פתרון מטלה 03 — תורת הקבוצות האקסיומטית, 80650

30 בנובמבר 2024

שאלה 1

נניח $\mathbf{ZF}+\mathbf{AC}$. יהי מונה רגולרי אינסופי κ. נגדיר $H(\kappa)=\{x \mid |\operatorname{trcl}(x)|<\kappa\}$ כאשר $\operatorname{trcl}(x)$ הסגור הטרנזיטיבי של x.

תהי קבוצה טרנזיטיבית x. נוכיח ש־$z=\{\operatorname{rank} y \mid y\in x\}$ קבוצה טרנזיטיבית.

הוכחה. נגדיר $c: z\to x$ פונקציית בחירה כך ש־$c(a)\in x$ וכמובן $\operatorname{rank} c(a)\in z$.

נוכיח שאם $t=\operatorname{rank} x$, אז לא קיים $l<t$ כך ש־$\forall y\in x, \operatorname{rank} y\neq l$.

נבחן את $t=l+1$ עבור t עוקב. מההגדרה השקולה ל־rank מהמטלה הקודמת נובע ישירות כי קיים $y\in x$ $\operatorname{rank} y=l,$. אילו t גבולי, אז מאותה סיבה לכל $l<t$ קיים y כזה אחרת $l+1$ לא בקבוצה וההגדרה הגבולית לא חלה.

באינדוקציה מהמבנה הזה ועל־ידי שימוש ב־c נוכל לקבל שאכן לא קיים y כזה.

לבסוף, אם $b\in a\in z$, אז בהכרח $\exists y\in x, \operatorname{rank} y=b$ ולכן גם $b\in z \implies c(b)\in x$. $\square$

שאלה 2

נוכיח ש־$H(\kappa)$ קבוצה.

הוכחה. יהי $x \in H(\kappa)$, ונגדיר $y = \mathrm{trcl}(x)$, אז $|y| < \kappa$.
נגדיר $\alpha = \operatorname{rank} y$, ונניח $\alpha > \kappa^+$ אז נקבל ש־$|y| > \kappa$ וזו סתירה להנחה, לכן $\operatorname{rank} y < \kappa^+$.
בהתאם $y \in V_{\kappa^+}$ לכל y ולכן $H(\kappa) \subseteq V_{\kappa^+}$ ובפרט קבוצה. $\square$

שאלה 3

נוכיח ש־$H(\kappa) \subseteq \kappa$ וש־$H(\kappa)$ טרנזיטיבי.

הוכחה. יהי $\alpha \in \kappa$, אז $\alpha = \operatorname{trcl}(\alpha)$ ואנו יודעים ש־κ מונה ולכן מהגדרה $|\alpha| < \kappa$, שאם לא כן המונה בו α היה מוכל היה גדול מ־κ, וכמובן $\kappa \notin \kappa$. נסיק אם כך ש־$\alpha \in H(\kappa)$ לכל $\alpha \in \kappa$ ולכן $\kappa \subseteq H(\kappa)$.

נראה ש־$H(\kappa)$ טרנזיטיבי. יהי $x \in H(\kappa)$, אז x טרנזיטיבי, ונבחן את $y = \operatorname{trcl}(x)$. כמובן $y = \operatorname{trcl}(y)$ ולכן $y \in H(\kappa)$ ומצאנו ש־$H(\kappa)$ טרנזיטיבית עבור הקבוצות הטרנזיטיביות בה. יהי $z \in x$, אז גם $z \in y$ ולכן $z \subseteq y$ ובהתאם y סגור טרנזיטיבי של z ו־$z \in H(\kappa)$ ולכן זו קבוצה טרנזיטיבית.

מתרגיל 1 והטרנזיטיביות נוכל להסיק ש־$\langle H(\kappa), \in \rangle$ מקיים את אקסיומת ההיקפיות והיסוד והקבוצה הריקה.

אילו נניח ש־$\omega < \kappa$ אז גם $\omega \in H(\kappa)$ ומתרגיל אחד מתקיימת אקסיומת האינסוף. $\square$

שאלה 4

נניח ש־$x \in H(\kappa)$ ו־$f : x \to H(\kappa)$. נראה ש־$f, \operatorname{rng} f \in H(\kappa)$.

הוכחה. נתון ש־$|\operatorname{trcl}(x)| < \kappa \iff x \in H(\kappa)$ אבל $|x| \le |\operatorname{trcl}(x)|$ ולכן $|x| < \kappa$, אז תהי $g : x \to \alpha$ עבור $\alpha \in \kappa$, חד־חד ערכית.
נגדיר פונקציית החלפה $c : \operatorname{rng} f \to x$, היא חד־חד ערכית מהגדרה, ולכן גם $c \circ g$ חד־חד ערכית ונסיק $\alpha = |\operatorname{rng} f|$.
אנו יודעים כי איחוד של קבוצות טרנזיטיביות הוא טרנזיטיבי ולכן $u = \bigcup_{y \in \operatorname{rng} f} \operatorname{trcl} y$ קבוצה טרנזיטיבית.
עוד נבחין כי $\kappa = |\kappa \times \kappa| \le |\alpha \times \kappa| < |u|$ ולכן $\operatorname{rng} f \in H(\kappa)$.
לבסוף $\kappa > |\kappa \times \kappa| < |x \times \operatorname{rng} f|$ ולכן גם $f \in H(\kappa)$.

תחת המודל, נסיק שלכל $x \in H(k)$ ומחלקת פונקציה F, גם $\{F(y) \mid y \in x\}$ קבוצה, שכן $F \restriction x : x \to H(\kappa)$.
יהי $x \in H(\kappa)$, אז מעיקרון הסדר הטוב קיים $\alpha \in Ord$ כך שקיימת $f : x \to \alpha$ הפיכה, ומבחירה נוכל להסיק שגם $\alpha < \kappa$. □

שאלה 5

נוכיח ש־$H(\kappa)$ מספקת את אקסיומת האיחוד.

הוכחה. למעשה כבר ראינו את הטענה הזו בסעיף הקודם. איחוד של קבוצות טרנזיטיביות הוא טרנזיטיבי ולכן אם $x \in H(\kappa)$ אז $\bigcup x \subseteq \bigcup \mathrm{trcl}(x)$ ולכן $\bigcup x \in H(\kappa)$.

נקבל אם כך שאקסיומת האיחוד חלה עבור $\langle H(\kappa), \in \rangle$ ולכן זהו מודל טרנזיטיבי של $\mathbf{ZFC} - \mathbf{Power\ set}$. $\square$

שאלה 6

נראה ש־$\mathbf{ZFC} - \mathbf{Power\ Set}$ לא מוכיח את הקיום של קבוצה שאיננה בת־מניה.

הוכחה. נגדיר $\kappa = \omega$ ולכן $\langle H(\omega), \in\rangle$ מודל של $\mathbf{ZFC} - \mathbf{Power\ Set}$, אז זהו מודל כך שאין בו קבוצות שאינן־בנות מניה.

אם נוסיף למודל את האקסיומה שאין קבוצה שלא בת־מניה נקבל שהיא עקבית. $\square$