פתרון מטלה 09 — מבנים אלגבריים 1 (80445)

13 ביולי 2024

שאלה 1

תהי G חבורה נילפוטנטית.

סעיף א'

נוכיח שכל $H \le G$ תת־חבורה היא גם נילפוטנטית.

הוכחה. נניח כי G היא r־נילפוטנטית, ונגדיר $\{e\} = Z_0 \triangleleft Z_1 \triangleleft \cdots \triangleleft Z_r = G$ הסדרה הנורמלית הנוצרת על־ידי הרכיבים הנילפוטנטיים.
ממשפט האיזומורפיזם השני נקבל כי $Z_i \cap H \triangleleft H$ לכל $0 \le i \le r$.
כך נקבל כי $Z_{i+1}/Z_i \simeq Z(G/Z_i)$ ולכן עלינו להוכיח כי $(H \cap Z_{i+1})/(H \cap Z_i) \simeq Z(H/(Z_i \cap H))$.
אני לא יודע. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $N \triangleleft G$, המנה G/N היא נילפוטנטית.

הוכחה. לא יודע. $\square$

שאלה 2

תהי G חבורהה נילפוטנטית סופית.

סעיף א'

נוכיח כי לכל $m \mid |G|$ קיימת תת־חבורה $H \le G$ כך ש־$|H| = m$.

הוכחה. אנו יודעים כי קיימת תת־חבורה p־סילו יחידה ונורמלית לכל p ואנו יודעים כי גם G היא מכפלה ישרה של חבורות p אלה.
ידוע גם כי קיימת תת־חבורה מכל סדר חזקת p קטן או שווה לחזקה המקסימלית, ולכן אם ניקח את הפירוק של m לראשוניים, מהעובדה שהוא מחלק את $|G|$ נוכל לקבוע כי לכל $p^r \mid m$ קיימת תת־חבורה בגודל זה ל־G.
נשתמש בעובדה שהיא איזומורפית למכפלה ישרה ונכפול את תת־החבורות האלו בגדלים ראשוניים מקסימליים המחלקים את m ונקבל תת־חבורה H כך שגודלה הוא בדיוק m. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $p \mid |G|$ ראשוני, מתקיים גם $p \mid |Z(G)|$.

הוכחה. תהי P חבורת p־סילו של G, וידוע כי $p \mid |Z(P)|$.
מהמשפט ש־G איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות p נסיק כי קיימת חבורה $H \le G$ כך ש־$G \simeq H \times P$, ומהלמה על מרכזי מכפלה ישרה נסיק $Z(G) \simeq Z(H) \times Z(P)$. לכן בפרט גם $|Z(G)| = |Z(H)| \cdot |Z(P)|$ ומצאנו כבר כי $p \mid |Z(P)|$ ולכן נסיק כי גם $p \mid |Z(G)|$. $\square$

שאלה 3

יהי $\mathbb{F}$ שדה. תהי $B_n(\mathbb{F}) \le GL_n(\mathbb{F})$ תת־חבורת המטריצות המשולשיות העליות ו־$U_n(\mathbb{F}) \le B_n(\mathbb{F})$ כאשר האלכסון שקול ל־I_n.

סעיף א'

נוכיח שהחבורה $U_n(\mathbb{F})$ היא נילפוטנטית לכל $n \ge 1$.

הוכחה. נניח ש־$U, A \in U_n(\mathbb{F})$, ולכן אנו יודעים כי $U \sim I_n$ ולכן נסיק כי קיימת $M \in GL_n(\mathbb{F})$ כך ש־$MUM^{-1} = I_n$.
עתה נבדוק מתי מתקיימת חילופיות ונקבל

$$AU = UA \iff AM^{-1}M = M^{-1}MA \iff MAM^{-1} = MA \iff U = A$$

ולכן נסיק כי $Z(U_n(\mathbb{F})) = \{I_n\}$ בלבד, ומכאן נוכל להסיק ישירות כי מתקיימת נילפוטנטיות. □

סעיף ב'

נוכיח כי החבורה $B_n(\mathbb{F})$ היא לא נילפוטנטית לכל $n \ge 2$.

הוכחה. אילו נעשה תהליך דומה לסעיף הקודם נקבל כי המרכז של $B_n(\mathbb{F})$ הוא חבורת המטריצות הסקלריות, נסמן $L_n(\mathbb{F}) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{F}, \lambda \ne 0_{\mathbb{F}}\}$.
נגדיר הומומורפיזם $\varphi : B_n(\mathbb{F}) \to B_n(\mathbb{F})$ על־ידי $\varphi(B) = \frac{B}{|B|}$, זהו אכן הומומורפיזם כנביעה מהעובדה שדטרמיננטה היא הומומורפיזם.
נבחין כי $\forall \lambda I_n \in L_n(\mathbb{F}) : \varphi(\lambda I_n) = 1/\lambda^n$. ממשפט האיזומורפיזם הראשון נסיק כי $B_n(\mathbb{F})/Z(B_n(\mathbb{F})) \simeq$
לא משנה אני לא יודע. □

שאלה 4

יהי R חוג ויהיו $x, y \in R$. נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נוכיח ש־$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

הוכחה. מפילוג נקבל

$$0 \cdot x = (1-1) \cdot x = 1 \cdot x - 1 \cdot x = 0 = x \cdot 1 - x \cdot 1 = x \cdot 0$$

□

סעיף ב'

נוכיח כי $(-1) \cdot x = -x$.

הוכחה. $0 = 0 \cdot x = (1-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x = 0 \implies x + (-1) \cdot x - x = -x \implies (-1) \cdot x = -x$. □

סעיף ג'

נסתור את הטענה כי $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ על־ידי דוגמה נגדית.

נבחין כי בעוד $x \cdot x$ חילופי בינו לבין עצמו, וכך גם $y = y$, לא בהכרח $xy = yx$.

נבחן את חוג המטריצות $M_2(\mathbb{R})$ ונראה כי

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad xy = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, yx = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל

$$(x+y)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

אבל

$$x^2 + 2xy + y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

ואלו כמובן מטריצות שונות.

סעיף ד'

נסתור את הטענה $xy = 0 \implies x = 0 \lor y = 0$ על־ידי דוגמה נגדית.

נגדיר

$$x = y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זוהי כמובן מטריצה נילפוטנטית וידוע כי

$$xy = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

אבל $x, y \neq 0$.

סעיף ה'

נסתור את הטענה $R = \{0\} \iff 1 = 0$ על־ידי דוגמה נגדית.

נגדיר $R = \mathbb{Z}_{/2}$ יחד עם פעולת הכפל הטריוויאלית, דהינו $\forall x, y \in R : x \cdot y = 0$, ולכן נקבל כי $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ ולכן ההגדרה מקיימת את תכונות החוג.

לעומת זאת, $R \neq \{0\}$.

שאלה 5

סעיף א'

נוכיח שההעתקה $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{/n}$ המוגדרת על־ידי $\varphi(x) = x \mod n$ היא הומומורפיזם חוגים.

הוכחה. יהיו $x, y \in \mathbb{Z}$, ונוכל לייצגם על־ידי $x = x' + kn, y = y' + kn$ כאשר k משתנה ו־$0 \leq x', y' < n$.
נקבל כמובן $\varphi(x) = x', \varphi(y) = y'$, ועתה נבחין כי $\varphi(x+y) = \varphi(x'+y') = x'+y' \mod n$.
כמו כן נקבל גם $\varphi(xy) = \varphi((x'+kn)(y'+kn)) = \varphi(x'y' + n(x'k + y'k + k^2)) = x'y' \mod n$.
נשאר לראות $\varphi(1) = 1$, ואכן על־פי הגדרה שוויון זה מתקיים לכל $n \geq 1$. □

סעיף ב'

נוכיח שאם $\mathbb{F}$ שדה ו־R חוג לא אפס, אז כל הומומורפיזם חוגים $f : \mathbb{F} \to S$ הוא חד־חד ערכי.

הוכחה. מה זה S? □

סעיף ג'

נוכיח שתת־הקבוצה

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

היא תת־חוג שאיזומורפי ל־$\mathbb{C}$.

הוכחה. למעשה כבר נתקלנו בהרצאה (שיעור 7) בקבוצה זו, שם הוכחנו כי היא סגורה לכפל ותת־חבורה ללא אפס, דהינו $I_2 \in C$.
נותר אם כן לבדוק כי היא חבורה יחד עם פעולת החיבור, אנו יודעים כי $0_2 \in C$, ולכן נבדוק סגירות לחיבור וקיום הופכי בלבד:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & -(b+b') \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix} \in C, \qquad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = 0_2$$

ומצאנו כי זהו אכן תת־חוג.

נבדוק איזומורפיה של C ל־$\mathbb{C}$.
נגדיר העתקה $\varphi : C \to \mathbb{C}$ המוגדרת על־ידי

$$\varphi(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}) = a + bi$$

ונבדוק סגירות לחיבור, כפל ויחידה:

$$\varphi(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}) = (a+a') + (b+b')i, \varphi(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}) + \varphi(\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}) = a + bi + a' + b'i = (a+a') + (b+b')i$$

ומצאנו סגירות לחיבור, בגירות לכפל נמצא באותה הדרך בדיוק תוך שימוש בהוכחה שצויינה לעיל מהרצאה 7, וכמובן על־פי הגדרה

$$\varphi(I_2) = 1 + 0i = 1$$

ומצאנו כי זהו הומומורפיזם חוגים, נותר לראות כי הוא הפיך. נגדיר $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \to C$ על־ידי

$$\varphi^{-1}(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

נוכל לבדוק ישירות על־ידי הצבה ונקבל $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = Id$ ונסיק כי שניהם אכן איזומורפיזמים, ולכן C איזומורפי ל־$\mathbb{C}$. □