פתרון מטלה 9 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

4 ביולי 2024

שאלה 1

נבדוק את התכנסות וערך האינטגרלים הבאים.

.i

$$\int_0^1 \ln(x)\ dx$$

נבחין כי בתחום מתקבל

$$\int \ln(x)\ dx = x\ln x - x$$

ולכן נקבל

$$\int_0^1 \ln(x)\ dx = \lim_{h\to 0} x\ln x - x\ |_h^1 = \lim_{h\to 0} -1 - h\ln h - h = -1 - 0\ln 0 - 0 = -1$$

ומצאנו כי האינטגרל מתכנס ל־-1.

.ii

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$$

נגדיר $t = \arctan x, dt = \frac{dx}{1+x^2}$ ולכן נקבל

$$\int_0^\pi t\ dt = \pi$$

שאלה 2

יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהינה $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות ב־$[a, N]$ עבור כל $a < N$.
נתון כי קיים $c \in [a, \infty)$ כך שלכל $c \leq x$ מתקיים $0 < f(x)$ ו־$0 < g(x)$.
נוכיח כי אם הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הצר והוא גדול ממש מאפס, אז האינטגרלים $\int_a^\infty f(x)\ dx$ ו־$\int_a^\infty g(x)\ dx$ מתבדרים ומתכנסים יחד.

הוכחה. נסמן $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L < \infty$ ולכן עבור $\epsilon = \frac{L}{2}$ לכמעט כל x מתקיים

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \frac{L}{2} \iff L - \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2} \iff 0 < \frac{L}{2}g(x) < f(x) < \frac{3L}{2}f(x)$$

אם כמובן נניח כי $\int_a^\infty g(x)\ dx$ מתכנס אז נקבל ישירות ממבחן ההשוואה כי $\int_a^\infty f(x)\ dx$ מתכנס אף הוא.
אם נניח כי $\int_a^\infty g(x)\ dx$ מתבדר נקבל כי גם $\int_a^\infty f(x)\ dx$ מתבדר. □

שאלה 3

נבדוק את התכנסות האינטגרלים הבאים:

סעיף א'

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\ dx$$

נשים לב כי $\cos x > \frac{1}{2}$ בסביבה של 0 ולכן האינטגרל מתכנס אם

$$\int_0^\delta \frac{1}{x} dx$$

מתכנס, ואנו כבר יודעים כי הוא מתבדר, ולכן נסיק כי גם האינטגרל המקורי מתבדר.

סעיף ב'

$$\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\ dx$$

אנו יודעים כי

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$$

ולכן ממשפט ההתכנסות האינטגרלי בגרסה הגבולית נסיק כי האינטגרל מתכנס, וכמובן גם בהחלט מהחיוביות בתחום.

סעיף ג'

$$\int_1^\infty \exp(-\sqrt{x})\ dx$$

ממבחן ההשוואה יחד עם $g(x) = \frac{1}{x}$ נקבל כי האינטגרל מתכנס.

סעיף ד'

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

אילו נגדיר $f(x) = \ln x, g(x) = \frac{1}{x-1}$ נקבל מלופיטל

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

ולכן מהגרסה הגבולית של מבחן ההשוואה נקבל כי האינטגרל מתכנס.

סעיף ה'

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}\ dx$$

בסביבה של 0 נקבל כי האינטגרל מתכנס על־פי מבחן ההשואה הגבולי יחד עם $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ובדיקה ישירה של האינטגרל של g.
בסביבה של ∞ נקבל ממבחן כי הערך המוחלט של הפונקציה חסום על־ידי $h(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ וזה כמובן מתכנס על־פי אינטגרציה ישירה, ולכן קיבלנו כי הפונקציה מתכנסת בהחלט.

סעיף ו'

$$\int_0^1 (\ln x)^7\ dx$$

נגדיר $x = e^t, dx = e^t dt$ ולכן האינטגרל שקול לאינטגרל

$$\int_{-\infty}^{0} t^7 e^t \; dt$$

ומצאנו במטלה הקודמת כי אינטגרל מהצורה הזו ניתן לחישוב וערכו הוא פולינום כלשהו כפול אקספוננט ולכן נוכל להסיק כי האינטגרל מתכנס, כמובן בתחום הוא לא משנה סימן ונסיק עי הוא מתכנס בהחלט.

שאלה 4

תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ עם $1\le a<b$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס בהחלט אז $\int_1^\infty f(x)\sin(x)\,dx$ מתכנס.

הוכחה. נתון כי $\int_1^\infty |f(x)|\,dx$ מתכנס, ונבחין כי

$$|f(x)\sin x| = |f(x)|\cdot|\sin x| \le |f(x)|$$

ולכן נסיק ממבחן ההשוואה הראשון כי $\int_1^\infty |f(x)\sin x|\,dx$ מתכנס, ולכן $\int_1^\infty f(x)\sin x\,dx$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס. $\square$

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם f מונוטונית עולה ב־$[1,\infty)$ אז $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתבדר.

נבחר את הדוגמה הנגדית $f(x)=-\frac{1}{x^2}$. נבחין כי הפונקציה אכן מונוטונית עולה ממש בתחום, ונשים לב גם כי $\int f(x)\,dx = -2\frac{1}{x}+C$ ולכן נסיק כי האינטגרל שלה בתחום מתכנס.

שאלה 5

נחשב את הפונקציות הקדומות של הפונקציות הרציונליות הבאות.

סעיף א'

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-5}{x^2+6}\,dx &= \int \frac{2x}{x^2+6} - \frac{5}{x^2+6}\,dx \\
&= \ln|x^2+6| - \frac{5}{6}\int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{6}})^2+1} \\
&= \ln|x^2+6| - \frac{5}{\sqrt{6}}\int \frac{dt}{t^2+1} \\
&= \ln|x^2+6| - \frac{5}{\sqrt{6}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{6}})
\end{aligned}$$

סעיף ב'

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+2x^2-2}{(x+1)(x+2)}dx &= \int x - \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \ln|x+1| - \int 1 - \frac{1}{x+2}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \ln|x+1| - x + \ln|x+2|
\end{aligned}$$

סעיף ג'

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2-3x-4}{(x-1)^3(x+2)}dx &= \int \frac{4(x^2+x-2)-7x+4}{(x-1)^3(x+2)}dx \\
&= \frac{4}{1-x} + \int \frac{-7x+4}{(x-1)^3(x+2)}dx \\
&= \frac{4}{1-x} + \int \frac{-7(x+2)}{(x-1)^3(x+2)} + \frac{18}{(x-1)^3(x+2)}dx \\
&= \frac{4}{1-x} + \frac{7}{2(x-1)^2} + \int \frac{18}{(x-1)^3(x+2)}dx \\
&= \frac{4}{1-x} + \frac{7}{2(x-1)^2} + \int \frac{2(x-1)+2(x-1)+2(x-1)+6(x+2)}{(x-1)^3(x+2)}dx \\
&= \frac{4}{1-x} + \frac{7}{2(x-1)^2} - \frac{6}{2(x-1)^2} + \int \frac{-2(x-1)+2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}dx \\
&= \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \int \frac{-2}{(x-1)(x+2)} + \frac{2}{(x-1)^2}dx \\
&= \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2}{1-x} + \int \frac{\frac{2}{3}(x-1)-\frac{2}{3}(x+2)}{(x-1)(x+2)}dx \\
&= \frac{6}{1-x} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \int \frac{\frac{2}{3}}{x+2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x-1}dx \\
&= \frac{6}{1-x} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2}{3}\ln|x+2| - \frac{2}{3}\ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

שאלה 6

יהיו $b, c \in \mathbb{R}$ כך ש־$x^2 + bx + c$ פולינום ריבועי אי־פריק, ויהי $n \in \mathbb{N}$.

סעיף א'

נביע את האינטגרל

$$\int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^n} dx$$

על־ידי I_n.

$$\int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^n} dx = \int \frac{1}{\left((x + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}\right)^n} dx = (c - \frac{b^2}{4})^{-n} \int \frac{1}{\left((\frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - b^2/4}})^2 + 1\right)^n} dx = (c - \frac{b^2}{4})^{-n} I_n$$

סעיף ב'

נחשב את האינטגרל הבא כתלות ב־I_n.

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^n} dx$$

נחשב ונראה

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^n} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + b) + B - \frac{Ab}{2}}{(x^2 + bx + c)^n} dx \\
&\overset{\substack{t = x^2 + bx + c \\ dt = (2x + b)\ dx}}{=} \int \frac{\frac{A}{2}}{t^n}\, dt + \int \frac{B - \frac{Ab}{2}}{(x^2 + bx + c)^n} dx \\
&= \frac{-A}{2(n-1)t^{n-1}} + (B - \frac{Ab}{2}) \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^n} dx \\
&= \frac{-A}{2(n-1)t^{n-1}} + (B - \frac{Ab}{2})(c - \frac{b^2}{4})^{-n} I_n
\end{aligned}$$

שאלה 7

תהי סדרה חסומה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ונסמן $u_k = \sup\{a_n \mid n \geq k\}$ ו־$l_k = \inf\{a_n \mid n \geq k\}$.
נחשב את u_k, l_k ונחשב את הגבול העליון והתחתון של הסדרה (a_n).

סעיף א'

(a_n) סדרה מונוטונית עולה המתכנסת ל־$A \in \mathbb{R}$.

נבחין כי $a_k \leq a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן נסיק $l_k = a_k$.

באופן דומה נראה כי $L < a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ומהגדרת הגבול נסיק כי זהו הגבול עצמו, דהינו $u_k = A$.

סעיף ב'

$a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$.

נבחין כי $a_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$, וגם $a_{2n-1} = -1 - \frac{1}{n}$.
לכן נקבל כי $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$ ולכן נסיק $u_k = 1 + \frac{1}{n}$, ונסיק באופן דומה כי $u_k = -1 - \frac{1}{n}$.

סעיף ג'

$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

נקבל $a_{2n} = 1 + \frac{1}{n}, a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{n}$.
לכן נבחין כי $1 + \frac{1}{k}$ הוא הערך הגדול ביותר שנקבל עבור $n \geq k$, ונקבל $u_k = 1 + \frac{1}{k}$, ונבחין כי a_{2n+1} מונוטונית יורדת ולכן נסיק $l_k = -1$.

שאלה 8

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כלשהי.

סעיף א'

נוכיח כי אם (a_n) חסומה אז מתקיים

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n) = -\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)$$

הוכחה. ידוע שהקבוצה חסומה ולכן נוכל להסיק כי כלל הגבולות החלקיים חסומים אף הם, נניח

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = l, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = L$$

עתה, אם נבחן את $(-a_n)$ נקבל כי הגבולות החלקיים שלה כולם הם הגבולות החלקיים של (a_n) עם היפוך סימן, ולכן נוכל להסיק כי גם

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} -a_n = -L, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} -a_n = -l$$

ולמעשה הוכחנו עתה את הטענה. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n < \infty$ אז יש $L \in \mathbb{R}$ כך ש-$L < a_n$ מתקיים באופן שכיח.

הוכחה. נגדיר $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = K$ ואנו יודעים כי $K \in \mathbb{R}$, אז אנו יודעים כי קיימת n_k כך ש-$a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} K$.
לכן מהגדרת הגבול נקבל כי $-1 < a_{n_k} - K < 1$ ולכן $K - 1 < a_{n_k} < K + 1$ ונוכל לבחור $L = K + 1$ וקיבלנו כי התכונה אכן שכיחה עבור n. $\square$