פתרון מטלה 08 — פונקציות מרוכבות, 80519

29 בדצמבר 2024

שאלה 1

נמצא את פיתוחי הטיילור ואת רדיוסי ההתכנסות לפונקציות הנתונות.

סעיף א׳

$$f(z)=\frac{1}{1+\sqrt{1-z}}$$

סביב $z=0$.

פתרון מתקיים

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-z}}=\frac{1-\sqrt{1-z}}{1-(1-z)}=\frac{1-\sqrt{1-z}}{z}$$

ועוד אנו יודעים כי

$$1-\sqrt{1-z}=1-((-z)+1)^{\frac{1}{2}}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-z)^n=1+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^{n+1}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^{n+1}z^n$$

ולכן

$$f(z)=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^{n+1}z^n}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-1)^n z^n$$

נבחין כי הפונקציה רציפה ב־$B(0,1)$, ולכן ממסקנה מהתרגול רדיוס ההתכנסות הוא $r=1$.

סעיף ב׳

$$f(z)=\mathrm{Log}(z)$$

סביב $z=-1+i$.

פתרון מתקיים

$$\mathrm{Log}(z)=\mathrm{Log}(-1+i+(z+1-i))-\mathrm{Log}(-1+i)+\mathrm{Log}(-1+i)=\mathrm{Log}(1+\frac{z+1-i}{-1+i})+\mathrm{Log}(-1+i)$$

ומפיתוח טיילור של לוגריתם נסיק

$$f(z)=\mathrm{Log}(-1+i)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{z-(-1+i)}{-1+i})^n=\mathrm{Log}(-1+i)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(-1+i)^n}(z-(-1+i))^n$$

כמובן הלוגריתם המרוכב הולומורפי בכל $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ולכן $r=1$.

סעיף ג׳

$$f(z)=\frac{z^2+z-1}{z^3-z}$$

סביב $z=i$.

פתרון נבחין כי

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{z^2+z-1}{z(z-1)(z+1)}\\&=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+1}\\&=\frac{A(z^2-1)+B(z+z^2)+C(z^2-z)}{z^3-z}\\&=\frac{z^2(A+B+C)+z(B-C)-A}{z^3-z}\end{aligned}$$

ולכן נובע $A=1, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}$ וכן

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{-i}}+\frac{1}{2(-1+i)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}-\frac{1}{2(1+i)}\frac{1}{1-\frac{z-i}{-1-i}}$$

ולכן מפיתוח טיילור של $\frac{1}{1-z}$ נובע

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{-i}\right)^n+\frac{1}{2(-1+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n-\frac{1}{2(1+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{-1-i}\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i}\frac{1}{(-i)^n}(z-i)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2(-1+i)}\frac{1}{(1-i)^n}(z-i)^n+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2(1+i)}\frac{1}{(-i-i)^n}(z-i)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\frac{1}{(-i)^n}+\frac{1}{2(-1+i)}\frac{1}{(1-i)^n}-\frac{1}{2(1+i)}\frac{1}{(-i-i)^n}\right)(z-i)^n\end{aligned}$$

הפונקציה כמובן אנליטית ב־$\mathbb{C}\setminus\{0,1,-1\}$ ולכן $r=1$.

שאלה 2

הוכחת משפט מוררה. נוכיח שאם $f : G \to \mathbb{C}$ רציפה כל שלכל משולש מלא $T \subseteq G$ מתקיים

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$$

אז f אנליטית.

הוכחה. נניח ללא הגבלת הכלליות ש־G קמורה, ותהי $z_0 \in G$ כך ש־$[z_0, z] \subseteq G$ לכל $z \in G$. נגדיר $F : G \to \mathbb{C}$ על־ידי

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)\, dw$$

פונקציה זו כמובן מוגדרת בכל נקודה בשל קמירות G. תהי נקודה $z' \in G$ כך ש־$|z - z'| < \epsilon$, ולכן מתקיים מהגדרת הפונקציה שמתקיים

$$F(z) - F(z') + \int_{[z,z']} f(w)\, dw = 0 \iff F(z) - F(z') = \int_{[z',z]} f(w)\, dw$$

ולכן מאי־שוויון ML

$$0 \le \left| \frac{F(z) - F(z') - f(z)}{z - z'} \right| \le \max_{t \in [z,z']} |f(t) - f(z)| \xrightarrow[z' \to z]{} 0$$

ולכן $F'(z) = f(z)$, ובפרט F אנליטית ולכן ממשפט טיילור גזירה אינסוף פעמים, כלומר קיימת נגזרת ל־f עצמה. $\square$

שאלה 3

הוכחת משפט ויירשטראס. נוכיח שאם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C^1(G)$ כך שהסדרה מתכנסת במידה שווה מקומית ל־f, אז f אנליטית. נראה שלכל $k \in \mathbb{N}$ סדרת הנגזרות $\left(f_n^{(k)}\right)$ מתכנסת במידה שווה מקומית ל־$f^{(k)}$.

הוכחה. יהי משולש $T \subseteq G$,

$$\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz - \int_{\partial T} f_n(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial T} f(z) - f_n(z)\,dz\right| \leq \int_{\partial T} |f(z) - f_n(z)|\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\partial T} |f(z) - f(z)|\,dz = 0$$

אבל גם לכל $n \in \mathbb{N}$ אנו יודעים שמתקיים

$$\int_{\partial T} f_n(z)\,dz = 0$$

ולכן נוכל להסיק

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$$

לכן ממשפט מוררה f אנליטית.

ממשפט טיילור ושוויון האינטגרלים נוכל להסיק שגם הנגזרות מתכנסות לכל סדר גזירה. □

שאלה 4

תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה שלמה, נוכיח כי f קבועה עבור התנאים הבאים.

סעיף א׳

$\operatorname{Re}(f(z))\le 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

הוכחה. נגדיר $g(z)=e^z$ ולכן

$$|(g\circ f)(z)|=e^{\operatorname{Re}(f(z))}|e^{i\operatorname{Im}(f(z))}|=e^{\operatorname{Re}f(z)}\le e^0=1$$

ולכן ממשפט ליוביל $g\circ f$ היא פונקציה קבועה, ובהתאם גם f עצמה קבועה (אחרת נקבל ש־g קבועה וזו סתירה). $\square$

סעיף ב׳

$|f(z)|\ne 1$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

הוכחה. מרציפות כפונקציה דו־משתנית אנו יכולים להסיק ש־$1<|f|$ או $|f|<1$.
אם $|f(z)|<1$ אז ממשפט ליוביל סיימנו, לכן נניח $|f(z)|>1$ תמיד, ונגדיר $g(z)=\frac{1}{z}$, לכן $|g\circ f|<1$ תמיד ונוכל להסיק ש־f קבועה בהכרח. $\square$

סעיף ג׳

$f(z)\notin(-\infty,0]$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

הוכחה. נגדיר $g(z)=z^i=e^{i\operatorname{Log}z}$, ולכן מהגדרת f נוכל להסיק שמתקיים

$$|g(f(z))|=|e^{i\log|z|-\operatorname{Arg}(z)}|=|e^{i\log|z|}|\cdot|e^{-\operatorname{Arg}(z)}|\le 1\cdot e^{\pi}$$

ולכן נובע ש־f קבועה. $\square$

סעיף ד׳

$f(z)\notin[0,1]$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

הוכחה. במטלה 4 תרגיל 4 מצאנו שהעתקת מביוס נקבעת ביחידות על־ידי הנקודות $z_1\to 0, z_2\to 1, z_3\to\infty$, נבחר את הנקודות $i,0,\frac{1}{2}$ בהתאמה ונקבל את ההעתקה

$$g(z)=\frac{0-\frac{1}{2}}{0-i}\cdot\frac{z-i}{z-\frac{1}{2}}=\frac{z-i}{2iz-i}$$

מהגדרתה נוכל להסיק ש־$g\circ f$ חסומה על־ידי $|0+i|=1$ ולכן f פונקציה קבועה. $\square$

שאלה 5

תהי $f : \overline{B}(z_0, r) \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה בכל תחומה ואנליטית ב־$B(z_0, r)$.

נגדיר את R_k להיות שארית טור טיילור מסדר k סביב $z = z_0$, דהינו

$$R_k(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

סעיף א׳

נוכיח כי לכל $z \in B(z_0, r)$ מתקיים

$$R_k(z) = \frac{(z - z_0)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)^{k+1}} \, dw$$

הוכחה. מההגדרה של R_k,

$$R_k(z) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k+1+n)}(z_0)}{(k + 1 + n)!}(z - z_0)^{k+1+n} = (z - z_0)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k+1+n)}(z_0)}{(k + 1 + n)!}(z - z_0)^n$$

ממשפט טיילור נובע

$$\begin{aligned}
&(z - z_0)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k+1+n)}(z_0)}{(k + 1 + n)!}(z - z_0)^n \\
=&(z - z_0)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + k + 1)!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+n+2}} \frac{1}{(k + 1 + n)!}(z - z_0)^n \, dw \\
=&\frac{(z - z_0)^{k+1}}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+n+2}}(z - z_0)^n \, dw \\
=&\frac{(z - z_0)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+2}} \cdot \frac{1}{2 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^n} \, dw \\
\overset{(1)}{=}&\frac{(z - z_0)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \cdot \frac{1}{w - z} \, dw
\end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מהזהות $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$ הידועה. $\square$

סעיף ב׳

נסיק שמתקיים

$$|R_k(z)| \leq \left(\frac{r}{r - |z - z_0|} \cdot \max_{|w-z_0|=r} |f(w)| \right) \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^{k+1}$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}
|R_k(z)| &= \left| \frac{(z-z_0)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}}\, dw \right| \\
&= \frac{|z-z_0|^{k+1}}{2\pi} \left| \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}}\, dw \right| \\
&\overset{\text{ML}}{\leq} \frac{|z-z_0|^{k+1}}{2\pi} L(\partial B(z_0,r)) \cdot \max_{w\in\partial B(z_0,r)} \left| \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^{k+1}} \right| \\
&= |z-z_0|^{k+1} r \cdot \max_{w\in\partial B(z_0,r)} \frac{|f(w)|}{|w-z|\cdot|w-z_0|^{k+1}} \\
&\leq \left(r \cdot \max_{w\in\partial B(z_0,r)} \frac{|f(w)|}{|w-z_0+z_0-z|} \right) \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^{k+1} \\
&\leq \left(\frac{r}{r-|z-z_0|} \cdot \max_{|w-z_0|=r} |f(w)| \right) \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^{k+1}
\end{aligned}$$

ומצאנו כי אי־השוויון אכן מתקיים. $\square$