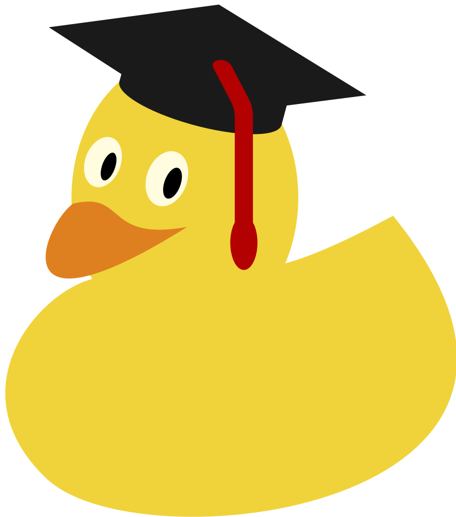
פתרון ממ"ן 14 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

25 באוגוסט 2023



שאלה 1

סעיף א'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin n\cdot\frac{(2^n+5^n)(n+1)^2}{n!}+\frac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}\right)$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sin n\cdot\frac{(2^n+5^n)(n+1)^2}{n!}\\ \iff&\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\frac{(2\cdot 2^n+5\cdot 5^n)(n+2)^2}{(n+1)!}\Big/\frac{(2^n+5^n)(n+1)^2}{n!}<1\\ \iff&\frac{\sin(n+1)}{\sin n}(2+\frac{3\cdot 5^n}{2^n+5^n})\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}(n+1)<1\end{aligned}$$

ניתן לשים לב כי כמעט לכל n אי־השוויון לא מתקיים, ולכן מהתנאי ההכרחי נובע כי הרכיב הראשון בטור לא מתכנס כלל.

ידוע כי $\cos x$ חיובי ואיננו מתאפס עבור $0<x\leq 1$ ולכן

$$\frac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}\geq 0$$

הביטוי חיובי או מתאפס לכל n ולכן נוכל להסיק כי הוא לא מתכנס או מתבדר לאינסוף או מתכנס לערך סופי.

מצאנו כי הטור מורכב מחיבור של טור מתבדר וטור חיובי ולכן נוכל להסיק כי הטור השלם מתבדר.

סעיף ב'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\cdot(n+1)^n}{n^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n$$

ידוע כי הפונקציה $(1+\frac{1}{n})^n$ מונוטונית עולה ומתכנסת ל־e ולכן לכל n

$$(1+\frac{1}{n})^n<e$$

ומתקיים

$$0\leq\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e\cos n}{n}\overset{5.10}{=}e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\qquad(1)$$

קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left|\frac{\cos n}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{|\cos n|}}{\sqrt{n}}=0$$

ולכן ממשפט 5.16** נובע ישירות כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$$

הוא טור מתכנס, ולכן מאי־שוויון (1) וממשפט ההשוואה הראשון נובע כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n$$

הוא טור מתכנס בהחלט.

סעיף ג'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$$

הטור מתכנס אם ורק אם האינטגרל הבא מתכנס על־פי מבחן ההתכנסות האינטגרלי:

$$\int_1^{\infty}\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)dx \tag{1}$$

מאי־השוויון הידוע $\sin x < x$ לכל $x > 0$ נוכל להסיק בתחום $1 < x$ גם:

$$1-x\sin\frac{1}{x}\leq\frac{1}{x^2}$$

וידוע כי

$$\int_1^{\infty}x^{-2}dx=-x^{-1}\Big|_1^{\infty}=0+1=1$$

לכן ממשפט 3.16 נובע כי האינטגרל (1) מתכנס ולכן גם הטור.

נשים לב כי כלל איברי הטור הם חיוביים ולכן הטור מתכנס גם בהחלט.

שאלה 2

נתונה סדרה (a_n) כך ש־$a_n > 0$ ו־$a_n \neq 1$ לכל n.

נוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$ מתכנס.

הוכחה. נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, על־פי משפט 5.5 הסדרה (a_n) אפסה, ולכן לכמעט כל n מתקיים $0 < a_n < 1$.

בהתאם גם $0 < 1 - a_n < 1$, נגדיר סדרה (b_n) כך שמתקיים

$$b_n = \frac{a_n}{1 - a_n}$$

ולכן לכמעט כל n אי־השוויון $0 < b_n < 1$ מתקיים.

עוד נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 1 - a_n = 1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

ולכן תנאי מבחן ההשוואה השני מתקיימים והטור

$$-\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$$

מתכנס והוכחנו את הכיוון הראשון של הטענה.

נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$ מתכנס.

נניח בשלילה כי (a_n) איננה אפסה, ולכן היא מתכנסת לערך סופי שונה מאפס או לערך לא סופי.

אילו היא מתכנסת לערך סופי שונה מאפס אז גבול הסדרה $\frac{a_n}{a_n - 1}$ הוא מספר שאיננו אפס או אינסוף בסתירה למשפט 5.5 ולנתון.

נניח אם כך כי הגבול של (a_n) הוא אינסוף או מינוס אינסוף, אך בשני מקרים אלה גבול $\frac{a_n}{a_n - 1}$ יהיה 1 בסתירה לאפסות הסדרה.

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ידוע כמובן מהנתון ומהגבול כי לכמעט כל n מתקיים $0 < a_n < 1$, ונוכל להגדיר מחדש את (b_n) כבחלק הראשון של ההוכחה, ולכן נתון כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$$

הוא טור מתכנס. נוכל אפוא להשתמש במשפט ההשוואה השני ולהוכיח כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

מצאנו כי שני הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו. **מש"ל**

שאלה 3

הסדרה (u_n) מוגדרת באופן הבא:

$$u_1 = 1, u_{n+1} = u_n \cdot \frac{1+u_n}{1+2u_n}$$

נוכיח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$$

הוא טור מתכנס.

הוכחה. נוכיח באידוקציה כי (u_n) מקיימת $0 < u_n \leq 1$ לכל n:

בסיס האינדוקציה: נתון כי $0 < u_1 = 1 \leq 1$

מהלך האינדוקציה: נניח כי $0 < u_n \leq 1$.

אז כמובן $1 < 1 + u_n \leq 2$ וגם $1 < 1 + 2u_n \leq 3$ ולכן בהתאם

$$0 < \frac{1+u_n}{1+2u_n} \leq \frac{2}{3} \implies 0 < u_n \frac{1+u_n}{1+2u_n} \leq \frac{2}{3} u_n \leq \frac{2}{3} \implies 0 < u_{n+1} \leq 1$$

מצאנו כי (u_n) חסומה ובמהלך ההוכחה אף ראינו כי לכל n מתקיים $u_{n+1} < u_n$, דהינו (u_n) היא סדרה מונוטונית יורדת וחסומה.

על־פי אינפי 1 הסדרה כמובן מתכנסת ואפסה.

נבחין כי

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n \leq (\frac{2}{3})^2 u_{n-1} \leq \cdots \leq (\frac{2}{3})^n u_1 = (\frac{2}{3})^n$$

דהינו u_n קטן מערך סדרה הנדסית שמנתה $2/3$ ובהתאם למשפט ההשוואה הראשון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס.

ממשפט 5.9 נובע כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_{n+1}$ אשר מורכב מסכום סדרות שטוריהן מתכנסים, הוא טור מתכנס.

מחישוב עולה כי

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{1+2u_n} \geq \frac{u_n + u_n^2}{3} \implies 3u_{n+1} \geq u_n + u_n^2 \implies 3u_{n+1} - u_n \geq u_n^2 > 0$$

ולכן באופן דומה גם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ מתכנס. **מש"ל**

שאלה 4

תהי (a_n) סדרה אפסה ויהי $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$k > 1$.

נגדיר לכל $n \geq 1$:

$$b_1 = \sum_{n=1}^{k} a_n, b_{n+1} = \sum_{n=kn+1}^{kn+k} a_n$$

נוכיח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

הוכחה. נוכיח תחילה באינדוקציה כי מתקיים

$$\sum_{n=1}^{m} b_n = \sum_{n=1}^{mk} a_n$$

בסיס האינדוקציה: השוויון מתקיים על־פי נתוני השאלה.

מהלך האינדוקציה: נניח כי התנאי מתקיים ולכן

$$\sum_{n=1}^{m+1} b_n = \sum_{n=1}^{m} b_n + b_{m+1} = \sum_{n=1}^{mk} a_n + \sum_{n=km+1}^{k(m+1)} a_n = \sum_{n=1}^{m(k+1)} a_n$$

והשלמנו את מהלך האינדוקציה.

כיוון ראשון: נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא מתכנס.

מהגדרת התכנסות הטור נובע כי מתקיים הגבול

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n$$

ומהגדרת היינה לסדרות נסיק כי גם הגבול

$$\lim_{mk\to\infty} \sum_{n=1}^{mk} a_n$$

הוא גבול מתכנס, וכמובן ש־$mk \to \infty$ אם ורק אם $m \to \infty$ ולכן מתכנס גם הגבול

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{mk} a_n = \sum_{n=1}^{m} b_n$$

ומהגדרת הגבול נובע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

כיוון שני: נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

מהגדרת הגבול נובע

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} b_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{mk} a_n$$

אז ממשפט 5.11 נובע ישירות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. **מש"ל**

שאלה 5

סעיף א'

נוכיח כי אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט וטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס בתנאי.

הוכחה. ממשפט 5.9 נובע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
ממשפט 5.24 אנו למדים כי טור החיוביים והשליליים של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, בעוד אלה של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדרים ל־∞.
מאינפי 1 אנו יודעים כי גבול סכום סדרות מתכנסת ומתבדרת הוא מתבדר ולכן גם גבול הטור המתאים לסדרה $|a_n+b_n|$ מתבדר ל־∞.
מצאנו כי טור סכומי אברי הסדרות מתכנס בתנאי. **מש"ל**

סעיף ב'

נסתור את הטענה כי אם

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

לכל n אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

סתירה. נגדיר

$$a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$$

ולכן כמובן

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(1 - \frac{1}{n})^n} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

ממסקנה 6.19 באינפי 1 נובע

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$$

בסתירה לתנאי ההכרחי להתכנסות טורים, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתכנס. **מש"ל**

סעיף ג'

נוכיח כי אם (a_n) סדרה יורדת ואפסה, אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

הוא טור מתכנס.

הוכחה. ממשפט 2.51 באינפי 1 אנו למדים כי הסדרה $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ היא סדרה אפסה, וידוע כי כל איבר ב־(a_n) חיובי ולכן גם כל איבר ב־(b_n) חיובי ונובע כי היא סדרה מונוטונית יורדת ואפסה.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n$ הוא טור חסום על־פי שאלה 33 ביחידה 5.
אז הסדרה $\sin 3n$ והסדרה (b_n) מקיימות את התנאים למבחן דיריכלה והטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

הוא טור מתכנס. **מש"ל**

סעיף ד'

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי־שלילית בתחום $[1,\infty)$, וידוע כי מתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
נוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם ורק אם האינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנס.

הוכחה. נגדיר סדרה חדשה (x_n) כך שמתקיים $0<f(x_{n+1})<f(x_n)$.
ניתן להגדיר סדרה כזו כמובן על־ידי שימוש בחיוביות ואפסות הפונקציה באינסוף.
על־ידי שימוש בסדרה זו נוכל להסיק ישירות כי הטור הנתון מתכנס אם ורק אם האינטגרל הנתון מתכנס אף הוא כמסקנה ממבחן ההתכנסות האינטגרלי. **מש"ל**