

פתרון מטלה 1 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (2-80132)

6 במאי 2024



שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$ גזירה בנקודה $x_0 = 3$.

על-פי הגדרת הנגזרת הגבול הבא צריך להתקיים:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((3+h)^3 + 5(3+h)^2 + 1 - 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 1) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((3+h)^3 + 5(3+h)^2 - 62) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (3^3 + 3 \cdot 3^2 h + 3 \cdot 3 h^2 + h^3 + 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 6h + 5h^2 - 62) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (27h + 9h^2 + h^3 + 30h + 5h^2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 57 + 14h + h^2 \\ &= 57 + 14 \cdot 0 + 0^2 = 57 \end{aligned}$$

מצאנו כי הגבול מתקיים ולכן הפונקציה גזירה בנקודה ואף מתקיים $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = 57$.

סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x}$ גזירה בנקודה $x_0 = 2$.

הוכחה. נגזרת מוגדרת בנקודה אם ורק אם הגבול הבא מתקיים:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sqrt[3]{2+h} - \sqrt[3]{2} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sqrt[3]{2+h} - \sqrt[3]{2} \right) \frac{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{2+h-2}{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(2+2)^2} + \sqrt[3]{2(2+2)} + \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \end{aligned}$$

מש"ל

מצאנו כי הגבול מתקיים ולכן נובע כי $f'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

סעיף ג'

נראה את הטענה כי הפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor$ גזירה בכל נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ על-ידי דוגמה נגדית: נגדיר $x_0 \in \mathbb{Z}$, ידוע כי הפונקציה f איננה רציפה בנקודות x_0 , ולכן עומדת בסתירה לטענה כי הן גזירות בנקודה זו.

שאלה 2

תהי f פונקציה המוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

סעיף א'

נראה כי הפונקציה גזירה מימין בנקודה $x_0 = 0$:

לכל סביבה ימנית של 0 ב- f מתקיים $f(x) = -x$, ואנו כמובן יודעים כי ביטוי זה גזיר וערך נגזרתו הוא -1 , לכן נסיק כי גם f גזירה מימין בנקודה.

סעיף ב'

נחשב את הפונקציה $f \circ f$:

עבור $x < 0$ נקבל $f(x) = 1$ ובהתאם $f(1) = -1$ ולכן $(f \circ f)(x) = -1$.
עבור $0 \leq x$ נקבל $f(x) = -x$, ובהתאם $f(-x) = 1$ ולכן $(f \circ f)(x) = 1$. נראה כי מתקיים

$$f \circ f = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \end{cases}$$

סעיף ג'

תהי פונקציה g אשר מוגדרת בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$, וגזירה מימין בנקודה, ותהי פונקציה h המוגדרת בסביבה מלאה של $x_1 = g(x_0)$ וגזירה מימין ב- x_1 . נוכיח כי $h \circ g$ גזירה מימין אף היא בנקודה x_0 :

הוכחה. הלכה למעשה טענה זו נובעת ישירות ממשפט הרכבת פונקציות בגבולות חלקיים.

ידוע כי g גזירה מימין ולכן גם רציפה מימין בנקודה ולכן

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = g(x_0) = x_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

נשתמש במשפט ההרכבה:

$$\lim_{g(x) \rightarrow x_1^+} \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{x - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

מש"ל

והגבול כמובן מוגדר

שאלה 3

סעיף א'

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 + 3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{2h} - 3 \frac{f(x_0 + 3h) - f(x_0)}{3h} \\ &= 2f'(x_0) - 3f'(x_0) = -f'(x_0) \end{aligned}$$

סעיף ב'

נגדיר את הפונקציה $g(x) = |x|$ ונבחן את הנקודה $x_0 = 0$.

אנו כבר יודעים כי הפונקציה איננה גזירה בנקודה זו, למרות זאת מתקיים:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0 + h) - g(0 - h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |h|}{2h} = 0$$

דהיננו, הגבול מתקיים וערכו 0 בסתירה לאי-קיום הנגזרת בנקודה זו.

שאלה 4

תהינה f, g פונקציות המוגדרות בסביבה של $x_0 \in \mathbb{R}$.

סעיף א'

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x < x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases} \quad \text{נוכיח כי אם } f(x_0) = g(x_0) \text{ וגם } f'_-(x_0) = g'_+(x_0) \text{ אז הפונקציה } h(x) \text{ גזירה ב-} x_0$$

הוכחה. הפונקציה h מתלכדת בסביבתה הימנית עם g ובשמאלית עם f ולכן מתקיימים הגבולות:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) = g'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$$

וקיבלנו כי $h'(x_0)$ מוגדרת שכן שני הגבולות החלקיים מתכנסים לאותו ערך ולכן גם הגבול הכללי מתקיים.

מש"ל

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם f, g גזירות בנקודה x_0 אז גם g גזירה בנקודה זו על-ידי דוגמה נגדית:

$$x_0 = 0, g(x) = |x|, f(x) = 0$$

נגדיר שמתקיים $f(x)g(x) = 0$ לכל x בתחום הגדרתן, וברור כי $f'(0) = 0$, אך g איננה גזירה ב- $x_0 = 0$.

סעיף ג'

נסתור את הטענה כי אילו $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ וגם f לא גזירה ב- x_0 ו- g גזירה בכל נקודה אז $f \circ g$ איננה גזירה ב- x_0 עם דוגמה נגדית.

נגדיר שוב $f(x) = |x|$ ו- $g(x) = 0$ עבור $x_0 = 0$. ברור למה תנאי הטענה מתקיימים אך כמובן $f \circ g = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכן גם גזירה בתחום זה.