פתרון מטלה 2 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132–2)

14 במאי 2024

שאלה 1

סעיף א'

i.

נמצא את תחום הגזירות של הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

נחשב את ערך הנגזרת על־פי חוקי גזירה:

$$f'(x) = \frac{(1 - x^2)'}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ונראה כי הביטוי מוגדר כאשר $\sqrt{1 - x^2} > 0$, ולכן נובע ישירות $1 - x^2 > 0$ ולכן $x \in (-1, 1)$.

ii.

יהי $x_0 \in (-1, 1)$ ומשיק Γ_f לגרף של f בנקודה $(x_0, f(x_0))$ ונראה כי הוא חותך את גרף הפונקציה f בנקודה אחת ויחידה.
נשים לב כי המשיק עובר בנקודה הנתונה ושיפועו נתון על־ידי $f'(x_0)$ ולכן נובע

$$\Gamma_f : f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{-x_0(x - x_0)}{\sqrt{1 - x_0^2}} + \sqrt{1 - x_0^2} = \frac{1 - x_0 x}{\sqrt{1 - x_0^2}}$$

ונבדוק מתי מתקיים $\Gamma_f = f$:

$$\begin{aligned}\Gamma_f = f = \frac{1 - x_0 x}{\sqrt{1 - x_0^2}} &= \sqrt{1 - x^2} \\ \implies \frac{1 - 2x_0 x + x_0^2 x^2}{1 - x_0^2} &= 1 - x^2 \\ \implies 1 - 2x_0 x + x_0^2 x^2 &= 1 - x_0^2 - x^2 + x^2 x_0^2 \\ \implies -2x_0 x &= -x_0^2 - x^2 \\ \implies (x - x_0)^2 &= 0\end{aligned}$$

ומצאנו כי השוויון מתקיים רק כאשר $x = x_0$.

סעיף ב'

נגדיר פונקציה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

נשים לב כי בנקודה $x_0 = 0$ מתקיים

$$g'(0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

לכן הישר המשיק לפונקציה g בנקודה $(0, 0)$ הוא $y = 0$, והוא כמובן נחתך אינסוף פעמים עם גרף הפונקציה g בכל סיבהב מנוקבת של $x_0 = 0$.

שאלה 2

סעיף א'

.i

ההגדרה לפונקציה זוגית וההגדרה לסימטריה סביב ציר ה־y הלכה למעשה מתלכדות, שכן הגדרת הסימטריה סביב ישר $x = x_0$ היא $f(-x+x_0) = f(x+x_0)$.

.ii

נבחין כי ראשית הצירים היא מרכז סימטריה סיבובית $(180°)$ של פונקציה אי־זוגית.

זאת שכן לכל נקודה שנבחר $(x, y) \in g$ נבחין כי גם $(-x, -y) \in g$ בעקבות הגדרת האי־סימטריה.

סעיף ב'

תהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה בכל $\mathbb{R}$, ונוכיח שאם g זוגית אז נגזרתה g' היא פונקציה אי־זוגית.

הוכחה. נניח כי g זוגית ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $g(x) = g(-x)$.

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(-x) - g(-x_0)}{-x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} -\frac{g(-x) - g(-x_0)}{x - (-x_0)} \\ g'(x_0) &= -g'(-x_0) \end{aligned}$$

ומצאנו כי הנגזרת מקיימת את ההגדרה לאי־סימטריה לכל $x \in \mathbb{R}$. **מש"ל**

שאלה 3

נוכיח כי פונקציית הנגזרת $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ של הפונקציה שהגדרנו בשאלה 1 סעיף ב' היא לא רציפה.

הוכחה. ראינו קודם כי מתקיים $f'(0) = 0$, ולכן נניח בשלילה כי גם $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.
עתה נחשב את ערך הנגזרת בנקודה על־פי נוסחות גזירה:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

בעוד אנו יודעים כי $2x\sin\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 0} 0$, גם ידוע כי $\cos\frac{1}{x}$ לא מתכנסת בנקודה, ולכן הגבול $\lim_{x\to 0} f'(x)$ לא מתקיים אף הוא, בסתירה להנחה.
לכן פונקציית הנגזרת איננה רציפה. **מש"ל**

שאלה 4

בסעיפים הבאים נמצא תחומי רציפות וגזירות וערך נגזרת בנקודה לפונקציות נתונות.

סעיף א'

נגדיר $g = \ln(|f|)$ כאשר f פונקציה גזירה ב־$\mathbb{R}$ כך ש־$f(x) \neq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

נובע מההגדרות כי f רציפה בכל $\mathbb{R}$ ולכן ממשפט ערך הביניים נסיק כי $f(x) < 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ או $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, ולכן נניח בלי הגבלת הכלליות $f(x) > 0$.

נובע אם כן כי $g(x) = \ln(f(x))$ ומתחום ההגדרה של $\ln$ נובע ישירות כי הפונקציה g מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$.

נחשב את הנגזרת על־פי חוקי גזירה, ונקבל כי $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. ידוע כי $f(x)$ חיובית, ולכן $g'(x)$ מוגדרת אף היא לכל $x \in \mathbb{R}$.

סעיף ב'

נגדיר $g(x) = x^{\beta}$ כאשר $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

נשים לב כי הפונקציה בהכרח מוגדרת לכל $x > 0$, בהכרח לא מוגדרת עבור $x < 0$ ומוגדרת ב־$x = 0$ אם ורק אם $\beta > 0$.

מחישוב עולה כי $g'(x) = \beta x^{\beta - 1}$ ולכן באופן דומה גם g' מוגדרת לכל $x > 0$, לא מוגדרת ל־$x < 0$, ומוגדרת ב־$x = 0$ אם ורק אם $\beta > 1$.

סעיף ג'

נגדיר $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^4}$.

הפונקציה g מוגדרת בכל $x \in \mathbb{R}$, שכן פונקציית השורש השלישי היא רציפה ואי־זוגית לכל $\mathbb{R}$, וגם פולינומים מוגדרים ורציפים, ובסך הכול גם הפונקציה השלמה.

נשים לב כי על־פי חוקי גזירה אשר נלמדו

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 4x^3}{3\sqrt[3]{x^3(1-x)^2}} = \frac{3 - 4x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

מביטוי זה נסיק כי פונקציית הנגזרת לא מוגדרת כאשר $x = \pm 1 \iff 3\sqrt[3]{(1-x)^2} = 0$.

לכן פונקציית הנגזרת מוגדרת ב־$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

שאלה 5

נוכיח כי לכל $k \in \mathbb{N}$ ולכל $x > -1$ מתקיים

$$\ln^{(k)}(1+x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על k.

בסיס האינדוקציה: עבור $k = 1$ מתקיים $(\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1}$.

מהלך האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור k כלשהו, ונראה כי מתקיים:

$$\begin{aligned}
\ln^{(k+1)}(1+x) &= (\ln^{(k)}(1+x))' \\
&= (((-1)^{k-1}(k-1)!)(1+x)^{-k})' \\
&= ((-1)^{k-1}(k-1)!)((1+x)^{-k})' \\
&= ((-1)^{k-1}(k-1)!) \cdot (-k)(1+x)^{-k-1} \\
&= ((-1)^{k}(k)!) \cdot (1+x)^{-k-1} \\
&= \frac{(-1)^k(k)!}{(1+x)^{k+1}}
\end{aligned}$$

ומצאנו כי הטענה מתקיימת עבור $\ln^{(k+1)}(1+x)$. **מש"ל**

שאלה 6

בסעיפים הבאים נחשב את נקודות הקיצון המקומי לפונקציות הנתונות.

סעיף א'

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

אנו יודעים כי הפונקציה f מונוטונית עולה ב־$0 < x$ ומונוטונית יורדת ב־$x < 0$ ולכן אין לה בתחומים אלה קיצון מקומי ועלינו לבחון את $x = 0$. נשים לב כי בסביבה המנוקבת $^*(-1,1) \ni x$ מתקיים $f(x) < 1 < f(0) = 2$ ולכן $(0,2) \in f$ נקודת מקסימום מקומי.

סעיף ב'

$$g(x) = \begin{cases} x^4, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases}$$

נשים לב כי באופן דומה לפונקציה אין מקסימום או מינימום משום סוג עבור $0 < |x|$, ולכן נבחן את $x = 0$.

נראה כי $f(0) = -2 < 0 < x^4$ לכל $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ולכן $(0,-2) \in g$ נקודת מינימום מוחלטת.

סעיף ג'

$$h(x) = \begin{cases} -x, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

תהי נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$. מהגדרת הפונקציה וצפיפות הרציונליים והאי־רציונליים, לכל סביבה מנוקבת של x_0 נוכל למצוא $x_1 \geq x_0$ כך ש־$x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ולכן $h(x_0) < h(x_1)$ והיא לא נקודת מקסימום מקומי. באופן דומה מצפיפות הרציונליים נובע שבכל סביבה כזו ישנו גם $x_2 > x_0$ כך ש־$x_2 \in \mathbb{Q}$ ולכן $f(x_2) < f(x_0)$ ובהתאם הוא גם לא מינימום מקומי.

מצאנו כי לכל נקודה היא לא מינימום או מקסימום מקומי ולכן לפונקציה h אין בכלל קיצון מקומי.

סעיף ד'

$$\begin{cases} x+3, & x \leq 0 \\ -x+3, & 0 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

תחילה נשים לב שהפונקציה מונוטונית עולה לכל $x < 0$ ולכן אין בקטע זה בכלל נקודות מקסימום או מינימום.

בנקודה $x = 0$ אנו רואים כי הפונקציה h מונוטונית עולה בסביבה השמאלית ומונוטונית יורדת בסביבה ימנית ולכן $(0,3) \in h$ נקודת מקסימום מקומי.

בקטע $(0,3)$ הפונקציה יורדת ולכן אין שם מינימום או מקסימום.

עבור $x \geq 3$ מתקיים $h(x) = 0$ ולכן על־פי הגדרת מינימום ומקסימום אוסף הנקודות האלה מהוות מינימום ומקסימום מקומיים.

סעיף ה'

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

נבחר נקודה $x_0 \in \mathbb{Q}$, אז נוכל למצוא בכל סביבה שלה ערך אי־רציונלי אשר ערכו קטן מערך הפונקציה בנקודה, לכן $(x_0, 1)$ לא נקודת מינימום, אבל ידוע כי $0 < 1 \geq 1 = f(x_0)$ ולכן זוהי נקודת מקסימום מקומי.

באופן דומה לכל נקודה $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ נובע ש־$(x_1, 0)$ היא נקודת מינימום מקומי אך לא נקודת מקסימום.

שאלה 7

נגדיר

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

סעיף א'

נוכיח ש־sinh היא אי־זוגית.

הוכחה. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$

מש"ל

סעיף ב'

נוכיח ש־cosh היא פונקציה זוגית.

הוכחה. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \cosh x$$

מש"ל

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים $\forall x, y \in \mathbb{R} : \cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
\cosh(x+y) &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \\
&= \frac{e^x e^y + e^{-x}e^{-y}}{2} \\
&= \frac{2e^x e^y + 2e^{-x}e^{-y} - e^x e^{-y} - e^{-x}e^y + e^x e^{-y} + e^{-x}e^y}{4} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + e^x e^y + e^{-x}e^{-y} - e^x e^{-y} - e^{-x}e^y}{4} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)
\end{aligned}$$

מש"ל

סעיף ד'

נוכיח כי $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הוכחה. נשתמש בזהות מהסעיף הקודם עבור $\cosh(x-x)$ ונקבל מזוגיות ואי־זוגיות כי

$$1 = \cosh(0) = \cosh(x-x) = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$$

מש"ל

נסיק מהעברת אגפים ושורש כי $\cosh(x) = \sqrt{1+\sinh^2(x)}$.

סעיף ה'

נוכיח כי $\sinh' = \cosh, \cosh' = \sinh$.

הוכחה. נשתמש בחוקי גזירה:

$$\sinh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

באופן דומה נקבל גם

$$\cosh'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

מש"ל

סעיף ו'

נוכיח כי

$$\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$$

הוכחה. תחילה ניזכר בגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

לכן גם $\lim_{x\to\infty} e^x \pm e^{-x} = \infty$ ומכאן נובע ישירות כי $\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$.

$\cosh(x)$ פונקציה סימטרית ולכן נובע גם $\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \infty$ ומאי־זוגיות $\sinh(x)$ נובע $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$. **מש"ל**