פתרון מטלה 12 — פונקציות מרוכבות, 80519

26 בינואר 2025

שאלה 1

תהי $f:U_a^* \to \mathbb{C}$ אנליטית עם קוטב מסדר $m \geq 1$ ב־$z=a$.
נראה שקיימים $\epsilon, r > 0$ כך שלכל $|w| > r$ קיימים בדיוק m פתרונות למשוואה $w = f(z)$ ב־$B^*(a,\epsilon)$.

הוכחה. נגדיר $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ ונבחין שמתקיים $g(a) = 0$ וכן ש־$\mathrm{ord}_a(g) = m$. לכן מהגרסה המקומית של משפט רושה קיימים $\epsilon, \delta > 0$ כך שלכל $w \in B(g(a),\delta)$ קיימים בדיוק m פתרונות למשוואה $w = g(z)$ ב־$B(a,\epsilon)$. נבחין כי $f(z) = \frac{1}{w} \iff g(z) = w$ ולכן קיבלנו את הטענה עבור $r = \frac{1}{\delta}$ ו־ϵ. $\square$

שאלה 2

נמצא כמה פתרונות כולל ריבוי יש למשוואות הבאות בתחומים הנתונים.

סעיף א׳

$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ ב־$B(0,1)$.

פתרון נגדיר $f(z) = z^7 - 5z^4 + z^4 - 2$ וגם $g(z) = z^7 - 5z^4$ ונבחין כי אם $|z| = 1$ אז,

$$|f(z) - g(z)| \le |z^2| + |2| = 3 \le |z^4| \cdot |z^2 - 5|$$

ולכן ממשפט רושה בכדור $B(0,1)$ אותו מספר אפסים לשתי הפונקציות, וכן

$$g(z) = 0 \iff z = 0, z^3 - 5 = 0$$

אפס הוא שורש מריבוי 4, וכן ישנם שלושה שורשים שלא בתחום, לכן יש ארבעה שורשים ל־f בתחום.

סעיף ב׳

$z^5 + 2z^3 - z^2 + z - \alpha = 0$ בתחום $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, עבור $\alpha \in \mathbb{R}$.

פתרון נגדיר ריבועים שצלעם התחתונה מונחת על ציר ה־x כך שגודל צלעם r והם ממורכזים.

נגדיר $f(z) = z^5 + 2z^3 - z^2 + z - \alpha$.

נגדיר $g(z) = z^5 + 2z^3$ ונקבל שלכל r מספיק גדול $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ על שפת הריבוע, ובהתאם משפט רושה חל ונובע שמספר השורשים בריבוע הוא 5 שורשים לרבות ריבוי. מתוך שורשים אלה שלושה הם על הראשית והשניים הנותרים הם על הציר הממשי, ולכן יש בתחום אפס שורשים. נסיק אם כך שכאשר $r \to \infty$ אז מספר הפתרונות של המשוואה נשאר אפס.

סעיף ג׳

$e^z = 3z^n$ בחצי המישור $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 1\}$ עבור $n \in \mathbb{N}$.

פתרון נגדיר $f(z) = e^z - 3z^n$ ונחקור את שורשיה.

נבחין שבמעגל היחידה מתקיים

$$|f(z) + 3z^n| = |e^z| \le e \le 3 = |-3z^n|$$

ולכן לפונקציה אותה כמות שורשים כמו ל־$-3z^n$, אך לזו האחרונה שורש מריבוי n באפס בלבד. נעבור לבחון ריבועים $[-r, r] \times [1 - 2r, 1]$. בריבועים אלה,

$$|f(z) + 3z^n| = |e^z| \le 1 \le |r| \le |-3z^n|$$

ולכן גם בתחום זה הריבוי הוא זהה, ונוכל להסיק שכאשר $r \to \infty$ מספר השורשים נשאר n.

שאלה 3

תהי $f : G \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, ויהי $z_0 \in G$ כך ש־$f'(z_0) \neq 0$.

נראה שקיים $r > 0$ כך ש־$\overline{B}(z_0, r) \subseteq G$ ו־$f \mid_{B(z_0,r)}$ הפיכה עם הופכית הנתונה על־ידי

$$f \mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{zf'(z)}{f(z) - w}\, dz$$

הוכחה. נוכל להסיק ש־$f(z_0) \neq 0$, אחרת היינו יכולים להסיק ש־f קבועה. משפט הפונקציה הפוכה חל ולכן קיים $r > 0$ כך ש־f הפיכה ב־$B(z_0, r) \subseteq G$. ממשפט קושי נובע

$$f \mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f \mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(z)}{z - w}\, dz$$

נשתמש במשפט ההצבה עם $z \to f \mid_{B(z_0,r)} (z)$ וכן $dz \to f \mid_{B(z_0,r)} (z)' dz$ ונקבל

$$f \mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f \mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(f \mid_{B(z_0,r)} (z))}{f \mid_{B(z_0,r)} (z) - w} \cdot f \mid_{B(z_0,r)} (z)'\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f \mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(z)}{z - w}\, dz$$

כפי שרצינו. $\square$

שאלה 4

נוכיח את משפט שוורץ־פיק על חצי המישור העליון H.

תהי $f: H \to H$ אנליטית לא קבועה, נראה שאי־השוויונות הבאים מתקיימים,

- $\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{f(z_2)-\overline{f(z_1)}}\right| \leq \left|\frac{z_2-z_1}{z_2-\overline{z_1}}\right|$ לכל $z_1, z_2 \in H$.
- $|f'(z)| \leq \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}$ לכל $z \in H$.

נראה בנוסף שאם יש שוויון בנקודה מסוימת באחד מאי־השוויונות לעיל אז $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ עבור $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$.

הוכחה. ניזכר ב־$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ העתקה המעבירה את H ל־D, ונקבל ש־$\varphi \circ f$ מקיימת את משפט שוורץ־פיק. לכן מתקיים,

$$\left|\frac{\varphi(f(z_2)) - \varphi(f(z_1))}{1-\varphi(f(z_1))\overline{\varphi(f(z_2))}}\right| \leq \left|\frac{\varphi(z_2)-\varphi(z_1)}{1-\varphi(z_1)\overline{\varphi(z_2)}}\right|$$

מחישוב ישיר של φ מתקבל,

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{f(z_2)-\overline{f(z_1)}}\right| = \left|\frac{\frac{f(z_2)-i}{f(z_2)+i} - \frac{f(z_1)-i}{f(z_1)+i}}{1-\frac{f(z_1)-i}{f(z_1)+i}\frac{(\overline{f(z_2)}+i)^2}{(f(z_2)-i)(\overline{f(z_2)}+i)}}\right| \leq \left|\frac{\varphi(z_2)-\varphi(z_1)}{1-\varphi(z_2)\overline{\varphi(z_1)}}\right| = \left|\frac{\frac{f(z_2)-i}{f(z_2)+i} - \frac{f(z_1)-i}{f(z_1)+i}}{1-\frac{f(z_1)-i}{f(z_1)+i}\frac{(\overline{f(z_2)}+i)^2}{(f(z_2)-i)(\overline{f(z_2)}+i)}}\right| = \left|\frac{z_2-z_1}{z_2-\overline{z_1}}\right|$$

באופן דומה נקבל מהמשפט עבור $\varphi \circ f$ שמתקיים,

$$|(\varphi \circ f)'(z)| \leq \frac{1-|\varphi(f(z))|^2}{1-|z|^2}$$

נבחין כי $\varphi'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}$ ולכן,

$$|\varphi'(f(z))f'(z)| = \left|\frac{-2i}{(f(z)+i)^2}f'(z)\right| \leq \frac{1-|\varphi(f(z))|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = \frac{1-\left|\frac{(f(z)-i)^2}{(f(z)+i)^2}\right|}{1-\left|\frac{(z-i)^2}{(z+i)^2}\right|}$$

ולכן,

$$\begin{aligned}
|2f'(z)| &\leq |(z+i)^2|\frac{|(f(z)+i)^2|-|(f(z)-i)^2|}{|(z+i)^2|-|(z-i)^2|} \\
&= |(z+i)^2|\frac{\operatorname{Re}^2(f(z)+i)+\operatorname{Im}^2(f(z)+i)-\operatorname{Re}^2(f(z)-i)-\operatorname{Im}^2(f(z)-i)}{|(z+i)^2|-|(z-i)^2|} \\
&= |(z+i)^2|\frac{2\operatorname{Im} f(z)}{2\operatorname{Im} z}
\end{aligned}$$

ועל־ידי הצבה של $z = \varphi^{-1}(z')$ נקבל את המבוקש.

במקרה בו יש שוויון אז נקבל ש־$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ היא חד־חד ערכית, ואף שמתקיים

$$\varphi(f(\varphi^{-1}(z))) = \lambda\frac{z-a}{1-z\overline{a}} \iff f(\varphi^{-1}(z)) = -i\frac{\lambda\frac{z-a}{1-z\overline{a}}+1}{\lambda\frac{z-a}{1-z\overline{a}}-1} = -i\frac{(\lambda-\overline{a})z-\lambda a+1}{(\lambda+\overline{a})z-\lambda a-1}$$

ולכן בהתאם,

$$f(z) = -i\frac{(\lambda-\overline{a})\frac{z-i}{z+i}-\lambda a+1}{(\lambda+\overline{a})\frac{z-i}{z+i}-\lambda a-1} = -i\frac{(\lambda-\overline{a})(z-i)-(\lambda a+1)(z+i)}{(\lambda+\overline{a})(z-i)-(\lambda a-1)(z+i)}$$

ולאחר צמצום ושימוש בתכונה $|\lambda| = 1$ נקבל שזוהי אכן העתקת מביוס הנוצאת על ידי מטריצה מ־$SL_2(\mathbb{R})$. $\square$

שאלה 5

תהי $f:\overline{D}\to\overline{D}$ פונקציה הרציפה ב־$\overline{D}$ ואנליטית ב־D כך ש־$f(\partial D)\subseteq\partial D$.

סעיף א׳

נוכיח שאם f אינה קבועה אז יש לה שורש.

הוכחה. נניח ש־f לא קבועה. אילו f לא חד־חד ערכית ב־D אז יש שתי נקודות $z_0,z_1\in D$ כך שמשוורץ־פיק מתקיים,
$$\frac{|f(z_1)-f(z_0)|}{|1-\overline{f(z_1)}f(z_0)|}\le|z_1-z_0|=0$$
ולכן בפרט $f(z_1)=f(z_0)$, ומצאנו שיש ל־f שורש. נניח אם כן ש־f חד־חד ערכית, ולכן מטענה מהכיתה נובע,
$$f(z)=\lambda\frac{z-a}{1-z\overline{a}}$$
כאשר $a\in D$, ולכן $f(a)=0$ וסיימנו. $\square$

סעיף ב׳

עבור $a\in D$ נגדיר $B_a:\overline{D}\to\overline{D}$ המוגדרת על־ידי $B_a(z)=\frac{a-z}{1-\overline{a}z}$.

נוכיח שמתקיים,
$$f(z)=\lambda\prod_{k=1}^{n}B_{a_k}(z)^{m_k}$$
כאשר $a_1,\dots,a_n\in D$ הם האפסים של f עם הריבויים $m_1,\dots,m_n$ ו־$|\lambda|=1$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על כמות האפסים (לרבות ריבוי) ב־f.

נניח שאין ל־f אפסים, אז אם נניח בשלילה ש־f לא קבועה נקבל סתירה מסעיף א׳, לכן f קבועה. מהעובדה ש־$|f(z)|=1$ לכל $|z|=1$ נסיק ש־$f(z)=\lambda$ עבור $|\lambda|=1$. נניח שהטענה נכונה עבור n ונניח של־f יש $n+1$ אפסים. נניח ש־$z_0\in D$ מקיים $f(z_0)=0$, לכן $\frac{f(z)(1-\overline{a}z)}{a-z_0}$ היא חלוקה של f באוטומורפיזם ומשמרת חד־חד ערכיות, בנוסף היא $\overline{D}\to\overline{D}$ ומחוסרת אפס אחד לרבות ריבוי, לכן מהנחת האינדוקציה מקיימת את הרצוי ונובע שאכן f ניתנת להצגה בצורה המבוקשת. $\square$