פתרון ממ"ן 14 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

11 במאי 2023

שאלה 1

יהיו $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות אשר מקיימות $(f \circ g)(x) = x$ [1] לכל $x \in \mathbb{R}$.

סעיף א'

נפריך את הטענה כי f חד־חד ערכית על־ידי דוגמה נגדית. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ x & x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

במצב זה אנו רואים כי מתקיים (1), אך $f(2) = f(0)$ בסתירה לטענת החד־חד ערכיות.

סעיף ב'

נוכיח כי g היא חד־חד ערכית.

יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $g(x) = g(y)$. על שוויון זה נבצע את הפונקציה f:

$$f(g(x)) = f(g(y)) \to (f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$$

אז גם מתקיים $x = y$ אם ורק אם $g(x) = g(y)$, ולכן על־פי הגדרה 4.5 g היא חד־חד ערכית.

סעיף ג'

נוכיח כי f היא על.

יהי $x \in \mathbb{R}$ מספר, בהתאם ל־(1) הוא מקיים $x = (f \circ g)(x)$. נגדיר $x' = g(x)$, אז כמובן $x = f(x')$. נראה כי מצאנו לכל x מספר x' כך ש־$x = f(x')$ ולכן $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$, דהינו, f היא על.

סעיף ד'

נפריך את הטענה כי g היא על על־ידי דוגמה נגדית.

למעשה, הפונקציה g אשר הוגדרה בסעיף א' מקיימת את (1) ואיננה על.

סעיף ה'

נפריך את הטענה כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $(g \circ f)(x) = x$ על־ידי דוגמה נגדית.

נגדיר את הפונקציות f, g כשם שהוגדרו בסעיף א', אז $(g \circ f)(0) = 2 \neq 0$ בסתירה לטענה.

סעיף ו'

נוכיח כי אם g היא על, אז $(g \circ f)(x) = x$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

אנו יודעים כי g על ולכן קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש־$g(x) = y$. ידוע כי $f(g(x)) = f(y) = x$, נפעיל את g על השוויון האחרון: $g(f(y)) = g(x) = y$, דהינו $(g \circ f)(x) = x$.

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח כי הגבול הבא מתקיים בלשון ϵ, δ

$$\lim_{x \to \frac{2}{\pi}} \left\lfloor \sin \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

נשים לב כי $0 < \sin \frac{1}{x} < 1$ עבור הערכים $\frac{2}{\pi} < x < \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi}$ על־פי הגדרת sin וחישוב ישיר. לכן בתחום זה

$$\left\lfloor \sin \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

יהי $\epsilon > 0$ ונגדיר $\delta = \min\{\frac{1}{\pi}, \epsilon\}$. אז לכל x המקיים $0 < |x - \frac{2}{\pi}| < \delta$ מתקיים

$$\left| \left\lfloor \sin \frac{1}{x} \right\rfloor - 0 \right| = 0 < \epsilon$$

לכן הגבול מתקיים.

סעיף ב'

נוכיח כי הגבול מתקיים בלשון M_1, M_2:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{2x - \sin 3x} = \infty$$

נגדיר $f(x) = \sqrt{2x - \sin 3x} = \infty$. יהי $M_1 \in \mathbb{R}$.
נגדיר $M_2 = \min\{0, M_1^2 + 20\}$. נשים לב כי עבור תחום ההגדרה של f, היא תמיד חיובית, שכן פעולת השורש לא מחזירה מספרים שליליים בממשיים. כאשר $M_1 < 0$ לכל $x > M_2$ הפונקציה $M_1 < 0 \leq f(x)$. עוד נראה כי עבור כל $0 \leq M_1$ כל $x > M_2 = M_1^2 + 20$ מקיים $f(x) > M_1$, שכן תמונת sin היא $[-1, 1]$ ולכן $2x - \sin 3x \geq 2x - 1 \geq 2M_1^2 + 19$. בהתאם $\sqrt{2M_1^2 + 19} > M_1$ וההוכחה נשלמה.

שאלה 3

סעיף א'

(i) ננסח את הטענה „לא קיים ל־f גבול סופי כש־$x \to \infty$" בלשון ϵ, M, על־ידי ניסוח שלילה להגדרה 4.54: נאמר כי לא קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אם לא קיים $L \in \mathbb{R}$ עבורו $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, דהינו אם לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $x > M$ עבורו $|f(x) - L| \geq \epsilon$.

(ii) ננסח את הטענה על־ידי שלילת הגדרת היינה לסדרות כפי שמופיעה בהגדרה 4.54:

לא קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אם ורק אם לכל $L \in \mathbb{R}$ קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ ולא מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} L$

סעיף ב'

תהי הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת

$$f(x) = \frac{4}{5 + \cos x}$$

(i) נוכיח כי ל־f אין גבול סופי כאשר $x \to \infty$ על־פי הגדרת סעיף א' (i).

הוכחה. יהי $L \in \mathbb{R}$. תמונת $\cos$ היא $[-1, 1]$, ולכן בהתאם תמונת f היא $[\frac{2}{3}, 1]$. אנו יודעים כי $\cos$ פונקציה מחזורית ולכן גם f בהתאם ולכן לכל $M \in \mathbb{R}$ שנבחר קיימים ערכי $x > M$ שמגיעים לכל חלקי תמונת f.

נוכל למצוא $x > M$ לכל $M \in \mathbb{R}$ אשר עבורו $|f(x) - L|$ הוא מספר שונה מאפס, נגדיר $\epsilon = |f(x) - L|/2$.

אז לפי הגדרת סעיף א' (i) לפונקציה f אין גבול סופי כאשר $x \to \infty$.

מש"ל

(ii) נוכיח כי ל־f אין גבול סופי כאשר $x \to \infty$ על־פי הגדרת סעיף א' (ii).

הוכחה. יהי $L \in \mathbb{R}$. כפי שראינו בתת־סעיף הקודם, קיים x כך ש־$f(x) \neq L$.

נגדיר $x_n = x + 2\pi n$, לכן $f(x_n)$ ערך קבוע ושונה מ־L. אז לפי הגדרת סעיף א' (ii) הפונקציה f לא מתכנסת לערך סופי כאשר $x \to \infty$. **מש"ל**

שאלה 4

סעיף א'

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x^2}=0+0=0$$

סעיף ב'

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{x^7}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4=\infty\cdot 1^4=\infty$$

סעיף ג'

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^5+5x^3+1}{5x^5+3x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^5/x^5+5x^3/x^5+1/x^5}{5x^5/x^5+3x^3/x^5-1/x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+5/x^2+1/x^5}{5+3/x^2-1/x^5}=\frac{-3}{5}$$

סעיף ד'

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-\sin x}+x$$

נשים לב כי $\sin x=-\sin x$, $x^2=(-x)^2$, ואילו את $+x$ נוכל לציין כ־$-x$, לכן

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-\sin x}+x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-\sin x}-x$$

מתקיים

$$\sqrt{x^2-\sin x}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2-\sin x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-\sin x}-x\right)}{\sqrt{x^2-\sin x}+x}=\frac{\sqrt{x^2-\sin x}^2-x^2}{\sqrt{x^2-\sin x}+x}=\frac{-\sin x}{\sqrt{x^2-\sin x}+x}$$

נשים לב כי מתקיים לכל $x\geq 1$ על־פי תחומי $\sin x$

$$0\leq x^2-\sin x\leq x^2+1\leq 4x^2\to 0\leq\sqrt{x^2-\sin x}\leq\sqrt{4x^2}\to x\leq\sqrt{x^2-\sin x}+x\leq 2x+x$$

לכן על־פי הביטוי האלגברי ואי־השוויון שמצאנו, ועל־פי חוקי אי־שוויונות.

$$\frac{-\sin x}{x}\leq\frac{-\sin x}{\sqrt{x^2-\sin x}+x}\leq\frac{-\sin x}{3x}$$

על־פי כלל הסנדוויץ'

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\sin x}{\sqrt{x^2-\sin x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\sin x}{3x}=0$$

לכן מתקיים הגבול

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-\sin x}+x=0$$

סעיף ה'

$$\lim_{x\to x_0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor$$

כאשר $x_0=0,\frac{\pi}{2},\pi$.

נשים לב כי בשל הגדרת sin:

$$\begin{aligned}
-\pi\le x<0 &\quad\rightarrow\quad \lfloor\sin x\rfloor=-1\\
0<x<\pi &\quad\rightarrow\quad \lfloor\sin x\rfloor=0\\
\pi<x<2\pi &\quad\rightarrow\quad \lfloor\sin x\rfloor=-1
\end{aligned}$$

כאשר $x_0=\frac{\pi}{2}$ אנו רואים כי

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor=0$$

כאשר $x_0=0$ אנו רואים כי עבור סביבת x_0 נגדיר פונקציה חדשה:

$$h(x)=\begin{cases}-\sin\frac{x}{2} & x<0\\ 0 & x\ge 0\end{cases}$$

ניתן לראות כי בסביבת x_0 ערך הפונקציה h שווה לערך הפונקציה המקורית, ובהתאם הגבול בנקודה זהה (אם מתקיים). על־פי גבול פונקציית sin ופונקציות קבועות מתקיים

$$\lim_{x\to 0}h(x)=0$$

ולכן מתקיים גם

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor=0$$

נתבונן עתה במקרה $x_0=\pi$.

גם במקרה זה נגדיר פונקציה:

$$g(x)=\begin{cases}0 & x<\pi\\ -\sin\frac{x}{2} & x\ge\pi\end{cases}$$

על־פי ערכי הפונקציה המקורית בסביבת $x_0=\pi$ הפונקציה g שווה בסביבה לפונקציה המקורית, ולכן הן מתכנסות יחדיו. נשים לב כי g מורכבת משתי פונקציות אשר מתכנסות ל־0 ול־-1, ולכן לפי הגדרת התכנסות הפונקציה השלמה g איננה מתכנסת, ובהתאם לא קיים גבול

$$\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor$$