פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

1 במאי 2023

שאלה 1

סעיף א'

נחשב את הגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

מהגדרת $\sin x$ אנו יכולים להסיק כי למשוואה $\sin x = x$ ישנו רק פתרון אחד כאשר $x = 0$, מהרציפות של שתי הפונקציות והעובדה כי $\sin 1 < 1$ (על־פי חישוב ישיר) נובע כי $\sin x < x$ לכל $0 < x$.

ניתן באופן דומה לראות כי $\alpha x < \sin x$ בסביבה חיובית של 0

$$\begin{aligned}
&\alpha x < \sin x < x \\
&\frac{1}{\alpha n^2} < \sin\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2} \\
&1+\frac{1}{n^4} < 1+\sin\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{n^2} \\
&\left(1+\frac{1}{\alpha n^2}\right)^{\alpha n^2} < \left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \\
&e^{\alpha} \le \lim_{n\to 0}\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \le e
\end{aligned}$$

וכאשר $\alpha \to 1$ נקבל

$$\lim_{n\to 0}\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$$

סעיף ב'

נמצא את ערך הגבול

$$\lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1}{x^2}}$$

על־פי הרכבת הפונקציה $\frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{t\to\infty}\left|\frac{1}{t}\right|^{t^2} \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{|t|^{t^2}} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

הגבול מתקיים במובן הרחב.

שאלה 2

תהי פונקציה

$$f(x) = e^{-x} + \sin^2 x$$

סעיף א'

נוכיח כי מתקיים הגבול הבא עבור סדרה

$$\lim_{n\to\infty} f(\pi n) = 0$$

הוכחה. מהגדרת פונקציית sin אנו יודעים כי $\sin \pi k = 0$ לכל $k \in \mathbb{Z}$.

אז גם $f(\pi k) = e^{-pik} = (\frac{1}{e})^k$, וממשפט 6.9 נובע

$$\lim_{n\to\infty} f(\pi n) = 0$$

מש"ל

סעיף ב'

נוכיח כי

$$\inf f([0,\infty)) = 0$$

הוכחה. נגדיר $a > 0$, ונראה כי קיים x_0 כך ש־$f(x_0) = a$.

אנו יודעים כי כאשר $x \to \infty$ אז $e^{-x} \to 0$, לכן מהגדרת הגבול ומתחום ההגדרה של e^{-x} אנו יודעים שקיים מספר $x_1 < a$.

ממשפט ערך הביניים של קושי נובע גם כי x_0 כזה המתואר קיים.

לכן $f(x) > 0$ לכל x בתחום ההגדרה וכל $a > 0$ שנבחר קיים בתמונת f, ומהגדרה 3.12 ונבע כי $\inf f([0,\infty)) = 0$. **מש"ל**

סעיף ג'

נוכיח כי הפונקציה f לא מקבלת מינימום בתחום הגדרתה.

הוכחה. נניח בשלילה כי הפונקציה מקבלת מינימום בנקודה x_0, ונגדיר כי $f(x_0) = c$.

כפי שראינו בסעיף הקודם, אילו $c > 0$ אז קיימת נקודה x_1 כך ש־$f(x_0) < f(x_1)$. לא קיים ערך x_0 עבורו $c = 0$, וידוע מהגדרתה כי f לא שלילית לאף ערך x.

על־כן ניתן לקבוע כי לא קיים x_0 כזה ובעקבות כך לפונקציה f אין מינימום. **מש"ל**

שאלה 3

בכל סעיף נמצא את תחום ההגדרה, תחום הרציפות תחום הגזירות, ואת ערך הנגזרת לכל נקודה בתחום הגזירות של הפונקציה המוגדרת.

סעיף א'

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(x)\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$