פתרון מטלה 03 — פונקציות מרוכבות, 80519

22 בנובמבר 2024

שאלה 1

תהי $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ קבוצה קומפקטית, ונניח כי קיים לוגריתם רציף $g : K \to \mathbb{C}$.

סעיף א'

נגדיר $\epsilon = \inf\{|g(z_1) - g(z_2) - 2\pi il| \mid l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, z_1, z_2 \in K\}$,
ונוכיח כי $\epsilon > 0$.

הוכחה. נבחין כי $\epsilon^2 = (\log|z_1| - \log|z_2|)^2 + (\operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2) - 2\pi l)^2$ ולכן אם נניח בשלילה ש־$\epsilon = 0$ אז קיימת סדרה של מרוכבים כך שערכם המוחלט מתכנס והארגומנט שלהם שואף למרחק $2\pi k$.
עוד נתון כי K קומפקטית ולכן סגורה וחסומה, לכן היא מכילה את כל הנקודות הגבוליות שלה ובהתאם הסדרות שמקיימות את $\epsilon = 0$ מתכנסות למספרים $z_1, z_2 \in K$.
אילו $|\arg(z_1) - \arg(z_2)| \geq 2\pi$ אז נקבל מהגדרת הארגומנט סתירה לרציפות של הענף של האגומנט שתומך ב־g, ולכן מתקבל שהארגומנטים מתכנסים, דהינו $z_1 = z_2$, אך אז נקבל $\epsilon \geq 2\pi$, וזו סתירה. □

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $z_0 \in K$ קיים $r > 0$ ולוגריתם אנליטי $h : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ כך ש־$h(z_0) = g(z_0)$ ובנוסף $|h(z_1) - h(z_2)| < \frac{\epsilon}{2}$ לכל $z_1, z_2 \in B(z_0, r)$.

הוכחה. תחילה נגדיר $0 < r < 2\pi$ ולכן מהבנייה של לוגריתם אנליטי שראינו בתרגול נובע שקיים לוגריתם h, ואנו יודעים שהוא נקבע על־ידי נקודה יחידה (טענה מהתרגול), לכן נגדיר $h(z_0) = g(z_0)$.
עתה, קיבלנו כי ϵ של הסעיף הקודם הוא ערך ממשי, וכך גם $\frac{\epsilon}{3}$, נגדיר

$$\sup_{z_1, z_2 \in \overline{B}(z_0, r)} |h(z_1) - h(z_2)| = \rho$$

ולכן נוכל לקבוע את r כך ש־ρ יקטן בהתאם, ומטופולוגיה של כדורים סגורים במרחב אוקלידי נוכל להסיק כי קיים r כך ש־$\rho < \frac{\epsilon}{3}$. □

סעיף ג'

נוכיח כי קיימת קבוצה פתוחה $K \subseteq U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ולוגריתם אנליטי $l : U \to \mathbb{C}$ כך ש־$l|_K = g$.

הוכחה. נבחר ϵ־כיסוי פתוח של K שאנו יודעים שקיים, ונקבל מהסעיף הקודם שקיימת h רציפה במידה שווה על K עבור הכיסוי הזה, ונגדיר $\tilde{h}$ על־ידי אוסף פונקציות זה.
מהרציפות נסיק כי קיימת פונקציה רציפה $\bar{h}$ כך שמתקיים $\bar{h} : U \to \mathbb{C}$ אשר היא לוגריתם אנליטי וכך ש־U פתוחה ו־$K \subseteq U$ ומקיימת את הטענה. □

שאלה 2

נוכיח בכל סעיף שניתן להגדיר לוגריתם אנליטי לפונקציה $f(z) = \cos(z) - 2$ בתחומים הנתונים.

סעיף א'

עבור $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Re}(z) < 2\pi\}$

הוכחה. נגדיר $l_1(z) = \text{Log}\,|f(z)| + \text{Arg}(f(z)) + \pi i$, הארגומנט מקיים את שתי תכונות הארגומנט כפי שראינו בתרגול ובהתאם זהו לוגריתם אנליטי תקין. עוד נבחין כי

$$f(z) = 0 \iff \cos z = 2 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 4 \iff e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0 \iff e^{iz} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \iff z = -i\log(2 \pm \sqrt{3})$$

ולכן $0 \notin f(U_1)$ וההגדרה שנתנו רציפה, ובהתאם l_1 אכן לוגריתם אנליטי של f. $\square$

סעיף ב'

עבור התחום $U_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < -3\}$.

הוכחה. גם הפעם נבחין כי $0 \notin f(U_2)$ ולכן נגדיר l_2 לוגריתם על U_2 של f שמתחייב שקיים, וכמובן נוכל לקבוע אותו ביחידות על ידי הצבה $e^{l_2(-4i)} = \cos(-4i) - 2 = \frac{e^4 + e^{-4}}{2} - 2$ ולכן

$$l_2(-4i) = \log(\frac{e^4 + e^{-4}}{2} - 2)$$

ולכן הוא קיים ונקבע ביחידות. $\square$

שאלה 3

נמצא תחום $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ וענף של הארגומנט $\arg : G \to \mathbb{R}$ כך שיתקיים $\arg(G) = [0, \infty)$.

פתרון נגדיר $G = \mathbb{C} \setminus \{te^{t\theta} \mid t \geq 0\}$.

בקבוצה זו נגדיר גם $\arg(1) = 0$ ולכן נובע $\arg$ כך שהוא רציף החל מ־0, זאת שכן שני ערכים z_1, z_2 כך ש־$\operatorname{Arg}(z_1) = \operatorname{Arg}(z_2), |z_1| = |z_2| + 2\pi k$ נמצאים משני צידי הספירלה, ולכן התנאי מתקיים.

נבחין כי זו ההוכחה שראינו בתרגול, זוהי הוכחה גאומטרית.

שאלה 4

סעיף א'

תהינה $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ נקודות שונות, ונוכיח כי קייצת העתקת מביוס יחידה $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ המקיימת

$$h(z_1) = 0, \qquad h(z_2) = 1, \qquad h(z_3) = \infty$$

הוכחה. נניח את ההנחה ונסיק שמתקיים

$$az_1 + b = 0, \qquad cz_3 + d = 0, \qquad az_2 + b = cz_2 + d$$

נגדיר $a = k$ באופן שרירותי ולכן

$$b = -kz_1, \qquad cz_2 + d = kz_2 - kz_1$$

נחסר מהשוויון השני את אחד השוויונות הראשונים ואז

$$cz_2 + d - cz_3 - d = c(z_2 - z_3) = -k(-z_2 + z_1) - 0$$

ולכן

$$c = -k\frac{-z_2 + z_1}{z_2 - z_3}$$

ולבסוף

$$d = -cz_3 = kz_3\frac{-z_2 + z_1}{z_2 - z_3}$$

אז ההעתקה מקיימת

$$h(z) = \frac{kz - kz_1}{-k\frac{-z_2+z_1}{z_2-z_3}z + kz_3\frac{-z_2+z_1}{z_2-z_3}} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

ומצאנו ביטוי שקול ל־h התלוי ב־z_1, z_2, z_3 בלבד, לכן כל ביטוי של h שקול לביטוי זה ונקבע ביחידות על־ידי ערכים אלה. □

סעיף ב'

נוכיח כי העתקות מביוס מעבירות מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים על הספירה של רימן.

הוכחה. אם $mz + n = 0$ ונבודק $mh(z) + n = 0$, נקבל $m(az + b) + n(cz + d) = 0$ וזה אכן מעגל מוכלל בספירת רימן.
בנוסף $m = {(z - n)}^2$ מעגל ונקבל $(az + b - n(cz + d))^2 = n(cz + d) \iff (h(z) - n)^2 = m$ וזו משוואת מעגל מוכלל בספירה של רימן (מעבר כזה נעשה בהרצאה). □

סעיף ג'

נמצא העתקת מביוס המעבירה את חצי המישור העליון $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ לדיסק היחידה $B(0, 1)$.
פתרון בכיתה נטענה הטענה שההעתקה $h(z) = i\frac{1-z}{1+z}$ מבצעת את המיפוי ההפוך בדיוק מזה שאנו נדרשים למצוא.
אנו גם יודעים כי העתקה זו נקבעת על־ידי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}$$

זו מטריצה הפיכה ומהטענה שהוצגה אף היא בכיתה $h_{A^{-1}} = {(h_A)}^{-1}$ ולכן נחשב ונמצא כי

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

ולכן ההעתקה שמקיימת את הדרישה היא

$$h_{A^{-1}}(z) = \frac{z - i}{-z - i} = \frac{i - z}{z + i}$$

סעיף ד'

נמצא פונקציה אנליטית המעבירה את חצי דיסק היחידה העליון $B(0,1) \cap H$ לדיסק היחידה $B(0,1)$.

פתרון תוצאת הסעיף הקודם תקפה גם פה, שכן h שמצאנו אנליטית.

שאלה 5

נגדיר את הענף הראשי של arctan על־ידי

$$\arctan(z) = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}(\frac{1+iz}{1-iz})$$

סעיף א'

נמצא את תחום ההגדרה המקסימלי שבו arctan אנליטית.

פתרון נבחין כי $\frac{1}{2i}$ קבוע ולא משפיע על הגזירות.

נעבור לייצוג הפונקציות על־ידי פונקציה דו־משתנית (לא כולל החלק שלא משפיע על הגזירות):

$$\arctan(z) = -\frac{i}{2}(\log|\frac{1+iz}{1-iz}| + i\operatorname{Arg}(\frac{1+iz}{1-iz})) = -\frac{1}{2}(i\log|1+iz| - i\log|1-iz| - \operatorname{Arg}(\frac{1+iz}{1-iz}))$$