תורת הקבוצות

5 ביוני 2024

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 8.5.2024

מרצה: עומר בן־נריה, מייל: omer.bn@mail.huji.ac.il

1.1 מבוא

הקורס בנוי מחצי של תורת הקבוצות הנאיבית, בה מתעסקים בקבוצה באופן כללי ולא ריגורזי, ומחצי של תורת הקבוצות האקסיומטית, בה יש הגדרה חזקה להכול.

הסיבה למעבר לתורה אקסיומטית נעוצה בפרדוקסים הנוצרים ממתמטיקה לא מוסדרת, לדוגמה הפרדוקס של בנך־טרסקי.

עוד דוגמה היא פרדוקס ראסל, אם במתמטיקה שואלים אילו קבוצות קיימות, אינטואיטיבית אפשר להניח שכל קבוצה קיימת, הפרדוקס מתאר שזה לא ממש אופציונלי. נניח שכל קבוצה קיימת, אז ניקח את הקבוצה $y = \{x \mid x \notin x\}$. מה אפשר להגיד על $y \in y$ ועל $y \notin y$, אז נראה כי $y \in y \implies y \notin y, y \notin y \implies y \in y$ ואלו הן סתירות מן הסתם.

התוכנית של הילברט, היא ניסיון להגדיר אקסיומטית בסיס רוחבי למתמטיקה, אבל ניתן להוכיח שגם זה לא עובד בלא מעט מקרים. מומלצת קריאה נוספת על Zermelo Frankel ZF בהקשר לסט האקסיומות הבסיסי המקובל היום.

1.2 עוצמות

העוצמה של קבוצה A היא הגודל של A.

שאלות: איך משווים בין גדלים של קבוצות A ו־B?

הגדרה: נאמר כי זוג קבוצות A ו־B הן שוות עוצמה ונסמן $|A| = |B|$, אם ורק אם יש פונקציה הפיכה $F : A \to B$.

1.3 תזכורת על פונקציות

סימון: הזוג הסדור של אובייקטים x, y יסומן $\langle x, y \rangle$.

הערה: אם $x \neq y$ אז $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$

המכפלה הקרטזית של קבוצות A, B היא הקבוצה

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

הגדרה: יחס בין A ל־B קבוצות, הוא תת־קבוצה R של המכפלה הקרטזית, $R \subseteq A \times B$.

הגדרה: פונקציה $F : A \to B$ היא יחס $F \subseteq A \times B$ המקיים כי $\forall a \in A \exists! b \in B : \langle a, b \rangle \in F$.

הערה חשובה: $\exists!$ קיים מקרה אחד בלבד כך שמתקיימת טענה.

דוגמה 1: $A = \{0, 1\}, B = \{3, \pi\}, R_1 = \{\langle 0, 3 \rangle\}$ לא פונקציה.

דוגמה 2: אותן קבוצות, אבל $R_2 = \{\langle 0, \pi \rangle, \langle 1, \pi \rangle\}$, היא אכן פונקציה.

דוגמה 3: לכל קבוצה X נסמן $Id_X = \{\langle a, a \rangle \mid a \in X\}$ מתקיים $Id_X : X \to X$ והיא פונקציית הזהות.

הגדרה: יהי יחס $R \subseteq A \times B$ נגדיר $dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B \langle a, b \rangle \in R\}$.

נגדיר $rng(R) = \{b \in A \mid \exists a \in A \langle a, b \rangle \in R\}$, נקרא לזה גם תמונה של R.

הבחנה: אם $R \subseteq A \times B$ הוא פונקציה מ־A ל־B אז $dom(R) = A$ ועוד נראה כי $rng(R) \subseteq B$.

הגדרות בסיסיות נוספות:

1. בהינתן $F : A \to B$ אז נסמן לכל $a \in A$ את $F(a)$ להיות $b \in B$ היחיד עבורו מתקיים $\langle a, b \rangle \in F$.
2. פונקציה $F : A \to B$ היא חד־חד ערכית אם לכל $a_1 \neq a_2$ איברים $a_1, a_2 \in A$ אז מתקיים $F(a_1) \neq F(a_2)$.
3. פונקציה $F : A \to B$ תיקרא על אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש־$\langle a, b \rangle \in R$, או גם $rng(F) = B$.
4. בהינתן יחס R נגדיר את היחס ההופכי $R^{-1} \subseteq B \times A$ להיות $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\}$.
5. פונקציה $F : A \to B$ נקראת הפיכה אם היחס ההופכי F^{-1} הוא פונקציה מ־B ל־A ונרשום $F^{-1} : B \to A$.

תרגיל: $F : A \to B$ היא הפיכה, אם ורק אם היא חד־חד ערכית ועל B.

מסקנה: אם $F : A \to B$ היא פונקציה חד־חד ערכית ועל אז גם הפונקציה ההופכית שלה $F^{-1} : B \to A$ היא חד־חד ערכית ועל.

הוכחה: נתון $F : A \to B$ ונתון כי היא חד־חד ערכית ועל, נסיק כי F הפיכה גם כן ולכן הגדרת ההפיכה מעידה כי $F^{-1} : B \to A$ היא פונקציה. לכן $(F^{-1})^{-1}$ היא פונקציה ולכן F^{-1} היא הפיכה על־פי הגדרה ובהתאם גם חח"ע ועל.

הגדרה: הרכבת יחסים. נניח כי קיימים שני יחסים $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ אז נגדיר $S \circ R \subseteq A \times C$ על־ידי

$$S \circ R = \{\langle a, c\rangle \mid a \in A, c \in C, \exists b \in B : \langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S\}$$

תרגיל: אם $F : A \to B$ ו־$G : B \to C$ אז $G \circ F \subseteq A \times C$ הוא יחס שהוא גם פונקציה.

הבחנות שהן גם תרגיל: בהינתן פונקציות כמו שהגדרנו השנייה אז מתקיימים המצבים הבאים:

1. אם F, G הן חד־חד ערכיות, אז גם $G \circ F$ היא חד־חד ערכית.
2. אם F, G על אז גם $G \circ F$ היא על.
3. F, G הפיכות אז $G \circ F$ הפיכה גם היא.
4. F הפיכה אז $Id_A = F^{-1} \circ F$ וגם $Id_B = F \circ F^{-1}$

נחזור לעוצמות:

נראה כי שוויון עוצמות הוא יחס שקילות:

1. אם יש $F : A \to B$ הפיכה אז גם יש $F^{-1} : B \to A$ ולכן $|B| = |A| \iff |A| = |B|$. כלומר יחס שוויון עוצמה הוא סימטרי.
2. לכל A מתקיים $|A| = |A|$ שכן $Id_A : A \to A$ היא הפיכה לעצמה.
3. אם $|A| = |B|$ וגם $|B| = |C|$ אז גם $|A| = |C|$ בגלל היכולת להרכיב פונקציות הפיכות מתאימות.

1.4 קבוצות סופיות

סימון לכל $n \geq 0$ נסמן $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

הגדרה זמנית: הקבוצה A נקראת סופית אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $|A| = |[n]|$.

הבחנה: לכל קבוצה סופית $A \neq \emptyset$ אם A^* מתקבלת מ־A על־ידי השמטת איבר אז $|A| \neq |A^*|$.

טענה: קבוצת כל המספרים הטבעיים $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ אינה סופית.

הוכחה: נסמן $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ונגדיר $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ על־ידי $F(n) = n + 1$, בבירור F חד־חד ערכית ועל $\mathbb{N}^*$ ולכן $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^*|$.

צריך להשלים את הסוף של ההאצאה.

2 שיעור 2 — 15.5.2024

2.1 תוצאות ראשונות בשוויון עוצמות

הקדמה למשפט קנטור

לכל מספר $x \in \mathbb{R}$ יש חלק שלם וחלק שברי כך שמתקיים $x = \lfloor x \rfloor + \langle x \rangle$.
במקרה זה $\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z}$, כאשר $n \le x$.
נובע כי $0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1$. נגדיר $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$.
כל מספר $\langle x \rangle$ ניתן להצגה כהצגה בצור

$$\langle x \rangle = 0.x_1 x_2 \dots x_k \dots$$

נשים לב כי צורת הצגה זו היא יחידה פרט למקרה בודד בו "הזנב" של הספרות נגמר ב־$x_k = 0$ או כאשר הזנב נגמר ב־$x_k = 9$.
לדוגמה $0.359999\ldots = 0.360000\ldots$.

מונח: פיתוח סטנדרטי

לכל מספר x עבורו ל־$\langle x \rangle$ יש פיתוח יחיד נקרא לו פיתוח **סטנדרטי**.
אחרת אם ל־$\langle x \rangle$ יש שני פיתוחים, אז נבחר את זה המסתיים ב־$x_k = 0$ להיות הסטנדרטי.

משפט קנטור

הוכחה. נראה כי לכל פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ אז f איננה על $\mathbb{R}$.
לכל $n \in \mathbb{N}$ נרשום את הפיתוח הסטנדרטי של $\langle f(n) \rangle$:

$$\langle f(n) \rangle = 0.x_0^n x_1^n x_2^n \dots$$

$$\begin{array}{ccccc}
\langle f(0) \rangle & 0.x_0^0 & x_1^0 & x_2^0 & \dots \\
\langle f(1) \rangle & 0.x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & \dots \\
\langle f(2) \rangle & 0.x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots
\end{array}$$

ונבחן את האלכסונים, ונבנה מספר כך שלכל ערך אלכסוני נבחר ספרה שונה מהערך האלכסוני. לכן נוכל לבנות מספר שלא מופיע בכלל ברשימה הזו.
נתבונן כעת במספר $y \in \mathbb{R}$ המוגדר על־ידי הפיתוח $y = 0.y_1 y_2 \dots$ כאשר לכל $n \in \mathbb{N}$ אנו מגדירים

$$y_n = \begin{cases} 2, & x_n^n \ne 2 \\ 7, & x_n^n = 2 \end{cases}$$

מכיוון שכל הספרות בפיתוח הנתון הן 2 או 7 אז פיתוח זה הוא הפיתוח הסטנדרטי של y.
לכל $n \in \mathbb{N}$ לא יתכן ש־$y = f(n)$ שכן אחרת $\langle y \rangle = \langle f(n) \rangle$ ומכאן של־$\langle y \rangle$ ול־$\langle f(n) \rangle$ אותו פיתוח סטנדרטי בסתירה לכך ש־$y_n \le x_n^n$.
מסיקים $\forall n \in \mathbb{N} : y \ne f(n)$ ולכן $y \notin rng(f)$ ובהתאם f איננה על $\mathbb{R}$. $\square$

הגדרות נוספות:

אי־שוויון עוצמות

עבור קבוצות A, B נאמר שעוצמת A קטנה מעוצמת B או $|A| \le |B|$ כאשר יש פונקציה חד־חד ערכית $f : A \to B$.
נאמר שעוצמת A קטנה ממש מעוצמת B אם $|A| \le |B| \land |A| \ne |B|$.

מסקנה: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$
זאת משום ש־$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ולכן $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{R}|$ והוכחנו במשפט קנטור ש־$|\mathbb{N}| \ne |\mathbb{R}|$.

2.2 שאלות המשך

שאלה 1

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathrm{Alg}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$$

מהן עוצמות קבוצות הביניים בין $\mathbb{N}$ ל־$\mathbb{R}$?

שאלה 2

האם יש גודל אינסופי מירבי?

קבוצה בת־מנייה

קבוצה A *ששוות עוצמה ל־*$\mathbb{N}$ תיקרא **בת־מנייה**.

קבוצה מעוצמת הרצף

קבוצה A *ששוות עוצמה ל־*$\mathbb{R}$ תיקרא בעוצמת הרצף.

משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין

תהינה שתי קבוצות A, B, אם $|A| \leq |B|$ וגם $|B| \leq |A|$ אז $|A| = |B|$.

הוכחה. נדחה לסוף הפרק, יושלם בהמשך $\square$

טענה: עוצמת הטבעיים ומכפלת הטבעיים בעצמם

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$$

נתאהר שתי הוכחות שונות למשפט.

בניית הנחש.

$$\begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots & (0,n) & \dots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) & \dots \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) & \dots \\ \vdots & & & & & \\ (m,0) & (m,1) & (m,2) & \dots & (m,n) & \dots \end{matrix}$$

ונעבור על המטריצה הזאת באופן אלכסוני.

נגדיר $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ על־ידי

$$f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$$

$\square$

שימוש במשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין. נמצא שתי פונקציות

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times$$

את f נגדיר על־ידי $f(n) = (0, n)$.

ונגדיר $g(i,j) = 2^i 3^j$. שתי הפונקציות כמובן חד־חד ערכיות.

נובע מיחידות הצגת מספרים טבעיים כמכפלת ראשוניים. $\square$

טענה: מכפלת קבוצות בנות מנייה

אם A, B קבוצות בנות מנייה, אז גם $A \times B$ בת מנייה.

הוכחה. נתון A, B בנות מנייה אז ניקח פונקציה $h_B : \mathbb{N} \to B$ חד־חד ערכית על B,
וניקח $h_A : \mathbb{N} \to A$ נקבע פונקציה חד־חד ערכית ועל $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (מטענה קודמת), $f(n) = (i_n, j_n)$, ונגדיר

$$H : \mathbb{N} \to A \times B, H(n) = (h_A(i_n), h_B(j_n)) \in A \times B$$

נראה כי H חד־חד ערכית, נניח $n \neq m$ אז $f(n) \neq f(m)$ (כי f חד־חד ערכית).
אז או $i_n \neq i_m$ או $j_n \neq j_m$ ונקבל $H(n) \neq H(m)$.
H גם על: $a \in A, b \in B$ וקיימים $i, j \in \mathbb{N}$ כך ש־$a = h_A(i), b = h_B(j)$, נובע מזה שהן על.
ידוע כי יש $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$f(n) = (i, j)$ ולכן מחיבור הטענות נקבל כי $H(n) = (a, b)$. □

הגדרה: חזקה קרטזית

לכל קבוצה A ו־$k \in \mathbb{N}$ נגדיר A^k באופן הבא:
אילו $k = 1$ אז $A^k = A$ ובמקרה ש־$k > 1$ אז $A^{k+1} = A^k \times A$.
סימון: נסמן את אברי A^k על־ידי $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, זאת למרות שבמציאות הקבוצה מוגדרת כ־$(((a_1, a_2), \ldots), a_k)$

טענה: חזקה קרטזית בת מנייה

לכל קבוצה A בת־מנייה ו־$k \geq 1$ טבעי נובע A^k בת־מנייה.

הוכחה. באינדוקציה על k ושימוש בטענה האחרונה. □

קבוצת הרציונליים היא בת־מנייה

$\mathbb{Q}$ היא בת־מנייה.

הוכחה. נשתמש במשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \implies |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$$

כדי להראות ש־$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$ מספיק לבנות פונקציה חד־חד ערכית לקבוצה בת מנייה כלשהי.
נגדיר $f : \mathbb{Q} \to A$. לכל מספר רציונלי $z \neq 0$ יש הצגה יחידה בצורה $z = \pm\frac{p}{q}$ כאשר $p, q > 0$ טבעיים וזרים.
נגדיר $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ על־ידי

$$f(z) = \begin{cases} (0,0,0), & z = 0 \\ (1,p,q), & z > 0 \\ (2,p,q), & z < 0 \end{cases}$$

נובע מהגדרתה כי f היא חד־חד ערכית ולכן $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^3| = |\mathbb{N}|$. □

3 שיעור 3 — 22.5.2024

3.1 קבוצת הסדרות הסופיות

הגדרה

בהינתן קבוצה A נגדרי

$$seq(A) = \bigcup_{k\geq 1} A^k$$

קבוצת כל הסדרות הסופיות של A.

טענה: קבוצת הסדרות הסופיות היא בת־מניה

לכל קבוצה בת־מניה A גם $seq(A)$ היא בת־מניה.

טענת עזר: נניח ש־B_n סדרת קבוצות ו־h_n סדרת פונקציות. $h_n : \mathbb{N} \to B_n$ הפיכה.
בפרט מתקבל כי B_n בת־מניה, אז הקבוצה

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{b \mid \exists n \in \mathbb{N}, b \in B_n\}$$

נוכיח ראשית את הטענה בהינתן טענת העזר.

תהי $h : \mathbb{N} \to A$ הפיכה. נתון כי A בת־מניה, ונגדיר סדרת פונקציות $(h_k)_{k=1}^{\infty}$, $h_k : \mathbb{N} \to A^k$.
נבחר $h_1 = h$. בהינתן h_k נגדיר את h_{k+1} באופן הבא:

$$\tilde{h}_{k+1} = h_k \times h_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A^k \times A$$

אנו יודעים כי $\tilde{h}_{k+1}$ הפיכה, ונשתמש בפונקציה ההפיכה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מהשיעור הקודם ונגדיר

$$h_{k+1} = \tilde{h}_{k+1} \circ f : \mathbb{N} \to A^{k+1}$$

אז תיארנו סדרה של פונקציות $h_k : \mathbb{N} \to A^k$ הפיכות ומטענת העזר נסיק $seq(A) = \bigcup_{k\geq 1} A^k$ היא בת־מניה.

נוכיח את טענת העזר:

נשתמש במשפט קנטור־ברנשטיין ונראה כי $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n| \leq |\mathbb{N}|$ הוא א' ו־$|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n| \geq |\mathbb{N}|$ הוא ב'.

א': נתון כי B_0 בת־מנייה, תהי $f_0 : \mathbb{N} \to B_0$ הפיכה. נשים לב כי ניתן להתייחס ל־f_0 כפונקציה לאיחוד והיא עדיין חד־חד ערכית, לכן $|\mathbb{N}| \leq |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n|$.

עתה לב'. מכיוון ש־$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ די להראות כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית

$$g : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

לכל n נסמן h_n ההופכית של g_n פונקציה על.

נגדיר את g באופן הבא. יהי $b \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ נסמן $n(b) \in \mathbb{N}$ המספר הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $b \in B_{n(bb)}$.

נשים לב כי $b \in B_{n(b)} \implies g_{n(b)}(b) \in \mathbb{N}$ ובפרט מוגדר.

ניקח

$$g(b) = \langle n(b), g_{n(b)}(b) \rangle$$

נבדוק כי g היא חד־חד ערכית.

יהיו $b \neq b^*$ איברים באיחוד.

נפריד לשני מקרים:

1. אם $n(b) \neq n(b^*)$ בוודאי $g(b) \neq g(b^*)$.
2. אם $n(b) = n(b^*)$ נסמן $n(b) = n(b^*) = m$ אז נסיק ש־$b, b^* \in B_m$ ו־$b \neq b^*$. מכיוון ש־g_m חד־חד ערכית אז נקבל $g_{n(b)}(b) = g_m(b) \neq g_m(b^*) = g_{n(b)}(b)$ ובפרט $g(b) \neq g(b^*)$.

3.2 משפט קנטור על קבוצת החזקה

הגדרה

בהינתן קבוצה A מגדירים

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

דוגמה

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

$|\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})| = |[2^n]|$

משפט קנטור

לכל קבוצה A מתקיים

$$|\mathcal{P}(A)| > |A|$$

הוכחה. הוכחת $A \leq \mathcal{P}(A)$:

נגדיר פונקציה $f : A \to \mathcal{P}(A)$ המוגדרת על־ידי $f(a) = \{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

f חד־חד ערכית ועונה על המבוקש.

כיוון $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$:

נוכיח כי לא קיימת פונקציה $g : A \to \mathcal{P}(A)$ שהיא על $\mathcal{P}(A)$.

תהי g כלשהי, ונגדיר $B \subseteq A$ באופן הבא

$$B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

כמובן ש־$B \in \mathcal{P}(A)$ ונטען כי $B \notin rng(g)$ ומכאן ש־g אינה על $\mathcal{P}(A)$.

נניח אחרת, אז יש $a^* \in A$ כך ש־$B = g(a^*)$.

נבדוק האם $a^* \in B$. אם $a^* \notin B \overset{\text{הגדרת } B}{\Longleftrightarrow} a^* \in g(a^*) \overset{\text{הנחת השלילה}}{\Longleftrightarrow} a^* \in B$.

קיבלנו סתירה להנחת השלילה ולכן $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$. □

עוצמות אינסופיות

נקבל עכשיו ש־$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$ ונוכל לקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$|\mathcal{P}^n(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}^{n+1}(\mathbb{N})|$$

נגדיר

$$\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{P}^k(\mathbb{N}) = \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$$

תרגיל:

$$\forall k \in \mathbb{N} \mathcal{P}^k(\mathbb{N}) < \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$$

וכמובן גם

$$\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}))$$

האם קיימת עוצמה גדולה ביותר?

3.3 פעולות על מחלקות שקילות

תזכורת: יחס שקילות

יחס $E \subseteq X \times X$ הוא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמות

1. $X_1 = \mathbb{Z}$ והיחס $E_1 = \{(a,b) \in (\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \mid a^2 = b^2\}$
2. $X_2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ו־$E_2 = \{((n,m),(n',m')) \mid n+m' = n'+m\}$.

בהינתן יחס שקילות E על קבוצה X מגדירים לכל $x \in X$ את

$$[x]_E = \{y \in X \mid (x,y) \in E\}$$

תכונה חשובה, לכל x, x^* אם $[x]_E \cap [x^*]_E \neq \emptyset$ אז $[x]_E = [x^*]_E$.

בדוגמה 1 $[1]_E = \{1,-1\}$ ו־$[0]_E = \{0\}$.

בנוגע לדוגמה 2 תרגיל בדקו כי זהו יחס שקילות ונראה כי מחלקות השקילות הן $\forall (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מתקיים רק אחד מהשניים:

1. $n \geq m$ ולכן $(n-m,0) \in [(n,m)]_{E_2}$
2. $n < m$ ולכן $(0,m-n) \in [(n,m)]_{E_2}$.

אנחנו רואים כי לכל $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ מתאים למחלקות שקילות של $[(0,l)]_{E_2}, [(l,0)]_{E_2}$.

שאלה מנחה

בהינתן פעולה או יחס על קבוצה X, ויחס שקילות E מתי ניתן להגדיר פעולה או יחס מושרית על קבוצת מחלקות השקילות?

$$X/E = \{[x]_E \mid x \in X\}$$

תהי $*$ פעולה על זוגות איברי X, דהינו $\forall x_1, x_2 \in X \implies x_1 + x_2 \in X$.

הרעיון, בהינתן מחלקות שקילות $C_1, C_2 \in X/E$ נבקש להגדיר $C_1 * C_2 \in X/E$ נגדיר באופן הבא:

נבחר נציג $x_1 \in C_1$ ו־$x_2 \in C_2$ וננסה להגדיר $C_1 * C_2 = [x_1 + x_2]_E$.

הקושי הוא שכדי לקבל פעולה מוגדרת היטב על מחלקות יש לבדוק כי ההגדרה איננה תלויה בבחירת נציגים. כלומר לכל $x_1, x_1' \in C_1, x_2, x_2' \in C_2$ יתקיים $[x_1 + x_2]_E = [x_1' + x_2']_E$ ובמקרה כזה נאמר כי הפעולה $*$ על X מוגדרת היטב על קבוצת המנה X/E.

4 שיעור 4 — 29.5.2024

4.1 מושג העוצמה

תזכורת

בהינתן יחס שקילות E על קבוצה X נסמן $X/E = \{[x]_E \mid x \in X\}$ קבוצת מחלקות השקילות.
בהינתן פעולה (יחס) $*$ על X.
$*$ משרהר פעולה מוגדרת הייטב על X/E אם מתקיימת התכונה הבאה:

$$\forall (x_1, x_2) \in E, \forall (y_1, y_2) \in E : (x_1 * y_1, x_2 * y_2) \in E$$

אי־תלות בנציגים E ביחס לפעולה $*$.
נגדיר את $*$ על X/E על־ידי

$$[x_1]_E * [y_1]_E = [x_1 * y_1]_E$$

נתבונן ביחס

$$E = \{(A, B) \mid \exists f : A \to B \text{ הפיכה}\}$$

ראינו כי E:

- רפלקסיבי
- סימטרי
- טרנזיטיבי

ולכן E מקיים את התכונות של יחס שקילות.

הגדרה (זמנית): עוצמה

עוצמה היא מחלקת שקילות לפי E.
נסמן ב־$|A|$ את מחלקת השקילות של A. סימונים מקובלים נוספים:

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$
- $\aleph = |\mathbb{R}|$ או גם מסמנים ב־$\mathfrak{C}$ גותית שאני לא יודע לעשות בלאטך.
- באופן כללי משתמשים באותיות גותעות כדי לסמן את העוצמות של קבוצות, לדוגמה $|A| = \mathfrak{a}, |B| = \mathfrak{b}$.
- לקבוצה סופית $[n]$ נסמן גם n $|[n]| =$.

דוגמות

1. $\{\pi, e, \frac{1}{7}\}$,$\{1, 2, 3\} \in |[3]|$.
2. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.
3. באופן דומה נקבל גם $|[0, 1]| = |\mathbb{R}\backslash a| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{C}$.
4. $|\emptyset| = 0$.

4.2 פעולות חשבון על עוצמות

נבקש להגדיר לכל זוג עוצמותת $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ עוצמות נוספות.
חיבור $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, כפל $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ וחזקה $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$.

כפל

נתבונן בפעולת המכפלה הקרטזית $\times$ על קבוצה $A \times B$.
נרצה להראות שהיא מגדירה פעולה מוגדרת היטב למחלקות עוצמה.

הוכחה. צריך להוכיח כי בהינתן A_1, A_2 שוות עוצמה ו־B_1, B_2 שוות עוצמה, אז שמתקיים $|A_1 \times B_1| = |A_2 \times B_2|$. נבחר $f : A_1 \to A_2$ הפיכה וגם $g : A_2 \to B_2$ הפיכה שאנו יודעים שקיימות ונבחן את

$$(f \times g) : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$$

המוגדרת על־ידי

$$(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$$

ולכן $f \times g$ היא חד־חד ערכית ועל $A_2 \times B_2$ שכן f, g הן חד־חד ערכיות ועל בנפרד.
מסקנה: $|A_1 \times B_1| = |A_2 \times B_2|$. $\square$

הגדרה: כפל עוצמות

בהינתן עוצמות $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ נגדיר $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ באופן הבא:
תהינה A, B קבוצות, $|A| = \mathfrak{a}, |B| = \mathfrak{b}$ אז נגדיר $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |A \times B|$.

דוגמה

1. לכל n, m סופיים נראה כי

$$|[n]| \cdot |[m]| = |[n] \times [m]| = |[n \cdot m]|$$

2. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

3. באינדוקציה על $1 \leq k$ נגדיר $\aleph_0 = \overbrace{\aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0}^{k}$

פעולת החזקה

בהינתן קבוצות A ו־B נתבונן בקבוצה $A^B = \{f : B \to A\}$.
נבקש ללבדוק כי הפעולה הזו לא תלויה בבחירת נציגים ולכן מוגדרת היטב.

הוכחה. צריך להוכיח: אם $|A_1| = |A_2|, |B_1| = |B_2|$ אז נראה כי $|A_1^{B_1}| = |A_2^{B_2}|$.
דהינו

$$|\{f : B_1 \to A_1\}| = |\{f : B_2 \to A_2\}|$$

נקבע פונקציות הפיכות $f : A_1 \to A_2$ ו־$g : B_1 \to B_2$ הפיכות.
נגדיר $\varphi : A_1^{B_1} \to A_2^{B_2}$ על־ידי

$$h_1 : B_1 \to A_1, \varphi(h_1) = f \circ h_1 \circ g^{-1} : B_2 \to A_2$$

נרצה להראות כי φ הפיכה על־ידי מציגת פונקציה הופכית:

$$\psi(h_2) : A_2^{B_2} \to A_1^{B_1}, \qquad \psi(h_2) = f^{-1} \circ h_2 \circ g$$

נבדוק את הרכבת הפונקציות:

$$\psi \circ \varphi = id_{A_1^{B_1}}$$

$$\varphi \circ \psi = id_{A_2^{B_2}}$$

ונסיק מהקריטריון השקול להפיכות כי φ הפיכה ומתקיים $\psi = \varphi^{-1}$.
נבדוק את ההרכבה הראשונה:

$$\forall h_1 \in A_1^{B_1}, (\psi \circ \varphi)(h_1) = \psi(f \circ h_1 \circ g^{-1}) = f^{-1} \circ f \circ h_1 \circ g^{-1} \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ h_1 \circ (g^{-1} \circ g) = (id_{A_1}) \circ h_1 \circ (id_{B_1}) = h_1$$

והצד השני דומה. $\square$

הגדרה: פעולת חזקה על עוצמות

בהינתן עוצמות $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ נגדיר עוצמה $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ באופן הבא:
נבחר קבוצות המקיימות $|A| = \mathfrak{a}, |B| = \mathfrak{b}$ ונגדיר $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = |A^B|$.

דוגמות

1. יהיו n, m סופיים, מתקיים $|[n]^{[m]}| = |[n^m]|$
2. תהי $\mathfrak{a} = |A|$ ו־$\mathfrak{b} = 0 = |\emptyset|$. נשים לב כי $f : \emptyset \to A$ היא פונקציה שכן $\emptyset \subseteq \emptyset \times A$ הוא יחס באופן ריק. הפונקציה היא אכן פונקציה באופן ריק.
   נסיק מכך כי מתקיים $A^{\emptyset} = \{\emptyset\}$ ולכן $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = |\{\emptyset\} = 1$.

טענה:

לכל קבוצה A מתקיים $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

הוכחה. על־פי ההגדרה העוצמה $2^|A|$ שווה למחלקת העוצמה של $\{h : A \to \{0,\}\} = \{0,1\}^A$.
לכן כדי להוכיח את הטענה די להראות קיום פונקציה הפיכה בין $\{0,1\}^A$ לבין $\mathcal{P}(A)$.
נגדיר $\varphi : \{0,1\}^A \to \mathcal{P}(A)$ על־ידי

$$\varphi(h) = h^{-1}(\{1\}) = \{a \in A \mid h(a) = 1\}$$

נוכיח כי φ חד־חד ערכית ועל $\mathcal{P}(A)$:

$$\forall h_1, h_2 : A \to \{0,1\}, h_1 \neq h_2, \exists a \in A : h_1(a) \neq h_2(a) \implies a \in h_1^{-1}(\{1\}) \triangle h_2^{-1}(\{1\})$$

בפרט הקבוצות $\varphi(h_1), \varphi(h_2)$ הן שונות.
נוכיח על: יהי $B \subseteq A$, דהינו $B \in \mathcal{P}(A)$. ניקח

$$l_B : A \to \{0,1\}, l_B(a) = \begin{cases} 0, & a \notin B \\ 1, & a \in B \end{cases}$$

נובע מהגדרת φ ש־$\varphi(l_b) = B$ והיא על.
הראינו כי קיימת פונקציה הפיכה $\varphi : \{0,1\}^A \to \mathcal{P}(A)$ ולכן מתקיים $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. $\square$

מסקנה

נובע ממשפט קנטור כי לכל עוצמה $\mathfrak{a}$ מתקיים $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

טענה: שקילות חיבור עוצמות

יהיו $|A_1| = |A_2|, |B_1| = |B_2|$, אם $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ וגם $A_2 \cap B_2 = \emptyset$.
אז $|A_1 \cup B_1| = |A_2 \cup B_2|$.
הוכחה בתרגיל.

הגדרה: חיבור עוצמות

תהינה עוצמות $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ אז נגדיר את $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ באופן הבא:
ניקח קבוצות זרות A, B כך ש־$|A| = \mathfrak{a}, |B| = \mathfrak{b}$.
נגדיר את $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ להיות העוצמה $A \cup B$.

הגדרה שקולה

הערה: לכל קבוצה A מתקיים $|\{0\} \times A| = |A| = |\{1\} \times A|$.
לכל זוג A, B קבוצות נראה כי

$$\emptyset = (\{0\} \times A) \cap (\{1\} \times B)$$

ולכן נגדיר

$$|A| + |B| = |(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)|$$

הגדרה: אי־שוויון בין עוצמות

בהינתן עוצמות $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ נגדיר כי $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ $(\mathfrak{a} < \mathfrak{b})$
אם יש נציגים $|A| = \mathfrak{a}, |B| = \mathfrak{b}$ כך שקיימת פונקציה חד־חד ערכית $f : A \to B$ (וגם לא קיימת f כזו שהיא גם על).
נבחין כי ההגדרה איננה תלויה בבחירת נציגים A, B.

הערה: ניסוח שקול למשפט קנטור־שרדר ברנשטיין

ניסוח שקול למשפט הוא שלכל $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ עוצמות אם גם $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ וגם $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$ אז $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

משפט: כללי חשבון בסיסיים

1. לכל $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ עוצמות מתקיים $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ וגם $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$.
2. לכל שלוש עוצמות $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ מתקיים $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_2$
3. לכל שלוש עוצמות $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ מתקיים $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_1} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_2} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2}$ וגם $\left(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_1}\right)^{\mathfrak{b}_2} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2}$.

5 שיעור 5 — 5.6.2024

5.1 עוצמת המנייה ועוצמת הרצף

משפט 5.1 $2^{\aleph_0} = \mathfrak{C} = |(0,1)|$

הוכחה. נשתמש במשפט CSB, תחילה נראה את $2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{C}$.
ניקח נציגים, עבור $2^{\aleph_0}$ נבחר $\{f : \mathbb{N}\{0,1\} = (\{0,1\})^{\mathbb{N}}$, ו־$(0,1)$ עבור $\mathfrak{C}$.
נגדיר פונקציה $G : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to (0,1)$ על־ידי

$$\forall f : \mathbb{N} \to \{0,1\}, \qquad G(f) = 0.1f(0)f(1)f(2)\dots f(n)\dots$$

בפיתוח עשרוני. יחידות הפיתוח של המספרים המדוברים מבטיח כי G היא חד־חד ערכית.
קיבלנו כי $2^{\aleph_0} = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |(0,1)| = \mathfrak{C}$.

עתה נוכיח את אי־השוויון לכיוון השני $\mathfrak{C} \leq 2^{\aleph_0}$.
נשים לב כי $2^{\aleph_0} \leq 10^{\aleph_0} \leq 16^{\aleph_0} = 2^{4\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ ומכאן נסיק כי $2^{\aleph_0} \leq 10^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0}$ ומ־CSB נקבל $2^{\aleph_0} = 10^{\aleph_0}$ ולכן מספיק להוכיח כי $\mathfrak{C} \leq 10^{\aleph_0}$. נבחר נציגים $(0,1)$ עבור $\mathfrak{C}$ ואת $\{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}}$ עבור $10^{\aleph_0}$.
נגדיר פונקציה $H : (0,1) \to \{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא:
לכל $x \in (0,1)$ ותהי $0.x_0x_1\dots x_n\dots$ ההצגה הסטנדרטית היחידה של x ונגדיר $H(x) : \mathbb{N} \to \{0,\dots,9\}$ על־ידי $H(x)(n) = x_n$.
יחידות ההצגה הסטנדרטית של המספר מבטיחה כי H היא חד־חד ערכית.
H מעידה על כך ש־$\mathfrak{C} \leq 10^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ כמבוקש. $\square$

נעבור עתה להוכיח את משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין

משפט 5.2 (משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין) *לכל זוג קבוצות A, B אם קיימת פונקציות חד־חד ערכיות $f : A \to B, g : B \to A$ אז קיימת פונקציה הפיכה $h : A \to B$.*

הוכחה. נוכיח בשני שלבים.
שלב ראשון (רדוקציה): המשפט שקול לטענה הבאה: לכל זוג קבוצות $A \subseteq B$ אם קיימת פונקציה $f : A \to B$ חד־חד ערכית אז קיימת פונקציה הפיכה $h : A \to B$.

נוכחת הטענה:
תהינה A, B אשר מקיימות את משפט CSB ולכן קיימות $f : A \to B, g : B \to A$ חד־חד ערכיות. נגדיר $B^* = g[B] \subseteq A$. נשים לב כי על־פי הגדרת B^* נוכל לבחון את $g : B \to B^*$ וזו פונקציה חד־חד ערכית וכמובן גם על ולכן הפיכה.
נגדיר $f^* = g \circ f : A \to B^*$ ולכן f^* חד־חד ערכית כהרכבה של f, g חד־חד ערכיות.
נקבל כי A, B^* מקיימות את ההנחות בנוסח שמופיע בטענה. לכן כמסקנה מהנוסח החלופי יש פונקציה $h^* : A \to B^*$ חד־חד ערכית ועל ונגדיר $h = g^{-1} \circ h^*$

שלב ב', נוכיח את הניסוח השקול שמופיע בשלב א'.
נניח $A \subseteq B$ ותהי פונקציה חד־חד ערכית $f : A \to B$.

יהיו $A \subseteq B$ ונתונה פונקציה חד־חד ערכית $f : A \to B$ ונגדיר

$$A^* = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \exists a \in A \setminus B : x = f^n(a)\}$$

מתקיים

1. $A \setminus B \subseteq A^*$.
2. לכל $x \in A^*$ גם $f(x) \in A^*$

נגדיר $h : A \to B$ על־ידי

$$h(x) = \begin{cases} x & x \in A \setminus A^* \\ f(x) & x \in A^* \end{cases}$$

h מוגדרת היטב שכן לכל $x \in A^*$ גם $h(x) = f(x) \in B$ כי $f : A \to B$ ולכל $x \in A \setminus A^*$ מתקיים $h(x) = x \in B$ שכן $A\setminus \subseteq A^*$.
נוכיח כי h חד־חד ערכית ונפריד למקרים.
אם $x_1, x_2 \in A^*$ אז $h(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = h(x_2)$.
אם $x_1, x_2 \in A \setminus A^*$ אז $h(x_1) = x_1 \neq x_2 = h(x_2)$.
אם $a_1 \in A^*$ ו־$a_2 \in A \setminus A^*$ ללא הגבלת הכלליות אז $h(x_1) = f(x_1) \in A^*, h(x_2) = x_2 \notin A^*$ ולכן כמובן $h(x_1) \neq h(x_2)$.
נוכיח כי h על B. יהי $b \in B$, ונפריד למקרים.
אם $b \in A \setminus A^*$ אז $h(b) = b$ ואם $b \in A^*$ אז ניקח $a \in A \setminus B$ ו־$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ כך ש־$b = f^n(a)$.
יהי $b' = f^{n-1}(a)$ ונסיק כי $h(b') = f(b') = f(f^{n-1}(a)) = b$. $\square$

5.2 מבוא לתורת הקבוצות האקסיומתית

נבחן מספר שאלות פתוחות שיש לנו:

1. יהיו A, B קבוצות כך שקיימת $g : B \twoheadrightarrow A$, האם בהכרח $|A| \leq |B|$?
נגסה לענות: נגדיר $a \in A$ ונגדיר $B_a = \{b \in B \mid g(b) = a\} \neq \emptyset$.
הבחנה: אם קיימת פונקציה $f : A \to B$ כך שלכל $a \in A$ מתקבל $f(a) \in B_a$ אז f חד־חד ערכית כמבוקש ו־$|A| \leq |B|$.

הגדרה 5.3 (אקסיומת הבחירה) לכל סדרת קבוצות לא ריקות $\langle B_i \mid i \in I \rangle$ כאשר I קבוצת אינדקסים קיימת פונקציה (פונקציית בחירה) $f : I \to \bigcup_{i \in I} B_i$, כלומר

$$\forall i \in I : f(i) \in B_i$$

תרגיל: הראו כי בהינתן אקסיומת הבחירה כי לכל A, B אם יש $g : B \to A$ על A אז $|A| \leq |B|$.