

פתרון ממ"ן 11 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

1 במרץ 2023

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי $a = k + m\sqrt{2}$ כאשר $k, m \in \mathbb{N}$ הוא מספר אי-רציונלי.

משפט 1.21 גורס כי $\sqrt{2}$ איננו רציונלי, לכן לא קיימים מספרים $p, q \in \mathbb{Z}$ כך ש- $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. אליו היה המספר $m\sqrt{2}$ מספר רציונלי אז היה מתקיים $m\sqrt{2} = \frac{mp}{q}$ בניגוד לאי-רציונליות $\sqrt{2}$, לכן $m\sqrt{2}$ מספר אי-רציונלי. נגדיר $p', q' \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

לכן מספר כל חיבור מספרים רציונליים הוא מספר רציונלי, אילו הייתה התוצאה $k + m\sqrt{2}$ רציונלית אז היה נגזר כי גם $m\sqrt{2}$ רציונלית, בסתירה להיותו אי-רציונלי. לכן המספר a אי-רציונלי.

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ המספר $(1 + \sqrt{2})^n$ לא רציונלי באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: המספר $(1 + \sqrt{2})^1$ הוא כמובן מספר אי-רציונלי בהתאם לסעיף א'.

מהלך האינדוקציה: נניח כי $(1 + \sqrt{2})^n = k + m\sqrt{2}$, $k, m \in \mathbb{N}$ אי-רציונלי. מתקיים

$$(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})^n (1 + \sqrt{2}) = (k + m\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = k + m\sqrt{2} + k\sqrt{2} + 2m = (k + 2m) + (m + k)\sqrt{2}$$

ידוע כי $k + 2m, m + k \in \mathbb{N}$ ולכן $(1 + \sqrt{2})^{n+1}$ הוא מספר אי-רציונלי על-פי סעיף א' והושלם מהלך האינדוקציה.

שאלה 2

סעיף א'

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ נוכיח שמתקיים:

$$\left| \sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1} \right| \leq \frac{|a-b|}{2}$$

מתקיים לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

נגדיר

$$x = |a| + 1, y = |b| + 1$$

אז

$$\left| \sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1} \right| = \frac{|a|+1 - |b|-1}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}} = \frac{|a|-|b|}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}}$$

בשל הגדרת הערך המוחלט מתקיים

$$0 \leq |a| \rightarrow 1 \leq |a| + 1 \rightarrow \sqrt{1} = 1 \leq \sqrt{|a|+1}$$

ולכן תמיד מתקיים

$$2 \leq \sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}$$

בשל הופעת הביטוי במכנה מתקיים:

$$\left| \sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1} \right| = \frac{|a|-|b|}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}} \geq \frac{|a|-|b|}{2}$$

לפי טענה 1.51:

$$\left| \sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1} \right| \geq \frac{|a-b|}{2}$$

סעיף ב'

נוכיח

$$\left(\frac{a+|a|}{2} \right)^2 + \left(\frac{a-|a|}{2} \right)^2 = a^2$$

לכל מספר ממשי n מתקיים $a^2 = |a| \cdot |a|$ לפי טענה 1.48 סעיף 6. נשתמש בטענה זו ונפתח סוגריים:

$$\left(\frac{a+|a|}{2} \right)^2 + \left(\frac{a-|a|}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + 2a|a| + a^2}{4} + \frac{a^2 - 2a|a| + a^2}{4} = \frac{4a^2 + 2a|a| - 2a|a|}{4} = a^2$$

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ אם $x \leq y$ אז $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

נניח כי $x \leq y$. נגדיר $x' = \langle x \rangle, y' = \langle y \rangle$ החלקים השבריים של x, y בהאמתה. מתקיים $x = \lfloor x \rfloor + x', y = \lfloor y \rfloor + y'$ לכן

$$\lfloor x \rfloor + x' \leq \lfloor y \rfloor + y'$$

אילו $x' \leq y'$ הטענה מתקיימת, לכן נניח $x' > y'$. מתקיים $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$, אחרת יתכן כי החלק השלם של המספרים יהיה זהה, אך החלק השבריי x' יהיה גדול מ- y' ויגרור $y < x$ בסתירה להנחה. אז מתקיים בכל מקרה $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

סעיף ב'

(i) נפתור את המשוואה

$$\begin{aligned}\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor^2 &= 25 \\ (\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor^2 + 5)(\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor^2 - 5) &= 0 \\ \lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor &= \pm 5\end{aligned}$$

על-פי טענה 1.64 (1)

$$\begin{aligned}\pm 5 &\leq x - \frac{1}{2} < \pm 5 + 1 \\ \pm 5 + \frac{1}{2} &\leq x < \pm 5 + 1\frac{1}{2} \\ -4\frac{1}{2} &\leq x < -3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2} \leq x < 6\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\lfloor x^2 \rfloor &= 9 \\ 9 &\leq x^2 < 10 \\ 9 &\leq x^2 \wedge x^2 < 10 \\ 0 &\leq x^2 - 9 \wedge x^2 - 10 < 0 \\ 0 &\leq (x-3)(x+3) \wedge (x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10}) < 0 \\ (x \geq 3 \vee x \leq -3) &\wedge (x < \sqrt{10} \vee x > -\sqrt{10}) \\ 3 &\leq x < \sqrt{10}, -\sqrt{10} < x \leq -3\end{aligned}$$

שאלה 4

סעיף א'

תהי הקבוצה

$$A = \{q\sqrt{3} \mid q \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}\}$$

נוכיח כי A צפופה בקטע $[0, 1]$.

ידוע כי \mathbb{Q} צפופה ב- $[0, 1]$. נגדיר $f : \mathbb{Q} \rightarrow A : f(x) = x\sqrt{3}$. ניתן לראות כי f על וחד־חד ערכית ולכן הפיכה. לכל שני מספרים $a, b \in A$ אשר מקיימים $a < b$ מתקיים גם $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$, והרי אלו הם מספרים רציונליים אשר ידוע כי צפופים, נבחר מספר c אשר מקיים $f^{-1}(x) < c < f^{-1}(y)$, ונשים לב כי גם מתקיים $x < f(c) < y$. מצאנו כי A צפופה לכל שני מספרים שונים המוכלים בה, לכן היא גם צפופה בתחום $[0, 1]$.

סעיף ב'

ננסה הגדרה לחוסר רציפות של קבוצה A בקטע I . תחילה נצירן את הטענה:

$$\neg \forall x, y \in I (x < y \rightarrow \exists a \in A (x < a \wedge a < y))$$

נפשט את הפסוק:

$$\exists x, y \in I (x < y \wedge \forall a \in A (x \geq a \vee a \geq y))$$

ננסח את הפסוק שהתקבל:

קבוצה A תיקרא לא צפופה ב- I אם קיימים שני מספרים $x, y \in I$ כך ש- $x < y$ וגם לכל איבר a ב- A מתקיים ש- $a \leq x$ או $a \geq y$.

סעיף ג'

נוכיח כי קבוצת השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 3 אינה צפופה בקטע $[-1, 1]$.

נגדיר $a = 0.3, b = 0.4$, ברור כי $a < b$, $a, b \in [-1, 1]$, אך לכל מספר $x \in A$ מתקיים או $x \leq a$ או $x \geq b$, שכן כל מספר שלא עומד בהגדרה זו חייב להיות מהתצורה $0.3 \dots$ ולכן איננו שייך ל- A . אז לפי הגדרת סעיף ב' הקבוצה A איננה צפופה ב- $[-1, 1]$.