פתרון מטלה 08 — תורת הקבוצות (80200)

9 ביולי 2024

שאלה 3

תהי r קבוצה. נוכיח כי $\{x : \exists y(\langle x, y\rangle \in r)\}$ היא קבוצה וגם $\{y : \exists x(\langle x, y\rangle \in r)\}$ היא קבוצה.
נסיק שאם f פונקציה אז $\mathrm{dom}(f), \mathrm{rng}(f)$ קבוצות.

הוכחה. נגדיר תכונה $p(x) = \exists y(\langle x, y\rangle \in r)$, ונוכל לבחור $\cup \cup r$ ואז מאקסיומת ההפרדה נקבל כי קיימת הקבוצה הראשונה, על־ידי הגדרת תכונה דומה והפעלת איחוד שלוש פעמים נקבל כי גם השנייה קיימת.

כמובן כל פונקציה f היא קבוצת זוגות סדורים, וההגדרה של $\mathrm{dom}(f), \mathrm{rng}(f)$ היא שקולה לקבוצה הראשונה והשנייה שמצאנו כי קיימות זה עתה, ולכן נסיק כי התחום והתמונה של פונקציה הן קבוצות תמיד. $\square$

שאלה 4

תהי X קבוצה. נוכיח במדויק על־ידי ZF את הטענות הבאות.

סעיף א'

נוכיח כי קיימת קבוצת כל יחסי השקילות על X.

הוכחה. אנו יודעים כי יחס שקילות הוא יחס עם קיום תכונות מוגדרות נוספות, ולכן נגדיר $p(x)$ תכונה של קיום תכונות יחס שקילות.
מצאנו בהרצאה כי קבוצת הזוגות הסדורים $X \times X$ קיימת, ולכן מאקסיומת ההפרדה נוכל לטעון כי גם $\{E \in X \times X \mid p(E)\}$ קיימת, וזו למעשה קבוצת כל יחסי השקילות על X. □

סעיף ב'

נוכיח כי אם E יחס שקילות על X ו־D מחלקת שקילות ביחס E, אז D קבוצה.

הוכחה. מצאנו עכשיו כי E קבוצה, נגדיר $e \in X$ איבר כלשהו, ונגדיר $p(x) = \exists y \in X(\langle e, x\rangle \in E)$.
נשתמש שוב באקסיומת ההפרדה ונקבל כמובן כי $\{x \in E \mid p(x)\}$ – מחלקת שקילות המושרית על־ידי e – היא קבוצה.
נשאר לנו לקחת איבר כלשהו $e \in D$ ונקבל כי היא אכן קבוצה. □

סעיף ג'

נוכיח שאם E יחס שקילות על X, אז X/E קבוצה.

הוכחה. בסעיף הקודם מצאנו כי אם $x \in X$ אז מחלקת השקילות המכילה את x היא קבוצה.
אנו יודעים כי $\mathcal{P}(X)$ היא קבוצה, ונבחין כי D מחלקת השקילות כך ש־$x \in D$ מקיימת $D \in \mathcal{P}(X)$.
לכן אם כן נוכל להסיק כי התכונה $p(x) = \forall y, y' \in x \implies \langle\langle y, y'\rangle\rangle \in E$ ניתנת להפרדה ונקבל כי קבוצת מחלקות השקילות היא אכן קבוצה. □

שאלה 5

תהי X קבוצה, נוכיח שקיימת קבוצה Y כך ש־$X \subseteq Y$ ולכל $y \in Y$ מתקיים $y \subseteq Y$.

הוכחה. נגדיר פונקציה g על־ידי $g(0) = X$ ו־$g(n+1) = \bigcup_{a \in g(n)} a$.
על־ידי אקסיומת החלפה ומשפט הרקורסיה נסיק כי הפונקציה g אכן קיימת ויחידה, ומאקסיומת האיחוד נקבל כי $Y = \bigcup_n g(n)$ אף היא קבוצה.
נותר רק לבדוק שהתנאי אכן מתקיים, יהי $y \in Y$, לכן קיים n עבורו $y \in g(n)$, ואנו יודעים כי $y \subseteq \{y\} \subseteq g(n+1)$, ולכן קיבלנו כי $y \subseteq Y$ במתבקש. $\square$

שאלה 6

סעיף א'

ניעזר בפונקציה $\text{Add} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כדי לבנות פונקציה $\text{Mult} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המתארת על פעולת הכפל על הטבעיים.

נבחין כי על הפונקציה לקיים את התכונות:

$$\text{Mult}(0,0) = 0 \qquad \text{Mult}(n+1,m) = \text{Mult}(n,m) + m \qquad \text{Mult}(n,m+1) = \text{Mult}(n,m) + n$$

כאשר אנו רושמים $X + n$ כסימון לביטוי $\text{Add}(X,n)$ ו־$X + 1$ כסימון ל־$s(X)$.

הוכחת קיום ויחידות הפונקציה Mult כפי שהגדרנו אותה זה עתה נוכל לעשות בתהליך זהה להוכחה שראינו בהרצאה, נקבע סדרת פונקציות $f_n(m+1) = m_n(m) + n$ עם בסיס $f_n(0) = 0$ ונקבל כי הן קיימות ומגדירות את Mult. בשלב השני נוכיח באינדוקציה כי לכל n, לכל בחירת m, מתקיים גם $f_{n+1}(m) = f_n(m) + m$.