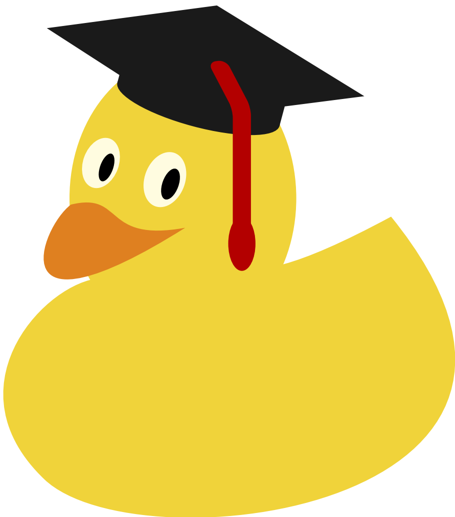
פתרון מטלה 02 — מבוא ללוגיקה, 80423

8 בנובמבר 2024



שאלה 1

תהי שפה $L = \{P, Q, R, S\}$ ויהי $\varphi = (\neg((P \to (\neg Q)) \wedge ((\neg R) \vee S)))$.

נכתוב עץ בינארי סטנדרטי מיושר לשמאל (T, f) ל־φ, ונחשב את הפונקציה המתאימה ψ.

פתרון נגדיר

$$\begin{aligned} f = \{&(\langle\rangle, \neg), (\langle 0,0,1\rangle, \neg), (\langle 0,1,0\rangle, \neg), (\langle 0\rangle, \wedge), (\langle 0,0\rangle, \to), \\ &(\langle 0,1\rangle, \vee), (\langle 0,0,0\rangle, P), (\langle 0,0,1,0\rangle, Q), (\langle 0,1,0,0\rangle, R), (\langle 0,1,1\rangle, S)\} \end{aligned}$$

עוד נגדיר $T = (\mathrm{dom} f, \preceq)$ כאשר $\preceq$ יחס הרישא חד־מקומי, ובהתאם (T, f) עץ היצירה של φ.

נגדיר $\psi : T \to \mathrm{sent}_L$, נקבל

$$\begin{aligned} \psi = \{&(\langle\rangle, (\neg((P \to (\neg Q)) \wedge ((\neg R) \vee S)))), \\ &(\langle 0\rangle, ((P \to (\neg Q)) \wedge ((\neg R) \vee S))), \\ &(\langle 0,0\rangle, (P \to (\neg Q))), \\ &(\langle 0,0,0\rangle, P), \\ &(\langle 0,0,1\rangle, (\neg Q)), \\ &(\langle 0,0,1,0\rangle, Q), \\ &(\langle 0,1\rangle, ((\neg R) \vee S)), \\ &(\langle 0,1,0\rangle, (\neg R)), \\ &(\langle 0,1,0,0\rangle, R), \\ &(\langle 0,1,1\rangle, S)\} \end{aligned}$$

שאלה 2

תהי L שפה, נוכיח שהביטוי $p \in \exp_L$ הוא פסוק אם ורק אם הוא פסוק מוגדר קווית.

הוכחה. נוכיח ש־$sent_L^+$ תת־קבוצה מינימלית של $\exp_L$ הסגורה תחת $F_\neg, F_\square$ לכל $\square \in B$.
נניח כי $\varphi \in sent_L^+$ ונגדיר $S \subseteq \exp_L$ הקבוצה המינימלית עליה דיברנו, עוד נניח כי $\varphi \notin L$, דהינו הקבוצה $sent_L^+$ לא מינימלית בגללה. מהגדרת $sent_L^+$ קיימת סדרת יצירה ל־φ, נגדירה כ־$(\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi)$. עתה נוכיח באינדוקציה על אורך הרשימה כי $\varphi \in S$. כבסיס נניח שאורך הרשימה 1, לכן $\varphi_0 = \varphi \in S$ וסיימנו. נניח עתה כי אורך הרשימה הוא n, ועוד נניח כי לכל $0 \le k < n$ מתקיים $\varphi_k \in S$, נוכיח כי גם $\varphi_n \in S$. אילו $\varphi_n \in L$ אז סיימנו, אילו מתקיים $\varphi_n = (\neg\varphi_k)$ עבור $0 \le k < n$ אז נקבל ש־$\varphi_n = F_\neg(\varphi_k)$ אבל $\varphi_k \in S$ ולכן גם $F_\neg(\varphi_k)$ ולכן גם $\varphi \in S$. נניח אם כן שמתקיים $\varphi = (\varphi_i \square \varphi_j)$ עבור $0 \le i, j < n$, נקבל אם כן $\varphi_i, \varphi_j \in S$, ובהתאם $F_\square(\varphi_i, \varphi_j) \in S$, וקיבלנו כי בכל מקרה $\varphi \in S$. השלמנו את צעד האינדוקציה ולכן קיבלנו שמתקיים $sent_L^+ \subseteq S \subseteq sent_L^+$ ולכן $S = sent_L^+$ בלבד.

נוכיח עתה גם כי $S \subseteq sent_L$, נגדיר φ מחדש על־ידי $\varphi \in sent_L$, לכן ל־φ עץ יצירה (T, f). נוכיח באינדוקציה על גובה העץ כי $\varphi \in S$, כבסיס נניח כי גובה העץ 1, לכן אין עוקבים ל־$\langle\rangle$, אז נובע כי $\varphi \in L$ ולכן גם $\varphi \in S$. נניח כי הטענה נכונה עבור גובה עץ $0 \le k < n$ ונניח כי גובה T הוא n. לא יתכן כי ל־$\langle\rangle$ אין עוקבים, לכן או שיש לו עוקב או שיש לו שניים. אילו יש לו עוקב יחיד, אז מתקיים $\varphi = (\neg\psi_{\langle 0\rangle})$, כאשר ל־$\psi_{\langle 0\rangle}$ עץ יצירה באורך $n - 1$, לכן הוא מוכל ב־S ובהתאם $\varphi \in S$. נניח אם כן שיש שני עוקבים ל־$\langle\rangle$, נסמנם ψ_0, ψ_1, ונקבל כי אורך עץ היצירה של שניהם $n - 1$ ולכן גם $\psi_0, \psi_1 \in S$. נקבל כי גם $F_{f(\langle\rangle)}(\psi_0, \psi_1) \in S$, אבל $\varphi = F_{f(\langle\rangle)}(\psi_1, \psi_2)$, לכן $\varphi \in S$ והשלמנו את מהלך האינדוקציה. נסיק אם כן $S \subseteq sent_L \subseteq S$ ולכן בהכרח $S = sent_L$.

נסיק $sent_L = S = sent_L^+$, דהינו $sent_L = sent_L^+$. $\square$

שאלה 3

תהי L שפה לתחשיב פסוקים, X קבוצה, $h : L \to X$ פונקציה, $\epsilon_\neg : X \to X$ פונקציה ו־$\epsilon_\square : X^2 \to X$ פונקציה לכל $\square \in B$.

סעיף ב'

נוכיח כי קיימת פונקציה $\bar{h} : sent_L \to X$ כך ש־$\forall\varphi \in L, \bar{h}(\varphi) = h(\varphi)$ וכן $\forall\varphi = (\neg\psi), \bar{h}(\varphi) = \epsilon_\neg(\bar{h}(\psi))$ ועבור כל $\square \in B$ מתקיים $\varphi = (\psi_0 \square \psi_1) \implies \bar{h}(\varphi) = \epsilon_\square(\bar{h}(\psi_0), \bar{h}(\psi_1))$.

הוכחה. יהי $\psi \in sent_L$, לכן קיים עץ יצירה (T_ψ, f_ψ) עבורו.
ניזכר בשאלה 3 ממטלה 1 ונגדיר את $\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)} : T_\psi \to X$ הפונקציה היחידה המקיימת לכל עלה בעץ היצירה $\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t) = h(f(t))$, לכל $t \in T_\psi$ בעל עוקב יחיד $\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t) = \epsilon_\neg(\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t \frown \langle 0\rangle))$ וכן לכל $t \in T_\psi$ בעל שני עוקבים $\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t) = \epsilon_{f(t)}(\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t \frown \langle 0\rangle), \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t \frown \langle 1\rangle))$.
נגדיר עתה $\bar{h}(\psi) = \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle\rangle)$ ונבדוק שהתנאים אכן מתקיימים.
תחילה נבחין כי ממסקנה מהכיתה נובע כי עץ היצירה לכל פסוק הוא יחיד, לכן הגדרה זו יחד עם יחידות g היא תקפה, ונוכל לדון לא בתוקפה אלא בקיום התכונות הרצויות בלבד.
נניח כי $\psi \in L^1$, אז מתקיים $\bar{h}(\psi) = \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle\rangle) = h(f_\psi(\langle\rangle)) = h(\psi)$.
עתה נשתמש בטענה זו כבסיס למהלך אינדוקטיבי על מבנה הפסוק, נניח כי הטענה נכונה עבור φ ועוד נניח שמתקיים $\psi = (\neg\varphi)$, אז נקבל $\bar{h}(\psi) = \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle\rangle) = \epsilon_\neg(\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle 0\rangle)) = \epsilon_\neg(\bar{h}(\varphi))$, נבחין כי השתמשנו פה פעמיים בהגדרה שסיפקנו ל־$\bar{h}$. נניח אם כן שמתקיים $\psi = (\varphi_0 \square \varphi_1)$ עבור $\square \in B$, ואז $\bar{h}(\psi) = \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle\rangle) = \epsilon_{f_\psi(\langle\rangle)}(\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle 0\rangle), \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle 1\rangle)) = \epsilon_\square(\bar{h}(\varphi_0), \bar{h}(\varphi_1))$, ושוב קיבלנו כי התכונה של $\bar{h}$ נשמרת, והשלמנו את המהלך האינדוקטיבי.
בהתאם נוכל להסיק כי $\bar{h}$ לא רק מוגדרת באופן חזק, אלא גם מקיימת את שלושת התנאים. $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי הפונקציה $\bar{h}$ מוגדרת ביחידות.

הוכחה. תהינה $\bar{h}, \bar{h}'$ שתי פונקציות המקיימות את התנאים.
יהי $\psi \in L$, מהתכונות שמצאנו מתקיים $\bar{h}(\psi) = h(\psi)$ אך גם $\bar{h}'(\psi) = h(\psi)$ ולכן בפרט $\bar{h}(\psi) = \bar{h}'(\psi)$.
גם הפעם נשתמש בטענה זו כבסיס האינדוקציה על מבנה הפסוק, ולכן נניח עתה את מהלך האינדוקציה, דהינו יהי $\varphi \in sent_L$ כך ש־$\bar{h}(\varphi) = \bar{h}'(\varphi)$, ויהי $\psi = (\neg\varphi)$. לכן $\bar{h}(\psi) = \epsilon_\neg(\bar{h}(\varphi)) = \epsilon_\neg(\bar{h}'(\varphi)) = \bar{h}'(\psi)$ ושוב הגענו לשוויון. נניח אם כך $\varphi_0, \varphi_1 \in sent_L$ מקיימים את הטענה, ונגדיר $\psi = (\varphi_0 \square \varphi_1)$ עבור $\square \in B$. אז $\bar{h}(\psi) = \epsilon_\square(\bar{h}(\varphi_0), \bar{h}(\varphi_1)) = \epsilon_\square(\bar{h}'(\varphi_0), \bar{h}'(\varphi_1)) = \bar{h}'(\psi)$. השלמנו אם כך את מהלך האינדוקציה וקיבלנו ש־$\bar{h}$ היא אכן יחידה. $\square$