פתרון ממ"ן 16 – אלגברה לינארית 2 (20229)

15 באפריל 2023

שאלה 1

תהי מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

סעיף א'

נמצא צורת ז'ורדן G של A ומטריצה הפיכה P כך שיתקיים $P^{-1}AP = G$.

נמצא את הפולינום האופייני של A:

$$|A| = (t-6)t + 9 = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

אז $P(t) = (t-3)^2$ ול־A יש ערך עצמי יחיד 3, ולכן ממשפט 11.9.2 נובע כי $A - 3I$ היא מטריצה נילפוטנטית. חישוב ישיר מראה כי

$$(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן אינדקס הנילפוטנטיות שלה הוא 2.

נשתמש באלגוריתם החישוב אשר מופיע בסעיף 11.7 על $A - 3I$ כדי למצוא בסיס אשר בו A היא בצורת ז'ורדן.

נגדיר $B_1 = \ker A - 3I = \mathrm{Sp}\{(3,1)\}$. נשלים את B_1 לבסיס של $\mathbb{R}^3$ על־ידי הקבוצה $E_2 = \{(1,0)\}$, נקבע גם $D_2 = E_2$. נגדיר $D_1 = \{(A-3I)D_2\} = \{(3,1)\}$ ולכן הביסיס $D = D_1 \cup D_2 = \{(3,1),(1,0)\}$ בסיס בו $A - 3I$ מטריצה בעלת צורת ז'ורדן.

ממשפט 11.9.2 נובע כי D בסיס בו גם A מקבלת צורת ז'ורדן, נחשב:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\ J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

סעיף ב'

נחשב את A^{100} ואת G^{100}. תחילה נחשב את G^{100}. ממסקנה 10.1.7 ומטענה 11.3.6 תוך שימוש בהערה 11.3.7 נובע כי

$$J^{100} = J_2(3)^{100} = \sum_{k=0}^{1} \binom{100}{k} 2^{100-k} J_2(0)^k = \binom{100}{0} 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \binom{100}{1} 2^{99} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$$

משאלה 8.2.3 א' נובע כי

$$A^{100} = P^{-1} J^{100} P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

סעיף ג'

נמצא נוסחה עבור a_n, כאשר נתון

$$a_n = \begin{cases} a & n = 0 \\ b & n = 1 \\ 6a_{n+1} - 9a_n & n > 1 \end{cases}$$

מחישוב ישיר ניתן לראות כי מתקיים

$$A\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6a_{n+1}-9a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}$$

לכן נוכל להוכיח באינדוקציה כי

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3^n&n3^n+3^n\\3^n&n3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(1+n)3^n&-n3^n\\n3^{n-1}&(1-n)3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\to a_n=b(1+n)3^n-na3^n$$