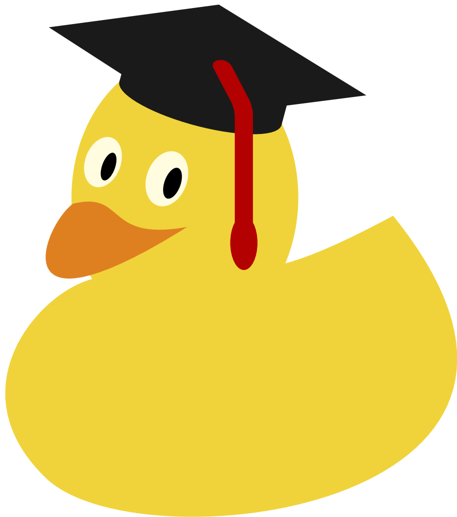
פתרון ממ"ן 14 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

29 ביולי 2023



שאלה 1

סעיף א'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin n\cdot\frac{(2^n+5^n)(n+1)^2}{n!}+\frac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}\right)$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sin n\cdot\frac{(2^n+5^n)(n+1)^2}{n!}\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\frac{(2\cdot 2^n+5\cdot 5^n)(n+2)^2}{(n+1)!}/\frac{(2^n+5^n)(n+1)^2}{n!}<1\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{\sin(n+1)}{\sin n}(2+\frac{3\cdot 5^n}{2^n+5^n})\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}(n+1)<1\end{aligned}$$

ולכן גבול הרכיב הראשון בטור איננו אפס.

ידוע כי $\cos x$ חיובי ואיננו מתאפס עבור $0<x\le 1$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}=0$$

אז מצאנו כי גבול הסדרה איננו אפס, ולכן ממשפט 5.5 נובע כי הטור איננו מתכנס.

סעיף ב'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\cdot(n+1)^n}{n^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n$$

ידוע כי הפונקציה $(1+\frac{1}{n})^n$ מונוטונית עולה ומתכנסת ל-e ולכן לכל n

$$(1+\frac{1}{n})^n<e$$

ומתקיים

$$0\le\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e\cos n}{n}\overset{5.10}{=}e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\tag{1}$$

קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left|\frac{\cos n}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{|\cos n|}}{\sqrt{n}}=0$$

ולכן ממשפט 5.16** נובע ישירות כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$$

הוא טור מתכנס, ולכן מאי־שוויון (1) וממשפט ההשוואה הראשון נובע כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\cdot(1+\frac{1}{n})^n$$

הוא טור מתכנס בהחלט.

סעיף ג'

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$$

הטור מתכנס אם ורק אם האינטגרל הבא מתכנס

$$\int_1^{\infty}\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)dx \tag{1}$$

נוכל לגזור את הביטויים פעמיים ולראות כי על־פי משפט 8.17 מאינפי 1 נובע לכל $1\leq x\leq\infty$

$$1-x\sin\frac{1}{x}\leq\frac{1}{x^2}$$

וידוע כי

$$\int_1^{\infty}x^{-2}dx=\left.-x^{-1}\right|_1^{\infty}=0+1=1$$

לכן ממשפט 3.16 נובע כי האינטגרל (1) מתכנס ולכן גם הטור.

נשים לב כי כלל איברי הטור הם חיוביים ולכן הטור מתכנס גם בהחלט.

שאלה 2

נתונה סדרה (a_n) כך ש־$a_n > 0$ ו־$a_n \neq 1$ לכל n.

נוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$ מתכנס.

הוכחה. נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, על־פי משפט 5.5 הסדרה (a_n) אפסה, ולכן לכמעט כל n מתקיים $0 < a_n < 1$.

בהתאם גם $0 < 1 - s_n < 1$, נגדיר סדרה (b_n) כך שמתקיים

$$b_n = \frac{a_n}{1 - a_n}$$

ולכן לכמעט כל n אי־השוויון $0 < b_n < 1$ מתקיים.

עוד נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 1 - a_n = 1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

ולכן תנאי מבחן ההשוואה השני מתקיימים והטור

$$-\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$$

מתכנס והוכחנו את הכיוון הראשון של הטענה.

נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$ מתכנס.

נניח בשלילה כי (a_n) איננה אפסה, ולכן היא מתכנסת לערך סופי שונה מאפס או לערך לא סופי.

אילו היא מתכנסת לערך סופי שונה מאפס אז גבול הסדרה $\frac{a_n}{a_n - 1}$ הוא מספר שאיננו אפס או אינסוף בסתירה למשפט 5.5 ולנתון.

נניח אם כך כי הגבול של (a_n) הוא אינסוף או מינוס אינסוף, אך בשני מקרים אלה גבול $\frac{a_n}{a_n - 1}$ יהיה 1 בסתירה לאפסות הסדרה.

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ידוע כמובן מהנתון ומהגבול כי לכמעט כל n מתקיים $0 < a_n < 1$, ונוכל להגדיר מחדש את (b_n) כבחלק הראשון של ההוכחה, ולכן נתון כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n - 1}$$

הוא טור מתכנס. נוכל אפוא להשתמש במשפט ההשוואה השני ולהוכיח כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

מצאנו כי שני הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו. **מש"ל**

שאלה 3

הסדרה (u_n) מוגדרת באופן הבא:

$$u_1 = 1, u_{n+1} = u_n \cdot \frac{1+u_n}{1+2u_n}$$

נוכיח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$$

הוא טור מתכנס.

הוכחה. נוכיח באידוקציה כי (u_n) מקיימת $0 < u_n \leq 1$ לכל n:

בסיס האינדוקציה: נתון כי $0 < u_1 = 1 \leq 1$

מהלך האינדוקציה: נניח כי $0 < u_n \leq 1$.

אז כמובן $1 < 1 + u_n \leq 2$ וגם $1 < 1 + 2u_n \leq 3$ ולכן בהתאם

$$0 < \frac{1+u_n}{1+2u_n} \leq \frac{2}{3} \implies 0 < u_n \frac{1+u_n}{1+2u_n} \leq \frac{2}{3} u_n \leq \frac{2}{3} \implies 0 < u_{n+1} \leq 1$$

מצאנו כי (u_n) חסומה ובמהלך ההוכחה אף ראינו כי לכל n מתקיים $u_{n+1} < u_n$, דהינו (u_n) היא סדרה מונוטונית יורדת וחסומה.

על־פי אינפי 1 הסדרה כמובן מתכנסת ואפסה.

נבחין כי

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n \leq (\frac{2}{3})^2 u_{n-1} \leq \cdots \leq (\frac{2}{3})^n u_1 = (\frac{2}{3})^n$$

דהינו u_n קטן מערך סדרה הנדסית שמנתה $2/3$ ובהתאם למשפט ההשוואה הראשון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס.

ממשפט 5.9 נובע כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_{n+1}$ אשר מורכב מסכום סדרות שטוריהן מתכנסים, הוא טור מתכנס.

מחישוב עולה כי

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{1+2u_n} \geq \frac{u_n + u_n^2}{3} \implies 3u_{n+1} \geq u_n + u_n^2 \implies 3u_{n+1} - u_n \geq u_n^2 > 0$$

ולכן באופן דומה גם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ מתכנס. **מש"ל**

שאלה 4

תהי (a_n) סדרה אפסה ויהי $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$k > 1$.

נגדיר לכל $n \geq 1$:

$$b_1 = \sum_{n=1}^{k} a_n, b_{n+1} = \sum_{n=kn+1}^{kn+k} a_n$$

נוכיח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

הוכחה. שלום **מש"ל**