פתרון ממ"ן 14 – אלגברה לינארית 2 (20229)

1 באפריל 2023

שאלה 1

נמצא את הדרגה ואת הסימנית של התבנית הריבועית $q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ המוגדרת

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+2x_1x_3+3x_1x_4+x_2x_3+2x_2x_4+x_3x_4$$

מסימטריית המטריצה המייצגת של q, נגדיר את המטריצה המייצגת

$$A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&1\\ 1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

נחפוף את A אלמנטרית:

$$\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&1\\ 1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_i\to\sqrt{2}C_i]{R_i\to\sqrt{2}R_i|1\le i\le 4}\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&1&2\\2&1&0&1\\3&2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3\to C_3-2C_2]{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}0&1&0&3\\1&0&1&2\\0&1&-4&-3\\3&2&-3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_4\to C_4-3C_2]{R_4\to R_4-3R_2}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&2\\0&1&-4&-6\\0&2&-6&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[C_4\to C_4-2C_3]{R_4\to R_4-2R_3}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&-4&2\\0&0&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3\to C_3-C_1]{R_3\to R_3-R_1}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-4&2\\0&0&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[C_1\to C_1+\frac{1}{2}C_2]{R_1\to R_1+\frac{1}{2}R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-4&2\\0&0&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\to C_2-C_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-4&2\\0&0&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[C_4\to C_4+\frac{1}{2}C_3]{R_4\to R_4+\frac{1}{2}R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

מצאנו מטריצה אלכסונית וממנה נובע $\rho(q)=4$ ומהגדרת החתימה נובע כי $\sigma=-2$.

סעיף ב'

נמצא תת־מרחב מממד מקסימלי של $\mathbb{R}^4$ שעליו q היא תבנית חיובית לחלוטין.

בסעיף הקודם מצאנו מטריצה מייצגת אלכסונית של q, נוכל לבנות לפיו בסיס עבורו q אלכסונית. נגדיר בסיס זה להיות W.

אז בבסיס זה

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-x_2^2-4x_3^2-3x_4^2 \tag{1}$$

עבור תת־המרחב $\mathrm{Sp}\{w_1\}$ התבנית q חיובית לחלוטין. אילו היה תת־המרחב המקסימלי המקיים תנאי זה גדול בממדו מ־1 אז היה קיים וקטור u בלתי תלוי ב־w_1 אשר מקיים

$$q(u)\geq 0$$

בשל היותו בלתי תלוי ב־w_1 כאשר $u=\lambda_1w_1+\lambda_2w_2+\lambda_3w_3+\lambda_4w_4$ אנו יודעים כי לפחות אחד הערכים $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_3\neq 0$.

נוכל ללא פגיעה בכלליות להניח ש־$\lambda_1=0$ שאם לא כן נוכל להגדיר מחדש את הווקטור כך.

מ־(1) נובע במצב זה ש־$q(v)<0$ בסתירה להנחה ולכן ממד המרחב המקסימלי אשר עבורו q חיובית לחלוטין הוא 1.

נעבור לחישוב w_1. אנו יודעים כי וקטור זה הוא ווקטור העמודה הראשון במטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי ל־W, ומטריצה זו מתקבלת מביצוע

פעולות השורה שביצענו בחפיפה האלמנטרית בסעיף הקודם, נפעיל אותם על מטריצת היחידה ונקבל

$$w_1 = (2, 1, 0, 0)$$

ובהתאם תת־המרחב המקסימלי הוא

$$\mathrm{Sp}\{(2, 1, 0, 0)\}$$

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי אשר ממדו n, ותהי q תבנית ריבועית חיובית למחצה מעל המרחב V. נגדיר ρ דרגת q.

נוכיח כי

$$L_0 = \{v \in V \mid q(v) = 0\}$$

הוא תת־מרחב של V ושמתקיים $\dim L_0 = n - \rho$.

הוכחה. משהו **משל**