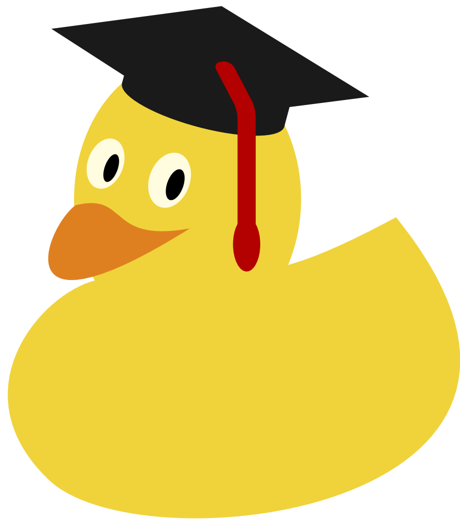
פתרון מטלה 01 — תורת ההסתברות (1), 80420

31 באוקטובר 2024



שאלה 1

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות בדיד, נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נוכיח שאם $A \subseteq \Omega$ מקיימת $\mathbb{P}(A) = 0$ אז לכל $B \subseteq \Omega$ מתקיים $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$.

הוכחה. נבחין כי $D = B \setminus A$ היא זרה באיחוד ל־$A \cap B$, לכן נקבל $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(D \cup (A \cap B)) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(A \cap B)$.
אבל $A \cap B \subseteq A$ ולכן מתכונות פונקציית הסתברות נקבל $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$.
לכן $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B)$. נשתמש בטענה זו ונקבל

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D) = 0 + \mathbb{P}(B)$$

וקיבלנו כי השוויון אכן מתקיים. □

סעיף ב'

נוכיח שאם $A \subseteq B$ אז $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

הוכחה. למעשה תכונה זו הוכחה בהרצאה, נעתיק את ההוכחה:

1. נראה כי $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$ שכן כל איחוד של קבוצות ריקות הוא זר, לכן אילו $\mathbb{P}(\emptyset) \neq 0$ נקבל ישר סתירה, נסיק כי $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ בלבד.
2. נגדיר $A_i = \emptyset$ לכל $i > n$ ונשתמש בסיגמא־אדיטיביות ונקבל
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$
3. נשתמש בתכונה 2 על $B, B \setminus A$, אלו הן קבוצות זרות כמובן, אם נגדיר $D = A \cup (B \setminus A)$ נקבל $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$.

□

סעיף ג'

נסתור את הטענה כי אם $A \subsetneq B$ אז $\mathbb{P}(A) \lneq \mathbb{P}(B)$.
פתרון נגדיר $\Omega = [3]$ ו־$p(1) = p(2) = \frac{1}{2}, p(3) = 0$, ונבחן את $\mathbb{P}_p$.
אם נגדיר $A = \{1\}, B = \{1, 3\}$ נקבל $A \subsetneq B$ אבל $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ בסתירה לטענה.

סעיף ד'

נוכיח שלכל $A, B \subseteq \Omega$ מתקיים $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$

הוכחה. מתכונות פונקציית הסתברות נקבל $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
לאחר החלפת אגפים נקבל

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

שכן מתקיים $\mathbb{P}(X) \leq 1$ לכל $X \in \mathcal{F}$ ובפרט עבור $A \cup B$. □

סעיף ה'

נוכיח כי מתקיים $\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$.

הוכחה. נבחין תחילה כי $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$,
נשתמש בשוויון מהסעיף הקודם ונקבל

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\triangle B) &= \mathbb{P}((A\cup B)\cap(A\cap B)^C)\\
&= \mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}((A\cap B)^C)-\mathbb{P}((A\cup B)\cup(A\cap B)^C)\\
&= \mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(\Omega\setminus(A\cap B))-\mathbb{P}(\Omega)\\
&= \mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(\Omega)-\mathbb{P}(A\cap B)-1 \qquad (1)\\
&= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-2\mathbb{P}(A\cap B)
\end{aligned}$$

כאשר המעבר (1) נובע מהשוויון $A\cup B\cup(A\cap B)^C=A\cup B\cup A^C\cup B^C=\Omega$ שנובעת מדה־מורגן לקבוצות. $\square$

שאלה 2

נוכיח שקיימת פונקציית הסתברות יחידה על $\Omega = \mathbb{N}$ המקיימת $\mathbb{P}(\{n\}) = 3\mathbb{P}(\{n+1\})$.

הוכחה. נוכיח שקיימת כזאת פונקציית הסתברות, נגדיר $p : \mathbb{N} \to [0,1]$ על־ידי $p(n) = 2 \cdot \frac{1}{3^n}$.
נקבל מנוסחת סכום סדרה הנדסית ש־$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = 1$ ולכן זוהי פונקציית הסתברות נקודתית והיא משרה פונקציית הסתברות $\mathbb{P}_p$ המקיימת את תנאי הטענה. אז הוכחנו שקיימת לכל הפחות פונקציה אחת כזו.

נעבור להוכחת יחידות, נניח ש־$\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ שתי פונקציות הסתברות המקיימות את הטענה.
באינדוקציה על n נקבל כי $\mathbb{P}(\{n\}) = 3^{1-n}\mathbb{P}(\{1\})$. מסיגמא־אדיטיביות נקבל

$$1 = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{1\}) 3^{1-n} = \mathbb{P}(\{1\}) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{1-n} = \mathbb{P}(\{1\}) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$$

ולכן נסיק $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{2}{3}$, וממהלך זה נוכל גם להסיק על־ידי סעיף ב' בתנאים שקולים לפונקציית הסתברות בדידה שקיימות פונקציות הסתברות נקודתיות p, p' כך ש־$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p, \mathbb{P}' = \mathbb{P}_{p'}$. אבל קיבלנו אם כך ש־$p(1) = p'(1) = \frac{2}{3}$ ובהתאם להגדרה הרקורסיבית נקבל $p = p'$ ובהתאם $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$, דהינו קיימת פונקציית הסתברות יחידה המקיימת את תנאי הטענה. $\square$

נחשב את $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ ואת $\mathbb{P}(3\mathbb{N})$. כמובן $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$, עבור $3\mathbb{N}$ נקבל

$$\mathbb{P}(3\mathbb{N}) = \sum_{n \in 3\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} p(3n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{3^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{9^n} = \frac{1}{4}$$

שאלה 3

מטעמי קריאות ולאור דרישת שמירת סדר מופע השאלות, שאלות 1 עד 7 בחלק השני של המטלה תאוגדנה כסעיפים א' עד ז' בשאלה זו.

נבנה מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ לכל סיטואציה בסעיפים הבאים.

סעיף א'

מטילים קוביה הוגנת 10 פעמים, לכן נגדיר $\Omega = [6]^{10}$, שכן כך אנו מתחשבים בכל תוצאת 10 הטלות ולפי סדר, עוד נגדיר $\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$ עבור פונקציית הסתברות נקודתית אחידה $p : [6] \to [0, 1]$. המאורע שקיבלנו לפחות פעם אחת 1 הוא $A = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \Omega \mid \exists i \in [10], x_i = 1\}$. נחשב במקום את המשלים, נגדיר מאורע $B = \Omega \setminus A = \{(x_i) \mid \forall i, x_i \ne 1\}$ ולכן נקבל $|B| = 5^{10}$. נקבל אם כן $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega \setminus B) = 1 - \frac{5^{10}}{6^{10}}$. נחשב את ההסתברות שיצא 1 בדיוק פעם אחת, נגדיר מאורע $C = \{(x_i) \in \Omega \mid \exists! i \in [10], x_i = 1\}$. משיקולים קומבינטוריים נקבל $|C| = 10 \cdot 5^9$ ולכן בהתאם $\mathbb{P}(C) = \frac{10 \cdot 5^9}{6^{10}}$.

סעיף ב'

מטילים שתי קוביות הוגנות, לכן $\Omega = [6]^2$ ו־$\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות אחידה, ונחשב את ההסתברות שסכום התוצאות הוא לפחות 7. נגדיר את המאורע $A = \{(n, m) \in \Omega \mid n + m \ge 7\}$, ונפרק אותו למקרים, נגדיר $A_i = \{(i, n) \in \Omega \mid i + n \ge 7\}$ עבור $1 \le i \le 6$ ונקבל $A = \bigcup_{i \in [6]} A_i$. לכן

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in [6]} A_i) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{6^2} = \frac{1}{6^2} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2}$$

סעיף ג'

נתונה קבוצה של עשרה חודשי לידה ולכן נקבע $\Omega = [12]^{10}$, ונתון כי ההסתברות היא אחידה. נחשב את הסבירות ששני אנשים לפחות נולדו באותו חודש. המאורע הוא $A = \{(x_i) \in \Omega \mid \exists i, j : 1 \le i < j \le 10, x_i = x_j\}$. נחשב על־ידי חישוב המשלים, נגדיר $B = \{(x_i) \in \Omega \mid \forall i, j : i \ne j \implies x_i \ne x_j\}$ המאורע שאין שני אנשים שחוגגים ביחד חודש הולדת. משיקולים קומבינטוריים נקבל $|B| = \frac{12!}{2!}$ ולכן $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{12!}{2 \cdot 12^{10}}$.

סעיף ד'

חידת התפוזים