



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. David Weber

# **Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro střední  
školy

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední  
školy se sdruženým studiem  
Učitelství informatiky pro střední  
školy

Praha (TODO: 2024)

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

(TODO: Doplnit poděkování)

Název práce: Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry

Autor: Bc. David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: (TODO: Doplnit abstrakt (česky))

Klíčová slova: , klicova slova

Title: Fractal geometry for (experienced) amateurs

Author: Bc. David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: (TODO: Doplnit abstrakt (anglicky))

Keywords: keywords

# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>3</b>
<b>1 Úvod do fraktálů</b>	<b>4</b>
1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie? . . . . .	4
1.2 Soběpodobnost . . . . .	7
1.2.1 Kochova křivka . . . . .	7
1.2.2 Sierpiňského trojúhelník . . . . .	9
1.2.3 Kochova vločka . . . . .	10
1.2.4 Cantorovo diskontinuum . . . . .	12
1.3 Fraktální dimenze . . . . .	14
1.3.1 Chápání konceptu dimenze . . . . .	14
1.3.2 Dimenze fraktálů . . . . .	17
1.3.3 Topologická dimenze . . . . .	18
1.4 Co je to fraktál? . . . . .	20
<b>2 Teorie míry</b>	<b>21</b>
2.1 Základní pojmy a značení . . . . .	21
2.2 Prostory s mírou . . . . .	22
2.2.1 Měřitelné prostory . . . . .	22
2.2.2 Míra . . . . .	24
2.3 Lebesgueova míra . . . . .	27
2.4 Box-counting dimenze . . . . .	31
2.4.1 Definice a výpočet . . . . .	31
2.4.2 Vlastnosti . . . . .	37
2.5 Hausdorffova míra a Hausdorffova dimenze . . . . .	40
<b>3 Klasifikace fraktálů</b>	<b>43</b>
3.1 L-systémy . . . . .	43

3.2	Systém iterovaných funkcí . . . . .	43
3.3	Time Escape Algorithms . . . . .	43
4	Generování fraktálů	44
5	Fraktály v praxi	45
	Seznam použité literatury	46
	Seznam obrázků	47
	Seznam tabulek	48
	Index	49

# Předmluva

(TODO: napsat předmluvu)

# Kapitola 1

## Úvod do fraktálů

Pod pojmem „geometrie“ si čtenář pravděpodobně vybaví rovinnou či prostoro-  
vou geometrii pracující s jednoduchými útvary jako trojúhelník, obdélník, kruh,  
kvádr, jehlan, apod. a s útvary z nich složenými. V reálném světě tak lze nalézt  
mnoho uplatnění této „standardní“ geometrie, kupříkladu ve strojírenství, staveb-  
nictví, i jinde. Často tak můžeme mít o světě představu právě ve smyslu euklei-  
dovské geometrie. Lze však nalézt řadu objektů, pro jejichž popis tyto představy  
jsou limitující. Např. v přírodě mrak nelze popsat jako kouli, horu nelze popsat  
jako jehlan a ani pobřeží nelze určitě popsat jako kružnici.

Mnohé přírodní obrazce již nelze jednoduše modelovat pomocí nástrojů „stan-  
dardní“ eukleidovské geometrie, s níž jsme seznámeni již od základní školy a  
která byla po mnoho století základním nástrojem pro popis a porozumění mate-  
matickému prostoru. Často zde hraje roli i jistá nahodilost projevující se v jejich  
charakteru. *Fraktální geometrie* se zabývá nepravidelnými a často se opakujícími  
vzory, které se vyskytují v přírodě i umění. Tyto vzory jsou často složité a zdánlivě  
chaotické, ale fraktální geometrie nám umožňuje je analyzovat a pochopit.

Vznik fraktální geometrie se datuje od roku 1975, za jejíhož zakladatele je pova-  
žován francouzsko-americký matematik BENOÎT MANDELBROT (1924–2010). His-  
toricky za jejím vznikem stály objevy matematických struktur, které nespadaly  
pod „představy“ do tehdy známé eukleidovské geometrie. Byly často považovány  
za „patologické“, nicméně matematici, kteří je vytvořili, je považovali za důle-  
žité pro ukázkou bohatých možností, které nabízí svět matematiky překračující  
možnosti jednoduchých struktur, které viděli okolo sebe. [4, str. 33]

### 1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?

Položme si na začátek trochu jinou otázku, kterou si z počátku položil i Benoît  
Mandelbrot: *Jaká je podstata tvaru pobřeží?* Ta se stala podstatnou v jeho práci  
„*How Long Is the Coast of Britain?*“. Uvažme část pobřeží s počátečním a konco-  
vým bodem (viz obrázek 1.1). Zjevně jeho délka je zdola omezena délkou spojnice  
koncových bodů  $A$  a  $B$ , nicméně typické pobřeží je velmi nepravidelné a klikaté, a  
jeho skutečná délka je tak často mnohem delší. Existují různé metody, které nám  
umožňují určit přesněji jeho délku. Několik z nich je popsáno v knize [4, str.





Obrázek 1.1: Příklad mapy pobřeží se spojnici bodů  $A$  a  $B$ .

79], pro uvedení do problematiky si zde však vystačíme s tou nejednodušší.

Předpokládejme, že pobřeží, které zkoumáme, má pevné hranice (tj. zanedbáváme např. přílivy a odlivy nastávající během roku), a dále jsme schopni rozlišovat libovolně krátké vzdálenosti.

Mějme zadané libovolné  $\varepsilon > 0$ . Podél pobřeží začneme umísťovat tyče tak, že po každém umístění provedeme na mapě krok délky **nejvýše**  $\varepsilon$ , přičemž začínáme v bodě  $A$  a postupujeme až k bodu  $B$  (popř. pokud měříme délku pobřeží ostrova, pokračujeme dokud se nevrátíme tam, kde jsme začali). Předpokládejme, že jsme provedli celkově  $n(\varepsilon)$  kroků (jejich počet je závislý na zvolené délce kroku). *Přibližnou délku pobřeží*  $\ell(\varepsilon)$  pak stanovíme jako

$$\ell(\varepsilon) = n(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Nyní by nás mohlo napadnout, že pro zmenšující se  $\varepsilon$ , tj.  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , bude hodnota



Obrázek 1.2: Odhad délky pobřeží, kde  $n = 10$  při zvoleném  $\varepsilon$ .

$\ell(\varepsilon)$  konvergovat ke skutečné délce pobřeží. Tzn. označíme-li skutečnou délku pobřeží  $L$ , pak bychom mohli očekávat, že platí

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ell(\varepsilon). \quad (1.1)$$

Jenže, bohužel, limita (1.1) ve skutečnosti bude rovna  $\infty$ . Proč? Je třeba si uvědomit, že zde pracujeme s *mapou* pobřeží, která má určité *měřítko*. Pokud bychom měli pobřeží na mapě s měřítkem 1 : 100 000, uvidíme méně detailů, než kdybychom jej zkoumali na mapě s měřítkem 1 : 1 000. (Viz obrázek 1.3.)

Nově odhalené detaily (menší poloostrovy apod.) zde přispívají k celkové délce pobřeží  $\ell(\varepsilon)$ . Postupným zvětšováním měřítka mapy bychom tak odhalili další detaily. Naše původní idea tak selhává, neboť (v „klasickém“ pojetí délky) pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  hodnota  $\ell(\varepsilon)$  poroste nade všechny meze, tj.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ell(\varepsilon) = \infty$ .

Nabízí se otázka: Proč se toto děje? Pokud se ohlédneme zpět za eukleidovskou geometrií, tento problém zde nenastává. Např. u kružnice v eukleidovské rovině  $\mathbb{E}_2$  změnou měřítka žádné další detaily křivky neobjevíme (podobně u jiných geometrických útvarů, viz obrázky 1.4a a 1.4b). Díky tomu můžeme v případě počítání obvodu kružnice použít např. Archimédovu metodu.



Obrázek 1.3: Část pobřeží od bodu  $A$  v menším měřítku.



(a) Kružnice v menším měřítku.



(b) Část kružnice ve větším měřítku.

Máme-li kružnici o poloměru  $r > 0$ , pak jí můžeme vepsat libovolný pravidelný  $n$ -úhelník (viz obrázek 1.5a). Obvod pravidelného  $n$ -úhelníku is označíme  $O_n$  a délku jeho strany  $x$  (viz obrázek 1.5b). Tu jsme schopni stanovit užitím elementární goniometrie, tj.

$$x = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

a tedy obvod

$$O_n = 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

Pro rostoucí  $n$  bude obvod pravidelného  $n$ -úhelníku stále lépe aproximovat obvod původní kružnice (viz obrázek 1.6). Limitním přechodem (tj. pro  $n \rightarrow \infty$ ) tak můžeme odvodit vzorec pro obvod kružnice:

$$O = \lim_{n \rightarrow \infty} 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

Idea aproximace pomocí „zjemňování“ zde skutečně funguje a délka ve standardním pojetí tak dává smysl, jak bychom mohli očekávat. Křivka, kterou tvoří pobřeží, má však oproti kružnici jiný geometrický charakter. Délka pobřeží  $\infty$ , k níž Mandelbrot došel, tak dává smysl z *geometrického pohledu*, avšak výsledek to není moc užitečný.



(a) Pravidelný osmiúhelník vepsaný kružnici.



(b) Část vepsaného pravidelného  $n$ -úhelníku.

Obrázek 1.5: Princip Archimédovy metody.



Obrázek 1.6: Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku.

## 1.2 Soběpodobnost

Mandelbrot si uvědomil, že struktura pobřeží se charakterově vymyká útvarům do tehdy známým eukleidovské geometrii, neboť mapy s různými měřítky poskytovaly různou úroveň detailů, které hrály netriviální roli v jeho celkové délce. Učinil však jiné zásadní pozorování, a to sice, že mnoho detailů má společné rysy, které se opakují. Hodně z nich se shodovalo s výjimkou jejich měřítka. [4, str. 96]

Ve fraktální geometrii se pro tento úkaz uchytil termín *soběpodobnost* (angl. *self-similarity*). Útvar nazýváme soběpodobným, **pokud se sám sobě podobný v libovolném měřítku** [11, str. 220] nebo pokud **část útvaru je podobná jeho celku**. Zmíněná podoba může být míněna přibližně (např. v případě pobřeží je nejspíše jasné, že žádné z jeho detailů nesdílejí společné rysy přesně), ale v dalších částech si předvedeme soběpodobnost *přímou*.

### 1.2.1 Kochova křivka

Jak jsme si již uvedli, za otce fraktální geometrie je považován Mandelbrot, avšak mnoho fraktálních křivek bylo známo již dříve (čtenář promine, že jsme blíže ne-

specifikovali termín „fraktální“, jeho přesný význam pro nás však zatím nebude stěžejní). Jako první se podíváme na jednu z nejznámějších, kterou objevil roku 1904 švédský matematik HELGE VON KOCH (1870–1924), dnes známou pod názvem *Kochova křivka*. [7, str. 61] Na začátku vezmeme úsečku délky 1. Vyjmeme prostřední (tj. druhou) třetinu a nahradíme ji dvěma úsečkami délky  $1/3$ , tak, aby na sebe navazovaly v krajních bodech. Tento proces následně opakujeme pro nově vzniklé úsečky. Obecně u úsečky délky  $l$  nahradíme její prostřední třetinu dvojicí úseček délek  $l/3$  (viz obrázek 1.7). V první řadě si můžeme všimnout, že v každé



Obrázek 1.7: Prvních pět iterací Kochovy křivky.

další iteraci jsou nově vzniklé podobné původnímu celku, tedy v předešlé iteraci (viz obrázek 1.8). Pokud by tento proces pokračoval do nekonečna, pak by každá ze čtyř částí křivky představovala **celý původní obrazec** ve zmenšeném měřítku (byla by tedy soběpodobná). Zkusme se nyní podívat na délku křivky. V první iteraci začínáme s úsečkou délky<sup>1</sup> 1, která se v druhé iteraci změní na křivku délky  $4/3$ . Není těžké si rozmyslet, že obecně v  $n$ -té iteraci bude délka křivky  $\ell_n$  rovna

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

<sup>1</sup>Mohli bychom také začít s obecnou délkou  $\ell_0$ , ale ta by se však při výpočtu projevila pouze jako konstantní násobek.



Obrázek 1.8: První iterace Kochovy křivky „uvnitř“ druhé v menším měřítku.

Posloupnost  $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$  je geometrická s kvocientem  $q = 4/3 > 1$ , a tedy její limita je  $\infty$ . Kochova křivka má tak *nekonečnou délku*.

## 1.2.2 Sierpiňského trojúhelník

Přesuneme nyní k plošným útvarům, neboť i zde lze sledovat některé zajímavé vlastnosti. Jedním z představitelů je tzv. *Sierpiňského trojúhelník*, který objevil roku 1916 polský matematik WACŁAW SIERPIŃSKI (1882–1969). [7, str. 61] Na začátku (v nulté iteraci) začínáme s rovnostranným trojúhelníkem se stranou délky 1 (též lze začít s obecnou délkou  $\ell_0$ ). V něm sestrojíme střední příčky (tj. spojnice středů stran trojúhelníka), které společně utvoří strany rovnostranného trojúhelníka čtvrtinového obsahu původního trojúhelníka (to vychází z faktu, že střední příčka v libovolném trojúhelníku má délku rovnou polovině délky strany, s níž je rovnoběžná). Obsah nově vzniklého trojúhelníku odebereme a postup opakujeme pro zbývající trojici trojúhelníků v původním obrazci (viz obrázek (TODO: doplnit odkaz)).

(TODO: doplnit obrázek)

I zde si lze všimnout, že po nekonečně mnoha iteracích budou menší trojúhelníky přesnými kopiemi původního obrazce. Zkusme se opět podívat, jak je to s obvodem obrazce. Každá ze středních příček, které vzniknou v další iteraci, má poloviční délku vůči délce strany  $l$  původního trojúhelníku. Obvod obrazce se tak zvětší o  $3l/2$ . Počet trojúhelníků poroste exponenciálně, neboť v každé iteraci odstraněním jednoho trojúhelníku vzniknou tři nové, tj. obvod se po  $k$ -té iteraci zvětší o  $3^k \cdot (1/2)^k = (3/2)^k$  (na začátku pro  $k = 0$  je obvod 3). Obvod obrazce  $O_n$  po  $n$  iteracích bude roven součtu přírůstků přes všechny iterace, tj.

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k. \quad (1.2)$$

Řada  $\sum_{k=1}^n (3/2)^k$  je geometrická s kvocientem  $3/2$ . Zde si vzpomeňme na vzorec pro její součet.

**Věta 1.2.1** (Součet geometrické řady). *Nechť je dána geometrická posloupnost  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  s kvocientem  $q \neq 1$ . Pak pro součet prvních  $n$  členů platí*

$$\sum_{k=1}^n g_k = g_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

*Důkaz.* Důkaz vzorce zde vynecháme, nicméně čtenář si jej může snadno ověřit např. indukcí podle  $n$ . □

Celkově tak po aplikaci vzorce z 1.2.1 v rovnosti (1.2) dostaneme po jednoduché úpravě

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k = 3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3 + 3 \left( \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right) = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Posloupnost  $\{O_n\}_{n=0}^\infty$  je opět geometrická s kvocientem  $q = 3/2 > 1$ , tzn. její limita je opět  $\infty$ . Obvod Sierpiňského trojúhelníku tedy roste nade všechny meze. (Výpočet jsme si mohli též zjednodušit uvědoměním si, že obvod obrazce roste s faktorem  $3/2$  a vzorec pro  $O_n$  jsme tak mohli určit ihned.)

Podívejme se nyní na obsah útvaru. Zde si již výpočet trochu usnadníme. Po každé iteraci se jeho obsah zmenší na  $3/4$  obsahu původního obrazce. Lze snadno odvodit, že obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky  $a$  je

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

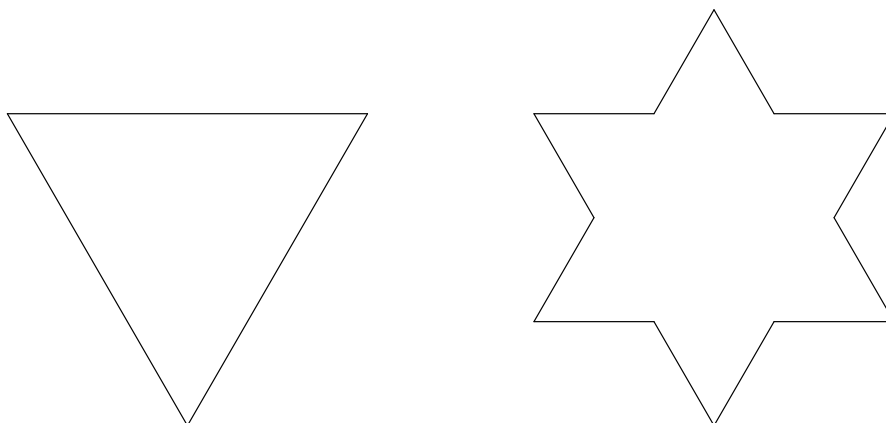
Na začátku je obsah útvaru  $S_0 = \sqrt{3}/4$ . Tj. celkově po  $n$ -iteracích bude obsah  $S_n$  roven

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (1.3)$$

Výraz (1.3) má pro  $n \rightarrow \infty$  limitu nulovou, tedy zatímco Sierpiňského trojúhelník má *nekonečný obvod*, jeho obsah je však naopak *nulový*.

### 1.2.3 Kochova vločka

Rozšiřující variantou Kochovy křivky 1.2.1 je tzv. *Kochova vločka*, která se skládá ze tří Kochových křivek. Rozdíl je zde v tom, že začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1. Na každou ze stran aplikujeme stejný proces, jako předtím, tj. odebereme prostřední třetinu, nahradíme ji dvěma na sebe navazujícími úsečkami délek  $1/3$  a opakujeme pro každou nově vzniklou úsečku (viz obrázky 1.9 a 1.10). Podíváme-li se na obvod, nejspíše nás nepřekvapí, že ten



Obrázek 1.9: Nulá a první iterace Kochovy vločky.



Obrázek 1.10: Čtvrtá iterace Kochovy vložky.

je i zde nekonečný<sup>2</sup> (už z principu, že každá strana původního rovnostranného trojúhelníka představuje samostatnou Kochovu křivku). Obsah vzniklého útvaru je však již zajímavější. Pro zjednodušení výpočtu si rozdělme útvar na *stejně rovnostranné trojúhelníky* podle obrázku 1.11, jejichž obsah je roven  $1/12$  obsahu obrazce v nulté iteraci. Výsledný obsah se tedy pokusíme vyjádřit relativně vůči



Obrázek 1.11: Rozdělení první iterace Kochovy vložky.

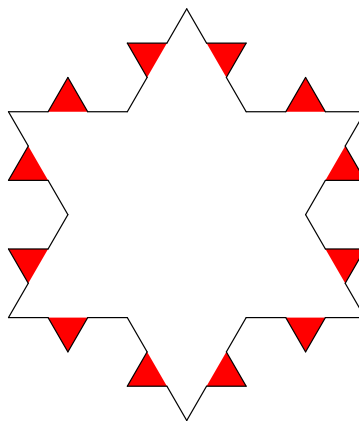
*obsahům daných trojúhelníků*, na něž jsme obrazec rozdělili, a pak jej pouze přepočítáme. Jejich obsah si označme  $\Delta$ . Tedy obsah Sierpiňského trojúhelníku v nulté iteraci lze vyjádřit jako  $S_0 = 9\Delta$ . Po první iteraci vzniknou na každé ze strany 3 nové trojúhelníky o obsahu  $1/9 \cdot \Delta$ . V každé další iteraci vzniknou z jedné úsečky 4 nové. Obecně po  $n$  iteracích jich tedy bude  $3 \cdot 4^n$ . (Při výpočtu musíme počítat s o jedna nižší mocninou, neboť trojúhelníky vznikají „na úsečkách“ z předešlé iterace, nikoliv té aktuální.)

Zaměříme se nyní pouze trojúhelníky, které vznikly v aktuální iteraci (viz obrázek 1.12). Součet jejich obsahů nám dává *přírůstek obsahu* v obecné  $n$ -té iteraci. Označíme-li tento přírůstek  $B_n$ , pak platí

$$B_n = \underbrace{3 \cdot 4^{n-1}}_{\text{počet úseček}} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \Delta}^{\text{obsah nových troj.}} = 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \Delta,$$

<sup>2</sup>Obvod Kochovy křivky po  $n$ -té iteraci je  $o_n = 3 \cdot (4/3)^n$ .

kde  $n \geq 1$ . Nyní můžeme již vyšetřit obsah v  $n$ -té iteraci  $S_n$  a posléze i celkový



Obrázek 1.12: Nově vzniklé trojúhelníky v druhé iteraci.

obsah výsledného obrazce  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Pro  $n \geq 1$  platí

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + \sum_{k=1}^n B_k = 9\Delta + 3\Delta \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = 9\Delta + 3\Delta \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \\ &= 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta = \frac{72}{5}\Delta. \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníků, na něž jsme rozdělili první iteraci Kochovy vločky, je

$$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9}$$

a tedy celkově

$$S = \frac{72}{5}\Delta = \frac{72}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Byl to trochu delší výpočet, nicméně jsme zjistili, že Kochova vločka má (stejně jako Kochova křivka) *nekonečnou délku (obvod)*, ale obsah má *konečný*.

## 1.2.4 Cantorovo diskontinuum

Podívejme se ještě na jeden typ fraktálního objektu, kterým je tzv. *Cantorovo diskontinuum*<sup>3</sup> Myšlenka je zde velmi jednoduchá: začínáme s úsečkou délky 1 (nultá iterace) a následně odebereme prostřední třetinu, čímž vznikne první iterace. V dalších iteracích postupujeme analogicky pro vzniklé úsečky (viz obrázek 1.13).

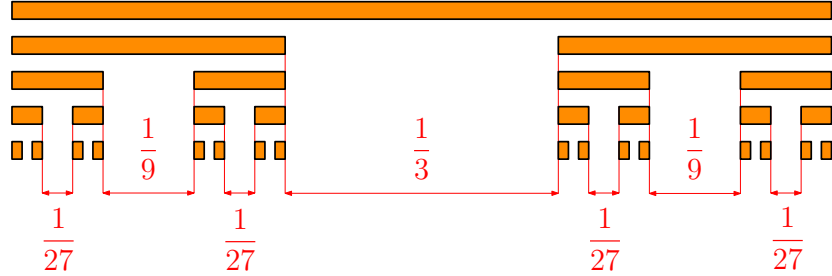
<sup>3</sup>Též se mu říká *Cantorova množina* (angl. „Cantor set“). Dvourozměrnou variantou je pak tzv. *Cantorův prach* (angl. „Cantor dust“). Slovo *prach* je zde míněno v přeneseném významu, neboť (podobně jako v této podsekcí) lze ukázat, že vzniklé útvary mají v limitě nulový obsah.





Obrázek 1.13: Nultá až čtvrtá iterace Cantorova diskontinua.

Nově vzniklé úsečky třetinové délky jsou kopiemi původní úsečky. Stejně jako u předešlých fraktálů nás i zde bude zajímat limitní chování tohoto procesu. Lze očekávat, že postupným odebráním zbudou úsečky nulové délky. O tom se lze přesvědčit např. tak, že spočítáme limitu celkových délek všech odebraných úseků. V první iteraci odebereme úsečku délky  $1/3$ , v druhé iteraci odebereme dvě celkové délky  $2 \cdot (1/3)^2 = 2/9$ , ve třetí vyjmemme čtyři celkové délky  $4 \cdot (1/3)^3 = 4/27$ , atd. (viz obrázek 1.14). Obecně počet odebraných úseků roste s mocninou



Obrázek 1.14: Znázornění délek vyjmutých úseků.

dvojky, jejichž délky klesají s mocninou trojky, tedy v  $n$ -té iteraci odebereme úsek délky  $2^n(1/3)^{n+1}$ . Označíme-li tedy délku zbylých úseků  $\ell_n$  po  $n$  iteracích a  $\bar{\ell}_n$  délku odebraných úseků, pak určitě platí  $\ell_n = 1 - \bar{\ell}_n$ . Protože nás zajímá délka *všech* odebraných úseků, pak po  $n$  iteracích bude celková délka rovna

$$\bar{\ell}_n = \sum_{k=0}^n 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}. \quad (1.4)$$

Označíme-li si limitu výrazů posloupností  $\ell_n$ , reps.  $\bar{\ell}_n$ , jako  $\ell$ , resp.  $\bar{\ell}$ , pak dostaneme

$$\bar{\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\ell}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Z toho již triviálně plyne, že

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \bar{\ell}_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\ell}_n = 1 - 1 = 0, \quad (1.5)$$

tzn. na konci procesu zbude Cantorovo diskontinuum délky nula.

## 1.3 Fraktální dimenze

### 1.3.1 Chápání konceptu dimenze

Výčet útvarů v sekci 1.2 splňoval zásadní vlastnost, a to sice, že všechny z nich byly *soběpodobné*. V eukleidovské geometrii lze však u mnohých základních objektů pozorovat stejnou vlastnost. Např. čtverec lze určitě prohlásit v jistém smyslu za soběpodobný, neboť jej lze rozdělit na podobné útvary (viz obrázek 1.15). Podobně např. i obyčejná úsečka je taktéž soběpodobná, protože ji mů-



Obrázek 1.15: Soběpodobnost čtverce.

žeme rozdělit na obecně  $k$  stejných částí (viz obrázek 1.16).



Obrázek 1.16: Úsečka rozdělená na šest stejných částí.

K čemu nám takové uvědomnění vlastně je? Zmenšíme-li úsečku  $k$ -krát, pak budeme potřebovat přesně  $k$  těchto částí, abychom dostali úsečku původní délky. U čtverce (nebo obdélníku obecně) při zmenšení délky strany  $k$ -krát budeme potřebovat  $k^2$  daných útvarů pro obdržení čtverce s původním obsahem.<sup>4</sup> Pro krychli bude situace zcela analogická,  $k$ -krát zmenšená kopie bude potřeba  $k^3$ -krát, abychom dostali krychli o původním objemu (viz obrázek 1.17). Lze si všimnout, že v závislosti na *dimenzi* objektu se mění daný exponent. Vztah lze tak zobecnit na

$$N(k) = k^d \quad (1.6)$$

kde  $N(k)$  je počet nových útvarů v závislosti na faktoru  $k$  a  $d$  je dimenze.

<sup>4</sup>Obdélník zmenšený  $k$ -krát bude mít strany délek  $a/k$ ,  $b/k$ , tedy jeho obsah bude

$$\frac{ab}{k^2} = \frac{S}{k^2},$$

kde  $S$  je obsah původního obdélníka.



Obrázek 1.17: Krychle rozdělená na 27 stejných částí.

Toto je jeden z možných způsobů, jak lze chápat koncept dimenze. Jednoduchou úpravou rovnosti (1.6) dostaneme

$$d = \log_k N(k) = \frac{\ln N(k)}{\ln k}.$$

(Obecně lze volit jakýkoliv přípustný základ logaritmů, tj  $d = \log_b N(k)/\log_b k$  pro  $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ .) Dimenze v tomto pojetí skutečně dává dobrý smysl. Pro

Útvar	$N(k)$	$d = \ln N(k)/\ln k$
Úsečka	3	1
Čtverec	9	2
Krychle	27	3
Teserakt	81	4

Tabulka 1.1: Hodnoty dimenze  $d$  pro různé útvary.

„klasické“ geometrické objekty vychází dimenze vždy celočíselně.

Na této myšlence je založen pojem tzv. *fraktální dimenze*. Existuje více způsobů její definice. Jedna z nich, které se dále nyní v této sekci budeme držet, se v anglicky psané literatuře nazývá „*box-counting dimension*“, odkud plyne i značení  $\dim_B$ . Pro útvar  $F$  (formálně vzato množinu bodů) definujeme

$$\dim_B F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \quad (1.7)$$

(Převzato z [10, str. 93] a [2, str. 28].) Výraz  $1/\varepsilon$  zde představuje faktor podobnosti jako původní  $k$  (samotné  $\varepsilon$  tak hraje roli měřítka), avšak největší rozdíl zde představuje zkoumání „limitního chování“ daného výrazu.

**Příklad 1.3.1** (Fraktální dimenze úsečky). Začneme asi nejednodušším příkladem výpočtu fraktální dimenze, a to u úsečky (označme  $\ell$ ). Představme si, že úsečku *jednotkové délky* rozdělíme na  $N_\varepsilon(\ell) = n$  shodných dílů. Pak měřítko libovolného dílu je

$$\varepsilon = \frac{1}{n} = n^{-1}.$$

(Zde je dobré si uvědomit, že pro  $n \rightarrow \infty$ , tedy zjemňování dělení úsečky, platí, že  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .) Fraktální dimenzi úsečky vypočteme z definice jako

$$\dim_B \ell = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(\ell)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n} = 1.$$

**Příklad 1.3.2** (Fraktální dimenze čtverce). Podobně, jako v příkladu 1.3.1 výše, můžeme stanovit i fraktální dimenzi čtverce (označme  $S$ ). Uvažujme tedy čtverec o jednotkovém obsahu, který rozdělíme  $N_\varepsilon(S) = n$  shodných útvarů. Přitom víme, že obsah mění kvadraticky vůči délce strany. Měřítka nového čtverce tak bude

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n}} = n^{-1/2}$$

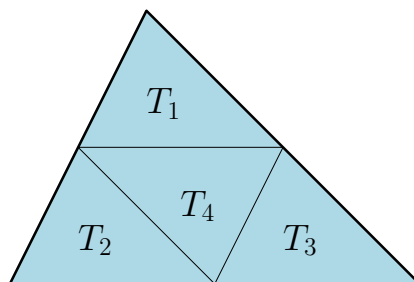
a fraktální dimenze vychází

$$\dim_B S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{2} \ln n} = 2.$$

Pro krychli bude výpočet naprosto analogický (viz příklad 1.3.2). Obecně pro  $d$ -rozměrnou krychli bude její fraktální dimenze<sup>5</sup> rovna  $d$ .

Zkusme se nyní odprostit od krychle k trochu jinému útvaru.

**Příklad 1.3.3** (Fraktální dimenze trojúhelníku). Podívejme se, jak to dopadne s fraktální dimenzí *obecného trojúhelníku*. Každý trojúhelník  $T$  lze rozdělit na čtveřici *vzájemně shodných trojúhelníků*  $T_1, \dots, T_4$ , které vzniknou sestrojením středních příček v původním trojúhelníku (viz obrázek 1.18). Délka každé střední



Obrázek 1.18: Trojúhelník  $T$  rozdělený na trojúhelníky  $T_1, \dots, T_4$ .

příčky odpovídá polovině délky strany, s níž je rovnoběžná, tedy obsah každého z nich je *čtvrtina obsahu původního* trojúhelníku  $T$ . Pokud obecně trojúhelník  $T$  rozdělíme<sup>6</sup> takto na obecně  $N_\varepsilon(T) = 4^n$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$  shodných částí, pak měřítko každé z nich bude  $\varepsilon = (1/2)^n$ . Fraktální dimenze tak vychází:

$$\dim_B T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \ln 2}{n \ln 2} = 2.$$

<sup>5</sup>Obdobnou úvahou dojmeme k měřítku  $\varepsilon = n^{-1/d}$ .

<sup>6</sup>Výpočet bychom mohli i zde provést ve stejném duchu jako u úsečky, čtverce nebo krychle. Počet částí, na něž rozdělíme trojúhelník, označíme  $N_\varepsilon(T) = n$ , přičemž měřítko pak bude  $\varepsilon = n^{-1/2}$ .

Pro jednoduché útvary vychází dimenze tak, jak bychom mohli očekávat. K zajímavějším výsledkům však dospějeme u fraktálů, na něž se blíže podíváme v následující podsecei 1.3.2.

### 1.3.2 Dimenze fraktálů

Co kdybychom však zkusili podobnou myšlenku aplikovat i na *fraktální objekty*? Zkusme to. Pro připomenutí jednotlivých křivek a výsledků k nim si dovoluji čtenáře opětovně odkázat na sekci 1.2, kde jsou podrobněji rozebrány.

- **Kochova křivka**  $F_{KC}$ . V každé iteraci nahrazujeme každou úsečku čtyřmi novými. Kompletní Kochova křivka tak obsahuje právě *čtyři* kopie sebe sama zmenšených na třetinu, tj. v  $n$ -té iteraci je  $N_\varepsilon(F_{KC}) = 4^n$ , jak jsme již odvodili (viz podsekcce 1.2.1).<sup>7</sup> Měřítka nové křivky je tak  $\varepsilon = (1/3)^n$ .

$$\dim_B F_{KC} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(F_{KC})}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618595 \dots \quad (1.8)$$

- **Kochova vložka**  $F_{KS}$ . Začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1, na jehož stranách postupně vznikne Kochova křivka. V  $n$ -té iteraci je obvod Kochovy vložky  $o_n$  roven  $3 \cdot 4^n$ , tj. i  $N_\varepsilon(F_{KS}) = 3 \cdot 4^n$ , kde měřítko<sup>8</sup> nově vzniklých úseček je  $\varepsilon = 1/3 \cdot (1/3)^n = (1/3)^{n+1}$ . Není těžké se přesvědčit, že fraktální dimenze vychází stejně, jako u Kochovy křivky:

$$\dim_B F_{KS} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3 \cdot 4^n}{\ln 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n \overbrace{\left(1 + \frac{\ln 3}{\ln 4^n}\right)}^{\rightarrow 1}}{\ln 3^n \underbrace{\left(1 + \frac{\ln 3}{\ln 3^n}\right)}_{\rightarrow 1}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \quad (1.9)$$

(TODO: Jak to bude s varinátou výpočtu pro plochu?)

- **Sierpiňského trojúhelník**  $F_{ST}$ . V každé iteraci vynecháme prostřední trojúhelník, čímž vznikne *trojice* nových trojúhelníků s *polovičním* měřítkem. Tzn.  $N_\varepsilon(F_{ST}) = 3^n$  pro  $\varepsilon = (1/2)^n$ , a tedy

$$\dim_B F_{ST} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5849625 \dots \quad (1.10)$$

- **Cantorovo diskontinuum**  $F_{CD}$ . Vždy vyjmeme prostřední třetinu úsečky, čímž obdržíme *dvojici* úseček *třetinové* délky, tj.  $N_\varepsilon(F_{CD}) = 2^n$  pro  $\varepsilon = (1/3)^n$ . Fraktální dimenze tak vychází

$$\dim_B F_{CD} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309297 \dots \quad (1.11)$$

<sup>7</sup>Lze však zvolit i jiné dělení. Např. lze na Kochovu křivku nahlížet, že obsahuje *16 kopií* sebe sama zmenšených na *devítinu*.

<sup>8</sup>Měřítka se ve srovnání s Kochovou křivkou liší v mocnině, neboť délku nových úseků porovnáváme s obvodem celého trojúhelníku, nikoliv pouze délkou jedné jeho strany. Nicméně ve výpočtu bych se mohli omezit i jen na jednu ze stran, výpočet by byl tak zcela identický, jako u Kochovy křivky.

Udělejme si nyní menší souhrn a porovnání dosavadně získaných výsledků (viz tabulka 1.2). Můžeme si všimnout, že zatímco u „klasických“ objektů vychází

Útvar $F$	$\varepsilon$	$N_\varepsilon(F)$	$\dim_B F$
Úsečka	$n^{-1}$	$n$	1
Čtverec	$n^{-1/2}$	$n$	2
Krychle	$n^{-1/3}$	$n$	3
Teserakt	$n^{-1/4}$	$n$	4
$d$ -rozměrná krychle	$n^{-1/d}$	$n$	$d$
Obecný trojúhelník	$(1/2)^n$	$4^n$	2
Kochova křivka	$(1/3)^n$	$4^n$	1,2618595...
Kochova vložka	$(1/3)^{n+1}$	$3 \cdot 4^n$	1,2618595...
Sierpiňského trojúhelník	$(1/2)^n$	$3^n$	1,5849625...
Cantorovo diskontinuum	$(1/3)^n$	$2^n$	0,6309297...

Tabulka 1.2: Porovnání fraktálních dimenzí  $d_k$  různých objektů.

fraktální dimenze *celočíslná*, u (zmíněných) fraktálů vychází *neceločíslně*, ba dokonce i iracionálně.

### 1.3.3 Topologická dimenze

Výsledky z předešlé části 1.3.2 se můžou zdát poněkud překvapující. Jak je vůbec možné, že dimenze nemusí vycházet nutně celočíselná? Ač se to možná zdá jako nesmyslný výsledek, je třeba si uvědomit, jak vlastně koncept dimenze chápeme. Na jednu stranu na ni lze nahlížet jako na mocninu „s níž se zvyšuje“ obsah/objem tělesa. Naopak čtenář znalý lineární algebry si možná vzpomene, že v této matematické disciplíně se na dimenzi nahlíží jako na *mohutnost libovolné báze daného vektorového (pod)prostoru*, která naopak vychází vždy pouze celočíselně, avšak nelze s ní dobře zachytit hlubší detail geometrie u objektů, jako jsou právě fraktály.

Tím se dostáváme ještě k jednomu typu dimenzí, a to tzv. *topologické dimenze*. Ty totiž daleko více odpovídají našemu intuitivnímu chápání tohoto pojmu, neboť se vždy jedná o celé číslo, jak ho známe ze školní geometrie. Existuje více topologických dimenzí<sup>9</sup>, které si, co do definice, obecně nejsou ekvivalentní, ačkoliv ve většině standardních případů splývají. My se zde pro ilustraci podíváme na tzv. *Lebesgueovu pokrývací dimenzi* (dále jen již „topologickou dimenzi“) pojmenovanou po francouzském matematikovi HENRI LEBESGUEVI (1875–1941). Myšlenka definice je založena na pokrývání objektu (formálně vzato *množiny bodů*) tzv. *otevřenými množinami*.<sup>10</sup> Formální definici si zde v rámci zachování jednoduchosti odpustíme, avšak pro hlubší matematický základ si dovolím čtenáře odkázat např. na knihu [1].

Obecně množina  $X$  má topologickou dimenzi  $\dim_L X = n$ , pokud  $n$  je nejmenší

<sup>9</sup>Jiným příkladem takové dimenze je *induktivní dimenze*.

<sup>10</sup>Otevřená množina je zobecnění pojmu otevřeného intervalu reálných čísel. Neformálně řečeno je to taková množina  $X$ , kde pro každý její bod  $x \in X$  patří do této množiny i nějaké  $\varepsilon$ -okolí tohoto bodu (patří do ní i body, které jsou „dostatečně blízko“).

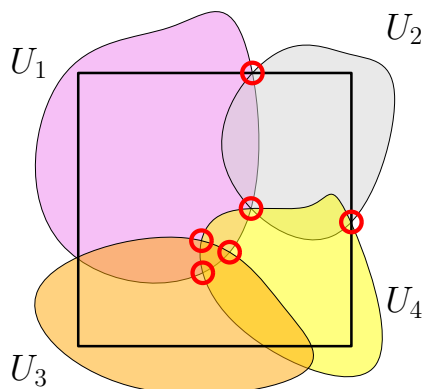
číslo, takové, že pro každé pokrytí otevřenými množinami<sup>11</sup>  $\mathcal{U}$  existuje zjemnění<sup>12</sup>  $\mathcal{U}'$ , v němž každý bod  $x \in X$  leží v průniku nejvýše  $n + 1$  množin pokrytí  $\mathcal{U}$ .

Tuto ideu si zkusíme přiblížit na příkladu topologické dimenze úsečky (viz obrázek 1.19). Pro libovolné pokrytí lze ukázat, že každý bod je obsažen v průniku



Obrázek 1.19: Různé možnosti (pod)pokrytí úsečky.

maximálně *dvou množin*, tedy topologická dimenze úsečky je 1. Podobně např. pro čtverec lze dojít k závěru, že pro každé podpokrytí nějakého pokrytí je každý jeho bod obsažen v průniku maximálně *tří množin*, tedy jeho topologická dimenze je 2, jak bychom očekávali (viz obrázek 1.20). Jak jsme se již přesvědčili v příkla-



Obrázek 1.20: Možné (pod)pokrytí čtverce.

<sup>11</sup>Formálněji to znamená, že  $A_1, \dots, A_n$  jsou otevřené množiny, takové, že platí  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ .

<sup>12</sup>Zjemněním pokrytí  $\mathcal{U}$  nazýváme takové (pod)pokrytí  $\mathcal{U}'$  množiny  $X$ , kde každá množina  $A'_i \in \mathcal{U}'$  je *podmnožinou* nějaké množiny  $A_j$  původního pokrytí  $\mathcal{U}$ .

dech 1.3.1, 1.3.2 a 1.3.3, pro „standardní“ útvary je fraktální dimenze celočíselná (ač jsou i další, které jsme neuvedli), zatímco v podsekcí 1.3.2 jsme zjistili, že u fraktální dimenze fraktálů tomu tak již nutně být nemusí. Přitom však topologická dimenze fraktálních útvarů je (a dokonce musí být) celočíselná (viz tabulka 1.3). Fraktální dimenze tak oproti té topologické daleko lépe zachycuje informaci

Útvar $F$	$\dim_B F$	$\dim_L F$
Úsečka	1	1
Čtverec	2	2
Krychle	3	3
Teserakt	4	4
$d$ -rozměrná krychle	$d$	$d$
Kochova křivka	1,2618595...	1
Kochova vložka	1,2618595...	1
Sierpiňského trojúhelník	1,5849625...	1
Cantorovo diskontinuum	0,6309297...	0

Tabulka 1.3: Porovnání fraktální a topologické dimenze útvarů.

o detailní geometrii daných objektů.

## 1.4 Co je to fraktál?

*Tak co je to tedy ten „fraktál“?* Odpovědi na tuto otázku jsme se poměrně dlouhou dobu vyhýbali a onen termín, popř. jeho přídatnou variantu „fraktální“, jsme používali čistě na intuitivní úrovni. Ač jsme se zatím obešli bez jeho formálnějšího upřesnění, bylo by možná při nejmenším slušné se o to alespoň pokusit. V předešlé sekci 1.3 jsme pokryli *fraktální* a *topologickou dimenzi*, které jsme následně použili na příkladech konkrétních útvarů (konkrétně viz tabulky 1.2 a 1.3).

Již jsme si všimli, že u fraktálních útvarů vychází fraktální dimenze  $\dim_H$  neceločíselně oproti jejich topologické dimenzi  $\dim_L$ , která je vždy celočíselná. To by se mohlo zdát jako dobrá charakteristika fraktálů. Avšak existují útvary, jejichž fraktální a topologická dimenze se shodují, přestože také mají „fraktální charakter“. Pro příklad nemusíme chodit nikterak daleko, pravděpodobně nejznámějším útvarem je v tomto ohledu *Mandelbrotova množina*, jejíž fraktální i topologická dimenze je rovna 2 (blíže se na ni podíváme v sekci (TODO: Doplnit odkaz)). Jiná definice zase naopak popisuje fraktál jako útvar, jehož Hausdorffova dimenze (na tu se blíže podíváme v sekci (TODO: Doplnit odkaz)) je ostře větší než dimenze topologická. Problém (a také důvod, proč jsme definici toho pojmu vyhýbali) je však zkrátka ten, že dodnes **není známá** žádná univerzální definice fraktálu. [11, str. 226]

Je to možná lehce zklamávající, nicméně dobrou zprávou je, že ani pro další výklad ona absence formální definice fraktálu nebude překážkou. V dalším textu se zaměříme (mj.) především na jejich klasifikaci (viz kapitola 3) a další vlastnosti.



# Kapitola 2

## Teorie míry

V této kapitole se budeme nyní věnovat fraktálům a jim příbuzným záležitostem trochu formálněji. Do této chvíle jsme si již stihli představit některé základní fraktály, jako je např. *Sierpiňského trojúhelník*, *Kochova vločka* nebo *Cantorovo diskontinuum*, na nichž jsme si ilustrovali především myšlenku sobepodobnosti a na to navazující pojetí dimenze (viz kapitola 1, sekce 1.2 a 1.3).

Ačkoliv leckterý čtenář by se s poskytnutým vysvětlením jistě spokojil, jiný by mohl namítat, že jsme řadu věcí vynechali. A měl by jistě pravdu. Proto se v této kapitole budeme věnovat některým záležitostem z tzv. *teorie míry*, která je v tomto ohledu klíčová a poskytne nám nástroje pro měření fraktálních útvarů, jejichž geometrie často přesahuje možnosti klasické „eukleidovské analýzy“. *Míra* pro nás představuje zobecnění pojmů jako je *délka*, *obsah* a *objem*, které známe ze školní geometrie. Na jejím základě pak budeme schopni detailněji prozkoumat fraktální dimenzi, kterou jsme již v základu pokryli v předešlé kapitole. Jmenovitě se budeme zabývat

- *měřitelnými prostory a prostory s mírou* obecně,
- *box-counting dimenzí*<sup>1</sup>
- *Hausdorffovou mírou* a z ní vycházející *Hausdorffovou dimenzí*.

Ačkoliv je toto téma jinak velice obsáhlé jsou mu věnované samostatné texty i knihy, spokojíme se pouze s naprostým základem. Pro další znalosti si dovolím čtenáře odkázat na knihy [2], [3] a [5].

### 2.1 Základní pojmy a značení

V tomto oddílu se v krátkosti zaměříme na připomenutí některých pojmů a značení, které budeme dále využívat. Související teorii týkající se mnoha záležitostí v tomto případě vynecháme s předpokladem, že ji čtenář již zná. Pokud tomu

---

<sup>1</sup>Těž ji lze nalézt pod názvem *Minkowského dimenze* nebo *Minkowského-Bouligandova dimenze*. Je pojmenována po polském matematikovi HERMANNOVI MINKOWSKÉM (1864–1909) a francouzském matematikovi GEORGESovi BOULIGANDovi (1889–1979).

však v některých případech takto nebude, lze tuto část textu považovat za výčet konceptů, které pro zvládnutí nadcházející teorie budeme potřebovat.

(TODO: Doplnit pojmy a značení podle dalšího textu

- Limita funkce
- Limes superior/inferior
- Metrický prostor
- Otevřená/uzavřená koule
- Otevřená/uzavřená množina
- Průměr množiny
- $\delta$ -okolí množiny
- Pokrytí, zjemnění
- $\delta$ -pokrytí
- $\delta$ -sít
- Vnitřek, hranice množiny
- (bi-)lipschitzovské zobrazení

)

## 2.2 Prostory s mírou

Jak již bylo zmíněno v úvodu, klíčovým pojmem v této kapitole (a pro studium fraktálů obecně) je takzvaná *míra*. Ta pro nás představuje obecný způsob, jak můžeme množinám přiřadit v jistém smyslu „velikost“. Konkrétněji, byť vágně, lze říci, že sestává-li množina z konečného nebo spočetného množství „rozumných“ částí, pak součet velikostí všech těchto dílčích množin je roven velikosti celé množiny, kterou nazveme její *mírou*. Pro začátek celkem jednoduchá myšlenka.

Pro formální zavedení tohoto pojmu však budeme muset nejprve zavést ještě jiný pojem, a to tzv.  $\sigma$ -algebru.

### 2.2.1 Měřitelné prostory

**Definice 2.2.1** ( $\sigma$ -algebra). Nechť je dána libovolná množina  $X$  a systém podmnožin  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Pak  $\mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra na množině  $X$ , pokud:

- (a)  $X \in \mathcal{A}$ .
- (b) Pro každou množinu  $A \in \mathcal{A}$  platí  $X \setminus A \in \mathcal{A}$ .

(c) Pro libovolné množiny  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  platí  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

Dvojice  $(X, \mathcal{A})$  se nazývá měřitelný prostor.

(TODO: Psát na konci každého bodu v definici/větě **tečku, čárku** nebo **středník?**)

**Příklad 2.2.2.** Jednoduché příklady  $\sigma$ -algeber:

- Triviálními příklady  $\sigma$ -algeber jsou množiny  $\emptyset$ ,  $\mathcal{P}(X)$  a  $\{\emptyset, X\}$  pro libovolnou množinu  $X$ .
- Pro konečnou množinu  $X = \{a, b, c, d\}$  je jednou možnou  $\sigma$ -algebrou systém množin

$$\Sigma = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

Sami se zkuste přesvědčit, že všechny zmíněné příklady vyhovují definici 2.2.1.

Než vyslovíme něco dalšího o  $\sigma$ -algebrách a jejich významu, podíváme se na seznam některých vesměs jednoduchých pozorování zformulovaných níže v tvrzení 2.2.3.

**Věta 2.2.3** (Vlastnosti  $\sigma$ -algebry). *Nechť  $(X, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. Pak platí:*

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
- (ii) Pro libovolné množiny  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  platí  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .
- (iii) Pro všechny množiny  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  platí

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}.$$

- (iv) Jsou-li  $A, B \in \mathcal{A}$  pak  $A \setminus B \in \mathcal{A}$ .

Z tohoto tvrzení je již lépe vidět, proč jsou pro nás  $\sigma$ -algebry tak příjemným objektem. Jsou totiž *uzavřené* na všechny základní množinové operace. To se nám bude později hodit při zavedení míry, ke které směřujeme. Důkaz těchto dílčích tvrzení přitom není nikterak složitý.

*Důkaz.* Mějme  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{A}$  na množině  $X$ .

- (i) Z podmínky (a) definice 2.2.1 víme, že  $X \in \mathcal{A}$  a z podmínky (b) tedy plyne  $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{A}$ .
- (ii) Mějme množiny  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ . Společně s využitím De Morganových zákonů plyne následující:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overbrace{(X \setminus A_i)}^{\in \mathcal{A} \text{ podle (b)}}}_{\in \mathcal{A} \text{ podle (c)}} \in \mathcal{A}.$$

(iii) Necht jsou dány množiny  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ . Když pro každé  $j > n$  položíme  $A_j = \emptyset$ , pak platí

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

a podobně pro  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$  podle předešlého bodu.

(iv) Pro libovolné množiny  $A, B \in \mathcal{A}$  platí

$$A \setminus B = \overbrace{A \cup (X \setminus B)}^{\substack{\in \mathcal{A} \text{ podle (c)} \\ \in \mathcal{A} \text{ podle (b)}}} \in \mathcal{A}.$$

□

## 2.2.2 Míra

V tuto chvíli máme již vše potřebné k zavedení pojmu míra, resp. prostor s mírou.

**Definice 2.2.4** (Prostor s mírou). Necht  $(X, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. Zobrazení  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  se nazývá *míra* na  $\mathcal{A}$ , pokud platí:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii) pro množiny  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  po dvou disjunktní je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad \triangleleft \sigma\text{-aditivita}$$

Uspořádanou trojici  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  nazýváme *prostor s mírou*.

Vzhledem k tomu, co míra reprezentuje (tj. zobecnění délky, obsahu, objemu), jsou tyto požadavky intuitivně dosti smysluplné.

**Příklad 2.2.5.** Příklady prostorů s mírou:

- Asi pro nás nejtypičtější způsob, jak měřit „velikost“ množiny, je podle *počtu prvků*. Pro libovolnou množinu  $X$  a potenční množinu  $\mathcal{P}(X)$  lze definovat prostor s mírou  $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ , kde pro libovolnou množinu  $A \in \mathcal{P}(X)$  položíme  $\mu(A) = |A|$ . Takto definované míře  $\mu$  říkáme *aritmetická míra*.
- Máme libovolnou množinu  $X$  a  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{A}$ . Zvolme si pevně  $x \in X$ . Míru libovolné množiny  $A \in \mathcal{A}$  lze definovat jako  $\delta_x(A) = \chi_A(x)$ , kde  $\chi_A$  je charakteristická funkce množiny  $A$ . Zobrazení  $\delta_x$  je tzv. *Diracova míra*.
- Zobrazení přiřazující náhodnému jevu pravděpodobnost je též případem míry. Označíme-li si  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  množinu všech elementárních jevů a  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ , pak  $P : \mathcal{F} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  definovaná pro  $A \in \mathcal{F}$  jako

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

je mírou na  $\mathcal{F}$ . Speciálně  $P(\Omega) = 1$ .

Ve všech případech zobrazení  $\mu$  v příkladu 2.2.5 se lze snadno přesvědčit, že se jedná o míru, tedy že splňuje podmínky (i) a (ii) uvedené v definici 2.2.4 výše.

Pojďme nyní prozkoumat vlastnosti míry trochu hlouběji.

**Věta 2.2.6** (Vlastnosti míry). *Nechť  $\mu$  je míra na  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{A}$ . Pak platí následující:*

(i) *Jsou-li množiny  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  po dvou disjunktní, pak*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i). \quad \triangleleft \text{aditivita}$$

(ii) *Pokud  $A, B \in \mathcal{A}$  a  $A \subseteq B$ , pak*

$$\mu(A) \leq \mu(B). \quad \triangleleft \text{monotonie míry}$$

*Navíc pokud  $\mu(A) < \infty$ , pak  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .*

(iii) *Pokud  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ , je neklesající posloupnost množin<sup>2</sup>, pak*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

(iv) *Pokud  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  je nerostoucí posloupnost množin<sup>3</sup> a navíc  $\mu(A_1) < \infty$ , pak*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

(v) *Pokud  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ , pak*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad \triangleleft \sigma\text{-subaditivita}$$

Poslední vlastnost (v) je tzv.  $\sigma$ -subaditivita<sup>4</sup>. Oproti  $\sigma$ -aditivitě se liší tím, že u množin  $A_1, A_2, \dots$  se nepožaduje, aby byly po dvou disjunktní, tzn. mohou se „překrývat“. Je však intuitivně nejspíše jasné, že součtem měr všech těchto množin určitě nemůžeme získat míru větší než je míra jejich sjednocení (dané „překryvy“ započítáváme v sumě vícekrát). Podobně i monotonie dává intuitivně smysl, neboť část větší množiny jistě nemůže mít větší míru než celek. Na formální stránku věci se podíváme nyní.

*Důkaz.* V důkazu využijeme některé vlastnosti  $\sigma$ -algebry z věty 2.2.3, zejména, že všechny množiny níže jsou opět prvky  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{A}$ .

(i) *Pokud pro každé  $j > n$  položíme  $A_j = \emptyset$ , pak z definice míry plyne*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

<sup>2</sup>Posloupnost množin, kde  $A_i \subseteq A_{i+1}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ .

<sup>3</sup> $A_i \supseteq A_{i+1}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ .

<sup>4</sup>V matematické terminologii se předpona  $\sigma$  běžně týká spočetných sjednocení. [3, str. 2]

(ii) Necht jsou dány  $A, B \in \mathcal{A}$ , takové, že  $A \subseteq B$ . Pak  $B = A \cup (B \setminus A)$ , přičemž  $A$  a  $B \setminus A$  jsou disjunktní. Tedy podle bodu (ii) lze psát  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$ , protože  $\mu(B \setminus A) \geq 0$ .

(iii) Mějme neklesající posloupnost množin  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$  (viz obrázek 2.1a). Definujeme posloupnost<sup>5</sup> množin  $B_1, B_2, \dots$  následovně:

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad B_i = A_i \setminus A_{i-1}, \quad i \geq 2.$$

Množiny  $B_1, B_2, \dots$  jsou po dvou disjunktní a zároveň  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Libovolnou množinu  $A_n$  lze totiž zapsat jako

$$A_n = \bigcup_{i=1}^n (A_i \setminus A_{i-1}) = \bigcup_{i=1}^n B_i.$$

Podle již dokázaného bodu (i) (aditivita míry) tedy pro každé  $n$  platí  $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$ . Celkově

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(iv) Necht je dána nerostoucí posloupnost množin  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$  (viz obrázek 2.1b). Podobně jako v předešlém bodě, i zde definujeme novou posloupnost množin  $B_1, B_2, \dots$  takto:

$$B_i = A_1 \setminus A_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Zde si můžeme všimnout, že pro každé  $i$  platí  $B_i \subseteq B_{i+1}$  a splňuje tak předpoklad předešlého bodu (iii). Dle De Morganových zákonů můžeme psát

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i) = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Výraz  $\lim_{j \rightarrow \infty} B_j$  lze rozepsat dvěma způsoby:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j) &\stackrel{(iii)}{=} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \stackrel{(ii)}{=} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right), \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_j) \stackrel{(ii)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_j)) = \mu(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j). \end{aligned}$$

Porovnáním obou rovností lze vidět, že

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

(v) Necht jsou dány množiny  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Definujeme posloupnost množin  $B_1, B_2, \dots$  takto:

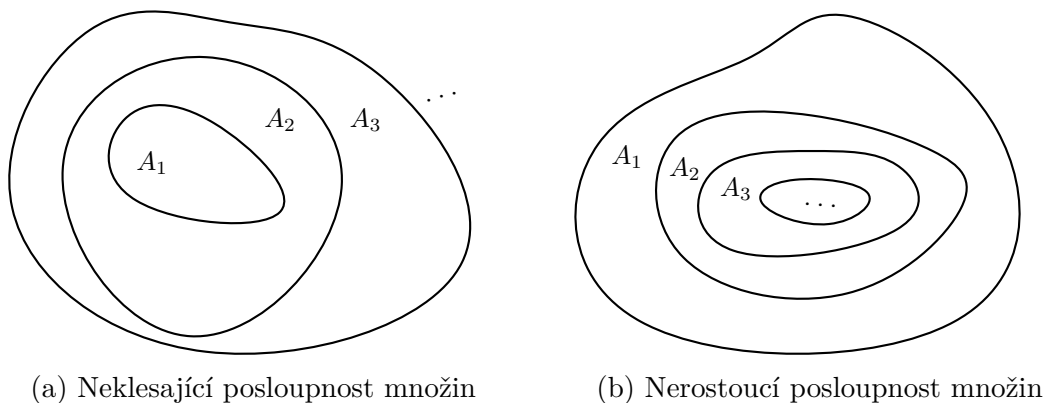
$$B_1 = A_1, \quad B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j.$$

---

<sup>5</sup>V podstatě konstruuje množiny  $A_1, A_2, \dots$  tak, aby v následující množině  $A_i$  nebyl obsažen prvek, který se nachází již v některé z množin  $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$ . Podobná myšlenka je využita i při důkazu bodů (iv) a (v).

Není složité si rozmyslet, že množiny  $B_1, B_2, \dots$  jsou po dvou disjunktní. Zároveň platí  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  a  $B_j \subseteq A_j$  pro každé  $j \in \mathbb{N}$ . Tím je dokázáno, že

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \stackrel{(ii)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$



Obrázek 2.1: Ilustrace k důkazu věty 2.2.6

(Převzato z [5, str. 19])

□

(TODO: Přidat obrázek ilustrující bod (v).)

**Poznámka 2.2.7.** Předpoklad  $\mu(A_1) < \infty$  ve větě 2.2.6 v bodě (iv) nelze vynechat. Jednoduchý protipříklad si uvedeme v sekci 2.3.

## 2.3 Lebesgueova míra

(TODO: Doplnit zmínku o Jordanově-Peanově obsahu)

V předešlé sekci 2.2 jsme si povídali o pojmu *míra* obecně a podívali jsme se na několik příkladů. Obecnou ideu měření „velikosti“ lze založit např. na aproximaci obecné množiny pomocí *spočetných sjednocení útvarů*, jejichž „velikost“ umíme jednoduše určit. V dalším textu se omezíme pouze na množinu  $\mathbb{R}^n$ .

Na zmíněné myšlence je postavena definice tzv. *n-rozměrné Lebesgueovy míry*, kdy obecnou množinu budeme pokrývat pomocí *kvádrů*. Připomeňme, že obecně *n-rozměrným kvádrem*  $I$  rozumíme kartézský součin *intervalů*

$$\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle \subseteq \mathbb{R},$$

tj.

$$I = \prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

a jeho objem definujeme jako

$$\text{vol}_n(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Lze nejspíše ihned vidět, že objem kvádrů  $\text{vol}_n(I)$  je *aditivní* i *subaditivní*.

(TODO: Přidat definici kvádrů a jeho objemu do sekce do značením)

Nyní si definujeme tzv. *vnější Lebesgueovu míru*.

**Definice 2.3.1** (Vnější Lebesgueova míra). Necht  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pak vnější  $n$ -rozměrnou Lebesgueovou mírou  $A$  je

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}_n(I_j) \mid I_j \text{ je kvádr, } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_j \right\}.$$

Vnější Lebesgueova míra množiny intuitivně zachycuje informaci o „velikosti“ dané množiny. Lze ihned vidět, že pro libovolnou množinu  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je  $\lambda_n^*(A) \in \mathbb{R}_0^+$ , protože  $\text{vol}_n(I_j) \geq 0$  pro každé  $j \in \mathbb{N}$ .

**Příklad 2.3.2.** Ukažme si některé triviální příklady výpočtů vnější Lebesgueovy míry z definice (viz 2.3.1), tedy budeme hledat příslušné pokrytí dané množiny.

- Pro prázdnou množinu  $\emptyset$  je  $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$ , neboť  $\emptyset \subseteq \prod_{i=1}^n \langle 0, 0 \rangle$  (prázdnou množinu lze pokrýt jakýmkoliv kvádrem nulového objemu) a

$$\text{vol}_n \left( \prod_{i=1}^n \langle 0, 0 \rangle \right) = 0.$$

- Mějme libovolnou konečnou množinu  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pro každé  $x_j$  stačí položit  $I_j = \{x_j\}$  pro každé  $1 \leq j \leq n$ , což je degenerovaný interval, jehož objem  $\text{vol}_n(I_j) = 0$ .
- Pro libovolnou spočetnou množinu  $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$  je  $\lambda_n^*(A) = 0$ . Pokrytí volíme stejně jako v předešlém bodě. Tedy např. pro  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  je  $\lambda_1^*(\mathbb{Q}) = 0$ , neboť  $\mathbb{Q}$  je spočetná.
- Pro množinu reálných čísel  $\mathbb{R}$  je  $\lambda_1^*(\mathbb{R}) = \infty$ , avšak pro

$$A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

(reálná osa v  $\mathbb{R}^2$ ) je  $\lambda_2^*(A) = 0$ .

Jako poslední si ukážeme, že v případě kvádrů  $n$ -rozměrného kvádrů odpovídá jeho vnější Lebesgueova míra skutečně jeho objemu.

**Tvrzení 2.3.3.** Je-li  $I \subset \mathbb{R}^n$  kvádr, pak  $\lambda_n^*(I) = \text{vol}_n(I)$ .

*Důkaz.* Ukážeme zvlášť, že  $\lambda_n^*(I) \leq \text{vol}_n(I)$  a  $\lambda_n^*(I) \geq \text{vol}_n(I)$ .

- **Důkaz**  $\lambda_n^*(I) \leq \text{vol}_n(I)$ . Zvolme pokrytí  $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots\}$  kvádrů  $I$ , tzn.  $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , tak, aby

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}_n(I_i) \leq (1 + \varepsilon) \lambda_n^*(I).$$



pro nějaké  $\varepsilon > 0$ . Nyní si zvolíme nové kvádry<sup>6</sup>  $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots\}$  tak, aby pro každé  $i \in \mathbb{N}$  platilo

$$I \subset J^O \wedge \text{vol}_n(J_i) \leq (1 + \varepsilon) \text{vol}_n(I_i).$$

To není nikterak složité, stačí např. pro každé  $i \in \mathbb{N}$  položit

$$J_i = \prod_{j=1}^n \langle a_j \sqrt[n]{1 + \varepsilon}, b_j \sqrt[n]{1 + \varepsilon} \rangle.$$

Protože však  $I$  je uzavřená a omezená množina, je podle věty (TODO: doplnit odkaz) kompaktní, tedy z otevřeného pokrytí  $J_1^O, J_2^O, \dots$  lze vybrat konečné podpokrytí. Existuje tedy  $m \in \mathbb{N}$ , takové, že

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^m J_i.$$

Celkově tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(I) &\leq \sum_{i=1}^m \text{vol}_n(J_i) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^m \text{vol}_n(I_i) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}_n(I_i) \\ &\leq (1 + \varepsilon)^2 \lambda_n^*(I) \end{aligned}$$

pro každé  $\varepsilon > 0$ , což jsme chtěli.

- **Důkaz**  $\lambda_n^*(I) \geq \text{vol}_n(I)$ . Důkaz opačné nerovnosti je oproti té předešlé naopak velmi jednoduchý. Kvádr  $I$  totiž reprezentuje pokrytí sebe samotného, tzn. lze volit  $I_1 = I$  a zbylé kvádry  $I_j$ , kde  $j \geq 2$ , mohou být libovolné s nulovým objemem.

Z kombinací obou nerovností lze vidět, že vnější Lebesgueova míra  $n$ -rozměrného kvádrů skutečně odpovídá jeho objemu, tj.

$$\lambda_n^*(I) = \text{vol}_n(I).$$

□

**Poznámka 2.3.4.** Vraťme se na chvíli ještě k větě 2.2.6 o vlastnostech míry, konkrétně bod (iv). Předpoklad  $\mu(A_1) < \infty$  zde vynechat nelze. Stačí vzít množiny  $A_j = \langle j, \infty \rangle$ , tzn.  $\lambda_n^*(A_j) = \lambda_n^*(\langle j, \infty \rangle) = \infty$  pro každé  $j \in \mathbb{N}$ . Snadno si rozmyslíme, že

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset,$$

nicméně lze vidět, že zatímco  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \infty$ , tak  $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$ .

Z příkladů 2.3.2 a 2.3.3 můžeme vidět, že pro rozumně zvolené množiny zachycuje vnější Lebesgueova míra jejich intuitivní „velikost“. V případě intervalu odpovídá jeho délce, v případě diskrétní množiny je nulová a podobně např. pro obdélník odpovídá jeho obsahu, pro kvádr jeho objemu, atd.

<sup>6</sup>Formálně  $\mathcal{I}$  tvoří zjemnění pokrytí  $\mathcal{J}$

Nyní se však nabízí jedna otázka. Čtenář by mohl již od chvíle, kdy jsme zavedli pojem vnější Lebesgueovy míry (opět viz definice 2.3.1) namítat, co nás opravňuje nazývat zobrazení  $\lambda_n^*$  mírou, tj. ve smyslu definice 2.2.4. Jak víme, že splňuje podmínku  $\sigma$ -aditivity? Odpověď na tuto otázku není zcela přímočará a vlastně není ani jednoduchá.

Bohužel pro libovolně zvolenou množinu  $X$  a  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{A}$  v případě vnější Lebesgueovy míry obecně neplatí vlastnost aditivity, tedy existují množiny  $A, B \in \mathcal{A}$ , takové, že

$$\lambda_n^*(A \cup B) \neq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B).$$

Příklad takové množiny využívá např. takzvaná *Vitaliho konstrukce*, se kterou přišel italský matematik GIUSEPPE VITALI (1875–1932) roku 1905, využívající invariance vnější Lebesgueovy míry vůči posunutí, tzn.  $\lambda_n^*(x + A) = \lambda_n^*(A)$ . [6] V rámci tohoto textu se jí zde zabývat nebudeme, avšak pro zájemce doporučuji zdroje [3, str. 3] a [9], kde je tato konstrukce podrobněji rozepsána.

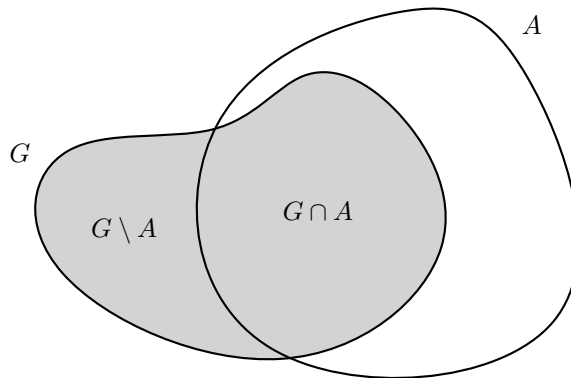
Je tedy potřeba se omezit na takové množiny, kde je  $\lambda_n^*$  aditivní. Existuje více způsobů jejich charakterizace, avšak my si zde uvedeme ten, se kterým přišel řecký matematik CONSTANTIN CARATHÉODORY (1873–1950).

**Definice 2.3.5** (Lebesgueovská měřitelnost). Množinu  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  nazveme (lebesgueovsky) měřitelnou, pokud pro každou množinu  $G$  platí

$$\lambda_n^*(G) = \lambda_n^*(G \cap A) + \lambda_n^*(G \setminus A).$$

Systém všech měřitelných množin v  $\mathbb{R}^n$  značíme  $\mathcal{L}^n$ . Pokud  $A \in \mathcal{L}^n$ , pak číslo  $\lambda_n(A) = \lambda_n^*(A)$  nazýváme  $n$ -rozměrnou Lebesgueovou mírou množiny  $A$ .

Podmínka v definici 2.3.5 se někdy nazývá říká *Carathéodoryho kritérium*. Zjednodušeně říká, že množina  $A$  je lebesgueovsky měřitelná, když při „rozdělení“ libovolně zvolené množiny  $G$  na dvě části pomocí  $A$  lze míru  $G$  stanovit součtem měr daných částí (viz obrázek 2.2). Zároveň je dobré podotknout, že kvádry, které figurují v definici vnější Lebesgueovy míry jsou měřitelné. O systému  $\mathcal{L}^n$  a



Obrázek 2.2: Ilustrace měřitelnosti množiny  $A$

Lebesgueově míře  $\lambda_n$  lze dokázat následující tvrzení.

**Věta 2.3.6.** *Platí:*

- (i)  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$  je měřitelný prostor.

(ii)  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda_n)$  je prostor s mírou.

Čtenář snad promine, že formální důkaz v případě tohoto tvrzení v zájmu zachování stručnosti textu zcela vynecháme, nicméně „zvědavce“ jej může nalézt např. v knize [8, str. 347], kde jsou příslušné záležitosti rozepsány.

## 2.4 Box-counting dimenze

Tomuto typu dimenze jsme se již v základu věnovali v kapitole 1, specificky sekci 1.3, kde jsme rozebrali jeho způsob jejího výpočtu a ukázali jsme si jej několika příkladech. V této části si blíže rozebereme některé další vlastnosti týkající se právě *box-counting dimenze*<sup>7</sup> a pokusíme se ji lépe zasadit do kontextu teorie míry, které jsme se samostatně až do této chvíle věnovali.

### 2.4.1 Definice a výpočet

Jako první se podíváme na myšlenku box-counting trochu blíže a maličko si ji zobecníme. Původně jsme nahlíželi na dimenzi jako na exponent, s nímž roste „velikost“ zkoumaného útvaru. Tato myšlenka nás se ukázala jako rozumná, neboť pro „klasické“ geometrické útvary vycházela tato dimenze vždy celočíselně, nicméně už tomu tak nebylo v případě fraktálních útvarů. Myšlenka byla taková, že jsme útvar  $F$  rozdělili na určitý počet stejně „velkých částí“, označme  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , v nějakém měřítku  $\varepsilon > 0$ . Zkusme nyní požadavek na striktně stejnou velikost (formálně vzato míru) trochu rozvolnit. Bude nám stačit, když pro každé  $i$  je  $\text{diam } F_i \leq \delta$ , kde  $\delta > 0$ . Zároveň nebudeme požadovat, aby množiny  $F_1, F_2, \dots, F_m$  byly všechny striktně po dvou téměř disjunktními<sup>8</sup> podmnožinami  $F$ , ale stačí, když budou tvořit pokrytí  $F$ .

Mějme tedy nějakou neprázdnou omezenou množinu  $F \subset \mathbb{R}^n$ , kde pro každé  $\delta > 0$  budeme hledat *nejmenší počet* množin, takových, že pokrývají  $F$ . Toto číslo si označíme  $N_\delta(F)$ . Dimenze množiny  $F$  by tedy měla odrážet „rychlost“ růstu  $N_\delta(F)$  pro  $\delta \rightarrow 0^+$ . Je-li splněna aproximace

$$N_\delta(F) \approx c\delta^{-s} \quad (2.1)$$

pro  $c > 0$ , pak řekneme, že množina  $F$  má box-counting dimenzi  $s$ . (Převzato z [2, str. 27].)

**Poznámka 2.4.1.** V dalším textu budeme místo  $\delta \rightarrow 0^+$  psát pro jednoduchost pouze  $\delta \rightarrow 0$ , byť by se slušilo používat první variantu. Čtenáři je však nejspíše jasné, že uvažovat záporný průměr množiny nemá smysl.

<sup>7</sup>V kapitole 1 jsme pro jednoduchost používali obecnější termín *fraktální dimenze*. Ten však zahrnuje daleko širší škálu možných definic, než jen tu, kterou jsme si představili. Avšak dále v tomto textu budeme používat výhradně její skutečný název, tj. box-counting dimenze.

<sup>8</sup>Množiny  $M, N$  jsou *téměř disjunktní*, pokud  $M^O \cap N^O = \emptyset$ , tedy může nastat, že se na hranici mohou „dotýkat“, tzn.  $\partial M \cap \partial N \neq \emptyset$ .

Logaritmováním a úpravou výrazu (2.1) dostaneme:

$$\ln N_\delta(F) \approx \ln c + \ln \delta^{-s} \quad (2.2)$$

$$\ln N_\delta(F) \approx \ln c - s \ln \delta \quad (2.3)$$

$$s \approx \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} + \frac{\ln c}{\ln \delta}. \quad (2.4)$$

Když porovnáme výsledek v (2.2) s rovností (1.7) z minulé kapitoly, můžeme si všimnout, že zde navíc figuruje člen  $\ln c / \ln \delta$ . Když však uvažíme limitu daného výrazu pro  $\delta \rightarrow 0$ , dostaneme původní vzorec, který jsme již viděli, tj.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} + \frac{\ln c}{\ln \delta} \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln c}{\ln \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

Předchozí úvahu můžeme shrnout do následující definice.

**Definice 2.4.2** (Box-counting dimenze). Necht  $F \subset \mathbb{R}^n$  je neprázdná omezená množina. Pak definujeme následující:

(a) *Nejmenší počet množin v  $\delta$ -pokrytí množiny  $F$*  značíme  $N_\delta(F)$ , tj.

$$N_\delta(F) = \inf \left\{ m \in \mathbb{N}_0 \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^m F_i, \text{ diam } F_j \leq \delta \text{ pro } 1 \leq j \leq m \right\}.$$

(b) *Horní box-counting dimenze množiny  $F$*  je

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

(c) *Dolní box-counting dimenze množiny  $F$*  je

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

V případě, že  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$ , pak společnou hodnotu nazýváme *box-counting dimenzí* množiny  $F$ , značíme  $\dim_B F$ , přičemž platí

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

**Poznámka 2.4.3.** Zde je důležité zmínit, že pro v dalším textu budeme uvažovat  $\delta$  dostatečně malé, takové, že hodnota  $-\ln \delta$  je vždy kladná. Dále též budeme pracovat (podle definice 2.4.2) pouze s neprázdnými omezenými množinami, abychom se vyhnuli problémům s případy, kdy  $N_\delta(F) = \infty$  nebo  $N_\delta(F) = 0$ .

Abychom uvedli vše na pravou míru, box-counting dimenzi lze taktéž definovat více způsoby. V tuto uvažujeme obecně  $\delta$ -pokrytí dané množiny  $F$ , tj. pokrytí *obecnými* množinami o průměru maximálně  $\delta > 0$ . Lze se však zaměřit i na konkrétní útvary, jak ukazuje následující věta.

**Věta 2.4.4** (Ekvivalentní definice box-counting dimenze). *Nechť  $F \subset \mathbb{R}^n$  je neprázdná omezená množina. Pak*

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_B F &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta}, \\ \overline{\dim}_B F &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta}, \\ \dim_B F &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta},\end{aligned}$$

kde pro  $M_\delta(F)$  platí

- (i)  $M_\delta(F) = \inf \left\{ m \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^m K_\delta(x_i), x_j \in \mathbb{R}^n \text{ pro } 1 \leq j \leq m \right\},$
- (ii)  $M_\delta(F) = \inf \left\{ m \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^m I_i, I_j = \prod_{k=1}^n \langle a_k, a_k + \delta \rangle \text{ pro } 1 \leq j \leq m \right\},$
- (iii)  $M_\delta(F) = |\{I \mid I \cap F \neq \emptyset, I \in \mathcal{D}\}|,$  kde  $\mathcal{D}$  je  $\delta$ -sít.
- (iv)  $M_\delta(F) = \sup \{m \mid B_\delta(x_i) \cap B_\delta(x_j) = \emptyset; x_i, x_j \in \mathbb{R}^n \text{ pro } 1 \leq i, j \leq m\}.$

Pojďme si větu 2.4.4 nyní trochu rozebrat.

- Body (i) a (iv) říkájí, že  $N_\delta(F)$  je rovno *nejmenšímu počtu uzavřených koulí o poloměru  $\delta$ , které pokrývají  $F$* , resp. *nejvyšší počet disjunktních otevřených koulí, které mají střed v  $F$* .
- Podobně body (ii) a (iii) tvrdí, že  $N_\delta(F)$  lze ekvivalentně definovat jako pokrytí kvádry o stranách délky  $\delta$ , resp. počet všech kvádrů z  $\delta$ -sítě, které mají s  $F$  neprázdný průnik.

Pro představu viz obrázek 2.3. Důkaz věty je delší a opět jej vynecháme, nicméně lze jej nalézt v knize [2, str. 30].

Zároveň body (ii) a (iii) nám dávají dobré opodstatnění názvu tohoto typu dimenze, neboť v podstatě zkoumáme pokrývání daného obrazce „kostkami“. Při aproximacích box-counting dimenze obrazce  $F \subset \mathbb{R}^2$  tak lze pracovat s mřížkou čtverců o libovolné straně  $\delta > 0$ , kdy  $N_\delta(F)$  stanovíme jako počet čtverců, které se překrývají se zkoumaným obrazcem  $F$ . Když se tedy zpět vrátíme k otázce rozebírané v úvodu tohoto textu týkající se délky pobřeží (viz kapitola 1), lze jeho „fráktálnost“ do jisté míry vyjádřit právě popsáním způsobem (viz obrázek 2.4). Nyní se opět vrátíme k fraktálům a výpočtům jejich dimenze, čemuž jsme se věnovali již v sekci 1.3 kapitoly 1, konkrétně 1.3.2. Tentokrát však budeme postupovat přímo podle definice box-counting dimenze 2.4.2, tedy budeme zvlášť zkoumat horní a dolní box-counting dimenzi.

**Příklad 2.4.5** (Cantorovo diskontinuum). Již jsme měli možnost se přesvědčit, že Cantorovo diskontinuum, označme  $C$ , má box-counting dimenzi  $\ln 2 / \ln 3$ . Zkusme nyní výpočet zopakovat, avšak vzlášť vypočítáme  $\underline{\dim}_B C$  a  $\overline{\dim}_B C$  podíváme se, zda se shodují.

Jako první provedeme horní odhad. Je potřeba zvolit  $\delta$  a na jeho základě dopočítat  $N_\delta(C)$ . V  $k$ -té iteraci, kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ , bude obecně  $2^k$  intervalů, každý o délce  $(1/3)^k$ , tedy pokud zvolíme  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ , pak intervaly o délce nejvýše  $\delta$  (viz věta 2.4.4, bod (i)) tvoří  $\delta$  pokrytí, přičemž  $N_\delta(C) \leq 2^k$ . Tedy celkově pro  $\delta$ -pokrytí všech intervalů bude potřeba nejvýše  $N_\delta(C) \leq 2^k$  intervalů  $I_1, I_2, \dots, I_{N_\delta(C)}$  o průměru  $3^{-k} < \text{diam } F_i \leq 3^{-k+1}$  pro každé  $i$ . Z toho dostáváme

$$\overline{\dim}_B C = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(C)}{-\ln \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{-\ln 3^{-k+1}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln 2}{(k-1) \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Naopak pokud uvažíme intervaly délky  $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ , pak každý z nich má neprázdný průnik s maximálně jedním intervalem  $k$ -té iterace  $C$ . Těch je, jak již víme,  $2^k$ , tedy intervalů  $I_1, I_2, \dots, I_{N_\delta(C)}$  bude nejméně  $2^k$  pro pokrytí  $C$ , tzn.  $N_\delta(C) \geq 2^k$ . Tím dostáváme dolní odhad:

$$\underline{\dim}_B C = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(C)}{-\ln \delta} \geq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln 2^k}{-\ln 3^{-k-1}} = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{k \ln 2}{(k+1) \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Protože  $\underline{\dim}_B C = \overline{\dim}_B C = \ln 2 / \ln 3$ , tak box-counting dimenze Cantorova diskontinua je  $\dim_B C = \ln 2 / \ln 3$ . (Převzato z [2, str. 32])

Podobně bychom postupovali pro rovinné obrazce.

**Příklad 2.4.6** (Kochova křivka). Opět ukážeme horní a dolní odhad zvlášť. Kochovu křivku si označíme  $K$ .

Obecně  $k$ -tá iterace Kochovy křivky bude obsahovat  $4^k$  úseček, každá o délce  $(1/3)^k$ . Podobně jako v předchozím příkladu 2.4.5 zvolíme  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ . Pokud si pro pokrytí zvolíme uzavřené koule

$$K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \dots, K_\delta^{N_\delta(K)}(x_{N_\delta(K)}), \text{ kde } x_1, x_2, \dots, x_{N_\delta(K)} \in \mathbb{R}^2$$

pak  $N_\delta(K) \leq 4^k$ . Tedy

$$\overline{\dim}_B K = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(K)}{-\ln K} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^k}{-\ln 3^{-k+1}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln 4}{(k-1) \ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Podobně pro dolní odhad uvažíme  $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ . Vezmeme-li uzavřené koule  $K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \dots, K_\delta^{N_\delta(K)}(x_{N_\delta(K)})$ , pak žádný nemůže mít neprázdný průnik s více než čtyřmi úsečkami, tedy pro jejich pokrytí je zapotřebí alespoň  $N_\delta(K) \geq 4^k/4 = 4^{k-1}$ , čímž dostáváme

$$\underline{\dim}_B K = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(K)}{-\ln K} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^{k-1}}{-\ln 3^{-k-1}} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1) \ln 4}{(k+1) \ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Tzn.  $\dim_B K = \ln 4 / \ln 3$ .

**Poznámka 2.4.7.** Obecně množina  $F$  skládající se z  $m$  disjunktních kopií sebe samotné v měřítku  $r$  má dimenzi  $\dim_B F = -\ln m / \ln r$ .

Nyní se podíváme ještě na jedno možné pojetí box-counting dimenze. Připomeňme, že  $\delta$ -okolím množiny  $F$  v metrickém prostoru  $(X, \rho)$  rozumíme

$$F_\delta = \{x \in X \mid \exists y \in F : \rho(x, y) < \delta\}.$$

Budeme nyní sledovat, jak „rychle“ se mění objem  $F_\delta$  pro  $\delta \rightarrow 0$ . A se zmínkou objemu nám zde do hry opět vstupuje Lebesgueova míra  $\lambda_n$ , o níž jsme si povídali v sekci 2.3. Podívejme se nejdříve na několik příkladů.

- Pro úsečku  $u \subset \mathbb{R}^3$  o délce  $\ell$  lze objem jejího  $\delta$ -okolí stanovit jako

$$\lambda_3(u) = \frac{4}{3}\pi\delta^3 + \pi\delta^2\ell.$$

Pokud však uvážíme  $\delta$  dostatečně malé, lze první člen zanedbat a psát

$$\lambda_3(u) \approx \pi\ell\delta^2.$$

- V případě uzavřené omezené množiny  $F$  o obsahu  $A$  je objem  $\lambda_3(F_\delta) \approx 2A\delta$ .
- Pro kouli  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^3$ , kde  $x \in \mathbb{R}^3$  a  $r > 0$  je objem

$$\lambda_3((B_r(x))_\delta) = \frac{4}{3}\pi(r + \delta)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2\delta + 4\pi r\delta^2 + \frac{4}{3}\pi\delta^3 \approx \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Změna objemu je v tomto případě vzhledem k  $\delta$  zanedbatelná.

Můžeme si všimnout, že v každém případě odhad objemu vychází  $\lambda_3(F) \approx c\delta^{3-s}$ , kde  $c > 0$  je závislé na původní míře  $F$  a  $s$  udává dimenzi. Obecněji pro množinu  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  bychom došli k  $\lambda_n(F) \approx c\delta^{n-s}$ . Nyní, podobně jako v úvodu této sekce, zkusme opět vyjádřit  $s$ :

$$\begin{aligned} \ln \lambda_n(F) &\approx \ln c + (n - s) \ln \delta \\ s \ln \delta &\approx n \ln \delta - \ln \lambda_n(F) + \ln c \\ s &\approx n - \frac{\ln \lambda_n(F)}{\ln \delta} + \frac{\ln c}{\ln \delta}. \end{aligned}$$

Poslední člen bude v limitě opět nulový.

Lze ukázat, že  $s$  není v tomto případě nic jiného, než již námi zkoumaná box-counting dimenze. To si shrneme a dokážeme ve větě 2.4.8.

**Věta 2.4.8.** *Nechť  $F \in \mathcal{L}^n$  je uzavřená a omezená. Pak platí:*

$$\begin{aligned} (i) \quad \underline{\dim}_B F &= n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_n(F_\delta)}{\ln \delta}, \\ (ii) \quad \overline{\dim}_B F &= n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_n(F_\delta)}{\ln \delta}. \end{aligned}$$

*Důkaz.* V rámci důkazu využijeme větu 2.4.4.

Mějme  $F \in \mathcal{L}^n$  omezenou a uzavřenou. Označme  $v_n$  objem jednotkové koule  $K_1(x)$ <sup>9</sup> v  $\mathbb{R}^n$  pro  $x \in \mathbb{R}^n$  libovolné. Dále mějme pokrytí

$$\mathcal{K} = \left\{ K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \dots, K_\delta^{N_\delta(F)}(x_{N_\delta(F)}) \right\}$$

množiny  $F$ , kde  $0 < \delta < 1$  a  $x_j \in F$  pro každé  $1 \leq j \leq N_\delta(F)$ . Pak lze zvolit pokrytí

$$\mathcal{K}' = \left\{ K_{2\delta}^1(x_1), K_{2\delta}^2(x_2), \dots, K_{2\delta}^{N_\delta(F)}(x_{N_\delta(F)}) \right\},$$

tzn.  $\mathcal{K}$  je zjemnění pokrytí  $\mathcal{K}'$ . Zároveň však platí, že  $\mathcal{K}$  je i pokrytím  $F_\delta$ . Pro libovolné  $x \in F_\delta$  existuje totiž  $y \in F$ , takové,  $\rho(x, y) < \delta$ . Tedy pro dané  $y$  existuje nějaká koule  $K_\ell(x_\ell) \in \mathcal{K}$ , taková, že  $y \in K_\ell(x_\ell)$ , což znamená, že

$$\rho(x_\ell, y) \leq \rho(x_\ell, x) + \rho(x, y) \leq \delta + \delta = 2\delta.$$

Tzn. míru  $F$  lze zhora odhadnout jako

$$\lambda_n(F_\delta) \leq N_\delta(F) v_n (2\delta)^n.$$

Úpravou získáme:

$$\begin{aligned} \ln \lambda_n(F_\delta) &\leq n \ln \delta + \ln N_\delta(F) + \ln 2^n v_n \\ \frac{\ln \lambda_n(F_\delta)}{-\ln \delta} &\leq -n + \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} + \frac{\ln 2^n v_n}{-\ln \delta}, \end{aligned}$$

tedy v limitě

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_n(F_\delta)}{-\ln \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B F.$$

K odhadu  $\overline{\dim}_B F$  lze dospět analogicky.

Nyní uvažujme po dvou disjunktní otevřené koule  $B_\delta^j(x_j)$ , kde  $x_j \in F$  pro  $1 \leq j \leq N_\delta(F)$ . Pak součtem jejich objemů získáme

$$N_\delta(F) v_n \delta^n \leq \lambda_n(F_\delta).$$

Obdobnou úpravou této nerovnosti získáme požadovanou nerovnost. □

Zkusme si aplikaci věty ilustrovat opět na příkladu fraktálu.

**Příklad 2.4.9** (Cantorovo diskontinuum potřetí). Pro Cantorovo diskontinuum  $C$  v  $k$ -té iteraci lze odhadnout délku  $C_\delta$  pro  $3^{-k} \leq \delta \leq 3^{-k+1}$  jako

$$\lambda_1(C_\delta) \leq 2^k \cdot 2\delta = 2^{k+1} 3^{-k+1}.$$

Tedy podle věty 2.4.8

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B C &= n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_1(C_\delta)}{\ln \delta} \leq 1 - \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{k+1} 3^{-k+1}}{\ln 3^{-k+1}} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1) \ln 2}{(k-1) \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \end{aligned}$$

---

<sup>9</sup>Objem koule v  $\mathbb{R}^n$  lze vyjádřit vztahem

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} r^n,$$

kde  $\Gamma$  je tzv. *gamma funkce*. Se vzorcem však dále v textu pracovat nebudeme.



Podobně zvolíme-li  $3^{-k-1} \leq \delta \leq 3^{-k}$ , pak

$$\lambda_1(C_\delta) \geq 2^{k+1} 3^{-k-1}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B C &= n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_1(C_\delta)}{\ln \delta} \geq 1 - \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{k+1} 3^{-k-1}}{\ln 3^{-k-1}} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1) \ln 2}{(k+1) \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \end{aligned}$$

## 2.4.2 Vlastnosti

V minulé podsekcí 2.4.1 jsme se bavili o možnostech pojetí box-counting dimenze. S tím souvisely zejména pak věty 2.4.4 a 2.4.8. Nyní trochu blíže ještě prozkoumáme některé její vlastnosti, na něž se podíváme ve větě .

**Věta 2.4.10** (Vlastnosti box-counting dimenze). *Nechť jsou dány  $F, G \subseteq \mathbb{R}^n$ .*

- (i) *Pokud  $G \subseteq F$ , pak  $\underline{\dim}_B G \leq \underline{\dim}_B F$  a  $\overline{\dim}_B G \leq \overline{\dim}_B F$ .  $\triangleleft$  monotonicita*
- (ii) *Je-li  $F \neq \emptyset$  omezená, pak  $0 \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq n$ .  $\triangleleft$  rozsah hodnot*
- (iii)  $\overline{\dim}_B(F \cup G) = \max \{ \overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B G \}$ .  $\triangleleft$  stabilita

*Důkaz.*

- (i) Plyne triviálně z faktu, že pro libovolné  $\delta > 0$  je  $N_\delta(G) \leq N_\delta(F)$ , neboť každé  $\delta$ -pokrytí  $\mathcal{F} \supset F$  je zároveň  $\delta$ -pokrytím  $G$ .
- (ii) První dvojice nerovností je zjevná z definice (viz 2.4.2). Pro třetí nerovnost zvolme kvádr  $I$ , takový, že  $F \subset I$ . Zvolíme-li  $\delta > 0$  a  $\delta$ -sít  $\mathcal{D}$ , pak podle věty 2.4.4 je

$$N_\delta(F) \leq N_\delta(I) = |\{J \mid J \cap I \neq \emptyset, J \in \mathcal{D}\}| \leq c\delta^{-n},$$

kde  $c > 0$ . Tedy

$$\overline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B I = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(I)}{-\ln \delta} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln c\delta^{-n}}{-\ln \delta} = n.$$

- (iii) Pro  $\delta > 0$  volme  $\delta$ -pokrytí  $\mathcal{F} \supset F$  a  $\mathcal{G} \supset G$ . Je celkem zjevné, že  $N_\delta(F \cup G) \leq N_\delta(F) + N_\delta(G)$ , neboli

$$\begin{aligned} \ln(N_\delta(F) + N_\delta(G)) &\leq \ln(2 \max \{N_\delta(F), N_\delta(G)\}) \\ &= \ln 2 + \ln(\max \{N_\delta(F), N_\delta(G)\}). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_B(F \cup G) &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{\ln 2}{-\ln \delta} + \frac{\ln (\max \{N_\delta(F), N_\delta(G)\})}{-\ln \delta} \right) \\
&\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln (\max \{N_\delta(F), N_\delta(G)\})}{-\ln \delta} \\
&= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left( \max \left\{ \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}, \frac{\ln N_\delta(G)}{-\ln \delta} \right\} \right) \\
&\leq \max \left\{ \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}, \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(G)}{-\ln \delta} \right\} \\
&= \max \{ \overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B G \}.
\end{aligned}$$

Opačná nerovnost plyne z faktu, že  $F \subset F \cup G$  a  $G \subset F \cup G$ , tedy

$$\overline{\dim}_B(F \cup G) \geq \overline{\dim}_B F \text{ a } \overline{\dim}_B(F \cup G) \geq \overline{\dim}_B G$$

podle bodu (i), neboli

$$\overline{\dim}_B(F \cup G) = \max \{ \overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B G \}.$$

□

(Převzato a upraveno z [2, str. 35].)

Poslední bod (iii) tvrzení 2.4.10 lze pochopitelně rozšířit indukci. Čtenář se sám může přesvědčit, že se jedná o relativně jednoduché cvičení.

**Důsledek 2.4.11.** *Pro  $F_1, F_2, \dots, F_m \subseteq \mathbb{R}^n$  platí:*

$$\overline{\dim}_B \left( \bigcup_{i=1}^m F_i \right) = \max \{ \overline{\dim}_B F_j \mid 1 \leq j \leq m \}.$$

*Důkaz.* Pro  $m = 1$  a  $m = 2$  víme, že tvrzení platí. Pro  $m + 1$  lze psát:

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_B \left( \bigcup_{i=1}^{m+1} F_i \right) &= \overline{\dim}_B \left( \left( \bigcup_{i=1}^m F_i \right) \cup F_{m+1} \right) \\
&= \max \left\{ \overline{\dim}_B \left( \bigcup_{i=1}^m F_i \right), \overline{\dim}_B F_{m+1} \right\} \\
&\stackrel{\text{I.P.}}{=} \max \left\{ \max \{ \overline{\dim}_B F_i \mid 1 \leq i \leq m \}, \overline{\dim}_B F_{m+1} \right\} \\
&= \max \{ \overline{\dim}_B F_j \mid 1 \leq j \leq m+1 \}.
\end{aligned}$$

□

Jako poslední se ještě nabízí otázka, jak se bude dimenze  $\dim_B$  chovat vůči zobrazování. V tomto kontextu pro nás budou relevantní především *lipschitzovská* a *bilipschitzovská zobrazení*. Připomeňme, že lipschitzovské zobrazení je takové zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  mezi metrickými prostory  $(X, \rho_X)$  a  $(Y, \rho_Y)$ , že existuje konstanta  $K > 0$  a pro každé  $x, y \in X$  platí

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \leq K \rho_X(x, y).$$

Pokud navíc platí, že existují konstanty  $K_1, K_2 > 0$ , takové, že platí

$$K_1 \rho_X(x, y) \leq \rho_Y(f(x), f(y)) \leq K_2 \rho_X(x, y),$$

pak  $f$  nazýváme bilipschitzovské.

Než se však podíváme na samotný vztah box-counting dimenze a lipschitzovských, resp. bilipschitzovských zobrazení, dokážeme si jedno jednoduché lemma, které později využijeme.

**Lemma 2.4.12.** *Nechť  $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$  jsou metrické prostory a zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  je bilipschitzovské. Pak  $f' : X \rightarrow f(X)$  je bijekce.*

*Důkaz.* Podle předpokladu je  $f$  bilipschitzovské zobrazení, tedy i  $f'$  je bilipschitzovské, tedy existují pro konstanty  $K_1, K_2 > 0$ , takové, že

$$K_1 \rho_X(x, y) \leq \rho_Y(f'(x), f'(y)) \leq K_2 \rho_X(x, y), \quad x, y \in X.$$

Surjektivita zobrazení  $f'$  je zřejmá z její definice. Pro spor předpokládejme, že  $f'$  není injektivní, tedy existují  $x, y \in X$ , taková, že  $f'(x) = f'(y)$ . Pak

$$0 < K_1 \rho_X(x, y) \leq \rho_Y(f'(x), f'(y)) = 0,$$

což je spor. □

V našem případě se nyní dále omezíme, stejně jako předtím, pouze na prostor  $\mathbb{R}^n$ .

**Věta 2.4.13.** *Nechť jsou dány metrické prostory  $(\mathbb{R}^n, \rho_n)$  a  $(\mathbb{R}^m, \rho_m)$ , zobrazení  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ . Platí:*

(i) *Je-li  $f$  lipschitzovské, pak*

$$\underline{\dim}_B f(F) \leq \underline{\dim}_B F \text{ a } \overline{\dim}_B f(F) \leq \overline{\dim}_B F.$$

(ii) *Je-li  $f$  bilipschitzovské, pak*

$$\underline{\dim}_B f(F) = \underline{\dim}_B F \text{ a } \overline{\dim}_B f(F) = \overline{\dim}_B F.$$

*Důkaz.* Máme tedy metrické prostory  $(\mathbb{R}^n, \rho_n), (\mathbb{R}^m, \rho_m)$ , zobrazení  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ .

(i) Jako první si všimneme, že je-li  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots\}$   $\delta$ -pokrytí, množiny  $F$ , kde  $\delta > 0$ , pak je jím i systém

$$\mathcal{F}' = \{F \cap F_1, F \cap F_2, \dots\}.$$

Podle předpokladu je  $f$  lipschitzovské, tzn. pro každé  $x, y \in \mathbb{R}^n$  je

$$\rho_m(f(x), f(y)) \leq K \rho_n(x, y), \quad K > 0.$$

Speciálně tak platí i  $\text{diam}(f(F \cap F_i)) \leq K \text{diam}(F \cap F_i)$  pro každé  $i$ , a tedy

$$\text{diam}(f(F \cap F_i)) \leq K \text{diam}(F \cap F_i) \leq K \text{diam } F_i \leq K\delta.$$

Z toho plyne, že  $\mathcal{G} = \{f(F \cap F_1), f(F \cap F_2), \dots\}$  tvoří  $K\delta$ -pokrytí množiny  $f(F)$ . Tedy máme, že  $N_{K\delta}(f(F)) \leq N_\delta(F)$ . Po úpravě

$$\frac{\ln N_{K\delta}(f(F))}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

Tedy celkově

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B f(F) &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_{K\delta}(f(F))}{-\ln K\delta} = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_{K\delta}(f(F))}{-\ln \delta} \cdot \frac{\ln \delta}{\ln K\delta} \\ &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(f(F))}{-\ln \delta} \cdot \frac{\ln \delta}{\ln K\delta} = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(f(F))}{-\ln \delta} \\ &= \overline{\dim}_B F. \end{aligned}$$

Nerovnost pro  $\underline{\dim}_B f(F)$  obdržíme analogicky.

(ii) Je-li  $f$  bilipschitzovské, pak podle lemmatu 2.4.12 je  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow f(\mathbb{R}^n)$  bijekce a existuje inverzní zobrazení  $g^{-1} : f(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Volme  $u, v \in f(\mathbb{R}^n)$  libovolně a položíme  $x = g^{-1}(u), y = g^{-1}(v)$ . Pak

$$K_1 \rho_n(x, y) = K_1 \rho_n(g^{-1}(u), g^{-1}(v)) \leq \rho_m(g(g^{-1}(u)), g(g^{-1}(v))) = \rho_m(u, v),$$

neboli

$$\rho_n(g^{-1}(u), g^{-1}(v)) \leq \frac{1}{K_1} \rho_m(u, v),$$

přičemž  $K_1, K_2$  jsou konstanty z definice. Tzn.  $g^{-1}$  je lipschitzovské.

Podle bodu (i) tedy platí

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B F &= \underline{\dim}_B g^{-1}(g(F)) \leq \underline{\dim}_B g(F), \\ \overline{\dim}_B F &= \overline{\dim}_B g^{-1}(g(F)) \leq \overline{\dim}_B g(F). \end{aligned}$$

Ovšem podle bodu (i) ovšem již víme, že také platí

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B g(F) &\leq \underline{\dim}_B F, \\ \overline{\dim}_B g(F) &\leq \overline{\dim}_B F. \end{aligned}$$

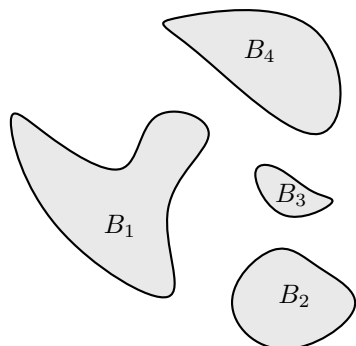
Z toho již plyne závěr tvrzení.

□

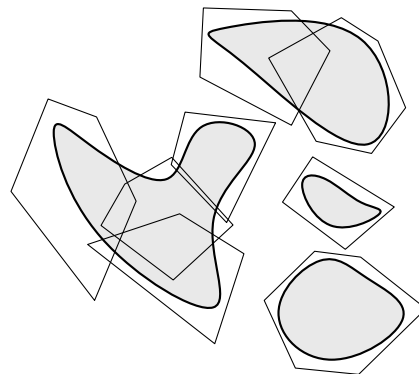
(Převzato z [2, str. 36].)

Právě dokázaná věta 2.4.13 (konkrétně bod (ii)) nám ve své podstatě říká, že box-counting dimenze nějakého útvaru  $F$  je invariantní vůči libovolnému bilipschitzovskému zobrazení  $f$ . Tento výsledek se nám bude hodit dále v kapitole 3 u tzv. *systémů iterovaných funkcí*.

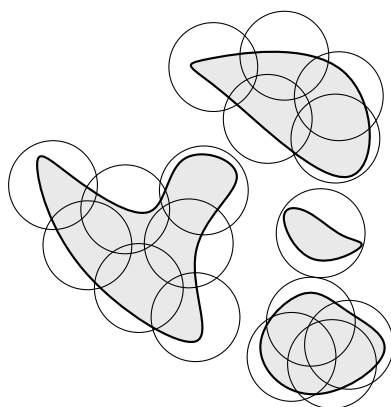
## 2.5 Hausdorffova míra a Hausdorffova dimenze



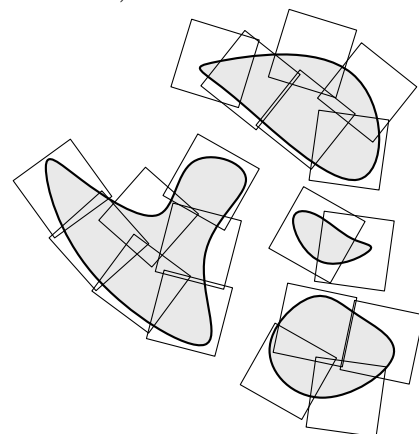
(a) Množina  $B = \bigcup_{i=1}^4 B_i$



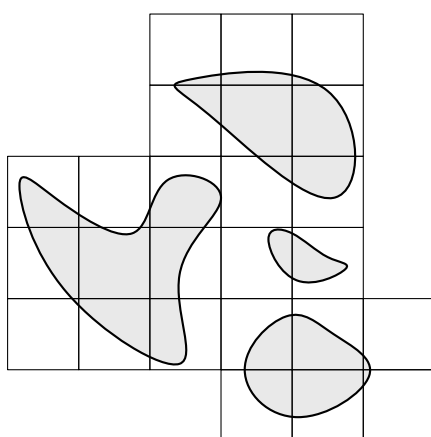
(b)  $\delta$ -pokrytí množiny  $B$  (viz definice 2.4.2)



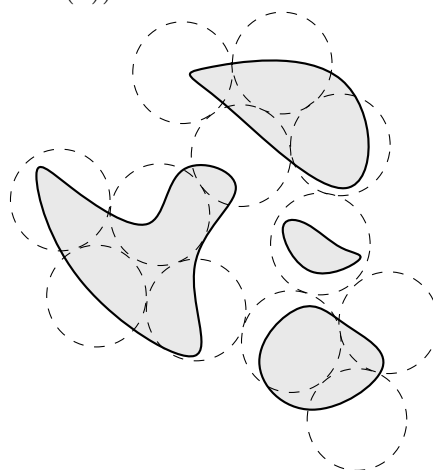
(c) Pokrytí uzavřenými koulemi (viz bod (i))



(d) Pokrytí pomocí kvádrů (viz bod (ii))

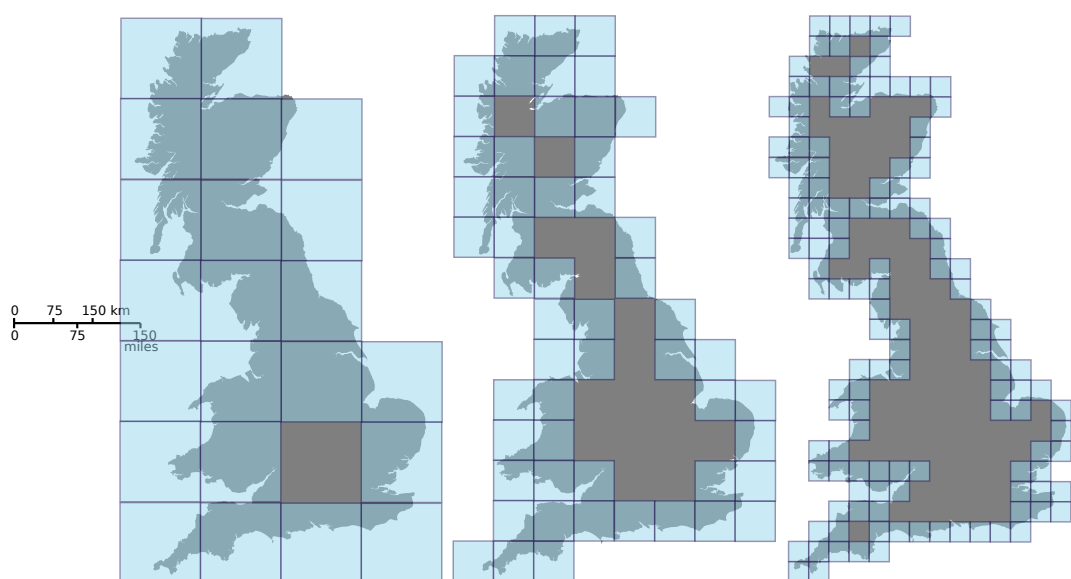


(e)  $\delta$ -sít (viz bod (iii))



(f) Pokrytí otevřenými po dvou disjunktními koulemi (viz bod (iv))

Obrázek 2.3: Ilustrace věty 2.4.4 (Inspirováno [2, str. 29])



Obrázek 2.4: Aproximace box-counting dimenze pobřeží Velké Británie. Převzato z Wikipedia Commons, [https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski%E2%80%93Bouligand\\_dimension#/media/File:Great\\_Britain\\_Box.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski%E2%80%93Bouligand_dimension#/media/File:Great_Britain_Box.svg). Viz též [https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski%E2%80%93Bouligand\\_dimension](https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski%E2%80%93Bouligand_dimension).

# Kapitola 3

## Klasifikace fraktálů

(TODO: Doplnit text ke kapitole.)

### 3.1 L-systémy

(TODO: Doplnit sekci.)

### 3.2 Systém iterovaných funkcí

(TODO: Doplnit sekci.)

### 3.3 Time Escape Algorithms

(TODO: Doplnit sekci.)

# Kapitola 4

## Generování fraktálů

(TODO: Doplnit kapitolu.)



# Kapitola 5

## Fraktály v praxi

(TODO: Doplnit kapitolu.)

# Seznam použité literatury

- [1] ENGELKING, R. (1989). *General topology*. Heldermann, Berlin, rev. and completed ed. ISBN 3-88538-006-4.
- [2] FALCONER, K. J. (2014). *Fractal geometry*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 3rd edition. ISBN 978-1-119-94239-9.
- [3] LUKEŠ, J. a MALÝ, J. (2013). *Measure and integral*. Matfyzpress, Praha, 3rd ed. ISBN 978-80-7378-253-5.
- [4] MANDELBROT, B. B. (1983). *Fractal geometry of nature*. Freeman and company, New York, vyd. 3. ISBN 978-0716711865.
- [5] NETUKA, I. (2016). *Integrální počet*. Matfyzpress, Praha, první vydání. ISBN 978-80-7378-334-1.
- [6] O'CONNOR, J. J. (Citováno 4. března 2025). Mactutor history of mathematics archive. *[online]*. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Vitali/>.
- [7] PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H. a SAUPE, D. (2004). *Chaos and Fractals*. Springer, New York, 2nd edition. ISBN 978-1-4684-9396-2.
- [8] ROYDEN, H. L. a FITZPATRICK, P. M. (2010). *Real analysis*. Prentice Hall, Boston, 4th ed. ISBN 978-0-13-511355-4.
- [9] VERNER, J. (Citováno 4. března 2025). Lebesgueovsky neměřitelné množiny. *[online]*. Dostupné z: <https://ktiml.mff.cuni.cz/~verner/download/nemeritelne.pdf>.
- [10] ZELINKA, I., VČELAŘ, F. a ČANDÍK, M. (2006). *Fraktální geometrie*. BEN - technická literatura, Praha, vydání 1. ISBN 80-7300-191-8.
- [11] ŠÁRKA VORÁČOVÁ, CSACHOVÁ, L., HÁJKOVÁ, V., HROMADOVÁ, J., MORAVCOVÁ, V., RICHTER, J., SURYNKOVÁ, P., ŠAROUNOVÁ, A., ŠAROUN, J., ŠRUBAŘ, J., ŠTAUBEROVÁ, Z. a TICHÝ, V. (2022). *Atlas geometrie*. Academia, Praha, vydání 2. ISBN 978-80-200-3336-9.

# Seznam obrázků

1.1	Příklad mapy pobřeží se spojnicí bodů $A$ a $B$ . . . . .	5
1.2	Odhad délky pobřeží, kde $n = 10$ při zvoleném $\varepsilon$ . . . . .	5
1.3	Část pobřeží od bodu $A$ v menším měřítku. . . . .	6
1.5	Princip Archimédovy metody. . . . .	7
1.6	Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku. . . . .	7
1.7	Prvních pět iterací Kochovy křivky. . . . .	8
1.8	První iterace Kochovy křivky „uvnitř“ druhé v menším měřítku. . . . .	9
1.9	Nultá a první iterace Kochovy vločky. . . . .	10
1.10	Čtvrtá iterace Kochovy vločky. . . . .	11
1.11	Rozdělení první iterace Kochovy vločky. . . . .	11
1.12	Nově vzniklé trojúhelníky v druhé iteraci. . . . .	12
1.13	Nultá až čtvrtá iterace Cantorova diskontinua. . . . .	13
1.14	Znázornění délek vyjmutých úseků. . . . .	13
1.15	Soběpodobnost čtverce. . . . .	14
1.16	Úsečka rozdělená na šest stejných částí. . . . .	14
1.17	Krychle rozdělená na 27 stejných částí. . . . .	15
1.18	Trojúhelník $T$ rozdělený na trojúhelníky $T_1, \dots, T_4$ . . . . .	16
1.19	Různé možnosti (pod)pokrytí úsečky. . . . .	19
1.20	Možné (pod)pokrytí čtverce. . . . .	19
2.1	Ilustrace k důkazu věty 2.2.6 . . . . .	27
2.2	Ilustrace měřitelnosti množiny $A$ . . . . .	30
2.3	Ilustrace věty 2.4.4 (Inspirováno [2, str. 29]) . . . . .	41
2.4	Aproximace box-counting dimenze pobřeží Velké Británie . . . . .	42

# Seznam tabulek

1.1	Hodnoty dimenze $d$ pro různé útvary. . . . .	15
1.2	Porovnání fraktálních dimenzí $d_k$ různých objektů. . . . .	18
1.3	Porovnání fraktální a topologické dimenze útvarů. . . . .	20

# Index

- $\sigma$ -aditivita, 25
- $\sigma$ -subaditivita, 25
- $n$ -rozměrná Lebesgueova míra, 30
- $n$ -rozměrný kvádr, 27
  
- aditivita, 25
  
- bilipschitzovské zobrazení, 38
- box-counting dimenze, 15, 31, 32
  - dolní box-counting dimenze, 32
  - horní box-counting dimenze, 32
  
- fraktální geometrie, 4
  - Cantorovo diskontinuum, 12
  - fraktál, 20
  - Kochova křivka, 8
  - Kochova vložka, 10
  - Lebesgueova pokrývací dimenze, 18
  - Sierpiňského trojúhelník, 9
  - topologická dimenze, 18
  
- kvádr
  - objem kvádrů, 27
  
- lebesgueovsky měřitelná množina, 30
- lipschitzovské zobrazení, 38
  
- Mandelbrot, 4
- monotonie míry, 25
- měřitelný prostor, 23
  - $\sigma$ -algebra, 22
  
- prostor s mírou, 24
  - aritmetická míra, 24
  - míra, 24
  
- soběpodobnost, 7
  
- teorie míry, 21
  
- Vitaliho konstrukce, 30
- vnější  $n$ -rozměrná Lebesgueova míra, 28