Základy středoškolské kombinatoriky

David Weber

david.weber99@seznam.cz

28. června 2022

Obsah

Kapitola 1

Úvodem

1.1 Was ist kombinatorika?

Kombinatorika představuje matematickou disciplínu zabývající se se kolekcemi prvků množin s definovanou vnitřní strukturou. Řekneme-li to méně formálně, studuje, kolika způsoby lze sestavit konfiguraci s jistými vlastnostmi. Zároveň se tak váže k blízkému oboru zvanému **teorie pravděpodobnosti**.

Typickou úlohou (otázkou) kombinatoriky je třeba tato:

Úloha 1.1.1. Na svatbě je n lidí.

(a) Kolika způsoby lze n svatebčanů sestavit do řady?

(b) V kolika případech stojí nevěsta napravo od ženicha?

(c) Kolik je řad, že ženich a nevěsta stojí vedle sebe?

Poměrně pěknou a lehce humornou úlohou spadající do klasické kombinatoriky je např. tzv. *problém šatnářky.*

Úloha 1.1.2. *Ctihodní pánové v počtu n přijdou na shromáždění, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu šatnářka, možná ten den velmi roztržitá, možná dokonce z mizerného osvětlení oslepá, vydá z pánů náhodně jeden z klobouků. Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane od šatnářky zpět svůj klobouk?* [1, str. 105]

Dalšími zajímavými problémy jsou např. tyto

Úloha 1.1.3.

- *Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže pomocí n přímek rozdělíme rovinu?* [2, str. 38]
- *Kolika způsoby lze rozměnit jeden dolar?* [3, str. 130]
- *Kolik různých náhrdelníků s dvaceti korálky lze vyrobit z korálků rodonitu, růženínu a lazuritu, pokud lze náhrdelník nosit v jakékoli orientaci?* [3, str. 130]

Kromě první zmíněné úlohy jsou ostatní svým řešením již nad rámec tohoto textu, avšak např. zmíněný problém šatnářky[1] 1.1.2 vede posléze k velmi zajímavým výsledkům. Nicméně pro řešení úlohy 1.1.1 a jí příbuzných si v dalších odstavcích vybudujeme potřebný matematický aparát.

[1] Konkrétně zde se při řešení využije tzv. *princip inkluze a exkluze.*

1.2 Množiny

Množiny pro nás budou klíčovým pojmem, neboť s jejich pomocí budeme formulovat další části výkladu. Proto považuji za nezbytné si zopakovat aspoň některé základní vlastnosti a operace, které s množinami můžeme provádět. Množinou v matematice rozumíme „soubor neuspořádaných prvků“. Dvě množiny tak považujeme za stejné (sobě rovné) právě tehdy, když mají stejné prvky. Byť tento popis nepředstavuje zcela formální definici, pro naše potřeby s tímto chápáním vystačíme.

Množiny zapisujeme pomocí složených závorek $\{,\}$, přičemž jejich specifikace lze provést dvě způsoby:

- výčtem (výpisem) jednotlivých prvků,
- společnou vlastností

Příklad 1.2.1. Množinu M obsahující prvky a, b, c lze jako

$$M = \{a, b, c\} .$$

V případě většího počtu prvků, avšak s jistou strukturou, můžeme množinu specifikovat buď pomocí „...“ nebo explicitním vyjádřením specifické vlastnosti.

Příklad 1.2.2. Množinu všech přirozených čísel menších nebo rovny 5 lze zapsat jako

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 5\} \quad \text{nebo} \quad S = \{1, 2, \ldots, 5\} .$$

Důležitou vlastností množin je, že neuvažujeme násobné výskyty prvků. Tedy např. množiny $M = \{1, 2, 3\}$ a $N = \{1, 2, 2, 3, 3\}$ jsou si rovny, tj. $M = N$. Též je vhodné si připomenout, že chceme-li vyjádřit, že libovolný prvek a je v množině A, pak píšeme $a \in A$ (čteme „a náleží množině A“). Naopak v případě, že prvek a nenáleží množině A, píšeme $a \notin A$.

Podstatnou vlastností pro nás budou operace *sjednocení*, *průniku* a *rozdílu* množin.

Definice 1.2.3 (Sjenocení, průnik a rozdíl)**.** Mějme množiny[2] A, B. Pak definujeme:

(i) sjednocení $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, tj. výsledná množina obsahuje prvky množiny A a zároveň prvky množiny B.

(ii) průnik $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, tj. výsledná množina obsahuje *pouze* prvky, které náleží oběma množinám.

(iii) rozdíl $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$, tj. výsledná množina obsahuje pouze ty prvky z množiny A, které nenáleží množině B.

Příklad 1.2.4. Pro množiny[3] $X = \{x, y, z\}$ a $Y = \{x, z, \{z\}, w\}$ platí

- $X \cup Y = \{x, y, z\} \cup \{x, z, \{z\}, w\} = \{x, y, z, x, z, \{z\}, w\} = \{x, y, z, \{z\}, w\}$,
- $X \cap Y = \{x, y, z\} \cap \{x, z, \{z\}, w\} = \{x, z\}$,
- $X \setminus Y = \{x, y, z\} \setminus \{x, z, \{z\}, w\} = \{x, z\} = \{y\}$.

Zkuste si výsledky operací porovnat s definicí 1.2.3 výše.

[2] Mohou být **konečné** i **nekonečné**, avšak nás budou zajímat konečné množiny.

[3] U množiny Y si uvědomme, že prvek $\{z\}$ není to samé jako prvek z, tedy např. po sjednocení se ve výsledné množině vyskytnou oba.

Pro větší počet množin můžeme využít pro zápis sjednocení tzv. *velké operátory* $\bigcup$, $\bigcap$. Máme-li tedy množiny $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$, můžeme jejich sjednocení, resp. průnik zapsat jako

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \quad \text{resp.} \quad \bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$$

Poslední, co nás bude zajímat, je velkost množiny. Tu budeme označovat svislými čarami, tedy např. velikost množiny X zapíšeme jako $|X|$. Konkrétně např. pro množinu $A = \{-1,\ 0, 10, 20\}$ je velikost $|A| = 4$.

Poznámka 1.2.5. K závěru ještě pár poznámek:

- Prázdnou množinu (tj. množinu neobsahující žádné prvky) budeme značit symbolem $\emptyset$.
- Pokud platí pro množiny A a B, že nemají žádné společné prvky, tj. $A \cap B = \emptyset$, pak je nazýváme *disjunktní*. Obecněji řekneme-li, že množiny $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$ jsou ***po dvou*** *disjunktní*, pak tím myslíme, že pro libovolnou dvojici množin X_i a X_j platí

  $$X_i \cap X_j = \emptyset,$$

  přičemž $0 \leqslant i,\ j \leqslant n$.

Kapitola 2

Kombinatorické počítání

Nyní se již podíváme na některé základní nástroje kombinatoriky a jejich využití. Na úvod se takto proto podíváme na pár motivačních příkladů.

2.1 Pravidlo součinu a součtu

Vezměme si pro začátek jednu motivační úlohu.

Úloha 2.1.1. *Předpokládejme, že chceme zjistit počet různých kurzů nabízených Wisconsinskou univerzitou v Madisonu. Kurzy rozdělíme podle oddělení, na kterém jsou uvedeny. Za předpokladu, že nedochází ke křížovému vypisování (křížové vypisování nastává, když je stejný kurz vypsán na více než jedné katedře), kolik předmětů si můžeme jako studenti zapsat?* [4, str. 28]

Řešení. K problému můžeme přistoupit následovně: předměty si postupně rozdělíme do množin. Množinu všech dostupných předmětů si označíme C (z angl. *classes*). To znamená, že hledáme $|C|$. Předměty si rozdělíme do množin podle katedry, která je nabízí. Tedy máme-li na univerzitě, pro zjednodušení, např. 5 kateder, pak se nám předměty rozdělí do pěti množin, které si označíme $C_1, \ldots, C_5$. Množina všech předmětů C je jednoduše sjednocením předmětů z jednotlivých kateder $C_1, \ldots, C_5$, tj.

$$C = \bigcup_{i=1}^{5} C_i = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \,.$$

Protože ze zadání víme, že každý předmět je vypsán v rámci **právě jedné** katedry, pak množiny $C_1, \ldots, C_5$ jsou po dvou disjunktní. Takže nám jednoduše stačí spočítat předměty na jednotlivých katedrách

$$|C| = \sum_{i=1}^{5} |C_i| = |C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| + |C_5| \,.$$

□

Ačkoliv jsme úlohu 2.1 jsme řešili sice trochu složitě, intuitivně je tento způsob nejspíše jasný. Máme-li n_1 způsobů, jak provést určitou akci a n_2 způsobů, jak provést nějakou jinou akci (kterou nelze provést současně s první), pak máme dohromady $n_1 + n_2$ způsobů, jak vybrat některou činnost.

Z tohoto jednoduchého principu plyne tzv. *kombinatorické pravidlo součtu*, které budeme v dalších úlohách využívat.

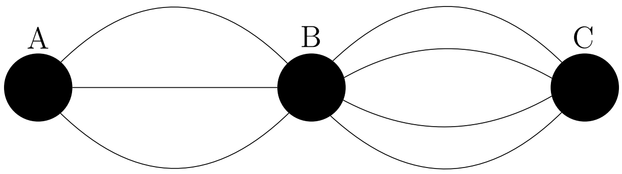
Věta 2.1.2 (Kombinatorické pravidlo součtu)**.** *Jsou-li X_1, X_2, $\dots$, X_n konečné množiny, které jsou po dvou disjunktní, pak platí*

$$|X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n|$$

nebo zkráceně

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|\,.$$

Představme si, že máme městečka A, B, C, mezi nimiž vede po řadě 3 a 5 cest (tj. 3 cesty mezi A a B, 4 cesty mezi B a C).



Obrázek 2.1: Cesty mezi městy A, B, C.

Chceme zjistit počet všech způsobů, jak se dostat z města A do města C. Jak aplikujeme pravidlo součtu zde? Mohli bychom si zde rozdělit cesty z A do C do množin podle toho, kterou cestou jsme dorazili z A do B. Pokud tak učiníme, pak jsme rozdělili cesty do celkem tří množin P_1, P_2, P_3, přičemž všechny jsou po dvou disjunktní (žádná z cest z A do C nemůže obsahovat dvě různé cesty z A do B) a množina P obsahuje všechny cesty z A do C. Tedy celkový počet cest $|P|$ je roven součtu $|P_1| + |P_2| + |P_3|$. Pro každou cestu mezi městy A a B máme 4 možnosti, kudy se dostat z B do C. Tedy

$$|P_1| = |P_2| = |P_3| = 4.$$

To znamená, že celkový počet cest $|P| = |P_1| + |P_2| + |P_3| = 4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12.$.

Tento způsob je jistě velmi nepraktický a navíc je celkem očividné, že na daný výsledek jsme mohli přijít hned. Stačilo vynásobit počet cest mezi městy A a B a počet cest mezi městy B a C. Z toho dostáváme druhé kombinatorické pravidlo:

Věta 2.1.3 (Kombinatorické pravidlo součinu)**.** *Počet uspořádaných k-tic, jejichž i-tý člen lze vybrat n_i způsoby je roven*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

Je důležité zmínit, že jednotlivé výběry **musí být nezávislé**, tedy výběr na jednu pozici nesmí ovlivnit počet výběrů na ostatní pozice. Méně formálně, avšak užitečněji, můžeme pravidlo formulovat i takto: *Lze-li první výběr provést celkem n způsoby a druhý výběr m způsoby bez ohledu na první výběr, pak celkový počet dvojic možných výběrů je nm.* (Pochopitelně, toto lze zobecnit na libovolný počet výběrů, jako je tomu v 2.1.3.)

Úloha 2.1.4. Křídy jsou vyráběny

- ve 3 různých barvách,
- v 8 různých délkách
- a o 4 různých průměrech.

Kolik typů křích celkově lze zakoupit? [4, str. 29]

Řešení. Barvu křídy můžeme vybrat celkem třemi způsoby, délku osmi způsoby a průměr křídy celkem čtyřmi způsoby. Protože výběry jsou na sobě nezávislé, pak podle předchozího pravidla součinu existuje celkem $3 \cdot 8 \cdot 4 = 96$ typů kříd. □

Úloha 2.1.5. Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže

(a) cifry se mohou opakovat,

(b) cifry se nemohou opakovat?

(Úloha i řešení [2, str. 7].)

Řešení. Řešení (a) Protože se cifry mohou opakovat, pak na každé číselné pozici máme stejný počet možností výběru číslici, až na první pozici, neboť nemůžeme vybrat číslici 0 (jinak by se nejednalo o *čtyřciferné* číslo). Na první pozici máme tak 5 možností výběru a na zbylých třech máme 6 možností, tj. celkově existuje

$$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080 \text{ možností.}$$

□

Řešení. Řešení (b) Tentokrát se cifry nesmí opakovat. Úvaha tak zůstává stejná, ale při určování počtu možností výběru musíme zohlednit již vybrané číslice. Na první pozici tak máme 5 možností výběru (nesmíme vybrat nulu), na druhé pozici máme 5 možností (původně jsme měli 6, ale jednu cifru jsme již použili na první pozici), na třetí pozici máme 4 možnosti (2 číslice jsme již použili) a na čtvrté pozici máme 3 možnosti. Celkově tak existuje

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300 \text{ možností.}$$

□

Kombinatorické pravidlo součtu a součinu však můžeme v různých úlohách kombinovat. Speciálně, pokud si tak ulehčíme hledání určených konfigurací.

Úloha 2.1.6. Kolik sudých čísel čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se nesmí opakovat? (Úloha i řešení [2, str. 8].)

Řešení. Aby výsledné číslo bylo sudé, musí končit (tj. mít na čtvrté pozici) číslici 0, 2, nebo 4. Zde již však nastává problém, neboť nemůžeme hned aplikovat pravidlo součinu. Je tomu tak proto, že pokud by byla na čtvrté pozici nula, pak na první pozici máme 5 možností, zatímco pokud by zde byla číslice 2, nebo 4, pak počet přípustných číslic na první pozici je již pouze 4 (nesmíme vybrat číslici 0 a pak číslici na čtvrté pozici). Počet výběrů tak již není nezávislý. Nicméně můžeme každý z případů vyšetřit zvlášť:

- označme si množinu D_1 (z angl. *digit*) obsahující všechna čísla končící číslicí 0,
- množinu čísel D_2 končících číslicí 2 a
- množinu čísel D_3 končících číslicí 4.

Pro čísla končící nulou máme na první pozici celkem 5 možností, na druhé pak 4 možnosti a na třetí 3 možnosti. Tedy z kombinatorického pravidla součinu máme

$$|D_1| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ možností.}$$

Množiny D_2 a D_3 mají stejnou velikost, neboť v obou případech máme na první pozici 4 možnosti výběru, na druhé 4 možnosti výběru a na třetí 3 možnosti. Tj.

$$|D_2| = |D_3| = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 \text{ možností.}$$

Je jasné, že tyto množiny jsou disjunktní (každá dvojice množin obsahuje čísla s jinou číslicí na čtvrté pozici). Tedy podle kombinatorického principu součtu platí

$$|D_1 \cup D_2 \cup D_3| = |D_1| + |D_2| + |D_3| = 60 + 48 + 48 = 156 \text{ možností.}$$

□

2.2 Variace, permutace a kombinace

Nyní trochu rozšíříme na repertoár nástrojů. Zatím jsme řešili úlohy, kde jsme vybírali vždy „po jednom" prvku, abychom dosáhli jisté konfigurace. Nyní se podíváme, jakých výsledků dosáhneme v případě, kdy budeme již vybírat nějaké k-tice z nějaké n prvkové množiny objektů.

Je třeba si rozmyslet dva základní případy:

- výběr k-tic, kde **záleží na pořadí**,
- výběr k-tic, kde **nezáleží na pořadí**.

S prvním případem jsme již do jisté míry obeznámeni, neboť u úloh, které jsme řešili, vždy záleželo na pořadí. To tedy vede na sestavování tzv. *uspořádaných k-tic*, které jsme již zmínili ve formulaci kombinatorického pravidla součinu 2.1.3. Těm říkáme tzv. **variace k-té třídy z n prvků**. Tedy např. variací 2. třídy z množiny $\{1, 2, 3\}$ je třeba

$$(1, 3) \quad \text{nebo} \quad (3, 1).$$

Druhý případ je pro nás novinkou. Vybíráme totiž tzv. *neuspořádané k-tice*, tzn. vybereme-li např. z množiny $\{a, b, c\}$ neuspořádanou dvojici sestávající z prvků a a c, pak je to stejné jako výběr neuspořádané dvojice sestávající z prvků c a a. Takový výběr nazýváme **kombinací k-té třídy z n prvků**.

Zatím se omezíme na tzv. variace, resp. kombinace **bez opakování**.

2.2.1 Výběry bez opakování

Výběrem bez opakování rozumíme výběr k-tice prvků takové, že se v ní žádný prvek neopakuje, tzn. každý je v ní nejvýše jednou. Tedy rozlišujeme

- *variace bez opakování* a
- *kombinace bez opakování.*

Pojďme se nyní podívat na metody jejich výpočtu.

Věta 2.2.1 (Variace bez opakování)**.** *Počet uspořádaných k-tic sestavených z n-prvkové množiny tak, že se každý prvek ve výběru vyskytne nejvýše jednou, je roven*

$$\prod_{i=1}^{k}(n - i + 1) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Důkaz. Tento fakt přímo plyne z kombinatorického pravidla součinu. Na první pozici máme n možností výběru, na druhé $n-1$ možností, ... a pro k-tý člen máme $n-k+1$ možností. Tedy celkově $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ možností. □

Počet variací k-té třídy z n-prvkové množiny bez opakování budeme značit $V_k(n)$.

Úloha 2.2.2. Ve třídě, kde je celkem 25 dětí, si žáci volí nového pokladníka, šatnáře a službu na tabuli, přičemž jeden žák nesmí zastávat více pozic zároveň. Kolika různými způsoby si může třída zvolit žáky na dané pozice.

Řešení. V tomto případě jistě záleží na pořadí výběru (vybrat žáka na pozici šatnáře není jistě to samé, jako jej vybrat na pozici pokladníka). Tedy budeme počítat variace 3. třídy z 25 prvků bez opakování, tedy existuje

$$V_3(25) \overset{2.2.1}{=} 25 \cdot (25-1) \cdot (25-2) = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800 \text{ způsobů.}$$

□

Dalším důležitým, a zatím nezmíněným termínem, je tzv. *permutace*. Permutací rozumíme libovolné uspořádání n prvků do řady. Tedy např. 5, 3, 2, 4, 1 je permutace množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Permutace lze interpretovat jako uspořádané n-tice, což z nich dělá speciální případ variace (výběr uspořádané n-tice z n prvkové množiny). Stejně jako u variací a kombinací rozlišujeme permutace s opakováním a bez opakování.

Věta 2.2.3 (Permutace bez opakování)**.** *Počet uspořádaných n-tic z n-prvkové množiny tak, že se každý prvek ve výběru vyskytne nejvýše jednou, je*

$$\prod_{i=1}^{n} i = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1.$$

Důkaz. Permutace je speciálním případem variace pro $k=n$, tedy $V_n(n) \overset{2.2.1}{=} n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.$ □

Definice 2.2.4 (Faktoriál)**.** Je-li $n \in \mathbb{N}$, pak definujeme číslo

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i,$$

které nazýváme *faktoriál* (čteme „n faktoriál“).

Číslo $n!$ tedy vyjadřuje počet permutací n prvkové množiny[1].

Úloha 2.2.5. Z 10 knih je 6 psáno česky a zbylé 4 latinsky. Kolika různými způsoby lze daná knihy umístit na poličku, jestliže všechny knihy psané česky mají být vedle sebe a všechny latinsky psané vedle sebe?[5]

Řešení. Všechny české knihy chceme seřadit vedle sebe, tj. jedná se o permutaci na šesti prvcích, kterých je $6!$. Podobně latinsky psané knihy lze vedle sebe seřadit $4!$ způsoby. Seřazení český a latinských knih jsou na sobě nezávislá a tedy podle kombinatorického pravidla součinu existuje

$$6! \cdot 4! = (6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1) = 720 \cdot 24 = 17280 \text{ možností.}$$

[1] Podobně jako pro variace, i pro permutaci n prvkové množiny se zřídka používá značení $P(n)$. Avšak je tomu tak málokdy, neboť často se při výpočtech píše rovnou $n!$.

□

Zatím jsme se zabývali uspořádanými k-ticemi (variace a permutace), jejichž důležitou vlastností bylo, že záleželo na pořadí. Pokud ovšem chceme od pořadí upustit a soustředit se jen na vybrané prvky, budeme muset náš výpočet lehce upravit.

Věta 2.2.6 (Kombinace bez opakování)**.** *Počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků n prvkové množiny tak, že se každý prvek ve výběru vyskytne nejvýše jednou, je roven*

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}(n-i+1)$$

Důkaz. Naši úvahu můžeme založit na následujícím pozorování: máme-li nějakou *neuspořádanou* k-tici prvků z n prvkové množiny, pak existuje přesně $k!$ způsobů, jak vybrané prvky uspořádat do řady, čímž z ní vytvoříme *uspořádanou* k-tici. To znamená, že platí

$$(\text{počet uspořádaných } k\text{-tic}) = k! \cdot (\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}).$$

Počet neuspořádaných k-tic umíme vypočítat podle věty 2.2.1, tedy máme

$$\prod_{i=1}^{k}(n-i+1) = k! \cdot (\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}).$$

Vydělíme-li rovnost číslem $k!$, dostaneme požadovaný výraz, tj.

$$(\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}) = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}(n-i+1)$$

□

Seznam použité literatury

[1] J. Matoušek a J. Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 4., upr. a dopl. vyd. Karolinum, Praha, 2009. ISBN 978-80-246-1740-4.

[2] A. Slavík. *Kombinatorika*. *[online]*, Citováno 26. června 2022. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/kombinatorika/skripta-kombinatorika.pdf.

[3] John M. Harris and Michael J. Hirst, Jeffry L. and Mossinghoff. *Combinatorics and graph theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2010. ISBN 978-14-419-2723-1.

[4] Richard A. Brualdi. *Introductory combinatorics*. 5th ed. Pearson/Prentice Hall, 2018. ISBN 978-71-112-6525-2.

[5] L. Havrlant. *Matematika polopatě - Permutace*. *[online]*, Citováno 27. června 2022. Dostupné z: https://www.matweb.cz/permutace/.