שאלה 1

סעיף א'

נגדיר סדרה

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & n\%2 = 0 \\ 0 & n\%2 = 1 \end{cases}$$

תחילה נגדיר $n_k = 2k$ סדרת האינדקסים הזוגית, אז כמובן נובע כי תת־הסדרה $a_{n_k} = \frac{n}{2}$.
אנו יכולים להסיק בנקל כי $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$.
נגדיר עתה גם כי $m_k = 2k - 1$ סדרת האינדקסים האי־זוגית, ומהגדרת (a_n) נובע כי $a_{m_k} = 0$, ובהתאם גבול תת־הסדרה הוא 0 גם כן.
מצאנו שתי תת־סדרות אשר מכסות את הסדרה (a_n) ולכן שני הגבולות היחידים של הסדרה הם 0 ו־∞.

סעיף ב'

נגדיר את הסדרה (a_n) בצורה הבאה:

$$a_n = (1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 \dots)$$

סדרה חזרתית של הסדרה $\frac{1}{n}$ עבור ערכים עולים.
יהי $m \in \mathbb{N}$ ונגדיר $\lambda = \frac{1}{m}$. אנו יודעים מהגדרת הסדרה (a_n) כי קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו מתקיים $a_n = \lambda$.
למעשה, מהגדרת החזרתיות של (a_n) נובע כי ישנם אינסוף אינדקסים עבורם מתקיים $a_n = \lambda$, ולכן נוכל להגדיר תת־סדרה n_k כך שמתקיים $a_{n_k} = \lambda$. בהתאם מתקיים $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \lambda = \lambda$. מצאנו אם כך כי כל λ כזה הוא גבול חלקי של הסדרה (a_n).
עתה נשים לב כי גם 0 גבול חלקי של הסדרה, זאת נוכל לקבל על־ידי הגדרת סדרת אינדקסים עבורה תת־הסדרה n_k מקיימת $a_{n_k} = \frac{1}{n}$.
אנו יכולים להסיק כי קיימת סדרה כזו מהגדרת הסדרה, הסדרה מורכבת מתבנית הולכת ונמשכת, ובכל פעם "נוסף" איבר חדש בדמות $\frac{1}{n}$. כמובן גם

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

וקיבלנו כי קבוצת הגבולות החלקיים של (a_n) היא $\{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
אנו יודעים כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 < a_n \le 1$ על־פי הגדרת הסדרה, לכן כמובן $\sup a_n = 1$ וגם $\inf a_n = 0$.
מחסימות זו נסיק כי לכל $L \in \mathbb{R}$ אשר לא מקיים $0 \le L \le 1$ בהכרח L איננו גבול חלקי של הסדרה, שאם לא כן נקבל כי קיימים בסדרה ערכים שחוצים את החסמים העליונים או התחתונים שלה.
לדוגמה, אם נבחר $L = 2$, אז מהגדרת הגבול על־פי היינה ו־$\epsilon = \frac{1}{2}$ נקבל כי קיימים אינסוף ערכים של (a_n) אשר מקיימים

$$|a_n - 2| < \frac{1}{2} \to -\frac{1}{2} < a_n - 2 < \frac{1}{2} \to 1\frac{1}{2} < a_n < 2\frac{1}{2}$$

וזאת בסתירה לטענה כי $a_n \le 1$ לכל n טבעי.
לסיכום מצאנו כי קבוצת הגבולות החלקיים של (a_n) היא $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.