פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

12 במאי 2023

שאלה 1

נמצא את נקודות הרציפות והאי־רציפות של הפונקציה f המוגדרת:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \tan \frac{\pi x}{2}$$

בתחום $\mathbb{R}$ ונמיינן.

על־פי משפט 5.13 הפונקציה $\tan \frac{\pi x}{2}$ רציפה בכל תחום הגדרתה, ועל־פי הגדרת הפונקציה אנו יודעים כי היא איננה מוגדרת בערכים

$$\{1 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

מהגדרת החלק השלם והפוקנציה x אנו יודעים כי $\lfloor x \rfloor$ רציפה בכל תחום הגדרתה.

על־פי משפט 5.11 גם f רציפה בכל תחום הגדרתה, והיא כמובן לא מוגדרת ב־$\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

יהי $k \in \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, אנו יודעים כי $f(k)$ איננה מוגדרת, וכי $\lim_{x \to k^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

לכן בנקודות אלה ל־f נקודות אי־רציפות ממין שני, והפונקציה f רציפה בכל נקודה אחרת.

שאלה 2

סעיף א'

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0.

(i) ננסח את הטענה כי f איננה רציפה ב־x_0 בלשון ϵ, δ:

הפונקציה f לא רציפה ב־x_0 אם ורק אם קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים x כך ש־$|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

(ii) ננסח את הטענה כי f איננה רציפה ב־x_0 בלשון סדרות:

הפונקציה f איננה רציפה ב־x_0 אם ורק אם קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$.

סעיף ב'

נגדיר g פונקציה הרציפה ב־x_0 ופונקציה f המוגדרת $f(x) = g(x)D(x)$.

נוכיח כי אם $g(x_0) = 0$ אז f רציפה ב־x_0.

הוכחה. מטענה 5.3 נובע כי לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|g(x)| < \epsilon$.

על־פי הגדרת פונקציית דיריכלה אנו יודעים כי $D(x) \in \{0, 1\}$ לכל $x \in \mathbb{R}$, לכן תמיד מתקיים $D(x) \leq 1$. אז כמובן שמתקיים גם $|g(x)|D(x) \leq |g(x)| < \epsilon$ ולכן גם $f(x)$ רציפה ב־x_0. **מש"ל**

סעיף ג'

נגדיר $x_0 \in \mathbb{R}$ אשר עבורו $g(x_0) \neq 0$, כמובן ש־g רציפה ב־x_0.

(i) נוכיח כי הפונקציה f איננה רציפה ב־x_0 על־פי ההגדרה מסעיף א' (i)

הוכחה. נמצא $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים ערך x כך ש־$|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

נקבע $\epsilon < 1$, ויהי $\delta > 0$ אשר עבורו $|x - x_0| < \delta$.

מהגדרת פונקציית דיריכלה ואקסיומת הרצף, אנו יכולים להסיק כי קיים מספר x_1 אשר מקיים $|x_0 - x_1| < \delta$, ואשר הוא אי־רציונלי. **מש"ל**

(ii) נוכיח כי הפונקציה f איננה רציפה ב־x_0 על־פי ההגדרה מסעיף א' (ii)

הוכחה. נמצא סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$.

נגדיר (x_n) סדרה אינסופית של מספרים אי־רציונליים, $x_1 < x_0$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ כאשר $n > 1$ גם

$$x_n < x_{n+1} < x_0$$

הגדרה זו אפשרית כמובן על־פי צפיפות הממשיים.

מהגדרת הגבול עבור סדרות נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

אבל אנו יודעים שלכל n גם $f(x_n) = 0$ מהגדרת פונקציית דיריכלה, לכן

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq x_0$$

מש"ל

(iii) נניח בשלילה כי f רציפה ב־x_0 ולכן על־פי משפט 5.11

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \lim_{x\to x_0} D(x) \to \lim_{x\to x_0} D(x) \neq 0$$

אך ממשפט 5.10 נובע כי $D(x)$ אינה רציפה ב־x_0 בסתירה לטענה, לכן f אינה רציפה ב־x_0.

שאלה 3

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$.

נוכיח כי אם לכל $x>0$ מתקיים $x<|f(x)|$, אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ או $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

הוכחה. תחילה נראה כי הפונקציה $f(x)$ היא חיובית לכל x או שלילית לכל x בתחום.

נניח בשלילה כי $f(x)$ משנה סימן כאשר $x=x_0$. נניח כי קיים a כך ש-$a<x_0$ וגם $f(a)<-a$ וכי קיים $b>x_0$ כך ש-$f(b)>b$.

ממשפט ערך הביניים של קושי נובע כי קיים מספר c ככה ש-$f(c)=0$ בניגוד לנתון כי $0<x<|f(x)|$.

יכולנו להגדיר את שינוי הסימן ההפוך וההוכחה הייתה נשארת זהה, לכן לא נפגעת הגבלת הכלליות.

אז אנו יכולים להסיק כי לכל x מתקיים $x<f(x)$, או לחילופין לכל x מתקיים $x<-f(x)$.

מהגדרת השאיפה לאינסוף ומינוס אינסוף בפונקציות נובע ישירות כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

או

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

מש"ל

שאלה 4

תהי f פונקציה רציפה בקטע $\mathbb{R}_{0\geq} = [0, \infty)$ ויהי $L \in \mathbb{R}$. ידוע כי מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

סעיף א'

נוכיח כי אם f מקבלת מינימום ב־$\mathbb{R}_{0\geq}$ אז קיים $x_0 \geq 0$ כך ש־$f(x_0) \leq L$.

הוכחה. נקבע כי x_1 היא נקודת מינימום של $f(x)$ וכי $f(x_1) = c$.

נבחן שני מקרים, כאשר $c \leq L$ אז כמובן שקיים x_0 כזה, והוא כאשר $x_0 = x_1$.

לכן עלינו רק לבחון את המקרה בו $c > L$.

מהגדרת הגבול בלשון ϵ, M נובע כי עבור $\epsilon = |c - L| = c - L$ קיים M כך ש־$|f(x) - L| < c - L$ לכל $x > M$.

אילו היה מתקיים $f(x) < L < c$ והגענו לסתירה לטענה כי x_1 נקודת מינימום.

$$f(x) - L < c - L \to f(x) < c$$

הגענו לסתירה לטענה כי x_1 היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$ ולכן לא יתכן כי $c > L$ ובהתאם יתכן רק כי $c \leq L$. **מש"ל**

סעיף ב'

נוכיח כי אם קיים $x_0 \geq 0$ כך ש־$f(x_0) < L$, אז f מקבלת מינימום ב־$\mathbb{R}_{0\geq}$.

הוכחה. בשל הגבול של $f(x)$ באינסוף אנו יכולים להסיק כי קיים $M \in \mathbb{R}_{0\geq}$ עבורו לכל $x > M$ מתקיים $f(x_0) < x$.

מהמשפט השני של ויירשטראס על הקטע $[0, M]$ נובע כי בקטע זה ישנה נקודת מינימום x_1.

כמובן שמתקיים $f(x_0) \geq f(x_1)$, ולכן בהתאם לכל $x > M$ נסיק כי $f(x_1) < x$, ולכן x_1 נקודת מינימום בכל הקטע $\mathbb{R}_{0\geq}$. **מש"ל**

סעיף ג'

נוכיח כי אם קיים $x_0 \geq 0$ כך ש־$f(x_0) = L$, אז f מקבלת מינימום ב־$\mathbb{R}_{0\geq}$.

הוכחה. אילו f פונקציה קבועה אז כמובן שהיא מקבלת מינימום, ולכן נניח כי f פונקציה רציפה שאיננה קבועה.

אילו קיימת נקודה x_1 עבורה $f(x_1) \leq L$ אז על־פי סעיף ב' הפונקציה מקבלת מינימום.

נניח כי לא קיימת נקודה $x_0 \neq x_1$ אשר מקיימת $f(x_1) \leq f(x_0)$, אז זוהי כמובן הגדרת המינימום ובמקרה זה f מקבלת מינימום ב־x_0 עצמה. **מש"ל**

שאלה 5

תהי פונקציה f המוגדרת

$$f(x) = \frac{(2x + \sin x) \arctan x}{x^2}$$

נבדוק האם הפונקציה f מקבלת מינימום ב־$(0, \infty)$.

מהגדרה 5.44 ומהגדרה 5.45 ניתן להסיק כי

$$\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

לכן נוכל להסיק בנקל מהאריתמטיקה של הגבולות כי

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

מהגדרת כלל רכיביה האלגבריים של f אנו למדים כי היא רציפה.

מסעיף א' בשאלה 4 נובע כי אם ב־f ישנה נקודת מינימום, אז גם קיים $x_0 \geq 0$ כך ש־$f(x_0) \leq 0$. אנו יודעים מהגדרתן כי $\arctan x, x^2$ חיוביות לכל $x > 0$. באופן דומה, ניתן להסיק כי $2x + \sin x$ חיובי לכל $x > 0$ מהגדרת $\sin x$.

לכן $f(x) > 0$ לכל $x > 0$, ובהתאם ההנחה כי יש ל־f נקודת מינימום סותרת את הטענה כי x_0 אשר מקיים את התנאי קיים בתחום.

לכן אין ל־f מינימום בתחום $(0, \infty)$.

שאלה 6

סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

רציפה במידה שווה בקטע $[0, \infty)$.

הוכחה. נראה כי לכל $a \geq 1$ מתקיים

$$0 \leq a \to a^2 \leq a^2 + a \to a \leq \sqrt{a^2 + a} \to a + \frac{1}{2} \leq \sqrt{a^2 + a} + \frac{1}{2} \leq 2\sqrt{a^2 + a}$$

לכן לכל $x_1, x_2 \geq 1$ מתקיים גם

$$x_1 + x_2 + 1 \leq 2\sqrt{x_1^2 + x_1} + 2\sqrt{x_2^2 + x_2}$$
$$\frac{x_1 + x_2 + 1}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + 2\sqrt{x_2^2 + x_2}} \leq 2$$

יהי $\delta > 0$ ו־x_1, x_2 כך ש־$|x_1 - x_2| < \delta$.

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x_1^2 + x_1} - \sqrt{x_2^2 + x_2}\right| &= \left|\frac{\left(\sqrt{x_1^2 + x_1} - \sqrt{x_2^2 + x_2}\right)\left(\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}\right)}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}}\right| \\ &= \left|\frac{x_1^2 + x_1 - x_2^2 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}}\right| \\ &= \left|\frac{(x_1 + x_2 + 1)(x_1 - x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}}\right| \\ &= \left|\frac{x_1 + x_2 + 1}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}}\right| |x_1 - x_2|\end{aligned}$$

נניח כי גם $x_1, x_2 \geq 1$ ולכן

$$\left|\sqrt{x_1^2 + x_1} - \sqrt{x_2^2 + x_2}\right| \leq 2|x_1 - x_2| < 2\delta$$

יהי $\epsilon > 0$, אם נגדיר $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ אז לכל $x_1, x_2 \in [1, \infty)$, אשר עבורם $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, אז מהגדרה 5.46 נובע כי $f(x)$ רציפה במידה שווה בקטע.

ממשפט קנטור אנו יכולים להסיק כי $f(x)$ רציפה במידה שווה גם ב־$[0, \infty)$. **מש"ל**

סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

רציפה במידה שווה בקטע $(0, \infty)$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x}}\sin x && \text{5.14 על־פי} \\
&= \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\frac{\sin x}{x} \\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= 0\cdot 1 = 0 && \text{4.45 על־פי משפט}
\end{aligned}$$

אנו יודעים כי $\sin x$ היא פונקציה חסומה, ולכן גם $\sin\frac{1}{x}$ חסומה, לכן ממשפט 4.53 נובע כי

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

משני הגבולות האלה ומשפט 5.49 נובע כי $f(x)$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$. **מש"ל**

סעיף ג'

נפריך את הטענה כי הפונקציה

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.

הוכחה. נניח בשלילה כי $f(x)$ רציפה במידה שווה, ויהיו ϵ,δ אשר מקיימים את הגדרה 5.46.

נקבע

$$x_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + 2\pi k}, x_2 = \frac{1}{-\frac{1}{2}\pi + 2\pi k}$$

כאשר $k\in\mathbb{N}$. בשל הקשר בין k לבין גודל המכנה, קיים k כך ש־$|x_1 - x_2| < \delta$.

אך כמובן ש־$|f(x_1) - f(x_2)| = |1-(-1)| = 2$, בסתירה לטענה כי קיים ערך δ לכל ϵ. **מש"ל**