פתרון מטלה 11 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

27 ביולי 2024

שאלה 1

סעיף א'

יהי תחום $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, כאשר מסובבים אותו סביב ציר z הוא יוצא תחום V, דהינו כל נקודה (x_0, z_0) הופכת למעגל במישור $z = z_0$ סביב $(0, 0, z_0)$ ברדיוס x_0.

נוכיח שאם A בעל נפח, אז $\operatorname{vol}(V) = 2\pi \iint_A x\ dx\ dz$.

הוכחה. אם נבחן את V בקורדינטה גלילית, נקבל על־פי ההגדרה כי לכל $(x, z) \in A$, גם $(r, \theta, y) \in V$ לכל θ בתחום, דהינו

$$V = \{(r, \theta, z) \mid (r, z) \in A, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

אם A בעל נפח, אז גם V שכן הוא קבוצה בעלת נפח שמוכפלת בתיבה $[0, 2\pi]$.

נבחין כי לכל קבוצה בעלת נפח X ופונקציית קורדינטה לגלילי $g(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ מתקיים

$$\iiint_X 1\ dx\ dy\ dz = \iiint_{g^{-1}(X)} 1 \cdot |J_g(r, \theta, z)|\ dr\ d\theta\ dz$$

כאשר אנו יודעים כי $|J_g| = |r| = r$, ולכן:

$$\operatorname{vol}(V) = \iiint_V r\ dr\ d\theta\ dz = \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\theta\right) \cdot \left(\iint_A r\ dr\ dz\right)$$

ולכן לאחר חישוב ושינוי הסימון r ל־x נקבל

$$\operatorname{vol}(V) = 2\pi \iint_A x\ dx\ dz$$

$\square$

סעיף ב'

נתונים $0 < b < a$, הגוף הנוצר על־ידי סיבוב העיגול עם רדיוס b ומרכז $(a, 0)$ נקרא טורוס, נחשב את נפחו.

בסעיף הקודם מצאנו כי אם V טורוס הנוצר על־ידי הפרמטרים a, b אז

$$\operatorname{vol}(V) = 2\pi \iint_A x\ dx\ dz$$

כאשר A הוא שטח העיגול שמגדיר את הטורוס, דהינו $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + y^2 \le b^2\}$.

נשים לב שממשפט החלפת משתנים נובע כי החלפות משתנים לינאריות לא משפיעות על ביטוי האינטגרל ולכן נחשב את

$$2\pi \iint_{A'} (x + a)\ dx\ dz, \qquad A' = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le b^2\} = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le b, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

ולכן מהחלפת משתנים לקורדינטה קוטבית נקבל

$$2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^b (r\cos(\theta) + a) r\ dr\ d\theta = 2\pi \int_0^b (r \cdot 0 + a \cdot 2\pi) r\ dr = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{2} a r^2 \mid_0^b = 2\pi^2 a b^2$$

ומצאנו כי $\operatorname{vol}(V) = 2\pi^2 a b^2$.

שאלה 2

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ תיבה ו־$f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
נראה שאם $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה, אז $g \circ f$ אינטגרבילית ב־A.

הוכחה. נבחין כי הרכבת פונקציות רציפות משמרת רציפות ולכן נסיק כי ל־f ול־$g \circ f$ נקודות רציפות ואי־רציפות זהות. ממשפט לבג נובע שקבוצת נקודות אי־הרציפות של f ממידה 0, ונבחן את נקודות אי־הרציפות של $g \circ f$, נוכל לכל $\epsilon > 0$ לבחור סדרת תיבות על־פי מידת 0, ומהרציפות לחסום כל תיבה כזו ונקבל כי נקודות אי־הרציפות של $g \circ f$ היא ממידה 0 וממשפט לבג שוב נקבל ש־$g \circ f$ אינטגרבילית. $\square$

שאלה 3

יהיו X,Y מרחבים מטריים קומפקטיים, נראה שהמרחב המטרי $X\times Y$ יחד עם מטריקת הסכום הוא קומפקטי.

הוכחה. נגדיר ρ_x,ρ_y המטריקות של X,Y בהתאמה, ונגדיר גם $\rho:X\times Y\to\mathbb{R}^+$ על־ידי $\rho(x,y)=\rho_x(x)+\rho_y(y)$ מטריקת הסכום.
ידוע ש־X,Y הם קומפקטיים, אז נבחן שתי סדרות $(x_n)_1^\infty,(y_n)_1^\infty$ בשני המרחבים בהתאמה.
לכן קיימת סדרת אינדקסים (n_k) כך ש־$(x_{n_k}),(y_{n_k})$ מתכנסות שתיהן, ראינו בנייה לסדרת אינדקסים כזו בהרצאה.
נבחן עתה את הסדרה $(a_n)\subseteq X\times Y$ המוגדרת על־ידי $a_n=(x_n,y_n)$, ונבחין כי $a_{n_k}=(x_{n_k},y_{n_k})$, נבדוק אם היא מתכנסת.
נגדיר מטעמי נוחות את הסדרות המקוריות להיות תתי־הסדרות המתכנסות. נגדיר x,y הגבולות של תתי־הסדרות $(x_n),(y_n)$, ויהי $\epsilon>0$, אז קיימים N_x,N_y כך ש־$\forall n>N_x:\rho_x(x_n,x)<\frac{\epsilon}{2}$, וגם $\forall n>N_y:\rho_y(y_n,y)<\frac{\epsilon}{2}$. נגדיר $N=\max\{N_x,N_y\}$ ונקבל

$$\forall n>N:\rho_x(x_n,x),\rho_y(y_n,y)<\frac{\epsilon}{2}\implies\rho_x(x_n,x)+\rho(y_n,y)=\rho((x_n,y_n),(x,y))<\epsilon$$

מצאנו כי (x_n,y_n) מתכנס ולכן נסיק ש־$X\times Y$ קומפקטית סדרתית. $\square$

שאלה 4

תהי $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x, y, z) = 2x + 2y + 3z$$

ותהי הקבוצה $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 3z^2 = 35, x + y + z = 7\}$.
נסביר למה ל־f יש מינימום ומקסימום ב־A ונחשבם.

נבחין כי f היא פולינום ולכן רציפה ומקבלת מינימום ומקסימום בכל תחום סגור, ובפרט בתחום הסגור A.
נבדוק את הנקודות הקריטיות הפנימיות של f ב־A°.

$$\nabla f(x, y, z) = (2, 2, 3)$$

ולכן אין נקודות קריטיות פנימיות, נגדיר $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 35, g_2(x, y, z) = x + y + z - 7$.
פונקציות אלה הן פונקציות האילוץ המגדירות את A ונבחין כי הן בלתי תלויות לינארית ב־f, לכן משפט כופלי לגרנז' חלים ונחשב את הנקודות הקריטיות בקטעים הסגורים.

$$\nabla g_1 = (2x, 2y, 6z), \qquad \nabla g_2 = (1, 1, 1)$$

לכן נקבל $(1, 1, 1) = \lambda_1(x, y, 2z) \implies x = y = 2z$, ובהצבה באילוץ נקבל $x^2 + x^2 + 12x^2 = 35$ ולכן נקבל את הנקודות $\pm(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \sqrt{10})$. שתי הנקודות לא עומדות באילוץ g_2 ולכן אינן בתחום. מהאילוץ השני נקבל את הנקודה $(0, 0, 7)$ אך היא לא עומדת באילוץ הראשון, ולכן נשאר לבדוק את האילוצים יחד בלבד.

$$(2, 2, 3) = \lambda_1(2x, 2y, 6z) + \lambda_2(1, 1, 1)$$

ולכן כבר נוכל לקבוע $x = y$ ובהתאם $z = 7 - 2x$, נציב באילוץ השני ונקבל

$$x^2 + x^2 + 3(49 - 28x + 4x^2) - 35 = 0 \implies x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) = 0$$

אז קיבלנו את הנקודות $(2, 2, 3), (4, 4, -1)$, ובהן $f(2, 2, 3) = 18, f(4, 4, -1) = 13$ ומצאנו ערכים יחידים שיכולים להוות המינימום והמקסימום.

שאלה 5

נוכיח שיש סביבה U של $(2,11)$ כך שיש זוג יחיד של פונקציות רציפות $u,v : U \to \mathbb{R}$ המקיימות

$$x = u^3 - 3uv^2, \qquad y = 3u^2v - v^3$$

לכל $(x,y) \in U$ וכן ש־$u(2,11) = 2, v(2,11) = 1$, ונמצא את הנגזרת של u בנקודה $(2,11)$ בכיוון $(3,4)$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ על־ידי $f(x,y,u,v) = (u^3 - 3uv^2 - x, 3u^2v - v^3 - y)$.
ונגדיר $(x,y) = (2,11) \iff (u,v) = (2,11)$ ולכן נקבל מחישוב ישיר ש־$f(2,11,2,11) = 0$, נחשב את היעקוביאן החלקי עבור u,v ונקבל

$$J = \frac{\partial f}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 3u^2 - 3v^2 & -6uv \\ 6uv & 3u^2 - 3v^2 \end{vmatrix} = 9(u^4 + v^4)$$

ולכן כמובן $J(2,11) > 0$ ומתקיים משפט הפונקציה הסתומה ונסיק כי נוכל לבטא את x,y על־ידי הפונקציות הנתונות בסביבה U כלשהי של $(2,11)$. נסיק מהמשפט גם שהפונקציות יחידות מתוצאת המשפט, דהינו כל פונקציות שנבחר ועומדות בתנאים מקבלות במשפט את אותה הפונקציה (כנביעה ממהלך ההוכחה שהוצג בשיעור).

נעבור לחישוב הנגזרת של u בנקודה. גזרנו וקיבלנו כי $x' = 0 = 3u^2 \cdot u' - 3v^2 \cdot u' = 12u' - 363u'$ ולכן $u'(2,11) = 0$. $\square$

שאלה 6

יהי $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \le x^2 + y^2 \le 4z\}$, נחשב את $\iiint_V zx^2\, dx\, dy\, dz$.

נעביר לקורדינטה גלילית, דהינו $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ ונקבל

$$\iiint_V zx^2\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\substack{z^2 \le r \le 4z \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} zr^2 \cos^2(\theta) \cdot r\, dr\, d\theta\, dz$$

נבחין גם ש־$z^2 \le 4z \iff 0 \le z \le 4$ ובהתאם $0 \le r \le 4$ ונקבל

$$\iiint_{\substack{0 \le z, r \le 4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} zr^3 \cos^2(\theta)\, dr\, d\theta\, dz = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta\right) \cdot \left(\int_0^4 r^3\, dr\right) \cdot \left(\int_0^4 z\, dz\right) = \pi \cdot \frac{1}{4} 4^4 \cdot \frac{1}{2} 4^2 = \pi 2^9$$