

פתרון ממ"ן 16 – אלגברה לינארית 2 (20229)

10 ביוני 2023



שאלה 1

תהי מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

סעיף א'

נמצא צורת ז'ורדן G של A ומטריצה הפיכה P כך שיתקיים $P^{-1}AP = G$.

נמצא את הפולינום האופייני של A :

$$|A| = (t-6)t + 9 = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

אז $P(t) = (t-3)^2$ ול- A יש ערך עצמי יחיד 3, ולכן ממשפט 11.9.2 נובע כי $A - 3I$ היא מטריצה נילפוטנטית. חישוב ישיר מראה כי

$$(A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן אינדקס הנילפוטנטיות שלה הוא 2.

נשתמש באלגוריתם החישוב אשר מופיע בסעיף 11.7 על $A - 3I$ כדי למצוא בסיס אשר בו A היא בצורת ז'ורדן.

נגדיר $B_1 = \ker A - 3I = \text{Sp}\{(3, 1)\}$. נשלים את B_1 לבסיס של \mathbb{R}^3 על-ידי הקבוצה $E_2 = \{(1, 0)\}$, נקבע גם $D_2 = E_2$. נגדיר

$D_1 = \{(A - 3I)D_2\} = \{(3, 1)\}$ ולכן הביסס $D = D_1 \cup D_2 = \{(3, 1), (1, 0)\}$ בסיס בו $A - 3I$ מטריצה בעלת צורת ז'ורדן.

ממשפט 11.9.2 נובע כי D בסיס בו גם A מקבלת צורת ז'ורדן, נחשב:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

סעיף ב'

נחשב את A^{100} ואת G^{100} . תחילה נחשב את G^{100} . ממסקנה 10.1.7 ומטענה 11.3.6 תוך שימוש בהערה 11.3.7 נובע כי

$$J^{100} = J_2(3)^{100} = \sum_{k=0}^1 \binom{100}{k} 3^{100-k} J_2(0)^k = \binom{100}{0} 3^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \binom{100}{1} 3^{99} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$$

משאלה 8.2.3 א' נובע כי

$$A^{100} = P^{-1}J^{100}P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

סעיף ג'

נמצא נוסחה עבור a_n , כאשר נתון

$$a_n = \begin{cases} a & n = 0 \\ b & n = 1 \\ 6a_{n+1} - 9a_n & n > 1 \end{cases}$$

מחשוב ישיר ניתן לראות כי מתקיים

$$A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a_{n+1} - 9a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

לכן נוכל להוכיח באינדוקציה כי

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & n3^n + 3^n \\ 3^n & n3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+n)3^n & -n3^n \\ n3^{n-1} & (1-n)3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \\ &\rightarrow a_n = b(1+n)3^n - na3^n \end{aligned}$$

שאלה 2

יהי $V = \mathbb{C}^n$ מרחב אוניטרי מממד סופי ותהי העתקה לינארית $T : V \rightarrow V$.

ידוע כי כל וקטור עצמי של T הוא גם וקטור עצמי של T^* .

נוכיח כי T העתקה נורמלית.

הוכחה. יהיו הערכים העצמיים של T $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

יהי i מספר כך ש- $1 \leq i \leq n$, ונגדיר את V_i להיות המרחב העצמי של λ_i לכל i .

אנו יודעים כי לכל $u \in V_i$ מתקיים $Tu = \lambda_i u \in V_i$ ולכן נגדיר $T_i : V_i \rightarrow V_i$ צמצום של T ל- V_i בהתאם לשאלה 8.4.3 א'.

מהגדרתה נובע ש- T_i היא העתקה סקלרית ולכן מטריצת יצוגה דומה ל- $\lambda_i I_n$, מהגדרה 3.1.1 נובע כי היא לכסינה אוניטרית ונורמלית.

מסיבה זו נוכל גם לקבוע כי קיים בסיס אורתונורמלי $B_i \subseteq V_i$ אשר מלכסן אוניטרית את T_i .

מנורמליות T_i על-פי למה 3.2.5 נובע גם כי לכל $u \in V_i$

$$T_i^* u = \overline{\lambda_i} u \quad (1)$$

יהיו i, j כך ש- $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$, ויהיו וקטורים $v_i \in V_i, v_j \in V_j$.

אנו יודעים כי כל וקטור עצמי של T הוא גם וקטור עצמי של T^* , אז

$$(Tv_i, v_j) = \lambda_i(v_i, v_j) = (v_i, T^*v_j) \stackrel{8.4.8}{=} (v_i, T_j^*v_j) \stackrel{(1)}{=} (v_i, \overline{\lambda_j}v_j) \stackrel{1.2.3}{=} \lambda_j(v_i, v_j)$$

ולכן בהתאם

$$(\lambda_i - \lambda_j)(v_i, v_j) = 0$$

ידוע כי $\lambda_i \neq \lambda_j$ ולכן בהכרח $(v_i, v_j) = 0$ ובהתאם כל שני וקטורים עצמיים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

אנו יודעים כי B_i ו- B_j בלתי תלויות לינארית, ועתה נובע גם כי $B_i \perp B_j$, לכן גם

$$B = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

הוא אורתונורמלי, בלתי תלוי לינארית, ומהגדרת B_i מהווה קבוצת יוצרים ל- V .

אנו יודעים כי לכל $b \in B$ מתקיים $Tb = \alpha b$ ולכן מהגדרת האלכסוניות T תיוצג כמטריצה אלכסונית בבסיס B .

לכן מהגדרה 3.1.1 נובע כי T לכסינה אוניטרית ולכן גם נורמלית.

מש"ל

שאלה 3

סעיף א'

נמצא צורת ז'ורדן למטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ננתחיל בחישוב ערכיה העצמיים בעזרת פולינום אופייני:

$$\begin{aligned} P(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & t+6 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & t-1 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & t-8 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ 2 & t+6 & -13 \\ 1 & 4 & t-8 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)((t-1)(t+6)(t-8) - 39 - 24 + 3(t+6) - 6(t-8) + 52(t-1)) = (t-1)^4 \end{aligned}$$

ל- A ערך עצמי יחיד 1 אשר ריבוי האלגברי הוא 4.

נחשב את הריבוי הגאומטרי של 1 עבור A על-ידי חישוב ממד מרחב הפתרונות של $(A - I)u = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(A - I) = 2$$

אז הריבוי הגאומטרי של 1 הוא 2.

מהגדרה 9.10.1 נובע ש- $A - I$ נילפוטנטית, נחשב את אינקס הנילפוטנטיות שלה על-ידי חישוב ישיר של A^k .

מחישוב ישיר מוצאים כי $(A - I)^3 = 0$, $(A - I)^2 \neq 0$, לכן אינדקס הנילפוטנטיות של $A - I$ הוא 3.

11.8.1 מטענה אנו מסיקים כי מספר מטריצות הז'ורדן היסודיות המופיעות במטריצת הז'ורדן הדומה ל- A היא 2 ומטריצת הז'ורדן הגדולה ביותר

היא בגודל 3. לכן A דומה למטריצה הבאה

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ב'

נגדיר מטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

נמצא צורת ז'ורדן J של המטריצה B ומטריצה הפיכה P המקיימת $B = P^{-1}JP$.
 מתהליך חישוב הפולינום האופייני של A אנו למדים כי $P_B(t) = (t-1)^3$.
 מחישוב ישיר אנו מקבלים כי $\rho(B-I) = 2$, וגם כי אינדקס הנילפוטנטיות של $A-I$ הוא 3.
 בשל נתונים אלה אנו יכולים להסיק מטענה 11.8.1

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ענה נמצא את המטריצה P :

המטריצה P המקיימת את התנאי היא מטריצת בין $B-I$ לבין $J_3(0)$.
 נגדיר בסיס $W = (w_1, w_2, w_3)$ בסיס הז'ורדן של $B-I$ וכמובן גם של B .
 ידוע כי

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן על-פי הגדרת הבסיס W צריך להתקיים $(B-I)w_3 = w_2$. נגדיר $w_3 = (1, 0, 0)$ מטעמי פשטות, ולכן

$$(B-I)w_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

בהתאם להגדרת w_3 נובע כי $w_2 = (0, -2, -1)$.

על-פי הגדרת W מתקיים גם $(B-I)w_2 = w_1$, נחשב

$$(A-I)w_2 = w_1 = (3, 3, 1)$$

נשים לב כי אכן מתקיים $(B-I)w_1 = 0$ על-פי חישוב ישיר, ואכן W בסיס ז'ורדן של B .
 מהגדרת מטריצת מעבר נקבע

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

תהי A מטריצה ריבועית מסדר 7 בעלת ערך עצמי יחיד $\lambda \in \mathbb{C}$.

ידוע כי $\rho(A - \lambda I)^2 = 1$ וכי $\rho(A - \lambda I) = 2$.

נמצא את צורת ז'ורדן ואת הפולינום המינימלי של A .

9.12.1 נובע כי $B = A - \lambda I$ מטריצה נילפוטנטית, ומטענה 9.11.5 אנו מסיקים כי אינדקס הנילפוטנטיות של B הוא 3.

על-פי טענה 11.8.1 מספר מטריצות הז'ורדן היסודיות המופיעות בצורת ז'ורדן של A הוא 5, וגם כי מטריצת ז'ורדן היסודית הגדולה ביותר היא

מסדר 3. נוכל להסיק מכל האמור לעיל כי B דומה למטריצת ז'ורדן הבאה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ובהתאם ממשפט 11.9.2 נובע כי A דומה למטריצת ז'ורדן הבאה

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

על-פי טענה 9.12.1 על-כן נובע גם כי $M_A(x) = (x - \lambda)^3$.

שאלה 5

תהי $A \in M_3(\mathbb{C})$ בעלת ערכים עצמיים ממשיים בלבד.

ידוע כי צורת ז'ורדן של A^3 היא

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נמצא את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של A ונציג צורת ז'ורדן שלה.

חישוב ישיר מניב כי הפולינום האופייני של A^3 הוא $p_3(t) = (t-8)^2(t-1)$.

על-פי שאלה 11.3.2 מהקורס הקודם והעובדה כי כלל ערכיה העצמיים של A הם ממשיים נובע כי ערכיה העצמיים של A הם 1, 2.

על-ידי שימוש בדרך חישוב החזקה בשאלה 1 סעיף ב' ושילוב זהויות דטרמיננטה, אנו יכולים להסיק כי הפולינום האופייני של A הוא

$$p(t) = (t-2)^2(t-1)$$

מטענה 9.8.8 א' נובע כי הפולינום המינימלי של A הוא $(t-2)^2(t-1)$ או $(t-2)(t-1)$.

אילו הוא היה $(t-2)(t-1)$ אז מצב זה היה אפשרי על-פי טענה 9.8.2 רק אם A הייתה לכסינה, אך במצב זה A^3 הייתה לכסינה אף היא, בסתירה לנתון. לכן

$$M_A(t) = (t-2)^2(t-1)$$

לבסוף נובע ממשפט 11.10.1 כי למטריצה A צורת ז'ורדן ומהפולינום המינימלי אנו יכולים להסיק כי מטריצת ז'ורדן זו היא

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$