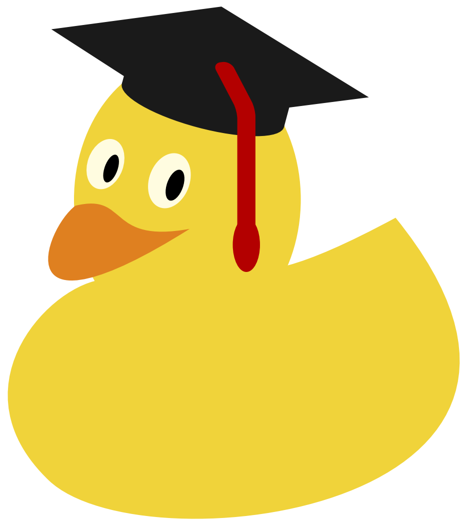
# פתרון ממ"ן 14 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

31 ביולי 2023



## שאלה 1

### סעיף א'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin n\cdot\frac{(2^n+5^n)(n+1)^2}{n!}+\frac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}\right)$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sin n\cdot\frac{(2^n+5^n)(n+1)^2}{n!}\\
\iff&\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\frac{(2\cdot 2^n+5\cdot 5^n)(n+2)^2}{(n+1)!}/\frac{(2^n+5^n)(n+1)^2}{n!}<1\\
\iff&\frac{\sin(n+1)}{\sin n}(2+\frac{3\cdot 5^n}{2^n+5^n})\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}(n+1)<1
\end{aligned}$$

ולכן גבול הרכיב הראשון בטור איננו אפס.

ידוע כי $\cos x$ חיובי ואיננו מתאפס עבור $0<x\leq 1$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}=0$$

אז מצאנו כי גבול הסדרה איננו אפס, ולכן ממשפט 5.5 נובע כי הטור איננו מתכנס.

### סעיף ב'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\cdot(n+1)^n}{n^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n$$

ידוע כי הפונקציה $(1+\frac{1}{n})^n$ מונוטונית עולה ומתכנסת ל־$e$ ולכן לכל $n$

$$(1+\frac{1}{n})^n<e$$

ומתקיים

$$0\leq\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e\cos n}{n}\overset{5.10}{=}e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\tag{1}$$

קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left|\frac{\cos n}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{|\cos n|}}{\sqrt{n}}=0$$

ולכן ממשפט 5.16** נובע ישירות כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$$

הוא טור מתכנס, ולכן מאי־שוויון (1) וממשפט ההשוואה הראשון נובע כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n$$

הוא טור מתכנס בהחלט.

### סעיף ג'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$$

הטור מתכנס אם ורק אם האינטגרל הבא מתכנס

$$\int_{1}^{\infty}\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)dx \tag{1}$$

נוכל לגזור את הביטויים פעמיים ולראות כי על־פי משפט 8.17 מאינפי 1 נובע לכל $1 \leq x \leq \infty$

$$1-x\sin\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2}$$

וידוע כי

$$\int_{1}^{\infty} x^{-2}dx = -x^{-1}\Big|_{1}^{\infty} = 0+1=1$$

לכן ממשפט 3.16 נובע כי האינטגרל $(1)$ מתכנס ולכן גם הטור.

נשים לב כי כלל איברי הטור הם חיוביים ולכן הטור מתכנס גם בהחלט.

## שאלה 2

נתונה סדרה $(a_n)$ כך ש־$a_n > 0$ ו־$a_n \neq 1$ לכל $n$.

נוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n-1}$ מתכנס.

*הוכחה.* נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, על־פי משפט 5.5 הסדרה $(a_n)$ אפסה, ולכן לכמעט כל $n$ מתקיים $0 < a_n < 1$.

בהתאם גם $0 < 1 - s_n < 1$, נגדיר סדרה $(b_n)$ כך שמתקיים

$$b_n = \frac{a_n}{1-a_n}$$

ולכן לכמעט כל $n$ אי־השוויון $0 < b_n < 1$ מתקיים.

עוד נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 1 - a_n = 1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

ולכן תנאי מבחן ההשוואה השני מתקיימים והטור

$$-\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$$

מתכנס והוכחנו את הכיוון הראשון של הטענה.

נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n-1}$ מתכנס.

נניח בשלילה כי $(a_n)$ איננה אפסה, ולכן היא מתכנסת לערך סופי שונה מאפס או לערך לא סופי.

אילו היא מתכנסת לערך סופי שונה מאפס אז גבול הסדרה $\frac{a_n}{a_n-1}$ הוא מספר שאיננו אפס או אינסוף בסתירה למשפט 5.5 ולנתון.

נניח אם כך כי הגבול של $(a_n)$ הוא אינסוף או מינוס אינסוף, אך בשני מקרים אלה גבול $\frac{a_n}{a_n-1}$ יהיה 1 בסתירה לאפסות הסדרה.

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ידוע כמובן מהנתון ומהגבול כי לכמעט כל $n$ מתקיים $0 < a_n < 1$, ונוכל להגדיר מחדש את $(b_n)$ כבחלק הראשון של ההוכחה, ולכן נתון כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$$

הוא טור מתכנס. נוכל אפוא להשתמש במשפט ההשוואה השני ולהוכיח כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

מצאנו כי שני הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו. **מש"ל**

## שאלה 3

הסדרה $(u_n)$ מוגדרת באופן הבא:

$$u_1 = 1, u_{n+1} = u_n \cdot \frac{1+u_n}{1+2u_n}$$

נוכיח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$$

הוא טור מתכנס.

*הוכחה.* נוכיח באידוקציה כי $(u_n)$ מקיימת $0 < u_n \leq 1$ לכל $n$:

**בסיס האינדוקציה:** נתון כי $0 < u_1 = 1 \leq 1$

**מהלך האינדוקציה:** נניח כי $0 < u_n \leq 1$.

אז כמובן $1 < 1 + u_n \leq 2$ וגם $1 < 1 + 2u_n \leq 3$ ולכן בהתאם

$$0 < \frac{1+u_n}{1+2u_n} \leq \frac{2}{3} \implies 0 < u_n\frac{1+u_n}{1+2u_n} \leq \frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3} \implies 0 < u_{n+1} \leq 1$$

מצאנו כי $(u_n)$ חסומה ובמהלך ההוכחה אף ראינו כי לכל $n$ מתקיים $u_{n+1} < u_n$, דהינו $(u_n)$ היא סדרה מונוטונית יורדת וחסומה.

על־פי אינפי 1 הסדרה כמובן מתכנסת ואפסה.

נבחין כי

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n \leq (\frac{2}{3})^2 u_{n-1} \leq \cdots \leq (\frac{2}{3})^n u_1 = (\frac{2}{3})^n$$

דהינו $u_n$ קטן מערך סדרה הנדסית שמנתה $2/3$ ובהתאם למשפט ההשוואה הראשון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס.

ממשפט 5.9 נובע כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_{n+1}$ אשר מורכב מסכום סדרות שטוריהן מתכנסים, הוא טור מתכנס.

מחישוב עולה כי

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{1+2u_n} \geq \frac{u_n + u_n^2}{3} \implies 3u_{n+1} \geq u_n + u_n^2 \implies 3u_{n+1} - u_n \geq u_n^2 > 0$$

ולכן באופן דומה גם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ מתכנס. **מש"ל**

## שאלה 4

תהי $(a_n)$ סדרה אפסה ויהי $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$k > 1$.

נגדיר לכל $n \geq 1$:

$$b_1 = \sum_{n=1}^{k} a_n, b_{n+1} = \sum_{n=kn+1}^{kn+k} a_n$$

נוכיח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

*הוכחה.* נוכיח תחילה באינדוקציה כי מתקיים

$$\sum_{n=1}^{m} b_n = \sum_{n=1}^{mk} a_n$$

**בסיס האינדוקציה:** השוויון מתקיים על־פי נתוני השאלה.

**מהלך האינדוקציה:** נניח כי התנאי מתקיים ולכן

$$\sum_{n=1}^{m+1} b_n = \sum_{n=1}^{m} b_n + b_{m+1} = \sum_{n=1}^{mk} a_n + \sum_{n=km+1}^{k(m+1)} a_n = \sum_{n=1}^{m(k+1)} a_n$$

והשלמנו את מהלך האינדוקציה.

**כיוון ראשון:** נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא מתכנס.

מהגדרת התכנסות הטור נובע כי מתקיים הגבול

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n$$

ומהגדרת היינה לסדרות נסיק כי גם הגבול

$$\lim_{mk\to\infty} \sum_{n=1}^{mk} a_n$$

הוא גבול מתכנס, וכמובן ש־$mk \to \infty$ אם ורק אם $m \to \infty$ ולכן מתכנס גם הגבול

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{mk} a_n = \sum_{n=1}^{m} b_n$$

ומהגדרת הגבול נובע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

**כיוון שני:** נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

מהגדרת הגבול נובע

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} b_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{mk} a_n$$

אז ממשפט 5.11 נובע ישירות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. **מש"ל**

## שאלה 5

### סעיף א'

נוכיח כי אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט וטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ מתכנס בתנאי.

*הוכחה.* ממשפט 5.9 נובע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
ממשפט 5.24 אנו למדים כי טור החיוביים והשליליים של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, בעוד אלה של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדרים ל־$\infty$.
מאינפי 1 אנו יודעים כי גבול סכום סדרות מתכנסת ומתבדרת הוא מתבדר ולכן גם גבול הטור המתאים לסדרה $|a_n + b_n|$ מתבדר ל־$\infty$.
מצאנו כי טור סכומי אברי הסדרות מתכנס בתנאי. **מש"ל**

### סעיף ב'

נסתור את הטענה כי

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le 1 - \frac{1}{n}$$

לכל $n$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

*הוכחה.* נגדיר

$$a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$$

ולכן כמובן

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(1 - \frac{1}{n})^n} = 1 - \frac{1}{n} \le 1 - \frac{1}{n}$$

ממסקנה 6.19 באינפי 1 נובע

$$\lim_{n \to \infty} a_n = e^{-1}$$

בסתירה לתנאי ההכרחי להתכנסות טורים, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתכנס. **מש"ל**

### סעיף ג'

נוכיח כי אם $(a_n)$ סדרה יורדת ואפסה, אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

הוא טור מתכנס.

*הוכחה.* ממשפט 2.51 באינפי 1 אנו למדים כי הסדרה $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ היא סדרה אפסה, וידוע כי כל איבר ב־$(a_n)$ חיובי ולכן גם כל איבר ב־$(b_n)$ חיובי ונובע כי היא סדרה מונוטונית יורדת ואפסה.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n$ הוא טור חסום על־פי שאלה 33 ביחידה 5.
אז הסדרה $\sin 3n$ והסדרה $(b_n)$ מקיימות את התנאים למבחן דיריכלה והטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

הוא טור מתכנס. **מש"ל**

### סעיף ד'

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי־שלילית בתחום $[1, \infty)$, וידוע כי מתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
נוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם ורק אם האינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס.

*הוכחה.* מהותית מגדירים סדרה $x_n$ כך שלכל $n$ מתקיים $f(x_{n+1}) < f(x_n)$, זה אפשרי בגלל הגבול לאפס.
אחרי שעשינו את זה משתמשים בגדול בהוכחה של משפט 5.19 בעמוד 139. **מש"ל**