

## פתרון מטלה 07 – מבנים אלגבריים 1 (80445)

28 ביוני 2024



## שאלה 1

### סעיף א'

נוכיח כי חבורה מסדר 45 היא לא פשוטה.

הוכחה. נבחן את  $Syl_5(G)$  עבור  $G$  כלשהי המקיימת  $|G| = 45$ .

ממשפט סילו השלישי נקבל כי  $n_5 = 1 \pmod{5}$  ולכן נסיק  $n_5 = 1, 6, 26$  ואלה האופציות היחידות מטעמי גודל החבורה.

אנו גם יודעים כי  $9 \mid n_5$  ולכן  $n_5 = 1$  בלבד וממשפט סילו השני נוכל להסיק כי קיימת תת-חבורה נורמלית מסדר 5 ובהתאם  $G$  לא פשוטה.  $\square$

### סעיף ב'

נוכיח כי אם חבורה מסדר 30 אז היא לא פשוטה.

הוכחה. תהי  $G$  חבורה כך ש- $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ .

ממשפטי סילו הראשון והשלישי נסיק כי  $n_3 = 1, 10$  אם  $n_3 = 1$  ממשפט סילו השני נסיק כי  $G$  לא פשוטה ולכן נניח כי  $n_3 = 10$ .

נגדיר  $\{P_1, \dots, P_{10}\} = Syl_3(G)$  ונסיק כי  $P_i \simeq \mathbb{Z}/3$  לכל  $i \in [10]$  ולכן גם לכל  $i \neq j \in [10]$  נקבל  $P_i \cap P_j = \{e\}$ .

נסיק אם כן כי קיימים 20 איברים מסדר 3 ב- $G$ .

באופן דומה נקבל כי  $n_5 = 1, 6$  ולכן נניח כי  $n_5 = 6$  בלבד, ונקבל כי ישנן שש חבורות מסדר 5 ולכן ישנם 25 איברים מסדר 5 בסתירה למה

שמצאנו זה עתה, ולכן או  $n_5 = 1$  או  $n_3 = 1$  ובכל מקרה  $G$  לא פשוטה.  $\square$

## שאלה 2

תהי  $G$  חבורה מסדר סופי ו- $p$  ראשוני.

### סעיף א'

נוכיח כי כל תת-חבורת  $p$ -שנסמן  $Q \leq G$  מוכלת בחבורת  $p$ -סילו של  $G$ .

הוכחה. מלמה שהוכחה בהרצאה נסיק כי קיים  $g \in G$  כך ש- $gQg^{-1} \leq P$  כאשר  $P$  תת-חבורת  $p$ -סילו של  $G$ .  
אנו יודעים ממשפט סילו השני כי כל חבורות  $p$ -סילו צמודות, ולכן גם  $g^{-1}$  מצמיד את  $P$  ל- $P'$  חבורת  $p$ -סילו כלשהי, ונקבל

$$g^{-1}gQg^{-1}g = Q \leq g^{-1}Pg = P'$$

□

### סעיף ב'

תהי  $H \leq G$  תת-חבורה. נוכיח כי כל תת-חבורת  $p$ -סילו  $P_H \leq H$  מוכלת בתת-חבורת  $p$ -סילו  $P_G \leq G$ .

הוכחה.  $P_H$  היא חבורת  $p$ -על-פי הגדרה וכמובן  $P_H \leq G \implies P_H \leq P_G$  ולכן תנאי הסעיף הקודמים מתקיימים ונובע כי  $P_H$  מוכלת באיזושהי חבורת  $p$ -סילו  $P_G \leq G$ .

□

### סעיף ג'

תהי  $N \triangleleft G$  תת-חבורה נורמלית. נוכיח כי לכל חבורת  $p$ -סילו  $P \leq G$ , החבורה  $P \cap N$  היא תת-חבורת  $p$ -סילו של  $N$  ו- $PN/N$  היא תת-חבורת  $p$ -סילו של  $G/N$ .

הוכחה. אנו יודעים כי  $N$  היא איחוד של מחלקות צמידות של  $G$ , ואנו יודעים גם כי ל- $G$  מחלקות צמידות של תת-חבורות  $p$ -סילו של  $G$ .  
אילו  $N$  מורכבת ממחלקת הצמידות של  $P$  אז בהתאם  $P = P \cap N$ , ולכן חיתוך זה הוא חבורת  $p$ , וחבורת  $p$ -סילו של  $G$ , ולכן משיקולי גודל בוודאי שגם תת-חבורת  $p$ -סילו של  $N$ .

נניח אם כן כי  $N$  לא מורכבת ממחלקת הצמידות של  $P$ , ולכן כמובן נוכל להסיק כי  $P \cap N = \{e\}$  וכמובן הטענה נכונה באופן ריק.

מצאנו כי  $P \cap N$  תת-חבורת  $p$ -סילו של  $N$ , נוכיח כי  $PN/N$  תת-חבורת  $p$ -סילו של  $G/N$ .  
ממשפט האיזומורפיזם השני נקבל  $PN/N \simeq P/(P \cap N)$ , ולכן נקבל  $PN/N \simeq P$  או  $PN/N \simeq \{e\}$ .

במקרה השני כמובן נקבל כי זו היא תת-חבורת  $p$ -סילו של  $G/N$ , ולכן נבדוק את המקרה הראשון בלבד.

נקבל  $PN/N \leq G/N$  והיא חבורת  $p$ , ונוכל להסיק מהגדלים של החבורות כי היא אף  $p$ -סילו.

□

### שאלה 3

#### סעיף א'

לכל  $p$  ראשוני נמצא את החבורות  $p$ -סילו של  $D_6$ .

נבחין כי  $3 \cdot 2^2 = 12 = |D_6|$ .

לכן לכל ראשוני גדול מ-3 חבורת  $p$ -סילו היא טריוויאלית, דהינו  $D_6$  עצמו.

נראה כי  $3 \mid n_2$ ,  $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$  ולכן נסיק  $n_2 = 1, 3$ . נראה כי  $\langle \sigma^3, \tau \rangle$  היא חבורה המקיימת את התנאי, ולכן אם קיימות שתי חבורות כאלה נוספות הן צמודות לזו. מבדיקה ידנית של הצמדות נגלה כי זוהי החבורה הכזו היחידה.

נעבור למצוא את 3, נקבל  $4 \mid n_3$ ,  $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$  ולכן  $n_3 = 1, 4$ , ואנו יודעים כי  $\langle \sigma^2 \rangle$  חבורה המקיימת את הטענה, ומבדיקה היא צמודה רק לעצמה, ולכן מצאנו את כל החבורות  $p$ -סילו של  $D_6$ .

#### סעיף ב'

לכל ראשוני  $p$  נמצא את כל החבורות  $p$ -סילו של  $A_4$ .

אנו כבר יודעים כי  $3 \cdot 2^2 = 12 = |A_4|$ , וכי  $n_2 = 1, 3$ ,  $n_3 = 1, 4$ , כשעלינו לגלות מה הערך הנכון.

נבחין כי  $\langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$  מבדיקה ישירה היא חבורה מגודל 4 ולכן מהווה 2-סילו, ומבדיקה ישירה נגלה כי הוא היחיד. נמצא 3-סילו, לדוגמה  $\langle (1\ 2\ 3) \rangle$ , ולכן כמובן גם  $\langle (2\ 3\ 4) \rangle$ ,  $\langle (1\ 3\ 4) \rangle$ , ואלו הם כל ה-3-סילו.

#### סעיף ג'

נוכיח כי לא קיימת פעולה נאמנה של חבורת הקוורטרניונים  $Q$  על קבוצה עם 4 איברים.

הוכחה. תהי קבוצה  $X$  כך ש- $|X| = 4$ , ונניח בשלילה כי קיימת פעולה נאמנה  $Q \curvearrowright X$ .

נראה כי  $8 = 2^3 = |Q|$  ולכן היא חבורת 2, ובהתאם  $Z(Q)$  לא טריוויאלי, ונגדיר  $g \in Z(Q)$  איבר לא נייטרלי כלשהו.

הפעולה איזומורפית ל- $\text{Sym}(X) \rightarrow Q$  ואנו יודעים כי  $Z(\text{Sym}(X))$  הוא טריוויאלי, ונקבל סתירה בבנייה.

□

## שאלה 4

תהי  $G$  חבורה מסדר סופי ו- $p$  ראשוני.

### סעיף א'

נוכיח כי אם  $|G| \mid p^k$  אז  $G$  מכילה תת־חבורה מסדר  $p^k$ .

הוכחה.

□