פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

6 במאי 2023

שאלה 1

סעיף א'

נחשב את הגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

מהגדרת $\sin x$ אנו יכולים להסיק כי למשוואה $\sin x = x$ ישנו רק פתרון אחד כאשר $x = 0$, מהרציפות של שתי הפונקציות והעובדה כי $\sin 1 < 1$ (על־פי חישוב ישיר) נובע כי $\sin x < x$ לכל $0 < x$.

ניתן באופן דומה לראות כי $\alpha x < \sin x$ בסביבה חיובית של 0

$$\begin{aligned}
&\alpha x < \sin x < x\\
&\frac{1}{\alpha n^2} < \sin\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}\\
&1+\frac{1}{n^4} < 1+\sin\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{n^2}\\
&\left(1+\frac{1}{\alpha n^2}\right)^{\alpha n^2} < \left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\\
&e^{\alpha} \le \lim_{n\to 0}\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \le e
\end{aligned}$$

וכאשר $\alpha \to 1$ נקבל

$$\lim_{n\to 0}\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$$

סעיף ב'

נמצא את ערך הגבול

$$\lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1}{x^2}}$$

על־פי הרכבת הפונקציה $\frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{t\to\infty}\left|\frac{1}{t}\right|^{t^2}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{|t|^{t^2}}\\
&= \infty
\end{aligned}$$

הגבול מתקיים במובן הרחב.

שאלה 2

תהי פונקציה

$$f(x) = e^{-x} + \sin^2 x$$

סעיף א'

נוכיח כי מתקיים הגבול הבא עבור סדרה

$$\lim_{n\to\infty} f(\pi n) = 0$$

הוכחה. מהגדרת פונקציית $\sin$ אנו יודעים כי $\sin \pi k = 0$ לכל $k \in \mathbb{Z}$.
אז גם $f(\pi k) = e^{-pik} = (\frac{1}{e})^k$, וממשפט 6.9 נובע

$$\lim_{n\to\infty} f(\pi n) = 0$$

מש"ל

סעיף ב'

נוכיח כי

$$\inf f([0, \infty)) = 0$$

הוכחה. נגדיר $a > 0$, ונראה כי קיים x_0 כך ש־$f(x_0) = a$.

אנו יודעים כי כאשר $x \to \infty$ אז $e^{-x} \to 0$, לכן מהגדרת הגבול ומתחום ההגדרה של e^{-x} אנו יודעים שקיים מספר $x_1 < a$.

ממשפט ערך הביניים של קושי נובע גם כי x_0 כזה המתואר קיים.

לכן $0 < f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה וכל $a > 0$ שנבחר קיים בתמונת f, ומהגדרה 3.12 ונבע כי $\inf f([0, \infty)) = 0$. **מש"ל**

סעיף ג'

נוכיח כי הפונקציה f לא מקבלת מינימום בתחום הגדרתה.

הוכחה. נניח בשלילה כי הפונקציה מקבלת מינימום בנקודה x_0, ונגדיר כי $f(x_0) = c$.

כפי שראינו בסעיף הקודם, אילו $c > 0$ אז קיימת נקודה x_1 כך ש־$f(x_0) < f(x_1)$. לא קיים ערך x_0 עבורו $c = 0$, וידוע מהגדרתה כי f לא שלילית לאף ערך x.

על־כן ניתן לקבוע כי לא קיים x_0 כזה ובעקבות כך לפונקציה f אין מינימום. **מש"ל**

שאלה 3

בכל סעיף נמצא את תחום ההגדרה, תחום הרציפות תחום הגזירות, ואת ערך הנגזרת לכל נקודה בתחום הגזירות של הפונקציה המוגדרת.

סעיף א'

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(x)\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

מהגדרת פונקציית sin נובע כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$, ומוגדר $f(0) = 0$, לכן $f(x)$ רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$.

ממסקנה 5.12, משפט 5.13 והאריתמטיקה של פונקציות רציפות נובע כי $f(x)$ רציפה לכל $x \neq 0$. נוכיח כי $f(x)$ רציפה ב־$x = 0$.

הוכחה. על־פי הגדרת הרציפות בנקודה, עלינו להוכיח כי

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

ידוע כי $\sin x$ היא חסומה, ולכן גם $\sin\frac{1}{x}$ חסומה, ומטענה 4.44 נובע כי

$$\lim_{x\to 0} \sin^2 x = 0$$

מהגדרת ההתכנסות בנקודה לפונקציה לפי היינה ומהגדרה 2.13 נובע כי

$$\lim_{x\to 0} \sin^2 x \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

מש"ל

מצאנו כי $f(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x \in \mathbb{R}$.

נגדיר $f'(x)$ פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ונבדוק מתי היא מוגדרת.

על־פי משפט 7.14 ומשפט 7.21 $f(x)$ גזירה לכל $x \neq 0$. נחשבה:

$$f'(x) = (\sin^2 x)' \sin\frac{1}{x} + \sin^2 x(\sin\frac{1}{x})' = 2\sin x\cos x\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin^2 x\cos\frac{1}{x}$$

נבדוק עתה את $x = 0$:

מטענה 7.8 נובע כי נוכל לבדוק את קיום הגבול הבא

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\sin\frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x} \\ &= 1\cdot 0 \end{aligned}$$

מצאנו כי הגבול קיים ולכן מהגדרה 7.8 נובע כי $f'(0) = 0$.

סעיף ב'

$$g(x) = |\ln x|$$

מהגדרה 6.11 והגדרת הערך המוחלט נובע כי $g(x)$ מוגדרת לכל $x \geq 0$.

ממשפט 6.10 והגדרה 6.11 נובע כי $g(x)$ רציפה בכל תחום חיוביותה, דהינו כאשר $1 < x$. בתחום $0 < x < 1$ הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = -\ln x$ ולכן רציפה גם כן.

נבחן את $x = 1$, בנקודה זו מטענה 6.13 ורציפות הלוגריתם נובע

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = 0 = g(1)$$

ולכן $g(x)$ רציפה בכל תחום הגדרתה.

נמצא את תחום הגזירות של $g(x)$.

בתחום $x > 1$ ממשפט 7.29 נובע ישירות כי $g'(x) = \frac{1}{x}$. בתחום $0 < x < 1$ ראינו כי $g(x) = -\ln x$ ובהתאם $g'(x) = \frac{-1}{x}$.

מטענה 7.10 והרכבת פונקציות נובע כי $g(x)$ לא גזירה כאשר $x = 1$.

שאלה 4

תהי f פונקציה זוגית ב־$\mathbb{R}$. נוכיח כי אם $f(x)$ גזירה כאשר $x = 0$ אז $f'(0) = 0$.

הוכחה. נניח כי f גזירה ב־0 וידוע כי $f(-x) = f(x)$ לכל x.

תהי x_0 נקודה כלשהי אשר f מוגדרת וגזירה בה. מטענה 7.7 נובע

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

גבול מוגדר. עתה נראה כי מהזוגיות של f נובע

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-x_0+h) - f(-x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-f(x_0-h) + f(x_0)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h}$$

נגדיר $h' = -h$ ולכן

$$L = -\lim_{h' \to 0} \frac{f(x_0+h') - f(x_0)}{h'}$$

לכן על־פי הגדרה 7.7 הפונקציה f גזירה בנקודה $-x_0$ ומתקיים $f'(-x_0) = -f'(x_0)$.

ידוע כי 0 נקודת גזירות, לכן $f'(-0) = -f'(0)$ ולכן בהכרח $f'(0) = 0$. **מש"ל**

שאלה 5

יהי $a \in \mathbb{R}$ ופונקציה המוגדרת

$$f(x) = \begin{cases} x + xe^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{a - 2\cos x}{\sin x} & x > 0 \end{cases}$$

סעיף א'

נמצא את כל ערכי a שעבורם הפונקציה f רציפה ב־$x = 0$.

על־פי אריתמטיקה של גבולות, גבול הרכבה והגדרת אקספוננט:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x + xe^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$$

לכן הפונקציה f רציפה משמאל בנקודה $x = 0$.

נבדוק את רציפות f מימין כאשר $a \neq 2$:

מטענה 5.44 נובע כי $a - 2\cos x$ רציפה בכל הגדרתה, ובהצבה נקבל $a - 2\cos 0 = a - 2 \neq 0$.

לכן ממשפט 2.43 סעיף ו' נובע (כתלות בהפרש $a - 2$)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{a - 2\cos x}{\sin x} = \frac{\pm 1}{\infty} = \pm\infty$$

לכן הפונקציה f לא רציפה ב־0 כאשר $a \neq 2$.

נבדוק עתה את המקרה $a = 2$:

במקרה זה

$$\frac{a - 2\cos x}{\sin x} = 2\frac{1 - \cos x}{\sin x} = 2\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = 2\frac{\sin^2 x}{\sin(1 + \cos x)} = \frac{2\sin x}{1 + \cos x}$$

לכן בהתאם

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \cdot 0}{1 + 0} = 0$$

ממשפט 4.48 נובע כי

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

ולכן f רציפה ב־0 כאשר $a = 2$ בלבד.

סעיף ב'

נמצא את כל ערכי a עבורם f גזירה ב־0.

נניח בשלילה כי קיים $a \neq 2$ עבורו f גזירה ב־0. מטענה 7.9 נובע כי f רציפה ב־0, אבל ידוע כי f איננה רציפה בנקודה זו ולכן זוהי סתירה. אז כאשר $a \neq 2$ הפונקציה אינה גזירה כאשר $x = 0$.

נבחן את המקרה בו $a = 2$.

מטענה 7.8 נובע כי f גזירה ב־0 אם ורק אם מתקיים הגבול

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

נחשב את שני הגבולות החלקיים בנקודה לפי משפט 4.48.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x + xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} 1 + e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2-2\cos x}{\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x}{x(1+\cos x)} = 1 \cdot \frac{2}{1+1} = 1$$

לכן הגבול מוגדר וערכו 1 ובהתאם f גזירה בנקודה $x = 0$.