פתרון מטלה 10 — תורת ההסתברות (1), 80420

16 בינואר 2025

שאלה 1

יהי X משתנה מקרי שהמומנט ה־k שלו קיים וסופי.

נוכיח שלכל $c > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^k)}{c^k}$$

הוכחה. נבחין כי הקבוצות הבאות שקולות,

$$\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq c\} = \{|X - \mathbb{E}(X)|^k \geq c^k\}$$

ולכן מאי־שוויון מרקוב והעובדה שנתון כי המומנט ה־k של X מוגדר,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq c)\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^k \geq c^k) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^k)}{c^k}$$

□

שאלה 2

נחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של $U([k])$ ונקבע את תחום הגדרתה.

פתרון נניח ש־$X \sim U([k])$ ולכן עלינו למצוא את $M_X(t)$ לכל $t \in \mathbb{R}$ או להראות ש־$M_X(t)$ לא מוגדר.

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) \\
&= \sum_{s \in \operatorname{Supp} e^{tX}} s\mathbb{P}(e^{tX} = s) \\
&= \sum_{s \in \{e^{tn} \mid n \in [k]\}} s\mathbb{P}(e^{tX} = s) \\
&= \sum_{n=1}^{k} e^{tn}\mathbb{P}(e^{tX} = e^{tn}) \\
&= \sum_{n=1}^{k} e^{tn}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{k} \cdot e^t \frac{e^{tk} - 1}{e^t - 1} \\
&= \frac{e^{t(k+1)} - e^t}{k(e^t - 1)}
\end{aligned}$$

ולכן $M_X(t) = \frac{e^{t(k+1)} - e^t}{k(e^t - 1)}$, אבל מצאנו בחישוב שלכל $t \neq 0$ הביטוי מוגדר, ולכן $M_X(t) : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

שאלה 3

יהי X משתנה מקרי עם פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = at + b$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$.

נמצא את ערכי a, b ואת התפלגות X.

פתרון נתחיל בהצבה,

$$M_X(0) = \mathbb{E}(e^{0X}) = \mathbb{E}(1) = 1 = a \cdot 0 + b$$

ולכן $b = 1$. עוד אנו יודעים ש־$M'_X(0) = \mathbb{E}(X)$ אבל $M'_X(t) = a$ ולכן $\mathbb{E}(X) = a$, וכן $\mathbb{E}(X^2) = M''_X(0) = 0$ ולכן

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 0 - a^2$$

ומאי־שליליות השונות נובע ש־$a = 0$ בלבד, כלומר $M_X(t) = 1$ וכן $\mathbb{E}(X) = 0, \mathrm{Var}(X) = 0$, כלומר $X = 0$.

שאלה 4

יהי $X \sim Poi(\lambda)$, נראה שלכל $c > 1$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq c\lambda) \leq \frac{e^{c\lambda-\lambda}}{c^{c\lambda}}$$

הוכחה. בהרצאה מצאנו שמתקיים $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, לכן מאי־שוויון צ'רנוף לכל $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq c\lambda) \leq \frac{M_X(t)}{e^{tc\lambda}} = \frac{e^{c\lambda(e^t-1)}}{e^{tc\lambda}}$$

לכן בפרט כאשר $t = \log c$ מתקיים,

$$\mathbb{P}(X \geq c\lambda) \leq \frac{e^{\lambda(e^{\log c}-1)}}{e^{\log(c)c\lambda}} = \frac{e^{\lambda c-\lambda}}{c^{c\lambda}}$$

כפי שרצינו. $\square$

שאלה 5

יהי $n \in \mathbb{N}$ ונגדיר טבלה בגודל $n \times n$, נעבור על כל צלע בטבלה ונמחק אותה בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן בלתי־תלוי.
יהי X מספר הריבועים שלא נמחקה אף צלע שלהם, נוכיח על־ידי שימוש באי־שוויון הופדינג שלכל $c > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{n^2}{16} + cn) \leq 2e^{-\frac{c^2}{4}}$$

הוכחה. נגדיר $Y_{i,j} \sim Ber(\frac{1}{2})$ האם הצלע ה־i, j קיימת (מטעמי סימטריה מותר לנו לבחור כן).
נגדיר גם $X_{i,j} = Y_{i,j} \cdot Y_{i+1,j} \cdot Y_{i,j+1} \cdot Y_{i+1,j+1} \sim Ber(\frac{1}{16})$ המייצג שהריבוע ה־i, j קיים.
לבסוף גם $X = \sum_{1 \leq i,j \leq n} X_{i,j}$.
נניח שהצלעות של הטבלה הן בלתי־תלויות, דהינו הטבלה מהצורה:

C	B	A
C	B	A
C	B	A

נבחין שמתקיים

$$\mathbb{E}(Y_{i,j}) = \frac{1}{4}$$

ולכן

$$\mathbb{E}(X_{i,j}) = \mathbb{E}(Y_{i,j}) \cdot \mathbb{E}(Y_{i+1,j}) \cdot \mathbb{E}(Y_{i,j+1}) \cdot \mathbb{E}(Y_{i+1,j+1}) = \frac{1}{16}$$

ובהתאם

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} X_{i,j} = \frac{n^2}{16}$$

וכמובן גם מההגדרה לכל $1 \leq i, j \leq n$ גם $|X_{i,j}| \leq 1$, אז תנאי אי־שוויון הופדינג חלים ומתקיים

$$\mathbb{P}(X - \frac{n^2}{16} \geq cn)\mathbb{P}(X \geq cn + \frac{n^2}{16}) \leq e^{-\frac{c^2 n^2}{2n^2}} \leq 2e^{-\frac{c^2}{4}}$$

כפי שרצינו להראות. □

שאלה 6

שיכור עומד על ציר המספרים, בכל יום הוא צועד צעד אחד שמאלה בהסתברות p או שני צעדים ימינה בהסתברות $1-p$, באופן בלתי־תלוי בימים הקודמים.

נוכיח שההסתברות שהשיכור נמצא בראשית ביום ה־$3n$ דועכת מעריכית לכל $p \neq \frac{2}{3}$.

הוכחה. נגדיר X_n המשתנה המקרי המייצג כמה זז השיכור ביום ה־n, כלומק

$$\mathbb{P}(X_n = s) = \begin{cases} p & s = 1 \\ 1-p & s = -2 \end{cases}$$

וכן נגדיר $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$, סך המרחק שזז השיכור לאורך n ימים. נבחין ש־$\frac{X_n+2}{3} \sim Ber(p)$, ולכן $\frac{Y_n+2n}{3} \sim Bin(n,p)$. לכן גם $Y_{3n} + 2n \sim Bin(n,p)$ ונובע

$$\mathbb{E}(Y_{3n}) = 3np + 2n = n(3p+2)$$

נחשב

$$\mathbb{P}(Y_{3n} = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_{3n} \geq 1) - \mathbb{P}(Y_{3n} \leq -1)$$

וכן

$$\mathbb{P}(Y_{3n} \geq 1) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_{3n}}{\mathbb{E}(Y_{3n})} - 1 \geq \frac{1}{\mathbb{E}(Y_{3n})} - 1\right) \leq \exp\left(-\frac{\left(\frac{1}{n(3p+2)} - 1\right)^2}{2n}\right) \leq \exp\left(-\frac{(n(3p+2)-1)^2}{2n(n(3p+2))^2}\right) = o(e^{-n})$$

ובאופן דומה,

$$\mathbb{P}(Y_{3n} \leq -1) = \mathbb{P}(-Y_{3n} \geq 1) = \mathbb{P}\left(\frac{-Y_{3n}}{\mathbb{E}(Y_{3n})} - 1 \geq \frac{1}{\mathbb{E}(Y_{3n})} - 1\right) = o(e^{-n})$$

ומצאנו שאסימפטוטית יש דעיכה מעריכית לעמידה על הראשית, אלא אם $2n = 3$, אז אי־השוויון איננו מוגדר והתוחלת היא 0 תמיד. □