Treball final CSL

54894677W

5-5-2023

Estudi de les ressonàncies del cristall de quars

PAS 1: El conjunt sèrie R_m - L_m - C_m té una impedància $Z_m(\omega) = R_m + j(L_m\omega - \frac{1}{C_m\omega})$. Podem observar que la funció $|Z_m|(\omega)$ té un únic mínim relatiu o, d'altra banda, que la part imaginària de $Z_m(\omega)$ es cancel·la per $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$. Sigui com sigui, s'arriba a la conclusió que el conjunt té una única freqüència de ressonància situada a $f_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$.

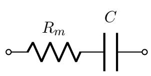
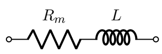
PAS 2: Evaluem per casos la impedància del conjunt.

$f = f_0$*:* Com $Z_m = R_m$ el conjunt es pot substituir per un resistor.

$f < f_0$*:* Intuitivament, la impedància d'un condensador a freqüències baixes és més gran que la d'un inductor. Analíticament, si $\Im(Z_m) = L_m\omega - \frac{1}{C_m\omega}$ per una $\omega < \omega_0$, llavors $\frac{1}{C_m\omega} > \frac{1}{C_m\omega_0}$ i $L_m\omega < L_m\omega_0$ resultant en una part imaginària negativa. Podem aleshores substituir el conjunt per un resistor en sèrie amb un condensador. [1]

[1] En sèrie la impedància es suma. La impedància d'un condensador és $-j\frac{1}{C\omega}$ (part imaginària negativa). En paral·lel caldria un inductor.

$f > f_0$*:* Amb el mateix raonament que abans obtenim que la part imaginària es positiva. Per tant, podem substituir el conjunt per un resistor en sèrie amb un inductor.

	$f < f_0$	$f = f_0$	$f > f_0$
Circuits equivalents:			

Taula 1: Comportament elèctric del cristall de quars al voltant de la ressonància sèrie

PAS 3: El paral·lel C_e sí provoca la aparició d'una freqüència de ressonància adicional superior a la ressonància sèrie. En aquesta segona ressonància el conjunt té una impedància molt gran.

Per freqüencies més baixes que f_0 el conjunt sèrie es pot substituir per un resistor i un condensador de valor indeterminat. Aquest últim conjunt pero, en paral·lel amb un altre condensador no provoca la aparició de cap frequència de ressonància[2]. En canvi, per freqüencies més altes que f_0 es té un bloc sèrie resistor-inductor en paral·lel amb un condensador. Aquesta última configuració té una freqüència de ressonància per $\frac{1}{\sqrt{LC_e}}$.

[2] La part imaginària de la impedància no es pot cancel·lar per cap $0 < \omega < \infty$.

El bloc $R - L$ en paral·lel amb C és més habitual. La resistència R_m és suficientment petita en relació a L com a per a tractarla com la resistència interna d'un inductor no ideal. Aixi doncs podem reescriure el conjunt com a la figura 1. On R_p és $R_m Q_b^2$ i L_p és practicament L. En freqüència de ressonància aquest conjunt te una impedància real R_p. Com Q_b és molt gran aquesta impedància també ho serà.

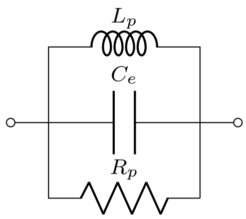


Figura 1: Circuit equivalent per excitacions amb freqüència superior a la ressonància sèrie

Estudi analític de la resposta freqüencial del circuit de mesura

PAS 4: Apliquem anàlisi per nodes al circuit de la figura 2 i obtenim la següent equació.

$$V_o\left[\frac{1}{R_o}+\frac{1}{R_m+L_m s+\frac{1}{C_m s}}\right]=V_{in}\left[\frac{1}{R_m+L_m s+\frac{1}{C_m s}}\right]$$
$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)}=\frac{\frac{1}{R_m+L_m s+\frac{1}{C_m s}}}{\frac{1}{R_o}+\frac{1}{R_m+L_m s+\frac{1}{C_m s}}}$$

Després de normalitzar la funció de xarxa obtenim:

$$H(s)=\frac{R_o}{L_m}\cdot\frac{s}{s^2+\frac{R_m+R_o}{L_m}s+\frac{1}{L_m C_m}}$$

Aquesta funció de xarxa clarament correspon a un filtre passabanda de segon ordre. De segon ordre perquè hi ha dos pols i passabanda perquè hi ha un zero per $s=0$ i un altre per $s\to\infty$.

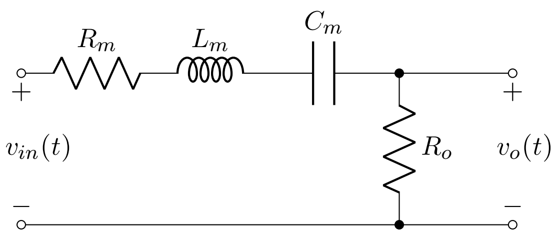


Figura 2: Esquema del circuit de mesura menyspreant C_e i eliminant el conjunt $v_g(t)$ - R_o

PAS 5: Per esbrinar les característiques del filtre fem servir les formules deduides per un filtre passabanda de segon ordre genèric.

$$H(s)=\frac{R_o}{L_m}\cdot\frac{s}{s^2+\frac{R_m+R_o}{L_m}s+\frac{1}{L_m C_m}}=k\cdot\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$$

Aleshores,

Paràmetre intermig	k	ω_0	ζ
Expressió	$\frac{R_o}{L_m}$	$\frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$	$\sqrt{\frac{C_m}{L_m}}\frac{R_m+R_o}{2}$

Taula 2: Paràmetres d'un passabanda genèric

Finalment,

Paràmetre	Expressió matemàtica
Amplificació màxima, $\|H\|_{max}$	$\frac{R_o}{R_o+R_m}$
Amplada de banda BW (Hz)	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R_m+R_o}{L_m}$
Freqüència de ressonància f_0 (Hz)	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$

Taula 3: Paràmetres del filtre en funció dels valors dels elements

Determinació de R_m, L_m i C_m a partir de les dades experimentals

PAS 6: Veure figura 3.

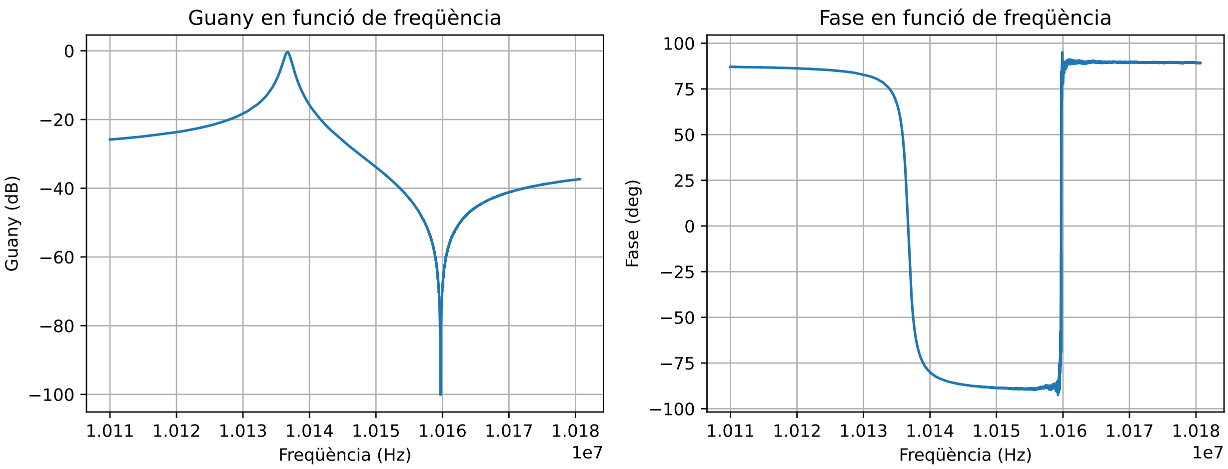


Figura 3: Representació de la resposta freqüencial del circuit de mesura

PAS 7: Busquem a les mesures els valors de f_0, f_{c1}, f_{c2} i $|H_{max}|$. Després aïllem de les expressions previament deduïdes.

Paràmetre	R_m	L_m	C_m	Q
Expressió aïllada	$\frac{R_o}{\|H_{max}\|} - R_o$	$\frac{R_m+R_o}{2\pi BW}$	$\frac{1}{L_m(2\pi f_0)^2}$	$\frac{f_0}{BW}$

Taula 4: Valors dels components en funció de les mesures i factor de qualitat

Carreguem les dades per cercar els valors desitjats. La eïna escollida per dur a terme la operació ha estat Python.

```
hmax_idx = modules.argmax()
hmax = modules[hmax_idx]
Ro = 50
Rm = Ro/hmax - Ro
fo = freqs[hmax_idx]
fc1 = freqs[(np.abs(modules[:hmax_idx] - hmax/np.sqrt(2))).argmin()]
```

```
fc2 = freqs[(np.abs(modules[hmax_idx:] - hmax/np.sqrt(2))).argmin() + hmax_idx]
BW = fc2 - fc1
Lm = (Ro + Rm)/(2 * pi * BW)
Cm = 1/( (2 * pi * fo)**2 * Lm )
Q = fo/BW
```

En fer `print` dels valors obtenim les següents dades.[3]

[3] Els calculs estàn fets amb unitats del sistema internacional

```
Rm = 2.309326308199182
BW = 1330.0
Lm = 0.006259614926132951
Cm = 3.938223103179858e-14
Q = 7621.571428571428
```

Per obtenir BW_u i Q_u plantejem nodes al circuit de la figura 4 i normalitzem $H(s)$.

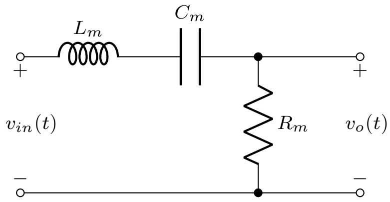


Figura 4: Circuit equivalent del cristall conectat a una font ideal

$$V_o\left[\frac{1}{R_m} + \frac{1}{L_m s + \frac{1}{C_m s}}\right] = V_{in}\left[\frac{1}{L_m s + \frac{1}{C_m s}}\right]$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{L_m s + \frac{1}{C_m s}}}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{L_m s + \frac{1}{C_m s}}}$$

$$H(s) = \frac{R_m}{L_m} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{R_m}{L_m}s + \frac{1}{C_m L_m}}$$

D'aquesta manera es pot veure que $BW_u = \frac{R_m}{L_m}$ i que $Q_u = \frac{\omega_0}{BW_u} = \frac{1}{BW_u\sqrt{L_m C_m}}$. Ho calculem i queda.

```
BWu = Rm/Lm
Qu = 1/(BWu * np.sqrt(Lm * Cm))
```

```
BWu = 368.9246599751835
Qu = 172638.7758295109
```

Determinació de C_e

PAS 8: La freqüència f_1 a la qual es produeix la segona ressonància està situada al segón pic (el negatiu) de la gràfica de la figura 3. És una frequencia de ressonància perque la fase és nula, i és negativa perque la impedància del cristall és molt alta. Tal i com s'ha raonat anteriorment.

El valor de f_1 rondarà els 10.16 MHz.

Per coneixer el valor de la impedància i la admitància amb exactitud executem les següents línies de codi.

```
f1 = freqs[modules.argmin()]
Zs = Rm + 1j*(Lm * f1 * 2*pi - 1/(Cm * f1 * 2*pi))
Ys = 1/Zs
Rp = 1/(Ys.real)
Lp = -1/(Ys.imag * f1 * 2*pi)
```

```
f1 = 10159700.0
Zs = (2.309326308199182+1807.9317002811003j)
Ys = (7.065136469458759e-07-0.0005531173374934277j)
Rp = 1415400.8267537504
Lp = 2.8321873317442023e-05
```

Aquesta admitància ens indica que el conjunt pot ser expressat com es mostra a la figura 1, on $L_p \simeq 28.32\,\mu\mathrm{H}$ i $R_p \simeq 1.41\,\mathrm{M\Omega}$.

Com per f_1 hi ha ressonància, sabem que en aquesta configuració la admitància del inductor L_p i el condensador C_e han de sumar 0.

$$\Im(Y_s) + C_e(2\pi f_1) = 0$$
$$C_e = \frac{-\Im(Y_s)}{2\pi f_1}$$

En codi

```
Ce = -(Ys.imag)/(2*pi * f1)
```

```
Ce = 8.66475962596407e-12
```

La taula 5 és la recopilació de totes les dades obtingudes.

Paràmetre	Valor mesurat	Element	Valor calculat
$\lvert H_{max}\rvert$	0.9558	R_m	$2.309\,\Omega$
BW	1330 Hz	L_m	6.259 mH
f_0	10.136 MHz	C_m	0.039 38 pF
f_1	10.160 MHz	C_e	8.664 pF
Paràmetre	Valor calculat		
Q	7621		
Q_u	172 638		

Taula 5: Deducció dels valors del model del cristall

Validació de resultats

PAS 9: El resultat es troba a la figura 5. Es pot apreciar un cert desfasament entre les respostes. Això és degut en major part a imprecisió a l'hora de entrar els valors dels components al simulador. Tret d'aquest detall el model funciona practicament igual entre les freqüències desitjades que el quars.

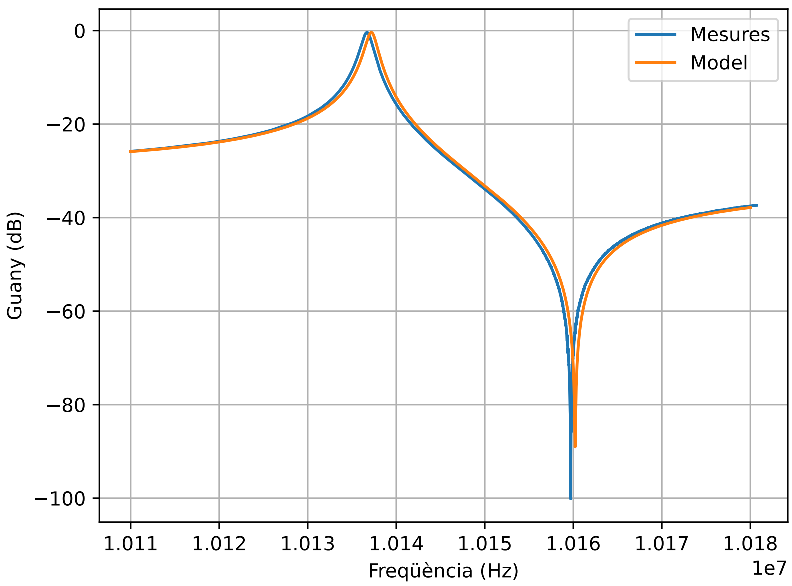


Figura 5: Dades simulades sobre dades mesurades

Aplicació al filtrat de senyals

PAS 10: Normalment s'hauria de calcular les integrals corresponents per obtenir els coeficients de Fourier, de tota manera també podem observar el següent.[4]

[4] El raonament fa us de la famosa formula $\cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$

$$\begin{aligned} v_g(t) &= 6 \cdot \cos^2(2\pi f_x t) \\ &= 6\left(\frac{1+\cos\left(2(2\pi f_x t)\right)}{2}\right) \\ &= 3 + 3\cos(4\pi f_x t) \end{aligned}$$

Aquesta última expressió ja és una combinació lineal de cosinus. Per tant, equival al seu desenvolupament de Fourier.

PAS 11: Per $f_x = \frac{f_o}{2}$, $v_g(t) = 3 + 3\cos(2\pi f_o t)$. La component continua serà gairebé completament eliminada pel filtre, d'altra banda, el cosinus no serà gaire atenuat i gens desfasat.[5]

[5] Com la freqüència del cosinus és la de ressonància la fase que aporta el filtre es nula. La atenuació es notable pero baixa.

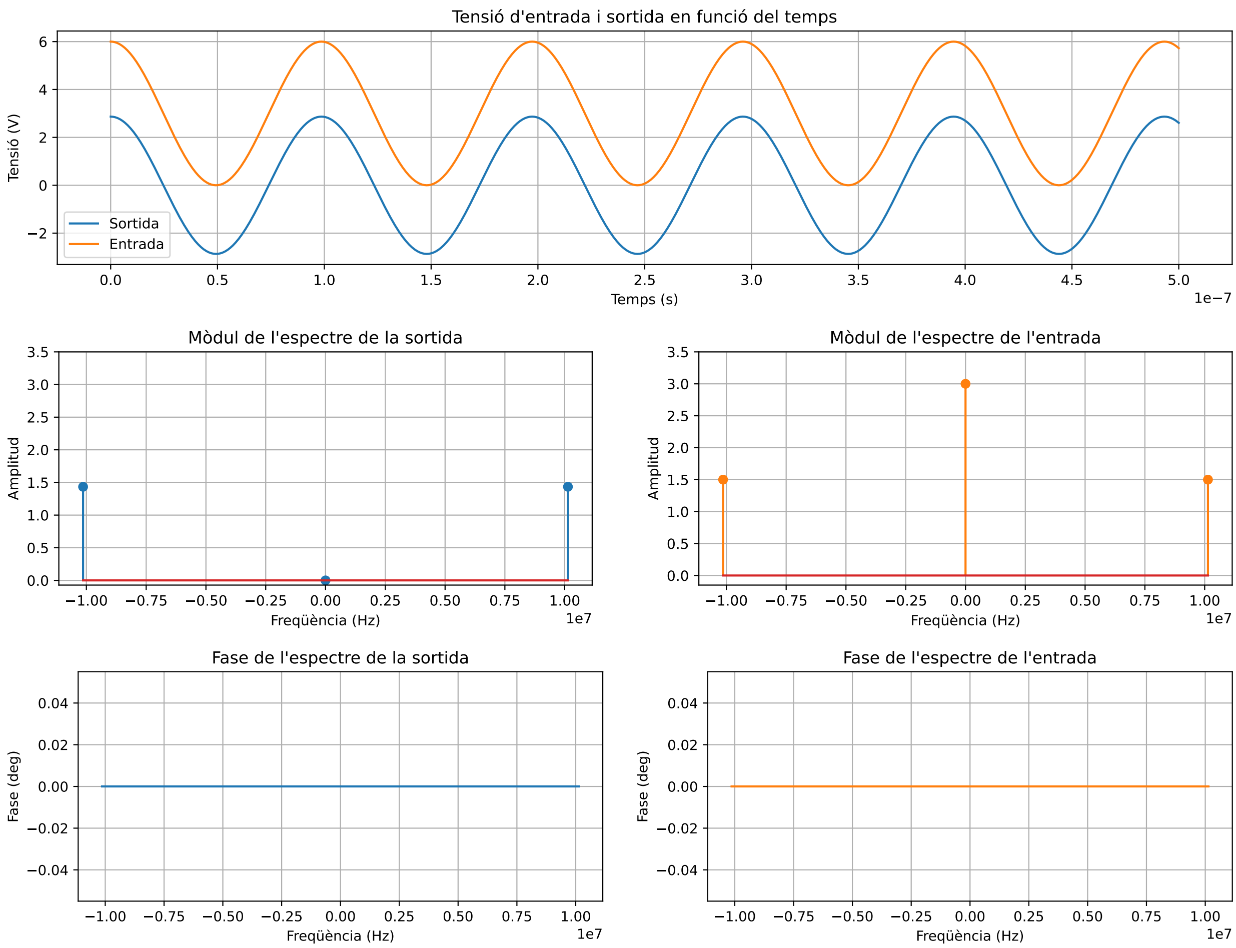


Figura 6: Anàlisi de l'entrada v_g i la sortida del filtre