פתרון ממ"ן 14 – אלגברה לינארית 1 (20109)

3 בפברואר 2023

שאלה 1

סעיף א'

יהיו U, W_1, W_2 תת־מרחבים של מרחב לינארי V. נוכיח שמתקיים:

$$(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2) \qquad (*)$$

לפי הגדרת חיבור הקבוצות $W_1 + W_2$ היא כלל הווקטורים המשמשים כצירוף לינארי של וקטורי W_1, W_2. הקבוצות $U \cap W_1$ ו־$U \cap W_2$ שתיהן מורכבות מווקטורים שמוכלים ב־W_1 ו־W_2 בהתאמה, בהתאם להגדרת חיתוך קבוצות. לכן גם חיבור הקבוצות $(U \cap W_1) + (U \cap W_2)$ יכיל צירופים לינאריים של וקטורים הקיימים ב־W_1, W_2, אז מתקיים

$$(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq W_1 + W_2$$

באופן דומה אנו רואים כי גם $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U$, שהרי כל וקטור ב־$(U \cap W_1) + (U \cap W_2)$ מוכל גם ב־U וגם ב־$W_1 + W_2$, לכן בוודאי שהוא מוכל גם ב־$U \cap (W_1 + W_2)$, דהינו $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2)$.

סעיף ב'

נמצא שלושה תת־מרחבים $U, W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ כך שיתקיים (*) ביחס הכלה ממש.

נגדיר

$$U = \mathrm{Sp}\{(1,1)\}$$
$$W_1 = \mathrm{Sp}\{(1,0)\}$$
$$W_2 = \mathrm{Sp}\{(0,1)\}$$

אז מתקיים:

$$(U \cap W_1) = (U \cap W_2) = O$$
$$(U \cap W_1) + (U \cap W_2) = O$$
$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$$
$$U \cap (W_1 + W_2) = \mathrm{Sp}\{(1,1)\}$$
$$O \subset \mathrm{Sp}\{(1,1)\}$$

ולכן

$$(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subset U \cap (W_1 + W_2)$$

שאלה 2

סעיף א'

יהיה מרחב V ושני תתי־מרחבים $U, W \subseteq V$ כך ש־$U \neq W$. נתונים $\{u_1, u_2\}$ בסיס ל־U ו־$\{w_1, w_2\}$ בסיס ל־W. נוכיח כי אם הקבוצה $\{u_1, u_2, w_1\}$ תלויה לינארית אז $w_1 \in U \cap W$:

ידוע כי $\{u_1, u_2, w_1\}$ תלויה לינארית, אך הקבוצה $\{u_1, u_2\}$ בלתי תלויה לינארית, לכן נוכל להניח כי הווקטור w_1 תלוי לינארית ב־u_1, u_2 ללא חשש כי התלות היא בין u_1 ל־u_2 בלבד. לכן גם $w_1 \in U$ על־פי הגדרת הבסיס. ידוע כי $w_1 \in W$ מעצם היותו מרכיב בבסיס ל־W. ראינו כי $w_1 \in U, W$, לכן בוודאי שגם $w_1 \in U \cap W$.

סעיף ב'

נמצא את $\dim(U + W)$.

לפי הגדרת חיבור מרחבים והגדרת קבוצת יוצרים:

$$U + W = \text{Sp}\{u_1, u_2\} + \text{Sp}\{w_1, w_2\} = \text{Sp}\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$$

ידוע כי w_1 תלוי לינארית ב־u_1, u_2, לכן נוכל להסיר את w_1 מהקבוצה הפורשת ללא שינוי במרחב הנוצר:

$$U + W = \text{Sp}\{u_1, u_2, w_1, w_2\} = \text{Sp}\{u_1, u_2, w_2\}$$

ידוע כי $U \neq W$ וכי $w_1 \in U$, אילו היה מתקיים גם $w_2 \in U$, ניתן היה לתאר את שני המרחבים בעזרת אותה קבוצת יוצרים ו־$U = W$ בסתירה לטענה, לכן w_2 איננו תלוי לינארית ב־u_1, u_2. לפיכך $\{u_1, u_2, w_2\}$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית המהווה בסיס ל־$U + W$. על־פי הגדרת הממד, אנו יודעים שערך ממד מרחב הוא ככמות הווקטורים בבסיסו, לכן $\dim(U + W) = 3$.

שאלה 3

סעיף א'

יהיו U, W תת־המרחבים הבאים של $\mathbb{R}_4[x]$:

$$U = \mathrm{Sp}\{x^3 + 4x^2 - x + 3, x^3 + 5x^2 + 5, 3x^3 + 10x^2 + 5\}$$
$$W = \mathrm{Sp}\{x^3 + 4x^2 + 6, x^3 + 2x^2 - x + 5, 2x^3 + 2x^2 - 3x + 9\}$$

נמצא את הבסיס והממד עבור $U, W, U + W$:

תחילה נגדיר את הבסיס הסדור הסטנדרטי ל־$\mathbb{R}_4[x]$:

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

נמצא את הבסיס ל־U:

נמצא את הבסיס לתת־המרחב על־ידי המרה למרחב $\mathbb{R}^4$ על־ידי קורדינטה לפי E. נגדיר:

$$\begin{aligned} U' = [U]_E &= \mathrm{Sp}\{[x^3 + 4x^2 - x + 3]_E, [x^3 + 5x^2 + 5]_E, [3x^3 + 10x^2 + 5]_E\} \\ &= \mathrm{Sp}\{(1, 4, -1, 3), (1, 5, 0, 5), (3, 10, 0, 5)\} \end{aligned}$$

נמצא בסיס ל־U' לפי שאלה 7.5.12, נבנה את מטריצת השורות המייצגת את הקבוצה הפורשת של U', כל מטריצה שקולת שורות למטריצה זו מייצגת קבוצה פורשת שקולה לקבוצת היוצרים המקורית:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3/5}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

אנו רואים כי המטריצה לא שקולה למטריצה עם שורת אפסים, לכן הקבוצה הפורשת של U' בלתי תלויה לינארית ומתקיים:

$$U' = \mathrm{Sp}\{(1, 0, 0, -5), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$$

בשל החד־חד ערכיות במעבר בין U ל־U' לפי משפט 8.4.2 מתקיים גם:

$$U = \mathrm{Sp}\{x^3 - 5, x^2 + 2, x\} \tag{*}$$

שכן קבוצה פורשת זו במעבר קורדינטות שווה ל־$(*)$. ראינו כי הקבוצה הפורשת של U' בלתי תלויה לינארית, לכן לפי משפט 8.4.4 גם הקבוצה הפורשת את U היא בלתי תלויה לינארית ומהווה בסיס ל־U. בשל כך מתקיים גם $\dim U = 3$.

נמצא את הבסיס ל־W:

נפעל בדומה לדרך המציאה עבור U ונגדיר:

$$W' = \mathrm{Sp}\{[x^3 + 4x^2 + 6]_E, [x^3 + 2x^2 - x + 5]_E, [2x^3 + 2x^2 - 3x + 9]_E\} = \mathrm{Sp}\{(1, 4, 0, 6), (1, 2, -1, 5), (2, 2, -3, 9)\}$$

נבדוק אם קבוצה פורשת זו תלויה לינארית על־ידי המרה למטריצת שורות ודירוגה:

$$\begin{bmatrix}1&4&0&6\\1&2&-1&5\\2&2&-3&9\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&4&0&6\\0&-2&-1&-1\\0&-6&-3&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to -R_3]{R_2\to -R_2}\begin{bmatrix}1&4&0&6\\0&2&1&1\\0&6&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_2]{R_1\to R_1-2R_2}\begin{bmatrix}1&0&-2&4\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ניתן לראות כי המטריצה שקולה למטריצה עם שורת אפס, לכן הקבוצה תלויה לינארית ומתקיים:

$$W'=\mathrm{Sp}\{(1,0,-2,4),(0,2,1,1)\}$$

על־פי החד־חד ערכיות של מעבר הקורדינטה:

$$W=\mathrm{Sp}\{x^3-2x+4,2x^2+x+1\}$$

לכן הקבוצה $\{x^3-2x+4,2x^2+x+1\}$ מהווה בסיס ל־W, ומהגדרה 8.3.3 נובע ש־$\dim W=2$.

נמצא את הבסיס ל־$U+W$:

תחילה נשתמש בהגדרת חיבור המרחבים ונראה כי:

$$U+W=\mathrm{Sp}\{x^3-5,x^2+2,x\}+\mathrm{Sp}\{x^3-2x+4,2x^2+x+1\}$$

על־פי שאלה 7.6.8:

$$U+W=\mathrm{Sp}\{x^3-5,x^2+2,x,x^3-2x+4,2x^2+x+1\}$$

כמו במציאת הבסיסים ל־U ו־W, גם עתה נגדיר קבוצה חדשה $V=[U+W]_E$ ונמצא אם היא בסיס על־ידי שימוש במטריצת שורות ודירוגה:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\1&0&-2&4\\0&2&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_5\to R_5-2R_2-R_3]{R_4\to R_4-R_1+2R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&9\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_4/9}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2\to R_2-2R_4,R_5\to R_5+3R_1]{R_1\to R_1+5R_4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

הקבוצה הפורשת של V מתלכדת עם הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$, ולכן בהתאם $U+W=\mathbb{R}_4[x]$ ו־$\dim(U+W)=4$.

סעיף ב'

נמצא בסיס לתת־המרחב $V=U\cap W$. נציב ערכים במשוואה המתקיימת ממשפט 8.3.6:

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim V$$

$$4=2+3-\dim V$$

$$\dim V=1$$

V מוגדר כחיתוך של שני תתי־מרחב, לכן הוא מכיל את כלל הווקטורים אשר מופיעים בשני תתי־המרחב. דהינו קבוצת הסקלרים $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ המקיימים את המשוואה:

$$\lambda_1(x^3-5)+\lambda_2(x^2+2)+\lambda_3(x)=\lambda_4(x^3-2x+4)+\lambda_5(2x^2+x+1)$$

נעביר אגפים:

$$\lambda_1(x^3-5)+\lambda_2(x^2+2)+\lambda_3(x)+\lambda_4(-x^3+2x-4)+\lambda_5(-2x^2-x-1)=0$$

זוהי משוואה לינארית הומוגנית, נמצא את קבוצת הפתרונות שלה על־ידי המרה למטריצת מקדמים מצומצמת ודירוגה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4+5R_1-2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

נבצע הצבה לאחור:

$$\begin{aligned} &-3\lambda_4-\lambda_5=0 && \to\lambda_5=3\lambda_4 \\ &\lambda_3+2\lambda_4-\lambda_5=0 && \to\lambda_3=\lambda_4 \\ &\lambda_2-2\lambda_5=0 && \to\lambda_2=6\lambda_4 \\ &\lambda_1-\lambda_4=0 && \to\lambda_1=\lambda_4 \end{aligned}$$

נגדיר $\lambda_4=t$, הווקטור על־פי הצבת ערכי הסקלרים

$$t(x^3-5)+6t(x^2+2)+t(x)$$

נקבץ ערכים ונבצע כפל בסקלר:

$$t(x^3+6x^2+x+7)$$

לכן $V=\mathrm{Sp}\{(x^3+6x^2+x+7)\}$

סעיף ג'

נמצא תת־מרחב $T\subseteq\mathbb{R}_4[x]$ כך שמתקיים $W\oplus T=\mathbb{R}_4[x]$.

על־פי משפט 8.3.6 והגדרת החיבור הישר:

$$\begin{aligned} &\dim(W+T)=\dim W+\dim T-\dim(W\cap T) \\ &4=2+\dim T-0 \\ &\dim T=2 \end{aligned}$$

נזכיר

$$W=\mathrm{Sp}\{x^3-2x+4, 2x^2+x+1\}$$

בקבוצת היוצרים של W מופיעים המקדמים x^3 ו־x^2, נגדיר $T=\mathrm{Sp}\{1,x\}$ ונבדוק אם T עומד בדרישות.

ניתן לראות כי ארבעת הווקטורים ב־$W+T$ אינם תלויים לינארית, שכן בכל וקטור מופיע מקדם שאיננו קיים בווקטורים האחרים, לכן $W+T$ הוא בסיס ל־$\mathbb{R}_4[x]$ ומתקיים $W+T=\mathbb{R}_4[x]$.

כבר ראינו כי הקבוצה $W+T$ בלתי תלויה לינארית, לכן לא קיים וקטור מלבד וקטור האפס הקיים בשני תתי־המרחב, אז $W\cap T=\{0\}$.

לכן לפי משפט 7.7.2 $W\oplus T=\mathbb{R}_4[x]$.

שאלה 4

יהיו תת־מרחבים $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$ כך ש־$\dim U(**) < \dim W$. ידוע כי $U \cap W = \operatorname{Sp}\{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(-1,0,1,2)\}$ וגם כי $(0,0,1,0) \notin U+W$. נמצא את ממדו של $U+W$.

נמצא בסיס ל־$U \cap W$ על־ידי דירוג מטריצת השורות של קבוצת היוצרים הפורשים הנתונה לפי שאלה 7.5.12:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

אנו רואים כי $U \cap W = \operatorname{Sp}\{(1,1,1,1),(0,1,2,3)\}$, קבוצת היוצרים בלתי תלויה כפי שאנו למדים מהדירוג למטריצת מדרגות, לכן מתקיים $\dim(U \cap W) = 2$. מהגדרת החיתוך נובע $U \cap W \subseteq U, W$, לכן לפי משפט 8.3.4 מתקיים $2 \leq \dim U, \dim W(\#)$. ידוע כי קיים וקטור ב־$\mathbb{R}^4$ שאיננו מוכל ב־$U+W$, לכן לא יתכן כי ממד החיבור הוא 4, אז $\dim(U+W) < 4(*)$. לפי משפט 8.3.6 מתקיים:

$$\begin{aligned}
&\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) && (***) \\
&\dim(U+W) = \dim U + \dim W - 2 && \\
&\dim U + \dim W - 2 < 4 && (*) \\
&\dim U + \dim W < 6 && \\
&4 \leq \dim U + \dim W < 6 && (\#) \\
&\dim U = 3, \dim W = 2 && (**)
\end{aligned}$$

על־ידי הצבת הערכים המתקבלים ב־$(***)$ מתקבל כי $\dim(U+W) = 3$.

נמצא בסיס ל־W. ידוע כי $\operatorname{Sp}\{(1,1,1,1),(0,1,2,3)\} \subseteq W$ וכי $\dim W = 2$, לכן קבוצה זו מהווה בסיס ל־W ומתקיים

$$W = Sp\{(1,1,1,1),(0,1,2,3)\}$$

שאלה 5

סעיף א'

תהיה $A = [a_{ij}]$ מטריצה ריבועית מסדר n שדרגתה 1. נוכיח $A^2 = \text{tr}(A)A$.

מהגדרה 8.5.4 אנו למדים כי מטריצה שדרגתה 1 היא מטריצה בה יש שורה אחת בלבד שאיננה שורת אפסים, נגדיר $0 \leq k \leq n$, וגם כי $[a]_k^r = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$. עבור כל $j \neq k$ אנו יודעים כי $[a]_j^r = (0, \ldots, 0)$. בעזרת מסקנה 3.4.4 מתקבל כי גם $[a^2]_j^r = (0, \ldots, 0)$, דהינו שמלבד השורה k כלל השורות ב־A^2 הן שורות אפסים. בעזרת חישוב מתקבל כי

$$[a^2]_k^r = (b_k b_0, b_k b_1, \ldots, b_k b_n) = b_k(b_0, b_1, \ldots, b_n) \tag{*}$$

לכן גם $A^2 = b_k \cdot A$. האלכסון של המטריצה A מורכב מ־0 מלבד האיבר $a_{kk} = b_k$, לכן גם $\text{tr}(A) = b_k$. נציב ונקבל שמתקיים $A^2 = \text{tr}(A)A$.

סעיף ב'

אם מתקיים $\text{tr}(A) = 0$ אז $A^2 = 0A$, לכן $A^2 = 0$. נראה כי עבור כל $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, אם $\text{tr}(A) \neq 0$ אז גם $A^k \neq 0$. את פעולה $(*)$ ניתן להחיל שוב ושוב על־ידי הכפלת מטריצה שמהווה חזקה של A ב־A שוב, לכן תמיד תהיה שורה שאיננה ריקה, ומכאן נובע $A^k \neq 0$.

סעיף ג'

נניח שעבור $k \in \mathbb{N}$ נתון $A^k = 0$ ונוכיח כי אז גם $A^2 = 0$. אם $k = 1$ אז המטריצה היא מטריצת אפס, וכל מכפלה שלה תוביל למטריצת אפס, לכן בוודאי שגם $A^2 = 0$. אם $k = 2$ אז כמובן ש־$A^2 = 0$. במקרה שבו $k \geq 2$ נשתמש בחוקי מכפלת מטריצות ונכתוב מחדש, $A^2 A^{k-2} = 0$. הראינו בסעיף ב' כי $A^2 = 0$ במקרה זה, לכן $A^k = 0A^{k-2} = 0$.

שאלה 6

יהיה מרחב V הנפרש על־ידי הפונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אשר מוגדרות על־ידי $f(x)=\sin x$ ו־$g(x)=\cos x$. מגדירים את הפונקציות $h,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על־ידי $h(x)=2\sin x+\cos x$ ו־$k(x)=3\cos x$.

סעיף א'

נוכיח כי הקבוצות $B=\{f,g\},C=\{h,k\}$ בסיסים של V.

ידוע כי המרחב V נפרש על־ידי f ו־g, כדי להוכיח ש־B בסיס עלינו גם לוודא ששתי הפונקציות בלתי תלויות לינארית. במילים אחרות, עלינו לבדוק ש־f לא פורפורציולית ל־g. על־פי הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות f ו־g אכן לא פורפורציונליות, ולכן B בלתי תלויה לינארית ומהווה בסיס ל־V.

נשתמש בשאלה 7.5.11 כדי להראות $\text{Sp}\,B=\text{Sp}\,C$:

$$\text{Sp}\{\sin x,\cos x\}=\text{Sp}\{2\sin x,\cos x\}=\text{Sp}\{2\sin x+\cos x,\cos x\}=\text{Sp}\{2\sin x+\cos x,3\cos x\}$$

לכן גם C פורשת את V. בקבוצה C שני וקטורים בלתי תלויים לינארית, לכן ממדה כממד המרחב V והיא בסיס עבורו.

סעיף ב'

נמצא את מטריצת המעבר מ־B ל־C.

נחשב את $[h]_B$:

$$h(x)=2\sin x+\cos x=2f(x)+g(x)\to[h]_B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

נחשב את $[k]_B$:

$$k(x)=0\sin x+3\cos x=0f(x)+3g(x)\to[k]_B=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

בעזרת הגדרה 8.4.6 נבנה את מטריצת המעבר M:

$$M=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}$$

נחשב את המטריצה ההופכית M^{-1} אשר מהווה מטריצת המעבר מ־C ל־B לפי משפט 8.4.9:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2&0&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1/2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&0\\1&3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&3&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2/3}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

מטריצת המעבר מ־C ל־B היא

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

סעיף ג'

נתונה פונקציה $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $l(x)=5\sin x-2\cos x$. נחשב את $[l]_C$ בעזרת מטריצת מעבר.

תחילה נחשב את $[l]_B$:

$$l(x)=5\sin x-2\cos x=5f(x)-2g(x)=\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$$

נחשב על־ידי מטריצת מעבר לפי משפט 8.4.7:

$$[l]_C = M^{-1}[l]_B$$

$$[l]_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$[l]_C = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$