

Algebraiska likheter och olikheter

1. En identitet

Bevisa att följande påståenden är sanna:

a) $D_1 = \{x \in R \mid x \neq -1\}$

$$(\forall x \in D_1) \left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} = \frac{x - 1}{x^2 - x + 1} \right)$$

b) $D_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \neq y\}$

$$(\forall (x, y) \in D_2) \left(\frac{x - y}{x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right)$$

c) $D_3 = \{x \in R \mid x \neq 0 \wedge x \geq -2 \wedge x \leq 2\}$

$$(\forall x \in D_3) \left(\frac{1 + (x - 1)(x + 1)}{2 - \sqrt{4 - x^2}} = 2 + \sqrt{4 - x^2} \right)$$

2. En identitet och dess domän

I följande likheter representerar x ett reellt tal:

a)

$$\frac{x^3 + 27}{x^2 + x - 6} = \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 2}$$

b)

$$\frac{(x - 1)^2}{x^3 - 3x + 2} = \frac{1}{x + 2}$$

c)

$$\frac{3x^2 - 12x + 11}{(x-1)(x^2 - 5x + 6)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

a) Bevisa att dessa likheter är identiteter, och fastställ domäner där dessa identiteter gäller.

b) Yttra identiteterna genom universella påståenden.

3. En ekvation

Lös följande ekvationer i domänen av alla reella tal R :

a)

$$8 - 7x^3 = x^6$$

b)

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3} = 2$$

c)

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{5}{2}$$

d)

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

4. En ekvation

Lös följande ekvationer i domänen av alla reella tal R :

a)

$$x = \sqrt{x+3} - 1$$

b)

$$\sqrt{x} = 1 - x$$

c)

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 3$$

d)

$$\sqrt{2x+3} = -x^2 - 4$$

5. Ett system av ekvationer

Lös följande ekvationssystem i domänen $R \times R$:

a)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 2+y-x \\ x+2y-4=0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy - 1 \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$$

d)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3 \quad \wedge \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

6. En ekvation

Lös följande ekvationer i domänen av alla reella tal R :

a)

$$(1 + x^3)^2(x^4 + x^2 - 6) = 0$$

b)

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} + 6$$

c)

$$(1 + x^2)^2 = 9 - 5x^2$$

7. En olikhet att bevisa

Bevisa följande olikheter:

a)

$$x^2 + y^2 \geq 6y - 4x - 13, x, y \in R$$

b)

$$x^4 + y^4 \geq 2x^2 - 4y^2 - 5, x, y \in R$$

c)

$$(x - 1)^2 \leq 1, x \in \{x \in R \mid x \geq 0 \wedge x \leq 2\}$$

d)

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x}{3} + \frac{3y}{4}, \{x, y \in R \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

8. En funktions värdemängd

Bestäm värdemängder för följande funktioner:

a)

$$f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \wedge x \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x(2 + x)$$

b)

$$g: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \wedge x \leq 4\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - \sqrt{x}$$

9. En olikhet att lösa

Lös följande olikheter i domänen av alla reella tal:

a)

$$x + 2 > 6x^2$$

b)

$$\frac{x + 1}{(x - 2)(2x + 3)} \geq 0$$

c)

$$\frac{x^2 - 5}{x - 1} \leq -1$$

d)

$$-\sqrt{x^2 + 9} \geq 2\sqrt{x} + 4$$

e)

$$\sqrt{3x + 3} \geq \sqrt{x} + 1$$

10. Sanningsmängder till predikater

Bestäm sanningsmängder till följande predikater i domänen av alla reella tal:

a)

$$x^3 < 1 \wedge x^2 - x - 6 \geq 0$$

b)

$$(2x - 1)(x - 3)(2x - 5) = 0 \wedge \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 2$$

c)

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq \sqrt{x} \wedge x^2 - 1 \geq 0$$

11. Sanningsmängder till predikater

Bestäm sanningsmängder till följande predikater i domänen av alla reella tal:

a)

$$|x - 1| > 3 \wedge |x - 5| < 2$$

b)

$$|x^2 - 2x| < \frac{3}{4} \wedge |x - 1| \leq 1$$

c)

$$\left| \frac{x - 1}{x - 2} \right| \geq 1$$