פתרון ממ"ן 15 – אלגברה לינארית 2 (20229)

12 באפריל 2023

שאלה 1

סעיף א'

תהי העתקה לינארית $T : V \to V$ אשר בבסיס הסטנדרטי מיוצגת על־ידי המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$$

נמצא את כל תת־המרחבים ה־T שמורים של V כאשר $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2$:

(1) נגדיר $V = \mathbb{R}^2$:

תחילה, נמצא את ערכיה העצמיים של T על־ידי חישוב פולינום אופייני:

$$p(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -5 \\ 10 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) + 50 = t^2 + 49$$

אין להעתקה T אם־כן ערכים עצמיים כלל, ולכן משאלה 8.4.3 א' נובע כי אין ל־T תת־מרחב T שמור שאיננו טריוויאלי.

בהתאם כלל התת־מרחבים ה־T שמורים הם, על־פי דוגמה 8.4.2, הם מרחב האפס ו־V עצמו.

(2) נגדיר $V = \mathbb{C}^2$:

מעל שדה המרוכבים $p(t) = t^2 + 49 = (t-7i)(t+7i)$ ובהתאם $-7i, 7i$ הם ערכיה העצמיים של T והיא אף לכסינה.

נמצא וקטורים עצמיים של T על־ידי חישוב המרחב העצמי לכל ערך עצמי:

$$(7iI - A)(x,y)^t = 0 \to \begin{pmatrix} -1+7i & -5 \\ 10 & 1+7i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -50 & -5(1+7i) \\ 10 & 1+7i \end{pmatrix} \to 10x - (1+7i)y = 0 \to \mathrm{Sp}\{(1+7i, 10)\}$$

$$(-7i - A)(x,y)^t = 0 \to \begin{pmatrix} -1-7i & -5 \\ 10 & 1-7i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -50 & -5(1-7i) \\ 10 & 1-7i \end{pmatrix} \to 10x + (1-7i)y = 0 \to \mathrm{Sp}\{(7i-1, 10)\}$$

אז מצאנו כי כל תת־המרחבים ה־T שמורים שאינם טריוויאליים הם

$$\mathrm{Sp}\{(7i-1, 10)\}, \mathrm{Sp}\{(7i+1, 10)\}$$

סעיף ב'

יהי V מרחב לינארי מעל F ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית כך שכל תת־מרחב של V הוא T שמור.

נוכיח שקיים $\alpha \in F$ כך ש־$T = \alpha I$.

הוכחה. ידוע כי כל תת־מרחב של V הוא T שמור ולכן נובע כי גם עבור תת־מרחבים מממד 1 הם T שמורים, לכן

$$\forall v \in V : Tv = \alpha v$$

דהינו ש־Tv הוא צ"ל של v. מהגדרת ההעתקה הלינארית נובע כי α קבוע לכל v שנבחר. **מש"ל**

שאלה 2

סעיף א'

תהי T העתקה לינארית במרחב לינארי V שממדו סופי ויהי W תת־מרחב T שמור של V ו־T_W הצמצום של T ל־W.

(1) נוכיח כי הפולינום המינימלי של T_W מחלק את הפולינום המינימלי של T.

הוכחה. נגדיר $M_1(x)$ הפולינום המינימלי של T ו־$M_2(x)$ הפולינום המינימלי של T_W.
ידוע כי $M_1(T) = M_2(T_W) = 0$. נניח בשלילה כי $M_1(T_W) \neq 0$, ולכן קיים $u \in W$ כך ש־$M_1(T_W)u \neq 0$. אבל $W \subseteq V$ ולכן $u \in V$ ובהתאם $M_1(T)u = 0$, וידוע כי מעל W מתקיים $T = T_W$ ולכן $M_1(T_w) = 0$ בסתירה לטענה.
משאלה 9.9.1 סעיף א' נובע ישירות כי M_2 מחלק את M_1. **מש"ל**

(2) נוכיח כי אם T לכסינה אז גם T_W לכסינה.

הוכחה. ממשפט 10.2.11 נובע כי M_1 מתפרקת למכפלת גורמים לינאריים שונים וידוע לנו כי M_2 מחלקת אותה, לכן גם M_2 מורכבת ממכפלת גורמים לינאריים שונים. ממשפט 10.2.11 נובע מסיבה זו שגם M_2 לכסינה. **מש"ל**

סעיף ב'

נניח כי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ היא בעלת ערכים עצמיים $1, 2, 3$ ווקטורים עצמיים v_1, v_2, v_3 בהתאמה.
נמצא את כל תת־המרחבים ה־T שמורים של $\mathbb{R}^3$:
ההעתקה T היא בעלת 3 ערכים עצמיים שונים ולכן לכסינה. לכל וקטור עצמי u שנבחר קיים ערך עצמי λ המקיים $Tu = \lambda u$, ולכן הצמצום של T ל־$\text{Sp}\{u\}$ הוא T שמור. כמובן שגם חיבור שני תתי־מרחב T שמורים יובילו לתת־מרחב T שמור, ולכן כלל התת־מרחבים ה־T שמורים על $\mathbb{R}^3$ הם:

$$0, \text{Sp}\{v_1\}, \text{Sp}\{v_2\}, \text{Sp}\{v_3\}, \text{Sp}\{v_1, v_2\}, \text{Sp}\{v_1, v_3\}, \text{Sp}\{v_2, v_3\}, \mathbb{R}^3$$

שאלה 3

תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית אשר מיוצגת בבסיס הסטנדרטי על־ידי המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

סעיף א'

נמצא תתי־מרחב T שמורים לא טריוויאליים על $\mathbb{R}^3$.

A היא מטריצה משולשית ולכן T ניתן לשילוש ומטענה 8.1.1 נובע כי ערכיה הפנימיים של T הם $2,3$. מחישוב המרחב העצמי אנו למדים כי $T(0,0,1)=2(0,0,1)$ וגם כי $T(1,0,0)=3(1,0,0)$ ולכן משאלה 8.4.1 סעיף ג' נובע כי המרחבים

$$\mathrm{Sp}\{(1,0,0)\},\mathrm{Sp}\{(0,0,1)\},$$

הם מרחבים לא טריוויאליים T שמורים מעל $\mathbb{R}^3$.

סעיף ב'

יהי $W=\ker(T-3I)$, נוכיח כי לא קיים תת־מרחב $U\subseteq\mathbb{R}^3$ שהוא T שמור ומקיים

$$\mathbb{R}^3=W\oplus U$$

הוכחה. מחישוב מערכת המשוואות אנו מקבלים כי

$$W=\mathrm{Sp}\{(1,0,0)\}$$

לכן על U לקיים

$$U=\mathrm{Sp}\{(0,1,0),(0,0,1)\} \tag{1}$$

כדי שהטענה תתקיים.

כבר מצאנו כי $(0,0,1)$ הוא וקטור עצמי של 2 והצמצום על תת־המרחב שהוא יוצר הוא T שמור, לכן עלינו לבדוק את $(0,1,0)$ בלבד.

מחישוב נובע כי $A(0,1,0)^t=(1,3,0)^t$ ולכן וקטור זה איננו יוצר תת־מרחב T שמור, ואף מעל U על־פי (1) הוא לא T שמור.

אז לא קיים אף U אשר יכול לקיים את התנאים. מש"ל

שאלה 4

יהי V מרחב לינארי ממימד סופי ו־$T : V \to V$ העתקה לינארית.

יהי $M(x) = M_1(x)M_2(x)\cdots M_k(x)$ הפולינום המינימלי של T כאשר $M_i(x)$ פולינומים מתוקנים זרים בזוגות.

נגדיר $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ הפירוק הפרימרי המתאים ל־T כאשר $W_i = \ker M_i(T)$.

יהי W תת־מרחב T שמור של V.

נוכיח כי

$$W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k)$$

הוכחה. יהי $1 \le i, j \le k$, על־פי הפירוק הפרימרי $W_i \cap W_j = \{0\}$ ולכן

$$W_i \cap W_j \cap W = (W_i \cap W) \cap (W_j \cap W) = \{0\} \tag{1}$$

כמו־כן

$$\begin{aligned}
(W_i \cap W) + (W_j \cap W) &= \{u_i + u_j \mid u_i \in (W_i \cap W), u_j \in (W_j \cap W)\} \\
&= \{u_i + u_j \mid u_i \in W_i \cap W, u_j \in W_j \cap W\} \cap W && \text{מרחב לינארי } W \\
&= \{u_i + u_j \mid u_i \in W_i, u_j \in W_j\} \cap W && \text{כנסיעה מתכונות המרחב} \\
&= (W_i + W_j) \cap W
\end{aligned}$$

אז בתהליך דומה נוכל לקבוע גם כי

$$(W \cap W_1) + \cdots + (W \cap W_k) = W \cap (W_1 + \cdots + W_k) = W \cap V = W$$

וכנביעה מ־(1) גם

$$W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k)$$

מש"ל

שאלה 5

יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי ו־$T : V \to V$ העתקה נורמלית.

נוכיח שכל תת־מרחב T שמור הוא גם T^* שמור.

הוכחה. יהי W תת־מרחב T שמור של V ונגדיר T_W הצמצום של T על W.

אנו יודעים כי עבור וקטורים ב־W ההעתקות T ו־T_W זהות ולכן גם T_W נורמלית.

בשל כך ועל־פי משפט 3.2.1 ההעתקה T_W לכסינה אוניטרית.

ממשפט 3.4.2 נובע כי אם λ_i כאשר $1 \le i \le k$ ערכים עצמיים של T_W ו־P_i ההיטלים האורתוגונליים של V_{λ_i}, אז לכל $w \in W$

$$T_W w = \lambda_1 P_1 w + \cdots + \lambda_k P_k w \in W$$

ובהתאם גם לכל i

$$\lambda_i P_i w \in W$$

מלמה 3.2.5 וממשפט 3.4.2 סעיף ה' נובע כי

$$\overline{\lambda_i} P_i \in W$$

ולכן

$$T^* w = \overline{\lambda_1} P_1 w + \cdots + \overline{\lambda_k} P_k w \in W$$

ומכאן נובע כי W הוא תת־מרחב T^* שמור. **מש"ל**