פתרון ממ"ן 15 – אלגברה לינארית 1 (20109)

3 בפברואר 2023

שאלה 1

סעיף א'

נבדוק אם ההעתקה $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על־ידי $T_1(x, y) = (\sin y, x)$ היא העתקה לינארית.

נעשה זאת על־ידי בדיקה ישירה של תנאי הגדרה של העתקה לינארית, לפיהם עבור כל העתקה T מעל מרחב U ושדה F מקיימת:

$$u_1, u_2 \in U, \lambda \in F$$

$$T(\lambda u_1) = \lambda T(u_1)$$

$$T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2)$$

ניתן לראות כי עבור T_1 לא מתקיים $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ כאשר $u = (0, \frac{\pi}{2}), \lambda = 2$, שכן מתקיים:

$$2T_1(0, \frac{\pi}{2}) = 2(1, 0) = (2, 0)$$

$$T_1(2(0, \frac{\pi}{2})) = T_1(0, \pi) = (0, 0)$$

$$(2, 0) \neq (0, 0)$$

לכן ההעתקה T_1 היא לא העתקה לינארית.

סעיף ב'

נבדוק אם ההעתקה $T_2 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ המוגדרת על־ידי $T_2(p(x)) = (x + 1)p'(x) - p(x)$ היא העתקה לינארית.

תחילה נבדוק אם עבור כל $\lambda \in \mathbb{R}$ ו־$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ מתקיים $\lambda T_2(p(x)) = T_2(\lambda p(x))$. נסתמך על התכונות של פולינומים:

$$\lambda T_2(p(x)) = \lambda((x + 1)p'(x) - p(x)) = (x + 1)\lambda p'(x) - \lambda p(x) = (x + 1)p'(\lambda x) - p(\lambda x) = T_2(\lambda p(x))$$

אנו רואים כי תנאי זה אכן מתקיים. נבדוק אם עבור כל $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ מתקיים $T_2(p_1(x)) + T_2(p_2(x)) = T_2(p_1(x) + p_2(x))$:

$$\begin{aligned}
T_2(p_1(x)) + T_2(p_2(x)) &= (x + 1)p_1'(x) - p_1(x) + (x + 1)p_2'(x) - p_2(x) \\
&= (x + 1)(p_1'(x) + p_2'(x)) - (p_1(x) + p_2(x)) \\
&= (x + 1)(p_1 + p_2)'(x) - (p_1(x) + p_2(x)) \\
&= T_2(p_1(x) + p_2(x))
\end{aligned}$$

ראינו כי גם תנאי זה מתקיים, לכן ההעתקה T_2 היא אכן העתקה לינארית.

שאלה 2

סעיף א'

נראה כי לא קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ השונה מאפס המקיימת:

$$\lambda = T(1,0,1) = T(1,2,1) = T(0,1,1) = T(2,3,3)$$

ידוע כי T היא העתקה לינארית, לכן מתקיים:

$$\lambda = T(2,3,3) = T((1,0,1)+(0,1,1)+(0,1,1)) = T(1,0,1)+T(0,1,1)+T(0,1,1) = 3\lambda$$

מכך נובע כי $\lambda = 0$. נבדוק אם הווקטורים $(1,0,1),(1,2,1),(0,1,1)$ פורשים את $\mathbb{R}^3$ לפי שאלה 7.5.12 בעזרת דירוג מטריצת השורות שלהם:

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2-R_1} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2/2} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3-R_2} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

הגענו למטריצת מדרגות ללא שורת אפסים, לכן הווקטורים אכן פורשים את המרחב $\mathbb{R}^3$, ישנם שלושה וקטורים ולכן לפי משפט 8.3.2(ד') קבוצה זו היא בסיס למרחב. כל וקטור במרחב הוא צירוף לינארי של שלושת הווקטורים הנתונים, אך ידוע שכל צירוף לינארי שלהם בהצבה ב־T שווה ל־0, לכן גם ההתעקה הלינארית T היא העתקת האפס, לכן לא קיימת העתקה כזו המקיימת את תנאי השאלה.

סעיף ב'

יהיה V מרחב לינארי ממד סופי ו־U תת־מרחב שלו.

נוכיח שקיימת העתקה לינארית $T:V\to V$, כך שמתקיים $\ker T = U$ ו־$\ker T\cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

ידוע כי ממדו של V סופי, אז נגדיר $V = \operatorname{Sp}\{v_1,\dots v_n\}$ כך ש־n מספר טבעי והקבוצה הפורשת היא בסיס ל־V. ידוע כי $U\subseteq V$, לכן נגדיר $U = \operatorname{Sp}\{v_1,\dots,v_k\}$ כך ש־$k\le n$ והקבוצה הפורשת היא בסיס ל־U. נגדיר העתקה לינארית $T:V\to V$ כך שמתקיים:

$$T(v_1) = T(v_2) = \ldots = T(v_k) = 0$$

בנוסף נגדיר כי לכל $k<i\le n$ מתקיים:

$$T(v_i) = v_i$$

ההעתקה T מוגדרת עבור כלל המרחב V על־ידי הרחבה לינארית מהגדרה על בסיס שלה. על־פי הגדרת ההעתקה מתקיים:

$$\ker T = \operatorname{Sp}\{v_1,\dots,v_k\} = U$$

על־פי ההגדרה התמונה של T, היא מכילה כל וקטור ב־V שאיננו ב־U, דהינו:

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Sp}\{v_{k+1},\dots v_n\}$$

לכן מתקיים:

$$\ker T\cap\operatorname{Im} T = U\cap\operatorname{Sp}\{v_{k+1},\dots,v_n\} = \operatorname{Sp}\{v_1,\dots,v_k\}\cap\operatorname{Sp}\{v_{k+1},\dots,v_n\} = \{0\}$$

הוכחנו כי קיימת העתקה לינארית T המקיימת את התנאים על־ידי בנייתה.

סעיף ג'

יהיה V מרחב לינארי ו־$S : V \to V$ העתקה לינארית הפיכה.

נוכיח כי לא קיימת העתקה לינארית $T : V \to V$ שמקיימת $\ker TS = \{0\}$ ו־$\ker T \neq \{0\}$.

על־פי הגדרת איזומורפיזם והעתקה הפיכה, אנו למדים כי S איזומורפיזם. על־פי למה 9.5.2 $\ker S = \{0\}$. על־פי אותה הלמה אנו רואים כי על TS להיות איזומורפיזם בפרט והפיכה בכלל, וכי על T עצמה להיות לא הפיכה. אם T לא הפיכה, אז קיימים $v, u \in V, u \neq v$ שעבורם מתקיים $T(u) = T(v)$. נגדיר כי $v', u' \in V, S(v') = v, S(u') = u$, נראה כי $u' \neq v'$, שכן S הפיכה ולכן גם חד־חד ערכית. אנו רואים כי $TS(v') = TS(u')$, אבל $v' \neq u'$ ולכן על־פי ההפיכות של TS מתקיים גם $TS(u') \neq TS(v')$. ההגדרה של T מובילה לסתירה, ולכן לא קיימת העתקה המקיימת את התנאים.

שאלה 3

סעיף א'

תהיה $T : V \to V$ העתקה לינארית כאשר V מרחב לינארי מעל השדה F.

קיים מספר טבעי $k \geq 2$ כך ש־$T^{k-1} \neq 0$ ו־$T^k = 0$. יהי $u \in V$ כך ש־$T^{k-1}(u) \neq 0$.

נוכיח שהקבוצה $L = \{u, T(u), T^2(u), \dots, T^{k-1}(u)\}$ בלתי תלויה לינארית.

על־פי הגדרת התלות הלינארית, קיימת תלות רק אם למשוואה:

$$\lambda_1 u + \lambda_2 T(u) + \cdots + \lambda_k T^{k-1}(u) = 0$$

יש רק פתרון טריוויאלי. נבצע את הפעולה T על שני אגפי המשוואה:

$$\begin{aligned}
&T(\lambda_1 u + \lambda_2 T(u) + \cdots + \lambda_k T^{k-1}(u)) = T(0) \\
&\lambda_1 T(u) + \lambda_2 T^2(u) + \cdots + \lambda_k T^k(u) = 0 && T^k(v) = 0 \\
&\lambda_1 T(u) + \lambda_2 T^2(u) + \cdots + \lambda_k 0 = 0
\end{aligned}$$

אם נבצע על אגפי המשוואה השמה ב־T $k-1$ פעמים יתקבל כי:

$$\lambda_1 T^{k-1}(u) = 0$$

ולכן $\lambda_1 = 0$. נוכל לבצע את התהליך הזה שוב ושוב ולהשתמש בהצבה, ונראה כי מתקיים $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$. דהינו, יש רק פתרון אחד למשוואה והוא הפתרון הטריוויאלי, לכן הקבוצה בלתי תלויה לינארית.

סעיף ב'

נוכיח כי לא קיימת מטריצה $A \in M_{2\times 2}(F)$ המקיימת $A^2 \neq 0$ ו־$A^3 = 0$.

נגדיר העתקה לינארית $T : F^2 \to F^2$ כך ש־A המטריצה המייצגת שלה. אז מתקיים $T^2 \neq 0$ ו־$T^3 = 0$. על־פי הסעיף הקודם קיים $u \in F^2$ המקיים $T^2(u) \neq 0$ עבורו $\{u, T(u), T^2(u)\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית. לכן גם הקבוצה השקולה לה $\{u, Au, A^2u\}$ בלתי תלויה לינארית. ידוע כי $\dim F^2 = 2$, לכן מספר האיברים בבסיס של F^2 הוא 2. לפי משפט 8.3.2 קבוצה גדולה מ־2 מ־F^2 היא תלויה לינארית, אבל הקבוצה בעלת שלושת האיברים $\{u, Au, A^2u\}$ בלתי תלויה לינארית וזוהי סתירה, לכן אין מטריצה A שיכולה לקיים את התנאים הנתונים.

שאלה 4

סעיף א'

תהיה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ השונה מהעתקת האפס ואשר מקיימת $T^2 = 2T$, וידוע כי T לא הפיכה.

נמצא את ממד הגרעין והתמונה של T.

ידוע כי T איננה הפיכה, לכן לפי למה 9.5.2 $\ker T \neq \{0\}$. לפיכך אנו יודעים כי T נפרש על־ידי לפחות איבר אחד, לכן $0 < \dim \ker T$.

ההעתקה T שונה מהעתקת האפס, לכן בתמונתה קיימים איברים שונים מאפס, וכך גם ממדה לא יכול להיות 0, $0 < \dim \operatorname{Im} T$. ידוע כי ממד המרחב הוא 2, אז לפי משפט 9.6.1:

$$\dim \underset{0<}{\ker} T + \dim \underset{0<}{\operatorname{Im}} T = 2$$

הערכים האפשריים של ממדים אלה הם 0 עד 2, וניתן לראות כי השוויון מתקיים רק כאשר:

$$\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T = 1$$

סעיף ב'

נוכיח כי קיים בסיס B של $\mathbb{R}^2$ כך שמטריצת הייצוג של T לפי B היא:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ננסה לבנות בסיס מתאים על־פי הגרעין והתמונה של T. נגדיר $u_1 \in \ker T, u_2 \in \operatorname{Im} T$ ובהתאם $B = (u_1, u_2)$. הווקטור u_1 מוכל בגרעין ההעתקה, לכן מתקיים $T(u_1) = 0$, לכן גם:

$$[T(u_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

נגדיר $u_2 \neq 0$, הווקטור מוכל בתמונת ההעתקה, לכן בהתאם קיים וקטור $u_2' \in \mathbb{R}^2, u_2' \neq 0$ אשר מקיים $T(u_2') = u_2$. ידוע כי $T^2(u_2') = 2T(u_2')$, לכן מתקיים גם $T(u_2) = 2u_2 = 0u_1 + 2u_2$, לכן גם:

$$[T(u_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

נבנה מטריצה מייצגת על־פי הגדרה 10.1.1:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

הוכחנו כי קיים בסיס B כזה על־ידי בנייתו.

שאלה 5

סעיף א'

תהיה $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית ויהיה $B = ((1,1,1), (1,0,1), (1,1,0))$ בסיס ל-$\mathbb{R}^3$. ידוע כי:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 3 & 2a & 1 \\ 2c & b & a \end{bmatrix}, (1,0,0) \in \ker T$$

נמצא את ערכי a,b,c:

נגדיר $B=(b_1,b_2,b_3)$. תחילה נראה כי $(1,0,0)=-b_1+b_2+b_3$, לכן $[(1,0,0)]_B=[-1,1,1]^t$. נראה כי $T(1,0,0)=0$, שכן נתון כי הווקטור בגרעין ההעתקה. לפי משפט 10.2.1 מתקיים השוויון הבא:

$$[T(1,0,0)]_B=[T]_B[(1,0,0)]_B$$
$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0&b\\3&2a&1\\2c&b&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a+b\\2a-2\\a+b-2c\end{bmatrix}$$

את שיוויון המטריצות הזה נוכל לפרק למערכת המשוואות:

$$\begin{cases}-a+b=0\\2a-2=0\\a+b-2c=0\end{cases}$$

פתרונה מניב כי $a=b=c=1$.

סעיף ב'

נמצא בסיס לתמונת וגרעין ההעתקה T.

בסעיף הקודם גילינו כי:

$$[T]_B=\begin{bmatrix}1&0&1\\3&2&1\\2&1&1\end{bmatrix}$$

נמצא את כלל הערכים עבורם ההעתקה מקבלת 0, דהינו את גרעינה, על־ידי פתרון מערכת המשוואות $T(u)=0$ בעזרת משפט 10.2.1:

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\3&2&1\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

זוהי כמובן מערכת משוואות הומוגנית, נדרגה כדי למצוא את קבוצת הפתרונות:

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\3&2&1\\2&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-3R_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&-2\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2/2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

אנו רואים כי ישנה שורת אפסים אחת, לכן יש משתנה חופשי אחד ובהתאם ממד מרחב הפתרונות הוא 1, ידוע כבר כי $(1,0,0)\in\ker T$, לכן וקטור זה מהווה בסיס לגרעין ההעתקה.

נמצא את תמונת T. על־פי הגדרת מטריצת מעבר, וקטורי העמודה המופיעים בה הם קורדינטות וקטורים בתמונת T. נבחר את:

$$\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

שכן אינם בלתי תלויים ונחשב את ערכם לפי בסיס B:

$$1 \cdot (1,1,1) + 3 \cdot (1,0,1) + 2 \cdot (1,1,0) = (6,3,4)$$
$$1 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (1,0,1) + 1 \cdot (1,1,0) = (3,2,2)$$

לכן

$$\ker T = \mathrm{Sp}\{(1,0,0)\}, \operatorname{Im} T = \mathrm{Sp}\{(6,3,4),(3,2,2)\}$$

סעיף ג'

נמצא ביטוי עבור $T(x,y,z)$ לכל $x,y,z \in \mathbb{R}^3$.

אנו יודעים כי $(1,0,0) \in \ker T$, לכן $T(1,0,0) = (0,0,0)$.

נחשב את ערכי הווקטורים ששומשו לייצוג בסיס התמונה בסעיף הקודם בעזרת הגדרת הקורדינטה:

$$[T(1,1,1)]_B = \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} \to T(1,1,1) = 1(1,1,1) + 3(1,0,1) + 2(1,1,0) = (6,3,4)$$

$$[T(1,1,0)]_B = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \to T(1,1,0) = 1(1,1,1) + 1(1,0,1) + 1(1,1,0) = (3,2,2)$$

בשל היות T העתקה לינארית, נראה כי:

$$T(1,1,0) - T(1,0,0) = T(0,1,0) = (3,2,2)$$

$$T(1,1,1) - T(1,0,0) - T(0,1,0) = T(0,0,1) = (3,1,2)$$

לכן:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T(x,0,0) + T(0,y,0) + T(0,0,z) \\ &= (0,0,0) + (3y,2y,2y) + (3z,1z,2z) \\ &= (3y+3z, 2y+z, 2y+2z) \end{aligned}$$