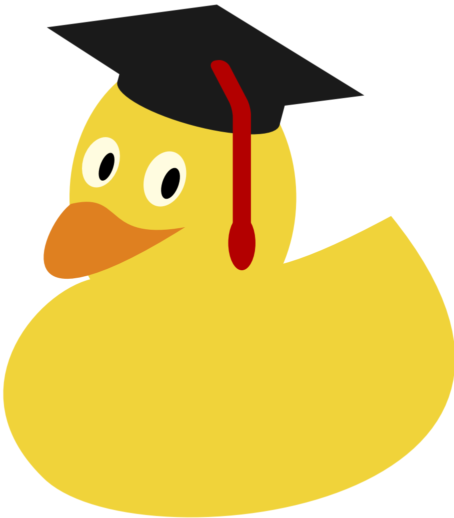
פונקציות מרוכבות — סיכום

31 באוקטובר 2024



תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 31.10.2024

למרצה קוראים עדי. המייל הוא adi.glucksam@mail.huji.ac.il
שיעורי הבית הפעם הם 20 אחוזים מהציון, גם פה עם התחשבות במטלות הטובות ביותר. שעת קבלה של עדי היא בימי ראשון אחרי השיעור, דהינו ב־12:00, במנצ'סטר 303.

1.1 השדה המרוכב

אנחנו נבצע התאמה של מספרים ממשיים $(x,y) \mapsto z = x + iy, i = \sqrt{-1}$. עוד נסמן $\mathrm{Re}(z) = x$ ו־$\mathrm{Im}(z) = y$, החלק הממשי והחלק המדומה.

נגדיר גם את הפעולו, אם $z = x+iy$ ו־$w = a+ib$ אז נגדיר $z \pm w = (x \pm a) + i(y \pm b)$. כפל בסקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר על־ידי $\alpha \cdot z = \alpha x + i\alpha y$.
כפל של מרוכב במרוכב נגדיר על־ידי $z \cdot w = (x+iy)(a+ib) = xa + xib + iya + iyib = xa - yb + i(xb + ya)$.
נגדיר פעולה חדשה, היא הצמדה (conjugation), נסמן $\overline{z} = \overline{x+iy} = x - y$. נקבל גם $z = \overline{\overline{z}}$. במקרה בו $z \in \mathbb{R}$ אז נקבל $x = \overline{z}$ ולמעשה השוויון מתקיים אם ורק אם $z \in \mathbb{R}$.
נגדיר גם את הערך המוחלט, על־ידי $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$, פעולה זו מייצגת את המרחק מהראשית במישור המרוכב.
הפעולה האחרונה שנגדיר היא חלוקה: $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{1}{|w|^2} z \cdot \overline{w}$.
כשדה וקטורי אפשר לבחון מספרים על־ידי $z = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.
ישנן מספר הצגות שונות למספרים מרוכבים, אחת מהן היא במטריצות, את זה נראה בתרגול, ובנוסף ישנה ההצגה הפולארית. נוכל לבחון כל מספר כווקטור, דהינו על־ידי עוצמה וזווית. בקורס שלנו זווית היא ב־$(-\pi, \pi]$ והיא מודדת מרחק זוויתי מהכיוון החיובי של ציר ה־x. כל מספר $z = x+iy$ ניתן לייצג על־ידי (r, θ), כאשר $r = |z|$ ו־$\theta = \mathrm{Arg}(z)$. סימון לזה (ובהמשך הקורס הוא יהפוך להגדרה) הוא $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. בהתאם $z = r \cdot e^{i\theta}$.

תרגיל 1.1 1. הראו כי $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

2. האם נכון תמיד ש־$Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$?

3. אם התשובה היא לא, איך זה לא מתנגש עם סעיף 1?

תרגיל 1.2 מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $\sqrt[n]{z} = w$.

פתרון

$$\sqrt[n]{z} = w \iff z = w^n = \left(r \cdot e^{i\theta}\right)^n = r^n \left(e^{i\theta}\right)^n$$

אז נקבל $|w|^n = r^n$ ולכן נקבל $|w| = |z|^{\frac{1}{n}}$.
נקבל בנוסף על־ידי נוסחת דה־מואר (שתגיע בהמשך הקורס)

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta}\left(e^{i\theta}\right)^{n-1} = e^{in\theta}$$

דהינו $Arg(w)n = Arg(z)$ ולכן $Arg(w) = \frac{Arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ עבור $k = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

1.2 מטריקה

מגיעה מהערך המוחלט, דהינו נגדיר $d(z,w) = |z - w|$, הגדרה זו משרה טופולוגיה. נוכל אם כן לבחון כדורים פתוחים, $B(z,r) = \{w \mid |z - w| < r\}$, ו־$U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה אם לכל $z \in U$ קיים $r = r(Z)$ כך ש־$B(z,r) \subseteq U$. $F \subseteq \mathbb{C}$ סגורה אם $\mathbb{C} \setminus F$ היא קבוצה פתוחה. פנים של $A \subset \mathbb{C}$ מוגדר $int(A) = \{z \in A \mid \exists r > 0, B(z,r) \subset A\}$. החוץ של A מוגדר כ־$Ext(A) = int(\mathbb{C} \setminus A)$ והשפה של A תוגדר להיות $\partial A = \mathbb{C} \setminus (int(A) \cup Ext(A))$. הסגור של A הוא $A \cup \partial A$, קבוצה היא חסומה אם קיים $R > 0$ כך ש־$A \subseteq B(0,R)$ וקבוצה K היא קומפקטית אם היא סגורה וחסומה.

בפעם הבאה נדבר על התכנסות בעולם של מרוכבים, מהי רציפות וכן הלאה.