פתרון מטלה 10 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

12 ביולי 2024

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ ותהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה אז $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$

הוכחה. מצאנו כי סדרה מתכנסת אם ורק אם הגבולות העליון והתחתון שלה שווים ולכן נסיק כי $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$.
לכן אם נבחר את סדרת הסופרמומים של $(a_n b_n)$ נקבל את מכפלת הסופרמומים ומצאנו כי אלו הן סדרות מוגדרות היטב.
נסיק אם כן שהגבול העליון של מכפלת הסדרות קיים במובן הרחב, ובפרט כאשר (b_n) חסומה וקיים גבול עליון במובן המצומצם נקבל כי גבול המכפלות מוגדר.

אנו יודעים כי הסופרמום הוא הגבול החלקי הגדול ביותר ונסיק כי תת־סדרה של b_n הגדולה ביותר מקבלת גבול 1 עבור a_n ונסיק כי מתקיים

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n b_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$

□

סעיף ב'

נוכיח כי קיימת סדרה שקבוצת הגבולות החלקיים שלה שווה ל־$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

הוכחה. נגדיר סדרה $(l_n)_1^k$ על־ידי $l_n = \frac{1}{n}$ עבור $1 \le n \le k \in \mathbb{N}$.
עתה נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ על־ידי $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots$ סדרה מהצורה

$$1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

קל למצוא סדרת אינדקסים עולה ממש (n_k) כך שנקבל $a_{n_k} = \frac{1}{m}$ עבור $m \in \mathbb{N}$ קבוע כלשהו, ולכן זהו גבול חלקי שלה ומצאנו כי התנאי מתקיים.
□

שאלה 2

תהינה $f,g:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות ב־$[1,N]$ עבור כל $1<N$.
נסתור את הטענה כי אם הסדרה $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס אף הוא, על־ידי דוגמה נגדית

הוכחה. נגדיר $f(x)=\sin(2\pi x)$ וכלן לכל $N>1$ נקבל $\int_1^N f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\cos(\pi x)\mid_1^N=1-1=0$ ולכן נקבל סדרה קבועה וכמובן מתכנסת. לעומת זאת אנו יודעים כי $\int_1^\infty \sin(2\pi x)\,dx$ לא מתכנס, וקיבלנו סתירה. $\square$

שאלה 3

תהינה סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות אי־שליליות כך ש־$b_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ אז הטור $\sum_n b_n$ מתכנס גורר שהטור $\sum_n a_n$ מתכנס.

הוכחה. מהנתון נסיק כי לכמעט כל n מתקיים $a_n < b_n$ ולכן ממבחן ההשוואה הראשון והאי־שליליות נסיק כי הטענה מתקיימת. $\square$

סעיף ב'

נסתור את הטענה כי אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ אז הטור $\sum_n a_n$ מתכנס גורר שהטור $\sum_n b_n$ מתכנס על־ידי דוגמה נגדית.

נבחר $b_n = 1, a_n = \frac{1}{n^2}$, ברור כי הטור $\sum_n a_n$ מתכנס וגם כי $\sum_n b_n$ מתבדר, אבל $0 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^2}$ בסתירה לטענה.

סעיף ג'

הטענה של סעיף א' כאשר 0 מוחלף ב־∞ איננה נכונה. הדוגמה הנגדית היא הדוגמה של סעיף ב' כאשר הופכים את הסדרות.

עבור הטענה של סעיף ב' וההחלפה נקבל כי הטענה נכונה, נוכיח באופן זהה להוכחת סעיף א', נקבל כי $b_n < a_n$ מהגבול ולכן $0 < b_n < a_n$ וממשפט ההשוואה נקבל התכנסות.

שאלה 4

נבדוק את התכנסות הטורים הבאים

סעיף א'

$$\sum_n \frac{2^n}{3^n+1}$$

ממבחן ההשוואה הגבולי עם $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ וכמובן הטור הזה מתכנס שכן $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}/\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} < 1$ נובעת התכנסות ממבחן דאלמבר.

סעיף ב'

$$\sum_n \frac{3^n}{n!}$$

נבדוק לפי מבחן המנה ונקבל

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן נסיק כי הטור מתכנס.

סעיף ג'

$$\sum_n \frac{2n-3}{n^2-n+4}$$

ממבחן המנה הגבולי יחד עם $\frac{1}{n}$ נקבל כי הטור מתכנס אם ורק אם הטור ההרמוני מתכנס ולכן נסיק כי הטור מתבדר.

סעיף ד'

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

אנו יודעים מאינפי 1 כי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ולכן הטור כמובן מתבדר.

סעיף ה'

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$

נבחין כי

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}} = \sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

ולכן ממבחן ההשוואה הגבולי יחד עם $\frac{1}{n}$ נסיק כי הטור מתבדר.

סעיף ו'

$$\sum_n \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

נבדוק ונקבל

$$\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n} = (t-1)^t \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן ממבחן קושי להתכנסות נקבל שהטור מתכנס.

סעיף ז'

$$\sum_n \frac{n^2}{2^n}$$

נשתמש במבחן ההשוואה עבור $\frac{1}{n^2}$, אנו יודעים כי $\frac{1}{n^2} < \frac{n^2}{2^n}$ לכמעט כל n ולכן נקבל מהתכנסות $\sum_n \frac{1}{n^2}$ שגם הטור הנתון מתכנס.

סעיף ח'

$$\sum_n \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}}$$

נבחין כי

$$\frac{1}{n} / \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}} = n^{(-1+1+\frac{1}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

ולכן מהתבדרות הטור ההרמוני ומבחן המנה הגבולי נקבל כי הטור מתבדר.

סעיף ט'

$$\sum_n \frac{2^n n!}{n^n}$$

נבדוק את מבחן דאלמבר

$$\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} / \frac{2^n n!}{n^n} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2(\frac{n}{n+1})^n = 2(1-\frac{1}{n+1})^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{e} < 1$$

ונקבל מהמבחן כי הטור מתכנס.

סעיף י'

$$\sum_n \sqrt[n]{e} - 1$$

נשתמש בתוצאת התרגול הגורסת כי $\lim_{n\to\infty} \frac{u^4}{e^u}$ עבור $u_n = -\frac{1}{n}$ ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{n^4} = 0$$

ולכן נוכל להסיק כי הטור מתכנס על־ידי מבחן ההוואה הגבולי עם $\frac{1}{n^4}$.

סעיף כ'

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{(n+3)(n^4+2n-1)}}$$

נבחין כי

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(n+3)(n^4+2n-1)}} < \frac{1}{\sqrt[3]{(n)(n^4)}} = \frac{1}{n^{5/3}}$$

ומצאנו כי הטור $\sum_n \frac{1}{n^{5/3}}$ מתכנס בתרגול ולכן נסיק ממבחן ההשוואה כי גם הטור הנתון מתכנס.

שאלה 5

נגדיר

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2^k \\ 0 & n \notin \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\} \end{cases}, \qquad b_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2^k \\ 0 & n \notin \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

נבדוק את התכנסות הטורים $\sum_n a_n, \sum_n b_n$.

נבחין כי לכל $k \in \mathbb{N}$ נקבל כי $\sum_k a_n = \sum_k \frac{1}{2^k}$ מההגדרה, וזהו כמובן טור מתכנס, ולכן נוכל להסיק גם את ההתכנסות של $\sum_n a_n$ עצמו.

לעומת זאת נקבל גם $\sum_k b_n = \sum_k \frac{1}{k}$, דהינו נוכל לבנות תת־סדרה של סכומים של b_n כך שהם זהותית שווים לסכומים החלקיים של הטור ההרמוני, ונוכל להסיק כי הטור מתבדר.

שאלה 6

תהינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות ממשיות.

סעיף א'

נוכיח את הטענה כי אם (a_n) אי־שלילית אז $\sum_n a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n$ מתכנס.

הוכחה. **כיוון ראשון:** ידוע כי הטור מתכנס ולכן נסיק כי גם $\sum e a_n$ מתכנס, שכן מכפלה בסקלר לא משנה התכנסות.
עוד אנו יודעים כי $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ומונוטוני עולה ולכן $0 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n \le e a_n$ ונקבל כי הטור מתכנס.

כיוון שני: נניח כי הטור השני מתכנס, ולכן ישירות נוכל להסיק כי $\frac{e}{2} a_n$ חסום על־ידי הסדרה ולכן ממבחן ההשוואה נקבל כי $\sum_n a_n$ מתכנס אף הוא. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי אם $\sum_n a_n$ מתבדר ו־$\sum_n b_n$ מתכנס אז $\sum_n a_n + b_n$ מתבדר.

הוכחה. נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי ונקבל מהעובדה ש־$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{a_n} = 1$$

ולכן הטורים מתכנסים או מתבדרים יחד, במקרה הזה כמובן מתבדרים. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שאם (a_n) אי־שלילית ואפסה אז קיימת תת־סדרה (a_{n_k}) כך ש־$\sum_k a_{n_k}$ מתכנסת.

הוכחה. ידוע כי הסדרה אפסה ולכן לכל $l \in \mathbb{N}$ נוכל למצוא אינדקס עבורו $a_k < \frac{1}{l^2}$, נבנה סדרת אינדקסים כזו עבור $l = 1, 2, \ldots$ ונקבל תת־סדרה (a_{n_k}) כך ש־$a_{n_k} \le \frac{1}{k^2}$ וזו כמובן מתכנסת. $\square$

סעיף ד'

נוכיח שאם (a_n) אי־שלילית ומונוטונית יורדת אז $\sum_n a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_n a_{2n}$ מתכנס.

הוכחה. נניח כי $\sum_n a_n$ מתכנס ונבחין כי $a_{2n} < a_n$ לכל n ולכן ממבחן ההתכנסות הראשון נובע מיידית כי הטור $\sum_n a_{2n}$ מתכנס אף הוא.
נניח כי $\sum_n a_{2n}$ מתכנס. לכל n נוכל לראות כי $a_n + a_{n+1} < 2a_n$ מהמונוטוניות ולכן $a_{2n-1} + a_{2n} < 2a_{2n}$ ולמעשה תנאי מבחן ההשוואה מתקיימים שוב ונסיק כי $\sum_n a_n$ מתכנס. $\square$

סעיף ה'

נוכיח כי אם (a_n) אי־שלילית והטורים $\sum_n a_{2n-1}, \sum_n a_{2n}$ מתכנסים אז גם הטור $\sum_n a_n$ מתכנס.

הוכחה. נובע ישירות מתוצאת הסעיף הקודם. $\square$

שאלה 7

יהי $N \in \mathbb{N}$, וידוע כי התכנסות $\sum_n a_n$ גוררת את התכנסות $\sum_n a_{n+N}$.
נוכיח שאם $\sum_n a_n$ מתכנס אז מתקיים

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=N+1}^{k} a_n = 0$$

הוכחה. נבחין כי

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) - \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)$$

טענה זו נכונה על־פי תהליך ההוכחה של הטענה שהוצגה בתחילת ההוכחה.
עתה נראה כי נתון $\sum_n a_n = L$ ערך סופי, ולכן נקבל על־פי הגדרה כי

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = L$$

ולכן נקבל

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) - \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\right) = L - L = 0$$

□