פתרון מטלה 07 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

26 ביוני 2024

שאלה 1

נמצא ונסווג את כל הנקודות הקריטיות של הפונקציה

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 3z - x$$

נחשב

$$\nabla f(x,y,z) = (2x + y - 1, 2y + x, 2z + 3)$$

נבדוק את התאפסות הגרדיאנט

$$\nabla f = 0 \iff z = \frac{-3}{2}, y = \frac{-1}{3}, x = \frac{2}{3}$$

ומצאנו כי ישנה נקודה יחידה חשודה והיא $p = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$. נחשב את הנגזרת השנייה ונקבל

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

זוהי כמובן מטריצה חיובית לחלוטין לפי משפט סילבסטר ולכן p מינימום מקומי ויחיד ולכן גם מינימום מוחלט.

שאלה 2

יהי $V = \mathbb{R}^{d\times d}$ מרחב מטריצות.

נוכיח שקיימת סביבה U של I כך שכל המטריצות ב־U הן ריבועים.

הוכחה. נגדיר $f : V \to V$ על־ידי $f(A) = A^2$.

נראה כי $f(A+H) = A^2 + AH + HA + H^2$ ולכן נוכל לקבוע כי f גזירה בכל נקודה וכי $(Df\mid_A)(X) = AX + XA$.

זוכי כמובן פונקציה רציפה ולכן מצאנו כי f גזירה ברציפות בסביבת $A \in V$ ובפרט ב־I.

נבחין כי $(Df\mid_I)(X) = 2X$ ובהתאם $J_f(I) = \det(2I) \geq 0$ ולכן קיימת סביבה פתוחה $V \subseteq U \ni I$ כך ש־$f^{-1} : U \to U$ מוגדרת וגזירה ברציפות בה. מהגדרת f ישירות נובע כי כל $A \in U$ היא ריבוע. $\square$

שאלה 3

נמצא את המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציות הבאות.

סעיף א'

הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, 3x\ge -y\}$.

נתחיל בבדיקת A°, זוהי קבוצה פתוחה ולכן נבדוק על־פי גזירה ומציאת נקודות קריטיות:

$$\nabla f(x,y)=(2x-12,2y+16)$$

הנקודה היחידה החשודה לקיצון היא $(6,-8)\notin A$.

עתה נבדוק את $\partial A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1, 3x=-y\}$.

נגדיר $g_1(x,y)=x^2+y^2-1, g_2(x,y)=3x+y$ ונראה כי $g_1(x,y)=g_2(x,y)=0 \iff (x,y)\in\partial A$.

נראה גם כי $\nabla g_1=(2x,2y), \nabla g_2=(3,1)$, ולכן אוסף הנקודות החשוד הוא הפתרון של המשוואות

$$(2x-12,2y+16)=\lambda(2x,2y), \qquad (2x-12,2y+16)=\lambda(3,1)$$

הפתרון לשוויון השני הוא

$$2x-12=3\lambda, 2y+16=\lambda \iff 2x-12=3(2(-3x)+16)=-20x+60=0 \iff x=\frac{1}{3}, y=-1, \lambda=14$$

דהינו $(\frac{1}{3},-1)$ והוא לא בתחום.

נבדוק את השוויון הראשון

$$2x(1-\lambda)+16=0, 2y(1-\lambda)-12=0 \iff 2x\frac{6}{y}+16=0 \iff 3x+4y=0,$$

$$(2x+2y)(1-\lambda)+4=0 \iff (-\frac{3}{2}x+2x)(1-\lambda)+4=0 \iff \frac{1}{2}x=-4 \iff x=-8$$

ונקבל)