פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

28 ביולי 2023

שאלה 1

את הפונקציה $f(x)=\ln x$ מקרבים בקטע $I=[e^2-1,e^2+1]$ על־ידי הפולינום

$$P(x)=\frac{1}{2}+\frac{2x}{e^2}-\frac{x^2}{2e^4}$$

נראה כי

$$|f(x)-P(x)|<\frac{1}{3{(e^2-1)}^3}$$

לכל $x\in I$.

נראה כי $\ln x=\ln(e^2e^{-2}x)=\ln(e^{-2}x)+2=\ln((e^{-2}x-1)+1)+2$

לכן נגדיר $t=\frac{x}{e^2}-1$

אז מההגדרה נובע $\ln x=g(t)=\ln(t+1)+2$

ידוע כי $x\in[e^2-1,e^2+1]$ ולכן

$$\begin{aligned}&e^2-1\le x\le e^2+1\\&e^2-1\le e^2(t+1)\le e^2+1\\&1-e^{-2}\le t+1\le 1+e^{-2}\\&-1<-e^{-2}\le t\le e^{-2}<1\end{aligned}$$

דהינו $t\in(-1,1)$ ולכן על־פי פיתוח טיילור של $\ln(t+1)$ בתחום $(-1,1)$ אשר מוגדר בעמוד 65 כרך ב' פולינום טיילור מסדר 2 של $g(t)$ הוא

$$P_2(t)=g(0)+t-\frac{1}{2}t^2=2+\frac{x}{e^2}-1-\frac{1}{2}{(\frac{x}{e^2}-1)}^2=1+\frac{x}{e^2}-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{e^4}-\frac{2x}{e^2}+1)=\frac{1}{2}+\frac{2x}{e^2}-\frac{x^2}{2e^4}=P(x)$$

לכן על־פי הגדרת השארית

$$R_2(t)=g(t)-P_2(t)$$

על־פי דוגמה 4.4 לכל $t\in(-1,1)$ מתקיים

$$|R_2(t)|<\frac{{|t|}^3}{1-|t|}=\frac{{(\frac{x}{e^2}-1)}^3}{\frac{x}{e^2}}=\frac{{(x-e^2)}^3}{xe^4}$$

מחקירת הפונקציה עולה כי היא מקבלת מקסימום ב־$x=e^2+1$ ולכן

$$|R_2(t)|=|f(x)-P(x)|<\frac{{(e^2+1-e^2)}^3}{(e^2+1)e^4}=\frac{1}{e^6+e^4}$$

ניתן לבדוק ולראות כי מתקיים לכל $x\in[e^2-1,e^2+1]$

$$|f(x)-P(x)|<\frac{1}{3{(e^2-1)}^3}$$

שאלה 2

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בקטע $[a,b]$ ו־$f^{(n+1)}(x)$ רציפה ב־$[a,b]$.

נקבע נקודה $x_0 \in [a,b]$ ונסמן ב־$R_n(x)$ את השארית מסדר n של f ב־x_0.

נוכיח כי לכל $x \in [a,b]$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$$

הוכחה. נגדיר $P_i(x)$ פיתוח טיילור של $f(x)$ סביב x_0. נשים לב כי הפונקציה $f(x)$ עומדת בכל הדרישות לפיתוח זה עבור $0 \le i \le n$.

נוכיח באינדוקציה את הטענה:

בסיס האינדוקציה: מהמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסמלי נובע כי

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0) = f(x) - P_0(x) = R_0(x)$$

ומצאנו כי הטענה נכונה עבור $n=0$.

מהלך האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור $0 < i \le n$, לכן מתקיים

$$f(x) = P_i(x) + \frac{1}{i!}\int_{x_0}^{x} f^{(i+1)}(t)(x-t)^i dt$$

עבור הביטוי נבצע אינטגרציה בחלקים, כאשר

$$u = f^{(i+1)}(t) \qquad dv = (x-t)^i$$

$$du = f^{(i+2)}(t)dt \qquad v = -\frac{1}{i+1}(x-t)^{i+1}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_0}^{x} u(t)v(t)dt \\
&= -\frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(t)(x-t)^{(i+1)}\bigg|_{x_0}^{x} \\
&= -\frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x)(x-x)^{(i+1)} + \frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{(i+1)} \\
&= \frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{(i+1)} \\
f(x) &= P_i(x) + \frac{1}{i!}\left(A - \frac{1}{i+1}\int_{x_0}^{x}(-1)f^{(i+2)}(t)(x-t)^{(i+1)}dt\right) \\
&= P_i(x) + \frac{1}{(i+1)!}\left(f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{(i+1)} + \int_{x_0}^{x} f^{(i+2)}(t)(x-t)^{(i+1)}dt\right) \\
&= P_{i+1}(x) + \frac{1}{(i+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(i+2)}(t)(x-t)^{(i+1)}dt
\end{aligned}$$

והשלמנו את מהלך האינדוקציה. **מש"ל**

שאלה 3

נשתמש בפיתוח מקלורן ונחשב את הגבולות הבאים:

סעיף א'

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-(x+1)}{\tan x-\sin x} \tag{1}$$

נגזור ונחשב פולינומים עבור חלקי הביטוי

$$f(x)=e^x\cos x, f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x, f''(x)=-2e^x\sin x, f^{(3)}(x)=-2e^x(\sin x+\cos x)$$

ונחשב

$$f(0)=1, f'(1)=1, f''(0)=0, f^{(3)}(0)=-2$$

ולכן ערך המכנה הוא

$$e^x\cos x-(x+1)=1+x-2\frac{1}{3!}x^3+R_3(x)-x-1=-\frac{1}{3}x^3+R_3(x)$$

נגזור את הביטוי

$$\begin{aligned}&g(x)=\tan x-\sin x, g'(x)=\cos^{-2}(x)-\cos x,\\&g''(x)=2\sin x\cos^{-3}(x)+\sin x, g^{(3)}(x)=2(\cos^{-2}(x)+-3\sin^2 x\cos^{-4}(x))+\cos x\end{aligned}$$

ונחשב

$$g(0)=0, g'(0)=0, g''(0)=0, g^{(3)}(0)=3$$

ולכן מכנה הביטוי מקיים

$$\tan x-\sin x=\frac{1}{2}x^3+S_3(x)$$

ולכן על־פי משפט 4.7 גבול (1) שקול לגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3+R_3(x)}{\frac{1}{2}x^3+S_3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\frac{x^3}{x^3}+\frac{R_3(x)}{x^3}}{3\frac{x^3}{x^3}+\frac{S_3(x)}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2+0}{3+0}=-\frac{2}{3}$$

סעיף ב'

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2+1)+\ln(n^2-1)-4\ln n}{1-\cos(1/n^2)} \tag{2}$$

נחשב

$$\ln(n^2+1)+\ln(n^2-1)-4\ln n=\ln(\frac{n^4-1}{n^4})=\ln(1-\frac{1}{n^4})$$

לכן ערך גבול (2) שקול לערך הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1-\frac{1}{n^4})}{1-\cos(\frac{1}{n^2})} \tag{3}$$

על־פי הגדרת היינה לגבול פונקציה ערך גבול (3) לערך גבול לפונקציה זהה. על הגבול בתצורת פונקציה נחיל את משפט הרכבת פונקציות מאינפי 1 עבור $f(x) = \frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x^2)}{1-\cos x}$$

הוא גבול המתכנס לאותו ערך כמו גבול (2).

נחשב נגזרות עבור המונה

$$f(x) = \ln(1-x^2), f'(x) = -2\frac{x}{1-x^2}, f''(x) = -2\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

ולכן

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = -2$$

נחשב את נגזרות המכנה

$$g(x) = 1 - \cos x, g'(x) = \sin x, g''(x) = \cos x$$

ומחישוב עולה כי

$$g(0) = 0, g'(0) = 0, g''(0) = 1$$

ונובע כי הגבול שקול על־פי משפט 4.7 לביטוי

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{2!}x^2 + R_2(x)}{\frac{1}{2!}x^2 + S_2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1 + \frac{R_2(x)}{x^2}}{\frac{1}{2} + \frac{S_2(x)}{x^2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

אז גבול (2) ערכו הוא -2.

שאלה 4

תהי $f(x)$ פונקציה אי־שלילית גזירה פעמיים בקטע $[-2,2]$ וידוע שיש ל־$f(x)$ אפס בקטע זה. עוד ידוע כי $f(-2)=f(2)=\pi$.
נוכיח כי קיימת נקודה $c\in(-2,2)$ כך שמתקיים $f''(c)\geq\pi/2$

הוכחה. ידוע כי קיימת נקודה $x_0\in(-2,2)$ עבורה $f(x_0)=0$, וידוע כי זוהי נקודת מינימום של הפונקציה ולכן ממשפט פרמה נובע כי $f'(x_0)=0$ גם כן.
לכן פיתוח טיילור של f סביב x_0 הוא

$$P(x)=0+0(x-x_0)+R_1(x)=R_1(x)$$

כאשר $R_1(x)$ פונקציית השארית.
נציג את השארית בצורת לגראנז' בנקודה $x=2$ ונקבל

$$P(2)=\pi=R_1(2)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x_0)^2$$

ולכן

$$f''(\xi_1)=\frac{2\pi}{(2-x_0)^2}$$

באופן דומה נקבל עבור הצגת לאגרנז' בנקודה $x=-2$ כי

$$f''(\xi_2)=\frac{2\pi}{(2+x_0)^2}$$

נבחין כי על־פי הצגת לאגרנז' $\xi_1,\xi_2\in(-2,2)$.
ידוע כי $-2<x_0<2$, נבחן את התחומים הבאים:

1. כאשר $-2<x_0<0$
מתקיים $0<(x_0+2)^2<4$ ולכן גם

$$f''(\xi_2)=\frac{2\pi}{(2+x_0)^2}>\frac{\pi}{2}$$

2. כאשר $x_0=0$
מתקיים

$$f''(\xi_2)=\frac{2\pi}{(2+0)^2}=\frac{\pi}{2}$$

3. כאשר $0<x_0<2$
מתקיים $0<(2-x_0)^2<4$ ולכן גם

$$f''(\xi_1)=\frac{2\pi}{(2-x_0)^2}>\frac{\pi}{2}$$

אז מצאנו כי קיים מספר $\xi\in(-2,2)$ עבורו

$$f''(\xi)\geq\frac{\pi}{2}$$

מש"ל

שאלה 5

תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בנקודה $x=1$ ומתקיים

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x}{(x-1)^2}=1$$

נמצא את הערכים של f ושל שתי נגזרותיה הראשונות בנקודה $x=1$.

תחילה נבחין כי תנאי כלל לופיטל מתקיימים פעמיים, ולכן מתקיים

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-1}{2x-2}=\lim_{x\to1}\frac{f''(x)}{2}=f''(1)/2=1$$

וקיבלנו $f''(1)=2$.

נבחן את הגבול

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-1}{2x-2}=1$$

הוא כמובן שקול על־פי פיתוח טיילור סביב $x=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(1)+f''(1)(x-1)+R_1(x)-1}{2x-2}=\lim_{x\to1}\frac{f'(1)+2x-3+R_1(x)}{2x-2}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)+f'(1)-1+R_1(x)}{2x-2}$$

ממשפט 4.7 נובע כי $R_1(x)$ איננו משפיע על הגבול, אך אילו $f'(1)-1\neq0$ אז המונה לא יתאפס בנקודה בסתירה לסופיות הגבול, ולכן נובע כי $f'(1)=1$.

לכן לפי פיתוח טיילור ב־$x=1$ של הגבול:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(1)+(x-1)+(x-1)^2-x+R_2(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{f(1)-1+(x-1)^2+R_2(x)}{(x-1)^2}=1$$

באופן דומה $R_2(x)$ מתאפס בגבול, אך אילו $f(1)-1\neq0$ אז המונה איננו מתאפס בסתירה לסופיות הגבול ולכן $f(1)=1$.

מצאנו כי $f(1)=f'(1)=1, f''(1)=2$.

שאלת רשות

נמצא פולינום מקלורן ממעלה 3 של הפונקציה

$$f(x) = (1+x)^{1/x}, f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = e$$

תחילה נשים לב כי

$$f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

על־פי כרך ב' של הספר אנו למדים כי

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x)$$

ולכן

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+R_4(x))} = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{R_4(x)}{x}} = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+R_3(x)} = e(e^{\frac{-x}{2}})(e^{\frac{x^2}{3}})(e^{\frac{-x^3}{4}}) + R_3(x)$$

מפיתוח מקלורן עולה כי

$$\begin{aligned}
e^{-x/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + R_3(x) \\
e^{x^2/3} &= 1 + 0x + \frac{1}{3}x^2 + 0x^3 + R_3(x) \\
e^{-x^3/4} &= 1 + 0x + 0x^2 - \frac{1}{4}x^3 + R_3(x)
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
e(e^{\frac{-x}{2}})(e^{\frac{x^2}{3}})(e^{\frac{-x^3}{4}}) + R_3(x) &= e(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3)(1+\frac{1}{3}x^2)(1-\frac{1}{4}x^3) + R_3(x) \\
&= e(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^3) + R_3(x) \\
&= e(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{21}{48}x^3) + R_3(x)
\end{aligned}$$

ולכן מצאנו כי

$$f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + R_3(x)$$