פונקציות מרוכבות — סיכום

28 בנובמבר 2024

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 31.10.2024

למרצה קוראים עדי. המייל הוא adi.glucksam@mail.huji.ac.il
שיעורי הבית הפעם הם 20 אחוזים מהציון, גם פה עם התחשבות במטלות הטובות ביותר. שעת קבלה של עדי היא בימי ראשון אחרי השיעור, דהינו ב־12:00, במנצ'סטר 303.

1.1 מבוא

נגדיר מספרים מרוכבים על־ידי ההתאמה $(x, y) \mapsto z = x + iy$ כאשר $i = \sqrt{-1}$, הקבוע המדומה. נגדיר מספר סימונים שיעזרו לנו בהמשך.

הגדרה 1.1 (חלק שלם וחלק מדומה) עבור $z = x + iy$ נגדיר $\mathrm{Re}(z) = x$ ו־$\mathrm{Im}(z) = y$, החלק הממשי והחלק המדומה בהתאמה.

נעבור להגדרת הפעולות בשדה המרוכב:

הגדרה 1.2 (חיבור וחיסור מרוכבים) אם $z = x + iy$ ו־$w = a + ib$ אז נגדיר $z \pm w = (x \pm a) + i(y \pm b)$.

הגדרה 1.3 (כפל) כפל בסקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר על־ידי $\alpha \cdot z = \alpha x + i\alpha y$.
כפל של מרוכב במרוכב נגדיר על־ידי $z \cdot w = (x + iy)(a + ib) = xa + xib + iya + iyib = xa - yb + i(xb + ya)$.

הגדרה 1.4 (הצמדה) נגדיר פעולה חדשה שלא קיימת בממשיים, היא הצמדה (conjugation), נסמן $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - y$.
נקבל גם $\overline{\overline{z}} = z$.

במקרה בו $z \in \mathbb{R}$ אז נקבל $\overline{z} = x$ ולמעשה השוויון מתקיים אם ורק אם $z \in \mathbb{R}$.

הגדרה 1.5 (ערך מוחלט) נגדיר ערך מוחלט על־ידי $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.
פעולה זו מייצגת את המרחק מהראשית במישור המרוכב, בדומה לאופן פעולת הערך המוחלט בממשיים.

הגדרה 1.6 (חלוקה) חלוקה נגדיר על־ידי $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{1}{|w|^2} z \cdot \overline{w}$.

הערה (מרוכבים כמרחב וקטורי מעל הממשיים) ניתן לבחון את המרוכבים כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}^2$ על־ידי $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ המוגדר

$$z = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ראינו כי אפשר לייצג את המרוכבים על־ידי מרחב וקטורי ממשי, ובאותו אופן ניתן לייצג את המרוכבים גם על־ידי מטריצות ועל־ידי תצוגה פולארית. בתרגול נעסוק בתצוגת המטריצות, ועתה נתעמק בהצגה פולארית.

נוכל לבחון כל מספר כווקטור, דהינו על־ידי עוצמה וזווית. בקורס שלנו זווית היא ב־$[-\pi, \pi)$ והיא מודדת מרחק זוויתי מהכיוון החיובי של ציר ה־x. כל מספר $z = x + iy$ ניתן לייצג על־ידי (r, θ), כאשר $r = |z|$ ו־$\theta = \mathrm{Arg}(z)$. סימון לזה (ובהמשך הקורס הוא יהפוך להגדרה) הוא $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. בהתאם $z = r \cdot e^{i\theta}$.

תרגיל 1.1 1. הראו כי $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

2. האם נכון תמיד ש־$Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$?

3. אם התשובה היא לא, איך זה לא מתנגש עם סעיף 1?

תרגיל 1.2 מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $\sqrt[n]{z} = w$.

פתרון

$$\sqrt[n]{z} = w \iff z = w^n = \left(r \cdot e^{i\theta}\right)^n = r^n \left(e^{i\theta}\right)^n$$

אז נקבל $|w|^n = r^n$ ולכן נקבל $|w| = |z|^{\frac{1}{n}}$.
נקבל בנוסף על־ידי נוסחת דה־מואר (שתגיע בהמשך הקורס)

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta}\left(e^{i\theta}\right)^{n-1} = e^{in\theta}$$

דהינו $Arg(w)n = Arg(z)$ ולכן $Arg(w) = \frac{Arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ עבור $k = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

1.2 תזכורת למטריקות

נוכל להגדיר מטריקה על המרוכבים על־ידי שימוש בערך המוחלט שהגדרנו, דהינו נגדיר $d(z,w)=|z-w|$, והגדרה זו משרה טופולוגיה על המרוכבים ומאפשרת לנו לדון במספר תכונות נוספות:

הגדרה 1.7 (כדור פתוח) נגדיר כדור פתוח במרוכבים על־ידי $B(z,r)=\{w\in\mathbb{C}\mid d(z,w)<r\}$.

ניזכר בהגדרה של קבוצות פתוחות וסגורות:

הגדרה 1.8 (קבוצה פתוחה וסגורה) קבוצה $U\subseteq\mathbb{C}$ תיקרא **פתוחה** אם $\forall z\in U\exists r\in\mathbb{R},B(z,r)\subseteq U$.
קבוצה $F\subseteq\mathbb{C}$ תיקרא **סגורה** אם המשלים שלה $F^C=\mathbb{C}\setminus F$ הוא קבוצה פתוחה.

הגדרה 1.9 (פנים של קבוצה) פנים של $A\subseteq\mathbb{C}$ מוגדר על־ידי $\text{int}(A)=\{z\in A\mid\exists r>0,B(z,r)\subseteq A\}$.

הגדרה 1.10 (חוץ של קבוצה) החוץ של A מוגדר על־ידי $\text{Ext}(A)=\text{int}(\mathbb{C}\setminus A)$.

הגדרה 1.11 (שפה של קבוצה) השפה של A תוגדר להיות $\partial A=\mathbb{C}\setminus(\text{int}(A)\cup\text{Ext}(A))$.

הגדרה 1.12 (סגור של קבוצה) הסגור של A הוא $A\cup\partial A$,

הגדרה 1.13 (קבוצה חסומה וקבוצה קומפקטית) קבוצה A היא חסומה אם קיים $R>0$ כך ש־$A\subseteq B(0,R)$ וקבוצה K היא קומפקטית אם היא סגורה וחסומה.

2 שיעור 2 — 3.11.2024

2.1 התכנסות ורציפות

הגדרה 2.1 (התכנסות סדרות מרוכבים) תהי סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$, נאמר ש־$z_n \to z$ אם $\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.

נבחין כי זהו גבול מעל הממשיים.

תרגיל 2.1 תהי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ ונסמן $x_n = \mathrm{Re}(z_n), y_n = \mathrm{Im}(z_n)$ אז $x_n \to x \wedge y_n \to y \iff z_n \to z$. כאשר $z = x + iy$.

דוגמה 2.1 תהי $z_n = 2^{1/n} + i2^{-n}$ ונבדוק אם היא מתכנסת. נבחן את הערך הממשי שלה, $x_n = \mathrm{Re}(z_n) = 2^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
באופן דומה $y_n = \mathrm{Im}(z_n) = 2^{-n} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. ולכן $z_n \to 1$.

דוגמה 2.2 לעומת זאת $z_n = (-1)^n 2^{1/n} + i2^{-n}$, $x_{2n} = \mathrm{Re}(z_{2n}) = 2^{1/2n} \xrightarrow{x\to\infty} 1$
אבל $x_{2n+1} = \mathrm{Re}(z_{2n+1}) = -2^{1/(2n+1)} \xrightarrow{x\to\infty} -1$. ולכן z_n לא מתכנסת.

הגדרה 2.2 תהי $G \subseteq \mathbb{C}$, ותהי $f : G \to \mathbb{C}$. נאמר ש־f רציפה בסביבת z אם לכל סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$z_n \to z$ מקיימת $f(z_n) \to f(z)$.
נאמר ש־f רציפה (רציפה ב־G) אם לכל $z \in G$ מתקיים ש־f רציפה ב־z.

דוגמה 2.3 נגדיר $f(z) = \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) + i\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}$ ונגדיר $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$.
אנו יודעים שיש התכנסות אם ורק אם יש התכנסות בחלק הממשיים ובחלק המדומה בנפרד, נקבל

$$\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) = x \cdot y$$

ולכן f רציפה כפונקציה מ־$\mathbb{R}^2$ ל־$\mathbb{R}$. נבדוק את החלק המדומה

$$\mathrm{Im}(f) = \frac{\mathrm{Re}\, z}{\mathrm{Im}\, z} = \frac{x}{y}$$

ולכן f רציפה לכל $y \neq 0$. נסיק מהתרגיל כי f אכן רציפה ב־G.

ניזכר בהגדרת הקשירות

הגדרה 2.3 (קשירות) תהי $G \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, התנאים הבאים שקולים:

1. אם $U \subseteq G$ פתוחה וגם $G \setminus U$ פתוחה אז $U = G$ או $U = \emptyset$
2. קשירות פוליגונלית: לכל $z, w \in G$ קיים $z \le a_1, \dots, a_n \le w$ כך ש־$[a_j, a_{j+1}] \subseteq G$.
נבחין כי $[z, w] = \{t \cdot z + (1-t) \cdot w \mid t \in [0,1]\}$.
הרעיון הוא שלכל שתי נקודות, נוכל לבחור סדרת נקודות, כל שתי נקודות מחוברות בקטע ישר, ובסך הכול קיים מסלול של קטעים ישרים כאלה שמחבר את הנקודות, והחובה היא שכל הקטעים האלה מוכלים בקבוצה.
3. כל פונקציה קבועה מקומית היא קבועה.
ההגדרה לפונקציה קבועה מקומית היא $\forall z \in G, \exists r, B(z,r) \subseteq G \wedge f\mid_{B(z,r)} = c$. בפועל המשמעות היא שבכל קבוצה מבודדת הערך קבוע.

הגדרה 2.4 (תחום) תחום הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

הערה כל $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ניתן לכתוב $G = \biguplus G_i$ ו־G_i תחום.

2.2 הטלה סטריאוגרפית

המטרה היא להטיל את המרחב שמורכב מהמישור המרוכב וציר נוסף לספירת היחידה. נגדיר את ספירת היחידה להיות S^2. במצב זה הצירים x, y מייצגים את המישור המרוכב עצמו, על־ידי $z = x + iy, z = 0$. נגדיר $N = (0,0,1)$ הנקודה העליונה של ספירת היחידה. לכל $z \in \mathbb{C}$ נסמן ב־$P_z = (x, y, 0) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), 0)$ ונסמן $L_z = \{t \cdot P_z + (1-t)N \mid t \in \mathbb{R}\}$. בהטלה מהסוג הזה אנו מסתכלים על N בתור אינסוף.
עתה נגדיר $\phi : \mathbb{C} \to S^2$. כל נקודה על L_z היא מהצורה $tP_z + (1-t)N = (tx, ty, (1-t))$ פריט המידע השני הוא שהנקודה צריכה להיות על ספירת היחידה, דהינו $tP_z + (1-t)N \in S^2$, לכן $1 = \|tP_z + (1-t)N\|^2 = t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 \iff 2t = t^2(1 + |z|^2)$,

כאשר $|z|^2 = x^2 + y^2$. במקרה $t=0$ נקבל את N ולכן הוא לא מעניין, אם $t \neq 0$ אז $t = \frac{2}{1+|z|^2}$. נקבל
$$t \cdot P_z + (1-t)N = (\frac{2x}{1+|z|^2}, \frac{2y}{1+|z|^2}, 1 - \frac{2}{1+|z|^2})$$
נחשב את $\phi^{-1} : S^2 \to \mathbb{C}$.

עתה $P = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$, דהינו $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, אך עדיין אם $\phi^{-1}(P) = z_0$ אז $P \in L_{z_0}$ ובהתאם $z_0 \in L_p$, כאשר
$$L_p = \{tP + (1-t)N \mid t \in \mathbb{R}\}$$
ולכן
$$\operatorname{Re}(z_0) = tx_0, \quad \operatorname{Im}(z_0) = ty_0, \quad \{z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
אם כך נקבל
$$tz_0 + (1-t) = 0 \iff t(z_0 - 1) = -1 \implies t = \frac{1}{1 - z_0}$$
אז
$$\operatorname{Re}(z) = \frac{x_0}{1 - z_0}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{y_0}{1 - z_0}$$
אם $z_0 = 1$ אז הנקודה מתאימה לאינסוף, ולכן נשתמש ב־$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ במקום ב־$\mathbb{C}$ עצמו.

במקרה זה גם נוכל לקבל מטריקה חדשה.

הגדרה 2.5 $z, w \in \mathbb{C}$, אז נגדיר $\rho(z, w) = \|\phi(z) - \phi(w)\|$.
במקרה זה נקבל $\rho^2(z, w) = \cdots = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}$.
גם
$$\rho(z, \infty) = \lim_{w \to \infty} \rho(z, w) = \lim_{w \to \infty} \frac{2|\frac{z}{w} - 1|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\frac{1}{w}|^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$
תרגיל 2.2 אם $w_n \to \infty$ לא חסום אז $\rho(w_n, \infty) \to 0$.

מה קורה למעגלים ב־S^2 תחת ϕ_{-1}?

נשים לב שאם C מעגל על S^2 אז בהכרח $C = S^2 \cap P_C$ עבור P_C מישור כלשהו.
$$P_C = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
תהי $z \in \mathbb{C}$ המקיימת $\phi(z) \in C$ אז בפרט $\phi(z) \in P_C$, אז נציג $\phi(z)$ במשוואת המישור
$$d = a \cdot \frac{2\operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2} + b \cdot \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2} + c\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \implies d + c = 2a\operatorname{Re}(z) + 2b\operatorname{Im}(z) + |z|^2(c - d)$$
נבחן את המקרה ש־$c = d$, נקבל
$$c = a\operatorname{Re}(z) + b\operatorname{Im}(z) = ax + by$$
וזהו למעשה ישר במישור. אם $c \neq d$ אז מקבלים משוואת מעגל
$$c + d = a2x + 2by + (x^2 + y^2)(c - d) \iff (x - A)^2 + (y - B)^2 = C^2$$
המשמעות היא שאם $c = d$ אז $N \in P_C$ ואם $c \neq d$ אז $N \notin P_C$.

2.3 דיפרנציאביליות

מעכשיו $F : U_z \to \mathbb{C}$ כאשר U_z סביבה פתוחה של z, לדוגמה כדור פתוח סביב z. נראה תזכורת מ־$\mathbb{R}^2$.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$
f דיפרנציאבילית ב־(x_0, y_0) אם ניתן לחקור את הפונקציה על־ידי חקירת קירוב לינארי שלה, דהינו
$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{1}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \|f(x, y) - f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)\| = 0$$

3 תרגול 1 — 4.11.2024

3.1 מנהלות

למתרגל קוראים יונתן. יש 12 תרגילים בסמסטר הזה, כולם להגשה ונלקחים 10 הטובים ביותר. הם 20% מהציון, אז חשוב להשקיע בהם. תהיה ליונתן שעת קבלה אבל הוא עוד לא קבע אותה. המייל שלו הוא yonatan.bachar@mail.huji.ac.il.

3.2 שדה המרוכבים

הגדרנו את שדה המרוכבים על־ידי

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad i^2 = -1$$

כפי שראינו בשיעור 1, יש לנו מספר פעולות על המרוכבים.

אנו גם יודעים כי $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ עם בסיס $\{1, i\}$ כמרחב וקטורי, נקבע $z \in \mathbb{C}$ ונגדיר $M_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ על־ידי $M_z(w) = z \cdot w$. נבחן את המטריצה המייצגת של ההעתקה הזו, נניח $z = a + bi$ ונבדוק את הפעולה על הבסיס שלנו.

$$M_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

העתקה זו מייצגת את הכפל ב־z.

מה אנחנו יכולים להגיד על ההעתקה הזו? תכונות:

1. $M_{z+w} = M_z + M_w$
2. $M_{z \cdot w} = M_z \cdot M_w$
3. $M_{\overline{z}} = M_z^T$

נגדיר את z בתצורה פולארית:

$$z = re^{i\theta}$$

ונקבל

$$M_z = M_{re^{i\theta}} = \begin{pmatrix} r & \\ & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

זוהי למעשה מטריצה סקלרית כפול מטריצת סיבוב.

3.3 טופולוגיה וסדרות

נבחן את המטריקה על $\mathbb{C}$:

$$d(z, w) = |z - w|$$

היא מגדירה לנו טופולוגיה עם קבוצות פתוחות בסיסיות מהצורה $B(z, r)$.

כמרחב טופולוגי או נורמי, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ולכן התכונות מושרות.

נגדיר שסדרה (z_n) מתכנסת ל־z אם $|z_n - z| \to 0$ ונאמר שסדרה היא חסומה אם קיים $r > 0$ כך ש־$|z_n| < r$ לכל $n \in \mathbb{N}$. ניזכר בטענה מההרצאה:

טענה 3.1 $z_n \to z$ *אם ורק אם* $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z) \land \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$.

ונראה דוגמה לשימוש בטענה זו.

דוגמה 3.1 נגדיר $z_n = n(e^{-n} + i \sin \frac{1}{n})$.

נקבל מהטענה כי $z_n \to i$.

נעבור לסדרה מעניינת יותר

דוגמה 3.2 נקבע $c \in \mathbb{C}$ ונגדיר $f_c(z) = z^2 + c$, נתבונן בסדרה

$$z_0 = 0, \quad z_1 = f_c(0), \quad z_n = f_c(z_{n-1})$$

עבור $c = 0$ נקבל $z_n \equiv 0$. עבור $c = 1$ נקבל $0, 1, 2, 5, 26, \dots$. עבור $c = i$ נקבל $0, i, -1+i, -i, -1+i, \dots$.
הסדרה הזו מתנהגת בצורה מאוד משונה בהתאם לנקודת ההתחלה, וקשה להבין את ההתנהגות באופן כללי.
סדרה זו מהווה הבסיס להגדרה של קבוצת מנדלברוט ופרקטל מנדלברוט, קבוצה זו מוגדרת על־ידי המספרים המרוכבים שהסדרה שלהם חסומה:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \exists r > 0, \forall n \in \mathbb{N} |f_c^n(0)| < r\}$$

נסיים בתזכורת בהטלה הסטריאוגרפית שראינו בשיעור 2.
הגדרנו את הספירה של רימן, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ בתור קומפקטיזציה חד־מימדית והגדרנו את S^2 על־ידי

$$S^2 = \{(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1\}$$

ראינו את $\pi : S^2 \to \mathbb{C}^*$ ההטלה, מצאנו כי היא נתונה על־ידי

$$\pi(x_0, y_0, z_0) = \frac{x_0}{1 - z_0} + i\frac{y_0}{1 - z_0}$$

נראה עתה שתי טענות מעניינות

טענה 3.2 *לכל* $N \in S^2$ *מתקיים*

$$\pi(N)\overline{\pi(-N)} = -1$$

הוכחה. נסמן $N = (x_0, y_0, z_0)$ ונקבל

$$\begin{aligned}
\pi(N) \cdot \overline{\pi(-N)} &= \left(\frac{x_0}{1 - z_0} + i\frac{y_0}{1 - z_0}\right)\left(-\frac{x_0}{1 + z_0} + i\frac{y_0}{1 + z_0}\right) \\
&= \frac{-x_0^2 - y_0^2}{1 - z_0^2} + i\frac{x_0y_0 - x_0y_0}{1 - z_0^2} \\
&= \frac{-(1 - z_0^2)}{1 - z_0^2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

□

טענה 3.3 *לכל* θ *מתקיים:*

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

הוכחה. נוכיח באמצעות מרוכבים

$$\begin{aligned}
\sin(2\theta) = \operatorname{Im}(e^{i2\theta}) &= \operatorname{Im}((e^{i\theta})^2) \\
&= \operatorname{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^2) \\
&= \operatorname{Im}((\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\sin\theta\cos\theta)) \\
&= 2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

□

4 שיעור 3 — 7.11.2024

4.1 דיפרנציאביליות ועוד

ניזכר בהגדרה של דיפרנציאביליות ב־$\mathbb{R}$ וב־$\mathbb{R}^2$. במימד אחד פונקציה גזירה אם קיים הגבול
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x)$$
ובהתאם $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(|x-x_0|)$
בשני מימדים $f(x,y)=f(x_0,y_0)+a(a-x_0)+b(y-y_0)+o(\|(x,y)\|)$ כאשר גם $a=f_x(x_0,y_0),b=f_y(x_0,y_0)$.

הגדרה 4.1 (דיפרנציאביליות במרוכבות) תהי $f:U_{z_0}\to\mathbb{C}$, נאמר כי היא דיפרנציאבילית, או גזירה, ב־$z_0\in\mathbb{C}$ אם ורק אם קיים הגבול
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$
ובמקרה זה נסמן גבול זה ב־$f'(z_0)$.

טענה 4.2 (תכונות של גזירות) *שתי התכונות הבאות מתקיימות עבור $f:U_{z_0}\to\mathbb{C}$ גזירה ב־$\mathbb{C}$:*

1. $L(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ *לינארית ב־*$\mathbb{C}$
2. $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-L(z)}{z-z_0}=0$.

ברמה הפשוטה אנו עלולים לזהות פונקציה מרוכבת כדומה לפונקציה $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, גם היא יכולה להיות גזירה, אז נשאל מה ההבדל. התשובה היא שבעוד שבמקרה של משתנים מרובים הנגזרת מוגדרת עבור ציר וכן בהתאם קיימות נגזרות כיווניות שונות, במקרה המרוכב יש רק ציר אחד, וכל הפונקציות הכיווניות הן למעשה אותה הפונקציה, זהו תנאי חזק הרבה יותר.

דוגמה 4.1 נניח ש־$f(z)=z^n$, נבדוק את גזירותה. נשתמש בטענה $z^n-w^n=(z-w)(z^{n-1}+wz^{n-2}+w^2z^{n-3}+\cdots+w^{n-1})$ ונקבל
$$\lim_{w\to z}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}=\lim_{w\to z}\frac{z^n-w^n}{z-w}=\lim_{w\to z}\sum_{k=0}^{n-1}w^kz^{n-1-k}=n\cdot z^{n-1}$$

דוגמה 4.2 נגדיר $f(x,y)=(x,-y)$, נמיר לפונקציה מרוכבת על־ידי $f(z)=\overline{z}\iff f(x+iy)=x-iy$, ונבדוק אם הפונקציה גזירה, דהינו אם קיים הגבול
$$\lim_{w\to z}\frac{\overline{w}-\overline{z}}{w-z}$$
נראה שהגבול הזה לא קיים, נניח $w=z+i\epsilon$ ונקבל
$$\lim_{w\to z}\frac{\overline{w}-\overline{z}}{w-z}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\overline{z}-(\overline{z}-i\epsilon)}{-i\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{i}{-i}=-1$$
נניח $w=z+\epsilon$ ונקבל
$$\lim_{z\to w}\frac{z+\epsilon-z}{\epsilon}=1$$
ולכן הפונקציה לא גזירה, נשים לב גם שב־$\mathbb{R}^2$ הפונקציה דיפרנציאבילית ומתקיים $\nabla f=(-1,-1)$, דהינו אין קשר מחייב בין גזירות בשני המקרים.

הגדרה 4.3 נאמר ש־f היא **אנליטית** ב־z_0 אם קיימת סביבה U_{z_0} כך ש־f דיפרנציאבילית (במובן המרוכב) לכל $z\in U_{z_0}$.

סימון 4.4 יהי $G\subseteq\mathbb{C}$ תחום, נסמן ב־$\mathrm{Hol}(G)$ את קבוצת הפונקציות האנליטיות ב־G.

טענה 4.5 (תכונות של פונקציות אנליטיות) *נניח* $f,g\in Hol(G)$

1. $(f\pm g)'=f'\pm g'$.
2. $(f\cdot g)'=f'g+fg'$
3. $(\frac{1}{g})'=\frac{-g'}{g^2}$
4. $(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'$
5. $\overline{f(\overline{z})}$ *אנליטית, דהינו g אינווריאנטית תחת הצמדה.*

6. $f(\overline{z})$ ו־$\overline{f(z)}$ *לא אנליטיות.*

נעבור על מספר דוגמות של פונקציות

דוגמה 4.3 (פונקציות לינאריות) נסמן $\mathcal{L}_0(\mathbb{C},\mathbb{C})$ ככל הפונקציות הלינאריות העוברות דרך הראשית.
במישור המרוכב $L(z) = az$ עבור $a \in \mathbb{C}$.
ב־$\mathbb{R}^2$ ניתן לתאר כל העתקה לינארית על־ידי כפל במטריצה

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

תרגיל 4.1 לפונקציה שתיארנו זה עתה מתאימה פונקציה מרוכבת ונוכיח

1. $L(z) = z(\frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\gamma+\beta}{2}) + \overline{z}(\frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\gamma-\beta}{2})$
2. $L(z) = az + b\overline{z}$ עבור $a, b \in \mathbb{C}$ אז L אנליטית אם ורק אם $b = 0$.
3. מסקנה: $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ לינארית אז $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ אנליטית אם ורק אם $\alpha = \delta, \beta = -\gamma$.

5 שיעור 4 — 10.11.2024

בשיעור הקודם ראינו פונקציות לינאריות כדוגמה, היום נראה עוד דוגמות. קיימות פונקציות לינאריות ב־$\mathbb{R}^2$ שאינן לינאריות כ־$\mathbb{C}$.

דוגמה 5.1 יהי פולינום

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k, a_n \in \mathbb{C}$$

אבל כפי שראינו $f(x,y) = 2xy$ לא פולינום מרוכב, היא לא דיפרנציאבילית במובן המרוכב. עוד הערה היא שמתקיים

$$(p(z))' = \sum_{k=0}^{N} (a_k z^k)' = \sum_{k=0}^{N} a_k k z^{k-1}$$

המוטיבציה להגדרת המרוכבים הייתה למציאת פתרונות למשוואה $x^2 + 1 = 0$, ואכן נראה בהמשך כי אם p פולינום ממעלה $k \geq 1$ אז בהכרח ניתן לפרק את p לביטוי $(z - a_1) \cdots (z - a_k)$, יש לו בדיוק k שורשים.

טענה 5.1 *1. אם $a_N = 1$ אז נקרא לו פולינום מתוקן (monic polynom).*

2. p הוא ממשי אם $\forall k, a_k \in \mathbb{R}$.

3. אם p ממשי אז מתקיים $p(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

4. אם p פולינום ממשי וגם $p(z) = 0$ אז $p(\overline{z}) = 0$.

נעבור לדבר על העתקות מוביוס (Mobius). העתקות מהצורה $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ עבור $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, הרבה פעמים מתארים על־ידי

$$A_h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

טענה 5.2 *תכונות*

1. אם $A = Id$ אז $h(z) = z$.

2. $h'(z) = \frac{\det(A)}{(cz+d)^2}$ ולכן h קבועה אם ורק אם $\det(A) = 0$, לכן נניח תמיד ש־$\det(A) \neq 0$.

3. תהינה A, B מטריצות, אז $h_A \circ h_B = h_{AB}$.

4. $h_{A^{-1}} = (h_A)^{-1}$.

טענה 5.3 *$Mob(\mathbb{C})$ קבוצת העתקות מביוס, בדרך־כלל מנורמלות כך שיש רק דטרמיננטה 1, יחד עם תכונה 3 ו־4 נותנות לקבוצה זו מבנה של חבורה. לכל 3 נקודות $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ קיימת העתקת מביוס h כך ש־$h(z_1) = 1, h(z_2) = 0, h(z_3) = \infty$.*

נשאל את עצמנו האם $0, 1, \infty$ מיוחדות.

הוכחה. נמצא $h \in Mob(\mathbb{C})$ המקיימת $h(-1) = \infty, h(0) = i, h(1) = 0$. נשים לב כי למרות שיש ארבעה משתנים חופשיים, אחד נקבע בעקבות קיבוע הדטרמיננטה, דהינו אחד השוויונות הוא $ad - bc = 1$ והוא מוריד דרגת חופש.

$$h(0) = \frac{b}{d} = i, \quad h(1) = \frac{a+b}{c+d} = 0, \quad h(-1) = \frac{b-a}{c-d} = \infty$$

מהנתון השלישי נקבל $c - d = 0$, דהינו $c = d$. מהשוויון השני נקבל $a = -b \iff a + b = 0$. לבסוף נקבל גם $b = id = -a = ic$.
נקבל אם כך ש־$h(z) = \frac{az-a}{iaz+ia} = \frac{z-1}{i(z+1)} = i\frac{1-z}{1+z}$ $\square$

טענה 5.4 *ההעתקה h ממפה את כדור היחידה $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ לחצי העליון של המישור המרוכב $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$*

תרגיל 5.1 מצאו את h^{-1}. בדקו לאן הוא ממפה את $\mathbb{R}$ ואת $i\mathbb{R}$.

טורים, ותזכורת על טורים.

משפט 5.5 (M test) *נניח כי $f_n : E \to \mathbb{C}$, נניח כי $|f_n| \leq M_n$ ונניח כי $\sum M_n < \infty$ אז $\sum f_n$ מתכנס בהחלט ובידה שווה ב־E.*

למה 5.6 *אם $\sum c_n(w - z_n)$ מתכנס בהחלט אז הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה ב־$\{z \mid |z - z_n| < |w - z|\}$.*

נסמן טורים על־ידי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

טענה 5.7 *אחד מהבאים מתקיים*

1. *לכל $z \neq z_0$ הטור מתבדר.*
2. *לכל z הטור מתכנס.*
3. *קיים R כך ש-$R > |z - z_0|$ אז הטור מתכנס, אם $|z - z_0| > R$ הטור מתבדר ואם $|z - z_0| = R$ לא ידוע.*

הגדרה 5.8 (רדיוס התכנסות) מספר $R_c \geq 0$ כך ש-$|z - z_0| \leq R_c$ גורר שהטור מתכנס, ואם $|z - z_0| > R_c$ הטור מתבדר.

משפט 5.9 (הדאמר) $\frac{1}{R_c} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$.
אם $R_c > 0$ נסמן

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

מוגדר בתחום $\{|z - z_0| < R_c\}$. אז

$$C'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1}$$

וכן

$$C^{(j)}(z) = \sum_{n=j}^{\infty} c_n n(n-1)\cdots(n-j+1)(z - z_0)^{n-j}$$

הגדרה 5.10 (אקספוננט מרוכב והטריגונומטריות המרוכבות)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

נקבל $R_c = \infty$ ולכן יש הצדקה להגדרה זו.

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

טענה 5.11 (זהות אוילר)

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

עבור $z = \theta \in [-\pi, \pi]$.

תרגיל 5.2 מתקיים

1. $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos(z)$
2. $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = \sin(z)$

מראים זאת עם הטורים ומסיקים את הזהות.

ואז אפשר להסיק שמתקיים

$$\cos(z) + i\sin(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = e^{iz}$$

תרגיל 5.3 הראו ש-e^z אנליטית ב-$\mathbb{C}$, הסיקו גזירות, $\sin z, \cos z$ ומצאו את הנגזרות.

טענה 5.12 *תהי f הולומורפית (אנליטית ב-$\mathbb{C}$) המקיימת $f' = f$, אז $f(z) = c \cdot e^z$.*

הוכחה. נסמן $g(z) = f(z) \cdot e^{-z}$. g הולומורפית כמכפלת פונקציות הולומורפיות.

$$g'(z) = f'(z)e^{-z} + f(z)(-e^{-z}) = e^{-z}(f'(z) - f(z)) = 0$$

לכן $g' = 0$ ולכן $g(z) = c$, ובהתאם $c = g(z) = f(z)e^{-z}$ ובהתאם $f(z) = ce^z$. □

מסקנה 5.13 $f = f' \iff f = ce^z$

נעבור לפונקציות יוצאות. נגדיר $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} = -i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$. נגדיר גם $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$. באופו אופן $\sinh(z) =$

$i\sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ וכמובן $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

6 שיעור 5 — 14.11.2024

6.1 לוגריתם מרוכב

נבחין כי אם $z_1 = i\pi/2, z_2 = i(\pi/2 + 2\pi)$ אז $e^{z_1} = e^{z_2}$, לכן האקספוננט המרוכב הוא לא חד־חד ערכי.

הגדרה 6.1 הגדרנו את $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \to (-\pi, \pi]$, זהו הענף הראשי של הארגומנט. בהתאם נגדיר את הענף הראשי של הלוגריתם על־ידי

$$\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

הערה אם $z_1, z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$ אז $\mathrm{Log}(z_1) = \mathrm{Log}(z_2) \implies \mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2)$.

הקטע הוא להסתכל על קבוצת מקרים ספציפית שמכסה את כל המקרים.

הגדרה 6.2 (ענף) תהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום המקיים $0 \in G$.

נגדיר **ענף** של הארגומנט להיות כל פונקציה $\alpha : G \to \mathbb{R}$ רציפה המקיימת

$$\alpha(z) \in \{\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

דוגמה 6.1 $G = \{\mathrm{Re}(x) > 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$, אז נוכל להגדיר $\arg_G(z) = \mathrm{Arg}(z)$, נבחין כי היא אכן רציפה ומקיימת את הטענה.

דוגמה 6.2 הפעם $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$.

הפעם נגדיר $\alpha(z) = \mathrm{Arg}(e^{i\pi} z)$ כדי לעמוד בהגדרת התחום.

לכן $\alpha : G \to (0, 2\pi]$. α רציפה שכן Arg רציפה בתחום הנתון, ובנוסף אכן מתקיים $\alpha(z) \in \{\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k\}$.

7 שיעור 6 — 17.11.2024

7.1 הלוגריתם המרוכב

הגדרנו את הענף הראשי של לוג על־ידי

$$\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

ניזכר כי הגדרנו ענפים על־ידי

הגדרה 7.1 ענף של הארגומנט הוא פונקציה $\alpha : G \to \mathbb{C}$ אשר היא רציפה ומתקיים

$$\alpha(z) \in \{\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

איך מוכיחים? מראים רציפות, ואז מראים התנאי השני, ראינו ש־$e^{z+w} = e^z e^w$, ואז נוכל להראות $e^{i\alpha(z)} = e^{i\,\mathrm{Arg}(z)}$.

כדי להפריך צריך להשתמש בקפיצה שבוודאות יש איפשהו בפונקציה, קפיצה במינוס שני פאי.

הערה לכל $l(z) \in \{\mathrm{Log}(z) + 2\pi k\}$, $\mathrm{Im}(l)$ הוא ענף של הארגומנט.

לכל ענף של הארגומנט, $\alpha(z)$, מתקיים

$$l(z) = \log|z| + i\alpha(z)$$

יהיה ענף של הלוגריתם.

טענה 7.2 *אם l ענף של הלוגריתם, אז l הולומורפית ב־G וגם* $l'(z) = \frac{1}{z}$.

הוכחה. אנו יודעים $l(w) = \xi,\, l(z) = \zeta,\, w = e^{l(w)}$ ולכן

$$\lim_{w\to z}\frac{l(w)-l(z)}{w-z} = \lim_{\xi\to\zeta}\frac{\xi-\zeta}{e^{\xi}-e^{\zeta}} = \lim_{\xi\to\zeta}\frac{1}{\frac{e^{\xi}-e^{\zeta}}{\xi-\zeta}} = \frac{1}{\lim_{\xi\to\zeta}\frac{e^{\xi}-e^{\zeta}}{\xi-\zeta}} = \frac{1}{\frac{d}{d\zeta}e^{\zeta}} = \frac{1}{e^{\zeta}} = \frac{1}{z}$$

□

משפט 7.3 *תהי $f : G \to G'$ עבור G, G' תחומים, המקיימת עבור f הולומורפית*

$$(f \circ g)(z) = (g \circ f)(z)$$

אז

$$g \in Hol(G'), \qquad g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$$

ונוכיח את המשפט בפרקים הבאים.

הגדרה 7.4 תהי $f \in Hol(G)$ המקיימת $f(z) \neq 0$. נגדיר ענף של $\log f$ להיות כל פונקציה רציפה g המקיימת $e^{g(z)} = f(z)$.

טענה 7.5 *אם g הוא ענף של $\log f$ אז $g \in Hol(G)$ ו־* $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

הוכחה. נקבע $z_0 \in G$ ולכן $f(z_0) \neq 0$, מרציפות של f קיימת סביבה $U_{z_0} \subseteq G$ כך ש־$f|_{U_{z_0}} \neq 0$.

נשתמש במשפט ההעתקה הפתוחה (שיוכח בהמשך) שגורר שאם $f : G \to \mathbb{C}$ פתוחה לכל U אז $f(U)$ פתוחה.

ממשפט ההעתקה הפתוחה $f(U_{z_0}) = V$ היא קבוצה פתוחה שלא מכילה את הראשית, לכן נוכל להגדיר ענף של הלוגריתם המקיים $\log f(w) \in \{\mathrm{Log}\, f(w) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. □

הגדרה 7.6 אם $f \neq 0$ ב־G אז $\frac{f'}{f}$ היא הנגזרת הלוגריתמית של f.

הגדרה 7.7 (n + 1) יהי G תחום כך שקיים ענף של הלוג ב־G, נדגיר לכל $\sigma \in G$ את $z^{\sigma} = \exp(\sigma \log z)$.

נבחין כי ההגדרה תלויה בתחום $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

נקבל $z^{\sigma} = \exp(\sigma(\log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)))$.

$\sigma = i/2 \to l_1$ אז $z^{i/2} = \exp(\frac{i}{2}\log|z| + \frac{i}{2}i\,\mathrm{Arg}(z)) = \exp(\frac{i}{2}\log|z| - \frac{1}{2}\mathrm{Arg}(z)) \implies |z^{i/2}| = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Arg}(z)}$. לעומת זאת $\sigma = i/2$

אז $z^{i/2} = \exp(\frac{i}{2}\log|z| + \frac{i}{2}i\,\mathrm{Arg}(z) + 2\pi) = \exp(\frac{i}{2}\log|z| - \frac{1}{2}\mathrm{Arg}(z) + 2\pi) \implies |z^{i/2}| = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Arg}(z)}e^{-\pi}$.

לכל שני ענפים l_1, l_2 נקבל

$$z^\sigma = \exp(\sigma l_1(z)) = \exp(\sigma l_2(z)) \cdot \exp(\sigma 2\pi k)$$

דוגמה 7.1 $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ עבור $\sigma \in \mathbb{R}$ נקבל $z^\sigma = r^\sigma e^{i\sigma\theta}$

דוגמה 7.2 $f(z) = \sqrt{\frac{z+1l}{z-1}}$.

7.2 טורי טיילור

דוגמה 7.3 $\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$.

אם $f(z) = z+1$ אז $\log(z+1) = \log f$ ולכן $\mathbb{C} \to \mathbb{D}$ לא מכיל את $(-\infty, 0]$.

עוד ראינו כי $\log'(1+z) = \frac{f'}{f} = \frac{1}{z+1} |_{z=0} = 1$.

$$\frac{d}{df}\log(1+z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

וזהו סכום סדרה הנדסית ואז

$$\text{Log}(1+z) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} + C$$

נציב $z = 0$ ונקבל $C = 0$.

דוגמה 7.4 אם $f_n \to f$ במידה שווה משהו $f'_n \to f'$ במידה שווה מקומית.

דוגמה 7.5

$$\arctan(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}$$

רדיוס התכנסות 1.

$$\tan(w) = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{-ie^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$$

$$\tan(w) = z \iff w = \frac{1}{2i}\log(\frac{1+iz}{1-iz})$$

8 שיעור 7 — 21.11.2024

הערה את החישוב של טור טיילור של $\log(z)$ אפשר לקבל גם על־ידי שימוש בנוסחה של הפרש חזקות.

תרגיל 8.1 אם $f_n^i \to g$ במידה שווה מקומית וגם $f_n(z) \to L$ אז $f_n \to f$, f גזירה ו־$f' \to f_n'$.

בהינתן התרגיל

$$g_N' = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$$

וכן $g_N' \to g'$

$$g_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{z^{k+1}}{k+1} + f(0)$$

הסדרה g_N מקיימת $g_N' \to g$ במידה שווה מקומית. $g_N(0) = f(0)$ ומהתרגיל $g_N \to f$.

8.1 משוואות קושי רימן

סימון 8.1 אם $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, אז נסמן $\operatorname{Re}(f) = u(x,y)$ ו־$\operatorname{Im}(f) = v(x,y)$, כאשר $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
אז $f(z) = f(x+iy) = u(u,y) + iv(x,y)$.

טענה 8.2 (משוואות קושי־רימן) *תהי $f = u + iv$ פונקציה גזירה במובן המרוכב, אז אז* $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$, ולכן

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z) - f(z-h)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(x,y) - u(x-h,y)}{h} + i\frac{v(x,y) - v(x-h,y)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(x,y) - u(x-h,y)}{h} + i \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{v(x,y) - v(x-h,y)}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

□

האם זה תנאי מספיק לגזירות?

משפט 8.3 *תהינה $u, v \in C^1(G)$ והן מקיימות את משוואות קושי־רימן, אז $f = u + iv$ היא גזירה ב־G.*

הוכחה. תהי $h = \delta + i\epsilon$ עבור $\delta, \epsilon \in \mathbb{R}$. לכן

$$u(x+\delta, y+\epsilon) - u(x,y) = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\alpha} \delta + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{\beta} \epsilon + o(\delta, \epsilon)$$

וכן

$$v(x+\delta, y+\epsilon) - v(x,y) = -\beta\delta + \alpha\epsilon + o(\|h\|)$$

אם $h = w - z$ אז

$$\begin{aligned}
\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+\delta, y+\epsilon) + iv(x+\delta, y+\epsilon) - u(x,y) - iv(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\alpha\delta + \beta\epsilon + o(\|h\|) + i(-\beta\delta + \alpha\epsilon + o(\|h\|))) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\alpha(\delta + i\epsilon) + \beta(\epsilon - i\delta) + o(\|h\|)) \\
&= \alpha - i\beta = f'(z)
\end{aligned}$$

□

הערה מספיק u, v גזירות ב־$\mathbb{R}^2$ לא מספיק קיום u_x, v_y.

משפט 8.4 *יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום ו־$f \in Hol(G)$, התנאים הבאים שקולים:*

1. *f קבועה*
2. *$f' \equiv 0$*
3. *$u = \mathrm{Re}(f)$ קבועה*
4. *$\mathrm{Im}\, f = v$ קבועה*
5. *$|f|$ קבועה*
6. *$\mathrm{Arg}(f)$ קבועה*

הוכחה. מספיק להראות שהכול שקול ל־$f' \equiv 0$.

ברור ש־1 גורר הכול.

אם u קבועה אז

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ולכן מקושי־רימן גם $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ולכן $f' = 0$. □

9 שיעור 8 — 24.11.2024

בשיעור הקודם דיברנו על משוואות קושי־רימן. נעבור להוכחה של מה שנשאר מהמשפט של השיעור הקודם.

הוכחה. אם $f' \equiv 0$ אז f קבועה ולכן גם $|f|, \arg(f)$ קבועים.

נניח ש־$|f|$ קבועה. גם $|f|^2$ קבועה, וכן $|f|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y)$ ואם נגזור נקבל

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial x}|f|^2 &= \frac{\partial}{\partial x}u^2(x,y) + v^2(x,y) \\ &= 2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= -2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

ממשוואות קושי־רימן, ונקבל משוויונות אלה

$$0 = u(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}) + v(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y})$$

וכן גם

$$0 = u(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}) + v(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y})$$

עבור $x + iy$ כלשהם, אם $v \neq 0$ אז

$$0 = u(u_x - v_x) + v(u_x + v_x) \implies \frac{u}{v} = \frac{u_x + v_x}{u_x - v_x}$$

ומהשוויון הקודם נסיק

$$\frac{u}{v} = \frac{u_x - v_x}{u_x + v_x} \implies \frac{u_x - v_x}{u_x + v_x} = -\frac{u_x + v_x}{u_x - v_x} = 0$$

ולכן

$$u_x - v_x = u_x + v_x = u_x - v_x = 0$$

ונסיק $f'(z) = 0$.

נניח ש־$v = 0$, אז נקבל $\{z \mid v(z) = 0\}$ קבוצה של נקודות לא רציפות והראינו שעל $G_0 = G \setminus \{v = 0\}$ מתקיים $f' = 0$ ולכן $f : G_0 \to \mathbb{C}$ קבועה ולכן מרציפות גם ב־G. במקרה השני קיים כדור $B \subseteq G_0$ ולכן $G \setminus \overline{B}$ קבוצה פתוחה.

נניח $\arg(f)$ קבוע ולכן

$$\arg f = \{\arctan(\frac{\operatorname{Im} f}{\operatorname{Re} f}) + 2\pi k\}$$

אם $\arg f$ קבוע מרציפות $\frac{\operatorname{Im} f}{\operatorname{Re} f} = \alpha \in \mathbb{R}$.

אם $\operatorname{Im} f = \alpha \cdot \operatorname{Re} f$ אז $\alpha u = v$ ומקושי רימן $\alpha u_x = v_x = -\alpha v_y = -u_y$ ובאופן דומה $\alpha u_y = u_x$. אז

$$\alpha u_x = v_x = \frac{-1}{\alpha}(-\alpha v_x) = \frac{-1}{\alpha}u_x$$

אז $u_x = 0$ או $\alpha = \frac{-1}{\alpha}$ ואז לא יתכן ש־$\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

9.1 פונקציות הרמוניות

הגדרה 9.1 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ אז

$$\triangle h(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

נקרא לפלסיאן. נשים לב כי חייב להתקיים

$$h \in \mathbb{C}^2(G)$$

אם $h \in \mathbb{C}^2(G)$ וגם $\triangle h = 0$ אז h פונקציה הרמונית ב־G.

הערה $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נגדיר

$$\triangle h=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$$

ו־h הרמונית אם $h\in C^2(G)$ וגם $\triangle h=0$.

נסמן ב־$Harm(G)$ את ההרמוניות ב־G.

תרגיל 9.1 תהי $f\in Hol(G)\cap\mathbb{C}^2(G)$ אז u,v הרמוניות.

מה לגבי הכיוון ההפוך?

$$f\in Hol(G)\cap\mathbb{C}^2(G)\implies u,v\in Harm(G)$$

האם לכל פונקציה $u\in Harm(G)$ קיימת פונקציה $v\in Harm(G)$ כך ש־$f=u+iv$ הולומורפית ב־G?

הגדרה 9.2 (צמודה הרמונית) עבור $u\in Harm(G)$ פונקציה ו־$v\in Harm(G)$ כך ש־$u+iv\in Hol(G)$ נקראת **הצמודה ההרמונית** של u ומסומנת לרוב $\tilde{u}$.

האם לכל פונקציה הרמונית קיימת צמודה הרמוינית?

באופן כללי – לא. אם $G=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ונניח $u=\log|z|$ ותרגיל $\log|z|\in Hom(G)$ אבל ראינו שלא ניתן להגדיר ענף של הארגומנט (ולכן של הלוג) בתחום G.

אז מה כן?

דוגמה 9.1 $u(x,y)=x$ אז $v(x,y)=y$ ונקבל $f=Id$, נובע מ:

משהו אחר

$$g(z)=\log|z|+iv(x,y),\mathbb{C}\setminus\{0\}=G_1$$

וגם

$$G_2=\{z\mid \operatorname{Re}z\geq 0\}$$

וגם

$$g_2(z)=\log|z|+i\operatorname{Arg}(z),\operatorname{Re}(g_1-g_2)=0\implies g_1=g_2$$

דוגמה 9.2

$$u(x,y)=x^2-y^2,v(x,y)=2xy,f(x+iy)=x^2-y^2+2ixy=(x+iy)^2=z^2$$

יהי G תחום ונקבע $(x_0,y_0)\in G$ לבחירתנו, נגדיר

$$v(x,y)=v(x,y)-v(x_0,y)+v(x_0,y)-v(x_0,y_0)+v(x_0,y_0)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v}{\partial x}(t,y)\,dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,t)\,dt+v(x_0,y_0)$$

וזה שווה מקושי רימן ל:

$$v(x_0,y_0)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\,dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)\,dt$$

נגדיר אם כן

$$v(x,y)=C-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\,dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)\,dt$$

וזה משפט.

משפט 9.3 *אם G מלבן או עיגול אז ל־$u\in Hom(G)$ יש צמודה הרמונית.*

תרגיל 9.2 הוכיחו $u+iv\in Hol$.

דוגמה 9.3 (מציאת צמוד הרמוני) נגדיר $u(x,y)=x^2-3xy^2$ נעשה בדיקה שמתקיים $\triangle u=0$ ואז נוכל להמשיך.
נראה ש־$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$ וכן $\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy$.

נבחר נקודות $(0,0)$ וינבע

$$v(x,y) = C - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\ dt + \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\ dt = C + \int_0^x 6t\ dt + \int_0^y -3t^2\ dt = C - 3x^2y - y^3$$

ומצאנו צמוד הרמוני.

9.2 העתקות קונפורמיות

הגדרה 9.4 (מסילה במרוכבים) מסילה היא פונקציה רציפה $\gamma : I \to \mathbb{C}$ עבור I קטע סגור (בדרך־כלל $I = [0,1]$).

דוגמה 9.4 מסילה על־ידי ישר בין נקודות, זוהי דוגמה פשוטה שכבר ראינו בקורס עד כה. $\gamma(t) = tz_0 + (1-t)z_1$ עבור $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. מתקבל $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$.

דוגמה 9.5 גם $\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(t)$ עבור $t \in [0, 2\pi]$, המסילה שמייצגת את מעגל היחידה המרוכב.

דוגמה 9.6 $\gamma(y) = \cos(t) - i\sin(t)$ נותן מעגל בכיוון ההפוך.

דוגמה 9.7

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & [0,1] \\ 1 + i(t-1) & [1,2] \\ i + (3-t) & [2,3] \\ (4-t)i & [3,4] \end{cases}$$

ויצרנו מסילה שהיא ריבוע!

נניח $\gamma \in C^1(I)$ אז נגדיר $\dot\gamma(t) = x'(t) + iy'(t)$ ו־$\gamma(t) = x(t) + y(t)$ הנגזרת של המסילה γ.

נאמר ש־t_0 נקודה רגולרית אם $\dot\gamma(t_0) \neq 0$.

10 שיעור 9 — 28.11.2024

10.1 העתקות קונפורמיות

הגדרה 10.1 (עקומה) עקומה היא $\gamma : I \to \mathbb{C}$ עבור I מקטע סגור.

לרוב נניח $\gamma \in C^1$ וכן $\dot{\gamma}(t) = x'(t) + iy'(t)$.
בנוסף נקודה t_0 היא רגולרית אם $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$.

הגדרה 10.2 (זוויות) תהינה γ_1, γ_2 שתי עקומות המקיימות $\mathbb{C} \ni z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$.
הזווית בין γ_1 ל־γ_2 ב־z_0 היא הזווית בין המשיקים לעקומות באותה נקודה.
הזווית בין העקומות מוגדרת להיות

$$\arg(\dot{\gamma}_2(t_2)) - \arg(\dot{\gamma}_1(t_1)) = \alpha$$

הערה הזווית מוגדרת רק בנקודות רגולריות של γ_1, γ_2 ולכן קיים ענף של הארגומנט בסביבת הנקודות.
הערה הגדרה זו יחידה עד כדי $2\pi k$ משום שהוצאנו קרן ישרה שאיננה תלויה ב־k.

הגדרה 10.3 (פונקציה משמרת זווית) נאמר ש־$f : G \to \mathbb{C}$ משמרת זוויות בין עקומות העוברות ב־$z \in G$ ו־$\gamma_j : I_j \to G$ אם

$$\arg(f \dot{\circ} \gamma_2)(t_2) - \arg(f \dot{\circ} \gamma_1)(t_1) = \arg(\dot{\gamma_2})(t_2) - \arg(\dot{\gamma_1})(t_1)$$

משפט 10.4 *1. אם $f \in Hol(G) \cap \mathbb{C}^1(G)$ וגם $f'(z_0) \neq 0$ אז f משמרת זוויות בין עקומות שעוברות ב־z_0.*
2. אם $f \in \mathbb{C}^1(G)$ משמרת זוויות בין עקומות שעוברות ב־z_0 אז $f \in Hol(G)$ ו־$f'(z_0) \neq 0$.

הוכחה. 1. $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = f'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ (תרגיל) ולכן

$$\begin{aligned}\arg(f \dot{\circ} \gamma_2)(t_2) - \arg(f \dot{\circ} \gamma_1)(t_1) &= \arg(f'(\gamma(t_2)) \cdot \dot{\gamma}(t_2)) - \arg(f'(\gamma(t_1)) \cdot \dot{\gamma}(t_1)) \\ &= \arg(f'(\gamma(t_2))) + \arg(\dot{\gamma}_2(t_2)) + 2\pi k_2 - \arg(f'(\gamma(t_1))) + \arg(\dot{\gamma}_1(t_1)) - 2\pi k_1 \\ &= \arg(\dot{\gamma}_2(t_2)) + 2\pi k_2 + \arg(\dot{\gamma}_1(t_1)) - 2\pi k_1 \\ &= \arg(\dot{\gamma}_2(t_2)) + \arg(\dot{\gamma}_1(t_1)) + 2\pi k_3\end{aligned}$$

אבל אנו מזהים זוויות עד כדי $2\pi k$ וכלן קיבלנו שהזוויות זהות.

2. נתחיל במקרה ש־f לינארית, נגדיר $Tz = a \cdot z + b \cdot \overline{z}$.
אם $a + b = 0$ אז $Tz = a(z - \overline{z}) = 2ia\,\mathrm{Im}(z)$ ולכן T מעבירה את $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ לנקודת האפס ולכן לא יכולה לשמר זווית.
לכן $a + b \neq 0$ ונגדיר $\gamma_1(t) = t$ ו־$\gamma_2(t) = \lambda t$ עבור $\lambda = e^{i\theta}$, עבור $\theta \in [0, 2\pi)$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$, בהתאם

$$\arg(\dot{\gamma}_2(0)) - \arg(\dot{\gamma}_1(0)) = \arg(\lambda) - \arg(1) = \mathrm{Arg}(\lambda)$$

ונבחין כי

$$(T \circ \gamma_1)(0) = at + bt = \gamma_1(t)(a + b)$$

ולכן $T\dot{\gamma}_1(t) = a + b \neq 0$ וכן באופן דומה נקבל $(T \dot{\circ} \gamma_2)(t) = \lambda(a + be^{-2i\theta})$. אז

$$\arg(T \dot{\circ} \gamma_2)(0) - \arg(T \dot{\circ} \gamma_1)(0) = \arg(\lambda(a+be^{-2i\theta})) - \arg(a+b) = \arg(\lambda) + \arg(a+be^{-2i\theta}) - \arg(a+b) + 2\pi k \implies \arg(a+be^{-2i\theta}) = \mathrm{ar}$$

□