



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

David Weber

Stručný úvod do teorie množin pro středoškoláky

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na
vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na
vzdělávání se sdruženým studiem
informatika se zaměřením na
vzdělávání

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

(TODO: Doplnit poděkování.)

Název práce: Stručný úvod do teorie množin pro středoškoláky

Autor: David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: (TODO: Doplnit abstrakt.)

Klíčová slova: teorie množin kardinál ordinál přirozené číslo nekonečno Georg Cantor Bernard Bolzano

Title: A Brief Introduction to Set Theory for High Schools

Author: David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: (TODO: Doplnit abstrakt (EN).)

Keywords: set theory cardinal number ordinal number natural number infinity Georg Cantor Bernard Bolzano

Obsah

1	Historický úvod k teorii množin	3
1.1	Potenciální versus aktuální nekonečno	3
1.1.1	Galileova úvaha o velikosti	4
1.1.2	Grandiho řada	4
1.1.3	Nekonečno v matematické analýze	7
1.2	Počátky teorie množin a současnost	10
1.2.1	Bernard Bolzano	10
1.2.2	Georg Cantor	11
1.2.3	Teorie množin v současnosti	13
2	Základní pojmy a značení	16
2.1	Výroková logika	16
2.1.1	Logické spojky	16
2.1.2	Výrokové formule	17
2.2	Kvantifikátory a predikátový počet	24
2.2.1	Primitivní predikáty	25
2.2.2	Jiné zápisy formulí s kvantifikátory	26
2.2.3	Negace formulí s kvantifikátory	27
2.3	Množiny a čísla	28
2.3.1	Čísla a sumy	28
2.3.2	Množiny a operace s nimi	30
2.3.3	Ještě k velkým operátorům	33
2.4	Důkazy	34
2.4.1	Důkaz přímý	34
2.4.2	Důkaz nepřímý	38
2.4.3	Důkaz sporem	40
2.4.4	Důkaz matematickou indukcí	42
	Seznam použité literatury	44
	Seznam použitých zkratk	45

A Přílohy	46
A.1 První příloha	46

Kapitola 1

Historický úvod k teorii množin

Čtenář se s pojmem *množina* již jistě setkal. Často se o množině hovoří jako o „celku“, „souboru“ nebo „souhrnu“ obsahujícím jisté prvky. Na střední škole jsme si s tímto chápáním uvedeného pojmu nejspíše vystačili, když jsme se např. učili o Vennových diagramech. To nám poskytovalo poměrně názorný způsob, jak si představit množiny a vztahy mezi nimi. Většinou jsme se dotazovali např. na velikost množiny či zda jí nějaký zvolený prvek náleží či nikoliv. Pojem „náležení“ jsme stejně jako množinu též nejspíše nikterak formálně nedefinovali, přesto ale intuitivně tušíme, co to znamená, když se řekne, že „prvek náleží množině“. Jak byste ale formálně definovali množinu? Nebo co teprve „býti prvkem množiny“?

Zkusme ještě otázku jiného charakteru. Jak by čtenář odpověděl na otázku, jestli je více čísel v intervalu $(0,1)$ nebo všech přirozených čísel? A jak by svou odpověď zdůvodnil? Odpověď **stejně**, neboť jich je nekonečně mnoho zní velmi intuitivně, ale jak se později dozvíme, odpověď na tuto otázku je daleko složitější, než se může zdát.

Důvod proč se najednou místo množin zabýváme *nekonečnem*, je ten, že ve skutečnosti tento termín je hlavní příčinou vzniku teorie množin (nikoliv definice pojmu „množina“, jak by se mohlo zdát). V následujících sekcích se proto podíváme na to, jak se na pojem nekonečna nahlíželo v historii a jaké problémy způsobovalo.

1.1 Potenciální versus aktuální nekonečno

Co je vlastně nekonečno? Čtenáři toho může připadat jako absurdní dotaz, ale tento zdánlivě jasný pojem způsoboval ve své době potíže.

Fakt, že přirozených čísel je nekonečně mnoho byl znám již ve starověku.

$$1, 2, 3, \dots$$

I žáci na základních školách jsou si této skutečnosti vědomi a pravděpodobně se nad tím nikdo z nich nepozastaví. Jak ale toto můžeme chápat? Existují dva základní způsoby.

Pokud začneme postupně vypisovat všechna přirozená čísla, jistě je nikdy nevy-píšeme všechna, protože bez ohledu na to, jakou si zvolíme mez, vždy ji nakonec

přesáhneme. Takovémuto nekonečnému **procesu** pak říkáme *potenciální nekonečno*.

Druhou možností ale je, že se na množinu přirozených čísel budeme dívat již jako na „hotovou“. To znamená, že nebudeme řešit, jak všechna přirozená čísla vypíšeme, ale budeme na tuto množinu nahlížet již jako na **celek**, tedy nekonečno budeme chápat v uzavřené formě. V takovém případě mluvíme o tzv. *aktuálním nekonečnu*.

Starým Řekům se však jak z důvodů matematických, tak filozofických, zdálo, že lidskému myšlení je přístupné pouze nekonečno **potenciální**. O tom se lze přesvědčit už ze samotných *Eukleidových axiomů*. K axiomatice čtenář bude mít možnost blíže nahlédnout v kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu.) v sekci (TODO: doplnit odkaz na sekci.). EUKLEIDÉS právě z důvodu nemyslitelnosti aktuálního nekonečna mluvil o *přímce* jako o úsečce, kterou může libovolně prodlužovat, nikoliv, že je „nekonečná“ nebo „nekonečně dlouhá“, jak říkáme dnes.

1.1.1 Galileova úvaha o velikosti

S problémem nekonečna se však pojily i další problémy. Při zrodu samotné teorie množin v 70. letech 19. století se totiž nabízela otázka, zdali *má vůbec smysl porovnávat nekonečné množiny*. Nad tím se pozastavil už jeden z génů 16. a 17. století GALILEO GALILEI (1564–1642). Ten si vypsals dvě posloupnosti čísel:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad \text{a} \quad 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots,$$

tzn. přirozená čísla a jejich druhé mocniny. Avšak při pohledu na tyto dvě posloupnosti si Galileo uvědomil, že každý prvek množiny přirozených čísel lze „spárovat“ s jeho druhou mocninou (v dnešní terminologii bychom řekli, že existuje *bijekce*; na tu se blíže podíváme v kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu s bijekcí.)).

$$\begin{array}{c} 1, 2, 3, \dots, n, \dots \\ \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \\ 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots \end{array}$$

To by však znamenalo, že přirozených čísel a jejich druhých mocnin je **stejně mnoho**! Avšak jeden z Eukleidových logických axiomů říká, že *celek je větší část*. Proto se tehdy Galileovi zdál tento závěr jako naprostý nesmysl a tak usoudil, že porovnávat nekonečné množiny podle velikosti zkrátka nemá žádný smysl. Jinak řečeno, tvrdil, že **aktuální nekonečno** je sporné a tedy nemůže existovat. [1]

1.1.2 Grandiho řada

Dalším typickým problémem týkajícím se nekonečna je tzv. *Grandiho řada*. Čtenář se nejspíše již s řadami setkal na střední škole, specificky s řadou aritmetickou a geometrickou. Řadou v matematice rozumíme zápis

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

kde pro všechna přirozená i je a_i člen nějaké posloupnosti. U řad nás celkem pochopitelně zajímal jejich součet. To nebyl většinou problém, neboť jsme se převážně zajímali o řady konečné (a speciálně pro aritmetickou a geometrickou posloupnost jsme měli i elegantní vzorce), ale uvažíme-li řady nekonečné, mohou nastat potíže.

Co se vůbec rozumí pod pojmem „součet nekonečné řady“? Jako příklad si vezmeme řadu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

tedy sčítáme členy posloupnosti $\{1/2^n\}_{n=1}^\infty$. Podívejme se, jak se situace bude vyvíjet, když budeme členy postupně přičítat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 0,5 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= 0,75 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= 0,875 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &= 0,9375.\end{aligned}$$

Těmto součtům se říká tzv. *částečné součty*. Po součtu prvních dvaceti členů bude výsledek následující:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{20}} = 0,999999046.$$

Jak je vidět, částečné součty se postupně „blíží“ nejspíše číslu 1. Dávalo by tedy smysl prohlásit číslo 1 za výsledek této nekonečné řady, tj.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Tímto způsobem obecně vnímáme součet nekonečné řady: **hodnota, ke které se blíží částečné součty**. (Formální definici součtu nekonečné řady si zde odpustíme.)

Problému s nekonečnými řadami si všiml italský matematik GILDO GRANDI (1671–1742). Uvažme následující rovnost:

$$0 = 0 + 0 + 0 + \cdots.$$

To nejspíše nevypadá nikterak zajímavě. Přeci jen nekonečným sčítáním nul celkem přirozeně nemohu dostat jiný výsledek než opět nulu. Nulu si však můžeme vyjádřit jako $1 - 1$. Aplikací na rovnost výše dostaneme

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots. \quad (1.1)$$

Podle asociativního zákona pro sčítání můžeme změnit uzávorkování. Změníme jej proto takto

$$0 = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$$

a nakonec z každé závorky vytkneme znaménko „–“

$$0 = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots .$$

Tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \\ &= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots \\ &= 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1 . \end{aligned}$$

Aplikací jednoduchých aritmetických pravidel jsme dospěli k závěru, že $0 = 1$. To je samozřejmě nesmysl, ale kde je tedy chyba? (Zde poprosím čtenáře, aby se zkusil zamyslet.)

Grandiho řadou nazýváme zápis

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots ,$$

kterou jsme obdrželi u rovnosti (1.1) (až na uzávorkování). Není těžké si všimnout, že postupným sčítáním jednotlivých členů se budou částečné součty opakovat

$$\begin{aligned} 1 &= 1 , \\ 0 &= 1 - 1 , \\ 1 &= 1 - 1 + 1 , \\ 0 &= 1 - 1 + 1 - 1 , \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zkusme k této řadě přistoupit ještě jedním způsobem. Uvažujme, že řada má součet, který si označíme S . Pak

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots .$$

Opět využitím asociativního zákona a vytknutím znaménka „–“ si upravíme řadu na pravé straně takto:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) .$$

Čtenář si však již možná všiml, že výraz v závorce na pravé straně je opět námi vyšetřovaná řada se součtem S , tedy z toho vyplývá

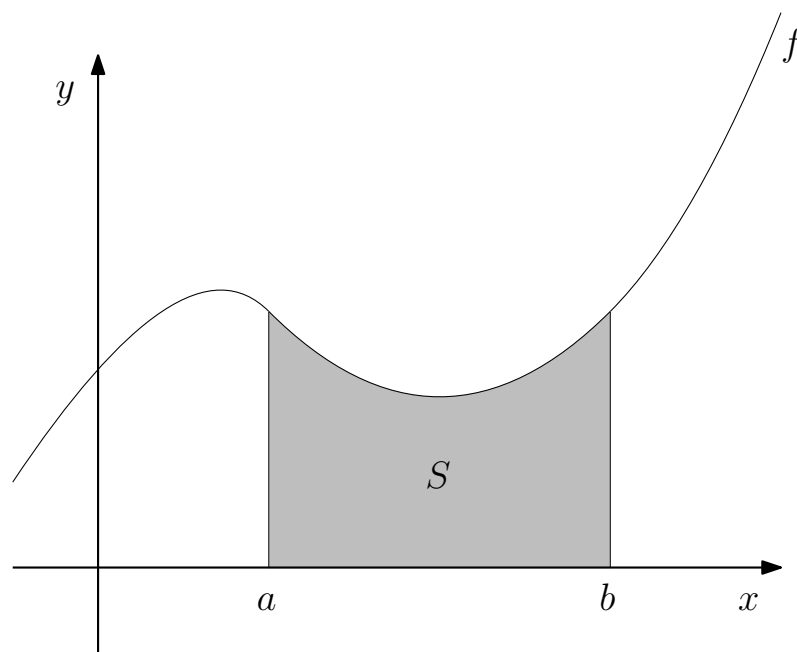
$$\begin{aligned} S &= 1 - S \\ S &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Toto je však také zarážející výsledek, neboť jak jsme se sami přesvědčili, tak částečné součty pouze oscilují mezi 0 a 1.

Všimněme si, že rovnosti uvedené výše jsme obdrželi pouhou aplikací základních početních pravidel; přesto jsou však sporné. Tyto výsledky později vedly k novým poznatkům v aritmetice, a to sice faktu, že asociativita a komutativita definitivně platí pouze u konečných součtů.

1.1.3 Nekonečno v matematické analýze

Velká část matematické analýzy je založená na úvahách s *nekonečně malými veličinami*; často se mluví o tzv. *infinitesimálním počtu*. Čtenář se s těmito pojmy již možná setkal, ačkoliv nemusí mít nutně představu o jeho přesném významu. Asi nejznámějším příkladem je integrální počet, specificky výpočet „plochy pod křivkou“.



Obrázek 1.1: Příklad určitého integrálu funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$.

Obrázek 1.1 a obrázky jemu podobné se často uvádí ve spojitosti s tzv. *určitým integrálem*. Zde bychom mohli psát

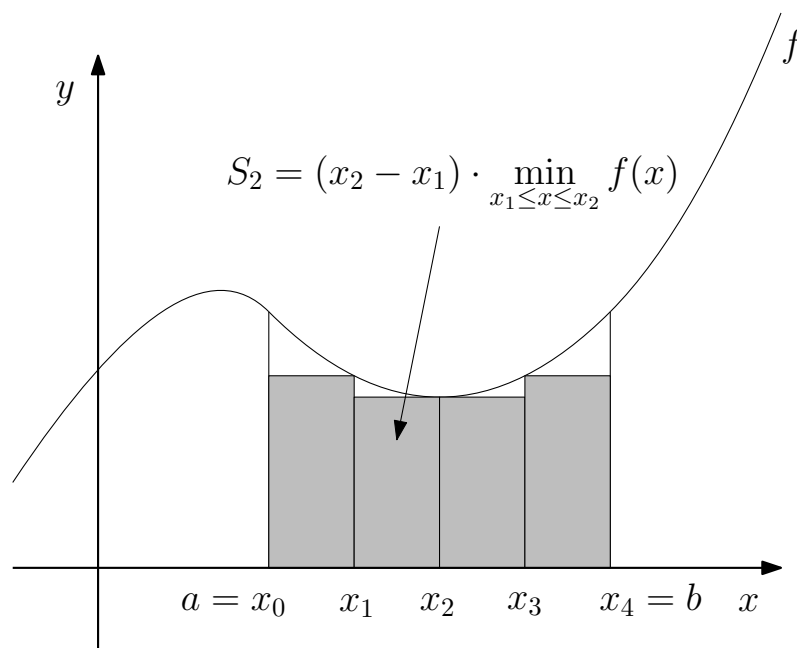
$$S = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Pro upřesnění, pokud platí, že funkce f je na intervalu $\langle a, b \rangle$ kladná, pak integrál $\int_a^b f(x) \, dx$ je obsah plochy pod grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Výpočet obsahu takové složitě vypadající plochy, jako na obrázku 1.1, se může zdát bez znalosti integrálního počtu takřka nemožným úkolem. Pokusme se ale na danou problematiku podívat právě optikou infinitesimálního počtu. (Znalý čtenář snad promine, že se zatím zdržím formalismů a pouze jednoduše naznačím myšlenku.)

Pro začátek zkusíme plochu pouze aproximovat. K tomu využijeme tvar, jehož obsah jsme schopni triviálně vypočítat – obdélníka. Pro začátek zkusíme plochu aproximovat pomocí 4 obdélníků (viz obrázek 1.2). Všechny 4 obdélníky jsme zvolili tak, aby měly stejnou šířku a jejich výška odpovídala minimální hodnotě v daném dílčím intervalu. Obecně obsah i -tého obdélníku S_i bychom zapsali jako

$$S_i = (x_i - x_{i-1}) \cdot \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x),$$

kde $\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ je minimální hodnota funkce f na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ (předpokládáme pro jednoduchost, že f je spojitá, takže nabývá svého minima na kaž-



Obrázek 1.2: Aproximace plochy pod grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ pomocí 4 obdélníků.

dém z daných intervalů). Rozdíl $x_i - x_{i-1}$ odpovídá šířce obdélníku a $\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ jeho výšce.

Pokud bychom si však interval $\langle a, b \rangle$ rozdělili ještě „jemněji“, není těžké vidět, že se náš odhad zpřesní (viz obrázek 1.3). Volbou stále „jemnějšího“ dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ se náš odhad bude zpřesňovat. Budeme-li mít tedy plochu aproximovanou n obdélníky, pak¹

$$S \approx (x_1 - x_0) \cdot \min_{x_0 \leq x \leq x_1} f(x) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot \min_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} f(x). \quad (1.2)$$

Pro rostoucí n , tedy počet dílčích intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, se bude rozdíl $x_i - x_{i-1}$ blížit nule (obdélníky se budou „zužovat“). V konečném důsledku bude rozdíl $x_i - x_{i-1}$ „nekonečně malý“ a součet uvedený výše u aproximace v obrázku 1.2 přejde v integrál

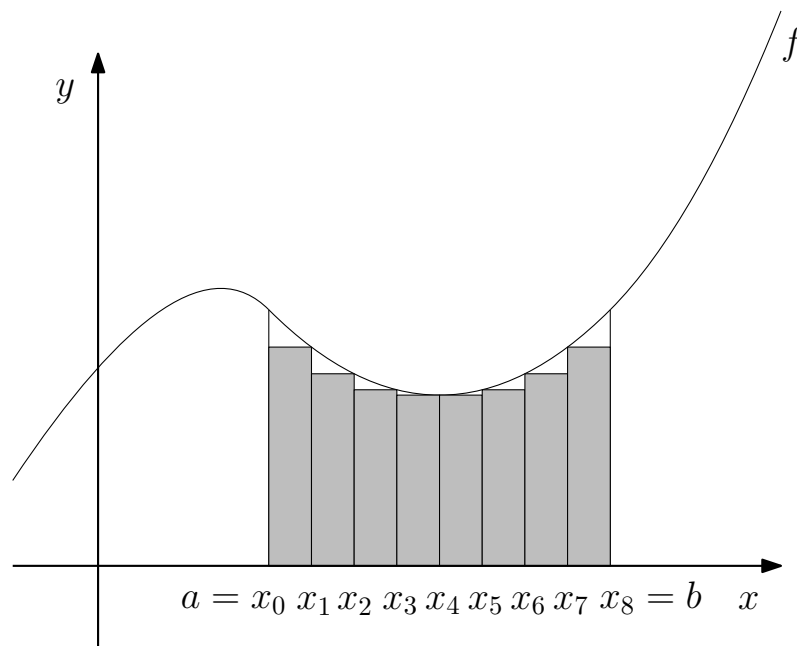
$$S = \int_a^b f(x) \, dx,$$

kde rozdíl $x_i - x_{i-1}$ přešel v diferenciál dx a minimum $\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ přešlo přímo ve funkční hodnotu $f(x)$.

V matematice značíme součty pomocí řeckého symbolu \sum (velké písmeno *sigma*). (Podrobněji toto značení zavedeme v kapitole 2 v sekci 2.3.) Proto se čtenář může často setkat v jiných textech se zápisem

$$S \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

¹Symbolem \approx značíme přibližnou rovnost (ve starších textech lze najít i symbol \doteq).



Obrázek 1.3: Aproximace plochy pod grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ pomocí 8 obdélníků.

Prohodíme-li činitele v součinu, pak už je o něco jednodušeji vidět přechod v integrál, který jsme popsali výše

$$\sum_{i=0}^n \overbrace{\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)}^{\rightarrow f(x)} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\rightarrow dx} \longrightarrow \int_a^b f(x) dx .$$

Toto je velmi zjednodušené vysvětlení určitého integrálu, avšak hlavní myšlenkou bylo právě ono potenciálně „nekonečné dělení“, které bylo jedním z příkladů využití **nekonečně malých veličin**. (Zde konkrétně roli nekonečně malé veličiny zastávala postupně zmenšující se šířka obdélníků kvůli „zjemňování“ dělení.)

Na podobných úvahách jsou založeny různé další pojmy v matematické analýze, jako např. *limita* nebo i *derivace*. Je však nutno si uvědomit, že co je nám známo dnes, nebylo zcela známo matematikům v 17. století. V této době se začal *integrální* a *diferenciální* počet pořádně rozvíjet. Jejich tvůrci GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) a ISAAC NEWTON (1642–1726/27) základy své tehdejší úvahy o infinitezimálním počtu postavili právě na nekonečně malých veličinách. Problémem tehdy však bylo, že tento pojem nebyl pořádně definován a pravidla pro počítání s (aktuálně) nekonečně malými veličinami byla definována pouze velmi vágně. I přesto se však integrální a diferenciální počet ukázal být opravdu mocným nástrojem (hlavně ve fyzice). Postupně se ale začaly nejasnosti v jejich samotných základech vyhrcovat, což nakonec vyústilo v období, které dnes nazýváme *druhou krizí matematiky*².

Problémy v matematické analýze se začaly odstraňovat až na počátku 19. století, kdy významnou roli sehrál ve dvacátých letech AUGUSTIN LOUIS CAU-

²První krize matematiky nastala v dobách antického Řecka a souvisela s objevem iracionálních čísel (TODO: případně doplnit do přílohy.).

CHY zavedením limity. Její formální definici však podal později KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS, která pracovala opět s potenciálním nekonečnem. [1]

1.2 Počátky teorie množin a současnost

V matematice se přibližně až do poloviny 19. století uvažovalo pouze **potenciální nekonečno**. Myšlenka pohlížet na množiny jako na nekonečné byla silně odmítána, neboť na nekonečno **aktuální** se v té době pohlíželo jako na koncept nedostupný lidskému myšlení. Ačkoliv v matematické analýze již existovaly metody k odstranění problémů s „nekonečně malými“ veličinami, přesto se v matematické literatuře nacházely spousty postupů s nekonečnem, které často vedly k nesprávným výsledkům.

1.2.1 Bernard Bolzano

Problémů s nekonečnem a s jeho vnímáním si všiml i český matematik, filozof a kněz BERNARD PLACIDUS JOHANN NEPOMUK BOLZANO³ (1781–1848). Byl jedním z matematiků, kteří prosazovali existenci aktuálního nekonečna, o čemž později píše i ve svém díle *Paradoxy nekonečna*⁴ (v německém originále *Paradoxien des Unendlichen*). Bolzanovo dílo však není až tak úplně dílem ryze matematickým, jako spíše matematicko-filozofickým. Kromě nekonečna je zde věnována pozornost i fyzice a jejímu náhledu na svět.

Ve svém díle se Bolzano snaží (mimo jiné) ukázat, proč je zapotřebí pracovat v matematice s aktuálním nekonečnem a také se zaměřuje na některé chyby, kterých se vědci dopouštějí při úvahách o nekonečnu. Je nutné však dodat, že ačkoliv svými úvahami byl Bolzano blízko úvahám, s nimiž dneska v teorii množin pracujeme, přesto se v některých záležitostech došel k jiným výsledkům. Např. dospěl k závěru, že pokud je jedna množina obsažena v druhé (tzn. je její podmnožinou), pak musí jedna mít menší mohutnost než druhá nebo pokud existuje „párování“ mezi prvky dvou množin (viz podsekcce 1.1.1 o Galileově úvaze o veličnosti), neznamená to nutně, že mají stejnou mohutnost (blíže nahlédneme v sekci **(TODO: doplnit odkaz na sekci.)**). To však nic nemění na faktu, že Paradoxy nekonečna jsou pozoruhodným dílem, které nám dává skvělý vhled do vědeckého myšlení v Bolzanově době. Pozornost si zaslouží parafráze myšlenky, pomocí které se Bolzano pokusil existenci aktuálního nekonečna zdůvodnit.

Množina pravd o sobě

Představme si, že máme nějaký libovolný **pravdivý** výrok, který si označíme *A*. O tomto výroku můžeme určitě vyslovit výrok: „*A* je pravdivé“, který si označíme *B*. Jsou tyto výroky stejné? Z čistě matematického pohledu jsou si tato tvrzení ekvivalentní, co do jejich pravdivostní hodnoty, neboť i kdyby neplatilo

³Ačkoliv byl B. Bolzano čech, publikoval své práce v němčině a latině.

⁴Dílo vyšlo až 3 roky po Bolzanově smrti, tj. v roce 1851, kdy se jeho publikace ujal Bolzanův žák FRANTIŠEK PŘÍHONSKÝ. Českého překladu se však dílo dočkalo až roku 1963 od OTAKARA ZIČHA (viz seznam použité literatury).

A , pak jistě neplatí ani B . Avšak zněním si stejná již tato tvrzení nejsou. Ať už si za výrok A dosadíme jakékoliv tvrzení, je třeba si uvědomit, že subjektem B je samotný výrok A (což pro výrok A samotný již neplatí). Pokud zkonstruuujeme další výrok C stejným způsobem, jeho znění bude „Je pravdivé, že je pravdivé A “, což je opět odlišný výrok od B . Takto můžeme pokračovat libovolně dlouho. Množina těchto výroků by svou velikostí jistě musela převyšovat jakékoliv přirozené číslo, tedy je *nekonečné velikosti*.

Bolzano zde však uznává, že tento myšlenkový konstrukt je svou povahou stále záležitostí nekonečna potenciálního. Reagoval tak na námitky tehdejší matematické společnosti, že je nesmysl se bavit o nekonečných množinách, neboť taková množina **nemůže být nikdy sjednocena v celek a být celá obsáhnuta naším myšlením**. Zkusme se na chvíli vrátit ke konečným množinám. Uvážíme-li množinu všech obyvatel Prahy, málokdo z nás nejspíše zná každého z nich. Přesto však hovoříme o každém z nich, když řekneme např. „všichni obyvatelé Prahy“. Tedy ani tato (konečná) množina nemůže být celá obsáhnuta naší myšlením. Tuto myšlenku se Bolzano snažil aplikovat i na množiny nekonečné. Uvážíme-li množinu přirozených čísel, také jistě neznáme všechna **přirozená čísla**, ale i přesto nám nedělá problém hovořit o nich jako o celku.

Teologicky zdůvodňoval Bolzano existenci aktuálního nekonečna ve své knize tak, že je-li Bůh považován za **vševědoucího**, tedy zná všechny pravdy, pak jistě vidí i ty, které jsme zkonstruovali v prvním odstavci. Množina pravd o sobě je tak podle Bolzana nekonečná, neboť **Bůh je všechny zná**.^[2]

1.2.2 Georg Cantor

Bolzano byl vskutku velmi blízko k odhalení a pochopení vlastností nekonečných množin, avšak v jeho práci bylo vidět, že stále nebyl schopen se plně dostat za hranici myšlenky, že „celek je větší než část“. To se podařilo až GEORGU CANTOROVÍ⁵ (1845–1918), kterému se podařilo učinit při úvahách s nekonečnými množinami velký myšlenkový posun. Cantor je dodnes považován a zaslouženě uznáván za zakladatele teorie množin, která výrazně ovlivnila soudobou matematiku. Svou prací navázal na Bolzanovy Paradoxy nekonečna, neboť též zastával názor existence aktuálního nekonečna. Konkrétně se dostal k otázce, zdali je mohutnější množina přirozených čísel nebo reálných. (Všimněte si, že oproti otázce v úvodu této kapitoly zde již používáme termín *mohutnost*. Blíže nahlédneme v kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu.) v sekci (TODO: doplnit odkaz na sekci.)) Cantor došel k překvapivému závěru, a to sice, že **množina reálných čísel je mohutnější než množina přirozených čísel**. Tyto výsledky Cantora dovedly postupně k definici pojmu mohutnosti množiny a také vybudování teorie tzv. *kardinálních* a *ordinálních* čísel.

Cantor tehdy považoval za množinu libovolný souhrn objektů, kdy o každém prvku lze (v principu) rozhodnout, zdali dané množině náleží, či nikoliv. Tedy při výstavbě své teorie vnímal Cantor pojem množiny velmi intuitivně. Dnes tuto teorii označujeme jako *naivní teorii množin*. Důvod tohoto názvu je v objevených paradoxech.

⁵Celým jménem se jmenoval GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR.

Cantorova teorie byla ve své době mnohými neuznávána a velmi znevažována, což mu velmi ztížilo činnost publikování. Práce byla hodně kritizována za to, jak Cantor zachází s aktuálně nekonečnými množinami. Problém s Cantorovou teorií však nastal tehdy, když se zjistilo, jak silné dopady má ono intuitivní chápání pojmu množina.

Russellův paradox

V roce 1902 přemýšlel BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872–1970) o samotném Cantorově zavedení pojmu množina. Cantor považoval za množinu jakýkoliv souhrn objektů, kde o každém prvku je možné (alespoň v principu) rozhodnout, zdali je či není jejím prvkem. S tímto chápáním množiny jsme většinou pracovali na střední škole, neboť nám nejspíše znělo poměrně rozumně, ale Russell si v tomto pojetí množiny všiml problému.

Uvažujme, že je dána množina S , která obsahuje všechny množiny takové, že nejsou samy sobě prvkem.

Jak si takovou množinu vůbec představit? Co to znamená, že je množina sama sobě prvkem? Zkusme se nejdříve podívat na několik příkladů.

- Uvažujme množinu všech obyvatel Prahy. Je taková množina sama obyvatelem Prahy? Nejspíše není, taková množina tedy **není prvkem sebe sama**.
- Mějme množinu všech možných ideí. Je taková množina sama ideou? Ale jistě, že je. Taková množina tedy naopak **je sama sobě prvkem**.
- Je množina všech států sama sobě prvkem? (Tj. je sama státem?) **Ne**, není.
- Množina všech objektů popsatelných méně než deseti slovy **je sama sobě prvkem**. (Popsali jsme ji pomocí osmi slov.)

Takové množiny jsou tedy skutečně představitelné a má smysl se jimi zabývat. Russell tedy uvážil právě takovou množinu, která obsahuje množiny, jenž samy sebe neobsahují.

Symbolicky bychom množinu S zapsali (značení viz podsekcce o množinách 2.3.2)

$$S = \{X \mid X \notin X\} .$$

Množina S je dobře definovaná v Cantorově pojetí (jedná se o souhrn objektů). Pokud bychom si vzali např. množiny

$$A = \{X, Y, Z, A\} \quad \text{a} \quad B = \{X, Y, W\} ,$$

kde X, Y, Z, W jsou libovolně zvolené prvky, pak podle definice S platí, že $A \notin S$ a $B \in S$. Podle takto zvolené definice S , patří do ní sama množina S ?

Postupujme podle dané logiky. Pokud množina S neobsahuje sebe sama, pak by ale podle své definice sama sebe obsahovat měla. A naopak pokud množina sama sebe obsahuje, pak je to spor s její definicí a sama sebe by obsahovat neměla. Tím jsme však v obou případech došli ke sporu, neboť z tohoto plyne závěr,

že množina S je sama sobě prvkem právě tehdy, když není sama sobě prvkem. Symbolicky (viz sekce o logice 2.1)

$$S \in S \Leftrightarrow S \notin S.$$

Tento paradox se uvádí v mnoha analogiích. Asi nejtypičtější a nejčastěji uváděný je tzv. *paradox holiče*.

„Holič holí všechny lidi, kteří se neholí sami. Podle uvedeného pravidla, holí holič sám sebe?“

I zde bychom došli ke sporu stejným způsobem. Pokud by se holič holil, pak by se podle pravidla holit neměl a pokud by se neholil, pak by se naopak holit měl. Zkuste si sami rozmyslet souvislost s originálním zněním Russellova paradoxu.

V teorii množin se postupně začalo objevovat více paradoxů⁶ a nesrovnalostí. Překvapivě některé z nich byly objeveny již před samotným Russellovým paradoxem. Za jedny z nejdůležitějších lze považovat ještě

- *Burali-Fortiův paradox* - objeven roku 1897 CESAREM BURALI-FORTIM (1861–1931),
- *Cantorův paradox* - objeven roku 1899.

K vysvětlení těchto paradoxů však zatím nemáme vyvinutý dostatečný matematický aparát, nicméně ještě se k nim později vrátíme pro doplnění (TODO: dopsat např. do přílohy.).

1.2.3 Teorie množin v současnosti

Cantorova tehdejší naivní teorie množin začala být nakonec ke konci 19. století uznávána. Začalo se ukazovat, že teorie množin je skutečně mocným nástrojem k vybudování samotných základů matematiky. Chvíli se zdálo, že matematici mají dostupný skutečně pevný základ pro výstavbu dalších teorií. Avšak postupné objevování antinomií v teorii množin je vyvedlo z jejich omylu a bylo jasné, že pro spolehlivé vybudování základů bude třeba daleko více práce. Toto období proto nazýváme *3. krizí matematiky*.

Jak se ukázalo, dosavadní způsob budování matematiky byl neudržitelný, a tak se matematici snažili přijít s řešením. Ta se však svou povahou velmi lišila podle matematického a filozofického uvažování každého z nich. Hrubě bychom mohli tehdy rozlišit dva hlavní myšlenkové proudy: *intuicionismus* a *formalismus*.

Intuicionismus byl svým přístupem velmi omezený, neboť v jeho duchu bylo možné pracovat pouze s omezenou částí matematiky, která byla „přípustná“. Aktuální nekonečno s existenčními důkazy⁷ jsou odmítány. Uznávány jsou pouze objekty, které lze přímo zkonstruovat (tzv. *konstruktivní důkazy*). Proto byl tehdy např. kritizován Cantorův důkaz existence tzv. *transcendentních čísel*⁸ (blíže v

⁶Též *antinomie*, tj. sporné tvrzení vyvozené z korektně vyvozených závěrů.

⁷*Existenční důkazy* jsou takové důkazy, které prokážou existenci nějakého objektu, ale není možno z nich obdržet žádný příklad daného objektu.

⁸Tak nazýváme čísla, která nejsou kořeny žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty (např. Ludolfovo číslo π nebo Eulerovo číslo e).

kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu.) v sekci (TODO: doplnit odkaz na sekci.)). Zajímavostí a kontroverzí jeho důkazu byl fakt, že při tehdejších dokázání jejich existence neuvedl příklad ani jednoho nich.

Formalismus naopak dále pracoval s aktuálními znalostmi. Matematici se snažili vybudovat matematiku na množinách tak, jak zamýšlel Cantor, avšak jedním z cílů byla eliminace dosavadně známých antinomií. Objevují se dva rozdílné přístupy, přičemž prvním z nich byla tzv. *teorie typů*⁹ a *axiomatická výstavba*.

Protože axiomatická výstavba pro nás jako koncept bude dále podstatným stavebním kamenem, zaměříme se právě na ni. Axiomatická výstavba je dnes asi nejrozšířenějším způsobem budování různých teorií. Ať už budujeme jakoukoliv teorii, v principu není možné definovat všechny pojmy a dokázat všechna možná tvrzení. Dříve nebo později bychom došli k závěru, že abychom mohli dojít k různým tvrzením, je třeba zavést nějaké „primitivní pojmy“, na nichž budeme stavět další definice, a tzv. *axiómy* neboli tvrzení, která implicitně považujeme za pravdivá a nedokazujeme jejich platnost. Ve skutečnosti však axiomatika nebyla nikterak novou záležitostí; byla známa již od starověku.

Jedním z nejstarších děl jsou v tomto ohledu Eukleidovy *Základy*. Eukleidés se pokusil tehdejší rovinou geometrii (dnes nazývanou *eukleidovskou geometrií*) vybudovat na celkem pěti základních postulátech. Čtenář si nejspíše všiml, že jsme použili termín postulát (též „předpoklad“ či „prvotný úkol“), nikoliv axióm, avšak není mezi nimi významný rozdíl. Většinou se tyto termíny uvádí vzhledem k historickému kontextu. Uvedme si zde pro představu několik Eukleidových základních pojmů (citováno z českého překladu Základů z roku 1907 od Františka Servíta [3]):

- Bod jest, co nemá dílu.
- Čára pak délka bez šířky.
- Plocha jest, co jen délku a šířku má.
- Hranicemi plochy jsou čáry.
- Tupý jest úhel pravého větší.

Eukleidovy postuláty:

- (i) Budiž úkolem od kteréhokoliv bodu ke kterémukoliv bodu vésti přímku.
- (ii) A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.
- (iii) A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovatí kruh.
- (iv) A že všechny pravé úhly sobě rovny jsou.
- (v) A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže (přilehlé) straně úhly menších dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na straně, kde jsou úhly menších dvou pravých.

⁹O té se zmiňuje Russell v knize *Principia Mathematica*, na které se s ním podílel anglický matematik ALFRED NORTH WHITEHEAD. Kniha vyšla v letech 1910–1913.

Toto je první historicky známé dílo, kde byla teorie takto deduktivně budována. Dnešním axiomatickým systémům je však celkem pochopitelně vzdálená, neboť tehdy byly základní pojmy a axiomy, resp. postuláty, psány běžnou řečí a odvozování tvrzení na jejich základě probíhalo intuitivně. Dnešní axiomatika je v těchto směrech formálnější, protože se využívá formálního jazyka a též jsou dána přesná odvozovací pravidla. Co však matematiky tehdy zajímalo na axiomaticky budovaných systémech byla jejich:

- *nezávislost* (tzn. zdali žádný z axiómů nelze odvodit ze zbylých axiómů; takové tvrzení pak již není axióm, nýbrž věta);
- *úplnost* (tzn. zdali je dána taková soustava axiómů, abychom každé tvrzení mohli dokázat, nebo dokázat jeho negaci);
- *bezespornost* (tzn. zdali není možné z daných axiómů odvodit tvrzení a současně jeho negaci).

Čtenáře možná napadne, že pokud jde o nezávislost, jedná se v podstatě jen o „vadu na kráse“, neboť pokud nějaký axióm lze v teorii odvodit z ostatních, pak jej stačí odstranit. Není-li systém úplný, je to již poměrně nepříjemné, neboť by to znamenalo, že v teorii existují tvrzení, která nelze dokázat, ani vyvrátit. Nejhorší je však pochopitelně, pokud je teorie sporná.

První úspěšnou teorii množin axiomaticky vybudoval v letech 1904–1908 německý matematik ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO (1871–1953), které se v tomto textu budeme dále věnovat. Základní Zermelovou myšlenkou při budování jeho teorie bylo, že ne každý souhrn objektů je možné považovat za množinu (blíže si jednotlivé axiomy vysvětlíme v kapitole (TODO: doplnit odkaz na kapitolu.)). Pojem **množina** a **býti prvkem** jsou zde považovány za primitivní (nedefinované) pojmy, s nimiž se dále pracuje. Zermelovu teorii později upravil izraelský matematik ADOLF ABRAHAM HA-LEVI FRAENKEL (1891–1965), čímž vznikla tzv. *Zermelova-Fraenkelova teorie množin*. Dodnes se jedná o nejrozšířenější variantu.

Později vyšla i tzv. *Gödelova-Bernaysova teorie množin*, jíž dal základ švýcarský matematik ISSAK PAUL BERNAYS (1888–1977) v letech 1937–1954 a rakouský matematik KURT FRIEDRICH GÖDEL (1906–1978) v reakci na omezení, která se objevovala v Zermelově-Fraenkelově teorii množin.

Bohužel se nikdy nikomu nepodařilo dokázat, zdali jsou budované axiomatické teorie bezesporné a úplné (což se pro srovnání podařilo např. u varianty zmíněné eukleidovské geometrie). Jak ukázal Kurt Gödel (viz tzv. *Gödelovy věty o neúplnosti*), tak ve skutečnosti takovou teorii není ani možné sestavit, neboť v libovolném „dostatečně bohatém“ axiomatickém systému teorie množin budou vždy existovat tvrzení, která nelze dokázat a ani nelze dokázat jejich negaci, což tehdy odhalilo výraznou omezenost axiomatických metod.

Kapitola 2

Základní pojmy a značení

V této kapitole zavedeme některá základní značení a pojmy, které dále v tomto textu využijeme. Je dosti možné, že některé záležitosti již čtenář dobře zná nebo o nich slyšel. Proto některé sekce věnující se konkrétním pojmům jsou formulovány spíše jako připomenutí než zavádění něčeho nového. I přesto však považuji jejich zmínku za nezbytnou, neboť se jedná o základní stavební kameny, na nichž budeme stavět další teorii.

2.1 Výroková logika

Tato část je čtenáři pravděpodobně již z části známa ze střední školy. Řadu vět (matematických i nematematických) lze matematicky chápat jako *výrok*, tj. tvrzení, o kterém lze jednoznačně prohlásit, zdali je či není pravdivé. Výrokům přiřazujeme tzv. *pravdivostní hodnotu*, která je buď 1 pro *pravdivý* výrok nebo 0 pro *nepravdivý* výrok.

Za výroky lze považovat např. tvrzení:

- „Prší.“,
- „Prší a svítí slunce.“,
- „Nebude-li pršet, nezmoknem.“,
- „Když bude pršet, zmokneme.“,

a mnohé jiné (u každého z nich jsme schopni jednoznačně určit jeho pravdivostní hodnotu). K formálnímu zápisu tvrzení v matematice vyžíváme tzv. *logické spojky* a *kvantifikátory*.

2.1.1 Logické spojky

Mezi logické spojky řadíme *negaci* \neg , *konjunkci* \wedge , *disjunkci* \vee , *implikaci* \Rightarrow a *ekvivalenci* \Leftrightarrow . Připomeňme si stručně jejich významy.

Úmluva 2.1.1 (Abeceda pro výrokové proměnné). Pro označení *výroků* nebo též *výrokových proměnných* budeme používat velká písmena latinské abecedy A, B, \dots, X, Y, Z , případně opatřenými indexy.

Uvažujme libovolné výroky A a B .

- Negace $\neg A$ má opačnou pravdivostní hodnotu než A .
- Konjunkce $A \wedge B$ je pravdivá, pokud je pravdivý výrok A **a současně** je pravdivý výrok B . Tedy má-li A nebo B pravdivostní hodnotu 0, pak i $A \wedge B$ má pravdivostní hodnotu 0. Čteme „ A a (zároveň) B “.
- Disjunkce $A \vee B$ je pravdivá, pokud alespoň jeden z výroků A a B je pravdivý. Výrok $A \vee B$ je tedy nepravdivý pouze když jsou současně nepravdivé výroky A i B . Čteme „ A nebo B “.
- U implikace se často mluví o výroku A jako o *předpokladu* a o B jako o *závěru*. Výrok $A \Rightarrow B$ pak říká, že pokud platí výrok A , **pak nutně platí** i výrok B . Čteme „*jestliže* A , *pak* B “, „*z* A *vyplývá* B “ či „ A *implikuje* B “. Zde se hodí upozornit na to, že mezi předpokladem a závěrem nemusí být nutně souvislost.
- Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ je pravdivá, pokud jsou výroky A a B **současně pravdivé** nebo **současně nepravdivé**. Čteme „ A *právě tehdy, když* B “.

Výroky uvedené výše obsahující dané logické spojky lze přehledně zapsat do tabulky pravdivostních hodnot (viz tabulka 2.1).

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulka 2.1: Tabulka pravdivostních hodnot pro základní logické spojky

Vraťme se nyní ještě ke zmíněné implikaci. Ve skutečnosti tato logická spojka je pravděpodobně tou nejsložitější na pochopení ze všech čtyř zmíněných, neboť při neobeztřetnosti je často (a to i v běžné mluvě) zaměňována za ekvivalenci. Uvažme tvrzení „Jestliže nebudeš jíst, nedostaneš zmrzlinu.“. Synáček by v takovou chvíli očekával, že když naopak oběd sní, tak zmrzlinu dostane, avšak ze striktně matematického hlediska mu ji tatínek i tak dát nemusí a přesto by nelhal. Je důležité si uvědomit, že v případě nesplnění předpokladu nám implikace o závěru nic neříká.

2.1.2 Výrokové formule

Pokud se ohlédneme za výroky, které jsme zatím uvažovali, vždy se jednalo o výroky *složené*. Vezmeme-li např. výrok „Číslo 2 je sudé nebo liché.“, tak jej lze rozdělit na dva „jednodušší“ výroky, tj. „Číslo 2 je sudé.“ a „Číslo 2 je liché.“, přičemž dané výroky jsou spojeny disjunkcí \vee . Tyto výroky však již žádné logické spojky neobsahuje a tedy je nelze dále „rozložit“. S tímto souvisí terminologie zavedená v definici 2.1.3.

Úmluva 2.1.2 (Abeceda pro výrokové formule). Pro označení výrokových formulí budeme používat malá písmena řecké abecedy, tj. $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, případně opatřenými indexy.

Definice 2.1.3 (Výroková a atomická formule).

- (i) Každá výroková proměnná je *výroková formule* (tzv. *atomická formule*).
- (ii) Jsou-li φ a ψ výrokové formule, pak $\neg(\varphi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$ a $(\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$ jsou také výrokové formule.
- (iii) Výraz, který nelze získat pomocí pravidel (i) a (ii) není výrokovou formulí.

(Převzato z [1], str. 14 a [4], str. 30).

Poznámka 2.1.4. Občas budeme v této sekci zkráceně psát pouze *formule*. Nicméně vždy tím bude míněna výroková formule ve smyslu definice 2.1.3.

Úmluva 2.1.5 („Rovnost“ výrokových formulí). Uvažujme, že máme libovolné výrokové formule φ a ψ . Pokud φ a ψ vyjadřují stejnou výrokovou formuli, pak budeme psát $\varphi \sim \psi$.

Řekneme-li, že výrokové formule „jsou stejné“, pak se formule shodují ve svém zápisu. Máme-li např. výrokové formule

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\sim (A) \wedge ((B) \vee (C)) , \\ \varphi_2 &\sim ((A) \wedge (B)) \vee ((A) \wedge (C)) \text{ a} \\ \varphi_3 &\sim ((A) \wedge (B)) \vee ((A) \wedge (C)) ,\end{aligned}$$

pak můžeme psát, že $\varphi_2 \sim \varphi_3$, ale nikoliv $\varphi_1 \sim \varphi_2$, byť φ_1 a φ_2 mají shodnou tabulku pravdivostních hodnot.

Definice výrokové formule 2.1.3 nám v podstatě říká, jakým způsobem můžeme sestavit potenciálně všechny možné formule. Mějme výrokové proměnné A , B a C . Ty jsou podle (i) v definici 2.1.3 výrokovými formulemi. Podle (ii) jsou pak formulemi i výrazy

$$(A) \wedge (B) , (A) \vee (C) \text{ a } \neg(B). \quad (2.1)$$

Nyní můžeme opakovaně použít (ii) k sestrojení dalších složitějších formulí. Tedy užitím formulí (2.1) můžeme dále postupně sestavit např. výrazy

$$((A) \wedge (B)) \Rightarrow ((A) \vee (C)) \text{ a } ((A) \wedge (\neg(B))) \Leftrightarrow (\neg((A) \vee (B))) ,$$

které jsou opět podle (ii) výrokovými formulemi. Opětovným užitím (ii) pak je dále výrokovou formulí např.

$$\left(((A) \wedge (B)) \Rightarrow ((A) \vee (C)) \right) \Rightarrow \left(((A) \wedge (\neg(B))) \Leftrightarrow (\neg((A) \vee (B))) \right) .$$

Takto můžeme postupovat dál a opakovanou aplikací pravidla (ii) vytvořit ještě složitější výrokové formule.

Naopak pokud bychom uvažili nějaký výraz, můžeme obdobně zjistit, jestli se jedná o výrokovou formuli či nikoliv.

Příklad 2.1.6. Mějme výraz

$$\varphi \sim ((A) \wedge (C)) \Leftrightarrow (((A) \vee (B)) \Rightarrow \neg(C)) .$$

Ověřte, zda φ je výroková formule.

Řešení. Aby φ byla formule, musí být

$$\varphi_1 \sim (A) \wedge (C) \quad \text{a} \quad \varphi_2 \sim ((A) \vee (B)) \Rightarrow \neg(C)$$

též formulemi. Výraz φ_1 zřejmě je formulí, neboť A a C jsou atomické formule. Ovšem u φ_2 lze již vidět, že výraz nesplňuje definici výrokové formule, neboť u $\neg(C)$ chybí vnější závorky. Z bodu (iii) definice 2.1.3 tedy plyne, že výraz φ **není výrokovou formulí**, neboť jej nelze získat pomocí pravidel (i) a (ii). □

Čtenáře možná již napadlo, že formule, které jsme sestrojili z definice 2.1.3, jsou zapsány poměrně komplikovaně, především co do nadměrného používání závorek. Např. výraz

$$A \wedge \neg C , \tag{2.2}$$

není podle 2.1.3 výrokovou formulí. I přesto je však nejspíše zřejmé, že tímto zápisem vyjadřujeme výrok „Platí A a zároveň neplatí C “. Nebo vrátíme-li se k příkladu 2.1.6, i při vypuštění uzávorkování u výrazu φ_2 by dávalo smysl interpretovat výraz

$$A \vee B \Rightarrow \neg C$$

jako výrok „Jestliže platí A a zároveň B , pak neplatí C “. Pro zjednodušení zápisu dalších výrokových formulí se proto budeme držet následující úmluvy 2.1.7.

Úmluva 2.1.7 (Pořadí logických operací).

- (1) Negace \neg má přednost před všemi ostatními logickými spojkami.
- (2) Konjunkce a disjunkce \wedge, \vee jsou rovnocenné a mají přednost před implikací a ekvivalencí $\Rightarrow, \Leftrightarrow$, které jsou sobě rovnocenné.

Příklad 2.1.8. Zjednodušení některých formulí při aplikaci zavedeného pořadí logických operací v úmluvě 2.1.7.

- (i) $(A) \wedge (B) \rightsquigarrow A \wedge B,$
- (ii) $\neg(\neg A) \rightsquigarrow \neg\neg A,$
- (iii) $\neg((A) \vee (B)) \rightsquigarrow \neg(A \vee B),$
- (iv) $\left(((A) \wedge (B)) \vee (\neg(C)) \right) \Rightarrow (\neg(A)) \wedge (\neg(C)) \rightsquigarrow$
 $\rightsquigarrow (A \wedge B) \vee \neg C \Rightarrow \neg A \wedge \neg C.$

Nyní se vraťme k původní definici výrokové formule 2.1.3, kterou jsme zavedli. S ní souvisí čtenářovi pravděpodobně známý postup pro vyhodnocování logických formulí, a to sice *tabulková metoda*. Její myšlenkou bylo rozdělit danou výrokovou formuli postupně na dílčí formule a takto postupovat u i daných dílčích formulí. Tímto způsobem nakonec dojdeme až k samotným atomickým formulím, kde zkoumáme všechny možné kombinace jejich pravdivostních hodnot (resp. kombinace pravdivostních hodnot jejich výrokových proměnných).

Před ukázkou na příkladech si ještě zavedeme jedno značení, které budeme potřebovat.

Definice 2.1.9 (Logická ekvivalence výrokových formulí). Mějme výrokové formule φ a ψ . Řekneme, že φ a ψ jsou *logicky ekvivalentní*, což zapisujeme jako $\varphi \equiv \psi$, pokud je formule $\varphi \Leftrightarrow \psi$ pro všechny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných obsažených ve φ a ψ pravdivá.

Pokud tedy budeme mít např. formule

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\sim \neg(A \wedge B), \\ \varphi_2 &\sim \neg A \vee \neg B,\end{aligned}$$

pak můžeme psát $\varphi \equiv \psi$, neboť jak se lze přesvědčit, formule $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ je vždy pravdivá.

Nabízí se otázka: jaký je rozdíl mezi \equiv a \Leftrightarrow ? Formálně vzato bychom mohli mezi formule jednoduše vkládat ekvivalenci, avšak pak se nám tato logická spojka mohla plést s ekvivalencemi, které jsou součástí φ a ψ .

Příklad 2.1.10. Mějme formuli

$$\varphi \sim A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \vee B.$$

Pro jaké pravdivostní hodnoty výroků A a B je formule φ pravdivá?

Řešení. Postupujme způsobem popsaným výše, tj. rozdělme nejdříve danou formuli na dílčí formule. V tomto případě dílčími formulemi φ jsou

$$\varphi_1 \sim A \wedge \neg B \quad \text{a} \quad \varphi_2 \sim A \vee B,$$

které jsou spojeny ekvivalencí \Leftrightarrow , tj.

$$\varphi \sim \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2.$$

Formule φ_1 obsahuje atomický výrok A a formuli $\neg B$ spojené konjunkcí \wedge . Označme tedy ještě

$$\varphi_3 \sim \neg B$$

φ_3 již obsahuje pouze atomický výrok B v negaci \neg .

Podívejme se nyní na dílčí formuli φ_2 . Ta obsahuje atomické výroky A a B spojené disjunkcí \vee . Zapišme nyní vše zmíněné po řadě do tabulky pravdivostních hodnot (viz tabulka 2.2).

Z tabulky 2.2 můžeme již vidět, že formule φ je pravdivá pro $A \equiv 1$ a $B \equiv 0$, nebo pro $A \equiv 0$ a $B \equiv 0$.

□

A	B	$\varphi_3 \sim \neg B$	$\varphi_1 \sim A \wedge \neg B$	$\varphi_2 \sim A \vee B$	$\varphi \sim A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \vee B$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1

Tabulka 2.2: Tabulka pravdivostních hodnot pro φ_1 , φ_2 , φ_3 a φ

Tento středoškolský postup je zcela jistě vždy funkční. Avšak ne vždy je moudré jej ihned aplikovat. Zkusme se podívat ještě na jeden příklad výrokové formule.

Příklad 2.1.11. Mějme logickou formuli

$$\psi \sim (A \wedge \neg A \Rightarrow B) \vee ((A \Leftrightarrow B) \wedge (C \vee \neg C)) .$$

Pro jaké pravdivostní hodnoty výroků A, B, C je formule ψ pravdivá?

Řešení. V tuto chvíli bychom aplikací metody použité v příkladu 2.1.10 museli vyšetřit pravdivostní hodnotu formule ψ pro celkem $2^3 = 8$ různých kombinací pravdivostních hodnot A, B, C . Jistě bychom takto též došli k řešení, nicméně práci si můžeme značně ulehčit. (Prosím čtenáře, aby se zde pozorněji zaměřil na formuli ψ v zadání.)

Ve skutečnosti jsou některé dílčí formule zjednodušitelné. Zaměříme se pro začátek na formuli

$$A \wedge \neg A .$$

Může tato formule být někdy pravdivá? Jistě, že nemůže. Libovolný výrok buď **platí a nebo platí jeho negace**, což nikdy nemůže nastat současně. Taková formule má pak vždy pravdivostní hodnotu 0 bez ohledu na pravdivostní hodnotu A . Tedy

$$A \wedge \neg A \equiv 0 .$$

Z výše uvedeného také ovšem plyne, že formule

$$C \vee \neg C \equiv 1 ,$$

neboť opět platí buď C , nebo jeho negace $\neg C$.

Vyšetřovanou formuli ψ tedy můžeme zjednodušit

$$\begin{aligned} \psi &\sim \left(\overbrace{(A \wedge \neg A)}^{\equiv 0} \Rightarrow B \right) \vee \left((A \Leftrightarrow B) \wedge \overbrace{(C \vee \neg C)}^{\equiv 1} \right) \equiv \\ &\equiv (0 \Rightarrow B) \vee \left((A \Leftrightarrow B) \wedge 1 \right) . \end{aligned}$$

Tento krok nám však umožňuje provést další úpravy. Podívejme se blíže na formuli

$$(A \Leftrightarrow B) \wedge 1 .$$

Výsledek této konjunkce vždy bude záviset na pouze na pravdivostní hodnotě $A \Leftrightarrow B$, tzn. konjunkce je zde nadbytečná a můžeme psát

$$(A \Leftrightarrow B) \wedge 1 \equiv A \Leftrightarrow B .$$

Čeho si lze dále všimnout je, že výrok

$$0 \Rightarrow B$$

je také vždy pravdivý (viz tabulka 2.1). Celkově se tedy výroková formule ψ zjednoduší takto

$$\begin{aligned} \psi &\sim \overbrace{(0 \Rightarrow B)}^{\equiv 1} \vee \left(\overbrace{(A \Leftrightarrow B) \wedge 1}^{\equiv A \Leftrightarrow B} \right) \equiv \\ &\equiv 1 \vee (A \Leftrightarrow B) . \end{aligned}$$

Disjunkce je však pravdivá právě tehdy, když je alespoň jeden z výroků pravdivý, což zde platí. Z tohoto dostáváme výsledek, že

$$\psi \equiv 1 .$$

Tedy bez ohledu na to, jaké pravdivostní hodnoty budou mít výroky A, B, C , bude formule ψ vždy pravdivá. Pokud bychom přeci jen přistoupili na použití tabulkové metody, které jsme se zpočátku vyhnuli, můžeme se skutečně přesvědčit, že náš závěr je správný (viz tabulky 2.3 a 2.4).

A	B	C	$\neg A$	$\neg C$	$A \wedge \neg A$	$C \vee \neg C$	$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$
1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1

Tabulka 2.3: Tabulka pravdivostních hodnot podformulí formule ψ (1. část).

A	B	C	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (C \vee \neg C)$	ψ
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

Tabulka 2.4: Tabulka pravdivostních hodnot podformulí formule ψ (2. část).

□

Tento typ formulí je poměrně významný a proto pro ně zavádíme speciální pojmenování v definici 2.1.12.

Definice 2.1.12 (Tautologie). Výrokovou formuli φ nazveme *tautologií*, pokud $\varphi \equiv 1$.

Některé tautologie jsme využili již při řešení příkladu 2.1.11. Uvedme si zde ještě několik dalších významných příkladů.

Věta 2.1.13 (Významné tautologie). *Následující výrokové formule jsou tautologie:*

- (i) $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$
- (ii) $A \vee \neg A$ \triangleleft zákon vyloučeného třetího
- (iii) $A \Leftrightarrow A$ \triangleleft zákon identity
- (iv) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ \triangleleft zákon dvojí negace
- (v) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ \triangleleft de Morganovo pravidlo
- (vi) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ \triangleleft de Morganovo pravidlo
- (vii) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ \triangleleft pravidlo Modus ponens¹
- (viii) $((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$ \triangleleft pravidlo Modus tollens²
- (ix) $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$ \triangleleft reductio ad absurdum
- (x) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- (xi) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- (xii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow B \vee \neg A$
- (xiii) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$
- (xiv) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- (xv) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- (xvi)

Čtenář si pravdivosti těchto výroků může ověřit prostým sestavením tabulek pravdivostních hodnot daných logických formulí. Tautologie (vii), (x) a (xi) se hodně využívají při dokazování tvrzení (blíže nahlédneme v sekci 2.4).

¹Česky *pravidlo vynětí*.

²Česky *popírání důsledku*.

2.2 Kvantifikátory a predikátový počet

Logické spojky nám jistě poskytují nástroj pro vyjádření celé řady různých výroků. Vyjádřit např. výrok „Anička má zelené vlasy (Z) a modré oči (M).“ tak pro nás není problém. Symbolicky bychom mohli napsat např.

$$Z_{\text{Anička}} \wedge M_{\text{Anička}} .$$

Co kdybychom toto chtěli prohlásit místo o jednom člověku např. o všech obyvatelích Prahy? Užitím čistě logických spojek, jak jsme prováděli doposud, bychom museli napsat např.

$$(Z_{\text{Anička}} \wedge M_{\text{Anička}}) \wedge (Z_{\text{Eva}} \wedge M_{\text{Eva}}) \wedge (Z_{\text{Tomáš}} \wedge M_{\text{Tomáš}}) \wedge \cdots \wedge (Z_{\text{Jiří}} \wedge M_{\text{Jiří}}) .$$

To je sice správné, ale poměrně těžkopádné vyjádření tak jednoduchého výroku. Jistě bychom neřekli „Anička má zelené vlasy a modré oči a zároveň Eva má zelené vlasy a modré oči a zároveň . . . “. Čtenář nejspíše tuší, že existuje jednodušší způsob vyjádření takového výroku, resp. výrokové formule. K tomu v logice slouží právě takzvané *kvantifikátory*.

V praxi bychom zkrátka řekli: „Všichni obyvatelé Prahy mají zelené vlasy a modré oči.“ (takové tvrzení je jistě výrok). Tímto způsobem formulujeme podobné výroky i v logice. Zkrátka prohlásíme, že pro každého obyvatele Prahy x platí

$$M_x \wedge Z_x .$$

K formálnímu zápisu podobných tvrzení využíváme tzv. *univerzální kvantifikátor* (též *obecným*), který zapisujeme pomocí \forall .

Nyní se ještě zamysleme, co nám toto říká z pohledu logiky. Tvrzení je takové, že je-li x obyvatelem Prahy, pak má zelené vlasy a modré oči. V řeči logických spojek toto není nic jiného, než implikace. Označíme-li výrok „ x je obyvatelem Prahy.“ jako P_x , pak bychom mohli napsat

$$\forall x (P_x \Rightarrow Z_x \wedge M_x) , \quad (2.3)$$

nebo podle (xii) ve větě 2.1.13 o tautologiích

$$\forall x (Z_x \vee M_x \vee \neg P_x) .$$

Takový výrok bychom četli: „**pro všechna x platí**, že pokud platí P_x , pak platí Z_x a zároveň M_x “. Ve výrazu (2.3) můžeme uvažovat libovolná x (nemusí se ani jednat o lidi), avšak pouze u x , která splňují předpoklad P_x tvrdíme, že splňují i závěr $Z_x \wedge M_x$. Proto jsme ve výrazu nepoužili konjunkci, tj.

$$\forall x (P_x \wedge Z_x \wedge M_x) ,$$

neboť bychom vzali např. obyvatele Brna, pak by byl již výrok nepravdivý (kvůli P_x).

Druhým typem kvantifikátoru je tzv. *existenční kvantifikátor*. Uvažme, že bychom chtěli naopak říci, že ze všech obyvatel Prahy má alespoň jeden zelené

vlasý a modré oči. S využitím čistě logických spojek by pak znamenalo, že jedna z dílčích formulí je pravdivá

$$(Z_{\text{Anička}} \wedge M_{\text{Anička}}) \vee (Z_{\text{Eva}} \wedge M_{\text{Eva}}) \vee (Z_{\text{Tomáš}} \wedge M_{\text{Tomáš}}) \vee \cdots \vee (Z_{\text{Jiří}} \wedge M_{\text{Jiří}}) .$$

I zde však máme kratší alternativu, a to s využitím symbolu \exists pro existenční kvantifikátor. Opět se však nejdřív podívejme na naše tvrzení. To říká, že existuje x takové, že x je obyvatelem Prahy a zároveň má zelené vlasy a modré oči. Zde si tedy naopak vystačíme pouze s konjunkcí:

$$\exists x (P_x \wedge Z_x \wedge M_x) . \quad (2.4)$$

Přirozeně se zde nabízí otázka, proč jen nenahradit univerzální kvantifikátor ve výrazu (2.3) za existenční. Pokud bychom napsali

$$\exists x (P_x \Rightarrow Z_x \wedge M_x) , \quad (2.5)$$

pak by tvrzení již neplatilo pouze na obyvatele Prahy (v případě nesplněného předpokladu je implikace pravdivá), ale třeba pro obyvatele Brna by toto tvrzení také byla pravda. Pokud by však v Praze neexistoval občan se zelenými vlasy a modrýma očima, pak by výraz (2.4) by nepravdivý, ale výraz (2.5) by pravdivý již byl.

2.2.1 Primitivní predikáty

Vzpomeneme-li si na definici výrokových formulí (viz 2.1.3), tak zde jsme formule tvořili opakovanou aplikací jistých pravidel, přičemž „nejtriviálnější“ výrokovou formulí (tj. atomickou formulí) pro nás byly **výrokové proměnné**. Těm jsme přiřazovali pravdivostní hodnotu 0 (nepravda) nebo 1 (pravda). V tomto se však nachází jisté omezení. U předešlého příkladu jsme, kromě jiných, uvažovali výrok „ x je obyvatelem Prahy“, který jsme značili výrokovou proměnnou P_x . Tím jsme přiřadili P_x jistý význam.

Zkusme takto zapsat matematické tvrzení „Pokud je x větší než y a zároveň y je větší než z , pak x je větší než z “. Výrok „ x je větší než y “ označme A , „ y je větší než z “ označme B a „ x je větší než z “ označme C . Pak původní výrok bychom symbolicky zapsali jako

$$A \wedge B \Rightarrow C .$$

Nebylo by však jednodušší a smysluplnější zapsat takový výrok zkrátka jako $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$? Takový zápis by odporoval definici výrokové formule, přesto jeho význam je zřejmý. Navíc bychom si tak ušetřili ono přiřazování významu jednotlivým výrokovým proměnným, jako tomu bylo doposud, neboť bychom měli možnost jejich syntaktického popisu. To nám je umožněno v *predikátovém počtu*.

Ve výrokové logice zastávaly výrokové proměnné roli těch „nejjednodušších“ formulí, které již nevznikaly z formulí jiných. V predikátovém počtu tuto roli zastávají tzv. *primitivní predikáty* (nebo jen zkráceně *predikáty*). Ty obsahuje každá matematická teorie. V aritmetice jsou to právě např. $x < y$, $x + y < z$,

apod., v teorii množin považujeme za primitivní predikát $x \in X$. Po dosazení konkrétních hodnot dané proměnné již obdržíme nějaký atomární výrok v dané teorii.

Výroky složené z primitivních predikátů již nenazýváme výrokové formule, ale *predikátové formule*. I ty lze definovat obdobně jako formule výrokové pomocí jistých pravidel, avšak pro pochopení konceptu si vystačíme s tímto vystačíme.

Úmluva 2.2.1. V dalším textu této sekce budeme slovo formule užívat ve významu predikátové formule.

Příklad 2.2.2. Ukázky některých predikátových formulí:

- $x > y$ \triangleleft *Primitivní predikát (aritmetika) je predikátovou formulí*
- $\forall x(x = 0 \vee x < 0 \vee x > 0)$
- $\forall x(2 \mid x \Rightarrow \exists k(x = 2k))^3$
- $\exists k(k \in \mathbb{N} \wedge \exists x(x = 2k + 1))$

2.2.2 Jiné zápisy formulí s kvantifikátory

Formule s obecným kvantifikátorem \forall jsme zatím uvažovali ve tvaru

$$\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) ,$$

kde φ a ψ jsou nějaké predikátové formule obsahující proměnnou x . (Formálně vzato, formule φ a ψ nemusí v tomto zápisu obsahovat proměnnou x , nicméně pak je kvantifikátor redundantní.) Existuje však o něco úspornější (a častěji používaný) zápis. Např. formulí

$$\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0)$$

můžeme též zapsat jako

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > 0 .$$

Čteme jako „pro všechna přirozená čísla n platí, že n je větší než nula“. Obecněji formulí ve tvaru $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$ lze psát jako $\forall \varphi : \psi$. Stejně tak můžeme zapisovat i formule s existenčním kvantifikátorem, tj. $\exists \varphi : \psi$ místo $\exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Často se nám může stát, že se kvantifikátory ve formulí kumulují. Zápisy prováděné dosavadním způsobem by se mohly značně zkomplikovat. Jako příklad uvažme formulí

$$\forall x(x \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k(k > n)) .$$

Podle zmíněného již víme, že tento zápis můžeme zjednodušit na

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists k : k > n .$$

³Zápis $a \mid b$ znamená a dělí (beze zbytku) b

V takovém případě můžeme dvojtečku mezi obecným a existenčním kvantifikátorem vynechat a ponechat ji pouze před závěrem, nebo nahradit dvojtečku mezi kvantifikátory čárkou, tj. můžeme psát

$$\forall x \in \mathbb{N} \exists k : k > n \quad \text{nebo} \quad \forall x \in \mathbb{N}, \exists k : k > n .$$

Čteme: „Pro všechna přirozená čísla n existuje k takové, že k je větší než n “. Speciálně, může se stát, že dvě nebo více proměnných jsou součástí stejného predikátu u stejného typu kvantifikátoru. Kupříkladu formuli

$$\forall n (n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall k (k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^k \geq n))$$

můžeme zjednodušit jako

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : n^k \geq n .$$

Proměnné n a k však uvažujeme ze stejné množiny a jsou součástí stejného typu kvantifikátoru (obecného). V takových případech můžeme zápis sloučit a psát

$$\forall n, k \in \mathbb{N} : n^k \geq n .$$

Je třeba však upozornit na fakt, že pořadí kvantifikátorů může mít vliv na význam daného výroku (a tudíž i jeho pravdivostní hodnotu). Např. formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : k > n \quad \text{a} \quad \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : k > n .$$

neříkají totéž (zkuste si je přečíst). První říká, že **pro každé n existuje nějaké k takové, že k je větší než n** , kdežto druhá formule má význam takový, že **existuje k takové, že pro všechna n je k větší než n** . Jinými slovy říkáme, že existuje jedno **univerzální** číslo k tak, že je splněna daná podmínka. První formule je tak pravdivá, ale druhá již není.

2.2.3 Negace formulí s kvantifikátory

V sekci o výrokové logice 2.1 jsme si zmínili některé důležité tautologie. Specificky, de Morganovy pravidla (v) a (vi) zmíněné ve větě 2.1.13.

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B , \\ \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B . \end{aligned}$$

Tyto tautologie nám dávaly způsob, jak negovat složené výroky obsahující konjunkci nebo disjunkci. Jak ovšem negovat formule s kvantifikátory?

Zkusme se na problematiku podívat opět skrze příklad o obyvatelích Prahy. Měli jsme tvrzení, že každý obyvatel Prahy má zelené vlasy a modré oči, což jsme zapisovali

$$\forall x : P_x \Rightarrow Z_x \wedge M_x .$$

Jak by zněla negace takového výroku? Zamysleme se nad tím, v jakém případě by výrok neplatil. Pokud by v Praze byl obyvatel, který nemá zelené vlasy nebo modré oči, pak naše tvrzení neplatí. Zdá se tedy, že platí

$$\neg(\forall x : P_x \Rightarrow Z_x \wedge M_x) \Leftrightarrow \exists x : \neg(P_x \Rightarrow Z_x \wedge M_x)$$

Tj. existuje x takové, že x je obyvatelem Prahy a platí, že nemá zelené vlasy nebo nemá modré oči. Jak se tedy změnila naše formule? Obecný kvantifikátor se změnil na existenční a znegovali jsme formuli $P_x \Rightarrow Z_x \wedge M_x$. Užitím tautologií (xii) a de Morganova pravidla pro negaci konjunkce (v) ve větě 2.1.13 můžeme ještě formuli upravit

$$\exists x : P_x \wedge (\neg Z_x \vee \neg M_x) .$$

Skutečně, toto je negace původního výroku. Ta nyní říká: „Existuje x takové, že x je obyvatelem Prahy a buď nemá zelené vlasy nebo nemá modré oči.“. Jinak řečeno, tvrdíme, že existuje protipříklad.

Funguje i opačná úvaha. Pokud naše tvrzení je, že existuje obyvatel Prahy se zelenými vlasy a modrými oči, pak negace naopak říká, že všichni obyvatelé Prahy nemají zelené vlasy nebo nemají modré oči. Tzn.

$$\neg(\exists x : P_x \wedge Z_x \wedge M_x) \Leftrightarrow \forall x : P_x \Rightarrow \neg Z_x \vee \neg M_x .$$

Obecně řečeno, formule s kvantifikátory se negují tak, že kvantifikátory si prohodí roli, tj. obecný kvantifikátor se změnil na existenční a naopak, a znegujeme dílčí formuli φ , tzn.

$$\begin{aligned} \forall x : \varphi &\rightsquigarrow \neg \exists x : \neg \varphi \\ \exists x : \varphi &\rightsquigarrow \neg \forall x : \neg \varphi \end{aligned}$$

Kvantifikátory se mohou pochopitelně ve formulích různě kumulovat. V takovou chvíli postupujeme pořád stejně. Např. negace formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y > x .$$

bude

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y \leq x .$$

(TODO: doplnit cvičení.)

2.3 Množiny a čísla

V této sekci si připomeneme některá značení pro práci s čísly, zavedeme nová a především připomeneme práci s množinami.

2.3.1 Čísla a sumy

Úmluva 2.3.1 (Značení číselných oborů). V dalším textu budeme obor *přirozených čísel* značit písmenem \mathbb{N} , obor *celých čísel* písmenem \mathbb{Z} , obor *racionálních čísel* písmenem \mathbb{Q} , obor *reálných čísel* písmenem \mathbb{R} a obor komplexních čísel písmenem \mathbb{C} . Speciálně, horním indexem „+“, resp. „−“, budeme značit, že uvažujeme pouze všechna kladná, resp. záporná, čísla a dolním indexem „0“ budeme značit, že v dané množině uvažujeme nulu. (Např. \mathbb{R}_0^+ , N_0 , Z^- , apod.)

Číselné intervaly budeme zapisovat pomocí kulatých závorek $(,)$ pro otevřené nebo polootevřené intervaly a pro uzavřené nebo polouzavřené intervaly budeme používat⁴ špičaté závorky \langle, \rangle .

Při sčítání většího počtu čísel pro nás bude výhodnější zavést značení pomocí symbolu \sum (velké řecké písmeno „sigma“)⁵. Mějme nějakou číselnou posloupnost a_1, a_2, \dots, a_n . Pak součet $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n a_i .$$

Příklad 2.3.2. Příklady různých součtů zapsaných pomocí sumy:

- (i) $\sum_{i=1}^5 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 ,$
- (ii) $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{3i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{27} + \frac{1}{30} ,$
- (iii) $\sum_{j=1}^5 \frac{1}{3i} = \frac{1}{3i} + \frac{1}{3i} + \frac{1}{3i} + \frac{1}{3i} + \frac{1}{3i} = \frac{5}{3i} .$

Symbol sumy se může i kumulovat pro zápis složitějších součtů:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (i+j) &= \sum_{i=1}^n ((i+1) + (i+2) + \dots + (i+m)) = \\ &= (1+1) + (1+2) + \dots + (1+m) + \\ &+ (2+1) + (2+2) + \dots + (2+m) + \\ &+ (3+1) + (3+2) + \dots + (3+m) + \\ &\vdots \\ &+ (n+1) + (n+2) + \dots + (n+m) . \end{aligned}$$

V některých textech se u dvojité sumy připisují závorky k vnitřní sumě

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (i+j) \right) .$$

My se však budeme držet varianty bez závorek (nebude-li potřeba je použít).

Podobně můžeme zapisovat i součiny čísel (tzv. *produkt*) pomocí symbolu \prod (velké řecké písmeno „pí“):

$$\prod_{i=2}^n \frac{i+1}{i-1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{n-1}{n-3} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

⁴V jiných textech se mohou používat i hranaté závorky $[,]$.

⁵Pokud se čtenář někdy setkal s programováním (v libovolném jazyce), tento zápis svým způsobem připomíná FOR cyklus.

2.3.2 Množiny a operace s nimi

Množinami se budeme v tomto textu ještě podrobněji zabývat; nyní si však pouze připomeneme, co už víme. Množiny zapisujeme pomocí složených závorek $\{, \}$ a pro jejich označování si vymezíme velká písmena latinské abecedy $A, B, C, D, \dots, X, Y, Z$, kterou případně opět opatříme indexy. Např. množinu s prvky 10, 4, 90, 666 zapíšeme jako $\{4, 10, 90, 666\}$. Speciálně, prázdnou množinu značíme buď \emptyset nebo $\{\}$. Prvky v množině budeme vždy seřazovat vzestupně, pokud nebude v dané situaci výhodnější použít jiné uspořádání.

Kromě zápisu množin samotných bude často potřeba vyjádřit, že nějaká množina obsahuje jistý prvek. K tomu používáme symbol „ \in “. Tedy např. informaci, že množina X obsahuje prvek x píšeme jako $x \in X$ (čteme „ x je prvkem (množiny) X “). Opačný případ, kdy prvek x nenáleží množině X budeme zapisovat jako $x \notin X$. (Jedná se v podstatě o zkrácený zápis formule $\neg(x \in X)$.)

Mějme množiny

$$A = \{333, 444, 555\} \quad \text{a} \quad B = \{333, 333, 444, 444, 555\} .$$

Jsou množiny A a B odlišné? **Ne, nejsou**; umnožin neuvažujeme násobné výskyty prvků, ale pouze, zdali mají či nemají stejné prvky. Tj. množiny X a Y považujeme za rovné, což vyjadřujeme pomocí „ $=$ “, tedy $X = Y$ (formálně zavedeme v sekci (TODO: Doplnit sekci na axiomy TM.)), v opačném případě píšeme $X \neq Y$.

Řadu množin v matematice definujeme pomocí jiných množin na základě jistého pravidla. Např. množinu všech mocnin dvojky bychom zapsali jako

$$\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots\} .$$

Příklad 2.3.3. Další zápisy množin podle společné vlastnosti prvků:

- (i) $\{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ je liché}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\} ,$
- (ii) $\{i^2 \mid i \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : k^2 = n\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$
- (iii)

$$\begin{aligned} \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \wedge \exists n \in \mathbb{N} : x^2 = n\} = \\ &= \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots\} . \end{aligned}$$

Poznámka 2.3.4. V případě slovního popisu společné vlastnosti je třeba dbát na jednoznačnost.

U množin můžeme jako jejich prvky vzít i jiné množiny, např.:

$$M_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{8, 14\}, 3\}, \{0, 7\}, 3, 5\} , \tag{2.6}$$

přičemž i takové typy množiny můžeme zadat společnou vlastností:

$$M_2 = \{\{i, j, k\} \mid i, j, k \in \mathbb{N}\} .$$

U množin nás dále bude zajímat jejich *mohutnost*, kterou budeme značit svislými čarami, tedy X zapíšeme jako $|X|$. Později si tento termín zavedeme i pro nekonečné množiny. Např. mohutnost množiny $X = \{2,3,5,8\}$ je $|X| = 4$. Nyní otázka na čtenáře, jakou mohutnost má množina M_1 uvedená v (2.6)? Zde je velmi důležité si uvědomit, co je prvkem množiny M_1 . Např. číslo 1 není prvkem M_1 , ačkoliv je prvkem množiny $\{1,2,3\}$. Prvkem M_1 jsou pouze samotné množiny a čísla 3 a 5, tedy $|M_1| = 5$.

Nyní zavedeme dva důležité pojmy, a to sice *podmnožina* a *vlastní podmnožina*. Ačkoliv tyto termíny čtenář možná již zná, přesto je pro nás poměrně důležité stanovit si jejich význam a značení k nim, neboť s nimi dále budeme pracovat.

Definice 2.3.5 (Podmnožina a vlastní podmnožina). Necht A a B jsou množiny. Pokud platí

$$\forall x \in B : x \in A ,$$

pak říkáme, že B je *podmnožinou* A , což zapisujeme jako $B \subseteq A$. Speciálně, pokud navíc platí, že $A \neq B$, pak říkáme, že B je *vlastní podmnožinou* A a píšeme $B \subset A$.

Méně formálně řečeno, množina B je podmnožinou A , pokud každý prvek v B je obsažen i v A . Není zcela těžké vidět, že je-li množina B vlastní podmnožinou A , tj. $B \subset A$, pak je i $B \subseteq A$, ovšem opačné tvrzení (obecně) neplatí.

Poznámka 2.3.6. Vztah (nebo přesněji relace, viz (TODO: doplnit odkaz na sekci o relacích.)) „ \subseteq “ se nazývá *inkluze*.

Příklad 2.3.7. Příklady vztahů množin A, B mezi sebou:

- (i) $M_1 = \{1,2\}$, $M_2 = \{1,2,3\}$, pak platí $M_1 \subset M_2$ a tj. i $M_1 \subseteq M_2$, ale nikoliv $M_2 \subseteq M_1$;
- (ii) $N_1 = \{a,b,c\}$, $N_2 = \{a,b,c\}$, pak platí $N_1 \subseteq N_2$ a i $N_2 \subseteq N_1$, ale nikoliv $N_1 \subset N_2$ nebo $N_2 \subset N_1$;
- (iii) $K_1 = \emptyset$, $K_2 = \{k\}$, pak platí $K_1 \subset K_2$ a tudíž i $K_1 \subseteq K_2$.

Zde se hodí ještě upozornit na to, že prázdná množina je podmnožinou **každé množiny**. Dalším důležitým termínem pro nás bude *potenční množina*, neboli **množina všech podmnožin** dané množiny.

Definice 2.3.8 (Potenční množina). Necht X je libovolná množina. *Potenční množinou* množiny X nazveme množinu $\mathcal{P}(X)$, když platí

$$\forall A (A \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow A \subseteq X) .$$

(značení \mathcal{P} vychází z anglického „power set“)⁶

Příklad 2.3.9. Příklady potenčních množin:

- (i) $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,

⁶Též se občas využívá značení 2^X .

- (ii) $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$,
 (iii) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Přesuňme se k množinovým operacím. Čtenář nejspíše již zná operace *sjednocení*, *průniku* a *rozdílu* dvou množin. Sjednocením množin A a B jsme rozuměli množinu, která obsahovala prvky ležící v A nebo v B , průnikem množinu prvků ležících v A i v B a rozdílem množinu prvků ležících v A , ale nikoliv v B . Zdefinujme si tyto operace trochu formálněji v 2.3.10.

Definice 2.3.10 (Základní množinové operace). Mějme množiny A a B . Pak definujeme:

- (i) *sjednocení* $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$,
 (ii) *průnik* $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$,
 (iii) *rozdíl* $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Podobně jako u sumy \sum a produktu \prod , i zde můžeme sjednocení a průnik zapsat pomocí velkých operátorů \cup a \cap . Tj. máme-li množiny X_1, \dots, X_n , pak jejich sjednocení můžeme zapsat jako

$$\bigcup_{i=1}^n X_i = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$$

a průnik jako

$$\bigcap_{i=1}^n X_i = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n .$$

Pro obě operace platí jak *komutativní*, tak i *asociativní zákon*:

$$\begin{aligned} X \cup Y &= Y \cup X , \\ X \cap Y &= Y \cap X , \\ (X \cup Y) \cup Z &= X \cup (Y \cup Z) , \\ (X \cap Y) \cap Z &= X \cap (Y \cap Z) . \end{aligned}$$

Navíc sjednocení a průnik jsou vzájemně vůči sobě *distributivní*:

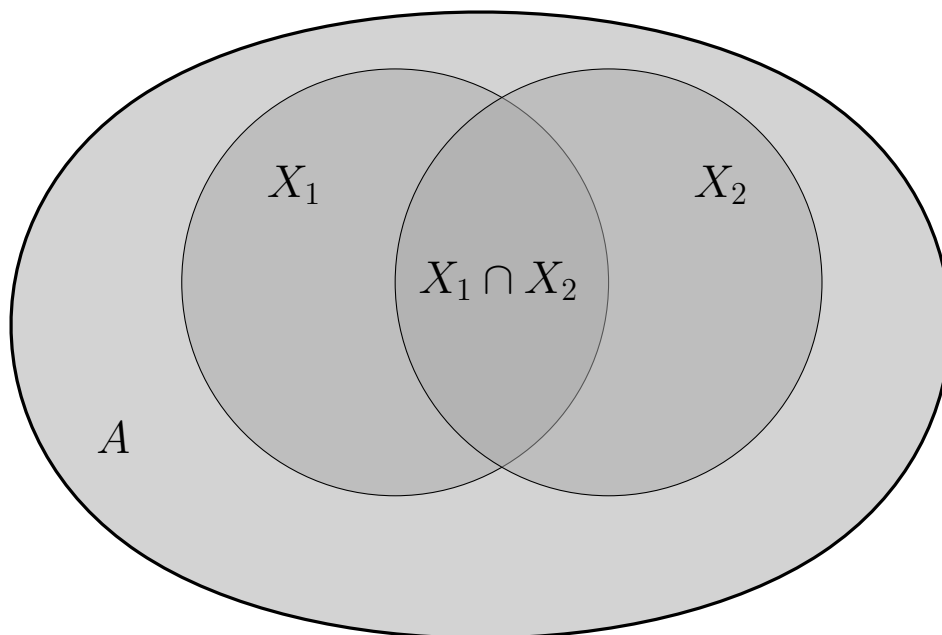
$$\begin{aligned} X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z) , \\ X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z) . \end{aligned}$$

Tento poznatek můžeme zobecnit užitím velkých operátorů \cup , \cap jako

$$\begin{aligned} A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n X_i \right) &= \bigcap_{i=1}^n (A \cup X_i) , \\ A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n X_i \right) &= \bigcup_{i=1}^n (A \cap X_i) . \end{aligned}$$

Ještě jedny známé vztahy pro množiny jsou tzv. *de Morganovy vzorce*

$$A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n X_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus X_i) \quad A \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n X_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \setminus X_i)$$



Obrázek 2.1: Vennův diagram pro de Morganovy vzorce při $n = 2$.

Později si ukážeme i jejich důkaz (viz sekce 2.4.2). Platnost de Morganových vzorců lze i pěkně graficky znázornit pomocí Vennových diagramů (viz obrázek 2.3.2).

Definice 2.3.11 (Disjunktní množiny). Necht X_1, X_2, \dots, X_n jsou libovolné množiny. Pokud platí

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} : X_i \cap X_j = \emptyset ,$$

pak říkáme, že množiny X_1, X_2, \dots, X_n jsou *disjunktní*.

2.3.3 Ještě k velkým operátorům

Po připomenutí práce s množinami se hodí ještě zmínit jiné způsoby zápisů pomocí velkých operátorů. Množinu, přes kterou sčítáme nemusíme nutně zadávat pouze počátečním a koncovým indexem, ale můžeme ji zadat i explicitně. Tedy např. sumu

$$\sum_{i=1}^4 i$$

lze zapsat i třeba takto:

$$\sum_{i \in \{1, 2, 3, 4\}} i = 1 + 2 + 3 + 4 .$$

Obecněji řečeno, pod znaménko sumy zapíšeme sčítací proměnnou a poté specifikujeme množinu hodnot, přes kterou sčítáme. Třeba součet $2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ můžeme zapsat jako

$$\sum_{2 \leq i \leq 5} i^2 .$$

Zápis může být (stejně jako u množin) částečně nebo úplně zadán slovně. Třeba:

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \text{ sudé}}} i - \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \text{ liché}}} j .$$

Podobně můžeme tyto způsoby zápisů využít i u jiných velkých operátorů. (Inspirováno [5].)

2.4 Důkazy

V matematice se lze setkat s celou řadou různých tvrzení. Od primitivních, jejichž platnost je zřejmá až po složitější, nad jejich platností je třeba se více zamyslet. Čtenář se nejspíše zatím spíše setkával s matematikou, která zahrnovala užívání jistých postupů. Např. zjednodušování algebraických výrazů, řešení soustav rovnic, ověřování trigonometrických identit, aj. Avšak hodně postupů v matematice je založeno na již známých výsledcích, o nichž bylo dokázáno, že jsou pravdivé. Pokud ovšem máme dokázat určité tvrzení, je třeba, aby bylo naše zdůvodnění jednoznačné a logicky správné. V této sekci se proto podíváme na důkazové techniky používané v matematice, které budeme dále v textu využívat.

Matematická tvrzení jsou často různě klasifikována v závislosti na jejich povaze. Základními typy jsou tyto.

- *Axióm.* Tvrzení, které implicitně považujeme za pravdivé a nedokazujeme jej. S axiomatikou jsme se již částečně seznámili v historické předmluvě (viz 1.2.3).
- *Věta.* Matematické tvrzení, jehož pravdivost můžeme ověřit důkazem.
- *Lemma.* Pomocné tvrzení, které běžně využíváme pro důkaz jiného (typicky složitějšího) tvrzení.
- *Důsledek.* Tvrzení, které je přímým důsledkem jiného tvrzení.

Čistě formálně však mezi **větou**, **lemmatem** a **důsledkem** není žádný rozdíl.

2.4.1 Důkaz přímý

Jedná se o asi nejjednodušší typ důkazu. Často jsou matematická tvrzení formulována jako implikace, tzn. „Jestliže platí A , pak platí B “. Konkrétně, např. „Je-li $x < 0$, pak $x^2 > 0$ “.

Myšlenka důkazu je taková, že začínáme od předpokladu A , z něhož dále odvozujeme dílčí tvrzení tak dlouho, až dojdeme k požadovanému závěru B . Symbolicky, pokud si označíme dílčí tvrzení v důkazu X_1, X_2, \dots, X_n , pak vlastně dokazujeme výrokovou formuli

$$(A \Rightarrow X_1) \wedge (X_1 \Rightarrow X_2) \wedge \dots \wedge (X_{n-1} \Rightarrow X_n) \wedge (X_n \Rightarrow B) . \quad (2.7)$$

V tomto procesu dokazování se využívá tautologie (xiii) z věty 2.1.13

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C) .$$

Z tohoto faktu vyplývá, že pokud je každá z dílčích implikací pravdivá, pak je nutně pravdivá i implikace $A \Rightarrow B$, kterou jsme chtěli dokázat⁷. Podívejme se na příklad podobný příklad z úvodu.

Tvrzení 2.4.1. *Nechť $x \in \mathbb{R}$. Je-li $x < 0$, pak $x^2 + 1 > 0$.*

Důkaz. Předpokladem našeho tvrzení je $x \in \mathbb{R} \wedge x < 0$. Víme, že pro každé reálné číslo x platí, že $x^2 \geq 0$. Z toho již plyne

$$0 \leq x^2 < x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 1 > 0 .$$

□

Posloupnost dokázaných implikací bychom mohli podle (2.7) zapsat nyní jako

$$(x \in \mathbb{R} \wedge x < 0 \Rightarrow x^2 \geq 0) \wedge (x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0) ,$$

a tedy jsme dokázali i implikaci v původním tvrzení $x < 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0$.

Všimněte si, že důkaz našeho tvrzení ve skutečnosti vůbec nezávisel na předpokladu, že $x < 0$, neboť jak jsme správně konstatovali, tak platí

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 .$$

Tj. dokázané tvrzení lze zobecnit klidně zobecnit.

Tvrzení. *Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak platí $x^2 + 1 > 0$.*

Poznámka 2.4.2. Též bychom mohli psát „Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak $x^2 + 1 > 0$ “; význam by byl stejný.

Tvrzení 2.4.3. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché číslo. Pak $3n + 7$ je sudé číslo.*

Důkaz. Začneme opět u předpokladu, že $n \in \mathbb{N}$ je liché číslo. To znamená, že

$$\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1 .$$

Po dosazení obdržíme

$$3(2k + 1) + 7 = 6k + 3 + 7 = 6k + 10 = 2(3k + 5) .$$

Protože $3k + 5$ je přirozené číslo, pak $3n + 7$ je dělitelné dvěma a je tedy sudé, což jsme chtěli dokázat.

□

Tvrzení 2.4.4 (AG nerovnost). *Pro $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ platí*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} .$$

⁷Výrokové proměnné lze v konkrétním případě nahradit příslušnými predikáty.

Důkaz. Při důkazu tohoto tvrzení vyjdeme z jednoduchého pozorování:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 0 .$$

Nyní stačí výraz upravit a dostaneme požadovanou nerovnost.

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} .$$

□

Tvrzení 2.4.5. *Pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y .$$

Důkaz. Zde je třeba si všimnout „dvojitě“ nerovnosti v dokazovaném tvrzení. To nám již napovídá, že ve skutečnosti musíme dokázat 2 dílčí tvrzení, konkrétně

$$x < \frac{x+y}{2} \quad \text{a} \quad \frac{x+y}{2} < y .$$

Při důkazu obou částí vyjdeme opět z předpokladu. Tedy mějme libovolná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ taková, že $x < y$. Pak jistě platí

$$x + x < x + y \Rightarrow 2x < x + y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} .$$

Tím jsme dokázali první nerovnost. Platnost druhé dokážeme analogicky:

$$x + y < y + y \Rightarrow x + y < 2y \Rightarrow \frac{x+y}{2} < y .$$

□

(Převzato z [6], str. 79 a [7], sekce *důkaz přímý*.)

Ne všechna tvrzení jsou v matematice nutně formulována jako implikace. Často se lze setkat s tvrzeními formulovanými jako ekvivalence, tj. $A \Leftrightarrow B$. Důkazy takových výroků jsou již trochu delší, neboť už nestačí pouze ukázat $A \Rightarrow B$. Vzpomeňme si však na tautologii, která nám dávala do souvislosti ekvivalenci s implikací (viz (xi) ve větě 2.1.13):

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) .$$

Z toho je již vidět, jak u takových tvrzení při důkazu postupovat. Zkrátka dokážeme zvlášť $A \Rightarrow B$ a $A \Leftarrow B$.

Tvrzení 2.4.6. *Nechť $x, y \in \mathbb{Z}$. Pak $3 \mid xy$ právě tehdy, když $3 \mid x$ nebo $3 \mid y$.*

Důkaz. (\Rightarrow). Začneme s předpokladem, že $3 \mid xy$. Víme, že pokud je číslo dělitelné třemi, pak jej lze zapsat jako $3k$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Uvažujme následující případy:

- $3 \mid x \wedge 3 \mid y$. Tehdy tvrzení jistě platí.

- $3 \nmid x$. Ukážeme, že pak nutně musí platit $3 \mid y$. Pokud x není dělitelné třemi, pak jej lze zapsat buď jako $3k + 1$, nebo $3k + 2$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

$$xy = (3k + 1)y \quad \text{nebo} \quad xy = (3k + 2)y$$

Protože čísla $3k + 1$ a $3k + 2$ nejsou dělitelná třemi, pak je vidět, že musí platit $3 \mid y$.

- $3 \nmid y$. Zde je postup analogický.

Tím máme dokázanou implikaci $3 \mid xy \Rightarrow 3 \mid x \vee 3 \mid y$.

(\Leftarrow). Nyní předpokládáme, že platí $3 \mid x \vee 3 \mid y$; chceme ukázat, že $3 \mid xy$. Bez újmy na obecnosti⁸, nechť je x dělitelné třemi. Pak existuje $x = 3k$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Po dosazení dostaneme

$$xy = (3k)y = 3(ky) \Rightarrow 3 \mid xy.$$

Tedy dokázali jsme obě implikace a tím i původní tvrzení. □

V sekci 2.3 jsme si ukázali *de Morganovy vzorce* pro množiny. Nyní si ukážeme důkaz jejich platnosti. Zároveň si tak ukážeme příklad „množinového“ důkazu.

Tvrzení 2.4.7 (de Morganovy vzorce). *Nechť A, X_1, X_2, \dots, X_n jsou libovolné množiny. Pak platí*

$$(i) \quad A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n X_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus X_i),$$

$$(ii) \quad A \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n X_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \setminus X_i).$$

Důkaz. Nejdříve si uvědomme, co vlastně říkají dané rovnosti. Vyjadřují, že výsledné množiny jsou stejné. Kdy toto platí? Právě když dané množiny obsahují stejné prvky, tj.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Myšlenka našeho důkazu bude tedy taková, že uvážíme libovolný prvek x náležící pravé straně rovnosti a ukážeme, že rovněž náleží i straně druhé.

Ukážeme si platnost (i), avšak důkaz (ii) je zcela analogický. Tedy budiž dáno $x \in A \setminus (\bigcup_{i=1}^n X_i)$. Z definice rozdílu množin (viz 2.3.10) tedy musí platit

$$x \in A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n X_i \right) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin \bigcup_{i=1}^n X_i.$$

Protože však prvek x nenáleží sjednocení množin X_1, \dots, X_n , pak nenáleží žádné z nich:

$$x \notin \bigcup_{i=1}^n X_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : x \notin X_i.$$

⁸Termín *bez újmy na obecnosti* (někdy zkráceně *BÚNO*) se v matematických textech používá v situacích, kdy může nastat více možností, avšak říkáme, že jejich důkazy jsou analogické.

Celkově tedy nyní víme, že

$$x \in A \wedge \forall i \in \{1, \dots, n\} : x \notin X_i \quad (2.8)$$

Nyní se podívejme na pravou stranu zkoumané rovnosti. Z (2.8) již plyne

$$\begin{aligned} x \in A \wedge (\forall i \in \{1, \dots, n\} : x \notin X_i) &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : x \in (A \setminus X_i) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n (A \setminus X_i) , \end{aligned}$$

a celkově tedy jsme dokázali implikaci

$$x \in A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n X_i \right) \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n (A \setminus X_i) .$$

Prvek x jsme však volili libovolně a náš argument výše je tak univerzální (platí pro všechny prvky). Zároveň si však všimněme, že všechna odvozená dílčí tvrzení jsou ekvivalencemi a tedy platí i opačná implikace

$$x \in A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n X_i \right) \Leftarrow x \in \bigcap_{i=1}^n (A \setminus X_i) .$$

Z toho dostáváme platnost původní rovnosti v (i). Tj.

$$\left(\forall x : x \in A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n X_i \right) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n (A \setminus X_i) \right) \Leftrightarrow A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n X_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus X_i) .$$

□

Obecně pokud je tvrzení takové, že platí pro všechny objekty z jisté množiny, pak bývá právě častým způsobem důkazu, že se platnost ukáže obecně pro kterýkoliv objekt z dané množiny nezávisle na jeho volbě.

2.4.2 Důkaz nepřímý

Řada tvrzení v matematice však není až tak jednoduchá na dokázání přímo. Důkazy, které jsme si ukazovali, vždy začínaly od předpokladu a postupně jsme došli k požadovanému závěru. Lze ale postupovat i jinak. Opět se odkážeme na dříve zmíněné tautologie věty 2.1.13, konkrétně na (x):

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) . \quad (2.9)$$

Implikace je ve skutečnosti ekvivalentní s tvrzením, že pokud neplatí závěr, pak neplatí ani předpoklad. Na této skutečnosti je založen *důkaz nepřímý* (též *důkaz obměnou*). Podívejme se na příklady užití.

Tvrzení 2.4.8. *Nechť $x \in \mathbb{Z}$ a $3 \nmid (x^2 - 1)$. Pak $3 \mid x$.*

V tomto případě máme dvě možnosti. Buď začneme s předpokladem $3 \nmid (x^2 - 1)$ a dokážeme, že $3 \mid x$ (tedy dokážeme tvrzení přímo), nebo naopak budeme předpokládat, že $3 \nmid x$ a dokážeme negaci původního předpokladu. Ačkoliv by se jistě

našla možnost, jak tvrzení dokázat přímo, přesto se nejspíše zdá jednodušší začít s předpokladem, že x není dělitelné třemi.

Důkaz. Necht $3 \nmid x$. Ukážeme, že platí $3 \mid (x^2 - 1)$. Podle předpokladu lze x zapsat jako $3k + 1$ nebo $3k + 2$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Bez újmy na obecnosti píšme $x = 3k + 1$. Pak $x^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k) \Rightarrow 3 \mid (x^2 - 1)$.

Tedy dokázali jsme, že

$$3 \nmid x \Rightarrow 3 \mid (x^2 - 1),$$

což je však podle 2.9 ekvivalentní s

$$3 \nmid (x^2 - 1) \Rightarrow 3 \mid x$$

a původní tvrzení je tak dokázané. □

Tvrzení 2.4.9. *Necht jsou dány množiny A a B . Pak*

$$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A.$$

Důkaz. (\Rightarrow). Tuto implikaci dokážeme obměnou. Necht jsou dány množiny A a B takové, že B není podmnožinou A . Pak

$$\exists x \in B : x \notin A.$$

Prvek x se tedy objeví i ve sjednocení $A \cup B$, tj.

$$x \in A \cup B.$$

Ale protože $x \notin A$, pak $A \cup B \neq A$.

(\Leftarrow). Opačnou implikaci lze již dokázat přímo a využijeme zde poměrně hezkého triku, který se při dokazování podobných tvrzení využívá. Tvrdíme-li, že dvě množiny se rovnají, pak ovšem i platí, že jsou vzájemně podmnožinami té druhé. Symbolicky

$$X = Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X).$$

V našem případě budeme chtít ukázat, že platí

$$(A \subseteq A \cup B) \wedge (A \cup B \subseteq A).$$

Platnost inkluze $A \subseteq A \cup B$ je vidět okamžitě (vyplývá z definice sjednocení), neboť pro libovolný prvek x platí:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$

a tedy skutečně $A \subseteq A \cup B$.

Zbývá ukázat, že $A \cup B \subseteq A$. Vezměme libovolný prvek $x \in A \cup B$; ukážeme že $x \in A$. Nyní mohou nastat dvě možnosti:

- $x \in A$. Pak máme triviálně požadovaný výsledek.
- $x \in B$. Z předpokladu víme, že $B \subseteq A$, z čehož opět plyne $x \in A$.

Dokázali jsme tedy obě inkluze, tj. $A \subseteq A \cup B$ a $A \cup B \subseteq A$ a tedy platí

$$A \cup B = A.$$

□

(Převzato z [6], str. 111.)

2.4.3 Důkaz sporem

Už jsme si představili dvě základní důkazové techniky. Nyní k nim přidáme metodu třetí – *důkaz sporem*.

Uvažme, že máme tvrzení ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$, které chceme dokázat. Podle (ix) ve větě 2.1.13 víme, že vždy platí

$$(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow \neg P . \quad (2.10)$$

Tato tautologie říká, že pokud z výroku P lze odvodit jeho negaci $\neg P$, pak výrok P neplatí.

Myšlenka důkazu sporem je tedy taková, že **budeme předpokládat platnost negace dokazovaného tvrzení $\neg(A \Rightarrow B)$ a dojdeme k závěru, který je v rozporu předpokladem**. Z toho pak podle (2.10) plyne, že znegované tvrzení neplatí a podle *zákona vyloučeného třetího* (viz (ii) ve větě 2.1.13) musí platit tvrzení opačné (což je původní tvrzení).

Ještě si vzpomeňme na tautologii

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow B \vee \neg A .$$

Pomocí ní můžeme psát

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg(B \vee \neg A) \equiv A \wedge \neg B .$$

To ostatně dává i smysl. Implikace je nepravdivá pouze, když platí její předpoklad, ale neplatí její závěr.

Tvrzení 2.4.10. *Nechť jsou dána $a, b \in \mathbb{Z}$, kde a je sudé a b je liché. Pak $4 \nmid (a^2 + 2b^2)$.*

Důkaz. Nejprve znegujeme dokazované tvrzení, tj.

$$\neg((2 \mid a \wedge 2 \nmid b) \Rightarrow 4 \nmid (a^2 + 2b^2)) \Leftrightarrow (2 \mid a \wedge 2 \nmid b) \wedge 4 \mid (a^2 + 2b^2) .$$

Pro spor tedy předpokládejme, že je-li a sudé a b liché, pak výraz $a^2 + 2b^2$ je dělitelný čtyřmi. Tedy existují čísla $k, l \in \mathbb{Z}$ taková, že $a = 2k$ a $b = 2l - 1$. Tedy

$$a^2 + 2b^2 = (2k)^2 + 2(2l - 1)^2 = 4k^2 + 8l^2 - 8l + 2 = 4(k^2 + 2l^2 - 2l) + 2 .$$

Výraz $4(k^2 + 2l^2 - 2l)$ je jistě dělitelný 4. Avšak protože platí $4 \mid a^2 + 2b^2$, pak musí také platit $4 \mid 2$. To očividně však neplatí. To znamená, že znegované tvrzení je nepravdivé a platí tvrzení původní, což jsme chtěli dokázat. □

(Převzato z [6], str. 126) V případě důkazu sporem je asi nejznámější (a též i nejstarší dochovaný) důkaz, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Tvrzení 2.4.11. *Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.*

Důkaz. Než začneme s důkazem, trochu si rozmysleme dokazované tvrzení. Jak bude vypadat jeho negace? Opačným tvrzením je, že *číslo $\sqrt{2}$ je racionální*. Z definice racionálního čísla to však znamená

$$\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q} .$$

O každém zlomku však víme, že jej lze zapsat v základním tvaru, tj. můžeme zároveň předpokládat, že p a q jsou nesoudělná. S tímto budeme dále pracovat. Pišme

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \frac{p}{q} \\ 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2q^2 &= p^2.\end{aligned}$$

Z posledního řádku lze vidět, že p^2 lze zapsat jako dvojnásobek nějakého jiného čísla. Tedy p^2 je určitě sudé. Co nám to říká o samotném p ? Že p je také sudé. (O tom není těžké se přesvědčit. Stačí si spočítat $(2k)^2$ a analogicky pro lichá čísla $(2l-1)^2$.) Tzn. že existuje $r \in \mathbb{Z}$ takové, že $p = 2r$. Nyní dosadíme:

$$\begin{aligned}2q^2 &= (2r)^2 \\ 2q^2 &= 4r^2 \\ q^2 &= 2r^2.\end{aligned}$$

Tedy q^2 je také nutně sudé a tedy i q je sudé. Dohromady tedy p a q jsou obě sudá. To je však spor, neboť jsme předpokládali, že p a q jsou nesoudělná. Tzn. nemůže neexistovat zlomek p/q , který by byl roven $\sqrt{2}$ a byl v základním tvaru. \square

Tvrzení 2.4.12. *Prvočísel je nekonečně mnoho.*

Důkaz. Pro spor naopak uvažujme, že prvočísel je konečně mnoho; označme si je p_1, p_2, \dots, p_n . Definujeme číslo m následovně:

$$m = p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Nyní k číslu m přičteme 1

$$m + 1 = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Na závěr celou rovnost vydělíme kterýmkoliv z čísel p_1, p_2, \dots, p_n ; bez újmy na obecnosti zvolme p_1 :

$$\frac{m+1}{p_1} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n + 1}{p_1} = p_2 \cdots p_n + \frac{1}{p_1}.$$

Číslo $p_2 \cdots p_n$ je jistě přirozené, avšak $1/p_1$ již přirozené není (nejmenší prvočíslo je 2). Je vidět, že nově vzniklé přirozené číslo $m+1$ není dělitelné žádným z prvočísel p_1, p_2, \dots, p_n . To však znamená, že $m+1$ je buď samo prvočíslo, nebo je dělitelné prvočíslem, které není součástí posloupnosti p_1, p_2, \dots, p_n . V obou případech však dostáváme spor, neboť jsme předpokládali, že posloupnost p_1, p_2, \dots, p_n obsahuje všechna prvočísla. \square

2.4.4 Důkaz matematickou indukcí

K této důkazové technice si na úvod ukažme příklad. Čtenáři je jistě znám vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti. Jistě tak pro nás neměl být problém určit součet

$$\sum_{k=0}^n 2^k .$$

Představme si na chvíli, že bychom neznali daný vzorec. Zkusme si vypočítat prvních několik hodnot:

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 , \\ 2^0 + 2^1 &= 3 , \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 &= 7 , \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 &= 15 . \end{aligned}$$

Zdá se, že vzorec pro obecné n by mohl být $2^{n+1} - 1$. Ale i kdybychom to ověřili pro jakékoliv množství hodnot n , stále to nebude není důkaz. Jak na to? K podobným tvrzením se využívá tzv. *matematická indukce* (někdy zkráceně jen *indukce*). Ukažme si na tomto příkladu způsob použití (formální princip si vysvětlíme později).

Naším cílem je tedy dokázat, že $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1 .$$

(i) Nejdříve ověříme platnost vzorce pro nejmenší možné n , tj. pro $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^0 2^k = 2^0 = 1 \quad \text{a} \quad 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1 .$$

Pro $n = 0$ vzorec platí.

(ii) Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro určité $n = n_0 \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že pak tvrzení nutně musí platit i pro $n = n_0 + 1$. Pišme

$$\sum_{k=0}^{n_0+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n_0} 2^k + 2^{n_0+1} .$$

Podle předpokladu vzorec platí pro n_0 , tedy za $\sum_{k=0}^{n_0} 2^k$ můžeme dosadit $2^{n_0+1} - 1$. Tedy

$$\sum_{k=0}^{n_0+1} 2^k + 2^{n_0+1} = 2^{n_0+1} - 1 + 2^{n_0+1} = 2 \cdot 2^{n_0+1} - 1 = 2^{n_0+2} - 1 .$$

To je ale přesně vzorec pro $n = n_0 + 1$.

Tím jsme dokázali dané tvrzení. Jak? Podle (i) vzorec platí pro $n = 0$. Podle (ii) pak platí, že když tvrzení platí pro $n = 0$, pak platí i pro $n = 1$ (pro $n_0 = 0$). Pro $n = 1$ pak opět podle (ii) platí, že tvrzení platí i pro $n = 2$. Opět podle (ii) víme, že když tvrzení platí pro $n = 2$, pak platí i pro $n = 3$ a tak dále. Z tohoto principu

plyne, že tvrzení tedy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Krok (ii) se nazývá *indukční krok* a předpoklad, že dokazované tvrzení platí pro nějaké $n = n_0$ se nazývá *indukční předpoklad*. Někdy se v důkazech indukcí pro upřesnění specifikuje, podle jaké proměnné dané tvrzení dokazujeme. V tomto případě bychom řekli: „*Indukcí podle n .*“ (Inspirováno [5], str. 32.)

Tento postup vychází tzv. *principu matematické indukce*, který lze zformulovat jako větu.

Věta 2.4.13 (Princip matematické indukce). *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je P_n predikátová formule. Pokud platí*

(i) *platí P_1 a*

(ii) *platí $\forall k \in \mathbb{N} : P_k \Rightarrow P_{k+1}$,*

pak platí $\forall n \in \mathbb{N} : P_n$.

(Převzato z [6], str. 144.)

Tuto větu v různých textech lze najít i v jiných formulacích. Důkaz této věty však vyžaduje složitější znalosti a uvedeme si jej proto až později (viz **(TODO: doplnit odkaz.)**). Uvedme si ještě jeden příklad.

Úmluva 2.4.14. Při aplikaci indukčního předpokladu se někdy píše zkratka *I.P.*, čehož se budeme držet v dalším textu.

Tvrzení 2.4.15. *Pro každé $n \geq 5$ platí $2^n > n^2$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí podle n .

- Pro nejmenší hodnotu $n = 5$ dostáváme $2^5 = 32 > 5^2 = 25$, což jistě platí.
- Nyní dokážeme indukční krok. Tedy předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolné $n_0 \geq 5$; ukážeme platnost pro $n_0 + 1$:

$$2^{n_0+1} = 2^{n_0} \cdot 2 \stackrel{\text{I.P.}}{>} n_0^2 \cdot 2.$$

Pro dokázání tvrzení nyní stačí ukázat, že $2n_0^2 > (n_0 + 1)^2$.

$$\begin{aligned} 2n_0^2 &= n_0^2 + n_0^2 > n_0^2 + 5n_0 = n_0^2 + 2n_0 + 3n_0 = n_0^2 + 2n_0 + 15 \\ &> n_0^2 + 2n_0 + 1 = (n_0 + 1)^2. \end{aligned}$$

Celkově tedy dostáváme $2^{n_0+1} > (n_0 + 1)^2$.

Podle principu matematické indukce tedy platí $\forall n \geq 5 : 2^n > n^2$, což jsme chtěli dokázat. □

(Převzato z [6], str. 153.)

(TODO: Doplnit cvičení.)

Seznam použité literatury

- [1] E. Fuchs. *Teorie množin pro učitele*. Masarykova univerzita, Brno, 2003. ISBN 80-210-2201-9.
- [2] B. Bolzano. *Paradoxy nekonečna*. Československá akademie věd, Praha, 1963.
- [3] Eukleidés. *Základy*. Jednota českých matematiků a fyziků, Praha, 1907.
- [4] B. Balcar a P. Štěpánek. *Teorie množin*. Academia, Praha, 1986. ISBN 80-200-0470-X.
- [5] J. Matoušek a J. Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 4., upr. a dopl. vyd. Karolinum, Praha, 2009. ISBN 978-80-246-1740-4.
- [6] Gary Chartrand, Albert D. Polimeni, and Ping Zhang. *Mathematical proofs: A transition to Advanced Mathematics*. Pearson Education, 2014. ISBN 9780321797094.
- [7] Univerzita Karlova. Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta. Matematická logika. *[online]*, Citováno 24. března 2022. Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/logika/?page=prim>.

Seznam použitých zkratek

Příloha A

Přílohy

A.1 První příloha