MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

David Weber

TODO: doplnit název práce

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.
Studijní program:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání se sdruženým studiem informatika se zaměřením na vzdělávání

Praha TODO: doplnit rok odevzdání

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

TODO: Doplnit poděkování

Název práce: TODO: doplnit název práce

Autor: David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: TODO: Doplnit abstrakt

Klíčová slova: klíčová slova

Title: TODO: doplnit název práce (EN)

Author: David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: TODO: Doplnit abstrakt (EN)

Keywords: key words

Obsah

Kapitola 1

Historický úvod k teorii množin

Čtenář se s pojmem *množina* již jistě setkal. Často se o množině hovoří jako o „celku“, „souboru“ nebo „souhrnu“ obsahujícím jisté prvky. Na střední škole jsme si s tímto chápáním uvedeného pojmu nejspíše vystačili, když jsme se např. učili o různých funkcích, kde jsme (mimo jiné) vyšetřovali jejich definiční obor nebo obor hodnot. Dané množiny jsme pak chápali jako „soubory“ obsahující jisté hodnoty, pro které je funkce definovaná, resp. jakých nabývá. Při určování průsečíku grafu funkce s osou x jsme se pak dotazovali již na specifické hodnoty. Konkrétně jestli se hodnota 0 nachází v oboru hodnot funkce a popř. pro jakou hodnotu proměnné x ji nabývá. Čtenář nejspíše již tuší, že ačkoliv jsme pojem množiny nebo „náležení“ či „nenáležení“ prvku množině formálně nikterak nedefinovali (tzn. zacházeli jsme s nimi intuitivně), přesto jsme neměli problém s nimi pracovat.

Ke vzniku teorie množin však nevedly spory o definici onoho pojmu, ale potřeba matematiků vypořádat se s problematikou **nekonečna** a proto začneme s ním.

1.1 Potenciální versus aktuální nekonečno

Co je to vlastně nekonečno? Čtenáři toho může připadat jako absurdní dotaz, ale tento zdánlivě jednoduše pochopitelný pojem způsoboval ve své době řady problémů.

Fakt, že přirozených čísel je nekonečně mnoho byl znám již ve starověku.

$$1,2,3,\ldots$$

I žáci na základních školách toto již znají a pravděpodobně se nad tím nikdo z nich nepozastaví. Jak ale toto můžeme chápat? Existují dva způsoby.
Pokud začneme postupně vypisovat všechna přirozená čísla, jistě je nikdy nevypíšeme všechna, protože bez ohledu na to, jakou si zvolíme mez, vždy ji nakonec přesáhneme. Takovémuto nekonečnému **procesu** pak říkáme *potenciální nekonečno.*

Druhou možností ale je, že se na množinu přirozených čísel budeme dívat již jako na „hotovou“. To znamená, že nebudeme řešit, jak všechna přirozená čísla vypíšeme, ale budeme na tuto množinu nahlížet již jako na celek, tedy nekonečno budeme chápat v uzavřené formě. V takovém případě mluvíme o tzv. *aktuálním nekonečnu.*

Starým Řekům se však jak z důvodů matematických, tak filozofických, zdálo, že lidskému myšlení je přístupné pouze nekonečno **potenciální**. O tom se lze přesvědčit už ze samotných *Eukleidových axiómů*. K axiomatice čtenář bude mít možnost blíže nahlédnout v kapitole TODO: doplnit odkaz na kapitolu v sekci TODO: doplnit odkaz na sekci. Eukleidés právě z důvodu nemyslitelnosti aktuálního nekonečna mluvil o *přímce* jako o úsečce, kterou může libovolně prodlužovat, nikoliv, že ji lze prodloužit „do nekonečna“, jak říkáme dnes.

1.1.1 Galileova úvaha o mohutnosti

S problémem nekonečna se však pojili i další problémy. Při zrodu samotné teorie množin v 70. letech 19. století se totiž nabízela otázka, zdali *má vůbec smysl porovnávat nekonečné množiny*. Nad tímto se pozastavil už jeden z géniů 16. a 17. století Galileo Galilei (1564–1642). Ten si vypsal dvě posloupnosti čísel:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, n, \ldots \qquad \text{a} \qquad 1,\ 4,\ 9, \ldots, n^2, \ldots\ ,$$

tzn. přirozená čísla a jejich druhé mocniny. Avšak při pohledu na tyto dvě posloupnosti si Galileo uvědomil, že každý prvek množiny přirozených čísel lze „spárovat“ s jeho druhou mocninou (v dnešní terminologii bychom řekli, že existuje *bijekce*; na tu se blíže podíváme v kapitole TODO: doplnit odkaz na kapitolu s bijekcí).

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1, & 4, & 9, & \ldots, & n^2, & \ldots \end{array}$$

To by však znamenalo, že přirozených čísel a jejich druhých mocnin je **stejně mnoho**! To se však tehdy Galileovi zdálo jako naprostý nesmysl a tak usoudil, že porovnávat nekonečné množiny podle velikosti zkrátka nemá žádný smysl. Jinak řečeno, tvrdil, že **aktuální nekonečno** je sporné a tedy nemůže existovat. (Fuchs, 2003, s. 103–105)

1.1.2 Grandiho řada

Dalším typickým problémem týkající se nekonečna je tzv. *Gradiho řada*. Čtenář se nejspíše již řadami setkal na střední škole, specificky s řadou aritmetickou a geometrickou. Řadou jsme rozuměli symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\ ,$$

kde pro všechna přirozená i byl a_i člen nějaké posloupnosti. U řad nás celkem pochopitelně zajímal jejich součet. To nebyl většinou problém, neboť jsme se většinou zajímali o řady konečné (a speciálně pro aritmetickou a geometrickou posloupnost jsme měli i elegantní vzorce), ale uvážíme-li řady nekonečné, mohou nastat potíže.

Takového problému si všiml italský matematik Gildo Grandi (1671–1742). Uvažme následující rovnost:

$$0 = 0 + 0 + 0 + \cdots\ .$$

To nejspíše nevypadá nikterak zajímavě. Přeci jen nekonečným sčítáním nul celkem přirozeně nemohu dostat jiný výsledek než opět nulu. Nulu si však můžeme vyjádřit jako $1 - 1$. Aplikací na rovnost výše dostaneme

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \ . \tag{1.1}$$

Podle asociativního zákona pro sčítání můžeme změnit uzávorkování. Změníme jej proto takto

$$0 = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$$

a nakonec z každé závorky vytkneme znaménko „$-$“

$$0 = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots \ .$$

Tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \ . \end{aligned}$$

(Pospíšil, 2017) Aplikací jednoduchých aritmetických pravidel jsme dospěli k závěru, že $0 = 1$. To je samozřejmě nesmysl, ale kde je tedy chyba? (Zde poprosím čtenáře, aby se zkusil zamyslet.)
Grandiho řadou nazýváme součet

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \ ,$$

kterou jsme obdrželi u „rovnosti“ 1.1 (až na uzávorkování). Není těžké si všimnout, že postupným sčítáním jednotlivých členů se budou částečné součty opakovat, tedy

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \ , \\ 0 &= 1 - 1 \ , \\ 1 &= 1 - 1 + 1 \ , \\ 0 &= 1 - 1 + 1 - 1 \ , \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zkusme k součtu této řady přistoupit ještě jedním způsobem. Uvažujme, že řada má součet, který si označíme S. Pak

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \ ,$$

Opět využitím asociativního zákona a vytknutím znaménka „$-$“ si upravíme řadu na pravé straně takto:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) \ .$$

Čtenář si však již možná všiml, že výraz v závorce na pravé straně je opět námi vyšetřovaná řada se součtem S, tedy z toho vyplývá

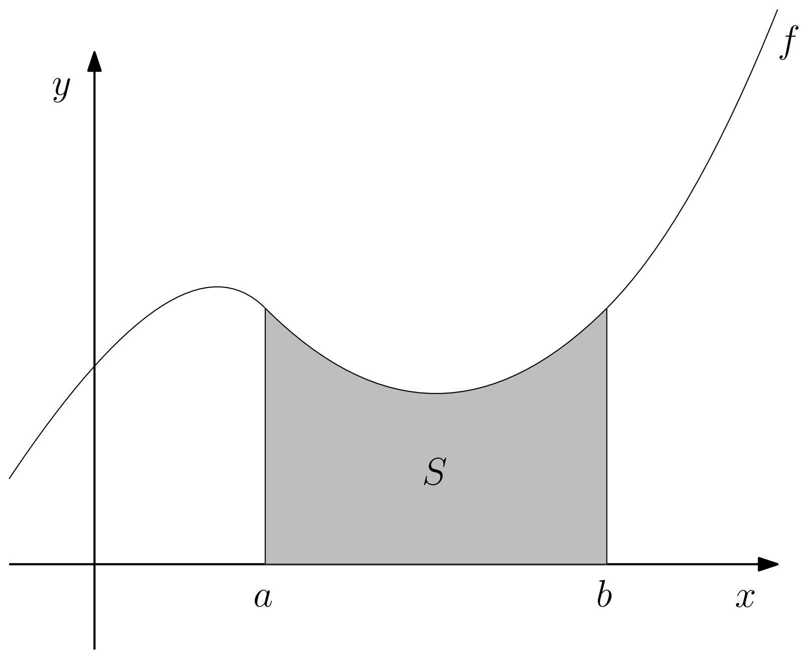
$$
\begin{aligned}
S &= 1 - S \\
S &= \frac{1}{2} \ .
\end{aligned}
$$

Toto je však také zarážející výsledek, neboť jak jsme se sami přesvědčili, tak částečné součty pouze oscilují mezi 0 a 1.

Tyto výsledky později vedly k novým poznatkům v aritmetice a to sice faktu, že asociativita a komutativita definitivně platí pouze u konečných součtů.

1.1.3 Nekonečno v matematické analýze

Velká část matematické analýzy je založená na úvahách s *nekonečně malými veličinami*; často se mluví o tzv. *infinitezimálním počtu*. Čtenář se s těmito pojmy již možná setkal, ačkoliv nemusí mít nutně představu o jeho přesném významu. Asi nejznámějším příkladem je integrální počet, specificky výpočet „plochy pod křivkou“.



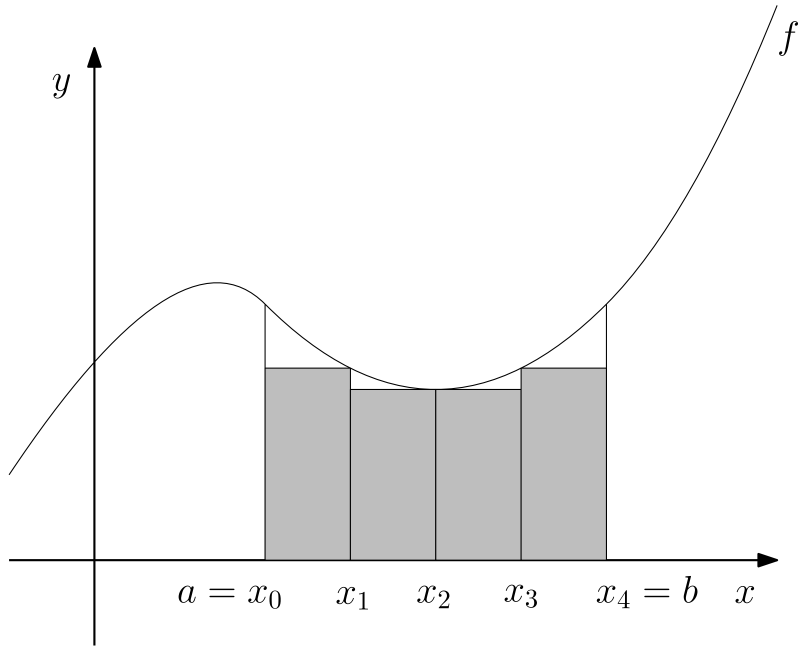
Obrázek 1.1: Příklad určitého integrálu funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$.

Obrázek 1.1 výše a obrázky jemu podobné se často uvádí ve spojitosti s tzv. *určitým integrálem*. Zde bychom mohli psát

$$
S = \int_a^b f(x)\, dx \ .
$$

Výpočet takové složitě vypadající plochy, jako na obrázku 1.1, se může zdát bez znalosti integrálního počtu takřka nemožným úkolem. Pokusme se ale na danou problematiku podívat právě optikou infinitezimálního počtu. (Znalý čtenář snad promine, že se zatím zdržím formalismů a pouze jednoduše naznačím myšlenku.)

Pro začátek zkusíme plochu pouze aproximovat. K tomu využijeme tvaru, jehož obsah jsme schopni triviálně vypočítat – obdélník. Pro začátek zkusíme plochu apraximovat pomocí 4 obdélníků (viz obrázek 1.2). Všechny 4 obdélníky



Obrázek 1.2: Aproximace plochy pod grafem funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ pomocí 4 obdélníků.

jsme zvolili tak, aby měly stejnou šířku a jejich výška odpovídala minimální hodnotě v daném dílčím intervalu. Obecně obsah i-tého obdélníku S_i bychom zapsali jako

$$S_i = (x_i - x_{i-1}) \cdot \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \ ,$$

kde $\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ je minimální hodnota funkce f na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ (předpokládáme pro jednoduchost, že f je spojitá, tzn. nabývá svého minima na každém z daných intervalů).

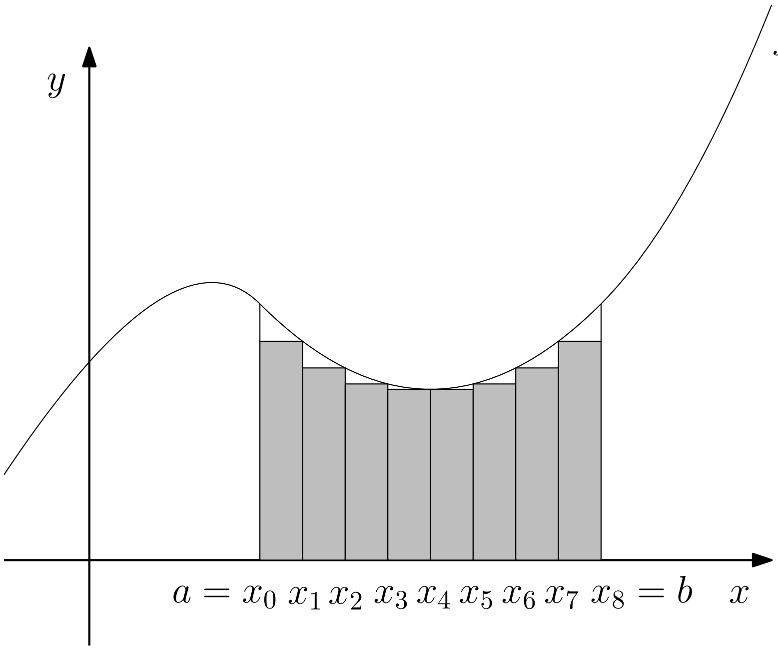
Pokud bychom si však interval $\langle a,b \rangle$ rozdělili ještě „jemněji“, není těžké vidět, že se náš odhad zpřesní. (viz obrázek 1.3.) Volbou stále „jemnějšího“ dělení intervalu $\langle a,b \rangle$ se náš odhad bude zpřesňovat. Budeme-li mít tedy plochu aproximovanou n obdélníky, pak

$$S \approx {}^1(x_1 - x_0) \cdot \min_{x_0 \leq x \leq x_1} f(x) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \cdot \min_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} f(x) \ . \qquad (1.2)$$

Pro rostoucí n, tedy počet dílčích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, se bude rozdíl rozdíl $x_i - x_{i-1}$ blížit nule (obdélníky se budou „zužovat“). V konečném důsledku bude rozdíl $x_i - x_{i-1}$ „nekonečně malý“ a součet uvedený výše u aproximace v obrázku 1.2 přejde v integrál

$$S = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

[1] Pomocí $\approx$ značíme přibližnou rovnost.



Obrázek 1.3: Aproximace plochy pod grafem funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ pomocí 8 obdélníků.

Toto je velmi zjednodušené vysvětlení určitého integrálu, avšak hlavní myšlenkou bylo právě ono „nekonečné dělení“, které bylo jednou z příkladů **nekonečně malých veličin**.

Na podobných úvahách jsou založeny různé další pojmy v matematické analýze, jako například derivace nebo i *limita*. Je však nutno si uvědomit, že co je nám známo dnes, nebylo zcela známo matematikům v 17. století. V této době začal *integrální* a *diferenciální* počet vznikat. Jejich tvůrci Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a Isaac Newton (1642–1726/27) základy své tehdejší úvahy o infinitezimálním počtu postavili právě na nekonečně malých veličinách. Problémem tehdy však bylo, že tento pojem nebyl pořádně definován a pravidla pro počítání s nimi byla definována pouze velmi vágně. I přesto se však integrální a diferenciální počet ukázal být velmi mocným nástrojem (hlavně ve fyzice). Postupně se ale začaly nejasnosti v jejich samotných základech vyhrocovat, což nakonec vyústilo v období, které dnes nazýváme *druhou krizí matematiky*.

Problémy v matematické analýze se začaly odstraňovat až na počátku 19. století, kdy významnou roli sehrál ve dvacátých letech Augustin Louis Cauchy zavedením limity. Její formální definici však podal později Karl Theodor Wilhelm Weierstrass. (Fuchs, 2003, s. 105–106)

1.2 Počátky teorie množin a současnost

1.2.1 Bolzano a jeho dílo

TODO: doplnit

1.2.2 Georg Cantor

TODO: doplnit

1.2.3 Teorie množin v současnosti

TODO: doplnit

Seznam použité literatury

FUCHS, E. (2003). *Teorie množin pro učitele.* Masarykova univerzita, Brno. ISBN 80-210-2201-9.

POSPÍŠIL, Z. (2017). Nekonečno v matematice.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

Příloha A

Přílohy

A.1 První příloha