

פתרון ממ"ן 15 – אלגברה לינארית 2 (20229)

22 במאי 2023

שאלה 1

סעיף א'

תהי העתקה לינארית $T : V \rightarrow V$ אשר בבסיס הסטנדרטי מיוצגת על-ידי המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$$

נמצא את כל תת-המרחבים ה- T שמורים של V כאשר $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2$:

(1) נגדיר $V = \mathbb{R}^2$:

תחילה, נמצא את ערכיה העצמיים של T על-ידי חישוב פולינום אופייני:

$$p(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -5 \\ 10 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) + 50 = t^2 + 49$$

אין להעתקה T אם-כן ערכים עצמיים כלל, ולכן משאלה 8.4.3 א' נובע כי אין ל- T תת-מרחב T שמור שאיננו טריוויאלי.

בהתאם לכלל התת-מרחבים ה- T שמורים הם, על-פי דוגמה 8.4.2, הם מרחב האפס ו- V עצמו.

(2) נגדיר $V = \mathbb{C}^2$:

מעל שדה המרוכבים $p(t) = t^2 + 49 = (t - 7i)(t + 7i)$ ובהתאם $-7i, 7i$ הם ערכיה העצמיים של T והיא אף לכסינה.

נמצא וקטורים עצמיים של T על-ידי חישוב המרחב העצמי לכל ערך עצמי:

$$\begin{aligned} (7iI - A)(x, y)^t = 0 &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 + 7i & -5 \\ 10 & 1 + 7i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -50 & -5(1 + 7i) \\ 10 & 1 + 7i \end{pmatrix} \rightarrow 10x - (1 + 7i)y = 0 \rightarrow \text{Sp}\{(1 + 7i, 10)\} \\ (-7iI - A)(x, y)^t = 0 &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 - 7i & -5 \\ 10 & 1 - 7i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -50 & -5(1 - 7i) \\ 10 & 1 - 7i \end{pmatrix} \rightarrow 10x + (1 - 7i)y = 0 \rightarrow \text{Sp}\{(7i - 1, 10)\} \end{aligned}$$

אז מצאנו כי כל תת-המרחבים ה- T שמורים שאינם טריוויאליים הם

$$\text{Sp}\{(7i - 1, 10)\}, \text{Sp}\{(7i + 1, 10)\}$$

סעיף ב'

יהי V מרחב לינארי מעל F ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית כך שכל תת-מרחב של V הוא T שמור.

נוכיח שקיים $\alpha \in F$ כך ש- $T = \alpha I$.

הוכחה. ידוע כי כל תת-מרחב של V הוא T שמור ולכן נובע כי גם עבור תת-מרחבים מממד 1 הם T שמורים, לכן

$$\forall v \in V : Tv = \alpha v$$

מש"ל

דהינו ש- Tv הוא צ"ל של v . מהגדרת ההעתקה הלינארית נובע כי α קבוע לכל v שנבחר.

שאלה 2

סעיף א'

תהי T העתקה לינארית במרחב לינארי V שממדו סופי ויהי W תת-מרחב T שמור של V ו- T_W הצמצום של T ל- W . (1) נוכיח כי הפולינום המינימלי של T_W מחלק את הפולינום המינימלי של T .

הוכחה. נגדיר $M_1(x)$ הפולינום המינימלי של T ו- $M_2(x)$ הפולינום המינימלי של T_W . ידוע כי $M_1(T) = M_2(T_W) = 0$. נניח בשלילה כי $M_1(T_W) \neq 0$, ולכן קיים $u \in W$ כך ש- $M_1(T_W)u \neq 0$. אבל $W \subseteq V$ ולכן $u \in V$ ובהתאם $M_1(T)u = 0$, וידוע כי מעל W מתקיים $T = T_W$ ולכן $M_1(T_W) = 0$ בסתירה לטענה.

מש"ל משאלה 9.9.1 סעיף א' נובע ישירות כי M_2 מחלק את M_1 .

(2) נוכיח כי אם T לכסינה אז גם T_W לכסינה.

הוכחה. ממשפט 10.2.11 נובע כי M_1 מתפרקת למכפלת גורמים לינאריים שונים וידוע לנו כי M_2 מחלקת אותה, לכן גם M_2 מורכבת ממכפלת גורמים לינאריים שונים. ממשפט 10.2.11 נובע מסיבה זו שגם M_2 לכסינה.

מש"ל

סעיף ב'

נניח כי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ היא בעלת ערכים עצמיים 1, 2, 3 ווקטורים עצמיים v_1, v_2, v_3 בהתאמה.

נמצא את כל תת-המרחבים ה- T שמורים של \mathbb{R}^3 :

ההעתקה T היא בעלת 3 ערכים עצמיים שונים ולכן לכסינה. לכל וקטור עצמי u שנבחר קיים ערך עצמי λ המקיים $Tu = \lambda u$, ולכן הצמצום של T ל- $\text{Sp}\{u\}$ הוא T שמור. כמובן שגם חיבור שני תתי-מרחב T שמורים יובילו לתת-מרחב T שמור, ולכן כלל התת-מרחבים ה- T שמורים על \mathbb{R}^3 הם:

$$0, \text{Sp}\{v_1\}, \text{Sp}\{v_2\}, \text{Sp}\{v_3\}, \text{Sp}\{v_1, v_2\}, \text{Sp}\{v_1, v_3\}, \text{Sp}\{v_2, v_3\}, \mathbb{R}^3$$

שאלה 3

תהי $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית אשר מיוצגת בבסיס הסטנדרטי על-ידי המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

סעיף א'

נמצא תתי-מרחב T שמורים לא טריוויאליים על \mathbb{R}^3 .

A היא מטריצה משולשית ולכן T ניתן לשילוש ומטענה 8.1.1 נובע כי ערכיה הפנימיים של T הם 3, 2. מחישוב המרחב העצמי אנו למדים כי $T(0, 0, 1) = 2(0, 0, 1)$ וגם $T(1, 0, 0) = 3(1, 0, 0)$ ולכן משאלה 8.4.1 סעיף ג' נובע כי המרחבים

$$\text{Sp}\{(1, 0, 0)\}, \text{Sp}\{(0, 0, 1)\},$$

הם מרחבים לא טריוויאליים T שמורים מעל \mathbb{R}^3 .

סעיף ב'

יהי $W = \ker(T - 3I)$, נוכיח כי לא קיים תת-מרחב $U \subseteq \mathbb{R}^3$ שהוא T שמור ומקיים

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus U$$

הוכחה. מחישוב מערכת המשוואות אנו מקבלים כי

$$W = \text{Sp}\{(1, 0, 0)\}$$

לכן על U לקיים

$$U = \text{Sp}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad (1)$$

כדי שהטענה תתקיים.

נבדוק כי $(0, 0, 1)$ הוא וקטור עצמי של 2 והצמצום על תת-המרחב שהוא יוצר הוא T שמור, לכן עלינו לבדוק את $(0, 1, 0)$ בלבד.

מחישוב נובע כי $A(0, 1, 0)^t = (1, 3, 0)^t$ ולכן וקטור זה איננו יוצר תת-מרחב T שמור, ואף מעל U על-פי (1) הוא לא T שמור.

אז לא קיים אף U אשר יכול לקיים את התנאים.

מש"ל

שאלה 4

יהי V מרחב לינארי מממד סופי ו- $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

יהי $M(x) = M_1(x)M_2(x) \cdots M_k(x)$ הפולינום המינימלי של T כאשר $M_i(x)$ פולינומים מתוקנים זרים בזוגות.

נגדיר $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ הפירוק הפרימרי המתאים ל- T כאשר $W_i = \ker M_i(T)$.

יהי W תת-מרחב T שמור של V .

נוכיח כי

$$W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k)$$

הוכחה. יהי $1 \leq i, j \leq k$, על-פי הפירוק הפרימרי $W_i \cap W_j = \{0\}$ ולכן

$$W_i \cap W_j \cap W = (W_i \cap W) \cap (W_j \cap W) = \{0\} \quad (1)$$

כמו-כן

$$\begin{aligned} (W_i \cap W) + (W_j \cap W) &= \{u_i + u_j \mid u_i \in (W_i \cap W), u_j \in (W_j \cap W)\} \\ &= \{u_i + u_j \mid u_i \in W_i \cap W, u_j \in W_j \cap W\} \cap W && \text{יראניל בחרמ } W \\ &= \{u_i + u_j \mid u_i \in W_i, u_j \in W_j\} \cap W && \text{כנסיעה מתכונות המרחב} \\ &= (W_i + W_j) \cap W \end{aligned}$$

אז בתהליך דומה נוכל לקבוע גם כי

$$(W \cap W_1) + \cdots + (W \cap W_k) = W \cap (W_1 + \cdots + W_k) = W \cap V = W$$

וכנביעה מ-(1) גם

$$W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k)$$

מש"ל

שאלה 5

יהי V מרחב אוניטרי מממד סופי ו- $T : V \rightarrow V$ העתקה נורמלית.

נוכיח שכל תת-מרחב T שמור הוא גם T^* שמור.

הוכחה. יהי W תת-מרחב T שמור של V ונגדיר T_W הצמצום של T על W .

אנו יודעים כי עבור וקטורים ב- W ההעתקות T ו- T_W זהות ולכן גם T_W נורמלית.

בשל כך ועל-פי משפט 3.2.1 ההעתקה T_W לכסינה אוניטרית.

ממשפט 3.4.2 נובע כי אם λ_i כאשר $1 \leq i \leq k$ ערכים עצמיים של T_W ו- P_i ההיטלים האורתוגונליים של V_{λ_i} , אז לכל $w \in W$

$$T_W w = \lambda_1 P_1 w + \cdots + \lambda_k P_k w \in W$$

ובהתאם גם לכל i

$$\lambda_i P_i w \in W$$

מלמה 3.2.5 וממשפט 3.4.2 סעיף ה' נובע כי

$$\overline{\lambda_i} P_i \in W$$

ולכן

$$T^* w = \overline{\lambda_1} P_1 w + \cdots + \overline{\lambda_k} P_k w \in W$$

ומכאן נובע כי W הוא תת-מרחב T^* שמור.

מש"ל