פתרון מטלה 7 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

19 ביוני 2024

שאלה 1

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־$0<a<b$ ו־$\alpha\in\mathbb{N}$. לכל $n\in\mathbb{N}$ נסמן $q=q_n=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ ו־$P_n=\{a,aq,\dots,aq^n=b\}$.

סעיף א'

נחשב את $\lim_{n\to\infty}\triangle(P_n)$.

נבחן את $\triangle x_i=aq^{i+1}-aq^i$, ונקבל $aq^i(q-1)$, כמובן ש־$q-1$ הוא ערך קבוע ולכן עלינו לבחון את aq^i בלבד. כמובן ידוע כי $b>a$ ולכן $q>1$ ונקבל כי $i=n-1$ הוא המקסימום, דהינו

$$\triangle(P_n)=aq^{n-1}(q-1)$$

ולכן גם

$$\lim_{n\to\infty}\triangle(P_n)=\lim_{n\to\infty}b-(\frac{b}{a})^{(n-1)/n}=\frac{ab-b}{a}$$

סעיף ב'

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(x)=x^\alpha$.

נוכיח כי

$$L(f,P_n)=(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\cdot\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1},\qquad U(f,P_n)=q^\alpha\cdot L(f,P_n)$$

הוכחה. נבחין כי $\alpha\geq 1$ ולכן x^α מונוטונית עולה, ולכן בכל מקטע הערך המינימלי הוא גם m_i, ונקבל

$$\begin{aligned}L(f,P_n)&=\sum_{i=1}^n(aq^{i-1})^\alpha(x_i-x_{i-1}) &&=\sum_{i=1}^n a^\alpha q^{(i-1)\alpha}aq^{i-1}(q-1)\\&=a^{\alpha+1}(q-1)\sum_{i=1}^n q^{(i-1)(\alpha+1)} &&=a^{\alpha+1}(q-1)\frac{q^{(\alpha+1)n}-1}{q^{\alpha+1}-1}\\&=a^{\alpha+1}((\frac{b}{a})^{(\alpha+1)}-1)\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} &&=(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}\end{aligned}$$

כמובן עבור M_i עלינו לבחור על־פי המונוטוניות את הקצה הימני ובהתאם נקבל

$$U(f,P_n)=q^\alpha L(f,P_n)$$

$\square$

סעיף ג'

נוכיח כי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ונחשב את ערך האינטגרל.

הוכחה. נבחין כי

$$\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\lim_{q\to1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}=\lim_{q\to1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\frac{1}{(\alpha+1)q^\alpha}=\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})$$

ועוד נראה כי

$$\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)\lim_{n\to\infty}q^\alpha L(f,P_n)=\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})$$

הגבולות מתכנסים לערך משותף ולכן על־פי הגדרת אינטגרל דרבו נקבל

$$\int_a^b x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})$$

$\square$

שאלה 2

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־$a<b$ ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

סעיף א'

נוכיח כי לכל חלוקה P של $[a,b]$ קיימות פונקציות מדרגות g,h בקטע כך שמתקיים

$$L(f,P)=\int_a^b g(x)dx, \qquad U(f,P)=\int_a^b h(x)dx$$

הוכחה. תהי חלוקה $P=\{x_1,\dots,x_n\}$ ויהי $i\in[n]$, אז נסיק כי f חסומה בקטע $[x_i,x_{i+1}]$.

נסיק מהחסימות בקטע כי קיימים

$$M_i=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x), \quad m_i=\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

נגדיר כמובן g פונקציית מדרגות על־ידי m_i ו־h על־פי M_i ומהגדרת סכום תחתון ועליון, ומלמה על פונקציות מדרגות כי

$$L(f,P)=\int_a^b g(x)dx, \qquad U(f,P)=\int_a^b h(x)dx$$

$\square$

סעיף ב'

נוכיח כי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם לכל $\epsilon>0$ קיימות פונקציות מדרגות g,h בקטע כך ש־$g(x)\le f(x)\le h(x)$ ו־$\int_a^b (h(x)-g(x))dx\le\epsilon$.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, לכן על־פי הגדרת אינטגרל דרבו נקבל

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)-L(f,P_n)=0$$

ולכן על־פי הסעיף הקודם נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b h(x)dx-\int_a^b g(x)dx=0$$

ולכן הטענה נכונה מהגדרת הגבול ישירות.

כיוון שני: נניח כי לכל $\epsilon>0$ קיימות פונקציות מדרגות g,h המקיימות את תנאי הטענה.

נוכל להשתמש בלמה על אינטגרל פונקציית מדרגות ובחלוקה P_n מתאימה כי

$$g(x)\le L(f,P_n)\le f(x)\le U(f,P_n)$$

ולכן מהאינטגרלים הנתונים נוכל להסיק גם

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)<\epsilon$$

וזו למעשה הגדרת אינטגרביליות דרבו. $\square$

שאלה 3

תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

סעיף א'

נוכיח כי f אינטגרבילית ב־$[\alpha, 1]$ עבור כל $\alpha \in (0,1)$ ונמצא את ערך אינטגרל זה.

הוכחה. נוכיח הוכחה אינדוקטיבית על־פי α.

נניח תחילה כי $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, נקבל בהתאם כי $f(x) = 0$ לכל $x \in (\alpha, 1)$ ולכן בהתאם f אינטגרבילית בקטע $(\alpha, 1)$ ובהתאם גם ב־$[\alpha, 1]$.

עתה נניח כי f אינטגרבילית בקטע $[1/m, 1]$ עבור $m \in \mathbb{N}$, ונבחר $\alpha \in (\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1})$, לכן $f(x) = 0$ ל־$x \in (\alpha, \frac{1}{m})$, מלבד נקודה יחידה $\frac{1}{m+1}$. לכן ממשפט שהוכחנו בתרגול נקבל כי f אינטגרבילית בקטע $[\alpha, \frac{1}{m}]$, והנחנו תחת הנחת האינדוקציה כי היא אף אינטגרבילית בקטע $[\frac{1}{m}, 1]$ ולכן מאדיטיביות נקבל אינטגרביליות ב־$[\alpha, 1]$. נבחין כי $\frac{1}{m+1} \in [\alpha, 1]$ ולמעשה השלמנו את מהלך האינדוקציה ומצאנו כי הטענה נכונה.

בתהליך זה אף מצאנו כי ערך אינטגרל זה הוא 0, דהינו

$$\int_\alpha^1 f(x)\, dx = 0$$

$\square$

סעיף ב'

נוכיח כי f אינטגרבילית ב־$[0,1]$ ונחשב את האינטגרל בקטע זה.

הוכחה. נראה כי f אינטגרבילית בקטע $[0, \alpha]$ על־פי הגדרת דרבו לאינטגרביליות.

מצפיפות הממשיים נוכל לקבוע כי בכל סביבה של $x = \frac{1}{m}$ לכל $m \in \mathbb{N}$ קיים $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ולכן בחלק זה $m_i = 0$ בעוד $M_i = 1$.

לעומת זאת, נבחין כי בחלוקה בה ישנה סביבה לכל $\frac{1}{m}$ (הנשמרת תחת עידון), נקבל כי Δx_i קטן בעוד M_i, m_i קבועים, בעוד מתקבלים חלקים חדשים בחלוקה אשר אפסים.

נוכל לקבוע אם כן שהגבול של הסכום העליון של הפונקציה הוא אפס, ובהתאם היא אינטגרבילית בקטע $[0, \alpha]$, ומאדיטיביות נקבל

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

$\square$

שאלה 4

יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ כאשר $a \le b$ ויהי $D \subseteq \mathbb{R}$ מקטע.

סעיף א'

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, נוכיח כי לכל חלוקה P קיימת קבוצת ערכים P^* כך שסכום רימן $S(f,P,P^*) = U(f,P)$.

הוכחה. תהי P חלוקה כלשהי, ויהי x_0, x_1 קטע בחלוקה זו, אנו יודעים כי $M_i = \sup_{x\in[x_0,x_1]} f(x)$ ומווירשטראס השני נקבל בפרט $M_i = \max_{x\in[x_0,x_1]} f(x)$, נקבע $M_i = f(c)$, אנו יכולים להסיק כי קיים כזה מווירשטראס, ועתה נגדיר כי $c \in P^*$.
בשיטה זו נבנה את P^* לכל קטע בחלוקה P, ונקבל $S(f,P,P^*) = U(f,P)$. □

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם $f,g:D\to\mathbb{R}$ רציפות במידה שווה ב־D, אז גם מכפלתן רציפה במידה שווה ב־D.

נבחר $D=\mathbb{R}_+$ ו־$f(x)=g(x)=x$, לכן $(fg)(x)=x^2$, ומצאנו כי x^2 איננה רציפה במידה שווה.

סעיף ג'

נוכיח כי הפונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}) & 0<x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

הוכחה. נשתמש בתוצאת שאלה 2 ונקבל שהפנקציה, אשר ידוע כי חסומה, היא אינטגרבילית בקטע החסום. □

שאלה 5

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על־ידי $f(x)=\sin(x^2)$, נוכיח כי f איננה רציפה במידה שווה ב־$[1,\infty)$.

הוכחה. נגדיר שתי סדרות נקודות $(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}$ בתחום על־ידי

$$x_n=\sqrt{2\pi n},\quad y_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$$

ונבחין כי

$$\lim_{n\to\infty} y_n-x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n-2\pi n}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}-\sqrt{2\pi n}}=0$$

נגדיר $\epsilon=\frac{1}{2}$, ונראה כי

$$\forall n\in\mathbb{N}:|f(y_n)-f(x_n)|=|1-0|=1\geq\epsilon$$

ולכן ממשפט אשר למדנו בהרצאה נקבל כי הפונקציה לא רציפה במידה שווה בתחום. □

שאלה 6

סעיף א'

יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נוכיח שאם קיים $c \in [a, \infty)$ כך ש־f רציפה במידה שווה ב־$[c, \infty)$ אז היא רציפה במדיה שווה ב־$[a, \infty)$.

הוכחה. ממשפט קנטור נובע כי f רציפה במידה שווה ב־$[a, c]$.
יהי $\epsilon > 0$, אז קיימות $\delta_0, \delta_1 > 0$ עבורן:

$$\forall x_1, y_1 \in [a, c], x_2, y_2 \in [c, \infty) : |x_1 - y_1| \le \delta_0 \implies |f(x_1) - f(y_1)| \le \epsilon, |x_2 - y_2| \le \delta_1 \implies |f(x_2) - f(y_2)| \le \epsilon$$

אילו נבחר $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ נקבל גם

$$\forall x_1, y_1 \in [a, c], x_2, y_2 \in [c, \infty) : |x_1 - y_1| \le \delta \implies |f(x_1) - f(y_1)| \le \epsilon, |x_2 - y_2| \le \delta \implies |f(x_2) - f(y_2)| \le \epsilon$$

ולכן נוכל לאחד את התחומים ולקבל

$$\forall x, y \in [a, c] \cup [c, \infty) : |x - y| \le \delta \implies |f(x) - f(y)| \le \epsilon$$

דהינו, הפונקציה f רציפה במידה שווה בקטע $[a, \infty)$. □

סעיף ב'

נוכיח שאם f מקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ אז f רציפה במידה שווה ב־$[a, \infty)$.

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$, אז קיים $M > 0$ כך שמתקיים

$$\forall x > M : |f(x) - L| \le \frac{\epsilon}{2}$$

עתה נראה כי מאי־שוויון המשולש נובע

$$\forall x, y > M : |f(x) - f(y)| \le |f(x) - L| + |f(y) - L| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

לכן בפרט הפונקציה f רציפה במידה שווה ב־$[M, \infty)$, וכמובן ממשפט קנטור היא רציפה במידה שווה ב־$[a, M]$, לכן נסיק מהסעיף הקודם כי f רציפה במידה שווה ב־$[a, \infty)$. □

סעיף ג'

נוכיח כי $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^3)$ רציפה במידה שווה ב־$(0, \infty)$.

הוכחה. מספיק שנוכיח כי f רציפה במידה שווה בתחום $(0, 1]$ ונקבל מהסעיף הקודם כי היא רציפה במידה שווה בכל התחום.
נבחין כי

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \frac{\sin(x^3)}{x^3} = 0 \cdot 1 = 0$$

לכן נגדיר $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אז h רציפה בקטע הסגור $[0, 1]$ ולכן ממשפט קנטור נובע כי היא רציפה במידה שווה בו.
מכאן נסיק כי היא רציפה במידה שווה גם בקטע $(0, 1]$, ולכן גם f רציפה במידה שווה בקטע זה. □

שאלה 7

בכל סעיף מוגדרת $f : [0,6] \to \mathbb{R}$. נבדוק כי f אינטגרבילית בתחום הגדרתה, נחשב ביטוי מפורש ל־$F : [0,6] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, ונבדוק את תחום הגזירות והנגזרת של F.

i.

$$f(t) = t$$

מצאנו בשאלה 1 כי פונקציה זו אינטגרבילית ואף קיבלנו כי

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

קיבלנו פרבולה, אנו יודעים כי היא גזירה בכל התחום, ומתקיים

$$F'(x) = x$$

ii.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 4 \\ 1 & t = 4 \\ 0 & 4 < t \le 6 \end{cases}$$

נבחין כי פונקציה זו שקולה לפונקציה $y = 0$ מלבד בנקודה יחידה, ולכן נסיק ממשפט מהתרגול כי היא אינטגרבילית וכי מתקיים

$$F(x) = 0$$

כמובן פונקציה זו גזירה בכל נקודה, ומתקיים

$$F'(x) = 0$$

iii.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le t < 4 \\ 3 & 4 \le t \le 6 \end{cases}$$

נבחין כי פונקציה זו היא פונקציית מדרגות ולכן היא אינטגרבילית.

נשתמש בשאלה 1 ופירוק הפונקציה למקטעים ונקבל כי

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x < 4 \\ 2 + 3x & 4 \le x \le 6 \end{cases}$$

פונקציה זו גזירה בכל נקודה בתחום מלבד $x = 4$, ובשאר הנקודות מתקיים

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x < 4 \\ 3 & 4 < x \le 6 \end{cases}$$