פתרון מטלה 02 — תורת ההסתברות (1), 80420

11 בנובמבר 2024

שאלה 1

בוחרים באקראי סדרה של n מספרים $[m]$ עם חזרות. נגדיר p_m את ההסתברות שבסדרה שבחרנו יש מופע של אותו מספר שלוש פעמים לפחות, נניח גם ש־$n(m) = o(m^{2/3})$, נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} p_m = 0$.

הוכחה. על־פי הנתון מתקיים $\Omega = [m]^n$, וכן נגדיר פונקציית הסבתרות נקודתית אחידה, דהינו $p(\omega) = \frac{1}{m^n}$.
יהי A_i עבור $i \in [m]$ המאורע ש־i מופיע לפחות שלוש פעמים, אז מתקיים

$$|A_i| = m^n - \binom{n}{2}(m-1)^{n-2} - \binom{n}{1}(m-1)^{n-1} - (m-1)^n$$

וכן $|\Omega| = m^n$, ולכן גם $\mathbb{P}_p(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|}$.
עוד נגדיר $A = \bigcup_{i\in[m]} A_i$ המאורע שיש לפחות שלושה ממספר לאיזשהו מספר, אז מחסם האיחוד

$$p_m = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{i\in[m]} A_i) \le \sum_{i\in[m]} \mathbb{P}(A_i) = m \cdot \frac{|A_1|}{|\Omega|}$$

ולכן

$$\begin{aligned} p_m &\le m \cdot \frac{1}{m^n} \cdot (m^n - \binom{n}{2}(m-1)^{n-2} - \binom{n}{1}(m-1)^{n-1} - (m-1)^n) \\ &= m - \binom{n}{2}\frac{(m-1)^{n-2}}{m^{n-1}} - n\frac{(m-1)^{n-1}}{m^{n-1}} - \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} \end{aligned}$$

לבסוף נבחין כי $n(m) = o(m^{2/3})$ ולכן $n \to \infty$ גורר $m \to \infty$, לכן נבחן את

$$0 \le \lim_{m\to\infty} p_m \le \lim_{m\to\infty} m - \frac{1}{2}n(n-1)\frac{(m-1)^{n-2}}{m^{n-1}} - n\frac{(m-1)^{n-1}}{m^{n-1}} - \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} = 0$$

ולכן גם $\lim_{n\to\infty} p_m = 0$. $\square$

שאלה 2

בכל בוקר ילד מקבל מהוריו סכום קבוע לקנות חטיף. בכל חטיף נמצאות אחת מ־22 האותיות של האלפבית העברי בהסתברות שווה, ועל הילד להרכיב את המילה "קטר".

נגדיר את האותיות לפי מספרים עד 22, ונגדיר שרירותית את האותיות "קטר" להיות 1 עד 3.

סעיף א'

עבור $n \in \mathbb{N}$ נחשב את ההסתברות שביום ה־n לילד לא הייתה האות a עבור $a \in [3]$.

פתרון לכל יום $\Omega_d = [22]$ עם פונקציית הסתברות אחידה $p(n) = \frac{1}{22}$, בהתאם לאחר n ימים נקבל $\Omega = \Omega_d^n$, ואנו מחפשים את המאורע $A = \{\omega \in \Omega \mid a \notin \omega\}$. נקבל $|A| = 21^n$, באופן דומה נקבל גם $|\Omega| = 22^n$, לכן

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{21^n}{22^n}$$

סעיף ב'

נחשב את ההסתברות שלאחר n ימים הילד עדיין לא הצליח להרכיב את המילה הרצויה על־ידי שימוש בנוסחת הכלה והדחה.

פתרון נגדיר A, B, C המאורע שלילד אין את האותיות הראשונה השנייה והשלישית לאחר n ימים, מהכלה והפרדה נקבל

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

נבחין כי אנו מחפשים באמת את אחד מהמצבים בהם לפחות אחת מן האותיות חסרה, זהו אכן האיחוד של המאורעות, לעומת זאת מטעמי הסתברות אחידה נוכל כי

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 3\mathbb{P}(A) - 3\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

מצאנו כי $\mathbb{P}(A) = \frac{21^n}{22^n}$, ובאופן דומה גם נוכל להסיק $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{20^n}{22^n}$ ואף $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{19^n}{22^n}$ ולכן

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 3\frac{21^n}{22^n} - 3\frac{20^n}{22^n} + \frac{19^n}{22^n} = \frac{3 \cdot 21^n - 3 \cdot 20^n + 19^n}{22^n}$$

שאלה 3

בכד $n \geq 2$ כדורים ומתוכם אחד בצבע לבן והאחרים שחורים, מוציאים ללא החזרה שני כדורים ובוחנים את צבעיהם.

סעיף א'

נגדיר מרחב הסתברות מתאים.

פתרון נגדיר מרחב הסתברות דו־שלבי, נתחיל בהגדרת $\Omega_1 = \{B, W\}$, נתון כי $p(B) = \frac{n-1}{n}$ וכי $p(W) = \frac{1}{n}$.
נעבור לניסוי השני, עבורו מתקיים $\Omega_2 = \Omega_1$, ונגדיר את פונקציית ההסתברות הנקודתית p_W, p_B על־ידי

$$p_W(W) = 0, p_W(B) = 1, p_B(W) = \frac{1}{n-1}, p_B(B) = \frac{n-2}{n-1}$$

בהתאם להגדרת הניסוי, לבסוף נגדיר את מרחב הניסוי $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_{1,2}, \mathbb{P}_q)$ עבור $q(a,b) = p(a) \cdot p_a(b)$.

סעיף ב'

נתון כי ההסתברות להוציא את הכדור הלבן כפולה מההסתברות שלא להוציא אותו, נמצא את n.

פתרון נבחין כי ההסתברות לא להוציא את הכדור הלבן היא ההסתברות להוציא שני כדורים שחורים $= q(B,B) = p(B) \cdot p_B(B) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} = \frac{n-2}{n}$.
עוד נבחין כי ההסתברות להוציא כדור לבן היא $\mathbb{P}(\{WB, BW, WW\}) = q(W,B) + q(B,W) + q(W,W) = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + 0 = \frac{2}{n}$.
בהתאם נתון גם כי $\frac{2}{n} = 2\frac{n-2}{n}$, ולכן נובע $n = 3$.

שאלה 4

2^n שחקניות שונות אבל זהות בכישוריהן משתתפות בטורניר שחמט באורך n, ונניח שבכל משחק יש מנצחת ומפסידה בלבד, בסיבוב הראשון משחקות 2^n שחקניות, בסיבוב השני 2^{n-1} המנצחות וכן הלאה.

סעיף א'

עבור $k \in \mathbb{N}$ זוגי תהי $\Omega_p(k)$ קבוצת האפשרויות לחלק k איברים לזוגות, נחשב את $|\Omega_p(k)|$.

פתרון השאלה שקולה למספר התמורות המורכבות ממחזורים זוגיים נפרדים, דהינו נבחר כל פעם 2 ויצור ציוות שלהם, תוך הורדת המספר בהתאם, אם נתחיל ב־k ואפס אפשרויות, נקבל $k-2$ ו־$\binom{k}{2}$.

בשלב השני נקבל $k-4$ נשארו ו־$\frac{k!}{2^2(k-4)!} = \binom{k}{2}\binom{k-2}{2}$, אם נמשיך תהליך זה נקבל $\frac{k!}{2^{k/2}}$.

סעיף ב'

נחשב את ההסתברות ששתי שחקניות נתונות יפגשו בסיבוב הראשון.

פתרון נגדיר $1, 2$ הזוג שאנו רוצים שיצוות, נקבל אם כן $A = \{(x_1, \ldots, x_{n/2}) \in \Omega_p(k) \mid \exists \{1,2\} = x_i\}$.

שאלה 5

בוחרים באקראי באופן אחיד אחת מהקוביות D_4, D_6, D_8 מטילים אותה ומדווחים איזו קוביה נבחרה ומה תוצאת ההטלה, באופן זה מתקבלת הסתברות $\mathbb{P}$ על $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ כאשר $\Omega_1 = \{4,6,8\}$ ו־$\Omega = [8]$.

סעיף א'

נכתוב מפורשות את הניסוי הדו־שלבי שמגדיר את $\mathbb{P}$.

פתרון נתון כי הסתברות הניסוי הראשון היא אחידה, לכן $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega_1|} = \frac{1}{3}$.

עתה נגדיר את הניסוי השני. עבור $\omega_1 = 4$ נקבל

$$p_4(\omega_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \le \omega_2 \le 4 \\ 0 & 4 < \omega_2 \end{cases}$$

באופן דומה עבור $\omega_1 = 6$ נקבל

$$p_6(\omega_2) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 1 \le \omega_2 \le 6 \\ 0 & 6 < \omega_2 \end{cases}$$

ועבור $\omega_1 = 8$ נקבל $p_8(\omega_2) = \frac{1}{8}$.

לבסוף נגדיר $q(\omega_1, \omega_2) = p(\omega_1) \cdot p_{\omega_1}(\omega_2)$, ובהתאם $\mathbb{P} = \mathbb{P}_q$.

סעיף ב'

עתה נגדיר את פונקציית ההסתברות במקרה ההפוך, כאשר $\Omega_1' = [8], \Omega_2' = \{4,6,8\}$ כך שההסתברות נשארת זהה עבור $\Omega_1' \times \Omega_2'$ זהה ל־$\mathbb{P}$ בסעיף הקודם.

פתרון נתחיל במקרה הפשוט ביותר, אם $5 \le \omega_1 \le 8$ אז $p(\omega_1) = \frac{1}{3 \cdot 8}$ ו־$p_{\omega_1}(\omega_2) = 1$, זאת שכן רק קוביה D_8 מאפשרת קבלת מספר מטווח זה.

נעבור עתה למקרה $6 \le \omega_1 \le 7$, במקרה זה עדיין $p(\omega_1) = \frac{1}{8}$ אך $p_{\omega_1}(\omega_2) = \frac{1}{2}$.

שאלה 6

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות בדיד, עבור $A, B \subseteq \Omega$ נגדיר $\tilde{\mathbb{P}}(A \times B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $|\Omega| > 1$ אז קיימות תת־קבוצות של $\Omega \times \Omega$ שלא ניתנות להצגה בצורה של $A \times B$ עבור $A, B \subseteq \Omega$.

הוכחה. $\square$