

# **Základy středoškolské kombinatoriky**

DAVID WEBER

david.weber99@seznam.cz

30. června 2022

# Obsah

<b>1 Úvodem</b>	<b>2</b>
1.1 Was ist kombinatorika?	2
1.2 Množiny	3
<b>2 Kombinatorické počítání</b>	<b>5</b>
2.1 Pravidlo součinu a součtu	5
2.2 Variace, permutace a kombinace	8
2.3 Cvičení	12
<b>3 Kombinatorické identity</b>	<b>14</b>
3.1 Vlastnosti kombinačních čísel	14
3.2 Binomická věta	16
<b>4 Základy pravděpodobnosti</b>	<b>19</b>
<b>Výsledky cvičení</b>	<b>20</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>21</b>

# Kapitola 1

## Úvodem

### 1.1 Was ist kombinatorika?

**Kombinatorika** představuje matematickou disciplínu zabývající se se kolekcemi prvků množin s definovanou vnitřní strukturou. Řekneme-li to méně formálně, studuje, kolika způsoby lze sestavit konfiguraci s jistými vlastnostmi. Zároveň se tak váže k blízkému oboru zvanému **teorie pravděpodobnosti**.

Typickou úlohou (otázkou) kombinatoriky je třeba tato:

**Úloha 1.1.1.** Na svatbě je  $n$  lidí.

- (a) Kolika způsoby lze  $n$  svatebčanů sestavit do řady?
- (b) V kolika případech stojí nevěsta napravo od ženicha?
- (c) Kolik je řad, že ženich a nevěsta stojí vedle sebe?

Poměrně pěknou a lehce humornou úlohou spadající do klasické kombinatoriky je např. tzv. *problém šatnářky*.

**Úloha 1.1.2.** *Ctihodní pánové v počtu  $n$  přijdou na shromáždění, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu šatnářka, možná ten den velmi roztržitá, možná dokonce z mizerného osvětlení osleplá, vydá z pánů náhodně jeden z klobouků. Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane od šatnářky zpět svůj klobouk?* [1, str. 105]

Dalšími zajímavými problémy jsou např. tyto

- Úloha 1.1.3.**
- Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže pomocí  $n$  přímek rozdělíme rovinu? [2, str. 38]
  - Kolika způsoby lze rozměnit jeden dolar? [3, str. 130]
  - Kolik různých náhrdelníků s dvaceti korálky lze vyrobit z korálků rodonitu, růženínu a lazuritu, pokud lze náhrdelník nosit v jakékoli orientaci? [3, str. 130]

Kromě první zmíněné úlohy jsou ostatní svým řešením již nad rámec tohoto textu, avšak např. zmíněný problém šatnářky<sup>1</sup> 1.1.2 vede posléze k velmi zajímavým výsledkům. Nicméně pro řešení úlohy 1.1.1 a jí příbuzných si v dalších odstavcích vybudujeme potřebný matematický aparát.

---

<sup>1</sup>Konkrétně zde se při řešení využije tzv. *princip inkluze a exkluze*.

## 1.2 Množiny

Množiny pro nás budou klíčovým pojmem, neboť s jejich pomocí budeme formulovat další části výkladu. Proto považují za nezbytné si zopakovat aspoň některé základní vlastnosti a operace, které s množinami můžeme provádět. Množinou v matematice rozumíme „soubor neuspořádaných prvků“. Dvě množiny tak považujeme za stejné (sobě rovné) právě tehdy, když mají stejné prvky. Byť tento popis nepředstavuje zcela formální definici, pro naše potřeby s tímto chápáním vystačíme.

Množiny zapisujeme pomocí složených závorek  $\{, \}$ , přičemž jejich specifikace lze provést dvě způsoby:

- výčtem (výpisem) jednotlivých prvků,
- společnou vlastností

**Příklad 1.2.1.** Množinu  $M$  obsahující prvky  $a, b, c$  lze zapsat jako

$$M = \{a, b, c\}.$$

V případě většího počtu prvků, avšak s jistou strukturou, můžeme množinu specifikovat buď pomocí „...“ nebo explicitním vyjádřením specifické vlastnosti.

**Příklad 1.2.2.** Množinu všech přirozených čísel menších nebo rovny 5 lze zapsat jako

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5\} \quad \text{nebo} \quad S = \{1, 2, \dots, 5\}.$$

Důležitou vlastností množin je, že neuvažujeme násobné výskyty prvků. Tedy např. množiny  $M = \{1, 2, 3\}$  a  $N = \{1, 2, 2, 3, 3\}$  jsou si rovny, tj.  $M = N$ . Též je vhodné si připomenout, že chceme-li vyjádřit, že libovolný prvek  $a$  je v množině  $A$ , pak píšeme  $a \in A$  (čteme „ $a$  náleží množině  $A$ “). Naopak v případě, že prvek  $a$  nenáleží množině  $A$ , píšeme  $a \notin A$ .

Podstatnou vlastností pro nás budou operace *sjednocení*, *průniku* a *rozdílu* množin.

**Definice 1.2.3** (Sjednocení, průnik a rozdíl). Mějme množiny<sup>2</sup>  $A, B$ . Pak definujeme:

- (i) sjednocení  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ , tj. výsledná množina obsahuje prvky množiny  $A$  a zároveň prvky množiny  $B$ .
- (ii) průnik  $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ , tj. výsledná množina obsahuje *pouze* prvky, které náleží oběma množinám.
- (iii) rozdíl  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ , tj. výsledná množina obsahuje pouze ty prvky z množiny  $A$ , které nenáleží množině  $B$ .

**Příklad 1.2.4.** Pro množiny<sup>3</sup>  $X = \{x, y, z\}$  a  $Y = \{x, z, \{z\}, w\}$  platí

- $X \cup Y = \{x, y, z\} \cup \{x, z, \{z\}, w\} = \{x, y, z, x, z, \{z\}, w\} = \{x, y, z, \{z\}, w\},$
- $X \cap Y = \{x, y, z\} \cap \{x, z, \{z\}, w\} = \{x, z\},$
- $X \setminus Y = \{x, y, z\} \setminus \{x, z, \{z\}, w\} = \{y\}.$

Zkuste si výsledky operací porovnat s definicí 1.2.3 výše.

<sup>2</sup>Mohou být **konečné** i **nekonečné**, avšak nás budou zajímat konečné množiny.

<sup>3</sup>U množiny  $Y$  si uvědomme, že prvek  $\{z\}$  není to samé jako prvek  $z$ , tedy např. po sjednocení se ve výsledné množině vyskytnou oba.

Pro větší počet množin můžeme využít pro zápis sjednocení tzv. *velké operátory*  $\cup$ ,  $\cap$ . Máme-li tedy množiny  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , můžeme jejich sjednocení, resp. průnik zapsat jako

$$\bigcup_{i=1}^n X_i = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \quad \text{resp.} \quad \bigcap_{i=1}^n X_i = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$$

Poslední, co nás bude zajímat, je velikost množiny. Tu budeme označovat svislými čarami, tedy např. velikost množiny  $X$  zapíšeme jako  $|X|$ . Konkrétně např. pro množinu  $A = \{-1, 0, 10, 20\}$  je velikost  $|A| = 4$ .

**Poznámka 1.2.5.** K závěru ještě pár poznámek:

- Prázdnou množinu (tj. množinu neobsahující žádné prvky) budeme značit symbolem  $\emptyset$ .
- Pokud platí pro množiny  $A$  a  $B$ , že nemají žádné společné prvky, tj.  $A \cap B = \emptyset$ , pak je nazýváme *disjunktní*. Obecněji řekneme-li, že množiny  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jsou **po dvou disjunktní**, pak tím myslíme, že pro libovolnou dvojici množin  $X_i$  a  $X_j$  platí

$$X_i \cap X_j = \emptyset,$$

přičemž  $0 \leq i, j \leq n$ .

## Kapitola 2

# Kombinatorické počítání

Nyní se již podíváme na některé základní nástroje kombinatoriky a jejich využití. Na úvod se takto proto podíváme na pár motivačních příkladů.

### 2.1 Pravidlo součinu a součtu

Vezměme si pro začátek jednu motivační úlohu.

**Úloha 2.1.1.** *Předpokládejme, že chceme zjistit počet různých kurzů nabízených Wisconsinskou univerzitou v Madisonu. Kurzy rozdělíme podle oddělení, na kterém jsou uvedeny. Za předpokladu, že nedochází ke křížovému vypisování (křížové vypisování nastává, když je stejný kurz vypsán na více než jedné katedře), kolik předmětů si můžeme jako studenti zapsat? [4, str. 28]*

**Řešení.** K problému můžeme přistoupit následovně: předměty si postupně rozdělíme do množin. Množinu všech dostupných předmětů si označíme  $C$  (z angl. *classes*). To znamená, že hledáme  $|C|$ . Předměty si rozdělíme do množin podle katedry, která je nabízí. Tedy máme-li na univerzitě, pro zjednodušení, např. 5 kateder, pak se nám předměty rozdělí do pěti množin, které si označíme  $C_1, \dots, C_5$ . Množina všech předmětů  $C$  je jednoduše sjednocením předmětů z jednotlivých kateder  $C_1, \dots, C_5$ , tj.

$$C = \bigcup_{i=1}^5 C_i = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5.$$

Protože ze zadání víme, že každý předmět je vypsán v rámci **právě jedné** katedry, pak množiny  $C_1, \dots, C_5$  jsou po dvou disjunktní. Takže nám jednoduše stačí spočítat předměty na jednotlivých katedrách

$$|C| = \sum_{i=1}^5 |C_i| = |C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| + |C_5|.$$

□

Ačkoliv jsme úlohu 2.1 jsme řešili sice trochu složitě, intuitivně je tento způsob nejspíše jasný. Máme-li  $n_1$  způsobů, jak provést určitou akci a  $n_2$  způsobů, jak provést nějakou jinou akci (kterou nelze provést současně s první), pak máme dohromady  $n_1 + n_2$  způsobů, jak vybrat některou činnost.

Z tohoto jednoduchého principu plyne tzv. *kombinatorické pravidlo součtu*, které budeme v dalších úlohách využívat.

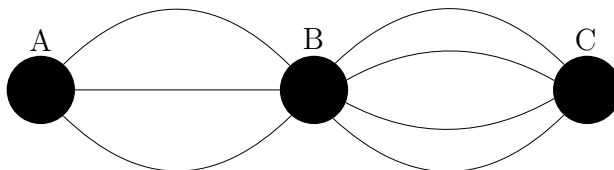
**Věta 2.1.2** (Kombinatorické pravidlo součtu). *Jsou-li  $X_1, X_2, \dots, X_n$  konečné množiny, které jsou po dvou disjunktní, pak platí*

$$|X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n|$$

nebo zkráceně

$$\left| \bigcup_{i=1}^n X_i \right| = \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

Představme si, že máme městečka  $A, B, C$ , mezi nimiž vede po řadě 3 a 5 cest (tj. 3 cesty mezi  $A$  a  $B$ , 4 cesty mezi  $B$  a  $C$ ).



Obrázek 2.1: Cesty mezi městy  $A, B, C$ .

Chceme zjistit počet všech způsobů, jak se dostat z města  $A$  do města  $C$ . Jak aplikujeme pravidlo součtu zde? Mohli bychom si zde rozdělit cesty z  $A$  do  $C$  do množin podle toho, kterou cestou jsme dorazili z  $A$  do  $B$ . Pokud tak učiníme, pak jsme rozdělili cesty do celkem tří množin  $P_1, P_2, P_3$ , přičemž všechny jsou po dvou disjunktní (žádná z cest z  $A$  do  $C$  nemůže obsahovat dvě různé cesty z  $A$  do  $B$ ) a množina  $P$  obsahuje všechny cesty z  $A$  do  $C$ . Tedy celkový počet cest  $|P|$  je roven součtu  $|P_1| + |P_2| + |P_3|$ . Pro každou cestu mezi městy  $A$  a  $B$  máme 4 možnosti, kudy se dostat z  $B$  do  $C$ . Tedy

$$|P_1| = |P_2| = |P_3| = 4.$$

To znamená, že celkový počet cest  $|P| = |P_1| + |P_2| + |P_3| = 4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$ .

Tento způsob je jistě velmi nepraktický a navíc je celkem očividné, že na daný výsledek jsme mohli přijít hned. Stačilo vynásobit počet cest mezi městy  $A$  a  $B$  a počet cest mezi městy  $B$  a  $C$ . Z toho dostáváme druhé kombinatorické pravidlo:

**Věta 2.1.3** (Kombinatorické pravidlo součinu). *Počet uspořádaných  $k$ -tic, jejichž  $i$ -tý člen lze vybrat  $n_i$  způsoby je roven*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{i=1}^k n_i$$

Je důležité zmínit, že jednotlivé výběry **musí být nezávislé**, tedy výběr na jednu pozici nesmí ovlivnit počet výběrů na ostatní pozice. Méně formálně, avšak užitečněji, můžeme pravidlo formulovat i takto: *Lze-li první výběr provést celkem  $n$  způsoby a druhý výběr  $m$  způsoby bez ohledu na první výběr, pak celkový počet dvojic možných výběrů je  $nm$ .* (Pochopitelně, toto lze zobecnit na libovolný počet výběrů, jako je tomu v 2.1.3.)

**Úloha 2.1.4.** Křídly jsou vyráběny

- ve 3 různých barvách,
- v 8 různých délkách
- a o 4 různých průměrech.

Kolik typů kříd celkově lze zakoupit? [4, str. 29]

*Řešení.* Barvu křídý můžeme vybrat celkem třemi způsoby, délku osmi způsoby a průměr křídý celkem čtyřmi způsoby. Protože výběry jsou na sobě nezávislé, pak podle předchozího pravidla součinu existuje celkem  $3 \cdot 8 \cdot 4 = 96$  typů kříd.  $\square$

**Úloha 2.1.5.** Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže

- (a) cifry se mohou opakovat,
- (b) cifry se nemohou opakovat?

(Úloha i řešení [2, str. 7].)

*Řešení (a).* Protože se cifry mohou opakovat, pak na každé číselné pozici máme stejný počet možností výběru číslicí, až na první pozici, neboť nemůžeme vybrat číslici 0 (jinak by se nejednalo o čtyřciferné číslo). Na první pozici máme tak 5 možností výběru a na zbylých třech máme 6 možností, tj. celkově existuje

$$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080 \text{ možností.}$$

 $\square$ 

*Řešení (b).* Tentokrát se cifry nesmí opakovat. Úvaha tak zůstává stejná, ale při určování počtu možností výběru musíme zohlednit již vybrané číslice. Na první pozici tak máme 5 možností výběru (nesmíme vybrat nulu), na druhé pozici máme 5 možností (původně jsme měli 6, ale jednu cifru jsme již použili na první pozici), na třetí pozici máme 4 možnosti (2 číslice jsme již použili) a na čtvrté pozici máme 3 možnosti. Celkově tak existuje

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300 \text{ možností.}$$

 $\square$ 

Kombinatorické pravidlo součtu a součinu však můžeme v různých úlohách kombinovat. Speciálně, pokud si tak ulehčíme hledání určených konfigurací.

**Úloha 2.1.6.** Kolik sudých čísel čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se nesmí opakovat? (Úloha i řešení [2, str. 8].)

*Řešení.* Aby výsledné číslo bylo sudé, musí končit (tj. mít na čtvrté pozici) číslici 0, 2, nebo 4. Zde již však nastává problém, neboť nemůžeme hned aplikovat pravidlo součinu. Je tomu tak proto, že pokud by byla na čtvrté pozici nula, pak na první pozici máme 5 možností, zatímco pokud by zde byla číslice 2, nebo 4, pak počet přípustných číslic na první pozici je již pouze 4 (nesmíme vybrat číslici 0 a pak číslici na čtvrté pozici). Počet výběrů tak již není nezávislý. Nicméně můžeme každý z případů vyšetřit zvlášť:

- označme si množinu  $D_1$  (z angl. *digit*) obsahující všechna čísla končící číslicí 0,
- množinu čísel  $D_2$  končících číslicí 2 a
- množinu čísel  $D_3$  končících číslicí 4.

Pro čísla končící nulou máme na první pozici celkem 5 možností, na druhé pak 4 možnosti a na třetí 3 možnosti. Tedy z kombinatorického pravidla součinu máme

$$|D_1| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ možností.}$$



Množiny  $D_2$  a  $D_3$  mají stejnou velikost, neboť v obou případech máme na první pozici 4 možnosti výběru, na druhé 4 možnosti výběru a na třetí 3 možnosti. Tj.

$$|D_2| = |D_3| = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 \text{ možností.}$$

Je jasné, že tyto množiny jsou disjunktní (každá dvojice množin obsahuje čísla s jinou číslicí na čtvrté pozici). Tedy podle kombinatorického principu součtu platí

$$|D_1 \cup D_2 \cup D_3| = |D_1| + |D_2| + |D_3| = 60 + 48 + 48 = 156 \text{ možností.}$$

□

## 2.2 Variace, permutace a kombinace

Nyní trochu rozšíříme na repertoár nástrojů. Zatím jsme řešili úlohy, kde jsme vybírali vždy „po jednom“ prvku, abychom dosáhli jisté konfigurace. Nyní se podíváme, jakých výsledků dosáhneme v případě, kdy budeme již vybírat nějaké  $k$ -tice z nějaké  $n$  prvkové množiny objektů.

Je třeba si rozmyslet dva základní případy:

- výběr  $k$ -tic, kde **záleží na pořadí**,
- výběr  $k$ -tic, kde **nezáleží na pořadí**.

S prvním případem jsme již do jisté míry obeznámeni, neboť u úloh, které jsme řešili, vždy záleželo na pořadí. To tedy vede na sestavování tzv. *uspořádaných  $k$ -tic*, které jsme již zmínili ve formulaci kombinatorického pravidla součinu 2.1.3. Těm říkáme tzv. **variace  $k$ -té třídy z  $n$  prvků**. Tedy např. variací 2. třídy z množiny  $\{1, 2, 3\}$  je třeba

$$(1, 3) \text{ nebo } (3, 1).$$

Druhý případ je pro nás novinkou. Vybíráme totiž tzv. *neuspořádané  $k$ -tice*, tzn. vybereme-li např. z množiny  $\{a, b, c\}$  neuspořádanou dvojici sestávající z prvků  $a$  a  $c$ , pak je to stejné jako výběr neuspořádané dvojice sestávající z prvků  $c$  a  $a$ . Takový výběr nazýváme **kombinací  $k$ -té třídy z  $n$  prvků**.

V rámci tohoto textu se omezíme na tzv. variace, resp. kombinace **bez opakování**. Výběry s opakováním si zle nastudovat např. ve skriptech [2, str. 9].

Výběrem bez opakování rozumíme výběr  $k$ -tice prvků takové, že se v ní žádný prvek neopakuje, tzn. každý je v ní nejvýše jednou. Tedy rozlišujeme

- *variace bez opakování* a
- *kombinace bez opakování*.

Pojďme se nyní podívat na metody jejich výpočtu.

**Věta 2.2.1** (Variace bez opakování). *Počet uspořádaných  $k$ -tic sestavených z  $n$ -prvkové množiny tak, že se každý prvek ve výběru vyskytne nejvýše jednou, je roven*

$$\prod_{i=1}^k (n - i + 1) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - k + 1).$$

*Důkaz.* Tento fakt přímo plyne z kombinatorického pravidla součinu. Na první pozici máme  $n$  možností výběru, na druhé  $n - 1$  možností, ... a pro  $k$ -tý člen máme  $n - k + 1$  možností. Tedy celkově  $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$  možností.  $\square$

Počet variací  $k$ -té třídy z  $n$ -prvkové množiny bez opakování budeme značit  $V_k(n)$ .

**Úloha 2.2.2.** Ve třídě, kde je celkem 25 dětí, si žáci volí nového pokladníka, šatnáře a službu na tabuli, přičemž jeden žák nesmí zastávat více pozic zároveň. Kolika různými způsoby si může třída zvolit žáky na dané pozice.

*Řešení.* V tomto případě jistě záleží na pořadí výběru (vybrat žáka na pozici šatnáře není jistě to samé, jako jej vybrat na pozici pokladníka). Tedy budeme počítat variace 3. třídy z 25 prvků bez opakování, tedy existuje

$$V_3(25) \stackrel{2.2.1}{=} 25 \cdot (25 - 1) \cdot (25 - 2) = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800 \text{ způsobů.}$$

 $\square$ 

Dalším důležitým, a zatím nezmíněným termínem, je tzv. *permutace*. Permutací rozumíme libovolné uspořádání  $n$  prvků do řady. Tedy např. 5, 3, 2, 4, 1 je permutace množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Permutace lze interpretovat jako uspořádané  $n$ -tice, což z nich dělá speciální případ variace (výběr uspořádané  $n$ -tice z  $n$  prvkové množiny). Stejně jako u variací a kombinací rozlišujeme permutace s opakováním a bez opakování.

**Věta 2.2.3** (Permutace bez opakování). *Počet uspořádaných  $n$ -tic z  $n$ -prvkové množiny tak, že se každý prvek ve výběru vyskytne nejvýše jednou, je*

$$\prod_{i=1}^n i = n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1.$$

*Důkaz.* Permutace je speciálním případem variace pro  $k = n$ , tedy  $V_n(n) \stackrel{2.2.1}{=} n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1$ .  $\square$

**Definice 2.2.4** (Faktoriál). Je-li  $n \in \mathbb{N}_0$ , pak definujeme číslo

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^n i,$$

které nazýváme *faktoriál* (čteme „ $n$  faktoriál“). Speciálně pro  $n = 0$  definujeme  $0! = 1$ .

Číslo  $n!$  tedy vyjadřuje počet permutací  $n$  prvkové množiny<sup>1</sup>. Zároveň se podívejme ještě na speciální případ  $n = 0$ . Podle naší definice a významu, který přidružujeme faktoriálu, říkáme, že 0 prvků lze seřadit jedním způsobem. (Zkuste si promyslet.)

**Úloha 2.2.5.** Z 10 knih je 6 psáno česky a zbylé 4 latinsky. Kolika různými způsoby lze daná knihy umístit na policičku, jestliže všechny knihy psané česky mají být vedle sebe a všechny latinsky psané vedle sebe? (Úloha i řešení [5].)

*Řešení.* Všechny české knihy chceme seřadit vedle sebe, tj. jedná se o permutaci na šesti prvcích, kterých je  $6!$ . Podobně latinsky psané knihy lze vedle sebe seřadit  $4!$  způsoby. Seřazení český a latinských knih jsou sobě nezávislá a tedy podle kombinatorického pravidla součinu existuje

$$6! \cdot 4! = (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 720 \cdot 24 = 17\,280 \text{ možností.}$$

<sup>1</sup>Podobně jako pro variace, i pro permutaci  $n$  prvkové množiny se zřídka používá značení  $P(n)$ . Avšak je tomu tak málokdy, neboť často se při výpočtech píše rovnou  $n!$ .

□

Zatím jsme se zabývali uspořádanými  $k$ -ticemi (variace a permutace), jejichž důležitou vlastností bylo, že záleželo na pořadí. Pokud ovšem chceme od pořadí upustit a soustředit se jen na vybrané prvky, budeme muset náš výpočet lehce upravit.

**Věta 2.2.6** (Kombinace bez opakování). *Počet neuspořádaných  $k$ -tic sestavených z prvků  $n$  prvkové množiny tak, že se každý prvek ve výběru vyskytne nejvýše jednou, je roven*

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k (n-i+1)$$

*Důkaz.* Naši úvahu můžeme založit na následujícím pozorování: máme-li nějakou *neuspořádanou*  $k$ -tici prvků z  $n$  prvkové množiny, pak existuje přesně  $k!$  způsobů, jak vybrané prvky uspořádat do řady, čímž z ní vytvoříme *uspořádanou*  $k$ -tici. To znamená, že platí

$$(\text{počet uspořádaných } k\text{-tic}) = k! \cdot (\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}).$$

Počet neuspořádaných  $k$ -tic umíme vypočítat podle věty 2.2.1, tedy máme

$$\prod_{i=1}^k (n-i+1) = k! \cdot (\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}).$$

Vydělíme-li rovnost číslem  $k!$ , dostaneme požadovaný výraz, tj.

$$(\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}) = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k (n-i+1)$$

□

**Definice 2.2.7** (Kombinační číslo). Mějme čísla  $n, k \in \mathbb{N}$ . Pak definujeme číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!} \prod_{i=1}^k (n-i+1),$$

které nazýváme *kombinační číslo* (čteme „ $n$  nad  $k$ “).

**Poznámka 2.2.8.** Kombinační číslo tedy představuje počet možných výběrů neuspořádané  $k$ -tice z  $n$  prvků.

Často se lze však setkat s alternativní definicí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Není těžké si rozmyslet, že tento vzorec říká to samé, co vzorec ve větě 2.2.6. Avšak zde je třeba si dávat pozor, že vzorec platí pouze, pokud je  $k \leq n$ , protože pro  $k > n$  by byl výraz  $n-k$  záporný a jeho faktoriál by tak nebyl definován. Avšak ve vzorci

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

se pro  $k > n$  vyskytne v čitateli zlomku u jednoho z činitelů 0 (neboť se zde vždy vyskytne výraz  $n-(n+1)+1$  pro  $k = n+1$ ) a tedy i celý součin bude nulový. To dává ostatně i smysl, neboť neuspořádanou  $k$ -tici  $n$  prvků bez opakování při  $k > n$  nelze vybrat žádným způsobem. Nicméně pro  $k > n$  je někdy tvar

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

výhodný při výpočtech.

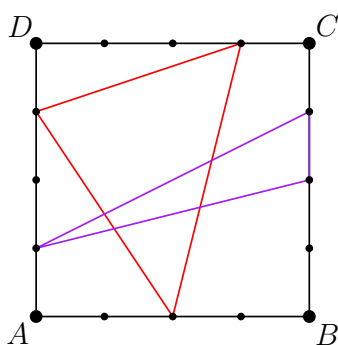
**Úloha 2.2.9.** Petr má sedm knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má deset knih, o které se zajímá Petr. Určete, kolika způsoby si Petr může vyměnit dvě své knihy za dvě knihy Ivaniny. [6, sekce *Kombinace*]

**Řešení.** Ivana a Petr každý vybírají 2 knihy, které si vymění s tím druhým. Na pořadí výběru knih nezáleží. Celkově se tedy bude jednat *kombinace 2. třídy ze 10 prvků* a *kombinace 2. třídy ze 7 prvků*. Každý z výběrů je však nezávislý, tedy podle kombinatorického pravidla součinu dostáváme

$$\binom{10}{2} \binom{7}{2} \stackrel{2.2.8}{=} \frac{10!}{(10-2)!2!} \cdot \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2} = 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 = 945 \text{ možností.}$$

□

**Úloha 2.2.10.** Je dán čtverec ABCD a na každé jeho straně  $n$  ( $n \geq 3$ ) vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech. [6, sekce *Kombinace*]



Obrázek 2.2: Ukázka trojúhelníků ve čtverci ABCD.

**Řešení.** V tomto případě stačí ze všech dostupných bodů (kterých je  $4n$ ) vybrat všechny možné trojice. Je třeba mít však na paměti, že trojúhelník vznikne pouze volbou bodů, které neleží na jedné přímce, tzn. body nesmí všechny ležet na jedné straně čtverce ABCD. Tyto varianty jsou však započítány ve výrazu  $\binom{4n}{3}$ , tedy je třeba je odečíst. Na libovolné straně nepřipouštíme žádnou kombinaci tří bodů na ní ležících, těch je  $\binom{n}{3}$  a pro všechny strany tedy  $4 \cdot \binom{n}{3}$ . Celkově tedy existuje

$$\binom{4n}{3} - 4 \cdot \binom{n}{3} \text{ různých trojúhelníků.}$$

□

**Úloha 2.2.11.** Určete, kolika způsoby je možno ze dvaceti osob vybrat deset, požadujeme-li, aby mezi vybranými

- (a) nebyl pan A;
- (b) nebyli zároveň pánové A a B;
- (c) byl aspoň jeden z pánů A, B.

[6, sekce *Kombinace*]

**Řešení (a).** Pokud nechceme, aby mezi vybranými lidmi byl pan A, pak vybíráme všechny kombinace 10. třídy takové, že neobsahují pana A, tj. ze zbývajících devatenácti osob. Takových výběrů existuje

$$\binom{19}{10} \stackrel{2.2.8}{=} \frac{19!}{(19-10)!10!} = \frac{19 \cdot 18 \cdots 10!}{9! \cdot 10!} = 92\,378.$$

□

**Řešení (b).** Pokud nemají být mezi vybranými lidmi pánové A a B **zároveň**, pak ovšem připouštíme varianty, kdy je ve vybrané skupině pouze pan A, nebo pouze pan B. K výpočtu lze přistoupit takto:

- (i) vypočítáme počet všech skupinek,
- (ii) odečteme počet skupinek, kde se nachází pan A a pan B zároveň.

V případě (i) se jednoduše jedná o kombinaci 10. třídy z 20 prvků, tj.  $\binom{20}{10}$ . V případě (ii) lze skupinky, kde se nachází pan A a zároveň pan B, následovně: uvážíme, že pan A a pan B jsou již ve vybrané skupince a nyní k nim přidáme ze zbylých osmnácti lidí osm, tj.  $\binom{18}{8}$ . Tedy celkově existuje

$$\binom{20}{10} - \binom{18}{8} = 140\,998$$

výběrů, kde se nenachází pan A a zároveň pan B. □

**Řešení (c).** Zde by nás mohlo napadnou spočítat počet těchto výběrů tak, že sečteme skupinky, kde se nachází pan A a skupinky, kde se nachází pan B. Problém však je, že tím bychom některé možnosti započítali vícekrát (specificky ty, kde se nachází pan A, i pan B zároveň). Zkusme proto obdobou strategii, jako v (b). Od celkového počtu možných výběrů libovolné skupinky, který je  $\binom{20}{10}$ , odečteme ty, kde se nenachází ani pan A, ani pan B. To odpovídá výběru desetičlenné skupinky ze zbylých osmnácti lidí, tj.  $\binom{18}{10}$ . Celkově tak existuje

$$\binom{20}{10} - \binom{18}{10} = 140\,998$$

výběrů<sup>2</sup>, kde se nachází aspoň jeden z panů A, B. □

## 2.3 Cvičení

**Cvičení 2.3.1.** Jana má pět různě barevných triček a tři nestejné sukně. Kolika způsoby si může vzít tričko a sukni, aby pokaždé vypadala jinak? [7, str. 145]

**Cvičení 2.3.2.** V jedné třídě, ve které každý žák ovládá aspoň jeden ze dvou jazyků (angličtinu nebo němčinu), hovoří 25 žáků anglicky, 16 žáků německy a 7 žáků hovoří oběma jazyky. Kolik žáků chodí do této třídy? [8, sekce Kombinatorika]

**Cvičení 2.3.3.** Určete počet všech přirozených čísel větších než 2000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 1, 2, 4, 6, 8, a to každá nejvýše jednou? [7, str. 146]

**Cvičení 2.3.4.** Na běžecké trati běží 8 závodníků. Za předpokladu, že každou z medailí získá právě jeden závodník, vypočítejte, kolik je možností na rozdělení zlaté, stříbrné a bronzové medaile mezi závodníky. [7, str. 146]

**Cvičení 2.3.5.** Ve třídě je 30 míst, ale ve třídě 3. B je pouze 28 žáků. Kolika způsoby lze sestavit zasedací pořádek? [7, str. 146]

**Cvičení 2.3.6.** Z kolika prvků lze vytvořit 992 variací druhé třídy bez opakování? [7, str. 146]

<sup>2</sup>Může se možná zdát zarážející, že výsledek je stejný, jako v bodě (b), nicméně později se dozvíme, proč tomu tak je. Není to náhoda. :-)

**Cvičení 2.3.7.** Kolika způsoby lze rozmíchat hru 32 karet? [7, str. 146]

**Cvičení 2.3.8.** Kolik různých devíticiferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1 až 9? [7, str. 146]

**Cvičení 2.3.9.** Kolik přímek určuje deset různých bodů v rovině, z nichž

- (a) žádné tři neleží na jedné přímce,
- (b) právě šest leží na jedné přímce?

[7, str. 146]

**Cvičení 2.3.10.** Určete počet všech úhlopříček v konvexním mnohoúhelníku. [7, str. 147]

**Cvičení 2.3.11.** V krabici je 10 výrobků, z nichž jsou právě tři vadné. Kolika způsoby lze vybrat 5 výrobků tak, aby:

- (a) žádný nebyl vadný,
- (b) právě jeden byl vadný,
- (c) nejvýše jeden byl vadný,
- (d) alespoň dva byly vadné.

[7, str. 147]

**Cvičení 2.3.12.** Z kolika prvků lze vytvořit 990 kombinací druhé třídy bez opakování? [7, str. 147]

**Cvičení 2.3.13.** Učitel chce vytvořit ze čtyř dívek a čtyř chlapců jeden tříčlenný tým, v němž bude jedna dívka a dva chlapci. Kolika různými způsoby může sestavit tým? [9, příklad *Tříčlenné* 69274]

## Kapitola 3

# Kombinatorické identity

Nyní jsme si již prošli základní nástroje, které v kombinatorice využíváme. V rámci minulé kapitoly jsme si ukázali práci s kombinačními čísly a především jejich význam. Nyní se na ně trochu více zaměříme, neboť zjistíme, že tento matematický objekt má pozoruhodné vlastnosti, díky kterým obdržíme několik zajímavých identit.

### 3.1 Vlastnosti kombinačních čísel

V této sekci se budeme *především* (avšak ne vždy) držet naší původní definice kombinačního čísla z 2.2.7, tj.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

a to právě kvůli již zmíněné vlastnosti, že oproti

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

dává výraz smysl i pro  $k > n$  a je vždy roven nule (ostatně i z kombinatorického hlediska dává tento výsledek smysl). Nebudeme se tak muset explicitně odvolávat na předpoklad, že  $n \leq k$ , abychom předešli formálním nepřesnostem.

U kombinačních čísel lze pozorovat některé zajímavé vlastnosti. Začneme asi tou nejzákladnější.

**Věta 3.1.1** (Symetrie kombinačních čísel). *Pro  $n, k \in \mathbb{N}_0$ , kde  $k \leq n$ , platí*

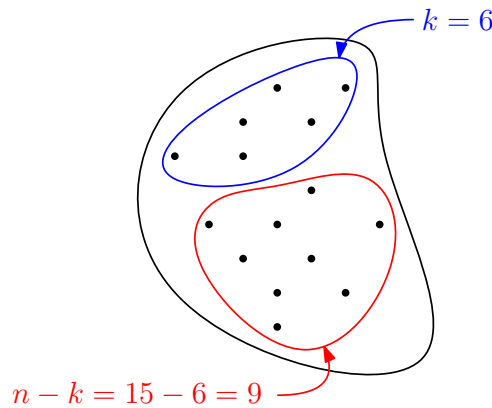
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

*Důkaz první.* Asi nejjednodušší důkaz je přímým výpočtem:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

□

*Důkaz druhý.* Názornější důkaz nám poskytne kombinatorická interpretace tohoto tvrzení. Libovolná  $k$ -tice (v tomto smyslu množina) je **jednoznačně určena** výběrem prvků z nějaké  $n$  prvkové množiny, které jí budou náležet. Výběrem  $k$  prvků z dané množiny tak zbude  $n - k$  prvků, které nejsou součástí dané  $k$ -tice.



Obrázek 3.1: Výběr šesti prvků z patnácti.

Takových možných výběrů existuje  $\binom{n}{k}$ . Danou  $k$ -tici ovšem lze vybrat i opačným způsobem, a to sice volbou prvků, které jí náležet **nebudou**. Tedy výběrem  $n - k$  prvků zbude celkem  $k$  prvků, které jí budou náležet. Takových výběrů existuje  $\binom{n}{n-k}$ . Protože výběrem  $n - k$  prvků vždy jednoznačně určíme nějakou  $k$ -tici, pak neuspořádaných  $k$ -tic a neuspořádaných  $(n - k)$ -tic musí být stejně, tj.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

□

**Věta 3.1.2.** Pro  $n, k \in \mathbb{N}_0$  platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

*Důkaz první.* Obdobně i zde lze tvrzení dokázat přímým výpočtem:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{n+1}{k+1} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1) \cdots (n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

□

*Důkaz druhý.* Opět o něco názorněji lze platnost tvrzení zdůvodnit kombinatorickou úvahou. Představme si, že máme množinu

$$\{1, 2, \dots, n, n+1\}.$$



Chceme vybrat spočítat počet možných výběrů všech neuspořádaných  $(k+1)$ -tic, pak jejich počet odpovídá kombinačnímu číslu  $\binom{n+1}{k+1}$ . To je význam pravé strany rovnosti.

Chceme-li vybrat všechny neuspořádané  $(k+1)$ -tice, lze postupovat i následovně:

- vybereme všechny  $(k+1)$ -tice, které **obsahují prvek**  $n+1$  a
- vybereme všechny  $(k+1)$ -tice, které **neobsahují prvek**  $n+1$ .

Je nejspíše intuitivně jasné, že neuspořádané  $(k+1)$ -tice z obou skupin dají celkově všechny  $(k+1)$ -tice (každá z nich buď daný prvek obsahuje, nebo jej neobsahuje). V prvním případě máme jeden prvek již vybraný, a to  $n+1$ . Zbýlých  $k$  prvků lze vybrat  $\binom{n}{k}$  způsoby.

V druhém případě vybíráme  $k+1$  prvků, avšak pouze z  $n$  prvků (prvek  $n+1$  neuvažujeme). Takových výběrů existuje  $\binom{n}{k+1}$ . Protože obě „skupiny“ neuspořádaných  $(k+1)$ -tic jsou disjunktní, je tak celkový všech  $k+1$ -tic z  $n+1$  prvků roven

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

□

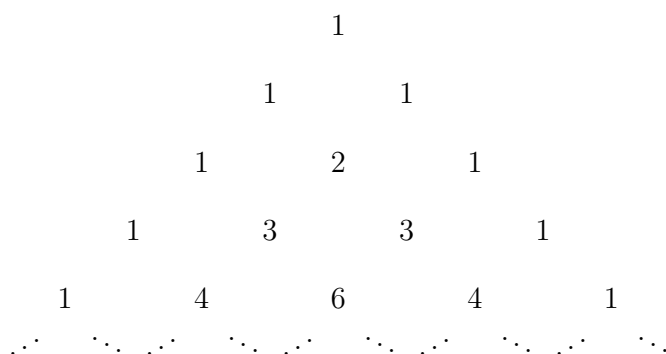
## 3.2 Binomická věta

Kombinační čísla mají kromě kombinatorických úloh využití i v klasické aritmetice. Ať už se to zdá, nebo ne, tyto dva možná zdánlivě rozdílné světy si nejsou až tak vzdálené. V této sekci se proto podíváme na větu, která nám trochu více zobecní koncept roznásobování dvojčlenů.

Podívejme se nejdříve na ty nejjednodušší případy:

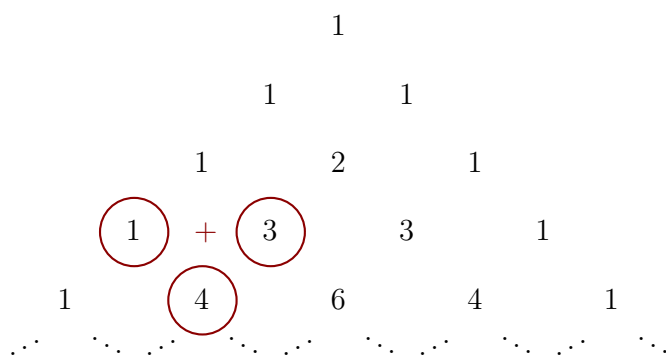
$$\begin{aligned}(x+y)^0 &= 1, \\(x+y)^1 &= x+y, \\(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2, \\(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3, \\(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4, \\&\vdots\end{aligned}$$

Čeho bychom si mohli na poprvé možná všimnout je faktu, že koeficienty u jednotlivých členů jsou symetrické. To je asi nejlépe vidět u roznásobení čtvrté mocniny dvojčlenu  $x+y$ . Proč tomu ale tak je? Vzpomeňme si na větu 3.1.1, díky které jsme se dozvěděli, že kombinační čísla jsou „symetrická“, tzn.  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . Další pozorování bychom z tohoto zápisu učili nejspíše stěží (avšak klobouček dolů všem, kteří to již vidí :-)). Zkusme se zaměřit nyní čistě na dané koeficienty. Počet členů je vždy totiž lichý, což nám umožňuje zapsat si jejich koeficienty ve schématu níže.



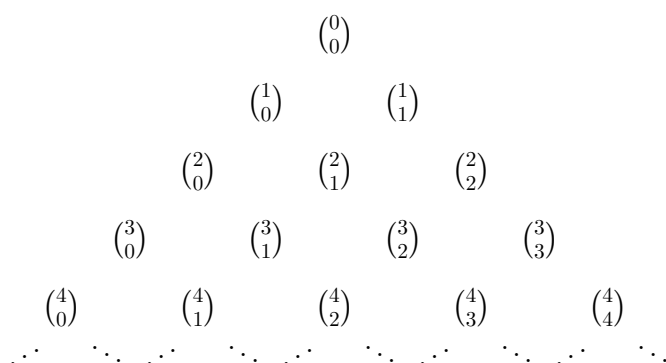
Obrázek 3.2: Schéma koeficientů ve tvaru pyramidy.

Toto schéma se nazývá **Pascalův trojúhelník**. Pokud se podíváme blíže, lze si všimnout, jak vznikají jeho řádky. Na kraji vždy pevně stojí číslo 1 a další koeficienty vzniknou součtem koeficientů nad ním.



Obrázek 3.3: Generování Pascalova trojúhelníku součtem členů.

Pokud se nyní vrátíme opět ke kombinačním číslům, jistě si vzpomeneme, že jsme zde měli větu 3.1.2, která dávala do souvislosti kombinační čísla a jejich součet. Z toho by nás tak mohlo napadnout, že jednotlivá čísla v Pascalově trojúhelníku by tak mohla odpovídat jistým kombinačním číslům. Je tomu skutečně tak.



Obrázek 3.4: Pascalův trojúhelník pomocí kombinačních čísel.

Sami se můžete přesvědčit, že jednotlivá kombinační čísla odpovídají daným koeficientům. Navíc zde lze i vidět i jejich další vlastnosti v uplatnění, konkrétně věty 3.1.1 (stačí se podívat na  $k$ -tý člen a příslušném  $(n - k)$ -tý člen, kde  $n$  zde představuje číslo řádku od nuly, neboť odpovídá mocnině daném dvojčlenu) a 3.1.2 (koeficient různý od jedničky na kraji je součtem koeficientů nad ním).

Vraťme se nyní k roznásobování dvojčlenů. Z Pascalova trojúhelníku lze tak vidět, že koeficienty v rozvoji  $(x + y)^n$  by mohly být po řadě čísla

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}.$$

Jak lze ukázat, platí totiž následující věta.

**Věta 3.2.1** (Binomická). *Pro libovolná  $x, y \in \mathbb{C}$  a  $n \in \mathbb{N}$  platí*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

*neboli*

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^n.$$

## **Kapitola 4**

# **Základy pravděpodobnosti**

## Výsledky cvičení

- 2.3.1** 15 způsobů.
- 2.3.1** 34 žáků.
- 2.3.1** 216 čísel.
- 2.3.1** 336 způsobů.
- 2.3.1**  $30!/2$ .
- 2.3.1** 44.
- 2.3.1**  $32!$  způsobů.
- 2.3.1** 362 800 čísel.
- 2.3.1** (a) 45 přímek; (b) 31 přímek.
- 2.3.1**  $n(n - 3)/2$ .
- 2.3.1** (a) 50 388; (b) 75 582; (c) 18 564; (d) 43 758.
- 2.3.1** 45.
- 2.3.1** 24 způsobů.

# Seznam použité literatury

- [1] J. Matoušek a J. Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 4., upr. a dopl. vyd. Karolinum, Praha, 2009. ISBN 978-80-246-1740-4.
- [2] A. Slavík. *Kombinatorika*. [online], Citováno 26. června 2022. Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/kombinatorika/skripta-kombinatorika.pdf>.
- [3] John M. Harris and Michael J. Hirst, Jeffry L. and Mossinghoff. *Combinatorics and graph theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2010. ISBN 978-14-419-2723-1.
- [4] Richard A. Brualdi. *Introductory combinatorics*. 5th ed. Pearson/Prentice Hall, 2018. ISBN 978-71-112-6525-2.
- [5] L. Havrlant. *Matematika polopatě - Permutace*. [online], Citováno 27. června 2022. Dostupné z: <https://www.matweb.cz/permutace/>.
- [6] J. Farská. *Výuka kombinatoriky na střední škole s využitím webových stránek*. [online], Citováno 28. června 2022. Dostupné z: <https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/kombinatorika/>.
- [7] J. Petáková. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 2. vydání. Praha: Prometheus, Praha, 2021. ISBN 978-80-7196-487-2.
- [8] Katedra didaktiky matematiky MFF UK. *Portál středoškolské matematiky*. [online], Citováno 28. června 2022. Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/>.
- [9] *Hackmath.net*. [online], Citováno 28. června 2022. Dostupné z: <https://www.hackmath.net/>.