

פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

1 במאי 2023

שאלה 1

סעיף א'

נחשב את הגבול הבא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

מהגדרת $\sin x$ אנו יכולים להסיק כי למשוואה $\sin x = x$ ישנו רק פתרון אחד כאשר $x = 0$, מהרציפות של שתי הפונקציות והעובדה כי $\sin 1 < 1$

(על-פי חישוב ישיר) נובע כי $\sin x < x$ לכל $x > 0$.

ניתן באופן דומה לראות כי $\sin x < \alpha x$ בסביבה חיובית של 0

$$\alpha x < \sin x < x$$

$$\frac{1}{\alpha n^2} < \sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}$$

$$1 + \frac{1}{n^4} < 1 + \sin \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{n^2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha n^2}\right)^{\alpha n^2} < \left(1 + \sin \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

$$e^\alpha \leq \lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + \sin \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leq e$$

וכאשר $\alpha \rightarrow 1$ נקבל

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + \sin \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$$

סעיף ב'

נמצא את ערך הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{1}{x^2}}$$

על-פי הרכבת הפונקציה $\frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{t} \right|^{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{|t|^{t^2}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

הגבול מתקיים במובן הרחב.

שאלה 2

תהי פונקציה

$$f(x) = e^{-x} + \sin^2 x$$

סעיף א'

נוכיח כי מתקיים הגבול הבא עבור סדרה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\pi n) = 0$$

מש"ל

הוכחה. קליל, הסינוס מתאפס תמיד, והאקספוננט הולך וקטן אז משפט 6.8