Planare Graphen - Planare Einbettung

Manuel Frohn

RWTH Aachen University, Aachen, Germany

28.08.2023

Inhaltsverzeichnis

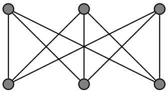
Relevanz

1. Real auftretene Klasse
2. Wichtig für Chip Design und Städteplanung
3. Bedingung für Algorithmen und Sätze

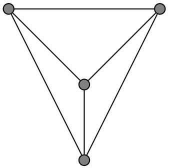
Planare Graphen

Definition

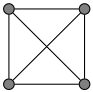
Ein Graph G heißt planar, wenn man in der Lage ist, den Graphen so auf eine Ebene zu zeichnen, dass sich seine Kanten nicht schneiden.



(a) $K_{3,3}$



(b) K_4

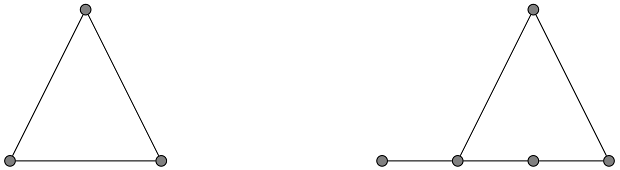


(c) K_4

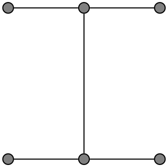
Minor

Definition

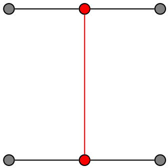
M heißt Minor von G wenn M aus einem Teilgarphen von G, durch Kantenkontaktion hervorgeht.



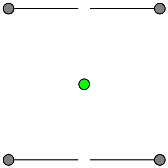
Kantenkontraktion



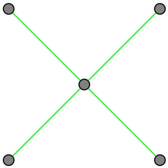
Kantenkontraktion



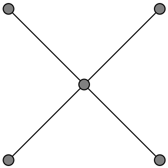
Kantenkontraktion



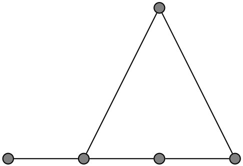
Kantenkontraktion



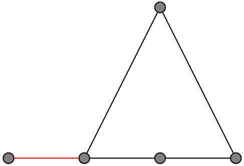
Kantenkontraktion



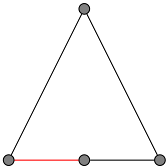
Minor Beispiel



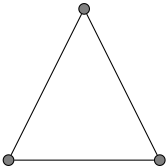
Minor Beispiel



Minor Beispiel



Minor Beispiel



Eulerscher Polyedersatz

Satz

Gegeben ein planarer Graph $G = (V, E)$ *und die Anzahl seiner Gebiete* $|F|$ *gilt:* $|V| - |E| + |F| = 2$

Eulerscher Polyedersatz

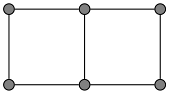
Satz

Gegeben ein planarer Graph $G = (V, E)$ *und die Anzahl seiner Gebiete* $|F|$ *gilt:* $|V| - |E| + |F| = 2$

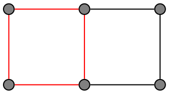
Satz

G *Planar* $\Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6 \wedge |F| \leq 2|V| - 4$

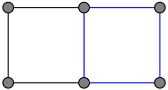
Gebiete



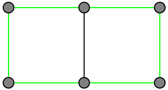
Gebiete



Gebiete



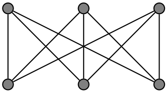
Gebiete



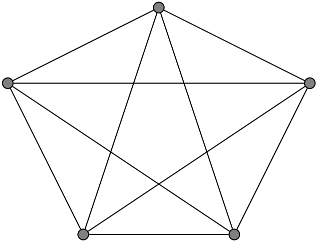
Satz von Kuratowski

Satz

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder den $K3,3$ noch den K_5 als Minor enthält



(a) $K_{3,3}$



(b) K_5

Komponente

Definition

Ein maximale Teilgraph $G' = (V', G') \subset G$ mit $\forall v \in V' \forall w \in V' : v \overset{*}{\Rightarrow} w$ heißt Komponente von G

Separator

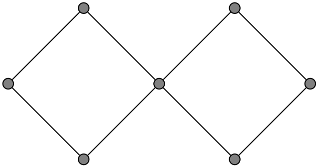
Definition

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ heißt ein Knoten $u \in V$ Separator, wenn für alle Pfade $p = v \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ mit $v, w \in V$ gilt: $u \in p$

Separator

Definition

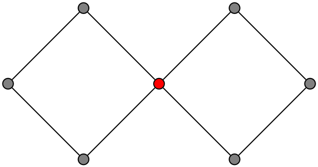
Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ heißt ein Knoten $u \in V$ Separator, wenn für alle Pfade $p = v \overset{*}{\Rightarrow} w$ mit $v, w \in V$ gilt: $u \in p$



Separator

Definition

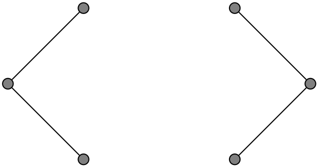
Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ heißt ein Knoten $u \in V$ Separator, wenn für alle Pfade $p = v \overset{*}{\Rightarrow} w$ mit $v, w \in V$ gilt: $u \in p$



Separator

Definition

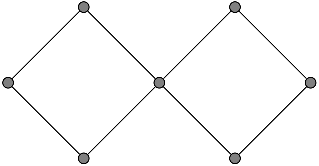
Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ heißt ein Knoten $u \in V$ Separator, wenn für alle Pfade $p = v \overset{*}{\Rightarrow} w$ mit $v, w \in V$ gilt: $u \in p$



Bikomponente

Definition

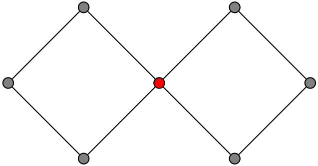
Ein maximale Teilgraph $G' = (V', G') \subset G$ ohne Separatoren heißt Bi-Komponente von G



Bikomponente

Definition

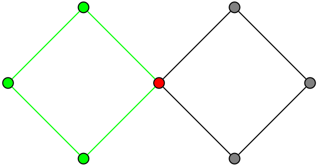
Ein maximale Teilgraph $G' = (V', G') \subset G$ ohne Separatoren heißt Bi-Komponente von G



Bikomponente

Definition

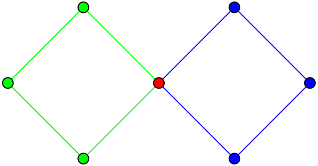
Ein maximale Teilgraph $G' = (V', G') \subset G$ ohne Separatoren heißt Bi-Komponente von G



Bikomponente

Definition

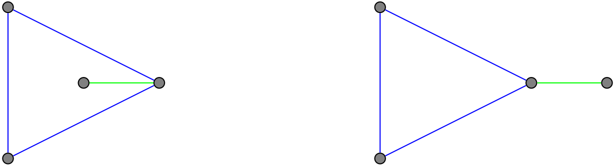
Ein maximale Teilgraph $G' = (V', G') \subset G$ ohne Separatoren heißt Bi-Komponente von G



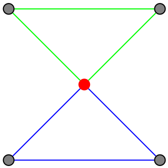
Bikomponenten und Planarität

Satz

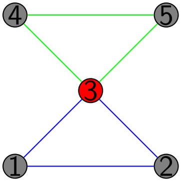
Ein Graph ist genau dan Planar, wenn seine Bikomponenten planar sind

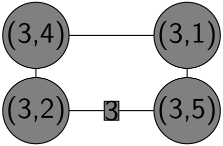


Knoten in der Planaren Einbettung



Knoten in der Planaren Einbettung



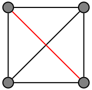


Der Einbettungsalgorithmus - Idee

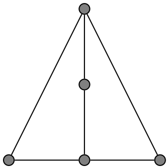
Bette Kante für Kante ein, so dass jede Teileinbettung planar ist

Frage 1: Wo ?

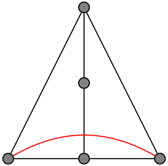
Frage 2: Wann ?



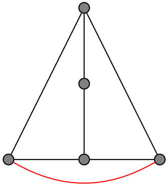
Wo ?



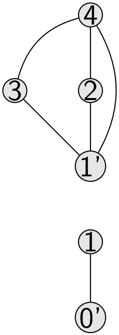
Wo ?



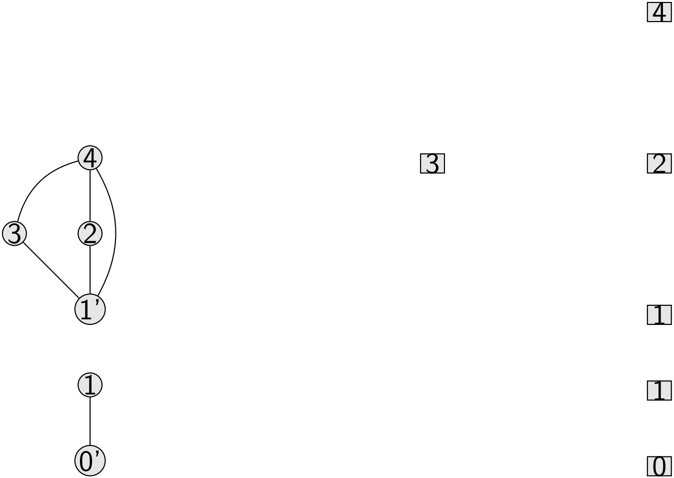
Wo ?



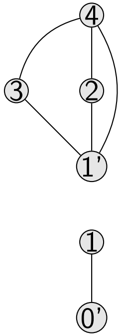
Die Datenstruktur

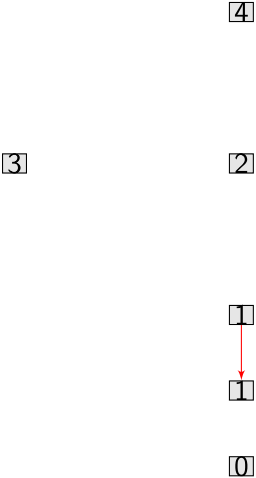


Die Datenstruktur

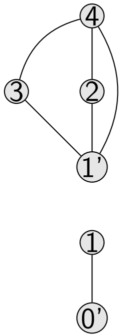


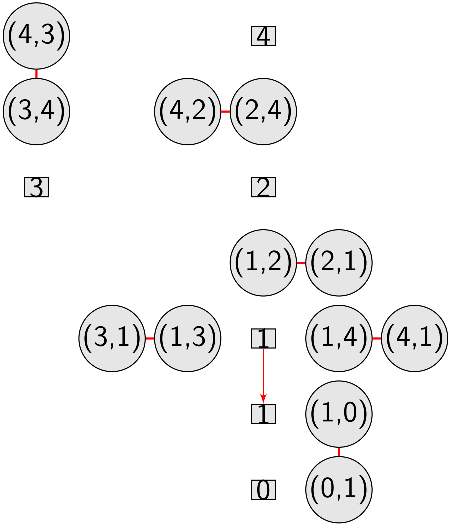
Die Datenstruktur



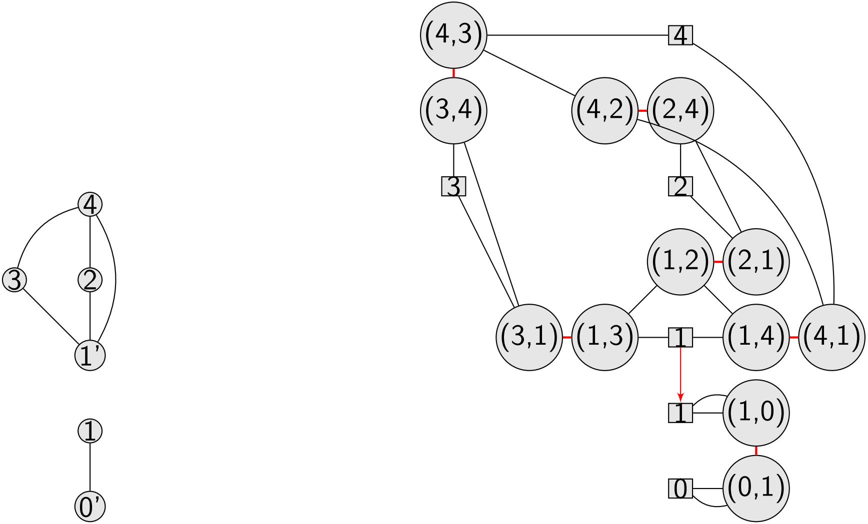


Die Datenstruktur





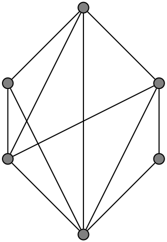
Die Datenstruktur



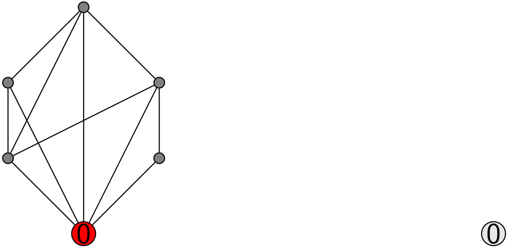
Der Einbettungsalgorithmus

1. Erstelle einen Palmtree des Eingabegraphens G
2. Für alle Knoten v des Graphens, in inverser DFI Ordnung:
3. Für alle Kanten e, die v mit einem DFS Nachkommen verbinden:
4. Führe $WalkUp(e)$ aus
5. Führe auf den Graphen, der durch die Pfade aus Schritt 4 induziert wird, *WalkDown* aus

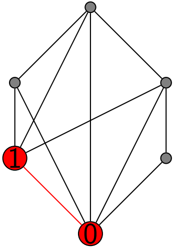
Palmtree

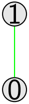


Palmtree

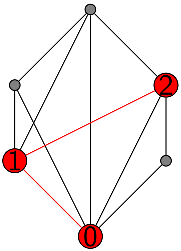


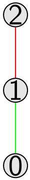
Palmtree



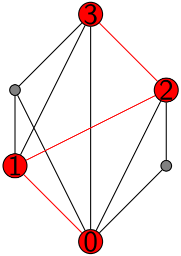


Palmtree

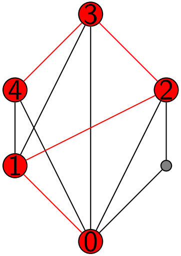




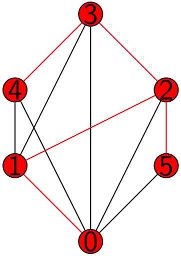
Palmtree

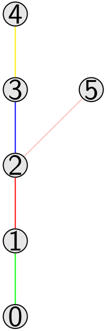


Palmtree

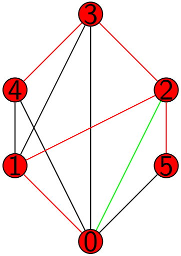


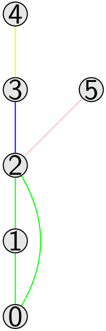
Palmtree



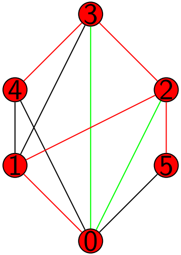


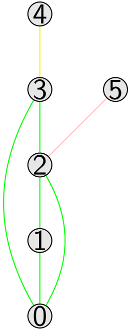
Palmtree



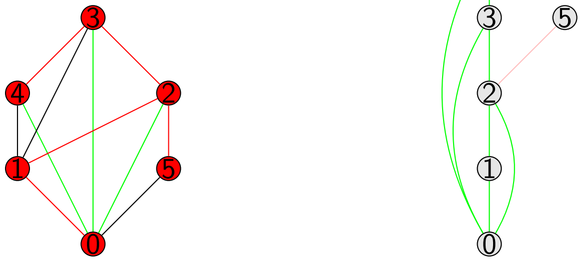


Palmtree

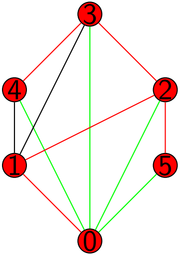


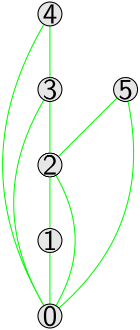


Palmtree

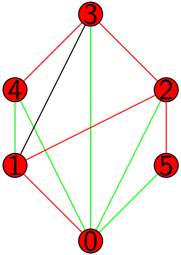


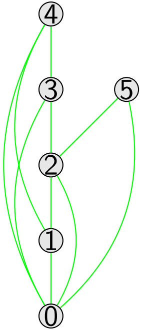
Palmtree



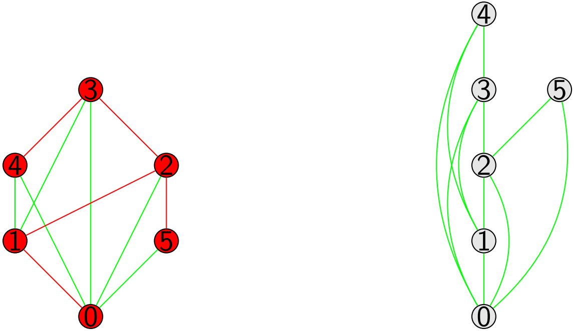


Palmtree

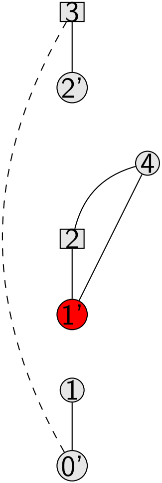




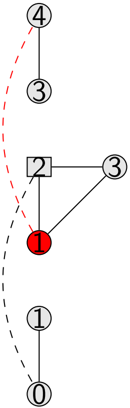
Palmtree



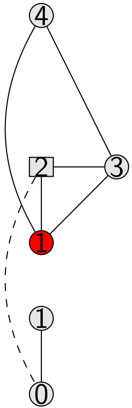
Außen Aktive Knoten



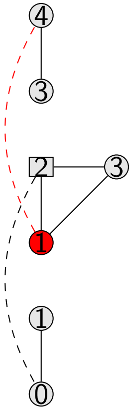
Zusammenfügen von Bikomponenten



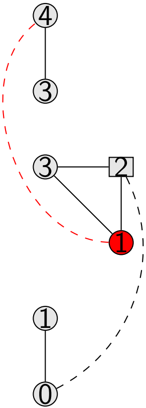
Zusammenfügen von Bikomponenten



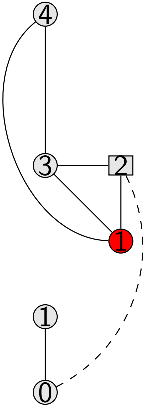
Zusammenfügen von Bikomponenten



Zusammenfügen von Bikomponenten

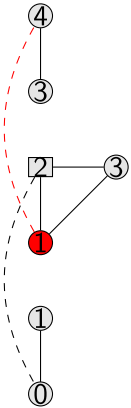


Zusammenfügen von Bikomponenten



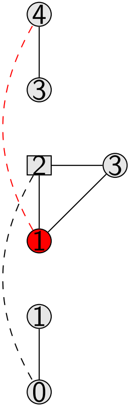
WalkUp

Suche einen Pfad von w nach v über die außen liegenden Knoten



WalkUp

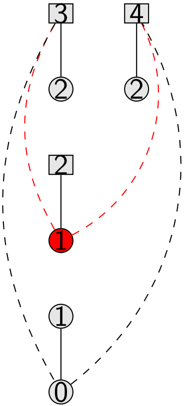
Suche einen Pfad von w nach v über die außen liegenden Knoten



Beachte:
Außenaktive Knoten dürfen nicht traversiert werden

WalkUp

Suche einen Pfad von w nach v über die außen liegenden Knoten

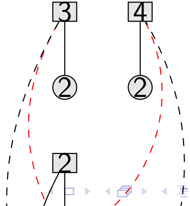


Beachte:

Wird eine Wurzel aus Zwei Außenaktiven Bikomponenten, oder aus zwei Richtungen beschritten, müssen zwei Pfade über die außen liegenden Knoten gefunden werden

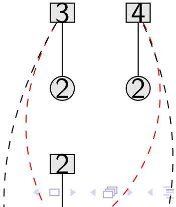
WalkUp

Suche einen Pfad von w nach v über die außen liegenden Knoten



WalkUp

Suche einen Pfad von w nach v über die außen liegenden Knoten



Walk Down

Performe DFS auf den Graphen, der durch die Pfade aus dem WalkUp induziert wird

Beachte jedoch

1. Füge zuerst die Kante zu einbettung hinzu, die an dem Knoten anliegt, indem du gerade bist
2. Gibt es eine zuvor besuchte Bikomponte,ohne außen aktive Knoten von der der Momentane Knoten die Wurzel ist, schreite in diese Bikomponente hinein
3. Gibt es eine zuvor besuchte Bikomponte,mit außen aktive Knoten von der der Momentane Knoten die Wurzel ist, schreite in diese Bikomponente hinein

Kuratowski Minore - Walk Up