เอกสารประกอบการสอน

รายวิชา 5571102 คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า

Electrical Engineering Mathematics

ชื่อผู้เรียน: _____

หมู่เรียน: _____

ภาคเรียน/ปีการศึกษา: _____

สาขาวิชาเทคโนโลยีวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

สารบัญ

1 สาระสำคัญ 1

2 ผลลัพธ์การเรียนรู้ประจำบท 2

3 คำสำคัญ 2

4 บทนำ 3

5 จำนวนเชิงซ้อนและการดำเนินการ 4

5.1 นิยามจำนวนเชิงซ้อน 4

5.2 การบวกและการลบจำนวนเชิงซ้อน 5

5.3 การคูณจำนวนเชิงซ้อน 7

5.4 คอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อน 8

5.5 การหารจำนวนเชิงซ้อน 9

6 รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน 9

6.1 รูปเชิงพีชคณิต 9

6.2 ขนาดและมุมของจำนวนเชิงซ้อน 10

6.3 รูปเชิงขั้ว 10

6.4 รูปเอ็กซ์โพเนนเชียล 11

6.5 ตารางสรุปการแปลงรูปจำนวนเชิงซ้อน 11

7 สูตรของออยเลอร์และความหมายทางวิศวกรรมไฟฟ้า 12

8 ฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนเบื้องต้น **13**

8.1 ความหมายของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน 13

8.2 ตัวอย่างฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน 14

8.3 ความเชื่อมโยงกับโดเมน s ในระบบควบคุมและวงจรไฟฟ้า 15

9 เฟสเซอร์และการแทนสัญญาณไซน์ **15**

9.1 แนวคิดของเฟสเซอร์ 15

9.2 การแปลงจากโดเมนเวลาเป็นเฟสเซอร์ 16

9.3 ตารางสรุปการแทนสัญญาณด้วยเฟสเซอร์ 17

10 อิมพีแดนซ์ในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ **18**

10.1 ความหมายของอิมพีแดนซ์ 18

10.2 อิมพีแดนซ์ของตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ 18

10.3 เฟสของแรงดันและกระแสใน R, L และ C 19

11 ตัวอย่างโจทย์พร้อมวิธีทำ **19**

12 การประยุกต์ใช้ในงานวิศวกรรมไฟฟ้า **27**

12.1 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ 27

12.2 การวิเคราะห์สัญญาณไฟฟ้าและรูปคลื่น 27

12.3 การวิเคราะห์ระบบไฟฟ้ากำลัง 27

12.4 การวิเคราะห์ระบบควบคุม 28

12.5 การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก 28

13 ตารางสรุปสูตรสำคัญประจำบท **28**

14 กิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียนและกิจกรรมปฏิบัติการ 29

14.1 กิจกรรมที่ 1 แผนภาพ Argand Diagram 29

14.2 กิจกรรมที่ 2 การแปลงสัญญาณไซน์เป็นเฟสเซอร์ 30

14.3 กิจกรรมที่ 3 ปฏิบัติการคำนวณจำนวนเชิงซ้อนด้วย Python 30

15 แบบฝึกหัดท้ายบท 31

15.1 ระดับพื้นฐาน 31

15.2 ระดับประยุกต์ 32

15.3 ระดับวิเคราะห์ 33

16 คำถามทบทวนท้ายบท 33

17 สรุปท้ายบท 34

18 ข้อเสนอแนะรูปภาพ แผนภาพ และกราฟที่ควรมีในบทเรียน 35

19 เอกสารอ้างอิงท้ายบท 37

20 แนวทางการตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา 38

บทที่ 2
จำนวนเชิงซ้อน ฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน และเฟสเซอร์

Complex Numbers, Complex Variable Functions and Phasors

ระยะเวลาที่ใช้สอน: 2 สัปดาห์

ชั่วโมงเรียน: 6 ชั่วโมงบรรยาย + 4 ชั่วโมงปฏิบัติ

บทที่รองรับ CLO: CLO 1

รายวิชา: 5571102 คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า

Electrical Engineering Mathematics

1 สาระสำคัญ

จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในงานวิศวกรรมไฟฟ้า โดยเฉพาะการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ (Alternating Current Circuit: AC Circuit) เนื่องจากสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับมีทั้ง “ขนาด” และ “มุมเฟส” ซึ่งไม่สามารถอธิบายได้ครบถ้วนด้วยจำนวนจริงเพียงอย่างเดียว จำนวนเชิงซ้อนช่วยให้สามารถแทนแรงดัน กระแส อิมพีแดนซ์ และกำลังไฟฟ้าในรูปแบบที่คำนวณได้สะดวกและเป็นระบบ (Kreyszig, 2011; Alexander & Sadiku, 2021)

บทนี้เริ่มจากนิยามของจำนวนเชิงซ้อน การดำเนินการพื้นฐาน การแปลงระหว่างรูปเชิงพีชคณิต รูปเชิงขั้ว และรูปเอ็กซ์โพเนนเชียล จากนั้นอธิบายสูตรของออยเลอร์ (Euler’s Formula) และฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนเบื้องต้น ก่อนเชื่อมโยงเข้าสู่แนวคิดของเฟสเซอร์ (Phasor) ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ อิมพีแดนซ์ของตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ รวมถึงการประยุกต์ใช้ในระบบไฟฟ้ากำลังและระบบควบคุม (Hayt et al., 2019; Nilsson & Riedel, 2019)

2 ผลลัพธ์การเรียนรู้ประจำบท

เมื่อศึกษาบทนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. อธิบายความหมายของจำนวนเชิงซ้อน ส่วนจริง ส่วนจินตภาพ และหน่วยจินตภาพได้
2. ดำเนินการบวก ลบ คูณ หาร และหาคอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนได้
3. แปลงจำนวนเชิงซ้อนระหว่างรูปเชิงพีชคณิต รูปเชิงขั้ว และรูปเอ็กซ์โพเนนเชียลได้
4. อธิบายและประยุกต์ใช้สูตรของออยเลอร์ในการแทนสัญญาณไซน์ได้
5. อธิบายความหมายของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนเบื้องต้นได้
6. แปลงสัญญาณไซน์ในโดเมนเวลาให้อยู่ในรูปเฟสเซอร์ได้
7. คำนวณอิมพีแดนซ์ของ R, L และ C ในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับได้
8. วิเคราะห์วงจร AC อย่างง่ายโดยใช้เฟสเซอร์และจำนวนเชิงซ้อนได้
9. ใช้โปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์ เช่น Python หรือ MATLAB/Octave เพื่อช่วยคำนวณและแสดงผลจำนวนเชิงซ้อนได้

3 คำสำคัญ

คำไทย	คำอังกฤษ	ความหมายโดยย่อ
จำนวนเชิงซ้อน	Complex Number	จำนวนที่ประกอบด้วยส่วนจริงและส่วนจินตภาพ
ส่วนจริง	Real Part	ส่วนของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนแกนจริง

ส่วนจินตภาพ	Imaginary Part	ส่วนของจำนวนเชิงซ้อนที่คูณกับ j
หน่วยจินตภาพ	Imaginary Unit	$j = \sqrt{-1}$ ใช้ในงานวิศวกรรมไฟฟ้า
คอนจูเกต	Complex Conjugate	จำนวนเชิงซ้อนที่เปลี่ยนเครื่องหมายส่วนจินตภาพ
ขนาด	Magnitude / Modulus	ระยะจากจุดกำเนิดถึงจุดบนระนาบเชิงซ้อน
อาร์กิวเมนต์	Argument	มุมของจำนวนเชิงซ้อนกับแกนจริงบวก
รูปเชิงขั้ว	Polar Form	การแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยขนาดและมุม
รูปเอ็กซ์โพเนนเชียล	Exponential Form	การแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วย $re^{j\theta}$
สูตรของออยเลอร์	Euler's Formula	ความสัมพันธ์ $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
เฟสเซอร์	Phasor	จำนวนเชิงซ้อนที่แทนขนาดและเฟสของสัญญาณไซน์
อิมพีแดนซ์	Impedance	ความต้านทานรวมในวงจร AC มีหน่วยเป็นโอห์ม

4 บทนำ

ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ สัญญาณแรงดันและกระแสมักอยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ เช่น

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

โดยที่ $v(t)$ คือ แรงดันไฟฟ้า ณ เวลา t มีหน่วยเป็นโวลต์ (V) V_m คือ ค่าสูงสุดของ

แรงดัน มีหน่วยเป็นโวลต์ (V) ω คือ ความถี่เชิงมุม มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที (rad/s) t คือ เวลา มีหน่วยเป็นวินาที (s) ϕ คือ มุมเฟส มีหน่วยเป็นองศาหรือเรเดียน

หากวิเคราะห์สัญญาณดังกล่าวในโดเมนเวลาโดยตรง การบวก ลบ หรือเปรียบเทียบสัญญาณหลายตัวที่มีมุมเฟสต่างกันจะทำได้ค่อนข้างยุ่งยาก แต่เมื่อใช้จำนวนเชิงซ้อนและเฟสเซอร์ จะสามารถแทนสัญญาณไซน์ด้วยจำนวนเชิงซ้อนเพียงตัวเดียว ทำให้การคำนวณวงจรไฟฟ้ากระแสสลับทำได้ง่ายขึ้นอย่างมาก (Alexander & Sadiku, 2021; Hayt et al., 2019)

ตัวอย่างเช่น แรงดัน

$$v(t) = 100\cos(377t + 30^\circ)$$

สามารถแทนด้วยเฟสเซอร์ได้เป็น

$$\mathsf{V} = 100\angle 30^\circ$$

หรือหากใช้ค่า RMS จะเขียนเป็น

$$\mathsf{V} = \frac{100}{\sqrt{2}}\angle 30^\circ$$

การแทนด้วยเฟสเซอร์ช่วยให้นักศึกษาสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดัน กระแส และอิมพีแดนซ์ในวงจร AC ได้ในลักษณะเดียวกับการใช้กฎของโอห์ม แต่เปลี่ยนจากจำนวนจริงเป็นจำนวนเชิงซ้อน (Nilsson & Riedel, 2019)

5 จำนวนเชิงซ้อนและการดำเนินการ

5.1 นิยามจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนได้ในรูป

$$z = a + jb$$

โดยที่ z คือ จำนวนเชิงซ้อน a คือ ส่วนจริง (Real Part) เขียนแทนด้วย Re(z) b คือ สัมประสิทธิ์ของส่วนจินตภาพ เขียนแทนด้วย Im(z) j คือ หน่วยจินตภาพ มีสมบัติ $j^2 = -1$

ในทางคณิตศาสตร์ทั่วไปมักใช้ $i = \sqrt{-1}$ แต่ในงานวิศวกรรมไฟฟ้านิยมใช้ j แทนหน่วยจินตภาพ เพื่อหลีกเลี่ยงความสับสนกับ i ซึ่งมักใช้แทนกระแสไฟฟ้า (Electric Current) (Kreyszig, 2011; Alexander & Sadiku, 2021)

จำนวนเชิงซ้อนสามารถแสดงบนระนาบเชิงซ้อน (Complex Plane) หรือแผนภาพอาร์กองด์ (Argand Diagram) โดยแกนนอนคือแกนจริง และแกนตั้งคือแกนจินตภาพ จุด $z = a + jb$ จะอยู่ที่พิกัด (a, b)

5.2 การบวกและการลบจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้

$$z_1 = a_1 + jb_1$$

และ

$$z_2 = a_2 + jb_2$$

การบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนทำได้โดยรวมส่วนจริงกับส่วนจริง และรวมส่วนจินตภาพกับส่วนจินตภาพ ดังนี้

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

การบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนมีความสำคัญในการรวมสัญญาณไฟฟ้าหลายตัวที่มีเฟสต่างกัน เช่น การรวมแรงดันในวงจร AC หรือการรวมกระแสในจุดต่อวงจร (Alexander & Sadiku, 2021)

ตัวอย่างที่ 2.1 การบวกและลบจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้

$$z_1 = 4 + j3, \quad z_2 = 2 - j5$$

จงหา $z_1 + z_2$ และ $z_1 - z_2$

วิธีทำ

$$z_1 + z_2 = (4 + 2) + j[3 + (-5)]$$

$$z_1 + z_2 = 6 - j2$$

และ

$$z_1 - z_2 = (4 - 2) + j[3 - (-5)]$$

$$z_1 - z_2 = 2 + j8$$

ตอบ $z_1 + z_2 = 6 - j2$ $z_1 - z_2 = 2 + j8$

5.3 การคูณจำนวนเชิงซ้อน

การคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงพีชคณิตทำได้โดยกระจายพจน์เหมือนพีชคณิตทั่วไป และใช้สมบัติ $j^2 = -1$

$$z_1 z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

การคูณจำนวนเชิงซ้อนมักพบในการวิเคราะห์กำลังเชิงซ้อน อิมพีแดนซ์ และการแปลงรูปสัญญาณในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ (Hayt et al., 2019)

ตัวอย่างที่ 2.2 การคูณจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้

$$z_1 = 3 + j4, \quad z_2 = 2 + j5$$

จงหา $z_1 z_2$

วิธีทำ

$$z_1 z_2 = (3 + j4)(2 + j5)$$

$$= 3(2) + 3(j5) + j4(2) + j4(j5)$$

$$= 6 + j15 + j8 + j^2 20$$

เนื่องจาก $j^2 = -1$

$$= 6 + j23 - 20$$

$$= -14 + j23$$

ตอบ

$$z_1 z_2 = -14 + j23$$

5.4 คอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อน

คอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + jb$ เขียนแทนด้วย z^* หรือ $\overline{z}$ นิยามเป็น

$$z^* = a - jb$$

ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนกับคอนจูเกตของตนเองจะได้จำนวนจริงเสมอ

$$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$$

คอนจูเกตมีบทบาทสำคัญในการหารจำนวนเชิงซ้อน การหาขนาดกำลังสอง และการคำนวณกำลังเชิงซ้อนในระบบไฟฟ้ากำลัง เช่น

$$S = VI^*$$

โดยที่ S คือ กำลังเชิงซ้อน V คือ เฟสเซอร์แรงดัน และ I^* คือ คอนจูเกตของเฟสเซอร์กระแส (Grainger & Stevenson, 1994; Alexander & Sadiku, 2021)

5.5 การหารจำนวนเชิงซ้อน

การหารจำนวนเชิงซ้อนทำได้โดยคูณทั้งเศษและส่วนด้วยคอนจูเกตของตัวส่วน

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2}$$

คูณด้วยคอนจูเกตของตัวส่วน

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

การหารจำนวนเชิงซ้อนใช้บ่อยในการหากระแสจากสมการเฟสเซอร์ของกฎโอห์ม

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Z}}$$

โดยที่ I คือ เฟสเซอร์กระแส มีหน่วยเป็นแอมแปร์ (A) V คือ เฟสเซอร์แรงดัน มีหน่วยเป็นโวลต์ (V) Z คือ อิมพีแดนซ์ มีหน่วยเป็นโอห์ม (Ω)

(Alexander & Sadiku, 2021; Nilsson & Riedel, 2019)

6 รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน

6.1 รูปเชิงพีชคณิต

รูปเชิงพีชคณิต หรือรูปสี่เหลี่ยม (Rectangular Form) คือรูปที่เขียนจำนวนเชิงซ้อนเป็น

$$z = a + jb$$

รูปนี้เหมาะสำหรับการบวกและลบจำนวนเชิงซ้อน เพราะสามารถแยกส่วนจริงและส่วนจินตภาพได้โดยตรง (Kreyszig, 2011)

6.2 ขนาดและมุมของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน $z = a + jb$ มีขนาดหรือโมดูลัสเป็น

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

และมีมุมหรืออาร์กิวเมนต์เป็น

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

โดยที่ r คือ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อน θ คือ มุมของจำนวนเชิงซ้อน วัดจากแกนจริงบวก a คือ ส่วนจริง b คือ ส่วนจินตภาพ

ใน การ คำนวณ จริง ควร พิจารณา จตุ ภาค ของ จุด (a, b) ด้วย เพราะ ค่า ของ $\tan^{-1}(b/a)$ อาจ ให้ มุม ที่ ต้อง ปรับ ตาม ตำแหน่ง ของ จำนวนเชิงซ้อน บน ระนาบ เชิงซ้อน (Kreyszig, 2011; Brown & Churchill, 2014)

6.3 รูปเชิงขั้ว

จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$z = r\angle\theta$$

หรือ

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

โดยที่ r คือ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อน θ คือ มุมเฟสหรืออาร์กิวเมนต์

รูปเชิงขั้วมีความเหมาะสมมากสำหรับการคูณ หาร และการวิเคราะห์เฟสเซอร์ เพราะขนาดและมุมเฟสสามารถมองเห็นได้ชัดเจน (Alexander & Sadiku, 2021)

6.4 รูปเอ็กซ์โพเนนเชียล

จากสูตรของออยเลอร์

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนเป็นรูปเอ็กซ์โพเนนเชียลได้ดังนี้

$$z = re^{j\theta}$$

รูปเอ็กซ์โพเนนเชียลมีความสำคัญในงานสัญญาณ ระบบควบคุม การวิเคราะห์ฟูเรียร์และลาปลาซ เพราะสามารถเชื่อมโยงสัญญาณไซน์กับฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลเชิงซ้อนได้โดยตรง (Kreyszig, 2011; Oppenheim et al., 1997)

6.5 ตารางสรุปการแปลงรูปจำนวนเชิงซ้อน

รูปแบบ	**สมการ**	**เหมาะสำหรับ**
รูปเชิงพีชคณิต	$z = a + jb$	การบวกและลบ
รูปเชิงขั้ว	$z = r\angle\theta$	การอ่านขนาดและมุมเฟส
รูปตรีโกณมิติ	$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$	การเชื่อมโยงกับเรขาคณิต
รูปเอ็กซ์โพเนนเชียล	$z = re^{j\theta}$	การวิเคราะห์สัญญาณ ฟูเรียร์และลาปลาซ

7 สูตรของออยเลอร์และความหมายทางวิศวกรรมไฟฟ้า

สูตรของออยเลอร์เป็นความสัมพันธ์พื้นฐานระหว่างฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลเชิงซ้อนและฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

จากสมการนี้สามารถเขียนได้ว่า

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

และ

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

สูตรของออยเลอร์มีความสำคัญอย่างมากในการวิเคราะห์สัญญาณไฟฟ้า เพราะสัญญาณไซน์และโคไซน์สามารถมองเป็นส่วนจริงหรือส่วนจินตภาพของสัญญาณเอ็กซ์โพเนนเชียลเชิงซ้อน เช่น

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$v(t) = \mathrm{Re}\left\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\right\}$$

โดยที่ $\mathrm{Re}\{\cdot\}$ หมายถึง การนำเฉพาะส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน สมการนี้เป็นพื้นฐานของเฟสเซอร์และการวิเคราะห์สัญญาณไซน์ในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ (Oppenheim et al., 1997; Hayt et al., 2019)

8 ฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนเบื้องต้น

8.1 ความหมายของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

ฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน (Complex Variable Function) คือ ฟังก์ชันที่มีตัวแปรต้นเป็นจำนวน-เชิงซ้อน เช่น

$$w = f(z)$$

โดยที่

$$z = x + jy$$

และ

$$w = u + jv$$

โดยที่ z คือ ตัวแปรเชิงซ้อนอินพุต w คือ ผลลัพธ์เชิงซ้อน x, y คือ ตัวแปรจริงของอินพุต u, v คือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของผลลัพธ์

ดังนั้นสามารถเขียนได้ว่า

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

แนวคิดของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนมีความสำคัญในงานวิศวกรรมไฟฟ้าขั้นสูง เช่น การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้า การวิเคราะห์สัญญาณ การแปลงลาปลาซ และการวิเคราะห์ระบบควบคุมในโดเมน s (Kreyszig, 2011; Brown & Churchill, 2014)

8.2 ตัวอย่างฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

ตัวอย่างฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน เช่น

$$f(z) = z^2$$

ถ้า

$$z = x + jy$$

จะได้ว่า

$$f(z) = (x + jy)^2$$

$$= x^2 + 2jxy + j^2y^2$$

เนื่องจาก $j^2 = -1$

$$f(z) = x^2 - y^2 + j2xy$$

ดังนั้น

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

และ

$$v(x, y) = 2xy$$

ฟังก์ชันลักษณะนี้ช่วยให้นักศึกษาเข้าใจว่าฟังก์ชันเชิงซ้อนสามารถแยกเป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพได้ ซึ่งเป็นพื้นฐานของการศึกษาฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Function) ในระดับสูงขึ้น (Kreyszig, 2011)

8.3 ความเชื่อมโยงกับโดเมน s ในระบบควบคุมและวงจรไฟฟ้า

ในหัวข้อการแปลงลาปลาซ ตัวแปร s เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่นิยามโดย

$$s = \sigma + j\omega$$

โดยที่ s คือ ตัวแปรเชิงซ้อนในโดเมนลาปลาซ σ คือ ส่วนจริง เกี่ยวข้องกับการเพิ่มขึ้นหรือลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ω คือ ความถี่เชิงมุม เกี่ยวข้องกับการแกว่งของสัญญาณ j คือ หน่วยจินตภาพ

ตัวแปร s มีความสำคัญในการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบควบคุมและวงจรไฟฟ้า เช่น โพล (Pole) และซีโร (Zero) ของฟังก์ชันถ่ายโอนจะอยู่บนระนาบเชิงซ้อน ซึ่งส่งผลต่อพฤติกรรมของระบบ เช่น การสั่น การหน่วง และความเร็วในการตอบสนอง (Ogata, 2010; Nise, 2020)

9 เฟสเซอร์และการแทนสัญญาณไซน์

9.1 แนวคิดของเฟสเซอร์

เฟสเซอร์ (Phasor) คือ จำนวนเชิงซ้อนที่ใช้แทนสัญญาณไซน์ในสถานะคงตัว โดยตัดส่วนเวลา $e^{j\omega t}$ ออก เหลือเฉพาะขนาดและมุมเฟสของสัญญาณ ตัวอย่างเช่น

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

สามารถแทนด้วยเฟสเซอร์ได้เป็น

$$\mathsf{V} = V_m \angle \phi$$

ถ้าใช้ค่า RMS จะเขียนเป็น

$$\mathsf{V} = V_{rms} \angle \phi$$

โดยที่

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

ในงานวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับนิยมใช้ค่า RMS เพราะสัมพันธ์โดยตรงกับกำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่โหลดได้รับ (Hayt et al., 2019; Alexander & Sadiku, 2021)

9.2 การแปลงจากโดเมนเวลาเป็นเฟสเซอร์

หากสัญญาณอยู่ในรูปโคไซน์

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

เฟสเซอร์ในรูปค่าสูงสุดคือ

$$\mathsf{V} = V_m \angle \phi$$

และเฟสเซอร์ในรูปค่า RMS คือ

$$\mathsf{V} = V_{rms} \angle \phi$$

ถ้าสัญญาณอยู่ในรูปไซน์ เช่น

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

สามารถแปลงเป็นโคไซน์ได้โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\sin\theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

ดังนั้น

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi - 90^\circ)$$

เฟสเซอร์จึงเป็น

$$\mathrm{V} = V_m\angle(\phi - 90^\circ)$$

การกำหนดมาตรฐานว่าจะใช้ไซน์หรือโคไซน์เป็นสัญญาณอ้างอิงต้องทำให้สอดคล้องกันตลอดทั้งการคำนวณ เพื่อหลีกเลี่ยงความผิดพลาดของมุมเฟส (Nilsson & Riedel, 2019)

9.3 ตารางสรุปการแทนสัญญาณด้วยเฟสเซอร์

สัญญาณในโดเมนเวลา	เฟสเซอร์แบบค่าสูงสุด	เฟสเซอร์แบบ RMS
$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m\angle\phi$	$\frac{V_m}{\sqrt{2}}\angle\phi$
$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m\angle\theta$	$\frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle\theta$
$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$	$V_m\angle(\phi - 90^\circ)$	$\frac{V_m}{\sqrt{2}}\angle(\phi - 90^\circ)$

10 อิมพีแดนซ์ในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

10.1 ความหมายของอิมพีแดนซ์

อิมพีแดนซ์ (Impedance) คือปริมาณที่แสดงการต่อต้านการไหลของกระแสไฟฟ้าในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ เขียนแทนด้วย Z และมีหน่วยเป็นโอห์ม (Ω)

$$Z = R + jX$$

โดยที่ Z คือ อิมพีแดนซ์ มีหน่วยเป็นโอห์ม (Ω) R คือ ความต้านทาน (Resistance) มีหน่วยเป็นโอห์ม (Ω) X คือ รีแอกแตนซ์ (Reactance) มีหน่วยเป็นโอห์ม (Ω) jX คือ ส่วนจินตภาพของอิมพีแดนซ์

ถ้า $X > 0$ วงจรมีลักษณะเหนี่ยวนำ ถ้า $X < 0$ วงจรมีลักษณะเก็บประจุ

(Alexander & Sadiku, 2021; Hayt et al., 2019)

10.2 อิมพีแดนซ์ของตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ

อุปกรณ์	ความสัมพันธ์เวลา	อิมพีแดนซ์
ตัวต้านทาน R	$v(t) = Ri(t)$	$Z_R = R$
ตัวเหนี่ยวนำ L	$v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$Z_L = j\omega L$
ตัวเก็บประจุ C	$i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$	$Z_C = \dfrac{1}{j\omega C} = -\dfrac{j}{\omega C}$

โดยที่ R คือ ความต้านทาน มีหน่วยโอห์ม (Ω) L คือ ความเหนี่ยวนำ มีหน่วยเฮนรี (H) C คือ ความจุไฟฟ้า มีหน่วยฟารัด (F) ω คือ ความถี่เชิงมุม มีหน่วยเรเดียนต่อวินาที (rad/s)

อิมพีแดนซ์เหล่านี้ช่วยให้สามารถใช้กฎของโอห์มในรูปเฟสเซอร์ได้

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}$$

ซึ่งเป็นเครื่องมือหลักของการวิเคราะห์วงจร AC ในสถานะคงตัว (Nilsson & Riedel, 2019)

10.3 เฟสของแรงดันและกระแสใน R, L และ C

อุปกรณ์	ความสัมพันธ์เฟส	ความหมาย
ตัวต้านทาน R	แรงดันและกระแสเฟสเดียวกัน	ไม่มีการนำหน้าหรือล้าหลัง
ตัวเหนี่ยวนำ L	แรงดันนำหน้ากระแส 90°	กระแสล้าหลังแรงดัน
ตัวเก็บประจุ C	กระแสนำหน้าแรงดัน 90°	แรงดันล้าหลังกระแส

ความเข้าใจเรื่องเฟสมีความสำคัญต่อการวิเคราะห์ค่าตัวประกอบกำลัง (Power Factor) ระบบไฟฟ้ากำลัง และการแก้ไขเพาเวอร์แฟกเตอร์ในโรงงานอุตสาหกรรม (Grainger & Stevenson, 1994; Alexander & Sadiku, 2021)

11 ตัวอย่างโจทย์พร้อมวิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2.3 การแปลงจำนวนเชิงซ้อนจากรูปเชิงพีชคณิตเป็นรูปเชิงขั้ว

โจทย์ จงแปลงจำนวนเชิงซ้อน

$$z = 3 + j4$$

ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 หาขนาด

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$r = \sqrt{9 + 16} = 5$$

ขั้นที่ 2 หามุม

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\theta \approx 53.13^\circ$$

ดังนั้น

$$z = 5\angle 53.13^\circ$$

ตอบ

$$3 + j4 = 5\angle 53.13^\circ$$

ตัวอย่างที่ 2.4 การแปลงจำนวนเชิงซ้อนจากรูปเชิงขั้วเป็นรูปเชิงพีชคณิต

โจทย์ จงแปลง

$$z = 10\angle 30^\circ$$

ให้อยู่ในรูป $a + jb$

วิธีทำ

ใช้สมการ

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

แทนค่า

$$z = 10(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ)$$

โดยที่

$$\cos 30^\circ = 0.866, \quad \sin 30^\circ = 0.5$$

ดังนั้น

$$z = 10(0.866 + j0.5)$$

$$z = 8.66 + j5$$

ตอบ

$$10\angle 30^\circ = 8.66 + j5$$

ตัวอย่างที่ 2.5 การแปลงสัญญาณไซน์เป็นเฟสเซอร์

โจทย์ กำหนดแรงดันไฟฟ้า

$$v(t) = 311\cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$$

จงเขียนเฟสเซอร์แรงดันในรูปค่าสูงสุดและรูปค่า RMS

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 พิจารณารูปทั่วไป

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

เปรียบเทียบกับโจทย์ จะได้

$$V_m = 311 \text{ V}$$

$$\omega = 314 \text{ rad/s}$$

$$\phi = 30^\circ$$

ขั้นที่ 2 เฟสเซอร์แบบค่าสูงสุด

$$\mathbf{V} = 311\angle 30^\circ \text{ V}$$

ขั้นที่ 3 คำนวณค่า RMS

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$V_{rms} = \frac{311}{\sqrt{2}}$$

$$V_{rms} \approx 220 \text{ v}$$

ดังนั้นเฟสเซอร์แบบ RMS คือ

$$\text{v} = 220\angle 30^\circ \text{ v}$$

ตอบ เฟสเซอร์แบบค่าสูงสุดคือ $311\angle 30^\circ$ v เฟสเซอร์แบบ RMS คือ $220\angle 30^\circ$ v

ตัวอย่างที่ 2.6 การหาอิมพีแดนซ์ของวงจร R-L อนุกรม

โจทย์ วงจร R-L อนุกรมมี $R = 20\ \Omega$, $L = 0.1$ H ต่อกับแหล่งจ่ายไฟความถี่ $f = 50$ Hz จงหาอิมพีแดนซ์ของวงจร

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 หาความถี่เชิงมุม

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi(50)$$

$$\omega = 314.16 \text{ rad/s}$$

ขั้นที่ 2 หารีแอกแตนซ์ของตัวเหนี่ยวนำ

$$X_L = \omega L$$

$$X_L = 314.16(0.1)$$

$$X_L = 31.416\ \Omega$$

ขั้นที่ 3 เขียนอิมพีแดนซ์รวม

$$Z = R + jX_L$$

$$Z = 20 + j31.416\ \Omega$$

ขั้นที่ 4 หาขนาดของอิมพีแดนซ์

$$|Z| = \sqrt{20^2 + 31.416^2}$$

$$|Z| = \sqrt{400 + 986.96}$$

$$|Z| \approx 37.24\ \Omega$$

ขั้นที่ 5 หามุมของอิมพีแดนซ์

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{31.416}{20}\right)$$

$$\theta \approx 57.52^\circ$$

ดังนั้น

$$Z = 37.24\angle 57.52^\circ\ \Omega$$

ตอบ

$$Z = 20 + j31.416\ \Omega$$

หรือ

$$Z = 37.24\angle 57.52^\circ\ \Omega$$

ตัวอย่างที่ 2.7 การหากระแสในวงจร AC ด้วยเฟสเซอร์

โจทย์ แหล่งจ่ายแรงดันมีค่า

$$\mathrm{v} = 220\angle 0^\circ\ \mathrm{v}$$

ต่อกับโหลดที่มีอิมพีแดนซ์

$$Z = 20 + j31.416\ \Omega$$

จงหากระแส $\mathbf{I}$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 แปลงอิมพีแดนซ์เป็นรูปเชิงขั้ว จากตัวอย่างก่อนหน้าได้ว่า

$$Z = 37.24\angle 57.52^\circ\ \Omega$$

ขั้นที่ 2 ใช้กฎของโอห์มในรูปเฟสเซอร์

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{Z}$$

แทนค่า

$$\mathbf{I} = \frac{220\angle 0^\circ}{37.24\angle 57.52^\circ}$$

การหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว ให้หารขนาดและลบมุม

$$\mathbf{I} = \frac{220}{37.24}\angle(0^\circ - 57.52^\circ)$$

$$\mathbf{I} = 5.91\angle -57.52^\circ\ \text{A}$$

ตอบ

$$\mathbf{I} = 5.91\angle -57.52^\circ\ \text{A}$$

หมายความว่า กระแสมีขนาด 5.91 A และล้าหลังแรงดัน 57.52° ซึ่งสอดคล้องกับวงจรที่มีลักษณะเหนี่ยวนำ

12 การประยุกต์ใช้ในงานวิศวกรรมไฟฟ้า

12.1 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

จำนวนเชิงซ้อนและเฟสเซอร์ช่วยให้การวิเคราะห์วงจร AC ทำได้ง่ายขึ้น โดยเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุให้เป็นสมการพีชคณิตในรูปอิมพีแดนซ์ เช่น

$$Z_L = j\omega L$$

และ

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

ดังนั้นวงจร R, L และ C สามารถวิเคราะห์ได้ด้วยกฎของโอห์มและกฎของเคอร์ชอฟฟ์ในรูปเฟสเซอร์ (Hayt et al., 2019; Alexander & Sadiku, 2021)

12.2 การวิเคราะห์สัญญาณไฟฟ้าและรูปคลื่น

สูตรของออยเลอร์ช่วยให้สามารถแทนสัญญาณไซน์ด้วยฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลเชิงซ้อน ซึ่งเป็นพื้นฐานของการวิเคราะห์ฟูเรียร์ การวิเคราะห์สเปกตรัม และการประมวลผลสัญญาณไฟฟ้า เช่น การแยกรูปคลื่นที่ไม่เป็นไซน์ออกเป็นองค์ประกอบฮาร์มอนิก (Oppenheim et al., 1997; Lathi, 2009)

12.3 การวิเคราะห์ระบบไฟฟ้ากำลัง

ในระบบไฟฟ้ากำลัง จำนวนเชิงซ้อนใช้ในการวิเคราะห์กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน

$$S = P + jQ$$

โดยที่ S คือ กำลังเชิงซ้อน มีหน่วยเป็นโวลต์-แอมแปร์ (VA) P คือ กำลังจริง มีหน่วยเป็นวัตต์ (W) Q คือ กำลังรีแอกทีฟ มีหน่วยเป็นวาร์ (var)

แนวคิดนี้ใช้ในการวิเคราะห์โหลด มุมเฟส ตัวประกอบกำลัง และการชดเชยกำลังรีแอกทีฟในระบบไฟฟ้ากำลัง (Grainger & Stevenson, 1994; Stevenson, 1982)

12.4 การวิเคราะห์ระบบควบคุม

ในระบบควบคุม ตัวแปร $s = \sigma + j\omega$ ใช้อธิบายพฤติกรรมของระบบในโดเมนลาปลาซ ตำแหน่งโพลและซีโรบนระนาบเชิงซ้อนส่งผลต่อเสถียรภาพและการตอบสนองของระบบ เช่น ระบบที่มีโพลใกล้แกนจินตภาพอาจมีการสั่นหรือใช้เวลานานกว่าจะเข้าสู่สภาวะคงตัว (Ogata, 2010; Nise, 2020)

12.5 การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

แม้จำนวนเชิงซ้อนจะใช้เด่นชัดในวงจร AC แต่ยังมีบทบาทในการแทนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา โดยเฉพาะการวิเคราะห์คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปเฟสเซอร์ เช่น สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่มีการเปลี่ยนแปลงแบบไซน์ตามเวลา (Sadiku, 2018)

13 ตารางสรุปสูตรสำคัญประจำบท

หัวข้อ	**สูตร**	**ความหมาย**
จำนวนเชิงซ้อน	$z = a + jb$	รูปเชิงพีชคณิต
คอนจูเกต	$z^* = a - jb$	เปลี่ยนเครื่องหมายส่วนจินตภาพ
ขนาด	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	ระยะจากจุดกำเนิด
มุม	$\theta = \tan^{-1}(b/a)$	มุมกับแกนจริงบวก

รูปเชิงขั้ว	$z = r\angle\theta$	แสดงขนาดและมุม
รูปตรีโกณมิติ	$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$	เชื่อมกับเรขาคณิต
สูตรออยเลอร์	$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$	เชื่อม exponential กับ sine/cosine
รูปเอ็กซ์โพเนนเชียล	$z = re^{j\theta}$	ใช้ในสัญญาณและระบบ
เฟสเซอร์แรงดัน	$\mathsf{V} = V_{rms}\angle\phi$	แทนแรงดัน AC
กฎโอห์มเฟสเซอร์	$\mathsf{V} = \mathtt{I}Z$	ใช้วิเคราะห์วงจร AC
อิมพีแดนซ์ R	$Z_R = R$	ตัวต้านทาน
อิมพีแดนซ์ L	$Z_L = j\omega L$	ตัวเหนี่ยวนำ
อิมพีแดนซ์ C	$Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$	ตัวเก็บประจุ
กำลังเชิงซ้อน	$S = VI^*$	วิเคราะห์กำลังในระบบ AC

14 กิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียนและกิจกรรมปฏิบัติการ

14.1 กิจกรรมที่ 1 แผนภาพ Argand Diagram

วัตถุประสงค์ ให้นักศึกษาเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างรูปเชิงพีชคณิตและตำแหน่งของจำนวน-เชิงซ้อนบนระนาบเชิงซ้อน

ขั้นตอนกิจกรรม

1. แบ่งนักศึกษาเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3–4 คน
2. กำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้แต่ละกลุ่ม เช่น $2 + j3$, $-4 + j2$, $-3 - j5$, $5 - j1$
3. ให้นักศึกษาวาดตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบเชิงซ้อน
4. คำนวณขนาดและมุมของจำนวนเชิงซ้อนแต่ละตัว

5. เปรียบเทียบผลการคำนวณกับตำแหน่งบนกราฟ

ผลลัพธ์ที่คาดหวัง นักศึกษาสามารถแปลงจำนวนเชิงซ้อนจากรูปเชิงพีชคณิตเป็นรูปเชิงขั้ว และอธิบายความหมายทางเรขาคณิตได้

14.2 กิจกรรมที่ 2 การแปลงสัญญาณไซน์เป็นเฟสเซอร์

วัตถุประสงค์ ให้นักศึกษาเข้าใจการแทนสัญญาณ AC ด้วยเฟสเซอร์

ขั้นตอนกิจกรรม

1. ผู้สอนกำหนดสัญญาณแรงดันและกระแส เช่น

$$v(t) = 100\cos(377t + 20^\circ)$$

$$i(t) = 5\cos(377t - 30^\circ)$$

2. ให้นักศึกษาเขียนเฟสเซอร์ของแรงดันและกระแส
3. คำนวณความต่างเฟสระหว่างแรงดันและกระแส
4. อภิปรายว่าวงจรมีลักษณะเป็นโหลดแบบใด เช่น ตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ หรือตัวเก็บประจุ

14.3 กิจกรรมที่ 3 ปฏิบัติการคำนวณจำนวนเชิงซ้อนด้วย Python

วัตถุประสงค์ ให้นักศึกษาใช้โปรแกรมคำนวณช่วยตรวจสอบผลลัพธ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่างโค้ด

```
import cmath
import math

z = 3 + 4j
```

```
r = abs(z)
theta_rad = cmath.phase(z)
theta_deg = math.degrees(theta_rad)

print("z =", z)
print("Magnitude =", r)
print("Angle =", theta_deg, "degrees")
print("Conjugate =", z.conjugate())
```

คำถามหลังปฏิบัติการ

1. ค่า Magnitude ที่ได้ตรงกับการคำนวณด้วยมือหรือไม่
2. มุมที่คำนวณได้อยู่ในจตุภาคที่ถูกต้องหรือไม่
3. Python ใช้สัญลักษณ์ j ในการแทนจำนวนเชิงซ้อนอย่างไร

อ้างอิงแนวคิดการใช้ Python เพื่อการคำนวณจากเอกสาร Python Documentation และ NumPy Documentation

15 แบบฝึกหัดท้ายบท

15.1 ระดับพื้นฐาน

1. จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
   (a) $z = 5 + j2$
   (b) $z = -3 + j7$
   (c) $z = 4 - j6$
2. กำหนดให้ $z_1 = 3 + j4$ และ $z_2 = 2 - j5$ จงหา

(a) $z_1 + z_2$

(b) $z_1 - z_2$

(c) $z_1 z_2$

(d) z_1^*

3. จงแปลงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

(a) $z = 1 + j1$

(b) $z = 3 + j4$

(c) $z = -2 + j2$

4. จงแปลงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงพีชคณิต

(a) $z = 10\angle 0^\circ$

(b) $z = 5\angle 60^\circ$

(c) $z = 8\angle -30^\circ$

5. จงเขียน e^{j30° ให้อยู่ในรูป $a + jb$

15.2 ระดับประยุกต์

6. กำหนดแรงดันไฟฟ้า

$$v(t) = 170\cos(377t + 45^\circ) \text{ V}$$

จงเขียนเฟสเซอร์แรงดันในรูปค่าสูงสุดและค่า RMS

7. กำหนดกระแสไฟฟ้า

$$i(t) = 10\sin(314t + 20^\circ) \text{ A}$$

จงเขียนเฟสเซอร์กระแสโดยใช้โคไซน์เป็นสัญญาณอ้างอิง

8. วงจร R-L อนุกรมมี $R = 10\ \Omega$, $L = 0.05$ H, $f = 50$ Hz จงหาอิมพีแดนซ์รวมของวงจร

9. วงจร R-C อนุกรมมี $R = 100\ \Omega$, $C = 100\ \mu$F, $f = 50$ Hz จงหาอิมพีแดนซ์รวมของวงจร

10. แหล่งจ่ายแรงดัน V $= 220\angle 0^\circ$ V ต่อกับโหลด $Z = 30 + j40\ \Omega$ จงหากระแส I

15.3 ระดับวิเคราะห์

11. อธิบายว่าเหตุใดการใช้เฟสเซอร์จึงช่วยให้การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับง่ายกว่าการวิเคราะห์ในโดเมนเวลาโดยตรง

12. เปรียบเทียบลักษณะเฟสของแรงดันและกระแสในตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ พร้อมยกตัวอย่างการประยุกต์ใช้งานจริง

13. ถ้าวงจรมีอิมพีแดนซ์ $Z = 20 - j15\ \Omega$ จงวิเคราะห์ว่าโหลดมีลักษณะเหนี่ยวนำหรือเก็บประจุ พร้อมอธิบายเหตุผล

14. จงวิเคราะห์ผลของการเพิ่มความถี่ต่ออิมพีแดนซ์ของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ

15. ระบบควบคุมมีโพลที่ $s = -2 + j5$ และ $s = -2 - j5$ จงอธิบายความหมายเบื้องต้นของส่วนจริงและส่วนจินตภาพของโพลต่อพฤติกรรมของระบบ

16 คำถามทบทวนท้ายบท

1. จำนวนเชิงซ้อนแตกต่างจากจำนวนจริงอย่างไร

2. เหตุใดงานวิศวกรรมไฟฟ้าจึงนิยมใช้ j แทน i

3. รูปเชิงพีชคณิตและรูปเชิงขั้วเหมาะกับการคำนวณแบบใด
4. คอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อนมีประโยชน์อย่างไรในการหารจำนวนเชิงซ้อน
5. สูตรของออยเลอร์มีความสำคัญต่อการวิเคราะห์สัญญาณไฟฟ้าอย่างไร
6. เฟสเซอร์คืออะไร และใช้แทนสัญญาณชนิดใด
7. ค่า RMS มีความสำคัญอย่างไรในการวิเคราะห์วงจร AC
8. อิมพีแดนซ์แตกต่างจากความต้านทานอย่างไร
9. เหตุใดตัวเหนี่ยวนำจึงมีอิมพีแดนซ์เป็น $j\omega L$
10. เหตุใดตัวเก็บประจุจึงมีอิมพีแดนซ์เป็น $\dfrac{1}{j\omega C}$
11. วงจรที่มีอิมพีแดนซ์ส่วนจินตภาพเป็นบวกบอกลักษณะใดของวงจร
12. วงจรที่มีอิมพีแดนซ์ส่วนจินตภาพเป็นลบบอกลักษณะใดของวงจร
13. เฟสเซอร์ช่วยในการวิเคราะห์ระบบไฟฟ้ากำลังอย่างไร
14. ตัวแปร $s = \sigma + j\omega$ ในระบบควบคุมมีความหมายอย่างไร
15. โปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์ช่วยตรวจสอบคำตอบของบทนี้ได้อย่างไร

17 สรุปท้ายบท

บทที่ 2 กล่าวถึงจำนวนเชิงซ้อน ฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน และเฟสเซอร์ ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญของการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับและระบบทางวิศวกรรมไฟฟ้า โดยสรุปได้ดังนี้

1. จำนวนเชิงซ้อนเขียนได้ในรูป $z = a + jb$ โดย a คือส่วนจริง และ b คือส่วนจินตภาพ
2. หน่วยจินตภาพในงานวิศวกรรมไฟฟ้าใช้ j โดยมีสมบัติ $j^2 = -1$

3. จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนได้หลายรูปแบบ ได้แก่ รูปเชิงพีชคณิต รูปเชิงขั้ว รูปตรีโกณมิติ และรูปเอ็กซ์โพเนนเชียล

4. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนคือ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ และมุมคือ $\theta = \tan^{-1}(b/a)$

5. สูตรของออยเลอร์ $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ เป็นสะพานเชื่อมระหว่างจำนวนเชิงซ้อนกับสัญญาณไซน์

6. เฟสเซอร์ใช้แทนสัญญาณไซน์ในสถานะคงตัว โดยแสดงขนาดและมุมเฟสของสัญญาณ

7. อิมพีแดนซ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ใช้แทนการต้านทานในวงจร AC

8. อิมพีแดนซ์ของตัวต้านทานคือ R ของตัวเหนี่ยวนำคือ $j\omega L$ และของตัวเก็บประจุคือ $\frac{1}{j\omega C}$

9. กฎของโอห์มในรูปเฟสเซอร์คือ $\mathrm{V} = \mathrm{I}Z$

10. จำนวนเชิงซ้อนยังเชื่อมโยงกับระบบควบคุมผ่านตัวแปร $s = \sigma + j\omega$ และเชื่อมโยงกับระบบไฟฟ้ากำลังผ่านกำลังเชิงซ้อน $S = P + jQ$

18 ข้อเสนอแนะรูปภาพ แผนภาพ และกราฟที่ควรมีในบทเรียน

ลำดับ	รูปภาพ/แผนภาพ/กราฟที่ควรมี	จุดประสงค์ทางการเรียนรู้	แหล่งที่มา/คำค้นที่แนะนำ
1	แผนภาพระนาบเชิงซ้อน	แสดงแกนจริง แกนจินตภาพ และตำแหน่ง $z = a + jb$	complex plane Argand diagram

2	แผนภาพการแปลง $a + jb$ เป็น $r\angle\theta$	อธิบายขนาดและมุมของจำนวนเชิงซ้อน	สร้างเองด้วย Python หรือ GeoGebra
3	แผนภาพวงกลมหนึ่งหน่วยและสูตรออยเลอร์	เชื่อมโยง $e^{j\theta}$, $\cos\theta$, $\sin\theta$	Euler formula unit circle
4	กราฟสัญญาณไซน์และเฟสเซอร์หมุน	อธิบายที่มาของเฟสเซอร์	phasor representation of sinusoid
5	แผนภาพเฟสแรงดันและกระแสใน R, L, C	เปรียบเทียบการนำหน้าและล้าหลังของเฟส	หนังสือวงจรไฟฟ้าหรือสร้างเองด้วย Python
6	วงจร R-L และ R-C อนุกรมพร้อมเฟสเซอร์ไดอะแกรม	เชื่อมโยงทฤษฎีกับการวิเคราะห์วงจรจริง	RL circuit phasor diagram, RC circuit phasor diagram
7	ระนาบ s ในระบบควบคุม	แสดงตำแหน่งโพลและซีโรเบื้องต้น	s-plane poles zeros control system
8	ตัวอย่างกราฟจำนวนเชิงซ้อนจาก Python	ฝึกใช้โปรแกรมคำนวณ	สร้างเองด้วย Python Matplotlib

หมายเหตุ: รูปภาพ สำหรับ เอกสาร ประกอบ การ สอน ควร สร้าง เอง จาก Python, MATLAB, GNU Octave หรือ GeoGebra เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาลิขสิทธิ์ และควรอ้างอิงแนวคิดจากตำราหลักที่ใช้ในบทเรียน

19 เอกสารอ้างอิงท้ายบท

เอกสารอ้างอิงหลัก

Alexander, C. K., & Sadiku, M. N. O. (2021). *Fundamentals of Electric Circuits* (7th ed.). McGraw-Hill.

Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2014). *Complex Variables and Applications* (9th ed.). McGraw-Hill.

Hayt, W. H., Kemmerly, J. E., & Durbin, S. M. (2019). *Engineering Circuit Analysis* (9th ed.). McGraw-Hill.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). John Wiley & Sons.

Nilsson, J. W., & Riedel, S. A. (2019). *Electric Circuits* (11th ed.). Pearson.

เอกสารอ้างอิงด้านสัญญาณ ระบบ และระบบควบคุม

Lathi, B. P. (2009). *Linear Systems and Signals* (2nd ed.). Oxford University Press.

Nise, N. S. (2020). *Control Systems Engineering* (8th ed.). Wiley.

Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering* (5th ed.). Prentice Hall.

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1997). *Signals and Systems* (2nd ed.). Prentice Hall.

เอกสารอ้างอิงด้านระบบไฟฟ้ากำลังและสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

Grainger, J. J., & Stevenson, W. D. (1994). *Power System Analysis*. McGraw-Hill.

Sadiku, M. N. O. (2018). *Elements of Electromagnetics* (7th ed.). Oxford University Press.

Stevenson, W. D. (1982). *Elements of Power System Analysis* (4th ed.). McGraw-Hill.

แหล่งเรียนรู้แบบเปิดและเครื่องมือคำนวณ

All About Circuits. (n.d.). *AC Circuit Analysis*. https://www.allaboutcircuits.com/textbook/alternating-current/

GNU Octave Project. (n.d.). *GNU Octave Documentation*. https://docs.octave.org/

MIT OpenCourseWare. (n.d.). *Circuits and Electronics*. Massachusetts Institute of Technology. https://ocw.mit.edu/

NumPy Developers. (n.d.). *NumPy Documentation*. https://numpy.org/doc/

Python Software Foundation. (n.d.). *Python Documentation*. https://docs.python.org/3/

SciPy Developers. (n.d.). *SciPy Documentation*. https://docs.scipy.org/doc/scipy/

SymPy Development Team. (n.d.). *SymPy Documentation*. https://docs.sympy.org/

20 แนวทางการตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา

1. ตรวจสอบการใช้สัญลักษณ์ j ให้สอดคล้องกับงานวิศวกรรมไฟฟ้า
2. ตรวจสอบหน่วยของตัวแปร เช่น V, A, Ω, H, F, rad/s
3. ตรวจสอบการแปลงมุมระหว่างองศาและเรเดียน

4. ตรวจสอบว่าการใช้ค่า RMS และค่าสูงสุดไม่ปะปนกัน

5. ตรวจสอบเครื่องหมายของรีแอกแตนซ์ โดยตัวเหนี่ยวนำเป็น $+j\omega L$ และตัวเก็บประจุเป็น $-j/(\omega C)$

6. ตรวจสอบการแปลงไซน์เป็นโคไซน์ก่อนเขียนเฟสเซอร์

7. ตรวจสอบว่าการอ้างอิงในแต่ละหัวข้อสอดคล้องกับเนื้อหาที่กล่าวถึง