פתרון מטלה 03 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

24 במאי 2024

שאלה 1

נמצא שתי קבוצות סגורות ולא ריקות $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ כך שהמרחק ביניהן לא מתקבל.

נבחר את הקבוצות $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.

שתי הקבוצות ניתנות לתיאור על־ידי פונקציות $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפות בכל תחומן ולכן הקבוצות מכילות את כל הנקודות הגבוליות שלהן, ובהתאם סגורות.

לעומת זאת, הקבוצות זרות, ונראה כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\frac{1}{|x|} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{x^2}} = \rho((x, 0), (x, \frac{1}{x}))$ ולכן $\inf \operatorname{dist}(A, B) = 0$

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי ו־$\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ שתי נורמות עליו.

תהי $S_1 = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ ונגדיר $A = \{\|v\|' \mid v \in S_1\}$.

נוכיח כי הנורמות שקולות אם ורק אם $\inf A > 0, \sup A < \infty$.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי הנורמות שקולות.

לכן קיימים $0 < C_1 \leq C_2$ כך ש־$\forall v \in V : C_1\|v\| \leq \|v\|' \leq C_2\|v\|$.

בפרט

$$\forall v \in S_1 : C_1 \leq \|v\|' \leq C_2 \implies \forall a \in A : C_1 \leq a \leq C_2$$

ובהתאם $\inf A \geq C_1 \geq 0$ וגם $\sup A \leq C_2 < \infty$.

כיוון שני: נניח כי $\inf A = a > 0$ ו־$\sup A = b < \infty$.

לכן נובע ישירות $\forall x \in A : a \leq x \leq b$ ובהתאם $\forall v \in S_1 : a\|v\| \leq \|v\|' \leq b\|v\|$.

יהי $u \in V$, אז אנו יודעים כי קיים $u^* \in V$ כך ש־$\|u^*\| = 1$ ו־$\lambda \in \mathbb{R}^+$ כך ש־$u = \lambda u^*$ ולכן גם $\|u\| = \lambda\|u^*\| = \lambda$.

נשים לב עתה כי $u^* \in S_1$ ולכן $a\|u^*\| \leq \|u^*\|' \leq b\|u^*\|$, נכפיל את שלושת האגפים ב־λ ונקבל

$$a\|u\| \leq \|u\|' \leq b\|u\|$$

ולכן הנורמות שקולות. $\square$

שאלה 3

יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי ממימד d מעל $\mathbb{R}$.

סעיף א'

תהי $T : \mathbb{R}^d \to V$ העתקה לינארית חד־חד ערכית ועל.

נוכיח שהפונקציה $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(u) = \|T(u)\|$ משרה נורמה על $\mathbb{R}^d$.

הוכחה. נראה כי שלוש התכונות של נורמה מתקיימות.

1. חיוביות: ידוע כי T הפיכה ולכן גרעינה הוא וקטור האפס בלבד, ובהתאם $\|u\| = 0 \iff f(u) = \|Tu\| = 0$.
2. כפל בסקלר: $\forall u \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u) = \|T(\lambda u)\| = \|\lambda \cdot Tu\| = |\lambda|\|Tu\| = |\lambda| f(u)$.
3. אי־שוויון המשולש: $\forall u, v \in \mathbb{R}^2, f(u+v) = \|T(u+v)\| = \|Tu + Tv\| \leq \|Tu\| + \|Tv\| = f(u) + f(v)$.

ומצאנו כי f מקיימת את התנאים לנורמה ולכן מהווה נורמה ל־$\mathbb{R}^d$. □

יהי $B = (v_1, \dots, v_d)$ בסיס ל־V, ונגדיר נורמה על־ידי

$$\|\alpha v_1 + \cdots + \alpha_d v_d\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |\alpha_1| = d|\alpha_1|$$

נוכיח שהנורמות $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|$ שקולות.

הוכחה. בסעיף הקודם הוכחנו ששימוש ב־T מאפשר להשרות נורמה מ־V ל־$\mathbb{R}^2$, ולכן אפשר להגדיר פונצקיה משרה לנורמה לשתי הנורמות הנתונות.

נשתמש בטענה כי כל הנורמות ב־$\mathbb{R}^d$ הן שקולות ונקבל כי גם $\|\cdot\|$ שקולה ל־$\|\cdot\|_1$. □

שאלה 4

יהיו X,Y מרחבים מטריים ו־$f:X\to Y$ פונקציה חד־חד ערכית ועל.

נוכיח כי שלושת התנאים הבאים שקולים:

1. f היא הומיאומורפיזם.

2. כל קבוצה $U\subseteq X$ היא פתוחה אם ורק אם $f(U)$ פתוחה.

3. כל קבוצה $U\subseteq X$ היא סגורה אם ורק אם $f(U)$ סגורה.

הוכחה. **$1\leftarrow 2$:** נניח כי f היא הומיאומורפיזם.

לכן f רציפה וגם f^{-1} רציפה. לכן נסיק מהתנאי המספיק לרציפות כי $U\subseteq X$ פתוחה אז $f(U)$ פתוחה ולכל $U\subseteq Y$ גם $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה.

במסתכם $U\subseteq X$ פתוחה אם ורק אם $f(U)\subseteq Y$ פתוחה.

$2\leftarrow 3$: נניח כי $U\subseteq X$ פתוחה אם ורק אם $f(U)\subseteq Y$ פתוחה.

תהי קבוצה סגורה $A\subseteq X$, אז A^C קבוצה פתוחה ולכן $f(A^C)$ קבוצה פתוחה ב־Y.

באופן דומה $f(U)$ קבוצה פתוחה. אילו נניח בשלילה כי $f(U)\cap f(U^C)\neq\emptyset$ נקבל כי ישנם $x\neq y\in X$ כך ש־$f(x)=f(y)$ בסתירה לחד־חד ערכיות, ולכן $f(U)\cap f(U^C)=\emptyset$.

נראה גם $f(U)\cup f(U^C)=Y$ אחרת תכונת העל נסתרת עבור f, ולכן נסיק $f(U^C)=(f(U))^C$.

מטענה זו נוכל להסיק ישירות ש־$U\subseteq X$ סגורה אם ורק אם $f(U)\subseteq Y$ סגורה.

$2\leftarrow 3$: נניח כי כל קבוצה $U\subseteq X$ סגורה אם ורק אם $f(U)\subseteq Y$ סגורה אף היא.

נוכל להשתמש בחד־חד ערכיות באופן זהה לסעיף הקודם וכך גם בעל ונקבל כי $f(U^C)=(f(U))^C$ לכל $U\subseteq X$.

נשים לב כי התנאי המספיק לרציפות, שמקור כל קבוצה פתוחה הוא קבוצה פתוחה מתקיים לשני הכיוונים, לכן f,f^{-1} רציפות ובהתאם f הומיאומורפיזם. □

שאלה 5

יהיו X,Y מרחבים מטריים ו־$f : X \to Y$ פונקציה חד־חד ערכית, על ורציפה.

סעיף א'

נוכיח שאם X קומפקטי אז f היא הומיאומורפיזם.

הוכחה. ידוע ש־X קומפקטית ו־f רציפה ולכן נסיק ש־$f(X) \subseteq Y$ קומפקטית אף היא.

ידוע ש־f על ולכן $f(X) = Y$ ו־Y קבוצה קומפקטית.

עוד ידוע שתת־קבוצה סגורה של קבוצה קומפקטית היא קומפקטית, יהי $A \subseteq X$ סגור, אז גם $f(A) \subseteq Y$ קבוצה סגורה.

נניח ש־$f(B)$ קבוצה סגורה כאשר $B \subseteq X$. לכן גם $f(B)$ היא קומפקטית, אם נניח ש־B עצמה לא קומפקטית נקבל סתירה לטענה שהוצגה קודם, לכן B קומפקטית.

$B \subseteq X$ וקומפקטית ולכן גם סגורה, וקיבלנו כי תנאי 3 של השאלה הקודמת מתקיים ונובע כי f הומיאומורפיזם. $\square$

סעיף ב'

נראה דוגמה למקרה בו X לא קומפקטית ו־f איננה הומיאומורפיזם.

נבחן את הפונקציה מאחד התרגילים הקודמים $f : [0,1) \to S(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ המוגדרת על־ידי

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

אבל הראינו כי היא לא הומיאומורפיזם בשאלה 6 סעיף ה'.

שאלה 6

סעיף א'

יהי X מרחב מטרי שלם, ויהי $D \subseteq X$ כדור סגור.

נוכיח ש־D עם המטריקה המושרית על־ידי X היא מרחב מטרי שלם.

הוכחה. תהי סדרת קושי $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D$.

כמובן שגם $\forall n \in \mathbb{N} a_n \in X$ ולכן מהשלמות נסיק ש־(a) מתכנסת ונגדיר $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

ידוע כי $a \in A$, אבל ידוע גם כי D קבוצה סגורה ולכן היא מכילה את כלל הנקודות הגבוליות שלה, ואכן a נקודה גבולית שלה ונסיק כי $a \in D$.

מכאן נסיק כי D עצמה שלמה. □

סעיף ב'

נוכיח שלמשוואה

$$f'(x) = x \cdot \cos(f^2(x))$$

עם תנאי ההתחלה $f(0) = 3$ יש פתרון יחיד בסביבת 0.

הוכחה. תחילה נמיר למשוואה אינטגרלית ונקבל

$$f(x) = 3 + \int_0^x t \cdot \cos(f^2(t))dt$$

נבחר קטע $I = [-a, a]$ סביב 0, ונגדיר $T : C(I) \to C(I)$ על־ידי

$$T(f)(x) = 3 + \int_0^x t \cdot \cos(f^2(t))dt$$

יהיו $f, g \in C(I)$ ונניח $M = \|f - g\|_\infty$, ויהי $x \in I$, מתקיים

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x) - (Tg)(x)| &= |\int_0^x t \cdot \cos(f^2(t))dt - \int_0^x t \cdot \cos(g^2(t))dt| \\
&= |\int_0^x t \cdot (\cos(f^2(t)) - \cos(g^2(t)))dt| \\
&\leq |\int_0^x tMdt| \\
&\leq M|\frac{x^2}{2}| \\
|(Tf)(x) - (Tg)(x)| &\leq \frac{a^2 M}{2}
\end{aligned}$$

ונסיק כי ההעתקה T מכווצת עבור כל $0 < a < \sqrt{2}$ שנבחר.

תנאי משפט נקודת השבת של בנך מתקיימים ונקבל כי קיימת נקודה $x_0 \in I$ יחידה המקיימת $(Tf)(x_0) = x_0$ ועל־פי הגדרת ההעתקה זהו גם הפתרון של המשוואה הנתונה. □

שאלה 7

תהי $I \subseteq \mathbb{R}$ סביבה של 0 ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך ש־$f(0) = 0$ ו־f' רציפה ב־0. נניח גם ש־$|f'(0)| < 1$.
נוכיח שקיים קטע $X = [-a, a]$ עבורו $f(X) \subseteq X$ וגם ההעתקה המצומצמת $f : X \to X$ היא מכווצת ממש.

הוכחה. מהנתון $|f'(0)| < 1$ ו־f' רציפה בסביבת 0 נסיק כי קיימת סביבה $X = [-a, a]$ כך ש־$\forall x \in X : |f'(x)| < 1$.
נגדיר $M = \max_{x \in X} |f'(x)|$. כמובן $M < 1$ על־פי הגדרתו.
נקבל כי $f^*(x) = |f(x)| - x$ מקיימת $f^*(x) \le 0$ עבור $0 \le x \le a$ וממעבר דומה על החלק השלילי של התחום שבחרנו לקבל ש־$f(X) \subseteq X$.

נגדיר $g : X \to X$ על־ידי $g(x) = f(x)$ ההעתקה המצומצמת.
ראינו כי $|g(x)| < |x| < a \implies |x|$, דהינו ההעתקה מכווצת, ואף $|g(x)| < M|x|$ בתחום.

$$\forall x, y \in (-a, a) : |g(x) - g(y)| \le |g(x)| - |g(y)| < M|x| - M|y| \forall x, y \in (-a, a) : |g(x) - g(y)| \le |M|x| - M|y||$$

ותמשיך מפה נמאס לי $\square$