פתרון מטלה 03 — תורת ההסתברות (1), 80420

21 בנובמבר 2024

שאלה 1

נאמר שמאורע A מחזק את מאורע B אם $\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B)$.
יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ונוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נסתור את הטענה כי אם A מחזק את B ו־B מחזק את C, אז A מחזק את C, על־ידי דוגמה נגדית.
פתרון נניח Ω הטלת שתי קוביות הוגנות, נניח גם A המאורע שיצא 2 בקוביה הראשונה, B המאורע שיצא 2 לפחות בכל קוביה, ו־C המאורע שיצא לפחות 2 בקוביה ב'.
נחשב $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{5}{6} > \mathbb{P}(B) = \frac{5^2}{6^2}$, בנוסף $\mathbb{P}(C \mid B) = 1 > \mathbb{P}(C) = \frac{5}{6}$ אבל $\mathbb{P}(C \mid A) = \frac{5}{6} = \mathbb{P}(C) = \frac{5}{6}$.

סעיף ב'

נוכיח כי אם A מחזק את B אז גם B מחזק את A.

הוכחה. ישירות מהגדרה

$$\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B) \iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} > \mathbb{P}(B) \iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} > \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$$

□

סעיף ג'

נסתור את הטענה כי אם A, B מאורעות המקיימים $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ אז $A \cap B = \emptyset$.
פתרון יהי Ω הטלת מטבע טריק, מטבע שבו תמיד צד א' נבחר.
נגדיר גם $A = \Omega$ ו־B מאורע שיצא צד ב', אז כמובן $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) = 0$, אבל $A \cap B$ הוא המקרה שיצא צד ב', ובפרט איננו מאורע ריק.

סעיף ד'

נסתור את הטענה כי אם A, B, C מאורעות כך ש־$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$ וגם $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ אז $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$.
פתרון נגדיר $\Omega = \{0, 1\}$ עם $\mathbb{P}$ אחידה, ונגדיר $A = C = \Omega, B = \emptyset$, אז נקבל ש־$A \cap B \cap C = A \cap B = \emptyset$ וגם כי $A \cap C = \Omega$, ולכן הטענה מתקיימת.

סעיף ה'

נסתור את הטענה כיאם $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אחידה, ונניח גם B מאורע כך ש־$\mathbb{P}(B) > 0$, אז $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ מרחב הסתברות אחידה.
פתרון נבחן מרחב הסתברות של הטלת קוביה הוגנת, הוא עומד בכל התנאים, ואם $B = \{1, 2, 3\}$ אז $\mathbb{P}_B(\{1\}) = \frac{1}{3} \neq 0 = \mathbb{P}_B(\{4\})$, דהינו מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ לא אחיד.
נבחין כי $(\Omega \cap B, \mathbb{P}_B)$ הוא כן מרחב הסתברות אחיד.

סעיף ו'

נוכיח שאם $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות לא אחיד ויהי B כך ש־$\mathbb{P}(B) > 0$, אז $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ מרחב הסתברות לא אחיד.

הוכחה. מהנתון נסיק כי Ω לא ריק, ונבחין בין שני מקרים.
אם $B = \Omega$ אז $\mathbb{P} = \mathbb{P}_B$ ולכן סיימנו.
אחרת נגדיר $A = \Omega \setminus B$ ולכן $\mathbb{P}_B(B) = 1 \neq 0 = \mathbb{P}_B(A)$, ולכן מרחב ההסתברות הוא לא אחיד. □

שאלה 2

סעיף א'

בשידה שלוש מגירות, באחת זוג גרביים שחור, בשנייה זוג גרביים לבן, ובשלישית גרב שחור וגרב לבן.
בוחרים מגירה באקראי ובהסתברות אחידה ומוציאים ממנה גרס יחיד באקראי, ונתון כי הוא לבן.
מה ההסתברות שגם הכרב השני במגירה לבן?
פתרון השאלה שקולה לשאלה מה הסיכוי להוציא גרב לבן ואז גרב לבן נוסף, נגדיר $\Omega = \{(w,w),(b,b),(w,b),(b,w)\}$.
נגדיר $A = \{(w,w),(w,b)\}$ המאורע שהגרב הראשון שנבחר הוא לבן, עוד נבחין כי $p(w,w) = p(b,b) = p(w,b) + p(b,w)$ ו־$p(w,b) = p(b,w)$.
נגדיר $B = \{(w,w)\}$ המאורע ששני הגרביים לבנים, ואנו מחפשים את $\mathbb{P}(B \mid A)$, לכן

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

סעיף ב'

נתון דלי עם k כדורים לבנים ו־k כדורים שחורים. מוציאים $k > n$ כדורים ללא החזרה ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף, כדור $n+1$. נחשב מה ההסתברות אם ידוע ש־n הכדורים הראשונים לבנים, מה ההסתברות שהכדור ה־$n+1$ שחור.
פתרון נגדיר $\Omega = \{b,w\}^{2k}$ כל הוצאות כל הכדורים ללא החזרה ועם חשיבות לסדר מהדלי.
נגדיר גם $A = \{\omega \in \Omega \mid \forall 1 \le i \le n, \omega_i = w\}$ המאורע ש־n הכדורים הראשונים הם לבנים, ו־$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega_{n+1} = b\}$ המאורע שהכדור ה־$n+1$ שחור. משיקולים קומבינטוריים נוכל להסיק

$$|\Omega| = \binom{2k}{k}, \qquad |A| = \binom{2k-n}{k-n}, \qquad |B| = \binom{2k-1}{k}, \qquad |A \cap B| = \binom{2k-n-1}{k-n}$$

נחשב

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{\binom{2k-n-1}{k-n}}{\binom{2k-n}{k-n}} = \frac{k}{2k-n}$$

סעיף ג'

נגדיר $\Omega\mathbb{N}, p(n) = 2^{-n}$. מגרילים מספר באקראי לפי p. נחשב את ההסתברות שבהינתן שהמספר שהתקבל מתחלק ב־6, ההסתברות שהוא מתחלק ב־7, וההסתברות שהוא מתחלק ב־4.
פתרון יהי $k \in \mathbb{N}$ ונגדיר $l = \operatorname{lcm}(6,k)$, אז אנו יודעים ש־$6\mathbb{N} \cap k\mathbb{N} = l\mathbb{N}$.
עוד נוכל לחשב שמתקיים לכל $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(m\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-mn} = \frac{2^{-m}}{1 - 2^{-m}} = \frac{1}{2^m - 1}$$

ולכן

$$\mathbb{P}_6(k) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(k\mathbb{N} \mid 6\mathbb{N}) = \frac{\mathbb{P}(l\mathbb{N})}{\mathbb{P}(6\mathbb{N})} = \frac{\frac{1}{2^l - 1}}{\frac{1}{2^6 - 1}} = \frac{2^6 - 1}{2^{\operatorname{lcm}(6,k)} - 1}$$

לבסוף נציב

$$\mathbb{P}_6(7) = \frac{2^6 - 1}{2^{42} - 1}, \qquad \mathbb{P}_6(4) = \frac{2^6 - 1}{2^8 - 1}$$

סעיף ד'

בוחרים אחד מהמספרים $L = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$ בהסתברות אחידה ואז מטילים מטבע מוטה בהתאם לפרמטר שנבחר פעמיים.
נחשב את ההסתברות לכל אחד מהפרמטרים בהינתן שיצא צד א' ואז צד ב'.

פתרון נגדיר $\Omega = L \times [2]^2$, וכן $A = L \times (1,2)$, ונגדיר $B_i = \{i\} \times [2]^2$. אנו מחפשים את $\mathbb{P}(B_i \mid A)$, לכן נתחיל מחישובים הכרחיים:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{4} = \frac{5}{24}, \mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{3}$$

ובהתאם לחישובים האלה

$$\mathbb{P}(A \cap B_1) = \mathbb{P}(A \cap B_3) = \frac{1}{16}, \qquad \mathbb{P}(A \cap B_2) = \frac{1}{12}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(B_1 \mid A) = \mathbb{P}(B_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{24}}, \qquad \mathbb{P}(B_2 \mid A) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{24}}$$

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח כי לכל שלושה מאורעות A_1, A_2, A_3 המקיימים $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$

הוכחה. מהנתון נסיק כי גם $\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2) > 0$ ולכן יש הצדקה לדבר על הסתברות מותנית על מאורעות אלה. נובע

$$\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}$$

מהגדרת הסתברות מותמית נובע גם

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)$$

לכן

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$

□

סעיף ב'

נוכיח כי לכל סדרה יורדת של n מאורעות $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n$ המקיימים $\mathbb{P}(A_{n-1}) > 0$ מתקיים השוויון

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in [n]} A_i) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i \in [n-1]} \mathbb{P}(A_{i+1} \mid A_i)$$

הוכחה. נשתמש בתוצאת הסעיף הקודם כבסיס אינדוקציה ונראה עתה את צעד האינדוקציה.

נניח כי הטענה נכונה עבור n ונראה שהיא נכונה גם עבור $n+1$, מהגדרת הסתברות מותנית

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = \frac{\mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)}$$

עתה נבחין כי מהגדרת סדרה יורדת מתקיים לכל $1 \le k \le n+1$

$$\bigcap_{i \in [k]} A_i = A_k$$

ולכן נסיק

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) = \mathbb{P}(A_{n+1})$$

אז מהנחת האינדוקציה

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcap_{i \in [n+1]} A_i) &= \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_1) \prod_{i \in [n-1]} \mathbb{P}(A_{i+1} \mid A_i) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{i \in [n]} \mathbb{P}(A_{i+1} \mid A_i)\end{aligned}$$

□

סעיף ג'

נראה שהתנאי שהסדרה יורדת הוא הכרחי על־ידי מציאת דוגמה נגדית לטענה כאשר הסדרה לא יורדת.

פתרון נגדיר ניסוי של הטלת קוביה הוגנת, ונניח $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{2,3\}, A_3 = \{3,4\}$, אז נקבל

$$0 = \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\bigcap_{i \in [n]} A_i) \ne \mathbb{P}(A_1) \prod_{i \in [n-1]} \mathbb{P}(A_{i+1} \mid A_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

שאלה 4

לאדם שני ילדים, נתון כי אחד מהם הוא בן ונולד ביום שלישי. נחשב את ההסתברות ששניהם בנים.

פתרון נתחיל ונבחין כי העובדה שהבן הראשון נולד ביום שלישי לא משפיעה על התשובה, לכן נתעלם מעובדה זו.

נגדיר $\Omega = \{(b,b),(b,g),(g,b),(b,g)\}$, עוד נגדיר $A = \{(b,g),(b,b)\}$ המאורע שהילד הראשון בן.

לבסוף, אנו מחפשים את $\mathbb{P}(\{(b,b)\} \mid A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

נבחין כי לחילופין היינו יכולים להגדיר $A = \{(b,b),(b,g)\}, B = \{(g,b),(b,b)\}$ המאורע שהילד הראשון בן ושהילד השני בן, והיינו מקבלים מאורעות בלתי־תלויים:

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap B)$$

דהינו מין הילדים איננו תלוי.

שאלה 5

מונטי הול מחביא אוצר באקראי מאחורי אחת משש דלתות, המשתתף בוחר 2 מהן.

מונטי פותח שתי דלתות באקראי מבין הדלתות שלא נבחרו, ואין מאחוריהן אוצר.

המשתתף אז בוחר האם לפתוח את שתי הדלתות שבחר או אחת מהדלתות הנותרות.

נחשב מה עדיף.

פתרון נניח שהמשתתף תמיד בוחר את דלתות 1 ו־2, עוד נניח A_i המאורע שהאוצר נמצא מאחורי דלת i.

נניח גם ש־B_i המאורע שהמנחה פותח את הדלת ה־i, וכמובן נניח כי היא תמיד ריקה.

אז המאורע שבו המשתתף זוכה אם הוא לא החליף דלת הוא $A_1 \cup A_2$.

אנו גם יודעים שההסתברות אחידה לאוצרות, לכן $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{6}$ וכן $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{3}$, דהינו לפני שהמנחה מתערב יש סיכוי של $\frac{1}{3}$ לזכות.

עתה נעבור לבדיקת ההסתברות לאחר פתיחת הדלתות, אם המשתתף בחר את האוצר אז המנחה יכול לפתוח ארבע דלתות בהסתברות שווה, דהינו $\mathbb{P}(B_i \mid A_1) = \frac{1}{4}$ עבור $3 \le i \le 6$. אם לעומת זאת האוצר במיקום אחר, אז למנחה יש רק שלוש דלתות לבחור מהן, דהינו $\mathbb{P}(B_i \mid A_j) = \frac{1}{3}$ עבור $3 \le j \le 6$ ו־$3 \le i \le 6, i \ne j$.

נעבור לחישוב ההסתברות שהמשתתף בחר את האוצר ולא החליף דלת, מטעמי אחידות ההסתברות הזו שקולה ל־$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \mid B_3 \cup B_4)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \mid B_3 \cup B_4) &= \frac{\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap (B_3 \cup B_4))}{\mathbb{P}(B_3 \cup B_4)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B_3) + \mathbb{P}(A_3 \cap B_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4)} \\
&= \frac{2\mathbb{P}(A_1 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_3)} \\
&= 2\mathbb{P}(A_1 \mid B_3) \\
&= 2\frac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B_3)}\mathbb{P}(B_3 \mid A_1) \\
&= \frac{1}{12\mathbb{P}(B_3)}
\end{aligned}$$

אז נחשב את $\mathbb{P}(B_3)$:

$$\mathbb{P}(B_3) = \sum_{i \in [6]} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_3 \mid A_i) = \frac{1}{6} \sum_{i \in [6]} \mathbb{P}(B_3 \mid A_i) = \frac{1}{6}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{3}) = \frac{5}{36}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \mid B_3 \cup B_4) = \frac{3}{5}$$

דהינו אם המשתתף דבק בהחלטתו אז יש לו סיכוי של $\frac{3}{5}$ לזכות בפרס.

עתה נבחן את המקרה השני, המשתתף ויתר על דלתות 1 ו־2 לטובת דלת 5 לאחר שהמנחה פתח את דלתות 3 ו־4, דהינו נחשב את $\mathbb{P}(A_5 \mid B_3 \cup B_4)$.

$$\mathbb{P}(A_5 \mid B_3 \cup B_4) = \frac{\mathbb{P}(A_5 \cap (B_3 \cup B_4))}{\mathbb{P}(B_3 \cup B_4)} = \frac{\mathbb{P}(A_5 \cap B_3) + \mathbb{P}(A_5 \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4)} = \frac{\mathbb{P}(A_5 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{\mathbb{P}(A_5)}{\mathbb{P}(B_3)}\mathbb{P}(B_3 \mid A_5) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{36}}\frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

ולכן למשתתף יהיה סיכוי של $\frac{2}{5}$ לזכות אם הוא יעבור לדלת אחרת לאחר שבחר שתיים ואז המנחה פתח שתיים נוספות.

נסכם ונאמר שלמשתתף במקרה זה לא משתלם להחליף דלתות, ואם הוא לא יחליף יש סיכוי של 60% שיצליח לזכות באוצר.

שאלה 6

יהיה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ סדרת מאורעות יורדת.
נוכיח כי מתקיים

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

הוכחה. נגדיר סדרה חדשה $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ על־ידי $B_n = \Omega \setminus A_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
לכל n מתקיים $B_n \subseteq B_{n+1} \iff \Omega \setminus A_n \subseteq \Omega \setminus A_{n+1} \iff A_n \supseteq A_{n+1}$, דהינו $\{B_n\}$ סדרת מאורעות עולה.
ממשפט רציפות פונקציית ההסתברות נסיק $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$.
נבחין כי $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\Omega \setminus A_n) = \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ולכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \mathbb{P}(\Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \\
&= \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \\
&= \mathbb{P}(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Omega \setminus B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)
\end{aligned}$$

$\square$