פתרון מטלה 07 — תורת הקבוצות (80200)

1 ביולי 2024

שאלה 1

נוכיח שאם $\langle A, \leq_A\rangle$ קבוצה סדורה חלקית, אז יש שיכון של $\langle A, \leq_A\rangle$ לתוך $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq\rangle$.

הוכחה. יהי איבר $b \in A$, ונגדיר $B = \{\langle n, m\rangle \in \leq_A \mid m = b\}$, ולכן $\forall c \in B : c \leq b$, נגדיר $f : \langle A, \leq_A\rangle \to \langle \mathcal{P}(A), \subseteq\rangle$, על־ידי

$$f(x) = \{\langle a, x\rangle \in \leq_A\}$$

למעשה פונקציה זו מחזירה קבוצת האיברים הקטנים מהאיבר המקורי (כולל אותו עצמו), ולכן מהתכונות של סדר נוכל להסיק $a \leq_A b \implies f(a) \subseteq f(b)$ ומצאנו שיכון. $\square$

שאלה 2

לכל קבוצה A נסמן $\mathcal{P}_{\text{fin}}(A)=\{X\subseteq A \mid X \text{ is finite}\}$.

סעיף א'

נמצא שיכון של $\langle\mathbb{Z},\leq\rangle$ לתוך $\langle\mathcal{P}(\mathbb{N}),\subseteq\rangle$.

נגדיר $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ על־ידי

$$f(z)=\begin{cases}2z+1 & z\leq 0\\ -2z & z<0\end{cases}$$

יחד עם יחס הסדר $\preceq=\{\langle n,m\rangle\in\mathbb{N}^2 \mid m=1(\mod 2)\implies n\leq m\vee n=0(\mod 2)\implies n\leq m\vee(n=0(\mod 2)\wedge m=1(\mod 2))\}$.

מהותית סדר שבודק את הזוגיות ומשמר את הסדר המקורי של $\mathbb{Z}$, ועתה נרכיב את השיכון משאלה 1 ונקבל שיכון כפי שנתבקשנו.

סעיף ב'

נוכיח כי לא קיים שיכון של $\langle\mathbb{Z},\leq\rangle$ לתוך $\langle\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}),\subseteq\rangle$.

הוכחה. נניח בשלילה כי ישנו שיכון f כזה.

לכן $f(-1)\subseteq f(0)$, וכמו־כן גם $\forall n\in-\mathbb{N}: f(n)\subseteq f(0)$, ולכן נוכל להסיק כי $|f(0)|=\aleph_0$ בסתירה להנחה כי כל איבר ב־$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ הוא סופי. $\square$

סעיף ג'

נמצא שיכון של $\langle Seq(\mathbb{N}),\trianglelefteq\rangle$ לתוך $\langle\mathbb{N}\setminus\{0\},|\rangle$.

נגדיר $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציה המחזירה ראשוניים הולכים וגדלים.

נגדיר $f:\langle Seq(\mathbb{N}),\trianglelefteq\rangle\to\langle\mathbb{N}\setminus\{0\},|\rangle$ על־ידי

$$f(\langle n_1,\ldots,n_d\rangle)=\prod_{i=1}^{d}\varphi(\varphi(i)^{n_i})$$

נניח כי $v,u\in Seq(\mathbb{N})$ כך ש־$v\trianglelefteq u$ אז נובע כי $u=\langle v_1,\ldots,v_d,u_{d+1},\ldots,u_k\rangle$, $v=\langle v_1,\ldots,v_d\rangle$,

אז נובע כי $f(u)=f(v)\cdot C$ ולכן $f(v)\mid f(u)$.

בכיוון ההפוך נניח כי $f(u)\mid f(v)$ ונקבל מפירוק $f(u)$ למספרים ראשוניים וחישוב כי $v_1=u_1$ וכן הלאה, ונוכל להסיק $v\trianglelefteq u$.

סעיף ד'

נוכיח כי $\langle Seq(\mathbb{N}),\trianglelefteq\rangle$ ו־$\langle\mathbb{N}\setminus\{0\},|\rangle$ לא איזומורפיים.

הוכחה. יהיו $a,b\in\mathbb{N}$, נבחין כי קיים $c\in\mathbb{N}$ כך ש־$a,b\mid c$ תמיד ($c=ab$ לדוגמה).

לעומת זאת יהיו $u,v\in Seq(\mathbb{N})$, אם $u\neq v$ והם מאותו האורך, אז אין $w\in Seq(\mathbb{N})$ כך ש־$a\trianglelefteq c$ וגם $b\trianglelefteq c$, בסתירה לשימור מקסימלי לתת־קבוצות בין קבוצות איזומורפיות. $\square$

סעיף ה'

נמצא שיכון של $\langle Seq(\mathbb{N}),\trianglelefteq\rangle$ לתוך $\langle\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}),\subseteq\rangle$.

נשתמש בפונקציה שהגדרנו בשאלה 1, עלינו לבדוק רק שכל קבוצה שתתקבל היא אכן סופית.

יהי $u \in Seq(\mathbb{N})$, ונניח כי גודל u הוא n, אז נסיק כי u גדול מ־n איברים, הם הצמצומים שלו, וסדרה ריקה, ולכן $|f(u)| = n$, ולכן $f(u) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ לכל $u \in Seq(\mathbb{N})$.

סעיף ו'

נוכיח כי $\langle Seq(\mathbb{N}), \trianglelefteq\rangle$ ו־$\langle \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ לא איזומורפיים.

הוכחה. למעשה, ההוכחה זהה לסעיף ד', שכן לכל שתי קבוצות $X, Y \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ קיים $X \cup Y$ אשר מהווה איבר גדול משתיהן. לעומת זאת, ראינו כי לא לכל שני איברים יש איבר משותף גדול משניהם ב־$Seq(\mathbb{N})$. $\square$

שאלה 3

הגדרנו עבור סדרים חלקיים $\langle A, \leq_A\rangle, \langle B, \leq_B\rangle$ את הסדר המילוני על $A \times B$ על־ידי

$$\langle a, b\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a', b'\rangle \iff a <_A a' \lor (a = a' \land b \leq_B b')$$

נניח כי A, B קבוצות לא ריקות.

סעיף א'

נוכיח כי $\langle A \times B, \leq_{\text{lex}}\rangle$ קבוצה סדורה חלקית.

הוכחה. נבדוק את תכונות הסדר החלקי:

1. רפלקסיביות: $\langle a, b\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a, b\rangle \iff a = a' \land b \leq_B b \implies \forall (a, b) \in A \times B$.
2. טרנזיטיבי: $\forall \langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \langle a_3, b_3\rangle \in A \times B : \langle a_1, b_1\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a_2, b_2\rangle \land \langle a_2, b_2 \leq_{\text{lex}} \langle a_3, b_3\rangle \iff (a_1 <_A a_2 \lor (a_1 = a_2 \land b_1 \leq_B b_2)) \land (a_2 <_A a_3 \lor (a_2 = a_3 \land b_2 \leq_B b_3)) \iff (a_1 <_A a2 \land a_2 <_A a_3) \lor (a_1 = a_2 \land b_2 \leq_B b_3 \land a_2 = a_3 \land b_2 \leq_B b_3) \iff (a_1 <_A a_3) \lor (a_1 = a_3 \land b_1 \leq_B b_3) \iff \langle a_1, b_1\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a_3, b_3\rangle$.
3. אנטי־סימטרי: $\forall \langle a, b\rangle, \langle a', b'\rangle \in A \times B : \langle a, b\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a', b'\rangle \land \langle a', b'\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a, b\rangle \iff (a < a' \land a' < a) \lor (a = a' \land (b \leq b' \land b' \leq b)) \iff a = a' \land b = b' \iff \langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$.

ומצאנו כי שלושת התנאים מתקיימים וזהו אכן יחס סדר חלקי. □

סעיף ב'

נוכיח כי $\langle A \times B, \leq_{\text{lex}}\rangle$ סדורה קווית אם ורק אם $\langle A, \leq_A\rangle, \langle B, \leq_B\rangle$ סדורות קווית.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $\langle A \times B, \leq_{\text{lex}}\rangle$ סדורה קווית.
נבחן את $\langle a, b\rangle, \langle a', b\rangle$, אם הם שווים נובע $a = a'$, אם $\langle a, b\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a', b\rangle$ אז נובע $a \leq_A a$ ואם $\langle a', b\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a, b\rangle$ אז באופן דומה נקבל $a' \leq_A a$. קיבלנו כי $\langle A, \leq_A\rangle$ קווית, ובאותו אופן בדיוק עבור $\langle a, b\rangle, \langle a, b'\rangle$ נקבל כי גם $\langle B, \leq_B\rangle$ קווית.

כיוון שני: נניח כי $\langle A, \leq_A\rangle, \langle B, \leq_B\rangle$ שניהם סדרים קוויים.
נבחן את $\langle a, b\rangle, \langle a', b'\rangle$, אם $a = a', b = b'$ אז גם $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$.
אם $a \leq_A a' \land b \leq_B b'$ אז נובע כי $a <_A a'$ או $a = a'$ ולכן $\langle a, b\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a', b'\rangle$.
אם $a' \leq_A a \land b' \leq_B b$ אז באופן זהה השוויון מתקיים לכיוון השני.
אם $a <_A a'$ אז כמובן היחס מתקיים, וגם $a >_A a'$, ולכן נניח ש־$a = a'$.
אם $b \leq_B b'$ אז $\langle a, b\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a', b'\rangle$, הכיוון השני זהה, וסיימנו לעבור על כל המקרים וראינו כי תמיד היחס מוגדר, ובהתאם היחס קווי. □

סעיף ג'

נוכיח כי $\langle A \times B, \leq_{\text{lex}}\rangle$ מבוסס היטב אם ורק אם $\langle A, \leq_A\rangle, \langle B, \leq_B\rangle$ מבוססים היטב שניהם.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $\langle A \times B, \leq_{\text{lex}}\rangle$ מבוסס היטב.
לכל תת־קבוצה $A' \subseteq A$ נקבל כי לקבוצה $A' \times \{b\}$ (כאשר b קבוע) יש איבר מינימלי. תחת ההגבלה נקבל כי $\leq_{\text{lex}} \iff a <_A a' \lor a =$
$\leq_A \iff a \leq_A a' \iff a'$, דהינו נקבל כי לכל $A' \subseteq A$ לא ריקה קיים איבר מינימלי עבור $\leq_A$ ולכן $\langle A, \leq_A\rangle$ מבוסס היטב.
ההוכחה ל־B זהה לחלוטין ונובעת מהעובדה ש־$b \leq_B b' \iff \langle a, b\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a, b'\rangle$.

כיוון שני: נניח כי $\langle A, \leq_A\rangle, \langle\langle B, \leq_B\rangle$ סדרים מבוססים היטב, ותהינה $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ כאשר $A', b' \neq \emptyset$.
לכן קיימים איברים מינימליים $a \in A', b \in B'$. נבדוק עתה את $\langle a', b'\rangle \in A' \times B'$ איבר כלשהו.
נניח ש־$\langle a', b'\rangle \leq_{\text{lex}} \langle a, b\rangle$ ולכן נקבל $a = a' \land b = b' \iff (a' <_A a \lor (a' = a \land b' \leq_B b)) \land a \leq_A a' \land b \leq_B b'$ ולכן $\langle a, b\rangle$ מינימלי ב־$A' \times B'$. □

שאלה 4

נוכיח כי לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $\langle [n \cdot m], \leq \rangle \cong \langle [n] \times [m], \leq_{\text{lex}} \rangle$.

הוכחה. נתחיל במציאת שיכון בין הסדרים.

נגדיר $f : \langle [n] \times [m], \leq_{\text{lex}} \rangle \to \langle [n \cdot m], \leq \rangle$ על־ידי

$$f(x, y) = mx + y$$

ונקבל $\forall \langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in [n] \times [m] : \langle x, y \rangle \leq_{\text{lex}} \langle x', y' \rangle \iff x < x' \lor (x = x' \land y \leq y') \iff mx < mx' \lor (nx + y \leq$ $mx' + y') \iff mx + y \leq mx' + y' \iff f(x, y) \leq_{\text{lex}} f(x', y')$ כנביעה מ־$y < m$.

נבחין עתה כי כל $z \in [n \cdot m]$ ניתן לייצוג על־ידי $z = mx + y$ ולכן נוכל לקבוע כי f היא על ובהתאם $\langle [n \cdot m], \leq \rangle \cong \langle [n] \times [m], \leq_{\text{lex}} \rangle$. $\square$

שאלה 6

נניח כי $\langle A, \leq \rangle$ סדר קווי צפוף ללא מקסימום ומינימום.

יהיו $\langle B, \leq_B \rangle, \langle B', \leq_{B'} \rangle$ סדרים קוויים שלמים ללא מינימום ומקסימום.

$g : A \to B, g' : A \to B'$ שיכונים של הסדרים כך ש־$\mathrm{rng}(g), \mathrm{rng}(g')$ צפופים ב־B, B' בהתאמה.

נוכיח שקיים איזומורפיזם יחיד של סדרים $h : B \to B'$ המקיים $h \circ g = g'$.

הוכחה. אנחנו יודעים כי B, B' שתיהן סדרים שלמים וצפופים, ולכן לשתיהן יש סופרמום ואינפימום. מצטער, אני לא יודע לעשות את השאלה הזאת בלי בחירה. נבחר $x_0 \in B, y_0 \in B'$ ונגדיר פונקציה $h : B \to B'$ כך ש־$f(x_0) = y_0$.

לצורך ההוכחה "נוסיף" שני איברים המייצגים מינימום ומקסימום לשתי הקבוצות, s, s', i, i' מקסימום ואינפימום בהתאמה, ונגדיר $h(s) = s', h(i) = i'$.

עתה לכל $s > x' > x_0 > x > i$ נבחר $i' < y < y_0 < y' < s'$ כלשהם ונגדיר $h(x) = y, h(x') = y'$, ננצל את אקסיומת הבחירה ונבנה את הפונקציה ככה לכל $x \in B$.

קיבלנו שיכון, שכן $x \leq_B x' \iff h(x) \leq_{B'} h(x')$ ישירות מהגדרת הפונקציה.

נוכל עתה להסיר את האיברים מהקבוצות ולשמר את מבנה הפונקציה מעבר לשני איברים אלה וקיבלנו שיכון בין B ו־B' כקבוצות שקיבלנו.

נבחין כי h חד־חד ערכית, אבל גם על על־פי הגדרתנו, שכן לכל איבר $y \in B'$ בחרנו איבר $x \in B$ אשר מקיים את השיכון בצפיפות.

מצאנו כי קיימים איזומורפיזמים בין B, B', ומצאנו כי נוכל לבנות אותם על־פי קבוצות איברים ב־B, B', ולכן עתה נבחן את A ואת g, g'.

אנו יודעים כי $\mathrm{rng}(B), \mathrm{rng}(B')$ הן צפופות ונוכל להסיק שאין להן מינימום ומקסימום, שכן אחרת נקבל סתירה להגדרת A, ולכן נבנה את h כך ש־$\mathrm{rng}(B) \cong \mathrm{rng}(B')$.

קיבלנו אם כן כי $h \circ g = g'$, ונשאר לנו להוכיח כי h יחידה.

למעשה שוויון זה מאלץ כבר יחידות, שכן מדובר באיזומורפיזמים, אין איברים חופשיים ל־h שלא מעבירים איבר מ־B ל־B' (לצמצומם). $\square$