פתרון ממ"ן 14 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

3 בפברואר 2023

שאלה 1

יהיו f ו־g פונקציות מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$.

סעיף א'

נוכיח כי אם הפונקציה $f \circ g$ היא על $\mathbb{R}$ אז f היא על $\mathbb{R}$.

ההוכחה מבוססת על הוכחת משפט 3.22 בספר תורת הקבוצות מעת שמואל ברגר.

נוכיח כי לכל $c \in (f \circ g)(\mathbb{R})$ קיים $b \in \mathbb{R}$ כך ש־$f(b) = c$. יהי $c \in \mathbb{R}$, הפונקציה $f \circ g$ היא על, לכן קיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש־$(f \circ g)(a) = c$, כלומר $f(g(a)) = c$. $g(a) \in \mathbb{R}$. נגדיר $b = g(a)$. מצאנו b עבורו $c = f(b)$.

סעיף ב'

נראה כי אם $f \circ g$ היא על, הפונקציה g איננה בהכרח על.

נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x - 1 & 0 \le x \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x + 1 & 0 \le x \end{cases}$$

תמונת הפונקציה $g(\mathbb{R})$ איננה כוללת את הקטע $(0,1)$, לעומת זאת הפונקציה $f \circ g$ היא על, בסתירה לטענה.

סעיף ג'

נוכיח שאם הפונקציה $f \circ g$ היא על ו־f היא חד־חד ערכית אז g היא על $\mathbb{R}$.

נשים לב כי מתקיים $f(g(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$ על־פי הנתון כי $f \circ g$ על. ידוע כי f היא חד־חד ערכית, ועל־פי סעיף א' גם על, ולכן הפיכה. נגדיר f^{-1} הפונקציה ההפוכה ל־f, לכן $f^{-1}(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = f^{-1}(f(g(\mathbb{R})))$. ידוע כי f^{-1} היא על ולכן מתקיים $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ולכן גם $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, אז הפונקציה g היא על.

סכיף ד'

הטענה כי אם $f \circ g$ מונוטונית עולה אז g מונוטונית איננה נכונה.

נראה דוגמה נגדית, נגדיר

$$f(x) = x, g(x) = x^2$$

הפונקציה $(f \circ g)(x) = x^3$, פונקציה מונוטונית לכל $\mathbb{R}$ ועולה, אבל g היא פרבולה ובהכרח איננה מונוטונית.

סעיף ה'

נוכיח כי אם $f \circ g$ היא מונוטונית עולה ו־f היא מונוטונית יורדת, אז g היא מונוטונית יורדת.

נראה כי לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ מתקיים:

$$f(g(x_1)) < f(g(x_2))$$

אבל ידוע כי f מונוטונית יורדת, לכן גם מתקיים

$$g(x_1) > g(x_2)$$

דהינו הפונקציה g מונוטונית יורדת.

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח כי הגבול הבא מתקיים בלשון ϵ, δ

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{2x^2-7}=5$$

נוכיח כי לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-4|<\delta$ מתקיים $|\sqrt{2x^2-7}-5|<\epsilon$.

x בסביבה של 4 ולכן עבור ערך δ מתאים מתקיים $|x-4|<1$. לפי אי־שוויון זה גם $-1<x-4<1$ ולכן $3<x<5$. אנו רואים כי במקרה זה $x<5$ ולכן $|x+4|<|4+5|=9$. נראה כי מתקיים:

$$|x-4|<\delta$$

$$|x-4||x+4|<9\delta$$

$$|(x-4)(x+4)|<9\delta$$

$$|x^2-16|<9\delta$$

$$|2x^2-7-25|<18\delta$$

$$|\sqrt{2x^2-7}-5||\sqrt{2x^2-7}+5|<18\delta$$

נשים לב כי הערך $\sqrt{2x^2-7}+5$ חיובי וגדול מ־1 בכל תחום הגדרתו, לכן

$$|\sqrt{2x^2-7}-5|<|\sqrt{2x^2-7}-5||\sqrt{2x^2-7}+5|<18\delta$$

נגדיר

$$\delta=\max\{1,\frac{\epsilon}{18}\}$$

בשל הגבלת הסביבה, מתקיים

$$|\sqrt{2x^2-7}-5|<\epsilon$$

ולכן מתקיים הגבול $\lim_{x\to 4}\sqrt{2x^2-7}=5$.

סעיף ב'

נוכיח כי הגבול מתקיים בלשון ϵ, M:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\lfloor x\rfloor}$$

הביטוי לא מוגדר כאשר $0\le x<1$, לכן נגדיר $M\ge 1$. נשים לב כי אי־השוויון

$$\left|\frac{x-1}{\lfloor x\rfloor}-1\right|<\epsilon$$

מתקיים רק כאשר

$$\left|\frac{x-\lfloor x\rfloor-1}{\lfloor x\rfloor}\right|<\epsilon$$

על־פי ההגדרה $M \geq 1$ תמיד מתקיים $\lfloor x \rfloor > 0$ לכן
$$\frac{|x - \lfloor x \rfloor - 1|}{\lfloor x \rfloor} < \epsilon$$
על־פי חוקי החלק השלם $x < \lfloor x \rfloor \leq x - 1$ לכן $0 < \lfloor x \rfloor - x < x - 1 - x$ אז $-1 < x - \lfloor x \rfloor - 1 < 0$. מכנה אי־השוויון תמיד יהיה ערך בין 0 ל־1, אז מתקיים
$$\frac{|x - \lfloor x \rfloor - 1|}{\lfloor x \rfloor} < \frac{1}{\lfloor x \rfloor} < \epsilon$$
אילו נגדיר
$$M = 1 + \frac{1}{\epsilon}$$
יתקיים
$$M = 1 + \frac{1}{\epsilon} < x$$
ולכן גם
$$\frac{1}{x-1} < \epsilon$$
ועל־פי אי־שוויון החלק השלם גם
$$\frac{1}{\lfloor x \rfloor} < \epsilon$$
ובמקרה זה ראינו כי גם מתקיים
$$\left| \frac{x-1}{\lfloor x \rfloor} - 1 \right| < \epsilon$$
ולכן הגבול מתקיים.

שאלה 3

סעיף א'

(i) ננסח את הטענה „לא קיים ל־f גבול סופי כש־$x \to \infty$" בלשון ϵ, M, על־ידי ניסוח שלילה להגדרה 4.54: נאמר כי לא קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אם לא קיים $L \in \mathbb{R}$ עבורו $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, דהינו אם לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $x > M$ עבורו $|f(x) - L| \geq \epsilon$.

(ii) ננסח את הטענה על־ידי שלילת הגדרת היינה לסדרות כפי שמופיעה בהגדרה 4.54:

לא קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אם ורק אם לכל $L \in \mathbb{R}$ קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ ולא מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} L$

סעיף ב'

נוכיח כי $L = \frac{1}{2}$ איננו הגבול של $f(x) = \langle x \rangle$ כאשר $x \to \infty$ בלשון ϵ, M.

קודם כל נראה כי לכל $M \in \mathbb{R}$ שנבחר, לכל $x > M$ כך ש־$\langle x \rangle = 0$ מתקיים

$$\left|\langle x \rangle - \frac{1}{2}\right| = \left|0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

על־פי הגדרת הגבול בלשון ϵ, M לכל $\epsilon > 0$ קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > M$ מתקיים

$$\left|\langle x \rangle - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

אך ראינו כי מתקיים

$$\left|\langle x \rangle - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < \epsilon$$

לכן קיימים ערכי $\epsilon > 0$ כך שלא קיים ערך M כזה, ולכן גבול זה איננו מתקיים.

סעיף ג'

(i) נוכיח כי לא קיים גבול לפונקציה $f(x) = \langle x \rangle$ כאשר $x \to \infty$ על־פי הגדרת סעיף א' (i)

על־פי ההגדרה, נוכיח כי לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\epsilon > 0$ עבורו לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $x > M$ עבורו

$$|f(x) - L| \geq \epsilon$$

על־פי הגדרת החלק השברי תמונת $f(x)$ היא $[0, 1)$, לכן לכל L כך ש־$L > 1$ נגדיר $\epsilon = |L - 1|$. עבור ϵ זה לכל M קיים $x > M$ כך ש־$x = \lfloor x \rfloor + 1$ ומתקיים

$$|f(x) - L| = |0 - L| > |L - 1| = \epsilon$$

באופן דומה כאשר $L < 0$ נגדיר $\epsilon = |1 - L|$ ויתקיים אי־השוויון.

כאשר $0 \leq L < 1$ נגדיר $\epsilon = L$ ונראה כי לכל $M \in \mathbb{R}$ ועבור $x = 1$ מתקיים

$$|f(x) - L| = L \geq \epsilon$$

ראינו כי אכן ההגדרה מתקיימת לכל $L \in \mathbb{R}$ ולכן לא קיים גבול כאשר $x \to \infty$ לפונקציה f.

(ii) נוכיח כי אין גבול לפונקציה בלשון היינה כפי שהוגדר בסעיף א'.

עבור $L \neq 0$ נגדיר את הסדרה $x_n = \lfloor x \rfloor$. לכל איבר בסדרה זו מתקיים $f(x) = 0$, לכן

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq L$$

נגדיר $L = 0$ ו־$x_n = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$. אז מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1}{2} \neq 0$$

ראינו כי התנאי מתקיים לכל $L \in \mathbb{R}$ ולכן על־פי הגדרת היינה אין גבול לפונקציה f.

שאלה 4

סעיף א'

על־פי כלל הרכבה לכל $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$\lim_{x\to 0}\cos(cx) = \lim_{t\to 0}\cos t = 1 \tag{*}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\sin 3x} &\overset{\text{כלל לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\tan' 5x}{\sin' 3x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5}{\cos(3x)\cdot 3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\cos(3x)\cos^2(5x)}\\
&\overset{\text{חוקי גבולות}}{=} \frac{5}{3}\frac{1}{\lim_{x\to 0}\left(\cos(3x)\cos^2(5x)\right)}\\
&\overset{(*)}{=} \frac{5}{3}\frac{1}{1}\\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

סעיף ב'

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}+\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x}\frac{2\sqrt{\cos x}-1}{\sqrt{\cos x}}$$

על־פי משפט 4.45:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4}$$

הביטוי $\sqrt{\cos x}$ מוגדר וחיובי בסביבה החיובית של 0, לכן גם

$$\frac{2\sqrt{\cos x}-1}{\sqrt{\cos x}} = 2-\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$$

נשים לב כי מתקיים הגבול

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$$

וניתן להוכיח כי מתקיים הגבול

$$\lim_{t\to 0}\sqrt{\cos t} = 1$$

לכן משפט 4.39

$$\lim_{x\to 0}2-\frac{1}{\sqrt{\cos x}} = 1$$

ולכן מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\cos x}{x^2} = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

סעיף ג'

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-5x^4+x\cos x}{3x^2-5x^3+x\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^5}{x^5}-5\frac{x^4}{x^5}+\frac{x\cos x}{x^5}}{3\frac{x^2}{x^5}-5\frac{x^3}{x^5}+\frac{x\sqrt{x}}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-5\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{x^4}}{3\frac{1}{x^3}-5\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{\cos x}{x^4}}{\frac{\sqrt{x}}{x^4}}$$

נשים לב כי מתקיים

$$\frac{-1}{x^4}\le\frac{\cos x}{x^4}\le\frac{1}{x^4}$$

לכל $x\ge 0$, לכן לפי משפט 4.43 מתקיים

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}=0$$

לכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{\cos x}{x^4}}{\frac{\sqrt{x}}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+0}{\frac{\sqrt{x}}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{\sqrt{x}}$$

קל לראות על־פי הגדרה 4.55

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{\sqrt{x}}=\infty$$

סעיף ד'

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x^2+\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x^2}+\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+1}$$

על־פי משפט 4.45:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+1}=\lim_{x\to 0}\frac{0+1\cdot\frac{1}{x}}{1^2+1}=\lim_{x\to 0}\frac{0+1\cdot 0}{2}=0$$

סעיף ה'

$$\lim_{x\to x_0}\lfloor\tan x\rfloor\cos x, x_0=0,\frac{\pi}{2}$$

על־פי הגדרת $\tan x$ מתקיים כאשר $0\le x<\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}<1$$

ולכן עבור $\delta<1$ מתקיים

$$\lfloor\tan x\rfloor=0$$

ובהתאם

$$\lim_{x\to 0}\lfloor\tan x\rfloor\cos x=\lim_{x\to 0}0\cos x=\lim_{x\to 0}0=0$$

נמצא את הגבול

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\lfloor\tan x\rfloor\cos x$$

נשים לב כי כאשר $\frac{\sqrt{2}}{2}\le x<\frac{\pi}{2}$:

$$\tan x-1\le\lfloor\tan x\rfloor\le\tan x$$

ולאחר הכפלה

$$(\tan x - 1)\cos x \leq \lfloor \tan x \rfloor \cos x \leq \tan x \cos x$$

בתחום $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ נוכל לצמצם את הביטוי $\tan x \cos x$ ל־$\sin x$ בלא שינוי לערך, לכן:

$$\sin x - \cos x \leq \lfloor \tan x \rfloor \cos x \leq \sin x$$

לכן לפי משפט 4.43

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x - \cos x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \lfloor \tan x \rfloor \cos x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$