פתרון מטלה 06 — מבוא ללוגיקה, 80423

8 בדצמבר 2024

שאלה 1

תהי L שפה סופית לתחשיב פסוקים, ונסמן $\mathcal{F}=\{\mathbb{T},\mathbb{F}\}^L$.
נגדיר $B: sent_L/\equiv_{tau}\to\mathcal{F}$ על־ידי $B([\varphi]_{\equiv_{tau}})=B_\varphi$.

סעיף א׳

נוכיח ש־B מוגדרת היטב.

הוכחה. החל מעתה נסמן $\equiv$ כ־$\equiv_{tau}$ מטעמי קריאות.
יהיו $\varphi,\psi\in[\varphi]_\equiv$ שני פסוקים. נראה כי

$$B_\varphi=B_\psi \iff \forall v\in\mathcal{F}, B_\varphi(v)=B_\psi(v) \iff \forall v\in\mathcal{F},\overline{v}(\varphi)=\overline{v}(\psi) \iff \varphi\equiv\psi$$

אבל מהגדרתם $\varphi\equiv\psi$ ולכן $B_\varphi=B_\psi$ וכן הפונקציה B לא תלויה בבחירת נציג, קרי היא מוגדרת היטב. □

סעיף ב׳

נוכיח ש־B חד־חד ערכית ועל.

הוכחה. נניח $[\varphi]_\equiv\neq[\psi]_\equiv$ ולכן קיים $v\in\mathcal{F}$ כך שמתקיים

$$\overline{v}(\varphi)\neq\overline{v}(\psi) \implies B_\varphi\neq B_\psi \iff B([\varphi]_\equiv)\neq B([\psi]_\equiv)$$

ומצאנו חד־חד ערכיות. נעבור להוכחת על. תהי $f\in\mathcal{F}$, אז מטענה מההרצאה קיים φ כך ש־$f=B_\varphi$, ולכן $[\varphi]_\equiv\in\operatorname{dom}B$, וגם $B(f)=B_\varphi$
ומצאנו ש־B על. □

סעיף ג׳

נוכיח שלכל $\varphi,\phi\in sent_L$ מתקיים

$$B([\varphi]_\equiv\tilde{\cdot}[\phi]_\equiv)=B([\varphi]_\equiv)\cdot' B([\phi]_\equiv),\qquad B([\varphi]_\equiv\tilde{+}[\phi]_\equiv)=B([\varphi]_\equiv)+' B([\phi]_\equiv),\qquad B(\tilde{-}[\varphi]_\equiv)=-'B([\varphi]_\equiv)$$

הוכחה. יהי $v\in\mathcal{F}$, אז

$$\begin{aligned}
B([\varphi]_\equiv\tilde{\cdot}[\phi]_\equiv)(\varphi)&=B([\varphi\cdot\phi]_\equiv)(\varphi)\\
&=B_{\varphi\cap\phi}(v)\\
&=\overline{v}(\varphi\cap\phi)\\
&=V_\wedge(\overline{v}(\varphi),\overline{v}(\phi))\\
&=\overline{v}(\varphi)\cdot\overline{v}(\phi)\\
&=B_\varphi(v)\cdot B_\phi(v)\\
&=(B_\varphi\cdot' B_\phi)(v)\\
&=(B([\varphi]_\equiv)\cdot' B([\phi]_\equiv))(v)
\end{aligned}$$

ולכן $B([\varphi]_\equiv\tilde{\cdot}[\phi]_\equiv)=B([\varphi]_\equiv)\cdot' B([\phi]_\equiv)$.
המהלך עבור $B([\varphi]_\equiv\tilde{+}[\phi]_\equiv)=B([\varphi]_\equiv)+' B([\phi]_\equiv)$ זהה.
נבחן את השלילה:

$$B(\tilde{-}[\varphi]_\equiv)(v)=B([-\varphi]_\equiv)(v)=B_{(\neg\varphi)}(v)=V_\neg(\overline{v}(\varphi))=-B_\varphi(v)=(-'B([\varphi]_\equiv))(v)$$

ולכן $B(\tilde{-}[\varphi]_\equiv)=-'B([\varphi]_\equiv)$. □

שאלה 2

תהי L שפה לתחשיב יחסים.

סעיף א'

יהי $\mathcal{A} = (A; I)$ מבנה ל־L. תהי $\sigma : Var \to A$ השמה ונבנה ברקורסיה פונקציה כך ש־$\bar{f}_\sigma(t) = t^{\mathcal{A}}(\sigma)$.

הוכחה. נגדיר $f_\sigma : Var \cup const_L \to A$ על־ידי $f_\sigma(v) = \sigma(v)$ עבור $v \in Var$ ו־$f_\sigma(c) = c^{\mathcal{A}}$ עבור $c \in const_L$.
לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $F \in Func_{L,n}$ נגדיר $\epsilon_F : A^n \to A$ על־ידי $\epsilon_F(a_0, \ldots, a_{n-1}) = F^{\mathcal{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$.
ממשפט ההגדרה ברקורסיה נובע שקיימת ויחידה $\bar{f}_\sigma : term_L \to A$ המקיימת לפי ההגדרה $\bar{f}_\sigma(t) = t^{\mathcal{A}}(\sigma)$, ניתן כמובן להוכיח טענה זו באינדוקציה, אך לא התבקשנו לעשות כן. $\square$

סעיף ב'

נבנה פונקציה $form_L \to Y$ המחזירה עבור נוסחה את קבוצת המשתנים החופשיים בה.
פתרון נגדיר $Y = \mathcal{P}(Var)$, וכן $f : atom_L \to Y$ כך שלכל $\varphi \in atom_L, f(\varphi) = g(\varphi)$, כאשר g הפונקציה המתקבלת משאלה 3 ב' במטלה 5.
עוד נגדיר $\epsilon_\neg : Y \to Y$ על־ידי $\epsilon_\neg(x) = x$ וכמו־כן לכל $\square \in \mathcal{B}$ גם $\epsilon_\square : Y^2 \to Y$ על־ידי $\epsilon_\square(x, y) = x \cup y$.
נגדיר גם $\epsilon_\exists, \epsilon_\forall : Var \times Y$ על־ידי $\epsilon_\forall(v, x) = \epsilon_\exists(v, x) = x \setminus \{v\}$.
כל זאת בנינו בהתאם להגדרה של משתנים חופשיים, ולכן גם $\overline{f}$ המתקיימת מהפעלת משפט הרקורסיה ליחסים קיימת ומתאימה קבוצות משתנים חופשיים לנוסחות.

שאלה 3

תהי $L_=$ שפת השוויון ויהי $n \in \mathbb{N}$.

סעיף א׳

נוכיח שקיים $\varphi_{\geq n} \in sent_L$ כך שלכל $\mathcal{A} = (A; I)$ מבנה ל־$L_=$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi_{\geq n}$ אם ורק אם $|A| \geq n$.

הוכחה. נסמן $(\neg = (x, y))$ על־ידי $x \neq y$, נבחין כי זהו סימון בלבד. נגדיר נוסחה

$$\varphi_{\geq n} = \exists x_0(\exists x_1(x_1 \neq x_0 \land \exists x_2(x_2 \neq x_1 \land x_2 \neq x_0 \land \dots \exists x_{n-1}(x_{n-1} \neq x_0 \land \dots \land x_{n-1} \neq x_{n-2}))))$$

נניח ש־$\mathcal{A} \models \varphi_{\geq n}$ ולכן ישירות מהגדרת הנוסחה נקבל שקיימים $x_0, \dots, x_{n-1} \in A$ שונים בזוגות, ולכן $|A| \geq |\{x_0, \dots, x_{n-1}\}| = n$.
נניח ש־$|A| \geq n$ ולכן קיימת תת־קבוצה $X \subseteq A$ כך ש־$|X| = n$ (ואין צורך באקסיומת הבחירה מסופיות X) כך שכל האיברים שונים בזוגות, דהינו $\varphi_{\geq n}$ מתקיים ב־$\mathcal{A}$ ולכן $\mathcal{A} \models \varphi_{\geq n}$. □

סעיף ב׳

נסיק כי יש נוסחה $\varphi_{=n}$ כך שלכל $\mathcal{A} = (A; I)$ מבנה ל־$L_=$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi_{=n}$ אם ורק אם $|A| = n$.

הוכחה. נגדיר

$$\varphi_{\leq n} = \exists x_0 \exists x_1 \dots \exists x_{n-1}(\forall x(x = x_0 \lor \dots \dots x = x_{n-1}))$$

נוסחה שמתארת שקיימים לכל היותר n איברים בעולם, נבחין כי בנוסחה אין התייחסות למקרה שבו $x_i = x_j$ עבור $i \neq j$, נוכל כמובן לתקן נוסחה זו באופן דומה לבניית הנוסחה $\varphi_{\geq n}$, אך אין בכך צורך.
ניתן להוכיח באופן דומה לסעיף א׳ כי מתקיים $|A| \leq n \iff \mathcal{A} \models \varphi_{\leq n}$.
נבחן אם כן את $(\varphi_{\leq n} \land \varphi_{\geq n}) \overset{def}{=} \varphi_{=n}$ ונקבל מהטענות שמצאנו ומזהויות שמתקיים $|A| = n \iff \mathcal{A} \models \varphi_{=n}$ כמבוקש, זאת שכן

$$A \models \varphi_{=n} \iff A \models \varphi_{\geq n}, \varphi_{\leq n} \iff n \leq |A| \leq n \iff |A| = n$$

□

סעיף ג׳

נסיק שאם L שפה כלשהי לתחשיב יחסים ו־$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ מבנים סופיים שלה כך ש־$|B| \neq |A|$ אז $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ אינם שקולים אלמנטרית.

הוכחה. נניח $|A| = n \neq m = |B|$ בהתאם לנתון.
לכן גם $\mathcal{A} \models \varphi_{=n}$ וגם $\mathcal{B} \models \varphi_{=m}$. אבל מאותו הנתון גם $\mathcal{A} \not\models \varphi_{=m}$ ו־$\mathcal{B} \not\models \varphi_{=n}$ ולכן $\mathcal{A}$ לא שקול אלמנטרית ל־$\mathcal{B}$. □

שאלה 4

תהי L שפה עם סימן פונקציה דו־מקומי $+$. יהיו $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, I^{\mathcal{Z}}), \mathcal{W} = (\mathbb{Z}, I^{\mathcal{W}})$ מבנים כך שמתקיים $+^{\mathcal{Z}}$ החיבור הסטנדרטי של השלמים ו־$(a,b) +^{\mathcal{W}} (a',b') = (a+a', b+b')$.

סעיף א׳

נגדיר איבר זוגי להיות איבר המקיים את הנוסחה $\varphi(x) = \exists y(x = y + y)$.

נראה שקיים $t \in \mathbb{Z}$ כך שלכל $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\varphi(x) \vee \varphi(x+t)$.

הוכחה. נניח שאנו כבר יודעים את כל הפרטים על זוגיות בשלמים, אם לא כן נוכל להגדיר חבורת מודולו ולהגדיר את הזוגיות ביחס אליה ולהראות את אותן הטענות.

נגדיר $t = 1$ ולכן אילו $x \in \mathbb{Z}$ זוגי אז סיימנו, ואילו הוא לא אז $x + t = x + 1$ זוגי, לכן $\varphi(x)$. $\square$

סעיף ב׳

נראה שאין איבר כזה ב־$\mathbb{Z}^2$.

הוכחה. נניח בשלילה שיש כזה, ולכן מתקיים $\varphi((1,0))$ וגם $\varphi((0,1))$, דהינו קיים $y, z \in \mathbb{Z}^2$ כך ש־$(1,0)+t = y+y$ וכן $(0,1)+t = z+z$. בהתאם גם $(1,0) + (0,1) + 2t = (1,1) + 2t = (y+z) + (y+z)$, אבל אז גם $(1,1) = (y+z-t) + (y+z-t)$, וקיבלנו סתירה שכן $(1,1)$ לא זוגי.

נבחין כי יצאנו מהמודל והוכחנו את הטענה באופן כללי, ונוכל להוכיח אותה גם מתוך המודל על־ידי פסילה דומה עבור כל t פוטנציאלי. $\square$

סעיף ג׳

נסיק ש־$\mathcal{Z}, \mathcal{W}$ לא שקוים אלמנטרית.

הוכחה. נגדיר $\varphi = \exists t\, \forall x\, \exists y\, (x = y + y \vee x + t = y + y)$, ראינו כי $\mathcal{Z} \models \varphi$ וכן ש־$\mathcal{W} \not\models \varphi$, לכן בפרט הם לא שקולים אלמנטרית. $\square$