

Асимптотика алгоритма.

Инициализация ребер, т.к. Мы исследуем полный граф, проходит за $O(N^2)$ (N - число вершин в графе).

Затем проходит сортировка всех ребер. Мной была использована стандартная питоновская функция сортировки `sort` (Timsort внутри), её сложность в худшем случае - $n \log n$ (n - число элементов). Сортируем ребра $\Rightarrow E \log E$.

Далее для каждого ребра происходит вызов функции `union`. Её сложность составляет сложность функции `Find` + $O(1)$ операций. `Find` - рекурсивная функция, её глубина не превосходит глубины дерева $O(\log N)$ (за счет применения эвристик сжатия пути и подвешивания более низкого дерева к более высокому). Таким образом, сложность функции `Union` $O(\log N) + O(1) = O(\log N)$, а сложность функции `getCount` $O(E \log N)$. Итого, сложность обработки одного Test Case: $O(E \log E) + O(E \log N) = O(E \log E) = O(N^2 \log N)$.

Доказательство корректности алгоритма:

Требуется соединить все города при помощи дорог минимальной длины \Rightarrow решением будет MST для полного графа, вершины в котором - города, а веса ребер - расстояния между ними. По мере построения MST, мы суммируем длины обычных дорог и железных дорог, числом штатов является число железных дорог + 1 (т.к. В основном дереве циклов нет).

Используя тот факт, что основное дерево является базой графового матроида (по определению) и теорему «Если область истинности предиката P - матроид S над A , то полученное жадным алгоритмом подмножество u_n доставляет максимум функционалу F », получаем, что алгоритм Краскала, являющийся жадным, корректен и находит MST. В предыдущих терминах S - все независимые подмножества ребер графа, A - множество ребер графа, F - сумма весов ребер, u_n - MST (база матроида). В нашей задаче мы минимизируем функционал F .