



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. David Weber

### **Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro střední  
školy

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední  
školy se sdruženým studiem  
Učitelství informatiky pro střední  
školy

Praha (TODO: 2024)



Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... ..

Podpis autora



(TODO: Doplnit poděkování)



Název práce: Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry

Autor: Bc. David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: (TODO: Doplnit abstrakt (česky))

Klíčová slova: , klicova slova

Title: Fractal geometry for (experienced) amateurs

Author: Bc. David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: (TODO: Doplnit abstrakt (anglicky))

Keywords: keywords





# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>3</b>
<b>1 Úvod do fraktálů</b>	<b>5</b>
1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie? . . . . .	5
1.2 Soběpodobnost . . . . .	8
1.2.1 Kochova křivka . . . . .	8
1.2.2 Sierpiňského trojúhelník . . . . .	10
1.2.3 Kochova vločka . . . . .	12
1.2.4 Cantorovo diskontinuum . . . . .	14
1.3 Fraktální dimenze . . . . .	15
1.3.1 Chápání konceptu dimenze . . . . .	15
1.3.2 Dimenze fraktálů . . . . .	18
1.3.3 Topologická dimenze . . . . .	19
1.4 Co je to fraktál? . . . . .	22
<b>2 Teorie míry a dimenze</b>	<b>23</b>
2.1 Základní pojmy a značení . . . . .	24
2.1.1 Metrické pojmy . . . . .	24
2.1.2 Limity posloupností . . . . .	26
2.1.3 Limity funkcí . . . . .	28
2.1.4 Bodová a stejnoměrná konvergence . . . . .	28
2.1.5 Topologické pojmy . . . . .	29
2.1.6 Lipschitzovská zobrazení . . . . .	30
2.2 Prostory s mírou . . . . .	31
2.2.1 Měřitelné prostory . . . . .	31
2.2.2 Míra . . . . .	32
2.3 Lebesgueova míra . . . . .	35
2.4 Box-counting dimenze . . . . .	40
2.4.1 Definice a výpočet . . . . .	40
2.4.2 Vlastnosti . . . . .	48
2.5 Hausdorffova míra a Hausdorffova dimenze . . . . .	52
2.5.1 Definice Hausdorffovy míry . . . . .	52
2.5.2 Stručně k vlastnostem Hausdorffovy míry . . . . .	57
2.5.3 Hausdorffova dimenze . . . . .	58
<b>3 Hausdorffův metrický prostor</b>	<b>63</b>

3.1	Hausdorffova metrika . . . . .	63
3.2	Kompaktní množiny a konvergence . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Klasifikace fraktálů</b>	<b>69</b>
4.1	L-systémy . . . . .	69
4.1.1	Odbočka k formálním jazykům a gramatikám . . . . .	71
4.1.2	Definice L-systému . . . . .	76
4.1.3	Želví grafika . . . . .	77
4.1.4	Ukázky fraktálů a jejich L-systémů . . . . .	81
4.2	Systém iterovaných funkcí . . . . .	84
4.2.1	Kontrakce v Hausdorffově metrickém prostoru . . . . .	85
4.3	Time Escape Algoritmy . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Generování fraktálů</b>	<b>89</b>
	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>91</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>93</b>
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>94</b>
	<b>Index</b>	<b>95</b>

# Předmluva

(TODO: napsat předmluvu)



# Kapitola 1

## Úvod do fraktálů

Pod pojmem „geometrie“ si čtenář pravděpodobně vybaví rovinnou či prostoro-  
vou geometrii pracující s jednoduchými útvary jako trojúhelník, obdélník, kruh,  
kvádr, jehlan, apod. a s útvary z nich složenými. V reálném světě tak lze nalézt  
mnoho uplatnění této „standardní“ geometrie, kupříkladu ve strojírenství, staveb-  
nictví, i jinde. Často tak můžeme mít o světě představu právě ve smyslu euklei-  
dovské geometrie. Lze však nalézt řadu objektů, pro jejichž popis tyto představy  
jsou limitující. Např. v přírodě mrak nelze popsat jako kouli, horu nelze popsat  
jako jehlan a ani pobřeží nelze určitě popsat jako kružnici.

Mnohé přírodní obrazce již nelze jednoduše modelovat pomocí nástrojů „stan-  
dardní“ eukleidovské geometrie, s níž jsme seznámeni již od základní školy a  
která byla po mnoho století základním nástrojem pro popis a porozumění mate-  
matickému prostoru. Často zde hraje roli i jistá nahodilost projevující se v jejich  
charakteru. *Fraktální geometrie* se zabývá nepravidelnými a často se opakujícími  
vzory, které se vyskytují v přírodě i umění. Tyto vzory jsou často složité a zdánlivě  
chaotické, ale fraktální geometrie nám umožňuje je analyzovat a pochopit.

Vznik fraktální geometrie se datuje od roku 1975, za jejíhož zakladatele je pova-  
žován francouzsko-americký matematik BENOÎT MANDELBROT (1924–2010). His-  
toricky za jejím vznikem stály objevy matematických struktur, které nespadaly  
pod „představy“ do tehdy známé eukleidovské geometrie. Byly často považovány  
za „patologické“, nicméně matematici, kteří je vytvořili, je považovali za důle-  
žité pro ukázkou bohatých možností, které nabízí svět matematiky překračující  
možnosti jednoduchých struktur, které viděli okolo sebe. [7, str. 33]

### 1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?

Položme si na začátek trochu jinou otázku, kterou si z počátku položil i Benoît  
Mandelbrot: *Jaká je podstata tvaru pobřeží?* Ta se stala podstatnou v jeho práci  
„*How Long Is the Coast of Britain?*“. Uvažme část pobřeží s počátečním a konco-  
vým bodem (viz obrázek 1.1). Zjevně jeho délka je zdola omezena délkou spojnice  
koncových bodů  $A$  a  $B$ , nicméně typické pobřeží je velmi nepravidelné a klikaté, a  
jeho skutečná délka je tak často mnohem delší. Existují různé metody, které nám  
umožňují určit přesněji jeho délku. Několik z nich je popsáno v knize [7, str.



Obrázek 1.1: Příklad mapy pobřeží se spojnicí bodů  $A$  a  $B$ .

79], pro uvedení do problematiky si zde však vystačíme s tou nejednodušší.

Předpokládejme, že pobřeží, které zkoumáme, má pevné hranice (tj. zanedbáváme např. přílivy a odlivy nastávající během roku), a dále jsme schopni rozlišovat libovolně krátké vzdálenosti.

Mějme zadané libovolné  $\varepsilon > 0$ . Podél pobřeží začneme umísťovat tyče tak, že po každém umístění provedeme na mapě krok délky **nejvýše**  $\varepsilon$ , přičemž začínáme v bodě  $A$  a postupujeme až k bodu  $B$  (popř. pokud měříme délku pobřeží ostrova, pokračujeme dokud se nevrátíme tam, kde jsme začali). Předpokládejme, že jsme provedli celkově  $n(\varepsilon)$  kroků (jejich počet je závislý na zvolené délce kroku). *Přibližnou délku pobřeží*  $\ell(\varepsilon)$  pak stanovíme jako

$$\ell(\varepsilon) = n(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Nyní by nás mohlo napadnout, že pro zmenšující se  $\varepsilon$ , tj.  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , bude hodnota



Obrázek 1.2: Odhad délky pobřeží, kde  $n = 10$  při zvoleném  $\varepsilon$ .

$\ell(\varepsilon)$  konvergovat ke skutečné délce pobřeží. Tzn. označíme-li skutečnou délku pobřeží  $L$ , pak bychom mohli očekávat, že platí

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ell(\varepsilon). \quad (1.1)$$

Jenže, bohužel, limita (1.1) ve skutečnosti bude rovna  $\infty$ . Proč? Je třeba si uvědomit, že zde pracujeme s *mapou* pobřeží, která má určité *měřítko*. Pokud bychom měli pobřeží na mapě s měřítkem  $1 : 100\,000$ , uvidíme méně detailů, než kdybychom jej zkoumali na mapě s měřítkem  $1 : 1\,000$ . (Viz obrázek 1.3.)

Nově odhalené detaily (menší poloostřívky apod.) zde přispívají k celkové délce pobřeží  $\ell(\varepsilon)$ . Postupným zvětšováním měřítka mapy bychom tak odhalili další detaily. Naše původní idea tak selhává, neboť (v „klasickém“ pojetí délky) pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  hodnota  $\ell(\varepsilon)$  poroste nade všechny meze, tj.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ell(\varepsilon) = \infty$ .

Nabízí se otázka: Proč se toto děje? Pokud se ohlédneme zpět za eukleidovskou geometrií, tento problém zde nenastává. Např. u kružnice v eukleidovské rovině  $\mathbb{E}_2$  změnou měřítka žádné další detaily křivky neobjevíme (podobně u jiných geometrických útvarů, viz obrázky 1.4a a 1.4b). Díky tomu můžeme v případě počítání obvodu kružnice použít např. Archimédovu metodu.



Obrázek 1.3: Část pobřeží od bodu  $A$  v menším měřítku.



(a) Kružnice v menším měřítku.



(b) Část kružnice ve větším měřítku.

Máme-li kružnici o poloměru  $r > 0$ , pak jí můžeme vepsat libovolný pravidelný  $n$ -úhelník (viz obrázek 1.5a). Obvod pravidelného  $n$ -úhelníku is označíme  $O_n$  a délku jeho strany  $x$  (viz obrázek 1.5b). Tu jsme schopni stanovit užitím elementární goniometrie, tj.

$$x = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

a tedy obvod

$$O_n = 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

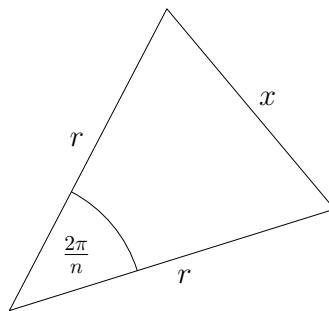
Pro rostoucí  $n$  bude obvod pravidelného  $n$ -úhelníku stále lépe aproximovat obvod původní kružnice (viz obrázek 1.6). Limitním přechodem (tj. pro  $n \rightarrow \infty$ ) tak můžeme odvodit vzorec pro obvod kružnice:

$$O = \lim_{n \rightarrow \infty} 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

Idea aproximace pomocí „zjemňování“ zde skutečně funguje a délka ve standardním pojetí tak dává smysl, jak bychom mohli očekávat. Křivka, kterou tvoří pobřeží, má však oproti kružnici jiný geometrický charakter. Délka pobřeží  $\infty$ , k níž Mandelbrot došel, tak dává smysl z *geometrického pohledu*, avšak výsledek to není moc užitečný.

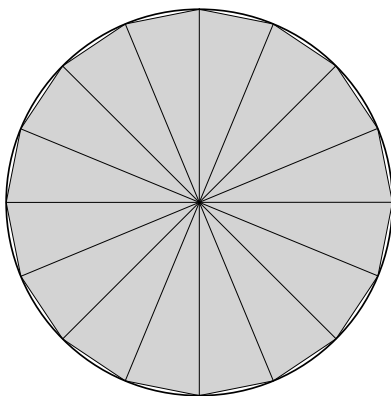


(a) Pravidelný osmiúhelník vepsaný kružnici.



(b) Část vepsaného pravidelného  $n$ -úhelníku.

Obrázek 1.5: Princip Archimédovy metody.



Obrázek 1.6: Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku.

## 1.2 Soběpodobnost

Mandelbrot si uvědomil, že struktura pobřeží se charakterově vymyká útvarům do tehdy známým eukleidovské geometrii, neboť mapy s různými měřítky poskytovaly různou úroveň detailů, které hrály netriviální roli v jeho celkové délce. Učinil však jiné zásadní pozorování, a to sice, že mnoho detailů má společné rysy, které se opakují. Hodně z nich se shodovalo s výjimkou jejich měřítka. [7, str. 96]

Ve fraktální geometrii se pro tento úkaz uchytil termín *soběpodobnost* (angl. *self-similarity*). Útvar nazýváme soběpodobným, **pokud se sám sobě podobný v libovolném měřítku** [23, str. 220] nebo pokud **část útvaru je podobná jeho celku**. Zmíněná podoba může být míněna přibližně (např. v případě pobřeží je nejspíše jasné, že žádné z jeho detailů nesdílí společné rysy přesně), ale v dalších částech si předvedeme soběpodobnost *přímou*.

### 1.2.1 Kochova křivka

Jak jsme si již uvedli, za otce fraktální geometrie je považován Mandelbrot, avšak mnoho fraktálních křivek bylo známo již dříve (čtenář promine, že jsme blíže ne-



specifikovali termín „fraktální“, jeho přesný význam pro nás však zatím nebude stěžejní). Jako první se podíváme na jednu z nejznámějších, kterou objevil roku 1904 švédský matematik HELGE VON KOCH (1870–1924), dnes známou pod názvem *Kochova křivka*. [17, str. 61] Na začátku vezmeme úsečku délky 1. Vyjmeme prostřední (tj. druhou) třetinu a nahradíme ji dvěma úsečkami délky  $1/3$ , tak, aby na sebe navazovaly v krajních bodech. Tento proces následně opakujeme pro nově vzniklé úsečky. Obecně u úsečky délky  $l$  nahradíme její prostřední třetinu dvojicí úseček délek  $l/3$  (viz obrázek 1.7). V první řadě si můžeme všimnout, že v každé



Obrázek 1.7: Prvních pět iterací Kochovy křivky.

další iteraci jsou nově vzniklé podobné původnímu celku, tedy v předešlé iteraci (viz obrázek 1.8). Pokud by tento proces pokračoval do nekonečna, pak by každá ze čtyř částí křivky představovala **celý původní obrazec** ve zmenšeném měřítku (byla by tedy soběpodobná). Zkusme se nyní podívat na délku křivky. V první iteraci začínáme s úsečkou délky<sup>1</sup> 1, která se v druhé iteraci změní na křivku délky  $4/3$ . Není těžké si rozmyslet, že obecně v  $n$ -té iteraci bude délka křivky  $\ell_n$  rovna

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

<sup>1</sup>Mohli bychom také začít s obecnou délkou  $\ell_0$ , ale ta by se však při výpočtu projevila pouze jako konstantní násobek.



Obrázek 1.8: První iterace Kochovy křivky „uvnitř“ druhé v menším měřítku.

Posloupnost  $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$  je geometrická s kvocientem  $q = 4/3 > 1$ , a tedy její limita je  $\infty$ . Kochova křivka má tak *nekonečnou délku*.

### 1.2.2 Sierpiňského trojúhelník

Přesuneme nyní k plošným útvarům, neboť i zde lze sledovat některé zajímavé vlastnosti. Jedním z představitelů je tzv. *Sierpiňského trojúhelník*, který objevil roku 1916 polský matematik WACŁAW SIERPIŃSKI (1882–1969). [17, str. 61] Na začátku (v nulté iteraci) začínáme s rovnostranným trojúhelníkem se stranou délky 1 (též lze začít s obecnou délkou  $\ell_0$ ). V něm sestrojíme střední příčky (tj. spojnice středů stran trojúhelníka), které společně utvoří strany rovnostranného trojúhelníka čtvrtinového obsahu původního trojúhelníka (to vychází z faktu, že střední příčka v libovolném trojúhelníku má délku rovnou polovině délky strany, s níž je rovnoběžná). Obsah nově vzniklého trojúhelníku odebereme a postup opakujeme pro zbývající trojici trojúhelníků v původním obrazci (viz obrázek 1.9).

I zde si lze všimnout, že po nekonečně mnoha iteracích budou menší trojúhelníky přesnými kopiemi původního obrazce. Zkusme se opět podívat, jak je to s obvodem obrazce. Každá ze středních příček, které vzniknou v další iteraci, má poloviční délku vůči délce strany  $l$  původního trojúhelníku. Obvod obrazce se tak zvětší o  $3l/2$ . Počet trojúhelníků poroste exponenciálně, neboť v každé iteraci odstraněním jednoho trojúhelníku vzniknou tři nové, tj. obvod se po  $k$ -té iteraci zvětší o  $3^k \cdot (1/2)^k = (3/2)^k$  (na začátku pro  $k = 0$  je obvod 3). Obvod obrazce  $O_n$  po  $n$  iteracích bude roven součtu přírůstků přes všechny iterace, tj.

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k. \quad (1.2)$$

Řada  $\sum_{k=1}^n (3/2)^k$  je geometrická s kvocientem  $3/2$ . Zde si vzpomeňme na vzorec pro její součet.

**Věta 1.2.1** (Součet geometrické řady). *Nechť je dána geometrická posloupnost  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  s kvocientem  $q \neq 1$ . Pak pro součet prvních  $n$  členů platí*

$$\sum_{k=1}^n g_k = g_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

*Důkaz.* Důkaz vzorce zde vynecháme, nicméně čtenář si jej může snadno ověřit např. indukcí podle  $n$ .  $\square$



Obrázek 1.9: První čtyři iterace Sierpiňského trojúhelníka.

Celkově tak po aplikaci vzorce z 1.2.1 v rovnosti (1.2) dostaneme po jednoduché úpravě

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k = 3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3 + 3 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Posloupnost  $\{O_n\}_{n=0}^{\infty}$  je opět geometrická s kvocientem  $q = 3/2 > 1$ , tzn. její limita je opět  $\infty$ . Obvod Sierpiňského trojúhelníku tedy roste nade všechny meze. (Výpočet jsme si mohli též zjednodušit uvědoměním si, že obvod obrazce roste s faktorem  $3/2$  a vzorec pro  $O_n$  jsme tak mohli určit ihned.)

Podívejme se nyní na obsah útvaru. Zde si již výpočet trochu usnadníme. Po každé iteraci se jeho obsah zmenší na  $3/4$  obsahu původního obrazce. Lze snadno odvodit, že obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky  $a$  je

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Na začátku je obsah útvaru  $S_0 = \sqrt{3}/4$ . Tj. celkově po  $n$ -iteracích bude obsah  $S_n$  roven

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (1.3)$$

Výraz (1.3) má pro  $n \rightarrow \infty$  limitu nulovou, tedy zatímco Sierpiňského trojúhelník má *nekonečný obvod*, jeho obsah je však naopak *nulový*.

### 1.2.3 Kochova vločka

Rozšiřující variantou Kochovy křivky 1.2.1 je tzv. *Kochova vločka*, která se skládá ze tří Kochových křivek. Rozdíl je zde v tom, že začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1. Na každou ze stran aplikujeme stejný proces, jako předtím, tj. odebereme prostřední třetinu, nahradíme ji dvěma na sebe navazujícími úsečkami délek  $1/3$  a opakujeme pro každou nově vzniklou úsečku (viz obrázky 1.10 a 1.11). Podíváme-li se na obvod, nejspíše nás nepřekvapí, že ten



Obrázek 1.10: Nulá a první iterace Kochovy vločky.

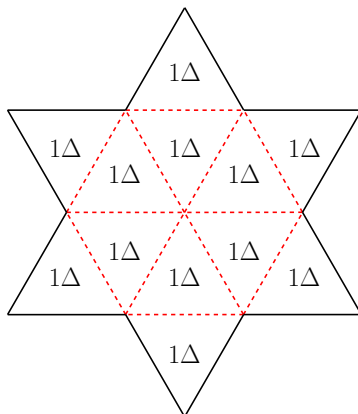


Obrázek 1.11: Čtvrtá iterace Kochovy vločky.

je i zde nekonečný<sup>2</sup> (už z principu, že každá strana původního rovnostranného trojúhelníka představuje samostatnou Kochovu křivku). Obsah vzniklého útvaru je však již zajímavější. Pro zjednodušení výpočtu si rozdělme útvar na *stejně*

<sup>2</sup>Obvod Kochovy křivky po  $n$ -té iteraci je  $o_n = 3 \cdot (4/3)^n$ .

rovnostranné trojúhelníky podle obrázku 1.12, jejichž obsah je roven  $1/12$  obsahu obrazce v nulté iteraci. Výsledný obsah se tedy pokusíme vyjádřit relativně vůči



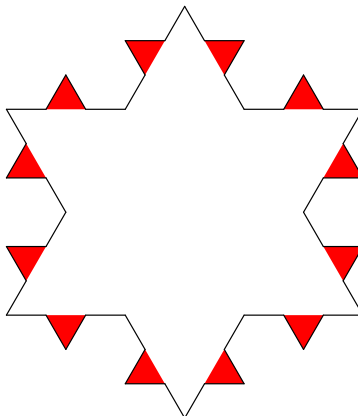
Obrázek 1.12: Rozdělení první iterace Kochovy vločky.

obsahům daných trojúhelníků, na něž jsme obrazec rozdělili, a pak jej pouze přepočítáme. Jejich obsah si označme  $\Delta$ . Tedy obsah Sierpiňského trojúhelníku v nulté iteraci lze vyjádřit jako  $S_0 = 9\Delta$ . Po první iteraci vzniknou na každé ze strany 3 nové trojúhelníky o obsahu  $1/9 \cdot \Delta$ . V každé další iteraci vzniknou z jedné úsečky 4 nové. Obecně po  $n$  iteracích jich tedy bude  $3 \cdot 4^n$ . (Při výpočtu musíme počítat s o jedna nižší mocninou, neboť trojúhelníky vznikají „na úsečkách“ z předešlé iterace, nikoliv té aktuální.)

Zaměříme se nyní pouze trojúhelníky, které vznikly v aktuální iteraci (viz obrázek 1.13). Součet jejich obsahů nám dává *přírůstek obsahu* v obecné  $n$ -té iteraci. Označíme-li tento přírůstek  $B_n$ , pak platí

$$B_n = \underbrace{3 \cdot 4^{n-1}}_{\text{počet úseček}} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \Delta}^{\text{obsah nových troj.}} = 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \Delta,$$

kde  $n \geq 1$ . Nyní můžeme již vyšetřit obsah v  $n$ -té iteraci  $S_n$  a posléze i celkový



Obrázek 1.13: Nově vzniklé trojúhelníky v druhé iteraci.

obsah výsledného obrazce  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Pro  $n \geq 1$  platí

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + \sum_{k=1}^n B_k = 9\Delta + 3\Delta \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = 9\Delta + 3\Delta \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - 0\right) \\ &= 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta = \frac{72}{5}\Delta. \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníků, na než jsme rozdělili první iteraci Kochovy vložky, je

$$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9}$$

a tedy celkově

$$S = \frac{72}{5}\Delta = \frac{72}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Byl to trochu delší výpočet, nicméně jsme zjistili, že Kochova vložka má (stejně jako Kochova křivka) *nekonečnou délku (obvod)*, ale obsah má *konečný*.

## 1.2.4 Cantorovo diskontinuum

Podívejme se ještě na jeden typ fraktálníhoho objektu, kterým je tzv. *Cantorovo diskontinuum*<sup>3</sup> Myšlenka je zde velmi jednoduchá: začínáme s úsečkou délky 1 (nultá iterace) a následně odebereme prostřední třetinu, čímž vznikne první iterace. V dalších iteracích postupujeme analogicky pro vzniklé úsečky (viz obrázek 1.14).



Obrázek 1.14: Nultá až čtvrtá iterace Cantorova diskontinua.

Nově vzniklé úsečky třetinové délky jsou kopiemi původní úsečky. Stejně jako u předešlých fraktálů nás i zde bude zajímat limitní chování tohoto procesu. Lze očekávat, že postupným odebíráním zbudou úsečky nulové délky. O tom se lze přesvědčit např. tak, že spočítáme limitu celkových délek všech odebraných úseků. V první iteraci odebereme úsečku délky  $1/3$ , v druhé iteraci odebereme dvě celkové délky  $2 \cdot (1/3)^2 = 2/9$ , ve třetí vyjmeme čtyři celkové délky  $4 \cdot (1/3)^3 =$



Obrázek 1.15: Znázornění délek vyjmutých úseků.

$4/27$ , atd. (viz obrázek 1.15). Obecně počet odebraných úseků roste s mocninou dvojky, jejichž délky klesají s mocninou trojky, tedy v  $n$ -té iteraci odebereme úsek délky  $2^n(1/3)^{n+1}$ . Označíme-li tedy délku zbylých úseků  $\ell_n$  po  $n$  iteracích a  $\bar{\ell}_n$  délku odebraných úseků, pak určitě platí  $\ell_n = 1 - \bar{\ell}_n$ . Protože nás zajímá délka *všech* odebraných úseků, pak po  $n$  iteracích bude celková délka rovna

$$\bar{\ell}_n = \sum_{k=0}^n 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}. \quad (1.4)$$

Označíme-li si limitu výrazů posloupností  $\ell_n$ , reps.  $\bar{\ell}_n$ , jako  $\ell$ , resp.  $\bar{\ell}$ , pak dostaneme

$$\bar{\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\ell}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Z toho již triviálně plyne, že

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \bar{\ell}_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\ell}_n = 1 - 1 = 0, \quad (1.5)$$

tzn. na konci procesu zbude Cantorovo diskontinuum délky nula.

## 1.3 Fraktální dimenze

### 1.3.1 Chápání konceptu dimenze

Výčet útvarů v sekci 1.2 splňoval zásadní vlastnost, a to sice, že všechny z nich byly *soběpodobné*. V eukleidovské geometrii lze však u mnohých základních objektů pozorovat stejnou vlastnost. Např. čtverec lze určitě prohlásit v jistém smyslu za soběpodobný, neboť jej lze rozdělit na podobné útvary (viz obrázek 1.16). Podobně např. i obyčejná úsečka je taktéž soběpodobná, protože ji můžeme rozdělit na obecně  $k$  stejných částí (viz obrázek 1.17).

K čemu nám takové uvědomnění vlastně je? Zmenšíme-li úsečku  $k$ -krát, pak budeme potřebovat přesně  $k$  těchto částí, abychom dostali úsečku původní délky.

<sup>3</sup>Též se mu říká *Cantorova množina* (angl. „Cantor set“). Dvourozměrnou variantou je pak tzv. *Cantorův prach* (angl. „Cantor dust“). Slovo *prach* je zde míněno v přeneseném významu, neboť (podobně jako v této podsekci) lze ukázat, že vzniklé útvary mají v limitě nulový obsah.



(a) Čtverec rozdělený na čtyři menší čtverce.

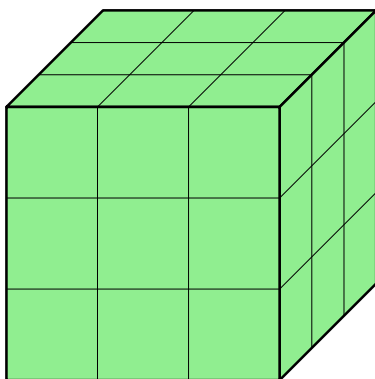
(b) Jiná možnost rozdělení čtverce.

Obrázek 1.16: Soběpodobnost čtverce.



Obrázek 1.17: Úsečka rozdělená na šest stejných částí.

U čtverce (nebo obdélníku obecně) při zmenšení délky strany  $k$ -krát budeme potřebovat  $k^2$  daných útvarů pro obdržení čtverce s původním obsahem.<sup>4</sup> Pro krychli bude situace zcela analogická,  $k$ -krát zmenšená kopie bude potřeba  $k^3$ -krát, abychom dostali krychli o původním objemu (viz obrázek 1.18). Lze si všim-



Obrázek 1.18: Krychle rozdělená na 27 stejných částí.

nout, že v závislosti na *dimenzi* objektu se mění daný exponent. Vztah lze tak zobecnit na

$$N(k) = k^d \quad (1.6)$$

kde  $N(k)$  je počet nových útvarů v závislosti na faktoru  $k$  a  $d$  je dimenze.

Toto je jeden z možných způsobů, jak lze chápat koncept dimenze. Jednoduchou

---

<sup>4</sup>Obdélník zmenšený  $k$ -krát bude mít strany délek  $a/k$ ,  $b/k$ , tedy jeho obsah bude

$$\frac{ab}{k^2} = \frac{S}{k^2},$$

kde  $S$  je obsah původního obdélníka.



úpravou rovnosti (1.6) dostaneme

$$d = \log_k N(k) = \frac{\ln N(k)}{\ln k}.$$

(Obecně lze volit jakýkoliv přípustný základ logaritmů, tj  $d = \log_b N(k)/\log_b k$  pro  $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ .) Dimenze v tomto pojetí skutečně dává dobrý smysl. Pro

Útvar	$N(k)$	$d = \ln N(k)/\ln k$
Úsečka	3	1
Čtverec	9	2
Krychle	27	3
Teserakt	81	4

Tabulka 1.1: Hodnoty dimenze  $d$  pro různé útvary.

„klasické“ geometrické objekty vychází dimenze vždy celočíselně.

Na této myšlence je založen pojem tzv. *fraktální dimenze*. Existuje více způsobů její definice. Jedna z nich, které se dále nyní v této sekci budeme držet, se v anglicky psané literatuře nazývá „*box-counting dimension*“, odkud plyne i značení  $\dim_B$ . Pro útvar  $F$  (formálně vzato množinu bodů) definujeme

$$\dim_B F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \quad (1.7)$$

(Převzato z [21, str. 93] a [5, str. 28].) Výraz  $1/\varepsilon$  zde představuje faktor podobnosti jako původní  $k$  (samotné  $\varepsilon$  tak hraje roli měřítka), avšak největší rozdíl zde představuje zkoumání „limitního chování“ daného výrazu.

**Příklad 1.3.1** (Fraktální dimenze úsečky). Začneme asi nejjednodušším příkladem výpočtu fraktální dimenze, a to u úsečky (označme  $\ell$ ). Představme si, že úsečku *jednotkové délky* rozdělíme na  $N_\varepsilon(\ell) = n$  shodných dílů. Pak měřítka libovolného dílu je

$$\varepsilon = \frac{1}{n} = n^{-1}.$$

(Zde je dobré si uvědomit, že pro  $n \rightarrow \infty$ , tedy zjemňování dělení úsečky, platí, že  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .) Fraktální dimenzi úsečky vypočteme z definice jako

$$\dim_B \ell = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(\ell)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n} = 1.$$

**Příklad 1.3.2** (Fraktální dimenze čtverce). Podobně, jako v příkladu 1.3.1 výše, můžeme stanovit i fraktální dimenzi čtverce (označme  $S$ ). Uvažujme tedy čtverec o jednotkovém obsahu, který rozdělíme  $N_\varepsilon(S) = n$  shodných útvarů. Přitom víme, že obsah mění kvadraticky vůči délce strany. Měřítka nového čtverce tak bude

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n}} = n^{-1/2}$$

a fraktální dimenze vychází

$$\dim_B S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{2} \ln n} = 2.$$

Pro krychli bude výpočet naprosto analogický (viz příklad 1.3.2). Obecně pro  $d$ -rozměrnou krychli bude její fraktální dimenze<sup>5</sup> rovna  $d$ .

Zkusme se nyní odprostit od krychle k trochu jinému útvaru.

**Příklad 1.3.3** (Fraktální dimenze trojúhelníku). Podívejme se, jak to dopadne s fraktální dimenzí *obecného trojúhelníku*. Každý trojúhelník  $T$  lze rozdělit na čtveřici *vzájemně shodných trojúhelníků*  $T_1, \dots, T_4$ , které vzniknou sestrojením středních příček v původním trojúhelníku (viz obrázek 1.19). Délka každé střední



Obrázek 1.19: Trojúhelník  $T$  rozdělený na trojúhelníky  $T_1, \dots, T_4$ .

příčky odpovídá polovině délky strany, s níž je rovnoběžná, tedy obsah každého z nich je *čtvrtina obsahu původního* trojúhelníku  $T$ . Pokud obecně trojúhelník  $T$  rozdělíme<sup>6</sup> takto na obecně  $N_\varepsilon(T) = 4^n$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$  shodných částí, pak měřítko každé z nich bude  $\varepsilon = (1/2)^n$ . Fraktální dimenze tak vychází:

$$\dim_B T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \ln 2}{n \ln 2} = 2.$$

Pro jednoduché útvary vychází dimenze tak, jak bychom mohli očekávat. K zajímavějším výsledkům však dospějeme u fraktálů, na něž se blíže podíváme v následující podsekcí 1.3.2.

## 1.3.2 Dimenze fraktálů

Co kdybychom však zkusili podobnou myšlenku aplikovat i na *fraktální objekty*? Zkusme to. Pro připomenutí jednotlivých křivek a výsledků k nim si dovoluji čtenáře opětovně odkázat na sekci 1.2, kde jsou podrobněji rozebrány.

- **Kochova křivka**  $F_{KC}$ . V každé iteraci nahrazujeme každou úsečku čtyřmi novými. Kompletní Kochova křivka tak obsahuje právě *čtyři* kopie sebe

<sup>5</sup>Obdobnou úvahou dojdeme k měřítku  $\varepsilon = n^{-1/d}$ .

<sup>6</sup>Výpočet bychom mohli i zde provést ve stejném duchu jako u úsečky, čtverce nebo krychle. Počet částí, na něž rozdělíme trojúhelník, označíme  $N_\varepsilon(T) = n$ , přičemž měřítko pak bude  $\varepsilon = n^{-1/2}$ .

sama zmenšených na třetinu, tj. v  $n$ -té iteraci je  $N_\varepsilon(F_{KC}) = 4^n$ , jak jsme již odvodili (viz podsekcce 1.2.1).<sup>7</sup> Měřítko nové křivky je tak  $\varepsilon = (1/3)^n$ .

$$\dim_B F_{KC} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(F_{KC})}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618595 \dots \quad (1.8)$$

- **Kochova vložka  $F_{KS}$ .** Začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1, na jehož stranách postupně vznikne Kochova křivka. V  $n$ -té iteraci je obvod Kochovy vložky  $o_n$  roven  $3 \cdot 4^n$ , tj. i  $N_\varepsilon(F_{KS}) = 3 \cdot 4^n$ , kde měřítko<sup>8</sup> nově vzniklých úseček je  $\varepsilon = 1/3 \cdot (1/3)^n = (1/3)^{n+1}$ . Není těžké se přesvědčit, že fraktální dimenze vychází stejně, jako u Kochovy křivky:

$$\dim_B F_{KS} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3 \cdot 4^n}{\ln 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n \overbrace{\left(1 + \frac{\ln 3}{\ln 4^n}\right)}^{\rightarrow 1}}{\ln 3^n \underbrace{\left(1 + \frac{\ln 3}{\ln 3^n}\right)}_{\rightarrow 1}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \quad (1.9)$$

(TODO: Jak to bude s varinátou výpočtu pro plochu?)

- **Sierpiňského trojúhelník  $F_{ST}$ .** V každé iteraci vynecháme prostřední trojúhelník, čímž vznikne *trojice* nových trojúhelníků s *polovičním* měřítkem. Tzn.  $N_\varepsilon(F_{ST}) = 3^n$  pro  $\varepsilon = (1/2)^n$ , a tedy

$$\dim_B F_{ST} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5849625 \dots \quad (1.10)$$

- **Cantorovo diskontinuum  $F_{CD}$ .** Vždy vyjmemme prostřední třetinu úsečky, čímž obdržíme *dvojici* úseček *třetinové* délky, tj.  $N_\varepsilon(F_{CD}) = 2^n$  pro  $\varepsilon = (1/3)^n$ . Fraktální dimenze tak vychází

$$\dim_B F_{CD} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309297 \dots \quad (1.11)$$

Udělejme si nyní menší souhrn a porovnání dosavadně získaných výsledků (viz tabulka 1.2). Můžeme si všimnout, že zatímco u „klasických“ objektů vychází fraktální dimenze *celočíslná*, u (zmíněných) fraktálů vychází *neceločíslně*, ba dokonce i iracionálně.

### 1.3.3 Topologická dimenze

Výsledky z předešlé části 1.3.2 se můžou zdát poněkud překvapující. Jak je vůbec možné, že dimenze nemusí vycházet nutně celočíselná? Ač se to možná zdá

<sup>7</sup>Lze však zvolit i jiné dělení. Např. lze na Kochovu křivku nahlížet, že obsahuje *16 kopií* sebe sama zmenšených na *devětinu*.

<sup>8</sup>Měřítko se ve srovnání s Kochovou křivkou liší v mocnině, neboť délku nových úseků porovnáváme s obvodem celého trojúhelníku, nikoliv pouze délkou jedné jeho strany. Nicméně ve výpočtu bych se mohli omezit i jen na jednu ze stran, výpočet by byl tak zcela identický, jako u Kochovy křivky.

Útvar $F$	$\varepsilon$	$N_\varepsilon(F)$	$\dim_B F$
Úsečka	$n^{-1}$	$n$	1
Čtverec	$n^{-1/2}$	$n$	2
Krychle	$n^{-1/3}$	$n$	3
Teserakt	$n^{-1/4}$	$n$	4
$d$ -rozměrná krychle	$n^{-1/d}$	$n$	$d$
Obecný trojúhelník	$(1/2)^n$	$4^n$	2
Kochova křivka	$(1/3)^n$	$4^n$	1,2618595...
Kochova vločka	$(1/3)^{n+1}$	$3 \cdot 4^n$	1,2618595...
Sierpiňského trojúhelník	$(1/2)^n$	$3^n$	1,5849625...
Cantorovo diskontinuum	$(1/3)^n$	$2^n$	0,6309297...

Tabulka 1.2: Porovnání fraktálních dimenzí  $d_k$  různých objektů.

jako nesmyslný výsledek, je třeba si uvědomit, jak vlastně koncept dimenze chápeme. Na jednu stranu na ni lze nahlížet jako na mocninu „s níž se zvyšuje“ obsah/objem tělesa. Naopak čtenář znalý lineární algebry si možná vzpomene, že v této matematické disciplíně se na dimenzi nahlíží jako na *mohutnost libovolné báze daného vektorového (pod)prostoru*, která naopak vychází vždy pouze celočíselně, avšak nelze s ní dobře zachytit hlubší detail geometrie u objektů, jako jsou právě fraktály.

Tím se dostáváme ještě k jednomu typu dimenzí, a to tzv. *topologické dimenze*. Ty totiž daleko více odpovídají našemu intuitivnímu chápání tohoto pojmu, neboť se vždy jedná o celé číslo, jak ho známe ze školní geometrie. Existuje více topologických dimenzí<sup>9</sup>, které si, co do definice, obecně nejsou ekvivalentní, ačkoliv ve většině standardních případů splývají. My se zde pro ilustraci podíváme na tzv. *Lebesgueovu pokrývací dimenzi* (dále jen již „topologickou dimenzi“) pojmenovanou po francouzském matematikovi HENRI LEBESGUEVI (1875–1941). Myšlenka definice je založena na pokrývání objektu (formálně vzato *množiny bodů*) tzv. *otevřenými množinami*.<sup>10</sup> Formální definici si zde v rámci zachování jednoduchosti odpustíme, avšak pro hlubší matematický základ si dovolím čtenáře odkázat např. na knihu [3].

Obecně množina  $X$  má topologickou dimenzi  $\dim_L X = n$ , pokud  $n$  je nejmenší číslo, takové, že pro každé pokrytí otevřenými množinami<sup>11</sup>  $\mathcal{U}$  existuje zjemnění<sup>12</sup>  $\mathcal{U}'$ , v němž každý bod  $x \in X$  leží v průniku nejvýše  $n + 1$  množin pokrytí  $\mathcal{U}$ .

Tuto ideu si zkusíme přiblížit na příkladu topologické dimenze úsečky (viz obrázek 1.20). Pro libovolné pokrytí lze ukázat, že každý bod je obsažen v průniku maximálně *dvou množin*, tedy topologická dimenze úsečky je 1. Podobně např. pro čtverec lze dojít k závěru, že pro každé podpokrytí nějakého pokrytí je každý jeho bod obsažen v průniku maximálně *tří množin*, tedy jeho topologická dimenze

<sup>9</sup>Jiným příkladem takové dimenze je *induktivní dimenze*.

<sup>10</sup>Otevřená množina je zobecnění pojmu otevřeného intervalu reálných čísel. Neformálně řečeno je to taková množina  $X$ , kde pro každý její bod  $x \in X$  patří do této množiny i nějaké  $\varepsilon$ -okolí tohoto bodu (patří do ní i body, které jsou „dostatečně blízko“).

<sup>11</sup>Formálněji to znamená, že  $A_1, \dots, A_n$  jsou otevřené množiny, takové, že platí  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ .

<sup>12</sup>Zjemněním pokrytí  $\mathcal{U}$  nazýváme takové (pod)pokrytí  $\mathcal{U}'$  množiny  $X$ , kde každá množina  $A'_i \in \mathcal{U}'$  je *podmnožinou* nějaké množiny  $A_j$  původního pokrytí  $\mathcal{U}$ .



Obrázek 1.20: Různé možnosti (pod)pokrytí úsečky.

je 2, jak bychom očekávali (viz obrázek 1.21). Jak jsme se již přesvědčili v příkla-



Obrázek 1.21: Možné (pod)pokrytí čtverce.

dech 1.3.1, 1.3.2 a 1.3.3, pro „standardní“ útvary je fraktální dimenze celočíselná (ač jsou i další, které jsme neuvedli), zatímco v podsecei 1.3.2 jsme zjistili, že u fraktální dimenze fraktálů tomu tak již nutně být nemusí. Přitom však topologická dimenze fraktálních útvarů je (a dokonce musí být) celočíselná (viz tabulka 1.3). Fraktální dimenze tak oproti té topologické daleko lépe zachycuje informaci o detailní geometrii daných objektů.

Útvar $F$	$\dim_B F$	$\dim_L F$
Úsečka	1	1
Čtverec	2	2
Krychle	3	3
Teserakt	4	4
$d$ -rozměrná krychle	$d$	$d$
Kochova křivka	1,2618595...	1
Kochova vločka	1,2618595...	1
Sierpiňského trojúhelník	1,5849625...	1
Cantorovo diskontinuum	0,6309297...	0

Tabulka 1.3: Porovnání fraktální a topologické dimenze útvarů.

## 1.4 Co je to fraktál?

*Tak co je to tedy ten „fraktál“?* Odpovědi na tuto otázku jsme se poměrně dlouhou dobu vyhýbali a onen termín, popř. jeho přídatnou variantu „fraktální“, jsme používali čistě na intuitivní úrovni. Ač jsme se zatím obešli bez jeho formálnějšího upřesnění, bylo by možná při nejmenším slušné se o to alespoň pokusit. V předešlé sekci 1.3 jsme pokryli *fraktální* a *topologickou dimenzi*, které jsme následně použili na příkladech konkrétních útvarů (konkrétně viz tabulky 1.2 a 1.3).

Již jsme si všimli, že u fraktálních útvarů vychází fraktální dimenze  $\dim_H$  neceločíslně oproti jejich topologické dimenzi  $\dim_L$ , která je vždy celočíselná. To by se mohlo zdát jako dobrá charakteristika fraktálů. Avšak existují útvary, jejichž fraktální a topologická dimenze se shodují, přestože také mají „fraktální charakter“. Pro příklad nemusíme chodit nikterak daleko, pravděpodobně nejznámějším útvarem je v tomto ohledu *Mandelbrotova množina*, jejíž fraktální i topologická dimenze je rovna 2 (blíže se na ni podíváme v sekci (TODO: Doplnit odkaz)). Jiná definice zase naopak popisuje fraktál jako útvar, jehož Hausdorffova dimenze (na tu se blíže podíváme v sekci (TODO: Doplnit odkaz)) je ostře větší než dimenze topologická. Problém (a také důvod, proč jsme definici toho pojmu vyhýbali) je však zkrátka ten, že dodnes **není známá** žádná univerzální definice fraktálu. [23, str. 226]

Je to možná lehce zklamávající, nicméně dobrou zprávou je, že ani pro další výklad ona absence formální definice fraktálu nebude překážkou. V dalším textu se zaměříme (mj.) především na jejich klasifikaci (viz kapitola 4) a další vlastnosti.

# Kapitola 2

## Teorie míry a dimenze

V této kapitole se budeme nyní věnovat fraktálům a jim příbuzným záležitostem trochu formálněji. Do této chvíle jsme si již stihli představit některé základní fraktály, jako je např. *Sierpiňského trojúhelník*, *Kochova vločka* nebo *Cantorovo diskontinuum*, na nichž jsme si ilustrovali především myšlenku soběpodobnosti a na to navazující pojetí dimenze (viz kapitola 1, sekce 1.2 a 1.3).

Ačkoliv leckterý čtenář by se s poskytnutým vysvětlením jistě spokojil, jiný by mohl namítat, že jsme řadu věcí vynechali. A měl by jistě pravdu. Proto se v této kapitole budeme věnovat některým záležitostem z tzv. *teorie míry*, která je v tomto ohledu klíčová a poskytne nám nástroje pro měření fraktálních útvarů, jejichž geometrie často přesahuje možnosti klasické „eukleidovské analýzy“. *Míra* pro nás představuje zobecnění pojmů jako je *délka*, *obsah* a *objem*, které známe ze školní geometrie. Na jejím základě pak budeme schopni detailněji prozkoumat fraktální dimenzi, kterou jsme již v základu pokryli v předešlé kapitole. Jmenovitě se budeme zabývat

- *měřitelnými prostory a prostory s mírou* obecně,
- *lebesgueovou mírou*,
- *box-counting dimenzí*<sup>1</sup>
- *Hausdorffovou mírou* a z ní vycházející *Hausdorffovou dimenzí*.

Ačkoliv je toto téma jinak velice obsáhlé jsou mu věnované samostatné texty i knihy, spokojíme se pouze s naprostým základem. Pro další znalosti si dovolím čtenáře odkázat na knihy [5], [6], [11] a [2].

Než se však pustíme do samotné problematiky, je důležité zmínit, že pro rigorózní budování budeme potřebovat některé základní znalosti. V dalším textu předpokládáme, že je s nimi čtenář obeznámen. I přesto si zde dovolíme začít soupisem pojmů a značení, které budeme dále potřebovat. Některé záležitosti využijeme ještě v kapitole 3 o Hausdorffově metrickém prostoru.

---

<sup>1</sup>Těž ji lze nalézt pod názvem *Minkowského dimenze* nebo *Minkowského-Bouligandova dimenze*. Je pojmenována po polském matematikovi HERMANNOVI MINKOWSKÉM (1864–1909) a francouzském matematikovi GEORGESovi BOULIGANDovi (1889–1979).

## 2.1 Základní pojmy a značení

V tomto oddílu se v krátkosti zaměříme na připomenutí některých pojmů a značení, které budeme dále využívat. Související teorii týkající se mnoha záležitostí v tomto případě vynecháme s předpokladem, že ji čtenář již zná. Pokud tomu však v některých případech takto nebude, lze tuto část textu považovat za výčet konceptů, které pro zvládnutí nadcházející teorie budeme potřebovat. V tomto ohledu lze např. nahlédnout do knihy [10].

Tuto část tedy vnímejte spíše jako referenční, než rigorózní výklad.

Výklad v této kapitole a dále v kapitole 3 se bude točit především okolo tzv. *metrických prostorů* (viz definice 2.1.1).

**Definice 2.1.1** (Metrický prostor). *Metrickým prostorem* nazýváme uspořádanou dvojici  $(X, \varrho)$ , kde  $X \neq \emptyset$  a  $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  je zobrazení splňující:

- (a)  $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- (b)  $\forall x, y \in X : x \neq y \implies \varrho(x, y) > 0$ ,
- (c)  $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ ,  $\triangleleft$  symetrie
- (d)  $\forall x, y, z \in X : \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ .  $\triangleleft$  trojúhelníková nerovnost

Zobrazení  $\varrho$  nazýváme *metrika*.

### 2.1.1 Metrické pojmy

Začneme některými základními pojmy sousvisejícími s metrickými prostory.

**Definice 2.1.2** (Otevřená/uzavřená koule). Necht  $(X, \varrho)$  je metrický prostor. Pak definujeme

- *otevřenou kouli* se středem v bodě  $x \in X$  o poloměru  $r \geq 0$

$$B_r(x) = \{y \in X \mid \varrho(y, x) < r\},$$

- resp. *uzavřenou kouli* se středem v bodě  $x \in X$  o poloměru  $r \geq 0$

$$K_r(x) = \{y \in X \mid \varrho(y, x) \leq r\}.$$

Např. v  $\mathbb{R}$  představuje otevřená koule  $B_r(x)$  otevřený interval  $(x - r, x + r)$  a  $K_r(x) = [x - r, x + r]$ . V  $\mathbb{R}^2$  se jedná o standardní kruh (s hranicí, nebo bez ní). Nebo v případě prostoru spojitých funkcí  $X = \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$  se pro libovolnou funkci  $f \in X$  jedná o pás šířky  $2r$  sestrojený okolo grafu funkce  $f$ .

S otevřenými, resp. uzavřenými koulemi se pojí další terminologie.

**Definice 2.1.3** (Otevřená, uzavřená a omezená množina). Množina  $M$  v metrickém prostoru  $(X, \varrho)$  se nazývá



- *otevřená*, pokud pro každé  $x \in M$  existuje  $r > 0$ , takové, že  $B_r(x) \subseteq M$ .
- *uzavřená*, pokud její doplněk  $X \setminus M$  je otevřená množina.
- *omezená*, pokud existuje  $x \in X$  a  $r > 0$ , takové, že  $M \subseteq B_r(x)$ .

Uzavřenost a otevřenost množiny závisí na volbě konkrétního metrického prostoru. Např. interval  $(a, b)$  je v  $\mathbb{R}$  otevřená množina, avšak v  $X = (a, b)$  je to uzavřená množina, neboť její doplněk  $\emptyset$  je otevřený.

**Definice 2.1.4** (Průměr množiny). Necht  $(X, \varrho)$  je metrický prostor. *Průměr množiny*  $M \subseteq X$ ,  $M \neq \emptyset$  definujeme jako

$$\text{diam } M = \sup \{ \varrho(x, y) \mid x, y \in M \}.$$

Není těžké dokázat, že  $\mathbb{R}^n$  je

$$\text{diam } B_r(x) = \text{diam } K_r(x) = 2r.$$

Obecně to však neplatí. Uvažme metrický prostor  $(X, \varrho)$ , kde je metrika  $\varrho$

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

Jedná se o takzvaný *diskrétní metrický prostor* (o tom, že  $\varrho$  je metrika se lze snadno přesvědčit). Pro  $x \in X$  a  $r > 0$  platí, že

$$\text{diam } B_r(x) = \begin{cases} 0 & r \leq 1, \\ 1 & r > 1. \end{cases}$$

Tedy poloměr koule  $B_r(x)$  může být větší než její průměr.

**Definice 2.1.5** (Vzdálenost bodu od množiny, vzdálenost množin). Necht  $(X, \varrho)$  je metrický prostor.

- *Vzdáleností bodu*  $x \in X$  *od množiny*  $M \subseteq X$  rozumíme

$$\varrho(x, M) = \inf \{ \varrho(x, y) \mid y \in M \}.$$

- *Vzdáleností množin*  $M, N \subseteq X$  rozumíme

$$\varrho(M, N) = \inf \{ \varrho(x, y) \mid x \in M, y \in N \}.$$

**Definice 2.1.6** (Vnitřek, hranice a uzávěr množiny). Necht  $(X, \varrho)$  je metrický prostor a  $M \subseteq X$ .

- *Vnitřek množiny*  $M$  je množina

$$M^\circ = \{ x \in X \mid \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq M \}.$$

- *Hranice množiny*  $M$  je množina

$$\partial M = \{x \in X \mid \forall r > 0 \exists y, z \in B_r(x) : y \in X \wedge z \in X \setminus M\}.$$

- *Uzávěr množiny*  $M$  je množina

$$\overline{M} = M \cup \partial M$$

V textu též budeme hodně pracovat s pojmem  $\delta$ -okolí.

**Definice 2.1.7** ( $\delta$ -okolí). Necht  $(X, \varrho)$  je metrický prostor a  $M \subseteq X$ . Pak  $\delta$ -okolím množiny  $M$  rozumíme množinu

$$(M)_\delta = \{y \in X \mid \exists x \in M : \varrho(x, y) < \delta\}.$$

Zde se zvláště hodí zmínit, že  $(M)_\delta$  je v prostoru  $\mathbb{R}^n$ , s nímž budeme často pracovat, otevřená množina.

Jako poslední zde zmíníme termíny, které zejména využijeme v sekci věnující se tzv. Lebesgueově míře a posléze box-counting dimenzi (viz sekce 2.3 a 2.4).

**Definice 2.1.8** (Kvadr). Kvádrem v  $\mathbb{R}^n$  nazveme množinu

$$I = \prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle,$$

kde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Objem kvádru  $I$  definujeme jako

$$\text{vol}_n(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

**Definice 2.1.9** ( $\delta$ -mříž).  $\delta$ -mříž v  $\mathbb{R}^n$  nazýváme množinu

$$\mathcal{Q}_\delta = \left\{ \prod_{i=1}^n \langle m_i \delta, (m_i + 1) \delta \rangle \mid m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Definice 2.1.9 vlastně říká, že  $\mathcal{Q}_\delta$  představuje rozdělení  $\mathbb{R}^n$  na krychle o straně délky  $\delta$  dotýkajících se pouze na hranici.

## 2.1.2 Limity posloupností

S limitou posloupnosti a funkce jedné proměnné je čtenář nejspíše dobře seznámen. V kontextu metrických prostorů definujeme pojem limity následovně (viz definice 2.1.10).

**Definice 2.1.10** (Limita posloupnosti). Mejsme metrický prostor  $(X, \varrho)$  a posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , kde  $x_i \in X$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Pak posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  má limitu  $x \in X$ , píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

nebo též  $x_n \rightarrow x$ , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \varrho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Limita posloupnosti je vždy určena jednoznačně (pokud existuje). Ve spojitosti s limitami pro nás bude dále relevantní i tzv. *limes superior* a *limes inferior*. Ty si však připomeneme mimo kontext metrických prostorů. Vystačíme si v reálných číslech.

**Definice 2.1.11** (Limes superior, limes inferior). Nechť je dána posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , kde  $x_n \in \mathbb{R}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Pak definujeme:

- Limes superior

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_k \mid k \geq n\}.$$

- Limes inferior

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{x_k \mid k \geq n\}.$$

Jinak lze definovat limes superior, resp. limes inferior jako supremum, resp. infimum hromadných bodů posloupnosti. Speciálně platí, že posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  má limitu  $L$ , právě tehdy, když

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = L.$$

Čtenář již nejspíše slyšel i o tzv. *Bolzanově-Cauchyově podmínce*. Posloupnosti ji splňující nazýváme tzv. *cauchyovské*.

**Definice 2.1.12** (Cauchyovská posloupnost). Nechť  $(X, \varrho)$  je metrický prostor. Posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , kde  $x_i \in X$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ , nazveme *cauchyovskou*, pokud splňuje:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Připomeňme rovněž, že Bolzanova-Cauchyova podmínka je nutná, nikoliv však postačující pro konvergenci posloupnosti v  $X$ . Uvažme např. prostor  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  se stardardní eukleidovskou metrikou. Posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  je definujeme následovně:

$$x_0 > 0 \text{ a } x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Všechny její členy jsou v  $\mathbb{Q}$  a lze též ověřit, že je cauchyovská. Nicméně pro její limitu platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

V rámci metrických prostorů se tedy dává smysl mnohdy omezovat pouze na takové, kde je Bolzanova-Cauchyova podmínka nutná i postačující pro konvergenci. Těž říkáme úplné.

**Definice 2.1.13** (Úplný metrický prostor). Metrický prostor  $(X, \varrho)$  se nazývá *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost v  $X$  má limitu v  $X$ .

### 2.1.3 Limity funkcí

Od posloupností se přesuneme na chvíli k limitám funkcí.

**Definice 2.1.14** (Limita funkce v bodě). Necht  $(X, \varrho_1), (Y, \varrho_2)$  a funkce  $f : X \rightarrow Y$ . Řekneme, že  $f$  má limitu  $y \in Y$  v bodě  $x_0 \in X$ , píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y,$$

pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in B_\varepsilon(y).$$

Podobně i zde lze definovat limes superior a limes inferior. Omezíme se opět jen na funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definice 2.1.15** (Limes superior a limes inferior pro funkce). Necht  $(X, \varrho)$  je metrický prostor a funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $M \subseteq X$ . Pak definujeme

- Limes superior v bodě  $x_0$ :

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sup \{f(x) : x \in M \cap B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\})$$

- Limes inferior v bodě  $x_0$ :

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\inf \{f(x) : x \in M \cap B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\})$$

### 2.1.4 Bodová a stejnoměrná konvergence

V rámci posloupností se v matematické analýze často pracuje s posloupnostmi funkcí. K jejich limitám se váže dvojice důležitých termínů: *bodová* a *stejnoměrná konvergence*.

**Definice 2.1.16** (Bodová a stejnoměrná konvergence). Necht  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost funkcí z metrického prostoru  $(\mathcal{C}(\langle a, b \rangle), \varrho)$ , kde  $\varrho$  je tzv. *supremová metrika*, tj. pro každou  $f, g \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f_n(x) - f(x)|,$$

přičemž  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  konverguje k funkci  $f \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ . Pak říkáme, že posloupnost  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  konverguje k  $f$

- *bodově*, pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .
- *stejnoměrně*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in \langle a, b \rangle : \varrho(f_n, f) < \varepsilon.$$

Píšeme  $f_n \rightrightarrows f$ .

Stejněměrná konvergence implikuje konvergenci bodovou, opačné tvrzení však neplatí. Např. posloupnost funkcí  $f_n(x) = x^n$ , kde  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , konverguje k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

pouze bodově, nikoliv stejnoměrně, protože

$$\sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |x^n - 0| = 1.$$

### 2.1.5 Topologické pojmy

Poměrně důležitým pojmem v teorii metrických prostorů jsou tzv. kompaktní množiny. S tím se pojí následující termíny (viz definice 2.1.17).

**Definice 2.1.17** (Pokrytí,  $\delta$ -pokrytí a zjemnění). Nechť je dán metrický prostor  $(X, \varrho)$ ,  $M \subseteq X$  a systém množin  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

- $\mathcal{U}$  tvoří tzv. *pokrytí* množiny  $M$ , pokud

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Navíc o pokrytí  $\mathcal{U}$  říkáme, že je *otevřené*, pokud pro každé  $i \in \mathbb{N}$  je množina  $U_i$  otevřená.

- Pokud existuje  $\delta > 0$ , takové, že pro každé  $i \in \mathbb{N}$  platí  $\text{diam } U_i < \delta$ , pak  $\mathcal{U}$  nazýváme  *$\delta$ -pokrytím*.
- Platí-li pro systém  $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , že

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,$$

pak  $\mathcal{G}$  je tzv. *podpokrytí* pokrytí  $\mathcal{U}$ .

- Pokud navíc pro každou  $G \in \mathcal{G}$  existuje množina  $U \in \mathcal{U}$ , taková, že  $G \subseteq U$ , pak  $\mathcal{G}$  nazýváme *zjemněním* pokrytí  $\mathcal{U}$ .

**Definice 2.1.18** (Kompaktní množina). Nechť  $(X, \varrho)$  je metrický prostor. Množinu  $M \subseteq X$  nazveme *kompaktní*, jestliže pro každé otevřené pokrytí  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots\}$  existují indexy  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ , takové, že

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{n_i}.$$

Volněji řečeno, pro kompaktní množinu lze z jejího libovolného otevřeného pokrytí vybrat konečné podpokrytí. Dokazovat kompaktnost množiny z definice může být mnohdy nepraktické, nicméně vzhledem k tomu, že budeme často pracovat s prostorem  $\mathbb{R}^n$ , záležitost se nám v tomto ohledu značně zjednodušuje.

**Věta 2.1.19** (Heineho-Borelova). *Nechť  $(\mathbb{R}^n, \varrho_e)$  je metrický prostor, kde  $\varrho_e$  je eukleidovská metrika, a  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Následující výroky jsou ekvivalentní:*

- (i) *Množina  $M$  je kompaktní.*
- (ii) *Množina  $M$  je uzavřená a omezená.*

Důkaz věty lze nalézt např. v [10, str. 166]. Pro obecný metrický prostor toto tvrzení již neplatí. Např. v diskrétním metrickém prostoru je každá množina uzavřená i omezená (stačí zvolit  $r > 1$ , tzn.  $B_r(x) = X$ ). Nicméně uvažíme-li prostor  $X = (0, 1)$  s diskrétní metrikou  $\varrho$ , pak z otevřeného pokrytí

$$(0, 1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right\rangle$$

nelze vybrat žádné konečné, navzdory faktu, že interval  $(0, 1)$  je v  $X$  uzavřený a omezený.

**Věta 2.1.20.** *Nechť  $M$  je kompaktní množina v metrickém prostoru  $(X, \varrho)$ . Pak  $M$  je omezená.*

K důkazu věty 2.1.20 lze využít faktu, že každá spojitá funkce definovaná na kompaktní množině nabývá svého maxima.

## 2.1.6 Lipschitzovská zobrazení

**Definice 2.1.21** (Lipschitzovské zobrazení). *Nechť  $(X, \varrho_1), (Y, \varrho_2)$  jsou metrické prostory. Pak zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  nazveme*

- *lipschitzovské*, pokud existuje konstanta  $K > 0$  taková, že pro každé  $x, y \in X$  platí

$$\varrho_2(f(x), f(y)) \leq K \varrho_1(x, y).$$

Navíc pokud lze volit  $K < 1$ , pak  $f$  nazýváme *kontrakcí*

- *bilipschitzovské*, pokud existují konstanty  $K_1, K_2 > 0$  takové, že pro každé  $x, y \in X$  platí

$$K_1 \varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(f(x), f(y)) \leq K_2 \varrho_1(x, y).$$

Je celkem zjevné, že lipschitzovská zobrazení jsou vždy spojitá. Pro každé  $\varepsilon > 0$  stačí zvolit kouli o poloměru  $\varepsilon/K$ , tedy

$$\varrho_2(f(x_0), f(x)) \leq K \varrho_1(x_0, x) \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

implikující spojitost  $f$  v bodě  $x_0$ .

## 2.2 Prostory s mírou

Jak již bylo zmíněno v úvodu, klíčovým pojmem v této kapitole (a pro studium fraktálů obecně) je takzvaná *míra*. Ta pro nás představuje obecný způsob, jak můžeme množinám přiřadit v jistém smyslu „velikost“. Konkrétněji, byť vágně, lze říci, že sestává-li množina z konečného nebo spočetného množství „rozumných“ částí, pak součet velikostí všech těchto dílčích množin je roven velikosti celé množiny, kterou nazveme její *mírou*. Pro začátek celkem jednoduchá myšlenka.

Pro formální zavedení tohoto pojmu však budeme muset nejprve zavést ještě jiný pojem, a to tzv.  $\sigma$ -algebru.

### 2.2.1 Měřitelné prostory

**Definice 2.2.1** ( $\sigma$ -algebra). Nechť je dána libovolná množina  $X$  a systém podmnožin  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Pak  $\mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra na množině  $X$ , pokud:

- (a)  $X \in \mathcal{A}$ .
- (b) Pro každou množinu  $A \in \mathcal{A}$  platí  $X \setminus A \in \mathcal{A}$ .
- (c) Pro libovolné množiny  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  platí  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

Dvojice  $(X, \mathcal{A})$  se nazývá měřitelný prostor.

(TODO: Psát na konci každého bodu v definici/větě **tečku, čárku** nebo **středník?**)

**Příklad 2.2.2.** Jednoduché příklady  $\sigma$ -algeber:

- Triviálními příklady  $\sigma$ -algeber jsou množiny  $\emptyset$ ,  $\mathcal{P}(X)$  a  $\{\emptyset, X\}$  pro libovolnou množinu  $X$ .
- Pro konečnou množinu  $X = \{a, b, c, d\}$  je jednou možnou  $\sigma$ -algebrou systém množin

$$\Sigma = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

Sami se zkuste přesvědčit, že všechny zmíněné příklady vyhovují definici 2.2.1.

Než vyslovíme něco dalšího o  $\sigma$ -algebrách a jejich významu, podíváme se na seznam některých vesměs jednoduchých pozorování zformulovaných níže v tvrzení 2.2.3.

**Věta 2.2.3** (Vlastnosti  $\sigma$ -algebry). *Nechť  $(X, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. Pak platí:*

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
- (ii) Pro libovolné množiny  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  platí  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

(iii) Pro všechny množiny  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  platí

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}.$$

(iv) Jsou-li  $A, B \in \mathcal{A}$  pak  $A \setminus B \in \mathcal{A}$ .

Z tohoto tvrzení je již lépe vidět, proč jsou pro nás  $\sigma$ -algebry tak příjemným objektem. Jsou totiž *uzavřené* na všechny základní množinové operace. To se nám bude později hodit při zavedení míry, ke které směřujeme. Důkaz těchto dílčích tvrzení přitom není nikterak složitý.

*Důkaz.* Mějme  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{A}$  na množině  $X$ .

(i) Z podmínky (a) definice 2.2.1 víme, že  $X \in \mathcal{A}$  a z podmínky (b) tedy plyne  $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{A}$ .

(ii) Mějme množiny  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ . Společně s využitím De Morganových zákonů plyne následující:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overbrace{(X \setminus A_i)}^{\in \mathcal{A} \text{ podle (b)}}}_{\in \mathcal{A} \text{ podle (c)}} \in \mathcal{A}.$$

(iii) Necht jsou dány množiny  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ . Když pro každé  $j > n$  položíme  $A_j = \emptyset$ , pak platí

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

a podobně pro  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$  podle předešlého bodu.

(iv) Pro libovolné množiny  $A, B \in \mathcal{A}$  platí

$$A \setminus B = \underbrace{A \cup \underbrace{(X \setminus B)}_{\in \mathcal{A} \text{ podle (b)}}}_{\in \mathcal{A} \text{ podle (c)}} \in \mathcal{A}.$$

□

## 2.2.2 Míra

V tuto chvíli máme již vše potřebné k zavedení pojmu míra, resp. prostor s mírou.

**Definice 2.2.4** (Prostor s mírou). Necht  $(X, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. Zobrazení  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  se nazývá *míra* na  $\mathcal{A}$ , pokud platí:

(a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,



(b) pro množiny  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ , po dvou disjunktní je

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad \triangleleft \sigma\text{-aditivita}$$

Uspořádanou trojici  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  nazýváme *prostor s mírou*.

Vzhledem k tomu, co míra reprezentuje (tj. zobecnění délky, obsahu, objemu), jsou tyto požadavky intuitivně dosti smysluplné.

**Příklad 2.2.5.** Příklady prostorů s mírou:

- Asi pro nás nejtypičtější způsob, jak měřit „velikost“ množiny, je podle *počtu prvků*. Pro libovolnou množinu  $X$  a potenční množinu  $\mathcal{P}(X)$  lze definovat prostor s mírou  $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ , kde pro libovolnou množinu  $A \in \mathcal{P}(X)$  položíme  $\mu(A) = |A|$ . Takto definované míře  $\mu$  říkáme *aritmetická míra*.
- Máme libovolnou množinu  $X$  a  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{A}$ . Zvolme si pevně  $x \in X$ . Míru libovolné množiny  $A \in \mathcal{A}$  lze definovat jako  $\delta_x(A) = \chi_A(x)$ , kde  $\chi_A$  je charakteristická funkce množiny  $A$ . Zobrazení  $\delta_x$  je tzv. *Diracova míra*.
- Zobrazení přiřazující náhodnému jevu pravděpodobnost je též případem míry. Označíme-li si  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  množinu všech elementárních jevů a  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ , pak  $P : \mathcal{F} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  definovaná pro  $A \in \mathcal{F}$  jako

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

je mírou na  $\mathcal{F}$ . Speciálně  $P(\Omega) = 1$ .

Ve všech případech zobrazení  $\mu$  v příkladu 2.2.5 se lze snadno přesvědčit, že se jedná o míru, tedy že splňuje podmínky (a) a (b) uvedené v definici 2.2.4 výše.

Pojďme nyní prozkoumat vlastnosti míry trochu hlouběji.

**Věta 2.2.6** (Vlastnosti míry). *Nechť  $\mu$  je míra na  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{A}$ . Pak platí následující:*

(i) *Jsou-li množiny  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  po dvou disjunktní, pak*

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i). \quad \triangleleft \text{aditivita}$$

(ii) *Pokud  $A, B \in \mathcal{A}$  a  $A \subseteq B$ , pak*

$$\mu(A) \leq \mu(B). \quad \triangleleft \text{monotonie míry}$$

*Navíc pokud  $\mu(A) < \infty$ , pak  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .*

(iii) *Pokud  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ , je neklesající posloupnost množin<sup>2</sup>, pak*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \mu \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right).$$

---

<sup>2</sup>Posloupnost množin, kde  $A_i \subseteq A_{i+1}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ .

(iv) Pokud  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ , je nerostoucí posloupnost množin<sup>3</sup> a navíc  $\mu(A_1) < \infty$ , pak

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \mu \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right).$$

(v) Pokud  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ , pak

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad \triangleleft \sigma\text{-subaditivita}$$

Poslední vlastnost (v) je tzv.  $\sigma$ -subaditivita<sup>4</sup>. Oproti  $\sigma$ -aditivitě se liší tím, že u množin  $A_1, A_2, \dots$  se nepožaduje, aby byly po dvou disjunktní, tzn. mohou se „překrývat“. Je však intuitivně nejspíše jasné, že součtem měr všech těchto množin určitě nemůžeme získat míru nižší než je míra jejich sjednocení (dané „překryvy“ započítáváme v sumě vícekrát). Podobně i monotonie dává intuitivně smysl, neboť část větší množiny jistě nemůže mít větší míru než celek. Na formální stránku věci se podíváme nyní.

*Důkaz.* V důkazu využijeme některé vlastnosti  $\sigma$ -algebry z věty 2.2.3, zejména, že všechny množiny níže jsou opět prvky  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{A}$ .

(i) Pokud pro každé  $j > n$  položíme  $A_j = \emptyset$ , pak z definice míry plyne

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

(ii) Necht jsou dány  $A, B \in \mathcal{A}$ , takové, že  $A \subseteq B$ . Pak  $B = A \cup (B \setminus A)$ , přičemž  $A$  a  $B \setminus A$  jsou disjunktní. Tedy podle bodu (b) lze psát  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$ , protože  $\mu(B \setminus A) \geq 0$ .

(iii) Mějme neklesající posloupnost množin  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$  (viz obrázek 2.1a). Definujeme posloupnost<sup>5</sup> množin  $B_1, B_2, \dots$  následovně:

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad B_i = A_i \setminus A_{i-1}, \quad i \geq 2.$$

Množiny  $B_1, B_2, \dots$  jsou po dvou disjunktní a zároveň  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Libovolnou množinu  $A_n$  lze totiž zapsat jako

$$A_n = \bigcup_{i=1}^n (A_i \setminus A_{i-1}) = \bigcup_{i=1}^n B_i.$$

Podle již dokázaného bodu (i) (aditivita míry) tedy pro každé  $n$  platí  $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$ . Celkově

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

<sup>3</sup>  $A_i \supseteq A_{i+1}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ .

<sup>4</sup> V matematické terminologii se předpona  $\sigma$  běžně týká spočetných sjednocení. [6, str. 2]

<sup>5</sup> V podstatě konstruujeme množiny  $A_1, A_2, \dots$  tak, aby v následující množině  $A_i$  nebyl obsažen prvek, který se nachází již v některé z množin  $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$ . Podobná myšlenka je využita i při důkazu budů (iv) a (v).

- (iv) Necht je dána nerostoucí posloupnost množin  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$  (viz obrázek 2.1b). Podobně jako v předešlém bodě, i zde definujeme novou posloupnost množin  $B_1, B_2, \dots$  takto:

$$B_i = A_1 \setminus A_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Zde si můžeme všimnout, že pro každé  $i$  platí  $B_i \subseteq B_{i+1}$  a splňuje tak předpoklad předešlého bodu (iii). Dle De Morganových zákonů můžeme psát

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i) = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Výraz  $\lim_{j \rightarrow \infty} B_j$  lze rozepsat dvěma způsoby:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j) &\stackrel{(iii)}{=} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \stackrel{(ii)}{=} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right), \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_j) \stackrel{(ii)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_j)) = \mu(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j). \end{aligned}$$

Porovnáním obou rovností lze vidět, že

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

- (v) Necht jsou dány množiny  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Definujeme posloupnost množin  $B_1, B_2, \dots$  takto:

$$B_1 = A_1, \quad B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, \quad k \leq 2.$$

(Viz obrázek 2.1c.) Není složité si rozmyslet, že množiny  $B_1, B_2, \dots$  jsou po dvou disjunktní. Zároveň platí  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  a  $B_j \subseteq A_j$  pro každé  $j \in \mathbb{N}$ . Tím je dokázáno, že

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \stackrel{(ii)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(Převzato z [11, str. 19])

□

**Poznámka 2.2.7.** Předpoklad  $\mu(A_1) < \infty$  ve větě 2.2.6 v bodě (iv) nelze vynechat. Jednoduchý protipříklad si uvedeme v sekci 2.3.

## 2.3 Lebesgueova míra

Jedními z nejznámějších průkopníků v oblasti teorie míry byli francouzský matematik CAMILLE JORDAN (1832–1922) a italský matematik GIUSEPPE PEANO (1858–1932), kteří ve svých publikacích popsali způsob měření „velikosti“ množin, který je dnes známý jako tzv. *Jordanova-Peanova míra*. Rovinu  $\mathbb{R}^2$  si rozdělíme na čtvercovou síť, přičemž  $S$  bude představovat součet obsahů všech čtverců



Obrázek 2.1: Ilustrace k důkazu věty 2.2.6

sítě, které jsou obsaženy ve vnitřku množiny  $M$  a  $S'$  je součet obsahů všech čtverců sítě, které mají společný alespoň jeden bod s hranicí množiny  $M$ . Součet  $S + S'$  pak představuje obsah všech čtverců sítě, které obsahují body uzávěru množiny  $M$ . (Viz obrázek 2.2.) Při zjemňování čtvercové sítě konvergují součty  $S$  a  $S + S'$  k limitám, které po řadě nazýváme *vnitřní* a *vnější Jordanova-Peanova míra*. Tato úvaha předložila základní předpoklady právě pro vznik teorie míry. [22]

V předešlé sekci 2.2 jsme si povídali o pojmu *míra* obecně a podívali jsme se na několik příkladů. Obecnou ideu měření „velikosti“ lze založit např. na aproximaci obecné množiny pomocí *spočetných sjednocení útvarů*, jejichž „velikost“ umíme jednoduše určit. V dalším textu se omezíme pouze na množinu  $\mathbb{R}^n$ .

Na zmíněné myšlence je postavena definice tzv.  *$n$ -rozměrné Lebesgueovy míry*, kdy obecnou množinu budeme pokrývat pomocí *kvádrů*. Připomeňme, že obecně  $n$ -rozměrným kvádrem  $I$  rozumíme kartézský součin *intervalů*

$$\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle \subseteq \mathbb{R},$$

tj.

$$I = \prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$$



Obrázek 2.2: Vnitřní a vnější Jordanova-Peanova míra množiny  $M$ .

a jeho objem definujeme jako

$$\text{vol}_n(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Lze nejspíše ihned vidět, že objem kvádrů  $\text{vol}_n(I)$  je *aditivní* i *subaditivní*.

Nyní si definujeme tzv. *vnější Lebesgueovu míru*.

**Definice 2.3.1** (Vnější Lebesgueova míra). Necht  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pak vnější  $n$ -rozměrnou Lebesgueovou mírou  $A$  je

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}_n(I_j) \mid I_j \text{ je kvádr, } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_j \right\}.$$

Vnější Lebesgueova míra množiny intuitivně zachycuje informaci o „velikosti“ dané množiny. Lze ihned vidět, že pro libovolnou množinu  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je  $\lambda_n^*(A) \in \mathbb{R}_0^+$ , protože  $\text{vol}_n(I_j) \geq 0$  pro každé  $j \in \mathbb{N}$ .

**Příklad 2.3.2.** Ukažme si některé triviální příklady výpočtů vnější Lebesgueovy míry z definice (viz 2.3.1), tedy budeme hledat příslušné pokrytí dané množiny.

- Pro prázdnou množinu  $\emptyset$  je  $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$ , neboť  $\emptyset \subseteq \prod_{i=1}^n \langle 0, 0 \rangle$  (prázdnou množinu lze pokrýt jakýmkoliv kvádrem nulového objemu) a

$$\text{vol}_n \left( \prod_{i=1}^n \langle 0, 0 \rangle \right) = 0.$$

- Mějme libovolnou konečnou množinu  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pro každé  $x_j$  stačí položit  $I_j = \{x_j\}$  pro každé  $1 \leq j \leq n$ , což je degenerovaný interval, jehož objem  $\text{vol}_n(I_j) = 0$ .
- Pro libovolnou spočetnou množinu  $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$  je  $\lambda_n^*(A) = 0$ . Pokrytí volíme stejně jako v předešlém bodě. Tedy např. pro  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  je  $\lambda_1^*(\mathbb{Q}) = 0$ , neboť  $\mathbb{Q}$  je spočetná.
- Pro množinu reálných čísel  $\mathbb{R}$  je  $\lambda_1^*(\mathbb{R}) = \infty$ , avšak pro

$$A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

(reálná osa v  $\mathbb{R}^2$ ) je  $\lambda_2^*(A) = 0$ .

Jako poslední si ukážeme, že v případě kvádrů  $n$ -rozměrného kvádrů odpovídá jeho vnější Lebesgueova míra skutečně jeho objemu.

**Tvrzení 2.3.3.** *Je-li  $I \subset \mathbb{R}^n$  kvádr, pak  $\lambda_n^*(I) = \text{vol}_n(I)$ .*

*Důkaz.* Ukážeme zvlášť, že  $\lambda_n^*(I) \leq \text{vol}_n(I)$  a  $\lambda_n^*(I) \geq \text{vol}_n(I)$ .

- **Důkaz**  $\lambda_n^*(I) \leq \text{vol}_n(I)$ . Zvolme pokrytí  $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots\}$  kvádrů  $I$ , tzn.  $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , tak, aby

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}_n(I_i) \leq (1 + \varepsilon) \lambda_n^*(I).$$

pro nějaké  $\varepsilon > 0$ . Nyní si zvolíme nové kvádry<sup>6</sup>  $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots\}$  tak, aby pro každé  $i \in \mathbb{N}$  platilo

$$I \subset J^\circ \wedge \text{vol}_n(J_i) \leq (1 + \varepsilon) \text{vol}_n(I_i).$$

To není nikterak složité, stačí např. pro každé  $i \in \mathbb{N}$  položit

$$J_i = \prod_{j=1}^n \left\langle x_j - r_j \sqrt[n]{1 + \varepsilon}, x_j + r_j \sqrt[n]{1 + \varepsilon} \right\rangle,$$

kde  $x_j$  je střed  $j$ -tého intervalu kvádrů  $I_i$  a  $r_j$  jeho poloměr, tzn.  $r_j = (b_j - a_j)/2$ . Protože však  $I$  je uzavřená a omezená množina, je podle věty (TODO: doplnit odkaz) kompaktní, tedy z otevřeného pokrytí  $J_1^\circ, J_2^\circ, \dots$  lze vybrat konečné podpokrytí. Existuje tedy  $m \in \mathbb{N}$ , takové, že

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^m J_i.$$

Celkově tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(I) &\leq \sum_{i=1}^m \text{vol}_n(J_i) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^m \text{vol}_n(I_i) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}_n(I_i) \\ &\leq (1 + \varepsilon)^2 \lambda_n^*(I) \end{aligned}$$

pro každé  $\varepsilon > 0$ , což jsme chtěli.

- **Důkaz**  $\lambda_n^*(I) \geq \text{vol}_n(I)$ . Důkaz opačné nerovnosti je oproti té předešlé naopak velmi jednoduchý. Kvádr  $I$  totiž reprezentuje pokrytí sebe samotného, tzn. lze volit  $I_1 = I$  a zbylé kvádry  $I_j$ , kde  $j \geq 2$ , mohou být libovolné s nulovým objemem.

Z kombinací obou nerovností lze vidět, že vnější Lebesgueova míra  $n$ -rozměrného kvádrů skutečně odpovídá jeho objemu, tj.

$$\lambda_n^*(I) = \text{vol}_n(I).$$

□

---

<sup>6</sup>Formálně  $\mathcal{I}$  tvoří zjemnění pokrytí  $\mathcal{J}$

**Poznámka 2.3.4.** Vraťme se na chvíli ještě k větě 2.2.6 o vlastnostech míry, konkrétně bod (iv). Předpoklad  $\mu(A_1) < \infty$  zde vynechat nelze. Stačí vzít množiny  $A_j = \langle j, \infty \rangle$ , tzn.  $\lambda_n^*(A_j) = \lambda_n^*(\langle j, \infty \rangle) = \infty$  pro každé  $j \in \mathbb{N}$ . Snadno si rozmyslíme, že

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset,$$

nicméně lze vidět, že zatímco  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \infty$ , tak  $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$ .

Z příkladů 2.3.2 a 2.3.3 můžeme vidět, že pro rozumně zvolené množiny zachycuje vnější Lebesgueova míra jejich intuitivní „velikost“. V případě intervalu odpovídá jeho délce, v případě diskrétní množiny je nulová a podobně např. pro obdélník odpovídá jeho obsahu, pro kvádř jeho objemu, atd.

Nyní se však nabízí jedna otázka. Čtenář by mohl již od chvíle, kdy jsme zavedli pojem vnější Lebesgueovy míry (opět viz definice 2.3.1) namítat, co nás opravňuje nazývat zobrazení  $\lambda_n^*$  mírou, tj. ve smyslu definice 2.2.4. Jak víme, že splňuje podmínku  $\sigma$ -aditivity? Odpověď na tuto otázku není zcela přímočará a vlastně není ani jednoduchá.

Bohužel pro libovolně zvolenou množinu  $X$  a  $\sigma$ -algebru  $\mathcal{A}$  v případě vnější Lebesgueovy míry obecně neplatí vlastnost aditivity, tedy existují množiny  $A, B \in \mathcal{A}$ , takové, že

$$\lambda_n^*(A \cup B) \neq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B).$$

Příklad takové množiny využívá např. takzvaná *Vitaliho konstrukce*, se kterou přišel italský matematik GIUSEPPE VITALI (1875–1932) roku 1905, využívající invariance vnější Lebesgueovy míry vůči posunutí, tzn.  $\lambda_n^*(x + A) = \lambda_n^*(A)$ . [16] V rámci tohoto textu se jí zde zabývat nebudeme, avšak pro zájemce doporučuji zdroje [6, str. 3] a [20], kde je tato konstrukce podrobněji rozepsána.

Je tedy potřeba se omezit na takové množiny, kde je  $\lambda_n^*$  aditivní. Existuje více způsobů jejich charakterizace, avšak my si zde uvedeme ten, se kterým přišel řecký matematik CONSTANTIN CARATHÉODORY (1873–1950).

**Definice 2.3.5** (Lebesgueovská měřitelnost). Množinu  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  nazveme (lebesgueovsky) měřitelnou, pokud pro každou množinu  $G$  platí

$$\lambda_n^*(G) = \lambda_n^*(G \cap A) + \lambda_n^*(G \setminus A).$$

Systém všech měřitelných množin v  $\mathbb{R}^n$  značíme  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Pokud  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , pak číslo  $\lambda_n(A) = \lambda_n^*(A)$  nazýváme  $n$ -rozměrnou Lebesgueovou mírou množiny  $A$ .

Podmínka v definici 2.3.5 se někdy nazývá říká *Carathéodoryho kritérium*. Zjednodušeně říká, že množina  $A$  je lebesgueovsky měřitelná, když při „rozdělení“ libovolně zvolené množiny  $G$  na dvě části pomocí  $A$  lze míru  $G$  stanovit součtem měr daných částí (viz obrázek 2.3). Zároveň je dobré podotknout, že kvádry, které figuruji v definici vnější Lebesgueovy míry jsou měřitelné. O systému  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  a Lebesgueově míře  $\lambda_n$  lze dokázat následující tvrzení.

**Věta 2.3.6.** *Platí:*

- (i)  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  je měřitelný prostor.



Obrázek 2.3: Ilustrace měřitelnosti množiny  $A$

(ii)  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$  je prostor s mírou.

Čtenář snad promine, že formální důkaz v případě tohoto tvrzení v zájmu zachování stručnosti textu zcela vynecháme, nicméně „zvědavce“ jej může nalézt např. v knize [19, str. 347], kde jsou příslušné záležitosti rozepsány.

## 2.4 Box-counting dimenze

Tomuto typu dimenze jsme se již v základu věnovali v kapitole 1, specificky sekci 1.3, kde jsme rozebrali jeho způsob jejího výpočtu a ukázali jsme si jej několika příkladech. V této části si blíže rozebereme některé další vlastnosti týkající se právě *box-counting dimenze*<sup>7</sup> a pokusíme se ji lépe zasadit do kontextu teorie míry, které jsme se samostatně až do této chvíle věnovali.

### 2.4.1 Definice a výpočet

Jako první se podíváme na myšlenku box-counting trochu blíže a maličko si ji zobecníme. Původně jsme nahlíželi na dimenzi jako na exponent, s nímž roste „velikost“ zkoumaného útvaru. Tato myšlenka se ukázala jako rozumná, neboť pro „klasické“ geometrické útvary vycházela tato dimenze vždy celočíselně, nicméně už tomu tak nebylo v případě fraktálních útvarů. Podstata byla taková, že jsme útvar  $F$  rozdělili na určitý počet stejně „velkých částí“, označme  $F_1, F_2, \dots, F_m$  v nějakém měřítku  $\varepsilon > 0$ . Zkusme nyní požadavek na striktně stejnou velikost (formálně vzato míru) trochu rozvolnit. Bude nám stačit, když pro každé  $i$  je

$$\text{diam } F_i \leq \delta, \text{ kde } \delta > 0.$$

Zároveň nebudeme požadovat, aby množiny  $F_1, F_2, \dots, F_m$  byly všechny striktně po dvou téměř disjunktními<sup>8</sup> podmnožinami  $F$ , ale stačí, když budou tvořit pokrytí  $F$ .

<sup>7</sup>V kapitole 1 jsme pro jednoduchost používali obecnější termín *fraktální dimenze*. Ten však zahrnuje daleko širší škálu možných definic, než jen tu, kterou jsme si představili. Avšak dále v tomto textu budeme používat výhradně její skutečný název, tj. box-counting dimenze.

<sup>8</sup>Množiny  $M, N$  jsou *téměř disjunktní*, pokud  $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset$ , tedy může nastat, že se na hranici mohou „dotýkat“, tzn.  $\partial M \cap \partial N \neq \emptyset$ .



Mějme tedy nějakou neprázdnou omezenou množinu  $F \subset \mathbb{R}^n$ , kde pro každé  $\delta > 0$  budeme hledat *nejmenší počet* množin, takových, že pokrývají  $F$ . Toto číslo si označíme  $N_\delta(F)$ . Dimenze množiny  $F$  by tedy měla odrážet „rychlost“ růstu  $N_\delta(F)$  pro  $\delta \rightarrow 0^+$ . Je-li splněna aproximace

$$N_\delta(F) \approx c\delta^{-s} \quad (2.1)$$

pro  $c > 0$ , pak řekneme, že množina  $F$  má box-counting dimenzi  $s$ . (Převzato z [5, str. 27].)

**Poznámka 2.4.1.** V dalším textu budeme místo  $\delta \rightarrow 0^+$  psát pro jednoduchost pouze  $\delta \rightarrow 0$ , byť by se slušilo používat první variantu. Čtenáři je však nejspíše jasné, že uvažovat záporný průměr množiny nemá smysl.

Logaritmováním a úpravou výrazu (2.1) dostaneme:

$$\ln N_\delta(F) \approx \ln c + \ln \delta^{-s} \quad (2.2)$$

$$\ln N_\delta(F) \approx \ln c - s \ln \delta \quad (2.3)$$

$$s \approx \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} + \frac{\ln c}{\ln \delta}. \quad (2.4)$$

Když porovnáme výsledek v (2.2) s rovností (1.7) z minulé kapitoly, můžeme si všimnout, že zde navíc figuruje člen  $\ln c / \ln \delta$ . Když však uvážíme limitu daného výrazu pro  $\delta \rightarrow 0$ , dostaneme původní vzorec, který jsme již viděli, tj.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} + \frac{\ln c}{\ln \delta} \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln c}{\ln \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

Předchozí úvahu můžeme shrnout do následující definice.

**Definice 2.4.2** (Box-counting dimenze). Necht  $F \subset \mathbb{R}^n$  je neprázdna omezená množina. Pak definujeme následující:

(a) *Nejmenší počet množin v  $\delta$ -pokrytí množiny  $F$*  značíme  $N_\delta(F)$ , tj.

$$N_\delta(F) = \min \left\{ m \in \mathbb{N}_0 \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^m F_i, \text{ diam } F_j \leq \delta \text{ pro } 1 \leq j \leq m \right\}.$$

(b) *Horní box-counting dimenze množiny  $F$*  je

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

(c) *Dolní box-counting dimenze množiny  $F$*  je

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

V případě, že  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$ , pak společnou hodnotu nazýváme *box-counting dimenzí* množiny  $F$ , značíme  $\dim_B F$ , přičemž platí

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

**Poznámka 2.4.3.** Zde je důležité zmínit, že pro v dalším textu budeme uvažovat  $\delta$  dostatečně malé, konkrétně  $0 < \delta < 1$ , tzn. hodnota  $-\ln \delta$  je vždy kladná. Dále též budeme pracovat (podle definice 2.4.2) pouze s neprázdnými omezenými množinami, abychom se vyhnuli problémům s případy, kdy  $N_\delta(F) = \infty$  nebo  $N_\delta(F) = 0$ .

Abychom uvedli vše na pravou míru, box-counting dimenzi lze taktéž definovat více způsoby. V tuto uvažujeme obecně  $\delta$ -pokrytí dané množiny  $F$ , tj. pokrytí *obecnými* množinami o průměru maximálně  $\delta > 0$ . Lze se však zaměřit i na konkrétní útvary, jak ukazuje následující věta.

**Věta 2.4.4** (Ekvivalentní definice box-counting dimenze). *Nechť  $F \subset \mathbb{R}^n$  je neprázdná omezená množina. Pak*

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_B F &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta}, \\ \overline{\dim}_B F &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta}, \\ \dim_B F &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta},\end{aligned}$$

kde  $M_\delta(F)$  je definováno jedním z následujících vzorců:

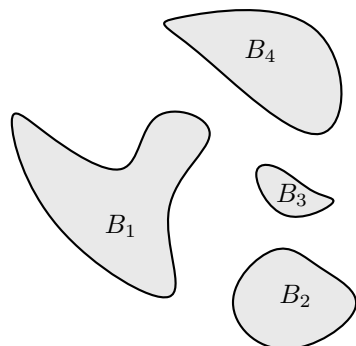
- (i)  $M_\delta(F) = \inf \left\{ m \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^m K_\delta(x_i), x_j \in \mathbb{R}^n \text{ pro } 1 \leq j \leq m \right\},$
- (ii)  $M_\delta(F) = \inf \left\{ m \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^m I_i, I_j = \prod_{k=1}^n \langle a_k, a_k + \delta \rangle \text{ pro } 1 \leq j \leq m \right\},$
- (iii)  $M_\delta(F) = |\{I \mid I \cap F \neq \emptyset, I \in \mathcal{Q}_\delta\}|, \text{ kde } \delta > 0.$
- (iv)  $M_\delta(F) = \sup \{m \mid B_\delta(x_i) \cap B_\delta(x_j) = \emptyset; x_i, x_j \in \mathbb{R}^n \text{ pro } 1 \leq i, j \leq m\}.$

Pojďme si větu 2.4.4 nyní trochu rozebrat.

- Body (i) a (iv) říkají, že  $M_\delta(F)$  je rovno *nejmenšímu počtu uzavřených koulí o poloměru  $\delta$ , které pokrývají  $F$* , resp. *nejvyšší počet disjunktních otevřených koulí, které mají střed v  $F$* .
- Podobně body (ii) a (iii) tvrdí, že  $M_\delta(F)$  lze definovat jako pokrytí kvádry o stranách délky  $\delta$ , resp. počet všech kvádrů z  $\delta$ -mříže, které mají s  $F$  neprázdný průnik.

Pro představu viz obrázky 2.4. Důkaz věty je delší a opět jej vynecháme, nicméně lze jej nalézt v knize [5, str. 30].

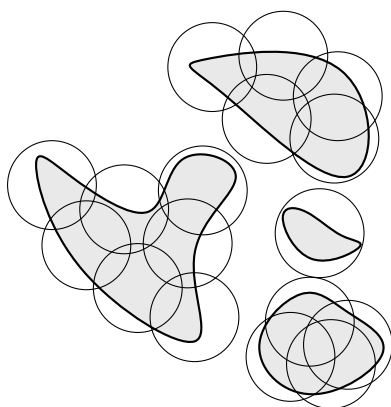
Zároveň body (ii) a (iii) nám dávají dobré opodstatnění názvu tohoto typu dimenze, neboť v podstatě zkoumáme pokrývání daného obrazce „kostkami“. Při aproximacích box-counting dimenze obrazce  $F \subset \mathbb{R}^2$  tak lze pracovat s mřížkou čtverců o libovolné straně  $\delta > 0$ , kdy  $M_\delta(F)$  stanovíme jako počet čtverců, které se překrývají se zkoumaným obrazcem  $F$ . Když se tedy zpět vrátíme k otázce



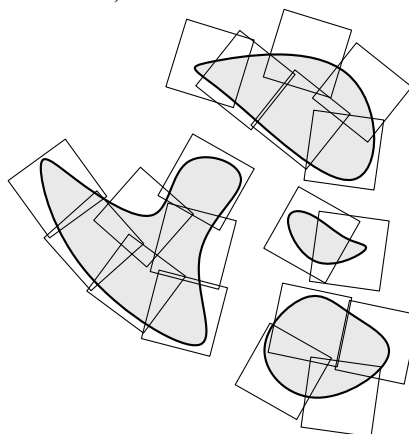
(a) Množina  $B = \bigcup_{i=1}^4 B_i$



(b)  $\delta$ -pokrytí množiny  $B$  (viz definice 2.4.2)



(c) Pokrytí uzavřenými koulemi (viz bod (i))



(d) Pokrytí pomocí kvádrů (viz bod (ii))



(e)  $\delta$ -mříž (viz bod (iii))



(f) Pokrytí otevřenými po dvou disjunktními koulemi (viz bod (iv))

Obrázek 2.4: Ilustrace věty 2.4.4 (Inspirováno [5, str. 29])



Obrázek 2.5: Aproximace box-counting dimenze pobřeží Velké Británie (Převzato z Wikipedia Commons)<sup>9</sup>

rozebírané v úvodu tohoto textu týkající se délky pobřeží (viz kapitola 1), lze jeho „fraktálnost“ do jisté míry vyjádřit právě popsáním způsobem (viz obrázek 2.5). Nyní se opět vrátíme k fraktálům a výpočtům jejich dimenze, čemuž jsme se věnovali již v sekci 1.3 kapitoly 1, konkrétně 1.3.2. Tentokrát však budeme postupovat přímo podle definice box-counting dimenze 2.4.2, tedy budeme zvlášť zkoumat horní a dolní box-counting dimenzi.

**Příklad 2.4.5** (Cantorovo diskontinuum). Formálně můžeme popsat Cantorovo diskontinuum  $C$  jako průnik množin  $C_k$  pro  $k = 0, 1, 2, \dots$ , přičemž

$$C_k = \bigcup_{j=0}^{3^{k-1}-1} \left( \left\langle \frac{3j+0}{3^k}, \frac{3j+1}{3^k} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3j+2}{3^k}, \frac{3j+3}{3^k} \right\rangle \right).$$

$C_k$  tedy reprezentuje  $k$ -tou iteraci a  $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$ . Již jsme měli možnost se přesvědčit, že tento fraktál má box-counting dimenzi  $\ln 2 / \ln 3$ . Zkusme nyní výpočet zopakovat, avšak vzlášt vypočítáme  $\underline{\dim}_B C$  a  $\overline{\dim}_B C$  podíváme se, zda se shodují.

Jako první provedeme horní odhad. Je potřeba zvolit  $\delta$  a na jeho základě dopočítat  $N_\delta(C)$ . V  $k$ -té iteraci, kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ , bude obecně  $2^k$  intervalů, každý o délce  $(1/3)^k$ , tedy pokud zvolíme  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ , pak intervaly o délce nejvýše  $\delta$  (viz věta 2.4.4, bod (i)) tvoří  $\delta$  pokrytí, přičemž  $N_\delta(C) \leq 2^k$ . Tedy celkově pro  $\delta$ -pokrytí všech intervalů bude potřeba nejvýše  $N_\delta(C) \leq 2^k$  intervalů  $I_1, I_2, \dots, I_{N_\delta(C)}$  o průměru  $3^{-k} < \text{diam } F_i \leq 3^{-k+1}$  pro každé  $i$ . Z toho dostáváme

$$\overline{\dim}_B C = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(C)}{-\ln \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{-\ln 3^{-k+1}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln 2}{(k-1) \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Naopak pokud uvažíme intervaly délky  $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ , pak každý z nich má neprázdný průnik s maximálně jedním intervalem  $k$ -té iterace  $C$ . Těch je, jak již víme,  $2^k$ , tedy intervalů  $I_1, I_2, \dots, I_{N_\delta(C)}$  bude nejméně  $2^k$  pro pokrytí  $C$ , tzn.

$N_\delta(C) \geq 2^k$ . Tím dostáváme dolní odhad:

$$\underline{\dim}_B C = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(C)}{-\ln \delta} \geq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln 2^k}{-\ln 3^{-k-1}} = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{k \ln 2}{(k+1) \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Protože  $\underline{\dim}_B C = \overline{\dim}_B C = \ln 2 / \ln 3$ , tak box-counting dimenze Cantorova diskontinua je  $\dim_B C = \ln 2 / \ln 3$ . (Převzato z [5, str. 32])

Podobně bychom postupovali pro rovinné obrazce.

**Příklad 2.4.6** (Kochova křivka). Zde se zatím s formální definicí nebudeme zatěžovat. Opět ukážeme horní a dolní odhad zvlášť. Kochovu křivku si označíme  $K$ .

Obecně  $k$ -tá iterace Kochovy křivky bude obsahovat  $4^k$  úseček, každá o délce  $(1/3)^k$ . Podobně jako v předchozím příkladu 2.4.5 zvolíme  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ . Pokud si pro pokrytí zvolíme uzavřené koule

$$K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \dots, K_\delta^{M_\delta(K)}(x_{M_\delta(K)}), \text{ kde } x_1, x_2, \dots, x_{M_\delta(K)} \in \mathbb{R}^2$$

pak  $M_\delta(K) \leq 4^k$ . Tedy

$$\overline{\dim}_B K = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_\delta(K)}{-\ln K} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^k}{-\ln 3^{-k+1}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln 4}{(k-1) \ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Podobně pro dolní odhad uvážíme  $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ . Vezmeme-li uzavřené koule  $K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \dots, K_\delta^{M_\delta(K)}(x_{M_\delta(K)})$ , pak žádný nemůže mít neprázdný průnik s více než čtyřmi úsečkami, tedy pro jejich pokrytí je zapotřebí alespoň  $M_\delta(K) \geq 4^k/4 = 4^{k-1}$ , čímž dostáváme

$$\underline{\dim}_B K = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_\delta(K)}{-\ln K} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^{k-1}}{-\ln 3^{-k-1}} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1) \ln 4}{(k+1) \ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Tzn.  $\dim_B K = \ln 4 / \ln 3$ .

**Poznámka 2.4.7.** Obecně množina  $F$  skládající se z  $m$  disjunktních kopií sebe samotné, kde každá z nich je  $r$ -krát menší, má dimenzi  $\dim_B F = \ln m / \ln r$ .

Nyní se podíváme ještě na jedno možné pojetí box-counting dimenze. Připomeňme, že  $\delta$ -okolím množiny  $F$  v metrickém prostoru  $(X, \varrho)$  rozumíme

$$(F)_\delta = \{x \in X \mid \exists y \in F : \varrho(x, y) < \delta\}.$$

Budeme nyní sledovat, jak „rychle“ se mění objem  $(F)_\delta$  pro  $\delta \rightarrow 0$ . A se zmínkou objemu nám zde do hry opět vstupuje Lebesgueova míra  $\lambda_n$ , o níž jsme si povídali v sekci 2.3. Podívejme se nejdříve na několik příkladů.

- Pro konečnou množinu  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je

$$\lambda_3((F)_\delta) \leq n \cdot \frac{4}{3} \pi \delta^3.$$

Pro  $\delta \leq 1/2 \min \{\varrho(x, y) \mid x, y \in F\}$  nastává rovnost.

- Pro úsečku  $u \subset \mathbb{R}^3$  o délce  $\ell$  lze objem jejího  $\delta$ -okolí stanovit jako

$$\lambda_3((u)_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3 + \pi\delta^2\ell.$$

Pokud však uvážíme  $\delta$  dostatečně malé, lze první člen zanedbat a psát

$$\lambda_3((u)_\delta) \approx \pi\ell\delta^2.$$

- V případě neprázdného kvádru

$$I = \{(x, y, 0) \mid x \in \langle a_1, b_1 \rangle, y \in \langle a_2, b_2 \rangle\}$$

je

$$\begin{aligned}\lambda_3(I_\delta) &= 2(b_1 - a_1)(a_2 - b_2)\delta + 2(b_1 - a_1)\pi\delta^2 + 2(b_2 - a_2)\pi\delta^2 + \frac{4}{3}\pi\delta^3 \\ &\approx 2(b_1 - a_1)(a_2 - b_2)\delta\end{aligned}$$

- Pro kouli  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^3$ , kde  $x \in \mathbb{R}^3$  a  $r > 0$  je objem

$$\lambda_3((B_r(x))_\delta) = \frac{4}{3}\pi(r + \delta)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2\delta + 4\pi r\delta^2 + \frac{4}{3}\pi\delta^3 \approx \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Změna objemu je v tomto případě vzhledem k původnímu objemu zanedbatelná.

Výsledky si srovnáme v tabulce 2.1. Můžeme si všimnout, že v každém případě

Útvar $F$	$\lambda_3((F)_\delta)$
Konečná množina $\{x_1, \dots, x_n\}$	$\frac{4n}{3}\pi\delta^3 = c_1\delta^3$
Úsečka $u$	$\pi\ell\delta^2 = c_2\delta^2$
Kvadr $I$	$2(b_1 - a_1)(a_2 - b_2)\delta = c_3\delta^1$
Koule $B_\delta(x)$	$\frac{4}{3}\pi r^3 = c_4\delta^0$

Tabulka 2.1: Odhady  $\lambda_3$  pro vybrané útvary

odhad objemu vychází  $\lambda_3((F)_\delta) \approx c\delta^{3-s}$ , kde  $c > 0$  je závislé na původní míře  $F$  a  $s$  udává dimenzi. Obecněji pro množinu  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  bychom došli k  $\lambda_n((F)_\delta) \approx c\delta^{n-s}$ . Nyní, podobně jako v úvodu této sekce, zkusme opět vyjádřit  $s$ :

$$\begin{aligned}\ln \lambda_n((F)_\delta) &\approx \ln c + (n - s) \ln \delta \\ s \ln \delta &\approx n \ln \delta - \ln \lambda_n((F)_\delta) + \ln c \\ s &\approx n - \frac{\ln \lambda_n((F)_\delta)}{\ln \delta} + \frac{\ln c}{\ln \delta}.\end{aligned}$$

Poslední člen bude v limitě opět nulový.

Lze ukázat, že  $s$  není v tomto případě nic jiného, než již námi zkoumaná box-counting dimenze. To si shrneme a dokážeme ve větě 2.4.8.

**Věta 2.4.8.** *Nechť  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pak platí:*

$$(i) \underline{\dim}_B F = n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_n((F)_\delta)}{\ln \delta},$$

$$(ii) \overline{\dim}_B F = n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_n((F)_\delta)}{\ln \delta}.$$

*Důkaz.* V rámci důkazu využijeme větu 2.4.4.

Mějme  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ . Označme  $v_n$  objem jednotkové koule  $K_1(x)$ <sup>10</sup> v  $\mathbb{R}^n$  pro  $x \in \mathbb{R}^n$  libovolné. Dále mějmě pokrytí

$$\mathcal{K} = \{K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \dots, K_\delta^{M_\delta(F)}(x_{M_\delta(F)})\}$$

množiny  $F$ , kde  $0 < \delta < 1$  a  $x_j \in F$  pro každé  $1 \leq j \leq M_\delta(F)$ , přičemž  $M_\delta(F)$  je definováno podle bodu (i) věty 2.4.4. Pak lze zvolit pokrytí

$$\mathcal{K}' = \{K_{2\delta}^1(x_1), K_{2\delta}^2(x_2), \dots, K_{2\delta}^{M_\delta(F)}(x_{M_\delta(F)})\},$$

tzn.  $\mathcal{K}$  je zjemnění pokrytí  $\mathcal{K}'$ . Zároveň však platí, že  $\mathcal{K}'$  je i pokrytím  $(F)_\delta$ . Pro libovolné  $x \in (F)_\delta$  existuje totiž  $y \in F$ , takové,  $\varrho(x, y) < \delta$ . Tedy pro dané  $y$  existuje nějaká koule  $K_\ell(x_\ell) \in \mathcal{K}$ , taková, že  $y \in K_\ell(x_\ell)$ , což znamená, že

$$\varrho(x_\ell, y) \leq \varrho(x_\ell, x) + \varrho(x, y) \leq \delta + \delta = 2\delta.$$

Tzn. míru  $F$  lze zhora odhadnout jako

$$\lambda_n((F)_\delta) \leq M_\delta(F) v_n (2\delta)^n.$$

Úpravou získáme:

$$\begin{aligned} \ln \lambda_n((F)_\delta) &\leq n \ln \delta + \ln M_\delta(F) + \ln 2^n v_n \\ \frac{\ln \lambda_n((F)_\delta)}{-\ln \delta} &\leq -n + \frac{\ln M_\delta(F)}{-\ln \delta} + \frac{\ln 2^n v_n}{-\ln \delta}, \end{aligned}$$

tedy v limitě

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_n((F)_\delta)}{-\ln \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B F.$$

K odhadu  $\overline{\dim}_B F$  lze dospět analogicky.

Nyní uvažujme po dvou disjunktní otevřené koule  $B_\delta^j(x_j)$ , kde  $x_j \in F$  pro  $1 \leq j \leq M_\delta(F)$ . Pak součtem jejich objemů získáme

$$M_\delta(F) v_n \delta^n \leq \lambda_n((F)_\delta).$$

Obdobnou úpravou této nerovnosti získáme požadovanou nerovnost. □

Zkusme si aplikaci věty ilustrovat opět na příkladu fraktálu.

---

<sup>10</sup>Objem koule v  $\mathbb{R}^n$  lze vyjádřit vztahem

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} r^n,$$

kde  $\Gamma$  je tzv. *gamma funkce*. Se vzorcem však dále v textu pracovat nebudeme.

**Příklad 2.4.9** (Cantorovo diskontinuum potřetí). Pro Cantorovo diskontinuum v  $k$ -té iteraci, označme  $C_k$ , lze odhadnout délku  $(C_k)_\delta$  pro  $3^{-k-2} \leq \delta \leq 3^{-k-1}$  jako

$$\lambda_1((C_k)_\delta) \geq 2^k(3^{-k-2} + 2\delta) \leq 2^k \cdot 3 \cdot 3^{-k-2} = 2^k \cdot 3^{-k-1}.$$

Tedy podle věty 2.4.8

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B C &= n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_1((C)_\delta)}{\ln \delta} \leq 1 - \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k \cdot 3^{-k-1}}{\ln 3^{-k-1}} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln 2}{(k+1) \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \end{aligned}$$

Podobně zvolíme-li  $3^{-k-1} \leq \delta \leq 3^{-k}$ , pak

$$\lambda_1((C_k)_\delta) \leq 2^k(3^{-k} + 2\delta) \leq 2^k \cdot 3 \cdot 3^{-k} = 2^k \cdot 3^{-k+1}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B C &= n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_1((C)_\delta)}{\ln \delta} \geq 1 - \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k \cdot 3^{-k+1}}{\ln 3^{-k+1}} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln 2}{(k-1) \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \end{aligned}$$

## 2.4.2 Vlastnosti

V minulé podsekci 2.4.1 jsme se bavili o možnostech pojetí box-counting dimenze. S tím souvisely zejména pak věty 2.4.4 a 2.4.8. Nyní trochu blíže ještě prozkoumáme některé její vlastnosti, na něž se podíváme ve větě 2.4.10.

**Věta 2.4.10** (Vlastnosti box-counting dimenze). *Nechť jsou dány  $F, G \subseteq \mathbb{R}^n$ .*

- (i) *Pokud  $G \subseteq F$ , pak  $\underline{\dim}_B G \leq \underline{\dim}_B F$  a  $\overline{\dim}_B G \leq \overline{\dim}_B F$ .  $\triangleleft$  monotonie*
- (ii) *Je-li  $F \neq \emptyset$  omezená, pak  $0 \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq n$ .  $\triangleleft$  rozsah hodnot*
- (iii)  $\overline{\dim}_B(F \cup G) = \max \{ \overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B G \}$ .  $\triangleleft$  stabilita

*Důkaz.*

- (i) Plyne triviálně z faktu, že pro libovolné  $\delta > 0$  je  $N_\delta(G) \leq N_\delta(F)$ , neboť každé  $\delta$ -pokrytí  $\mathcal{F} \supset F$  je zároveň  $\delta$ -pokrytím  $G$ .
- (ii) První dvojice nerovností je zjevná z definice (viz 2.4.2). Pro třetí nerovnost zvolme kvádr  $I$ , takový, že  $F \subset I$ . Zvolíme-li  $\delta > 0$  a  $\delta$ -mříž  $\mathcal{Q}_\delta$ , pak

$$\begin{aligned} M_\delta(F) &= |\{J \mid J \cap F \neq \emptyset, J \in \mathcal{Q}_\delta\}| \\ &\leq |\{J \mid J \cap I \neq \emptyset, J \in \mathcal{Q}_\delta\}| \\ &= M_\delta(I) \leq c\delta^{-n}, \end{aligned}$$

kde  $c > 0$ . Poslední nerovnost si lze snadno rozmyslet. Tedy podle věty 2.4.4 a přechozího bodu (i) máme

$$\overline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B I = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(I)}{-\ln \delta} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln c\delta^{-n}}{-\ln \delta} = n.$$



(iii) Pro  $\delta > 0$  volme  $\delta$ -pokrytí  $\mathcal{F} \supset F$  a  $\mathcal{G} \supset G$ . Je celkem zjevné, že  $N_\delta(F \cup G) \leq N_\delta(F) + N_\delta(G)$ , neboli

$$\begin{aligned} \ln(N_\delta(F) + N_\delta(G)) &\leq \ln(2 \max\{N_\delta(F), N_\delta(G)\}) \\ &= \ln 2 + \ln(\max\{N_\delta(F), N_\delta(G)\}). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B(F \cup G) &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{\ln 2}{-\ln \delta} + \frac{\ln(\max\{N_\delta(F), N_\delta(G)\})}{-\ln \delta} \right) \\ &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\max\{N_\delta(F), N_\delta(G)\})}{-\ln \delta} \\ &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left( \max \left\{ \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}, \frac{\ln N_\delta(G)}{-\ln \delta} \right\} \right) \\ &\leq \max \left\{ \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}, \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(G)}{-\ln \delta} \right\} \\ &= \max\{\overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B G\}. \end{aligned}$$

Opačná nerovnost plyne z faktu, že  $F \subset F \cup G$  a  $G \subset F \cup G$ , tedy

$$\overline{\dim}_B(F \cup G) \geq \overline{\dim}_B F \text{ a } \overline{\dim}_B(F \cup G) \geq \overline{\dim}_B G$$

podle bodu (i), neboli

$$\overline{\dim}_B(F \cup G) = \max\{\overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B G\}.$$

□

(Převzato a upraveno z [5, str. 35].)

Poslední bod (iii) tvrzení 2.4.10 lze pochopitelně rozšířit indukcí. Čtenář se sám může přesvědčit, že se jedná o relativně jednoduché cvičení.

**Důsledek 2.4.11.** Pro  $F_1, F_2, \dots, F_m \subseteq \mathbb{R}^n$  platí:

$$\overline{\dim}_B \left( \bigcup_{i=1}^m F_i \right) = \max \left\{ \overline{\dim}_B F_j \mid 1 \leq j \leq m \right\}.$$

*Důkaz.* Pro  $m = 1$  a  $m = 2$  víme, že tvrzení platí. Pro  $m + 1$  lze psát:

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B \left( \bigcup_{i=1}^{m+1} F_i \right) &= \overline{\dim}_B \left( \left( \bigcup_{i=1}^m F_i \right) \cup F_{m+1} \right) \\ &= \max \left\{ \overline{\dim}_B \left( \bigcup_{i=1}^m F_i \right), \overline{\dim}_B F_{m+1} \right\} \\ &\stackrel{\text{I.P.}}{=} \max \left\{ \max \left\{ \overline{\dim}_B F_i \mid 1 \leq i \leq m \right\}, \overline{\dim}_B F_{m+1} \right\} \\ &= \max \left\{ \overline{\dim}_B F_j \mid 1 \leq j \leq m+1 \right\}. \end{aligned}$$

□

Jako poslední se ještě nabízí otázka, jak se bude dimenze  $\dim_B$  chovat vůči zobrazování. V tomto kontextu pro nás budou relevantní především *lipschitzovská* a *bilipschitzovská* zobrazování. Připomeňme, že lipschitzovské zobrazování je takové zobrazování  $f : X \rightarrow Y$  mezi metrickými prostory  $(X, \varrho_1)$  a  $(Y, \varrho_2)$ , že existuje konstanta  $K > 0$ , taková, že pro každé  $x, y \in X$  platí

$$\varrho_2(f(x), f(y)) \leq K \varrho_1(x, y).$$

Pokud navíc platí, že existují konstanty  $K_1, K_2 > 0$ , takové, že platí

$$K_1 \varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(f(x), f(y)) \leq K_2 \varrho_1(x, y),$$

pak  $f$  nazýváme bilipschitzovské.

Než se však podíváme na samotný vztah box-counting dimenze a lipschitzovských, resp. bilipschitzovských zobrazování, dokážeme si jedno jednoduché lemma, které později využijeme.

**Lemma 2.4.12.** *Nechť  $(X, \varrho_1), (Y, \varrho_2)$  jsou metrické prostory a zobrazování  $f : X \rightarrow Y$  je bilipschitzovské. Pak  $f : X \rightarrow f(X)$  je bijekce.*

*Důkaz.* Podle předpokladu je  $f$  bilipschitzovské zobrazování, tedy existují pro konstanty  $K_1, K_2 > 0$ , takové, že

$$K_1 \varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(f(x), f(y)) \leq K_2 \varrho_1(x, y), \quad x, y \in X.$$

Surjektivita zobrazování  $f$  je zřejmá z její definice. Pro spor předpokládejme, že  $f$  není injektivní, tedy existují  $x, y \in X$ , taková, že  $x \neq y$  a  $f(x) = f(y)$ . Pak

$$0 < K_1 \varrho_1(x, y) \leq \varrho_2(f(x), f(y)) = 0,$$

což je spor. □

V našem případě se nyní dále omezíme, stejně jako předtím, pouze na prostor  $\mathbb{R}^n$ .

**Věta 2.4.13.** *Nechť jsou dány metrické prostory  $(\mathbb{R}^n, \varrho_n)$  a  $(\mathbb{R}^m, \varrho_m)$ ,  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  a zobrazování  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Platí:*

(i) *Je-li  $f$  lipschitzovské, pak*

$$\underline{\dim}_B f(F) \leq \underline{\dim}_B F \text{ a } \overline{\dim}_B f(F) \leq \overline{\dim}_B F.$$

(ii) *Je-li  $f$  bilipschitzovské, pak*

$$\underline{\dim}_B f(F) = \underline{\dim}_B F \text{ a } \overline{\dim}_B f(F) = \overline{\dim}_B F.$$

*Důkaz.* Máme tedy metrické prostory  $(\mathbb{R}^n, \varrho_n), (\mathbb{R}^m, \varrho_m)$ , zobrazování  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  a  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- (i) Jako první si všimneme, že je-li  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots\}$   $\delta$ -pokrytí množiny  $F$ , kde  $\delta > 0$ , pak je jím i systém

$$\mathcal{F}' = \{F \cap F_1, F \cap F_2, \dots\}.$$

Podle předpokladu je  $f$  lipschitzovské, tzn. pro každé  $x, y \in \mathbb{R}^n$  je

$$\varrho_m(f(x), f(y)) \leq K \varrho_n(x, y), \quad K > 0.$$

Speciálně tak platí i  $\text{diam}(f(F \cap F_i)) \leq K \text{diam}(F \cap F_i)$  pro každé  $i$ , a tedy

$$\text{diam}(f(F \cap F_i)) \leq K \text{diam}(F \cap F_i) \leq K \text{diam } F_i \leq K\delta.$$

Z toho plyne, že  $\mathcal{G} = \{f(F \cap F_1), f(F \cap F_2), \dots\}$  tvoří  $K\delta$ -pokrytí množiny  $f(F)$ . Tedy máme, že  $N_{K\delta}(f(F)) \leq N_\delta(F)$ . Po úpravě

$$\frac{\ln N_{K\delta}(f(F))}{-\ln \delta} \leq \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

Tedy celkově

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B f(F) &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_{K\delta}(f(F))}{-\ln K\delta} = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_{K\delta}(f(F))}{-\ln \delta} \cdot \frac{\ln \delta}{\ln K\delta} \\ &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(f(F))}{-\ln \delta} \cdot \frac{\ln \delta}{\ln K\delta} = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(f(F))}{-\ln \delta} \\ &= \overline{\dim}_B F. \end{aligned}$$

Nerovnost pro  $\underline{\dim}_B f(F)$  obdržíme analogicky.

- (ii) Je-li  $f$  bilipschitzovské, pak podle lemmatu 2.4.12 je  $f : F \rightarrow f(F)$  bijekce a existuje inverzní zobrazení  $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ . Volme  $u, v \in f(F)$  libovolně a položme  $x = f^{-1}(u), y = f^{-1}(v)$ . Pak

$$\begin{aligned} K_1 \varrho_n(x, y) &= K_1 \varrho_n(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) \leq \varrho_m(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))) \\ &= \varrho_m(u, v), \end{aligned}$$

neboli

$$\varrho_n(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) \leq \frac{1}{K_1} \varrho_m(u, v),$$

přičemž  $K_1, K_2$  jsou konstanty z definice. Tzn.  $f^{-1}$  je lipschitzovské.

Podle bodu (i) tedy platí

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B F &= \underline{\dim}_B f^{-1}(f(F)) \leq \underline{\dim}_B f(F), \\ \overline{\dim}_B F &= \overline{\dim}_B f^{-1}(f(F)) \leq \overline{\dim}_B f(F). \end{aligned}$$

Ovšem podle bodu (i) ovšem již víme, že také platí

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B f(F) &\leq \underline{\dim}_B F, \\ \overline{\dim}_B f(F) &\leq \overline{\dim}_B F. \end{aligned}$$

Z toho již plyne závěr tvrzení.

□

(Převzato z [5, str. 36].)

Právě dokázaná věta 2.4.13 (konkrétně bod (ii)) nám ve své podstatě říká, že box-counting dimenze nějakého útvaru  $F$  je invariantní vůči libovolnému bilipschitzovskému zobrazení  $f$ . Tento výsledek se nám bude hodit dále v kapitole 4 u tzv. *systémů iterovaných funkcí*.

## 2.5 Hausdorffova míra a Hausdorffova dimenze

Způsobů, jak definovat dimenzi je celá řada. Zatím jsme společně prozkoumali box-counting dimenzi (resp. některá její pojetí), avšak lze najít více způsobů její definice<sup>11</sup>. Pravděpodobně však nejstarším exemplářem svého druhu je tzv. *Hausdorffova dimenze* a s ní související *Hausdorffova míra*, které hrají ve fraktální geometrii velice podstatnou roli. Stále se však budeme zabývat pouze množinami v  $\mathbb{R}^n$ . Jsou pojmenovány po německém matematikovi FELIXI HAUSDORFFOVI (1868–1942).



Obrázek 2.6: Felix Hausdorff<sup>12</sup>, 1868–1942

### 2.5.1 Definice Hausdorffovy míry

**Definice 2.5.1.** Necht je dána množina  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $s > 0$ . Pak pro každé  $\delta > 0$  definujeme zobrazení

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } F_i)^s \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, \text{ diam } F_j \leq \delta \text{ pro } j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Na první pohled si lze všimnout, že pro  $0 < \delta_1 < \delta_2$  je  $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(F) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(F)$ . Jinými slovy, funkce  $\delta \mapsto \mathcal{H}_\delta^s(F)$  je nerostoucí. Toto není nikterak těžké si rozmyslet, ne-

<sup>11</sup>Některé další jsou sepsány např. v [5, str. 40].

boť pro  $\delta_1 < \delta_2$  existuje  $\delta_1$ -pokrytí  $\mathcal{F}_1$ , takové, že je podpokrytím  $\delta_2$ -pokrytí  $\mathcal{F}_2$  množiny  $F$ , tedy  $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ . To znamená, že

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\delta_1}^s(F) &= \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{F}_1} (\text{diam } U)^s \mid \mathcal{F}_1 \text{ je } \delta_1\text{-pokrytí } F \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{F}_2} (\text{diam } U)^s \mid \mathcal{F}_2 \text{ je } \delta_2\text{-pokrytí } F \right\} = \mathcal{H}_{\delta_2}^s(F). \end{aligned}$$

Zároveň je z definice 2.5.1 zjevné, že  $\mathcal{H}_{\delta}^s(F) \geq 0$ .

**Definice 2.5.2** (Hausdorffova míra). Necht  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pak pro množinu  $F$  definujeme  $s$ -dimenzionální Hausdorffovu míru jako

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F).$$

Z přechodzího je zjevné, že limita v definici 2.5.2 vždy existuje.

Bude dobré se přesvědčit, že je Hausdorffova míra mírou ve smyslu definice 2.2.4. Začneme však otázkou. *Na jaké množině je potřeba Hausdorffovu míru  $\mathcal{H}^s$  uvažovat?* Odpověď nám poskytují tzv. *borelovské množiny*, které jsou pojmenovány po francouzském matematikovi ÉMILE BORELOVI (1871–1956). Borelovské mno-



Obrázek 2.7: Émile Borel<sup>13</sup>, 1871–1956

žiny hrají podstatnou roli v tzv. *Deskriptivní teorii množin*. Nebudeme si zde vykládat všechny souvislosti, vystačíme si se základem. Takto nazýváme všechny množiny, které lze získat iteracemi operací spočetného sjednocení, průniku a doplňku otevřených množin z  $X$ . Označme systém takových množin jako  $\mathcal{G}$ . Na tomto základě pak definujeme tzv.  $\sigma$ -algebru borelovských množin na  $X$ :

$$\mathcal{B}(X) = \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G} \\ \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra}}} \mathcal{F}.$$

Jinými slovy,  $\mathcal{B}(X)$  je nejmenší  $\sigma$ -algebra generovaná<sup>14</sup> všemi otevřenými množinami z  $X$ .

Nás speciálně bude zajímat  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Nejdříve si však dokážeme dvě pomocná lemmata.

**Lemma 2.5.3** ( $\sigma$ -subaditivita Hausdorffovy míry). *Nechť jsou dány množiny  $A_1, A_2, \dots$ , kde  $A_i \subseteq X$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Pak pro každé  $s \geq 0$  platí*

$$\mathcal{H}^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i).$$

*Důkaz.* Nechť  $s \geq 0$  a dále budiž dáno  $\varepsilon > 0$ . Pro každé  $i \in \mathbb{N}$  a  $\delta > 0$  mějme pokrytí

$$\mathcal{F}_i = \{F_{i,1}, F_{i,2}, \dots\}$$

množiny  $A_i$ , takové, že platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } F_{i,j})^s \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Systém  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$  tedy tvoří  $\delta$ -pokrytí množiny  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Celkově

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\delta}^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &\leq \sum_{i,j \in \mathbb{N}} (\text{diam } F_{i,j})^s = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } F_{i,j})^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \mathcal{H}_{\delta}^s(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^s(A_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Limitním přechodem  $\delta \rightarrow 0$  a aplikací Leviho věty<sup>15</sup> dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^s(A_i) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(A_i) + \varepsilon \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

---

<sup>14</sup>Obecně  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  je generovaná množinou  $X$ , když

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \supseteq X \\ \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra}}} \mathcal{F}.$$

Tento fakt se někdy značí  $\mathcal{A} = \sigma(X)$ .

<sup>15</sup>Leviho věta o záměně pořadí limity a Lebesgueova integrálu říká, že je-li posloupnost nezáporných měřitelných funkcí  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  neklesající, tj.

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

na prostoru  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  a zároveň  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  pro každé  $x \in X$ , pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu.$$

Zde je speciálně  $\mu$  aritmetická míra,  $X = \mathbb{N}$ , a  $f_n(i)$  lze volit např.  $\mathcal{H}_{1/n}^s(A_i)$ . Z Heineho věty víme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{1/n}^s(A_i) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(A_i) = \mathcal{H}^s(A_i).$$

**Lemma 2.5.4.** *Nechť  $(X, \varrho)$  je metrický prostor, kde  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , a  $A, B \subseteq X$ , takové, že pro jejich vzdálenost platí  $\varrho(A, B) > 0$ . Pak pro každé  $s \geq 0$  platí*

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

*Důkaz.* Nerovnost  $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$  je zřejmá ze  $\sigma$ -subaditivity Hausdorffovy míry (viz lemma 2.5.3).

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $\mathcal{H}^s(A \cup B) < \infty$ . Mějme libovolné  $\varepsilon > 0$ . Zvolme  $\delta$ -pokrytí  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots\}$  množiny  $A \cup B$ , takové, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } F_i)^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) + \varepsilon.$$

Opět bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že pro každé  $i \in \mathbb{N}$  je  $\text{diam } F_i < \varrho(A, B)$ . V opačném případě bychom  $F_i$  pokryli množinami s menším průměrem. Z toho pak plyne, že každá z množin  $F_i$  má neprázdný průnik s nejvýše jednou z množin  $A, B$ , tzn. z pokrytí  $\mathcal{F}$  lze vybrat dva disjunktní podsystémy  $\mathcal{F}_A$  a  $\mathcal{F}_B$ , přičemž  $\bigcup \mathcal{F}_A \supseteq A$  a  $\bigcup \mathcal{F}_B \supseteq B$ . Tedy celkově s užitím předchozího lemmatu 2.5.3 máme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B) &\leq \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}_A} F\right) + \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}_B} F\right) \\ &\leq \sum_{F \in \mathcal{F}_A} (\text{diam } F)^s + \sum_{F \in \mathcal{F}_B} (\text{diam } F)^s \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } F_i)^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pro  $\delta \rightarrow 0$  dostáváme

$$\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A \cup B) + \varepsilon$$

□

**Definice 2.5.5** (Vnější míra). Nechť  $(X, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. Zobrazení  $\mu^* : \mathcal{A} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  nazveme *vnější mírou* na  $\mathcal{A}$ , pokud platí:

- (a)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
- (b) Pokud  $A, B \in \mathcal{A}$  a  $A \subseteq B$ , pak  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ .
- (c) Je-li  $A_1, A_2, \dots$  posloupnost množin, kde  $A_i \in \mathcal{A}$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ , pak

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Vnější míra představuje zobecnění toho, co jsme měli možnost vidět již v sekci 2.3 týkající Lebesgueovy míry<sup>16</sup>. Tu jsme definovali na základě tzv. *vnější Lebesgueovy míry* (viz definice 2.3.1), která sice sama o sobě míru nepředstavovala, nicméně

<sup>16</sup>Jedná se slabší požadavek, tzn. každá míra je vnější mírou, opačné tvrzení však neplatí.

při restrikci na „správný“ systém množin jsme konstatovali, že se již jedná o míru. Lze se přesvědčit, že vnější Lebesgueova míra  $\lambda_n^*$  je vnější mírou ve smyslu definice 2.5.5 výše. Podobné pozorování lze učinit i pro Hausdorffovu míru  $\mathcal{H}^s$ . Platnost podmínky (c) jsme dokázali v lemmatu 2.5.3 a o platnosti (a) a (b) se může čtenář velice snadno předvědět. Tedy Hausdorffova míra na měřitelném prostoru  $(X, \mathcal{A})$  je vnější mírou. Navíc pokud vnější míra  $\mu^*$  splňuje závěr lemmatu 2.5.4, pak ji nazýváme *metrickou vnější mírou*.

Carathéodoryho kritérium, které jsme si uváděli při zavádění *lebesgueovské měřitelnosti* (viz definice 2.3.5). Ta jednoduše říkala, že rozdělením libovolné množiny  $G$  pomocí pěvně zvolené množiny  $A$  lze stanovit její míru jako součet měr dílčích částí, tzn.  $G \cap A$  a  $G \setminus A$ . Tento koncept lze však rozšířit. Obecně jakákoliv množina je  $\mu$ -měřitelná, pokud splňuje Carathéodoryho kritérium.

**Definice 2.5.6.** Necht  $\mu$  je míra a  $A \subseteq X$ . Množina  $A$  je  $\mu$ -měřitelná, pokud pro každé  $G \subseteq X$  platí

$$\mu(G) = \mu(G \cap A) + \mu(G \setminus A).$$

Speciálně nyní ukážeme platnost následujícího tvrzení 2.5.7.

**Věta 2.5.7.** Necht  $(X, \varrho)$  je metrický prostor. Pak každá množina  $A \in \mathcal{B}(X)$  je  $\mathcal{H}^s$ -měřitelná pro každé  $s \geq 0$ .

*Důkaz.* Není těžké si rozmyslet, že  $\mathcal{B}(X)$  vyjma otevřených množin obsahuje též všechny uzavřené<sup>17</sup>. Volme tedy uzavřenou množinu  $A \in \mathcal{B}(X)$ ,  $G \subseteq X$  a  $s \geq 0$ . Ze  $\sigma$ -subaditivity plyne nerovnost

$$\mathcal{H}^s(G) \leq \mathcal{H}^s(G \cap A) + \mathcal{H}^s(G \setminus A).$$

Pro důkaz opačné nerovnosti definujeme posloupnost množin  $P_0, P_1, P_2, \dots$  následovně:

$$P_0 = \{x \in G \mid \varrho(x, A) \geq 1\},$$

$$P_i = \left\{x \in G \mid \frac{1}{i+1} \leq \varrho(x, A) \leq \frac{1}{i}\right\}, \quad i \geq 1.$$

Pro libovolnou dvojici množin z podposloupnosti  $P_0, P_2, P_4, \dots$  platí, že jejich vzdálenosti jsou kladné. Z faktu, že  $\mathcal{H}^s$  je metrická (viz lemma 2.5.4) a monotonie plyne

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(P_{2i}) = \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=0}^m P_{2i}\right) \leq \mathcal{H}^s(G)$$

pro všechna  $m \in \mathbb{N}$ . Podobně pro liché členy  $\sum_{i=0}^m \mathcal{H}^s(P_{2i+1}) \leq \mathcal{H}^s(G)$ . Tzn. řada  $\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(P_i)$  je konvergentní. Zároveň platí

$$\varrho\left(\bigcup_{i=0}^m P_i, G \cap A\right) > 0,$$

---

<sup>17</sup>Plyne z uzavřenosti na doplněk.



pro každé  $m \in \mathbb{N}$ , tedy lze psát

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(G \setminus A) &\leq \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=0}^m P_i\right) + \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} P_i\right) \\ &\leq \mathcal{H}^s(G) - \mathcal{H}^s(G \cap A) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \mathcal{H}^s(P_i).\end{aligned}$$

Pro  $m \rightarrow \infty$  dostáváme

$$\mathcal{H}^s(G \setminus A) \leq \mathcal{H}^s(G) - \mathcal{H}^s(G \cap A)$$

z čehož již plyne požadovaná nerovnost.  $\square$

**Důsledek 2.5.8.** *Trojice  $(X, \mathcal{B}(X), \mathcal{H}^s)$ , kde  $X$  je libovolná množina a  $s \geq 0$ , tvoří prostor s mírou.*

Nyní již můžeme zobrazení  $\mathcal{H}^s$  nazývat mírou oprávněně. Pojdme se podívat na nějaké příklady.

**Příklad 2.5.9.** Pro  $s = 0$  představuje zobrazení  $\mathcal{H}^s$  obyčejnou aritmetickou míru, tzn. pro konečnou množinu  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je  $\mathcal{H}^0(A) = |A|$ . Toto není těžké ukázat. Mějme množinu  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Zvolíme-li

$$\delta < \frac{1}{2} \cdot \min \{\varrho_e(x_i, x_j) \mid 1 \leq i, j \leq n\},$$

pak pro  $\delta$ -pokrytí  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  takové, že  $x_i \in F_i$  pro každé  $i$  máme

$$\sum_{i=1}^n (\text{diam } F_i)^0 = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Není těžké si rozmyslet, že  $n$  je nejmenší počet množin o průměru nejvýše  $\delta$ , takových, aby pokrývaly množinu  $A$ . Zároveň pro libovolné  $\varepsilon > 0$  je potřeba nejvýše  $n$ -koulí o poloměru  $\varepsilon/2$  se středy v  $x_i$  pro pokrytí  $A$ . Tzn.  $\mathcal{H}^0(A) = |A| = n$ .

V rámci tohoto textu jsme se již zabývali jiným typem míry a to tzv. *lebesgueovou mírou* (viz sekce 2.3). Ta pro nás hrála důležitou roli v jednom možném pojetí *box-counting dimenze* (viz sekce 2.4). Lze ukázat, že pro množinu  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  je

$$\mathcal{H}^n(F) = \frac{1}{v_n} \lambda_n(F),$$

kde  $v_n$  je objem (míra) jednotkové koule v  $\mathbb{R}^n$ . Čtenář snad promine, že tento fakt zde ponecháme bez důkazu. [5, str. 45]

## 2.5.2 Stručně k vlastnostem Hausdorffovy míry

Na chvíli se ještě zastavíme u vlastností Hausdorffovy míry. Již jsme společně dokázali, že Hausdorffova míra je skutečně mírou, tzn. splňuje všechny základní vlastnosti, které jsme si představili ve větě 2.2.6 (viz sekce 2.2). V tomto ohledu tedy netřeba již nic dalšího dokazovat. Nicméně podobně jako v případě *box-counting dimenze* (viz podsekce 2.4.2) se i zde podíváme, jak se Hausdorffova míra chová vůči *lipschitzovským zobrazením*.

**Věta 2.5.10.** *Nechť  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  v metrickém prostoru  $(\mathbb{R}^n, \varrho)$  a zobrazení  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  je lipschitzovské<sup>18</sup> s konstantou  $K > 0$ . Pak pro každé  $s \geq 0$  platí*

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq K^s \mathcal{H}^s(F).$$

*Důkaz.* Nechť  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots\}$  je  $\delta$ -pokrytí  $F$ . Pak

$$\text{diam}(f(F \cap F_i)) \leq K \text{diam}(F \cap F_i) \leq K \text{diam } F_i,$$

což znamená, že  $\mathcal{G} = \{F \cap F_1, F \cap F_2, \dots\}$  je  $K\delta$ -pokrytí  $f(F)$ . Z toho plyne, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(f(F \cap F_i)))^s \leq K^s \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } F_i)^s$$

a tedy  $\mathcal{H}_{K\delta}^s(f(F)) \leq K^s \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$ . Pro  $\delta \rightarrow 0$  máme požadovaný výsledek.  $\square$

(Převzato z [5, str. 46].)

Z toho speciálně plyne důsledek týkající se podobností.

**Důsledek 2.5.11.** *Nechť  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  v metrickém prostoru  $(\mathbb{R}^n, \varrho)$  a zobrazení  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  je podobnost, tzn. existuje  $K > 0$  takové, že pro každé  $x, y \in F$  platí*

$$\varrho(f(x), f(y)) = K \varrho(x, y).$$

*Pak pro každé  $s \geq 0$  platí*

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = K^s \mathcal{H}^s(F).$$

*Důkaz.* K podobnosti  $f$  existuje inverzní zobrazení  $f^{-1}$  s koeficientem  $L = 1/K$ . Z věty 2.5.10 tedy plyne, že

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(f^{-1}(f(F))) \leq \frac{1}{K^s} \mathcal{H}^s(f(F))$$

nebo-li  $\mathcal{H}^s(f(F)) \geq K^s \mathcal{H}^s(F)$ . Opačnou nerovnost získáme aplikací věty 2.5.10 na zobrazení  $f$ .  $\square$

## 2.5.3 Hausdorffova dimenze

Středobodem této sekce je tzv. *Hausdorffova dimenze*. Na úvod si dokážeme jedno jednoduché tvrzení týkající se Hausdorffovy míry.

---

<sup>18</sup>Tvrzení lze zformulovat obecněji pro tzv. *hölдеровská zobrazení*, tedy zobrazení  $f$  splňující

$$\varrho(f(x), f(y)) \leq K(\varrho(x, y))^\alpha.$$

kde  $\alpha > 0$ . Pak pro  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  platí

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq K^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

My si však vystačíme se speciálním případem.

**Věta 2.5.12.** *Nechť  $0 \leq s < t < \infty$  a  $F \subseteq X$ . Pak platí:*

$$(i) \mathcal{H}^s(F) < \infty \implies \mathcal{H}^t(F) = 0,$$

$$(ii) \mathcal{H}^t(F) > 0 \implies \mathcal{H}^s(F) = \infty.$$

*Důkaz.* Mějme  $\delta$ -pokrytí  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots\}$ , takové, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } F_i)^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(F) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

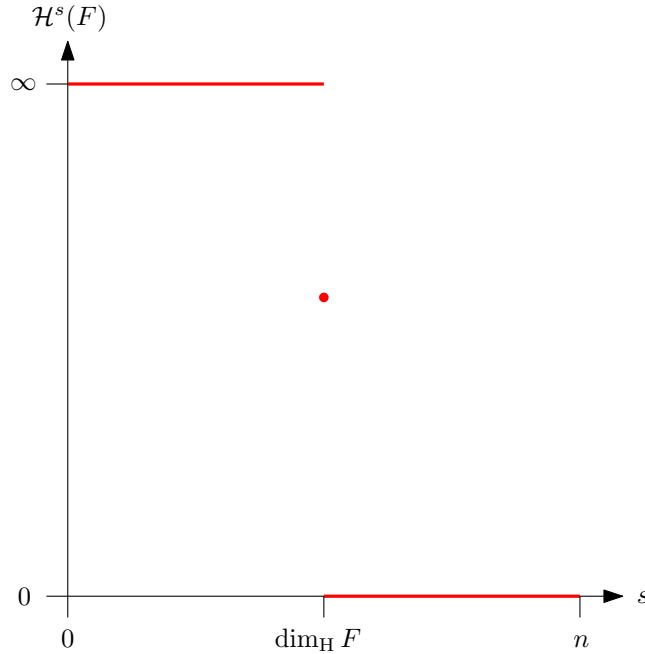
Pak

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } F_i)^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } F_i)^s \leq \delta^{t-s} (\mathcal{H}_\delta^s(F) + \varepsilon).$$

Tzn.  $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Pro  $\delta \rightarrow 0$  dostaneme body (i) a (ii).  $\square$

(Převzato z [8, str. 68].)

Z věty 2.5.12 lze vidět, že Hausdorffova míra dává smysl jen pro určitou hodnotu  $s$ . Pro „příliš velké“  $s$  bude hodnota vždy 0, naopak pro „moc malé“  $s$  bude jeho hodnota rovna  $\infty$  (viz obrázek 2.8). Této kritické hodnotě  $s$  říkáme *Hausdorffova*



Obrázek 2.8: Graf funkce  $f(s) = \mathcal{H}^s(F)$ , kde  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ .

*dimenze.*

**Definice 2.5.13** (Hausdorffova dimenze). Nechť  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ . Hausdorffovou dimenzí<sup>19</sup> množiny  $F$  nazveme hodnotu

$$\dim_{\text{H}} F = \inf \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

<sup>19</sup>Též někdy nazývaná *Hausdorffova-Bezikičova dimenze*.

Hodnota  $\mathcal{H}^s(F)$  pro  $s = \dim_{\mathbb{H}} F$  může být různá, tzn. může platit, že  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ ,  $\mathcal{H}^s(F) = 0$  a nebo se může jednat o konečné nenulové číslo, tj.  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

Nyní se podívejme na příklad výpočtu. Podobně, jako v případě box-counting dimenze, i zde budeme nezávisle určovat horní a dolní odhad.

**Příklad 2.5.14** (Sierpińského trojúhelník). V tomto případě se podíváme na dvě možnosti, jak dojít k výsledku. Celý Sierpińského trojúhelník si označme  $S$ .

- V  $k$ -té iteraci, kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ , vzniknou 3 nové trojúhelníky o obsahu  $1/4$  obsahu původního trojúhelníka, tzn. jejich celkový počet je  $t = 3^k$ . Uvažíme-li  $\delta$ -pokrytí

$$\mathcal{K} = \{K_\delta^1(x_1), K_\delta^2(x_2), \dots, K_\delta^t(x_t), \emptyset, \emptyset, \dots\}$$

kde  $x_1, x_2, \dots, x_t \in S_k$  a  $\delta \leq 2^{-k}/2 = 2^{-k-1}$ , pak

$$\mathcal{H}_{2^{-k}}^s(S_k) \leq \sum_{i=1}^{3^k} (2^{-k})^s = 3^k 2^{-ks} = 1.$$

Pro  $k \rightarrow \infty$  je  $\mathcal{H}^s(S) \leq 1$ . Poslední rovnost nastává právě pro  $s = \ln 3 / \ln 2$ .

Nyní ukážeme, že  $\mathcal{H}^s(S) \geq 3^{-s} = 1/2$ . Zvolme  $\delta$ -pokrytí  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots\}$ , takové, že

$$2^{-k-1} \leq \text{diam } F_i < 2^{-k}, \quad (2.5)$$

kde  $i \in \mathbb{N}$ . Lze si rozmyslet, že každá z množin  $F_i$  má neprázdný průnik s nejvýše dvěma dílčími trojúhelníky. Zvolíme-li  $j \geq k$ , pak každá z množin  $F_i$  má průnik maximálně s  $3^{j-k}$  trojúhelníky v  $j$ -té iteraci, resp.

$$3^{j-k} = 3^j 2^{-ks} \leq 2^j 3^s (\text{diam } F_i)^s,$$

jak plyne z volby pokrytí  $\mathcal{F}$  v (2.5). Pokud navíc pro každé  $i \in \mathbb{N}$  platí, že

$$3^{-j-1} \leq \text{diam } F_i,$$

pak každá z množin  $F_i$  má neprázdný průnik s nejvýše  $3^j$  trojúhelníky. Tedy pro jejich počet platí

$$3^j \leq \sum_{i=1}^{\infty} 3^j 3^s (\text{diam } F_i)^s,$$

přičemž úpravou už získáme požadovanou nerovnost.

- Druhá varianta výpočtu je sice méně rigorózní, avšak podstatně jednodušší. Sierpińského trojúhelník sestává ze tří kopií sebe samotného, přičemž každá z nich je obrazem původního obrazce  $S$  v podobnosti s koeficientem  $K = 1/2$ . Označme si dané části  $S_1, S_2$  a  $S_3$ , tj.  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ . Tedy podle  $\sigma$ -aditivity Hausdorffovy míry a důsledku 2.5.11 můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(S) &= \mathcal{H}^s(S_1) + \mathcal{H}^s(S_2) + \mathcal{H}^s(S_3) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(S) + \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(S) + \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(S) \\ &= 3 \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(S). \end{aligned}$$

Budeme-li předpokládat, že  $\mathcal{H}^s(S) < \infty$  (jak jsme již viděli z předchozího výpočtu, jedná se o netriviální předpoklad) pro  $s = \dim_{\text{H}} S$ , pak z rovnosti  $1 = 3(1/2)^s$  lze dopočítat, že  $s = \ln 3 / \ln 2$ .

(Převzato a upraveno z [5, str. 53].)

Myšlenku druhého výpočtu z příkladu 2.5.14 ještě rozvedeme v kapitole 4, konkrétně v sekci 4.2 věnované systémům iterovaných funkcí.

Jako poslední zkusme postavit Hausdorffovu dimenzi proti box-counting dimenzi, kterou jsme si představili v sekci 2.4. Vztah mezi nimi je docela jednoduchý a udává jej věta 2.5.15. Pro připomenutí doporučuji se opětovně podívat na definici 2.4.2

**Věta 2.5.15.** *Nechť  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  je neprázdná omezená množina. Pak platí*

$$\dim_{\text{H}} F \leq \underline{\dim}_{\text{B}} F \leq \overline{\dim}_{\text{B}} F$$

*Důkaz.* Nechť platí  $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$  pro  $s \geq 0$ . Zvolme  $\delta > 0$  takové, že platí

$$1 < \mathcal{H}_{\delta}^s(F) \leq N_{\delta}(F)\delta^s.$$

Úpravou této nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &< \ln N_{\delta}(F) + s \ln \delta \\ s &< \frac{\ln N_{\delta}(F)}{-\ln \delta} \\ s &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\delta}(F)}{-\ln \delta}. \end{aligned}$$

Druhá nerovnost, jak již víme, plyne přímo z definice box-counting dimenze (viz 2.4.2). Pro případ  $0 < \mathcal{H}_{\delta}^s(F) < 1$  stačí aplikovat podobnost na  $F$  a využít tvrzení 2.5.11.  $\square$

(Převzato z [5, str. 50].)

K závěru poznamenejme, že mnoho „rozumných“ útvarů  $F$  je  $\dim_{\text{H}} F = \dim_{\text{B}} F$ , ale obecná rovnost zde neplatí. Např. pro množinu  $X = \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle$  je  $\dim_{\text{H}} X = 0$ , neboť  $X$  je spočetná. Nicméně v případě box-counting dimenze je  $\dim_{\text{B}} X = 1$ . Rozmyšlení již ponecháme na čtenáři.

Pro více informací si dovoluji odkázat na článek [4] věnovaný přímo této otázce.



# Kapitola 3

## Hausdorffův metrický prostor

V této kratší kapitole se podíváme na některé výsledky související s tzv. *Hausdorffovým metrickým prostorem*, s nímž se ještě dále setkáme. Pro připomenutí záležitostí ohledně metrických prostorů celkově doporučuji čtenáři se podívat do sekce 2.1 v kapitole 2. Pokud by čtenáře zajímaly další podrobnosti, doporučuji se podívat do knihy [2, str. 71].

### 3.1 Hausdorffova metrika

Jako první se podíváme na tzv. *Hausdorffovu metriku*.

**Definice 3.1.1** (Hausdorffova metrika). Hausdorffovou metrikou (vzdálenost) nazýváme takové zobrazení  $\varrho_H : \mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ , kde pro každé  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  platí

$$\varrho_H(A, B) = \inf \{ \delta > 0 \mid A \subseteq (B)_\delta, B \subseteq (A)_\delta \}.$$

Podobně jako v případě Lebesgueovy míry (viz sekce 2.3, definice 2.3.5) se i zde nabízí stejná otázka: *Co nás opravňuje nazývat Hausdorffovu metriku metrikou?* Odpovědí je, že zatím nic, neboť tato definice sama o sobě neimplikuje, že  $\varrho_H$  je metrika. V definici povolujeme totiž případ, kdy  $\varrho_H(A, B) = \infty$  a pro příklady takových množin netřeba chodit daleko. Např. v  $\mathbb{R}$ , když budeme počítat Hausdorffovu metriku množin  $\{0\}$  a  $\langle 0, \infty \rangle$ , zjistíme, že  $\varrho_H(\{0\}, \langle 0, \infty \rangle) = \infty$ . Podobně budeme-li počítat  $\varrho_H(\emptyset, \{0\})$ , dojdeme ke stejnému výsledku. Ovšem i v případě některých neprázdných omezených množin si lze všimnout nesrovnalostí. Např. pro množiny  $(0, 1)$  a  $(0, 1]$  je Hausdorffova metrika nulová, přestože dané množiny nejsou stejné.

Pokud se však omezíme jen na některé množiny, bude  $\varrho_H$  skutečně metrikou ve smyslu definice 2.1.1. Proto se dále zaměříme pouze na takové podmnožiny  $X$ , které jsou *neprázdné a kompaktní*.

**Definice 3.1.2** (Hyperprostor). Systém všech neprázdných kompaktních podmnožin množiny  $X$  nazýváme *hyperprostor* a značíme jej  $\mathbb{H}(X)$ .

**Tvrzení 3.1.3.** *Necht  $A, B \in \mathbb{H}(X)$ . Pak  $A \cup B \in \mathbb{H}(X)$ .*

*Důkaz.* Neprázdnost  $A \cup B$  je zjevná. Sjednocení kompaktních množin je opět kompaktní. Máme-li totiž pokrytí  $\mathcal{U} \supseteq A$  a  $\mathcal{V} \supseteq B$ , pak z kompaktnosti  $A, B$  víme, že z každého z nich lze vybrat konečné podpokrytí

$$\mathcal{U}' = \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\} \subset \mathcal{U}, \text{ resp. } \mathcal{V}' = \{V_{j_1}, V_{j_2}, \dots, V_{j_\ell}\} \subset \mathcal{V},$$

kde  $k, \ell \in \mathbb{N}$ . Tedy  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  tvoří pokrytí  $A \cup B$ , resp.

$$\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}' \cup \mathcal{V}' \supseteq A \cup B.$$

□

Tvrzení 3.1.3 lze opět rozšířit indukcí

**Důsledek 3.1.4.** Pro  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{H}(X)$  platí  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathbb{H}(X)$ .

Pro operaci průniku nebo rozdílu toto tvrzení již neplatí. Např. intervaly  $\langle 0, 1 \rangle$  a  $\langle 2, 3 \rangle$  jsou uzavřené a omezené, tedy (podle Heineho-Borelovy věty 2.1.19) jsou kompaktní. Avšak jejich průnik je prázdný. Podobně pro rozdíl stačí uvážit  $A \subseteq B$ , tzn.  $A \setminus B = \emptyset$ .

**Věta 3.1.5.** Nechť  $(X, \varrho)$  je metrický prostor, kde  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pak Hausdorffova metrika  $\varrho_H$  je metrikou na  $\mathbb{H}(X)$ .

*Důkaz.* Zjevně pro každé  $A, B \in \mathbb{H}(X)$  z definice platí  $\varrho_H(A, B) \geq 0$  a  $\varrho_H(A, B) = \varrho_H(B, A)$ . Z kompaktnosti množin  $A, B$  plyne (podle věty 2.1.20), že  $A, B$  jsou omezené množiny, tedy  $\varrho_H(A, B) < \infty$ .

Pro  $A = B$  platí, že pro každé  $\delta > 0$  je splněno  $A \subseteq (B)_\delta$  a zároveň  $B \subseteq (A)_\delta$ , tzn.  $\varrho_H(A, B) = 0$ . Opačná implikace také platí. Předpokládejme, že množiny  $A, B$  splňují  $\varrho_H(A, B) = 0$ . Pokud  $x \in A$ , pak pro každé  $\delta > 0$  platí, že  $x \in (B)_\delta$ , tzn.  $\varrho(x, B) = 0$ , a z uzavřenosti  $B$  plyne  $x \in B$ . Tedy  $A \subseteq B$  a analogicky platí i  $B \subseteq A$ , tzn.  $A = B$ .

Jako poslední je třeba ukázat platnost trojúhelníkové nerovnosti. Mějme množiny  $A, B, C \in \mathbb{H}(X)$  a  $\varepsilon > 0$ . Pro libovolné  $x \in A$  existuje  $y \in B$ , takové, že

$$\varrho(x, y) < \varrho_H(A, B) + \varepsilon.$$

Podobně pro  $y$  existuje  $z \in C$ , takové, že

$$\varrho(y, z) < \varrho_H(B, C) + \varepsilon.$$

Z toho plyne

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \varrho_H(A, B) + \varrho_H(B, C) + 2\varepsilon,$$

kde pravou stranu nerovnosti označme  $\delta$ . To znamená, že  $A \subseteq (C)_\delta$  a zároveň  $C \subseteq (A)_\delta$ . Tudíž

$$\varrho_H(A, C) \leq \varrho_H(A, B) + \varrho_H(B, C) + 2\varepsilon.$$

□

(Převzato z [2, str. 72].)



**Definice 3.1.6** (Hausdorffův metrický prostor). Metrický prostor  $(\mathbb{H}(X), \varrho_H)$  nazýváme *Hausdorffův metrický prostor* na metrickém prostoru  $(X, \varrho)$ .

Nyní si opět připomeňte něco z terminologie metrických prostorů. Posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  v metrickém prostoru  $(X, \varrho)$ , se nazývá *cauchyovská*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m > n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Obecně neplatí, že každá cauchyovská posloupnost je konvergentní, avšak pokud v  $X$  všechny takové posloupnosti jsou konvergentní, pak  $(X, \varrho)$  nazýváme *úplný metrický prostor*. O Hausdorffově metrickém prostoru lze v tomto ohledu dokázat následující tvrzení.

**Věta 3.1.7** (Úplnost HMP). *Je-li  $(X, \varrho)$  úplný metrický prostor, pak  $(\mathbb{H}(X), \varrho_H)$  je také úplný metrický prostor.*

Důkaz věty je už trochu delší, nicméně lze jej nalézt opět např. v knize [2, str. 72].

## 3.2 Kompaktní množiny a konvergence

**Věta 3.2.1.** *Nechť  $A_1, A_2, \dots$  je nerostoucí posloupnost množin, kde  $A_i \in \mathbb{H}(X)$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Pak posloupnost  $A_1, A_2, \dots$  konverguje k množině*

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

*v Hausdorffově metrice.*

*Důkaz.* Nechť je dáno  $\varepsilon > 0$ . Zjevně pro každé  $i$  je  $A \subseteq A_i$ , tzn.  $A \subseteq (A_i)_{\varepsilon}$ .

Nyní ukážeme, že  $\varrho_H(A, A_i) < \varepsilon$  pro každé  $i \geq i_0$ . Systém

$$\mathcal{F} = \{(A_i)_{\varepsilon}\} \cup \{X \setminus A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

tvoří otevřené pokrytí množiny  $A_1$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Podle předpokladu je však  $A_1$  kompaktní, tedy z  $\mathcal{F}$  lze vybrat konečné podpokrytí. Specificky existuje  $i_0 \in \mathbb{N}$ , takové, že pro všechna  $i \geq i_0$  je systém

$$\mathcal{G} = \{X \setminus A_i\} \cup \{(A)_{\varepsilon}\}$$

pokrytím  $A_1$  a  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  (viz obrázek 3.1). Z toho plyne, že  $A_i \subseteq (A)_{\varepsilon}$  a tedy  $\varrho_H(A, A_i) < \varepsilon$ .  $\square$

V souvislosti s konvergencí v prostoru  $(\mathbb{H}(X), \varrho_H)$  nebude na škodu si připomenout jedno známé související tvrzení z matematické analýzy.

**Věta 3.2.2** (Cantorova). *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i)  $(X, \varrho)$  je úplný metrický prostor.



Obrázek 3.1: Ilustrace věty 3.2.1

(ii) Je-li  $A_1, A_2, \dots$  neklesající posloupnost uzavřených množin, kde  $A_i \subseteq X$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ , takových, že  $\text{diam } A_i \rightarrow 0$ , pak existuje  $x \in X$  splňující

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x\}.$$

Věta 3.2.2 je v podstatě rozšířením Cantorova principu vnořených intervalů v  $\mathbb{R}$ . Speciálně z toho vyplývá, že i v Hausdorffově metrickém prostoru platí podmínka (ii), neboť z věty 3.1.7 víme, že  $(\mathbb{H}(X), \varrho_H)$  tvoří úplný metrický prostor.

**Věta 3.2.3.** Nechť  $(X, \varrho_1), (Y, \varrho_2)$  jsou metrické prostory a zobrazení  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ , kde  $f_i : X \rightarrow Y$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$  a  $f_j \rightrightarrows f$  pro  $j \rightarrow \infty$ . Pak posloupnost  $f_1(X), f_2(X), \dots$  konverguje k  $f(X)$  na metrickém prostoru  $(\mathbb{H}(Y), \varrho_H)$ .

*Důkaz.* Mějme  $\varepsilon > 0$ . Ukážeme, že  $\varrho_H(f(X), f_i(X)) < \varepsilon$  pro  $i \geq i_0$ . Funkce  $f_1, f_2, \dots$  konvergují k  $f$  stejnoměrně, tzn.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists i_0 \in \mathbb{N} \forall i \geq i_0 \forall x \in X : \varrho_2(f(x), f_i(x)) < \varepsilon.$$

Tzn. pro každé  $x \in X$  a  $i \geq i_0$  platí

$$\varrho_2(f(x), f_i(X)) \leq \varrho_2(f(x), f_i(x)) < \varepsilon.$$

a též

$$\varrho_2(f_i(x), f(X)) \leq \varrho_2(f_i(x), f(x)) = \varrho_2(f(x), f_i(x)) < \varepsilon.$$

Z toho vyplývá, že

$$f(X) \subseteq (f_i(X))_\varepsilon \text{ a zároveň } f_i(X) \subseteq (f(X))_\varepsilon$$

neboli  $\varrho_H(f(X), f_i(X)) < \varepsilon$ . □

(Převzato z [2, str. 74])

**Poznámka 3.2.4.** Předpoklad stejnoměrné konvergence ve větě 3.2.3 je důležitý. Mějme např. metrický prostor  $X = \langle 0, 1 \rangle$  se standardní eukleidovskou metrikou a definujme posloupnost funkcí

$$f_n : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Limitou je funkce  $f$ , kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Posloupnost konverguje k funkci  $f$  pouze bodově, nikoliv stejnoměrně. Pro celý interval je  $f(X) = \{0, 1\}$ , nicméně

$$\varrho_{\mathbb{H}}(\langle 0, 1 \rangle, \{0, 1\}) = \frac{1}{2}.$$

Tedy neplatí, že  $f_n(X) \Rightarrow f(X)$  v  $(\mathbb{H}(\mathbb{R}), \varrho_{\mathbb{H}})$ .



# Kapitola 4

## Klasifikace fraktálů

S kapitolami 2 a 3 jsme si v jistém rozsahu ukázali formální podstatu fraktální geometrie. Nicméně pravdou zůstává, že z fraktální útvarů jako takových jsme si toho zatím moc neukázali (některým z nich jsme se věnovali v kapitole 1 v sekci 1.2 o soběpodobnosti). Proto se nyní podíváme na některé další příklady a především jejich podrobnější klasifikaci dle způsobu jejich vzniku. Na tuto kapitolu též volně navazuje kapitola 5, kde si fraktály trochu rozebereme z programovacího hlediska.

V této kapitole se zaměříme na tři hlavní metody klasifikace a konstrukce fraktálů – konkrétně na *L-systémy*, *systémy iterovaných funkcí (IFS)* a tzv. *Time Escape algoritmy*. Tyto přístupy představují základní postupy, pomocí kterých lze fraktální útvary nejen systematicky vytvářet, ale také analyzovat jejich strukturu a chování z pohledu matematické dynamiky.

### 4.1 L-systémy

Uvedeme tuto kapitolu s ohledem na předchozí obsah trochu netradičně a od matematiky se (alespoň zdánlivě) na chvíli odkloníme. Podíváme se na fraktály, s jejichž způsobem popisu přišel roku 1968 maďarský biolog ARISTID LINDENMAYER (1925–1989) a který (možná pro někoho i překvapivě) má základy především v informatice. [18, str. 2]

K popisu specifického druhu fraktálů lze využít znalosti z *teorie formálních jazyků* a *teorie automatů*, na jejímž počátku stál (mj.) britský matematik a informatik ALAN TURING (1912–1954). Ten ve svém článku *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* z roku 1936 zavedl koncept abstraktního stroje dnes známého jako *Turingův stroj*, jednoduché zařízení s výpočetními schopnostmi již tehdy porovnatelnými se současnými počítači. Jeho princip fungování přitom není nikterak složitý. Pomineme-li nyní matematickou definici Turingova stroje, lze říci, že sestává ze tří hlavních částí:

1. **Oboustranně nekončná páska.** Páska je rozdělena na políčka, z nichž každé může obsahovat některý symbol z předem známé abecedy (formálně vzato množiny) znaků.
2. **Čtecí/zapisovací hlava.** Hlavu si můžeme představit jako čtecí/zapisovací

„okénko“, které stojí právě nad jedním políčkem pásky. V každém kroku stroj:

- přečte symbol pod hlavou,
- podle svého stavu a právě přečteného symbolu rozhodne, jakou akci provést.

3. **Řídící jednotka.** Řídí chování stroje pomocí konečné množiny stavů

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}.$$

Přechodová funkce  $\delta$  pro (ne nutně všechny) dvojice (stav, znak) udává:

- jaký symbol má hlava na pásku zapsat (může přepsat stávající symbol nebo nechat stejný),
- do jakého stavu se stroj přepne,
- jak se posune hlava: doleva (L), doprava (R) nebo zůstane (N).

Výpočet pak probíhá takto:

1. Stroj začíná ve stavu, který je stanovený jako počáteční. Na pásce je vložen vstup (řetězec symbolů), zbytek pásky je prázdný.
2. Vždy podle přechodové funkce stroje:
  - přečte, co je pod hlavou,
  - zapíše (případně přepíše) symbol,
  - přesune hlavu,
  - přejde do dalšího stavu.
3. Pokud stroj nemá definovaný přechod pro aktuální stav a čtený symbol na pásce, zastaví se. Pokud stroj skončil ve stavu, který je označený jako přijímající, pak stroj slovo **přijal**, jinak jej **odmítá**.

V té době se Turing zabýval otázkou, kterou v roce 1928 položil známý německý matematik DAVID HILBERT (1862–1943), jež je známá pod názvem „*Entscheidungsproblem*“<sup>2</sup>. Problémem bylo, zda existuje algoritmus, který o každém tvrzení je schopný rozhodnout (v konečném čase), zda je či není pravdivé. Později Alan Turing tento problém přeformuloval takto: *Existuje program, který o jiném programu na vstupu rozhodne, zda se zastaví, či nikoliv?* David Hilbert byl ve svých vizích optimistický, avšak nakonec Alan Turing dokázal, že **takový algoritmus nemůže existovat**. Způsob, jakým Turing došel onomu výsledku, byl v konečném důsledku vlastně až překvapivě jednoduchý a existuje pro něj velké množství popularizačních materiálů<sup>3</sup>. Alan Turing dal základ dnešní teoretické informatice.

<sup>2</sup>Anglicky *The Decision problem*, česky přeložitelné jako „*rozhodovací problém*“. Zde však poznamenejme, že onem český termín se používá i v související teorii složitosti a vyčíslitelnosti, má však podstatně jiný význam.

<sup>3</sup>Pokud by se chtěl čtenář dozvědět více o této problematice a teorii s ní související, doporučuji např. knihu [9]



Obrázek 4.1: Alan Turing<sup>1</sup>, 1912–1954

Turingův stroj, co by výpočetní model, stojí na samotném vrchlu hierarchie dalších výpočetních modelů<sup>5</sup>, které jsou však svoji výpočetní silou slabší. Později pak americký matematik NOAM CHOMSKY (1928–současnost) popsal celkem 4 základní třídy tzv. *formálních jazyků*, které jsou dnes souhrně známé pod názvem *Chomského hierarchie*. Za formální jazyk považujeme určitou množinu slov (řetězců). Chomského hierarchie zařazuje každý jazyk do jedné ze tříd podle výpočetního modelu, který jej přijímá, resp. typu tzv. *formální gramatiky*, která slova z něj generuje. O gramatikách a obecně určitém základu teorie formálních jazyků si ještě budeme podrobněji povídat později. O hlubší související teorii se čtenář může více dozvědět např. v knize [9].

#### 4.1.1 Odbočka k formálním jazykům a gramatikám

V úvodu této sekce jsme si již trochu přiblížili historické pozadí teorie formálních jazyků a automatů (tou se již dále zabývat nebudeme, nicméně bylo by při nejmenším neslušné ji zde alespoň nezmínit vzhledem k její přímé souvislosti). Ačkoliv tento text si neklade za cíl seznámit čtenáře se všemi podrobnostmi, byly zmíněny určité termíny, jejichž význam bude dobré si objasnit, konkrétně

- *formální jazyk*
- a *formální gramatika*.

**Definice 4.1.1.** Množinu symbolů (znaků)  $\Sigma$  nazýváme *abeceda*.

- Libovolnou konečnou posloupnost znaků

$$w = a_1 a_2 \dots a_n,$$

kde  $a_i \in \Sigma$  pro každé  $1 \leq i \leq n$  nazýváme *slovo*, popř. *řetězec*

---

<sup>5</sup>Mezi ně patří jmenovitě tzv. *lineárně omezený automat*, *zásobníkový automat*, *deterministický* a *nedeterministický konečný automat*.



Obrázek 4.2: David Hilbert<sup>4</sup>, 1862–1943

- Prázdným slovem nazýváme slovo neobsahující žádné znaky, značíme  $\lambda$ .
- Délku slova  $w$  značíme  $|w|$ , tzn.

$$|w| = |a_1 a_2 \dots a_n| = n.$$

- Množinu všech slov délky  $n$  značíme  $\Sigma^n$ , tj.

$$\Sigma^n = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i \in \Sigma \text{ pro každé } i \in \mathbb{N}\}.$$

Speciálně  $\Sigma^0 = \{\lambda\}$ .

- Množinu všech slov v abecedě  $\Sigma$  značíme  $\Sigma^*$ , tzn.

$$\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n.$$

- Množinu všech neprázdných slov v abecedě  $\Sigma$  značíme  $\Sigma^+$ , tzn.

$$\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\lambda\}.$$

- *Formálním jazykem* (nebo zkráceně jen *jazykem*) nazýváme libovolnou podmnožinu  $L \subseteq \Sigma^*$ .

**Příklad 4.1.2.** Některé příklady abeced:

- $\Sigma = \{0, 1\}$ , tzv. *binární abeceda*.

$$\{0, 1\}^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$$

- $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$ , tj. všechna písmena anglické abecedy.

$$\{a, b, c, \dots, z\}^* = \{a, b, c, \dots, z, aa, ab, ac, \dots\}$$



- Všechny znaky ASCII<sup>6</sup> tvoří abecedu.

**Definice 4.1.3** (Operace se slovy). Necht  $\Sigma$  je libovolná abeceda a mějme slova  $u, v \in \Sigma^*$ , kde  $u = u_1u_2 \dots u_n$  a  $v = v_1v_2 \dots v_m$ . Pak definujeme následující operace:

- *Zřetězení (konkatenace)* slov  $u$  a  $v$  je slovo

$$uv = u_1u_2 \dots u_nv_1v_2 \dots v_m.$$

Je celkem zjevné, že  $|uv| = |u| + |v| = n + m$ .

- Necht  $n \in \mathbb{N}$ . Pak definujeme induktivně:

$$\begin{aligned} u^0 &= \lambda, \\ u^1 &= u, \\ u^n &= u^{n-1}u. \end{aligned}$$

Slovo  $u^n$  se nazývá *n-tá mocnina slova u*.

- *Obráceným slovem*  $u$  rozumíme slovo  $u^R = u_nu_{n-1} \dots u_1$ .

**Poznámka 4.1.4.** Speciálně pro prázdné slovo  $\lambda$  a libovolné slovo  $u \in \Sigma^*$  platí  $u\lambda = \lambda u = u$ .

Na základě definice 4.1.3 můžeme být nyní daleko konkrétnější při popisu některých slov a jazyků. Např.

$$L = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

značí jazyk všech slov obsahující znaky 0 a 1 ve tvaru

$$\lambda, 01, 0011, 000111, \dots$$

O jazycích celkově lze dokázat řadu zajímavých tvrzení, která se přímo opírají o již zmíněnou teorii automatů. V tomto ohledu si dovolíme však hodně záležitostí přeskočit. Jazyky lze popisovat několika různými způsoby, avšak nás bude zajímat popis pomocí formálních gramatik.

**Definice 4.1.5** (Formální gramatika). *Formální gramatikou* (zkráceně jen gramatikou *gramatikou*) nazýváme uspořádanou čtveřici  $G = (V, T, P, S)$ , kde

- $V \neq \emptyset$  je množina *neterminálů*<sup>7</sup> (neterminálních symbolů),
- $T \neq \emptyset$  je množina *terminálů* (terminálních symbolů),
- $S \in V$  je *počáteční symbol*,

<sup>6</sup>Zkratka pro *American Standard For Information Interchange*. Stanovuje 128-bitové znakové kódování. Podotkneme, že ne všechny znaky jsou nutně tisknutelné a mají čistě informativní charakter, avšak to nás zde z formálního hlediska trápí vůbec nemusí.

<sup>7</sup>Anglicky *variables*

- a  $P$  je množina přepisovacích *pravidel*<sup>8</sup> ve tvaru  $\beta A \gamma \rightarrow \omega$  (čteme „řetězec  $\beta A \gamma$  se přepíše na řetězec  $\omega$ “), kde  $A \in T$  a  $\beta, \gamma, \omega \in (V \cup T)^*$ . Tzn. levá strana každého pravidla obsahuje alespoň jeden neterminál.

**Definice 4.1.6** (Odvození slova v gramatice). Mějme gramatiku  $G = (V, T, P, S)$ . Říkáme, že

- $\alpha$  se *přímo přepíše* na  $\omega$ , píšeme  $\alpha \Rightarrow_G \omega$  nebo jen  $\alpha \Rightarrow \omega$ , jestliže

$$\exists \beta, \gamma, \eta, \nu \in (V \cup T)^* : \alpha = \eta \beta \nu, \omega = \eta \gamma \nu \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \in P.$$

- $\alpha$  se *přepíše* na  $\omega$ , píšeme  $\alpha \Rightarrow_G^* \omega$  nebo jen  $\alpha \Rightarrow^* \omega$ , pokud

$$\exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in (V \cup T)^* : \alpha = \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \beta_n = \omega.$$

Posloupnost  $\beta_1, \dots, \beta_n$  nazýváme odvozením. Též říkáme, že gramatika  $G$  generuje slovo  $w$ , pokud  $S \Rightarrow^* w$ .

Formální gramatiky nám umožňují rekurzivní definici jazyka. Jinak řečeno, popisuje, jak lze slova daného jazyka generovat. Pravidla z množiny  $P$  lze aplikovat v libovolném pořadí.

**Poznámka 4.1.7.** • Typicky platí, že pro neterminály používáme velká písmena abecedy  $A, B, \dots, Z$  a pro terminály naopak malá písmena  $a, b, \dots, z$ . Pro slova (řetězce) budeme využívat buď malá písmena řecké abecedy, nebo malá písmena z konce abecedy, tj.  $\dots, w, y, x, z$ .

- Pokud máme více pravidel ve tvaru  $\alpha \rightarrow \omega_i$ , tj. se shodnou levou stranou, pak pro jejich zápis volíme tuto kompaktnější variantu:

$$\alpha \rightarrow \omega_1 \mid \omega_2 \mid \dots \mid \omega_n.$$

**Příklad 4.1.8.** Jazyk všech palindromů nad binární abecedou, tj.

$$L_{\text{pal}} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}.$$

lze generovat gramatikou  $G = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$ , přičemž  $P$  obsahuje následující pravidla:

$$S \rightarrow \lambda \mid 0 \mid 1 \mid 0S0 \mid 1S1.$$

Kupříkladu slovo  $w = 011110$  lze odvodit takto:

$$S \Rightarrow 0S0 \Rightarrow 01S10 \Rightarrow 011S110 \Rightarrow 011\lambda 110 = 011110.$$

Trochu praktičtěji zaměřený příklad nám poskytuje 4.1.9. Gramatiky se typicky využívají (vyjma fraktální geometrie) např. v kompilátorech různých programovacích jazyků v rámci tzv. *syntaktické analýzy*, při níž se (jak název napovídá) kontroluje syntaktická správnost zápisu programu. Konkrétně se pro jednoduchost zaměříme pouze na matematické výrazy obsahující pouze operace  $+$  a  $*$  (násobení).

<sup>8</sup>Formálně vzato se jedná o uspořádanou dvojici  $(\alpha, \omega)$ .

**Příklad 4.1.9.** Mějme gramatiku  $G = (V, T, P, S)$ , kde

$$V = \{E, I\}, T = \{a, b, (, ), +, *\}, S = E$$

a pravidla jsou následující:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E) \\ I &\rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib. \end{aligned}$$

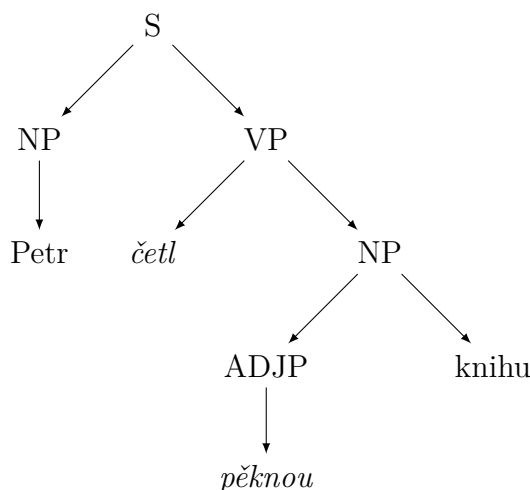
V takto definované gramatice lze vygenerovat např. slovo

$$w = (a + b) + bb * (ab + bb)$$

následovně:

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E + E \Rightarrow (E) + E \Rightarrow (E) + E * E \Rightarrow (E) + E * (E) \\ &\Rightarrow (E + E) + E * (E) \Rightarrow (E + E) + E * (E + E) \\ &\Rightarrow^* (I + I) + I * (I + I) \Rightarrow^* (a + b) + Ib * (Ib + Ib) \\ &\Rightarrow^* (a + b) + bb * (ab + bb). \end{aligned}$$

S podobným přístupem se lze setkat i např. v lingvistice. Čtenář si možná ze základní školy vzpomíná na větný rozbor, v jehož rámci bylo úkolem určit pro zadanou větu její strukturu. Ve skutečnosti se nejedná o nic jiného, než využití určité formální gramatiky  $G = (V, T, P, S)$ , jejíž pravidla v množině  $P$  jsou dána gramatickými pravidly (nyní v lingvistickém slova smyslu) českého jazyka. Pro příklad viz obrázek<sup>9</sup> 4.3. Zároveň zde můžeme vidět souvislost formální gramatiky



Obrázek 4.3: Příklad syntaktického stromu věty: „Petr četl pěknou knihu.“

s gramatikou v lingvistice.

<sup>9</sup>S, NP, VP, ADJP představují neterminály příslušné gramatiky a jednotlivá slova (Petr, četl, pěknou, knihu) její terminály. Významy: S (*Sentence*), NP (*Noun Phrase*), VP (*Verb Phrase*), ADJP (*Adjective Phrase*).

## 4.1.2 Definice L-systému

V podsekcí 4.1.1 jsme si udělali v podstatě „rychlouvod“ do problematiky *formálních jazyků* a *gramatik*, kde jsme si především zavedli potřebné značenou terminologii a značení. L-systémy<sup>10</sup> se v kontextu formálních gramatik mírně, avšak podstatně liší v tom, že pravidla jsou v jednom kroku aplikována paralelně.

Základní idea vychází popisu fraktálů vychází z konceptu, který jsme si již představili v úvodní kapitole 1, a to *soběpodobnosti*. V každém dalším kroku jsme část útvaru nahradili jeho zmenšenou kopií. Nešlo by toto nějak zachytit pomocí postupného přepisování, jako tomu bylo v případě formálních gramatik? Ovšem, že ano. Jako první se tedy podíváme na definici L-systému.

**Definice 4.1.10** (L-systém). L-systémem nazveme uspořádanou trojici  $G = (V, \omega, P)$ , kde:

- $V$  je abeceda,
- $\omega \in \Sigma^+$  je počáteční slovo zvané *axiom*,
- a  $P$  je množina pravidel tvaru  $a \rightarrow \alpha$ , kde  $a \in V$  a  $\alpha \in V^*$ .
- Pro každé  $a \in V$  platí  $(a \rightarrow a) \in P$ , pokud  $a$  není na levé straně žádného jiného pravidla.

Porovnejme na chvíli definici 4.1.10 s definicí formální gramatiky (viz definice 4.1.5). U gramatik jsme rozlišovali tzv. neterminální a terminální symboly. U L-systému však tato dvojice druhů symbolů splývá, resp. nerozlišujeme mezi terminály a neterminály, neboť v jednom kroku přepisujeme všechny symboly. Dále začínáme rovnou s řetězcem symbolů  $\omega \in V^+$ . To lze v gramatice zařídit jednoduše tak, že zavedeme speciální neterminál  $T$ , který uvedeme jako počáteční, a pak přidáme pravidlo  $T \rightarrow \omega$ , přičemž  $\omega$ , ani žádná jiná pravidla neobsahují neterminál  $T$ . V tomto ohledu tedy můžeme vidět, že L-systém je z pohledu definice gramatiky pouze zvláštní případ.

Jak už bylo uvedeno na začátku této podsekcce, podstatný rozdíl oproti gramatikám nastává ve způsobu přepisování, resp. odvozování slov (pro připomenutí viz definice 4.1.6).

**Definice 4.1.11** (Odvození slova v L-systému). Nechť je dán L-systém  $G = (V, \omega, P)$ .

- Slovo  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \in V^+$  se *přímo přepíše* na  $\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ , kde  $\omega_i \in V^*$  pro každé  $1 \leq i \leq n$ , pokud

$$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n : (a_i \rightarrow \omega_i) \in P.$$

Píšeme  $\alpha \Rightarrow_G \omega$  nebo jen  $\alpha \Rightarrow \omega$ .

- Slovo  $\alpha$  se *přepíše* na  $\omega$ , pokud

$$\exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in V^* : \alpha = \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \beta_n = \omega.$$

---

<sup>10</sup>Pojmenovány po Aristidu Lindenmayerovi.

Zatím jsme se moc nepozastavili nad poslední podmínkou v definici 4.1.10. Zajišťuje nám, že každý znak lze vždy přepsat na jiný řetězec. Zkuste si schválně rozmyslet, že právě díky této podmínce dává definice odvození slova 4.1.11 smysl.

Než se posuneme dál, zkusme ještě na chvíli prodiskutovat různé varianty L-systémů. Definice 4.1.10, kterou jsme si uvedli, ve skutečnosti odráží pouze jeden ze speciálních případů. Tomuto typu se říká *bezkontextové* L-systémy (značené *OL-systémy*). Název vychází z faktu, že každý symbol přepisujeme zvlášť (připouštíme pouze pravidla ve tvaru  $a \rightarrow \omega$ , kde  $a \in V$  a  $\omega \in V^*$ ), tzn. nezáleží na ostatních znacích (tedy kontextu, v němž se nechází). Jinými typy L-systémů jsou naopak *kontextové*<sup>11</sup>, kde pracujeme s pravidly ve tvaru  $\gamma A \beta \rightarrow \gamma \omega \beta$ , kde  $\gamma, \beta, \omega \in V^*$  a  $A \in V$ .

Dále lze L-systémy rozlišovat podle toho, zda pro každý řetězec  $\alpha \in V^*$  existuje právě jedno pravidlo  $\alpha \rightarrow \omega$ , nebo existuje více pravidel v  $P$ , které obsahují  $\alpha$  na levé straně. Takový typům se říká *deterministické*<sup>12</sup>, resp. *nedeterministické*. Pro deterministické bezkontextové L-systémy se pak užívá značení *DOL-systémy*, což je i případ, kterým se budeme dále zabývat. Pokud by čtenáře tato teorie zajímala více, doporučuji knihu [18].

### 4.1.3 Želví grafika

Pro neznalého čtenáře se může zdát zarážející, že zde pracujeme celou dobu s řetězcí znaků a nikoliv s geometrickými útvary. Zde si ukážeme, jak interpretovat výsledné řetězce pomocí tzv. *želví grafiky*.

Představme, že máme virtuální želvu v  $\mathbb{R}^2$ , jejíž stav reprezentujeme pomocí trojice  $(x, y, \alpha)$ , kde  $(x, y)$  jsou její pozice<sup>13</sup> a  $\alpha$  je orientovaný úhel udávající její směr. Dále máme pevně zadanou délku kroku  $d > 0$  a přírůstek úhlu  $\delta$ . Definujeme základní čtveřici symbolů, s níž budeme v rámci abecedy  $V$  pracovat, které budou reprezentovat jednotlivé akce pro želvu. Jejich význam udává tabulka 4.1.

- |     |  |
|-----|--|
| $F$ | Želva se přesune o vzdálenost $d$ . Stav se změní na $(x', y', \alpha)$ , kde $x' = x + d \cos \alpha$ a $y' = y + d \sin \alpha$ a zároveň je nakreslena úsečka mezi body $(x, y)$ a $(x', y')$ . |
| $f$ | Želva se přesune o vzdálenost $d$ bez kreslení úsečky.   |
| +   | Želva se otočí doleva o úhel $\delta$ . Nový stav bude $(x, y, \alpha + \delta)$ .   |
| −   | Želva se otočí doprava o úhel $\delta$ . Nový stav bude $(x, y, \alpha - \delta)$ .  |

Tabulka 4.1: Význam symbolů v abecedě  $V$  pro želvu.

Pracujeme tedy v základu s abecedou  $V = \{F, f, +, -\}$  (později dodefinujeme ještě další symboly). Předpokládáme, že počáteční stav želvy je vždy  $(0, 0, 0)$ . Začneme s velice jednoduchou ukázkou, kde  $\delta = \pi/6$  a krok  $d$  volíme libovolně. Pro začátek se podíváme na Kochovu křivku, kterou už jsme viděli v sekci 1.2.

<sup>11</sup>Tyto typy L-systémů souvisí do jisté míry s již v úvodu zmíněnou Chomského hierarchií, v jejímž rámci jsou definovány podobně i bezkontextové a kontextové gramatiky.

<sup>12</sup>Tzn. je jednoznačně určeno, na jaký řetězec bude  $\alpha$  přepsáno.

<sup>13</sup>Situaci lze pochopitelně zobecnit do  $\mathbb{R}^n$ . Ve vyšších dimenzích bychom museli zavést symboly pro rotaci okolo každé osy zvlášť.

- *Axiom*  $\omega = F$
- *Pravidla*  $P: F \rightarrow F - F - - - F - F$

Iterováním tohoto L-systému postupně dostaneme slova:

- $n = 0: F$
- $n = 1: F - F - - - F - F$
- $n = 2: F - F - - - F - F - F - F - - - F - F - - - F - F - - -$   
 $- F - F - F - F - - - F - F$
- $n = 3: F - F - - - F - F - F - F - - - F - F - - - F - F - - - F - F -$   
 $F - F - - - F - F - F - F - - - F - F - F - F - - - F - F - - - F -$   
 $F - - - F - F - F - F - - - F - F - - - F - F - - - F - F - F - F -$   
 $- - - F - F - - - F - F - - - F - F - F - F - - - F - F - F - F - - -$   
 $- F - F - F - F - - - F - F - - - F - F - - - F - F - F - F - - - F - F$

Délka řetězce poroste exponenciálně<sup>14</sup>. Výslednou interpretaci daných řetězců můžeme vidět na obrázku 4.4. Všimněte si, že právě onen rekurzivní „charakter“ gramatik, resp. L-systémů nám pomáhá dobře zachytit soběpodobnost (viz sekce 1.2) daných útvarů. Lindenmayer původně přišel s L-systémy kvůli modelování růstu a vývoje rostlin. Je ovšem nejspíše jasné, že růst rostlin není čistě deterministický proces a hraje při něm roli jistá míra náhody. [18] I takové případy lze modelovat<sup>15</sup>. Pro zachování rozumného rozsahu tohoto textu se podíváme čistě na deterministické varianty. Na další typy fraktálů a jejich L-systémů se můžete podívat v podsekcí 4.1.4.

V případě modelování rostlin se nám bude hodit zavést ještě dvojici symbolů. Mnohdy se nám stane, že se potřebujeme vrátit na určitou pozici, kde želva již stála. To by bylo možné vyřešit např. zpětným chodem želvy do původní pozice, nicméně velice špatně by se s tímto pracovalo v rámci L-systému. Nejdříve si vysvětlíme pojem tzv. *zásobníku*.

Koncept zásobníku je programátorům nejspíše velmi dobře známý, přesto však jej zde krátce vysvětlíme. Jedná se datovou strukturu pro dočasné ukládání dat, přičemž jeho charakteristikou je, že data, která jsou zařazena do zásobníku jako poslední jsou jako první odebrána. Pro tento způsob manipulace s daty se používá zkratka *LIFO*<sup>16</sup> – *Last In, First Out*. V rámci zásobníku máme dvojici základních operací:

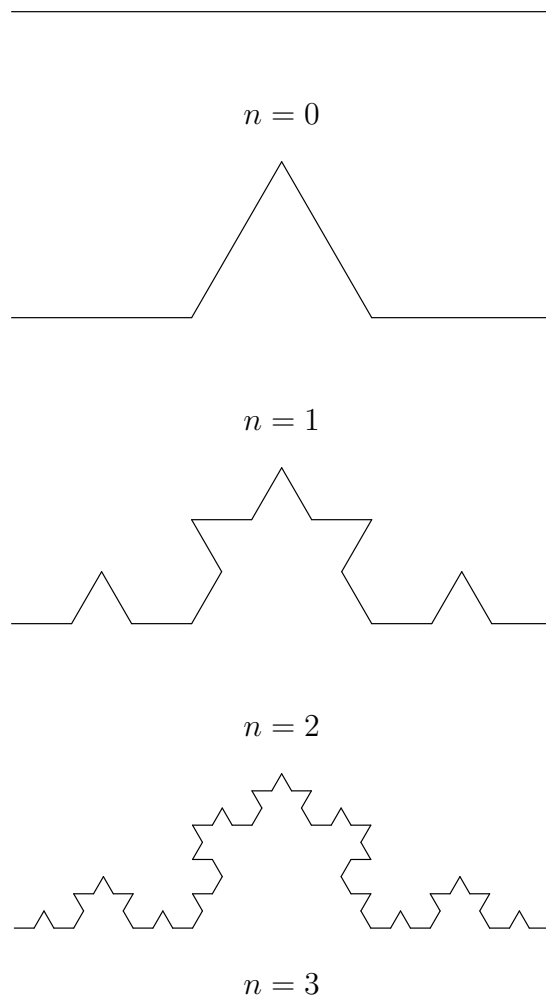
- *vložení prvku na vrchol zásobníku* (tzv. operace **push**),
- *a odebrání prvku z vrcholu zásobníku* (tzv. operace **pop**).

Pro znázornění zásobníku viz obrázek 4.5.

<sup>14</sup>Podobná situace nastává pro ostatní fraktály, které si zde ještě představíme. Generování vyšších iterací daných útvarů je proto často výpočetně náročné.

<sup>15</sup>Konkrétně pomocí tzv. *stochastických L-systémů*, kde každému pravidlu přiřadíme pravděpodobnost aplikace v dalším kroku.

<sup>16</sup>Alternativním způsobem je *FIFO* – *First In, First Out*, který je využíván u datové struktury zvané *fronta*.



Obrázek 4.4: Interpretace vygenerovaných řetězců pro Kochovu křivku.

Do abecedy  $V$  zavedeme nové znaky uvedené v tabulce 4.2.

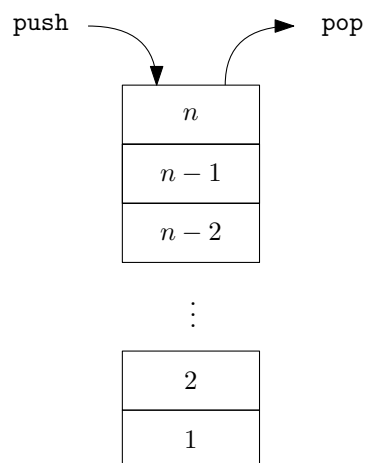
- [ Uložení aktuálního stavu želvy  $(x, y, \alpha)$  na zásobník.
- ] Odebere stav uložený na vrcholu zásobníku a nastaví jej jako aktuální stav želvy.

Tabulka 4.2: Význam symbolů v abecedě  $V$  pro želvu.

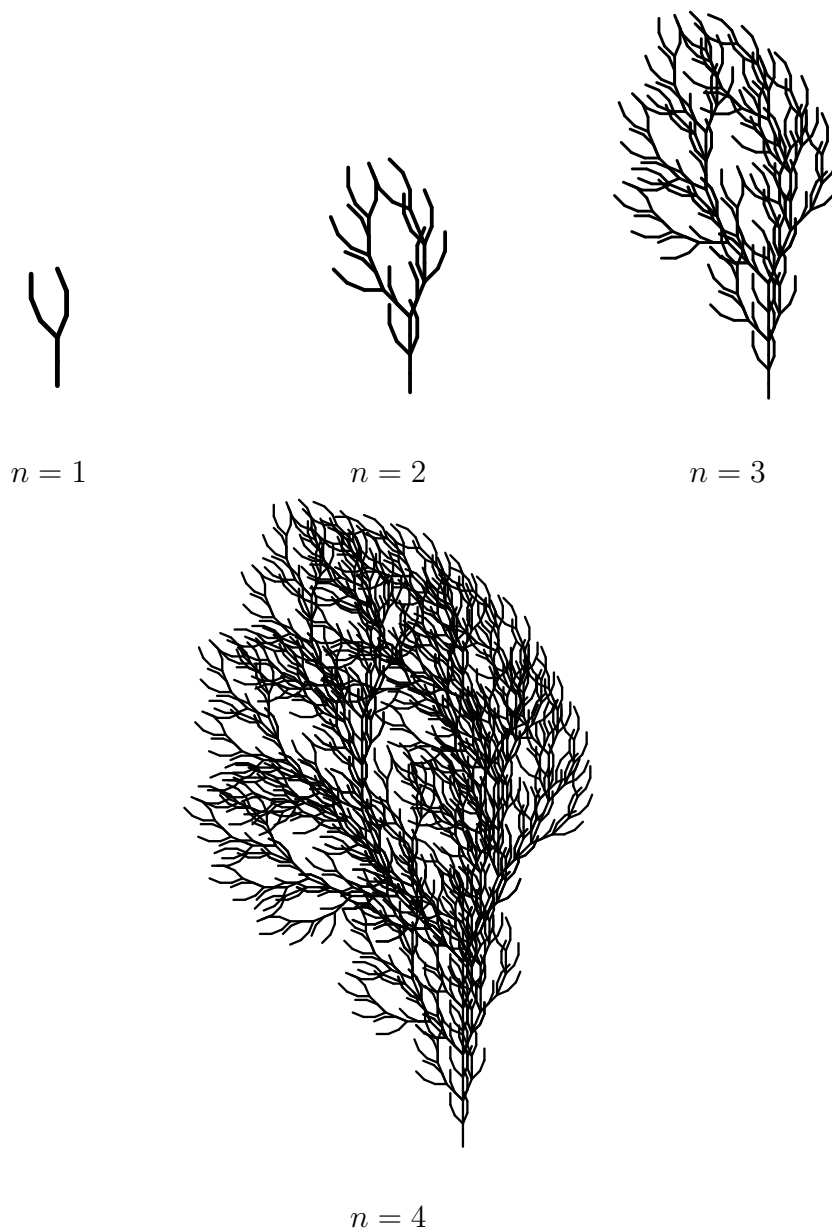
Tato dvojice symbolů nám umožňuje využít želví grafiku pro vykreslení fraktálních útvarů, jako je např. tento:

- *Axiom*:  $\omega = F$ ,
- *Pravidla P*:  $F \rightarrow FF - [-F + F + F] + [+F - F - F]$ ,
- $\delta = \pi/8$ .

Viz obrázek 4.6.



Obrázek 4.5: Znázornění zásobníku.



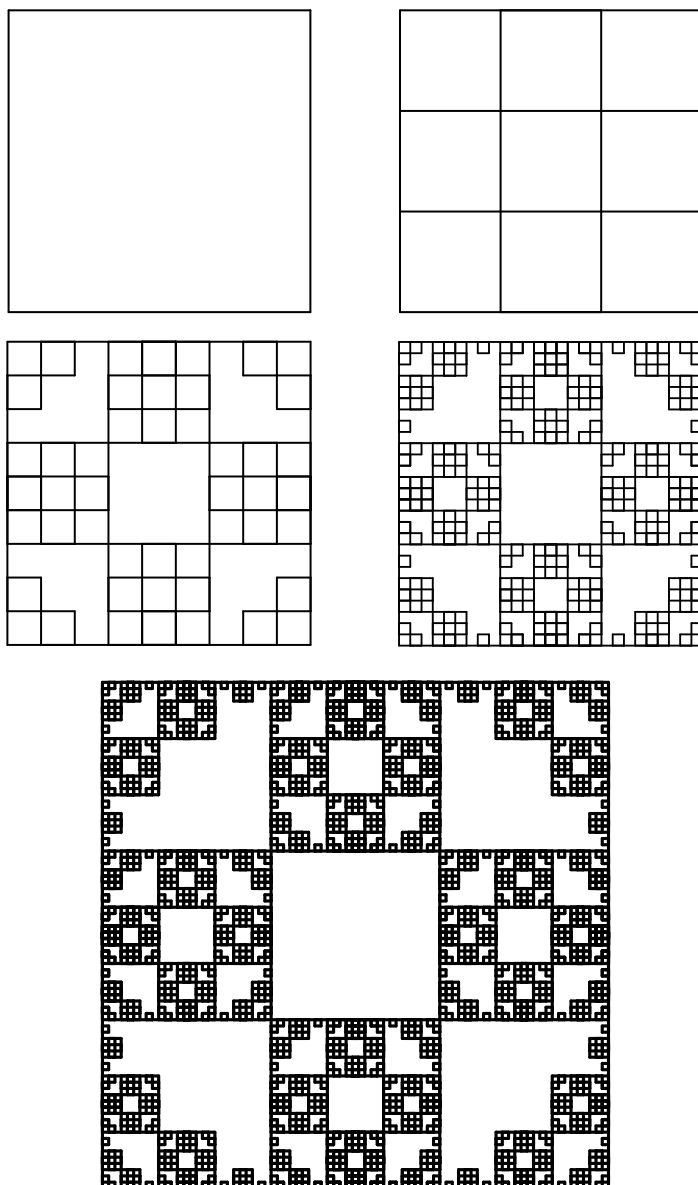
Obrázek 4.6: Fraktální strom pro  $n = 1, 2, 3, 4$



### 4.1.4 Ukázky fraktálů a jejich L-systémů

Zde naleznete některé další ukázky fraktálů a jejich L-systémů. Všechny obrázky fraktálních útvarů, které jste zde viděli a ještě uvidíte jsou vygenerovány pomocí přiloženého programu<sup>17</sup> k tomuto textu. Všechny tyto příklady jsou převaty z knihy [18], kde lze též nalézt mnoho dalších.

Zároveň zde ještě dodejme, že někdy se též můžeme setkat se situací, kdy potřebujeme více než jeden neterminál, tedy kromě  $F$  máme ještě jiné znaky. Obecně však platí, že jejich interpretace v želví grafice je stejná jako pro symbol  $F$ .

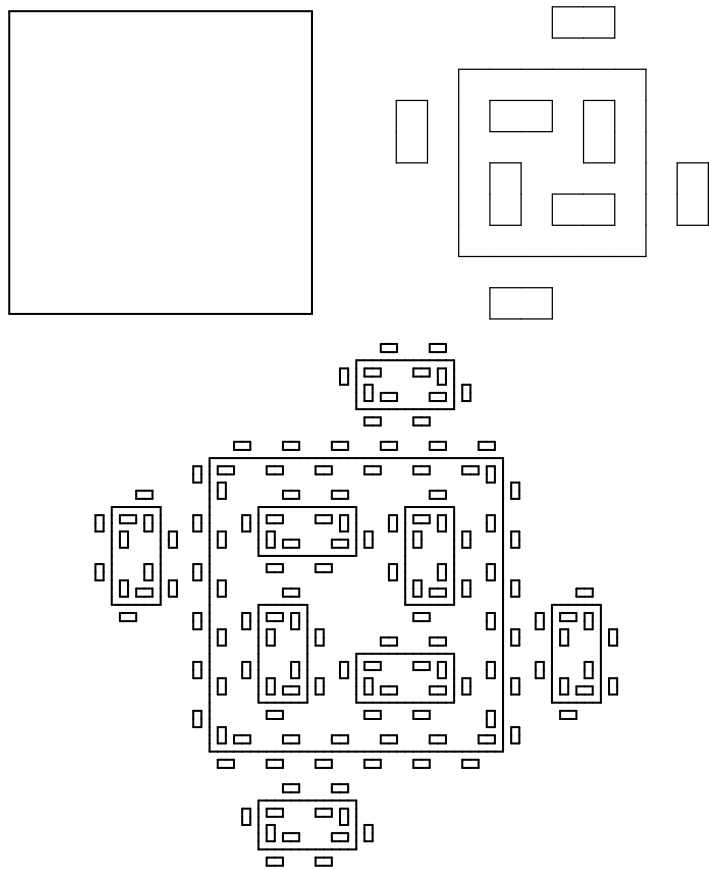


$$\omega = F - F - F - F$$

$$F \rightarrow FF - F - F - F - FF$$

$$\delta = \pi/2$$

<sup>17</sup>viz odkaz na GitHub repozitář: <https://github.com/D4vE0FF/Py-Fractal-Generator>

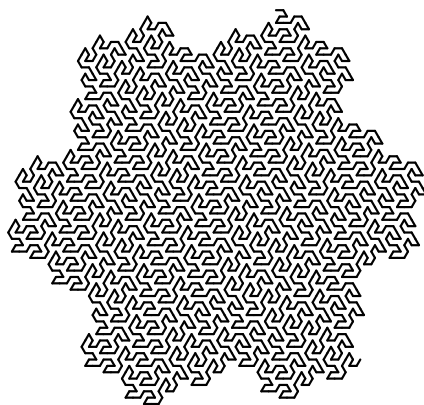


$$\omega = F + F + F + F$$

$$F \rightarrow F + f - FF + F + FF + Ff + FF - f + FF - F - FF - Ff - FFF$$

$$f \rightarrow ffffff$$

$$\delta = \pi/2$$



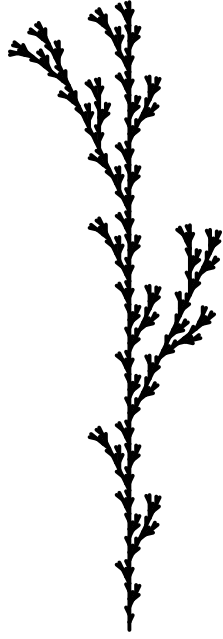
$$\omega = L$$

$$L \rightarrow L + R + +R - L - -LL - R +$$

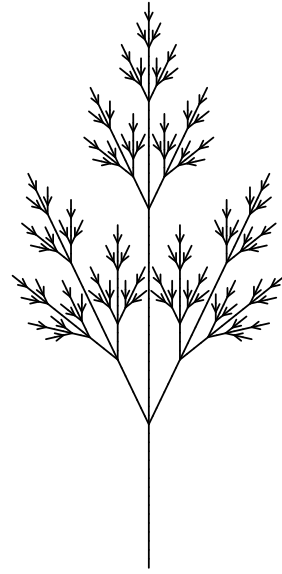
$$R \rightarrow -L + RR + +R + L - -L - R$$

$$\delta = \pi/3$$

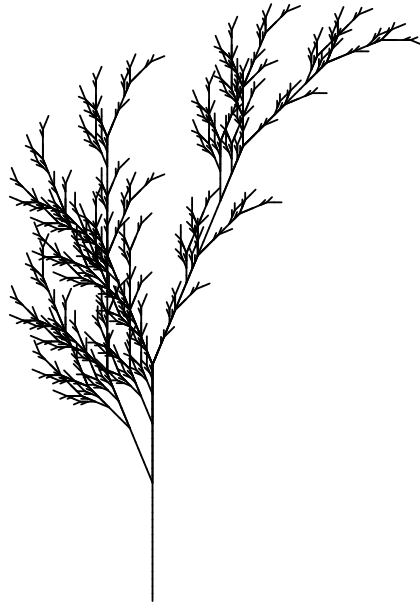
$$n = 4$$



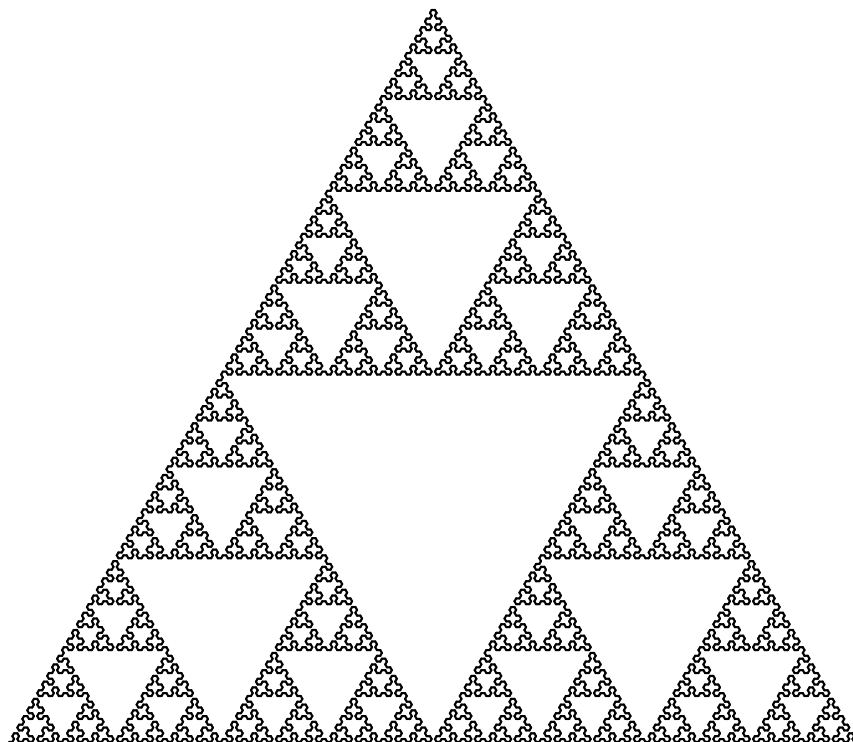
$\omega = F$   
 $F \rightarrow F[+F]F[-F]F$   
 $\delta = 25,7^\circ$   
 $n = 4$



$\omega = X$   
 $X \rightarrow F[+X][-X]FX$   
 $F \rightarrow FF$   
 $\delta = 25,7^\circ$   
 $n = 5$



$\omega = X$   
 $X \rightarrow F[+X][-X]FX$   
 $F \rightarrow FF$   
 $\delta = 22,5^\circ$   
 $n = 5$



$$\begin{aligned}\omega &= A \\ A &\rightarrow B - A - B \\ B &\rightarrow A + B + A \\ \delta &= \pi/3 \\ n &= 8\end{aligned}$$

## 4.2 Systém iterovaných funkcí

V předchozí části kapitoly viděli, jak lze fraktální objekty efektivně popisovat pomocí L-systémů, kde struktura vzniká paralelním přepisováním symbolů a jejich vizualizace se provádí prostřednictvím želví grafiky. Tento přístup nám umožňoval popsat určitou skupinu fraktálů, nicméně pro jiné fraktály by se nám hodil vhodnější popis jejich konstrukce. Např. Sierpińského trojúhelník lze popsat pomocí L-systému, nicméně v sekci 1.2 o soběpodobnosti jsme si jej zavedli spíše pomocí opakované aplikace určitých geometrických transformací (ač jsme neuvedli jejich explicitní vyjádření). Ty si později zavedeme jako tzv. *systémy iterovaných funkcí*.

Nejdříve se podíváme trochu více na matematickou podstatu. Hodně záležitostí jsme si již rozebrali v kapitole 3 o Hausdorffově metrickém prostoru, který zde bude hrát významnou roli, a dále na ně budeme navazovat. Pro související matematickou teorii, kterou zde dále budeme vykládat, doporučuji knihu [1].

### 4.2.1 Kontrakce v Hausdorffově metrickém prostoru

V minulých kapitolách jsme se často zaměřovali na lipschitzovská a bilipschitzovská zobrazení. V tomto případě nás budou speciálně zajímat tzv. *kontrakce*. Těmto termínům a faktům s nimi souvisejícími jsme se krátce věnovali v podsekcí 2.1.6.

Připomeňme, že lipschitzovské zobrazení rovnou implikuje spojist v libovolném metrickém prostoru  $(X, \varrho)$ . Ještě však než začneme, podíváme se na alternativní definici Hausdorffovy metriky, která se nám dále bude hodit.

**Věta 4.2.1** (Alternativní definice Hausdorffovy metriky). *Nechť  $(X, \varrho)$  je metrický prostor. Pro každé  $A, B \in \mathbb{H}(X)$  platí*

$$\varrho_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \varrho(x, B), \sup_{y \in B} \varrho(y, A) \right\}.$$

*Důkaz.* Nechť je dáno  $\varepsilon > 0$ , takové, že  $\varepsilon \geq \varrho_H(A, B)$ . Pak  $A \subseteq (B)_\varepsilon$  a  $B \subseteq (A)_\varepsilon$ , tzn.

$$\varepsilon \geq \max \left\{ \sup_{x \in A} \varrho(x, B), \sup_{y \in B} \varrho(y, A) \right\}.$$

Naopak zvolíme-li  $0 < \varepsilon \leq \varrho_H(A, B)$ , pak určitě platí alespoň jedna z nerovností:

$$\varepsilon \leq \sup_{x \in A} \varrho(x, B) \text{ nebo } \varepsilon \leq \sup_{y \in B} \varrho(y, A).$$

Tedy

$$\varepsilon \leq \max \left\{ \sup_{x \in A} \varrho(x, B), \sup_{y \in B} \varrho(y, A) \right\}.$$

Z toho dostáváme závěr tvrzení. □

Jako první se podíváme na trojici pomocných lemmat.

**Lemma 4.2.2.** *Nechť  $f : X \rightarrow X$  je spojité zobrazení v metrickém prostoru  $(X, \varrho)$ . Pak pro každé  $S \in \mathbb{H}(X)$  platí  $f(S) \in \mathbb{H}(X)$ .*

*Důkaz.* Nechť  $S \in \mathbb{H}(X)$ . Zjevně platí  $f(S) \neq \emptyset$ . Pro důkaz kompaktnosti  $f(S)$  uvažujme posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , kde  $x_i \in S$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Protože  $S$  je kompaktní, existuje posloupnost indexů  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ , taková, že  $x_{n_k} \rightarrow x \in S$ . Ze spojitosti zobrazení  $f$  však plyne, že pak  $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^\infty$  je podposloupností posloupnosti  $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$  a  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ , tedy i  $f(S)$  je kompaktní. □

**Lemma 4.2.3.** *Nechť  $f : X \rightarrow X$  je kontrakce na metrickém prostoru  $(X, \varrho)$  s faktorem  $0 < K < 1$ . Pak  $f : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  je kontrakce na Hausdorffově metrickém prostoru s faktorem  $K$ .*

(Převzato z [1, str. 79].)

*Důkaz.* Z předchozího lemmatu 4.2.2 víme, že  $f(S) \in \mathbb{H}(X)$  pro každé  $S \in \mathbb{H}(X)$ .  
Mějme množiny  $A, B \in \mathbb{H}(X)$ . Pak

$$\begin{aligned}\varrho(f(A), f(B)) &= \inf \{ \varrho(f(x), f(y)) \mid x \in A, y \in B \} \\ &\leq \inf \{ K \cdot \varrho(x, y) \mid x \in A, y \in B \} \\ &= K \cdot \inf \{ \varrho(x, y) \mid x \in A, y \in B \} \\ &= K \cdot \varrho(A, B).\end{aligned}$$

Tedy celkově

$$\begin{aligned}\varrho_{\mathbb{H}}(f(A), f(B)) &= \inf \{ \delta > 0 \mid f(A) \subseteq (f(B))_{\delta} \wedge f(B) \subseteq (f(A))_{\delta} \} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in A} \varrho(f(x), f(B)), \sup_{y \in B} \varrho(f(y), f(A)) \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \varrho(f(x), f(y)), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \varrho(f(y), f(x)) \right\} \\ &\leq K \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \varrho(f(x), f(y)), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \varrho(f(y), f(x)) \right\} \\ &= K \varrho_{\mathbb{H}}(A, B).\end{aligned}$$

Druhá rovnost plyne z věty 4.2.1. □

(Převzato a upraveno z [1, str. 79].)

**Lemma 4.2.4.** *Pro každé  $A, B, C, D \in \mathbb{H}(X)$ , kde  $(X, \varrho)$  je metrický prostor, platí*

$$\varrho_{\mathbb{H}}(A \cup B, C \cup D) \leq \max \{ \varrho_{\mathbb{H}}(A, C), \varrho_{\mathbb{H}}(B, D) \}.$$

*Důkaz.* Budeme vycházet z alternativní definice Hausdorffovy metriky (viz věta 4.2.1). Pro  $\varrho(x, A \cup B)$  platí následující odhad:

$$\varrho(x, A \cup B) = \min \left\{ \inf_{y \in A} \varrho(x, y), \inf_{z \in B} \varrho(x, z) \right\} \leq \inf_{y \in A} \varrho(x, y) = \varrho(x, A).$$

Z toho pak máme

$$\sup_{x \in A} \varrho(x, C \cup D) \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in C} \varrho(x, y) = \varrho(x, A) \leq \varrho_{\mathbb{H}}(A, C)$$

a tedy

$$\sup_{x \in A \cup B} \varrho(x, C \cup D) \leq \max \{ \varrho_{\mathbb{H}}(A, C), \varrho_{\mathbb{H}}(B, D) \}.$$

Stejný odhad lze získat i pro  $\sup_{x \in C \cup D} \varrho(x, A \cup B)$ :

$$\begin{aligned}\sup_{x \in C \cup D} \varrho(x, A \cup B) &= \max \left\{ \sup_{x \in C} \varrho(x, A \cup B), \sup_{x \in D} \varrho(x, A \cup B) \right\} \\ &\leq \max \{ \varrho_{\mathbb{H}}(C, A), \varrho_{\mathbb{H}}(D, B) \} = \max \{ \varrho_{\mathbb{H}}(A, C), \varrho_{\mathbb{H}}(B, D) \}.\end{aligned}$$

Tedy celkově lze psát

$$\begin{aligned}\varrho_{\mathbb{H}}(A \cup B, C \cup D) &= \max \left\{ \sup_{x \in A \cup B} \varrho(x, C \cup D), \sup_{x \in C \cup D} \varrho(x, A \cup B) \right\} \\ &\leq \max \{ \varrho_{\mathbb{H}}(A, C), \varrho_{\mathbb{H}}(B, D) \}.\end{aligned}$$

□

Dvojice lemmat 4.2.2 a 4.2.3 nám v podstatě říká, že obrazem kompaktní množiny v kontraktivním zobrazení je opět kompaktní množina a že „kontraktivita“ zobrazení definovaného na libovolném metrickém prostoru  $(X, \varrho)$  se zachovává na hyperprostoru. Tento výsledek se nám bude později hodit, neboť jak již bylo zmíněno na začátku, některé fraktály lze konstruovat pomocí opakované aplikace určitých geometrických transformací. Jak lze nejspíše z dosavadního výkladu tušit, budeme pracovat právě s kontrakcemi.

**Definice 4.2.5** (Systém iterovaných funkcí). *Systém iterovaných funkcí*, zkráceně IFS (z anglického *iterated function system*), na metrickém prostoru  $(X, \varrho)$  je konečná množina kontrakcí

$$\{\psi_i : X \rightarrow X \mid 1 \leq i \leq n\}$$

s faktory  $K_i$ . Kontraktivním faktorem IFS je číslo  $K = \max \{K_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ .

Zatím není zcela zjevné, proč definujeme pro IFS kontraktivní faktor jako maximum z faktorů všech kontrakcí v něm obsažených (byť to může působit do jisté míry intuitivně). Odpověď na tuto otázku nám poskytne následující věta 4.2.6.

**Věta 4.2.6.** *Nechť  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  je IFS na metrickém prostoru  $(X, \varrho)$  s kontraktivním faktorem  $0 < K < 1$ . Pak zobrazení  $\Psi : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  definované předpisem*

$$\Psi(A) = \bigcup_{i=1}^n \psi_i(A)$$

*pro  $A \in \mathbb{H}(X)$  je kontrakce na  $(\mathbb{H}(X), \varrho_H)$  s faktorem  $K$ .*

*Důkaz.* Důkaz tvrzení lze provést indukcí podle  $n$ . Pro  $n = 2$  zvolme množiny  $A, B \in \mathbb{H}(X)$ . Pak

$$\begin{aligned} \varrho_H(\psi_1(A) \cup \psi_2(A), \psi_1(B) \cup \psi_2(B)) &\leq \max \{ \varrho_H(\psi_1(A), \psi_1(B)), \varrho_H(\psi_2(A), \psi_2(B)) \} \\ &\leq \max \{ K_1 \varrho_H(A, B), K_2 \varrho_H(A, B) \} \\ &\leq K \varrho_H(A, B), \end{aligned}$$

kde druhá nerovnost plyne z lemmatu 4.2.4. Nyní ukážeme, že zobrazení  $\Psi$  definované předpisem  $\Psi(A) = \bigcup_{i=1}^n \psi_i(A)$  je kontrakce. Mějme opět množiny  $A, B \in \mathbb{H}(X)$ . Pak

$$\begin{aligned} \varrho_H(\Psi(A), \Psi(B)) &= \varrho_H \left( \bigcup_{i=1}^n \psi_i(A), \bigcup_{j=1}^n \psi_j(B) \right) \\ &= \varrho_H \left( \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} \psi_i(A) \right) \cup \psi_n(A), \left( \bigcup_{j=1}^{n-1} \psi_j(B) \right) \cup \psi_n(B) \right) \\ &\leq \max \left\{ \varrho_H \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} \psi_i(A), \bigcup_{j=1}^{n-1} \psi_j(B) \right), \varrho_H(\psi_n(A) \cup \psi_n(B)) \right\} \\ &\stackrel{\text{I.P.}}{\leq} \max \{ K \varrho_H(A, B), K_n \varrho_H(A, B) \} \leq K \varrho_H(A, B). \end{aligned}$$

□

## 4.3 Time Escape Algoritmy

(TODO: Doplnit sekci.)



# Kapitola 5

## Generování fraktálů

(TODO: Doplnit kapitolu.)



# Seznam použité literatury

- [1] BARNESLEY, M. F. (1993). *Fractals everywhere*. Academic Press Professional, Boston, 2nd ed. ISBN 0-12-079061-0.
- [2] EDGAR, G. (2008). *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer, New York, 2nd ed. ISBN 978-0-387-74748-4.
- [3] ENGELKING, R. (1989). *General topology*. Heldermann, Berlin, rev. and completed ed. ISBN 3-88538-006-4.
- [4] FALCONER, K. J. (1989). Dimensions and measures of quasi self-similar sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **106**(2). doi: 10.1090/S0002-9939-1989-0969315-8. URL <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1989-0969315-8>. MSC: Primary 58F12; Secondary 28A75.
- [5] FALCONER, K. J. (2014). *Fractal geometry*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 3rd edition. ISBN 978-1-119-94239-9.
- [6] LUKEŠ, J. a MALÝ, J. (2013). *Measure and integral*. Matfyzpress, Praha, 3rd ed. ISBN 978-80-7378-253-5.
- [7] MANDELBROT, B. B. (1983). *Fractal geometry of nature*. Freeman and company, New York, vyd. 3. ISBN 978-0716711865.
- [8] MATTILA, P. (1995). *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st ed. ISBN 0-521-46576-1.
- [9] MOTWANI, R., HOPCROFT, J. E. a ULLMAN, J. D. (2003). *Introduction to automata theory, languages, and computation*. Pearson Addison Wesley, Upper Saddle River, 2nd ed. ISBN 0321210298.
- [10] NETUKA, I. (2014). *Základy moderní analýzy*. Matfyzpress, Praha, 1. vyd. ISBN 978-80-7378-277-1.
- [11] NETUKA, I. (2016). *Integrální počet*. Matfyzpress, Praha, první vydání. ISBN 978-80-7378-334-1.
- [12] O'CONNOR, J. J. (Citováno 17. dubna 2025). Mactutor history of mathematics archive. [online]. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/>.
- [13] O'CONNOR, J. J. (Citováno 17. dubna 2025). Mactutor history of mathematics archive. [online]. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Turing/>.

- [14] O'CONNOR, J. J. (Citováno 19. března 2025). Mactutor history of mathematics archive. *[online]*. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hausdorff/>.
- [15] O'CONNOR, J. J. (Citováno 29. března 2025). Mactutor history of mathematics archive. *[online]*. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Borel/>.
- [16] O'CONNOR, J. J. (Citováno 4. března 2025). Mactutor history of mathematics archive. *[online]*. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Vitali/>.
- [17] PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H. a SAUPE, D. (2004). *Chaos and Fractals*. Springer, New York, 2nd edition. ISBN 978-1-4684-9396-2.
- [18] PRUSINKIEWICZ, P. a LINDENMAYER, A. (1990). *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag, New York. ISBN 978-1-4613-8476-2.
- [19] ROYDEN, H. L. a FITZPATRICK, P. M. (2010). *Real analysis*. Prentice Hall, Boston, 4th ed. ISBN 978-0-13-511355-4.
- [20] VERNER, J. (Citováno 4. března 2025). Lebesgueovsky neměřitelné množiny. *[online]*. Dostupné z: <https://ktiml.mff.cuni.cz/~verner/download/nemeritelne.pdf>.
- [21] ZELINKA, I., VČELÁŘ, F. a ČANDÍK, M. (2006). *Fraktální geometrie*. BEN - technická literatura, Praha, vydání 1. ISBN 80-7300-191-8.
- [22] ŠARMANOVÁ, P. (1996). *Malý průvodce historií integrálu*. Prometheus, Praha, 1. vyd. ISBN 80-7196-038-1.
- [23] ŠÁRKA VORÁČOVÁ, CSACHOVÁ, L., HÁJKOVÁ, V., HROMADOVÁ, J., MORAVCOVÁ, V., RICHTER, J., SURYNKOVÁ, P., ŠAROUNOVÁ, A., ŠAROUN, J., ŠRUBAŘ, J., ŠTAUBEROVÁ, Z. a TICHÝ, V. (2022). *Atlas geometrie*. Academia, Praha, vydání 2. ISBN 978-80-200-3336-9.

# Seznam obrázků

1.1	Příklad mapy pobřeží se spojnicí bodů $A$ a $B$ .	6
1.2	Odhad délky pobřeží, kde $n = 10$ při zvoleném $\varepsilon$ .	6
1.3	Část pobřeží od bodu $A$ v menším měřítku.	7
1.5	Princip Archimédovy metody.	8
1.6	Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku.	8
1.7	Prvních pět iterací Kochovy křivky.	9
1.8	První iterace Kochovy křivky „uvnitř“ druhé v menším měřítku.	10
1.9	První čtyři iterace Sierpiňského trojúhelníka.	11
1.10	Nultá a první iterace Kochovy vločky.	12
1.11	Čtvrtá iterace Kochovy vločky.	12
1.12	Rozdělení první iterace Kochovy vločky.	13
1.13	Nově vzniklé trojúhelníky v druhé iteraci.	13
1.14	Nultá až čtvrtá iterace Cantorova diskontinua.	14
1.15	Znázornění délek vyjmutých úseků.	15
1.16	Soběpodobnost čtverce.	16
1.17	Úsečka rozdělená na šest stejných částí.	16
1.18	Krychle rozdělená na 27 stejných částí.	16
1.19	Trojúhelník $T$ rozdělený na trojúhelníky $T_1, \dots, T_4$ .	18
1.20	Různé možnosti (pod)pokrytí úsečky.	21
1.21	Možné (pod)pokrytí čtverce.	21
2.1	Ilustrace k důkazu věty 2.2.6	36
2.2	Vnitřní a vnější Jordanova-Peanova míra množiny $M$ .	37
2.3	Ilustrace měřitelnosti množiny $A$	40
2.4	Ilustrace věty 2.4.4	43
2.5	Aproximace box-counting dimenze pobřeží Velké Británie	44
2.6	Felix Hausdorff, 1868–1942	52
2.7	Émile Borel, 1871–1956	53
2.8	Graf funkce $f(s) = \mathcal{H}^s(F)$ , kde $F \subseteq \mathbb{R}^n$ .	59
3.1	Ilustrace věty 3.2.1	66
4.1	Alan Turing, 1912–1954	71
4.2	David Hilbert, 1862–1943	72
4.3	Příklad syntaktického stromu věty: „ <i>Petr četl pěknou knihu.</i> “	75
4.4	Interpretace vygenerovaných řetězců pro Kochovu křivku.	79
4.5	Znázornění zásobníku.	80
4.6	Fraktální strom pro $n = 1, 2, 3, 4$	80

# Seznam tabulek

1.1	Hodnoty dimenze $d$ pro různé útvary. . . . .	17
1.2	Porovnání fraktálních dimenzí $d_k$ různých objektů. . . . .	20
1.3	Porovnání fraktální a topologické dimenze útvarů. . . . .	22
2.1	Odhady $\lambda_3$ pro vybrané útvary . . . . .	46
4.1	Význam symbolů v abecedě $V$ pro želvu. . . . .	77
4.2	Význam symbolů v abecedě $V$ pro želvu. . . . .	79

# Index

- $\delta$ -mříž, 26
- $\delta$ -pokrytí, 29
- $\sigma$ -aditivita, 34
- $\sigma$ -algebra, 31
- $\sigma$ -subaditivita, 34
- $n$ -rozměrný kvádr, 36
  
- abeceda, 71
- aditivita, 33
- automat
  - deterministický, 71
  - lineárně omezený, 71
  - nedeterministický, 71
  - zásobníkový, 71
- axiom, 76
  
- Benoît Mandelbrot, 5
- bezkontextový L-systém, 77
- Bolzanova-Cauchyova podmínka, 27
- box-counting dimenze, 17, 23, 40
  - dolní, 41
  - horní, 41
  
- Cantorova věta, 65
- Cantorovo diskontinuum, 15
- cauchyovská posloupnost, 65
- Chomského hierarchie, 71, 77
- Constantin Carathéodory, 39
  
- deterministický L-systém, 77
- dimenze
  - box-counting, 41
  - Hausdorffova, 58, 59
  - Hausdorffova-Bezikovičkova, 59
  - Lebesgueova pokrývací, 20
  - Minkowského, 23
  - Minkowského-Bouligandova, 23
  - topologická, 20
- DOL-systém, 77
- délka slova, 72
  
- Entscheidungsproblem, 70
  
- FIFO, 78
- formální
  - gramatika, 71, 73
  - jazyk, 71, 72
- fraktál, 22
- fraktální geometrie, 5
- fronta, 78
  
- Giuseppe Vitali, 39
- gramatika, 71, 73
  
- Hausdorffův metrický prostor, 65, 84
  - Hausdorffova metrika, 63
- Henri Lebesgue, 20
- hranice množiny, 26
- hyperprostor, 63
  
- iterated function system, 87
  
- jazyk, 71, 72
- Jordanova-Peanova míra, 35, 36
  - vnitřní, 36
  - vnější, 36
  
- Kochova křivka, 9
- Kochova vložka, 12
- kompilátor, 74
- konkatenace, 73
- kontrakce, 30, 85
- kontraktivní zobrazení, 87
- konvergence
  - bodová, 28
  - stejněměrná, 28, 66
- kvádr, 26
  - objem kvádru, 37
  
- L-systém, 69, 76
  - deterministický, 77
  - nedeterministický, 77
  - stochastický, 78

Lebesgueova míra, 23  
      $n$ -rozměrná, 37  
      $n$ -rozměrná Lebesgueova míra, 39  
     vnější, 37  
 LIFO, 78  
 limes inferior, 27  
 limes superior, 27  
 limita  
     funkce v bodě, 28  
     posloupnosti, 26  
 Mandelbrot, 5  
 metrický prostor, 24  
     diskrétní, 25  
     Hausdorffův, 65, 84  
     úplný, 27, 65  
 metrika, 24  
 množina  
     borelovská, 53  
     kompaktní, 29  
     lebesgueovsky měřitelná, 39  
     omezená, 25  
     otevřená, 25  
     uzavřená, 25  
 mocnina slova, 73  
 monotonie míry, 33  
 míra, 32  
     aritmetická, 33, 57  
     Diracova, 33  
     Hausdorffova, 53  
     metrická, 56  
     metrická vnější, 56  
     vnější, 55  
 měřitelnost  
     lebesgueovská, 56  
 měřitelný prostor, 23  
 nedeterministický L-systém, 77  
 neterminál, 73  
 neterminální symbol, 73  
 objem kvádrů, 26  
 odvození slova, 74  
 OL-systém, 77  
 podobnost, 58  
 podpokrytí, 29  
 pokrytí, 29  
     otevřené, 29  
 pravidlo, 74  
 prostor  
     metrický, 24  
     měřitelný, 31  
     s mírou, 33  
 prostor s mírou, 23, 33  
 prázdné slovo, 72  
 průměr množiny, 25  
 přepisovací pravidlo, 74  
 Sierpińského trojúhelník, 10  
 slovo, 71  
 soběpodobnost, 8, 76  
 stochastický L-systém, 78  
 symbol, 71  
 syntaktická analýza, 74  
 Systém iterovaných funkcí, 69  
 systém iterovaných funkcí, 61, 84, 87  
 teorie míry, 23  
 terminál, 73  
 terminální symbol, 73  
 The Decision problem, 70  
 Time Escape algoritmus, 69  
 Turingův stroj, 69  
 uzávěr množiny, 26  
 Vitali, 39  
 Vitaliho konstrukce, 39  
 vnitřek množiny, 25  
 vzdálenost  
     bodu od množiny, 25  
     množin, 25  
 zjemnění, 29  
 znak, 71  
 zobrazení  
     bilipschitzovské, 30, 50  
     hölderovské, 58  
     kontraktivní, 85, 87  
     lipschitzovské, 30, 50, 57  
 zásobník, 78  
 zřetězení, 73  
 řetězec, 71  
 želní grafika, 77