פתרון ממ"ן 16 – אלגברה לינארית 2 (20229)

18 באפריל 2023

שאלה 1

תהי מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

סעיף א'

נמצא צורת ז'ורדן G של A ומטריצה הפיכה P כך שיתקיים $P^{-1}AP = G$.

נמצא את הפולינום האופייני של A:

$$|A| = (t-6)t + 9 = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

אז $P(t) = (t-3)^2$ ול־A יש ערך עצמי יחיד 3, ולכן ממשפט 11.9.2 נובע כי $A - 3I$ היא מטריצה נילפוטנטית. חישוב ישיר מראה כי

$$(A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן אינדקס הנילפוטנטיות שלה הוא 2.

נשתמש באלגוריתם החישוב אשר מופיע בסעיף 11.7 על $A - 3I$ כדי למצוא בסיס אשר בו A היא בצורת ז'ורדן.

נגדיר $B_1 = \ker A - 3I = \mathrm{Sp}\{(3,1)\}$. נשלים את B_1 לבסיס של $\mathbb{R}^3$ על־ידי הקבוצה $E_2 = \{(1,0)\}$, נקבע גם $D_2 = E_2$. נגדיר $D_1 = \{(A-3I)D_2\} = \{(3,1)\}$ ולכן הביסיס $D = D_1 \cup D_2 = \{(3,1),(1,0)\}$ בסיס בו $A - 3I$ מטריצה בעלת צורת ז'ורדן.

ממשפט 11.9.2 נובע כי D בסיס בו גם A מקבלת צורת ז'ורדן, נחשב:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \ J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

סעיף ב'

נחשב את A^{100} ואת G^{100}. תחילה נחשב את G^{100}. ממסקנה 10.1.7 ומטענה 11.3.6 תוך שימוש בהערה 11.3.7 נובע כי

$$J^{100} = J_2(3)^{100} = \sum_{k=0}^{1} \binom{100}{k} 2^{100-k} J_2(0)^k = \binom{100}{0} 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \binom{100}{1} 2^{99} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$$

משאלה 8.2.3 א' נובע כי

$$A^{100} = P^{-1} J^{100} P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

סעיף ג'

נמצא נוסחה עבור a_n, כאשר נתון

$$a_n = \begin{cases} a & n = 0 \\ b & n = 1 \\ 6a_{n+1} - 9a_n & n > 1 \end{cases}$$

מחישוב ישיר ניתן לראות כי מתקיים

$$A\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6a_{n+1}-9a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}$$

לכן נוכל להוכיח באינדוקציה כי

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3^n&n3^n+3^n\\3^n&n3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(1+n)3^n&-n3^n\\n3^{n-1}&(1-n)3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\\\to a_n&=b(1+n)3^n-na3^n\end{aligned}$$

שאלה 2

יהי $V = \mathbb{C}^n$ מרחב אוניטרי מממד סופי ותהי העתקה לינארית $T : V \to V$.

ידוע כי כל וקטור עצמי של T הוא גם וקטור עצמי של T^*.

נוכיח כי T העתקה נורמלית.

הוכחה. יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ הערכים העצמיים של T.

יהי i מספר כך ש־$1 \le i \le n$, ונגדיר את V_i להיות המרחב בעצמי של λ_i.

אנו יודעים כי לכל $u \in V_i$ מתקיים $Tu = \lambda_i u \in V_i$ ולכן נגדיר $T_i : V_i \to V_i$ צמצום של T ל־V_i.

מהדרתה נובע ש־T_i היא העתקה סקלרית ולכן מטריצת יצוגה דומה ל־$\lambda_i I_n$ ולכן מהגדרה 3.1.1 נובע כי היא לכסינה אוניטרית ונורמלית.

מסיבה זו נוכל גם לקבוע כי קיים בסיס אורתונורמלי $B_i \subseteq V_i$ אשר מלכסן אוניטרית את T_i.

מנורמליות T_i על־פי למה 3.2.5 נובע גם כי לכל $u \in V_i$

$$T_i^* u = \overline{\lambda_i} u \tag{1}$$

יהיו i, j כך ש־$1 \le i, j \le n, i \ne j$, ויהיו וקטורים $v_i \in V_i, v_j \in V_j$.

אנו יודעים כי כל וקטור עצמי של T הוא גם וקטור עצמי של T^*, אז

$$(Tv_i, v_j) = \lambda_i (v_i, v_j) = (v_i, T^* v_j) \overset{8.4.8}{=} (v_i, T_j^* v_j) \overset{(1)}{=} (v_i, \overline{\lambda_j} v_j) \overset{1.2.3}{=} \lambda_j (v_i, v_j)$$

ולכן בהתאם

$$(\lambda_i - \lambda_j)(v_i, v_j) = 0$$

ידוע כי $\lambda_i \ne \lambda_j$ ולכן בהכרח $(v_i, v_j) = 0$ ובהתאם כל שני וקטורים עצמיים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

אנו יודעים כי B_i ו־B_j בלתי תלויות לינארית, ועתה נובע גם כי $B_i \perp B_j$, לכן גם

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

הוא אורתונורמלי, בלתי תלוי לינארית, ומהגדרת B_i מהווה קבוצת יוצרים ל־V.

אנו יודעים כי לכל $b \in B$ $Tb = \alpha b$ ולכן מהגדרת האלכסוניות T תיוצג כמטריצה אלכסונית בבסיס B.

לכן מהגדרה 3.1.1 נובע כי T לכסינה אוניטרית ולכן גם נורמלית.

מש"ל