פתרון ממ"ן 17 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

13 במאי 2023

שאלה 1

תהי f פונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}$ המקבלת מקסימום מקומי בנקודה x_0.

נוכיח כי אם אין ל־f נקודות קיצון נוספות אז f מקבלת מקסימום בנקודה x_0.

הוכחה. ידוע כי x_0 נקודת מקסימום מקומי של x_0, לכן קיימת סביבה של x_0 בה ערך הפונקציה הוא מקסימלי.

נסמן תחום זה כערכים $|x - x_0| \leq \delta$.

זהו כמובן תחום סגור ולכן על־פי המשפט השני של ויירשטראס לפונקציה יש נקודת מקסימום ומינימום. כמובן שנקודת המקסימום בקטע זה מתלכדת עם המקסימום המקומי. אנו יודעים כי לא קיימות נקודות קיצון נוספות, דהינו לכל δ לא קיים בתחום נקודת קיצון נוספת ובהתאם x_0 נשארת נקודת הקיצון ולכן המקסימום.

נניח בשלילה עתה כי קיים x_1 כך ש־$f(x_1) > f(x_0)$.

נבחר δ כך שמתקיים $|x_1 - x_0| \leq \delta$, אז בתחום זה $f(x_0) > f(x)$ לכל x, ובפרט גם $f(x_0) > f(x_1)$ בבתירה לטענה.

אז x_0 נקודת מקסימום של $f(x)$. **מש"ל**

שאלה 2

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). נניח כי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך שמתקיים

$$(f(c)-f(a))(f(b)-f(c)) < 0$$

נוכיח כי קיימת נקודה $t \in (a,b)$ עבורה $f'(t) = 0$.

הוכחה. מאי־השוויון נובע ישירות כי $f(a) < f(c)$ או $f(b) < f(c)$ בלבד.

ללא פגיעה בכלליות ההוכחה נוכל להניח כי אחד השוויונות מתקיימים, ועל־ידי היפוך תפקידי a, b להגיע למצב שהושמט.

נניח כי $f(a) < f(c)$ ולכן לא יתכן כי $f(b) < f(c)$, ואף לא יתכן כי $f(b) = f(c)$ כנביעה מאי־השוויון הנתון, לכן $f(c) < f(b)$.

מהמשפט השני של ויירשטראס נובע כי בתחום $[a,b]$ קיים מינימום ל־f, אך בשל $f(c)$ אנו יכולים להסיק כי הוא לא ב־a או ב־b. נגדיר t נקודת המינימום בקטע $[a,b]$ עבור f, ולכן ממשפט פרמה נובע כי $f'(t) = 0$. **מש"ל**

שאלה 3

תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$ המקיימת $0 \leq f'(x) \leq 1$ לכל $x \in [0,1]$.
נוכיח כי קיימת נקודה $x_0 \in [0,1]$ כך שמתקיים

$$f'(x_0) = \frac{3x_0}{\sqrt{3x_0^2+6}}$$

הוכחה. נגדיר פונקציה $g(x) = \sqrt{3x^2+6}$.

$$g'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+6}}$$

נשים לב כי $g'(0) = 0$, $g'(1) = 1$ וכי $f'(x) = g'(x)$.

ממשפט דארבו נובע כי לכל $x \in [0,1]$ קיים x_0 כך ש-x $= f'(x_0)$. **מש"ל**

שאלה 4

נוכיח כי הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x}\sin\sqrt{x}$$

רציפה במידה שווה בקטע $[0,\infty)$

הוכחה. יהי $\delta > 0$, לכל $x, y \in [0,\infty)$ אשר מקיימים $|x-y| < \delta$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - \sqrt{y}\sin\sqrt{y}| \\
&= \frac{|\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - \sqrt{y}\sin\sqrt{y}| \cdot |\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \sqrt{y}\sin\sqrt{y}|}{|\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \sqrt{y}\sin\sqrt{y}|} \\
&= \frac{|x\sin^2\sqrt{x} - y\sin^2\sqrt{y}|}{|\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \sqrt{y}\sin\sqrt{y}|} \\
&\le \frac{|x-y|}{|\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \sqrt{y}\sin\sqrt{y}|}
\end{aligned}$$

נגדיר גם $x, y \ge 1$ ולכן

$$|f(x)-f(y)| \le \frac{|x-y|}{1} < \delta$$

לכל $\epsilon > 0$ נגדיר $\delta = \epsilon$ ולכן בהתאם להגדרה 5.46 f רציפה במידה שווה בתחום $[1,\infty)$.

ממשפט קנטור עבור התחום $[0,1]$ נובע כי f רציפה במידה שווה בתחום $[0,\infty)$ **מש"ל**

שאלה 5

סעיף א'

תהי f פונקציה גזירה ב־$\mathbb{R}_{\geq a} = [a,\infty)$.

(i) נוכיח כי אם קיים קבוע $m > 0$ כך ש־$f'(x) \geq m$ לכל $x \in \mathbb{R}_{\geq a}$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

הוכחה. ממשפט 8.18 נובע ישירות כי f עולה ב־$\mathbb{R}_{\geq a}$, ולכן מהגדרת גבול פונקציות באינסוף מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

מש"ל

(ii) נוכיח כי אם קיים קבוע $m > 0$ כך ש־$f'(x) \leq -m$ לכל $x \in \mathbb{R}_{\geq a}$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

הוכחה. נובע באופן דומה ממשפט 8.18. מש"ל

סעיף ב'

תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב־$(0,\infty)$ כך ש־$f''(x) > 0$ לכל $x \in (0,\infty)$.

נתון כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

(i) נוכיח כי $f'(x) < 0$ לכל $x \in (0,\infty)$.

הוכחה. ידוע כי $f''(x) > 0$ לכל x בתחום, ולכן משפט 8.18 נובע כי $f'(x)$ עולה לכל $x \in (0,\infty)$.

נניח בשלילה כי ישנה נקודה x_0 אשר בה $f'(x_0) = 0$.

בשל עלייתה בכל נקודה, בהכרח מתקיים לכל $x < x_0$ $f'(x) < 0$ ובאופן דומה לכל $x > x_0$ גם $f'(x) > 0$.

בקטע (x_0,∞) ממשפט 8.18 נובע כי $f(x)$ עולה לכל נקודה, ולכן על־פי הגדרת הגבול לאינסוף

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

בסתירה לטענה כי $f(x)$ מתכנסת לערך ממשי L.

בשל כך לא קיימת נקודה x_0 עבורה $f'(x) = 0$ ולכל $x \in (0,\infty)$ מתקיים $f'(x) < 0$. מש"ל

(ii) נוכיח כי $\sup f'((0,\infty)) = 0$

הוכחה. ממשפט לופיטל נובע כי

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{1}$$

דהינו

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$$

אנו גם יודעים כי $f'(x) < 0$ לכל $x \in (0,\infty)$.

משילוב טענות אלה אנו מקבלים כי לכל $\epsilon > 0$ קיים M כך שלכל $x > M$ מתקיים $-\epsilon < f'(x)$. מצאנו כי לכל $a < 0$ קיים $b \in (0,\infty)$ כך ש־$a \le f'(b)$ ולכן נובע כי

$$\sup f'((0,\infty)) = 0$$

מש"ל

(iii) נוכיח כי

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$$

הוכחה. למעשה כבר הוכחנו זאת בתת־סעיף הקודם. **מש"ל**

שאלה 6

נחשב את הגבולות הבאים או נוכיח כי אינם קיימים.

סעיף א'

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$$

מחישוב ישיר מתקבל

$$1^1 - 1 = 0, \ln 1 - 1 + 1 = 0$$

נשים לב כי

$$(x^x)' = (e^{x\ln x})' = (1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x})e^{x\ln x} = (\ln x + 1)x^x$$

ולכן על־פי משפט לופיטל

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^x - x)'}{(\ln x - x + 1)'} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x + 1)x^x - 1}{\frac{1}{x} - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}x^x + \ln x(\ln x + 1)x^x + (\ln x + 1)x^x}{\frac{-1}{x^2}} && \text{על־פי משפט לופיטל} \\ &= \frac{\frac{1}{1}1^1 + \ln 1(\ln 1 + 1)1^1 + (\ln 1 + 1)1^1}{\frac{-1}{1^2}} \\ &= \frac{1+1}{-1} = -2\end{aligned}$$

ולכן

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = -2$$

סעיף ב'

$$\lim_{x\to 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

נחשב את שני הגבולות החד־צדדיים.

$$\lim_{x\to 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{1} = \infty$$

על־פי משפט הרכבה עבור $t = \frac{1}{x}$ ומשפט לופיטל.

$$\lim_{x\to 0^-} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^t}{1} = 0$$

על־פי חישוב דומה.

מצאנו כי הגבולות החד־צדדיים שונים ולכן בהתאם הגבול לא מתקיים.

סעיף ג'

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}$$

נבדוק את גבול המעריך:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{\frac{2}{\pi}\arctan x}}{\frac{-1}{x^2}} && \text{לופיטל} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-\arctan x(1+x^2)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\arctan x}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} \\
&= \frac{-2}{\pi}
\end{aligned}$$

ולכן ממשפט פונקציית הרכבה נובע

$$\lim_{x\to 0} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

שאלה 7

סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

מקבלת בקטע $(0,\infty)$ מינימום בנקודה $x = 1$.

הוכחה. ממשפט 8.4 נובע כי בנקודת קיצון של $f(x)$ ערך הנגזרת $f'(x)$ הוא 0, לכן נחשב את הנגזרת ונשווה ל־0:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

נשווה ונפתור

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ & \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \\ & -1 + x = 0 \\ & x = 1 \end{aligned}$$

אנו יודעים כי ל־$f'(x)$ נקודת איפוס אחת בלבד, ומהגדרתה אנו גם יודעים כי היא רציפה, לכן ממשפט ערך הביניים נובע ישירות כי $f'(x) < 0$ לכל $x < 1$, ובאופן דומה גם $f'(x) > 0$ לכל $x > 1$.

ממשפט 8.18 מתקבל כי $f(x)$ יורדת כאשר $x < 1$, ועולה כאשר $x > 1$, לכן בכל סביבה שנבחר $x = 1$ היא מינימום מקומי של $f(x)$, דהינו היא נקודת מינימום של הפונקציה **מש"ל**

סעיף ב'

נגדיר

$$g(x) = e^x \ln x$$

נוכיח כי הפונקציה מקבלת כל ערך ממשי בדיוק פעם אחת.

הוכחה. תחילה נראה כי מהגדרות רכיבי $g(x)$ ומאריתמטיקה של הגבולות נובע:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$$

מגבול זה אנו יכולים להסיק כי בסביבה החיובית של 0 $g(x)$ פונקציה עולה.

עוד אנו יכולים להסיק מרכיביה את עלייתה גם בתחום $(1,\infty)$.

ניתן לקבוע כי $g(x)$ עולה לכל $x \in (0,\infty)$ ובהתאם לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $g(x_1) < g(x_2)$, לכן היא מקבלת כל ערך ממשי פעם אחת בלבד. **מש"ל**