פתרון מטלה 13 — פונקציות מרוכבות, 80519

31 בינואר 2025

שאלה 1

תהי $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ המוגדרת על־ידי $\gamma(t) = e^{4it} - 7e^{3it} + 2e^{it} + 6$.
נחשב את $\text{Ind}_\gamma(3)$.

פתרון מתכונות אינדקס ליפוף נובע,

$$\text{Ind}_\gamma(3) = \text{Ind}_{\gamma-3}(0)$$

אבל אם מגדירים $f(z) = z^4 - 7z^3 + 2z + 3$ מקבלים מתכונות גם,

$$\text{Ind}_{\gamma-3}(0) = \text{Ind}_{f\circ e^{it}}(0) = \frac{1}{2\pi i}\Delta_\gamma f$$

ומעקרון הארגומנט,

$$\frac{1}{2\pi i}\Delta_\gamma f = |Z_f \cap D|$$

כאשר $Z_f = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ ו־$D = \overline{B}(0,1)$. נבחין כי עבור $z \in \partial D$,

$$|f(z) + 7z^3| \le |z^4| + 2|z| + 3 = 6 < 7 = |-7z^3|$$

ולכן ממשפט רושה ל־f אותו מספר אפסים כמו ל־$-2z^3$, כלומר שלושה אפסים בדיוק, כלומר

$$\text{Ind}_{\gamma-3}(0) = 3$$

שאלה 2

תהי $\gamma : I \to \mathbb{C}$ מסילה סגורה.

סעיף א׳

נוכיח כי ל־$\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ יש רכיב קשירות יחיד לא חסום.

הוכחה. נניח בשלילה שישנם לפחות שני רכיבי קשירות לא חסומים, Ω_1, Ω_2, נבחין כי מהגדרת מסילה סגורה קיים $r_0 > 0$ כך ש־$\mathbb{C} \setminus B(0, r_0) = (\Omega_1 \setminus B(0, r_0)) \uplus (\Omega_2 \setminus B(0, r_0))$. יהי $r > r_0$, נראה ש־$\partial B(0, r) = (\partial B(0, r) \cap \Omega_1) \uplus (\partial B(0, r) \cap \Omega_2)$, ואם אחד משני התחומים ריק אז נובע שהתחום השני חסום בסתירה, לכן שניהם לא ריקים. נבחר $z_r \in \overline{(\partial B(0, r) \cap \Omega_1)} \cap \overline{(\partial B(0, r) \cap \Omega_2)}$, נבחין כי זו אכן קבוצה לא ריקה מהעובדה ששתי הקבוצות לא ריקות. נגדיר סדרה $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ על־ידי $z_n = z_r$ כך ש־$r = n$. הנקודות המחלקות את התחומים שייכות ל־$\gamma(I)$, כלומר $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \gamma(I)$, וכן $|z_n| = n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, לכן קבוצת הנקודות הזו לא חסומה, וזוהי כמובן סתירה לסגירות γ. נסיק אם כך שאין שני רכיבי קשירות שונים לא חסומים. $\square$

סעיף ב׳

נראה שהפונקציה $\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma(I) \to \mathbb{Z}$ רציפה ומתאפסת ברכיב הקשירות הלא חסום.

הוכחה. תהי $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, לכל $\epsilon > 0$ כך ש־$B(z, \epsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, אם $w \in B(z, \epsilon)$ אז,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Ind}_\gamma(z) - \operatorname{Ind}_\gamma(w)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta - \int_\gamma \frac{1}{\zeta - w} \, d\zeta \right) \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{w - z}{(\zeta - z)(\zeta - w)} \, d\zeta \right| \\
&\le \frac{\epsilon}{2\pi} L(\gamma) \cdot \max_{\zeta \in \gamma} \left| \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - w)} \right|
\end{aligned}$$

נבחין שכאשר $z \to w$ נקבל $\max_{\zeta \in \gamma} \left| \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - w)} \right| \to \max_{\zeta \in \gamma} \left| \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right|$, כלומר ביטוי קבוע.
גם $L(\gamma)$ קבוע ולכן $0 \xrightarrow{\epsilon \to 0} |\operatorname{Ind}_\gamma(z) - \operatorname{Ind}_\gamma(w)|$, כלומר $\operatorname{Ind}_\gamma$ רציפה.

נראה גם שברכיב הקשירות הלא חסום הפונקציה מתאפסת. מצאנו בסעיף הקודם כי רכיב הקשירות איננו חסום, ומרציפות נובע שבאותו רכיב קשירות ערך הפונקציה (שתמונתה איננה רציפה) הוא קבוע, כלומר לכל $r > r_0$ עבור r_0 החוסם את $\gamma(I)$ נובע,

$$|\operatorname{Ind}_\gamma(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta \right| \le \frac{L(\gamma)}{2\pi} \max_{\zeta \in \gamma} \left| \frac{1}{\zeta - z} \right| = \frac{L(\gamma)}{2\pi} (r - r_0) \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

אבל מרציפות $\operatorname{Ind}_\gamma$ ומתמונתה (שאיננה רציפה) נובע שלכל $z, w \in \Omega_i$ כאשר Ω_i רכיב קשירות כלשהו,

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \operatorname{Ind}_\gamma(w)$$

ומצאנו שקיים $r > r_0$ עבורו $\operatorname{Ind}_\gamma(z) < 1$ לכל $z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r)$, ולכן $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ לכל $z \in \mathbb{C}\Omega_j$ רכיב הקשירות הלא חסום. $\square$

שאלה 3

תהי $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב־$\overline{D}$ והרמונית ב־D.

סעיף א׳

נוכיח שאם $u\geq 0$ על ∂D אז $u\geq 0$ ב־D.

הוכחה. מתכונת הערך הממוצע נובע,

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})\,dt\geq 0$$

זאת שכן $u(e^{it})\geq 0$ לכל $t\in[0,2\pi]$. □

סעיף ב׳

נוכיח את אי־שוויון Harnack, נניח ש־$u\geq 0$, ונראה שלכל $z\in D$ מתקיים,

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}u(0)\leq u(z)\leq\frac{1+|z|}{1-|z|}u(0)$$

הוכחה. נבחין כי המשפט על גרעין פואסון חל ולכן

$$u(z)=(P_D u)(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}u(e^{it})\,dt$$

ולכן בפרט $u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})\,dt$. מאי־שוויון המשולש נובע,

$$u(z)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-|z|)(1+|z|)}{(|e^{it}|-|z|)^2}u(e^{it})\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+|z|}{1-|z|}u(e^{it})\,dt=\frac{1}{2\pi}\frac{1+|z|}{1-|z|}\int_0^{2\pi}u(e^{it})\,dt=\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

מהצד השני מתקיים,

$$u(z)\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-|z|)(1+|z|)}{(|e^{it}|+|z|)^2}u(e^{it})\,dt\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|}{1+|z|}u(e^{it})\,dt=\frac{1-|z|}{1+|z|}$$

ומצאנו את שני חלקי אי־השוויון. □

שאלה 4

נחשב את האינטגרל הבא בעזרת נוסחת ינסן,

$$\int_0^{2\pi} \log(9+16\sin^2 t)\ dt$$

פתרון נגדיר $f(z)=4z^2-1$, נבדוק שזוהי פונקציה הרמונית.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0$$

ולכן f היא הרמונית ב־D ומקיימת את נוסחת ינסן,

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{n} m_k \log|a_k| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{it})|\ dt$$

כאשר $a_1,\dots,a_n$ הם האפסים של f ב־D עם ריבויים $m_1,\dots,m_n$. נובע גם $\log|f(0)| = \log|-1| = 0$, ונבחין כי גם $z=\pm\frac{1}{2}$ האפסים היחידים של f, כלומר $a_1=\frac{1}{2}$ ו־$m_1=1$, וכן גם $a_2=-\frac{1}{2}$ ו־$m_2=1$. נציב ונקבל,

$$0 = \log\left|\frac{1}{2}\right| + \log\left|-\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|4e^{2it}-1|\ dt$$

כלומר,

$$\int_0^{2\pi} \log|4e^{2it}-1|\ dt = 2\pi\log 4$$

נבחין כי גם,

$$\begin{aligned} |4e^{2it}-1|^2 &= (4\cos(2t)-1)^2 + (4\sin(2t))^2 \\ &= 16\cos^2(2t) - 8\cos(2t) + 1 + 16\sin^2(2t) \\ &= -8\cos(2t)+17 \\ &= -8(1-2\sin^2 t)+17 \\ &= 16\sin^2 t + 9 \end{aligned}$$

ונובע,

$$\int_0^{2\pi} \log(9+16\sin^2 t)\ dt = 8\pi\log 2$$