פתרון מטלה 07 — פונקציות מרוכבות, 80519

23 בדצמבר 2024

שאלה 1

נחשב את האינטגרלים הבאים על־ידי שימוש במשפט קושי.

סעיף א׳

$$J = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$$

על־ידי שימוש בהרכבת המסילות

$$\gamma_1(t) = (1-t)\epsilon + tr \qquad t\in[0,1]$$
$$\gamma_2(t) = re^{it} \qquad t\in[0,\pi]$$
$$\gamma_3(t) = (1-t)(-r) + t(-\epsilon) \qquad t\in[0,1]$$
$$\gamma_4(t) = \epsilon e^{i(\pi-t)} \qquad t\in[0,\pi]$$

פתרון נגדיר $f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$ ונבחין כי $J = \operatorname{Re}(\int_0^\infty f)$.
לכל $\epsilon, r\in\mathbb{R}$ האינטגרל מתאפס ממשפט קושי, אנו גם יודעים שהאינטגרל מתכנס מאינפי 2 ולכן נעבור לחישובו.
נבדוק את האינטגרל על γ_2:

$$I_2 = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

נבחין כי

$$\max_{z\in\gamma_2}|f(z)| = \max_{z\in\gamma_2}\left|\frac{1-e^{iz}}{z^2}\right| \le \max_{z\in\gamma_2}\frac{|1-e^{iz}|}{r^2} \le \frac{1+1\cdot\max_{t\in[0,\pi]}e^{-\sin t}}{r^2} = \frac{2}{r^2}$$

ולכן מאי־שוויון ML,

$$I_2 \le \frac{2}{r^2}\cdot\frac{2\pi r}{2} = \frac{2}{r}$$

לכן $I_2\to 0$.
נעבור לבחינת

$$I_4 = \int_{\gamma_4} f(z)\,dz$$

הפעם מקירוב לינארי כפי שראינו בהרצאה

$$\int_{\gamma_4} f = \int_{\gamma_4}\frac{1-(1+iz+o(|z|))}{z^2}\,dz = -\int_0^\pi \frac{ie^{i(\pi-t)}+o(|\epsilon e^{i(\pi-t)})}{\epsilon e^{i(\pi-t)}\cdot\epsilon e^{i(\pi-t)}}(-i\epsilon)e^{i(\pi-t)}\,dt = i\int_0^\pi\frac{i\epsilon e^{i(\pi-t)}+o(|\epsilon|)}{\epsilon e^{i(\pi-t)}}\,dt \to -\pi$$

נבחין כי גם

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 \frac{1-e^{i(1-t)\epsilon+itr}}{((1-t)\epsilon+tr)^2}\,dt = \int_\epsilon^r\frac{1-e^{it}}{t^2}\,dt$$

וכן

$$I_3 = \int_{-r}^{-\epsilon}\frac{1-e^{it}}{t^2}\,dt = \int_r^\epsilon -\frac{1-e^{-it}}{t^2}\,dt = \int_\epsilon^r\frac{1-e^{-it}}{t^2}\,dt$$

ולכן

$$I_1+I_3 = 2\operatorname{Re}(\int_\epsilon^r\frac{1-e^{it}}{t^2}\,dt) = 2\int_\epsilon^r\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$

ונוכל להסיק $I_1+I_3\to 2J$.
ממשפט קושי נוכל להסיק

$$I_1+I_2+I_3+I_4 = 0 \implies -\pi+2J = 0$$

ולכן $J = \frac{\pi}{2}$

סעיף ב׳

נחשב את

$$J=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{x^n+1}\,dx$$

עבור $n>m$ טסעיים על־ידי שימוש במסילה הבאה

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t)=t && t\in[0,r]\\
&\gamma_2(t)=re^{it} && t\in[0,\frac{2\pi}{n}]\\
&\gamma_3(t)=e^{i\frac{2\pi}{n}}(r-t) && t\in[0,r]\\
&\gamma_4(t)=e^{\frac{\pi i}{n}}+\epsilon e^{-it} && t\in[0,2\pi]
\end{aligned}$$

פתרון נגדיר

$$f(z)=\frac{z^{m-1}}{z^n+1}$$

ונבחין כי הפונקציה מוגדרת ורציפה בכל נקודה פרט ל־ $z=e^{\frac{\pi i}{n}}$, לכן התחום הסגור שהמסילות מגדירות הוא תחום בו f רציפה כך שהוא מקיים את תנאי משפט קושי המורחב (את תנאי רגל שמאל) ולכן הוא תקף.

כמובן מאינפי 2 האינטגרל המבוקש מתכנס ויש הצדקה לדבר על ערכו, ונגדיר

$$I_1=\int_{\gamma_1}f(z)\,dz,\quad I_2=\int_{\gamma_2}f(z)\,dz,\quad I_3=\int_{\gamma_3}f(z)\,dz,\quad I_4=\int_{\gamma_4}f(z)\,dz$$

אז מהמשפט נקבל $I_1+I_2+I_3+I_4=0$ לכל $\epsilon,r>0$.

נעבור לבדיקת האינטגרלים הללו.

$$I_1=\int_0^r\frac{t^{m-1}}{t^n+1}\,dt\to J$$

וכן

$$I_3=\int_0^r\frac{e^{i\frac{2\pi(m-1)}{n}}(r-t)^{m-1}}{(r-t)^n+1}\,dt=e^{i\frac{2\pi(m-1)}{n}}\int_0^r\frac{t^{m-1}}{t^n+1}\,dt\to e^{i\frac{2\pi(m-1)}{n}}J$$

נחסום את f ב־γ_2 ונקבל

$$\sup_{t\in[0,\frac{2\pi}{n}]}|f(\gamma_2(t))|\le\sup_{t\in[0,\frac{2\pi}{n}]}\frac{r^{m-1}}{r^n+1}=\frac{r^{m-1}}{r^n+1}$$

ולכן מאי־שוויון ML והנתון אודות $n>m$,

$$I_2\le\frac{r^{m-1}}{r^n+1}\cdot\frac{2\pi r}{n}=\frac{r^m}{r^n+1}\cdot\frac{2\pi}{n}\to0$$

נעבור לחישוב I_4,

$$I_4=\int_0^{2\pi}\frac{\left(e^{\frac{\pi i}{n}}+\epsilon e^{it}\right)^{m-1}}{\left(e^{\frac{\pi i}{n}}+\epsilon e^{it}\right)^n+1}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac{(m-1)\pi i}{n}}+o(\epsilon)}{2+o(\epsilon)}\,dt\to\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac{(m-1)\pi i}{n}}}{2}\,dt=\pi e^{\frac{(m-1)\pi i}{n}}$$

ולכן

$$J+e^{i\frac{2\pi(m-1)}{n}}J+0+\pi e^{i\frac{\pi(m-1)}{n}}=0$$

ובפרט

$$J+\cos(\frac{2\pi(m-1)}{n})J=-\pi\cos(\frac{\pi(m-1)}{n})$$

ולכן

$$J=\frac{-\pi\cos(\frac{\pi(m-1)}{n})}{1+\cos(\frac{2\pi(m-1)}{n})}$$

שאלה 2

יהי $r > 0$ ו־$\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ על־ידי $\gamma_r(t) = re^{it}$.
אם $g : \overline{B}(0,r) \to \mathbb{C}$ רציפה בכל תחומה ואנליטית ב־$B(0,r)$ אז נוכיח שמתקיים

$$\left|\int_{\gamma_r} e^{iaz} g(z)\, dz\right| \le M \cdot \frac{\pi}{a}$$

עבור $M = \max_{t\in[0,\pi]} |g(\gamma_r(t))|$ לכל $a > 0$.

הוכחה. נרצה להשתמש באי־שוויון ML, ולכן נחפש חסם לפונקציה הפנימית,

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le\pi} |e^{ia\gamma_r(t)} g(\gamma_r(t))| &= \sup_{0\le t\le\pi} |e^{iare^{it}}| \cdot |g(z)| \\
&\le M \sup_{0\le t\le\pi} |e^{iar(\cos t + i\sin t)}| \\
&= M \sup_{0\le t\le\pi} |e^{iar\cos t}| \cdot |e^{-ar\sin t}| \\
&= M \sup_{0\le t\le\pi} e^{-ar\sin t} \\
&= \frac{M}{e^{ar}} \\
&\le \frac{M}{ar}
\end{aligned}$$

וכן $L(\gamma_r) = \pi r$, ונובע

$$ML(\gamma_r) \le M \cdot \frac{\pi r}{ar} = M\frac{\pi}{a}$$

כפי שרצינו להראות. □

שאלה 3

יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום כוכבי.

נוכיח כי לכל פונקציה אנליטית $f : G \to \mathbb{C}$ קיימת פונקציה קדומה.

הוכחה. תהי $z_0 \in G$ נקודה כך שלכל $z \in G$ גם $[z_0, z] \subseteq G$, קיימת כזו מהיות G כוכבי.

נגדיר מסילה $\gamma_z(t) = z_0(1-t) + zt$ וכן את הפונקציה $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\, dw$.

אנו רוצים להראות ש־F רציפה וכן ש־$F' = f$.

תהי z ותהי $z' \in B(z, \epsilon)$, אז ממשפט קושי למשולשים מתקיים

$$|F(z) - F(z')| = \left| \int_{[z', z]} f(w)\, dw \right| \leq M|z' - z| = M\epsilon$$

עבור $M = \sup_{w \in [z, z']} f(w)$, אז גם

$$\lim_{z' \to z} \frac{|F(z') - F(z) - f(z)(z' - z)|}{|z' - z|} \leq \lim_{z' \to z} \sup_{w \in [z, z']} f(w) - f(z) = 0$$

ומצאנו כי הפונקציה F גזירה כך ש־f נגזרתה. □

שאלה 4

יהי f פונקציה הנתונה על־ידי טור חזקות מתכנס עם רדיוס התכנסות r ונסמן

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

סעיף א׳

נוכיח כי רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות הנתון על־ידי

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

הוא r.

הוכחה. יהי $z\in B(0,r)$, אז $f(z)$ מוגדר ואף מתכנס בהחלט בנקודה זו, כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\cdot |z|^n$$

מוגדר אף הוא, זאת ראינו בתחילת הקורס.

נבחין שזהו טור ממשי ולכן נוכל לגזור אותו איבר איבר ויתקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}$$

טור מתכנס, אבל זוהי התכנסות בהחלט של הטור אותו אנו מחפשים, לכן $g(z)$ מוגדר ומתכנס בהחלט לכל $z\in B(0,r)$, לכן רדיוס ההתכנסות של g הוא r. □

סעיף ב׳

נוכיח שמתקיים

$$f(z)=f(0)+\int_{[0,z]} g(w)\ dw$$

הוכחה. נבחין כי מהשאלה הקודמת והעובדה שכדור הוא תחום כוכבי קיימת G פונקציה הולומורפית כך ש־$G'=g$, נבחין כי קיימת יחידה כזו כך שגם $G(0)=f(0)$, ונראה ש־$f=G$.

$$\left|f(0)+\int_{[0,z]} g(w)\ dw - f(z)\right| \le \left|\int_{[0,z]}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n\ dw-\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right| \le \int_{[0,z]} |g(w)|\ dw$$

יהי $N\in\mathbb{N}$, אז נגדיר f_N, g_N התחיליות של הטורים, כלומר $f_N\to f, g_N\to g$, ולכן

$$\left|f_N(z)-f(0)-\int_{[0,z]} g_N(w)\ dw\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} a_n z^n-\int_{[0,z]}\sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}\ dw\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} a_n z^n-\sum_{n=1}^{N}\int_{[0,z]} n a_n z^{n-1}\ dw\right| = 0$$

כאשר המהלך האחרון נובע מאינטגרביליות פולינום שראינו כבר, ועתה נוכל להסיק גם

$$\lim_{N\to\infty} |f(z)-f(0)-\int_{[0,z]} g(w)\ dw| = 0$$

ולכן ממשפט התכנסות במידה שווה נסיק $f(z)=f(0)+\int_{[0,z]} g(w)\ dw$. □

סעיף ג׳

נוכיח ללא שימוש במשפט קושי שלכל מסילה סגורה $\gamma: I\to B(0,r)$ מתקיים

$$\int_\gamma g(z)\ dz = 0$$

הוכחה. יהי $N \in \mathbb{N}$ ונגדיר חלוקה למסילה γ על־ידי $[\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}]$ כך ש־$\gamma = \gamma_0 + \cdots + \gamma_{n-1}$.
עוד נגדיר

$$I = \int_\gamma g(z)\ dz$$

נסמן את נקודות הקצה של γ_i ב־a_i, b_i ונגדיר

$$I_i = \int_{\gamma_i} g(z)\ dz + \int_{[0,a_i]} f(z)\ dz + \int_{[b_i,0]} f(z)\ dz$$

לבסוף נבחין כי

$$I = I_1 + \cdots I_{n-1}$$

ישירות מהגדרה ומהעובדה ש־$a_{i+1} = b_i$.
מתוצאת הסעיף הקודם נובע גם

$$I_i = f(b_i) - f(a_i) + \int_{\gamma_i} g(z)\ dz$$

ולכן מרציפות f נובע ש־$N \to \infty$ גורר $I_i = \int_{\gamma_i} g(z)\ dz$.
כאשר N מספיק קטן I_i שואף לקירוב הפוליגונלי של γ ולכן משפט קושי למשולשים (אותו אנו יכולים להוכיח מחדש) תקף ונובע ש־$I_i \to 0$, ולכן $\int_{\gamma_i} g(z)\ dz \to 0$ לכל $0 \le i < n$ וכן $I \to 0$, כלומר $I = 0$ כמבוקש. □

סעיף ד׳

נשתמש בהגדרת הגבול ונוכיח כי f אנליטית ב־$B(0,r)$ כך ש־$f' = g$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{\int_{[0,z_0]} g(w)\ dw - \int_{[0,z]} g(w)\ dw}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{\int_{[z,z_0]} g(w)\ dw}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \int_{[z,z_0]} \frac{g(w)}{z - z_0}\ dw \\
&= \lim_{z \to z_0} \int_0^1 \frac{g(\gamma(t)) \cdot (z - z_0)}{z - z_0}\ dw \\
&= \lim_{z \to z_0} \int_0^1 g(\gamma(t))\ dt \\
&= \lim_{z \to z_0} g(z_0) - g(z - z_0) \\
&= g(z_0)
\end{aligned}$$

□

שאלה 5

תהי $K \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה קמורה קומפקטית.

סעיף א׳

לכל $\delta > 0$ תהי הקבוצה $K_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, K) < \delta\}$.
נראה ש־K_δ קבוצה פתוחה וקמורה.

הוכחה. תהי נקודה $z \in K$, אז ברור ש־$z \in K_\delta^\circ$ מהגדרה, ואילו $z \in K_\delta \setminus K$ אז קיימת $w \in K$ כך ש־$d(z, w) < \delta$, ולכן נוכל לבנות כדור פתוח עם $r < \delta - d(z, w)$ ונקבל שהנקודה פנימית.
נעבור להוכחת הקמירות. תהינה שתי נקודות $z, z' \in K_\delta$, אז קיימות $w, w' \in K$ כך ש־$d(z, w), d(z', w') < \delta$.
מקמירות K נסיק $[w, w'] \subseteq K$ ונרצה להראות שגם $[z, z'] \subseteq K_\delta$. תהי $z(1-t) + z't$ כלשהי עבור $t \in [0, 1]$ ולכן

$$\begin{aligned} d(z(1-t) + z't, [w, w']) &= \inf_{0 \le s \le 1} d(z(1-t) + z't, w(1-s) + w's) \\ &\le \inf_{0 \le s \le 1} |z(1-t) + z't - (w(1-s) + w's)| \\ &\le |(z-w)(1-t) + (z'-w')t| \\ &\le |z-w|(1-t) + |z'-w'|t \\ &< \delta(1-t) + \delta t \\ &= \delta \end{aligned}$$

ומצאנו כי K_δ אכן קמורה. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח כי לכל קבוצה פתוחה $K \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ קיים $\delta > 0$ כך ש־$K_\delta \subseteq U$.

הוכחה. מידת לבג של השפה של K היא אפס ולכן קיים ϵ־כיסוי לשפה, ולכן נובע ישירות ש־$K_{\epsilon/2} \subseteq U$ ממשפטים רלוונטיים שהוכחו באינפי 3. $\square$

סעיף ג׳

נאמר שפונקציה $f : K \to \mathbb{C}$ היא אנליטית אם קיימת קבוצה פתוחה $K \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ ופונקציה אנליטית $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ כך ש־$\tilde{f}|_K = f$.
נסיק שלכל פונקציה f כזאת ניתן לבחור U כך של־$\tilde{f}$ תהיה קיימת פונקציה קדומה.

הוכחה. ממשפט קושי לקבוצות קמורות אנו יודעים שקיימת קדומה $F : K \to \mathbb{C}$ כך ש־$F' = f$.
עוד אנו יודעים ש־F היא אנליטית ולכן ניתן לייצוג כטור חזקות בעל רדיוס התכנסות כלשהו המכסה את K, ונבחר מספר δ קטן מרדיוס זה, ולכן $\tilde{F} : K_\delta \to \mathbb{C}$ רציפה ו־$\tilde{F}|_K = F$. נגדיר $\tilde{f} = \tilde{F}'$ ולכן $\tilde{f} : K_\delta \to \mathbb{C}$ ו־$\tilde{f}|_K = f$. $\square$