פתרון ממ"ן 13 – אלגברה לינארית 1 (20109)

3 בפברואר 2023

שאלה 1

יהיו a,b,c,d,e,f איברים בשדה F. נוכיח כי:

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{vmatrix} = 0$$

לפי משפט 4.3.5 אם מטריצה בעלת שתי עמודות זהות אז ערך הדטרמיננטה שלה הוא 0. נגדיר מטריצה A כך שמתקיים:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ c+d+e & c+d+e & c+d+e \\ f & g & g \end{bmatrix}$$

העמודה השנייה והשלישית של A זהות, לכן $|A| = 0$. על־פי משפט 4.3.4 נוכל לפרק את A ללא שינוי לערך הדטרמיננטה של המטריצות החדשות.

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ c+d+e & c+d+e & c+d+e \\ f & g & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b \\ d+e & c+e & c+d \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{vmatrix} = 0$$

שאלה 2

נחשב את ערך הדטרמיננטות D_1, D_2:

תחילה נחשב את ערך D_1. נשתמש במשפט הפיתוח (4.2.1) על השורה האחרונה ב־D_1:

$$D_1 = b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & a & b \end{vmatrix} + a(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & a \end{vmatrix}$$

שתי הדטרמיננטות הנותרות הן של מטריצה משולשית עילית ותחתית. לפי משפט 4.3.8 ערך הדטרמיננטות הללו ערכו כמכפלת האלכסון הראשי בהן, לכן:

$$D_1 = b(-1)^{n+1}b^{n-1} + a(-1)^{2n}a^{n-1}$$

$$D_1 = (-1)^{n+1}b^n + a^n$$

נחשב את ערכה של D_2. לפי משפט 4.3.6 ערך הדטרמיננטה לא ישתנה לאחר חיסור שורה משורה אחרת, עבור $0 < i \leq n$ עבור כל שורה i נחסרה בשורה $i-1$, בסדר יורד, דהינו כל שורה במטריצה נחסר במטריצה שלפניה, מלמעלה למטה:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

על־פי משפט 4.3.2 החלפת שתי עמודות במטריציה משנה את סימן הדטרמיננטה שלה. עבור $0 \leq i < n/2$ נחליף כל שתי עמודות i ו־$n-i$. סימן הדטרמיננטה יהיה $(-1)^{n/2}$ במקרה בו n הוא מספר זוגי, ו־$(-1)^{(n-1)/2}$ אחרת. נסמן מספר זה ב־k.

$$D_2 = k \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

מטריצה זו היא מטריצה משולשית עילית ולכן נוכל לחשב את ערך הדטרמיננטה בעזרת משפט 4.3.8:

$$D_2 = kn$$

שאלה 3

נגדיר מעתה:

$$\text{cis}(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

למה א'

לכל שני מספרים α, β המייצגים זווית מתקיים:

$$\frac{\text{cis}(\alpha)}{\text{cis}(\beta)} = \text{cis}(\alpha - \beta)$$

הוכחה

תחילה, נכפול את המנה במשלים $\overline{\text{cis}(\beta)}$:

$$\frac{\text{cis}(\alpha)}{\text{cis}(\beta)} = \frac{\text{cis}(\alpha)\overline{\text{cis}(\beta)}}{\text{cis}(\beta)\overline{\text{cis}(\beta)}}$$

נפרק את הביטוי:

$$\begin{aligned}
\frac{\text{cis}(\alpha)\overline{\text{cis}(\beta)}}{\text{cis}(\beta)\overline{\text{cis}(\beta)}} &= \frac{(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) - i\sin(\beta))}{(\cos(\beta) + i\sin(\beta))(\cos(\beta) - i\sin(\beta))} \\
&= \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) + i(\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta))}{\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)} \\
&= \frac{\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)}{1} \\
&= \text{cis}(\alpha - \beta)
\end{aligned}$$

נציב זהויות טריגונומטריות:

מש"ל

סעיף א'

נתונים $t = \text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$ ו־$w = 1 - i$. נפתור את המשוואה $z^3 = \frac{w}{t}$. נמיר את w להצגה פולרית, על־פי ערכו אנו יודעים שהוא ממוקם ברביע הרביעי$(*)$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\theta = \tan(\frac{1}{-1}) = -\frac{\pi}{4}(*)$$

נשים לב כי הזווית $-\frac{\pi}{4}$ שקולה לזווית $\frac{7\pi}{4}$, ולכן נכתוב:

$$w = \sqrt{2}\,\text{cis}(\frac{7\pi}{4})$$

נחשב את $\frac{w}{t}$ בעזרת נוסחת החילוק וערך צמוד משאלה 6.5.5 ולמה א':

$$\frac{w}{t} = \frac{\sqrt{2}\,\text{cis}(\frac{7\pi}{4})}{1\,\text{cis}(-\frac{3\pi}{4})} = \sqrt{2}\,\text{cis}(\frac{10\pi}{4}) = \sqrt{2}\,\text{cis}(\frac{\pi}{2})$$

נחשב את ערך השורשים המהווים פתרון למשוואה בעזרת דרך החישוב המוצגת בספר אלגברה לינארית 1 – כרך ב', עמוד 85:

$$r = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$$
$$\theta = \frac{\pi + 4\pi k}{6}(0 \le k \le 2)$$
$$z = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}(\frac{\pi + 4\pi k}{6})$$
$$z = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}(\frac{5\pi}{6}), \sqrt[6]{2}\,\text{cis}(\frac{9\pi}{6}), \sqrt[6]{2}\,\text{cis}(\frac{13\pi}{6})$$

סעיף ב'

יהי n מספר טבעי אי־זוגי, $z_1, z_2, \dots, z_n$ כל הפתרונות ב־$\mathbb{C}$ של המשוואה $z^n = 1$. נוכיח כי $z_1 z_2 \dots z_n = 1$.

לפי שאלה 6.6.1 ידוע לנו כי $z_k = \text{cis}(\frac{2k\pi}{n})$, לכן:

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} \text{cis}(\frac{2k\pi}{n})$$

על־פי כלל המכפלה:

$$\prod_{k=1}^{n} \text{cis}(\frac{2k\pi}{n}) = \text{cis}(\sum_{k=1}^{n} \frac{2k\pi}{n}) = \text{cis}(\frac{2\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k)$$

על־ידי שימוש בנוסחת סכום סדרה חשבונית נראה כי:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(1+n)$$

ידוע לנו כי n אי־זוגי, לכן $n+1$ זוגי, ולכן גם $n(n+1)$. הביטוי $\frac{2\pi}{n}\frac{n}{2}(n+1) = \pi(n+1)$ מורכב ממכפלה זוגית של π. מהגדרת cis נובע כי $\text{cis}(2\pi k) = \text{cis}(0) = 1$ לכל k זוגי, ובפרט $n+1$. לכן $z_1 z_2 \dots z_n = 1$.

שאלה 4

נוכיח כי הקבוצה V היא לא מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$. יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ו־$v \in V$. נגדיר $v = (x_v, y_v)$. הקבוצה V ופעולת הכפל לא עומדות בסעיף ג' של הגדרה 7.1.1. נראה כי עבור כל λ, μ, v מתקיים:

$$\begin{aligned}
\lambda v + \mu v &= \lambda(x_v, y_v) + \mu(x_v, y_v) \\
&= (x_v, \lambda y_v) + (x_v, \mu y_v) \\
&= (x_v + x_v, \lambda y_v + \mu y_v) \\
&= (2x_v, (\lambda + \mu) y_v) \\
&= (\lambda + \mu)(2x_v, y_v) \\
\lambda v + \mu v &\neq (\lambda + \mu) v
\end{aligned}$$

ראינו כי עבור כל איבר ב־V שאיננו מהצורה $(0, n)$ לא מתקיים חוק הפילוג הכפל בסקלר מעל F ולכן V יחד עם פעולות החיבור והכפל המוגדרות איננה מרחב לינארי.

שאלה 5

סעיף א'

הקבוצה W היא תת־קבוצה של מרחב הפונקציות מהממשיים לממשיים, אך איננה מקיימת את סעיף ב' במשפט 7.3.2. דוגמה נגדית היא הפונקציה $f(x) = x$. ניתן לראות כי $f(x+1) = x+1$, אך $(f+f)(x) = 2x$, וכן $(f+f)(x+1) = 2x+2 \neq 2x+1$, ולכן W איננה מרחב.

נוכיח כי M הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}_4[x]$ על־ידי משפט 7.3.2.

א. על הקבוצה להיות לא ריקה, ובכן כלל הפולינומים מהצורה nx^0 מקיימים $p(x) = p(x-1) = n$.

ב. לכל שני פולינומים $X, Y \in \mathbb{R}_4[x]$ מתקיים $X + Y \in M$, שכן

$$X(x) + Y(x) = X(x-1) + Y(x-1)$$

ג. לכל $\lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}_4[x]$ מתקיים:

$$X(x) = X(x-1) \to \lambda X(x) = \lambda X(x-1)$$

נוכיח כי S הוא לא מרחב מעל $\mathbb{R}$. נראה דוגמה נגדית לסעיף ב' של משפט 7.3.2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

עבור שתי המטריצות הראשונות מתקיים $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, עבור תוצאת החיבור שלהן מתקיים $1 \cdot 1 \neq 0$ בסתירה לטענת סעיף ב'.

הקבוצה L היא מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$. נוכיח זאת בעזרת משפט 7.3.2':

א. הקבוצה איינה ריקה, שכן כל וקטור $v \in \mathbb{R}^3$ עומד בתנאי הקבוצה.

ב. נראה כי עבור כל $w_1, w_2 \in L$ ו־$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ גם $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in L$:

נגדיר $w_1 = (z_1, \overline{z_1}, z_2)$. ו־$w_2 = (z_3, \overline{z_3}, z_4)$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 &= \lambda_1 (z_1, \overline{z_1}, z_2) + \lambda_2 (z_3, \overline{z_3}, z_4) \\ &= (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_3, \lambda_1 \overline{z_1} + \lambda_2 \overline{z_2}, z_2 + z_4) \\ &= (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_3, \overline{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}, z_2 + z_4) \in L && \text{על־פי חוקי המשלים} \end{aligned}$$

ראינו כי שני התנאים מתקיימים ולכן L הוא מרחב מעל $\mathbb{R}$.

סעיף ב'

נמצא קבוצה פורשת סופית עבור M. תחילה נוכיח כי הפולינומים היחידים ב־M הם מהצורה nx^0. יהי $P(x)$ פולינום כך ש־$P \in \mathbb{R}_4[x]$. נגדיר $P(x) = ax^0 + bx^1 + cx^2 + dx^3$. ידוע כי:

$$\begin{aligned} &P(x) = P(x-1) \\ &a + bx + cx^2 + dx^3 = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 \\ &cx^2 + dx^3 = -b + c(x^2 - 2x + 1) + d(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &-b + c(-2x+1) + d(-3x^2 + 3x - 1) = 0 \\ &(-b + c - d) + (-2c + 3d)x + (-3d)x^2 = 0 \end{aligned}$$

ניתן לראות כי כל אחד מהמקדמים במשוואה צריך להתאפס. בהמרה למערכת משוואות והצבה לאחור מתקבל $b=c=d=0$, לכן ישנו משתנה חופשי יחיד, הוא a. לכן הקבוצה $\{1\}$ פורשת את M.

נמצא קבוצה פורשת סופית עבור L. על־פי הגדרת המרחב ועל־פי הגדרת הערך הצמוד:

$$\begin{aligned}
L &= \{(a+bi, a-bi, z) \mid a,b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\} \\
&= \{(a+bi, a-bi, c+di) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(1,1,0) + b(i,-i,0) + c(0,0,1) + d(0,0,i) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Sp}\{(1,1,0),(i,-i,0),(0,0,1),(0,0,i)\}
\end{aligned}$$

מצאנו כי הקבוצה $\{(1,1,0),(i,-i,0),(0,0,1),(0,0,i)\}$ פורשת את המרחב L.

שאלה 6

סעיף א'

יהיו וקטורים $u,v,w\in V$ כאשר V מרחב לינארי מעל השדה R. נוכיח כי מתקיים:

$$\mathrm{Sp}\{u-v+2w,-2u+v-w,-u+2v+w\}=\mathrm{Sp}\{u,v,w\}$$

לפי שאלה 7.5.11 אנו רואים כי עבור קבוצת וקטורים ב־Sp ניתן לבצע הכפלה בסקלר לכל וקטור בקבוצה, כמו גם הוספת כפולה בסקלר של וקטור אחד לאחר. כמו־כן ניתן להחליף את סדר הווקטורים בקבוצה זו בשל חוסר הסדר בקבוצה.
לשם הפשטות נתייחס לווקטורים בקבוצה לפי סדר כתיבתם. נראה כי ה־Sp הנתון שווה ערך למרחב $\mathrm{Sp}\{u,v,w\}$.

$$\mathrm{Sp}\{u-v+2w,-2u+v-w,-u+2v+w\}$$

נוסיף את האיבר הראשון פעמיים לאיבר השני ופעם אחת לאיבר השלישי:

$$\mathrm{Sp}\{u-v+2w,-v+3w,v+3w\}$$

נוסיף את האיבר השלישי לאיבר השני ונחלק את התוצאה ב־6:

$$\mathrm{Sp}\{u-v+2w,w,v+3w\}$$

נחסר את האיבר השני שלוש פעמים מהאיבר השלישי ופעמיים מהאיבר הראשון:

$$\mathrm{Sp}\{u-v,w,v\}$$

נחסר את האיבר השלישי מהראשון:

$$\mathrm{Sp}\{u,w,v\}=\mathrm{Sp}\{u,v,w\}$$

סעיף ב'

יהיו $U=\mathrm{Sp}\{(1,2,5),(1,1,3)\}$ ו־$W=\mathrm{Sp}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ תת־מרחבים של $\mathbb{R}^3$. נוכיח כי $U\neq W$.
נוכיח כי קיים וקטור ב־U שאיננו קיים ב־W. נגדיר $v=(1,1,3)$, הווקטור v מוכל בקבוצת היוצרים של U, לכן בוודאי $v\in U$. כדי להיות מוכל ב־W על הווקטור v להיות צירוף לינארי של קבוצת היוצרים של W. ננסה למצוא צירוף כזה בעזרת בניית מערכת משוואות מיוצגת במטריצת מקדמים ודירוגה:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\\1&1&3\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_3\to R_3-R_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{array}\right]$$

הגענו לשורת סתירה, לכן אין פתרון למערכת המשוואות ובהתאם לזאת $v\notin W$. ישנו וקטור ב־U שלא קיים ב־W, לכן בהכרח $U\neq W$.