

## פתרון מטלה 1 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (2-80132)

10 במאי 2024



## שאלה 1

### סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$  גזירה בנקודה  $x_0 = 3$ .

על-פי הגדרת הנגזרת הגבול הבא צריך להתקיים:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((3+h)^3 + 5(3+h)^2 + 1 - 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 1) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((3+h)^3 + 5(3+h)^2 - 72) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (3^3 + 3 \cdot 3^2 h + 3 \cdot 3 h^2 + h^3 + 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 6h + 5h^2 - 72) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (27h + 9h^2 + h^3 + 30h + 5h^2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 57 + 14h + h^2 \\ &= 57 + 14 \cdot 0 + 0^2 = 57 \end{aligned}$$

מצאנו כי הגבול מתקיים ולכן הפונקציה גזירה בנקודה ואף מתקיים  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = 57$ .

### סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  גזירה בנקודה  $x_0 = 2$ .

הוכחה. נגזרת מוגדרת בנקודה אם ורק אם הגבול הבא מתקיים:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\sqrt[3]{2+h} - \sqrt[3]{2}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\sqrt[3]{2+h} - \sqrt[3]{2}) \frac{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{2+h-2}{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(2+2)^2} + \sqrt[3]{2(2+2)} + \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \end{aligned}$$

מש"ל

מצאנו כי הגבול מתקיים ולכן נובע כי  $f'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$ .

### סעיף ג'

נראה את הטענה כי הפונקציה  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  גזירה בכל נקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$  על-ידי דוגמה נגדית: נגדיר  $x_0 \in \mathbb{Z}$ , ידוע כי הפונקציה  $f$  איננה רציפה בנקודות  $x_0$ , ולכן עומדת בסתירה לטענה כי הן גזירות בנקודה זו.

## שאלה 2

תהי  $f$  פונקציה המוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

### סעיף א'

נראה כי הפונקציה גזירה מימין בנקודה  $x_0 = 0$ :

לכל סביבה ימנית של 0 ב- $f$  מתקיים  $f(x) = -x$ , ואנו כמובן יודעים כי ביטוי זה גזיר וערך נגזרתו הוא  $-1$ , לכן נסיק כי גם  $f$  גזירה מימין בנקודה.

### סעיף ב'

נחשב את הפונקציה  $f \circ f$ :

עבור  $x < 0$  נקבל  $f(x) = 1$  ובהתאם  $f(1) = -1$  ולכן  $(f \circ f)(x) = -1$ .

עבור  $0 < x$  נקבל  $f(x) = -x$ , ובהתאם  $f(-x) = 1$  ולכן  $(f \circ f)(x) = 1$ .

לבסוף נחשב  $f(f(0)) = f(0) = 0$ :

$$f \circ f = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

### סעיף ג'

תהי פונקציה  $g$  אשר מוגדרת בסביבה מלאה של  $x_0 \in \mathbb{R}$ , וגזירה מימין בנקודה, ותהי פונקציה  $h$  המוגדרת בסביבה מלאה של  $x_1 = g(x_0)$  וגזירה מימין ב- $x_1$ . נוכיח כי  $h \circ g$  גזירה מימין אף היא בנקודה  $x_0$ :

הוכחה. הלכה למעשה טענה זו נובעת ישירות ממשפט הרכבת פונקציות בגבולות חלקיים.

ידוע כי  $g$  גזירה מימין ולכן גם רציפה מימין בנקודה ולכן

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = g(x_0) = x_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

נשתמש במשפט ההרכבה:

$$\lim_{g(x) \rightarrow x_1^+} \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{x - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

מש"ל

והגבול כמובן מוגדר

### שאלה 3

סעיף א'

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 + 3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{2h} - 3 \frac{f(x_0 + 3h) - f(x_0)}{3h} \\ &= 2f'(x_0) - 3f'(x_0) = -f'(x_0) \end{aligned}$$

סעיף ב'

נגדיר את הפונקציה  $g(x) = |x|$  ונבחן את הנקודה  $x_0 = 0$ .

אנו כבר יודעים כי הפונקציה איננה גזירה בנקודה זו, למרות זאת מתקיים:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |h|}{2h} = 0$$

דהינן, הגבול מתקיים וערכו 0 בסתירה לאי-קיום הנגזרת בנקודה זו.

## שאלה 4

תהינה  $f, g$  פונקציות המוגדרות בסביבה של  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

### סעיף א'

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x < x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases} \quad \text{נוכיח כי אם } f(x_0) = g(x_0) \text{ וגם } f'_-(x_0) = g'_+(x_0) \text{ אז הפונקציה } h \text{ גזירה ב-} x_0$$

הוכחה. הפונקציה  $h$  מתלכדת בסביבתה הימנית עם  $g$  ובשמאלית עם  $f$  ולכן מתקיימים הגבולות:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) = g'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$$

וקיבלנו כי  $h'(x_0)$  מוגדרת שכן שני הגבולות החלקיים מתכנסים לאותו ערך ולכן גם הגבול הכללי מתקיים. מש"ל

### סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם  $f, g$  גזירות בנקודה  $x_0$  אז גם  $g$  גזירה בנקודה זו על-ידי דוגמה נגדית:

$$\text{נגדיר } x_0 = 0, g(x) = |x| \text{ ו-} f(x) = 0$$

כמובן שמתקיים  $f(x)g(x) = 0$  לכל  $x$  בתחום הגדרתן, וברור כי  $f'(0) = 0$ , אך  $g$  איננה גזירה ב- $x_0 = 0$ .

### סעיף ג'

נסתור את הטענה כי אילו  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  וגם  $f$  לא גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  גזירה בכל נקודה אז  $g \circ f$  איננה גזירה ב- $x_0$  עם דוגמה נגדית.

נגדיר שוב  $g(x) = |x|$  ו- $f(x) = 0$  עבור  $x_0 = 0$ . ברור למה תנאי הטענה מתקיימים אך כמובן  $g \circ f = 0$  לכל  $x \in \mathbb{R}$  ולכן גם גזירה בתחום זה.

## שאלה 5

תהי  $h$  פונקציה גזירה בנקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

### סעיף א'

נתון כי קיימת  $\delta > 0$  כך שמתקיים  $h(x_0) < h(x)$  לכל  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ .

נוכיח כי  $0 \leq h'(x_0)$

הוכחה. נניח בשלילה כי  $h'(x_0) < 0$ . לכן מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} < 0$$

על-פי הגדרת הגבול הנתון, נובע כי ל- $\delta = \epsilon$  קיים  $\delta_0$  כך שלכל  $x \in \mathbb{R}$  המקיים  $0 < x - x_0 < \delta_0$  מתקיים

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} < 0 \wedge x - x_0 > 0 \implies h(x) - h(x_0) < 0 \implies h(x) < h(x_0)$$

מש"ל

בסתירה לטענה, לכן לא מתקיים  $h'(x_0) < 0$  ובהתאם נובע כי  $h'(x_0) \geq 0$ .

### סעיף ב'

נניח כי  $h'(x_0) > 0$  ונוכיח  $h(x) > h(x_0)$   $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$   $\exists \delta$ .

הוכחה. למעשה, זוהי הוכחה דומה להוכחה של הסעיף הקודם, מתקיים הגבול החד-צדדי:

$$h'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} > 0$$

נבחר  $\epsilon > 0$  אשר עבורו נתונה  $\delta_0$  עבורה לכל  $x \in \mathbb{R}$  המקיים  $0 < x - x_0 < \delta_0$  מתקיים:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} > 0 \implies h(x) - h(x_0) > 0 \implies h(x) > h(x_0)$$

ולבסוף נגדיר  $\delta = \delta_0$ .

את הכיוון ההפוך נוכיח באותה הדרך בדיוק עבור הפונקציה  $h^*(x) = -h(x)$  והנקודה  $x_1 = -x_0$ , ונראה כי הטענה מתקיימת במלואה. מש"ל

## שאלה 6

### סעיף א'

יהי  $n \in \mathbb{N}$  ותהי  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על-ידי  $f_n(x) = x^n$ .

נוכיח כי  $f_n$  גזירה ב- $x_0 \in \mathbb{R}$  וכי  $f'_n(x_0) = nx_0^{n-1}$ .

הוכחה. נבחן את הגדרת הנגזרת:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((x_0 + h)^n - x_0^n) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x_0^i h^{n-i} \right) - x_0^n \right) \quad \text{פירוק בינומי} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x_0^i h^{n-i} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x_0^i h^{n-i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \lim_{h \rightarrow 0} \binom{n}{i} x_0^i h^{n-i-1} \quad \text{סכום סופי ואריתמטיקה של גבולות} \\ &= \binom{n}{n-1} x_0^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} x_0^i 0^{n-i-1} \\ &= f'_n(x_0) = nx_0^{n-1} \end{aligned}$$

מש"ל

### סעיף ב'

יהי  $n \in \mathbb{Z}$  ותהי  $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על-ידי  $f_n(x) = x^n$ .

נוכיח כי  $f_n$  גזירה בנקודה  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ואף  $f'_n(x_0) = nx_0^{n-1}$ .

הוכחה. אילו  $n > 0$  אז מתקיים  $n \in \mathbb{N}$ , והטענה מתקיימת על-פי הסעיף הקודם, לכן נניח כי  $n < 0$ .

נגדיר  $m = -n$  ונראה כי מתקיים  $f_n(x) = \frac{1}{x^m}$  לכל  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^m - (x_0 + h)^m}{h x_0^m (x_0 + h)^m} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-mx_0^{m-1} - h \sum_{i=0}^{m-2} \binom{m}{i} x_0^i h^{m-i-1}}{x_0^m (x_0 + h)^m} \\ &= \frac{-mx_0^{m-1}}{x_0^{2m}} = \frac{m}{x_0^{m+1}} = nx_0^{n-1} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{(x_0 + h)^m} - \frac{1}{x_0^m} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} x_0^i h^{m-i-1}}{x_0^m (x_0 + h)^m} \\ &= \frac{-mx_0^{m-1} + 0}{x_0^m (x_0 + 0)^m} \end{aligned}$$

מש"ל

## שאלה 7

### סעיף א'

יהי  $0 < x \in \mathbb{R}$ , נוכיח כי קיים  $n \in \mathbb{Z}$  יחיד כך שמתקיים  $10^n \leq x < 10^{n+1}$ .

הוכחה. נשים לב כי הקטע  $[10^n, 10^{n+1})$  מייצג את הקטע מהטענה, ונשים לב כי

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} [10^n, 10^{n+1}) = (-\infty, \infty)$$

את הטענה ניתן להוכיח בקלות באינדוקציה, לכן בוודאי  $x \in (-\infty, \infty)$ .

נניח בשלילה כי ישנם שני  $n < n_0$  המקיימים את הטענה, לכן  $10^{n_0} \leq x < 10^{n_0+1}$  ו-  $10^n \leq x < 10^{n+1}$ .

נשים לב גם כי  $10^n < 10^{n_0}$  ובהתאם  $10^{n+1} \leq 10^{n_0}$ . ונקבל כי  $x < 10^{n+1} \leq 10^{n_0} < x$ , לכן בהכרח אין שני  $n$ -ים שונים המקיימים את הטענה.

מש"ל

### סעיף ב'

עבור  $0 < x \in \mathbb{R}$  נוכיח כי קיימים  $n \in \mathbb{Z}$  ו-  $x' \in [0, 1)$  יחידים כך ש-  $\log_{10}(x) = n + x'$ .

הוכחה. נראה כי מתקיים  $n \leq \log_{10}(x) < n + 1$  על-פי החלק השלם  $\lfloor n + x' \rfloor = n$ .

בהתאם מתקיים גם  $10^n \leq 10^{\log_{10}(x)} = x < 10^{n+1}$ , וטענה זו נכונה על-פי הסעיף הקודם.

מש"ל

### סעיף ג'

בסעיף א' הוכחנו את הטענה אשר חוסמת כל מספר במספר הקטן ביותר בעל אותה כמות ספרות כמוהו והמספר הגדול ביותר עם כמות הספרות הזו, היא  $n + 1$ . כמובן הסיבה היא שהמספר הוא  $n + 1$  היא שהכפלה ב-10 מוסיפה ספרה, וכאשר האיבר הנייטרלי לחיבור לא מוכפל בעשר כלל, הוא עדיין מצריך ספרה יחידה לכתיבה.

בסעיף ב' מצאנו כי  $\lfloor \log_{10}(x) \rfloor = n$ , לכן בהתאם כמות הספרות במספר  $x$  היא  $\lfloor \log_{10}(x) \rfloor + 1$ .

### סעיף ד'

$$10^5 \leq 493566 < 10^6 \implies 5 \leq \log_{10}(493566) < 6$$

לכן הערך הוא בערך 5 או 6.