פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

2 באוגוסט 2023

שאלה 1

לכל $x \in [0,1]$ נגדיר את $f_n(x)$ בצורה הבאה:

$$f_1(x) = x, f_{n+1}(x) = f_n(x) - f_n^3(x)$$

נוכיח שהסדרה $(f_n(x))$ מתכנסת לכל $x \in [0,1]$ ונבדוק אם היא מתכנסת במידה שווה בקטע זה.

הוכחה. יהי $x_0 \in [0,1]$, ונגדיר סדרת מספרים (a_n) על־ידי:

$$a_1 = f_1(x_0), a_n = f_n(x_0)$$

אז כמובן שנובע גם

$$a_{n+1} = f_{n+1}(x_0) = f_n(x_0) - f_n^3(x_0) = a_n - a_n^3$$

עתה נוכיח באינדוקציה כי $0 \leq a_n \leq a$ לכל n:

בסיס האינדוקציה: נתון כי $a_1 = f_1(x_0) = x_0$ והטענה מתקיימת.

מהלך האינדוקציה: נניח כי $0 \leq a_n \leq 1$.

מתקיים כמובן גם $0 \leq a_n^3 \leq a_n$, ואחרי העברת אגפים $0 \leq a_n - a_n^3 \leq a_n \leq 1$ והשלמנו את מהלך האינדוקציה.

עוד נראה כי אילו $a_n > 0$ אז כמובן שגם $a_n - a_n^3 < a_n$. במהלך ההוכחה מצאנו כי הסדרה מונוטונית במובן הרחב, ואז ראינו כי היא גם מונוטונית או שווה לאפס, לכן a_n סדרה מונוטונית יורדת וחסומה, ולכן מתכנסת, דהינו $(f_n(x_0))$ מתכנסת.

מצאנו כי הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$.

כמובן שמהגדרת הגבול הזה נובע כי לכל $\epsilon > 0$ שנבחר כמעט לכל n מתקיים

$$f_n(x_0) = |0 - f_n(x_0)| = |f(x_0) - f_n(x_0)| < \epsilon$$

ולכן על־פי הגדרה הסדרה (f_n) מתכנסת לפונקציה $f(x)$ במידה שווה בתחום $[0,1]$. **מש"ל**

שאלה 2

נגדיר

$$f_n(x) = \frac{1}{\sin^2 x + (1+x^2)^n}$$

תחילה נמצא את ערכיה של $f(x)$:

לכל $x \neq 0$ הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\infty} = 0$ ומתקיים $f(x) = 0$.

כאשר $x = 0$ אז הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_n(x) = \frac{1}{1}$ ולכן $f(0) = 1$.

נבדוק את התכנסות סדרת הפונקציות $(f_n(x))$ במידה שווה בקטעים הנתונים.

סעיף א'

נבדוק את ההתכנסות במידה שווה בקטע $\mathbb{R}$.

על־פי הגדרת $f_n(x)$ נובע כי היא רציפה לכל n, נניח בשלילה רציפות במידה שווה ונקבל ממשפט 6.4 כי $f(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$, בסתירה לאי־רציפותה ב־$x = 0$.

לכן ההתכנסות היא לא במידה שווה ב־$\mathbb{R}$.

סעיף ב'

נבדוק את התכנסותה במידה שווה בקטע $(0, 1)$.

בקטע זה הפונקציה $f_n(x)$ היא חיובית מונוטונית יורדת, ידוע כי לכל x בתחום $f(x) = 0$ ולכן $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$.

נבחן את $c_n = \sup\{f_n(x) : x \in (0, 1)\}$. אנו יודעים כי לכל $x \in (0, 1)$ מתקיים $f_n(x) < 1$ וכי לכל $x < 1$ קיים x_0 כך ש־$f_n(x_0) > x$.

לכן מתקיים $c_n = 1$ לכל n ובהתאם $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ ועל־כן מלמה 6.3 נובע כי סדרת הפונקציות לא מתכנסת במידה שווה בקטע.

סעיף ג'

נבדוק את התכנסותה במידה שווה בקטע $[\frac{1}{2023}, \infty)$.

מסעיף ב' אנו יודעים כי הפונקציה $f_n(x)$ היא מונוטונית יורדת בתחום, ולכן היא מקבלת מקסימום בקטע בנקודה $x = \frac{1}{2023}$.

בהתאם גם $c_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [\frac{1}{2023}, \infty)\} = f_n(\frac{1}{2023})$.

הגבול $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{\infty} = 0$ כמובן ובהתאם ללמה 6.3 סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה בקטע.

שאלה 3

נבדוק התכנסות במידה שווה בתחום עבור הטורים הבאים:

סעיף א'

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}$$

בתחום התכנסותו.

נראה כי

$$u(x) = x^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

נבדוק את מנת הטור:

$$\left|\frac{e^{-(n+1)x}}{e^{-nx}}\right| = \left|e^{-(n+1)x} \cdot e^{nx}\right| = \left|e^{-x}\right| = e^{-x}$$

נוכל כמובן למצוא מספר q המקיים $e^{-x} \leq q < 1$ אם ורק אם $x > 0$ ובהתאם הטור מתכנס על־פי מבחן דאלמבר לכל $x > 0$.

באופן דומה נקבל ממבחן דאלמבר כי לכל $x \leq 0$ הטור מתבדר.

נבחין כי כאשר הטור מתכנס, הוא מהווה חיבור של פונקציות רציפות ולכן רציף גם הוא, ולכן ממשפט דיני לטורים נובע כי $u(x)$ מתכנסת במידה שווה בתחום התכנסותה.

סעיף ב'

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 9^n}$$

בתחום התכנסותו.

ממבחן לייבניץ נובע כי אם $\frac{x^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 9^n}$ היא סדרה אפסה אז הטור מתכנס. נעיר כי הסדרה חיובית ולכן זהו התנאי היחיד ההכרחי.

נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 9^n} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{x^2}{9}\right)^n$$

ולכן הגבול מתכנס לאפס כאשר $\frac{x^2}{9} \leq 1$ ומתבדר אחרת, דהינו הטור מתכנס כאשר $-3 \leq x \leq 3$.

ממבחן המנה של דאלמבר נובע כי עבור כל x שאיננו בתחום זה הטור מתבדר, ומצאנו כי הוא מתכנס רק כאשר $x \in [-3, 3]$.

נבדוק את התכנסותו במידה שווה בתחום זה.

מהסעיף השני והשלישי של מבחן לייבניץ אנו מסיקים כי עבור $m > n > N$ כאשר N טבעי כלשהו:

$$|S_m - S_n| = |S_m - S - S_n + S| \overset{(1)}{\leq} |S_m - S| + |S_n - S| \overset{(2)}{\leq} a_{n+1} + a_{m+1} \overset{(3)}{\leq} 2a_{N+1}$$

(1) אי שוויון המשולש

(2) משפט לייבניץ

(3) סדרה מונוטונית יורדת

לכל $\epsilon > 0$ נוכל למצוא N כך ש־$2a_{N+1} < \epsilon$ בשל אפסות הסדרה,

ולכן ממבחן קושי להתכנסות במידה שווה נובע כי $u(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-3, 3]$.

סעיף ג'

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^{n-1}$$

בקטע $[-1,1]$.

תחילה נראה כי כאשר $x=0$ גם $u(x)=0$, ובאופן דומה כאשר $x=\pm 1$ אז $1-x^2=0$ ומתקבל באופן דומה כי $u(x)=0$.

נניח עתה כי $x \in (-1,1)$ ונקבע $t = 1-x^2$:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(1-t)t^{n-1} = (1-t)\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

זהו כמובן סכום סדרה הנדסית, נבחין כי $x^2 < 1$ ולכן גם $0 < t < 1$ ולכן

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n = (1-t)\frac{1}{1-t} = 1$$

דהינו לכל $x \in (-1,0), x \in (0,1)$ מתקיים $u(x) = 1$.

כמובן אם כך שבנקודה $x=0$ הפונקציה $u(x)$ איננה רציפה, אלא מקבלת נקודת אי־רציפות סליקה, וממשפט 6.4* נסיק כי $u(x)$ לא רציפה במידה שווה בקטע $[-1,1]$.

שאלה 4

נתון
$$g(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x} & x>-1, x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

נגדיר גם
$$f(x)=\int_0^x g(t)\,dt$$

נפתח את $f(x)$ לטור חזקות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ונמצא את תחום ההתכנסות של הטור.

על־פי שאלה 5.3 מתקיים

$$\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$$

נשים לב כי בהצבה $x=0$ מתקבל 1 ולכן התניית הפונקציה המקורית נשמרת ומתקיים

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$$

נבדוק את הגבול המוגדר על־ידי למה 6.11

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big/\frac{(-1)^n}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-1}{n}\Big/\frac{1}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

אז נובע כי רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R=1$.

ממשפט 6.12 נובע כי $g(x)$ אינטגרבילית ב־$(-1,1)$ ומתקיים

$$f(x)=\int_0^x g(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}x^{n+1}$$

כמובן ש־$f(x)$ מוגדר ב־$(-1,1)$, נבדוק את התכנסותו ב־$x=\pm 1$ בהצבה:

$$f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

וממשפט לייבניץ נובע ישירות כי הטור $f(1)$ מתכנס.

$$f(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}(-1)(-1)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

וממשפט 5.16** אנו רואים כי הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

הוא גבול מתכנס לאפס ולכן הטור מתכנס ובהתאם $f(-1)$ מתכנס ומוגדר.

מצאנו כי $f(x)$ מתכנסת בתחום $[-1,1]$ ומהערה ג' אודות הוכחת משפט אבל נובע כי זוהי התכנסות במידה שווה.

שאלה 5

נוכיח או נפריך את הטענות הבאות:

סעיף א'

נוכיח כי קיים $x \in \mathbb{R}$ כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ מתבדר והטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ מתכנס,
אז רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ שווה לרדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

הוכחה. ש **מש"ל**