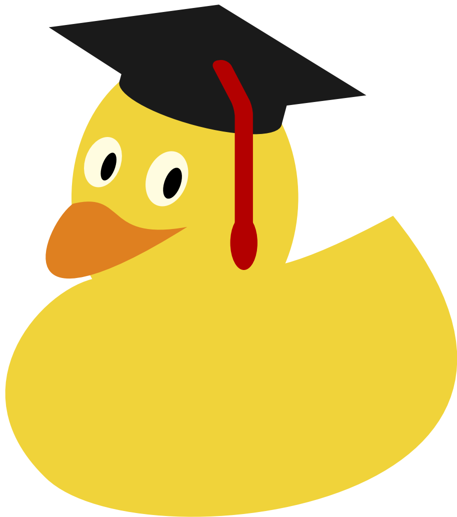
פתרון מטלה 02 — תורת הקבוצות (80200)

19 במאי 2024



שאלה 1

סעיף א'

נוכיח שאם A קבוצה סופית וגם $|A| = n$ אז $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

הוכחה. נקבע ללא פגיעה בכלליות ההוכחה כי הקבוצה $A = [n]$.
נגדיר פונקציה $f : \mathcal{P}(A) \to [2^n]$ על־ידי

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} \begin{cases} 2^i, & i \in X \\ 0, & i \notin X \end{cases}$$

פונקציה זו מתאימה מספר אי־שלילי לכל קבוצה $X \subset A$ על־ידי שימוש בבסיס בינארי, בדומה לייצוג עשרוני, לכן.
לכן נניח שהפונקציה חד־חד ערכית. לכל מספר $r \in [2^n]$ נוכל למצוא יצוג בינארי מהצורה $r_0 2^0 + r_1 2^1 + \ldots + r_n 2^n$ כאשר $r_i \in \{0, 1\}$ לכל $i \in [n]$.
אילו נבנה קבוצה $X = \{i \mid r_i = 1\}$ אז נקבל $f(X) = r$ ולכן הפונקציה גם על.
לכן נובע $|\mathcal{P}(A)| = |[2^n]| = 2^n$ $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי אם $|A| = |B|$ אז גם $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

הוכחה. אילו הקבוצות A, B סופיות אז הטענה נובעת ישירות מהסעיף הקודם.
נניח כי A, B אינן סופיות. משוויון העוצמות נובע שקיימת $f : A \to B$ הפיכה.
נגדיר $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ על־ידי

$$g(X) = \{f(x) \mid x \in A\}, \qquad g^{-1}(X) = \{f^{-1}(x) \mid x \in B\}$$

הראינו פונקציה שמוכיחה כי הפונקציה היא על, ומהחד־חד ערכיות של f נובעת חד־חד ערכיות של g, לכן $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי מתקיים השוויון

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

הוכחה.

$$\forall X \subseteq A \cap B \iff X \subseteq A \land X \subseteq B \iff X \in \mathcal{P}(A) \land X \in \mathcal{P}(B) \iff X \in \mathcal{P}(A \cap B)$$

ולכן $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$. $\square$

סעיף ד'

נוכיח כי

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

הוכחה.

$$\forall X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \iff X \subseteq A \vee X \subseteq B \implies X \subseteq A \cup B \iff X \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

$\square$

נראה דוגמה שבה זו הכלה ממש:

$$A = \{0\}, B = \{1\}, \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\} \subset \mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

סעיף ה'

נמצא קבוצה אינסופית A כך ש־$A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

נגדיר איבר $\emptyset_0 = \emptyset$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $\emptyset_{n+1} = \{\emptyset_n\}$.

עתה נגדיר $A = \{\emptyset_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

נובע כי לכל n גם $\emptyset_n \in A \wedge \emptyset_n \subseteq A$ ולכן גם $\emptyset_n \in \mathcal{P}(A)$ ובמסתכם $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

שאלה 2

נבדוק את הרפלקסיביות, הסימטריה והטרנזיטיביות של היחסים הבאים:

סעיף א'

$$R_1 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q}^2 \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$$

היחס רפלקסיבי שכן לכל $\langle x, x\rangle$ מתקיים $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$.

היחס סימטרי שכן $\forall\langle x, y\rangle \in R_1 : x - y \in \mathbb{Z} \iff y - x \in \mathbb{Z}$.

היחס גם טרנזיטיבי שכן $\forall x, y, z \in R_1 : xR_1y \wedge yR_1z \implies x - y + y - z \in \mathbb{Z}, x - z \in \mathbb{Z} \implies \langle x, z\rangle \in R_1$.

סעיף ב'

$$R_2 = \{\langle A, B\rangle \in (\mathcal{P}(X))^2 \mid A \cap B \text{ אינסופי}\}$$

היחס רפלקסיבי שכן $A \cap A = A$ לכל קבוצה, וסימטרי כנביעה ישירה מסימטריית חיתוך הקבוצות.

היחס לא טרנזיטיבי. נגדיר $X = \mathbb{N}, A = 2\mathbb{N}, B = \mathbb{N}, C = 2\mathbb{N} + 1$ אז $A \cap B = A$ ולכן אינסופית, וגם $B \cap C = C$ אינסופית, אבל $A \cap C = \emptyset$.

סעיף ג'

$$R_2 = \{\langle A, B\rangle \in (\mathcal{P}(X))^2 \mid A \triangle B \text{ אינסופי}\}$$

היחס לא רפלקסיבי, לדוגמה $\mathbb{N} \triangle \mathbb{N} = \emptyset$ והיא איננה אינסופית.

היחס סימטרי כנביעה מסימטריית ההפרש הסימטרי.

היחס גם לא טרנזיטיבי, נראה כי אם $A = C = \mathbb{N}, B = \emptyset$ אז $A \triangle B = C \triangle B = \mathbb{N}$ אינסופי אבל $A \triangle C = \emptyset$.

שאלה 3

סעיף א'

תהי A קבוצה ו־$E \subseteq A \times A$ יחס שקילות.
נוכיח ש־A/E היא חלוקה של A.

הוכחה. יהיו $a, b \in A$ ונגדיר A_a, A_b מחלקות השקילות של a, b בהתאמה.
נשים לב ש־$aEb \iff A_a = A_b$, ולכן נניח מעתה כי $\langle a, b \rangle \notin E$.
נקבל בהתאם כי $A_a \neq A_b$, ונראה שגם $A_a \cap A_b = \emptyset$, שאם לא כן קיים איבר $c \in A$ שמקיים $\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle \in E$ ויחד עם טרנזיטיביות A נקבל סתירה.
כל $a \in A$ מגדיר איזושהי מחלקת שקילות, דהינו אין איבר כך שהוא לא נמצא באף מחלקת שקילות, ולכן איחודן הוא A עצמה.
מצאנו כי A/E היא חלוקה של A. □

סעיף ב'

תהי A קבוצה ו־$Q \subseteq \mathcal{P}(A)$ חלוקה של A, נגדיר

$$E_Q = \{\langle a, b \rangle \in A^2 \mid \exists X \in Q : a \in X \land b \in X\}$$

נוכיח כי E_Q הוא יחס שקילות.

הוכחה. נבדוק את כל התנאים ליחס שקילות:

- רפלקסיביות: $\forall a \in A \exists X \in Q : a \in X \land a \in X \implies \langle a, a \rangle \in E_Q$.
- סימטריה: $\forall \langle a, b \rangle \in E_Q \exists X : b \in X \land a \in X \implies \langle b, a \rangle \in E_Q$.
- טרנזיטיביות: $\forall \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \exists X_1, X_2 : a \in X_1, b \in X_2, b \in X_2, c \in X_2 \implies X_1 = X_2 \implies c \in X_1, \langle a, c \rangle \in E_Q$.

□

סעיף ג'

i.

נוכיח כי לכל יחס שקילות $A \subseteq A \times A$ מתקיים $E_{A/E} = E$.

הוכחה. מצאנו בסעיף א' כי A/E היא חלוקה של A, ובסעיף ב' מצאנו כי היחס המושרה על־ידי חלוקה מהווה יחס שקילות בין רכיבי החלוקה, ולכן נובע

$$\forall \langle a, b \rangle \in E \iff \langle a, b \rangle \in A_{A/E}$$

ומצאנו כי הטענה נכונה. □

.ii

נוכיח כי לכל חלוקה $Q \subseteq \mathcal{P}(A)$ מתקיים $A/E_Q = Q$.

הוכחה. תהי Q חלוקה, מסעיף א' וב' נקבל כי E_Q הוא יחס שקילות וכי A/E_Q חלוקה, נותר להוכיח שהחלוקות אכן זהות.

יהי $q_1, q_2 \in A$ ונניח כי עבור מחלקת שקילות $Q_1 \in Q$ מתקיים $q_1, q_2 \in Q_1$, לכן מהסעיפים הקודמים נקבל $\langle q_1, q_2 \rangle \in Q_1$ ובהתאם q_1, q_2 באותה מחלקת שקילות ב־A/E_Q.

מצאנו כי החלוקות זהות. $\square$

שאלה 4

יהי $R \subseteq A \times A$. נוכיח ש־R יחס שקילות אם ורק אם קיימת קבוצה W ופונקציה $f : A \to W$ כך שמתקיים

$$R = \{\langle a, b\rangle \in A^2 \mid f(a) = f(b)\}$$

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי R הוא יחס שקילות ונגדיר Q_R החלוקה המושרית על־ידי R.

נגדיר $Q_R = W$ ו־$f(a)$ מחזיר את מחלקת השקילות $E \in W$ אשר $a \in E$.

מהגדרה זו נובע כי אם aRb אז גם $f(a) = f(b) = E$ כפי שרצינו.

כיוון שני: נניח כי קיימת קבוצה W ופונקציה f המקיימות את הטענה.

נראה כי ההגדרה של יחס שקילות מתקיימת:

- רפלקסיביות: $\forall a \in A : f(a) = f(a) \implies \langle a, a\rangle \in R$.
- סימטריה: $\forall a, b \in A, \langle a, b\rangle \in R \implies f(a) = f(b) = f(a) \implies \langle b, a\rangle \in R$.
- טרנזיטיביות: $\forall\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle \in R : f(a) = f(b), f(b) = f(c) \implies f(a) = f(c) \implies \langle a, c\rangle \in R$

ומצאנו כי R אכן יחס שקילות. $\square$

שאלה 5

תהינה A, B, C קבוצות כך שמתקיים

$$|A| < |B|, \qquad |B| < |C|$$

נוכיח כי $|A| < |C|$.

הוכחה. תהינה פונקציות חד־חד ערכיות

$$f : A \to B, g : B \to C$$

אלה כמובן קיימות על־פי אי־שוויון העוצמות.

הוכחנו במטלה 1 שהרכבת פונקציות חד־חד ערכיות היא חד־חד ערכית, דהינו $g \circ f : A \to C$ חד־חד ערכית ומתקיים

$$|A| \le |C|$$

ידוע כי $|B| \ne |C|$ ולכן הפונקציה g איננה על, לכן ישנו $x \in C$ כך ש־$\forall binB, g(b) \ne x$, ולכן גם $\forall a \in A : g(f(a)) \ne x$, זאת אומרת שההרכבה איננה על, ולכן נסיק $|A| \ne |C|$, ומחיבור הטענות:

$$|A| < |C|$$

$\square$

שאלה 6

יהיו $A_1,\dots,A_k$ קבוצות בנות־מניה.

סעיף א'

נניח שהקבוצות זרות בזוגות, ונוכיח כי $\bigcup_{i=1}^k A_i$ היא בת־מניה.

הוכחה. בתרגול ראינו כי

$$|\mathbb{N}| = |\overbrace{\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}^{k}|$$

ולכן יש פונקציה חד־חד ערכית ועל מהטבעיים ל־k־יה הסדורה של מספרים טבעיים $f:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$.

הקבוצה $U=\bigcup_{i=1}^k A_i$ היא איחוד זר ולכן לכל איבר $u\in U$ קיים i יחיד כך ש־$u\in A_i$, וכי קיימת פונקציה הפיכה $g_i:A_i\to\mathbb{N}$.

נגדיר פונקציה $g:U\to\mathbb{N}^k$ על־ידי $g(a\in A_i)=g_i(a)\cdot e_i$, כאשר $e_i=\langle\overbrace{0,\dots,0}^{i-1},1,0,\dots\rangle$.

נקבל כי $f\circ g:U\to\mathbb{N}$ היא פונקציה הפיכה ולכן U בת־מנייה. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי U בת־מניה גם כאשר A_i לא זרות.

הוכחה. נגדיר לכל קבוצה A_i קבוצה חדשה $A'_i=\{\langle i,a\rangle \mid a\in A_i\}$.

על־פי ההגדרה החדשה $U'=\bigcup_{i=1}^k A'_i$ הן קבוצות זרות בזוגות, ולכן הקבוצה U' בת־מניה.

ניצור פונקציה $f:U\to U'$ על־ידי בחירת האינדקס המינימלי אשר מקיים $\langle i,a\rangle\in A'_i$ והגדרת $f(a)=\langle i,a\rangle$.

הפונקציה המתקבלת היא חד־חד ערכית ולא על, ונסיק $|U|\le|\mathbb{N}|$.

נבחר קבוצה ספציפית $A_j\subseteq U$, זוהי קבוצה בת־מניה, ולכן קיימת פונקציה חד־חד ערכית כלשהי $g:\mathbb{N}\to A_j$, ולכן היא גם חד־חד ערכית $g:\mathbb{N}\to U$ ככלל, ונסיק $|\mathbb{N}|\le U$.

קיבלנו אם כן ש־$|U|=|\mathbb{N}|$. $\square$