פתרון מטלה 10 — פונקציות מרוכבות, 80519

11 בינואר 2025

שאלה 1

עבור כל אחת מן הפונקציות הנתונות, נמצא את כל התחומים בהם ניתן לפתח טור לורן סביב נקודה נתונה, ונמצא את הפיתוחים.

סעיף א׳

$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$ סביב $z=i$.

פתרון נבחין כי f לא מוגדרת ב־$\pm i$ בלבד, לכן נוכל לחלק את הפיתוח לתחומים $A_0^2(i)$ ו־$A_2^\infty(i)$.

בתחום הראשון ישנה התלכדות עם טור טיילור של ולכן נפרק את הפונקציה ונחשב,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2} \\
&= (z-i)^{-2}\cdot\int -\frac{1}{z+i} \\
&= (z-i)^{-2}\cdot\int \frac{-1}{2i}\frac{1}{1+(z-i)/2i} \\
&= (z-i)^{-2}\cdot\int \frac{-1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2i)^n}(z-i)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2i)^{n-1}}\frac{1}{n+1}(z-i)^{n-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2i)^n}\frac{1}{n+2}(z-i)^n
\end{aligned}$$

נעבור לתחום השני ממהלך זהה למהלך בתרגיל נקבל

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n\frac{1}{(2i)^n}\frac{1}{n+2}(z-i)^n$$

סעיף ב׳

$f(z)=\frac{z^2-6z+10}{z^2-7z+12}$, סביב $z=2$.

פתרון נגדיר $w=z-2$ ונקבל

$$z(w)=\frac{w^2-2w+2}{w^2-3w+2}=1+\frac{w}{(w-1)(w-2)}=1+\frac{1}{1-w}-\frac{2}{1-\frac{w}{2}}$$

עבור w אנו צריכים לפתח סביב $w=0$, ונבחין כי $w=1,2$ נקודות אי הגדרה, לכן נפתח בתחומים A_0^1,A_1^2,A_2^∞.

עבור A_0^1 מתקבל

$$f(w)=1+\sum_{n=0}^{\infty}w^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{w}{2})^n$$

כלומר $c_0=1,c_n=1-\frac{1}{2^n}$ לכל n חיובי. באופן דומה בתחום A_1^2 מתקבל

$$f(w)=1+\frac{1}{w(\frac{1}{w}-1)}-\frac{2}{1-\frac{w}{2}}=1-\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}w^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{w}{2})^n=1-\sum_{n=-\infty}^{-1}w^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{w}{2})^n$$

ולבסוף בתחום A_2^∞,

$$f(w)=1-\frac{1}{w(1-\frac{1}{w})}-\frac{1}{w}\frac{2}{1-2w}=1-\sum_{n=-\infty}^{-1}w^n-\sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{w}{2})^n$$

סעיף ג׳

$f(z)=\mathrm{Log}(\frac{z}{z-1})$ סביב $z=0$.

פתרון נבחין כי הפעם הפונקציה לא מוגדרת ב־$z=0,1$ ולכן נחלק לתחומים A_0^1,A_1^∞.

בתחום A_1^∞ נקבל

$$f(z)=-\operatorname{Log}(1-\frac{1}{z})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{(-z)^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n}z^n$$

ובתחום A_0^1 נקבל

$$f(z)=-\operatorname{Log}(\frac{z-1}{z})=-(\operatorname{Log}(z-1)-z)=-\operatorname{Log}(1+(-z))+z=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-z)^n=z-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n$$

שאלה 2

עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות נמצא את כל נקודות הסינגולריות, נסווגן ונחשב את השארית שלהן.

סעיף א׳

$f(z) = \frac{z}{\sin z}$

פתרון z הסרת נקודות סינגולריות, ולכן יש סינגולריות אם ורק אם $z = \pi k \iff \sin z = 0$.

בנקודה $z = 0$ ומרציפות נקבל

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

ולכן בסביבה זו הפונקציה חסומה וזוהי סינגולריות סליקה.

בכל נקודה אחרת מתקיים

$$\lim_{z\to \pi k} |\frac{z}{\sin z}| = \lim_{x\to \pi k} |\frac{x}{\sin x}| = \infty$$

ולכן ממשפט מההרצאה אלו הן נקודות סינגולריות קוטב, ומהליך דומה לחישוב הנקודה $z = 0$ נסיק שזהו קוטב מסדר 1, ונחשב את השארית,

$$\mathrm{res}_f(\pi k) = \frac{1}{(1-1)!}(z-\pi k)\frac{z}{\sin z} \to \pi k\frac{z-\pi k}{\sin z} = (-1)^n \pi k$$

סעיף ב׳

$f(z) = \frac{z^{2n}}{(z+1)^n}$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$.

פתרון ישנה נקודה יחידה בה הפונקציה לא מוגדרת, $z = -1$, בה נבדוק חשד לסינגולריות קוטב,

$$\lim_{z\to -1} (z+1)^n f(z) \lim_{z\to -1} z^{2n} = 1$$

ולכן נקודה זו היא אכן קוטב, וסדר הקוטב n. נחשב את השארית בנקודה זו,

$$\mathrm{res}_f(-1) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+1)^n f(z) \mid_{z=-1} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{(2n)!}{(n+1)!} z^{n+1} \mid_{z=-1} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{(2n)!}{(n+1)!}(-1)^{n+1}$$

סעיף ג׳

$f(z) = z^2 \cos(\frac{1}{z-2})$.

פתרון פונקציה זו מוגדרת בכל התחום פרט למקרה $z = 2$, נבדוק נקודה זו

$$\lim_{z\to 2} z^2 \cos\frac{1}{z-2} = 4\lim_{z\to 0} \cos\frac{1}{z}$$

אבל נבחין כי

$$\lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = 1$$

בעוד

$$\lim_{n\to\infty} \cos in = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}+e^n}{2} = \infty$$

ולכן זוהי סינגולריות עיקרית. נעבור לחישוב השארית על־ידי פיתוח טור לורן סביב $z = 2$ עבור $w = z - 2$,

$$f(w) = (w+2)^2 \cos\frac{1}{w} = (w+2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n2)!}(\frac{1}{w})^{2n} = (w^2+4w+4)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n2)!} w^{-2n}$$

ולכן $c_{-1} = 4 \cdot \frac{-1}{2!} = -2$.

שאלה 3

תהי f פונקציה שלמה לא קבועה.

סעיף א'

נוכיח כי $f(\mathbb{C})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$.

הוכחה. נבחין כי באינסוף הפונקציה f לא חסומה אחרת ממשפט ליוביל היא קבועה.
אם ל־f הייתה סינגולריות עיקרית ב־∞ אז ממשפט קזורטי ויירשטראס היינו מקבלים ש־$\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$, כלומר ש־$f$ צפופה, וסיימנו.
נניח אם כן של־f אין סינגולריות עיקרית ב־∞, לכן נובע שיש לה קוטב באינסוף ובהתאם ממשפט מההרצאה f היא פולינום ותמונתה המישור המרוכב. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי לכל פונקציה אנליטית $g : U_a^* \to \mathbb{C}$ בעלת סינגולריות עיקרית ב־$z = a$, גם ל־$f \circ g$ יש סינגולריות עיקרית ב־$z = a$.

הוכחה. נבחין של־$f \circ g$ אכן יש סינגולריות ב־$z = a$, וכן שהרכבה זו היא הרכבת פונקציות אנליטיות ולכן אנליטית.
יהי $B_r = B(a, r) \subseteq U_a^*$. ממשפט קזורטי ויירשטראס $\overline{g(B_r)} = \mathbb{C}$. אבל מהצפיפות שמצאנו בסעיף הקודם $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$, כלומר מרציפות נובע

$$\overline{(f \circ g)(B_r)} = \overline{f(\overline{g(B_r)})} = \overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$$

אילו נניח ש־$z = a$ נקודה סליקה או קוטב של $f \circ g$ נקבל סתירה למשפט קזורטי ויירשטראס, ולכן זוהי סינגולריות עיקרית. $\square$

שאלה 4

תהינה f, g פונקציות שלמות המקיימות $|f(z)| \leq |g(z)|$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
נראה ש-$f = \lambda g$ עבור קבוע $|\lambda| \leq 1$.

הוכחה. נגדיר

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

ולכן $|h(z)| \leq 1$ לכל z. אילו $h(z) \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$ אז ממשפט ליוביל h קבועה ובהתאם $f(z) = h(0)g(z)$, לכן נניח ש-f מתאפסת במספר כלשהו של נקודות. בכל נקודה כזאת הפונקציה חסומה, ולכן נוכל להסיק שנקודה זו היא סינגולריות סליקה של h, ונגדיר פונקציה חדשה $h \equiv \bar{h}$ המשכה אנליטית של h. נבחין שממשפט ליוביל שוב $\bar{h}$ היא פונקציה קבועה, ונגדיר $\lambda = \operatorname{Im} \bar{h}$. לכל $z \in \mathbb{C}, g(z) \neq 0$ מתקבל $f(z) = \lambda g(z)$. בנקודות בהן $g(z) = 0$ נובע גם $|f(z)| \leq 0$, כלומר $f(z) = 0 = \lambda g(z)$, ולכן שוויון זה נכון בכל נקודה. $\square$

שאלה 5

תהי $f:U_0^*\to\mathbb{C}$ אנליטית לא קבועה בסביבה מנוקבת של $z=0$.
נראה שאם $|f(\frac{1}{n})|=O(\frac{1}{n!})$ אז ל־f יש סינגולריות עיקרית ב־$z=0$.
נמצא דוגמה לפונקציה כזו.

הוכחה. מהנתון 0 סינגולריות של f, וכן

$$\exists M\in\mathbb{R}_+,\ \lim_{n\to\infty}|f(\frac{1}{n})|\le\lim_{n\to\infty}M\frac{1}{n!}=0$$

ולכן f חסומה בסביבה של $z=0$, כלור זוהי לא סינגולריות קוטב, לכן היא עיקרית או סליקה, ונניח בשלילה שהיא סליקה.
מהגבול שמצאנו נובע בהכרח שאם g המשכה אנליטית של f, אז $g(0)=0$.
נגדיר $g(z)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lz^l$ פיתוח טיילור שקיים בסביבה של $z=0$, מצאנו ש־$a_0=0$. יהי $k\in\mathbb{N}$ האיבר הראשון כך ש־$c_k\neq 0$ ולכן

$$g(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_nz^n=z^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}z^n$$

ולכן

$$\frac{g(z)}{z^k}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}z^n\xrightarrow[z\to0]{}c_k$$

אבל

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{g(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^k}\right|\le\lim_{n\to\infty}\left|\frac{g(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n!}}\right|=0$$

ולכן $c_k=0$ ובהתאם לא קיים k כזה, כלומר $g\equiv 0$. זוהי כמובן סתירה לנתון ש־f לא קבועה, ולכן הסינגולריות לא סליקה, דהינו היא עיקרית. $\square$

לבסוף נראה דוגמה לפונקציה כזו, $f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$, פונקציה זו היא פונקציה שאנו כבר יודעים שב־$z=0$ יש לה סינגולריות עיקרית, ולכל $n\in\mathbb{N}$,

$$|f(z)|=e^{-n}\le\frac{1}{n!}$$

והתנאי אכן מתקיים.

שאלה 6

תהי $f:G\to\mathbb{C}$ רציפה.

נאמר ש־$g:G\to\mathbb{C}$ היא שורש רציף של f אם היא רציפה ובנוסף $\forall z\in G, f(z)=g(z)^2$.

סעיף א׳

נוכיח שאם f אנליטית ו־$f(z)\neq 0$ לכל $z\in G$ אז כל שורש רציף של f הוא אנליטי.

הוכחה. נגדיר $H=f(G)$, ידוע ש־f רציפה ו־G תחום ולכן גם H תחום, וכן $0\notin H$, ולכן קיים ענף של הלוגריתם על H, $\log$. בהתאם

$$g(z)=e^{\frac{\log(f(z))}{2}}$$

אבל אקספוננט אנליטית בכל תחום, וכן ידוע ש־f אנליטית, ולכן מספיק לבדוק את $\log$ שהגדרנו. אבל ראינו שכל פונקציית לוגריתם רציפה ואנליטית בתחום בו היא מוגדרת (טענה שראינו בהרצאה) ולכן כמובן שגם פונקציה זו אנליטית, ולכן גם g. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח כי הטענה שהוכחנו זה עתה חלה גם אם לא בהכרח $f(z)\neq 0$.

הוכחה. אילו יש כמות בת־מניה של נקודות בהן $f(z)=0$ אז נוכל לצמצם את התחום שלנו בנקודות אלה ולהשתמש בהמשכה אנליטית כדי להשתמש בהוכחה שראינו זה עתה.

אם כמות זו לא בת־מניה, אז מקומפקטיות G (התחום לא הוגדר בשום שלב, אבל נניח שהתחום הוא טוב) ולכן יש תת־סדרה מתכנסת כך ש־$g(z_n)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וממשפט היחידות השני היא קבועה וכמובן גם אנליטית. $\square$