פתרון ממ"ן 12 – אלגברה לינארית 1 (20109)

3 בפברואר 2023

שאלה 1

סעיף א'

נשתמש בטענה 2.6.5 לבחינת התלות הלינארית בקבוצה על־ידי יצירת מטריצה מתאימה ודרוגה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 = R_4 - R_1 - R_3]{R_2 = R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

למערכת המקדמים המצומצמת יש שורת אפסים, לכן ישנו פתרון טריוויאלי למערכת והיא תלויה לינארית.

סעיף ב'

באופן דומה לסעיף הראשון נבנה מטריצה מהווקטורים ונדרגה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 = R_3 + R_1, R_4 = R_4 + R_1]{R_2 = R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 = R_3 - R_4]{R_2 = R_2 - R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

מטריצת המקדמים עבור קבוצת הווקטורים לא שקולת שורה למטריצה בעלת שורת אפסים, לכן היא בלתי תלויה לינארית לפי טענה 2.6.5.

שאלה 2

נוכיח כי יש אינסוף פתרונות למשוואה $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$.

אם אין פתרון למשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n = w$ אז לפי משפט 1.12.1 מטריצת המקדמים השקולה למשוואה שקולת שורה למטריצה בה יש שורה מהתצורה $[0, \ldots, 0, a] (a \neq 0)$. לפיכך ניתן לדעת כי מטריצת המקדמים המצומצמת של המשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n = 0$ מכילה שורת אפס. לפי שורת האפס אנו יודעים כי למשוואה יש משתנה חופשי אחד לפחות, ולכן לפי משפט 1.12.2 יש לה אינסוף פתרונות.

שאלה 3

סעיף א'

תהיינה המטריצות $A_{m\times n}, B_{n\times m}$ המקיימות $AB = I_m (*)$. נוכיח כי למערכת ההומוגנית $B\underline{x} = \underline{0}$ יש פתרון יחיד.

נראה כי עבור המשוואה מתקיים:

$$\begin{aligned} B\underline{x} &= \underline{0} && A\cdot \\ AB\underline{x} &= A\underline{0} && (*) \\ I\underline{x} &= \underline{0} \\ \underline{x} &= \underline{0} \end{aligned}$$

אנו רואים כי ממערכת המשוואות הנתונה נובע כי $\underline{x} = 0$ בלבד, וזהו הפתרון היחיד למערכת.

סעיף ב'

נוכיח כי $m \le n$.

ידוע כי למערכת $Bx = 0$ ישנו פתרון בודד, לכן אין במערכת משתנה חופשי. לפי משפט 2.6.5 וקטורי העמודה המרכיבים את המטריצה B הם בלתי תלויים לינארית. ישנם m וקטורים כאלה, ככמות השורות ב־B, וכל אחד מהם שייך ל־F^n כאשר F הוא השדה עליו מוגדרות המטריצות.

לפי מסקנה 2.6.7 מתקיים $m \le n$.

סעיף ג'

תהיה מטריצה X כך ש־$BX = I_n$. נוכיח כי $X = A$ ו־$n = m$.

נשתמש בדרך ההוכחה של סעיף ב' על B ו־X כמחליפות של A ו־B בהתאמה, ונראה כי $n \le m$, אבל $m \le n$, לכן $n = m$.

שתי המטריצות A, B הן מטריצות ריבועיות. לפי טענה 3.10.3 מטריצה היא הפיכה אם ורק אם העמודות שלה בלתי תלויות לינארית. ראינו בסעיף א' כי אכן זהו המצב ב־B ולכן היא מטריצה הופכית.

מתקיים עבור המטריצה ההופכית B לפי הגדרה 3.8.2 כי $AB = BA = I$, אך $BA = BX$, לכן לפי טענה 3.8.3 מתקיים $A = X$.

שאלה 4

תהיינה מטריצות ריבועיות A, B מסדר n, נוכיח כי אם $AB^2 - A$ הפיכה, אז $BA + A$ הפיכה.

לפי שאלה 3.10.2 שתי מכפלת מטריצות הפיכה אם ורק אם המטריצות המוכפלות הפיכות גם הן, ניתן לראות כי $AB^2 - A = A(B^2 - I)$ לפי הפילוג על כפל מטריצות. לכן A הפיכה ו־$B^2 - I$ הפיכה גם היא. נוסיף ונפרק $B^2 - I = (B - I)(B + I)$, ולכן גם $B - I$ הפיכה, וכמוה גם $B + I$.

נגדיר $M = \left(AB^2 - A\right)^{-1}$, נראה כי על־פי החילופיות בכפל של מטריצות הפיכות מתקיים:

$$\begin{aligned} M(AB^2 - A) &= I \\ MA(B^2 - I) &= I \\ MA(B + I)(B - I) &= I \\ M(B - I)(AB + A) &= I \end{aligned}$$

אנו רואים כי המטריצה $AB + A$ היא הפיכה, שכן מכפלתה ב־$M(B - I)$ מובילה למטריצת היחידה.

שאלה 5

סעיף א'

תהיה מטריצה אנטיסימטרית A, כאשר $I+2A$ הפיכה. נוכיח כי גם $I-2A$ הפיכה.

נראה תחילה כי חיבור מטריצות משוחלפות שקול לשחלוף חיבורי המטריצות המקוריות, תהנייה מטריצות $[a_{ij}]_{n\times m}, [b_{ij}]_{n\times m}$ מתקיים:

$$[a_{ij}]^t + [b_{ij}]^t = [a_{ji}+b_{ji}] = ([a_{ij}]+[b_{ij}])^t$$

ניתן לראות באותה הצורה כי כפל בסקלר ניתן להוצאה מפעולת השחלוף.

נראה גם כי מטריצה הפיכה משוחלפת היא עדיין הפיכה, על־פי טענה 3.4.5 (#) עבור מטריצה הפיכה B מתקיים $(B^{-1}B)^t = B^t(B^{-1})^t$, לכן לפי הגדרת הפיכות 3.8.2 כל מטריצה הפיכה משוחלפת שומרת על הפיכותה.

נשתמש בטענות הללו ונראה כי $(I+2A)^t = I^t + 2A^t = I-2A$, לכן המטריצה $I-2A$ הפיכה.

סעיף ב'

נוכיח כי המטריצה $C=(I-2A)(I+2A)^{-1}$ מקיימת $C^tC=I$.

תחילה נוכיח כי עבור כל מטריצה הפיכה D מתקיים $(D^{-1})^t = (D^t)^{-1}$. I היא מטריצה סימטרית, לכן מתקיים $I^t = I$. נראה כי עבור כל מטריצה הופכית D מתקיים:

$$I = DD^{-1}$$
$$I^t = (DD^{-1})^t$$
$$I^t = (D^{-1})^t D^t$$

ידוע כי D^t היא הופכית, נגדיר $D'=D^t$, אז D' הופכית:

$$I = D'^{-1}D' \to I = (D^t)^{-1}D^t$$

נשלב את שתי המשוואות לפי I

$$(D^t)^{-1}D^t = I = I^t = (D^{-1})^t D^t$$
$$(D^t)^{-1}D^t = (D^{-1})^t D^t$$
$$(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t \qquad (*)$$

המטריצה C הפיכה שכן היא מכפלה של מטריצות הפיכות. נחשב את ערך C^t:

$$\begin{aligned} C^t &= ((I-2A)(I+2A)^{-1})^t \\ &= (I-2A)^t((I+2A)^{-1})^t \quad (\#) \\ &= (I+2A)(I-2A)^{-1} \qquad (*) \end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned} C^tC &= (I+2A)(I-2A)^{-1}(I-2A)(I+2A)^{-1} \\ &= (I+2A)(I+2A)^{-1}(I-2A)^{-1}(I-2A) \\ &= II \\ &= I \end{aligned}$$

הוכחנו כי המטריצה C מקיימת $C^tC=I$.

שאלה 6

סעיף א'

קיימת מטריצה C כך שמתקיים $B = CA$ משום שהמטריצות A, B שקולות שורה. נבצע פעולות אלמנטריות אשר מתבטאות בפעולות שורה כדי להגיע מ־A ל־B כדי להוכיח טענה זו:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1+R_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3+R_1} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3=R_3+3R_2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1+R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1+4R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

לפי משפט 3.9.4, נוכל לפרק את פעולות השורה שביצענו במעבר כמכפלות של מטריצות אלמנטריות, מכפלה זו בהכפלה ב־A שווה ל־B, לכן מטריצה זו היא C. נחשב את ערך המטריצה לפי הפעולות האלמנטריות על מטריצת היחידה:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

סעיף ב'

נרשום את C כמכפלה של המטריצות האלמנטריות המתקבלות מהפעולות האלמנטריות שבוצעו במעבר בסעיף הקודם:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$