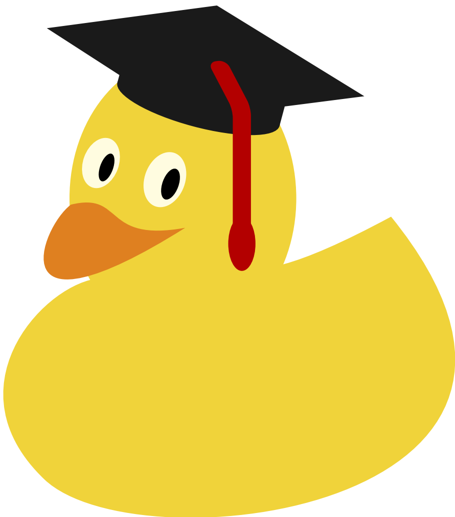
פתרון מטלה 07 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

27 ביוני 2024



שאלה 1

נמצא ונסווג את כל הנקודות הקריטיות של הפונקציה

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 3z - x$$

נחשב

$$\nabla f(x,y,z) = (2x + y - 1, 2y + x, 2z + 3)$$

נבדוק את התאפסות הגרדיאנט

$$\nabla f = 0 \iff z = \frac{-3}{2}, y = \frac{-1}{3}, x = \frac{2}{3}$$

ומצאנו כי ישנה נקודה יחידה חשודה והיא $p = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$. נחשב את הנגזרת השנייה ונקבל

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

זוהי כמובן מטריצה חיובית לחלוטין לפי משפט סילבסטר ולכן p מינימום מקומי ויחיד ולכן גם מינימום מוחלט.

שאלה 2

יהי $V = \mathbb{R}^{d\times d}$ מרחב מטריצות.

נוכיח שקיימת סביבה U של I כך שכל המטריצות ב־U הן ריבועים.

הוכחה. נגדיר $f : V \to V$ על־ידי $f(A) = A^2$.

נראה כי $f(A+H) = A^2 + AH + HA + H^2$ ולכן נוכל לקבוע כי f גזירה בכל נקודה וכי $(Df\mid_A)(X) = AX + XA$.

זוכי כמובן פונקציה רציפה ולכן מצאנו כי f גזירה ברציפות בסביבת $A \in V$ ובפרט ב־I.

נבחין כי $(Df\mid_I)(X) = 2X$ ובהתאם $J_f(I) = \det(2I) \geq 0$ ולכן קיימת סביבה פתוחה $V \subseteq U \ni I$ כך ש־$f^{-1} : U \to U$ מוגדרת וגזירה ברציפות בה. מהגדרת f ישירות נובע כי כל $A \in U$ היא ריבוע. $\square$

שאלה 3

נמצא את המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציות הבאות.

סעיף א'

הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, 3x\ge -y\}$.

נתחיל בבדיקת A°, זוהי קבוצה פתוחה ולכן נבדוק על־פי גזירה ומציאת נקודות קריטיות:

$$\nabla f(x,y)=(2x-12,2y+16)$$

הנקודה היחידה החשודה לקיצון היא $(6,-8)\notin A$.

עתה נבדוק את $\partial A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1, 3x=-y\}$.

נגדיר $g_1(x,y)=x^2+y^2-1, g_2(x,y)=3x+y$ ונראה כי $g_1(x,y)=g_2(x,y)=0 \iff (x,y)\in\partial A$.

נראה גם כי $\nabla g_1=(2x,2y), \nabla g_2=(3,1)$.

נתחיל בחיפוש נקודות קיצון תחת האילוץ g_1 ונקבל

$$\nabla f=\lambda\nabla g_1 \implies 2x(1-\lambda)=12, 2y(1-\lambda)=-16$$

אם $\lambda=1$ נקבל סתירה ולכן נניח $\lambda\ne 1$, וידוע כי $x,y\ne 0$ מהתחום ולכן נוכל להסיק

$$x\cdot\frac{-8}{y}=6 \implies x=-\frac{3}{4}y$$

נשתמש בשוויון $g_1(x,y)=0$ ונקבל $\frac{9}{16}y^2+y^2=1$ ולכן $y=\pm\frac{4}{5}$ ונקבל $\pm(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$, בתחום נמצאת רק $(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$, ובה $f(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})=-19$.

נבדוק את האילוץ השני ונקבל את השוויון

$$2x-12=3\lambda, 2y+16=\lambda$$

אילו $\lambda=0$ אז נקבל נקודה יחידה שאיננה בתחום g_1 ולכן נניח $\lambda\ne 0$ ונקבל

$$2x-12=3(2y+16) \implies x=3y+30$$

ונסיק מ־$g_2=0$ כי

$$3x+y=0 \implies 3x+3x+30=0 \implies x=-5$$

ונסיק כי הנקודה לא בתחום.

נבדוק את המקרה בו שני האילוצים מתקיימים, במקרה זה יש שתי נקודות יחידות כאשר

$$9y^2+y^2=1 \implies y=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

וקיבלנו את הנקודות $\pm(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}})$, ונקבל $f(\pm(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}))=1\mp\frac{36}{\sqrt{10}}\mp\frac{16}{\sqrt{10}}=1\mp\frac{52}{\sqrt{10}}$.

מצאנו את כל הנקודות.