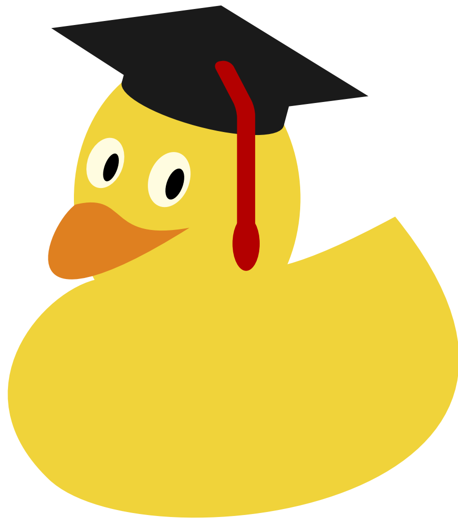
פתרון מטלה 10 — תורת הקבוצות (80200)

26 ביולי 2024



שאלה 1

נוכיח שלכל סודר α מתקיים $\alpha \le \omega_\alpha$.

הוכחה. נתחיל בבדיקת הטבעיים, מהגדרה נקבל כי $n \in \mathbb{N} = \omega \in \omega_n$ ולכן $n \le \omega_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
עבור $\omega \le \alpha \le \omega^+$ נקבל $\omega^+ \le \omega_\alpha$ כמובן. נוכל כמובן באופן דומה לחסום כל סודר α במונים ולקבל שהמונה ω_α גדול מהם על־פי הגדרה. $\square$

שאלה 2

נוכיח שלכל סודר α קיים סודר $\alpha \leq \beta$ כך ש־$\beta = \omega_\beta$.

הוכחה. נגדיר מחלקת פונקציה $\xi \to \omega_\xi$ ולכן ממשפט הרקורסיה עבור α נקבל כי קיימת הקבוצה $\delta = \{\alpha, \omega_\alpha, \omega_{\omega_\alpha}, \dots\}$.
מההגדרה של סודר גבולי נקבל ש־$\delta = \bigcup_{\beta\in\delta} \beta = \omega_\delta$. □

שאלה 3

נוכיח שמחלקת המונים היא מחלקה נאותה.

הוכחה. נניח בשלילה כי מחלקת המונים היא קבוצה ונסמנה Ω, ולכן ממשפט הסדר הטוב נסיק כי קיים מונה יחיד ω כך ש־$|\Omega| = |\omega|$.
ידוע כי Ω קבוצת סודרים ולכן $A = \bigcup \Omega$ הוא סודר, ו־$\omega \in A$ ולכן $\omega \subseteq A$ ובהתאם $|\omega| \leq |A|$, אבל $\omega^+ \in \Omega$ ולכן גם $\omega^+ \subseteq A$ ונסיק $|\omega^+| = |A|$. מצאנו אם כן ש־$|A| \neq |\omega|$ וזו סתירה, לכן מחלקת המונים היא לא קבוצה. $\square$

שאלה 5

נוכיח שהתנאים הבאים שקולים

1. אקסיומת הבחירה: לכל קבוצה A אם $\emptyset \notin A$ אז קיימת $f : A \to \bigcup A$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $f(a) \in a$.
2. אקסיומת הבחירה לקבוצות חזקה: לכל קבוצה A קיימת $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ כך שלכל $B \subseteq A$ מתקיים $f(B) \in B$.
3. לכל יחס שקילות יש קבוצת נציגים: אם $E \subseteq X \times X$ יחס שקילות, אז קיימת $Y \subseteq X$ כך שלכל $x \in X$ קיים ויחיד $y \in Y$ כך ש־$\langle y, x\rangle \in E$.
4. לכל פונקציה יש חתך: תהי $f : A \to B$ כאשר $B = \operatorname{rng} f$, אז קיימת $g : B \to A$ כך שלכל $b \in B$ מתקיים $f(g(b)) = b$.

הוכחה. $2 \to 1$: נניח את אקסיומת הבחירה. תהי קבוצה A כך ש־$\emptyset \notin A$ ותהי פונקציית בחירה $f : A \to \bigcup A$. עתה נגדיר ש־$A = \mathcal{P}(C)$ עבור קבוצה C כלשהי, ולכן $C = \bigcup A$. נקבל אם כן כי לכל $B \subseteq C \iff B \in A$ מתקיים $f(B) \in B$.

$3 \to 2$: נניח את אקסיומת הבחירה לקבוצות חזקה. יהי $E \subseteq X \times X$ יחס שקילות, ולכן כלל מחלקות השקילות מוכלות בקבוצה $\mathcal{P}(X)$ וידוע כי לא יכולה להיות מחלקת שקילות ריקה, ולכן מחלקות השקילות מוכלות ב־$\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. לכן מאקסיומת הבחירה לקבוצות חזקה קיימת פונקציה $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$.

תהי מחלקת שקילות $B \subseteq A$, אז כמובן $f(B) \in B$. אנו יודעים כי צמצום של פונקציה הוא פונקציה ולכן נצמצם את f לחול רק על מחלקות השקילות, ונבחין כי $Y = \operatorname{rng} f$ מקיימת את התנאי שרצינו להוכיח.

$4 \to 3$: נניח כי לכל יחס שקילות יש קבוצת נציגים ונוכיח שלכל פונקציה יש חתך.

תהי $f : A \to B$, ונגדיר $C = A \cup B$, ואת יחס השקילות $E \subseteq C \times C$ על־ידי $f(a) = b \vee f(b) = a \iff \langle a, b\rangle \in C$. לכן קיימת $Y \subseteq C$ קבוצת נציגים, ומיחידות המקור של פונקציות נסיק כי אם D מחלקת שקילות, אז $\forall d, d' \in D, f(d) = f(d')$, ולכן גם קיים ויחיד $y \in Y$ כך ש־$f(y) = f(d)$.

עתה נגדיר פונקציה חדשה $g : B \to A$ כך ש־$g(b)$ הוא הנציג מ־Y של מחלקת השקילות שהיא המקורות של b. לכן מתקיים $f(g(b)) = b$ לכל $b \in \operatorname{rng} f = B$.

$1 \to 4$: נניח כי לכל פונקציה יש חתך ונוכיח את אקסיומת הבחירה.

תהי A קבוצה ותהי $f : \bigcup A \to A$ פונקציה כלשהי על (נוכל לבנות על־ידי מיפוי ערכים לקבוצות המקור שלהם). לכן יש לפונקציה חתך $g : A \to \bigcup A$ כך ש־$f(g(b)) = b$ לכל $b \in A$, וזוהי פונקציית בחירה. $\square$