



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

David Weber

### **Stručný úvod do teorie množin pro středoškoláky**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na  
vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na  
vzdělávání se sdruženým studiem  
informatika se zaměřením na  
vzdělávání

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

(TODO: Doplnit poděkování.)

Název práce: Stručný úvod do teorie množin pro středoškoláky

Autor: David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: (TODO: Doplnit abstrakt.)

Klíčová slova: teorie množin kardinál ordinál přirozené číslo nekonečno Georg Cantor Bernard Bolzano

Title: A Brief Introduction to Set Theory for High Schools

Author: David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: (TODO: Doplnit abstrakt (EN).)

Keywords: set theory cardinal number ordinal number natural number infinity Georg Cantor Bernard Bolzano

# Obsah

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Historický úvod k teorii množin</b>          | <b>4</b>  |
| 1.1      | Potenciální versus aktuální nekonečno . . . . . | 4         |
| 1.1.1    | Galileova úvaha o velikosti . . . . .           | 5         |
| 1.1.2    | Grandiho řada . . . . .                         | 5         |
| 1.1.3    | Nekonečno v matematické analýze . . . . .       | 8         |
| 1.2      | Počátky teorie množin a současnost . . . . .    | 11        |
| 1.2.1    | Bernard Bolzano . . . . .                       | 11        |
| 1.2.2    | Georg Cantor . . . . .                          | 12        |
| 1.2.3    | Teorie množin v současnosti . . . . .           | 14        |
| <b>2</b> | <b>Logika</b>                                   | <b>17</b> |
| 2.1      | Výroková logika . . . . .                       | 17        |
| 2.1.1    | Logické spojky . . . . .                        | 17        |
| 2.1.2    | Výrokové formule . . . . .                      | 18        |
| 2.2      | Kvantifikátory a predikátový počet . . . . .    | 24        |
| 2.2.1    | Primitivní predikáty . . . . .                  | 25        |
| 2.2.2    | Jiné zápisy formulí s kvantifikátory . . . . .  | 26        |
| 2.2.3    | Negace formulí s kvantifikátory . . . . .       | 27        |
| <b>3</b> | <b>Axiomy teorie množin</b>                     | <b>29</b> |
| 3.1      | Axiomy 1 až 3 . . . . .                         | 31        |
| 3.1.1    | Axiom existence . . . . .                       | 31        |
| 3.1.2    | Axiom extenzionality . . . . .                  | 31        |
| 3.1.3    | Axiom dvojice . . . . .                         | 31        |
| 3.2      | Axiomy 4 až 6 . . . . .                         | 34        |
| 3.2.1    | Schéma axiomů vydělení . . . . .                | 34        |
| 3.2.2    | Axiom potence . . . . .                         | 37        |
| 3.2.3    | Axiom sumy . . . . .                            | 37        |
| 3.3      | Axiom nekonečna . . . . .                       | 39        |
| <b>4</b> | <b>Relace</b>                                   | <b>40</b> |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.1      | Kartézský součin . . . . .                       | 40         |
| 4.2      | Zavedení relace . . . . .                        | 42         |
| 4.3      | Zobrazení . . . . .                              | 44         |
| 4.3.1    | Zavedení a související pojmy . . . . .           | 44         |
| 4.3.2    | Druhy zobrazení . . . . .                        | 46         |
| <b>5</b> | <b>Budování číselných množin</b>                 | <b>49</b>  |
| 5.1      | Peanovy axiomy . . . . .                         | 49         |
| 5.2      | Přirozená čísla . . . . .                        | 51         |
| 5.3      | Relace podrobněji . . . . .                      | 52         |
| 5.3.1    | Druhy relací . . . . .                           | 52         |
| 5.3.2    | Relace uspořádání . . . . .                      | 55         |
| 5.4      | Speciálně o uspořádaných množinách . . . . .     | 58         |
| 5.5      | Vlastnosti přirozených čísel . . . . .           | 62         |
| 5.6      | Aritmetika přirozených čísel . . . . .           | 64         |
| <b>6</b> | <b>Porovnávání nekonečných množin</b>            | <b>66</b>  |
| 6.1      | Hilbertův hotel . . . . .                        | 66         |
| 6.2      | Porovnávání podle počtu prvků . . . . .          | 69         |
| 6.3      | Spočetné a nespočetné množiny . . . . .          | 73         |
|          | <b>Seznam použité literatury</b>                 | <b>80</b>  |
|          | <b>Seznam obrázků</b>                            | <b>81</b>  |
| <b>A</b> | <b>Důkazy</b>                                    | <b>83</b>  |
| A.1      | Důkaz přímý . . . . .                            | 83         |
| A.2      | Důkaz nepřímý . . . . .                          | 86         |
| A.3      | Důkaz sporem . . . . .                           | 88         |
| A.4      | Důkaz matematickou indukcí . . . . .             | 90         |
| <b>B</b> | <b>Dodatky k logice</b>                          | <b>93</b>  |
| <b>C</b> | <b>Dodatky k axiomům teorie množin</b>           | <b>95</b>  |
| C.1      | Důkazy aritmetických vlastností množin . . . . . | 95         |
| C.2      | Schéma axiomů nahrazení . . . . .                | 96         |
| C.3      | Axiom fundovanosti . . . . .                     | 97         |
| <b>D</b> | <b>Dodatky k budování číselných množin</b>       | <b>99</b>  |
| <b>E</b> | <b>Dodatky k porovnávání nekonečných množin</b>  | <b>100</b> |
| E.1      | Relace ekvivalence . . . . .                     | 100        |

|     |                             |     |
|-----|-----------------------------|-----|
| E.2 | Mohutnost množiny . . . . . | 103 |
|-----|-----------------------------|-----|

# Kapitola 1

## Historický úvod k teorii množin

Čtenář se s pojmem *množina* již jistě setkal. Často se o množině hovoří jako o „celku“, „souboru“ nebo „souhrnu“ obsahujícím jisté prvky. Na střední škole jsme si s tímto chápáním uvedeného pojmu nejspíše vystačili, když jsme se učili např. o Vennových diagramech. To nám poskytovalo poměrně názorný způsob, jak si představit množiny a vztahy mezi nimi. Většinou jsme se dotazovali např. na velikost množiny či zda jí nějaký zvolený prvek náleží, či nikoliv. Pojem „náležení“ jsme stejně jako množinu též nejspíše nikterak formálně nedefinovali, přesto ale intuitivně tušíme, co to znamená, když se řekne, že „prvek náleží množině“. Jak byste ale formálně definovali množinu? Nebo co teprve „býti prvkem množiny“?

Zkusme ještě otázku jiného charakteru. Jak by čtenář odpověděl na otázku, jestli je více čísel v intervalu  $(0,1)$ , nebo všech přirozených čísel? A jak by svou odpověď zdůvodnil? Odpověď **stejně**, neboť jich je nekonečně, mnoho zní velmi intuitivně, ale jak se později dozvíme, odpověď na tuto otázku je daleko složitější, než se může zdát.

Důvod, proč se najednou místo množin zabýváme *nekonečnem*, je ten, že se ve skutečnosti jedná o hlavní příčinu vzniku teorie množin (nikoliv definice pojmu „množina“, jak by se mohlo zdát). V následujících sekcích se proto podíváme na to, jak se na pojem nekonečna nahlíželo v historii a jaké problémy způsoboval.

### 1.1 Potenciální versus aktuální nekonečno

Co je vlastně nekonečno? Čtenáři toto může připadat jako absurdní dotaz, ale tento zdánlivě jasný pojem způsoboval ve své době potíže.

Fakt, že přirozených čísel je nekonečně mnoho, byl znám již ve starověku.

$$1, 2, 3, \dots$$

I žáci na základních školách jsou si této skutečnosti vědomi a pravděpodobně se nad tím nikdo z nich nepozastaví. Jak ale můžeme na tuto skutečnost pohlížet? Existují dva základní způsoby.

Pokud začneme postupně vypisovat všechna přirozená čísla, jistě je nikdy nevypíšeme všechna, protože bez ohledu na to, jakou si zvolíme mez, vždy ji nakonec přesáhneme. Takovému nekonečnému **procesu** pak říkáme *potenciální nekonečno*.



Druhou možností ale je, že se na množinu přirozených čísel budeme dívat již jako na „hotovou“. To znamená, že se nebudeme zabývat tím, jak všechna přirozená čísla vypíšeme, ale budeme na tuto množinu nahlížet již jako na **celek**, tedy nekonečno budeme chápat v uzavřené formě. V takovém případě mluvíme o tzv. *aktuálním nekonečnu*.

Starým Řekům se však jak z důvodů matematických, tak filozofických, zdálo, že lidskému myšlení je přístupné pouze nekonečno **potenciální**. ([1], str. (TODO: doplnit stranu.)) O tom se lze přesvědčit už ze samotných *Eukleidových axiomů*. K axiomatice čtenář bude mít možnost blíže nahlédnout v 1.2.3 a později také v kapitole 3. EUKLEIDÉS právě z důvodu nemyslitelnosti aktuálního nekonečna mluvil o *přímce* jako o úsečce, kterou může libovolně prodlužovat, netvrdil, že je „nekonečná“ nebo „nekonečně dlouhá“, jak říkáme dnes.

### 1.1.1 Galileova úvaha o velikosti

S problémem nekonečna se však pojily i další problémy. Při zrodu samotné teorie množin v 70. letech 19. století se totiž nabízela otázka, zdali *má vůbec smysl porovnávat nekonečné množiny*. Nad tím se pozastavil už jeden z géníů 16. a 17. století GALILEO GALILEI (1564–1642). Ten si vypsals dvě posloupnosti čísel:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad \text{a} \quad 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots,$$

tzn. přirozená čísla a jejich druhé mocniny. Avšak při pohledu na tyto dvě posloupnosti si Galileo uvědomil, že každý prvek množiny přirozených čísel lze „spárovat“ s jeho druhou mocninou (v dnešní terminologii bychom řekli, že existuje *bijekce*; na tu se blíže podíváme v sekci 4.3).

$$\begin{array}{c} 1, 2, 3, \dots, n, \dots \\ \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \\ 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots \end{array}$$

To by však znamenalo, že přirozených čísel a jejich druhých mocnin je **stejně mnoho**. Avšak jeden z Eukleidových logických axiomů říká, že *celek je větší část*. Proto se tehdy Galileovi zdál tento závěr jako naprostý nesmysl, a tak usoudil, že porovnávat nekonečné množiny podle velikosti zkrátka nemá žádný smysl. Tvrdil tak, že **aktuální nekonečno** je sporné, a tedy nemůže existovat. ([1], str. 103–105.)

### 1.1.2 Grandiho řada

Dalším typickým problémem týkajícím se nekonečna je tzv. *Grandiho řada*. Čtenář se nejspíše již s řadami setkal na střední škole, specificky s řadou aritmetickou a geometrickou. Řadou v matematice rozumíme zápis

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

kde pro všechna přirozená  $i$  je  $a_i$  člen nějaké posloupnosti. U řad nás celkem pochopitelně zajímal jejich součet. To nebyl většinou problém, neboť jsme se převážně zajímali o řady konečné (a speciálně pro aritmetickou a geometrickou posloupnost jsme měli i elegantní vzorce), ale uvažíme-li řady nekonečné, mohou nastat potíže.

Co se vůbec rozumí pod pojmem „součet nekonečné řady“? Jako příklad si vezmeme řadu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

tedy sčítáme členy posloupnosti  $\{1/2^n\}_{n=1}^\infty$ . Podívejme se, jak se situace bude vyvíjet, když budeme členy postupně přičítat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 0,5 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= 0,75 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= 0,875 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &= 0,9375.\end{aligned}$$

Těmto součtům se říká tzv. *částečné součty*. Po součtu prvních dvaceti členů bude výsledek následující:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{20}} = 0,999999046.$$

Jak je vidět, částečné součty se postupně „blíží“ nejspíše číslu 1. Dávalo by tedy smysl prohlásit číslo 1 za výsledek této nekonečné řady, tj.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Tímto způsobem obecně vnímáme součet nekonečné řady: **hodnota, ke které se blíží částečné součty**. (Formální definici součtu nekonečné řady si zde odpustíme.)

Problému s nekonečnými řadami si všiml italský matematik GILDO GRANDI (1671–1742). Uvažme následující rovnost:

$$0 = 0 + 0 + 0 + \cdots.$$

To nejspíše nevypadá nikterak zajímavě. Přeci jen nekonečným sčítáním nul celkem přirozeně nemohu dostat jiný výsledek než opět nulu. Nulu si však můžeme vyjádřit jako  $1 - 1$ . Aplikací na rovnost výše dostaneme

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots. \quad (1.1)$$

Podle asociativního zákona pro sčítání můžeme změnit uzávorkování. Změníme jej proto takto

$$0 = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$$

a nakonec z každé závorky vytkneme znaménko „–“

$$0 = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

Tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \\ &= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots \\ &= 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1. \end{aligned}$$

Aplikací jednoduchých aritmetických pravidel jsme dospěli k závěru, že  $0 = 1$ . To je samozřejmě nesmysl, ale kde je tedy chyba? (Zde poprosím čtenáře, aby se zkusil zamyslet.)

*Grandiho řadou* nazýváme zápis

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

kterou jsme obdrželi u rovnosti (1.1) (až na uzávorkování). Není těžké si všimnout, že postupným sčítáním jednotlivých členů se budou částečné součty opakovat

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 0 &= 1 - 1, \\ 1 &= 1 - 1 + 1, \\ 0 &= 1 - 1 + 1 - 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zkusme k této řadě přistoupit ještě jedním způsobem. Uvažujme, že řada má součet, který si označíme  $S$ . Pak

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Opět využitím asociativního zákona a vytknutím znaménka „–“ upravíme řadu na pravé straně takto:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots).$$

Výraz v závorce na pravé straně je opět námi vyšetřovaná řada se součtem  $S$ , tedy z toho vyplývá

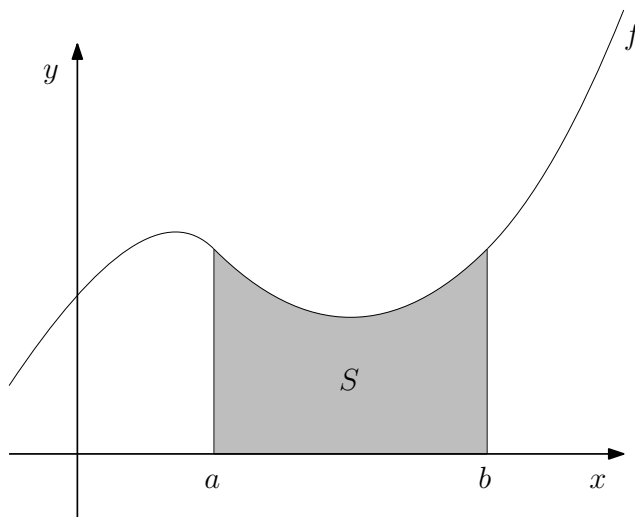
$$\begin{aligned} S &= 1 - S \\ S &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Toto je však také zarážející výsledek, neboť, jak jsme se sami přesvědčili, částečné součty pouze oscilují mezi 0 a 1.

Všimněme si, že rovnosti uvedené výše jsme obdrželi pouhou aplikací základních početních pravidel; přesto jsou však sporné. Tyto výsledky později vedly k novým poznatkům v aritmetice, a to sice faktu, že asociativita a komutativita definitivně platí pouze u konečných součtů.

### 1.1.3 Nekonečno v matematické analýze

Velká část matematické analýzy je založená na úvahách s *nekonečně malými veličinami*; často se mluví o tzv. *infinitesimálním počtu*. Čtenář se s těmito pojmy již možná setkal, ačkoliv nemusí mít nutně představu o jeho přesném významu. Asi nejznámějším příkladem je integrální počet, specificky výpočet „plochy pod křivkou“.



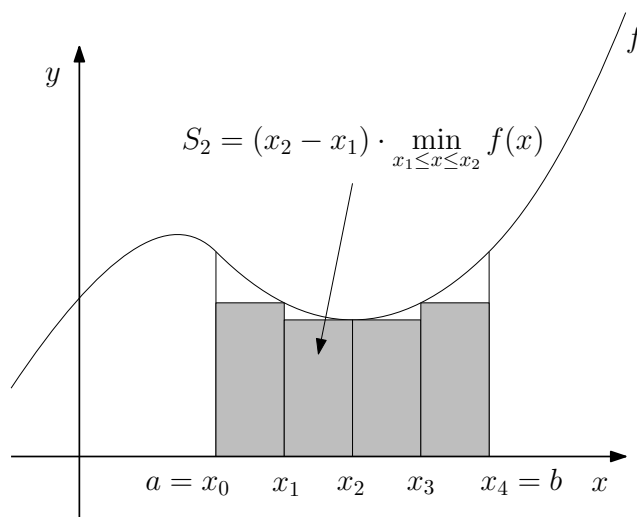
Obrázek 1.1: Příklad určitého integrálu funkce  $f$  na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Obrázek 1.1 a obrázky jemu podobné se často uvádí ve spojitosti s tzv. *určitým integrálem*. Zde bychom mohli psát

$$S = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Pro upřesnění, pokud platí, že funkce  $f$  je na intervalu  $\langle a, b \rangle$  kladná, pak integrál  $\int_a^b f(x) \, dx$  je obsah plochy pod grafem funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Výpočet obsahu takové složitě vypadající plochy, jako na obrázku 1.1, se může zdát bez znalosti integrálního počtu takřka nemožným úkolem. Pokusme se ale na danou problematiku podívat právě optikou infinitesimálního počtu. (Znalý čtenář snad promine, že se zatím zdržím formalismů a pouze jednoduše naznačím myšlenku.)

Pro začátek zkusíme plochu pouze aproximovat. K tomu využijeme tvar, jehož obsah jsme schopni triviálně vypočítat – obdélníka. Pro začátek zkusíme plochu aproximovat pomocí 4 obdélníků (viz obrázek 1.2).



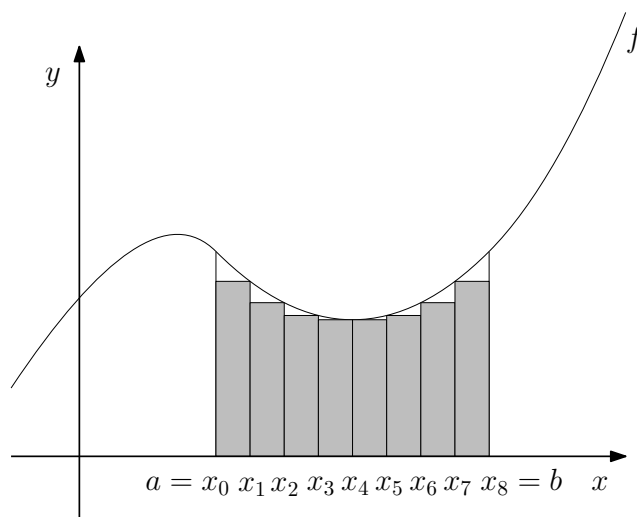
Obrázek 1.2: Aproximace plochy pod grafem funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  pomocí 4 obdélníků.

Všechny 4 obdélníky jsme zvolili tak, aby měly stejnou šířku a jejich výška odpovídala minimální hodnotě v daném dílčím intervalu. Obecně obsah  $i$ -tého obdélníku  $S_i$  bychom zapsali jako

$$S_i = (x_i - x_{i-1}) \cdot \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x),$$

kde  $\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$  je minimální hodnota funkce  $f$  na intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  (předpokládáme pro jednoduchost, že  $f$  je spojitá, takže nabývá svého minima na každém z daných intervalů). Rozdíl  $x_i - x_{i-1}$  odpovídá šířce obdélníku a jeho výšce hodnota  $\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ .

Pokud bychom si však interval  $\langle a, b \rangle$  rozdělili ještě „jemněji“, není těžké vidět, že se náš odhad zpřesní (viz obrázek 1.3).



Obrázek 1.3: Aproximace plochy pod grafem funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  pomocí 8 obdélníků.

Volbou stále „jemnějšího“ dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  se náš odhad bude zpřesňovat.

Budeme-li mít tedy plochu aproximovanou  $n$  obdélníky, pak<sup>1</sup>

$$S \approx (x_1 - x_0) \cdot \min_{x_0 \leq x \leq x_1} f(x) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \cdot \min_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} f(x). \quad (1.2)$$

Pro rostoucí  $n$ , tedy počet dílčích intervalů  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ , se bude rozdíl  $x_i - x_{i-1}$  blížit nule (obdélníky se budou „zužovat“). V konečném důsledku bude rozdíl  $x_i - x_{i-1}$  „nekonečně malý“ a součet uvedený výše u aproximace v obrázku 1.2 přejde v integrál

$$S = \int_a^b f(x) \, dx,$$

kde rozdíl  $x_i - x_{i-1}$  přešel v diferenciál  $dx$  a minimum  $\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$  přešlo přímo ve funkční hodnotu  $f(x)$ .

V matematice značíme součty pomocí řeckého symbolu  $\sum$  (velké písmeno *sigma*). Proto se čtenář může často setkat v jiných textech se zápisem

$$S \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

Prohodíme-li činitele v součinu, pak už je o něco jednodušeji vidět přechod v integrál, který jsme popsali výše

$$\sum_{i=0}^n \overbrace{\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)}^{\rightarrow f(x)} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\rightarrow dx} \longrightarrow \int_a^b f(x) \, dx.$$

Toto je velmi zjednodušené vysvětlení určitého integrálu, avšak hlavní myšlenkou bylo právě ono potenciálně „nekonečné dělení“, které bylo jedním z příkladů využití **nekonečně malých veličin**. (Zde konkrétně roli nekonečně malé veličiny zastávala postupně zmenšující se šířka obdélníků kvůli „zjemňování“ dělení.)

Na podobných úvahách jsou založeny různé další pojmy v matematické analýze, jako např. *limita* nebo i *derivace*. Je však nutno si uvědomit, že co je nám známo dnes, nebylo zcela známo matematikům v 17. století. V této době se začal *integrální* a *diferenciální* počet pořádně rozvíjet. Jejich tvůrci matematik GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) a fyzik ISAAC NEWTON (1642–1726/27) základy své tehdejší úvahy o infinitezimálním počtu postavili právě na nekonečně malých veličinách. Problémem tehdy však bylo, že tento pojem nebyl pořádně definován a pravidla pro počítání s (aktuálně) nekonečně malými veličinami byla definována pouze velmi vágně. I přesto se však integrální a diferenciální počet ukázal být opravdu mocným nástrojem (hlavně ve fyzice). Postupně se ale začaly nejasnosti v jejich samotných základech vyhrocovat, což nakonec vyústilo v období, které dnes nazýváme *druhou krizí matematiky*<sup>2</sup>.

Problémy v matematické analýze se začaly odstraňovat až na počátku 19. století, kdy významnou roli sehrál ve dvacátých letech AUGUSTIN LOUIS CAUCHY zavedením limity. Její formální definici však podal později KARL WEIERSTRASS, která pracovala opět s potenciálním nekonečnem. ([1], str. 105–106.)

<sup>1</sup>Symbolem  $\approx$  značíme přibližnou rovnost (ve starších textech lze najít i symbol  $\doteq$ ).

<sup>2</sup>První krize matematiky nastala v dobách antického Řecka a souvisela s objevem iracionálních čísel.

## 1.2 Počátky teorie množin a současnost

V matematice se přibližně až do poloviny 19. století uvažovalo pouze **potenciální nekonečno**. Myšlenka pohlížet na množiny jako na nekonečné byla silně odmítána, neboť na nekonečno **aktuální** se v té době pohlíželo jako na koncept nedostupný lidskému myšlení. Ačkoliv v matematické analýze již existovaly metody k odstranění problémů s „nekonečně malými“ veličinami, přesto se v matematické literatuře nacházely spousty postupů s nekonečnem, které často vedly k nesprávným výsledkům.

### 1.2.1 Bernard Bolzano

Problémů s nekonečnem a s jeho vnímáním si všiml i český matematik, filozof a kněz BERNARD BOLZANO<sup>3</sup> (1781–1848). Byl jedním z matematiků, kteří prosazovali existenci aktuálního nekonečna, o čemž později píše i ve svém díle *Paradoxy nekonečna*<sup>4</sup> (v německém originále *Paradoxien des Unendlichen*). Bolzanovo dílo však není až tak úplně dílem ryze matematickým, jako spíše matematicko-filozofickým. Kromě nekonečna je zde věnována pozornost i fyzice a jejímu náhledu na svět.

Ve svém díle se Bolzano snaží (mimo jiné) ukázat, proč je zapotřebí pracovat v matematice s aktuálním nekonečnem a také se zaměřuje na některé chyby, kterých se vědci dopouštějí při úvahách o nekonečnu. Je nutné však dodat, že ačkoliv svými úvahami byl Bolzano blízko úvahám, s nimiž dneska v teorii množin pracujeme, přesto v některých záležitostech došel k jiným výsledkům. Např. dospěl k závěru, že pokud je jedna množina obsažena v druhé (tzn. je její podmnožinou), pak musí jedna mít menší mohutnost než druhá nebo pokud existuje „párování“ mezi prvky dvou množin (viz podsekcce 1.1.1 o Galileově úvaze o velikosti), neznamená to nutně, že mají stejnou mohutnost (blíže nahlédneme v kapitole 6). To však nic nemění na faktu, že Paradoxy nekonečna jsou pozoruhodným dílem, které nám dává skvělý vhled do vědeckého myšlení v Bolzanově době. Pozornost si zaslouží parafráze myšlenky, pomocí které se Bolzano pokusil existenci aktuálního nekonečna zdůvodnit.

#### Množina pravd o sobě

Představme si, že máme nějaký libovolný **pravdivý** výrok, který si označíme  $A$ . O tomto výroku můžeme určitě vyslovit výrok: „ $A$  je pravdivé“, který si označíme  $B$ . Jsou tyto výroky stejné? Z čistě matematického pohledu jsou si tato tvrzení ekvivalentní, co do jejich pravdivostní hodnoty, neboť i kdyby neplatilo  $A$ , pak jistě neplatí ani  $B$ . Avšak zněním si stejná již tato tvrzení nejsou. Ať už si za výrok  $A$  dosadíme jakékoliv tvrzení, je třeba si uvědomit, že subjektem  $B$  je samotný výrok  $A$  (což pro výrok  $A$  samotný již neplatí). Pokud zkonstruuujeme další výrok  $C$  stejným způsobem, jeho znění bude „Je pravdivé, že je pravdivé  $A$ “,

<sup>3</sup>Ačkoliv byl B. Bolzano čech, publikoval své práce v němčině a latině.

<sup>4</sup>Dílo vyšlo až 3 roky po Bolzanově smrti, tj. v roce 1851, kdy se jeho publikace ujal Bolzanův žák FRANTIŠEK PŘÍHONSKÝ. Českého překladu se však dílo dočkalo až roku 1963 od OTAKARA ZICHA (viz seznam použité literatury).

což je opět odlišný výrok od  $B$ . Takto můžeme pokračovat libovolně dlouho. Množina těchto výroků by svou velikostí jistě musela převyšovat jakékoliv přirozené číslo, tedy je *nekonečné velikosti*.

Bolzano zde však uznává, že tento myšlenkový konstrukt je svou povahou stále záležitostí nekonečna potenciálního. Reagoval tak na námitky tehdejší matematické společnosti, že je nesmysl se bavit o nekonečných množinách, neboť taková množina **nemůže být nikdy sjednocena v celek a být celá obsáhnuta naším myšlením**. Zkusme se na chvíli vrátit ke konečným množinám. Uvážíme-li množinu všech obyvatel Prahy, málokdo z nás nejspíše zná každého z nich. Přesto však hovoříme o každém z nich, když řekneme např. „všichni obyvatelé Prahy“. Tedy ani tato (konečná) množina nemůže být celá obsáhnuta naším myšlením. Tuto myšlenku se Bolzano snažil aplikovat i na množiny nekonečné. Uvážíme-li množinu přirozených čísel, také jistě neznáme všechna **přirozená čísla**, ale i přesto nám nedělá problém hovořit o nich jako o celku.

Teologicky zdůvodňoval Bolzano existenci aktuálního nekonečna ve své knize tak, že je-li Bůh považován za **vševědoucího**, tedy zná všechny pravdy, pak jistě vidí i ty, které jsme zkonstruovali v prvním odstavci. Množina pravd o sobě je tak podle Bolzana nekonečná, neboť **Bůh je všechny zná**. [2]

### 1.2.2 Georg Cantor

Bolzano byl vskutku velmi blízko k odhalení a pochopení vlastností nekonečných množin, avšak v jeho práci bylo vidět, že stále nebyl schopen se plně dostat za hranici myšlenky, že „celek je větší než část“. To se podařilo až německému matematikovi GEORGU CANTOROVÍ (1845–1918), který učinil při úvahách s nekonečnými množinami velký myšlenkový posun. Cantor je dodnes považován a zaslouženě uznáván za zakladatele teorie množin, která výrazně ovlivnila soudobou matematiku. Svou prací navázal na Bolzanovy Paradoxy nekonečna, neboť též zastával názor existence aktuálního nekonečna. Konkrétně se dostal k otázce, zdali je mohutnější množina přirozených čísel nebo reálných. Cantor došel k překvapivému závěru, a to sice, že **množina reálných čísel je mohutnější než množina přirozených čísel**. Tyto výsledky Cantora dovedly postupně k definici pojmu mohutnosti množiny a také vybudování teorie tzv. *kardinálních* a *ordinálních* čísel.

Cantor tehdy považoval za množinu libovolný souhrn objektů, kdy o každém prvku lze (v principu) rozhodnout, zdali dané množině náleží, či nikoliv. Tedy při výstavbě své teorie vnímal Cantor pojem množiny velmi intuitivně. Dnes tuto teorii označujeme jako *naivní teorii množin*. Důvod tohoto názvu je v objevených paradoxech.

Cantorova teorie byla ve své době mnohými neuznávána a velmi znevažována, což mu velmi ztížilo činnost publikování. Práce byla hodně kritizována za to, jak Cantor zachází s aktuálně nekonečnými množinami. Problém s Cantorovou teorií však nastal tehdy, když se zjistilo, jak silné dopady má ono intuitivní chápání pojmu množina.



## Russellův paradox

V roce 1902 přemýšlel BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL (1872–1970) o samotném Cantorově zavedení pojmu množina. Cantor považoval za množinu jakýkoliv souhrn objektů, kde o každém prvku je možné (alespoň v principu) rozhodnout, zdali je či není jejím prvkem. S tímto chápáním množiny jsme většinou pracovali na střední škole, neboť nám nejspíše znělo poměrně rozumně, ale Russell si v tomto pojetí množiny všiml problému.

Uvažujme, že je dána množina  $S$ , která obsahuje všechny množiny takové, že nejsou samy sobě prvkem.

Jak si takovou množinu vůbec představit? Co to znamená, že je množina sama sobě prvkem? Zkusme se nejdříve podívat na několik příkladů.

- Uvažujme množinu všech obyvatel Prahy. Je taková množina sama obyvatelem Prahy? Nejspíše není, taková množina tedy **není prvkem sebe sama**.
- Mějme množinu všech možných ideí. Je taková množina sama ideou? Ale jistě, že je. Taková množina tedy naopak **je sama sobě prvkem**.
- Je množina všech států sama sobě prvkem? (Tj. je sama státem?) **Ne**, není.
- Množina všech objektů popsatelných méně než deseti slovy **je sama sobě prvkem**. (Popsali jsme ji pomocí osmi slov.)

Takové množiny jsou tedy skutečně představitelné a má smysl se jimi zabývat. Russell tedy uvažil právě takovou množinu, která obsahuje množiny, jenž samy sebe neobsahují.

Symbolicky bychom množinu  $S$  zapsali

$$S = \{X \mid X \notin X\}.$$

Množina  $S$  je dobře definovaná v Cantorově pojetí (jedná se o souhrn objektů). Pokud bychom si vzali např. množiny

$$A = \{X, Y, Z, A\} \quad \text{a} \quad B = \{X, Y, W\},$$

kde  $X, Y, Z, W$  jsou libovolně zvolené prvky, pak podle definice  $S$  platí, že  $A \notin S$  a  $B \in S$ . Podle takto zvolené definice  $S$ , patří do ní sama množina  $S$ ?

Postupujme podle dané logiky. Pokud množina  $S$  neobsahuje sebe sama, pak by ale podle své definice sama sebe obsahovat měla. A naopak pokud množina sama sebe obsahuje, pak je to spor s její definicí a sama sebe by obsahovat neměla. Tím jsme však v obou případech došli ke sporu, neboť z tohoto plyne závěr, že množina  $S$  je sama sobě prvkem právě tehdy, když není sama sobě prvkem. Symbolicky (viz sekce o logice 2.1)

$$S \in S \Leftrightarrow S \notin S.$$

Tento paradox se uvádí v mnoha analogiích. Asi nejtypičtější a nejčastěji uváděný je tzv. *paradox holiče*.

„Holič holí všechny lidi, kteří se neholí sami. Podle uvedeného pravidla, holí holič sám sebe?“

I zde bychom došli ke sporu stejným způsobem. Pokud by se holič holil, pak by se podle pravidla holit neměl a pokud by se neholil, pak by se naopak holit měl. Zkuste si sami rozmyslet souvislost s originálním zněním Russellova paradoxu.

V teorii množin se postupně začalo objevovat více paradoxů<sup>5</sup> a nesrovnalostí. Překvapivě některé z nich byly objeveny již před samotným Russellovým paradoxem. Za jedny z nejdůležitějších lze považovat ještě

- *Burali-Fortiův paradox* - objeven roku 1897 CESAREM BURALI-FORTIM (1861–1931),
- *Cantorův paradox* - objeven roku 1899.

### 1.2.3 Teorie množin v současnosti

Cantorova tehdejší naivní teorie množin začala být nakonec ke konci 19. století uznávána. Začalo se ukazovat, že teorie množin je skutečně mocným nástrojem k vybudování samotných základů matematiky. Chvíli se zdálo, že matematici mají dostupný skutečně pevný základ pro výstavbu dalších teorií. Avšak postupné objevování antinomií v teorii množin je vyvedlo z jejich omylu a bylo jasné, že pro spolehlivé vybudování základů bude třeba daleko více práce. Toto období proto nazýváme *3. krizí matematiky*.

Jak se ukázalo, dosavadní způsob budování matematiky byl neudržitelný, a tak se matematici snažili přijít s řešením. Ta se však svou povahou velmi lišila podle matematického a filozofického uvažování každého z nich. Hrubě bychom mohli tehdy rozlišit dva hlavní myšlenkové proudy: *intuicionismus* a *formalismus*.

Intuicionismus byl svým přístupem velmi omezený, neboť v jeho duchu bylo možné pracovat pouze s omezenou částí matematiky, která byla „přípustná“. Aktuální nekonečno s existenčními důkazy<sup>6</sup> jsou odmítány. Uznávány jsou pouze objekty, které lze přímo zkonstruovat (tzv. *konstruktivní důkazy*). Proto byl tehdy např. kritizován Cantorův důkaz existence tzv. *transcendentních čísel*<sup>7</sup>. Zajímavostí a kontroverzí jeho důkazu byl fakt, že při tehdejší dokázání jejich existence neuvedl příklad ani jednoho nich.

Formalismus naopak dále pracoval s aktuálními znalostmi. Matematici se snažili vybudovat matematiku na množinách tak, jak zamýšlel Cantor, avšak jedním z cílů byla eliminace dosavadně známých antinomií. Objevují se dva rozdílné přístupy, přičemž prvním z nich byla tzv. *teorie typů*<sup>8</sup> a *axiomatická výstavba*.

Protože axiomatická výstavba pro nás jako koncept bude dále podstatným stavebním kamenem, zaměříme se právě na ni. Axiomatická výstavba je dnes

<sup>5</sup>Též *antinomie*, tj. sporné tvrzení vyvozené z korektně vyvozených závěrů.

<sup>6</sup>*Existenční důkazy* jsou takové důkazy, které prokážou existenci nějakého objektu, ale není možno z nich obdržet žádný příklad daného objektu.

<sup>7</sup>Tak nazýváme čísla, která nejsou kořeny žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty (např. Ludolfovo číslo  $\pi$  nebo Eulerovo číslo  $e$ ).

<sup>8</sup>O té se zmiňuje Russell v knize *Principia Mathematica*, na které se s ním podílel anglický matematik ALFRED NORTH WHITEHEAD. Kniha vyšla v letech 1910–1913.

asi nejrozšířenějším způsobem budování různých teorií. Ať už budujeme jakoukoliv teorii, v principu není možné definovat všechny pojmy a dokázat všechna možná tvrzení. Dříve nebo později bychom došli k závěru, že abychom mohli dojít k různým tvrzením, je třeba zavést nějaké „primitivní pojmy“, na nichž budeme stavět další definice, a tzv. *axiómy* neboli tvrzení, která implicitně považujeme za pravdivá a nedokazujeme jejich platnost. Ve skutečnosti však axiomatika nebyla nikterak novou záležitostí; byla známa již od starověku.

Jedním z nejstarších děl jsou v tomto ohledu Eukleidovy *Základy*. Eukleidés se pokusil tehdejší rovinou geometrii (dnes nazývanou *eukleidovskou geometrií*) vybudovat na celkem pěti základních postulátech. Čtenář si nejspíše všiml, že jsme použili termín postulát (též „předpoklad“ či „prvotný úkol“), nikoliv axióm, avšak není mezi nimi významný rozdíl. Většinou se tyto termíny uvádí vzhledem k historickému kontextu. Uveďme si zde pro představu několik Eukleidových základních pojmů (citováno z českého překladu Základů z roku 1907 od Františka Servíta [3]):

- *Bod jest, co nemá dílu.*
- *Čára pak délka bez šířky.*
- *Plocha jest, co jen délku a šířku má.*
- *Hranicemi plochy jsou čáry.*
- *Tupý jest úhel pravého větší.*

### **Eukleidovy postuláty:**

- (E1) *Budiž úkolem od kteréhokoliv bodu ke kterémukoliv bodu vésti přímku.*
- (E2) *A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.*
- (E3) *A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovatí kruh.*
- (E4) *A že všechny pravé úhly sobě rovny jsou.*
- (E5) *A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže (přilehlé) straně úhly menších dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na straně, kde jsou úhly menších dvou pravých.*

Toto je první historicky známé dílo, kde byla teorie takto deduktivně budována. Dnešním axiomatickým systémům je však celkem pochopitelně vzdálená, neboť tehdy byly základní pojmy a axiomy, resp. postuláty, psány běžnou řečí a odvozování tvrzení na jejich základě probíhalo intuitivně. Dnešní axiomatika je v těchto směrech formálnější, protože se využívá formálního jazyka a též jsou dána přesná odvozovací pravidla. Co však matematiky tehdy zajímalo na axiomaticky budovaných systémech byla jejich:

- *nezávislost* (tzn. zdali žádný z axiómů nelze odvodit ze zbylých axiómů; takové tvrzení pak již není axióm, nýbrž věta);

- *úplnost* (tzn. zdali je dána taková soustava axiómů, abychom každé tvrzení mohli dokázat, nebo dokázat jeho negaci);
- *bezespornost* (tzn. zdali není možné z daných axiómů odvodit tvrzení a současně jeho negaci).

Čtenáře možná napadne, že pokud jde o nezávislost, jedná se v podstatě jen o „vadu na kráse“, neboť pokud nějaký axióm lze v teorii odvodit z ostatních, pak jej stačí odstranit. Není-li systém úplný, je to již poměrně nepříjemné, neboť by to znamenalo, že v teorii existují tvrzení, která nelze dokázat, ani vyvrátit. Nejhorší je však pochopitelně, pokud je teorie sporná.

První úspěšnou teorii množin axiomaticky vybudoval v letech 1904–1908 německý matematik ERNST ZERMELO (1871–1953), které se v tomto textu budeme dále věnovat. Základní Zermelovou myšlenkou při budování jeho teorie bylo, že ne každý souhrn objektů je možné považovat za množinu (blíže si jednotlivé axiomy vysvětlíme v kapitole 3). Pojem **množina** a **býti prvkem** jsou zde považovány za primitivní (nedefinované) pojmy, s nimiž se dále pracuje. Zermelovu teorii později upravil izraelský matematik ADOLF ABRAHAM FRAENKEL (1891–1965), čímž vznikla tzv. *Zermelova-Fraenkelova teorie množin*. Dodnes se jedná o nejrozšířenější variantu.

Později vyšla i tzv. *Gödelova-Bernaysova teorie množin*, jíž dal základ švýcarský matematik ISSAK PAUL BERNAYS (1888–1977) v letech 1937–1954 a rakouský matematik KURT FRIEDRICH GÖDEL (1906–1978) v reakci na omezení, která se objevovala v Zermelově-Fraenkelově teorii množin.

Bohužel se nikdy nikomu nepodařilo dokázat, zdali jsou budované axiomatické teorie bezesporné a úplné (což se pro srovnání podařilo např. u varianty zmíněné eukleidovské geometrie). Jak ukázal Kurt Gödel (viz tzv. *Gödelovy věty o neúplnosti*), tak ve skutečnosti takovou teorii není ani možné sestavit, neboť v libovolném „dostatečně bohatém“ axiomatickém systému teorie množin budou vždy existovat tvrzení, která nelze dokázat a ani nelze dokázat jejich negaci, což tehdy odhalilo výraznou omezenost axiomatických metod.

# Kapitola 2

## Logika

V této kapitole zavedeme některá základní značení a pojmy v oblasti logiky. Je dosti možné, že některé záležitosti již čtenář dobře zná nebo o nich slyšel a to především v úvodní části. I přesto však považuji jejich zmínku za nezbytnou, neboť na těchto pojmech budeme dále stavět. Posléze se dostaneme k zajímavější části a to sice kvantifikátorům, které budeme dále využívat, neboť nám umožní zápisy některých složitějších výroků.

### 2.1 Výroková logika

Tato část je čtenáři pravděpodobně již z části známa ze střední školy. Řadu vět (matematických i nematematických) lze matematicky chápat jako *výrok*, tj. tvrzení, o kterém lze jednoznačně prohlásit, zdali je či není pravdivé. Výrokům přiřazujeme tzv. *pravdivostní hodnotu*, která je buď 1 pro *pravdivý* výrok nebo 0 pro *nepravdivý* výrok.

Za výroky lze považovat např. tvrzení:

- „Prší.“,
- „Prší a svítí slunce.“,
- „Nebude-li pršet, nezmoknem.“,
- „Když bude pršet, zmokneme.“,

a mnohé jiné (u každého z nich jsme schopni jednoznačně určit jeho pravdivostní hodnotu). K formálnímu zápisu tvrzení v matematice vyžíváme tzv. *logické spojky* a *kvantifikátory*.

#### 2.1.1 Logické spojky

Mezi logické spojky řadíme *negaci*  $\neg$ , *konjunkci*  $\wedge$ , *disjunkci*  $\vee$ , *implikaci*  $\Rightarrow$  a *ekvivalenci*  $\Leftrightarrow$ . Připomeňme si stručně jejich významy.

**Úmluva 2.1.1** (Abeceda pro výrokové proměnné). Pro označení *výroků* nebo též *výrokových proměnných* budeme používat velká písmena latinské abecedy  $A, B, \dots, X, Y, Z$ , případně opatřenými indexy.

Uvažujme libovolné výroky  $A$  a  $B$ .

- Negace  $\neg A$  má opačnou pravdivostní hodnotu než  $A$ .
- Konjunkce  $A \wedge B$  je pravdivá, pokud je pravdivý výrok  $A$  **a současně** je pravdivý výrok  $B$ . Tedy má-li  $A$  nebo  $B$  pravdivostní hodnotu 0, pak i  $A \wedge B$  má pravdivostní hodnotu 0. Čteme „ $A$  a (zároveň)  $B$ “.
- Disjunkce  $A \vee B$  je pravdivá, pokud alespoň jeden z výroků  $A$  a  $B$  je pravdivý. Výrok  $A \vee B$  je tedy nepravdivý pouze když jsou současně nepravdivé výroky  $A$  i  $B$ . Čteme „ $A$  nebo  $B$ “.
- U implikace se často mluví o výroku  $A$  jako o *předpokladu* a o  $B$  jako o *závěru*. Výrok  $A \Rightarrow B$  pak říká, že pokud platí výrok  $A$ , **pak nutně platí** i výrok  $B$ . Čteme „*jestliže*  $A$ , *pak*  $B$ “, „z  $A$  *vyplývá*  $B$ “ či „ $A$  *implikuje*  $B$ “. Zde se hodí upozornit na to, že mezi předpokladem a závěrem nemusí být nutně souvislost.
- Ekvivalence  $A \Leftrightarrow B$  je pravdivá, pokud jsou výroky  $A$  a  $B$  **současně pravdivé** nebo **současně nepravdivé**. Čteme „ $A$  *právě tehdy, když*  $B$ “.

Výroky uvedené výše obsahující dané logické spojky lze přehledně zapsat do tabulky pravdivostních hodnot (viz tabulka 2.1).

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| 1   | 1   | 0        | 1            | 1          | 1                 | 1                     |
| 1   | 0   | 0        | 0            | 1          | 0                 | 0                     |
| 0   | 1   | 1        | 0            | 1          | 1                 | 0                     |
| 0   | 0   | 1        | 0            | 0          | 1                 | 1                     |

Tabulka 2.1: Tabulka pravdivostních hodnot pro základní logické spojky

Vraťme se nyní ještě ke zmíněné implikaci. Ve skutečnosti tato logická spojka je pravděpodobně tou nejsložitější na pochopení ze všech čtyř zmíněných, neboť při neobežetnosti je často (a to i v běžné mluvě) zaměňována za ekvivalenci. Uvažme tvrzení „Jestliže nebudeš jíst, nedostaneš zmrzlinu.“ Synáček by v takovou chvíli očekával, že když naopak oběd sní, tak zmrzlinu dostane, avšak ze striktně matematického hlediska mu ji tatínek i tak dát nemusí a přesto by nelhal. Je důležité si uvědomit, že v případě nesplnění předpokladu nám implikace o závěru nic neříká.

## 2.1.2 Výrokové formule

Pokud se ohlédneme za výroky, které jsme zatím uvažovali, vždy se jednalo o výroky *složené*. Vezmeme-li např. výrok „Číslo 2 je sudé nebo liché.“, tak jej lze rozdělit na dva „jednodušší“ výroky, tj. „Číslo 2 je sudé.“ a „Číslo 2 je liché.“, přičemž dané výroky jsou spojeny disjunkcí  $\vee$ . Tyto výroky však již žádné logické spojky neobsahuje a tedy je nelze dále „rozložit“.

**Úmluva 2.1.2** (Abeceda pro výrokové formule). Pro označení výrokových formulí budeme používat malá písmena řecké abecedy, tj.  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , případně opatřenými indexy.

Obecně, pro výroky zavádíme následující terminologii.

- *Výrokovou formulí* nebo též *logickou formulí* nazveme výrok obsahující libovolný počet výrokových proměnných a logických spojek.
- Speciálně, pokud výrok neobsahuje žádnou logickou spojku, pak jej nazýváme *atomickým*, resp. *atomickou formulí*.

Tento popis však nelze považovat za definici, neboť je zde pochopitelně řada nepřesností. Např.  $A \neg$  nebo  $AB \Rightarrow \wedge C$  neurčitě nejsou korektní výrokové formule. Podrobnější informace k tomuto se čtenář může dočíst v příloze B.

**Poznámka 2.1.3.** Občas budeme v této sekci zkráceně psát pouze *formule*. Později se zmíníme i o tzv. *predikátových formulích*, nicméně z kontextu vždy bude zřejmé, v jakém smyslu daný termín používáme.

**Úmluva 2.1.4** („Rovnost“ výrokových formulí). Uvažujme, že máme libovolné výrokové formule  $\varphi$  a  $\psi$ . Pokud  $\varphi$  a  $\psi$  vyjadřují stejnou výrokovou formuli, pak budeme psát  $\varphi \sim \psi$ .

Řekneme-li, že výrokové formule „jsou stejné“, pak se formule shodují ve svém zápisu. Máme-li např. výrokové formule

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\sim (A) \wedge ((B) \vee (C)), \\ \varphi_2 &\sim ((A) \wedge (B)) \vee ((A) \wedge (C)) \text{ a} \\ \varphi_3 &\sim ((A) \wedge (B)) \vee ((A) \wedge (C)),\end{aligned}$$

pak můžeme psát, že  $\varphi_2 \sim \varphi_3$ , ale nikoliv  $\varphi_1 \sim \varphi_2$ , byť  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  mají shodnou tabulku pravdivostních hodnot.

Z příkladu výše lze však vidět poměrně nadměrné používání závorek. Ačkoliv bychom tak jednoznačně určili pořadí jednotlivých logických operací, existuje o něco příjemnější přístup. Pro zjednodušení zápisu dalších výrokových formulí se proto budeme držet následující úmluvy 2.1.5.

**Úmluva 2.1.5** (Pořadí logických operací). Budeme dodržovat následující pořadí logických operací:

- (1) Negace  $\neg$  má přednost před všemi ostatními logickými spojkami.
- (2) Konjunkce a disjunkce  $\wedge, \vee$  jsou rovnocenné a mají přednost před implikací a ekvivalencí  $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ , které jsou sobě rovnocenné.

**Příklad 2.1.6.** Zjednodušení některých formulí při aplikaci zavedeného pořadí logických operací v úmluvě 2.1.5.

$$(i) \quad (A) \wedge (B) \rightsquigarrow A \wedge B,$$

- (ii)  $\neg(\neg A) \rightsquigarrow \neg\neg A,$
- (iii)  $\neg((A) \vee (B)) \rightsquigarrow \neg(A \vee B),$
- (iv)  $\left( \left( (A) \wedge (B) \right) \vee \left( \neg(C) \right) \right) \Rightarrow \left( \neg(A) \right) \wedge \left( \neg(C) \right)$   
 $\rightsquigarrow (A \wedge B) \vee \neg C \Rightarrow \neg A \wedge \neg C.$

Nyní se vraťme k původní definici výrokové formule B.0.1, kterou jsme zavedli. S ní souvisí čtenářovi pravděpodobně známý postup pro vyhodnocování logických formulí, a to sice *tabulková metoda*. Její myšlenkou bylo rozdělit danou výrokovou formuli postupně na dílčí formule a takto postupovat u i daných dílčích formulí. Tímto způsobem nakonec dojdeme až k pamotným atomickým formulím, kde zkoumáme všechny možné kombinace jejich pravdivostních hodnot (resp. kombinace pravdivostních hodnot jejich výrokových proměnných).

Před ukázkou na příkladech si ještě zavedeme jedno značení, které budeme potřebovat.

**Definice 2.1.7** (Logická ekvivalence výrokových formulí). Mějme výrokové formule  $\varphi$  a  $\psi$ . Řekneme, že  $\varphi$  a  $\psi$  jsou *logicky ekvivalentní*, což zapisujeme jako  $\varphi \equiv \psi$ , pokud je formule  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  pro všechny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných obsažených ve  $\varphi$  a  $\psi$  pravdivá.

Pokud tedy budeme mít např. formule

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\sim \neg(A \wedge B), \\ \varphi_2 &\sim \neg A \vee \neg B,\end{aligned}$$

pak můžeme psát  $\varphi \equiv \psi$ , neboť jak se lze přesvědčit, formule  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$  je vždy pravdivá.

Nabízí se otázka: jaký je rozdíl mezi  $\equiv$  a  $\Leftrightarrow$ ? Formálně vzato bychom mohli mezi formule jednoduše vkládat ekvivalenci, avšak pak se nám tato logická spojka mohla plést s ekvivalencemi, které jsou součástí  $\varphi$  a  $\psi$ .

**Příklad 2.1.8.** Mějme formuli

$$\varphi \sim A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \vee B.$$

Pro jaké pravdivostní hodnoty výroků  $A$  a  $B$  je formule  $\varphi$  pravdivá?

*Řešení.* Postupujme způsobem popsaným výše, tj. rozdělme nejdříve danou formuli na dílčí formule. V tomto případě dílčími formulemi  $\varphi$  jsou

$$\varphi_1 \sim A \wedge \neg B \quad \text{a} \quad \varphi_2 \sim A \vee B,$$

které jsou spojeny ekvivalencí  $\Leftrightarrow$ , tj.

$$\varphi \sim \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2.$$

Formule  $\varphi_1$  obsahuje atomický výrok  $A$  a formuli  $\neg B$  spojené konjunkcí  $\wedge$ . Označme tedy ještě

$$\varphi_3 \sim \neg B$$



$\varphi_3$  již obsahuje pouze atomický výrok  $B$  v negaci  $\neg$ .

Podívejme se nyní na dílčí formuli  $\varphi_2$ . Ta obsahuje atomické výroky  $A$  a  $B$  spojené disjunkcí  $\vee$ . Zapišme nyní vše zmíněné po řadě do tabulky pravdivostních hodnot (viz tabulka 2.2).

| $A$ | $B$ | $\varphi_3 \sim \neg B$ | $\varphi_1 \sim A \wedge \neg B$ | $\varphi_2 \sim A \vee B$ | $\varphi \sim A \wedge \neg B \Leftrightarrow A \vee B$ |
|-----|-----|-------------------------|----------------------------------|---------------------------|---|
| 1   | 1   | 0                       | 0                                | 1                         | 0   |
| 1   | 0   | 1                       | 1                                | 1                         | 1   |
| 0   | 1   | 0                       | 0                                | 1                         | 0   |
| 0   | 0   | 1                       | 0                                | 0                         | 1   |

Tabulka 2.2: Tabulka pravdivostních hodnot pro  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  a  $\varphi$

Z tabulky 2.2 můžeme již vidět, že formule  $\varphi$  je pravdivá pro  $A \equiv 1$  a  $B \equiv 0$ , nebo pro  $A \equiv 0$  a  $B \equiv 0$ .

□

Tento středoškolský postup je zcela jistě vždy funkční. Avšak ne vždy je moudré jej ihned aplikovat. Zkusme se podívat ještě na jeden příklad výrokové formule.

**Příklad 2.1.9.** Mějme logickou formuli

$$\psi \sim (A \wedge \neg A \Rightarrow B) \vee ((A \Leftrightarrow B) \wedge (C \vee \neg C)).$$

Pro jaké pravdivostní hodnoty výroků  $A, B, C$  je formule  $\psi$  pravdivá?

*Řešení.* V tuto chvíli bychom aplikací metody použité v příkladu 2.1.8 museli vyšetřit pravdivostní hodnotu formule  $\psi$  pro celkem  $2^3 = 8$  různých kombinací pravdivostních hodnot  $A, B, C$ . Jistě bychom takto též došli k řešení, nicméně práci si můžeme značně ulehčit. (Prosím čtenáře, aby se zde pozorněji zaměřil na formuli  $\psi$  v zadání.)

Ve skutečnosti jsou některé dílčí formule zjednodušitelné. Zaměříme se pro začátek na formuli

$$A \wedge \neg A.$$

Může tato formule být někdy pravdivá? Jistě, že nemůže. Libovolný výrok buď **platí a nebo platí jeho negace**, což nikdy nemůže nastat současně. Taková formule má pak vždy pravdivostní hodnotu 0 bez ohledu na pravdivostní hodnotu  $A$ . Tedy

$$A \wedge \neg A \equiv 0.$$

Z výše uvedeného také ovšem plyne, že formule

$$C \vee \neg C \equiv 1,$$

neboť opět platí buď  $C$ , nebo jeho negace  $\neg C$ .

Vyšetřovanou formuli  $\psi$  tedy můžeme zjednodušit

$$\begin{aligned} \psi &\sim \left( \overbrace{(A \wedge \neg A)}^{\equiv 0} \Rightarrow B \right) \vee \left( (A \Leftrightarrow B) \wedge \overbrace{(C \vee \neg C)}^{\equiv 1} \right) \equiv \\ &\equiv (0 \Rightarrow B) \vee ((A \Leftrightarrow B) \wedge 1). \end{aligned}$$

Tento krok nám však umožňuje provést další úpravy. Podívejme se blíže na formuli

$$(A \Leftrightarrow B) \wedge 1.$$

Výsledek této konjunkce vždy bude záviset na pouze na pravdivostní hodnotě  $A \Leftrightarrow B$ , tzn. konjunkce je zde nadbytečná a můžeme psát

$$(A \Leftrightarrow B) \wedge 1 \equiv A \Leftrightarrow B.$$

Čeho si lze dále všimnout je, že výrok

$$0 \Rightarrow B$$

je také vždy pravdivý (viz tabulka 2.1). Celkově se tedy výroková formule  $\psi$  zjednoduší takto

$$\begin{aligned} \psi &\sim \overbrace{(0 \Rightarrow B)}^{\equiv 1} \vee \left( \overbrace{(A \Leftrightarrow B) \wedge 1}^{\equiv A \Leftrightarrow B} \right) \equiv \\ &\equiv 1 \vee (A \Leftrightarrow B). \end{aligned}$$

Disjunkce je však pravdivá právě tehdy, když je alespoň jeden z výroků pravdivý, což zde platí. Z tohoto dostáváme výsledek, že

$$\psi \equiv 1.$$

Tedy bez ohledu na to, jaké pravdivostní hodnoty budou mít výroky  $A, B, C$ , bude formule  $\psi$  vždy pravdivá. Pokud bychom přeci jen přistoupili na použití tabulkové metody, které jsme se zpočátku vyhnuli, můžeme se skutečně přesvědčit, že náš závěr je správný (viz tabulky 2.3 a 2.4).

| $A$ | $B$ | $C$ | $\neg A$ | $\neg C$ | $A \wedge \neg A$ | $C \vee \neg C$ | $A \Leftrightarrow B$ | $(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-----|----------|----------|-------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------------------|
| 1   | 1   | 1   | 0        | 0        | 0                 | 1               | 1                     | 1                                 |
| 1   | 1   | 0   | 0        | 1        | 0                 | 1               | 1                     | 1                                 |
| 1   | 0   | 1   | 0        | 0        | 0                 | 1               | 0                     | 1                                 |
| 1   | 0   | 0   | 0        | 1        | 0                 | 1               | 0                     | 1                                 |
| 0   | 1   | 1   | 1        | 0        | 0                 | 1               | 0                     | 1                                 |
| 0   | 1   | 0   | 1        | 1        | 0                 | 1               | 0                     | 1                                 |
| 0   | 0   | 1   | 1        | 0        | 0                 | 1               | 1                     | 1                                 |
| 0   | 0   | 0   | 1        | 1        | 0                 | 1               | 1                     | 1                                 |

Tabulka 2.3: Tabulka pravdivostních hodnot podformulí formule  $\psi$  (1. část).

□

Tento typ formulí je poměrně významný a proto pro ně zavádíme speciální pojmenování v definici 2.1.10.

**Definice 2.1.10** (Tautologie). Výrokovou formuli  $\varphi$  nazveme *tautologií*, pokud  $\varphi \equiv 1$ .

Některé tautologie jsme využili již při řešení příkladu 2.1.9. Uvedme si zde ještě několik dalších významných příkladů.

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \Leftrightarrow B) \wedge (C \vee \neg C)$ | $\psi$ |
|-----|-----|-----|--|--------|
| 1   | 1   | 1   | 1  | 1      |
| 1   | 1   | 0   | 1  | 1      |
| 1   | 0   | 1   | 0  | 1      |
| 1   | 0   | 0   | 0  | 1      |
| 0   | 1   | 1   | 0  | 1      |
| 0   | 1   | 0   | 0  | 1      |
| 0   | 0   | 1   | 1  | 1      |
| 0   | 0   | 0   | 1  | 1      |

Tabulka 2.4: Tabulka pravdivostních hodnot podformulí formule  $\psi$  (2. část).

**Věta 2.1.11** (Významné tautologie). *Následující výrokové formule jsou tautologie:*

- (i)  $\neg(A \Leftrightarrow \neg A)$
- (ii)  $A \vee \neg A$   $\triangleleft$  zákon vyloučeného třetího
- (iii)  $A \Leftrightarrow A$   $\triangleleft$  zákon identity
- (iv)  $\neg\neg A \Leftrightarrow A$   $\triangleleft$  zákon dvojí negace
- (v)  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$   $\triangleleft$  de Morganovo pravidlo
- (vi)  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$   $\triangleleft$  de Morganovo pravidlo
- (vii)  $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$   $\triangleleft$  pravidlo Modus ponens<sup>1</sup>
- (viii)  $((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$   $\triangleleft$  pravidlo Modus tollens<sup>2</sup>
- (ix)  $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$   $\triangleleft$  reductio ad absurdum
- (x)  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- (xi)  $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- (xii)  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow B \vee \neg A$
- (xiii)  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$
- (xiv)  $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- (xv)  $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Čtenář si pravdivosti těchto výroků může ověřit prostým sestavením tabulek pravdivostních hodnot daných logických formulí. Tautologie (vii), (x) a (xi) se hodně využívají při dokazování tvrzení (viz příloha A).

---

<sup>1</sup>Česky *pravidlo vynětí*.

<sup>2</sup>Česky *popírání důsledku*.

## 2.2 Kvantifikátory a predikátový počet

Logické spojky nám jistě poskytují nástroj pro vyjádření celé řady různých výroků. Vyjádřit např. výrok „Anička má zelené vlasy ( $Z$ ) a modré oči ( $M$ ).“ tak pro nás není problém. Symbolicky bychom mohli napsat např.

$$Z(\text{Anička}) \wedge M(\text{Anička}).$$

Co kdybychom toto chtěli prohlásit místo o jednom člověku např. o všech obyvatelích Prahy? Užitím čistě logických spojek, jak jsme prováděli doposud, bychom museli napsat např.

$$(Z(\text{Anička}) \wedge M(\text{Anička})) \wedge (Z(\text{Eva}) \wedge M(\text{Eva})) \wedge \dots \wedge (Z(\text{Jiří}) \wedge M(\text{Jiří})).$$

To je sice správné, ale poměrně těžkopádné vyjádření tak jednoduchého výroku. Jistě bychom neřekli „Anička má zelené vlasy a modré oči a zároveň Eva má zelené vlasy a modré oči a zároveň . . . “. Čtenář nejspíše tuší, že existuje jednodušší způsob vyjádření takového výroku, resp. výrokové formule. K tomu v logice slouží právě takzvané *kvantifikátory*.

V praxi bychom zkrátka řekli: „Všichni obyvatelé Prahy mají zelené vlasy a modré oči.“ (takové tvrzení je jistě výrok). Tímto způsobem formulujeme podobné výroky i v logice. Zkrátka prohlásíme, že pro každého obyvatele Prahy  $x$  platí

$$M(x) \wedge Z(x).$$

K formálnímu zápisu podobných tvrzení využíváme tzv. *univerzální kvantifikátor* (též *obecným*), který zapisujeme pomocí  $\forall$ .

Nyní se ještě zamysleme, co nám toto říká z pohledu logiky. Tvrzení je takové, že je-li  $x$  obyvatelem Prahy, pak má zelené vlasy a modré oči. V řeči logických spojek toto není nic jiného, než implikace. Označíme-li výrok „ $x$  je obyvatelem Prahy.“ jako  $P(x)$ , pak bychom mohli napsat

$$\forall x (P(x) \Rightarrow Z(x) \wedge M(x)), \quad (2.1)$$

nebo podle (xii) ve větě 2.1.11 o tautologiích

$$\forall x (Z(x) \vee M(x) \vee \neg P(x)).$$

Takový výrok bychom četli: „**pro všechna  $x$  platí**, že pokud platí  $P(x)$ , pak platí  $Z(x)$  a zároveň  $M(x)$ “. Ve výrazu (2.1) můžeme uvažovat libovolná  $x$  (nemusí se ani jednat o lidi), avšak pouze u  $x$ , která splňují předpoklad  $P(x)$  tvrdíme, že splňují i závěr  $Z(x) \wedge M(x)$ . Proto jsme ve výrazu nepoužili konjunkci, tj.

$$\forall x (P(x) \wedge Z(x) \wedge M(x)),$$

neboť bychom vzali např. obyvatele Brna, pak by byl již výrok nepravdivý (kvůli  $P(x)$ ).

Druhým typem kvantifikátoru je tzv. *existenční kvantifikátor*. Uvažme, že bychom chtěli naopak říci, že ze všech obyvatel Prahy má alespoň jeden zelené

vlasý a modré oči. S využitím čistě logických spojek by pak znamenalo, že jedna z dílčích formulí je pravdivá

$$(Z(\text{Anička}) \wedge M(\text{Anička})) \vee (Z(\text{Eva}) \wedge M(\text{Eva})) \vee \dots \vee (Z(\text{Jiří}) \wedge M(\text{Jiří})).$$

I zde však máme kratší alternativu, a to s využitím symbolu  $\exists$  pro existenční kvantifikátor. Opět se však nejdřív podívejme na naše tvrzení. To říká, že existuje  $x$  takové, že  $x$  je obyvatelem Prahy a zároveň má zelené vlasy a modré oči. Zde si tedy naopak vystačíme pouze s konjunkcí:

$$\exists x (P(x) \wedge Z(x) \wedge M(x)). \quad (2.2)$$

Přirozeně se zde nabízí otázka, proč jen nenahradit univerzální kvantifikátor ve výrazu (2.1) za existenční. Pokud bychom napsali

$$\exists x (P(x) \Rightarrow Z(x) \wedge M(x)), \quad (2.3)$$

pak by tvrzení již neplatilo pouze na obyvatele Prahy (v případě nesplněního předpokladu je implikace pravdivá), ale třeba pro obyvatele Brna by toto tvrzení také byla pravda. Pokud by však v Praze neexistoval občan se zelenými vlasy a modrýma očima, pak by výraz (2.2) by nepravdivý, ale výraz (2.3) by pravdivý již byl.

## 2.2.1 Primitivní predikáty

Vzpomeneme-li si na předešlou sekci 2.1 věnovanou výrokové logice, tak „nejtriviálnější“ výrokovou formulí (tj. atomickou formulí) pro nás byly **výrokové proměnné**. Těm jsme přiřazovali pravdivostní hodnotu 0 (nepravda) nebo 1 (pravda). V tomto se však nachází jisté omezení. U předešlého příkladu jsme, kromě jiných, uvažovali výrok „ $x$  je obyvatelem Prahy“, který jsme značili výrokovou proměnnou  $P(x)$ . Tím jsme přiřadili  $P(x)$  jistý význam.

Zkusme takto zapsat matematické tvrzení „Pokud je  $x$  větší než  $y$  a zároveň  $y$  je větší než  $z$ , pak  $x$  je větší než  $z$ “. Výrok „ $x$  je větší než  $y$ “ označme  $A$ , „ $y$  je větší než  $z$ “ označme  $B$  a „ $x$  je větší než  $z$ “ označme  $C$ . Pak původní výrok bychom symbolicky zapsali jako

$$A \wedge B \Rightarrow C.$$

Nebylo by však jednodušší a smysluplnější zapsat takový výrok zkrátka jako  $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$ ? Takový zápis by odporoval definici výrokové formule, přesto jeho význam je zřejmý. Navíc bychom si tak ušetřili ono přiřazování významu jednotlivým výrokovým proměnným, jako tomu bylo doposud, neboť bychom měli možnost jejich syntaktického popisu. To nám je umožněno v *predikátovém počtu*.

Ve výrokové logice zastávaly výrokové proměnné roli těch „nejjednodušších“ formulí, které již nevznikaly z formulí jiných. V predikátovém počtu tuto roli zastávají tzv. *primitivní predikáty* (nebo jen zkráceně *predikáty*). Ty obsahuje každá matematická teorie. V aritmetice jsou to právě např.  $x < y$ ,  $x + y < z$ , apod., v teorii množin považujeme za primitivní predikát  $x \in X$  (ostatně celou teorii množin lze vybudovat pouze za použití tohoto predikátu). Po dosazení

konkrétních hodnot dané proměnné již obdržíme nějaký atomární výrok v dané teorii.

Výroky složené z primitivních predikátů již nenazýváme výrokové formule, ale *predikátové formule*. I ty lze definovat obdobně jako formule výrokové pomocí jistých pravidel, avšak pro pochopení konceptu si vystačíme s tímto vystačíme.

**Příklad 2.2.1.** Ukázky některých predikátových formulí:

- $x > y$                        $\triangleleft$  *Primitivní predikát (aritmetika) je predikátovou formulí*
- $\forall x(x = 0 \vee x < 0 \vee x > 0)$
- $\forall x(2 \mid x \Rightarrow \exists k(x = 2k))^3$
- $\exists k(k \in \mathbb{N} \wedge \exists x(x = 2k + 1))$

## 2.2.2 Jiné zápisy formulí s kvantifikátory

Formule s obecným kvantifikátorem  $\forall$  jsme zatím uvažovali ve tvaru

$$\forall x(\varphi \Rightarrow \psi),$$

kde  $\varphi$  a  $\psi$  jsou nějaké predikátové formule obsahující proměnnou  $x$ . (Formálně vzato, formule  $\varphi$  a  $\psi$  nemusí v tomto zápisu obsahovat proměnnou  $x$ , nicméně pak je kvantifikátor redundantní.) Existuje však o něco úspornější (a častěji používaný) zápis. Např. formulí

$$\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0)$$

můžeme též zapsat jako

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > 0.$$

Čteme jako „pro všechna přirozená čísla  $n$  platí, že  $n$  je větší než nula“. Obecněji formulí ve tvaru  $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$  lze psát jako  $\forall \varphi : \psi$ . Stejně tak můžeme zapisovat i formule s existenčním kvantifikátorem, tj.  $\exists x(\varphi \wedge \psi)$  místo  $\exists x(\varphi \wedge \psi)$ .

Často se nám může stát, že se kvantifikátory ve formulí kumulují. Zápisy prováděné dosavadním způsobem by se mohly značně zkomplikovat. Jako příklad uvažme formulí

$$\forall x(x \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k(k > n)).$$

Podle zmíněného již víme, že tento zápis můžeme zjednodušit na

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists k : k > n.$$

V takovém případě můžeme dvojtečku mezi obecným a existenčním kvantifikátorem vynechat a ponechat ji pouze před závěrem, nebo nahradit dvojtečku mezi kvantifikátory čárkou, tj. můžeme psát

$$\forall x \in \mathbb{N} \exists k : k > n \quad \text{nebo} \quad \forall x \in \mathbb{N}, \exists k : k > n.$$

---

<sup>3</sup>Zápis  $a \mid b$  znamená  $a$  dělí (beze zbytku)  $b$

Čteme: „Pro všechna přirozená čísla  $n$  existuje  $k$  takové, že  $k$  je větší než  $n$ “. Speciálně, může se stát, že dvě nebo více proměnných jsou součástí stejného predikátu u stejného typu kvantifikátoru. Kupříkladu formuli

$$\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall k(k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^k \geq n))$$

můžeme zjednodušit jako

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : n^k \geq n.$$

Proměnné  $n$  a  $k$  však uvažujeme ze stejné množiny a jsou součástí stejného typu kvantifikátoru (obecného). V takových případech můžeme zápis sloučit a psát

$$\forall n, k \in \mathbb{N} : n^k \geq n.$$

Je třeba však upozornit na fakt, že pořadí kvantifikátorů může mít vliv na význam daného výroku (a tudíž i jeho pravdivostní hodnotu). Např. formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : k > n \quad \text{a} \quad \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : k > n.$$

neříkají totéž (zkuste si je přechít). První říká, že **pro každé  $n$  existuje nějaké  $k$  takové, že  $k$  je větší než  $n$** , kdežto druhá formule má význam takový, že **existuje  $k$  takové, že pro všechna  $n$  je  $k$  větší než  $n$** . Jinými slovy říkáme, že existuje jedno **univerzální** číslo  $k$  tak, že je splněna daná podmínka. První formule je tak pravdivá, ale druhá již není.

Tento způsob zápisu však neplatí pouze pro kvantifikátory. Mějme např. formuli

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow x < y \vee x > y.$$

Zde též není nutné explicitně psát implikaci. Když se nám to hodí, můžeme předpoklad také uvést před dvojtečkou.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y : x < y \vee x > y$$

### 2.2.3 Negace formulí s kvantifikátory

V sekci o výrokové logice 2.1 jsme si zmínili některé důležité tautologie. Specificky, de Morganova pravidla (i) a (ii) zmíněné ve větě 2.1.11.

$$\begin{aligned}\neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \\ \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.\end{aligned}$$

Tyto tautologie nám dávaly způsob, jak negovat složené výroky obsahující konjunkci nebo disjunkci. Jak ovšem negovat formule s kvantifikátory?

Zkusme se na problematiku podívat opět skrze příklad o obyvatelích Prahy. Měli jsme tvrzení, že každý obyvatel Prahy má zelené vlasy a modré oči, což jsme zapisovali

$$\forall x : P(x) \Rightarrow Z(x) \wedge M(x).$$

Pro začátek si vezmeme jednodušší variantu bez konjunkce:

$$\forall x : P(x) \Rightarrow M(x).$$

Tedy uvažovaný výrok je „Každý obyvatel Prahy má zelené vlasy.“. Jak by zněla negace takového výroku? Zamysleme se nad tím, v jakém případě by výrok neplatil. Pokud by v Praze byl obyvatel, který nemá modré oči, pak naše tvrzení neplatí. Zdá se tedy, že by mohlo platit

$$\neg(\forall x : P(x) \Rightarrow M(x)) \Leftrightarrow \exists x : P(x) \wedge \neg M(x).$$

Tj. tvrdíme, že existuje  $x$  takové, že  $x$  je obyvatelem Prahy a  $x$  nemá modré oči. Jak se tedy změnila naše formule? Obecný kvantifikátor se změnil na existenční a znegovali jsme formuli  $P(x) \Rightarrow M(x)$  (viz tautologie (xii) ve větě 2.1.11). Skutečně, toto je negace původního výroku.

Podobně tomu bude i pro náš původní výrok s konjunkcí:

$$\neg(\forall x : P(x) \Rightarrow Z(x) \wedge M(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg(P(x) \Rightarrow Z(x) \wedge M(x)).$$

Tj. existuje  $x$  takové, že  $x$  je obyvatelem Prahy a platí, že nemá zelené vlasy nebo nemá modré oči. Opět užitím tautologie (xii) a následně de Morganova pravidla pro negaci konjunkce (i) ve větě 2.1.11 můžeme formuli upravit na

$$\exists x : P(x) \wedge (\neg Z(x) \vee \neg M(x)).$$

Funguje i opačná úvaha. Pokud naše tvrzení je, že existuje obyvatel Prahy se zelenými vlasy a modrými oči, pak negace naopak říká, že všichni obyvatelé Prahy nemají zelené vlasy nebo nemají modré oči. Tzn.

$$\neg(\exists x : P(x) \wedge Z(x) \wedge M(x)) \Leftrightarrow \forall x : P(x) \Rightarrow \neg Z(x) \vee \neg M(x).$$

Obecně řečeno, formule s kvantifikátory se negují tak, že kvantifikátory si prohodí roli, tj. obecný kvantifikátor se změnil na existenční a naopak, a znegujeme dílčí formuli  $\varphi$ , tzn.

$$\begin{aligned} \forall x : \varphi &\rightsquigarrow \exists x : \neg \varphi \quad \text{a} \\ \exists x : \varphi &\rightsquigarrow \forall x : \neg \varphi \end{aligned}$$

Kvantifikátory se mohou pochopitelně ve formulích různě kumulovat. V takovou chvíli postupujeme pořád stejně. Např. negace formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y > x.$$

bude

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y \leq x.$$



# Kapitola 3

## Axiomy teorie množin

Jak jsme si již zmínili v historickém úvodu tohoto textu, teorie množin se po objevu různých paradoxů (viz Russellův paradox a jiné v 1.2.2) v Cantorově zavedení začala později budovat axiomaticky. K tomu jsme měli možnost nahlédnout v sekci 1.2.3. Jednou z variant axiomatické teorie množin je tzv. **Zermelova-Fraenkelova teorie množin**, která je literatuře pravděpodobně tou nejrozšířenější; označujeme ji zkratkou  $ZF^1$ . Proto se právě jí budeme v této sekci věnovat. V dalších odstavcích se postupně zaměříme na jednotlivé axiomy  $ZF$  a ukážeme si, jak z nich vyplývají definice dalších pojmů (i některých nám již známých).

Nutno dodat, že  $ZF$  má více variant a tak v různých textech se může systém axiomů, s nimiž se pracuje, jemně lišit. Odlišné přístupy v této axiomatické teorii lze krásně vidět např. v knihách [4] a [5]. Lze však ukázat, že tyto varianty jsou si ekvivalentní. (Zmíníme se ještě později.)

Než začneme s dalším vysvětlováním, je nutné mít na paměti, že množiny jsou pro nás **jedinými** základními objekty, tzn. prvky množin mohou být opět pouze množiny a žádné jiné nepřipouštíme. Tedy jiné objekty, zejména čísla, vybudujeme pouze pomocí množin pomocí množin. Jak později uvidíme, skutečně si s tím vystačíme.

Pro začátek si zde přehledně vypíšeme všechny axiomy  $ZF$ , s nimiž budeme pracovat, a v dalších sekcích si některé detailněji popíšeme. **Schéma axiomů vydělení** a **axiom fundovanosti** zde vynecháme, nicméně čtenář si jejich podrobnější vysvětlení může přečíst v příloze C.

**Úmluva 3.0.1.** Množiny budeme v dalším textu podle potřeby značit velkými i malými písmeny latinské abecedy, tj.  $a, b, c, \dots, x, y, z, A, B, C, \dots, X, Y, Z$ .

**Axiomy Zermelovy-Fraenkelovy teorie množin:**

(ZF1) *Axiom existence.*

$$\exists x (x = x)$$

(ZF2) *Axiom estenzionalità.*

$$\forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

---

<sup>1</sup>Obdobně Gödelova-Bernaysova teorie množin je označována  $GB$ .

(ZF3) *Axiom dvojice.*

$$\forall a \forall b \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$$

(ZF4) *Schéma axiomů vydělení.*

$$\forall a \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)),$$

kde  $\varphi(x)$  je formule neobsahující proměnnou  $y$ .

(ZF5) *Axiom potence.*

$$\forall a \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \subseteq a)$$

(ZF6) *Axiom sumy.*

$$\forall a \exists z \forall x (x \in z \Leftrightarrow \exists y (x \in y \wedge y \in a))$$

(ZF7) *Axiom nekonečna.*

$$\exists y (\emptyset \in y \wedge \forall x (x \in y \Rightarrow x \cup \{x\} \in y))$$

(ZF8) *Schéma axiomů nahrazení.*

$$\begin{aligned} & \forall u \forall v \forall v' (\varphi(u, v) \wedge \varphi(u, v') \Rightarrow v = v') \Rightarrow \\ & \Rightarrow \forall a \exists z \forall x (x \in z \Leftrightarrow \exists y (y \in a \wedge \varphi(y, x))), \end{aligned}$$

kde formule  $\varphi(u, v)$  neobsahuje proměnné  $v'$  a  $z$ .

(ZF9) *Axiom fundovanosti.*

$$\forall a (a \neq \emptyset \Rightarrow \exists x : (x \in a \wedge x \cap a = \emptyset))$$

Ve formulaci axiomů (ZF5), (ZF7) a (ZF9) jsme využili symboly  $\emptyset$  a  $\subseteq$ , které jsme zatím formálně nedefinovali. Učinili jsme tak z didaktického hlediska, aby byly dané axiomy jasnější. Nicméně čtenář si bude moci později rozmyslet, že tyto symboly lze definovat pomocí predikátu  $x \in y$  jako zbytek axiomů.

Je dobré zmínit, že ve skutečnosti nám na seznamu výše jeden axiom chybí – *axiom výběru*. Ten byl skutečně součástí původní Zermelovy axiomatiky z roku 1908 a v teorii množin měl dosti netriviální důsledky<sup>2</sup>. Dnes jej však nepočítáme mezi základní axiomy teorie množin. Pokud se tedy mluví o **Zermelově-Fraenkelově teorii množin**, pracujeme se soustavou axiomů popsaných výše (tu značíme právě ZF). Naopak v případě varianty s axiomem výběru označujeme ZFC<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup>Asi nejznámějším příkladem je tzv. *Banachův-Tarského paradox*. Jeho formální vysvětlení je však zcela na rámcích tohoto textu.

<sup>3</sup>Písmeno C vychází z anglického *axiom of choice*

## 3.1 Axiomy 1 až 3

### 3.1.1 Axiom existence

$$\exists x (x = x)$$

Formulace axiomu (ZF1) se může jevit na první pohled zvláštní, ale jednoduše nám zaručuje, že nějaká **množina existuje**. Tento axiom se též někdy nahrazuje *axiomatic prázdné množiny*. Později si však ukážeme, že axiom existence a axiom prázdné množiny jsou spolu ekvivalentní (tedy z platnosti jednoho plyne druhý a naopak).

### 3.1.2 Axiom extenzionality

$$\forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

(ZF2) dává do souvislosti predikáty rovnosti a náležení: množiny jsou si rovny, když obsahují stejné prvky. Z tohoto axiomu vyplývá, že opakované výskyty prvku v množině jsou pro nás irelevantní, tj. např.

$$\{a, b, c, c\} = \{a, b, c\} \text{ apod.}$$

### 3.1.3 Axiom dvojice

$$\forall a \forall b \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x = a \wedge x = b)$$

Existence množiny garantovaná axiomem existence (ZF1) nám bohužel nezaručuje existenci žádné konkrétní množiny. Axiom dvojice nám zaručuje, že pokud máme dvě (ne nutně různé) množiny  $x$  a  $y$ , pak i  $\{x, y\}$  je množina (resp. že existuje množina obsahující prvky  $a$  a  $b$ ). Např. když máme množiny

$$\{a, b\} \text{ a } \{c\} \text{ pak existuje množina } \{\{a, b\}, \{c\}\}.$$

Není těžké se přesvědčit, že taková množina je vždy unikátní. V následujícím tvrzení si představíme variantu existenčního kvantifikátoru se symbolem „!“, tj.  $\exists!$ . Jeho význam je „**existuje právě jeden/jedno**“.

**Lemma 3.1.1.** *Pro každou množinu  $a$  a pro každou množinu  $b$  existuje jediná množina  $y$ , jejíž prvky jsou právě  $a$  a  $b$ . Symbolicky*

$$\forall a \forall b \exists! y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x = a \wedge x = b).$$

*Důkaz.* K důkazu lze přistoupit např. sporem. Pro spor nechť jsou dány dvě různé množiny  $y$  a  $y'$ , pro které platí

$$\forall x (x \in y \Leftrightarrow x = a \vee x = b) \quad \text{a} \quad \forall x (x \in y' \Leftrightarrow x = a \vee x = b).$$

Pak tedy platí

$$\forall x (x \in y \Leftrightarrow x \in y')$$

a z axiomu extenzionality (ZF2) vyplývá  $y = y'$ , což je spor s předpokladem, že  $y$  a  $y'$  jsou různé množiny. □

Množiny  $a, b$  nemusí být však nutně různé. Pokud budeme mít množinu  $x$ , pak z axiomu dvojice existuje množina  $\{x, x\}$ . Ta je však podle axiomu extenzionality rovna množině  $\{x\}$ , která podle výše dokázaného je jediná (stačí uvážit  $a = x$  a  $b = x$ ).

**Definice 3.1.2** (Neuspořádaná dvojice). Necht  $x$  a  $y$  jsou množiny. Pak množinu  $\{x, y\}$  nazýváme (*neuspořádanou dvojicí*).

Tato definice nejspíše není moc zajímavá, neboť zavedený termín je již v názvu axiomu. Avšak ono přídavné jméno „**neuspořádaná**“ nás může přivádět k otázce, jak reprezentovat *uspořádanou dvojici*. Čtenáři je tento termín nejspíše již známý v jiných podobách; typicky např. **vektory** využívané v analytické geometrii. Ty jsme běžně značili  $(x, y)$ . Nejdůležitější vlastností tohoto objektu pro nás byl fakt, že  $(x, y) \neq (y, x)$  a tedy záleželo na pořadí prvků. Jak toto vyjádřit pomocí množin? Je nejspíše jasné, že reprezentace pomocí množiny  $\{x, y\}$  již nebude dostatečující, protože podle axiomu extenzionality (ZF2) je  $\{x, y\} = \{y, x\}$  (proto název *neuspořádaná dvojice*). Naše požadavky pro objekt uspořádané dvojice tedy jsou:

1. pro každou množinu  $x$  a pro každou množinu  $y$  existuje jediná uspořádaná dvojice  $(x, y)$ ,
2. uspořádané dvojice  $(x, y)$  a  $(a, b)$  se rovnají právě tehdy, když  $x = a$  a  $y = b$ .

Již víme, že neuspořádané dvojice nám v tomto směru nepostačí. Potřebovali bychom umět nějak rozlišit, která souřadnice je „první“ a která „druhá“. Tento problém poměrně elegantně řeší definice, se kterou přišel polský matematik a logik KAZIMIERZ KURATOWSKI (1896–1980).

**Definice 3.1.3** (Uspořádaná dvojice). Necht  $x$  a  $y$  jsou množiny. Pak definujeme *uspořádanou dvojici*  $(x, y)$  jako

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Po chvilce zamyšlení nad touto definicí si můžeme uvědomit, že název „uspořádaná dvojice“ je zcela oprávněný. Množina  $\{x\}$  nám v podstatě říká, která z množin  $x, y$  je na „prvním místě“. Přesvědčme se, že takto definovaná uspořádaná dvojice má skutečně požadované vlastnosti.

Začneme jednodušším požadavkem a to sice, aby pro libovolné množiny  $x, y$  existovala právě jedna uspořádaná dvojice  $(x, y)$ .

**Lemma 3.1.4.** *Jsou-li  $x, y$  libovolné množiny, pak existuje právě jediná uspořádaná dvojice  $(x, y)$ .*

*Důkaz.* V důkazu tohoto tvrzení se můžeme přímo odvolat na fakt, který jsme dokázali dříve v lemmatu 3.1.1. Podle něj pro libovolné množiny  $x, y$  existuje právě jediná neuspořádaná dvojice  $\{x, y\}$ . K důkazu můžeme opět přistoupit sporem.

Pro spor nechť existují dvě různé uspořádané dvojice  $t$  a  $t'$ . Z výše uvedeného definice 3.1.3 musí platit

$$\forall x' (x' \in t \Leftrightarrow x' = \{x\} \vee x' = \{x, y\}) \quad \text{a} \quad \forall x' (x' \in t' \Leftrightarrow x' = \{x\} \vee x' = \{x, y\}).$$

Podle lemmatu 3.1.1 existují právě jedny neuspořádané dvojice  $\{x, y\}$  a  $\{x\}$ <sup>4</sup>. Z toho dostáváme, že  $t$  a  $t'$  mají stejné prvky a podle axiomu extenzionality (ZF2) platí  $t = t'$ , což je spor s předpokladem, že  $t$  a  $t'$  jsou různé množiny.  $\square$

**Lemma 3.1.5.** *Pro libovolné množiny  $x, y$  platí:*

$$(a, b) = (x, y) \Rightarrow a = x \wedge b = y.$$

Před uvedením důkazu si ještě zavedeme úmluvu pro zjednodušení zápisu.

**Úmluva 3.1.6.** Zápisem  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  budeme rozumět formuli tvaru  $x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = x_n$ .

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme opakovanou aplikací axiomu extenzionality (ZF2). Mějme uspořádané dvojice  $(a, b)$  a  $(x, y)$  takové, že  $(a, b) = (x, y)$ , tj. podle definice 3.1.3

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Podle (ZF2) musí mít množin na pravé a levé straně stejné prvky. Rozdělme si tento důkaz na dva případy.

- (a)  $\{a\} = \{x\}$ . Pak opět podle (ZF2) platí  $a = x$ . Rozlišme dále případy, když  $a = b$  a když  $a \neq b$ .

- $a = b$ . Pak

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} \stackrel{(ZF2)}{=} \{\{a\}, \{a\}\} \stackrel{(ZF2)}{=} \{\{a\}\}.$$

Musí tedy platit  $\{\{a\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ . Opět z (ZF2) vyplývá  $\{x, y\} = \{a\}$ , tj.  $x = a$  a  $y = a$ . Celkově dostáváme  $a = b = x = y$  a tedy i  $a = x$  a  $b = y$ , jak jsme chtěli.

- $a \neq b$ . V takovém případě nemůže platit, že  $\{a, b\} = \{a\}$  (zkuste si rozmyslet podle (ZF2)), tj. nutně musí  $\{a, b\} = \{x, y\}$ . Protože však  $a = x$ , pak  $b = y$ .

Celkově tak v obou případech dostáváme, že pokud  $\{a\} = \{x\}$ , pak  $x = a$  a  $y = b$ .

- (b)  $\{a\} = \{x, y\}$ . Podle (ZF2) pak platí  $x = a$  a  $y = a$ , tedy  $x = y$ . Stejným postupem tak dostáváme

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, x\}\} \stackrel{(ZF2)}{=} \{\{x\}, \{x\}\} \stackrel{(ZF2)}{=} \{\{x\}\}.$$

Tedy  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}\}$ . Protože prvky množiny na levé straně musí být prvky množiny na pravé straně, pak  $\{a\} = \{a, b\} = \{x\}$ . Z toho opět dostáváme, že  $a = b = x = y$ , tj.  $a = x$  a  $b = y$ .

V obou dílčích případech jsme dostali, že  $a = x$  a  $b = y$ , což jsme chtěli dokázat.  $\square$

---

<sup>4</sup>Množina obsahující pouze jeden prvek je také neuspořádanou dvojicí. Podle axiomu extenzionality je rovna množině  $\{x, x\}$ .

## 3.2 Axiomy 4 až 6

První trojice axiomů se zdá být dobrým základem, avšak stále je stále hodně typů množin, jejichž existence z nich neplyne. Trochu „podvodným“ způsobem jeden takový typ použili (a pokud čtenář odpustí, budeme i nadále používat pro lepší názornost) v diskuzi axiomu extenzionality, konkrétně množinu  $\{a,b,c\}$ . Při zamyšlení zjistíme, že čistě z axiomů (ZF2), (ZF1) a (ZF3) nelze takovou množinu „sestrojit“. Pomocí axiomu dvojice plyne pro množiny  $a,b,c$  existence množin

$$\{a,b\} \text{ a tudíž i } \{\{a,b\},c\},$$

což jak víme, není to samé co  $\{a,b,c\}$ . Její existenci a existenci mnoha dalších množin nám zaručí (společně se (ZF2), (ZF1) a (ZF3)) axiomy (ZF4), (ZF5) a (ZF6).

### 3.2.1 Schéma axiomů vydělení

$$\forall a \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)), \quad (3.1)$$

kde  $\varphi(x)$  je formule neobsahující proměnnou  $y$ .

Často potřebujeme z určité množiny prvků vybrat množinu prvků takových, že všechny sdílejí jistou vlastnost. Např.

- všechna sudá čísla z množiny  $\mathbb{Z}$ ,
- všechna nezáporná čísla z množiny  $\mathbb{R}$ ,
- všechna prvočísla z množiny  $\mathbb{N}$ , apod.

Schéma axiomů vydělení<sup>5</sup> nám obecně říká, že pro každou množinu  $a$  existuje množina  $y$  taková, že každý její prvek  $x$  je zároveň prvek  $a$  splňuje určitou formuli  $\varphi(x)$  (ta reprezentuje danou vlastnost). Podle axiomu extenzionality (ZF2) je množina v (3.1) jednoznačně určena. Čtenář je nejspíše zvyklý množiny, jejichž prvky sdílejí určitou vlastnost, zapisovat např. jako

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Obecněji množinu z (3.1) zapisujeme výrazem

$$\{x \mid x \in a \wedge \varphi(x)\} \text{ nebo též } \{x \in a \mid \varphi(x)\}.$$

Pokud se nyní vrátíme k množinám, se kterými jsme doteď pracovali, můžeme pro množiny  $a$  a  $b$  definovat množinu

$$\{x \in a \mid x \notin b\},$$

kde formule  $\varphi(x)$  je  $x \notin b$ . Toto schéma axiomů má následující důsledek.

---

<sup>5</sup>Slovo „schéma“ přidáváme z důvodu, že pro každou volbu formule  $\varphi$  dostáváme jeden konkrétní axiom teorie – axiom vydělení. Tedy schéma axiomů vydělení představuje nekonečně mnoho různých axiomů, které vzniknou tím, že  $\varphi$  proběhne všechny možné formule s proměnnou  $x$ .

**Důsledek 3.2.1.** *Existuje množina, která nemá žádné prvky.*

*Důkaz.* Důkaz je jednoduchý. Máme-li libovolnou množinu  $a$ , pak podle schématu axiomů vydělení lze sestavit množinu, která nemá žádné prvky. Toho docílíme volbou formule  $\varphi(x)$  jako  $x \neq x$ , tzn.

$$\{x \in a \mid x \neq x\}$$

je také množina. □

Takovou množinu pak nazýváme *prázdná množina* a typicky ji označujeme znakem  $\emptyset$  nebo též někdy prázdnými složenými závorkami  $\{\}$ . Toto tvrzení se v jiných variantách ZF považuje za axiom a nahrazuje axiom existence. Všimněte si, že důkaz výše (a prakticky důkazy všech zatím zformulovaných tvrzení) závisely (mimo jiné) právě na axiomu existence. Jinak bychom množinu  $a$  vůbec nemohli uvažovat. Naopak pokud bychom přijali existenci prázdné množiny jako axiom, pak to automaticky implikuje existenci množiny obecně, kterou nám zaručuje axiom existence.

Pomocí schématu axiomů vydělení můžeme definovat některé základní operace s množinami.

**Definice 3.2.2** (Průnik a rozdíl množin). Necht jsou dány libovolné množiny  $a$  a  $b$ , pak

(i) *průnikem* množin  $a$  a  $b$  rozumíme množinu  $a \cap b$ , kterou definujeme

$$a \cap b = \{x \mid x \in a \wedge x \in b\}.$$

(ii) *rozdílem* množin  $a$  a  $b$  rozumíme množinu  $a \setminus b$ , kterou definujeme

$$a \setminus b = \{x \mid x \in a \wedge x \notin b\}.$$

**Příklad 3.2.3.** Ukázky průniku a rozdílu množin:

- (i)  $\{a, b, c\} \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$ ,
- (ii)  $\{a, b, c\} \cap \emptyset = \emptyset$ ,
- (iii)  $\{x, y, z\} \setminus \{y\} = \{x, z\}$ ,
- (iv)  $\{y, z\} \setminus \emptyset = \{y, z\}$ .

**Poznámka 3.2.4.** Speciálně, pokud pro množiny  $a, b$  platí, že  $a \cap b = \emptyset$  (tzn.  $a$  a  $b$  nemají žádný společný prvek), pak říkáme, že jsou *disjunktní*.

Proč rovnou nedefinovat i *sjednocení* množin? Protože schéma axiomů vydělení (ZF4) garantuje existenci pouze takové množiny  $y$ , že všechny její prvky náleží množině  $a$ . To však při sjednocení množin neplatí, neboť některé prvky množiny  $b$  nemusí být prvky množiny  $a$ . S touto vlastností všech množin, jejichž existenci máme díky schématu axiomů vydělení, se pojí ještě jeden termín.

**Definice 3.2.5** (Podmnožina a vlastní podmnožina). Nechť  $a$  je libovolná množina. Pak  $b$  nazveme *podmnožinou* množiny  $a$ , pokud

$$\forall x (x \in b \Rightarrow x \in a).$$

Pokud navíc platí, že  $a \neq b$ , pak  $b$  nazýváme *vlastní podmnožinou*.

**Příklad 3.2.6.** Ukázky vztahů množin mezi sebou:

- (i)  $x_1 = \{a, b\}$ ,  $x_2 = \{a, b, c\}$ , pak platí  $x_1 \subset x_2$  a tj. i  $x_1 \subseteq x_2$ , ale nikoliv  $x_2 \subseteq x_1$ ;
- (ii)  $y_1 = \{a, b, c\}$ ,  $y_2 = \{a, b, c\}$ , pak platí  $y_1 \subseteq y_2$  a i  $y_2 \subseteq y_1$ , ale nikoliv  $y_1 \subset y_2$  nebo  $y_2 \subset y_1$ ;
- (iii)  $z_1 = \emptyset$ ,  $z_2 = \{k\}$ , pak platí  $z_1 \subset z_2$  a tudíž i  $z_1 \subseteq z_2$ .

Poslední ze zmíněných příkladů je celkem pozoruhodný, neboť s ním souvisí následující lemma.

**Lemma 3.2.7.** *Platí:*

- (i)  $\forall x : \emptyset \subseteq x$ ,
- (ii)  $\forall x : x \subseteq \emptyset \Leftrightarrow x = \emptyset$ .

*Důkaz.* (i). Zde se dostáváme k poměrně zajímavé části logiky. Pokud bychom si roze-psali definici podmnožiny (viz 3.2.5), formule by vypadala takto:

$$\forall x (x \in \emptyset \Rightarrow x \in a) \text{ nebo ekvivalentně } \forall x \in \emptyset : \Rightarrow x \in a. \quad (3.2)$$

Problém je však, že prázdná množina žádné prvky nemá. Jak tedy rozhodnout o pravdivosti (3.2)? Ve skutečnosti, jakékoliv tvrzení obsahující obecný kvantifikátor, kde množina, z níž  $x$  uvažujeme, je prázdná, je vždy pravdivé. Tzn. výrok

$$\alpha \sim \forall x \in \emptyset : \varphi,$$

kde  $\varphi$  je libovolná formule, je vždy pravdivý<sup>6</sup>. Pokud není čtenáři, že  $\alpha$  platí, pak snad bude jasnější se přesvědčit, že opačné tvrzení  $\neg\alpha$  neplatí, tj.

$$\exists x \in \emptyset : \neg\varphi.$$

(Tzn. nutně platí  $\alpha$ .)

(ii). ( $\Rightarrow$ ). Pokud pro libovolné  $x$  platí  $x \subseteq \emptyset$ , pak z definice

$$\forall y (y \in x \Rightarrow y \in \emptyset)$$

je vidět, že tvrzení platí pouze pro  $x = \emptyset$  (pro neprázdnou množinu  $x$  by libovolný její prvek nikdy neležel v  $\emptyset$ ).

( $\Leftarrow$ ). Plyne přímo z (i). Prázdná množina je podmnožinou každé množiny, tedy i sebe sama.

□

---

<sup>6</sup>Analogicky výroky s existenčním kvantifikátorem, kde  $x$  uvažujeme z prázdné množiny, jsou vždy nepravdivé.



### 3.2.2 Axiom potence

$$\forall a \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \subseteq a)$$

Pro každou množinu  $a$  existuje množina  $y$  taková, že obsahuje **právě** všechny její podmnožiny. Z axiomu extenzionality navíc opět platí, že taková množina je vždy jediná. Na základě tohoto axiomu můžeme definovat:

**Definice 3.2.8** (Potenční množina). Necht  $a$  je libovolná množina. Pak *potenční množinu* (též *potenci*)  $\mathcal{P}(a)$ <sup>7</sup> množiny  $a$  definujeme

$$\mathcal{P}(a) = \{x \mid x \subseteq a\}.$$

**Příklad 3.2.9.** Příklady potenčních množin:

- (i)  $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\},$
- (ii)  $\mathcal{P}(\{x, y, z\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\},$
- (iii)  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$  (potence má jeden prvek).

### 3.2.3 Axiom sumy

$$\forall a \exists z \forall x (x \in z \Leftrightarrow \exists y (x \in y \wedge y \in a))$$

Ke každé množině  $a$  existuje (podle axiomu extenzionality jediná) množina  $y$  obsahující **právě** takové prvky, které jsou prvkem některého z prvků (tj. množin) množiny  $a$ . Obdobně jako potenční množinu můžeme i tento typ množiny definovat.

**Definice 3.2.10** (Suma množiny). Necht  $a$  je libovolná množina. *Sumou množiny*  $a$  rozumíme množinu  $\bigcup a$  definovanou

$$\bigcup a = \{x \mid \exists y (x \in y \wedge y \in a)\}.$$

**Příklad 3.2.11.** Ukázky sum množin:

- (i)  $\bigcup \{\{a, b\}, \{c\}\} = \{a, b, c\},$
- (ii)  $\bigcup \{\{x\}\} = \{x\}.$

Jak lze vidět z příkladu (i), který jsme si ukázali v úvodu této sekce, axiom sumy nám dovoluje opět pracovat s větším spektrem množin, kde můžeme uvažovat množiny libovolné (konečné) velikosti. Trochu precizněji, společně s axiomem dvojice (ZF3) a axiomem extenzionality (ZF2) víme, že pro množiny  $a$  a  $b$  existuje jediná dvojice  $\{a, b\}$  a pro množinu  $c$  existuje dvojice  $\{c, c\} \stackrel{(ZF2)}{=} \{c\}$ . Opět podle axiomu dvojice pak je i množinou

$$\{\{a, b\}, \{c\}\}$$

---

<sup>7</sup>V jiných textech se lze též setkat se značením  $2^a$ .

a nakonec podle axiomu sumy (ZF6) je množina i

$$\{a, b, c\}.$$

Díky axiomu sumy můžeme repertoár základních množinových operací rozšířit o sjednocení.

**Definice 3.2.12** (Sjednocení množin). Necht  $a, b$  jsou libovolné množiny. *Sjednocením množin  $a$  a  $b$*  rozumíme množinu  $a \cup b$  definovanou

$$a \cup b = \{x \mid x \in a \vee x \in b\}.$$

Zde si můžeme všimnout souvislosti se sumou množiny, neboť sjednocení množin  $a, b$  lze zapsat i takto:

$$a \cup b = \bigcup \{a, b\}.$$

(Zkuste si rozmyslet z definice.) Z toho je také vidět, že definice sjednocení množin je zcela oprávněná, neboť je v souladu s axiomem sumy.

**Příklad 3.2.13.** Ukázky sjednocení:

$$(i) \quad \{a, b, c\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\},$$

$$(ii) \quad \{x, y\} \cup \emptyset = \{x, y\}$$

Nyní se ještě chvíli budeme držet zavedených operací **sjednocení, průniku a rozdílu**. Máme-li množiny  $X_1, \dots, X_n$ , pak jejich sjednocení můžeme zapsat jako

$$\bigcup_{i=1}^n X_i = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$$

a průnik jako

$$\bigcap_{i=1}^n X_i = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n.$$

Ačkoliv jsme si společně ukázali, že sjednocení  $\bigcup_{i=1}^n$  lze ekvivalentně zapsat pomocí sumy  $\bigcup$ , přesto se nejedná o stejné operace a je důležité vnímat rozdíl v jejich značení.

Celkově o sjednocení, průniku a rozdílu dvou množin lze ukázat řadu vlastností. Pro operace sjednocení a průniku platí jak *komutativní*, tak i *asociativní zákon*:

$$\begin{aligned} X \cup Y &= Y \cup X, \\ X \cap Y &= Y \cap X, \\ (X \cup Y) \cup Z &= X \cup (Y \cup Z), \\ (X \cap Y) \cap Z &= X \cap (Y \cap Z). \end{aligned}$$

Navíc sjednocení a průnik jsou vzájemně vůči sobě *distributivní*:

$$\begin{aligned} X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \\ X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z). \end{aligned}$$

Tento poznatek můžeme zobecnit užitím velkých operátorů  $\cup$ ,  $\cap$  jako

$$A \cup \left( \bigcap_{i=1}^n X_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup X_i),$$

$$A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n X_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap X_i).$$

### 3.3 Axiom nekonečna

Už jsme zde ukázkově zmínili nám asi jedny z nejznámějších množin jako jsou přirozená čísla  $\mathbb{N}$  nebo reálná čísla  $\mathbb{R}$ . Ačkoliv je šestice již zmíněných axiomů poměrně silná a umožňuje nám pracovat velkou škálou množin, přesto by bylo stále ambiciózní tvrdit např. o přirozených, racionálních či reálných číslech jako o množinách v kontextu ZF. Axiom dvojice nebo axiomy sumy nám zatím dávají možnost mluvit pouze o konečných množinách, byť libovolně velkých. Mohli bychom ještě udat jako důvod, že množiny jsou pro nás jediným přípustným objektem (jak jsme zmiňovali na začátku kapitoly) a prvky množin musí být opět množiny. Jak ale později uvidíme (viz 5), číselné obory jsou také množinami v ZF. Podívejme se na axiom nekonečna (ZF7).

$$\exists y (\emptyset \in y \wedge \forall x (x \in y \Rightarrow x \cup \{x\} \in y)$$

Existuje množina  $y$ , kde pro každý její prvek  $x$  platí, že je prvkem i  $x \cup \{x\}$ . Zkráceně tento axiom postuluje existenci **aktuálně** nekonečné množiny.

Zde opět narážíme na problematiku, kterou jsme diskutovali v historické části, a to sice **potenciální** vs **aktuální** nekonečno. Axiomy dvojice a sumy nám zaručovaly existenci **potenciálně** nekonečných množin, zatímco axiom nekonečna nám zaručuje existenci **aktuálně** nekonečné množiny (bez udání způsobu, jak takovou sestavit z již existujících množin).

# Kapitola 4

## Relace

Množiny nám dávají možnost definovat řadu rozličných matematických pojmů. Jedním z nich je tzv. *relace*. Jak čtenář později zjistí, tento termín nám ve skutečnosti není tak vzdálený a setkáváme se s ním v matematice neustále. Před jeho zavedením však budeme potřebovat ještě jiné pojmy.

### 4.1 Kartézský součin

**Definice 4.1.1** (Kartézský součin množin). Necht  $a, b$  jsou libovolné množiny. Pak *kartézský součin*  $a$  a  $b$  značíme  $a \times b$  a definujeme jej jako

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Slovně řečeno, kartézský součin  $A \times B$  je množina všech uspořádaných dvojic  $(x, y)$ , kde  $x \in A$  a  $y \in B$ . Takový objekt je podle axiomu dvojice (ZF3) a axiomu sumy (ZF6) množinou v ZF.

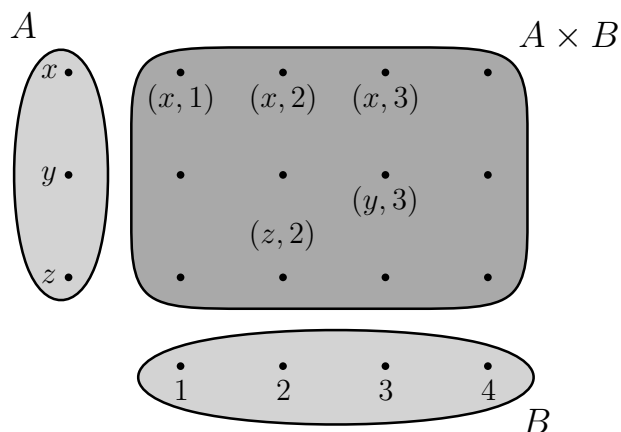
**Příklad 4.1.2.** Mějme množiny  $A = \{x, y, z\}$  a  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . Vypočítejte kartézský součin  $A \times B$ .

*Řešení.* Stačí postupovat podle definice, tj.

$$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (x, 4), (y, 1), (y, 2), (y, 3), (y, 4), (z, 1), (z, 2), (z, 3), (z, 4)\}.$$

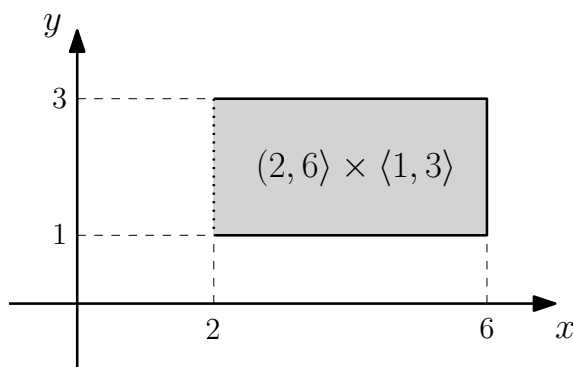
Kartézský součin množin  $A, B$  lze interpretovat i graficky (viz obrázek 4.1).

□



Obrázek 4.1: Grafické znázornění kartézského součinu z příkladu 4.1.2.

Pokud budeme však pracovat např. s intervaly reálných čísel, pak již nemůžeme takto kartézský součin znázornit, ale můžeme reprezentovat uspořádané dvojice jako body v rovině. Např. pro  $A = (2, 6)$  a  $B = \langle 1, 3 \rangle$  je grafické znázornění na obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: Grafické znázornění kartézského součinu intervalů  $(2, 6)$  a  $\langle 1, 3 \rangle$ .

Podobně jako v případě součinu čísel, i zde můžeme kartézské součiny stejných množin značit pomocí horního indexu (tzv. *kartézské mocniny*), např.  $A \times A = A^2$ ,  $A \times A \times A = A^3$ , atd. Obecně lze definovat

$$\begin{aligned} A^1 &= A, \\ A^n &= A^{n-1} \times A. \end{aligned}$$

Neplatí zde však asociativní ani komutativní zákon:

$$\begin{aligned} (A \times B) \times C &\neq A \times (B \times C), \\ A \times B &\neq C \times A, \end{aligned}$$

protože jak jsme si již dříve uvedli, tak obecně  $(x, y) \neq (y, x)$ . (Zkuste si rozmyslet.)

**Příklad 4.1.3.** Necht je dána množina  $X = \{a, b\}$ . Vypočítejte  $X^3$ .

*Řešení.* Kartézský součin  $X^3$  můžeme vypočítat jako  $X^2 \times X$ .

$$X^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

Nyní stačí dopočítat  $X^2 \times X = X^3 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\} \times \{a,b\}$ , čímž obdržíme

$$X^3 = \{(a,(a,a)), (a,(a,b)), (a,(b,a)), (a,(b,b)), (b,(a,a)), (b,(a,b)), (b,(b,a)), (b,(b,b))\}.$$

Ovšem jak jsme již zmiňovali, tak  $(x,(y,z)) = (x,y,z)$ , tedy množina  $X^3$  jednoduše obsahuje všechny uspořádané trojice prvků z  $x$ .

$$X^3 = \{(a,a,a), (a,a,b), (a,b,a), (a,b,b), (b,a,a), (b,a,b), (b,b,a), (b,b,b)\}.$$

□

## 4.2 Zavedení relace

Relace (jak název napovídá) odpovídá jistému „vztahu“. Z reálného života takové příklady známe, např. vztah „matka – dcera“, „stát – hlavní město státu“, apod. Jsou-li např. Jitka a Lenka spolu ve vztahu „matka – dcera“, pak bychom mohli jednoduše psát

$$(Jitka, Lenka).$$

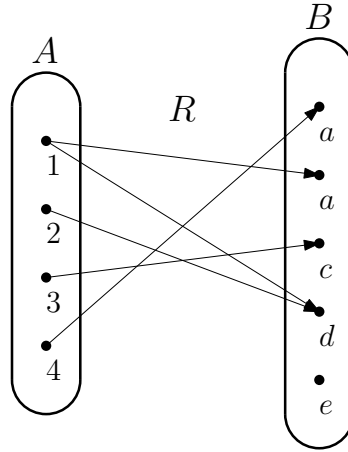
To však v řeči matematiky není nic jiného, než uspořádaná dvojice prvků. K tomu se nám bude hodit již zavedený kartézský součin.

**Definice 4.2.1** (Relace). Necht  $X, Y$  jsou libovolné množiny. Pak *relací mezi  $X$  a  $Y$*  nazýváme libovolnou podmnožinu  $R$  kartézského součinu  $X \times Y$ , tj.  $R \subseteq X \times Y$ . Speciálně, pokud  $X = Y$ , pak mluvíme o *relaci na množině  $X$* , tzn.  $R \subseteq X^2$ .

Pokud  $(x,y) \in R$ , pak říkáme, že *prvky  $x$  a  $y$  jsou v relaci  $R$* , což ekvivalentně zapisujeme jako  $xRy$ . Jak už jsme si zmínili, tak relace již známe a i v tomto textu jsme je mnohokrát použili. Např. relace rovnosti „ $=$ “ na  $\mathbb{N}$  by obsahovala prvky  $(1,1), (2,2), (3,3), \dots$ . Pochopitelně bychom mohli psát „ $(2,2) \in =$ “, ale to neděláme; místo toho zkrátka píšeme „ $2 = 2$ “. Podobně např. relace „ $\leq$ “ na množině  $\mathbb{R}$ , „ $>$ “, „ $\geq$ “, aj.

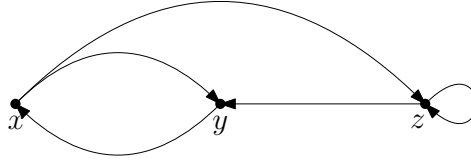
**Úmluva 4.2.2.** Pro značení relací budeme používat velká písmena latinské abecedy  $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ .

Relace můžeme znázornit více způsoby v závislosti na jejich typu. Např. máme-li relaci  $R = \{(1,b), (1,d), (2,d), (3,c), (4,a)\}$  mezi množinami  $A = \{1,2,3,4\}$  a  $B = \{1,2,3,4,5\}$ , pak ji můžeme znázornit způsobem uvedeným na obrázku 4.5.



Obrázek 4.3: Grafické znázornění relace  $R$  mezi množinami  $A$  a  $B$ .

Avšak pokud máme relaci  $S$  **na množině**  $C = \{x, y, z\}$ , kupříkladu  $S = \{(x, z), (x, y), (y, x), (z, y), (z, z)\}$ , pak volíme spíše znázornění na obrázku 4.5.



Obrázek 4.4: Grafické znázornění relace  $S$  na množině  $C$ .

Jako poslední si ještě zmíníme tzv. *skládání relací*.

**Definice 4.2.3** (Složení relací). Necht  $X, Y, Z$  jsou libovolné množiny,  $R \subseteq X \times Y$  a  $S \subseteq Y \times Z$ . Relaci  $T \subseteq X \times Z$  definujeme následovně:

$$xTz \Leftrightarrow \exists y \in Y : xRy \wedge ySz.$$

Složení relací  $R$  a  $S$  značíme  $S \circ R$ , tzn.  $T = S \circ R$ .

**Příklad 4.2.4.** Mějme množiny  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x, y, z\}$  a  $C = \{i, j, k, l\}$ . Na nich definujeme relace

$$R = \{(a, z), (a, y), (c, x)\} \subseteq A \times B \quad \text{a} \quad S = \{(x, k), (y, i), (y, j), (z, j)\} \subseteq B \times C.$$

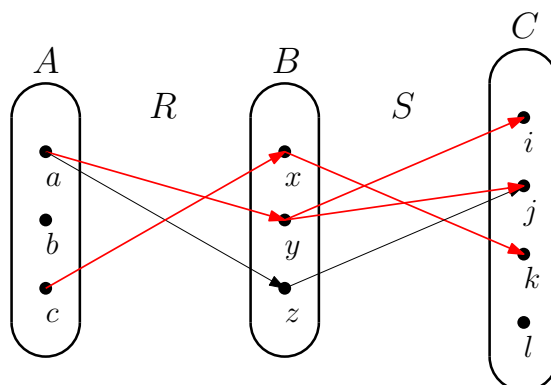
Určete  $T = S \circ R$ .

*Řešení.* Postupujeme podle definice 4.2.3 výše. Pro každou z dvojic v  $R$  se podíváme, zda existuje nějaká dvojice v  $S$  taková, že platí:  $t_1 R t_2$  a  $t_2 S t_3$ , kde  $t_1 \in A$ ,  $t_2 \in B$  a  $t_3 \in C$ .

$$\begin{aligned} aRj \wedge zSj &\Rightarrow aTj, \\ aRy \wedge ySi &\Rightarrow aTi, \\ aRy \wedge ySj &\Rightarrow aTj \text{ (duplikátní)}, \\ cRx \wedge xSk &\Rightarrow cTk. \end{aligned}$$

Tedy  $T = \{(a,i), (a,j), (c,k)\}$ .

□



Obrázek 4.5: Grafické znázornění relace složení relací  $R$  a  $S$  z příkladu 4.2.4.

Podívejme se ještě na jeden příklad:

**Příklad 4.2.5.** Mějme relace  $R = \{(x,x), (x,y), (y,z)\}$  a  $S = \{(x,z), (z,y)\}$ . Určete  $T = S \circ R$  a  $T' = R \circ S$ .

*Řešení.* Začneme s  $T = S \circ R$ .

$$xRx \wedge xSz \Rightarrow xTz$$

$$yRz \wedge zSy \Rightarrow yTy$$

Tzn.  $T = \{(x,z), (y,y)\}$ . Nyní analogicky pro  $T'$ .

$$zSy \wedge yRz \Rightarrow zTz$$

Tím získáváme  $T' = \{(z,z)\}$ .

□

Z příkladu 4.2.5 lze vidět, že skládání relací není komutativní a tedy záleží na pořadí.

(Sekce inspirována [6], str. 34–39.)

## 4.3 Zobrazení

Jedním z nejdůležitějších typů relací je tzv. *zobrazení*. Zde se zároveň dostáváme trochu zpět k tématu, kterým se čtenář na střední škole jistě zabýval, akorát se o něm nemluvalo v souvislosti s relacemi, a to sice k *funkcím*. Termíny jako definiční obor, obor hodnot, aj. nejspíše tak pro nás nebudou velkou neznámou, ale přesto nezanedbáme jejich formální zavedení.

### 4.3.1 Zavedení a související pojmy

**Definice 4.3.1** (Zobrazení). *Zobrazením z množiny  $X$  do množiny  $Y$  nazýváme relaci  $f \subseteq X \times Y$ , když platí*

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y : xfy.$$



U relací jsme si zaváděli úmluvu, kde jsme si pro jejich značení rezervovali velká písmena latinské abecedy. U zobrazení je tomu trochu jinak.

**Úmluva 4.3.2.** Zobrazení budeme značit malými písmeny latinské abecedy  $a, b, c, \dots, x, y, z$ , nebo případně malými písmeny řecké abecedy  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \chi, \psi, \omega$ .

Že  $f$  je zobrazení z  $X$  do  $Y$  zapisujeme jako

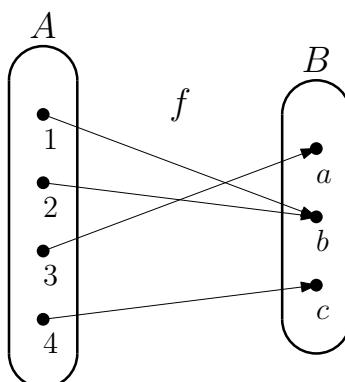
$$f : X \rightarrow Y,$$

a to, že zobrazení  $f$  přiřazuje prvku  $x$  prvek  $y$  vyjádříme zápisem

$$f : x \mapsto y.$$

Tato definice by nám měla být povědomá, neboť takto jsme si nejspíše na střední škole definovali funkci. Jaký je tedy rozdíl mezi **funkcí** a **zobrazením**? Ve skutečnosti toto není v matematice jednotné. V určitých odvětvích se tyto termíny považují za synonyma a jinde se zase naopak funkcí nazývá speciální typ zobrazení, kdy množina  $Y$  je číselná, tj.  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\dots$  (tedy funkce je zobrazení, avšak ne naopak). My tyto pojmy budeme v dalším textu rozlišovat, aby byl výklad jasnější.

Např. zobrazení  $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c\}$ , kde  $f = \{(1, b), (2, b), (3, a), (4, c)\}$  je znázorněno na obrázku 4.6.



Obrázek 4.6: Grafické znázornění zobrazení  $f = \{(1, b), (2, b), (3, a), (4, c)\}$ .

U zobrazení  $f : X \rightarrow Y$ , kde  $f : x \mapsto y$ , se

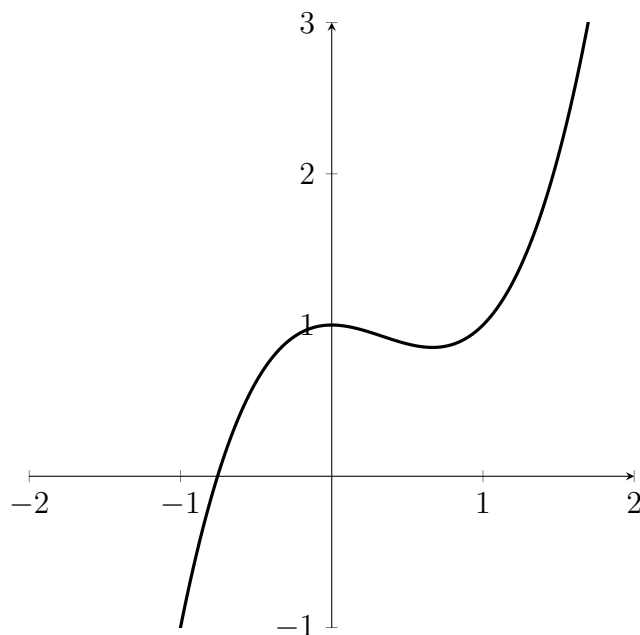
- $x$  nazývá *vzor* prvku  $y$  a
- $y$  se nazývá *obraz* prvku  $x$  nebo také *hodnota zobrazení  $f$  v bodě  $x$* .

Množiny  $X$  a  $Y$  pak po řadě nazýváme *množina vzorů* a *množina obrazů*. U funkcí je zvykem tyto množiny nazývat *definiční obor* a *obor hodnot*.

Těž se zavádí *obraz množiny*, tj. je-li  $A \subseteq X$ , pak

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

V případě funkce, co by podmnožiny kartézského součinu, byl čtenář nejspíše zvyklý je zadávat pomocí tzv. *funkčního předpisu*, např.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , přičemž  $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ . Tu jsme znázorňovali pomocí *grafu* (viz 4.7).



Obrázek 4.7: Graf funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ .

Tento způsob proto budeme používat i u zobrazení (tedy nejen u funkcí).

### 4.3.2 Druhy zobrazení

Skládání zobrazení je zcela stejné, jako v případě relací (ostatně zobrazení je relace). Avšak pro ujasnění si jej zformulujeme jako samostatnou definici.

**Definice 4.3.3** (Skládání zobrazení). Necht  $f : X \rightarrow Y$  a  $g : Y \rightarrow Z$  jsou zobrazení. *Složením zobrazení  $f$  a  $g$  nazveme zobrazení  $h : X \rightarrow Z$ , pro které platí*

$$\forall x \in X : h(x) = g(f(x)).$$

Složení zobrazení  $g$  a  $f$  se značí (stejně jako u relací)  $g \circ f$ , tzn.  $h = g \circ f$ .

Podle právě zformulované definice 4.3.3 tedy platí:

$$\forall x \in X : (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Definice 4.3.4** (Důležité druhy zobrazení). Necht je dáno zobrazení  $f : X \rightarrow Y$ . Pak  $f$  je

- (i) *prosté* (též *injektivní* či *injekce*), jestliže  $\forall x, y \in X, x \neq y : f(x) \neq f(y)$ .
- (ii) *na* (též *surjektivní*<sup>1</sup> či *surjekce*), jestliže  $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$ .
- (iii) *vzájemně jednoznačné* (též *bijektivní* či *bijekce*), když  $f$  je prosté a na.

**Příklad 4.3.5.** Ukázky některých zobrazení a jejich klasifikace podle 4.3.4. ( $A$  je libovolná množina.)

<sup>1</sup>Z francouzštiny, čteme „syrjektivní“/„syrjekce“.

- (i) Zobrazení  $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , kde  $f_1(n) = -n$ , je *bijekce*.
- (ii) Zobrazení  $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ , kde  $f_2(n) = |n| + 1$ , je *na*, avšak není *prosté* a tedy ani *bijekce*.
- (iii) Zobrazení  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , kde  $f_3(x) = x^2$ , je *na*, ale není *prosté*.
- (iv) Zobrazení  $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , kde  $f_4(x) = x^2 + 1$ , není *prosté*, ani *na*.
- (v) Zobrazení  $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , kde  $f_5(x) = e^x$ , je *bijekce*.
- (vi) Zobrazení  $f_6 : A^2 \rightarrow A^2$ , kde  $f_6((x,y)) = (y,x)$ , je *bijekce*.
- (vii) Zobrazení  $f_7 : A \rightarrow A$ , kde  $f_7(x) = x$ , je *bijekce*.
- (viii) Zobrazení  $f_8 : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , kde  $A$  je libovolná množina a  $f_8(a) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid a \in X\}$ , je *bijekce*.

(Inspirováno [7], str. 10.)

Psát v matematice  $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$  je nezvyklé (jak jsme provedli v (vi)). Nejspíše by dávalo větší smysl v takovém případě nepsat vnořené závorky. Proto si zavedme následující úmluvu.

**Úmluva 4.3.6.** Zápis  $f((x_1, x_2, \dots, x_n))$  budeme nahrazovat symbolem  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  stejného významu (tj. obraz uspořádané  $n$ -tice).

Poslední bod (vii) je dosti významným příkladem zobrazení, které si zaslouží vlastní definici (viz 4.3.7).

**Definice 4.3.7** (Identita). Necht  $f : X \rightarrow X$  je zobrazení takové, že  $f(x) = x$ . Pak  $f$  nazýváme *identitou* nebo též *identické zobrazení* a značíme jej  $1_X$ .

U zobrazení a jejich skládání můžeme pozorovat jisté závislosti. Jejich důkazy jsou triviální a plynou přímo z definice, ale přesto si je zde uvedeme.

**Tvrzení 4.3.8** (Vlastnosti skládání zobrazení). Necht  $f : X \rightarrow Y$  a  $g : Y \rightarrow Z$  jsou zobrazení. Pak

- (i) jsou-li  $f, g$  *prostá zobrazení*, je  $g \circ f$  *prosté zobrazení*.
- (ii) jsou-li  $f, g$  *zobrazení na*, je  $g \circ f$  *zobrazení na*.
- (iii) jsou-li  $f, g$  *bijekce*, je  $g \circ f$  *bijekce*.

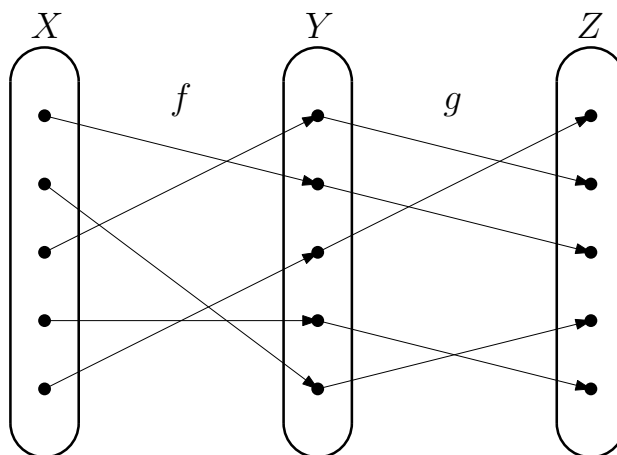
*Důkaz.* (i). Budiž dány prvky  $x, y \in X$  takové, že  $x \neq y$ . Protože  $f$  je *prosté*, pak  $f(x) \neq f(y)$ . Protože prvky  $f(x), f(y) \in Y$  jsou různé a  $g$  je *prosté*, pak  $g(f(x)) \neq g(f(y))$ .

(ii). Zde budeme postupovat opačně. Mějme prvek  $z \in Z$ . Z předpokladu, že  $g$  je *na*, plyne, že existuje  $y \in Y$  takové, že  $g(y) = z$ . Analogicky pro  $y$  musí existovat  $x \in X$  takové, že  $f(x) = y$ , neboť  $f$  je *na*. Tzn.  $g(f(x)) = z$ .

(iii). Přímý důsledek (i) a (ii).

□

Princip bodu (iii) je znázorněn na obrázku 4.8.



Obrázek 4.8: Příklad složení bijekcí  $f$  a  $g$ .

(Sekce inspirována [6], str. 39–43.)

# Kapitola 5

## Budování číselných množin

Ne nadarmo se někdy metaforicky teorii množin říká *svět matematiky*. Množiny jsou skutečně silným nástrojem pro budování různých matematických objektů. Již jsme si vysvětlovali, že zobrazení mezi množinami  $A$  a  $B$  není nic jiného, než množina uspořádaných dvojic, což podle Kuratowského definice uspořádané dvojice 3.1.3 není opět nic jiného než množina. Tedy i funkce tak, jak je známe ze střední školy, lze bez problému vnímat jako „pouhé“ množiny, splňující určité vlastnosti.

Jak ale reprezentovat pomocí množin čísla? Takto se jedná o dosti složitou otázku, neboť číselných oborů máme hned několik: přirozená čísla, racionální čísla, reálná čísla a jiné další. Je tomu tak až s podivem, že takto pro nás elementární záležitost by mohla mít množinovou definici. V této kapitole se podíváme na to, jak můžeme v tomto ohledu zavést *přirozená čísla*  $\mathbb{N}$ , která jsou pro ostatní číselné obory základním stavebním kamenem. Pokud jde o budování např. racionálních čísel  $\mathbb{Q}$  či reálných čísel  $\mathbb{R}$ , velmi pěkně je toto popsáno v knize [5] (str. 8–32), z níž je ostatně v dalších odstavcích čerpáno.

### 5.1 Peanovy axiomy

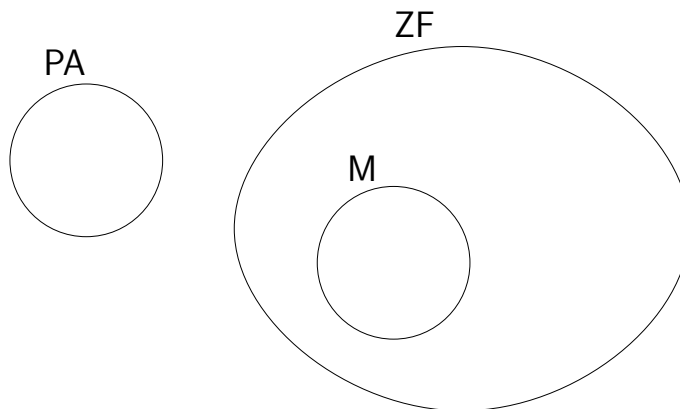
Jedním ze způsobů, jak popsat přirozená čísla, je zavedením určitých axiomů pro ně. Tímto se zabýval matematik, logik a filozof GIUSEPPE PEANO (1858–1932), který zavedl soustavu axiomů, dnes nazývanou *Peanovy axiomy*, která vystihuje jejich vlastnosti. Později uvidíme, tak tyto vlastnosti splňují **právě** přirozená čísla s nulou  $\mathbb{N}_0$ <sup>1</sup>.

Zde si dovoluji čtenáře upozornit, že v dalším výkladu této sekce se budeme pohybovat (chvíli) mimo teorii množin. Peanovy axiomy jsou ve skutečnosti základem pro samostatnou teorii, tzv. Peanovu aritmetiku (PA). Později si ukážeme, jak vybudovat přirozená čísla v rámci ZF a uvidíme, že Peanovy axiomy jsou i v jejím rámci splněny (i když zde již technicky nepůjde o axiomy). Trochu obecněji lze ukázat, že axiomatizovaná Peanova aritmetika existuje v jisté izomorfní formě

---

<sup>1</sup>Ve skutečnosti takových množin existuje více. Lze však ukázat, že pro všechny existuje bijekce na  $\mathbb{N}_0$ , která zachovává všechny vztahy mezi jejich odpovídajícími prvky (přesněji tzv. *izomorfismus*). Všechny množiny splňující Peanovy axiomy mají tak „shodnou strukturu“. Důkaz tohoto faktu zde však vynecháme.

právě i v ZF (viz znázornění na obrázku 5.10).



Obrázek 5.1: Model  $M$  v rámci  $ZF$ , který je izomorfní s  $PA$ .

### Peanovy axiomy pro přirozená čísla:

$X$  je množina obsahující (speciální) prvek  $0_X \in X$  a  $s : X \rightarrow X$  zobrazení takové, že:

- (P1) zobrazení  $s$  je prosté, tj.  $\forall x, y \in X, x \neq y : s(x) \neq s(y)$ ,
- (P2)  $\forall x \in X : s(x) \neq 0_X$  a
- (P3) pro každou formuli  $\varphi(x)$  platí  $A = \{x \mid \varphi(0_X) \wedge (\varphi(x) \Rightarrow \varphi(s(x)))\} \Rightarrow A = X$ .

Idea zobrazení  $s$  v kontextu Peanových axiomů je taková, že každému  $x$  je přiřazen jeho *následník*<sup>2</sup>  $s(x)$ .

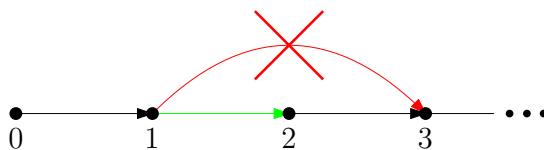
- První axiom (P1) tak říká, že pokud máme dva různé prvky  $x, y$ , pak nikdy nemohou mít stejného následníka.
- Druhý axiom (P2) se týká speciálně prvku  $0_X$  a zaručuje, že  $0_X$  není následníkem žádného prvku.
- Třetí axiom (P3) postuluje, že pokud pro libovolnou formuli  $\varphi(x)$  množina  $A$  obsahuje prvek  $0_X$  (protože platí  $\varphi(0_X)$ ) a pro každé její  $x$  obsahuje i jeho následníka  $s(x)$ , pak nutně  $A$  je nutně rovna celé množině  $X$ . Tento axiom<sup>3</sup> se též nazývá *princip matematické indukce* a často jej využíváme v důkazech (viz podsekcce A.4 v příloze).

Z kontextu lze vidět, že prvek  $0_X$  zde zastává roli čísla nula. Skutečně, pokud bychom si označili postulovanou množinu  $X$  jako  $\mathbb{N}_0$  a její prvky  $1, 2, 3, \dots$ , tj.  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ , kde  $0_X$  interpretujeme právě symbolem  $0$  a funkci  $s$  definovali  $s(n) = n + 1$ , pak lze vidět, že  $\mathbb{N}_0$  splňuje axiomy (P1), (P2) a (P3).

<sup>2</sup>Tento termín si formálně definujeme v sekci 5.2 pomocí množin.

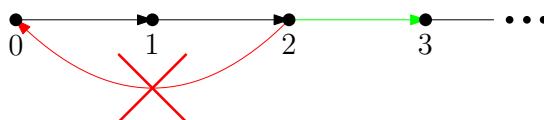
<sup>3</sup>Přesněji bychom měli psát *schéma axiomů*, neboť každou formuli  $\varphi$  představuje tvrzení samostatný axiom. Tedy axiomů je (stejně jako v případě schématu axiomů vydělení) nekonečně mnoho.

Nutnost prvních dvou axiomů si můžeme poměrně lehce představit. První požadavek na prostost zobrazení  $s$  je celkem přirozený. Např. číslo 7 je následníkem čísla pouze čísla 6. Nikdy tak nemůže vzniknout situace jako na obrázku 5.2.



Obrázek 5.2: Každý prvek je následníkem právě jednoho prvku.

Podobně prvek 0 není následníkem žádného prvku (viz obrázek 5.3).



Obrázek 5.3: Žádný prvek není následníkem 0.

Není těžké si též uvědomit, že přirozená čísla bez nuly  $\mathbb{N}$  též splňují (P1), (P2) a (P3), stačí za prvek  $0_X$  vzít číslo 1.

## 5.2 Přirozená čísla

Peanovy axiomy nám dávají poměrně jasnou představu, co od přirozených čísel požadovat. Naším cílem tak pochopitelně bude, aby naše definice zachovala všechny základní vlastnosti, které přirozená čísla mají splňovat. Zároveň by naše definice neměla být takto samoučelná, ale měla by být dále použitelná při definici základních aritmetických operací na přirozených číslech a také definování vztahů mezi nimi, tj. např.  $\leq$ ,  $\geq$ , aj.

Čtenář nejspíše nebude nic namítat, pokud řekneme, že „nejjednodušší“ množinou pro nás je **prázdná množina**. Z toho by nás tak mohlo přirozeně napadnout definovat prvek (číslo) 0 jako  $\emptyset$ . Jak pak ale definovat následníka čísla  $x$ ? Zde přichází poměrně chytrá definice, která zde zastoupí zmíněnou funkci  $s$  (viz sekce 5.1).

**Definice 5.2.1** (Následník). Necht  $x$  je libovolná množina. Pak *následníkem*  $x$  rozumíme množinu

$$x^+ = x \cup \{x\}.$$

Zápis  $x^+$  je v tomto případě zkratkou pro  $s(x)$ . Z této definice tedy máme např.:

$$\begin{aligned} \emptyset &= \emptyset, \\ \emptyset^+ &= \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}, \\ \emptyset^{++} &= (\emptyset^+)^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ \emptyset^{+++} &= (\emptyset^{++})^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

(Převzato z [5], str. 38.)

Na začátku jsme si řekli, že nejpřirozenější se pro nás zdá definovat číslo 0 právě jako  $\emptyset$ . Společně s definicí následníka libovolné množiny se zdá nyní velmi lákavé definovat množinu  $\mathbb{N}_0$  jako

$$\{0, 0^+, 0^{++}, 0^{+++}, \dots\}.$$

Pochopitelně zapisovat obecný prvek  $n$  množiny  $\mathbb{N}_0$  jako

$$0 \overbrace{+ + + \dots +}^{n\text{-krát}}$$

je dosti nepraktické. Lepší pro nás bude, když si každého z nich nějak označíme:

$$\begin{aligned} 1 &= 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\}, \\ 2 &= (0^+)^+ = 1^+ = 0 \cup \{1\} = \{0, 1\}, \\ 3 &= (0^{++})^+ = 2^+ = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \\ 4 &= (0^{+++})^+ = 3^+ = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zde se ukazuje jedna technická výhoda von Neumannovy definice, a to sice, že každý prvek  $x$  obsahuje všechny své předchůdce. Formálně bychom takový termín mohli definovat takto:

**Definice 5.2.2** (Předchůdce). Necht  $n \in \mathbb{N}_0$ . Pak *předchůdcem* prvku  $n$  nazveme každý prvek  $m \in n$ .

Čtenář si již nyní může zkusit rozmyslet, jaký „vztah“ mezi přirozenými čísly můžeme takto relativně snadno definovat. Předtím se však ještě trochu detailněji podíváme na **relace**, kterým jsme se věnovali v kapitole 3 v sekci ??.

## 5.3 Relace podrobněji

U relací ještě chvíli zůstaneme, neboť ty budou pro nás v dalším textu nejpodstatnější. Mezi nimi lze najít mnoho zvláštních typů, které jsou svojí strukturou zajímavější než ty, které jsme si ukazovali doteď. Pokud se čtenář do této chvíle stihl ztratit v záplavě nových pojmů a znalostí, doporučuji se vrátit k sekcím 4.2 o relacích a 4.3 o zobrazeních.

### 5.3.1 Druhy relací

Zatím jsme si uvedli pouze jeden zvláštní typ relace, který nám (nejspíše) byl již trochu povědomý, a to sice zobrazení. Lze se však setkat i s relacemi, které jsou svojí povahou zcela odlišné. V této sekci si zavedeme dva takové typy. Nejdříve se však podíváme na nejdůležitější 4 druhy relací.

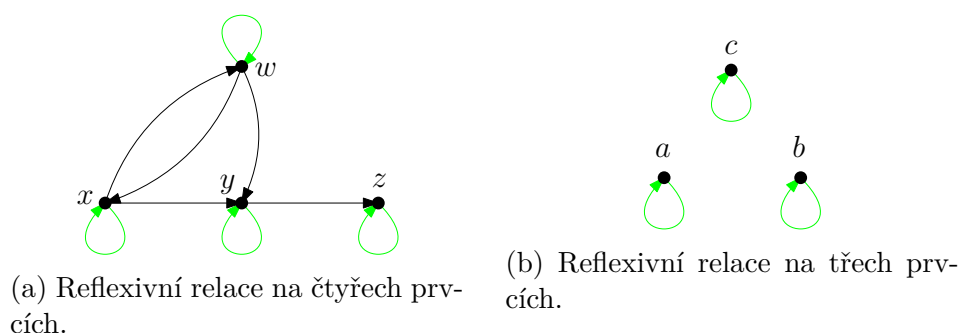
Ačkoliv jsme si zaváděli relaci obecně mezi dvěma množinami  $X$  a  $Y$ , v dalším textu se omezíme již pouze na relace na množině.



**Definice 5.3.1** (Důležité druhy relací). Necht  $R$  je relace na množině  $X$ . Pak  $R$  je

- (i) *reflexivní*, jestliže  $\forall x \in X : xRx$ .
- (ii) *symetrická*, jestliže  $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ .
- (iii) *tranzitivní*, jestliže  $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ .
- (iv) *antisymetrická*, jestliže  $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ .

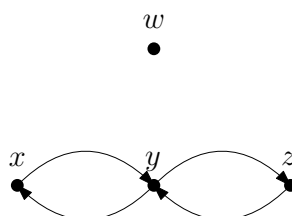
Reflexivní relace je jednoduše taková relace, kdy jsou všechny prvky v relaci samy se sebou (viz 5.4).



Obrázek 5.4: Příklady reflexivních relací.

Speciálně obrázek 5.4b je příkladem nejmenší možné reflexivní relace. Z definice 4.3.7 můžeme vidět, že se jedná o *identitu*.

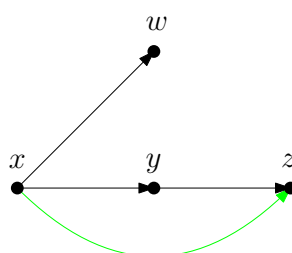
Podobně si můžeme znázornit i symetrii na obrázku 5.5.



Obrázek 5.5: Symetrická relace na čtyřech prvcích.

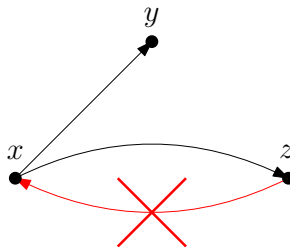
Z obrázku 5.5 můžeme vidět, že mezi dvojicí prvků, které jsou v relaci, vedou šipky oběma směry.

U tranzitivity musí platit, že pokud máme šipku mezi  $x$  a  $y$  a zároveň mezi  $y$  a  $z$ , pak musí být i šipka mezi  $x$  a  $z$  (viz 5.6).



Obrázek 5.6: Tranzitivní relace na čtyřech prvcích.

Antisymetrie je pravděpodobně nejtěžší z těchto druhů relací, co se týče definice. Zatímco u symetrie platí, že relace musí být „vzájemná“, u antisymetrie naopak říkáme, že pokud jsou prvky ve „vzájemné“ relaci, pak se jedná o tentýž prvek. Z toho si však můžeme uvědomit, že u antisymetrické relace nemůže tedy nastat, že by mezi dvěma prvky vedly šipky oběma směry, jak lze vidět na obrázku 5.7.



Obrázek 5.7: Antisymetrická relace na třech prvcích.

Nyní si zdefinujeme další důležitý pojem v definici 5.3.2.

**Definice 5.3.2** (Inverzní relace). Necht  $R$  je relace na množině  $X$ . *Inverzní relací* k relaci  $R$  nazýváme relaci

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid xRy\}.$$

Proč právě inverzní? Mějme libovolnou relaci  $R \subseteq X \times Y$  a k ní inverzní relaci  $R^{-1}$  (ta je naopak podmnožinou „obráceného“ kartézského součinu  $Y \times X$ ). Zkusme relace  $R$  a  $R^{-1}$  složit (pro připomenutí viz definice 4.2.3).

$$R \circ R^{-1} = \{(x, z) \mid \exists y \in Y : xRy \wedge yR^{-1}z\}$$

Ovšem víme, že když  $xRy$ , pak  $yR^{-1}x$ , což znamená, že  $x(R \circ R^{-1})x$ . Tedy složením získáme identitu:

$$R \circ R^{-1} = 1_X.$$

Stejně je tomu i u zobrazení. Čtenář pravděpodobně již slyšel termín *inverzní funkce*. Zde se nám tato znalost krásně propojuje se středoškolským učivem.

**Poznámka 5.3.3.** Inverzní zobrazení  $f^{-1}$  k  $f$  existuje právě tehdy, když  $f$  je **prosté**.

Některé příklady jsou níže.

- (i) Funkce  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , kde  $f_1(x) = e^x$ ; inverzní funkce  $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $f_1^{-1}(x) = \ln x$ .
- (ii) Funkce  $f_2 : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$ , kde  $f_2(x) = \sin x$ ; inverzní funkce  $f_2^{-1} : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ , kde  $f_2^{-1} = \arcsin x$ ,
- (iii) Funkce  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $f_3(x) = x^3 - 1$ ; inverzní funkce  $f_3^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $f_3^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$ .

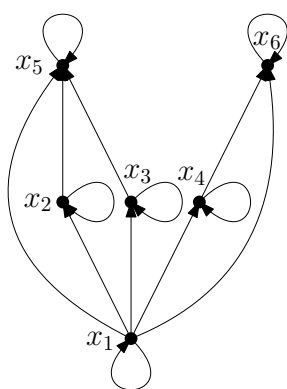
Je vidět, že složením libovolné  $f_i$  s  $f_i^{-1}$  dostaneme identitu  $(f_i \circ f_i^{-1})(x) = x$ .

### 5.3.2 Relace uspořádání

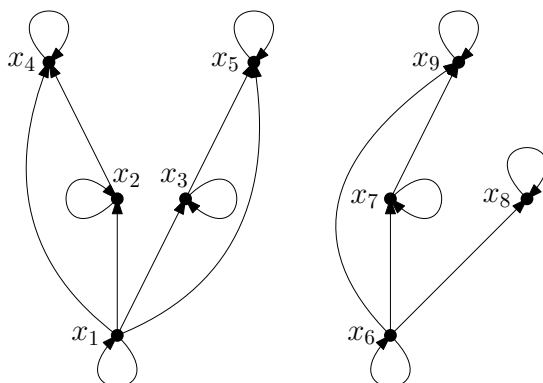
Relace lze dále klasifikovat podle jejich typů. Každý z nich se vyznačuje právě podle definovaných druhů v 5.3.1, do nichž spadají. Pro nás bude velmi podstatné tzv. *uspořádání*. (Vedle tohoto typu ještě existuje tzv. *relace ekvivalence*, o které si lze přečíst v příloze E.)

**Definice 5.3.4** (Uspořádání). Necht  $R$  je relace na množině  $X$ . Řekneme, že  $R$  je relací *uspořádání* (též jen *uspořádání*), pokud je *reflexivní*, *antisymetrická* a *tranzitivní*.

Začneme opět příklady, ať víme, jak si takový typ relace vlastně představit. Mějme relace  $R_1$  a  $R_2$  na obrázcích 5.8 a 5.9. (Zkuste si sami rozmyslet, zda  $R_1, R_2$  splňují podmínky uspořádání.)

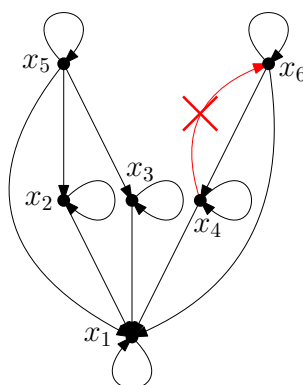


Obrázek 5.8: Relace uspořádání  $R_1$  na šesti prvcích.

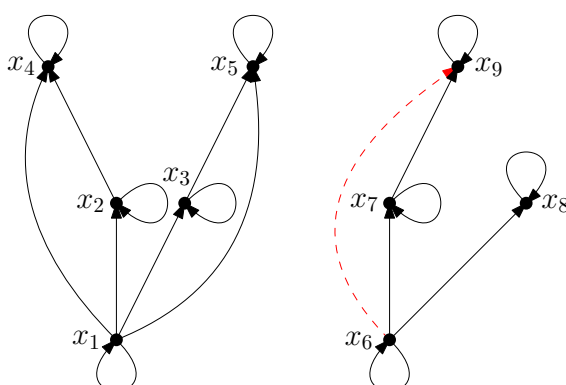


Obrázek 5.9: Relace uspořádání  $R_2$  na devíti prvcích.

Naopak ukázky modifikací relací  $R_1, R_2$  na obrázcích 5.10 a 5.11 **nej**sou uspořádáními.



Obrázek 5.10: Relace  $R_1 \cup (x_4, x_6)$ , která není uspořádáním.

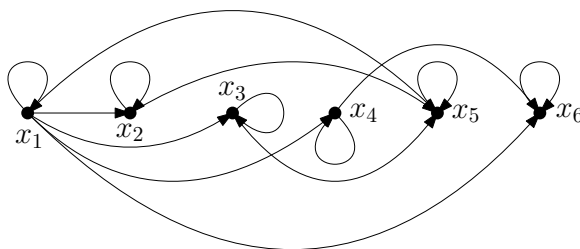


Obrázek 5.11: Relace  $R_2 \setminus (x_6, x_9)$ , která není uspořádáním.

**Příklad 5.3.5.** Další příklady uspořádání:

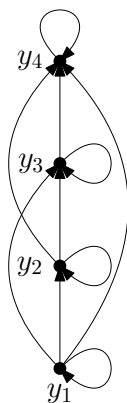
- (i) Relace „ $\leq$ “ na množině  $\mathbb{N}$  je uspořádání.
- (ii) Relace „ $\geq$ “ na množině  $\mathbb{R}$  je uspořádání.
- (iii) Relace „ $|$ “ („býti dělitelem“) na množině  $\mathbb{N}$  je uspořádání.
- (iv) Relace „ $\subseteq$ “ na množině  $\mathcal{P}(X)$  je uspořádání, kde  $X$  je konečná množina.

Zde si můžeme všimnout jisté redundance při zakreslování. Konkrétně dvojice vyplývající z tranzitivity a reflexivity bychom v těchto případech mohli klidně vynechat a považovat za samozřejmé. Zároveň jsme cíleně zakreslili relace  $R_1$  a  $R_2$  tak, aby šipky vedly pouze nahoru, neboť to činí obrázek přehlednějším. (Toto funguje díky tomu, že v relaci uspořádání se nemohou vyskytnout cykly kvůli podmínce antisymetrie a tranzitivity, nepočítáme-li cykly z reflexivity.) Zkuste se schválně podívat na znázornění relace  $R_1$  na obrázku 5.12 pro srovnání.



Obrázek 5.12: Relace  $R_1$  zakreslená podle pořadí indexů prvků.

Tím se dostáváme k tzv. *Hasseovým diagramům*, které se nám poskytují velmi komfortní reprezentaci uspořádání. Dosavadní způsoby reprezentace relací v sobě obsahovaly jistou míru libovůle, co do umístění prvků v diagramech, neboť důležité byly pouze šipky mezi nimi. Zde toto již neplatí, neboť umístěním prvků budeme určovat, které jsou společně v relaci. Přijmeme konvenci, že šipky mezi prvky povedou pouze směrem nahoru. Tzn. pokud  $xRy$ , pak  $x$  bude nakresleno níž oproti  $y$ . Na obrázku 5.13 máme zakreslené uspořádání na množině  $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ .



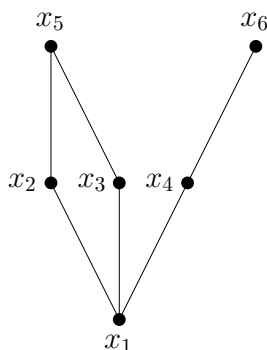
(a) Standardní zakreslení  $S$



(b) Hasseův diagram  $S$

Obrázek 5.13: Relace  $S$  zakreslená standardně a pomocí Hasseova diagramu.

Podobně bychom můžeme zakreslit i relaci  $R_1$  z obrázku 5.8 (viz obrázek 5.14).



Obrázek 5.14: Hasseův diagram relace  $R_1$ .

(Sekce inspirována [6], str. 44–48 a str. 55)

## 5.4 Speciálně o uspořádaných množinách

Uspořádání v matematice lze dále klasifikovat. Už jsme měli možnost vidět různé příklady tohoto typu relace, kdy naším primárním cílem bylo si ilustrovat jeho vlastnosti, jimiž je definována a ukázat si pro nás jejich výhodný jejich způsob zakreslování – *Hasseovými diagramy*. V této části se více zaměříme na vlastnosti uspořádání, zavedeme si další typy a především se podíváme na tzv. *dobře uspořádané množiny*.

V ohledu, v jakém se budeme dále uspořádáním věnovat, se nám bude lépe pracovat s následujícím termínem.

**Definice 5.4.1** (Uspořádaná množina). Necht  $R$  je uspořádání na množině  $X$ . Pak uspořádanou dvojici  $(X, R)$  nazýváme *uspořádaná množina*.

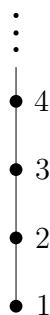
Uvedme si nejdříve definici těchto pojmů a poté si vysvětleme jejich význam.

**Definice 5.4.2** (Lineární uspořádání). Necht  $(X, R)$  je uspořádaná množina. Pak  $R$ , resp.  $(X, R)$  nazýváme *lineárním uspořádáním*, resp. *lineárně uspořádanou množinou*, jestliže  $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$ .

Pojem *částečné uspořádání*, resp. *částečně uspořádaná množina* jsou používány naopak pro uspořádání, která nemusí být nutně lineární. Jedná se tedy pouze o obšírnější termín. Obecně platí, že každá lineárně uspořádaná množina je částečně uspořádanou, avšak ne každá částečně uspořádaná množina je lineárně uspořádanou.

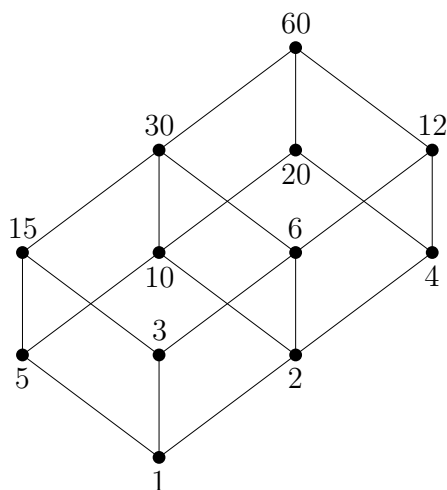
**Příklad 5.4.3.** Klasifikace některých známých uspořádání a jejich Hasseovy diagramy.

- (i)  $(\mathbb{N}, \leq)$  je lineárně uspořádaná množina.



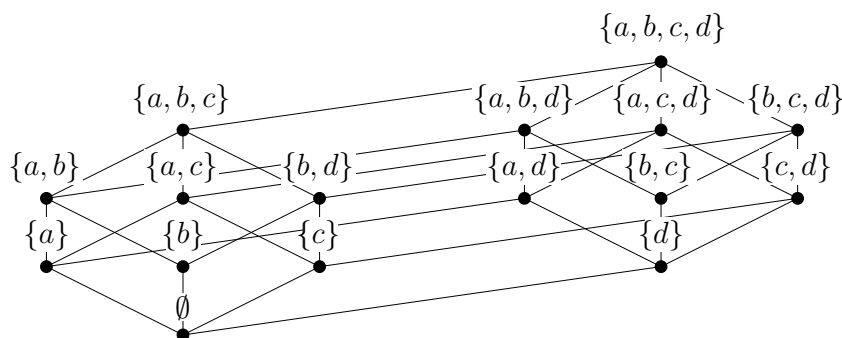
Obrázek 5.15: Diagram uspořádané množiny  $(\mathbb{N}, \leq)$ .

- (ii)  $(S, |)$ , kde  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$  (množina všech dělitelů čísla 60), je částečně (nikoliv však lineárně) uspořádaná množina.



Obrázek 5.16: Diagram uspořádané množiny  $(S, |)$ .

- (iii)  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ , kde  $X = \{a, b, c, d\}$ , je částečně (nikoliv však lineárně) uspořádaná množina.

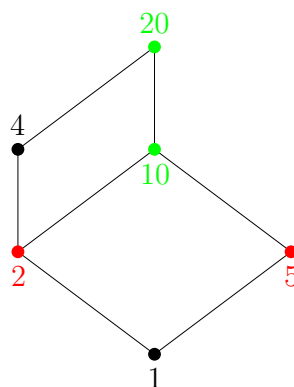


Obrázek 5.17: Diagram uspořádané množiny  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ .

Lze si všimnout, že díky antisymetrii tvoří prvky jistou „hierarchii“. Např. v (i) v předešlém příkladu 5.4.3 můžeme vidět z obrázku 5.15, že každému prvku „předchází“ jiný prvek až na číslo 1. Podobně je tomu tak i u (ii) a (iii).

**Definice 5.4.4** (Porovnatelné prvky). Necht  $(X, R)$  je uspořádaná množina. Řekneme, že prvky  $x, y \in X$  jsou *porovnatelné*, pokud  $xRy \vee yRx$ .

Pro příklad nemusíme chodit daleko. Vezměme si všechny třeba všechny dělitele čísla 20, tj.  $(\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}, |)$ , na obrázku 5.18 níže, kde je zeleně zvýrazněn příklad porovnatelných prvků a červeně příklad prvků, které nejsou porovnatelné.



Obrázek 5.18: Diagram uspořádané množiny  $(\{1,2,4,5,10,20\}, |)$  se zvýrazněním porovnatelných a neporovnatelných prvků.

Naopak u lineárního uspořádání si můžeme snad uvědomit, že každá dvojice prvků je porovnatelná (z definice). S tím se pojí již trochu významově „užší“ termíny, které pro nás budou stěžejní.

**Definice 5.4.5** (Minimální/maximální prvek, nejmenší/největší prvek). Necht  $(X, R)$  je uspořádaná množina. Mějme prvek  $a \in X$ . Prvek  $a$  nazveme

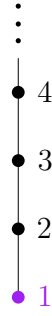
- (i) *minimálním*, pokud  $\forall x \in X, x \neq a : x \not R a$ .
- (ii) *maximálním*, pokud  $\forall x \in X, x \neq a : a \not R x$ .
- (iii) *nejmenším*, pokud  $\forall x \in X : a R x$ .
- (iv) *největším*, pokud  $\forall x \in X : x R a$ .

Na první pohled nemusí být rozdíl v definici jednotlivých termínů zřejmý. Zkuste se však nad nimi zamyslet z pohledu porovnatelnosti prvků. Ve skutečnosti termíny *nejmenší* a *největší prvek* jsou „silnější“. Je-li např. prvek maximální, pak tvrdíme, že není s žádným z ostatních prvků množiny v relaci. To ale však neznamená, že je se všemi prvky porovnatelný. (Opět vyzývám čtenáře, aby si zkusil rozmyslet.) Podobně je tomu i pro minimální prvek. Naopak největší a nejmenší prvek jsou vždy s každým prvkem porovnatelné. Lépe bude rozdíl v těchto termínech vidět opět na příkladech.

**Příklad 5.4.6.** Ukázky některých uspořádaných množin a jejich nejmenších/největších, resp. minimálních/maximálních prvků. Maximální/největší prvky jsou označeny oranžovou barvou a minimální/nejmenší prvky fialovou.

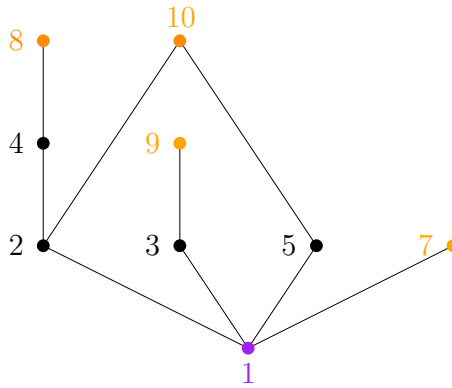
- (i) Uspořádaná množina  $(\mathbb{N}, \leq)$  má minimální prvek 1, ale nemá největší, ani maximální prvek.





Obrázek 5.19: Diagram uspořádané množiny  $(\mathbb{N}, \leq)$  s minimálním prvkem.

- (ii) Uspořádaná množina  $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$  má nejmenší prvek 1 a maximální prvky 7, 8, 9 a 10, ale nemá největší prvek.

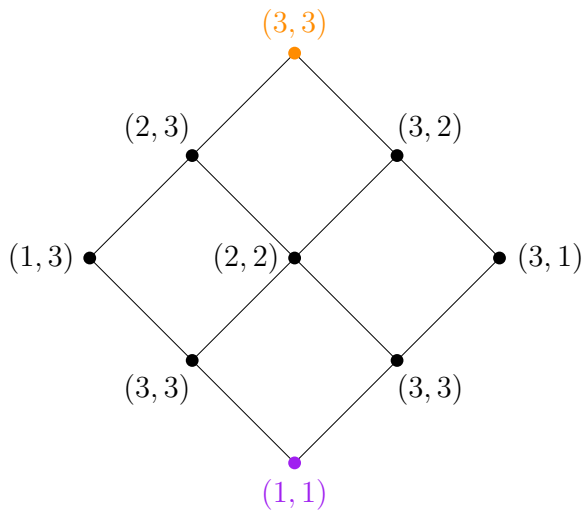


Obrázek 5.20: Diagram uspořádané množiny  $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$  s minimálním prvkem a dvěma maximálními prvky.

- (iii) Uspořádaná množina  $(A^2, \preceq)$ , kde  $A = \{a, b, c\}$ , definovaná předpisem

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A^2 : ((x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2)$$

má nejmenší prvek  $(1, 1)$  největší prvek  $(3, 3)$ .



Obrázek 5.21: Diagram uspořádané množiny  $(A^2, \preceq)$  s nejmenším prvkem a největším prvkem.

Ve skutečnosti si lze všimnout, že největší, resp. nejmenší prvek je vždy zároveň i maximální, resp. minimální. Opačné tvrzení však již neplatí.

## 5.5 Vlastnosti přirozených čísel

Podívejme se nyní blíže na vlastnosti přirozených čísel, které plynou z definice v sekci 5.2. Je celkem pozoruhodné, že čistě pomocí množin se nám podařilo vybudovat objekt, který s čísly zdánlivě na první pohled ani nesouvisí. Již jsme si také ukazovali, jak lze axiomaticky zavést přirozená čísla pomocí Peanových axiomů (viz 5.1), které nám dávaly poměrně jednoznačnou představu, co od takové množiny požadujeme. Skutečně, množina přirozených čísel zavedená jako

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0,1\}, \quad 3 = \{0,1,2\}, \quad 4 = \{0,1,2,3\}, \quad \dots$$

splňuje tyto axiomy. Mějme na paměti, že v rámci teorie množin **Peanovy axiomy** již nejsou v ZF axiomy, nýbrž věty (tvrzení, která lze odvodit z axiomů ZF). Jejich platnost zde dokazovat nebudeme, avšak budeme je v dalším textu používat. Důkazy lze najít v knize [5], str. 40–41 a str. 43–44.

Na konci sekce 5.2 jsme poukázali na to, že zavedení přirozených čísel použitým způsobem má za důsledek, že každý z prvků obsahuje všechny své předchůdce. To nám umožňuje zformulovat poznatek 5.5.1. Zároveň nám to poslouží jako ukázka využití indukce při studiu tohoto modelu přirozených čísel v ZF.

**Lemma 5.5.1.** *Nechť jsou dána přirozená čísla  $n, m \in \mathbb{N}_0$ . Pak platí:*

- (i)  $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n \subseteq \mathbb{N}_0$ ,
- (ii)  $m \in n \Rightarrow m \subseteq n$ ,
- (iii)  $n \notin n$ .

*Důkaz.* Všechny body tohoto tvrzení separátně dokážeme indukcí.

(i). Pro začátek ověříme platnost tvrzení pro nulu. To jistě platí, neboť  $0 = \emptyset$  a prázdná množina je podmnožinou každé množiny, jak jsme si již samostatně dokázali v tvrzení 3.2.7.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro jisté přirozené číslo  $n$ , tzn.  $n \subseteq \mathbb{N}_0$ . Ukážeme, že tvrzení platí i pro  $n^+$ . Protože  $n \in \mathbb{N}_0$ , pak  $\{n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ , z čehož již plyne, že  $n^+ = n \cup \{n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ , neboť sjednocením podmnožin je opět podmnožina. Z principu indukce tak (i) platí pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(ii). Definujme množinu

$$X = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \forall m (m \in n \Rightarrow m \subseteq n)\}.$$

Naším cílem je indukcí ukázat, že  $X = \mathbb{N}_0$ .

Určitě platí, že  $0 \in X$ . (Ačkoliv  $\emptyset$  neobsahuje žádné prvky, tvrzení přesto platí. Vysvětlení v sekci 3.2 v důkazu lemmatu 3.2.7.)

Předpokládejme, že  $n \in X$ . Ukážeme, že  $n^+ \in X$ . Vezměme si libovolný prvek  $m \in n^+ = n \cup \{n\}$ . Z toho vyplývá, že buď  $m \in n$ , nebo  $m = n$ . V prvním případě

$m \in n$  z indukčního předpokladu platí  $m \subseteq n$ . V druhém případě  $m = n$  platí totéž. Tím jsme ukázali, že  $n^+ \in X$  a podle principu indukce tedy platí  $X = \mathbb{N}_0$ .

(iii). Pro nulu tvrzení platí. Opět předpokládejme, že tvrzení platí pro  $n \in \mathbb{N}_0$ , tj.  $n \notin n$ . Indukční krok dokážeme sporem. Pro spor necht platí  $n^+ \in n^+$ . Pak z definice  $n^+$  musí platit buď  $n^+ \in n$ , nebo  $n^+ = n$ . Použitím tvrzení (ii) v obou případech dostáváme, že  $n^+ = n \cup \{n\} \subseteq n$ . To znamená, že  $\{n\} \subseteq n$ , z čehož již odvodíme  $n \in n$ . To je však spor s indukčním předpokladem, že  $n \notin n$ . Tím dostáváme, že  $n^+ \notin n^+$ . □

(Převzato z [4], str. 86–87.)

Všimněte si, že bod (ii) jsme dokázali definováním množiny prvků, které splňují dokazované tvrzení a ukázali jsme, že taková množina jsou všechna přirozená čísla. Ostatní body (i) a (iii) jsme dokázali „běžnou“ indukcí. Jedná se však o zcela ekvivalentní přístupy.

Je tak docela pěkně vidět, co v řeči množin znamená, když je nějaké přirozené číslo větší/menší než jiné.

**Definice 5.5.2.** Necht  $n, m \in \mathbb{N}_0$ . Pak definujeme

- (i)  $m < n \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} m \in n$ ,
- (ii)  $m \leq n \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} m < n \vee m = n$ ,
- (iii)  $m > n \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} n < m$ ,
- (iv)  $m \geq n \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} n \leq m$ .

O relaci „ $\leq$ “ jsme již v minulé sekci o uspořádáních 5.4 ukázali, že na  $\mathbb{N}$  se jedná o lineární uspořádání (konkrétně v příkladu 5.4.3). Zde jsme s ní však nepracovali ve smyslu definice 5.5.2. Zkusme se tedy přesvědčit, zdali je takto definovaná relace skutečně lineárním uspořádáním na  $\mathbb{N}_0$  (pro připomenutí definice viz 5.3.4). Nejdříve si však zformulujeme následující lemma, které později využijeme.

**Lemma 5.5.3.** Necht jsou dána přirozená čísla  $n, m \in \mathbb{N}_0$ . Pak platí:

- (i)  $m < n \Leftrightarrow m \subset n$ ,
- (ii)  $m < n \vee m = n \vee m > n$ .

*Důkaz.* (i). ( $\Rightarrow$ ). Z definice máme  $m \in n$ . Platnost této implikace je pouze důsledkem lemmatu 5.5.1 (bodu (ii)) a faktu  $m \in m$  (bod (iii)).

( $\Leftarrow$ ). Postupujeme indukcí podle  $n$ . Zvolme si pevné  $m \in \mathbb{N}_0$ . Pro  $n = 0$  lze vidět, že tvrzení platí.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro  $n$  (a všechna  $m$ ), tj.  $m < n \Leftrightarrow m \subset n$ . Zvolme  $m \subset n^+$ . Ukážeme, že z toho plyne  $m < n^+$ .

Ukažme nejprve, že  $m \subseteq n$ . Na to lze nahlédnout sporem. Kdyby platilo  $n > m$ , tzn.  $n \in m$ , pak by podle tvrzení (ii) v lemmatu 5.5.1 dostáváme  $n \subseteq$

$m$  a tedy i  $n^+ \subseteq m$  (opět nemůže platit, že  $n \in n$ ). To je však v rozporu s předpokladem, že  $m \subset n^+$ .

Již tedy víme, že  $n \in m$  a  $m \subseteq n$ . Z definice podmnožiny mohou nastat dva případy (pro připomenutí viz definice 3.2.5).

- $m \subset n$ . Podle indukčního předpokladu platí  $m < n$  a tedy i  $m < n^+$ .
- $m = n$ . Pak z faktu  $n < n^+$  plyne  $m < n^+$ .

V obou případech jsme tak dokázali indukční krok.

(ii). Důkaz je trochu složitější a proto jej zde vynecháme, nicméně čtenář jej může nalézt v knize [4], str. 88.

□

(Převzato z [4], str. 87–88.)

**Důsledek 5.5.4.**  $\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : n \leq m \vee m \leq n$ .

*Důkaz.* Přímo plyne z tvrzení (ii) lemmatu 5.5.3.

□

Díky lemmatům 5.5.1, 5.5.3 a důsledku 5.5.4 můžeme již zformulovat větu 5.5.5. Důkaz lze nalézt v příloze D.

**Věta 5.5.5.**  $(\mathbb{N}_0, \leq)$  je lineárně uspořádaná množina.

Co kdybychom uvažili relaci „ $<$ “ na  $\mathbb{N}_0$ ? Striktně podle definice 5.3.4 by  $(\mathbb{N}_0, <)$  nebyla uspořádaná množina, neboť „ $<$ “ není reflexivní. Nicméně zbývající vlastnosti jsou zachovány. V matematice se občas dále rozlišuje tzv. *ostré* a *neostré* uspořádání, kdy ostré oproti neostrému je *antireflexivní*, tj. pro všechna  $x$  z dané množiny platí  $x \not R x$ .

## 5.6 Aritmetika přirozených čísel

Již jsme si ukázali, že naše definice přirozených čísel je skutečně korektní a splňuje vlastnosti lineárního uspořádání vzhledem k relaci „ $\leq$ “. Posledním krokem pro nás nyní je zavést základní početní operace a též je důležité dokázat, že mají takové vlastnosti, na jaké jsme zvyklí. V této sekci si však jen ukážeme náznak, jak zavést tyto základní početní operace; důkazům jejich vlastnostem se již věnovat nebudeme. Zatím jsme se bavili v případě množin pouze o jejich struktuře, avšak vyhýbali jsme termínům jako *počet prvků*, *velikost množiny*, apod. Přitom přirozená čísla si člověk často spojí s **počtem nějakých objektů**. Intuitivní by tak bylo definovat tyto operace v tomto duchu. Alternativní zavedení pomocí následníků nabízí např. kniha [5], str. 48–57.

Zcela pochopitelně by čtenář mohl namítat, že pojem „**velikost množiny**“ jsme nikterak formálně nedefinovali. Vzhledem k tomu, že v této sekci budeme pracovat pouze s konečnými<sup>4</sup> množinami, můžeme zatím termín počtu prvků chápat víceméně intuitivně, avšak později si tento koncept zobecníme v kapitole 6 v sekci 6.3. Velikost množiny  $X$  (resp. počet prvků) budeme značit  $|X|$ , kterou reprezentuje přirozené číslo z množiny  $\mathbb{N}_0$ .

<sup>4</sup>Konečnost a nekonečnost množiny později definujeme v kapitole 6 v sekci 6.2.

**Definice 5.6.1** (Součin přirozených čísel). Necht jsou dána přirozená čísla  $a, b, k$ . Pak definujeme *součin* čísel  $a$  a  $b$

$$a \cdot b = k \stackrel{\text{def}}{\iff} |a \times b| = |k|.$$

Pokud si vzpomeneme na kartézský součin množin (viz definice 4.1.1), zjistíme, že takové zavedení je celkem přirozené. Z kombinatorického hlediska to není nic jiného, než počítání všech možných uspořádaných dvojic. Např. součin přirozených čísel 3 a 5 tak odpovídá číslu 15 (čísla  $0, 1, \dots, 14$  jsou jeho prvky).

Co kdybychom však za jedno z čísel vzali nulu? Z definice bychom tak dostali kartézský součin, kde jedna z množin by byla prázdná, tj. např.  $\emptyset \times b$ . Podle definice kartézského součinu by muselo platit:

$$\emptyset \times b = \{(x, y) \mid x \in \emptyset \wedge y \in b\}.$$

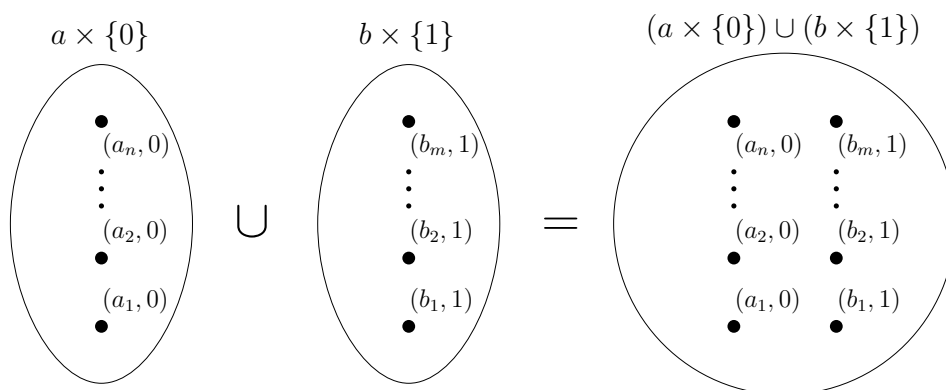
Avšak uspořádaná dvojice  $(x, y)$ , která by splňovala podmínku  $x \in \emptyset \wedge y \in b$  pochopitelně nemůže existovat, neboť  $x$  bereme z prázdné množiny. Tedy skutečně  $\emptyset \times b = b \times \emptyset = \emptyset$ , což znamená, že  $0 \cdot b = b \cdot 0 = 0$ , jak bychom předpokládali. Naše definice je tak skutečně korektní.

Přesuňme se k součtu. Zde nemůžeme položit  $a + b = |a \cup b|$ , neboť  $a$  a  $b$  nemusí být nutně disjunktní, tj. nemusí platit  $a \cap b = \emptyset$ . Prvky těchto množin je tak třeba určitým způsobem „odlišit“. Toho docílíme v definici 5.6.2.

**Definice 5.6.2** (Součet přirozených čísel). Necht jsou dána přirozená čísla  $a, b, k$ . Pak definujeme *součet* čísel  $a$  a  $b$

$$a + b = k \stackrel{\text{def}}{\iff} |(a \times \{0\}) \cup (b \times \{1\})| = |k|.$$

Kartézské součiny  $a \times \{0\}$  a  $b \times \{1\}$  zde zajišťují, že výsledné množiny každého z nich budou disjunktní (druhá souřadnice se vždy bude lišit) a tedy velikost jejich sjednocení bude skutečně korespondovat s naší představou (viz obrázek 5.22).



Obrázek 5.22: Grafické znázornění sjednocení množin  $a \times \{0\}$  a  $b \times \{1\}$ .

Nyní bychom měli správně ukázat, že takto zavedené operace sčítání a násobení splňují vlastnosti jako *asociativita*, *komutativita*, *distributivita*, aj. Pro udržení jednoduchosti textu zde tuto pasáž vynecháme.

# Kapitola 6

## Porovnávání nekonečných množin

Na začátku celého tohoto textu jsme si položili otázku, zda má více prvků interval  $(0,1)$ , nebo množina všech přirozených čísel  $\mathbb{N}$ . I přesto, co všechno jsme o množinách zjistili, stále se nezdá, že bychom způsob, jak na tuto otázku odpovědět. V této závěrečné kapitole se proto podíváme na to, jak v matematice zacházíme s nekonečnými množinami a co vlastně vůbec rozumíme pod pojmem „počet prvků“ v případě nekonečných množin.

### 6.1 Hilbertův hotel

Jak jsme si již uvedli v historickém úvodu (konkrétně v podsekcí 1.2.2), matematik GEORG CANTOR byl jedním z prvních, kteří se zabývali konceptem nekonečna v uvedeném smyslu, aniž by se ohlížel na předsudky, které plynuly o nekonečnu z naší intuice. Jeden takový případ jsme si již ukázali u pozorování GALILEA GALILEI (viz podsekcí 1.1.1), který však naopak dospěl k závěru, že porovnáváním velikostí nekonečných množin nemá smysl se zabývat. Cantorovy úvahy o nekonečnu byly z počátku velmi kontroverzní a odmítané, avšak dnes jsou již drtivou většinou matematické komunity uznávány. Ve své době však vznikaly různé „paradoxy nekonečna“<sup>1</sup>, které ilustrovaly, jak neintuitivní může být práce s nekonečnem. Jedním z nejznámějších paradoxů tohoto typu je tzv. *Hilbertův hotel*, který je pojmenován po německém matematikovi DAVIDU HILBERTOVI<sup>2</sup> (1862–1943), jenž přišel s tímto myšlenkovým experimentem.

**Zadání problému.** *Představme si, že v jednom neznámém městě stojí hotel, kde pracuje matematiky znalý recepční. Hotel má jednu zvláštní vlastnost, a to sice, že má nekonečně mnoho pokojů. Všechny pokoje v hotelu jsou jednolůžkové postupně očíslované přirozenými čísly  $1, 2, 3, \dots$  a hotel je plně obsazen. Recepční se postupně potýká s následujícími situacemi.*

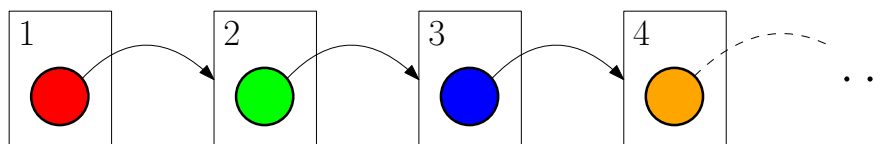
---

<sup>1</sup>Uvozovky jsou zde uvedeny právě z důvodu, že dnes již tyto záležitosti za paradoxy nepovažujeme.

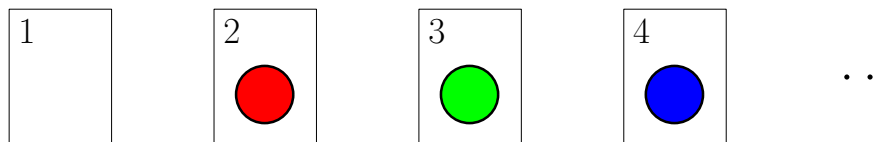
<sup>2</sup>D. Hilbert si v historii matematiky připsal mnohé zásluhy. Jako první uspokojivě vybudoval axiomatickou eukleidovskou geometrii a také zformuloval 23 nejdůležitějších (tehdy zatím nevyřešených) problémů matematiky, které prezentoval na 2. mezinárodním matematickém kongresu v Paříži v roce 1900, jímž nasměroval úsilí matematické komunity na další století. Některé z těchto problémů jsou dodnes otevřené a není na ně známá jednoznačná odpověď.

- (i) Do hotelu přijde nový zákazník. Běžný recepční by nejspíše zákazníka poslal pryč s tím, že hotel je plný. Avšak tento recepční si ale uvědomí, že i přesto může nového zákazníka snadno ubytovat. Protože hotel je nekonečný, vymyká se principům platným u konečných množin. Není tak žádný problém každého z hostů požádat, aby se přesunul do vedlejšího pokoje. To znamená, že host v pokoji č. 1 se přesune do pokoje č. 2, host v pokoji č. 2 do pokoje č. 3, atd. Situaci lze sledovat na obrázku 6.1. Právě z důvodu,

Před přesunutím:



Po přesunutí:



Obrázek 6.1: Situace před a po přesunutí hostů. (Převzato z [8] a upraveno.)

že hotel je nekonečný, nemůže nastat situace, kdy by některý z hostů se již nemohl přesunout do nového pokoje (což naopak, jak si můžeme rozmyslet, by nastalo u hotelu s konečně mnoha pokoji). Pro nového hosta se tak uvolní pokoj č. 1, kde může být ubytován.

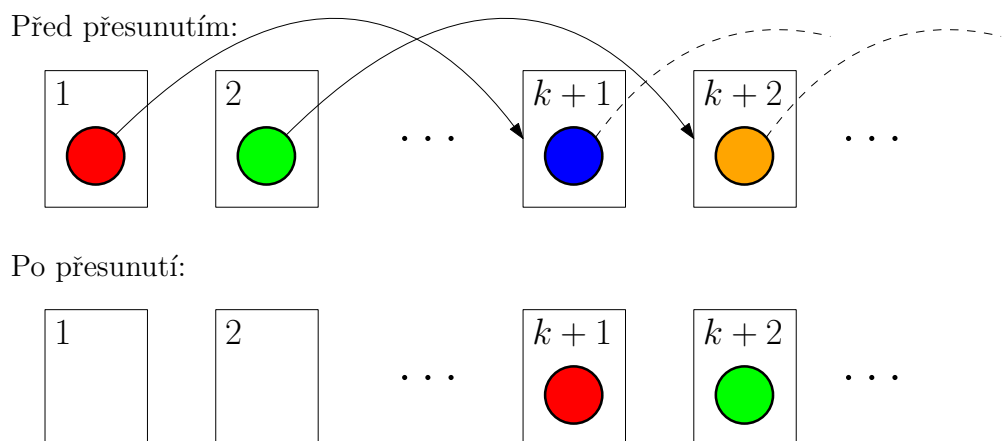
Jak bychom činnost recepčního mohli vyjádřit matematicky? Podíváme-li se na tuto akci obecněji, tak libovolný host v pokoji s číslem  $n$  se přesunul do pokoje s číslem  $n + 1$ . Nejedná se tak o nic jiného, než o zobrazení (dokonce funkci) z  $\mathbb{N}$  do  $\mathbb{N}$ . Pokud bychom si jej označili  $f$ , pak  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , kde

$$f(n) = n + 1$$

Zobrazení  $f$  je jistě prosté (žádní dva hosté se nepřesunou do stejného pokoje) a není na (první pokoj zůstane neobsazený).

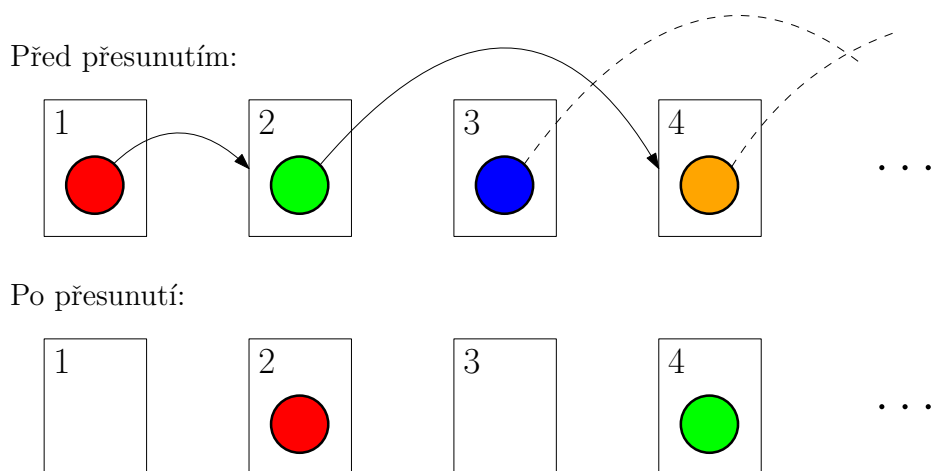
- (ii) Do hotelu přijde obecně  $k$  nových hostů. Recepční se s tímto problémem může vypořádat obdobně jako v předešlém případě. Je tedy potřeba uvolnit  $k$  pokojů. V předešlém případě recepční požádal hosta v pokoji č.  $n$  o přesunutí do pokoje č.  $n + 1$ . Pro  $k$  nových hostů nám tak stačí požádat každého hosta o přesun do pokoje s číslem větším o  $k$ , tj. pro host v pokoji č.  $n$  se přesune do pokoje č.  $n + k$  (viz 6.2). Analogicky i zde můžeme tuto akci popsat jako zobrazení  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , kde  $g(n) = n + k$  ( $k$  je pevné). Zobrazení  $g$  je prosté, neboť hosté z různých pokojů se nikdy nepřesunou na pokoj se stejným číslem a také není na, neboť čísla  $1, 2, \dots, k$  nemají žádný vzor, tj. prvních  $k$  pokojů zůstane volných.

Ze situací (i) a (ii) lze vidět, že ačkoliv je hotel plně obsazen, recepční stále může ubytovávat nové hosty.



Obrázek 6.2: Situace před a po přesunutí  $k$  hostů. (Převzato z [8] a upraveno.)

(iii) Recepční tak může zajásat, neboť pro libovolný počet nových hostů vždy může uvolnit potřebný počet pokojů. Avšak při pohledu z okna si všimne, že před hotelem zaparkoval autobus. To by nebyl takový problém, neboť recepční již zná postup, jak uvolnit pokoje pro libovolný **konečný** počet nových hostů. Avšak tento autobus byl nekonečný s nekonečně mnoha sedadly očíslovanými přirozenými čísly  $1, 2, \dots$ , kde každé bylo obsazeno turistou se zájmem o ubytování. Jak má nyní recepční postupovat? Postup popsany výše mu zde bohužel již nepomůže. Nemůže požádat hosta v pokoji č. 1, aby se přesunul o nekonečně mnoho pokojů dál (pokoje jsou očíslované konečnými čísly). Bude třeba jiná strategie. Zde si však recepční může poradit takto: hosta v pokoji č. 1 požádá, aby se přesunul do pokoje č. 2; hosta v pokoji č. 2, aby se přesunul do pokoje č. 4; hosta v pokoji č. 3, aby se přesunul do pokoje č. 6; atd. Obecně host v pokoji č.  $n$  se přesune do pokoje s číslem  $2n$  (viz 6.3). Jak můžeme vidět, touto akcí recepční zaplnil



Obrázek 6.3: Situace po přesunutí hostů obecně z pokoje  $n$  do  $2n$ . (Převzato z [8] a upraveno.)

všechny pokoje se **sudým** číslem a pokoje s lichým číslem tak jsou nyní volné. Nyní recepčnímu stačí obecně turistu sedícího na sedačce s číslem  $k$ , aby se nastěhoval do pokoje č.  $2k - 1$ .



(iv) Mohlo by se zdát, že je již problémům konec. Avšak jednoho dne se recepční podíval z okna a viděl, že před hotelem parkuje nekonečně mnoho autobusů, kde každý z nich byl nekonečně dlouhý s nekonečně mnoha turisty. Každý z turistů se chce v hotelu ubytovat. Jak si recepční má poradit nyní? Především postup již fungovat nebude, neboť by bylo třeba pro každý z autobusů provést samostatné stěhování již ubytovaných hostů (iterací by tak muselo být nekonečně mnoho). Náš recepční je však matematicky zdatný a vzpomene si na fakt, že prvočísel je nekonečně mnoho (pro zvědavého čtenáře viz příloha A, tvrzení A.3.3).

$$2, 3, 5, 7, 11, \dots$$

Jak mu to zde pomůže? Pro všechny ubytované hosty vezme první prvočíslu, což je 2, a každého z nich ubytuje následujícím způsobem. Hostovi v pokoji č. 1 přiřadí pokoj č.  $2^1 = 2$ , hostovi v pokoji č. 2 pokoj č.  $2^2 = 4$ , atd. Obecně hostovi v pokoji s číslem  $k$  je přiřazen pokoj č.  $2^k$ . Pro všechny ubytované hosty tak vyčerpá všechny mocniny dvojky. Následně pro první autobus vezme prvočíslu 3 a nyní postup probíhá stejně obdobně. Turista na sedadle s číslem  $k$  je ubytován v pokoji č.  $3^k$ . Nejprve si uvědomme, že pro libovolná  $n, m \in \mathbb{N}$  je  $2^n \neq 3^m$ , tzn. žádnému z turistů z prvního autobusu nemůže být přiřazen pokoj, který je již obsazený již ubytovaným hostem.

Obecně označíme-li si  $\ell$ -té prvočíslu jako  $p_\ell$ , pak pro  $(\ell - 1)$ -tý autobus bude  $k$ -tému turistovi přiřazen pokoj  $p_\ell^k$ . I zde bychom mohli ukázat, že zobrazení  $h_\ell : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  pro  $\ell \in \mathbb{N}$  je prosté a

$$\forall \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}, \ell_1 \neq \ell_2 : h_{\ell_1}(\mathbb{N}) \cap h_{\ell_2}(\mathbb{N}) = \emptyset,$$

tj. množiny obrazů zobrazení  $h_{\ell_1}$  a  $h_{\ell_2}$  jsou pro různá  $\ell_1, \ell_2$  disjunktní. Tímto způsobem tak recepční je schopný ubytovat všechny turisty, aniž by na některého z nich nezbyl žádný pokoj. Dokonce si můžeme všimnout, že některé pokoje i po ubytování zůstanou neobsazené. Např. pokoj č. 6, protože toto číslo není mocninou žádného prvočísla; jeho faktory jsou 2 a 3.

Pokud pomineme potenciálně nekonečný počet stížností od hostů kvůli neustálému stěhování a jiné problémy, Hilbertův hotel nám dosti krásně ilustruje jednu myšlenku, a to sice, že práce s nekonečnem může být dosti neintuitivní a i poměrně jednoduché principy platné při konečných počtech v případě nekonečna již neplatí. Sami jsme viděli, že i přesto, že byl hotel plně obsazen, nebyl problém problém zde ubytovat další nové hosty, a to ať už v konečném nebo nekonečném počtu. Matematickou podstatu Hilbertova hotelu si blíže popíšeme v sekci 6.2.

## 6.2 Porovnávání podle počtu prvků

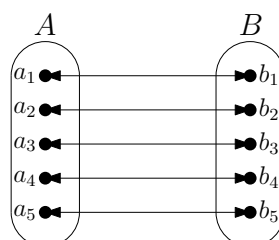
Nekonečné množiny mají tedy dost pozoruhodné vlastnosti. V souvislosti s předešlou úvahou by nás tak mohlo napadnout, že při plně obsazeném hotelu je hostů „stejně mnoho“ jako pokojů. Ovšem z případu (i) jsme mohli vidět, že po přesunutí hostů do vedlejšího pokoje byly pak již obsazeny „pouze“ pokoje

2, 3, ... a první tak zůstal volný. Pokud by toto byla výchozí situace, mohlo by se nám tak zdát, že hostů je méně, neboť v prvním pokoji žádný není. Avšak jediné, co se stalo je, že hosté změnili svůj, čímž se celkem přirozeně nemohl porušit jejich počet. Změnil se tedy počet hostů a pokojů, nebo jich je stejně mnoho?

Náš náhled se pochopitelně odráží od porovnávání velikostí konečných množin. U těch toto nečiní žádný problém, stačí spočítat jejich prvky. U nekonečných množin již prvky „spočítat“ nemůžeme. Existuje však ještě jeden způsob, který ve skutečnosti vůbec nevyžaduje schopnost počítání.

**O domorodém kmenu a slepicích.** Představme si, že jistý domorodý kmen hledá nového náčelníka. Po několika vyřazovacích kolech zbyli poslední dva kandidáti. Ostatní členové kmenu rozhodli, že náčelníkem se stane ten z kandidátů, který vlastní více slepic. Tento kmen je však matematicky velmi primitivní a jeho příslušníci umí počítat pouze do pěti. Oba dva kandidáti však mají ostře více jak pět slepic. Kmen se tedy rozhodl postupovat takto: každý z kandidátů přinese vždy jednu svojí slepici a tímto způsobem pokračují, dokud jednomu z nich slepice nedojdou. Ten, kterému dříve dojdou slepice, prohraje a druhý se tak stane náčelníkem. [9]

Z tohoto příkladu je již nejspíše jasné, jak lze množiny porovnávat. Pokud mají dvě množiny stejný počet prvků, pak lze jednotlivé prvky „spárovat“. V matematické řeči náčelníci pouze sestavují zobrazení z jedné množiny slepic do druhé. Toto dává jistě smysl v kontextu konečných množin. Pokud mají množiny stejně prvků, pak mezi nimi existuje bijekce (viz obrázek 6.4). Stejným způsobem však



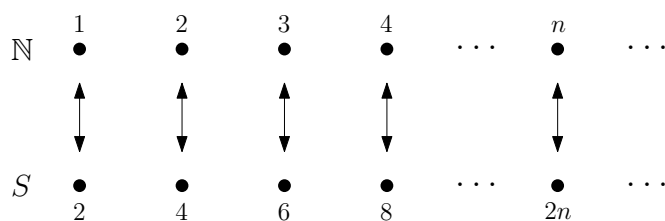
Obrázek 6.4: Bijekce mezi konečnými množinami  $A, B$  se stejným počtem prvků.

můžeme porovnávat i nekonečné množiny! Zkusme si vzít např. množinu všech kladných sudých čísel  $S = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$  a přirozená čísla  $\mathbb{N}$ . Selský rozum by nám nejspíše napověděl, že sudých čísel musí být „méně“ než přirozených, neboť  $S$  neobsahuje všechna přirozená čísla, zatímco množině  $\mathbb{N}$  náleží. Z jistého pohledu tomu tak může být, ale z „perspektivy“ bijekce nikoliv. Pokud uvažíme zobrazení  $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ , kde pro  $n \in \mathbb{N}$  je  $f(n) = 2n$ , můžeme se snadno přesvědčit, že  $f$  je bijekcí<sup>3</sup>.

**Příklad 6.2.1.** Další příklady bijekcí mezi  $\mathbb{N}$  a jinými množinami.

- (i) Bijekce mezi  $\mathbb{N}$  a kladnými lichými čísly:  $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ , kde  $f_1(n) = 2n - 1$ .
- (ii) Bijekce mezi  $\mathbb{N}$  a druhými mocninami:  $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ , kde  $f_2(n) = n^2$ .

<sup>3</sup>Skutečně, inverzní zobrazení je  $f^{-1} : S \rightarrow \mathbb{N}$ , kde  $f^{-1}(n) = n/2$ .



Obrázek 6.5: Bijekce mezi množinami  $S$  a  $\mathbb{N}$ .

(iii) Bijekce mezi  $\mathbb{N}$  a prvočísla.

Všimněme si, že všechny (zatím) uvažované množiny byly všechny vlastní podmnožiny  $\mathbb{N}$ . Toto však u konečných množin provést nelze, neboť libovolná vlastní podmnožina je vždy „menší“ než původní množina (velikosti těchto množin se pak liší v počtu „chybějících“ prvků). V případě nekonečných množin toto však není žádnou překážkou. Archimédův logický axiom, že *celek je větší než část* tak skutečně patří pouze do oblasti konečných množin. Toto se zdá být jako pěkná charakteristika odlišující konečné a nekonečné množiny.

Do této chvíle jsme termín „konečná“ a „nekonečná“ množina chápali intuitivně bez formální definice. Vzhledem k jasnosti těchto termínů v použitých kontextech nejspíše nebyl problém s jejich chápáním. Avšak díky výše zmíněnému máme již dostupný nástroj, jak definovat nekonečnou množinu.

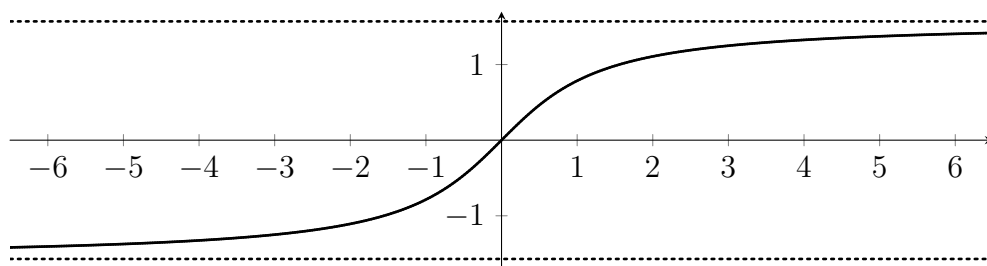
**Definice 6.2.2** (Nekonečnost množiny). Množinu libovolnou množinu  $X$  nazveme *nekonečnou*, pokud existuje množina  $X' \subset X$  taková, že existuje bijektivní zobrazení  $f : X \rightarrow X'$ .

Jednoduše, množina je nekonečná, pokud existuje bijekce množiny na některou její vlastní podmnožinu. Nabízí se otázka, jak bychom mohli definovat konečnou množinu. Vzhledem k formalizaci „nekonečná množina“ v definici 6.2.2 bychom za konečnou množinu mohli jednoduše prohlásit množinu, která není nekonečná. Avšak tento termín můžeme zavést i více přirozeně. Pokud o množině řekneme, že je „konečná“, pak tím intuitivně rozumíme, že její počet prvků odpovídá nějakému přirozenému číslu, tj.  $|A| = n$ , kde  $n \in \mathbb{N}_0$ . Pokud si však vzpomeneme, přirozená čísla jsme si zaváděli pomocí množin, což znamená že se opět jedná o množiny. Za konečnou množinu tak můžeme prohlásit množinu, u níž **existuje bijekce na nějaké přirozené číslo**.

Pokud se nebudeme omezovat pouze na přirozená čísla, příklady bijekcí najdeme i u reálných čísel  $\mathbb{R}$ .

**Příklad 6.2.3.** Ukázky bijekcí mezi množinou  $\mathbb{R}$  některými jejími vlastními podmnožinami.

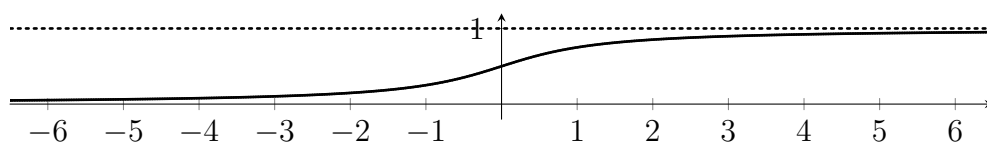
- (i) Bijekce mezi  $\mathbb{R}$  a intervalem  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ :  $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , kde  $g_1(x) = \arctg x$ .



Obrázek 6.6: Graf funkce  $g_1$ .

- (ii) Bijekce mezi  $\mathbb{R}$  a intervalem  $(0,1)$ :  $g_2 : \mathbb{R} \rightarrow (0,1)$ , kde

$$g_2(x) = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right)$$



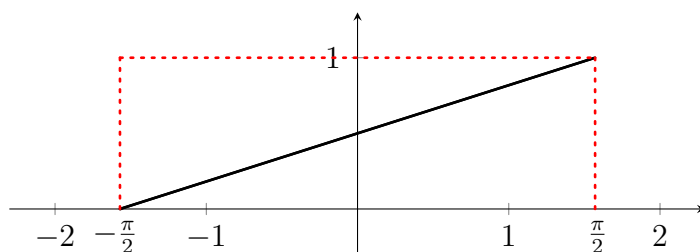
Obrázek 6.7: Graf funkce  $g_2$  („přeskálovaný“ a posunutý graf  $\operatorname{arctg}$ ).

- (iii) Stejně tak lze sestavit bijekci z intervalu  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  do  $\mathbb{R}$ . Stačí vzít inverzní funkci ke  $g_2$ , tj.  $g_3 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $g_3(x) = g_2^{-1}(x) = \operatorname{tg} x$ .
- (iv) Bijekci můžeme sestavit i mezi samotnými intervaly  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  a  $(0,1)$ . Tu můžeme nalézt složením funkcí  $g_3$  a  $g_2$ , tj.  $g_4 = g_3 \circ g_2$ , protože

$$g_3 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \text{ a } g_2 : \mathbb{R} \rightarrow (0,1)$$

Tedy celkově  $g_4 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0,1)$ , kde

$$g_4(x) = g_2(g_3(x)) = \frac{1}{\pi} \left( \underbrace{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)}_{\text{identita}} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} x + \frac{1}{2}.$$



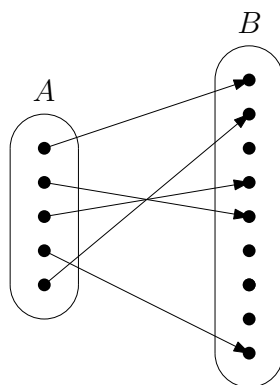
Obrázek 6.8: Graf funkce  $g_4$  (složení funkcí  $g_3$  a  $g_2$ ).

Lze vidět, že  $g_4$  je skutečně bijekce, což ostatně plyne z bodu (iii) tvrzení 4.3.8 o vlastnostech skládání zobrazení.

(Převzato z [8], str. 4–5.)

## 6.3 Spočetné a nespočetné množiny

V této sekci si položíme jednu důležitou otázku, kterou později rozdělíme nekonečné množiny na dva základní typy. Než tak však učiníme, zůstaneme ještě na chvíli u bijekcí mezi množinami, kterými jsme se zabývali v minulé sekci. Zde jsme se snažili ukázat souvislost mezi „velikostmi“ množin a existencí bijekce mezi nimi. V případě konečných množin však zcela běžně může nastat situace, kdy množiny mají různý počet prvků, tj. pokud  $|A| = n$  a  $|B| = m$ , kde  $n < m$ . Je zřejmé, že bijekci mezi takovými množinami sestavit nelze. Nicméně, stále můžeme sestavit prosté zobrazení z  $A$  do  $B$  (viz obrázek 6.9).



Obrázek 6.9: Prosté zobrazení z množiny  $A$  do množiny  $B$ .

Je vhodné podotknout, že pokud platí  $X \approx Y$ , pak  $X \preceq Y$  i  $Y \preceq X$ , neboť bijekce je (z definice) prostá.<sup>4</sup> Takové zobrazení však nikdy nemůže být surjektivní, naopak zobrazení z  $B$  do  $A$  může být surjektivní, ale nikdy ne prosté. Stejný princip platí i pro nekonečné množiny (více později). V souvislosti s tímto si zavedeme následující termíny a značení.

**Definice 6.3.1** (Subvalence a ekvipotence). Necht  $X$  a  $Y$  jsou libovolné množiny. Pak pokud

- (i) existuje prosté zobrazení z  $X$  do  $Y$ , píšeme  $X \preceq Y$  (čteme „ $X$  je *subvalentní*  $Y$ “ nebo „ $X$  má *menší nebo stejnou mohutnost* jako  $Y$ “).
- (ii) existuje bijekce mezi  $X$  a  $Y$ , píšeme  $X \approx Y$  (čteme „ $X$  je *ekvipotentní*  $Y$ “ nebo „ $X$  a  $Y$  mají *stejnou mohutnost*“<sup>5</sup>).

Z předchozích příkladů 6.2.1 a 6.2.3 bychom tak mohli zápis některých našich poznatků zkrátit jednoduše takto:

- $\mathbb{N} \approx \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ ,
- $\mathbb{N} \approx \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,

<sup>4</sup>Opačná implikace, tj.  $X \preceq Y \wedge Y \preceq X \Rightarrow X \approx Y$  platí též. Tomuto tvrzení se nazývá *Cantorova-Bernsteinova věta*. Její důkaz je však zcela nad rámec tohoto textu.

<sup>5</sup>Pomocí ekvipotence bychom mohli ještě definovat relaci „ $\prec$ “, kde  $X \prec Y$ , pokud  $X \preceq Y \wedge X \approx Y$ .

- $\mathbb{R} \approx (0,1)$ , apod.

V definici 6.3.1 jsme zmínili pojem „mohutnost“. V případě konečných množin bychom tento termín nejspíše chápali ve smyslu **velikosti** množiny. U nekonečných množin zatím pouze víme, co znamená, že dvě množiny mají stejnou mohutnost, ale samotný termín nejsme schopni vysvětlit. Definice mohutnosti je však trochu složitější a zabývat se jí zde nebudeme. Zvědavý čtenář si však může nahlédnout do přílohy E pro přiblížení. Podrobněji se této problematice věnuje např. kniha [10], str. 167.

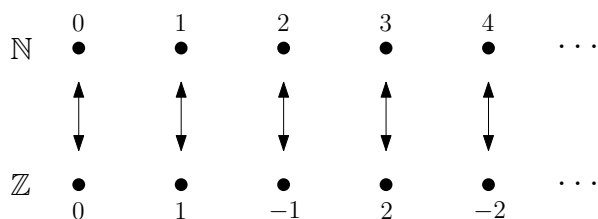
Podívejme se na trochu zajímavější korespondenci mezi celými a přirozenými čísly s nulou.

**Věta 6.3.2.** *Platí  $\mathbb{N}_0 \approx \mathbb{Z}$ .*

*Důkaz.* Pro důkaz sestojíme bijekci mezi  $\mathbb{N}_0$  a  $\mathbb{Z}$ . Zobrazení  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  definujeme předpisem

$$f(n) = \begin{cases} -n/2, & \text{pokud } 2 \mid n \\ (n+1)/2, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Na obrázku 6.10 můžeme vidět, jakým způsobem spolu korespondují v  $f$  prvky  $\mathbb{N}_0$  a  $\mathbb{Z}$ .



Obrázek 6.10: Znázornění zobrazení  $f$ .

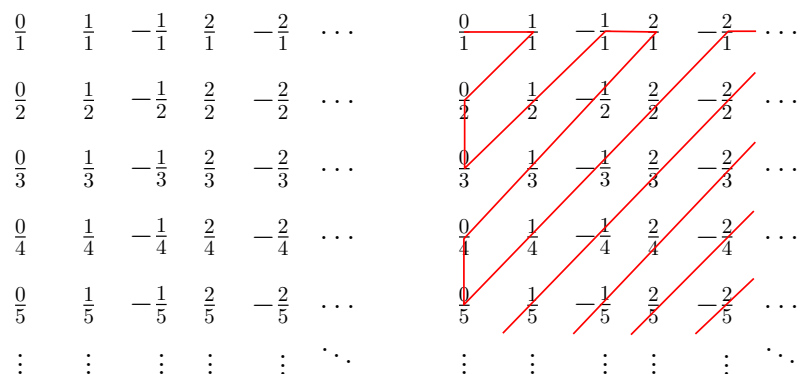
Snadno se lze přesvědčit, že  $f$  je bijekce.

□

Překvapivější výsledek, ke kterému došel GEORG CANTOR, je ekvipotence množiny přirozených čísel  $\mathbb{N}$  a racionálních čísel  $\mathbb{Q}$ . To může působit jako zarážející, neboť při pohledu na reálnou osu se zde racionální čísla vyskytují „četněji“ oproti přirozeným číslům, přesto však mezi nimi existuje bijekce.

**Věta 6.3.3.** *Platí  $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ .*

*Náznak důkazu.* Uspořádejme všechna racionální čísla do „mřížky“ (viz obrázek 6.11). Začneme-li od zlomku  $0/1$ , tedy  $f(0/1) = 1$ . Pak lomená čára určuje pořadí, v němž zobrazíme dané prvky postupně na čísla  $1, 2, 3, \dots$



Obrázek 6.11: Znázornění zobrazovacího „algoritmu“ racionálních čísel na přirozená.

Tedy je možné sestavit bijekci mezi  $\mathbb{N}^6$  a  $\mathbb{Q}$ .

□

Definovaná subvalence „ $\preccurlyeq$ “ v 6.3.1 nám může trochu naznačovat, že existují dvojice množin, které nemají stejnou mohutnost. S takovými jsme se zatím neselekali v případě nekonečných množin. Jsou skutečně všechny nekonečné množiny stejně velké? Odpověď na tuto otázku jsme si již předložili v podsekcí 1.2.2, kde jsme si zmínili, že GEORG CANTOR ukázal, že množina všech reálných čísel  $\mathbb{R}$  má větší mohutnost než množina přirozených čísel  $\mathbb{N}$ . Způsob, kterým k tomuto závěru dospěl, je dnes nazýván *Cantorova diagonální metoda*.

**Věta 6.3.4.** *Platí  $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{R}$ .*

*Důkaz.* Ve skutečnosti dokážeme silnější tvrzení, a to sice, že  $\mathbb{N} \preccurlyeq (0,1)$ . Z příkladu 6.2.3 (konkrétně (ii)) již víme, že  $\mathbb{R} \approx (0,1)$ . Pokud by platilo, že  $\mathbb{N} \approx \mathbb{R}$ , pak z tranzitivity relace „ $\approx$ “ by platilo

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{R} \wedge \mathbb{R} \approx (0,1) \Rightarrow \mathbb{N} \approx (0,1).$$

Obměnou získáme  $\mathbb{N} \not\approx (0,1) \Rightarrow \mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$ . Nejdříve tedy dokážeme, že  $\mathbb{N} \not\approx (0,1)$ .

Důkaz provedeme sporem. Pro spor nechť existuje bijekce  $f : \mathbb{N} \rightarrow (0,1)$ . Obrazy jednotlivých přirozených čísel můžeme tak uspořádat do „seznamu“  $f(1), f(2), f(3), \dots$ . Každé přirozené číslo tak „koresponduje“ s jistým desetinným číslem. Reálná čísla jsou jednoznačně určena svým desetinným rozvojem (přičemž vylučujeme periodu  $\overline{9}$ ).

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, 4 6 1 1 \dots \\ f(2) &= 0, 9 9 4 2 \dots \\ f(3) &= 0, 5 1 0 6 \dots \\ f(4) &= 0, 7 2 7 2 \dots \end{aligned}$$

Obrázek 6.12: Desetinné rozvoje obrazů přirozených čísel v  $f$ .

<sup>6</sup>Stejně tak lze sestavit bijekci mezi  $\mathbb{N}_0$  a  $\mathbb{Q}$ , protože  $\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_0$ .

Podle předpokladu musí být na tomto „seznamu“ (viz obrázek 6.12) **všechna** reálná čísla, protože každé je obrazem nějakého přirozeného čísla. Zaměřme se nyní na diagonálu tvořenou těmito desetinnými rozvoji (viz obrázek 6.13).

$$\begin{array}{rcccccc} f(1) = & 0, & 4 & 6 & 1 & 1 & \dots \\ f(2) = & 0, & 9 & 9 & 4 & 2 & \dots \\ f(3) = & 0, & 5 & 1 & 0 & 6 & \dots \\ f(4) = & 0, & 7 & 2 & 7 & 2 & \dots \end{array}$$

Obrázek 6.13: Diagonála tvořená obrazy v  $f$ .

Pokud bychom si číslice na diagonále uspořádali, přidáním „0,“ bychom opět dostali nějaký desetinný rozvoj čísla, jež si označíme  $x$ , tj. v tomto případě  $x = 0,4902\dots$ . Je takové číslo na našem seznamu? To nemůžeme vědět. Mohlo by se stát (při nešťastné volbě obrazů  $f(1), f(2), \dots$ ), že číslice na diagonále budou tvořit periodu  $\overline{9}$ , kterou jsme vyloučili. My však z toho čísla můžeme vytvořit nový desetinný rozvoj. Definujme zobrazení  $d : \{0, 1, 2, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1\}$  předpisem:

$$d(i) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i = 0 \\ 0, & \text{pokud } i \neq 0. \end{cases}$$

Uvažujme nyní číslo  $x \in (0, 1)$ , jehož desetinný rozvoj je tvořený číslicemi na diagonále, které si označíme  $i_1, i_2, i_3, \dots$ , tzn.  $x = 0, i_1, i_2, i_3, \dots$ . Nové číslo  $x'$  definujeme desetinným rozvojem

$$0, d(i_1)d(i_2)d(i_3)\dots$$

Pokud má tedy číslo  $n$  ve svém obrazu  $f(n)$  na  $n$ -tém místě (tedy na diagonále) svého desetinného rozvoje číslo různé od nuly, pak číslo  $x'$  bude mít na dané pozici nulu. Naopak pokud bude číslo na dané pozici číslo 0, pak  $x'$  zde bude mít číslo 1. Např. pro diagonálu na obrázku 6.13 výše bude  $x' = 0,1101\dots$

Číslo  $x'$  jistě nemůže obsahovat periodu  $\overline{9}$ . Přitom stále platí, že  $x' \in (0, 1)$  a podle předpokladu se musí nacházet v „seznamu“, resp.  $\exists n \in \mathbb{N} : f(n) = x'$ . Může toto nastat? Nemůže, a to z principu konstrukce! Číslo  $x'$  se totiž liší od každého čísla v seznamu (minimálně) v cifře na diagonále. Tzn. že  $x'$  nemá v zobrazení  $f$  svůj vzor, což je spor s předpokladem, že  $f$  je bijekce, protože není surjektivní.

Z toho celkově plyne, že  $\mathbb{N} \not\approx (0, 1)$  a tedy  $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$ .

Mezi množinami  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{R}$  tedy neexistuje bijekce. Aby platilo  $\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}$ , stačí nalézt prosté zobrazení z  $\mathbb{N}$  do  $\mathbb{R}$ . Protože  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ , stačí zvolit identitu, tedy  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $g(n) = n$ . □

Jak můžeme vidět, skutečně existují nekonečné množiny, které mají různé mohutnosti. Tento poznatek nám dává základ pro následující klasifikaci množin.

**Definice 6.3.5** (Spočetná a nespočetná množina). Nechť  $X$  je libovolná množina. Pak říkáme, že  $X$  je



- (i) *spočetná*, pokud  $X \preccurlyeq \mathbb{N}$ .
- (ii) *nespočetná*, pokud  $X \not\preccurlyeq \mathbb{N}$ .

Množina  $X$  je tedy spočetná, pokud existuje prosté zobrazení z  $X$  do  $\mathbb{N}$  (resp. existuje bijekce na nějakou podmnožinu  $\mathbb{N}$ ). Naopak pokud takové zobrazení z  $X$  do  $\mathbb{N}$  neexistuje, pak  $X$  nazýváme nespočetnou<sup>7</sup>. U konečných množin se můžeme přesvědčit, že **všechny jsou spočetné**; stačí

**Věta 6.3.6.** (i) *Množiny přirozených čísel  $\mathbb{N}$ , celých čísel  $\mathbb{Z}$  a racionálních čísel  $\mathbb{Q}$  jsou spočetné.*

(ii) *Množiny reálných čísel  $\mathbb{R}$  a komplexních čísel  $\mathbb{C}$  jsou nespočetné.*

*Důkaz.* Triviálně platí  $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{N}$ . Zbývající části plynou z 6.3.2, 6.3.3 a 6.3.4. □

Podobně ostatní množiny zmíněné v příkladech 6.2.1 a 6.2.3 můžeme takto klasifikovat:

- množina  $\{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$  je spočetná,
- množina  $\{p \mid p \text{ je prvočíslo}\}$  je spočetná,
- interval  $(0,1)$  je nespočetný,
- interval  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  je nespočetný.

Takto se nám zdánlivě rozpadají množiny do dvou velkých skupin. Mohlo by se tak zdát, že pokud libovolná množina  $X$  není spočetná, tj. je nespočetná, pak nutně  $X \approx \mathbb{R}$ . Ve skutečnosti existují množiny, které jsou nespočetné, ale nemají stejnou mohutnost jako  $\mathbb{R}$ . S tímto nám pomůže tzv. *Cantorova věta*.

**Věta 6.3.7** (Cantorova). *Pro libovolnou množinu  $X$  platí*

$$X \preccurlyeq \mathcal{P}(X).$$

K důkazu lze opět použít Cantorovu diagonální metodu.

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že  $X \not\approx \mathcal{P}(X)$ . K tomu lze přistoupit sporem. Pro spor nechť  $X \approx \mathcal{P}(X)$ , tzn. existuje bijektivní zobrazení  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Obdobně jako v důkazu věty 6.3.4, i zde ukážeme, že  $f$  není surjektivní. Obrazy prvků  $x_i \in X$  tak můžeme „uspořádat“ do „seznamu“  $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ . Podmnožinu  $A$  můžeme z množiny sestavit tak, že pro každý z prvků množiny  $X$  určíme, zda náleží  $A$  či nikoliv. Označíme-li si případ  $x \in A$  písmenem A a případ  $x \notin A$  jako N, pak zmíněný „seznam“ bychom mohli znázornit podobně jako na obrázku 6.14.

---

<sup>7</sup>Termíny „spočetný“ a „nespočetný“ v tomto kontextu vychází z faktu, že prvky spočetných množin lze „spočítat“, tedy lze je očíslovat přirozenými čísly. Naopak u nespočetných toto nelze.

$$\begin{aligned}
X &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\} \\
f(x_1) &: \text{A } \text{N } \text{A } \text{N } \text{A } \dots \\
f(x_2) &: \text{N } \text{N } \text{A } \text{A } \text{N } \dots \\
f(x_3) &: \text{A } \text{N } \text{N } \text{N } \text{N } \dots \\
f(x_4) &: \text{N } \text{A } \text{N } \text{A } \text{N } \dots \\
f(x_5) &: \text{A } \text{N } \text{N } \text{N } \text{A } \dots
\end{aligned}$$

Obrázek 6.14: Podmnožiny (obrazy) množiny  $X$  určené náležením každého z prvků.

Opět se zaměříme na diagonálu tohoto seznamu.

$$\begin{aligned}
X &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\} \\
f(x_1) &: \text{A } \text{N } \text{A } \text{N } \text{A } \dots \\
f(x_2) &: \text{N } \text{N } \text{A } \text{A } \text{N } \dots \\
f(x_3) &: \text{A } \text{N } \text{N } \text{N } \text{N } \dots \\
f(x_4) &: \text{N } \text{A } \text{N } \text{A } \text{N } \dots \\
f(x_5) &: \text{A } \text{N } \text{N } \text{N } \text{A } \dots
\end{aligned}$$

Obrázek 6.15: Diagonála seznamu podmnožin množiny  $X$ .

Zkonstruujeme množinu  $S$  tak, že každý prvek  $x$  na diagonále jí náleží právě tehdy, když nenáleží podmnožině (tedy obrazu  $f(x)$ ) v příslušném řádku. Formálně bychom množinu  $S$  mohli zapsat takto:

$$S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

(Zkuste si rozmyslet.) Podle předpokladu  $f$  je bijekce a tedy je surjektivní. To znamená, že  $\exists s \in X : f(s) = S$ , tedy  $S$  má vzor v  $f$ . Z principu konstrukce ale se množina  $S$  nemůže nacházet na seznamu, neboť od každé množiny se liší právě v prvku na diagonále. To znamená, že  $S$  nemá v  $f$  vzor a tedy zobrazení  $f$  není surjektivní. Celkově tedy  $f$  není bijekce, což je spor.

Formálně bychom ke sporu došli takto: pro prvek musí platit buď, že  $s \in S$ , nebo  $s \notin S$ .

- $s \in S$ . Tzn.  $s \in f(s)$ . Z definice množiny  $S$  musí pro  $s$  platit, že  $s \notin f(s) = S$ , což je spor.
- $s \notin S$ . Pak prvek  $s$  splňuje, že  $s \in f(s)$  a podle definice množiny  $S$  platí  $s \in S = f(s)$ , čímž jsme též došli ke sporu<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Jedná se o podobný spor, jako v Russellově paradoxu (viz podsekcce 1.2.2).

V obou případech jsme dostali spor, tedy platí  $X \not\approx \mathcal{P}(X)$ .

Pro důkaz  $X \preccurlyeq \mathcal{P}(X)$  můžeme definovat prosté zobrazení  $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  předpisem  $g(x) = \{x\}$ .

□

Indukcí můžeme toto tvrzení rozšířit, tedy platí

$$X \preccurlyeq \mathcal{P}(X) \preccurlyeq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \preccurlyeq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))) \preccurlyeq \dots$$

Tedy skutečně existuje nekonečně mnoho množin vzájemně různých mohutností. Speciálně, pro  $X = \mathbb{N}$  máme

$$\mathbb{N} \preccurlyeq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \preccurlyeq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \preccurlyeq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \preccurlyeq \dots$$

Lze dokonce ukázat, že  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ . Důkaz tohoto tvrzení je však netriviální.

# Seznam použité literatury

- [1] E. Fuchs. *Teorie množin pro učitele*. Masarykova univerzita, Brno, 2003. ISBN 80-210-2201-9.
- [2] B. Bolzano. *Paradoxy nekonečna*. Československá akademie věd, Praha, 1963.
- [3] Eukleidés. *Základy*. Jednota českých matematiků a fyziků, Praha, 1907.
- [4] B. Balcar a P. Štěpánek. *Teorie množin*. Academia, Praha, 1986. ISBN 80-200-0470-X.
- [5] Derek C. Goldrei. *Classic Set Theory: For Guided Independent Study*. Chapman & Hall Mathematics. CRC Press, 2017. ISBN 9781351460613.
- [6] J. Matoušek a J. Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 4., upr. a dopl. vyd. Karolinum, Praha, 2009. ISBN 978-80-246-1740-4.
- [7] J. Bečvář. *Lineární algebra*. Vydání páté. Matfyzpress, Praha, 2019. ISBN 978-80-7378-378-5.
- [8] M. Rmoutil. *Logika a teorie množin*. [online], Citováno 4. května 2022. Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rmoutil/NMTM503/TM.pdf>.
- [9] L. Pick. *Strašidelné matematické paradoxy aneb S rozumem v koncích*. [online], Citováno 1. května 2022. Dostupné z: <https://youtu.be/6Ti44xNaEm8>.
- [10] Michael D. Potter. *Set theory and its philosophy: A critical introduction*. Clarendon, 2009. ISBN 9781423788850.
- [11] Gary Chartrand, Albert D. Polimeni, and Ping Zhang. *Mathematical proofs: A transition to Advanced Mathematics*. Pearson Education, 2014. ISBN 9780321797094.
- [12] *karlin.mff.cuni.cz*. [online], Citováno 24. března 2022. Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/logika/?page=prim>.

# Seznam obrázků

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Příklad určitého integrálu funkce $f$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ .                   | 8  |
| 1.2  | Aproximace plochy pod grafem funkce $f$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ pomocí 4 obdélníků. . . . . | 9  |
| 1.3  | Aproximace plochy pod grafem funkce $f$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ pomocí 8 obdélníků. . . . . | 9  |
| 4.1  | Grafické znázornění kartézského součinu z příkladu 4.1.2. . . . .                                       | 41 |
| 4.2  | Grafické znázornění kartézského součinu intervalů $(2, 6)$ a $\langle 1, 3 \rangle$ . . . . .           | 41 |
| 4.3  | Grafické znázornění relace $R$ mezi množinami $A$ a $B$ . . . . .                                       | 43 |
| 4.4  | Grafické znázornění relace $S$ na množině $C$ . . . . .   | 43 |
| 4.5  | Grafické znázornění relace složení relací $R$ a $S$ z příkladu 4.2.4. . . . .                           | 44 |
| 4.6  | Grafické znázornění zobrazení $f = \{(1, b), (2, b), (3, a), (4, c)\}$ . . . . .                        | 45 |
| 4.7  | Graf funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ . . . . .              | 46 |
| 4.8  | Příklad složení bijekcí $f$ a $g$ . . . . .   | 48 |
| 5.1  | Model $M$ v rámci $ZF$ , který je izomorfní s $PA$ . . . . .  | 50 |
| 5.2  | Každý prvek je následníkem právě jednoho prvku. . . . .   | 51 |
| 5.3  | Žádný prvek není následníkem 0. . . . .   | 51 |
| 5.4  | Příklady reflexivních relací. . . . .   | 53 |
| 5.5  | Symetrická relace na čtyřech prvcích. . . . .   | 53 |
| 5.6  | Tranzitivní relace na čtyřech prvcích. . . . .  | 53 |
| 5.7  | Antisymetrická relace na třech prvcích. . . . .   | 54 |
| 5.8  | Relace uspořádání $R_1$ na šesti prvcích. . . . .   | 55 |
| 5.9  | Relace uspořádání $R_2$ na devíti prvcích. . . . .  | 55 |
| 5.10 | Relace $R_1 \cup (x_4, x_6)$ , která není uspořádáním. . . . .  | 56 |
| 5.11 | Relace $R_2 \setminus (x_6, x_9)$ , která není uspořádáním. . . . .                                     | 56 |
| 5.12 | Relace $R_1$ zakreslená podle pořadí indexů prvků. . . . .  | 57 |
| 5.13 | Relace $S$ zakreslená standardně a pomocí Hasseova diagramu. . . . .                                    | 57 |
| 5.14 | Hasseův diagram relace $R_1$ . . . . .  | 57 |
| 5.15 | Diagram uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ . . . . .   | 58 |
| 5.16 | Diagram uspořádané množiny $(S,  )$ . . . . .   | 59 |
| 5.17 | Diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ . . . . .                                      | 59 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.18 | Diagram uspořádané množiny $(\{1,2,4,5,10,20\},  )$ se zvýrazněním porovnatelných a neporovnatelných prvků. . . . . | 60  |
| 5.19 | Diagram uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ s minimálním prvkem. . . . .  | 61  |
| 5.20 | Diagram uspořádané množiny $(\{1,2,\dots,10\},  )$ s minimálním prvkem a dvěma maximálními prvky. . . . .           | 61  |
| 5.21 | Diagram uspořádané množiny $(A^2, \preceq)$ s nejmenším prvkem a největším prvkem. . . . .                          | 61  |
| 5.22 | Grafické znázornění sjednocení množin $a \times \{0\}$ a $b \times \{1\}$ . . . . .                                 | 65  |
| 6.1  | Situace před a po přesunutí hostů. (Převzato z [8] a upraveno.) . . .   | 67  |
| 6.2  | Situace před a po přesunutí $k$ hostů. (Převzato z [8] a upraveno.) . . .   | 68  |
| 6.3  | Situace po přesunutí hostů obecně z pokoje $n$ do $2n$ . (Převzato z [8] a upraveno.) . . . . .                     | 68  |
| 6.4  | Bijekce mezi konečnými množinami $A, B$ se stejným počtem prvků. . . . .  | 70  |
| 6.5  | Bijekce mezi množinami $S$ a $\mathbb{N}$ . . . . .   | 71  |
| 6.6  | Graf funkce $g_1$ . . . . .   | 72  |
| 6.7  | Graf funkce $g_2$ („přeskálovaný“ a posunutý graf $\arctg$ ). . . . .   | 72  |
| 6.8  | Graf funkce $g_4$ (složení funkcí $g_3$ a $g_2$ ). . . . .  | 72  |
| 6.9  | Prosté zobrazení z množiny $A$ do množiny $B$ . . . . .   | 73  |
| 6.10 | Znázornění zobrazení $f$ . . . . .  | 74  |
| 6.11 | Znázornění zobrazovacího „algoritmu“ racionálních čísel na přirozená. . . . .                                       | 75  |
| 6.12 | Desetinné rozvoje obrazů přirozených čísel v $f$ . . . . .  | 75  |
| 6.13 | Diagonála tvořená obrazy v $f$ . . . . .  | 76  |
| 6.14 | Podmnožiny (obrazy) množiny $X$ určené náležením každého z prvků. . . . .   | 78  |
| 6.15 | Diagonála seznamu podmnožin množiny $X$ . . . . .   | 78  |
| A.1  | Důkaz indukci lze přirovnat k efektu padajícího domina. . . . .   | 91  |
| C.1  | De Morganovy vzorce pro $n = 2$ . . . . .   | 96  |
| E.1  | Relace ekvivalence $R$ na $X$ . . . . .   | 100 |
| E.2  | Relace $R \cup (x_3, x_4)$ na $X$ . . . . .   | 101 |
| E.3  | Schématické znázornění ekvivalence $R$ na $X$ . . . . .   | 101 |

# Příloha A

## Důkazy

V matematice se lze setkat s celou řadou různých tvrzení. Od primitivních, jejichž platnost je zřejmá až po složitější, nad jejich platností je třeba se více zamyslet. Čtenář se nejspíše zatím spíše setkával s matematikou, která zahrnovala užívání jistých postupů. Např. zjednodušování algebraických výrazů, řešení soustav rovnic, ověřování trigonometrických identit, aj. Avšak hodně postupů v matematice je založeno na již známých výsledcích, o nichž bylo dokázáno, že jsou pravdivé. Pokud ovšem máme dokázat určité tvrzení, je třeba, aby bylo naše zdůvodnění jednoznačné a logicky správné. V této sekci se proto podíváme na důkazové techniky používané v matematice, které budeme dále v textu využívat.

Matematická tvrzení jsou často různě klasifikována v závislosti na jejich povaze. Základními typy jsou tyto.

- *Axiom.* Tvrzení, které implicitně považujeme za pravdivé a nedokazujeme jej. S axiomatikou jsme se již částečně seznámili v historické předmluvě (viz 1.2.3).
- *Věta.* Matematické tvrzení, jehož pravdivost můžeme ověřit důkazem.
- *Lemma.* Pomocné tvrzení, které běžně využíváme pro důkaz jiného (typicky složitějšího) tvrzení.
- *Důsledek.* Tvrzení, které je přímým důsledkem jiného tvrzení.

Čistě formálně však mezi **větou**, **lemmatem** a **důsledkem** není žádný rozdíl.

### A.1 Důkaz přímý

Jedná se o asi nejjednodušší typ důkazu. Často jsou matematická tvrzení formulována jako implikace, tzn. „Jestliže platí  $A$ , pak platí  $B$ “. Konkrétně, např. „Je-li  $x < 0$ , pak  $x^2 > 0$ “.

Myšlenka důkazu je taková, že začínáme od předpokladu  $A$ , z něhož dále odvozujeme dílčí tvrzení tak dlouho, až dojdeme k požadovanému závěru  $B$ . Symbolicky, pokud si označíme dílčí tvrzení v důkazu  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , pak vlastně dokážeme výrokovou formuli

$$(A \Rightarrow X_1) \wedge (X_1 \Rightarrow X_2) \wedge \dots \wedge (X_{n-1} \Rightarrow X_n) \wedge (X_n \Rightarrow B). \quad (\text{A.1})$$

V tomto procesu dokazování se využívá tautologie (xiii) z věty 2.1.11

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C).$$

Z tohoto faktu vyplývá, že pokud je každá z dílčích implikací pravdivá, pak je nutně pravdivá i implikace  $A \Rightarrow B$ , kterou jsme chtěli dokázat<sup>1</sup>. Podívejme se na příklad podobný příklad z úvodu.

**Tvrzení A.1.1.** *Necht  $x \in \mathbb{R}$ . Je-li  $x < 0$ , pak  $x^2 + 1 > 0$ .*

*Důkaz.* Předpokladem našeho tvrzení je  $x \in \mathbb{R} \wedge x < 0$ . Víme, že pro každé reálné číslo  $x$  platí, že  $x^2 \geq 0$ . Tj. určitě platí implikace

$$x < 0 \Rightarrow x^2 > 0.$$

Dále víme, že triviálně platí  $1 > 0$ , tedy také jistě platí

$$x^2 + 1 > x^2.$$

Protože však  $x^2 > 0$ , pak také  $x^2 + 1 > 0$ , což jsme chtěli dokázat. □

Posloupnost dokázaných implikací bychom mohli podle (A.1) zapsat nyní jako

$$(x \in \mathbb{R} \wedge x < 0 \Rightarrow x^2 > 0) \wedge (x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > x^2) \wedge (x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow x^2 + 1 > 0),$$

a tedy jsme dokázali i implikaci v původním tvrzení  $x < 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0$ .

V praxi důkazy takto samozřejmě nerozepisujeme a řadu věcí považujeme za samozřejmé, např. právě  $1 > 0$ ,  $x^2 + 1 > x^2$ , apod. Takový důkaz bychom bez většího rozepisování mohli napsat klidně na jeden řádek.

$$x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 1 > 0.$$

Všimněte si zároveň, že jsme zde použili jistou generalizaci. Předvedený důkaz totiž není závislý na volbě  $x$  a náš argument je tak univerzální. Tedy platí

$$\forall x < 0 : x^2 + 1 > 0.$$

Obecně tvrzení formulovaná stylem „je-li  $x \in X$ , pak ...“ jsou míněna jako

$$\forall x \in X : \dots$$

**Tvrzení A.1.2.** *Necht  $n \in \mathbb{N}$  je liché. Pak  $3n + 7$  je sudé číslo.*

*Důkaz.* Začneme u předpokladu, že  $n \in \mathbb{N}$  je liché číslo. To znamená, že

$$\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1.$$

Po dosazení obdržíme

$$3(2k + 1) + 7 = 6k + 3 + 7 = 6k + 10 = 2(3k + 5).$$

Protože  $3k + 5$  je přirozené číslo, pak  $3n + 7$  je dělitelné dvěma a je tedy sudé, což jsme chtěli dokázat. □

---

<sup>1</sup>Výrokové proměnné lze v konkrétním případě nahradit příslušnými predikáty.



**Tvrzení A.1.3** (AG nerovnost). *Pro  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$  platí*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

*Důkaz.* Při důkazu tohoto tvrzení vyjdeme z jednoduchého pozorování:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Nyní stačí výraz upravit a dostaneme požadovanou nerovnost.

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

□

**Tvrzení A.1.4.** *Pro  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  platí*

$$x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y.$$

*Důkaz.* Zde je třeba si všimnout „dvojitě“ nerovnosti v dokazovaném tvrzení. To nám již napovídá, že ve skutečnosti musíme dokázat 2 dílčí tvrzení, konkrétně

$$x < \frac{x+y}{2} \quad \text{a} \quad \frac{x+y}{2} < y.$$

Při důkazu obou částí vyjdeme opět z předpokladu. Tedy mějme libovolná čísla  $x, y \in \mathbb{R}$  taková, že  $x < y$ . Pak jistě platí

$$x + x < x + y \Rightarrow 2x < x + y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2}.$$

Tím jsme dokázali první nerovnost. Platnost druhé dokážeme analogicky:

$$x + y < y + y \Rightarrow x + y < 2y \Rightarrow \frac{x+y}{2} < y.$$

□

(Převzato z [11], str. 79 a [12], sekce *důkaz přímý*.)

Ne všechna tvrzení jsou v matematice nutně formulována jako implikace. Často se lze setkat s tvrzeními formulovanými jako ekvivalence, tj.  $A \Leftrightarrow B$ . Důkazy takových výroků jsou již trochu delší, neboť už nestačí pouze ukázat  $A \Rightarrow B$ . Vzpomeňme si však na tautologii, která nám dávala do souvislosti ekvivalenci s implikací (viz (xi) ve větě 2.1.11):

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Z toho je již vidět, jak u takových tvrzení při důkazu postupovat. Zkrátka dokážeme zvlášť  $A \Rightarrow B$  a  $A \Leftarrow B$ .

**Tvrzení A.1.5.** *Nechť  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Pak  $3 \mid xy$  právě tehdy, když  $3 \mid x$  nebo  $3 \mid y$ .*

*Důkaz. ( $\Rightarrow$ ).* Začneme s předpokladem, že  $3 \mid xy$ . Víme, že pokud je číslo dělitelné třemi, pak jej lze zapsat jako  $3k$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Uvažujme následující případy:

- $3 \mid x \wedge 3 \mid y$ . Tehdy tvrzení jistě platí.
- $3 \nmid x$ . Ukážeme, že pak nutně musí platit  $3 \mid y$ . Pokud  $x$  není dělitelné třemi, pak jej lze zapsat buď jako  $3k + 1$ , nebo  $3k + 2$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$xy = (3k + 1)y \quad \text{nebo} \quad xy = (3k + 2)y$$

Protože čísla  $3k + 1$  a  $3k + 2$  nejsou dělitelná třemi, pak je vidět, že musí platit  $3 \mid y$ .

- $3 \nmid y$ . Zde je postup analogický.

Tím máme dokázanou implikaci  $3 \mid xy \Rightarrow 3 \mid x \vee 3 \mid y$ .

( $\Leftarrow$ ). Nyní předpokládáme, že platí  $3 \mid x \vee 3 \mid y$ ; chceme ukázat, že  $3 \mid xy$ . Bez újmy na obecnosti<sup>2</sup>, nechť je  $x$  dělitelné třemi. Pak existuje  $x = 3k$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Po dosazení dostaneme

$$xy = (3k)y = 3(ky) \Rightarrow 3 \mid xy.$$

Tedy dokázali jsme obě implikace a tím i původní tvrzení. □

## A.2 Důkaz nepřímý

Řada tvrzení v matematice však není až tak jednoduchá na dokázání přímo. Důkazy, které jsme si ukazovali, vždy začínaly od předpokladu a postupně jsme došli k požadovanému závěru. Lze ale postupovat i jinak. Opět se odkážeme na dříve zmíněné tautologie věty 2.1.11, konkrétně na (x):

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A). \quad (\text{A.2})$$

Implikace je ve skutečnosti ekvivalentní s tvrzením, že pokud neplatí závěr, pak neplatí ani předpoklad. Na této skutečnosti je založen *důkaz nepřímý* (též *důkaz obměnou*). Podívejme se na příklady užití.

**Tvrzení A.2.1.** *Nechť  $x \in \mathbb{Z}$  a  $3 \nmid (x^2 - 1)$ . Pak  $3 \mid x$ .*

V tomto případě máme dvě možnosti. Buď začneme s předpokladem  $3 \nmid (x^2 - 1)$  a dokážeme, že  $3 \mid x$  (tedy dokážeme tvrzení přímo), nebo naopak budeme předpokládat, že  $3 \nmid x$  a dokážeme negaci původního předpokladu. Ačkoliv by se jistě našla možnost, jak tvrzení dokázat přímo, přesto se nejspíše zdá jednodušší začít s předpokladem, že  $x$  není dělitelné třemi.

---

<sup>2</sup>Termín *bez újmy na obecnosti* (někdy zkráceně *BÚNO*) se v matematických textech používá v situacích, kdy může nastat více možností, avšak říkáme, že jejich důkazy jsou analogické.

*Důkaz.* Necht  $3 \nmid x$ . Ukážeme, že platí  $3 \mid (x^2 - 1)$ . Podle předpokladu lze  $x$  zapsat jako  $3k + 1$  nebo  $3k + 2$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Bez újmy na obecnosti píšme  $x = 3k + 1$ . Pak  $x^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k) \Rightarrow 3 \mid (x^2 - 1)$ .

Tedy dokázali jsme, že

$$3 \nmid x \Rightarrow 3 \mid (x^2 - 1),$$

což je však podle A.2 ekvivalentní s

$$3 \nmid (x^2 - 1) \Rightarrow 3 \mid x$$

a původní tvrzení je tak dokázané. □

**Tvrzení A.2.2.** *Necht jsou dány množiny  $A$  a  $B$ . Pak*

$$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A.$$

*Důkaz. ( $\Rightarrow$ ).* Tuto implikaci dokážeme obměnou. Necht jsou dány množiny  $A$  a  $B$  takové, že  $B$  není podmnožinou  $A$ . Pak

$$\exists x \in B : x \notin A.$$

Prvek  $x$  se tedy objeví i ve sjednocení  $A \cup B$ , tj.

$$x \in A \cup B.$$

Ale protože  $x \notin A$ , pak  $A \cup B \neq A$ .

( $\Leftarrow$ ). Opačnou implikaci lze již dokázat přímo a využijeme zde poměrně hezkého triku, který se při dokazování podobných tvrzení využívá. Tvrdíme-li, že dvě množiny se rovnají, pak ovšem i platí, že jsou vzájemně podmnožinami té druhé. Symbolicky

$$X = Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X).$$

V našem případě budeme chtít ukázat, že platí

$$(A \subseteq A \cup B) \wedge (A \cup B \subseteq A).$$

Platnost inkluze  $A \subseteq A \cup B$  je vidět okamžitě (vyplývá z definice sjednocení), neboť pro libovolný prvek  $x$  platí:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$

a tedy skutečně  $A \subseteq A \cup B$ .

Zbývá ukázat, že  $A \cup B \subseteq A$ . Vezměme libovolný prvek  $x \in A \cup B$ ; ukážeme že  $x \in A$ . Nyní mohou nastat dvě možnosti:

- $x \in A$ . Pak máme triviálně požadovaný výsledek.
- $x \in B$ . Z předpokladu víme, že  $B \subseteq A$ , z čehož opět plyne  $x \in A$ .

Dokázali jsme tedy obě inkluze, tj.  $A \subseteq A \cup B$  a  $A \cup B \subseteq A$  a tedy platí

$$A \cup B = A.$$

□

(Převzato z [11], str. 111.)

## A.3 Důkaz sporem

Už jsme si představili dvě základní důkazové techniky. Nyní k nim přidáme metodu třetí – *důkaz sporem*.

Uvažme, že máme tvrzení ve tvaru implikace  $A \Rightarrow B$ , které chceme dokázat. Podle (ix) ve větě 2.1.11 víme, že vždy platí

$$(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow \neg P. \quad (\text{A.3})$$

Tato tautologie říká, že pokud z výroku  $P$  lze odvodit jeho negaci  $\neg P$ , pak výrok  $P$  neplatí.

Myšlenka důkazu sporem je tedy taková, že **budeme předpokládat platnost negace dokazovaného tvrzení  $\neg(A \Rightarrow B)$  a dojdeme k závěru, který je v rozporu předpokladem**. Z toho pak podle (A.3) plyne, že znegované tvrzení neplatí a podle *zákona vyloučeného třetího* (viz (ii) ve větě 2.1.11) musí platit tvrzení opačné (což je původní tvrzení).

Ještě si vzpomeňme na tautologii

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow B \vee \neg A.$$

Pomocí ní můžeme psát

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg(B \vee \neg A) \equiv A \wedge \neg B.$$

To ostatně dává i smysl. Implikace je nepravdivá pouze, když platí její předpoklad, ale neplatí její závěr.

**Tvrzení A.3.1.** *Nechť jsou dána  $a, b \in \mathbb{Z}$ , kde  $a$  je sudé a  $b$  je liché. Pak  $4 \nmid (a^2 + 2b^2)$ .*

*Důkaz.* Nejprve znegujeme dokazované tvrzení, tj.

$$\neg((2 \mid a \wedge 2 \nmid b) \Rightarrow 4 \nmid (a^2 + 2b^2)) \Leftrightarrow (2 \mid a \wedge 2 \nmid b) \wedge 4 \mid (a^2 + 2b^2).$$

Pro spor tedy předpokládejme, že je-li  $a$  sudé a  $b$  liché, pak výraz  $a^2 + 2b^2$  je dělitelný čtyřmi. Tedy existují čísla  $k, l \in \mathbb{Z}$  taková, že  $a = 2k$  a  $b = 2l - 1$ . Tedy

$$a^2 + 2b^2 = (2k)^2 + 2(2l - 1)^2 = 4k^2 + 8l^2 - 8l + 2 = 4(k^2 + 2l^2 - 2l) + 2.$$

Výraz  $4(k^2 + 2l^2 - 2l)$  je jistě dělitelný 4. Avšak protože platí  $4 \mid a^2 + 2b^2$ , pak musí také platit  $4 \mid 2$ . To očividně však neplatí. To znamená, že znegované tvrzení je nepravdivé a platí tvrzení původní, což jsme chtěli dokázat. □

(Převzato z [11], str. 126) V případě důkazu sporem je asi nejznámější (a též i nejstarší dochovaný) důkaz, že číslo  $\sqrt{2}$  je iracionální.

**Tvrzení A.3.2.** *Číslo  $\sqrt{2}$  je iracionální.*

*Důkaz.* Než začneme s důkazem, trochu si rozmysleme dokazované tvrzení. Jak bude vypadat jeho negace? Opačným tvrzením je, že *číslo  $\sqrt{2}$  je racionální*. Z definice racionálního čísla to však znamená

$$\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

O každém zlomku však víme, že jej lze zapsat v základním tvaru, tj. můžeme zároveň předpokládat, že  $p$  a  $q$  jsou nesoudělná. S tímto budeme dále pracovat. Pišme

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \frac{p}{q} \\ 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2q^2 &= p^2.\end{aligned}$$

Z posledního řádku lze vidět, že  $p^2$  lze zapsat jako dvojnásobek nějakého jiného čísla. Tedy  $p^2$  je určitě sudé. Co nám to říká o samotném  $p$ ? Že  $p$  je také sudé. (O tom není těžké se přesvědčit. Stačí si spočítat  $(2k)^2$  a analogicky pro lichá čísla  $(2l-1)^2$ .) Tzn. že existuje  $r \in \mathbb{Z}$  takové, že  $p = 2r$ . Nyní dosadíme:

$$\begin{aligned}2q^2 &= (2r)^2 \\ 2q^2 &= 4r^2 \\ q^2 &= 2r^2.\end{aligned}$$

Tedy  $q^2$  je také nutně sudé a tedy i  $q$  je sudé. Dohromady tedy  $p$  a  $q$  jsou obě sudá. To je však spor, neboť jsme předpokládali, že  $p$  a  $q$  jsou nesoudělná. Tzn. nemůže neexistovat zlomek  $p/q$ , který by byl roven  $\sqrt{2}$  a byl v základním tvaru.  $\square$

**Tvrzení A.3.3.** *Prvočísel je nekonečně mnoho.*

*Důkaz.* Pro spor naopak uvažujme, že prvočísel je konečně mnoho; označme si je  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Definujeme číslo  $m$  následovně:

$$m = p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Nyní k číslu  $m$  přičteme 1

$$m + 1 = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Na závěr celou rovnost vydělíme kterýmkoliv z čísel  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ; bez újmy na obecnosti zvolme  $p_1$ :

$$\frac{m+1}{p_1} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n + 1}{p_1} = p_2 \cdots p_n + \frac{1}{p_1}.$$

Číslo  $p_2 \cdots p_n$  je jistě přirozené, avšak  $1/p_1$  již přirozené není (nejmenší prvočíslo je 2). Je vidět, že nově vzniklé přirozené číslo  $m+1$  není dělitelné žádným z prvočísel  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . To však znamená, že  $m+1$  je buď samo prvočíslo, nebo je dělitelné prvočíslem, které není součástí posloupnosti  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . V obou případech však dostáváme spor, neboť jsme předpokládali, že posloupnost  $p_1, p_2, \dots, p_n$  obsahuje všechna prvočísla.  $\square$

## A.4 Důkaz matematickou indukcí

K této důkazové technice si na úvod ukažme příklad. Čtenáři je jistě znám vzorec pro součet prvních  $n$  členů geometrické posloupnosti. Jistě tak pro nás neměl být problém určit součet

$$\sum_{k=0}^n 2^k.$$

Představme si na chvíli, že bychom neznali daný vzorec. Zkusme si vypočítat prvních několik hodnot:

$$\begin{aligned}2^0 &= 1, \\2^0 + 2^1 &= 3, \\2^0 + 2^1 + 2^2 &= 7, \\2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 &= 15.\end{aligned}$$

Zdá se, že vzorec pro obecné  $n$  by mohl být  $2^{n+1} - 1$ . Ale i kdybychom to ověřili pro jakékoliv množství hodnot  $n$ , stále to nebude není důkaz. Jak na to? K podobným tvrzením se využívá tzv. *matematická indukce* (někdy zkráceně jen *indukce*). Ukažme si na tomto příkladu způsob použití (formální princip si vysvětlíme později).

Naším cílem je tedy dokázat, že  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  platí

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

(i) Nejdříve ověříme platnost vzorce pro nejmenší možné  $n$ , tj. pro  $n = 0$ :

$$\sum_{k=0}^0 2^k = 2^0 = 1 \quad \text{a} \quad 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Pro  $n = 0$  vzorec platí.

(ii) Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro určité  $n = n_0 \in \mathbb{N}$ . Ukážeme, že pak tvrzení nutně musí platit i pro  $n = n_0 + 1$ . Pišme

$$\sum_{k=0}^{n_0+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n_0} 2^k + 2^{n_0+1}.$$

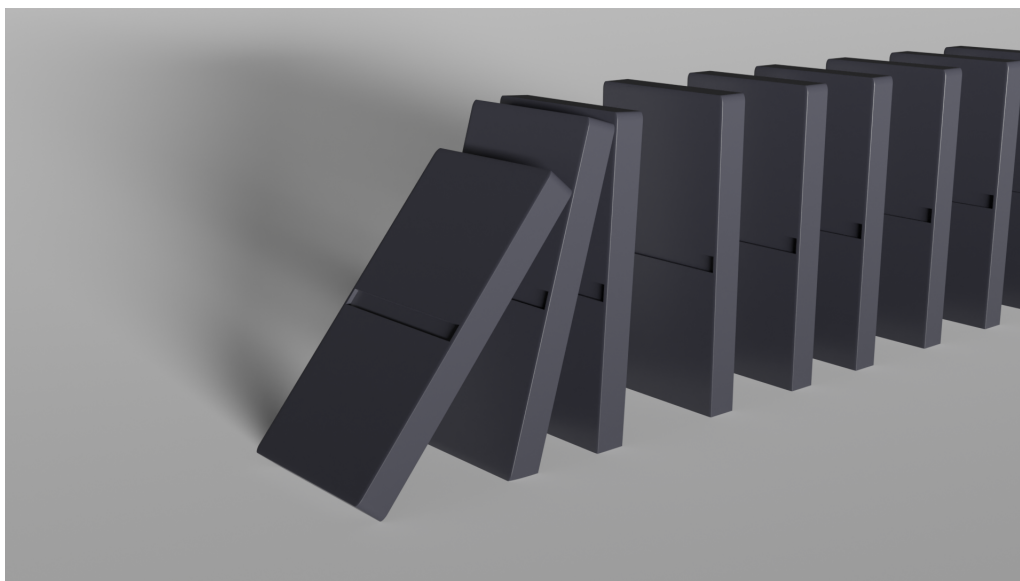
Podle předpokladu vzorec platí pro  $n_0$ , tedy za  $\sum_{k=0}^{n_0} 2^k$  můžeme dosadit  $2^{n_0+1} - 1$ . Tedy

$$\sum_{k=0}^{n_0+1} 2^k + 2^{n_0+1} = 2^{n_0+1} - 1 + 2^{n_0+1} = 2 \cdot 2^{n_0+1} - 1 = 2^{n_0+2} - 1.$$

To je ale přesně vzorec pro  $n = n_0 + 1$ .

Tím jsme dokázali dané tvrzení. Jak? Podle (i) vzorec platí pro  $n = 0$ . Podle (ii) pak platí, že když tvrzení platí pro  $n = 0$ , pak platí i pro  $n = 1$  (pro  $n_0 = 0$ ). Pro  $n = 1$  pak opět podle (ii) platí, že tvrzení platí i pro  $n = 2$ . Opět podle (ii)

víme, že když tvrzení platí pro  $n = 2$ , pak platí i pro  $n = 3$  a tak dále. Z tohoto principu plyne, že tvrzení tedy platí pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  (viz obrázek A.1).



Obrázek A.1: Důkaz indukcí lze přirovnat k efektu padajícího domina.

Krok (ii) se nazývá *indukční krok* a předpoklad, že dokazované tvrzení platí pro nějaké  $n = n_0$  se nazývá *indukční předpoklad*. Někdy se v důkazech indukcí pro upřesnění specifikuje, podle jaké proměnné dané tvrzení dokazujeme. V tomto případě bychom řekli „*indukcí podle  $n$* “. (Inspirováno [6], str. 32.)

Tento postup vychází z tzv. *principu matematické indukce*, který lze zformulovat jako větu.

**Věta A.4.1** (Princip matematické indukce). *Nechť pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $\varphi_n$  libovolný výrok. Pokud platí*

$$(i) \quad \varphi_1$$

$$(ii) \quad \forall k \in \mathbb{N} : \varphi_k \Rightarrow \varphi_{k+1},$$

*pak platí  $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi_n$ .*

(Převzato z [11], str. 144.)

Tuto větu v různých textech lze najít i v jiných formulacích. Její důkaz však vyžaduje složitější znalosti. Uvedme si ještě jeden příklad.

**Úmluva A.4.2.** Při aplikaci indukčního předpokladu se někdy píše zkratka *I. P.*, čehož se budeme držet v dalším textu.

**Tvrzení A.4.3.** *Pro každé přirozené  $n \geq 5$  platí  $2^n > n^2$ .*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme indukcí podle  $n$ .

- Pro nejmenší hodnotu  $n = 5$  dostáváme  $2^5 = 32 > 5^2 = 25$ , což jistě platí.

- Nyní dokážeme indukční krok. Předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolné  $n_0 \geq 5$ ; ukážeme platnost pro  $n_0 + 1$ :

$$2^{n_0+1} = 2^{n_0} \cdot 2 \stackrel{\text{I. P.}}{>} n_0^2 \cdot 2.$$

Pro dokázání tvrzení nyní stačí ukázat, že  $2n_0^2 > (n_0 + 1)^2$ .

$$\begin{aligned} 2n_0^2 &= n_0^2 + n_0^2 > n_0^2 + 5n_0 = n_0^2 + 2n_0 + 3n_0 = n_0^2 + 2n_0 + 15 \\ &> n_0^2 + 2n_0 + 1 = (n_0 + 1)^2. \end{aligned}$$

Celkově tedy dostáváme  $2^{n_0+1} > (n_0 + 1)^2$ .

Podle principu matematické indukce platí  $\forall n \geq 5 : 2^n > n^2$ , což jsme chtěli dokázat. □

(Převzato z [11], str. 153.)

**Tvrzení A.4.4.** *Necht  $X$  je libovolná  $n$ -prvková množina. Pak  $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ .*

*Důkaz.* Postupujme indukcí podle mohutnosti  $n$  množiny  $X$ . Pro  $n = 0$  obsahuje potenční množina množiny  $X$  pouze prázdnou množinu, tj.  $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^0 = 1$ .

Předpokládejme, že tvrzení platí pro množinu o  $n_0$  prvcích. Pro důkaz indukčního kroku mějme množinu  $X$  o  $n_0 + 1$ . Vezměme libovolný prvek  $x \in X$ . Prvky potenční množiny  $\mathcal{P}(X)$  si rozdělíme do množin  $T$  a  $T'$  takto:

- $T = \{Q \in \mathcal{P}(X) \mid x \in Q\}$  a
- $T' = \{Q \in \mathcal{P}(X) \mid x \notin Q\}$ .

Tedy v  $T$  se nachází všechny podmnožiny množiny  $X$  obsahující prvek  $x$  a v  $T'$  všechny podmnožiny, které jej neobsahují. Z definice lze vidět, že  $T$  a  $T'$  jsou disjunktní, tj.  $T \cap T' = \emptyset$  a tedy  $X = T \cup T'$ . Jaké jsou mohutnosti  $T$  a  $T'$ ? Množina  $T'$  obsahuje všechny podmnožiny množiny  $X \setminus \{x\}$  a tedy podle indukčního předpokladu má  $2^{n_0}$  podmnožin, tj.  $|\mathcal{P}(X \setminus \{x\})| = 2^{n_0}$ .

Jak vypadají množiny obsažené v  $T$ ? Uvažme libovolnou podmnožinu  $A'$  množiny  $X$ , která neobsahuje prvek  $x$ . Taková množina musí být (z definice) prvkem množiny  $T'$ . Pokud nyní položíme množinu  $A = A' \cup \{x\}$ , získáme tak množinu obsahující prvek  $x$  a tudíž  $A \in T$ . Naopak pokud bychom měli množinu  $B$  obsahující prvek  $x$ , tj.  $B \in T$ , pak definováním  $B' = B \setminus \{x\}$  získáme množinu z  $T'$ . To však znamená, že každé množině  $A' \in T'$  odpovídá právě jedna množina  $A \in T$ .

Z toho plyne, že počet množin v  $T$  je stejný<sup>3</sup> jako v  $T'$ , tj.  $|T| = |T'|$ , což podle již aplikovaného indukčního předpokladu znamená, že  $|T| = 2^{n_0}$ . Protože však množiny  $T$  a  $T'$  jsou disjunktní, pak celkový počet prvků je  $2^{n_0} + 2^{n_0} = 2^{n_0+1}$ , což jsme chtěli dokázat. □

---

<sup>3</sup>Formálně vzato jsme sestrojili *bijekci* mezi množinami  $T$  a  $T'$ , kde obrazem množiny  $A \in T$  je  $A \setminus \{x\} \in T'$ . Termín je zaveden v sekci 4.3.



# Příloha B

## Dodatky k logice

V kapitole o výrokovém a predikátovém počtu jsme pracovali s výrokovými a později predikátovými formulemi, kde jsme si pouze neformálně vysvětlili, co pod těmito termíny rozumíme. Formálněji můžeme k těmto záležitostem přistoupit pomocí následující metadefinice.

**Definice B.0.1** (Výroková a atomická formule). (i) Každá výroková proměnná je *výroková formule* (tzv. *atomická formule*).

(ii) Jsou-li  $\varphi$  a  $\psi$  výrokové formule, pak  $\neg(\varphi)$ ,  $(\varphi) \wedge (\psi)$ ,  $(\varphi) \vee (\psi)$ ,  $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$  a  $(\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$  jsou také výrokové formule.

(iii) Výraz, který nelze získat pomocí pravidel (i) a (ii) není výrokovou formulí.

(Převzato z [1], str. 14 a [4], str. 30).

Definice výrokové formule B.0.1 nám v podstatě říká, jakým způsobem můžeme sestavit potenciálně všechny možné formule. Mějme výrokové proměnné  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Ty jsou podle (i) v definici B.0.1 výrokovými formulemi. Podle (ii) jsou pak formulemi i výrazy

$$(A) \wedge (B), (A) \vee (C) \text{ a } \neg(B). \quad (\text{B.1})$$

Nyní můžeme opakovaně použít (ii) k sestavení dalších složitějších formulí. Tedy užitím formulí (B.1) můžeme dále postupně sestavit např. výrazy

$$\left( (A) \wedge (B) \right) \Rightarrow \left( (A) \vee (C) \right) \quad \text{a} \quad \left( (A) \wedge (\neg(B)) \right) \Leftrightarrow \left( \neg((A) \vee (B)) \right),$$

které jsou opět podle (ii) výrokovými formulemi. Opětovným užitím (ii) pak je dále výrokovou formulí např.

$$\left( \left( (A) \wedge (B) \right) \Rightarrow \left( (A) \vee (C) \right) \right) \Rightarrow \left( \left( (A) \wedge (\neg(B)) \right) \Leftrightarrow \left( \neg((A) \vee (B)) \right) \right).$$

Takto můžeme postupovat dál a opakovanou aplikací pravidla (ii) vytvořit ještě složitější výrokové formule.

Naopak pokud bychom uvažili nějaký výraz, můžeme obdobně zjistit, jestli se jedná o výrokovou formuli či nikoliv.

**Příklad B.0.2.** Mějme výraz

$$\varphi \sim ((A) \wedge (C)) \Leftrightarrow (((A) \vee (B)) \Rightarrow \neg(C)).$$

Ověřte, zda  $\varphi$  je výroková formule.

*Řešení.* Aby  $\varphi$  byla formule, musí být

$$\varphi_1 \sim (A) \wedge (C) \quad \text{a} \quad \varphi_2 \sim ((A) \vee (B)) \Rightarrow \neg(C)$$

těž formulí. Výraz  $\varphi_1$  zřejmě je formulí, neboť  $A$  a  $C$  jsou atomické formule. Ovšem u  $\varphi_2$  lze již vidět, že výraz nesplňuje definici výrokové formule, neboť u  $\neg(C)$  chybí vnější závorky. Z bodu (iii) definice B.0.1 tedy plyne, že výraz  $\varphi$  **není výrokovou formulí**, neboť jej nelze získat pomocí pravidel (i) a (ii). □

Čtenáře možná již napadlo, že formule, které jsme sestrojili z definice B.0.1, jsou zapsány poměrně komplikovaně, především co do nadměrného používání závorek. Např. výraz

$$A \wedge \neg C, \tag{B.2}$$

není podle B.0.1 výrokovou formulí. I přesto je však nejspíše zřejmé, že tímto zápisem vyjadřujeme výrok „Platí  $A$  a zároveň neplatí  $C$ “. Nebo vrátíme-li se k příkladu B.0.2, i při vypuštění uzávorkování u výrazu  $\varphi_2$  by dávalo smysl interpretovat výraz

$$A \vee B \Rightarrow \neg C$$

jako výrok „Jestliže platí  $A$  a zároveň  $B$ , pak neplatí  $C$ “.

# Příloha C

## Dodatky k axiomům teorie množin

### C.1 Důkazy aritmetických vlastností množin

Ještě jedny známé vztahy pro množiny jsou tzv. *de Morganovy vzorce* (viz obrázek C.1), které si zde zformulujeme jako větu.

**Věta C.1.1** (de Morganovy vzorce). *Nechť  $A, X_1, \dots, X_n$  jsou libovolné množiny. Pak platí*

$$(i) \quad A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n X_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus X_i),$$

$$(ii) \quad A \setminus \left( \bigcap_{i=1}^n X_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \setminus X_i).$$

*Důkaz.* Nejdříve se zamysleme, co vlastně říkají dané rovnosti. Vyjadřují, že množiny a pravé a levé straně jsou si rovny. Z axiomu extenzionality (ZF2) víme, že to platí právě tehdy, když mají dané množiny stejné prvky.

Ukážeme pouze platnost (i), avšak důkaz (ii) je zcela analogický. Budiž dán libovolný prvek  $x \in A \setminus (\bigcup_{i=1}^n X_i)$ . Ukážeme, že  $x \in \bigcap_{i=1}^n (A \setminus X_i)$ . Z definice rozdílu množin (viz 3.2.2) tedy musí platit

$$x \in A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n X_i \right) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin \bigcup_{i=1}^n X_i.$$

Protože však  $x$  nenáleží sjednocení množin  $X_1, \dots, X_n$ , pak nenáleží (podle definice 3.2.12) žádné z nich:

$$x \in \bigcup_{i=1}^n X_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : x \notin X_i.$$

Tedy víme, že platí:

$$x \in A \wedge \forall i \in \{1, \dots, n\} : x \notin X_i.$$

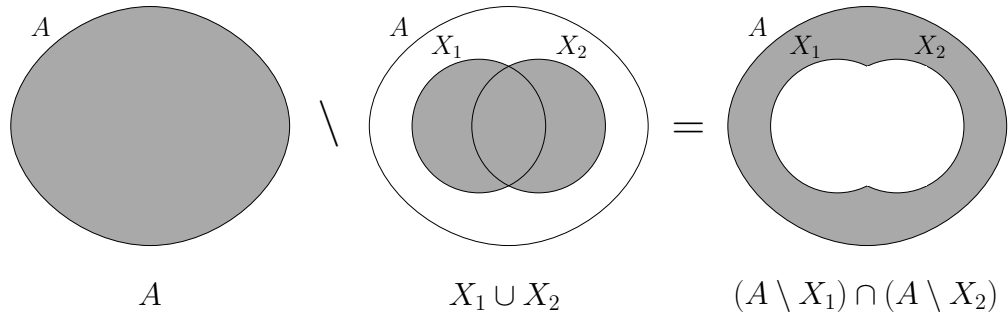
Pokud prvek  $x$  náleží množině  $A$  a zároveň nenáleží žádné z množin  $X_1, \dots, X_n$ , pak nenáleží ani množině  $A \setminus X_i$  pro libovolné  $i$ , kde  $1 \leq i \leq n$ . Tj.

$$x \in A \wedge (\forall i \in \{1, \dots, n\} : x \notin X_i) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : x \in A \setminus X_i.$$

Z tohoto faktu již lze vidět, že  $x$  nutně leží v průniku těchto množin, tzn.

$$x \in \bigcap_{i=1}^n (A \setminus X_i),$$

což jsme chtěli dokázat. □



Obrázek C.1: De Morganovy vzorce pro  $n = 2$ .

## C.2 Schéma axiomů nahrazení

$$\begin{aligned} & \forall u \forall v \forall v' (\varphi(u, v) \wedge \varphi(u, v') \Rightarrow v = v') \Rightarrow \\ & \Rightarrow \forall a \exists z \forall x (x \in z \Leftrightarrow \exists y (y \in a \wedge \varphi(y, x))), \end{aligned}$$

kde formule  $\varphi(u, v)$  neobsahuje proměnné  $v'$  a  $z$ .

Tento axiom je pravděpodobně nejsložitější, co do jeho zápisu. Zaměříme se nyní pouze na předpoklad

$$\forall u \forall v \forall v' (\varphi(u, v) \wedge \varphi(u, v') \Rightarrow v = v').$$

Ten udává, jakou vlastnost musí splňovat formule  $\varphi(u, v)$ . Tvrzení je takové, že pokud existují množiny  $v, v'$  takové, že platí  $\varphi(u, v)$  i  $\varphi(u, v')$ , pak množiny  $v$  a  $v'$  musí být stejné. Resp. předpoklad požaduje, aby pro každé  $u$  platila formule  $\varphi(u, v)$  pro nejvýše jeden prvek  $v$ . Ekvivalentně bychom toto mohli napsat jako

$$\forall u \exists! v : \varphi(u, v).$$

Toto by nám již mělo být povědomé. Podobně jsme definovali zobrazení v definici 4.3.1. V tomto případě můžeme tak  $\varphi$  chápat jako formuli udávající, zda obrazem prvku  $u$  je prvek  $v$ .

Druhá část

$$\forall a \exists z \forall x (x \in z \Leftrightarrow \exists y (y \in a \wedge \varphi(y, x)))$$

nám zaručuje, že všechny prvky  $v$ , kterým odpovídá (v rámci formule  $\varphi(u,v)$ ) nějaký prvek  $u \in a$ , tvoří množinu  $z$ . Stručně řečeno, **obrazem libovolné množiny při definovatelném zobrazení je opět množina**.

Tento axiom nebyl součástí původních Zermelových axiomů. Posléze se však ukázalo, že existují množiny, jejichž existence není zbývajících axiomů implikována. Např.

$$m = \{x, \mathcal{P}(x), \mathcal{P}(\mathcal{P}(x)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(x))), \dots\},$$

kde  $x \neq \emptyset$ . Z axiomu nekonečna zaručující existenci nekonečné množiny  $z$  víme, že pokud  $x$  je prvkem  $z$ , pak i  $x \cup \{x\}$  je prvkem  $z$ . Není těžké si rozmyslet, že toto pro  $m$  není splněno. Nicméně při vhodné volbě formule  $\varphi$  lze definovat zobrazení prvků nějaké aktuálně nekonečné množiny postulované axiomem nekonečna na množiny  $x, \mathcal{P}(x), \mathcal{P}(\mathcal{P}(x)), \dots$  a podle axiomu nahrazení tak tyto obrazy

$$\{x, \mathcal{P}(x), \mathcal{P}(\mathcal{P}(x)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(x))), \dots\}$$

tvoří opět množinu.

### C.3 Axiom fundovanosti

$$\forall a \left( a \neq \emptyset \Rightarrow \exists x : (x \in a \wedge x \cap a = \emptyset) \right)$$

Tento axiom slouží svým způsobem jako omezení množin, které lze uvažovat. Tvzení je takové, že každá neprázdná množina musí obsahovat alespoň jeden prvek, který je s ní *disjunktní* (tj. má s ní prázdný průnik). Tím zamezujeme existenci některých typů množin, jako třeba množiny obsahující samy sebe, tj.  $a \in a$ . Jmenovitě např.

$$a = \{a\}, b = \{b, \emptyset\} \text{ a jiné.}$$

Lze se snadno přesvědčit, že při existenci takových množin by axiom fundovanosti byl porušen. Pokud bychom připustili např. existenci množiny  $x'$ , pro kterou by platilo, že  $x' \in x'$ , pak podle axiomu dvojice (ZF3) je též množinou i  $u = \{x'\}$ . Podle axiomu fundovanosti musí  $u$  obsahovat prvek  $x$ , takový, že  $x \cap x' = \emptyset$ . Protože však pouze  $x'$  je prvkem  $u$ , pak musí nutně platit (protože  $x' \neq \emptyset$ ), že  $x' \cap u = \emptyset$ . To ale neplatí!

$$x' \cap \{x'\} = x',$$

neboť  $x' \in x'$ . Tzn.  $u$  tedy **nesplňuje** axiom fundovanosti a není tak množinou v ZF.

Dalšími důsledky axiomu fundovanosti je vyloučení cyklů v relaci „býti prvkem“, tj. např.

$$x_1 \in x_2 \in x_3 \in x_1.$$

Trochu obecněji lze nahlédnout, že nikdy tak nemůže nastat situace, kdy bychom našli nekonečný řetězec „do sebe zanořených“ množin

$$\dots \in x_n \in \dots \in x_2 \in x_1 \in x_0.$$

Axiom fundovanosti tedy slouží jako obecná charakteristika všech myslitelných množin v  $\mathbf{ZF}$ . Oproti všem ostatním je tedy trochu jiného charakteru, neboť doposud zmíněné axiomy byly spíše „konstrukční“. Jejich postupnou aplikací jsme byli schopni sestavit z menších množin množiny větší. Lze ukázat, že axiom fundovanosti je ekvivalentní s tvrzením, že všechny množiny v  $\mathbf{ZF}$  lze generovat z prázdné množiny opakovanou aplikací axiomu potence a sumy.

# Příloha D

## Dodatky k budování číselných množin

**Věta D.0.1.**  $(\mathbb{N}_0, \leq)$  je lineárně uspořádaná množina.

*Důkaz.* Je-li množina  $\mathbb{N}_0$  lineárně uspořádaná vzhledem k relaci „ $\leq$ “, pak tato relace musí být **reflexivní**, **antisymetrická** a **tranzitivní** (pro připomenutí viz definice 5.3.1) a dále každá dvojice prvků  $n, m \in \mathbb{N}_0$  musí být porovnatelná, tj.  $n \leq m \vee m \leq n$ .

- **Reflexivita.** Z definice relace „ $\leq$ “ v 5.5.2 triviálně pro libovolné přirozené číslo  $n$  platí  $n \leq n$ .
- **Antisymetrie.** Necht  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , přičemž  $n \leq m \wedge m \leq n$ . Chceme ukázat, že  $n = m$ . Pokud platí  $n \leq m \wedge m \leq n$ , pak musí platit

$$(n < m \vee n = m) \wedge (m < n \vee n = m) \text{ neboli } n = m \vee (n < m \wedge m < n).$$

Případ  $n < m \wedge m < n$  nemůže nastat. K tomu lze přistoupit sporem. Pak by muselo platit  $n \in m \wedge m \in n$ . Z bodu (i) lemmatu 5.5.3 by plynulo  $n \subset m \wedge m \subset n$  a tedy i  $n \subset n$ , což opět podle (i) implikuje  $n \in n$ . To je však spor s tvrzením (iii) lemmatu 5.5.1, tj.  $n \notin n$ .

- **Tranzitivita.** Necht  $n, m, \ell \in \mathbb{N}_0$ , taková, že platí  $n \leq m \wedge m \leq \ell$ . Chceme ukázat, že  $n \leq \ell$ .

Pokud platí  $n = m$ ,  $m = \ell$  nebo  $n = \ell$ , pak tvrzení jistě platí. Předpokládejme nyní, že  $n \neq m \wedge m \neq \ell \wedge n \neq \ell$ . Podle bodu (iii) lemmatu 5.5.3 dostáváme  $n \subset m \wedge m \subset \ell$  a tedy  $n \subset \ell$ . Opět podle tvrzení (iii) odvodíme  $n \leq \ell$ .

Tedy relace „ $\leq$ “ na  $\mathbb{N}_0$  je skutečně uspořádáním. Fakt, že toto uspořádání je lineární plyne přímo z důsledku 5.5.4.

□

# Příloha E

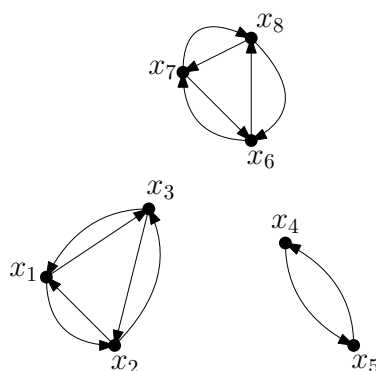
## Dodatky k porovnávání nekonečných množin

### E.1 Relace ekvivalence

Zmíněné druhy relací nám dovolují definovat dva jejich nejdůležitější typy, jednomu z nichž se budeme dále přednostně věnovat. Začneme prvním z nich.

**Definice E.1.1** (Relace ekvivalence). Nechť  $R$  je relace na množině  $X$ . Řekneme, že  $R$  je *relací ekvivalence na  $X$*  (nebo jen *ekvivalencí na  $X$* ), pokud je *reflexivní*, *symetrická* a *tranzitivní*.

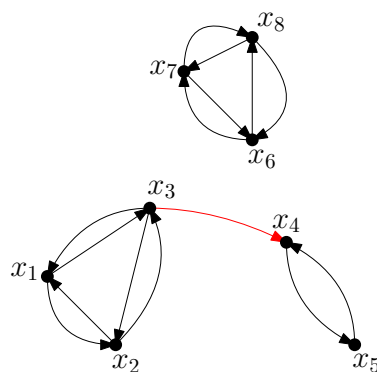
Ač se to nemusí zdát, tento typ relace má velmi příjemné vlastnosti. Jak si ji představit? Příkladem může být třeba relace  $R$  na množině  $X = \{x_1, \dots, x_7\}$  znázorněná na obrázku E.1 níže.



Obrázek E.1: Relace ekvivalence  $R$  na  $X$ .

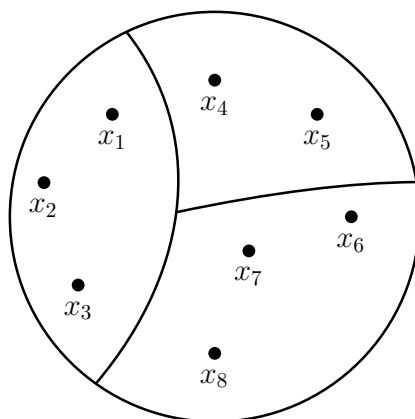
Pokud by však byl např. prvek  $x_3$  v relaci prvkem  $x_4$ , pak by již  $R$  nebyla ekvivalencí, jak lze naopak vidět z obrázku E.2.





Obrázek E.2: Relace  $R \cup (x_3, x_4)$  na  $X$ .

Všimněte si, že na obrázku E.1 jsou prvky rozděleny na „ostrůvky“, kde v rámci každého z nich jsou spolu všechny prvky v relaci<sup>1</sup>. (Zkuste si z definice rozmyslet, že to tak vždy musí být.) Zakreslovat relaci ekvivalence dosavadním se tak stává již celkem nevýhodným, neboť pro větší množství ekvivalentních prvků již zakreslovat všechny vztahy šipkami je v tomto případě poměrně zdlouhavý proces (např. pro 5 ekvivalentních prvků bychom museli kreslit 25 šipek). Úspornější a taktéž názornější pro nás bude si pouze schématicky rozdělit prvky do skupinek (relace mezi nimi z definice ekvivalence považujeme za samozřejmé), např. jako na obrázku E.3.



Obrázek E.3: Schématické znázornění ekvivalence  $R$  na  $X$ .

Definujme si nyní tyto „ostrůvky“ trochu formálněji.

**Definice E.1.2** (Třída ekvivalence). Nechť  $R$  je relace ekvivalence na množině  $X$  a nechť  $x \in X$ . Pak definujeme množinu

$$[x]_R = \{y \mid xRy\},$$

kterou nazýváme *třída ekvivalence  $R$  určená prvkem  $x$* .

Třída ekvivalence  $[x]_R$  jistého prvku  $x$  tak obsahuje všechny prvky, které jsou s  $x$  ekvivalentní. Z příkladu výše je vidět že platí:

<sup>1</sup>U relace ekvivalence též říkáme, že prvky jsou spolu *ekvivalentní*.

- $[x_1]_R = [x_2]_R = [x_3]_R = \{x_1, x_2, x_3\},$
- $[x_4]_R = [x_5]_R = \{x_4, x_5\},$
- $[x_6]_R = [x_7]_R = [x_8]_R = \{x_6, x_7, x_8\}.$

**Příklad E.1.3.** Další příklady relací ekvivalence a jejich tříd.

- (i)  $(\mathbb{N}, =)$  (rovnost přirozených čísel) je relace ekvivalence, kde každý prvek tvoří samostatnou třídu ekvivalence.

$$\begin{aligned}[1]_R &= \{1\} \\ [2]_R &= \{2\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

- (ii) Relace „mít stejnou paritu“<sup>2</sup> na množině  $\mathbb{Z}$  je relace ekvivalence o dvou třídách (sudá a lichá čísla).

$$\begin{aligned}[1]_R &= \{-1, 1, -3, 3, -5, 5, \dots\} \\ [2]_R &= \{0, -2, 2, -4, 4, \dots\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

- (iii) Relace „mít stejný zbytek po celočíselném dělení 5“ na množině  $\mathbb{Z}$  je relace ekvivalence o pěti třídách (čísla 0–4 jako zbytek po celočíselném dělení).

$$\begin{aligned}[0]_R &= \{0, 5, 10, \dots\} \\ [1]_R &= \{1, 6, 11, \dots\} \\ [2]_R &= \{2, 7, 12, \dots\} \\ [3]_R &= \{3, 8, 13, \dots\} \\ [4]_R &= \{4, 9, 14, \dots\}\end{aligned}$$

- (iv) Relace „mít stejnou absolutní hodnotu“ na množině  $\mathbb{R}$  je relace ekvivalence, kde každá třída obsahuje prvek  $x$  a  $-x$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}[0]_R &= \{0\} \\ [1]_R &= \{-1, 1\} \\ [\sqrt{2}]_R &= \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \\ [\sqrt[4]{30}]_R &= \{\sqrt[4]{30}, -\sqrt[4]{30}\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Tzn. obě čísla jsou sudá nebo lichá.

## E.2 Mohutnost množiny

V sekci jsme v definici subvalence a ekvipotence 6.3.1 zmínili pojem „mohutnost“ (ostatně zmínili jsme jej už v historickém úvodu). Již víme, co je míněno pod tvrzením, že množina „má větší/stejnou mohutnost“ jako jiná množina. To nám však pouze dává představu, jak mohutnosti porovnávat. Jak tuto vlastnost množiny explicitně vyjádřit?

V případě konečných množin rozumíme pod „mohutností“ množiny jednoduše její velikost (tj. počet prvků), kterou reprezentuje nějaké přirozené číslo. U nekonečných množin je to však složitější. Nelze říci, že mohutnost je  $\infty$ . Podle této logiky by pak muselo platit např.  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}| = \infty$ . To by však nebylo konzistentní s definicí, že dvě množiny mají stejnou mohutnost, když mezi nimi existuje bijekce, protože podle věty 6.3.4 víme, že  $\mathbb{R} \approx \mathbb{N}$ . Na mohutnost množiny lze nahlížet i trochu abstraktněji.

Pro lehčí pochopení se na chvíli přesuňme ke geometrii. Uvážíme-li relaci „být rovnoběžný s“, tj. „ $\parallel$ “ na množině všech přímek v rovině, jaké vlastnosti splňuje?

- **Reflexivita.** Každá přímka je rovnoběžná sama se sebou, tj. pro přímku  $p$  platí  $p \parallel p$ .
- **Symetrie.** Platí-li  $p \parallel q$ , pak platí i  $q \parallel p$ .
- **Tranzitivita.** Je-li přímka  $p$  rovnoběžná s přímkou  $q$  a zároveň  $q$  je rovnoběžná s přímkou  $r$ , pak určitě  $p \parallel r$ .

Tedy „ $\parallel$ “ je relací ekvivalence. Na základě tohoto poznatku, máme-li libovolnou přímku  $p$ , jaké přímky obsahuje třída ekvivalence  $[p]_{\parallel}$ ? Budou to právě takové přímky, které jsou rovnoběžné s přímkou  $p$ . Jak bychom definovali *směr* přímky? Zkuste se zamyslet, než budete pokračovat.

Zkusme se ale zpětně zaměřit na třídy ekvivalence „ $\parallel$ “. Uvážíme-li libovolnou z nich, pak přímky jí náležící mají vždy shodný směr. To znamená, že výběrem kterékoliv třídy ekvivalence je směr jednoznačně určen podle náležících přímek. Tedy celkově: za směr přímky  $p$  prohlásíme třídu ekvivalence  $[p]_{\parallel}$ .

Tato úvaha nám zde velmi pomůže. Ačkoliv sice netušíme, co je to mohutnost množiny, přesto dokážeme určit (v principu), zda libovolné množiny  $X$  a  $Y$  mají stejnou mohutnost, nebo nemají.

**Lemma E.2.1.** *Ekvipotence  $\approx$  je relací ekvivalence<sup>3</sup>.*

*Důkaz.* Z definice relace ekvivalence stačí ověřit, že  $\approx$  je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Mějme libovolné množiny  $X, Y, Z$ .

- **Reflexivita.** Jistě platí  $X \approx X$ . Za bijektivní zobrazení stačí zvolit identitu  $1_X$ .

---

<sup>3</sup>Zde se jedná o tzv. *třídovou relaci* na tzv. *univerzální třídě* (často označované  $\mathbb{V}$ ), tedy „souhrnu“ všech množin. Tento „souhrn“ nemůže být množinou, neboť bychom tak došli ke sporu v ZF. Třídy představují v teorii množin „nadstavbu“ termínu množina. Obecně platí, že každá množina je třída, ale ne každá třída je množina. Pro hlubší pochopení doporučuji knihu [4], str. 45–50

- **Symetrie.** Pokud  $X \approx Y$ , pak existuje bijekce  $f : X \rightarrow Y$ . Protože  $f$  je bijekce, existuje inverzní zobrazení  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ , které je též bijekcí. Tzn. platí i  $Y \approx X$ .
- **Tranzitivita.** Necht  $X \approx Y$  a zároveň  $Y \approx Z$ . Pišme  $f : X \rightarrow Y$  a  $g : Y \rightarrow Z$ . Definujme zobrazení  $h = g \circ f$ . Podle tvrzení 4.3.8 je  $h : X \rightarrow Z$  bijekce a tedy  $X \approx Z$ .

Tedy  $\approx$  je relací ekvivalence. □

Pro libovolnou množinu  $X$  tak třída ekvivalence  $[X]_{\approx}$  obsahuje všechny množiny, které mají stejnou mohutnost jako  $X$ . Tzn.

$$\forall Y \in [X]_{\approx} : Y \approx X.$$

Víme tak, že každá z množin v libovolné třídě ekvivalence má stejnou mohutnost. Tuto třídu bychom pak mohli prohlásit za její mohutnost.

Obecně pro kvantifikování mohutností množin složí tzv. *kardinální čísla*, která lze definovat způsobem popsáním výše. ([10], str. 156) (TODO: doplnit zakončení.)