פתרון מטלה 10 — מבנים אלגבריים 1 (80445)

24 ביולי 2024

שאלה 1

יהי $\mathbb{F}$ שדה, נוכיח שהחוג $R = M_n(\mathbb{F})$ לא מכיל אידאלים לא טריוויאליים.

הוכחה. נניח כי קיים $R \triangleleft I \neq \{0\}$. לכן קיימת מטריצה $I \in M$. אילו מטריצה זו הפיכה אז $R \in M^{-1}$ ובהתאם $I \in MM^{-1} = I_n$ ולכן נוכל להסיק כי $I = R$, ולכן נניח כי M לא הפיכה. מלינארית נסיק כי קיימת מטריצה ממטריצות הבסיס הסטנדרטי שלא מאפסת את M (אחרת $M = 0$ בסתירה לטענה). נקבל אם כן שקיימת מטריצה מהבסיס הסטנדרטי ב־I, ועל־ידי שימוש במטריצות שינוי שורה ועמודה (שפגשנו בתרגול) נוכל לבנות את כלל מטריצת היחידה, דהינו $I_n \in I$ וקיבלנו שוב כי $I = R$.

מצאנו אם כן כי יש רק אידאלים טריוויאליים ל־R. $\square$

שאלה 2

יהי חוג R ו־$I \triangleleft R$.

סעיף א'

נוכיח כי לכל חבורה חיבורית $J \le R$ כך ש־$I \subseteq J$, תת־החבורה $\overline{J} \le R/I$ היא אידאל אם ורק אם $J \triangleleft R$.

הוכחה. נניח ש־$J \triangleleft R$ ונוכיח ש־$\overline{J} \triangleleft R/I$. למעשה, זו כבר חבורה חיבורית ולכן מספיק להראות את תכונת הסגירות לכפל בחוג. יהיו $a + I \in \overline{J}, b+I \in R/I$, נראה כי $(a+I)(b+I) = ab+I$ הוא האיבר המתקבל מההטלה הקאנונית $\pi : R \to R/I$ מ־$a \in J, b \in R$, ולכן $ab \in J$ ובהתאם $ab + I \in \overline{J}$. נסיק אם כן ש־$\overline{J} \triangleleft R/I$.

הכיוון ההפוך זהה לחלוטין, נשתמש בהטלה הקאנונית ובמשפט ההתאמה. □

סעיף ב'

יהי תת־חוג $S \subseteq R$, נוכיח ש־$S + I$ הוא תת־חוג של R, ש־$S \cap I \triangleleft S$ ושההומומורפיזם של החבורות החיבוריות המתקבל ממשפט האיזומורפיזם השני לחבורות

$$S/(S \cap I) \simeq (S + I)/I$$

הוא איזומורפיזם של חוגים.

הוכחה. נראה ש־$S + I$ תת־חוג.
זוהי כמובן תת־חבורה חיבורית כפי שראינו בעבר, ולכן עלינו רק לבדוק את הסגירות לכפל וקיום יחידה.
נבחר $0 \in S, 1 \in I$ ולכן נקבל $0 + 1 = 1 \in S + I$.
נראה שהקבוצה סגורה לכפל. למעשה, S סגורה וכפל וכך גם I ולכן נותר לבדוק את המקרה ab כאשר $a \in I, b \in S$.
אנו יודעים כי I אידאל וגם כי $b \in S \in R$ ולכן $ab \in I$ ונסיק כי $S + I$ סגורה לכפל ולכן תת־חוג.

נראה ש־$S \cap I \triangleleft S$.
חיתוך של תת־חבורות חיבוריות קומוטטיביות הוא חבורה חיבורית כפי שראינו בעבר, $0, 1 \in S \cap I$ כפי שגם ראינו כבר, ולכן נשאר לבדוק סגירות לכפל באיבר מ־S.
יהיו $a \in S \cap I, b \in S$. $a, b \in S$ ולכן $ab \in S$, ו־I אידאל ו־$a \in R$ ולכן $ab \in I$ ונסיק כי $ab \in S \cap I$ ומצאנו כי $S \cap I \triangleleft S$.

נגדיר הומומורפיזם $\varphi : S/(S \cap I) \to (S + I)/I$ על־פי משפט ההומוורפיזם השני לחבורות, ונבדוק אם הוא משמר כפל.
יהיו $a + S \cap I, b + S \cap I \in S/(S \cap I)$, אז $\varphi(a + S \cap I) = a + I$ ובהתאם גם $\varphi(b + S \cap I) = b + I$ ונקבל $\varphi(ab + S \cap I) = ab + I$ וגם $\varphi(a + S \cap I)\varphi(b + S \cap I) = (a + I)(b + I) = ab + I$.
מצאנו אם כן ש־φ הומומורפיזם של חוגים, ואיזומורפיזם מבדיקה ישירה של הופכיות. □

שאלה 3

יהי R חוג קומוטטיבי.

סעיף א'

נוכיח ש־R הוא שדה אם ורק אם יש לו רק את שני האידאלים הטריוויאליים בלבד, וכי הם שונים.

הוכחה. נניח ש־R שדה ולכן לכל איבר יש הופכי (מלבד אפס), יהי $I \triangleleft R$, ויהי $x \in I$, אז $x^{-1} \in R$ קיים, ובהתאם $xx^{-1} = 1 \in I$ ובהתאם $I = R$ ומצאנו כי קיימים שני אידאלים בלבד.

נניח מצד שני כי R חוג קומוטטיבי עם שני האידאלים בלבד. אילו נניח כי קיים $x \in R$ שאין לו הופכי נקבל כי $(x) \triangleleft R$ ו־$R \neq (x)$, בסתירה להנחה כי אין אידאלים לא טריוויאליים, ולכן נוכל להסיק כי לכל איבר יש הופכי, וכי $0, 1 \in R$ וגם $1 \neq 0$. נקבל אם כן ש־R שדה. □

סעיף ב'

יהיו $I, J \triangleleft R$ כך ש־$I + J = R$, נגדיר

$$\pi : R \to R/I \times R/J$$

המוגדר על־ידי $\pi(x) = (x + I, x + J)$ הוא על.

הוכחה. יהי $x \in R$, מהנתון $I + J = R$ נסיק כי קיימים $y \in I, z \in J$ כך ש־$x = y + z$, ובהתאם $\pi(x) = (y + I, z + J)$.
נוכל אם כן לבחור $(y + I, z + J)$ כלשהם, ולקבל $y + z \in R$ וכי קיים $x \in R$ עבורו $x = y + z$ ומכאן נסיק שההעתקה היא על. □

סעיף ג'

נוכיח שלכל $a_1, \dots, a_n \in R$ קיים איזומורפיזם

$$R[x_1, \dots, x_n]/(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \simeq R$$

הוכחה. נשתמש בתכונה של פולינומים ש־$x - a = (x - a_1) + (a_1 - a)$, ו־$x^2 - a = x(x - a) + a(x - a) + (a^2 - a)$ ופירוק דומה לכל מעלה כדי להסיק שכל איבר בחוג הנתון מתאפס פרט לאיבר החופשי.
נוכל כמובן להעביר תהליך זהה עבור איברים מעורבים מהצורה kx_ix_j על־ידי קיבוע x_i וביצוע פירוק דומה לפירוק שהוצג זה עתה, ונקבל כי האיבר החופשי היחיד שלא מתאפס ובהתאם נקבל את האיזומורפיה. □

שאלה 4

יהי R תחום שלמות, ונגדיר את שדה הרציונליים על R על־ידי מחלקות השקילות

$$Q(R) := \{(a, b) \mid a \in R, 0 \neq b \in R\}/\sim$$

כאשר $ad = bc \iff (a, b) \sim (c, d)$, נגדיר גם

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd), \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

ולבסוף נגדיר את $\iota : R \to Q(R)$ על־ידי $\iota(r) = (r, 1)$.

סעיף א'

נוכיח כי $\sim$ יחס שקילות על $R \times (R \setminus \{0\})$.

הוכחה. הוכח במסגרת הקורס מבוא לתורת הקבוצות, שאלה חמש בקובץ הבא: מטלה 3 $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי הפעולות $\cdot, +$ מוגדרות היטב על $Q(R)$.

הוכחה. הוכח במסגרת הקורס מבוא לתורת הקבוצות, שאלה חמש בקובץ הבא: מטלה 3 $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי $(Q(R), +, \cdot, (0, 1), (1, 1))$ הוא שדה.

הוכחה. אנו יודעים כי R תחום שלמות ולכן נוכל להסיק שגם $Q(R)$, ולכן עלינו רק לבדוק סגירות להופכי.
למעשה, אנו כבר יודעים כי לכל $(a, b) \in Q(R)$ כאשר $b \neq 0$ מתקיים $(a, b) \cdot (b, a) = (1, 1)$ ולכן מצאנו הופכי ונסיק ש־$Q(R)$ שדה. $\square$

סעיף ד'

נוכיח כי $\iota : R \to Q(R)$ היא הומומורפיזם חוגים חד־חד ערכי.

הוכחה. נראה

$$\forall a, b \in R : \iota(a + b) = (a + b, 1) = (a, 1) + (b, 1) = \iota(a) + \iota(b)$$

באופן דומה נקבל

$$\forall a, b \in R : \iota(a \cdot b) = (a \cdot b, 1) = (a, 1) \cdot (b, 1) = \iota(a) \cdot \iota(b)$$

ונשאר לבדוק חד־חד ערכיות. נניח ש־$a \neq b$ הפעם, ונקבל $\iota(a) = (a, 1) \neq (b, 1) = \iota(b)$. $\square$