פתרון מטלה 12 — תורת ההסתברות (1), 80420

28 בינואר 2025

שאלה 1

נראה שאם $X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu)$ משתנים מקריים בלתי־תלויים אז גם $Z = \min\{X, Y\}$ מתפלג מעריכית.

הוכחה. נבחן את ההתפלגות המצטברת של Z,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \le t) &= 1 - \mathbb{P}(Z > t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) \\
&= 1 - (1 - \mathbb{P}(X \le t))(1 - \mathbb{P}(Y \le t)) \\
&= F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t)F_Y(t)
\end{aligned}$$

אבל נתונה התפלגות מעריכית ולכן $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ו־$F_Y(t) = 1 - e^{-\mu t}$ ולכן

$$\mathbb{P}(Z \le t) = 1 - e^{-\lambda t} + 1 - e^{-\mu t} - 1 + e^{-\lambda t} + e^{-\mu t} - e^{-(\lambda+\mu)t} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$$

ובהתאם $F_Z'(t) = 1 - (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)t}$ ולכן $Z \sim Exp(\lambda + \mu)$. □

שאלה 2

שומר מפטרל לאורך גדר באורך l ומיקומו מתפלג אחיד לאורכה. גנב מגיע לנקודה בגדר, מיקומה מתפלג אחיד ובלתי־תלוי במיקום השומר. נחשב את פונקציית הצפיפות של המרחק ביניהם.

פתרון נגדיר $X \sim Unif([0,l])$ את מיקום השומר ו־$Y \sim Unif([0,l])$ את מיקום הגנב. נגדיר גם $Z = |X-Y|$ המרחק שלהם. נבחין כי $\{Z \le t\} = \{|X-Y| \le t\} = \{-t \le X-Y \le t\} = \{X-Y \le t\} \setminus \{X-Y \le -t\}$ כאשר המעבר האחרון נובע מרציפות בהחלט.

לכן מספיק שנחשב את $\mathbb{P}(X-Y \le t) = \mathbb{P}(X \le Y+t)$, כאשר t חיובי מתקיים,

$$\begin{aligned}
\iint_{x \le y+t} f_{X,Y}(x,y) 1_{[0,l]}(x) 1_{[0,l]}(y)\, dx\, dy &= \iint_{x \le y+t} \frac{1}{l^2} 1_{[0,l]}(x) 1_{[0,l]}(y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^l \int_0^{\min\{y+t,l\}} \frac{1}{l^2}\, dx\, dy \\
&= \int_0^{l-t} \int_0^{y+t} \frac{1}{l^2}\, dx\, dy + \int_{l-t}^l \int_0^l \frac{1}{l^2}\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{l^2} \left(\int_0^{l-t} y+t\, dy + \int_{l-t}^l l\, dy \right) \\
&= \frac{1}{l^2} \left(\frac{1}{2}(l-t)^2 + (l-t)t + lt \right) \\
&= \frac{1}{l^2} (\frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}t^2 + lt) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2l^2} + \frac{t}{l}
\end{aligned}$$

וכאשר נבחן את $-t$ נובע באופן דומה,

$$\begin{aligned}
\iint_{x \le y-t} \frac{1}{l^2} 1_{[0,l]}(x) 1_{[0,l]}(y)\, dx\, dy &= \int_t^l \int_0^{y-t} \frac{1}{l^2}\, dx\, dy + \int_0^{l-t} \int_0^0 \frac{1}{l^2}\, dx\, dy \\
&= \int_t^l \int_0^{y-t} \frac{1}{l^2}\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{l^2} \left(\int_t^l y-t\, dy \right) \\
&= \frac{1}{l^2} \left(\frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}t^2 - lt + t^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2l^2} - \frac{t}{l}
\end{aligned}$$

ונסיק $\mathbb{P}(|X-Y| \le t) = \mathbb{P}(X-Y \le t) - \mathbb{P}(X-Y \le -t) = \frac{t^2}{l^2}$. כלומר $F_Z(t) = \frac{t^2}{l^2}$ ולכן $f_Z(t) = \frac{2t}{l^2}$.

שאלה 3

יהיו X,Y משתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת

$$f_{X,Y}(x,y) = ce^{-2y-x}1_{(0,\infty)}(x)1_{(0,\infty)}(y)$$

סעיף א׳

נמצא את c.

פתרון ידוע כי $\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y} = 1$, וכן,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} ce^{-2y-x}\,dx\,dy = c\left(\int_0^{\infty} e^{-2y}\,dy\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\right) = c(0-(-\frac{1}{2}))(0-(-1))$$

ולכן בהכרח $c=2$.

סעיף ב׳

נבדוק האם X,Y משתנים מקריים בלתי־תלויים.

פתרון נרצה לבדוק האם $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, לשם כך נשתמש בנוסחה לחישוב צפיפות מצפיפות משותפת,

$$f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)\,dt = 2e^{-s}\int_0^{\infty} e^{-2t}\,dt = 2e^{-s}\left(0+\frac{1}{2}\right) = e^{-s}$$

וכן,

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)\,ds = 2e^{-2t}\int_0^{\infty} e^{-s}\,ds = 2e^{-2t}(0+1) = 2e^{-2t}$$

ונעבור לבדיקה,

$$f_X(s)f_Y(t) = e^{-s}2e^{-2t} = f_{X,Y}(s,t)$$

ולכן X,Y משתנים מקריים בלתי־תלויים.

סעיף ג׳

נחשב את ההסתברות למאורע $\{1<X\}\cap\{Y<1\}$.

פתרון

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{1<X\}\cap\{Y<1\}) &= \mathbb{P}(1<X, Y<1) \\
&= \mathbb{P}(1<X)\mathbb{P}(Y<1) \\
&= \left(\int_1^{\infty} e^{-s}\,ds\right)\left(\int_0^1 2e^{-2t}\,dt\right) \\
&= (0+e^{-1})(-e^{-2}+1) \\
&= e^{-1}-e^{-3}
\end{aligned}$$

סעיף ד׳

נחשב את ההסתברות למאורע $\{X<Y\}$.

פתרון

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X<Y) &= \iint_{\{x,y\in\mathbb{R}^2 | x<y\}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-2y}\int_0^{y} e^{-x}\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-2y}\,\left(-e^{-x}\right)\Big|_{x=0}^{x=y}\,dy \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-2y}-e^{-3y}\,dy \\
&= \,2\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}+\frac{1}{3}e^{-3y}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\infty} \\
&= 2(0-(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3})) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

ולכן נובע $\mathbb{P}(X<Y)=\frac{1}{3}$.

שאלה 4

יהיו X, Y, Z משתנים מקריים בלתי־תלויים שווי־התפלגות בעלי התפלגות $Unif([0,1])$. נחשב את $\mathbb{P}(X \geq YZ)$.

פתרון

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq YZ) &= \iiint_{\{x,y,z \in \mathbb{R}^3 | x \geq yz\}} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{\{x,y,z \in \mathbb{R}^3 | x \geq yz\}} f_X(x) f_Y(y) f_Z(z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{\{x,y,z \in \mathbb{R}^3 | x \geq yz\}} 1_{[0,1]}(x) 1_{[0,1]}(y) 1_{[0,1]}(z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_{yz}^1 1\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 1 - yz\, dy\, dz \\
&= \int_0^1 1 - \frac{1}{2} z\, dz \\
&= 1 - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

ולכן $\mathbb{P}(X \geq YZ) = \frac{3}{4}$.

שאלה 5

נשתמש במשפט פוביני כדי להראות שאם X משתנה מקרי אי־שלילי בעל צפיפות ובעל תוחלת סופית אז $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(t))\, dt$.

הוכחה. נשחזר את הוכחת נוסחת הזנב לחישוב תוחלת שראינו בהרצאה עבור המקרה הרציף,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty t f_X(t)\, dt = \int_0^\infty \int_0^t f_X(t)\, dt = \iint_{\{t,s\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq s\leq t\}} f_X(t)\, dt\, ds = \int_0^\infty \int_t^\infty f_X(t)\, ds\, dt = \int_0^\infty 1 - F_X(t)\, dt$$

כאשר הצדקת כלל המעברים זהה להצדקה בהוכחה המקורית כך שמשפט פוביני לטורים מוחלף במשפט פוביני לאינטגרלים. □

שאלה 6

יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $X_i \sim Exp(1)$ בלתי־תלויים עבור $i \in [n]$. נסמן $Y_i = X_iX_{i+1}$ וכן $Y = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$. נחשב את התוחלת והשונות של Y.

פתרון נתחיל ונבחין שמתקיים $\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_iX_{i+1}) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1}) = 1$. לכן נובע ישירות ש־$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(Y_i) = n-1$. נעבור לחישוב השונות, נבחין ש־$\text{Cov}(Y_i, Y_i) = \mathbb{E}(Y_i^2) - \mathbb{E}(Y_i)^2 = \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_{i+1}^2) - \mathbb{E}(X_i)^2\mathbb{E}(X_{i+1})^2 = 4 - 1 = 3$. נמשיך ונחשב, $\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \text{Cov}(X_iX_{i+1}, X_{i+1}X_{i+2}) = \mathbb{E}(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}) - \mathbb{E}(X_iX_{i+1})\mathbb{E}(X_{i+1}X_{i+2}) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1}^2)\mathbb{E}(X_{i+2}) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1})\mathbb{E}(X_{i+1})\mathbb{E}(X_{i+2}) = 1 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3$. לכל i, j כך ש־$i + 1 < j$ המשתנים הם בלתי־תלויים ולכן $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$. לבסוף נובע,

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Var}(Y_i) + 2\sum_{i=1}^{n-2} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) + 0 = 3(n-1) + 2 \cdot 3(n-2) = 9n - 9$$

שאלה 7

יהי $C \in \mathbb{R}$ קבוע ונגדיר $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, יהיו שני משתנים מקריים X, Y כך שמתקיים

$$f_{X,Y}(x,y) = x1_A(x,y)C$$

סעיף א׳

נחשב את C.

פתרון נבחין שמתקיים,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy &= \iint_A xC\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} xC\,dx\,dy \\
&= C\int_0^1 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=1-y} dy \\
&= C\frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^2\,dy \\
&= C\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(1-y)^3\Big|_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{C}{6}(0+1)
\end{aligned}$$

מתכונות פונקציית הציפות נובע $\frac{C}{6} = 1$ ולכן בהכרח $C = 6$.

סעיף ב׳

נחשב את ההתפלגות השולית $f_X(t)$ ואת $f_Y(t)$.

פתרון עבור $0 \leq t \leq 1$ מתקיים,

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,y)\,dy = 6t\int_{-\infty}^{\infty} 1_A(t,y)\,dy = 6t\int_0^{1-t} 1\,dy = 6t(1-t)$$

ולכן

$$f_X(t) = \begin{cases} 6t(1-t) & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

באופן דומה עבור $0 \leq t \leq 1$ מתקיים,

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t)\,dx = 6\int_{-\infty}^{\infty} x1_A(x,t)\,dx = 6\int_0^{1-t} x\,dx = 6\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=1-t} = 3(1-t)^2$$

ולכן,

$$f_Y(t) = \begin{cases} 3(1-t)^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

סעיף ג׳

נבדוק אם X ו־Y תלויים.

פתרון בתחום $[0,1]^2$ מתקיים,

$$f_{X,Y}(x,y) = 6x\cdot 1_A(x,y) \neq 18x(1-x)(1-y)^2 = f_X(x)f_Y(y)$$

ולכן נסיק ש־X ו־Y אינם בלתי־תלויים.

סעיף ד׳

נחשב את $\mathbb{P}(X<Y)$.

פתרון

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<Y) &= \iint_{\{x,y\in\mathbb{R}^2 | x<y\}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\ &= 6\int_0^{\frac{1}{2}} x \int_x^{1-x} 1\,dy\,dx \\ &= 6\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x-x)\,dx \\ &= 6\int_0^{\frac{1}{2}} x-2x^2\,dx \\ &= 6\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} \\ &= 6\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)\end{aligned}$$

ולכן נובע $\mathbb{P}(X<Y)=\frac{1}{4}$.

סעיף ה׳

נחשב את פונקציית הצפיפות של $Z=X+Y$.

פתרון

$$\begin{aligned}F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z\le t) \\ &= \mathbb{P}(X+Y\le t) \\ &= \iint_{\{x,y\in\mathbb{R}^2 | x+y\le t\}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\ &= 6\int_0^t \int_0^{t-x} x\,dy\,dx \\ &= 6\int_0^t tx-x^2\,dx \\ &= 6\left(\frac{tx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=t} \\ &= 6\left(\frac{t^3}{2}-\frac{t^3}{3}\right) \\ &= t^3\end{aligned}$$

ולכן $f_Z(t)=F_Z'(t)=3t^2$ כאשר $0\le t\le 1$, כאשר אחרת $f_Z(t)=0$.