פתרון מטלה 00 — תורת הקבוצות האקסיומטית, 80650

6 בנובמבר 2024

במטלה זו נניח את סט האקסיומות Z — Foundation.

שאלה 1

נוכיח שאם A מחלקה לא ריקה, אז $\bigcap A$ קבוצה.

הוכחה. נבחין תחילה כי $\bigcap A$ מחלקה (שעלולה להיות ריקה), עוד נתון כי A עצמה לא ריקה ולכן תהי $a \in A$ קבוצה כלשהי. עתה נשתמש בסכמת הפרדה ונקבל $\{x \in a \mid x \in \bigcap A\}$ קבוצה, אבל מהגדרת החיתוך אם $x \in a \implies \forall b \in A, b \in x \iff x \in A$ וסיימנו. $\square$

שאלה 2

נוכיח כי לכל a, b קבוצות, גם $a \times b = \{\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} \mid x \in a, y \in b\}$ קבוצה.

הוכחה. מאקסיומת קבוצת חזקה נבחין כי $\mathcal{P}(a)$ קיימת, מסכמת הפרדה עבור $\varphi = \forall w, z \in x, w = z$ נקבל קבוצת יחידונים עבור קבוצות ב־a, דהינו $c_0 = \{\{x\} \mid x \in a\}$. מאקסיומת האיחוד ומאקסיומת הזוגות הלא סדורים קיימת הקבוצה $c_1 = \{\{x, y\} \mid x, y \in a \cup b\}$, וכן קיימת $c_0 \cup c_1$. עתה נגדיר $c_2 = \mathcal{P}(c_0 \cup c_1)$ ואת הטענה $\varphi = \forall u \in x(\exists z_0, z_1 \in u \land z_0 \in z_1 \land z_0 \subseteq z_1 \land \forall z_2 \in u(z_2 = z_0 \lor z_2 = z_1))$. ונקבל מסכמת הפרדה את קבוצת הקבוצות בגודל 2 כך שקבוצה אחת חלקית לשנייה, נשאר להשתמש שוב בסכמת הפרדה עבור $\psi = \forall u \in x, \exists z_0, z_1(z_0 \in a \land z_1 \in b \land z_0, z_1 \in u)$ וקיבלנו את הקבוצה המבוקשת. $\square$

שאלה 3

עתה נוכיח את טענת השאלה הקודמת כאשר לא מניחים את אקסיומת קבוצת החזקה אך מניחים את אסיומת סכמת החלפה.

הוכחה. מאקסיומת הזוג הלא סדור יש לנו הצדקה להגדיר את פונקציית המחלקה

$$F_y(x) = \{x, y\}$$

מאקסיומת החלפה נקבל שעבור $y \in b$ כלשהו, $c_y = \{\{x, y\} \mid x \in a\}$ היא קבוצה, ולכן יש לנו הצדקה להגדיר פונקציית מחלקה נוספת

$$G(y) = \{c_y \mid y\}$$

ונקבל $d = \{c_y \mid y \in b\}$ קבוצה, ונבחין כי גם האיחוד $\bigcup d$ קבוצה, עתה נשתמש בסכמת החלפה עם $H(\{x, y\}) = \{\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle\}$ ובאיחוד ונקבל את הקבוצה הדרושה. □

שאלה 4

נפתור את הסעיפים הבאים תוך שימוש ב־Z.

סעיף א'

נמצא נוסחה Δ_0, $\varphi_1(x)$ כך ש־x סודר אם ורק אם $\varphi_1(x)$.

פתרון נגדיר נוסחה כך ש־x סדר טוב יחד עם $\in$ אם ורק אם $\psi_0(x)$.

$$\psi_0(x) = \forall a \in \mathcal{P}(x)(\exists b \in a(\forall c \in a(b \in c)))$$

נגדיר נוסחה $\psi_1(x)$ אשר מתקיימת אם ורק אם x קבוצה טרנזיטיבית.

$$\psi_1(x) = \forall a \in x(\forall b \in a(b \in x))$$

לבסוף נגדיר $\varphi(x) = \psi_1(x) \wedge \psi_1(x)$.

סעיף ב'

נמצא נוסחה Δ_0, $\varphi_2(x, y)$ כך ש־$x = \bigcup y$ אם ורק אם $\varphi_2(x)$.

פתרון נגדיר את הנוסחה בהתאם להגדרת האיחוד

$$\varphi_2(x, y) = (\forall a \in x(\exists b \in y(a \in b))) \wedge (\forall a \in y(\forall b \in a(b \in x)))$$

נמצא נוסחה Δ_0, $\varphi_3(x)$ כך ש־x הוא סודר עוקב אם ורק אם $\varphi_3(x)$.

פתרון נוכל להשתמש ב־$\varphi_1(x)$ כדי לוודא ש־x אכן סודר, ונכתוב נוסחה נוספת לבדיקה שהוא אכן עוקב לסודר אחר:

$$\psi(x) = \exists a \in x(x = a \cup \{a\})$$

נוסחה זו כמובן מקבל משמעות בעקבות אקסיומת הזוג הלא סדור. לבסוף נגדיר $\varphi_3(x) = \varphi_1(x) \wedge \psi(x)$.

סעיף ג'

נמצא נוסחה Δ_0, $\varphi_4(x)$ כך ש־$x = \omega$ אם ורק אם $\varphi_4(x)$.

פתרון נשתמש בעובדה ש־ω הסודר הגבולי הראשון, ולכן כל $n \in \omega$ הוא סודר עוקב או הקבוצה הריקה:

$$\varphi_4(x) = \forall a \in x(\varphi_3(a) \vee a = \emptyset)$$

שאלה 5

יהיו $B \subseteq A$ קבוצות טרנזיטיביות לא ריקות.

סעיף א'

תהי נוסחה $\varphi(y_0, \dots, y_{n-1})$ מהצורה $\forall x \psi$ כאשר ψ היא Δ_0, ויהיו $p_0, \dots, p_{n-1} \in A$.
נוכיח כי $\langle B, \in\rangle \models \varphi(p_0, \dots, p_{n-1})$ גורר ש־$\langle A, \in\rangle \models \varphi(p_0, \dots, p_{n-1})$.

הוכחה. נניח ש־$\langle B, \in\rangle \models \varphi(p_0, \dots, p_{n-1})$, ולכן מלמה שהוכחה בכיתה $\varphi(p_0, \dots, p_{n-1})$ מתקיים, על־פי אותה הלמה בדיוק זה נכון אם ורק אם $\langle A, \in\rangle \models \varphi(p_0, \dots, p_{n-1})$. □