פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

25 ביולי 2023

שאלה 1

את הפונקציה $f(x) = \ln x$ מקרבים בקטע $I = [e^2-1, e^2+1]$ על־ידי הפולינום

$$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{e^2} - \frac{x^2}{2e^4}$$

נראה כי

$$|f(x) - P(x)| < \frac{1}{3(e^2-1)^3}$$

לכל $x \in I$.

נראה כי $\ln x = \ln(e^2 e^{-2} x) = \ln(e^{-2}x) + 2 = \ln((e^{-2}x - 1) + 1) + 2$

לכן נגדיר $t = \frac{x}{e^2} - 1$

אז מההגדרה נובע $\ln x = g(t) = \ln(t+1) + 2$

ידוע כי $x \in [e^2-1, e^2+1]$ ולכן

$$\begin{aligned} &e^2 - 1 \le x \le e^2 + 1 \\ &e^2 - 1 \le e^2(t+1) \le e^2 + 1 \\ &1 - e^{-2} \le t + 1 \le 1 + e^{-2} \\ &-1 < -e^{-2} \le t \le e^{-2} < 1 \end{aligned}$$

דהינו $t \in (-1,1)$ ולכן על־פי פיתוח טיילור של $\ln(t+1)$ בתחום $(-1,1)$ אשר מוגדר בעמוד 65 כרך ב' פולינום טיילור מסדר 2 של $g(t)$ הוא

$$P_2(t) = g(0) + t - \frac{1}{2}t^2 = 2 + \frac{x}{e^2} - 1 - \frac{1}{2}(\frac{x}{e^2} - 1)^2 = 1 + \frac{x}{e^2} - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{e^4} - \frac{2x}{e^2} + 1) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{e^2} - \frac{x^2}{2e^4} = P(x)$$

לכן על־פי הגדרת השארית

$$R_2(t) = g(t) - P_2(t)$$

על־פי דוגמה 4.4 לכל $t \in (-1,1)$ מתקיים

$$|R_2(t)| < \frac{|t|^3}{1-|t|} = \frac{(\frac{x}{e^2} - 1)^3}{\frac{x}{e^2}} = \frac{(x-e^2)^3}{xe^4}$$

מחקירת הפונקציה עולה כי היא מקבלת מקסימום ב־$x = e^2 + 1$ ולכן

$$|R_2(t)| = |f(x) - P(x)| < \frac{(e^2+1-e^2)^3}{(e^2+1)e^4} = \frac{1}{e^6+e^4}$$

ניתן לבדוק ולראות כי מתקיים לכל $x \in [e^2-1, e^2+1]$

$$|f(x) - P(x)| < \frac{1}{3(e^2-1)^3}$$

שאלה 2

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בקטע $[a,b]$ ו־$f^{(n+1)}(x)$ רציפה ב־$[a,b]$.

נקבע נקודה $x_0 \in [a,b]$ ונסמן ב־$R_n(x)$ את השארית מסדר n של f ב־x_0.

נוכיח כי לכל $x \in [a,b]$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$$

הוכחה. נגדיר $P_i(x)$ פיתוח טיילור של $f(x)$ סביב x_0. נשים לב כי הפונקציה $f(x)$ עומדת בכל הדרישות לפיתוח זה עבור $0 \le i \le n$.

נוכיח באינדוקציה את הטענה:

בסיס האינדוקציה: מהמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסמלי נובע כי

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0) = f(x) - P_0(x) = R_0(x)$$

ומצאנו כי הטענה נכונה עבור $n=0$.

מהלך האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור $0 < i \le n$, לכן מתקיים

$$f(x) = P_i(x) + \frac{1}{i!}\int_{x_0}^{x} f^{(i+1)}(t)(x-t)^i dt$$

עבור הביטוי נבצע אינטגרציה בחלקים, כאשר

$$u = f^{(i+1)}(t) \qquad dv = (x-t)^i$$

$$du = f^{(i+2)}(t)dt \qquad v = -\frac{1}{i+1}(x-t)^{i+1}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_0}^{x} u(t)v(t)dt \\
&= -\frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(t)(x-t)^{(i+1)}\Big|_{x_0}^{x} \\
&= -\frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x)(x-x)^{(i+1)} + \frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{(i+1)} \\
&= \frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{(i+1)} \\
f(x) &= P_i(x) + \frac{1}{i!}\left(A - \frac{1}{i+1}\int_{x_0}^{x}(-1)f^{(i+2)}(t)(x-t)^{(i+1)}dt\right) \\
&= P_i(x) + \frac{1}{(i+1)!}\left(f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{(i+1)} + \int_{x_0}^{x} f^{(i+2)}(t)(x-t)^{(i+1)}dt\right) \\
&= P_{i+1}(x) + \frac{1}{(i+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(i+2)}(t)(x-t)^{(i+1)}dt
\end{aligned}$$

והשלמנו את מהלך האינדוקציה. **מש"ל**