



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. David Weber

Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro střední
školy

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední
školy se sdruženým studiem
Učitelství informatiky pro střední
školy

Praha (TODO: doplnit rok odevzdání.)

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

(TODO: Doplnit poděkování.)

Název práce: Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry

Autor: Bc. David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: (TODO: Doplnit abstrakt (česky).)

Klíčová slova: , klicova slova

Title: (TODO: doplnit název anglicky.)

Author: Bc. David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: (TODO: Doplnit abstrakt (anglicky).)

Keywords: keywords

Obsah

Předmluva	2
1 Úvod do fraktálů	3
1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?	3
1.2 Soběpodobnost	6
1.2.1 Kochova křivka	6
1.2.2 Sierpiňského trojúhelník	8
1.2.3 Kochova vločka	9
1.3 Fraktální dimenze	11
Seznam použité literatury	12
Seznam obrázků	13

Předmluva

(TODO: napsat předmluvu.)

Kapitola 1

Úvod do fraktálů

Pod pojmem “geometrie” si čtenář pravděpodobně vybaví rovinnou či prostorovou geometrii pracující s jednoduchými útvary jako trojúhelník, obdélník, kruh, kvádr, jehlan, apod. a s útvary z nich složenými. V reálném světě tak lze nalézt mnoho uplatnění této “standardní” geometrie, kupříkladu ve strojírenství, stavebnictví, i jinde. Často tak můžeme mít o světě představu právě ve smyslu eukleidovské geometrie. Lze však nalézt řadu objektů, pro jejichž popis tyto představy jsou limitující. Např. v přírodě mrak nelze popsat jako kouli, horu nelze popsat jako jehlan a ani pobřeží nelze určitě popsat jako kružnici.

Mnohé přírodní obrazce již nelze jednoduše modelovat pomocí nástrojů “standardní” eukleidovské geometrie, s níž jsme seznámeni již od základní školy a která byla po mnoho století základním nástrojem pro popis a porozumění matematickému prostoru. Často zde hraje roli i jistá nahodilost projevující se v jejich charakteru. *Fraktální geometrie* se zabývá nepravidelnými a často se opakujícími vzory, které se vyskytují v přírodě i umění. Tyto vzory jsou často složité a zdánlivě chaotické, ale fraktální geometrie nám umožňuje je analyzovat a pochopit.

Vznik fraktální geometrie se datuje od roku 1975, za jejíhož zakladatele je považován francouzsko-americký matematik BENOÎT MANDELBROT (1924–2010). Historicky za jejím vznikem stály objevy matematických struktur, které nespadaly pod “představy” do tehdy známé eukleidovské geometrie. Byly často považovány za “patologické”, nicméně matematici, kteří je vytvořili, je považovali za důležité pro ukázkou bohatých možností, které nabízí svět matematiky překračující možnosti jednoduchých struktur, které viděli okolo sebe. [1, str. 33]

1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?

Položme si na začátek trochu jinou otázku, kterou si z počátku položil i Benoît Mandelbrot: *Jaká je podstata tvaru pobřeží?* Ta se stala podstatnou v jeho práci „*How Long Is the Coast of Britain?*“. Uvažme část pobřeží s počátečním a koncovým bodem (viz obrázek 1.1). Zjevně jeho délka je zdola omezena délkou spojnice koncových bodů A a B , nicméně typické pobřeží je velmi nepravidelné a klikaté, a jeho skutečná délka je tak často mnohem delší. Existují různé metody, které nám umožňují určit přesněji jeho délku. Několik z nich je popsáno v knize [1, str. 79], pro uvedení do problematiky si zde však vystačíme s tou nejjednodušší.



Obrázek 1.1: Příklad mapy pobřeží se spojnici bodů A a B .

Předpokládejme, že pobřeží, které zkoumáme, má pevné hranice (tj. zanedbáváme např. přílivy a odlivy nastávající během roku), a dále jsme schopni rozlišovat libovolně krátké vzdálenosti.

Mějme zadané libovolné $\varepsilon > 0$. Podél pobřeží začneme umísťovat tyče tak, že po každém umístění provedeme na mapě krok délky **nejvýše** ε , přičemž začínáme v bodě A a postupujeme až k bodu B (popř. pokud měříme délku pobřeží ostrova, pokračujeme dokud se nevrátíme tam, kde jsme začali). Předpokládejme, že jsme provedli celkově $n(\varepsilon)$ kroků (jejich počet je závislý na zvolené délce kroku). *Přibližnou délku pobřeží* $\ell(\varepsilon)$ pak stanovíme jako

$$\ell(\varepsilon) = n(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Nyní by nás mohlo napadnout, že pro zmenšující se ε , tj. $\varepsilon \rightarrow 0^+$, bude hodnota



Obrázek 1.2: Odhad délky pobřeží, kde $n = 10$ při zvoleném ε .

$\ell(\varepsilon)$ konvergovat ke skutečné délce pobřeží. Tzn. označíme-li skutečnou délku pobřeží L , pak bychom mohli očekávat, že platí

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ell(\varepsilon). \quad (1.1)$$

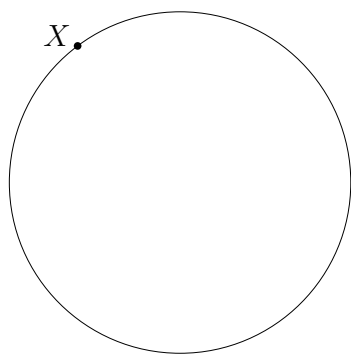
Jenže, bohužel, limita (1.1) ve skutečnosti bude rovna ∞ . Proč? Je třeba si uvědomit, že zde pracujeme s *mapou* pobřeží, která má určité *měřítko*. Pokud bychom měli pobřeží na mapě s měřítkem 1 : 100 000, uvidíme méně detailů, než kdybychom jej zkoumali na mapě s měřítkem 1 : 1 000. (Viz obrázek 1.3.)



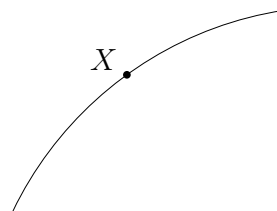
Obrázek 1.3: Část pobřeží od bodu A v menším měřítku.

Nově odhalené detaily (menší poloostřívky apod.) zde přispívají k celkové délce pobřeží $\ell(\varepsilon)$. Postupným zvětšováním měřítka mapy bychom tak odhalili další detaily. Naše původní idea tak selhává, neboť (v “klasickém” pojetí délky) pro $\varepsilon \rightarrow 0^+$ hodnota $\ell(\varepsilon)$ poroste nade všechny meze, tj. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ell(\varepsilon) = \infty$.

Nabízí se otázka: Proč se toto děje? Pokud se ohlédneme zpět za eukleidovskou geometrií, tento problém zde nenastává. Např. u kružnice v eukleidovské rovině \mathbb{E}_2 změnou měřítka žádné další detaily křivky neobjevíme (podobně u jiných geometrických útvarů, viz obrázky 1.4a a 1.4b). Díky tomu můžeme v případě



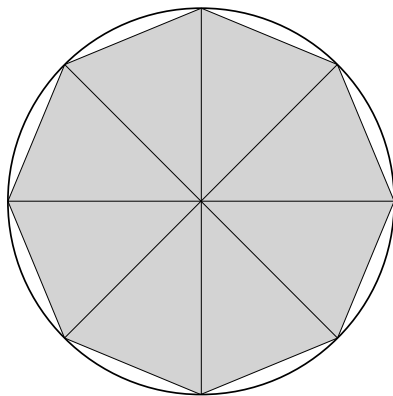
(a) Kružnice v menším měřítku.



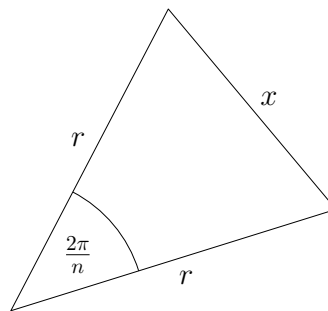
(b) Část kružnice ve větším měřítku.

počítání obvodu kružnice použít např. Archimédovu metodu.

Máme-li kružnici o poloměru $r > 0$, pak jí můžeme vepsat libovolný pravidelný n -úhelník (viz obrázek 1.5a). Obvod pravidelného n -úhelníku is označíme



(a) Pravidelný osmiúhelník vepsaný kružnici.



(b) Část vepsaného pravidelného n -úhelníku.

Obrázek 1.5: Princip Archimédovy metody.

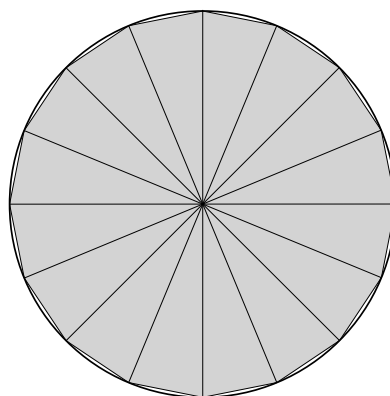
O_n a délku jeho strany x (viz obrázek 1.5b). Tu jsme schopni stanovit užitím elementární goniometrie, tj.

$$x = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

a tedy obvod

$$O_n = 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

Pro rostoucí n bude obvod pravidelného n -úhelníku stále lépe aproximovat obvod původní kružnice (viz obrázek 1.6). Limitním přechodem (tj. pro $n \rightarrow \infty$) tak



Obrázek 1.6: Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku.

můžeme odvodit vzorec pro obvod kružnice:

$$O = \lim_{n \rightarrow \infty} 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

Idea aproximace pomocí “zjemňování” zde skutečně funguje a délka ve standardním pojetí tak dává smysl, jak bychom mohli očekávat. Křivka, kterou tvoří pobřeží, má však oproti kružnici jiný geometrický charakter. Délka pobřeží ∞ , k níž Mandelbrot došel, tak dává smysl z *geometrického pohledu*, avšak výsledek to není moc užitečný.

1.2 Soběpodobnost

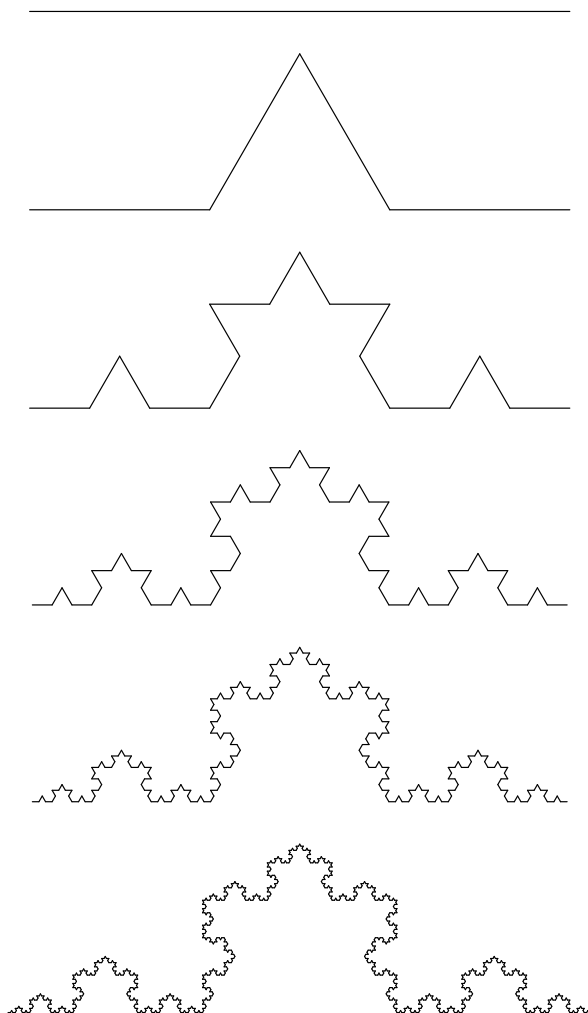
Mandelbrot si uvědomil, že struktura pobřeží se charakterově vymyká útvarům do tehdy známým eukleidovské geometrii, neboť mapy s různými měřítky poskytovaly různou úroveň detailů, které hrály netriviální roli v jeho celkové délce. Učinil však jiné zásadní pozorování, a to sice, že mnoho detailů má společné rysy, které se opakují. Hodně z nich se shodovalo s výjimkou jejich měřítka. [1, str. 96]

Ve fraktální geometrii se pro tento úkaz uchýlil termín *soběpodobnost* (angl. *self-similarity*). Útvar nazýváme soběpodobným, **pokud se sám sobě podobný v libovolném měřítku** [2, str. 220] nebo pokud **část útvaru je podobná jeho celku**. Zmíněná podoba může být míněna přibližně (např. v případě pobřeží je nejspíše jasné, že žádné z jeho detailů nesdílejí společné rysy přesně), ale v dalších částech si předvedeme soběpodobnost *přímou*.

1.2.1 Kochova křivka

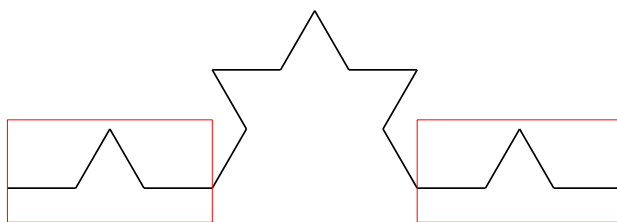
Jak jsme si již uvedli, za otce fraktální geometrie je považován Mandelbrot, avšak mnoho fraktálních křivek bylo známo již dříve (čtenář promine, že jsme zatím blíže nespecifikovali termín “fraktální”, jeho význam pro nás však zatím nebude stěžejní). Jako první se podíváme na jednu z nejznámějších, kterou objevil

roku 1904 švédský matematik HELGE VON KOCH (1870–1924), dnes známou pod názvem *Kochova křivka*. [3, str. 61] Na začátku vezmeme úsečku délky 1. Vyjmeme prostřední (tj. druhou) třetinu a nahradíme ji dvěma úsečkami délky $1/3$, tak, aby na sebe navazovaly v krajních bodech. Tento proces následně opakujeme pro nově vzniklé úsečky. Obecně u úsečky délky l nahradíme její prostřední třetinu dvojicí úseček délek $l/3$ (viz obrázek 1.7). V první řadě si můžeme všimnout, že



Obrázek 1.7: Prvních pět iterací Kochovy křivky.

v každé další iteraci jsou nově vzniklé podobné původnímu celku, tedy v předešlé iteraci (viz obrázek 1.8). Pokud by tento proces pokračoval do nekonečna, pak by každá ze čtyř částí křivky představovala **celý původní obrazec** ve zmenšeném měřítku (byla by tedy soběpodobná). Zkusme se nyní podívat na délku křivky.



Obrázek 1.8: První iterace Kochovy křivky “uvnitř” druhé v menším měřítku.

V první iteraci začínáme s úsečkou délky¹ 1, která se v druhé iteraci změní na křivku délky $4/3$. Není těžké si rozmyslet, že obecně v n -té iteraci bude délka křivky ℓ_n rovna

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Posloupnost $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s kvocientem $q = 4/3 > 1$, a tedy její limita je ∞ . Kochova křivka má tak *nekonečnou délku*.

1.2.2 Sierpiňského trojúhelník

Přesuneme nyní k plošným útvarům, neboť i zde lze sledovat některé zajímavé vlastnosti. Jedním z představitelů je tzv. *Sierpiňského trojúhelník*, který objevil roku 1916 polský matematik WACŁAW SIERPIŃSKI (1882–1969). [3, str. 61] Na začátku (v nulté iteraci) začínáme s rovnostranným trojúhelníkem se stranou délky 1 (též lze začít s obecnou délkou ℓ_0). V něm sestrojíme střední příčky (tj. spojnice středů stran trojúhelníka), které společně utvoří strany rovnostranného trojúhelníka čtvrtinového obsahu původního trojúhelníka (to vychází z faktu, že střední příčka v libovolném trojúhelníku má délku rovnou polovině délky strany, s níž je rovnoběžná). Obsah nově vzniklého trojúhelníku odebereme a postup opakujeme pro zbývající trojici trojúhelníků v původním obrazci (viz obrázek (TODO: doplnit odkaz.)).

(TODO: doplnit obrázek.)

I zde si lze všimnout, že po nekonečně mnoha iteracích budou menší trojúhelníky přesnými kopiemi původního obrazce. Zkusme se opět podívat, jak je to s obvodem obrazce. Každá ze středních příček, které vzniknou v další iteraci, má poloviční délku vůči délce strany l původního trojúhelníku. Obvod obrazce se tak zvětší o $3l/2$. Počet trojúhelníků poroste exponenciálně, neboť v každé iteraci odstraněním jednoho trojúhelníku vzniknou tři nové, tj. obvod se po k -té iteraci zvětší o $3^k \cdot (1/2)^k = (3/2)^k$ (na začátku pro $k = 0$ je obvod 3). Obvod obrazce O_n po n iteracích bude roven součtu přírůstků přes všechny iterace, tj.

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k. \quad (1.2)$$

Řada $\sum_{k=1}^n (3/2)^k$ je geometrická s kvocientem $3/2$. Zde si vzpomeňme na vzorec pro její součet.

Věta 1.2.1 (Součet geomerické řady). *Nechť je dána geometrická posloupnost $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ s kvocientem $q \neq 1$. Pak pro součet prvních n členů platí*

$$\sum_{k=1}^n g_k = g_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Důkaz. Důkaz vzorce zde vynecháme, nicméně čtenář si jej může snadno ověřit např. indukcí podle n . □

¹Mohli bychom také začít s obecnou délkou ℓ_0 , ale ta by se však při výpočtu projevila pouze jako konstantní násobek.

Celkově tak po aplikaci vzorce z 1.2.1 v rovnosti 1.2 dostaneme po jednoduché úpravě

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k = 3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3 + 3 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right) = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Posloupnost $\{O_n\}_{n=0}^\infty$ je opět geometrická s kvocientem $q = 3/2 > 1$, tzn. její limita je opět ∞ . Obvod Sierpiňského trojúhelníku tedy roste nade všechny meze. (Výpočet jsme si mohli též zjednodušit uvědoměním si, že obvod obrazce roste s faktorem $3/2$ a vzorec pro O_n jsme tak mohli určit ihned.)

Podívejme se nyní na obsah útvaru. Zde si již výpočet trochu usnadníme. Po každé iteraci se jeho obsah zmenší na $3/4$ obsahu původního obrazce. Lze snadno odvodit, že obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky a je

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

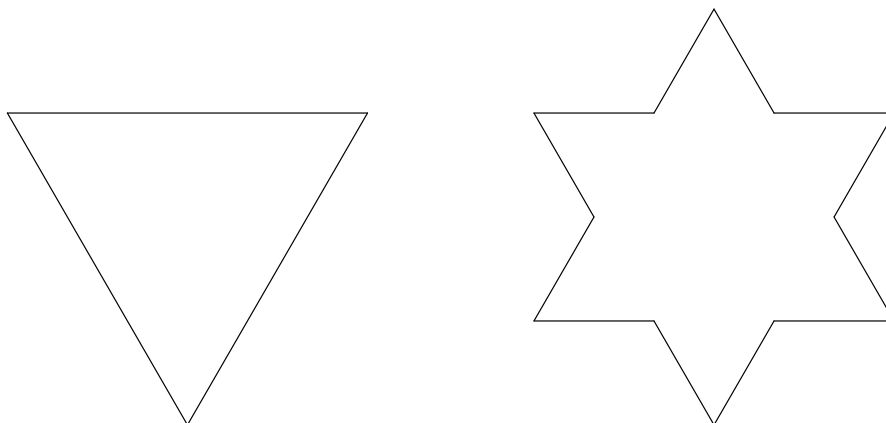
Na začátku je obsah útvaru $S_0 = \sqrt{3}/4$. Tj. celkově po n -iteracích bude obsah S_n roven

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (1.3)$$

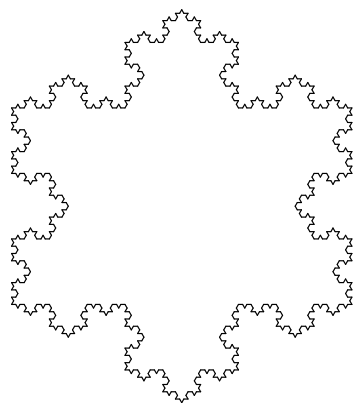
Výraz 1.3 má pro $n \rightarrow \infty$ limitu nulovou, tedy zatímco Sierpiňského trojúhelník má *nekonečný obvod*, jeho obsah je však naopak *nulový*.

1.2.3 Kochova vložka

Rozšiřující variantou Kochovy křivky 1.2.1 je tzv. *Kochova vložka*, která se skládá ze tří Kochových křivek. Rozdíl je zde v tom, že začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1. Na každou ze stran aplikujeme stejný proces, jako předtím, tj. odebereme prostřední třetinu, nahradíme ji dvěma na sebe navazujícími úsečkami délek $1/3$ a opakujeme pro každou nově vzniklou úsečku (viz obrázky 1.9 a 1.10). Podíváme-li se na obvod, nejspíše nás nepřekvapí, že ten



Obrázek 1.9: Nultá a první iterace Kochovy vložky.



Obrázek 1.10: Čtvrtá iterace Kochovy vložky.

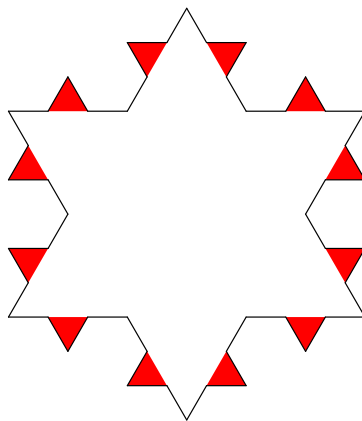
je i zde nekonečný² (už z principu, že každá strana původního rovnostranného trojúhelníka představuje samostatnou Kochovu křivku). Obsah vzniklého útvaru je však již zajímavější. Po první iteraci přibudou 3 nové trojúhelníky se stranou délky $1/3$, tzn. jejich obsah bude

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

a celkový obsah obrazce tedy bude

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

V každé další iteraci vzniknou z jedné úsečky 4 nové. Obecně po n iteracích jich bude $3 \cdot 4^n$ (při výpočtu však musíme počítat s o jedna nižší mocninou, neboť trojúhelníky vznikají “na úsečkách” z předešlé iterace, nikoliv té aktuální, viz obrázek 1.11). Délka úseček, a tedy i stran nově vzniklých rovnostranných



Obrázek 1.11: Nově vzniklé trojúhelníky v druhé iteraci.

trojúhelníků, je $(1/3)^n$. Celkový obsah nově vzniklých trojúhelníků je tak

$$3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3^n}\right)^2. \quad (1.4)$$

²Obvod Kochovy křivky po n -té iteraci je $o_n = 3 \cdot (4/3)^n$.

Pro další výpočet bude pro nás výhodné si výraz (1.4) upravit.

$$3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4^2} \cdot \frac{4^n}{3^{2n}} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Celkový obsah obrazce po n iteracích lze tak vypočítat součtem obsahů všech vzniklých trojúhelníků ve všech předešlých iteracích, tj.

$$S_n = \sum_{k=1}^n S_k = \overbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{S_0} + \sum_{k=1}^n \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

Suma na pravé straně představuje geometrickou řadu s kvocientem $4/9$. Úpravou získáme

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \quad (1.5)$$

Můžeme si všimnout, že výraz (1.5) bude tentokrát již konečné číslo, neboť limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$ se výraz $(4/9)^n$ bude blížit nule. Celkově tedy máme

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

Byl to delší výpočet, nicméně jsme zjistili, že Kochova vložka má (stejně jako Kochova křivka) *nekonečnou délku (obvod)*, ale obsah má *konečný*.

1.3 Fraktální dimenze

Seznam použité literatury

- [1] B. Benoît Mandelbrot. *Fractal geometry of nature*. Freeman and company, New York, vyd. 3 edition, 1983. ISBN 978-0716711865.
- [2] Šárka Voráčová, Lucia Csachová, Vladimíra Hájková, Jana Hromadová, Vlasta Moravcová, Jaroslav Richter, Petra Surynková, Alena Šarounová, Jakub Šaroun, Jiří Šrubař, Zuzana Štauberová, and Vladimír Tichý. *Atlas geometrie*. Academia, Praha, vydání 2 edition, 2022. ISBN 978-80-200-3336-9.
- [3] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, and Dietmar Saupe. *Chaos and Fractals*. Springer, New York, 2nd edition edition, 2004. ISBN 978-1-4684-9396-2.

Seznam obrázků

1.1	Příklad mapy pobřeží se spojnicí bodů A a B	4
1.2	Odhad délky pobřeží, kde $n = 10$ při zvoleném ε	4
1.3	Část pobřeží od bodu A v menším měřítku.	4
1.5	Princip Archimédovy metody.	5
1.6	Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku.	6
1.7	Prvních pět iterací Kochovy křivky.	7
1.8	První iterace Kochovy křivky “uvnitř” druhé v menším měřítku.	7
1.9	Nultá a první iterace Kochovy vločky.	9
1.10	Čtvrtá iterace Kochovy vločky.	10
1.11	Nově vzniklé trojúhelníky v druhé iteraci.	10