פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

25 ביולי 2023

שאלה 1

את הפונקציה $f(x) = \ln x$ מקרבים בקטע $I = [e^2-1, e^2+1]$ על־ידי הפולינום

$$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{e^2} - \frac{x^2}{2e^4}$$

נראה כי

$$|f(x) - P(x)| < \frac{1}{3(e^2-1)^3}$$

לכל $x \in I$.

נראה כי $\ln x = \ln(e^2 e^{-2} x) = \ln(e^{-2}x) + 2 = \ln((e^{-2}x - 1) + 1) + 2$

לכן נגדיר $t = \frac{x}{e^2} - 1$

אז מההגדרה נובע $\ln x = g(t) = \ln(t+1) + 2$

ידוע כי $x \in [e^2-1, e^2+1]$ ולכן

$$\begin{aligned}
&e^2 - 1 \le x \le e^2 + 1 \\
&e^2 - 1 \le e^2(t+1) \le e^2 + 1 \\
&1 - e^{-2} \le t + 1 \le 1 + e^{-2} \\
&-1 < -e^{-2} \le t \le e^{-2} < 1
\end{aligned}$$

דהינו $t \in (-1,1)$ ולכן על־פי פיתוח טיילור של $\ln(t+1)$ בתחום $(-1,1)$ אשר מוגדר בעמוד 65 כרך ב' פולינום טיילור מסדר 2 של $g(t)$ הוא

$$P_2(t) = g(0) + t - \frac{1}{2}t^2 = 2 + \frac{x}{e^2} - 1 - \frac{1}{2}(\frac{x}{e^2} - 1)^2 = 1 + \frac{x}{e^2} - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{e^4} - \frac{2x}{e^2} + 1) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{e^2} - \frac{x^2}{2e^4} = P(x)$$

לכן על־פי הגדרת השארית

$$R_2(t) = g(t) - P_2(t)$$

על־פי דוגמה 4.4 לכל $t \in (-1,1)$ מתקיים

$$|R_2(t)| < \frac{|t|^3}{1 - |t|} = \frac{(\frac{x}{e^2} - 1)^3}{\frac{x}{e^2}} = \frac{(x - e^2)^3}{xe^4}$$

מחקירת הפונקציה עולה כי היא מקבלת מקסימום ב־$x = e^2 + 1$ ולכן

$$|R_2(t)| = |f(x) - P(x)| < \frac{(e^2 + 1 - e^2)^3}{(e^2+1)e^4} = \frac{1}{e^6 + e^4}$$

ניתן לבדוק ולראות כי מתקיים לכל $x \in [e^2-1, e^2+1]$

$$|f(x) - P(x)| < \frac{1}{3(e^2-1)^3}$$

שאלה 2

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בקטע $[a,b]$ ו־$f^{(n+1)}(x)$ רציפה ב־$[a,b]$.

נקבע נקודה $x_0 \in [a,b]$ ונסמן ב־$R_n(x)$ את השארית מסדר n של f ב־x_0.

נוכיח כי לכל $x \in [a,b]$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

הוכחה. נגדיר $P_i(x)$ פיתוח טיילור של $f(x)$ סביב x_0. נשים לב כי הפונקציה $f(x)$ עומדת בכל הדרישות לפיתוח זה עבור $0 \le i \le n$.

נוכיח באינדוקציה את הטענה:

בסיס האינדוקציה: מהמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסמלי נובע כי

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0) = f(x) - P_0(x) = R_0(x)$$

ומצאנו כי הטענה נכונה עבור $n = 0$.

מהלך האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור $0 < i \le n$, לכן מתקיים

$$f(x) = P_i(x) + \frac{1}{i!}\int_{x_0}^{x} f^{(i+1)}(t)(x-t)^i dt$$

עבור הביטוי נבצע אינטגרציה בחלקים, כאשר

$$\begin{aligned} u &= f^{(i+1)}(t) & dv &= (x-t)^i \\ du &= f^{(i+2)}(t)dt & v &= -\frac{1}{i+1}(x-t)^{i+1} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_0}^{x} u(t)v(t)dt \\ &= -\frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(t)(x-t)^{(i+1)}\Big|_{x_0}^{x} \\ &= -\frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x)(x-x)^{(i+1)} + \frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{(i+1)} \\ &= \frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{(i+1)} \\ f(x) &= P_i(x) + \frac{1}{i!}\left(A - \frac{1}{i+1}\int_{x_0}^{x}(-1)f^{(i+2)}(t)(x-t)^{(i+1)}dt\right) \\ &= P_i(x) + \frac{1}{(i+1)!}\left(f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{(i+1)} + \int_{x_0}^{x} f^{(i+2)}(t)(x-t)^{(i+1)}dt\right) \\ &= P_{i+1}(x) + \frac{1}{(i+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(i+2)}(t)(x-t)^{(i+1)}dt \end{aligned}$$

והשלמנו את מהלך האינדוקציה. **מש"ל**

שאלה 3

נשתמש בפיתוח מקלורן ונחשב את הגבולות הבאים:

סעיף א'

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-(x+1)}{\tan x-\sin x} \tag{1}$$

נגזור ונחשב פולינומים עבור חלקי הביטוי

$$f(x)=e^x\cos x, f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x, f''(x)=-2e^x\sin x, f^{(3)}(x)=-2e^x(\sin x+\cos x)$$

ונחשב

$$f(0)=1, f'(1)=1, f''(0)=0, f^{(3)}(0)=-2$$

ולכן ערך המכנה הוא

$$e^x\cos x-(x+1)=1+x-2\frac{1}{3!}x^3+R_3(x)-x-1=-\frac{1}{3}x^3+R_3(x)$$

נגזור את הביטוי

$$g(x)=\tan x-\sin x, g'(x)=\cos^{-2}(x)-\cos x,$$
$$g''(x)=2\sin x\cos^{-3}(x)+\sin x, g^{(3)}(x)=2(\cos^{-2}(x)+-3\sin^2 x\cos^{-4}(x))+\cos x$$

ונחשב

$$g(0)=0, g'(0)=0, g''(0)=0, g^{(3)}(0)=3$$

ולכן מכנה הביטוי מקיים

$$\tan x-\sin x=\frac{1}{2}x^3+S_3(x)$$

ולכן על־פי משפט 4.7 גבול (1) שקול לגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3+R_3(x)}{\frac{1}{2}x^3+S_3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\frac{x^3}{x^3}+\frac{R_3(x)}{x^3}}{3\frac{x^3}{x^3}+\frac{S_3(x)}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2+0}{3+0}=-\frac{2}{3}$$

סעיף ב'

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2+1)+\ln(n^2-1)-4\ln n}{1-\cos(1/n^2)} \tag{2}$$

נחשב

$$\ln(n^2+1)+\ln(n^2-1)-4\ln n=\ln(\frac{n^4-1}{n^4})=\ln(1-\frac{1}{n^4})$$

ידוע כי $n>0$ ולכן הביטוי $1-n^{-4}<1$, אז ניתן להשתמש בפיתוח מקלורן עבור $\ln(x+1)$ לערכים בתחום.

בהתאם לכך מתקיים

$$\ln(1-\frac{1}{n^4})=-\frac{1}{n^4}-\frac{1}{2n^{16}}+R_2(x)$$

נבחן את המכנה:

ולכן