# Analytická geometrie a SVG

Adam Papula, David Weber

SPŠE Ječná, MFF UK

5. listopadu 2023

# Obsah

# Lineární zobrazení

# Lineární zobrazení

## Definice homomorfismu

Jsou-li $U, V$ vektorové prostory nad tělesem $T$, pak zobrazení $f : U \to V$ je *lineární (homomorfismus)*, pokud platí

1. $\forall x, y \in U : \ f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall x \in V, \forall \alpha \in T : \ f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$.

# Lineární zobrazení

## Definice homomorfismu

Jsou-li $U, V$ vektorové prostory nad tělesem $T$, pak zobrazení $f : U \to V$ je *lineární (homomorfismus)*, pokud platí

1. $\forall x, y \in U : \ f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall x \in V, \forall \alpha \in T : \ f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$.

Nás bude zajímat především prostor $\mathbb{R}^2$, neboť budeme pracovat s rovinou $\implies U = V = \mathbb{R}^2$.

# Lineární zobrazení

## Vyjádření homomorfismu

Každý homomorfismus $f : U \to V$ lze vyjádřit ve tvaru $f(x) = Ax$, kde

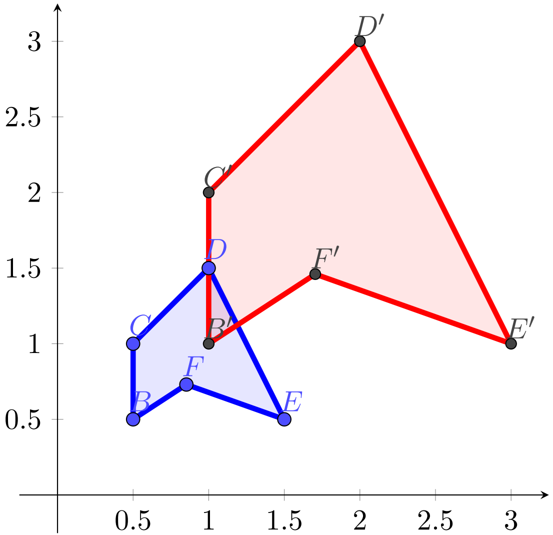
$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ f(v_1) & \cdots & f(v_n) \\ | & & | \end{pmatrix},$$

přičemž $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je báze prostoru $U$, tj. $\operatorname{span} U$.

# Příklady

Homomorfismus s maticí

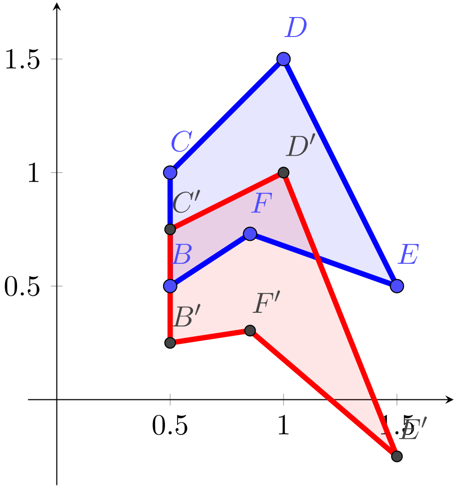
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



# Příklady

Homomorfismus s maticí

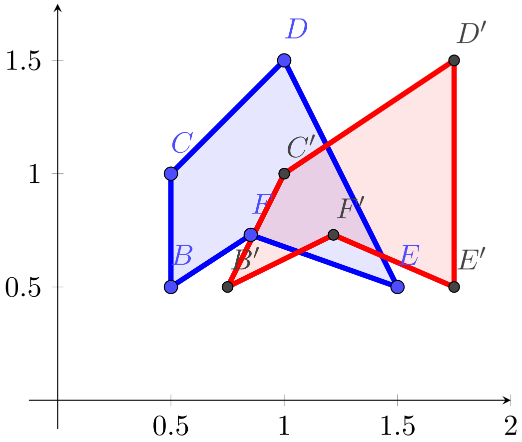
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$



# Příklady

Homomorfismus s maticí

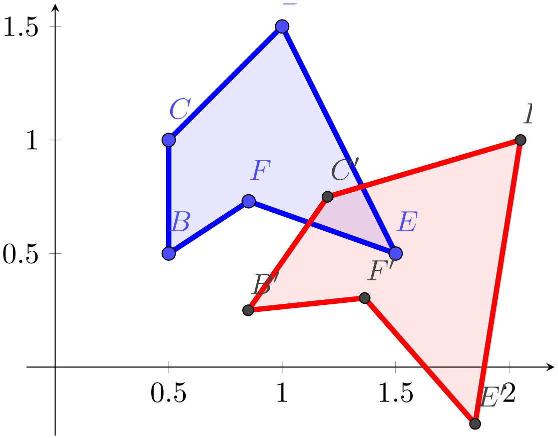
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



# Příklady

Homomorfismus s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}7 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$



# Afinní zobrazení

## Defininice afinního zobrazení

Buď $g : U \to V$ homomorfismus a $b \in V$ vektor. Pak *afinní zobrazení* $f : U \to V$ má tvar $f(x) = g(x) + b$, kde $x \in U$.

# Afinní zobrazení

## Defininice afinního zobrazení

Buď $g : U \to V$ homomorfismus a $b \in V$ vektor. Pak *afinní zobrazení* $f : U \to V$ má tvar $f(x) = g(x) + b$, kde $x \in U$.

Afinní zobrazení $f$ lze tedy zapsat ve tvaru

$$f(x) = Ax + b,$$

kde $A$ je matice homomorfismu $g$.

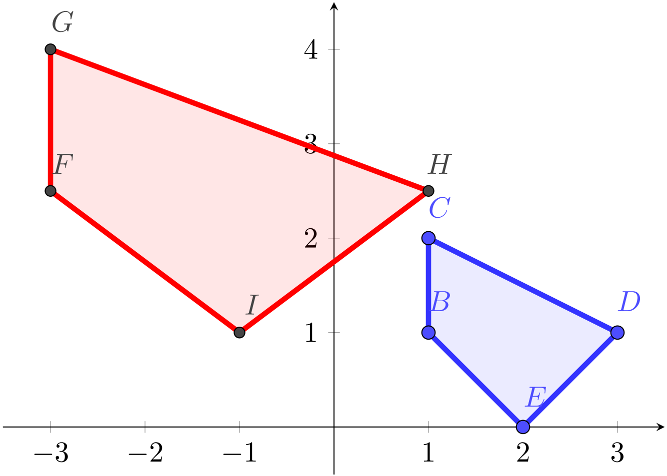
# Příklad

Afinní zobrazení dané maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

a vektorem

$$b = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$



# Homogenní souřadnice

# Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.

# Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.
- Obecný vektor $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ zapíšeme jako $(u_1, u_2, 1)^\top$

# Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.
- Obecný vektor $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ zapíšeme jako $(u_1, u_2, 1)^\top$
- Díky tomu můžeme posunutí o vektor $b$ v daném afinním zobrazení $f$ zapsat jako *pouhé* násobení matice s vektorem:

# Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.
- Obecný vektor $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ zapíšeme jako $(u_1, u_2, 1)^\top$
- Díky tomu můžeme posunutí o vektor $b$ v daném afinním zobrazení $f$ zapsat jako *pouhé* násobení matice s vektorem:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.
- Obecný vektor $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ zapíšeme jako $(u_1, u_2, 1)^\top$
- Díky tomu můžeme posunutí o vektor $b$ v daném afinním zobrazení $f$ zapsat jako *pouhé* násobení matice s vektorem:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Afinní matice}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.
- Obecný vektor $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ zapíšeme jako $(u_1, u_2, 1)^\top$
- Díky tomu můžeme posunutí o vektor $b$ v daném afinním zobrazení $f$ zapsat jako *pouhé* násobení matice s vektorem:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Afinní matice}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- To odpovídá původnímu zápisu

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = Ax + b$$

# Translace

- Afinní matice translace $T$ o vektor $t = (t_x, t_y)^\top$

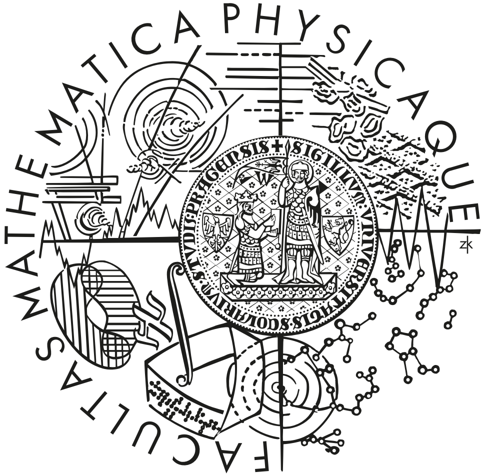
$$\mathcal{T}_b(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Odpovídá zobrazení $T(x) = x + b$.

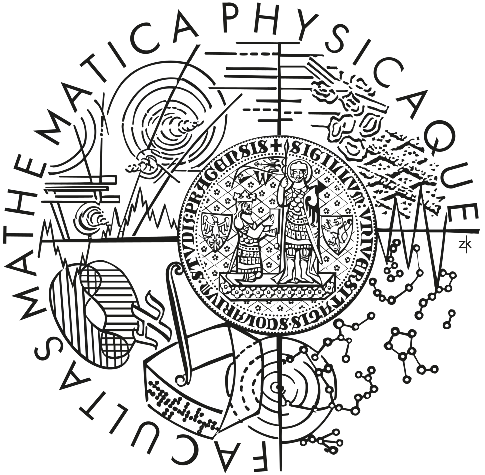
# Formát SVG

- SVG – Scalable Vector Graphics.
- Celý obrázek složen ze základních útvarů:
  - body, přímky, křivky, mnohoúhelníky.
- Lze neomezeně škálovat **bez ztráty kvality**.
- Je možné pracovat s každým objektem zvlášť.
- Snadná generace pomocí programu.
- Nízká paměťová náročnost.

# Formát SVG

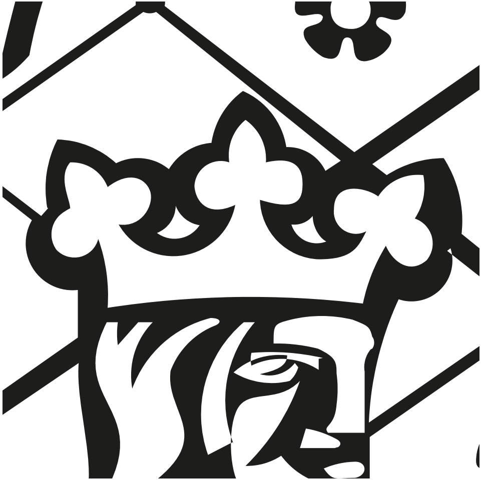



Obrázek: Vektorové logo

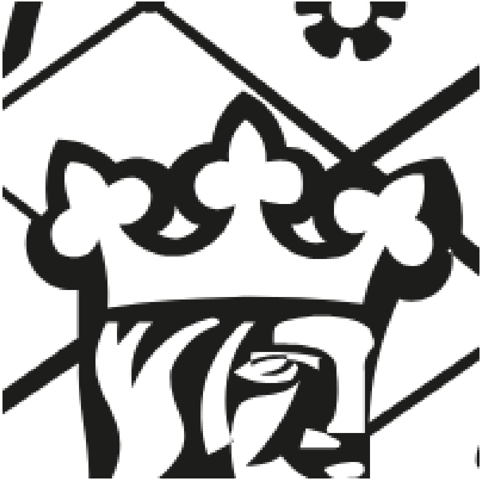



Obrázek: Rastrové logo

# Formát SVG



Obrázek: Vektorové logo



Obrázek: Rastrové logo

# Syntaxe

- Jde o textový formát, přípona `.svg`.
- Základní struktura může vypadat takto:

```
<svg width="100" height="100">
    <!--Obsah-->
</svg>
```

# Syntaxe

## Základní objekty

- Obdélník:

```
<rect x="10" y="20" width="50" height="20"/>
```

- Kruh:

```
<circle cx="20" cy="20" r="10"/>
```

- Elipsa:

```
<ellipse cx="50" cy="50" rx="40" ry="20"/>
```

- Čára:

```
<line x1="0" y1="0" x2="20" y2="30"/>
```

# Syntaxe

## Základní objekty

- Polygon:

```
<polygon points="10,10 10,20 5,20"/>
```

- Lomená čára:

```
<polyline points="20,20 60,40 80,100 100,10, 10,100"
   style="fill:none"/>
```

# Transformace

## Translace

- Všechny transformace se dělají pomocí atributu `transform`.
- Lze využít vestavěné příkazy nebo matici transformace.
- Translace pomocí hodnoty atributu `translate(tx,[ty])`.
- V případě matice pak hodnota atributu je `matrix(1,0,0,1,tx,ty)`,
    - hodnoty odpovídají prvním dvěma řádkům transformační matice, zapsané po sloupcích.

```
<rect x="10" y="20" width="50" height="20"
    transform="translate(10,5)"/>
<rect x="10" y="20" width="50" height="20"
    transform="matrix(1,0,0,1,10,5)"/>
```

# Transformace

## Škálování

- Škálování pomocí hodnoty atributu `scale(sx,[sy])`.
- V případě matice pak hodnota atributu je `matrix(sy,0,0,sy,0,0)`,
  - hodnoty odpovídají prvním dvěma řádkům transformační matice, zapsané po sloupcích.

```
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="scale(2)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="scale(10,5)"/>

<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="matrix(10,0,0,5,0,0)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="matrix(2,0,0,2,0,0)"/>
```

# Transformace

## Otočení

- Zkosení pomocí hodnoty atributu `rotate(angle,[cx,cy])`.
- V případě matice pak hodnota atributu je `matrix(cos(`$\alpha$`),sin(`$\alpha$`),-sin(`$\alpha$`),cos(`$\alpha$`),0,0)`,
  - hodnoty odpovídají prvním dvěma řádkům transformační matice, zapsané po sloupcích.

```
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="rotate(-45)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="rotate(-45,5,5)"/>

<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="matrix(0.7071, -0.7071, 0.7071, 0.7071, 0, 0)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="matrix(0.7071, -0.7071, 0.7071, 0.7071, 0, 0)"/>
```

# Transformace

## Zkosení

- Zkosení pomocí hodnoty atributu `skewX(angle)` nebo `skewY(angle)`.
- V případě matice je hodnota atributu pro osu $x$ `matrix(1,0,tan(`$\alpha$`),1,0,0)` a pro osu $y$ `matrix(1,tan(`$\alpha$`),0,1,0,0)`,
  - hodnoty odpovídají prvním dvěma řádkům transformační matice, zapsané po sloupcích.

```
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
     transform="skewX(45)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
     transform="skewY(45)"/>

<rect x="0" y="10" width="10" height="10" transform="matrix
    (1,0,1,1,0,0)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10" transform="matrix
    (1,1,0,1,0,0)"/>
```