

Движение заряженной частицы в
магнитном поле прямого тока
направленного по оси Ox

Contents

1	Теоретическая часть	3
1.1	Формулировка задачи	3
1.2	Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле	3
1.3	Движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока	4
2	Моделирование	5

1 Теоретическая часть

1.1 Формулировка задачи

Заряженная частица влетает в магнитное поле прямого тока под углом к направлению поля. Построить проекции траектории частицы на координатные плоскости для произвольной начальной скорости частицы. В частности построить траекторию частицы для случая, когда начальная скорость частицы лежит в плоскости xOy и направлена под произвольным углом к направлению тока.

1.2 Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Уравнение движения заряженной частицы в магнитном поле:

$$\vec{F}_L = m\vec{a}, \text{ где } F_L - \text{ сила Лоренца}$$
$$m \frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = q[\vec{\vartheta}, \vec{B}] \quad (1)$$

B - магнитная индукция, q - заряд частицы, а m - ее масса.

Раз частица движется под произвольным углом α к направлению тока, разделим скорость на параллельную $\vec{\vartheta}_{\parallel}$ и перпендикулярную составляющую $\vec{\vartheta}_{\perp}$ и перепишем уравнение в виде:

$$m \frac{d\vec{\vartheta}_{\parallel}}{dt} + m \frac{d\vec{\vartheta}_{\perp}}{dt} = q[\vec{\vartheta}, \vec{B}]_{\parallel} + q[\vec{\vartheta}, \vec{B}]_{\perp} \quad (2)$$

Заметим, что $m \frac{d\vec{\vartheta}_{\parallel}}{dt} = q[\vec{\vartheta}, \vec{B}]_{\parallel} = 0$. Значит $\vec{\vartheta}_{\parallel} = \text{const}$, и в направлении, параллельном магнитному полю частица движется с постоянной скоростью. Теперь рассмотрим движение в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Такое движение будет движением по окружности с линейной скоростью $\vec{\vartheta}_{\perp}$. Определим радиус R этой окружности:

$$\frac{m\vartheta_{\perp}^2}{R} = q\vartheta_{\perp}B \quad (3)$$

$$R = \frac{m\vartheta_{\perp}}{qB} \quad (4)$$

Также найдем угловую частоту вращения:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\vartheta_{\perp}}{R} = \frac{qB}{m} \quad (5)$$

Таким образом, заряженная частица в однородном магнитном поле будет двигаться вдоль поля с постоянной скоростью, при этом вращаясь вокруг силовой линии с линейной скоростью. Частица будет двигаться по спирали с постоянным радиусом R , постоянным шагом и постоянной угловой скоростью.

1.3 Движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока

В предыдущем пункте было рассмотрено движение в однородном поле, однако поле прямого тока неоднородно (с помощью закона Био-Савара находим: $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$).

В неоднородном магнитном поле частица также будет двигаться по окружности, но радиус будет меняться - чем больше B , тем меньше радиус кривизны. Тогда движение можно разделить на 3 составляющие:

- быстрое ларморовское вращение вокруг силовой линии магнитного поля
- движение вдоль направления силовой линии
- дрейфовое движение циклотронной окружности перпендикулярно магнитному полю

Зададимся начальной скоростью \vec{v}_0 , тогда в начальный момент времени частица будет находиться от проводника на расстоянии $r_0 = \frac{mv_0}{qB(r_0)}$.

Рассмотрим плоскость проходящую через проводник и частицу. Направим ось X по току, ось Y перпендикулярно проводнику. Спроецируем вектор магнитной индукции B :

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -B \sin \alpha = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+z^2}} \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} = -\frac{\mu_0 I z}{2\pi(y^2+z^2)} \\ B_z = B \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+z^2}} \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I y}{2\pi(y^2+z^2)} \end{cases} \quad (6)$$

Тогда векторное произведение $[\vec{v}B]$ можно переписать в виде:

$$[\vec{v}B] = (v_y B_z - v_z B_y, -v_x B_z, v_x B_y) \quad (7)$$

Подставим полученные формулы во второй закон Ньютона:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{e}{m} (v_y B_z - v_z B_y) \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{m} v_x B_z \\ \frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{m} v_x B_y \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi m(z^2+y^2)} (y v_y + z v_z) \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{ey\mu_0 I}{2\pi m(y^2+z^2)} v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = -\frac{ez\mu_0 I}{2\pi m(y^2+z^2)} v_x \end{cases} \quad (9)$$

Теперь приведем уравнения к безразмерному виду: Введем новые переменные: $\omega = \frac{eB}{m}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\tau = \frac{t}{T}$, $R = \frac{mv_0}{eB(r_0)}$, $x = \Upsilon R$, $y = \Psi R$, $z = \Omega R$. Подставим в систему:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Upsilon}{d\tau^2} = -\frac{4\pi^2 (v_y B_z - v_z B_y) e}{m v_{0x}^2} \\ \frac{d^2 \Psi}{d\tau^2} = \frac{4\pi^2 v_x B_z e}{m v_{0y}^2} \\ \frac{d^2 \Omega}{d\tau^2} = -\frac{4\pi^2 v_x B_y e}{m v_{0z}^2} \end{cases} \quad (10)$$

2 Моделирование

[Код на github](#)