פתרון מטלה 10 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

9 ביולי 2024

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ ותהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה אז $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$

הוכחה. מצאנו כי סדרה מתכנסת אם ורק אם הגבולות העליון והתחתון שלה שווים ולכן נסיק כי $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$.
לכן אם נבחר את סדרת הסופרמומים של $(a_n b_n)$ נקבל את מכפלת הסופרמומים ומצאנו כי אלו הן סדרות מוגדרות היטב.
נסיק אם כן שהגבול העליון של מכפלת הסדרות קיים במובן הרחב, ובפרט כאשר (b_n) חסומה וקיים גבול עליון במובן המצומצם נקבל כי גבול המכפלות מוגדר.

אנו יודעים כי הסופרמום הוא הגבול החלקי הגדול ביותר ונסיק כי תת־סדרה של b_n הגדולה ביותר מקבלת גבול 1 עבור a_n ונסיק כי מתקיים

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n b_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$

□

סעיף ב'

נוכיח כי קיימת סדרה שקבוצת הגבולות החלקיים שלה שווה ל־$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

הוכחה. נגדיר סדרה $(l_n)_1^k$ על־ידי $l_n = \frac{1}{n}$ עבור $1 \le n \le k \in \mathbb{N}$.
עתה נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ על־ידי $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots$ סדרה מהצורה

$$1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

קל למצוא סדרת אינדקסים עולה ממש (n_k) כך שנקבל $a_{n_k} = \frac{1}{m}$ עבור $m \in \mathbb{N}$ קבוע כלשהו, ולכן זהו גבול חלקי שלה ומצאנו כי התנאי מתקיים. □

שאלה 2

תהינה $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות ב־$[1, N]$ עבור כל $1 < N$.
נוכיח כי אם הסדרה $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס אף הוא.

הוכחה. נניח בשלילה כי הסדרה לא מתכנסת ואז נקבל מאפיון היינה לסדרות סתירה לגבול הפונקציה הצוברת של f באינסוף. $\square$

שאלה 3

תהינה סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות אי־שליליות כך ש־$b_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ אז הטור $\sum_n b_n$ מתכנס גורר שהטור $\sum_n a_n$ מתכנס.

הוכחה. מהנתון נסיק כי לכמעט כל n מתקיים $a_n < b_n$ ולכן ממבחן ההשוואה הראשון והאי־שליליות נסיק כי הטענה מתקיימת. $\square$

סעיף ב'

נסתור את הטענה כי אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ אז הטור $\sum_n b_n$ מתכנס גורר שהטור $\sum_n a_n$ מתכנס על־ידי דוגמה נגדית.

נבחר $b_n = 1$, $a_n = \frac{1}{n^2}$, ברור כי הטור $\sum_n a_n$ מתכנס וגם כי $\sum_n b_n$ מתבדר, אבל $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ בסתירה לטענה.

סעיף ג'

השאלה לא מנוסחת היטב.

שאלה 4

נבדוק את התכנסות הטורים הבאים

סעיף א'

$$\sum_n \frac{2^n}{3^n+1}$$

ממבחן ההשוואה הגבולי עם $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ והעובדה שהטור המבוסס על סדרה זו מתכנס נקבל כי הטור שקיבלנו מתכנס אף הוא.

סעיף ב'

$$\sum_n \frac{3^n}{n!}$$

נבדוק לפי מבחן המנה ונקבל

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן נסיק כי הטור מתכנס.

סעיף ג'

$$\sum_n \frac{2n-3}{n^2-n+4}$$

ממבחן המנה הגבולי יחד עם $\frac{1}{n}$ נקבל כי הטור מתכנס אם ורק אם הטור ההרמוני מתכנס ולכן נסיק כי הטור מתבדר.

סעיף ד'

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

אנו יודעים מאינפי 1 כי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ולכן הטור כמובן מתבדר.

סעיף ה'

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$

נבחין כי

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}} = \sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

ולכן ממבחן ההשוואה הגבולי יחד עם $\frac{1}{n}$ נסיק כי הטור מתבדר.

סעיף ו'

$$\sum_n \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

נבדוק ונקבל

$$\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n} = (t-1)^t \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן ממבחן קושי להתכנסות נקבל שהטור מתכנס.

סעיף ז'

$$\sum_n \frac{n^2}{2^n}$$

נשתמש במבחן ההשוואה עבור $\frac{1}{n^2}$, אנו יודעים כי $\frac{1}{n^2} < \frac{n^2}{2^n}$ לכמעט כל n ולכן נקבל מהתכנסות $\sum_n \frac{1}{n^2}$ שגם הטור הנתון מתכנס.

סעיף ח'

$$\sum_n \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}}$$

נבחין כי

$$\frac{1}{n}/\frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}} = n^{(-1+1+\frac{1}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

ולכן מהתבדרות הטור ההרמוני ומבחן המנה הגבולי נקבל כי הטור מתבדר.

סעיף ט'

$$\sum_n \frac{2^n n!}{n^n}$$

נבדוק את מבחן דאלמבר

$$\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}/\frac{2^n n!}{n^n} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2(\frac{n}{n+1})^n = 2(1-\frac{1}{n+1})^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{e} < 1$$

ונקבל מהמבחן כי הטור מתכנס.

סעיף י'

$$\sum_n \sqrt[n]{e} - 1$$

נשתמש בתוצאת התרגול הגורסת כי $\lim_{n\to\infty} \frac{u^4}{e^u}$ עבור $u_n = -\frac{1}{n}$ ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{n^4} = 0$$

ולכן נוכל להסיק כי הטור מתכנס על־ידי מבחן ההוואה הגבולי עם $\frac{1}{n^4}$.

סעיף כ'

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{(n+3)(n^4+2n-1)}}$$

נבחין כי

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(n+3)(n^4+2n-1)}} < \frac{1}{\sqrt[3]{(n)(n^4)}} = \frac{1}{n^{5/3}}$$

ומצאנו כי הטור $\sum_n \frac{1}{n^{5/3}}$ מתכנס בתרגול ולכן נסיק ממבחן ההשוואה כי גם הטור הנתון מתכנס.

שאלה 5

נגדיר

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2^k \\ 0 & n \notin \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\} \end{cases}, \qquad b_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2^k \\ 0 & n \notin \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

נבדוק את התכנסות הטורים $\sum_n a_n, \sum_n b_n$.

נבחין כי לכל $k \in \mathbb{N}$ נקבל כי $\sum_k \frac{1}{2^k} = \sum_k a_n$ מההגדרה, וזהו כמובן טור מתכנס, ולכן נוכל להסיק גם את ההתכנסות של $\sum_n a_n$ עצמו.

לעומת זאת נקבל גם $\sum_k b_n = \sum_k \frac{1}{k}$, דהינו נוכל לבנות תת־סדרה של סכומים של b_n כך שהם זהותית שווים לסכומים החלקיים של הטור ההרמוני, ונוכל להסיק כי הטור מתבדר.

שאלה 6

תהינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות ממשיות.

סעיף א'

נוכיח את הטענה כי אם (a_n) אי־שלילית אז $\sum_n a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n$ מתכנס.

הוכחה. **כיוון ראשון:** ידוע כי הטור מתכנס ולכן נסיק כי גם $\sum e a_n$ מתכנס, שכן מכפלה בסקלר לא משנה התכנסות.
עוד אנו יודעים כי $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ומונוטוני עולה ולכן $0 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n \le e a_n$ ונקבל כי הטור מתכנס.

כיוון שני: נניח כי הטור השני מתכנס, ולכן ישירות נוכל להסיק כי $\frac{e}{2} a_n$ חסום על־ידי הסדרה ולכן ממבחן ההשוואה נקבל כי $\sum_n a_n$ מתכנס אף הוא. □

סעיף ב'

נוכיח כי אם $\sum_n a_n$ מתבדר ו־$\sum_n b_n$ מתכנס אז $\sum_n a_n + b_n$ מתבדר.

הוכחה. נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי ונקבל מהעובדה ש־$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{a_n} = 1$$

ולכן הטורים מתכנסים או מתבדרים יחד, במקרה הזה כמובן מתבדרים. □

סעיף ג'

נוכיח שאם (a_n) אי־שלילית ואפסה אז קיימת תת־סדרה (a_{n_k}) כך ש־$\sum_k a_{n_k}$ מתכנסת.

הוכחה. ידוע כי הסדרה אפסה ולכן לכל $l \in \mathbb{N}$ נוכל למצוא אינדקס עבורו $a_k < \frac{1}{l^2}$, נבנה סדרת אינדקסים כזו עבור $l = 1, 2, \ldots$ ונקבל תת־סדרה (a_{n_k}) כך ש־$a_{n_k} \le \frac{1}{k^2}$ וזו כמובן מתכנסת. □

סעיף ד'

נוכיח שאם (a_n) אי־שלילית ומונוטונית יורדת אז $\sum_n a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_n a_{2n}$ מתכנס.