פתרון מטלה 11 — תורת הקבוצות (80200)

26 ביולי 2024

שאלה 1

תהי $\langle X, \prec \rangle$ קבוצה סדורה חלקית, נוכיח שקיים סדר קווי $\lhd$ על X שמרחיב את $\prec$, דהינו $\forall x, y \in X, x \prec y \implies x \lhd y$.

הוכחה. נבנה את הסדר $\lhd$, נתחיל מ־$\lhd = \prec$ ונוסיף איברים.

נגדיר $\le$ יחס סדר מלא על X, קיים אחד לפי משפט הסדר הטוב.

יהיו $x, y, z \in X$ כך ש־$x, y \prec z$ ו־$x \not\prec y \wedge y \not\prec x$ ו־$x \le y$, אז נגדיר $x \lhd y$.

באופן דומה לכל $x, y, z \in X$ כך ש־$z \lhd x, y$ שאינם ניתנים להשוואה כך ש־$x \lhd y$ נגדיר $x \le y$.

נקבל עתה כי $\le$ הוא מספר סדרים קוויים זרים עתה, כנביעה ישירה מהבנייה, תהינה שתי שרשראות $C, C' \subseteq X$ כך שהן מכילות את כלל האיברים ברי־ההשוואה לאיבריהן, נגדיר $\forall x \in C, y \in C', x \lhd y$ באופן שרירותי, וכך נקבל שתחת השינוי ב־$\lhd$ $C = C'$, נחזור על התהליך עד שלא תישארנה שרשאות נפרדות ב־X. $\square$

שאלה 2

תהי A קבוצה אינסופית ו־$B \subseteq A$, נוכיח כי מתקיים $|A| = |B|$ או $|A| = |A \setminus B|$.

הוכחה. ידוע ש־$|B| \leq |A|$, אילו $|A| = |B|$ סיימנו, ולכן נניח $|B| < |A|$ ונוכיח ש־$|A| = |A \setminus B|$.
נבחין כי כמובן $|A \setminus B| \leq |A|$ ולכן עלינו רק להוכיח ש־$|A| \leq |A \setminus B|$.
אנחנו יודעים ש־A אינסופית ולכן $|A| = 2 \cdot |A|$ ונוכל להסיק שקיימות $C, C' \subseteq A$ כך ש־$C \cap C' = \emptyset$.
אנו יודעים ש־$|A| = |C|$ ולכן $|B| < |C|$ ולכן נוכל לבחור קבוצות C, C' כך ש־$B \subseteq C$ ולכן גם $B \cap C' = \emptyset$.
נבנה אם כן פונקציה $f : A \to A \setminus B$ כהרחבה של הפונקציה החד־חד ערכית ועל $C \to A$ ונגדיר $\forall x \in B, f(x) \in C'$ באופן חד־חד ערכי כפי שמובטח שייתכן מאותם שיקולי עוצמות.
נקבל אם כן ש־f חד־חד ערכית ולכן $|A| \leq |A \setminus B|$ כפי שרצינו להוכיח. $\square$

שאלה 3

נוכיח שלכל A אינסופית, מתקיים $|A|^{|A|} = 2^{|A|}$.

הוכחה. תהי A קבוצה כלשהי, נבחין כי $2^A \subseteq A^A$, ולכן גם $2^{|A|} \leq |A|^{|A|}$ ונשאר להוכיח את הכיוון השני בלבד.
נבחין כי $A^A \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$, וידוע כי A אינסופית, לכן $|A \times A| = |A|$ ובהתאם $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A \times A)| \leq |A|^{|A|}$.
הוכח בהרצאה כי מתקיים $|mathcalP(X)| = 2^{|X|}$ לכל X קבוצה, ולכן נקבל בפרט ש-$|A|^{|A|} \leq 2^{|A|}$. $\square$