Движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока направленного по оси Ох

Contents

1	Теоретическая часть	3
	1.1 Формулировка задачи	3
	1.2 Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле	3
	1.3 Движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока	3
2	Моделирование	4

1 Теоретическая часть

1.1 Формулировка задачи

Заряженная частица влетает в магнитнрое поле прямого тока под углом к направлению поля.Построить проекции траектории частицы на координатные плоскости для произвольной начальной скорости частицы. В частности построить траекторию частицы для случая, когда начальная скорость частицы лежит в плоскости хОу и направлена под произвольным углом к направлению тока.

1.2 Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Уравнение движения заряженной частицы в магнитном поле:

$$ec{F_L}=mec{a}$$
, где F_L - сила Лоренца

$$m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = q[\vec{\vartheta}, \vec{B}] \tag{1}$$

B - магнитная индукция, q - заряд частицы, а m - ее масса.

Раз частица движется под произвольным углом α к направлению тока, разделим скорость на параллельную $\vec{\vartheta}_{\perp}$ и перпендикулярную составляющую $\vec{\vartheta}_{\perp}$ и перепишем уравнение в виде:

$$m\frac{d\vec{\vartheta}_{\parallel}}{dt} + m\frac{d\vec{\vartheta}_{\perp}}{dt} = q[\vec{\vartheta}, \vec{B}]_{\parallel} + q[\vec{\vartheta}, \vec{B}]_{\perp}$$
 (2)

Заметим, что $m \frac{d \vec{\vartheta}_{\parallel}}{dt} = q[\vec{\vartheta}, \vec{B}]_{\parallel} = 0$. Значит $\vec{\vartheta}_{\parallel} = const$, и в направлении, параллельному магнитному полю частица движется с постоянной скоростью.

Теперь рассмотрим движение в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Такое движение будет движением по окружности с линейной скоростью $\vec{\vartheta}_{\perp}$. Определим радиус R этой окружности:

$$\frac{m\vartheta_{\perp}^2}{R} = q\vartheta_{\perp}B\tag{3}$$

$$R = \frac{m\vartheta_{\perp}}{aB} \tag{4}$$

Также найдем угловую частоту вращения:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\vartheta_{\perp}}{R} = \frac{qB}{m} \tag{5}$$

Таким образом, заряженная частица в однородном магнитном поле будет двигаться вдоль поля с постоянной скоростью, при этом вращаясь вокруг силовой линии с линейной скоростью. Частица будет двигаться по спирали с постоянным радиусом R, постоянным шагом и постоянной угловой скоростью.

1.3 Движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока

В предыдущем пункте было рассмотрено движение в однородном поле, однако поле прямого тока неоднородно (с помощью закона Био-Савара находим: $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$).

В неоднородном магнитном поле частица также будет двигаться по окружности, но радис будет меняться - чем больше В, тем меньше радиус кривизны. Тогда движение можно разделить на 3 составляющие:

- быстрое ларморовское вращение вокруг силовой линии магнитного поля
- движение вдоль направления силовой линии
- дрейфое движение циклотронной окружности перпендикулярно магнитному полю

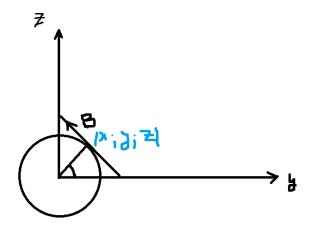


Figure 1: Enter Caption

Зададимся начальной скоростью $\vec{\vartheta_0}$, тогда в начальный момент времени частица будет находиться от проводника на расстоянии $r_0 = \frac{m\vartheta_0}{qB(r_0)}$.

Рассмотрим плоскость проходящую через проводник и частицу. Направим ось X по току, ось Y перпендикулярно проводнику. Спроецируем вектор магнитной индукции B:

$$\begin{cases}
B_x = 0 \\
B_y = -B\cos\alpha = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2 + z^2}} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi(y^2 + z^2)} \\
B_z = B\sin\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2 + z^2}} \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I z}{2\pi(y^2 + z^2)}
\end{cases}$$
(6)

Тогда векторное произведение $[\vartheta B]$ можно переписать в виде:

$$[\vartheta B] = (\vartheta_y B_z - \vartheta_z B_y, -\vartheta_x B_z, \vartheta_x B_y) \tag{7}$$

Подставим полученные формулы во второй закон Ньютона:

$$\begin{cases}
\frac{d\vartheta_x}{dt} = -\frac{e}{m}(\vartheta_y B_z - \vartheta_z B_y) \\
\frac{d\vartheta_y}{dt} = \frac{e}{m}\vartheta_x B_z \\
\frac{d\vartheta_z}{dt} = -\frac{e}{m}\vartheta_x B_y
\end{cases}$$
(8)

$$\begin{cases}
\frac{d\vartheta_x}{dt} = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi m(z^2 + y^2)} (y\vartheta_y + z\vartheta_z) \\
\frac{d\vartheta_y}{dt} = \frac{ey\mu_0 I}{2\pi m(y^2 + z^2)} \vartheta_x \\
\frac{d\vartheta_z}{dt} = -\frac{ez\mu_0 I}{2\pi m(y^2 + z^2)} \vartheta_x
\end{cases} \tag{9}$$

Теперь приведем уравнения к безразмерному виду: Введем новые переменные: $\omega = \frac{eB}{m}, T = \frac{2\pi}{\omega}, \tau = \frac{t}{T}, R = \frac{m\vartheta_0}{eB(r_0)}, x = \Upsilon R, y = \Psi R, z = \Omega R$. Подставим в систему:

$$\begin{cases}
\frac{d^2 \Upsilon}{d\tau^2} = -\frac{4\pi^2 (\vartheta_y B_z - \vartheta_z B_y) e}{m\vartheta_{0x}^2} \\
\frac{d^2 \Psi}{d\tau^2} = \frac{4\pi^2 \vartheta_x B_z e}{m\vartheta_{0y}^2} \\
\frac{d^2 \Omega}{d\tau^2} = -\frac{4\pi^2 \vartheta_x B_y e}{m\vartheta_{0z}^2}
\end{cases} \tag{10}$$

2 Моделирование

Код на github