פתרון מטלה 12 — מבוא ללוגיקה, 80423

28 בינואר 2025

שאלה 1

נשלים את הוכחת עקרון לפשץ. נסמן ב־P את קבוצת המספרים הראשוניים, ותהי $L = \{0, 1, +, \cdot\}$. נוכיח שהטענות הבאות שקולות עבור פסוק φ ב־L,

1. $\mathrm{ACF}_0 \models \varphi$
2. $|\{p \in P \mid \mathrm{ACF}_p \not\models \varphi\}| < \omega$
3. $|\{p \in P \mid \mathrm{ACF}_p \models \varphi\}| \geq \omega$

הוכחה. $1 \implies 2$: נניח ש־$\mathrm{ACF}_0 \models \varphi$ ולכן משלמות $\mathrm{ACF}_0 \vdash \varphi$, ונוכל להסיק שקיים עץ היסק שמעיד על כך. בעץ היסק זה יש שימוש בכמות סופית של טענות, בפרט בכמות סופית של פסוקים $\neg\varphi_p$ כפי שהוגדרו בתרגול. עתה נבחין כי לכל פסוק אחר בעץ ההיסק, הפסוק מוכל ב־ACF_p לכל $p \in P$ מההגדרה של התורות. לכן אם נגדיר $Q \subseteq P$ להיות הקבוצה של הראשוניים כך ש־$\neg\varphi_n$ בעץ ההיסק, אז לכל $p \in Q$ נוכל להסיק ש־$\varphi \vdash \neg \mathrm{ACF}_p$. אבל מנאותות ושלמות התורות נובע $\varphi \not\models \mathrm{ACF}_p$. לבסוף נבחין שאכן Q סופית ולכן גם קבוצת התורות הללו, זאת מסופיות עץ ההיסק.

$2 \implies 3$: ניזכר ש־ACF_p שלמה לכל $p \in P$, ונניח ש־$\omega > |\{p \in P \mid \mathrm{ACF}_p \not\models \varphi\}| = \alpha$.
לכן נובע ישירות ש־$\omega = \alpha \setminus |P| \leq |\{p \in P \mid \mathrm{ACF}_p \models \varphi\}|$.

$3 \implies 1$: נגדיר T_n עצי ההיסק המעידים $\mathrm{ACF}_n \models \varphi$ (עם שלמות). נעיר שהכוונה היא שעצים אלה מוגדרים עבור המקרים בהם הטענה מתקיימת בהתאם להנחה $\omega \leq \{p \in P \mid \mathrm{ACF}_p \models \varphi\}$. נגדיר בנוסף $A = \{\varphi_m \mid n < \omega, \varphi_n \in T_n\}$, כלומר קבוצת הפסוקים המעידים על מציין אשר משמשים בהוכחת φ באיזשהו עץ ההיסק. נניח שהיא לא ריקה ולכן יהי $A \ni \varphi_n$, אז נוכל להסיק ש־$(\varphi_n \to \varphi) \vdash T$, כאשר T תורת השדות הסגורים אלגברית. אבל $\mathrm{ACF}_m \models \neg\varphi_n$ לכל $m \neq n$ וזו סתירה להנחה, לכן $\varphi_n \notin A$. אז $|A| = 0$, נבחר T_n כלשהו ולכן $\neg\varphi_m \in T_n$ לאיזושהי קבוצת ערכים $\omega > m$, ובהתאם עץ היסק זה תקין גם ב־ACF_0, ולכן מנאותות נובע $\mathrm{ACF}_0 \models \varphi$. □

שאלה 2

נבחין בהגדרת $r : \mathrm{form}_L \to \mathbb{N}$ אשר הופיעה בהרצאה. תהי φ נוסחה.

סעיף א׳

נוכיח ש־$r(\varphi)$ הוא גובה עץ היצירה של φ לכל $\varphi \in \mathrm{form}_L$.

הוכחה. נגדיר $B = \{x \in 2^n \mid n < \omega\}$, קבוצת כל הענפים האפשריים בעצים סטנדרטיים מיושרים לשמאל. נגדיר גם $b_m : \mathrm{form}_L \to B$ כך ש־$b_m(\varphi) = \sup\{b \in B \mid b \in \varphi\}$, כאשר $b \in \varphi$ אם ורק אם קיים הענף b בעץ היצירה של φ, ביחס הסדר של עץ יצירה זה. אנו רוצים להוכיח ש־$r(\varphi) = |b_m(\varphi)|$ לכל $\varphi \in \mathrm{form}_L$.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על מבנה הנוסחה. לבסיס נניח ש־φ נוסחה יסודית, ולכן $r(\varphi) = 1$ לפי הגדרת הפונקציה, בעוד $b_m(\varphi) = \langle\rangle$ לפי הגדרת b_m, ולכן נובע $|b_m(\varphi)| = 1 = r(\varphi)$. נניח שהטענה נכונה עבור φ ונבחן את $\neg\varphi$, מהגדרת r, $r(\neg\varphi) = r(\varphi) + 1 = |b_m(\varphi)| + 1$. מהצד השני $b_m(\neg\varphi) = \langle 0\rangle \frown b_m(\varphi)$, ולכן $|b_m(\neg\varphi)| = 1 + |b_m(\varphi)| = r(\neg\varphi)$. נניח ש־$\psi$ מקיים אף הוא את הטענה ויהי $\square \in \mathcal{B}$, ונבחן את $\varphi\square\psi$. נובע $r(\varphi\square\psi) = \max\{r(\varphi), r(\psi)\} + 1$ מהגדרה, וכן $b_m(\varphi\square\psi) = \sup\{\langle 0\rangle \frown b_m(\varphi), \langle 1\rangle \frown b_m(\psi)\}$. לכן $r(\varphi\square\psi) = 1 + \max\{|b_m(\varphi)|, |b_m(\psi)|\} = |b_m(\varphi\square\psi)|$. נבחן עתה את $\forall v\varphi$, במקרה זה מוגדר $r(\forall v\varphi) = r(\varphi) + 1$ וכן $b_m(\forall v\varphi) = \langle 0\rangle \frown b_m(\varphi)$, ולכן $r(\forall v\varphi) = 1 + |b_m(\varphi)| = |b_m(\forall v\varphi)|$. סיימנו את מהלך האינדוקציה. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שמתקיים $r(\varphi) = r(\varphi^x_t)$ לכל $t \in \mathrm{constterm}_L$ ולכל $x \in \mathrm{Var}$.

הוכחה. מהגדרת החלפה ועץ היצירה נבחין שאם $\langle T, f\rangle$ עץ היצירה של φ אז $f(b_m(\varphi) \restriction 2^n) = f(b_m(\varphi^x_t) \restriction 2^n)$ לכל $n < |b_m(\varphi)|$. נבחין גם שמתקיים $f(b_m(\varphi))^x_t = f(b_m(\varphi^x_t))$ ולכן $r(\varphi) = r(\varphi^x_t)$. $\square$

שאלה 3

תהי $L=\{E\}$ שפה עם סימן יחס דו־מקומי.

סעיף א׳

נכתוב אקסיומות לתורה T כך ש־E יהיה יחס שקילות שכל מחלקותיו באותו הגודל.

פתרון

$$\begin{aligned}&T=\{\forall x(E(x,x)),\forall x\forall y(E(x,y)\to E(y,x)),\forall x\forall y\forall z((E(x,y)\wedge E(y,z))\to E(x,z))\}\\&\cup\{\forall x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_{n-1}(\forall i<j<n(x_i\neq x_j\wedge y_i\neq y_j\wedge E(x_i,x_j)\wedge E(y_i,y_j))\wedge E(x_0,x_n)\wedge\forall i<n,x_n\neq x_i)\\&\to\exists y_n(E(y_0,y_n)\wedge\forall i<n,y_n\neq y_i)\mid n<\omega\}\end{aligned}$$

כלומר לכל קבוצות איברים ממחלקות שקילות שונות מגודל סופי, אם נוסיף איבר לקבוצה של מחלקת השקילות הראשונה, נוכל להוסיף גם איבר לקבוצה של מחלקת השקילות השנייה. דהינו לכל מספר סופי, קבוצות ממחלקות השקילות הן בנות הרחבה לאותו גודל. בשל כך גם למקרים בני־מניה נוכל לקבל שהמחלקות הן באותו גודל, אבל לא עבור מקרים גדולים יותר.

סעיף ב׳

נגדיר קבוצה $\operatorname{comp}(T)$ של תורות שלמות המכילות את T. נראה שכל תורה שלמה $T_0\supseteq T$ שקולה לתורה $T_0'\in\operatorname{comp}(T)$, במובן שמתקיים $\forall\varphi,T_0\models\varphi\iff T_0'\models\varphi$.

פתרון אנו יודעים ש־$|\operatorname{sent}_L|=\omega$ ולכן נגדיר $\operatorname{comp}(T)=\{S\subseteq\operatorname{sent}_L\mid S\text{ is complete},T\subseteq S\}$. זוהי קבוצה ומתקיים $|\operatorname{comp}(T)|\leq\omega_1$. מההגדרה נובע שאם $T_0\supseteq T$ תורת שלמה, אז $T_0\in\operatorname{comp}(T)$ ולכן בפרט נובע $\forall\varphi,T_0\models\varphi\iff T_0\models\varphi$ כפי שרצינו.

נעיר שמותר לנו להשתמש באקסיומת הפרדה כפי שעשינו שכן נוכל להשתמש בפונקציית הערכת האמת כל קבוצת כל המודלים $\leq\omega$ כדי להגדיר פונקציה בוליאנית שמחזירה עבור כל תורה האם יש בה סתירה.

סעיף ג׳

נבדוק אילו מהתורות ב־$\operatorname{comp}(T)$ הן $\aleph_0$־קטגוריות ואילו קטגוריות.

פתרון כל תורה שקובעת ביחידות את גודל ומספר מחלקות השקילות שלה תקבע באופן יחיד את המודלים שלה, שכן נוכל לבנות איזומורפיזם של תורת הקבוצות בין כל שני מודלים ביחס לקבוצות של מחלקות השקילות. כל תורה שלא מאפשרת כמות סופית של מחלקות שקילות או של גודלן, תהיה $\aleph_0$־קטגורית מסיבות דומות.

שאלה 4

נפריך את הטענה שכל תורה $\aleph_0$־קטגורית היא שלמה.

פתרון נעבוד בשפת השוויון, כלומר $L = \{=\}$. נקבע $c < \omega$ כלשהו, ונגדיר את $T_c = \{\varphi_{\geq n} \mid n < c\}$.

נוכיח ש־T_c היא $\aleph_0$־קטגורית. יהיו מודלים $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T_c$ כך ש־$|A| = |B| = \aleph_0$. משוויון העוצמות נובע שקיימת $f : A \to B$ חד־חד ערכית ועל. נובע אם כך ש־$f(a) = f(a') \iff a = a', \forall a, a'$, אבל מהגדרת השוויון גם $f(a) =^{\mathcal{B}} f(a') \iff a =^{\mathcal{A}} a'$, לכן $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ איזומורפיזם ובהתאם T_c היא $\aleph_0$־קטגורית.

אבל נבחין ש־$\langle [c+1], = \rangle \models T_c, \varphi_{\geq c+1}$, וכן ש־$\langle [c], = \rangle \models T_C, \neg\varphi_{\geq n+1}$, לכן T_c היא לא שלמה, בסתירה לטענה.

שאלה 5

תהי L שפה לתחשיב יחסים. יהי x משתנה ונניח ש־φ פסוק. תהי Σ קבוצת פסוקים כך ש־$\Sigma \models \varphi^x_c$ עבור קבוע c שאינו מופיע ב־φ או ב־Σ.

סעיף א׳

נוכיח ללא שימוש במשפטי השלמות והנאותות ש־$\Sigma \models \forall\varphi$.

הוכחה. נבחין שמתקיים $\Sigma \models \varphi^x_c$ אם ורק אם לכל $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ מתקיים $\mathcal{M} \models \varphi^x_c$. נבחין שאם נבחר מודל $\mathcal{M}$ כזה, אז $c^{\mathcal{M}} = d$ עבור איזשהו $d \in M$. אבל עבור מודל $\mathcal{N}$ כך ש־$N = M$ ופירוש כל סימן ב־$\mathcal{N}$ זהה לזה ב־$\mathcal{M}$ פרט ל־$c^{\mathcal{N}} = x$ כלשהו, עדיין מתקיים $\mathcal{N} \models \varphi^x_c$, ולכן נוכל להסיק $\mathcal{M} \models \varphi^x_d$ לכל $d \in M$, כלומר $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$. טענה זו נכונה עבור כל מודל $\mathcal{M}$ כזה, לכן בפרט מההגדרה $\Sigma \models \forall x\varphi$. $\square$

סעיף ב׳

נראה שלא בהכרח $\varphi^x_c \models \forall x\varphi$.

פתרון נגדיר את השפה $L = \{=, c\}$ וכן את המודל $\mathcal{M} = \langle 2; 0\rangle$, וכן $\varphi = x = c$. לכן מתקיים φ^x_c, כלומר $\mathcal{M} models0 = 0$, אבל $\mathcal{M} \models \forall x\varphi \implies \mathcal{M} \models \varphi^x_1$, כלומר $\mathcal{M} \models 1 = 0$, וזו כמובן סתירה.