פתרון מטלה 02 — מבוא ללוגיקה, 80423

9 בנובמבר 2024

שאלה 1

תהי שפה $L = \{P, Q, R, S\}$ ויהי $\varphi = (\neg((P \to (\neg Q)) \wedge ((\neg R) \vee S)))$.

נכתוב עץ בינארי סטנדרטי מיושר לשמאל (T, f) ל־φ, ונחשב את הפונקציה המתאימה ψ.

פתרון נגדיר

$$
\begin{aligned}
f = \{&(\langle\rangle, \neg), (\langle 0,0,1\rangle, \neg), (\langle 0,1,0\rangle, \neg), (\langle 0\rangle, \wedge), (\langle 0,0\rangle, \to),\\
&(\langle 0,1\rangle, \vee), (\langle 0,0,0\rangle, P), (\langle 0,0,1,0\rangle, Q), (\langle 0,1,0,0\rangle, R), (\langle 0,1,1\rangle, S)\}
\end{aligned}
$$

עוד נגדיר $T = (\mathrm{dom} f, \preceq)$ כאשר $\preceq$ יחס הרישא חד־מקומי, ובהתאם (T, f) עץ היצירה של φ.

נגדיר $\psi : T \to \mathrm{sent}_L$, נקבל

$$
\begin{aligned}
\psi = \{&(\langle\rangle, (\neg((P \to (\neg Q)) \wedge ((\neg R) \vee S)))),\\
&(\langle 0\rangle, ((P \to (\neg Q)) \wedge ((\neg R) \vee S))),\\
&(\langle 0,0\rangle, (P \to (\neg Q))),\\
&(\langle 0,0,0\rangle, P),\\
&(\langle 0,0,1\rangle, (\neg Q)),\\
&(\langle 0,0,1,0\rangle, Q),\\
&(\langle 0,1\rangle, ((\neg R) \vee S)),\\
&(\langle 0,1,0\rangle, (\neg R)),\\
&(\langle 0,1,0,0\rangle, R),\\
&(\langle 0,1,1\rangle, S)\}
\end{aligned}
$$

שאלה 2

תהי L שפה, נוכיח שהביטוי $p \in \exp_L$ הוא פסוק אם ורק אם הוא פסוק מוגדר קווית.

הוכחה. נוכיח ש־$sent_L^+$ תת־קבוצה מינימלית של $\exp_L$ הסגורה תחת $F_\neg, F_\Box$ לכל $\Box \in B$.
נניח כי $\varphi \in sent_L^+$ ונגדיר $S \subseteq \exp_L$ הקבוצה המינימלית עליה דיברנו, עוד נניח כי $\varphi \notin L$, דהינו הקבוצה $sent_L^+$ לא מינימלית בגללה. מהגדרת $sent_L^+$ קיימת סדרת יצירה ל־φ, נגדירה כ־$(\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi)$. עתה נוכיח באינדוקציה על אורך הרשימה כי $\varphi \in S$. כבסיס נניח שאורך הרשימה 1, לכן $\varphi_0 = \varphi \in S$ וסיימנו. נניח עתה כי אורך הרשימה הוא n, ועוד נניח כי לכל $0 \le k < n$ מתקיים $\varphi_k \in S$, נוכיח כי גם $\varphi_n \in S$. אילו $\varphi_n \in L$ אז סיימנו, אילו מתקיים $\varphi_n = (\neg\varphi_k)$ עבור $0 \le k < n$ אז נקבל ש־$\varphi_n = F_\neg(\varphi_k)$ אבל $\varphi_k \in S$ ולכן גם $F_\neg(\varphi_k)$ ולכן גם $\varphi \in S$. נניח אם כן שמתקיים $\varphi = (\varphi_i \Box \varphi_j)$ עבור $0 \le i, j < n$, נקבל אם כן $\varphi_i, \varphi_j \in S$, ובהתאם $F_\Box(\varphi_i, \varphi_j) \in S$, וקיבלנו כי בכל מקרה $\varphi \in S$. השלמנו את צעד האינדוקציה ולכן קיבלנו שמתקיים $sent_L^+ \subseteq S \subseteq sent_L^+$ ולכן $S = sent_L^+$ בלבד.

נוכיח עתה גם כי $sent_L \subseteq S$, נגדיר φ מחדש על־ידי $\varphi \in sent_L$, לכן ל־φ עץ יצירה (T, f). נוכיח באינדוקציה על גובה העץ כי $\varphi \in S$, כבסיס נניח כי גובה העץ 1, לכן אין עוקבים ל־$\langle\rangle$, אז נובע כי $\varphi \in L$ ולכן גם $\varphi \in S$. נניח כי הטענה נכונה עבור גובה עץ $0 \le k < n$ ונניח כי גובה T הוא n. לא יתכן כי ל־$\langle\rangle$ אין עוקבים, לכן או שיש לו עוקב או שיש לו שניים. אילו יש לו עוקב יחיד, אז מתקיים $(\neg\psi_{\langle 0\rangle}) = \varphi$, כאשר ל־$\psi_{\langle 0\rangle}$ עץ יצירה באורך $n - 1$, לכן הוא מוכל ב־S ובהתאם $\varphi \in S$. נניח אם כן שיש שני עוקבים ל־$\langle\rangle$, נסמנם ψ_0, ψ_1, ונקבל כי אורך עץ היצירה של שניהם $n - 1$ ולכן גם $\psi_0, \psi_1 \in S$. נקבל כי גם $F_{f(\langle\rangle)}(\psi_0, \psi_1) \in S$, אבל $F_{f(\langle\rangle)}(\psi_1, \psi_2) = \varphi$, לכן $\varphi \in S$ והשלמנו את מהלך האינדוקציה. נסיק אם כן $S \subseteq sent_L \subseteq S$ ולכן בהכרח $S = sent_L$.

נסיק $sent_L^+ = S = sent_L$, דהינו $sent_L^+ = sent_L$. $\square$

שאלה 3

תהי L שפה לתחשיב פסוקים, X קבוצה, $h : L \to X$ פונקציה, $\epsilon_\neg : X \to X$ פונקציה ו־$\epsilon_\Box : X^2 \to X$ פונקציה לכל $\Box \in B$.

סעיף ב'

נוכיח כי קיימת פונקציה $\bar{h} : sent_L \to X$ כך ש־$\forall \varphi \in L, \bar{h}(\varphi) = h(\varphi)$ וכן $\forall \varphi = (\neg\psi), \bar{h}(\varphi) = \epsilon_\neg(\bar{h}(\psi))$ ועבור כל $\Box \in B$ מתקיים $\varphi = (\psi_0 \Box \psi_1) \implies \bar{h}(\varphi) = \epsilon_\Box(\bar{h}(\psi_0), \bar{h}(\psi_1))$.

הוכחה. יהי $\psi \in sent_L$, לכן קיים עץ יצירה (T_ψ, f_ψ) עבורו.

ניזכר בשאלה 3 ממטלה 1 ונגדיר את $\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)} : T_\psi \to X$ הפונקציה היחידה המקיימת לכל עלה בעץ היצירה $\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t) = h(f(t))$, לכל $t \in T_\psi$ בעל עוקב יחיד $\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t) = \epsilon_\neg(\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t \frown \langle 0 \rangle))$ וכן לכל $t \in T_\psi$ בעל שני עוקבים $\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t) = \epsilon_{f(t)}(\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t \frown \langle 0 \rangle), \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(t \frown \langle 1 \rangle))$.

נגדיר עתה $\bar{h}(\psi) = \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle\rangle)$ ונבדוק שהתנאים אכן מתקיימים.

תחילה נבחין כי ממסקנה מהכיתה נובע כי עץ היצירה לכל פסוק הוא יחיד, לכן הגדרה זו יחד עם יחידות g היא תקפה, ונוכל לדון לא בתוקפה אלא בקיום התכונות הרצויות בלבד.

נניח כי $\psi \in L^1$, אז מתקיים $\bar{h}(\psi) = \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle\rangle) = h(f_\psi(\langle\rangle)) = h(\psi)$.

עתה נשתמש בטענה זו כבסיס למהלך אינדוקטיבי על מבנה הפסוק, נניח כי הטענה נכונה עבור φ ועוד נניח שמתקיים $\psi = (\neg\varphi)$, אז נקבל $\bar{h}(\psi) = \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle\rangle) = \epsilon_\neg(\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle 0 \rangle)) = \epsilon_\neg(\bar{h}(\varphi))$, נבחין כי השתמשנו פה פעמיים בהגדרה שסיפקנו ל־$\bar{h}$. נניח אם כן שמתקיים $\psi = (\varphi_0 \Box \varphi_1)$ עבור $\Box \in B$, ואז $\bar{h}(\psi) = \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle\rangle) = \epsilon_{f_\psi(\langle\rangle)}(\tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle 0 \rangle), \tilde{g}_{\psi,(T_\psi,f_\psi)}(\langle 1 \rangle)) = \epsilon_\Box(\bar{h}(\varphi_0), \bar{h}(\varphi_1))$, ושוב קיבלנו כי התכונה של $\bar{h}$ נשמרת, והשלמנו את המהלך האינדוקטיבי.

בהתאם נוכל להסיק כי $\bar{h}$ לא רק מוגדרת באופן חזק, אלא גם מקיימת את שלושת התנאים. $\Box$

סעיף ג'

נוכיח כי הפונקציה $\bar{h}$ מוגדרת ביחידות.

הוכחה. תהינה $\bar{h}, \bar{h}'$ שתי פונקציות המקיימות את התנאים.

יהי $\psi \in L$, מהתכונות שמצאנו מתקיים $\bar{h}(\psi) = h(\psi)$ אך גם $\bar{h}'(\psi) = h(\psi)$ ולכן בפרט $\bar{h}(\psi) = \bar{h}'(\psi)$.

גם הפעם נשתמש בטענה זו כבסיס האינדוקציה על מבנה הפסוק, ולכן נניח עתה את מהלך האינדוקציה, דהינו יהי $\varphi \in sent_L$ כך ש־$\bar{h}(\varphi) = \bar{h}'(\varphi)$, ויהי $\psi = (\neg\varphi)$. לכן $\bar{h}(\psi) = \epsilon_\neg(\bar{h}(\varphi)) = \epsilon_\neg(\bar{h}'(\varphi)) = \bar{h}'(\psi)$ ושוב הגענו לשוויון.

נניח אם כך $\varphi_0, \varphi_1 \in sent_L$ מקיימים את הטענה, ונגדיר $\psi = (\varphi_0 \Box \varphi_1)$ עבור $\Box \in B$.

אז $\bar{h}(\psi) = \epsilon_\Box(\bar{h}(\varphi_0), \bar{h}(\varphi_1)) = \epsilon_\Box(\bar{h}'(\varphi_0), \bar{h}'(\varphi_1)) = \bar{h}'(\psi)$.

השלמנו אם כך את מהלך האינדוקציה וקיבלנו ש־$\bar{h}$ היא אכן יחידה. $\Box$

שאלה 4

תהי L שפה לתחשיב פסוקים.

סעיף א'

נוכיח כי אם $\varphi \in sent_L$ אז יש לו אינסוף סדרות יצירה שונות.

הוכחה. תהי $\alpha_0 = \langle \varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \rangle$ סדרת יצירה כך ש־$\varphi = \varphi_0$.

נניח כי $\psi \in L$ פסוק יסודי כלשהו שמובטחל שקיים מהגדרת L.

עתה נבנה סדרה חדשה $\alpha_1 = \langle \varphi \rangle \frown \alpha_0$. נבחין כי כל תנאי סדרת היצירה נשמרו שכן האיבר הראשון לא מצריך איברים נוספים, ולכל איבר כל האיברים הקודמים לו נשמרו ברשימה ובסדר.

ביתר פירוט נוכל להוכיח באינדוקציה על אורך הרשימה כי אכן α_1 סדרת יצירה של φ.

עתה נבצע תהליך זה באופן מחזורי, נגדיר $\alpha_k = \langle \psi \rangle \frown \alpha_{k-1}$. כמובן אורך α_k שונה לכל $k \in \mathbb{N}$ ולכן הסדרות אכן שונות. $\square$

סעיף ב'

עתה נגדיר $L = \{p, q\}$, ונחשב את מספר סדרות היצירה השונות של הפסוק $\varphi = (p \to q)$ כך שהן באורך 3.

פתרון נגדיר $\langle \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ סדרת יצירה של φ, לכן גם $\varphi_2 = \varphi$.

מהגדרת סדרת יצירה קיים $0 \le i \le 2$ כך ש־p מופיע בסדרה וכך גם עבור q, זאת מטענה $\varphi_2 = \varphi$, נבחין כי מצב זה יתכן כאשר $\varphi_0 = p, \varphi_1 = q$ או כאשר $\varphi_0 = q, \varphi_1 = p$ בלבד. נסיק אם כן שמספר הסדרות באורך 3 הוא 2 בלבד.