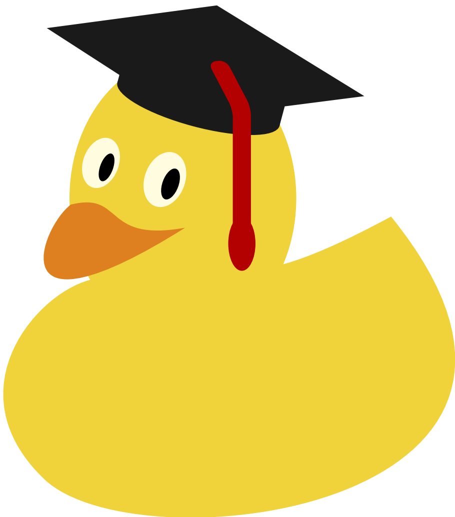
פתרון מטלה 05 — תורת הקבוצות (80200)

8 ביוני 2024



שאלה 3

תהי $\langle A, \leq\rangle$ קבוצה סדורה חלקית.

סעיף א'

תהי $B \subseteq A$, ונוכיח כי $\langle B, \leq \cap (B \times B)\rangle$ היא קבוצה סדורה חלקית אף היא.

הוכחה. נבדוק את תכונות הסדר החלקי.

1. טרנזיטיביות: $\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle \in \leq \cap B^2 \implies a \leq c \wedge a, c \in B \implies (a, c) \in \leq \cap B^2$.
2. רפלקסיביות: $\forall b \in B : \langle b, b\rangle \in \leq \wedge \langle b, b\rangle \in B^2 \implies \langle b, b\rangle \in (\leq \cap B^2)$.
3. אנטי־סימטריה: $\forall a, b \in B : \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle \in (\leq \cap B^2) \implies a = b, b \in B$

ומצאנו כי כל ההגדרות מתקיימות. □

סעיף ב'

נוכיח כי אם $a \in A$ הוא מינימום, אז הוא איבר מינימלי והמינימלי היחיד.

הוכחה. נניח כי $a \in A$ הוא מינימום ולכן $\forall b \in A : a \leq b$.
יהי איבר $b \in A$ המקיים $b \leq a$, אבל ידוע כי $a \leq b$ ולכן נסיק מהאנטי־סימטריה כי $a = b$, ולכן נובע כי a איבר מינימלי.
נניח כי קיים איבר $b \in A$ אשר הוא מינימלי, ואנו יודעים כי $a \leq b$, ולכן נובע מהמינימליות כי $a = b$, ומצאנו כי קיים איבר מינימלי יחיד והוא a. □

סעיף ג'

נוכיח כי הכיוון ההפוך לטענה הקודמת איננו נכון, קיום מינימלי יחיד לא גורר כי קיים מינימום.

הוכחה. נבחן את $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$ כאשר מוציאים את כל הזוגות הסדורים שמעורבים ב־0, מלבד $\langle 0, 0\rangle$.
סדר זה עומד בכלל ההגדרות, אין מינימום או מקסימום, ואפס הוא מינימלי. □

סעיף ד'

נוכיח שאם $\langle A, \leq\rangle$ הוא סדר מלא אז איבר הוא מינימלי אם ורק אם הוא המינימום.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $a \in A$ הוא איבר מינימלי. לכן $\forall b \in a : b \leq a \implies a = b$.
כל איבר $b \in A$ מקיים $b \leq a \implies a = b \implies a \leq b$ או $a \leq b$ ולכן נקבל כי $a \leq b$ בכל מקרה, ולכן a מינימום.

כיוון שני: נניח כי a הוא מינימום ולכן $\forall b \in A : a \leq b$.
יהי $b \in A, b \leq a$, אז $a \leq b$ ובפרט $a = b$ וקיבלנו כי גם הגדרת המינימלי חלה. □

סעיף ה'

נוכיח כי אם A סופית ולא ריקה אז יש בה איבר מינימלי.

הוכחה. נניח בשלילה כי לא קיים איבר מינימלי, לכן $\forall a \in A \exists b \in A : b \leq a, a \neq b$.
נניח ש־$|A| = n$ ונבחר $a_1 \in A$, כלשהו, נגדיר $a_2 \leq a_1, a_1 \neq a_2$, ובאופן דומה נגדיר $a_{k+1} \leq a_k, a_{k+1} \neq a_k$.
נבנה כך סדרה באורך $n+1$ ונסיק מעיקרון שובך היונים שאיבר כלשהו a_k מופיע פעמיים בסדרה ומקיים $a_k \leq a_k, a_k \neq a_k$ בסתירה להנחתנו כי אין איבר מינימלי. □

שאלה 4

יהיו ארבעה יחסים מעל $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$$R_1 = \{\langle f, g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall m : f(m) \le g(m)\}$$
$$R_2 = \{\langle f, g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \forall m : m > n \implies f(m) \le g(m)\}$$
$$R_3 = \{\langle f, g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \exists m, m > n \implies f(m) \le g(m)\}$$
$$R_4 = \{\langle f, g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f = g \vee (\exists n : f \restriction [n] = g \restriction [n] \wedge f(n) < g(n))\}$$

סעיף א'

נבדוק עבור כל יחס אם הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי־סימטרי.

עבור R_1:

1. נשים לב כי בהינתן $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ לכל $m \in \mathbb{N}$ נקבל $f(m) = f(m) \implies f(m) \le f(m)$ ולכן R_1 הוא רפלקסיבי.
2. יהיו fR_1g, gR_1h ויהי $m \in \mathbb{N}$, אז $f(m) \le g(m), g(m) \le h(m)$ ולכן גם $f(m) \le h(m)$ ולכן fR_1h, והיחס טרנזיטיבי.
3. יהיו fR_1g כך שגם gR_1f אז לכל $m \in \mathbb{N}$ אז $f(m) \le g(m)$ וגם $g(m) \le f(m)$ ולכן נוכל להסיק $f(m) = g(m)$, דהינו $f = g$, ולכן היחס אנטי־סימטרי.

עבור R_2:

1. נוכל להניח כי רפלקסיביות מתקיימת שכן אם נבחר $m = 0$ נקבל את התנאי של רפלקסיביות עבור R_1.
2. יהיו fR_2g, gR_2h, לכן קיימים n_1, n_2 כך שבהתאמה לכל $m > n_1, n_2$ מתקיים $f(m) = g(m), g(m) = h(m)$, ולכן נבחר $n = \max\{n_1, n_2\}$ ועבורו לכל $m > n$ נקבל $f(m) \le g(m) \le h(m)$ ולכן gR_2h.
3. נניח כי fR_2g, gR_2f, ונבחר באופן דומה להוכחת הסימטריה n מינימלי עבורו $m > n > 0$ מקיים $f(m) = g(m)$, אבל עבור $m = 0$ יכול להיות ש־$f(m) \neq g(m)$ ולכן לא מתקיימת אנטי־סימטריה.

עבור R_3:

1. לכל f ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) = f(n)$ ולכן נוכל לבחור $m = n + 1$ לכל n ונקבל כי fR_3f, דהינו היחס הוא רפלקסיבי.
2. נגדיר פונקציות הבנויות ממחזור המספרים הבא $f = (3, 2, 3, 3, 3, \dots), g = (2, 2, 3, 2, 2, \dots), h = (1, 1, 1, 2, 1, \dots)$, מאופן הבנייה נובע כי fR_3g, gR_3h אבל לכל $m \in \mathbb{N}$ גם $f(m) > h(m)$.
לכן נסיק כי היחס לא טרנזיטיבי.
3. נגדיר

$$f(m) = \begin{cases} 1 & m \in 2\mathbb{N} \\ 0 & m \notin 2\mathbb{N} \end{cases}, g(m) = 1 - f(m)$$

נבחין כי fR_3g, gR_3f, אבל $f \neq g$, ולכן היחס לא אנטי־סימטרי.

עבור R_4:

1. היחס מוגדר להיות רפלקסיבי.
2. יהיו fR_4g, gR_4h, אז קיים n_1, n_2 המקיימים את תנאי ההגדרה של הקבוצה עבור f, g ו־g, h בהתאמה.
נבחר $n = \min\{n_1, n_2\}$ ונקבל כי $\forall m < n : f(m) = g(m) = h(m)$, ועבור $m = n$ נקבל כי $f(m) < g(m) = h(m)$ או $f(m) = g(m) < h(m)$ ובכל מקרה קיבלנו כי $f(m) < h(m)$ וקיבלנו כי טרנזיטיביות חלה.
3. נבחין כי אם fR_4g וגם gR_4f מדרך ההוכחה של הסעיף הקודם נקבל כי $f(m) \neq f(m)$ עבור m כלשהו ולכן נסיק ש־$f = g$ כמתקבל מהתנאי הראשון של הגדרת הקבוצה.

סעיף ב'

מצאנו כי R_1, R_4 הם סדרים.

.i

נוכיח כי R_1 איננו יחס קווי ואילו כי R_4 הוא אכן יחס קווי.

הוכחה. עבור R_1 מספיק שנציג דוגמה נגדית, ולכן נבחר את הדוגמה ל־f, g מהסתירה כי R_3 היא אנטי־סימטרית.
ראינו כי $g(0) \leq g(0)$ אבל $f(1) \not\leq g(1)$ וגם כי $f(1) \leq g(1)$ אבל $f(0) \not\leq g(0)$ ולכן $\langle f, g\rangle \notin R_1, \langle g, f\rangle \notin R_1, f \neq g$ וקיבלנו כי היחס לא קווי.

נוכיח כי R_4 הוא אכן קווי.

הגדרתו מכילה איברים שווים ולכן מספיק שנוכיח כי אם $f \neq g$ אז או fR_4g או gR_4f בלבד.

יהיו $f, g \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ כך ש־$f \neq g$ ונגדיר $n \in \mathbb{N}$ המספר המקסימלי עבורו $\forall m \in \mathbb{N}, m < n : f(m) = g(m)$.

נבחין כי יתכן ש־$n = 0$ והטענה הזו מתקיימת באופן ריק בלבד. מאיך שהגדרנו את n נקבל כי $f(n) \neq g(n)$, ולכן או ש־$f(n) < g(n)$ ונגרר כי fR_4g או ש־$g(n) < f(n)$ ומתקבל gR_4f בלבד. $\square$

.ii

נבדוק את קיומם של איברים מינימליים, מקסימליים ואת קיומו של מינימום ומקסימום.

נבחן תחילה את R_1, ונטען ש־f המוגדרת על־ידי $f(n) = 0$ היא המינימום.

לכל פונקציה g שנבחר ולכל $m \in \mathbb{N}$ נקבל $f(m) = 0 \leq g(m)$ ולכן מצאנו כי זהו המינימום, ולכן מטענה מהשאלה הקודמת נקבל כי זהו גם האיבר המינימלי היחיד.

נבחר פונקציה כלשהי f, ונגדיר g על־ידי $g(n) = f(n) + 1$, ולכן מהגדרת R_1 נסיק כי fR_1g.

לכן מצאנו כי לכל פונקציה קיימת פונקציה גדולה ממנה ולכן אין איבר מקסימלי או מקסימום.

נעבור עתה ל־R_4. זהו יחס קווי ולכן כפי שהוכחנו אם יש איבר מינימום אז הוא המינימלי היחד.

גם הפעם נבחר את $f(n) =$, ונבחין כי לכל פונקציה או שמתקיים $g(n) = 0$ ולכן $f = g$ או ש־$f \neq g$ ולכן קיים m עבורו $g(m) > 0$ ונקבל ישירות fR_4g, דהינו f היא המינימום וההאיבר המינימלי היחיד ביחס.

תהי פונקציה f, ונגדיר פונקציה g על־ידי $g(n) = f(n+1)$, ולכן מתקיים $f(0) < g(1)$ ונקבל כי fR_4g, ולכן אין איבר מקסימלי או מקסימום ביחס.

שאלה 5

סעיף א'

נוכיח ש־$\trianglelefteq$ הוא יחס סדר חלקי על $Seq(A)$.

הוכחה. נבדוק את הגדרת יחס סדר:

1. רפלקסיביות: יהי $a \in A$, אז $a \trianglelefteq a$ שכן אורך הסדרה זהה לעצמו וכן כלל האיברים שווים.
2. טרנזיטיביות: יהיו $a \trianglelefteq b, b \trianglelefteq c$, ונגדיר m_a, m_b, m_c אורכי הסדרות, אז $m_a \leq m_b, m_b \leq m_c$ ונקבל $m_a \leq m_c$, ולכל $i < m_a$ נקבל $a_i = b_i = c_i$ וקיבלנו כי $a \trianglelefteq c$.
3. אנטי־סימטריה: נניח כי $b \trianglelefteq a$ וגם $b \trianglelefteq a$, ויהיו m, n אורכי a, b בהתאמה. אז נקבל $n \leq m, m \leq n$ ולכן $m = n$, וגם לכל $i < m$ מתקיים $a_i = b_i$ ולכן $a = b$.

נראה על־ידי דוגמה נגדית כי זהו לא יחס מלא, דהינו שהוא חלקי.

נבחר $a = (1), b = (2)$, אז $a \ntrianglelefteq b$ וגם $b \ntrianglelefteq a$ על־פי ההגדרה, וכמובן $a \neq b$. $\square$

סעיף ב'

נמצא תנאי מספיק והכרחי ל־A כך ש־$\trianglelefteq$ יהיה יחס סדר מלא על $Seq(A)$.

מצאנו כי היחס לא חל על סדרות שונות מאורך זהה, ולכן מספיק שנגביל את A להיות יחידון ונקבל כי אם $a, b \in Seq(A)$ אז $a \trianglelefteq b$ או $b \trianglelefteq a$ או $a = b$ כמתבקש.

נניח מהצד השני כי שתי סדרות באורך זהה a, b מקיימות $a \trianglelefteq b$ או $b \trianglelefteq a$, אז מההגדרה נקבל כי $a = b$ ולכן איבריהם זהים.

סעיף ג'

נמצא תנאי מספיק והכרחי עבורו יהיה איבר מקסימלי ב־$Seq(A)$.

נניח כי קיים איבר מקסימלי ב־A, ונניח בשלילה שאורכו 1 לפחות, לכן נוכל לבנות סדרה חדשה b על־ידי הכפלת האיבר ונקבל $a \trianglelefteq b$, בסתירה למקסימליות, לכן נסיק שכדי שיהיה איבר מקסימלי הוא צריך להיות מגודל 0.

דהינו נקבל כי $A = \emptyset$.

מהצד השני נניח כי $A = \emptyset$ ולכן גם $Seq(A) = \{\emptyset\}$ והקבוצה היא יחידון ולכן ישנו איבר מקסימלי.