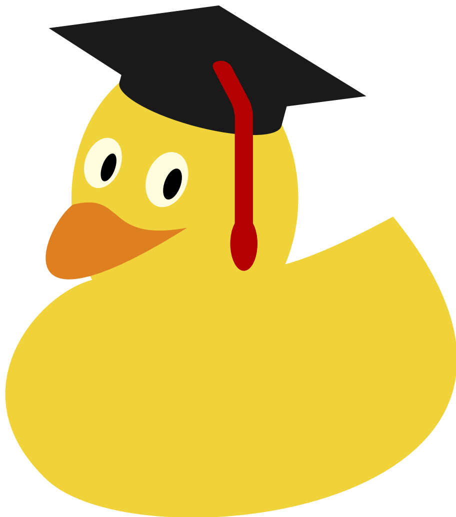
# פתרון מטלה 8 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

25 ביוני 2024



## שאלה 1

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x^2}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

נוכיח כי $f$ גזירה בקטע הסגור $[0,1]$ אך לא ליפשיצית בקטע זה.

*הוכחה.* ברור כי $f$ גזירה בכל הנקודות שהן לא $x=0$, ולכן נבדוק את הנגזרת בנקודה זו בלבד:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x\sin(\frac{1}{x^2})=0$$

ומצאנו כי $f'(0)=0$.

נניח בשלילה כי $f$ היא $M$־ליפשיצית, לכן בפרט מתקיים

$$|f(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}})-f(\frac{1}{\sqrt{2\pi k+\frac{1}{2}\pi}})|\leq M|\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi k+\frac{1}{2}\pi}}|$$

דהינו

$$\frac{1}{2\pi k+\frac{1}{2}\pi}\leq M\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi^2k^2+\pi^2k}}$$

ונוכל לראות שעבור $k$ עולים, גם $M$ נחסם מלמטה על־יד מספרים הולכים וגדלים, ולכן נוכל להסיק כי $M$ סופי כזה לא קיים והפונקציה איננה ליפשיצית. $\square$

## שאלה 2

תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[-1,1]\setminus\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}\\ 1 & x\in\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}\end{cases}$$

### סעיף א'

נוכיח כי $f$ אינטגרבילית ב־$[-1,1]$ ונחשב את $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$.

נשים לב כי בקטע $[0,1]$ הפונקציה שווה לפונקציה משאלה 3 במטלה 7, ולכן נוכל להסיק כי היא אינטגרבילית וכי ערך האינטגרל שלה בקטע הוא 0.

עוד נראה כי $\forall x\in[-1,0]:f(x)=1$ ולכן נוכל להסיק כי גם $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=1$, ונקבל מאדיטיביות האינטגרל

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx=1$$

### סעיף ב'

תהי $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

#### .i

נראה כי הפונקציה מוגדרת היטב, שכן מצאנו כי הפונרציה $f$ היא אינטגרבילית, ולכן נוכל להסיק כי $F$ מוגדרת בכל התחום.

#### .ii

נחשב נוסחה מפורשת ל־$F$:

$$F(x)=\begin{cases}-x & -1\le x\le 0\\ 1 & 0<x\le 1\end{cases}$$

על־פי הסעיפים הקודמים.

#### .iii

נוכיח כי $f$ בעלת נקודת אי־רציפות מסוג שני בנקודה 0.

*הוכחה.* אנו יודעים כבר כי

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 1=1$$

ואילו נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty},(b_n)_{n=1}^{\infty}$ על־ידי

$$a_n=\frac{1}{n},\qquad b_n=\frac{\sqrt{2}}{n}$$

אז נקבל כי $f(a_n)\xrightarrow{n\to\infty}1$ ואילו $f(b_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$ ולכן נוכל להסיק כי $f$ כלל לא רציפה מימין בנקודה. $\square$

נבחין כי $F$ איננה גזירה ב־$x=0$, זאת נסיק ישירות מנוסחתה המפורשת שמצאנו.

## שאלה 3

נשתמש בסכומי רימן ונחשב את הערך של

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)$$

עבור $0<p\in\mathbb{R}$ כלשהו.

נבחין כי מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^p}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p$$

דהינו, מצאנו כי זהו סכום רימן על החלוקה השווה של $[0,1]$ של $x^p$, ולכן נוכל להסיק כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)=\int_0^1 x^p\;dx=\frac{1}{p+1}$$

# שאלה 4

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על כל תת־קטע סגור וחסום של $\mathbb{R}$ המקיימת $\int_a^{a+1} f(x)\,dx = 0$ לכל $a \in \mathbb{R}$.

## סעיף א'

נמצא דוגמה ל־$f$ אי־שלילית המקיימת את הנתון ואיננה מתאפסת באף קטע של $\mathbb{R}$.

נבחר

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ \cos^2 x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

אז מהתרגילים הקודמים אנו יודעים כי $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ לכל $a \le b$, וכמובן אין קטע חלקי ל־$\mathbb{R}$ בו $f$ היא זהותית אפס.

## סעיף ב'

נמצא דוגמה ל־$f$ רציפה המקיימת את הנתון ושאיננה פונקציית האפס.

נגדיר $f(x) = \sin(\pi x)$, ולכן

$$\int_a^{a+1} \sin(\pi x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\mid_a^{a+1} = -\frac{1}{\pi}(\cos(\pi a + \pi) - \cos(\pi a)) = 0$$

וכמובן שהפונקציה רציפה ולא אפס.

## סעיף ג'

נוכיח כי לא תיתכן $f$ רציפה המקיימת את הנתון ובנוסף $f(x) \neq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

*הוכחה.* מערך הביניים נוכל להסיק כי $f(x) < 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ או $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, על־ידי בחירת השלילי לפונקציה נוכל להניח כי $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.

יהי $a \in \mathbb{R}$, אז בקטע הסגור $[a, a+1]$ מוויירשטראס השני נסיק כי ישנו מינימום $m > 0$ עבורו $f(x) > m$ לכל $x$ בתחום.

עתה נבחן את $h(x) = f(x) - m$, היא כמובן חיובית בתחום, ולכן נסיק $\int_a^{a+1} h(x)\,dx > 0$, אילו נניח בשלילה $\int_a^{a+1} f(x)\,dx = 0$ אז נקבל סתירה ללינאריות האינטגרל.

לכן לא יתכן כי $f$ עומדת בתנאים. $\square$

## סעיף ד'

נמצא דוגמה לפונקציה המקיימת את הנתון כך שבנוסף גם $f(x) \neq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & x \in \mathbb{R} \setminus \{k \mid k \in \mathbb{N}\} \\ 1 & x \in \{k \mid k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

נבחין כי הפונקציה אכן לא מתאפסת באף נקודה, היא אינטגרבילית בכל קטע סגור וחסום שכן היא בעצמה חסומה,
וכמובן בכל קטע $[a, a+1]$ היא זהה ל־$\cos(\pi x)$ מלבד לכל היותר שתי נקודות, ולכן האינטגרלים של הפונקציות זהים, ומצאנו כי הטענה מתקיימת עבור פונקציה זו.

## סעיף ה'

נניח כי $f$ פולינום, ונוכיח כי $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$.

*הוכחה.* פולינומים סגורים לגזירה ולכן גם לאינטגרציה, ונוכל להניח כי ל־$f$ פונקציה קדומה $F$ אשר היא בעצמה גם פולינום, ונוכיח כי אם $F(a+1)-F(a)=0$ לכל $a\in\mathbb{R}$ אז בהכרח $F(x)=0$.

יהי $k$ מעלת הפולינום, אז $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}=b$, עבור $b\in\mathbb{R}$ כלשהו, אילו $b\neq 0$ נקבל כי הפונקציה חיובית לחלוטין או שלילית לחלוטין לכמעט כל $x$, ולכן נסיק $b=0$.

נקבל כי מעלת הפולינום היא $k-1$, וכך נוכל להראות באינדוקציה כי $k=0$ וכמובן $F(x)=0$. $\square$

## שאלה 5

נמצא את תחום הגזירות של הפונקציה

$$G(x) = \int_{\sin x}^{x^2} e^{t^2}\ dt$$

ונמצא ביטוי מפורש ללא סימן אינטגרל לנגזרת של $G$.

אנו יודעים כי האינטגרל של פונקציה הוא תמיד רציף, ואנו יודעים כי $e^{t^2}$ חיובית רציפה, לכן נוכל להסיק משיקולי חלוקה כי גם האינטגרל שלה הוא חיובי, וכמובן גזיר ל־$e^{t^2}$ עצמה.

עבור $x > 1$ נקבל $\sin x < x^2$ ולכן נוכל להסיק כי $G$ גזירה, ובאופן דומה נקבל כי היא גזירה אף ב־$x < 0$, נותר לבדוק את $x = 0$ עצמה.

נבחין כי הנגזרת של $\int e^{t^2}\ dt$ שואפת ל־1 משני הצדדים, לכן מספיק שנבחר $0 < x < 1$, אז $\sin x > x^2$ ונקבל כי הסימן מתהפך, והפונקציה לא תהיה גזירה בנקודות $x = 0, 1$.

נגדיר $F(t) = \int e^{t^2}\ dt$, ולכן $F'(t) = e^{t^2}$, נראה כי $G(x) = F(x^2) - F(\sin x)$, ולכן נגזור לפי כלל השרשרת ונקבל

$$G'(x) = 2xF'(x^2) - \cos(x)F'(\sin(x)) = e^{x^4} - \cos(x)e^{\sin^2(x)}$$

### סעיף א'

#### .i

נגדיר

$$G(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$$

נוכיח כי $G$ קבועה בקרן $(0,\infty)$ ונחשב את ערכה שם.

נוכל להשתמש בשיטה דומה לסעיף הקודם ולקבל כי

$$G'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

מצאנו כי הנגזרת היא אפס תמיד ולכן נוכל להסיק כי הפונקציה $G$ קבועה בקטע זה.

אנו גם יודעים ש־$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ולכן נוכל להסיק כי

$$G(1) = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan(x)\mid_0^1 = 2\frac{\pi}{2}$$

ידוע כי $G$ קבועה ולכן נוכל להסיק כי $G(x) = \pi$ לכל $x \in (0,\infty)$.

#### .ii

נוכיח כי $G$ קבועה גם בקרן $(-\infty, 0)$ וכי ערכה שם הוא $-\pi$.

*הוכחה.* נראה כי $G(-x) = -G(x)$ מחוקי אינטגרלים, ולכן נוכל כמובן להניח כי $\forall x < 0 : G(x) = -G(-x) = -\pi$. □

## שאלה 6

### סעיף א'

נוכיח כי לכל $-1 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt$$

*הוכחה.* נשתמש במשפט היסודי של החשבון האינפינטסמלי, ונקבל כי

$$\ln(x+1)' = \frac{1}{1+x}$$

ולכן מאינטגרציה לשני האגפים נקבל

$$\ln(x+1) + C = \int \frac{dt}{1+t}$$

נציב כמובן $[0,x]$ בקטע ונקבל

$$\ln(x+1) - \ln(1) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

$\square$

נבחין כי ערך הסכום

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2) - \ln(1)$$

### סעיף ב'

נוכיח כי $\forall x > -1 : \ln(1+x) \leq x$.

*הוכחה.* נפרק למקרים, תחילה נניח כי $x > 0$ ונקבל נקבל $x+1 > 1$ ובהתאם גם $0 < \frac{1}{1+x} < 1$, וממונוטוניות האינטגרל נקבל גם

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} \leq \int_0^t dt \implies \ln(1+x) \leq x$$

נניח עתה כי $-1 < x < 0$ ונקבל גם $0 < x+1 < 1$ ולכן $1 < \frac{1}{x+1}$, ונקבל

$$\int_0^x dt \leq \int_0^x \frac{dt}{t+1} \implies \ln(1+x) \leq x$$

$\square$

### סעיף ג'

נוכיח כי $\forall 0 < x : x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

*הוכחה.* יהי $x > 0$, אז $1 - x < 1 < \frac{1}{x+1}$ כפי שמצאנו בסעיף הקודם, ומתהליך זהה לסעיף הקודם נקבל ישירות כי $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$. $\square$

## שאלה 7

נחשב את האינטגרלים הבאים:

### סעיף א'

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה עבור $t=\cos x, dt=-\sin x\ dx$ ונקבל

$$-\int \frac{dt}{1+t^2} = -\tan(t) = -\tan(\cos x)$$

### סעיף ב'

$$\int x(x+1)^{95}\ dx$$

נגדיר $t=x-1, dt=dx$ ונקבל

$$\int (t-1)t^{95}\ dt = \int t^{96}-t^{95}\ dt = \frac{1}{97}t^{97}-\frac{1}{96}t^{96} = \frac{1}{97}(x-1)^{97}-\frac{1}{96}(x-1)^{96}$$

### סעיף ג'

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx$$

נגדיר $t=e^x, dt=e^x dx$ ולכן נקבל

$$\int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t}\int \frac{1}{\frac{1}{t}+1}\cdot\frac{dt}{t^2}$$

נגדיר גם $u=\frac{1}{t}, du=\frac{-dt}{t^2}$ ולכן

$$\int \frac{1}{u+1}du = \ln(u+1) = \ln(\frac{1}{t}+1) = \ln(\frac{1}{e^x}+1)$$

### סעיף ד'

$$\int \sin^5(x)dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x\ dx$$

נגדיר $\cos x = t, -\sin x dx = dt$ ונקבל

$$-\int \left(1-t^2\right)^2 dt = \int -t^4+2t^2-1\ dt = \frac{-t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}-1 = \frac{-\cos^5(x)}{5}+\frac{2\cos^3(x)}{3}-1$$

### סעיף ה'

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

נגדיר $t=\sqrt{x}, dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ ונקבל

$$\int \frac{2dt}{1+t^2} = 2\arctan(t) = 2\arctan(\sqrt{x})$$

### סעיף ו'

$$\int \arctan(x)\ dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\ dx$$

נגדיר $t = x^2, dt = 2x\ dx$ ונקבל

$$x \arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = x \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+t) = x \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$