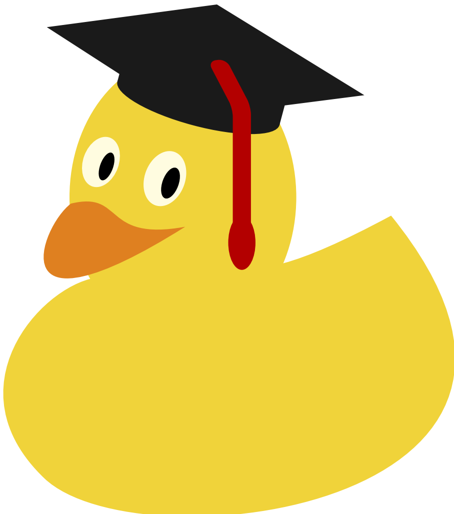
פתרון מטלה 04 — תורת ההסתברות (1), 80420

26 בנובמבר 2024



שאלה 1

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נסתור את הטענה כי שני מאורעות A, B הם בלתי־תלויים אם ורק אם הם זרים על־ידי דוגמה נגדית.

פתרון נגדיר Ω מאורע של הטלת קוביה, $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}$ ונגדיר שהקוביה לא הוגנת ו־1 לא יכול לצאת (השאר בהסתברות שווה), אז $A \cap B \neq \emptyset$ ולכן הם לא זרים, אבל

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = 0 \neq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

סעיף ב'

נסתור את הטענה כי אם A ו־B בלתי־תלויים וגם B ו־C בלתי־תלויים אז A ו־C בלתי־תלויים.

פתרון נגדיר Ω הטלת שתי קוביות, A המאורע שיצא 1 בקוביה א', B המאורע שיצא 1 בקוביה ב' ו־$C = A$, אז

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

לכן A, B בלתי־תלויים, ולכן גם B, C בלתי־תלויים, אבל $A = C$ והם כמובן לא בלתי־תלויים:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{36} = \mathbb{P}^2(A)$$

סעיף ג'

נוכיח שאם A בלתי־תלוי בעצמו, אז $\mathbb{P}(A) = 0$ או $\mathbb{P}(A) = 1$.

הוכחה. נניח בשלילה ש־$\mathbb{P}(A) \notin \{0, 1\}$ ולכן

$$\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}^2(A) \iff 1 = \mathbb{P}(A)$$

וקיבלנו סתירה. $\square$

סעיף ד'

אם A, B בלתי־תלויים אז גם A^C, B^C בלתי־תלויים.

פתרון ראינו בכיתה כי גם A ו־B^C בלתי־תלויים, ומאותה טענה גם A^C ו־B^C בלתי־תלויים.

סעיף ה'

נסתור את הטענה כי אם A, B, C בלתי־תלויים אז גם $A \cup B$ ו־C בלתי־תלויים.

פתרון נניח A קוביה א' יצאה 1, B קוביה ב' יצאה 1 ו־$C = A^C$ אז כמובן A, B, C בלתי־תלויים אבל

$$\mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) = 0 \neq \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(A \cup B)$$

סעיף ו'

אם A, B בלתי־תלויים וכן A, C בלתי־תלויים אז $A, B \cup C$ בלתי תלויים.

פתרון נניח Ω הטלת שתי קוביות, נניח גם A שיצא סכום 7, ו־B שיצא 4 בקוביה הראשונה ו־C שיצא 4 בקוביה השניה.

ראינו בהרצאה כי A, B וגם A, C שני זוגות מאורעות בלתי־תלויים, אבל

$$\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \frac{2}{36} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{6 + 6 - 1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C)$$

סעיף ז'

נוכיח שאם A ו־B בלתי־תלויים וכן A ו־C בלתי־תלויים וגם B, C זרים אז A ו־$B \cup C$ בלתי־תלויים.

הוכחה. נבחין כי

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap (B \uplus C)) &= \mathbb{P}((A \cap B) \uplus (A \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\
&= \mathbb{P}(A)(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A \cup C)
\end{aligned}$$

□

שאלה 2

נוכיח שהמאורעות $A_1,\dots,A_n$ הם בלתי תלויים אם ורק אם לכל $I \subseteq [n]$ מתקיים

$$\mathbb{P}((\bigcap_{i\in I} A_i) \cap (\bigcap_{i\in[n]\setminus I} A_i^C)) = (\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)) \cdot (\prod_{i\in[n]\setminus I}\mathbb{P}(A_i^C))$$

הוכחה. נניח ש־$A_1,\dots,A_n$ בלתי תלויים ולכן מטענה מהכיתה גם $A_1,\dots,A_n,A_1^C,\dots,A_n^C$ בלתי־תלויים.
יהי $I \subseteq [n]$ ונגדיר $J = I \cup \{n+j \mid j \in [n] \wedge j \notin I\}$ ונקבל מאי־התלות ישירות

$$\mathbb{P}((\bigcap_{i\in I} A_i) \cap (\bigcap_{i\in[n]\setminus I} A_i^C)) = (\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)) \cdot (\prod_{i\in[n]\setminus I}\mathbb{P}(A_i^C))$$

נניח את כיוון השני.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על n. במקרה $n=1$ הוא טריוויאלי ולכן נניח שהקבוצה $A_1,\dots,A_{n-1}$ היא בלתי־תלויה ומקיימת את השוויון ונבדוק את הקבוצה $A_1,\dots,A_n$ אשר מקיימת את השוויון גם כן.

נבדוק

$$\mathbb{P}(A_n^C \cap \bigcap_{i\in[n-1]} A_i) = \mathbb{P}(A_n^C) \cdot \prod_{i\in[n-1]}\mathbb{P}(A_i)$$

ולכן הקבוצה $\{A_1,\dots,A_{n-1},A_n^C\}$ בלתי־תלויה, ולכן גם הקבוצה $\{A_1,\dots,A_n\}$ והשלמנו את מהלך האינדוקציה. $\square$

שאלה 3

שלושה שופטים מכריעים את גורלו של נאשם לפי דעת רוב, שניים מהשופטים צודקים בהחלטתם בסיכוי 0.9 והשופט השלישי לא מנוסה וצודק בסבירות של 0.51. נבדוק את ההסתברות לפסק דין נכון במקרים שונים.

סעיף א'

נניח כי החלטת כל שופט היא בלתי־תלויה.

פתרון נסמן A_1, A_2 המאורעות שהשופטים המנוסים צדקו ו־A_3 המאורע שהשופט הלא מנוסה צדק.

נתון לנו שמתקיים $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{9}{10}$ וגם $\mathbb{P}(A_3) = \frac{51}{100}$.

אנו מחפשים את הסיכוי לרוב, לכן נבחן את

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^C) \cup (A_1^C \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^C \cap A_3)) \\
=&\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1^C \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^C \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^C) \\
=&\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_1^C)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2^C)\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3^C) \\
=&\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{51}{100} + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{51}{100} + \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{49}{100}
\end{aligned}
$$

סעיף ב'

השופטים המנוסים מחליטים באופן בלתי־תלוי והשופט הלא מנוסה בוחר אחד מהם באקראי ומצטרף לדעתו.

פתרון נבחין כי הפעם בהינתן המידע החדש מתקיים

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1^C \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^C \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^C) \\
=&\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 2\mathbb{P}(A_1^C \cap A_2 \cap A_3) + 0 \\
=&\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) + 2\mathbb{P}(A_1^C \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

במקרה $A_1^C \cap A_2 \cap A_3$ הוא המקרה ששופט אחד צדק והשני טעה מבין המנוסים, והשופט הלא מנוסה בחר אחד מהם בהסתברות אחידה, לכן במקרה זה $\mathbb{P}(A_3 \mid A_1^C \cap A_2) = \frac{1}{2}$ ולכן נקבל

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) + 2\mathbb{P}(A_1^C \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} + 2\mathbb{P}(A_1^C \cap A_2) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} + \mathbb{P}(A_1^C)\mathbb{P}(A_2) \\
&= \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}
\end{aligned}
$$

שאלה 4

נתבונן במרחב המדגם $\Omega = [5]$ עם הסתברות אחידה,

נמצא משתנים מקריים X, Y כך ש־$X, Y, X+Y$ כולם מתפלגים אחיד על $\{-2,-1,0,1,2\}$.

פתרון נגדיר $X(\omega) = \omega - 3$.

עוד נגדיר $Y(1) = 2, Y(2) = -1, Y(3) = 1, Y(4) = -2, Y(5) = 0$.

בהתאם נקבל $(X+Y)(1) = 0, (X+Y)(2) = -2, (X+Y)(3) = 1, (X+Y)(4) = -1, (X+Y)(5) = 2$.

נבחין כי גם X גם Y וגם $X+Y$ הן חד־חד ערכיות ועל $[5] \to \{-2,-1,0,1,2\}$ ולכן מההסתברות האחידה של Ω נסיק התפלגות אחידה.

שאלה 5

נתונים זוג קוביות הוגנות בעלות שש פאות, על פאות קוביה א' כתוב $\{1,2,2,3,3,4\}$, ועל פאות קוביה ב' כתוב $\{1,3,5,6,8\}$.
נוכיח כי התפלגות סכום הקוביות זהה להתפלגות סכומן של שתי קוביות משחק רגילות.

הוכחה. נגדיר X משתנה מקרי המתאר את סכום הקוביות המיוחדות ו־Y סכום הקוביות הרגילות ונבדוק את כלל ערכי ההתפלגות.
נבחין כי אלו הם משתנים מקריים בדידים ולכן מספיק לבדוק כל ערך בנפרד.

עבור $n<2$ נקבל $\mathbb{P}'_X(n)=\mathbb{P}_Y(n)=0$ שכן אין סכום קוביות שמוביל לערך זה.
באופן דומה נקבל שגם עבור $n>12$ נקבל ש־$\mathbb{P}_Y(n)=0$ ואנו יודעים כי הסכום המקסימלי בקוביות המיוחדות הוא 12 ולכן נסיק ישירות שגם $\mathbb{P}'_X(n)=0$.
נראה כי $\mathbb{P}_Y(2)=\mathbb{P}(\{(a,b)\in\Omega\mid a+b=2\})=\mathbb{P}(\{(1,1)\})=\mathbb{P}'(\{(1,1)\})=\mathbb{P}_X(2)$.
באופן דומה $\mathbb{P}_Y(3)=\frac{2}{36}=\mathbb{P}_X(3)$ על־ידי הצירופים $(1,2)$ ו־$(2,1)$ נוסף. נוכל להמשיך את החישוב הידני ונקבל שההסתברות אכן שווה בכל מקרה, ולכן הקוביות אכן שקולות התפלגות. $\square$

שאלה 6

במגירה יש n זוגות גרביים, אדם מוציא גרב מהמגירה שוב ושוב עד שיש ברשותו זוג תואם.

ננתח את ההתפלגות של מספר הגרביים שהוצאו.

פתרון נגדיר את המשתנה המקרי X כך שייצג את מספר הגרביים שהוצאו מהמגירה, נבחין כי מתקיים

$$\mathbb{P}(X=k)=1-\frac{2n}{2n}\cdot\frac{n-1}{2n-1}\cdots\frac{n-k}{2n-k}=1-2\frac{n!}{(n-k+1)!}\cdot\frac{(2n-k+1)!}{(2n)!}$$

כאשר עבור $X(n)=1-0=1$.

נסביר, ההסתברות עבור $X=k$ היא המשלים להסתברות של המאורע שכולל את כל הסדרים של הוצאת גרביים ב־k המקומות הראשונים, ביחס למאורע שכל k הגרביים הראשונים הם מקבוצה של בודדים מהזוגות (בגודל n).

שאלה 7

ניתן דוגמה למרחב הסתברות ולמשתנים מקריים X, Y ופונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שיתקיים

$$X \overset{a.s.}{\neq} Y, \qquad f(X) \neq f(Y), \qquad f(X) \overset{a.s.}{=} f(Y)$$

פתרון נגדיר $\Omega = [6]$ מרחב הסתברות של הטלת קוביה לא הוגנת כך ש־$p(1) = 0, p(n) = \frac{1}{5}$.
עוד נגדיר $X = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,6), (6,5)\}, Y = \{(1,-1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
נקבל אם כך ש־$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}) = p(2) + p(3) + p(4) = \frac{3}{5} \neq 1$ ולכן $X \overset{a.s.}{\neq} Y$.
נגדיר f על־ידי $f(x) = \begin{cases} 6 & x = 5 \\ x & x \neq 5 \end{cases}$. עתה נבחין כי $f(X) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,6), (6,6)\}$,
וכן $f(Y) = \{(1,-1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,6), (6,6)\}$. לכן גם $f(X) \neq f(Y)$.
לבסוף מתקיים $\mathbb{P}(X = Y) = p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \frac{5}{5} = 1$ ולכן $f(X) \overset{a.s.}{=} f(Y)$.