

# מבנים אלגבריים 1

28 במאי 2024



## תוכן העניינים

### שיעור 1 – 6.5.2024

6	הגדרה: חבורה
6	למה: קיום איבר נייטרלי יחיד
7	דוגמות
7	הגדרה: חבורה קומוטטיבית
7	דוגמות לחבורות קומוטטיביות
7	דוגמות לחבורות שאינן קומוטטיביות

### תרגול 1 – 7.5.2024

8	דוגמות לחבורות
8	תכונות בסיסיות של חבורות
8	תתי-חבורות
8	קריטריון מקוצר לתת-חבורה
9	דוגמות
9	טענה: תת-חבורה לחבורה סופית
9	חבורת התמורות
9	הגדרה: סדר של חבורה
9	חזרה לתמורות
10	תתי-חבורות של חבורת התמורות
10	מחזורים

### שיעור 2 – 8.5.2024

11	מבוא לאיזומורפיות
11	הגדרה: הומומורפיזם
11	למה: תנאי הכרחי להומומורפיזם
11	הגדרה: איזומורפיזם
11	למה: הופכי לאיזומורפיזם
12	מסקנה: תנאי הכרחי לאיזומורפיזם
12	הגדרה: איזומורפיות
12	למה: הרכבת הומומורפיזמים
12	מסקנה: הרכבת איזומורפיזמים
12	הגדרה: אוטומורפיזם
12	למה: חבורת האוטומורפיזמים
12	טענה, ערך $(Z, Aut)$
13	הגדרה: מכפלת חבורות
13	הגדרה: תת-חבורה
13	למה: חיתוך תת-חבורות

14 . . . . . הגדרה: תת־חבורה נוצרת

**15 שיעור 3 — 15.5.2024**

15 . . . . . תת־חבורות

15 . . . . . הגדרה: תת־חבורה נוצרת

15 . . . . . למה: תת־חבורה מינימלית

15 . . . . . טענה: תת־חבורה נוצרת מפורשת

15 . . . . . הגדרה: שלמות תת־חבורה יוצרת

15 . . . . . חבורה ציקלית

16 . . . . . טענה

16 . . . . . טענה: תת־חבורות של  $Z$

16 . . . . . הגדרה:  $gcb$

16 . . . . . מסקנה: הלמה של Bézout

17 . . . . . מחלקות (Cosets)

17 . . . . . הגדרה: מחלקה ימנית ושמאלית

17 . . . . . למה: שיוך למחלקה

17 . . . . . מסקנה

17 . . . . . טענה: כיסוי זר

17 . . . . . טענה:

18 . . . . . הגדרה: אוסף מחלקות

18 . . . . . משפט לאגרנז'

18 . . . . . דוגמות

**19 שיעור 4 — 20.5.2024**

19 . . . . . חזרה

19 . . . . . הגדרה: סדר של חבורה

19 . . . . . למה: סדר

19 . . . . . מסקנה מלאגרנז'

20 . . . . . הבחנה

20 . . . . . טענת בסיס למשפט השאריות הסיני

20 . . . . . פעולות של חבורה על קבוצה

20 . . . . . הגדרה: פעולה

20 . . . . . דוגמות לפעולות כאלה

21 . . . . . הגדרה: אינבולוציה

21 . . . . . הגדרה: הפעולה הרגולרית

21 . . . . . הגדרה: הצמדה

22 . . . . . טענה: הצמדה היא הומומורפיזם

**23 תרגול 3 — 21.5.2024**

23	שאלות מתרגיל 1
23	שאלה 1
23	שאלה 4
24	מחלקות שקילות
24	הגדרה
24	תכונות של מחלקות
24	הגדרה: אינדקס
24	דוגמות
25	משפט לגרנו
25	הגדרה: סדר של איבר
25	משפט לגרנו
25	מסקנה
25	מסקנה:
25	מסקנה
26	משפט פרמה הקטן
26	שאלה 4 סעיף א'

## 27 שיעור 5 — 22.5.2024

27	פעולות על קבוצות
27	טענה: יחס שקילות בפעולה על קבוצות
27	הגדרה: מסלולים
27	הגדרה: נקודת שבת
28	הגדרה: טרנזיטיבית
28	מסקנה
28	דוגמות
28	הגדרה: מקבע
29	הגדרה: מייצב
29	למה: מייצב הוא תת־חבורה
29	הגדרה: פעולה חופשית
29	דוגמה
29	הגדרה: מרכז
29	משפט: מסלול־מייצב
30	דוגמה
30	משפט קושי

## 31 שיעור 6 — 27.5.2024

31	מקבעים של פעולות
31	תזכורת: מקבע
31	למה: הלמה של ברנסייד

32	דוגמות . . . . .
32	הגדרה: מרכז חבורה . . . . .
32	טענה: מרכז הוא תת-חבורה . . . . .
33	למה: חיתוך מרכזים . . . . .
33	סימון: מחלקות צמידות . . . . .
33	טענה: נוסחת המחלקות . . . . .
34	הגדרה: חבורת $p$ . . . . .
34	טענה: מרכז של חבורת $p$ . . . . .

35	תרגול 4 – 28.5.2024
35	צביעות . . . . .
35	הגדרה: צביעה . . . . .
35	טענה: צביעה מעל פעולה . . . . .
35	הגדרה: שימור צביעה . . . . .
35	טטרההדרון . . . . .
36	טענה: פעולת סימטריות על הקודקודים . . . . .
36	מסקנה: איזומורפיות הסימטריות . . . . .
36	מסקנה: טרנזיטיביות הפעולה . . . . .
36	טענה: מקבצי הסימטריות . . . . .
37	מסקנה: מסלולים מעל צביעה . . . . .
37	טענה: כמות הצביעות בסימטריות חיוביות . . . . .
37	מסקנה: מספר המסלולים בסימטריות סיבוביות . . . . .
37	הערה: צביעה של פאות . . . . .

## שיעור 1 — 6.5.2024

הקורס עוסק בעיקרו בתורת החבורות, ממנה גם מתחילים.

חבורה (באנגלית Group) היא מבנה מתמטי.

ברעיון חבורה מייצגת סימטריה, אוסף השינויים שאפשר לעשות על אובייקט ללא שינוי שלו, קרי שהוא ישאר שקול לאובייקט במקור.

מה הן הסימטריות שיש לריבוע? אני יכול לסובב ולשקף אותו בלי לשנות את הצורה המתקבלת והיא תהיה שקולה. חשוב להגיד שהפעולות האלה שקולות שכן התוצאה הסופית זהה למקורית.

אפשר לסובב ספציפית אפס, תשעים מאה שמונים ומאתיים שבעים מעלות, נקרא לפעולות האלה  $A, B, C$  בהתאמה.

בנוסף אפשר לשקף סביב ציר האמצע, ציר האמצע מלמעלה, ועל האלכסונים, ניתן גם לאלה שמות, נקרא לפעולות אלה  $D, E, F, G, H$  בהתאמה. אלה הפעולות הבסיסיות ואי אפשר לעשות פעולה שלא בקבוצה הזאת, אבל אפשר להרכיב את הפעולות האלה והתוצאה הסופית תהיה שקולה לפעולה מהקבוצה.

נגדיר את הפעולות:

$$D_4 = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}, \circ : D_4 \times D_4 \rightarrow D_4$$

נראה כי הרכבת פעולות שקולה לפעולה קיימת:

$$E \circ G = C, E \circ B = H, B \circ F = F$$

חשוב לשים לב שהפעולה הזאת לא חילופית:  $X \circ Y \neq Y \circ X$ .

היא כן קיבוצית:  $X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z$ .

תכונה נוספת היא קיום האיבר הנייטרלי, במקרה הזה  $A$ . איבר זה לא משפיע על הפעולה הסופית, והרכבה איתו מתבטלת ומשאירה רק את האיבר השני:

$$\forall X \in D_4 : A \circ X = X \circ A = X$$

התכונה האחרונה היא קיום איבר נגדי:

$$\forall X \in D_4 \exists Y \in D_4 : X \circ Y = Y \circ X = A$$

### הגדרה: חבורה

חבורה היא קבוצה  $G$  עם  $\circ : G \times G \rightarrow G$  ואיבר  $e \in G$  כך שמתקיימות התכונות הבאות:

1. אסוציאטיביות (חוק הקיבוץ):  $\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ .

2. קיום איבר נייטרלי: לכל  $x \in G$  מתקיים  $x \circ e = e \circ x = x$ .

3. קיום איבר נגדי: לכל  $x \in G$  קיים  $y \in G$  כך שמתקיים  $x \circ y = y \circ x = e$ .

חשוב לציין כי זו היא לא הגדרה מינימלית, ניתן לצמצם אותה, לדוגמה להגדיר שלכל איבר יש הופכי משמאל בלבד (יש להוכיח שקילות).

### למה: קיום איבר נייטרלי יחיד

אם  $e_1, e_2 \in G$  נייטרליים אז  $e_1 = e_2$ .

הוכחה.  $e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$

□

דהינו, קיים איבר נייטרלי יחיד.

## דוגמות

הקורס מבוסס על הספר "מבנים אלגבריים" מאת דורון פודר, אלכס לובוצקי ואהוד דה שליט, אך יש הבדלים, חשוב לשים לב אליהם. ניתן לקרוא שם דוגמות.

דוגמות כלליות לחבורות, עבור  $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$  שדה:

1. חבורה החיבורית היא  $(\mathbb{F}, +, 0)$

2. החבורה הכפלית היא  $(\mathbb{F}, \cdot, 1)$

הסימון הכי נפוץ לפעולה של החבורה היא כפל או נקודה או לא בכלל:  $xy = x \cdot y$ .

## הגדרה: חבורה קומוטטיבית

חבורה  $G$  תיקרא קומוטטיבית או חילופית או אבלית (על שם המתטיקאי אבל) אם  $xy = yx$  לכל  $x, y \in G$ . חשוב להבין, למה שסימטריות תהינה חילופיות.

## דוגמות לחבורות קומוטטיביות

$(\mathbb{Z}, +, 0)$  חבורת החיבור מעל השלמים, היא חבורה קומוטטיבית.

באופן דומה גם  $(\mathbb{Z}_n, +, 0)$ .

## דוגמות לחבורות שאינן קומוטטיביות

•  $(D_4, \circ, A)$  אשר מייצג את הריבוע עליו דובר בתחילת ההרצאה

•  $S_n$  תמורות על  $1, \dots, n$  עם הרכבה.

תמורה היא פעולה שמחליפה שני איברים כפונקציה, לדוגמה  $s(1) = 2, s(2) = 1, s(n) = n$ .

$S_n$  הוא מקרה פרטי של תמורות על קבוצה  $\{1, \dots, n\}$

•  $\text{Sym}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ ועל}\}$

תמורות הן סימטריה של קבוצה, כל תמורה היא העתקה חד-חד ערכית ועל שמשמרת את מבנה הקבוצה.

•  $GL_n(\mathbb{F})$  מטריצות  $n \times n$  הפיכות מעל שדה  $\mathbb{F}$ .

• אם  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$  אז

$GL(V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ ערכית וחד}\}$

נשים לב כי  $GL_n(\mathbb{F}) \cong GL(\mathbb{F}^n)$ , דהינו הם איזומורפיים. זה לא אומר שהם שווים, רק שיש להם בדיוק אותן תכונות.

גם בקבוצות שתי קבוצות עם אותו גודל הן איזומורפיות אך לא שקולות.

## תרגול 1 — 7.5.2024

### דוגמות לחבורות

$(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$	לא חבורה בגלל 0
$(M_{n \times n}(\mathbb{R}), \circ, I_n)$	לא חבורה בגלל מטריצות רגולריות ומטריצת האפס לדוגמה
$(\mathbb{Z}_4, +_4, 0)$	אכן חבורה
$(\mathbb{Z}_3, +_3, 0)$	אכן חבורה
$(\mathbb{Z}_4^*, \cdot, 1)$	לא חבורה, $2 \cdot 2 = 0$
$(\mathbb{Z}_3^*, \cdot, 1)$	אכן חבורה, מבוסס על מספר ראשוני

הערה לא קשורה: הסימון של כוכבית מסמן הסרת כלל האיברים הלא הפיכים מהקבוצה. כל שלישיה  $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot_p, 1)$  היא חבורה בתנאי ש- $p$  הוא ראשוני.

### תכונות בסיסיות של חבורות

$e_1 = e_1 e_2 = e_2$	יחידות האיבר הנייטרלי
$x \in G, y, y_1 = x^{-1} : y = y \cdot e = xy y_1 = e \cdot y_1 = y_1$	יחידות ההופכי

תהי  $G$  חבורה,  $g = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$  ביטוי לא תלוי בהצבת סוגריים, טענה זו אפשר להוכיח באינדוקציה. לכל  $n, m \in \mathbb{N}$  מתקיים גם  $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$  ואף  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ .

### תתי-חבורות

תהי חבורה  $(G, \cdot_G, e_G)$ , ותהי  $H \subseteq G$  תת-קבוצה, אז  $(H, \cdot_G, e_G)$  תיקרא תת-חבורה אם היא מהווה חבורה תקינה. נסמן  $H \leq G$ . לדוגמה נראה  $(\mathbb{Z}, +, 0) \leq (2\mathbb{Z}, +, 0)$  חבורת הזוגיים בחיבור היא תת-חבורה של השלמים.  $(\text{diag}_n(\mathbb{R}), \circ, I_n) \leq (GL_n(\mathbb{R}), \circ, I_n)$  חבורת המטריצות האלכסוניות היא תת-חבורה של המטריצות.  $(GL_n(\mathbb{Q}), \circ, I_n) \leq (GL_n(\mathbb{R}), \circ, I_n)$  מטריצות הפיכות מעל הרציונליים חלקיות למטריצות הפיכות מעל הממשיים.

### קריטריון מקוצר לתת-חבורה

תהי  $G$  חבורה ותהי קבוצה  $H \subseteq G$  אז  $H \leq G$  (תת-חבורה של  $G$ ) אם ורק אם:

- $e_G \in H$ , איבר היחידה נמצא ב- $H$

- $\forall x \in H : x^{-1} \in H$ , לכל איבר גם האיבר ההופכי לו נמצא בקבוצה

- $\forall x, y \in H : x \cdot y \in H$ , הקבוצה סגורה לכפל האיברים בה



$$(\mathbb{N}_0, +, 0) \not\subseteq (\mathbb{Z}, +, 0)$$

$$1 \in \mathbb{N}_0 \wedge -1 \notin \mathbb{N}_0$$

$$\{0, 2, 4, 6, 8\} \subseteq (\mathbb{Z}_{10}, +_{10}, 0)$$

כלל התנאים מתקיימים

**טענה:** תת-חבורה לחבורה סופית

אם חבורה היא סופית, אז תנאי 2 איננו הכרחי לתת-חבורות.

**הוכחה.** תהי  $G$  חבורה סופית ותהי  $H \subseteq G$  אשר מקיימת את סעיפים 1 ו-3 בקריטריון.

יהי  $x \in H$ , נבחין כי  $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$  בעקבות סעיף 3 של הקריטריון.

לכן קיימים שני מספרים  $n, m \in \mathbb{N}$  כך ש- $n < m$  אשר מקיימים  $x^n = x^m$ .

כמוכן מתקיים  $x^n \cdot x^{-m} = e$  ומהסגירות לכפל נובע כי  $x^{n-m} \in H$  ומצאנו כי התנאי השני מתקיים.

□

## חבורת התמורות

תהי  $X$  קבוצה, אז  $\text{Sym}(X)$  היא קבוצת הפונקציות החד-חד ערכיות ועל מ- $X$  לעצמה.

$(\text{Sym}(X), \circ, Id)$  היא חבורה, מורכבת מכלל התמורות, הרכבת פונקציות ופונקציית הזהות.

אם  $X$  היא קבוצה סופית אז  $S_n = \text{Sym}(X)$ , ובדרך כלל נגדיר  $X = [n] = \{1, \dots, n\}$  וחבורת התמורות תהיה  $(S_n, \circ, Id)$ .

## הגדרה: סדר של חבורה

סדר של חבורה הוא מספר האיברים בחבורה.

אילו  $G$  אז נגיד שסדר החבורה הוא אינסוף.

נסמן את הסדר  $|G|$ .

אילו  $G$  חבורה ו- $x \in G$ , הסדר של  $x$  הוא  $n \in \mathbb{N}$  המינימלי כך שמתקיים  $x^n = e$ , נסמנו  $|x|$  או  $\sigma(x)$ .

## חזרה לתמורות

נשים לב שמתקיים  $|S_n| = n!$ .

$\sigma \in S_n$ , נכתוב את התמורה כך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

אילו  $\sigma \in S_n$  ו- $i \in [n]$  נקיים  $\sigma(i) = i$  או  $i$  נקרא **נקודת שבט** של  $\sigma$ .

בדוגמה שנתנו,  $\sigma(3) = 3$  ולכן זוהי נקודת שבט של  $\sigma$ .

## תתי-חבורות של חבורת התמורות

גודמה ראשונה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq S_3$$

היא תת-חבורה של  $S_3$  שכן כללי הקריטריון מתקיימים מבדיקה.

גם  $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$  היא תת-חבורה, שכן  $\sigma(\tau(1)) = \tau(\sigma(1)) = 1$ .

לעומת זאת  $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) \in \{1, 2, 3\}\}$  איננה חבורה. נראה כי אם  $\sigma, \tau$  המקיימות  $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \tau(2) = 1, \tau(1) = 2$  וכל השאר נקודות שבט,  $\sigma(\tau(1)) = 4$  שלא נמצא בקבוצה על-פי הגדרתה.

## מחזורים

מחזור הוא רצף של איברים שהתמורה מחזירה כרצף, זאת אומרת שהתמורה עבור האיבר הראשון במחזור תחזיר את השני, השני את השלישי וכן הלאה.

**הגדרה:** מחזור פשוט  $\sigma \in S_n$  יקרא  $l$ -מחזור אם קיימים  $x_1, \dots, x_l \in [n]$  כך שלכל  $0 \leq i < l$  מתקיים  $\sigma(x_i) = x_{i+1}$  ו- $\sigma(x_l) = x_1$ .

**טענה:** כל תמורה היא הרכבה של מספר כלשהו של מחזורים, ההוכחה מסתמכת על היכולת לשרשר את ערכי המחזור משרשראות שאינן נוגעות אחת לשנייה.

לדוגמה, נבחין כי אם

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

אז נוכל להרכיב  $\sigma = (1645)(2)(37)$ .

נשים לב למקרה מיוחד, יהי  $\sigma \in S_n$  כך ש- $\sigma$  הוא  $l$ -מחזור, ונגדיר  $\sigma = (x_1 x_2 \dots x_l)$ .

בהינתן  $\tau \in S_n$ , מתקיים

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau(x_1) \tau(x_2) \dots \tau(x_n))$$

זאת שכן לדוגמה  $(\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1})(x_1) = \tau(\sigma(\tau^{-1}(x_1))) = \tau(\sigma(x_1)) = \tau(x_2)$  ובהתאם

## שיעור 2 — 8.5.2024

### מבוא לאיזומורפיות

המטרה שלנו היא להבין מתי שתי חבורות שונות הן שקולות, ולחקור את מושג האיזומורפיות. נבחן את  $\mathbb{Z}/2$  ואת  $(\{\pm 1\}, \cdot)$  ובשתייהן יש רק שני איברים, אחד נייטרלי ואחד לא, ובשתייהן הפעולות מתנהגות אותו דבר בדיוק.

$$1 \leftrightarrow -1, 1 \leftrightarrow 0$$

עוד דוגמה היא  $(\mathbb{R}, +)$  ו- $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ .

$$(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\exp} (\mathbb{R}^{>0}, \cdot), \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

### הגדרה: הומומורפיזם

עבור  $G$  ו- $H$  חבורות:

הומומורפיזם מ- $G$  ל- $H$  היא פונקציה  $\varphi : G \rightarrow H$  שמקיימת:

$$1. \varphi(e_G) = e_H$$

$$2. \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

$$3. \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$$

### למה: תנאי הכרחי להומומורפיזם

$\varphi : G \rightarrow H$  היא הומומורפיזם אם ורק אם לכל  $x, y \in G$  מתקיים  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ .

הוכחה. נראה ששלושת התכונות מתקיימות:

$$1. \text{ נבחר } x \in G \text{ ונראה כי } e_H = \varphi(e_G) \iff \varphi(x) = \varphi(e_G x) = \varphi(e_G)\varphi(x)$$

2. נתון

$$3. \varphi(e_G) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = e_H \implies \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}e_H$$

ומצאנו כי שלושת התנאים מתקיימים.

□

### הגדרה: איזומורפיזם

איזומורפיזם מ- $G$  ל- $H$  הוא הומומורפיזם חד-חד ערכי ועל ומסומן  $\varphi : G \xrightarrow{\sim} H$ .

### למה: הופכי לאיזומורפיזם

עבור  $\varphi : G \xrightarrow{\sim} H$  גם ההופכי הומומורפיזם (ולכן גם איזומורפיזם).

הוכחה. נראה כי לכל  $x, y \in H$ :

$$\varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(\varphi^{-1}(y))) = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)$$

ומצאנו כי התנאי ההכרחי להומומורפיזם מתקיים.

□

מסקנה: תנאי הכרחי לאיזומורפיזם

הומומורפיזם  $\varphi : G \rightarrow H$  הוא איזומורפיזם אם ורק אם קיים הומומורפיזם  $\psi : H \rightarrow G$  כך שמתקיים  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id_G$ .

הגדרה: איזומורפיות

נגדיר שתי חבורות כאיזומורפיות אם ורק אם קיים איזומורפיזם ביניהן.

נשים לב שמספר האיזומורפיזמים בין החבורות, גם אם הוא אינסופי, הוא חסר משמעות, ובמקום אנו מסתכל על עצם האיזומורפיות.

דוגמה לחבורות איזומורפיות הן  $(\mathbb{Z}/2, \cdot) \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$  כפי שראינו בהתחלה.

חשוב לשים לב שגם אם יש כמות איברים זהה בין החבורות, הן לא בהכרח תהינה איזומורפיות, לדוגמה  $GL_2(\mathbb{F}_2)$ , חבורת המטריצות ההפיכות מעל שדה עם שני איברים. יש בשורה העליונה 3 אפשרויות, ובשורה השנייה 2 ולכן יש 6 איברים בחבורה הזו. גם ב- $S_3$  יש בדיוק שישה איברים, אבל  $GL_2(\mathbb{F}_2) \not\cong S_3$ . גם החבורה החיבורית  $\mathbb{Z}/6$  היא חבורה עם שישה איברים. החבורה הראשונה לא קומוטטיבית והשנייה כן, כי כפל מטריצות לא ניתן לשינוי סדר.

למה: הרכבת הומומורפיזמים

$\varphi : G \rightarrow H$  ו- $\psi : H \rightarrow K$  שני הומומורפיזמים, אז גם  $\psi \circ \varphi : G \rightarrow K$  הוא הומומורפיזם.

הוכחה.  $\forall x, y \in G : (\psi \circ \varphi)(xy) = \psi(\varphi(xy)) = \psi(\varphi(x)\varphi(y)) = \psi(\varphi(x))\psi(\varphi(y)) = (\psi \circ \varphi)(x)(\psi \circ \varphi)(y)$  □

מסקנה: הרכבת איזומורפיזמים

הרכבה של איזומורפיזמים היא איזומורפיזם.

הגדרה: אוטומורפיזם

אוטומורפיזם של  $G$  הוא איזומורפיזם  $G \xrightarrow{\sim} G$ . נסמן ב- $Aut(G)$  את קבוצת האוטומורפיזמים של  $G$ .

למה: חבורת האוטומורפיזמים

$Aut(G)$  היא חבורה ביחס להרכבה.

הוכחה. הרכבה היא אסוציאטיבית, העתקת הזהות מוכללת בקבוצה ונייטרלי להרכבה, והוכחנו שלכל אוטומורפיזם  $\varphi$  יש הופכי  $\varphi^{-1} \in Aut(G)$ .

□

מהי  $Aut(\mathbb{Z})$ ? לדוגמה  $\varphi(n) = n + 1$ . פונקציה זו איננה אוטומורפיזם שכן  $\varphi(1) + \varphi(3) = 6$ ,  $\varphi(1+3) = \varphi(4) = 5$ .

פונקציית הזהות היא אוטומורפיזם, והפונקציה  $\varphi(n) = -n$  על-פי בדיקה ישירה של הגדרות.

נבחן את פונקציית הכפל בקבוע,  $\varphi(n) = 2n$ , נראה כי  $\varphi(n) + \varphi(m) = 2n + 2m$ ,  $\varphi(n+m) = 2(n+m) = 2n + 2m$ . הומומורפיזם, אבל לא כל איבר שייך לקבוצה השנייה ולכן לא אוטומורפיזם.

$$Aut(\mathbb{Z}) = \{Id, -Id\} \cong \mathbb{Z}/2$$

(טענה, ערך  $Aut(\mathbb{Z})$ )

$$Aut(\mathbb{Z}) = \{Id, -Id\}$$

הוכחה. יהי  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , ראשית נראה כי  $\varphi(n) = n\varphi(1)$ .

עבור  $n = 0$  ברור, עבור  $n > 1$  נראה כי  $\varphi(n) = \varphi(1 + \dots + 1) = \varphi(1) + \dots + \varphi(1) = n\varphi(1)$ .

עבור  $n \leq 1$  נשתמש ב- $\varphi(-1) = -1$  ובהתאם  $\varphi(-n) = (-n)\varphi(1)$ . תתקן אחר כך את הסימנים.

לכן  $\varphi(1) = \pm 1 \implies \varphi = \pm Id$ .

□

### הגדרה: מכפלת חבורות

אם  $G$  ו- $H$  הן חבורות, המכפלה הישרה ל- $G$  ו- $H$  או  $G \times H$  היא החבורה שמקיימת  $G \times H = \{(x, y) \mid x \in G, y \in H\}$ . עם הפעולה

$$e = (e_G, e_H) \in G \times H \text{ והנייטרלי } (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

נראה בהמשך שמתקיים  $\mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . אבל  $\mathbb{Z}/4 \not\cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ .

### הגדרה: תת-חבורה

$G$  חבורה, ותהי תת-קבוצה  $H \subseteq G$  נקראת תת-חבורה אם

$$1. e \in H$$

$$2. x, y \in H \implies xy \in H$$

$$3. x \in H \implies x^{-1} \in H$$

נשים לב כי תת-קבוצה  $H \subseteq G$  היא תת-חבורה אם ורק אם  $H$  חבורה ביחס לאותה פעולה של  $G$ .

מסמנים  $H \leq G$  תת-חבורה.

דוגמות:

$$\bullet \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\} \leq D_4$$

$$\bullet \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\} \leq S_n$$

$$\text{- תהי } G \text{ חבורה סופית אז } S_n \cong \text{Sym}(G) \leq \text{Aut}(G)$$

$$\bullet SL_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F}) \text{ מטריצות עם דטרמיננטה 1 הן חלקיות למטריצות הפיכות.}$$

$$\bullet B_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F}) \text{ מטריצות משולשיות עליונות עם אלכסון 1 הן חלקיות אף הן להפיכות.}$$

$$\bullet O_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F}) \text{ חבורת המטריצות האורתוגונליות חלקיות לחבורת המטריצות ההפיכות. } I_n =$$

$$AA^t = A^t A$$

### למה: חיתוך תת-חבורות

לכל קבוצה  $S$  ומשפחה  $\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}$  של תת-חבורות של  $G$  אז  $\bigcap_{\alpha \in S} H_\alpha \leq G$  תת-חבורה.

הערה קטנה: משפחה היא קבוצה של קבוצות ככה שאפשר לזהות כל אחת לפי מספר, אפשר להשתמש בלמה גם בקבוצות כרגיל.

$$\text{הוכחה. } e \in \bigcap_{\alpha \in S} H_\alpha \text{ לכל } \alpha \in S \text{ ולכן } e \in \bigcap_{\alpha \in S} H_\alpha$$

$$\bullet x, y \in \bigcap_{\alpha \in S} H_\alpha \text{ אם ורק אם לכל } \alpha \text{ מתקיים } x, y \in H_\alpha \text{ ולכן } xy \in H_\alpha \text{ ובהתאם } xy \in \bigcap_{\alpha \in S} H_\alpha$$

□

ומצאנו כי זוהי חבורה.

$$SO_n = SL_n(\mathbb{R}) \cap O_n \leq GL_n(\mathbb{R}) \text{ למשל}$$

**הגדרה:** תת־חבורה נוצרת

$G$  חבורה ו־ $S \subseteq G$ , תת־קבוצה, התת־חבורה הנוצרת על־ידי  $S$  מוגדרת להיות:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq H \leq G} H$$

ונשים לב כי על־פי הלמה האחרונה מתקבל כי זוהי אכן תת־חבורה.

## תת־חבורות

הגדרה: תת־חבורה נוצרת

תהי  $S \subseteq G$  תת־קבוצה לחבורה, נגדיר

$$\langle S \rangle = \bigcup_{S \subseteq H \leq G} H$$

למה: תת־חבורה מינימלית

$S \subseteq G$  התת־חבורה המינימלית  $\langle S \rangle$  היא התת־חבורה המינימלית של  $G$  המכילה את  $S$ .

קצת קשה לעבור על זה, איזה אפיון נוסף יש לדבר הזה?

טענה: תת־חבורה נוצרת מפורשת

אז  $S \subseteq G$

$$\langle S \rangle = \overline{S} \equiv \{x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} \mid x_i \in S, \epsilon_i = \pm 1\}$$

הוכחה:

כיוון ראשון: נניח שעבור תת־חבורה  $H$  המכילה של  $S$  סגירות  $H$  לכפל והופכי גוררת שהקבוצה  $\overline{S}$  הנתונה מוכלת ב־ $H$ .

מצד שני נראה שזוהי כבר תת־חבורה.

•  $1 \in \overline{S}$  מכפלה ריקה.

•  $x, y \in \overline{S}$  אז נסמן

$$x = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}, y = y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2} \cdots y_n^{\epsilon_n}, xy = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2} \cdots y_n^{\epsilon_n}$$

•  $x \in \overline{S}$  אז

$$x^{-1} = x_1^{-\epsilon_1} x_2^{-\epsilon_2} \cdots x_n^{-\epsilon_n},$$

$$(xy)(x^{-1}y^{-1}) = xyx^{-1}y^{-1} = xx^{-1} = 1 \text{ וידוע כי } 1 \in \overline{S}$$

הגדרה: שלמות תת־חבורה יוצרת

אם  $\langle S \rangle = G$  אומרים ש־ $S$  יוצרת את  $G$ .

דוגמה: מתקיים  $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$ .  $\langle -1 \rangle = d\mathbb{Z}$  כקונספט כללי  $\langle d \rangle$ .

מה לגבי  $\mathbb{Z}/n$ ? מתקיים  $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}/n$ ?

חבורה ציקלית

חבורה  $G$  נקראת ציקלית אם היא נוצרת על־ידי איבר אחד, דהיינו קיים  $x \in G$  כך ש־ $\langle x \rangle = G$ .

## טענה

כל חבורה ציקלית  $G$  מקיימת  $G \cong \mathbb{Z}$  או  $G \cong \mathbb{Z}/n$  הוכחה בתרגיל.

## דוגמה:

$$G = D_4$$

נגדיר את  $\sigma$  להיות סיבוב בתשעים מעלות, ואת  $\tau$  להיות היפוך על ציר האיקס.

$$\langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$$

$$\langle \tau \rangle = \{e, \tau\}$$

אנחנו יכולים להכפיל כל שני איברים משתי הקבוצות שסימנו עכשיו.

$$D_4 = \langle \sigma, \tau \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\}$$

$$\tau\sigma = \sigma^3\tau, \sigma^4 = e, \tau^2 = e$$

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^3 = \sigma^{-1}$$

## טענה: תת-חבורות של $\mathbb{Z}$

לכל  $H \leq \mathbb{Z}$  קיים  $d \geq 0$  יחיד כך ש- $H = d\mathbb{Z}$ .

הוכחה. אם  $H \neq \{0\}$  אז קיים  $0 < d \in H$  וניקה את  $d$  להיות המינימלי שמקיים את אי-השוויון.

$$\langle d \rangle = d\mathbb{Z} \subseteq H$$

מצד שני, עבור  $a \in H$  וידוע  $a > 0$  אז נכתוב  $a = nd + r$  כאשר  $0 \leq r < d$  שארית.

$$r = a - nd \in H$$

יחידות של זה: תרגיל נגלה בהמשך שתת-חבורה של חבורה ציקלית היא בעצמה ציקלית.

## הגדרה: gcb

עבור שני מספרים  $a, b \in \mathbb{Z}$  שלא שניהם 0 נגדיר  $\gcd(a, b) = d$  (Greatest common divisor) מחלק משותף מקסימלי כך שמתקיים:  $d \mid a, b$

וגם לשלכל  $a, b$  מתקיים גם  $m \mid d$ .

הוכחה.  $\langle a, b \rangle = d\mathbb{Z}$ , לאיזשהו  $d \geq 0$  יחיד.

$$d = \gcd(a, b)$$

מצד אחד  $a, b \in d\mathbb{Z}$  ולכן  $d \mid a, b$ .

מצד שני אם  $a, b \mid n$  אז  $\{a, b\} \subseteq n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$  ולכן  $m \mid d$  והוא מחלק מקסימלי.

$$2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle = \langle 6, 10 \rangle$$

## מסקנה: הלמה של Bézout

לכל  $a, b \in \mathbb{Z}$  קיימים  $n, m \in \mathbb{Z}$  עבורם  $\gcd(a, b) = na + mb$ .



## מחלקות (Cosets)

הגדרה: מחלקה ימנית ושמאלית

תהי  $G$  חבורה ו- $H \leq G$  ו- $x \in G$ . נגדיר את המחלקה המשאלית של  $x$  על-ידי

$$xH = \{xh \mid h \in H\}$$

ואת המחלקה הימנית של  $x$  בהתאם

$$Hx = \{hx \mid h \in H\}$$

תרגיל: להוכיח שהמחלקה הימנית והשמאלית הן איזומורפיות. וזה לא נכון במונאיד.

למה: שיוך למחלקה

$$y \in xH \iff yH = xH$$

הוכחה.

$$y \in xH \iff y = xh \iff x^{-1}y \in H \iff y^{-1}x \in H \iff x \in yH, y \in xH \iff xH = yH$$

□

מסקנה

לכל  $x, y \in G$  מתקיים

$$xH = yH \text{ (אם ורק אם } x^{-1}y \in H \text{)}$$

$$\text{או } xH \cup yH = \emptyset$$

□

הוכחה. אם  $z \notin xH \cup yH$  אז מהלמה הקודמת  $yH = xH$ .

טענה: כיסוי זר

$$G \leq H \text{ התת-קבוצות מהצורה } xH \text{ עבור } x \in G \text{ מהוות כיסוי זר של } G.$$

□

הוכחה. נשאר לשים לב  $x \in xH$  ולכן כיסוי ומהמסקנה זר.

טענה:

$$\text{לכל } x, y \in G \text{ יש התאמה חד-חד ועל ערכית של קבוצות } xH \xrightarrow{\sim} yH$$

$$\text{בפרט אם } H \text{ סופית אז לכל המחלקות אותו גודל, } |xH| = |yH|.$$

$$\text{הוכחה. נגדיר } \varphi : xH \rightarrow yH \text{ על-ידי } \varphi(z) = yx^{-1}z.$$

$$\text{ונגדיר פונקציה חדשה } \psi : yH \rightarrow xH \text{ על-ידי } \psi(z) = xy^{-1}z.$$

$$\text{אז מתקיים } \psi = \varphi^{-1} \text{ ובהתאם נובע כי } \varphi \text{ איזומורפיזם.}$$

□

הגדרה: אוסף מחלקות

$H \leq G$  אז נסמן

$$G/H = \{xH \mid x \in G\}, H \backslash G = \{Hx \mid x \in G\}$$

אוסף המחלקות השמאליות והימניות בהתאמה.

משפט לאגרנו'

אם  $G$  חבורה סופית, אז לכל  $H \leq G$  מתקיים  $|H| \mid |G|$ .

הוכחה. ל- $G$  יש כיסוי זר על-ידי מחלקות שמאליות של  $H$  ולכן הגודל של  $|G/H|$  של  $|G| = |H| \cdot |G/H|$ .

הגודל של  $|G/H| = |G|/|H|$ .

סימון  $|G/H| = |G : H|$  האינדקס של  $H$  ב- $G$ .

דוגמות

המחלקות של  $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ :

$$3\mathbb{Z} + 0 = 3\mathbb{Z} + 3, 3\mathbb{Z} + 1, 3\mathbb{Z} + 2$$

הקבוצה  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  היא השאריות האפשריות בחלוקה לשלוש.

□

## שיעור 4 — 20.5.2024

### חזרה

הגדרה: סדר של חבורה

$G$  חבורה ו- $x \in G$  מסומן  $o(x)$  הוא המספר הקטן ביותר כך ש- $x^n = e$  או  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq n$  או  $\infty$  אם לא קיים  $n$  כזה.

למה: סדר

$$o(x) = |\langle x \rangle|$$

הוכחה. נוכיח שאם  $o(x)$  סופי אז

$$\langle x \rangle = \{1, x, x^2, \dots, x^{o(x)-1}\} \quad (1)$$

ואם  $o(x) = \infty$  אז

$$\langle x \rangle = \{1, x, x^2, \dots\} \cup \{x^{-1}, x^{-2}, \dots\} \quad (2)$$

הוכחה ל-(1).

(1) תת-חבורה:

$$x^k \cdot x^m = x^{(m+k) \bmod o(x)}.$$

$$(x^n)^{-1} = x^{o(x)-n}.$$

כל ההאיברים שונים כי אם  $x^k = x^m$  ל- $0 \leq k < m \leq o(x)$  אז

$$1 = x^0 = x^{m-k}$$

ונקבל  $0 < m-k < o(x)$  בסתירה למינימליות של  $o(x)$ .

הוכחה ל-(2):

אם  $H = \langle x \rangle$

סופיות נתונה בקבוצה.

$$\{1, x, x^2, \dots\} \subseteq H$$

מסופיות קיימים  $0 \leq k < m$  עבורם

$$x^k = x^m \implies x^{m-k} = 1$$

ולכן ל- $x$  יש סדר סופי, משובך היונים.

2 תרגיל.

מסקנה מלאגרנד'

$G$  חבורה סופית, אז לכל  $x \in G$  מתקיים

$$o(x) \mid |G|$$

□

## הבחנה

אם קיים  $x \in G$  עבורו  $|G| = o(x)$  אז  $G$  ציקלית.

## טענת בסיס למשפט השאריות הסיני

לכל  $a, b \geq 1$  זרים אז  $\gcd(a, b) = 1$ , מתקיים

$$\mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b \cong \mathbb{Z}/ab$$

הוכחה. נראה שהסדר של  $x = (1, 1) \in \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$  הוא  $ab$  ונסיק מההבחנה.

$$x^{ab} = (ab, ab) = (0, 0) = 1 \text{ ראשית,}$$

מצד שני, אם  $x^n = 1$  אז  $(n, n) = (0, 0) \in \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$  כלומר

$$0 = n \in \mathbb{Z}/a, \quad 0 = n \in \mathbb{Z}/b$$

ולכן  $a|n, b|n$  ולכן  $ab|n$ .

$$|\mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b| = |\mathbb{Z}/a| \cdot |\mathbb{Z}/b| = ab \text{ מכיוון ש-}$$

$\mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$  ציקלית מגודל  $ab$  ולכן איזומורפית ל- $\mathbb{Z}/ab$ .

□

## פעולות של חבורה על קבוצה

נתעסק בחבורות לא אבליות ואיך הן מופיעות כסימטריות פעמים רבות. הסיבה שאנחנו מתעסקים בחבורות היא לראות את הפעולות שלהן על דברים.

## הגדרה: פעולה

פעולה של חבורה  $G$  על קבוצה  $X$  זו פונקציה  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  כך שמתקיים:

$$1 \cdot x = x \text{ לכל } x \in X.$$

$$2. \quad h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x \text{ לכל } x \in X, g, h \in G.$$

סימון:  $G \curvearrowright X$ . באנגלית Group action.

## דוגמות לפעולות כאלה

1.  $S_n$  פועלת על הקבוצה  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  על-ידי

$$S_n \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

$$\text{על-ידי } (\sigma, k) \mapsto \sigma(k).$$

2.  $D_n \leq S_n$  כפי שהגדרנו בתרגיל.

$D_n$  פועלת על  $\{1, 2, \dots, n\}$  באותו אופן כמו  $S_n$ , והיא אינטואיטיבית שקולה לביצוע פעולה סימטרית נתונה על מצב מסוים של הריבוע.

3.  $\mathbb{R}^n \curvearrowright GL_n(\mathbb{R})$  על-ידי

$$GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (A, v) \mapsto Av$$

קבלת וקטור ומטריצה וכפל הווקטור במטריצה.

$$\mathbb{R}^n \circ O_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$$

$$SO_2(\mathbb{R}) = O_2(\mathbb{R}) \cap SL_2(\mathbb{R})$$

**הערה:** הסימון  $O(n) = O_n(\mathbb{R})$  הוא קבוצת האורתוגונליים על  $\mathbb{R}$ , באופן דומה  $SO_n(\mathbb{R})$  קבוצת האורתוגונליים עם דטרמיננטה 1.

4. דוגמה 0: המקרה הטריטוריאלי, כל חבורה  $G$  ולכל קבוצה  $X$  יש את הפעולה הטריטוריאלי של  $G$  על  $X$  והיא

$$g \cdot x = x, \forall g \in G, x \in X$$

הרציונל מאחורי ההגדרה הזאת הוא שאנחנו יכולים לפרק את החבורות מתוך פעולות שאנחנו כבר מכירים ולחקור את התכונות של הפעולות האלה באופן ריגורוזי ושיטתי. נשים לב לדוגמה ש- $D_4 \circ \{D_1, D_2\}$ , אנחנו יכולים לחקור את המקרה היחסית טריטוריאלי הזה של סימטריה גאומטרית על-ידי הגדרת הפעולה המתאימה.

### הגדרה: אינבולוציה

נבחן את הפעולה של  $\mathbb{Z}/2$  על  $X$ . האיבר הנייטרלי לא עושה כלום ולכן קל להגדיר אותו, יש להגדיר פעולה רק עבור איבר לא נייטרלי.

זה אותו דבר בגדול כמו פונקציה  $\tau : X \rightarrow X$  שמקיימת  $\tau \circ \tau = Id_X$ , זאת שכן

$$\mathbb{Z}/2 \times X \rightarrow X, \quad g \cdot x \mapsto \begin{cases} x, & g = 0 \\ \tau(x), & g = 1 \end{cases}$$

לפונקציה כזאת קוראים אינבולוציה, פעולה שריבועה הוא  $Id$ , באנגלית Involution, וכבר ראינו פונקציות רבות כאלה.

כדוגמה יש לנו לפחות שלוש פעולות של  $\mathbb{Z}/2$  על  $\mathbb{R}^2$  כאלה

$$\tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}, \quad \tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}, \quad \tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

### הגדרה: הפעולה הרגולרית

$G$  חבורה, הפעולה הרגולרית (השמאלית) של  $G$  על  $G$  שנתונה על-ידי

$$g \cdot x = gx$$

פעולה המוגדרת על-ידי הכפל של החבורה. זוהי כמובן פעולה והסימון הוא  $G \circ G$ .

האם פעולה ימנית גם עומדת בהגדרת הפעולה?

נבדוק את  $G \times G \rightarrow G$  המוגדרת על-ידי  $(g, x) \mapsto xg$ :

נבדוק אסוציאטיביות

$$h \cdot (g \cdot x) = h \cdot (xg) = (xg)h, \quad (hg) \cdot x = x(hg), \quad (xg)h \neq x(hg)$$

ומצאנו כי הביטויים לא שווים ואין שמירה על אסוציאטיביות כחלק מהגדרת הפעולה, ולכן כמובן זוהי לא פעולה.

נשתמש במקום זאת בהופכית ונגדיר  $(g, x) \mapsto xg^{-1}$

פעולה זאת היא אכן פעולה מוגדרת והיא נקראת הפעולה הרגולרית הימנית.

יש עוד פעולה מעניינת של חבורה על עצמה, על-ידי הצמדה

### הגדרה: הצמדה

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g, x) \mapsto xgx^{-1}$$

היא פעולת ההצמדה, נחקור אותה בתרגיל. באנגלית Conjugacy. באופן דומה הפעולה היא *conjugate*.

בהינתן פעולה של  $G \curvearrowright X$  נגדיר פונצקיה  $f : G \rightarrow \text{Sym}(X) \subseteq \text{End}(X)$  על-ידי

$$f(g)(x) = g \cdot x$$

זאת שכן  $G \times X \rightarrow X$  שקול ל- $\{X \rightarrow X\}$ .

**טענה: הצמדה היא הומומורפיזם**

$f$  היא הומומורפיזם של חבורות.

הוכחה.

$$f(hg)(x) = (hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = f(h)(g \cdot x) = f(h)(f(g)(x)) = (f(h) \cdot f(g))(x)$$

□

למה  $f(g) \in \text{Sym}(X)$ ?

$$f(g) \cdot f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = f(1) = Id \text{ גם } f(g^{-1}) \cdot f(g) = f(g^{-1}g) = f(1) = Id \text{ כי}$$

בשיעור הבא נגדיר המון דברים על פעולות על קבוצות, אז צריך להבין את זה ואת הדוגמות באופן מאוד כבד ושלם.

שאלות מתרגיל 1

שאלה 1

$$\text{End}(X) = \{f : X \rightarrow X\}$$

היה צריך להוכיח שזה מונואיד. וזה חבורה רק כשהקבוצה היא הקבוצה הריקה או יחידון או משהו כזה. הסעיף השני הוא שיהא  $M$  מונואיד כך שלכל  $x \in M$  קיים הופכי משמאל ומראים ש- $M$  חבורה.

פתרון. יש לי  $x \in M$  וצריך להראות שקיים  $y \in M$  כך ש- $xy = yx = e$ .

נתון קיום של  $y \in M$  כך ש- $yx = e$  ואנחנו רוצים להראות שגם  $xy \in M$ .

$$xy = e \implies (xy)^2 = e = x(yx)y = xy = e$$

ולכן  $\exists t \in M : tz = e$  ונקבל  $z = tz^2 = tz = e$ .

עכשיו נגיד שיש לנו מונואיד  $M$  כך ש- $x \in M$  ול- $x$  יש הופכי מימין והופכי משמאל וצריך להראות שהם שווים.

פתרון. קיימים  $y, z$  כך ש- $yx = e$  ו- $xz = e$ .

לכן

$$z = ez = (yx)z = y(xz) = y$$

הסעיף האחרון הוא לתת דוגמה לאיבר במונואיד עם הופכי משמאל ולא מימין.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ n-1, & n > 1 \end{cases} \quad f(x) = x+1$$

נבחן את  $\text{End}(\mathbb{N})$  ונבחר את  $f(x) = x+1$ .

שאלה 4

סעיף ב', צריך להראות שזה איזומורפי

$$\varphi : (\mathbb{R}^\times, \cdot) \rightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{R}^+$$

ונאחנו משתמשים בבינאריות של  $\mathbb{Z}/2$ , ואנחנו יודעים שלוגריתם משמר פעולות.

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1, \ln |x|), & x < 0 \\ (0, \ln |x|), & x > 0 \end{cases}$$

ועכשיו לסעיף ג':

צריך למצוא פונקציה

$$\varphi : GL_2(\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\sim} S(\{v_1, v_2, v_3\}), \quad v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1)$$

$$\varphi(T) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(T)\varphi(S) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ S(v_1) & S(v_2) & S(v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ T(S(v_1)) & T(S(v_2)) & T(S(v_3)) \end{pmatrix}$$

וזה מן הסתם עובד די טוב. אז בקיצור זה איזומורפיזם. ועכשיו נתחיל באשכרה תרגול.

## מחלקות שקילות

### הגדרה

תהא  $G$  חבורה, ו- $H \leq G$ . מחלקות השקילות השמאליות של  $H$  הן קבוצות מהצורה  $gH, g \in G$ .

### תכונות של מחלקות

$$1. \quad gH = H \iff g \in H$$

$$2. \quad \text{אם } H \text{ סופית אז לכל } g \in G \text{ מתקיים } |gH| = |H|.$$

$$3. \quad \forall g \in G : gH = Hg \iff gHg^{-1} \subseteq H$$

$$4. \quad \text{ישנה התאמה בין הקבוצות } gH \text{ ל-} Hg.$$

### הגדרה: אינדקס

תהי  $H \leq G$  חבורה ותת-חבורתה.

נגדיר  $[G : H]$  להיות מספר המחלקות השמאליות של  $H$ . אם מספר זה אינסופי אז נגדיר את האינדקס  $[G : H] = \infty$ . מספר זה נקרא אינדקס של  $H$  ב- $G$ .

### דוגמות

נתבונן ב- $D_3$ . חבורת הסימטריות על משולש שווה צלעות. יש לנו שלושה צירי סימטריה, ויש לנו שלושה סיבובים לעשות.

$$D_3 = \{r, r^2, f, fr, fr^2\}$$

$$D_3 = \langle r, f \rangle \text{ מקיים}$$

$$\text{נגדיר } H_1 = \{e, f_2\}, H_2 = \{e, r, r^2\}$$

נראה כי מחלקות שקילות הן:

$$rH_1 = \{r, rf\}, r^2H_1 = \{r^2, r^2f\}, H_1 = H_1$$

ומהצד השני:

$$H_1r = \{r, fr\}, H_1r^2 = \{r^2, fr^2\}$$

ועבור  $H_2$ :

$$fH_2 = \{f, fr, fr^2\}, \text{etc}$$

עתה נדבר על סדר.



## משפט לגרנו'

הגדרה: סדר של איבר

תהא  $G$  חבורה סופית ו-, לכן  $g \in G$  נגדיר את הסדר של  $g$ , או  $|g| = \text{ord}(g)$  הוא המינימום של המספרים הטבעיים כך ש- $g^n = e$ .

## משפט לגרנו'

תהא  $G$  חבורה סופית ו- $H$  תת-חבורה של  $G$ . אז

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$$

ובפרט  $|H| \mid |G|$ .

## מסקנה

תהא  $G$  סופית ו- $g \in G$  אז  $|G| \mid \text{ord}(g)$ .

הוכחה. עליידי התבוננות ב- $H = \langle g \rangle$ .

למה:  $|H| = \text{ord}(g)$ .

הוכחה. נגדיר  $\varphi : \mathbb{Z}/\text{ord}(g) \rightarrow H$  עליידי  $\varphi(b) = g^b$ .

נראה כי  $\varphi$  חד-חד ערכית ועל.

יהיו  $n, m \in \mathbb{Z}/\text{ord}(g)$  ונניח כי  $\varphi(n) = \varphi(m)$ , אזי  $g^n = g^m$  ולכן  $g^{n-m} = e$  ולכן  $n - m = 0$ , שאם לא כן יש סתירה למינימליות של  $\text{ord}(g)$ .

מה החבורה הנוצרת עליידי  $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

יהא  $n \in \mathbb{Z}$  נחלק את  $n$  עם שארית בסדר של  $g$ ,  $n = m \cdot \text{ord}(g) + r$ , לכן  $g^n = g^{m \cdot \text{ord}(g) + r} = g^r$ .

הראינו כי  $|H| = \text{ord}(g)$  ולכן הסדר של  $|G| \mid \text{ord}(g)$ .

## מסקנה:

תהיה  $G$  חבורה סופית.

$$\forall g \in G, g^{|G|} = e$$

הוכחה. לפי המסקנה הקודמת

$$g^{|G|} = g^{k \cdot \text{ord}(g)} = g^{\text{ord}(g)} = e$$

## מסקנה

יהיה  $p$  ראשוני, ו- $G$  חבורה מסדר  $p$ . אז

1.  $G$  ציקלית.

2.  $G$  איזומורפית ל- $\mathbb{Z}/p$ .

3. כל החבורות מגודל  $p$  איזומורפיות.

הוכחה.  $G$  היא לא חבורה טריוויאלית בגלל  $p$  ולכן נוכל להגדיר  $g \in G \setminus \{e\}$ .

נשים לב כי  $1 < \text{ord}(g) \leq p$  מצד שני  $|\langle g \rangle| = \text{ord}(g)$ .

לכן  $\langle g \rangle = G$ ,  $|\langle g \rangle| = p$ .

סעיף ב' בתרגיל 2.

□

### משפט פרמה הקטן

יהיה  $p$  ראשוני,  $a \in \mathbb{Z}$ , אם  $\gcd(a, p) = 1$  אז  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

הוכחה. נתבונן בחבורה הכפלית של  $\mathbb{Z}/p$ , מסומנת  $\mathbb{Z}/p^\times$  שהוא השדה בלי 0.

הגודל של  $\mathbb{Z}/p^\times$  הוא  $p-1$  ולכן לכל  $x$  בחבורה הזאת  $x^{p-1} = 1$ .

כעת נחלק את  $a$  ב- $p$  עם שארית, ונקבל  $a = np + r$  כאשר  $0 < r \leq p-1$ , וזה נכון כי הם זרים, דהינו  $r \in \mathbb{Z}/p^\times$ .

נשים לב כי

$$a^{p-1} = (np + r)^{p-1} \implies a^{p-1} = (np + r)^{p-1} \pmod{p} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} (np)^i r^{p-1-i} \pmod{p} = r^{p-1} \pmod{p}$$

לכן  $a^{p-1} = r^{p-1} = 1$ .

□

### שאלה 4 סעיף א'

היה צריך למצוא תת-חבורה של  $GL_n(\mathbb{F})$  שאיזומורפית ל- $S_n$ .

פתרון. אוסף מטריצות הפרמוטציה,  $\{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid A \text{ שורה או עמודה יש איבר בודד שאיננו אפס והוא אחד}\}$ .

המטריצות האלה הן כידוע מטריצות שפשוט מחליפות אנפים בווקטורים ולמעשה זה פשוט תמורה על הווקטורים מסדר  $n$ .

$S_n = S([n])$  ולכן נגדיר  $\varphi : H \rightarrow S_n$  על-ידי התמורה שפועלת על  $A$ .  $\varphi(A) = A$ .

□

## שיעור 5 — 22.5.2024

צריך ללכת לשעות קבלה, ליאור כועס עלינו שאנחנו לא הולכים אליהן. תברר מה השעת קבלה שלו ולך פעם אחת.

נניח שיש לי  $G$  חבורה סופית. מלגרז' נובע ש- $|H| \mid |G|$   $\implies H \leq G$ . משפט קושי אומר שאם  $|G|$  ראשוני אז קיימת חבורה  $H \leq G$  כך ש- $|H| = p$ . למעשה קיים  $x \in G$  עם  $o(x) = p$ .

### פעולות על קבוצות

בהינתן  $G \curvearrowright X$  נסמן עבור  $x, y \in X$  את  $x \sim y$  כיחס שמתקיים אם  $\exists g \in G : g \cdot x = y$ . במילים פשוטות, שני איברים בקבוצה הם דומים אם קיים איבר בחבורה שמוביל מאחד מהם לשני. רעיונית מדובר בסימטריה, ולכן הגיוני לשאול אם שני מצבים הם סימטריים ללא קשר למה הפעולה שמשרה את הסימטריה.

### טענה: יחס שקילות בפעולה על קבוצות

$\sim$  הוא יחס שקילות.

הוכחה. נבחין כי הגדרת יחס השקילות מתקיימת:

• רפלקסיבי  $e \cdot x = x$ .

• סימטרי:  $x \sim y \implies \exists g \in G : g \cdot x = y \implies g^{-1} \cdot y = x \implies y \sim x$ .

• טרנזיטיבי:  $x \sim y, y \sim z \implies \exists g, h \in G : gx = y, hy = z \implies (hg)x = h(gx) = hy = z \implies x \sim z$ .

□

משמעות הדבר היא שסימטריות הן שקולות. שוב, מדובר ברעיון מאוד הגיוני שכן אם בוחנים את הכול בעיניים של סימטריה. כלל המצבים שסימטריים בזוגות גם סימטריים בכללי.

### הגדרה: מסלולים

בהינתן  $G \curvearrowright X$ , המסלולים של  $G$  הם מחלקות השקילות של  $\sim$  והמסלול של  $x \in X$  הוא

$$O(x) = \{y \in X \mid y \sim x\} = \{y \in X \mid \exists g \in G : g \cdot x = y\}$$

סימן: קבוצת המסלולים מסומנת  $G \backslash X$ .

אבחנה:  $X = \bigcup_{O \in G \backslash X} O$ , דרך מזעזעת להגיד שהקבוצה המקורית מורכבת מהחלוקה למסלולים שלה. מהותית אנו מדברים פה על החלוקה של  $X$  לפי השקילות, בכל קבוצה יהיו רק איברים ששקולים אחד לשני.

### הגדרה: נקודת שבת

$x \in X$  נקודת שבת של  $G$  אם  $|O(x)| = 1$ .

כלומר  $\forall g \in G : g \cdot x = x$ .

הרעיון הוא שהפעולה על איבר מסוים תמיד מחזירה אותו עצמו, ללא קשר לאיזו סימטריה מהחבורה אנחנו בוחרים.

## הגדרה: טרנזיטיביות

פעולה  $G \curvearrowright X$  נקראת טרנזיטיבית אם  $|G \backslash X| = 1$ .  
הפעולה היא טרנזיטיבית אם יש רק קבוצת מסלולים (שהיא חלוקת שקילות) אחת, דהיינו שכל איבר בקבוצה סימטרי לכל איבר אחר.

## מסקנה

$H \backslash G$  קבוצת המסלולים של  $H \curvearrowright G$  רגולרית משמאל שקולה ל- $H \backslash G$  קבוצת המחלקות הימניות של  $H$  ב- $G$ .  
באופן דומה  $G/H$  המסלולים של הפעולה  $H \curvearrowright G$  הרגולרית מימין.  
יש פה התכנסות מאוד אלגנטית גם של הרעיון של מחלקות ימניות ושל השקילות מבחינת רגולריות משמאל, זו הרי מהותית מגדירה הכפלה של האיברים משמאל, ולכן גם המסלולים מעל התת-חבורה הם המחלקות האלה.

## דוגמות

1.  $G \curvearrowright G$  פעולה רגולרית שמאלית.  $\forall x, y \in G, x \sim y \iff g \in G : gx = y$  ותמיד קיים  $g$  כזה והוא אף יחיד,  $g = yx^{-1}$ . לכן יש מסלול אחד והפעולה טרנזיטיבית.

2. יהי  $H \leq G$ , ונבחן את  $H \curvearrowright G$ , רגולרית משמאל, הפעם  $Hx = Hy \iff yx^{-1} \in H \iff \exists h \in H : hx = y$ . מחלקות ימניות.

מצאנו הפעם כי יש מסלול בין איברים רק אם הם באותה מחלקה ימנית (על אף שמדובר על רגולריות שמאלית). נראה את המסקנה האחרונה.

3.  $GL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2$  מטריצות הפיכות פועלות על המרחב  $\mathbb{R}^2$ .

מסלולים:  $\{\{0\}, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ .

ביתר פירוט, מטריצות הפיכות משמרות את האי-אפס, אבל כן נוכל להגיע מכל וקטור לכל וקטור אחר עם המטריצה הנכונה. לעומת זאת וקטור אפס ישאר אפס מכל מטריצה שתוכפל בו, ולכן הוא לא סימטרי לאף וקטור אחר בפעולה.

4.  $O_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ , ידוע כי  $O_2(\mathbb{R}) \leq GL_2(\mathbb{R})$ . הפעם כל וקטור צריך להגיע רק לווקטור מאותו גודל.

מסלולים:  $\{\{0\}, \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = a\} \mid a > 0\}$ .

לכל וקטור שנבחר, כל מטריצה בחבורה משמרת את הנורמה שלו, אבל לא את הכיוון, ובהתאם נוכל להסיק שכל שני וקטורים עם אותה נורמה שקולים ונמצאים באותה קבוצה.

5.  $S_n \curvearrowright \{1, \dots, n\}$  הפעולה הזו היא טרנזיטיבית.

זה די טריוויאלי בגדול, נוכל לסדר מחדש את רשימת המספרים בכל דרך על-ידי איזושהי תמורה, ובהתאם כל הסדרים דומים אחד לשני ויש ביניהם מסלול.

6. כל הדגלים שמחולקים לשלושה פסים בשלושה צבעים, וכל האופציות לבחור את שלוש הצבעים. יש מן הסתם שמונה דגלים כאלה.

אפשר להגדיר פעולה  $\mathbb{Z}/2$  של סיבוב ב- $180^\circ$  ואז אפשר לראות אילו דגלים מתקשרים לאילו דגלים אחרים. יש שישה מסלולים.

## הגדרה: מקבע

תהינה  $G \curvearrowright X$ , עבור  $g \in G$ , ונגדיר את המקבע להיות  $Fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$ .

עוד סימון הוא  $X^g$ , אבל לא מומלץ להשתמש בו, הוא יחסית מבלבל.

עבור איבר בחבורה, המקבע הוא כל האיברים בקבוצה שהפעולה לא משנה, הם לא בהכרח נקודות שבת כי אנחנו מדברים פה בהקשר של סימטריה ספציפית.

## הגדרה: מייצב

יהיו  $G \curvearrowright X$ , אז נגדיר את המייצב של  $x \in X$  להיות  $Stab(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$ , באנגלית Stabilizer. סימון נוסף הוא  $G_x$ .

במילים זוהי קבוצת איברי החבורה שלא משנים את  $x$ , או לחילופין שולחים אותו לעצמו. האינטואיציה היא שיש איברים שסימטריות מסוימות פשוט לא משפיעות עליהם, ובהתאם המייצב הוא קבוצת הסימטריות הכאלה שנייטרליות לאיבר שבחרנו.

## למה: מייצב הוא תת-חבורה

$G_x$  תת-חבורה של  $G$ .

הוכחה. נבדוק את הגדרת תת-החבורה:

$$1. \text{ איבר נייטרלי: } e \cdot x = x \implies e \in G_x$$

$$2. \text{ סגירות לכפל: } \forall g, h \in G, g \cdot x, h \cdot x = x \implies (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x \implies gh \in G_x$$

$$3. \text{ קיום הופכי: } g \in G \implies g \cdot x = x \implies x = g^{-1} \cdot x \implies g^{-1} \in G_x$$

מצאנו כי כלל התכונות מתקיימות ולכן  $G_x$ , המייצב של  $x$ , הוא תת-חבורה של  $G$ . □

## הגדרה: פעולה חופשית

$G \curvearrowright X$  נקראת חופשית אם  $G_x = \{e\}$  לכל  $x \in X$ . במילים אחרות, הפעולה לעולם לא שולחת איבר לעצמו. היא נקראת נאמנה אם  $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$ , החיתוך הזה בכללי גם נקרא גרעין. נאמנה זה שם קצת מוזר אבל הוא בגדול מבטיח שאין איבר בחבורה שכל איברי הקבוצה נייטרליים אליו, חוץ מהאיבר הנייטרלי עצמו. עניין הגרעין הוא די דומה למה שקורה בלינאריות גם, איבר שהפעולה איתו לא משפיעה על אף איבר בקבוצה.

## דוגמה

נבחן את  $G \curvearrowright G$  על-ידי הצמדה.

$$O(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$$

המסלול של  $x$  הוא קבוצת האיברים שמקיימים  $gxg^{-1} = y$ , באופן מאוד דומה למטריצות דומות. נקרא למסלול הזה מחלקת צמידות.

## הגדרה: מרכז

ישנו המרכז של  $x$  ב- $G$  והוא  $C_G(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} \iff gx = xg$ . באנגלית Centralizer. מרכז הוא סוג של מייצב במקרה שבו  $X = G$ .

## משפט: מסלול-מייצב

$$G \curvearrowright X \text{ ו- } x \in X. |O(x)| = [G : G_x]. \text{ וזה נכון גם כשהחבורה לא סופית. } O(x) \xrightarrow{\sim} G/G_x$$

בפרט אם  $G$  סופית אז  $|O(x)| = \frac{|G|}{|G_x|}$  ונובע שהגודל של כל מסלול מחלק את גודל החבורה. במילים הטענה היא שהמסלול של  $x$ , שהוא מספר האיברים שאפשר להגיע אליהם ממנו, שווה לאינדקס של המייצב, דהינו מספר מחלקות השקילות

השונויות שאפשר ליצור בעזרת מחלקות שמאליות עם התת-חבורה שלא מושפעת מ- $x$ .

הוכחה. נגדיר  $f: G/G_x \rightarrow O(x)$  ונראה שהיא חד-חד ערכית ועל.

נבחר  $f(gG_x) = g \cdot x$ . זה לא בהכרח מוגדר היטב ולכן נבדוק למה זה כן.

אם יש איבר  $g' \in gG_x$  אז  $g' = g \cdot h$  כך  $h \in G_x$ . מתקיים ש- $g \cdot x \stackrel{h \in G_x}{=} ghx$ .

על: לפי הגדרה.

חד-חד ערכי: נניח ש- $g'G_x = gG_x$  סגירות להופכי  $\implies (g')^{-1}g \in G_x \implies (g')^{-1}gx = x \implies g' \cdot x = f(g'G_x) = f(gG_x) = g \cdot x$ .  $\square$

## דוגמה

תהינה חבורה  $H \leq G$  ותת-חבורתה, יש פעולה "רגולרית" של  $G$  על  $G/H$ :

$$g \cdot (xH) = (g \cdot x)H$$

## משפט קושי

יהיו  $G$  חבורה סופית ו- $p$  ראשוני כך ש- $p \mid |G|$ . אז קיים  $x \in G$  כך ש- $\text{ord}(x) = p$ .

הוכחה. נגדיר פעולה של החבורה  $\mathbb{Z}/p$  על הקבוצה  $X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1g_2 \cdots g_p = e\}$ .

הפעולה פועלת על-ידי שיפט ציקלי:  $u \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  אז  $k \cdot (g_1, \dots, g_p) = (g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_p, g_1, \dots, g_k)$ .

אז  $k(g_{k+1}, \dots, g_p) = e$  וגם  $(g_{k+1}, \dots, g_p)(g_1, \dots, g_k) = e$ .

נבחין כי כלל המסלולים בפעולה הם אחד משני סוגים:

- מסלולים בגודל  $p$ . אם לא כל האיברים זהים, מעגל שלם יקח ככמות האיברים והיא מוגדרת להיות  $p$ .

- מסלולים בגודל 1. אם כל האיברים זהים אז שיפט יחזיר את האיבר עצמו.

$$|O(x)| \mid p \iff |O(x)| = 1, p$$

עתה נבחין כי אם ישנו מסלול בגודל  $p$  אז הוא כמובן ממלא את טענת ההוכחה ולכן נניח שאין כזה.

נראה כי מסלול בגודל 1 הוא מסלול שמקיים  $(g_1, \dots, g_p) = (g_2, \dots, g_p, g_1)$  כלומר  $(g, \dots, g)$  כלומר  $g^p = e$ .

$$|X| = \sum_{O \in \mathbb{Z}/p \backslash X} |O| \quad X = \bigcup_{O \in \mathbb{Z}/p \backslash X} O$$

אם  $(e, \dots, e)$  היה נקודת השבת היחידה אז  $|O| = 1 \pmod{p}$ , שכן כל מסלול כולל  $p$  חילופים ונקודת השבת היחידה הייתה תורמת 1 בלבד.

לכן מצד אחד  $p \mid |G|^{p-1}$  ומצד שני  $|G|^{p-1} \cong 1 \pmod{p}$  ולכן קיים  $x \neq e$  עם  $x^n = e$ .  $\square$

ההוכחה מוויקיפדיה הרבה יותר ברורה.

## שיעור 6 — 27.5.2024

### מקבעים של פעולות

תזכורת: מקבע

מקבע  $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$ , דהינו האיברים ב- $X$  שלא משתנים על-ידי הסימטריה  $g$ .

לדוגמה עבור החבורה  $D_4$  ו- $X = \{1, 2, 3, 4\}$  אוסף קודקודי ריבוע נבחן את  $g$  סיבוב על האלכסון:  $g = (1\ 3)$  ואת  $h = (1\ 2)(3\ 4)$  שיקוף על האמצע. אז כמובן המקבע של  $g$  ב- $X$  הוא  $X^g = \{1, 3\}$  אוסף הקודקודים שלא מושפעים מהסימטריה  $g$ . באופן דומה  $X^h = \emptyset$ , דהינו הסימטריה  $h$  תמיד משנה את כל הקודקודים ובהתאם המקבע הוא ריק.

### למה: הלמה של ברנסייד

תהיה חבורה סופית  $G$  ופעולה  $G \curvearrowright X$  כאשר  $X$  סופית גם היא. יהי  $g \in G$  ונסמן  $\text{Fix}(g) = X^g = \{x \in X \mid gx = x\} \subseteq X$ . אז מספר המסלולים (מסומן גם  $X/G$ ) הוא

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

דהינו ממוצע כמות האיברים שנשארים במקום היא ככמות המסלולים השונים.

הוכחה. תהי חבורה סופית  $G$ . עבור  $X$  סופית ופעולה  $G \curvearrowright X$  נגדיר

$$E(X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

נוכיח כי  $E(X) = |X/G|$ .

נשים לב שאם  $X, Y$  קבוצות זרות עם פעולה של  $G$ , אז נובע מהזרות ומהגדרת המסלולים של הקבוצות כי

$$(X \sqcup Y)/G = X/G \sqcup Y/G \implies |(X \sqcup Y)/G| = |X/G| + |Y/G|$$

עוד נראה כי  $(X \sqcup Y)^g = X^g \sqcup Y^g$   $\forall g \in G$ : ולכן גם  $|(X \sqcup Y)^g| = |X^g| + |Y^g|$ , ונוכל להסיק ש- $E(X \sqcup Y) = E(X) + E(Y)$ . נסיק כי אילו הלמה נכונה עבור  $X, Y$  זרים, אז היא מתקיימת גם עבור איחודם  $X \sqcup Y$ .

תהי  $X$  קבוצה כלשהי, נוכל לכתוב גם

$$X = \bigsqcup_{O \in G \backslash X} O$$

במילים ש- $X$  היא איחוד זר של קבוצות המסלולים השונות שמוגדרות על-ידי הפעולה  $G \curvearrowright X$ .

על-כן מהטענה שהוכחנו זה עתה מספיק להוכיח את הטענה כאשר ל- $X$  יש מסלול יחיד  $x = O$ , ובמקרה הכללי נוכל לאחד איחוד זר של מסלולים. נניח מעתה כל  $X \neq \emptyset$  עם מסלול יחיד (פעולה טרנזיטיבית). במקרה הזה צריך להוכיח

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = E(X) = 1$$

נגדיר עבור  $x \in X, g \in G$  את  $s(g, x)$  על-ידי

$$s(g, x) = \begin{cases} 1, & gx = x \\ 0, & gx \neq x \end{cases}$$

דהינו  $s$  מחזירה 1 אם  $g$  מקבעת את  $x$ . ואנו יודעים כי  $X^g = \{g \in G \mid gx = x\} = \{g \in G \mid s(g, x) = 1\}$ . לכן נוכל להסיק שמתקיים

$$|X^g| = \sum_{x \in G} s(g, x)$$

ועתה נציב ונקבל כי

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} s(g, x) = \sum_{x \in X} \sum_{g \in G} s(g, x) \stackrel{(1)}{=} \sum_{x \in X} |G_x| \stackrel{(2)}{=} |X| \cdot |G_x| = |G|$$

(1) נובע ישירות מההגדרה של מייצב  $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$

(2) ממשפט מסלול-מייצב נקבל כי  $|G| = |G_x| \cdot |O(x)|$  אבל ידוע שהפעולה טרנזיטיבית ולכן  $O(x) = X$   $\forall x \in X$ , לכן  $|G| = |X| \cdot |G_x|$ .

קיבלנו כי  $|E(X)| = 1$  ולכן נוכל להסיק כי הטענה מתקיימת תמיד.  $\square$

## דוגמות

בתזכורת הראינו כי עבור  $D_4$  ו- $X = \{1, 2, 3, 4\}$  מתקיים  $|X^g| = 2, |X^h| = 0$ . נחשב את כלל המקבעים ונקבל על-פי הלמה:

$$\frac{1}{8}(4 + 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 1 = |D_4 \backslash X|$$

דהינו  $D_4$  טרנזיטיבית לפי הלמה, שכן יש לה רק מסלול אחד.

דוגמה נוספת היא בחירת  $G$  סופית ופעולה שלה על עצמה עם הצמדה.

לכן  $g(h) = ghg^{-1} = h$  ונשים לב כי המקבע הוא  $C(g) = G^g = \{h \in G \mid ghg^{-1} = h\}$ .

כמות מחלקות הצמידות – היא מספר המסלולים על-פי הצמדה – ניתנת לחישוב על-ידי

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C(g)|$$

## הגדרה: מרכז חבורה

נגדיר את המרכז של חבורה  $G$ , המסומן  $Z(G)$ , להיות קבוצת האיברים שנייטרליים לסדר ההכפלה בהם:

$$Z(G) = \{h \in G \mid \forall g \in G : gh = hg\}$$

לחילופין הגדרה שקולה היא קבוצת האיברים שצמודים לעצמם בלבד.

## טענה: מרכז הוא תת-חבורה

תהי  $G$  חבורה, אז  $Z(G) \subseteq G$  היא תת-חבורה.

הוכחה. נראה כי תכונות החבורה חלות על  $Z(G)$ :

1. איבר נייטרלי:  $\forall g \in G : eg = ge \implies e \in Z(G)$

2. סגירות לכפל:  $\forall a, b \in G : \forall g \in G, abg = agb = gab \implies ab \in Z(G)$

3. סגירות להופכי:  $n \in Z(G) : ng = gn \implies \forall g \in G, n^{-1}g = gn^{-1}$

לכן  $Z(G)$  חבורה וחלקית ל- $G$  ולכן נובע  $Z(G) \leq G$ .

$\square$



למה: חיתוך מרכזים

תהי  $G$  חבורה, נזכר כי המרכז של  $G$  מוגדר על-ידי

$$C_G(x) = C(x) = \{g \in G \mid g x g^{-1} = x\}$$

ומתקיים

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C(x)$$

הוכחה. נובע ישירות מההגדרות

□

לכן נשים לב שחיתוך המרכזים הוא המרכז של החבורה, והיא תת-חבורה אבלית.

סימון: מחלקות צמידות

תהי חבורה  $G$ , אז נסמן את אוסף מחלקות הצמידות שלה:

$$cent(G) := \{X \subseteq G \mid \forall x, y \in X \exists g \in G : x = g y g^{-1}\}$$

נשים לב שמרכז עבור צמידות מסומן באופן מיוחד, וגם כאן זהו סימון מיוחד עבור  $G \setminus G$  עם פעולת ההצמדה.

כל איבר ב- $cent(G)$  הוא קבוצה שכלל האיברים בה צמודים זה לזה. נשתמש בהגדרת המרכז ונכתוב גם

$$cent(G) = \{X \subseteq G \mid \forall x, y \in X : y \in C(x)\}$$

ונסמן  $[g] \in cent(G)$  איבר כלשהו מייצג מכל מחלקת צמידות.

טענה: נוסחת המחלקות

תהי חבורה סופית  $G$ , אז מתקיים

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{[h] \in cent(G), h \notin Z(G)} \frac{|G|}{|G_h|}$$

הוכחה. תחילה נבחין כי נוכל לפרק את  $G$ :

$$G = \bigsqcup_{[h] \in cent(G)} C(h)$$

ונבחין כי לכל  $h \in G$  מתקיים

$$h \in Z(G) \iff |C(h)| = 1 \iff \forall g \in G : g h g^{-1} = h$$

אז נוכל לראות כי

$$G = Z(G) \sqcup \bigsqcup_{[h] \in cent(G), h \notin Z(G)} C(h)$$

ומכאן נסיק

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{[h] \in cent(G), h \notin Z(G)} |C(h)| \stackrel{\text{מסלול-מייצב}}{=} |Z(G)| + \sum_{[h] \in cent(G), h \notin Z(G)} \frac{|G|}{|G_h|}$$

□

**הגדרה: חבורת  $p$**

תהי חבורה סופית  $G$ , אז נקרא ל- $G$  חבורת  $p$  אם קיים ראשוני  $n \in \mathbb{N}$  כך שמתקיים  $|G| = p^n$ .

**טענה: מרכז של חבורת  $p$**

אם  $G$  חבורת  $p$  ו- $|G| \neq 1$  (לא טריוויאלית) אז  $|Z(G)| > 1$ .

*הוכחה.* למעשה נוכיח ש- $|Z(G)| \geq p$  ולכן  $|Z(G)| \geq p$ .

נשתמש בנוסחת המחלקות

$$|G| = |Z(G)| + \sum \frac{|G|}{|G_x|}$$

המשך יבוא

□

## צביעות

הגדרה: צביעה

תהי קבוצה  $X$  ותהי צביעה עם  $m$  צבעים, אז **צביעה** של  $X$  עם  $m$  היא פונקציה  $f : x \rightarrow [m]$ .  
הרעיון פה הוא שאנחנו יכולים לקחת את הקבוצה ולסווג לכל איבר בה צבע (מספר) ומן הסתם יש לנו  $[m]^{|X|}$  צביעות רעיוניות כאלה.

טענה: צביעה מעל פעולה

תהי קבוצה  $X$  ו- $G \curvearrowright X$  חבורה ופעולה המסומנת על-ידי  $\cdot$ , ויהי  $[m]^X$  אוסף הצביעות ב- $m$  של  $X$ .  
אז הפונקציה  $G \times [m]^X \rightarrow [m]^X$  : המוגדרת על-ידי

$$\forall g \in G, f \in [m]^X, \forall x \in X : g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

היא פעולה של  $G$  על  $[m]^X$ .

הוכחה. אנו צריכים לבדוק ששתי התכונות של פעולה של החבורה על הקבוצה מתקיימות.

• נייטרליות האיבר הנייטרלי:  $\forall f \in [m]^X, x \in X : e \cdot f(x) = f(e^{-1}x) = f(x)$

• סגירות לכפל:  $\forall f \in [m]^X, x \in X : g \cdot (h \cdot f)(x) = (h \cdot f)(g^{-1} \cdot x) = f(h^{-1}g^{-1} \cdot x) = (gh) \cdot f(x)$

ומצאנו כי התנאים לפעולה מתקיימים ומתקיים  $G \curvearrowright [m]^X$ . □

מה שבעצם עשינו פה הוא להרחיב פעולה של  $G$  על  $X$  להשרות פעולה מעל אוסף הצביעות השונות שלו, ועשינו את זה על-ידי שימוש בכפל בהופכי. מאוד חשוב לשים לב שאנחנו מקבלים את הצביעה כפונקציה של אוסף האיברים ב- $X$  לאוסף הצבעים, אבל זה עדיין איבר בקבוצת הצביעות.

הגדרה: שימור צביעה

נגדיר שצביעה  $f \in [m]^X$  נשמרת על-ידי  $g \in G$  אם  $f \in \text{Fix}(g)$ , דהינו  $g \cdot f = f$ .

## טטרהדרון

נבחן עתה את הטטרהדרון (ארבעון) שמרכזו הוא  $0 \in \mathbb{R}^3$  ושקודקודיו מסומנים על-ידי  $v_0, \dots, v_3$  ונגדיר אותו מעתה להיות  $\Delta^3$ . ונגדיר את חבורת הסימטריה  $\text{Sym}(\Delta^3)$  להיות אוסף האיזומטריות הלינאריות שמשמרות את הטטרהדרון:

$$\text{Sym}(\Delta^3) = \{T \in GL_3(\mathbb{R}) \mid |\det T| = 1, T\Delta^3 = \Delta^3\}$$

ונגדיר גם את חבורת הסימטרייות האיזומטריות שנוצרות על-ידי פעולות נוקשות:

$$\text{Sym}_+(\Delta^3) = \{T \in \text{Sym}(\Delta^3) \mid \det T = 1\}$$

נשים לב כי כל  $T \in \text{Sym}(\Delta^3)$  היא למעשה תמורה בין קודקודי הטטרהדרון. יותר מזה גם נשים לב כי אם שתי העתקות סימטריות משנות את הקודקודים באופן זהה אז הן מתנהגות באופן זהה.

נגדיר אם כן את התורה  $\sigma_T$  כתמורה שמזוזה את הקודקודים על-פי  $T \in \text{Sym}(\Delta^3)$ .

טענה: פעולת סימטריות על הקודקודים

הפעולה  $\text{Sym}(\Delta^3) \times \{v_0, \dots, v_3\} \rightarrow \{v_0, \dots, v_3\}$  : הנתונה על-ידי  $T \cdot v_i = T(v_i)$  היא פעולה על הקבוצה  $\{v_0, \dots, v_3\}$ .

הוכחה. בתרגיל

□

מסקנה: איזומורפיות הסימטריות

הפונקציה  $\varphi : \text{Sym}(\Delta^3) \rightarrow S(\{v_0, \dots, v_3\})$  המוגדרת על-ידי  $\varphi(T) = \sigma^T$  היא איזומורפיזם.

הוכחה. מספיק להוכיח ש- $\varphi$  היא הומומורפיזם ושכל מחזור מהצורה  $(v_i, v_j)$  הוא בתמונת  $\varphi$ . העובדה שהיא הומומורפיזם נובעת מיידית מהיותה פעולה על הקבוצה. יהיו  $i \neq j$  המתארים קודקודים, אז ישנו מישור העובר בין שני הקודקודים האחרים ודרך  $\frac{v_i+v_j}{2}$ . השיקוף סביב מרחב זה שולח את  $v_i$  ל- $v_j$  והפוך, בלי להשפיע על שאר הקודקודים. לכן  $(v_i, v_j) \in \varphi(\text{Sym}(\Delta^3))$ . נראה כי  $\varphi(\text{Sym}(\Delta^3))$  היא תת-חבורה של  $S(\{v_0, \dots, v_3\})$  ולכן היא מכילה קבוצה יוצרת, ומכאן נקבל  $\varphi(\text{Sym}(\Delta^3)) = S(\{v_0, \dots, v_3\})$ , מהטענות הקודמות נקבל גם חד-חד ערכיות.

□

מעתה נתייחס באופן שקול ל- $\text{Sym}(\Delta^3)$  ו- $\sigma_T$ .

מסקנה: טרנזיטיביות הפעולה

הפעולה של  $\text{Sym}(\Delta^3)$  על הקודקודים היא טרנזיטיבית.

הוכחה. נסיק מכך שכל  $(v_i, v_j) \in \text{Sym}(\Delta^3)$  שהמסלול של הגעה מכל קודקוד לכל קודקוד הוא יחיד, ולכן ככלל יש מסלול יחיד בפעולה.

□

נבחן עתה את הפעולה של  $\text{Sym}(\Delta^3)$  על  $[m]^X$  כאשר  $X = \{v_0, \dots, v_3\}$  כפי שהגדרנו בחלק הקודם.

טענה: מקבצי הסימטריות

יהי  $T \in \text{Sym}(\Delta^3)$ , אז נוכיח כי  $|Fix(T)|$  תלוי בסוג המחזור של  $T$  בלבד.

הוכחה. נכתוב את כלל סוגי המחזורים ב- $\text{Sym}(\Delta^3)$  על-פי אורכם:

1 1 1 1

2 1 1

2 2

3 1

4

מספר התמורות מכל סוג ב- $S_4$  הן 1, 6, 3, 8, 6, 1 בהתאמה. עתה נחשב את הצביעות המשתמרות על כל מקרה.

עבור 1 1 1 1 ישנה רק תמורת הזהות, ובהתאם היא משמרת את הצבע של כל קודקוד, ולכן  $|Fix(e)| = m^4$ .

עתה נבחן מחזור בגודל 2, דהינו  $\sigma = (i, j)$ . התמורה הזו תשמר את הצביעה של קודקודים אם ורק אם  $v_i, v_j$  הם מאותו הצבע. לכן לשני הקודקודים  $v_i, v_j$  יכולות להיות  $m$  צביעות שונות כך שהתמורה תשמר את הצביעה, כאשר שאר הקודקודים בלתי תלויים, ולכן במקרה זה ישנן  $m^3$  צביעות

משתמרות.

באופן דומה יש  $m^2$  צביעות משתמרות עבור שרשור שני מחזוריים מגודל 2.

כאשר בוחנים מחזוריים בגודל 3 אז יכולה להיות רק צביעה אחת לשלושת הקודקודים כך שהצביעה תשתמר, ולקודקוד הנותר הצבע חופשי, ונקבל  $m^2$ .

עבור תמורות שהן מחזור בודד מגודל 4 אז על כלל הקודקודים להיות באותו צבע, ונקבל כמובן את מספר הצבעים עצמו  $m$ .  $\square$

נשתמש בלמה של ברנסייד כדי לחשב את מספר המסלולים של סימטריות על קודקודים על צביעות שונות של הקודקודים.

$$|\text{Sym}(\Delta^3) \setminus [m]^X| = \frac{1}{|\text{Sym}(\Delta^3)|} \sum_{T \in \text{Sym}(\Delta^3)} |\text{Fix}(T)| = \frac{1m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m}{24}$$

**מסקנה: מסלולים מעל צביעה**

בעוד הפעולה של הסימטריות על  $X$  היא טרנזיטיבית, הפעולה מעל הצביעות היא עצמה לא כזו בהכרח, דהינו הטרנזיטיביות של פעולה לא מעידה על טרנזיטיביות הצביעה מעליה.

**טענה: כמות הצביעות בסימטריות חזיביות**

נבחן את הפעולה של  $\text{Sym}_+(\Delta^3)$  על הצביעות של הקודקודים ונחשב את כמות המסלולים השונים בה.

*פתרון.* נובע ממשפט לגרנו'. סיבובים ללא היפוך יכולים להיות מורכבים רק מסיבוב סביב אחת הפאות, ולכן רק ממחזוריים מהצורה  $(i j k)$ . יש כמובן 8 סיבובים אפשריים כאלה (סביב כל פאה יש שניים). לכן יש בחבורה  $\text{Sym}_+(\delta^3)$  לפחות 9 איברים יחד עם הנייטרלי, וממשפט לגרנו' נובע כי  $24 \mid |\text{Sym}_+(\delta^3)|$  ולכן  $|\text{Sym}_+(\delta^3)| \in \{12, 24\}$ .

אבל אנו יודעים כי  $|\text{Sym}_+(\delta^3)| < |\text{Sym}(\delta^3)|$  שכן ישנן העתקות שהופכות את הצורה, ולכן נקבל  $|\text{Sym}_+(\delta^3)| = 12$ . נחפש אם כן את שלוש התמורות החסרות. נשים לב כי תמורות מהצורה  $(i j)(ll)$  מוכלות גם הן ב- $\text{Sym}_+(\delta^3)$  שכן הן הופכות את סימן הדטרמיננטה פעמיים. לכן נוכל לבחור את התמורה בין שלושה זוגות כפולים של קודקודים ונקבל את שלוש התמורות החסרות.  $\square$

**מסקנה: מספר המסלולים בסימטריות סיבוביות**

נשתמש בלמה של ברנסייד ונקבל כי מספר המסלולים של  $\text{Sym}_+(\delta^3)$  על  $[m]^X$  היא

$$|\text{Sym}_+(\Delta^3) \setminus [m]^X| = \frac{1}{|\text{Sym}_+(\Delta^3)|} \sum_{T \in \text{Sym}_+(\Delta^3)} |\text{Fix}(T)| = \frac{1m^4 + 11m^2}{12}$$

**הערה: צביעה של פאות**

נשים לב כי ישנן ארבע פאות ולכן נוכל לקשר כל פאה לקודקוד ונקבל כי מספר הצביעות של פאות שקול למספר הצביעות של הקודקודים.