T(n) Recursivo

Colectivo Estructuras de Datos y Algoritmos

Marzo 2021

1. Para cada una de las funciones de complejidad temporal siguientes determine, utilizando el método del árbol, una función $f(n)$ tal que $T(n) = \Theta(f(n))$; y demuestre dicha relación utilizando el método de inducción completa. En cada caso c es una constante positiva.

   a) $T(n) = T(n-1) + c$

Respuesta

Mediante el método del árbol deben obtener que el valor exacto de la recurrencia es una función que es $\Theta(n)$.

Demostremos que $T(n) = O(n)$, o sea: $\exists c, n_0 > 0$ tales que $\forall n \geq n_0$ se cumple que $T(n) \leq cn$. El primer aspecto importante a notar en la definición a la hora de hacer la demostración por inducción es que el predicado P que queremos demostrar es de la forma:

$$\exists c > 0,\ \exists n_0 > 0,\ \forall_{n \geq n_0} (P(n, c))$$

Esto significa que en la inducción la constante c es la misma para todo n. Noten como esto es distinto a:

$$\exists n_0 > 0,\ \forall_{n \geq n_0} \exists c\, (P(n, c)).\ \ \textit{(esto NO es lo que se quiere demostrar)}$$

En este caso habría que encontrar un c potencialmente distinto para cada n.

Por conveniencia, vamos a comenzar demostrando el paso inductivo. Para ello vamos a asumir c y n_0 existen. Entonces la demostración va a, potencialmente, arrojar condiciones sobre c y n_0 suficientes para que el enunciado del paso inductivo se cumpla.

Paso inductivo

¿Cuál sería la hipótesis de inducción en este caso? En este caso particular no hace falta, pero generalmente vamos a necesitar inducción fuerte. De ahí que planteemos la hipótesis como:

$\forall m$ tal que $n_0 \leq m < n$ se cumple que $T(m) \leq cm$

y tenemos que demostrar que $T(n) \leq cn$. Entonces por la definición de $T(n)$ y la hipótesis de inducción tenemos que:

$$T(n) = T(n-1) + c \leq c(n-1) + c$$

Noten que si demostramos que $c(n-1) + c \leq cn$, entonces se cumple el paso inductivo. Luego:

$$\begin{array}{rcl} & c(n-1) + c & \leq cn \\ \Leftrightarrow & cn - c + c & \leq cn \\ \Leftrightarrow & cn & \leq cn \end{array}$$

Y esto último se cumple para cualquier valor de n y c. ■

Casos base

Los casos base de este tipo de recurrencias los vamos a analizar a conveniencia. Vamos a considerar como caso base **todo aquel valor de n que no pueda cumplir la proposición del paso inductivo**. En este caso el único valor así es $n = 1$, puesto que n_0 tiene que ser positivo. En este sentido, noten que si para $n = 1$ se cumpliera la desigualdad, entonces ya para $n = 2$ se cumpliría también, como ya demostramos en el paso inductivo.

Recuerden que la propiedad que queríamos demostrar era $T(n) \leq cn$. Luego, para $n = 1$ esto ocurre solo si:

$$T(1) \leq c$$

$\blacksquare$

Hemos encontrado en este caso que la única condición para que se cumplan los casos base de inducción es que $c \geq T(1)$, y desde luego $n_0 = 1$. Por tanto podemos decir que para $c = T(1)$ y $n_0 = 1$ se cumple $\forall n \geq n_0$ que $T(n) \leq cn$ por inducción en n. De lo que $T(n) = O(n)$.$\blacksquare$

Faltaría demostrar que $T(n) = \Omega(n)$, pero el procedimiento es análogo.

b) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + c$

c) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$

Respuesta

Mediante el método del árbol deben obtener que el valor exacto de la recurrencia es una función que es $\Theta(n \log n)$.

Demostremos que $T(n) = O(n \log n)$. Demostremos por inducción fuerte en n que $\exists c, n_0 > 0$ tales que $\forall n \geq n_0$ se cumple que $T(n) \leq cn \log_2 n$. Noten como, por conveniencia, vamos a hacer la inducción utilizando logaritmo en base 2. Analicen por qué podemos hacer esto.

Paso inductivo

La hipótesis de inducción es:

$\forall m$ *tal que* $n_0 \leq m < n$ *se cumple que* $T(m) \leq cm \log_2 m$

y tenemos que demostrar que $T(n) \leq cn \log_2 n$. Desarrollemos la expresión de $T(n)$.

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(\frac{n}{2}) + n \\
&\leq 2(c\frac{n}{2}\log_2 \frac{n}{2}) + n \\
&= cn \log_2 \frac{n}{2} + n \\
&= cn(\log_2 n - \log_2 2) + n \\
&= cn \log_2 n - cn + n \\
&= cn \log_2 n + n(1 - c)
\end{aligned}$$

Si se cumple que $cn \log n + n(1 - c) \leq cn \log n$, entonces se cumple el paso inductivo. Entonces:

$$\begin{array}{rcl} & cn\log n + n(1-c) & \leq cn\log n \\ \Leftrightarrow & n(1-c) & \leq 0 \\ \Leftrightarrow & 1-c & \leq 0 \\ \Leftrightarrow & 1 & \leq c \end{array}$$

Noten como podemos dividir entre n (segundo al tercer paso) debido a que sabemos que $n > 0$. Finalmente, sabemos que para $n_0 > 0$ y $c \geq 1$ se cumple el paso inductivo. ■

Casos base

A priori solo necesitamos analizar lo que sucede cuando $n = 1$, puesto que $n = 2$ ya se apoya en $n = 1$. Luego, la desigualdad $T(n) \leq cn\log n$ para $n = 1$ queda expresada como:

$$T(1) \leq clog_2 1 = 0$$

Pero sabemos que T es una función positiva, por lo que no puede suceder que $T(1) \leq 0$. Como la desigualdad no se cumple para $n = 1$, hay que analizar otros casos base. Particularmente aquellos que se apoyaban en $n = 1$; o sea: $n = 2$ y $n = 3$. Vamos a asumir que la división no exacta resulta en el mayor entero por debajo. Asumir una cosa o la otra no influye en el comportamiento asintótico de la función.

$$\begin{array}{rcl} & T(2) & \leq c\log_2 2 \\ \Rightarrow & c & \geq T(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & T(3) & \leq c\log_2 3 \\ \Rightarrow & c & \geq \dfrac{T(3)}{\log_2 3} \end{array}$$

■

Finalmente, para $n_0 = 2$ y $c = \text{máx}(1, T(2), \frac{T(3)}{\log_2 3})$ se cumple $\forall n \geq n_0$ que $T(n) \leq cn\log_2 n$ por inducción en n. De lo que $T(n) = O(n\log n)$. ■

d) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n$

e) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n^2$

f) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

Respuesta

Vamos a analizar qué sucede en este caso. El desarrollo del árbol debe haber arroja que $T(n) = \Theta(n^2)$. Vamos a demostrar que $T(n) = O(n^2)$. Demostremos por inducción en n que $\exists c, n_0 > 0$ tales que $\forall n \geq n_0$ se cumple que $T(n) \leq cn^2$.

Paso inductivo

La hipótesis de inducción es:

$\forall m$ *tal que* $n_0 \leq m < n$ *se cumple que* $T(m) \leq cm^2$

y tenemos que demostrar que $T(n) \leq cn^2$. Desarrollemos la expresión de $T(n)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(\frac{n}{2}) + n \\
&\leq 4c(\frac{n}{2})^2 + n \\
&= 4c\frac{n^2}{4} + n \\
&= cn^2 + n \\
&\leq cn^2 \ (?)
\end{aligned}
$$

Esta última desigualdad no se cumple para ningún valor de $n > 0$. ¿Significa esto que no se cumple la propiedad? No, solo significa que no la podemos demostrar por esta vía.

Vamos a ver un recurso que les va a permitir demostrarlo. Se los presentamos y después trataremos de construir la intuición de por qué funciona. Vamos a demostrar por inducción algo más fuerte. Demostremos que $\exists \alpha, c, n_0 > 0$ tales que $\forall n \geq n_0$ se cumple que $T(n) \leq cn^2 - \alpha n$.

Paso inductivo

La hipótesis de inducción es:

$\forall m$ *tal que* $n_0 \leq m < n$ *se cumple que* $T(m) \leq cm^2 - \alpha m$

y tenemos que demostrar que $T(n) \leq cn^2 - \alpha n$. Desarrollemos la expresión de $T(n)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(\frac{n}{2}) + n \\
&\leq 4(c(\frac{n}{2})^2 - \alpha\frac{n}{2}) + n \\
&= 4c\frac{n^2}{4} - 4\alpha\frac{n}{2} + n \\
&= cn^2 + n(1 - 2\alpha) \\
&\leq cn^2 - \alpha n \ (?)
\end{aligned}
$$

Veamos entonces cuándo $cn^2 + n(1 - 2\alpha) \leq cn^2 - \alpha n$.

$$
\begin{array}{ccl}
 & cn^2 + n(1-2\alpha) & \leq cn^2 - \alpha n \\
\Leftrightarrow & n(1-2\alpha) & \leq -\alpha n \\
\Leftrightarrow & 1 - 2\alpha & \leq -\alpha \\
\Leftrightarrow & 1 & \leq \alpha
\end{array}
$$

¿Qué acabamos de hacer? Acabamos de demostrar que cuando $\alpha \geq 1$ se cumple el paso inductivo, particularmente para $\alpha = 1$. Analicemos los casos base siendo $\alpha = 1$. Recuerden que la desigualdad que estamos demostrando es $T(n) \leq cn^2 - \alpha n$.

Casos base

$$
\begin{array}{ccl}
 & T(1) & \leq c1^2 - 1 \\
\Rightarrow & c & \geq T(1) + 1
\end{array}
$$

Ya $T(2)$ se apoya en el paso inductivo, por lo que basta con $T(1)$. Concluyendo, acabamos de demostrar por inducción en n que para $c = T(1) + 1$ y $n_0 = 1$ se cumple $\forall n \geq n_0$ que $T(n) \leq cn^2 - n$. Pero, a su vez, $cn^2 - n \leq cn^2$. Luego, $T(n) \leq cn^2$; por lo que $T(n) = O(n^2)$. ■

Hasta aquí la demostración. Pensemos en la intuición de lo que acaba de suceder, porque parece contradictorio. Sucedió que no pudimos demostrar por inducción una propiedad P, y en su lugar sí pudimos demostrar una propiedad más fuerte que P. Si analizan cómo funciona el principio de inducción se darán cuenta que esto no es tan contradictorio, puesto que demostrar una propiedad más fuerte, también nos garantizó una hipótesis más fuerte en el paso inductivo.

Ahora, parece mágico que la transformación sea sustraer αn del miembro derecho de la desigualdad. En realidad no es mágico. Noten como en el paso inductivo de la inducción que no funcionó, en el miembro izquierdo de la desigualdad nos "sobraba" el sumando n. De no haber estado, se hubiera cumplido la desigualdad. Entonces, la idea de restar αn es para intentar "cancelarlo" con el sumando n que nos sobraba durante el paso inductivo. Si se fijan, eso fue lo que hicimos.

Nota: Este recurso lo van a poder utilizar en otros incisos de la Clase Práctica. No duden en preguntar si tienen alguna duda.

g) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$

h) $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n^2$

i) $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n$

**j)* $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$

**k)* $T(n) = 4T(\frac{n}{64}) + \sqrt[3]{n}$

**l)* $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + \log n$

Nota: Cuando los casos base de una recurrencia no aparecen indicados, se asume que tienen valor constante.