תורת ההסתברות 1 — סיכום

12 בנובמבר 2024

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 29.10.2024

1.1 מבוא הקורס

נלמד לפי ספר שעוד לא יצא לאור שנכתב על־ידי אורי עצמו, הוא עוד לא סופי ויש בו בעיות ואי־דיוקים, תשיג את הספר הזה. כן יש הבדל בין הקורס והספר אז לא לסמוך על הסדר שלו גם כשאתה משיג אותו, אבל זו תוספת מאוד נוחה. יש סימון של כוכביות לחומר מוסף, כדאי לעבור עליו לקראת המבחן כי זה יתן לנו עוד אינטואיציה והעמקה של ההבנה.

נשים לב כי ענף ההסתברות הוא ענף חדש יחסית, שהתפתח הרבה אחרי שאר הענפים הקלאסיים של המתמטיקה, למעשה רק לפני 400 שנה נשאלה על־ידי נזיר במהלך חקר של משחק אקראי השאלה הראשית של העולם הזה, מה ההסתברות של הצלחה במשחק.

נעבור לדבר על פילוסופיה של ההסתברות. מה המשמעות של הטלת מטבע מבחינת הסתברות? ישנה הגישה של השכיחות, שמציגה הסתברות כתוצאה במקרה של חזרה על ניסוי כמות גדולה מאוד של פעמים. יש כמה בעיות בזה, לרבות חוסר היכולת להגדיר במדויק אמירה כזו, הטיות שנובעות מפיזיקה, מטבעות הם לא מאוזנים לדוגמה. הבעיה הראשית היא שלא לכל בעיה אפשר לפנות בצורה כזאת. ישנה גישה נוספת, היא הגישה האוביקטיבית או המתמטית, הגישה הזו בעצם היא תרגום בעיה מהמציאות לבעיה מתמטית פורמלית. לדוגמה נשאל את השאלה מה ההסתברות לקבל 6 בהגרלה של כל המספרים מ־1 עד מיליון. השיטה ההסתברותית קובעת שאם אני רוצה להוכיח קיום של איזשהו אוביקט, לפעמים אפשר לעשות את זה על־ידי הגרלה של אוביקט כזה והוכחה שיש הסתברות חיובית שהוא יוגרל, וזו הוכחה שהוא קיים. מה התחזיות שינבעו מתורת ההסתברות? לדוגמה אי־אפשר לחזות הטלת מטבע בודדת, אבל היא כן נותנת הבנה כללית של הטלת 1000 מטבעות, הסתברויות קטנות מספיק יכולות להיות זניחות ובמקרה זה נוכל להתעלם מהן. לפחות בתחילת הקורס נדבר על תרגום של בעיות מהמציאות לבעיות מתמטיות, זה אומנם חלק פחות ריגורזי, אבל הוא כן חשוב ליצירת קישור בין המציאות לבין החומר הנלמד.

דבר אחרון, ישנה השאלה הפילוסופית של האם באמת יש הסתברות שכן לא בטוח שיש אקראיות בטבע, הגישה לנושא מבחינה פיזיקלית קצת השתנתה בעת האחרונה וקשה לענות על השאלה הזאת. יש לנו תורות פיזיקליות שהן הסתברותיות בעיקרן, כמו תורת הקוונטים, תורה זו לא סתם הסתברותית, אנחנו לא מנסים לפתור בעיות הסתברותיות אלא ממש משתמשים במודלים סטטיסטיים כדי לתאר מצב בעולם. לדוגמה נוכל להסיק ככה מסקנה פשוטה שאם מיכל גז נפתח בחדר, יהיה ערבוב של הגז הפנימי ושל אוויר החדר, זוהי מסקנה הסתברותית. החלק המדהים הוא שתורת הקוונטים מניחה חוסר דטרמניזם כתכונה יסודית ועד כמה שאפשר לראות יש ניסויים שמוכיחים שבאמת יש חוסר ודאות בטבע. דהינו שברמה העקרונית הפשוטה באמת אין תוצאה ודאית בכלל למצבים כאלה במציאות.

1.2 מרחבי מדגם ופונקציית הסתברות

הגדרה 1.1 (מרחב מדגם) מרחב מדגם הוא קבוצה לא ריקה שמהווה העולם להסתברות.
נסמנה Ω. איבר במרחב המדגם נסמן ב־$\omega \in \Omega$ על־פי רוב.

נוכל להגיד שמרחב במדגם הוא הקבוצה של האיברים שעליה אנחנו שואלים בכלל שאלות, זהו הייצוג של האיברים או המצבים שמעניינים אותנו. בהתאם נראה עכשיו מספר דוגמות שמקשרות בין אובייקטים שאנו דנים בהם בהסתברות ובהגדרה פורמלית של מרחבי מדגם עבורם.

דוגמה 1.1 (מרחבי הסתברות שונים) נראה מספר דוגמות למצבים כאלה:

- הטלת מטבע תוגדר על־ידי $\Omega = \{H, T\}$.
- הטלת שלושה מטבעות תהיה באופן דומה $\Omega = \{H, T\}^3$.
- הטלת קוביה היא $\Omega = [6] = \{1, \ldots, 6\}$.
- הטלת מטבע ואז אם יוצא עץ (H) אז מטילים קוביה ואם יוצא פלי (T) אז מטילים קוביה עם 8 פאות.
במקרה זה נסמן $\Omega = \{H1, H2, H3, \ldots, H6, T1, \ldots, T8\} = \{H, T\} \times \{1, \ldots, 8\}$ כאשר הכוונה פה היא לזוג סדור $\langle H, 1 \rangle$.
- ערבוב חפיסת קלפים, במקרה זה מרחב המדגם שלנו יהיה סימון של הקלפים כרשימה מספרית בלבד, דהינו $\Omega = S_{52}$.
נוכל גם לסמן במקום את $\Omega = \{1, \ldots, 52\}^{52}$, זהו סימון זהה.

בדוגמה זו קל במיוחד לראות שכל איבר בקבוצה מתאר מצב סופי כלשהו, ואנו יכולים לשאול שאלות הסתברותיות מהצורה מה הסיכוי שנקבל ω מסוים מתוך Ω, זאת ללא התחשבות בבעיה שממנה אנו מגיעים. נבחן עתה גם דוגמות למקרים שבהם אין לנו מספר סופי של אפשרויות, למעשה מקרים אלה דומים מאוד למקרים שראינו עד כה.

דוגמה 1.2 (מרחבי מדגם לא סופיים) מטילים מטבע עד שיוצא H, אז מרחב המדגם הוא $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
באופן דומה נוכל לבחון מדידת זמן התפרקות חלקיק, היא $\Omega = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

הגדרה 1.2 (פונקציית הסתברות נקודתית) יהי מרחב מדגם Ω ותהי $p : \Omega \to [0, \infty)$ פונקציה כך שמתקיים

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

אז פונקציה זו נקראת **פונקציית הסתברות**.

למעשה פונקציית הסתברות היא מה שאנחנו נזהה עם הסתברות במובן הפשוט, פונקציה זו מגדירה לנו לכל סיטואציה ממרחב המדגם מה הסיכוי שנגיע אליה, כך לדוגמה אם נאמר שהטלת מטבע תגיע בחצי מהמקרים לעץ ובחצי השני לפלי, אז זו היא פונקציית ההסתברות עצמה, פונקציה שמחזירה חצי עבור עץ וחצי עבור פלי, נראה מספר דוגמות.

דוגמה 1.3 (פונקציית הסתברות להטלת מטבע) נגדיר $\Omega = \{H, T\}$ ויהי $0 \le \alpha \le 1$, נגדיר $p(H) = \alpha, p(T) = 1 - \alpha$.

דוגמה 1.4 (פונקציית הסתברות אינסופית) נגדיר $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ו־ $p(\omega) = \begin{cases} 2^{-\omega} & \omega \in \mathbb{N} \\ 0 & \omega = \infty \end{cases}$. בדוגמה זו נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ ולכן זו אכן פונקציית הסתברות.

נבחין כי הדוגמה האחרונה מתארת לנו התפלגות של דעיכה, זאת אומרת שלדוגמה אם קיים חלקיק עם זמן מחצית חיים של יחידה אחת, פונקציית הסתברות זו תניב לנו את הסיכוי שהוא התפרק לאחר כמות יחידות זמן כלשהי.

דוגמה 1.5 נגדיר $\Omega = \mathbb{N}$ ו־ $p(\omega) = \frac{1}{\omega(\omega+1)}$, נבחין כי אכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

הגדרה 1.3 (תומך) התומך של p הוא $\text{Supp}(p) = \{\omega \in \Omega \mid p(\omega) > 0\}$.
נבחין כי התומך הוא למעשה קבוצת האיברים שאפשרי לקבל לפי פונקציית ההסתברות, כל שאר המצבים מקבלים 0, משמעו הוא שאין אפשרות להגיע אליו.

הערה נבחין כי תמיד $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

הגדרה 1.4 (מאורע) מאורע הוא תת־קבוצה של מרחב המדגם, קבוצת כל המאורעות תסומן $\mathcal{F}$. עבור מאורע A המאורע המשלים מסומן ב־ $A^C = \Omega \setminus A$.

הגדרה 1.5 (פונקציית הסתברות) נגדיר עתה פונקציית הסתברות שאיננה נקודתית. יהי מרחב מדגם Ω וקבוצת מאורעות $\mathcal{F}$.
תהי $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ המקיימת את התכונות הבאות:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ סדרת מאורעות שונים מתקיים

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)$$

דהינו, הפונקציה סכימה בתת־קבוצות בנות מניה.

לפונקציה כזו נקרא **פונקציית ההסתברות** על $(\Omega, \mathcal{F})$.

טענה 1.6 *תהי p פונקציית הסתברות נקודתית על Ω אז נגדיר פונקציית הסתברות $\mathbb{P}_p$ על־ידי*

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

אז $\mathbb{P}_p$ היא פונקציית הסתברות.

הוכחה. נוכיח ששתי התכונות של פונקציית הסתברות מתקיימות.

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \ge 0$$

שכן זהו סכום אי־שלילי מהגדרת p, בנוסף נקבל מההגדרה של p כי

$$\mathbb{P}_p(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

וקיבלנו כי התכונה הראשונה מתקיימת.

תהי $\{A\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, אז נקבל

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_p(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{\omega\in A_i} p(\omega) \right) = \sum_{\omega\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} p(\omega) = \mathbb{P}_p(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$$

ולכן גם התכונה השנייה מתקיימת וקיבלנו כי $\mathbb{P}_p$ היא אכן פונקציית הסתברות. $\square$

נשים לב כי בעוד פונקציית הסתברות נקודתית מאפשרת לנו לדון בהסתברות של איבר בודד בקבוצות בנות מניה, פונקציית הסתברות למעשה מאפשרת לנו לדון בהסתברות של מאורעות, הם קבוצות של כמה מצבים אפשריים, ובכך להגדיל את מושא הדיון שלנו. מהטענה האחרונה גם נוכל להסיק שבין שתי ההגדרות קיים קשר הדוק, שכן פונקציית הסתברות נקודתית גוררת את קיומה של פונקציית הסתברות כללית.

2 תרגול 1 — 31.10.2024

המתרגל הוא אמיר, amir.behar@mail.huji.ac.il

2.1 מרחבי הסתברות סופיים ובני־מניה

ניזכר בהגדרה למרחב הסתברות, המטרה של הגדרה זו היא לתאר תוצאות אפשריות של מצב נתון.

הגדרה 2.1 (מרחב הסתברות) מרחב הסתברות הוא קבוצה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ כאשר $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, כך שמתקיים

1. חיוביות: $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0$
2. נרמול: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. סיגמא־אדיטיביות: $\forall \{A_i\}_{i=1}^\infty \in \mathcal{F}, (\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset) \implies \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i)$

תרגיל 2.1 יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, $A, B \in \mathcal{F}$, הוכיחו

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

הוכחה. נבחין כי $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B)$ וגם $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B)$. נוכל אם כן לסכום ולקבל

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

נבחין כי השוויון האחרון נובע מהזרות של קבוצות אלה. □

לאורך פרק זה נגדיר מעתה שמתקיים Ω סופית, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ואף נגדיר כי ההסתברות אחידה, דהינו $\forall A \ \ \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, זה כמובן שקול לטענה

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\omega'\})$$

תרגיל 2.2 מטילים קוביה הוגנת, מה ההסתברות שיצא מספר זוגי?

פתרון נגדיר $\Omega = [6] = \{1, \dots, 6\}$, עם $\mathbb{P}$ אחידה.
נרצה לחשב את $A = \{2, 4, 6\}$ ולכן נקבל $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

תרגיל 2.3 מטילים מטבע הוגן שלוש פעמים, מה ההסתברות שיצא עץ בדיוק פעמיים, ומה ההסתברות שיצא עץ לפחות פעמיים?

פתרון נגדיר $\Omega = \{TTT, TTP, TPT, PTT, \dots\}$.
עבור המקרה הראשון נגדיר $A = \{TTP, TPT, PTT\}$, ולכן נקבל שההסתברות היא $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.
במקרה השני נקבל $B = A \cup \{TTT\}$ ולכן $P(B) = \frac{1}{2}$.

תרגיל 2.4 מטילים קוביה הוגנת n פעמים.

1. מה ההסתברות שתוצאת ההטלה הראשונה קטנה מ־4?
2. מה ההסתברות שתוצאת ההטלה הראשונה קטנה שווה מתוצאת ההטלה השנייה?
3. מה ההסתברות שיצא 1 לפחות פעם אחת?

פתרון נגדיר $\Omega = [6]^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [6]\}$.

1. נגדיר $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_1 < 4\}$ ולכן $\mathbb{P}(A) = \frac{3 \cdot 6^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{2}$.
2. נגדיר $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_1 \leq x_2\} = \bigcup_{i=1}^6 \{(x_1, i, x_3, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_i \leq i\}$, ולכן נקבל
$$\mathbb{P}(B) = \sum \mathbb{P}(B_i) = \sum \frac{i \cdot 6^{n-2}}{6^n} = \frac{\sum_{i=1}^6 i}{6^2} = \frac{6 \cdot 7}{6^2 \cdot 2} = \frac{7}{12}$$
3. הפעם $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \exists i, x_i = 1\}$, בהתאם $C^C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \forall i, x_1 \neq 1\}$.
לכן נקבל $\mathbb{P}(C^C) = \frac{5^n}{6^n} \implies \mathbb{P}(C) = 1 - \frac{5^n}{6^n}$.

תרגיל 2.5 חמישה אנשים בריאים וחמישה אנשים חולי שפעת עומדים בשורה. מה ההסתברות שחולי השפעת נמצאים משמאל לאנשים הבריאים?

פתרון נגדיר Ω ככל הסידורים של $0, 1$ כשיש חמישה מכל סוג. לכן נקבל $|\Omega| = \binom{10}{5}$, שכן $\Omega = \{X \subset [10] \mid |X| = 5\}$.
המאורע הפעם הוא $A = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ ובהתאם $\mathbb{P}(A) = \frac{5!5!}{10!}$.

נוכל גם להגדיר $\Omega = S_{10}$ כאשר חמשת המספרים הראשונים מייצגים בריאים וחמשת האחרונים מייצגים חולים.
במקרה זה נקבל $A = \{\pi \in \Omega \mid \pi(\{1,2,3,4,5\}) \subseteq \{1,2,3,4,5\}\}$ ולכן $|A| = 5!5!$ וכך נקבל $\mathbb{P}(A) = \frac{5!5!}{10!}$.

3 שיעור 2 — 31.10.2024

3.1 השלמה לטורים דו־מימדיים

נגדיר הגדרה שדרושה לצורך ההרצאה הקודמת כדי להיות מסוגלים לדון בסכומים אינסופיים בני־מניה.

הגדרה 3.1 אם $\{a_i\}_{i\in I}$ ו־$a_i \geq 0$ לכל $i \in I$ אז נגדיר

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} \mid J \subseteq I, J \text{ is finite}\right\}$$

3.2 תכונות של פונקציות הסתברות

נעבור עתה לבחון פונקציות הסתברות ואת תכונותיהן, נתחיל מתרגיל שיוצק תוכן לתומך של פונקציית הסתברות:

תרגיל 3.1 הוכיחו כי אם $\sum_{i\in I} a_i < \infty$ ו־$a_i \geq 0$ לכל $i \in I$ אז $|\{i \in I \mid a_i < 0\}| \leq \aleph_0$. במילים אחרות הוכיחו כי התומך של a הוא בן־מניה.

בשיעור הקודם ראינו את ההגדרה והטענה הבאות:

הגדרה 3.2 בהינתן פונקציית הסתברות נקודתית p נגדיר

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$$

טענה 3.3 *$\mathbb{P}_p$ היא פונקציית הסתברות.*

טענה זו בעצם יוצרת קשר בין פונקציות הסתברות לפונקציות הסתברות נקודתיות, ומאפשרת לנו לחקור את פונקציות ההסתברות לעומק באופן פשוט הרבה יותר. נשתמש עתה בכלי זה.

הגדרה 3.4 (מרחב הסתברות בדיד) אם $\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות כך שקיימת פונקציית הסתברות נקודתית p כך ש$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$, אז נאמר ש־$\mathbb{P}$ היא בדידה ו־$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ **מרחב הסתברות בדיד**.

טענה 3.5 *יש פונקציות הסתברות שאינן בדידות. בפרט, עבור מדגם ההסתברות $\Omega = [0, 1]$ קיימת פונקציית הסתברות $\mathbb{P}$ המקיימת*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a \leq b \leq 1 \implies \mathbb{P}([a, b]) = b - a$$

דוגמה 3.1 ידוע כי $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$ ולכן נוכל להגדיר $\Omega = \mathbb{N}$ ו־$p(n) = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6}n^2}$, הגדרה זו תניב ש־$\sum_{n\in\mathbb{N}} p(n) = 1$ ולכן זו פונקציית הסתברות. נחשב את $\mathbb{P}_p(A)$ עבור $A = 2\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{n\in A} p(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p(2k) = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6}(2k)^2} = \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{4}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}$$

נסביר, הגדרנו פונקציית הסתברות של דעיכה, דהינו שככל שהמספר שאנו מבקשים גדול יותר כך הוא פחות סביר באופן מעריכי (לדוגמה זמן מחצית חיים), ואז שאלנו כמה סביר המאורע שבו נקבל מספר זוגי.

משפט 3.6 (תכונות פונקציית הסתברות) *$\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות על $(\Omega, \mathcal{F})$, אז*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. *אם I קבוצה סופית ו־$\{A_i\}_{i\in I}$ מאורעות זרים בזוגות, אז* $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$
3. *אם $A \subseteq B$ מאורעות אז* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. $\mathbb{P}(A) \leq 1$ *לכל מאורע* A
5. *לכל מאורע A מתקיים* $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$

הוכחה. נוכיח את התכונות

1. נראה כי $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$ שכן כל איחוד של קבוצות ריקות הוא זר, לכן אילו $\mathbb{P}(\emptyset) \neq 0$ נקבל ישר סתירה, נסיק כי $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ בלבד.

2. נגדיר $A_i = \emptyset$ לכל $i > n$ ונשתמש בסיגמא־אדיטיביות ונקבל
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$
3. נשתמש בתכונה 2 על $B, B \setminus A$, אלו הן קבוצות זרות כמובן, אם נגדיר $D = A \cup (B \setminus A)$ נקבל $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$.
4. נובע ישירות מתכונה 3 ומ־$A \subseteq \Omega$.
5. ניזכר כי $A^C = \Omega \setminus A$ ולכן $\Omega = A \cup A^C$ ונקבל $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C)$.

□

נעבור עתה לאפיון של פונקציות הסתברות בדידות, נבין מתי הן כאלה ומתי לא.

משפט 3.7 (תנאים שקולים לפונקציית הסתברות בדידה) *אם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, התנאים הבאים שקולים:*

1. *$\mathbb{P}$ היא פונקציית הסתברות בדידה*
2. *$\mathbb{P}$ נתמכת על קבוצות בנות־מניה, כלומר קיימת קבוצה $A \in \mathcal{F}$ בת־מניה כך ש־$\mathbb{P}(A) = 1$*
3. *$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$*
4. *לכל מאורע $A \in \mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$*

הוכחה. $2 \implies 1$: נניח ש־$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$ עבור $p : \Omega \to [0, \infty)$ פונקציית הסתברות נקודתית. נסתכל על $\text{Supp}(p) = \{\omega \in \Omega \mid p(\omega) > 0\}$, לפי הגדרת הסכום והתרגיל נובע ש־$A = \text{Supp}(p)$ בת־מניה. נקבל
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$
$4 \implies 2$: נניח ש־$\mathbb{P}(S) = 1$ עבור S בת־מניה. לכן $\mathbb{P}(S^C) = 0$. נראה כי A הוא איחוד זר $A = (A \cap S) \cup (A \cap S^C)$ ולכן נקבל
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(A \cap S^C) = \mathbb{P}(A \cap S) + 0 = \sum_{\omega\in A\cap S} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$
$3 \implies 4$: אם נבחר $A = \Omega$ נקבל את טענה 3.

$1 \implies 3$: נגדיר $p : \Omega \to [0, \infty)$ על־ידי $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$, נקבל $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$ ולכן p היא פונקציית הסתברות נקודתית. מהתרגיל והגדרת הסכום נובע ש־$S = \text{Supp}(p)$ היא בת־מניה ומתקיים $\mathbb{P}(S^C) = 0$, אז לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(A \cap S^C) = \mathbb{P}(A \cap S) = \sum_{\omega\in A\cap S} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p(\omega) = \mathbb{P}_p(A)$$

□

3.3 פרדוקס יום ההולדת

פרדוקס יום ההולדת הוא פרדוקס מוכר הגורס כי גם בקבוצות קטנות יחסית של אנשים, הסיכוי שלשני אנשים שונים יהיה תאריך יום הולדת זהה הוא גבוה במידה משונה. הפרדוקס נקרא כך שכן לכאורה אין קשר בין מספר הימים בשנה לבין הסיכוי הכל־כך גבוה שמצב זה יקרה, נבחן עתה את הפרדוקס בהיבט הסתברותי.

נניח שכל תאריכי יום ההולדת הם סבירים באותה מידה ונבחן את הפרדוקס. נגדיר $\Omega = [365]^k$ עבור k מספר האנשים בקבוצה נתונה כלשהי. $p(\omega) = \frac{1}{365^k}$ לכל $\omega \in \Omega$. נקבל $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_p(A) = \frac{|A|}{365^k}$. נרצה לחשב את A כמאורע שיש לפחות שני אנשים שיש להם יום הולדת באותו יום, דהינו שיש שני ערכים זהים ברשימת המספרים, נגדיר $A = \{\omega \in \Omega \mid \exists 1 \leq i \neq j \leq k, \omega_i = \omega_j\}$. בשל המורכבות נבחן את המשלים A^C, נקבל $|A^C| = 365 \cdot 364 \cdots (365 - (k-1)) = \frac{365!}{(365-(i-1))!}$. נציב ונחשב:
$$\mathbb{P}(A^C) = \frac{|A^C|}{365^k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{365 - (i-1)}{365} = \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{i-1}{365})$$
מהנוסחה שקיבלנו נראה שמההצבה $k = 23$ נקבל שההסתברות היא בערך $\frac{1}{2}$, דהינו בקבוצה של 23 אנשים יש סבירות של חצי שלפחות שניים יחגגו יום הולדת באתו יום.

4 שיעור 3 — 5.11.2024

4.1 מכפלת מרחבי הסתברות בדידים

ניזכר תחילה במרחבי הסתברות אחידים

הגדרה 4.1 מרחב הסתברות אחיד הוא $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ המקיים $p(\omega_1) = p(\omega_2)$ לכל $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$.

מסקנה 4.2 $\mathbb{P}_p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

נבחין כי במקרים מסוימים ההסתברות שלנו מורכבת משני מאורעות בלתי תלויים, במקרים אלה נרצה להגדיר מכפלה של מרחבי ההסתברות.

הגדרה 4.3 (מרחב מכפלת הסתברויות) אם $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_{p_1})$ ו־$(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_{p_2})$ מרחבי הסתברות בדידים נגדיר $q : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, \infty)$ על־ידי $q(\omega_1, \omega_2) = p(\omega_1) \cdot p(\omega_2)$.

טענה 4.4 *q פונקציית הסתברות נקודתית.*

הוכחה. נשתמש ישירות בהגדרה ונחשב

$$\sum_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2} q(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2} q(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1} \left(\sum_{\omega_2\in\Omega_2} p_1(\omega_1)p_2(\omega_2)\right) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1} p_1(\omega_1) = 1$$

□

עתה כשהוכחנו טענה זו, יש לנו הצדקה אמיתית להגדיר את $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_{1,2}, \mathbb{P}_q)$ כמרחב הסתברות, ונקרא לו מרחב מכפלה.

טענה 4.5 *אם $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_{p_1})$ ו־$(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_{p_2})$ מרחבי הסתברות אחידים, אז מרחב המכפלה $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_{1,2}, \mathbb{P}_q)$ אחיד אף הוא.*

הוכחה.

$$q(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2) = \frac{1}{|\Omega_1|} \cdot \frac{1}{|\Omega_2|} = \frac{1}{|\Omega_1 \times \Omega_2|}$$

□

הגדרה 4.6 במרחב מכפלה המאורעות מהצורה $A \times \Omega_2$ או $\Omega_1 \times A$ נקראים שוליים.
מאורע מהצורה $A \times B$ נקרא מאורע מכפלה.

טענה 4.7 *במרחב מכפלה $\mathbb{P}_q(A \times B) = \mathbb{P}_{p_1}(A) \cdot \mathbb{P}_{p_2}(B)$. בפרט $\mathbb{P}_q(A \times \Omega_2) = \mathbb{P}_{p_1}(A)$.*

הוכחה.

$$\sum_{(\omega_1,\omega_2)\in A\times B} q(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega_1\in A,\omega_2\in B} q(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega_1\in A} \left(\sum_{\omega_2\in B} p_1(\omega_1)p_2(\omega_2)\right) = \sum_{\omega_1\in A} p_1(\omega_1)\mathbb{P}_{p_2}(B) = \mathbb{P}_{p_1}(A)\mathbb{P}_{p_2}(B)$$

□

דוגמה 4.1 בהינתן n הטלות מטבע כלשהו, מה ההסתברות שיצאו k עצים?

עבור ההטלה הראשונה, $\Omega_1 = \{0, 1\}$. עוד נגדיר $p(1) = \alpha, p(0) = 1 - \alpha$ עבור $0 \le \alpha \le 1$ כלשהו.
בהתאם נקבל $\Omega = \{0, 1\}^n$, וכן

$$q(\omega_1, \dots, \omega_n) = \prod_{i=1}^{n} p(\omega_i) = \prod_{i=1}^{n} \alpha^{\omega_i} \cdot (1 - \alpha)^{1-\omega_i} = \alpha^{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}(1 - \alpha)^{n-\sum_{i=1}^{n} \omega_i}$$

נבחין כי היינו יכולים לתאר את המקרה הזה ממש על־ידי $q(\omega) = \alpha^\omega \cdot (1 - \alpha)^{1-\omega}$.

נעבור עתה לבחינת המאורע

$$A = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\}$$

נקבל מהביטוי שמצאנו כי

$$\mathbb{P}_q(A) = \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in A} q(\omega_1,\ldots,\omega_n) \sum_{\sum_{i=1}^n \omega_i = k} \alpha^{\sum_{i=1}^n \omega_i}(1-\alpha)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i} = |A|\alpha^k(1-\alpha)^{n-k} = \binom{n}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$$

דוגמה 4.2 נבחן עתה את המקרה של הטלות הוגנות ובחינת המקרה שחצי מההטלות לפחות יצאו עץ, זאת־אומרת שנבחן את הדוגמה הקודמת כאשר $n = 2m, k = m$, ו־$\alpha = \frac{1}{2}$. מנוסחת סטרלינג שאנחנו לא מכירים $m! \simeq \sqrt{2\pi m}(\frac{m}{e})^m$ ואז נוכל להסיק

$$\mathbb{P}_q(A) = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^m} \simeq \frac{\sqrt{4\pi m}(\frac{2m}{e})^{2m}}{(\sqrt{2\pi m}(\frac{k}{e})^m)^2 2^{2m}} = \frac{\sqrt{4\pi m}}{2\pi m} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

4.2 ניסויים דו־שלביים

נניח $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_{p_1})$ מרחב הסתברות בדידה עבור הניסוי הראשון, ונניח שיש מרחב הסתברות בדידה עבור הניסוי השני כך שלכל תוצאה בניסוי הראשון, פונקציית ההסתברות תשתנה בהתאם בניסוי השני. לכל $\omega_1 \in \Omega_1$ יש פונקציית הסתברות נקודתית $p_{\omega_1} : \Omega_2 \to [0,\infty)$. נגדיר את מרחב הניסוי הדו־שלבי $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_{1,2}, \mathbb{P}_q)$, כאשר $q(\omega_1,\omega_2) = p_1(\omega_1)\cdot p_{\omega_1}(\omega_2)$.

טענה 4.8 *$\mathbb{P}_q$ פונקציית הסתברות.*

הוכחה.

$$\sum_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2} q(\omega_1,\omega_2) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1}\left(\sum_{\omega_2\in\Omega_2} p_1(\omega_1)p_{\omega_1}(\omega_2)\right) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1} p_1(\omega_1)\left(\sum_{\omega_2\in\Omega_2} p_{\omega_1}(\omega_2)\right) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1} p_1(\omega_1) = 1$$

□

דוגמה 4.3 $\Omega_1 = \{H, T\}$ ו־$\Omega_2 = \{1,\ldots,8\}$, נגדיר $p_1(H) = p_1(T) = \frac{1}{2}$. עוד נגדיר

$$p_H(\omega_2) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 1 \le \omega_2 \le 6 \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \qquad p_T(\omega_2) = \frac{1}{8}$$

מהגדרה זו נקבל

$$q(\omega_1,\omega_2) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \omega_1 = H, \omega_2 \in [6] \\ 0 & \omega_1 = H, \omega_2 \in \{7,8\} \\ \frac{1}{16} & \omega_1 = T, \omega_2 \in [8] \end{cases}$$

משפט 4.9 (חסם האיחוד) *אם A, B מאורעות אז* $\mathbb{P}(A\cup B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

הוכחה.

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A \uplus (B\setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B\setminus A) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

□

נוכל להשתמש בחסם האיחוד כדי להוכיח גרסה כללית יותר של המשפט:

משפט 4.10 (אי־שוויון בול) *אם $A_1,\ldots,A_k$ מאורעות, אז* $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^k A_i) \le \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i)$.

דוגמה 4.4 נחזור לבחון את פרדוקס יום ההולדת, הפעם נבחן גרסה כללית יותר של הרעיון. נגדיר $\Omega = [m]^k$ עם הסתברות אחידה. נגדיר גם $A = \{\omega\in\Omega \mid \exists 1 \le i < j \le k, \omega_i = \omega_j\}$. אנו רוצים את ההסתברות $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, אז נבחן את המשלים

$$A^C = \{\omega\in\Omega \mid \forall 1 \le i,j \le k, i\ne j \implies \omega_i \ne \omega_j\}$$

נחשב

$$|A^C| = m(m-1)\cdots(m-(k-1))$$

בהתאם

$$\mathbb{P}(A^C) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(m-i)}{m^k} = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{m-i}{m^k} = \prod_{i=0}^{k-1}(1-\frac{i}{m})$$

נזכור ש־$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$, ונוכל לקבל

$$\prod_{i=0}^{k-1}(1-\frac{i}{m}) \leq \prod_{i=0}^{k-1} e^{-\frac{i}{m}} = \exp(-\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{k-1} i) = e^{-\frac{k(k-1)}{2m}}$$

כאשר k גדול ביחס ל־$\sqrt{2m}$ מקבלים הסם קרוב ל־0.

נגדיר הפעם $A = \bigcup_{\substack{i\neq j \\ i,j\in[k]}} A_{ij}$ עבור $A_{ij} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j\}$. וגם

$$i \neq j \implies \mathbb{P}(A_{ij}) = \frac{|A_{ij}|}{m^k} = \frac{m \cdot m^{k-2}}{m^k} = \frac{1}{m}$$

ועתה

$$\mathbb{P}(A) \leq \sum_{\substack{i\neq j \\ i,j\in[k]}} \mathbb{P}(A_{ij}) = \sum_{\substack{i\neq j \\ i,j\in[k]}} \frac{1}{m} = \binom{k}{2}\frac{1}{m} = \frac{k(k-1)}{2m}$$

לכן אם k קטן ביחס ל־$\sqrt{2m}$ אז ההסתברות ליום־הולדת משותף קטנה.

5 תרגול 2 — 7.11.2024

5.1 פתרון שאלות הסתברותיות

נתחיל בבחינת טענה שימושית לביצוע חישובי הסתברות:

טענה 5.1 (נוסחת ההסתברות השלמה) *יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, $\mathcal{A}$ חלוקה בת־מניה של Ω, לכל $B \in \mathcal{F}$ מתקיים*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A \cap B)$$

נניח שיש מרחב הסתברות ויש חלוקה בת מניה של המרחב, אז לכל מאורע ההסתברות שלו היא הסכום על החלוקה על החיתוך של החלוקה ו־A.

הוכחה. נשים לב כי $B = \biguplus A \in \mathcal{A} B \cap A$ איחוד זר, ולכן הטענה נובעת מסיגמא־אדיטיביות. □

תרגיל 5.1 קוביה מוטה בעלת 6 פאות עם הסתברות נקודתית $p(i) = \frac{i}{21}$ מוטלת 5 פעמים.
מה ההסתברות שתוצאת ההטלה הראשונה התקבלה פעם אחת ויחידה?

פתרון נגדיר $\Omega = [6]^5$ ונגדיר $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_5) = p(x_1) \cdots p(x_5)$. אנו רוצים לחשב את

$$B = \{(x_1, \dots, x_5) \in \Omega \mid \forall j \neq 1, x_j \neq x_1\}$$

נגדיר חלוקה $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_6\}$ של Ω כך ש־$A_i = \{(i, x_2, \dots, x_5) \in \Omega \mid 1 \leq x_j \leq 6\}$.
נקבל

$$\mathbb{P}(B \cap A_i) = \frac{i}{21} \cdot (1 - \frac{i}{21})^4$$

על־ידי שימוש בנוסחת ההסתברות השלמה נקבל

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{21}(1 - \frac{i}{21})^4$$

נראה עתה דוגמה לשימוש בחסם האיחוד בן־המניה, אותו נראה בהרצאה הבאה

טענה 5.2 (חסם האיחוד הבן־מניה) *אם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ו־$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ אז מתקיים*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

תרגיל 5.2 משלשלים k פתקי הצבעה בין n קלפיות.
מה ההסתברות שאין קלפי עם יותר מפתק אחד?

פתרון נגדיר $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i, x_1 + \dots + x_n = k\}$. נחשב ונקבל $|\Omega| = \binom{n+k-1}{k-1}$.
נגדיר את המאורע, $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_i \leq 1\}$.
ננסה לחסום את המשלים,

$$\Omega \setminus A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \exists i, x_i \geq 2\}$$

אם נגדיר $A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_i \geq 2\}$ אז נוכל להגדיר

$$\Omega \setminus A = \bigcup_{i \in [n]} A_i$$

נחשב את ההסתברות של כל A_i, מתקבל $|A_i| = \binom{n+k-3}{k-3}$ מהשיקול של סכימת הפתרונות השלמים תוך התעלמות משני פתקים.
לכן

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n+k-3}{k-3}}{\binom{n+k-1}{k-1}} = \frac{k(k-1)}{(k+n-1)(k+n-2)}$$

מחסם האיחוד נובע

$$\mathbb{P}(\Omega - A) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{k(k-1)}{(k+n-1)(k+n-2)} = n \cdot \frac{k(k-1)}{(n+k-1)(n+k-2)}$$

ועל־ידי מעבר למשלים שוב נוכל להסיק $\mathbb{P}(A) \geq 1 - n \cdot \frac{k(k-1)}{(n+k-1)(n+k-2)}$.

נזכור כי אנו מנסים להבין את המגמה כאשר המספרים מאוד גדולים, לכן נבחן את המקרה ש־$n \to \infty$, אז נובע $\mathbb{P}(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, דהינו כאשר יש כמות קלפיות הולכת וגדלה הסיכוי שיהיה פתק יחיד בכל אחת (מספר הפתקים לא משתנה) הולך וגדל ומתקרב לסיכוי מלא.

נראה עתה דוגמה לשימוש במרחבי ניסוי דו־שלביים:

תרגיל 5.3 מה ההסתברות שנגריל מספר m בין 1 ל־n, ואז נגריל עוד מספר והוא יהיה בין 1 לבין m?

פתרון נבנה פונקציית הסתברות עבור הניסוי השני, נניח שבניסוי השני קיבלנו m:

$$p_m(k) = \begin{cases} \frac{1}{m} & k \le m \\ 0 & k > m \end{cases}, \qquad q(m,k) = \begin{cases} \frac{1}{mn} & k \le m \\ 0 & k > m \end{cases}$$

נגדיר A_k המאורע שתוצאת ההגרלה השניה היא k, לכן

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\{(m,k) \in \Omega \mid m \le k\}) = \sum_{m=1}^{n} q(m,k) = \sum_{m=k}^{n} \frac{1}{mn}$$

נבחין כי המעבר האחרון אכן תקין, שכן קיבענו את המשתנה השני, זאת אומרת שעכשיו במקום להסתכל על מספר שיותר קטן ממספר אחר, אנו בוחנים את המספר החוסם מלמעלה, המספר הגדול יותר.

לדוגמה

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n^2}, \qquad \mathbb{P}(A_1) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{mn} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \approx \frac{\log n}{n}$$

נבחן דוגמה ספציפית כהמשך של השאלה הזו, הפעם נגדיר $m = n/2$:

דוגמה 5.1 נגדיר $B_{n/2}$ להיות המאורע בהתחלה השניה ו־B שבהגרלה השניה יצא מספר גדול מ־$n/2$

$$\mathbb{P}(B_{n/2}) = \mathbb{P}(\bigcup_{k \ge n/2}^{n} A_k) = \frac{1}{n}\sum_{k \ge \frac{n}{2}}^{n}\sum_{m=k}^{n} \frac{1}{m} = \frac{1}{n}\sum_{m=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \frac{\frac{n}{2} + 1 - n + m}{m}$$

כמו בשאלה הקודמת, גם הפעם נרצה להבין מגמה כללית, ולכן נבדוק את הביטוי כאשר n שואף לאינסוף, דהינו שהמספרים שאפשר להגדיל הולכים וגדלים בכמותם:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_{n/2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \frac{1 + m - \frac{n}{2}}{m}$$

נבחין כי $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = \log(n) + e + o(\frac{1}{m})$ ולכן

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \frac{1 + m - \frac{n}{2}}{m} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{n}{2n}(\log(n) - \log(\frac{n}{2}) + o(\frac{1}{n})) + \frac{1}{n}(\log(n) - \log(\frac{n}{2}) + o(\frac{1}{n})) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\log 2\end{aligned}$$

6 שיעור 4 — 7.11.2024

בשיעור הקודם דיברנו על מרחבי מכפלה וניסויים דו־שלביים. ברור לנו כי על־ידי שרשור דומה לתהליך של ניסוי דו־שלבי נוכל לבנות ניסוי רב־שלבי. עוד דיברנו על חסם האיחוד, הטענה כי $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$. השימוש של חסם האיחוד מאפשר לנו לפשט חישובים שבהם אנחנו רוצים הבנה כללית של ההתנהגות של מרחב ההסתברות.

6.1 חסמי איחוד ורציפות

הגדרה 6.1 סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ נקראת עולה אם $A_n \subseteq A_{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

סימון 6.2 נסמן $A_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

משפט 6.3 (משפט רציפות פונקציית ההסתברות) *אם $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ סדרת מאורעות עולה אז*

$$\mathbb{P}(A_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

המשפט נקרא כך בשל ההקבלה שלו לקונספט של רציפות בפונקציות רגילות, עבור $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא רציפה ב־a אם ורק אם לכל סדרה $x_n \to a$ מתקיים $f(x_n) \to f(a)$.

הוכחה. נגדיר $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ כאשר $B_1 = A_1 \setminus \emptyset = A_1$.
נראה כי מתקיים $\biguplus_{n=1}^m B_n = A_m$ איחוד זר:
$\bigcup_{n=1}^m B_n = A_m$ כי לכל $\omega \in A_m$ יש n מינימלי כך ש־$\omega \in A_n$, אבל $\omega \notin A_{n-1}$, לכן נוכל להסיק כי $\omega \in A_n \setminus A_{n-1} = B_n$.
אם $\omega \in B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ אז $\omega \notin A_{n-1}$ ולכן $\omega \notin A_k$ לכל $k < n$. מסיגמא־אדיטיביות נסיק

$$\sum_{n=1}^m \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_m)$$

וגם

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\biguplus_{n=1}^\infty B_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{m=1}^\infty \left(\biguplus_{n=1}^\infty B_n\right)) = \mathbb{P}(\bigcup_{m=1}^\infty A_m)$$

מצד שני מהגדרת הגבול

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(B_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{P}(B_n) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(A_m)$$

□

הגדרה 6.4 (סדרת מאורעות יורדת) נגדיר סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ כך שמתקיים $A_{n+1} \subseteq A_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

נוכל להסיק מהעובדה שמשלים של סדרה עולה הוא סדרה יורדת ונקבל

טענה 6.5

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

טענה 6.6 (חסם האיחוד הבן־מניה) *אם $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ סדרת מאורעות אז מתקיים*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה. נגדיר $B_m = \bigcup_{n=1}^m A_n$, זוהי סדרה עולה ולכן

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{m=1}^\infty B_m) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(B_m) \le \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n)$$

□

6.2 עיקרון ההכלה וההדחה

טענה 6.7 *אם A, B מאורעות אז*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

הוכחה. נגדיר $C = A \setminus B, D = A \cap B, E = B \setminus A$, נקבל

$$A = C \uplus D, \quad B = D \uplus E, \quad A \cup B = C \uplus D \uplus E$$

ונקבל

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D), \quad \mathbb{P}(D \cup B) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(E)$$

ולכן

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(E)$$

□

משפט 6.8 *עבור שלושה מאורעות A, B, C:*

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

משפט 6.9 *יהיו $A_1, \dots, A_n$ מאורעות, אז*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots$$

אם נגדיר $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$ לכל $I \subseteq [n]$ אז נקבל

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq [i] \\ |I|=k}} \mathbb{P}(A_I) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \mathbb{P}(A_I)$$

את משפט זה נוכיח בהמשך הקורס.

נראה דוגמה לבעיה קלאסית במקרים אלה.

תרגיל 6.1 (בעיית ההתאמה) מחלקים n מעטפות ל־n תיבות דואר, אחת לכל תיבה, מה ההסתברות שאף מכתב לא הגיע ליעדו?

פתרון נגדיר $\Omega = S_n$ מרחב אחיד. $A = \{\omega \in \Omega \mid \forall i, \omega(i) \neq i\}$.

נבחן את המשלים, $A^C = \{\omega \in \Omega \mid \exists i, \omega(i) = i\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ עבור $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega(i) = i\}$. נחשב

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

במקרה של חיתוך $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$ עבור $j < i$ נקבל

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{|A_i \cap A_j|}{|\Omega|} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

נוכל להמשיך את התהליך הזה, ונקבל

$$\mathbb{P}(A_I) = \frac{|\bigcap_{i \in I} A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-|I|)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(I+1))}$$

כעת נותר להשתמש בנוסחה להכלה והדחה, ונקבל

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

נשים לב כי רצינו לחשב את המשלים למאורע, לכן

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-1}$$

נקבל שאוסף התמורות ללא נקודת שבת הוא

$$|A^n| = n!\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l}{l!}$$

נגדיר קבוצה חדשה

$$D_k = \{\omega \in S_n \mid \exists i, \omega(i) = i\} = \biguplus_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}} D_I$$

ונבחין כי

$$D_I = \{\omega \in S_n \mid \forall i \in I, \omega(i) = i, \forall i \notin I, \omega(i) \neq i\}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_k) &= \sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}} \mathbb{P}(D_I)\\
&= \sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}} \frac{|D_I|}{n!}\\
&= \sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}} \frac{(n-k)!\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l}{l!}}{n!}\\
&= \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l}{l!}\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l}{l!}\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e^{-1}}{k!}
\end{aligned}$$

7 שיעור 5 — 12.11.2024

7.1 הסתברות מותנית

הגדרה 7.1 (הסתברות מותנית) A,B מאורעות, ההסתברות המותנית של A בהינתן B תוגדר להיות

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

דוגמה 7.1 אם מטילים שתי קוביות מאוזנות, מה ההסתברות שיצא 3 בקוביה הראשונה בהינתן שהסכום הוא 8?

נגדיר כמובן $\Omega = [6]^2$, וכן נגדיר $A = \{(3,i) \in \omega \mid 1 \le i \le 6\}$ וכן $B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$.

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

טענה 7.2 *נקבע מאורע B עם הסתברות $\mathbb{P}(B) > 0$, נגדיר $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$, דהינו $\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \to [0,\infty)$.*
אז $\mathbb{P}_B$ היא פונקציית הסתברות.

הוכחה. $\mathbb{P}_B(A)$ היא אי־שלילית.
נראה גם

$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

ולבסוף

$$\mathbb{P}_B(\biguplus_{i\in I} A_i) = \frac{(\mathbb{P}_B(\biguplus_{i\in I} A_i)) \cap B}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_B(\biguplus_{i\in I} A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i\in I} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_B(A_i)$$

$\square$

טענה 7.3 *יהיו C,B מאורעות המקיימים $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$, נסמן $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_B$ ו־$\mathbb{P}'' = \mathbb{P}'_C$.*
אז לכל מאורע A מתקיים $\mathbb{P}''(A) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)$ או בחילוף סימונים $\mathbb{P}'' = \mathbb{P}_{B\cap C}$.

הוכחה.

$$\mathbb{P}''(A) = \mathbb{P}'_C(A) = \frac{\mathbb{P}'(A \cap C)}{\mathbb{P}'(C)} = \frac{\mathbb{P}_B(A \cap C)}{\mathbb{P}_B(C)} = \frac{\frac{\mathbb{P}(B\cap(A\cap C))}{\mathbb{P}(B)}}{\frac{\mathbb{P}(B\cap C)}{\mathbb{P}(B)}} = \mathbb{P}_{B\cap C}(A)$$

$\square$

מצאנו כי התניה חוזרת היא אסוציאטיבית ולכן נוכל לדבר על הסתברות מותנית בכמה מאורעות ללא התייחסות לסדר שלהם, למעשה התנייה מותנית היא קומוטטיבית כפי שאפשר לראות בהוכחה.

מסקנה 7.4 (נוסחת ההסתברות השלמה בהסתברות מותנית) נניח ש־$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ חלוקה בת־מניה של Ω ו־B מאורע כלשהו, אז

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)$$

הוכחה.

$$\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i) = \mathbb{P}(A_i)\frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} = \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

ולכן

$$\biguplus_{i\in\mathbb{N}} (B \cap A_i) = B \implies \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

$\square$

למה 7.5 (כלל בייס) אם A,B *מאורעות עם הסתברות חיובית אז*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}_B(A)$$

הוכחה. ישירות מהגדרה נסיק

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}_B(A)$$

□

מסקנה 7.6 (כלל השרשרת)

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)$$

תרגיל 7.1 מטילים מטבע הוגן. אם יוצא עץ נוסעים לתל־אביב ואם יוצא פלי אז נוסעים לחיפה. כשנוסעים לתל־אביב יש הסתברות של אחוז אחד לפנצ'ר, ובנסיעה לחיפה יש הסתברות של 2 אחוז לפנצ'ר.
מה ההסתברות לפנצ'ר ומה ההסתברות שנסעו לתל־אביב?

פתרון נגדיר A הוא עץ או לנסוע לתל־אביב ו־B ההסתרות שיהיה פנצ'ר, בהתאם

$$\mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(B \mid A) = 0.01, \mathbb{P}(B \mid A^C) = 0.02$$

בהתאם

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(A^C) + \mathbb{P}(B \mid A^C) = \frac{1}{2}0.01 + \frac{1}{2}0.02 = 0.015$$

באשר לשאלה השנייה נקבל

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\frac{1}{2}}{0.015} \cdot 0.01 = \frac{1}{3}$$

נבחין כי התוצאה יצאה מאוד אלגנטית כתוצאה מהמטבע ההוגן, אילו הוא היה לא הוגן היינו מקבלים חישוב שונה במקצת, אך תקף באותה המידה.

דוגמה 7.2 (מונטי הול) *יש שלוש דלתות, בוחרים אחת, מנחה פותח דלת שלא נבחרה ומאחוריה אין כלום, מה שאומר שמאחורי אחת הדלתות הסגורות יש אוצר ובאחרות יש עז. המנחה מציע לכם להחליף את הדלת שבחרתם.*

קשה למדל את הבעיה הזו, שכן חסר תיאור והגדרה, אז נאמר שהגרלנו מספר ב־$[3]$, נניח שבחרנו 1, נניח שהמנחה גם במכוון תמיד בוחר דלת ריקה. נוסיף את ההנחה שאם האוצר מאחורי דלת 1 אז המנחה פותח את 2 או 3, וההסתברויות שוות.

נעבור להגדרה, A_i המאורע שהאוצר ב־i ו־B_i היא שהמנחה פותח את דלת i. מההנחות שלנו נובע $\mathbb{P}(B_3 \mid A_2) = 1, \mathbb{P}(B_2 \mid A_3) = 1, \mathbb{P}(B_3 \mid A_1) = \mathbb{P}(B_2 \mid A_1) = \frac{1}{2}$. לבסוף נניח כי $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3}$ לכל שלוש הדלתות.
נרצה לחשב את $\mathbb{P}(A_1 \mid B_2)$:

$$\mathbb{P}(A_1 \mid B_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B_2)} \cdot \mathbb{P}(B_2 \mid A_1) = \frac{\frac{1}{6}}{\mathbb{P}(B_2)}$$

וגם

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_2 \mid A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B_2 \mid A_2) + \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B_2 \mid A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$