

PROPUESTA DEL PROYECTO

# Propuesta del Proyecto: Análisis del Movimiento del Gömböc

David García<sup>a</sup>

Paula Uribe<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Universidad Industria de Santander*

29 de marzo de 2025

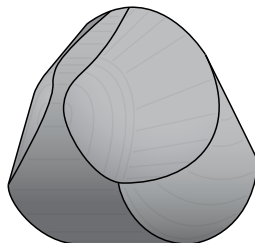
## Abstract

Este proyecto se centra en el análisis del comportamiento dinámico y la estabilidad del Gömböc, un objeto geométrico singular que posee un único punto de equilibrio estable y otro inestable. La investigación aborda cómo las propiedades geométricas y la distribución de masa influyen en su comportamiento, empleando tanto modelos matemáticos como simulaciones computacionales para reproducir y predecir su movimiento. Además, se validarán los modelos teóricos a través de experimentos con modelos físicos impresos en 3D, lo que permitirá ajustar y afinar la precisión del simulador basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange.

*Palabras clave:* “Gömböc”, “dinámica”, “simulación computacional”, “modelo físico”, “estabilidad”,

**Figure 1**

Structure of the characteristic gömböc by Domokos and Várkonyi.“ por “Vierkantswortel2”, 2013, alojada en Wikipedia



### **Pregunta de investigación**

¿Cómo influyen las propiedades geométricas y la distribución de masa en la estabilidad del Gömböc, y de qué manera pueden ser modeladas y validadas mediante simulaciones computacionales y experimentos con modelos físicos?

### **Introducción**

El Gömböc es un objeto de gran interés en el ámbito de la física y la matemática debido a su inusual propiedad de contar con un único punto de equilibrio estable y uno inestable, independientemente de la orientación en la que se encuentre. Este comportamiento lo convierte en un caso ideal para estudiar la influencia de la geometría y la distribución de masa en la estabilidad de cuerpos rígidos. La presente propuesta tiene como objetivo principal caracterizar estos efectos a través de un enfoque multidisciplinario que combine el análisis teórico, la simulación computacional y la experimentación práctica. En un primer momento se desarrollará un modelo matemático que permita describir el potencial gravitacional del objeto en coordenadas esféricas, y posteriormente se utilizará este potencial para resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange y simular el movimiento del Gömböc. La validez del modelo se contrastará mediante experimentos con réplicas físicas obtenidas por impresión 3D, ofreciendo así un puente entre la teoría y la observación experimental.

### **Estado del Arte**

El estudio del Gömböc ha captado la atención de diversos investigadores en las últimas décadas, destacándose los trabajos pioneros de Domokos y Várkonyi, quienes demostraron la existencia de cuerpos mono-monostáticos y exploraron sus propiedades de equilibrio. Investigaciones posteriores han ampliado este campo, analizando tanto los aspectos teóricos como las aplicaciones prácticas de estos objetos en contextos tan variados como la estabilidad de estructuras y la robótica. Se han desarrollado modelos matemáticos que describen la distribución de masa y la geometría de estos cuerpos, lo cual ha permitido predecir sus puntos de equilibrio y su respuesta ante perturbaciones externas. Además, los avances en simulación computacional han facilitado la visualización del comportamiento dinámico del Gömböc, mientras que las técnicas de impresión 3D han abierto nuevas posibilidades para la realización de experimentos controlados. La literatura actual destaca la importancia de integrar estos enfoques para obtener modelos más precisos y útiles, estableciendo un marco comparativo entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales obtenidos en entornos reales.

## Objetivos del Proyecto de Investigación

Caracterizar la influencia de la geometría en la dinámica y estabilidad del Gömböc, comparando los resultados obtenidos a partir de modelos matemáticos y simulaciones computacionales con datos experimentales de modelos físicos 3D, con el fin de evaluar y ajustar dichos modelos para una predicción precisa de su comportamiento.

### Objetivos Específicos

- Determinar numéricamente el potencial gravitacional y otros parámetros relevantes del objeto para correlacionarlos con las predicciones del modelo.
- Diseñar un modelo de simulación para visualizar el cambio de las coordenadas generalizadas bajo diferentes condiciones iniciales.
- Validar la precisión del modelo de simulación mediante la comparación de sus predicciones con datos experimentales obtenidos de un modelo físico 3D del Gömböc.

## Metodología

### Formulación Teórica

El archivo del Gömböc será tratado en coordenadas esféricas para poder hallar el potencial en términos de los ángulos de colatitud y azimutal. Luego este potencial (numérico) será utilizado para solucionar las ecuaciones de Euler-Lagrange de manera computacional y finalmente generar un simulador. Para llegar a lo mencionado se propone el siguiente orden de actividades.

#### *Tensor de inercia y ejes principales de rotación*

Inicialmente, se calcula el centro de masa haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$CM = \sum_i^N \frac{V_i}{N}$$

Donde  $N$  es la cantidad de vértices que tiene la figura en su representación 3D y  $V_i$  es la posición de los vértices. Es posible definir el centro de masa igual al centroide debido a que suponemos una densidad constante y como una sumatoria porque tenemos un conjunto finito de puntos que definen el objeto.

Ahora se halla el tensor de inercia con respecto al centro de coordenadas (no necesariamente es el centro de masa), el cual está definido de la siguiente integral en un sistema continuo.

$$I_{ij} = I_{ji} = \int_V \rho \left[ \delta_{ij} \left( \sum_i x_i^2 \right) - x_i x_j \right] dV$$

Donde  $I$  es el tensor de inercia de cada tetraedro,  $\rho$  es la densidad,  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker y  $x_i$  son las coordenadas generalizadas. Para hallar el tensor de inercia del Gömböc se hacen tetraedros, los cuales están dados por los vértices de cada cara triangular del archivo y el centro de coordenadas. Cada tensor de inercia puede sumarse para dar el total.

$$I_{total} = \sum_i^N I_{ij}$$

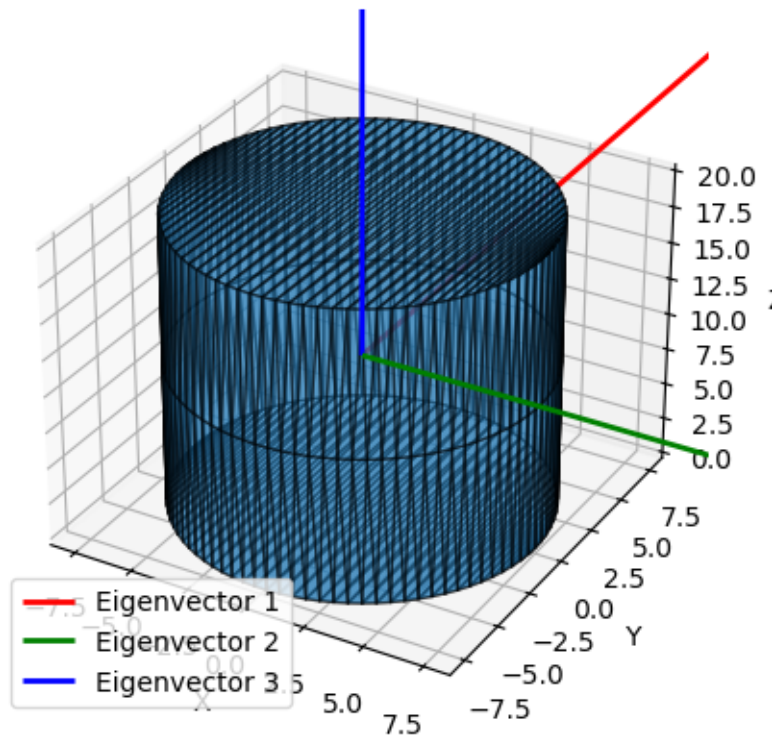
Finalmente, se usa el teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner para llegar al tensor de inercia con respecto al centro de masa.

$$I'_{ij} = I_{ij} + m(|\mathbf{d}|^2\delta_{ij} - d_i d_j)$$

Para hallar los ejes principales de rotación es necesario diagonalizar el tensor de inercia. De manera que los ejes principales de rotación son iguales a los vectores propios, como el tensor de inercia es simétrico, también serán ortogonales y el nuevo tensor de inercia será el tensor de inercia diagonalizado.

**Figure 2**

Representación de un cilindro en 3D con los ejes principales de rotación dados por vectores unitarios. El sistema de laboratorio esta dado por un sistema cartesiano donde  $\hat{e}_z$  es equivalente al vector propio 2, el eje  $\hat{e}_x$  es equivalente al vector propio 1 y el eje  $\hat{e}_y$  es equivalente al vector propio 3.



### *Potencial gravitacional*

Se plantean dos vectores, el primero unitario, y a su vez normal a la superficie del Gömböc ( $\mathbf{r}_n$ ) y otro que va desde el centro de masa a la superficie ( $\mathbf{r}_{CM}$ ). Entonces se llama altura del centro de masa ( $h$ ) a la proyección del vector  $\mathbf{r}_{CM}$  sobre el vector  $\mathbf{r}_n$ .

### *Vector del centro de masa a la superficie*

Para calcular este vector se usan los vértices de cada cara del triángulo que define el objeto 3D. Entonces se usa el promedio de la posición de los vértices para hallar el centro de cada triángulo.

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3}{3}$$

*Vector normal a la superficie*

Este vector se obtiene a partir del producto vectorial de dos vectores no paralelos que se encuentren en el plano del triángulo, por ejemplo, los vectores,  $V_1 - V_2$ ,  $V_2 - V_3$  o  $V_3 - V_1$ . Luego este vector es dividido por su norma.

$$\mathbf{r}_n = \frac{(V_1 - V_2) \times (V_3 - V_1)}{|(V_1 - V_2) \times (V_3 - V_1)|}$$

*Altura*

$$h = \mathbf{r}_{CM} \cdot \mathbf{r}_n$$

La proyección del vector  $\mathbf{r}_{CM}$  sobre  $\mathbf{r}_n$  se puede hallar como el producto interno/punto entre dichos vectores. Ahora se hará una transformación de coordenadas con respecto a los vectores propios que se tomaran cuando el sistema se encuentre en equilibrio. Figure 2 (Goldberg et al., 1969)

**Simulación***Obtención del Potencial Gravitacional*

Se define el potencial en términos de los ángulos en coordenadas esféricas (colatitud y azimutal), considerando el ángulo formado entre el vector que une el centro de masa con la superficie y el vector normal a la superficie del Gömböc. La altura  $h$  se obtiene como la proyección del vector desde el centro de masa a la superficie sobre el vector normal.

*Resolución de las Ecuaciones de Euler-Lagrange*

Con el potencial definido, se plantean las ecuaciones de Euler-Lagrange, que describen la evolución temporal del sistema dinámico. La resolución numérica de estas ecuaciones permite simular el movimiento del Gömböc bajo un campo gravitacional uniforme.

*Desarrollo del Simulador*

Se implementa un modelo computacional que visualiza el cambio de las coordenadas generalizadas del sistema, permitiendo analizar la evolución del objeto a partir de diversas condiciones iniciales. Esta herramienta es clave para prever el comportamiento dinámico y ajustar los parámetros del modelo teórico.

**Experimentación*****Diseño y Construcción del Modelo Físico***

Se fabrica un modelo físico del Gömböc mediante impresión 3D, asegurando que la geometría y distribución de masa se correspondan con el modelo teórico.

***Experimentación y Captura de Datos***

Se realizan múltiples lanzamientos del modelo físico desde diversas posiciones iniciales. El movimiento se registra utilizando un sistema de cámaras y sensores, lo que permite medir el tiempo de estabilización y la trayectoria seguida por el objeto.

***Comparación y Ajuste del Modelo***

Los datos experimentales se comparan con las predicciones del simulador. Las discrepancias identificadas se utilizan para ajustar parámetros del modelo teórico, refinando así la precisión de las simulaciones.

### **Cronograma**

<b>Fase</b>	<b>Duración (semanas)</b>
Revisión bibliográfica y recopilación de información	1–3
Formulación teórica y desarrollo del modelo matemático	4–9
Implementación de simulaciones computacionales	4–10
Diseño y fabricación del modelo físico (impresión 3D)	4–7
Experimentación y recolección de datos	8–12
Validación y ajuste del modelo matemático	12–14
Redacción y revisión del informe final	14–16
Preparación de la presentación final	14–16

### Referencias

- Domokos, G. b., Papadopoulos, J., & Ruina, A. (1994). Static equilibria of planar, rigid bodies: is there anything new?. *Journal of Elasticity*, 36(1), 59–66. <https://doi.org/10.1007/BF00042491>
- Goldberg, M., Guy, R. K., & Guy, R. K. (1969). Stability of Polyhedra (J. H. Conway and R. K. Guy). *SIAM Review*, 11(1), 78–82. <https://doi.org/10.1137/1011014>
- Sloan, M. L. (2023, ). *Analytical Gomboc*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2306.14914>
- The story of the Gömböc* | *plus.maths.org*. (2009, September). <https://plus.maths.org/content/story-gomboc>
- Varkonyi, P., & Domokos, G. (2006). Static Equilibria of Rigid Bodies: Dice, Pebbles, and the Poincare-Hopf Theorem. *Journal of Nonlinear Science*, 16(3), 255–281. <https://doi.org/10.1007/s00332-005-0691-8>
- Várkonyi, P. L., & Domokos, G. (2006). Mono-monostatic bodies: The answer to Arnold's question. *The Mathematical Intelligencer*, 28(4), 34–38. <https://doi.org/10.1007/BF02984701>