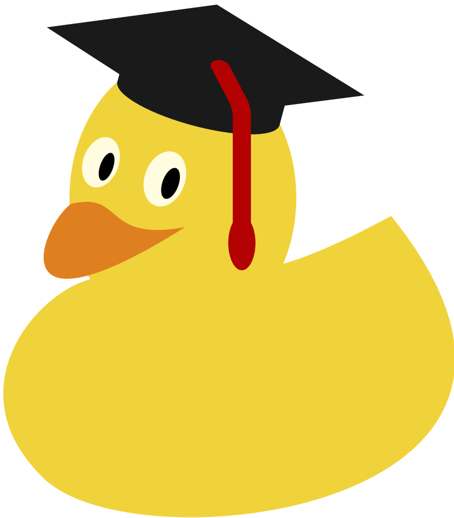
פונקציות מרוכבות — סיכום

31 באוקטובר 2024



תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 31.10.2024

למרצה קוראים עדי. המייל הוא adi.glucksam@mail.huji.ac.il
שיעורי הבית הפעם הם 20 אחוזים מהציון, גם פה עם התחשבות במטלות הטובות ביותר. שעת קבלה של עדי היא בימי ראשון אחרי השיעור, דהינו ב־12:00, במנצ'סטר 303.

1.1 מבוא

נגדיר מספרים מרוכבים על־ידי ההתאמה $(x, y) \mapsto z = x + iy$ כאשר $i = \sqrt{-1}$, הקבוע המדומה. נגדיר מספר סימונים שיעזרו לנו בהמשך.

הגדרה 1.1 (חלק שלם וחלק מדומה) עבור $z = x + iy$ נגדיר $\mathrm{Re}(z) = x$ ו־$\mathrm{Im}(z) = y$, החלק הממשי והחלק המדומה בהתאמה.

נעבור להגדרת הפעולות בשדה המרוכב:

הגדרה 1.2 (חיבור וחיסור מרוכבים) אם $z = x + iy$ ו־$w = a + ib$ אז נגדיר $z \pm w = (x \pm a) + i(y \pm b)$.

הגדרה 1.3 (כפל) כפל בסקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר על־ידי $\alpha \cdot z = \alpha x + i\alpha y$.
כפל של מרוכב במרוכב נגדיר על־ידי $z \cdot w = (x + iy)(a + ib) = xa + xib + iya + iyib = xa - yb + i(xb + ya)$.

הגדרה 1.4 (הצמדה) נגדיר פעולה חדשה שלא קיימת בממשיים, היא הצמדה (conjugation), נסמן $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - y$.
נקבל גם $\overline{\overline{z}} = z$.

במקרה בו $z \in \mathbb{R}$ אז נקבל $\overline{z} = x$ ולמעשה השוויון מתקיים אם ורק אם $z \in \mathbb{R}$.

הגדרה 1.5 (ערך מוחלט) נגדיר ערך מוחלט על־ידי $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.
פעולה זו מייצגת את המרחק מהראשית במישור המרוכב, בדומה לאופן פעולת הערך המוחלט בממשיים.

הגדרה 1.6 (חלוקה) חלוקה נגדיר על־ידי $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{1}{|w|^2} z \cdot \overline{w}$.

הערה (מרוכבים כמרחב וקטורי מעל הממשיים) ניתן לבחון את המרוכבים כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}^2$ על־ידי $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ המוגדר

$$z = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ראינו כי אפשר לייצג את המרוכבים על־ידי מרחב וקטורי ממשי, ובאותו אופן ניתן לייצג את המרוכבים גם על־ידי מטריצות ועל־ידי תצוגה פולארית. בתרגול נעסוק בתצוגת המטריצות, ועתה נתעמק בהצגה פולארית.

נוכל לבחון כל מספר כווקטור, דהינו על־ידי עוצמה וזווית. בקורס שלנו זווית היא ב־$(-\pi, \pi]$ והיא מודדת מרחק זוויתי מהכיוון החיובי של ציר ה־x. כל מספר $z = x + iy$ ניתן לייצג על־ידי (r, θ), כאשר $r = |z|$ ו־$\theta = \mathrm{Arg}(z)$. סימון לזה (ובהמשך הקורס הוא יהפוך להגדרה) הוא $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. בהתאם $z = r \cdot e^{i\theta}$.

תרגיל 1.1 1. הראו כי $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

2. האם נכון תמיד ש־$Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$?

3. אם התשובה היא לא, איך זה לא מתנגש עם סעיף 1?

תרגיל 1.2 מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $\sqrt[n]{z} = w$.

פתרון

$$\sqrt[n]{z} = w \iff z = w^n = \left(r \cdot e^{i\theta}\right)^n = r^n \left(e^{i\theta}\right)^n$$

אז נקבל $|w|^n = r^n$ ולכן נקבל $|w| = |z|^{\frac{1}{n}}$.
נקבל בנוסף על־ידי נוסחת דה־מואר (שתגיע בהמשך הקורס)

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta}\left(e^{i\theta}\right)^{n-1} = e^{in\theta}$$

דהינו $Arg(w)n = Arg(z)$ ולכן $Arg(w) = \frac{Arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ עבור $k = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

1.2 תזכורת למטריקות

נוכל להגדיר מטריקה על המרוכבים על־ידי שימוש בערך המוחלט שהגדרנו, דהינו נגדיר $d(z,w)=|z-w|$, והגדרה זו משרה טופולוגיה על המרוכבים ומאפשרת לנו לדון במספר תכונות נוספות:

הגדרה 1.7 (כדור פתוח) נגדיר כדור פתוח במרוכבים על־ידי $B(z,r)=\{w\in\mathbb{C}\mid d(z,w)<r\}$.

ניזכר בהגדרה של קבוצות פתוחות וסגורות:

הגדרה 1.8 (קבוצה פתוחה וסגורה) קבוצה $U\subseteq\mathbb{C}$ תיקרא **פתוחה** אם $\forall z\in U\exists r\in\mathbb{R},B(z,r)\subseteq U$.
קבוצה $F\subseteq\mathbb{C}$ תיקרא **סגורה** אם המשלים שלה $F^C=\mathbb{C}\setminus F$ הוא קבוצה פתוחה.

הגדרה 1.9 (פנים של קבוצה) פנים של $A\subseteq\mathbb{C}$ מוגדר על־ידי $\text{int}(A)=\{z\in A\mid \exists r>0,B(z,r)\subseteq A\}$.

הגדרה 1.10 (חוץ של קבוצה) החוץ של A מוגדר על־ידי $\text{Ext}(A)=\text{int}(\mathbb{C}\setminus A)$.

הגדרה 1.11 (שפה של קבוצה) השפה של A תוגדר להיות $\partial A=\mathbb{C}\setminus(\text{int}(A)\cup\text{Ext}(A))$.

הגדרה 1.12 (סגור של קבוצה) הסגור של A הוא $A\cup\partial A$,

הגדרה 1.13 (קבוצה חסומה וקבוצה קומפקטית) קבוצה A היא חסומה אם קיים $R>0$ כך ש־$A\subseteq B(0,R)$ וקבוצה K היא קומפקטית אם היא סגורה וחסומה.