

פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

21 ביולי 2023



שאלה 1

נחשב את האינטגרלים הבאים

סעיף א'

$$\begin{aligned}\int x^3(1-3x^2)^{10} dx &= \int x^3 \left(\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-3x^2)^k \right) dx \\ &= \int \left(\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-3)^k x^{2k+3} \right) dx \\ &= C + \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \frac{1}{2k+4} (-3)^k x^{2k+4} \\ &= C + x^4 \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \frac{(-3)^k}{2k+4} x^{2k}\end{aligned}$$

סעיף ב'

$$\begin{aligned}\int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sin \arcsin(x) e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \sin(t) e^t dt \Big|_{dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}^{t=\arcsin x} \\ &= -\cos(t) e^t + \int \cos(t) e^t dt && \text{אינטגרציה בחלקים} \\ &= -\cos(t) e^t + \sin(x) e^t - \int \sin(t) e^t dt && \text{אינטגרציה בחלקים} \\ 2 \int \sin(t) e^t dt &= \sin(x) - \cos(t) e^t \\ \int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} \right) + C\end{aligned}$$

סעיף ג'

$$\begin{aligned}\int (x-1)^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} e^{2x} (x-1)^2 - \int \frac{1}{2} e^{2x} (2x-2) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (x-1)^2 + \int e^{2x} dx - \int e^{2x} x dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (x-1)^2 + \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} x + \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - 3x + 2) + \frac{1}{4} e^{2x} \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 - 3x + 2\frac{1}{2} \right) + C\end{aligned}$$

סעיף ד'

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right| \\ &= \int \frac{4t-7}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt \\ &= 2 \int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt - 7 \int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt\end{aligned}$$

נחשב

$$\begin{aligned}&\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt \\ &\left| \begin{array}{l} u = t^2+1 \\ du = 2t \end{array} \right| \\ &= \int \frac{du}{u^{3/2}} \\ &= \int u^{-3/2} du \\ &= -2u^{-1/2} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

נחשב גם

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt \\ &\left| \begin{array}{l} t = \tan u \\ dt = \frac{du}{\cos^2 u} \end{array} \right| \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 u \sqrt{(\tan^2 u + 1)^3}} du \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 u \sqrt{(\cos^{-2})^3}} du \\ &= \sin u = \sin \arctan t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

ולכן נובע כי

$$2 \int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt - 7 \int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt = 2 \frac{-2}{\sqrt{t^2+1}} - 7 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{-7t-4}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{-7x-18}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

לכן

$$\int_{-2}^{-1} \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}} dx = \left. \frac{-7x-18}{\sqrt{x^2+4x+5}} \right|_{-2}^{-1} = \frac{-7(-2)-18}{\sqrt{(-2)^2+4(-2)+5}} - \frac{-7(-1)-18}{\sqrt{(-1)^2+4(-1)+5}} = -4 + \frac{11}{\sqrt{2}}$$

סעיף ה'

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}(1+x^3+\sin x)dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}(x^3+\sin x)dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}dx$$

נגדיר

$$f(x) = e^{|x|}(1+\sin x)$$

מחישוב עולה כי

$$f(-x) = e^{|-x|}(-x^3 - \sin x) = -f(x)$$

ולכן

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx = \int_{-\ln 2}^0 f(x)dx + \int_0^{\ln 2} f(x)dx = -\int_0^{\ln 2} f(x)dx + \int_0^{\ln 2} f(x)dx = 0$$

עוד נראה כי

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}dx = \int_{-\ln 2}^0 e^{|x|}dx + \int_0^{\ln 2} e^{|x|}dx = \int_{-\ln 2}^0 e^{-x}dx + \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2 \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2(e^{\ln 2} - 1) = 4$$

שאלה 2

עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים נקבע אם הוא מתכנס בהחלט, בתנאי, או כלל לא.

סעיף א'

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$$

נשים לב כי $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ היא פונקציה מונוטונית יורדת וכי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
 עוד נשים לב כי $g(x) = \cos^2 x$ היא פונקציה חסומה המקיימת $0 \leq g(x) \leq 1$ לכל x .
 לכן ממבחן דיריכלה נובע כי האינטגרל הנתון, אשר מהווה אינטגרל מכפלת הפונקציות f, g מתכנס.
 נשים לב כי גם $f(x)g(x) = |f(x)g(x)|$ ולכן האינטגרל גם מתכנס בהחלט.

סעיף ב'

$$\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)(\ln(x + 1))^3} dx$$

נגדיר

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

נשים לב כי

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} < 0$$

נראה גם כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

ולכן $f(x)$ מונוטונית יורדת ואפסה.

נגדיר גם

$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln^3(x + 1)}$$

נראה כי עבור $x \geq 1$:

$$0 < \frac{\ln x}{\ln^3(x + 1)} \leq \frac{\ln(x + 1)}{\ln^3(x + 1)} = \frac{1}{\ln^2(x + 1)} \leq 1$$

מצאנו כי $g(x)$ חסומה בתחום $[1, \infty)$.

מצאנו כי הפונקציות f ו- g מקיימות את מבחן דיריכלה ולכן

$$\int_1^\infty f(x)g(x)dx$$

מתכנס. נשים לב כי $0 \leq f(x)$ לכל $x > 1$ ולכן מתקיים $|f(x)g(x)| = f(x)g(x)$ ובהתאם האינטגרל מתכנס בהחלט.

סעיף ג'

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) \sin(2\sqrt{x}) dx$$

נגדיר

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{x}, g(x) = \sin(2\sqrt{x})$$

בתחום $[1, \infty)$ הפונקציה f מונוטונית יורדת וחיובית בכל התחום, ו- $|g|$ חסומה על-ידי $[0, 1]$.
כמו-כן גם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ולכן ממבחן דיריכלה האינטגרל

$$\int_1^\infty |f(x)g(x)| dx$$

מתכנס. ידוע מאדיטיביות האינטגרל כי

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_1^\infty f(x)g(x)dx$$

נראה כי

$$f(x)g(x) = 2 \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1} \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

ידוע כי בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $0 < \sin t < t$ ולכן גם בהכרח $0 < \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} < 1$.

אז מצאנו כי

$$f(x)g(x) < \frac{2}{\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2(x^{1/2} + x^{1/4})}{x^{3/4}} = \frac{4x^{1/4}}{x^{3/4}} < \frac{4}{x^{1/4}}$$

מלמה 3.2 נובע כי האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{4}{x^{1/4}} dx$$

הוא אינטגרל מתכנס ולכן ממשפט ההשוואה נובע שמתכנס גם

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ולכן האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

מתכנס בהחלט.

שאלה 3

תהי פונקציה f אינטגרלית בקטע $[0, a]$ לכל $a > 0$ ומתקיים $|f(x)| \leq \sqrt{x}$ לכל $x \geq 0$. נגדיר $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, ונוכיח כי האינטגרל המוגדר על-ידי

$$\int_0^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx \quad (1)$$

מתכנס.

הוכחה. ידוע כי $|f(x)| \leq \sqrt{x}$ לכל $x \geq 0$ ולכן מהמונוטוניות של האינטגרל המסוים (1.26) נובע

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^x \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

מא-השוויון נובע כי לכל $x \geq 0$ גם

$$\frac{F(x)}{\pi + x^3} \leq \frac{2\sqrt{x^3}}{3\pi + 3x^3} \quad (2)$$

נשים לב כי מונה נגזרת הביטוי הימני הוא

$$\sqrt{x}(\pi + x^3) - \frac{4}{3}x^2\sqrt{x^3}$$

ולכן קיים קבוע $c > 0$ עבורו הביטוי יורד לכל $x \geq c$, וכמו כן ניתן לראות כי זוהי פונקציה אפסה.

עוד נראה כי שתי הפונקציות המופיעות באי-השוויון הן רציפות לכל $x \geq 0$ ובהתאם ניתן להסיק כי הביטוי השמאלי חסום בתחום $[a, \infty)$.

אז ממבחן דיריכלה נובע כי האינטגרל

$$\int_c^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx$$

מתכנס. נבחן את האינטגרל

$$\int_0^c \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx$$

זהו כמובן אינטגרל מסוים של פונקציה רציפה ולכן הוא מתכנס ובעל ערך סופי, ומתקיים

$$\int_c^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx + \int_0^c \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx = \int_0^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx$$

מש"ל

שאלה 4

סעיף א'

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה וחיובית בקטע $[a, \infty)$.

נוכיח כי אם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז קיים $0 < c < 1$ כך שהאינטגרל

$$\int_a^\infty (f(x))^p dx$$

מתכנס לכל $c \leq p \leq 1$.

הוכחה. מהגדרת האינטגרל אנו יכולים להסיק כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

מהגבול ומרציפותה בתחום ניתן להסיק ממשפט ויירשטרס השני כי יש לפונקציה מקסימום M ,

ומהגבול ניתן להסיק כי אפשר לחסום את הפונקציה בפונקציה מהצורה $M_1 x^{-b}$, כאשר $b > 1$ קבוע כלשהו, וכאשר $M_1 \geq M$.

אז מתקיים

$$0 < f(x) < M_1 x^{-b}$$

לכל $x \geq a$ נבחין כי גם

$$0 < f^p(x) < M_1^p x^{-bp}$$

לכל $0 < p < 1$, ומלמה 3.12 נסיק כי אם $bp > 1$ אז האינטגרל $\int_a^\infty M_1^p x^{-bp} dx$ מוגדר גם הוא ובעקבותיו גם $\int_a^\infty f^p(x) dx$.

אז מצאנו כי עבור $\frac{1}{b} < p \leq 1$ האינטגרל מוגדר, נוכל להגדיר $\frac{1}{b} < c < 1$ ערך המקיים את התנאי.

מש"ל

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם $f(x)$ רציפה ב- $[a, \infty)$, האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס וקיים הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$,

אז האינטגרל $\int_a^\infty f^2(x)dx$ מתכנס.

הוכחה. נגדיר

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

נחשב

$$\int f(x)dx = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \int \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$$

ונשים לב כי

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

ולכן ממבחן ההשוואה ולמה 3.12 נובע כי

$$\int_1^\infty f(x)dx = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) - \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$$

הוא אינטגרל מתכנס. נבחן את האינטגרל של $f^2(x)$

$$\int f^2(x)dx = \int \frac{\cos^2 x}{x} dx = \ln x \cos^2 x - \int \ln x \cdot 2 \cos x \sin x dx = \ln x \cos^2 x - \int \ln x \sin 2x dx$$

עוד נראה כי

$$\ln x \sin 2x \leq \ln x$$

ולכן

$$\ln x \cos^2 x - \int \ln x \sin 2x dx \geq \ln(\cos^2(x) + 1)$$

ולכן ממבחן ההשוואה נקבל כי האינטגרל

$$\int_1^\infty f^2(x)dx$$

מש"ל

איננו מתכנס, בסתירה לטענה.

שאלה 5

תהינה $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות ב- $[0, \infty)$ אשר עבורן מתקיים:

$g(x)$ חסומה ובעלת נגזרת רציפה ב- $[0, \infty)$ כך ש- $g'(x) < g(x)$ לכל $x \geq 0$,

קיים M כך שמתקיים לכל $t \geq 0$

$$\left| \int_0^t e^x f(x) dx \right| \leq M$$

נוכיח את התכנסות האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

הוכחה. נגדיר $g_0(x) = \frac{g(x)}{e^x}$, ונחשב את נגזרתה

$$g'_0(x) = \frac{g'(x)e^x - g(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{g'(x) - g(x)}{e^x}$$

ידוע כי $g'(x) - g(x) < 0$ ולכן g_0 יורדת לכל $x \geq 0$.

$g_0(x)$ היא חלוקת פונקציה חסומה בפונקציה מונוטונית עולה, ולכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_0(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

מצאנו כי $g_0(x)$ מקיימת את התנאי הראשון של מבחן דיריכלה.

נגדיר $f_0(x) = e^x f(x)$. נתון כי

$$\left| \int_0^t f_0(x) dx \right| \leq M$$

ידוע כי $f_0(x)$ היא רציפה בתחום $[0, \infty)$, אילו מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

כאשר L סופי אז ניתן להוכיח כי f_0 חסומה בתחום. נניח כי גבול זה איננו סופי, דהיינו $L = \pm\infty$.

במצב זה האינטגרל

$$\int_0^t f_0(x) dx$$

מייצג פונקציה מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת על-פי אינפי 1, בסתירה לטענה כי אינטגרל זה חסום, ולכן הגבול של f_0 הוא סופי והיא חסומה.

על-כן f_0 ממלאת את התנאים למבחן דיריכלה. עתה נבחין כי

$$f_0(x)g_0(x) = f(x)g(x)\frac{e^x}{e^x} = f(x)g(x)$$

ולכן נובע כי מתקיים האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

מש"ל