# פתרון ממ"ן 11 – אלגברה לינארית 1 (20109)

3 בפברואר 2023

## שאלה 1

### סעיף א'

נמצא את ערכו של $\alpha$:

$$\alpha = 2 \cdot 4 - 3 \cdot \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 8 - 3 \cdot 6$$
$$\alpha = 8 - 18$$
$$\alpha = 1$$

נמצא את ערכו של $\beta$:

$$\beta = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$$
$$\beta = 8 - 9$$
$$\beta = 10$$

### סעיף ב'

.1

$$3x^2 = 6$$
$$x^2 = 2$$
$$x = 3, 4$$

.2

$$6x^2 + \frac{1}{2} = 0$$
$$6x^2 + 4 = 0$$
$$x^2 + \frac{2}{3} = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2, 5$$

.3

$$5x + 4y + z = 0$$

$$z = -5x - 4y = 2x + 3y$$

$$\{t, s \in \mathbb{Z}_7 \mid (t, s, 2t + 3s)\}$$

## שאלה 2

### סעיף א'

$(A, \oplus, *)$ הוא אכן שדה. ניתן להוכיח כי זהו שדה לפי הגדרה 1.2.1, אך נעשה זאת בהישענות על עובדת היות $\mathbb{R}$ שדה. נגדיר את הפונקציה $f : A \to \mathbb{R}$ כך ש־$f(x,1) = x$. הפונקציה $f$ היא חד־חד ערכית שכן עבור כל $x, y$ מתקיים $f(x,1) = x = y = f(y,1)$ אם ורק אם $x = y$. פונקציה זו גם על, שכן כל מספר ממשי מוכל בתמונת $f$. ידוע לנו כי $\mathbb{R}$ הוא אכן שדה, וניתן לראות כי בהגדרת החיבור והכפל והרכבת הפונקציה $f$ מתקבלות הגדרות החיבור והכפל בהתאמה של השדה $\mathbb{R}$, לכן בסך־הכול ניתן להסתמך על תכונות השדה $\mathbb{R}$ והפונקציה $f$ ולראות כי גם $(A, \oplus, *)$ שדה.

### סעיף ב'

1. הפעולה $*$ היא חילופית, שכן עבור כל $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$a * b = a + b - 2 = b + a - 2 = b * a$$

הפעולה גם קיבוצית, שכן עבור כל $a, b, c \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$(a * b) * c = (a + b - 2) + c - 2 = a + (b + c - 2) - 2 = a * (b * c)$$

2. נוכיח כי קיים איבר ניטרלי עבור הפעולה. אם איבר הוא ניטרלי, אז בביצוע הפעולה איתו הערך המקורי לא משתנה. ניצור משוואה מתאימה: $a * e = 0$, כאשר $e$ מייצג את האיבר הניטרלי. נפתור:

$$a * e = a$$

$$a + e - 2 = a$$

$$e = 2$$

לכן קיים איבר ניטרלי לפעולה וערכו הוא 2.

### סעיף ג'

נוכיח כי $\mathbb{Z}_9$ איננו שדה. על־פי משפט 1.2.6, בכל שדה אם מתקיים $ab = 0$, אז $a = 0$ או $b = 0$. ב־$\mathbb{Z}_9$ מתקיים $3 \cdot 3 = 0$, וזוהי סתירה להנחה כי הוא שדה, לכן $\mathbb{Z}_9$ איננו שדה.

# שאלה 3

## סעיף א'

נמיר את מערכת המשוואות למטריצת מקדמים ונדרגה:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3=R_3-R_1, R_4=R_4-2R_1]{R_2=R_2-R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4=R_4+R_3+R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

נשתמש במטריצת המדרגות המפושטת ונבצע הצבה לאחור:

$$3t = 3 \to t = 1$$

$$z + t = 0 \to z = -1$$

$$y + t = -1 \to y = -2$$

$$x + y + z = 2 \to x = 5$$

הפתרון היחיד למערכת המשוואות הוא $x = 5, y = -2, z = -1, t = 1$.

## סעיף ב'

על־פי למה 5.2.6 חיבור וכפל מודולו ניתנים לביצוע על תוצאות ומכפלות מספרים משדה $\mathbb{Z}$. ננצל זאת כדי להשתמש במטריצת המקדמים המצומצמת שחישבנו בסעיף הקודם ונחיל עליה את השדה $\mathbb{Z}_3$ על־ידי ביצוע מודולו לכל אחד מן הסקלרים במטריצה:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \equiv_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

הפעם ניתן לראות כי הגענו לשורת 0, לכן ישנו משתנה אחד חופשי, ממטריצת המדרגות אנו רואים כי משתנה זה הוא $t$. נבצע הצבה לאחור:

$$z + t = 0 \to z = -t$$

$$y + t = 2 \to y = 2 - t$$

$$x + y + z = 2 \to x + 2 - t - t = 2 \to x = 2t$$

קבוצת פתרונות מערכת המשוואות היא:

$$\{s \in \mathbb{Z}_3 \mid (2s, 2 - s, -s, s)\}$$

בשל היותו של השדה סופי, יש שלושה פתרונות למשוואה: $(0, 2, 0, 0), (2, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 2)$

## שאלה 4

תחילה, נמיר את מערכת המשוואות למטריצת מקדמים ונדרגה:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 1 & 2-a & -1 & 2-a \\ a & a & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3=R_3-aR_1]{R_2=R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 5 \\ 0 & -a & 1-a^2 & 7+3a+a^2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3=R_3-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 5 \\ 0 & 0 & 2+a-a^2 & 2+3a+a^2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3-a \\ 0 & -a & -1-a & 5 \\ 0 & 0 & -(a+1)(a-2) & (a+1)(a+2) \end{array}\right]$$

(i) למערכת המשוואות יהיה פתרון יחיד אם אף שורה לא תתאפס במטריצת המקדמים המדורגת. ניתן לראות שעבור $a=-1$ השורה השלישית מתאפסת, ועבור $a=2$ השורה היא שורת סתירה, לכן כדי שיהיה פתרון בודד $a\neq -1,2$.

(ii) כאמור, הערך היחיד עבורו ישנו איפוס באחת השורות הוא כאשר $a=-1$, במקרה זה השורה השלישית מתאפסת, ו־$z$ הופך למשתנה חופשי. נציב לאחור:

$$-ay-(a+1)z=5 \to y=5$$

$$x+2y+az=-3-a \to x+10-z=-2 \to x=z-12$$

הפתרון הכללי הוא $\{t\in\mathbb{R} \mid (t-12,5,t)\}$.

(iii) לא יהיה פתרון למערכת המשוואות במקרה שקיימת שורת סתירה במטריצת המקדמים המדורגת, אנו רואים כי רק במקרה ש־$a=2$ השורה השלישית הופכת לשורת סתירה.

## שאלה 5

נמיר את מערכת המשוואות למטריצה ונדרגה:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & a-b & b+1 \\ 1 & a+1 & a+b & 2a-b & a+b+1 \\ 3 & 3a & 3a+b & 3a-b & 4b+3 \\ 1 & a & a & 0 & 2b \end{array}\right] \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & 2b \\ 1 & a+1 & a+b & 2a-b & a+b+1 \\ 3 & 3a & 3a+b & 3a-b & 4b+3 \\ 1 & a & a & a-b & b+1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3=R_3-3R_1,R_4=R_4-R_1]{R_2=R_2-R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & 2b \\ 0 & 1 & b & 2a-b & a-b+1 \\ 0 & 0 & b & 3a-b & -2b+3 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & -b+1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4=R_4-3R_4]{R_2=R_2-2R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & 2b \\ 0 & 1 & b & b & a+b-1 \\ 0 & 0 & b & 2b & b \\ 0 & 0 & 0 & a-b & -b+1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2=R_2-R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & 2b \\ 0 & 1 & 0 & -b & a-1 \\ 0 & 0 & b & 2b & b \\ 0 & 0 & 0 & a-b & -b+1 \end{array}\right]$$

תחילה נראה עבור אילו ערכים של $a$ ו־$b$ יש למערכת המשוואות פתרון יחיד. למערכת יהיה פתרון יחיד כאשר למטריצת המדרגות לא תהיה שורת אפסים ושורת סתירה כלל. בשל הערך $1$ המופיע בשתי השורות הראשונות במטריצה, שתי שורות אלה לא יכולות להשפיע על קיומו של פתרון יחיד. השורה השלישית תלויה כולה ב־$b$, לכן איפוסו יוביל לשורת אפסים ולאינסוף פתרונות. בשורה הרביעית ניתן לראות כי כאשר $a=b$ אז השורה תהיה שורת סתירה או שורת אפסים. לכן כדי שיהיה פתרון יחיד למערכת המשוואות חייב להתקיים $a\neq b, a\neq 0, b\neq 0$.

למערכת המשוואות אין פתרון כאשר במטריצת המדרגות יש שורת סתירה. כאמור, שורת סתירה תיתכן בשורה הרביעית בלבד. ניתן לראות שמצב זה יקרה כאשר $a=b$ וגם $-b+1\neq 0 \to b\neq 0$. דהינו לא יהיה פתרון למערכת המשוואות במצב שבו $a=b\neq 1$.

כפי שראינו, אם $b=0$ או $a=b=1$ אז יהיו אינסוף פתרונות עבור מערכת המשוואות. תחילה נמצא את הפתרון הכללי כאשר $a\neq 0, b=0$

על־ידי הצבה לאחור:

$$(a-0)w = -0+1 \to w = \frac{1}{a}$$

$$y = a-1$$

$$x+ay+az = 0 \to x = -a^2+a-az$$

לכן במקרה זה הפתרון הכללי יהיה $\{t \in \mathbb{R} \mid (-a^2+a-at, a-1, t, \frac{1}{a})\}$.

במקרה שבו $a=b=0$ אנו כבר יודעים כי אין פתרון למערכת המשוואות. נציב לאחור במקרה זה:

$$z+2w = 1 \to z = 1-2w$$

$$y-w = 0 \to y = w$$

$$x+y+z = 2 \to x = 1+w$$

לכן במקרה זה הפתרון הכללי הוא $\{t \in \mathbb{R} \mid (1+t, t, 1-2t, t)\}$.