פתרון מטלה 12 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

26 ביולי 2024

שאלה 1

נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נוכיח ש קיימות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$b_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ וכך ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ו־$\sum_n b_n$ מתכנס אך $\sum_n a_n$ מתבדר.

הוכחה. למעשה כבר הוכחנו את המשפט הזה עבור סדרות אי־שליליות, ולכן נסיק כי אם התנאי מתקיים אז הטורים מתכנסים ומתבדרים ביחד בהחלט, ולכן בפרט גם מתכנסים ומתבדרים ביחד. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי אם $\sum_n a_n$ מתכנס בתנאי, אז קיימת סדרה $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$\epsilon_n = \pm 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \epsilon_n = -\infty$.

הוכחה. נתונה התכנסות בתנאי ולכן $\sum_n |a_n|$ מתבדרת, וזוהי כמובן סדרה מונוטונית חיובית, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.
לכן כמובן $\sum_{n=1}^{\infty} -|a_n| = -\infty$, ונגדיר $\epsilon_n = \frac{-|a_n|}{a_n}$ ולכן $a_n \epsilon_n = -|a_n|$ ונקבל כי הטענה מתקיימת. $\square$

שאלה 2

נמצא בכל סעיף את רדיוס ההתכנסות ותחום ההתכנסות של הטורים הנתונים.

סעיף א'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3+2n-1}{7n^5+4n^2-3}x^n$$

נבחין כי $a_n/\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ ולכן גם $\sqrt[n]{|a_n|}/\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ ונוכל להסיק כי $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, לכן $R=1$. נסיק מנקודות הקצה וממבחן ההשוואה הגבולי שראינו הרגע כי $R=[-1,1]$.

סעיף ב'

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^{n^2}x^n$$

עבור $a\in\mathbb{R}$ קבוע. נראה כי

$$\sqrt[n]{|a^{n^2}|}=|a|^{n^2/n}=|a|^n$$

ולכן נסיק כי אם $-1<a<1$ אז $R=\mathbb{R}$, אם $a=\pm1$ אז $R=(-1,1)$ ואם $|a|>1$ אז $R=0$.

סעיף ג'

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n+6^n}(x+2)^n$$

נראה כי

$$a_n/(\frac{4}{6})^n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \implies \sqrt[n]{|a_n|}/\frac{2}{3} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \implies R=\frac{3}{2}$$

ולכן תחום ההתכנסות הוא $(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2})$ ונשאר לבדוק את נקודות הקצה. עבור $x=-\frac{1}{2}$ נקבל את הטור $\sum_n 1$ והוא כמובן מתבדר, ועבור $x=-\frac{7}{2}$ נקבל $\sum_n(-1)$ וגם הוא מתבדר.

סעיף ד'

$$\sum_{n=1}^{\infty}5^{n\ln n}x^n$$

נראה כי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|5^{n\ln n}|}\lim_{n\to\infty}5^{\ln n}=\infty$$

ולכן $R=0$ ובהתאם הטור מתכנס ב־$x=0$ בלבד.

סעיף ה'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{2n+1}$$

ולכן הסדרה מורכבת מאפסים במקומות הזוגיים וסדרת לייבניץ במקומות האי־זוגיים, ולכן

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\frac{1}{n}}=1$$

ולכן $R=1$ ויש לבדוק נקודות קצה, בשתיהן נקבל מהאי־זוגיות של x את טור לייבניץ והתכנסות, לכן תחום ההתכנסות הוא $[-1,1]$.

סעיף ו'

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^{n^2}$$

עבור $a \in \mathbb{R}$ קבוע. כמו בסעיף הקודם נקבל

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a|^{n/n^2} = 1$$

אם $a = 0$ אז נקבל $R = \infty$, לכן נניח $a \neq 0$ ולכן $R = 1$ ובהתאם בנקודות הקצה נקבל התכנסות אם ורק אם $a < 1$.

סעיף ז'

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n^2} + 4^n}{5^n + 6^n} x^n$$

נראה כי

$$a_n/3^{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \implies \sqrt[n]{|a_n|}/3^n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \implies \sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 0.

שאלה 3

נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נוכיח כי קיים טור חזקות סביב 0 המתכנס בתנאי ב־± 1.

הוכחה. נבחין כי אם $a_n = \frac{1}{n}$ אז נקבל טור חזקות העומד בתנאים אך שמתבדר ב־1, לכן נבחר את הסידור מחדש של טור לייבניץ

$$b_n = a_{a+(-1)^n}$$

ונקבל שהוא מתכנס וכך גם הכפלתו ב־$(-1)^n$, בתנאי בשני המקרים. $\square$

סעיף ב'

נסתור את הטענה כי קיים טור חזקות סביב 0 המתכנס בהחלט ב־1 ומתבדר ב־-1.

נניח בשלילה כי קיים טור חזקות כזה $\sum_n a_n$, לכן מהנתון נקבל כי $\sum_n |a_n|$ מתכנס וגם $\sum_n (-1)^n a_n$ מתבדר, ולכן ממשפט התכנסות בהחלט נקבל $\sum_n |(-1)^n|$ מתבדר בסתירה להתכנסות שנתונה.

שאלה 4

בתרגיל זה נעבוד בחוג $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ כאשר מוגדר $0 \cdot \infty = 1$, ותהי סדרה $(a_n)_{n=1}^\infty$ כך ש־$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$.

סעיף א'

נוכיח שאם $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ קיים ב־$\mathbb{R}_\infty$, אז רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^\infty a_n (x-x_0)^n$ הוא $R = \frac{1}{L}$.

הוכחה. נחשב

$$\left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x-x_0| \xrightarrow{n\to\infty} L|x-x_0|$$

ממבחן דאלמבר נסיק כי אם $L|x-x_0| < 1$ אז הטור מתכנס, דהינו אם $|x-x_0| = R = \frac{1}{L}$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי ניתן להחליש את הטענה מהסעיף הקודם להיות התכנסות הטור כאשר $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

הוכחה. נניח כי התנאי מתקיים, וידוע כי $M < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 0$ ולכן נסיק כי כלל הגבולות החלקיים L_i מקיימים $0 \leq L_i \leq L$ כאשר L הגבול העליון. לכל גבול חלקי נקבל $R_i = \frac{1}{L_i}$ ולכן $R_i \geq R$ ונסיק כי ברדיוס R כל תת־הסדרות מתכנסות ובהתאם הטור אף הוא מתכנס. $\square$

שאלה 5

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(x)=\sin x$.

סעיף א'

נראה כי f חלקה.

הוכחה. אנו יודעים כי $f^{(4)}=f$ ולכן נוכל להסיק כי היא חלקה. $\square$

סעיף ב'

נסמן כרגיל $T_{f,0}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור טיילור של f סביב 0.
נמצא נוסחה מפורשת ל־a_n עבור כל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ונחשב את רדיוס ההתכנסות R של $T_{f,0}$.

למעשה כבר מצאנו נוסחה מפורשת כזו והיא

$$T_{f,0}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

ואם נשתמש במבחן ההתכנסות לטורי חזקות נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)!}}=0$$

ולכן $T_{f,0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

סעיף ג'

נוכיח כי $T_{f,0}=f$.

הוכחה. למעשה נוכל להשתמש בשארית טיילור, ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}R_{n,f,0}=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$$

ולכן נוכל להסיק כי $f=\lim_{n\to\infty}P_{n,f,0}=T_{f,0}$. $\square$

סעיף ד'

נסדור עבור אילו $x\in\mathbb{R}$ הטור $T_{f,0}$ הוא טור לייבניץ.

למעשה, הסדרה היא סדרת לייבניץ כבר, ומקיום הערך במקומות האי־זוגיים בלבד נקבל כי גם עבור ערכי x שליליים הטור הוא טור לייבניץ.

סעיף ה'

נמצא קירוב רציונלי ל־$f(\frac{1}{2})$ המדויק עד כדי 10^{-6}.

למעשה, נוכל להשתמש בשארית טיילור כפי שעשינו במטלות קודמות, נראה כי

$$R_{n,f,0}\le 10^{-6}\implies\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\frac{1}{2}-0)^{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\le 2^{-n-1}\le 2^{-20}\le 10^{-6}$$

ולכן נגדיר $n=19$ ובהתאם

$$\sin\frac{1}{2}\approx\sum_{n=0}^{19}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\frac{1}{2})^{2n+1}$$

שאלה 6

יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ו־$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ טורי חזקות עם רדיוסי התכנסות R_1, R_2 סופיים.
יהי R_3 רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$.

סעיף א'

נוכיח כי $R_3 \geq \min(R_1, R_2)$.

הוכחה. יהי $x \in (-R_1, R_1) \cap (-R_2, R_2)$, אז כמובן $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ שניהם מתכנסים ולכן גם סכומם מתכנס ולכן נוכל להסיק כי $R_3 > |x|$, אבל $|x| < R_1, R_2$. □

סעיף ב'

נוכיח שאם $R_1 \neq R_2$ אז $R_3 = \min(R_1, R_2)$.

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות נקבע $R_1 < R_2$ ולכן $\forall x \in (-R_1, R_1) \implies x \in (-R_2, R_2)$ ונסיק כי גם סכום הטורים מתכנס וכן נוכל להסיק כי $R_3 \geq R_1$.
נניח עתה כי $R_1 \leq |x| < R_2$ ונקבל כי הטור הראשון מתבדר והשני מתכנס ולכן מהמטלות הקודמות נוכל להסיק כי סכום הטורים מתבדר אף הוא ונקבל $R_3 \leq R_1$ וקיבלנו כי $R_1 = R_3$. □

סעיף ג'

נמצא טורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ו־$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ שעבורם מתקיים אי־שוויון חזק $R_3 > \min(R_1, R_2)$.
למעשה עבור כל $a_n = -b_n$ הטענה תתקיים, לדוגמה $a_n = n, b_n = -n$ מתקיים $R_1 = R_2 = 1$ אבל $R_3 = \infty$.