פתרון ממ"ן 14 – אלגברה לינארית 2 (20229)

21 במאי 2023

שאלה 1

נמצא את הדרגה ואת הסימנית של התבנית הריבועית $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ המוגדרת

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4$$

מסימטריית המטריצה המייצגת של q, נגדיר את המטריצה המייצגת

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

נחפוף את A אלמנטרית:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_i \to \sqrt{2}C_i]{R_i \to \sqrt{2}R_i | 1 \le i \le 4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \to C_3 - 2C_2]{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 - 3C_2]{R_4 \to R_4 - 3R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 - 2C_3]{R_4 \to R_4 - 2R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \to C_3 - C_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1 \to C_1 + \frac{1}{2}C_2]{R_1 \to R_1 + \frac{1}{2}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \to C_2 - C_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 + \frac{1}{2}C_3]{R_4 \to R_4 + \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

מצאנו מטריצה אלכסונית וממנה נובע $\rho(q) = 4$ ומהגדרת החתימה נובע כי $\sigma = -2$.

סעיף ב'

נמצא תת־מרחב מממד מקסימלי של $\mathbb{R}^4$ שעליו q היא תבנית חיובית לחלוטין.

בסעיף הקודם מצאנו מטריצה מייצגת אלכסונית של q, נוכל לבנות לפיו בסיס עבורו q אלכסונית. נגדיר בסיס זה להיות W.

אז בבסיס זה

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 3x_4^2 \tag{1}$$

עבור תת־המרחב $\mathrm{Sp}\{w_1\}$ התבנית q חיובית לחלוטין. אילו היה תת־המרחב המקסימלי המקיים תנאי זה גדול בממדו מ־1 אז היה קיים וקטור u בלתי תלוי ב־w_1 אשר מקיים

$$q(u) \ge 0$$

בשל היותו בלתי תלוי ב־w_1 כאשר $u = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4$ אנו יודעים כי לפחות אחד הערכים $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_3 \neq 0$.

נוכל ללא פגיעה בכלליות להניח ש־$\lambda_1 = 0$ שאם לא כן נוכל להגדיר מחדש את הווקטור כך.

מ־(1) נובע במצב זה ש־$q(v) < 0$ בסתירה להנחה ולכן ממד המרחב המקסימלי אשר עבורו q חיובית לחלוטין הוא 1.

נעבור לחישוב w_1. אנו יודעים כי וקטור זה הוא ווקטור העמודה הראשון במטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי ל־W, ומטריצה זו מתקבלת מביצוע פעולות השורה שביצענו בחפיפה האלמנטרית בסעיף הקודם, נפעיל אותם על מטריצת היחידה ונקבל

$$w_1 = (2, 1, 0, 0)$$

ובהתאם תת־המרחב המקסימלי הוא

$$\mathrm{Sp}\{(2, 1, 0, 0)\}$$

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי אשר ממדו n, ותהי q תבנית ריבועית חיובית למחצה מעל המרחב V. נגדיר ρ דרגת q.
נוכיח כי

$$L_0 = \{v \in V \mid q(v) = 0\}$$

הוא תת־מרחב של V ושמתקיים $\dim L_0 = n - \rho$.

הוכחה. יהי W בסיס אורתונורמלי מלכסן קנונית של q, לכן קיימים $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$ עבורם לפי טענה 6.3.2

$$0 \leq q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_\rho x_\pi^2 + 0x_{\pi+1}^2 + \cdots + 0x_n^2 \tag{1}$$

בשל התאפסות המקדמים לכל $\rho < i \leq n$ מתקיים $q(w_i) = 0$, q תבנית בילינארית ולכן נובע גם כי לכל סקלר λ מתקיים

$$q(\lambda w_i) = \lambda^2 q(w_i) = 0$$

יהי $j \in \mathbb{N}$ כך ש־$\rho < j \leq n$, מ־(1) נובע גם כי $q(w_i + w_j) = 0$.
נגדיר $L_0 = \{v \in v \mid q(v) = 0\}$, קבוצת הווקטורים שמאפסים את q, משתי הטענות האחרונות נובע כי קבוצה זו היא מרחב ווקטורי.
עוד אנו יודעים כי $L_0 \subseteq V$ ולכן L_0 תת־מרחב של V.
ראינו כי תת־המרחב נוצר על־ידי $\{w_{\rho+1}, \dots, w_n\}$, וידוע לנו כי קבוצה זו בלתי תלויה מינימלית, ולכן מהווה בסיס ל־L_0, אז ממד L_0 הוא $n - \rho$.
מש"ל

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $q : V \to \mathbb{R}$ תבנית ריבועית.

נוכיח כי אם הקבוצה $L = \{v \mid q(v) \geq 0\}$ היא תת־מרחב של V אז q שומרת סימן.

הוכחה. תהי L קבוצה המוגדרת כלעיל, ונניח כי היא תת־מרחב של V.

נגדיר בסיס מלכסן קנונית W עבור q, ונגדיר ρ דרגת q, π מספר האיברים החיוביים בצורה הקנונית של q.

נניח כי קיים w_i כך ש־$q(w_i) \geq 0$ ובהתאם $w_i \in L$. נניח בשלילה כי קיים גם וקטור w_j עבורו $q(w_j) < 0$.

מהגדרת התבנית הריבועית הקנונית נובע ישירות כי קיימים סקלרים $\lambda, \mu > 0$ כך ש־$q(\lambda w_i + \mu w_j) \geq 0$. ולכן גם $\lambda w_i + \mu w_j \in L$, וכמובן בשל היות L מרחב וקטורי כך ש־$w_i \in L$ נובע גם כי $w_j \in L$. אם $w_j \in L$ אז $q(w_j) \geq 0$ בסתירה להנחה כי $q(w_j) < 0$ ולכן הנחת הבסיס היא סתירה.

אז לא קיימים וקטורים w_i, w_j עבורם $q(w_i) \geq 0 > q(w_j)$ ומכאן נובע כי q שומרת סימן. **מש"ל**

שאלה 4

סעיף א'

נמצא את כל הערכים הממשיים של λ עבורם התבנית הריבועית $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$$

חיובית לחלוטין.

נחשב את המטריצה המייצגת של q:

$$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&5\\\lambda&4&3\\5&3&1\end{pmatrix}$$

לפי מסקנה 6.4.3 q תבנית חיובית לחלוטין אם ורק אם כלל המינורים הראשיים של A חיוביים. נבדוק את חיוביותם:

$$\begin{vmatrix}1\end{vmatrix}=1>0$$

$$\begin{vmatrix}1&\lambda\\\lambda&4\end{vmatrix}=4-\lambda^2>0\to\qquad -2<\lambda<2$$

$$\begin{vmatrix}1&\lambda&5\\\lambda&4&3\\5&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-24&\lambda-15&5\\\lambda-15&-5&3\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-24&\lambda-15\\\lambda-15&-5\end{vmatrix}$$

$$=120-(\lambda-15)^2>0\to 120-\lambda^2+30\lambda-225>0\to\qquad 15-\sqrt{120}<\lambda<15+\sqrt{120}$$

לא קיים ערך λ אשר עבורו כלל המינורים הם חיוביים ובהתאם אין ערך λ עבורו התבנית q חיובית לחלוטין.

סעיף ב'

תהיינה התבניות הבאות על $\mathbb{R}^3$:

$$q_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$$
$$q_2(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+8x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$$

נמצא בסיס של $\mathbb{R}^3$ עבורו

$$q_1=y_1^2+y_2^2+y_3^3 \tag{1}$$

נבנה את המטריצה המייצגת של q_1 ונהפוך אותה אלמנטרית תוך כדי ביצוע פעולות השורה על מטריצת היחידה I_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\-1&0&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[C_2\to C_2-C_1]{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\-1&1&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[C_3\to C_3+C_1]{R_3\to R_3+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&1&2&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[C_3\to C_3-C_2]{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&2&-1&1\end{array}\right)$$

אז המטריצה המלכסנת של q_1 היא

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

מצאנו על־ידי הפיפה אלמנטרית בסיס בו מתקבלת צורה (1). בסיס זה הוא

$$B=((1,0,0),(-1,1,0),(2,-1,1))$$

נחשב את המטריצה האלכסונית של q_2 על־ידי מציאת המטריצה המייצגת שלה ולכסון על־ידי M.

$$M^t[q_2]_EM=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&1\\4&8&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&1\\2&4&1\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}=A$$

אנו יודעים כי M מלכסנת את q_1 למטריצת היחידה ואת q_2 ל־A, אילו נמצא מטריצה P המלכסנת את A בשל החפיפה למטריצת היחידה החפיפה של q_1 לא תיפגע. נחפוף אלמנטרית את A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&1&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[C_2\to C_2-C_1]{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\0&0&0&-1&1&0\\1&0&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[C_3\to C_3-\frac{1}{2}C_1]{R_3\to R_3-\frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&1&0\\0&0&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right)$$

אז מטריצת המעבר מ־B לבסיס בו q_2 אלכסונית היא

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ומטריצת המעבר השלמה היא MP, נחשבה

$$M'=MP=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ובהתאם הבסיס של $\mathbb{R}^3$ הוא

$$((1,0,0),(-2,1,0),(\frac{3}{2},-1,1))$$

ומתקיים בו

$$q_2(y)=2y_1^2+0y_2^2+\frac{5}{2}y_3^2$$

שאלה 5

סעיף א'

נוכיח כי אם q תבנית ריבועית חיובית למחצה אז המטריצה המייצגת אותה היא מטריצה סינגולרית.

הוכחה. תהי q תבנית ריבועית, A_E מטריצת הייצוג שלה בבסיס הסטנדרטי, בסיס מלכסן אורתונורמלי W ומטריצת הייצוג לפיו A_W.

ידוע כי q חיובית למחצה, לכן קיים i כך ש־$q(w_i) = 0$, ובהתאם במטריצה האלכסונית A_W האיבר ה־ii הוא 0.

מסיבה זו A_W כמובן בלתי הפיכה, ולכן נותר רק לראות כי A_E ו־A_W שקולות־שורה.

אנו יודעים כי קיימת מטריצה הפיכה P עבורה מתקיים $A_E = P^t A_W P$, וממשפט 2.3.7 נובע כי P אורתונורמלית ומקיימת $P^t = P^{-1}$. אז מתקיים $A_E = P^{-1} A_W P$ והמטריצה A_E סינגולרית. **מש"ל**

סעיף ב'

תהי מטריצה סימטרית A ותהי תבנית ריבועית $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $q(x) = x^t A x$, ידוע כי q חיובית לחלוטין.

נוכיח כי A מטריצה אורתוגונלית אם ורק אם $A = I_n$.

הוכחה. q חיובית לחלוטין ולכן על־פי טענה 6.3.2 A חופפת אלמנטרית ל־I. (1)

נניח כי A אורתוגונלית ונוכיח כי $A = I$.

ידוע כי A סימטרית ולכן $A^t = A$. עוד אנו יודעים כי A אורתוגונלית ולכן גם $AA^t = I$, אז נובע כי $A^2 = I$. משוויון זה נובע כי $(A - I)(A + I) = O$, ובהתאם $A = \pm I$ וממסקנה 6.2.1 ו־(1) נובע כי $A = I$ בלבד.

נניח כי $A = I$ ונוכיח כי A אורתוגונלית.

$I = I^t$ על־פי סימטריית I, וידוע גם כי $II = I$, אז $AA^t = I$. **מש"ל**