MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. David Weber

Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro střední školy

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy se sdruženým studiem Učitelství informatiky pro střední školy

Praha (TODO: 2024)

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

(TODO: Doplnit poděkování)

Název práce: Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry

Autor: Bc. David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: (TODO: Doplnit abstrakt (česky))

Klíčová slova: , klicova slova

Title: Fractal geometry for (experienced) amateurs

Author: Bc. David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: (TODO: Doplnit abstrakt (anglicky))

Keywords: keywords

Obsah

Předmluva

(TODO: napsat předmluvu)

Kapitola 1

Úvod do fraktálů

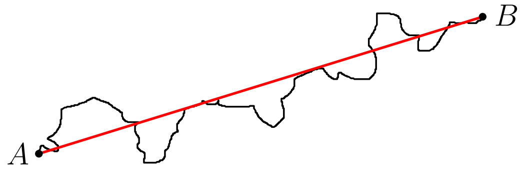
Pod pojmem „geometrie“ si čtenář pravděpodobně vybaví rovinnou či prostorovou geometrii pracující s jednoduchými útvary jako trojúhelník, obdélník, kruh, kvádr, jehlan, apod. a s útvary z nich složenými. V reálném světě tak lze nalézt mnoho uplatnění této „standardní“ geometrie, kupříkladu ve strojírenství, stavebnictví, i jinde. Často tak můžeme mít o světě představu právě ve smyslu eukleidovské geometrie. Lze však nalézt řadu objektů, pro jejichž popis tyto představy jsou limitující. Např. v přírodě mrak nelze popsat jako kouli, horu nelze popsat jako jehlan a ani pobřeží nelze určitě popsat jako kružnici.

Mnohé přírodní obrazce již nelze jednoduše modelovat pomocí nástrojů „standardní“ eukleidovské geometrie, s níž jsme seznámeni již od základní školy a která byla po mnoho století základním nástrojem pro popis a porozumění matematickému prostoru. Často zde hraje roli i jistá nahodilost projevující se v jejich charakteru. *Fraktální geometrie* se zabývá nepravidelnými a často se opakujícími vzory, které se vyskytují v přírodě i umění. Tyto vzory jsou často složité a zdánlivě chaotické, ale fraktální geometrie nám umožňuje je analyzovat a pochopit.

Vznik fraktální geometrie se datuje od roku *1975*, za jejíhož zakladatele je považován francouzko-americký matematik Benoît Mandelbrot (1924–2010). Historicky za jejím vznikem stály objevy matematických struktur, které nespadaly pod „představy“ do tehdy známé eukleidovské geometrie. Byly často považovány za „patologické“, nicméně matematici, kteří je vytvořili, je považovali za důležité pro ukázku bohatých možností, které nabízí svět matematiky překračující možnosti jednoduchých struktur, které viděli okolo sebe. [6, str. 33]

1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?

Položme si na začátek trochu jinou otázku, kterou si z počátku položil i Benoît Mandelbrot: *Jaká je podstata tvaru pobřeží?* Ta se stala podstatnou v jeho práci *„How Long Is the Coast of Britain?“*. Uvažme část pobřeží s počátečním a koncovým bodem (viz obrázek 1.1). Zjevně jeho délka je zdola omezena délkou spojnice koncových bodů A a B, nicméně typické pobřeží je velmi nepravidelné a klikaté, a jeho skutečná délka je tak často mnohem delší. Existují různé metody, které nám umožňují určit přesněji jeho délku. Několik z nich je popsáno v knize [6, str.



Obrázek 1.1: Příklad mapy pobřeží se spojnicí bodů A a B.

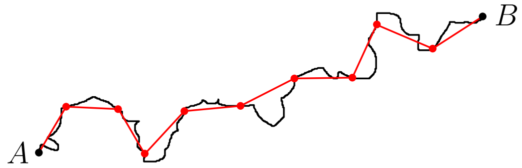
79], pro uvedení do problematiky si zde však vystačíme s tou nejednodušší.

Předpokládejme, že pobřeží, které zkoumáme, má pevné hranice (tj. zanedbáváme např. přílivy a odlivy nastávající během roku), a dále jsme schopni rozlišovat libovolně krátké vzdálenosti.

Mějme zadané libovolné $\varepsilon > 0$. Podél pobřeží začneme umisťovat tyče tak, že po každém umístění provedeme na mapě krok délky **nejvýše** ε, přičemž začínáme v bodě A a postupujeme až k bodu B (popř. pokud měříme délku pobřeží ostrova, pokračujeme dokud se nevrátíme tam, kde jsme začali). Předpokládejme, že jsme provedli celkově $n(\varepsilon)$ kroků (jejich počet je závislý na zvolené délce kroku). *Přibližnou délku pobřeží* $\ell(\varepsilon)$ pak stanovíme jako

$$\ell(\varepsilon) = n(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Nyní by nás mohlo napadnout, že pro zmenšující se ε, tj. $\varepsilon \to 0^+$, bude hodnota



Obrázek 1.2: Odhad délky pobřeží, kde $n = 10$ při zvoleném ε.

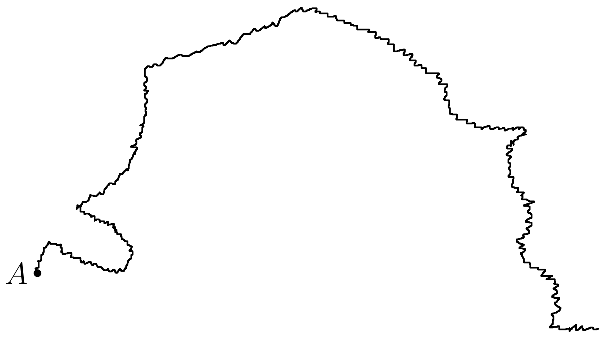
$\ell(\varepsilon)$ konvergovat ke skutečné délce pobřeží. Tzn. označíme-li skutečnou délku pobřeží L, pak bychom mohli očekávat, že platí

$$L = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ell(\varepsilon). \tag{1.1}$$

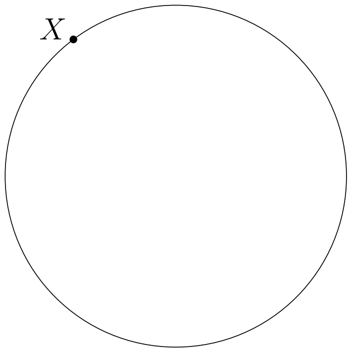
Jenže, bohužel, limita (1.1) ve skutečnosti bude rovna ∞. Proč? Je třeba si uvědomit, že zde pracujeme s *mapou* pobřeží, která má určité *měřítko*. Pokud bychom měli pobřeží na mapě s měřítkem 1 : 100 000, uvidíme méně detailů, než kdybychom jej zkoumali na mapě s měřítkem 1 : 1 000. (Viz obrázek 1.3.)

Nově odhalené detaily (menší poloostrůvky apod.) zde přispívají k celkové délce pobřeží $\ell(\varepsilon)$. Postupným zvětšováním měřítka mapy bychom tak odhalili další detaily. Naše původní idea tak selhává, neboť (v „klasickém“ pojetí délky) pro $\varepsilon \to 0^+$ hodnota $\ell(\varepsilon)$ poroste nade všechny meze, tj. $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ell(\varepsilon) = \infty$.

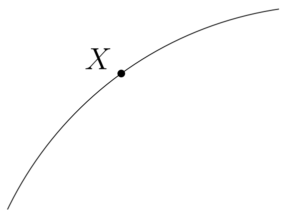
Nabízí se otázka: Proč se toto děje? Pokud se ohlédneme zpět za eukleidovskou geometrií, tento problém zde nenastává. Např. u kružnice v eukleidovské rovině $\mathbb{E}_2$ změnou měřítka žádné další detaily křivky neobjevíme (podobně u jiných geometrických útvarů, viz obrázky 1.4a a 1.4b). Díky tomu můžeme v případě počítání obvodu kružnice použít např. Archimédovu metodu.



Obrázek 1.3: Část pobřeží od bodu A v menším měřítku.



(a) Kružnice v menším měřítku.



(b) Část kružnice ve větším měřítku.

Máme-li kružnici o poloměru $r > 0$, pak jí můžeme vepsat libovolný pravidelný n-úhelník (viz obrázek 1.5a). Obvod pravidelného n-úhelníku is označíme O_n a délku jeho strany x (viz obrázek 1.5b). Tu jsme schopni stanovit užitím elementární goniometrie, tj.

$$x = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

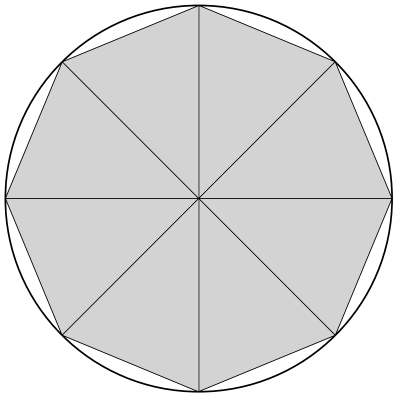
a tedy obvod

$$O_n = 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

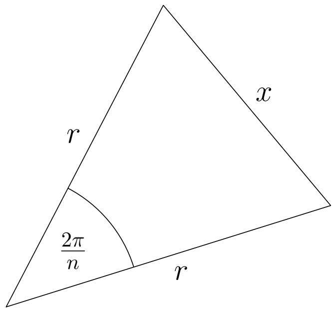
Pro rostoucí n bude obvod pravidelného n-úhelníku stále lépe aproximovat obvod původní kružnice (viz obrázek 1.6). Limitním přechodem (tj. pro $n \to \infty$) tak můžeme odvodit vzorec pro obvod kružnice:

$$O = \lim_{n\to\infty} 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2r \cdot \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi r \cdot \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

Idea aproximace pomocí „zjemňování“ zde skutečně funguje a délka ve standardním pojetí tak dává smysl, jak bychom mohli očekávat. Křivka, kterou tvoří pobřeží, má však oproti kružnici jiný geometrický charakter. Délka pobřeží ∞, k níž Mandelbrot došel, tak dává smysl *z geometrického pohledu*, avšak výsledek to není moc užitečný.

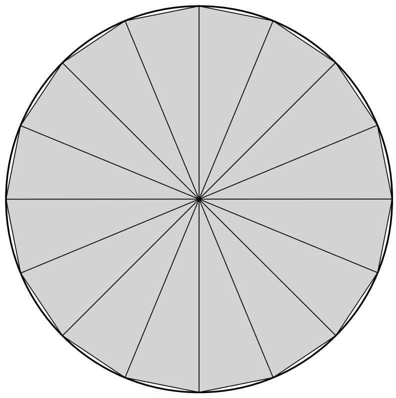


(a) Pravidelný osmiúhelník vepsaný kružnici.



(b) Část vepsaného pravidelného n-úhelníku.

Obrázek 1.5: Princip Archimédovy metody.



Obrázek 1.6: Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku.

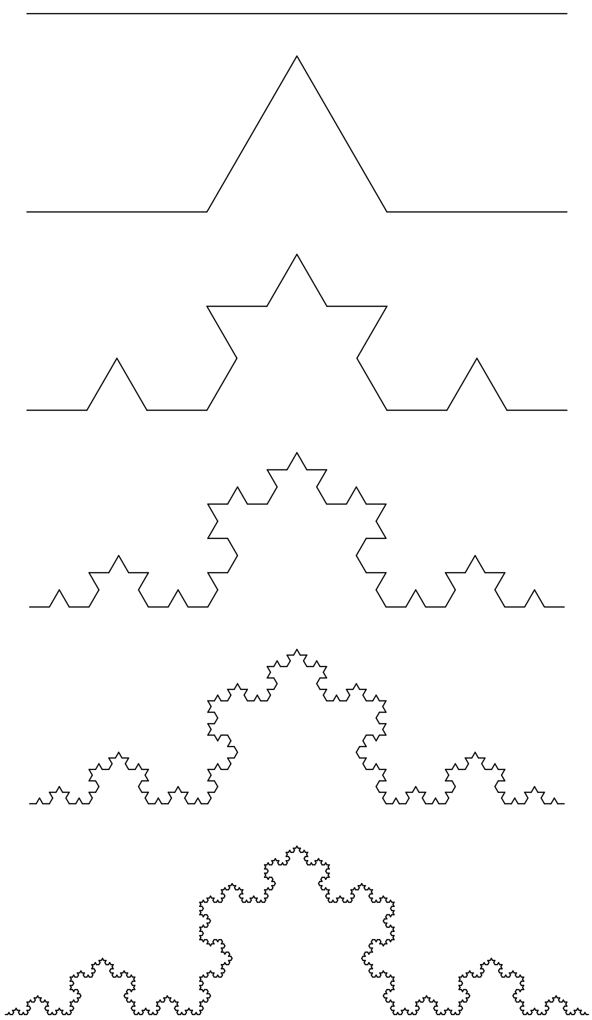
1.2 Soběpodobnost

Mandelbrot si uvědomil, že struktura pobřeží se charakterově vymyká útvarům do tehdy známým eukleidovské geometrii, neboť mapy s různými měřítky poskytovaly různou úroveň detailů, které hrály netriviální roli v jeho celkové délce. Učinil však jiné zásadní pozorování, a to sice, že mnoho detailů má společné rysy, které se opakují. Hodně z nich se shodovalo s výjimkou jejich měřítka. [6, str. 96]

Ve fraktální geometrii se pro tento úkaz uchytil termín *soběpodobnost* (angl. *self-similarity*). Útvar nazýváme soběpodobným, **pokud se sám sobě podobný v libovolném měřítku** [22, str. 220] nebo pokud **část útvaru je podobná jeho celku**. Zmíněná podoba může být míněna přibližně (např. v případě pobřeží je nejspíše jasné, že žádné z jeho detailů nesdílejí společné rysy přesně), ale v dalších částech si předvedeme soběpodobnost *přímou*.

1.2.1 Kochova křivka

Jak jsme si již uvedli, za otce fraktální geometrie je považován Mandelbrot, avšak mnoho fraktálních křivek bylo známo již dříve (čtenář promine, že jsme blíže nespecifikovali termín „fraktální“, jeho přesný význam pro nás však zatím nebude stěžejní). Jako první se podíváme na jednu z nejznámějších, kterou objevil roku *1904* švédský matematik Helge von Koch (1870–1924), dnes známou pod názvem *Kochova křivka*. [16, str. 61] Na začátku vezmeme úsečku délky 1. Vyjmeme prostřední (tj. druhou) třetinu a nahradíme ji dvěma úsečkami délky $1/3$, tak, aby na sebe navazovaly v krajních bodech. Tento proces následně opakujeme pro nově vzniklé úsečky. Obecně u úsečky délky l nahradíme její prostřední třetinu dvojicí úseček délek $l/3$ (viz obrázek 1.7). V první řadě si můžeme všimnout, že v každé

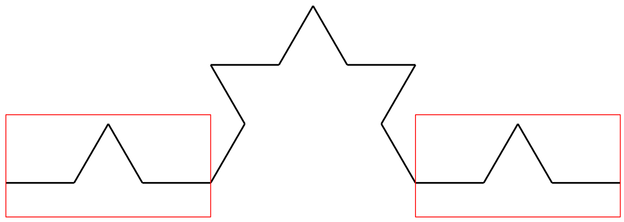


Obrázek 1.7: Prvních pět iterací Kochovy křivky.

další iteraci jsou nově vzniklé podobné původnímu celku, tedy v předešlé iteraci (viz obrázek 1.8). Pokud by tento proces pokračoval do nekonečna, pak by každá ze čtyř částí křivky představovala **celý původní obrazec** ve zmenšeném měřítku (byla by tedy soběpodobná). Zkusme se nyní podívat na délku křivky. V první iteraci začínáme s úsečkou délky[1] 1, která se v druhé iteraci změní na křivku délky $4/3$. Není těžké si rozmyslet, že obecně v n-té iteraci bude délka křivky ℓ_n rovna

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

[1]Mohli bychom také začít s obecnou délkou ℓ_0, ale ta by se však při výpočtu projevila pouze jako konstantní násobek.



Obrázek 1.8: První iterace Kochovy křivky „uvnitř“ druhé v menším měřítku.

Posloupnost $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s kvocientem $q = 4/3 > 1$, a tedy její limita je ∞. Kochova křivka má tak *nekonečnou délku.*

1.2.2 Sierpińského trojúhelník

Přesuneme nyní k plošným útvarům, neboť i zde lze sledovat některé zajímavé vlastnosti. Jedním z představitelů je tzv. *Sierpińského trojúhelník*, který objevil roku *1916* polský matematik Wacław Sierpiński (1882–1969). [16, str. 61] Na začátku (v nulté iteraci) začínáme s rovnostranným trojúhelníkem se stranou délky 1 (též lze začít s obecnou délkou ℓ_0). V něm sestrojíme střední příčky (tj. spojnice středů stran trojúhelníka), které společně utvoří strany rovnostranného trojúhelníka čtvrtinového obsahu původního trojúhelníka (to vychází z faktu, že střední příčka v libovolném trojúhelníku má délku rovnou polovině délky strany, s níž je rovnoběžná). Obsah nově vzniklého trojúhelníku odebereme a postup opakujeme pro zbývající trojici trojúhelníků v původním obrazci (viz obrázek 1.9).

I zde si lze všimnout, že po nekonečně mnoha iteracích budou menší trojúhelníky přesnými kopiemi původního obrazce. Zkusme se opět podívat, jak je to s obvodem obrazce. Každá ze středních příček, které vzniknou v další iteraci, má poloviční délku vůči délce strany l původního trojúhelníku. Obvod obrazce se tak zvětší o $3l/2$. Počet trojúhelníků poroste exponenciálně, neboť v každé iteraci odstraněním jednoho trojúhelníku vzniknou tři nové, tj. obvod se po k-té iteraci zvětší o $3^k \cdot (1/2)^k = (3/2)^k$ (na začátku pro $k = 0$ je obvod 3). Obvod obrazce O_n po n iteracích bude roven součtu přírůstků přes všechny iterace, tj.

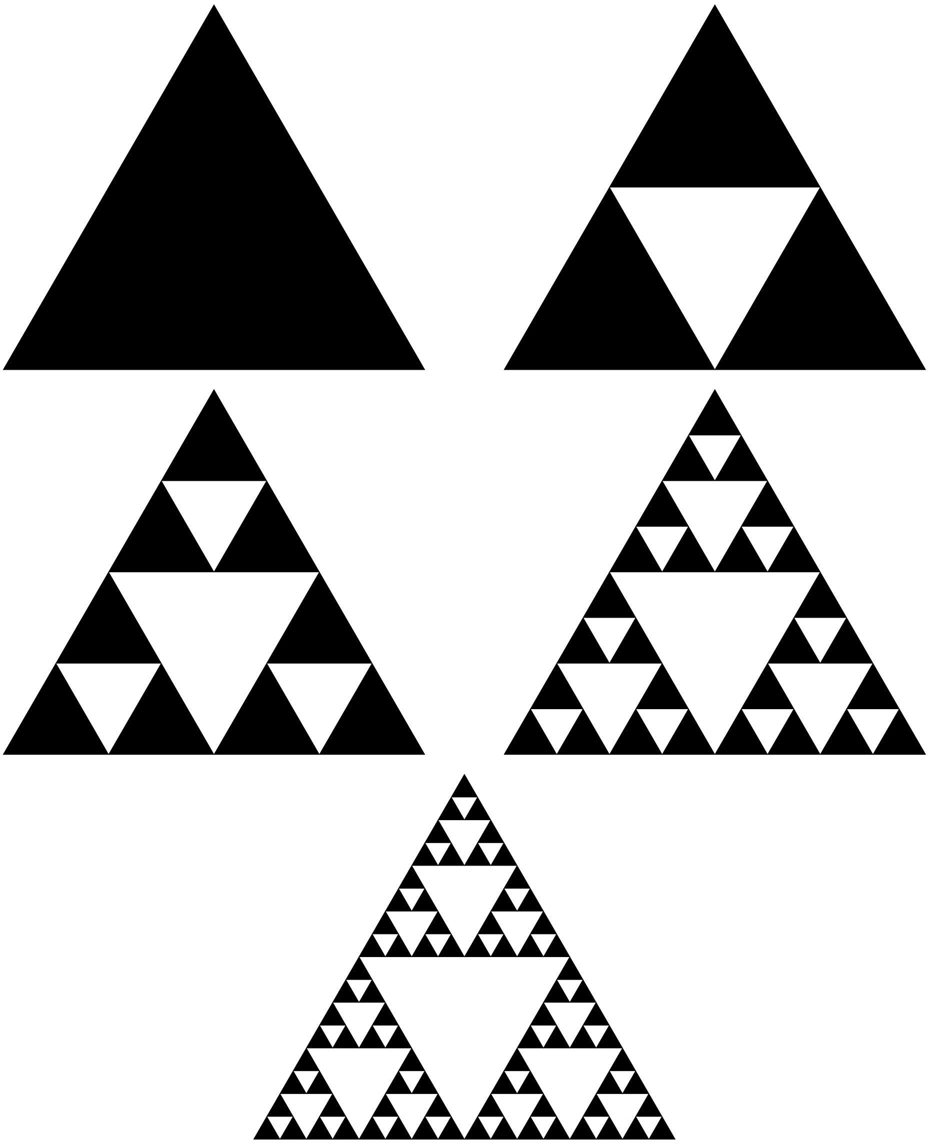
$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k. \tag{1.2}$$

Řada $\sum_{k=1}^{n}(3/2)^k$ je geometrická s kvocientem $3/2$. Zde si vzpomeňme na vzorec pro její součet.

Věta 1.2.1 (Součet geomerické řady)**.** *Nechť je dána geometrická posloupnost $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ s kvocientem $q \neq 1$. Pak pro součet prvních n členů platí*

$$\sum_{k=1}^{n} g_k = g_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Důkaz. Důkaz vzorce zde vynecháme, nicméně čtenář si jej může snadno ověřit např. indukcí podle n. □



Obrázek 1.9: První čtyři iterace Sierpińského trojúhelníka.

Celkově tak po aplikaci vzorce z 1.2.1 v rovnosti (1.2) dostaneme po jednoduché úpravě

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k = 3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3 + 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Posloupnost $\{O_n\}_{n=0}^{\infty}$ je opět geometrická s kvocientem $q = 3/2 > 1$, tzn. její limita je opět ∞. Obvod Sierpińského trojúhelníku tedy roste nade všechny meze. (Výpočet jsme si mohli též zjednodušit uvědoměním si, že obvod obrazce roste s faktorem $3/2$ a vzorec pro O_n jsme tak mohli určit ihned.)

Podívejme se nyní na obsah útvaru. Zde si již výpočet trochu usnadníme. Po každé iteraci se jeho obsah zmenší na $3/4$ obsahu původního obrazce. Lze snadno odvodit, že obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky a je

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

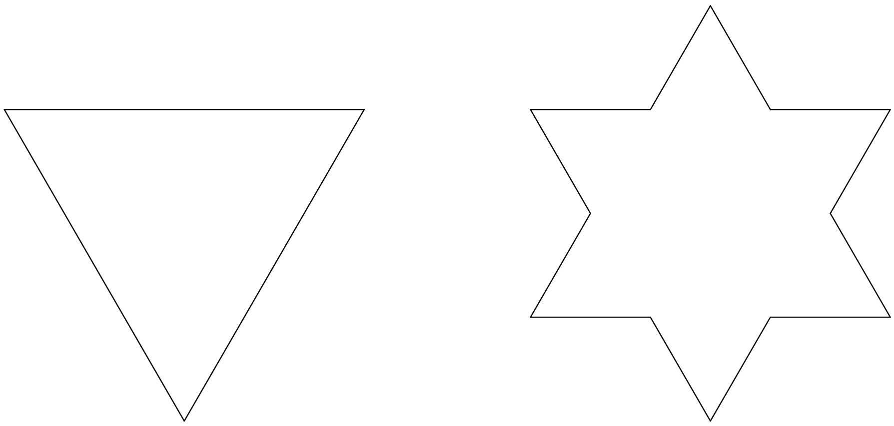
Na začátku je obsah útvaru $S_0 = \sqrt{3}/4$. Tj. celkově po n-iteracích bude obsah S_n roven

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n \tag{1.3}$$

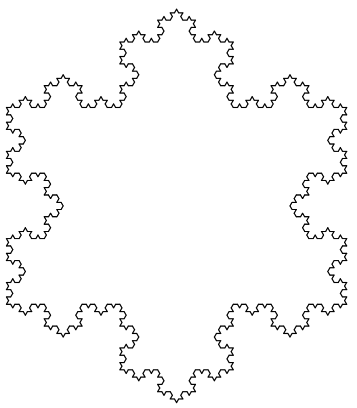
Výraz (1.3) má pro $n \to \infty$ limitu nulovou, tedy zatímco Sierpińského trojúhelník má *nekonečný obvod*, jeho obsah je však naopak *nulový*.

1.2.3 Kochova vločka

Rozšiřující variantou Kochovy křivky 1.2.1 je tzv. *Kochova vločka*, která se skládá ze tří Kochových křivek. Rozdíl je zde v tom, že začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1. Na každou ze stran aplikujeme stejný proces, jako předtím, tj. odebereme prostřední třetinu, nahradíme ji dvěma na sebe navazujícími úsečkami délek 1/3 a opakujeme pro každou nově vzniklou úsečku (viz obrázky 1.10 a 1.11). Podíváme-li se na obvod, nejspíše nás nepřekvapí, že ten



Obrázek 1.10: Nultá a první iterace Kochovy vločky.

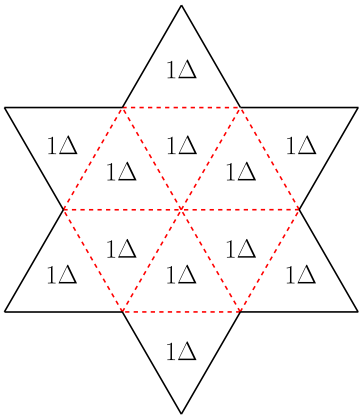


Obrázek 1.11: Čtvrtá iterace Kochovy vločky.

je i zde nekonečný[2] (už z principu, že každá strana původního rovnostranného trojúhelníka představuje samostatnou Kochovu křivku). Obsah vzniklého útvaru je však již zajímavější. Pro zjednodušení výpočtu si rozdělme útvar na *stejné*

[2]Obvod Kochovy křivky po n-té iteraci je $o_n = 3 \cdot (4/3)^n$.

rovnostranné trojúhelníky podle obrázku 1.12, jejichž obsah je roven 1/12 obsahu obrazce v nulté iteraci. Výsledný obsah se tedy pokusíme vyjádřit relativně vůči



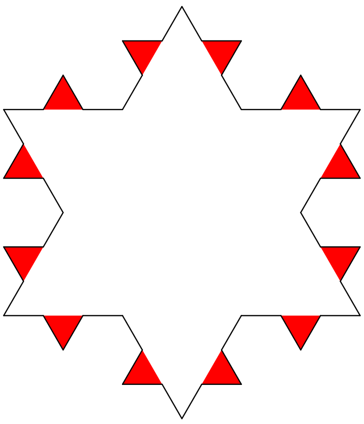
Obrázek 1.12: Rozdělení první iterace Kochovy vločky.

obsahům daných trojúhelníků, na něž jsme obrazec rozdělili, a pak jej pouze přepočítáme. Jejich obsah si označme Δ. Tedy obsah Sierpińského trojúhelníku v nulté iteraci lze vyjádřit jako $S_0 = 9\Delta$. Po první iteraci vzniknou na každé ze strany 3 nové trojúhelníky o obsahu $1/9 \cdot \Delta$. V každé další iteraci vzniknou z jedné úsečky 4 nové. Obecně po n iteracích jich tedy bude $3 \cdot 4^n$. (Při výpočtu musíme počítat s o jedna nižší mocninou, neboť trojúhelníky vznikají „na úsečkách“ z předešlé iterace, nikoliv té aktuální.)

Zaměřme se nyní pouze trojúhelníky, které vznikly v aktuální iteraci (viz obrázek 1.13). Součet jejich obsahů nám dává *přírůstek obsahu* v obecné n-té iteraci. Označíme-li tento přírůstek B_n, pak platí

$$B_n = \underbrace{3 \cdot 4^{n-1}}_{\text{počet úseček}} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \Delta}^{\text{obsah nových troj.}} = 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \Delta,$$

kde $n \geqslant 1$. Nyní můžeme již vyšetřit obsah v n-té iteraci S_n a posléze i celkový



Obrázek 1.13: Nově vzniklé trojúhelníky v druhé iteraci.

obsah výsledného obrazce $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Pro $n \geqslant 1$ platí

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} B_k = 9\Delta + 3\Delta \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = 9\Delta + 3\Delta \cdot \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$$
$$= 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

Tedy

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$
$$= 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta = \frac{72}{5}\Delta.$$

Obsah trojúhelníků, na než jsme rozdělili první iteraci Kochovy vločky, je

$$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9}$$

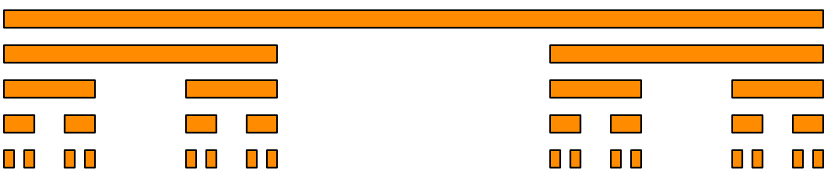
a tedy celkově

$$S = \frac{72}{5}\Delta = \frac{72}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Byl to trochu delší výpočet, nicméně jsme zjistili, že Kochova vločka má (stejně jako Kochova křivka) *nekonečnou délku (obvod)*, ale obsah má *konečný*.

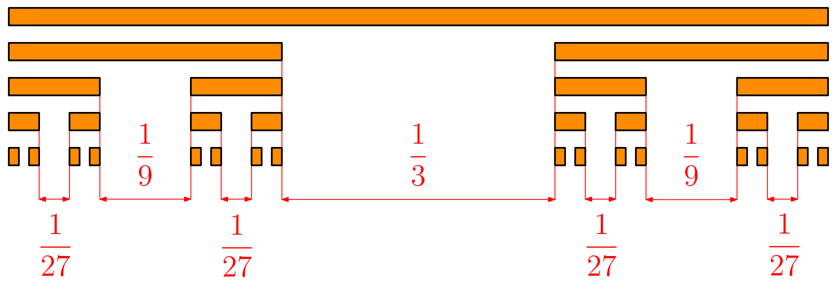
1.2.4 Cantorovo diskontinuum

Podívejme se ještě na jeden typ fraktálního objektu, kterým je tzv. *Cantorovo diskontinuum*[3] Myšlenka je zde velmi jednoduchá: začínáme s úsečkou délky 1 (nultá iterace) a následně odebereme prostřední třetinu, čímž vznikne první iterace. V dalších iteracích postupujeme analogicky pro vzniklé úsečky (viz obrázek 1.14).



Obrázek 1.14: Nultá až čtvrtá iterace Cantorova diskontinua.

Nově vzniklé úsečky třetinové délky jsou kopiemi původní úsečky. Stejně jako u předešlých fraktálů nás i zde bude zajímat limitní chování tohoto procesu. Lze očekávat, že postupným odebíráním zbudou úsečky nulové délky. O tom se lze přesvědčit např. tak, že spočítáme limitu celkových délek všech odebraných úseků. V první iteraci odebereme úsečku délky $1/3$, v druhé iteraci odebereme dvě celkové délky $2\cdot(1/3)^2 = 2/9$, ve třetí vyjmeme čtyři celkové délky $4\cdot(1/3)^3 =$



Obrázek 1.15: Znázornění délek vyjmutých úseků.

4/27, atd. (viz obrázek 1.15). Obecně počet odebraných úseků roste s mocninou dvojky, jejichž délky klesají s mocninou trojky, tedy v n-té iteraci odebereme úsek délky $2^n(1/3)^{n+1}$. Označíme-li tedy délku zbylých úseků ℓ_n po n iteracích a $\overline{\ell_n}$ délku odebraných úseků, pak určitě platí $\ell_n = 1 - \overline{\ell_n}$. Protože nás zajímá délka *všech* odebraných úseků, pak po n iteracích bude celková délka rovna

$$\overline{\ell_n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}. \tag{1.4}$$

Označíme-li si limitu výrazů posloupností ℓ_n, reps. $\overline{\ell_n}$, jako ℓ, resp. $\overline{\ell}$, pak dostaneme

$$\overline{\ell} = \lim_{n\to\infty} \overline{\ell_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Z toho již triviálně plyne, že

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \ell_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \overline{\ell_n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} \overline{\ell_n} = 1 - 1 = 0, \tag{1.5}$$

tzn. na konci procesu zbude Cantorovo diskontinuum délky nula.

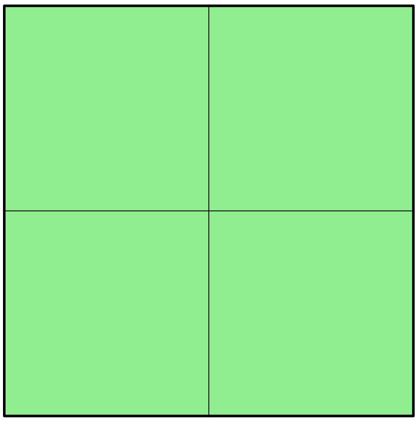
1.3 Fraktální dimenze

1.3.1 Chápání konceptu dimenze

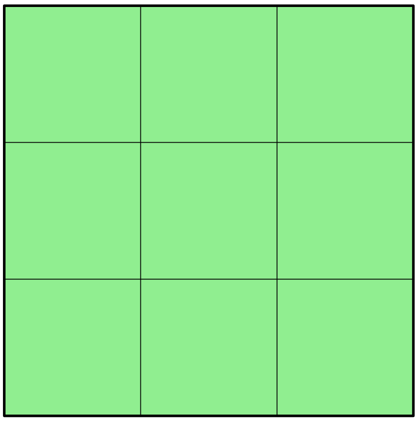
Výčet útvarů v sekci 1.2 splňoval zásadní vlastnost, a to sice, že všechny z nich byly *soběpodobné*. V eukleidovské geometrii lze však u mnohých základních objektů pozorovat stejnou vlastnost. Např. čtverec lze určitě prohlásit v jistém smyslu za soběpodobný, neboť jej lze rozdělit na podobné útvary (viz obrázek 1.16). Podobně např. i obyčejná úsečka je taktéž soběpodobná, protože ji můžeme rozdělit na obecně k stejných částí (viz obrázek 1.17).

K čemu nám takové uvědomnění vlastně je? Zmenšíme-li úsečku k-krát, pak budeme potřebovat přesně k těchto částí, abychom dostali úsečku původní délky.

[3] Též se mu říká *Cantorova množina* (angl. „*Cantor set*“). Dvourozměrnou variantou je pak tzv. *Cantorův prach* (angl. „*Cantor dust*“). Slovo *prach* je zde míněno v přeneseném významu, neboť (podobně jako v této podsekci) lze ukázat, že vzniklé útvary mají v limitě nulový obsah.

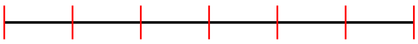


(a) Čtverec rozdělený na čtyři menší čtverce.



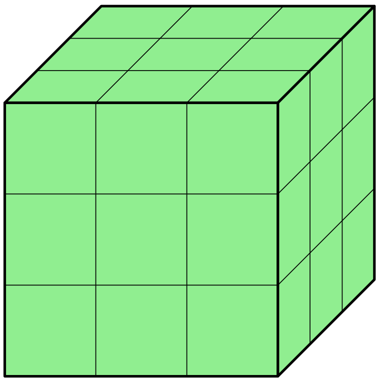
(b) Jiná možnost rozdělení čtverce.

Obrázek 1.16: Soběpodobnost čtverce.



Obrázek 1.17: Úsečka rozdělená na šest stejných částí.

U čtverce (nebo obdélkuníku obecně) při změnšení délky strany k-krát budeme potřebovat k^2 daných útvarů pro obdržení čtverce s původním obsahem.[4] Pro krychli bude situace zcela analogická, k-krát zmenšená kopie bude potřeba k^3-krát, abychom dostali krychli o původním objemu (viz obrázek 1.18). Lze si všim-



Obrázek 1.18: Krychle rozdělená na 27 stejných částí.

nout, že v závislosti na *dimenzi* objektu se mění daný exponent. Vztah lze tak zobecnit na

$$N(k) = k^d \tag{1.6}$$

kde $N(k)$ je počet nových útvarů v závislosti na faktoru k a d je dimenze.

Toto je jeden z možných způsobů, jak lze chápat koncept dimenze. Jednoduchou

[4]Obdélník změnšený k-krát bude mít strany délek a/k, b/k, tedy jeho obsah bude

$$\frac{ab}{k^2} = \frac{S}{k^2},$$

kde S je obsah původního obdélníka.

úpravou rovnosti (1.6) dostaneme

$$d = \log_k N(k) = \frac{\ln N(k)}{\ln k}.$$

(Obecně lze volit jakýkoliv přípustný základ logaritmů, tj $d = \log_b N(k)/\log_b k$ pro $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.) Dimenze v tomto pojetí skutečně dává dobrý smysl. Pro

Útvar	$N(k)$	$d = \ln N(k)/\ln k$
Úsečka	3	1
Čtverec	9	2
Krychle	27	3
Teserakt	81	4

Tabulka 1.1: Hodnoty dimenze d pro různé útvary.

„klasické“ geometrické objekty vychází dimenze vždy celočíselně.

Na této myšlence je založen pojem tzv. *fraktální dimenze*. Existuje více způsobů její definice. Jedna z nich, které se dále nyní v této sekci budeme držet, se v anglicky psané literatuře nazývá *„box-counting dimension“*, odkud plyne i značení $\dim_{\mathrm{B}}$. Pro útvar F (formálně vzato množinu bodů) definujeme

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{\ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}. \tag{1.7}$$

(Převzato z [20, str. 93] a [4, str. 28].) Výraz $1/\varepsilon$ zde představuje faktor podobnosti jako původní k (samotné ε tak hraje roli měřítka), avšak největší rozdíl zde představuje zkoumání „limitního chování“ daného výrazu.

Příklad 1.3.1 (Fraktální dimenze úsečky)**.** Začněme asi nejednodušším příkladem výpočtu fraktální dimenze, a to u úsečky (označme ℓ). Představme si, že úsečku *jednotkové délky* rozdělíme na $N_\varepsilon(\ell) = n$ shodných dílů. Pak měřítko libovolného dílu je

$$\varepsilon = \frac{1}{n} = n^{-1}.$$

(Zde je dobré si uvědomit, že pro $n \to \infty$, tedy zjemňování dělení úsečky, platí, že $\varepsilon \to 0^+$.) Fraktální dimenzi úsečky vypočteme z definice jako

$$\dim_{\mathrm{B}} \ell = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(\ell)}{\ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n} = 1.$$

Příklad 1.3.2 (Fraktální dimenze čtverce)**.** Podobně, jako v příkladu 1.3.1 výše, můžeme stanovit i fraktální dimenzi čtverce (označme S). Uvažujme tedy čtverec o jednotkovém obsahu, který rozdělíme $N_\varepsilon(S) = n$ shodných útvarů. Přitom víme, že obsah mění kvadraticky vůči délce strany. Měřítko nového čtverce tak bude

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n}} = n^{-1/2}$$

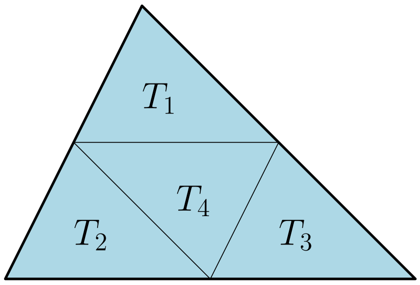
a fraktální dimenze vychází

$$\dim_{\mathrm{B}} S = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{2}\ln n} = 2.$$

Pro krychli bude výpočet naprosto analogický (viz příklad 1.3.2). Obecně pro d-rozměrnou krychli bude její fraktální dimenze[5] rovna d.

Zkusme se nyní odprostit od krychle k trochu jinému útvaru.

Příklad 1.3.3 (Fraktální dimenze trojúhelníku)**.** Podívejme se, jak to dopadne s fraktální dimenzí *obecného trojúhelníku*. Každý trojúhelník T lze rozdělit na čtveřici *vzájemně shodných trojúhelníků* $T_1, \ldots, T_4$, které vzniknou sestrojením středních příček v původním trojúhelníku (viz obrázek 1.19). Délka každé střední



Obrázek 1.19: Trojúhelník T rozdělený na trojúhelníky $T_1, \ldots, T_4$.

příčky odpovídá polovině délky strany, s níž je rovnoběžná, tedy obsah každého z nich je *čtvrtina obsahu původního* trojúhelníku T. Pokud obecně trojúhelník T rozdělíme[6] takto na obecně $N_\varepsilon(T) = 4^n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ shodných částí, pak měřítko každé z nich bude $\varepsilon = (1/2)^n$. Fraktální dimenze tak vychází:

$$\dim_{\mathrm{B}} T = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\ln 2}{n\ln 2} = 2.$$

Pro jednoduché útvary vychází dimenze tak, jak bychom mohli očekávat. K zajímavějším výsledkům však dospějeme u fraktálů, na něž se blíže podíváme v následující podsekci 1.3.2.

1.3.2 Dimenze fraktálů

Co kdybychom však zkusili podobnou myšlenku aplikovat i na *fraktální objekty*? Zkusme to. Pro připomenutí jednotlivých křivek a výsledků k nim si dovoluji čtenáře opětovně odkázat na sekci 1.2, kde jsou podrobněji rozebrány.

- **Kochova křivka F_{KC}.** V každé iteraci nahrazujeme každou úsečku čtyřmi novými. Kompletní Kochova křivka tak obsahuje právě *čtyři* kopie sebe

[5]Obdobnou úvahou dojmeme k měřítku $\varepsilon = n^{-1/d}$.

[6]Výpočet bychom mohli i zde provést ve stejném duchu jako u úsečky, čtverce nebo krychle. Počet částí, na než rozdělíme trojúhelník, označíme $N_\varepsilon(T) = n$, přičemž měřítko pak bude $\varepsilon = n^{-1/2}$.

sama zmenšených na třetinu, tj. v n-té iteraci je $N_\varepsilon(F_{KC}) = 4^n$, jak jsme již odvodili (viz podsekce 1.2.1).[7] Měřítko nové křivky je tak $\varepsilon = (1/3)^n$.

$$\dim_{\mathrm{B}} F_{KC} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(F_{KC})}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}2618595\ldots \tag{1.8}$$

- **Kochova vločka F_{KS}.** Začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1, na jehož stranách postupně vznikne Kochova křivka. V n-té iteraci je obvod Kochovy vločky o_n roven $3\cdot 4^n$, tj. i $N_\varepsilon(F_{KS}) = 3\cdot 4^n$, kde měřítko[8] nově vzniklých úseček je $\varepsilon = 1/3 \cdot (1/3)^n = (1/3)^{n+1}$. Není těžké se přesvědčit, že fraktální dimenze vychází stejně, jako u Kochovy křivky:

$$\dim_{\mathrm{B}} F_{KS} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3\cdot 4^n}{\ln 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n \overbrace{\left(1 + \frac{\ln 3}{\ln 4^n}\right)}^{\to 1}}{\ln 3^n \underbrace{\left(1 + \frac{\ln 3}{\ln 3^n}\right)}_{\to 1}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \tag{1.9}$$

  (TODO: Jak to bude s varinatou výpočtu pro plochu?)

- **Sierpińského trojúhelník F_{ST}.** V každé iteraci vynecháme prostřední trojúhelník, čímž vznikne *trojice* nových trojúhelníků s *polovičním* měřítkem. Tzn. $N_\varepsilon(F_{ST}) = 3^n$ pro $\varepsilon = (1/2)^n$, a tedy

$$\dim_{\mathrm{B}} F_{ST} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}5849625\ldots \tag{1.10}$$

- **Cantorovo diskontinuum F_{CD}.** Vždy vyjmeme prostřední třetinu úsečky, čímž obdržíme *dvojici* úseček *třetinové* délky, tj. $N_\varepsilon(F_{CD}) = 2^n$ pro $\varepsilon = (1/3)^n$. Fraktální dimenze tak vychází

$$\dim_{\mathrm{B}} F_{CD} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}6309297\ldots \tag{1.11}$$

Udělejme si nyní menší souhrn a porovnání dosavadně získaných výsledků (viz tabulka 1.2). Můžeme si všimnout, že zatímco u „klasických“ objektů vychází fraktální dimenze *celočíselná*, u (zmíněných) fraktálů vychází *neceločíselně*, ba dokonce i iracionálně.

1.3.3 Topologická dimenze

Výsledky z předešlé části 1.3.2 se můžou zdát poněkud překvapující. Jak je vůbec možné, že dimenze nemusí vycházet nutně celočíselná? Ač se to možná zdá

[7] Lze však zvolit i jiné dělení. Např. lze na Kochovu křivku nahlížet, že obsahuje *16 kopií* sebe sama zmenšených na *devítinu*.

[8] Měřítko se ve srovnání s Kochovou křivkou liší v mocnině, neboť délku nových úseků porovnáváme s obvodem celého trojúhelníku, nikoliv pouze délkou jedné jeho strany. Nicméně ve výpočtu bych se mohli omezit i jen na jednu ze stran, výpočet by byl tak zcela identický, jako u Kochovy křivky.

Útvar F	ε	$N_\varepsilon(F)$	$\dim_{\mathrm{B}} F$
Úsečka	n^{-1}	n	1
Čtverec	$n^{-1/2}$	n	2
Krychle	$n^{-1/3}$	n	3
Teserakt	$n^{-1/4}$	n	4
d-rozměrná krychle	$n^{-1/d}$	n	d
Obecný trojúhelník	$(1/2)^n$	4^n	2
Kochova křivka	$(1/3)^n$	4^n	1,2618595...
Kochova vločka	$(1/3)^{n+1}$	$3 \cdot 4^n$	1,2618595...
Sierpińského trojúhelník	$(1/2)^n$	3^n	1,5849625...
Cantorovo diskontinuum	$(1/3)^n$	2^n	0,6309297...

Tabulka 1.2: Porovnání fraktálních dimenzí d_k různých objektů.

jako nesmyslný výsledek, je třeba si uvědomit, jak vlastně koncept dimenze chápeme. Na jednu stranu na ni lze nahlížet jako na mocninu „s níž se zvyšuje" obsah/objem tělesa. Naopak čtenář znalý lineární algebry si možná vzpomene, že v této matematické disciplíně se na dimenzi nahlíží jako na *mohutnost libovolné báze daného vektorového (pod)prostoru*, která naopak vychází vždy pouze celočíselně, avšak nelze s ní dobře zachytit hlubší detail geometrie u objektů, jako jsou právě fraktály.

Tím se dostáváme ještě k jednomu typu dimenzí, a to tzv. *topologické dimenze*. Ty totiž daleko více odpovídají našemu intuitivnímu chápání tohoto pojmu, neboť se vždy jedná o celé číslo, jak ho známe ze školní geometrie. Existuje více topologických dimenzí[9], které si, co do definice, obecně nejsou ekvivalentní, ačkoliv ve většině standardních případů splývají. My se zde pro ilustraci podíváme na tzv. *Lebesgueovu pokrývací dimenzi* (dále jen již „topologickou dimenzi") pojmenovanou po francouzském matematikovi Henri Lebesgueovi (1875–1941). Myšlenka definice je založena na pokrývání objektu (formálně vzato *množiny bodů*) tzv. *otevřenými množinami*.[10] Formální definici si zde v rámci zachování jednoduchosti odpustíme, avšak pro hlubší matematický základ si dovolím čtenáře odkázat např. na knihu [2].

Obecně množina X má topologickou dimenzi $\dim_{\mathrm{L}} X = n$, pokud n je nejmenší číslo, takové, že pro každé pokrytí otevřenými množinami[11] $\mathcal{U}$ existuje zjemnění[12] $\mathcal{U}'$, v němž každý bod $x \in X$ leží v průniku nejvýše $n + 1$ množin pokrytí $\mathcal{U}$.

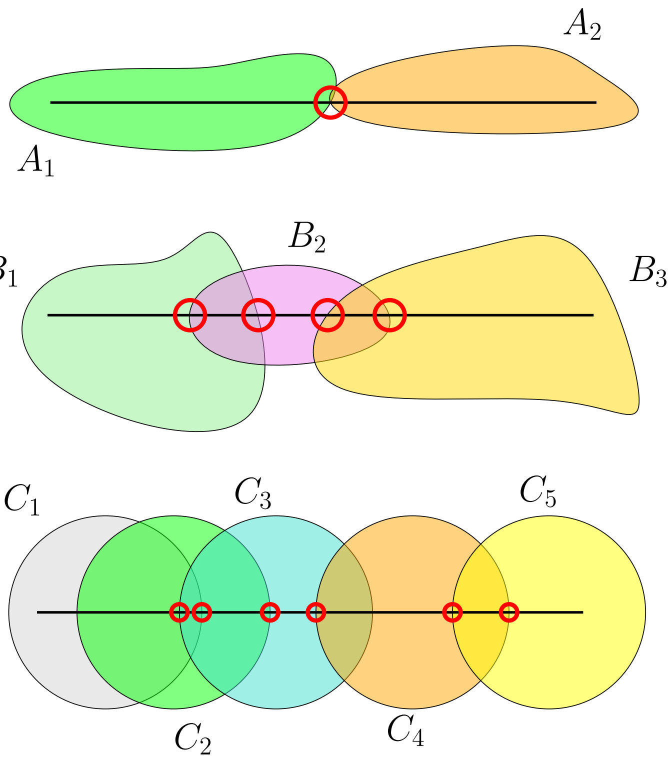
Tuto ideu si zkusmíme přiblížit na příkladu topologické dimenze úsečky (viz obrázek 1.20). Pro libovolné pokrytí lze ukázat, že každý bod je obsažen v průniku maximálně *dvou množin*, tedy topologická dimenze úsečky je 1. Podobně např. pro čtverec lze dojít k závěru, že pro každé podpokrytí nějakého pokrytí je každý jeho bod obsažen v průniku maximálně *tří množin*, tedy jeho topologická dimenze

[9] Jiným příkladem takové dimenze je *induktivní dimenze*.

[10] Otevřená množina je zobecnění pojmu otevřeného intervalu reálných čísel. Neformálně řečeno je to taková množina X, kde pro každý její bod $x \in X$ patří do této množiny i nějaké ε-okolí tohoto bodu (patří do ní i body, které jsou „dostatečně blízko").

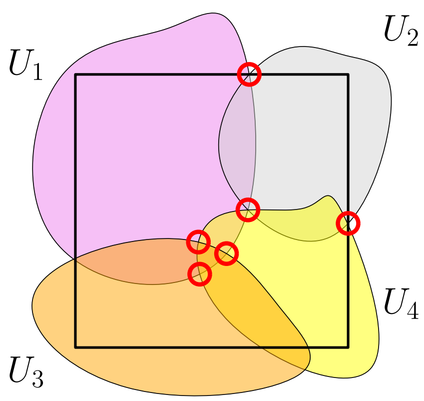
[11] Formálněji to znamená, že $A_1, \ldots, A_n$ jsou otevřené množiny, takové, že platí $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

[12] Zjemněním pokrytí $\mathcal{U}$ nazýváme takové (pod)pokrytí $\mathcal{U}'$ množiny X, kde každá množina $A'_i \in \mathcal{U}'$ je *podmnožinou* nějaké množiny A_j původního pokrytí $\mathcal{U}$.



Obrázek 1.20: Různé možnosti (pod)pokrytí úsečky.

je 2, jak bychom očekávali (viz obrázek 1.21). Jak jsme se již přesvědčili v příkla-



Obrázek 1.21: Možné (pod)pokrytí čtverce.

dech 1.3.1, 1.3.2 a 1.3.3, pro „standardní“ útvary je fraktální dimenze celočíselná (ač jsou i další, které jsme neuvedli), zatímco v podsekci 1.3.2 jsme zjistili, že u fraktální dimenze fraktálů tomu tak již nutně být nemusí. Přitom však topologická dimenze fraktálních útvarů je (a dokonce musí být) celočíselná (viz tabulka 1.3). Fraktální dimenze tak oproti té topologické daleko lépe zachycuje informaci o detailní geometrii daných objektů.

Útvar F	$\dim_B F$	$\dim_L F$
Úsečka	1	1
Čtverec	2	2
Krychle	3	3
Teserakt	4	4
d-rozměrná krychle	d	d
Kochova křivka	1,2618595 . . .	1
Kochova vločka	1,2618595 . . .	1
Sierpińského trojúhelník	1,5849625 . . .	1
Cantorovo diskontinuum	0,6309297 . . .	0

Tabulka 1.3: Porovnání fraktální a topologické dimenze útvarů.

1.4 Co je to fraktál?

Tak co je to tedy ten „fraktál“? Odpovědi na tuto otázku jsme se poměrně dlouhou dobu vyhýbali a onen termín, popř. jeho přídavnou variantu *„fraktální“*, jsme používali čistě na intuitivní úrovni. Ač jsme se zatím obešli bez jeho formálnějšího upřesnění, bylo by možná při nejmenším slušné se o to alespoň pokusit. V předešlé sekci 1.3 jsme pokryli *fraktální* a *topologickou dimenzi*, které jsme následně použili na příkladech konkrétních útvarů (konkrétně viz tabulky 1.2 a 1.3).

Již jsme si všimli, že u fraktálních útvarů vychází fraktální dimenze $\dim_H$ neceločíselně oproti jejich topologické dimenzi $\dim_L$, která je vždy celočíselná. To by se mohlo zdát jako dobrá charakteristika fraktálů. Avšak existují útvary, jejichž fraktální a topologická dimenze se shodují, přestože také mají „fraktální charakter“. Pro příklad nemusíme chodit nikterak daleko, pravděpodobně nejznáměnším útvarem je v tomto ohledu *Mandelbrotova množina*, jejiž fraktální i topologická dimenze je rovna 2 (blíže se na ni podíváme v sekci (TODO: Doplnit odkaz)). Jiná definice zase naopak popisuje fraktál jako útvar, jehož Hausdorffova dimenze (na tu se blíže podíváme v sekci (TODO: Doplnit odkaz)) je ostře větší než dimenze topologická. Problém (a také důvod, proč jsme definici toho pojmu vyhývali) je však zkrátka ten, že dodnes **není známá** žádná univerzální definice fraktálu. [22, str. 226]

Je to možná lehce zklamávající, nicméně dobrou zprávou je, že ani pro další výklad ona absence formální definice fraktálu nebude překážkou. V dalším textu se zaměříme (mj.) především na jejich klasifikaci (viz kapitola 4) a další vlastnosti.

Kapitola 2

Teorie míry a dimenze

V této kapitole se budeme nyní věnovat fraktálům a jim příbuzným záležitostem trochu formálněji. Do této chvíle jsme si již stihli představit některé základní fraktály, jako je např. *Sierpińského trojúhelník*, *Kochova vločka* nebo *Cantorovo diskontinuum*, na nichž jsme si ilustrovali především myšlenku soběpodobnosti a na to navazující pojetí dimenze (viz kapitola 1, sekce 1.2 a 1.3).

Ačkoliv leckterý čtenář by se s poskytnutým vysvětlením jistě spokojil, jiný by mohl namítat, že jsme řadu věcí vynechali. A měl by jistě pravdu. Proto se v této kapitole budeme věnovat některým záležitostem z tzv. *teorie míry*, která je v tomto ohledu klíčová a poskytne nám nástroje pro měření fraktálních útvarů, jejichž geometrie často přesahuje možnosti klasické „eukleidovské analýzy". *Míra* pro nás představuje zobecnění pojmů jako je *délka, obsah* a *objem*, které známe ze školní geometrie. Na jejím základě pak budeme schopni detailněji prozkoumat fraktální dimenzi, kterou jsme již v základu pokryli v předešlé kapitole. Jmenovitě se budeme zabývat

- *měřitelnými prostory* a *prostory s mírou* obecně,
- *lebesgueovou mírou*,
- *box-counting dimenzí*[1]
- *Hausdorffovou mírou* a z ní vycházející *Hausdorffovou dimenzí*.

Ačkoliv je toto téma jinak velice obsáhlé jsou mu věnované samostatné texty i knihy, spokojíme se pouze s naprostým základem. Pro další znalosti si dovolím čtenáře odkázat na knihy [4], [5], [10] a [1].

Než se však pustíme do samotné problematiky, je důležité zmínit, že pro rigorózní budování budeme potřebovat některé základní znalosti. V dalším textu předpokládáme, že je s nimi čtenář obeznámen. I přesto si zde dovolíme začít soupisem pojmů a značení, které budeme dále potřebovat. Některé záležitosti využijeme ještě v kapitole 3 o Hausdorffově metrickém prostoru.

[1] Též ji lze nalézt pod názvem *Minkowského dimenze* nebo *Minkowského-Bouligandova dimenze*. Je pojmenována po polském matematikovi Hermannovi Minkowském (1864–1909) a francouzském matematikovi Georgesovi Bouligandovi (1889–1979).

2.1 Základní pojmy a značení

V tomto oddílu se v krátkosti zaměříme na připomenutí některých pojmů a značení, které budeme dále využívat. Související teorii týkající se mnoha záležitostí v tomto případě vynecháme s předpokladem, že ji čtenář již zná. Pokud tomu však v některých případech takto nebude, lze tuto část textu považovat za výčet konceptů, které pro zvládnutí nadcházející teorie budeme potřebovat. V tomto ohledu lze např. nahlédnout do knihy [9].

Tuto část tedy vnímejte spíše jako referenční, než rigorózní výklad.

Výklad v této kapitole a dále v kapitole 3 se bude točit především okolo tzv. *metrických prostorů* (viz definice 2.1.1).

Definice 2.1.1 (Metrický prostor)**.** *Metrickým prostorem* nazýváme uspořádanou dvojici (X, ϱ), kde $X \neq \varnothing$ a $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ je zobrazení splňující:

(a) $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = 0 \iff x = y$,

(b) $\forall x, y \in X : x \neq y \implies \varrho(x, y) > 0$,

(c) $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, $\triangleleft$ *symetrie*

(d) $\forall x, y, z \in X : \varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. $\triangleleft$ *trojúhelníková nerovnost*

Zobrazení ϱ nazýváme *metrika*.

2.1.1 Metrické pojmy

Začneme některými základními pojmy sousvisejícími s metrickými prostory.

Definice 2.1.2 (Otevřená/uzavřená koule)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Pak definujeme

- *otevřenou kouli* se středem v bodě $x \in X$ o poloměru $r \geqslant 0$

$$B_r(x) = \{y \in X \mid \varrho(y, x) < r\},$$

- resp. *uzavřenou kouli* se středem v bodě $x \in X$ o poloměru $r \geqslant 0$

$$K_r(x) = \{y \in X \mid \varrho(y, x) \leqslant r\}.$$

Např. v $\mathbb{R}$ představuje otevřená koule $B_r(x)$ otevřený interval $(x - r, x + r)$ a $K_r(x) = \langle x - r, x + r\rangle$. V $\mathbb{R}^2$ se jedná o standardní kruh (s hranicí, nebo bez ní). Nebo v případě prostoru spojitých funkcí $X = \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$ se pro libovolnou funkci $f \in X$ jedná o pás šířky $2r$ sestrojený okolo grafu funkce f.

S otevřenými, resp. uzavřenými koulemi se pojí další terminologie.

Definice 2.1.3 (Otevřená, uzavřená a omezená množina)**.** Množina M v metrickém prostoru (X, ϱ) se nazývá

- *otevřená*, pokud pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$, takové, že $B_r(x) \subseteq M$.
- *uzavřená*, pokud její doplněk $X \setminus M$ je otevřená množina.
- *omezená*, pokud existuje $x \in X$ a $r > 0$, takové, že $M \subseteq B_r(x)$.

Uzavřenost a otevřenost množiny závisí na volbě konkrétního metrického prostoru. Např. interval (a, b) je v $\mathbb{R}$ otevřená množina, avšak v $X = (a, b)$ je to uzavřená množina, neboť její doplněk $\varnothing$ je otevřený.

Definice 2.1.4 (Průměr množiny)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. *Průměr množiny* $M \subseteq X$, $M \neq \varnothing$ definujeme jako

$$\operatorname{diam} M = \sup \left\{ \varrho(x, y) \mid x, y \in M \right\}.$$

Není těžké dokázat, že $\mathbb{R}^n$ je

$$\operatorname{diam} B_r(x) = \operatorname{diam} K_r(x) = 2r.$$

Obecně to však neplatí. Uvažme metrický prostor (X, ϱ), kde je metrika ϱ

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

Jedná se o takzvaný *diskrétní metrický prostor* (o tom, že ϱ je metrika se lze snadno přesvědčit). Pro $x \in X$ a $r > 0$ platí, že

$$\operatorname{diam} B_r(x) = \begin{cases} 0 & r \leqslant 1, \\ 1 & r > 1. \end{cases}$$

Tedy poloměr koule $B_r(x)$ může být větší než její průměr.

Definice 2.1.5 (Vzdálenost bodu od množiny, vzdálenost množin)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor.

- *Vzdáleností bodu $x \in X$ od množiny $M \subseteq X$* rozumíme

$$\varrho(x, M) = \inf \left\{ \varrho(x, y) \mid y \in X \right\}.$$

- *Vzdáleností množin $M, N \subseteq X$* rozumíme

$$\varrho(M, N) = \inf \left\{ \varrho(x, y) \mid x \in M\ ,\ y \in N \right\}.$$

Definice 2.1.6 (Vnitřek, hranice a uzávěr množiny)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a $M \subseteq X$.

- *Vnitřek množiny M* je množina

$$M^\circ = \left\{ x \in X \mid \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq M \right\}.$$

- *Hranice množiny M* je množina

$$\partial M = \{x \in X \mid \forall r > 0\ \exists y, z \in B_r(x) : y \in X \wedge z \in X \setminus M\}.$$

- *Uzávěr množiny M* je množina

$$\overline{M} = M \cup \partial M$$

V textu též budeme hodně pracovat s pojmem δ-okolí.

Definice 2.1.7 (δ-okolí)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a $M \subseteq X$. Pak δ-okolím množiny M rozumíme množinu

$$(M)_\delta = \{y \in X \mid \exists x \in X : \varrho(x, y) < \delta\}.$$

Zde se zvlášť hodí zmínit, že $(M)_\delta$ je v prostoru $\mathbb{R}^n$, s nímž budeme často pracovat, otevřená množina.

Jako poslední zde zmíníme termíny, které zejména využijeme v sekci věnující se tzv. Lebesgueově míře a posléze box-counting dimenzi (viz sekce 2.3 a 2.4).

Definice 2.1.8 (Kvádr)**.** Kvádrem v $\mathbb{R}^n$ nazveme množinu

$$I = \prod_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i \rangle,$$

kde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Objem kvádru I definujeme jako

$$\mathrm{vol}_n(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Definice 2.1.9 (δ-mříž)**.** *δ-mříž* v $\mathbb{R}^n$ názýváme množinu

$$\mathcal{Q}_\delta = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \langle m_j \delta, (m_j + 1)\delta \rangle \;\middle|\; m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Definice 2.1.9 vlastně říká, že $\mathcal{Q}_\delta$ představuje rozdělení $\mathbb{R}^n$ na krychle o straně délky δ dotýkajících se pouze na hranici.

2.1.2 Limity posloupností

S limitou posloupnosti a funkce jedné proměnné je čtenář nejspíše dobře seznámen. V kontextu metrických prostorů definujeme pojem limity následovně (viz definice 2.1.10).

Definice 2.1.10 (Limita posloupnosti)**.** Mejme metrický prostor (X, ϱ) a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x_i \in X$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $x \in X$, píšeme

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x,$$

nebo též $x_n \to x$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 : \varrho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Limita posloupnosti je vždy určena jednoznačně (pokud existuje). Ve spojitosti s limitami pro nás bude dále relevantní i tzv. *limes superior* a *limes inferior*. Ty si však připomeneme mimo kontext metrických prostorů. Vystačíme si v reálných číslech.

Definice 2.1.11 (Limes superior, limes inferior)**.** Nechť je dána posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak definujeme:

- Limes superior
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\left\{x_k \mid k \geqslant n\right\}.$$
- Limes inferior
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\left\{x_k \mid k \geqslant n\right\}.$$

Jinak lze definovat limes superior, resp. limes inferior jako supremum, resp. infimum hromadných bodů posloupnosti. Speciálně platí, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu L, právě tehdy, když

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = L.$$

Čtenář již nejspíše slyšel i o tzv. *Bolzanově-Cauchyově podmínce*. Posloupnosti ji splňující názýváme tzv. *cauchyovské*.

Definice 2.1.12 (Cauchyovská posloupnost)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x_i \in X$ pro každé $i \in N$, nazveme *cauchyovskou*, pokud splňuje:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geqslant n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Připomeňme rovněž, že Bolzanova-Cauchyova podmínka je nutná, nikoliv však postačující pro konvergenci posloupnosti v X. Uvažme např. prostor $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ se stardardní eukleidovskou metrikou. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definujeme následovně:

$$x_0 > 0 \text{ a } x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right), \; n \in \mathbb{N}.$$

Všechny její členy jsou v $\mathbb{Q}$ a lze též ověřit, že je cauchyovská. Nicméně pro její limitu platí

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

V rámci metrických prostorů se tedy dává smysl mnohdy omezovat pouze na takové, kde je Bolzanova-Cauchyova podmínka nutná i postačující pro konvergenci. Těž říkáme úplné.

Definice 2.1.13 (Úplný metrický prostor)**.** Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost v X má limitu v X.

2.1.3 Limity funkcí

Od posloupností se přesuneme na chvíli k limitám funkcí.

Definice 2.1.14 (Limita funkce v bodě)**.** Nechť $(X, \varrho_1), (Y, \varrho_2)$ a funkce $f : X \to Y$. Řekneme, že f má limitu $y \in Y$ v bodě $x_0 \in X$, píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y,$$

pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X : x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in B_\varepsilon(y).$$

Podobně i zde lze definovat limes superior a limes inferior. Omezíme se opět jen na funkce $f : M \to \mathbb{R}$.

Definice 2.1.15 (Limes superior a limes inferior pro funkce)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a funkce $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subseteq X$. Pak definujeme

- Limes superior v bodě x_0:

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sup \{f(x) : x \in M \cap B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\}\right)$$

- Limes inferior v bodě x_0:

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf \{f(x) : x \in M \cap B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\}\right)$$

2.1.4 Bodová a stejnoměrná konvergence

V rámci posloupností se v matematické analýze často pracuje s posloupnostmi funkcí. K jejich limitám se váže dvojice důležitých termínů: *bodová* a *stejnoměrná konvergence*.

Definice 2.1.16 (Bodová a stejnoměrná konvergence)**.** Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost funkcí z metrického prostoru $(\mathcal{C}(\langle a, b\rangle), \varrho)$, kde ϱ je tzv. *suprémová metrika*, tj. pro každou $f, g \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in \langle a, b\rangle} |f_n(x) - f(x)|,$$

přičemž $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkci $f \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$. Pak říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f

- *bodově*, pokud $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.
- *stejnoměrně*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ \forall x \in \langle a, b\rangle : \varrho(f_n, f) < \varepsilon.$$

  Píšeme $f_n \rightrightarrows f$.

Stejnoměrná konvergence implikuje konvergenci bodovou, opačné tvezení však neplatí. Např. posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$, kde $x \in \langle 0, 1\rangle$, konverguje k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

pouze bodově, nikoliv stejnoměrně, protože

$$\sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |x^n - 0| = 1.$$

2.1.5 Topologické pojmy

Poměrně důležitým pojmem v teorii metrických prostorů jsou tzv. kompaktní množiny. S tím se pojí následující termíny (viz definice 2.1.17).

Definice 2.1.17 (Pokrytí, δ-pokrytí a zjemnění)**.** Nechť je dán metrický prostor (X, ϱ), $M \subseteq X$ a systém množin $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots\} \subseteq \mathscr{P}(X)$.

- $\mathcal{U}$ tvoří tzv. *pokrytí* množiny M, pokud
$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$
Navíc o pokrytí $\mathcal{U}$ říkáme, že je *otevřené*, pokud pro každé $i \in \mathbb{N}$ je množina U_i otevřená.
- Pokud existuje $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{diam} U_i < \delta$, pak $\mathcal{U}$ nazýváme *δ-pokrytím.*
- Platí-li pro systém $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots\} \subseteq \mathscr{P}(X)$, že
$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,$$
pak $\mathcal{G}$ je tzv. *podpokrytí* pokrytí $\mathcal{U}$.
- Pokud navíc pro každou $G \in \mathcal{G}$ existuje množina $U \in \mathcal{U}$, taková, že $G \subseteq U$, pak $\mathcal{G}$ nazýváme *zjemněním* pokrytí $\mathcal{U}$.

Definice 2.1.18 (Kompaktní množina)**.** Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Množinu $M \subseteq X$ nazveme *kompaktní*, jestliže pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots\}$ existují indexy $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, takové, že

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i}.$$

Volněji řečeno, pro kompaktní množinu lze z jejího libovolného otevřeného pokrytí vybrat konečné podpokrytí. Dokazovat kompaktnost množiny z definice může být mnohdy nepraktické, nicméně vzhledem k tomu, že budeme často pracovat s prostorem $\mathbb{R}^n$, záležitost se nám v tomto ohledu značně zjednodušuje.

Věta 2.1.19 (Heineho-Borelova)**.** *Nechť* $(\mathbb{R}^n, \varrho_e)$ *je metrický prostor, kde* ϱ_e *je eukleidovská metrika, a* $M \subseteq \mathbb{R}^n$*. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) Množina M *je kompaktní.*

(ii) Množina M *je uzavřená a omezená.*

Důkaz věty lze nálézt např. v [9, str. 166]. Pro obecný metrický prostor toto tvrzení již neplatí. Např. v diskrétním metrickém prostoru je každá množina uzavřená i omezená (stačí zvolit $r > 1$, tzn. $B_r(x) = X$). Nicméně uvážíme-li prostor $X = (0,1)$ s dikrétní metrikou ϱ, pak z otevřeného pokrytí

$$(0,1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$$

nelze vybrat žádné konečné, navzdory faktu, že interval $(0,1)$ je v X uzavřený a omezený.

Věta 2.1.20. *Nechť* M *je kompaktní množina v metrickém prostoru* (X, ϱ)*. Pak* M *je omezená.*

K důkazu věty 2.1.20 lze využít faktu, že každá spojitá funkce definovaná na kompaktní množině nabývá svého maxima.

2.1.6 Lipschitzovská zobrazení

Definice 2.1.21 (Lipschitzovské zobrazení)**.** Nechť $(X, \varrho_1), (Y, \varrho_2)$ jsou metrické prostory. Pak zobrazení $f : X \to Y$ nazveme

- *lipschitzovské*, pokud existuje konstanta $K > 0$ taková, že pro každé $x, y \in X$ platí
$$\varrho_2(f(x), f(y)) \leqslant K \varrho_1(x, y).$$
Navíc pokud lze volit $K < 1$, pak f nazýváme *kontrakcí*

- *bilipschitzovské*, pokud existují konstanty $K_1, K_2 > 0$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí
$$K_1 \varrho_1(x, y) \leqslant \varrho_2(f(x), f(y)) \leqslant K_2 \varrho_1(x, y).$$

Je celkem zjevné, že lipschitzovská zobrazení jsou vždy spojitá. Pro každé $\varepsilon > 0$ stačí zvolit kouli o poloměru ε / K, tedy

$$\varrho_2(f(x_0), f(x)) \leqslant K \varrho_1(x_0, x) \leqslant K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

implikující spojitost f v bodě x_0.

2.2 Prostory s mírou

Jak již bylo zmíněno v úvodu, klíčovým pojmem v této kapitole (a pro studium fraktálů obecně) je takzvaná *míra*. Ta pro nás představuje obecný způsob, jak můžeme množinám přiřadit v jistém smyslu „velikost“. Konkrétněji, byť vágně, lze říci, že sestává-li množina z konečného nebo spočetného množství „rozumných“ částí, pak součet velikostí všech těchto dílčích množin je roven velikosti celé množiny, kterou nazveme její *mírou*. Pro začátek celkem jednoduchá myšlenka.

Pro formální zavedení tohoto pojmu však budeme muset nejprve zavést ještě jiný pojem, a to tzv. *σ-algebru*.

2.2.1 Měřitelné prostory

Definice 2.2.1 (σ-algebra)**.** Nechť je dána libovolná množina X a systém podmnožin $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Pak $\mathcal{A}$ je *σ-algebra* na množině X, pokud:

(a) $X \in \mathcal{A}$.

(b) Pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$ platí $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(c) Pro libovolné množiny $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ platí $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Dvojice $(X, \mathcal{A})$ se nazývá měřitelný prostor.

(TODO: Psát na konci každého bodu v definici/větě **tečku**, **čárku** nebo **středník**?)

Příklad 2.2.2. Jednoduché příklady σ-algeber:

- Triviálními příklady σ-algeber jsou množiny $\varnothing$, $\mathscr{P}(X)$ a $\{\varnothing, X\}$ pro libovolnou množinu X.

- Pro konečnou množinu $X = \{a, b, c, d\}$ je jednou možnou σ-algebrou systém množin
$$\Sigma = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

Sami se zkuste přesvědčit, že všechny zmíněné příklady vyhovují definici 2.2.1.

Než vyslovíme něco dalšího o σ-algebrách a jejich významu, podíváme se na seznam některých vesměs jednoduchých pozorováních zformulovaných níže v tvrzení 2.2.3.

Věta 2.2.3 (Vlastnosti σ-algebry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je meřitelný prostor. Pak platí:*

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$.

(ii) Pro libovolné množiny $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ platí $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

(iii) Pro všechny množiny $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ platí

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}.$$

(iv) Jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$ pak $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Z tohoto tvrzení je již lépe vidět, proč jsou pro nás σ-algebry tak příjemným objektem. Jsou totiž *uzavřené* na všechny základní množinové operace. To se nám bude později hodit při zavedení míry, ke které směřujeme. Důkaz těchto dílčích tvrzení přitom není nikterak složitý.

Důkaz. Mějme σ-algebru $\mathcal{A}$ na množině X.

(i) Z podmínky (a) definice 2.2.1 víme, že $X \in \mathcal{A}$ a z podmínky (b) tedy plyne $X \setminus X = \varnothing \in \mathcal{A}$.

(ii) Mějme množiny $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$. Společně s využitím De Morganových zákonů plyne následující:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overbrace{X \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overbrace{(X \setminus A_i)}^{\in \mathcal{A} \text{ podle (b)}}}_{\in \mathcal{A} \text{ podle (c)}}}^{\in \mathcal{A} \text{ podle (b)}} \in \mathcal{A}.$$

(iii) Nechť jsou dány množiny $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Když pro každé $j > n$ položíme $A_j = \varnothing$, pak platí

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

a podobně pro $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ podle předešlého bodu.

(iv) Pro libovolné množiny $A, B \in \mathcal{A}$ platí

$$A \setminus B = \overbrace{A \cup \underbrace{(X \setminus B)}_{\in \mathcal{A} \text{ podle (b)}}}^{\in \mathcal{A} \text{ podle (c)}} \in \mathcal{A}.$$

□

2.2.2 Míra

V tuto chvíli máme již vše potřebné k zavedení pojmu míra, resp. prostor s mírou.

Definice 2.2.4 (Prostor s mírou)**.** Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Zobrazení $\mu : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty)$ se nazývá *míra* na $\mathcal{A}$, pokud platí:

(a) $\mu(\varnothing) = 0$,

(b) pro množiny $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \qquad \triangleleft\ \textit{σ-aditivita}$$

Uspořádanou trojici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazýváme *prostor s mírou.*

Vzhledem k tomu, co míra reprezentuje (tj. zobecnění délky, obsahu, objemu), jsou tyto požadavky intuitivně dosti smysluplné.

Příklad 2.2.5. Příklady prostorů s mírou:

- Asi pro nás nejtypičtější způsob, jak měřit „velikost“ množiny, je podle *počtu prvků.* Pro libovolnou množinu X a potenční množinu $\mathscr{P}(X)$ lze definovat prostor s mírou $(X, \mathscr{P}(X), \mu)$, kde pro libovolnou množinu $A \in \mathscr{P}(X)$ položíme $\mu(A) = |A|$. Takto definované míře μ říkáme *aritmetická míra.*
- Máme libovolnou množinu X a σ-algebru $\mathcal{A}$. Zvolme si pevně $x \in X$. Míru libovolné množiny $A \in \mathcal{A}$ lze definovat jako $\delta_x(A) = \chi_A(x)$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny A. Zobrazení δ_x je tzv. *Diracova míra.*
- Zobrazení přiřazující náhodnému jevu pravděpodobnost je též případem míry. Označíme-li si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ množinu všech elementárních jevů a $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, pak $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to \langle 0, 1 \rangle$ definovaná pro $A \in \mathcal{F}$ jako

  $$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

  je mírou na $\mathcal{F}$. Speciálně $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Ve všech případech zobrazení μ v příkladu 2.2.5 se lze snadno přesvědčit, že se jedná o míru, tedy že splňuje podmínky (a) a (b) uvedené v definici 2.2.4 výše.

Pojďme nyní prozkoumat vlastnosti míry trochu hlouběji.

Věta 2.2.6 (Vlastnosti míry)**.** *Nechť μ je míra na σ-algebře $\mathcal{A}$. Pak platí následující:*

(i) Jsou-li množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, pak

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i). \qquad \triangleleft\ \textit{aditivita}$$

(ii) Pokud $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subseteq B$, pak

$$\mu(A) \leqslant \mu(B). \qquad \triangleleft\ \textit{monotonie míry}$$

Navíc pokud $\mu(A) < \infty$, pak $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(iii) Pokud $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, je neklesající posloupnost množin[2], pak

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

[2]Posloupnost množin, kde $A_i \subseteq A_{i+1}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.

(iv) Pokud $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, je nerostoucí posloupnost množin[3] *a navíc $\mu(A_1) < \infty$, pak*

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

(v) Pokud $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, pak

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \qquad \triangleleft\ \sigma\text{-subaditivita}$$

Poslední vlastnost (v) je tzv. *σ-subaditivita*[4]. Oproti σ-aditivitě se liší tím, že u množin $A_1, A_2, \ldots$ se nepožaduje, aby byly po dvou disjunktní, tzn. mohou se „překrývat". Je však intuitivně nejspíše jasné, že součtem měr všech těchto množin určitě nemůžeme získat míru nižší než je míra jejich sjednocení (dané „překryvy" započítáváme v sumě vícekrát). Podobně i monotonie dává intuitivně smysl, neboť část větší množiny jistě nemůže mít větší míru než celek. Na formální stránku věci se podíváme nyní.

Důkaz. V důkazu využijeme některé vlastnosti σ-algebry z věty 2.2.3, zejména, že všechny množiny níže jsou opět prvky σ-algebry $\mathcal{A}$.

(i) Pokud pro každé $j > n$ položíme $A_j = \varnothing$, pak z definice míry plyne

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

(ii) Nechť jsou dány $A, B \in \mathcal{A}$, takové, že $A \subseteq B$. Pak $B = A \cup (B \setminus A)$, přičemž A a $B \setminus A$ jsou disjunktní. Tedy podle bodu (b) lze psát $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A)$, protože $\mu(B \setminus A) \geqslant 0$.

(iii) Mějme neklesající posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ (viz obrázek 2.1a). Definujeme posloupnost[5] množin $B_1, B_2, \ldots$ následovně:

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_i = A_i \setminus A_{i-1},\ i \geqslant 2.$$

Množiny $B_1, B_2, \ldots$ jsou po dvou disjunktní a zároveň $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Libovolnou množinu A_n lze totiž zapsat jako

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus A_{i-1}) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Podle již dokázaného bodu (i) (aditivita míry) tedy pro každé n platí $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$. Celkově

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

[3] $A_i \supseteq A_{i+1}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.

[4] V matematické terminologii se předpona σ běžně týká spočetných sjednocení. [5, str. 2]

[5] V podstatě konstruujeme množiny $A_1, A_2, \ldots$ tak, aby v následující množině A_i nebyl obsažen prvek, který se nachází již v některé z množin $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$. Podobná myšlenka je využita i při důkazu budů (iv) a (v).

(iv) Nechť je dána nerostoucí posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ (viz obrázek 2.1b). Podobně jako v předešlém bodě, i zde definujeme novou posloupnost množin $B_1, B_2, \ldots$ takto:

$$B_i = A_1 \setminus A_i, \; i \in \mathbb{N}.$$

Zde si můžeme všimnout, že pro každé i platí $B_i \subseteq B_{i+1}$ a splňuje tak předpoklad předešlého bodu (iii). Dle De Morganových zákonů můžeme psát

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i) = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Výraz $\lim_{j\to\infty} B_j$ lze rozepsat dvěma způsoby:

$$\lim_{j\to\infty} \mu(B_j) \overset{(iii)}{=} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{(ii)}{=} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right),$$

$$\lim_{j\to\infty} \mu(B_j) = \lim_{j\to\infty} (A_1 \setminus A_j) \overset{(ii)}{=} \lim_{j\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_j)) = \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Porovnáním obou rovností lze vidět, že

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

(v) Nechť jsou dány množiny $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Definujeme posloupnost množin $B_1, B_2, \ldots$ takto:

$$B_1 = A_1, \; B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, \; k \leqslant 2.$$

(Viz obrázek 2.1c.) Není složité si rozmyslet, že množiny $B_1, B_2, \ldots$ jsou po dvou disjunktní. Zároveň platí $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ a $B_j \subseteq A_j$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Tím je dokázáno, že

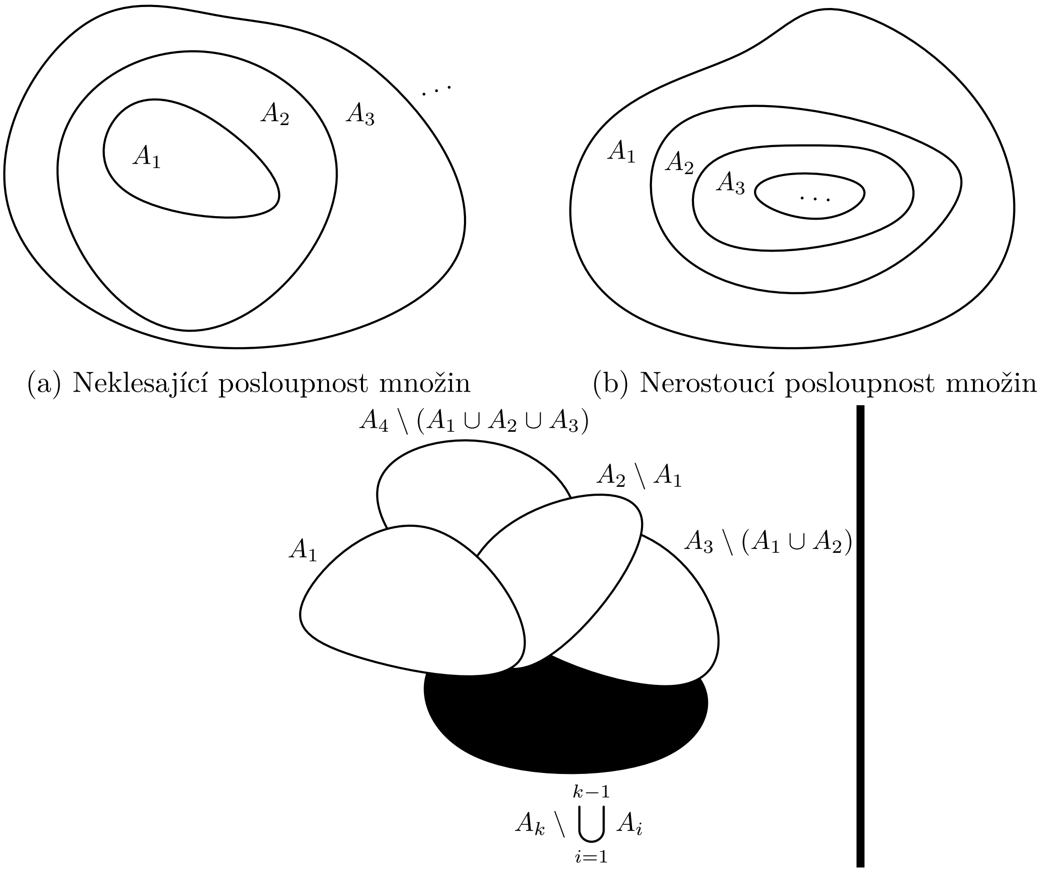
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \overset{(ii)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(Převzato z [10, str. 19]) □

Poznámka 2.2.7. Předpoklad $\mu(A_1) < \infty$ ve větě 2.2.6 v bodě (iv) nelze vynechat. Jednoduchý protipříklad si uvedeme v sekci 2.3.

2.3 Lebesgueova míra

Jednimi z nejznámějších průkopníků v oblasti teorie míry byli francouzský matematik Camille Jordan (1832–1922) a italský matematik Giuseppe Peano (1958–1932), kteří ve svých publikacích popsali způsob měření „velikosti“ množin, který je dnes známý jako tzv. *Jordanova-Peanova míra*. Rovinu $\mathbb{R}^2$ si rozdělíme na čtvercovou síť, přičemž S bude představovat součet obsahů všech čtverců



(a) Neklesající posloupnost množin

(b) Nerostoucí posloupnost množin

(c) Konstrukce množin B_k

Obrázek 2.1: Ilustrace k důkazu věty 2.2.6

sítě, které jsou obsaženy ve vnitřku množiny M a S' je součeet obsahů všech čtverců sítě, které mají společný alespoň jeden bod s hranicí množiny M. Součet $S + S'$ pak představuje obsah všech čtverců sítě, které obsahují body uzávěru množiny M. (Viz obrázek 2.2.) Při zjemňování čtvercové sítě konvergují součty S a $S + S'$ k limitám, které po řadě nazýváme *vnitřní* a *vnější Jordanova-Peanova míra*. Tato úvaha předložila základní předpoklady právě pro vznik teorie míry. [21]

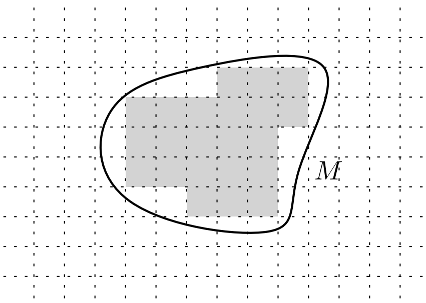
V předešlé sekci 2.2 jsme si povídali o pojmu *míra* obecně a podívali jsme se na několik příkladů. Obecnou ideu měření „velikosti“ lze založit např. na aproximaci obecné množiny pomocí *spočetných sjednocení útvarů*, jejichž „velikost“ umíme jednoduše určit. V dalším textu se omezíme pouze na množinu $\mathbb{R}^n$.

Na zmíněné myšlence je postavena definice tzv. *n-rozměrné Lebesgueovy míry*, kdy obecnou množinu budeme pokrývat pomocí *kvádrů*. Připomeňme, že obecně n-rozměrným kvádrem I rozumíme kartézský součin *intervalů*

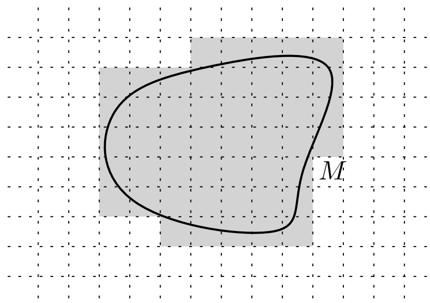
$$\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle \subseteq \mathbb{R},$$

tj.

$$I = \prod_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i \rangle = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$$



(a) Součet S



(b) Součet $S + S'$

Obrázek 2.2: Vnitřní a vnější Jordanova-Peanova míra množiny M.

a jeho objem definujeme jako

$$\operatorname{vol}_n(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Lze nejspíše ihned vidět, že objem kvádru $\operatorname{vol}_n(I)$ je *aditivní* i *subaditivní*.

Nyní si definujeme tzv. *vnější Lebesgueovu míru*.

Definice 2.3.1 (Vnější Lebesgueova míra)**.** Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak vnější n-rozměrnou Lebesgueovou mírou A je

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}_n(I_j) \;\middle|\; I_j \text{ je kvádr },\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_j \right\}.$$

Vnější Lebesgueova míra množiny intuitivně zachycuje informaci o „velikosti“ dané množiny. Lze ihned vidět, že pro libovolnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je $\lambda_n^*(A) \in \mathbb{R}_0^+$, protože $\operatorname{vol}_n(I_j) \geqslant 0$ pro každé $j \in \mathbb{N}$.

Příklad 2.3.2. Ukažme si některé triviální příklady výpočtů vnější Lebesgueovy míry z definice (viz 2.3.1), tedy budeme hledat příslušné pokrytí dané množiny.

- Pro prázdnou množinu $\varnothing$ je $\lambda_n^*(\varnothing) = 0$, neboť $\varnothing \subseteq \prod_{i=1}^{n} \langle 0, 0 \rangle$ (prázdnou množinu lze pokrýt jakýmkoliv kvádrem nulového objemu) a
$$\operatorname{vol}_n \left(\prod_{i=1}^{n} \langle 0, 0 \rangle \right) = 0.$$
- Mějme libovolnou konečnou množinu $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pro každé x_j stačí položit $I_j = \{x_j\}$ pro každé $1 \leqslant j \leqslant n$, což je degenerovaný interval, jehož objem $\operatorname{vol}_n(I_j) = 0$.
- Pro libovolnou spočetnou množinu $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ je $\lambda_n^*(A) = 0$. Pokrytí volíme stejně jako v předešlém bodě. Tedy např. pro $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ je $\lambda_1^*(\mathbb{Q}) = 0$, neboť $\mathbb{Q}$ je spočetná.
- Pro množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ je $\lambda_1^*(\mathbb{R}) = \infty$, avšak pro
$$A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$
(reálná osa v $\mathbb{R}^2$) je $\lambda_2^*(A) = 0$.

Jako poslední si ukážeme, že v případě kvádru n-rozměrného kvádru odpovídá jeho vnější Lebesgueova míra skutečně jeho objemu.

Tvrzení 2.3.3. *Je-li $I \subset \mathbb{R}^n$ kvádr, pak $\lambda_n^*(I) = \operatorname{vol}_n(I)$.*

Důkaz. Ukážeme zvlášť, že $\lambda_n^*(I) \leqslant \operatorname{vol}_n(I)$ a $\lambda_n^*(I) \geqslant \operatorname{vol}_n(I)$.

- **Důkaz $\lambda_n^*(I) \leqslant \operatorname{vol}_n(I)$.** Zvolme pokrytí $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots\}$ kvádru I, tzn. $I \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty I_i$, tak, aby

$$\sum_{i=1}^\infty \operatorname{vol}_n(I_i) \leqslant (1+\varepsilon)\lambda_n^*(I).$$

  pro nějaké $\varepsilon > 0$. Nyní si zvolíme nové kvádry[6] $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots\}$ tak, aby pro každé $i \in \mathbb{N}$ platilo

$$I \subset J^\circ \wedge \operatorname{vol}_n(J_i) \leqslant (1+\varepsilon)\operatorname{vol}_n(I_i).$$

  To není nikterak složité, stačí např. pro každé $i \in \mathbb{N}$ položit

$$J_i = \prod_{j=1}^n \left\langle x_j - r_j \sqrt[n]{1+\varepsilon}, x_j + r_j \sqrt[n]{1+\varepsilon} \right\rangle,$$

  kde x_j je střed j-tého intervalu kvádru I_i a r_j jeho poloměr, tzn. $r_j = (b_j - a_j)/2$. Protože však I je uzavřená a omezená množina, je podle věty (TODO: doplnit odkaz) kompaktní, tedy z otevřeného pokrytí $J_1^\circ, J_2^\circ, \dots$ lze vybrat konečné podpokrytí. Existuje tedy $m \in \mathbb{N}$, takové, že

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^m J_i.$$

  Celkově tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}_n(I) &\leqslant \sum_{i=1}^m \operatorname{vol}_n(J_i) \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^m \operatorname{vol}_n(I_i) \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^\infty \operatorname{vol}_n(I_i)\\ &\leqslant (1+\varepsilon)^2\lambda_n^*(I)\end{aligned}$$

  pro každé $\varepsilon > 0$, což jsme chtěli.

- **Důkaz $\lambda_n^*(I) \geqslant \operatorname{vol}_n(I)$.** Důkaz opačné nerovnosti je oproti té předešlé naopak velmi jednoduchý. Kvádr I totiž reprezentuje pokrytí sebe samotného, tzn. lze volit $I_1 = I$ a zbylé kvádry I_j, kde $j \geqslant 2$, mohou být libovolné s nulovým objemem.

Z kombinací obou nerovností lze vidět, že vnější Lebesgueova míra n-rozměrného kvádru skutečně odpovídá jeho objemu, tj.

$$\lambda_n^*(I) = \operatorname{vol}_n(I).$$

□

[6] Formálně $\mathcal{I}$ tvoří zjemnění pokrytí $\mathcal{J}$

Poznámka 2.3.4. Vraťme se na chvíli ještě k větě 2.2.6 o vlastnostech míry, konkrétně bod (iv). Předpoklad $\mu(A_1) < \infty$ zde vynechat nelze. Stačí vzít množiny $A_j = \langle j, \infty)$, tzn. $\lambda_n^*(A_j) = \lambda_n^*(\langle j, \infty)) = \infty$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Snadno si rozmyslíme, že

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing,$$

nicméně lze vidět, že zatímco $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \infty$, tak $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$.

Z příkladů 2.3.2 a 2.3.3 můžeme vidět, že pro rozumně zvolené množiny zachycuje vnější Lebesgueova míra jejich intuitivní „velikost". V případě intervalu odpovídá jeho délce, v případě diskrétní množiny je nulová a podobně např. pro obdélník odpovídá jeho obsahu, pro kvádr jeho objemu, atd.

Nyní se však nabízí jedna otázka. Čtenář by mohl již od chvíle, kdy jsme zavedli pojem vnější Lebesgueovy míry (opět viz definice 2.3.1) namítat, co nás opravňuje nazývat zobrazení λ_n^* mírou, tj. ve smyslu definice 2.2.4. Jak víme, že splňuje podmínku σ-aditivity? Odpověď na tuto otázku není zcela přímočará a vlastně není ani jednoduchá.

Bohužel pro libovolně zvolenou množinu X a σ-algebru $\mathcal{A}$ v případě vnější Lebesgueovy míry obecně neplatí vlastnost aditivity, tedy existují množiny $A, B \in \mathcal{A}$, takové, že

$$\lambda_n^*(A \cup B) \neq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B).$$

Příklad takové množiny využívá např. takzvaná *Vitaliho konstrukce*, se kterou přišel italský matematik Giuseppe Vitali (1875–1932) roku 1905, využívající invariance vnější Lebesgueovy míry vůči posunutí, tzn. $\lambda_n^*(x + A) = \lambda_n^*(A)$. [15] V rámci tohoto textu se jí zde zabývat nebudeme, avšak pro zájemce doporučuji zdroje [5, str. 3] a [19], kde je tato konstrukce podrobněji rozepsána.

Je tedy potřeba se omezit na takové množiny, kde je λ_n^* aditivní. Existuje více způsobů jejich charakterizace, avšak my si zde uvedeme ten, se kterým přišel řecký matematik Constantin Carathéodory (1873–1950).

Definice 2.3.5 (Lebesgueovská měřitelnost)**.** Množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme (lebesgueovsky) měřitelnou, pokud pro každou množinu G platí

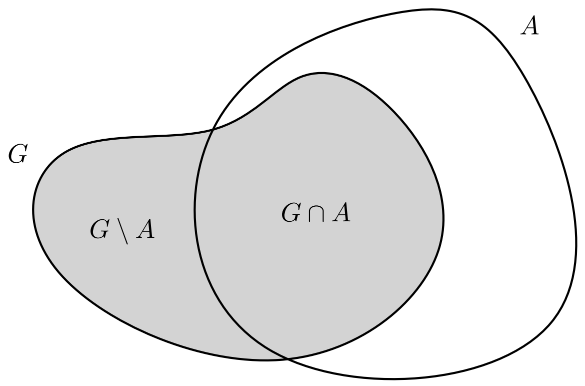
$$\lambda_n^*(G) = \lambda_n^*(G \cap A) + \lambda_n^*(G \setminus A).$$

Systém všech měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$ značíme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Pokud $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, pak číslo $\lambda_n(A) = \lambda_n^*(A)$ nazýváme n-rozměrnou Lebesgueovou mírou množiny A.

Podmínka v definici 2.3.5 se někdy nazývá říká *Carathéodoryho kritérium*. Zjednodušeně říká, že množina A je lebesgueovsky měřitelná, když při „rozdělení" *libovolně* zvolené množiny G na dvě části pomocí A lze míru G stanovit součtem měr daných částí (viz obrázek 2.3). Zároveň je dobré podotknout, že kvádry, které figurují v definici vnější Lebesgueovy míry jsou měřitelné. O systému $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a Lebesgueově míře λ_n lze dokázat následující tvrzení.

Věta 2.3.6. *Platí:*

(i) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ *je měřitelný prostor.*



Obrázek 2.3: Ilustrace měřitelnosti množiny A

(ii) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ *je prostor s mírou.*

Čtenář snad promine, že formální důkaz v případě tohoto tvrzení v zájmu zachování stručnosti textu zcela vynecháme, nicméně „zvídavec“ jej může nalézt např. v knize [18, str. 347], kde jsou příslušné záležitosti rozepsány.

2.4 Box-counting dimenze

Tomuto typu dimenze jsme se již v základu věnovali v kapitole 1, specificky sekci 1.3, kde jsme rozebrali jeho způsob jejího výpočtu a ukázali jsme si jej několika příkladech. V této části si blíže rozebereme některé další vlastnosti týkající se právě *box-counting dimenze*[7] a pokusíme se ji lépe zasadit do kontextu teorie míry, které jsme se samostatně až do této chvíle věnovali.

2.4.1 Definice a výpočet

Jako první se podíváme na myšlenku box-counting trochu blíže a maličko si ji zobecníme. Původně jsme nahlíželi na dimenzi jako na exponent, s nímž roste „velikost“ zkoumaného útvaru. Tato myšlenka se ukázala jako rozumná, neboť pro „klasické“ geometrické útvary vycházela tato dimenze vždy celočíselně, nicméně už tomu tak nebylo v případě fraktálních útvarů. Podstata byla taková, že jsme útvar F rozdělili na určitý počet stejně „velkých částí“, označme $F_1, F_2, \dots, F_m$ v nějakém měřítku $\varepsilon > 0$. Zkusme nyní požadavek na striktně stejnou velikost (formálně vzato míru) trochu rozvolnit. Bude nám stačit, když pro každé i je

$$\operatorname{diam} F_i \leqslant \delta, \text{ kde } \delta > 0.$$

Zároveň nebudeme požadovat, aby množiny $F_1, F_2, \dots, F_m$ byly všechny striktně po dvou téměř disjunktními[8] podmnožinami F, ale stačí, když budou tvořit pokrytí F.

[7] V kapitole 1 jsme pro jednoduchost používali obecnější termín *fraktální dimenze*. Ten však zahrnuje daleko širší škálu možných definic, než jen tu, kterou jsme si představili. Avšak dále v tomto textu budeme používat výhradně její skutečný název, tj. box-counting dimenze.

[8] Množiny M, N jsou *téměř disjunktní*, pokud $M^\circ \cap N^\circ = \varnothing$, tedy může nastat, že se na hranici mohou „dotýkat“, tzn. $\partial M \cap \partial N \neq \varnothing$.

Mějme tedy nějakou neprázdnoou omezenou množinu $F \subset \mathbb{R}^n$, kde pro každé $\delta > 0$ budeme hledat *nejmenší počet* množin, takových, že pokrývají F. Toto číslo si označíme $N_\delta(F)$. Dimenze množiny F by tedy měla odrážet „rychlost" růstu $N_\delta(F)$ pro $\delta \to 0^+$. Je-li splněna aproximace

$$N_\delta(F) \approx c\delta^{-s} \tag{2.1}$$

pro $c > 0$, pak řekneme, že množina F má box-counting dimenzi s. (Převzato z [4, str. 27].)

Poznámka 2.4.1. V dalším textu budeme místo $\delta \to 0^+$ psát pro jednoduchost pouze $\delta \to 0$, byť by se slušilo používat první variantu. Čtenáři je však nejspíše jasné, že uvažovat záporný průměr množiny nemá smysl.

Logaritmováním a úpravou výrazu (2.1) dostaneme:

$$\ln N_\delta(F) \approx \ln c + \ln \delta^{-s} \tag{2.2}$$

$$\ln N_\delta(F) \approx \ln c - s \ln \delta \tag{2.3}$$

$$s \approx \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} + \frac{\ln c}{\ln \delta}. \tag{2.4}$$

Když porovnáme výsledek v (2.2) s rovností (1.7) z minulé kapitoly, můžeme si všimnout, že zde navíc figuruje člen $\ln c / \ln \delta$. Když však uvážíme limitu daného výrazu pro $\delta \to 0$, dostaneme původní vzorec, který jsme již viděli, tj.

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} + \frac{\ln c}{\ln \delta} \right) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} + \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln c}{\ln \delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

Předchozí úvahu můžeme shrnout do následující definice.

Definice 2.4.2 (Box-counting dimenze)**.** Nechť $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená množina. Pak definujeme následující:

(a) *Nejmenší počet množin v δ-pokrytí množiny F* značíme $N_\delta(F)$, tj.

$$N_\delta(F) = \min \left\{ m \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F_i \;,\; \operatorname{diam} F_j \leqslant \delta \text{ pro } 1 \leqslant j \leqslant m \right\}.$$

(b) *Horní box-counting dimenze* množiny F je

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

(c) *Dolní box-counting dimenze* množiny F je

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

V případě, že $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, pak společnou hodnotu nazýváme *box-counting dimenzí* množiny F, značíme $\dim_{\mathrm{B}} F$, přičemž platí

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

Poznámka 2.4.3. Zde je důležité zmínit, že pro v dalším textu budeme uvažovat δ dostatečně malé, konkrétně $0 < \delta < 1$, tzn. hodnota $-\ln \delta$ je vždy kladná. Dále též budeme pracovat (podle definice 2.4.2) pouze s neprázdnými omezenými množinami, abychom se vyhnuli problémům s případy, kdy $N_\delta(F) = \infty$ nebo $N_\delta(F) = 0$.

Abychom uvedli vše na pravou míru, box-counting dimenzi lze taktéž definovat více způsoby. V tuto uvažujeme obecně δ-pokrytí dané množiny F, tj. pokrytí *obecnými* množinami o průměru maximálně $\delta > 0$. Lze se však zaměřit i na konkrétní útvary, jak ukazuje následující věta.

Věta 2.4.4 (Ekvivalentní definice box-counting dimenze)**.** *Nechť $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená množina. Pak*

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta},$$
$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta},$$
$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta},$$

kde $M_\delta(F)$ je definováno jedním z následujících vzorců:

(i) $M_\delta(F) = \inf \left\{ m \;\middle|\; F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} K_\delta(x_i)\ ,\ x_j \in \mathbb{R}^n \textit{ pro } 1 \leqslant j \leqslant m \right\},$

(ii) $M_\delta(F) = \inf \left\{ m \;\middle|\; F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} I_i\ ,\ I_j = \prod_{k=1}^{n} \langle a_k, a_k + \delta \rangle \textit{ pro } 1 \leqslant j \leqslant m \right\},$

(iii) $M_\delta(F) = |\{ I \mid I \cap F \neq \varnothing\ ,\ I \in \mathcal{Q}_\delta \}|$*, kde* $\delta > 0$.

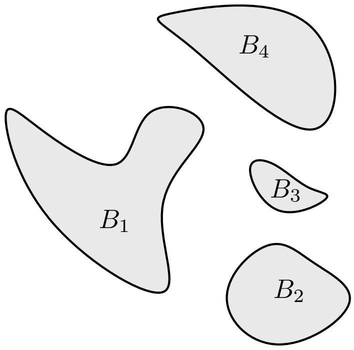
(iv) $M_\delta(F) = \sup \{ m \mid B_\delta(x_i) \cap B_\delta(x_j) = \varnothing\ ;\ x_i, x_j \in \mathbb{R}^n \textit{ pro } 1 \leqslant i, j \leqslant m \}.$

Pojďme si větu 2.4.4 nyní trochu rozebrat.

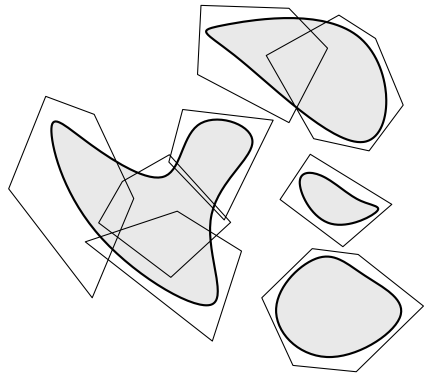
- Body (i) a (iv) říkají, že $M_\delta(F)$ je rovno *nejmenšímu počtu uzavřených koulí o poloměru δ, které pokrývají F*, resp. *nejvyšší počet disjunktních otevřených koulí, které mají střed v F.*
- Podobně body (ii) a (iii) tvrdí, že $M_\delta(F)$ lze definovat jako pokrytí kvádry o stranách délky δ, resp. počet všech kvádrů z δ-mříže, které mají s F neprázdný průnik.

Pro představu viz obrázek 2.4. Důkaz věty je delší a opět jej vynecháme, nicméně lze jej nalézt v knize [4, str. 30].

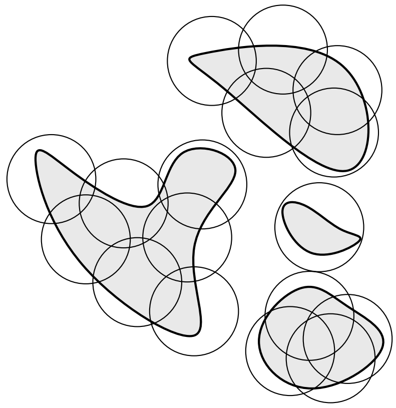
Zároveň body (ii) a (iii) nám dávají dobré opodstatnění názvu tohoto typu dimenze, neboť v podstatě zkoumáme pokrývání daného obrazce „kostkami“. Při aproximacích box-counting dimenze obrazce $F \subset \mathbb{R}^2$ tak lze pracovat s mřížkou čtverců o libovolné straně $\delta > 0$, kdy $M_\delta(F)$ stanovíme jako počet čtverců, které se překrývají se zkoumaným obrazcem F. Když se tedy zpět vrátíme k otázce



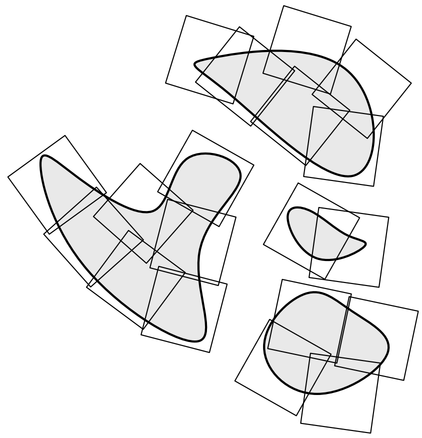
(a) Množina $B = \bigcup_{i=1}^{4} B_i$



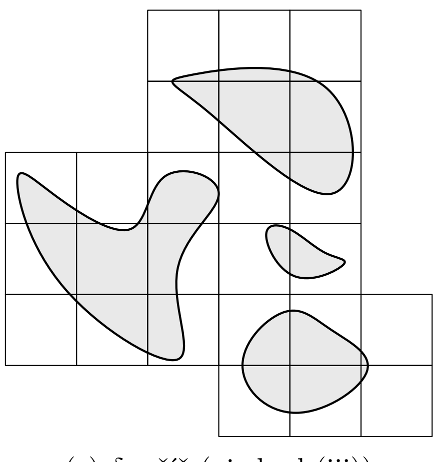
(b) δ-pokrytí množiny B (viz definice 2.4.2)



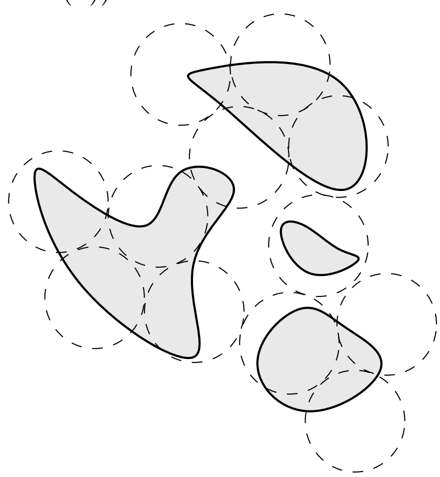
(c) Pokrytí uzavřenými koulemi (viz bod (i))



(d) Pokrytí pomocí kvádrů (viz bod (ii))

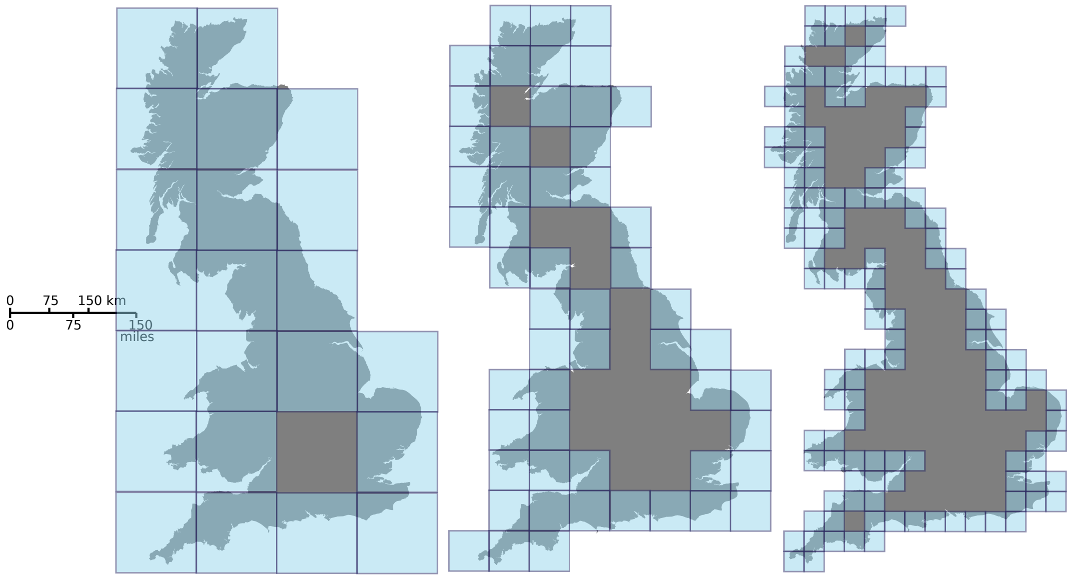


(e) δ-mříž (viz bod (iii))



(f) Pokrytí otevřenými po dvou disjunktními koulemi (viz bod (iv))

Obrázek 2.4: Ilustrace věty 2.4.4 (Inspirováno [4, str. 29])



Obrázek 2.5: Aproximace box-counting dimenze pobřeží Velké Británie (Převzato z Wikipedia Commons)[9]

rozebírané v úvodu tohoto textu týkající se délky pobřeží (viz kapitola 1), lze jeho „fráktálnost“ do jisté míry vyjádřit právě popsaným způsobem (viz obrázek 2.5). Nyní se opět vrátíme k fraktálům a výpočtům jejich dimenze, čemuž jsme se věnovali již v sekci 1.3 kapitoly 1, konkrétně 1.3.2. Tentokrát však budeme postupovat přímo podle definice box-counting dimenze 2.4.2, tedy budeme zvlášť zkoumat horní a dolní box-counting dimenzi.

Příklad 2.4.5 (Cantorovo diskontinuum)**.** Formálně můžeme popsat Cantorovo diskontinuum C jako průnik množin C_k pro $k = 0, 1, 2, \ldots$, přičemž

$$C_k = \bigcup_{j=0}^{3^{k-1}-1} \left(\left\langle \frac{3j+0}{3^k}, \frac{3j+1}{3^k} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3j+2}{3^k}, \frac{3j+3}{3^k} \right\rangle \right).$$

C_k tedy reprezentuje k-tou iteraci a $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$. Již jsme měli možnost se přesvědčit, že tento fraktál má box-counting dimenzi $\ln 2/\ln 3$. Zkusme nyní výpočet zopakovat, avšak vzlášť vypočítáme $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} C$ a $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} C$ podíváme se, zda se shodují.

Jako první provedeme horní odhad. Je potřeba zvolit δ a na jeho základě dopočítat $N_\delta(C)$. V k-té iteraci, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$, bude obecně 2^k intervalů, každý o délce $(1/3)^k$, tedy pokud zvolíme $3^{-k} < \delta \leqslant 3^{-k+1}$, pak intervaly o délce nejvýše δ (viz věta 2.4.4, bod (i)) tvoří δ pokrytí, přičemž $N_\delta(C) \leqslant 2^k$. Tedy celkově pro δ-pokrytí všech intervalů bude potřeba nejvýše $N_\delta(C) \leqslant 2^k$ intervalů $I_1, I_2, \ldots, I_{N_\delta(C)}$ o průměru $3^{-k} < \operatorname{diam} F_i \leqslant 3^{-k+1}$ pro každé i. Z toho dostáváme

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} C = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(C)}{-\ln \delta} \leqslant \limsup_{k \to \infty} \frac{\ln 2^k}{-\ln 3^{-k+1}} = \limsup_{k \to \infty} \frac{k \ln 2}{(k-1)\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Naopak pokud uvážíme intervaly délky $3^{-k-1} \leqslant \delta < 3^{-k}$, pak každý z nich má neprázdný průnik s maximálně jedním intervalem k-té iterace C. Těch je, jak již víme, 2^k, tedy intervalů $I_1, I_2, \ldots, I_{N_\delta(C)}$ bude nejméně 2^k pro pokrytí C, tzn.

$N_\delta(C) \geqslant 2^k$. Tím dostáváme dolní odhad:

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} C = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(C)}{-\ln \delta} \geqslant \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln 2^k}{-\ln 3^{-k-1}} = \liminf_{\delta \to 0} \frac{k \ln 2}{(k+1)\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Protože $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} C = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} C = \ln 2 / \ln 3$, tak box-counting dimenze Cantorova diskontinua je $\dim_{\mathrm{B}} C = \ln 2/\ln 3$. (Převzato z [4, str. 32])

Podobně bychom postupovali pro rovinné obrazce.

Příklad 2.4.6 (Kochova křivka)**.** Zde se zatím s formální definicí nebudeme zatěžovat. Opět ukážene horní a dolní odhad zvlášť. Kochovu křivku si označíme K.

Obecně k-tá iterace Kochovy křivky bude obsahovat 4^n úseček, každá o délce $(1/3)^k$. Podobně jako v předchozím příkladu 2.4.5 zvolíme $3^{-k} < \delta \leqslant 3^{-k+1}$. Pokud si pro pokrytí zvolíme uzavřené koule

$$K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \ldots, K_\delta^{M_\delta(K)}(x_{M_\delta(K)}), \text{ kde } x_1, x_2, \ldots, x_{M_\delta(K)} \in \mathbb{R}^2$$

pak $M_\delta(K) \leqslant 4^k$. Tedy

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} K = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln M_\delta(K)}{-\ln K} \leqslant \limsup_{k \to \infty} \frac{\ln 4^k}{-\ln 3^{-k+1}} = \limsup_{k \to \infty} \frac{k \ln 4}{(k-1)\ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Podobně pro dolní odhad uvážíme $3^{-k-1} \leqslant \delta < 3^{-k}$. Vezmeme-li uzavřené koule $K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \ldots, K_\delta^{M_\delta(K)}(x_{M_\delta(K)})$, pak žádný nemůže mít neprázdný průnik s více než čtyřmi úsečkami, tedy pro jejich pokrytí je zapotřebí alespoň $M_\delta(K) \geqslant 4^k/4 = 4^{k-1}$, čímž dostáváme

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} K = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln M_\delta(K)}{-\ln K} \geqslant \liminf_{k \to \infty} \frac{\ln 4^{k-1}}{-\ln 3^{-k-1}} = \liminf_{k \to \infty} \frac{(k-1)\ln 4}{(k+1)\ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Tzn. $\dim_{\mathrm{B}} K = \ln 4/\ln 3$.

Poznámka 2.4.7. Obecně množina F skládající se z m disjunktních kopií sebe samotné, kde každá z nich je r-krát menší, má dimenzi $\dim_{\mathrm{B}} F = \ln m/\ln r$.

Nyní se podíváme ještě na jedno možné pojetí box-counting dimenze. Připomeňme, že δ-okolím množiny F v metrickém prostoru (X, ϱ) rozumíme

$$(F)_\delta = \{x \in X \mid \exists y \in X : \varrho(x,y) < \delta\}.$$

Budeme nyní sledovat, jak „rychle“ se mění objem $(F)_\delta$ pro $\delta \to 0$. A se zmínkou objemu nám zde do hry opět vstupuje Lebesgueova míra λ_n, o níž jsme si povídali v sekci 2.3. Podívejme se nejdříve na několik příkladů.

- Pro konečnou množinu $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je

  $$\lambda_3((F)_\delta) \leqslant n \cdot \frac{4}{3}\pi\delta^3.$$

  Pro $\delta \leqslant 1/2 \min\{\varrho(x,y) \mid x, y \in F\}$ nastává rovnost.

- Pro úsečku $u \subset \mathbb{R}^3$ o délce ℓ lze objem jejího δ-okolí stanovit jako

$$\lambda_3((u)_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3 + \pi\delta^2\ell.$$

  Pokud však uvážíme δ dostatečně malé, lze první člen zanedbat a psát

$$\lambda_3((u)_\delta) \approx \pi\ell\delta^2.$$

- V případě neprázdného kvádru

$$I = \{(x, y, 0) \mid x \in \langle a_1, b_1\rangle, \, y \in \langle a_2, b_2\rangle\}$$

  je

$$\begin{aligned}\lambda_3(I_\delta) &= 2(b_1 - a_1)(a_2 - b_2)\delta + 2(b_1 - a_1)\pi\delta^2 + 2(b_2 - a_2)\pi\delta^2 + \frac{4}{3}\pi\delta^3 \\ &\approx 2(b_1 - a_1)(a_2 - b_2)\delta\end{aligned}$$

- Pro kouli $B_r(x) \subset \mathbb{R}^3$, kde $x \in \mathbb{R}^3$ a $r > 0$ je objem

$$\lambda_3((B_r(x))_\delta) = \frac{4}{3}\pi(r+\delta)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2\delta + 4\pi r\delta^2 + \frac{4}{3}\pi\delta^3 \approx \frac{4}{3}\pi r^3.$$

  Změna objemu je v tomto případě vzhledem k původnímu objemu zanedbatelná.

Výsledky si srovnejme v tabulce 2.1. Můžeme si všimnout, že v každém případě

Útvar F	$\lambda_3((F)_\delta)$
Konečná množina $\{x_1, \dots, x_n\}$	$\frac{4n}{3}\pi\delta^3 = c_1\delta^3$
Úsečka u	$\pi\ell\delta^2 = c_2\delta^2$
Kvádr I	$2(b_1 - a_1)(a_2 - b_2)\delta = c_3\delta^1$
Koule $B_\delta(x)$	$\frac{4}{3}\pi r^3 = c_4\delta^0$

Tabulka 2.1: Odhady λ_3 pro vybrané útvary

odhad objemu vychází $\lambda_3((F)_\delta) \approx c\delta^{3-s}$, kde $c > 0$ je závislé na původní míře F a s udává dimenzi. Obecněji pro množinu $F \subseteq \mathbb{R}^n$ bychom došli k $\lambda_n((F)_\delta) \approx c\delta^{n-s}$. Nyní, podobně jako v úvodu této sekce, zkusme opět vyjádřit s:

$$\begin{aligned}\ln \lambda_n((F)_\delta) &\approx \ln c + (n - s)\ln\delta \\ s\ln\delta &\approx n\ln\delta - \ln\lambda_n((F)_\delta) + \ln c \\ s &\approx n - \frac{\ln\lambda_n((F)_\delta)}{\ln\delta} + \frac{\ln c}{\ln\delta}.\end{aligned}$$

Poslední člen bude v limitě opět nulový.

Lze ukázat, že s není v tomto případě nic jiného, než již námi zkoumaná box-counting dimenze. To si shrneme a dokážeme ve větě 2.4.8.

Věta 2.4.8. *Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak platí:*

(i) $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n - \limsup_{\delta \to 0} \dfrac{\ln \lambda_n((F)_\delta)}{\ln \delta}$,

(ii) $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n - \liminf_{\delta \to 0} \dfrac{\ln \lambda_n((F)_\delta)}{\ln \delta}$.

Důkaz. V rámci důkazu využijeme větu 2.4.4.

Mějme $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Označme v_n objem jednotkové koule $K_1(x)$[10] v $\mathbb{R}^n$ pro $x \in \mathbb{R}^n$ libovolné. Dále mějmě pokrytí

$$\mathcal{K} = \left\{ K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \ldots, K_\delta^{M_\delta(F)}(x_{M_\delta(F)}) \right\}$$

množiny F, kde $0 < \delta < 1$ a $x_j \in F$ pro každé $1 \leqslant j \leqslant M_\delta(F)$, přičemž $M_\delta(F)$ je definováno podle bodu (i) věty 2.4.4. Pak lze zvolit pokrytí

$$\mathcal{K}' = \left\{ K_{2\delta}^1(x_1), K_{2\delta}^2(x_2), \ldots, K_{2\delta}^{M_\delta(F)}(x_{M_\delta(F)}) \right\},$$

tzn. $\mathcal{K}$ je zjemnění pokrytí $\mathcal{K}'$. Zároveň však platí, že $\mathcal{K}'$ je i pokrytím $(F)_\delta$. Pro libovolné $x \in (F)_\delta$ existuje totiž $y \in F$, takové, $\varrho(x, y) < \delta$. Tedy pro dané y existuje nějaká koule $K_\ell(x_\ell) \in \mathcal{K}$, taková, že $y \in K_\ell(x_\ell)$, což znamená, že

$$\varrho(x_\ell, y) \leqslant \varrho(x_\ell, x) + \varrho(x, y) \leqslant \delta + \delta = 2\delta.$$

Tzn. míru F lze zhora odhadnout jako

$$\lambda_n((F)_\delta) \leqslant M_\delta(F) v_n (2\delta)^n.$$

Úpravou získáme:

$$\begin{aligned} \ln \lambda_n((F)_\delta) &\leqslant n \ln \delta + \ln M_\delta(F) + \ln 2^n v_n \\ \frac{\ln \lambda_n((F)_\delta)}{-\ln \delta} &\leqslant -n + \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta} + \frac{\ln 2^n v_n}{-\ln \delta}, \end{aligned}$$

tedy v limitě

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln \lambda_n((F)_\delta)}{-\ln \delta} \leqslant -n + \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F.$$

K odhadu $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$ lze dospět analogicky.

Nyní uvažujme po dvou disjunktní otevřené koule $B_\delta^j(x_j)$, kde $x_j \in F$ pro $1 \leqslant j \leqslant M_\delta(F)$. Pak součtem jejich objemů získáme

$$M_\delta(F) v_n \delta^n \leqslant \lambda_n((F)_\delta).$$

Obdobnou úpravou této nerovnosti získáme požadovanou nerovnost. $\square$

Zkusme si aplikaci věty ilustrovat opět na příkladu fraktálu.

[10] Objem koule v $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit vztahem

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} r^n,$$

kde Γ je tzv. *gamma funkce*. Se vzorcem však dále v textu pracovat nebudeme.

Příklad 2.4.9 (Cantorovo diskontinuum potřetí)**.** Pro Cantorovo diskontinuum v k-té iteraci, označme C_k, lze odhadnout délku $(C_k)_\delta$ pro $3^{-k-2} \leqslant \delta \leqslant 3^{-k-1}$ jako

$$\lambda_1((C_k)_\delta) \geqslant 2^k(3^{-k-2} + 2\delta) \leqslant 2^k \cdot 3 \cdot 3^{-k-2} = 2^k \cdot 3^{-k-1}.$$

Tedy podle věty 2.4.8

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_{\mathrm{B}} C &= n - \liminf_{\delta\to 0} \frac{\ln \lambda_1((C)_\delta)}{\ln \delta} \leqslant 1 - \liminf_{k\to\infty} \frac{\ln 2^k \cdot 3^{-k-1}}{\ln 3^{-k-1}} \\ &= \liminf_{k\to\infty} \frac{k \ln 2}{(k+1)\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \end{aligned}$$

Podobně zvolíme-li $3^{-k-1} \leqslant \delta \leqslant 3^{-k}$, pak

$$\lambda_1((C_k)_\delta) \leqslant 2^k(3^{-k} + 2\delta) \leqslant 2^k \cdot 3 \cdot 3^{-k} = 2^k \cdot 3^{-k+1}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_{\mathrm{B}} C &= n - \limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln \lambda_1((C)_\delta)}{\ln \delta} \geqslant 1 - \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln 2^k \cdot 3^{-k+1}}{\ln 3^{-k+1}} \\ &= \limsup_{k\to\infty} \frac{k \ln 2}{(k-1)\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \end{aligned}$$

2.4.2 Vlastnosti

V minulé podsekci 2.4.1 jsme se bavili o možnostech pojetí box-counting dimenze. S tím souvisely zejména pak věty 2.4.4 a 2.4.8. Nyní trochu blíže ještě prozkoumáme některé její vlastnosti, na něž se podíváme ve větě 2.4.10.

Věta 2.4.10 (Vlastnosti box-counting dimenze)**.** *Nechť jsou dány $F, G \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(i) Pokud $G \subseteq F$, pak $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} G \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$ a $\overline{\dim}_{\mathrm{B}} G \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$. ◁ *monotonie*

(ii) Je-li $F \neq \varnothing$ omezená, pak $0 \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant n$. ◁ *rozsah hodnot*

(iii) $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F \cup G) = \max\left\{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F, \overline{\dim}_{\mathrm{B}} G\right\}$. ◁ *stabilita*

Důkaz.

(i) Plyne triviálně z faktu, že pro libovolné $\delta > 0$ je $N_\delta(G) \leqslant N_\delta(F)$, neboť každé δ-pokrytí $\mathcal{F} \supset F$ je zároveň δ-pokrytím G.

(ii) První dvojice nerovností je zjevná z definice (viz 2.4.2). Pro třetí nerovnost zvolme kvádr I, takový, že $F \subset I$. Zvolíme-li $\delta > 0$ a δ-mříž $\mathcal{Q}_\delta$, pak

$$\begin{aligned} M_\delta(F) &= |\{J \mid J \cap F \neq \varnothing \ , \ J \in \mathcal{Q}_\delta\}| \\ &\leqslant |\{J \mid J \cap I \neq \varnothing \ , \ J \in \mathcal{Q}_\delta\}| \\ &= M_\delta(I) \leqslant c\delta^{-n}, \end{aligned}$$

kde $c > 0$. Poslední nerovnost si lze snadno rozmyslet. Tedy podle věty 2.4.4 a přechozího bodu (i) máme

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} I = \limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(I)}{-\ln \delta} \leqslant \limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln c\delta^{-n}}{-\ln \delta} = n.$$

(iii) Pro $\delta > 0$ volme δ-pokrytí $\mathcal{F} \supset F$ a $\mathcal{G} \supset G$. Je celkem zjevné, že $N_\delta(F \cup G) \leqslant N_\delta(F) + N_\delta(G)$, neboli

$$\begin{aligned}\ln(N_\delta(F) + N_\delta(G)) &\leqslant \ln\left(2 \max\{N_\delta(F), N_\delta(G)\}\right) \\ &= \ln 2 + \ln\left(\max\{N_\delta(F), N_\delta(G)\}\right).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F \cup G) &\leqslant \limsup_{\delta \to 0} \left(\frac{\ln 2}{-\ln \delta} + \frac{\ln\left(\max\{N_\delta(F), N_\delta(G)\}\right)}{-\ln \delta} \right) \\ &\leqslant \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln\left(\max\{N_\delta(F), N_\delta(G)\}\right)}{-\ln \delta} \\ &= \limsup_{\delta \to 0} \left(\max\left\{ \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}, \frac{\ln N_\delta(G)}{-\ln \delta} \right\} \right) \\ &\leqslant \max\left\{ \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}, \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(G)}{-\ln \delta} \right\} \\ &= \max\left\{ \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F, \overline{\dim}_{\mathrm{B}} G \right\}.\end{aligned}$$

Opačná nerovnost plyne z faktu, že $F \subset F \cup G$ a $G \subset F \cup G$, tedy

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F \cup G) \geqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \text{ a } \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F \cup G) \geqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} G$$

podle bodu (i), neboli

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F \cup G) = \max\left\{ \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F, \overline{\dim}_{\mathrm{B}} G \right\}.$$

□

(Převzato a upraveno z [4, str. 35].)

Poslední bod (iii) tvrzení 2.4.10 lze pochopitelně rozšířit indukcí. Čtenář se sám může přesvědčit, že se jedná o relativně jednoduché cvičení.

Důsledek 2.4.11. *Pro $F_1, F_2, \ldots, F_m \subseteq \mathbb{R}^n$ platí:*

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} \left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i \right) = \max\left\{ \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F_j \mid 1 \leqslant j \leqslant m \right\}.$$

Důkaz. Pro $m = 1$ a $m = 2$ víme, že tvrzení platí. Pro $m + 1$ lze psát:

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_{\mathrm{B}} \left(\bigcup_{i=1}^{m+1} F_i \right) &= \overline{\dim}_{\mathrm{B}} \left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i \right) \cup F_{m+1} \right) \\ &= \max\left\{ \overline{\dim}_{\mathrm{B}} \left(\bigcup_{i=1}^{m+1} F_i \right), \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F_{m+1} \right\} \\ &\overset{\text{I.P.}}{=} \max\left\{ \max\left\{ \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m \right\}, \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F_{m+1} \right\} \\ &= \max\left\{ \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F_j \mid 1 \leqslant j \leqslant m+1 \right\}.\end{aligned}$$

□

Jako poslední se ještě nabízí otázka, jak se bude dimenze $\dim_{\mathrm{B}}$ chovat vůči zobrazením. V tomto kontextu pro nás budou relevantní především *lipschitzovská* a *bilipschitzovská zobrazení*. Připomeňme, že lipschitzovské zobrazení je takové zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory (X, ϱ_1) a (Y, ϱ_2), že existuje konstanta $K > 0$, taková, že pro každé $x, y \in X$ platí

$$\varrho_2(f(x), f(y)) \leqslant K\varrho_1(x, y).$$

Pokud navíc platí, že existují konstanty $K_1, K_2 > 0$, takové, že platí

$$K_1\varrho_1(x, y) \leqslant \varrho_2(f(x), f(y)) \leqslant K_2\varrho_1(x, y),$$

pak f nazýváme bilipschitzovské.

Než se však podíváme na samotný vztah box-counting dimenze a lipschitzovských, resp. bilipschitzovských zobrazení, dokážeme si jedno jednoduché lemma, které později využijeme.

Lemma 2.4.12. *Nechť $(X, \varrho_1), (Y, \varrho_2)$ jsou metrické prostory a zobrazení $f : X \to Y$ je bilipschitzovské. Pak $f : X \to f(X)$ je bijekce.*

Důkaz. Podle předpokladu je f bilipschitzovské zobrazení, tedy existují pro konstanty $K_1, K_2 > 0$, takové, že

$$K_1\varrho_1(x, y) \leqslant \varrho_2(f(x), f(y)) \leqslant K_2\varrho_1(x, y),\ x, y \in X.$$

Surjektivita zobrazení f je zřejmá z její definice. Pro spor předpokládejme, že f není injektivní, tedy existují $x, y \in X$, taková, že $x \neq y$ a $f(x) = f(y)$. Pak

$$0 < K_1\varrho_1(x, y) \leqslant \varrho_2(f(x), f(y)) = 0,$$

což je spor. □

V našem případě se nyní dále omezíme, stejně jako předtím, pouze na prostor $\mathbb{R}^n$.

Věta 2.4.13. *Nechť jsou dány metrické prostory $(\mathbb{R}^n, \varrho_n)$ a $(\mathbb{R}^m, \varrho_m)$, $F \subseteq \mathbb{R}^n$ a zobrazení $f : F \to \mathbb{R}^m$. Platí:*

(i) Je-li f lipschitzovské, pak

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \text{ a } \overline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F.$$

(ii) Je-li f bilipschitzovské, pak

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \text{ a } \overline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F.$$

Důkaz. Máme tedy metrické prostory $(\mathbb{R}^n, \varrho_n)$, $(\mathbb{R}^m, \varrho_m)$, zobrazení $f : F \to \mathbb{R}^m$ a $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

(i) Jako první si všimneme, že je-li $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots\}$ δ-pokrytí množiny F, kde $\delta > 0$, pak je jím i systém

$$\mathcal{F}' = \{F \cap F_1, F \cap F_2, \dots\}.$$

Podle předpokladu je f lipschitzovské, tzn. pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ je

$$\varrho_m(f(x), f(y)) \leqslant K \varrho_n(x, y),\ K > 0.$$

Speciálně tak platí i $\operatorname{diam}(f(F \cap F_i)) \leqslant K \operatorname{diam}(F \cap F_i)$ pro každé i, a tedy

$$\operatorname{diam}(f(F \cap F_i)) \leqslant K \operatorname{diam}(F \cap F_i) \leqslant K \operatorname{diam} F_i \leqslant K\delta.$$

Z toho plyne, že $\mathcal{G} = \{f(F \cap F_1), f(F \cap F_2), \dots\}$ tvoří $K\delta$-pokrytí množiny $f(F)$. Tedy máme, že $N_{K\delta}(f(F)) \leqslant N_\delta(F)$. Po úpravě

$$\frac{\ln N_{K\delta}(f(F))}{-\ln \delta} \leqslant \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

Tedy celkově

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) &= \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_{K\delta}(f(F))}{-\ln K\delta} = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_{K\delta}(f(F))}{-\ln \delta} \cdot \frac{\ln \delta}{\ln K\delta} \\ &\leqslant \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(f(F))}{-\ln \delta} \cdot \frac{\ln \delta}{\ln K\delta} = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(f(F))}{-\ln \delta} \\ &= \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F.\end{aligned}$$

Nerovnost pro $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F)$ obdržíme analogicky.

(ii) Je-li f bilipschitzovské, pak podle lemmatu 2.4.12 je $f : F \to f(F)$ bijekce a existuje inverzní zobrazení $f^{-1} : f(F) \to F$. Volme $u, v \in f(F)$ libovolně a položme $x = f^{-1}(u), y = f^{-1}(v)$. Pak

$$\begin{aligned}K_1 \varrho_n(x, y) &= K_1 \varrho_n(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) \leqslant \varrho_m(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))) \\ &= \varrho_m(u, v),\end{aligned}$$

neboli

$$\varrho_n(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) \leqslant \frac{1}{K_1} \varrho_m(u, v),$$

přičemž K_1, K_2 jsou konstanty z definice. Tzn. f^{-1} je lipschitzovské.

Podle bodu (i) tedy platí

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F &= \underline{\dim}_{\mathrm{B}} f^{-1}(f(F)) \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F), \\ \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F &= \overline{\dim}_{\mathrm{B}} f^{-1}(f(F)) \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F).\end{aligned}$$

Ovšem podle bodu (i) ovšem již víme, že také platí

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) &\leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F, \\ \overline{\dim}_{\mathrm{B}} f(F) &\leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F.\end{aligned}$$

Z toho již plyne závěr tvrzení.

$\square$

(Převzato z [4, str. 36].)

Právě dokázaná věta 2.4.13 (konkrétně bod (ii)) nám ve své podstatě říká, že box-counting dimenze nějakého útvaru F je invariantní vůči libovolnému bilipschitzovskému zobrazení f. Tento výsledek se nám bude hodit dále v kapitole 4 u tzv. *systémů iterovaných funkcí*.

2.5 Hausdorffova míra a Hausdorffova dimenze

Způsobů, jak definovat dimenzi je celá řada. Zatím jsme společně prozkoumali box-counting dimenzi (resp. některá její pojetí), avšak lze najít více způsobů její definice[11]. Pravděpodobně však nejstarším exemplářem svého druhu je tzv. *Hausdorffova dimenze* a s ní související *Hausdorffova míra*, které hrají ve fraktální geometrii velice podstatnou roli. Stále se však budeme zabývat pouze množinami v $\mathbb{R}^n$. Jsou pojmenovány po německém matematikovi Felixi Hausdorffovi (1868–1942).

Obrázek 2.6: Felix Hausdorff[12], 1868–1942

2.5.1 Definice Hausdorffovy míry

Definice 2.5.1. Nechť je dána množina $F \subseteq \mathbb{R}^n$ a $s > 0$. Pak pro každé $\delta > 0$ definujeme zobrazení

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_i)^s \;\middle|\; F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \,,\ \operatorname{diam} F_j \leqslant \delta \text{ pro } j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Na první pohled si lze všimnout, že pro $0 < \delta_1 < \delta_2$ je $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(F) \geqslant \mathcal{H}^s_{\delta_2}(F)$. Jinými slovy, funkce $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(M)$ je nerostoucí. Toto není nikterak těžké si rozmyslet, ne-

[11] Některé další jsou sepsány např. v [4, str. 40].

boť pro $\delta_1 < \delta_2$ existuje δ_1-pokrytí $\mathcal{F}_1$, takové, že je podpokrytím δ_2-pokrytí $\mathcal{F}_2$ množiny F, tedy $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. To znamená, že

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_{\delta_1}(F) &= \inf\left\{\sum_{U\in\mathcal{F}_1} (\operatorname{diam} U)^s \;\middle|\; \mathcal{F}_1 \text{ je } \delta_1\text{-pokrytí } \mathcal{F}\right\} \\ &\geqslant \inf\left\{\sum_{U\in\mathcal{F}_2} (\operatorname{diam} U)^s \;\middle|\; \mathcal{F}_2 \text{ je } \delta_2\text{-pokrytí } \mathcal{F}\right\} = \mathcal{H}^s_{\delta_2}(F).\end{aligned}$$

Zároveň je z definice 2.5.1 zjevné, že $\mathcal{H}^s_\delta(F) \geqslant 0$.

Definice 2.5.2 (Hausdorffova míra)**.** Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak pro množinu F definujeme *s-dimenzionální Hausdorffovu míru* jako

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F).$$

Z přechodzího je zjevné, že limita v definici 2.5.2 vždy existuje.

Bude dobré se přesvědčit, že je Hausdorffova míra mírou ve smyslu definice 2.2.4. Začneme však otázkou. *Na jaké množině je potřeba Hausdorffovu míru $\mathcal{H}^s$ uvažovat?* Odpověď nám poskytují tzv. *borelovské množiny*, které jsou pojmenovány po francouzském matematikovi Émile Borelovi (1871–1956). Borelovské mno-

Obrázek 2.7: Émile Borel[13], 1871–1956

žiny hrají podstatnou roli v tzv. *Deskriptivní teorii množin.* Nebudeme si zde vykládat všechny souvislosti, vystačíme si se základem. Takto nazýváme všechny množiny, které lze získat iteracemi operacemi spočetného sjednocení, průniku a doplňku otevřených množin z X. Označme systém takových množin jako $\mathcal{G}$. Na tomto základě pak definujeme tzv. *σ-algebru borelovských množin na X*:

$$\mathscr{B}(X) = \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\supseteq\mathcal{G} \\ \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra}}} \mathcal{F}.$$

Jinými slovy, $\mathscr{B}(X)$ je nejmenší σ-algebra generovaná[14] všemi otevřenými množinami z X.

Nás speciálně bude zajímat σ-algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Nejdříve si však dokážeme dvě pomocná lemmata.

Lemma 2.5.3 (σ-subaditivita Hausdorffovy míry)**.** *Nechť jsou dány množiny $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \subseteq X$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $s \geqslant 0$ platí*

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i).$$

Důkaz. Nechť $s \geqslant 0$ a dále budiž dáno $\varepsilon > 0$. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$ mějme pokrytí

$$\mathcal{F}_i = \{F_{i,1}, F_{i,2}, \ldots\}$$

množiny A_i, takové, že platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_{i,j})^s \leqslant \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Systém $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ tedy tvoří δ-pokrytí množiny $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Celkově

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\leqslant \sum_{i,j\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} F_{i,j})^s = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_{i,j})^s \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Limitním přechodem $\delta \to 0$ a aplikací Leviho věty[15] dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \varepsilon \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i) + \varepsilon.\end{aligned}$$

□

[14] Obecně σ-algebra $\mathcal{A}$ je generovaná množinou X, když

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\supseteq X \\ \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra}}} \mathcal{F}.$$

Tento fakt se někdy značí $\mathcal{A} = \sigma(X)$.

[15] *Leviho věta o záměně pořadí limity a Lebesgueova integrálu* říká, že je-li posloupnost nezáporných měřitelných funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající, tj.

$$f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$$

na prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a zároveň $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in X$, pak

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Zde je speciálně μ aritmetická míra, $X = \mathbb{N}$, a $f_n(i)$ lze volit např. $\mathcal{H}^s_{1/n}(A_i)$. Z Heineho věty víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^s_{1/n}(A_i) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) = \mathcal{H}^s(A_i).$$

Lemma 2.5.4. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, kde $X \subseteq \mathbb{R}^n$, a $A, B \subseteq X$, takové, že pro jejich vzdálenost platí $\varrho(A, B) > 0$. Pak pro každé $s \geqslant 0$ platí*

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

Důkaz. Nerovnost $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leqslant \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ je zřejmá ze σ-subaditivity Hausdorffovy míry (viz lemma 2.5.3).

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\mathcal{H}^s(A \cup B) < \infty$. Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme δ-pokrytí $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots\}$ množiny $A \cup B$, takové, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_i)^s \leqslant \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) + \varepsilon.$$

Opět bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $\operatorname{diam} F_i < \varrho(A, B)$. V opačném případě bychom F_i pokryli množnami s menším průměrem. Z toho pak plyne, že každá z množin F_i má neprázdný průnik s nejvýše jednou z množin A, B, tzn. z pokrytí $\mathcal{F}$ lze vybrat dva disjunktní podsystémy $\mathcal{F}_A$ a $\mathcal{F}_B$, přičemž $\bigcup \mathcal{F}_A \supseteq A$ a $\bigcup \mathcal{F}_B \supseteq B$. Tedy celkově s užitím předchozího lemmatu 2.5.3 máme

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) &\leqslant \mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}_A} F\right) + \mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}_B} F\right) \\
&\leqslant \sum_{F \in \mathcal{F}_A} (\operatorname{diam} F)^s + \sum_{F \in \mathcal{F}_B} (\operatorname{diam} F)^s \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_i)^s \leqslant \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pro $\delta \to 0$ dostáváme

$$\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \leqslant \mathcal{H}^s(A \cup B) + \varepsilon$$

□

Definice 2.5.5 (Vnější míra)**.** Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Zobrazení $\mu^* : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty \rangle$ nazveme *vnější mírou* na $\mathcal{A}$, pokud platí:

(a) $\mu^*(\varnothing) = 0$,

(b) Pokud $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subseteq B$, pak $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

(c) Je-li $A_1, A_2, \ldots$ posloupnost množin, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, pak

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Vnější míra představuje zobecnění toho, co jsme měli možnost vidět již v sekci 2.3 týkající Lebesgueovy míry[16]. Tu jsme definovali na základě tzv. *vnější Lebesgueovy míry* (viz definice 2.3.1), která sice sama o sobě míru nepředstavovala, nicméně

[16]Jedná se slabší požadavek, tzn. každá míra je vnější mírou, opačné tvrzení však neplatí.

při restrikci na „správný“ systém množin jsme konstatovali, že se již jedná o míru. Lze se přesvědčit, že vnější Lebesgueova míra λ_n^* je vnější mírou ve smyslu definice 2.5.5 výše. Podobné pozorování lze učinit i pro Hausdorffovu míru $\mathcal{H}^s$. Platnost podmínky (c) jsme dokázali v lemmatu 2.5.3 a o platnosti (a) a (b) se může čtenář velice snadno předvědčit. Tedy Hausdorffova míra na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ je vnější mírou. Navíc pokud vnější míra μ^* splňuje závěr lemmatu 2.5.4, pak ji nazýváme *metrickou vnější mírou.*

Carathéodoryho kritérium, které jsme si uváděli při zavádění *lebesgueovské měřitelnosti* (viz definice 2.3.5). Ta jednoduše říkala, že rozdělením libovolné množiny G pomocí pěvně zvolené množiny A lze stanovit její míru jako součet měr dílčích částí, tzn. $G \cap A$ a $G \setminus A$. Tento koncept lze však rozšířit. Obecně jakákoliv množina je μ-měřitelná, pokud splňuje Carathéodoryho kritérium.

Definice 2.5.6. Nechť μ je míra a $A \subseteq X$. Množina A je μ-měřitelná, pokud pro každé $G \subseteq X$ platí

$$\mu(G) = \mu(G \cap A) + \mu(G \setminus A).$$

Speciálně nyní ukážeme platnost následujícího tvrzení 2.5.7.

Věta 2.5.7. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Pak každá množina $A \in \mathscr{B}(X)$ je $\mathcal{H}^s$-měřitelná pro každé $s \geqslant 0$.*

Důkaz. Není těžké si rozmyslet, že $\mathscr{B}(X)$ vyjma otevřených množin obsahuje též všechny uzavřené[17]. Volme tedy uzavřenou množinu $A \in \mathscr{B}(X)$, $G \subseteq X$ a $s \geqslant 0$. Ze σ-subaditivity plyne nerovnost

$$\mathcal{H}^s(G) \leqslant \mathcal{H}^s(G \cap A) + \mathcal{H}^s(G \setminus A).$$

Pro důkaz opačné nerovnosti definujeme posloupnost množin $P_0, P_1, P_2, \dots$ následovně:

$$\begin{aligned} P_0 &= \{x \in G \mid \varrho(x, A) \geqslant 1\}, \\ P_i &= \left\{x \in G \;\middle|\; \frac{1}{i+1} \leqslant \varrho(x, A) \leqslant \frac{1}{i}\right\}, \ i \geqslant 1. \end{aligned}$$

Pro libovolnou dvojici množin z podposloupnosti $P_0, P_2, P_4, \dots$ platí, že jejich vzdálenosti jsou kladné. Z faktu, že $\mathcal{H}^s$ je metrická (viz lemma 2.5.4) a monotonie plyne

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^s(P_{2i}) = \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=0}^{m} P_{2i}\right) \leqslant \mathcal{H}^s(G)$$

pro všechna $m \in \mathbb{N}$. Podobně pro liché členy $\sum_{i=0}^{m} \mathcal{H}^s(P_{2i+1}) \leqslant \mathcal{H}^s(G)$. Tzn. řada $\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(P_i)$ je konvergentní. Zároveň platí

$$\varrho\left(\bigcup_{i=0}^{m} P_i, G \cap A\right) > 0,$$

[17] Plyne z uzavřenosti na doplněk.

pro každé $m \in \mathbb{N}$, tedy lze psát

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(G \setminus A) &\leqslant \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=0}^{m} P_i\right) + \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} P_i\right)\\ &\leqslant \mathcal{H}^s(G) - \mathcal{H}^s(G \cap A) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \mathcal{H}^s(P_i).\end{aligned}$$

Pro $m \to \infty$ dostáváme

$$\mathcal{H}^s(G \setminus A) \leqslant \mathcal{H}^s(G) - \mathcal{H}^s(G \cap A)$$

z čehož již plyne požadovaná nerovnost. □

Důsledek 2.5.8. *Trojice $(X, \mathscr{B}(X), \mathcal{H}^s)$, kde X je libovolná množina a $s \geqslant 0$, tvoří prostor s mírou.*

Nyní již můžeme zobrazení $\mathcal{H}^s$ nazývat mírou oprávněně. Pojďme se podívat na nějaké příklady.

Příklad 2.5.9. Pro $s = 0$ představuje zobrazení $\mathcal{H}^s$ obyčejnou aritmetickou míru, tzn. pro konečnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{H}^0(A) = |A|$. Toto není těžké ukázat. Mějme množinu $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Zvolíme-li

$$\delta < \frac{1}{2} \cdot \min \{\varrho_e(x_i, x_j) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\},$$

pak pro δ-pokrytí $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ takové, že $x_i \in F_i$ pro každé i máme

$$\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{diam} F_i)^0 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Není těžké si rozmyslet, že n je nejmenší počet množin o průměru nejvýše δ, takových, aby pokrývaly množinu A. Zároveň pro libovolné $\varepsilon > 0$ je potřeba nejvýše n-koulí o poloměru $\varepsilon/2$ se středy v x_i pro pokrytí A. Tzn. $\mathcal{H}^0(A) = |A| = n$.

V rámci tohoto textu jsme se již zabývali jiným typem míry a to tzv. *lebesgueovou mírou* (viz sekce 2.3). Ta pro nás hrála důležitou roli v jednom možném pojetí *box-counting dimenze* (viz sekce 2.4). Lze ukázat, že pro množinu $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{v_n} \lambda_n(F),$$

kde v_n je objem (míra) jednotkové koule v $\mathbb{R}^n$. Čtenář snad promine, že tento fakt zde ponecháme bez důkazu. [4, str. 45]

2.5.2 Stručně k vlastnostem Hausdorffovy míry

Na chvíli se ještě zastavíme u vlastností Hausdorffovy míry. Již jsme společně dokázali, že Hausdorffova míra je skutečně mírou, tzn. splňuje všechny základní vlastnosti, které jsme si představili ve větě 2.2.6 (viz sekce 2.2). V tomto ohledu tedy netřeba již nic dalšího dokazovat. Nicméně podobně jako v případě *box-counting dimenze* (viz podsekce 2.4.2) se i zde podíváme, jak se Hausdorffova míra chová vůči *lipschitzovským zobrazením*.

Věta 2.5.10. *Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^n, \varrho)$ a zobrazení $f : F \to \mathbb{R}^n$ je lipschitzovské*[18] *s konstantou $K > 0$. Pak pro každé $s \geqslant 0$ platí*

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leqslant K^s \mathcal{H}^s(F).$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots\}$ je δ-pokrytí F. Pak

$$\operatorname{diam}(f(F \cap F_i)) \leqslant K \operatorname{diam}(F \cap F_i) \leqslant K \operatorname{diam} F_i,$$

což znamená, že $\mathcal{G} = \{F \cap F_1, F \cap F_2, \ldots\}$ je $K\delta$-pokrytí $f(F)$. Z toho plyne, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(f(F \cap F_i)))^s \leqslant K^s \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_i)^s$$

a tedy $\mathcal{H}^s_{K\delta}(f(F)) \leqslant K^s \mathcal{H}^s_\delta(F)$. Pro $\delta \to 0$ máme požadovaný výsledek. □

(Převzato z [4, str. 46].)

Z toho speciálně plyne důsledek týkající se podobností.

Důsledek 2.5.11. *Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^n, \varrho)$ a zobrazení $f : F \to \mathbb{R}^n$ je podobnost, tzn. existuje $K > 0$ takové, že pro každé $x, y \in F$ platí*

$$\varrho(f(x), f(y)) = K \varrho(x, y).$$

Pak pro každé $s \geqslant 0$ platí

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = K^s \mathcal{H}^s(F).$$

Důkaz. K podobnosti f existuje inverzní zobrazení f^{-1} s koeficientem $L = 1/K$. Z věty 2.5.10 tedy plyne, že

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(f^{-1}(f(F))) \leqslant \frac{1}{K^s} \mathcal{H}^s(f(F))$$

nebo-li $\mathcal{H}^s(f(F)) \geqslant K^s \mathcal{H}^s(F)$. Opačnou nerovnost získáme aplikací věty 2.5.10 na zobrazení f. □

2.5.3 Hausdorffova dimenze

Středobodem této sekce je tzv. *Hausdorffova dimenze*. Na úvod si dokážeme jedno jednoduché tvrzení týkající se Hausdorffovy míry.

[18] Tvrzení lze zformulovat obecněji pro tzv. *hölderovská zobrazení*, tedy zobrazení f splňující

$$\varrho(f(x), f(y)) \leqslant K(\varrho(x, y))^\alpha.$$

kde $\alpha > 0$. Pak pro $F \subseteq \mathbb{R}^n$ platí

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leqslant K^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

My si však vystačíme se speciálním případem.

Věta 2.5.12. *Nechť $0 \leqslant s < t < \infty$ a $F \subseteq X$. Pak platí:*

(i) $\mathcal{H}^s(F) < \infty \Longrightarrow \mathcal{H}^t(F) = 0$,

(ii) $\mathcal{H}^t(F) > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^s(F) = \infty$.

Důkaz. Mějme δ-pokrytí $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots\}$, takové, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_i)^s \leqslant \mathcal{H}^s_\delta(F) + \varepsilon \;,\; \varepsilon > 0.$$

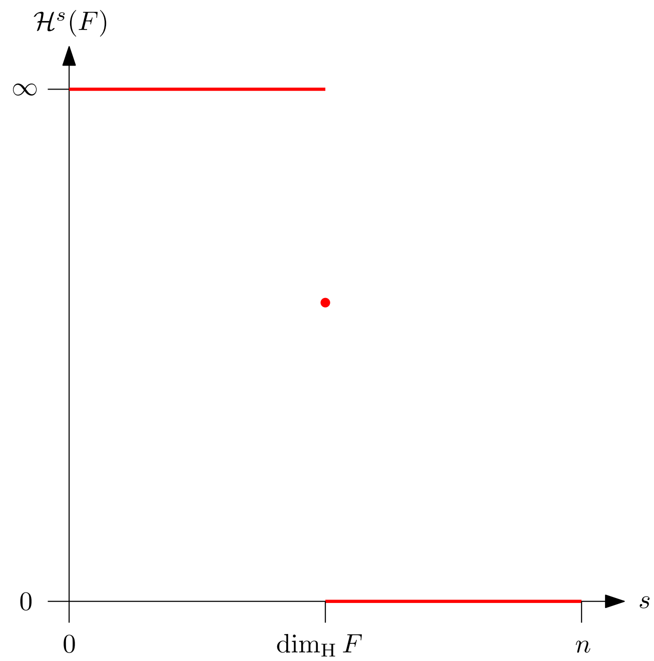
Pak

$$\mathcal{H}^t_\delta(F) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_i)^t \leqslant \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} F_i)^s \leqslant \delta^{t-s}(\mathcal{H}^s_\delta(F) + \varepsilon).$$

Tzn. $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leqslant \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F)$. Pro $\delta \to 0$ dostaneme body (i) a (ii). $\square$

(Převzato z [7, str. 68].)

Z věty 2.5.12 lze vidět, že Hausdorffova míra dává smysl jen pro určitou hodnotu s. Pro „příliš velké“ s bude hodnota vždy 0, naopak pro „moc malé“ s bude jeho hodnota rovna ∞ (viz obrázek 2.8). Této kritické hodnotě s říkáme *Hausdorffova*



Obrázek 2.8: Graf funkce $f(s) = \mathcal{H}^s(F)$, kde $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

dimenze.

Definice 2.5.13 (Hausdorffova dimenze)**.** Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Hausdorffovou dimenzí[19] množiny F nazveme hodnotu

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \inf\{s \geqslant 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geqslant 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

[19] Též někdy nazývaná *Hausdorffova-Bezikovičova dimenze.*

Hodnota $\mathcal{H}^s(F)$ pro $s = \dim_{\mathrm{H}} F$ může být různá, tzn. může platit, že $\mathcal{H}^s(F) = \infty$, $\mathcal{H}^s(F) = 0$ a nebo se může jednat o konečné nenulové číslo, tj. $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Nyní se podívejme na příklad výpočtu. Podobně, jako v případě box-counting dimenze, i zde budeme nezávisle určovat horní a dolní odhad.

Příklad 2.5.14 (Sierpińského trojúhelník)**.** V tomto případě se podíváme na dvě možnosti, jak dojít k výsledku. Celý Sierpińského trojúhelník si označme S.

- V k-té iteraci, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$, vzniknou 3 nové trojúhelníky o obsahu 1/4 obsahu původního trojúhelníka, tzn. jejich celkový počet je $t = 3^k$. Uvažíme-li δ-pokrytí
$$\mathcal{K} = \left\{K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \ldots, K_\delta^t(x_t), \varnothing, \varnothing, \ldots\right\}$$
kde $x_1, x_2, \ldots, x_t \in S_k$ a $\delta \leqslant 2^{-k}/2 = 2^{-k-1}$, pak
$$\mathcal{H}^s_{2^{-k}}(S_k) \leqslant \sum_{i=1}^{3^k} (2^{-k})^s = 3^k 2^{-ks} = 1.$$
Pro $k \to \infty$ je $\mathcal{H}^s(S) \leqslant 1$. Poslední rovnost nastává právě pro $s = \ln 3/\ln 2$.
Nyní ukážeme, že $\mathcal{H}^s(S) \geqslant 3^{-s} = 1/2$. Zvolme δ-pokrytí $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots\}$, takové, že
$$2^{-k-1} \leqslant \operatorname{diam} F_i < 2^{-k}, \tag{2.5}$$
kde $i \in \mathbb{N}$. Lze si rozmyslet, že každá z množin F_i má neprázdný průnik s nejvýše dvěma dílčími trojúhelníky. Zvolíme-li $j \geqslant k$, pak každá z množin F_i má průnik maximálně s 3^{j-k} trojúhelníky v j-té iteraci, resp.
$$3^{j-k} = 3^j 2^{-ks} \leqslant 2^j 3^s (\operatorname{diam} F_i)^s,$$
jak plyne z volby pokrytí $\mathcal{F}$ v (2.5). Pokud navíc pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí, že
$$3^{-j-1} \leqslant \operatorname{diam} F_i,$$
pak každá z množin F_i má neprázdný průnik s nejvýše 3^j trojúhelníky. Tedy pro jejich počet platí
$$3^j \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} 3^j 3^s (\operatorname{diam} F_i)^s,$$
přičemž úpravou už získáme požadovanou nerovnost.

- Druhá varianta výpočtu je sice méně rigorózní, avšak podstatně jednodušší. Sierpińského trojúhelník sestává ze tří kopií sebe samotného, přičemž každá z nich je obrazem původního obrazce S v podobnosti s koeficientem $K = 1/2$. Označme si dané části S_1, S_2 a S_3, tj. $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Tedy podle σ-aditivity Hausdorffovy míry a důsledku 2.5.11 můžeme psát
$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(S) &= \mathcal{H}^s(S_1) + \mathcal{H}^s(S_2) + \mathcal{H}^s(S_3)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(S) + \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(S) + \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(S)\\ &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(S).\end{aligned}$$

Budeme-li předpokládat, že $\mathcal{H}^s(S) < \infty$ (jak jsme již viděli z předchozího výpočtu, jedná se o netriviální předpoklad) pro $s = \dim_{\mathrm{H}} S$, pak z rovnosti $1 = 3(1/2)^s$ lze dopočítat, že $s = \ln 3/\ln 2$.

(Převzato a upraveno z [4, str. 53].)

Myšlenku druhého výpočtu z příkladu 2.5.14 ještě rozvedeme v kapitole 4, konkrétně v sekci 4.2 věnované systémům iterovaných funkcí.

Jako poslední zkusme postavit Hausdorffovu dimenzi proti box-counting dimenzi, kterou jsme si představili v sekci 2.4. Vztah mezi nimi je docela jednoduchý a udává jej věta 2.5.15. Pro připomenutí doporučuji se opětovně podívat na definici 2.4.2

Věta 2.5.15. *Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená množina. Pak platí*

$$\dim_{\mathrm{H}} F \leqslant \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leqslant \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$$

Důkaz. Nechť platí $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$ pro $s \geqslant 0$. Zvolme $\delta > 0$ takové, že platí

$$1 < \mathcal{H}^s_\delta(F) \leqslant N_\delta(F)\delta^s.$$

Úpravou této nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &< \ln N_\delta(F) + s \ln \delta \\ s &< \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} \\ s &\leqslant \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}. \end{aligned}$$

Druhá nerovnost, jak již víme, plyne přímo z definice box-counting dimenze (viz 2.4.2). Pro případ $0 < \mathcal{H}^s_\delta(F) < 1$ stačí aplikovat podobnost na F a využít tvrzení 2.5.11. $\square$

(Převzato z [4, str. 50].)

K závěru poznamenejme, že mnoho „rozumných“ útvarů F je $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F$, ale obecná rovnost zde neplatí. Např. pro množinu $X = \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$ je $\dim_{\mathrm{H}} X = 0$, neboť X je spočetná. Nicméně v případě box-counting dimenze je $\dim_{\mathrm{B}} X = 1$. Rozmyšlení již ponecháme na čtenáři.

Pro více informací si dovolím odkázat na článek [3] věnovaný přímo této otázce.

Kapitola 3

Hausdorffův metrický prostor

V této kratší kapitole se podíváme na některé výsledky související s tzv. *Hausdorffovým metrickým prostorem*, s nímž se ještě dále setkáme. Pro připomenutí záležitostí ohledně metrických prostorů celkově doporučuji čtenáři se podívat do sekce 2.1 v kapitole 2. Pokud by čtenáře zajímaly další podrobnosti, doporučuji se podívat do knihy [1, str. 71].

3.1 Hausdorffova metrika

Jako první se podíváme na tzv. *Hausdorffovu metriku.*

Definice 3.1.1 (Hausdorffova metrika)**.** Hausdorffovou metrikou (vzdálenost) nazýváme takové zobrazení $\varrho_{\mathrm{H}} : \mathscr{P}(X)^2 \to \langle 0, \infty \rangle$, kde pro každé $A, B \in \mathscr{P}(X)$ platí

$$\varrho_{\mathrm{H}}(A, B) = \inf \{\delta > 0 \mid A \subseteq (B)_\delta \ , \ B \subseteq (A)_\delta\} \, .$$

Podobně jako v případě Lebesgueovy míry (viz sekce 2.3, definice 2.3.5) se i zde nabízí stejná otázka: *Co nás opravňuje nazývat Hausdorffovu metriku metrikou?* Odpovědí je, že zatím nic, neboť tato definice sama o sobě neimplikuje, že ϱ_{H} je metrika. V definici povolujeme totiž případ, kdy $\varrho_{\mathrm{H}}(A, B) = \infty$ a pro příklady takových množin netřeba chodit daleko. Např. v $\mathbb{R}$, když budeme počítat Hausdorffovu metriku množin $\{0\}$ a $\langle 0, \infty)$, zjistíme, že $\varrho_{\mathrm{H}}(\{0\}, \langle 0, \infty)) = \infty$. Podobně budeme-li počítat $\varrho_{\mathrm{H}}(\varnothing, \{0\})$, dojdeme ke stejnému výsledku. Ovšem i v případě některých neprázdných omezených množin si lze všimnout nesrovnalostí. Např. pro množiny $(0, 1)$ a $(0, 1\rangle$ je Hausdorffova metrika nulová, přestože dané množiny nejsou stejné.

Pokud se však omezíme jen na některé množiny, bude ϱ_{H} skutečně metrikou ve smyslu definice 2.1.1. Proto se dále zaměříme pouze na takové podmnožiny X, které jsou *neprázdné* a *kompaktní.*

Definice 3.1.2 (Hyperprostor)**.** Systém všech neprázdných kompaktních podmnožin množiny X nazýváme *hyperprostor* a značíme jej $\mathbb{H}(X)$.

Tvrzení 3.1.3. *Nechť $A, B \in \mathbb{H}(X)$. Pak $A \cup B \in \mathbb{H}(X)$.*

Důkaz. Neprázdnost $A \cup B$ je zjevná. Sjednocení kompaktních množin je opět kompaktní. Máme-li totiž pokrytí $\mathcal{U} \supseteq A$ a $\mathcal{V} \supseteq B$, pak z kompaktnosti A, B víme, že z každého z nich z nich lze vybrat konečné podpokrytí

$$\mathcal{U}' = \{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k}\} \subset \mathcal{U}, \text{ resp. } \mathcal{V}' = \{V_{j_1}, V_{j_2}, \ldots, V_{j_\ell}\} \subset \mathcal{V},$$

kde $k, \ell \in \mathbb{N}$. Tedy $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ tvoří pokrytí $A \cup B$, resp.

$$\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}' \cup \mathcal{V}' \supseteq A \cup B.$$

□

Tvrzení 3.1.3 lze opět rozšířit indukcí

Důsledek 3.1.4. *Pro* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{H}(X)$ *platí* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{H}(X)$.

Pro operaci průniku nebo rozdílu toto tvrzení již neplatí. Např. intervaly $\langle 0, 1\rangle$ a $\langle 2, 3\rangle$ jsou uzavřené a omezené, tedy (podle Heineho-Borelovy věty 2.1.19) jsou kompaktní. Avšak jejich průnik je prázdný. Podobně pro rozdíl stačí uvážit $A \subseteq B$, tzn. $A \setminus B = \varnothing$.

Věta 3.1.5. *Nechť* (X, ϱ) *je metrický prostor, kde* $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Pak Hausdorffova metrika* ϱ_{H} *je metrikou na* $\mathbb{H}(X)$.

Důkaz. Zjevně pro každé $A, B \in \mathbb{H}(X)$ z definice platí $\varrho_{\mathrm{H}}(A, B) \geqslant 0$ a $\varrho_{\mathrm{H}}(A, B) = \varrho_{\mathrm{H}}(B, A)$. Z kompaktnosti množin A, B plyne (podle věty 2.1.20), že A, B jsou omezené množiny, tedy $\varrho_{\mathrm{H}}(A, B) < \infty$.

Pro $A = B$ platí, že pro každé $\delta > 0$ je splněno $A \subseteq (B)_\delta$ a zároveň $B \subseteq (A)_\delta$, tzn. $\varrho_{\mathrm{H}}(A, B) = 0$. Opačná implikace také platí. Předpokládejme, že množiny A, B splňují $\varrho_{\mathrm{H}}(A, B) = 0$. Pokud $x \in A$, pak pro každé $\delta > 0$ platí, že $x \in (B)_\delta$, tzn. $\varrho(x, B) = 0$, a z uzavřenosti B plyne $x \in B$. Tedy $A \subseteq B$ a analogicky platí i $B \subseteq A$, tzn. $A = B$.

Jako poslední je třeba ukázat platnost trojúhelníkové nerovnosti. Mějme množiny $A, B, C \in \mathbb{H}(X)$ a $\varepsilon > 0$. Pro libovolné $x \in A$ existuje $y \in B$, takové, že

$$\varrho(x, y) < \varrho_{\mathrm{H}}(A, B) + \varepsilon.$$

Podobně pro y existuje $z \in C$, takové, že

$$\varrho(y, z) < \varrho_{\mathrm{H}}(B, C) + \varepsilon.$$

Z toho plyne

$$\varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \varrho_{\mathrm{H}}(A, B) + \varrho_{\mathrm{H}}(B, C) + 2\varepsilon,$$

kde pravou stranu nerovnosti označme δ. To znamená, že $A \subseteq (C)_\delta$ a zároveň $C \subseteq (A)_\delta$. Tudíž

$$\varrho_{\mathrm{H}}(A, C) \leqslant \varrho_{\mathrm{H}}(A, B) + \varrho_{\mathrm{H}}(B, C) + 2\varepsilon.$$

□

(Převzato z [1, str. 72].)

Definice 3.1.6 (Hausdorffův metrický prostor)**.** Metrický prostor $(\mathbb{H}(X), \varrho_{\mathrm{H}})$ nazýváme *Hausdorffův metrický prostor* na metrickém prostoru (X, ϱ).

Nyní si opět připomeňte něco z terminologie metrických prostorů. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metrickém prostoru (X, ϱ), se nazývá *cauchyovská*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m > n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Obecně neplatí, že každá cauchyovská posloupnost je konvergentní, avšak pokud v X všechny takové posloupnosti jsou konvergentní, pak (X, ϱ) nazýváme *úplný metrický prostor*. O Hausdorffově metrickém prostoru lze v tomto ohledu dokázat následující tvrzení.

Věta 3.1.7 (Úplnost HMP)**.** *Je-li (X, ϱ) úplný metrický prostor, pak $(\mathbb{H}(X), \varrho_{\mathrm{H}})$ je také úplný metrický prostor.*

Důkaz věty je už trochu delší, nicméně lze jej nalézt opět např. v knize [1, str. 72].

3.2 Kompaktní množiny a konvergence

Věta 3.2.1. *Nechť $A_1, A_2, \dots$ je nerostoucí posloupnost množin, kde $A_i \in \mathbb{H}(X)$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak posloupnost $A_1, A_2, \dots$ konverguje k množině*

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

v Hausdorffově metrice.

Důkaz. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zjevně pro každé i je $A \subseteq A_i$, tzn. $A \subseteq (A_i)_\varepsilon$.

Nyní ukážeme, že $\varrho_{\mathrm{H}}(A, A_i) < \varepsilon$ pro každé $i \geqslant i_0$. Systém

$$\mathcal{F} = \{(A_i)_\varepsilon\} \cup \{X \setminus A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

tvoří otevřené pokrytí množiny A_1 pro každé $i \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu je však A_1 kompaktní, tedy z $\mathcal{F}$ lze vybrat konečné podpokrytí. Specificky existuje $i_0 \in \mathbb{N}$, takové, že pro všechna $i \geqslant i_0$ je systém

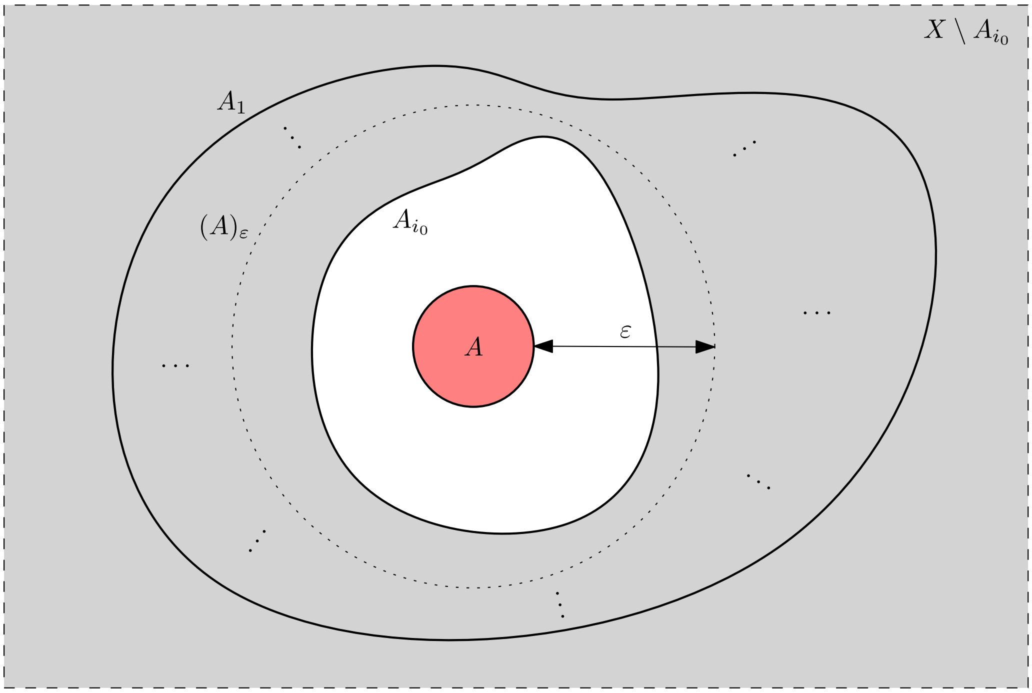
$$\mathcal{G} = \{X \setminus A_i\} \cup \{(A)_\varepsilon\}$$

pokrytím A_1 a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ (viz obrázek 3.1). Z toho plyne, že $A_i \subseteq (A)_\varepsilon$ a tedy $\varrho_{\mathrm{H}}(A, A_i) < \varepsilon$. $\square$

V souvislosti s konvergencí v prostoru $(\mathbb{H}(X), \varrho_{\mathrm{H}})$ nebude na škodu si připomenout jedno známé související tvrzení z matematické analýzy.

Věta 3.2.2 (Cantorova)**.** *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) (X, ϱ) je úplný metrický prostor.



Obrázek 3.1: Ilustrace věty 3.2.1

(ii) Je-li $A_1, A_2, \ldots$ *neklesající posloupnost uzavřených množin, kde* $A_i \subseteq X$ *pro každé* $i \in \mathbb{N}$*, takových, že* $\operatorname{diam} A_i \to 0$*, pak existuje* $x \in X$ *splňující*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x\}\,.$$

Věta 3.2.2 je v podstatě rozšířením Cantorova principu vnořených intervalů v $\mathbb{R}$. Speciálně z toho vyplývá, že i v Hausdorffově metrickém prostoru platí podmínka (ii), neboť z věty 3.1.7 víme, že $(\mathbb{H}(X), \varrho_{\mathrm{H}})$ tvoří úplný metrický prostor.

Věta 3.2.3. *Nechť* $(X, \varrho_1), (Y, \varrho_2)$ *jsou metrické prostory a zobrazení* $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$*, kde* $f_i : X \to Y$ *pro každé* $i \in \mathbb{N}$ *a* $f_j \rightrightarrows f$ *pro* $j \to \infty$*. k* f*. Pak posloupnost* $f_1(X), f_2(X), \ldots$ *konverguje k* $f(X)$ *na metrickém prostoru* $(\mathbb{H}(Y), \varrho_{\mathrm{H}})$*.*

Důkaz. Mějme $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že $\varrho_{\mathrm{H}}(f(X), f_i(X)) < \varepsilon$ pro $i \geqslant i_0$. Funkce $f_1, f_2, \ldots$ konvergují k f stejnoměrně, tzn.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists i_0 \in \mathbb{N}\ \forall i \geqslant i_0\ \forall x \in X : \varrho_2(f(x), f_i(x)) < \varepsilon.$$

Tzn. pro každé $x \in X$ a $i \geqslant i_0$ platí

$$\varrho_2(f(x), f_i(X)) \leqslant \varrho_2(f(x), f_i(x)) < \varepsilon.$$

a též

$$\varrho_2(f_i(x), f(X)) \leqslant \varrho_2(f_i(x), f(x)) = \varrho_2(f(x), f_i(x)) < \varepsilon.$$

Z toho vyplývá, že

$$f(X) \subseteq (f_i(X))_\varepsilon \text{ a zároveň } f_i(X) \subseteq (f(X))_\varepsilon$$

neboli $\varrho_{\mathrm{H}}(f(X), f_i(X)) < \varepsilon$. □

(Převzato z [1, str. 74])

Poznámka 3.2.4. Předpoklad stejnoměrné konvergence ve větě 3.2.3 je důležitý. Mějme např. metrický prostor $X = \langle 0, 1\rangle$ se standardní eukleidovskou metrikou a definujme posloupnost funkcí

$$f_n : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n.$$

Limitou je funkce f, kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, 1), \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Posloupnost konverguje k funkci f pouze bodově, nikoliv stejnoměrně. Pro celý interval je $f(X) = \{0, 1\}$, nicméně

$$\varrho_{\mathrm{H}}(\langle 0, 1\rangle, \{0, 1\}) = \frac{1}{2}.$$

Tedy neplatí, že $f_n(X) \rightrightarrows f(X)$ v $(\mathbb{H}(\mathbb{R}), \varrho_{\mathrm{H}})$.

Kapitola 4

Klasifikace fraktálů

S kapitolami 2 a 3 jsme si v jistém rozsahu ukázali formální podstatu fraktální geometrie. Nicméně pravdou zůstává, že z fraktální útvarů jako takových jsme si toho zatím moc neukázali (některým z nich jsme se věnovali v kapitole 1 v sekci 1.2 o soběpodobnosti). Proto se nyní podíváme na některé další příklady a především jejich podrobnější klasifikaci dle způsobu jejich vzniku. Na tuto kapitolu též volně navazuje kapitola 5, kde si fraktály trochu rozebereme z programovacího hlediska.

V této kapitole se zaměříme na tři hlavní metody klasifikace a konstrukce fraktálů – konkrétně na *L-systémy*, *systémy iterovaných funkcí (IFS)* a tzv. *Time Escape algoritmy*. Tyto přístupy představují základní postupy, pomocí kterých lze fraktální útvary nejen systematicky vytvářet, ale také analyzovat jejich strukturu a chování z pohledu matematické dynamiky.

4.1 L-systémy

Uvedeme tuto kapitolu s ohledem na předchozí obsah trochu netradičně a od matematiky se (alespoň zdánlivě) na chvíli odkloníme. Podíváme se na fraktály, s jejichž způsobem popisu přišel roku 1968 maďarský biolog Aristid Lindenmayer (1925–1989) a který (možná pro někoho i překvapivě) má základy především v informatice. [17, str. 2]

K popisu specifického druhu fraktálů lze využít znalosti z *teorie formálních jazyků* a *teorie automatů*, na jejímž počátku stál (mj.) britský matematik a informatik Alan Turing (1912–1954). Ten ve svém článku *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* z roku 1936 zavedl koncept abstraktního stroje dnes známého jako *Turingův stroj*, jednoduché zařízení s výpočetními schopnostmi již tehdy porovnatelnými se současnými počítači. V té době se zabýval otázkou, kterou v roce 1928 položil známý německý matematik David Hilbert (1862–1943), jež je známá pod názvem *„Entscheidungsproblem“*[2]. Problémem bylo, zda existuje algoritmus, který o každém tvrzení je schopný rozhodnout (v konečném čase), zda je či není pravdivé. Později Alan

[2] Anglicky *The Decision problem*, česky přeložitelné jako *„rozhodovací problém“*. Zde však poznamenejme, že onem český termín se používá i v související teorii složitosti a vyčíslitelnosti, má však podstatně jiný význam.

Obrázek 4.1: Alan Turing[1], 1912–1954

Turing tento problém přeformuloval takto: *Existuje program, který o jiném programu na vstupu rozhodne, zda se zastaví, či nikoliv?* David Hilbert byl ve svých vizích optimistický, avšak nakonec Alan Turing dokázal, že **takový algoritmus nemůže existovat**. Způsob, jakým Turing došel onomu výsledku, byl v konečném důsledku vlastně až překvapivě jednoduchý a existuje pro něj velké množství popularizačních materiálů[3].

Obrázek 4.2: David Hilbert[4], 1862–1943

[3]Pokud by se chtěl čtenář dozvědět více o této problematice a teorii s ní související, doporučuji např. knihu [8]

4.2 Systém iterovaných funkcí

(TODO: Doplnit sekci.)

4.3 Time Escape Algoritmy

(TODO: Doplnit sekci.)

Kapitola 5

Generování fraktálů

(TODO: Doplnit kapitolu.)

Seznam použité literatury

[1] Edgar, G. (2008). *Measure, topology, and fractal geometry.* Springer, New York, 2nd ed. ISBN 978-0-387-74748-4.

[2] Engelking, R. (1989). *General topology.* Heldermann, Berlin, rev. and completed ed. ISBN 3-88538-006-4.

[3] Falconer, K. J. (1989). Dimensions and measures of quasi self-similar sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **106**(2). doi: 10.1090/S0002-9939-1989-0969315-8. URL `https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1989-0969315-8`. MSC: Primary 58F12; Secondary 28A75.

[4] Falconer, K. J. (2014). *Fractal geometry.* John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 3rd edition. ISBN 978-1-119-94239-9.

[5] Lukeš, J. a Malý, J. (2013). *Measure and integral.* Matfyzpress, Praha, 3rd ed. ISBN 978-80-7378-253-5.

[6] Mandelbrot, B. B. (1983). *Fractal geometry of nature.* Freeman and company, New York, vyd. 3. ISBN 978-0716711865.

[7] Mattila, P. (1995). *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, 1st ed. ISBN 0-521-46576-1.

[8] Motwani, R., Hopcroft, J. E. a Ullman, J. D. (2003). *Introduction to automata theory, languages, and computation.* Pearson Addison Wesley, Upper Saddle River, 2nd ed. ISBN 0321210298.

[9] Netuka, I. (2014). *Základy moderní analýzy.* Matfyzpress, Praha, 1. vyd. ISBN 978-80-7378-277-1.

[10] Netuka, I. (2016). *Integrální počet.* Matfyzpress, Praha, první vydání. ISBN 978-80-7378-334-1.

[11] O'Connor, J. J. (Citováno 17. dubna 2025). Mactutor history of mathematics archive. *[online].* Dostupné z: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/`.

[12] O'Connor, J. J. (Citováno 17. dubna 2025). Mactutor history of mathematics archive. *[online].* Dostupné z: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Turing/`.

[13] O'Connor, J. J. (Citováno 19. března 2025). Mactutor history of mathematics archive. *[online]*. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hausdorff/.

[14] O'Connor, J. J. (Citováno 29. března 2025). Mactutor history of mathematics archive. *[online]*. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Borel/.

[15] O'Connor, J. J. (Citováno 4. března 2025). Mactutor history of mathematics archive. *[online]*. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Vitali/.

[16] Peitgen, H.-O., Jürgens, H. a Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals*. Springer, New York, 2nd edition. ISBN 978-1-4684-9396-2.

[17] Prusinkiewicz, P. a Lindenmayer, A. (1990). *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag, New York. ISBN 978-1-4613-8476-2.

[18] Royden, H. L. a Fitzpatrick, P. M. (2010). *Real analysis*. Prentice Hall, Boston, 4th ed. ISBN 978-0-13-511355-4.

[19] Verner, J. (Citováno 4. března 2025). Lebesgueovsky neměřitelné množiny. *[online]*. Dostupné z: https://ktiml.mff.cuni.cz/~verner/download/nemeritelne.pdf.

[20] Zelinka, I., Včelař, F. a Čandík, M. (2006). *Fraktální geometrie*. BEN - technická literatura, Praha, vydání 1. ISBN 80-7300-191-8.

[21] Šarmanová, P. (1996). *Malý průvodce historií integrálu*. Prometheus, Praha, 1. vyd. ISBN 80-7196-038-1.

[22] Šárka Voráčová, Csachová, L., Hájková, V., Hromadová, J., Moravcová, V., Richter, J., Surynková, P., Šarounová, A., Šaroun, J., Šrubař, J., Štauberová, Z. a Tichý, V. (2022). *Atlas geometrie*. Academia, Praha, vydání 2. ISBN 978-80-200-3336-9.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Index