Základy středoškolské kombinatoriky

David Weber

david.weber99@seznam.cz

26. června 2022

Obsah

Kapitola 1

Základní pojmy a značení

1.1 Was ist kombinatorika?

Kombinatorika představuje matematickou disciplínu zabývající se se kolekcemi prvků množin s definovanou vnitřní strukturou. Řekneme-li to méně formálně, studuje, kolika způsoby lze sestavit konfiguraci s jistými vlastnostmi. Zároveň se tak váže k blízkému oboru zvanému **teorie pravděpodobnosti**.

Typickou úlohou (otázkou) kombinatoriky je třeba tato:

Úloha 1.1.1. Na svatbě je n lidí.

(a) Kolika způsoby lze n svatebčanů sestavit do řady?

(b) V kolika případech stojí nevěsta napravo od ženicha?

(c) Kolik je řad, že ženich a nevěsta stojí vedle sebe?

Poměrně pěknou a lehce humornou úlohou spadající do klasické kombinatoriky je např. tzv. *problém šatnářky.*

Úloha 1.1.2. *Ctihodní pánové v počtu n přijdou na shromáždění, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu šatnářka, možná ten den velmi roztržitá, možná dokonce z mizerného osvětlení osleplá, vydá z pánů náhodně jeden z klobouků. Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane od šatnářky zpět svůj klobouk?* [1, str. 105]

Dalšími zajímavými problémy jsou např. tyto

Úloha 1.1.3.
- *Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže pomocí n přímek rozdělíme rovinu?* [2, str. 38]
- *Kolika způsoby lze rozměnit jeden dolar?* [3, str. 130]
- *Kolik různých náhrdelníků s dvaceti korálky lze vyrobit z korálků rodonitu, růženínu a lazuritu, pokud lze náhrdelník nosit v jakékoli orientaci?* [3, str. 130]

Kromě první zmíněné úlohy jsou ostatní svým řešením již nad rámec tohoto textu, avšak např. zmíněný problém šatnářky[1] 1.1.2 vede posléze k velmi zajímavým výsledkům. Nicméně pro řešení úlohy 1.1.1 a jí příbuzných si v dalších odstavcích vybudujeme potřebný matematický aparát.

[1] Konkrétně zde se při řešení využije tzv. *princip inkluze a exkluze.*

1.2 Množiny

Množiny pro nás budou klíčovým pojmem, neboť s jejich pomocí budeme formulovat další části výkladu. Proto považuji za nezbytné si zopakovat aspoň některé základní vlastnosti a operace, které s množinami můžeme provádět. Množinou v matematice rozumíme „soubor neuspořádaných prvků". Dvě množiny tak považujeme za stejné (sobě rovné) právě tehdy, když mají stejné prvky. Byť tento popis nepředstavuje zcela formální definici, pro naše potřeby s tímto chápáním vystačíme.

Množiny zapisujeme pomocí složených závorek $\{,\}$, přičemž jejich specifikace lze provést dvě způsoby:

- výčtem (výpisem) jednotlivých prvků,
- společnou vlastností

Příklad 1.2.1. Množinu M obsahující prvky a, b, c lze jako

$$M = \{a, b, c\}.$$

V případě většího počtu prvků, avšak s jistou strukturou, můžeme množinu specifikovat buď pomocí „$\ldots$" nebo explicitním vyjádřením specifické vlastnosti.

Příklad 1.2.2. Množinu všech přirozených čísel menších nebo rovny 5 lze zapsat jako

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 5\} \quad \text{nebo} \quad S = \{1, 2, \ldots, 5\}.$$

Důležitou vlastností množin je, že neuvažujeme násobné výskyty prvků. Tedy např. množiny $M = \{1, 2, 3\}$ a $N = \{1, 2, 2, 3, 3\}$ jsou si rovny, tj. $M = N$. Též je vhodné si připomenout, že chceme-li vyjádřit, že libovolný prvek a je v množině A, pak píšeme $a \in A$ (čteme „a náleží množině A"). Naopak v případě, že prvek a nenáleží množině A, píšeme $a \notin A$.

Podstatnou vlastností pro nás budou operace *sjednocení*, *průniku* a *rozdílu* množin.

Definice 1.2.3 (Sjenocení, průnik a rozdíl)**.** Mějme množiny[2] A, B. Pak definujeme:

(i) sjednocení $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, tj. výsledná množina obsahuje prvky množiny A a zároveň prvky množiny B.

(ii) průnik $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, tj. výsledná množina obsahuje *pouze* prvky, které náleží oběma množinám.

(iii) rozdíl $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$, tj. výsledná množina obsahuje pouze ty prvky z množiny A, které nenáleží množině B.

Příklad 1.2.4. Pro množiny[3] $X = \{x, y, z\}$ a $Y = \{x, z, \{z\}, w\}$ platí

- $X \cup Y = \{x, y, z\} \cup \{x, z, \{z\}, w\} = \{x, y, z, x, z, \{z\}, w\} = \{x, y, z, \{z\}, w\}$,
- $X \cap Y = \{x, y, z\} \cap \{x, z, \{z\}, w\} = \{x, z\}$,
- $X \setminus Y = \{x, y, z\} \setminus \{x, z, \{z\}, w\} = \{x, z\} = \{y\}$.

Zkuste si výsledky operací porovnat s definicí 1.2.3 výše.

[2] Mohou být **konečné** i **nekonečné**, avšak nás budou zajímat konečné množiny.

[3] U množiny Y si uvědomme, že prvek $\{z\}$ není to samé jako prvek z, tedy např. po sjednocení se ve výsledné množině vyskytnou oba.

Pro větší počet množin můžeme využít pro zápis sjednocení tzv. *velké operátory* $\bigcup$, $\bigcap$. Máme-li tedy množiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$, můžeme jejich sjednocení, resp. průnik zapsat jako

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \quad \text{resp.} \quad \bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$$

Poslední, co nás bude zajímat, je velkost množiny. Tu budeme označovat svislými čarami, tedy např. velikost množiny X zapíšeme jako $|X|$. Konkrétně např. pro množinu $A = \{-1, 0, 10, 20\}$ je velikost $|A| = 4$.

Kapitola 2

Kombinatorické počítání

Seznam použité literatury

[1] J. Matoušek a J. Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 4., upr. a dopl. vyd. Karolinum, Praha, 2009. ISBN 978-80-246-1740-4.

[2] A. Slavík. *Kombinatorika*. *[online]*, Citováno 26. června 2022. Dostupné z: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/kombinatorika/skripta-kombinatorika.pdf`.

[3] John M. Harris, Jeffry L. Hirst, and Michael J. Mossinghoff. *Combinatorics and graph theory*. Springer, 2010. ISBN 978-14-419-2723-1.