

פתרון מטלה 11 – פונקציות מרוכבות, 80519

19 בינואר 2025



שאלה 1

נחשב את האינטגרלים הבאים באמצעות משפט השארית.

סעיף א'

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^n + 1} dx \quad \text{לכל } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

פתרון נגדיר

$$f(z) = \frac{\log z}{z^n + 1}$$

כאשר \log הוא הענף המוגדר בתחום שנציין בהמשך (בתחום זה אכן יש ענף מוגדר). נבחין שמתקיים

$$z^n + 1 = 0 \iff z = \exp\left(\frac{\pi i}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right), k \in \{0, \dots, n-1\}$$

לכן בפרט יש סינגולריות קוטב מסדר 1 ב- $z = \exp(\frac{\pi i}{n})$.

נגדיר את המסילות הבאות:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t & t &\in [\epsilon, r] \\ \gamma_2(t) &= re^{it} & t &\in [0, \frac{2\pi}{n}] \\ \gamma_3(t) &= te^{\frac{2\pi i}{n}} & t &\in [r, \epsilon] \\ \gamma_4(t) &= \epsilon e^{\frac{2\pi i}{n} - it} & t &\in [0, \frac{2\pi}{n}] \end{aligned}$$

התחום המוגדר על ידי גבולות אלה לכל $\epsilon, r > 0$ הוא תחום טוב (בעל שפה סופית וחסום) ומחורר בנקודה היחידה $z = e^{\frac{\pi i}{n}}$. מההגדרה

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{r \rightarrow \infty} I$$

מא־שוויון ML נובע,

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\log(re^{it})}{r^n e^{int} + 1} dt \leq \frac{2\pi r}{n} \log r \cdot \frac{1}{r^n + 1} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

מבדיקה ישירה ותוצאת שאלה 1 סעיף ב' של מטלה 7 נובע,

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_r^\epsilon f(te^{\frac{2\pi i}{n}}) e^{\frac{2\pi i}{n}} dt = e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_r^\epsilon \frac{\log(t) + \frac{2\pi i}{n}}{t^n + 1} dt = e^{\frac{2\pi i}{n}} (I - \frac{\pi}{2})$$

ולבסוף נבחין שגם

$$\int_{\gamma_4} f(z) dz \leq \frac{2\pi\epsilon}{n} \cdot \frac{e^\epsilon}{\epsilon^n + 1} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

ולכן נובע ממשפט השארית וטענה לחישוב שאריות קוטב פשוט,

$$\int_{\partial G} f(z) dz = I + e^{\frac{\pi i}{n}} (I - \frac{\pi}{2}) = I(1 + e^{\frac{\pi i}{n}}) - \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi i}{n}} = 2\pi i \operatorname{res}_f(e^{\frac{\pi i}{n}}) = 2\pi i \frac{\log z}{nz^{n-1}} \Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{n}}} = 2 \frac{\pi^2}{n^2} e^{\frac{\pi i}{n}}$$

ובפרט נובע

$$I(1 + e^{\frac{\pi i}{n}}) = 2 \frac{\pi^2}{n^2} e^{\frac{\pi i}{n}} + \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi i}{n}}$$

ומחילוי הערך הממשי נקבל

$$I(1 + \cos(\frac{\pi}{n})) = \cos(\frac{\pi}{n}) (2 \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi}{2})$$

ולכן

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^n + 1} dx = \frac{\cos(\frac{\pi}{n}) (2 \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi}{2})}{1 + \cos(\frac{\pi}{n})}$$

סעיף ב'

עבור כל $a, b \in \mathbb{R}$,

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

פתרון נגדיר

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}$$

ולכן $I = \operatorname{Re}(\int_0^\infty f(z) dz)$. נבחין כי אם $a = 0$ או $b = 0$ אז מאינפי 2 האינטגרל לא מתכנס ולכן נניח $a, b \neq 0$. עוד נבחין ש- f היא פונקציה זוגית ולכן,

$$2I = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

ונחשב אינטגרל זה במקום. עוד נבחין שמתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x f(x) = 0$$

בשל חסימות המונה וגודל המכנה, לכן $f(x) = o(|\frac{1}{x}|)$ ומטענה מהכיתה נובע שאם Z קבוצת הסינגולריות של f , אז

$$2I = 2\pi i \sum_{z \in Z, \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_f(z)$$

אבל אנו גם יודעים ש- $Z = \{\pm ai, \pm bi\}$, לכן נניח בלי הגבלת הכלליות $a, b > 0$ ונקבל שהנקודות הקריטיות לחישוב האינטגרל הן ai, bi , בלבד, את ההנחה הזו מותר לנו לעשות בשל סימטריית הסינגולריות, במקרה שלילה נבחר $-a, -b$. אילו $a \neq b$, אז נובע שהסינגולריות היא קוטב מסדר 1 בשתי הנקודות, נחשב,

$$\operatorname{res}_f(ai) = \left. \frac{e^z}{2z(2z^2 + a^2 + b^2)} \right|_{z=ai} = \frac{e^{ai}}{2ai(b^2 - a^2)}$$

ולכן באופן דומה גם

$$\operatorname{res}_f(bi) = \frac{e^{bi}}{2bi(a^2 - b^2)}$$

ובהתאם נובע

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \left(\pi i \left(\frac{e^{ai}}{2ai(b^2 - a^2)} + \frac{e^{ai}}{2bi(a^2 - b^2)} \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\pi \left(\frac{e^{ai}}{2a(b^2 - a^2)} + \frac{e^{ai}}{2b(a^2 - b^2)} \right) \right) = \pi \left(\frac{\cos(a)}{2a(b^2 - a^2)} + \frac{\cos(b)}{2b(a^2 - b^2)} \right) \end{aligned}$$

כעת נניח ש- $a = b$, ולכן קיימת סינגולריות יחידה מסדר 2 ב- ai , ונחשב את השארית,

$$\operatorname{res}_f(ai) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \frac{e^z (z - ai)^2}{(z^2 + a^2)^2} = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z + ai)^2} = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{e^z (z + ai)^2 - e^z 2(z + ai)}{(z + ai)^4} = \frac{e^{ai}(-a^2 - ai)}{4a^4}$$

ולכן

$$I = \operatorname{Re} \left(\pi i \frac{e^{ai}(-a^2 - ai)}{4a^4} \right) = \operatorname{Re} \left(\pi \frac{e^{ai}(-a^2 i + a)}{4a^4} \right) = \pi \frac{\cos(a)}{4a^3}$$

סעיף ג'

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$$

פתרון נבחין שהאינטגרל הנתון מתכנס ישירות מהזהות $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ וממבחי התכנסות. נבחין שמתקיים,

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= \operatorname{Im} \left(i \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^3}{(2i)^3} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(i \frac{e^{3ix} - 3e^{2ix-ix} + 3e^{ix-2ix} - e^{-3ix}}{-8i} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix} + 2\cos(3x) - 6\cos(x)}{-8} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} - 3e^{ix} - 3e^{-ix}}{-8} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{3ix} - 3e^{ix}}{-4} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{(1 - e^{3ix}) - 3(1 - e^{ix})}{4} \right) \end{aligned}$$

ולכן נגדיר

$$f(z) = \frac{(1 - e^{3iz}) - 3(1 - e^{iz})}{4z^3}$$

ונובע

$$I = \operatorname{Im} \left(\int_0^\infty f(z) dz \right)$$

נבחין ש- f בעלת סינגולריות סליקה ב- $z = 0$ ולכן נתייחס אליה כאל ההשלמה האנליטית שלה בנקודה זו. נרצה אם כך לחשב את ערך האינטגרל, לכן נגדיר תחום טוב אשר שפתו מוגדרת על-ידי

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t & t \in [0, r] \\ \gamma_2(t) &= re^{it} & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \gamma_3(t) &= it & t \in [r, 0] \end{aligned}$$

לכל $r > 0$. מאנליטיות f נובע

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz \right) = 0$$

ונעבור לחישוב האינטגרלים.

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma_1} f(z) dz \xrightarrow{r \rightarrow \infty} I$$

נבחין כי אין חלק מדומה לאינטגרל הבא,

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_r^0 \frac{1 - e^{-3t} - 3(1 - e^{-t})}{-it^3} \cdot i dt = 0$$

אנו יודעים שמתקיים $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^3)$ ולכן נובע

$$f(z) = \frac{-2 - 1 - 3iz - \frac{(3iz)^2}{2} + 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2} + o(z^3)}{4z^3} = \frac{3z^2 + o(z^3)}{4z^3} = \frac{3}{4} \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

ולכן

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{re^{it}} + \frac{o(r^3)}{r^3} \right) \cdot ire^{it} dt = \frac{3i}{4} \int_0^{\pi/2} 1 + \frac{o(\frac{1}{r})}{\frac{1}{r}} dt = \frac{3i}{4} \cdot (0 - \pi/2) + o\left(\frac{1}{r}\right)/r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{3\pi i}{8}$$

ולכן מאיחוד השוויונות שמצאנו נובע

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz \right) = \operatorname{Im} \left(0 + iI - \frac{3\pi i}{8} \right) \Rightarrow I = \frac{3\pi}{8}$$

שאלה 2

סעיף א'

תהי פונקציה רציונלית, כך ש- $p, q \in \mathbb{C}[z]$ פולינומים כך ש- $\deg q \geq \deg p + 2$.

נסמן $Z \subseteq \mathbb{C}$ את קבוצת השורשים של q ונניח $Z \cap \mathbb{R} = \emptyset$. נוכיח שמתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{a \in Z \cap H} \text{res}_{p/q}(a)$$

כאשר $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$.

הוכחה. נגדיר $G = \{z \in \overline{B}(0, r) \mid \text{Re } z \geq 0\}$ לכל $r > 0$, זהו כמובן תחום טוב, וכן $\partial G = \gamma_1 + \gamma_2$, כאשר

$$\gamma_1(t) = t, \quad t \in [-r, r]$$

$$\gamma_2(t) = re^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

נגדיר $d = \deg q - \deg p$, לכן $d \geq 2$, עבור r מספיק גדול נובע $\frac{p}{q} = o(\frac{1}{r^d})$ ולכן מ-ML,

$$\int_{\gamma_2} \frac{p(z)}{q(z)} dz \leq \pi r \cdot \max_{z \in \gamma_2} \frac{p(z)}{q(z)} = \pi r^{1-d} \cdot \frac{o(\frac{1}{r^d})}{\frac{1}{r^d}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

ונסיק ממשפט השארית (תוך ההנחה שבחרנו r כך ש- $Z \cap \partial G = \emptyset$),

$$\int_{\partial G} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{-r}^r \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \sum_{a \in Z \cap G} \text{res}_{p/q}(a)$$

אבל $H \xrightarrow{r \rightarrow \infty} G$ ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{a \in Z \cap H} \text{res}_{p/q}(a)$$

□

סעיף ב'

נסיק דרך נוספת לחישוב האינטגרל

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

שהוצג בתרגיל 7.

פתרון נגדיר $p(z) = z^2, q(z) = z^4 + 1$ ולכן $\deg q \geq \deg p + 2$ וכן $p, q \in \mathbb{C}[z]$. נבחין ש- $z = e^{\frac{\pi i + 2\pi i k}{4}}$ נכחי $z^4 + 1 = 0 \iff$ ל- $k \in \{0, \dots, 3\}$, לכן

$$Z = \{e^{\frac{\pi i + 2\pi i k}{4}} \mid k \in \{0, \dots, 3\}\}$$

בפרט $Z \cap \mathbb{R} = \emptyset$, ולכן תנאי הסעיף הקודם חלים ונסיק

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx &= 2\pi i \sum_{a \in Z \cap H} \text{res}_{p/q}(a) \\ &= 2\pi i (\text{res}_{p/q}(e^{\frac{\pi i}{4}}) + \text{res}_{p/q}(e^{\frac{3\pi i}{4}})) \\ &= 2\pi i \left(\left(\frac{z^2}{4z^3} \right)_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} + \left(\frac{z^2}{4z^3} \right)_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}} \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{\frac{\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} \right) \end{aligned}$$

נבחין ש- $\frac{p(x)}{q(x)}$ היא פונקציה סימטרית מעל הממשיים, ולכן

$$\int_0^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \pi i \left(\frac{1}{4e^{\frac{\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} \right)$$

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \pi$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה. נגדיר $p(z) = 1, q(z) = (z^2 + 1)^{n+1}$ ולכן תנאי סעיף א' חלים ועלינו לחשב את השארית בכל נקודות הסינגולריות. ישנה סינגולריות קוטב מסדר $n+1$ בנקודות $z = \pm i$, אבל רק $z = i \in H$ ולכן מספיק שנחשב את ערך השארית בה. מטענה אודות ערך שארית בקוטב נקבל שעלינו לחשב את,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p/q}(i) &= \frac{1}{(n-1+1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1+1}}{dz^{n-1+1}} \left((z-i)^{n+1} \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^n}{dz^n} (z+i)^{-n-1} \\ &= \frac{(-n-1) \cdots (-2n)}{n!} \lim_{z \rightarrow i} (z+i)^{-2n-1} \\ &= \frac{(-1)^n (n+1) \cdots 2n}{n! 2^{2n+1} \cdot (-1)^n \cdot i} \\ &= -\frac{i}{2} \frac{\frac{(2n)!}{n! 2^n}}{n! \cdot 2^n} \end{aligned}$$

נבחין שמהגדרת עצרת כפולה נובע $(2n)!! = n! 2^n$, ולכן

$$-\frac{i}{2} \frac{\frac{(2n)!}{n! 2^n}}{n! \cdot 2^n} = -\frac{i}{2} \frac{\frac{(2n)!}{(2n)!!}}{(2n)!!}$$

אנו גם יודעים ש- $(2n)! = (2n)!! \cdot (2n-1)!!$ מבדיקה ישירה של ההגדרה, לכן

$$\operatorname{res}_{p/q}(i) = -\frac{i}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

ולבסוף מסעיף א',

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = 2\pi i \cdot (-1) \frac{i}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

□

שאלה 3

תהי

$$f(z) = \operatorname{Log} \left(\frac{z}{z-1} \right)$$

סעיף א'

נראה ש- f מוגדרת בתחום $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$.

הוכחה. נבחין ש- Log מוגדר ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ולכן מספיק שנבדוק מתי $\frac{z}{z-1} \neq 0$. כמובן $z = 0 \iff \frac{z}{z-1} = 0$, וכן $z = 1 \iff z - 1 = 0$, כלור בתחום $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ הפונקציה f מוגדרת וסופית. \square

סעיף ב'

נחשב את האינטגרל

$$\int_{|z|=4} f(z) dz$$

פתרון ממשפט השארית באינסוף נובע

$$\int_{|z|=4} f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_f(\infty)$$

נגדיר

$$F(z) = -\frac{f(\frac{1}{z})}{z^2} = -\frac{\operatorname{Log}(\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1})}{z^2} = -\frac{1}{z^2} \operatorname{Log} \left(\frac{1}{1-z} \right)$$

אנו יודעים ש- $\frac{1}{1-z} = 1 + z + o(z^2)$ וכן ש- $\operatorname{Log}(1 + z + o(z^2)) = z + o(z^2)$, ולכן $c_{-1} = -1$ עבור הסדרה המגדירה את טור לורן של F . בהתאם $\operatorname{res}_F(0) = -1$ ולכן ממשפט השארית באינסוף גם

$$\int_{|z|=4} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_f(\infty) = 2\pi i \operatorname{res}_F(0) = -2\pi i$$

שאלה 4

יהי $u \in \mathbb{C}$ ונגדיר

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z+u)^2}$$

עבור $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$.

סעיף א'

נסמן ב- C_N לכל $N \in \mathbb{N}$ את המסילה המקיפה את הריבוע $[-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2}]^2$ נגד כיוון השעון. נראה שמתקיים

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} f(z) dz = 0$$

הוכחה. כתוצאה ממטלה 3 נבחין שלכל $z \in \mathbb{C}$, $|\cot z| \leq 1$, כלומר הפונקציה חסומה. בנוסף $\cot(\pi n + \frac{1}{2}) = 0$ ולכן הפונקציה חסומה גם בסביבות אלה בריבוע. לכל N מספיק גדול ביחס ל- u (כלומר u -פנימית לריבוע),

$$\int_{C_N} f(z) dz \leq 4(N + \frac{1}{2}) \cdot \max_{z \in C_N} f(z) \leq 4(N + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\pi \cdot 1}{N^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

ולכן נוכל להסיק שערך האינטגרל שואף לאפס כפי שרצינו. \square

סעיף ב'

נשתמש במשפט השארית כדי להראות שלכל $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ מתקיים,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi u)}$$

הוכחה. נבחין של- f סינגולריות בקבוצה $\{-u\} \cup \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leq N\}$ לכל C_N , ולכן נובע ממשפט השארית בתחום זה

$$\int_{C_N} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_f(u) + 2\pi i \sum_{n=-N}^N \operatorname{res}_f(n) = 0 \iff -\operatorname{res}_f(u) = \sum_{n=-N}^N \operatorname{res}_f(n)$$

כל סינגולריות של f היא קוטב מסדר 1 לפי זהויות על סינוס, ונקבל

$$\operatorname{res}_f(n) = \left. \frac{\frac{\pi \cos(\pi z)}{(z+u)^2}}{\pi \cos(\pi z)} \right|_{z=n} = \frac{\frac{\pi \cos(\pi n)}{(n+u)^2}}{\pi \cos(\pi n)} = \frac{1}{(n+u)^2}$$

ב- $z = -u$ יש סינגולריות מסדר 2 ולכן

$$\operatorname{res}_f(-u) = \lim_{z \rightarrow -u} \frac{d}{dz} \frac{\pi \cot(\pi z)(z+u)^2}{(z+u)^2} = \lim_{z \rightarrow -u} \frac{d}{dz} \pi \cot(\pi z) = \frac{-\pi}{\sin^2(-\pi u)} = \frac{-\pi}{\sin^2(\pi u)}$$

ולכן מהשוויון ממשפט השארית נובע

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi u)}$$

\square

סעיף ג'

נשתמש במשפט השארית כדי להראות שעבור $u = 0$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

הוכחה. מהסעיף הקודם נובע שעבור u בסביבה של 0 מתקיים,

TODO

□