# פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

29 באפריל 2023

## שאלה 1

נמצא את נקודות הרציפות והאי־רציפות של הפונקציה $f$ המוגדרת:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \tan \frac{\pi x}{2}$$

בתחום $\mathbb{R}$ ונמיינן.

על־פי משפט 5.13 הפונקציה $\tan \frac{\pi x}{2}$ רציפה בכל תחום הגדרתה, ועל־פי הגדרת הפונקציה אנו יודעים כי היא איננה מוגדרת בערכים

$$\{1 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

מהגדרת החלק השלם והפוקנציה $x$ אנו יודעים כי $\lfloor x \rfloor$ רציפה בכל תחום הגדרתה, ולא מוגדרת בנקודות $x \in \mathbb{Z}$. על־פי משפט 5.11 גם $f$ רציפה בכל תחום הגדרתה, והיא כמובן לא מוגדרת ב־$x \in \mathbb{Z}$. אז כלל הנקודות החשודות באי־רציפות הן $x \in \mathbb{Z}$.

נגדיר מעתה $k \in \mathbb{Z}$. אנו יודעים כי כאשר $x = 1 + 2k$ אז הפונקציה $f(k)$ איננה מוגדרת, וכי $\lim_{x \to k^\pm} f(x) = \pm\infty$, לכן בנקודות אלה ל־$f$ נקודות אי־רציפות ממין שני.

כאשר $x = 2k$ אנו וידעים כי $\tan \pi x 2$ רציפה, ואילו $\lfloor x \rfloor$ מקיימת

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = k - 1 = \left( \lim_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor \right) + \left( \lim_{x \to k^+} \tan \frac{\pi x}{2} \right) = k - 1 + 0 = k - 1$$

וגם

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = k - 1 = k + 0 = k$$

לכן על־פי הגדרה 5.22 הנקודות $x = 2k$ הן נקודות אי־רציפות ממין ראשון ב־$f$.

## שאלה 2

### סעיף א'

תהי $f$ פונקציה המוגדרת בסביבת $x_0$.

**(i)** ננסח את הטענה כי $f$ איננה רציפה ב־$x_0$ בלשון $\epsilon, \delta$:

הפונקציה $f$ לא רציפה ב־$x_0$ אם ורק אם קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים $x$ כך ש־$|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

**(ii)** ננסח את הטענה כי $f$ איננה רציפה ב־$x_0$ בלשון סדרות:

הפונקציה $f$ איננה רציפה ב־$x_0$ אם ורק אם קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$.

### סעיף ב'

נגדיר $g$ פונקציה הרציפה ב־$x_0$ ופונקציה $f$ המוגדרת $f(x) = g(x)D(x)$.

נוכיח כי אם $g(x_0) = 0$ אז $f$ רציפה ב־$x_0$.

מטענה 5.3 נובע כי לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|g(x)| < \epsilon$.

על־פי הגדרת פונקציית דיריכלה אנו יודעים כי $D(x) \in \{0, 1\}$ לכל $x \in \mathbb{R}$, לכן תמיד מתקיים $D(x) \leq 1$. אז כמובן שמתקיים גם $|g(x)|D(x) \leq |g(x)| < \epsilon$ ולכן גם $f(x)$ רציפה ב־$x_0$.

### סעיף ג'

נגדיר $x_0 \in \mathbb{R}$ אשר עבורו $g(x_0) \neq 0$, כמובן גם $g$ רציפה ב־$x_0$.

**(i)** נוכיח כי הפונקציה $f$ איננה רציפה ב־$x_0$ על־פי ההגדרה מסעיף א' (i)

*הוכחה.* נמצא $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים ערך $x$ כך ש־$|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

נקבע $\epsilon < 1$, ויהי $\delta > 0$ אשר עבורו $|x - x_0| < \delta$.

מהגדרת פונקציית דיריכלה ואקסיומת הרצף, אנו יכולים להסיק כי קיים מספר $x_1$ אשר מקיים $|x_0 - x_1| < \delta$, ואשר הוא אי־רציונלי. **מש"ל**

**(ii)** נוכיח כי הפונקציה $f$ איננה רציפה ב־$x_0$ על־פי ההגדרה מסעיף א' (ii)

*הוכחה.* נמצא סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$.

נגדיר $(x_n)$ סדרה אינסופית של מספרים אי־רציונליים, $x_1 < x_0$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ כאשר $1 < n$ גם

$$x_n < x_{n+1} < x_0$$

הגדרה זו אפשרית כמובן על־פי צפיפות הממשיים.

על־פי הגדרת הגבול עבור סדרות, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

אבל אנו יודעים שלכל $n$ גם $f(x_n) = 0$ מהגדרת פונקציית דיריכלה, לכן

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq x_0$$

**מש"ל**

## שאלה 3

תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$.

נוכיח כי אם לכל $x > 0$ מתקיים $x < |f(x)|$, אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ או $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

*הוכחה.* תחילה נראה כי הפונקציה $f(x)$ היא חיובית לכל $x$ או שלילית לכל $x$ בתחום.

נניח בשלילה כי $f(x)$ משנה סימן כאשר $x = x_0$. נניח כי קיים $a$ כך ש-$a < x_0$ וגם $f(a) < -a$ וכי קיים $b > x_0$ כך ש-$f(b) > b$.

ממשפט ערך הביניים של קושי נובע כי קיים מספר $c$ ככה ש-$f(c) = 0$ בניגוד לנתון כי $0 < x < |f(x)|$.

יכולנו להגדיר את שינוי הסימן ההפוך וההוכחה הייתה נשארת זהה, לכן לא נפגעת הגבלת הכלליות.

אז אנו יכולים להסיק כי לכל $x$ מתקיים $x < f(x)$, או לחילופין לכל $x$ מתקיים $x < -f(x)$.

מהגדרת השאיפה לאינסוף ומינוס אינסוף בפונקציות נובע ישירות כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

או

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

מש"ל

## שאלה 4

תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $\mathbb{R}_{0\geq}=[0,\infty)$ ויהי $L\in\mathbb{R}$. ידוע כי מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

### סעיף א'

נוכיח כי אם $f$ מקבלת מינימום ב־$\mathbb{R}_{0\geq}$ אז קיים $x_0\geq 0$ כך ש־$f(x_0)\leq L$.

*הוכחה.* נקבע כי $x_1$ היא נקודת מינימום של $f(x)$ וכי $f(x_1)=c$.

נבחן שני מקרים, כאשר $c\leq L$ אז כמובן שקיים $x_0$ כזה, והוא כאשר $x_0=x_1$.

לכן עלינו רק לבחון את המקרה בו $c>L$.

מהגדרת הגבול בלשון $\epsilon, M$ נובע כי עבור $\epsilon=|c-L|=c-L$ קיים $M$ כך ש־$|f(x)-L|<c-L$ לכל $x>M$.

אילו היה מתקיים $f(x)<L<c$ והגענו לסתירה לטענה כי $x_1$ נקודת מינימום.

$$f(x)-L<c-L\to f(x)<c$$

הגענו לסתירה לטענה כי $x_1$ היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$ ולכן לא יתכן כי $c>L$ ובהתאם יתכן רק כי $c\leq L$. **מש"ל**

### סעיף ב'

נוכיח כי אם קיים $x_0\geq 0$ כך ש־$f(x_0)<L$, אז $f$ מקבלת מינימום ב־$\mathbb{R}_{0\geq}$.

*הוכחה.* בשל הגבול של $f(x)$ באינסוף אנו יכולים להסיק כי קיים $M\in\mathbb{R}_{0\geq}$ עבורו לכל $x>M$ מתקיים $x<f(x_0)$.

מהמשפט השני של ויירשטראס על הקטע $[0,M]$ נובע כי בקטע זה ישנה נקודת מינימום $x_1$.

כמובן שמתקיים $f(x_0)\geq f(x_1)$, ולכן בהתאם לכל $x>M$ נסיק כי $x<f(x_1)$, ולכן $x_1$ נקודת מינימום בכל הקטע $\mathbb{R}_{0\geq}$. **מש"ל**

### סעיף ג'

נוכיח כי אם קיים $x_0\geq 0$ כך ש־$f(x_0)=L$, אז $f$ מקבלת מינימום ב־$\mathbb{R}_{0\geq}$.

*הוכחה.* אילו $f$ פונקציה קבועה אז כמובן שהיא מקבלת מינימום, ולכן נניח כי $f$ פונקציה רציפה שאיננה קבועה.

אילו קיימת נקודה $x_1$ עבורה $f(x_1)\leq L$ אז על־פי סעיף ב' הפונקציה מקבלת מינימום.

נניח כי לא קיימת נקודה $x_1\neq x_0$ אשר מקיימת $f(x_1)\leq f(x_0)$, אז זוהי כמובן הגדרת המינימום ובמקרה זה $f$ מקבלת מינימום ב־$x_0$ עצמה. **מש"ל**

## שאלה 5

תהי פונקציה $f$ המוגדרת

$$f(x) = \frac{(2x + \sin x)\arctan x}{x^2}$$

נבדוק האם הפונקציה $f$ מקבלת מינימום ב־$(0, \infty)$.

מהגדרה 5.44 ומהגדרה 5.45 ניתן להסיק כי

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

לכן נוכל להסיק בנקל מהאריתמטיקה של הגבולות כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

מהגדרת כלל רכיביה האלגבריים של $f$ אנו למדים כי היא רציפה.

מסעיף א׳ בשאלה 4 אנו למדים כי אם ב־$f$ ישנה נקודת מינימום, אז גם קיים $x_0 \geq 0$ כך ש־$f(x_0) \leq 0$. אנו יודעים מהגדרתן כי $\arctan x, x^2$ חיוביות לכל $x > 0$. באופן דומה, ניתן להסיק כי $2x + \sin x$ חיובי לכל $x > 0$ מהגדרת $\sin x$.

לכן $f(x) > 0$ לכל $x > 0$, ובהתאם ההנחה כי יש ל־$f$ נקודת מינימום סותרת את הטענה כי $x_0$ אשר מקיים את התנאי קיים בתחום.

לכן אין ל$f$ מינימום בתחום $(0, \infty)$.

## שאלה 6

### סעיף א'

הוכיחו כי הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

רציפה במידה שווה בקטע $[0, \infty)$.

*הוכחה.*

$$\left|\sqrt{x_1^2 + x_1} - \sqrt{x_2^2 + x_2}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{x_1^2 + x_1} - \sqrt{x_2^2 + x_2}\right)\left(\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}\right)}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}}\right| = \left|\frac{x_1^2 + x_1 - x_2^2 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}}\right|$$

**מש"ל**