פתרון מטלה 02 — פונקציות מרוכבות, 80519

14 בנובמבר 2024

שאלה 1

תהינה $f,g:U\to\mathbb{C}$ פונקציות אנליטיות המוגדרות על קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{C}$.

סעיף א'

נוכיח כי $(f+g)'(z)=f'(z)+g'(z)$.

הוכחה. מהגדרת הנגזרת נובע

$$(f+g)'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$

אבל שני הביטויים הללו נתונים ולכן מאריתמטיקה

$$(f+g)'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)+g'(z_0)$$

□

סעיף ב'

נוכיח כי $(f\cdot g)'(z)=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.

הוכחה. מהגדרת הנגזרת ומרציפות פונקציות גזירות נובע

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(z_0)&=\lim_{z\to z_0}\frac{(f\cdot g)(z)-(f\cdot g)(z_0)}{z-z_0}\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)\cdot g(z)-f(z_0)\cdot g(z_0)}{z-z_0}\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{(f(z)-f(z_0))\cdot g(z)+f(z_0)g(z)-f(z_0)\cdot g(z_0)}{z-z_0}\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot g(z)+\frac{f(z_0)g(z)-f(z_0)\cdot g(z_0)}{z-z_0}\\&=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\\&=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)\end{aligned}$$

□

סעיף ג'

נוכיח כי $(f\circ g)'(z)=f'(g(z))\cdot g'(z)$.

הוכחה. מהגדרת הנגזרת נקבל

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(z_0)&=\lim_{z\to z_0}\frac{(f\circ g)(z)-(f\circ g)(z_0)}{z-z_0}\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)}\cdot\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\\&=f'(g(z_0))\cdot g'(z_0)\end{aligned}$$

□

שאלה 2

עבור הפונקציות הבאות נמצא את נקודות הגזירות ונקבע באילו נקודות היא אנליטית.

סעיף א'

$$f(x+iy)=(x^2+y^2)+i(-x^2+y^2)$$

פתרון נבחין כי אם נגזור את החלק מממשי נקבל

$$\mathrm{Re}(f(x+iy))'=(x^2+y^2)'=(2x,2y)$$

ובאופן דומה

$$\mathrm{Im}(f(x+iy))'=(-x^2+y^2)'=(-2x,2y)$$

כמובן $2y=2y$ בכל התחום, אך $2x=-2x \iff x=0$ ולכן היא גזירה על הציר המדומה בלבד.
בהתאם אין נקודה פנימית בתחום הגזירות ולכן f לא אנליטית לאף נקודה.

סעיף ב'

$$g(x+iy)=x^2+3iy$$

גם הפעם נחשב

$$\mathrm{Re}(g(x+iy))'=(3x^2,0), \qquad \mathrm{Im}(g(x+iy))'=(0,3)$$

אין נקודה בה $3=0$ ולכן g לא גזירה באף נקודה.

סעיף ג'

$$h(x+iy)=|x^2-y^2|+2ixy$$

פתרון נבחן את הנגזרות החלקיות כשאר $x^2 \geq y^2$:

$$\mathrm{Re}(h)'=(2x,-2y), \qquad \mathrm{Im}(h)'=(2,2)$$

ונקבל גזירות כאשר $x=1, y=-1$ בלבד.
נבחן את הנגזרות החלקיות בשאר המקרים:

$$\mathrm{Re}(h)'=(-2x,2y), \qquad \mathrm{Im}(h)'=(2,2)$$

ונקבל $x=-1, y=1$ בלבד, אך לא מתקיים $1^2<(-1)^2$ ולכן נוכל להסיק כי $1-i$ נקודת גזירות יחידה.

סעיף ד'

$$\forall a,b\in\mathbb{C}, k(z)=az+b\overline{z}$$

פתרון ראינו כבר כי אם $b=0$ אז k גזירה ואנליטית בכל תחומה.
אילו $a=0$ נקבל

$$\lim_{z\to z_0} b\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}=b\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}$$

ומכאן ניתן לראות כי הצבה של סדרות ממשיות תניב נגזרת 1 והצבת סדרות מדומות תניב -1 ו־k איננה גזירה באף נקודה.
נניח $a,b\neq 0$ ונניח שקיימים ערכים עבורם k גזירה, נקבל אם כך $(az+b\overline{z})'$ גזיר, ומשאלה 1 נסיק $az'+b\overline{z}'$ ביטוי מוגדר, וזו כמובן סתירה לתוצאה שקיבלנו זה עתה.
נסיק שכל עוד $b=0$ אז k הולומורפית.

שאלה 3

תהי $f : G \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית המוגדרת על תחום $G \subseteq \mathbb{C}$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $\forall z \in G, f'(z) = 0$ אז f בהכרח קבועה.

הוכחה. תהינה שתי נקודות $z_0, z_1 \in G$, נניח גם $z_0 \neq z_1$.
נגדיר מסילה $l = [z_0, z_1]$, אז כמובן $l : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ונבחן את הגרסה שלה בשני משתנים $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ במקום.
בגרסה זו נגזרתה מתלכדת עם הנגזרת הכיוונית $Df_{z_1 - z_0} = 0$, ולכן גם $\nabla l = (0, 0)^t$.
ידוע ש־$z_0 \neq z_1 \iff (\mathrm{Re}(z_0) \neq \mathrm{Re}(z_1) \vee \mathrm{Im}(z_0) \neq \mathrm{Im}(z_1))$ נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$\mathrm{Re}(z_0) \neq \mathrm{Re}(z_1)$ ולכן אם $l = (l_1, l_2)$ מספיק שנבחן את l_1.
קיבלנו ש־$l_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ וגם $l'(t) = 0$ לכל $0 \leq t \leq 1$, ולכן $l_1(0) = l_1(1)$ וזאת בסתירה להנחתנו, לכן $z_0 = z_1$ בלבד. □

סעיף ב'

נוכיח כי אם $f(G) \subseteq \mathbb{R}$ אז f בהכרח קבועה.

הוכחה. □