פתרון מטלה 07 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

28 ביוני 2024

שאלה 1

נמצא ונסווג את כל הנקודות הקריטיות של הפונקציה

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 3z - x$$

נחשב

$$\nabla f(x,y,z) = (2x + y - 1, 2y + x, 2z + 3)$$

נבדוק את התאפסות הגרדיאנט

$$\nabla f = 0 \iff z = \frac{-3}{2}, y = \frac{-1}{3}, x = \frac{2}{3}$$

ומצאנו כי ישנה נקודה יחידה חשודה והיא $p = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$. נחשב את הנגזרת השנייה ונקבל

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

זוהי כמובן מטריצה חיובית לחלוטין לפי משפט סילבסטר ולכן p מינימום מקומי ויחיד ולכן גם מינימום מוחלט.

שאלה 2

יהי $V = \mathbb{R}^{d\times d}$ מרחב מטריצות.

נוכיח שקיימת סביבה U של I כך שכל המטריצות ב־U הן ריבועים.

הוכחה. נגדיר $f : V \to V$ על־ידי $f(A) = A^2$.

נראה כי $f(A+H) = A^2 + AH + HA + H^2$ ולכן נוכל לקבוע כי f גזירה בכל נקודה וכי $(Df\mid_A)(X) = AX + XA$.

זוכי כמובן פונקציה רציפה ולכן מצאנו כי f גזירה ברציפות בסביבת $A \in V$ ובפרט ב־I.

נבחין כי $(Df\mid_I)(X) = 2X$ ובהתאם $J_f(I) = \det(2I) \geq 0$ ולכן קיימת סביבה פתוחה $V \subseteq U \ni I$ כך ש־$f^{-1} : U \to U$ מוגדרת וגזירה ברציפות בה. מהגדרת f ישירות נובע כי כל $A \in U$ היא ריבוע. $\square$

שאלה 3

נמצא את המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציות הבאות.

סעיף א'

הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1, 3x\geq -y\}$.

נתחיל בבדיקת A°, זוהי קבוצה פתוחה ולכן נבדוק על־פי גזירה ומציאת נקודות קריטיות:

$$\nabla f(x,y)=(2x-12,2y+16)$$

הנקודה היחידה החשודה לקיצון היא $A\notin(6,-8)$.

עתה נבדוק את $\partial A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1, 3x=-y\}$.

נגדיר $g_1(x,y)=x^2+y^2-1, g_2(x,y)=3x+y$ ונראה כי $0=g_1(x,y)=g_2(x,y) \iff (x,y)\in\partial A$.

נראה גם כי $\nabla g_1=(2x,2y), \nabla g_2=(3,1)$.

נתחיל בחיפוש נקודות קיצון תחת האילוץ g_1 ונקבל

$$\nabla f=\lambda\nabla g_1 \implies 2x(1-\lambda)=12, 2y(1-\lambda)=-16$$

אם $\lambda=1$ נקבל סתירה ולכן נניח $\lambda\neq 1$, וידוע כי $x,y\neq 0$ מהתחום ולכן נוכל להסיק

$$x\cdot\frac{-8}{y}=6 \implies x=-\frac{3}{4}y$$

נשתמש בשוויון $g_1(x,y)=0$ ונקבל $\frac{9}{16}y^2+y^2=1$ ולכן $y=\pm\frac{4}{5}$ ונקבל $\pm(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$, בתחום נמצאת רק $(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$, ובה $f(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})=-19$.

נבדוק את האילוץ השני ונקבל את השוויון

$$2x-12=3\lambda, 2y+16=\lambda$$

אילו $\lambda=0$ אז נקבל נקודה יחידה שאיננה בתחום g_1 ולכן נניח $\lambda\neq 0$ ונקבל

$$2x-12=3(2y+16) \implies x=3y+30$$

ונסיק מ־$g_2=0$ כי

$$3x+y=0 \implies 3x+3x+30=0 \implies x=-5$$

ונסיק כי הנקודה לא בתחום.

נבדוק את המקרה בו שני האילוצים מתקיימים, במקרה זה יש שתי נקודות יחידות כאשר

$$9y^2+y^2=1 \implies y=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

וקיבלנו את הנקודות $\pm(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}})$, ונקבל $f(\pm(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}))=1\mp\frac{36}{\sqrt{10}}\mp\frac{16}{\sqrt{10}}=1\mp\frac{52}{\sqrt{10}}$.

מצאנו את כל הנקודות.

סעיף ב'

$$f(x,y)=8x-2y, \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 2x-y^3\leq 1, 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$$

נתחיל מחישוב קיצון פנימיות:

$$\nabla f=(8,-2)$$

ולכן אין קיצון פנימיות.

נעבור על חמשת האילוצים:

נגדיר $g_1(x,y)=2x-y^3-1$ ונקבל גם

$$\nabla g_1=(2,3y^2)$$

מלגרנז' נקבל

$$(8,-2)=\lambda(2,3y^2)$$

נקבל סתירה ישירות מחיוביות השוויון השני.

נגדיר $g_2(x,y)=x$ ונבחן את האילוץ $g_2(x,y)=0$:

$$\nabla g_2=(1,0)$$

ולכן

$$(8,-2)=\lambda(1,0)$$

ונראה כי אנחנו מקבלים סתירות, נוכל לעשות תהליך זה לכל האילוצים הישירים על הצירים ולקבל סתירה דומה, נבחן עתה את חיתוכי האילוצים.

כמובן נקבל ישירות את הנקודות $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ ובהתאמה

$$f(0,0)=0,f(0,1)=-2,f(1,0)=8,f(1,1)=6$$

ונשאר לבדוק את g_1 עם הגבלות על הצירים, נקבל

$$(0,-1),(1,1),(\frac{1}{2},0)$$

ישנה נקודה יחידה שבתחום ולא בדקנו, ונקבל

$$f(\frac{1}{2},0)=4$$

ולכן המקסימום הוא $(1,0)$ ו־$(0,1)$ המינימום.

סעיף ג'

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 2x^2+y^2+z^2\le 1,5x+4y+3z=0\}$$

לכן נגדיר

$$g_1(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-1,\qquad g_2(x,y,z)=5x+4y+3z$$

ונחשב

$$\nabla f=(2x,2y,2z),\qquad \nabla g_1=(4x,2y,2z),\qquad \nabla g_2=(5,4,3)$$

נבדוק קיצון פנימי ונקבל

$$\nabla f=0\implies(0,0,0)$$

ואכן $(0,0,0)\in A$, אנו כבר יודעים כי f פרבולואיד ולכן זהו מינימום מקומי.

נבדוק את האילוץ $g_1=0$ על־ידי לגרנז' ונקבל

$$(2x,2y,2z)=\lambda(4x,2y,2z)$$

נקבל מהשוויון השלישי ישירות כי $\lambda=1$ ומהשוויון הראשון כי $x=0$ ולכן $g_1(0,y,z)=y^2+z^2-1=0$, נצמצם עוד על־ידי האילוץ השני ונקבל $4y+3z=0$ ולכן $y=\pm\frac{3}{5}\implies 16y^2=9z^2=9-9y^2$.

נקבל $\pm(0,\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ בלבד וערך f בנקודות אלה הוא

$$f(\pm(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}))=1$$

נבדוק את האילוץ השני ונקבל

$$(2x,2y,2z)=\lambda(5,4,3)$$

נקבל מערכת הומוגנית ונפתור אותה

$$\begin{pmatrix}2&0&0&-5\\0&2&0&-4\\0&0&2&-3\\5&4&3&0\end{pmatrix}$$

זו כמובן מטריצה הפיכה ונסיק כי $(0,0,0)$ פתרון יחיד.

נבדוק את שני האילוצים יחד ונקבל את המשוואה

$$(2x,2y,2z)=\lambda_1(4x,2y,2z)+\lambda_2(5,4,3)$$

והיא תניב לנו תוצאות שלא בתחום ונסיק כי $(0,0,0)$ מינימום ו־$\pm(\frac{3}{5},-\frac{4}{5},1)$ מקסימום.

סעיף ד'

$$f(x,y,z)=x-y+3z, A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2+z^2\leq 1, z\geq 0\}$$

ולכן נגדיר

$$g_1(x,y,z)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2+z^2-1, \qquad g_2(x,y,z)=z$$

ונחשב

$$\nabla f=(1,-1,3), \qquad \nabla g_1=(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y,2z), \qquad \nabla g_2=(0,0,1)$$

הפונקציה לינארית ולכן אין נקודות קיצון פנימיות.

נבדוק את האילוץ הראשון על־ידי לגרנז'

$$(1,-1,3)=\lambda(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y,2z)$$

ולכן כמובן נקבל $x=-y=4z$ על־ידי שימוש באגפים הראשונים. נקבל מ־$g_1(x,y,z)=0$ גם

$$\frac{1}{4}16z^2+\frac{1}{4}16z^2+z^2=1 \implies z=\frac{1}{3}$$

ולכן נקבל את הנקודה $(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{1}{3})$, עבורה מתקיים $\frac{11}{3}=f(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{1}{3})$.

האילוץ השני הוא לינארי והחיתוך שלו על הפונקציה לא מניב נקודות קריטיות.

האילוץ השני גורר $z=0$ ולכן כדי לבדוק את שניהם מספיק שנחשב את

$$(1,-1)=\lambda(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)$$

כמובן נקבל $x=-y$ וגם $\frac{1}{2}x^2=1 \implies x=\pm\sqrt{2}$, ולכן הנקודות הקריטיות הן $\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$.

נקבל גם $f(\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2},0))=\pm2\sqrt{2}$.

שאלה 4

נחשב את הנפח המקסימלי של תיבה מקבילה לצירים שאפשר לבנות בתוך האליפסואיד

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$$

נבחין כי מסימטריה של האליפסואיד סביב הצירים כל נקודה יחידה פנימית שלו מגדירה היטב תיבה על־ידי בחירת קודקוד נגדי, ונפח תיבה זו הוא $8xyz$, ולכן מטעמי נוחות נגדיר

$$f(x,y,z)=xyz$$

פונקציית נפח שמייצגת נאמנה את התנהגות נפח התיבה הסופית, על־ידי $8|f(p)|$.

נגדיר את החסימה על־ידי האליפסואיד כאילוץ על־ידי הפונקציה

$$g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

נחשב את הגרדיאנטים להמשך החישוב

$$\nabla f=(yz,xz,xy),\qquad \nabla g=(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2})$$

נתחיל במציאת קיצון פנימי ונקבל מאיפוס הגרדיאנט ישירות את הנקודה $(0,0,0)$, בה כמובן הנפח עצמו הוא מינימלי.

נעבור לבדיקת קיצון על האליפסואיד, נשתמש בשיטת לגרנז' ונקבל את השוויון

$$(yz,xz,xy)=\lambda(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})$$

לכן נקבל $\frac{z^2}{c^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}=xyz$ והשוויון $g(x,y,z)=1$ נקבל גם $\frac{3}{a^2}x^2=1$, ולכן $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, נתעלם מהתוצאה השלילית מסימטריית התיבה המתקבלת. נקבל מהתליך הזה את הנקודה $(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$, ו־$f(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

ולכן נפח התיבה המקסימלית יהיה $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

שאלה 5

יהיו $p,q>0$ כך ש־$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

סעיף א'

נבדוק אם לפונקציה

$$f(x,y)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

יש מינימום ומקסימום על חצי ההיפרבולה $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0, xy=1\}$.

נתחיל כמובן מלבדוק קיצון כללי בפונקציה, נחשב

$$\nabla f=(x^{p-1},y^{q-1})$$

ולכן כמובן נקבל נקודה יחידה $(0,0)$ אשר איננה בתחום.

נגדיר $g(x,y)=xy$ ונבדוק את ההגבלה $g(x,y)=1$ על־ידי שימוש במשפט כופלי לגרנז', נקבל

$$(x^{p-1},y^{q-1})=\lambda(y,x)$$

אנו יודעים כי $xy=1$ ומחיוביות נוכל לקבוע $y=\frac{1}{y}$ ויחד עם השוויון $x^{p-1}\frac{1}{y}=\lambda=y^{q-1}\frac{1}{x}$ הנובע מהשורה הקודמת נקבל

$$x^p=y^q \implies x^{pq}=1 \implies x=1 \implies y=1$$

ומצאנו כי הנקודה $(1,1)$ היא קיצון בתחום, ומתקיים $f(1,1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. מבדיקת נקודה נוספת בתחום והעובדה שזהו הקיצון היחיד נסיק כי זהו מינימום.

סעיף ב'

נוכיח את אי־שוויון יאנג, לכל $x,y>0$ מתקיים

$$xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

הוכחה. בסעיף הקודם מצאנו כי אם $xy=1$ אז בהיפרבולה זו המינימום של $f(x,y)$ הוא 1 ולכן $xy\le f(x,y)$.
נחפש באופן דומה נקודות קיצון עבור $xy=k$ ל־$k\in\mathbb{R}_+$ כלשהו, ונקבל מהתהליך את הנקודה $(\sqrt[p]{k},\sqrt[q]{k})$ כנקודת מינימום, ומתקיים $f(\sqrt[p]{k},\sqrt[q]{k})=k$, ומצאנו כי אי־השוויון נכון. □

שאלה 6

רוצים לתכנן פחית משקה גלילית עם נפח V ושטח פנים מינימלי.

נחשב את מידות הפחית.

נגדיר פונקציות f, g המסמלות את שטח הפנים והנפח בהתאמה:

$$f(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi hr \qquad g(r,h) = \pi hr^2$$

כמובן אנו מנסים למצוא את המינימום של f עם האילוץ $g = V$, ולכן נחשב גרדיאנטים

$$\nabla f = (4\pi r + 2\pi h, 2\pi r) \qquad \nabla g = (2\pi rh, \pi r^2)$$

לכן ממשפט כופלי לגרנז' נקבל

$$(4\pi r + 2\pi h, 2\pi r) = \lambda(2\pi rh, \pi r^2)$$

יחד עם האילוץ $\pi hr^2 = V$. נקבל $2r + h = \lambda rh$ וכן $\lambda = \frac{2r+h}{rh}$, ומהשוויון השני $2r = \lambda r^2$ ולכן $\lambda = \frac{2}{r}$ ונקבל

$$\frac{2r+h}{rh} = \frac{2}{r} \implies 2r + h = 2h \implies h = 2r$$

נציב ונקבל $V = 2\pi r^3$ ולכן $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, ונקבל גם $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, ומבדיקת נקודות אחרות בתחום נקבל כי זהו מינימום.

נסכם ונאמר כי על גובה הפחית להיות $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ ועל רדיוסה להיות $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.