פתרון מטלה 5 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

12 ביוני 2024

שאלה 1

ניעזר בפולינום טיילור כדי למצוא קירוב רציונלי ל-$\cos\frac{1}{4}$ כך שהשגיאה לא תהיה מעל 10^{-12}.

פתרון. בכיתה מצאנו כי

$$P_{n,\cos,0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

ונבחן את השארית בצורת לגרנז'

$$R_n = \frac{\cos^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} x^{k+1}$$

ובהתאם

$$|R_n| \leq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{4^{k+1}(k+1)!}$$

אם כן נמצא $k \in \mathbb{N}$ עבורו $4^{k+1}(k+1)! \geq 10^{12}$, נבחין כי תנאי זה מתקיים עבור $k = 9$ ולכן

$$\cos\frac{1}{4} = \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{(2n)!} x^{2k} + R_n, \qquad |R_n| < 10^{-12}$$

□

שאלה 2

נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\sin(x)-x}{\sin^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2x}{2\sin^3(x)}$$

נבחין כי נגזרותיה הראשונות של $\sin(2x)$ הן $\sin(2x), 2\cos(2x), -4\sin(2x), -8\cos(2x)$ ובהתאם עבור $x=0$ נקבל $0, 2, 0, -8$ ולכן הגבול שקול לביטוי

$$\lim_{x\to 0}\frac{0+2x-0-\frac{8}{6}x^3+R_{3,\sin(2x),0}(x)-2x}{2\sin^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{\sin^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{3}+o(x^3)/x^3}{\sin^3(x)/x^3}=-\frac{2}{3}$$

שאלה 3

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(x)=\sin(x^{10})$ ונחשב את $f^{(2024)}(0), f^{(2025)}(0), f^{(2026)}(0)$.

נשתמש בתוצאת סעיף 6א' מהמטלה הקודמת ונקבל כי $\forall k\geq 0: (f(x))^{(k)}=f^{(k)}(x)h(x)$ כאשר h פולינום כלשהו.

עתה נבחין כי כל מונום ב־h מוכפל ב־$\sin(x^{10})$ או ב־$\cos(x^{10})$, וכי הם מתחלפים בזוגיות (להוציא סימן) ולכן חזקת המונום זוגית רק במקרה של מכפלה ב־cos וזוגית במכפלה ב־sin, ונקבל כי האיבר החופשי מוכפל תמיד ב־sin.

לכן לכל נגזרת באפס כלל המונומים מתאפסים בשל הכפולה ב־x, והאיבר החופשי מתאפס שכן $\sin(0^k)=0$ לכל $k\in\mathbb{N}$. בהתאם נובע

$$f^{(2024)}(0)=f^{(2025)}(0)=f^{(2026)}(0)=0$$

שאלה 4

סעיף א'

נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים
$$0 < e - S_n < \frac{3}{(n+1)!}$$
כאשר $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

הוכחה. נבחין כי על־פי הנלמד בכיתה מתקבל $S_n = P_{n,\exp,0}(1)$.
עוד ידוע ש־$\exp(1) = e$ ולכן $R_{n,\exp,0}(1) = e - S_n$.
נציג את השארית בצורת לגרנז' ונקבל
$$R_{n,\exp,0}(1) = \frac{\exp^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}$$
עתה נבחין כי $0 < c < 1$ על־פי משפט השארית ובהתאם $1 < e^c < e < 3$ ומכאן נסיק ישירות כי
$$0 < R_{n,\exp,0}(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$
ומצאנו כי אי־השוויון נכון. $\square$

סעיף ב'

נמצא קירוב רציונלי ל־e כך שהשגיאה לא תעלה על 10^{-3}.
לאחר מכן נשווה תוצאה זו לקירוב $(1 + \frac{1}{1000})^{1000}$.

מצאנו בסעיף הקודם חסם לשארית הקירוב הרציונלי לפי פולינום טיילור ל־e, ולכן מספיק שנמצא $n \in \mathbb{N}$ עבורו
$$3 \cdot 10^3 = 3000 < (n+1)!$$
מבדיקה מהירה נקבל כי $n = 6$ מקיים את השוויון והוא הטבעי המינימלי הכזה (נשבע שבדקתי בדף ולא במחשבון),
לכן $e = \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!}$ בקירוב הרלוונטי.
$$\begin{aligned} e &= 2.71828182846\ldots \\ &\approx \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} = 2.718055555\ldots \\ &\approx (1 + \frac{1}{1000})^{1000} = 2.71692393224 \end{aligned}$$
דהינו הקירוב שמצאנו הוא הרבה יותר מדויק ביחס לכמות החישוב הנדרשת.

סעיף ג'

נוכיח כי e לא רציונלי.

הוכחה. נניח בשלילה כי e רציונלי, ולכן קיימים $p, q \in \mathbb{N}$ עבורם מתקיים $e = \frac{p}{q}$. עתה נשים לב כי
$$e = \frac{p}{q}$$

נבחין כי מסעיף 1 נובע

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(q+1)!}$$

$$0 < \frac{p(q-1)!}{q!} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(q+1)!}$$

$$0 < \frac{p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} k!}{q!} < \frac{3}{(q+1)!}$$

$$0 < p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} k! < \frac{3}{q+1}$$

ולכן $C = p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} k!$ מקיים $0 < C < 1$ עבור $qle2$ בסתירה לזה שהוא מספר שלם מהגדרתו, ולכן $0 < q < 2$.
אבל מצאנו בסעיף הראשון כי לא יתכן ש־e הוא מתחלק ב־2 והגענו לסתירה.
לכן e לא רציונלי. $\square$

שאלה 5

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה.
ידוע גם כי לכל $b>0$ קיים M קבוע כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in[0,b]$ מתקיים $|f^{(n)}(x)|\le M$.
נוכיח שלכל $b>0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}P_n(b)=f(b)$ כאשר $P_n(x)=P_{n,f,0}(x)$.

הוכחה. יהי $b>0$ אז קיים M קבוע כך שלכל $x\in[0,b]$ מתקיים

$$\frac{|f^{(n+1)}(b)|}{(n+1)!}<\frac{M}{(n+1)!}$$

ובהתאם גם

$$0\le R_n(x)=\frac{|f^{(n+1)}(b)|}{(n+1)!}x^{n+1}<\frac{Mb^{n+1}}{(n+1)!}$$

כאשר R_n שארית בצורת לגרנז'. כמובן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Mb^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

ולכן מכלל הסנדוויץ' נובע כי $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ולכן נסיק כי

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\lim_{n;\to\infty}f(x)-R_n(x)=f(x)$$

ובפרט הגבול מתקיים גם עבור $x=b$. □

שאלה 6

יהי $\alpha \in \mathbb{Q}$ ונגדיר $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ על־ידי $f(x) = (x+1)^{\alpha}$.

סעיף א'

יהי $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ונחשב את $P_{n,f,0}$.

תחילה נבחין כי $f^{(n)}(x) = (\prod_{k=0}^{n-1} \alpha^k)(x+1)^{\alpha-n}$ על־פי חוקי גזירה.

עתה נחשב את פולינום טיילור:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (\prod_{k=0}^{n-1} \alpha^k)(0+1)^{\alpha-n} \frac{1}{k!} 1^{\alpha-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

סעיף ב'

נחשב את P_4 עבור f כאשר $\alpha = \frac{1}{2}$.

קיבלנו

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{32}x^2 + \dots$$

סעיף ג'

.i

נקבל כי

$$P_0(9) = 1, P_1(9) = 5.5, P_2(9) = -4.65, P_3(9) = 40.9375, P_4(9) = -215 \dots$$

ונבחין כי הסדרה הזו לא מתכנסת, אף לא במובן הרחב.

.ii

נקבל הפעם כי

$$3 \cdot P_0(9) = 3, 3 \cdot P_1(9) = 3.166 \dots, 3 \cdot P_2(9) = 3.1620 \dots, 3 \cdot P_3(9) = 3.1622 \dots, 3 \cdot P_4(9) = 3.1622 \dots$$

הפעם ניתן לראות כי סדרת המספרים נזכירה את ערכו של $\sqrt{10}$ ונראה כי היא נוטה להתכנסות.

סעיף ד'

ננסה לחסום מלעיל את הפיתוח של $y = \sqrt{\frac{6}{5}}$ הנתון על־ידי $A = 1.095 = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{200}$.

נתבקשנו לחסום מלעיל, ולא למצוא חסם עליון, ולכן נבחר 1000000000000000000000000 כחסם ונראה כי הוא אכן תקף.

שאלה 7

יהיו $L, U \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקות כך ש־$L \leq U$.

סעיף א'

נוכיח כי $\sup(L) = \inf(U)$ אם ורק אם קיימות סדרות $(u_n)_{n=1}^{\infty}, (l_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$l_n \in L, u_n \in U$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ומתקיים $\lim_{n\to\infty}(u_n - l_n) = 0$.

נראה גם כי $\lim_{n\to\infty} u_n = \inf(U) = \sup(L) = \lim_{n\to\infty} l_n$.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $\sup(L) = \inf(U)$, דהינו קיים M כך שמתקיים $\forall u \in U, l \in L : l \leq M \leq u$.

מההגדרה של אינפימום וסופרמום נקבל גם כי לכל $M - \frac{1}{n}$ ו־$M + \frac{1}{n}$ בהתאמה $\exists l \in L, u \in U : M - \frac{1}{n} \leq u \leq M \leq l \leq M + \frac{1}{n}$.

לכל n נגדיר u_n, l_n איברים המקיימים את אי־השוויון האחרון כפי שהוא מבטיח שקיימים.

מהגדרה זו נובע ישירות כי

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} l_n = M$$

ולכן גם $\lim_{n\to\infty}(u_n - l_n) = 0$.

כיוון שני: נניח כי קיימות סדרות $(u_n), (l_n)$ עבורן

$$\lim_{n\to\infty}(u_n - l_n) = 0$$

נגדיר $M = \inf(U)$ ולכן מאי־השוויון $L \leq U$ נסיק $l_n \leq M \leq u_n$.

נחסר ונקבל $0 \leq M - l_n \leq u_n - l_n$ ולכן מכלל הסנדוויץ' נקבל ישירות $M - l_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

בהתאם $M \xrightarrow[n\to\infty]{} l_n$. נבחין כי $\forall l \in L : l \leq M$ מאי־שוויון הקבוצות, וקיבלנו כי לכל $M - \delta$ קיים $l \in L$ המקיים $M - \delta \leq l_n$ ולכן זהו אינפימום.

קיבלנו כי $M = \inf U = \sup L$. $\square$

שאלה 8

ניתן דוגמה לפונקציות f,g החסומות ב־$[a,b]$ כך שמתקיים

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx < \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))dx$$

נבחר $f(x)=D(x)$ ו־$g(x)=1-D(x)$ כאשר D היא פונקציית דיריכלה.

בכיתה הראינו כי

$$\underline{\int_a^b} D(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$$

ולכן נסיק גם

$$\underline{\int_a^b} 1-D(x)dx = \underline{\int_a^b} g(x)dx = 0$$

אבל $1 = f(x)+g(x)$ ולכן

$$\underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))dx = a-b$$

ומצאנו כי הפונקציות עומדות בתנאי.

שאלה 9

תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על־ידי

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0 & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

סעיף א'

תהי $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[0,1]$, ונחשב את ערכם של m_i, M_i המוגדרים על־ידי

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_{i+1}}\{f(x)\}, M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_{i+1}}\{f(x)\}$$

נבחין כי לכל $x\in[0,1]$ מתקיים $f(x)=0$ או $f(x)=x$ ולכן בהתאם נוכל לקבוע כי $m_i=0$.
את הסופרמום נקבע על־פי צפיפות הרציונליים ולכן $M_i=x_{i+1}$.

סעיף ב'

נוכיח כי f לא אינטגרבילית ב־$[0,1]$.

הוכחה. מצאנו בסעיף הקודם כי על־פי הגדרה מתקיים

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx=0$$

וגם כי

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx>0$$

ולכן הפונקציה לא עומדת בהגדרה לאינטגרביליות. $\square$