פתרון מטלה 04 — מבוא ללוגיקה, 80423

25 בנובמבר 2024

שאלה 1

הגדרה 0.1 (אלגברה בוליאנית) תהי קבוצה סדורה $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ עבור B קבוצה, פונקציות דו־מקומיות $+, \cdot$, פונקציה חד־מקומית $-$ וקבועים $0, 1$ כך שמתקיים לכל $x, y, z \in B$:

1. $+, \cdot$ קומוטטיביים ואסוציאטיביים.
2. ספיגה: $x \cdot (x + y) = x, \qquad x + (x \cdot y) = x$.
3. פילוג: $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z), \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
4. השלמה: $x + (-x) = 1, \qquad x \cdot (-x) = 0$.

תהי B אלגברה בוליאנית.

סעיף א'

נוכיח שלכל $x \in B$ מתקיים $x \cdot 1 = x + 0 = x \cdot x = x$.

הוכחה. מהשלמה וספיגה נובע

$$x \cdot 1 = x \cdot (x + (-x)) = x$$

באופן דומה

$$x + 0 = x + (x \cdot (-x)) = x$$

נובע משוויון זה ומספיגה

$$x \cdot x = x \cdot (x + 0) = x$$

ומצאנו כי כל השוויון המבוקש מתקיים. $\square$

סעיף ב'

נראה שקיימת אלגברה בוליאנית יחידה B כך ש־$B = \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ כך ש־$0 = \mathbb{F}, 1 = \mathbb{T}$.

הוכחה. נראה שהפעולות מוגדרות ביחידות ולכן גם כל B נקבע ביחידות.
נתחיל מבחינת $-$, נבחין כי $\mathbb{T} = 1 = (-0) + 0 = -0 = -\mathbb{F}$ מהשלמה ומסעיף א', גם $\mathbb{F} = 0 = (-1) \cdot 1 = -1 = -\mathbb{T}$ מאותה סיבה. לכן $(-) = \{\langle \mathbb{F}, \mathbb{T} \rangle, \langle \mathbb{T}, \mathbb{F} \rangle\}$ והיא נקבעת היחידות מההגדרה.
נעבור ל־$\cdot$, מתקיים $\mathbb{T} = 1 = 1 \cdot 1 = \mathbb{T} \cdot \mathbb{T}$ מסעיף א' וכן $\mathbb{F} = 0 = (0 + 0) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}$ מספיגה וסעיף א', ולבסוף $\mathbb{F} = 0 = 1 \cdot 0 = \mathbb{T} \cdot \mathbb{F} = \mathbb{F} \cdot \mathbb{T}$ מקומוטטיביות, סעיף א' והשלמה. לכן גם $\cdot$ נקבעת ביחידות.
לבסוף נבחן את $+$, הפעם $\mathbb{F} = 0 = 0 + 0 = \mathbb{F} + \mathbb{F}$ מסעיף א', $\mathbb{T} = 1 = 1 + 0 = \mathbb{T} + \mathbb{F} = \mathbb{F} + \mathbb{T}$ מסעיף א' וקומוטטיביות, וגם $\mathbb{T} = 1 = (1 \cdot 1) + 1 = 1 + 1 = \mathbb{T} + \mathbb{T}$. נובע שגם $+$ נקבע ביחידות, ולכן גם האלגברה הבוליאנית B נקבעת ביחידות. $\square$

סעיף ג'

נסמן ב־B את האלגברה הבוליאנית של סעיף ב' ותהי X קבוצה.
נגדיר $B_X = \{f \mid f : X \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}\}$ ונגדיר $-' : B_X \to B_X, +', \cdot' : B_X^2 \to B_X$ על־ידי

$$(f \cdot' g)(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad (f +' g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (-'f)(x) = -f(x),$$

נוכיח ש־B_X היא אלגברה בוליאנית ביחס לפונקציות $\cdot', +', -'$.

הוכחה. נעבור על כל הטענות שמגדירות אלגברה בוליאנית:

1. אסוציאטיביות וקומוטטיביות נובעות ישירות מתכונות אלה של האלגברה הבוליאנית B.

2. ספיגה: $(f +' (f \cdot' g))(x) = f(x) + (f \cdot' g)(x) = f(x) + (f(x) \cdot g(x)) = f(x)$ מ־B, וכך גם $(f \cdot' (f +' g))(x) = f(x) \cdot (f +' g)(x) = f(x) \cdot (f(x) + g(x)) = f(x)$ באותו אופן.
3. פילוג: $(f \cdot' (g +' h))(x) = f(x) \cdot (g(x) + h(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x) = (f \cdot' g)(x) + (g \cdot' h)(x) = (f \cdot' g +' f \cdot' h)(x)$.
באופן דומה גם $(f +' (g \cdot h))(x) = f(x) + (g(x) \cdot h(x)) = (f(x) + g(x)) \cdot (f(x) + h(x)) = ((f +' g) \cdot' (f +' h))(x)$.
4. השלמה: $(f \cdot' (-'f))(x) = f(x) \cdot (-'f)(x) = f(x) \cdot (-f(x)) = 0$ וכן $(f +' (-'f))(x) = f(x) + (-f(x)) = 1$.

נבחין כי במצב זה 0 ו־1 הם פונקציות קבועות כך ש־$0(x) = \mathbb{F}, 1(x) = \mathbb{T}$ לכל $x \in X$. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

נראה ש־$C = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ היא לא מערכת קשרים שלמה.

הוכחה. נגדיר את השפה $L = \{P\}$, ואת הערכת האמת $u : L \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ המוגדרת על־ידי $v(P) = \mathbb{T}$ ונוכיח באינדוקציה שלכל $\varphi \in sent_L^C, \bar{u}(\varphi) = \mathbb{T}$.

האינדוקציה היא על מבנה הפסוק ולכן נבחן את המקרה של פסוק יסודי, דהינו עבור $P = \varphi$, ומהגדרה נובע $\bar{u}(\varphi) = \mathbb{T}$, זהו בסיס האינדוקציה.

נניח ש־$\bar{u}(\varphi_1) = \bar{u}(\varphi_2) = \mathbb{T}$ ונוכיח שגם עבור $\Box \in C$ מתקיים $\bar{u}(\varphi_1 \Box \varphi_2) = \mathbb{T}$.

מתקיים $\bar{u}(\varphi_1 \Box \varphi_2) = V_\Box(\bar{u}(\varphi_1), \bar{u}(\varphi_2)) = V_\Box(\mathbb{T}, \mathbb{T})$.

אבל מהגדרת כל $\Box \in C$ אנו יודעים כי $V_\Box(\mathbb{T}, \mathbb{T}) = \mathbb{T}$ ולכן הטענה מתקיימת והשלמנו את מהלך האינדוקציה.

נניח בשלילה ש־C היא מערכת קשרים שלמה ויהי פסוק $\neg(\bot) \in sent_L$ $\varphi =$, לכן קיים $\varphi' \in sent_L^C$ כך ש־$\varphi' \equiv_{tau} \varphi$.

לכן לכל הערכת אמת v מתקיים $\bar{v}(\varphi) = \bar{v}(\varphi')$, אבל φ הוא סתירה ולכן $\bar{v}(\varphi) = \mathbb{F}$.

נקבל אם כך שגם $\bar{u}(\varphi') = \mathbb{F}$ בסתירה לטענה שהוכחנו זה עתה, ולכן נסיק ש־C איננה מערכת קשרים שלמה. $\Box$

סעיף ב'

נבחן את מערכת הקשרים $*$ אשר כוללת את הקשר ה־0 מקומי $\bot$.

נוכיח שהמערכת $C = \{\rightarrow, \bot\}$ היא מערכת קשרים $*$ שלמה.

הוכחה. תהי שפה L כלשהי ויהי $\varphi \in sent_L^*$ ונוכיח כי קיים $\varphi' \in sent_L^C$ באינדוקציה על מבנה הפסוק במערכת $*$ (נניח כי כלל המשפטים הרלוונטיים זהים עד כדי הוספת $\bot$).

עבור בסיס האינדוקציה נבחן את $\varphi \in L$, כמובן שגם $\varphi \in sent_L^C$ מהגדרה.

נניח שהטענה מתקיימת עבור $\psi \in sent_L^*$ ולכן קיים $\psi' \in sent_L^C$ שקול טאוטולוגית ל־ψ, ונבחן את $(\neg\psi) = \varphi$. נגדער $\varphi' = (\psi \rightarrow \bot)$ ונקבל שעבור $\bar{v}(\psi) = \mathbb{T}$ גם $\bar{v}(\psi \rightarrow \bot) = \mathbb{F}$ ובאופן דומה גם $\bar{v}(\varphi') = \mathbb{T} \implies \bar{v}(\psi) = \mathbb{F}$ ולכן הטענה מתקיימת.

נניח שהטענה מתקיימת עבור $\psi_1, \psi_2 \in sent_L^*$, דהינו קיימים $\psi_1', \psi_2' \in sent_L^C$, ונוכיח את הטענה גם עבור $\varphi = (\psi_1 \Box \psi_2)$ לכל $\Box \in B$.

אם $\wedge = \Box$ אז נגדיר $\varphi' = (\psi_1' \rightarrow (\psi_2' \rightarrow \bot))$, כדי לבדוק את השקילות הטאוטולוגית די שנראה שעבור הערכות אמת כך ש־$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle \in [\mathbb{F}, \mathbb{T}]^2$ השקילות מתקיימת. מחישוב ישיר נקבל שאכן ישנה שקילות.

עבור $\vee = \Box$ נגדיר $\varphi' = ((\psi_1' \rightarrow \bot) \rightarrow \psi_2')$ ונקבל מאותו טיעון את השקילות.

עבור $\rightarrow = \Box$ נגדיר $\varphi' = (\psi_1' \rightarrow \psi_2')$ והטענה נובעת ישירות.

עבור $\leftrightarrow$ נשתמש בזהות $x \leftrightarrow y \iff ((x \wedge y) \vee ((\neg x) \wedge (\neg y)))$ ובזהויות שמצאנו זה עתה עבור $\wedge, \vee, \neg$ ונוכל לבנות $\varphi' \in sent_L^C$ המקיים את הטענה. השלמנו אם כך את מהלך האינדוקציה ולכן C מערכת קשרים $*$ שלמה. $\Box$

סעיף ג'

נוסיף קשר בינארי חדש, $|$ למערכת הקשרים, ונגדיר שמתקיים $V_|(\epsilon_0, \epsilon_1) = V_\neg(V_\wedge(\epsilon_0, \epsilon_1))$.

נוכיח ש־$C = \{|\}$ היא מערכת קשרים שלמה.

הוכחה. בסעיף הקודם ראינו שכדי להוכיח את הטענה מספיק למצוא זהות בין כל קשר לוגי לבין פסוק במערכת הקשרים החדשה, ונראה כי מתקיים לכל $\varphi, \psi \in sent_L^{**}$:

$$(\neg\varphi) \equiv (\varphi \mid \varphi) \quad (\varphi \wedge \psi) \equiv ((\varphi \mid \psi) \mid (\varphi \mid \psi)) \quad (\varphi \vee \psi) \equiv ((\varphi \mid \varphi) \mid (\psi \mid \psi))$$

בדיקת שוויון כמובן תתקיים על־ידי בניית טבלת ערכים והשוואתה.

נוכל כמובן למצוא גם זהויות דומות עבור $\leftrightarrow, \rightarrow$, תוך שימוש בעובדה ש־$\{\wedge, \vee, \neg\}$ היא בעצמה מערכת קשרים שלמה.

נוכיח באינדוקציה זהה לתהליך בסעיף הקודם ותוך שימוש בזהויות אלה את הטענה, כאשר גם בסיס האינדוקציה נשאר זהה ונובע מהעובדה ש־$sent_L^C \supseteq L \subseteq sent_L^{**}$. $\Box$

שאלה 3

משפט 0.2 (משפט החתונה של הול) *יהי $G = (V_0 \uplus V_1, E)$ גרף דו־צדדי סופי.*
לכל $A \subseteq V_0$ נסמן $N(A) = \{v \in V_1 \mid \exists a \in A, \{a, v\} \in E\}$.
אם $\forall A \subseteq V_0$ מתקיים $|N(A)| \ge |A|$ אז קיים ב־G צימוד מושלם.

יהי $G = (V_0 \uplus V_1, E)$ גרף דו־צדדי סופי מקומית המקיים שלכל $A \subseteq V_0$ גם $|N(A)| \ge |A|$.

סעיף א'

נניח בשלילה שאין ב־G צימוד מושלם ונוכיח ש־Σ משאלה 2 בתרגיל 3 איננה ספיקה.

הוכחה. נניח של־G אין צימוד מושלם ולכן ממסקנת שאלה זו נובע ש־Σ איננה ספיקה. □

סעיף ב'

נוכיח שכל $\Xi \subseteq \Sigma$ איננה ספיקה.

הוכחה. ממשפט הקומפקטיות נובע ש־Σ ספיקה אם ורק אם Ξ ספיקה, אך זו הראשונה לא ספיקה לפי סעיף א', ולכן גם Ξ לא ספיקה. □

סעיף ג'

נוכיח שבתת־הגרף שמורכב מהקודקודים שב־Ξ יש צימוד מושלם.

הוכחה. נבחין כי בתת־גרף זה כל תת־קבוצה A היא גם תת־קבוצה ב־G עצמו, ולכן $A \ge |N(A)|$, ולכן ממשפט החתונה של הול קיים צימוד מושלם בתת־גרף זה. □

סעיף ד'

נוכיח של־G צימוד מושלם.

הוכחה. מצאנו בסעיף הקודם כי ל־Ξ צימוד מושלם, אז משאלה 2 במטלה 3 נובע כי Ξ ספיקה, אבל זו סתירה להנחה כי G לא ספיקה ולכן היא כן ספיקה, ולכן שוב משאלה 2 במטלה 3 נסיק כי ל־G צימוד מושלם. □