MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

David Weber

Stručný úvod do teorie množin pro středoškoláky

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání se sdruženým studiem informatika se zaměřením na vzdělávání

Praha (TODO: doplnit rok odevzdání.)

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

(TODO: Doplnit poděkování.)

Název práce: Stručný úvod do teorie množin pro středoškoláky

Autor: David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: (TODO: Doplnit abstrakt.)

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Brief introduction to set theory for highschool students

Author: David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: (TODO: Doplnit abstrakt (EN).)

Keywords: key words

Obsah

Kapitola 1

Historický úvod k teorii množin

Čtenář se s pojmem *množina* již jistě setkal. Často se o množině hovoří jako o „celku“, „souboru“ nebo „souhrnu“ obsahujícím jisté prvky. Na střední škole jsme si s tímto chápáním uvedeného pojmu nejspíše vystačili, když jsme se např. učili o Vennových diagramech. To nám poskytovalo poměrně názorný způsob, jak si představit množiny a vztahy mezi nimi. Většinou jsme se dotazovali např. na velikost množiny či zda jí nějaký zvolený prvek náleží či nikoliv. Pojem „náležení“ jsme stejně jako množinu též nejspíše nikterak formálně nedefinovali, přesto ale intuitivně tušíme, co to znamená, když „prvek náleží množině“. Jak byste ale formálně definovali množinu? Nebo co teprve „býti prvkem množiny“?

Zkusme ještě otázku jiného charakteru. Jak by čtenář odpověděl na následující otázku, jestli je více čísel v intervalu (0,1) nebo všech přirozených čísel? A jak by svou odpověď zdůvodnil? Odpověď **stejně**, neboť jich je nekonečně mnoho zní velmi intuitivně, ale jak se později dozvíme, tak odpověď na tuto otázku je daleko složitější, než se může zdát.

Důvod proč se najednou místo množin zabýváme *nekonečnem* je ten, že ve skutečnosti tento termín je hlavním důvodem, proč teorie množin vznikla (nikoliv definice pojmu „množina“, jak by se mohlo zdát). V následujících sekcích se proto podíváme na to, jak se na pojem nekonečna nahlíželo v historii a jaké problémy způsobovalo.

1.1 Potenciální versus aktuální nekonečno

Co je vlastně nekonečno? Čtenáři toho může připadat jako absurdní dotaz, ale tento zdánlivě jednoduše pochopitelný pojem způsoboval ve své době řady problémů.

Fakt, že přirozených čísel je nekonečně mnoho byl znám již ve starověku.

$$1,2,3,\ldots$$

I žáci na základních školách toto již znají a pravděpodobně se nad tím nikdo z nich nepozastaví. Jak ale toto můžeme chápat? Existují dva způsoby.
Pokud začneme postupně vypisovat všechna přirozená čísla, jistě je nikdy nevypíšeme všechna, protože bez ohledu na to, jakou si zvolíme mez, vždy ji nakonec přesáhneme. Takovémuto nekonečnému **procesu** pak říkáme *potenciální nekonečno.*

Druhou možností ale je, že se na množinu přirozených čísel budeme dívat již jako na „hotovou". To znamená, že nebudeme řešit, jak všechna přirozená čísla vypíšeme, ale budeme na tuto množinu nahlížet již jako na celek, tedy nekonečno budeme chápat v uzavřené formě. V takovém případě mluvíme o tzv. *aktuálním nekonečnu*.

Starým Řekům se však jak z důvodů matematických, tak filozofických, zdálo, že lidskému myšlení je přístupné pouze nekonečno **potenciální**. O tom se lze přesvědčit už ze samotných *Eukleidových axiómů*. K axiomatice čtenář bude mít možnost blíže nahlédnout v kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu.) v sekci (TODO: doplnit odkaz na sekci.). Eukleidés právě z důvodu nemyslitelnosti aktuálního nekonečna mluvil o *přímce* jako o úsečce, kterou může libovolně prodlužovat, nikoliv, že ji lze prodloužit „do nekonečna", jak říkáme dnes.

1.1.1 Galileova úvaha o velikosti

S problémem nekonečna se však pojili i další problémy. Při zrodu samotné teorie množin v 70. letech 19. století se totiž nabízela otázka, zdali *má vůbec smysl porovnávat nekonečné množiny*. Nad tímto se pozastavil už jeden z géniů 16. a 17. století Galileo Galilei (1564–1642). Ten si vypsal dvě posloupnosti čísel:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \qquad \text{a} \qquad 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots \ ,$$

tzn. přirozená čísla a jejich druhé mocniny. Avšak při pohledu na tyto dvě posloupnosti si Galileo uvědomil, že každý prvek množiny přirozených čísel lze „spárovat" s jeho druhou mocninou (v dnešní terminologii bychom řekli, že existuje *bijekce*; na tu se blíže podíváme v kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu s bijekcí.)).

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1, & 4, & 9, & \ldots, & n^2, & \ldots \end{array}$$

To by však znamenalo, že přirozených čísel a jejich druhých mocnin je **stejně mnoho**! Avšak jeden z Eukleidových logických axiomů říká, že *celek je větší část*. Proto se tehdy Galileovi zdál tento závěr jako naprostý nesmysl a tak usoudil, že porovnávat nekonečné množiny podle velikosti zkrátka nemá žádný smysl. Jinak řečeno, tvrdil, že **aktuální nekonečno** je sporné a tedy nemůže existovat. [1]

1.1.2 Grandiho řada

Dalším typickým problémem týkající se nekonečna je tzv. *Grandiho řada*. Čtenář se nejspíše již řadami setkal na střední škole, specificky s řadou aritmetickou a geometrickou. Řadou v matematice rozumíme symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \ ,$$

kde pro všechna přirozená i byl a_i člen nějaké posloupnosti. U řad nás celkem pochopitelně zajímal jejich součet. To nebyl většinou problém, neboť jsme se převážně zajímali o řady konečné (a speciálně pro aritmetickou a geometrickou posloupnost jsme měli i elegantní vzorce), ale uvážíme-li řady nekonečné, mohou nastat potíže.

Takového problému si všiml italský matematik Gildo Grandi (1671–1742). Uvažme následující rovnost:

$$0 = 0 + 0 + 0 + \cdots \ .$$

To nejspíše nevypadá nikterak zajímavě. Přeci jen nekonečným sčítáním nul celkem přirozeně nemohu dostat jiný výsledek než opět nulu. Nulu si však můžeme vyjádřit jako $1 - 1$. Aplikací na rovnost výše dostaneme

$$0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \ . \tag{1.1}$$

Podle asociativního zákona pro sčítání můžeme změnit uzávorkování. Změníme jej proto takto

$$0 = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots$$

a nakonec z každé závorky vytkneme znaménko „$-$“

$$0 = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots \ .$$

Tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ &= 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \ . \end{aligned}$$

Aplikací jednoduchých aritmetických pravidel jsme dospěli k závěru, že $0 = 1$. To je samozřejmě nesmysl, ale kde je tedy chyba? (Zde poprosím čtenáře, aby se zkusil zamyslet.)
Grandiho řadou nazýváme součet

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \ ,$$

kterou jsme obdrželi u „rovnosti“ 1.1 (až na uzávorkování). Není těžké si všimnout, že postupným sčítáním jednotlivých členů se budou mezisoučty opakovat

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \ , \\ 0 &= 1 - 1 \ , \\ 1 &= 1 - 1 + 1 \ , \\ 0 &= 1 - 1 + 1 - 1 \ , \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zkusme k této řadě přistoupit ještě jedním způsobem. Uvažujme, že řada má součet, který si označíme S. Pak

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \ .$$

Opět využitím asociativního zákona a vytknutím znaménka „−“ si upravíme řadu na pravé straně takto:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) \,.$$

Čtenář si však již možná všiml, že výraz v závorce na pravé straně je opět námi vyšetřovaná řada se součtem S, tedy z toho vyplývá

$$\begin{aligned} S &= 1 - S \\ S &= \frac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

Toto je však také zarážející výsledek, neboť jak jsme se sami přesvědčili, tak částečné součty pouze oscilují mezi 0 a 1.

Všimněme si, že rovnosti uvedené výše jsme obdrželi pouhou aplikací základních početních pravidel; přesto jsou však sporné. Tyto výsledky později vedly k novým poznatkům v aritmetice a to sice faktu, že asociativita a komutativita definitivně platí pouze u konečných součtů.

1.1.3 Paradox lomené čáry

(TODO: doplnit.)

1.1.4 Nekonečno v matematické analýze

Velká část matematické analýzy je založená na úvahách s *nekonečně malými veličinami*; často se mluví o tzv. *infinitezimálním počtu*. Čtenář se s těmito pojmy již možná setkal, ačkoliv nemusí mít nutně představu o jeho přesném významu. Asi nejznámějším příkladem je integrální počet, specificky výpočet „plochy pod křivkou“.

Obrázek 1.1 výše a obrázky jemu podobné se často uvádí ve spojitosti s tzv. *určitým integrálem*. Zde bychom mohli psát

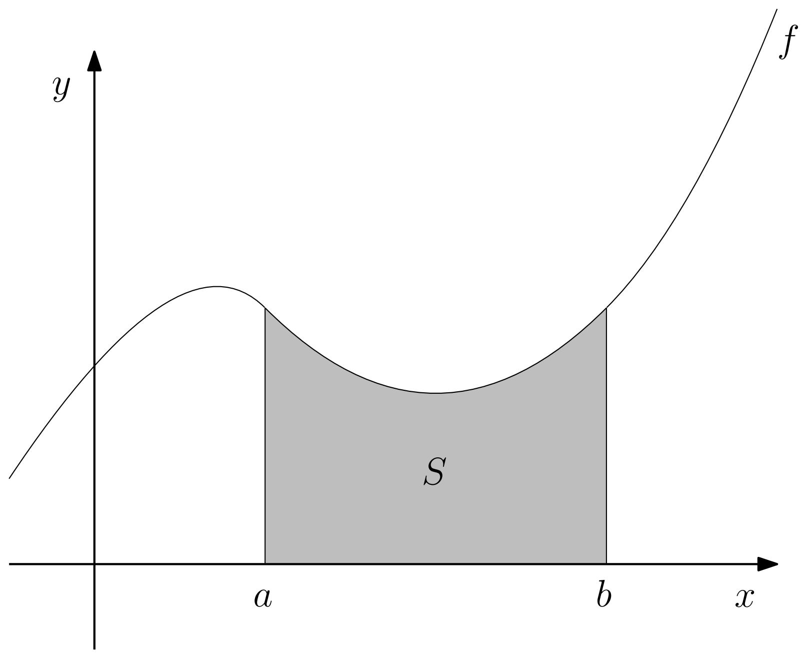
$$S = \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

Výpočet takové složitě vypadající plochy, jako na obrázku 1.1, se může zdát bez znalosti integrálního počtu takřka nemožným úkolem. Pokusme se ale na danou problematiku podívat právě optikou infinitezimálního počtu. (Znalý čtenář snad promine, že se zatím zdržím formalismů a pouze jednoduše naznačím myšlenku.)

Pro začátek zkusíme plochu pouze aproximovat. K tomu využijeme tvaru, jehož obsah jsme schopni triviálně vypočítat – obdélník. Pro začátek zkusíme plochu aproximovat pomocí 4 obdélníků (viz obrázek 1.2). Všechny 4 obdélníky jsme zvolili tak, aby měly stejnou šířku a jejich výška odpovídala minimální hodnotě v daném dílčím intervalu. Obecně obsah i-tého obdélníku S_i bychom zapsali jako

$$S_i = (x_i - x_{i-1}) \cdot \min_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \,,$$

kde $\min_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$ je minimální hodnota funkce f na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ (předpokládáme pro jednoduchost, že f je spojitá, tzn. nabývá svého minima na každém



Obrázek 1.1: Příklad určitého integrálu funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$.

z daných intervalů). Rozdíl $x_i - x_{i-1}$ odpovídá šířce obdélníku a $\min\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ jeho výšce.

Pokud bychom si však interval $\langle a, b \rangle$ rozdělili ještě „jemněji", není těžké vidět, že se náš odhad zpřesní (viz obrázek 1.3). Volbou stále „jemnějšího" dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ se náš odhad bude zpřesňovat. Budeme-li mít tedy plochu aproximovanou n obdélníky, pak[1]

$$S \approx (x_1 - x_0) \cdot \min_{x_0 \leq x \leq x_1} f(x) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \cdot \min_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} f(x) \; . \tag{1.2}$$

Pro rostoucí n, tedy počet dílčích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, se bude rozdíl $x_i - x_{i-1}$ blížit nule (obdélníky se budou „zužovat"). V konečném důsledku bude rozdíl $x_i - x_{i-1}$ „nekonečně malý" a součet uvedený výše u aproximace v obrázku 1.2 přejde v integrál

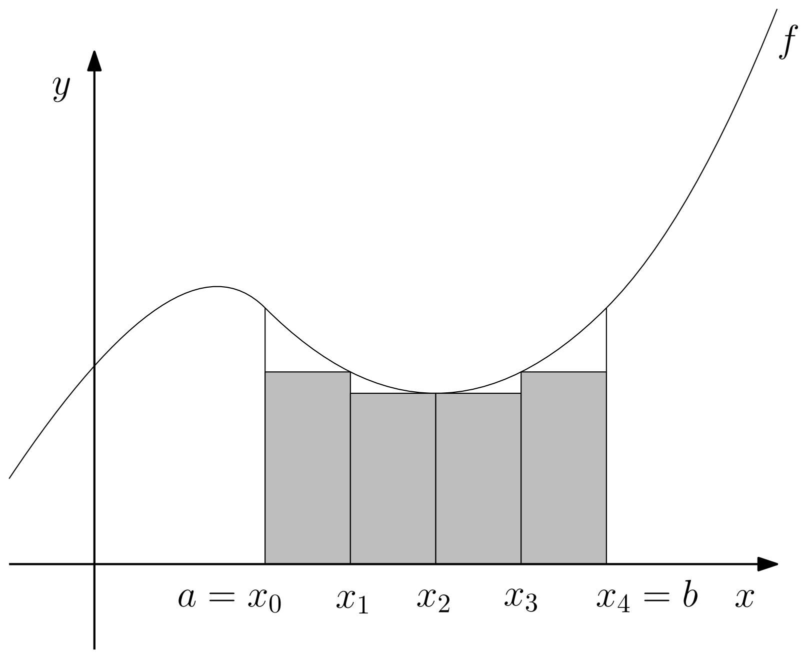
$$S = \int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x \; ,$$

kde rozdíl $x_i - x_{i-1}$ přešel v diferenciál $\mathrm{d}x$ a minimum $\min\limits_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} f(x)$ přešlo přímo ve funkční hodnotu $f(x)$.

V matematice značíme součty pomocí řeckého symbolu Σ (písmeno *sigma*). (Podrobněji toto značení zavedeme v kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu.) v sekci (TODO: doplnit odkaz na sekci.).) Proto se čtenář může často setkat v jiných publikacích se zápisem

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \; .$$

[1] Symbolem $\approx$ značíme přibližnou rovnost (ve starších textech lze najít i symbol $\doteq$).



Obrázek 1.2: Aproximace plochy pod grafem funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ pomocí 4 obdélníků.

Prohodíme-li činitele v součinu, pak už je o něco jednodušeji vidět přechod v integrál, který jsme popsali výše

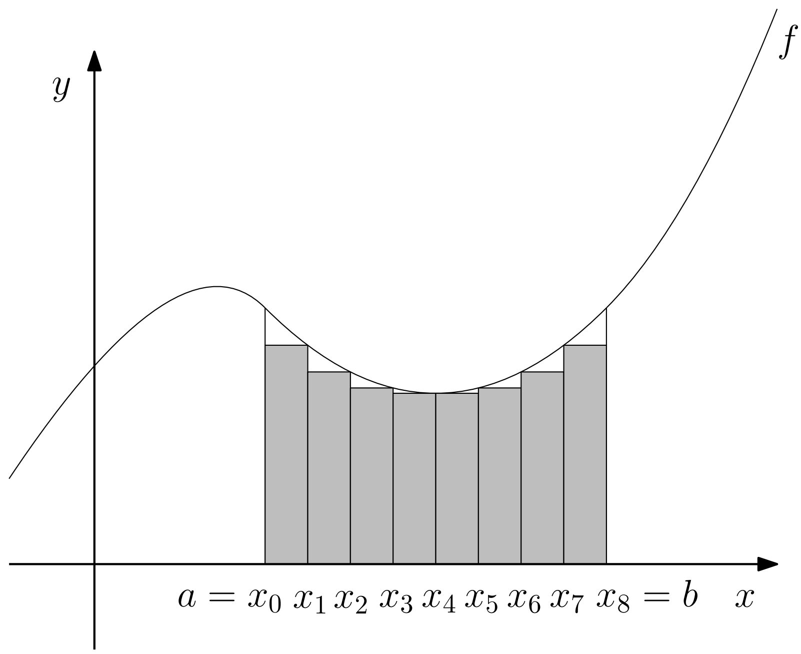
$$\sum_{i=0}^{n} \overbrace{\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)}^{\to f(x)} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\to \mathrm{d}x} \longrightarrow \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Toto je velmi zjednodušené vysvětlení určitého integrálu, avšak hlavní myšlenkou bylo právě ono „nekonečné dělení“, které bylo jednou z příkladů **nekonečně malých veličin**.

Na podobných úvahách jsou založeny různé další pojmy v matematické analýze, jako například derivace nebo i *limita*. Je však nutno si uvědomit, že co je nám známo dnes, nebylo zcela známo matematikům v 17. století. V této době se začal *integrální* a *diferenciální* počet pořádně rozvíjet. Jejich tvůrci Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a Isaac Newton (1642–1726/27) základy své tehdejší úvahy o infinitezimálním počtu postavili právě na nekonečně malých veličinách. Problémem tehdy však bylo, že tento pojem nebyl pořádně definován a pravidla pro počítání s nekonečně malými veličinami byla definována pouze velmi vágně. I přesto se však integrální a diferenciální počet ukázal být velmi mocným nástrojem (hlavně ve fyzice). Postupně se ale začaly nejasnosti v jejich samotných základech vyhrocovat, což nakonec vyústilo v období, které dnes nazýváme *druhou krizí matematiky*[2].

Problémy v matematické analýze se začaly odstraňovat až na počátku 19. století, kdy významnou roli sehrál ve dvacátých letech Augustin Louis Cauchy zavedením limity. Její formální definici však podal později Karl Theodor

[2]První krize matematiky nastala v dobách antického Řecka a souvisela s objevem iracionálních čísel (TODO: případně doplnit do přílohy.).



Obrázek 1.3: Aproximace plochy pod grafem funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ pomocí 8 obdélníků.

Wilhelm Weierstrass. [1]

1.2 Počátky teorie množin a současnost

Matematika se přibližně až do poloviny 19. století točila okolo **potenciálního nekonečna**. Myšlenka pohlížet na množiny jako na nekonečné byla silně odmítána, neboť na nekonečno **aktuální** se v té době pohlíželo jako na koncept nedostupný lidskému myšlení. Ačkoliv v matematické analýze již existovaly metody k odstranění problémů s „nekonečně malými“ veličinami, přesto se v matematické literatuře nacházely spousty postupů s nekonečnem, které často vedly k nesprávným výsledkům.

1.2.1 Bernard Bolzano

Problémů s nekonečnem a s jeho vnímáním si všiml i český matematik, filozof a kněz Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano[3] (1781–1848). Byl jedním z matematiků, kteří prosazovali existenci aktuálního nekonečna, o čemž později píše i ve svém díle *Paradoxy nekonečna*[4] (v německém originále *Paradoxien des Unendlichen*). Bolzanovo dílo však není až tak úplně dílem ryze matematickým, jako spíše matematicko-filozofickým. Kromě nekonečna je zde věnována pozornost i fyzice a jejímu náhledu na svět.

[3] Ačkoliv byl B. Bolzano původem z Česka, publikoval své práce v němčině a latině.

[4] Dílo vyšlo až 3 roky po Bolzanově smrti, tj. v roce 1851, kdy se jeho publikace ujal Bolzanův žák František Příhonský. Českého překladu se však dílo dočkalo až roku 1963 v překladu Otakara Zicha (viz seznam použité literatury).

Ve svém díle se Bolzano snaží (mimo jiné) ukázat, proč je zapotřebí pracovat v matematice s aktuálním nekonečnem a také se zaměřuje na některé chyby, kterých s vědci dopouštějí při úvahách o nekonečnu. Je nutné však dodat, že ačkoliv svými úvahami byl Bolzano svými úvahami blízko úvahám, s nimiž dneska v teorii množin pracujeme, přesto se v některých záležitostech pletl. Např. dospěl k závěru, že pokud je jedna množina obsažena v druhé (tzn. je její podmnožinou), pak musí být jedna menší a druhá větší nebo pokud existuje „párování" mezi prvky dvou množin (viz podsekce 1.1.1 o Galileově úvaze o velikosti), neznamená to nutně, že mají stejnou velikost, což dnes již víme, že není pravda (blíže nahlédneme v sekci (TODO: doplnit odkaz na sekci.)). To však nic nemění na faktu, že Padadoxy nekonečna jsou pozoruhodným dílem, které nám dává skvělý vhled do vědeckého myšlení v Bolzanově době. Pozornost si zaslouží parafráze myšlenky, pomocí které se Bolzano pokusil existenci aktuálního nekonečna zdůvodnit.

Množina pravd o sobě

Představme si, že máme nějaký libovolný **pravdivý** výrok, který si označíme A. O tomto výroku můžeme určitě vyslovit výrok: „A je pravdivé", který si označíme B. Jsou tyto výroky stejné? Z čistě matematického pohledu jsou si tato tvrzení ekvivalentní, co do jejich pravdivostní hodnoty, neboť i kdyby neplatilo A, pak jistě neplatí ani B. Avšak zněním si stejná již tato tvrzení nejsou. Ať už si za výrok A dosadíme jakékoliv tvrzení, je třeba si uvědomit, že subjektem B a samotný výrok A (což pro výrok A samotný již neplatí). Pokud zkonstruujeme další výrok C stejným způsobem, jeho znění bude „Je pravdivé, že je pravdivé A", což je opět odlišný výrok od B. Takto můžeme pokračovat libovolně dlouho. Množina těchto výroků svou velikostí jistě musí převyšovat jakékoliv reálné číslo, tedy je *nekonečné velikosti*.

Bolzano zde však uznává, že tento myšlenkový konstrukt je svou povahou stále záležitostí nekonečna potenciálního. Reagoval tak na námitky tehdejší matematické společnosti, že je nesmysl se bavit o nekonečných množinách, neboť taková množina **nemůže být nikdy sjednocena v celek a být celá obsáhnuta naším myšlením**. Zkusme se na chvilku vrátit ke konečným množinám. Uvážíme-li množinu všech obyvatel Prahy, málokdo z nás nejspíše zná každého z nich. Přesto však hovoříme o každém z nich, když řekneme např. „všichni obyvatelé Prahy". Tuto myšlenku se Bolzano snažil aplikovat i na množiny nekonečné. Uvážíme-li množinu přirozených čísel, také jistě neznáme všechna **přirozená čísla**, ale i přesto nám nedělá problém hovořit o nich jako o celku.

Teologicky zdůvodňoval Bolzano existenci aktuálního nekonečna ve své knize tak, že je-li bůh považován za **vševědoucího**, tedy zná všechny pravdy, pak jistě vidí i ty, které jsme zkonstruovali v prvním odstavci. Množina pravd o sobě je tak podle Bolzana nekonečná, neboť **bůh je všechny vidí**.[2]

1.2.2 Georg Cantor

Bolzano byl vskutku velmi blízko k odhalení a pochopení vlastností nekonečných množin, avšak v jeho práci bylo vidět, že stále nebyl schopen se plně dostat za hranici myšlenky, že „celek je větší než část“. To se ale však podařilo GEORGU CANTOROVI (1845–1918) nebo celým jménem GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR, kterému se podařilo učinit při úvahách s nekonečnými množinami velký myšlenkový posun. Cantor je dodnes považován a zaslouženě uznáván za zakladatele teorie množin, která výrazně ovlivnila soudobou matematiku. Svou prací navázal na Bolzanovy Paradoxy nekonečna, neboť též zastával názor existence aktuálního nekonečna. Konkrétně se zabýval otázkou, zdali je mohutnější množina přirozených čísel nebo reálných. (Všimněte si, že oproti otázce v úvodu této kapitoly zde již používáme termín *mohutnost*. Blíže nahlédneme v kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu.) v sekci (TODO: doplnit odkaz na sekci.)) Jakkoliv se nám stále tato otázka může zdát absurdní, došel Cantor k překvapivému závěru, a to sice, že **množina reálných čísel je mohutnější než množina přirozených čísel**. Tyto výsledky Cantora dovedly postupně k samotnému zadefinování pojmu mohutnosti množiny a také vybudování teorie tzv. *kardinálních* a *ordinálních* čísel.

Cantor tehdy považoval za množinu libovolný souhrn objektů, kdy o každém prvku lze (v principu) rozhodnout, zdali dané množině náleží, či nikoliv. Tedy při výstavbě své teorie vnímal Cantor pojem množiny velmi intuitivně. Dnes tuto teorii proto označujeme jako *naivní teorii množin*.

Cantorova teorie byla ve své době neuznávána a velmi znevažována, což mu velmi ztížilo činnost publikování. Práce byla hodně kritizována za to, jak Cantor zachází s aktuálně nekonečnými množinami. Vrcholem Cantorovy teorie však bylo, když se zjistilo, jak silné dopady má ono intuitivní chápání pojmu množina.

Russelův paradox

V roce 1902 objevil BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872–1970) problém v samotném Cantorově zavedení pojmu množina. Cantor považoval za množinu jakýkoliv souhrn objektů, kde o každém prvku je možné (alespoň v principu) rozhodnout, zdali je či není jejím prvkem. S tímto chápáním množiny jsme většinou pracovali na střední škole, neboť nám nejspíše znělo poměrně rozumně, ale Russell si v tomto pojetí množiny všiml problému.

Uvažujme, že je dána množina S, která obsahuje všechny množiny, takové, že dané množiny neobsahují samy sebe. Symbolicky bychom množinu S zapsali

$$S = \{X \mid X \notin X\} \ .$$

Množina S je dobře definovaná v Cantorově pojetí (jedná se o souhrn objektů). Pokud bychom si vzali např. množiny

$$A = \{X,Y,Z,A\} \quad \text{a} \quad B = \{X,Y,W\} \ ,$$

kde X,Y,Z,W jsou libovolně zvolené prvky, pak podle definice S platí, že $A \notin S$ a $B \in S$. Podle takto zvolené definice S, patří do ní sama množina S?

Postupujme podle dané logiky. Pokud množina S neobsahuje sebe sama, pak by ale podle své definice sama sebe obsahovat měla. A naopak pokud množina sama sebe obsahuje, pak je to spor s její definicí a sama sebe by obsahovat neměla. Tím jsme však v obou případech došli ke sporu, neboť z tohoto plyne závěr, že množina S je sama sobě prvkem právě tehdy, když není sama sobě prvkem. Symbolicky

$$S \in S \iff S \notin S \ .$$

Tento paradox se uvádí v mnoha analogiích. Asi nejtypičtější a nejčastěji uváděný je tzv. *paradox holiče*.

„Holič holí všechny lidi, kteří se neholí sami. Podle uvedeného pravidla, holí holič sám sebe?"

I zde bychom došli ke sporu stejným způsobem. Pokud by se holič holil, pak by se podle pravidla holit neměl a pokud by se neholil, pak by se holit naopak holit měl. Zkuste si sami rozmyslet souvislost s originálním zněním Russelova paradoxu.

V teorii množin se postupně začalo objevovat více paradoxů[5] správných a nesrovnalostí. Překvapivě některé z nich byly objeveny již před samotným Russellovým paradoxem. Za jedny z nejdůležitějších lze považovat ještě

- *Bufali-Fortiův paradox* - objeven roku 1897 Cesarem Burali-Fortim (1861–1931),
- *Cantorův paradox* - objeven roku 1899.

K vysvětlení těchto paradoxů však zatím nemáme vyvinutý dostatečný matematický aparát, nicméně ještě se k nim později vrátíme pro doplnění (TODO: dopsat např. do přílohy.).

1.2.3 Teorie množin v současnosti

Cantorova tehdejší naivní teorie množin začala být nakonec ke konci 19. století uznávána. Začalo se ukazovat, že teorie množin je skutečně mocným nástrojem k vybudování samotných základů matematiky. Chvíli se zdálo, že matematici mají dostupný skutečně pevný základ pro výstavbu dalších teorií. Avšak postupné objevování antinomií v teorii množin je však vyvedlo z jejich mylného zdání a bylo jasné, že pro spolehlivé vybudování základů bude třeba daleko více práce. Toto období proto nazýváme *3. krizí matematiky*.

Jak se ukázalo, tak dosavadní způsob budování matematiky byl neudržitelný a tak se matematici snažili přijít s řešením. Ta se však svou povahou velmi lišila podle matematického a filozofického uvažování každého z nich. Hrubě bychom mohli tehdy rozlišit dva myšlenkové proudy: *intuicionismus* a *formalismus*.

Intuicionismus byl svým přístupem velmi omezený, neboť v jeho duchu bylo možné pracovat pouze s omezenou částí matematiky, která byla „přípustná". Aktuální nekonečno s existenčními důkazy jsou odmítány. Uznávány jsou pouze objekty, které lze přímo zkonstruovat (tzv. *konstruktivní důkazy*). Proto byl tehdy např. kritizován Cantorův důkaz existence tzv. *transcendentních čísel* (blíže v kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu.) v sekci (TODO: doplnit odkaz na sekci.)). Ačkoliv jsme si zatím nevysvětlili tento pojem, tak zajímavostí jeho důkazu byl fakt, že při tehdejším dokázání jejich existence neuvedl příklad ani jednoho nich.

Formalismus naopak dále pracoval s aktuálními znalostmi. Matematici se snažili vybudovat matematiku na množinách tak, jak zamýšlel Cantor, avšak byl

[5] Přesnějším termínem je *antinomie*, tj. sporné tvrzení vyvozené z korektně vyvozený závěrů.

kladen silný důraz na eliminování dosavadně známých antinomií. Objevují se dva rozdílné přístupy, přičemž prvním z nich byla tzv. *teorie typů* a *axiomatická výstavba*.

Protože axiomatická výstavba pro nás jako koncept bude dále podstatným stavebním kamenem, zaměříme se právě na ni. Axiomatická výstavba je dnes asi nejrozšířenějším způsobem budování různých teorií. Ať už budujeme jakoukoliv teorii, v principu není možné definovat všechny pojmy a dokázat všechna možná tvrzení. Dříve nebo později bychom došli k závěru, že abychom mohli dojít k různým tvrzením, je třeba zavést nějaké „primitivní pojmy“, na nichž budeme stavět další definice, a tzv. *axiómy* neboli tvrzení, která implicitně považujeme za pravdivá a nedokazujeme jejich platnost. Ve skutečnosti však axiomatika nebyla nikterak novou záležitostí; byla známa již od starověku.

Jedním z nejstarších děl jsou v tomto ohledu Eukleidovy *Základy*. Eukleidovi se podařilo tehdejší rovinou geometrii (dnes nazývanou *eukleidovskou geometrií*) vybudovat na celkem pěti základních postulátech. Čtenář si nejspíše všiml, že jsme použili termín postulát (též „předpoklad“ či „prvotný úkol“), nikoliv axióm, avšak není mezi nimi významný rozdíl. Většinou se tyto termíny uvádí vzhledem k historickému kontextu. Uveďme si zde pro představu několik Eukleidových základních pojmů (citováno z českého překladu Základů z roku 1907 od Františka Servíta [3]):

- Bod jest, co nemá dílu.
- Čára pak délka bez šířky.
- Plocha jest, co jen délku a šířku má.
- Hranicemi plochy jsou čáry.
- Tupý jest úhel pravého větší.

Eukleidovy postuláty:

(i) Budiž úkolem od kteréhokoliv bodu ke kterémukoliv bodu vésti přímku.

(ii) A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.

(iii) A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.

(iv) A že všecky pravé úhly sobě rovny jsou.

(v) A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže (přilehlé) straně úhly menších dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na straně, kde jsou úhly menších dvou pravých.

Toto je první historicky známé dílo, kde byla teorie takto deduktivně budována. Dnešním axiomatickým systémům je však celkem pochopitelně vzdálená, neboť tehdy byly základní pojmy a axiomy, resp. postuláty, psány hovorovou řečí a odvozování tvrzení na jejich základě probíhalo intuitivně. Dnešní axiomatika je v těchto směrech formálnější, neboť se využívá formálního jazyka a též jsou dána přesná odvozovací pravidla. Co však matematiky tehdy zajímalo na axiomatický budovaných systémech byla jejich:

- *nezávislost* (tzn. zdali žádný z axiómů nelze odvodit ze zbylých axiómů; takové tvrzení pak již není axióm, nýbrž věta);
- *úplnost* (tzn. zdali je dána taková soustava axiómů, abychom každé tvrzení mohli dokázat nebo dokázat jeho negaci);
- *bezespornost* (tzn. zdali není možné z daných axiómů odvodit tvrzení a současně jeho negaci).

Čtenáře možná napadne, že pokud jde o nezávislost, jedná se v podstatě jen o „vadu na kráse“, neboť pokud nějaký axióm lze v teorii odvodit z ostatních, pak jej stačí odstranit. Není-li systém úplný, je to již poměrně nepříjemné, neboť by to znamenalo, že v teorii existují tvrzení, která nelze dokázat, ani vyvrátit. Nejhorší je však pochopitelně, pokud je teorie sporná.

První úspěšnou axiomaticky vybudovanou teorii množin vybudoval v letech 1904–1908 německý matematik Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953), které se v tomto textu budeme dále věnovat. Základní Zermelovou myšlenkou při budování jeho teorie bylo, že ne každý souhrn objektů je možné považovat za množinu (blíže si jednotlivé axiómy vysvětlíme v kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu.)). Zermelovu teorii později upravil izraelský matematik Adolf Abraham ha-Levi Fraenkel (1891–1965), čímž vznikla tzv. *Zermelova-Fraenkelova teorie množin*. Dodnes se jedná o nejrozšířenější variantu.

Později vyšla i tzv. *Gödel-Bernaysova teorie množin*, jíž dal základ švýcarský matematik Issak Paul Bernays (1888–1977) v letech 1937–1954 a český matematik Kurt Friedrich Gödel (1906–1978) v reakci na omezení, která se objevovala v Zermelově-Fraenkelově teorii množin.

Bohužel se nikdy nikomu nepodařilo dokázat, zdali jsou budované axiomatické teorie bezesporné a úplné (což se pro srovnání podařilo např. u zmíněné eukleidovské geometrie). Jak ukázal Kurt Gödel (viz tzv. *Gödelovy věty o neúplnosti*), tak ve skutečnosti takovou teorii není ani možné sestrojit, neboť v libovolném axiomatickém systému teorie množin budou vždy existovat tvrzení, která nelze dokázat a ani nelze dokázat jejich negaci, což tehdy odhalilo výraznou omezenost axiomatických metod.

Seznam použité literatury

[1] Eduard Fuchs. *Teorie množin pro učitele.* Masarykova univerzita, Brno, 2003.

[2] Bernard Bolzano. *Paradoxy nekonečna.* Československá akademie věd, Praha, 1963.

[3] Eukleidés. *Základy.* Jednota českých mathematiků a fysiků, Praha, 1907.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

Příloha A

Přílohy

A.1 První příloha