פתרון ממ"ן 13 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

5 במרץ 2023

שאלה 1

סעיף א'

נגדיר $a_1 = 0$ ולכל n:
$$a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)}$$

נוכיח כי הסדרה מוגדרת לכל n:

הסדרה איננה מוגדרת במקרה בו קיים $a_n = 1$. נוכיח באינדוקציה שמקרה זה לא מתקיים על־ידי ההוכחה כי $0 < a_n < \frac{1}{2}$ לכל $n > 1$:

בסיס האינדוקציה: על־פי חישוב $\frac{1}{4} = \frac{1}{4(1-0)} = a_2$ ולכן $0 < a_2 < \frac{1}{2}$.

מהלך האינדוקציה: נניח כי $0 < a_n < 1$ ונראה כי $0 < a_{n+1} < \frac{1}{2}$.

מתקיים

$$\begin{aligned}
&0 < a_n < \frac{1}{2} \\
&1 - 0 = 1 > 1 - a_n > \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \\
&4 > 4(1-a_n) > 2 \\
&0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{4(1-a_n)} < \frac{1}{2} \\
&0 < a_{n+1} < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

מהלך האינדוקציה הושלם ולכן לכל $n > 1$ מתקיים
$$0 < a_n < \frac{1}{2}$$

לפיכך אנו יודעים כי לכל $n > 1$ מתקיים $a_n \neq 1$ ולכן a_n מוגדר לכל n.

סעיף ב'

נוכיח כי הסדרה (a_n) מתכנסת ונמצא את ערך גבולה.

תחילה נוכיח באינדוקציה כי לכל $n > 1$ מתקיים $a_{n+1} > a_n$:

בסיס האינדוקציה:
$$a_3 = \frac{1}{4(1-a_2)} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = a_2$$

מהלך האינדוקציה: נניח כי $a_n > a_{n-1}$ ונוכיח כי $a_{n+1} > a_n$.

$$\begin{aligned}
&a_n > a_{n-1} \\
&1 - a_n < 1 - a_{n-1} \\
&4(1-a_n) < 4(1-a_{n-1}) \\
&\frac{1}{4(1-a_n)} > \frac{1}{4(1-a_{n-1})} \\
&a_{n+1} > a_n
\end{aligned}$$

התנאי מתקיים ולכן הסדרה עולה לכל $n > 1$.

ידוע כי $a_n < \frac{1}{2}$ לכל n, וראינו כי הסדרה עולה ולכן הסדרה (a_n) חסומה ועולה, ולכן לפי משפט 3.16 מתכנסת. נגדיר $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. לכן מתקיים

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(1-a_n)} &&= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} 4(1-a_n)} \\
&= \frac{1}{4\lim\limits_{n\to\infty}(1-a_n)} &&= \frac{1}{4(1-\lim\limits_{n\to\infty} a_n)} \\
L &= \frac{1}{4(1-L)} &&\to 4L(1-L) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&4L - 4L^2 - 1 = 0 \\
&4L^2 - 4L + 1 = 0 \\
&L = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 4}}{2\cdot 4} = \frac{4\pm 0}{8} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

לכן מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

שאלה 2

סעיף א'

נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-5)^n + 2(-2)^n + 3}{5^{n+1} + 2(-3)^n + 3}$$

נגדיר שתי תת־סדרות (a_{n_k}) ו־(a_{m_k}) המוגדרות כסדרת האיברים הזוגיים והאי־זוגיים בהתאמה של הסדרה. סדרות אלה מכסות את הסדרה המקורית, ומתקיים:

$$a_{n_k} = \frac{5^n + 2\cdot 2^n + 3}{5^{n+1} + 2\cdot 3^n + 3}$$

נחשב את גבולה בעזרת אריתמטיקה של גבולות:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n_k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 2\cdot 2^n + 3}{5^{n+1} + 2\cdot 3^n + 3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n/5^n + 2\cdot 2^n/5^n + 3/5^n}{5^{n+1}/5^n + 2\cdot 3^n/5^n + 3/5^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+0+0}{5^1+0+0} \\
\lim_{n\to\infty} a_{n_k} &= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

באופן דומה נראה כי

$$a_{m_k} = \frac{-5^m - 2\cdot 2^m + 3}{5^{m+1} - 2\cdot 3^m + 3}$$

חישוב דומה יוביל אותנו למסקנה

$$\lim_{m\to\infty} (a_{m_k}) = -\frac{1}{5}$$

ראינו כי גבולות תת־הסדרות של הסדרה מתכנסות לערכים שונים, לכן לפי משפט 3.31 הסדרה עצמה מתבדרת, וגבולותיה החלקיים הם $\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}$.

סעיף ב'

נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-5)^n + 4^{n+1} + 3}{(-4)^n + 2(-2)^n + 3}$$

נגדיר סדרות זוגיות ואי־זוגיות כבסעיף א' ונחשב את גבולן:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 4^{n+1} + 3}{4^n + 2\cdot 2^n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n/5^n + 4^{n+1}/5^n + 3/5^n}{4^n/5^n + 2\cdot 2^n/5^n + 3/5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{0^+} = \infty$$

גבול האברים האי־זוגיים הוא, על־פי חישוב דומה:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{-5^m + 4^{m+1} + 3}{-4^m - 2\cdot 2^m + 3} = \lim_{m\to\infty} \frac{-1}{0^-} = \infty$$

על־פי משפט 3.31 מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-5)^n + 4^{n+1} + 3}{(-4)^n + 2(-2)^n + 3} = \infty$$

סעיף ג'

נוכיח כי לא מתקיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)^n$$

נגדיר (a_{n_k}) סדרת האיברים הזוגיים של (a_n), (a_{m_k}) סדרת האיברים האי־זוגיים של (a_n).

נשים לב כי בסדרה (a_{n_k}) מתקיים

$$\left(\frac{1}{n}-1\right)^n=(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

כמו־כן מתקיים

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{-n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n}$$

על־פי דוגמה 3.5 ושאלה 20 סעיף א' מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}a_{n_k}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n}=e^{-1}$$

באופן דומה עבור (a_{m_k}) ו־(1) מתקיים

$$\left(\frac{1}{n}-1\right)^n=-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

ולכן על־פי אריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{m\to\infty}a_{m_k}=-a_{n_k}=-e^{-1}$$

אנו רואים כי (a_n) לא מתכנסת וגבולותיה החלקיים הם $\pm e^{-1}$.

סעיף ד'

תהי (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים, נוכיח כי מתקיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$

על־פי הגדרה 3.24 ומשפט 3.25 מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ולכן על־פי דוגמה 3.5 הגבול מתקיים וערכו הוא e.

שאלה 3

תהי $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle$.

סעיף א'

נוכיח כי הסדרה (a_n) חסומה.

נגדיר $l = \sqrt{n}$, אז מתקיים $a_n = \langle l \rangle$. על־פי הגדרת החלק השברי מתקיים $0 \leq l < 1$, לכן מתקיים גם $0 \leq \sqrt{n} < 1$.

נעלה בריבוע ונקבל $0^2 = 0 \leq n < 1^2 = 1$. אנו רואים כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \leq a_n < 1$ ולכן הסדרה (a_n) חסומה ב־1.

סעיף ב'

נחשב את $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

נגדיר $n_k = n^2$, נשים לב כי מתקיים $a_{n_k} = \langle \sqrt{n^2} \rangle = \langle n \rangle = 0$. לכן גם מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = 0$ ובהתאם 0 הוא גבול חלקי של (a_n).

בסעיף הקודם הוכחנו שלכל n מתקיים $0 \leq a_n$ ולכן לא יתכן שקיים גבול הקטן מ־0, ובהתאם 0 הוא הגבול החלקי הקטן ביותר של (a_n) ומתקיים

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$$

סעיף ג'

נגדיר $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. נמצא את $\inf A$.

כפי שראינו בסעיף הקודם, $0 \in A$ מקיים $\forall a \in A, 0 \leq a$ ולכן לפי הגדרה 3.12 $\inf A = 0$.

לקבוצה כמובן יש מינימום לפי טענה 3.13, הוא 0.

סעיף ד'

נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left\langle \sqrt{n^2 - 1} \right\rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$$

מתקיים

$$-n \leq -1$$
$$-2n \leq -2$$
$$-2n + 1 \leq -1$$

מתקיים גם

$$n^2 - 2n + 1 \leq n^2 - 1 \leq n^2$$
$$(n-1)^2 \leq n^2 - 1 \leq n^2$$
$$n - 1 \leq \sqrt{n^2 - 1} \leq n$$

לפי טענה 1.64 3.

$$\left\lfloor \sqrt{n^2 - 1} \right\rfloor = n - 1$$
$$\sqrt{n^2 - 1} - \left\lfloor \sqrt{n^2 - 1} \right\rfloor = \left\langle \sqrt{n^2 - 1} \right\rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$$

סעיף ה'

נגדיר (b_n) סדרה כך שמתקיים

$$b_n = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$$

נוכיח כי יש גבול לסדרה:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1} - n + 1 &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}\sqrt{n-1} - \sqrt{n-1}\sqrt{n-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n-1}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n-1}\frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n-1}\frac{n+1-n+1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}} \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1} - n + 1 &= \frac{2\cdot 1}{1+1} = 1
\end{aligned}$$

סעיף ו'

נוכיח כי $L = 1$ הוא גבול חלקי של (a_n).

נגדיר סדרת אינדקסים

$$n_k = \sqrt{n^2 - 1}$$

על־פי סעיף ד' מתקיים

$$a_{n_k} = \left\langle \sqrt{n^2-1} \right\rangle = \sqrt{n^2-1} - n + 1$$

ולכן על־פי סעיף ה'

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1} - n + 1 = 1$$

לכן $L = 1$ גבול חלקי של (a_n).

סעיף ז'

נחשב את $L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$.

נניח בשלילה כי $L > 1$, לכן קיימת תת־סדרה a_{n_k} אשר מקיימת $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} > 1$.

על־פי הגדרת הגבול במצב זה לפי הגדרה 2.9 קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $a_n = 1$ בסתירה למסקנת סעיף א', לכן $L \le 1$. בסעיף הקודם מצאנו כי $L = 1$ הוא גבול חלקי של הסדרה, וידוע כי $L \ge 1$ לכל גבול חלקי L ולכן בהתאם הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של (a_n), דהינו

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 1$$

סעיף ח'

נגדיר $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ונמצא את $\sup A$.

אנו יודעים כי $1 \notin A$, אך על־פי הסעיף הקודם אנו יודעים כי לכל $n < 1$ בסביבה של 1 מתקיים $n \in A$.

מסיבה זו $l=1$ הוא חסם מלעיל של A, ולכל $k<l$ שנבחר קיים $a\in A$ כך ש־$a>k$[1], לכן l חסם עליון, נסמן

$$\sup A = 1$$

כאמור, לקבוצה A אין מקסימום, על־פי טענה (1).