שאלה 1

סעיף ג׳

נניח כי ישנן X דבורים, כאשר X_a הן ג׳ו והשאר, קרי $X_b = X - X_b$, הן בטהובן. עוד ידוע לנו שכמות הדבש הנוצרת ביום היא $\frac{X_a}{2} + \ln(X_b^2+1)$.
נגדיר אם כן $g : \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ על־ידי,

$$g(x,y) = \frac{x}{2} + \ln(y^2+1)$$

פונקציה המייצגת את כמות הדבש הנוצרת ביום כתלות בכמות סוגי הדבורים. נתון כי $g(x,y) = C$ עבור $C = 200000$. נבחין כי גם,

$$\nabla g = (\frac{1}{2}, \frac{2y}{y^2+1})$$

נגדיר $f(x,y) = x + y$ כמות הדבורים הכוללת, ונרצה למצוא את ערכי הקיצון שלה תחת האילוץ $g = C$, נבחין כי גם,

$$\nabla f = (1,1)$$

לכן משיטת כופלי לגרנז׳ נובע,

$$(1,1) = \lambda(\frac{1}{2}, \frac{2y}{y^2+1})$$

בפרט $\lambda = 2 \iff 1 = \lambda \cdot \frac{1}{2}$ ומשוויון האגף השני,

$$1 = 2 \cdot \frac{2y}{y^2+1} \iff y^2 - 4y + 1 = 0 \iff y = 2 \pm \sqrt{3}$$

ומהשוויון $g = C$ נסיק,

$$x = 2(C - \ln(7 \pm 4\sqrt{3}))$$

כלומר מצאנו שהנקודות $(2(C - \ln(7 \pm 4\sqrt{3})), 2 \pm \sqrt{3})$ הן נקודות קיצון בתחום. נחשב ונקבל שגם

$$f(2(C - \ln(7 + 4\sqrt{3})), 2 + \sqrt{3}) \approx 399998.32, \qquad f(2(C - \ln(7 - 4\sqrt{3})), 2 - \sqrt{3}) \approx 400000.12$$

ולכן $(2(C - \ln(7 + 4\sqrt{3})), 2 + \sqrt{3})$ מינימום ונובע $X_a \approx 399999.86, X_b \approx 0.26$.