פתרון מטלה 09 — מבוא ללוגיקה, 80423

7 בינואר 2025

שאלה 1

קבוצת פסוקים Σ תיקרא קבוצת הינטיקה אם היא מקיימת את התנאים הבאים לכל שני פסוקים α, β בשפה.

1. אם P פסוק יסודי אז לא יתכן שגם P וגם $\neg P$ שייכים ל־Σ.
2. אם $\neg(\neg\alpha) \in \Sigma$ אז גם $\alpha \in \Sigma$.
3. אם $\alpha \wedge \beta \in \Sigma$ אז $\alpha, \beta \in \Sigma$ ואם $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$ אז או $\neg\alpha$ או $\neg\beta$ ב־Σ.
4. אם $\alpha \vee \beta \in \Sigma$ אז או $\alpha \in \Sigma$ או $\beta \in \Sigma$, אם $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$ אז $\neg\alpha, \neg\beta \in \Sigma$.
5. אם $\alpha \to \beta \in \Sigma$ אז או $\neg\alpha$ או β ב־Σ, ואם $\neg(\alpha \to \beta) \in \Sigma$ אז $\alpha, \neg\beta \in \Sigma$.
6. אם $\alpha \leftrightarrow \beta \in \Sigma$ אז או $\alpha, \beta \in \Sigma$ או $\neg\alpha, \neg\beta \in \Sigma$, אם $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \in \Sigma$ אז או $\alpha, \neg\beta \in \Sigma$ או $\neg\alpha, \beta \in \Sigma$.

נוכיח שאם Σ קבוצת הינטיקה אז Σ ספיקה.

הוכחה. נגדיר $v : L \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ על־ידי $P \in \Sigma \iff v(P) = \mathbb{T}$.
נגדיר $\xi = \forall\varphi(((\varphi \in \Sigma) \implies \bar{v}(\varphi) = \mathbb{T}) \wedge ((\neg\varphi) \in \Sigma \implies \bar{v}(\varphi) = \mathbb{F}))$, ונוכיח את ξ באינדוקציה על מבנה הפסוק.
לפני שנתחיל נעיר ש־ξ הוא טענה שנכתבה בשפה לוגית מטעמי נוחות, ואנו מתייחסים אליה כטענה ולא כאל נוסחה.
עבור בסיס האינדוקציה יהי $P \in L$ פסוק יסודי, אם $P \in \Sigma$ אז מהגדרה נובע $\bar{v}(P) = \mathbb{T}$ כמבוקש, ואילו $\neg P \in \Sigma$ אז $\bar{v}(\neg P) = V_{\neg}(v(P)) = \mathbb{T} \implies \bar{v}(P) = \mathbb{F}$. נעיר שמתנאי 1 לקבוצות הינטיקה נובע שהמהלך שביצענו מוגדר ולכן השלמנו אם כך את בסיס האינדוקציה ולכן נעבור להוכיח את המהלך. נניח ש־α, β מקיימים את ξ כהנחה אינדוקטיבית.

- אם $\varphi = \neg\alpha$ אז אם $\varphi \in \Sigma$ אז $\neg\alpha \in \Sigma$ ותנאי האינדוקציה חל, נובע $\bar{v}(\alpha) = \mathbb{F}$, ולכן $\bar{v}(\varphi) = V_{\neg}(\bar{v}(\alpha)) = \mathbb{T}$.
  אם $\neg\varphi \in \Sigma$ אז $\neg(\neg\alpha) \in \Sigma$ ולכן מ־1 גם $\alpha \in \Sigma$ ומהנחת האינדוקציה $\bar{v}(\alpha) = \mathbb{T}$, בהתאם $\bar{v}(\varphi) = V_{\neg}(\bar{v}(\alpha)) = \mathbb{F}$.
- אם $\varphi = \alpha \wedge \beta$ אז אם $\varphi \in \Sigma$ אז מ־3 גם $\alpha, \beta \in \Sigma$ ולכן $\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta) = \mathbb{T}$ ולכן בהכרח $\bar{v}(\varphi) = \mathbb{T}$.
  אם $\neg\varphi \in \Sigma$ אז מ־3 וללא הגבלת הכלליות גם $\neg\alpha \in \Sigma$ ולכן $\bar{v}(\alpha) = \mathbb{F}$ מהנחת האינדוקציה, בהתאם גם $\bar{v}(\varphi) = \mathbb{F}$.
  נבחין כי למעשה יכולנו לסיים את ההוכחה כאן על־ידי שימוש בקבוצת כמתים שלמה של $\neg, \wedge$, ניתן אף להוכיח שכלל תנאי קבוצת הינטיקה נובעים משלושת התנאים הראשונים, אך נוכיח את מהלך האינדוקציה עבור כלל $\mathcal{B}$ מטעמי פורמליות.
- אם $\varphi = \alpha \vee \beta$ אז אם $\varphi \in \Sigma$ אז ללא הגבלת הכלליות גם $\alpha \in \Sigma$ ולכן נובע $\bar{v}(\varphi) = \mathbb{T}$.
  אם $\neg\varphi \in \Sigma$ אז מ־4 גם $\neg\alpha, \neg\beta \in \Sigma$ ולכן נובע $\bar{v}(\varphi) = V_{\vee}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta)) = \mathbb{F}$.
- אם $\varphi = \alpha \to \beta$ אז אם $\varphi \in \Sigma$ אז מ־5 וללא הגבלת הכלליות גם $\neg\alpha \in \Sigma$ ולכן נובע $\bar{v}(\varphi) = \mathbb{T}$.
  אם $\neg\varphi \in \Sigma$ אז נובע $\alpha, \neg\beta \in \Sigma$ וכן שוב מכללי הערכת אמת נובע $\bar{v}(\varphi) = \mathbb{F}$.
- אם $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$ אז אם $\varphi \in \Sigma$ אז באופן דומה נפצל למקרים על תנאי 6 מתקבל בהכרח ש־$\bar{v}(\varphi) = \mathbb{T}$.
  אם $\neg\varphi \in \Sigma$ אז ללא הגבלת הכלליות $\alpha, \neg\beta \in \Sigma$ ונובע בהכרח $\bar{v}(\varphi) = \mathbb{F}$.

השלמנו את מהלך האינדוקציה ולכן ξ מתקיים. $\square$

שאלה 2

סעיף ב׳

קבוצת פסוקים Σ תיקרא עקבית עבור H אם אין פסוק α עבורו $\Sigma \vdash^H \alpha$ וגם $\Sigma \vdash^H \neg\alpha$.
נוכיח שאם Σ אינה עקבית עבור H אז לכל פסוק β מתקיים $\Sigma \vdash^H \beta$.

הוכחה. TODO $\square$

שאלה 3

תהי שפה L לתחשיב יחסים ותהי $\varphi \in form_L$.

סעיף א׳

נוכיח שמתקיים $\exists x\varphi \vdash \neg(\forall x(\neg\varphi))$.

הוכחה. נבנה עץ היסק ב־KE להוכחת הטענה.

1. $\neg(\neg(\forall x(\neg\varphi)))$
2. $\forall x(\neg\varphi)$, כללי שלילה
3. $\exists x\varphi$, הוספת הנחה
4. φ_c^x, כללי קיים, הוספת עד c
5. $\neg\varphi_c^x$, כללי לכל, הצבה ל־2, וסתירה

נבחין כי במהלך האחרון הסתמכנו על הזהות $(\neg\varphi)_c^x = \neg\varphi_c^x$ אשר הוכחנו שמתקיימת בתרגילים קודמים.

מעץ ההיסק שמצאנו אכן מתקיים $\exists x\varphi \vdash \neg(\forall x(\neg\varphi))$. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שמתקיים $\forall x\varphi \vdash \neg(\exists x(\neg\varphi))$.

הוכחה. כמו בסעיף הקודם נבנה עץ היסק ב־KE עבור הטענה.

1. $\neg(\neg(\exists x(\neg\varphi)))$
2. $\exists x(\neg\varphi)$, כללי שלילה
3. φ_c^x, כללי קיים, הוספת עד c
4. $\forall x\varphi$, הוספת הנחה
5. φ_c^x, כללי לכל, הצבה, וסתירה

ומצאנו כי קיים עץ היסק מתאים לטענה. $\square$

שאלה 4

תהי φ נוסחה, t שם עצם קבוע, x משתנה, c ו־d סימני קבוע ב־$L_{P,f}$.

סעיף א׳

נוכיח שמתקיים $(\varphi_t^x)_d^c = (\varphi_d^c)_{t_d^c}^x$.

הוכחה. צריך להשתמש בזה ש־t שם עצם קבוע. $\square$