,(1), מטלה -04 מטלה פתרון מטלה חורת ההסתברות (1),

2024 בנובמבר 25



שאלה 1

. הטענות הטענות או נפריך או נוכיח הסתברות. הסתברות (Ω,\mathbb{P}) היי

'סעיף א

נסתור את הטענה כי שני מאורעות A,B הם בלתי־תלויים אם ורק אם הם ל-ידי דוגמה נגדית.

פתרון נגדיר אז הוגנת ו־1 לא יכול לצאת (השאר בהסתברות שווה), אז $A=\{1,2\}, B=\{1,3\}$ מאורע של הטלת קוביה, אבל ונגדיר $A=\{1,2\}, B=\{1,3\}$ השאר בהסתברות שווה), אז $A\cap B\neq\emptyset$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = 0 \neq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

'סעיף ב

. בלתי־תלויים אז Cו־בA אז הטענה כי בלתי־תלויים וגם בלתי־תלויים אז Bבלתי-תלויים בלתי־תלויים נסתור את בלתי

פתרון נגדיר Ω הטלת שיצא בקוביה מיצא בקוביה ע שיצא בקוביה א', מאורע שיצא המאורע מיצא מחרון הטלת מיצא מחרון נגדיר הטלת מיצא וויבות, אוויבות שיצא פתרון הטלת שיצא וויבות אוויבות הטלת שיצא וויבות אוויבות שיצא בקוביה ב' וויבות אוויבות שיצא וויבות הטלת שיצא וויבות שוויבות שיצא וויבות שוויבות שיצא וויבות שיצא

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

יים: אבל כמובן לא כלתי־תלויים. בלתי־תלויים, אבל B,Cגם ולכן לא בלתי־תלויים: לכן לכן בלתי־תלויים. אבל האבל האבל בלתי־תלויים:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{36} = \mathbb{P}^2(A)$$

'סעיף ג

 $\mathbb{P}(A)=1$ או $\mathbb{P}(A)=0$ או בעצמו, אז בלתי־תלוי בעצמו נוכיח שאם ב

ולכן $\mathbb{P}(A) \notin \{0,1\}$ ולכן בשלילה נניח בשלילה ב

$$\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}^2(A) \iff 1 = \mathbb{P}(A)$$

וקיבלנו סתירה.

'סעיף ד

. בלתי־תלויים A^C, B^C בא גם בלתי־תלויים A, B

. בלתי־תלויים. B^C ו בכיתה כי גם אותה בלתי־תלויים. בלתי־תלויים בלתי־תלויים. פתרון ראינו בכיתה בי B^C ו

'סעיף ה

. בלתי־תלויים Cו־ $A \cup B$ ו־ בלתי־תלויים אז בלתי־תלויים בלתי־תלויים בלתי־תלויים.

אבל בלתי־תלויים אבל A,B,C אז כמובן A אז בלתי־תלויים ב' קוביה א' יצאה אל קוביה א' אבל פתרון בניח אבל אורים אבל פתרון ביי

$$\mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) = 0 \neq \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(A \cup B)$$

'סעיף ו

. בלתי תלויים אז $A,B\cup C$ אם בלתי-תלויים וכן A,C בלתי תלויים אם בלתי-תלויים או

. בקוביה שיצא 4 שיצא Cים הראשונה ו־C בקוביה הראשונה 1, ו־B שיצא סכום 7, שיצא 4 בקוביה שיצא C הטלת שתי קוביות, נניח מ

אבל אבל בלתי־תלויים, שני זוגות שני אני אבל וגם A,C וגם אבל בהרצאה ראינו בהרצאה אני אבל וגם

$$\mathbb{P}(A\cap(B\cup C)) = \frac{2}{36} \neq \frac{1}{6}\cdot\frac{6+6-1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\cup C)$$

'סעיף ז

. בלתי־תלויים אז $B \cup C$ ו אז אז B,Cונכיח וגם בלתי־תלויים וכן Aוכן בלתי־תלויים בלתי־תלויים ווכיח שאם בלתי־תלויים וכן B

הוכחה. נבחין כי

$$\mathbb{P}(A \cap (B \uplus C)) = \mathbb{P}((A \cap B) \uplus (A \cap C))$$

$$= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C)$$

$$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

$$= \mathbb{P}(A)(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C))$$

$$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A \cup C)$$

שאלה 2

מתקיים מתקיים לכל אם ורק הב בלתי הלויים הם A_1,\dots,A_n מתקיים נוכיח שהמאורעות

$$\mathbb{P}((\bigcap_{i\in I}A_i)\cap(\bigcap_{i\in [n]\setminus I}A_i^C))=(\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i))\cdot(\prod_{i\in [n]\setminus I}\mathbb{P}(A_i^C))$$

. בלתי־תלויים $A_1,\dots,A_n,A_1^C,\dots,A_n^C$ בניח מטענה ולכן מטענה בלתי בלתי בלתי שירות בלתי שירות ונגדיר ונגדיר $J=I\cup\{n+j\mid j\in[n]\land j\notin I\}$ ונגדיר ישירות ישירות

$$\mathbb{P}((\bigcap_{i \in I} A_i) \cap (\bigcap_{i \in [n] \backslash I} A_i^C)) = (\prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)) \cdot (\prod_{i \in [n] \backslash I} \mathbb{P}(A_i^C))$$

נניח את כיוון השני.

 $.\{A_j\mid 1\leq j\leq n\}\setminus A_i$ ביתלוי בלתי־תלות כי להראות להראו ונרצה לכלשהו כל יהי נורצה להראות כי ל