Základy středoškolské kombinatoriky

David Weber

david.weber99@seznam.cz

3. července 2022

Obsah

Kapitola 1

Úvodem

1.1 Was ist kombinatorika?

Kombinatorika představuje matematickou disciplínu zabývající se se kolekcemi prvků množin s definovanou vnitřní strukturou. Řekneme-li to méně formálně, studuje, kolika způsoby lze sestavit konfiguraci s jistými vlastnostmi. Zároveň se tak váže k blízkému oboru zvanému **teorie pravděpodobnosti**.

Typickou úlohou (otázkou) kombinatoriky je třeba tato:

Úloha 1.1.1. Na svatbě je n lidí.

(a) Kolika způsoby lze n svatebčanů sestavit do řady?

(b) V kolika případech stojí nevěsta napravo od ženicha?

(c) Kolik je řad, že ženich a nevěsta stojí vedle sebe?

Poměrně pěknou a lehce humornou úlohou spadající do klasické kombinatoriky je např. tzv. *problém šatnářky*.

Úloha 1.1.2. *Ctihodní pánové v počtu n přijdou na shromáždění, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu šatnářka, možná ten den velmi roztržitá, možná dokonce z mizerného osvětlení osleplá, vydá z pánů náhodně jeden z klobouků. Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane od šatnářky zpět svůj klobouk?* [1, str. 105]

Dalšími zajímavými problémy jsou např. tyto

Úloha 1.1.3.

- *Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže pomocí n přímek rozdělíme rovinu?* [2, str. 38]
- *Kolika způsoby lze rozměnit jeden dolar?* [3, str. 130]
- *Kolik různých náhrdelníků s dvaceti korálky lze vyrobit z korálků rodonitu, růženínu a lazuritu, pokud lze náhrdelník nosit v jakékoli orientaci?* [3, str. 130]

Kromě první zmíněné úlohy jsou ostatní svým řešením již nad rámec tohoto textu, avšak např. zmíněný problém šatnářky[1] 1.1.2 vede posléze k velmi zajímavým výsledkům. Nicméně pro řešení úlohy 1.1.1 a jí příbuzných si v dalších odstavcích vybudujeme potřebný matematický aparát.

[1] Konkrétně zde se při řešení využije tzv. *princip inkluze a exkluze*.

1.2 Množiny

Množiny pro nás budou klíčovým pojmem, neboť s jejich pomocí budeme formulovat další části výkladu. Proto považuji za nezbytné si zopakovat aspoň některé základní vlastnosti a operace, které s množinami můžeme provádět. Množinou v matematice rozumíme „soubor neuspořádaných prvků“. Dvě množiny tak považujeme za stejné (sobě rovné) právě tehdy, když mají stejné prvky. Byť tento popis nepředstavuje zcela formální definici, pro naše potřeby s tímto chápáním vystačíme.

Množiny zapisujeme pomocí složených závorek $\{,\}$, přičemž jejich specifikace lze provést dvě způsoby:

- výčtem (výpisem) jednotlivých prvků,
- společnou vlastností

Příklad 1.2.1. Množinu M obsahující prvky a, b, c lze zapsat jako

$$M = \{a, b, c\}.$$

V případě většího počtu prvků, avšak s jistou strukturou, můžeme množinu specifikovat buď pomocí „$\ldots$“ nebo explicitním vyjádřením specifické vlastnosti.

Příklad 1.2.2. Množinu všech přirozených čísel menších nebo rovny 5 lze zapsat jako

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 5\} \quad \text{nebo} \quad S = \{1, 2, \ldots, 5\}.$$

Důležitou vlastností množin je, že neuvažujeme násobné výskyty prvků. Tedy např. množiny $M = \{1, 2, 3\}$ a $N = \{1, 2, 2, 3, 3\}$ jsou si rovny, tj. $M = N$. Též je vhodné si připomenout, že chceme-li vyjádřit, že libovolný prvek a je v množině A, pak píšeme $a \in A$ (čteme „a náleží množině A“). Naopak v případě, že prvek a nenáleží množině A, píšeme $a \notin A$.

Podstatnou vlastností pro nás budou operace *sjednocení*, *průniku* a *rozdílu* množin.

Definice 1.2.3 (Sjenocení, průnik a rozdíl)**.** Mějme množiny[2] A, B. Pak definujeme:

(i) sjednocení $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, tj. výsledná množina obsahuje prvky množiny A a zároveň prvky množiny B.

(ii) průnik $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, tj. výsledná množina obsahuje *pouze* prvky, které náleží oběma množinám.

(iii) rozdíl $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$, tj. výsledná množina obsahuje pouze ty prvky z množiny A, které nenáleží množině B.

Příklad 1.2.4. Pro množiny[3] $X = \{x, y, z\}$ a $Y = \{x, z, \{z\}, w\}$ platí

- $X \cup Y = \{x, y, z\} \cup \{x, z, \{z\}, w\} = \{x, y, z, x, z, \{z\}, w\} = \{x, y, z, \{z\}, w\}$,
- $X \cap Y = \{x, y, z\} \cap \{x, z, \{z\}, w\} = \{x, z\}$,
- $X \setminus Y = \{x, y, z\} \setminus \{x, z, \{z\}, w\} = \{y\}$.

Zkuste si výsledky operací porovnat s definicí 1.2.3 výše.

[2] Mohou být **konečné** i **nekonečné**, avšak nás budou zajímat konečné množiny.

[3] U množiny Y si uvědomme, že prvek $\{z\}$ není to samé jako prvek z, tedy např. po sjednocení se ve výsledné množině vyskytnou oba.

Pro větší počet množin můžeme využít pro zápis sjednocení tzv. *velké operátory* $\bigcup$, $\bigcap$. Máme-li tedy množiny $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$, můžeme jejich sjednocení, resp. průnik zapsat jako

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \quad \text{resp.} \quad \bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$$

Dále, co nás bude zajímat, je velkost množiny. Tu budeme označovat svislými čarami, tedy např. velikost množiny X zapíšeme jako $|X|$. Konkrétně např. pro množinu $A = \{-1,\, 0, 10, 20\}$ je velikost $|A| = 4$.

Poznámka 1.2.5. K závěru ještě pár poznámek:

- Prázdnou množinu (tj. množinu neobsahující žádné prvky) budeme značit symbolem $\emptyset$.
- Pokud platí pro množiny A a B, že nemají žádné společné prvky, tj. $A \cap B = \emptyset$, pak je nazýváme *disjunktní*. Obecněji řekneme-li, že množiny $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ jsou ***po dvou*** *disjunktní*, pak tím myslíme, že pro libovolnou dvojici množin X_i a X_j platí

  $$X_i \cap X_j = \emptyset,$$

  přičemž $0 \leqslant i,\, j \leqslant n$.

Jako poslední zmíníme pojem tzv. *podmnožiny*, který později využijeme hlavně v pravděpodobnosti.

Definice 1.2.6 (Podmnožina)**.** Mějme množiny A a B. Řekneme, že množina A je **podmnožinou** množiny B, pokud platí

$$x \in A \longrightarrow x \in B.$$

(Píšeme $A \subseteq B$.)

Kapitola 2

Kombinatorické počítání

Nyní se již podíváme na některé základní nástroje kombinatoriky a jejich využití. Na úvod se takto proto podíváme na pár motivačních příkladů.

2.1 Pravidlo součinu a součtu

Vezměme si pro začátek jednu motivační úlohu.

Úloha 2.1.1. *Předpokládejme, že chceme zjistit počet různých kurzů nabízených Wisconsinskou univerzitou v Madisonu. Kurzy rozdělíme podle oddělení, na kterém jsou uvedeny. Za předpokladu, že nedochází ke křížovému vypisování (křížové vypisování nastává, když je stejný kurz vypsán na více než jedné katedře), kolik předmětů si můžeme jako studenti zapsat?* [4, str. 28]

Řešení. K problému můžeme přistoupit následovně: předměty si postupně rozdělíme do množin. Množinu všech dostupných předmětů si označíme C (z angl. *classes*). To znamená, že hledáme $|C|$. Předměty si rozdělíme do množin podle katedry, která je nabízí. Tedy máme-li na univerzitě, pro zjednodušení, např. 5 kateder, pak se nám předměty rozdělí do pěti množin, které si označíme $C_1, \ldots, C_5$. Množina všech předmětů C je jednoduše sjednocením předmětů z jednotlivých kateder $C_1, \ldots, C_5$, tj.

$$C = \bigcup_{i=1}^{5} C_i = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \,.$$

Protože ze zadání víme, že každý předmět je vypsán v rámci **právě jedné** katedry, pak množiny $C_1, \ldots, C_5$ jsou po dvou disjunktní. Takže nám jednoduše stačí spočítat předměty na jednotlivých katedrách

$$|C| = \sum_{i=1}^{5} |C_i| = |C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| + |C_5| \;.$$

□

Ačkoliv jsme úlohu 2.1 jsme řešili sice trochu složitě, intuitivně je tento způsob nejspíše jasný. Máme-li n_1 způsobů, jak provést určitou akci a n_2 způsobů, jak provést nějakou jinou akci (kterou nelze provést současně s první), pak máme dohromady $n_1 + n_2$ způsobů, jak vybrat některou činnost.

Z tohoto jednoduchého principu plyne tzv. *kombinatorické pravidlo součtu*, které budeme v dalších úlohách využívat.

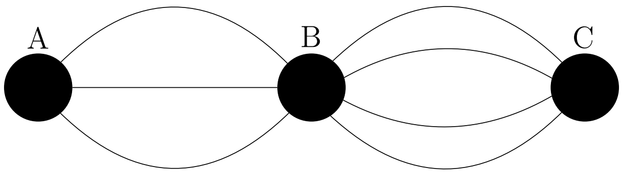
Věta 2.1.2 (Kombinatorické pravidlo součtu)**.** *Jsou-li X_1, X_2, …, X_n konečné množiny, které jsou po dvou disjunktní, pak platí*

$$|X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$$

nebo zkráceně

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|\,.$$

Představme si, že máme městečka A, B, C, mezi nimiž vede po řadě 3 a 5 cest (tj. 3 cesty mezi A a B, 4 cesty mezi B a C).



Obrázek 2.1: Cesty mezi městy A, B, C.

Chceme zjistit počet všech způsobů, jak se dostat z města A do města C. Jak aplikujeme pravidlo součtu zde? Mohli bychom si zde rozdělit cesty z A do C do množin podle toho, kterou cestou jsme dorazili z A do B. Pokud tak učiníme, pak jsme rozdělili cesty do celkem tří množin P_1, P_2, P_3, přičemž všechny jsou po dvou disjunktní (žádná z cest z A do C nemůže obsahovat dvě různé cesty z A do B) a množina P obsahuje všechny cesty z A do C. Tedy celkový počet cest $|P|$ je roven součtu $|P_1| + |P_2| + |P_3|$. Pro každou cestu mezi městy A a B máme 4 možnosti, kudy se dostat z B do C. Tedy

$$|P_1| = |P_2| = |P_3| = 4.$$

To znamená, že celkový počet cest $|P| = |P_1| + |P_2| + |P_3| = 4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12.$.

Tento způsob je jistě velmi nepraktický a navíc je celkem očividné, že na daný výsledek jsme mohli přijít hned. Stačilo vynásobit počet cest mezi městy A a B a počet cest mezi městy B a C. Z toho dostáváme druhé kombinatorické pravidlo:

Věta 2.1.3 (Kombinatorické pravidlo součinu)**.** *Počet uspořádaných k-tic, jejichž i-tý člen lze vybrat n_i způsoby je roven*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

Je důležité zmínit, že jednotlivé výběry **musí být nezávislé**, tedy výběr na jednu pozici nesmí ovlivnit počet výběrů na ostatní pozice. Méně formálně, avšak užitečněji, můžeme pravidlo formulovat i takto: *Lze-li první výběr provést celkem n způsoby a druhý výběr m způsoby bez ohledu na první výběr, pak celkový počet dvojic možných výběrů je nm.* (Pochopitelně, toto lze zobecnit na libovolný počet výběrů, jako je tomu v 2.1.3.)

Úloha 2.1.4. Křídy jsou vyráběny

- ve 3 různých barvách,
- v 8 různých délkách
- a o 4 různých průměrech.

Kolik typů křid celkově lze zakoupit? [4, str. 29]

Řešení. Barvu křídy můžeme vybrat celkem třemi způsoby, délku osmi způsoby a průměr křídy celkem čtyřmi způsoby. Protože výběry jsou na sobě nezávislé, pak podle předchozího pravidla součinu existuje celkem $3 \cdot 8 \cdot 4 = 96$ typů kříd. □

Úloha 2.1.5. Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže

(a) cifry se mohou opakovat,

(b) cifry se nemohou opakovat?

(Úloha i řešení [2, str. 7].)

Řešení (a). Protože se cifry mohou opakovat, pak na každé číselné pozici máme stejný počet možností výběru číslici, až na první pozici, neboť nemůžeme vybrat číslici 0 (jinak by se nejednalo o *čtyřciferné* číslo). Na první pozici máme tak 5 možností výběru a na zbylých třech máme 6 možností, tj. celkově existuje

$$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080 \text{ možností.}$$

□

Řešení (b). Tentokrát se cifry nesmí opakovat. Úvaha tak zůstává stejná, ale při určování počtu možností výběru musíme zohlednit již vybrané číslice. Na první pozici tak máme 5 možností výběru (nesmíme vybrat nulu), na druhé pozici máme 5 možností (původně jsme měli 6, ale jednu cifru jsme již použili na první pozici), na třetí pozici máme 4 možnosti (2 číslice jsme již použili) a na čtvrté pozici máme 3 možnosti. Celkově tak existuje

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300 \text{ možností.}$$

□

Kombinatorické pravidlo součtu a součinu však můžeme v různých úlohách kombinovat. Speciálně, pokud si tak ulehčíme hledání určených konfigurací.

Úloha 2.1.6. Kolik sudých čísel čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se nesmí opakovat? (Úloha i řešení [2, str. 8].)

Řešení. Aby výsledné číslo bylo sudé, musí končit (tj. mít na čtvrté pozici) číslici 0, 2, nebo 4. Zde již však nastává problém, neboť nemůžeme hned aplikovat pravidlo součinu. Je tomu tak proto, že pokud by byla na čtvrté pozici nula, pak na první pozici máme 5 možností, zatímco pokud by zde byla číslice 2, nebo 4, pak počet přípustných číslic na první pozici je již pouze 4 (nesmíme vybrat číslici 0 a pak číslici na čtvrté pozici). Počet výběrů tak již není nezávislý. Nicméně můžeme každý z případů vyšetřit zvlášť:

- označme si množinu D_1 (z angl. *digit*) obsahující všechna čísla končící číslicí 0,
- množinu čísel D_2 končících číslicí 2 a
- množinu čísel D_3 končících číslicí 4.

Pro čísla končící nulou máme na první pozici celkem 5 možností, na druhé pak 4 možnosti a na třetí 3 možnosti. Tedy z kombinatorického pravidla součinu máme

$$|D_1| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ možností.}$$

Množiny D_2 a D_3 mají stejnou velikost, neboť v obou případech máme na první pozici 4 možnosti výběru, na druhé 4 možnosti výběru a na třetí 3 možnosti. Tj.

$$|D_2| = |D_3| = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 \text{ možností.}$$

Je jasné, že tyto množiny jsou disjunktní (každá dvojice množin obsahuje čísla s jinou číslicí na čtvrté pozici). Tedy podle kombinatorického principu součtu platí

$$|D_1 \cup D_2 \cup D_3| = |D_1| + |D_2| + |D_3| = 60 + 48 + 48 = 156 \text{ možností.}$$

□

2.2 Variace, permutace a kombinace

Nyní trochu rozšíříme na repertoár nástrojů. Zatím jsme řešili úlohy, kde jsme vybírali vždy „po jednom“ prvku, abychom dosáhli jisté konfigurace. Nyní se podíváme, jakých výsledků dosáhneme v případě, kdy budeme již vybírat nějaké k-tice z nějaké n prvkové množiny objektů.

Je třeba si rozmyslet dva základní případy:

- výběr k-tic, kde **záleží na pořadí**,
- výběr k-tic, kde **nezáleží na pořadí**.

S prvním případem jsme již do jisté míry obeznámeni, neboť u úloh, které jsme řešili, vždy záleželo na pořadí. To tedy vede na sestavování tzv. *uspořádaných k-tic*, které jsme již zmínili ve formulaci kombinatorického pravidla součinu 2.1.3. Těm říkáme tzv. **variace k-té třídy z n prvků**. Tedy např. variací 2. třídy z množiny $\{1, 2, 3\}$ je třeba

$$(1, 3) \quad \text{nebo} \quad (3, 1).$$

Druhý případ je pro nás novinkou. Vybíráme totiž tzv. *neuspořádané k-tice*, tzn. vybereme-li např. z množiny $\{a, b, c\}$ neuspořádanou dvojici sestávající z prvků a a c, pak je to stejné jako výběr neuspořádané dvojice sestávající z prvků c a a. Takový výběr nazýváme **kombinací k-té třídy z n prvků**.

V rámci tohoto textu se omezíme na tzv. variace, resp. kombinace **bez opakování**. Výběry s opakováním si zle nastudovat např. ve skriptech [2, str. 9].

Výběrem bez opakování rozumíme výběr k-tice prvků takové, že se v ní žádný prvek neopakuje, tzn. každý je v ní nejvýše jednou. Tedy rozlišujeme

- *variace bez opakování* a
- *kombinace bez opakování*.

Pojďme se nyní podívat na metody jejich výpočtu.

Věta 2.2.1 (Variace bez opakování)**.** *Počet uspořádaných k-tic sestavených z n-prvkové množiny tak, že se každý prvek ve výběru vyskytne nejvýše jednou, je roven*

$$\prod_{i=1}^{k}(n - i + 1) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Důkaz. Tento fakt přímo plyne z kombinatorického pravidla součinu. Na první pozici máme n možností výběru, na druhé $n-1$ možností, ... a pro k-tý člen máme $n-k+1$ možností. Tedy celkově $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ možností. □

Počet variací k-té třídy z n-prvkové množiny bez opakování budeme značit $V_k(n)$.

Úloha 2.2.2. Ve třídě, kde je celkem 25 dětí, si žáci volí nového pokladníka, šatnáře a službu na tabuli, přičemž jeden žák nesmí zastávat více pozic zároveň. Kolika různými způsoby si může třída zvolit žáky na dané pozice.

Řešení. V tomto případě jistě záleží na pořadí výběru (vybrat žáka na pozici šatnáře není jistě to samé, jako jej vybrat na pozici pokladníka). Tedy budeme počítat variace 3. třídy z 25 prvků bez opakování, tedy existuje

$$V_3(25) \overset{2.2.1}{=} 25 \cdot (25-1) \cdot (25-2) = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800 \text{ způsobů.}$$

□

Dalším důležitým, a zatím nezmíněným termínem, je tzv. *permutace*. Permutací rozumíme libovolné uspořádání n prvků do řady. Tedy např. 5, 3, 2, 4, 1 je permutace množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Permutace lze interpretovat jako uspořádané n-tice, což z nich dělá speciální případ variace (výběr uspořádané n-tice z n prvkové množiny). Stejně jako u variací a kombinací rozlišujeme permutace s opakováním a bez opakování.

Věta 2.2.3 (Permutace bez opakování)**.** *Počet uspořádaných n-tic z n-prvkové množiny tak, že se každý prvek ve výběru vyskytne nejvýše jednou, je*

$$\prod_{i=1}^{n} i = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1.$$

Důkaz. Permutace je speciálním případem variace pro $k=n$, tedy $V_n(n) \overset{2.2.1}{=} n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.$ □

Definice 2.2.4 (Faktoriál)**.** Je-li $n \in \mathbb{N}_0$, pak definujeme číslo

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i,$$

které nazýváme *faktoriál* (čteme „n faktoriál“). Speciálně pro $n=0$ definujeme $0! = 1$.

Číslo $n!$ tedy vyjadřuje počet permutací n prvkové množiny[1]. Zároveň se podívejme ještě na speciální případ $n=0$. Podle naší definice a významu, který přidružujeme faktoriálu, říkáme, že 0 prvků lze seřadit jedním způsobem. (Zkuste si promyslet.)

Úloha 2.2.5. Z 10 knih je 6 psáno česky a zbylé 4 latinsky. Kolika různými způsoby lze daná knihy umístit na poličku, jestliže všechny knihy psané česky mají být vedle sebe a všechny latinsky psané vedle sebe? (Úloha i řešení [5].)

Řešení. Všechny české knihy chceme seřadit vedle sebe, tj. jedná se o permutaci na šesti prvcích, kterých je $6!$. Podobně latinsky psané knihy lze vedle sebe seřadit $4!$ způsoby. Seřazení český a latinských knih jsou na sobě nezávislá a tedy podle kombinatorického pravidla součinu existuje

$$6!\cdot 4! = (6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1) = 720\cdot 24 = 17\,280 \text{ možností.}$$

[1] Podobně jako pro variace, i pro permutaci n prvkové množiny se zřídka používá značení $P(n)$. Avšak je tomu tak málokdy, neboť často se při výpočtech píše rovnou $n!$.

□

Zatím jsme se zabývali uspořádanými k-ticemi (variace a permutace), jejichž důležitou vlastností bylo, že záleželo na pořadí. Pokud ovšem chceme od pořadí upustit a soustředit se jen na vybrané prvky, budeme muset náš výpočet lehce upravit.

Věta 2.2.6 (Kombinace bez opakování)**.** *Počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků n prvkové množiny tak, že se každý prvek ve výběru vyskytne nejvýše jednou, je roven*

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}(n-i+1)$$

Důkaz. Naši úvahu můžeme založit na následujícím pozorování: máme-li nějakou *neuspořádanou* k-tici prvků z n prvkové množiny, pak existuje přesně $k!$ způsobů, jak vybrané prvky uspořádat do řady, čímž z ní vytvoříme *uspořádanou* k-tici. To znamená, že platí

$$(\text{počet uspořádaných } k\text{-tic}) = k! \cdot (\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}).$$

Počet neuspořádaných k-tic umíme vypočítat podle věty 2.2.1, tedy máme

$$\prod_{i=1}^{k}(n-i+1) = k! \cdot (\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}).$$

Vydělíme-li rovnost číslem $k!$, dostaneme požadovaný výraz, tj.

$$(\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}) = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}(n-i+1)$$

□

Definice 2.2.7 (Kombinační číslo)**.** Mějme čísla n, $k \in \mathbb{N}$. Pak definujeme číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}(n-i+1),$$

které nazýváme *kombinační číslo* (čteme „n nad k“).

Poznámka 2.2.8. Kombinační číslo tedy představuje počet možných výběrů neuspořádané k-tice z n prvků.

Často se lze však setkat s alternativní definicí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Není těžké si rozmyslet, že tento vzorec říká to samé, co vzorec ve větě 2.2.6. Avšak zde je třeba si dávat pozor, že vzorec platí pouze, pokud je $k \leqslant n$, protože pro $k > n$ by byl výraz $n-k$ záporný a jeho faktoriál by tak nebyl definován. Avšak ve vzorci

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

se pro $k > n$ vyskytne v čitateli zlomku u jednoho z činitelů 0 (neboť se zde vždy vyskytne výraz $n-(n+1)+1$ pro $k = n+1$) a tedy i celý součin bude nulový. To dává ostatně i smysl, neboť neuspořádanou k-tici n prvků bez opakování při $k > n$ nelze vybrat žádným způsobem. Nicméně pro $k > n$ je někdy tvar

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

výhodný při výpočtech.

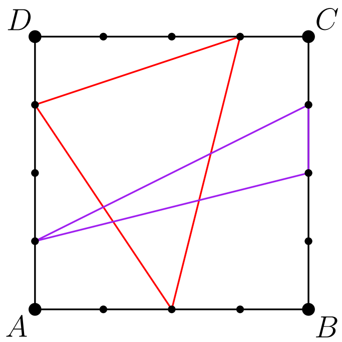
Úloha 2.2.9. Petr má sedm knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má deset knih, o které se zajímá Petr. Určete, kolika způsoby si Petr může vyměnit dvě své knihy za dvě knihy Ivaniny. [6, sekce *Kombinace*]

Řešení. Ivana a Petr každý vybírají 2 knihy, které si vymění s tím druhým. Na pořadí výběru knih nezáleží. Celkově se tedy bude jednat *kombinace 2. třídy ze 10 prvků* a *kombinace 2. třídy ze 7 prvků*. Každý z výběrů je však nezávislý, tedy podle kombinatorického pravidla součinu dostáváme

$$\binom{10}{2}\binom{7}{2} \overset{2.2.8}{=} \frac{10!}{(10-2)!2!} \cdot \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2} = 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 = 945 \text{ možností.}$$

□

Úloha 2.2.10. Je dán čtverec ABCD a na každé jeho straně n $(n \geqslant 3)$ vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech. [6, sekce *Kombinace*]



Obrázek 2.2: Ukázka trojúhelníků ve čtverci ABCD.

Řešení. V tomto případě stačí ze všech dostupných bodů (kterých je $4n$) vybrat všechny možné trojice. Je třeba mít však na paměti, že trojúhelník vznikne pouze volbou bodů, které neleží na jedné přímce, tzn. body nesmí všechny ležet na jedné straně čtverce ABCD. Tyto varianty jsou však započítány ve výrazu $\binom{4n}{3}$, tedy je třeba je odečíst. Na libovolné straně nepřipouštíme žádnou kombinaci tří bodů na ní ležících, těch je $\binom{n}{3}$ a pro všechny strany tedy $4 \cdot \binom{n}{3}$. Celkově tedy existuje

$$\binom{4n}{3} - 4 \cdot \binom{n}{3} \text{ různých trojúhelníků.}$$

□

Úloha 2.2.11. Určete, kolika způsoby je možno ze dvaceti osob vybrat deset, požadujeme-li, aby mezi vybranými

(a) nebyl pan A;

(b) nebyli zároveň pánové A a B;

(c) byl aspoň jeden z pánů A, B.

[6, sekce *Kombinace*]

Řešení (a). Pokud nechceme, aby mezi vybranými lidmi byl pan A, pak vybíráme všechny kombinace 10. třídy takové, že neobsahují pana A, tj. ze zbývajících devatenácti osob. Takových výběrů existuje

$$\binom{19}{10} \overset{2.2.8}{=} \frac{19!}{(19-10)!10!} = \frac{19 \cdot 18 \cdots \cancel{10!}}{9! \cdot \cancel{10!}} = 92\,378.$$

□

Řešení (b). Pokud nemají být mezi vybraný lidmi pánové A a B **zároveň**, pak ovšem připouštíme varianty, kdy je ve vybrané skupině pouze pan A, nebo pouze pan B. K výpočtu lze přistoupit takto:

(i) vypočítáme počet všech skupinek,

(ii) odečteme počet skupinek, kde se nachází pan A a pan B zároveň.

V případě *(i)* se jednoduše jedná o kombinaci 10. třídy z 20 prvků, tj. $\binom{20}{10}$. V případě *(ii)* lze skupinky, kde se nachází pan A a zároveň pan B, následovně: uvážíme, že pan A a pan B jsou již ve vybrané skupince a nyní k nim přidáme ze zbylých osmnácti lidí osm, tj. $\binom{18}{8}$. Tedy celkově existuje

$$\binom{20}{10} - \binom{18}{8} = 140\,998$$

výběrů, kde se nenachází pan A a zároveň pan B. □

Řešení (c). Zde by nás mohlo napadnou spočítat počet těchto výběrů tak, že sečteme skupinky, kde se nachází pan A a skupinky, kde se nachází pan B. Problém však je, že tím bychom některé možnosti započítali vícekrát (specificky ty, kde se nachází pan A, i pan zároveň). Zkusme proto obdobou strategii, jako v *(b)*. Od celkového počtu možných výběrů libovolné skupinky, který je $\binom{20}{10}$, odečteme ty, kde se nenachází ani pan A, ani pan B. To odpovídá výběru desetičlenné skupinky ze zbylých osmnácti lidí, tj. $\binom{18}{10}$. Celkově tak existuje

$$\binom{20}{10} - \binom{18}{10} = 140\,998$$

výběrů[2], kde se nachází aspoň jeden z panů A, B. □

2.3 Cvičení

Cvičení 2.3.1. *Jana má pět různě barevných triček a tři nestejné sukně. Kolika způsoby si může vzít tričko a sukni, aby pokaždé vypadala jinak?* [7, str. 145]

Cvičení 2.3.2. V jedné třídě, ve které každý žák ovládá aspoň jeden ze dvou jazyků (angličtinu nebo němčinu), hovoří 25 žáků anglicky, 16 žáků německy a 7 žáků hovoří oběma jazyky. Kolik žáků chodí do této třídy? [8, sekce Kombinatorika]

Cvičení 2.3.3. Určete počet všech přirozených čísel větších než 2000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 1, 2, 4, 6, 8, a to každá nejvýše jednou? [7, str. 146]

Cvičení 2.3.4. Na běžecké trati běží 8 závodníků. Za předpokladu, že každou z medailí získá právě jeden závodník, vypočítejte, kolik je možností na rozdělení zlaté, stříbrné a bronzové medaile mezi závodníky. [7, str. 146]

Cvičení 2.3.5. Ve třídě je 30 míst, ale ve třídě 3. B je pouze 28 žáků. Kolika způsoby lze sestavit zasedací pořádek? [7, str. 146]

Cvičení 2.3.6. Z kolika prvků lze vytvořit 992 variací druhé třídy bez opakování? [7, str. 146]

[2] Může se možná zdát zarážející, že výsledek je stejný, jako v bodě *(b)*, nicméně později se dozvíme, proč tomu tak je. Není to náhoda. :-)

Cvičení 2.3.7. Kolika způsoby lze rozmíchat hru 32 karet? [7, str. 146]

Cvičení 2.3.8. Kolik různých devíticiferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1 až 9? [7, str. 146]

Cvičení 2.3.9. Kolik přímek určuje deset různých bodů v rovině, z nichž

(a) žádné tři neleží na jedná přímce,

(b) právě šest leží na jedné přímce?

[7, str. 146]

Cvičení 2.3.10. Určete počet všech úhlopříček v konvexním mnohoúhelníku. [7, str. 147]

Cvičení 2.3.11. V krabici je 10 výrobků, z nichž jsou právě tři vadné. Kolika způsoby lze vybrat 5 výrobků tak, aby:

(a) žádný nebyl vadný,

(b) právě jeden byl vadný,

(c) nejvýše jeden byl vadný,

(d) alespoň dva byly vadné.

[7, str. 147]

Cvičení 2.3.12. Z kolika prvků lze vytvořit 990 kombinací druhé třídy bez opakování? [7, str. 147]

Cvičení 2.3.13. Učitel chce vytvořit ze čtyř dívek a čtyř chlapců jeden tříčlenný tým, v němž bude jedna dívka a dva chlapci. Kolika různými způsoby může sestavit tým? [9, příklad *Tříčlenné 69274*]

Kapitola 3

Kombinatorické identity

Nyní jsme si již prošli základní nástroje, které v kombinatorice využíváme. V rámci minulé kapitoly jsme si ukázali práci s kombinačními čísly a především jejich význam. Nyní se na ně trochu více zaměříme, neboť zjistíme, že tento matematický objekt má pozoruhodné vlastnosti, díky kterým obdržíme několik zajímavých identit.

3.1 Vlastnosti kombinačních čísel

V této sekci se budeme *především* (avšak ne vždy) držet naší původní definice kombinačního čísla z 2.2.7, tj.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

a to právě kvůli již zmíněné vlastnosti, že oproti

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

dává výraz smysl i pro $k > n$ a je vždy roven nule (ostatně i z kombinatorického hlediska dává tento výsledek smysl). Nebudeme se tak muset explicitně odvolávat na předpoklad, že $n \leqslant k$, abychom předešli formálním nepřesnostem.

U kombinačních čísel lze pozorovat některé zajímavé vlastnosti. Začneme asi tou nejzákladnější.

Věta 3.1.1 (Symetrie kombinačních čísel)**.** *Pro $n, k \in \mathbb{N}_0$, kde $k \leqslant n$, platí*

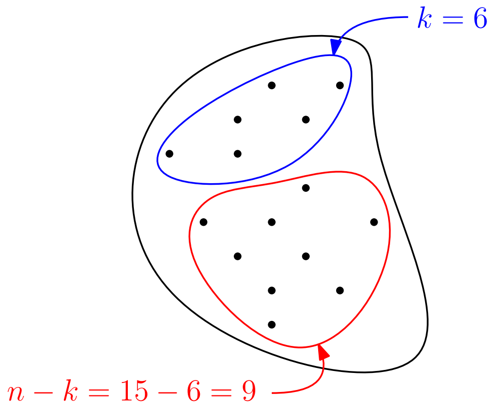
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Důkaz první. Asi nejjednodušší důkaz je přímým výpočtem:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

□

Důkaz druhý. Názornější důkaz nám poskytne kombinatorická interpretace tohoto tvrzení. Libovolná k-tice (v tomto smyslu množina) je **jednoznačně určena** výběrem prvků z nějaké n prvkové množiny, které jí budou náležet. Výběrem k prvků z dané množiny tak zbude $n-k$ prvků, které nejsou součástí dané k-tice.



Obrázek 3.1: Výběr šesti prvků z patnácti.

Takových možných výběrů existuje $\binom{n}{k}$. Danou k-tici ovšem lze vybrat i opačným způsobem, a to sice volbou prvků, které jí náležet **nebudou**. Tedy výběrem $n-k$ prvků zbude celkem k prvků, které jí budou náležet. Takových výběrů existuje $\binom{n}{n-k}$. Protože výběrem $n-k$ prvků vždy jednoznačně určíme nějakou k-tici, pak neuspořádaných k-tic a neuspořádaných $(n-k)$-tic musí být stejně, tj.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

□

Věta 3.1.2. *Pro* $n,\, k \in \mathbb{N}_0$ *platí*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Důkaz první. Obdobně i zde lze tvrzení dokázat přímým výpočtem:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{n+1}{k+1} \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Důkaz druhý. Opět o něco názorněji lze platnost tvrzení zdůvodnit kombinatorickou úvahou. Představme si, že máme množinu

$$\{1,\, 2,\, \ldots,\, n,\, n+1\}\,.$$

Chceme vybrat spočítat počet možných výběrů všech neuspořádaných $(k+1)$-tic, pak jejich počet odpovídá kombinačnímu číslu $\binom{n+1}{k+1}$. To je význam pravé strany rovnosti.

Chceme-li vybrat všechny neuspořádané $(k+1)$-tice, lze postupovat i následovně:

- vybereme všechny $(k+1)-tice$, které **obsahují prvek** $n+1$ a
- vybereme všechny $(k+1)$-tice, které **neobsahují prvek** $n+1$.

Je nejspíše intuitivně jasné, že neuspořádané $(k+1)$-tice z obou skupin dají celkově všechny $(k+1)$-tice (každá z nich buď daný prvek obsahuje, nebo jej neobsahuje). V prvním případě máme jeden prvek již vybraný, a to $n+1$. Zbylých k prvků lze vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby.

V druhém případě vybíráme $k+1$ prvků, avšak pouze z n prvků (prvek $n+1$ neuvažujeme). Takových výběrů existuje $\binom{n}{k+1}$. Protože obě „skupiny" neuspořádaných $(k+1)$-tic jsou disjunktní, je tak celkový všech $k+1$-tic z $n+1$ prvků roven

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

□

Úloha 3.1.3. Vyjádřete výraz

$$\binom{11}{7} + \binom{11}{5}$$

jedním kombinačním číslem.

Řešení. K úpravě výrazu se nám budou hodit věty 3.1.1 a 3.1.2 výše. Rádi bychom dostali oba členy do tvaru $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, abychom je mohli sečíst. Nejdříve proto využijeme větu 3.1.1.

$$\binom{11}{7} + \binom{11}{5} \overset{3.1.1}{=} \binom{11}{11-7} + \binom{11}{5} = \binom{11}{4} + \binom{11}{5} \overset{3.1.2}{=} \binom{12}{5}.$$

□

3.2 Binomická věta

Kombinační čísla mají kromě kombinatorických úloh využití i v klasické aritmetice. Ať už se to zdá, nebo ne, tyto dva možná zdánlivě rozdílné světy si nejsou až tak vzdálené. V této sekci se proto podíváme na větu, která nám trochu více zobecní koncept roznásobování dvojčlenů.

Podívejme se nejdříve na ty nejjednodušší případy:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1,\\
(x+y)^1 &= x+y,\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2,\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,\\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Čeho bychom si mohli na poprvé možná všimnout je faktu, že koeficienty u jednotlivých členů jsou symetrické. To je asi nejlépe vidět u roznásobení čtvrté mocniny dvojčlenu $x + y$. Proč tomu ale tak je? Vzpomeňme si na větu 3.1.1, díky které jsme se dozvěděli, že kombinační čísla jsou „symetrická", tzn. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Další pozorování bychom z tohoto zápisu učili nejspíše stěží (avšak klobouček dolů všem, kteří to již vidí :-)). Zkusme se zaměřit nyní čistě na dané koeficienty. Počet členů je vždy totiž lichý, což nám umožňuje zapsat si jejich koeficienty ve schématu níže.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\end{array}
$$

$$\cdots$$

Obrázek 3.2: Schéma koeficientů ve tvaru pyramidy.

Toto schéma se nazývá **Pascalův trojúhelník**. Pokud se podíváme blíže, lze si všimnout, jak vznikají jeho řádky. Na kraji vždy pevně stojí číslo 1 a další koeficienty vzniknou součtem koeficientů nad ním.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & + & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\end{array}
$$

$$\cdots$$

Obrázek 3.3: Generování Pascalova trojúhelníku součtem členů.

Pokud se nyní vrátíme opět ke kombinačním číslům, jistě si vzpomeneme, že jsme zde měli větu 3.1.2, která dávala do souvislosti kombinační čísla a jejich součet. Z toho by nás tak mohlo napadnout, že jednotlivá čísla v Pascalově trojúhelníku by tak mohla odpovídat jistým kombinačním číslům. Je tomu skutečně tak.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\end{array}
$$

$$\cdots$$

Obrázek 3.4: Pascalův trojúhelník pomocí kombinačních čísel.

Sami se můžete přesvědčit, že jednotlivá kombinační čísla odpovídají daným koeficientům. Navíc zde lze i vidět i jejich další vlastnosti v uplatnění, konkrétně věty 3.1.1 (stačí se podívat na k-tý člen a příslušném $(n-k)$-tý člen, kde n zde představuje číslo řádku od nuly, neboť odpovídá mocnině daném dvojčlenu) a 3.1.2 (koeficient různý od jedničky na kraji je součtem koeficientů nad ním).

Vraťme se nyní k roznásobování dvojčlenů. Z Pascalova trojúhelníku lze tak vidět, že koeficienty v rozvoji $(x+y)^n$ by mohly být po řadě čísla

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}.$$

Jak lze ukázat, platí totiž následující věta.

Věta 3.2.1 (Binomická)**.** *Pro libovolná* x, $y \in \mathbb{C}$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

neboli

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^n.$$

Důkaz. Nejnázornějším důkazem pro nás opět bude kombinatorická úvaha. Rozepišme si součin $(x+y)^n$ jako

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n\text{-krát}}.$$

Sečíst můžeme pouze členy, které mají v součinu stejný počet x a stejný počet y. Např.

$$(x+y)(x+y)(x+y) = xxx + xxy + xyx + yxx + xyy + yxy + yyx + yyy = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Člen $x^{n-k}y^k$ tvoří tak uspořádanou n-tici činitelů z x a y.

$$\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{(n-k)\text{-krát}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdots y}_{k\text{-krát}}.$$

Takovou uspořádanou n-tici můžeme sestavit tak, že vybereme k pozic pro činitel y (zbylých $n-k$ pozic doplníme činitelem x). Takových výběrů existuje $\binom{n}{k}$, a tedy v tomto počtu se daný člen objeví v rozvoji $(x+y)^n$. □

Úloha 3.2.2. Vypočítejte rozvoj $\left(x + \frac{1}{2y}\right)^5$.

Řešení. Postupujeme podle binomické věty 3.2.1:

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{1}{2y}\right)^5 &\overset{3.2.1}{=} \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} \left(\frac{1}{2y}\right)^k \\
&= \binom{5}{0} x^5 \left(\frac{1}{2y}\right)^0 + \binom{5}{1} x^4 \left(\frac{1}{2y}\right)^1 + \binom{5}{2} x^3 \left(\frac{1}{2y}\right)^2 + \binom{5}{3} x^2 \left(\frac{1}{2y}\right)^3 \\
&+ \binom{5}{4} x^1 \left(\frac{1}{2y}\right)^4 + \binom{5}{5} x^0 \left(\frac{1}{2y}\right)^5 \\
&= x^5 + 5 \cdot \frac{x^4}{2y} + 10 \cdot \frac{x^3}{4y^2} + 10 \cdot \frac{x^2}{8y^3} + 5 \cdot \frac{x}{16y^4} + \frac{1}{32y^5}.
\end{aligned}$$

□

Úloha 3.2.3. Vypočítejte desátý člen rozvoje $(a+2b)^{15}$.

Řešení. Pochopitelně bychom zde mohli vypočítat celý rozvoj a podívat se na jeho patnáctý člen, nicméně díky binomické větě známe tvar každého členu.

$$(a+2b)^15 = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} a^{15-k}(2b)^k$$

Desátý člen vypočítáme pro $k = 9$ (rozvoj začíná od $k = 0$):

$$\binom{15}{9} a^{15-9}(2b)^9 = 5005 \cdot a^6 \cdot 512b^9 = 2\,562\,560a^6b^9.$$

□

Pojďme se nyní podívat na některé další kombinatorické identity.

Věta 3.2.4. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

neboli

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Důkaz první. Tvrzení přímo plyne z binomické věty, dosadíme-li $a = b = 1$, tj.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}1^k \overset{3.2.1}{=} (1+1)^n = 2^n.$$

□

Důkaz druhý. Rovnost lze zdůvodnit opět i kombinatoricky. Pravá strana vyjadřuje počet všech možných neuspořádaných výběrů (libovolné velikosti, tj. pro $k = 0, \ldots, n$) z n-prvkové množiny. Počet takových výběrů jednoduše odpovídá součtu počtů všech výběrů k-tic přes všechny velikosti (tj. přes všechna k), tzn.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Libovolnou k-tici lze však také vybrat tak, že pro každý z prvků dané množiny nezávisle určíme, zda bude náležet dané k-tici, či nebude. Pro každý prvek tak máme 2 možnosti výběru, tj.

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n\text{-krát}} = 2^n.$$

□

Úloha 3.2.5. Ve firmě pracuje celkem 100 zaměstnanců. Kolika způsoby lze vybrat skupinu zaměstnanců, kteří budou pracovat na technickém oddělení a jednoho z nich zvolit jako vedoucího?

Řešení. Protože nemáme pevně zadané množství zaměstnanců, kteří budou na oddělení pracovat, pak uvažujeme skupiny všech možných velikostí. Nejdříve vybereme vedoucího a následně k němu přidáme skupinu ze zbývajících $n-1$ zaměstnanců. Vedoucího můžeme vybrat celkem n způsoby. Ze zbylých $n-1$ zaměstnanců lze utvořit skupinu celkem $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$ způsoby, což je podle předchozí věty 3.2.4 rovno 2^{n-1}. Celkově lze tedy vybrat skupinu zaměstnanců na dané oddělení $n \cdot m2^{n-1}$ způsoby. □

Věta 3.2.6. *Počet neuspořádaných výběrů se sudým počtem prvků je stejný jako počet neuspořádaných výběrů s lichým počtem prvků.*

Důkaz první. K důkazu lze opět využít binomickou větu. Začneme tím, že si trochu netradičně zapíšeme nulu:

$$0 = 1 - 1 = (1-1)^n = (1 + (-1))^n,$$

což je podle binomické věty rovno

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}.$$

Tento součet si však můžeme rozdělit na dvě sumy podle toho, zda je k sudé nebo liché:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ sudé}}}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ liché}}}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ sudé}}}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ liché}}}^{n}\binom{n}{k}.$$

U první sumy, kde k je sudé, je výraz $(-1)^k$ vždy roven jedné a u druhé sumy, kde k je liché je naopak $(-1)^k$ vždy rovno -1, přičemž toto číslo jsme vytkli z celé sumy. Na začátku jsme však začínali s nulou a tedy platí

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ sudé}}}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ liché}}}^{n}\binom{n}{k} = 0.$$

Přičtením druhé sumy k celé rovnosti, tj.

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ liché}}}^{n}\binom{n}{k},$$

dostaneme

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ sudé}}}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ liché}}}^{n}\binom{n}{k}$$

neboli

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

Kombinatoricky obě strany rovnosti vyjadřují počty výběrů z n prvkové množiny se sudým, resp. lichým počtem prvků. Protože jsou si však tyto počty rovny, dostáváme tvrzení věty. □

Důkaz druhý. Rovnost lze také zdůvodnit kombinatoricky. Uvažme, že provádíme výběr z množiny $\{1, \ldots, n\}$. Dále uvažujme následující operace: pokud vybraná množina prvků obsahuje číslo 1, pak jej z množiny odstraníme a naopak pokud vybraná množina neobsahuje číslo 1, pak jej do množiny přidáme. V obou případech se tak vždy změní počet prvků o jeden, tedy z výběru sudé velikosti se stane výběr liché velikosti a naopak. Ke každý výběr sudé velikosti tak lze „spárovat“ s výběrem liché velikosti a tedy výběrů obou typů musí být stejně mnoho. □

3.3 Cvičení

Cvičení 3.3.1. Vyjádřete výraz

$$\binom{10}{1} + \binom{10}{0} + \binom{11}{9}$$

jedním kombinačním číslem.

Cvičení 3.3.2. Řešte rovnici

$$\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} = \frac{n^2+1}{2}.$$

Cvičení 3.3.3. Řešte rovnici

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = 15(n-1).$$

Cvičení 3.3.4. Vypočítejte pátý člen binomického rozvoje $(1+y)^{10}$.

Cvičení 3.3.5. Určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)$ byl roven 2016.

Cvičení 3.3.6. Který člen binomického rozvoje $(5-2m)^7$ obsahuje m^4?

Kapitola 4

Základy teorie pravděpodobnosti

4.1 Co je to pravděpodobnost?

Pravděpodobnost (někdy též *šance*) je jeden z pojmů, který vystupuje nejen v matematice, ale i v reálném životě. Když si hodíme mincí, asi je nám jasné, že je stejná šance, že nám padne rub nebo líc. Naopak třeba u hodu klasicky hrací kostkou máme šanci $1:6$, že nám padne jednička a šance tak již není vyrovnaná situaci, že nám nepadne. Intuitivně tak asi tušíme, co se myslí, když se řekne, že např. šance výhry je 75 %. Co však ale reprezentuje ono číslo? Definovat, co je to „skutečná“ pravděpodobnost je obtížné a jedná se spíše o záležitost filozofickou. V matematice se však tomuto problému dokážeme vyhnout.

Jako lidé chápeme, že šance výhry 70 % je v jistém smyslu „lepší“ než např. 30 %, ale proč tomu tak je? Pro příklad si vezměme již zmíněnou klasickou hrací kostku. Pro simulaci hodů využijeme jednoduchý program v jazyce Python:

```
import random

trials = 0
total_trials = int(input("Zadejte počet pokusů: "))
dice_side_occurence = [0 for x in range(6)]

while trials <= total_trials:
    number = random.randint(1, 6)
    dice_side_occurence[number - 1] += 1
    trials += 1

for number_of_occurences in dice_side_occurence:
    print(f"Počet výskytů: {number_of_occurences}, " +
    f"Poměr v %: {100*(number_of_occurences/total_trials)}")
```

Níže je tabulka četností výskytů a jejich poměru vůči celkovému počtu jednotlivých ok po miliónu pokusů.

Počet ok	Četnost	Výskyt (%)
1	166 896	$16{,}6896$
2	166 789	$16{,}6789$
3	166 508	$16{,}6508$
4	166 863	$16{,}6863$
5	166 151	$16{,}6150$
6	166 794	$16{,}6794$

Tabulka 4.1: Četnost hodů ok na hrací kostce po miliónu pokusech.

Víme, že šance pro všechny strany je stejná - $1 : 6$, což odpovídá hodnotě numerické hodnotě $0{,}1\overline{6}$, neboli $16{,}\overline{6}$. Celkově tak můžeme vidět, že procentuální výskyt se jen málo liší od našeho očekávání. Tímto způsobem můžeme vnímat pravděpodobnost. Jako číslo ke kterému se blíží **poměr počtu příznivých pokusů a počtu všech pokusů**.

Praktický výpočet pravděpodobnosti však probíhá trochu jinak. U kostky jsme určili pravděpodobnost hodu jedničky tak, že jsme vzali **počet příznivých hodů** ku **počtu všech možných hodů**. A v tomto duchu také definujeme pravděpodobnost.

Definice 4.1.1 (Elementární a náhodný jev, pravděpodobnost)**.** Mějme množinu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Pak

- Ω nazýváme **množinou elementárních jevů** a libovolný její prvek ω_i **elementárním jevem**.
- libovolnou podmnožinu $A \subseteq \Omega$ nazýváme **(náhodný) jev**.

Dále definujeme funkci P přiřazující libovolnému jevu $A \subseteq \Omega$ reálné číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ splňující

(i) $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$,

(iii) $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$,

kde $A, B \subseteq \Omega$ jsou disjunktní jevy. Číslo $\mathsf{P}(A)$ nazýváme **pravděpodobností jevu** A.

Poslední vztah lze zobecnit pro obecný počet disjunktních jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$, tj.

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i).$$

Ve všech příkladech dále budeme pracovat s variantou, že všechny elementární jevy jsou stejně pravděpodobné. To má tedy za následek způsob výpočtu, který jsme zmínili výše, tedy je-li $A \subseteq \Omega$ libovolný jev, pak pravděpodobnost jevu A stanovíme jako

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Příklad 4.1.2. V případě hodu kostkou tvoří množinu elementárních jevů Ω případy, kdy 1 až 6 ok. Označíme-li si jednotlivé počty ok $O_1, \dots, O_6$, pak $\Omega = \{O_1, \dots, O_6\}$. Všechny elementární jevy jsou zde stejně pravděpodobné, tedy pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ platí

$$\mathsf{P}(O_i) = \frac{1}{6}.$$

Vezmeme-li jev L, který nastane právě tehdy, když padne lichý počet ok, pak $L = \{O_1, O_3, O_5\}$ (všechny elementární jevy jsou **vždy** považovány za vzájemně po dvou disjunktní). Pravděpodobnost jevu L je podle bodu *(iii)* v definici 4.1.1 rovna

$$\mathsf{P}(L) = \mathsf{P}(O_1) + \mathsf{P}(O_3) + \mathsf{P}(O_5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%,$$

což souhlasí s naším očekáváním.

Úloha 4.1.3. Z osmnácti lístků označených čísly 1 - 18 vytáhneme náhodně jeden lístek. Jaká je pravděpodobnost, že na vytažením lístku bude:

(a) sudé číslo

(b) číslo dělitelné 3

(c) prvočíslo

(d) dělitelné 6

[10, sekce *Pravděpodobnost a statistika*]

Řešení. Zde představuje množinu elementárních jevů, že si vytáhneme jeden lístek z osmnácti, tj. $\Omega = \{L_1, L_2, \ldots, L_{18}\}$, kde L_i je jev, kdy jsme si vytáhli lístek s číslem i (všechny tahy jsou stejně pravděpodobné). Vyřešíme po řadě jednotlivé pravděpodobnosti.

(a) Jev A bude představovat situaci, kdy jsme si vytáhli sudé číslo, tzn. $A = \{L_2, L_4, \ldots, L_{18}\}$. Počet příznivých jevů je tak

$$|A| = \frac{18}{2} = 9.$$

Počet všech možných jevů je $|\Omega| = 18$. Tedy

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = 50\,\%.$$

(b) Počet čísel dělitelných třemi z množiny $\{1, 2, \ldots, 18\}$ je $18/3 = 6$, tedy označíme-li si tento jev B, pak $|B| = 6$. Tzn.

$$\mathsf{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} = 33{,}\overline{3}\,\%.$$

(c) Z množiny $\{1, 2, \ldots, 18\}$ jsou prvočísla $2, 3, 5, 7, 11, 13$ a 17, tj. pro příslušný jev C platí $|C| = 7$. Tzn.

$$\mathsf{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{7}{18} = 38{,}\overline{8}\,\%.$$

(d) Počet čísel dělitelných šesti je přesně 3 (jsou jimi 6, 12 a 18), tj. $|D| = 3$ a tedy

$$\mathsf{P}(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} = 16{,}\overline{6}\,\%.$$

□

Úloha 4.1.4. Jaká je pravděpodobnost že při hodu dvěma kostkami (červené a modré) padne součet 8? [10, sekce *Pravděpodobnost a statistika*]

Řešení. Zde je třeba se trochu promyslet, co považovat za elementární jev. Pokud hodíme dvěma kostkami, obdržíme dvojici hodnot (i, j), kde na modré kostce padlo číslo i a na červené kostce číslo j. Tedy množina elementárních jevů množina všech takových dvojic, tj. $\Omega = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 6\}$. Dvojice, u nichž je součet ok na obou kostkách roven osmi, jsou $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ a tedy $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$. Tedy takových dvojic je celkem 5. Výsledná pravděpodobnost je

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} = 13{,}\overline{8}\,\%.$$

□

4.2 Nezávislé jevy

Klíčovým pojmem v teorii pravděpodobnosti jsou tzv. *nezávislé jevy*. Nejprve si uveďme definici a následně se podíváme na několik příkladů.

Definice 4.2.1 (Nezávislé jevy)**.** Libovolné jevy $A, B \subseteq \Omega$ nazýváme **nezávislé**, pokud platí

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

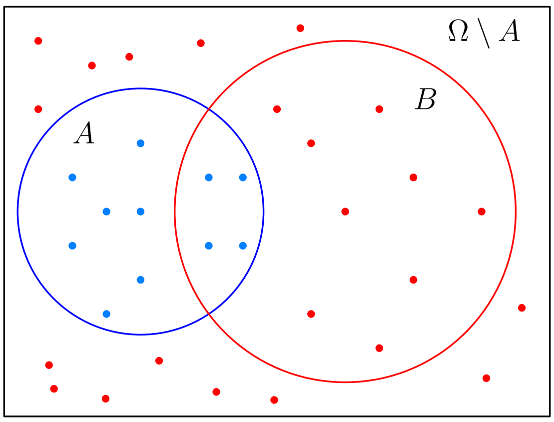
V opačném případě nazveme nazveme jevy A, B **závislými**.

Tuto definici můžeme zobecnit na libovolný počet jevů, tj. jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ nezveme nezávislými, pokud platí

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i).$$

Tato definice se může zdát poměrně abstraktní. Avšak název reflektuje poměrně jednoduchou věc a to sice, že jsou-li jevy A, B nezávislé, pak tvrdíme, že výskyt jevu A **nijak neovlivní výskyt** B. Často se této vlastnosti využívá, pokud chceme vypočítat pravděpodobnost, že nastane jev A a zároveň i jev B, tzn. jev $A \cap B$.

J. Nešetřil ve své knize *Kapitoly z diskrétní matematiky* vysvětluje nezávislost jevů následovně: *Nezávislost znamená, že rozdělíme-li Ω na dvě části, jev A a jeho doplněk $\Omega \setminus A$, pak jev B „rozřízne“ obě tyto části v témže poměru. Jinak řečeno, kdybychom prvek $\omega \in \Omega$ volili náhodně nikoliv ze všech prvků Ω, ale jenom mezi prvky A, byla by pravděpodobnost, že $\omega \in B$, přesně rovna P(B) (za předpokladu, že P$(A) \neq 0$).* [1, str. 314]



Obrázek 4.1: Grafické znázornění nezávislosti jevů.

Na obrázku 4.1 lze vidět grafické znázornění k vysvětlení výše. Poměr počtu červeně vyznačených elementárních jevů, které náleží jevu B a počtu elementárních jevů, které mu nenáleží, ale náleží $\Omega \setminus A$, je stejný, jako poměr počtu elementárních jevů, které náleží A, ale nikoliv B, a počtu elementárních jevů, které náleží $A \cap B$. Protože všechny elementární jevy jsou stejně pravděpodobné, pak příslušné poměry přímo odpovídají daným pravděpodobnostem. tzn.

$$\frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{|B \setminus A|}{|\Omega \setminus A|}$$

Úloha 4.2.2. Házíme n-krát spravedlivou mincí. Jaká pravděpodobnost, že 2-krát za sebou padne líc?

Řešení. První hod mince jistě nijak neovlivní druhý hod. Protože házíme dvakrát, množinu elementárních jevů nyní tvoří uspořádané dvojice, kdy první, resp. druhá souřadnice značí, zda v prvním, resp. druhém hodu padl rub (R) nebo líc (L), tj. $\Omega = \{(R,\, R),\, (R,\, L),\, (L,\, R),\, (L,\, L)\}$. Jev, kdy v prvním hodu padl líc, si označíme $A = \{(L,\, R),\, (L,\, L)\}$, a jev, kdy padl v druhém hodu líc, si označíme $B = \{(R,\, L),\, (L,\, L)\}$. Protože nás zajímá, kdy padne v obou hodech líc, pak nás zajímá jev $A \cap B = \{(L,\, L)\}$. Tedy pravděpodobnost, že tento jev nastane, je

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4} = 25\,\%.$$

Avšak, jak se můžeme přesvědčit, platí také

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Jevy A a B jsou tedy **nezávislé**. □

Jedna věc se zde může zdát zarážející. Pokud se ohlédneme zpět za definicí nezávislých jevů 4.2.1, můžeme si všimnout, že ačkoliv nám definice dává v podstatě „návod“, jak počítat pravděpodobnost nezávislých jevů, přesto jsme se u příkladu výše byly „nuceni“ uchýlit ke klasickému výpočtu pravděpodobnosti z definice, tj. *počet příznivých možností ke počtu všech možných možností*, a to proto, že jsme dopředu nevěděli, zda uvažované jevy jsou skutečně nezávislé a museli jsme tuto skutečnost ověřit výpočtem. Nezdá se, že tak naše definice byla něčemu užitečná. Ale není tomu tak, neboť si stačí uvědomit následující věc. Představme si, že máme množinu elementárních jevů $\Omega = \{\omega_1,\, \omega_2,\, \ldots,\, \omega_n\}$ a libovolné disjunktní jevy $A,\, B \subseteq \Omega$. Uvažme, že chceme vypočítat pravděpodobnost, že při dvou pokusech nejdříve nastane jev A a pak jev B. Pak tuto pravděpodobnost lze stanovit právě pomocí vzorce

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Je tomu tak z důvodu, že pokud provádíme dva pokusy, pak množina všech možných jevů, označme Ω', obsahuje uspořádané dvojice (jako u úlohy s hodem mincí), tj. $\Omega' = \{(\omega_i,\, \omega_j) \mid 0 \leqslant i,\, j \leqslant n\}$ (tedy zde započítáváme i kolik pokusů provádíme; obecně pokud bychom prováděli k pokusů, pak tato množiny bude obsahovat uspořádané k-tice). Tzn. jev $A \cap B$ obsahuje všechny dvojice, které náleží jak jevu A, tak jevu B, tj. takové, které na příslušných souřadnicích mají elementární jevy z A a B. Formálně zapsáno:

$$A \cap B = \{(\varphi,\, \psi) \mid \varphi \in A \wedge \psi \in B\}\,.$$

Chceme nyní vypočítat $\mathsf{P}(A \cap B)$. K tomu potřebujeme znát $|A \cap B|$ a $|\Omega'|$. Protože víme, že $|\Omega| = n$ a Ω' je množina všech uspořádaných dvojic z elementárních jevů Ω, pak $|\Omega'| = n^2$.

Velikost průniku $A \cap B$ lze určit následující úvahou. Pokud elementární jevy jevu A obsahují na první souřadnici elementární jevy množiny Ω, které si označíme

$$\varphi_1,\, \varphi_2,\, \ldots,\, \varphi_m,$$

pak $|A| = mn$. Analogicky pro obsahující uspořádané dvojice, kde na druhé souřadnici jsou elementární jevy

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \dots,\ \psi_k,$$

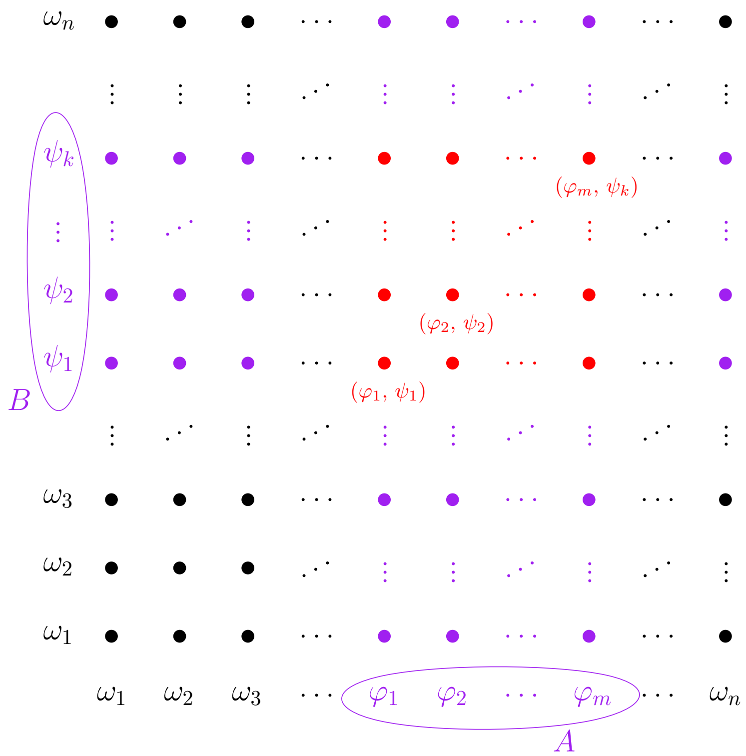
pak $|B| = kn$. Tedy pravděpodobnost, že nastane jev A, je tak

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{mn}{n^2} = \frac{m}{n}$$

a analogicky pro B je pravděpodobnost

$$\mathsf{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{kn}{n^2} = \frac{k}{n}.$$

Pravděpodobnosti těchto jevů tedy vyjadřují podíl daných jevů vůči všem možnostem.



Obrázek 4.2: Znázornění jevů A a B v množině Ω'.

Z obrázku si však můžeme uvědomit, že podíl počtu elementární jevů A a všech elementárních jevů musí být stejný jako podíl počtu elementárních jevů jevu $A \cap B$ a počtu elementárních jevů jevu B. To znamená, že platí

$$\frac{|A|}{|\Omega'|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Z této rovnosti již dokážeme vyjádřit $|A \cap B|$, tj.

$$|A \cap B| = \frac{|A|}{|\Omega'|} \cdot |B| = \frac{m}{n^2} \cdot k$$

a z toho dostáváme

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega'|} = \frac{\frac{m}{n^2} \cdot k}{n^2} = \frac{m}{n^2} \cdot \frac{k}{n^2} = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Úloha 4.2.3. Ve městě jsou čtyři křižovatky se světelnými semafory. Každý z nich uvolňuje nebo uzavírá dopravu se stejnou pravděpodobností $0{,}5$. Jaká je pravděpodobnost, že auto:

(a) projde první křižovatkou bez zdržení,

(b) projde prvními dvěma křižovatkami bez zdržení,

(c) projde všemi čtyřmi křižovatkami bez zdržení.

Řešení. Každá z těchto křižovatek představuje *samostatnou situaci*, kde chceme spočítat, zda auto projede, nebo neprojede bez zdržení. Všechny situace, kdy auto projede bez zdržení tak u každé křižovatky tvoří samostatný jev[1], tj. K_1, K_2, K_3, K_4, které jsou nezávislé. Body *(a)*, *(b)* a *(c)* tak vyřešíme následovně:

(a) $\mathsf{P}(K_1) = 0{,}5 = 50\,\%$,

(b) $\mathsf{P}(K_1 \cap K_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 = 25\,\%$,

(c) $\mathsf{P}(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$.

□

[1] Technicky vzato zde máme 4 množiny elementárních jevů pro každou křižovatku, ale předešlou úvahu o nezávislých jevech lze aplikovat i pro různé množiny elementárních jevů (tj. nemusí být nutně stejné).

Výsledky cvičení

2.3.1 15 způsobů.
2.3.1 34 žáků.
2.3.1 216 čísel.
2.3.1 336 způsobů.
2.3.1 $30!/2$.
2.3.1 44.
2.3.1 $32!$ způsobů.
2.3.1 362 800 čísel.
2.3.1 (a) 45 přímek; (b) 31 přímek.
2.3.1 $n(n-3)/2$.
2.3.1 (a) 50 388; (b) 75 582; (c) 18 564; (d) 43 758.
2.3.1 45.
2.3.1 24 způsobů.
3.3.1 $\binom{12}{2}$.
3.3.2 Nemá řešení.
3.3.3 $n = 9$.
3.3.4 $210y^4$.
3.3.5 $x = \sqrt[3]{2}$.
3.3.6 5. člen, $70000m^4$.

Seznam použité literatury

[1] J. Matoušek a J. Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 4., upr. a dopl. vyd. Karolinum, Praha, 2009. ISBN 978-80-246-1740-4.

[2] A. Slavík. *Kombinatorika*. *[online]*, Citováno 26. června 2022. Dostupné z: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/kombinatorika/skripta-kombinatorika.pdf`.

[3] John M. Harris and Michael J. Hirst, Jeffry L. and Mossinghoff. *Combinatorics and graph theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2010. ISBN 978-14-419-2723-1.

[4] Richard A. Brualdi. *Introductory combinatorics*. 5th ed. Pearson/Prentice Hall, 2018. ISBN 978-71-112-6525-2.

[5] L. Havrlant. *Matematika polopatě - Permutace*. *[online]*, Citováno 27. června 2022. Dostupné z: `https://www.matweb.cz/permutace/`.

[6] J. Farská. *Výuka kombinatoriky na střední škole s využitím webových stránek*. *[online]*, Citováno 28. června 2022. Dostupné z: `https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/kombinatorika/`.

[7] J. Petáková. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 2. vydání. Praha: Prometheus, Praha, 2021. ISBN 978-80-7196-487-2.

[8] Katedra didaktiky matematiky MFF UK. *Portál středoškolské matematiky*. *[online]*, Citováno 28. června 2022. Dostupné z: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/`.

[9] *Hackmath.net*. *[online]*, Citováno 28. června 2022. Dostupné z: `https://www.hackmath.net/`.

[10] *Priklady.eu*. *[online]*, Citováno 2. července 2022. Dostupné z: `https://www.priklady.eu/`.