

פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

10 במרץ 2023

שאלה 1

נמצא את נקודות הרציפות והאי־רציפות של הפונקציה f המוגדרת:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \tan \frac{\pi x}{2}$$

בתחום \mathbb{R} ונמיינן.

על־פי משפט 5.13 הפונקציה $\tan \frac{\pi x}{2}$ רציפה בכל תחום הגדרתה, ועל־פי הגדרת הפונקציה אנו יודעים כי היא איננה מוגדרת בערכים

$$\{1 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

מהגדרת החלק השלם והפונקציה x אנו יודעים כי $\lfloor x \rfloor$ רציפה בכל תחום הגדרתה, ולא מוגדרת בנקודות $x \in \mathbb{Z}$. על־פי משפט 5.11 גם f רציפה

בכל תחום הגדרתה, והיא כמובן לא מוגדרת ב־ \mathbb{Z} . אז כלל הנקודות החשודות באי־רציפות הן $x \in \mathbb{Z}$.

נגדיר מעתה $k \in \mathbb{Z}$. אנו יודעים כי כאשר $x = 1 + 2k$ אז הפונקציה $f(k)$ איננה מוגדרת, וכי $\lim_{x \rightarrow k^\pm} f(x) = \pm\infty$, לכן בנקודות אלה ל־ f נקודות אי־רציפות ממין שני.

כאשר $x = 2k$ אנו יודעים כי $\tan \frac{\pi x}{2}$ רציפה, ואילו $\lfloor x \rfloor$ מקיימת

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = k - 1 = \left(\lim_{x \rightarrow k^+} \lfloor x \rfloor \right) + \left(\lim_{x \rightarrow k^+} \tan \frac{\pi x}{2} \right) = k - 1 + 0 = k - 1$$

וגם

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = k - 1 = k + 0 = k$$

לכן על־פי הגדרה 5.22 הנקודות $x = 2k$ הן נקודות אי־רציפות ממין ראשון ב־ f .

שאלה 2

סעיף א'

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0 .

(i) ננסה את הטענה כי f איננה רציפה ב- x_0 אם ורק אם קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים x כך ש- $|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

הפונקציה f לא רציפה ב- x_0 אם ורק אם קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים x כך ש- $|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

(ii) ננסה את הטענה כי f איננה רציפה ב- x_0 אם ורק אם קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ המקיימת $x_n \rightarrow x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

הפונקציה f איננה רציפה ב- x_0 אם ורק אם קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ המקיימת $x_n \rightarrow x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

סעיף ב'

נגדיר g פונקציה הרציפה ב- x_0 ופונקציה f המוגדרת $f(x) = g(x)D(x)$.

נוכיח כי אם $g(x_0) = 0$ אז f רציפה ב- x_0 .

that! Do

סעיף ג'

(i) נוכיח כי הפונקציה f איננה רציפה על-פי ההגדרה מסעיף א' (i).

נמצא $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים ערך x כך ש- $|x| < \delta$ וגם $|f(x)| \geq \epsilon$.

נגדיר $\epsilon = \frac{1}{2}$. על-פי אקסיומת הרציפות קיים מספר ממשי שאיננו רציונלי x_1 כך ש- $0 < x_1 < \delta$. בשל היותו לא רציונלי מתקיים $f(x_1) = 1$.

ולכן גם $\epsilon = \frac{1}{2} \leq 1 = f(x_1)$. כמוכן שאם מתקיים $0 < x_1 < \delta$ אז גם $|x_1| < \delta$.

מצאנו ϵ העומד בתנאי ולכן על-פי הגדרת סעיף א' (i) הפונקציה f איננה רציפה כאשר $x_0 = 0$.

(ii) נוכיח כי הפונקציה f איננה רציפה על-פי ההגדרה מסעיף א' (ii).

נמצא סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ המקיימת $x_n \rightarrow 0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \rightarrow 0$.

נגדיר $x_n = \frac{\pi}{n}$. הסדרה מוגדרת לכל $n \in \mathbb{N}$, ומתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} = 0$$

הסדרה (x_n) אי-רציונלית לכל איבריה, לכן מתקיים $f(x_n) = 1$ לכל n . לכן $f(x_n) \rightarrow 1$ אבל $f(0) = 0$ ולכן הפונקציה f איננה רציפה ב- $x_0 = 0$.

סעיף ד'

נוכיח כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = 1 + (x - 1)D(x)$ כאשר $D(x)$ היא פונקציית דיריכלה.

לכל $x \in \mathbb{Q}$ מתקיים $f(x) = x, D(x) = 1$. לכן

$$f(x) = x = 1 + (x - 1) \cdot 1 = 1 + (x - 1)D(x)$$

לכל $x \notin \mathbb{Q}$ מתקיים $f(x) = 1, D(x) = 0$. לכן מתקיים

$$f(x) = 1 = 1 + (x - 1) \cdot 0 = 1 + (x - 1)D(x)$$

ראינו כי מתקיים $f(x) = 1 + (x - 1)D(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

סעיף ה'

תהי $x_0 \neq 1$ נוכיח כי f איננה רציפה ב- x_0 :

נניח בשלילה כי f רציפה בנקודה $x = x_0$. לכן על-פי משפט 5.11 הפונקציה 1 והפונקציה $(x-1)D(x)$ רציפות. באותה השיטה נראה כי $x-1$ היא רציפה וכי $D(x)$ רציפה, אבל לפי משפט 5.10 $D(x)$ איננה רציפה, בסתירה לטענה, ולכן גם $f(x)$ איננה רציפה.

שאלה 3

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0, \infty)$ המקיימת

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(0)$$

נוכיח כי f איננה חד-חד ערכית בקטע $[0, \infty)$.

על-פי שלילת הגדרת החד-חד ערכיות, נצטרך להוכיח כי קיימים שני ערכים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a \neq b$ אבל $f(a) = f(b)$ (*).

אילו הפונקציה f היא פונקציה קבועה, אז כמובן שאיננה חד-חד ערכית.

נוכיח כי הפונקציה מקיימת את תנאי (*) כאשר היא איננה קבועה.

נגדיר מספר ממשי $\epsilon > 0$. על-פי הגדרת הגבול 4.54 קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - f(0)| < \epsilon$. נגדיר b מספר כלשהו

שמקיים $b > M$.

על-פי הגדרת הרציפות 5.3 קיים $\delta > 0$ כך שלכל x שמקיים $|x - 0| < \delta$ מתקיים גם $|f(x) - f(0)| < \epsilon$. נגדיר a מספר כלשהו המקיים

$0 < x < \delta$. כשם שהגדרנו את הערכים a, b עבור ϵ כך נוכל להגדיר אותם גם עבור $\frac{\epsilon}{4}$, נגדירים a_0, b_0 . על-פי משפט ערך הביניים של קושי לקטע

$[a_1, a]$ קיים c_0 המקיים $f(c_0) = \frac{\epsilon}{2}$. באותה הדרך נוכל להגדיר ערך c_1 המקיים $f(c_1) = \frac{\epsilon}{2}$ מהקטע $[b, b_1]$.

הקטעים הללו אינם חופפים, לכן כמובן $c_0 \neq c_1$, אך $f(c_0) = f(c_1)$, והוכחנו את טענה (*).

שאלה 4

נגדיר:

$$f(x) = \frac{(x+1)\sin x}{x}, g(x) = \frac{x\sin x}{x+1}$$

סעיף א'

נוכיח כי f חסומה בקטע $(0, \infty)$:

נבחן תחילה את התחום $(1, \infty)$. בקטע זה מתקיים:

$$0 < 1 < x \rightarrow x < 1 + x < 2x \rightarrow 1 < \frac{1+x}{x} < 2 \quad (\#)$$

תמונת פונקציית $\sin x$ היא $[-1, 1]$, לכן מתקיים לכל x בקטע

$$-2 < \sin x < 2 \rightarrow -2 < \frac{(1+x)\sin x}{x} < 4$$

לכן על-פי הגדרה 4.8 הפונקציה חסומה בקטע $(1, \infty)$.

נוכיח כי הפונקציה חסומה גם בקטע $(0, 1]$:

קל לראות כי הפונקציה f מוגדרת ורציפה בקטע $(0, \infty)$. נשים לב כי מתקיים:

$$f(x) = \frac{x\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \sin x + \frac{\sin x}{x}$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1$$

מצאנו כי הפונקציה f רציפה כאשר $x_0 = 0$, לכן היא רציפה בקטע $[0, 1]$ ולכן לפי המשפט הראשון של ויירשטראס גם חסומה בקטע זה, לכן הפונקציה f חסומה גם בקטע $(0, \infty)$.

סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה f מקבלת מקסימום בקטע $(0, \infty)$.

נשים לב כל לכל $0 < x < y$ מתקיים:

$$x < y \rightarrow x + xy < y + xy \rightarrow x(y+1) < y(x+1) \rightarrow \frac{y+1}{y} < \frac{x+1}{x} \quad (*)$$

עוד ידוע לנו כי $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1$ לכל $k \in \mathbb{N}$. אלו הן נקודות מקסימום אזוריות של הפונקציה $\sin x$ ובשל המכפלה גם של f . בשל $(*)$ כל נקודות מקסימום כזו בפונקציה f קטנה מקודמתה, ולכן איננה נקודת מקסימום. בשל תחומה של f , כאשר $k = 0$ ישנה נקודת מקסימום כזו שאין נקודת מקסימום לפניה, ובשל כך אין נקודה גדולה ממנה ב- f . נקודה זו היא $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

סעיף ג'

נוכיח כי $\sup g((0, \infty)) = 1$ על-פי טענה 3.9.

נוכיח כי 1 הוא חסם מלעיל של $g((0, \infty))$:

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{x+1}{x} \\ \sin x &\leq 1 < \frac{x+1}{x} \\ \sin x &< \frac{x+1}{x} \\ \frac{x \sin x}{x+1} &= g(x) < 1 \end{aligned} \quad (\#)$$

מצאנו כי 1 אכן חסם מלעיל של הפונקציה. עתה נשאר להוכיח כי לכל $\epsilon > 0$ קיים $x \in g((0, \infty))$ כך ש- $x > 1 - \epsilon$ לפני-כן נראה כי מתקיים הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

על-פי הגבול שמצאנו לכל $\epsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך שלכל $x > M$ מתקיים

$$\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \epsilon$$

על-פי הופכיות אי-שוויון (#) מתקיים לכל $x > 0$:

$$\frac{x}{x+1} < 1 \rightarrow -\frac{x}{x+1} > -1 \rightarrow 1 - \frac{x}{x+1} > 0$$

לכן

$$\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| = 1 - \frac{x}{x+1} < \epsilon \rightarrow 1 - \epsilon < \frac{x}{x+1}$$

נגדיר $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ כאשר $k \in \mathbb{N}$ אז $\sin x = 1$ ולכן

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon) \sin x &< \frac{x}{x+1} \sin x \\ 1 - \epsilon &< \frac{x \sin x}{x+1} \end{aligned}$$

מצאנו כי שני התנאים לטענה 3.9 מתקיימים ולכן $\sup g((0, \infty)) = 1$.

סעיף ד'

נוכיח כי g איננה מקבלת מקסימום בקטע $(0, \infty)$:

נניח בשלילה כי לפונקציה g יש נקודת מקסימום ב- x_0 . מתקיים $x_0 < x_0 + 2\pi$ וגם $\sin x_0 = \sin(x_0 + 2\pi)$. על-פי ההופכי של (#) מתקיים:

$$\frac{x_0}{x_0+1} < \frac{x_0+2\pi}{x_0+2\pi+1} \rightarrow \frac{x_0 \sin x_0}{x_0+1} < \frac{(x_0+2\pi) \sin(x_0+2\pi)}{x_0+2\pi+1} \rightarrow g(x_0) < g(x_0+2\pi)$$

אנו רואים כי הנקודה x_0 איננה נקודת מקסימום בסתירה לטענה, ולכן אין נקודת מקסימום ל- g בקטע $(0, \infty)$.

שאלה 5

סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ רציפה במידה שווה בקטע $[0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \epsilon &> \left| \sqrt{1+x_0^2} - \sqrt{1+x_1^2} \right| \\ &= \frac{\left| \left(\sqrt{1+x_0^2} - \sqrt{1+x_1^2} \right) \left(\sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+x_1^2} \right) \right|}{\left| \sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+x_1^2} \right|} \\ &= \frac{|1+x_0^2 - 1 - x_1^2|}{\left| \sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+x_1^2} \right|} \\ &= \frac{|(x_0+x_1)(x_0-x_1)|}{\left| \sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+x_1^2} \right|} \\ &= \frac{|x_0+x_1|}{\left| \sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+x_1^2} \right|} |x_0-x_1| \end{aligned}$$

בקטע הנתון $x_0, x_1 > 0$ ולכן $x_0 + x_1 > 0$, כמו־כן שורשים אלה מוגדרים בכל הקטע וחיוביים בו:

$$\frac{x_0+x_1}{\sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+x_1^2}} |x_0-x_1| < \epsilon$$

לכל $x > 0$ מתקיים $\sqrt{x^2+1} > x$. נגדיר את δ :

$$\frac{x_0+x_1}{\sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+x_1^2}} |x_0-x_1| < \frac{\sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+x_1^2}}{\sqrt{1+x_0^2} + \sqrt{1+x_1^2}} |x_0-x_1| < \delta$$

ולכן

$$|x_0-x_1| < \delta$$

כמו קראינו, במצב זה גם מתקיים

$$|f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon$$

ולכן הפונקציה f רציפה במידה שווה בקטע $[0, \infty)$.

סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה המוגדרת רציפה במידה שווה בקטע $(0, \infty)$:

$$f(x) = (1 - \cos x) \sin \frac{1}{x}$$

הפונקציה f מוגדרת בכל הקטע הנתון ומורכבת ממכפלת והרכבת פונקציות רציפות ולכן רציפה גם (למצוא תירוץ יותר טוב). נראה כי מתקיים:

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0^+} 1 - \cos x_0 = 0$$

הפונקציה $\sin \frac{1}{x}$ אומנם איננה מתכנסת ב־ $x_0 = 0$, אבל חסומה ב־ $[-1, 1]$ ולכן על־פי הגדרת היינה לגבול חד־צדדי ומשפט 2.22 מתקיים:

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0^+} (1 - \cos x_0) \sin \frac{1}{x_0} = 0$$

נמצא את הגבול

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty^-} (1 - \cos x_0) \sin \frac{1}{x_0}$$

במקרה זה $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$ על-פי גבול $\sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ והרכבת פונקציה עם $\frac{1}{x}$. הפונקציה $1 - \cos x$ חסומה בקטע $[-1, 1]$ ובאופן דומה:

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty^-} (1 - \cos x_0) \sin \frac{1}{x_0} = 0$$

יש בספר משפט שמרחיב את משפט 5.49 לקטעים אינסופיים, תשתמש בזה.

סעיף ג'

נוכיח כי לכל $y \geq x \geq 1$ מתקיים

$$y^2 \arctan y - x^2 \arctan x \geq (y^2 - x^2) \arctan x$$

$$y^2 \arctan y \geq y^2 \arctan x$$

$$\arctan y \geq \arctan x$$

על-פי טענה 5.44 ומשפט 5.43 מתקיים $\arctan y \geq \arctan x$ אם $y \geq x$ ולכן אי-השוויון מתקיים.

נוכיח כי הפונקציה f , המוגדרת:

$$f(x) = x^2 \arctan x$$

איננה רציפה במידה שווה בקטע $[1, \infty)$:

נניח בשלילה כי הפונקציה f רציפה במידה שווה לכל $\epsilon > 0$, לכן לכל $x, y \in \mathbb{R}$ שעבורם מתקיים $|x - y| < \delta$, מתקיים

$$|y^2 \arctan y - x^2 \arctan x| < \epsilon$$

לכן גם מתקיים:

$$|(x^2 - y^2) \arctan x| < \epsilon$$

הפונקציה $\arctan x$ חיובית לכל $x \geq 0$ ולכן

$$|(x - y)(x + y)| \arctan x = |x - y| (x + y) \arctan x < \epsilon$$