פתרון מטלה 11 — תורת ההסתברות (1), 80420

25 בינואר 2025

שאלה 1

יהי X משתנה מקרי בדיד כך ש־$\mathrm{Supp}\,X = \mathbb{Q}$.
נראה של־X אין פונקציית צפיפות ושלמרות זאת פונקציית ההסתברות המצטברת של X עולה ממש.

הוכחה. נבחין כי משיקולי עוצמות אכן קיים משתנה מקרי כזה, לדוגמה נבחר $Y \sim Geo(p)$ ו־$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ המעידה על $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, ונגדיר $X = f(Y)$.

אילו נניח בשלילה ש־X היא פונקציה רציפה נובע שאם $\mathbb{P}(X = q) > 0$ עבור $q \in \mathbb{Q}$ כלשהו, אז קיימת סביבה של q בה ההסתברות היא חיובית ממש וחסומה, ולכן $\mathbb{P}(|X - q| < \epsilon) = \infty$ בסתירה להגדרה של X. נסיק אם כך ש־X לא רציפה, כלומר פונקציית ההסתברות המצטברת של X לא רציפה, ואין אף קטע בה שבו יש צפיפות. למרות זאת, מתקיים $\mathbb{P}(X = q) > 0$ עבור כל $q \in \mathbb{Q}$, ולכן פונקציית ההסתברות המצטברת של X עולה ממש. $\square$

שאלה 2

יהי $X \sim Unif([0,1])$. נחשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת ופונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y = \sin(2\pi X)$.

פתרון נרצה לחשב את $\mathbb{P}(Y \le t)$ לכל $t \in [-1,1]$. נבחין ש-$t = Y \iff 2\pi X = \arcsin(t), 2\pi X = \pi - \arcsin(t)$, ובהתאם לתחומי חיוביות נוכל להסיק ש-$\{\sin(2\pi X) \le t\} = \{2\pi X \le \arcsin t\} \cup \{\pi - \arcsin t \le 2\pi X\}$. זהו כמובן איחוד זר ולכן,

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \le t) \\ &= \mathbb{P}(0 \le 2\pi X \le \arcsin t) + \mathbb{P}(\pi - \arcsin t \le 2\pi X \le 2\pi) \\ &= \frac{\arcsin t - 0}{2\pi} + \frac{\pi + \arcsin t}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin t \end{aligned}$$

ומצאנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y, נותר לגזור ולקבל את הצפיפות,

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

שאלה 3

יהי $X \sim Unif([3,7])$. נחשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת ואת פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y = X^2$.

פתרון נרצה לחשב את $\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t)$, מחיוביות התחום נסיק שביטוי זה שווה ל־$\mathbb{P}(X \leq \sqrt{t})$. אנו גם יודעים ש־$f_X(t) = \frac{1}{4}$ עבור $3 \leq t \leq 7$, לכן גם $F_X(t) = \frac{1}{4}(t-3)$ עבור $3 \leq t \leq 7$, ונובע $F_Y(t) = F_X(\sqrt{t}) = \frac{1}{4}(\sqrt{t}-3)$ עבור $9 \leq t \leq 49$. בהתאם לזה נקבל $f_Y(t) = F'_Y(t) = \frac{1}{8\sqrt{t}}$ עבור $9 \leq t \leq 49$. עבור כל ערך אחר נקבל $f_Y(t) = 0$.

שאלה 4

יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט ויהי $\alpha > 1$, נתון כי

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ (1+t)^\alpha - 1 & 0 \le t < \beta \\ 1 & t \ge \beta \end{cases}$$

נמצא את β ונחשב את f_X.

פתרון משילוב המונוטוניות של פונקציית ההתפלגות המצטברת והרציפות של F_X הנובעת מהרציפות בהחלט של X נובע

$$\lim_{t\to\beta} F_X(t) = 1 = (1+t)^\alpha - 1 \iff (t+1)^\alpha = 2 \iff t = 2^{1/\alpha} - 1$$

ולכן בהכרח $\beta = 2^{1/\alpha} - 1$. בהתאם נחשב את פונקציית הצפיפות,

$$f_X(t) = \begin{cases} \alpha(1+t)^{\alpha-1} & 0 \le t < 2^{1/\alpha} - 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

שאלה 5

יהי $X \sim Exp(\lambda)$.

סעיף א'

נחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של X.

פתרון ניזכר תחילה ש־$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ לכל $t \geq 0$. נעבור עתה לחישוב,

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{ts} f_X(s)\, ds = \int_0^\infty e^{ts} \lambda e^{-\lambda s}\, ds = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)s}\, ds = \lambda\, \frac{1}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)s}\Big|_{s=0}^{s=\infty} = \begin{cases} \frac{\lambda}{t-\lambda}(1-0) & t < \lambda \\ \infty & t \geq \lambda \end{cases}$$

כלומר $M_X(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda}$ עבור $t < \lambda$, ולא מוגדר עבור $t \geq \lambda$.

סעיף ב'

נראה ש־X חסר זיכרון, כלומר

$$\mathbb{P}(X > s+t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

לכל $s, t > 0$.

הוכחה. נבחין תחילה שמתקיים לכל $s > 0$,

$$F_X(s) \int_0^s f_X(t)\, dt = \int_0^s \lambda e^{-\lambda t}\, dt = -e^{-\lambda t}\Big|_{t=0}^{t=s} = 1 - e^{-\lambda s}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > s+t \mid X > s) &= \frac{\mathbb{P}(X > s+t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} & &= \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > s)} \\ &= \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq s+t)}{1 - \mathbb{P}(X \leq s)} & &= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda t}) & &= 1 - \mathbb{P}(X \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X > t) \end{aligned}$$

$\square$

סעיף ג'

נראה שאם X הוא משתנה מקרי המקיים $F_X(t) = 0$ עבור $t \leq 0$ ומקיים את תכונת חוסר הזיכרון, אז $X \sim Exp(\lambda)$ עבור $\lambda > 0$ כלשהו.

הוכחה.

$$\mathbb{P}(X \leq 2s) = \mathbb{P}(X \leq s+s) = 1 - \mathbb{P}(X > s+s) = 1 - \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > s)$$

ולכן $\mathbb{P}(X > 2s) = \mathbb{P}(X > s)^2$. נוכל באינדוקציה להראות שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{P}(X > ns) = \mathbb{P}(X > s)^n$. ניתן לראות כי גם,

$$\mathbb{P}(X > s) = \mathbb{P}(X > \frac{1}{2}s)\mathbb{P}(X > \frac{1}{2}s)$$

ולכן אפשר להראות במהלך אינדוקטיבי שגם $\mathbb{P}(X > \frac{1}{n}s) = \mathbb{P}(X > s)^{\frac{1}{n}}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. על־ידי שימוש בשתי הטענות האחרונות ובשלמות הממשיים נקבל שמתקיים $\mathbb{P}(X > ts) = \mathbb{P}(X > s)^t$ לכל $t > 0$. נסמן $C = \mathbb{P}(X > 1)$, ולכן בהתאם עבור $s = 1$ נקבל $\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - \mathbb{P}(X > t \cdot 1) = 1 - e^{\log(C)t}$. כמובן $C < 0$ מהיותו תוצאת פונקציית הסתברות. $\square$

שאלה 6

יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות $f_X(t) = 2t \cdot 1_{[0,1]}(t)$.

נחשב את התוחלת והשונות של X.

פתרון נתחיל בחישוב התוחלת,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\, dt = \int_0^1 2t^2\, dt = \frac{2}{3}t^3\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{3}$$

עתה נחשב את $\mathbb{E}(X^2)$,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)\, dt = \int_0^1 2t^3\, dt = \frac{2}{4}t^4\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}$$

ולכן $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$.