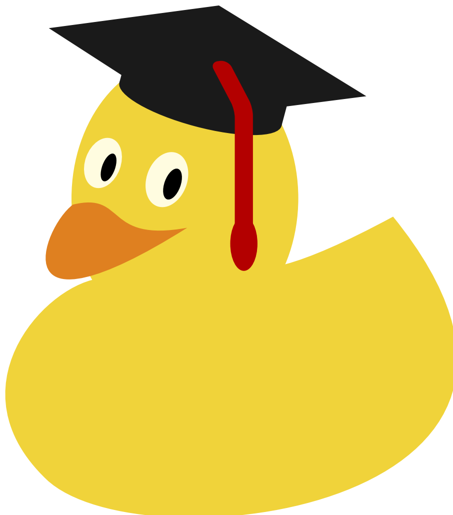
פתרון מטלה 05 — תורת ההסתברות (1), 80420

3 בדצמבר 2024



שאלה 1

עבור $i \in \{0,1\}$ תהי $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}$, ותהי $\mathbb{P}_i$ פונקציית הסתברות בדידה על Ω_i ותהי $X_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ פונקציית הזהות.
נוכיח ש־$X_2 \overset{d}{=} X_1$ אם ורק אם קיימת $S \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$ קבוצה בת־מניה במובן הרחב המקיימת $\operatorname{Supp} \mathbb{P}_2 = \operatorname{Supp} \mathbb{P}_1 = S$ וכן $\forall x \in S, \mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$.

הוכחה. נניח ש־$X_2 \overset{d}{=} X_1$, ולכן $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.
נגדיר $\operatorname{Supp} \mathbb{P}_2 = \operatorname{Supp} \mathbb{P}_1 = S$ ואנו יודעים כי אלו הן פונקציות בדידות ולכן $|S| \le \aleph_0$, כמובן גם מההגדרה של התומך נסיק $S \subseteq \Omega_1, \Omega_2$ ולכן בפרט $S \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$.
מתקיים $\mathbb{P}_1(X_1 = x) = \mathbb{P}(\{y \in S \mid y \in X_1^{-1}(x)\}) = \mathbb{P}_1(\{y \in S \mid x = y\}) = \mathbb{P}_1(x)$ ולכן נסיק ממהלך זהה על $\mathbb{P}_2$ שגם $\mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$.

נניח את הכיוון השני.
מצאנו כי $\forall x \in S, \mathbb{P}_1(X_1 = x) = \mathbb{P}_1(x)$ ואנו רוצים להראות ש־$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X_1 = x) = \mathbb{P}(X_2 = x)$ אבל מהשוויון נובע שעלינו רק להראות ש־$\mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
כמובן אם $x \in \mathbb{R} \setminus S$ אז $\mathbb{P}_1(x) = 0 = \mathbb{P}_2(x)$, אחרת $x \in S$, אבל אז ישירות מההנחה מתקבל $\mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$ ומצאנו כי $X_1 \overset{d}{=} X_2$. □

שאלה 2

נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א׳

נוכיח שאם תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חד־חד ערכית, אז $X\overset{d}{=}Y$ אם ורק אם $f(X)\overset{d}{=}f(Y)$.

הוכחה. הכיוון הראשון הוכח כטענה בכיתה, לכן נניח ש־$f(X)\overset{d}{=}f(Y)$.
יהי $x\in\mathbb{R}$, אם קיים $y\in\mathbb{R}$ כך ש־$f(y)=x$ אז נובע $\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(Y=x) \implies \mathbb{P}(f(X)=f(y))=\mathbb{P}(f(Y)=f(y))$.
אם לא קיים y כזה, אז $\mathbb{P}(f(X)=x)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid \omega=X^{-1}(f^{-1}(x))\})=0$ ולכן נסיק $\mathbb{P}(X=x)=0$. $\square$

סעיף ב׳

נסתור את הטענה כי אם $X\overset{d}{=}Y$ אז $\mathbb{P}(X=Y)>0$.
פתרון עבור $\Omega=[6]$, $\mathbb{P}$ אחיד,
עוד נגדיר $X=Id, Y=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, אז נקבל $\mathbb{P}(X=n)=\frac{1}{6}=\mathbb{P}(Y=n)$ אבל גם

$$\mathbb{P}(X=Y)=\mathbb{P}(\{n\in[6] \mid X(n)=Y(n)\})=0$$

סעיף ג׳

נסתור את הטענה שאם $X\overset{d}{=}Y$ וגם X,Y בלתי־תלויים, אז $\mathbb{P}(X=Y)>0$.
פתרון נגדיר הטלת שתי קוביות הוגנות וגם $X(n,m)=n, Y(n,m)=m+6$, אז המשתנים המקריים בלתי־תלויים, וגם $\mathbb{P}(X=Y)=0$.

סעיף ד׳

נוכיח שאם X בלתי־תלוי בעצמו, אז קיים $c\in\mathbb{R}$ שעבורו $\mathbb{P}(X=c)=1$.

הוכחה. נתון שמתקיים

$$\mathbb{P}(X=t,X=s)=\mathbb{P}(X=t)\mathbb{P}(X=s)$$

אבל אם $s\neq t$ אז $\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=s=t\}=\emptyset$ ולכן $\mathbb{P}(X=s)\mathbb{P}(X=t)=0$.
אם $s=t$ אז נקבל

$$\mathbb{P}(X=t,X=t)=\mathbb{P}(X=t)=\mathbb{P}^2(X=t) \iff \mathbb{P}(X=t)=0,1$$

ואילו לא קיים c עבורו $\mathbb{P}(X=c)=1$ אז נסיק $\mathbb{P}(X\in\mathbb{R})=\mathbb{P}(\Omega)=0$ וזו סתירה, לכן c כזה קיים ואף יחיד. ולכן $\square$

סעיף ה׳

נוכיח שאם $X^2\overset{d}{=}X$ אז קיים $p\in[0,1]$ שעבורו $X\sim Ber(p)$.

הוכחה. נבחין כי

$$\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(X^2=x) \iff \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=x\})=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid X^2(\omega)=x\})$$

ועבור $x=0,1$ מתקיים $X(\omega)=X^2(\omega)$.
אילו $x\neq 0,1$ אז נקבל

$$\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(X=\sqrt{x})=\mathbb{P}(X=\sqrt[4]{x})=\cdots$$

ואילו $\mathbb{P}(X=x)\neq 0$ נקבל $\mathbb{P}(\Omega)=\infty$ בסתירה להגדרת פונקציית הסתברות, ולכן $\mathbb{P}(X=x)=0$.
לכן גם $\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)=1$ ובהתאם קיבלנו כי קיים $p\in[0,1]$ כך ש־$X\sim Ber(p)$. $\square$

שאלה 3

יהיה $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

נוכיח כי מאורעות $A_1, \dots, A_n$ הם בלתי־תלויים אם ורק אם $1_{A_1}, \dots, 1_{A_n}$ הם משתנים מקריים בלתי־תלויים.

הוכחה. נבחין כי אילו $1_{A_1}, \dots, 1_{A_n}$ בלתי־תלויים ונבחר $S_1 = \cdots = S_n = 1$ אז נקבל את קבוצת המאורעות $A_1, \dots, A_n$.

נניח אם כך ש־$A_1, \dots, A_n$ בלתי־תלויה. תהינה $S_1, \dots, S_n \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$. נבחין כי אם $1 \in S_i$ אז $\{1_{A_i}(\omega) \in S_i\} = A_i$ ובהתאם אם $1 \notin S_i$ אז $\{1_{A_i}(\omega) \in S_i\} = \emptyset$.

לכן נגדיר $I = \{i \in [n] \mid 1 \in S_i\}$ ונקבל ש־$\{1_{A_i} \in S_i\}_{i \in [n]} = \{A_i\}_{i \in I}$ וזו כמובן קבוצה בלתי־תלויה מההנחה. $\square$

שאלה 4

יהיו $X \sim Geo(p), Y \sim Gro(q)$ משתנים מקריים בלתי־תלויים.

סעיף א׳

נחשב את ההסתברות למאורע $\{X \geq n\}$ עבור $n \in \{1, 2, \dots\}$ כלשהו.

פתרון

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = m) = \sum_{m=n}^{\infty} (1-p)^{m-1} p = p \sum_{m=n+1}^{\infty} (1-p)^m = p \cdot \frac{(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-1}$$

סעיף ב׳

נראה שהמשתנה המקרי $Z = \min(X, Y)$ הוא בעל התפלגות $Geo(1-(1-p)(1-q))$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
p_Z(x) &= \mathbb{P}(x = \min(X, Y)) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid x = \min(X(\omega), Y(\omega))\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid (x = X(\omega) \wedge x = Y(\omega)) \vee (x = X(\omega) \wedge x < Y(\omega)) \vee (x = Y(\omega) \wedge x < X(\omega))\}) \\
&\overset{(1)}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid x = X(\omega), x = Y(\omega)\} \uplus \{\omega \in \Omega \mid x = X(\omega), x < Y(\omega)\} \uplus \{\omega \in \Omega \mid x = Y(\omega), x < X(\omega)\}) \\
&= \mathbb{P}(X = x, Y = x) + \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y > x) + \mathbb{P}(Y = x)\mathbb{P}(X > x) \\
&\overset{(2)}{=} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y \geq x) + \mathbb{P}(Y = x)\mathbb{P}(X \geq x) - \mathbb{P}(X = x, Y = x) \\
&= (1-p)^{x-1} p (1-q)^{x-1} + (1-q)^{x-1} q (1-p)^{x-1} - (1-p)^{x-1} p (1-q)^{x-1} q \\
&= (1-p)^{x-1} (1-q)^{x-1} (-pq + p + q) \\
&= (1-(1-p)(1-q))^{x-1} (1-(1-p)(1-q))
\end{aligned}$$

כאשר

1. המאורעות המושרים הם זרים שאם לא כן נקבל סתירה לערך יחיד של X או Y עבור מקרה.
2. נחליף את המאורעות להיות במקרה של גדול ולא גדול ממש, ועל־ידי שימוש בהכלה והדחה נקבל שיש צורך בחיסור המקרה המשותף.

ולכן $\min(X, Y) \sim Geo(1-(1-p)(1-q))$. $\square$

שאלה 5

יהיו שני משתנים מקריים X, Y בלתי־תלויים שנתמכים על $\{0, \ldots, n-1\}$. נסמן $Z = X + Y \mod n$.
נראה ש־X ו־Z בלתי־תלויים אם ורק אם $Y \sim U(\{0, \ldots, n-1\})$.

הוכחה. נניח ש־X, Z בלתי־תלויים.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k, X = l) &= \mathbb{P}(X + Y \in \{k, k+n\}, X = l) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) + Y(\omega) \in \{k, k+n\}, X(\omega) = l\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid l + Y(\omega) \in \{k, k+n\}, X(\omega) = l\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \in \{k - l, k + n - l\}, X(\omega) = l\}) \\
&= \mathbb{P}(Y \in \{k - l, k - l + n\})\mathbb{P}(X = l)
\end{aligned}$$

ומצד שני

$$\mathbb{P}(Z = k, X = l) = \mathbb{P}(Z = k)\mathbb{P}(X = l)$$

לכן

$$\mathbb{P}(Y = k - l, k - l + n) = \mathbb{P}(Z = k)$$

נחפש את המקרה $Y = m$ ונקבל $k = m + l \mod n$ ולכן

$$\mathbb{P}(Y = m) = \mathbb{P}(Z = m + l)$$

כלומר

$$\mathbb{P}(Y = m) = \mathbb{P}(Z = m) = \mathbb{P}(Z = m + 1) = \cdots$$

ולכן נוכל להסיק שמתקיים $\mathbb{P}(Y = m) = \frac{1}{n}$, דהינו $Y \sim U(\{0, \ldots, n-1\})$.
נניח בכיוון ההפוך ש־$Y \sim U$ ונרצה להראות ש־X, Z בלתי־תלויים.
נבדוק

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k, Z = l) &= \mathbb{P}(X = k, X + Y = l) \\
&= \mathbb{P}(X = k, Y \in \{l - k, l - k + n\}) \\
&= \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \{l - k, l - k + n\}) \\
&= \mathbb{P}(X = k)\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מנוסחת ההסתברות השלמה על התומך של X. ובנוסף

$$\mathbb{P}(Z = l) = \mathbb{P}(X + Y \in \{l, l+n\}) = \mathbb{P}(X + Y \in \{l, l+n\}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k - l \mod n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \frac{1}{n}$$

ולכן נוכל להסיק כי X, Z בלתי־תלויים לפי השוויון הקודם. $\square$

שאלה 6

תהי $M \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ המטריצה המתארת התפלגות משותפת נקודתית של שני משתני ברנולי X ו־Y.

סעיף א'

נוכיח ש־X ו־Y שווי התפלגות אם ורק אם $M^t = M$.

הוכחה. נניח $X \sim Ber(p), Y \sim Ber(q)$ עבור $0 \le p, q \le 1$.

ישירות מחישוב בהינתן סימונים אלה

$$M = \begin{pmatrix} pq & p(1-q) \\ q(1-p) & (1-p)(1-q) \end{pmatrix}$$

נבחין כי $\mathbb{P}(X = Y = 1) = pq$ תמיד נכון, וכך גם $\mathbb{P}(X = Y = 0) = (1-p)(1-q)$, טענות אלה תקפות תמיד.

נניח ש־X, Y שווי התפלגות ונובע $p(1-q) = q(1-p)$ ולכן M סימטרית, נניח ש־M סימטרית ונקבל שהשוויון מתקיים, ולכן בהכרח $p = q$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח ש־X ו־Y שווים כמעט תמיד אם ורק אם M היא אלכסונית.

הוכחה. נניח ש־$Y \overset{a.s.}{=} X$ ולכן $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ ובהתאם $\mathbb{P}(X \ne Y) = 0$, לכן מתקיים $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0$, ונקבל ש־$M$ אלכסונית.

נניח ש־M אלכסונית ונבדוק $\mathbb{P}(X = Y)$, אבל מהאיפוס נובע $p(1-q) = q(1-p) = 0$ ולכן או $p = q = 1$ או $p = q = 0$ ובהתאם מחישוב ישיר $\mathbb{P}(X = Y) = 1$, לכן $X \overset{a.s.}{=} Y$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח X ו־Y בלתי־תלויים אם ורק אם M היא מדרגה 1 מעל הממשיים.

הוכחה. נניח ש־X ו־ Y בלתי־תלויים ולכן $\mathbb{P}(X = 1, Y = k) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = k)$ וכן $\mathbb{P}(X = 0, Y = k) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = k)$ ולכן שתי השורות הן תלויות לינארית, והמטריצה מדרגה 1.

נניח שהמטריצה מדרגה 1 ולכן קיים קבוע c כך ש־$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = c\mathbb{P}(X = 1, Y = 0)$, אבל גם

$$p = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = (c+1)\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$$

ולכן

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{p}{c+1}$$

מתהליך דומה נקבל גם

$$1 - p = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = (c+1)\mathbb{P}(P = 0, Y = 1) \implies \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{1-p}{c+1}$$

אבל

$$q = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{1 + p - p}{c+1}$$

ומכאן נסיק ישירות $\mathbb{P}(X = t, Y = s) = \mathbb{P}(X = t)\mathbb{P}(Y = s)$. $\square$