פתרון מטלה 08 — מבוא ללוגיקה, 80423

26 בדצמבר 2024

שאלה 1

תהי L שפה לתחשיב יחסים, תהי φ נוסחה ונניח ש־$x \in Var$.

סעיף א׳

נוכיח שלכל מבנה $\mathcal{A}$ ל־L ולכל השמה $\sigma : Var \to A$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$, אם ורק אם לכל מבנה והשמה כאלה מתקיים $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(\sigma)$.

הוכחה. נניח את הכיוון הראשון, נקבע $\mathcal{A}$ כלשהו ונבחין כי $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$ לכל הצבה σ כזו. לכן בפרט לכל הצבה, גם $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma[x : a])$ לכל $a \in A$. אבל במצב זה נבחין כי לכל $a \in A$ הטענה מתקיימת, כלומר $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(\sigma)$, ומצאנו כי הטענה אכן חלה.

לכיוון ההפוך נקבע שוב $\mathcal{A}$ כזה המקיים את הטענה והפעם נקבל שאם $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(\sigma)$ אז בפרט לכל $a \in A$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma[x : a])$. נוכל אם כן לבנות כל $\sigma : Var \to A$ כך ש־$\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$. □

סעיף ב׳

נוכיח שלכל מבנה $\mathcal{A}$ ל־L ולכל השמה $\sigma : Var \to A$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$ אם ורק אם לכל הכללה ψ של φ ולכל מבנה $\mathcal{A}$ ל־L מתקיים $\mathcal{A} \models \psi$.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה.
נבחין כי בסיס האינדוקציה הוא למעשה טענת הסעיף הקודם, ולכן נסיק שהיא אכן חלה.
נניח ש־$FV(\varphi) = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ וכן ש־$\psi = \forall x_0 \dots \forall x_{n-2} \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ ושהטענה חלה עבור פסוקים אלה, ונבחן את $\phi = \forall x_{n-1} \psi(x_{n-1})$. אז מאותה הוכחה של סעיף א׳ נובע שהטענה מתקיימת עבור ϕ ביחס ל־ψ ולכן השלמנו את מהלך האינדוקציה. □

שאלה 2

תהי $L=\{p_0,\dots,p_{n-1}\}$ שפה לתחשיב פסוקים, $\alpha\in form_L$.
תהי L' שפה לתחשיב יחסים ו־$\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}\in form_{L'}$.
תהי $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$ נוסחה המתקבלת מהחלפת כל מופע של p_i ב־φ_i בו־זמנית.

סעיף א׳

נוכיח שזוהי אכן נוסחה.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על מבנה הפסוק בתחשיב פסוקים.
עבור הבסיס נניח ש־$\alpha=p_i$ עבור $i\in[n]$, ולכן מההגדרה $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}=\varphi_i$ וזוהי כמובן נוסחה.
נניח שהטענה מתקיימת עבור α ונבחן את $(\neg\alpha)$. נניח $\psi=\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$, ולכן מההגדרה $(\neg\alpha)^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}=(\neg\psi)$ וזוהי כמובן נוסחה.
באופן דומה אם α,β מקיימות את הטענה אז קיימות החלפות ψ_0,ψ_1 בהתאמה עבורן, וברור ש־$(\psi_0\Box\psi_1)$ נוסחה לכל $\Box\in\mathcal{B}$, אבל זוהי גם תוצאת ההחלפה של $(\alpha\Box\beta)$, ולכן השלמנו את מהלך האינדוקציה והטענה אכן מתקיימת. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שאם α טאוטולוגיה אז גם $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$ היא טאוטולוגיה כנוסחה ב־L.

הוכחה. נבחין כי יש משמעות לשאילת שאלה זו בשל תוצאת הסעיף הקודם. נניח ש־$f:form_L\to form_{L'}$ ההחלפה שהגדרנו קודם לכן, ונגדיר גם $g:form_{L'}\to form_{L'_{prop}}$ הבנייה שהגדרנו בהרצאה להחלפת נוסחות יסודיות. נבחין ש־$g\circ f$ היא פונקציה $form_L\to form_{L'_{prop}}$ פונקציית החלפה בין שפות בתחשיב פסוקים המקיימות את טענת שאלה 1 במטלה 3, לכן הרכבה זו משמרת שקילות טאוטולוגית. כלומר אם α טאוטולוגיה אז גם $(g\circ f)(\alpha)$ כפי שרצינו להראות. $\square$

סעיף ג׳

נסיק שנוסחה בשפה לתחשיב יחסים היא טאוטולוגיה אם ורק אם היא מהצורה $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$ עבור טאוטולוגיה α ושפה כלשהי לתחשיב פסוקים L'.

הוכחה. נבחין כי הכיוון השני הוא למעשה טענת הסעיף הקודם, לכן נניח ש־α היא טאוטולוגיה ונוכיח שהיא מהצורה המבוקשת. $\square$

שאלה 3

תהי שפה L לתחשיב פסוקים ויהיו $\psi_0, \psi_1 \in form_L$, נוכיח שאם $\vdash \psi_0$ וגם $\vdash (\psi_0 \to \psi_1)$ אז $\vdash \psi_1$.

הוכחה. TODO $\square$

שאלה 4

תהי L שפה לתחשיב פסוקים ויהיו $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \in form_L$, בסעיפים הבאים נכתוב עצי היסק במערכת ההיסק KEP עבור כל טענה.

סעיף א׳

$\psi_0 \vdash (\psi_0 \lor \psi_1)$.

פתרון TODO

סעיף ב׳

$(\psi_0 \lor \psi_1) \vdash (\psi_1 \lor \psi_0)$.

פתרון TODO

סעיף ג׳

$((\psi_0 \lor \psi_1) \lor \psi_2) \vdash (\psi_0 \lor (\psi_1 \lor \psi_2))$.

פתרון TODO

סעיף ד׳

$((\psi_0 \land \psi_1) \land \psi_2) \vdash (\psi_0 \land (\psi_1 \land \psi_2))$.

פתרון TODO

סעיף ה׳

$\vdash (((\psi_0 \lor \psi_1) \land \psi_2) \leftrightarrow ((\psi_0 \land \psi_2) \lor (\psi_1 \land \psi_2)))$.

פתרון TODO

סעיף ו׳

$(\psi_0 \to \psi_1), (\psi_1 \to \psi_0) \vdash (\psi_0 \leftrightarrow \psi_1)$.

פתרון TODO

סעיף ז׳

$\vdash ((\psi_0 \land (\neg\psi_0)) \to (\psi_1 \land (\neg\psi_1)))$.

פתרון TODO

סעיף ח׳

$\vdash (\psi_0 \to (\psi_1 \to \psi_0))$.

פתרון TODO

סעיף ט׳

$\vdash (((\neg\psi_0) \to (\neg\psi_1)) \to (\psi_1 \to \psi_0))$.

פתרון TODO

סעיף י׳

$\vdash ((\psi_0 \to (\psi_1 \to \psi_2)) \to ((\psi_0 \to \psi_1) \to (\psi_0 \to \psi_2)))$.

פתרון TODO

שאלה 5

נאמר שכלל היסק ניתן להשמטה אם לכ שפה L לתחשיב פסוקים ולכל קבוצת פסוקים Σ ופסוק φ כך ש־$\Sigma \vdash \varphi$ קיים עץ היסק לטענה כך שהכלל אינו מופיע בה, לכל כלל בסעיפים הבאים נוכיח שהוא ניתן להשמטה.

סעיף א׳

$\frac{(A \to B), (\neg B)}{(\neg A)}$

הוכחה. TODO $\square$

סעיף ב׳

$\frac{(A \leftrightarrow B), A}{B}$

הוכחה. TODO $\square$

סעיף ג׳

$\frac{(A \leftrightarrow B), (\neg B)}{(\neg A)}$

הוכחה. TODO $\square$