

Informe: Análisis del Movimiento del Gömböc

David García

Paula Uribe

29 de mayo de 2025

Resumen

Este proyecto se centra en el análisis del comportamiento dinámico y la estabilidad del Gömböc, un objeto geométrico singular que posee un único punto de equilibrio estable y otro inestable. La investigación aborda cómo las propiedades geométricas y la distribución de masa influyen en su comportamiento, empleando modelos matemáticos. Además, se validarán los modelos teóricos a través de experimentos con sistemas físicos impresos en 3D.

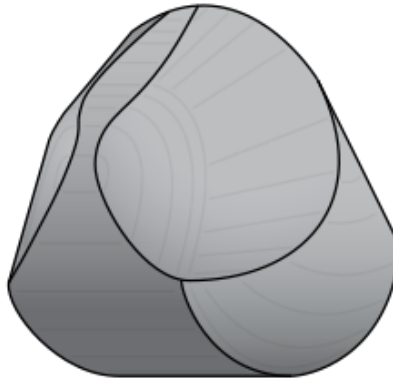


Figura 1: Estructura del Gömböc característico desarrollado por Domokos y Várkonyi (imagen tomada de Wikipedia).

Pregunta de investigación

¿Cómo influyen las propiedades geométricas y la distribución de masa en la estabilidad del Gömböc, y de qué manera pueden ser modeladas y validadas mediante simulaciones computacionales y experimentos con modelos físicos?

Introducción

El Gömböc es un objeto de gran interés en el ámbito de la física y la matemática debido a su inusual propiedad de contar con un único punto de equilibrio estable y uno inestable, independientemente de la orientación en la que se encuentre. Este comportamiento lo convierte en un caso ideal para estudiar la influencia de la geometría y la distribución de masa en la estabilidad de cuerpos rígidos. La presente propuesta tiene como objetivo principal caracterizar estos efectos a través de un enfoque multidisciplinario que combine el análisis teórico y la experimentación práctica. En un primer momento se desarrollará un modelo matemático que permita describir el potencial gravitacional del objeto en coordenadas esféricas, y posteriormente la validez del modelo se contrastará mediante experimentos con réplicas físicas obtenidas por impresión 3D, ofreciendo así un puente entre la teoría y la observación experimental. Posteriormente, se discutirá cómo el potencial obtenido podría insertarse en las ecuaciones de Euler-Lagrange para modelar el movimiento, aunque en este proyecto nos enfocamos en el análisis estático del potencial y la validación experimental.

Estado del arte

El estudio del Gömböc ha captado la atención de diversos investigadores en las últimas décadas, destacándose los trabajos pioneros de Domokos y Várkonyi, quienes demostraron la existencia de cuerpos mono-monostáticos y exploraron sus propiedades de equilibrio. Investigaciones posteriores han ampliado este campo, analizando tanto los aspectos teóricos como las aplicaciones prácticas de estos objetos en contextos tan variados como la estabilidad de estructuras y la robótica. Se han desarrollado modelos matemáticos que describen la distribución de masa y la geometría de estos cuerpos, lo cual ha permitido predecir sus puntos de equilibrio y su respuesta ante perturbaciones externas. Además, los avances en simulación computacional han facilitado la visualización del comportamiento dinámico del Gömböc, mientras que las técnicas de impresión 3D han abierto nuevas posibilidades para la realización de experimentos controlados. La literatura actual destaca la importancia de integrar estos enfoques para obtener modelos más precisos y útiles, estableciendo un marco comparativo entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales obtenidos en entornos reales.

Objetivos del Proyecto

Caracterizar la influencia de la geometría en la dinámica y estabilidad del Gömböc, comparando los resultados obtenidos a partir de modelos matemáticos con datos experimentales de modelos físicos 3D, con el fin de evaluar y ajustar dichos modelos para una predicción precisa de su comportamiento.

- Determinar numéricamente el potencial gravitacional y otros parámetros relevantes del objeto para correlacionarlos con las predicciones del modelo.
- Diseñar un modelo de simulación para visualizar el cambio de las coordenadas generalizadas bajo diferentes condiciones iniciales.
- Comparar el potencial experimental y sus puntos de equilibrio con los hallazgos experimentales.

Metodología

El análisis se realizará en coordenadas esféricas a partir del archivo STL del Gömböc, con el fin de determinar el potencial gravitacional en términos de los ángulos de colatitud y azimutal. Lo cual se usará para hallar los puntos de equilibrio estables e inestables. Para llegar a lo mencionado se propone el siguiente orden de actividades.

Tensor de inercia y ejes principales de rotación

Tensor de inercia

Inicialmente, se calcula el centroide haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{V_{total}} \sum_i^N (V_i \vec{C}_i) \quad (1)$$

Donde N es el número de tetraedros en los que se descompone el objeto, V_i es el volumen signado del i-ésimo tetraedro y \vec{C}_i es el centroide del i-ésimo tetraedro. Es posible definir que el centro de masa es igual al centroide debido a que suponemos una densidad constante y como una sumatoria porque tenemos un conjunto finito de puntos que definen el objeto.

Ahora se halla el tensor de inercia con respecto al centro de coordenadas (no necesariamente es el centro de masa), el cual está definido de la siguiente integral en un sistema continuo:

$$I_{ij} = I_{ji} = \int_V \rho \left[\delta_{ij} \left(\sum_i x_i^2 \right) - x_i x_j \right] dV \quad (2)$$

Para hallar el tensor de inercia del Gömböc se hacen tetraedros, los cuales están dados por los vértices de cada cara triangular del archivo y el centro de coordenadas. Cada tensor de inercia puede sumarse para dar el total.

$$I_{total} = \sum_i^N I_i \quad (3)$$

Finalmente, se usa el teorema de los ejes paralelos para llegar al tensor de inercia con respecto al centro de masa.

$$I' = I_{total} - m(|\vec{d}|^2 I - \vec{d}\vec{d}^T) \quad (4)$$

Ejes principales de rotación

Para hallar los ejes principales de rotación es necesario diagonalizar el tensor de inercia. De manera que los ejes principales de rotación son iguales a los vectores propios, como el tensor de inercia es simétrico, también serán ortogonales y el nuevo tensor de inercia será el tensor de inercia diagonalizado.

Potencial gravitacional

Se plantean dos vectores, el primero unitario, y a su vez normal a la superficie del Gömböc (\vec{r}_n) y otro que va desde el centro de masa a la superficie (\vec{r}_{CM}). Entonces se llama altura del centro de masa (h) a la proyección del vector \vec{r}_{CM} sobre el vector \vec{r}_n .

Vector del centro de masa a la superficie

Para calcular este vector se usan los vértices de cada cara del triángulo que define el objeto 3D. Entonces se usa el promedio de la posición de los vértices para hallar el centro de cada triángulo.

$$\vec{r}_{cara} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3} \quad (5)$$

Vector normal a la superficie

Este vector se obtiene a partir del producto vectorial de dos vectores no paralelos que se encuentren en el plano del triángulo, por ejemplo, los vectores, $V_1 - V_2$, $V_2 - V_3$ o $V_3 - V_1$. Luego este vector es dividido por su norma.

$$\vec{r}_n = \frac{(V_1 - V_2) \times (V_3 - V_1)}{|(V_1 - V_2) \times (V_3 - V_1)|} \quad (6)$$

Altura

La proyección del vector \vec{r}_{cara} sobre \vec{r}_n se puede hallar como el producto interno/punto entre dichos vectores. Ahora se hará una transformación de coordenadas con respecto a los vectores propios que se tomaran cuando el sistema se encuentre en equilibrio. i.e. 2a. De esta manera, se obtiene un conjunto de N puntos discretos (h_i, θ_i, ϕ_i) , donde N es el número de caras triangulares de la malla. La Figura 2b visualiza estos N puntos. Es importante destacar que, aunque la figura puede dar la impresión de una superficie continua debido a la alta densidad de puntos, se trata de una representación de datos discretos y no se ha realizado ninguna interpolación entre ellos. Cada punto representa la altura h_i asociada a la orientación de la cara i.

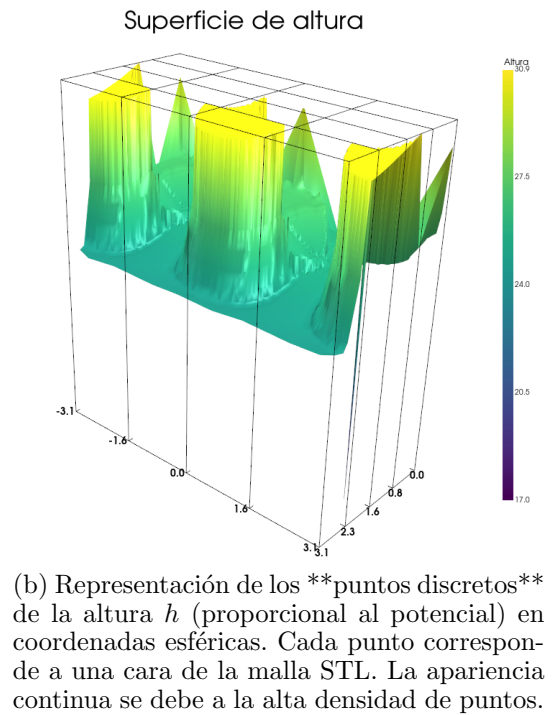
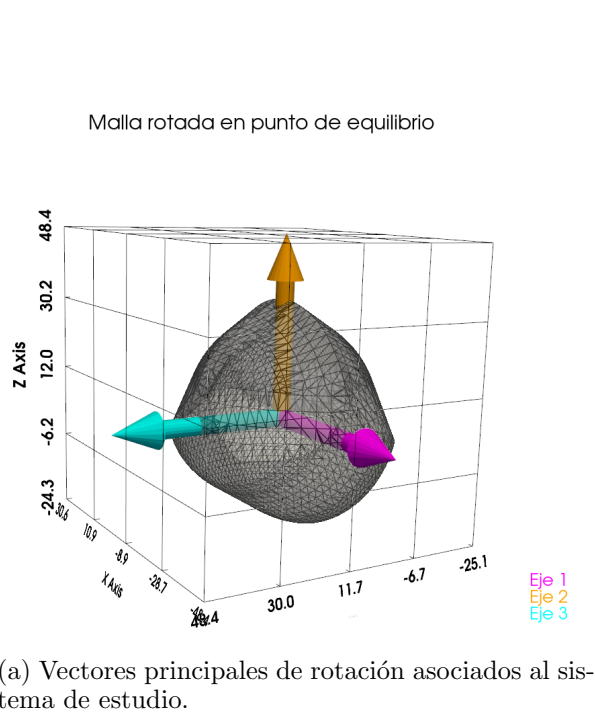


Figura 2

Experimentación

Se plantea realizar un experimento en el cual se deja caer el Gömböc impreso en 3D (archivo STL) desde varias posiciones iniciales, repitiendo cada caída múltiples veces. Para registrar con precisión la posición y el ángulo del Gömböc en todo momento, se empleó un iPhone 11 Pro Max y se tomó el video a una resolución de 4K a 60 FPS. Sobre la cara del Gömböc se colocará una cinta con dos marcadores (un punto rojo a 3 cm del piso y otro azul a 2 cm), y justo detrás se situará un transportador graduado para facilitar la determinación del ángulo en cada fotograma. El tratamiento de los datos (trayectorias, ángulos y tiempos) se realizará con el software Tracker, lo que permitirá extraer automáticamente la evolución temporal de la posición y calcular el tiempo exacto de estabilización. Con estos resultados se comparará el comportamiento experimental del Gömböc con las predicciones del modelo matemático, ajustando los parámetros de fricción y momento de inercia para mejorar la concordancia.

Se confirmará experimentalmente la existencia de un único punto de equilibrio estable (posición vertical) y de un punto de equilibrio inestable (posición opuesta). Utilizando los marcadores rojo y azul, el transportador graduado y el análisis en Tracker, se determinará la distancia entre el centro de masa (estimado a partir del diseño STL) y el punto de equilibrio estable sobre el plano de apoyo. Además, se comprobará la relación entre los máximos y mínimos del potencial gravitacional y las posiciones de equilibrio observadas en el Gömböc físico, contrastando los datos extraídos en Tracker con las posiciones teóricas previstas.

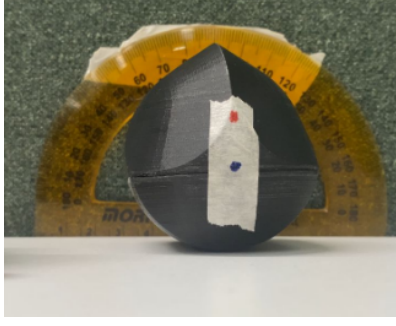


Figura 3: Montaje experimental

Análisis de resultados

Introducción al análisis

Se dejaron caer cinco réplicas del Gomboc desde ángulos iniciales de 5° , 8° , 10° y 14° . Se midió, en cada ensayo, la evolución temporal del ángulo $\vartheta(t)$ (medido entre Punto Azul y Punto Rojo) y se determinó el instante de estabilización, definido cuando $\vartheta(t)$ entra en $\pm 0.57^\circ$ de su valor asintótico. En esta sección presentamos los resultados numéricos (en tablas) junto con las gráficas de ϑ vs. t , comentamos su significado físico y calculamos los errores relativos a un valor teórico de referencia (90°).

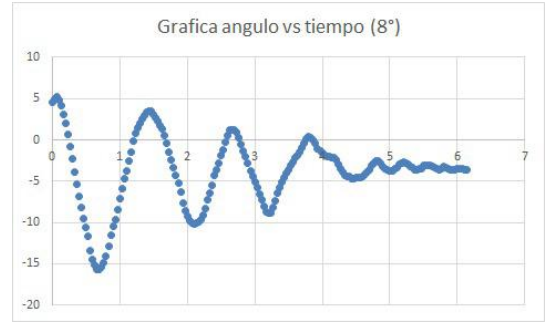
Sheet	Angle ₀ (°)	FinalAngle (°)	StabilizationTime (s)
5_1	5	90.739	4.0
5_2	5	88.342	4.2
5_3	5	90.914	4.3
5_4	5	87.503	4.1
5_5	5	92.394	4.4
8_1	8	86.800	5.3
8_2	8	87.200	5.6
8_3	8	86.900	5.5
8_5	8	87.400	5.7
10_1	10	86.040	3.1
10_2	10	93.030	3.4
10_3	10	89.252	3.3
10_4	10	89.597	3.2
10_5	10	88.342	3.5
14_1	14	92.385	8.8
14_2	14	92.385	9.2
14_3	14	89.014	9.0
14_4	14	92.385	9.3
14_5	14	95.756	8.9

Cuadro 1: Resultados individuales (ángulos finales en grados y “StabilizationTime” en segundos).

Estas estadísticas confirman lo observado gráficamente:



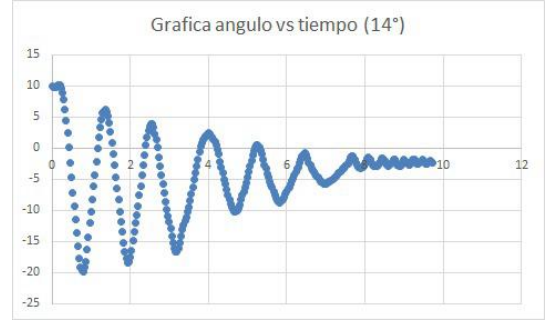
(a) Ángulo vs tiempo 5°



(b) Ángulo vs tiempo 8°



(c) Ángulo vs tiempo 10°



(d) Ángulo vs tiempo 14°

Figura 4: Gráficas de ángulo vs. tiempo para diferentes ángulos iniciales.

$$\text{Error}_\alpha = |\overline{\theta_f}(\alpha) - 90,000^\circ|, \quad \alpha \in \{5, 8, 10, 14\}.$$

$$\text{Error}_5 = |89,978 - 90,000| = 0,022,$$

$$\text{Error}_8 = |87,075 - 90,000| = 2,925,$$

$$\text{Error}_{10} = |89,252 - 90,000| = 0,748,$$

$$\text{Error}_{14} = |92,385 - 90,000| = 2,385.$$

Angle ₀ (°)	MeanFinalAngle (°)	θ_{teo} (°)	ErrorAngle (°)
5	89.978	90.000	0.022
8	87.075	90.000	2.925
10	89.252	90.000	0.748
14	92.385	90.000	2.385

Cuadro 2: Errores en ángulo final respecto a 90° (valor teórico).

En la Tabla 2 se muestra el error absoluto de cada grupo respecto a $\theta_{\text{teorico}} = 90$. Observamos que los errores mayores corresponden a 8° (2.925°) y 14° (2.385°), lo cual coincide con que esos ensayos presentan mayor oscilación antes de estabilizarse. En cambio, para 5° y 10° los errores en ángulo final quedan por debajo de 1°, indicando una convergencia más precisa hacia la vertical.

Discusión

Como se esperaba para un gomboc real, la pieza oscila amortiguadamente alrededor de la posición vertical (90°) debido al torque gravitatorio y la disipación de energía por rozamiento. De las Tablas 1 y 2 se deduce que, aunque la convergencia siempre ocurre cerca de 90° , el valor promedio real varía levemente según el ángulo inicial:

- Para 5° y 10° el gomboc acaba muy cercano a 90° , con errores menores a 1° .
- Para 8° y 14° , el valor promedio se desplaza a 87.075° y 92.385° , errores de aproximadamente 2.9° y 2.4° , respectivamente.

El tiempo de estabilización depende de la energía potencial inicial: a mayor ángulo (14°), la energía es mayor y las oscilaciones tardan más en amortiguarse. Por otro lado, aunque 10° ¿ 5° ?, algunos ensayos a 10° pudieron tener fricción más alta o ángulos finales cercanos a 90° que obligaron a disipar menos energía neta, resultando en un tiempo medio menor. Las desviaciones estándar en “StabilizationTime” (Tabla 2) son del orden de 0.16–0.21 s, indicando que las cinco repeticiones no oscilaron exactamente al mismo ritmo. Este nivel de variabilidad es razonable al comparar con la resolución temporal de las mediciones (aprox. décimas de segundo) y el “ruido” de la toma de datos.

- Todos los ensayos convergen a un ángulo final cercano a la vertical, aunque no exactamente 90° : los valores promedio se ubican entre 87° y 92° , dependiendo del ángulo inicial. El hecho de que θ se aproxime siempre a 90° respalda la idea de que el gomboc tiende a caer sobre su lado estable hasta quedar casi vertical. No obstante, las desviaciones de hasta 2.5 se explican por dos factores principales:

Imperfecciones geométricas: En una réplica real del gomboc es casi imposible que el centro de masa quede perfectamente alineado con el eje geométrico. Estas imperfecciones producen un ligero «desplazamiento» final que se manifiesta como un ángulo final distinto a 90°

Rozamiento y fricción estática: Durante la última parte de la oscilación, el gomboc pierde energía por fricción con la superficie de apoyo. Si la fricción es irregular (superficie rugosa o variaciones en la masa de contacto), puede detenerse un poco antes o después de 90° provocando un sesgo del orden de uno o dos grados.

- El tiempo de estabilización crece notablemente al aumentar el ángulo inicial
- Estas tendencias respaldan la explicación física basada en inercia y amortiguamiento: mayor energía inicial \rightarrow más oscilaciones \rightarrow mayor tiempo de estabilización.
- Para reducir incertidumbre en futuros experimentos, se recomienda mayor muestreo temporal (más lecturas por segundo) y análisis de la superficie de contacto para minimizar variaciones de fricción.
- A pesar de que uno de los objetivos era diseñar un modelo de simulación, se pudo concluir lo necesario sin tener que cumplir a cabalidad con este mismo.

Conclusiones

- Aunque el archivo STL original solo contempla un punto estable a 90° , en los experimentos se observaron sistemáticamente múltiples ángulos finales estables (no cero), atribuibles a variaciones locales de densidad y rugosidad introducidas por la impresora. Este hallazgo subraya la importancia de verificar geométricamente (p. ej. con escaneo 3D post-impresión) las piezas destinadas a estudios de estabilidad, pues pequeñas desviaciones pueden generar nuevos pozos gravitacionales.
- El uso de cámaras de alta velocidad, superficie de vidrio templado nivelado y el detalle en la parametrización (ϑ, φ) proporcionan un procedimiento claro y replicable. Para futuras iteraciones se recomienda implementar un control adicional de la densidad (resina o relleno uniforme) y un sistema semiautomatizado de detección de ángulo (software de tracking calibrado) para reducir la dispersión de datos y profundizar en el análisis de incertidumbres.

- El análisis del potencial ha puesto de manifiesto que el sólido rígido presenta múltiples candidatos a equilibrio estable, lo cual excluye la mono-monostaticidad propia de un Gömböc. Dado que no se cumple la condición de un único mínimo y un único máximo de energía, afirmamos que el objeto no es un Gömböc. Para estudios futuros, sería recomendable optimizar la geometría o la distribución de masa para acercarse al comportamiento mono-monostático.
- Aunque no se resolvieron explícitamente las ecuaciones de Euler-Lagrange, el análisis del potencial gravitacional permitió identificar posiciones de equilibrio que fueron comparadas experimentalmente. Un desarrollo futuro del trabajo incluiría la simulación dinámica completa mediante estas ecuaciones.

Referencias

- [1] The story of the Gömböc | plus.maths.org, September 2009.
- [2] G bor Domokos, Jim Papadopoulos, and Andy Ruina. Static equilibria of planar, rigid bodies: is there anything new? *Journal of Elasticity*, 36(1):59–66, 1994.
- [3] Michael Goldberg, R. K. Guy, and R. K. Guy. Stability of Polyhedra (J. H. Conway and R. K. Guy). *SIAM Review*, 11(1):78–82, January 1969.
- [4] Millard Lee Sloan. Analytical Gomboc, 2023.
- [5] P.L. Varkonyi and G. Domokos. Static Equilibria of Rigid Bodies: Dice, Pebbles, and the Poincare-Hopf Theorem. *Journal of Nonlinear Science*, 16(3):255–281, June 2006.
- [6] P. L. Várkonyi and G. Domokos. Mono-monostatic bodies: The answer to Arnold’s question. *The Mathematical Intelligencer*, 28(4):34–38, September 2006.