

פתרון מטלה 5 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

5 ביוני 2024



שאלה 1

ניעזר בפולינום טיילור כדי למצוא קירוב רציונלי ל- $\cos \frac{1}{4}$ כך שהשגיאה לא תהיה מעל 10^{-12} .

פתרון. בכיתה מצאנו כי

$$P_{n,\cos,0} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

ונבחן את השארית בצורת לגרנז'

$$R_n = \frac{\cos^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} x^{k+1}$$

ובהתאם

$$|R_n| \leq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{4^{k+1}(k+1)!}$$

אם כן נמצא $k \in \mathbb{N}$ עבורו $4^{k+1}(k+1)! \geq 10^{12}$, נבחין כי תנאי זה מתקיים עבור $k = 9$ ולכן

$$\cos \frac{1}{4} = \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{(2n)!} x^{2k} + R_n, \quad |R_n| < 10^{-12}$$

□

שאלה 2

נחשב את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(x) - x}{\sin^3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{2 \sin^3(x)}$$

נבחין כי נגזרותיה הראשונות של $\sin(2x)$ הן $\sin(2x)$, $2 \cos(2x)$, $-4 \sin(2x)$ ובהתאם עבור $x = 0$ נקבל $0, 2, 0$ ולכן הגבול שקול לביטוי

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + 2x - 0 + R_{3, \sin(2x), 0}(x) - 2x}{2 \sin^3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{2 \sin^3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)/x^3}{2 \sin^3(x)/x^3} = \frac{0}{2} = 0$$

שאלה 3

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי $f(x) = \sin(x^{10})$ ונחשב את $f^{(2024)}(0), f^{(2025)}(0), f^{(2026)}(0)$.
נשתמש בתוצאת סעיף 6' מהמטלה הקודמת ונקבל כי $(f(x))^{(k)} = f^{(k)}(x)h(x)$ $\forall k \geq 0$ כאשר h פולינום כלשהו.
עתה נבחין כי כל מונום ב- h מוכפל ב- $\sin(x^{10})$ או ב- $\cos(x^{10})$, וכי הם מתחלפים בזוגיות (להוציא סימן) ולכן חזקת המונום זוגית רק במקרה של מכפלה ב- \cos וזוגית במכפלה ב- \sin , ונקבל כי האיבר החופשי מוכפל תמיד ב- \sin .
לכן לכל נגזרת באפס כלל המונומים מתאפסים בשל הכפולה ב- x , והאיבר החופשי מתאפס שכן $\sin(0^k) = 0$ לכל $k \in \mathbb{N}$. בהתאם נובע

$$f^{(2024)}(0) = f^{(2025)}(0) = f^{(2026)}(0) = 0$$

שאלה 4

סעיף א'

נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$0 < e - S_n < \frac{3}{(n+1)!}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ כאשר}$$

הוכחה. נבחין כי על-פי הנלמד בכיתה מתקבל $S_n = P_{n,\exp,0}(1)$

עוד ידוע ש- $\exp(1) = e$ ולכן $R_{n,\exp,0}(1) = e - S_n$

נציג את השארית בצורת לגרנז' ונקבל

$$R_{n,\exp,0}(1) = \frac{\exp^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

עתה נבחין כי $0 < c < 1$ על-פי משפט השארית ובהתאם $1 < e^c < e < 3$ ומכאן נסיק ישירות כי

$$0 < R_{n,\exp,0}(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

ומצאנו כי אי-השוויון נכון.

סעיף ב'

נמצא קירוב רציונלי ל- e כך שהשגיאה לא תעלה על 10^{-3} .

לאחר מכן נשווה תוצאה זו לקירוב $(1 + \frac{1}{1000})^{1000}$.

מצאנו בסעיף הקודם חסם לשארית הקירוב הרציונלי לפי פולינום טיילור ל- e , ולכן מספיק שנמצא $n \in \mathbb{N}$ עבורו

$$3 \cdot 10^3 = 3000 < (n+1)!$$

מבדיקה מהירה נקבל כי $n = 6$ מקיים את השוויון והוא הטבעי המינימלי הכזה (נשבע שבדקתי בדף ולא במחשבון).

לכן $e = \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!}$ בקירוב הרלוונטי.

$$e = 2.71828182846 \dots$$

$$\approx \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} = 2.718055555 \dots$$

$$\approx (1 + \frac{1}{1000})^{1000} = 2.71692393224$$

דהינו הקירוב שמצאנו הוא הרבה יותר מדויק ביחס לכמות החישוב הנדרשת.

סעיף ג'

נוכיח כי e לא רציונלי.

הוכחה. נניח בשלילה כי e רציונלי, ולכן קיימים $p, q \in \mathbb{N}$ עבורם מתקיים $e = \frac{p}{q}$. עתה נשים לב כי

$$e = \frac{p}{q} = \frac{p \cdot (q-1)!}{q!}$$

לא יודע, אחר כך

שאלה 5

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה.

ידוע גם כי לכל $b > 0$ קיים M קבוע כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [0, b]$ מתקיים $|f^{(n)}(x)| \leq M$.
נוכיח שלכל $b > 0$ מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(b) = f(b)$ כאשר $P_n(x) = P_{n,f,0}(x)$.

הוכחה. יהי $b > 0$ אז קיים M קבוע כך שלכל $x \in [0, b]$ מתקיים

$$\frac{|f^{(n+1)}(b)|}{(n+1)!} < \frac{M}{(n+1)!}$$

ובהתאם גם

$$0 \leq R_n(x) = \frac{|f^{(n+1)}(b)|}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{Mb^{n+1}}{(n+1)!}$$

כאשר R_n שארית בצורת לגרנז'. כמובן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Mb^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

ולכן מכלל הסנדוויץ' נובע כי $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ולכן נסיק כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - R_n(x) = f(x)$$

ובפרט הגבול מתקיים גם עבור $x = b$.

□

שאלה 6

יהי $\alpha \in \mathbb{Q}$ ונגדיר $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ על-ידי $f(x) = (x+1)^\alpha$

סעיף א'

יהי $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ונחשב את $P_{n,f,0}$.

תחילה נבחין כי $f^{(n)}(x) = (\prod_{k=0}^{n-1} \alpha^k)(x+1)^{\alpha-n}$ על-פי חוקי גזירה.

עתה נחשב את פולינום טיילור:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha^k \right) (0+1)^{\alpha-n} \frac{1}{k!} 1^{\alpha-k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k$$

סעיף ב'

נחשב את P_4 עבור f כאשר $\alpha = \frac{1}{2}$.

קיבלנו

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{32}x^2 + \dots$$

סעיף ג'

.i

נקבל כי

$$P_0(9) = 1, P_1(9) = 5.5, P_2(9) = -4.65, P_3(9) = 40.9375, P_4(9) = -215 \dots$$

ונבחין כי הסדרה הזו לא מתכנסת, אף לא במובן הרחב.

.ii

נקבל הפעם כי

$$3 \cdot P_0(9) = 3, 3 \cdot P_1(9) = 3.166\dots, 3 \cdot P_2(9) = 3.1620\dots, 3 \cdot P_3(9) = 3.1622\dots, 3 \cdot P_4(9) = 3.1622\dots$$

הפעם ניתן לראות כי סדרת המספרים נזכרה את ערכו של $\sqrt{10}$ ונראה כי היא נוטה להתכנסות.

סעיף ד'

ננסה לחסום מלעיל את הפיתוח של $y = \sqrt{\frac{6}{5}}$ הנתון על-ידי $A = 1.095 = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{200}$

נתבקשנו לחסום מלעיל, ולא למצוא חסם עליון, ולכן נבחר $1000000000000000000000000$ כחסם ונראה כי הוא אכן תקף.

שאלה 7

יהיו $L, U \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקות כך ש- $L \leq U$.

סעיף א'

נוכיח כי $\sup(L) = \inf(U)$ אם ורק אם קיימות סדרות $(l_n)_{n=1}^\infty, (u_n)_{n=1}^\infty$ כך ש- $l_n \in L, u_n \in U$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - l_n) = 0$.

נראה גם כי $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \sup(L) = \inf(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $\sup(L) = \inf(U)$, דהיינו קיים M כך שמתקיים $\forall u \in U, l \in L : l \leq M \leq u$. מההגדרה של אינפימום וסופרמום נקבל גם כי לכל $M - \frac{1}{n}$ ו- $M + \frac{1}{n}$ בהתאמה $\exists l \in L, u \in U : M - \frac{1}{n} \leq l \leq M \leq u \leq M + \frac{1}{n}$. לכל n נגדיר l_n, u_n איברים המקיימים את אי-השוויון האחרון כפי שהוא מבטיח שקיימים מהגדרה זו נובע ישירות כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = M$$

ולכן גם $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - l_n) = 0$.

כיוון שני: נניח כי קיימות סדרות $(l_n), (u_n)$ עבורן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - l_n) = 0$$

נגדיר $M = \inf(U)$ ולכן מאי-השוויון $L \leq U$ נסיק $l_n \leq M \leq u_n$.

נחסר ונקבל $0 \leq M - l_n \leq u_n - l_n$ ולכן מכלל הסנדוויץ' נקבל ישירות $M - l_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

בהתאם $l_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$. נבחין כי $\forall l \in L : l \leq M$ וקיבלנו כי לכל $M - \delta$ קיים $l \in L$ המקיים $M - \delta \leq l$ ולכן זהו אינפימום.

קיבלנו כי $M = \inf U = \sup L$.

□

שאלה 8

ניתן דוגמה לפונקציות f, g החסומות ב- $[a, b]$ כך שמתקיים

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx < \int_a^b (f(x) + g(x))dx$$

נבחר $f(x) = D(x)$ ו- $g(x) = 1 - D(x)$ כאשר D היא פונקציית דיריכלה.

בכיתה הראינו כי

$$\int_a^b D(x)dx = \int_a^b f(x)dx = 0$$

ולכן נסיק גם

$$\int_a^b 1 - D(x)dx = \int_a^b g(x)dx = 0$$

אבל $g(x) + f(x) = 1$ ולכן

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = a - b$$

ומצאנו כי הפונקציות עומדות בתנאי.

שאלה 9

תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על-ידי

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

סעיף א'

תהי $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ חלוקה של $[0, 1]$, ונחשב את ערכם של m_i, M_i המוגדרים על-ידי

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}} \{f(x)\}, M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}} \{f(x)\}$$

נבחין כי לכל $x \in [0, 1]$ מתקיים $f(x) = 0$ או $f(x) = x$ ולכן בהתאם נוכל לקבוע כי $m_i = 0$.
את הסופרמום נקבע על-פי צפיפות הרציונליים ולכן $M_i = x_{i+1}$.

סעיף ב'

נוכיח כי f לא אינטגרבילית ב- $[0, 1]$.

הוכחה. מצאנו בסעיף הקודם כי על-פי הגדרה מתקיים

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

וגם כי

$$\overline{\int_0^1 f(x) dx} > 0$$

ולכן הפונקציה לא עומדת בהגדרה לאינטגרביליות.

□