פתרון מטלה 03 — תורת הקבוצות (80200)

1 ביוני 2024

שאלה 1

סעיף א'

תהי $A = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ אינסופית}\}$. נוכיח כי היא איננה בת־מניה.

הוכחה. נניח בשלילה ש־A בת־מניה ולכן קיימת פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ חד־חד ערכית ועל.

נוכיח באופן דומה להוכחה של קנטור, נגדיר קבוצה B. לכל $n \in \mathbb{N}$, אם $n \notin f(n)$ אז נגדיר $n \in B$.

ידוע כי f על ולכן קיים $a \in \mathbb{N}$ כך ש־$f(a) = B$, ולכן על־פי הגדרתנו $a \notin B$. אבל לפי הגדרתנו $n \in B \implies f(n) = B \ni a$ וזו סתירה.

לכן A לא בת־מניה. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח שקבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהן מונוטוניות יורדות היא בת־מניה.

הוכחה. תהי פונקציה f כזו, על־פי הנתון יהי $k=f(0)$, אז $\forall n\in\mathbb{N}:0\leq f(n)\leq k$.
הפונקציה f אם כן "יכולה" לרדת k פעמים, ולאחר מכן היא תהיה הפונקציה הקבועה $f(n)=0$. נוכל לבנות סדרה סופית באורך לכל היותר k שמתארת את המספרים בתחום עבורם הפונקציה האכן יורדת.
כדי להגדיר את הסדרה בצורה פורמלית תהי הסדרה (a_n) כך ש־$a_1=f(0)$, ומתקיים $f(a_n)=f(a_{n+1})+1$, נשים לב כי הגדרה זו מכסה גם את המקרים בהם הירידה היא ביותר מיחידה.
לכל פונקציה כזו מתאימה סדרה כמתואר יחידה בלבד, ואם שתי פונקציות מתוארות על־ידי אותה הסדרה אז על־פי הגדרתה הפונקציות עצמן זהות.
תהי A קבוצת הפונקציות המדוברות ו־B סדרת הסדרות הסופיות מעל הטבעיים, אז $g:A\to B$ היא חד־חד ערכית ולכן גם $|A|\leq|B|\leq|\mathbb{N}|$ כפי שהוכח בהרצאה.
לכיוון ההפוך $h:B\to A$ נגדיר על־ידי $h(n)(0)=n,h(n)(x>0)=0$, זוהי כמובן פונקציה חד־חד ערכית והפונקציות בטווח הן אכן מונוטוניות יורדות, ולכן $|\mathbb{N}|\leq|A|$.
מצאנו כי A בת־מניה. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי עוצמת קבוצת הפונקציות מהשלמים לשלמים היורדות ממש היא 0.

הוכחה. נניח כי קיימת פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מונוטונית יורדת ממש, ונניח $f(0)=k\in\mathbb{N}$.
נראה כי $f(1)\leq f(0)-1=k-1$ וכי אם נניח ש־$f(n)\leq k-n$ אז $\forall n\in\mathbb{N}:f(n+1)\leq f(n)-1=k-n-1$ וזוהי הוכחה באינדוקציה, לכן

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}f(n)\leq k-n$$

ובפרט עבור $n=k$ מתקיים $0\leq f(n)\leq n-n=0$ ולכן $f(n)=0$.
ידוע כי $0\leq f(n+1)<f(n)=0$ ולכן $0<0$ וזוהי כמובן סתירה, לכן לא קיימת פונקציה f שעומדת בהגדרה.
בהתאם קבוצת הפונקציות האלה היא ריקה ועוצמתה 0. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שקבוצת הפונקציות המונוטויות העולות ממש C מהטבעיים לעצמם היא איננה בת־מניה.

הוכחה. נגדיר פונקציה מהקבוצה משאלה 1 A ל־C, $f:A\to C$.
תהי קבוצת טבעיים אינסופית כלשהי D, אז נוכל נבחר את סדרת המספרים אשר מתקבלת מסידור הקבוצה על־פי גודל המספרים המרכיבים אותה, נקרא לסדרה זו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. סדרה זו כמובן מוגדרת ישירות מההגדרה של הקבוצה, ולכל n מתקיים $a_{n+1}>a_n$ מיחידות ההכלה של הקבוצה המקורית והסידור לפי סדר עולה.
עתה נגדיר $f(D)=\{\langle n,a_n\rangle\mid n\in\mathbb{N}\}$, מיחידות האינדקס בסדרה נובע כי הפונקציה אכן מוגדרת ונובע $\forall n>m\in\mathbb{N}:f(n)>f(m)$ כפי שרצינו. נבחין כי הפונקציה אכן חד־חד ערכית, אם $\forall D,E\in A:f(D)=f(E)\overset{(1)}{\implies}f(D)(\mathbb{N})=f(E)(\mathbb{N})\implies D=E$.
(1) נובע ישירות מהגדרת הסדרה לשלוח לאיברי הקבוצה המקורית.

קיבלנו כי f חד־חד ערכית ולכן בהתאם $|C| \leq |A| < |\mathbb{N}|$ ולכן בהתאם C לא בת־מניה. $\square$

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח ישירות מטיעון האלכסון כי $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}\}$ איננה בת־מניה.

הוכחה. נניח בשלילה כי $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ בת־מניה ובהתאם קיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

נגדיר פונקציה $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ על־ידי $\forall n \in \mathbb{N} : f(n)(0) \neq 2 \iff g(n) = 2$.

ידוע כי $g \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ולכן קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$f(k) = g$ ולכן $f(k)(0) = g(0) = 2$ אם ורק אם $g(0) \neq 2$ וזוהי סתירה, ולכן $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ לא בת־מניה. $\square$

סעיף ב'

נוכיח ישירות על־ידי טיעון האלכסון כי $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חד־חד ערכית$\}$ איננה בת־מניה.

הוכחה. נניח בשלילה כי A בת־מניה ולכן קיימת פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$. חד־חד ערכית ועל.

נגדיר פונקציה חד־חד ערכית $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \in A$ כך ש־$\forall n \in \mathbb{N} f(n)(n) = n \iff g(2n) = 2n + 1 \land g(2n + 1) = 2n$.

כדי לשמור על החד־חד ערכיות נגדיר שאם $f(n)(2n) \neq n$ אז $g(2n) = 2n, g(2n + 1) = 2n + 1$.

הגדרה זו אכן שומרת על חד־חד ערכיות, שכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $g(2n) = 2n, g(2n+1) = 2n+1$ או $g(2n) = 2n+1, g(2n+1) = 2n$

ובכל מקרה אין עוד ערך $m \neq n$ כך ש־$f(m) = 2n + 1$ או $f(m) = 2n$.

עתה נראה כי $\exists k \in \mathbb{N} : f(k) = g \impliedby g \in A$, ו־$f(k)(2k) = k$ אם ורק אם $g(2k) = 2k + 1$ וזוהי כמובן סתירה, ולכן נסיק ש־A לא בת־מניה. $\square$

שאלה 4

סעיף א'

נוכיח כי

$$\operatorname{rng}\varphi^+ \cup \operatorname{rng}\varphi^- = (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim_{\mathbb{Z}}, \qquad \operatorname{rng}\varphi^+ \cap \operatorname{rng}\varphi^- = \{[\langle 0,0\rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}\}$$

הוכחה. יהי $\langle n,m\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. אם $n \ge m$ אז נוכל להגדיר $n = n' + m$ ומתקיים $\langle n',0\rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle n,m\rangle$, ובהתאם $[\langle n,m\rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \in \operatorname{rng}\varphi^+$.
אם $m \ge n$ אז בהתאם קיים $m' \in \mathbb{N}$ כך ש־$m = n + m'$ ולכן $[\langle n,m\rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \in \operatorname{rng}\varphi^-$.
מצאנו כי לכל $\langle n,m\rangle \in \mathbb{N}^2$ קיימת מחלקת שקילות כך ש־$[\langle n,m\rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \in \operatorname{rng}\varphi^+ \cup \operatorname{rng}\varphi^-$. בהתאם נובע

$$\operatorname{rng}\varphi^+ \cup \operatorname{rng}\varphi^- = (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim_{\mathbb{Z}},$$

ראינו כי עבור $\langle n,m\rangle$ אז $[\langle n,m\rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \in \operatorname{rng}\varphi^+ \iff n \ge m$ וגם כי $[\langle n,m\rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \in \operatorname{rng}\varphi^- \iff n \le m$. לכן

$$n = m \iff n \le m \land n \ge m \iff [\langle n,m\rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \in \operatorname{rng}\varphi^+ \land [\langle n,m\rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \in \operatorname{rng}\varphi^-$$

ואנו יודעים כי $\langle 0,0\rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle n,n\rangle$ ולכן $\operatorname{rng}\varphi^+ \cap \operatorname{rng}\varphi^- = \{[\langle 0,0\rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}\}$ $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי הפעולה

$$\langle a,b\rangle * \langle c,d\rangle := \langle a\cdot c, b\cdot d\rangle$$

לא משרה פעולה מוגדרת היטב על $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim_{\mathbb{Z}}$.

הוכחה. נראה כי $\langle 0,1\rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle 1,2\rangle$. נראה כי

$$\langle 1,2\rangle * \langle 1,3\rangle = \langle 1,6\rangle, \qquad \langle 0,1\rangle * \langle 1,3\rangle = \langle 0,3\rangle$$

לעומת זאת $\langle 1,5\rangle \not\sim_{\mathbb{Z}} \langle 1,6\rangle$ בסתירה להגדרת הסגירות של פעולה על מחלקות שקילות, ולכן הפונקציה $*$ לא משרה פעולה על $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim_{\mathbb{Z}}$. $\square$

סעיף ג'

נגדיר את הפונקציה $\cdot$ על־ידי

$$\langle a,b\rangle \cdot \langle c,d\rangle := \langle ac+bd, ad+bc\rangle$$

נוכיח כי פונקציה זו משרה פעולה על $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim_{\mathbb{Z}}$.

הוכחה. נראה שבחירת נציגים ממחלקת השקילות אינם משפיעים על תוצאת הפונקציה.
יהיו $\langle c',d'\rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle c,d\rangle, \langle a',b'\rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle a,b\rangle$ ולכן $c+d' = d+c', a+b' = b+a'$, מכפל שוויונות אלה נקבל

$$(a+b')(c+d') = (b+a')(d+c') \iff ac+ad'+b'c+b'd' = bd+bc'+a'd+a'c' \tag{1}$$

אז:

$$\langle a,b\rangle \cdot \langle c,d\rangle = \langle ac+bd, ad+bc\rangle, \qquad \langle a',b'\rangle \cdot \langle c',d'\rangle = \langle a'c'+b'd', a'd'+b'c'\rangle,$$

$$\langle a,b\rangle \cdot \langle c,d\rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle a',b'\rangle \cdot \langle c',d'\rangle \qquad \iff \langle ac+bd, ad+bc\rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle a'c'+b'd', a'd'+b'c'\rangle$$

$$\iff ac+bd+a'd'+b'c' = ad+bc+a'c'+b'd'$$

$$\begin{aligned}
&\iff ac+bd+ad+bc+2a'd'+2b'c' = 2ad+2bc+a'c'+b'd'+a'd'+b'c' \\
&\overset{(1)}{\iff} 2a'd'+2b'c' = 2ad+2bc \\
&\iff a'd'+b'c' = ad+bc \\
&\overset{(1)}{\iff} 0=0
\end{aligned}$$

ומצאנו כי הפעולה אכן סגורה לבחירת איברים ממחלקות השקילות. $\square$

שאלה 5

סעיף א'

על $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ יחס $\sim_{\mathbb{Q}}$ על־ידי

$$\langle p, q \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle r, s \rangle \iff p \cdot s = r \cdot q$$

נוכיח כי זהו יחס שקילות.

הוכחה. נבדוק את התנאים המגדירים יחס שקילות:

1. רפלקסיביות: $p \cdot q = p \cdot q \iff \langle p, q \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle p, q \rangle$ ואכן התכונה מתקיימת.
2. סימטריה: $\langle p, q \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle r, s \rangle \iff ps = rq \iff rq = ps \iff \langle r, s \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle p, q \rangle$
3. טרנזיטיביות: $\langle p, q \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle r, s \rangle, \langle r, s \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle t, u \rangle \iff ps = rq, ru = ts \iff psu = ruq = tsq \iff pu = tq \iff \langle p, q \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle t, u \rangle$

ומצאנו כי זהו אכן יחס שקילות. □

סעיף ב'

נגדיר $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}))/\sim_{\mathbb{Q}}$.

עוד נגדיר

$$\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle := \langle ad + bc, bd \rangle, \qquad \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle := \langle ac, bd \rangle$$

ונוכיח כי פעולות אלה משרות פעולות מוגדרות היטב ב־$\mathbb{Q}$.

הוכחה. נבדוק את סגירות פעולת החיבור שהגדרנו זה עתה:

$$\begin{aligned}
&\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle ad + bc, bd \rangle, \langle a', b' \rangle + \langle c', d' \rangle = \langle a'd' + b'c', b'd' \rangle, \\
&ad = bc, a'd' = b'c' \\
\iff &\langle a, b \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle a', b' \rangle, \langle c, d \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle c', d' \rangle \\
\iff &\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle a', b' \rangle + \langle c', d' \rangle \\
\iff &\langle ad + bc, bd \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle a'd' + b'c', b'd' \rangle \\
\iff &(ad + bc)(b'd') = (a'd' + b'c')(bd) \\
\iff &adb'd' + bcb'd' = a'd'bd + b'c'bd
\end{aligned}$$

וקיבלנו כי הטענה אכן מתקיימת והפעולה אכן ממוגדרת היטב ב־$\mathbb{Q}$. נבחין כי הפעולה $\cdot$ כמעט זהה והתהליך האלגברי לבדיקתה דומה. □

סעיף ג'

נגדיר את הפונקציה $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ על־ידי

$$\varphi([\langle n, m \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}) = [[\langle n, m \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}, 1]_{\sim_{\mathbb{Q}}}$$

נוכיח כי היא חד־חד ערכית

הוכחה. נשתמש בסימון למספרים אלה על־פי הגדרות המחלקות ונקבל

$$\varphi(n-m)=\frac{n-m}{1}$$

נשים לב כי זהו סימון בלבד ואלו הן מחלקות שקילות יחד עם הפעולות שהגדרנו. נראה כי

$$\forall n,m,n',m' : \varphi(n-m)=\varphi(n'-m') \iff \frac{n-m}{1}=\frac{n'-m'}{1} \iff 1(n-m)=1(n'-m') \iff n-m=n'-m'$$

וקיבלנו כי היא אכן חד־חד ערכית. $\square$