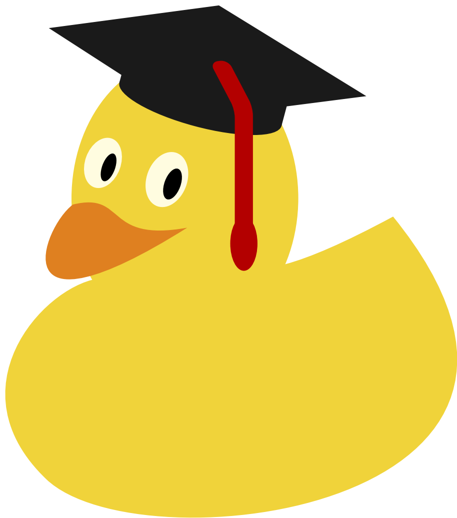
פתרון מטלה 05 — תורת הקבוצות (80200)

8 ביוני 2024



שאלה 3

תהי $\langle A, \leq \rangle$ קבוצה סדורה חלקית.

סעיף א'

תהי $B \subseteq A$, ונוכיח כי $\langle B, \leq \cap (B \times B) \rangle$ היא קבוצה סדורה חלקית אף היא.

הוכחה. נבדוק את תכונות הסדר החלקי.

1. טרנזיטיביות: $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \in \leq \cap B^2 \implies a \leq c \land a, c \in B \implies (a, c) \in \leq \cap B^2$.
2. רפלקסיביות: $\forall b \in B : \langle b, b \rangle \in \leq \land \langle b, b \rangle \in B^2 \implies \langle b, b \rangle \in (\leq \cap B^2)$.
3. אנטי־סימטריה: $\forall a, b \in B : \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \in (\leq \cap B^2) \implies a = b, b \in B$

ומצאנו כי כל ההגדרות מתקיימות. □

סעיף ב'

נוכיח כי אם $a \in A$ הוא מינימום, אז הוא איבר מינימלי והמינימלי היחיד.

הוכחה. נניח כי $a \in A$ הוא מינימום ולכן $\forall b \in A : a \leq b$.
יהי איבר $b \in A$ המקיים $b \leq a$, אבל ידוע כי $a \leq b$ ולכן נסיק מהאנטי־סימטריה כי $a = b$, ולכן נובע כי a איבר מינימלי.
נניח כי קיים איבר $b \in A$ אשר הוא מינימלי, ואנו יודעים כי $a \leq b$, ולכן נובע מהמינימליות כי $a = b$, ומצאנו כי קיים איבר מינימלי יחיד והוא a. □

סעיף ג'

נוכיח כי הכיוון ההפוך לטענה הקודמת איננו נכון, קיום מינימלי יחיד לא גורר כי קיים מינימום.

הוכחה. נבחן את $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ כאשר מוציאים את כל הזוגות הסדורים שמעורבים ב־0, מלבד $\langle 0, 0 \rangle$.
סדר זה עומד בכלל ההגדרות, אין מינימום או מקסימום, ואפס הוא מינימלי. □

סעיף ד'

נוכיח שאם $\langle A, \leq \rangle$ הוא סדר מלא אז איבר הוא מינימלי אם ורק אם הוא המינימום.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $a \in A$ הוא איבר מינימלי. לכן $\forall b \in a : b \leq a \implies a = b$.
כל איבר $b \in A$ מקיים $b \leq a \implies a = b \implies a \leq b$ או $a \leq b$ ולכן נקבל כי $a \leq b$ בכל מקרה, ולכן a מינימום.

כיוון שני: נניח כי a הוא מינימום ולכן $\forall b \in A : a \leq b$.
יהי $b \in A, b \leq a$, אז $a \leq b$ ובפרט $a = b$ וקיבלנו כי גם הגדרת המינימלי חלה. □

סעיף ה'

נוכיח כי אם A סופית ולא ריקה אז יש בה איבר מינימלי.

הוכחה. נניח בשלילה כי לא קיים איבר מינימלי, לכן $\forall a \in A \exists b \in A : b \leq a, a \neq b$.
נניח ש־$|A| = n$ ונבחר $a_1 \in A$, כלשהו, נגדיר $a_2 \leq a_1, a_1 \neq a_2$, ובאופן דומה נגדיר $a_{k+1} \leq a_k, a_{k+1} \neq a_k$.
נבנה כך סדרה באורך $n + 1$ ונסיק מעיקרון שובך היונים שאיבר כלשהו a_k מופיע פעמיים בסדרה ומקיים $a_k \leq a_k, a_k \neq a_k$ בסתירה להנחתנו כי אין איבר מינימלי. □

שאלה 4

יהיו ארבעה יחסים מעל $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$$R_1 = \{\langle f,g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall m : f(m) \leq g(m)\}$$
$$R_2 = \{\langle f,g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \forall m : m > n \implies f(m) \leq g(m)\}$$
$$R_3 = \{\langle f,g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \exists m, m > n \implies f(m) \leq g(m)\}$$
$$R_4 = \{\langle f,g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f = g \vee (\exists n : f \restriction [n] = g \restriction [n] \wedge f(n) < g(n))\}$$

סעיף א'

נבדוק עבור כל יחס אם הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי־סימטרי.

עבור R_1:

1. נשים לב כי בהינתן $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ לכל $m \in \mathbb{N}$ נקבל $f(m) = f(m) \implies f(m) \leq f(m)$ ולכן R_1 הוא רפלקסיבי.
2. יהיו fR_1g, gR_1h ויהי $m \in \mathbb{N}$, אז $f(m) \leq g(m), g(m) \leq h(m)$ ולכן גם $f(m) \leq h(m)$ ולכן fR_1h, והיחס טרנזיטיבי.
3. יהיו fR_1g כך שגם gR_1f אז לכל $m \in \mathbb{N}$ אז $f(m) \leq g(m)$ וגם $g(m) \leq f(m)$ ולכן נוכל להסיק $f(m) = g(m)$, דהינו $f = g$, ולכן היחס אנטי־סימטרי.

עבור R_2:

1. נוכל להניח כי רפלקסיביות מתקיימת שכן אם נבחר $m = 0$ נקבל את התנאי של רפלקסיביות עבור R_1.
2. יהיו fR_2g, gR_2h, לכן קיימים n_1, n_2 כך שבהתאמה לכל $m > n_1, n_2$ מתקיים $f(m) = g(m), g(m) = h(m)$, ולכן נבחר $n = \max\{n_1, n_2\}$ ועבורו לכל $m > n$ נקבל $f(m) \leq g(m) \leq h(m)$ ולכן gR_2h.
3. נניח כי fR_2g, gR_2f, ונבחר באופן דומה להוכחת הסימטריה n מינימלי עבורו $m > n > 0$ מקיים $f(m) = g(m)$, אבל עבור $m = 0$ יכול להיות ש־$f(m) \neq g(m)$ ולכן לא מתקיימת אנטי־סימטריה.

עבור R_3:

1. לכל f ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) = f(n)$ ולכן נוכל לבחור $m = n + 1$ לכל n ונקבל כי fR_3f, דהינו היחס הוא רפלקסיבי.
2. תהינה fR_3g, gR_3h פונקציות, ויהי $n \in \mathbb{N}$. לכן קיים $m_1 > n$ כך ש־$f(m_1) \leq g(m_1)$, וקיים גם $m_2 > g(m_1)$ עבורו $g(m_2) \leq h(m_2)$.