

פתרון מטלה 07 – תורת ההסתברות (1), 80420

19 בדצמבר 2024



שאלה 1

נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נסתור את הטענה שאם יהי X משתנה מקרי המוגדר על מרחב ההסתברות (Ω, \mathbb{P}) , ונניח ש- $X \sim U(\{1, 2, 3\})$, אז (Ω, \mathbb{P}) הוא מרחב הסתברות אחידה.

פתרון נניח שמרחב ההסתברות הוא של הטלת קובייה לא אחידה כך שלקבלת המספרים הזוגיים הסתברות של חצי מקבלת המספרים האי-זוגיים, כאשר ההסתברות אחידה בין מספרים עם אותה הזוגיות.

נגדיר גם $X(5) = X(6) = 3$, $X(3) = X(4) = 2$, $X(1) = X(2) = 1$, אז $X \sim U(\{1, 2, 3\})$ בעוד מרחב ההסתברות לא אחיד.

סעיף ב'

יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי-תלויים ובעלי תומך סופי. נסתור את הטענה שאם $\mathbb{E}(|X - Y|) = 0$ אז $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. **פתרון** נניח ש- $X(\omega) = 1$ ו- $Y(\omega) = 2$ לכל $\omega \in \Omega$, אז $|X - Y| = 1$ לכל ω גם כן, בהתאם $\mathbb{E}(|X - Y|) = 0$, אבל $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

סעיף ג'

נסתור את הטענה שאם נניח ש- X משתנה מקרי בעל תוחלת, אז גם X^2 בעל תוחלת. **פתרון** נניח ש- $\text{Supp } X = \mathbb{N}$ וכן $\mathbb{P}(X = n) = \frac{c}{n^3}$, ראינו כי אכן קיים משתנה מקרי כזה עם התפלגות כזו בהרצאות קודמות, ואנו יודעים כי

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{c}{n^3}$$

הוא טור מתכנס בהחלט, לעומת זאת

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{c}{n^3}$$

הוא טור הרמוני ומתבדר.

סעיף ד'

נניח ש- X משתנה מקרי כך ש- X^2 הוא בעל תוחלת, נוכיח שגם X בעל תוחלת.

פתרון נגדיר $S = \text{Supp } X$, אז

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{s \in S} s \mathbb{P}(X^2 = s) = \sum_{s \in S} s \mathbb{P}(X = \sqrt{s}) = \sum_{s \in S} |s| \cdot |s| \mathbb{P}(X = s)$$

הוא טור מתכנס בהחלט, ולכן ממבחן התכנסות גם

$$\sum_{s \in S} |s| \mathbb{P}(X = s)$$

טור מתכנס, אבל זוהי התכנסות בהחלט של $\mathbb{E}(X)$ עצמו, קרי יש תוחלת ל- X .

סעיף ה'

יהיו X, Y משתנים מקריים כך ש- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ וכן $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2)$. נסתור את הטענה שאז $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

פתרון נניח שוב ש- X, Y קבועים כך ש- $Y = 2$, $X = 1$ כמעט תמיד.

אז כמובן התוחלת שלהם ושל הריבוע שלהם שווה, אבל $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

סעיף ר'

נסתור את הטענה כי קיים משתנה מקרי בדיד X אי-שלילי בעל תוחלת סופית כך שמתקיים

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \mathbb{P}(X \geq n) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$$

הוכחה. נניח בשלילה שאכן קיים משתנה מקרי X כזה. נובע אם כך עבור ההסתברות שלו

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n - 1) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n} - \frac{\mathbb{E}(X)}{n - 1} = \mathbb{E}(X) \frac{1}{n(n - 1)}$$

ולכן מהגדרת התוחלת

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \mathbb{P}(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X) \frac{1}{n + 1}$$

דהינו

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 1}$$

וזו כמובן סתירה אלא אם $\mathbb{E}(X) = 0$. נעיר שמהנתון התומך הוא לא סופי, אחרת הטענה לא מתקיימת.

נניח ש- $\mathbb{E}(X) = 0$, לכן מהנתון התפלגות X קבועה, ובהתאם לאינסופיות התומך היא 0 בלבד, אבל זאת סתירה להגדרת התפלגות, ולכן קיבלנו סתירה. \square

שאלה 2

במשחק מטילים מטבע הוגן עד שמקבלים תוצאה של עץ. אם העץ המתקבל בהטלה ה- i אז מוענקים למטיל a^i נקודות.

סעיף א'

יהי X המשתנה המקרי המתאר את כמות הנקודות שהוענקה, נחשב את התפלגות X פתרון נבחין כי מההגדרה המשתנה Y המתאר את השאלה באיזה סיבוב המשחק הסתיים הוא $Geo(\frac{1}{2})$. בהתאם $X = a^Y$, שכן כמות הנקודות המתקבלת היא מספר הסיבוב האחרון כחזקת a . נעבור אם כן לחישוב ההתפלגות של X :

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(a^Y = n) = \mathbb{P}(Y = \log_a n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\log_a(n)-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{\log_a n}}$$

נבחין כי התומך הוא $\text{Supp } X = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

סעיף ב'

נחשב את $\mathbb{E}(X)$ לכל a .

פתרון

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{s \in \text{Supp } X} s \cdot \mathbb{P}(X = s) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \frac{1}{2^{\log_a a^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^n = \frac{\frac{a}{2}}{1 - \frac{a}{2}} = \frac{a}{2-a}$$

סעיף ג'

נחשב את ההסתברות להרוויח יותר מעשר נקודות עבור $a = 2$.

פתרון נבחין כי $X = 2^4$ הוא המקרה הראשון שבו מתקבלות מעל 10 נקודות, לכן אנו מחפשים את

$$\mathbb{P}(X \geq 10) = \mathbb{P}(Y \geq \log_2 10) = 1 - \mathbb{P}(1 \leq Y \leq 3) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) - \mathbb{P}(Y = 3) = 1 - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

שאלה 3

סעיף א'

ישנן שלוש צנצנות עוגיות, בראשונה 15 עוגיות, בשנייה 18 ובשלישית 9.

i

בוחרים עוגייה באופן אקראי ואחיד, נחשב את התוחלת של מספר העוגיות בצנצנת שלה.

פתרון אם נמספר את העוגיות נקבל 42 עוגיות, ונגדיר את המשתנה המקרי X כמחזיר לכל מספר עוגייה את מספר העוגיות בצנצנת שלה, כך לדוגמה $X(1) = 15$ וכן הלאה.

בהתאם נקבל

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=\{15,18,9\}} i\mathbb{P}(X=i) = 15 \cdot \frac{15}{42} + 18 \cdot \frac{18}{42} + 9 \cdot \frac{9}{42}$$

ii

בוחרים צנצנת באקראי ובאופן אחיד, נחשב את התוחלת של מספר העוגיות בצנצנת שבחרנו.

פתרון הפעם נגדיר Y מחזיר את מספר העוגיות עבור מספר צנצנת, כלומר $Y(1) = 15$ וכדומה, לכן

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 18 + \frac{1}{3} \cdot 9$$

סעיף ב'

מטילים שתי קוביות הוגנות. נמצא את תוחלת סכום התוצאות של הקוביות בהינתן שהקוביות נפלו על פאות שונות.

פתרון נגדיר X, Y תוצאת הטלת שתי הקוביות, ונגדיר גם $Z = X + Y \mid X \neq Y$.

הסכום יכול לצאת במקרה זה בין 3 ל-11, דהיינו $\text{Supp } Z = \{3, \dots, 11\}$, ולכן

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=3}^{11} i\mathbb{P}(Z=i) = 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 11 \cdot \frac{2}{36}$$

סעיף ג'

מטילים קובייה הוגנת שוב ושוב עד שיוצאת התוצאה 6.

יהי X המשתנה המקרי המייצג את מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 2.

נחשב את התוחלת של X בהינתן שכל ההטלות היו זוגיות.

פתרון נגדיר Y שיצא 6 בתוצאה ה- i , לכן $Y \sim \text{Geo}(\frac{1}{6})$.

בנוסף נגדיר X המשתנה המקרי המייצג את מספר ה-2 שהתקבלו, נבחין כי $Z \mid A, Y = n \sim \text{Bin}(n-1, \frac{1}{2})$, ישירות מכלל הסידורים

האפשריים של הטלות.

מנוסחת התוחלת השלמה

$$\mathbb{E}(Z \mid A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z \mid A, Y=n)\mathbb{P}(Y=n \mid A)$$

נעבור אם כך לחישוב ערכים אלה.

$$\mathbb{P}(Y=n \mid A) = \frac{\mathbb{P}(Y=n, A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(Y=n, A)}{\mathbb{P}(A)}$$

וכן

$$\mathbb{P}(Y=n, A) = \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

ולכן גם

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = n, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

ומצאנו ש- $\mathbb{P}(Y = n | A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ והינו $Y | A \sim Geo(\frac{2}{3})$.

אנו גם יודעים ש- $Z | A, Y = n \sim Bin(n-1, \frac{1}{2})$ ולכן $\mathbb{E}(Z | A, Y = n) = (n-1) \cdot \frac{1}{2}$ ובהתאם

$$\mathbb{E}(Z | A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2} \mathbb{P}(Y = n | A) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \mathbb{P}(Y = n | A) = \frac{1}{2} (\mathbb{E}(Y | A) - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = n | A)) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}$$

סעיף ד'

עשרה שופטים בתחרות מעניקים לקבוצת אנשים ציונים מקריים המתפלגים אחיד ב-[10].

נחשב את תוחלת הציון המינימלי והציון המקסימלי שקיבלה הקבוצה.

פתרון נגדיר $\forall i \in [10], X_i \sim U([10])$ הציון שנתן השופט ה- i . בנוסף נגדיר $X = \min\{X_1, \dots, X_{10}\}$ הציון המינימלי.

נבחין כי $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq n\} = \{\omega \in \Omega \mid X_i(\omega_i) \geq n\}$ ולכן

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \left(\frac{10 - (n-1)}{10}\right)^{10}$$

ולכן מנוסחת הזנב

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{10} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{10 - (n-1)}{10}\right)^{10} \approx 1.49$$

באופן דומה נגדיר $Y = \max\{X_1, \dots, X_{10}\}$ ולכן

$$\mathbb{P}(Y \geq n) = 1 - \mathbb{P}(Y < n) = 1 - \left(\frac{n-1}{10}\right)^{10}$$

וכן

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{10} \mathbb{P}(Y \geq n) = \sum_{n=1}^{10} 1 - \left(\frac{n-1}{10}\right)^{10} \approx 9.50$$

שאלה 4

יהי משתנה מקרי בעל תוחלת X הנתמך על \mathbb{N} .

נוכיח כי $X \sim Geo(p)$ עבור $p \in (0, 1)$ כלשהו אם ורק אם לכל $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים

$$\mathbb{E}(X \mid X > s) = \mathbb{E}(X) + s$$

הוכחה. נניח ש- $X \sim Geo(p)$ ולכן תכונת חוסר הזיכרון מתקיימת, כלומר נובע $X \stackrel{d}{=} X - s \mid X > s$ לכל s בתחום.

נחשב

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid X > s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(X - s = n - s \mid X > s) \\ &= \sum_{n=s+1}^{\infty} n \mathbb{P}(X - s = n - s \mid X > s) \\ &= \sum_{n=s+1}^{\infty} n \mathbb{P}(X = n - s) \\ &= \sum_{n=s+1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-s-1} p \end{aligned}$$

ומצד שני

$$\mathbb{E}(X) + s = \frac{sp}{1 - (1-p)} + \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} p = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} sp + \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} p = \sum_{n=1}^{\infty} (n+s)(1-p)^{n-1} p$$

ומצאנו כי הביטויים שווים.

נניח את הכיוון השני של הטענה, אז הטענה נכונה גם עבור $s = 1$, כלומר

$$\mathbb{E}(X \mid X > 1) = \mathbb{E}(X) + 1$$

לכן

$$\mathbb{E}(X - 1 \mid X > 1) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(X - 1 = n \mid X > 1) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \mathbb{P}(X = n \mid X > 1) = \mathbb{E}(X \mid X > 1) - 1 = \mathbb{E}(X)$$

ואז $\mathbb{E}(X - 1 \mid X > 1) - \mathbb{E}(X) = 0$, ומההתכנסות בהחלט ואינדוקציה על n נקבל משקילות תכונת חוסר הזיכרון את המבוקש. \square

שאלה 5

נמצא דוגמה לשני משתנים מקריים בעלי תוחלת תלויים כך ש- $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.
פתרון נגדיר $X = Y \sim \text{Ber}(1)$ ולכן

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2) = \sum_{n \in \{0,1\}} n^2 \mathbb{P}(X = n) = 0 \cdot (1 - 1) + 1 \cdot 1 = 1$$

ומצד שני

$$\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = (\mathbb{E}(X))^2 = 1^2 = 1$$

ומצאנו כי הטענה מתקיימת.