פתרון מטלה 6 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

11 ביוני 2024

שאלה 1

תהי פונקציה f הרציפה בקטע $[a,b]$ ו־K־ליפשיצית בקטע הפתוח (a,b).

סעיף א'

נוכיח כי f היא גם K־ליפשיצית בקטע הסגור $[a,b]$.

הוכחה. יהיו $a < x_1 < x_2 < b$ ולכן נקבל כי $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$.
נבחין כי שני האגפים בשוויון המתקבל מייצגים פונקציות רציפות (בקיבוע אחד המשתנים) ולכן ניעזר בהגדרת הרציפות ונקבל את הגבול

$$\lim_{x_2 \to b} |f(x_1) - f(x_2)| \leq \lim_{x_2 \to \infty} K|x_1 - x_2|$$

ונסיק מהרציפות

$$|f(x_1) - f(b)| \leq K|x_1 - b|$$

נעשה את התהליך גם על x_1 עבור קיבוע של $x_2 \leq b$ ונקבל כי f אכן K־ליפשיצית ב־$[a,b]$. □

סעיף ב'

נוכיח כי לכל חלוקה $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ של $[a,b]$ מתקיים

$$U(f,P) - L(f,P) \leq K(b-a)\Delta(P)$$

הוכחה. נראה כי

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$

ואנו יודעים כי קיימים m_i^x, M_i^x כך ש־$f(m_i^x) = m_i$ וגם $f(M_i^x) = M_i$ כנביעה מהגדרה ולכן

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(M_i^x) - f(m_i^x))(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} K(M_i^x - m_i^x)(x_{i+1} - x_i)$$

נשים לב כי $M_i^x - m_i^x \leq x_{i+1} - x_i$ ולכן מספיק שנבחר קטע חלוקה מקסימלי ומאי־שוויון משולש נקבל

$$U(f,P) - L(f,P) \leq K \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(P)(x_{i+1} - x_i) \leq K\Delta(P) \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = K(b-a)\Delta(P)$$

וקיבלנו כי אי־השוויון מתקיים. □

סעיף ג'

נמצא חלוקה שווה P של הקטע $[0,1]$ כך ש־$U(\cos, P) - L(\cos, P) < 0.001$.

אנו יודעים כי $\cos$ היא 1־ליפשיצית ולכן נקבל מתוצאת הסעיף הקודם כי

$$U(\cos, P) - L(\cos, P) \leq 1 \cdot (1-0)\Delta(P) = \frac{1}{n}$$

כאשר n הוא כמות הנקודות בחלוקה P.

לכן אם כן מספיק ש־$n = 1000$ והתנאי יתקיים.

שאלה 2

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ב־$[a,b]$, ונגדיר פונקציות חדשות f_-,f_+ בקטע זה על־ידי

$$\forall x\in[a,b]\quad f_+(x)=\max\{f(x),0\},\qquad f_-(x)=-\min\{f(x),0\}$$

סעיף א'

.i

נוכיח כי $0\le f_+(x)$.

הוכחה. נחלק למקרים:

- אם $f(x)\ge 0$ אז נקבל $f_+(x)=f(x)\ge 0$.
- אם $f(x)<0$ אז נקבל $f_+(x)=0\ge 0$

ולכן בכל מקרה $f_+(x)\ge 0$. $\square$

.ii

נוכיח כי $f_-(x)\ge 0$.

הוכחה. גם הפעם נראה שאם $f(x)\le 0$ אז $f_-(x)=-f(x)\ge 0$ ואילו $f(x)>0$ אז $f_-(x)=0\ge 0$. $\square$

.iii

נוכיח כי $f=f_+-f_-$.

הוכחה. נחלק שוב למקרים, תחילה נראה כי אם $f(x)=0$ אז $f_+(x)=f_-(x)=0$ ונקבל כי השוויון מתקיים.
כאשר $f(x)>0$ נקבל כי $f_+(x)=f(x)$ ואילו כי $f_-(x)=0$ ולכן השוויון עודנו מתקיים,
כאשר $f(x)<0$ אז $f_+(x)=0$ אבל $f_-(x)=-f(x)$ ולכן $f(x)=0-(-f(x))$.
מצאנו כי השוויון מתקיים לכל $x\in[a,b]$. $\square$

.iv

נוכיח כי $|f|=f_++f_-$.

הוכחה. הפעם אנחנו נהיה יצירתיים במיוחד, ונחלק למקרים.
אם $f(x)=0$ אז מהשוויון בהוכחת הסעיף הקודם נקבל כי השוויון מתקיים.
אם $f(x)>0$ אז $f_-(x)=0$ ונקבל $|f(x)|=f(x)=f_+(x)$ והשיון מתקיים.
עבור $f(x)<0$ נקבל $f_+(x)=0$ וגם $f_-(x)=-f(x)\ge 0$ ולכן $|f(x)|=0-f(x)$.
מצאנו כי השוויון אף הוא מתקיים לכל $x\in[a,b]$. $\square$

סעיף ב'

תהי חלוקה $P=\{a=x_0<\cdots<x_n=b\}$ ונסמן

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}\{f(x)\},M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}\{f(x)\},m_i^+=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}\{f_+(x)\},M_i^+=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}\{f_+(x)\}$$

ונוכיח כי $M_i^+-m_i^+\le M_i-m_i$.

הוכחה. אנו יודעים כי כאשר $f(x) \ge 0$ אז $f(x) = f_+(x)$ ולכן נוכל להסיק כי אם $M_i \ge 0$ אז נוכל לבחור את אותו ה־x ולקבל גם $M_i^+ = M_i$.
באופן דומה אם $m_i \ge 0$ אז $m_i^+ = m_i$ ונקבל כי $M_i^+ - m_i^+ = M_i - m_i$ ובפרט אי־השוויון מתקיים.
אם $M_i \le 0$ אז נוכל להסיק $M_i^+ = 0$ מהגדרתו, וכך גם $m_i \le M_i \le 0$ יוביל ל־$m_i^+ = 0$ וידוע כי $0 \le M_i - m_i$ ונקבל כי אי־השוויון חל.
המקרה האחרון הוא כאשר $M_i > 0$ אבל $m_i \le 0$, במקרה זה מצאנו כי $M_i^+ = M_i, m_i^+ = 0$ ונקבל $M_i - 0 \le M_i - m_i$.
אי־השוויון מתקיים בכל מקרה ולכן נכון לכל החלוקה.
אנו יודעים כי f אינטגרבילית, ולכן נקבל מאי־השוויון $0 \le M_i^+ - m_i^+ \le M_i - m_i$ כי גם f^+ אינטגרבילית ב־$[a, b]$. □

סעיף ג׳

נוכיח כי גם $|f|$, f_- אינטגרביליות ב־$[a, b]$.

הוכחה. מצאנו כי $f_- = f_+ - f$ בסעיף א׳ ובסעיף ב׳ מצאנו כי f, f_+ הן שתיהן אינטגרביליות, ולכן נסיק מלינאריות של האינטגרל כי גם f_- אינטגרבילית ב־$[a, b]$.
עתה כשמצאנו כי f_-, f_+ אינטגרביליות, נקבל כי גם חיבורן – הוא $|f|$ – היא אינטגרבילית ב־$[a, b]$. □

סעיף ד׳

נוכיח את אי־שוויון משולש האינטגרלי

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

הוכחה. מצאנו כי $f(x) \le f_+(x) \le |f(x)|$, ולכן גם

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

אנו יודעים כי הביטוי הימני תמיד חיובי, בעוד $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ ולכן נוכל להסיק גם

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

□

שאלה 3

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ב־$[a,b]$ ויהי $c>0$ קבוע ממשי.
נגדיר פונקציה $h:[a-c,b-c]\to\mathbb{R}$ על־ידי $h(x)=f(x+c)$ לכל $x\in[a-c,b-c]$.

סעיף א'

לכל חלוקה $P=\{x_0<\cdots<x_n\}$ של $[a,b]$ נתאים חלוקה $P-c=\{x_0-c<\cdots<x_n-c\}$ של $[a-c,b-c]$ ונראה כי $L(f,P)=L(h,P-c)$ וגם כי $U(f,P)=U(h,P-c)$.

הוכחה. ניעזר בהזזה של הפונקציה ומהעובדה ש־$h(x)=f(x+c)$ ונקבל כי M_i משותפת לשתי החלוקות, שכן עבור $[x_{i+1}-c,x_i-c]$ נקבל $h(x)=f(x+c)$, ואם נניח ש־M_i חסם עליון לערכי הפונקציה בחלוקה, אז זה גם החסם העליו עבור h בקטע המוזז. נקבל גם כי $x_{i+1}-c-x_i+c=x_{i+1}-x_i$ ולכן $U(f,P)=U(h,P-c)$.
נוכל לבצע תהליך זהה ונקבל כי גם $L(f,P)=L(h,P-c)$. $\square$

סעיף ב'

נסיק כי h אינטגרבילית בקטע $[a-c,b-c]$ וכי מתקיים

$$\int_{a-c}^{b-c} h(x)\,dx=\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

הוכחה. מצאנו בסעיף הקודם כי הסכומים העליונים והתחתונים של h ושל f לאחר הזזה מתאימה הם שווים, ולכן נקבל כי h אינטגרבילית אם ורק אם f אינטגרבילית בהתאמה להזזה.
נסיק אם כן ישירות כי

$$\int_{a-c}^{b-c} h(x)\,dx=\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

$\square$

שאלה 4

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ויהי $m\geq 0$ קבוע ממשי.
נגדיר פונקציה $h:[a/m,b/m]\to\mathbb{R}$ על־ידי $h(x)=f(mx)$ לכל $x\in[a/m,b/m]$.

סעיף א'

נתאים לכל חלוקה $P=\{x_0<\cdots<x_n\}$ של $[a,b]$ את החלוקה $P/m=\{x_0/m<\cdots<x_n/m\}$ של $[a/m,b/m]$ ונראה כי $L(h,P/m)=\frac{1}{m}L(f,P)$ וכי $U(h,P/m)=\frac{1}{m}U(f,P)$.

הוכחה. תהי $0\leq i<n$ ונבחן את $M_i=\sup_{x_i<x<x_{i+1}}f(x)$, ידוע כי $h(x)=f(mx)$ ולכן עבור x_M המקיים $f(x_M)=M_i$ נקבל גם $h(\frac{x_M}{m})=f(x_M)=M_i$. מצאנו כי הפונקציות, עבור החלוקות השקולות, חולקות חסמים מקסימליים, ונוכל להראות באותה הדרך כי גם מינימליים.
נבחן עתה את $U(h,P/m)$:

$$U(h,P/m)=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n-1}M_i(x_{i+1}-x_i)=\frac{1}{m}U(f,P)$$

ומתהליך דומה נקבל גם כי $L(h,P/m)=\frac{1}{m}L(f,P)$. □

סעיף ב'

נוכיח כי h אינטגרבילית ב־$[a/m,b/m]$ ושמתקיים

$$\int_{a/m}^{b/m}h(x)\,dx=\int_{a/m}^{b/m}f(mx)\,dx=\frac{1}{m}\int_a^b f(x)\,dx$$

הוכחה. מצאנו כי $U(h,P/m)-L(h,P/m)=\frac{1}{m}(U(f,P)-L(f,P))$ ומאינטגרביליות f ב־$[a,b]$ נסיק את השוויון ישירות. □

סעיף ג'

נוכיח כי השוויון הנתון נכון גם עבור $m<0$.

הוכחה. נגדיר $g(x)=h(-x)$ ולכן g מייצגת את h עבור $m<0$, בתרגול מצאנו כי

$$\int_{-b}^{-a}g(x)\,dx=\int_a^b h(x)\,dx=\int_{a/m}^{b/m}f(mx)\,dx$$

ולמעשה מצאנו כי השוויון חל גם עבור בחירת $m<0$. □

שאלה 5

סעיף א'

יהי $0 < b \in \mathbb{R}$ ותהי $f : [-b, b] \to \mathbb{R}$ פונקציה אי־זוגית.
נוכיח שאם f אינטגרבילית ב־$[-b, b]$ אז גם $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$.

הוכחה. נשתמש בתכונת האדיטיביות ונקבל

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

ומשיקוף על ציר ה־y שהוכחנו בתרגול נקבל

$$\int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx = \int_{0}^{b} f(-x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx = \int_{0}^{b} -f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx = \int_{0}^{b} -f(x)f(x)\,dx = 0$$

□

סעיף ב'

יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$, ונוכיח כי

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0$$

הוכחה. נראה כי $\cos(mx)\sin(nx)$ היא אי־זוגית:

$$\cos(-mx)\sin(-nx) = \cos(mx)(-1)\sin(nx) = -\cos(mx)\sin(nx)$$

ולכן מהסעיף הקודם נקבל ישירות כי

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0$$

□

שאלה 6

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T>0$, ו־f אינטגרבילית ב־$[0,T]$.
נוכיח כי לכל $a\in\mathbb{R}$ f אינטגרבילית בקטע $[a,a+T]$ וכי מתקיים

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$$

הוכחה. בסעיף ב' של שאלה 3 קיבלנו כי אינטגרלים נשמרים תחת הזזות, ולכן נקבל עבור ההזזה $h(x)=f(x-a)$ כי

$$\int_a^{a+T} h(x)=\int_a^{a+T} f(x-a)=\int_0^T f(x)\,dx$$

נבחין כי מהמחזוריות של f נקבל $h(x)=h(x+T)$ וכן גם $f(a)=f(a+T)$ ואנו רואים כי בחירת a לא משפיעה על התחום שיכלול יותר או פחות ממחזור יחיד, לכן

$$\int_a^{a+T} f(x)=\int_0^T f(x)\,dx$$

$\square$

שאלה 7

נחשב את פולינומי טיילור מסדר 5 סביב 0 של $f(x) = e^x \sin x$ ו-$g(x) = e^{\sin x}$.

אנו יודעים כבר כי

$$P_{5,\sin,0}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

וגם כי

$$P_{5,\exp,0} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

מצאנו בתרגול כי

$$P_{n,g\cdot f,a} = [P_{n,g,a} \cdot P_{n,f,a}]_{n,a}$$

ולכן נקבל כי

$$P_{5,\exp\,\cdot\,\sin,0} = [P_{5,\exp,0} \cdot P_{5,\sin,0}]_{5,0} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{3!}(x^3 - \frac{1}{3!}x^5) + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

בתרגול מצאנו כי לכל f, g גזירות n פעמים מתקיים

$$P_{n,g\circ f,a}(x) = [P_{n,g,f(a)}(P_{n,f,a}(x))]_{n,a}$$

ונקבל מהנוסחה כי

$$\begin{aligned}
&P_{5,\exp\,\circ\,\sin,0} = [P_{5,\exp,0}(P_{5,\sin,0}(x))]_{5,0} \\
=&[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + \frac{1}{(2!)^2}(x^3 - \frac{1}{3!}x^5 + \frac{1}{5!}x^7) \\
&+ \frac{1}{(3!)^2}(x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^8) + \frac{1}{(4!)^2}(x^5 - \frac{1}{3!}x^7 + \frac{1}{5!}x^9) + \frac{1}{(5!)^2}(x^6 - \frac{1}{3!}x^8 + \frac{1}{5!}x^{10})]_{5,0} \\
=&x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{(2!)^2}(x^3 - \frac{1}{3!}x^5) + \frac{1}{(3!)^2}(x^4) + \frac{1}{(4!)^2}(x^5)
\end{aligned}$$