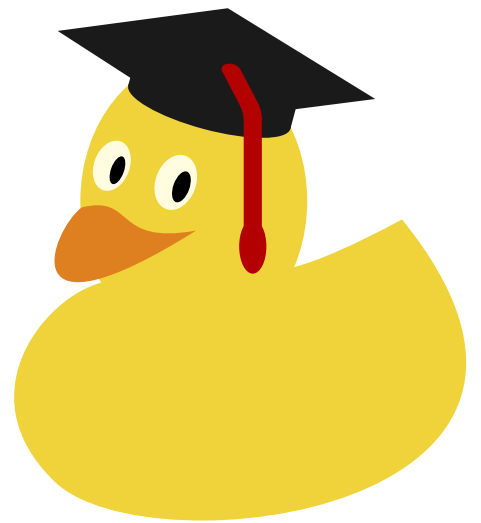


## פתרון ממ"ן 16 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

6 באוגוסט 2023



## שאלה 1

### סעיף א'

נחשב את הגבולות הבאים או נראה כי אינם מתקיימים

1

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \ln(x^4 + y^4)$$

נגדיר  $f(x, y) = (x+y) \ln(x^4 + y^4)$  ונניח על-פי היינה כי הפונקציה שואפת ב-0 ל-0,

לכן ישנן שתי סדרות נקודות  $x_n \rightarrow 0$  ו- $y_n \rightarrow 0$

לכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \ln(x_n^4 + y_n^4) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n \right) \ln \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^4 + y_n^4 \right)$$

נשים לב כי כמעט לכל  $n$  מתקיים  $(x_n + y_n)^4 > x_n^4 + y_n^4$  ולכן נוכל על-ידי שימוש בכלל הסנדוויץ'

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n \right) \ln \left( \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)^4 \right)$$

אנו יודעים כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = 0$  ולכן הגבול שקול לגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n = 0$$

ומצאנו כי הגבול מתכנס.

2

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$$

נניח כי סדרת הנקודות  $(p_n = (x_n, y_n))$  מתכנסת ל- $L$ , ולכן מהגדרת היינה לגבולות בשני משתנים נובע שהגבול מתכנס עבור  $p_n = (\frac{1}{n}, 0)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = \frac{\frac{0^3}{n}}{\frac{1}{n^2} + 0^6} = L = 0$$

כמו-כן, הגבול מתכנס עבור הסדרה  $p_n = (\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n})$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = \frac{\frac{1}{n^3 \cdot n^3}}{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6}} = L = \frac{1}{2}$$

אז מצאנו כי עבור סדרות שונות הגבול מתכנס לערכים שונים ובהתאם להגדרת היינה הגבול לא מתכנס בנקודה.

### סעיף ב'

נבדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב- $\mathbb{R}^2$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

לכל נקודה  $p_0 = (x_0, y_0)$  כאשר  $x_0, y_0 \neq 0$  נראה כי נובע מרציפות והגדרת היינה להתכנסות כי

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow p_0} xy}{\lim_{(x,y) \rightarrow p_0} x^2 + y^2} = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} = f(p_0)$$

אז מצאנו כי רציפה לכל  $p \neq 0$ .

מדוגמה 7.13 עולה כי ל- $f$  אין גבול בנקודה  $0$  ולכן בהכרח גם איננה מתכנסת בנקודה.

$$\begin{cases} \frac{\sin(2x^2+2y^2)}{e^{x^2+y^2}-1} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

תחילה נשים לב כי הפונקציה תלויה רק בערך  $\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2$ , ולכן נוכל להגדיר:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{e^x-1} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}, f(p) = g(\|p\|^2)$$

ידוע כי פעולת הנורמה היא פעולה רציפה (כנראה) ולכן ממשפט הרכבת פונקציות נובע כי אם  $g$  רציפה בכל תחומה אז גם  $f$  רציפה בכל המישור.  $g$  היא כמובן רציפה לכל  $x > 0$ , ולכן נבדוק את גבולה ב-0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(2x)}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cos(2x)}{e^x} = \frac{2}{1} = 2$$

אז מצאנו כי רציפה לכל  $x \geq 0$  ובהתאם  $f$  רציפה בכל המישור.

## שאלה 2

נמצא את כל הנקודות  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  בהן הפונקציה  $f(x, y) = \sqrt{|xy^3|}$  היא דיפרנציאבילית.

נמצא את הנגזרות החלקיות של  $f$  כאשר  $xy$  חיובי וכאשר הוא שלילי:

$$\begin{aligned} xy \geq 0, f_x(x, y) &= \frac{y^3}{2\sqrt{xy^3}} = \frac{y^2}{2\sqrt{xy}} \\ xy < 0, f_x(x, y) &= \frac{-y^3}{2\sqrt{-xy^3}} = \frac{-y^2}{2\sqrt{-xy}} \\ xy \geq 0, f_y(x, y) &= \frac{3xy^2}{2\sqrt{xy^3}} = \frac{3xy}{2\sqrt{xy}} = \frac{3}{2}\sqrt{xy} \\ xy < 0, f_y(x, y) &= \frac{-3xy}{2\sqrt{-xy}} = \frac{-3}{2}\sqrt{-xy} \end{aligned}$$

נשים לב כי עבור  $x \neq 0, y \neq 0$  כל נקודה שייכת לזוג נגזרות חלקיות ורציפה בהן ובהתאם לתנאי המספיק לדיפרנציאביליות  $f$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(x, y)$ .

נבדוק את התכנסות הנגזרות כאשר  $y$  הוא ערך קבוע לא אפס ו- $x = 0$ :

מונה  $f_x$  הוא רציף ושואף לערך סופי, בעוד המכנה שואף לאינסוף לכל  $y$  ולכן  $f_x$  לא רציפה בנקודות אלה, וממשפט 7.63 אנו יכולים להסיק כי  $f$  לא דיפרנציאבילית בתחום זה.

נבדוק את התכנסות הנגזרות כאשר  $x$  הוא ערך קבוע ו- $y = 0$ :

בנקודות אלה  $f_x$  כמובן רציפה, שכן המונה שלה מתאפס והמכנה רציף ולא מתאפס. כמו-כן גם  $f_y$  פונקציה רציפה ומתאפסת באוסף הנקודות. לכן  $f$  דיפרנציאבילית באוסף הנקודות  $(x, 0)$ .

מצאנו כי  $f$  דיפרנציאבילית לכל  $\mathbb{R}^2$  חוץ מהנקודות  $(0, t)$  כאשר  $t \neq 0$ .

### שאלה 3

#### סעיף א'

נוכיח כי  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  היא הרמונית לכל  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

הוכחה. נחשב את נגזרותיה החלקיות מסדר שני של  $u$  בתחום:

$$\begin{aligned}u_x(x, y) &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \\u_{xx}(x, y) &= \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\u_y(x, y) &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \\u_{yy}(x, y) &= \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

נבדוק

$$f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

מש"ל

ומצאנו כי  $f$  הרמונית בתחום  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

#### סעיף ב'

נגדיר  $f(x, y) = u(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$  כאשר  $u(t, s)$  פונקציה דיפרנציאבילית בכל נקודה.

נוכיח כי  $xf_y + yf_x = 0$  לכל  $x, y$ .

הוכחה. נגדיר  $t(u, v) = u^2 - v^2$  ולכן  $f(p) = u(t(p), -t(p))$ . נחשב את נגזרותיה החלקיות של  $f$  על-פי כלל השרשרת המוכלל מהתוספת לחומר של יחידה 7:

$$f_x(x, y) = u_x t_u + u_y t_v = u_x(x, y) \cdot 2x + u_y(x, y) \cdot (-2y) = 2x(u_x(x, y) - u_y(x, y))$$

ובאופן דומה נקבל גם

$$f_y(x, y) = u_x t_v + u_y (-t_v) = (-2x)u_x - (-2x)u_y = 2y(-u_x(x, y) + u_y(x, y))$$

ונקבל כי

$$xf_y + yf_x = 2xy(u_x(x, y) - u_y(x, y)) + 2yx(-u_x(x, y) + u_y(x, y)) = 0$$

מש"ל

ומצאנו כי השוויון מתקיים.

## סעיף ג'

נמצא את הקצב בו משתנה שטח מלבן אשר ברגע נתון אורכו 15 מטרים והוא קטן ב-3 מטרים לשנייה, ואשר רוחבו הוא 6 מטרים והוא גדל ב-2 מטרים לשנייה.

נגדיר  $f(x, y) = xy$  פונקציית השטח של מלבן.

עוד נגדיר  $h(t)$  פונקציית הגובה של המלבן לפי זמן ו- $w(t)$  פונקציית הרוחב של המלבן לפי זמן.

נגדיר  $F(t) = f(h(t), w(t))$  פונקציית השטח של המלבן הנתון לפי זמן.

נגדיר את הרגע הנתון בשאלה בתור  $t = 0$  ולכן  $w(0) = 2$ ,  $w'(0) = 6$ ,  $h(0) = -3$ ,  $h'(0) = 15$ .

נשים לב כי  $f_x(x, y) = y$ ,  $f_y(x, y) = x$  ולכן מכלל השרשרת בשני משתנים נובע כי

$$F'(t) = f_x(h(t), w(t)) \cdot h'(t) + f_y(h(t), w(t)) \cdot w'(t) = w(t)h'(t) + h(t)w'(t)$$

נציב

$$F'(0) = 6 \cdot (-3) + 15 \cdot 2 = 12$$

## סעיף ד'

תהי  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית במישור כולו.

נוכיח כי לכל שתי נקודות  $p_1 = (x_1, y_1)$  ו- $p_2 = (x_2, y_2)$ , בקטע המחבר בין  $p_1$  ל- $p_2$  קיימת נקודה  $p_c$  כך שמתקיים

$$f(p_2) - f(p_1) = f_x(p_c)(x_2 - x_1) + f_y(p_c)(y_2 - y_1)$$

הוכחה. תהי  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  העתקה לינארית המוגדרת על-ידי

$$l(t) = p_1 + (p_2 - p_1)t = (x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t)$$

ונגדיר גם  $g(t) = f(l(t))$ . נשים לב כי  $l$  היא הישר העובר דרך הנקודות  $p_1$  ו- $p_2$ , והפונקציה אף מקיימת  $l(0) = p_1, l(1) = p_2$ .

בד בבד הפונקציה  $g$  היא "החתך" של  $f$  עבור ערכי הנקודות על הישר  $t$ , דהיינו זו פונקציה ממשתנה אחד.

ממשפט הערך הממוצע של החשבון הדיפרנציאלי נובע כי קיים ערך  $t_c$  אשר מקיים

$$g'(t_c)(1 - 0) = g(1) - g(0) = f(p_2) - f(p_1) \quad (1)$$

כאשר  $0 < t_c < 1$ .

נחשב את  $g'(t)$  על-פי כלל השרשרת בשני משתנים:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dx} f(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t) \\ &= f_x(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t) \cdot (x_1 + (x_2 - x_1)t)' \\ &\quad + f_y(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t) \cdot (y_1 + (y_2 - y_1)t)' \\ &= f_x(l(t))(x_2 - x_1) + f_y(l(t))(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

ועל-ידי שימוש בנוסחה זו ב-(1) נקבל

$$f_x(l(t_c))(x_2 - x_1) + f_y(l(t_c))(y_2 - y_1) = f(p_2) - f(p_1)$$

נגדיר  $p_c = l(t_c)$ , ברור כי הנקודה נמצאת בין  $p_1$  לבין  $p_2$ , ונקבל כי

$$f_x(p_c)(x_2 - x_1) + f_y(p_c)(y_2 - y_1) = f(p_2) - f(p_1)$$

מש"ל

והוכחנו את הטענה.

## שאלה 4

### סעיף א'

מטייל עולה על הר שצורתו נתונה על ידי הנוסחה

$$h(x, y) = 1000 - 0.05x^2 - 0.04y^2$$

נתון כי המטייל נמצא בנקודה  $(60, 100)$ , נמצא את הכיוון עליו ללכת כדי להגיע לפסגה מהר ככל האפשר. המטייל יגיע לפסגה במהירות הגבוהה ביותר אם ילך בדרך התלולה ביותר, ולכן עלינו למצוא את הכיוון בו הנגזרת הכיוונית היא הגבוהה ביותר. נשים לב כי

$$f_x(x, y) = -0.1x, f_y(x, y) = -0.08y$$

נחשב את הגרדיאנט של  $h$ :

$$\nabla f(60, 100) = (f_x(60, 100), f_y(60, 100)) = (-6, -8)$$

נחשב את הווקטור הנורמלי:

$$u = \frac{(-6, -8)}{\|(-6, -8)\|} = (-0.6, -0.8)$$

ולכן הכיוון שעל המטייל ללכת בו הוא  $(-0.6, -0.8)$ .

### סעיף ב'

נמצא את הנקודה על המישור  $x + 2y + z = 1$  הקרובה ביותר לראשית הצירים. נשים לב כי  $z = 1 - x - 2y$  ולכן נגדיר פונקציה  $z(x, y) = 1 - x - 2y$  ונקבל כי לכל  $x, y \in \mathbb{R}$  הנקודה  $(x, y, z(x, y))$  על המישור הנתון. על-פי נוסחת המרחק בין נקודות (פיתגורס) בין נקודה על המישור לבין נקודת האפס הוא:

$$d_0(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2(x, y)} = \sqrt{x^2 + y^2 + (1 - x - 2y)^2}$$

כמובן שהפונקציה  $d_0$  מקבלת מינימום ומקסימום באותן הנקודות כמו  $d_0^2$ , ולכן נגדיר  $d(x, y) = d_0^2(x, y)$  ונחקור אותה. נמצא את נקודת המינימום של הפונקציה הנתונה בעזרת משפט 7.58, דהיינו נמצא נקודות בהן שתי הנגזרות החלקיות מתאפסות.

$$d_x(x, y) = 2x - 2(1 - x - 2y) = -2 + 4x + 4y, d_y(x, y) = 2y - 4(1 - x - 2y) = -4 + 4x + 10y,$$

נמיר למטריצת מקדמים ונפתור

$$\left( \begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 4 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

ומצאנו כי יש למערכת פתרון יחיד  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ .

נחשב את הנגזרת השנייה  $d_{xx}(x, y) = 4$ , ולכן ממשפט 7.72 נובע כי  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$  היא נקודת מינימום של הפונקציה ובה המרחק מהראשית הוא הקטן ביותר על מישור.