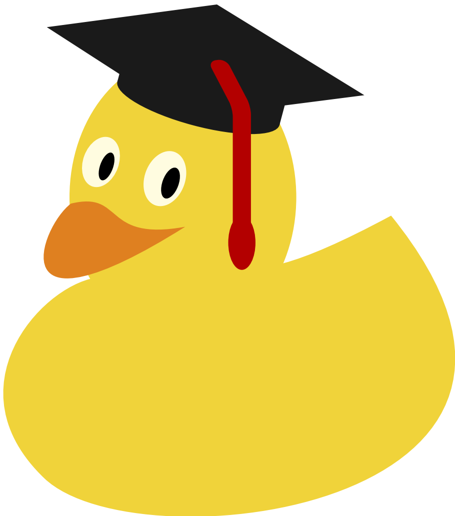
פתרון מטלה 04 — תורת ההסתברות (1), 80420

24 בנובמבר 2024



שאלה 1

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נסתור את הטענה כי שני מאורעות A, B הם בלתי־תלויים אם ורק אם הם זרים על־ידי דוגמה נגדית.

פתרון נגדיר Ω מאורע של הטלת קוביה, $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}$ ונגדיר שהקוביה לא הוגנת ו־1 לא יכול לצאת (השאר בהסתברות שווה), אז $A \cap B \neq \emptyset$ ולכן הם לא זרים, אבל

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = 0 \neq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

סעיף ב'

נסתור את הטענה כי אם A ו־B בלתי־תלויים וגם B ו־C בלתי־תלויים אז A ו־C בלתי־תלויים.

פתרון נגדיר Ω הטלת שתי קוביות, A המאורע שיצא 1 בקוביה א', B המאורע שיצא 1 בקוביה ב' ו־$C = A$, אז

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

לכן A, B בלתי־תלויים, ולכן גם B, C בלתי־תלויים, אבל $A = C$ והם כמובן לא בלתי־תלויים:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{36} = \mathbb{P}^2(A)$$

סעיף ג'

נוכיח שאם A בלתי־תלוי בעצמו, אז $\mathbb{P}(A) = 0$ או $\mathbb{P}(A) = 1$.

הוכחה. נניח בשלילה ש־$\mathbb{P}(A) \notin \{0, 1\}$ ולכן

$$\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}^2(A) \iff 1 = \mathbb{P}(A)$$

וקיבלנו סתירה. $\square$

סעיף ד'

אם A, B בלתי־תלויים אז גם A^C, B^C בלתי־תלויים.

פתרון ראינו בכיתה כי גם A ו־B^C בלתי־תלויים, ומאותה טענה גם A^C ו־B^C בלתי־תלויים.