

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = xy^2 - 54$$

כאשר האילוץ הוא $g(x, y) = 0$, נגזור:

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y), \quad \nabla g(x, y) = (y^2, 2xy)$$

וממשפט כופלי לגרנז' נקבל כי מתקיים

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \iff (2x, 2y) = \lambda(y^2, 2xy)$$

ולכן נקבל את שתי המשוואות $2x = \lambda y^2$, $2y = \lambda 2xy$, יחד עם השוויון מההגבלה $g(x, y) = 0 \implies xy^2 = 54$.

אנו יודעים כי $y \neq 0$ ולכן נקבל מהשוויון השני כי $x = \frac{1}{\lambda}$.

נציב בשוויון הראשון ונקבל $y^2 = \frac{2}{\lambda^2}$. נציב בשוויון השלישי ונקבל $\lambda = \frac{1}{3}$. $\frac{2}{\lambda^3} = 54 \implies$ בהתאם קיבלנו כי $x = 3, y = 3\sqrt{2}$ ולכן זהו המינימום, ונקבל כי המרחק המינימלי הוא $\sqrt{27}$.