# פתרון מטלה 02 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

23 במאי 2024

## שאלה 1

נמצא שתי קבוצות סגורות ולא ריקות $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ כך שהמרחק ביניהן לא מתקבל.

נבחר את הקבוצות $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.

שתי הקבוצות ניתנות לתיאור על־ידי פונקציות $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפות בכל תחומן ולכן הקבוצות מכילות את כל הנקודות הגבוליות שלהן, ובהתאם סגורות.

לעומת זאת, הקבוצות זרות, ונראה כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\rho((x, 0), (x, \frac{1}{x})) = \sqrt{0^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|}$ ולכן $\inf \operatorname{dist}(A, B) = 0$

## שאלה 2

יהי $V$ מרחב וקטורי ו־$\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ שתי נורמות עליו.

תהי $S_1 = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ ונגדיר $A = \{\|v\|' \mid v \in S_1\}$.

נוכיח כי הנורמות שקולות אם ורק אם $\inf A > 0, \sup A < \infty$.

*הוכחה.* **כיוון ראשון:** נניח כי הנורמות שקולות.

לכן קיימים $0 < C_1 \leq C_2$ כך ש־$\forall v \in V : C_1\|v\| \leq \|v\|' \leq C_2\|v\|$.

בפרט

$$\forall v \in S_1 : C_1 \leq \|v\|' \leq C_2 \implies \forall a \in A : C_1 \leq a \leq C_2$$

ובהתאם $\inf A \geq C_1 \geq 0$ וגם $\sup A \leq C_2 < \infty$.

**כיוון שני:** נניח כי $\inf A = a > 0$ ו־$\sup A = b < \infty$.

לכן נובע ישירות $\forall x \in A : a \leq x \leq b$ ובהתאם $\forall v \in S_1 : a\|v\| \leq \|v\|' \leq b\|v\|$.

יהי $u \in V$, אז אנו יודעים כי קיים $u^* \in V$ כך ש־$\|u^*\| = 1$ ו־$\lambda \in \mathbb{R}^+$ כך ש־$u = \lambda u^*$ ולכן גם $\|u\| = \lambda\|u^*\| = \lambda$.

נשים לב עתה כי $u^* \in S_1$ ולכן $a\|u^*\| \leq \|u^*\|' \leq b\|u^*\|$, נכפיל את שלושת האגפים ב־$\lambda$ ונקבל

$$a\|u\| \leq \|u\|' \leq b\|u\|$$

ולכן הנורמות שקולות. $\square$

## שאלה 3

יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי ממימד $d$ מעל $\mathbb{R}$.

### סעיף א'

תהי $T : \mathbb{R}^d \to V$ העתקה לינארית חד־חד ערכית ועל.

נוכיח שהפונקציה $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(u) = \|T(u)\|$ משרה נורמה על $\mathbb{R}^d$.

*הוכחה.* נראה כי שלוש התכונות של נורמה מתקיימות.

1. חיוביות: ידוע כי $T$ הפיכה ולכן גרעינה הוא וקטור האפס בלבד, ובהתאם $\|u\| = 0 \iff f(u) = \|Tu\| = 0$.
2. כפל בסקלר: $\forall u \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u) = \|T(\lambda u)\| = \|\lambda \cdot Tu\| = |\lambda|\|Tu\| = |\lambda| f(u)$.
3. אי־שוויון המשולש: $\forall u, v \in \mathbb{R}^2, f(u+v) = \|T(u+v)\| = \|Tu + Tv\| \leq \|Tu\| + \|Tv\| = f(u) + f(v)$.

ומצאנו כי $f$ מקיימת את התנאים לנורמה ולכן מהווה נורמה ל־$\mathbb{R}^d$. □

יהי $B = (v_1, \ldots, v_d)$ בסיס ל־$V$, ונגדיר נורמה על־ידי

$$\|\alpha v_1 + \cdots + \alpha_d v_d\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |\alpha_1| = d|\alpha_1|$$

נוכיח שהנורמות $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|$ שקולות.

*הוכחה.* בסעיף הקודם הוכחנו ששימוש ב־$T$ מאפשר להשרות נורמה מ־$V$ ל־$\mathbb{R}^2$, ולכן אפשר להגדיר פונצקיה משרה לנורמה לשתי הנורמות הנתונות.

נשתמש בטענה כי כל הנורמות ב־$\mathbb{R}^d$ הן שקולות ונקבל כי גם $\|\cdot\|$ שקולה ל־$\|\cdot\|_1$. □

## שאלה 4

יהיו $X, Y$ מרחבים מטריים ו־$f : X \to Y$ פונקציה חד־חד ערכית ועל.
נוכיח כי שלושת התנאים הבאים שקולים:

1. $f$ היא הומיאומורפיזם.
2. כל קבוצה $U \subseteq X$ היא פתוחה אם ורק אם $f(U)$ פתוחה.
3. כל קבוצה $U \subseteq X$ היא סגורה אם ורק אם $f(U)$ סגורה.

*הוכחה.* **$1 \leftarrow 2$:** נניח כי $f$ היא הומיאומורפיזם.
לכן $f$ רציפה וגם $f^{-1}$ רציפה. לכן נסיק מהתנאי המספיק לרציפות כי $U \subseteq X$ פתוחה אז $f(U)$ פתוחה ולכל $U \subseteq Y$ גם $f^{-1}(U) \subseteq X$ פתוחה.
במסתכם $U \subseteq X$ פתוחה אם ורק אם $f(U) \subseteq Y$ פתוחה.

**$2 \leftarrow 3$:** נניח כי $U \subseteq X$ פתוחה אם ורק אם $f(U) \subseteq Y$ פתוחה.
תהי קבוצה סגורה $A \subseteq X$, אז $A^C$ קבוצה פתוחה ולכן $f(A^C)$ קבוצה פתוחה ב־$Y$.
באופן דומה $f(U)$ קבוצה פתוחה. אילו נניח בשלילה כי $f(U) \cap f(U^C) \neq \emptyset$ נקבל כי ישנם $x \neq y \in X$ כך ש־$f(x) = f(y)$ בסתירה לחד־חד ערכיות, ולכן $f(U) \cap f(U^C) = \emptyset$.
נראה גם $f(U) \cup f(U^C) = Y$ אחרת תכונת העל נסתרת עבור $f$, ולכן נסיק $f(U^C) = (f(U))^C$.
מטענה זו נוכל להסיק ישירות ש־$U \subseteq X$ סגורה אם ורק אם $f(U) \subseteq Y$ סגורה.

**$2 \leftarrow 3$:** נניח כי כל קבוצה $U \subseteq X$ סגורה אם ורק אם $f(U) \subseteq Y$ סגורה אף היא.
נוכל להשתמש בחד־חד ערכיות באופן זהה לסעיף הקודם וכך גם בעל ונקבל כי $f(U^C) = (f(U))^C$ לכל $U \subseteq X$.
נשים לב כי התנאי המספיק לרציפות, שמקור כל קבוצה פתוחה הוא קבוצה פתוחה מתקיים לשני הכיוונים, לכן $f, f^{-1}$ רציפות ובהתאם $f$ הומיאומורפיזם. $\square$

## שאלה 5

יהיו $X, Y$ מרחבים מטריים ו־$f : X \to Y$ פונקציה חד־חד ערכית, על ורציפה.

### סעיף א'

נוכיח שאם $X$ קומפקטי אז $f$ היא הומיאומורפיזם.