פתרון ממ"ן 12 – אלגברה לינארית 2 (20229)

16 באפריל 2023

שאלה 1

סעיף א'

נגדיר

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$$

נבדוק אם כל אחת מן המטריצות נורמליות ואם כן נמצא מטריצה אוניטרית המלכסנת אותן.

נבדוק אם A_1 נורמלית:

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

לכן בהכרח $A_1A_1^* = A_1^*A_1$ וכן A_1 נורמלית. נחשב את הפולינום האופייני של A_1:

$$p(t) = \begin{vmatrix} t & -i \\ i & t \end{vmatrix} = t^2 - (-i)i = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

אז למטריצה שני ערכים עצמיים $-1, 1$. נמצא את V_{-1} על־ידי פתרון המערכת:

$$A_1u = -u \to (A_1 + I)u = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + iR_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to V_{-1} = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן בבסיס האורתוגונלי של V_{-1} ישנו רק הווקטור $\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

נמצא את המרחב V_1 באופן דומה:

$$(A_1 - I) = 0 \to \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to iR_2, R_2 \to R_2 - R_1]{R_1 \to -R_1} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to V_1 = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בבסיס האורתוגונלי של V_{-1} ישנו הווקטור $\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

בשל כך המטריצה P המוגדרת להלן מלכסנת אוניטרית את A_1:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

נחשב את A_2^*:

$$A_2^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$$

נבדוק אם A_2 נורמלית:

$$A_2A_2^* = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^*A_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

אנו רואים כי $A_2A_2^* \neq A_2^*A_2$ ולכן A_2 איננה נורמלית.

נבדוק אם A_3 נורמלית, תחילה נבחין כי

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix}$$

נבדוק אם היא נורמלית:

$$A_3A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$
$$A_3^*A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$

אנו רואים כי המטריצה A_3 אכן נורמלית.

נחשב את הפולינום האופייני של A_3:

$$p(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -i \\ -1 & t-2-i \end{vmatrix} = (t-1)(t-2-i)+i = t^2+(-3-i)t+2 \to t = \frac{3+i \pm \sqrt{8+6i-8}}{2} = \frac{3+i \pm (\sqrt{3}+\sqrt{3}i)}{2}$$

נשתמש בחישוב שמבוצע בתשובה 3.2.2 עבור המטריצה ולכן המטריצה האוניטרית היא

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}}(1-i) & \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3-\sqrt{3}}}(1-i) \end{pmatrix}$$

סעיף ב'

נמצא אילו מבין המטריצות המוגדרות להלן חיוביות.

נגדיר

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה ממשית וסימטרית, ולכן גם נורמלית. נחשב את ערכיה העצמיים:

$$p(t) = (t-1)^2 - 1 = t^2 - 2t = t(t-2)$$

לכן ערכיה העצמיים הם $0, 2$ והיא חיובית אך לא חיובית לחלוטין.

נגדיר

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

קל לראות כי המטריצה צמודה לעצמה, נחשב את ערכיה העצמיים:

$$p(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

למטריצה ערך עצמי שלילי ולכן היא לא חיובית כלל לפי משפט 3.2.2. נגדיר

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה זו לא צמודה לעצמה, ולכן לא יכולה להיות מטריצה חיובית כלל.

נגדיר

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

גם מטריצה זו לא סימטרית ולכן לא עומדת בהגדרה 1.2.5 כלל.

נגדיר

$$C_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מטריצה זו סימטרית, נחשב את ערכיה העצמיים:

$$p(t) = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 4 - 1 = t^2 - 4t + 3 = (t-3)(t-1)$$

לכן לפי משפט 3.2.2 המטריצה חיובית לחלוטין.

נגדיר

$$C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

גם מטריצה זו לא סימטרית ולכן לא חיובית.

שאלה 2

יהי V מרחב מכפלה פנימית מממד סופי ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית נורמלית.

i

נוכיח כי $\ker T = \ker T^*$.

יהי $u \in \ker T$, אז מתקיים $Tu = 0$ ובשל כך גם $\|u\| = 0$.

על־פי הגדרת הנורמה מתקיים גם $(Tu, Tu) = 0$. אז

$\|Tu\| = (Tu, Tu)$	
$= (u, T^*Tu)$	מהגדרת הצמוד
$= (u, TT^*u)$	ידוע כי T נורמלית
$= (T^*u, T^*u)$	שוב על־פי צמוד
$= \|T^*u\| = 0$	הגדרת הנורמה
$\to T^*u = 0 \to u \in \ker T^*$	נורמה חיובית לחלוטין

בשל הגדרת המכפלה הפנימית נובע כי $T^*u = 0$.

נשים לב כי בשל סימטריות המטריצות הנורמליות נוכל להוכיח באופן דומה גם כי אם $T^*u = 0$ אז $Tu = 0$, ולכן מתקיים $\ker T = \ker T^*$.

ii

נוכיח כי $\operatorname{Im} T = (\ker T)^{\perp}$.

על־פי משפט 3.2.1 ההעתקה T היא לכסינה אוניטרית בפרט ולכן לכסינה בכלל. מסיבה זו כל וקטור ב־V הוא וקטור עצמי לאיזשהו ערך עצמי ב־T.

יהיו $v \in \ker T, u \in \operatorname{Im} T$. נשים לב כי v הוא וקטור עצמי של 0, ואילו u וקטור עצמי לערך עצמי $\lambda \neq 0$.

בשל היותם ערכים עצמיים שונים, לפי משפט 3.2.6 הוקטורים אורתוגונליים זה לזה.

נכליל את הטענה הזו ונראה שלכל u כזה התנאי מתקיים לכל v, לכן $u \in (\ker T)^{\perp}$.

באופן דומה נוכל להכליל את הטענה על התמונה, ולכן $\operatorname{Im} T = (\ker T)^{\perp}$.

iii

נוכיח כי $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$.

על־פי סעיף ii מתקיים

$$\operatorname{Im} T^* = (\ker T^*)^{\perp}$$

וידוע כי $\ker T = \ker T^*$ על־פי סעיף i, לכן

$$\operatorname{Im} T^* = (\ker T)^{\perp} = \operatorname{Im} T$$

שאלה 3

יהי V מרחב מכפלה עצמית מממד סופי ו־$T : V \to V$ העתקה לינארית המקיימת

$$T^2 = \frac{1}{2}(T + T^*)$$

נוכיח כי T נורמלית ומתקיים $T^2 = T$.

$$TT^* = T(2T^2 - T) = T(2T - I)T = (2T^2 - T)T = T^*T$$

אנו רואים כי T נורמלית.

נוכיח גם כי $T^2 = T$.

יהי λ ערך עצמי של T ו־u וקטור עצמי שלו.

לפי למה 3.2.5 $\overline{\lambda}$ ערך עצמי של T^* ו־u וקטור עצמי שלו, דהינו $Tu = \lambda u, T^*u = \overline{\lambda}u$.

עוד אנו יודעים כי $T^2u = T\lambda u = \lambda^2 u$. מתקיים

$$T^2u = \lambda^2 u = \frac{1}{2}(\lambda u + \overline{\lambda}u) = \frac{1}{2}(Tu + T^*u)$$

אז נוכל להניח גם כי

$$2\lambda^2 = \lambda + \overline{\lambda}$$

נניח כי המרחב מוגדר מעל $\mathbb{C}$, כך שכל מרחב מכפלה פנימית הלכה למעשה מוכל בו. נגדיר $\lambda = a + bi$, אז

$$2a^2 + 4abi - 2b^2 = a + bi + a - bi$$

דהינו מתקיים

$$\begin{cases} 2ab = 0 \\ 2a^2 - 2b^2 = 2a \end{cases}$$

אילו $b \neq 0$, אז נובע מהמשוואה הראשונה כי $a = 0$ ומהשמוואה השנייה כי $b = 0$ בסתירה לטענה, אז מהמשוואה הראשונה אנו למדים כי $a \neq 0$.
לכן גם $b = 0$ ומהמשוואה השנייה נובע ש־$a(a-1) = 0$, ידוע כי $a \neq 0$ ולכן $a = 1$. מצאנו כי כלל הערכים העצמיים של T, T^2, T^* הם 1 בלבד, לכן לכל $v \in V$ מתקיים $Tv = T^2v = v$ ובהתאם $T^2 = T$.

שאלה 4

תהי H מטריצה סימטרית ממשית מסדר $n \times n$ ויהי λ הערך העצמי המקסימלי של H.
נוכיח כי לכל $v \in \mathbb{R}^n$ כאשר $\|v\| = 1$ מתקיים $v^t H v \leq \lambda$.

הוכחה. מהגדרה 2.3.4 נובע כי H אוניטרית בכלל ולכן נורמלית בפרט ולכן לפי הגדרה 3.2.1 H לכסינה אוניטרית.
נגדיר $B = (b_1, \ldots, b_n)$ בסיס מלכסן אורתונורמלי של H כך שמתקיים לכל $u \in V$ עבורו $[u]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

$$Hu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i b_i \tag{1}$$

יהי $v \in V$ וקטור כך ש־$\|v\| = 1$. ממשפט 2.3.2 נובע כי

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 = 1^2 = \|Hv\|^2 &= (Hv, Hv) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j b_j) && \text{על־פי (1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j \lambda_i \alpha_i (b_i, b_j) && \text{המכפלה הפנימית הסטנדרטית} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \alpha_i^2 && B \text{ בסיס אורתונורמלי} \\
1 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 && \text{טענה 2.4.3} \qquad (2)
\end{aligned}$$

נגדיר $\lambda = \max\{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ונראה כי

$$\begin{aligned}
v^t H v &= (v, Hv) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j b_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i^2 && \lambda \geq \lambda_i \\
v^t H v &\leq \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \\
v^t H v &\leq \lambda && \text{על־פי (2)}
\end{aligned}$$

מש"ל

שאלה 5

נוכיח כי המטריצה A המוגדרת להלן היא נורמלית.

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix}$$

לפי הגדרת המשלים

$$A^* = \begin{pmatrix} 2+i & -1 & 0 \\ -1 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix}$$

נחשב

$$AA^* = \begin{pmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & -1 & 0 \\ -1 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2+i & -1 & 0 \\ -1 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

על־פי החיושב $AA^* = A^*A$ ולכן המטריצה נורמלית.

נמצא את הפירוק

$$A = \sum_i \lambda_i P_i$$

כאשר P_i הן מטריצות של ההטלות האורתוגונליות שמופיעות בפירוק הספקטראלי של T_A.

נחשב את הפולינום האופייני של A:

$$p(t) = \begin{vmatrix} t-2+i & 1 & 0 \\ 1 & t-1+i & -1 \\ 0 & -1 & t-2+i \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3+R_1} \begin{vmatrix} t-2+i & 1 & 0 \\ 1 & t-1+i & -1 \\ t-2+i & 0 & t-2+i \end{vmatrix}$$

$$= (t-2+i)\begin{vmatrix} t-2+i & 1 & 0 \\ 1 & t-1+i & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2+R_3} (t-2+i)\begin{vmatrix} t-2+i & 1 & 0 \\ 2 & t-1+i & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-2+i)\begin{vmatrix} t-2+i & 1 \\ 2 & t-1+i \end{vmatrix} = (t-2+i)((t-2+i)(t-1+i)-2)$$

$$= (t-2+i)(t^2+(-3+2i)t+(-1-3i)) = (t-2+i)(t^2+(-1+2i)t+1-3i)$$

$$= (t-2+i)(t+i)(t-3+i)$$

אז הערכים העצמיים של T_A הם $2-i,-i,3-i$. נחשב את המרחב העצמי שלהם על־ידי פתרון מערכת המשוואות $(A-\lambda I)u=0$:

$$(A-(2-i)I)u=0\to\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to -R_2+R_1}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to V_{2-i}=\mathrm{Sp}\{(1,0,1)\},v_1=(1,0,1)$$

$$(A+iI)u=0\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_1\to -R_1]{R_2\leftrightarrow R_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2+2R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to V_{-i}=\mathrm{Sp}\{(1,2,-1)^t\},v_2=(1,2,-1)$$

$$(A-(3-i)I)u=0\to\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to R_2+R_1]{R_1\to -R_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to V_{3-i}=\mathrm{Sp}\{(1,-1,-1)^t\},v_3=(1,-1,-1)$$

נגדיר $B=(v_1,v_2,v_3)$ בסיס אורתוגונלי ו־E הבסיס הסטנדרטי, אז מטריצת המעבר מ־E ל־B היא

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

לפי חישוב גם

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

נגדיר P_i ההטלה האורתוגונלית על האיבר ה־i, אז לפי הקורס הקודם

$$[P_i]_E=M[P_i]_BM^{-1}$$

$$[P_1]_E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$[P_2]_E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$[P_3]_E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן $A=(2-i)[P_1]_E-i[P_2]_E+(3-i)[P_3]_E$