פתרון מטלה 08 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

4 ביולי 2024

שאלה 1

תהי D קבוצת החמישיות הסדורות $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$ שעבורן יש למשוואה $ax^4+bx^3+cx^2+dx^1+e=0$ יש פתרון ממשי.

סעיף א'

נוכיח ש־$(1,2,-4,3,-2)$ נקודה פנימית של D.

הוכחה. נגדיר $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f(a,b,c,d,e,x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx^1+e$$

נראה כי $f(1,2,-4,3,-2,1)=0$ ונבדוק את הנגזרת בנקודה לפי x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

ונקבל כי היעקוביאן (בגודל 1) בנקודה הוא $J(1,2,-4,3,-2,1)=4+6-8+6=8\neq 0$.

לכן משפט הפונקציה הסתומה מתקיים וניתן להגדיר את x על־ידי (a,b,c,d,e) ונוכל להסיק כי נקודה זו פנימית ב־D. $\square$

סעיף ב'

נמצא נקודה ב־D שאיננה פנימית.

אם נקודה לא פנימית אז בהכרח היעקוביאן בה מתאפס, ולכן נקבל

$$J(a,b,c,d,e,x)=0\implies 4x^3+3bx^2+2cx+d=0$$

נבנה נקודה כזו, נגדיר $x=1,a=1,b=1,c=1,d=-9$. נקבל מהשוויון $f(1,1,1,-9,e,1)=0$ כי $e=6$ וקיבלנו ערך קצה.

שאלה 2

נגדיר

$$f(x,y,z,w)=(xz-yw+e^x, \sin(xy)+x^2-y^2+z^3-w^3)$$

ונגדיר את מערכת המשוואות

$$f_1(x,y,z,w)=0, \qquad f_2(x,y,z,w)=6$$

נוכיח כי המערכת מגדירה את z,w כפונקציות של x,y בסביבה כלשהי של

$$(x_0,y_0,z_0,w_0)=(0,1,2,1)$$

ונחשב את הנגזרות $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}$ בנקודה $(x_0,y_0)=(0,1)$.

הוכחה. נתחיל ונחשב ישירות כי $f(x_0,y_0,z_0,w_0)=(0,-6)$.

נבחין כי הפונקציה מוגדרת על־ידי רכיבים גזירים ולכן אף היא גזירה ונקבל

$$\frac{\partial f}{\partial(z,w)}=\begin{pmatrix} x & -y \\ 3z^2 & -3w^2 \end{pmatrix}$$

נחשב את היעקוביאן ונקבל

$$J=3yz^2-3xw^2$$

נציב את הנקודה ונקבל $J(0,1,2,1)=3(1\cdot 2^2-0\cdot 1^2)=12\neq 0$, ולכן משפט הפונקציה הסתומה חל ונקבל כי המערכת אכן מגדירה פונקציה של z,w כתלות ב־x,y.

נעבור עתה לחישוב הנגזרות. $\square$