

פתרון מטלה 08 – תורת הקבוצות (80200)

5 ביולי 2024



שאלה 3

תהי r קבוצה. נוכיח כי $\{x : \exists y(\langle x, y \rangle \in r)\}$ היא קבוצה וגם $\{y : \exists x(\langle x, y \rangle \in r)\}$ היא קבוצה. נסיק שאם f פונקציה אז $\text{dom}(f), \text{rng}(f)$ קבוצות.

הוכחה. נגדיר תכונה $p(x) = \exists y(\langle x, y \rangle \in r)$, ונוכל לבחור $r \cup \cup$ ואז מאקסיומת ההפרדה נקבל כי קיימת הקבוצה הראשונה, על-ידי הגדרת תכונה דומה והפעלת איחוד שלוש פעמים נקבל כי גם השנייה קיימת. כמובן כל פונקציה f היא קבוצת זוגות סדורים, וההגדרה של $\text{dom}(f), \text{rng}(f)$ היא שקולה לקבוצה הראשונה והשנייה שמצאנו כי קיימות זה עתה, ולכן נסיק כי התחום והתמונה של פונקציה הן קבוצות תמיד. \square

שאלה 4

תהי X קבוצה. נוכיח במדויק על-ידי ZF את הטענות הבאות.

סעיף א'

נוכיח כי קיימת קבוצת כל יחסי השקילות על X .

הוכחה. אנו יודעים כי יחס שקילות הוא יחס עם קיום תכונות מוגדרות נוספות, ולכן נגדיר $p(x)$ תכונה של קיום תכונות יחס שקילות. מצאנו בהרצאה כי קבוצת הזוגות הסדורים $X \times X$ קיימת, ולכן מאקסיומת ההפרדה נוכל לטעון כי גם $\{E \in X \times X \mid p(E)\}$ קיימת, וזו למעשה קבוצת כל יחסי השקילות על X . □

סעיף ב'

נוכיח כי אם E יחס שקילות על X ו- D מחלקת שקילות ביחס E , אז D קבוצה.

הוכחה. מצאנו עכשיו כי E קבוצה, נגדיר $e \in X$ איבר כלשהו, ונגדיר $p(x) = \exists y \in X (\langle e, x \rangle \in E)$. נשתמש שוב באקסיומת ההפרדה ונקבל כמובן כי $\{x \in E \mid p(x)\} -$ מחלקת שקילות המושרית על-ידי e – היא קבוצה. נשאר לנו לקחת איבר כלשהו $e \in D$ ונקבל כי היא אכן קבוצה. □

סעיף ג'

נוכיח שאם E יחס שקילות על X , אז X/E קבוצה.

הוכחה. בסעיף הקודם מצאנו כי אם $x \in X$ אז מחלקת השקילות המכילה את x היא קבוצה. אנו יודעים כי $\mathcal{P}(X)$ היא קבוצה, ונבחין כי D מחלקת השקילות כך ש- $x \in D$ מקיימת $D \in \mathcal{P}(X)$. לכן אם כן נוכל להסיק כי התכונה $p(x) = \forall y, y' \in x \implies \langle \langle y, y' \rangle \rangle \in E$ ניתנת להפרדה ונקבל כי קבוצת מחלקות השקילות היא אכן קבוצה. □

שאלה 5

תהי X קבוצה, נוכיח שקיימת קבוצה Y כך ש- $X \subseteq Y$ ולכל $y \in Y$ מתקיים $y \subseteq Y$.

הוכחה. נגדיר פונקציה g על-ידי $g(0) = X$ ו- $g(n+1) = \bigcup_{a \in g(n)} a$.
על-ידי אקסיומת החלפה ומשפט הרקורסיה נסיק כי הפונקציה g אכן קיימת ויחידה, ומאקסיומת האיחוד נקבל כי $Y = \bigcup_n g(n)$ אף היא קבוצה.
נותר רק לבדוק שהתנאי אכן מתקיים, יהי $y \in Y$, לכן קיים n עבורו $y \in g(n)$, ואנו יודעים כי $y \subseteq \{y\} \subseteq g(n+1)$, ולכן קיבלנו כי $y \subseteq Y$.
במתבקש. \square

שאלה 6

סעיף א'

נוכיח כי לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $\text{Add}(n+1, m) = \text{Add}(n, m+1)$.

הוכחה. נתחיל ונבחין כי על-פי הגדרת הפונקציה נקבל $\text{Add}(n, m+1) = \text{Add}(n, m) + 1$ ולכן עלינו להוכיח כי $\text{Add}(n+1, m) = \text{Add}(n, m) + 1$ בלבד. נוכיח באינדוקציה על m כאשר n קבוע.

בסיס האינדוקציה: נניח כי n קבוע כלשהו, ונראה כי

□