

## Uppgiften

Lös nedanstående problem. Problemets lösning och resultat skall innehålla visualisering där det är relevant.

Tänk på följande:

1. Använd lämpliga stilar från meny Format->Style, i notebooken.
2. När ni skriver formler i text-celler, använd matematisk stil (se datorövning 1).
3. Glöm inte att ange namn och enhet för axlarna i grafer.

### 1. Trafikflöde

Den här uppgiften går ut på och visa hur man kan använda linjära ekvationssystem för att studera trafikflödet genom ett trafiksystem. Trafiksystemet består av gator och korsningar där gatorna möts. Varje gata har ett visst flöde, som mäts i fordon per tidenhet. Vi skall beräkna trafikflödet för alla gatorna i trafiksystemet, givet flödet in till trafiksystemet. Vi gör ett viktigt antagande: *Trafikflödet bevaras i varje korsning*. Det betyder att ett fordon som når en korsning måste fortsätta genom trafiksystemet. Ett positivt värde på flödet flyter i pilens riktning och ett negativt flöde flyter i motsatt riktning.

- a) Är vårt antagande om att flödet bevaras giltigt? När kan antagandet vara felaktigt?
- b) Vilka andra förenklingar har vi antagit?

Studera vägssystemet i figur 1. Siffrorna anger trafikflödena i fordon per timme. Alla vägar är enkelriktade och trafiken följer pilarnas riktning.

- c) Ställ upp ekvationssystemet.
- d) Bestäm trafikflödet för vägssystemet.
- e) Om trafikflödet för en av  $x$ ,  $y$ ,  $z$  eller  $w$  begränsas till 100 fordon per timme på grund av vägarbete. Vad blir trafikflödet för de andra vägarna?

figur 1. Diagram av vägsystem i Kumasi, Ghana (efter Adu et al. [2014])

## Svar

### A- Är vårt antagande om att flödet bevaras giltigt? När kan antagandet vara felaktigt?

Antagandet är giltigt i de flesta fallen, de enstaka fall som kan hindra att olyckor exempelvis med detta kommer enbart påverka förseningar men inga total stop, eftersom fordon kommer tas bort till slut så att andra foroden kan passera.

### B-Vilka andra förenklingar har vi antagit?

Förenklingar som har gjorts är att t.ex bilar kan parkera.  
Pilerna i figuren visar de positiva respektive negativa värden.

### C-Ställ upp ekvationsststemet

```
In[*]:= Quit[ ]
w + z == 516;
x + y == 255;
z + y == 430;
```

### D-Bestäm trafikflödet vägsystemet.

```
In[1]:= p = Reduce[{w + z == 516, z + y == 330, x + y == 255}, {x, y, z, w}]
```

```
Out[1]= y == 255 - x && z == 75 + x && w == 441 - x
```

```
In[2]:= Reduce[p]
```

```
Out[2]= y == 330 - z && x == -75 + z && w == 516 - z
```

### E - Om trafikflödet för en avx, y, zellerwbegränsas till 100 fordon per timme på

## grund av vägarbete.Vad blir trafikflödet för de andra vägarna?

```

In[3]:= z = 100
Reduce[p]

Out[3]= 100

Out[4]= y == 230 && x == 25 && w == 416

In[5]:= Clear[z]

In[6]:= w = 100
Out[6]= 100

In[7]:= Reduce[p]
Out[7]= z == 416 && y == -86 && x == 341

In[8]:= Clear[w, z]

In[9]:= y = 100
Reduce[p]

Out[9]= 100

Out[10]= Re[100 == 255 - x && z == 75 + x && w == 441 - x]

In[11]:= Clear[w, z, y]

In[12]:= Reduce[p]
Out[12]= y == 330 - z && x == -75 + z && w == 516 - z

```

## 2. Kaniner

Leonardo av Pisa, även känd som Fibonacci (circa 1170-1250) skapade en av de äldsta matematiska modellerna av förökning. Han modellerade förökning av kaniner. Genom att modellera kaninpar kunde han undvika att ta hänsyn till individuella kaniner av olika kön. Modellen beskriver förökningen av kaniner från månad  $n = 1$  där  $p_n$  är antal kaniner vid månad  $n$ . När en kanin föds, så är den en unge under en månad och sedan förökar sig kaninparen varje månad. Antal kaniner kan då beskrivas av en differensekvation:

$$p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$$

där vi antar att vi har bara ett kaninpar vid månad  $n = 1$ , dvs initialvärdena är  $p_1 = 1$  och  $p_2 = 1$ . Vilket betyder att  $p_3 = 2$ ,  $p_4 = 3$  och  $p_5 = 5$ .

- Beräkna talföljden och rita en graf över den.
- Undersök talföljden och diskutera tillväxtakten.
- Vilka begränsningar har modellen?
- Hur kan man förbättra modellen?

## Svar

**A-Beräkna talföljden och rita en graf över den.**

-Kaninernas antal förökar med 1 par per månad.

-månad 1,  $n=1$

$-a_n$  är antal per månad, Detta ger:

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  vilket skrives om som

$$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

In[ ]:= `a[1] = 1;`

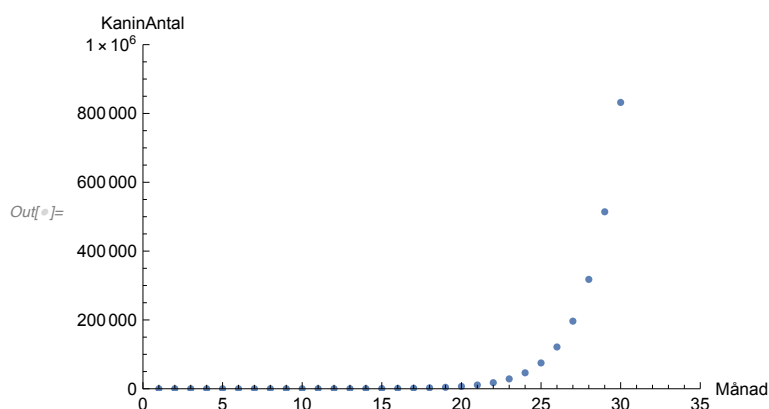
`a[2] = 1;`

`a[n_] := a[n - 1] + a[n - 2]`

In[ ]:= `KaninAntal = Table[a[n], {n, 1, 32}]`

Out[ ]:= `{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309}`

In[ ]:= `ListPlot[KaninAntal, AxesLabel → {"Månad", "KaninAntal"}, PlotRange → {{0, 35}, {-1000, 1000000}}]`



## B-Undersök talföljden och diskutera tillväxtakten.

Ovanstående funktion beskriver ökningen av antalet kaniner med avseende på tid uttryckt genom enheten månad.

Funktionen kan utnyttjas så att den visar exakta värden vid exakta tidpunkter.

Funktionen utseende tyder på att den liknar en exponential funktion i dess tillväxt.

In[ ]:= `ListOverKaninAntal = N[Table[a[n], {n, 1, 33}]]`

Out[ ]:= `{1., 1., 2., 3., 5., 8., 13., 21., 34., 55., 89., 144., 233., 377., 610., 987., 1597., 2584., 4181., 6765., 10946., 17711., 28657., 46368., 75025., 121393., 196418., 317811., 514229., 832040., 1.34627 × 106, 2.17831 × 106, 3.52458 × 106}`

## C- Villka begränsningar har modellen?

Modellen tar inte hänsyn till .1 att kaniner dör, 2. lika/olika kön föds.

## D- Hur kan man förbättra modellen?

En modell kan utföras som beskriver de olika faktorer som orsaker minskningen av antalet kaniner. faktorer såsom (dödsfall, lika/olika kön mm)