

## פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

20 ביולי 2023



## שאלה 1

נחשב את האינטגרלים הבאים

סעיף א'

$$\begin{aligned}\int x^3(1-3x^2)^{10} dx &= \int x^3 \left( \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-3x^2)^k \right) dx \\ &= \int \left( \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-3)^k x^{2k+3} \right) dx \\ &= C + \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \frac{1}{2k+4} (-3)^k x^{2k+4} \\ &= C + x^4 \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \frac{(-3)^k}{2k+4} x^{2k}\end{aligned}$$

סעיף ב'

$$\begin{aligned}\int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sin \arcsin(x) e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \sin(t) e^t dt \Big|_{dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}^{t=\arcsin x} \\ &= -\cos(t) e^t + \int \cos(t) e^t dt && \text{אינטגרציה בחלקים} \\ &= -\cos(t) e^t + \sin(x) e^t - \int \sin(t) e^t dt && \text{אינטגרציה בחלקים} \\ 2 \int \sin(t) e^t dt &= \sin(x) - \cos(t) e^t \\ \int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{1}{2} \left( x - \sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} \right) + C\end{aligned}$$

סעיף ג'

$$\begin{aligned}\int (x-1)^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} e^{2x} (x-1)^2 - \int \frac{1}{2} e^{2x} (2x-2) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (x-1)^2 + \int e^{2x} dx - \int e^{2x} x dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (x-1)^2 + \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} x + \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - 3x + 2) + \frac{1}{4} e^{2x} \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \left( x^2 - 3x + 2\frac{1}{2} \right) + C\end{aligned}$$

סעיף ד'

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right| \\ &= \int \frac{4t-7}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt \\ &= 2 \int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt - 7 \int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt\end{aligned}$$

נחשב

$$\begin{aligned}&\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt \\ &\left| \begin{array}{l} u = t^2+1 \\ du = 2t \end{array} \right| \\ &= \int \frac{du}{u^{3/2}} \\ &= \int u^{-3/2} du \\ &= -2u^{-1/2} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

נחשב גם

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt \\ &\left| \begin{array}{l} t = \tan u \\ dt = \frac{du}{\cos^2 u} \end{array} \right| \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 u \sqrt{(\tan^2 u + 1)^3}} du \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 u \sqrt{(\cos^{-2})^3}} du \\ &= \sin u = \sin \arctan t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

ולכן נובע כי

$$2 \int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt - 7 \int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt = 2 \frac{-2}{\sqrt{t^2+1}} - 7 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{-7t-4}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{-7x-18}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

לכן

$$\int_{-2}^{-1} \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}} dx = \left. \frac{-7x-18}{\sqrt{x^2+4x+5}} \right|_{-2}^{-1} = \frac{-7(-2)-18}{\sqrt{(-2)^2+4(-2)+5}} - \frac{-7(-1)-18}{\sqrt{(-1)^2+4(-1)+5}} = -4 + \frac{11}{\sqrt{2}}$$

סעיף ה'

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}(1+x^3+\sin x)dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}(x^3+\sin x)dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}dx$$

נגדיר

$$f(x) = e^{|x|}(1+\sin x)$$

מחישוב עולה כי

$$f(-x) = e^{|-x|}(-x^3 - \sin x) = -f(x)$$

ולכן

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx = \int_{-\ln 2}^0 f(x)dx + \int_0^{\ln 2} f(x)dx = -\int_0^{\ln 2} f(x)dx + \int_0^{\ln 2} f(x)dx = 0$$

עוד נראה כי

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}dx = \int_{-\ln 2}^0 e^{|x|}dx + \int_0^{\ln 2} e^{|x|}dx = \int_{-\ln 2}^0 e^{-x}dx + \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2 \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2(e^{\ln 2} - 1) = 4$$

## שאלה 2

עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים נקבע אם הוא מתכנס בהחלט, בתנאי, או כלל לא.

### סעיף א'

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$$

נשים לב כי  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  היא פונקציה מונוטונית יורדת וכי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .  
 עוד נשים לב כי  $g(x) = \cos^2 x$  היא פונקציה חסומה המקיימת  $0 \leq g(x) \leq 1$  לכל  $x$ .  
 לכן ממבחן דיריכלה נובע כי האינטגרל הנתון, אשר מהווה אינטגרל מכפלת הפונקציות  $f, g$  מתכנס.  
 נשים לב כי גם  $f(x)g(x) = |f(x)g(x)|$  ולכן האינטגרל גם מתכנס בהחלט.

### סעיף ב'

$$\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)(\ln(x + 1))^3} dx$$

נגדיר

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

נשים לב כי

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} < 0$$

נראה גם כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

ולכן  $f(x)$  מונוטונית יורדת ואפסה.

נגדיר גם

$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln^3(x + 1)}$$

נראה כי עבור  $x \geq 1$ :

$$0 < \frac{\ln x}{\ln^3(x + 1)} \leq \frac{\ln(x + 1)}{\ln^3(x + 1)} = \frac{1}{\ln^2(x + 1)} \leq 1$$

מצאנו כי  $g(x)$  חסומה בתחום  $[1, \infty)$ .

מצאנו כי הפונקציות  $f$  ו- $g$  מקיימות את מבחן דיריכלה ולכן

$$\int_1^\infty f(x)g(x)dx$$

מתכנס. נשים לב כי  $0 \leq f(x)$  לכל  $x > 1$  ולכן מתקיים  $|f(x)g(x)| = f(x)g(x)$  ובהתאם האינטגרל מתכנס בהחלט.

סעיף ג'

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) \sin(2\sqrt{x}) \, dx$$

נגדיר

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{x}, g(x) = \sin(2\sqrt{x})$$