פתרון מטלה 06 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

19 ביוני 2024

שאלה 1

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה ותהי $f : A \to \mathbb{R}$ כך שכל הנגזרות החלקיות של f מסדר ראשון ושני קיימות ורציפות ב־A.

סעיף א'

נוכיח כי f גזירה פעמיים.

הוכחה. תהי $x_0 \in A$, נתון כי כל הנגזרות החלקיות שלה מוגדרות, ולכן נובע כי f גזירה ונתון כי היא גם רציפה, דהינו $Df|_{x_0} : A \to \hom(A, \mathbb{R})$ רציפה, ונתון כי היא גם גזירה ברציפות ולכן מאותו משפט נובע גם כי $D^2 f \mid_{x_0}$ גם היא מוגדרת ורציפה. □

סעיף ב'

יהיו $v = (v_1, v_2)$ ו־$w = (w_1, w_2)$ וקטורים ב־$\mathbb{R}^2$, נכתוב את $D^2 f \mid_p (v, w)$.

נבחין כי

$$Df \mid_v x = \nabla f_v(x) = (\partial_x f(v)x, \partial_y f(v)x)$$

כאשר $Df \mid_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

עוד אנו יודעים כי $D^2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, ובהתאם נקבל

$$D^f(v, w) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(v, w) & \partial_{yx} f(v, w) \\ \partial_{xy} f(v, w) & \partial_{yy} f(v, w) \end{pmatrix}$$

שאלה 2

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

סעיף א'

נוכיח כי f גזירה בכל נקודה ונחשב את ∇f.

הוכחה. נראה כי בנקודות $(x,y)\neq(0,0)$ זוהי הרכבת פונקציות רציפות וגזירות ונוכל לחשב ולקבל

$$\nabla f(x,y)=(\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2},\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2})$$

נבדוק את הגבול ב־$(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{\|(x,y)\|^3}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^3}=0$$

ומצאנו כי $\nabla f(0,0)=(0,0)$, וכי הפונקציה גזירה בכל נקודה. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי כל הנגזרות החלקיות מסדר שני של f קיימות ב־$(0,0)$.

הוכחה. נבדוק

$$\partial_{xx}f(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 0^4}{\|(x,0)\|^3}=0$$

ונקבל באופן דומה גם כי $\partial_{yy}f(0,0)=0$.

נותר לבדוק את $\partial_{xy}f(0,0)$, נראה

$$\partial_{xy}f(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4\cdot 0}{\|(x,0)\|^3}=0$$

וקיבלנו כי כל הנגזרות החלקיות מתאפסות בנקודה. $\square$

סעיף ג'

נראה כי f לא גזירה פעמיים ב־$(0,0)$.

הוכחה. נבחן את $g(x,y)=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$, הרכיב הראשון בנגזרת של f, ונבדוק את נגזרתו הכיוונית עבור $v=(1,1)$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t,t)-g(0,0)}{t}=\frac{2t^5}{\sqrt{2}t^5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

דהינו, נגזרת מכוונת זו היא לא אפס בסתירה למה שמצאנו בסעיף הקודם. $\square$

שאלה 3

תהי $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ פונקציה גזירה שלוש פעמים ב-$p \in \mathbb{R}^d$. יהי $\{e_1,\dots,e_d\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$, נכתוב במפורש את $D^3 f\mid_p$ (e_i,e_j,e_k).

נבחן תחילה את $Df\mid_p(e_i)$, ונראה כי מתקיים

$$Df\mid_p = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1\mid_p & \dots & \partial_d f_1\mid_p \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m\mid_p & \dots & \partial_d f_m\mid_p \end{pmatrix}$$

ולכן נוכל להציב ולקבל

$$Df\mid_p(e_i) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1\mid_p & \dots & \partial_d f_1\mid_p \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m\mid_p & \dots & \partial_d f_m\mid_p \end{pmatrix} \cdot e_i = \begin{pmatrix} \partial_i f_1\mid_p \\ \vdots \\ \partial_i f_m\mid_p \end{pmatrix} = \partial_i f\mid_p$$

מחזרה על חישוב זה נקבל

$$D^3 f\mid_p(e_i,e_j,e_k) = \partial_k\partial_j\partial_i f\mid_p$$

שאלה 4

סעיף א'

נחשב את פולינום טיילור של $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}\cos(xy)$ עד סדר 4 סביב $(0,0)$.

נבחין כי $e^{-(x^2+y^2)}=e^{-t^2}$ כאשר $t=\|(x,y)\|$, מפיתוח טיילור של האקספוננט נקבל

$$e^{-t^2}=1-0t+\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot t^2+\frac{1}{3!}\cdot 0\cdot t^3+\frac{1}{4!}\cdot(-8)t^4+o(t^4)=1-t^2-\frac{1}{2}t^4+o(t^4)$$

ולכן נסיק גם

$$e^{-(x^2+y^2)}=1-(x^2+y^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2+o(\|(x,y)\|^4)$$

אנו יודעים כי

$$\cos(t)=1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4!}t^4+o(t^4),\qquad xy=xy+o(\|(x,y)\|^4)$$

פיתוח טיילור סטנדרטי ופיתוח טיילור של פולינום. נשתמש בהרכבת פולינומי טיילור ונקבל כי

$$\cos(xy)=1-\frac{x^2y^2}{2}+o(\|(x,y)\|^4)$$

ועתה נכפיל ונקבל

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(1-(x^2+y^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2)(1-\frac{1}{2}(x^2y^2))+o(\|(x,y)\|^4)\\&=1-(x^2+y^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2-\frac{1}{2}(x^2y^2)+o(\|(x,y)\|^4)\end{aligned}$$

סעיף ב'

נמצא פיתוח טיילור של $f(x,y)=e^y\tan x$ עד סדר 3 סביב $(0,\frac{1}{2})$.

נתחיל ונבחין כי

$$e^y=\sqrt{e}+\sqrt{e}(y-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{e}}{2}(y-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{e}}{3!}(y-\frac{1}{2})^3+o(\|(x,y)\|^3)$$

ונחשב ונקבל גם

$$\tan x=x+\frac{1}{3!}x^3+o(\|(x,y)\|^3)$$

לכן נוכל להסיק

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(\sqrt{e}+\sqrt{e}(y-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{e}}{2}(y-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{e}}{3!}(y-\frac{1}{2})^3)(x+\frac{1}{3!}x^3)+o(\|(x,y)\|^3)\\&=\sqrt{e}x+\frac{\sqrt{e}}{3!}x^3+\sqrt{e}x(y-\frac{1}{2})+o(\|(x,y)\|^3)\end{aligned}$$

סעיף ג'

נחשב את פולינום טיילור של $f(x,y,z)=x^3+2z^2-3yz+5z$ סביב $(0,1,2)$ עד סדר 3.

נתחיל בסיבה לבחירת הסדר, היא כמובן על־פי מעלת הפולינום.

נבחין כי פולינום טיילור של פולינום מתכנס לפולינום עצמו, ולכן נוכל לקבוע כי

$$f(x,y,z)=x^3+2z^2-3yz+5z+o(\|(x,y,z)\|^3)$$

שאלה 5

יהיו $a,b,d\neq 0$, נמצא את הנקודה הקרובה ביותר לראשית שעל המישור $ax+by+z=d$.

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f(x,y)=d-ax-by$$

לכן הנקודה הקרובה ביותר על המישור היא גם המינימום של $\|(x,y,f(x,y))\|$, מינימום של פונקציה זו זהה למינימום של

$$g(x,y)=\|(x,y,f(x,y))\|^2$$

ולכן מספיק לחקור אותה. תחילה נראה כי

$$g(x,y)=x^2+y^2+(d-ax-by)^2$$

נחפש את נקודות הקיצון של g, אלה תופיענה בנקודות בהן הנגזרות החלקיות מתאפסות, לכן נחשב אותן

$$\nabla g(x,y)=(2x-2a(d-ax-by),2y-2b(d-ax-by))$$

נבדוק התאפסות

$$\begin{aligned}
&(1+a^2)x+aby-ad=0 \iff x=\frac{ad-aby}{1+a^2},\\
&(1+b^2)y-bd+ab\frac{ad-aby}{1+a^2}=0\\
&\iff (1+b^2-\frac{a^2b^2}{1+a^2})y=bd-\frac{a^2bd}{1+a^2}\\
&\iff y=\frac{bd-\frac{a^2bd}{1+a^2}}{1+b^2-\frac{a^2b^2}{1+a^2}}\\
&\iff y=\frac{bd}{1+b^2a+a^2b}
\end{aligned}$$

ומתהליך מקביל והפוך נוכל לקבל גם

$$x=\frac{ad}{1+a^2b+ab^2}$$

ומצאנו נקודה יחידה חשודה להיות המינימום.

נחשב את $D^2f\mid_{(x,y)}$:

$$D^2f=\begin{pmatrix}2+2a^2 & 2ab\\ 2ab & 2+2b^2\end{pmatrix}$$

נשתמש במשפט סילבסטר ונראה כי

$$2+2a^2\geq 0,\quad (2+2a^2)(2+2b^2)-4a^2b^2=4+4a^2+4b^2\geq 0$$

ולכן נקבל כי המטריצה חיובית לחלוטין ונסיק כי הנקודה שמצאנו אכן מינימום מקומי ויחיד ולכן מינימום.

שאלה 6

נמצא ונסווג את הנקודות הקריטיות של הפונקציות הנתונות.

סעיף א'

$$f(x,y) = (x-1)(x-3)(y-1)(y-3)$$

נחשב את הגרדיאנט ונקבל

$$\nabla f(x,y) = (2(x-2)(y-1)(y-3), 2(x-1)(x-3)(y-2))$$

נבדוק איפוס ונקבל

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff (x=2, y \in \{1,3\}) \cap (y=2, x \in \{1,3\}) = \emptyset$$

לכן הנקודות החשודות בקיצון הן $\{(2,2),(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$.

נחשב עתה את הנגזרת השנייה ונקבל

$$D^2 f\mid_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2(y-1)(y-3) & 4(x-2)(y-2) \\ 4(x-2)(y-2) & 2(x-1)(x-3) \end{pmatrix}$$

נציב ונשתמש במשפט סילבסטר ונקבל כי $(2,2)$ מינימום, $(3,3)$, $(1,1)$, $(3,1)$, $(1,3)$ נקודות אוכף.

סעיף ב'

$$f(x,y) = xy \cdot \exp(-8(x^2+y^2))$$

נחשב

$$\nabla f(x,y) = (\exp(-8(x^2+y^2))(y-16x^2y), \exp(-8(x^2+y^2))(x-16xy^2))$$

נשווה לאפס ונקבל נקודות חשודות לקיצון הן $(\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4})$, $(0,0)$.

נחשב נגזרת שנייה ונקבל

$$D^2 f\mid_{(x,y)} = \begin{pmatrix} e^{-8(x^2+y^2)}(-32xy + (y-16x^2y)^2) & e^{-8(x^2+y^2)}(1-16x^2+(y-16x^2y)(x-16xy^2)) \\ e^{-8(x^2+y^2)}(1-16x^2+(y-16x^2y)(x-16xy^2)) & e^{-8(x^2+y^2)}(-32xy+(x-16y^2x)^2) \end{pmatrix}$$

נבחין כי רכיבי האקספוננט לא משפיעים על החיוביות ולכן נשתמש בבחינת התבנית הבילינארית

$$T = \begin{pmatrix} -32xy + (y-16x^2y)^2 & 1-16x^2+(y-16x^2y)(x-16xy^2) \\ 1-16x^2+(y-16x^2y)(x-16xy^2) & e-32xy+(x-16y^2x)^2 \end{pmatrix}$$