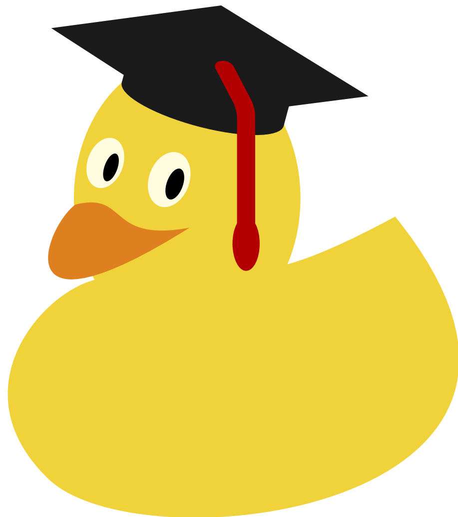
פתרון מטלה 06 — מבנים אלגבריים 1 (80445)

26 ביוני 2024



שאלה 1

סעיף א'

נוכיח שלכל $n \geq 1$, החבורה $\mathbb{Z}_{/n}$ מכילה תת־חבורה יחודית מסדר d לכל $n \mid d$.

הוכחה. יהי $n \mid d$, ונגדיר גם $k = \frac{n}{d}$. אנו יודעים כי $\mathbb{Z}_{/n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ונבחן את $d\mathbb{Z}_{/n}$, דהינו $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ממשפט האיזומורפיזם השלישי נקבל כי $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{/d}$.

נוכל אם כן להניח ש־$d\mathbb{Z}_{/n}$ היא מסדר d אף היא, ואנו יודעים כי היא אכן תת־חבורה של $\mathbb{Z}_{/n}$, נותר להראות כי היא יחידה.

תהי תת־חבורה אחרת H של $\mathbb{Z}_{/n}$ אשר היא מסדר d, אז קיים איבר $a \in H$ כך שהסדר שלו הוא d, זאת אנו יודעים מהתכונות של $\mathbb{Z}_{/n}$, ואנו יודעים כי $a \in d\mathbb{Z}_{/n}$ ולכן נוכל להסיק כי תת־החבורות שוות. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $a \in \mathbb{Z}_{/n}$ יוצר תת־חבורה מסדר d אם ורק אם $\gcd(a, n) = \frac{n}{d}$.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי a יוצר תת־חבורה מסדר d, ולכן נוכל להסיק מהסעיף הקודם כי $n \mid a \mid d$, ולכן נשתמש במסקנה מהרצאה ונקבל $\gcd(a, d) = 1$, ומכאן נוכל להסיק את המבוקש ישירות.

כיוון שני: נניח כי $\gcd(a, n) = \frac{n}{d}$, לכן נוכל להסיק כי $\frac{n}{d} \in \mathbb{Z}_{/n}$, וכי $\frac{n}{d}$ הוא מסדר d, ולכן נוכל להסיק כי a עצמו יוצר תת־חבורה מסדר זה. $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי $Aut(\mathbb{Z}_{/n}) \cong (\mathbb{Z}_{/n})^\times$.

הוכחה. ההגדרה לא ברורה. $\square$

שאלה 2

נמצא שני איברים ב־A_5 שהם צמודים תחת S_5 אבל לא תחת A_5.

אנו יודעים כי A_5 מכיל תמורות שהפירוק שלהן למחזורים מכיל רק מחזורים אי־זוגיים וכמות זוגית של מחזורים זוגיים.
עוד אנו יודעים כי איברים הם צמודים ב־S_5 כאשר הפירוק שלהם למחזורים הוא דומה, ולכן נניח כי ישנם שני איברים $\sigma, \tau \in A_5$ אשר הפירוק שלהם אכן זהה. נגדיר

$$\sigma = (1\ 2\ 3), \tau = (2\ 3\ 4)$$

נבחין כי אכן $\sigma, \tau \in A_5$, וגם כי $\phi = (1\ 4)$ הוא האיבר אשר מצמיד אותם, ולכן נוכל להסיק כי הם צמודים ב־S_5, אבל $\phi \notin A_5$ ולכן תחתיתה הם לא צמודים.

סעיף א'

נחלק את A_5 למחלקות צמידות.

A_5 יורש את החלוקה של S_5 ומעדן אותה, לכן עלינו לבדוק רק את החלוקה שמשרה A_5 על מחלקת צמידות כלשהי של S_5.
הסקנו בסעיף הקודם כי שני איברים הם צמודים אם האיבר שמצמיד אותם הוא בעצמו ב־A_5.
נוכל אם כן לחשב את האיברים הצמודים עצמם, מתוך 60 האיברים של החבורה.

שאלה 3

תהי $P_n^\pm \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ חבורת התמורות המורחבת.

סעיף א'

נוכיח כי $|P_n^\pm| = 2^n n!$.

הוכחה. אנו יודעים כי מטריצות התמורות היא קבוצה המונה $n!$ מטריצות, כפי שראינו בתרגול, ואנו יודעים מכפל מטריצות כי $\forall P \in P_n^\pm = JA$ כאשר A מטריצת תמורה ו־J אלכסונית כך שאלכסונה מורכב רק מ־± 1.
אנו יודעים כי קיימות 2^n מטריצות J כאלה, ו־$n!$ מטריצות P, ולכן נסיק כי $|P_n^\pm| = 2^n n!$. $\square$

סעיף ב'

תהי $P_n \leq GL_n(\mathbb{R})$ חבורת מטריצות התמורה, ותהי $R_n \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ חבורות המטריצות J שהגדרנו.
נוכיח כי $P_n^\pm = R_n P_n$.

הוכחה. בסעיף הקודם ראינו כי כל מטריצת תמורה מורחבת היא מכפלה של מטריצות כאלה, נסביר כי אילו שורה מסוימת היא שלילית ב־$J \in R_n$ אז העמודה המתקבלת במכפלה JP עבור $P \in P_n$ כלשהי שלילית אף היא. $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי P_n מנרמלת את R_n ולכן $P_n^\pm$ תת־חבורה של $GL_n(\mathbb{R})$.

הוכחה. הגדרה שלא למדנו. $\square$

שאלה 4

יהי $C_n = ([-1,1])^n \subseteq \mathbb{R}^n$ קוביה n־ממדית, ויהי $G_n \leq O(n)$ חבורת ההעתקות הלינאריות המשמרות את C_n.

סעיף א'

נוכיח כי $P_n^{\pm} \leq G_n$.

הוכחה. תהי $P \in P_n^{\pm}$ מטריצת תמורה מורחבת. מהגדרת מטריצות אלה אנו יכולים להסיק כי היא אורתוגונלית, ולכן עלינו רק לבדוק כי היא משמרת את המבנה של C_n.

תהי V קבוצת הקודקודים ויהי קודקוד $v \in V$ של C_n, נגדיר $v = (v_1, \dots, v_n)$ ונסיק כי $v_i = \pm 1$ לכל $1 \leq i \leq n$.

נבחין כי $Pv \in V$ כנביעה ישירה מהגדרת מטריצות התמורה המורחבות. מהאורתוגונליות נוכל להסיק כי גם המבנה משתמר ונקבל בסך־הכול כי $P \in C_n$, ולכן נוכל להסיק כי חבורה זו מקיימת $P_n^{\pm} \leq G_n$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי G_n פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $F = \{\epsilon e_i \mid \epsilon \in \{\pm 1\}, 1 \leq i \leq n\}$ יחד עם המייצב $(G_n)_{e_1} \cong G_{n-1}$.

הוכחה. יהיו $f_1, f_2 \in F$, ונגדיר העתקה $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ על־ידי $Tf_1 = f_2$, ונגדיר אותה כך ששאר העמודות ישלימו למטריצת תמורות מורחבת כלשהי, ולכן נקבל $T \in P_n^{\pm}$.

קיבלנו כי f_1, f_2 באותו מסלול ללא קשר לבחירתם, ולכן יש מסלול יחיד לפעולה.

נבדוק עבור אילו $g \in G_n$ נקבל $ge_1 = e_1$. כמובן אלו הן כל ההעתקות T כך ש־$Te_1 = e_1$, כאשר שאר המטריצה נקבעת על־ידי $n-1$ אופציות.

נוכל אם כן להסיק שעבור כל $P \in P_{n-1}^{\pm}$ לבנות מטריצה T אשר תקיים את הטענה ולכן גם נסיק כי $(G_n)_{e_1} = G_{n-1}$. $\square$

סעיף ג'

נסיק כי $G_n = P_n^{\pm}$.