פתרון מטלה 07 — מבוא ללוגיקה, 80423

14 בדצמבר 2024

שאלה 1

יהיו $mathcalA, B$ מבנים ל־L ויהי איזומורפיזם $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ושם עצם $t \in term_L$.
נוכיח שלכל השמה $\sigma : Var \to A$ מתקיים

$$f(t^{\mathcal{A}}(\sigma)) = t^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma)$$

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על שמות עצם.
נניח כי $t \in const_L$, ולכן מהגדרה של איזומורפיזם ושל השמה על קבועים

$$f(t^{\mathcal{A}}(\sigma)) = f(t^{\mathcal{A}}) = t^{\mathcal{B}} = t^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma)$$

נניח ש־$t \in Var$ ולכן מאותן ההגדרות נובע

$$f(t^{\mathcal{A}}(\sigma)) = f(\sigma(t)) = t^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma)$$

והשלמנו את בסיס האינדוקציה, נותר לבדוק את המהלך.
יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $F \in Func_{L,n}$ סימן פונקציה n־מקומי, ונניח $t_0, \dots, t_{n-1} \in term_L$ כך שהם מקיימים את טענת האינדוקציה, אז.
נגדיר $t = F(t_0, \dots, t_{n-1})$ ולכן מהגדרת איזומורפיזם, השמה עבור סימני פונקציה ויחד עם הנחת האינדוקציה נובע

$$f(t^{\mathcal{A}}(\sigma)) = f(F^{\mathcal{A}}(t_0^{\mathcal{A}}(\sigma), \dots, t_{n-1}^{\mathcal{B}}(\sigma))) = F^{\mathcal{B}}(f(t_0^{\mathcal{A}}(\sigma)), \dots, f(t_{n-1}^{\mathcal{B}}(\sigma))) = F^{\mathcal{B}}(t_0^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma), \dots, t_{n-1}^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma)) = t^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma)$$

והשלמנו את מהלך האינדוקציה. □

שאלה 2

נניח ש־L מכילה אינסוף סימני יחס חד־מקומיים $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
יהי מבנה $\mathcal{A}=\langle A,I\rangle$ כך ש־$A=\{0\}$ ו־$P_n^{\mathcal{A}}=\emptyset$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
נוכיח שלכל פסוק $\varphi\in sent_L$ כך ש־$\mathcal{A}\models\varphi$ קיים מבנה $\mathcal{B}$ ל־L כך ש־$\mathcal{B}\models\varphi$ וגם $\mathcal{A}\ncong\mathcal{B}$.

הוכחה. יהי פסוק φ כזה, ונגדיר $X_p=\{P_n\mid P_n\in\varphi\}$, קבוצת סימני היחס אשר מופיעים ב־φ (בסימון זה התייחסנו ל־φ כסדרה).
יהי $k\in\mathbb{N}\setminus\{i\in\mathbb{N}\mid P_i\in X_p\}$ כלשהו (הגדרה זו לא מצריכה בחירה).
נגדיר מבנה חדש $\mathcal{B}=\langle A,J\rangle$ כך ש־$I=J$ מלבד $P_k^{\mathcal{B}}=A\times A$.
נוכל להוכיח באינדוקציה על יחסים שמתקיים $\varphi\models$, אבל עבור הפסוק $\phi=\forall x\ P_k(x)$ נקבל $\mathcal{A}\not\models\phi$ בעוד $\mathcal{B}\models\phi$ ולכן בפרט $\mathcal{A}\ncong\mathcal{B}$. $\square$

שאלה 3

יהיו $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ מבנים ל־L ויהי ψ פסוק ללא כמתים ו־φ פסוק כך שעבור המשתנים $x_0, \ldots, x_{k-1} \in Var$ מתקיים $\varphi = \forall x_0, \ldots, \forall x_{k-1} \psi$.

סעיף א׳

נפריך את הטענה שאם $\mathcal{A} \models \varphi$ אז $\mathcal{B} \models \varphi$.
פתרון נגדיר L שפת השוויון ו־$A = \{0\}, B = \{0, 1\}$, ונגדיר גם $\psi(x, y) = x = y$, לכן φ מתלכדת עם $\varphi_{\leq 1}$ מהמטלה הקודמת.
בהתאם נבחין כי $\mathcal{A} \models \varphi$ אבל $\mathcal{B} \not\models \varphi$, זאת שכן $\psi(0, 1)$ לא מתקיים.

סעיף ב׳

נוכיח שאם $\mathcal{B} \models \varphi$ אז גם $\mathcal{A} \models \varphi$.

הוכחה. לכל השמה $\sigma : Var \to A$, נובע מהשיכון הנתון ומהעובדה ש־ψ חסר כמתים כי

$$\mathcal{A} \models \psi^{\mathcal{A}}(\sigma) \iff \mathcal{B} \models \psi^{\mathcal{B}}(\sigma) \impliedby \mathcal{B} \models \varphi$$

כאשר הגדרנו את σ מחדש כהרחבת הטווח, וכאשר הגרירה האחרונה נובעת מבדיקת הצבה ישירה והגדרת הקיום.
בהתאם מצאנו כי $\mathcal{A} \models \varphi$. $\square$

שאלה 4

תהי S מחלקה של מבנים ל־L.

סעיף א׳

נניח ש־$\mathcal{A}$ מבנה ל־L.

נוכיח שמתקיים $\mathcal{A} \in Mod(Th(S))$ אם ורק אם $\forall\varphi \in Th(\mathcal{A}), \exists\mathcal{B} \in S, \mathcal{B} \models \varphi$.

הוכחה. $\square$