MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. David Weber

Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.
Studijní program:	Učitelství matematiky pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy se sdruženým studiem Učitelství informatiky pro střední školy

Praha (TODO: 2024)

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

(TODO: Doplnit poděkování)

Název práce: Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry

Autor: Bc. David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: (TODO: Doplnit abstrakt (česky))

Klíčová slova: , klicova slova

Title: Fractal geometry for (experienced) amateurs

Author: Bc. David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: (TODO: Doplnit abstrakt (anglicky))

Keywords: keywords

Obsah

Předmluva

(TODO: napsat předmluvu)

Kapitola 1

Úvod do fraktálů

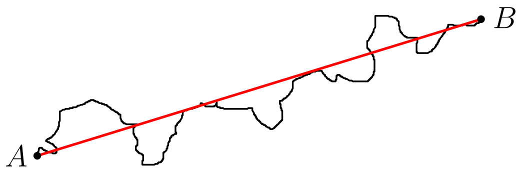
Pod pojmem „geometrie“ si čtenář pravděpodobně vybaví rovinnou či prostorovou geometrii pracující s jednoduchými útvary jako trojúhelník, obdélník, kruh, kvádr, jehlan, apod. a s útvary z nich složenými. V reálném světě tak lze nalézt mnoho uplatnění této „standardní“ geometrie, kupříkladu ve strojírenství, stavebnictví, i jinde. Často tak můžeme mít o světě představu právě ve smyslu eukleidovské geometrie. Lze však nalézt řadu objektů, pro jejichž popis tyto představy jsou limitující. Např. v přírodě mrak nelze popsat jako kouli, horu nelze popsat jako jehlan a ani pobřeží nelze určitě popsat jako kružnici.

Mnohé přírodní obrazce již nelze jednoduše modelovat pomocí nástrojů „standardní“ eukleidovské geometrie, s níž jsme seznámeni již od základní školy a která byla po mnoho století základním nástrojem pro popis a porozumění matematickému prostoru. Často zde hraje roli i jistá nahodilost projevující se v jejich charakteru. *Fraktální geometrie* se zabývá nepravidelnými a často se opakujícími vzory, které se vyskytují v přírodě i umění. Tyto vzory jsou často složité a zdánlivě chaotické, ale fraktální geometrie nám umožňuje je analyzovat a pochopit.

Vznik fraktální geometrie se datuje od roku *1975*, za jejíhož zakladatele je považován francouzko-americký matematik Benoît Mandelbrot (1924–2010). Historicky za jejím vznikem stály objevy matematických struktur, které nespadaly pod „představy“ do tehdy známé eukleidovské geometrie. Byly často považovány za „patologické“, nicméně matematici, kteří je vytvořili, je považovali za důležité pro ukázku bohatých možností, které nabízí svět matematiky překračující možnosti jednoduchých struktur, které viděli okolo sebe. [4, str. 33]

1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?

Položme si na začátek trochu jinou otázku, kterou si z počátku položil i Benoît Mandelbrot: *Jaká je podstata tvaru pobřeží?* Ta se stala podstatnou v jeho práci *„How Long Is the Coast of Britain?“*. Uvažme část pobřeží s počátečním a koncovým bodem (viz obrázek 1.1). Zjevně jeho délka je zdola omezena délkou spojnice koncových bodů A a B, nicméně typické pobřeží je velmi nepravidelné a klikaté, a jeho skutečná délka je tak často mnohem delší. Existují různé metody, které nám umožňují určit přesněji jeho délku. Několik z nich je popsáno v knize [4, str.



Obrázek 1.1: Příklad mapy pobřeží se spojnicí bodů A a B.

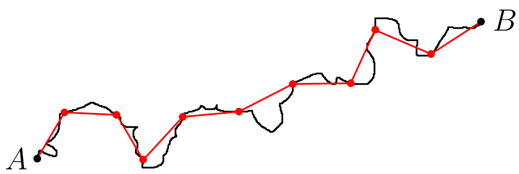
79], pro uvedení do problematiky si zde však vystačíme s tou nejednodušší.

Předpokládejme, že pobřeží, které zkoumáme, má pevné hranice (tj. zanedbáváme např. přílivy a odlivy nastávající během roku), a dále jsme schopni rozlišovat libovolně krátké vzdálenosti.

Mějme zadané libovolné $\varepsilon > 0$. Podél pobřeží začneme umisťovat tyče tak, že po každém umístění provedeme na mapě krok délky **nejvýše** ε, přičemž začínáme v bodě A a postupujeme až k bodu B (popř. pokud měříme délku pobřeží ostrova, pokračujeme dokud se nevrátíme tam, kde jsme začali). Předpokládejme, že jsme provedli celkově $n(\varepsilon)$ kroků (jejich počet je závislý na zvolené délce kroku). *Přibližnou délku pobřeží* $\ell(\varepsilon)$ pak stanovíme jako

$$\ell(\varepsilon) = n(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Nyní by nás mohlo napadnout, že pro zmenšující se ε, tj. $\varepsilon \to 0^+$, bude hodnota



Obrázek 1.2: Odhad délky pobřeží, kde $n = 10$ při zvoleném ε.

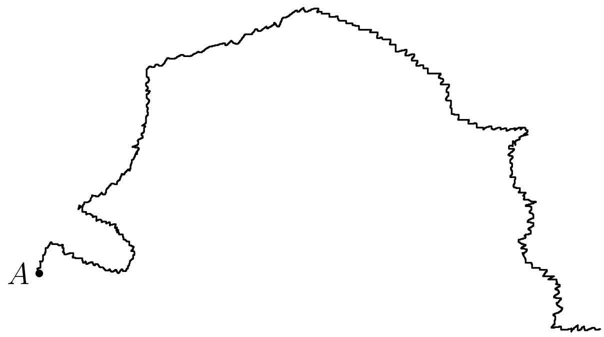
$\ell(\varepsilon)$ konvergovat ke skutečné délce pobřeží. Tzn. označíme-li skutečnou délku pobřeží L, pak bychom mohli očekávat, že platí

$$L = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ell(\varepsilon). \tag{1.1}$$

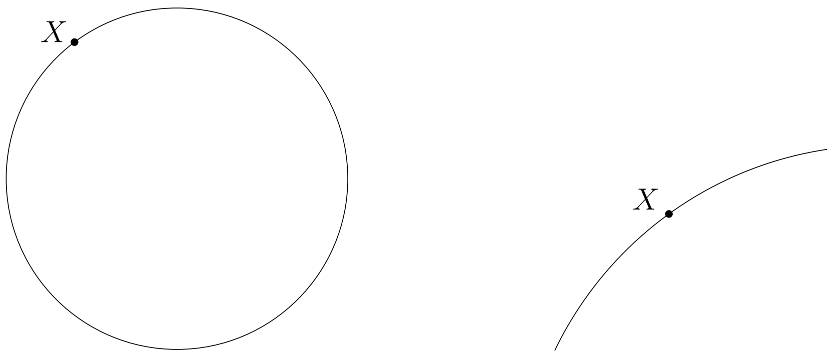
Jenže, bohužel, limita (1.1) ve skutečnosti bude rovna ∞. Proč? Je třeba si uvědomit, že zde pracujeme s *mapou* pobřeží, která má určité *měřítko*. Pokud bychom měli pobřeží na mapě s měřítkem 1 : 100 000, uvidíme méně detailů, než kdybychom jej zkoumali na mapě s měřítkem 1 : 1 000. (Viz obrázek 1.3.)

Nově odhalené detaily (menší poloostrůvky apod.) zde přispívají k celkové délce pobřeží $\ell(\varepsilon)$. Postupným zvětšováním měřítka mapy bychom tak odhalili další detaily. Naše původní idea tak selhává, neboť (v „klasickém" pojetí délky) pro $\varepsilon \to 0^+$ hodnota $\ell(\varepsilon)$ poroste nade všechny meze, tj. $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ell(\varepsilon) = \infty$.

Nabízí se otázka: Proč se toto děje? Pokud se ohlédneme zpět za eukleidovskou geometrií, tento problém zde nenastává. Např. u kružnice v eukleidovské rovině $\mathbb{E}_2$ změnou měřítka žádné další detaily křivky neobjevíme (podobně u jiných geometrických útvarů, viz obrázky 1.4a a 1.4b). Díky tomu můžeme v případě počítání obvodu kružnice použít např. Archimédovu metodu.



Obrázek 1.3: Část pobřeží od bodu A v menším měřítku.



(a) Kružnice v menším měřítku. (b) Část kružnice ve větším měřítku.

Máme-li kružnici o poloměru $r > 0$, pak jí můžeme vepsat libovolný pravidelný n-úhelník (viz obrázek 1.5a). Obvod pravidelného n-úhelníku is označíme O_n a délku jeho strany x (viz obrázek 1.5b). Tu jsme schopni stanovit užitím elementární goniometrie, tj.

$$x = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

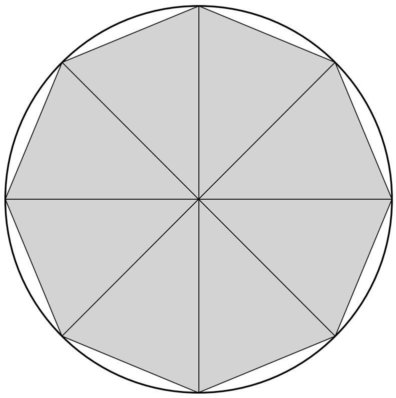
a tedy obvod

$$O_n = 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

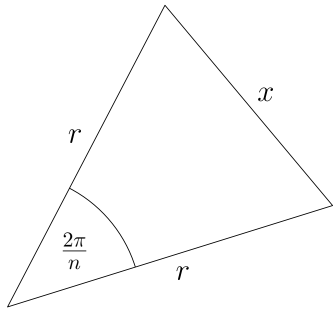
Pro rostoucí n bude obvod pravidelného n-úhelníku stále lépe aproximovat obvod původní kružnice (viz obrázek 1.6). Limitním přechodem (tj. pro $n \to \infty$) tak můžeme odvodit vzorec pro obvod kružnice:

$$O = \lim_{n\to\infty} 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2r \cdot \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi r \cdot \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

Idea aproximace pomocí „zjemňování“ zde skutečně funguje a délka ve standardním pojetí tak dává smysl, jak bychom mohli očekávat. Křivka, kterou tvoří pobřeží, má však oproti kružnici jiný geometrický charakter. Délka pobřeží ∞, k níž Mandelbrot došel, tak dává smysl *z geometrického pohledu*, avšak výsledek to není moc užitečný.

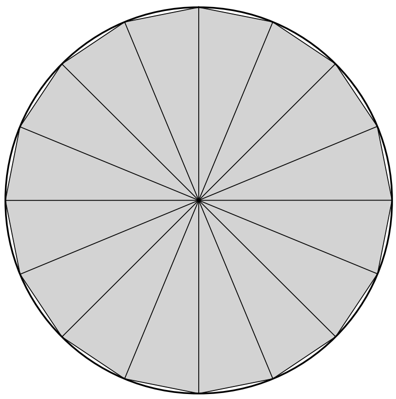


(a) Pravidelný osmiúhelník vepsaný kružnici.



(b) Část vepsaného pravidelného n-úhelníku.

Obrázek 1.5: Princip Archimédovy metody.



Obrázek 1.6: Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku.

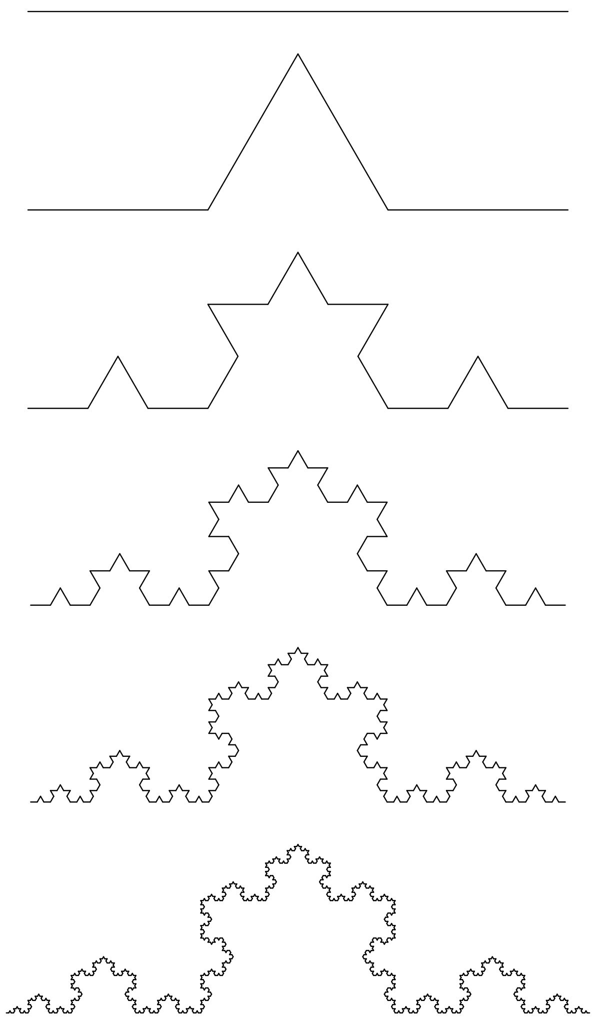
1.2 Soběpodobnost

Mandelbrot si uvědomil, že struktura pobřeží se charakterově vymyká útvarům do tehdy známým eukleidovské geometrii, neboť mapy s různými měřítky poskytovaly různou úroveň detailů, které hrály netriviální roli v jeho celkové délce. Učinil však jiné zásadní pozorování, a to sice, že mnoho detailů má společné rysy, které se opakují. Hodně z nich se shodovalo s výjimkou jejich měřítka. [4, str. 96]

Ve fraktální geometrii se pro tento úkaz uchytil termín *soběpodobnost* (angl. *self-similarity*). Útvar nazýváme soběpodobným, **pokud se sám sobě podobný v libovolném měřítku** [10, str. 220] nebo pokud **část útvaru je podobná jeho celku**. Zmíněná podoba může být míněna přibližně (např. v případě pobřeží je nejspíše jasné, že žádné z jeho detailů nesdílejí společné rysy přesně), ale v dalších částech si předvedeme soběpodobnost *přímou*.

1.2.1 Kochova křivka

Jak jsme si již uvedli, za otce fraktální geometrie je považován Mandelbrot, avšak mnoho fraktálních křivek bylo známo již dříve (čtenář promine, že jsme blíže nespecifikovali termín „fraktální“, jeho přesný význam pro nás však zatím nebude stěžejní). Jako první se podíváme na jednu z nejznámějších, kterou objevil roku *1904* švédský matematik Helge von Koch (1870–1924), dnes známou pod názvem *Kochova křivka*. [7, str. 61] Na začátku vezmeme úsečku délky 1. Vyjmeme prostřední (tj. druhou) třetinu a nahradíme ji dvěma úsečkami délky 1/3, tak, aby na sebe navazovaly v krajních bodech. Tento proces následně opakujeme pro nově vzniklé úsečky. Obecně u úsečky délky l nahradíme její prostřední třetinu dvojicí úseček délek $l/3$ (viz obrázek 1.7). V první řadě si můžeme všimnout, že

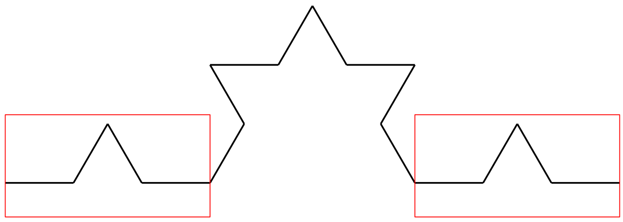


Obrázek 1.7: Prvních pět iterací Kochovy křivky.

v každé další iteraci jsou nově vzniklé podobné původnímu celku, tedy v předešlé iteraci (viz obrázek 1.8). Pokud by tento proces pokračoval do nekonečna, pak by každá ze čtyř částí křivky představovala **celý původní obrazec** ve zmenšeném měřítku (byla by tedy soběpodobná). Zkusme se nyní podívat na délku křivky. V první iteraci začínáme s úsečkou délky[1] 1, která se v druhé iteraci změní na křivku délky 4/3. Není těžké si rozmyslet, že obecně v n-té iteraci bude délka křivky ℓ_n rovna

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

[1]Mohli bychom také začít s obecnou délkou ℓ_0, ale ta by se však při výpočtu projevila pouze jako konstantní násobek.



Obrázek 1.8: První iterace Kochovy křivky „uvnitř“ druhé v menším měřítku.

Posloupnost $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s kvocientem $q = 4/3 > 1$, a tedy její limita je ∞. Kochova křivka má tak *nekonečnou délku*.

1.2.2 Sierpińského trojúhelník

Přesuneme nyní k plošným útvarům, neboť i zde lze sledovat některé zajímavé vlastnosti. Jedním z představitelů je tzv. *Sierpińského trojúhelník*, který objevil roku *1916* polský matematik Wacław Sierpiński (1882–1969). [7, str. 61] Na začátku (v nulté iteraci) začínáme s rovnostranným trojúhelníkem se stranou délky 1 (též lze začít s obecnou délkou ℓ_0). V něm sestrojíme střední příčky (tj. spojnice středů stran trojúhelníka), které společně utvoří strany rovnostranného trojúhelníka čtvrtinového obsahu původního trojúhelníka (to vychází z faktu, že střední příčka v libovolném trojúhelníku má délku rovnou polovině délky strany, s níž je rovnoběžná). Obsah nově vzniklého trojúhelníku odebereme a postup opakujeme pro zbývající trojici trojúhelníků v původním obrazci (viz obrázek (TODO: doplnit odkaz)).

(TODO: doplnit obrázek)

I zde si lze všimnout, že po nekonečně mnoha iteracích budou menší trojúhelníky přesnými kopiemi původního obrazce. Zkusme se opět podívat, jak je to s obvodem obrazce. Každá ze středních příček, které vzniknou v další iteraci, má poloviční délku vůči délce strany l původního trojúhelníku. Obvod obrazce se tak zvětší o $3l/2$. Počet trojúhelníků poroste exponenciálně, neboť v každé iteraci odstraněním jednoho trojúhelníku vzniknou tři nové, tj. obvod se po k-té iteraci zvětší o $3^k \cdot (1/2)^k = (3/2)^k$ (na začátku pro $k = 0$ je obvod 3). Obvod obrazce O_n po n iteracích bude roven součtu přírůstků přes všechny iterace, tj.

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k. \tag{1.2}$$

Řada $\sum_{k=1}^{n} (3/2)^k$ je geometrická s kvocientem $3/2$. Zde si vzpomeňme na vzorec pro její součet.

Věta 1.2.1 (Součet geomerické řady)**.** *Nechť je dána geometrická posloupnost $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ s kvocientem $q \neq 1$. Pak pro součet prvních n členů platí*

$$\sum_{k=1}^{n} g_k = g_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Důkaz. Důkaz vzorce zde vynecháme, nicméně čtenář si jej může snadno ověřit např. indukcí podle n. □

Celkově tak po aplikaci vzorce z 1.2.1 v rovnosti (1.2) dostaneme po jednoduché úpravě

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k = 3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3 + 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Posloupnost $\{O_n\}_{n=0}^{\infty}$ je opět geometrická s kvocientem $q = 3/2 > 1$, tzn. její limita je opět ∞. Obvod Sierpińského trojúhelníku tedy roste nade všechny meze. (Výpočet jsme si mohli též zjednodušit uvědoměním si, že obvod obrazce roste s faktorem 3/2 a vzorec pro O_n jsme tak mohli určit ihned.)

Podívejme se nyní na obsah útvaru. Zde si již výpočet trochu usnadníme. Po každé iteraci se jeho obsah zmenší na 3/4 obsahu původního obrazce. Lze snadno odvodit, že obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky a je

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

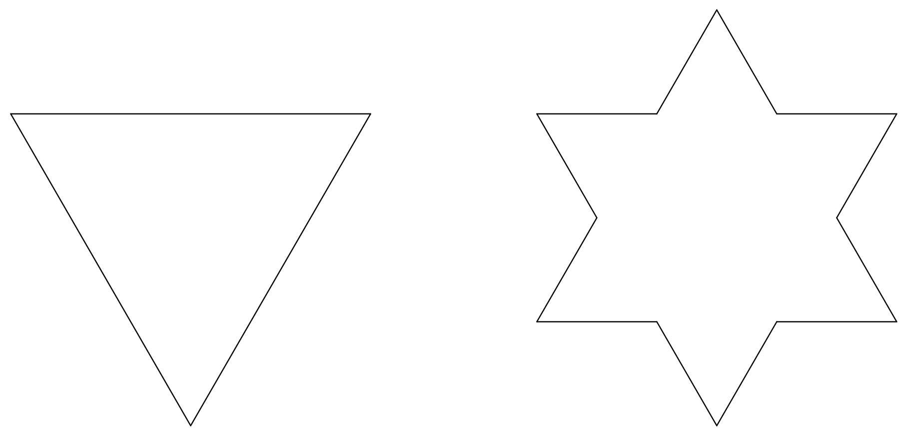
Na začátku je obsah útvaru $S_0 = \sqrt{3}/4$. Tj. celkově po n-iteracích bude obsah S_n roven

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n \tag{1.3}$$

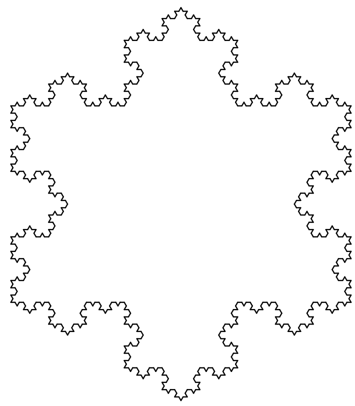
Výraz (1.3) má pro $n \to \infty$ limitu nulovou, tedy zatímco Sierpińského trojúhelník má *nekonečný obvod*, jeho obsah je však naopak *nulový*.

1.2.3 Kochova vločka

Rozšiřující variantou Kochovy křivky 1.2.1 je tzv. *Kochova vločka*, která se skládá ze tří Kochových křivek. Rozdíl je zde v tom, že začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1. Na každou ze stran aplikujeme stejný proces, jako předtím, tj. odebereme prostřední třetinu, nahradíme ji dvěma na sebe navazujícími úsečkami délek 1/3 a opakujeme pro každou nově vzniklou úsečku (viz obrázky 1.9 a 1.10). Podíváme-li se na obvod, nejspíše nás nepřekvapí, že ten

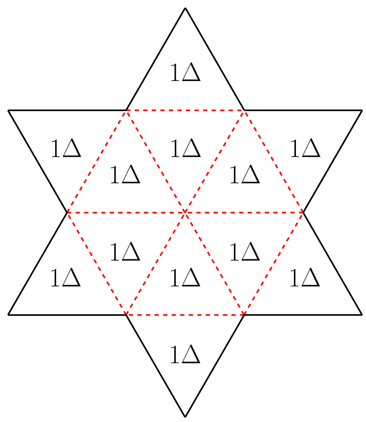


Obrázek 1.9: Nultá a první iterace Kochovy vločky.



Obrázek 1.10: Čtvrtá iterace Kochovy vločky.

je i zde nekonečný[2] (už z principu, že každá strana původního rovnostranného trojúhelníka představuje samostatnou Kochovu křivku). Obsah vzniklého útvaru je však již zajímavější. Pro zjednodušení výpočtu si rozdělme útvar na *stejné rovnostranné trojúhelníky* podle obrázku 1.11, jejichž obsah je roven 1/12 obsahu obrazce v nulté iteraci. Výsledný obsah se tedy pokusíme vyjádřit relativně vůči



Obrázek 1.11: Rozdělení první iterace Kochovy vločky.

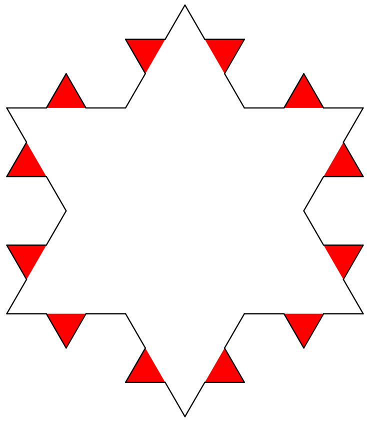
obsahům daných trojúhelníků, na něž jsme obrazec rozdělili, a pak jej pouze přepočítáme. Jejich obsah si označme Δ. Tedy obsah Sierpińského trojúhelníku v nulté iteraci lze vyjádřit jako $S_0 = 9\Delta$. Po první iteraci vzniknou na každé ze strany 3 nové trojúhelníky o obsahu $1/9 \cdot \Delta$. V každé další iteraci vzniknou z jedné úsečky 4 nové. Obecně po n iteracích jich tedy bude $3 \cdot 4^n$. (Při výpočtu musíme počítat s o jedna nižší mocninou, neboť trojúhelníky vznikají „na úsečkách“ z předešlé iterace, nikoliv té aktuální.)

Zaměřme se nyní pouze trojúhelníky, které vznikly v aktuální iteraci (viz obrázek 1.12). Součet jejich obsahů nám dává *přírůstek obsahu* v obecné n-té iteraci. Označíme-li tento přírůstek B_n, pak platí

$$B_n = \underbrace{3 \cdot 4^{n-1}}_{\text{počet úseček}} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \Delta}^{\text{obsah nových troj.}} = 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \Delta,$$

[2] Obvod Kochovy křivky po n-té iteraci je $o_n = 3 \cdot (4/3)^n$.

kde $n \geqslant 1$. Nyní můžeme již vyšetřit obsah v n-té iteraci S_n a posléze i celkový



Obrázek 1.12: Nově vzniklé trojúhelníky v druhé iteraci.

obsah výsledného obrazce $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Pro $n \geqslant 1$ platí

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} B_k = 9\Delta + 3\Delta \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = 9\Delta + 3\Delta \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}}$$
$$= 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

Tedy

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$
$$= 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta = \frac{72}{5}\Delta.$$

Obsah trojúhelníků, na než jsme rozdělili první iteraci Kochovy vločky, je

$$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9}$$

a tedy celkově

$$S = \frac{72}{5}\Delta = \frac{72}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Byl to trochu delší výpočet, nicméně jsme zjistili, že Kochova vločka má (stejně jako Kochova křivka) *nekonečnou délku (obvod)*, ale obsah má *konečný*.

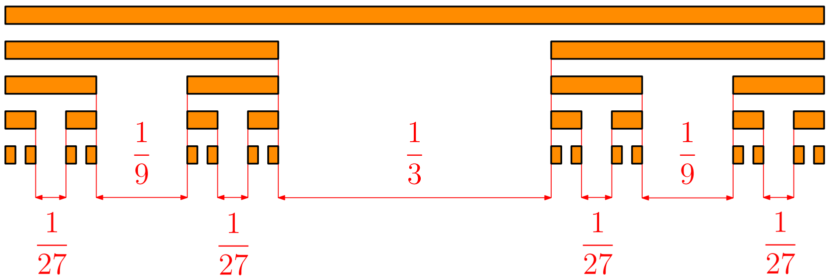
1.2.4 Cantorovo diskontinuum

Podívejme se ještě na jeden typ fraktálního objektu, kterým je tzv. *Cantorovo diskontinuum*[3] Myšlenka je zde velmi jednoduchá: začínáme s úsečkou délky 1 (nultá iterace) a následně odebereme prostřední třetinu, čímž vznikne první iterace. V dalších iteracích postupujeme analogicky pro vzniklé úsečky (viz obrázek 1.13).

[3] Též se mu říká *Cantorova množina* (angl. „*Cantor set*“). Dvourozměrnou variantou je pak tzv. *Cantorův prach* (angl. „*Cantor dust*“). Slovo *prach* je zde míněno v přeneseném významu, neboť (podobně jako v této podsekci) lze ukázat, že vzniklé útvary mají v limitě nulový obsah.

Obrázek 1.13: Nultá až čtvrtá iterace Cantorova diskontinua.

Nově vzniklé úsečky třetinové délky jsou kopiemi původní úsečky. Stejně jako u předešlých fraktálů nás i zde bude zajímat limitní chování tohoto procesu. Lze očekávat, že postupným odebíráním zbudou úsečky nulové délky. O tom se lze přesvědčit např. tak, že spočítáme limitu celkových délek všech odebraných úseků. V první iteraci odebereme úsečku délky $1/3$, v druhé iteraci odebereme dvě celkové délky $2 \cdot (1/3)^2 = 2/9$, ve třetí vyjmeme čtyři celkové délky $4 \cdot (1/3)^3 = 4/27$, atd. (viz obrázek 1.14). Obecně počet odebraných úseků roste s mocninou



Obrázek 1.14: Znázornění délek vyjmutých úseků.

dvojky, jejichž délky klesají s mocninou trojky, tedy v n-té iteraci odebereme úsek délky $2^n(1/3)^{n+1}$. Označíme-li tedy délku zbylých úseků ℓ_n po n iteracích a $\overline{\ell_n}$ délku odebraných úseků, pak určitě platí $\ell_n = 1 - \overline{\ell_n}$. Protože nás zajímá délka *všech* odebraných úseků, pak po n iteracích bude celková délka rovna

$$\overline{\ell_n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}. \tag{1.4}$$

Označíme-li si limitu výrazů posloupností ℓ_n, reps. $\overline{\ell_n}$, jako ℓ, resp. $\overline{\ell}$, pak dostaneme

$$\overline{\ell} = \lim_{n\to\infty} \overline{\ell_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Z toho již triviálně plyne, že

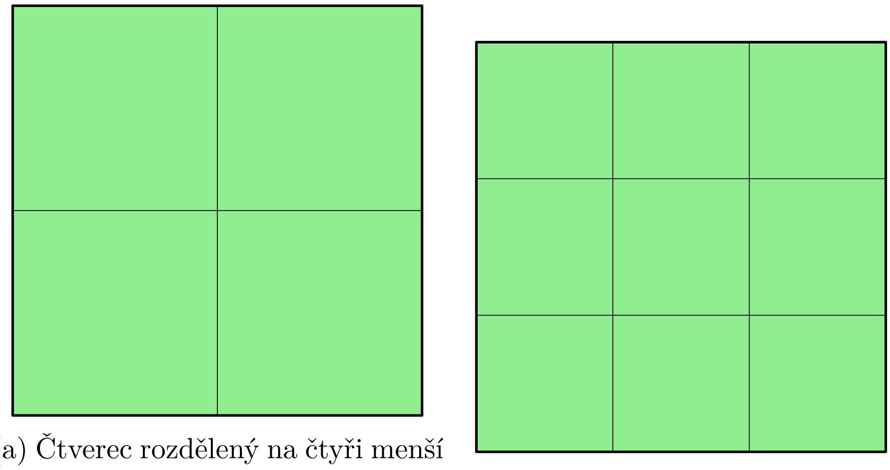
$$\ell = \lim_{n\to\infty} \ell_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \overline{\ell_n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} \overline{\ell_n} = 1 - 1 = 0, \tag{1.5}$$

tzn. na konci procesu zbude Cantorovo diskontinuum délky nula.

1.3 Fraktální dimenze

1.3.1 Chápání konceptu dimenze

Výčet útvarů v sekci 1.2 splňoval zásadní vlastnost, a to sice, že všechny z nich byly *soběpodobné*. V eukleidovské geometrii lze však u mnohých základních objektů pozorovat stejnou vlastnost. Např. čtverec lze určitě prohlásit v jistém smyslu za soběpodobný, neboť jej lze rozdělit na podobné útvary (viz obrázek 1.15). Podobně např. i obyčejná úsečka je taktéž soběpodobná, protože ji mů-

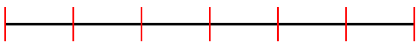


(a) Čtverec rozdělený na čtyři menší čtverce.

(b) Jiná možnost rozdělení čtverce.

Obrázek 1.15: Soběpodobnost čtverce.

žeme rozdělit na obecně k stejných částí (viz obrázek 1.16).



Obrázek 1.16: Úsečka rozdělená na šest stejných částí.

K čemu nám takové uvědomnění vlastně je? Zmenšíme-li úsečku k-krát, pak budeme potřebovat přesně k těchto částí, abychom dostali úsečku původní délky. U čtverce (nebo obdélkuníku obecně) při změnšení délky strany k-krát budeme potřebovat k^2 daných útvarů pro obdržení čtverce s původním obsahem.[4] Pro krychli bude situace zcela analogická, k-krát zmenšená kopie bude potřeba k^3-krát, abychom dostali krychli o původním objemu (viz obrázek 1.17). Lze si všimnout, že v závislosti na *dimenzi* objektu se mění daný exponent. Vztah lze tak zobecnit na

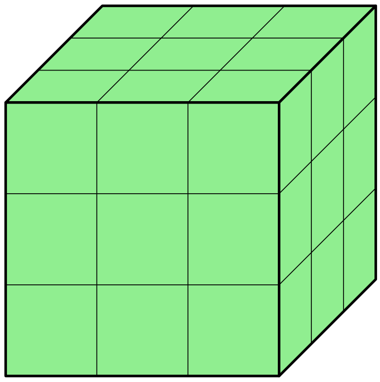
$$N(k) = k^d \tag{1.6}$$

kde $N(k)$ je počet nových útvarů v závislosti na faktoru k a d je dimenze.

[4]Obdélník změnšený k-krát bude mít strany délek a/k, b/k, tedy jeho obsah bude

$$\frac{ab}{k^2} = \frac{S}{k^2},$$

kde S je obsah původního obdélníka.



Obrázek 1.17: Krychle rozdělená na 27 stejných částí.

Toto je jeden z možných způsobů, jak lze chápat koncept dimenze. Jednoduchou úpravou rovnosti (1.6) dostaneme

$$d = \log_k N(k) = \frac{\ln N(k)}{\ln k}.$$

(Obecně lze volit jakýkoliv přípustný základ logaritmů, tj $d = \log_b N(k)/\log_b k$ pro $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.) Dimenze v tomto pojetí skutečně dává dobrý smysl. Pro

Útvar	$N(k)$	$d = \log_3 N(k)/\log_3 k$
Úsečka	3	1
Čtverec	9	2
Krychle	27	3
Teserakt	81	4

Tabulka 1.1: Hodnoty dimenze d pro různé útvary.

„klasické“ geometrické objekty vychází dimenze vždy celočíselně.

Na této myšlence je založen pojem tzv. *fraktální dimenze*[5]. Existuje více způsobů její definice. Jedna z nich, které se dále nyní v této sekci budeme držet, se v anglicky psané literatuře nazývá *„box-counting dimension“*, odkud plyne i značení $\dim_{\mathrm{B}}$. Pro útvar F (formálně vzato množinu bodů) definujeme

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{\ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}. \tag{1.7}$$

(Převzato z [9, str. 93] a [2, str. 28].) Výraz $1/\varepsilon$ zde představuje faktor podobnosti jako původní k (samotné ε tak hraje roli měřítka), avšak největší rozdíl zde představuje zkoumání „limitního chování“ daného výrazu.

Příklad 1.3.1 (Fraktální dimenze úsečky)**.** Začněme asi nejednodušším příkladem výpočtu fraktální dimenze, a to u úsečky (označme ℓ). Představme si, že

[5]Někdy se též nazývá *Kolmogorovova dimenze* nebo *Hausdoffova-Besikovičova dimenze*. Je pojmenována po německém matematikovi Felixi Hausdorffovi (1869–1942) a ruských matematicích Andreji Kolmogorovovi (1903–1987) a Abramovi Besikovičovi (1891–1970).

úsečku *jednotkové délky* rozdělíme na $N_\varepsilon(\ell) = n$ shodných dílů. Pak měřítko libovolného dílu je

$$\varepsilon = \frac{1}{n} = n^{-1}.$$

(Zde je dobré si uvědomit, že pro $n \to \infty$, tedy zjemňování dělení úsečky, platí, že $\varepsilon \to 0^+$.) Fraktální dimenzi úsečky vypočteme z definice jako

$$\dim_{\mathrm{B}} \ell = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(\ell)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n} = 1.$$

Příklad 1.3.2 (Fraktální dimenze čtverce)**.** Podobně, jako v příkladu 1.3.1 výše, můžeme stanovit i fraktální dimenzi čtverce (označme S). Uvažujme tedy čtverec o jednotkovém obsahu, který rozdělíme $N_\varepsilon(S) = n$ shodných útvarů. Přitom víme, že obsah mění kvadraticky vůči délce strany. Měřítko nového čtverce tak bude

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n}} = n^{-1/2}$$

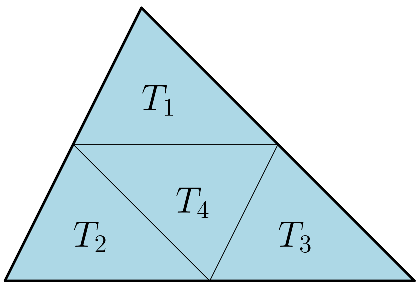
a fraktální dimenze vychází

$$\dim_{\mathrm{B}} S = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{2}\ln n} = 2.$$

Pro krychli bude výpočet naprosto analogický (viz příklad 1.3.2). Obecně pro d-rozměrnou krychli bude její fraktální dimenze[6] rovna d.

Zkusme se nyní odprostit od krychle k trochu jinému útvaru.

Příklad 1.3.3 (Fraktální dimenze trojúhelníku)**.** Podívejme se, jak to dopadne s fraktální dimenzí *obecného trojúhelníku*. Každý trojúhelník T lze rozdělit na čtveřici *vzájemně shodných trojúhelníků* $T_1, \ldots, T_4$, které vzniknou sestrojením středních příček v původním trojúhelníku (viz obrázek 1.18). Délka každé střední



Obrázek 1.18: Trojúhelník T rozdělený na trojúhelníky $T_1, \ldots, T_4$.

příčky odpovídá polovině délky strany, s níž je rovnoběžná, tedy obsah každého z nich je *čtvrtina obsahu původního* trojúhelníku T. Pokud obecně trojúhelník T rozdělíme[7] takto na obecně $N_\varepsilon(T) = 4^n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ shodných částí, pak měřítko každé z nich bude $\varepsilon = (1/2)^n$. Fraktální dimenze tak vychází:

$$\dim_{\mathrm{B}} T = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n \ln 2}{n \ln 2} = 2.$$

[6]Obdobnou úvahou dojmeme k měřítku $\varepsilon = n^{-1/d}$.

[7]Výpočet bychom mohli i zde provést ve stejném duchu jako u úsečky, čtverce nebo krychle. Počet částí, na než rozdělíme trojúhelník, označíme $N_\varepsilon(T) = n$, přičemž měřítko pak bude $\varepsilon = n^{-1/2}$.

Pro jednoduché útvary vychází dimenze tak, jak bychom mohli očekávat. K zajímavějším výsledkům však dospějeme u fraktálů, na něž se blíže podíváme v následující podsekci 1.3.2.

1.3.2 Dimenze fraktálů

Co kdybychom však zkusili podobnou myšlenku aplikovat i na *fraktální objekty*? Zkusme to. Pro připomenutí jednotlivých křivek a výsledků k nim si dovoluji čtenáře opětovně odkázat na sekci 1.2, kde jsou podrobněji rozebrány.

- **Kochova křivka F_{KC}.** V každé iteraci nahrazujeme každou úsečku čtyřmi novými. Kompletní Kochova křivka tak obsahuje právě *čtyři* kopie sebe sama zmenšených na třetinu, tj. v n-té iteraci je $N_\varepsilon(F_{KC}) = 4^n$, jak jsme již odvodili (viz podsekce 1.2.1).[8] Měřítko nové křivky je tak $\varepsilon = (1/3)^n$.

$$\dim_{\mathrm{B}} F_{KC} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(F_{KC})}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}2618595\ldots \tag{1.8}$$

- **Kochova vločka F_{KS}.** Začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1, na jehož stranách postupně vznikne Kochova křivka. V n-té iteraci je obvod Kochovy vločky o_n roven $3 \cdot 4^n$, tj. i $N_\varepsilon(F_{KS}) = 3\cdot 4^n$, kde měřítko[9] nově vzniklých úseček je $\varepsilon = 1/3 \cdot (1/3)^n = (1/3)^{n+1}$. Není těžké se přesvědčit, že fraktální dimenze vychází stejně, jako u Kochovy křivky:

$$\dim_{\mathrm{B}} F_{KS} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3\cdot 4^n}{\ln 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n \overbrace{\left(1+\frac{\ln 3}{\ln 4^n}\right)}^{\to 1}}{\ln 3^n \underbrace{\left(1+\frac{\ln 3}{\ln 3^n}\right)}_{\to 1}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \tag{1.9}$$

(TODO: Jak to bude s varinatou výpočtu pro plochu?)

- **Sierpińského trojúhelník F_{ST}.** V každé iteraci vynecháme prostřední trojúhelník, čímž vznikne *trojice* nových trojúhelníků s *polovičním* měřítkem. Tzn. $N_\varepsilon(F_{ST}) = 3^n$ pro $\varepsilon = (1/2)^n$, a tedy

$$\dim_{\mathrm{B}} F_{ST} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}5849625\ldots \tag{1.10}$$

- **Cantorovo diskontinuum F_{CD}.** Vždy vyjmeme prostřední třetinu úsečky, čímž obdržíme *dvojici* úseček *třetinové* délky, tj. $N_\varepsilon(F_{CD}) = 2^n$ pro $\varepsilon = (1/3)^n$. Fraktální dimenze tak vychází

$$\dim_{\mathrm{B}} F_{CD} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}6309297\ldots \tag{1.11}$$

[8] Lze však zvolit i jiné dělení. Např. lze na Kochovu křivku nahlížet, že obsahuje *16 kopií* sebe sama zmenšených na *devítinu.*

[9] Měřítko se ve srovnání s Kochovou křivkou liší v mocnině, neboť délku nových úseků porovnáváme s obvodem celého trojúhelníku, nikoliv pouze délkou jedné jeho strany. Nicméně ve výpočtu bych se mohli omezit i jen na jednu ze stran, výpočet by byl tak zcela identický, jako u Kochovy křivky.

Udělejme si nyní menší souhrn a porovnání dosavadně získaných výsledků (viz tabulka 1.2). Můžeme si všimnout, že zatímco u „klasických“ objektů vychází

Útvar F	ε	$N_\varepsilon(F)$	$\dim_{\mathrm{B}} F$
Úsečka	n^{-1}	n	1
Čtverec	$n^{-1/2}$	n	2
Krychle	$n^{-1/3}$	n	3
Teserakt	$n^{-1/4}$	n	4
d-rozměrná krychle	$n^{-1/d}$	n	d
Obecný trojúhelník	$(1/2)^n$	4^n	2
Kochova křivka	$(1/3)^n$	4^n	1,2618595...
Kochova vločka	$(1/3)^{n+1}$	$3 \cdot 4^n$	1,2618595...
Sierpińského trojúhelník	$(1/2)^n$	3^n	1,5849625...
Cantorovo diskontinuum	$(1/3)^n$	2^n	0,6309297...

Tabulka 1.2: Porovnání fraktálních dimenzí d_k různých objektů.

fraktální dimenze *celočíselná*, u (zmíněných) fraktálů vychází *neceločíselně*, ba dokonce i iracionálně.

1.3.3 Topologická dimenze

Výsledky z předešlé části 1.3.2 se můžou zdát poněkud překvapující. Jak je vůbec možné, že dimenze nemusí vycházet nutně celočíselná? Ač se to možná zdá jako nesmyslný výsledek, je třeba si uvědomit, jak vlastně koncept dimenze chápeme. Na jednu stranu na ni lze nahlížet jako na mocninu „s níž se zvyšuje“ obsah/objem tělesa. Naopak čtenář znalý lineární algebry si možná vzpomene, že v této matematické disciplíně se na dimenzi nahlíží jako na *mohutnost libovolné báze daného vektorového (pod)prostoru*, která naopak vychází vždy pouze celočíselně, avšak nelze s ní dobře zachytit hlubší detail geometrie u objektů, jako jsou právě fraktály.

Tím se dostáváme ještě k jednomu typu dimenzí, a to tzv. *topologické dimenze*. Ty totiž daleko více odpovídají našemu intuitivnímu chápání tohoto pojmu, neboť se vždy jedná o celé číslo, jak ho známe ze školní geometrie. Existuje více topologických dimenzí[10], které si, co do definice, obecně nejsou ekvivalentní, ačkoliv ve většině standardních případů splývají. My se zde pro ilustraci podíváme na tzv. *Lebesgueovu pokrývací dimenzi* (dále jen již „topologickou dimenzi“) pojmenovanou po francouzském matematikovi Henri Lebesgueovi (1875–1941). Myšlenka definice je založena na pokrývání objektu (formálně vzato *množiny bodů*) tzv. *otevřenými množinami*.[11] Formální definici si zde v rámci zachování jednoduchosti odpustíme, avšak pro hlubší matematický základ si dovolím čtenáře odkázat např. na knihu [1].

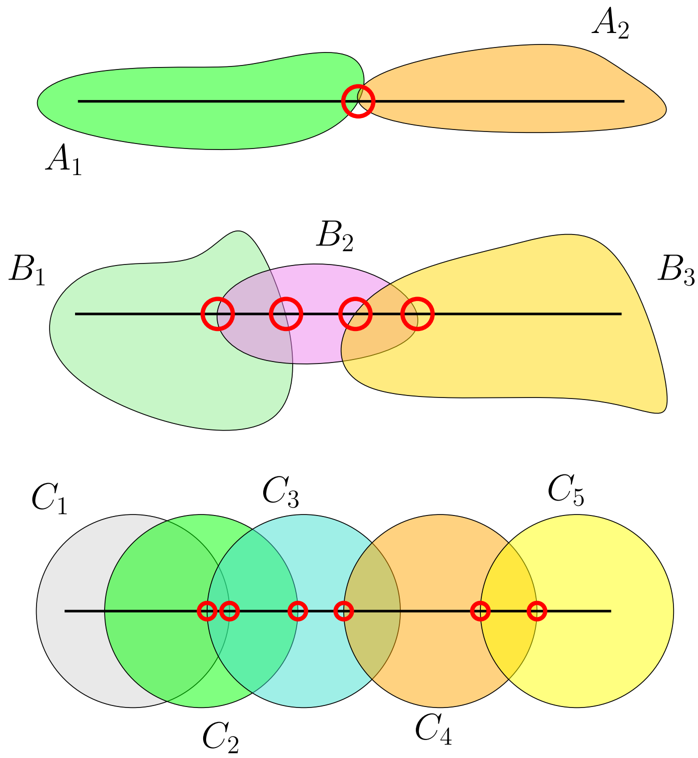
Obecně množina X má topologickou dimenzi $\dim_{\mathrm{L}} X = n$, pokud n je nejmenší

[10] Jiným příkladem takové dimenze je *induktivní dimenze*.

[11] Otevřená množina je zobecnění pojmu otevřeného intervalu reálných čísel. Neformálně řečeno je to taková množina X, kde pro každý její bod $x \in X$ patří do této množiny i nějaké ε-okolí tohoto bodu (patří do ní i body, které jsou „dostatečně blízko“).

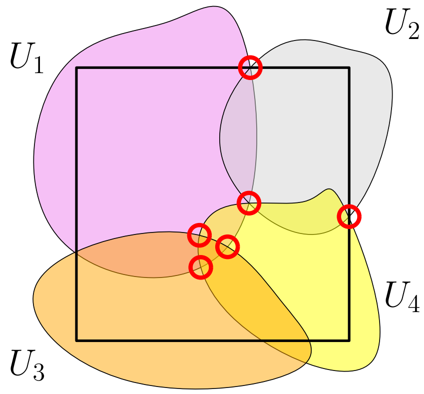
číslo, takové, že pro každé pokrytí otevřenými množinami[12] $\mathcal{U}$ existuje zjemnění[13] $\mathcal{U}'$, v němž každý bod $x \in X$ leží v průniku nejvýše $n+1$ množin pokrytí $\mathcal{U}$.

Tuto ideu si zkusmíme přiblížit na příkladu topologické dimenze úsečky (viz obrázek 1.19). Pro libovolné pokrytí lze ukázat, že každý bod je obsažen v průniku



Obrázek 1.19: Různé možnosti (pod)pokrytí úsečky.

maximálně *dvou množin*, tedy topologická dimenze úsečky je 1. Podobně např. pro čtverec lze dojít k závěru, že pro každé podpokrytí nějakého pokrytí je každý jeho bod obsažen v průniku maximálně *tří množin*, tedy jeho topologická dimenze je 2, jak bychom očekávali (viz obrázek 1.20). Jak jsme se již přesvědčili v příkla-



Obrázek 1.20: Možné (pod)pokrytí čtverce.

[12] Formálněji to znamená, že $A_1, \dots, A_n$ jsou otevřené množiny, takové, že platí $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

[13] Zjemněním pokrytí $\mathcal{U}$ nazýváme takové (pod)pokrytí $\mathcal{U}'$ množiny X, kde každá množina $A_i' \in \mathcal{U}'$ je *podmnožinou* nějaké množiny A_j původního pokrytí $\mathcal{U}$.

dech 1.3.1, 1.3.2 a 1.3.3, pro „standardní“ útvary je fraktální dimenze celočíselná (ač jsou i další, které jsme neuvedli), zatímco v podsekci 1.3.2 jsme zjistili, že u fraktální dimenze fraktálů tomu tak již nutně být nemusí. Přitom však topologická dimenze fraktálních útvarů je (a dokonce musí být) celočíselná (viz tabulka 1.3). Fraktální dimenze tak oproti té topologické daleko lépe zachycuje informaci o detailní geometrii daných objektů.

Útvar F	$\dim_B F$	$\dim_L F$
Úsečka	1	1
Čtverec	2	2
Krychle	3	3
Teserakt	4	4
d-rozměrná krychle	d	d
Kochova křivka	1,2618595 . . .	1
Kochova vločka	1,2618595 . . .	1
Sierpińského trojúhelník	1,5849625 . . .	1
Cantorovo diskontinuum	0,6309297 . . .	0

Tabulka 1.3: Porovnání fraktální a topologické dimenze útvarů.

1.4 Co je to fraktál?

Tak co je to tedy ten „fraktál“? Odpovědi na tuto otázku jsme se poměrně dlouhou dobu vyhýbali a onen termín, popř. jeho přídavnou variantu *„fraktální“*, jsme používali čistě na intuitivní úrovni. Ač jsme se zatím obešli bez jeho formálnějšího upřesnění, bylo by možná při nejmenším slušné se o to alespoň pokusit. V předešlé sekci 1.3 jsme pokryli *fraktální* a *topologickou dimenzi*, které jsme následně použili na příkladech konkrétních útvarů (konkrétně viz tabulky 1.2 a 1.3).

Již jsme si všimli, že u fraktálních útvarů vychází fraktální dimenze $\dim_H$ neceločíselně oproti jejich topologické dimenzi $\dim_L$, která je vždy celočíselná. To by se mohlo zdát jako dobrá charakteristika fraktálů. Avšak existují útvary, jejichž fraktální a topologická dimenze se shodují, přestože také mají „fraktální charakter“. Pro příklad nemusíme chodit nikterak daleko, pravděpodobně nejznáměnším útvarem je v tomto ohledu *Mandelbrotova množina*, jejíž fraktální i topologická dimenze je rovna 2 (blíže se na ni podíváme v sekci (TODO: Doplnit odkaz)). Jiná definice zase naopak popisuje fraktál jako útvar, jehož Hausdorffova dimenze (na tu se blíže podíváme v sekci (TODO: Doplnit odkaz)) je ostře větší než dimenze topologická. Problém (a také důvod, proč jsme definici toho pojmu vyhývali) je však zkrátka ten, že dodnes **není známá** žádná univerzální definice fraktálu. [10, str. 226]

Je to možná lehce zklamávající, nicméně dobrou zprávou je, že ani pro další výklad ona absence formální definice fraktálu nebude překážkou. V dalším textu se zaměříme (mj.) především na jejich klasifikaci (viz kapitola 3) a další vlastnosti.

Kapitola 2

Teorie míry

V této kapitole se budeme nyní věnovat fraktálům a jim příbuzným záležitostem trochu formálněji. Do této chvíle jsme si již stihli představit některé základní fraktály, jako je např. *Sierpińského trojúhelník*, *Kochova vločka* nebo *Cantorovo diskontinuum*, na nichž jsme si ilustrovali především myšlenku sobepodobnosti a na to navazující pojetí dimenze (viz kapitola 1, sekce 1.2 a 1.3).

Ačkoliv leckterý čtenář by se s poskytnutým vysvětlením jistě spokojil, jiný by mohl namítat, že jsme řadu věcí vynechali. A měl by jistě pravdu. Proto se v této kapitole budeme věnovat některým záležitostem z tzv. *teorie míry*, která je v tomto ohledu klíčová a poskytne nám nástroje pro měření fraktálních útvarů, jejichž geometrie často přesahuje možnosti klasické „eukleidovské analýzy“. *Míra* pro nás představuje zobecnění pojmů jako je *délka, obsah* a *objem*, které známe ze školní geometrie. Na jejím základě pak budeme schopni detailněji prozkoumat fraktální dimenzi, kterou jsme již v základu pokryli v předešlé kapitole. Jmenovitě se budeme zabývat

- *box-counting dimenzí*[1] (TODO: Psát **box-counting** nebo **Box-counting**)
- *Hausdorffovou mírou* a z ní vycházející *Haudorffovou dimenzí.*

Ačkoliv je toto téma jinak velice obsáhlé jsou mu věnované samostatné texty i knihy, spokojíme se pouze s naprostým základem. Pro další znalosti si dovolím čtenáře odkázat na knihy [2], [3] a [5].

2.1 Základní pojmy a značení

V tomto oddílu se v krátkosti zaměříme na připomenutí některých pojmů a značení, které budeme dále využívat. Související teorii týkající se mnoha záležitostí v tomto případě vynecháme s předpokladem, že ji čtenář již zná. Pokud tomu

[1] Též ji lze nalézt pod názvem *Minkowského dimenze* nebo *Minkowského-Bouligandova dimenze*. (TODO: Ověřit překlady) Je pojmenována po polském matematikovi Hermannovi Minkowském (1864–1909) a francouzském matematikovi Georgesovi Bouligandovi (1889–1979).

však v některých případech takto nebude, lze tuto část textu považovat za výčet konceptů, které pro zvládnutí nadcházející teorie budeme potřebovat.

(TODO: Doplnit pojmy a značení podle dalšího textu)

2.2 Prostory s mírou

Jak již bylo zmíněno v úvodu, klíčovým pojmem v této kapitole (a pro studium fraktálů obecně) je takzvaná *míra*. Ta pro nás představuje obecný způsob, jak můžeme množinám přiřadit v jistém smyslu „velikost". Konkrétněji, byť vágně, lze říci, že sestává-li množina z konečného nebo spočetného množství „rozumných" částí, pak součet velikostí všech těchto dílčích množin je roven velikosti celé množiny, kterou nazveme její *mírou*. Pro začátek celkem jednoduchá myšlenka.

Pro formální zavedení tohoto pojmu však budeme muset nejprve zavést ještě jiný pojem, a to tzv. *σ-algebru*.

2.2.1 Měřitelné prostory

Definice 2.2.1 (σ-algebra)**.** Nechť X je libovolná množina a systém podmnožin $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Pak $\mathcal{A}$ je *σ-algebra* na množině X, pokud:

(i) $X \in \mathcal{A}$.

(ii) Pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$ platí $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Pro libovolné množiny $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ platí $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Dvojice $(X, \mathcal{A})$ se nazývá měřitelný prostor.

(TODO: Psát na konci každého bodu v definici/větě **tečku**, **čárku** nebo **středník**?)

Příklad 2.2.2. Jednoduché příklady σ-algeber:

- Triviálními příklady σ-algeber jsou množiny $\emptyset$, $\mathscr{P}(X)$ a $\{\emptyset, X\}$ pro libovolnou množinu X.
- Pro konečnou množinu $X = \{a, b, c, d\}$ je jednou možnou σ-algebrou systém množin
$$\Sigma = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

Sami se zkuste přesvědčit, že všechny zmíněné příklady vyhovují definici 2.2.1.

Než vyslovíme něco dalšího o σ-algebrách a jejich významu, podíváme se seznam některých vesměs jednoduchých pozorováních zformulovaných níže v tvrzení 2.2.3.

Věta 2.2.3 (Vlastnosti σ-algebry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je meřitelný prostor. Pak platí:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) *Pro libovolné množiny* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *platí* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

(iii) *Pro všechny množiny* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *platí*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}.$$

(iv) *Jsou-li* $A, B \in \mathcal{A}$ *pak* $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Z tohoto tvrzení je již lépe vidět, proč jsou pro nás σ-algebry tak příjemným objektem. Jsou totiž *uzavřené* na všechny základní množinové operace. To se nám bude později hodit při zavedení míry, ke které směřujeme. Důkaz těchto dílčích tvrzení přitom není nikterak složitý.

Důkaz. Mějme σ-algebru $\mathcal{A}$ na množině X.

(i) Z podmínky (i) definice 2.2.1 víme, že $X \in \mathcal{A}$ a z podmínky (ii) tedy plyne $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Mějme množiny $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Společně s využitím De Morganových zákonů plyne následující:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overbrace{X \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overbrace{(X \setminus A_i)}^{\in \mathcal{A} \text{ podle (ii)}}}_{\in \mathcal{A} \text{ podle (iii)}}}^{\in \mathcal{A} \text{ podle (ii)}} \in \mathcal{A}.$$

(iii) Nechť jsou dány množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Když pro každé $j > n$ položíme $A_j = \emptyset$, pak platí

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

a podobně pro $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ podle předešlého bodu.

(iv) Pro libovolné množiny $A, B \in \mathcal{A}$ platí

$$A \setminus B = \overbrace{A \cup \underbrace{(X \setminus B)}_{\in \mathcal{A} \text{ podle (ii)}}}^{\in \mathcal{A} \text{ podle (iii)}} \in \mathcal{A}.$$

$\square$

2.2.2 Míra

V tuto chvíli máme již vše potřebné k zavedení pojmu míra, resp. prostor s mírou.

Definice 2.2.4 (Prostor s mírou)**.** Nechť $(X, \mathcal{A})$ je meřitelný prostor. Zobrazení $\mu : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty \rangle$ se nazývá *míra* na $\mathcal{A}$, pokud platí:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) pro množiny $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \qquad \lhd\ \sigma\text{-}\textit{aditivita}$$

Uspořádanou trojici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazýváme *prostor s mírou*.

Vzhledem k tomu, co míra reprezentuje (tj. zobecnění délky, obsahu, objemu), jsou tyto požadavky intuitivně dosti smysluplné.

Příklad 2.2.5. Příklady prostorů s mírou:

- Asi pro nás nejtypičtější způsob, jak měřit „velikost“ množiny, je podle *počtu prvků*. Pro libovolnou množinu X a potenční množinu $\mathscr{P}(X)$ lze definovat prostor s mírou $(X, \mathscr{P}(X), \mu)$, kde pro libovolnou množinu $A \in \mathscr{P}(X)$ položíme $\mu(A) = |A|$. Takto definované míře μ říkáme *aritmetická míra*.
- Máme libovolnou množinu X a σ-algebru $\mathcal{A}$. Zvolme si pevně $a \in X$. Míru libovolné množiny $A \in \mathcal{A}$ lze definovat jako $\mu(A) = \chi_A(a)$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny A.
- Zobrazení přiřazující náhodnému jevu pravděpodobnost je též případem míry. Označíme-li si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ množinu všech elementárních jevů a $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, pak $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to \langle 0, 1 \rangle$ definovaná pro $A \in \mathcal{F}$ jako

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

  je mírou na $\mathcal{F}$. Speciálně $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Ve všech případech zobrazení μ v příkladu 2.2.5 se lze snadno přesvědčit, že se jedná o míru, tedy že splňuje podmínky (i) a (ii) uvedené v definici 2.2.4 výše.

Pojďme nyní prozkoumat vlastnosti míry trochu hlouběji.

Věta 2.2.6 (Vlastnosti míry)**.** *Nechť μ je míra na σ-algebře $\mathcal{A}$. Pak platí následující:*

(i) Jsou-li množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, pak

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i). \qquad \lhd\ \textit{aditivita}$$

(ii) Pokud $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subseteq B$, pak

$$\mu(A) \leqslant \mu(B). \qquad \triangleleft \textit{ monotonie míry}$$

Navíc pokud $\mu(A) < \infty$, pak $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(iii) Pokud $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, je neklesající posloupnost množin, tj. taková, že $A_j \subseteq A_{j+1}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$, pak

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

(iv) Pokud $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ je nerostoucí posloupnost množin, tj. taková, že $A_i \supseteq A_{i+1}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, a navíc $\mu(A_1) < \infty$, pak

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

(v) Pokud $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, pak

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \qquad \triangleleft\ \sigma\textit{-subaditivita}$$

Poslední vlastnost (v) je tzv. σ-*subaditivita*[2]. Oproti σ-aditivitě se liší tím, že u množin $A_1, A_2, \ldots$ se nepožaduje, aby byly po dvou disjunktní, tzn. mohou se „překrývat“. Je však intuitivně nejspíše jasné, že součtem měr všech těchto množin určitě nemůžeme získat míru větší než je míra jejich sjednocení (dané „překryvy“ započítáváme v sumě vícekrát). Podobně i monotonie dává intuitivně smysl, neboť část větší množiny jistě nemůže mít větší míru než celek. Na formální stránku věci se podíváme nyní.

Důkaz. V důkazu využijeme některé vlastnosti σ-algebry z věty 2.2.3.

(i) Pokud pro každé $j > n$ položíme $A_j = \emptyset$, pak z definice míry plyne

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

(ii) Nechť jsou dány $A, B \in \mathcal{A}$, takové, že $A \subseteq B$. Pak $B = A \cup (B \setminus A)$, přičemž A a $B \setminus A$ jsou disjunktní. Tedy podle bodu (ii) lze psát $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A)$, protože $\mu(B \setminus A) \geqslant 0$.

(iii) Mějme neklesající posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ (viz obrázek 2.1a). Definujeme posloupnost množin $B_1, B_2, \ldots$ následovně:

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ \forall i \geqslant 2 : B_i = A_i \setminus A_{i-1}.$$

[2] V matematické terminologii se předpona σ běžně týká spočetných sjednocení. [3, str. 2]

Je zjevné, že množiny $B_1, B_2, \dots$ jsou po dvou disjunktní a zároveň $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Libovolnou množinu A_n lze totiž zapsat jako

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus A_{i-1}).$$

Podle již dokázaného bodu (i) (aditivita míry) tedy pro každé n platí $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$. Celkově

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(iv) Nechť je dána nerostoucí posloupnost množin $A_1, A_2, \dots$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ (viz obrázek 2.1b). Podobně jako v předešlém bodě, i zde definujeme novou posloupnost množin $B_1, B_2, \dots$ takto:

$$\forall i \in \mathbb{N} : B_i = A_1 \setminus A_i.$$

Zde si můžeme všimnout, že pro každé i platí $B_i \subseteq B_{i+1}$ a splňuje tak předpoklad předešlého bodu (iii). Dále si též lze všimnout, že dle De Morganových zákonů můžeme psát

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i) = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Výraz $\lim_{j\to\infty} B_j$ lze rozepsat dvěma způsoby:

$$\lim_{j\to\infty} B_j \overset{(iii)}{=} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{(ii)}{=} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right),$$

$$\lim_{j\to\infty} B_j = \lim_{j\to\infty} (A_1 \setminus A_j) \overset{(ii)}{=} \lim_{j\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_j)) = \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Porovnáním obou rovností lze vidět, že

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

(v) Nechť $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$. Definujeme posloupnost množin $B_1, B_2, \dots$ takto:

$$B_1 = A_1,\ B_i = A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i.$$

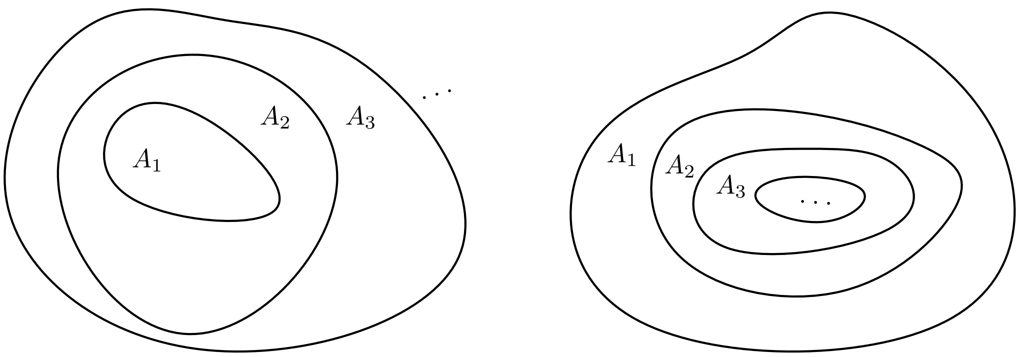
Není složité si rozmyslet, že množiny[3] $B_1, B_2, \dots$ jsou po dvou disjunktní. Zároveň platí $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Tím je dokázáno, že

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(Převzato z [5, str. 19]) □

Poznámka 2.2.7. Předpoklad $\mu(A_1) < \infty$ ve větě 2.2.6 v bodě (iv) nelze vynechat. Jednoduchý protipříklad si uvedeme v sekci 2.3.

[3] V podstatě konstruujeme množiny $A_1, A_2, \dots$ tak, aby v následující množině A_i nebyl obsažen prvek, který se nachází již v některé z množin $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$.



(a) Neklesající posloupnost množin (b) Nerostoucí posloupnost množin

Obrázek 2.1: Ilustrace k důkazu věty 2.2.6

2.3 Lebesgueova míra

(TODO: Doplnit zmínku o Jordanově-Peanově obsahu)

V předešlé sekci 2.2 jsme se povídali o pojmu *míra* obecně a podívali jsme se na několik příkladů. Obecnou ideu měření „velikosti“ lze založit např. na aproximaci obecné množiny pomocí *spočetných sjednocení útvarů*, jejichž „velikost“ umíme jednoduše určit. V dalším textu se omezíme pouze na množinu $\mathbb{R}^n$.

Na zmíněné myšlence je postavena definice tzv. *n-rozměrné Lebesgueovy míry*, kdy obecnou množinu budeme pokrývat pomocí *kvádrů*. Připomeňme, že obecně n-rozměrným kvádrem I rozumíme kartézský součin *intervalů*

$$\langle a_1, b_1\rangle, \dots, \langle a_n, b_n\rangle \subseteq \mathbb{R},$$

tj.

$$I = \prod_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i\rangle = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$$

a jeho objem definujeme jako

$$\mathrm{vol}^n(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Nyní si definujeme tzv. *vnější Lebesgueovu míru.*

Definice 2.3.1 (Vnější Lebesgueova míra)**.** Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak vnější n-rozměrnou Lebesgueovou mírou A je

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(I_j) \;\middle|\; I_j \text{ je kvádr} \land A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_j \right\}.$$

Vnější Lebesgueova míra množiny intuitivně zachycuje informaci o „velikosti“ dané množiny. Lze ihned vidět, že pro libovolnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je $\lambda_n^*(A) \in \mathbb{R}_0^+$, protože $\mathrm{vol}^n(I_j) \geqslant 0$ pro každé $j \in \mathbb{N}$.

Příklad 2.3.2. Ukažme si některé triviální příklady výpočtů vnější Lebesgueovy míry z definice (viz 2.3.1), tedy budeme hledat příslušné pokrytí dané množiny.

- Pro prázdnou množinu $\emptyset$ je $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$, neboť $\emptyset \subseteq \emptyset$ (tedy prázdná množina je pokrytím sebe sama) a $\mathrm{vol}^n(\emptyset) = 0$.

- Mějme libovolnou konečnou množinu $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pro každé x_j stačí položit $I_j = \{x_j\}$ pro každé $1 \leqslant j \leqslant n$, což je degenerovaný interval, jehož objem $\mathrm{vol}^n(I_j) = 0$.

- Pro libovolnou spočetnou množinu $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ je $\lambda_n^*(A) = 0$. Pokrytí volíme stejně jako v předešlém bodě. Tedy např. pro $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ je $\lambda_1^*(\mathbb{Q}) = 0$, neboť $\mathbb{Q}$ je spočetná.

- Pro množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ je $\lambda_1^*(\mathbb{R}) = \infty$, avšak pro

$$A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

(reálná osa v $\mathbb{R}^2$) je $\lambda_2^*(A) = 0$.

Příklad 2.3.3 (Výpočet vnější Lebesgueovy míry intervalu)**.** Jako poslední si ukážeme, že vnější Lebesgueova míra v případě intervalu (ať už otevřeného, nebo uzavřeného) skutečně koresponduje s jeho délkou, tedy pro $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ je $\lambda_1^*(I) = b - a$. Zde je potřeba ukázat dvojici nerovností: $\lambda_1^*(I) \leqslant b - a$ a $\lambda_1^*(I) \geqslant b - a$.

Zde je potřeba dávat pozor na to, že pokrytí, které hledáme, musí být spočetné. Začneme první nerovností.

- **Důkaz $\lambda_1^*(I) \geqslant b - a$.** Nechť je dána posloupnost intervalů $J_1, J_2, \dots$, taková, že $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$. Protože (a, b) je otevřený interval, existuje interval $I' = \langle a + \varepsilon, b - \varepsilon \rangle \subset (a, b)$ pro libovolné $\varepsilon > 0$.

  Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$. Protože však interval $\langle a + \varepsilon, b - \varepsilon \rangle$ je kompaktní množina a navíc

  $$\langle a + \varepsilon, b - \varepsilon \rangle \subset (a, b) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$$

  lze podle Heineho-Borelovy věty (viz (TODO: doplnit odkaz)) vybrat z pokrytí $J_1, J_2, \dots$ konečné podporytí, tzn. existuje konečná posloupnost množin $J_1', J_2', \dots, J_n'$, taková, že

  $$I' \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i'.$$

  Z tohoto pokrytí si nyní vybereme pouze takové intervaly J_i', které mají neprázdný průnik s I, tedy

  $$J_i' \cap I \neq \emptyset.$$

  Tyto intervaly si označíme $K_1, K_2, \dots, K_m$, kde $m \leqslant n$. Není těžké si rozmyslet, že $K_1, K_2, \dots, K_m$ tvoří opět pokrytí I' a navíc jejich sjednocení tvoří interval, tj.

  $$\bigcup_{i=1}^{m} K_i = (L, R) \supset I'.$$

Zároveň víme, že $L \leqslant a + \varepsilon$ a $R \geqslant b - \varepsilon$. Z toto tedy plyne, že

$$\operatorname{vol}^1((L,R)) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}^1(K_i) = L - R \geqslant (b-\varepsilon) - (a+\varepsilon) = b - a - 2\varepsilon.$$

Celkově máme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}^1(J_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{vol}^1(J_i') \geqslant \sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}^1(K_i) &\geqslant \operatorname{vol}^1((L,R)) \\ &= R - L \geqslant (b-\varepsilon) - (a+\varepsilon) = b - a - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Tím je dokázána nerovnost $\lambda_1^*(I) \geqslant b - a$.

- **Důkaz** $\lambda_1^*(I) \leqslant b - a$**.** Oproti předešlému výpočtu je důkaz této části velmi snadný. Samotný interval $I = (a,b)$ tvoří totiž pokrytí sebe samotného, tzn.

$$\lambda_1^*(I) \leqslant \operatorname{vol}^1((a,b)) = b - a.$$

Z platnosti obou nerovností tedy máme, že $\lambda_1^*(I) = b - a$.

Poznámka 2.3.4. Vraťme se na chvíli k větě 2.2.6 o vlastnostech míry, konkrétně bod (iv). Předpoklad $\mu(A_1) < \infty$ zde vynechat nelze. Stačí vzít množiny $A_j = \langle j, \infty)$, tzn. $\lambda_n^*(A_j) = \lambda_n^*(\langle j, \infty)) = \infty$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Snadno si rozmyslíme, že

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset,$$

nicméně lze vidět, že zatímco $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \infty$, tak $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.

Z příkladů 2.3.2 a 2.3.3 můžeme vidět, že pro rozumně zvolené množiny zachycuje vnější Lebesgueova míra jejich intuitivní „velikost“. V případě intervalu odpovídá jeho délce, v případě diskrétní množiny je nulová a podobně např. pro obdélník lze ukázat, že odpovídá jeho obsahu, popř. pro kvádr jeho objemu.

Nyní se však nabízí jedna otázka. Čtenář by mohl již od chvíle, kdy jsme zavedli pojem vnější Lebesgueovy míry (opět viz definice 2.3.1) namítat, co nás opravňuje nazývat zobrazení λ_n^* mírou, tj. ve smyslu definice 2.2.4. Jak víme, že splňuje podmínku σ-aditivity? Na tuto otázku odpověď není zcela přímočará a vlastně není ani jednoduchá.

Bohužel pro libovolně zvolenou množinu X a σ-algebru $\mathcal{A}$ v případě vnější Lebesgueovy míry obecně neplatí vlastnost aditivity, tedy existují množiny $A, B \in \mathcal{A}$, takové, že

$$\lambda_n^*(A \cup B) \neq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B).$$

Příklad takových množin využívá např. takzvaná *Vitaliho konstrukce*, se kterou přišel italský matematik Giuseppe Vitali (1875–1932) roku 1905, využívající invariance vnější Lebesgueovy míry vůči posunutí, tzn. $\lambda_n^*(x + A) = \lambda_n^*(A)$. [6] V rámci tohoto textu se jí zde zabývat nebudeme, avšak pro zájemce doporučuji zdroje [3, str. 3] a [8], kde je tato konstrukce podrobněji rozepsána.

Je tedy potřeba se omezit na takové množiny, kde je λ_n^* aditivní. Existuje více způsobů, jak lze charakterizovat takové množiny, avšak my si zde uvedeme způsob, se kterým přišel řecký matematik Constantin Carathéodory (1873–1950).

Definice 2.3.5 (Lebesgueovská měřitelnost)**.** Množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme (lebesgueovsky) měřitelnou, pokud pro každou množinu G platí

$$\lambda_n^*(G) = \lambda_n^*(A \cap G) + \lambda_n^*(A \setminus G).$$

Systém všech měřitelných množin v R^n značíme $\mathcal{L}^n$. Pokud $A \in \mathcal{L}^n$, pak číslo $\lambda_n(A) = \lambda_n^*$ nazýváme n-rozměrnou Lebesgueovou mírou množiny A.

(TODO: Musí být G omezená (viz porovnání knih *Real Analysis* a *Measure and integral*)?)

2.4 Box-counting dimenze

2.5 Hausdorffova míra a Hausdorffova dimenze

Kapitola 3

Klasifikace fraktálů

(TODO: Doplnit text ke kapitole.)

3.1 L-systémy

(TODO: Doplnit sekci.)

3.2 Systém iterovaných funkcí

(TODO: Doplnit sekci.)

3.3 Time Escape Algorithms

(TODO: Doplnit sekci.)

Kapitola 4

Generování fraktálů

(TODO: Doplnit kapitolu.)

Kapitola 5

Fraktály v praxi

(TODO: Doplnit kapitolu.)

Seznam použité literatury

[1] Engelking, R. (1989). *General topology.* Heldermann, Berlin, rev. and completed ed. ISBN 3-88538-006-4.

[2] Falconer, K. J. (2014). *Fractal geometry.* John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 3rd edition. ISBN 978-1-119-94239-9.

[3] Lukeš, J. a Malý, J. (2013). *Measure and integral.* Matfyzpress, Praha, 3rd ed. ISBN 978-80-7378-253-5.

[4] Mandelbrot, B. B. (1983). *Fractal geometry of nature.* Freeman and company, New York, vyd. 3. ISBN 978-0716711865.

[5] Netuka, I. (2016). *Integrální počet.* Matfyzpress, Praha, první vydání. ISBN 978-80-7378-334-1.

[6] O'Connor, J. J. (Citováno 4. března 2025). Mactutor history of mathematics archive. *[online].* Dostupné z: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Vitali/`.

[7] Peitgen, H.-O., Jürgens, H. a Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals.* Springer, New York, 2nd edition. ISBN 978-1-4684-9396-2.

[8] Verner, J. (Citováno 4. března 2025). Lebesgueovsky neměřitelné množiny. *[online].* Dostupné z: `https://ktiml.mff.cuni.cz/~verner/download/nemeritelne.pdf`.

[9] Zelinka, I., Včelař, F. a Čandík, M. (2006). *Fraktální geometrie.* BEN - technická literatura, Praha, vydání 1. ISBN 80-7300-191-8.

[10] Šárka Voráčová, Csachová, L., Hájková, V., Hromadová, J., Moravcová, V., Richter, J., Surynková, P., Šarounová, A., Šaroun, J., Šrubař, J., Štauberová, Z. a Tichý, V. (2022). *Atlas geometrie.* Academia, Praha, vydání 2. ISBN 978-80-200-3336-9.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Index