פתרון מטלה 10 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

26 ביולי 2024

שאלה 1

יהי $A \subset \mathbb{R}^2$ התחום החסום על־ידי העקומים $x^2 - y^2 = 1, y = 0, y = x, xy = 1$ ברביע הראשון.
נחשב את $\int_A (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ על־ידי החלפת המשתנים $u = xy, v = x^2 - y^2$.

נחשב את היעקוביאן עבור החלפת המשתנים ונקבל

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x+y)$$

ולכן $|J^{-1}| = 2(x+y)^2$. נקבל אם כן $f(x,y) = x^2 + y^2 = \frac{1}{2}|J|$.

עוד נבחין כי $v = 0, xy = u = 1 \iff u = 0, y = x = 0 \iff v = 1, y = 0 \iff x^2 - y^2 = 1$ ולכן נקבל ממשפט החלפת משתנים

$$\int_A (x^2, y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{2}\, du \right)\, dv = \frac{1}{2}$$

שאלה 2

נגדיר

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

סעיף א'

נראה ש־$f=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})$.

הוכחה. נחשב

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x(2x+0)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=f(x,y)$$

□

סעיף ב'

נחשב את $\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)\ dx)\ dy$ ואת $\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)\ dy)\ dx$.

נשתמש בתוצאת הסעיף הקודם ונקבל

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\ dx\right)\ dy=\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}\right)\ dy=\int_0^1\left(\frac{1}{1+y^2}-0\right)\ dy=\arctan(y)\big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

ניתן לראות כי

$$f=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2})$$

באותו האופן בו ראינו בסעיף א' את השוויון הדומה עבור x, ונקבל

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\ dy\right)\ dx=\int_0^1\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}^{y=1}\right)\ dx=\int_0^1\left(\frac{-1}{1+x^2}-0\right)\ dx=-\arctan(x)\big|_0^1=-\frac{\pi}{4}$$

סעיף ג'

נשים לב כי תוצאת שני האינטגרלים היא שונה, לכאורה בסתירה למשפט פוביני, נסביר את מקור הבעיה.

הפתרון הוא ש־f כלל לא חסומה בתחום הנתון, כאשר $f(0,0)$ לא מוגדר והפונקציה לא שואפת לערך קבוע בנקודה זו, ולכן תנאי המשפט כלל לא חלים.

שאלה 3

נחשב את האינטגרל של $f(x,y,z,w)=\left((x^2+y^2)(z^2+w^2)\right)^3$ בתחום $\overline{B}(0,3)\subseteq\mathbb{R}^4$

נגדיר $r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan(\frac{y}{x})$ קורדינטות פולריות ו־$s=\sqrt{z^2+w^2},\phi=\arctan(\frac{w}{z})$ קורדינטות קוטביות בלתי תלויות.

ראינו בתרגול כי החלפת משתנים זו עומדת במבחן החלפת משתנים, ולכן נחשב אותה

$$\begin{aligned}
J &= \left|\frac{\partial(r,\theta,s,\varphi)}{\partial(x,y,z,w)}\right| \\
&= \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{\sqrt{z^2+w^2}} & \frac{w}{\sqrt{z^2+w^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-w}{z^2+w^2} & \frac{z}{z^2+w^2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{z^2+w^2}{(z^2+w^2)\sqrt{z^2+w^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+w^2}}
\end{aligned}$$

ולכן $\sqrt{(x^2+y^2)(z^2+w^2)}=J^{-1}=|J^{-1}|$.

עתה נקבל

$$f(x,y,z,w)=J^{-1}\cdot rs^5$$

ולכן גם

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{B}(0,3)} f &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^3\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^3 rs^5\,ds\right)d\varphi\right)dr\right)d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi}1\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\right)\cdot\int_0^3\left(\int_0^3 rs^5\,ds\right)dr \\
&= 4\pi^2\cdot\int_0^3\frac{1}{6}(3^6r-0)\,dr \\
&= 2\cdot3^5\pi^2\cdot\int_0^3 rdr \\
&= 3^7\pi^2
\end{aligned}$$

שאלה 4

תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה, ויהי $B \subset \mathbb{R}^3$ כדור היחידה. לכל $v = (x,y,z)^t$ נחשב

$$\iiint_B \langle Av, v\rangle \, dx \, dy \, dz$$

נגדיר את פונקציית ההמרה לקורדינטה כדורית

$$g(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

ומצאנו בתרגול כי $J_g(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\varphi$ ונבחין כי ביטוי זה תמיד חיובי עבור תחומי המשתנים.

אנו יודעים כי

$$f(x,y,z) := \langle Av, v\rangle = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{21}+a_{12})xy + (a_{31}+a_{13})xz + (a_{23}+a_{32})yz$$

ולכן

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{g^{-1}(B)} f(g(r,\theta,\varphi)) J_g \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

נציב ונקבל את הביטוי

$$\begin{aligned}\iiint_{\substack{0\le r\le 1,\\ 0\le\theta\le 2\pi,\\ 0\le\varphi\le\pi}} &(a_{11}(r\cos(\theta)\sin(\varphi))^2 + a_{22}(r\sin(\theta)\sin(\varphi))^2 + a_{33}(r\cos(\varphi))^2 \\ &+ (a_{21}+a_{12})(r\cos(\theta)\sin(\varphi))(r\sin(\theta)\sin(\varphi)) + (a_{31}+a_{13})(r\cos(\theta)\sin(\varphi))(r\cos(\varphi)) \\ &+ (a_{23}+a_{32})(r\sin(\theta)\sin(\varphi))(r\cos(\varphi)))r^2\sin(\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi\end{aligned}$$

נכנס איברים ונקבל

$$\begin{aligned}\iiint_{\substack{0\le r\le 1,\\ 0\le\theta\le 2\pi,\\ 0\le\varphi\le\pi}} &a_{11}(r^4\cos^2(\theta)\sin^3(\varphi)) + a_{22}(r^4\sin^2(\theta)\sin^3(\varphi)) + a_{33}(r^4\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)) \\ &+ \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12})(r^4\sin(2\theta)\sin^3(\varphi)) + (a_{31}+a_{13})(r^4\cos(\theta)\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)) \\ &+ (a_{23}+a_{32})(r^4\sin(\theta)\sin^2(\varphi)\cos(\varphi))\, dr\, d\theta\, d\varphi\end{aligned}$$

עתה נבחין כי $\int_0^1 r^4\, dr = \frac{1}{5}$ ולכן האינטגרל הנתון שווה לביטוי

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi,\\ 0\le\varphi\le\pi}} &a_{11}(\cos^2(\theta)\sin^3(\varphi)) + a_{22}(\sin^2(\theta)\sin^3(\varphi)) + a_{33}(\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)) \\ &+ \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12})(\sin(2\theta)\sin^3(\varphi)) + (a_{31}+a_{13})(\cos(\theta)\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)) \\ &+ (a_{23}+a_{32})(\sin(\theta)\sin^2(\varphi)\cos(\varphi))\, d\theta\, d\varphi\end{aligned}$$

נחשב את המכפלות שקשורות ל-θ, נחשב כל מקרה לגופו ונבחין לפני זה כי

$$\int \cos^2(\theta)\,\theta = \sin(2\theta) + \frac{x}{2}, \qquad \int \sin^2(\theta)\,\theta = -\frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{x}{2}$$

ולכן גם

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\,\theta = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\,\theta = \pi$$

ונקבל

$$\frac{1}{5}\int_{0\le\varphi\le\pi} (\pi a_{11}(\sin^3(\varphi)) + \pi a_{22}(\sin^3(\varphi)) + 2\pi a_{33}(\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)) + 0)\, d\varphi$$

עתה נבחין כי

$$\int_0^{\pi} \sin^3(\varphi)\, d\varphi = \frac{4}{3}$$

ולכן נקבל כי ערך האינטגרל הוא

$$\frac{\pi}{5}(\frac{4}{3}a_{11} + \frac{4}{3}a_{22} - \frac{2}{3}a_{33})$$

שאלה 5

מומנט אינרציה מוגדר לגוף בתחום $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ושצפיפותו היא $\rho : V \to \mathbb{R}^+$ על־ידי

$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

נוכיח שעבור גוף $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid R_1^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R_2^2\}$ בעל צפיפות אחידה, מתקיים $I_z = \frac{2M}{5} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}$.

הוכחה. נעבור לקורדינטות כדוריות ונקבל

$$\begin{aligned}
I_z &= \iiint_{\substack{R_1 \le r \le R_2, \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \\ 0 \le \varphi \le \pi}} (r^4 \cos^2(\theta)\sin^3(\varphi) + r^4 \sin^2(\theta)\sin^3(\varphi))\,dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= \left(\int_{R_1}^{R_2} r^4\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^3(\varphi)\,d\varphi\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(R_2^5 - R_1^5\right)(2\pi)\left(\frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{4\pi}{15}\left(R_2^5 - R_1^5\right)
\end{aligned}$$

נעבור עתה לחישוב המסה של הקליפה הכדורית

$$\iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \left(\int_{R_1}^{R_2} r^2\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi\right) = \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 1$$

ולכן נקבל

$$I_z = \frac{2\pi}{15}\left(R_2^5 - R_1^5\right) \cdot M \frac{3}{2\pi(R_2^3 - R_1^3)} = \frac{2M}{5} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{(R_2^3 - R_1^3)}$$

$\square$