פתרון מטלה 07 — תורת הקבוצות (80200)

29 ביוני 2024

שאלה 1

נוכיח שאם $\langle A, \leq_A \rangle$ קבוצה סדורה חלקית, אז יש שיכון של $\langle A, \leq_A \rangle$ לתוך $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$.

הוכחה. יהי איבר $b \in A$, ונגדיר $B = \{\langle n, m \rangle \in \leq_A \mid m = b\}$, ולכן $\forall c \in B : c \leq b$, נגדיר $f : \langle A, \leq_A \rangle \to \langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$, על־ידי

$$f(x) = \{\langle a, x \rangle \in \leq_A\}$$

למעשה פונקציה זו מחזירה קבוצת האיברים הקטנים מהאיבר המקורי (כולל אותו עצמו), ולכן מהתכונות של סדר נוכל להסיק $a \leq_A b \implies f(a) \subseteq f(b)$ ומצאנו שיכון. □

שאלה 2

לכל קבוצה A נסמן $\mathcal{P}_{\text{fin}}(A) = \{X \subseteq A \mid X \text{ is finite}\}$.

סעיף א'

נמצא שיכון של $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ לתוך $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$.

נגדיר $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ על־ידי

$$f(z) = \begin{cases} 2z+1 & z \leq 0 \\ -2z & z < 0 \end{cases}$$

יחד עם יחס הסדר $\preceq = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid m = 1(\mod 2) \implies n \leq m \vee n = 0(\mod 2) \implies n \leq m \vee (n = 0(\mod 2) \wedge m = 1(\mod 2))\}$

מהותית סדר שבודק את הזוגיות ומשמר את הסדר המקורי של $\mathbb{Z}$, ועתה נרכיב את השיכון משאלה 1 ונקבל שיכון כפי שנתבקשנו.

סעיף ב'

נוכיח כי לא קיים שיכון של $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ לתוך $\langle \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$.

הוכחה. נניח בשלילה כי ישנו שיכון f כזה.

לכן $f(-1) \subseteq f(0)$, וכמו־כן גם $\forall n \in -\mathbb{N} : f(n) \subseteq f(0)$, ולכן נוכל להסיק כי $|f(0)| = \aleph_0$ בסתירה להנחה כי כל איבר ב־$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ הוא סופי. $\square$

סעיף ג'

נמצא שיכון של $\langle Seq(\mathbb{N}), \trianglelefteq \rangle$ לתוך $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$.

נגדיר $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה המחזירה ראשוניים הולכים וגדלים.

נגדיר $f : \langle Seq(\mathbb{N}), \trianglelefteq \rangle \to \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$ על־ידי

$$f(\langle n_1, \ldots, n_d \rangle) = \prod_{i=1}^{d} \varphi(\varphi(i)^{n_i})$$

נניח כי $v, u \in Seq(\mathbb{N})$ כך ש־$v \trianglelefteq u$ אז נובע כי $v = \langle v_1, \ldots, v_d \rangle, u = \langle v_1, \ldots, v_d, u_{d+1}, \ldots, u_k \rangle$,

אז נובע כי $f(u) = f(v) \cdot C$ ולכן $f(v) \mid f(u)$.

בכיוון ההפוך נניח כי $f(v) \mid f(u)$ ונקבל מפירוק $f(u)$ למספרים ראשוניים וחישוב כי $v_1 = u_1$ וכן הלאה, ונוכל להסיק $v \trianglelefteq u$.

סעיף ד'

נוכיח כי $\langle Seq(\mathbb{N}), \trianglelefteq \rangle$ ו־$\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$ לא איזומורפיים.

הוכחה. יהיו $a, b \in \mathbb{N}$, נבחין כי קיים $c \in \mathbb{N}$ כך ש־$c \mid a, b$ תמיד ($c = ab$ לדוגמה).

לעומת זאת יהיו $u, v \in Seq(\mathbb{N})$, אם $u \neq v$ והם מאותו האורך, אז אין $w \in Seq(\mathbb{N})$ כך ש־$c \trianglelefteq a$ וגם $c \trianglelefteq b$, בסתירה לשימור מקסימלי לתת־קבוצות בין קבוצות איזומורפיות. $\square$

סעיף ה'

נמצא שיכון של $\langle Seq(\mathbb{N}), \trianglelefteq \rangle$ לתוך $\langle \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$.

נשתמש בפונקציה שהגדרנו בשאלה 1, עלינו לבדוק רק שכל קבוצה שתתקבל היא אכן סופית.
יהי $u \in Seq(\mathbb{N})$, ונניח כי גודל u הוא n, אז נסיק כי u גדול מ־n איברים, הם הצמצומים שלו, וסדרה ריקה, ולכן $|f(u)| = n$, ולכן $f(u) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ לכל $u \in Seq(\mathbb{N})$.

סעיף ו'

נוכיח כי $\langle Seq(\mathbb{N}), \trianglelefteq \rangle$ ו־$\langle \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ לא איזומורפיים.

הוכחה. למעשה, ההוכחה זהה לסעיף ד', שכן לכל שתי קבוצות $X, Y \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ קיים $X \cup Y$ אשר מהווה איבר גדול משתיהן.
לעומת זאת, ראינו כי לא לכל שני איברים יש איבר משותף גדול משניהם ב־$Seq(\mathbb{N})$. $\square$

שאלה 3

הגדרנו עבור סדרים חלקיים $\langle A, \le_A \rangle, \langle B, \le_B \rangle$ את הסדר המילוני על $A \times B$ על־ידי

$$\langle a, b \rangle \le_{\text{lex}} \langle a', b' \rangle \iff a <_A a' \vee (a = a' \wedge b \le_B b')$$

נניח כי A, B קבוצות לא ריקות.

סעיף א'

נוכיח כי $\langle A \times B, \le_{\text{lex}} \rangle$ קבוצה סדורה חלקית.

הוכחה. נבדוק את תכונות הסדר החלקי:

1. רפלקסיביות: $\langle a, b \rangle \le_{\text{lex}} \langle a, b \rangle \iff a = a' \wedge b \le_B b \implies \forall (a, b) \in A \times B$.
2. טרנזיטיבי: $\forall \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_3, b_3 \rangle \in A \times B : \langle a_1, b_1 \rangle \le_{\text{lex}} \langle a_2, b_2 \rangle \wedge \langle a_2, b_2 \le_{\text{lex}} \langle a_3, b_3 \rangle \iff (a_1 <_A a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \le_B b_2)) \wedge (a_2 <_A a_3 \vee (a_2 = a_3 \wedge b_2 \le_B b_3)) \iff (a_1 <_A a2 \wedge a_2 <_A a_3) \vee (a_1 = a_2 \wedge b_2 \le_B b_3 \wedge a_2 = a_3 \wedge b_2 \le_B b_3) \iff (a_1 <_A a_3) \vee (a_1 = a_3 \wedge b_1 \le_B b_3) \iff \langle a_1, b_1 \rangle \le_{\text{lex}} \langle a_3, b_3 \rangle$.
3. אנטי־סימטרי: $\forall \langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle \in A \times B : \langle a, b \rangle \le_{\text{lex}} \langle a', b' \rangle \wedge \langle a', b' \rangle \le_{\text{lex}} \langle a, b \rangle \iff (a < a' \wedge a' < a) \vee (a = a' \wedge (b \le b' \wedge b' \le b)) \iff a = a' \wedge b = b' \iff \langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle$.

ומצאנו כי שלושת התנאים מתקיימים וזהו אכן יחס סדר חלקי. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $\langle A \times B, \le_{\text{lex}} \rangle$ סדורה קווית אם ורק אם $\langle A, \le_A \rangle, \langle B, \le_B \rangle$ סדורות קווית.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $\langle A \times B, \le_{\text{lex}} \rangle$ סדורה קווית.
נבחן את $\langle a, b \rangle, \langle a', b \rangle$, אם הם שווים נובע $a = a'$, אם $\langle a, b \rangle \le_{\text{lex}} \langle a', b \rangle$ אז נובע $a \le_A a$ ואם $\langle a', b \rangle \le_{\text{lex}} \langle a, b \rangle$ אז באופן דומה נקבל $a' \le_A a$. קיבלנו כי $\langle A, \le_A \rangle$ קווית, ובאותו אופן בדיוק עבור $\langle a, b \rangle, \langle a, b' \rangle$ נקבל כי גם $\langle B, \le_B \rangle$ קווית.

כיוון שני: נניח כי $\langle A, \le_A \rangle, \langle B, \le_B \rangle$ שניהם סדרים קוויים.
נבחן את $\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle$, אם $a = a', b = b'$ אז גם $\langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle$.
אם $a \le_A a' \wedge b \le_B b'$ אז נובע כי $a <_A a'$ או $a = a'$ ולכן $\langle a, b \rangle \le_{\text{lex}} \langle a', b' \rangle$.
אם $a' \le_A a \wedge b' \le_B b$ אז באופן זהה השוויון מתקיים לכיוון השני.
אם $a <_A a'$ אז כמובן היחס מתקיים, וגם $a >_A a'$, ולכן נניח ש־$a = a'$.
אם $b \le_B b'$ אז $\langle a, b \rangle \le_{\text{lex}} \langle a', b' \rangle$, הכיוון השני זהה, וסיימנו לעבור על כל המקרים וראינו כי תמיד היחס מוגדר, ובהתאם היחס קווי. $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי $\langle A \times B, \le_{\text{lex}} \rangle$ מבוסס היטב אם ורק אם $\langle A, \le_A \rangle, \langle B, \le_B \rangle$ מבוססים היטב שניהם.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $\langle A \times B, \le_{\text{lex}} \rangle$ מבוסס היטב.
לכל תת־קבוצה $A' \subseteq A$ נקבל כי לקבוצה $A' \times \{b\}$ (כאשר b קבוע) יש איבר מינימלי. תחת ההגבלה נקבל כי $\le_{\text{lex}} \iff a <_A a' \vee a =$
$\le_A \iff a \le_A a' \iff a'$, דהינו נקבל כי לכל $A' \subseteq A$ לא ריקה קיים איבר מינימלי עבור $\le_A$ ולכן $\langle A, \le_A \rangle$ מבוסס היטב.
ההוכחה ל־B זהה לחלוטין ונובעת מהעובדה ש־$b \le_B b' \iff \langle a, b \rangle \le_{\text{lex}} \langle a, b' \rangle$.

כיוון שני: נניח כי $\langle A, \le_A \rangle, \langle \langle B, \le_B \rangle$ סדרים מבוססים היטב, ותהינה $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ כאשר $A', b' \ne \emptyset$.
לכן קיימים איברים מינימליים $a \in A', b \in B'$. נבדוק עתה את $\langle a', b' \rangle \in A' \times B'$ איבר כלשהו.
נניח ש־$\langle a', b' \rangle \le_{\text{lex}} \langle a, b \rangle$ ולכן נקבל $a \le_A a' \wedge b \le_B b' \wedge (a' <_A a \vee (a' = a \wedge b' \le_B b)) \iff a = a' \wedge b = b'$ ולכן $\langle a, b \rangle$ מינימלי ב־$A' \times B'$. $\square$

שאלה 4

נוכיח כי לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $\langle [n \cdot m], \leq \rangle \cong \langle [n] \times [m], \leq_{\text{lex}} \rangle$.

הוכחה. נתחיל במציאת שיכון בין הסדרים.
נגדיר $f : \langle [n] \times [m], \leq_{\text{lex}} \rangle \to \langle [n \cdot m], \leq \rangle$ על־ידי

$$f(x, y) = mx + y$$

ונקבל $\forall \langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in [n] \times [m] : \langle x, y \rangle \leq_{\text{lex}} \langle x', y' \rangle \iff x < x' \vee (x = x' \wedge y \leq y') \iff mx < mx' \vee (nx + y \leq mx' + y') \iff mx + y \leq mx' + y' \iff f(x, y) \leq_{\text{lex}} f(x', y')$ כנביעה מ־$y < m$.
נבחין עתה כי כל $z \in [n \cdot m]$ ניתן לייצוג על־ידי $z = mx + y$ ולכן נוכל לקבוע כי f היא על ובהתאם $\langle [n \cdot m], \leq \rangle \cong \langle [n] \times [m], \leq_{\text{lex}} \rangle$. $\square$

שאלה 6

נניח כי $\langle A, \leq \rangle$ סדר קווי צפוף ללא מקסימום ומינימום.

יהיו $\langle B, \leq_B \rangle, \langle B', \leq_{B'} \rangle$ סדרים קוויים בעלי סדר שלם ללא מינימום ומקסימום,

$g : A \to B, g' : A \to B'$ שיכונים של הסדרים כך ש־$\operatorname{rng}(g), \operatorname{rng}(g')$ צפופים ב־B, B' בהתאמה.

נוכיח שקיים איזומורפיזם יחיד של סדרים $h : B \to B'$ המקיים $h \circ g = g'$.

הוכחה. □