# Движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока направленного по оси Ox

# Contents

**1 Теоретическая часть** **3**
1.1 Формулировка задачи . . . 3
1.2 Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле . . . 3
1.3 Движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока . . . 3

**2 Моделирование** **4**

# 1 Теоретическая часть

## 1.1 Формулировка задачи

Заряженная частица влетает в магнитнрое поле прямого тока под углом к направлению поля.Построить проекции траектории частицы на координатные плоскости для произвольной начальной скорости частицы. В частности построить траекторию частицы для случая, когда начальная скорость частицы лежит в плоскости xOy и направлена под произвольным углом к направлению тока.

## 1.2 Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Уравнение движения заряженной частицы в магнитном поле:

$$\vec{F_L} = m\vec{a}, \text{ где } F_L \text{ - сила Лоренца}$$

$$m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = q[\vec{\vartheta}, \vec{B}] \tag{1}$$

$B$ - магнитная индукция, $q$ - заряд частицы, а $m$ - ее масса.

Раз частица движется под произвольным углом $\alpha$ к направлению тока, разделим скорость на параллельную $\vec{\vartheta}_{\parallel}$ и перпендикулярную составляющую $\vec{\vartheta_{\perp}}$ и перепишем уравнение в виде:

$$m\frac{d\vec{\vartheta_{\parallel}}}{dt} + m\frac{d\vec{\vartheta_{\perp}}}{dt} = q[\vec{\vartheta}, \vec{B}]_{\parallel} + q[\vec{\vartheta}, \vec{B}]_{\perp} \tag{2}$$

Заметим, что $m\frac{d\vec{\vartheta_{\parallel}}}{dt} = q[\vec{\vartheta}, \vec{B}]_{\parallel} = 0$. Значит $\vec{\vartheta_{\parallel}} = const$, и в направлении, параллельному магнитному полю частица движется с постоянной скоростью.
Теперь рассмотрим движение в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Такое движение будет движением по окружности с линейной скоростью $\vec{\vartheta_{\perp}}$. Определим радиус $R$ этой окружности:

$$\frac{m\vartheta_{\perp}^2}{R} = q\vartheta_{\perp}B \tag{3}$$

$$R = \frac{m\vartheta_{\perp}}{qB} \tag{4}$$

Также найдем угловую частоту вращения:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\vartheta_{\perp}}{R} = \frac{qB}{m} \tag{5}$$

Таким образом, заряженная частица в однородном магнитном поле будет двигаться вдоль поля с постоянной скоростью, при этом вращаясь вокруг силовой линии с линейной скоростью. Частица будет двигаться по спирали с постоянным радиусом $R$, постоянным шагом и постоянной угловой скоростью.

## 1.3 Движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока

В предыдущем пункте было рассмотрено движение в однородном поле, однако поле прямого тока неоднородно (с помощью закона Био-Савара находим: $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$).
В неоднородном магнитном поле частица также будет двигаться по окружности, но радис будет меняться - чем больше B, тем меньше радиус кривизны. Тогда движение можно разделить на 3 составляющие:

- быстрое ларморовское вращение вокруг силовой линии магнитного поля
- движение вдоль направления силовой линии
- дрейфое движение циклотронной окружности перпендикулярно магнитному полю

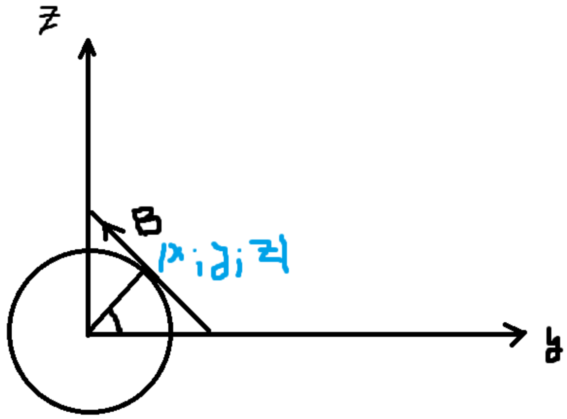


Figure 1: Enter Caption

Зададимся начальной скоростью $\vec{\vartheta_0}$, тогда в начальный момент времени частица будет находиться от проводника на расстоянии $r_0 = \frac{m\vartheta_0}{qB(r_0)}$ .
Рассмотрим плоскость проходящую через проводник и частицу. Направим ось X по току, ось Y перпендикулярно проводнику. Спроецируем вектор магнитной индукции B:

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -B\cos\alpha = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+z^2}}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} = -\frac{\mu_0 Iz}{2\pi(y^2+z^2)} \\ B_z = B\sin\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+z^2}}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{\mu_0 Iy}{2\pi(y^2+z^2)} \end{cases} \tag{6}$$

Тогда векторное произведение $[\vartheta B]$ можно переписать в виде:

$$[\vartheta B] = (\vartheta_y B_z - \vartheta_z B_y, -\vartheta_x B_z, \vartheta_x B_y) \tag{7}$$

Подставим полученные формулы во второй закон Ньютона:

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_x}{dt} = -\frac{e}{m}(\vartheta_y B_z - \vartheta_z B_y) \\ \frac{d\vartheta_y}{dt} = \frac{e}{m}\vartheta_x B_z \\ \frac{d\vartheta_z}{dt} = -\frac{e}{m}\vartheta_x B_y \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_x}{dt} = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi m(z^2+y^2)}(y\vartheta_y + z\vartheta_z) \\ \frac{d\vartheta_y}{dt} = \frac{ey\mu_0 I}{2\pi m(y^2+z^2)}\vartheta_x \\ \frac{d\vartheta_z}{dt} = -\frac{ez\mu_0 I}{2\pi m(y^2+z^2)}\vartheta_x \end{cases} \tag{9}$$

Теперь приведем уравнения к безразмерному виду: Введем новые переменные: $\omega = \frac{eB}{m}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\tau = \frac{t}{T}$, $R = \frac{m\vartheta_0}{eB(r_0)}$, $x = \Upsilon R$, $y = \Psi R$, $z = \Omega R$. Подставим в систему:

$$\begin{cases} \frac{d^2\Upsilon}{d\tau^2} = -\frac{4\pi^2(\vartheta_y B_z - \vartheta_z B_y)e}{m\vartheta_{0x}^2} \\ \frac{d^2\Psi}{d\tau^2} = \frac{4\pi^2\vartheta_x B_z e}{m\vartheta_{0y}^2} \\ \frac{d^2\Omega}{d\tau^2} = -\frac{4\pi^2\vartheta_x B_y e}{m\vartheta_{0z}^2} \end{cases} \tag{10}$$

## 2 Моделирование

Код на github