פתרון מטלה 04 — תורת הקבוצות (80200)

1 ביוני 2024

שאלה 1

יהיו A,B קבוצות כך ש־$|A|=n, |B|=m$ כאשר $n,m\in\mathbb{N}$.

נוכיח כי $|A^B|=n^m$.

הוכחה. נניח ללא הגבלת הכלליות כי $A=[n], B=[m]$. נגדיר פונקציה $f: A^B\to[n^m]$ על־ידי

$$f(g)=\sum_{k=0}^{m}n^k g(k)$$

פונקציה המתבססת על הקונספט של יצוג מספר לפי בסיס n.

נבחין כי $0\le g(k)<n$ ולכן $0\le n^k g(k)<n^{k+1}$.

נוכל להשתמש בטענה זו כדי להראות שפונקציה זו היא חד־חד ערכית. נבחר שתי פונקציות שונות ולכן קיים

$$\max_{k\in[m]} g(k)\neq h(k)$$

ומשימוש במספר זה יחד עם אי־השוויון שמצאנו נקבל כי $\forall g,h\in A^B, g\neq h: f(g)\neq f(h)$.

נבחר מספר $l\in[n^m]$, מספר זה ניתן לייצוג על־ידי טור יחיד מהצורה $\sum_{k=0}^{m}n^k g(k)$ ולכן גם נוכל להגדיר פונקציה $g\in A^B$ כך ש־$f(g)=l$,

ולכן פונקציה זו היא על.

נסיק ש־$|A^B|=n^m$. $\square$

שאלה 2

יהיו $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ עוצמות.

תהינה גם A, B, C קבוצות כך ש־$|A| = \mathfrak{a}, |B| = \mathfrak{b}, |C| = \mathfrak{c}$ ונניח גם ללא הגבלת הכלליות כי הקבוצות זרות.

סעיף א'

נוכיח כי $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $g : A \times (B \cup C) \to (A \times B) \cup (A \times C)$. על־ידי $g(\langle a, b\rangle) = \langle a, b\rangle$.
אם $b \in B$ אז $g(\langle a, b\rangle) \in (A \times B)$ ובאופן דומה אם $c \in C$ אז $g(\langle a, c\rangle) \in (A \times C)$, ובכל מקרה הפונקציה חד־חד ערכית עבור בחירות a, b, c. היא כמובן גם על שכן לכל $\langle a, b\rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$ נראה כי $\langle a, b\rangle$ ומצאנו כי $g(\langle a, b\rangle) = \langle a, b\rangle$ היא גם על, והשוויון מתקיים. □

סעיף ב'

נוכיח כי $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}$.

הוכחה. נגדיר $g : A^C \times B^C \to (A \times B)^C$ על־ידי

$$\forall c \in C : g(\langle f_1, f_2\rangle)(c) = \langle f_1(c), f_2(c)\rangle$$

זוהי פונקציה חד־חד ערכית באופן ישיר מהשמת הערכים, ולכל $h : C \to (A \times B)$ נוכל ליצור פונקציות $\langle f_1, f_2\rangle \in (A^C, B^C)$ כך ש־$g(f_1, f_2) = h$ ולכן g גם על.
קיבלנו כי השוויון מתקיים. □

סעיף ג'

נוכיח כי $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $g : A^B \times A^C \to A^{B \cup C}$ על־ידי

$$g(\langle h_b, h_c\rangle)(x) = \begin{cases} h_b(x) & x \in B \\ h_c(x) & x \in C \end{cases}$$

נשים לב כי $B \cap C = \emptyset$ ולכן פונקציה זו מוגדרת.
נשים לב שניתן להגדיר עבור כל פונקציה $B \cup C \to A$ שתי פונקציות ש־g תרכיב לפונקציה המקורית, ולכן g על.
נראה גם שמתקיים

$$\begin{aligned} & \forall u, v \in A^B \times A^C : g(u) = g(v) \\ \iff & \forall x \in B \cup C : g(u)(x) = g(v)(x) \\ \iff & \forall b \in B, c \in C : g(u)(b) = u_b(b) = v_b(b) = g(v)(b), g(u)(c) = u_b(c) = v_b(c) = g(v)(c) \\ \iff & u = v \end{aligned}$$

ולכן הפונקציה גם חד־חד ערכית ונקבל כי השוויון נכון. □

סעיף ד'

נוכיח כי $\left(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\right)^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}}$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $g : \left(A^B\right)^C \to A^{B\times C}$ על־ידי

$$g(f(c)(b)) = (g(f))(\langle b, c\rangle)$$

משיקולים דומים לסעיפים הקודמים נוכל לראות כי פונקציה זו חד־חד ערכית ועל. $\square$

שאלה 3

תהינה $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}^*$ עוצמות.

סעיף א'

נוכיח שאם $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}^*$ וגם $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}^*$ אז $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}^*$.

הוכחה. תהינה A, A^*, B, B^* קבוצות בעלות העוצמות הנתונות בהתאמה, ונניח ללא הגבלת הכלליות כי הקבוצות זרות.
נתון כי $f : A \to A^*, g : B \to B^*$ קיימות והן חד־חד ערכיות. נגדיר $h : A \cup B \to A^* \cup B^*$ על־ידי

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

מהחד־חד ערכיות ובדומה להוכחת סעיף 1ג' נוכל להסיק כי h היא חד־חד ערכית ולכן נסיק שמתקיים $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}^*$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם $\mathfrak{a} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{a}$ אז $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

הוכחה. אילו נניח בשלילה ש־$\mathfrak{a} < \aleph_0$ אז נקבל $\mathfrak{a} \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ בסתירה לטענה ולכן $\mathfrak{a} \geq \aleph_0$.
אם $\mathfrak{a} = \aleph_0$ אז הטענה נכונה על־פי הוכחת $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ והטענה נכונה, ולכן נניח $\mathfrak{a} > \aleph_0$.
מההוכחה ש־$|[0,1]| = |[1,2]|$ נוכל להסיק שמתקיים $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ עבור $\mathfrak{a} \geq \aleph$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שאם $\mathfrak{a} \geq 2$ וגם $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ אז $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$.

הוכחה. אילו נניח ש־$\mathfrak{a}$ סופית אז נקבל ש־$\mathfrak{a} = 1$ בסתירה לטענה ולכן נניח $\mathfrak{a} \geq \aleph_0$.
על־ידי בחינת הפונקציות $2^{\mathfrak{a}}$ והרחבת טווחן נקבל $2^{\mathfrak{a}} \leq \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$.
תהי A קבוצה כך ש־$\mathfrak{a} = |A|$, בתרגול ראינו כי $A^A \subseteq \mathcal{P}(A)$ ומכאן נסיק $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} \leq 2^{\mathfrak{a}}$.
ממשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נסיק ש־$\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}}$. $\square$

שאלה 4

תהי $\mathfrak{a}$ עוצמה, נוכיח ש־$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + 1$ אם ורק אם $\aleph_0 \le \mathfrak{a}$.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + 1$ ונניח בשלילה כי $\mathfrak{a} < \aleph_0$, דהינו קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$\mathfrak{a} = n$.
במטלה קודמת הראינו כי לא קיימת פונקציה חד־חד ערכית מ־$[n+1]$ ל־$[n]$ ולכן גם נסיק $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a} + 1$ בסתירה להנחה, ולכן $\aleph_0 \le \mathfrak{a}$.

כיוון שני: נניח ש־$\aleph_0 \le \mathfrak{a}$. למעשה הוכחנו כבר את הטענה הן עבור $|\mathbb{N}|$ ובתרגיל 2 גם עבור $|[0,1]|$ ולכן היא נכונה עבור $\aleph_0, \aleph$.
לשאר המקרים נשתמש בעובדה ש־$\mathfrak{a} \le \mathfrak{a} + 1$ ובסעיף 3ב' כדי להראות ש־$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$ ולכן בפרט $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + 1$. $\square$