

פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

2 באוגוסט 2023



שאלה 1

נחשב את האינטגרלים הבאים

סעיף א'

דרך א'

$$\int x^3(1-3x^2)^{10} dx$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t = 3x^2$, $dt = 6x dx$

$$\int x^3(1-3x^2)^{10} dx = \int \frac{1}{18} t(1-t)^{10} dt = \frac{1}{18} \int t(t-1)^{10} dt$$

נשתמש שוב בכלל ההצבה עבור $u = t-1$, $du = dt$

$$\begin{aligned} \frac{1}{18} \int t(t-1)^{10} dt &= \frac{1}{18} \int (u+1)u^{10} du = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{12} u^{12} + \frac{1}{11} u^{11} \right) + C \\ &= \frac{1}{216} (t-1)^{12} + \frac{1}{198} (t-1)^{11} + C = \frac{1}{216} (t-1)^{12} + \frac{1}{198} (t-1)^{11} + C \\ &= \frac{1}{216} (3x^2-1)^{12} + \frac{1}{198} (3x^2-1)^{11} + C \end{aligned}$$

ומצאנו כי

$$\int x^3(1-3x^2)^{10} dx = \frac{1}{216} (3x^2-1)^{12} + \frac{1}{198} (3x^2-1)^{11} + C$$

דרך ב'

דרך נוספת אפשרית שאשמח לקבל עליה ביקורת.

$$\begin{aligned} \int x^3(1-3x^2)^{10} dx &= \int x^3 \left(\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-3x^2)^k \right) dx && \text{פירוק בינומי} \\ &= \int \left(\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-3)^k x^{2k+3} \right) dx && \text{כינוס מקדמים} \\ &= C + \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \frac{1}{2k+4} (-3)^k x^{2k+4} && \text{נחשב איבר איבר} \\ &= C + x^4 \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \frac{(-3)^k}{2k+4} x^{2k} \end{aligned}$$

סעיף ב'

$$\int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

נשים לב כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה מתקיים $x = \sin \arcsin x$ ולכן

$$\int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin \arcsin(x) e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t = \arcsin x, dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{\sin \arcsin(x) e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sin(t) e^t dt$$

נשתמש באינטגרציה בחלקים עבור $u' = \sin t, v = e^t$

$$\int \sin(t) e^t dt = -\cos(t) e^t + \int \cos(t) e^t dt$$

ושוב אינטגרציה בחלקים עבור $u' = \cos t, v = e^t$

$$-\cos(t) e^t + \int \cos(t) e^t dt = -\cos(t) e^t + \sin(t) e^t - \int \sin(t) e^t dt = \int \sin(t) e^t dt$$

ומהשוויון נובע

$$\int \sin(t) e^t = \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t)) e^t + C = \frac{1}{2}(\sin(\arcsin x) - \cos(\arcsin x)) e^{\arcsin x} + C$$

ועל-פי זהויות טריגונומטריות

$$\int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2}) e^{\arcsin x} + C$$

סעיף ג'

$$\int (x-1)^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} (x-1)^2 - \int \frac{1}{2} e^{2x} (2x-2) dx \quad u' = e^{2x}, v = (x-1)^2 \quad \text{אינטגרציה בחלקים עבור}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} (x-1)^2 + \int e^{2x} dx - \int e^{2x} x dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} (x-1)^2 + \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} x + \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \quad u' = e^{2x}, v = x \quad \text{אינטגרציה בחלקים עבור}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - 3x + 2) + \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - 3x + 2\frac{1}{2}) + C$$

סעיף ד'

$$\int \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}} dx$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t = x+2, dt = dx$

$$\int \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}} dx = \int \frac{4t-7}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt = 2 \int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt - 7 \int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt$$

נחשב את האינטגרלים המתקבלים בנפרד:

$$\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $u = t^2 + 1, du = 2t dt$

$$\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt = \int \frac{du}{u^{3/2}} = \int u^{-3/2} du = -2u^{-1/2} = \frac{-2}{\sqrt{t^2+1}}$$

עבור האינטגרל

$$\int \frac{1}{\sqrt{(t^2 + 1)^3}} dt$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t = \tan u$, $dt = \frac{du}{\cos^2 u}$ ונקבל

$$\int \frac{1}{\sqrt{(t^2 + 1)^3}} dt = \int \frac{1}{\cos^2 u \sqrt{(\tan^2 u + 1)^3}} du = \int \frac{1}{\cos^2 u \sqrt{(\cos^{-2})^3}} du = \sin u = \sin \arctan t + C = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + C$$

ולכן עבור האינטגרל המקורי נקבל

$$2 \int \frac{2t}{\sqrt{(t^2 + 1)^3}} dt - 7 \int \frac{1}{\sqrt{(t^2 + 1)^3}} dt = 2 \frac{-2}{\sqrt{t^2 + 1}} - 7 \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{-7t - 4}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{-7x - 18}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} + C$$

נציב ונחשב

$$\int_{-2}^{-1} \frac{4x + 1}{\sqrt{(x^2 + 4x + 5)^3}} dx = \left. \frac{-7x - 18}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} \right|_{-2}^{-1} = \frac{-7(-1) - 18}{\sqrt{(-1)^2 + 4(-1) + 5}} - \frac{-7(-2) - 18}{\sqrt{(-2)^2 + 4(-2) + 5}} = 4 - \frac{11}{\sqrt{2}}$$

סעיף ה'

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|} (1 + x^3 + \sin x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|} (x^3 + \sin x) dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|} dx$$

נגדיר

$$f(x) = e^{|x|} (1 + \sin x)$$

מחישוב עולה כי

$$f(-x) = e^{|-x|} (-x^3 - \sin x) = -f(x)$$

ולכן

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \int_{-\ln 2}^0 f(x) dx + \int_0^{\ln 2} f(x) dx = - \int_0^{\ln 2} f(x) dx + \int_0^{\ln 2} f(x) dx = 0$$

עוד נראה כי

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|} dx = \int_{-\ln 2}^0 e^{|x|} dx + \int_0^{\ln 2} e^{|x|} dx = \int_{-\ln 2}^0 e^{-x} dx + \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2 \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2(e^{\ln 2} - 1) = 2$$

ולכן

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|} (1 + x^3 + \sin x) dx = 2$$

שאלה 2

עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים נקבע אם הוא מתכנס בהחלט, בתנאי, או כלל לא.

סעיף א'

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$$

ידוע כי $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ולכן

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx + \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x} - 0) = \infty$$

אבל גם $\cos^2 x = \sin^2(x + \pi/2)$, לכן שני האינטגרלים המחוברים מתבדרים יחד או מתכנסים יחד, ואנו יודעים כי חיבורם מתבדר, ולכן גם

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx = \infty$$

דהינו האינטגרל מתבדר.

סעיף ב'

$$\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)(\ln(x + 1))^3} dx$$

נשים לב כי

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)(\ln(x + 1))^3} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{(x^2 - 1) \ln^3 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1/x}{2x \ln^3 2} = \frac{1}{2 \ln^3 2}$$

(1) רציפות

ולכן כל אינטגרל מהצורה

$$\int_1^k \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)(\ln(x + 1))^3} dx$$

כאשר $k > 1$ הוא אינטגרל מתכנס, שכן זהו אינטגרל מערכים סופיים.

נגדיר $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ כי הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)(\ln(x + 1))^3} / g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(x^2 - 1)(\ln(x + 1))^3} = 0$$

הוא גבול מתכנס לאפס, ולכן ממשפט 3.16* נובע כי האינטגרל הנתון מתכנס אם ורק אם האינטגרל של $g(x)$ מתכנס.

נחשב על-פי אינטגרציה בחלקים

$$\int_k^\infty g(x) = \frac{-\ln x}{x} - \int_k^\infty \frac{-1}{x^2} = \left. \frac{-\ln x - 1}{x^2} \right|_k^\infty = 0 - \frac{-\ln k - 1}{k^2}$$

מצאנו כי האינטגרל מתכנס בהתאם למשפט ההשוואה הגבולי.

נשים לב כי הפונקציה הנתונה חיובית לכל ערך בתחום, ולכן האינטגרל מתכנס בהחלט.

סעיף ג'

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) \sin(2\sqrt{x}) dx$$

בתחום $x \in (0, 1]$ מהזהות $t \geq \sin t$ על הגבול $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t / t$ נובע כי $0 < \sin(2\sqrt{x}) / \sqrt{x} \leq 1$ לכל x בתחום, ולכן

$$0 < \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) \sin(2\sqrt{x}) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt[4]{x} + 1) \cdot 1 = \frac{1}{x^{3/4}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

מלמה 3.2 נובעת התכנסות האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{3/4}} + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

נשים לב כי כלל תנאי מבחן ההשוואה חלים ונובעת התכנסות האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) \sin(2\sqrt{x}) dx$$

נגדיר

$$f(x) = \frac{1}{x^{3/4}} + \frac{1}{x^{1/4}}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(2\sqrt{x})$$

מאינפי 1 אנו למדים כי הפונקציה $f(x)$ היא מונוטונית יורדת, ומחשוב עולה כי מתקיים הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

נחשב את האינטגרל

$$\int_1^x g(t) dt$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t = u^2, dt = 2u du$ ונקבל כי

$$\int_1^x g(t) dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{u} \sin(2u) \cdot 2u du = \int_1^{\sqrt{x}} 2 \sin(2u) du = -\cos(2u) \Big|_1^{\sqrt{x}} = -\cos(2\sqrt{x}) + \cos(2)$$

מצאנו כי האינטגרל חסום לכל $x \geq 1$, ולכן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מקיימות את תנאי מבחן דיריכלה ונובעת התכנסות האינטגרל

$$\int_1^\infty f(x)g(x) dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) \sin(2\sqrt{x}) dx$$

מאדיטיביות האינטגרל נובע כי שני האינטגרלים המתכנסים מקיימים

$$\int_0^1 \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) \sin(2\sqrt{x}) dx + \int_1^\infty \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) \sin(2\sqrt{x}) dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) \sin(2\sqrt{x}) dx$$

ולכן האינטגרל מתכנס.

נשים לב כי

$$\int_1^\infty \left| \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) \sin(2\sqrt{x}) \right| dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) |\sin(2\sqrt{x})| dx$$

נבחין כי מתקיים בתחום

$$\frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) |\sin(2\sqrt{x})| \geq \frac{1}{\sqrt{x}} |\sin(2\sqrt{x})|$$

ומדוגמה 3.12 נוכל להסיק את התבדרות האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} |\sin(2\sqrt{x})| dx$$

ולכן ממבחן השוואה נובע כי האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} (\sqrt[4]{x} + 1) |\sin(2\sqrt{x})| dx$$

לא מתכנס ובהתאם האינטגרל המקורי מתכנס בתנאי.

שאלה 3

תהי פונקציה f אינטגרלית בקטע $[0, a]$ לכל $a > 0$ ומתקיים $|f(x)| \leq \sqrt{x}$ לכל $x \geq 0$. נגדיר $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, ונוכיח כי האינטגרל המוגדר על-ידי

$$\int_0^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx \quad (1)$$

מתכנס.

הוכחה. ידוע כי $|f(x)| \leq \sqrt{x}$ לכל $x \geq 0$ ולכן ממבחן ההשוואה נובע אי השוויון

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^x \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

נקבל גם

$$\frac{F(x)}{\pi + x^3} \leq \frac{2\sqrt{x^3}}{3\pi + 3x^3} < \frac{2\sqrt{x^3}}{3x^3} = \frac{2}{3\sqrt{x^3}} \quad (2)$$

מטענה 3.2 נובעת התכנסות האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{2}{3\sqrt{x^3}} dx$$

ולכן ממבחן ההשוואה נובעת התכנסות האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx$$

כמור־ן נבחן את האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx$$

זהו כמובן אינטגרל מסוים של פונקציה רציפה ולכן הוא מתכנס ובעל ערך סופי, ומתקיים

$$\int_1^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx + \int_0^1 \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx = \int_0^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx$$

דהינו מצאנו כי האינטגרל (1) מתכנס.

מש"ל

שאלה 4

סעיף א'

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה וחיובית בקטע $[a, \infty)$.

נוכיח כי אם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז קיים $0 < c < 1$ כך שהאינטגרל

$$\int_a^\infty (f(x))^p dx$$

מתכנס לכל $c \leq p \leq 1$.

הוכחה. מהתנאי ההכרחי אנו יכולים להסיק כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

מהגבול ומרציפותה בתחום ניתן להסיק ממשפט ויירשטרס השני כי יש לפונקציה מקסימום M ,

ומהגבול ניתן להסיק כי אפשר לחסום את הפונקציה בפונקציה מהצורה $M_1 x^{-b}$, כאשר $b > 1$ קבוע כלשהו, וכאשר $M_1 \geq M$.

אז מתקיים

$$0 < f(x) < M_1 x^{-b}$$

לכל $x \geq a$ נבחין כי גם

$$0 < f^p(x) < M_1^p x^{-bp}$$

לכל $0 < p$, ומלמה 3.12 נסיק כי אם $bp > 1$ אז האינטגרל $\int_a^\infty M_1^p x^{-bp} dx$ מוגדר גם הוא ובעקבותיו גם $\int_a^\infty f^p(x) dx$.

אז מצאנו כי עבור $1 < p \leq \frac{1}{b}$ האינטגרל מוגדר, נגדיר $\frac{1}{b} < c < 1$ ערך המקיים את התנאי.

מש"ל

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם $f(x)$ רציפה ב- $[a, \infty)$, האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס וקיים הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$,

אז האינטגרל $\int_a^\infty f^2(x)dx$ מתכנס.

הוכחה. נגדיר

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

נחשב

$$\int f(x)dx = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \int \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$$

ונשים לב כי

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

ולכן ממבחן ההשוואה ולמה 3.12 נובע כי

$$\int_1^\infty f(x)dx = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) - \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$$

הוא אינטגרל מתכנס. נבחן את האינטגרל של $f^2(x)$

$$\int f^2(x)dx = \int \frac{\cos^2 x}{x} dx = \ln x \cos^2 x - \int \ln x \cdot 2 \cos x \sin x dx = \ln x \cos^2 x - \int \ln x \sin 2x dx$$

עוד נראה כי

$$\ln x \sin 2x \leq \ln x$$

ולכן ממבחן ההשוואה נובע ישירות כי

$$\ln x \cos^2 x - \int \ln x \sin 2x dx \geq \ln(\cos^2(x)) - \frac{1}{x}$$

כמובן שהגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(\cos^2(x)) - \frac{1}{x} = \infty$ ולכן ממבחן ההשוואה נובעת התבדרות האינטגרל

$$\int_1^\infty f^2(x) dx$$

מש"ל

מצאנו כי האינטגרל מתכנס בסתירה לטענה.

שאלה 5

תהינה $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות ב- $[0, \infty)$ אשר עבורן מתקיים:

$g(x)$ חסומה ובעלת נגזרת רציפה ב- $[0, \infty)$ כך ש- $g'(x) < g(x)$ לכל $x \geq 0$,

קיים M כך שמתקיים לכל $t \geq 0$

$$\left| \int_0^t e^x f(x) dx \right| \leq M$$

נוכיח את התכנסות האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

הוכחה. נגדיר $g_0(x) = \frac{g(x)}{e^x}$, ונחשב את נגזרתה

$$g'_0(x) = \frac{g'(x)e^x - g(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{g'(x) - g(x)}{e^x}$$

נתון כי $g'(x) - g(x) < 0$ ולכן g_0 יורדת לכל $x \geq 0$.

$g_0(x)$ היא חלוקת פונקציה חסומה בפונקציה מונוטונית עולה, ולכן

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_0(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

מצאנו כי $g_0(x)$ מקיימת את התנאי הראשון של מבחן דיריכלה.

נגדיר $f_0(x) = e^x f(x)$. נתון כי

$$\left| \int_0^t f_0(x) dx \right| \leq M$$

דהינו האינטגרל של $f_0(x)$ חסום לכל ערך, ולכן f_0 ממלאת את התנאים למבחן דיריכלה יחד עם $g_0(x)$.

עתה נבחין כי

$$f_0(x)g_0(x) = f(x)g(x)\frac{e^x}{e^x} = f(x)g(x)$$

ולכן נובע כי מתכנס האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

מש"ל

שאלת רשות

יהיו $0 < a < b$. נוכיח את התכנסות האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

הוכחה. נראה כי

מהגדרת האינטגרל המורחב

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx - \int_0^\infty \frac{e^{-bx}}{x} dx \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \int_k^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx - \int_k^\infty \frac{e^{-bx}}{x} dx \end{aligned}$$

נשים לב כי הביטויים שקולים

$$\left| \begin{array}{ll} t_1 = x/a & dt_1 = dx/a \\ t_2 = x/b & dt_2 = dx/b \end{array} \right| = \lim_{k \rightarrow 0} \int_{ak}^\infty \frac{e^{-t_1}}{t_1} dt_1 - \int_{bk}^\infty \frac{e^{-t_2}}{t_2} dt_2$$

על-פי גבול אינטגרל מוכלל ניתן לראות כי

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \int_{ak}^{bk} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

נשים לב כי k קבוע באינטגרל

$$\left| \begin{array}{l} t = ku \\ dt = k du \end{array} \right| = \lim_{k \rightarrow 0} \int_a^b \frac{e^{-ku}}{ku} k du$$

קיבלנו ביטוי עבורו הפונקציה הפנימית בלבד תלויה ב- k

$$= \int_a^b \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{-ku}}{u} du$$

$$= \int_a^b \frac{1}{u} du = \ln u \Big|_a^b = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

מצאנו כי האינטגרל מוגדר וכי

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{a}{b}$$

מש"ל