פתרון מטלה 05 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

6 ביוני 2024

שאלה 1

תהי $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ מסילה גזירה.

סעיף א'

נחשב את הנגזרת של $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(t) = \|\gamma(t)\|^2$.

נגדיר $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ על־ידי $g(v) = \|v\|^2$. נשים לב כי מתקיים $f = g \circ \gamma$ ונחשב את נגזרתה של f על־ידי שימוש בכלל הנגזרת, ונקבל

$$f'(t) = Dg \mid_{\gamma(t)} \circ \gamma'(t)$$

ולכן גם

$$f'(t) = \langle \nabla g \mid_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle$$

ומחישוב על־ידי הגדרת הנורמה האוקלידית ונגדיר $v = (v_1, \dots, v_d)$ פירוק לקורדינטה ונקבל

$$\nabla g_v = (2v_1, \dots, 2v_d)$$

ולכן גם

$$f'(t) = \langle (2\gamma_1(t), \dots, 2\gamma_d(t)), (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_d'(t)) \rangle$$

ולכן

$$f'(t) = 2\gamma_1(t) \cdot \gamma_1'(t) + \cdots + 2\gamma_d(t) \cdot \gamma_d'(t)$$

סעיף ב'

נניח כי קיימים $a < b$ כך ש־$\gamma(a) = \gamma(b)$. נוכיח שקיים $t_0 \in \mathbb{R}$ כך ש־$\gamma(t_0)$ מאונך ל־$\gamma'(t_0)$.

הוכחה. נבחין כי $\gamma(t_0)$ מאונך ל־$\gamma'(t_0)$ על־פי הגדרה כאשר $\langle \gamma(t_0), \gamma'(g_0) \rangle = 0$ >, דהינו כאשר $f'(t_0) = 0$, ולכן מספיק להוכיח כי קיים t_0 המאפס את f'.

עתה נשים לב גם ש־$f(a) = \|\gamma(a)\rangle^2 = \|\gamma(b)\rangle^2 = f(b)$.

הפונקציה f גזירה בכל תחומה ולכן גם רציפה ומצאנו כי $f(a) = f(b)$ בעוד $a < b$ ולכן ממשפט רול נקבל כי קיים $t_0 \in (a, b)$ עבורו $f'(t_0) = 0$. $\square$

שאלה 2

נגדיר את $k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על־ידי $k(x,y) = x^y$.
נוכיח כי k גזירה בכל התחום ונחשב את הגרדיאנט שלה.

הוכחה. נבדוק את כלל נגזרותיה החלקיות של k:

$$\frac{\partial k}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

שתי הפונקציות שקיבלנו מוגדרות עבור כל (x,y) בתחום של k ולכן נסיק ממשפט הנלמד בהרצאה כי k גזירה בכל תחום הגדרתה.
נשתמש בנגזרות החלקיות ונקבע גם שמתקיים

$$\nabla k(x,y) = (yx^{y-1}, x^y \ln(x))$$

□

סעיף א'

תהניה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ו־$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה t_0, ונחשב את נגזרת הפונקציה $h(t) = (f(t))^{f(t)}$ ב־t_0.

נראה כי $h(t) = k(f(t), g(t))$, ולכן נגדיר $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ על־ידי $m(t) = (f(t), g(t))$ ולכן $h(t) = (k \circ m)(t)$ ועלינו לגזור את ההרכבה $k \circ m$. נקבל מגזירה אגף אגף כי $m'(t) = (f'(t), g'(t))$ ולכן מתקיים

$$\begin{aligned} h'(t_0) = \nabla k(m(t_0)) \circ m'(t_0) &= \langle (g(t_0)(f(t_0))^{g(t_0)-1}, (f(t_0))^{g(t_0)} \ln(f(t_0))), (f'(t_0), g'(t_0)) \rangle \\ &= (g(t_0)(f(t_0))^{g(t_0)-1} f'(t_0) + (f(t_0))^{g(t_0)} \ln(f(t_0))) g'(t_0) \end{aligned}$$

שאלה 3

סעיף א'

תהי $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ב־$p\in\mathbb{R}^d$.

נסמן $A=f^{-1}(\{f(p)\})$

נוכיח כי אם וקטור $v\in\mathbb{R}^d$ משיק ל־A בנקודה p או הוא מאונך ל־$\nabla f|_p$.

הוכחה. נגדיר $\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\to A$ כך ש־$\gamma(0)=p$ ו־$\gamma'(0)=v$.

נגדיר $y=f(p)$ ולכן מהגדרת A נובע $f(\gamma(t))=y$ לכל t בתחום של העקומה.

נגזור את שני צדדי הביטוי ונקבל

$$\langle\nabla f|_{\gamma(0)},\gamma'(0)\rangle=\langle\nabla f|_p,v\rangle=0$$

דהינו, v מאונך ל־$\nabla f|_p$. $\square$

סעיף ב'

נמצא את אוסף הווקטורים המשיקים לאליפסואיד

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{27}=1\right\}$$

בנקודה $(1,2,3)$.

נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f(x,y)=3\sqrt{3-\frac{y^2}{4}-x^2}$$

נשים לב כי אכן $f(1,2)=3$ והנקודה מוכלת בגרף הפונקציה. נמצא את הגרדיאנט של f:

$$\nabla f=\left(\frac{-3x}{\sqrt{3-\frac{y^2}{4}-x^2}},\frac{-3y}{2\sqrt{3-\frac{y^2}{4}-x^2}}\right)$$

ולכן נציב ונקבל

$$\nabla f|_{(1,2)}=\left(\frac{-3}{\sqrt{3-\frac{2^2}{4}-1^2}},\frac{-3\cdot 2}{4\sqrt{3-\frac{2^2}{4}-1^2}}\right)=(-3,-\frac{3}{2})$$

אנו יודעים כי כל נגזרת כיוונית היא מכפלת וקטור כיוון בגרדיאנט ולכן נקבל כי קבוצת כל הווקטורים היא $u(-3,\frac{-3}{2})$.

סעיף ג'

נגדיר $f(x,y)=x^2-y^2$. נראה כי יש וקטור המאונך ל־$\nabla f|_{(0,0)}$ אבל לא משיק ל־$f^{-1}(\{0\})$ בנקודה $(0,0)$.

נחשב את הגרדיאנט ונקבל $\nabla f=(2x,-2y)$ ולכן גם $\nabla f|_{(0,0)}=(0,0)$, לכן נוכל להסיק שכל וקטור מאונך לגרדיאנט.

עתה נבחין כי $f^{-1}(\{0\})=(t,t,0)\cup(t,-t,0)$, דהינו קבוצה זו ניתנת לפירוק לשני ישרים ומהגדרת המשיק נקבל כי משיקיהם ב־$(0,0)$ הם וטורים מהצורה $(1,1),(1,-1)$. לכן נבחר בווקטור $(1,0)$ ונראה שהוא מקיים את כלל התנאים לשאלה.

שאלה 4

תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה L-ליפשיצית.
נוכיח כי אם f גזירה ב-$p \in \mathbb{R}^n$ אז $\|Df|_p\| \leq L$.

הוכחה. אנו יודעים כי

$$\forall p, v \in \mathbb{R}^n \|f(p+v) - f(p)\| \leq L\|p+v-p\| = L\|v\|$$

אם נבחר $v = e_i$ כאשר e_i הבסיס ל-$\mathbb{R}^n$ $(1 \leq i \leq n)$ נקבל מהגזירות של f גם כי

$$\frac{\|f(p+te_i) - f(p)\|}{\|te_i\|} = \left\| \frac{f(p+te_i) - f(p)}{|t|} \right\| \xrightarrow[t \to 0]{} \left\| \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}|_p \right\| \leq L$$

אנו יודעים כי $(Df|_p)$ היא מטריצה כך שמתקיים

$$Df|_p \cdot e_i = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i})^t$$

ולכן נוכל להסיק לכל $1 \leq i \leq n$:

$$\|Df|_p e_i\| \leq L$$

נבחר $\|v\| = 1$ עבורו $\|Df|_p \cdot v\|$ מקסימלי ונקבל

$$\|Df|_p\| = \|Df|_p \cdot v\|$$

נקבע $v = \sum_{k=1}^{n} e_k v_k$ ולכן

$$\|Df|_p\| = \|\sum_{k=1}^{n} Df|_p \cdot e_k v_k\| = \|\sum_{k=1}^{n} v_k Df|_p \cdot e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} v_k L = L$$

□