פתרון מטלה 11 — פונקציות מרוכבות, 80519

19 בינואר 2025

שאלה 1

נחשב את האינטגרלים הבאים באמצעות משפט השארית.

סעיף א׳

$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^n+1}\,dx$ לכל $n \geq 2$ טבעי.

פתרון נגדיר

$$f(z) = \frac{\log z}{z^n+1}$$

כאשר $\log$ הוא הענף המוגדר בתחום שנציין בהמשך (בתחום זה אכן יש ענף מוגדר). נבחין שמתקיים

$$z^n + 1 = 0 \iff z = \exp(\frac{\pi i}{n} + \frac{2\pi k}{n}), k \in \{0, \dots, n-1\}$$

לכן בפרט יש סינגולריות קוטב מסדר 1 ב־$z = \exp(\frac{\pi i}{n})$.

נגדיר את המסילות הבאות:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) = t && t \in [\epsilon, r] \\
&\gamma_2(t) = re^{it} && t \in [0, \frac{2\pi}{n}] \\
&\gamma_3(t) = te^{\frac{2\pi i}{n}} && t \in [r, \epsilon] \\
&\gamma_4(t) = \epsilon e^{\frac{2\pi i}{n} - it} && t \in [0, \frac{2\pi}{n}]
\end{aligned}$$

התחום המוגדר על־ידי גבולות אלה לכל $\epsilon, r > 0$ הוא תחום טוב (בעל שפה סופית וחסום) ומחורר בנקודה היחידה $z = e^{\frac{\pi i}{n}}$. מההגדרה

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \xrightarrow[\epsilon \to 0]{r \to \infty} I$$

מאי־שוויון ML נובע,

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\log(re^{it})}{r^n e^{int} + 1}\,dt \leq \frac{2\pi r}{n} \log r \cdot \frac{1}{r^n+1} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

מבדיקה ישירה ותוצאת שאלה 1 סעיף ב׳ של מטלה 7 נובע,

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_r^\epsilon f(te^{\frac{2\pi i}{n}}) e^{\frac{2\pi i}{n}}\,dt = e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_r^\epsilon \frac{\log(t) + \frac{2\pi i}{n}}{t^n + 1}\,dt = e^{\frac{2\pi i}{n}} (I - \frac{\pi}{2})$$

ולבסוף נבחין שגם

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,dz \leq \frac{2\pi\epsilon}{n} \cdot \frac{e^\epsilon}{\epsilon^n + 1} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

ולכן נובע ממשפט השארית וטענה לחישוב שאריות קוטב פשוט,

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = I + e^{\frac{\pi i}{n}}(I - \frac{\pi}{2}) = I(1 + e^{\frac{\pi i}{n}}) - \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi i}{n}} = 2\pi i \operatorname{res}_f(e^{\frac{\pi i}{n}}) = 2\pi i \left. \frac{\log z}{nz^{n-1}} \right|_{z = e^{\frac{\pi i}{n}}} = 2\frac{\pi^2}{n^2} e^{\frac{\pi i}{n}}$$

ובפרט נובע

$$I(1 + e^{\frac{\pi i}{n}}) = 2\frac{\pi^2}{n^2} e^{\frac{\pi i}{n}} + \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi i}{n}}$$

ומחילוץ הערך הממשי נקבל

$$I(1 + \cos(\frac{\pi}{n})) = \cos(\frac{\pi}{n})(2\frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi}{2})$$

ולכן

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^n+1}\,dx = \frac{\cos(\frac{\pi}{n})(2\frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi}{2})}{1 + \cos(\frac{\pi}{n})}$$

סעיף ב׳

עבור כל $a, b \in \mathbb{R}$,

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

פתרון נגדיר

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

ולכן $I = \operatorname{Re}(\int_0^\infty f(z)\,dz)$. נבחין כי אם $a = 0$ או $b = 0$ אז מאינפי 2 האינטגרל לא מתכנס ולכן נניח $a, b \neq 0$.
עוד נבחין ש־f היא פונקציה זוגית ולכן,

$$2I = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

ונחשב אינטגרל זה במקום. עוד נבחין שמתקיים

$$\lim_{x \to \pm\infty} x f(x) = 0$$

בשל חסימות המונה וגודל המכנה, לכן $f(x) = o(|\frac{1}{x}|)$ ומטענה מהכיתה נובע שאם Z קבוצת הסינגולריות של f, אז

$$2I = 2\pi i \sum_{z \in Z, \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_f(z)$$

אבל אנו גם יודעים ש־$Z = \{\pm ai, \pm bi\}$, לכן נניח בלי הגבלת הכלליות $a, b > 0$ ונקבל שהנקודות הקריטיות לחישוב האינטגרל הן ai, bi בלבד, את ההנחה הזו מותר לנו לעשות בשל סימטריית הסינגולריות, במקרה שלילה נבחר $-a, -b$. אילו $a \neq b$, אז נובע שהסינגולריות היא קוטב מסדר 1 בשתי הנקודות, נחשב,

$$\operatorname{res}_f(ai) = \left.\frac{e^z}{2z(2z^2+a^2+b^2)}\right|_{z=ai} = \frac{e^{ai}}{2ai(b^2-a^2)}$$

ולכן באופן דומה גם

$$\operatorname{res}_f(bi) = \frac{e^{bi}}{2bi(a^2-b^2)}$$

ובהתאם נובע

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re}\left(\pi i\left(\frac{e^{ai}}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{e^{ai}}{2bi(a^2-b^2)}\right)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\pi\left(\frac{e^{ai}}{2a(b^2-a^2)} + \frac{e^{ai}}{2b(a^2-b^2)}\right)\right) = \pi\left(\frac{\cos(a)}{2a(b^2-a^2)} + \frac{\cos(b)}{2b(a^2-b^2)}\right) \end{aligned}$$

כעת נניח ש־$a = b$, ולכן קיימת סינגולריות יחידה מסדר 2 ב־ai, ונחשב את השארית,

$$\operatorname{res}_f(ai) = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz} \frac{e^z (z-ai)^2}{(z^2+a^2)^2} = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z+ai)^2} = \lim_{z \to ai} \frac{e^z (z+ai)^2 - e^z 2(z+ai)}{(z+ai)^4} = \frac{e^{ai}(-a^2-ai)}{4a^4}$$

ולכן

$$I = \operatorname{Re}\left(\pi i \frac{e^{ai}(-a^2-ai)}{4a^4}\right) = \operatorname{Re}\left(\pi \frac{e^{ai}(-a^2 i + a)}{4a^4}\right) = \pi \frac{\cos(a)}{4a^3}$$

סעיף ג׳

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$$

פתרון נבחין שהאינטגרל הנתון מתכנס ישירות מהזהות $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ וממבחני התכנסות. נבחין שמתקיים,

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \mathrm{Im}\left(i\frac{(e^{ix}-e^{-ix})^3}{(2i)^3}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(i\frac{e^{3ix}-3e^{2ix-ix}+3e^{ix-2ix}-e^{-3ix}}{-8i}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}+2\cos(3x)-6\cos(x)}{-8}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}+e^{3ix}+e^{-3ix}-3e^{ix}-3e^{-ix}}{-8}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{3ix}-3e^{ix}}{-4}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{(1-e^{3ix})-3(1-e^{ix})}{4}\right)
\end{aligned}$$

ולכן נגדיר

$$f(z)=\frac{(1-e^{3iz})-3(1-e^{iz})}{4z^3}$$

ונובע

$$I=\mathrm{Im}\left(\int_0^\infty f(z)\,dz\right)$$

נבחין ש־f בעלת סינגולריות סליקה ב־$z=0$ ולכן נתייחס אליה כאל ההשלמה האנליטית שלה בנקודה זו. נרצה אם כך לחשב את ערך האינטגרל, לכן נגדיר תחום טוב אשר שפתו מוגדרת על־ידי

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t)=t && t\in[0,r]\\
&\gamma_2(t)=re^{it} && t\in[0,\frac{\pi}{2}]\\
&\gamma_3(t)=it && t\in[r,0]
\end{aligned}$$

לכל $r>0$. מאנליטיות f נובע

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\gamma_2}f(z)\,dz+\int_{\gamma_3}f(z)\,dz\right)=0$$

ונעבור לחישוב האינטגרלים.

$$\mathrm{Im}\int_{\gamma_1}f(z)\,dz\xrightarrow{r\to\infty}I$$

נבחין כי אין חלק מדומה לאינטגרל הבא,

$$\mathrm{Im}\int_{\gamma_3}f(z)\,dz=\int_r^0\frac{1-e^{-3t}-3(1-e^{-t})}{-it^3}\cdot i\,dt=0$$

אנו יודעים שמתקיים $e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+o(z^3)$ ולכן נובע

$$f(z)=\frac{-2-1-3iz-\frac{(3iz)^2}{2}+1+iz+\frac{(iz)^2}{2}+o(z^3)}{4z^3}=\frac{3z^2+o(z^3)}{4z^3}=\frac{3}{4}\frac{1}{z}+o(\frac{1}{r})$$

ולכן

$$\int_{\gamma_2}f(z)\,dz=\int_0^{\pi/2}(\frac{3}{4}\frac{1}{re^{it}}+\frac{o(r^3)}{r^3})\cdot ire^{it}=\frac{3i}{4}\int_0^{\pi/2}1+\frac{o(\frac{1}{r})}{\frac{1}{r}}\,dt=\frac{3i}{4}\cdot(0-\pi/2)+o(\frac{1}{r})/r\xrightarrow{r\to\infty}-\frac{3\pi i}{8}$$

ולכן מאיחוד השוויונות שמצאנו נובע

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\gamma_2}f(z)\,dz+\int_{\gamma_3}f(z)\,dz\right)=\mathrm{Im}\left(0+iI-\frac{3\pi i}{8}\right)\implies I=\frac{3\pi}{8}$$

שאלה 2

סעיף א׳

תהי $\frac{p(z)}{q(z)}$ פונקציה רציונלית, כך ש־$p,q \in \mathbb{C}[z]$ פולינומים כך ש־$\deg q \geq \deg p + 2$.
נסמן $Z \subseteq \mathbb{C}$ את קבוצת השורשים של q ונניח ש־$Z \cap \mathbb{R} = \emptyset$. נוכיח שמתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{a \in Z \cap H} \mathrm{res}_{p/q}(a)$$

כאשר $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

הוכחה. נגדיר $G = \{z \in \overline{B}(0,r) \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$ לכל $r > 0$, זהו כמובן תחום טוב, וכן $\partial G = \gamma_1 + \gamma_2$, כאשר

$$\gamma_1(t) = t, \qquad t \in [-r, r]$$
$$\gamma_2(t) = re^{it}, \qquad t \in [0, \pi]$$

נגדיר $d = \deg q - \deg p$, לכן $d \geq 2$, עבור r מספיק גדול נובע $\frac{p}{q} = o(\frac{1}{r^d})$ ולכן מ־ML,

$$\int_{\gamma_2} \frac{p(z)}{q(z)}\, dz \leq \pi r \cdot \max_{z \in \gamma_2} \frac{p(z)}{q(z)} = \pi r^{1-d} \cdot \frac{o(\frac{1}{r^d})}{\frac{1}{r^d}} \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

ונסיק ממשפט השארית (תוך ההנחה שבחרנו r כך ש־$Z \cap \partial G = \emptyset$),

$$\int_{\partial G} \frac{p(z)}{q(z)}\, dz = \int_{-r}^{r} \frac{p(z)}{q(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{a \in Z \cap G} \mathrm{res}_{p/q}(a)$$

אבל $H \xrightarrow{r \to \infty} G$ ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{a \in Z \cap H} \mathrm{res}_{p/q}(a)$$

□

סעיף ב׳

נסיק דרך נוספת לחישוב האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 1}$$

שהוצג בתרגיל 7.

פתרון נגדיר $p(z) = z^2, q(z) = z^4 + 1$ ולכן $\deg q \geq \deg p + 2$ וכן $p, q \in \mathbb{C}[z]$. נבחין ש־$z = e^{\frac{\pi i + 2\pi i k}{4}} \iff z^4 + 1 = 0$ ל־$k \in \{0, \ldots, 3\}$, לכן

$$Z = \{e^{\frac{\pi i + 2\pi i k}{4}} \mid k \in \{0, \ldots, 3\}\}$$

בפרט $Z \cap \mathbb{R} = \emptyset$, ולכן תנאי הסעיף הקודם חלים ונסיק

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx &= 2\pi i \sum_{a \in Z \cap H} \mathrm{res}_{p/q}(a) \\
&= 2\pi i (\mathrm{res}_{p/q}(e^{\frac{\pi i}{4}}) + \mathrm{res}_{p/q}(e^{\frac{3\pi i}{4}})) \\
&= 2\pi i \left(\left(\frac{z^2}{4z^3} \right)_{z = e^{\frac{\pi i}{4}}} + \left(\frac{z^2}{4z^3} \right)_{z = e^{\frac{3\pi i}{4}}} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{\frac{\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} \right)
\end{aligned}$$

נבחין ש־$\frac{p(x)}{q(x)}$ היא פונקציה סימטרית מעל הממשיים, ולכן

$$\int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = \pi i \left(\frac{1}{4e^{\frac{\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} \right)$$

סעיף ג׳

נוכיח שמתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}\, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \pi$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה. נגדיר $p(z) = 1, q(z) = \left(z^2+1\right)^{n+1}$ ולכן תנאי סעיף א׳ חלים ועלינו לחשב את השארית בכל נקודות הסינגולריות. ישנה סינגולריות קוטב מסדר $n+1$ בנקודות $z = \pm i$, אבל רק $z = i \in H$ ולכן מספיק שנחשב את ערך השארית בה. מטענה אודות ערך שארית בקוטב נקבל שעלינו לחשב את,

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{p/q}(i) &= \frac{1}{(n-1+1)!} \lim_{z \to i} \frac{d^{n-1+1}}{dz^{n-1+1}} \left((z-i)^{n+1} \frac{1}{\left(z^2+1\right)^{n+1}} \right) \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{z \to i} \frac{d^n}{dz^n} (z+i)^{-n-1} \\
&= \frac{(-n-1)\cdots(-2n)}{n!} \lim_{z \to i} (z+i)^{-2n-1} \\
&= \frac{(-1)^n (n+1)\cdots 2n}{n! 2^{2n+1} \cdot (-1)^n \cdot i} \\
&= -\frac{i}{2} \frac{\frac{(2n)!}{n! 2^n}}{n! \cdot 2^n}
\end{aligned}$$

נבחין שמהגדרת עצרת כפולה נובע $(2n)!! = n! 2^n$, ולכן

$$-\frac{i}{2} \frac{\frac{(2n)!}{n! 2^n}}{n! \cdot 2^n} = -\frac{i}{2} \frac{\frac{(2n)!}{(2n)!!}}{(2n)!!}$$

אנו גם יודעים ש־$(2n)! = (2n)!! \cdot (2n-1)!!$ מבדיקה ישירה של ההגדרה, לכן

$$\operatorname{res}_{p/q}(i) = -\frac{i}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

ולבסוף מסעיף א׳,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} = 2\pi i \cdot (-1) \frac{i}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

□

שאלה 3

תהי

$$f(z) = \operatorname{Log}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

סעיף א׳

נראה ש־f מוגדרת בתחום $\mathbb{C} \setminus [0,1]$.

הוכחה. נבחין ש־Log מוגדר ב־$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ולכן מספיק שנבדוק מתי $\frac{z}{z-1} \neq 0$. כמובן $z = 0 \iff \frac{z}{z-1} = 0$, וכן $z = 1 \iff z - 1 = 0$, כלור בתחום $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ הפונקציה f מוגדרת וסופית. □

סעיף ב׳

נחשב את האינטגרל

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz$$

פתרון ממשפט השארית באינסוף נובע

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_f(\infty)$$

נגדיר

$$F(z) = -\frac{f(\frac{1}{z})}{z^2} = -\frac{\operatorname{Log}(\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1})}{z^2} = -\frac{1}{z^2}\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

אנו יודעים ש־$\frac{1}{1-z} = 1 + z + o(z^2)$ וכן ש־$\operatorname{Log}(1 + z + o(z^2)) = z + o(z^2)$, ולכן $c_{-1} = -1$ עבור הסדרה המגדירה את טור לורן של F. בהתאם $\operatorname{res}_F(0) = -1$ ולכן ממשפט השארית באינסוף גם

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_f(\infty) = 2\pi i \operatorname{res}_F(0) = -2\pi i$$

שאלה 4

יהי $u \in \mathbb{C}$ ונגדיר

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z+u)^2}$$

עבור $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$.

סעיף א׳

נסמן ב־C_N לכל $N \in \mathbb{N}$ את המסילה המקיפה את הריבוע $[-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2}]^2$ נגד כיוון השעון.
נראה שמתקיים

$$\lim_{N \to \infty} \int_{C_N} f(z)\, dz = 0$$

הוכחה. כתוצאה ממטלה 3 נבחין שלכל $z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} z| \ge 1$ מתקיים $|\cot z| \le 1$, כלומר הפונקציה חסומה. בנוסף $\cot(\pi n + \frac{1}{2}) = 0$ ולכן הפונקציה חסומה גם בסביבות אלה בריבוע. לכל N מספיק גדול ביחס ל־u (כלומר ש־u פנימית לריבוע),

$$\int_{C_N} f(z)\, dz \le 4(N + \frac{1}{2}) \cdot \max_{z \in C_N} f(z) \le 4(N + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\pi \cdot 1}{N^2} \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

ולכן נוכל להסיק שערך האינטגרל שואף לאפס כפי שרצינו. □

סעיף ב׳

נשתמש במשפט השארית כדי להראות שלכל $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ מתקיים,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi u)}$$

הוכחה. נבחין של־f סינגולריות בקבוצה $\{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \le N\} \cup \{-u\}$ לכל C_N, ולכן נובע ממשפט השארית בתחום זה

$$\int_{C_N} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}_f(u) + 2\pi i \sum_{n=-N}^{N} \operatorname{res}_f(n) = 0 \iff -\operatorname{res}_f(u) = \sum_{n=-N}^{N} \operatorname{res}_f(n)$$

כל סינגולריות של f היא קוטב מסדר 1 לפי זהויות על סינוס, ונקבל

$$\operatorname{res}_f(n) = \left. \frac{\frac{\pi \cos(\pi z)}{(z+u)^2}}{\pi \cos(\pi z)} \right|_{z=n} = \frac{\frac{\pi \cos(\pi n)}{(n+u)^2}}{\pi \cos(\pi n)} = \frac{1}{(n+u)^2}$$

ב־$z = -u$ יש סינגולריות מסדר 2 ולכן

$$\operatorname{res}_f(-u) = \lim_{z \to -u} \frac{d}{dz} \frac{\pi \cot(\pi z)(z+u)^2}{(z+u)^2} = \lim_{z \to -u} \frac{d}{dz} \pi \cot(\pi z) = \frac{-\pi}{\sin^2(-\pi u)} = \frac{-\pi}{\sin^2(\pi u)}$$

ולכן מהשוויון ממשפט השארית נובע

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi u)}$$

□

סעיף ג׳

נשתמש במשפט השארית כדי להראות שעבור $u = 0$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

הוכחה. מהסעיף הקודם נובע שעבור u בסביבה של 0 מתקיים,

$$\frac{1}{u^2}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{(n+u)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi u)} \iff \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{(n+u)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi u)}-\frac{1}{u^2}=\frac{\pi^2u^2-\sin^2(\pi u)}{u^2\sin^2(\pi u)}$$

ממבחן התכנסות אנו יודעים שהביטוי השמאלי מתכנס כאשר $u\to 0$ לביטוי

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

ונותר לבדוק את הביטוי הימני, נבחין שמתקיים $\sin^2(\pi u)=\pi^2u^2-\frac{\pi^4}{3}u^4+o(u^5)$ ולכן,

$$\frac{\pi^2u^2-\sin^2(\pi u)}{u^2\sin^2(\pi u)}=\frac{\pi^2u^2-\pi^2u^2+\frac{\pi^4}{3}u^4+o(u^5)}{\pi^2u^4+o(u^5)}\xrightarrow{u\to 0}\frac{\pi^2}{3}$$

ונובע ישירות

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}$$

כפי שרצינו. $\square$