# פתרון מטלה 04 — מבנים אלגבריים 1 (80445)

1 ביוני 2024

## שאלה 1

### סעיף א'

הכוונה ברורה לי אבל עוד לפני שקראתי את שאר השאלה אני רוצה אינטואיטיבית להשתמש ב־$D_n$ וצביעה מעל קבוצה.

### סעיף ב'

נגדיר $X_{n,q} = [q]^{[n]}$. נוכיח שהחבורה $D_n$ משרה פעולה על הקבוצה $X_{n,q}$ על־ידי

$$\forall f \in X_{n,q} \forall \sigma \cdot f(k) = f(\sigma^{-1}(k))$$

*הוכחה.* אנו כבר יודעים כי החבורה $D_n$ היא פעולה מעל $[n]$ על־ידי $\forall g \in D_n, x \in [n] : g \cdot x = g(x)$.
בתרגול הוכחנו כי בהינתן קבוצה ופעולה עליה, ניתן להרחיב את הפעולה לצביעה של הקבוצה על־ידי

$$\forall g \in D_4, f \in [q]^{[n]} : \forall x \in [n], g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

ומצאנו כי הטענה נכונה. $\square$

### סעיף ג'

נחשב את מספר המסלולים של $D_n$ על $X_{n,q}$.

נגדיר $r = (1 \dots n)$ תמורת סיבוב ו־$s(k) = n - k + 1$ פונקציית ההיפוך, לכן $D_n = \langle r, s \rangle$.
תהי צביעה $f \in [q]^{[n]}$ כלשהי, אז נבחין כי אילו היא מורכבת מיותר צבע אחד, דהינו $\neg\exists c : \forall k \in [n] : f(k) = c$, אז מתחייב כי $\exists n : f(n) \neq f(n+1)$ ונוכל להסיק

$$Fix(f) = \{f\} \implies |Fix(f)| = 1$$

יהי $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$1 < m \le n$, ונבחן את $r^m$, סיבוב ב־$m$ איברים. אילו $m \big| n$ אז קל לראות כי ישנן $q^m$ צביעות אפשריות, אילו לעומת זאת $m \nmid n$ אז נוכל להוכיח בדומה למקרה $m = 1$ שמספר הצביעות האפשרי הוא צביעה אחידה, דהינו $q$ אפשרויות. נגדיר פונקציה $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המשקפת את מספר הצביעות המושרה על־ידי $r^m$ כזה, נגדירה להיות

$$\mu(m) = \begin{cases} q^m & m \mid n \\ q & m \nmid n \end{cases}$$

ואף מתקיים $Fix(r^m) = \mu(m)$ ישירות על־פי הגדרה.
נבחן את המקרה השני והוא $sr^m \in D_n$ כשאר $0 \le m < n$.
נשים לב כי $sr^m = (sr^m)^{-1}$ ולכן נובע כי $\forall k \in [n] : f(k) = f(sr^m k)$ ולמעשה נוכל להשתמש בהצמדה זו לקבוע כי ישנן $q\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ צביעות.
נסכם: ב־$\langle r, s \rangle$ ישנם $2n$ איברים בדיוק, כולם מהצורה $r^m$ או $sr^m$ עבור $0 \le m < n$. נבנה פונקציה $\nu : D_n \to \mathbb{N}$ המייצגת את כמות הצביעות על־פי פעולה מהחבורה:

$$Fix(s^l r^m) = \nu(s^l r^m) = \begin{cases} q\lfloor \frac{n}{2} \rfloor & l = 1 \\ \mu(m) & l = 0 \end{cases}$$

ונשתמש בלמה של ברנסייד לקבל כי מספר המסלולים מוגדר על־ידי

$$|X_{n,q}/D_n| = \frac{1}{|D_n|}\sum_{s^l r^m \in D_n, l\in\{0,1\}, 0\leq m<n} \nu(s^l r^m) = \frac{1}{|D_n|}\sum_{s^l r^m \in D_n, l\in\{0,1\}, 0\leq m<n} \begin{cases} q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} & l=1 \\ q^m & l=0, m \mid n \\ q & l=0, m\nmid n \end{cases}$$

## סעיף ד'

נחשב את מספר המסלולים שמשרה $\langle r\rangle$ על $X_{n,q}$.

למעשה כבר חישבנו מספר זה בדיוק וקיבלנו כי הוא

$$|X_{n,q}/\langle r\rangle| = \frac{1}{|D_n|}\sum_{0\leq m<n} \begin{cases} q^m & m \mid n \\ q & m\nmid n \end{cases}$$

## שאלה 2

### סעיף א'

יהיו $v_0,\dots,v_3$ קודקודי $\Delta^3$ ויהיו $E=\{\{v_i,v_j\}|i\neq j\}$ קבוצת הקשתות של $\Delta^3$. נוכיח ש־$\mathrm{Sym}_+(\Delta^3)$ פועלת על הקבוצה $E$.

*הוכחה.* בתרגול מצאנו כי $\mathrm{Sym}_+(\Delta^3)$ היא פעולה על $\Delta^3$ עצמה.
נגדיר $\cdot:\mathrm{Sym}_+(\Delta^3)\times E\to E$ על־ידי $g\cdot\{v_i,v_j\}=\{g\cdot v_i,g\cdot v_j\}$. עתה נבדוק אם התכונות של פעולה מתקיימות:

- נייטרליות: $\forall k\in E, e\cdot k=\{e\cdot v_i,e\cdot v_j\}=\{v_i,v_j\}=k$.
- $\forall g,h\in\mathrm{Sym}_+(\Delta^3),x\in E: h\cdot(g\cdot x):h\cdot\{gv_i,gv_j\}=\{(hg)v_i,(hg)v_j\}=(hg)\cdot x$.

ומצאנו כי התכונות נשמרות וזוהי פעולה. □

### סעיף ב'

יהי $m\in\mathbb{N}$ ונסמן $X=[m]^E$ הצביעה של $E$ ב־$m$ צבעים. נראה כי החבורה $\mathrm{Sym}_+(\Delta^3)$ פועלת על הקבוצה $X$ על־ידי $\forall T\in X,f\in X:$ $T\cdot f(x)=f(T^{-1}\cdot x)$.

*הוכחה.* למעשה, על־ידי שימוש בסעיף הקודם וטענה מהתרגול נקבל ישירות כי זוהי אכן פעולה מוגדרת. □

### סעיף ג'

נמצא את מספר המסלולים של הפעולה $\mathrm{Sym}_+(\Delta^3)$ על $X$.

בתרגול מצאנו כי החבורה מורכבת מאוסף המחזורים מגודל 3 ומהרכבה של מחזורים זרים בגודל 2, ובסך הכול יש 12 איברים בחבורה.
עבור העתקת הזהות נוכל לצבוע כל צלע בצביעה נפרדת, ונקבל כי יש $m^6$ צביעות כמספר הצלעות בטטרההדרון.
עבור מחזור בגודל שלוש נקבל שאנו מסובבים שלוש צלעות ובשאר אין שינוי, ולכן נוכל לצבוע את שלוש הצלעות בצבע אחד ואת שלוש הצלעות האחרות בצבע נפרד כל אחת, ונקבל $m^4$ צביעות.
עבור שני מחזורי 2 אנו מסובבים שתי צלעות סביב עצמן ובעצם לא משפיעים עליהן בפעולה, ואת ארבע הצלעות האחרות אנו מסובבים ומחליפים אותן בזוגות, לכן נוכל לצבוע את שתי הצלעות במחזורים בנפרד ושני זוגות צלעות בנפרד, ונקבל $m^4$ צביעות.
לכן מהלמה של ברנסייד נקבל

$$|X/E|=\frac{m^6+11m^4}{12}$$

דהינו מספר המסלולים השונים הוא $\frac{m^6+11m^4}{12}$.

## שאלה 3

### סעיף א'

תהי חבורה $G$ ויהי $N \leq G$ תת־חבורה, נוכיח שהתנאים הבאים שקולים:

1. $N$ נורמלית.
2. $\forall g \in G : g^{-1}Ng \leq N$.
3. $\forall g \in G : gN = Ng$.

*הוכחה.*
- $1 \to 2$:
תהי $N$ תת־חבורה נורמלית של $G$. ההגדרה גורסת כי $\forall g \in G : gNg^{-1} = N$, לכן נוכל להסיק בפרט גם $\forall g \in G : g^{-1}Ng \leq N$, שכן כל חבורה מהווה תת־חבורה לעצמה.
- $2 \to 3$:
נניח כי $\forall g \in G : g^{-1}Ng \leq N$. נכפיל משמאל ונקבל $Ng \leq gN$, אם נבחר את $g^{-1}$ נקבל גם $gNg^{-1} \leq N$ ומכאן נסיק $gN \leq Ng$, ובסך הכול $gN = Ng$.
- $3 \to 1$:
נניח כי $\forall g \in G : gN = Ng$. לכן גם $gNg^{-1} = Ngg^{-1} = N$ וקיבלנו כי $N \trianglelefteq G$.

$\square$

### סעיף ב'

נוכיח שאם $N \leq G$ וגם $[G : N] = 2$ אז $N \trianglelefteq G$.

*הוכחה.* נתון כי האינדקס של המחלקות של $N$ ב־$G$ הוא 2.
קיימות אם כן שתי מחלקות בלבד, והן $N, gN$ עבור $g \in G$ כלשהו.
מהתכונות של מחלקות נובע ש־$N = gN$ אם ורק אם $g \in N$, לכן נניח $g \notin N$ ונקבל $N \neq gN$ שתי המחלקות היחידות.
באופן דומה עבור אותו $g$ נקבל $N \neq Ng$, אבל ידוע כי יש רק שתי מחלקות ויש התאמה בין מחלקות ימניות ושמאליות ולכן נסיק $gN = Ng$, ומהסעיף הקודם נסיק $N \trianglelefteq G$. $\square$

### סעיף ג'

תהי חבורה $G$, ונוכיח ש־$Z(G) \trianglelefteq G$.

*הוכחה.* יהי $h \in G$, נבחין כי $hZ(G) = \{hx \mid \forall g \in G : gx = xg\} = \{xh \mid \forall g \in G : xg = gx\} = Z(G)h$. נסיק אם כן מסעיף א' ש־$Z(G) \trianglelefteq G$. $\square$

## שאלה 4

תהי חבורה $G$ ונסמן $X = \{H \subset G \mid H \leq G\}$.

### סעיף א'

נוכיח שהפעולה $\cdot : G \times X \to X$ המוגדרת על־ידי $g \cdot H = gHg^{-1}$ היא פעולה של $G$ על $X$.

*הוכחה.* נבחין תחילה כי האיבר הנייטרלי משמר את הקבוצה:

$$\forall H \in X : e_G H e_G^{-1} = H$$

נבחין גם כי תכונת השימור המגדירה פעולות על קבוצות חלה:

$$\forall H \in X, g, h \in G : g \cdot (h \cdot H) = g \cdot (hHh^{-1}) = ghHh^{-1}g^{-1} = (gh)H(gh)^{-1} = (gh) \cdot H$$

ומצאנו כי $G$ היא אכן פעולה מעל $X$. □

### סעיף ב'

נבחין במייצב:

$$N_G(H) = Stab(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

ונוכיח כי $H \trianglelefteq N_G(H)$.

*הוכחה.* יהי $h \in H$, אז כמובן נובע $h \in N_G(H)$ שכן $ehe^{-1} = h$. עוד נשים לב כי $forallg \in N_G(H) : gHg^{-1} = H$ וזוהי למעשהה ישירות הגדרת תת־חבורה נורמלית ונובע $H \trianglelefteq N_G(H)$. □

### סעיף ג'

נוכיח כי לכל $H \in X$ מתקיים $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$, דהינו המרכז של תת־חבורה הוא תת־חבורה נורמלית של המייצב של תת־הקבוצה.

*הוכחה.* נבחין כי $C_G(H) \leq H \leq N_G(H)$ ולכן $g \in C_G(H) \iff \forall h \in H : ghg^{-1} = h \implies gHg^{-1} = H$

$$C_G(H) \trianglelefteq N_G(H) \iff \forall g \in C_G(H) : gC_G(H)g^{-1} = C_G(H) \iff \forall g \in C_G(H), h \in N_G(H) : ghg^{-1} = h$$

ומצאנו כי ההגדרות של שתי הקבוצות משרות נורמליות ומתקיים $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$. □

### סעיף ד'

נמצא דוגמה כך ש־$C_G(H) \neq N_G(H)$.

נבחן את $G = D_4, H = \langle \sigma \rangle$.

נראה כי $\forall \sigma^m \in H : \sigma\sigma^m\sigma^3 = \sigma^m$ ולכן $\sigma \in C_G(H)$. לעומת זאת $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^3 \neq \sigma$ ולכן $\tau \notin C_G(H)$.

בסך הכול $C_G(H) = \langle \sigma \rangle = H$.

בתהליך זה מצאנו כי $\sigma H \sigma^3 = H$ וגם $\tau H \tau = H$ ולכן $N_G(H) = G$ ומצאנו $C_G(H) \neq N_G(H)$.

## שאלה 5

יהי $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ומוגדר $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ וגם $\forall x \in Q : (-1)x = x(-1) = -x$. נתון כי זוהי חבורה.

### סעיף א'

נוכיח כי $Q$ לא אבלית.

*הוכחה.* נניח בשלילה כי היא אבלית.

אנו יודעים כי $ji = (-1)(-1)(j(-1)(-1)i) = -ji$ בבחירה לטענה כי $ij = (j^{-1}i^{-1})^{-1} = -(j(-1)(-1)i) = -ji$ ולכן $Q$ לא אבלית. $\square$

### סעיף ב'

נראה כי $Q$ לא איזומורפית ל־$D_4$.

אילו ננסה לבנות הומומורפיזם בין החבורות, נקבל כי $\varphi(i^2) = \varphi(i)\varphi(i) = \varphi(-1)$ וגם $\varphi(-1) = \varphi(j)\varphi(j)$ אבל לא נוכל למצוא שני איברים שונים ב־$D_4$ שהרכבתם בעצמם היא זהה אך שאיננה האיבר הנייטרלי.

### סעיף ג'

נחשב את $Z(Q)$.

נשים לב כי ישנם שמונה איברים יחודיים ב־$Q$.

כמובן 1 נייטרלי לסדר ההכפלה, ועל־פי הגדרה גם $-1$.

לעומת זאת מצאנו כי $ij = -ji, ik = -ki, jk = -kj$ ולכן נוכל להסיק כי איברים אלה לא משמרים נייטרליות.

לכן $Z(Q) = \{1, -1\}$.

### סעיף ד'

נמצא את כל תת־החבורות של $Q$ ונבדוק אילו מהן נורמליות.

נבחין כי $i^{-1} = -i$ אבל $ij = k$ ולכן $\langle i, j \rangle = \langle i, j, k \rangle = Q$.

נסיק כי כל תת־החבורות הן $\{\{1, -1\}, \langle i \rangle, \langle j \rangle, \langle k \rangle, Q\}$.

נראה כי $i(-1)(-i) = -1$ וממעבר דומה נוכל להסיק כי $\{1, -1\}$ היא נורמלית.

עבור $\langle i \rangle$ נבחן את $ji(-j) = -jk = -i$ וממעבר דומה על $k$ נקבל כי גם $\langle i \rangle$ נורמלית.

מכאן נסיק ישירות כי כל תת־החבורות של $Q$ הן נורמליות.

### סעיף ה'

נמצא את מחלקות הצמידות של $Q$.

מצאנו כי כל תת־קבוצה היא נורמלית ולכן גם צמודה לעצמה בלבד, ונסיק כי יש ארבע מחלקות צמידות.