פתרון ממ"ן 17 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

20 במאי 2023

שאלה 1

תהי f פונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}$ המקבלת מקסימום מקומי בנקודה x_0.
נוכיח כי אם אין ל־f נקודות קיצון נוספות אז f מקבלת מקסימום בנקודה x_0.

הוכחה. ידוע כי x_0 נקודת מקסימום מקומי של x_0, לכן קיימת סביבה של x_0 בה ערך הפונקציה הוא מקסימלי.
נסמן תחום זה כערכים המקיימים $|x - x_0| \leq \delta$.
זהו כמובן תחום סגור ולכן על־פי המשפט השני של ויירשטראס לפונקציה יש נקודת מקסימום ומינימום. כמובן שנקודת המקסימום בקטע זה מתלכדת עם המקסימום המקומי x_0. אנו יודעים כי לא קיימות נקודות קיצון נוספות, דהינו לכל δ לא קיים בתחום נקודת קיצון נוספת ובהתאם x_0 נשארת נקודת הקיצון ולכן המקסימום בקטע זה.
נניח בשלילה עתה כי קיים x_1 כך ש־$f(x_1) > f(x_0)$.
נבחר δ כך שמתקיים $|x_0 - x_1| \leq \delta$, אז בתחום זה $f(x_0) > f(x)$ לכל x, ובפרט גם $f(x_0) > f(x_1)$ בסתירה לטענה.
בשל כך x_0 נקודת מקסימום של $f(x)$. **מש"ל**

שאלה 2

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). נניח כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ אשר עבורה

$$(f(c)-f(a))(f(b)-f(c))<0$$

נוכיח כי קיימת נקודה $t\in(a,b)$ עבורה $f'(t)=0$.

הוכחה. מאי־השוויון נובע ישירות כי $f(a)<f(c)$ או $f(c)<f(b)$ בלבד.
ללא פגיעה בכלליות ההוכחה נוכל להניח כי אחד השוויונות מתקיימים, ועל־ידי היפוך תפקידי a,b להגיע למצב שהושמט.
נניח כי $f(a)<f(c)$ ולכן לא יתכן כי $f(c)<f(b)$, ואף לא יתכן כי $f(c)=f(b)$ כנביעה מאי־השוויון הנתון, לכן $f(b)<f(c)$.
מהמשפט השני של ויירשטראס נובע כי בתחום $[a,b]$ קיים מינימום ל־f, אך בשל ערך $f(c)$ אנו יכולים להסיק כי הוא לא ב־a או ב־b. נגדיר t נקודת המינימום בקטע $[a,b]$ עבור f, ולכן ממשפט פרמה נובע כי $f'(t)=0$. **מש"ל**

שאלה 3

תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$ המקיימת $0 \leq f'(x) \leq 1$ לכל $x \in [0,1]$.

נוכיח כי קיימת נקודה $x_0 \in [0,1]$ כך שמתקיים

$$f'(x_0) = \frac{3x_0}{\sqrt{3x_0^2+6}}$$

הוכחה. נגדיר פונקציה $g(x) = \sqrt{3x^2+6}$, ונחשב את נגזרתה על־פי משפטי גזירה:

$$g'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+6}}$$

נשים לב כי $g'(0) = 0$, $g'(1) = 1$ וכי $f'(x) = g'(x)$.

ממשפט דארבו נובע ישירות כי קיים $x \in [0,1]$ כך ש־$f'(x) = g'(x)$. **מש"ל**

שאלה 4

נוכיח כי הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x}\sin\sqrt{x}$$

רציפה במידה שווה בקטע $[0,\infty)$

הוכחה. נחשב את נגזרתה של $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x}\cos\sqrt{x} = \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\cos\sqrt{x}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left|\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\cos\sqrt{x}\right| \\
&\le \left|\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right| + \left|\frac{1}{2}\cos\sqrt{x}\right| && \text{אי־שיוויון המשולש} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}|\sin\sqrt{x}| + \frac{1}{2}|\cos\sqrt{x}| && \text{חיוביות בתחום} \\
&\le \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} && \sin,\cos \text{ חסימות}
\end{aligned}$$

נגדיר גם $x,y \ge 1$ ולכן גם מתקיים בהתאם לאי־השוויון $|f'(x)| \le 1$, לכן הפונקציה $f'(x)$ חסומה.
משאלה 8.9 נובע כי $f(x)$ רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.
הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ וחסומה בו, ולכן ממשפט קנטור נובע כי היא רציפה בו במידה שווה.
בשל כך כמובן נוכל לראות כי לכל $[0,a]$ כאשר $a > 0$ הפונקציה רציפה בו במידה שווה, ובסך־הכול נקבל כי $f(x)$ רציפה במידה שווה ב־$[0,\infty)$.
מש"ל

שאלה 5

סעיף א'

תהי f פונקציה גזירה ב־$\mathbb{R}_{\geq a} = [a, \infty)$.

(i) נוכיח כי אם קיים קבוע $m > 0$ כך ש־$f'(x) \geq m$ לכל $x \in \mathbb{R}_{\geq a}$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

הוכחה. ממשפט 8.18 נובע ישירות כי f עולה ב־$\mathbb{R}_{\geq a}$, ולכן מהגדרת גבול פונקציות באינסוף מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

מש"ל

(ii) נוכיח כי אם קיים קבוע $m > 0$ כך ש־$f'(x) \leq -m$ לכל $x \in \mathbb{R}_{\geq a}$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

הוכחה. נובע באופן דומה ממשפט 8.18. מש"ל

סעיף ב'

תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב־$(0, \infty)$ כך ש־$f''(x) > 0$ לכל $x \in (0, \infty)$.

נתון כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

(i) נוכיח כי $f'(x) < 0$ לכל $x \in (0, \infty)$.

הוכחה. ידוע כי $f''(x) > 0$ לכל x בתחום, ולכן ממשפט 8.18 נובע כי $f'(x)$ עולה לכל $x \in (0, \infty)$.

נניח בשלילה כי ישנה נקודה x_0 אשר בה $f'(x_0) = 0$.

בשל עלייתה בכל נקודה, בהכרח לכל $x < x_0$ מתקיים $f'(x) < 0$ ובאופן דומה לכל $x > x_0$ גם $f'(x) > 0$.

בקטע (x_0, ∞) ממשפט 8.18 נובע כי $f(x)$ עולה לכל נקודה, ולכן על־פי הגדרת הגבול לאינסוף

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

בסתירה לטענה כי $f(x)$ מתכנסת לערך ממשי L.

בשל כך לא קיימת נקודה x_0 עבורה $f'(x) = 0$ ולכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $f'(x) < 0$. מש"ל

(ii) נוכיח כי $\sup f'((0, \infty)) = 0$

הוכחה. ממשפט לופיטל נובע כי

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{1}$$

דהינו

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$$

אנו גם יודעים כי $f'(x) < 0$ לכל $x \in (0,\infty)$.

משילוב טענות אלה אנו מקבלים כי לכל $\epsilon > 0$ קיים M כך שלכל $x > M$ מתקיים $-\epsilon < f'(x)$. מצאנו כי לכל $a < 0$ קיים $b \in (0,\infty)$ כך ש־$a \leq f'(b)$ ולכן נובע כי

$$\sup f'((0,\infty)) = 0$$

מש"ל

(iii) נוכיח כי

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$$

הוכחה. למעשה כבר הוכחנו זאת בתת־סעיף הקודם. **מש"ל**

שאלה 6

נחשב את הגבולות הבאים או נוכיח כי אינם קיימים.

סעיף א'

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$$

מחישוב ישיר מתקבל

$$1^1-1=0,\ln 1-1+1=0$$

נשים לב כי

$$(x^x)'=(e^{x\ln x})'=(1\cdot\ln x+x\frac{1}{x})e^{x\ln x}=(\ln x+1)x^x$$

ולכן על־פי משפט לופיטל

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x^x-x)'}{(\ln x-x+1)'}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x+1)x^x-1}{\frac{1}{x}-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}x^x+\ln x(\ln x+1)x^x+(\ln x+1)x^x}{\frac{-1}{x^2}} && \text{על־פי משפט לופיטל}\\&=\frac{\frac{1}{1}1^1+\ln 1(\ln 1+1)1^1+(\ln 1+1)1^1}{\frac{-1}{1^2}}\\&=\frac{1+1}{-1}=-2\end{aligned}$$

ולכן

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=-2$$

סעיף ב'

$$\lim_{x\to 0}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$$

נחשב את שני הגבולות החד־צדדיים.

$$\lim_{x\to 0^+}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{1}=\infty$$

על־פי משפט הרכבה עבור $t=\frac{1}{x}$ ומשפט לופיטל.

$$\lim_{x\to 0^-}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{1}=0$$

על־פי חישוב דומה.

מצאנו כי הגבולות החד־צדדיים שונים ולכן בהתאם הגבול לא מתקיים.

סעיף ג'

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}$$

נבדוק את גבול המעריך:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{\frac{2}{\pi}\arctan x}}{\frac{-1}{x^2}} && \text{לופיטל} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-\arctan x(1+x^2)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\arctan x}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} \\
&= \frac{-2}{\pi}
\end{aligned}$$

ולכן ממשפט פונקציית הרכבה נובע

$$\lim_{x\to 0} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

שאלה 7

סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

מקבלת בקטע $(0, \infty)$ מינימום בנקודה $x = 1$.

הוכחה. ממשפט 8.4 נובע כי בנקודת קיצון של $f(x)$ ערך הנגזרת $f'(x)$ הוא 0, לכן נחשב את הנגזרת ונשווה ל־0:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

נשווה ונפתור

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ & \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \\ & -1 + x = 0 \\ & x = 1 \end{aligned}$$

אנו יודעים כי ל־$f'(x)$ נקודת איפוס אחת בלבד, ומהגדרתה אנו גם יודעים כי היא רציפה, לכן ממשפט ערך הביניים נובע ישירות כי $f'(x) < 0$ לכל $x < 1$, ובאופן דומה גם $f'(x) > 0$ לכל $x > 1$.
ממשפט 8.18 מתקבל כי $f(x)$ יורדת כאשר $x < 1$, ועולה כאשר $x > 1$, לכן בכל סביבה שנבחר $x = 1$ היא מינימום מקומי של $f(x)$, דהינו היא נקודת מינימום של הפונקציה. **מש"ל**

סעיף ב'

נגדיר

$$g(x) = e^x \ln x$$

נוכיח כי הפונקציה מקבלת כל ערך ממשי בדיוק פעם אחת.

הוכחה. תחילה נראה כי מהגדרות רכיבי $g(x)$ ומאריתמטיקה של הגבולות נובע:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$$

מגבול זה אנו יכולים להסיק כי בסביבה החיובית של הפונקציה 0 $g(x)$ עולה.
עוד אנו יכולים להסיק מרכיביה את עלייתה גם בתחום $(1, \infty)$.
ניתן לקבוע כי $g(x)$ עולה לכל $x \in (0, \infty)$ ובהתאם לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $g(x_1) < g(x_2)$, לכן היא מקבלת כל ערך ממשי פעם אחת בלבד. **מש"ל**