פתרון מטלה 04 — תורת ההסתברות (1), 80420

25 בנובמבר 2024

שאלה 1

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נסתור את הטענה כי שני מאורעות A, B הם בלתי־תלויים אם ורק אם הם זרים על־ידי דוגמה נגדית.

פתרון נגדיר Ω מאורע של הטלת קוביה, $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}$ ונגדיר שהקוביה לא הוגנת ו־1 לא יכול לצאת (השאר בהסתברות שווה), אז $A \cap B \neq \emptyset$ ולכן הם לא זרים, אבל

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = 0 \neq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

סעיף ב'

נסתור את הטענה כי אם A ו־B בלתי־תלויים וגם B ו־C בלתי־תלויים אז A ו־C בלתי־תלויים.

פתרון נגדיר Ω הטלת שתי קוביות, A המאורע שיצא 1 בקוביה א', B המאורע שיצא 1 בקוביה ב' ו־$C = A$, אז

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

לכן A, B בלתי־תלויים, ולכן גם B, C בלתי־תלויים, אבל $A = C$ והם כמובן לא בלתי־תלויים:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{36} = \mathbb{P}^2(A)$$

סעיף ג'

נוכיח שאם A בלתי־תלוי בעצמו, אז $\mathbb{P}(A) = 0$ או $\mathbb{P}(A) = 1$.

הוכחה. נניח בשלילה ש־$\mathbb{P}(A) \notin \{0,1\}$ ולכן

$$\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}^2(A) \iff 1 = \mathbb{P}(A)$$

וקיבלנו סתירה. $\square$

סעיף ד'

אם A, B בלתי־תלויים אז גם A^C, B^C בלתי־תלויים.

פתרון ראינו בכיתה כי גם A ו־B^C בלתי־תלויים, ומאותה טענה גם A^C ו־B^C בלתי־תלויים.

סעיף ה'

נסתור את הטענה כי אם A, B, C בלתי־תלויים אז גם $A \cup B$ ו־C בלתי־תלויים.

פתרון נניח A קוביה א' יצאה 1, B קוביה ב' יצאה 1 ו־$C = A^C$ אז כמובן A, B, C בלתי־תלויים אבל

$$\mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) = 0 \neq \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(A \cup B)$$

סעיף ו'

אם A, B בלתי־תלויים וכן A, C בלתי־תלויים אז $A, B \cup C$ בלתי תלויים.

פתרון נניח Ω הטלת שתי קוביות, נניח גם A שיצא סכום 7, ו־B שיצא 4 בקוביה הראשונה ו־C שיצא 4 בקוביה השניה.

ראינו בהרצאה כי A, B וגם A, C שני זוגות מאורעות בלתי־תלויים, אבל

$$\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \frac{2}{36} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{6+6-1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C)$$

סעיף ז'

נוכיח שאם A ו־B בלתי־תלויים וכן A ו־C בלתי־תלויים וגם B, C זרים אז A ו־$B \cup C$ בלתי־תלויים.

הוכחה. נבחין כי

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap (B \uplus C)) &= \mathbb{P}((A \cap B) \uplus (A \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\
&= \mathbb{P}(A)(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A \cup C)
\end{aligned}$$

$\square$

שאלה 2

נוכיח שהמאורעות $A_1, \dots, A_n$ הם בלתי תלויים אם ורק אם לכל $I \subseteq [n]$ מתקיים

$$\mathbb{P}((\bigcap_{i\in I} A_i) \cap (\bigcap_{i\in[n]\setminus I} A_i^C)) = (\prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)) \cdot (\prod_{i\in[n]\setminus I} \mathbb{P}(A_i^C))$$

הוכחה. נניח ש־$A_1, \dots, A_n$ בלתי תלויים ולכן מטענה מהכיתה גם $A_1, \dots, A_n, A_1^C, \dots, A_n^C$ בלתי־תלויים.
יהי $I \subseteq [n]$ ונגדיר $J = I \cup \{n + j \mid j \in [n] \wedge j \notin I\}$ ונקבל מאי־התלות ישירות

$$\mathbb{P}((\bigcap_{i\in I} A_i) \cap (\bigcap_{i\in[n]\setminus I} A_i^C)) = (\prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)) \cdot (\prod_{i\in[n]\setminus I} \mathbb{P}(A_i^C))$$

נניח את כיוון השני.

יהי $i \in [n]$ כלשהו ונרצה להראות כי A_i בלתי־תלוי ב־$A_i \setminus \{A_j \mid 1 \le j \le n\}$. □