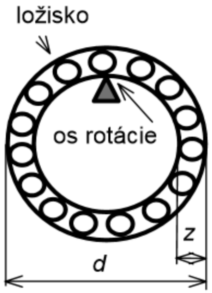


Experimentálna časť

Výsledok správne zaokrúhlite a zapíšte v tvare:

$a = a \pm \delta a$ a δa_{rel}.

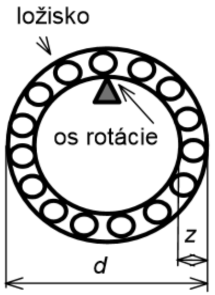
Poznámka: Neistoty zaokrúhlite na dve platné číslice!!!



Experimentálna časť

Tabuľka 3 Doba T_{25} kmitov a jedného kmitu T ložiska (δT_B = 0,01 s)

i	T_{25} [s]	$T = T_{25}/25$ [s]	$\Delta T_i = (T_i - \bar{T})$ [s]	$\Delta T_i^2 = (T_i - \bar{T})^2$ [s²]
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				
$\sum$				



Experimentálna časť

Výpočty k tabuľke 3:

a) aritmetický priemer doby jedného kmitu: $\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$

b) odchýlka i-teho merania: $\Delta T_i = T_i - \bar{T}$

c) kvadrát odchýlky i-teho merania: $(\Delta T_i)^2 = (T_i - \bar{T})^2$

d) neistota merania doby kmitu – priame meranie – neistota typu A:

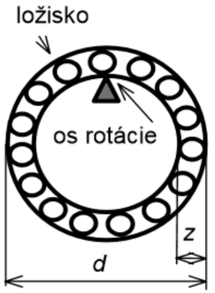
$$\delta T = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta T_i)^2}{n(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}}$$

e) relatívna neistota meranej veličiny v %: $\delta T_{\mathrm{rel}} = \frac{\delta T}{\bar{T}}.100\%$

f) výsledok správne zaokrúhlite a zapíšte v tvare:

$T = \bar{T} \pm \delta T$ a δT_{rel}.

Poznámka: Neistoty zaokrúhlite na dve platné číslice!!!

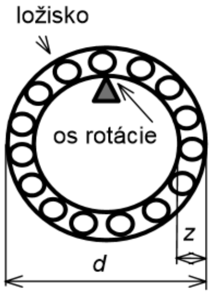


Experimentálna časť

Moment zotrvačnosti J ložiska určte nepriamym meraním, t. j. výpočtom zo vzťahu:

$$J = \frac{mga}{4\pi^2}\bar{T}^2$$

g = 9,81 m.s^{-2}



Experimentálna časť

Neistotu merania momentu zotrvačnosti δJ určte metódou linearizácie pre viacrozmerný prípad:

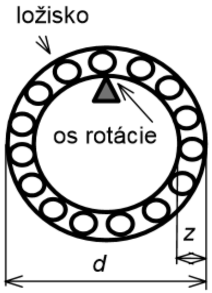
$$\delta J = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial m}\delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial a}\delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T}\delta T\right)^2}\ ,$$

kde

$$\frac{\partial J}{\partial m} = \left|\frac{\partial J}{\partial m}\right| = \left|\frac{ga\overline{T}^2}{4\pi^2}\right|$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \left|\frac{\partial J}{\partial a}\right| = \left|\frac{mg\overline{T}^2}{4\pi^2}\right|$$

$$\frac{\partial J}{\partial T} = \left|\frac{\partial J}{\partial T}\right| = \left|\frac{mga2\overline{T}}{4\pi^2}\right|$$



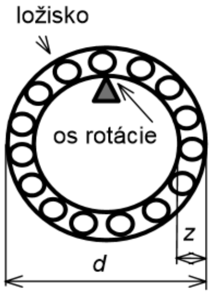
Experimentálna časť

Relatívnu neistotu merania momentu zotrvačnosti δJ_{rel} vypočítajte zo vzťahu:

$$\delta J_{rel} = \frac{\delta J}{J} .100\,\%$$

Vypočítanú hodnotu momentu zotrvačnosti ložiska J a neistoty merania δJ, δJ_{rel} správne zaokrúhlite a zapíšte v tvare: $J = J \pm \delta J$ a δJ_{rel}.

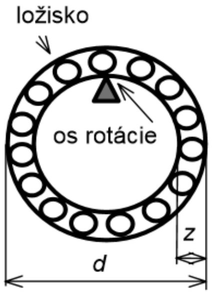
Poznámka: Neistoty zaokrúhlite na dve platné číslice!!!



Experimentálna časť

Moment zotrvačnosti J^* ložiska vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom určte nepriamym meraním, t. j. výpočtom zo vzťahu:

$$J^* = J - ma^2.$$



Experimentálna časť

Neistotu merania momentu zotrvačnosti δJ^* určte metódou linearizácie pre viacrozmerný prípad:

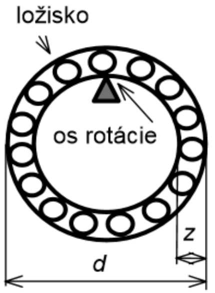
$$\delta J^* = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial J^*}{\partial m}\delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial J^*}{\partial a}\delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial J^*}{\partial T}\delta T\right)^2},$$

kde

$$\frac{\partial J^*}{\partial m} = \left|\frac{\partial J^*}{\partial m}\right| = \left|\frac{ga\bar{T}^2}{4\pi^2} - a^2\right|$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial a} = \left|\frac{\partial J^*}{\partial a}\right| = \left|\frac{mg\bar{T}^2}{4\pi^2} - 2ma\right|$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial T} = \left|\frac{\partial J^*}{\partial T}\right| = \left|\frac{mga2\bar{T}}{4\pi^2}\right|$$



Experimentálna časť

Relatívnu neistotu merania momentu zotrvačnosti $\delta J^{*}{}_{\mathrm{rel}}$ vypočítajte zo vzťahu:

$$\delta J^{*}{}_{\mathrm{rel}} = \frac{\delta J^{*}}{J^{*}}.100\,\%$$

Vypočítanú hodnotu momentu zotrvačnosti ložiska J^{*} a neistoty merania, δJ^{*}, $\delta J^{*}{}_{\mathrm{rel}}$ správne zaokrúhlite a zapíšte

v tvare: $J^{*} = J^{*} \pm \delta J^{*}$ a $\delta J^{*}{}_{\mathrm{rel}}$.

Poznámka: Neistoty zaokrúhlite na dve platné číslice!!!

Experimentálna časť

Diskutujte o výsledkoch merania a formulujte záver.

V závere sa pokúste odpovedať na otázku:

Ktorú z veličín vo vzťahu: $J = \frac{mga}{4\pi^2}\bar{T}^2$ je potrebné merať najpresnejšie?

Vysvetlite, prečo.

Z merania vypracujte laboratórny protokol.

Vypracovaný protokol odovzdajte svojmu vyučujúcemu na nasledujúcej hodine.

Literatúra

1. Kubliha, M. a kol. (2007) *Metodológia technického experimentu*. STU v Bratislave, MTF so sídlom v Trnave, ISBN 978-80-8096-00, str. 52 - 53.

2. Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálnym kyvadlom, (video), [online] dostupné na: <https://www.youtube.com/watch?v=YiffYEpY6nk> citované dňa 08.02.2024).

3. Physical Pendulums and Moments of Inertia, (video), [online] dostupné na: <https://www.youtube.com/watch?v=h_ZCoAIdIIo> citované dňa 08.02.2024).

Ďakujem za pozornosť!