פתרון מטלה 07 — תורת ההסתברות (1), 80420

20 בדצמבר 2024

שאלה 1

נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א׳

נסתור את הטענה שאם יהי X משתנה מקרי המוגדר על מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$, ונניח ש־$X \sim U(\{1,2,3\})$, אז $(\Omega, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות אחידה.

פתרון נניח שמרחב ההסתברות הוא של הטלת קובייה לא אחידה כך שלקבלת המספרים הזוגיים הסתברות של חצי מקבלת המספרים האי־זוגיים, כאשר ההסתברות אחידה בין מספרים עם אותה הזוגיות.

נגדיר גם $X(1) = X(2) = 1, X(3) = X(4) = 2, X(5) = X(6) = 3$, אז $X \sim U(\{1,2,3\})$ בעוד מרחב ההסתברות לא אחיד.

סעיף ב׳

יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי־תלויים ובעלי תומך סופי. נסתור את הטענה שאם $\mathbb{E}(|X - Y|) = 0$ אז $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

פתרון נגדיר $\Omega = \{-1, 1\}$ וכן $X(\omega) = \omega, Y(\omega) = -\omega$, לכן $\mathbb{E}(|X - Y|) = 0$, אבל $\mathbb{P}(X = Y) = 0 \neq 1$.

סעיף ג׳

נסתור את הטענה שאם נניח ש־X משתנה מקרי בעל תוחלת, אז גם X^2 בעל תוחלת.

פתרון נניח ש־$\operatorname{Supp} X = \mathbb{N}$ וכן $\mathbb{P}(X = n) = \frac{c}{n^3}$, ראינו כי אכן קיים משתנה מקרי כזה עם התפלגות כזו בהרצאות קודמות, ואנו יודעים כי

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{c}{n^3}$$

הוא טור מתכנס בהחלט, לעומת זאת

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{c}{n^3}$$

הוא טור הרמוני ומתבדר.

סעיף ד׳

נניח ש־X משתנה מקרי כך ש־X^2 הוא בעל תוחלת, נוכיח שגם X בעל תוחלת.

פתרון מתקיים

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{s\in\mathbb{R}_{\geq 0}} s\mathbb{P}(X^2 = s)\\ &= \sum_{s\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \sqrt{s}\cdot\sqrt{s}\mathbb{P}(X\in\{\sqrt{s},-\sqrt{s}\})\\ &= \sum_{s'\in\mathbb{R}_{\geq 0}} s'\cdot s'\mathbb{P}(X\in\{s',-s'\})\\ &= \sum_{s'\in\mathbb{R}_{\geq 0}} s'\cdot s'(\mathbb{P}(X=s')+\mathbb{P}(X=-s'))\\ &= \sum_{s'\in\mathbb{R}_{\geq 0}} s'\cdot s'\mathbb{P}(X=s') + \sum_{s'\in\mathbb{R}_{\geq 0}} s'\cdot s'\mathbb{P}(X=s')\\ &= \sum_{s'\in\mathbb{R}_{\geq 0}} |s'|\cdot|s'\mathbb{P}(X=s')| + \sum_{s'\in\mathbb{R}_{<0}} |s'|\cdot|s'\mathbb{P}(X=s')|\\ &= \sum_{s'\in\mathbb{R}} |s'|\cdot|s'\mathbb{P}(X=s')|\\ &= \sum_{s\in\operatorname{Supp} X} |s|\cdot|s\mathbb{P}(X=s)|\end{aligned}$$

הוא טור מתכנס בהחלט, ולכן ממבחן התכנסות גם

$$\sum_{s\in S} |s\mathbb{P}(X=s)|$$

טור מתכנס, אבל זוהי התכנסות בהחלט של $\mathbb{E}(X)$ עצמו, קרי יש תוחלת ל־X.

סעיף ה׳

יהיו X, Y משתנים מקריים כך ש־$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ וכן $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2)$. נסתור את הטענה שאז $\mathbb{P}(X=Y)=1$.

פתרון נניח שוב ש־X, Y קבועים כך ש־$X=1, Y=2$ כמעט תמיד.

אז כמובן התוחלת שלהם ושל הריבוע שלהם שווה, אבל $\mathbb{P}(X=Y)=0$.

סעיף ו׳

נסתור את הטענה כי קיים משתנה מקרי בדיד X אי־שלילי בעל תוחלת סופית כך שמתקיים

$$\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, \mathbb{P}(X\geq n) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$$

הוכחה. נניח בשלילה שאכן קיים משתנה מקרי X כזה. נובע אם כך עבור ההסתברות שלו עבור $n > N+1$,

$$\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X\geq n) - \mathbb{P}(X\geq n-1) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n} - \frac{\mathbb{E}(X)}{n-1} = \mathbb{E}(X)\frac{-1}{n(n-1)}$$

ולכן מהגדרת התוחלת

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(n) = \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X=n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X)\frac{-1}{n-1}$$

נסמן $C = \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X=n)$ ונבחין כי $C\geq 0$ וסופי בפרט, אבל

$$C = \mathbb{E}(X)(1 + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n-1})$$

וזו כמובן סתירה מהתבדרות הטור ההרמוני, לכן $\mathbb{E}(X)=0$. נעיר שמהנתון התומך הוא לא סופי, אחרת הטענה לא מתקיימת.

נניח ש־$\mathbb{E}(X)=0$, לכן מהנתון התפלגות X קבועה, ובהתאם לאינסופיות התומך היא 0 בלבד, אבל זאת סתירה להגדרת התפלגות, ולכן קיבלנו סתירה. $\square$

שאלה 2

במשחק מטילים מטבע הוגן עד שמקבלים תוצאה של עץ. אם העץ המתקבל בהטלה ה־i אז מוענקים למטיל a^i נקודות.

סעיף א׳

יהי X המשתנה המקרי המתאר את כמות הנקודות שהוענקה, נחשב את התפלגות X

פתרון נבחין כי מההגדרה המשתנה Y המתאר את השאלה באיזה סיבוב המשחק הסתיים הוא $Geo(\frac{1}{2})$.

בהתאם $X = a^Y$, שכן כמות הנקודות המתקבלת היא מספר הסיבוב האחרון כחזקת a.

נעבור אם כן לחישוב ההתפלגות של X:

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(a^Y = n) = \mathbb{P}(Y = \log_a n) = (1 - \frac{1}{2})^{\log_a(n)-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{\log_a n}}$$

נבחין כי התומך הוא $\text{Supp}\, X = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

סעיף ב׳

נחשב את $\mathbb{E}(X)$ לכל a.

פתרון

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{s \in \text{Supp}\, X} s \cdot \mathbb{P}(X = s) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \frac{1}{2^{\log_a a^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^n = \frac{\frac{a}{2}}{1 - \frac{a}{2}} = \frac{a}{2-a}$$

סעיף ג׳

נחשב את ההסתברות להרוויח יותר מעשר נקודות עבור $a = 2$.

פתרון נבחין כי $X = 2^4$ הוא המקרה הראשון שבו מתקבלות מעל 10 נקודות, לכן אנו מחפשים את

$$\mathbb{P}(X \geq 10) = \mathbb{P}(Y \geq \log_2 10) = 1 - \mathbb{P}(1 \leq Y \leq 3) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) - \mathbb{P}(Y = 3) = 1 - \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

שאלה 3

סעיף א׳

ישנן שלוש צנצנות עוגיות, בראשונה 15 עוגיות, בשנייה 18 ובשלישית 9.

i

בוחרים עוגייה באופן אקראי ואחיד, נחשב את התוחלת של מספר העוגיות בצנצנת שלה.
פתרון אם נמספר את העוגיות נקבל 42 עוגיות, ונגדיר את המשתנה המקרי X כמחזיר לכל מספר עוגייה את מספר העוגיות בצנצנת שלה, כך לדוגמה $X(1) = 15$ וכן הלאה.
בהתאם נקבל

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=\{15,18,9\}} i\mathbb{P}(X = i) = 15 \cdot \frac{15}{42} + 18 \cdot \frac{18}{42} + 9 \cdot \frac{9}{42}$$

ii

בוחרים צנצנת באקראי ובאופן אחיד, נחשב את התוחלת של מספר העוגיות בצנצנת שבחרנו.
פתרון הפעם נגדיר Y מחזיר את מספר העוגיות עבור מספר צנצנת, כלומר $Y(1) = 15$ וכדומה, לכן

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 18 + \frac{1}{3} \cdot 9$$

סעיף ב׳

מטילים שתי קוביות הוגנות. נמצא את תוחלת סכום התוצאות של הקוביות בהינתן שהקוביות נפלו על פאות שונות.
פתרון נגדיר X, Y תוצאת הטלת שתי הקוביות, ונגדיר גם $Z = X + Y \mid X \neq Y$.
הסכום יכול לצאת במקרה זה בין 3 ל־11, דהינו $\text{Supp}\, Z = \{3, \dots, 11\}$, ולכן

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=3}^{11} i\mathbb{P}(Z = i) = 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 11 \cdot \frac{2}{36}$$

סעיף ג׳

מטילים קובייה הוגנת שוב ושוב עד שיוצאת התוצאה 6.
יהי X המשתנה המקרי המייצג את מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 2.
נחשב את התוחלת של X בהינתן שכל ההטלות היו זוגיות.
פתרון נגדיר Y שיצא 6 בתוצאה ה־i, לכן $Y \sim Geo(\frac{1}{6})$.
בנוסף נגדיר X המשתנה המקרי המייצג את מספר ה־2 שהתקבלו, נבחין כי $Z \mid A, Y = n \sim Bin(n-1, \frac{1}{2})$, ישירות מכלל הסידורים האפשריים של הטלות.
מנוסחת התוחלת השלמה

$$\mathbb{E}(Z \mid A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z \mid A, Y = n)\mathbb{P}(Y = n \mid A)$$

נעבור אם כך לחישוב ערכים אלה.

$$\mathbb{P}(Y = n \mid A) = \frac{\mathbb{P}(Y = n, A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(Y = n, A)}{\mathbb{P}(A)}$$

וכן

$$\mathbb{P}(Y = n, A) = (\frac{2}{6})^{n-1} \frac{1}{6}$$

ולכן גם

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(Y=n,A)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{n-1}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

ומצאנו ש־$\mathbb{P}(Y=n\mid A)=\frac{\frac{1}{3^{n-1}}\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3^{n-1}}\frac{2}{3}$, דהינו $Y\mid A\sim Geo(\frac{2}{3})$.

אנו גם יודעים ש־$Z\mid A,Y=n\sim Bin(n-1,\frac{1}{2})$ ולכן $\mathbb{E}(Z\mid A,Y=n)=(n-1)\frac{1}{2}$ ובהתאם

$$\mathbb{E}(Z\mid A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2}\mathbb{P}(Y=n\mid A)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(Y=n\mid A)=\frac{1}{2}(\mathbb{E}(Y\mid A)-\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(Y=n\mid A))=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-1)=\frac{1}{4}$$

סעיף ד׳

עשרה שופטים בתחרות מעניקים לקבוצת אנשים ציונים מקריים המתפלגים אחיד ב־$[10]$.

נחשב את תוחלת הציון המינימלי והציון המקסימלי שקיבלה הקבוצה.

פתרון נגדיר $\forall i\in[10],X_i\sim U([10])$ הציון שנתן השופט ה־i. בנוסף נגדיר $X=\min\{X_1,\dots,X_{10}\}$ הציון המינימלי.

נבחין כי $\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\geq n\}=\{\omega\in\Omega\mid X_i(\omega_i)\geq n\}$ ולכן

$$\mathbb{P}(X\geq n)=\left(\frac{10-(n-1)}{10}\right)^{10}$$

ולכן מנוסחת הזנב

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=1}^{10}\mathbb{P}(X\geq n)=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{10-(n-1)}{10}\right)^{10}\approx 1.49$$

באופן דומה נגדיר $Y=\max\{X_1,\dots,X_{10}\}$, ולכן

$$\mathbb{P}(Y\geq n)=1-\mathbb{P}(Y<n)=1-\left(\frac{n-1}{10}\right)^{10}$$

וכן

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{n=1}^{10}\mathbb{P}(Y\geq n)=\sum_{n=1}^{10}1-\left(\frac{n-1}{10}\right)^{10}\approx 9.50$$

שאלה 4

יהי משתנה מקרי בעל תוחלת X הנתמך על $\mathbb{N}$.

נוכיח כי $X \sim Geo(p)$ עבור $p \in (0,1)$ כלשהו אם ורק אם לכל $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים

$$\mathbb{E}(X \mid X > s) = \mathbb{E}(X) + s$$

הוכחה. נניח ש־$X \sim Geo(p)$ ולכן תכונת חוסר הזיכרון מתקיימת, כלומר נובע $X - s \mid X > s \overset{d}{=} X$ לכל s בתחום.

נחשב

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid X > s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X - s = n - s \mid X > s) \\ &= \sum_{n=s+1}^{\infty} n\mathbb{P}(X - s = n - s \mid X > s) \\ &= \sum_{n=s+1}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n - s) \\ &= \sum_{n=s+1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-s-1} p\end{aligned}$$

ומצד שני

$$\mathbb{E}(X) + s = \frac{sp}{1-(1-p)} + \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}sp + \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p = \sum_{n=1}^{\infty}(n+s)(1-p)^{n-1}p$$

ומצאנו כי הביטויים שווים.

נניח את הכיוון השני של הטענה, אז הטענה נכונה גם עבור $s = 1$, כלומר

$$\mathbb{E}(X \mid X > 1) = \mathbb{E}(X) + 1$$

לכן

$$\mathbb{E}(X - 1 \mid X > 1) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X - 1 = n \mid X > 1) = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(X = n \mid X > 1) = \mathbb{E}(X \mid X > 1) - 1 = \mathbb{E}(X)$$

ואז $\mathbb{E}(X - 1 \mid X > 1) - \mathbb{E}(X) = 0$, ומההתכנסות בהחלט ואינדוקציה על n נקבל משקילות תכונת חוסר הזיכרון את המבוקש. $\square$

שאלה 5

נמצא דוגמה לשני משתנים מקריים בעלי תוחלת תלויים כך ש־$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

פתרון נגדיר $X = Y \sim Ber(1)$ ולכן

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2) = \sum_{n \in \{0,1\}} n^2 \mathbb{P}(X = n) = 0 \cdot (1-1) + 1 \cdot 1 = 1$$

ומצד שני

$$\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = (\mathbb{E}(X))^2 = 1^2 = 1$$

ומצאנו כי הטענה מתקיימת.