# פתרון מטלה 3 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

21 במאי 2024

## שאלה 1

נוכיח כי $\forall x \in (-1,0) \cup (0,\infty) : \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

*הוכחה.* תהי $g(x) = \ln(1+x)$ פונקציה המוגדרת לכל $x > -1$ וגזירה בתחום כאשר $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ על־פי נוסחות גזירה.
נבחר $x_0 = 0$ ו־$x > 0$ כך שגם $x \neq 0$ וממשפט הערך הממוצע נובע

$$\exists c \in (0,x) : g'(c) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

ידוע כי $g'$ פונקציה מונוטונית יורדת עבור $x > -1$ ולכן $g'(x_0) > g'(c) > g'(x)$ ובהתאם:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \implies \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

עבור $-1 < x < 0$ עדיין מתקיים

$$\exists c \in (x,0) : g'(c) = \frac{g(0) - g(x)}{0 - x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

ומתקיים $g'(x) > g'(c) > g(0)$ ולכן משליליות $x$ נסיק

$$\frac{1}{1+x} > \frac{\ln(1+x)}{x} > 1 \implies \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

ומצאנו כי הטענה נכונה לכל $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$. $\square$

## שאלה 2

יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש־$a < b < c$. תהי $f$ פונקציה רציפה ב־$[a, b]$ וגזירה ב־$(a, b)\backslash\{c\}$.

### סעיף א'

נוכיח כי אם $f'(x) \geqslant 0$ לכל $x \in (a, b)\backslash\{c\}$ אז $f$ מונוטונית עולה ב־$(a, b)$.

*הוכחה.* נניח בשלילה כי $f$ איננה מונוטונית עולה בתחום, ולכן קיימים $x < y$ בתחום הנתון המקיימים $f(x) > f(y)$.
ידוע כי הנגזרת חיובית ולכן נובע שבכל נקודה בה הנגזרת מוגדרת הפונקציה עולה, ולכן $x < c < y$.
עתה נבחין כי לכל $x < c$ הנגזרת כן מוגדרת ואי־שלילית ולכן נסיק $f(x) \leqslant f(c)$, ובאופן דומה נקבל כי $f(c) \leqslant f(y)$ ומכאן נסיק $f(x) \leqslant f(y)$ בסתירה להנחה.
לכן $f$ פונקציה מונוטונית עולה בתחום. □

### סעיף ב'

נוכיח כי אם $f'(x) > 0$ עבור כל $x \in (a, b)\backslash\{c\}$ אז $f$ מונוטונית עולה ממש ב־$(a, b)$.

*הוכחה.* נניח בשלילה כי $f$ איננה מונוטונית עולה בתחום, ולכן קיימים $x < y$ בתחום הנתון המקיימים $f(x) \geqslant f(y)$.
ידוע כי הנגזרת חיובית ולכן נובע שבכל נקודה בה הנגזרת מוגדרת הפונקציה עולה, ולכן $x < c < y$.
עתה נבחין כי לכל $x < c$ הנגזרת כן מוגדרת וחיובית ולכן נסיק $f(x) < f(c)$, ובאופן דומה נקבל כי $f(c) < f(y)$ ומכאן נסיק $f(x) < f(y)$ בסתירה להנחה.
לכן $f$ פונקציה מונוטונית עולה ממש בתחום. □

### סעיף ג'

נוכיח שאם $\forall x \in (a, c) : f'(x) < 0$ וגם $\forall x \in (c, b) : f'(x) > 0$ אז $c$ מינימום מקומי של $f$.

*הוכחה.* על־פי הנתונים $f$ מונוטונית עולה ממש ב־$(c, b)$ ויורדת ממש ב־$(a, c)$, דהינו לכל $x \in (a, b)$ מתקיים $f(c) < f(x)$ ולכן זהו מינימום מקומי. □

## שאלה 3

### סעיף א'

נתונים $p, q \in \mathbb{R}$ כאשר $0 < p < 1$. נוכיח כי למשוואה $x - p \cdot \sin(x) = q$ יש פתרון ממשי יחיד.

*הוכחה.* נגדיר $f(x) = x - p\sin(x) - q$ ולכן פתרונות המשוואה שקולים לשורשי הפונקציה.
נשים לב כי היא גזירה ב־$\mathbb{R}$ ואף $f'(x) = 1 - p\cos x$. תמונת $\cos x$ היא $[-1, 1]$ ובהתאם תמונת הפונקציה היא $[1-p, 1+p]$ ועל־פי הגדרת $p$ נובע ש־$f'(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. עוד נבחין כי $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$ וגם $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ ולכן נוכל להסיק כי היא יש לה לכל הפחות שורש יחיד $c \in \mathbb{R}$.
ניעזר במונוטויות ונקבל כי לכל $x \in \mathbb{R}, x \neq c$ מתקיים $f(x) \neq f(c) = 0$ וקיבלנו כי קיים שורש יחיד. □

### סעיף ב'

נוכיח כי גם אם $p = 1$ עדיין יש ל־$f$ שורש יחיד ב־$\mathbb{R}$.

*הוכחה.* במקרה זה תמונת $f'$ היא $[0, 1]$ ולכן $f$ פונקציה מונוטונית עולה ולא עולה ממש.
ההצדקה לקיום שורש $c \in \mathbb{R}$ עודנה נכונה במקרה זה, ונבדוק אם שורש זה הוא יחיד.
אילו $f'(c) > 0$ אז בסביבה של $c$ הפונקציה מונוטונית עולה ממש ונקבל כי זהו שורש יחיד בדומה לסעיף הקודם.
נניח אם כך ש־$f'(c) = 0$. מערך פונקציה הנגזרת שמצאנו ומתכונת פונקציית $\cos$ נסיק כי $f'(x) > 0$ בסביבה מנוקבת סביב $x = c$. ולכן $f$ עולה ממש בסביבה מנוקבת של $c$ ונקבל כי $f(x) \neq f(c)$ בתחום, וקיבלנו כי השורש הוא יחיד. □

## שאלה 4

תהי $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

נוכיח כי אם $\lim_{x\to\infty} f(x)=L\in\mathbb{R}$ אז $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

*הוכחה.* יהי $\epsilon>0$ ו־$M>0$ המקיים שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-L|<\epsilon$, זאת נסיק מהגבול הנתון.

נבחר עוד נקודה $y>0$ ונקבל כי $|f(y)-L|<\epsilon$ ולכן נקבל $|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-L|+|f(y)-L|=2\epsilon$.

בהתאם $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}=2\epsilon|x-y|\leqslant 2\epsilon$ כאשר $|x-y|<1$ הגדרת הנגזרת מתקיימת ונובע $|f'(x)|\leqslant|x-y|$ ומתקיים

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$$

$\square$

## שאלה 5

נגדיר $f:[0.\pi]\to[-1,1]$ על־ידי $f(x)=\cos x$.

### סעיף א'

נוכיח ש־$f$ חד־חד ערכית ועל.

*הוכחה.*

$$\forall x,y\in[0,\pi]:f(x)=f(y)\iff\cos x=\cos y\iff x=y+2\pi k\vee x=-y+2\pi k\forall k\in\mathbb{Z}\implies x=y$$

ולכן $f$ חד־חד ערכית.

נשים לב ש־$f(x)$ מונוטונית יורדת בכל תחומה, שכן $f'(x)=\cos'(x)=-\sin x$ וידוע כי $\sin x\geqslant 0$ לכל $x\in[0,\pi]$.

עוד נראה ש־$f(0)=1,f(\pi)=0$ ולכן נוכל להסיק $f([0,\pi])=[0,1]$ ולכן היא על. □

### סעיף ב'

נמצא את תחום הגזירות של $f^{-1}$ וביטוי מפורש לערך נגזרתה בתחום.

*פתרון.* נשים לב תחילה ש־$f^{-1}:[0,1]\to[0,\pi]$.

עוד נבחין שהפונקציה $f$ לא מקבלת אפס אלא בנקודת הקצה $x=\pi$ ולכן נסיק שנגזרת $f^{-1}$ מוגדרת עבור $(0,1)$.

נשתמש בנוסחת נגזרת הופכית עבור $y=\cos x$ ונקבל

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{-\sin x}=-\frac{1}{\sin(\cos^{-1}(x))}$$

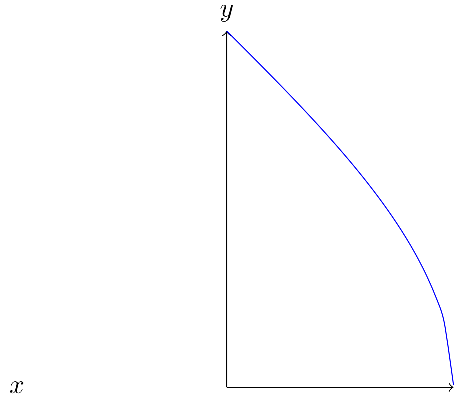
נשתמש בזהות $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ יחד עם $\theta=\cos^{-1}x$ ונקבל $x^2+\sin^2(\cos^{-1}(x))=1\implies\sin(\cos^{-1}(x))=\sqrt{1-x^2}$ ונקבל

$$(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ופונקציה זו אכן מוגדרת ב־$(0,1)$. □

### סעיף ג'

נסמן $f^{-1}=\arccos$ ונסרטט את את גרפה על־ידי סרטוט $\cos x$ המוכר לנו בשיקוף על $y=x$ כנלמד בכיתה.



## שאלה 6

### סעיף א'

נוכיח ש־arcsinh הפיכה.

*הוכחה.* ניזכר כי

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \implies 2y = e^x - e^{-x} = e^{\ln t} - e^{-\ln t} = t - \frac{1}{t}$$

□