פתרון ממ"ן 11 – אלגברה לינארית 2 (20229)

13 באפריל 2023

שאלה 1

סעיף א'

יהיה $V = M^{\mathbb{C}}_{n\times n}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, תהי $P \in V$ מטריצה הפיכה, ותהי העתקה לינארית $T_P : V \to V$ המוגדרת

$$T_P X = P^{-1} X P$$

נוכיח שמתקיים $T_P^* = T_{P^*}$.

הוכחה. נגדיר $A, B \in V$. נשים לב כי לפי משפט 2.1.4(ו') מתקיים

$$(P^{-1})^* = (P^*)^{-1} \tag{1}$$

נראה כי

$$\begin{aligned}
(A, T_{P^*} B) &= (A, (P^*)^{-1} B P^*) \\
&= \operatorname{tr}(((P^*)^{-1} B P^*)^* A) \\
&= \operatorname{tr}((P^*)^* ((P^*)^{-1} B)^* A) && \text{2.1.4 ו'} \\
&= \operatorname{tr}((P^*)^* B^* ((P^*)^{-1})^* A) \\
&= \operatorname{tr}((P^*)^* B^* ((P^*)^{-1})^* A) \\
&= \operatorname{tr}(P B^* P^{-1} A) && (1) \\
&= \operatorname{tr}(B^* P^{-1} A P) && \text{מכפלה ב־tr} \\
&= (P^{-1} A P, B) \\
&= (T_P A, B)
\end{aligned}$$

על־פי הגדרת העתקה צמודה מתקיים

$$(T_P)^* = (T_{P^*})$$

מש"ל

סעיף ב'

נגדיר $V = M^{\mathbb{C}}_{2\times 2}$. תהי $T_P : V \to V$ המוגדרת על־ידי $T_P X = P^{-1} X P$ כאשר

$$P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

נמצא את המטריצה המייצגת את $(T_P)^*$ בבסיס הסטנדרטי של V.

על־פי הסעיף הקודם מתקיים $(T_P)^* = T_{P^*}$, ולפי חישוב

$$P^* = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, (P^*)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

נגדיר $B=(E_1,E_2,E_3,E_4)$ הבסיס הסטנדרטי של V ונחשב:

$$T_{P^*}E_1=(P^*)^{-1}E_1P^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}$$

$$T_{P^*}E_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & -1\\ -1 & -i\end{pmatrix}$$

$$T_{P^*}E_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & -1\\ -1 & i\end{pmatrix}$$

$$T_{P^*}E_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

לכן

$$[T_{P^*}]_B=\begin{pmatrix}1 & -i & i & 1\\ i & -1 & -1 & -i\\ -i & -1 & -1 & i\\ 1 & i & -i & 1\end{pmatrix}$$

שאלה 2

סעיף א'

יהיו $P, Q \in M^{\mathbb{R}}_{n\times n}$ ותהי $U = P + iQ$. נסמן

$$D = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}$$

נוכיח שאם U מטריצה הרמיטית אז D מטריצה סימטרית.

הוכחה. נניח כי U הרמיטית, לכן לפי 2.1.4:

$$U^* = (P + iQ)^* = P^* - iQ^* = P + iQ$$

בשל היות P, Q ממשיות מתקיים:

$$P^* = P^t = P, -Q^* = -Q^t = Q$$

לכן P מטריצה סימטרית ו־Q מטריצה אינטי־סימטרית, ובהתאם:

$$D^t = \begin{pmatrix} P^t & Q^t \\ (-Q)^t & P^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} = D$$

המטריצה D היא סימטרית. **מש"ל**

סעיף ב'

נוכיח כי אם U מטריצה אוניטרית אז D מטריצה אורתוגונלית.

הוכחה. נניח כי U אוניטרית, לכן

$$UU^* = I \to (P + iQ)(P^t - iQ^t) = PP^t + iQP^t - iPQ^t + QQ^t = I \to PP^t + QQ^t = I, QP^t = PQ^t$$

נחשב

$$DD^t = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^t & Q^t \\ -Q^t & P^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^t + QQ^t & PQ^t - QP^t \\ QP^t - PQ^t & QQ^t + PP^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

לכן D מטריצה אורתוגונלית. **מש"ל**

שאלה 3

תהינה A, B מטריצות חיוביות לחלוטין ו־Q מטריצה אוניטרית.

הוכחה. נוכיח כי אם $A = BQ$ אז $A = B$.

יהי λ ערך עצמי של Q ו־u וקטור עצמי עבור λ, לכן $Au = BQu = \lambda Bu$.

נשים לב כי

$$(Au, u) = (BQu, u) = \lambda(Bu, u)$$

ידוע כי A, B חיוביות לחלוטין, לכן $(Au, u), (Bu, u) > 0$, ובהתאם גם

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{(Bu, u)} > 0$$

לכן בכלל גם $\lambda \in \mathbb{R}$, אז לפי טענה 2.4.3 ואי־השוויון מתקיים $\lambda = 1$ וזהו הערך העצמי היחיד של המטריצה.

Q מטריצה אוניטרית ולכן בכלל גם נורמלית, לכן ממשפט 3.1.4 נובע כי Q דומה למטריצה אלכסונית. עוד ידוע כי ל־Q ערך עצמי יחיד 1 ולכן Q דומה למטריצה אלכסונית שאלכסונה הוא 1, דהינו למטריצת היחידה. לכן קיימת מטריצה הפיכה P כך שמתקיים $Q = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$ לכן $Q = I$.

אז גם $A = BQ = BI = B$. מש"ל

שאלה 4

יהי $0 \neq w \in \mathbb{C}^n$ וקטור עמודה. נמצא תנאי הכרחי ומספיק עבור w כדי שהמטריצה $H = I - 2ww^*$ תהיה אוניטרית.

נשים לב כי $H^* = (I - 2ww^*)^* = I^* - (2ww^*)^* = I - 2(ww^*)^*$.

ידוע גם כי $w^* = \overline{w}^t$, וגם $\overline{(ww^*)}^t = (\overline{w}w^t)^t = ww^*$ לפי חוקי שחלוף מהקורס הקודם.

בסך־הכול מתקיים $H^* = H$. נחשב:

$$
\begin{aligned}
HH^* = H^*H = H^2 &= (I - 2ww^*)(I - 2ww^*) \\
&= I^2 - 2 \cdot I \cdot 2ww^* + 4(ww^*)^2 = I - 4ww^* + 4w\|w\|w^* \\
&= I - 4ww^*(1 - \|w\|)
\end{aligned}
$$

אנו יודעים כי $w \neq 0$ ולכן גם $ww^* \neq 0$, בהתאם מתקיים $HH^* = I$ כאשר $\|w\| = 1$ ולכן זהו תנאי הכרחי ומספיק לאוניטריות H.

נשים לב כי במקרה זה H היא מטריצת שיקוף ביחס ל־$\{w\}^\perp$:

$$Hw = Iw - 2ww^*w = w - 2\|w\|w = w - 2w = -w$$

$$\forall v \in \{w\}^\perp : Hv = Iv - 2ww^*v = v - 2w0 = v$$

שאלה 5

יהי V מרחב מכפלה פנימית, $w_1, w_2 \in V$ וקטורים המקיימים

$$(w_1, w_2) = 0, \|w_1\| = \|w_2\| = 1$$

נגדיר העתקה לינארית $T : V \to V$ כך שמתקיים

$$Tv = v - 2(v, w_1)w_1 - 2(v, w_2)w_2$$

סעיף א'

נוכיח כי T צמודה לעצמה ואוניטרית.

הוכחה. על־פי למה 1.2.3:

$$\begin{aligned}
(Tv, u) &= (v - 2(v, w_1)w_1 - 2(2, w_2)w_2, u) \\
&= (v, u) - 2(v, w_1)(w_1, u) - 2(v, w_2)(w_2, u) \\
&= (v, u) - (v, 2(u, w_1)w_1) - (v, (u, w_2)2w_2) \\
&= (v, u) - (v, 2(u, w_1)w_1) - (v, (u, w_2)2w_2) \\
&= (v, u - 2(u, w_1)w_1 - (u, w_2)2w_2) \\
(Tv, u) &= (v, Tu)
\end{aligned}$$

לכן T צמודה לעצמה. נחשב

$$\begin{aligned}
(Tv, Tv) =&(v - 2(v, w_1)w_1 - 2(2, w_2)w_2, v - 2(v, w_1)w_1 - 2(2, w_2)w_2) \\
=&(v, v - 2(v, w_1)w_1 - 2(2, w_2)w_2) \\
&- ((v, w_1)w_1, v - 2(v, w_1)w_1 - 2(2, w_2)w_2) \\
&- 2((v, w_2)w_2, v - 2(v, w_1)w_1 - 2(2, w_2)w_2) \\
=&(v, v) - 2(v, w_1)^2 - 2(v, w_2)^2 \\
&- 2(v, w_1)^2 + 4(v, w_1)^2 + 4(v, w_2)^2 \\
&- 2(v, w_2)^2 + 4(v, w_1)^2 + 4(2, w_2)^2 \\
=&\|v\|^2
\end{aligned}$$

ובהתאם להגדרת הנורמה $\|Tv\| = \|v\|$ ולכן לפי משפט 2.3.2 T אוניטרית. **מש"ל**

סעיף ב'

נבדוק אם T אי־שלילית.

נחשב את (Tw_1, w_1):

$$(Tw_1, w_1) = (w_1, w_1) - 2(w_1, w_1)^2 - 2(w_1, w_2)^2 = \|w_1\| - 2\|w_1\|^2 - 0 = -1$$

לכן T איננה אי־שלילית.