פתרון מטלה 09 — פונקציות מרוכבות, 80519

7 בינואר 2025

שאלה 1

בכל סעיף נוכיח שלא קיימת פונקציה שלמה המקיימת את הטענה או נביא דוגמה לפונקציה כזו.

סעיף א׳

לכל $n \geq 1$,

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$$

הוכחה. נניח בשלילה שקיימת פונקציה כזו, ונגדיר

$$g(z) = f(z) - z$$

לכן

$$g(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n}) - \frac{1}{2n} = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

וממשפט היחידות השני נובע $g \equiv 0$, לכן $f(z) = z$, אבל זו סתירה ל־$f(1) = -1$ ולכן לא קיימת f כזו. □

סעיף ב׳

עבור $n \geq 1$,

$$f(n) = (-1)^n n$$

פתרון נגדיר

$$f(z) = e^{i\pi z} z$$

ולכן נובע ישירות כי

$$f(n) = (-1)^n n$$

כפי שרצינו, ונבחין כי f אכן שלמה, כהרכבת פונקציות שלמות.

סעיף ג׳

עבור $n \geq 1$,

$$f(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n}$$

הוכחה. נניח בשלילה ש־f כזו קיימת ונגדיר

$$g(z) = f^2(z) - z$$

זוהי כמובן פונקציה שלמה, ונבחין כי גם

$$g(\frac{1}{n^2}) = f^2(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{n^2} = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

וממשפט היחידות השני נקבל $g \equiv 0$, כלומר $f(z) = \sqrt{z} \iff f^2 = z$. אבל f לא גזירה ב־0 בסתירה לשלמותה. □

סעיף ד׳

עבור $n \geq 1$,

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$$

הוכחה. נניח בשלילה ש־f כזו קיימת ונגדיר

$$g(z) = (1+z)f(z)$$

נבחין כי

$$g(\frac{1}{n}) = (1+\frac{1}{n})\frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ולכן שוב $f(z) = \frac{1}{z+1} \implies g \equiv 1$ לכל $z \neq -1$.

אבל עבור $z = -1$ מתקיים $1 = 0 \cdot f(z)$ וזו כמובן סתירה. $\square$

שאלה 2

תהי פונקציה שלמה המקיימת שלכל $z_0 \in \mathbb{C}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$f^{(n)}(z_0) = 0$.
נוכיח כי f היא פולינום.

הוכחה. תהי $z_0 \in \mathbb{C}$ כלשהי, אז ממשפט טיילור והעובדה שקיים סדר ממנו הנגזרת מתאפסת נוכל לקבוע כי קיים פולינום P_0 כך ש־$f \equiv P_0$ סביב הנקודה.

נבחר נקודה z_1 כך שערכה לא נקבע על־ידי P_0 ונקבל שקיים פולינום סביבה P_1. כל סביבה כזו לא מנוונת ולכן נוכל לבנות כיסוי ל־$\mathbb{C}$ על־ידי $\langle P_i \mid i < \omega \rangle$.

מהלמה של צורן נובע כמעט מיד שקיים n מקסימלי בקבוצה זו, כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$f^{(n)}(z) = 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$, ומכאן נסיק ישירות ש־f אכן פולינום. $\square$

שאלה 3

נגדיר $S = \partial B(0,1)$ ונוכיח כי לכל $z_1, \dots, z_n \in S$ קיימת נקודה $z \in S$ כך שמתקיים

$$\prod_{k=1}^{n} |z - z_k| = 1$$

הוכחה. תהינה קבוצת נקודות כזו ונגדיר את הפונקציה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ על־ידי

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

נבחין כי f היא פונקציה הולומורפית, וכן

$$|f(0)| = |z_1| \cdots |z_n| = 1 \cdots 1 = 1$$

מעיקרון המקסימום נוכל להסיק שבהכרח $\forall z \in S, |f(z)| \geq 1$. בנוסף מתקיים $f(z_0) = 0 \cdot (z_1 - z_0) \cdots (z_n - z_0) = 0$ ולכן גם $|f(z_0)| = 0$. לבסוף נגדיר את המסילה $\gamma(t) = e^{it}$ בתחום $[-\pi, \pi]$ ונקבל $g(t) = |f(\gamma(t))|$ פונקציה $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^+$ רציפה כך שקיים $g(t_0) = 0$ ו־$g(t_1) \geq 1$ ולכן מערך הביניים קיים t כך ש־$g(t) = 1$. □

שאלה 4

נגדיר $S = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ ותהי $f : \overline{S} \to \mathbb{C}$ פונקציה לא קבועה רציפה ב־$\overline{S}$ ואנליטית ב־S.

סעיף א׳

נוכיח את הגרסה הבאה של עקרון פרגמן־לינדלוף,
נניח ש־$\log|f(z)| \le C|\operatorname{Im}(z)|^b$ עבור $C > 0$ ו־$0 \le b < 2$ קבועים, כאשר $|\operatorname{Im}(z)| \to \infty$,
אז אם $|f(z)| \le 1$ על ∂S מתקיים $|f(z)| \le 1$ על S.

הוכחה. נגדיר $f_\epsilon : [0,1] \times [-r, r]$ על־ידי $f_\epsilon(z) = f(z)e^{\epsilon(z^2-1)}$ ונבחין כי

$$|e^{\epsilon(z^2-1)}| \le e^{\epsilon \operatorname{Re}(z^2-1)} \le e^{\epsilon(|\operatorname{Re} z|^2 - |\operatorname{Im} z|^2 - 1)} \le e^{-\epsilon |\operatorname{Im} z|^2}$$

ולכן נסיק ש־$|f_\epsilon(z)| \le |f(z)|$ וגם

$$|f_\epsilon(z)| \le \exp(-\epsilon|\operatorname{Im} z|^2 + C|\operatorname{Im} z|^b) \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$$

לכן עבור ערכים גדולים מספיק נקבל $|f_\epsilon(z)| < 1$, אבל אז מעיקרון המקסימום והעובדה ש־$|f(z)| \le 1$ עבור $z \in \partial S$ נסיק ש־$|f_\epsilon(z)| \le 1$ לכל $z \in \operatorname{dom} f_\epsilon$. אבל נבחין ש־$f_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} f$ ולכן גם $|f(z)| \le 1$ לכל $z \in S^\circ$ כמבוקש. □

סעיף ב׳

נניח ש־f חסומה. נגדיר $M : [0,1] \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x+iy)|$$

נוכיח שמתקיים

$$M(x) \le (M(0))^{1-x}(M(1))^x$$

הוכחה. נגדיר $g(z) = f(z)(M(0))^{z-1}(M(1))^{-z}$.
נרצה להראות ש־$|g(z)| \le 1$ על ∂S, ולכן

$$|g(0+yi)| = |f(0+yi)| M^{\operatorname{Re}(0+yi-1)}(0) M^{\operatorname{Re}(yi)}(1) \le M^{-1}(0)$$

אם נניח ש־$M(0) = 0$ נקבל $f(0+yi) = 0$ ולכן ממשפט היחידות $f \equiv 0$ ונסיק ש־$M(0) > 0$ ולכן $|g(0+yi)| \le 1$ בהכרח.
באופן דומה נקבל שגם $|g(1+yi)| \le 1$ ולכן $|g(z)| \le 1$ לכל $z \in \partial S$ ונקבל ש־$|g(z)| \le 1$ לכל $z \in S$.
לכן נובע

$$|g(x+0i)| = |f(x+0i)||(M(0))^{x+0i-1}(M(1))^{-(x+0i)}| = |f(x)|M(0)^{x-1}M(1)^{-x} \le 1 \iff |f(x)| \le M(0)^{1-x}M(1)^x$$

ולבסוף

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x+iy)| \le |f(x+0i)| \le M(0)^{1-x}M(1)^x$$

כפי שרצינו. □

סעיף ג׳

נסיק כי הפונקציה $\log M$ קמורה,
כלומר לכל $x_0, x_1, t \in [0,1]$ מתקיים

$$g((1-t)x_0 + tx_1) \le (1-t)g(x_0) + tg(x_1)$$

הוכחה. נקבע x_0, x_1 ונגדיר $h(z) = g(x_0 + (x_1 - x_0)z)$, וכן $N(x) = \sup|h(x+iy)|$ אז נקבל $N(x) \le N(0)^{1-x}N(1)^x$ כמו בסעיף

הקודם ונובע

$$\begin{aligned}\log N(t) &= \log(M(x_0 + (x_1 - x_0)t)) \\ &\le \log(N(0)^{1-t} N(1)^t) \\ &= (1-t)\log(N(0)) + t\log(N(1)) \\ &= (1-t)\log(M(x_0)) + t\log(M(x_1))\end{aligned}$$

ומצאנו ש־M אכן קמורה. $\square$