פתרון מטלה 7 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

19 ביוני 2024

שאלה 1

יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש־$0 < a < b$ ו־$\alpha \in \mathbb{N}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ ו־$P_n = \{a, aq, \dots, aq^n = b\}$.

סעיף א'

נחשב את $\lim_{n\to\infty} \triangle(P_n)$.

נבחן את $\triangle x_i = aq^{i+1} - aq^i$, ונקבל $aq^i(q-1)$, כמובן ש־$q-1$ הוא ערך קבוע ולכן עלינו לבחון את aq^i בלבד. כמובן ידוע כי $b > a$ ולכן $q > 1$ ונקבל כי $i = n-1$ הוא המקסימום, דהינו

$$\triangle(P_n) = aq^{n-1}(q-1)$$

ולכן גם

$$\lim_{n\to\infty} \triangle(P_n) = \lim_{n\to\infty} b - (\frac{b}{a})^{(n-1)/n} = \frac{ab-b}{a}$$

סעיף ב'

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(x) = x^\alpha$.

נוכיח כי

$$L(f, P_n) = (b^{\alpha+1} - a^{\alpha-1}) \cdot \frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1}, \qquad U(f, P_n) = q^\alpha \cdot L(f, P_n)$$

הוכחה. נבחר חלוקה P_n אחידה ולכן מהחלוקה נקבל כי $f(P_n)$ מתלכדת עם החלוקה מהסעיף הקודם, ונוכל להסיק מיידית כי $U(f, P_n) = aq^{\alpha-1}(q-1)$ □