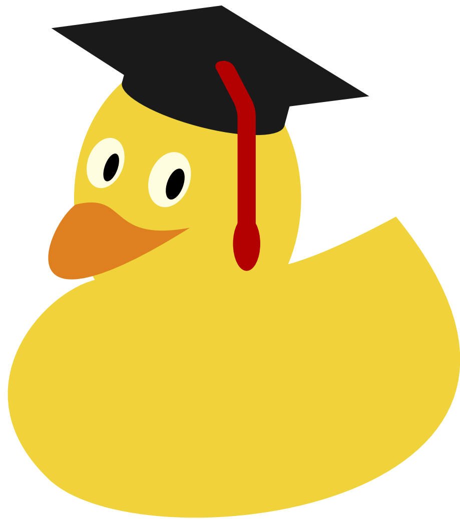
פתרון מטלה 01 — פונקציות מרוכבות, 80519

9 בנובמבר 2024



שאלה 1

נצייר את הקבוצות הבאות במישור המרוכב:

סעיף א'

$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z-1| < 2\}$.
זהו למעשה עיגול שמרכזו הוא $(1,0)$ שרדיוסו 2 לא כולל, ללא עיגול פנימי ברדיוס 1.

סעיף ב'

$\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}(z) \le \frac{\pi}{2}\}$.
זוהי קרן חסומה על־ידי $y = x$ מצד אחד ו־$y = \arctan(\frac{\pi}{3})x$, בכיוון החיובי.

סעיף ג'

$\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < \operatorname{Im}(z) < 4\}$.
שקול ל־$2 < y < 4$ לכל x.

סעיף ד'

$\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2+1| \ge |z+i|\}$.
נחשב

$$|z^2+1| \ge |z+i| \iff |z+i| \cdot |z-i| \ge |z+i| \iff |z-i| \ge 1 \iff \sqrt{x^2+(y-1)^2} \ge 1$$

דהינו זהו כל המישור למעט עיגול פתוח שמרכזו $(0,1)$ ורדיוסו 1.

סעיף ה'

$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{z} = \overline{z}\}$.
נבחין כי $0 \notin A$, ועתה נוכל לקבוע כי

$$\frac{1}{z} = \overline{z} \iff z\overline{z} = 1 \iff x^2+y^2 = 1$$

ולכן זהו מעגל היחידה, ובכל מקרה 0 לא במעגל היחידה.

שאלה 2

סעיף א'

המספר $z_1 = -1 + i$ נמצא ב-$(-1,1) \in \mathbb{R}^2$, ומתקיים $\mathrm{Re}(z_1) = -1, \mathrm{Im}(z_1) = 1, |z_1| = \sqrt{2}, \mathrm{Arg}(z_1) = \frac{3\pi}{4}$.

סעיף ב'

המספר $z_2 = 4\exp(\frac{4\pi}{3}i)$ נמצא ב-$(4 \cdot \cos(\frac{4\pi}{3}), 4 \cdot \sin(\frac{4\pi}{3}))$, ומתקיים $\mathrm{Re}(z_2) = 4 \cdot \cos(\frac{4\pi}{3}), \mathrm{Im}(z_2) = 4 \cdot \sin(\frac{4\pi}{3}), |z_2| = 4, \mathrm{Arg}(z_2) = \frac{4\pi}{3}$.

סעיף ג'

המספר $z_3 = 7i$ נמצא ב-$(0,7)$, ומתקיים $\mathrm{Re}(z_3) = 0, \mathrm{Im}(z_3) = 7, |z_3| = 7, \mathrm{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{2}$.

סעיף ד'

המספר $z_4 = e^2$ נמצא ב-$(e^2, 0)$, ומתקיים $\mathrm{Re}(z_4) = e^2, \mathrm{Im}(z_4) = 0, |z_4| = e^2, \mathrm{Arg}(z_2) = 0$.

סעיף ה'

המספר $e^{i\pi/12} = e^{i\pi/4}e^{-i\pi/3} = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = z_5$ נמצא ב-$(\cos(\pi/12), -\sin(\pi/12))$, ומתקיים $\mathrm{Re}(z_5) = \cos(\pi/12), \mathrm{Im}(z_5) = -\sin(\pi/12), |z_4| = 1, \mathrm{Arg}(z_2) = -\pi/12$.

שאלה 3

תהי $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$.

סעיף א'

נוכיח כי $z_n \to z$ אם ורק אם $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z) \wedge \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$.

הוכחה. תחילה נגדיר $x_n = \mathrm{Re}(z_n), y_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

נניח כי $z_n \to z$. לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$, אז נקבל $|x_n - x + i(y_n - y)| \to 0$ או בהתאם $(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 \to 0$.
אילו נניח בשלילה שלפחות אחת הסדרות לא מתכנסת, נקבל כי האינפימום הוא חיובי ובהתאם הגבול לא יכול להיות אפס, וסיימנו.

בכיוון ההפוך נניח $x_n \to x, y_n \to y$ ולכן בהתאם גם $(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 \to 0$, אבל זה שקול לגבול $|z_n - z|to0$ וקיבלנו את הסדרה המקורית. $\square$

סעיף ב'

נניח כי $z_n \to z$ ונסמן $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ 4 ובהתאם $z = re^{i\theta}$.
נוכיח כי בהכרח $r_n \to r$ ונמצא דוגמה נגדית הסותרת את הטענה $\theta_n \to \theta$.

הוכחה *($r_n \to r$).* מהסעיף הקודם נסיק כי אם $z_n \to z$ אז גם $|z_n| \to |z|$, אבל $|z_n| = r_n, |z| = r$ ולכן ישירות $r_n \to r$. $\square$

פתרון (הפרכה $\theta_n \to \theta$) נניח $r_n = \frac{1}{n}$, $\theta_n = n\pi$, וגם $r = 0, \theta = 1$, אז נקבל $|z_n - z| = |\frac{1}{n}e^{i\pi n} - 0| = \frac{1}{n} \to 0$ וקיבלנו את ההתכנסות $z_n \to z$ למרות שברור כי θ_n לא מתכנסת כלל.

שאלה 4

נמצא נוסחה סגורה לשני הסכומים הבאים עבור $\theta \in \mathbb{R}$ ו־$N \in \mathbb{N}$.

סעיף א'

$$\sum_{n=0}^{N} \cos(n\theta) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{N} \left(e^{i\theta}\right)^n) = \mathrm{Re}(\frac{e^{i\theta(N+1)} - 1^N}{e^{i\theta} - 1})$$

מצאנו נוסחה סגורה.

סעיף ב'

נפעל באופן דוגמה ונקבל

$$\sum_{n=0}^{N} \sin(n\theta) = \mathrm{Im}(\frac{e^{i\theta(N+1)} - 1}{e^{i\theta} - 1})$$

שאלה 5

לכל $c \in \mathbb{C}$ נגדיר $f_c(z) = z^2 + c$, והגדרנו את קבוצת מנדלברוט על־ידי $M = \{c \in \mathbb{C} \mid (f_c^n(0))_{n=1}^\infty \text{ is bound}\}$.

סעיף א'

נוכיח כי לכל $z \in \mathbb{C}$ ו־$\epsilon > 0$ כך ש־$|z| \geq \max\{2+\epsilon, |c|\}$ מתקיים $|f_c(z)| \geq (1+\epsilon)|z|$.

הוכחה. נשתמש בהגדרת $|z|$ ונקבל

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z| \cdot |z| - |c| \geq |z|(2+\epsilon) - |c| = |z|(1+\epsilon) + |z| - |c| \geq |z|(1+\epsilon)$$

□

סעיף ב'

נוכיח כי $M \subseteq \overline{B}(0,2) \subseteq \mathbb{C}$.

הוכחה. יהי $c \notin \overline{B}(0,2)$, אז בהכרח $|c| > 2$.
מחישוב ישיר $z_1 = f_c^1(0) = 0^2 + c$ ולכן גם $|z_1| > 2$. בהתאם לטענת סעיף א' מתקיים שאם $z_2 = f_c^2(0)$ אז $|z_2| \geq |z_1|(1+\epsilon)$ עבור $\epsilon = \frac{1}{2}$, דהינו $|z_2| \geq |z_1|\frac{3}{2}$.
נגדיר סדרה $(z_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ על־ידי תהליך זה ונקבל שגם $|z_{n+1}| \geq \frac{3}{2}|z_n|$ ולכן נוכל להסיק כי $z_n \to \infty$, ובהתאם $c \notin M$.
לכן נוכל להסיק כי אם $c \in M$ אז גם $c \in \overline{B}(0,2)$. □

סעיף ג'

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $F_n = \{c \in \mathbb{C} \mid |f_c^n(0) \leq 2\}$, ונגדיר $F = \bigcap_{n \in N} F_n$.
נוכיח כי $M = F$.

הוכחה. תחילה נבחין כי $M \supseteq F$ שכן כל איבר בקבוצה זו מהגדרתה חסום לכל $n \in \mathbb{N}$ וסיימנו.

נראה כי $M \subseteq F$.
יהי $c \in M$, אז כמובן $c \in F_1$ מסעיף ב'. נניח כי $m \in \mathbb{N}$ המינימלי כך ש־$c \notin F_m$. אז נקבל $f_c^m(0) > 2$, אבל שוב מסעיף ב' וההנחה נקבל כי $f_c^{m-1}(0) \in \overline{B}(0,2)$ ולכן גן $f_c^m(0) \in \overline{B}(0,2)$, וזו כמובן סתירה, לכן אין m כזה, ובהתאם $c \in F_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
נסיק כמובן ש־$c \in F$ ולכן $M \subseteq F$. □

נבחין כי חיתוך של קבוצות סגורות וקומפקטיות אף הוא חסום וקומפקטי ולכן F קומפקטית, אבל $M = F$ ולכן קיבלנו כי M קומפקטית.

שאלה 6

סעיף א'

נוכיח כי כל ישר או מעגל ב־$\mathbb{C}$ נשלח למעגל ב־$\mathbb{S}^2$ תחת ההעתקה ההופכית להטלה הסטריאוגרפית המוגדרת על־ידי

$$\varphi(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2}, \frac{-1+|z|^2}{1+|z|^2}\right)$$

הוכחה. יהי $c = a\operatorname{Re}(z) + b\operatorname{Im}(z)$ ישר כלשהו ב־$\mathbb{C}$, נבחר שלוש נקודות שונות על ישר זה ונבחן את המישור שהן יוצרות לאחר הטלה סטריאוגרפית, נגדיר מישור זה להיות P_C. אבל מטענה מהכיתה נובע כי החיתוך $\mathbb{S}^2 \cap P_C$ הוא ישר או מעגל בלבד ב־$\mathbb{C}$, ומהגדרתו שלוש נקודות שונות של הישר שהגדרנו מונחות עליו, ולכן לא יתכן שהוא מעגל. נסיק אם כן שהוא ישר, ומהתלכדות שלוש נקודות שונות בו נסיק ששני הישרים שווים. נשים לב כי יכולנו לבחור שתי נקודות בלבד ולבחור את הנקודה $\infty \in \mathbb{C}*$ כנקודה שלישית, שני ישירם זהים אם שתי נקודות שלהם מתלכדות ולכן טענה זו עדיין חלה.

נעבור אם כך לבחינת מעגל ב־$\mathbb{C}$, גם הפעם עבור נעגל נבחר שלוש נקודות ונגדיר מישור $P_C \subseteq \mathbb{R}^3$ המוגדר על־ידי הנקודות הללו אחרי העתקה סטריאוגרפית. גם הפעם אנו יודעים כי $\mathbb{S}^2 \cap P_C$ מעגל ב־$\mathbb{R}^3$ וגם הפעם נקבל שהוא משליך מעגל או ישר על המישור המרוכב, אבל שלוש הנקודות שבחרנו פוסלות את היותו ישר ומקבעים מעגל יחיד, שכן מעגל נוצר ביחידות על־ידי שלוש נקודות. $\square$

סעיף ב'

נגדיר $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ המטריקה המושרית מההעתקה הסטריאוגרפית, ידוע כי

$$\rho(z, w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}$$

נוכיח כי אם $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ אז $z_n \to z$ עבור $z \in \mathbb{C}$ אם ורק אם $\rho(z_n, z) \to 0$.

הוכחה. נבחין כי $\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)} \geq 1$ לכל $z, w \in \mathbb{C}$.

נניח כי $z_n \to z$, לכן לפי ההגדרה $|z - z_n| \to 0$, וכן גם $2|z - z_n| \to 0$ מאריתמטיקה, לכן

$$0 \leq \rho(z_n, z) \leq 2|z_n - z|$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ ובהתאם נסיק ש־$\rho(z_n, z) \to 0$.

בכיוון ההפוך נניח כי $\rho(z_n, z) \to 0$ ובשלילה ש־$z_n \not\to z$. קיים אם כך $\epsilon > 0$ כך ש־$|z - z_n| \geq \epsilon$ היא תכונה שכיחה על n, ובהתאם נקבל

$$\rho(z_n, z) = \frac{2|z_n - z|}{\sqrt{(1+|z_n|^2)(1+|z|^2)}} \geq \frac{2\epsilon}{\sqrt{(1+|z_n|^2)(1+|z|^2)}} \geq \frac{2\epsilon}{\sqrt{(1+\sup|z_n|^2)(1+|z|^2)}}$$

ובהתאם קיבלנו חסם תחתון חיובי למרחק ובהתאם קיבלנו סתירה ל־$\rho(z_n, z) \to 0$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי לכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים $\rho(z, w) = \rho(\overline{z}, \overline{w}) = \rho(\frac{1}{z}, \frac{1}{w})$.

הוכחה. נוכיח טענה כללית יותר תחילה, נוכיח כי לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|\overline{z}| = |z|$. נזכור כי הגדרנו $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$, וראינו בכיתה כי $z = \overline{\overline{z}}$ ולכן נסיק כי $|z| = \sqrt{\overline{z} \cdot z} = |\overline{z}|$. לכן בהכרח גם

$$\rho(\overline{z}, \overline{w}) = \frac{2|\overline{z} - \overline{w}|}{\sqrt{(1+|\overline{z}|^2)(1+|\overline{w}|^2)}} = \frac{2|\overline{z - w}|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} = \rho(z, w)$$

נעבור לבדיקת החלק האחרון בשוויון:

$$\begin{aligned}
\rho(\frac{1}{z},\frac{1}{w}) &= \frac{2|\frac{1}{z}-\frac{1}{w}|}{\sqrt{(1+|\frac{1}{z}|^2)(1+|\frac{1}{w}|^2)}} &&= \frac{2|\frac{z-w}{zw}|}{\sqrt{(1+\frac{1}{|z|^2})(1+\frac{1}{|w|^2}|)}} \\
&= \frac{2|z-w|}{\sqrt{|zw|^2(1+\frac{1}{|z|^2})(1+\frac{1}{|w|^2}|)}} &&= \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} \\
&= \rho(z,w)
\end{aligned}$$

ומצאנו כי השוויון אכן מתקיים. $\square$