פתרון מטלה 04 — מבנים אלגבריים 1 (80445)

31 במאי 2024

שאלה 1

סעיף א'

הכוונה ברורה לי אבל עוד לפני שקראתי את שאר השאלה אני רוצה אינטואיטיבית להשתמש ב־D_n וצביעה מעל קבוצה.

סעיף ב'

נגדיר $X_{n,q} = [q]^{[n]}$. נוכיח שהחבורה D_n משרה פעולה על הקבוצה $X_{n,q}$ על־ידי

$$\forall f \in X_{n,q} \forall \sigma \cdot f(k) = f(\sigma^{-1}(k))$$

הוכחה. אנו כבר יודעים כי החבורה D_n היא פעולה מעל $[n]$ על־ידי $\forall g \in D_n, x \in [n] : g \cdot x = g(x)$.

בתרגול הוכחנו כי בהינתן קבוצה ופעולה עליה, ניתן להרחיב את הפעולה לצביעה של הקבוצה על־ידי

$$\forall g \in D_4, f \in [q]^{[n]} : \forall x \in [n], g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

ומצאנו כי הטענה נכונה. $\square$

סעיף ג'

נחשב את מספר המסלולים של D_n על $X_{n,q}$.

נגדיר $\Xi \subseteq \mathbb{N}$ קבוצת הראשוניים, דהינו מתקיים

$$\Xi = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1, n\} : k \nmid n\}$$

נגדיר $\xi : \mathbb{N} \to \Xi$ על־ידי $\xi(n) = \{k \in \Xi \mid k|n\}$, פונקציה אשר מחזירה את הראשוניים אשר המספר מתחלק בהם.

עתה נגדיר גם $r = (1 \dots n)$ תמורת סיבוב ו־$s(k) = n - k + 1$ פונקציית ההיפוך, לכן $D_n = \langle r, s \rangle$.

תהי צביעה $f \in [q]^{[n]}$ כלשהי, אז נבחין כי אילו היא מורכבת מיותר צבע אחד, דהינו $\neg\exists c : \forall k \in [n] : f(k) = c$, אז מתחייב כי $\exists n : f(n) \neq f(n+1)$ ונוכל להסיק

$$Fix(f) = \{f\} \implies |Fix(f)| = 1$$

יהי $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$1 < m \le n$, ונבחן את r^m, סיבוב ב־m איברים. אילו $m \Big| n$ אז קל לראות כי ישנן q^m צביעות אפשריות, אילו לעומת זאת $m \nmid n$ אז נוכל להוכיח בדומה למקרה $m = 1$ שמספר הצביעות האפשרי הוא צביעה אחידה, דהינו q אפשרויות. נגדיר פונצקיה $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המשקפת את מספר הצביעות המושרה על־ידי r^m כזה, נגדירה להיות

$$\mu(m) = \begin{cases} q^m & m \mid n \\ q & m \nmid n \end{cases}$$

ואף מתקיים $Fix(r^m) = \mu(m)$ ישירות על־פי הגדרה.

נבחן את המקרה השני והוא $sr^m \in D_n$ כשאר $0 \le m < n$.

נשים לב כי $sr^m = (sr^m)^{-1}$ ולכן נובע כי $\forall k \in [n] : f(k) = f(sr^m k)$ ולמעשה נוכל להשתמש בהצמדה זו לקבוע כי ישנן $q\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ צביעות.

נסכם: ב־$\langle r, s \rangle$ ישנם $2n$ איברים בדיוק, כולם מהצורה r^m או sr^m עבור $0 \le m < n$. נבנה פונקציה $\nu : D_n \to \mathbb{N}$ המייצגת את כמות הצביעות על־פי פעולה מהחבורה:

$$Fix(s^l r^m) = \nu(s^l r^m) = \begin{cases} q\lfloor \frac{n}{2} \rfloor & l = 1 \\ \mu(m) & l = 0 \end{cases}$$

ונשתמש בלמה של ברנסייד לקבל כי מספר המסלולים מוגדר על־ידי

$$|X_{n,q}/D_n| = \frac{1}{|D_n|}\sum_{s^l r^m \in D_n, l\in\{0,1\}, 0\le m<n} \nu(s^l r^m) = \frac{1}{|D_n|}\sum_{s^l r^m \in D_n, l\in\{0,1\}, 0\le m<n} \begin{cases} q\lfloor\frac{n}{2}\rfloor & l=1 \\ q^m & l=0, m\mid n \\ q & l=0, m\nmid n \end{cases}$$