פתרון מטלה 1 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132–2)

10 במאי 2024

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$ גזירה בנקודה $x_0 = 3$.

על־פי הגדרת הנגזרת הגבול הבא צריך להתקיים:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((3+h)^3+5(3+h)^2+1-3^3-5\cdot 3^2-1) \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((3+h)^3+5(3+h)^2-62) \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(3^3+3\cdot 3^2h+3\cdot 3^1h^2+h^3+5\cdot 3^2+5\cdot 6h+5h^2-62) \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(27h+9h^2+h^3+30h+5h^2) \\
=&\lim_{h\to 0} 57+14h+h^2 \\
=&57+14\cdot 0+0^2=57
\end{aligned}
$$

מצאנו כי הגבול מתקיים ולכן הפונקציה גזירה בנקודה ואף מתקיים $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = 57$.

סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x}$ גזירה בנקודה $x_0 = 2$:

הוכחה. נגזרת מוגדרת בנקודה אם ורק אם הגבול הבא מתקיים:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt[3]{2+h}-\sqrt[3]{2}\right) \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt[3]{2+h}-\sqrt[3]{2}\right)\frac{\sqrt[3]{(2+h)^2}+\sqrt[3]{2(2+h)}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{(2+h)^2}+\sqrt[3]{2(2+h)}+\sqrt[3]{2^2}} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{2+h-2}{\sqrt[3]{(2+h)^2}+\sqrt[3]{2(2+h)}+\sqrt[3]{2^2}} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(2+h)^2}+\sqrt[3]{2(2+h)}+\sqrt[3]{2^2}} \\
=&\frac{1}{\sqrt[3]{(2+2)^2}+\sqrt[3]{2(2+2)}+\sqrt[3]{2^2}} \\
=&\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}
\end{aligned}
$$

מצאנו כי הגבול מתקיים ולכן נובע כי $f'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$. מש"ל

סעיף ג'

נראה את הטענה כי הפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor$ גזירה בכל נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ על־ידי דוגמה נגדית: נגדיר $x_0 \in \mathbb{Z}$, ידוע כי הפונקציה f איננה רציפה בנקודות x_0, ולכן עומדת בסתירה לטענה כי הן גזירות בנקודה זו.

שאלה 2

תהי f פונקציה המוגדרת על־ידי

$$f(x) = \begin{cases} -x & 0 \le x \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

סעיף א'

נראה כי הפונקציה גזירה מימין בנקודה $x_0 = 0$:

לכל סביבה ימנית של 0 ב־f מתקיים $f(x) = -x$, ואנו כמובן יודעים כי ביטוי זה גזיר וערך נגזרתו הוא -1, לכן נסיק כי גם f גזירה מימין בנקודה.

סעיף ב'

נחשב את הפונקציה $f \circ f$:

עבור $x < 0$ נקבל $f(x) = 1$ ובהתאם $f(1) = -1$ ולכן $(f \circ f)(x) = -1$.

עבור $0 \le x$ נקבל $f(x) = -x$, ובהתאם $f(-x) = 1$ ולכן $(f \circ f)(x) = 1$. נראה כי מתקיים

$$f \circ f = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \end{cases}$$

סעיף ג'

תהי פונקציה g אשר מוגדרת בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$, וגזירה מימין בנקודה, ותהי פונקציה h המוגדרת בסיבבה מלאה של $x_1 = g(x_0)$ וגזירה מימין ב־x_1. נוכיח כי $h \circ g$ גזירה מימין אף היא בנקודה x_0:

הוכחה. הלכה למעשה טענה זו נובעת ישירות ממשפט הרכבת פונקציות בגבולות חלקיים.

ידוע כי g גזירה מימן ולכן גם רציפה מימין בנקודה ולכן

$$\lim_{x \to x_0^+} g(x) = g(x_0) = x_1, \lim_{x \to x_1^+} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

נשתמש במשפט ההרכבה:

$$\lim_{g(x) \to x_1^+} \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{x - g(x_0)} = \lim_{x \to x_1^+} \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{x - g(x_0)}$$

והגבול כמובן מוגדר **מש"ל**

שאלה 3

סעיף א'

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0+3h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}2\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{2h}-3\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h}\\
=&2f'(x_0)-3f'(x_0)=-f'(x_0)
\end{aligned}$$

סעיף ב'

נגדיר את הפונקציה $g(x)=|x|$ ונבחן את הנקודה $x_0=0$.

אנו כבר יודעים כי הפונקציה איננה גזירה בנקודה זו, למרות זאת מתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h}=0$$

דהינו, הגבול מתקיים וערכו 0 בסתירה לאי־קיום הנגזרת בנקודה זו.

שאלה 4

תהינה f, g פונקציות המוגדרות בסביבה של $x_0 \in \mathbb{R}$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $f(x_0) = g(x_0)$ וגם $f'_-(x_0) = g'_+(x_0)$ אז הפונקציה $h(x) = \begin{cases} f(x) & x < x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$ גזירה ב־x_0:

הוכחה. הפונקציה h מתלכדת בסביבתה הימנית עם g ובשמאלית עם f ולכן מתקיימים הגבולות:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) = g'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$$

וקיבלנו כי $h'(x_0)$ מוגדרת שכן שני הגבולות החלקיים מתכנסים לאותו ערך ולכן גם הגבול הכללי מתקיים. **מש"ל**

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם fg ו־f גזירות בנקודה x_0 אז גם g גזירה בנקודה זו על־ידי דוגמה נגדית:

נגדיר $f(x) = 0$ ו־$g(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

כמובן שמתקיים $f(x)g(x) = 0$ לכל x בתחום הגדרתן, וברור כי $f'(0) = 0$, אך g איננה גזירה ב־$x_0 = 0$.

סעיף ג'

נסתור את הטענה כי אילו $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ וגם f לא גזירה ב־x_0 ו־g גזירה בכל נקודה אז $g \circ f$ איננה גזירה ב־x_0 עם דוגמה נגדית.

נגדיר שוב $g(x) = 0$ ו־$f(x) = |x|$ עבור $x_0 = 0$. ברור למה תנאי הטענה מתקיימים אך כמובן $g \circ f = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכן גם גזירה בתחום זה.

שאלה 5

תהי h פונקציה גזירה בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$.

סעיף א'

נתון כי קיימת $\delta > 0$ כך שמתקיים $h(x_0) < h(x)$ לכל $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.
נוכיח כי $0 \leq h'(x_0)$

הוכחה. נניח בשלילה כי $h'(x_0) < 0$. לכן מתקיים

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} < 0$$

על־פי הגדרת הגבול הנתון, נובע כי ל־$\epsilon = \delta$ קיים δ_0 כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ המקיים $0 < x - x_0 < \delta_0$ מתקיים

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} < 0 \land x - x_0 \implies h(x) - h(x_0) < 0 \implies h(x) < h(x_0)$$

בסתירה לטענה, לכן לא מתקיים $h'(x_0) < 0$ ובהתאם נובע כי $h'(x_0) \geq 0$. **מש"ל**

סעיף ב'

נניח כי $h'(x_0) > 0$ ונוכיח $\exists \delta : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : h(x) > h(x_0)$.

הוכחה. למעשה, זוהי הוכחה דומה להוכחה של הסעיף הקודם, מתקיים הגבול החד־צדדי:

$$h'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} > 0$$

נבחר $\epsilon > 0$ אשר עבורו נתונה δ_0 עבורה לכל $x \in \mathbb{R}$ המקיים $0 < x - x_0 < \delta_0$ מתקיים:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} > 0 \implies h(x) - h(x_0) > 0 \implies h(x) > h(x_0)$$

ולבסוף נגדיר $\delta = \delta_0$.

את הכיוון ההפוך נוכיח באותה הדרך בדיוק עבור הפונקציה $h^*(x) = -h(x)$ והנקודה $x_1 = -x_0$, ונראה כי הטענה מתקיימת במלואה. **מש"ל**

שאלה 6

סעיף א'

יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהי $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f_n(x) = x^n$.

נוכיח כי f_n גזירה ב־$x_0 \in \mathbb{R}$ וכי $f'_n(x_0) = nx_0^{n+1}$.

הוכחה. נבחן את הגדרת הנגזרת:

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f_n(x_0+h) - f_n(x_0)\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left((x_0+h)^n - x_0^n\right) \\
\text{פירוק בינומי } &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x_0^i h^{n-i}\right) - x_0^n\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}x_0^i h^{n-i}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}x_0^i h^{n-i-1} \\
\text{סכום סופי ואריתמטיקה של גבולות } &= \sum_{i=0}^{n-1}\lim_{h\to 0}\binom{n}{i}x_0^i h^{n-i-1} \\
&= \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n}{i}x_0^i 0^{n-i-1} \\
f'_n(x_0) &= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

מש"ל

סעיף ב'

יהי $n \in \mathbb{Z}$ ותהי $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ המוגדרת על־ידי $f_n(x) = x_n$.

נוכיח כי f_n גזירה בנקודה $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ואף $f'_n(x_0) = nx_0^{n-1}$.

הוכחה. אילו $n > 0$ אז מתקיים $n \in \mathbb{N}$, והטענה מתקיימת על־פי הסעיף הקודם, לכן נניח כי $n < 0$.

נגדיר $m = -n$ ונראה כי מתקיים $f_n(x) = \frac{1}{x^m}$ לכל $n < 0$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f_n(x_0+h) - f_n(x_0)\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x_0+h)^m} - \frac{1}{x_0^m}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^m - (x_0+h)^m}{h\, x_0^m (x_0+h)^m} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}x_0^i h^{m-i-1}}{x_0^m (x_0+h)^m} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-mx^{m-1} - h\sum_{i=0}^{m-2}\binom{m}{i}x_0^i h^{m-i-1}}{x_0^m (x_0+h)^m} \\
&= \frac{-mx^{m-1} + 0}{x_0^m (x_0+0)^m} \\
&= \frac{-mx^{m-1}}{x_0^{2m}} = \frac{m}{x_0^{m+1}} = nx_0^{n-1}
\end{aligned}$$

מש"ל

שאלה 7

סעיף א'

יהי $0 < x \in \mathbb{R}$, נוכיח כי קיים $n \in \mathbb{Z}$ יחיד כך שמתקיים $10^n \le x < 10^{n+1}$.

הוכחה. נשים לב כי הקטע $[10^n, 10^{n+1})$ מייצג את הקטע מהטענה, ונשים לב כי

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} [10^n, 10^{n+1}) = (-\infty, \infty)$$

את הטענה ניתן להוכיח בקלות באינדוקציה, לכן בוודאי $x \in (-\infty, \infty)$.

נניח בשלילה כי ישנם שני $n < n_0$ המקיימים את הטענה, לכן $10^n \le x < 10^{n+1} \wedge 10^{n_0} \le x < 10^{n_0+1}$.

נשים לב גם כי $10^n < 10^{n_0}$ ובהתאם $10^{n+1} \le 10^{n_0}$. ונקבל כי $x < 10^{n+1} \le x$, לכן בהכרח אין שני n־ים שונים המקיימים את הטענה. **מש"ל**

סעיף ב'

עבור $0 < x \in \mathbb{R}$ נוכיח כי קיימים $n \in \mathbb{Z}$, ו־$x' \in [0,1)$ יחידים כך ש־$\log_{10}(x) = n + x'$.

הוכחה. נראה כי מתקיים $n \le \log_{10}(x) < n+1$ על־פי החלק השלם $n = \lfloor n + x' \rfloor$.

בהתאם מתקיים גם $10^n \le 10^{\log_{10}(x)} = x < 10^{n+1}$, וטענה זו נכונה על־פי הסעיף הקודם. **מש"ל**

סעיף ג'

בסעיף א' הוכחנו את הטענה אשר חוסמת כל מספר במספר הקטן ביותר בעל אותה כמות ספרות כמוהו והמספר הגדול ביותר עם כמות הספרות הזו, היא $n+1$. כמובן הסיבה היא שהמספר הוא $n+1$ היא שהכפלה ב־10 מוסיפה ספרה, וכאשר האיבר הנייטרלי לחיבור לא מוכפל בעשר כלל, הוא עדיין מצריך ספרה יחידה לכתיבה.

בסעיף ב' מצאנו כי $n = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$, לכן בהתאם כמות הספרות במספר x היא $\lfloor \log_{10}(x) \rfloor + 1$.

סעיף ד'

$$10^5 \le 493566 < 10^6 \implies 5 \le \log_{10}(493566) < 6$$

לכן הערך הוא בערך 5 או 6.