פתרון מטלה 02 — תורת ההסתברות (1), 80420

10 בנובמבר 2024

שאלה 1

בכל בוקר ילד מקבל מהוריו סכום קבוע לקנות חטיף. בכל חטיף נמצאות אחת מ־22 האותיות של האלפבית העברי בהסתברות שווה, ועל הילד להרכיב את המילה "קטר".
נגדיר את האותיות לפי מספרים עד 22, ונגדיר שרירותית את האותיות "קטר" להיות 1 עד 3.

סעיף א'

עבור $n \in \mathbb{N}$ נחשב את ההסתברות שביום ה־n לילד לא הייתה האות a עבור $a \in [3]$.
פתרון לכל יום $\Omega_d = [22]$ עם פונקציית הסתברות אחידה $p(n) = \frac{1}{22}$, בהתאם לאחר n ימים נקבל $\Omega = \Omega_d^n$, ואנו מחפשים את המאורע $A = \{\omega \in \Omega \mid a \notin \omega\}$. נקבל $|A| = 21^n$, באופן דומה נקבל גם $|\Omega| = 22^n$, לכן
$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{21^n}{22^n}$$

סעיף ב'

נחשב את ההסתברות שלאחר n ימים הילד עדיין לא הצליח להרכיב את המילה הרצויה על־ידי שימוש בנוסחת הכלה והדחה.
פתרון נגדיר A, B, C המאורע שלילד אין את האותיות הראשונה השנייה והשלישית לאחר n ימים, מהכלה והפרדה נקבל
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$
נבחין כי אנו מחפשים באמת את אחד מהמצבים בהם לפחות אחת מן האותיות חסרה, זהו אכן האיחוד של המאורעות, לעומת זאת מטעמי הסתברות אחידה נוכל כי
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$
מצאנו כי $\mathbb{P}(A) = \frac{21^n}{22^n}$, ובאופן דומה גם נוכל להסיק $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{20^n}{22^n}$ ואף $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{19^n}{22^n}$ ולכן
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 3\frac{21^n}{22^n} - 3\frac{20^n}{22^n} + \frac{19^n}{22^n} = \frac{3 \cdot 21^n - 3 \cdot 20^n + 19^n}{22^n}$$

שאלה 2

בכד $n \geq 2$ כדורים ומתוכם אחד בצבע לבן והאחרים שחורים, מוציאים ללא החזרה שני כדורים ובוחנים את צבעיהם.

סעיף א'

נגדיר מרחב הסתברות מתאים.

פתרון נגדיר מרחב הסתברות דו־שלבי, נתחיל בהגדרת $\Omega_1 = \{B, W\}$, נתון כי $p(B) = \frac{n-1}{n}$ וכי $p(W) = \frac{1}{n}$.

נעבור לניסוי השני, עבורו מתקיים $\Omega_2 = \Omega_1$, ונגדיר את פונקציית ההסתברות הנקודתית p_W, p_B על־ידי

$$p_W(W) = 0, p_W(B) = 1, p_B(W) = \frac{1}{n-1}, p_B(B) = \frac{n-2}{n-1}$$

בהתאם להגדרת הניסוי, לבסוף נגדיר את מרחב הניסוי $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_{1,2}, \mathbb{P}_q)$ עבור $q(a,b) = p(a) \cdot p_a(b)$.

סעיף ב'

נתון כי ההסתברות להוציא את הכדור הלבן כפולה מההסתברות שלא להוציא אותו, נמצא את n.

פתרון נבחין כי ההסתברות לא להוציא את הכדור הלבן היא ההסתברות להוציא שני כדורים שחורים $= q(B,B) = p(B) \cdot p_B(B) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} = \frac{n-2}{n}$.

עוד נבחין כי ההסתברות להוציא כדור לבן היא $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + 0 = q(W,B) + q(B,W) + q(W,W) = \mathbb{P}(\{WB, BW, WW\})$.

בהתאם נתון גם כי $\frac{2}{n} = 2\frac{n-2}{n}$, ולכן נובע $n = 3$.

שאלה 3

בוחרים באקראי באופן אחיד אחת מהקוביות D_4, D_6, D_8 מטילים אותה ומדווחים איזו קוביה נבחרה ומה תוצאת ההטלה, באופן