Analytická geometrie a SVG

Adam Papula, David Weber

SPŠE Ječná, MFF UK

6. listopadu 2023

Obsah

Lineární zobrazení

Lineární zobrazení

Definice homomorfismu

Jsou-li U, V vektorové prostory nad tělesem T, pak zobrazení $f : U \to V$ je *lineární (homomorfismus)*, pokud platí

1. $\forall x, y \in U : \ f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall x \in V, \forall \alpha \in T : \ f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$.

Lineární zobrazení

Definice homomorfismu

Jsou-li U, V vektorové prostory nad tělesem T, pak zobrazení $f : U \to V$ je *lineární (homomorfismus)*, pokud platí

1. $\forall x, y \in U : \ f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall x \in V, \forall \alpha \in T : \ f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$.

Nás bude zajímat především prostor $\mathbb{R}^2$, nebot' budeme pracovat s rovinou $\implies U = V = \mathbb{R}^2$.

Lineární zobrazení

Vyjádření homomorfismu

Každý homomorfismus $f : U \to V$ lze vyjádřit ve tvaru $f(x) = Ax$, kde

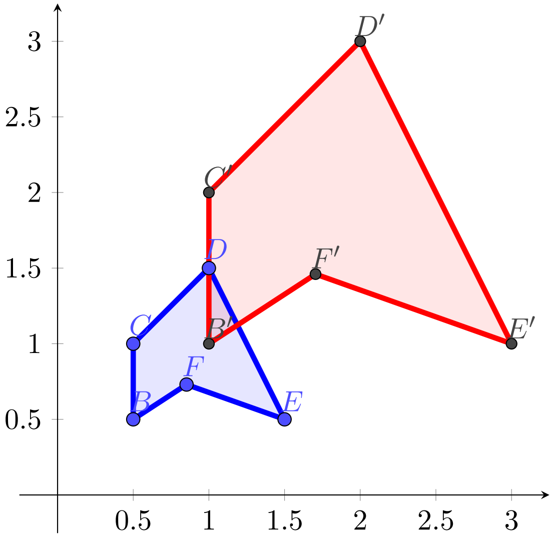
$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ f(v_1) & \cdots & f(v_n) \\ | & & | \end{pmatrix},$$

přičemž $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je báze prostoru U, tj. $\operatorname{span} U$.

Příklady

Homomorfismus s maticí

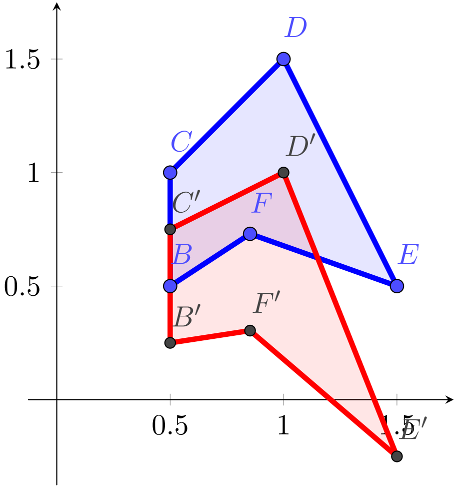
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



Příklady

Homomorfismus s maticí

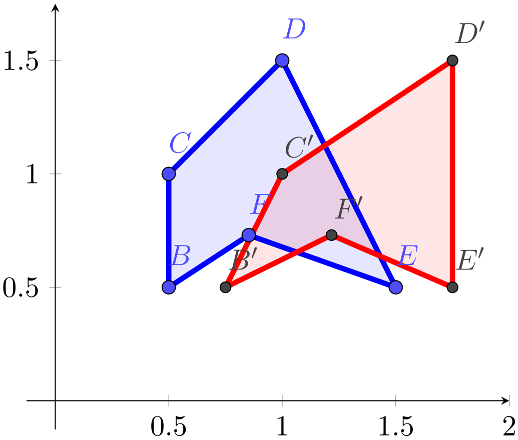
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$



Příklady

Homomorfismus s maticí

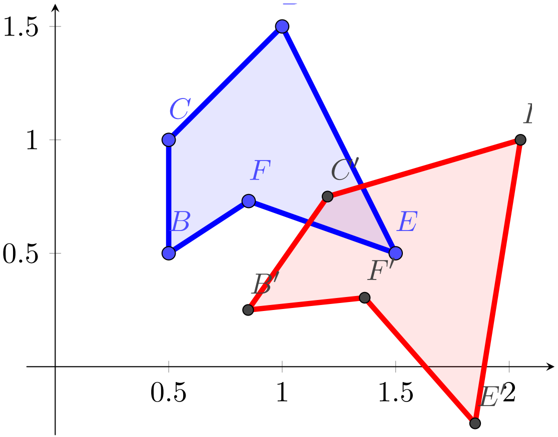
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Příklady

Homomorfismus s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}7 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$



Afinní zobrazení

Defininice afinního zobrazení

Buď $g : U \to V$ homomorfismus a $b \in V$ vektor. Pak *afinní zobrazení* $f : U \to V$ má tvar $f(x) = g(x) + b$, kde $x \in U$.

Afinní zobrazení

Defininice afinního zobrazení

Buď $g : U \to V$ homomorfismus a $b \in V$ vektor. Pak *afinní zobrazení* $f : U \to V$ má tvar $f(x) = g(x) + b$, kde $x \in U$.

Afinní zobrazení f lze tedy zapsat ve tvaru

$$f(x) = Ax + b,$$

kde A je matice homomorfismu g.

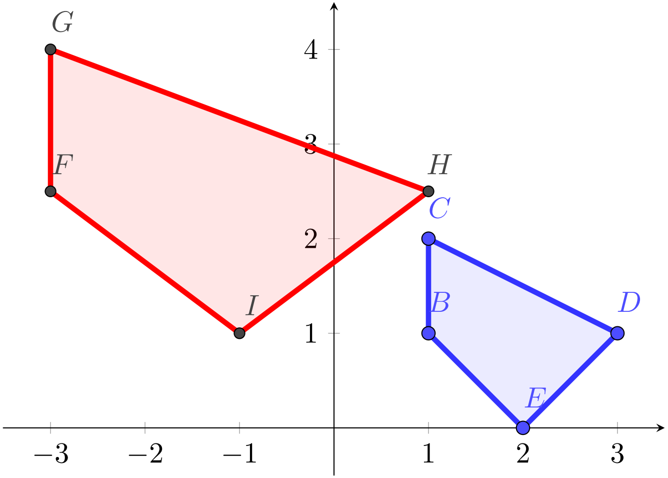
Příklad afinního zobrazení

Afinní zobrazení dané maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

a vektorem

$$b = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Homogenní souřadnice

Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\Longrightarrow$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.

Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.
- Obecný vektor $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ zapíšeme jako $(u_1, u_2, 1)^\top$

Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.
- Obecný vektor $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ zapíšeme jako $(u_1, u_2, 1)^\top$
- Díky tomu můžeme posunutí o vektor b v daném afinním zobrazení f zapsat jako *pouhé* násobení matice s vektorem:

Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.
- Obecný vektor $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ zapíšeme jako $(u_1, u_2, 1)^\top$
- Díky tomu můžeme posunutí o vektor b v daném afinním zobrazení f zapsat jako *pouhé* násobení matice s vektorem:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.
- Obecný vektor $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ zapíšeme jako $(u_1, u_2, 1)^\top$
- Díky tomu můžeme posunutí o vektor b v daném afinním zobrazení f zapsat jako *pouhé* násobení matice s vektorem:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Afinní matice}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Homogenní souřadnice

- Lze využít tzv. **homogenních souřadnic** $\implies$ rozšíříme prostor o jednu dimenzi.
- Obecný vektor $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ zapíšeme jako $(u_1, u_2, 1)^\top$
- Díky tomu můžeme posunutí o vektor b v daném afinním zobrazení f zapsat jako *pouhé* násobení matice s vektorem:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Afinní matice}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- To odpovídá původnímu zápisu

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = Ax + b$$

Translace

- Afinní matice translace t o vektor $t = (b_1, b_2)^\top$

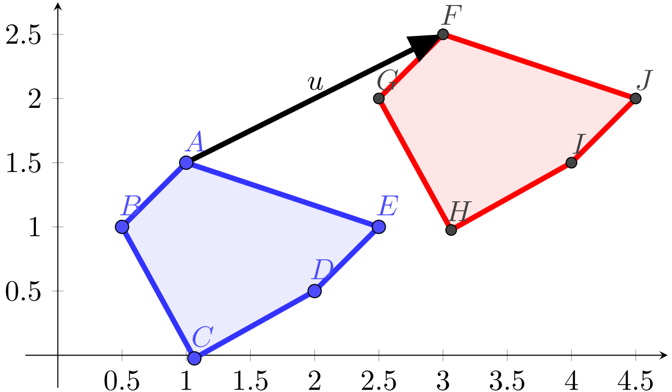
$$\mathcal{T}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Odpovídá zobrazení $t(x) = x + b$.

Příklad translace

Posunutí o vektor
$u = (2,1)^\top$

$$\mathcal{T}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Rotace

- Afinní matice rotace o pevný úhel φ **okolo počátku**:

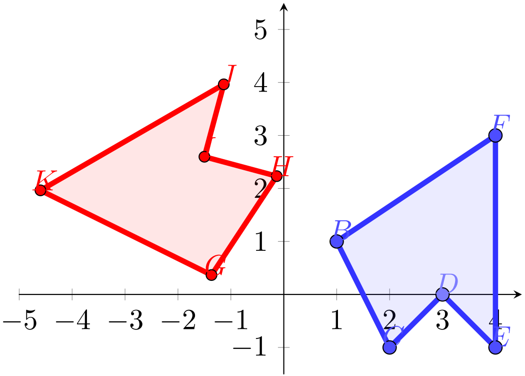
$$\mathcal{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Odpovídá zobrazení $r(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} x$

Příklad rotace

Rotace o úhel $\alpha = 2\pi/3$.

$$\mathcal{R}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 & 0 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Horizontální zkosení

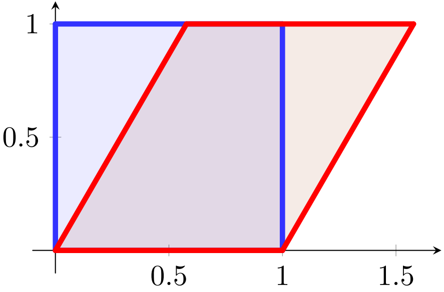
Afinní matice **horizontálního** zkosení o úhel φ:

$$\mathcal{SK}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg}\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad horizontálního zkosení

Horizontální zkosení o úhel $\alpha = \pi/6$.

$$\mathcal{SK}\,(\pi/6) = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg}\pi/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Vertikální zkosení

Pro **vertikální** zkosení bude afinní matice vypadat analogicky:

$$\mathcal{SK}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{tg}\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skládání afinních zobrazení

Skládání afinních zobrazení

Matice složeného zobrazení

Jsou-li $f : U \to V$ a $g : V \to W$ afinní zobrazení, kde matice přislušných homomorfismů jsou po řadě A, B, pak matice homomorfismu složeného afinního zobrazení $f \circ g$ je AB.

Skládání afinních zobrazení

Matice složeného zobrazení

Jsou-li $f : U \to V$ a $g : V \to W$ afinní zobrazení, kde matice přislušných homomorfismů jsou po řadě A, B, pak matice homomorfismu složeného afinního zobrazení $f \circ g$ je AB.

O tom se lze přesvědčit:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = A\overbrace{(Bx + v)}^{g(x)} + u = (AB)x + (Av + u).$$

Skládání afinních zobrazení

Matice složeného zobrazení

Jsou-li $f : U \to V$ a $g : V \to W$ afinní zobrazení, kde matice přislušných homomorfismů jsou po řadě A, B, pak matice homomorfismu složeného afinního zobrazení $f \circ g$ je AB.

O tom se lze přesvědčit:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = A\,\overbrace{(Bx + v)}^{g(x)} + u = (AB)x + (Av + u).$$

Pro **afinní** matice platí totéž $\implies$ maticí složeného afinního zobrazení je **součin afinních matic.**

Příklad složeného zobrazení

- Mějme afinní zobrazení f, g po řadě s afinními maticemi $\mathcal{T}((3,2)^\top)$, $\mathcal{R}(\pi/2)$ $\Longrightarrow$ **translace** a **rotace.**
- Matice zobrazení $f \circ g$:

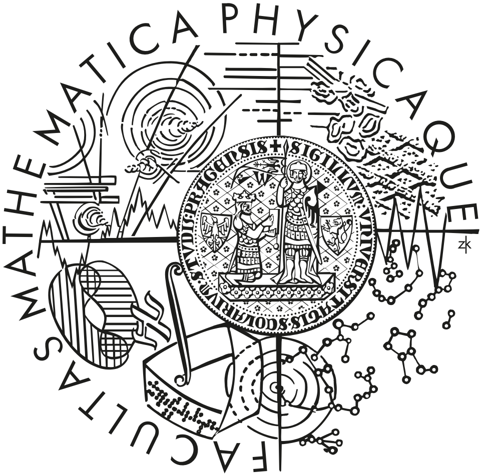
$$\mathcal{T}((3,2)^\top) \cdot \mathcal{R}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) & 0 \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

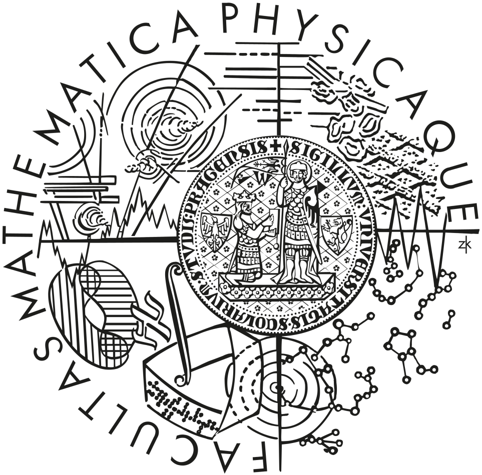
Formát SVG

- SVG – Scalable Vector Graphics.
- Celý obrázek složen ze základních útvarů:
  - body, přímky, křivky, mnohoúhelníky.
- Lze neomezeně škálovat **bez ztráty kvality**.
- Je možné pracovat s každým objektem zvlášť.
- Snadná generace pomocí programu.
- Nízká paměťová náročnost.

Formát SVG

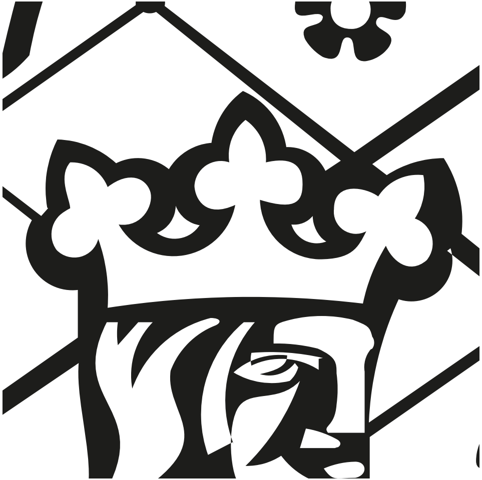


Obrázek: Vektorové logo

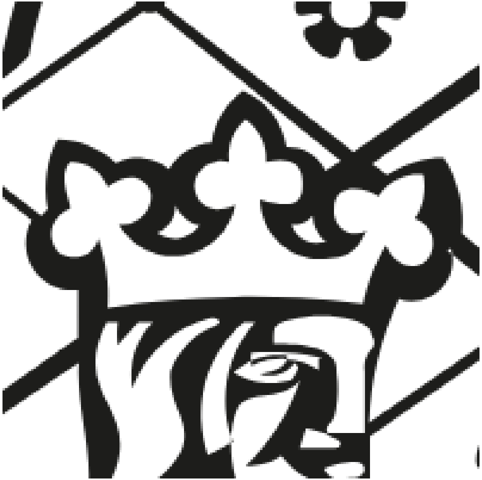


Obrázek: Rastrové logo

Formát SVG



Obrázek: Vektorové logo



Obrázek: Rastrové logo

Syntaxe

- Jde o textový formát, přípona `.svg`.
- Základní struktura může vypadat takto:

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<svg xmlns="http://www.w3.org/2000/svg" version="1.1"
   width="100" height="100">
     ...
</svg>
```

Syntaxe

Základní objekty

- Obdélník:

```
<rect x="10" y="20" width="50" height="20"/>
```

- Kruh:

```
<circle cx="20" cy="20" r="10"/>
```

- Elipsa:

```
<ellipse cx="50" cy="50" rx="40" ry="20"/>
```

- Čára:

```
<line x1="0" y1="0" x2="20" y2="30"/>
```

Syntaxe

Základní objekty

- Polygon:

```
<polygon points="10,10 10,20 5,20"/>
```

- Lomená čára:

```
<polyline points="20,20 60,40 80,100 100,10, 10,100"
   style="fill:none"/>
```

Transformace

Translace

- Všechny transformace se dělají pomocí atributu `transform`.
- Lze využít vestavěné příkazy nebo matici transformace.
- Translace pomocí hodnoty atributu `translate(tx,[ty])`.
- V případě matice pak hodnota atributu je `matrix(1,0,0,1,tx,ty)`,
  - hodnoty odpovídají prvním dvěma řádkům transformační matice, zapsané po sloupcích.

```
<rect x="10" y="20" width="50" height="20"
    transform="translate(10,5)"/>
<rect x="10" y="20" width="50" height="20"
    transform="matrix(1,0,0,1,10,5)"/>
```

Transformace

Škálování

- Škálování pomocí hodnoty atributu `scale(sx,[sy])`.
- V případě matice pak hodnota atributu je `matrix(sy,0,0,sy,0,0)`,
    - hodnoty odpovídají prvním dvěma řádkům transformační matice, zapsané po sloupcích.

```
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="scale(2)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="scale(10,5)"/>

<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="matrix(10,0,0,5,0,0)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="matrix(2,0,0,2,0,0)"/>
```

Transformace

Otočení

- Zkosení pomocí hodnoty atributu `rotate(angle,[cx,cy])`.
- V případě matice pak hodnota atributu je `matrix(cos(`α`),sin(`α`),-sin(`α`),cos(`α`),0,0)`,
  - hodnoty odpovídají prvním dvěma řádkům transformační matice, zapsané po sloupcích.

```
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="rotate(-45)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="rotate(-45,5,5)"/>

<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="matrix(0.7071,-0.7071,0.7071,0.7071,0,0)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="matrix(0.7071,-0.7071,0.7071,0.7071,0,0)"/>
```

Transformace

Zkosení

- Zkosení pomocí hodnoty atributu `skewX(angle)` nebo `skewY(angle)`.
- V případě matice je hodnota atributu pro osu x `matrix(1,0,tan(`α`),1,0,0)` a pro osu y `matrix(1,tan(`α`),0,1,0,0)`,
  - hodnoty odpovídají prvním dvěma řádkům transformační matice, zapsané po sloupcích.

```
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="skewX(45)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="skewY(45)"/>

<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="matrix(1,0,1,1,0,0)"/>
<rect x="0" y="10" width="10" height="10"
    transform="matrix(1,1,0,1,0,0)"/>
```