

НИУ ИТМО

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ»

Выполнил:

Гридусов Д.Д

Преподаватель:

Перегудин А.А

Санкт-Петербург
2024 г.

Содержание

1	Вещественные функции	2
1.1	Квадратная волна	2
1.2	Четная функция	3
1.3	Нечетная функция	5
1.4	Произвольная функция	7
1.5	Вывод	9
2	Комплекснозначные функции	9

1 Вещественные функции

1.1 Квадратная волна

Для начала зафиксируем параметры: $a = 2$, $b = 4$, $t_0 = 1$, $t_1 = 5$, $t_2 = 10$.
Тогда общий вид квадратной волны:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & t \in [1, 5) \\ 4, & t \in [5, 10) \end{cases}$$

Запомним на будущее, что $T = 9 \rightarrow w_n = \frac{2\pi n}{9}$

Найдем коэффициенты разложения в ряд Фурье:

$$a_n = \frac{2}{9} \int_1^{10} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{9}\right) dt = \frac{2}{9} \int_1^5 2 \cos\left(\frac{2\pi n t}{9}\right) dt + \frac{2}{9} \int_5^{10} 4 \cos\left(\frac{2\pi n t}{9}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{9} \int_1^{10} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{9}\right) dt = \frac{2}{9} \int_1^5 2 \sin\left(\frac{2\pi n t}{9}\right) dt + \frac{2}{9} \int_5^{10} 4 \sin\left(\frac{2\pi n t}{9}\right) dt$$

$$c_n = \frac{1}{9} \int_1^{10} f(t) e^{-i w_n t} dt = \frac{1}{9} \int_1^5 2 e^{-i w_n t} dt + \frac{1}{9} \int_5^{10} 4 e^{-i w_n t} dt$$

Результат ручного подсчета:

$$a_0 = 6.22 \quad b_0 = 0 \quad c_0 = 3.11$$

$$a_1 = 0.63 \quad b_1 = -1.08 \quad c_1 = 0.31 + 0.54i$$

$$a_2 = 0.11 \quad b_2 = 0.19 \quad c_2 = 0.05 - 0.10i$$

Программно посчитанные коэффициенты Фурье:

$$a_0 = 6.22 \quad b_0 = 0 \quad c_0 = 3.11$$

$$a_1 = 0.63 \quad b_1 = -1.08 \quad c_1 = 0.31 + 0.54i$$

$$a_2 = 0.11 \quad b_2 = 0.19 \quad c_2 = 0.05 - 0.09i$$

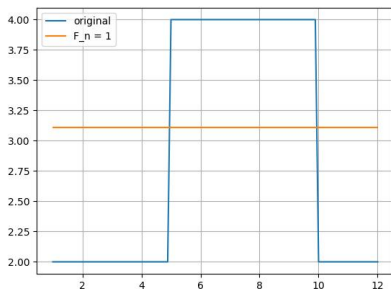


Рис. 1: $F_N(t)$, $N = 1$

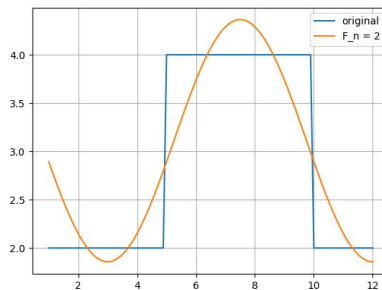


Рис. 2: $F_N(t)$, $N = 2$

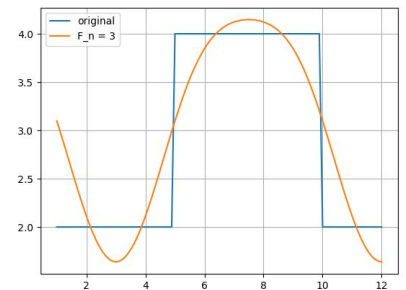


Рис. 3: $F_N(t)$, $N = 3$

Построим теперь и графики для $G_N(t)$

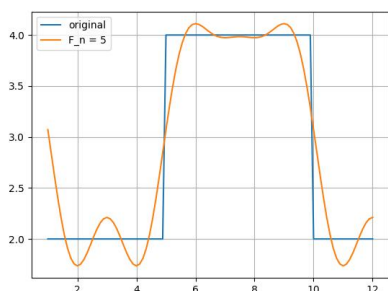


Рис. 4: $F_N(t)$, $N = 5$

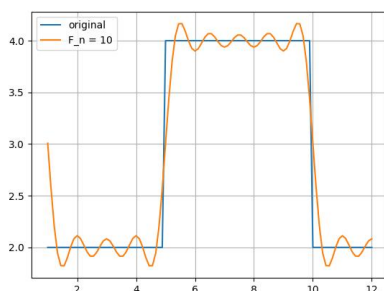


Рис. 5: $F_N(t)$, $N = 10$

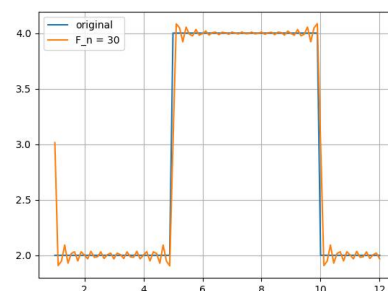


Рис. 6: $F_N(t)$, $N = 30$

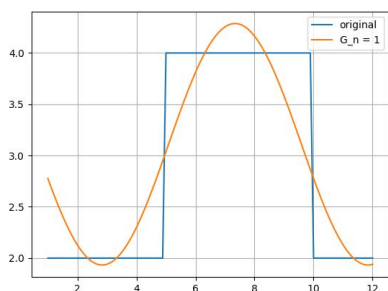


Рис. 7: $F_N(t)$, $N = 1$

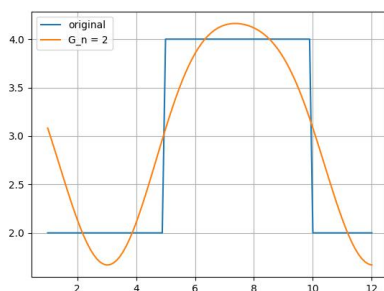


Рис. 8: $F_N(t)$, $N = 2$

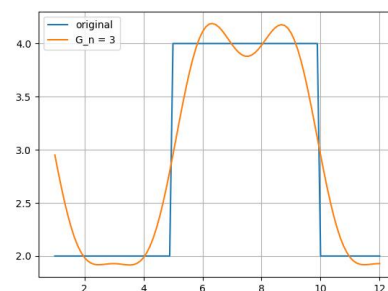


Рис. 9: $F_N(t)$, $N = 3$

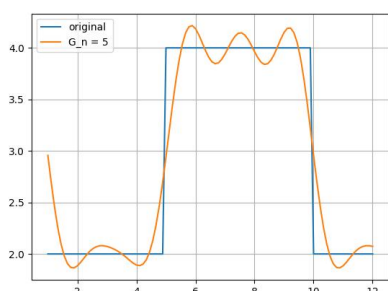


Рис. 10: $G_N(t)$, $N = 5$

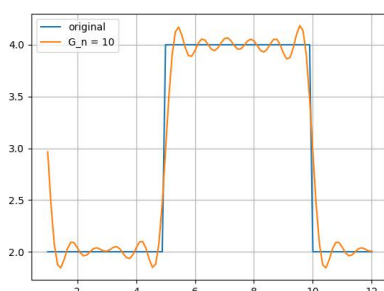


Рис. 11: $G_N(t)$, $N = 10$

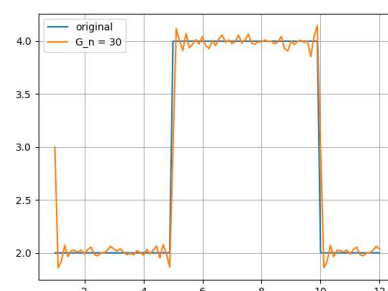


Рис. 12: $G_N(t)$, $N = 30$

1.2 Четная функция

Возьмем функцию:

$$y = t^2, t \in [-2, 2]$$

Программно посчитанные коэффициенты Фурье:

$$a_0 = 2.67 \quad b_0 = 0 \quad c_0 = 1.33$$

$$a_1 = -1.62 \quad b_1 = 0 \quad c_1 = -0.81$$

$$a_2 = 0.41 \quad b_2 = 0 \quad c_2 = 0.2$$

Также выполним проверку равенства Персиваля при $N = 25$:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 6.400$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |F_N(j\omega)|^2 d\omega = 6.413$ - равенство выполняется, если дополнительно учитывать погрешность, возникающую при численном интегрировании.

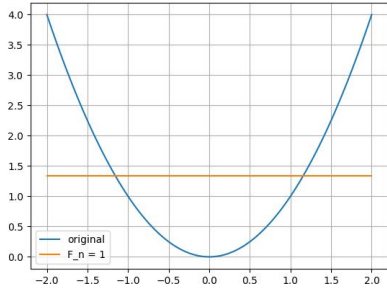


Рис. 13: $F_N(t)$, $N = 1$

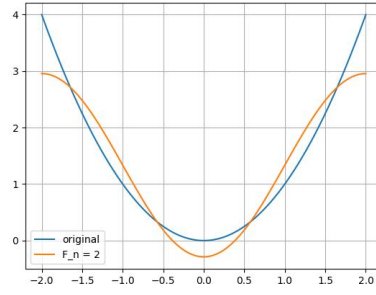


Рис. 14: $F_N(t)$, $N = 2$

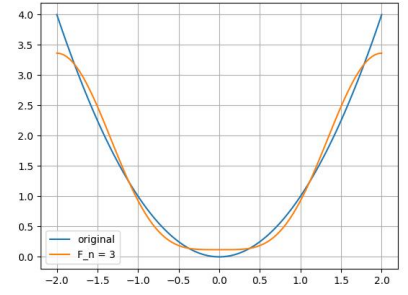


Рис. 15: $F_N(t)$, $N = 3$

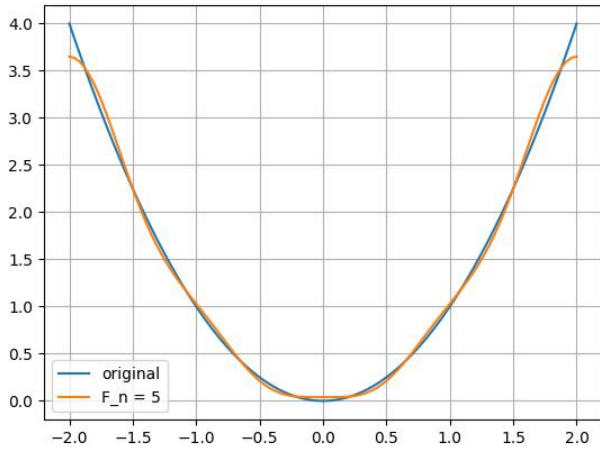


Рис. 16: $F_N(t)$, $N = 5$

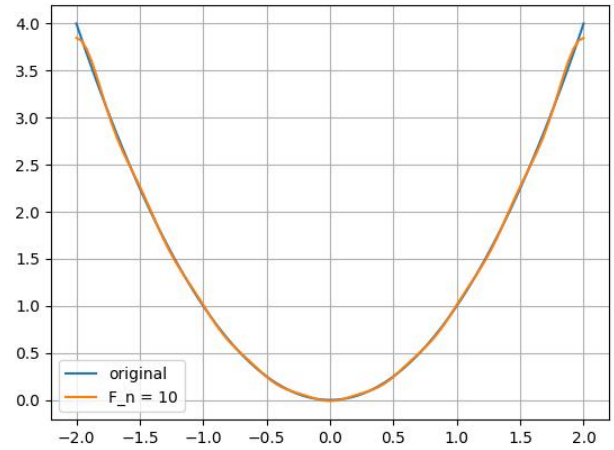


Рис. 17: $F_N(t)$, $N = 10$

Построим теперь и графики для $G_N(t)$

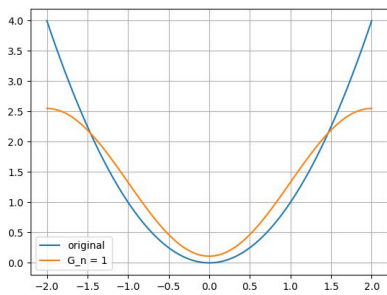


Рис. 18: $G_N(t)$, $N = 1$

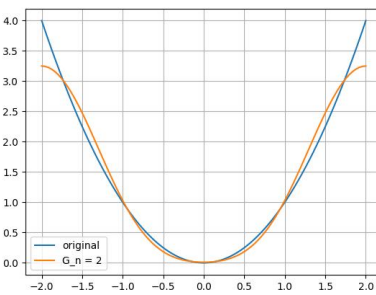


Рис. 19: $G_N(t)$, $N = 2$

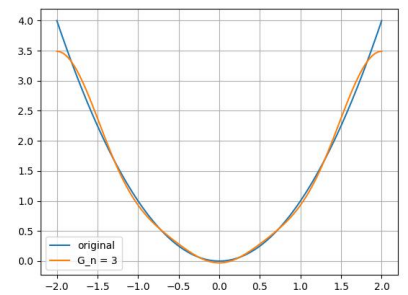


Рис. 20: $G_N(t)$, $N = 3$

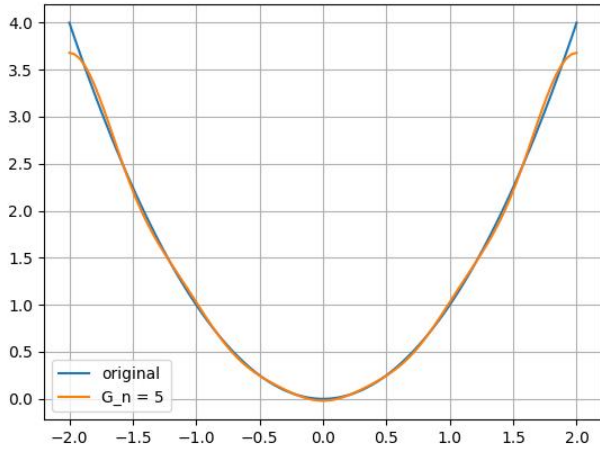


Рис. 21: $G_N(t)$, $N = 5$

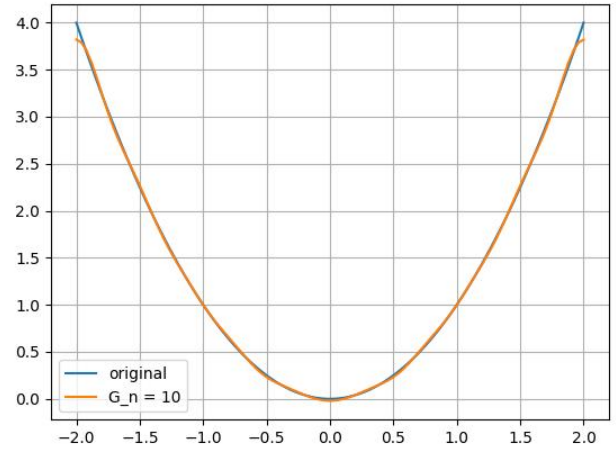


Рис. 22: $G_N(t)$, $N = 10$

1.3 Нечетная функция

Возьмем функцию:

$$y = t^3, t \in [-2, 2]$$

Программно посчитанные коэффициенты Фурье:

$$a_0 = 2.67 \quad b_0 = 0 \quad c_0 = 1.33$$

$$a_1 = -1.62 \quad b_1 = 0 \quad c_1 = -0.81$$

$$a_2 = 0.41 \quad b_2 = 0 \quad c_2 = 0.2$$

Также выполним проверку равенства Персиваля при $N = 25$:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 18.28$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |F_N(j\omega)|^2 d\omega = 17.26$ - равенство выполняется, если дополнительно учитывать погрешность, возникающую при численном интегрировании.

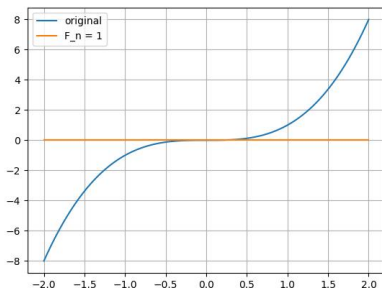


Рис. 23: $F_N(t)$, $N = 1$

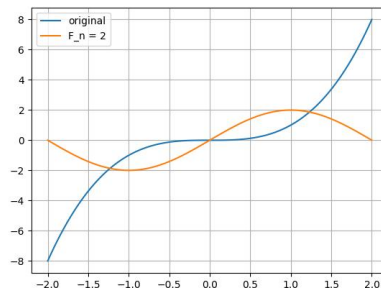


Рис. 24: $F_N(t)$, $N = 2$

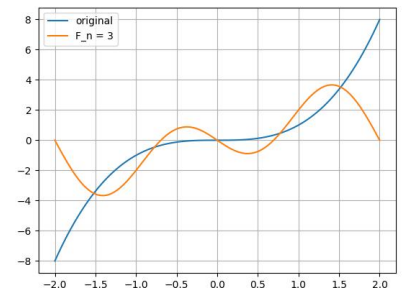


Рис. 25: $F_N(t)$, $N = 3$

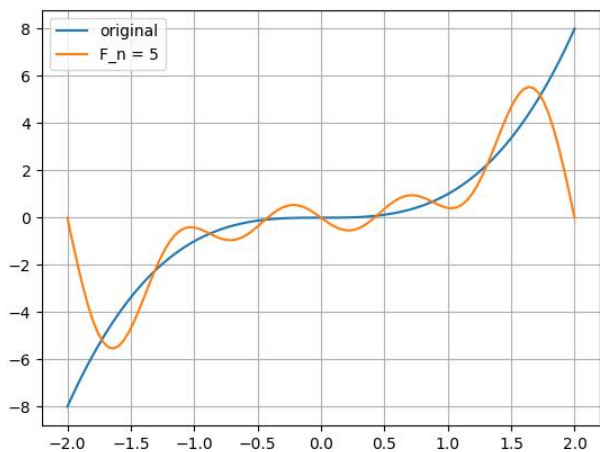


Рис. 26: $F_N(t)$, $N = 5$

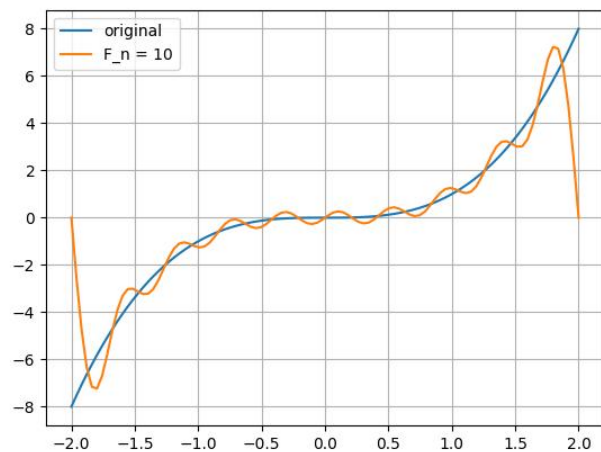


Рис. 27: $F_N(t)$, $N = 10$

Построим теперь и графики для $G_N(t)$

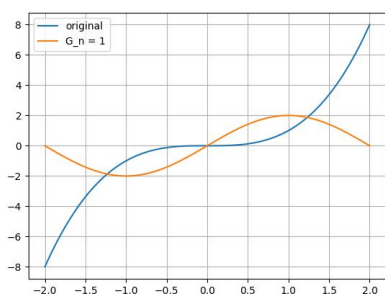


Рис. 28: $G_N(t)$, $N = 1$

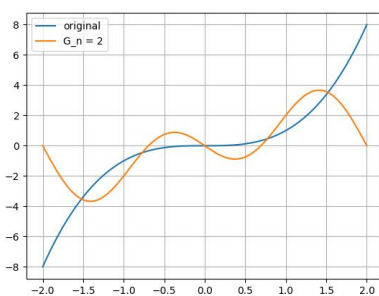


Рис. 29: $G_N(t)$, $N = 2$

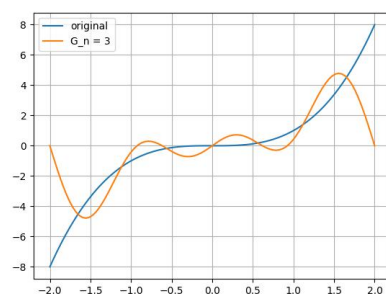


Рис. 30: $G_N(t)$, $N = 3$

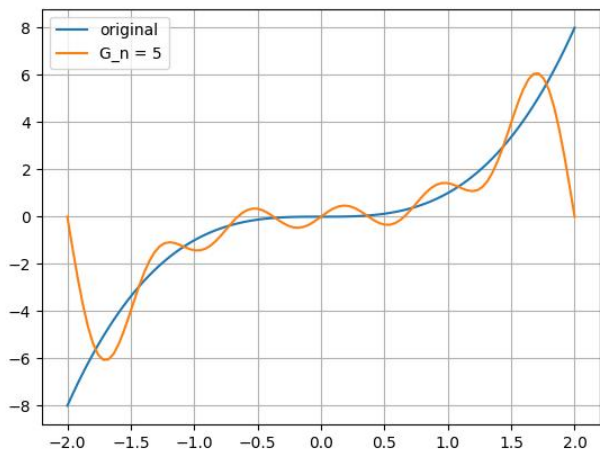


Рис. 31: $G_N(t)$, $N = 5$

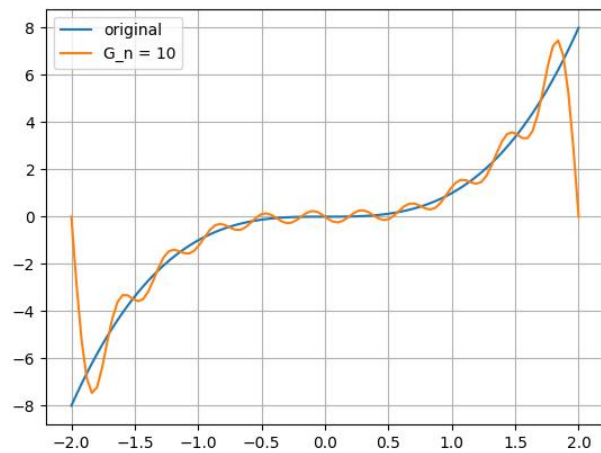


Рис. 32: $G_N(t)$, $N = 10$

1.4 Произвольная функция

Возьмем функцию:

$$y = t + t^3 + 2^t, t \in [-2, 2]$$

Программно посчитанные коэффициенты Фурье:

$$a_0 = 2.7 \quad b_0 = 0 \quad c_0 = 1.35$$

$$a_1 = -0.44 \quad b_1 = 4.27 \quad c_1 = -0.22 - 2.13i$$

$$a_2 = 0.12 \quad b_2 = -3.37 \quad c_2 = 0.06 + 1.68i$$

Также выполним проверку равенства Персиваля при $N = 25$:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 55.019$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |F_N(j\omega)|^2 d\omega = 52.756$ -равенство выполняется, если дополнительно учитывать погрешность, возникающую при численном интегрировании.

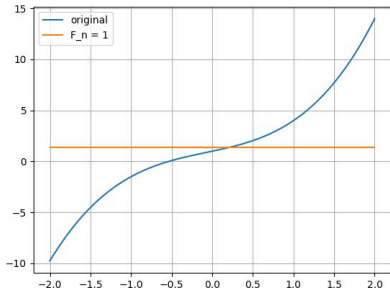


Рис. 33: $F_N(t)$, $N = 1$

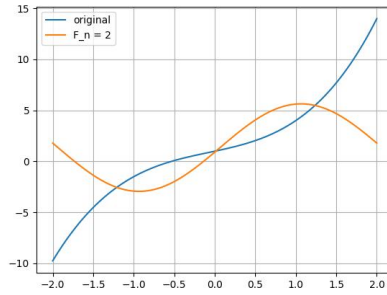


Рис. 34: $F_N(t)$, $N = 2$

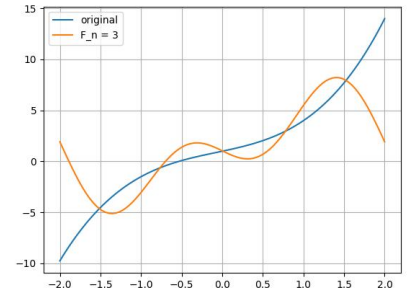


Рис. 35: $F_N(t)$, $N = 3$

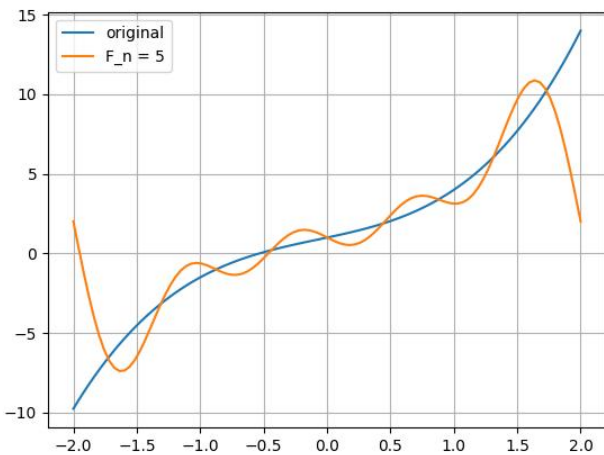


Рис. 36: $F_N(t)$, $N = 5$

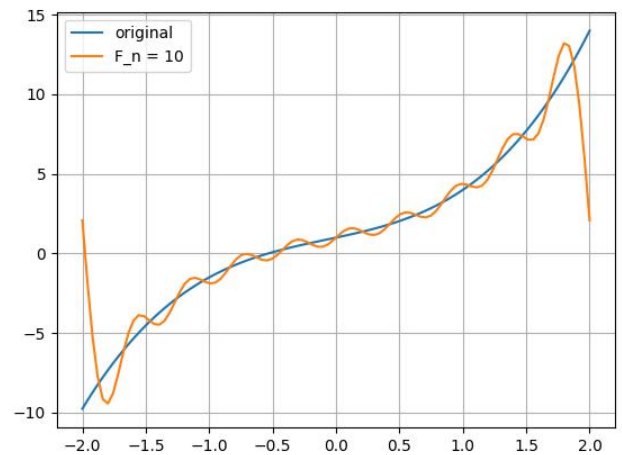


Рис. 37: $F_N(t)$, $N = 10$

Построим теперь и графики для $G_N(t)$

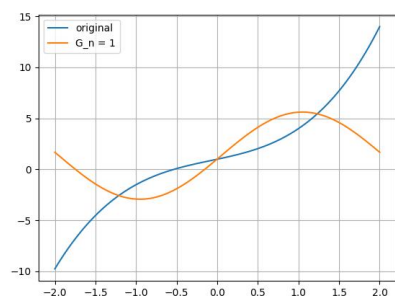


Рис. 38: $G_N(t)$, $N = 1$

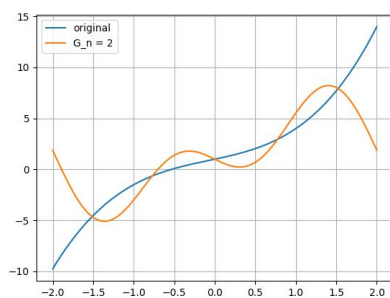


Рис. 39: $G_N(t)$, $N = 2$

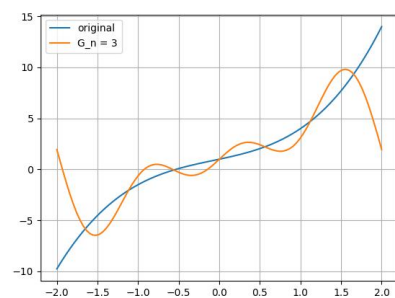


Рис. 40: $G_N(t)$, $N = 3$

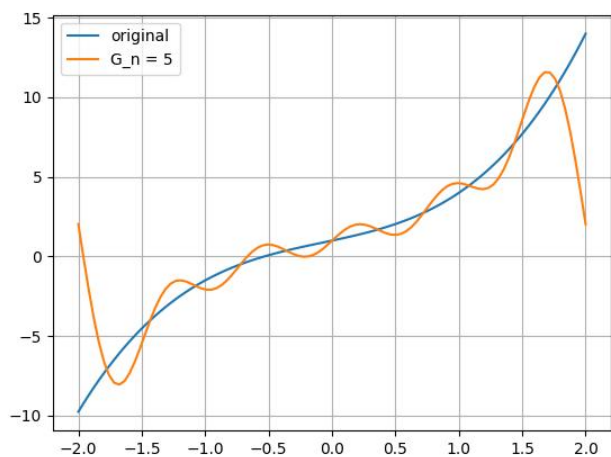


Рис. 41: $G_N(t)$, $N = 5$

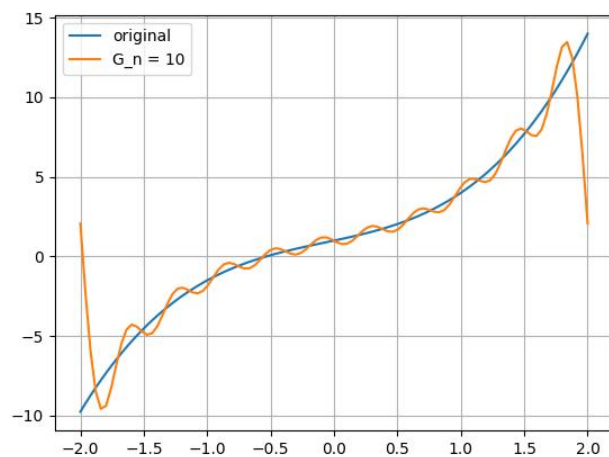


Рис. 42: $G_N(t)$, $N = 10$

1.5 Вывод

Как показывает практика, программно рассчитанные коэффициенты Фурье не отличаются (в пределах 2 порядков) от точных расчетов, даже несмотря на численное интегрирование. Хотя, учитывая вклад Wolfram alpha в данную работу, это достаточно сомнительный вывод, конечно.

2 Комплекснозначные функции

Зададимся параметрами $T = 8$, $R = 5$.

Тогда вид функции следующий:

$$Re f(t) = \begin{cases} 5, t \in [-1, 1) \\ 10 - 5t, t \in [1, 3) \\ -5, t \in [3, 5) \\ -30 + 5t, t \in [5, 7) \end{cases}$$

$$Im f(t) = \begin{cases} 5t, t \in [-1, 1) \\ 5, t \in [1, 3) \\ 20 - 5t, t \in [3, 5) \\ -5, t \in [5, 7) \end{cases}$$

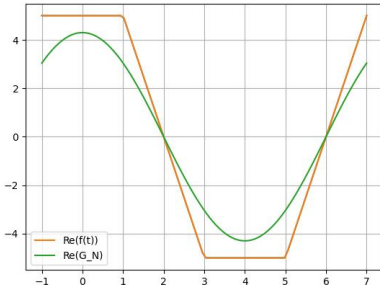


Рис. 43: $ReG_N(t)$, $N = 1$

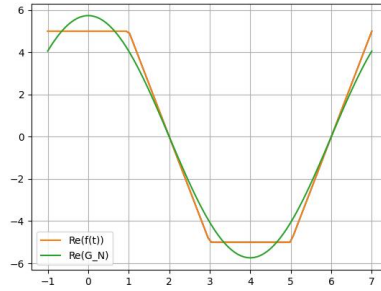


Рис. 44: $ReG_N(t)$, $N = 2$

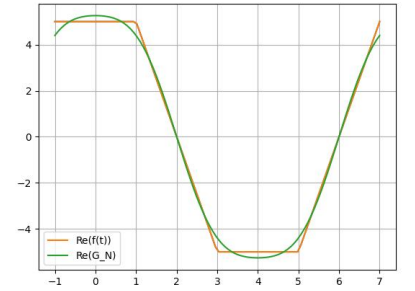


Рис. 45: $ReG_N(t)$, $N = 3$

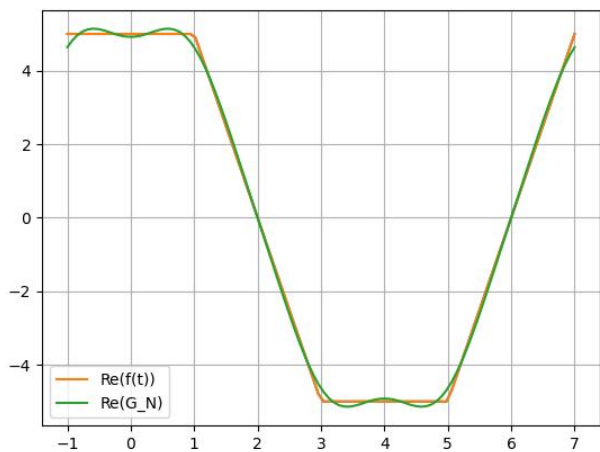


Рис. 46: $ReG_N(t)$, $N = 5$

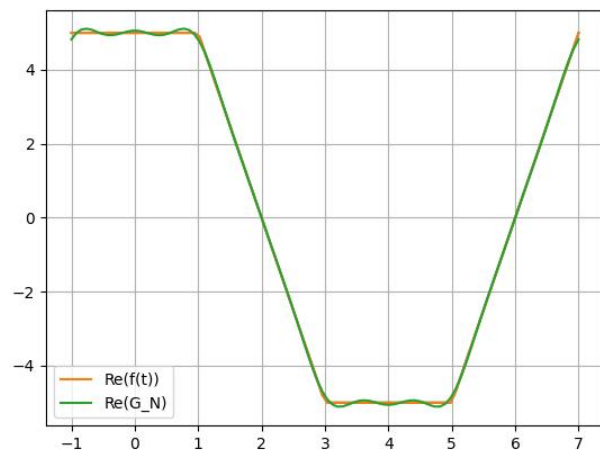


Рис. 47: $ReG_N(t)$, $N = 10$

Построим графики для $ImG_N(t)$

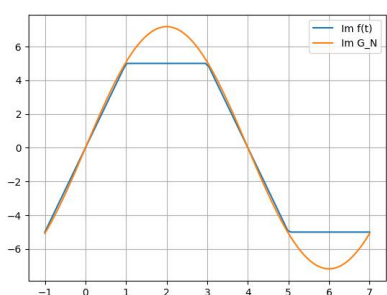


Рис. 48: $ImG_N(t)$, $N = 1$

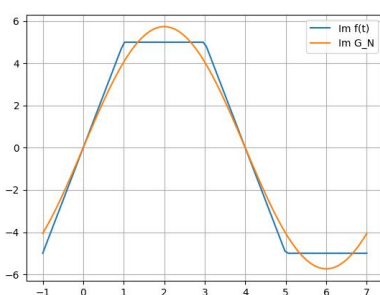


Рис. 49: $ImG_N(t)$, $N = 2$

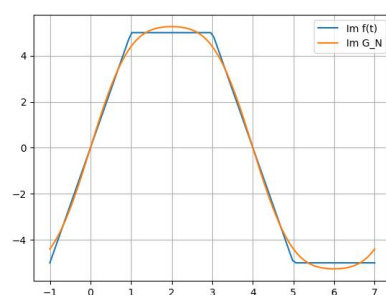


Рис. 50: $ImG_N(t)$, $N = 3$

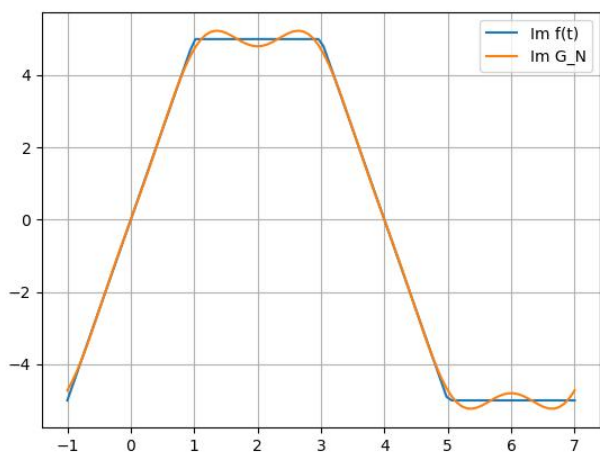


Рис. 51: $ImG_N(t)$, $N = 5$

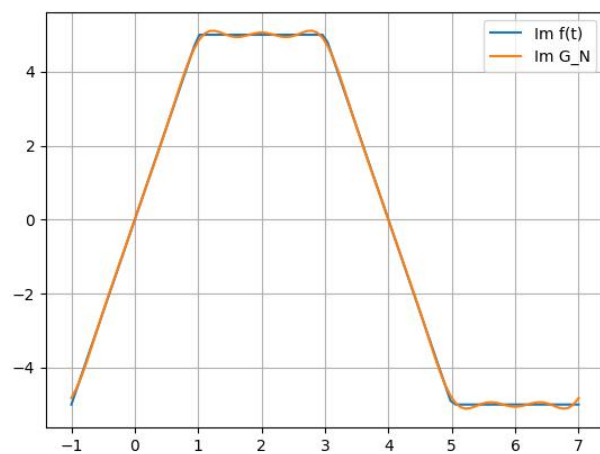


Рис. 52: $ImG_N(t)$, $N = 10$

Построим теперь и графики для $G_N(t)$

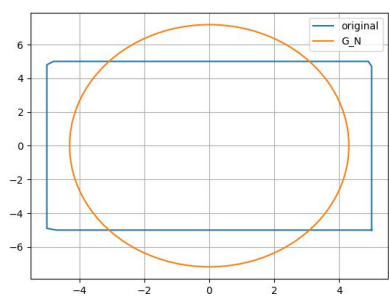


Рис. 53: $G_N(t)$, $N = 1$

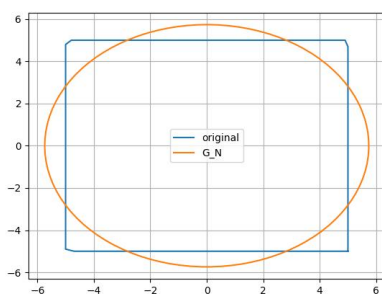


Рис. 54: $G_N(t)$, $N = 2$

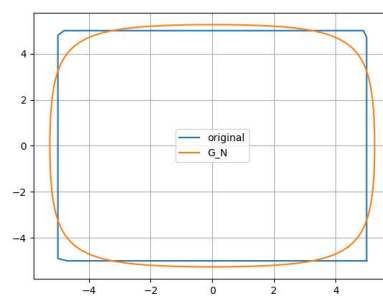


Рис. 55: $G_N(t)$, $N = 3$

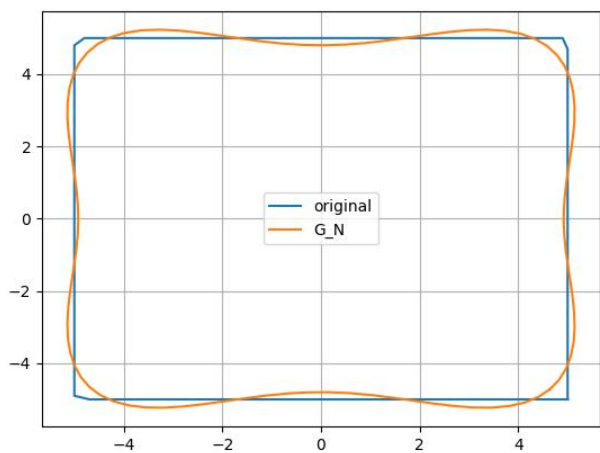


Рис. 56: $G_N(t)$, $N = 5$

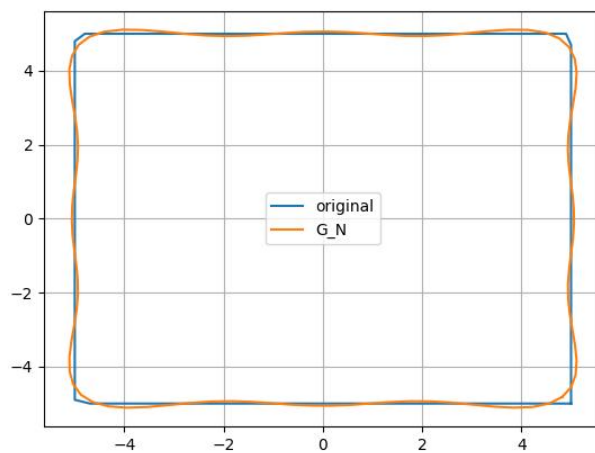


Рис. 57: $G_N(t)$, $N = 10$

Код всей лабораторной работы: [github](#)