פתרון מטלה 07 — פונקציות מרוכבות, 80519

21 בדצמבר 2024

שאלה 1

נחשב את האינטגרלים הבאים על־ידי שימוש במשפט קושי.

סעיף א׳

$$J = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$$

על־ידי שימוש בהרכבת המסילות

$$\begin{aligned} &\gamma_1(t) = (1-t)\epsilon + tr && t \in [0,1] \\ &\gamma_2(t) = re^{it} && t \in [0,\pi] \\ &\gamma_3(t) = (1-t)(-r) + t(-\epsilon) && t \in [0,1] \\ &\gamma_4(t) = \epsilon e^{i(\pi-t)} && t \in [0,\pi] \end{aligned}$$

פתרון נגדיר $f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$ ונבחין כי $J = \operatorname{Re}(\int_0^\infty f)$.

לכל $\epsilon, r \in \mathbb{R}$ האינטגרל מתאפס ממשפט קושי, אנו גם יודעים שהאינטגרל מתכנס מאינפי 2 ולכן נעבור לחישובו.

נבדוק את האינטגרל על γ_2:

$$I_2 = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

נבחין כי

$$\max_{z\in\gamma_2} |f(z)| = \max_{z\in\gamma_2} \left|\frac{1-e^{iz}}{z^2}\right| \le \max_{z\in\gamma_2} \frac{|1-e^{iz}|}{r^2} \le \frac{1 + 1\cdot \max_{t\in[0,\pi]} e^{-\sin t}}{r^2} = \frac{2}{r^2}$$

ולכן מאי־שוויון ML,

$$I_2 \le \frac{2}{r^2}\cdot\frac{2\pi r}{2} = \frac{2}{r}$$

לכן $I_2 \to 0$.

נעבור לבחינת

$$I_4 = \int_{\gamma_4} f(z)\,dz$$

הפעם מקירוב לינארי כפי שראינו בהרצאה

$$\int_{\gamma_4} f = \int_{\gamma_4} \frac{1-(1+iz+o(|z|))}{z^2}\,dz = -\int_0^\pi \frac{ie^{i(\pi-t)} + o(|\epsilon e^{i(\pi-t)})}{\epsilon e^{i(\pi-t)}\cdot \epsilon e^{i(\pi-t)}}(-i\epsilon)e^{i(\pi-t)}\,dt = i\int_0^\pi \frac{i\epsilon e^{i(\pi-t)} + o(|\epsilon|)}{\epsilon e^{i(\pi-t)}}\,dt \to -\pi$$

נבחין כי גם

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 \frac{1-e^{i(1-t)\epsilon + itr}}{((1-t)\epsilon + tr)^2}\,dt = \int_\epsilon^r \frac{1-e^{it}}{t^2}\,dt$$

וכן

$$I_3 = \int_{-r}^{-\epsilon} \frac{1-e^{it}}{t^2}\,dt = \int_r^\epsilon -\frac{1-e^{-it}}{t^2}\,dt = \int_\epsilon^r \frac{1-e^{-it}}{t^2}\,dt$$

ולכן

$$I_1 + I_3 = 2\operatorname{Re}(\int_\epsilon^r \frac{1-e^{it}}{t^2}\,dt) = 2\int_\epsilon^r \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$

ונוכל להסיק $I_1 + I_3 \to 2J$.

ממשפט קושי נוכל להסיק

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \implies -\pi + 2J = 0$$

ולכן $J = \frac{\pi}{2}$

סעיף ב׳

נחשב את

$$J = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{x^n+1}\,dx$$

עבור $n > m$ טבעיים על־ידי שימוש במסילה הבאה

$$\gamma_1(t) = t \qquad t \in [0,r]$$
$$\gamma_2(t) = re^{it} \qquad t \in [0, \frac{2\pi}{n}]$$
$$\gamma_3(t) = e^{i\frac{2\pi}{n}}(r-t) \qquad t \in [0,r]$$
$$\gamma_4(t) = e^{\frac{\pi i}{n}} + \epsilon e^{-it} \qquad t \in [0,2\pi]$$

פתרון נגדיר

$$f(z) = \frac{z^{m-1}}{z^n+1}$$

ונבחין כי הפונקציה מוגדרת ורציפה בכל נקודה פרט ל־ $z = e^{\frac{\pi i}{n}}$, לכן התחום הסגור שהמסילות מגדירות הוא תחום בו f רציפה כך שהוא מקיים את תנאי משפט קושי המורחב (את תנאי רגל שמאל) ולכן הוא תקף.

כמובן מאינפי 2 האינטגרל המבוקש מתכנס ויש הצדקה לדבר על ערכו, ונגדיר

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz, \quad I_2 = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz, \quad I_3 = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz, \quad I_4 = \int_{\gamma_4} f(z)\,dz$$

אז מהמשפט נקבל $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ לכל $\epsilon, r > 0$.

נעבור לבדיקת האינטגרלים הללו.

$$I_1 = \int_0^r \frac{t^{m-1}}{t^n+1}\,dt \to J$$

וכן

$$I_3 = \int_0^r \frac{e^{i\frac{2\pi(m-1)}{n}}(r-t)^{m-1}}{(r-t)^n+1}\,dt = e^{i\frac{2\pi(m-1)}{n}} \int_0^r \frac{t^{m-1}}{t^n+1}\,dt \to e^{i\frac{2\pi(m-1)}{n}} J$$

נחסום את f ב־γ_2 ונקבל

$$\sup_{t\in[0,\frac{2\pi}{n}]} |f(\gamma_2(t))| \le \sup_{t\in[0,\frac{2\pi}{n}]} \frac{r^{m-1}}{r^n+1} = \frac{r^{m-1}}{r^n+1}$$

ולכן מאי־שוויון ML והנתון אודות $n > m$,

$$I_2 \le \frac{r^{m-1}}{r^n+1} \cdot \frac{2\pi r}{n} = \frac{r^m}{r^n+1} \cdot \frac{2\pi}{n} \to 0$$

נעבור לחישוב I_4,

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{\frac{\pi i}{n}} + \epsilon e^{it})^{m-1}}{(e^{\frac{\pi i}{n}} + \epsilon e^{it})^n + 1}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{(m-1)\pi i}{n}} + o(\epsilon)}{2 + o(\epsilon)}\,dt \to \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{(m-1)\pi i}{n}}}{2}\,dt = \pi e^{\frac{(m-1)\pi i}{n}}$$

ולכן

$$J + e^{i\frac{2\pi(m-1)}{n}} J + 0 + \pi e^{i\frac{\pi(m-1)}{n}} = 0$$

ובפרט

$$J + \cos(\frac{2\pi(m-1)}{n})J = -\pi\cos(\frac{\pi(m-1)}{n})$$

ולכן

$$J = \frac{-\pi\cos(\frac{\pi(m-1)}{n})}{1 + \cos(\frac{2\pi(m-1)}{n})}$$

שאלה 2

יהי $r > 0$ ו־$\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ על־ידי $\gamma_r(t) = re^{it}$.
אם $g : \overline{B}(0, r) \to \mathbb{C}$ רציפה בכל תחומה ואנליטית ב־$B(0, r)$ אז נוכיח שמתקיים

$$\left| \int_{\gamma_r} e^{iaz} g(z)\, dz \right| \leq M \cdot \frac{\pi}{a}$$

עבור $M = \max_{t \in [0,\pi]} |g(\gamma_r(t))|$ לכל $a > 0$.

הוכחה. נרצה להשתמש באי־שוויון ML, ולכן נחפש חסם לפונקציה הפנימית,

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq t \leq \pi} |e^{ia\gamma_r(t)} g(\gamma_r(t))| &= \sup_{0 \leq t \leq \pi} |e^{iare^{it}}| \cdot |g(z)| \\
&\leq M \sup_{0 \leq t \leq \pi} |e^{iar(\cos t + i \sin t)}| \\
&= M \sup_{0 \leq t \leq \pi} |e^{iar \cos t}| \cdot |e^{-ar \sin t}| \\
&= M \sup_{0 \leq t \leq \pi} e^{-ar \sin t} \\
&= \frac{M}{e^{ar}} \\
&\leq \frac{M}{ar}
\end{aligned}$$

וכן $L(\gamma_r) = \pi r$, ונובע

$$ML(\gamma_r) \leq M \cdot \frac{\pi r}{ar} = M \frac{\pi}{a}$$

כפי שרצינו להראות. $\square$

שאלה 3

יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום כוכבי.

נוכיח כי לכל פונקציה אנליטית $f : G \to \mathbb{C}$ קיימת פונקציה קדומה.

הוכחה. תהי $z_0 \in G$ נקודה כך שלכל $z \in G$ גם $[z_0, z] \subseteq G$, קיימת כזו מהיות G כוכבי.

נגדיר מסילה $\gamma_z(t) = z_0(1-t) + zt$ וכן את הפונקציה $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\, dw$.

אנו רוצים להראות ש־F רציפה וכן ש־$F' = f$.

תהי z ותהי $z' \in B(z, \epsilon)$, אז ממשפט קושי למשולשים מתקיים

$$|F(z) - F(z')| = \left| \int_{[z',z]} f(w)\, dw \right| \leq M|z' - z| = M\epsilon$$

עבור $M = \sup_{w \in [z,z']} f(w)$, אז גם

$$\lim_{z' \to z} \frac{|F(z') - F(z) - f(z)(z' - z)|}{|z' - z|} \leq \lim_{z' \to z} \sup_{w \in [z,z']} f(w) - f(z) = 0$$

ומצאנו כי הפונקציה F גזירה כך ש־f נגזרתה. $\square$

שאלה 4

יהי f פונקציה הנתונה על־ידי טור חזקות מתכנס עם רדיוס התכנסות r ונסמן

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

סעיף א׳

נוכיח כי רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות הנתון על־ידי

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

הוא r.

הוכחה. יהי $z \in B(0,r)$, אז $f(z)$ מוגדר ואף מתכנס בהחלט בנקודה זו, כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\cdot|z|^n$$

מוגדר אף הוא, זאת ראינו בתחילת הקורס.

נבחין שזהו טור ממשי ולכן נוכל לגזור אותו איבר איבר ויתקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}$$

טור מתכנס, אבל זוהי התכנסות בהחלט של הטור אותו אנו מחפשים, לכן $g(z)$ מוגדר ומתכנס בהחלט לכל $z \in B(0,r)$, לכן רדיוס ההתכנסות של g הוא r. □

סעיף ב׳

נוכיח שמתקיים

$$f(z)=f(0)+\int_{[0,z]} g(w)\,dw$$

הוכחה. נבחין כי מהשאלה הקודמת והעובדה שכדור הוא תחום כוכבי קיימת G פונקציה הולומורפית כך ש־$G'=g$, נבחין כי קיימת יחידה כזו כך שגם $G(0)=f(0)$, ונראה ש־$G=f$.

$$\left|f(0)+\int_{[0,z]} g(w)\,dw-f(z)\right| \le \left|\int_{[0,z]}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n\,dw-\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right| \le \int_{[0,z]} |g(w)|\,dw$$

יהי $N\in\mathbb{N}$, אז נגדיר f_N, g_N התחיליות של הטורים, כלומר $f_N\to f, g_N\to g$, ולכן

$$\left|f_N(z)-f(0)-\int_{[0,z]} g_N(w)\,dw\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} a_n z^n-\int_{[0,z]}\sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}\,dw\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} a_n z^n-\sum_{n=1}^{N}\int_{[0,z]} n a_n z^{n-1}\,dw\right| = 0$$

כאשר המהלך האחרון נובע מאינטגרביליות פולינום שראינו כבר, ועתה נוכל להסיק גם

$$\lim_{N\to\infty} \left|f(z)-f(0)-\int_{[0,z]} g(w)\,dw\right| = 0$$

ולכן ממשפט התכנסות במידה שווה נסיק $f(z)=f(0)+\int_{[0,z]} g(w)\,dw$. □

סעיף ג׳

נוכיח ללא שימוש במשפט קושי שלכל מסילה סגורה $\gamma : I \to B(0,r)$ מתקיים

$$\int_{\gamma} g(z)\,dz = 0$$

הוכחה. □