פתרון ממ"ן 11 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

26 במרץ 2023

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי $a = k + m\sqrt{2}$ כאשר $k, m \in \mathbb{N}$ הוא מספר אי־רציונלי.

משפט 1.21 גורס כי $\sqrt{2}$ איננו רציונלי, לכן לא קיימים מספרים $p, q \in \mathbb{Z}$ כך ש־$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. אילו היה המספר $m\sqrt{2}$ מספר רציונלי אז היה מתקיים $m\sqrt{2} = \frac{mp}{q}$ בניגוד לאי־רציונליות $\sqrt{2}$, לכן $m\sqrt{2}$ מספר אי־רציונלי. נגדיר $p', q' \in \mathbb{Z}$, מתקיים:

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

לכן מספר כל חיבור מספרים רציונליים הוא מספר רציונלי, אילו הייתה התוצאה $k + m\sqrt{2}$ רציונלית אז היה נגזר כי גם $m\sqrt{2}$ רציונלית, בסתירה להיותו אי־רציונלי. לכן המספר a אי־רציונלי.

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ המספר $(1+\sqrt{2})^n$ לא רציונלי באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: המספר $(1+\sqrt{2})^1$ הוא כמובן מספר אי־רציונלי בהתאם לסעיף א'.

מהלך האינדוקציה: נניח כי $(1+\sqrt{2})^n = k + m\sqrt{2}, k, m \in \mathbb{N}$ אי־רציונלי. מתקיים

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2}) = (k+m\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = k + m\sqrt{2} + k\sqrt{2} + 2m = (k+2m) + (m+k)\sqrt{2}$$

ידוע כי $k+2m, m+k \in \mathbb{N}$ ולכן $(1+\sqrt{2})^{n+1}$ הוא מספר אי־רציונלי על־פי סעיף א' והושלם מהלך האינדוקציה.

שאלה 2

סעיף א'

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ נוכיח שמתקיים:

$$\left|\sqrt{|a|+1}-\sqrt{|b|+1}\right| \leq \frac{|a-b|}{2}$$

מתקיים לכל $x, y \geq 0$ כאשר $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

נגדיר

$$x=|a|+1, y=|b|+1$$

אז בשל חיוביות הערך המוחלט מתקיים לכל $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\left|\sqrt{|a|+1}-\sqrt{|b|+1}\right|=\frac{|a|+1-|b|-1}{\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}}=\frac{|a|-|b|}{\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}}$$

מהגדרת הערך המוחלט נובע כי לכל $a \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq |a| \rightarrow 1 \leq |a|+1 \rightarrow \sqrt{1}=1 \leq \sqrt{|a|+1}$$

ולכן תמיד מתקיים

$$2 \leq \sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}$$

בשל הופעת הביטוי במכנה נוכל להניח כי:

$$\left|\sqrt{|a|+1}-\sqrt{|b|+1}\right|=\frac{|a|-|b|}{\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}} \geq \frac{|a|-|b|}{2}$$

ועל־פי טענה 1.51:

$$\left|\sqrt{|a|+1}-\sqrt{|b|+1}\right| \geq \frac{|a-b|}{2}$$

סעיף ב'

נוכיח

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2+\left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2=a^2$$

לכל מספר ממשי n מתקיים $a^2=|a|\cdot|a|$ לפי טענה 1.48 סעיף 6. נשתמש בטענה זו ונפתח סוגריים:

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2+\left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2=\frac{a^2+2a|a|+a^2}{4}+\frac{a^2-2a|a|+a^2}{4}=\frac{4a^2+2a|a|-2a|a|}{4}=a^2$$

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח כי לכל $x,y\in\mathbb{R}$ אם $x\le y$ אז $\lfloor x\rfloor\le\lfloor y\rfloor$.

נניח כי $x\le y$. נגדיר $x'=\langle x\rangle, y'=\langle y\rangle$ החלקים השבריים של x,y בהאתמה. מתקיים $x=\lfloor x\rfloor+x', y=\lfloor y\rfloor+y'$ לכן

$$\lfloor x\rfloor+x'\le\lfloor y\rfloor+y'$$

אילו $x'\le y'$ הטענה מתקיימת, לכן נניח $x'>y'$. מתקיים $\lfloor x\rfloor<\lfloor y\rfloor$, אחרת יתכן כי החלק השלם של המספרים יהיה זהה, אך החלק השברי x' יהיה גדול מ־y' ויגרור $x>y$ בסתירה להנחה. אז מתקיים בכל מקרה $\lfloor x\rfloor\le\lfloor y\rfloor$.

סעיף ב'

(i) נפתור את המשוואה

$$\left\lfloor x-\frac{1}{2}\right\rfloor^2=25$$
$$\left(\left\lfloor x-\frac{1}{2}\right\rfloor^2+5\right)\left(\left\lfloor x-\frac{1}{2}\right\rfloor^2-5\right)=0$$
$$\left\lfloor x-\frac{1}{2}\right\rfloor=\pm5$$

על־פי טענה 1.64(1)

$$\pm5\le x-\frac{1}{2}<\pm5+1$$
$$\pm5+\frac{1}{2}\le x<\pm5+1\frac{1}{2}$$
$$-4\frac{1}{2}\le x<-3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\le x<6\frac{1}{2}$$

(ii)

$$\lfloor x^2\rfloor=9$$
$$9\le x^2<10$$
$$9\le x^2\wedge x^2<10$$
$$0\le x^2-9\wedge x^2-10<0$$
$$0\le(x-3)(x+3)\wedge(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})<0$$
$$(x\ge3\vee x\le-3)\wedge(x<\sqrt{10}\vee x>-\sqrt{10})$$
$$3\le x<\sqrt{10}, -\sqrt{10}<x\le-3$$

שאלה 4

סעיף א'

תהי הקבוצה

$$A = \left\{ q\sqrt{3} \mid q \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q} \right\}$$

נוכיח כי A צפופה בקטע $[0,1]$.

ידוע כי $\mathbb{Q}$ צפופה ב־$[0,1]$. נגדיר $f:\mathbb{Q} \to A$ המוגדרת $f(x) = x\sqrt{3}$. ניתן לראות כי f על וחד־חד ערכית ולכן הפיכה. לכל שני מספרים $a,b \in A$ אשר מקיימים $a < b$ מתקיים גם $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$, והרי אלו הם מספרים רציונליים אשר ידוע כי צפופים, נבחר מספר c אשר מקיים $f^{-1}(x) < c < f^{-1}(y)$, ונשים לב כי גם מתקיים $x < f(c) < y$. מצאנו כי A צפופה לכל שני מספרים שונים המוכלים בה, לכן היא גם צפופה בתחום $[0,1]$.

סעיף ב'

ננסח הגדרה לחוסר רציפות של קבוצה A בקטע I. תחילה נצרין את הטענה:

$$\neg \forall x,y \in I(x < y \to \exists a \in A(x < a \land a < y))$$

נפשט את הפסוק:

$$\exists x,y \in I(x < y \land \forall a \in A(x \geq a \lor a \geq y))$$

ננסח את הפסוק שהתקבל:

קבוצה A תיקרא לא צפופה ב־I אם קיימים שני מספרים $x,y \in I$ כך ש־$x < y$ וגם לכל איבר a ב־A מתקיים ש־$a \leq x$ או ש־$a \geq y$.

סעיף ג'

נוכיח כי קבוצת השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 3 אינה צפופה בקטע $[-1,1]$.

נגדיר $a = 0.3, b = 0.4$, ברור כי $a < b$, $a,b \in [-1,1]$, אך לכל מספר $x \in A$ מתקיים או $x \leq a$ או $x \geq b$, שכן כל מספר שלא עומד בהגדרה זו חייב להיות מהתצורה $0.3\ldots$ ולכן איננו שייך ל־A. אז לפי הגדרת סעיף ב' הקבוצה A איננה צפופה ב־$[-1,1]$.