פתרון מטלה 01 — תורת הקבוצות האקסיומטית, 80650

13 בנובמבר 2024

שאלה 1

נניח את $Z - \text{Foundation}$, ותהי קבוצה טרנזיטיבית לא ריקה x, נניח גם שלכל $y \in x$ יש קבוצה טרנזיטיבית z כך ש־$y \subseteq z \in x$, ולכל $y \in x$ גם $\mathcal{P}(y) \in x$.

סעיף א'

נוכיח ש־$\langle x, \in \rangle$ הוא מודל שמקיים את האקסיומות: ההיקפיות, הקבוצה הריקה, הפרדה והאיחוד.

הוכחה. נוכיח את האקסיומות:

- היקפיות: אם $\varphi = \forall y, y'(y = y' \iff \forall z(z \in y \iff z \in y'))$ אז בהתאם $\varphi^x = \forall y, y' \in x(y = y' \iff \forall z \in x(z \in y \iff z \in y'))$.
  זהו כמובן פסוק Δ_0 ולכן נוכל להסיק שהוא מתקיים אם ורק אם φ^x מתקיים, והוא אכן מתקיים.
- הקבוצה הריקה: נתון כי x טרנזיטיבית ולכן $\in$ מגדיר עליה סדר טוב, בהתאם קיים $y \in x$ כך שלכל $z \in x$ גם $y \in z$, לכן $\exists y \in x(\forall z \in x(z \notin y))$ ולמעשה $y = \emptyset^x$.
- סכמת החלפה: תהי $y \in x$, אז גם $\mathbb{P}(y) \in x$ ומטרנזיטיביות גם $\forall z \in z \in \mathbb{P}(y) \in x \implies z \in x$.
  עתה תהי A מחלקה לא ריקה ב־x, אז כמובן A^x מחלקה Δ_0 ובהתאם נוכל לקבל ש־$y \cap A^x \in V$ וגם $y \cap A^x \subseteq y$, לכן $y \cap A^x \in \mathbb{P}(y)$
  אבל מצאנו כי במצב זה $y \cap A^c \in x$.
- איחוד: תהי $y \in x$, אז קיימת $z \in x$ טרנזיטיבית כך ש־$y \subseteq z$, לכל $a \in y$ מתקיים $a \in z$ ולכן לכל $b \in a$ גם $b \in z$, אם כך נשתמש באקסיומת החלפה על מחלקת האיחוד של y על z ונקבל $\bigcup y$.

$\square$

שאלה 2

נניח את אקסיומת היסוד ונראה ש־$\langle x, \in \rangle$ מודל המקיים גם את אקסיומת היסוד.

הוכחה. נבחין כי אם φ אקסיומת היסוד אז φ מתקיים ולכן גם φ^x מתקיים, אבל φ^x הוא Δ_0 ולכן גם $\langle x, \in \rangle$ מקיים אותו, ולכן $\langle x, \in \rangle \models \varphi$.
נוכל לראות גם שאם $\langle x, \in \rangle \not\models \varphi$ אז קיים $y \in x$ כך ש־$\langle x, \in \rangle \models \neg\varphi(y)$ אבל $y \in V$ ולכן $V \models \neg\varphi(y)$ וזו סתירה לאקסיומה שהנחנו. $\square$

שאלה 3

נניח עתה שגם

$$\forall y, z \in x(y \cup z \in x)$$

ונוכיח שהמודל מקיים את אקסיומת הזוג הלא סדור.

הוכחה. נגדיר $\varphi(y) = \forall z, z' \in y(z = z')$ הנוסחה שקיים איבר יחיד ב־y (y יחידון), כמובן היא תקפה מאקסיומת ההיקפיות, ידוע גם ש$y \in x \implies \mathcal{P}(y) \in x$, ולכן מסכמת הפרדה גם מחלקת היחידונים מ־y קבוצה ומטרנזיטיביות נקבל כי $\{y\} \in x$, נעשה תהליך זה שוב עבור $z \in x$.

נקבל מהנוסחה הנתונה כי גם $\{y\} \cup \{z\} = \{y, z\} \in x$ ולכן אקסיומת הזוג הלא סדור חלה. □

נקבל כי $\langle x, \in \rangle$ מקיים את $\mathrm{Z} - \mathrm{Infinity}$.

שאלה 4

נניח ש־$x \in \omega$ ונוכיח ש־$\langle x, \in \rangle$ מקיים את אקסיומת האינסוף.

הוכחה. מאקסיומת השלמות קיים $\alpha \in \omega$ כך שחיתוכם זר ב־x. כמובן $\alpha < \omega$ מאקסיומת הפרדה עבור התכונה של איבר מינימלי נקבל כי $\emptyset \in x$, לכן $\emptyset^x = \emptyset$. אז נקבל מכל האקסיומות מלבד אינסוף שהעוקב לקבוצה הריקה, והעוקב ה־n־סופי של הקבוצה הריקה כולם מוכלים ב־x, ונתון כי גם ω מוכל בה, ולכן אקסיומת האינסוף מתקיימת. $\square$

שאלה 5

נניח עתה את ZF. נוכיח שלכל α סודר גבולי ככה ש־$\alpha \geq \omega + \omega$ ולכל φ אקסיומה של Z, $\langle V_\alpha, \in\rangle \models \alpha$.

הוכחה. יהי α כזה, נבחין כי V_α טרנזיטיבית (טענה מהכיתה) ונתון כי איננה ריקה. עוד ראינו כי לכל $y \in V_\alpha$ קיים $\beta \in \alpha$ כך ש־$y \subseteq V_\beta$, ומטרנזיטיביות $V_\beta \in V_\alpha$. לבסוף, גם $\mathcal{P}(y) \in V_{\alpha+1}$ ולכן $\mathcal{P}(y) \in V_\alpha$, אז טענת שאלה 1 חלה וכך גם 2 (הנחנו יסוד).

אם $y, z \in V_\alpha$ אז קיימים $i, j < \alpha$ כך ש־$y \in V_i, z \in V_z$, וכן בהכרח $V_i \leq V_j$ או הפוך, נניח $V_i \leq V_j$ ולכן מטרנזיטיביות $y, z \in V_j$. בהתאם $\{i, j\} \subseteq V_j$ כמחלקה, ולכן $\{y, z\} \in V_{j+1}$, לכן נוכל להסיק כי זו קבוצה, מטרנזיטיביות נקבל $\{y, z\} \in V_\alpha$.

מצאנו אם כך שטענת שאלה 3 מתקיימת אף היא. ידוע כי $\alpha \geq \omega$ ולכן $\omega \in V_\alpha$ ולכן $\langle V_\alpha, \in\rangle$ מקיים את Z. $\square$