

פתרון ממ"ן 14 – אלגברה לינארית 2 (20229)

6 באפריל 2023

שאלה 1

נמצא את הדרגה ואת הסימנית של התבנית הריבועית של $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4$$

מסימטריית המטריצה המייצגת של q , נגדיר את המטריצה המייצגת

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

נחפוף את A אלמנטרית:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_i \rightarrow \sqrt{2}C_i]{R_i \rightarrow \sqrt{2}R_i | 1 \leq i \leq 4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \rightarrow C_3 - 2C_2]{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \rightarrow C_4 - 3C_2]{R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \rightarrow C_4 - 2C_3]{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \rightarrow C_3 - C_1]{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1 \rightarrow C_1 + \frac{1}{2}C_2]{R_1 \rightarrow R_1 + \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \rightarrow C_2 - C_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \rightarrow C_4 + \frac{1}{2}C_3]{R_4 \rightarrow R_4 + \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

מצאנו מטריצה אלכסונית וממנה נובע $\rho(q) = 4$ ומהגדרת החתימה נובע כי $\sigma = -2$.

סעיף ב'

נמצא תת־מרחב מממד מקסימלי של \mathbb{R}^4 שעליו q היא תבנית חיובית לחלוטין.

בסעיף הקודם מצאנו מטריצה מייצגת אלכסונית של q , נוכל לבנות לפיו בסיס עבורו q אלכסונית. נגדיר בסיס זה להיות W .

אז בבסיס זה

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 3x_4^2 \quad (1)$$

עבור תת־מרחב $\text{Sp}\{w_1\}$ התבנית q חיובית לחלוטין. אילו היה תת־מרחב המקסימלי המקיים תנאי זה גדול בממדו מ־1 אז היה קיים וקטור u

בלתי תלוי ב־ w_1 אשר מקיים

$$q(u) \geq 0$$

בשל היותו בלתי תלוי ב־ w_1 כאשר $w_1 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4$ ו־ $u = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4$ וידועים כי לפחות אחד הערכים $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \neq 0$.

נוכל ללא פגיעה בכלליות להניח ש־ $\lambda_1 = 0$ שאם לא כן נוכל להגדיר מחדש את הווקטור כך.

מ־ (1) נובע במצב זה ש־ $q(v) < 0$ בסתירה להנחה ולכן ממד המרחב המקסימלי אשר עבורו q חיובית לחלוטין הוא 1.

נעבור לחישוב w_1 . אנו יודעים כי וקטור זה הוא וקטור העמודה הראשון במטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי ל־ W , ומטריצה זו מתקבלת מביצוע

פעולות השורה שביצענו בחפיפה האלמנטרית בסעיף הקודם, נפעיל אותם על מטריצת היחידה ונקבל

$$w_1 = (2, 1, 0, 0)$$

ובהתאם תת־המרחב המקסימלי הוא

$$\text{Sp}\{(2, 1, 0, 0)\}$$

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי אשר ממדו n , ותהי q תבנית ריבועית חיובית למחצה מעל המרחב V . נגדיר ρ דרגת q . נוכיח כי

$$L_0 = \{v \in V \mid q(v) = 0\}$$

הוא תת־מרחב של V ושמתקיים $\dim L_0 = n - \rho$.

הוכחה. יהי W בסיס אורתונורמלי מלכסן קנונית של q , לכן קיימים $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$ עבורם לפי טענה 6.3.2

$$0 \leq q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_\rho x_\rho^2 + 0x_{\rho+1}^2 + \dots + 0x_n^2 \quad (1)$$

בשל התאפסות המקדמים לכל $\rho < i \leq n$ מתקיים $q(w_i) = 0$, תבנית בילינארית ולכן נובע גם כי לכל סקלר λ מתקיים

$$q(\lambda w_i) = \lambda^2 q(w_i) = 0$$

יהי $j \in \mathbb{N}$ כך ש- $\rho < j \leq n$, מ-(1) נובע גם כי $q(w_i + w_j) = 0$.

נגדיר $L_0 = \{v \in V \mid q(v) = 0\}$, קבוצת הווקטורים שמאפסים את q , משתי הטענות האחרונות נובע כי קבוצה זו היא מרחב ווקטורי.

עוד אנו יודעים כי $L_0 \subseteq V$ ולכן L_0 תת־מרחב של V .

ראינו כי תת־המרחב נוצר על־ידי $\{w_{\rho+1}, \dots, w_n\}$, וידוע לנו כי קבוצה זו בלתי תלויה מינימלית, ולכן מהווה בסיס ל- L_0 , אז ממד L_0 הוא

מש"ל

$$n - \rho$$

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי מממד סופי מעל \mathbb{R} ותהי $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ תבנית ריבועית.

נוכיח כי אם הקבוצה $L = \{v \mid q(v) \geq 0\}$ היא תת־מרחב של V אז q שומרת סימן.

הוכחה. תהי L קבוצה המוגדרת כלעיל, ונניח כי היא תת־מרחב של V .

נגדיר בסיס מלכסן קנונית W עבור q , ונגדיר ρ דרגת q , מספר האיברים החיוביים בצורה הקנונית של q .

נניח כי קיים w_i כך ש־ $q(w_i) \geq 0$ ובהתאם $w_i \in L$. נניח בשלילה כי קיים גם וקטור w_j עבורו $q(w_j) < 0$.

מהגדרת התבנית הריבועית הקנונית נובע ישירות כי קיימים סקלרים $\lambda, \mu > 0$ כך ש־ $q(\lambda w_i + \mu w_j) \geq 0$. ולכן גם $\lambda w_i + \mu w_j \in L$, וכמובן

בשל היות L מרחב וקטורי כך ש־ $w_i \in L$ נובע גם כי $w_j \in L$. אם $w_j \in L$ אז $q(w_j) \geq 0$ בסתירה להנחה כי $q(w_j) < 0$ ולכן הנחת הבסיס היא סתירה.

אז לא קיימים וקטורים w_i, w_j עבורם $q(w_i) \geq 0 > q(w_j)$ ומכאן נובע כי q שומרת סימן.

מש"ל

שאלה 4

סעיף א'

נמצא את כל הערכים הממשיים של λ עבורם התבנית הריבועית של $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 10x_1 x_3 + 6x_2 x_3$$

חיובית לחלוטין.

נחשב את המטריצה המייצגת של q :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

לפי מסקנה 6.4.3 תבנית חיובית לחלוטין אם ורק אם כלל המינורים הראשיים של A חיוביים. נבדוק את חיוביותם:

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 > 0 \rightarrow$$

$$-2 < \lambda < 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -24 & \lambda - 15 & 5 \\ \lambda - 15 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -24 & \lambda - 15 \\ \lambda - 15 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 120 - (\lambda - 15)^2 > 0 \rightarrow 120 - \lambda^2 + 30\lambda - 225 > 0 \rightarrow$$

$$15 - \sqrt{120} < \lambda < 15 + \sqrt{120}$$

לא קיים ערך λ אשר עבורו כלל המינורים הם חיוביים.

סעיף ב'

תהינה התבניות הבאות על \mathbb{R}^3 :

$$q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_3$$

$$q_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$$

נמצא בסיס של \mathbb{R}^3 עבורו

$$q_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \quad (1)$$

נבנה את המטריצה המייצגת של q_1 ונחפוף אותה אלמנטרית תוך כדי ביצוע פעולות השורה על מטריצת היחידה I_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \rightarrow C_2 - C_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_3 \rightarrow C_3 + C_1]{R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \rightarrow C_3 - C_2]{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

אז המטריצה המלכסנת של q_1 היא

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאנו על-ידי חפיפה אלמנטרית בסיס בו מתקבלת צורה (1). בסיס זה הוא

$$B = ((1, 0, 0), (-1, 1, 0), (2, -1, 1))$$

נחשב את המטריצה האלכסונית של q_2 על-ידי מציאת המטריצה המייצגת שלה ולכסון על-ידי M .

$$M^t[q_2]_E M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

אנו יודעים כי M מלכסנת את q_1 למטריצת היחידה ואת q_2 ל- A , אילו נמצא מטריצה P המלכסנת את A בשל החפיפה למטריצת היחידה החפיפה של q_1 לא תיפגע. נחפוף אלמנטרית את A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[C_2 \rightarrow C_2 - C_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[C_3 \rightarrow C_3 - \frac{1}{2}C_1]{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

אז מטריצת המעבר מ- B לבסיס בו q_2 אלכסונית היא

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ומטריצת המעבר השלמה היא MP , נחשבה

$$M' = MP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ובהתאם הבסיס של \mathbb{R}^3 הוא

$$((1, 0, 0), (-2, 1, 0), (\frac{3}{2}, -1, 1))$$

ומתקיים בו

$$q_2 = 2y_1^2 + 0y_2^2 + \frac{5}{2}y_3^2$$

שאלה 5

סעיף א'

נוכיח כי אם q תבנית ריבועית חיובית למחצה אז המטריצה המייצגת אותה היא מטריצה סינגולרית.

הוכחה. תהי q תבנית ריבועית, A_E מטריצת הייצוג שלה בבסיס הסטנדרטי, בסיס מלכסן אורתונורמלי W ומטריצת הייצוג לפיו A_W .

ידוע כי q חיובית למחצה, לכן קיים i כך ש- $q(w_i) = 0$, ובהתאם במטריצה האלכסונית A_W האיבר ה- ii הוא 0.

מסיבה זו A_W כמובן בלתי הפיכה, ולכן נותר רק לראות כי A_E ו- A_W שקולות-שורה.

אנו יודעים כי קיימת מטריצה הפיכה P עבורה מתקיים $A_E = P^t A_W P$, וממשפט 2.3.7 נובע כי P אורתונורמלית ומקיימת $P^t = P^{-1}$. אז

מתקיים $A_E = P^{-1} A_W P$ והמטריצה A_E סינגולרית. מש"ל

סעיף ב'

תהי מטריצה סימטרית A ותהי תבנית ריבועית $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי $q(x) = x^t A x$, ידוע כי q חיובית לחלוטין.

נוכיח כי A מטריצה אורתוגונלית אם ורק אם $A = I_n$.

הוכחה. q חיובית לחלוטין ולכן על-פי טענה 6.3.2 A חופפת אלמנטרית ל- I . (1)

נניח כי A אורתוגונלית ונוכיח כי $A = I$.

ידוע כי A סימטרית ולכן $A = A^t$. עוד אנו יודעים כי A אורתוגונלית ולכן גם $AA^t = I$, אז נובע כי $A^2 = I$. משוויון זה נובע כי

$(A - I)(A + I) = O$, ובהתאם $A = \pm I$ וממסקנה 6.2.1 ו-(1) נובע כי $A = I$ בלבד.

נניח כי $A = I$ ונוכיח כי A אורתוגונלית.

$I = I^t$ על-פי סימטריית I , וידוע גם כי $II = I$, אז $AA^t = I$. מש"ל