פתרון מטלה 03 — מבנים אלגבריים 1 (80445)

25 במאי 2024

שאלה 1

סעיף א'

תהי G חבורה ועבור $g \in G$ נגדיר $\varphi_g : G \to G$ על־ידי $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$.

נוכיח ש־φ_g הוא אוטומורפיזם וש־$\phi : G \to Aut(G)$ המוגדר על־ידי $\phi(g) = \varphi_g$ הוא הומומורפיזם.

הוכחה. נוכיח תחילה ש־φ_g היא הומומורפיזם.

נראה כי

$$\forall x, y \in G, \varphi_g(xy) = gxyg^{-1} = gx(\overset{=e_G}{g^{-1}g})yg^{-1} = \varphi_g(x) \cdot \varphi_g(y)$$

ומצאנו כי התנאי ההכרחי להומומורפיזם מתקיים.

באותו אופן גם $\varphi_{g^{-1}}$ הוא הומומורפיזם ונשים לב שמתקיים

$$\forall x \in G, (\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g)(x) = g^{-1}gxg^{-1}g = x, \qquad (\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}})(x) = gg^{-1}xgg^{-1} = x$$

ומצאנו כי התנאי ההכרחי לאיזומורפיה מתקיים ובהתאם $\varphi_g : G \xrightarrow{\sim} G$.

מצאנו כי φ_g הוא אוטומורפיזם לכל $g \in G$, וכן כי $\varphi_{g^{-1}}$ אוטומורפיזם הופכי לה.

נראה כי גם

$$\forall x \in G : \phi(gh)(x) = \varphi_{gh}(x) = ghxh^{-1}g^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = (\varphi_g \circ \varphi_h)(x)$$

ומצאנו כי התנאי להומומורפיזם מתקיים ובהתאם $\phi : G \xrightarrow{\sim} Aut(G)$. □

סעיף ב'

נוכיח שלכל $g \in G$ וכל תת־חבורה $H \leq G$ מתקיים $gHg^{-1} \leq G$.

הוכחה. ראינו כי φ_g היא אוטומורפיזם ולכן מתקיימות התכונות:

1. קיום נייטרלי: $e \in H \implies geg^{-1} = e \in gHg^{-1}$.
2. סגירות לכפל: הוכחנו בסעיף הקודם.
3. קיום הופכי: $\forall x \in G : \varphi_g(x)\varphi_g(x^{-1}) = \varphi_g(x^{-1})\varphi_g(x) = \varphi_g(e) = e$

ומצאנו כי זוהי תת־חבורה. □

סעיף ג'

תהי קבוצה X ופעולה $\cdot : G \times X \to X$ ונוכיח שלכל $x, y \in X$, אם קיים $g \in G$ כך ש־$y = gx$ אז $G_y = gG_xg^{-1}$.

הוכחה. נניח כי התנאים מתקיימים, נבחין כי $G_x = \{h \in G \mid hx = x\}$.

נבחר $h \in G_x$ ונקבל

$$y = g(hx) = (gh)x \iff h^{-1}g^{-1}y = x \iff gh^{-1}g^{-1}y = gx = y \iff h^{-1} \in G_y \iff h \in G_y$$

ומצאנו כי $G_y = gG_xg^{-1}$ □

שאלה 2

סעיף א'

יהי $\tau = (a_1\ a_2 \dots a_k) \in S_n$ מחזור ו־$\sigma \in S_n$. נוכיח כי

$$\sigma(a_1\ a_2 \dots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2) \dots \sigma(a_k))$$

הוכחה. יהי a_m כך ש־$1 \le m < k$.

אז $(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1})(\sigma(a_m)) = \sigma(\tau(a_m)) = \sigma(a_{m+1})$.

עוד נראה כי $(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1})(\sigma(a_k)) = \sigma(a_1)$.

עבור a_m כאשר $k < m \le n$ נקבל $(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1})(\sigma(a_m)) = \sigma(a_m)$.

לסיכום מצאנו כי $(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1})(\sigma(a_m)) = \sigma(a_{m+1})$ עבור $m \le k$ ו־$(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1})(\sigma(a_m)) = \sigma(a_m)$ עבור שאר ערכי m ובהתאם מתקיים

$$\sigma(a_1\ a_2 \dots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2) \dots \sigma(a_k))$$

□

סעיף ב'

נוכיח ששתי תמורות הן צמודות אם ורק אם הפירוק שלהן למחזורים מכיל מספר זהה של מחזורים מכל אורך.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח ששתי חבורות τ, ϕ צמודות, לכן קיים $\sigma \in S_n$ כך ש־$\tau = \sigma\phi\sigma^{-1}$.

נוכל לפרק את $\phi = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_k$ ל־k מחזורים שונים.

נבחין כי $Id = \sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma$ וננצל עובדה זאת כדי לראות שמתקיים

$$\tau = \sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_k \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ \phi_1 \sigma^{-1} \sigma \circ \phi_2 \sigma^{-1} \sigma \circ \dots \circ \sigma^{-1} \sigma \phi_k \circ \sigma^{-1}$$

לכן τ הוא הרכבה של אוסף תמורות מהצורה $\sigma\phi_i\sigma^{-1}$ ובסעיף הקודם הראינו כי אלו מחזורים משמרי אורך, ומצאנו כי לשתי התמורות τ ו־ϕ פירוק למחזורים זהה.

כיוון שני: נניח כי לשתי חבורות τ, ϕ יש פירוק למחזורים זהה, $\tau = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_l, \phi = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_l$

נגדיר כי τ_i, ϕ_i כאשר $1 \le i \le l$ מחזורים באורך זהה בין שתי התמורות. לכן

$$\phi_i = (a_1\ a_2 \dots a_k), \qquad \tau_i = (b_1\ b_2 \dots b_k)$$

נגדיר תמורה חדשה $\sigma_i \in S_n$ על־ידי $\sigma(a_j) = b_j$ לכל $1 \le j \le k$.

מסעיף א' נקבל מיידית

$$\sigma_i \phi_i \sigma_i^{-1} = \tau_i$$

נגדיר $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_l$. נבחין כי המחזורים הם זרים אחד לשני, שכן מקורותיהם מוגדרים על־ידי מחזורים זרים של τ.

נראה כי

$$\sigma\phi_1\sigma^{-1} \circ \sigma\phi_2\sigma^{-1} \circ \dots \sigma\phi_l\sigma^{-1} = \tau = \sigma\phi_1 \cdots \phi_l\sigma^{-1} = \sigma\phi\sigma^{-1}$$

וקיבלנו כי הטענה נכונה. □

שאלה 3

יהי $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4), \tau = (2\ 3)(4\ 1) \in D_4 \leq S_4$.

סעיף א'

נחשב את המרכז של σ, τ ב־D_4.

נתחיל בחישוב $C_{D_4}(\sigma)$. בשאלה 2 מצאנו כי עבור ϕ תמורה אז $(\phi(1)\ \phi(2)\ \phi(3)\ \phi(4)) = (1\ 2\ 3\ 4) \iff \phi\sigma\phi^{-1} = \sigma$.
דהינו על ϕ לשמר את סדר המחזור, לכן נוכל לבחור רק $\phi = \sigma^k$ עבור $0 \leq k < 4$.
לכן $C_{D_4}(\sigma) = \{Id, \sigma, (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.
נחשב עתה את $C_{D_4}(\tau)$. במטלה הקודמת מצאנו כי $\sigma^k\tau\sigma^{-k} = \tau\sigma^{-2k}$ ולכן רק עבור $k = 2$ נקבל $\tau = \sigma^2\tau\sigma^{-2}$.
נקבל גם $\tau = \tau\sigma^k\tau\tau\sigma^{n-k} = \tau\sigma^k\tau(\tau\sigma^k)^{-1}$. וקיבלנו כי $C_{D_4}(\tau) = \{Id, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3, \sigma^2\}$.

סעיף ב'

נחשב את מחלקות הצמידות של D_4.

בסעיף הקודם למעשה מצאנו שיוך של כל איבר ב־D_4 למרכז כלשהו, ולכן מחלקות הצמידות הן

$$\{\{Id, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}, \{Id, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3, \sigma^2\}\}$$

סעיף ג'

נמצא שני איברים שאינם צמודים ב־D_4 אבל כן ב־S_4.

נבחר את τ, σ^2:

$$\sigma^2 = (13)(24), \tau = (14)(23)$$

נגדיר $\phi = (34)$ על־פי שאלה 2 ונקבל $\tau = \phi\sigma^2\phi^{-1}$, אבל $\phi \notin D_4$.

שאלה 4

נגדיר את הפעולה הבאה של S_n על $[n]^2$: לכל $\sigma \in S_n$ ו־$(i,j) \in [n]^2$ נגדיר $\sigma.(i,j) = (\sigma(i), \sigma(j))$.
נחשב את המסלולים של הפעולה של S_n על $[n]^2$.

בהרצאה מצאנו כי הפעולה של S_n מעל $[n]$ היא טרנזיטיבית, דהינו קיים רק מסלול אחד בין כלל האיברים.
נטען כי בפעולה שהגדרנו זה עתה ישנם שני מסלולים בלבד:

1. $O((1,1)) = \{(i,i) \in [n]^2 \mid i \in [n]\}$.
   יהי $i,j \in [n]$ כך ש־$i \neq j$. ונגדיר $\sigma = (i\ j)$, לכן $\sigma.(i,i) = (j,j)$ ומצאנו כי מסלול זה נכון.
2. $O((i,j)) = \{(a,b) \in [n]^2 \mid a \neq b, 0 \leq a,b < n\}$.
   יהי i,j כך ש־$i \neq j$, ויהיו a,b כך שגם $a \neq b$, ו־$i,j,a,b \in [n]$, אז נגדיר $\sigma = (i\ a)(j\ b)$, ומצאנו כי גם זה אכן מסלול.

נשים לב שכל תמורה היא חד־חד ערכית, ולכן לא יתכן ש־$a = b$ ולכן אין מסלול בין $(a,a) \to (i,j)$, ובאופן דומה כמובן אין תמורה $(a,a) \to (i,j)$ כאשר $i \neq j$.

לסיכום ישנם שני מסלולים שונים לפעולה, $O(0,0), O(0,1)$ בלבד.

שאלה 5

סעיף א'

תהי G חבורה אבלית ו־$H, K \leq G$ תת־חבורות, כך ש־$H \cap K = \{e\}$ ו־$G = H \cdot K$.

נוכיח ש־$G \xrightarrow{\sim} H \times K$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $\phi : H \times K \to G$ על־ידי $\phi(h, k) = h \cdot k$. אז

$$\phi(h_1h_2, k_1k_2) = (h_1h_2)(k_1k_2) \overset{\text{אבליות}}{=} h_1(h_2k_1)k_2 = (h_1k_1)(h_2k_2) = \phi(h_1, k_1)\phi(h_2, k_2)$$

ומצאנו כי ϕ הומומורפיזם.

נגדיר $\varphi : G \to H \times K$ על־ידי שימוש בנתון $HK = G$, ידוע כי $\forall G \in G \exists h \in H, k \in K : g = hk$ ולכן נגדיר $\varphi(g) = hk$. לכן גם $\forall g_1, g_2 \in G \exists h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K : g_1 = h_1k_1, g_2 = h_2k_2, \varphi(g_1g_2) = \varphi(h_1(k_1h_2)k_2) = \varphi((h_1h_2)e \cdot (k_1k_2)e) = \varphi(h_1h_2)\varphi(k_1k_2)$. ונסיק כי φ הומומורפיזם, ונשים לב ש־$\phi \circ \varphi = Id, \varphi \circ \phi = Id$ ולכן $\phi = \varphi^{-1}$ ונובע ש־G איזומורפית ל־$H \times K$. $\square$

סעיף ב'

נמצא חבורה G ושתי תת־חבורות שלה $H, K \leq G$ כך ש־$H \cdot K$ היא לא תת־חבורה.

נגדיר $G = S_3, H = \{e, (1\,2)\}, K = \{e, (2\,3)\}$. נשים לב ששתי תת־החבורות מוגדרות היטב, שכן לכל איבר יש הופכי, ושתי תת־החבורות אכן סגורות (באופן ריק) לכפל. נחשב ונקבל $H \cdot K = \{e, (1\,2), (2\,3), (1\,3\,2)\}$.

אנו רואים כי $(1\,3\,2) \in H \cdot K$ אבל $(1\,3\,2)^{-1} = (2\,3\,1) \notin H \cdot K$, דהינו הסגירות להופכי לא מתקיימת ב־$H \cdot K$ ולכן זוהי לא תת־חבורה.