פתרון ממ"ן 13 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

3 בפברואר 2023

שאלה 1

סעיף א'

נגדיר $a_1 = \sqrt{2}$ ולכל n:

$$a_{n+1} = 1 - \frac{5}{4a_n + 8}$$

נוכיח כי הסדרה מוגדרת לכל n:

הסדרה איננה מוגדרת במקרה בו קיים $a_n = -2$. נוכיח באינדוקציה שמקרה זה לא מתקיים על־ידי ההוכחה כי $a_n > 0$ לכל n:

בסיס האינדוקציה: נתון $a_1 = \sqrt{2} > 0$.

מהלך האינדוקציה: נניח כי $a_n > 0$ ונראה כי $a_{n+1} > 0$.

אם $a_n > 0$ אז גם $4a_n > 0$ ובהתאם $4a_n + 8 > 8 > 5$. נחלק את אי־השוויון בביטוי $4a_n + 8$:

$$1 > \frac{5}{4a_n + 8} \to 1 - \frac{5}{4a_n + 8} > 0 \to a_{n+1} > 0$$

ובכך השלמנו את מהלך האינדוקציה.

הסדרה (a_n) חיובית לכל איבר ולכן בהכרח מוגדרת לכל n.

סעיף ב'

נוכיח כי a_n הוא מספר חיובי ואי־רציונלי לכל n.

הראינו בסעיף א' כי a_n חיובי לכל n, לכן עלינו רק להוכיח כי הוא גם אי־רציונלי. נוכיח זאת באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: נתון $a_1 = \sqrt{2}$ וזהו כמובן מספר אי־רציונלי.

מהלך האינדוקציה: נניח a_n אי־רציונלי ונראה כי גם a_{n+1} אי־רציונלי.

על־פי הגדרת המספרים האי־רציונליים, חיבור ומכפלת מספר אי־רציונליים אינם רציונליים. לכן גם הביטוי $4a_n + 8$ איננו מספר רציונלי. בהתאם לפעולות החיבור והכפל, גם הפעולות ההפוכות להם משמרות את תכונת אי־הרציונליות, לכן גם המספר

$$1 - \frac{5}{4a_n + 8}$$

איננו רציונלי. זהו כמובן a_{n+1} והשלמנו את מהלך האינדוקציה. לכן a_n הוא מספר חיובי ואי־רציונלי לכל n.

סעיף ג'

נוכיח כי הסדרה (a_n) מתכנסת ונמצא את ערך גבולה.

תחילה נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים $a_{n+1} < a_n$:

בסיס האינדוקציה:

$$a_2 = 1 - \frac{5}{4\sqrt{2} + 8} = 0.633\ldots < a_1$$

מהלך האינדוקציה: נניח כי $a_n < a_{n-1}$ ונוכיח כי $a_{n+1} < a_n$.

$$
\begin{aligned}
&a_n < a_{n-1} \\
&4a_n < 4a_{n-1} \\
&4a_n + 8 < 4a_{n-1} + 8 \\
&\frac{1}{4a_n + 8} > \frac{1}{4a_{n-1} + 8} \\
&-1 + \frac{5}{4a_n + 8} > -1 + \frac{5}{4a_{n-1} + 8} \\
&1 - \frac{5}{4a_n + 8} < 1 - \frac{5}{4a_{n-1} + 8} \\
&a_{n+1} < a_n
\end{aligned}
$$

התנאי מתקיים ולכן הסדרה יורדת.

ידוע כי $a_n > 0$ לכל n, וראינו כי הסדרה יורדת ולכן $a_n < a_1 = \sqrt{2}$ לכל n, לכן הסדרה (a_n) חסומה ויורדת, ולכן לפי משפט 3.16 מתכנסת.

נגדיר $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. לכן מתקיים

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{5}{4a_{n-1} + 8} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{4a_{n-1} + 8} \\
&= 1 - \frac{\lim_{n\to\infty} 5}{\lim_{n\to\infty} 4a_{n-1} + 8} \\
L &= 1 - \frac{5}{4L + 8} \\
L(4L+8) &= 1(4L+8) - 5 \\
4L^2 + 8L &= 4L + 3 \\
4L^2 + 4L - 3 &= 0 \\
L &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} \\
L &= \frac{-1 \pm 2}{2} \\
L &= \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

על־פי משפט 3.16 לא יתכן כי $L < 0$, לכן $L = \frac{1}{2}$.

שאלה 2

סעיף א'

נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^{n+1} - (-2)^n + 5}{3^{n+2} + 2^n - 5}$$

נגדיר שתי תת־סדרות (a_{n_k}) ו־(a_{m_k}) המוגדרות כסדרת האיברים הזוגיים והאי־זוגיים בהתאמה של הסדרה. סדרות אלה מכסות את הסדרה המקורית, ומתקיים:

$$(a_{n_k}) = \frac{-3^{n+1} - 2^n + 5}{3^{n+2} + 2^n - 5}$$

נחשב את גבולה:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}(a_{n_k}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-3^{n+1} - 2^n + 5}{3^{n+2} + 2^n - 5} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{3} - \frac{2^n}{3^{n+2}} + \frac{5}{3^{n+2}}}{1 + \frac{2^n}{3^{n+2}} - \frac{5}{3^{n+2}}} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

באופן דומה נראה כי

$$(a_{m_k}) = \frac{3^{m+1} + 2^m + 5}{3^{m+2} + 2^m - 5}$$

חישוב דומה יוביל אותנו למסקנה

$$\lim_{m\to\infty}(a_{m_k}) = \frac{1}{3}$$

ראינו כי גבולות תת־הסדרות של הסדרה מתכנסות לערכים שונים, לכן לפי משפט 3.31 הסדרה עצמה מתבדרת, וגבולותיה החלקיים הם $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$.

סעיף ב'

נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^{n+1} - 4^n + 5}{3^{n+2} + 2^n - 5}$$

בדומה לסעיף א' נראה כי גבול סדרת האברים הזוגיים הוא:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3^{n+1} - 4^n + 5}{3^{n+2} + 2^n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-3^{n+1}}{4^n} - 1 + \frac{5}{4^n}}{\frac{3^{n+2}}{4^n} + \frac{2^n}{4^n} - \frac{5}{4^n}} - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

גבול האברים האי־זוגיים הוא, על־פי חישוב דומה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} - 4^n + 5}{3^{n+2} + 2^n - 5} = -\infty$$

על־פי משפט 3.31 מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^{n+1} - 4^n + 5}{3^{n+2} + 2^n - 5} = -\infty$$

סעיף ג'

נוכיח כי לא מתקיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} 2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor - n$$

נגדיר שתי תת־סדרות (a_{n_k}) ו־(a_{m_k}) המוגדרות כסדרת האברים הזוגיים והאי־זוגיים בהתאמה של הסדרה המקורית.

כאשר n זוגי $\frac{n}{2}$ הוא מספר שלם, לכן נוכל לכתוב

$$a_{n_k} = 2\frac{n}{2} - n = 0$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = 0$$

כאשר n אי־זוגי, חלוקתו ב־2 תוביל לערך חצי, ערך זה מחוסר בעקבות השמת החלק השלם. לכן מתקיים

$$a_{m_k} = 2\frac{n-1}{2} - n = -1$$

ובהתאם

$$\lim_{m\to\infty} a_{m_k} = -1$$

על־פי משפט 3.31 לא קיים גבול לסדרה המקורית, שכן תת־גבולותיה שונים זה מזה. ערכי תת־הגבולות של הסדרה הם 0 ו־-1.

סעיף ד'

נוכיח כי הגבול הבא קיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

תחילה נגדיר את הסדרה (a_n) כך שלכל n מתקיים

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n(n+1)n!}{n!(n+1)(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

לכל n טבעי מתקיים

$$0 < n < n+1 \to 0 < \frac{n}{n+1} < 1 \to 0 < \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$

לכן לפי מבחן המנה לגבולות

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

כמעט לכל n מתקיים על־פי הגבול

$$\frac{1}{n^n} < a_n = \frac{n!}{n^n} < 1$$

לאחר שורש

$$\frac{1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < 1$$

לפי משפט 2.32 מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = 1$$

שאלה 3

סעיף א'

תהי הסדרה

$$a_n = n - \sqrt{n}\lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

נוכיח כי הסדרה חסומה מלרע. על־פי תכונות החלק השלם

$$\begin{aligned}\lfloor\sqrt{n}\rfloor &\le \sqrt{n}\\ \lfloor\sqrt{n}\rfloor\sqrt{n} &\le \sqrt{n}\sqrt{n} = n\\ 0 &\le n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor\sqrt{n}\\ 0 &\le a_n\end{aligned}$$

הסדרה (a_n) חסומה מלרע על־ידי 0.

סעיף ב'

נוכיח כי 0 הוא גבול חלקי של הסדרה (a_n). נגדיר (n_k) כך שלכל k מתקיים

$$n_k = k^2$$

בסדרה החלקית (a_{n_k}) השורש של n תמיד יהיה מספר שלם בשל ההגדרת תת־הסדרה, לכן מתקיים

$$a_{n_k} = n - \sqrt{n}\sqrt{n} = n - n = 0$$

זוהי כמובן סדרה קבועה ולכן קיים לה גבול והוא זהה לערך כלל איברי הסדרה:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$$

סעיף ג'

נמצא את הגבול התחתון של הסדרה.
תחילה נראה כי $\inf(a_n) = 0$. ראינו קודם כי 0 הוא חסם מלרע של הסדרה, עתה נוכיח שהוא חסם מלרע מקסימלי. על־פי הגדרת חסם תחתון, זהו האיבר המינימלי בקבוצת ערכי הסדרה. ראינו כי האיבר 0 מוכל בקבוצת האברים, וכי אין איבר קטן ממנו, לכן הוא חסם תחתון של הסדרה.
על־פי הגדרת הגבול התחתון, גבול זה הוא הגבול החלקי הקטן ביותר של סדרה, אנו רואים כי 0 הוא גבול חלקי המתלכד עם החסם התחתון של הסדרה, לכן אין גבול קטן ממנו, לכן

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0$$

סעיף ד'

מצאנו בסעיף ג' כי $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

סעיף ה'

יהי $\ell \in \mathbb{N}$. נוכיח כי לכמעט כל n טבעי מתקיים

$$n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n + 1$$

נגדיר $N = \ell$ ונוכיח כי הטענה נכונה ל־$n > N$.

על־פי השוויון מתקיים כמעט לכל n

$$\ell < n$$

ℓ הוא מספר טבעי ולכן מתקיים

$$n^2 < n^2 + 2\ell$$

אבל ידוע כי $2\ell < 2n$, לכן

$$n^2 < n^2 + 2\ell < n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$$

נבצע שורש:

$$n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n + 1$$

סעיף ו'

יהי $\ell \in \mathbb{N}$, נוכיח כי

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$$

נראה כי מתקיים

$$\begin{aligned} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) &= n\frac{(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n)(\sqrt{n^2 + 2\ell} + n)}{\sqrt{n^2 + 2\ell} + n} \\ &= n\frac{n^2 + 2\ell - n^2}{\sqrt{n^2 + 2\ell} + n} \\ &= \frac{2\ell n}{\sqrt{n^2 + 2\ell} + n} \end{aligned}$$

לכן הגבול קיים רק אם קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2\ell} + n}$$

על־פי סעיף ה'

$$\begin{aligned} & n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n + 1 \\ & \frac{1}{2n} > \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2\ell} + n} > \frac{1}{2n + 1} & \text{על־פי חוקי אי־שוויונות} \\ & \frac{2n}{2n} > \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2\ell} + n} > \frac{2n}{2n + 1} \end{aligned}$$

לפי משפט 2.32

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2\ell} + n} = 1$$

לכן לפי משפט 2.18

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$$

סעיף ז'

נוכיח כי כל מספר טבעי הוא גבול חלקי של הסדרה (a_n).

נגדיר $\ell \in \mathbb{N}$ וסדרת אינדקסים (n_k) המוגדרת

$$n_k = n^2 + 2\ell$$

לכן מתקיים עבור (a_{n_k})

$$a_{n_k} = n^2 + 2\ell - \sqrt{n^2 + 2\ell}\lfloor\sqrt{n^2 + 2\ell}\rfloor$$

על־פי טענת סעיף ה'

$$n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n + 1 \to n = \lfloor\sqrt{n^2 + 2\ell}\rfloor < n + 1$$

לכן

$$a_{n_k} = n^2 + 2\ell - \sqrt{n^2 + 2\ell}n = 2\ell - n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n)$$

על־פי סעיף ו':

$$\lim_{n\to\infty}\Big(2\ell - n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n)\Big) = \lim_{n\to\infty} 2\ell - \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = 2\ell - \ell = \ell$$

ראינו כי לכל מספר טבעי ℓ קיים גבול חלקי שווה ל־ℓ לסדרה (a_n).

סעיף ח'

הסדרה (a_n) איננה חסומה מלעיל. נראה כי לכל מספר c שנבחר, קיימת תת־סדרה של (a_n) אשר גבולה הוא $c + 1$, ולכן לכמעט כל n מתקיים עבור תת־סדרה זו $c < (a_{n_k})$. לכן לסדרה אין חסם מלעיל.

סעיף ט'

נמצא את הגבול העליון של (a_n).

בסעיף הקודם ראינו כי לכל מספר $M < 0$ שנבחר, קיים גבול חלקי לסדרה הגדול ממנו. לכן על־פי הגדרת הגבול במובן הרחב

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \infty$$

סעיף י'

לא קיים $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. בסעיף הקודם ראינו כי הגבול העליון של הסדרה (a_n) הוא אינסוף, לכן בקבוצת האברים שלה לא יהיה מספר גדול ביותר, עבור כל מספר שנבחר יהיה איבר גדול ממנו.

בהתאם גם לא קיים איבר מקסימלי לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, שכן רליו היה אחד, אז לפי טענה 3.8 היה גם חסם עליון לקבוצה.