פתרון מטלה 06 — תורת ההסתברות (1), 80420

12 בדצמבר 2024

שאלה 1

בקופה n מטבעות. בכל סיבוב שני שחקנים מטילים באופן בלתי תלוי קוביה המתפלגת לפי $\frac{1}{5} = \mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4)$ ו־ $\mathbb{P}(5) = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{10}$. מי שמקבל את הערך הגבוה ביותר מקבל מטבע אחד מהקופה, כאשר אם הערכים שווים אף שחקן לא מקבל מטבע.

סעיף א'

נחשב מהי התפלגות מספר המטבעות שמרוויח כל אחד מהשחקנים בסוף המשחק.

פתרון נגדיר X_i שהשחקן הראשון זכה במטבע ה־i, ובהתאם $X = \sum_{k=1}^{n} X_i$, המקרה שהשחקן הראשון זכה במספר מטבעות במשחק.

נתחיל בחישוב המקרה $\mathbb{P}(X_i = 1)$, אם Y, Z תוצאות ההטלה של שני השחקנים, מתקבל

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(Y > Z) = \mathbb{P}(Y > Z, Z = 1) + \cdots + \mathbb{P}(Y > Z, Z = 6) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 0 = \frac{4+3+2+1}{25} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{41}{100}$$

נגדיר בהתאם $p = 0.41$. נבחין כי מההגדרה $X \sim Bin(n, p)$, לכן

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

סעיף ב'

נחשב מהי ההסתברות לקבל תוצאת תיקו בהטלה מסוימת.

פתרון למעשה מסימטריה ההסתברות בהטלה כלשהי שהשחקן הראשון יזכה ושהשני שוות, והן 0.41, לכן ההסתברות לתיקו היא $1 - 2 \cdot 0.41 = 0.09$.

סעיף ג'

נחשב מהי ההסתברות שמספר הסיבובים הכולל במשחק יהיה לכל היותר $n + 1$.

פתרון אנו יודעים שהמשחק מסתיים לאחר n זכיות של אחד המשתתפים, או לחילופין לאחר $n + Z$ זכיות עבור Z משתנה מקרי המייצג את מספר תוצאות התיקו.

ההסתברות לתוצאת תיקו היא קבועה, ומתקיים $Z \sim Ber(0.09)$.

נגדיר משתנה מקרי חדש W כך שהוא מייצג את מספר תוצאות התיקו שהיו,

נגדיר W_i שסיבוב הסתיים בניצחון כלשהו (ולא בתיקו), לפי הסעיף הקודם מתקיים $W \sim Ber(0.91)$.

עוד נגדיר W הסיכוי שהיו k סיבובים במשחק, לכן $\mathbb{P}(W = k) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{k} W_i = n)$, אבל לפי הנוסחה שראינו בכיתה נובע $W \sim Bin(n, 0.91)$, לכן בהתאם

$$\mathbb{P}(W \le n+1) = \mathbb{P}(W < n) + \mathbb{P}(W = n) + \mathbb{P}(W = n+1) = 0 + 0.91^n + \binom{n+1}{n} 0.91^n \cdot 0.09$$

שאלה 2

תהי $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ סדרה של משתנים מקריים המתפלגים $Ber(p)$ בלתי תלויים.
נקבע $Y_0=0$ וכן $Y_1=\min\{i \mid X_i=1\}$, ובאופן דומה ואינדוקטיבי

$$Y_k=\min\{i\in\mathbb{N} \mid X_i=1, i>Y_{k-1}\}$$

נוכיח ש־$\{Y_k-Y_{k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ היא סדרה של משתנים מקריים בלתי־תלויים המתפלגים גאומטרית עם סיכוי p.

הוכחה. תהי סדרה $\{l_i\}_{i=1}^k\subseteq\mathbb{N}$, ולכן

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\forall 1\le i\le k, Y_i-Y_{i-1}=l_i)\\
=&\mathbb{P}(Y_0=0, Y_1-0=l_1, Y_2-Y_1=l_2,\dots,Y_k-Y_{k-1}=l_k)\\
=&\mathbb{P}(Y_0=0, Y_1=l_1, Y_2=l_2+l_1,\dots,Y_k=l_k+\dots+l_1)\\
=&\mathbb{P}(X_1=0,\dots,X_{l_1}=1,X_{l_1+1}=0,\dots,X_{l_2+l_1}=1,X_{l_2+1}=0,\dots,X_{l_k+\dots+l_1}=1)\\
=&\mathbb{P}(X_1=0)\cdots\mathbb{P}(X_{l_1}=1)\mathbb{P}(X_{l_1+1}=0)\cdots\mathbb{P}(X_{l_2+l_1}=1)\mathbb{P}(X_{l_2+1}=0)\cdots\mathbb{P}(X_{l_k+\dots+l_1}=1)\\
=&(1-p)^{l_1-1}p(1-p)^{l_2-1}p\cdots(1-p)^{l_k-1}p\\
=&p^k(1-p)^{l-k}
\end{aligned}$$

עבור $l=\sum_{i=1}^k l_i$. נבחין כי מצאנו אי־תלות, שכן אין תלות בבחירת הערכים או k, וכן שמתקיים $\mathbb{P}(Y_k-Y_{k-1}=l_k)=p(1-p)^{l_k-1}$, דהינו $Y_k-Y_{k-1}\sim Geo(p)$. $\square$

שאלה 3

יהיו $X_1, \ldots, X_r \sim Geo(p)$ בלתי־תלויים.

סעיף א׳

נוכיח כי

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 2 + k) = (k+1)(1-p)^k p^2$$

הוכחה. מנוסחת ההסתברות השלמה ושימוש ב־ $\text{Supp}(X_1 + X_2)$ נובע

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 2 + k) &= \sum_{i=1}^{2+k} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 2 + k, X_1 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{2+k} \mathbb{P}(X_2 = 2 + k - i, X_1 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{2+k} \mathbb{P}(X_2 = 2 + k - i)\mathbb{P}(X_1 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{2+k} p(1-p)^{2+k-i-1} p(1-p)^{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{2+k} p^2(1-p)^k \\
&= (k + 2 - 1)p^2(1-p)^k
\end{aligned}$$

□

סעיף ב׳

נוכיח כי מתקיים

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{r} X_i = r + k) = \binom{k + r - 1}{r - 1}(1-p)^k p^r$$

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על r, כאשר את המקרה של $r = 1$ טריוויאלי ו־$r = 2$ הוכח בסעיף א׳.
נניח אם כך שהטענה נכונה עבור $1 \leq r' < r$ ולכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{r} X_i = r + k) &= \sum_{j=1}^{r+k} \mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(\sum_{i=2}^{r} X_i = (r-1) + (k - j - 1)) \\
&= \sum_{j=1}^{r+k} p(1-p)^{j-1} \cdot \binom{(k-j) + (r-1) - 1}{(r-1) - 1}(1-p)^{k-j} p^{r-1} \\
&= \sum_{j=1}^{r+k} \cdot \binom{k - j + r - 3}{r - 2}(1-p)^k p^r \\
&= \sum_{j=1}^{r+k} \cdot \binom{k - j + r - 3}{r - 2}(1-p)^k p^r
\end{aligned}$$

ולבסוף מזהות ונדרמונדה השוויון המבוקש מתקיים והשלמנו את מהלך האינדוקציה. □

שאלה 4

סעיף א׳

נוכיח שאם $X \sim Bin(n,p)$ אז $(n-X) \sim Bin(n,1-p)$.

הוכחה.

$$\mathbb{P}(n-X=l)=\mathbb{P}(X=n-l)=\binom{n}{n-l}p^{n-l}(1-p)^{n-(n-l)}=\binom{n}{l}p^{n-l}(1-p)^{l}$$

ולכן מהגדרה $n-X \sim Bin(n,1-p)$. □

סעיף ב׳

שתי חברות מטילות כל אחת מטבע הוגן n פעמים באופן בלתי־תלוי.

נסמן N_i את מספר תוצאות העץ של החברה ה־i.

נראה שמתקיים $N_1+(n-N_2) \sim Bin(2n,\frac{1}{2})$.

הוכחה. בתרגול ראינו שמתקיים $N_1+N_2 \sim Bin(2n,\frac{1}{2})$. עוד נבחין כי $(n-N_2) \sim Bin(n,1-\frac{1}{2})=Bin(n,\frac{1}{2})$ ולכן תוצאת טענה זו עודנה תקפה ומתקיים $N_1+(n-N_2) \sim (2n,\frac{1}{2})$. □

סעיף ג׳

נראה כי ההסתברות לכך ששתיהן קיבלו את אותו מספר תוצאות H היא $\binom{2n}{n}/4^n$ ונסיק את הזהות

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

הוכחה.

$$\mathbb{P}(N_1+(n-N_2)=0)=\binom{2n}{n}(\frac{1}{2})^n(1-\frac{1}{2})^{2n-n}=\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$$

אבל מתוצאת התרגול נובע גם

$$\mathbb{P}(N_1+(n-N_2)=0)=\mathbb{P}(N_1+N_2=n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\frac{1}{4^n}$$

ולכן נובע

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

□

שאלה 5

עבור $i \in [n]$ נגדיר $X_i \sim Ber(p)$ ו־$Z_i \sim Ber(q)$, ובנוסף $Y_i = X_i Z_i, X = \sum X_i, Y = \sum Y_i$.

סעיף א׳

נראה ש־$X \sim Bin(n, p), Y \sim Bin(n, pq)$ ולכל $0 \le m \le n$ גם $Y \mid \{X = m\} \sim Bin(m, q)$.

הוכחה. למעשה כבר ראינו בכיתה כי $X \sim Bin(n, p)$, נראה כי גם $Y \sim Bin(n, pq)$.

$$\mathbb{P}(Y_i = k) = \mathbb{P}(X_i Z_i = k) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(Z_i = 1) & k = 1 \\ \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(Z_i = 0) + \mathbb{P}(X_i = 0)\mathbb{P}(Z_i = 1) + \mathbb{P}(X_i = 0)\mathbb{P}(Z_i = 0) & k = 0 \\ \mathbb{P}(X_i = k)\mathbb{P}(Z_i = k) & \text{else} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} pq & k = 1 \\ 1 - pq & k = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהשלמה עבור $k = 1, k \notin \{0, 1\}$, לכן $Y_i \sim Ber(pq)$ ובהתאם $Y \sim Bin(n, pq)$.

נוכיח ש־$Y \mid \{X = m\}$ באינדוקציה על n.

נניח $n = 1$ ולכן

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k \mid X = m) &= \mathbb{P}(X_1 Z_1 = k \mid X_1 = m) && = \mathbb{P}(mZ_1 = k, X_1 = m)/\mathbb{P}(X_1 = m) \\ &= \mathbb{P}(mZ_1 = k)\mathbb{P}(X_1 = m)/\mathbb{P}(X_1 = m) && = \mathbb{P}(mZ_1 = k) \end{aligned}$$

אבל $k \in \{0, 1\}$ ולכן $\mathbb{P}(Z_1 = k) = \binom{m}{k} q^k (1 - q)^{m-k}$ מחישוב ישיר ולכן הטענה תקפה עבור המקרה $n = 1$.

נניח אם כך שהטענה נכונה עבור $1 < n \in \mathbb{N}$, ונבדוק את המקרה n,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k \mid X = m) &= \mathbb{P}(Y = k \mid X = m, X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(Y = k \mid X = m, X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(\sum_{i=2}^{n} Y_i = k \mid \sum_{i=2}^{n} X_i = m, X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(Z_1 + \sum_{i=2}^{n} Y = k \mid \sum_{i=2}^{n} X_i = m - 1, X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &= \binom{m}{k} q^k (1 - q)^{m-k} (1 - p) + \mathbb{P}(Z_1 = 0) \binom{m-1}{k} q^k (1 - q)^{m-1-k} p \\ &\quad + \mathbb{P}(Z_1 = 1) \binom{m-1}{k-1} q^{k-1} (1 - q)^{m-1-k+1} p \\ &= \binom{m}{k} q^k (1 - q)^{m-k} (1 - p) + \binom{m}{k-1} q^k (1 - q)^{m-k} p + \binom{m-1}{k-1} q^k (1 - q)^{m-k} p \\ &= \binom{m}{k} q^k (1 - q)^{m-k} (1 - p + p) \end{aligned}$$

והשלמנו את מהלך האינדוקציה, ולכן $Y \mid \{X = m\} \sim Bin(m, q)$. □

סעיף ב׳

נסיק כי אם $X \sim Bin(n, p)$ ו־Y משתנה מקרי כך שלכל ערך $0 \le m \le n$ מתקיים $Y \mid \{X = m\} \sim Bin(m, q)$ אז $Y \sim Bin(n, pq)$.

הוכחה. לא יודע □

שאלה 6

נניח כי הסתברות של א' לנצח את ב' במשחק היא $\frac{2}{3}$ באופן בלתי תלוי בתוצאת המשחקים הקודמים.
השניים משחקים עד שאחד מהם זוכה בשלושה משחקים בסך־הכול. נחשב מה ההסתברות שא' יזכה.
פתרון אם X_i שא' זכה בסיבוב ה־i אז $X_i \sim U(\frac{2}{3})$, ולכן גם $X^n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ מספר הזכיות ב־n סיבובים הוא $X^n \sim Bin(n, \frac{1}{3})$.
אילו $n > 5$ אז בוודאות יש לפחות שלושה נצחונות לאחד מהם, לכן נבחן את $n = 5$ ונבדוק את $\mathbb{P}(X^n \geq 3)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X^n \geq 3) &= \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5) \\
&= \binom{5}{3}(\frac{2}{3})^3(1-\frac{2}{3})^{5-3} + \binom{5}{4}(\frac{2}{3})^4(1-\frac{2}{3})^{5-4} + \binom{5}{5}(\frac{2}{3})^5(1-\frac{2}{3})^{5-5} \\
&= \frac{1}{3^5}(10 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5) \\
&= \frac{1}{3^5}(5 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^4) \\
&= \frac{2^6}{3^4}
\end{aligned}
$$