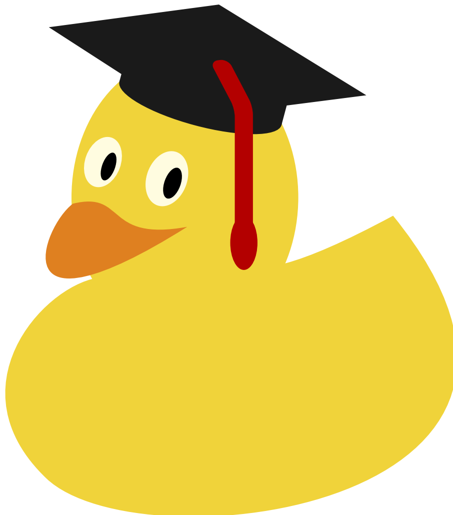
פתרון מטלה 01 — תורת הקבוצות (80200)

11 במאי 2024



שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי אם F קבוצת זוגות סדורים אז F היא פונקציה אם ורק אם $\forall x, y, y' : \langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in F \implies y = y'$.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי F פונקציה.

נגדיר $F : A \to B$, לכן לכל $x \in A$ קיים זוג סדור יחיד ב־F אשר רכיבו השמאלי הוא x. לכן נובע ישירות כי אם $\langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in F$ אז $y = y'$.

כיוון שני: נניח $\forall x, y, y' : \langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in F \implies y = y'$.

נבחר A קבוצת כל ה־x־ים המקיימים את הטענה. לכן $\forall x \in A \exists y : \langle x, y\rangle \in F$.

עתה נשים לב שנתון כי אם y, y' מקיימים את הטענה עבור $x \in A$ כלשהו, אז $y = y'$, ולכן נובע גם $\forall x \in A \exists! y : \langle x, y\rangle \in F$.

לכן F היא פונקציה על־פי הגדרה. **מש"ל**

סעיף ב'

יהיו f, g פונקציות, נוכיח כי $f \cap g$ היא פונקציה.

הוכחה. נגדיר $A = dom(f), B = dom(g)$. אז לכל איבר $c \in A \cap B$ מתקיים מהנתון $f(c) = g(c)$.

לכן קבוצת הזוגות הסדורים $A \cap B$ מכילה זוג סדור אחד ויחיד לכל איבר ב־$A \cap B$ ומההגדרה נקבל כי זוהי פונקציה. **מש"ל**

סעיף ג'

נראה דוגמה לפונקציות f, g כך ש־$f \cup g$ לא פונקציה:

נגדיר $A = \{0, 1\}$, ואת הפונקציות $f, g : A \to A$ על־ידי

$$f(x) = 1, g(x) = 0$$

ולכן נובע

$$f = \{(0, 1), (1, 1)\}, g = \{(0, 0), (1, 0)\}$$

אז

$$f \cup g = \{(0, 1), (1, 1), (0, 0), (1, 0)\}$$

וזוהי כמובן לא פונקציה.

סעיף ד'

נראה דוגמה לפונקציות f, g כך שמתקיים $dom(f \cap g) \neq dom(f) \cap dom(g)$.

נגדיר A כמו בסעיף הקודם ו־$f, g : A \to A$. נגדיר

$$f = \{(0, 1), (1, 0)\}, g = \{(0, 0), (1, 0)\}, f \cap g = \{(1, 0)\}$$

לכן

$$dom(f \cap g) = \{1\} \neq dom(f) \cap dom(g) = \{0, 1\} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$$

שאלה 2

תהי $f : A \to B$. נוכיח כי שלושת התנאים הבאים שקולים:

1. f הפיכה.
2. f חד־חד ערכית ועל.
3. קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך ש־$g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$.

הוכחה. **$1 \leftarrow 2$**: ידוע כי f הפיכה ולכן f^{-1} היא פונקציה.

נניח בשלילה ש־f לא חד־חד ערכית ולכן קיימים $a, b \in A$ כך ש־$a \neq b, f(a) = f(b) = y$. לכן על־פי הגדרה נובע כי $\langle y, a\rangle, \langle y, b\rangle \in f^{-1}$.
אבל ידוע כי f^{-1} פונקציה והגענו לסתירה, לכן f חד־חד ערכית.

נניח בשלילה ש־f לא על, לכן קיים $y \in B$ כך ש־$\forall a \in A, \langle a, y\rangle \notin f$. אבל ידוע ש־$f^{-1}$ פונקציה ולכן $\langle y, x\rangle \in f^{-1}$ עבור $x \in A$ כלשהו.
זוהי סתירה ולכן f חד־חד ערכית ועל.

$2 \leftarrow 3$: נניח כי f חד־חד ערכית ועל, ונגדיר $g = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in f\}$. ידוע כי f חד־חד ערכית, ולכן כל איבר באגף ימני של f לא חוזר על עצמו ובהתאם אין חזרה באגף ימני של g, והיא עומדת בהגדרת פונקציה. נניח שקיים $b \in B$ כך ש־$g(b)$ לא מוגדר, לכן אין $a \in A$ כך ש־$b = f(a)$, אך זו סתירה להיותה של g על, ולכן לא קיים b כזה. במילים אחרות, לכל $b \in B$ מתקיים $g(b) = a$ עבור a כלשהו. עתה נראה כי $\forall a \in A, g(f(a)) = g(b) = a$ שכן אם $\langle a, b\rangle \in f$ אז $\langle b, a\rangle \in g$. באופן דומה נראה כי $\forall b \in B, f(g(b)) = f(a) = b$ ולכן מתקיים $g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$.

$3 \leftarrow 1$: נניח כי קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך ש־$g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$.
מהנתון נובע כי אם $\langle a, b\rangle \in f$ אז $\langle b, a\rangle \in g$, ונתון כי היא פונקציה. לכן גם $g = f^{-1}$. **מש"ל**

שאלה 3

תהינה $f : A \to B, g : B \to C$.

סעיף א'

נוכיח כי אם g, f הן על, אז גם $g \circ f$ היא על.

הוכחה. יהי $c \in C$, g היא על ולכן קיים $b \in B$ כך ש־$g(b) = c$.
ידוע כי f היא על ולכן קיים $a \in A$ כך ש־$f(a) = b$, ולכן $g(f(a)) = c$ ומצאנו כי $g \circ f$ היא על. **מש"ל**

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם g על אז גם $g \circ f$ על על־ידי דוגמה נגדית:

נגדיר $A = B = C = \{0, 1\}$, ונגדיר $g = id_A$ ולכן על. עוד נגדיר $f(x) = 1$.

נראה כי $g(f(x)) = 1$ לכל x ולכן לא קיים x כך ש־$g(f(x)) = 0$ ובהתאם היא לא על.

סעיף ג'

נסתור את הטענה כי אם g היא חד־חד ערכית אם $g \circ f$ היא חד־חד ערכית על־ידי דוגמה נגדית:

נגדיר $A = \{0\}, B = C = \{0, 1\}$ וגם $f(0) = 0$ ו־$g(x) = 0$.

ניתן להבחין כי f חד־חד ערכית, וגם כי $g \circ f$ היא חד־חד ערכית, אבל $g(1) = g(0)$.

שאלה 4

תהינה קבוצות A, B, C, D כך שמתקיים $|A| = |C|, |B| = |D|$.

סעיף א'

נוכיח כי $|A \times B| = |C \times D|$.

הוכחה. משוויון העוצמות נניח שיש שתי פונקציות הפיכות $f : A \to C$ ו־$g : B \to D$.

נגדיר פונקציה חדשה $h : A \times B \to B \times D$ על־ידי $h(a, b) = \langle f(a), g(b) \rangle$.

זוהי כמובן פונקציה הפיכה שכן f, g הפיכות, ולכן מתקיים שוויון העוצמות $|A \times B| = |C \times D|$. **מש"ל**

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי $|A \cup B| = |C \cup D|$ על־ידי דוגמה נגדית:

נגדיר $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}, C = D = \{0, 1\}$.

ברור כי כלל הקבוצות בעלות עוצמה זהה, ובפרט $|A| = |C|, |B| = |D|$, אבל $A \cup B = \{0, 1, 2\}$ ואילו $C \cup D = \{0, 1\}$ ועוצמותיהן לא שוות.

שאלה 5

נוכיח כי אם A, B, סופיות, ו־$|A| = n, |B| = m$, אז $|A \times B| = n \cdot m$.

הוכחה. נגדיר $A = [n], B = [m]$, שאם לא כן נוכל להגדיר פונקציה הפיכה בין הקבוצות ועוצמותיהן שוות, לכן לא פגענו בכלליות ההוכחה.

נשים לב כי $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid 0 \leq a < n, 0 \leq b < m\}$

נגדיר $C = \{2^a \cdot 3^b \mid 0 \leq a < n, 0 \leq b < m\}$, בקבוצה זו יש בדיוק nm איברים.

נראה כי הפונקציה $f : A \times B \to C$ המוגדרת על־ידי $f(a, b) = 2^a 3^b$ היא חד־חד ערכית ועל ולכן נקבל כי $|A \times B| = nm$. **מש"ל**

שאלה 6

סעיף א'

נוכיח באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$ שאין פונקציה חד־חד ערכית מ־$[n+1]$ ל־$[n]$.

הוכחה. נבחין כי עבור $n = 1$ הפונקציה היחידה האפשרית היא $f(0) = f(1) = 0$ וזו כמובן לא חד־חד ערכית וזהו בסיס האינדוקציה.

נניח כי טענת האינדוקציה נכונה עבור $n - 1$, דהינו אין פונקצה חד־חד ערכית מ־$[n]$ ל־$[n-1]$.

תהי פונקציה כזו, ונרחיב אותה להיות מוגדרת מ־$[n+1]$ ל־$[n]$ על־ידי $f(n+1) = f(n)$. ידוע כי היא לא חד־חד ערכית, לכן ישנם לכל איבר בטווח **מש"ל**