פתרון מטלה 10 — מבוא ללוגיקה, 80423

14 בינואר 2025

שאלה 1

ניזכר בהוכחה מהתרגול, ובפרט בענף b מההוכחה האחרונה.

סעיף א'

נוכיח ש־b הוא קבוצת הינטיקה הכוללת את $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$.

הוכחה. נתון לנו כי Π חסכונית, וכן מהגדרת f והענף b אנו יודעים (הוכח בתרגול) שלכל $\psi \in b \implies \psi \in \Pi$, ולכן נשתמש בתכונות קבוצה חסכונית כדי להוכיח ש־b קבוצת הינטיקה. כהערה, בתרגיל הקודם מספרנו את התכונות של קבוצת הינטיקה לצורך קריאות ההוכחה, מספור זה הוא לפי הסדר בו התנאים מופיעים בתרגיל הקודם.

1. אם P פסוק יסודי אז מהגדרת הרקורסיה אין סתירה בענף ולכן $\neg P \notin b$.
2. אם $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Pi$ אז מהגדרת חסכונית $\psi_1, \psi_2 \in \Pi$, באופן דומה אם $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \in \Pi$ אז שלילת אחד הפסוקים ב־Π, ואנו עומדים בהגדרה של קבוצת הינטיקה לגימום.
3. אם $\psi_1 \vee \psi_2 \in \Pi$ אז מהעובדה שבענף אין סתירות נובע ש־$\psi_1 \in b$ או $\psi_2 \in b$ כפי שרצינו. אם $\neg(\psi_1 \vee \psi_2) \in \Pi$ אז $\psi_1 \vee \psi_2 \in \Pi$ ולכן בשל החוסר בסתירות $\neg\psi_1 \in b$ ואנו עומדים בהגדרה.
4. אם $\psi_1 \to \psi_2 \in \Pi$ אז $\psi_1 \in \Pi$ ולכן גם $\psi_1 \in b$, אם $\neg(\psi_1 \to \psi_2) \in \Pi$ אז $\psi_1 \to \psi_2 \in \Pi$ ומחוסר הסתירות ב־b גם $\psi_1, \neg\psi_2 \in b$.
5. אם $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2 \in \Pi$ אז $\psi_1, \psi_2, \neg\psi_1, \neg\psi_2 \in \Pi$ ומחוסר הסתירות $\psi_1, \psi_2 \in b$ או $\neg\psi_1, \neg\psi_2 \in b$ בהתאם להגדרה. אם שלילת הגרירה הדו־כיוונית ב־Π אז באופן דומה נקבל את התנאי עבור $\psi_1, \neg\psi_2$ או $\neg\psi_1, \psi_2$ אם שלילת הגרירה הדו־כיוונית ב־Π אז באופן דומה נקבל את התנאי עבור $\psi_1, \neg\psi_2$ או $\neg\psi_1, \psi_2$.

בהתאם מצאנו כי כל התנאים של קבוצת הינטיקה נובעים מההגדרה של קבוצה חסכונית יחד עם העובדה ש־b ענף ללא סתירות (שאם לא כן הוא לא הייתה הצדקה להגדרתו).

נבחין ש־$\neg\varphi \in b$ מההגדרה של הענף, וכן בתרגול הנחנו $\sigma \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Pi$ ולכן כמובן $\Sigma \subseteq b$. □

סעיף ב'

נסיק שלכל Π חסכונית, φ ו־Σ, כך ש־$\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq \Pi$ ו־$\Sigma \models \varphi$ קיים עץ היסק של φ מ־Σ המכיל רק פסוקים מ־Π.

הוכחה. נשתמש בהוכחה מהתרגול ונקבל שאו שיש עץ היסק סופי המקיים את התנאי המבוקש, או שבעץ היסק זה יש ענף אינסופי b כפי שתואר בתרגול.

ענף זה כפי שראינו זה עתה הוא קבוצת הינטיקה ולכן לפי שאלה 1 של המטלה הקודמת הוא ספיק, כלומר קיים $v : L \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ כך ש־$\forall\psi \in b, \bar{v}(\psi) = \mathbb{T}$. אבל φ הערכת אמת שמספקת את Σ, ונתון שבמקרה זה $\bar{v}(\varphi) = \mathbb{T}$, אבל $\neg\varphi \in b$ ולכן גם $\bar{v}(\neg\varphi) = \mathbb{T}$, כלומר הגענו לסתירה, וענף זה בהכרח מכיל סתירה.

בשל הופעת הפסוק נוכל בפרט לקבל סתירה לאינסופיות, כלומר קיבלנו עץ היסק שבו יש סתירה בכל ענף וגם כל ענף הוא סופי כפי שרצינו. □

שאלה 2

תהי L שפה לתחשיב יחסים.

סעיף א׳

נראה שאם φ פסוק אז לכל משתנה x מתקיים $\varphi \vdash \forall x \varphi$.

הוכחה. נבחין ש־x איננו משתנה חופשי ב־φ שכן φ פסוק, לכן נוכל לקבוע ש־$\varphi = \varphi_t^x$ לכל $t \in \mathrm{term}_L$.
בהתאם נוכל לבנות את עץ ההיסק הבא

1. $\neg\varphi$
2. $\forall x \varphi$, הוספת הנחה
3. φ_c^x, הצבה עבור קבוע כלשהו c
4. φ, כלל החזרה, שימוש בזהות שמצאנו זה עתה, וסתירה

ולכן $\varphi \vdash \forall x \varphi$. □

סעיף ב׳

נניח ש־L' שפה המתקבלת מ־L על־ידי הוספת סימני קבוע מכמות כלשהי $\omega \leq$.
נניח ש־Σ תורה ב־L וש־φ פסוק ב־L. נסמן $\Sigma \vdash_{L'} \varphi$ כאשר יש עץ היסק של φ מ־Σ ב־L'.
נראה שאם $\Sigma \vdash_{L'} \varphi$ אז $\Sigma \vdash_L \varphi$.

הוכחה. נניח שבעץ ההיסק שמעיד על $\Sigma \vdash_{L'} \varphi$ ישנה הופעה של קבוצת הפסוקים $C = \{c_i \mid i \leq \alpha < \omega\} \subseteq \mathrm{const}_{L'} \setminus \mathrm{const}_L$.
נבחין כי מסופיות הפסוק ועץ ההיסק, $|C| < \omega$, ולכן נוכל לבצע תהליך אינדוקטיבי על־ידי שימוש במשפט ההכללה על־ידי פסוקים ולהסיק שגם $\Sigma \vdash_{L'} \forall c_1 \ldots \forall c_\alpha \varphi$. מהמשפט c_i לא מופיע בעץ ההיסק המעיד על כך לכל $i \leq \alpha$, ולכן עץ היסק זה מעיד גם על $\Sigma \vdash_L \forall c_1 \ldots \forall c_\alpha \varphi$. נוכל אם כן להשתמש בסעיף א׳ כדי לבצע עוד תהליך אינדוקטיבי שיניב לנו את הטענה $\Sigma \vdash_L \varphi$ כפי שרצינו. □

סעיף ג׳

נסיק שאם Σ עקבית כתורה ב־L אז היא עקבית כתורה ב־L'.

הוכחה. אילו נניח ש־Σ לא עקבית כתורה ב־L' אז $\Sigma \vdash_{L'} \bot$. אבל מסעיף ב׳ נובע ישירות ש־$\Sigma \vdash_L \bot$ בסתירה לעקביות Σ תחת L. □

שאלה 3

תהי Σ קבוצת פסוקים ב־L.
נגדיר $E \subseteq \mathrm{form}_L^2$ על־ידי

$$\alpha E \beta \iff \Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

נראה ש־E יחס שקילות.

הוכחה. נבחן את כלל התכונות של יחס שקילות.

עבור רפלקסיביות, נבנה את עץ ההיסק הבא

1. $\neg(\alpha \leftrightarrow \alpha)$
2. פיצול למקרים על α
   (a) α
   (b) $\neg\alpha$, כללי גרירה דו־כיוונית מ־1, וסתירה
   (a) $\neg\alpha$
   (b) α, כללי גרירה דו־כיוונית מ־1, וסתירה

ולכן $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha$ ובפרט $\Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha$ ואכן $\forall \alpha \in \mathrm{form}_L, \alpha E \alpha$.

עבור סימטריה נניח ש־$\alpha, \beta \in \mathrm{dom}\, E$ כך ש־$\alpha E \beta$, לכן $\Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.
בנוסף נבנה עץ היסק ל־$\{\alpha \leftrightarrow \beta\} \vdash \beta \leftrightarrow \alpha$ ל־$\Sigma \cup$:

1. $\neg(\beta \leftrightarrow \alpha)$
2. $\alpha \leftrightarrow \beta$, הוספת הנחה
3. פיצול למקרים על α
   (a) α
   (b) β, חוקי גרירה דו־כיוונית ל־2
   (c) $\neg\beta$, חוקי גרירה דו־כיוונית ל־1, וסתירה
   (a) $\neg\alpha$
   (b) $\neg\beta$, חוקי גרירה דו־כיוונית ל־2
   (c) β, חוקי גרירה דו־כיוונית ל־1, וסתירה

ולכן מטרנזיטיביות ההיסק נובע $\Sigma \vdash \beta \leftrightarrow \alpha$ וכן $\alpha E \beta \implies \beta E \alpha$.

עבור טרנזיטיביות נניח ש־$\alpha E \beta, \beta E \gamma$ ונראה ש־$\Sigma \cup \{\alpha \leftrightarrow \beta, \beta \leftrightarrow \gamma\} \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$,

1. $\neg(\alpha \leftrightarrow \gamma)$
2. $\alpha \leftrightarrow \beta$, הוספת הנחה
3. $\beta \leftrightarrow \gamma$, הוספת הנחה
4. פיצול למקרים על α
   (a) α
   (b) β, כללי גרירה דו־כיוונית ל־2
   (c) γ, כללי גרירה דו־כיוונית ל־3
   (d) $\neg\gamma$, כללי גרירה דו־כיוונית ל־1, וסתירה
   (a) $\neg\alpha$

(b) $\neg\beta$, כללי גרירה דו־כיוונית ל־2

(c) $\neg\gamma$, כללי גרירה דו־כיוונית ל־3

(d) γ, כללי גרירה דו־כיוונית ל־1, וסתירה

ולכן מטרנזיטיביות היסק $\Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$ וכן $\alpha E \gamma$ כפי רצינו להראות, ו־E אכן יחס שקילות. $\square$

שאלה 4

סעיף א'

נוכיח שאין פסוק ב־$L_=$ כך ש־$\mathcal{A}$ מבנה ל־$L_=$ מספקת אותו אם ורק אם היא סופית.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים פסוק φ כך ש־$|A| < \omega \iff \mathcal{A} \models \varphi$.
ניזכר ב־$\varphi_{\geq n}$ שהגדרנו במטלות הקודמות ומקיים $|A| \geq n \iff \mathcal{A} \models \varphi_{\geq n}$, ונגדיר $\Sigma = \{\varphi\} \cup \{\varphi_{\geq n} \mid n < \omega\}$. עתה נראה ש־$\Sigma$ ספיקה סופית. תהי $\Pi \subseteq \Sigma$ כך ש־$|\Pi| < \omega$ ו־$n = \sup\{n < \omega \mid \varphi_{\geq n} \in \Pi\}$, אז $\mathcal{B} = \langle [n+1]; = \rangle$ מודל כך ש־$\mathcal{B} \models \Pi$ לפי בדיקה. בנוסף $\mathcal{B}$ מודל סופי ולכן $\mathcal{B} \models \varphi$. אז Σ ספיקה סופית ולכן ממשפט הקומפקטיות ספיקה, לכן קיים מודל $\mathcal{A} \models \Sigma$, אבל $|A| \geq n$ לכל $n < \omega$, לכן $|A| \geq \omega$ ובפרט $\mathcal{A} \not\models \varphi$ בסתירה ל־$\mathcal{A} \models \varphi$. לכן לא קיים פסוק φ כזה. $\square$

סעיף ב'

יהי $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$ גרף. נגדיר $\forall v, u \in V, S_{v,u} = \{\langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle \mid v_0 = v, v_{n-1} = u, \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle \in V^n, n < \delta\}$, בשאלה זו נניח $\delta = \omega$, וכן $d(v,u) = \inf_{s \in S_{v,u}} |s|$ ונסמן $d(v,u) = \infty$ אם $S_{u,v} = \emptyset$. נגדיר את הקוטר של $\mathcal{G}$ להיות $D(\mathcal{G}) = \min\{n \mid \forall v, u \in V, d(v,u) \leq n\}$.
תהי $L = \{E\}$ עבור E סימן יחס דו־מקומי, ונוכיח שלכל $n < \omega$ קיים פסוק $\varphi_{D>n}$ כך ש־$D(\mathcal{G}) > n \iff \mathcal{G} \models \varphi_{D>n}$.

הוכחה. נגדיר

$$\varphi_{D>n} = \neg(\forall v \forall u (\exists v_0 \dots \exists v_{n-1} (v = v_0 \wedge u = v_{n-1} \wedge E(v_0, v_1) \wedge \dots \wedge E(v_{n-2}, v_{n-1}))))$$

ונראה שאכן $D(\mathcal{G}) > n \iff \mathcal{G} \models \varphi_{D>n}$.

נניח ש־$\mathcal{G} \models \varphi_{D>n}$ ולכן מהגדרת הפסוק נובע ישירות שקיימים שני קודקודים ב־V כך שאין ביניהם מסלול באורך n, ולכן אין ביניהם גם מסלול קטן מ־n (אחרת היינו יכולים להגדיל אותו באופן טריוויאלי). לכן לפי ההגדרה $D(\mathcal{G}) > n$.
מהכיוון השני אם נניח ש־$D(\mathcal{G}) > n$ אז $d(v,u) > n$ לכל $v, u \in V$, ובפרט לא קיים מסלול באורך n בין קודקודים אלה, וזהו תוכן הפסוק במדויק. $\square$

סעיף ג'

נסיק מהסעיף הקודם שאין פסוק φ ב־L כך ש־$D(\mathcal{G}) < \infty \iff \mathcal{G} \models \varphi$.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים φ פסוק כך ש־$D(\mathcal{G}) < \infty \iff \mathcal{G} \models \varphi$, ונגדיר $\Sigma = \{\varphi\} \cup \{\varphi_{D<n} \mid n < \omega\}$. לכל $\Psi \subseteq \Sigma$ כך ש־$|\Pi| < \omega$, נגדיר $\mathcal{G} = \langle [n+1], \{\{n, n+1\} \mid n < n+1\} \rangle$ גרף כך ש־$D(\mathcal{G}) = n+1$ עבור $n = \sup\{n \mid \varphi_{D>n} \in \Pi\}$. בהתאם $\mathcal{G} \models \Pi$, שהרי המסלול בין 0 ו־n הוא באורך של n לכל הפחות. בפרט $\mathcal{G} \models \varphi$ שכן הוא סופי. כמו בסעיף א' נובע ממשפט הקומפקטיות שקיים $\mathcal{G} \models \Sigma$, אבל בהתאם נובע עבור ה־$n$ שהגדרנו ש־$n = \omega$, כלומר $D(\mathcal{G}) = \infty$, ולכן $\mathcal{G} \not\models \varphi$ בסתירה ל־$\mathcal{G} \models \Sigma \ni \varphi$. $\square$

שאלה 5

נוכיח שאין פסוק ב־$L = \{E\}$ שהגדרנו בשאלה 4 כך שגרף $\mathcal{G}$ מקיים $\forall u, v \in V, d(u,v) < \infty \iff \mathcal{G} \models \varphi$.

הוכחה. אנסה לפתור את השאלה בדרך שאיננה חלק מהחומר ואשמח לביקורת, נניח ש־κ מונה קומפקטי חזק (strongly compact) ונניח עתה שאנו עובדים מעל $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}(L)$, ונגדיר את השאלה מחדש. נגדיר $\forall u, v \in V, d(u,v) < \kappa \iff \mathcal{G} \models \varphi$. בשאלה זו נניח $\delta = \kappa$, כלומר אנו מגדירים מסלולים באופן מורחב.

נגדיר את הפסוק $\varphi_\alpha = \exists u, v(\exists_{i<\alpha} v_i((\bigwedge_{i<j<\alpha} \neg(v_i = v_j)) \wedge (\bigwedge_{i+1<\alpha} E(v_i, v_{i+1}))))$ לכל $\alpha < \kappa$.

נגדיר $\Sigma_\alpha = \{\varphi\} \cup \{\varphi_\beta \mid n < \beta\}$, ולכן אם נגדיר $\mathcal{G}_\alpha = \langle \alpha + 1; \{\{v_\gamma, v_{\gamma+1}\} \mid \gamma < \alpha\}\rangle$ ינבע $\mathcal{G}_\alpha \models \Sigma_\alpha$ לכל $\alpha < \kappa$. מהקומפקטיות החזקה של κ חל על קבוצה זו ולכן הקבוצה Σ_λ ספיקה ומסופקת על־ידי $\mathcal{G}_\kappa$, אבל $\mathcal{G}_\omega \models \varphi_\kappa$, בסתירה ל־$\varphi$.

במקרה הפרטי של $\kappa = \omega$ נקבל את השאלה המקורית, ושם נשתמש במשפט הקומפקטיות כדי לקבל את מבוקשנו. $\square$