



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. David Weber

# **Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro střední  
školy

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední  
školy se sdruženým studiem  
Učitelství informatiky pro střední  
školy

Praha (TODO: 2024.)

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

(TODO: Doplnit poděkování.)

Název práce: Fraktální geometrie pro (zdatné) amatéry

Autor: Bc. David Weber

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: (TODO: Doplnit abstrakt (česky).)

Klíčová slova: , klicova slova

Title: (TODO: Fractal geometry for (experienced) amateurs.)

Author: Bc. David Weber

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: (TODO: Doplnit abstrakt (anglicky).)

Keywords: keywords

# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>2</b>
<b>1 Úvod do fraktálů</b>	<b>3</b>
1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie? . . . . .	3
1.2 Soběpodobnost . . . . .	6
1.2.1 Kochova křivka . . . . .	6
1.2.2 Sierpiňského trojúhelník . . . . .	8
1.2.3 Kochova vložka . . . . .	9
1.2.4 Cantorovo diskontinuum . . . . .	11
1.3 Fraktální dimenze . . . . .	13
1.3.1 Chápání konceptu dimenze . . . . .	13
1.3.2 Dimenze fraktálů . . . . .	16
1.3.3 Topologická dimenze . . . . .	17
<b>2 Teorie míry</b>	<b>20</b>
<b>3 Klasifikace fraktálů</b>	<b>21</b>
3.1 L-systémy . . . . .	21
3.2 Systém iterovaných funkcí . . . . .	21
3.3 Time Escape Algorithms . . . . .	21
<b>4 Generování fraktálů</b>	<b>22</b>
<b>5 Fraktály v praxi</b>	<b>23</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>24</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>25</b>

# Předmluva

(TODO: napsat předmluvu.)

# Kapitola 1

## Úvod do fraktálů

Pod pojmem “geometrie” si čtenář pravděpodobně vybaví rovinnou či prostorovou geometrii pracující s jednoduchými útvary jako trojúhelník, obdélník, kruh, kvádr, jehlan, apod. a s útvary z nich složenými. V reálném světě tak lze nalézt mnoho uplatnění této “standardní” geometrie, kupříkladu ve strojírenství, stavebnictví, i jinde. Často tak můžeme mít o světě představu právě ve smyslu eukleidovské geometrie. Lze však nalézt řadu objektů, pro jejichž popis tyto představy jsou limitující. Např. v přírodě mrak nelze popsat jako kouli, horu nelze popsat jako jehlan a ani pobřeží nelze určitě popsat jako kružnici.

Mnohé přírodní obrazce již nelze jednoduše modelovat pomocí nástrojů “standardní” eukleidovské geometrie, s níž jsme seznámeni již od základní školy a která byla po mnoho století základním nástrojem pro popis a porozumění matematickému prostoru. Často zde hraje roli i jistá nahodilost projevující se v jejich charakteru. *Fraktální geometrie* se zabývá nepravidelnými a často se opakujícími vzory, které se vyskytují v přírodě i umění. Tyto vzory jsou často složité a zdánlivě chaotické, ale fraktální geometrie nám umožňuje je analyzovat a pochopit.

Vznik fraktální geometrie se datuje od roku 1975, za jejíhož zakladatele je považován francouzsko-americký matematik BENOÎT MANDELBROT (1924–2010). Historicky za jejím vznikem stály objevy matematických struktur, které nespadaly pod “představy” do tehdy známé eukleidovské geometrie. Byly často považovány za “patologické”, nicméně matematici, kteří je vytvořili, je považovali za důležité pro ukázkou bohatých možností, které nabízí svět matematiky překračující možnosti jednoduchých struktur, které viděli okolo sebe. [1, str. 33]

### 1.1 Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?

Položme si na začátek trochu jinou otázku, kterou si z počátku položil i Benoît Mandelbrot: *Jaká je podstata tvaru pobřeží?* Ta se stala podstatnou v jeho práci „*How Long Is the Coast of Britain?*“. Uvažme část pobřeží s počátečním a koncovým bodem (viz obrázek 1.1). Zjevně jeho délka je zdola omezena délkou spojnice koncových bodů  $A$  a  $B$ , nicméně typické pobřeží je velmi nepravidelné a klikaté, a jeho skutečná délka je tak často mnohem delší. Existují různé metody, které nám umožňují určit přesněji jeho délku. Několik z nich je popsáno v knize [1, str.



Obrázek 1.1: Příklad mapy pobřeží se spojnicí bodů  $A$  a  $B$ .

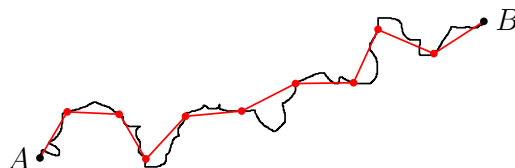
79], pro uvedení do problematiky si zde však vystačíme s tou nejednodušší.

Předpokládejme, že pobřeží, které zkoumáme, má pevné hranice (tj. zanedbáváme např. přílivy a odlivy nastávající během roku), a dále jsme schopni rozlišovat libovolně krátké vzdálenosti.

Mějme zadané libovolné  $\varepsilon > 0$ . Podél pobřeží začneme umísťovat tyče tak, že po každém umístění provedeme na mapě krok délky **nejvýše**  $\varepsilon$ , přičemž začínáme v bodě  $A$  a postupujeme až k bodu  $B$  (popř. pokud měříme délku pobřeží ostrova, pokračujeme dokud se nevrátíme tam, kde jsme začali). Předpokládejme, že jsme provedli celkově  $n(\varepsilon)$  kroků (jejich počet je závislý na zvolené délce kroku). *Přibližnou délku pobřeží*  $\ell(\varepsilon)$  pak stanovíme jako

$$\ell(\varepsilon) = n(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Nyní by nás mohlo napadnout, že pro zmenšující se  $\varepsilon$ , tj.  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , bude hodnota



Obrázek 1.2: Odhad délky pobřeží, kde  $n = 10$  při zvoleném  $\varepsilon$ .

$\ell(\varepsilon)$  konvergovat ke skutečné délce pobřeží. Tzn. označíme-li skutečnou délku pobřeží  $L$ , pak bychom mohli očekávat, že platí

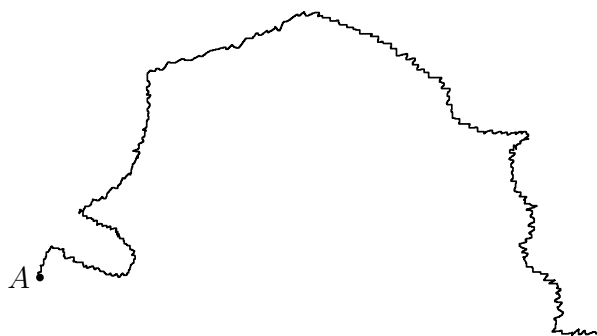
$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ell(\varepsilon). \quad (1.1)$$

Jenže, bohužel, limita (1.1) ve skutečnosti bude rovna  $\infty$ . Proč? Je třeba si uvědomit, že zde pracujeme s *mapou* pobřeží, která má určité *měřítko*. Pokud bychom měli pobřeží na mapě s měřítkem 1 : 100 000, uvidíme méně detailů, než kdybychom jej zkoumali na mapě s měřítkem 1 : 1 000. (Viz obrázek 1.3.)

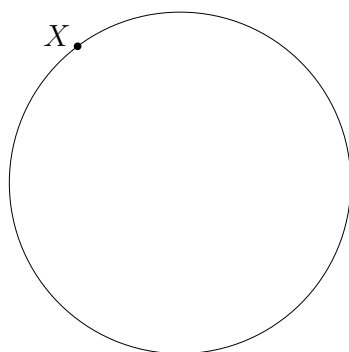
Nově odhalené detaily (menší poloostrovky apod.) zde přispívají k celkové délce pobřeží  $\ell(\varepsilon)$ . Postupným zvětšováním měřítka mapy bychom tak odhalili další detaily. Naše původní idea tak selhává, neboť (v “klasickém” pojetí délky) pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  hodnota  $\ell(\varepsilon)$  poroste nade všechny meze, tj.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ell(\varepsilon) = \infty$ .

Nabízí se otázka: Proč se toto děje? Pokud se ohlédneme zpět za eukleidovskou geometrií, tento problém zde nenastává. Např. u kružnice v eukleidovské rovině  $\mathbb{E}_2$  změnou měřítka žádné další detaily křivky neobjevíme (podobně u jiných geometrických útvarů, viz obrázky 1.4a a 1.4b). Díky tomu můžeme v případě počítání obvodu kružnice použít např. Archimédovu metodu.

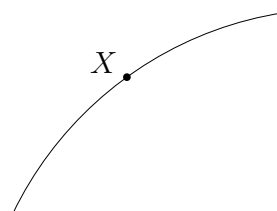




Obrázek 1.3: Část pobřeží od bodu  $A$  v menším měřítku.



(a) Kružnice v menším měřítku.



(b) Část kružnice ve větším měřítku.

Máme-li kružnici o poloměru  $r > 0$ , pak jí můžeme vepsat libovolný pravidelný  $n$ -úhelník (viz obrázek 1.5a). Obvod pravidelného  $n$ -úhelníku is označíme  $O_n$  a délku jeho strany  $x$  (viz obrázek 1.5b). Tu jsme schopni stanovit užitím elementární goniometrie, tj.

$$x = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

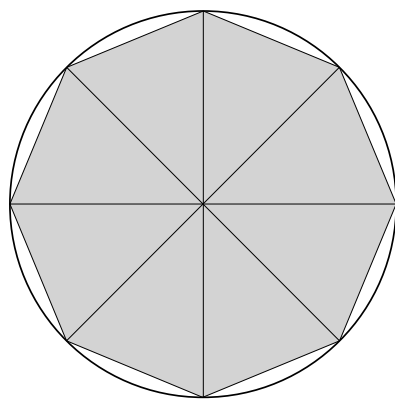
a tedy obvod

$$O_n = 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

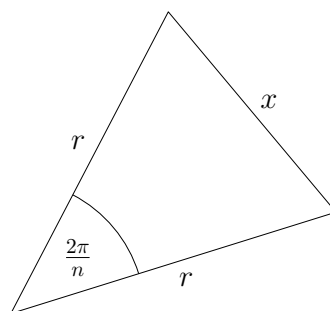
Pro rostoucí  $n$  bude obvod pravidelného  $n$ -úhelníku stále lépe aproximovat obvod původní kružnice (viz obrázek 1.6). Limitním přechodem (tj. pro  $n \rightarrow \infty$ ) tak můžeme odvodit vzorec pro obvod kružnice:

$$O = \lim_{n \rightarrow \infty} 2rn \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

Idea aproximace pomocí “zjemňování” zde skutečně funguje a délka ve standardním pojetí tak dává smysl, jak bychom mohli očekávat. Křivka, kterou tvoří pobřeží, má však oproti kružnici jiný geometrický charakter. Délka pobřeží  $\infty$ , k níž Mandelbrot došel, tak dává smysl z *geometrického pohledu*, avšak výsledek to není moc užitečný.

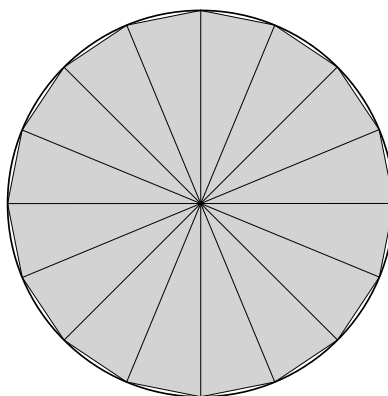


(a) Pravidelný osmiúhelník vepsaný kružnici.



(b) Část vepsaného pravidelného  $n$ -úhelníku.

Obrázek 1.5: Princip Archimédovy metody.



Obrázek 1.6: Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku.

## 1.2 Soběpodobnost

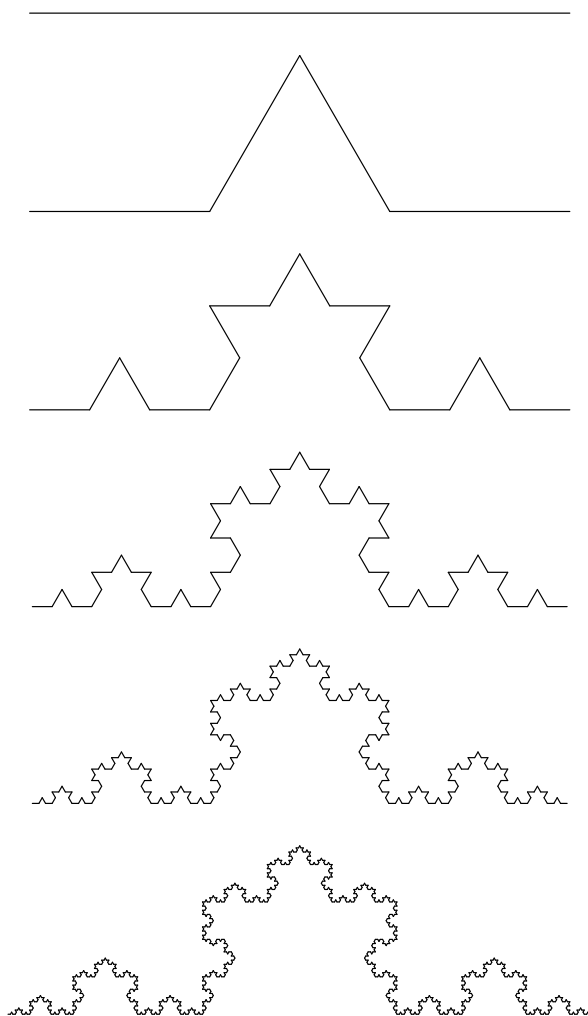
Mandelbrot si uvědomil, že struktura pobřeží se charakterově vymyká útvarům do tehdy známým eukleidovské geometrii, neboť mapy s různými měřítky poskytovaly různou úroveň detailů, které hrály netriviální roli v jeho celkové délce. Učinil však jiné zásadní pozorování, a to sice, že mnoho detailů má společné rysy, které se opakují. Hodně z nich se shodovalo s výjimkou jejich měřítka. [1, str. 96]

Ve fraktální geometrii se pro tento úkaz uchýlil termín *soběpodobnost* (angl. *self-similarity*). Útvar nazýváme soběpodobným, **pokud se sám sobě podobný v libovolném měřítku** [2, str. 220] nebo pokud **část útvaru je podobná jeho celku**. Zmíněná podoba může být míněna přibližně (např. v případě pobřeží je nejspíše jasné, že žádné z jeho detailů nesdílejí společné rysy přesně), ale v dalších částech si předvedeme soběpodobnost *přímou*.

### 1.2.1 Kochova křivka

Jak jsme si již uvedli, za otce fraktální geometrie je považován Mandelbrot, avšak mnoho fraktálních křivek bylo známo již dříve (čtenář promine, že jsme blíže ne-

specifikovali termín “fraktální”, jeho přesný význam pro nás však zatím nebude stěžejní). Jako první se podíváme na jednu z nejznámějších, kterou objevil roku 1904 švédský matematik HELGE VON KOCH (1870–1924), dnes známou pod názvem *Kochova křivka*. [3, str. 61] Na začátku vezmeme úsečku délky 1. Vyjmeme prostřední (tj. druhou) třetinu a nahradíme ji dvěma úsečkami délky  $1/3$ , tak, aby na sebe navazovaly v krajních bodech. Tento proces následně opakujeme pro nově vzniklé úsečky. Obecně u úsečky délky  $l$  nahradíme její prostřední třetinu dvojicí úseček délek  $l/3$  (viz obrázek 1.7). V první řadě si můžeme všimnout, že

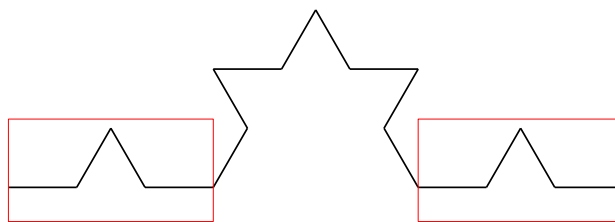


Obrázek 1.7: Prvních pět iterací Kochovy křivky.

v každé další iteraci jsou nově vzniklé podobné původnímu celku, tedy v předešlé iteraci (viz obrázek 1.8). Pokud by tento proces pokračoval do nekonečna, pak by každá ze čtyř částí křivky představovala **celý původní obrazec** ve zmenšeném měřítku (byla by tedy soběpodobná). Zkusme se nyní podívat na délku křivky. V první iteraci začínáme s úsečkou délky<sup>1</sup> 1, která se v druhé iteraci změní na křivku délky  $4/3$ . Není těžké si rozmyslet, že obecně v  $n$ -té iteraci bude délka křivky  $\ell_n$  rovna

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

<sup>1</sup>Mohli bychom také začít s obecnou délkou  $\ell_0$ , ale ta by se však při výpočtu projevila pouze jako konstantní násobek.



Obrázek 1.8: První iterace Kochovy křivky “uvnitř” druhé v menším měřítku.

Posloupnost  $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$  je geometrická s kvocientem  $q = 4/3 > 1$ , a tedy její limita je  $\infty$ . Kochova křivka má tak *nekonečnou délku*.

## 1.2.2 Sierpińského trojúhelník

Přesuneme nyní k plošným útvarům, neboť i zde lze sledovat některé zajímavé vlastnosti. Jedním z představitelů je tzv. *Sierpińského trojúhelník*, který objevil roku 1916 polský matematik WACŁAW SIERPIŃSKI (1882–1969). [3, str. 61] Na začátku (v nulté iteraci) začínáme s rovnostranným trojúhelníkem se stranou délky 1 (též lze začít s obecnou délkou  $\ell_0$ ). V něm sestrojíme střední příčky (tj. spojnice středů stran trojúhelníka), které společně utvoří strany rovnostranného trojúhelníka čtvrtinového obsahu původního trojúhelníka (to vychází z faktu, že střední příčka v libovolném trojúhelníku má délku rovnou polovině délky strany, s níž je rovnoběžná). Obsah nově vzniklého trojúhelníku odebereme a postup opakujeme pro zbývající trojici trojúhelníků v původním obrazci (viz obrázek (TODO: doplnit odkaz.)).

(TODO: doplnit obrázek.)

I zde si lze všimnout, že po nekonečně mnoha iteracích budou menší trojúhelníky přesnými kopiemi původního obrazce. Zkusme se opět podívat, jak je to s obvodem obrazce. Každá ze středních příček, které vzniknou v další iteraci, má poloviční délku vůči délce strany  $l$  původního trojúhelníku. Obvod obrazce se tak zvětší o  $3l/2$ . Počet trojúhelníků poroste exponenciálně, neboť v každé iteraci odstraněním jednoho trojúhelníku vzniknou tři nové, tj. obvod se po  $k$ -té iteraci zvětší o  $3^k \cdot (1/2)^k = (3/2)^k$  (na začátku pro  $k = 0$  je obvod 3). Obvod obrazce  $O_n$  po  $n$  iteracích bude roven součtu přírůstků přes všechny iterace, tj.

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k. \quad (1.2)$$

Řada  $\sum_{k=1}^n (3/2)^k$  je geometrická s kvocientem  $3/2$ . Zde si vzpomeňme na vzorec pro její součet.

**Věta 1.2.1** (Součet geometrické řady). *Nechť je dána geometrická posloupnost  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  s kvocientem  $q \neq 1$ . Pak pro součet prvních  $n$  členů platí*

$$\sum_{k=1}^n g_k = g_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

*Důkaz.* Důkaz vzorce zde vynecháme, nicméně čtenář si jej může snadno ověřit např. indukcí podle  $n$ . □

Celkově tak po aplikaci vzorce z 1.2.1 v rovnosti (1.2) dostaneme po jednoduché úpravě

$$O_n = 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k = 3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3 + 3 \left( \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right) = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Posloupnost  $\{O_n\}_{n=0}^\infty$  je opět geometrická s kvocientem  $q = 3/2 > 1$ , tzn. její limita je opět  $\infty$ . Obvod Sierpiňského trojúhelníku tedy roste nade všechny meze. (Výpočet jsme si mohli též zjednodušit uvědoměním si, že obvod obrazce roste s faktorem  $3/2$  a vzorec pro  $O_n$  jsme tak mohli určit ihned.)

Podívejme se nyní na obsah útvaru. Zde si již výpočet trochu usnadníme. Po každé iteraci se jeho obsah zmenší na  $3/4$  obsahu původního obrazce. Lze snadno odvodit, že obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky  $a$  je

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

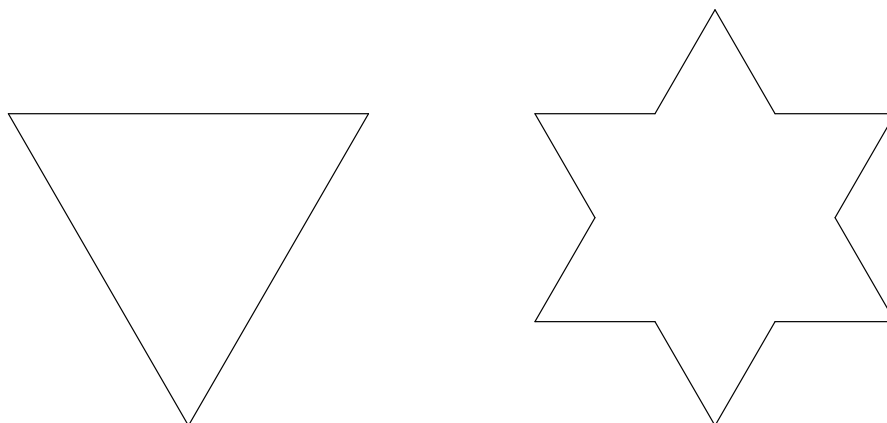
Na začátku je obsah útvaru  $S_0 = \sqrt{3}/4$ . Tj. celkově po  $n$ -iteracích bude obsah  $S_n$  roven

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (1.3)$$

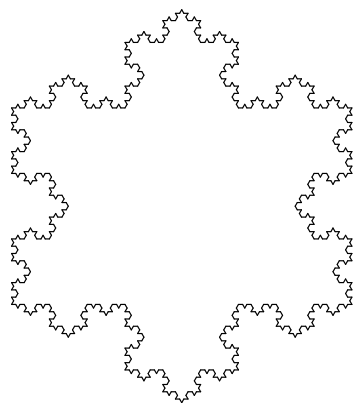
Výraz (1.3) má pro  $n \rightarrow \infty$  limitu nulovou, tedy zatímco Sierpiňského trojúhelník má *nekonečný obvod*, jeho obsah je však naopak *nulový*.

### 1.2.3 Kochova vločka

Rozšiřující variantou Kochovy křivky 1.2.1 je tzv. *Kochova vločka*, která se skládá ze tří Kochových křivek. Rozdíl je zde v tom, že začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1. Na každou ze stran aplikujeme stejný proces, jako předtím, tj. odebereme prostřední třetinu, nahradíme ji dvěma na sebe navazujícími úsečkami délek  $1/3$  a opakujeme pro každou nově vzniklou úsečku (viz obrázky 1.9 a 1.10). Podíváme-li se na obvod, nejspíše nás nepřekvapí, že ten

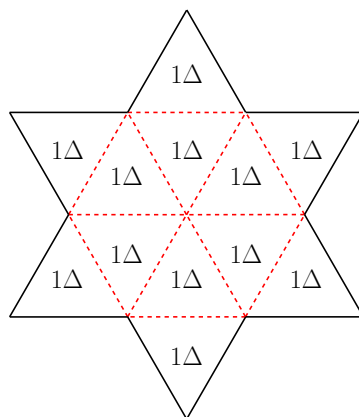


Obrázek 1.9: Nulová a první iterace Kochovy vločky.



Obrázek 1.10: Čtvrtá iterace Kochovy vložky.

je i zde nekonečný<sup>2</sup> (už z principu, že každá strana původního rovnostranného trojúhelníka představuje samostatnou Kochovu křivku). Obsah vzniklého útvaru je však již zajímavější. Pro zjednodušení výpočtu si rozdělme útvar na *stejně rovnostranné trojúhelníky* podle obrázku 1.11, jejichž obsah je roven  $1/12$  obsahu obrazce v nulté iteraci. Výsledný obsah se tedy pokusíme vyjádřit relativně vůči



Obrázek 1.11: Rozdělení první iterace Kochovy vložky.

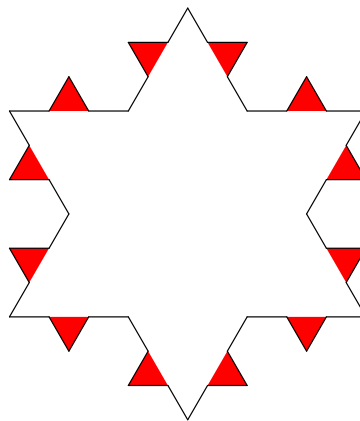
*obsahům daných trojúhelníků*, na něž jsme obrazec rozdělili, a pak jej pouze přepočítáme. Jejich obsah si označme  $\Delta$ . Tedy obsah Sierpiňského trojúhelníku v nulté iteraci lze vyjádřit jako  $S_0 = 9\Delta$ . Po první iteraci vzniknou na každé ze strany 3 nové trojúhelníky o obsahu  $1/9 \cdot \Delta$ . V každé další iteraci vzniknou z jedné úsečky 4 nové. Obecně po  $n$  iteracích jich tedy bude  $3 \cdot 4^n$ . (Při výpočtu musíme počítat s o jedna nižší mocninou, neboť trojúhelníky vznikají “na úsečkách” z předešlé iterace, nikoliv té aktuální.)

Zaměříme se nyní pouze trojúhelníky, které vznikly v aktuální iteraci (viz obrázek 1.12). Součet jejich obsahů nám dává *přírůstek obsahu* v obecné  $n$ -té iteraci. Označíme-li tento přírůstek  $B_n$ , pak platí

$$B_n = \underbrace{3 \cdot 4^{n-1}}_{\text{počet úseček}} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \Delta}^{\text{obsah nových troj.}} = 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \Delta,$$

<sup>2</sup>Obvod Kochovy křivky po  $n$ -té iteraci je  $o_n = 3 \cdot (4/3)^n$ .

kde  $n \geq 1$ . Nyní můžeme již vyšetřit obsah v  $n$ -té iteraci  $S_n$  a posléze i celkový



Obrázek 1.12: Nově vzniklé trojúhelníky v druhé iteraci.

obsah výsledného obrazce  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Pro  $n \geq 1$  platí

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + \sum_{k=1}^n B_k = 9\Delta + 3\Delta \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = 9\Delta + 3\Delta \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta \cdot \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \\ &= 9\Delta + \frac{27}{5}\Delta = \frac{72}{5}\Delta. \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníků, na něž jsme rozdělili první iteraci Kochovy vločky, je

$$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9}$$

a tedy celkově

$$S = \frac{72}{5}\Delta = \frac{72}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Byl to trochu delší výpočet, nicméně jsme zjistili, že Kochova vločka má (stejně jako Kochova křivka) *nekonečnou délku (obvod)*, ale obsah má *konečný*.

## 1.2.4 Cantorovo diskontinuum

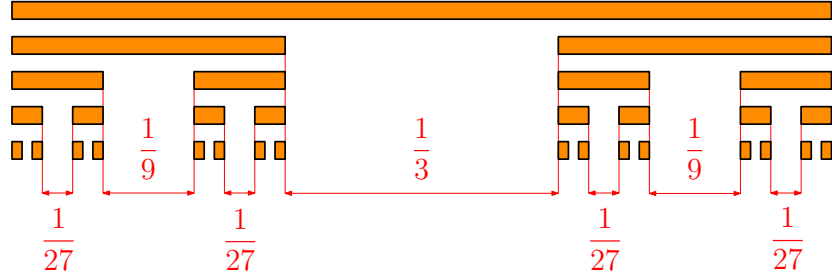
Podívejme se ještě na jeden typ fraktálního objektu, kterým je tzv. *Cantorovo diskontinuum*<sup>3</sup> Myšlenka je zde velmi jednoduchá: začínáme s úsečkou délky 1 (nultá iterace) a následně odebereme prostřední třetinu, čímž vznikne první iterace. V dalších iteracích postupujeme analogicky pro vzniklé úsečky (viz obrázek 1.13).

<sup>3</sup>Též se mu říká *Cantorova množina* (angl. „Cantor set“). Dvourozměrnou variantou je pak tzv. *Cantorův prach* (angl. „Cantor dust“). Slovo *prach* je zde míněno v přeneseném významu, neboť (podobně jako v této podsekcí) lze ukázat, že vzniklé útvary mají v limitě nulový obsah.



Obrázek 1.13: Nultá až čtvrtá iterace Cantorova diskontinua.

Nově vzniklé úsečky třetinové délky jsou kopiemi původní úsečky. Stejně jako u předešlých fraktálů nás i zde bude zajímat limitní chování tohoto procesu. Lze očekávat, že postupným odebráním zbudou úsečky nulové délky. O tom se lze přesvědčit např. tak, že spočítáme limitu celkových délek všech odebraných úseků. V první iteraci odebereme úsečku délky  $1/3$ , v druhé iteraci odebereme dvě celkové délky  $2 \cdot (1/3)^2 = 2/9$ , ve třetí vyjmemme čtyři celkové délky  $4 \cdot (1/3)^3 = 4/27$ , atd. (viz obrázek 1.14). Obecně počet odebraných úseků roste s mocninou



Obrázek 1.14: Znázornění délek vyjmutých úseků.

dvojky, jejichž délky klesají s mocninou trojky, tedy v  $n$ -té iteraci odebereme úsek délky  $2^n(1/3)^{n+1}$ . Označíme-li tedy délku zbylých úseků  $\ell_n$  po  $n$  iteracích a  $\bar{\ell}_n$  délku odebraných úseků, pak určitě platí  $\ell_n = 1 - \bar{\ell}_n$ . Protože nás zajímá délka *všech* odebraných úseků, pak po  $n$  iteracích bude celková délka rovna

$$\bar{\ell}_n = \sum_{k=0}^n 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}. \quad (1.4)$$

Označíme-li si limitu výrazů posloupností  $\ell_n$ , reps.  $\bar{\ell}_n$ , jako  $\ell$ , resp.  $\bar{\ell}$ , pak dostaneme

$$\bar{\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\ell}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Z toho již triviálně plyne, že

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \bar{\ell}_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\ell}_n = 1 - 1 = 0, \quad (1.5)$$

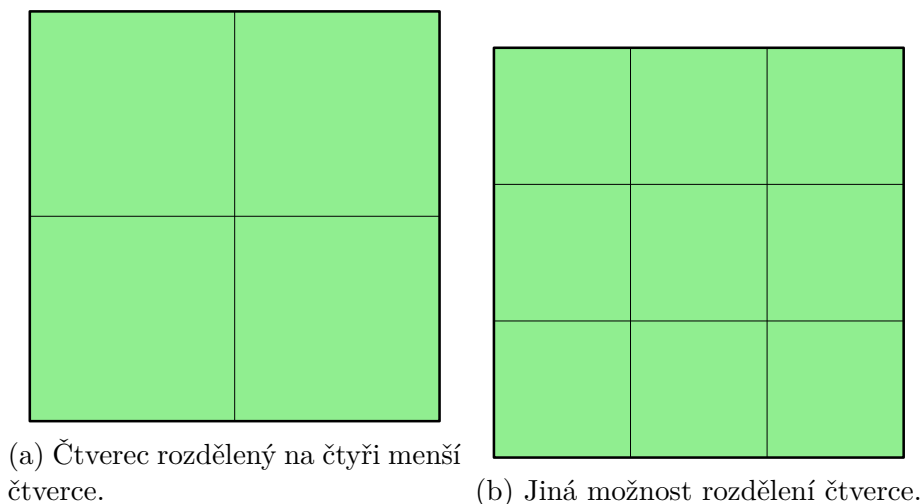
tzn. na konci procesu zbude Cantorovo diskontinuum délky nula.



## 1.3 Fraktální dimenze

### 1.3.1 Chápání konceptu dimenze

Výčet útvarů v sekci 1.2 splňoval zásadní vlastnost, a to sice, že všechny z nich byly *soběpodobné*. V eukleidovské geometrii lze však u mnohých základních objektů pozorovat stejnou vlastnost. Např. čtverec lze určitě prohlásit v jistém smyslu za soběpodobný, neboť jej lze rozdělit na podobné útvary (viz obrázek 1.15). Podobně např. i obyčejná úsečka je taktéž soběpodobná, protože ji mů-



Obrázek 1.15: Soběpodobnost čtverce.

žeme rozdělit na obecně  $k$  stejných částí (viz obrázek).



Obrázek 1.16: Úsečka rozdělená na šest stejných částí.

K čemu nám takové uvědomnění vlastně je? Zmenšíme-li úsečku  $k$ -krát, pak budeme potřebovat přesně  $k$  těchto částí, abychom dostali úsečku původní délky. U čtverce (nebo obdélníku obecně) při zmenšení délky strany  $k$ -krát budeme potřebovat  $k^2$  daných útvarů pro obdržení čtverce s původním obsahem.<sup>4</sup> Pro krychli bude situace zcela analogická,  $k$ -krát zmenšená kopie bude potřeba  $k^3$ -krát, abychom dostali krychli o původním objemu (viz obrázek 1.17). Lze si všimnout, že v závislosti na *dimenzi* objektu se mění daný exponent. Vztah lze tak zobecnit na

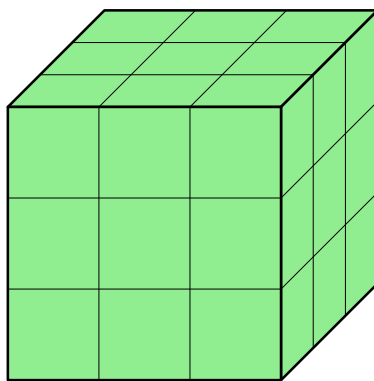
$$N(k) = k^d \quad (1.6)$$

kde  $N(k)$  je počet nových útvarů v závislosti na faktoru  $k$  a  $d$  je dimenze.

<sup>4</sup>Obdélník zmenšený  $k$ -krát bude mít strany délek  $a/k, b/k$ , tedy jeho obsah bude

$$\frac{ab}{k^2} = \frac{S}{k^2},$$

kde  $S$  je obsah původního obdélníka.



Obrázek 1.17: Krychle rozdělená na 27 stejných částí.

Toto je jeden z možných způsobů, jak lze chápat koncept dimenze. Jednoduchou úpravou rovnosti (1.6) dostaneme

$$d = \log_k N(k) = \frac{\ln N(k)}{\ln k}.$$

(Obecně lze volit jakýkoliv přípustný základ logaritmu, tj  $d = \log_b N(k)/\log_b k$  pro  $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ .) Dimenze v tomto pojetí skutečně dává dobrý smysl. Pro

Útvar	$N(k)$	$d = \log_3 N(k)/\log_3 k$
Úsečka	3	1
Čtverec	9	2
Krychle	27	3
Teserakt	81	4

Tabulka 1.1: Hodnoty dimenze  $d$  pro různé útvary.

“klasické” geometrické objekty vychází dimenze vždy celočíselně.

Na této myšlence je založen pojem tzv. *fraktální dimenze*<sup>5</sup>. Existuje více způsobů její definice. Jeden z nich, kterého se dále budeme držet, je následující:

$$d_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \quad (1.7)$$

(Převzato z [4, str. 93].) Výraz  $1/\varepsilon$  zde představuje faktor podobnosti jako původní  $k$  (samotné  $\varepsilon$  tak hraje roli měřítka), avšak největší rozdíl zde představuje zkoumání “limitního chování” daného výrazu.

**Příklad 1.3.1** (Fraktální dimenze úsečky). Začneme asi nejjednodušším příkladem výpočtu fraktální dimenze, a to u úsečky. Představme si, že úsečku *jednotkové délky* rozdělíme na  $N(\varepsilon) = n$  shodných dílů. Pak měřítko libovolného dílu je

$$\varepsilon = \frac{1}{n} = n^{-1}.$$

<sup>5</sup>Někdy se též nazývá *Kolmogorovova dimenze* nebo *Hausdorffova-Besičovičova dimenze*. Je pojmenována po německém matematikovi FELIXI HAUSDORFFOVI (1869–1942) a ruských matematicích ANDREJI KOLMOGOROVOVI (1903–1987) a ABRAMOVÍ BEŠIČOVIČOVI (1891–1970).

(Zde je dobré si uvědomit, že pro  $n \rightarrow \infty$ , tedy zjemňování dělení úsečky, platí, že  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .) Fraktální dimenzi úsečky vypočteme z definice jako

$$d_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n} = 1.$$

**Příklad 1.3.2** (Fraktální dimenze čtverce). Podobně, jako v příkladu 1.3.1 výše, můžeme stanovit i fraktální dimenzi čtverce. Uvažujme tedy čtverec o jednotkovém obsahu, který rozdělíme  $N(\varepsilon) = n$  shodných útvarů. Přitom víme, že obsah mění kvadraticky vůči délce strany. Měřítko nového čtverce tak bude

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n}} = n^{-1/2}$$

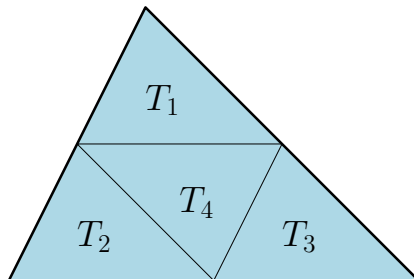
a fraktální dimenze vychází

$$d_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln n^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{2} \ln n} = 2.$$

Pro krychli bude výpočet naprosto analogický (viz příklad 1.3.2). Obecně pro  $d$ -rozměrnou krychli bude její fraktální dimenze<sup>6</sup> rovna  $d$ .

Zkusme se nyní odprostit od krychle k trochu jinému útvaru.

**Příklad 1.3.3** (Fraktální dimenze trojúhelníku). Podívejme se, jak to dopadne s fraktální dimenzí *obecného trojúhelníku*. Každý trojúhelník  $T$  lze rozdělit na čtveřici *vzájemně shodných trojúhelníků*  $T_1, \dots, T_4$ , které vzniknou sestrojením středních příček v původním trojúhelníku (viz obrázek 1.18). Délka každé střední



Obrázek 1.18: Trojúhelník  $T$  rozdělený na trojúhelníky  $T_1, \dots, T_4$ .

příčky odpovídá polovině délky strany, s níž je rovnoběžná, tedy obsah každého z nich je *čtvrtina obsahu původního* trojúhelníku  $T$ . Pokud obecně trojúhelník  $T$  rozdělíme<sup>7</sup> takto na obecně  $N(\varepsilon) = 4^n$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$  shodných částí, pak měřítko každé z nich bude  $\varepsilon = (1/2)^n$ . Fraktální dimenze tak vychází:

$$d_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \ln 2}{n \ln 2} = 2.$$

Pro jednoduché útvary vychází dimenze tak, jak bychom mohli očekávat. K zajímavějším výsledkům však dospějeme u fraktálů, na něž se blíže podíváme v následující podsekcí 1.3.2.

<sup>6</sup>Obdobnou úvahou dojmeme k měřítku  $\varepsilon = n^{-1/d}$ .

<sup>7</sup>Výpočet bychom mohli i zde provést ve stejném duchu jako u úsečky, čtverce nebo krychle. Počet částí, na něž rozdělíme trojúhelník, označíme  $N(\varepsilon) = n$ , přičemž měřítko pak bude  $\varepsilon = n^{-1/2}$ .

### 1.3.2 Dimenze fraktálů

Co kdybychom však zkusili podobnou myšlenku aplikovat i na *fraktální objekty*? Zkusme to. Pro připomenutí jednotlivých křivek a výsledků k nim si dovoluji čtenáře opětovně odkázat na sekci 1.2, kde jsou podrobněji rozebrány.

- **Kochova křivka.** V každé iteraci nahrazujeme každou úsečku čtyřmi novými. Kompletní Kochova křivka tak obsahuje právě *čtyři* kopie sebe sama zmenšených na třetinu, tj. v  $n$ -té iteraci je  $N(\varepsilon) = 4^n$ , jak jsme již odvodili (viz podsekce 1.2.1).<sup>8</sup> Měřítka nové křivky je tak  $\varepsilon = (1/3)^n$ .

$$d_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618595 \dots \quad (1.8)$$

- **Kochova vložka.** Začínáme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 1, na jehož stranách postupně vznikne Kochova křivka. V  $n$ -té iteraci je obvod Kochovy vložky  $o_n$  roven  $3 \cdot 4^n$ , tj. i  $N(\varepsilon) = 3 \cdot 4^n$ , kde měřítko<sup>9</sup> nově vzniklých úseček je  $\varepsilon = 1/3 \cdot (1/3)^n = (1/3)^{n+1}$ . Není těžké se přesvědčit, že fraktální dimenze vychází stejně, jako u Kochovy křivky:

$$d_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3 \cdot 4^n}{\ln 3^{n+1}} = \frac{\overbrace{\ln 4^n}^{\rightarrow 1} \left(1 + \frac{\ln 3}{\ln 4^n}\right)}{\underbrace{\ln 3^n}_{\rightarrow 1} \left(1 + \frac{\ln 3}{\ln 3^n}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \quad (1.9)$$

- **Sierpińského trojúhelník.** V každé iteraci vynecháme prostřední trojúhelník, čímž vznikne *trojice* nových trojúhelníků s *polovičním* měřítkem. Tzn.  $N(\varepsilon) = 3^n$  pro  $\varepsilon = (1/2)^n$ , a tedy

$$d_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5849625 \dots \quad (1.10)$$

- **Cantorovo diskontinuum.** Vždy vyjme prostřední třetinu úsečky, čímž obdržíme *dvojici* úseček *třetinové* délky, tj.  $N(\varepsilon) = 2^n$  pro  $\varepsilon = (1/3)^n$ . Fraktální dimenze tak vychází

$$d_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309297 \dots \quad (1.11)$$

Udělejme si nyní menší souhrn a porovnání dosavadně získaných výsledků (viz tabulka 1.2). Můžeme si všimnout, že zatímco u “klasických” objektů vychází fraktální dimenze *celočíslná*, u fraktálů vychází *neceločíselně*, ba dokonce i iracionálně.

<sup>8</sup>Lze však zvolit i jiné dělení. Např. lze na Kochovu křivku nahlížet, že obsahuje *16 kopií* sebe sama zmenšených na *devítinu*.

<sup>9</sup>Měřítka se ve srovnání s Kochovou křivkou liší v mocnině, neboť délku nových úseků porovnáváme s obvodem celého trojúhelníku, nikoliv pouze délkou jedné jeho strany. Nicméně ve výpočtu bych se mohli omezit i jen na jednu ze stran, výpočet by byl tak zcela identický, jako u Kochovy křivky.

Útvar	$\varepsilon$	$N(\varepsilon)$	$d_k$
Úsečka	$n^{-1}$	$n$	1
Čtverec	$n^{-1/2}$	$n$	2
Krychle	$n^{-1/3}$	$n$	3
Teserakt	$n^{-1/4}$	$n$	4
$d$ -rozměrná krychle	$n^{-1/d}$	$n$	$d$
Obecný trojúhelník	$(1/2)^n$	$4^n$	2
Kochova křivka	$(1/3)^n$	$4^n$	1,2618595...
Kochova vložka	$(1/3)^{n+1}$	$3 \cdot 4^n$	1,2618595...
Sierpiňského trojúhelník	$(1/2)^n$	$3^n$	1,5849625...
Cantorovo diskontinuum	$(1/3)^n$	$2^n$	0,6309297...

Tabulka 1.2: Porovnání fraktálních dimenzí  $d_k$  různých objektů.

### 1.3.3 Topologická dimenze

Výsledky z předešlé části 1.3.2 se můžou zdát poněkud překvapující. Jak je vůbec možné, že dimenze nemusí vycházet nutně celočíselná? Ač se to možná zdá jako nesmyslný výsledek, je třeba si uvědomit, jak vlastně koncept dimenze chápeme. Na jednu stranu na ni lze nahlížet jako na mocninu “s níž se zvyšuje” obsah/objem tělesa. Naopak čtenář znalý lineární algebry si možná vzpomene, že v této matematické disciplíně se na dimenzi nahlíží jako na *mohutnost libovolné báze daného vektorového prostoru*, která naopak vychází vždy pouze celočíselně, avšak nelze s ní dobře pracovat právě např. u objektů, jako jsou fraktály. (TODO: Ověřit.)

Tím se dostáváme ještě k jednomu typu dimenzí, a to tzv. *topologické dimenze*. Ty totiž daleko více odpovídají našemu intuitivnímu chápání tohoto pojmu, neboť se vždy jedná o celé číslo, jak ho známe ze školní geometrie. Existuje více topologických dimenzí<sup>10</sup>, které si, co do definice, obecně nejsou ekvivalentní, ačkoliv ve většině případů splývají. My se zde pro ilustraci podíváme na tzv. *Lebesgueovu pokrývací dimenzi* (dále jen již “topologickou dimenzi”) pojmenovanou po francouzském matematikovi HENRI LEBESGUEVI (1875–1941). Myšlenka definice je založena na pokrývání objektu (formálně vzato *množiny bodů*) tzv. *otevřenými množinami*.<sup>11</sup> Formální definici si zde v rámci zachování jednoduchosti odpustíme, avšak pro hlubší matematický základ si dovoluji čtenáře odkázat např. na knihu .

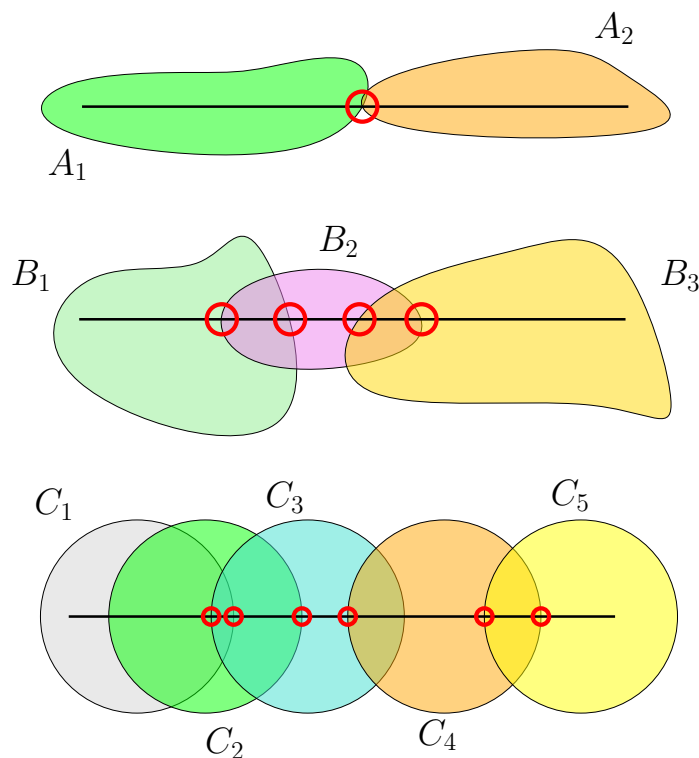
Obecně množina  $X$  má topologickou dimenzi  $n$ , pokud danou množinu nelze pokrýt<sup>12</sup> lib. otevřenými množinami, tak, že pro každé podpokrytí  $\mathcal{U}$  (TODO: Jak přeložit slovo „refinement“?.) tohoto pokrytí platí, že každý jeho bod  $x$  je obsažen v průniku nejvýše  $n + 1$  množin  $\mathcal{U}$ .

Tuto ideu si zkusíme přiblížit na příkladu topologické dimenze úsečky (viz obrázek 1.19). Pro libovolné pokrytí lze ukázat, že každý bod je obsažen v průniku maximálně *dvou množin*, tedy topologická dimenze úsečky je 1. Podobně např.

<sup>10</sup> Jiným příkladem takové dimenze je *induktivní dimenze*.

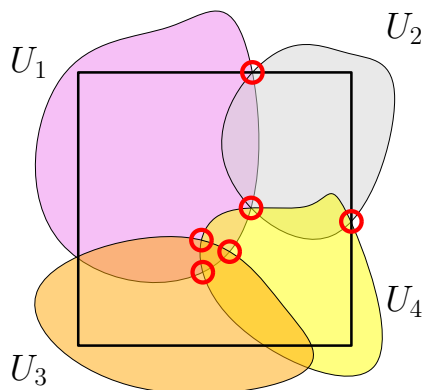
<sup>11</sup> Otevřená množina je zobecnění pojmu otevřeného intervalu reálných čísel. Neformálně řečeno je to taková množina  $X$ , kde pro každý její bod  $x \in X$  patří do této množiny i nějaké  $\varepsilon$ -okolí tohoto bodu (patří do ní i body, které jsou “dostatečně blízko”).

<sup>12</sup> Formálněji to znamená, že  $A_1, \dots, A_n$  jsou otevřené množiny, takové, že platí  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ .



Obrázek 1.19: Různé možnosti (pod)pokrytí úsečky.

pro čtverec lze dojít k závěru, že pro každé podpokrytí nějakého pokrytí je každý jeho bod obsažen v průniku maximálně *tří množin*, tedy jeho topologická dimenze je 2, jak bychom očekávali (viz obrázek 1.20). Jak jsme se již přesvědčili v příkla-



Obrázek 1.20: Možné (pod)pokrytí čtverce.

dech 1.3.1, 1.3.2 a 1.3.3, pro “standardní” útvary je fraktální dimenze celočíselná (ač jsou i další, které jsme neuvedli), zatímco v podsekcí 1.3.2 jsme zjistili, že u fraktální dimenze fraktálů tomu tak již nutně být nemusí. Přitom však topologická dimenze fraktálních útvarů je (a dokonce musí být) celočíselná (viz tabulka 1.3). Fraktální dimenze tak oproti té topologické daleko lépe zachycuje informaci o detailní geometrii daných objektů.

Útvar	$\dim_B$	$\dim_L$
Úsečka	1	1
Čtverec	2	2
Krychle	3	3
Teserakt	4	4
$d$ -rozměrná krychle	$d$	$d$
Kochova křivka	1,2618595...	1
Kochova vložka	1,2618595...	1
Sierpiňského trojúhelník	1,5849625...	1
Cantorovo diskontinuum	0,6309297...	0

Tabulka 1.3: Porovnání fraktální a topologické dimenze útvarů.

# Kapitola 2

## Teorie míry

(TODO: Doplnit kapitolu..)



# Kapitola 3

## Klasifikace fraktálů

(TODO: Doplnit text ke kapitole..)

### 3.1 L-systémy

(TODO: Doplnit sekci..)

### 3.2 Systém iterovaných funkcí

(TODO: Doplnit sekci..)

### 3.3 Time Escape Algorithms

(TODO: Doplnit sekci..)

# Kapitola 4

## Generování fraktálů

(TODO: Doplnit kapitolu..)

# Kapitola 5

## Fraktály v praxi

(TODO: Doplnit kapitolu..)

# Seznam použité literatury

- [1] B. Benoît Mandelbrot. *Fractal geometry of nature*. Freeman and company, New York, vyd. 3 edition, 1983. ISBN 978-0716711865.
- [2] Šárka Voráčová, Lucia Csachová, Vladimíra Hájková, Jana Hromadová, Vlasta Moravcová, Jaroslav Richter, Petra Surynková, Alena Šarounová, Jakub Šaroun, Jiří Šrubař, Zuzana Štauberová, and Vladimír Tichý. *Atlas geometrie*. Academia, Praha, vydání 2 edition, 2022. ISBN 978-80-200-3336-9.
- [3] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, and Dietmar Saupe. *Chaos and Fractals*. Springer, New York, 2nd edition edition, 2004. ISBN 978-1-4684-9396-2.
- [4] Ivan Zelinka, František Včelař, and Marek Čandík. *Fraktální geometrie: principy a aplikace*. BEN - technická literatura, Praha, vydání 1 edition, 2006. ISBN 80-7300-191-8.

# Seznam obrázků

1.1	Příklad mapy pobřeží se spojnicí bodů $A$ a $B$ . . . . .	4
1.2	Odhad délky pobřeží, kde $n = 10$ při zvoleném $\varepsilon$ . . . . .	4
1.3	Část pobřeží od bodu $A$ v menším měřítku. . . . .	5
1.5	Princip Archimédovy metody. . . . .	6
1.6	Aproximace obvodu kružnice pomocí pravidelného šestnáctiúhelníku. . . . .	6
1.7	Prvních pět iterací Kochovy křivky. . . . .	7
1.8	První iterace Kochovy křivky “uvnitř” druhé v menším měřítku. . . . .	8
1.9	Nultá a první iterace Kochovy vločky. . . . .	9
1.10	Čtvrtá iterace Kochovy vločky. . . . .	10
1.11	Rozdělení první iterace Kochovy vločky. . . . .	10
1.12	Nově vzniklé trojúhelníky v druhé iteraci. . . . .	11
1.13	Nultá až čtvrtá iterace Cantorova diskontinua. . . . .	12
1.14	Znázornění délek vyjmutých úseků. . . . .	12
1.15	Soběpodobnost čtverce. . . . .	13
1.16	Úsečka rozdělená na šest stejných částí. . . . .	13
1.17	Krychle rozdělená na 27 stejných částí. . . . .	14
1.18	Trojúhelník $T$ rozdělený na trojúhelníky $T_1, \dots, T_4$ . . . . .	15
1.19	Různé možnosti (pod)pokrytí úsečky. . . . .	18
1.20	Možné (pod)pokrytí čtverce. . . . .	18