פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

27 באפריל 2023

שאלה 1

נמצא את נקודות הרציפות והאי־רציפות של הפונקציה f המוגדרת:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \tan \frac{\pi x}{2}$$

בתחום $\mathbb{R}$ ונמיינן.

על־פי משפט 5.13 הפונקציה $\tan \frac{\pi x}{2}$ רציפה בכל תחום הגדרתה, ועל־פי הגדרת הפונקציה אנו יודעים כי היא איננה מוגדרת בערכים

$$\{1 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

מהגדרת החלק השלם והפוקנציה x אנו יודעים כי $\lfloor x \rfloor$ רציפה בכל תחום הגדרתה, ולא מוגדרת בנקודות $x \in \mathbb{Z}$. על־פי משפט 5.11 גם f רציפה בכל תחום הגדרתה, והיא כמובן לא מוגדרת ב־$x \in \mathbb{Z}$. אז כלל הנקודות החשודות באי־רציפות הן $x \in \mathbb{Z}$.

נגדיר מעתה $k \in \mathbb{Z}$. אנו יודעים כי כאשר $x = 1 + 2k$ אז הפונקציה $f(k)$ איננה מוגדרת, וכי $\lim_{x \to k^\pm} f(x) = \pm\infty$, לכן בנקודות אלה ל־$f$ נקודות אי־רציפות ממין שני.

כאשר $x = 2k$ אנו וידעים כי $\tan \pi x 2$ רציפה, ואילו $\lfloor x \rfloor$ מקיימת

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = k - 1 = \left(\lim_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor \right) + \left(\lim_{x \to k^+} \tan \frac{\pi x}{2} \right) = k - 1 + 0 = k - 1$$

וגם

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = k - 1 = k + 0 = k$$

לכן על־פי הגדרה 5.22 הנקודות $x = 2k$ הן נקודות אי־רציפות ממין ראשון ב־f.

שאלה 2

סעיף א'

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0.

(i) ננסח את הטענה כי f איננה רציפה ב־x_0 בלשון ϵ, δ:

הפונקציה f לא רציפה ב־x_0 אם ורק אם קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים x כך ש־$|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

(ii) ננסח את הטענה כי f איננה רציפה ב־x_0 בלשון סדרות:

הפונקציה f איננה רציפה ב־x_0 אם ורק אם קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$.

סעיף ב'

נגדיר g פונקציה הרציפה ב־x_0 ופונקציה f המוגדרת $f(x) = g(x)D(x)$.

נוכיח כי אם $g(x_0) = 0$ אז f רציפה ב־x_0.

מטענה 5.3 נובע כי לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|g(x)| < \epsilon$.

על־פי הגדרת פונקציית דיריכלה אנו יודעים כי $D(x) \in \{0, 1\}$ לכל $x \in \mathbb{R}$, לכן תמיד מתקיים $D(x) \leq 1$. אז כמובן שמתקיים גם $|g(x)|D(x) \leq |g(x)| < \epsilon$ ולכן גם $f(x)$ רציפה ב־x_0.

סעיף ג'

נגדיר $x_0 \in \mathbb{R}$ אשר עבורו $g(x_0) \neq 0$, כמובן גם g רציפה ב־x_0.

(i) נוכיח כי הפונקציה f איננה רציפה ב־x_0 על־פי ההגדרה מסעיף א' (i)

הוכחה. נמצא $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים ערך x כך ש־$|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

נקבע $\epsilon < 1$, ויהי $\delta > 0$ אשר עבורו $|x - x_0| < \delta$.

מהגדרת פונקציית דיריכלה ואקסיומת הרצף, אנו יכולים להסיק כי קיים מספר x_1 אשר מקיים $|x_0 - x_1| < \delta$, ואשר הוא אי־רציונלי. **מש"ל**

(ii) נוכיח כי הפונקציה f איננה רציפה ב־x_0 על־פי ההגדרה מסעיף א' (ii)

הוכחה. נמצא סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$.

נגדיר (x_n) סדרה אינסופית של מספרים אי־רציונליים, $x_1 < x_0$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ כאשר $1 < n$ גם

$$x_n < x_{n+1} < x_0$$

הגדרה זו אפשרית כמובן על־פי צפיפות הממשיים.

על־פי הגדרת הגבול עבור סדרות, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

אבל אנו יודעים שלכל n גם $f(x_n) = 0$ מהגדרת פונקציית דיריכלה, לכן

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq x_0$$

מש"ל

שאלה 3

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$.

נוכיח כי אם לכל $x>0$ מתקיים $x<|f(x)|$, אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ או $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

הוכחה. תחילה נראה כי הפונקציה $f(x)$ היא חיובית לכל x או שלילית לכל x בתחום.

נניח בשלילה כי $f(x)$ משנה סימן כאשר $x=x_0$. נניח כי קיים a כך ש-$a<x_0$ וגם $f(a)<-a$ וכי קיים $b>x_0$ כך ש-$f(b)>b$.

ממשפט ערך הביניים של קושי נובע כי קיים מספר c ככה ש-$f(c)=0$ בניגוד לנתון כי $0<x<|f(x)|$.

יכולנו להגדיר את שינוי הסימן ההפוך וההוכחה הייתה נשארת זהה, לכן לא נפגעת הגבלת הכלליות.

אז אנו יכולים להסיק כי לכל x מתקיים $x<f(x)$, או לחילופין לכל x מתקיים $x<-f(x)$.

מהגדרת השאיפה לאינסוף ומינוס אינסוף בפונקציות נובע ישירות כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

או

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

מש"ל

שאלה 4

תהי f פונקציה רציפה בקטע $\mathbb{R}_{0\geq}=[0,\infty)$ ויהי $L\in\mathbb{R}$. ידוע כי מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

סעיף א'

נוכיח כי אם f מקבלת מינימום ב־$\mathbb{R}_{0\geq}$ אז קיים $x_0\geq 0$ כך ש־$f(x_0)\leq L$.

הוכחה. נקבע כי x_1 היא נקודת מינימום של $f(x)$ וכי $f(x_1)=c$.

נבחן שני מקרים, כאשר $c\leq L$ אז כמובן שקיים x_0 כזה, והוא כאשר $x_0=x_1$.

לכן עלינו רק לבחון את המקרה בו $c>L$.

מהגדרת הגבול בלשון ϵ, M נובע כי עבור $\epsilon=c$ קיים M כך ש־$|f(x)-L|<c$ לכל $x>M$. מש"ל

שאלה 5

סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ רציפה במידה שווה בקטע $[0,\infty)$:

$$\begin{aligned}\epsilon &> \left|\sqrt{1+x_0^2}-\sqrt{1+x_1^2}\right| \\ &= \frac{\left|\left(\sqrt{1+x_0^2}-\sqrt{1+x_1^2}\right)\left(\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}\right)\right|}{\left|\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}\right|} \\ &= \frac{\left|1+x_0^2-1-x_1^2\right|}{\left|\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}\right|} \\ &= \frac{|(x_0+x_1)(x_0-x_1)|}{\left|\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}\right|} \\ &= \frac{|x_0+x_1|}{\left|\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}\right|}|x_0-x_1|\end{aligned}$$

בקטע הנתון $x_0,x_1>0$ ולכן $x_0+x_1>0$, כמו־כן שורשים אלה מוגדרים בכל הקטע וחיוביים בו:

$$\frac{x_0+x_1}{\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}}|x_0-x_1|<\epsilon$$

לכל $x>0$ מתקיים $x<\sqrt{x^2+1}$. נגדיר את δ:

$$\frac{x_0+x_1}{\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}}|x_0-x_1|<\frac{\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}}{\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}}|x_0-x_1|<\delta$$

ולכן

$$|x_0-x_1|<\delta$$

כמו קראינו, במצב זה גם מתקיים

$$|f(x_0)-f(x_1)|<\epsilon$$

ולכן הפונקציה f רציפה במידה שווה בקטע $[0,\infty)$.

סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה המוגדרת רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$:

$$f(x)=(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}$$

הפונקציה f מוגדרת בכל הקטע הנתון ומורכבת ממכפלת והרכבת פונקציות רציפות ולכן רציפה גם (למצוא תירוץ יותר טוב). נראה כי מתקיים:

$$\lim_{x_0\to 0^+} 1-\cos x_0=0$$

הפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ אומנם איננה מתכנסת ב־$x_0=0$, אבל חסומה ב־$[-1,1]$ ולכן על־פי הגדרת היינה לגבול חד־צדדי ומשפט 2.22 מתקיים:

$$\lim_{x_0\to 0^+}(1-\cos x_0)\sin\frac{1}{x_0}=0$$

נמצא את הגבול

$$\lim_{x_0\to\infty^-}(1-\cos x_0)\sin\frac{1}{x_0}$$

במקרה זה $\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$ על־פי גבול $0\underset{x\to 0}{\to}\sin x$ והרכבת פונקציה עם $\frac{1}{x}$. הפונקציה $1-\cos x$ חסומה בקטע $[-1,1]$ ובאופן דומה:

$$\lim_{x_0\to\infty^-}(1-\cos x_0)\sin\frac{1}{x_0}=0$$

יש בספר משפט שמרחיב את משפט 5.49 לקטעים אינסופיים, תשתמש בזה.

סעיף ג'

נוכיח כי לכל $1\geq x\geq y$ מתקיים

$$y^2\arctan y-x^2\arctan x\geq\left(y^2-x^2\right)\arctan x$$
$$y^2\arctan y\geq y^2\arctan x$$
$$\arctan y\geq\arctan x$$

על־פי טענה 5.44 ומשפט 5.43 מתקיים $\arctan y\geq\arctan x$ אם $y\geq x$ ולכן אי־השוויון מתקיים.

נוכיח כי הפונקציה f, המוגדרת:

$$f(x)=x^2\arctan x$$

איננה רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$:

נניח בשלילה כי הפונקציה f רציפה במידה שווה לכל $\epsilon>0$, לכן לכל $x,y\in\mathbb{R}$ שעבורם מתקיים $|x-y|<\delta$, מתקיים

$$\left|y^2\arctan y-x^2\arctan x\right|<\epsilon$$

לכן גם מתקיים:

$$\left|\left(x^2-y^2\right)\arctan x\right|<\epsilon$$

הפונקציה $\arctan x$ חיובית לכל $x\geq 0$ ולכן

$$|(x-y)(x+y)|\arctan x=|x-y|\,(x+y)\arctan x<\epsilon$$