



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. David Weber

# **Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro střední  
školy

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední  
školy se sdruženým studiem  
Učitelství informatiky pro střední  
školy

Praha (TODO: doplnit rok odevzdání.)

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

(TODO: Doplnit poděkování.)

Název práce: Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry

Autor: Bc. David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: (TODO: Doplnit abstrakt (česky).)

Klíčová slova: , klicova slova

Title: (TODO: doplnit název anglicky.)

Author: Bc. David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: (TODO: Doplnit abstrakt (anglicky).)

Keywords: keywords

# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>2</b>
<b>1 Úvod do fraktálů</b>	<b>3</b>
1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie? . . . . .	3
1.2 Soběpodobnost . . . . .	5
1.2.1 Kochova křivka . . . . .	6
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>8</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>9</b>

# Předmluva

(TODO: napsat předmluvu.)

# Kapitola 1

## Úvod do fraktálů

Pod pojmem “geometrie” si čtenář pravděpodobně vybaví rovinnou či prostorovou geometrii pracující s jednoduchými útvary jako trojúhelník, obdélník, kruh, kvádr, jehlan, apod. a s útvary z nich složenými. V reálném světě tak lze nalézt mnoho uplatnění této “standardní” geometrie, kupříkladu ve strojírenství, stavebnictví, i jinde. Často tak můžeme mít o světě představu právě ve smyslu eukleidovské geometrie. Lze však nalézt řadu objektů, pro jejichž popis tyto představy jsou limitující. Např. v přírodě mrak nelze popsat jako kouli, horu nelze popsat jako jehlan a ani pobřeží nelze určitě popsat jako kružnici.

Mnohé přírodní obrazce již nelze jednoduše modelovat pomocí nástrojů “standardní” eukleidovské geometrie, s níž jsme seznámeni již od základní školy a která byla po mnoho století základním nástrojem pro popis a porozumění matematickému prostoru. Často zde hraje roli i jistá nahodilost projevující se v jejich charakteru. *Fraktální geometrie* se zabývá nepravidelnými a často se opakujícími vzory, které se vyskytují v přírodě i umění. Tyto vzory jsou často složité a zdánlivě chaotické, ale fraktální geometrie nám umožňuje je analyzovat a pochopit.

Vznik fraktální geometrie se datuje od roku 1975, za jejíhož zakladatele je považován francouzsko-americký matematik BENOÎT MANDELBROT (1924–2010). Historicky za jejím vznikem stály objevy matematických struktur, které nespadaly pod “představy” do tehdy známé eukleidovské geometrie. Byly často považovány za “patologické”, nicméně matematici, kteří je vytvořili, je považovali za důležité pro ukázkou bohatých možností, které nabízí svět matematiky překračující možnosti jednoduchých struktur, které viděli okolo sebe. [1, str. 33]

### 1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?

Položme si na začátek trochu jinou otázku, kterou si z počátku položil i Benoît Mandelbrot: *Jaká je podstata tvaru pobřeží?* Ta se stala podstatnou v jeho práci „*How Long Is the Coast of Britain?*“. Uvažme část pobřeží s počátečním a koncovým bodem (viz obrázek 1.1). Zjevně jeho délka je zdola omezena délkou spojnice koncových bodů  $A$  a  $B$ , nicméně typické pobřeží je velmi nepravidelné a klikaté, a jeho skutečná délka je tak často mnohem delší. Existují různé metody, které nám umožňují určit přesněji jeho délku. Několik z nich je popsáno v knize [1, str. 79], pro uvedení do problematiky si zde však vystačíme s tou nejjednodušší.



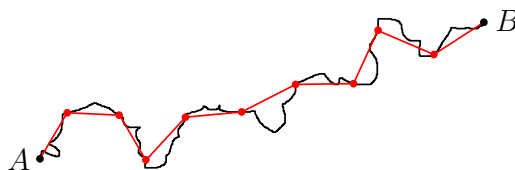
Obrázek 1.1: Příklad mapy pobřeží se spojnicí bodů  $A$  a  $B$ .

Předpokládejme, že pobřeží, které zkoumáme, má pevné hranice (tj. zanedbáváme např. přílivy a odlivy nastávající během roku), a dále jsme schopni rozlišovat libovolně krátké vzdálenosti.

Mějme zadané libovolné  $\varepsilon > 0$ . Podél pobřeží začneme umísťovat tyče tak, že po každém umístění provedeme na mapě krok délky **nejvýše**  $\varepsilon$ , přičemž začínáme v bodě  $A$  a postupujeme až k bodu  $B$  (popř. pokud měříme délku pobřeží ostrova, pokračujeme dokud se nevrátíme tam, kde jsme začali). Předpokládejme, že jsme provedli celkově  $n(\varepsilon)$  kroků (jejich počet je závislý na zvolené délce kroku). *Přibližnou délku pobřeží*  $\ell(\varepsilon)$  pak stanovíme jako

$$\ell(\varepsilon) = n(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Nyní by nás mohlo napadnout, že pro zmenšující se  $\varepsilon$ , tj.  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , bude hodnota



Obrázek 1.2: Odhad délky pobřeží, kde  $n = 10$  při zvoleném  $\varepsilon$ .

$\ell(\varepsilon)$  konvergovat ke skutečné délce pobřeží. Tzn. označíme-li skutečnou délku pobřeží  $L$ , pak bychom mohli očekávat, že platí

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ell(\varepsilon). \quad (1.1)$$

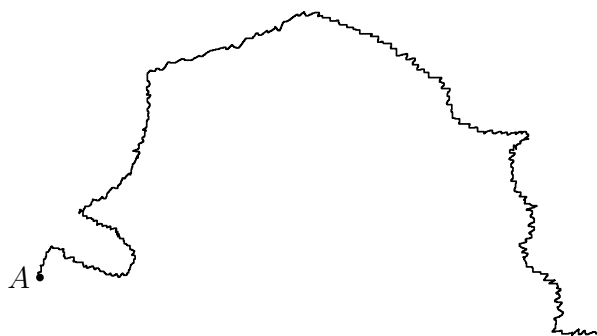
(TODO: Přeformulovat, není pravda, že neplatí..) Jenže, bohužel, limita (1.1) ve skutečnosti bude rovna  $\infty$ . Proč? Je třeba si uvědomit, že zde pracujeme s *mapou* pobřeží, která má určité *měřítko*. Pokud bychom měli pobřeží na mapě s měřítkem 1 : 100 000, uvidíme méně detailů, než kdybychom jej zkoumali na mapě s měřítkem 1 : 1 000. (Viz obrázek 1.3.)

Nově odhalené detaily (menší poloostrovky apod.) zde přispívají k celkové délce pobřeží  $\ell(\varepsilon)$ . Postupným zmenšováním měřítka mapy bychom tak odhalili další detaily. Naše původní idea tak selhává, neboť (v “klasickém” pojetí délky) pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  hodnota  $\ell(\varepsilon)$  poroste nade všechny meze, tj.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ell(\varepsilon) = \infty$ .

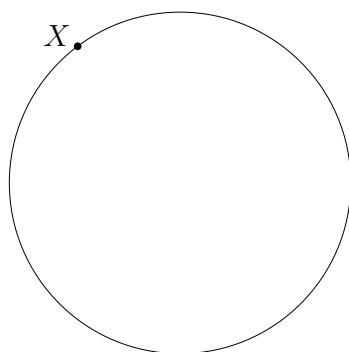
Nabízí se otázka: Proč se toto děje? Pokud se ohlédneme zpět za eukleidovskou geometrií, tento problém zde nenastává. Např. u kružnice v eukleidovské rovině  $\mathbb{E}_2$  změnou měřítka žádné další detaily křivky neobjevíme (podobně u jiných geometrických útvarů, viz obrázky 1.4a a 1.4b). Díky tomu můžeme v případě počítání obvodu kružnice použít např. Archimédovu metodu.

Máme-li kružnici o poloměru  $r > 0$ , pak jí můžeme vepsat libovolný pravidelný  $n$ -úhelník (viz obrázek 1.5a). Obvod pravidelného  $n$ -úhelníku is označíme

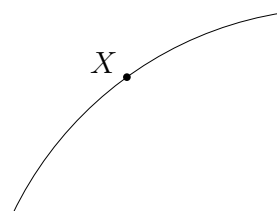




Obrázek 1.3: Část pobřeží od bodu  $A$  v menším měřítku.



(a) Kružnice v menším měřítku.



(b) Část kružnice ve větším měřítku.

$O_n$  a délku jeho strany  $x$  (viz obrázek 1.5b). Tu jsme schopni stanovit užitím elementární goniometrie, tj.

$$x = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

a tedy obvod

$$O_n = 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

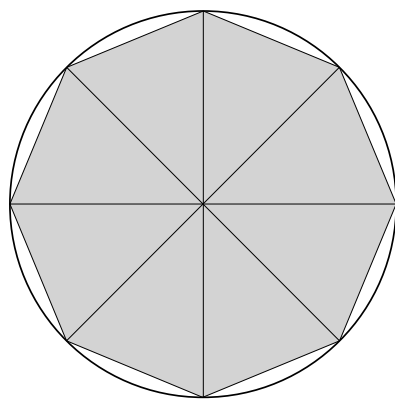
Pro rostoucí  $n$  bude obvod pravidelného  $n$ -úhelníku stále lépe aproximovat obvod původní kružnice (viz obrázek 1.6). Limitním přechodem (tj. pro  $n \rightarrow \infty$ ) tak můžeme odvodit vzorec pro obvod kružnice:

$$O = \lim_{n \rightarrow \infty} 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

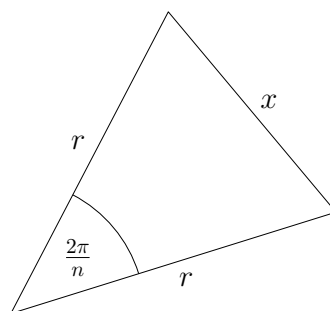
Idea aproximace pomocí “zjemňování” zde skutečně funguje a délka ve standardním pojetí tak dává smysl, jak bychom mohli očekávat. Křivka, kterou tvoří pobřeží, má však oproti kružnici jiný geometrický charakter. Délka pobřeží  $\infty$ , k níž Mandelbrot došel, tak dává smysl z *geometrického pohledu*, avšak není moc užitečný.

## 1.2 Soběpodobnost

Mandelbrot si uvědomil, že struktura pobřeží se charakterově vymyká útvarům do tehdy známým eukleidovské geometrii, neboť mapy s různými měřítky poskytovaly různou úroveň detailů, které hrály netriviální roli v jeho celkové

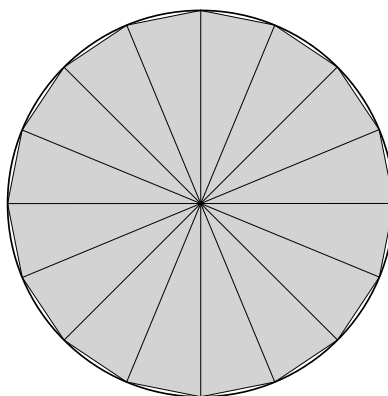


(a) Pravidelný osmiúhelník vepsaný kružnici.



(b) Část vepsaného pravidelného  $n$ -úhelníku.

Obrázek 1.5: Princip Archimédovy metody.



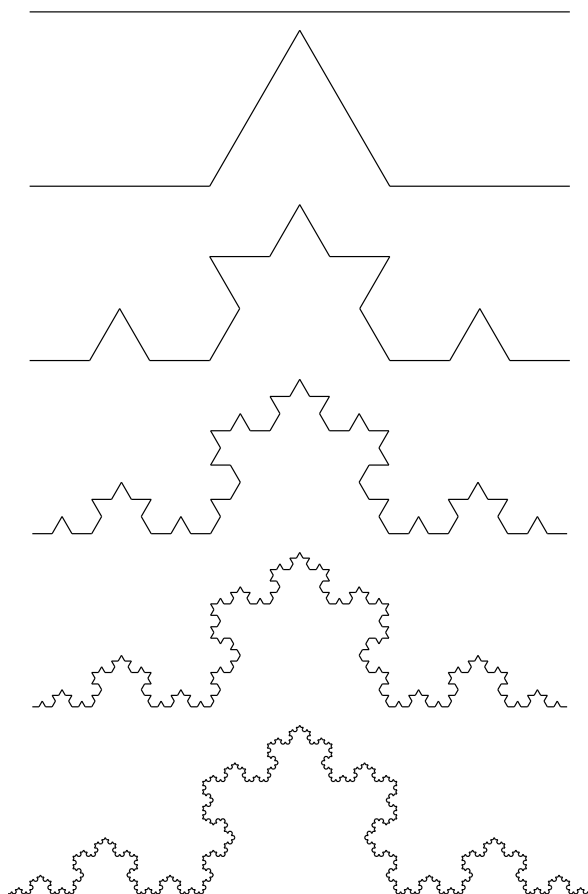
Obrázek 1.6: Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku.

délce. Učinil však jiné zásadní pozorování, a to sice, že mnoho detailů má společné rysy, které se opakují. Hodně z nich se shodovalo s výjimkou jejich měřítka. [1, str. 96]

Ve fraktální geometrii se pro tento úkaz uchýlil termín *soběpodobnost* (angl. *self-similarity*). Útvar nazýváme soběpodobným, **pokud se sám sobě podobná v libovolném měřítku** [2, str. 220] nebo pokud **část útvaru je podobná jeho celku**. Zmíněná podoba může být míněna přibližně (např. v případě pobřeží je nejspíše jasné, že žádné z jeho detailů nesdílejí společné rysy přesně), ale v dalších částech si předvedeme soběpodobnost *přímou*.

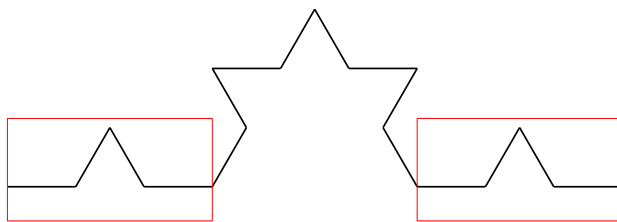
### 1.2.1 Kochova křivka

Na začátku vezmeme úsečku délky 1. Vyjmeme prostřední (tj. druhou) třetinu a nahradíme ji úsečkami délky  $1/3$ , tak, aby na sebe navazovaly v krajních bodech. Tento proces následně opakujeme pro nově vzniklé úsečky. Obecně u úsečky délky  $l$  nahradíme její prostřední třetinu dvojicí úseček délek  $l/3$  (viz obrázek 1.7). V první řadě si můžeme všimnout, že v každé další iteraci jsou nově vzniklé podobné původnímu celku, tedy v předešlé iteraci (viz obrázek ??). Pokud by tento proces



Obrázek 1.7: Prvních šest iterací Kochovy křivky.

pokračoval do nekonečna, pak by každá ze čtyř částí křivky představovala **celý původní obrazec** ve zmenšeném měřítku (byla by tedy soběpodobná). Zkusme



Obrázek 1.8: Druhá iterace Kochovy křivky „uvnitř“ třetí v menším měřítku.

se nyní podívat na délku křivky. V první iteraci začínáme s úsečkou délky<sup>1</sup> 1, která se v druhé iteraci změnila na křivku délky  $4/3$ . Není těžké si rozmyslet, že obecně v  $n$ -té iteraci bude délka křivky  $l_n$  rovna

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Posloupnost  $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$  je geometrická s kvocientem  $4/3 > 1$ , a tedy její limita je  $\infty$ . Kochova křivka má tedy nekonečnou délku.

<sup>1</sup>Mohli bychom také začít s obecnou délkou  $l_0$ , ale ta by se však při výpočtu projevila pouze jako konstantní násobek.

# Seznam použité literatury

- [1] B. Benoît Mandelbrot. *Fractal geometry of nature*. Freeman and company, New York, vyd. 3 edition, 1983. ISBN 978-0716711865.
- [2] Šárka Voráčová, Lucia Csachová, Vladimíra Hájková, Jana Hromadová, Vlasta Moravcová, Jaroslav Richter, Petra Surynková, Alena Šarounová, Jakub Šaroun, Jiří Šrubař, Zuzana Štauberová, and Vladimír Tichý. *Atlas geometrie*. Academia, Praha, vydání 2 edition, 2022. ISBN 978-80-200-3336-9.

# Seznam obrázků

1.1	Příklad mapy pobřeží se spojnicí bodů $A$ a $B$ . . . . .	4
1.2	Odhad délky pobřeží, kde $n = 10$ při zvoleném $\varepsilon$ . . . . .	4
1.3	Část pobřeží od bodu $A$ v menším měřítku. . . . .	5
1.5	Princip Archimédovy metody. . . . .	6
1.6	Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku. . . . .	6
1.7	Prvních šest iterací Kochovy křivky. . . . .	7
1.8	Druhá iterace Kochovy křivky „uvnitř“ třetí v menším měřítku. . . . .	7