Planare Graphen - Coloring

Manuel Frohn

RWTH Aachen University, Aachen, Germany
manuel.frohn@rwth-aachen.de

Abstract. Die Klasse der Planaren Graphen ist sowol für die innermathematische Untersuchung von Graphen, als auch zur Modelierung praktischer Netzwerke, wie zum Beispiel Straßennetze, oder Landkarten wichtig. So dient die Planarität von Graphen als Bedingung für die Funktionalität und/oder Effizienz einiger Algorithmen. Zu diesen zählt auch der Algorithmus zur Berechnung einer 4-Färbung in polinomieller Zeit. Die Berechnung einer Färbung ist ein Problem das viele Anwendungen findet. Es lassen sich unter anderem viele Zuweisungsprobleme wie zum Beispiel Stundenplanerstellung oder auch Speicherzuweisung als Coloring Problem modelieren.

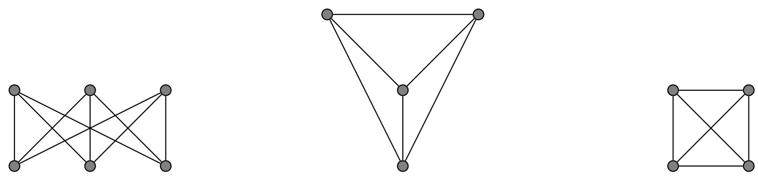
Keywords: Planare Graphen · Coloring

1 Planare Graphen

1.1 Einführung

Definition 1 (Planarität). *Ein Graph G heißt planar, wenn man in der Lage ist, den Graphen so auf eine Ebene zu zeichnen, dass sich seine Kanten nicht schneiden.*

Planare Graphen sind unter anderem durch die sehr graphische Natur ihrere Definition, eine Graphklasse, die schon sehr lange untersucht wird. Um ein besseres Verständnis für die Graphklasse zu entwickeln wollen wir uns nun folgende Abbildungen anschauen.



(a) (b) (c)

Fig. 1: Der $K_{3,3}$ (a) ist nicht planar, der K_4 (b) jedoch schon, lässt sich aber trozdem mit Kantenüberschneidung zeichnen (c)

(a) zeigt den sogenanten $K_{3,3}$, den volständigen bipariten Graphen, mit jeweils 3 Knoten pro Partition. Dieser ist nicht Planar. Egal wie man den Graphen zeichnet, man wird nicht in der Lage sein ihn so zu zeichnen, dass sich keine seiner Kanten schneiden. Betrachten wir nun (b). Wir sehen den K_4, den volständigen Graphen, mit 4 Knoten. Dieser ist Planar, was sich in der Abbildung auch sehr leicht erkennen lässt. Man möchte nun vileicht glauben, dass es sich bei der Planarität um eine Trivial prüfbare Eigenschaft handelt. Jedoch, wie wir in (c) erkennen können, lässt sich nicht aus jeder Zeichnung eines Planaren Graphen direkt dessen Planarität erkennen. Bevor wir uns aber damit beschäftigen, wie man, auch algorithmisch, feststellt, ob ein Graph Planar ist, bedarf es einem kleinem Exkurs.

1.2 Minore

Definition 2 (Teilgraph). *Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt Teilgraph von $G = (V, E)$, wenn gilt:*

$$V' \subset V \wedge \forall e = (a, b) \in E \text{ } mit \text{ } a, b \in V' \text{ } gilt \text{ } e \in E'$$

Definition 3 (Kantenkontraktion). *Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Kante $e = v, w \in E$, ist das Resultat der Kontraktion von e, der Graph $G' = (V', E')$ mit $V' = (V \setminus e) \cup \{n\}$ und $E' = (E \setminus \{v \in e \vee w \in e \mid e \in E\}) \cup \{\{n, z\} \mid z, v \in e \in E \vee z, w \in e \in E\}$*

Das Konzept des Teilgraphen sollte bereits aus der Vorlesung "Diskrete Strukturen" bekannt sein und wird daher nicht weiter erläutert. Die Kontraktions-Operation jedoch ist neu und soll daher im weiteren betrachtet werden. Schauen wir uns hierzu folgende Abbildung an:

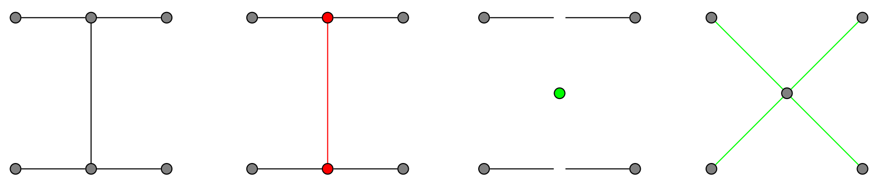


Fig. 2: Kantenkontaktion an einem Beispiel

Hier sehen wir wie einen Kantenkontraktion funktioniert. Und zwar verschmiltz man die beiden, durch die Kante verbundenen Knoten zu Einem. Dazu enfernt man zuerst die zu kontrahierende Kante, und ersetzt die beiden Knoten die sie verbindet, durch einen neuen Knoten. Danach ersetzt man jede Kante, die zufor mit einem der beiden verschmolzenen Knoten verbunden war, durch eine neue, die nun statdessen mit dem neuen Knoten verbunden ist. Betrachten wir nun das Konzept des Minors:

Definition 4 (Minor). *M heißt Minor von G wenn M aus einem Teilgarphen von G, durch Kantenkontaktion hervorgeht.*

So ist zum Beispiel der Dreiecksgraph (a) aus Figur 3 ein Minor des Graphen (b)

(a) (b)

Fig. 3: Minor Beispiel

Wichtige Sätze

Für Planare Graphen gibt es zwei Wichtige Sätze, welche als Voraussetzung für die Funktionalität des Algorithmus zur Planaritätsbestimmung dienen.

Theorem 1.