

פתרון מטלה 01 — מבוא ללוגיקה, 80423

1 בנובמבר 2024



שאלה 1

יהי $T = (V, E)$ עץ כאשר V סופית.

סעיף א'

נוכיח כי קיים מסלול ללא חזרות בין $v, u \in E$.

הוכחה. יהי $(v_n)_{n=1}^l$ מסלול סופי שמובטח שקיים מקשירות העץ כך $v_1 = v, v_l = u$. נבנה סדרה חדשה $(v'_n)_{n=1}^m$ על-ידי $v_k = v'_k$ לכל אילו אין חזרות סיימנו, לכן נניח שישנן חזרות, נבחר $0 \leq i < j \leq l$ כך $v_i = v_j$. והיא חוקית שכן ידוע כי $(v_{i-1}, v_i), (v_j, v_{j+1}) \in E$. נחזור על תהליך זה על (v'_n) שוב ושוב עד שנקבל מסלול ללא חזרות. נבחין כי אכן נקבל מסלול כזה, שכן כל מסלול הוא סופי, ולכן כמות החזרות אף היא סופית, וכמות החזרות לאחר התהליך קטנה ממש מכמות החזרות המקורית. \square

סעיף ב'

נוכיח כי אם $(v, u) \in E$ אז המסלול היחיד ללא חזרות ביניהם הוא $\langle v, u \rangle$.

הוכחה. ידוע לנו כי קיים מסלול ללא חזרות בין שני הקודקודים, וברור כי $\langle v, u \rangle$ הוא מסלול כזה, עתה נוכיח את יחידותו. יהי (v_1, \dots, v_l) מסלול נוסף ללא חזרות כך $v_1 = v, v_l = u$. אילו $v_2 = u$ אז נקבל את המסלול שהגדרנו קודם, ולכן נניח כי $v_2 \neq u$. נבחין עתה כי ידוע שבמסלול אין מעגלים, לכן לא קיים $2 < i \leq l$ כך $v_i = v$, אך בעץ אין מעגלים ולכן נקבל ש- $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{v\} \times V)$ הוא גרף בעל שני רכיבי קשירות. יהי G'_1 רכיב הקשירות אשר מכיל את v_2 , נוכל להסיק כי $u \notin G'_1$ אחרת נקבל סתירה להנחה ש- $v_2 \neq u$, ולכן נוכל לקבוע כי $u \neq v_i \implies \forall i, 0 \leq i \leq l$ וזו סתירה להגדרת מסלול זה. נסיק אם כן שקיים מסלול ללא חזרות יחיד והוא זה אשר ציינו. הוכחה נוספת והרבה יותר פשוטה: ידוע כי $\langle v, u \rangle$ מסלול ללא חזרות, נניח כי $\langle v = v_1, \dots, v_l = u \rangle$ מסלול נוסף כזה, אז $\langle v = v_1, \dots, v_l = u \rangle$ הוא מסלול ומעגל פשוט וזו סתירה להגדרת העץ, לכן מצאנו כי המסלול היחיד הוא אכן $\langle v, u \rangle$. \square

סעיף ג'

יהי מסלול ללא חזרות $\alpha = \langle v = v_0, \dots, v_l = u \rangle$ ונניח באינדוקציה תוך שימוש בסעיף הקודם כבסיס שלכל $2 \leq k' < k$ יש מסלול ללא חזרות יחיד, ונוכיח כי גם המסלול הנתון הוא יחיד.

הוכחה. נניח בשלילה כי קיים מסלול נוסף $\beta = \langle v = u_0, \dots, u_k = u \rangle$. אילו קיים $0 < i < k$ כך $v_i \in \beta$ אז מהנחת האינדוקציה נקבל כי קיים מסלול יחיד בין v ל- v_i ובין v_i ל- u ולכן $\alpha = \beta$ וקיבלנו סתירה לקיום מסלול נוסף. נניח אם כן שאין i כזה, דהיינו המסלולים זרים מלבד בקצוות. נבנה מסלול חדש $\langle v = v_0, \dots, v_l = u = u_m, u_{m-1}, \dots, u_0 = v \rangle$, נבחין כי במסלול זה אין חזרות מלבד בקצוות, והוא מתחיל ונגמר ב- v , דהיינו מסלול זה הוא מעגל פשוט. ידוע כי ב- T אין מעגלים מהגדרתו כעץ ולכן קיבלנו סתירה, ואין מסלול נוסף המקיים את התנאים. \square

סעיף ד'

נוכיח כי \leq_T הוא יחס סדר חלקי.

הוכחה. נגדיר $e \in V$ כגזע העץ, ונגדיר את \leq_T ביחס אליו, נוכיח כי הוא אכן סדר חלקי:

- רפלקסיביות: אם $\langle e = v_0, \dots, v_l = v \rangle$ מסלול, אז $v \in \langle v_i \rangle$ ולכן $v \leq_T v$.
- אנטי-סימטריה: נניח כי $v \leq_T u$ וגם $u \leq_T v$, לכן קיים מסלול $\langle e = v_0, \dots, v_l = v \rangle$ וקיים מסלול $\langle e = u_0, \dots, v_m = u \rangle$ כך ש- $v_i = u, u_j = v$ עבור $0 \leq i \leq l, 0 \leq j \leq m$. אבל נקבל שכל מסלול מוכל בשני מהטענה שהוכחנו בסעיפים הקודמים, ולכן בפרט $u = v$ ו- $i = j$.

• טרנזיטיביות: נניח $u \leq_T v, v \leq_T w$, ולכן קיים מסלול בין e לבין w כך ש- v מוכל בו, אבל יש מסלול יחיד גם בין e ל- v וידוע כי u מוכל בו, לכן בפרט u מוכל גם במסלול של e ל- w ומתקיים $u \leq_T w$.

□