פתרון מטלה 09 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

12 ביולי 2024

שאלה 1

תהי $S \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה בעלת נפח, ו־$f : S \to \mathbb{R}$ חסומה כך ש־$f(x) = 0$ לכל $x \in S^\circ$. נוכיח ש־$\int_S f = 0$.

הוכחה. ממשפט מההרצאה נסיק כי לשפה יש מידת לבג 0 ולכן נוכל לבנות חלוקה P כך ש־$A = \{A_1, \dots, A_k, \dots, A_n\}$ כך ש־k התיבות הראשונות מכילות את השפה ושאר התיבות מכילות את כל הפנים (על־פי הלמה שנלמדה על השפה). עתה נקבל מהלמה כי לכל $\varepsilon > 0$ שנבחר $\sum_{i=1}^{k} |A_i| < \varepsilon$, וכמובן $f(A_i) = 0$ לכל $k < i$ ומכאן נוכל להסיק ישירות כי הפונקציה אינטגרבילית ונפחה מתכנס לאפס. $\square$

שאלה 2

תהי $S \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה בעלת נפח ו־$f : S \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחסומה. נראה ש־f אינטגרבילית ב־S.

הוכחה. נבחר תיבה $A \supseteq S$, ונגדיר עליה חלוקה P על־פי הפונקציה המאפיינת 1_S.
לכן נוכל להגדיר קבוצת תיבות $C = \{C_1, \ldots, C_k, \ldots, C_m\}$ כך ש־$C_i \subseteq S$ לכל $1 \leq i \leq k$, ונוכל להסיק כי $1_S(C_i) = 0$ לכל $i > k$.
עבור התיבות החיצוניות עידון לא ישנה את העובדה שהפונקציה מקבל אפס עבורן, ולכן נבחן את העידון של התיבות $\{C_1, \ldots, C_k\}$ בלבד.
מהרציפות בתחום נוכל להסיק כי התמונה ההפוכה של כל נקודה היא קבוצה פתוחה, נוכל לחסום כל קבוצה כזו בתיבה ולהשתמש בקבוצת התיבות הזו כדי לעדן את החלוקה ונקבל התכנסות. □

שאלה 4

נחשב את נפח הקבוצות הבאות.

סעיף א'

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}}\le z\le 6-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}\right\}$$

נקבל

$$\mathrm{Vol}(V)=\int_S 1_S\;dx\;dy\;dz=\int_{\sqrt{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}}\le 6-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}}\left(\int_{\sqrt{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}}}^{6-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}}1dz\right)dx\;dy=\int_0^6\left(\int_{\sqrt{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}}\le 6-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}}1_S\;dx\;dy\right)\;dz$$

נקבל באינטגרל הפנימי שטח אליפסה (הסכום המחוסר מתאפס) ולכן נסיק כי האינטגרל שווה לביטוי

$$\int_0^6\pi\cdot 2\cdot 3\;dz=36\pi$$

סעיף ב'

$$D=\{(x_1,\ldots,x_d)\mid 0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_d\le M\}$$

פירמידה כאשר M קבוע חיובי.

נחשב ונקבל

$$S_D=\int_D 1\;dx=\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_{d-1}\le M}\left(\int_{x_{d-1}}^M 1\;dx_d\right)\;dx_1\ldots dx_{d-1}=\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_{d-1}\le M}(M-x_{d-1})\;dx_1\ldots dx_{d-1}$$

נוכל אם כן לבצע את אותו התהליך שוב ולקבל

$$\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_{d-1}\le M}(M-x_{d-1})\;dx_1\ldots dx_{d-1}=\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_{d-2}\le M}\left(\int_{x_{d-2}}^M(M-x_{d-1})\,dx_{d-1}\right)\;dx_1\ldots dx_{d-2}$$

ערך האינטגרל הפנימי הוא $Mx^{d-1}-\frac{1}{2}x_{d-1}^2\mid_{x_{d-2}}^M=\frac{M^2}{2}-Mx_{d-2}+\frac{x_{d-2}^2}{2}=\frac{1}{2}(M-x_{d-2})^2$ ונקבל

$$\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_{d-2}\le M}\left(\frac{1}{2}(M-x_{d-2})^2\right)\;dx_1\ldots dx_{d-2}$$

ומהפעלת התהליך הזה בדיוק $d-2$ פעמים נוספות נקבל

$$S_D=\frac{1}{d}M^d$$

שאלה 5

סעיף א'

תהי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ רציפה, נשנה את סדר האינטגרציה של

$$\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{x+y}f(x,y,z)\;dz\right)\;dy\right)\;dx$$

להיות על־פי הסדר $dy\;dx\;dz$.

נתחיל בהחלפה של סדר שני האינטגרלים הפנימיים, נבדוק את התחומים ונקבל $0\le y\le 1-x$, $0\le z\le x+y$. משרשור אי־השוויונות נקבל $0\le z\le x+y\le x+1-x=1$ ונסיק $0\le z\le 1$, וכמו־כן $0\le z+x\le y\le 1-x \implies 0\le z\le x+y$ ונקבל את האינטגרל

$$\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_{\max(0,z-x)}^{1-x}f(x,y,z)\;dy\right)\;dz\right)\;dx$$

מצאנו כי התחום של z ושל x לא תלויים ולכן נסיק כי האינטגרל שקול לביטוי

$$\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_{\max(0,z-x)}^{1-x}f(x,y,z)\;dy\right)\;dx\right)\;dz$$

סעיף ב'

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, ונוכיח את נוסחת קושי לאינטגרל משנה:

$$\int_0^M\int_0^{z_1}\int_0^{z_2}\cdots\int_0^{z_{n-1}}g(z_n)\;dz_n\ldots dz_1=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^M(M-t)^{n-1}g(t)\;dt$$

הוכחה. מהחלפת משתנים נקבל עבור שני האינטגרלים הפנימיים

$$\int_0^{z_{n-2}}\int_0^{z_{n-1}}g(z_n)\;dz_n\;d_{z-1}=\int_0^{z_{n-1}}\int_0^{z_{n-2}}g(z_n)\;d_{z-1}\;dz_n=\int_0^{z_{n-1}}(z_{n-2}-0)g(z_n)\;dz_n$$

אם נבחן את תוצאת אינטגרל זה תחת האינטגרל בו הם מוכלים נקבל באותו הליך

$$\int_0^{z_{n-3}}\int_0^{z_{n-1}}z_{n-2}g(z_n)\;dz_n\;dz_{n-2}=\int_0^{z_{n-1}}\int_0^{z_{n-3}}z_{n-2}g(z_n)\;dz_{n-2}\;dz_n=\frac{1}{2}\int_0^{z_{n-1}}z_{n-2}^2g(z_n)\;dz_n$$

נבצע את התהליך הזה שוב ושוב עד שנגיע לאינטגרל החיצוני ונקבל את הביטוי

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-2)!}\int_0^M\int_0^{z_{n-1}}z_1^{n-2}g(z_n)\;dz_n\;dz_1&=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^M\int_0^{M-z_n}z_1^{n-2}g(z_n)\;dz_1\;dz_n\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^M(M-z_n)^{n-1}g(z_n)\;dz_n\end{aligned}$$

□

שאלה 6

נמצא באילו פרוסות אבטיח הנפרס לגובהו יש יותר קליפה.

נניח כי נפח הקליפה הוא $S = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid R_1 \leq \|p\| \leq R_2\}$ עבור $0 < R_1, R_2$ כלשהם, והפרוסות הן מהצורה $\{(x,y,z) \in S \mid a \leq z \leq b\}$ כאשר $[a,b] \subseteq [-R_1, R_1]$ ועובי הפרוסות $b - a$ אחיד.

נבחין כי פרוסה אחת של האבטיח היא הנפח של $a \leq z \leq b$ של S עצמו, ולכן נסיק

$$\mathrm{Vol}(C_{\text{rust}}) = \int_a^b \int_S 1 \; dx \; dy \; dz$$

נשים לב כי עבור z קבוע S היא שני עיגולים נחתכים מהצורה

$$x^2 + y^2 = R_i^2 - z^2$$

ואנו יודעים כי שטח עיגול הוא πr^2 ולכן נסיק כי שטח הפרוסה לפי ציר z הוא $\pi(R_2^2 - R_1^2) = \pi(R_2^2 - z^2 - R_1^2 + z^2)$.
נקבל אם כן שהנפח הוא

$$\int_a^b \pi(R_2^2 - R_1^2) \; dz = (b-a)(R_2^2 - R_1^2)$$

ולכן נסיק שנפח הקליפה הוא זהה לכל פרוסה של אבטיח, תוצאה לא הגיונית שאני לא מקבל.