НИУ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа № 2
по дисциплине «Частотные методы»

Выполнил: Гридусов Д.Д

Преподаватель: Перегудин А.А

Санкт-Петербург
2024 г.

Содержание

1 Вещественное

1.1 Прямоугольная функция

$$f_1(t) = \begin{cases} a, |t| \leq b, \\ 0, |t| > b \end{cases}$$

С помощью унитарного преобразования к угловой частоте найдем образ Фурье:

$$c_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-iwt}}{-i\omega} \Big|_{-b}^{b} \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i\omega} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\sin(\omega b)}{w} = \frac{2a\sin(\omega b)}{\sqrt{2\pi}\omega}$$

Теперь построим графики Фурье образа и самой функции при различных значениях a и b.

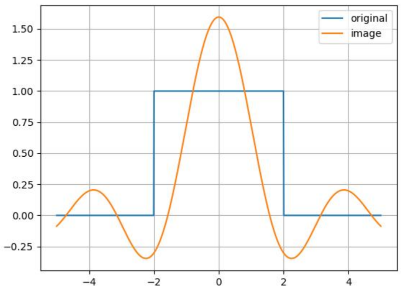

Рис. 1: a = 1, b = 2

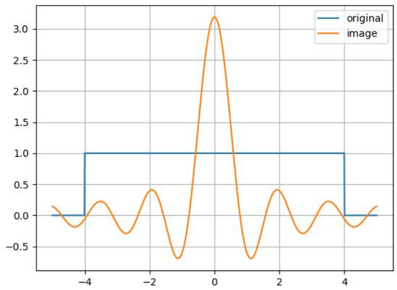

Рис. 2: a = 1, b = 4

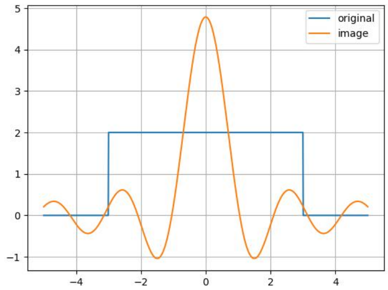

Рис. 3: a = 2, b = 3

Равенство Парсеваля:

$$\| f \|^2 = \int\limits_{-b}^{b} f^2(t) dt = [a = 1, b = 3] = 6$$

$$\| c(\omega) \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2(\omega) d\omega = 6$$

1.2 Треугольная функция

$$f_2(t) = \begin{cases} a - |\frac{a}{b}t|, |t| \leq b, \\ 0, |t| > b \end{cases}$$

Образ Фурье:

$$c_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-b}^{0} (a + \tfrac{a}{b}t) e^{-iwt} + \int\limits_{0}^{b} (a - \tfrac{a}{b}t) e^{-iwt} dt \right) = -\frac{\sqrt{2}a(\cos(b\omega) - 1)}{b\omega^2}$$

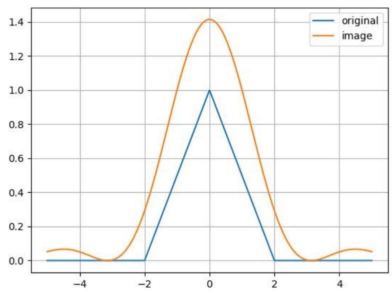

Рис. 4: $a = 1$, $b = 2$

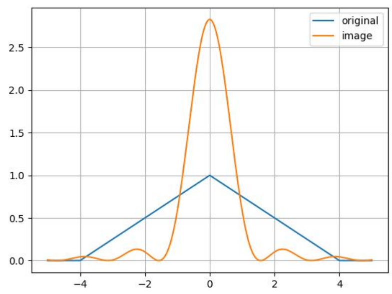

Рис. 5: $a = 1$, $b = 4$

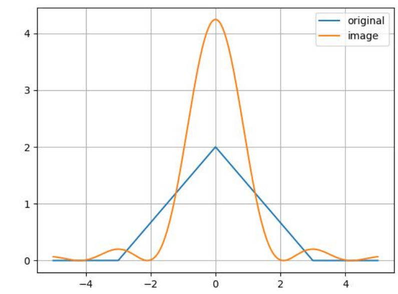

Рис. 6: $a = 2$, $b = 3$

1.3 Кардинальный синус

$$f_3(t) = a\frac{\sin(\pi bt)}{\pi bt}$$

Образ Фурье:

$$c_3(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}b\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\pi bt}-e^{-i\pi bt}}{2it}e^{-iwt}dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}b\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(\pi b-\omega)it}-e^{-(\pi b+\omega)it}}{2it}dt$$

Если не останавливаться, разбить на два и проигнтегрировать каждый по частым, то в итоге должна получиться уже знакомая нам прямоугольная функция.

$$c_3(\omega) = \begin{cases} \frac{a}{b\sqrt{2\pi}}, |\omega| \le b\pi, \\ 0, |\omega| > b\pi \end{cases}$$

Равенство Парсеваля:

$$\parallel f \parallel^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = [a = 1, b = 3] = \frac{1}{3}$$

$$\parallel c(\omega) \parallel^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2(\omega)d\omega = \frac{1}{3}$$

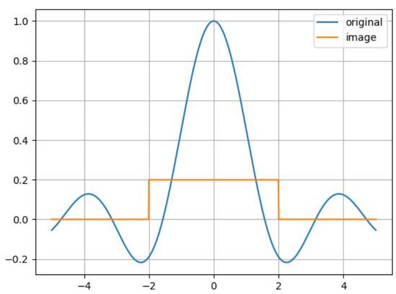

Рис. 7: $a = 1$, $b = 2$

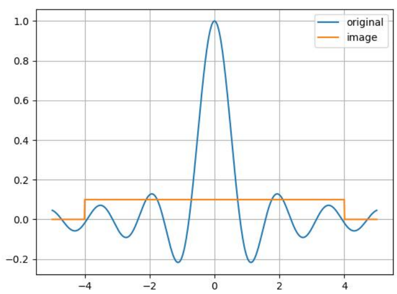

Рис. 8: $a = 1$, $b = 4$

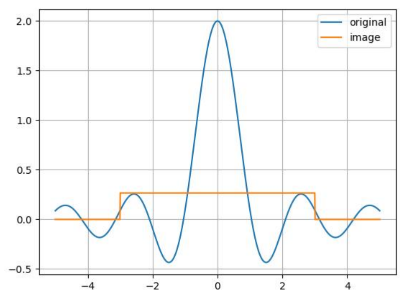

Рис. 9: $a = 2$, $b = 3$

1.4 Функция Гаусса

$$f_4(t) = ae^{-bt^2}$$

Образ Фурье:

$$c_4(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt^2 - iwt}dt = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

Равенство Парсеваля

$$\| f \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = [a = 1, b = 3] = 0.724$$

$$\| c(\omega) \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2(\omega)d\omega = 0.724$$

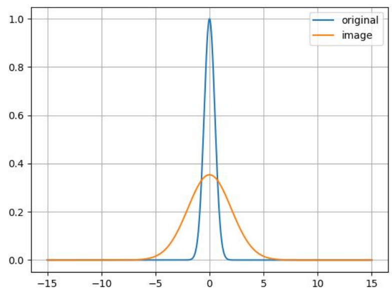

Рис. 10: $a = 1$, $b = 2$

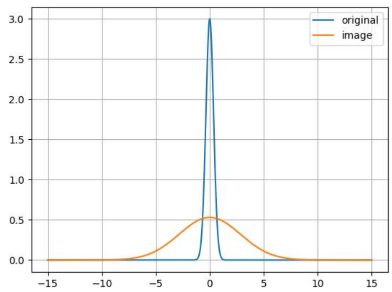

Рис. 11: $a = 3$, $b = 4$

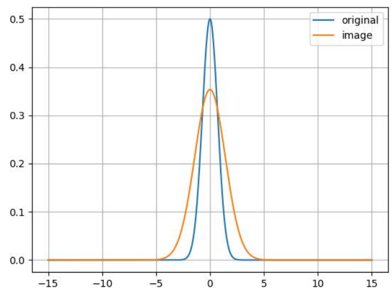

Рис. 12: $a = 0.5$, $b = 1$

1.5 Двустороннее затухание

$$f_5(t) = ae^{-b|t|}$$

Образ Фурье:

$$c_5(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-b|t|-iwt}dt$$

$$c_5(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{t(b-i\omega)}dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t(b+i\omega)}dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega}\right) = \frac{a}{\sqrt[2]{2\pi}} \frac{2b}{b^2+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ab}{b^2+\omega^2}$$

Равенство Парсеваля:

$$\| f \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = [a = 1, b = 3] = \frac{1}{3}$$

$$\| c(\omega) \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2(\omega)d\omega = \frac{1}{3}$$

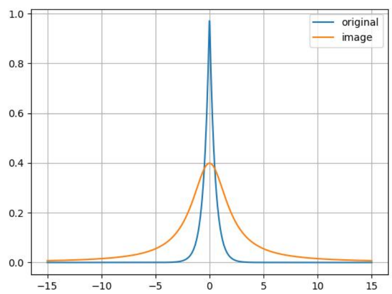

Рис. 13: $a = 1$, $b = 2$

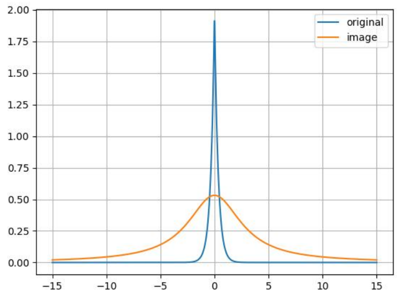

Рис. 14: $a = 2$, $b = 3$

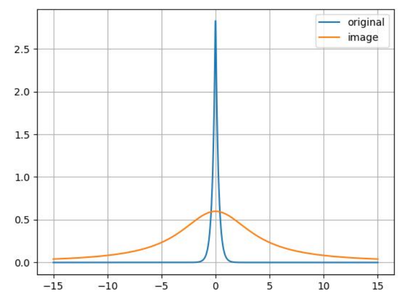

Рис. 15: $a = 3$, $b = 4$

1.6 Общий вывод

По графикам видно, что a отвечает за растяжение вдоль оси Oy, b - вдоль оси Ox. В более менее классической формулировке принцип неопределенности удтверждает, что для неккоммутируемых величин(т.е коммутатор не равен нулю - операторы положения и импульса подходят, например - их коммутатор равен $i\frac{h}{2\pi}$) существует предел точности одновременного измерения. Иначе говоря, мы не можем знать положение и импульс частицы в один момент времени без погрешности. Чем точнее знаем импульс, тем хуже положение (и наоборот). Т.к частицу можно описывать волновыми характеристиками (принцип корпускулярно-волнового дуализма), то как я понимаю наш случай с функциями и их образами, графики функций - функция плотности распределения положения частицы. То есть чем больше площадь под синим (в моем случае) графике, тем больше точек, в которых частица может быть обнаружена с ненулевой вероятностью. Чем больше ж еплощадь под графиком фурье образа, тем больше погрешность измериений импульса частицы. И когда мы уменьшаем площадь под одним из графиков, то увеличивается площадь по вторым (и наоборот).

2 Комплексное

2.1 Процесс

Возьмем функцию двустороннего затухания. Зафиксируем $a = 2$, $b = 4$

$$f(t) = 2e^{-4|t|}$$

$$g(t) = f(t+c) = 2e^{-4|t+c|}$$

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t+c)e^{-i\omega t}dt = [t+c=\mu] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-4|\mu|}e^{-iw(\mu-c)}d\mu =$$
$$e^{iwc}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\int\limits_{-\infty}^{-c} e^{(4-iw)\mu}d\mu + \int\limits_{-c}^{\infty} e^{-(4+iw)\mu}d\mu) = e^{iwc}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{1}{4-iw}e^{-c(4-iw)} + \frac{1}{-(4+iw)}e^{c(4+iw)})$$

Также построим графики сдвинутой функции и её Фурье образа

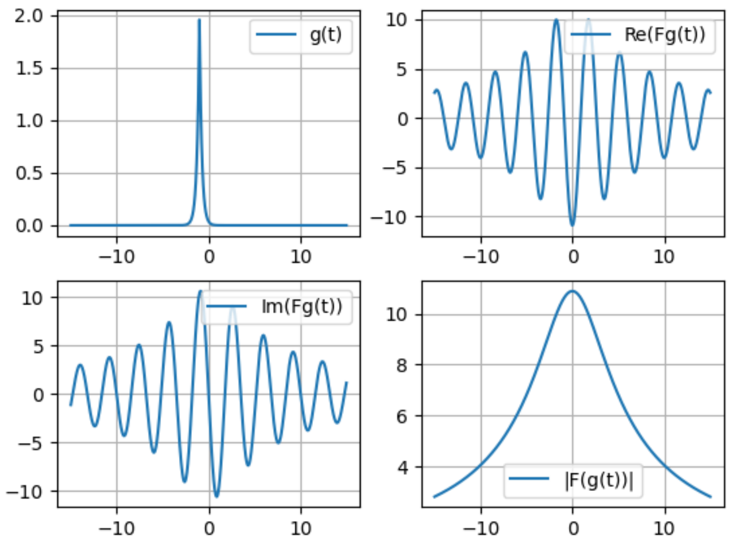

Рис. 16: $c = 1$

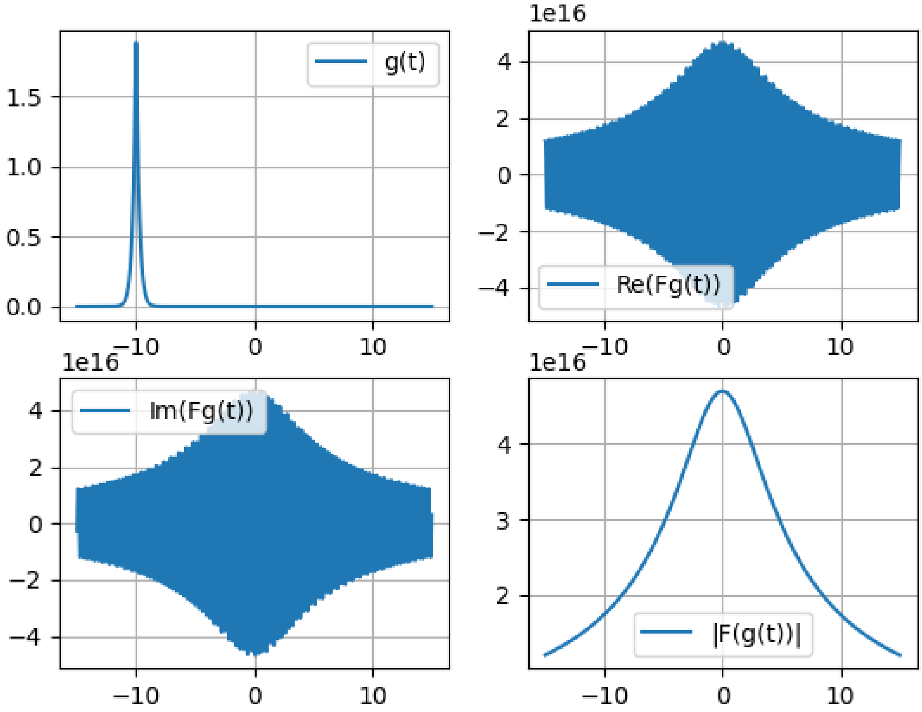

Рис. 17: $c = 10$

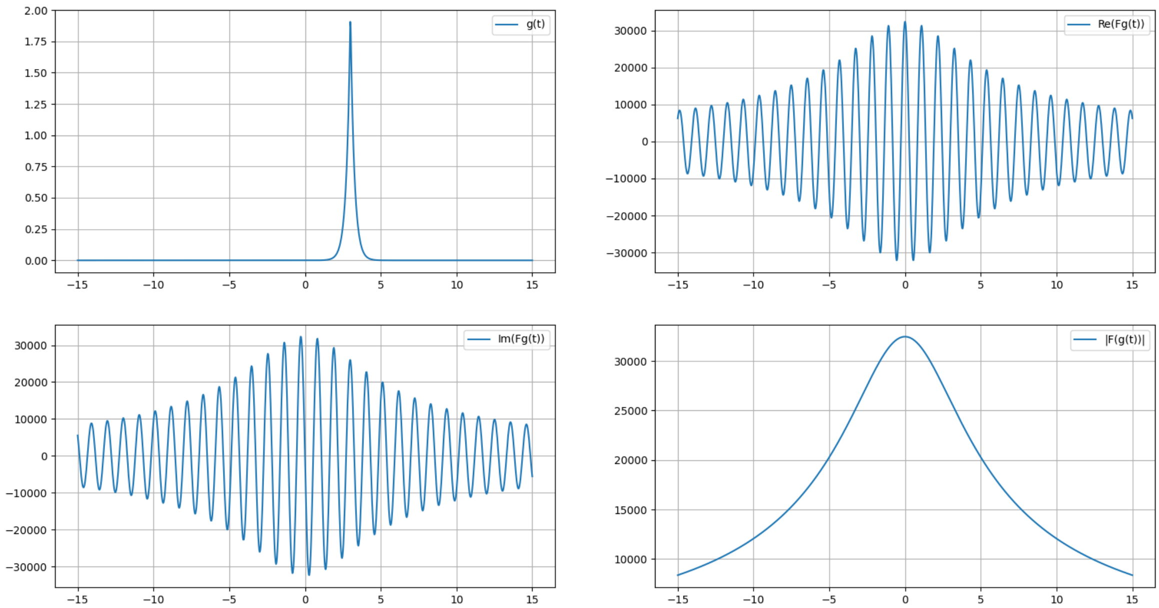

Рис. 18: $c = -3$

2.2 Вывод

Влияние параметра c на саму функцию достаточно предсказуемо - параметр отвечает за сдвиг функции, чем он больше - тем дальше, направление сдвига зависит от знака c. На фурье образ влияние более интересное - чем больше модуль параметра, тем чаще колеблется вещественная и мнима часть образа. Если же построить образ на комплексной плоскости, мы должны пронаблюдать большее количество вращений при увеличении модуля c.

3 Музыкальное

На этот раз откроем Matlab, напишем простую программу, которая выведет график, на котором по оси X будут отображаться частоты в герцах, а на оси Y - «вовлеченность» частоты в аккорд.

```
[y,f] = audioread("n15.mp3"); y = y(:,1);
dt = 1/f;
T = length(y) * dt;

t = 0:dt:T;
t = t.';

dv = 1;
v = 0 : dv : 1000;
Y = zeros(1,length(v));
for k = 1 : length(v)
    Y(k) = trapz(y.*exp(-1i*2*pi*v(k)*t));
end

plot(abs(Y));
```

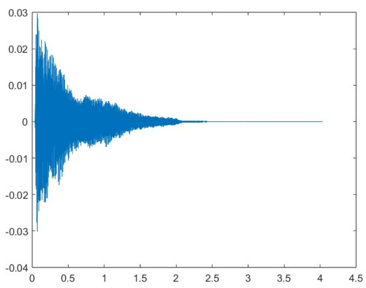

Рис. 19: Аккорд-15

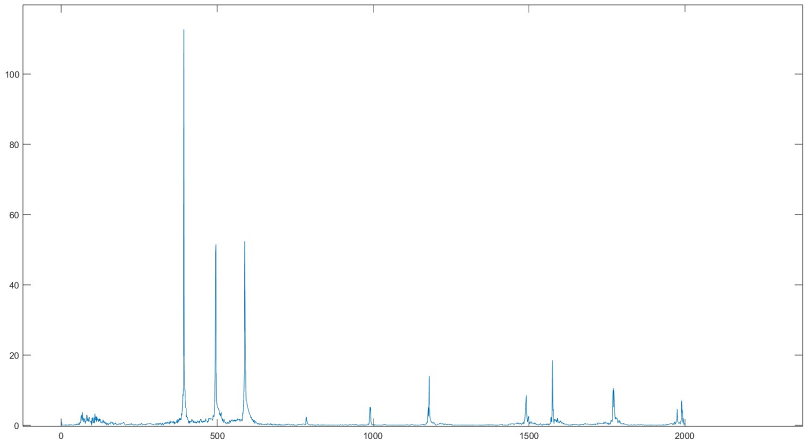

Рис. 20: Распределение частот аккорда

На графике имеем три пика на следующих частотах: 588, 495, 393. Значит аккорд №15 состоит из таких нот, как: Ре(2ая октава), Си(1ая октава), Соль(1ая октава).