פתרון מטלה 03 — פונקציות מרוכבות, 80519

23 בנובמבר 2024

שאלה 1

תהי $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ קבוצה קומפקטית, ונניח כי קיים לוגריתם רציף $g : K \to \mathbb{C}$.

סעיף א'

נגדיר $\epsilon = \inf\{|g(z_1) - g(z_2) - 2\pi i l| \mid l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, z_1, z_2 \in K\}$,
ונוכיח כי $\epsilon > 0$.

הוכחה. נבחין כי $\epsilon^2 = (\log|z_1| - \log|z_2|)^2 + (\mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2) - 2\pi l)^2$ ולכן אם נניח בשלילה ש־$\epsilon = 0$ אז קיימת סדרה של מרוכבים כך שערכם המוחלט מתכנס והארגומנט שלהם שואף למרחק $2\pi k$.

עוד נתון כי K קומפקטית ולכן סגורה וחסומה, לכן היא מכילה את כל הנקודות הגבוליות שלה ובהתאם הסדרות שמקיימות את $\epsilon = 0$ מתכנסות למספרים $z_1, z_2 \in K$.

אילו $|\arg(z_1) - \arg(z_2)| \geq 2\pi$ אז נקבל מהגדרת הארגומנט סתירה לרציפות של הענף של האגומנט שתומך ב־g, ולכן מתקבל שהארגומנטים מתכנסים, דהינו $z_1 = z_2$, אך אז נקבל $\epsilon \geq 2\pi$, וזו סתירה. □

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $z_0 \in K$ קיים $r > 0$ ולוגריתם אנליטי $h : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ כך ש־$h(z_0) = g(z_0)$ ובנוסף $|h(z_1) - h(z_2)| < \frac{\epsilon}{2}$ לכל $z_1, z_2 \in B(z_0, r)$.

הוכחה. תחילה נגדיר $0 < r < 2\pi$ ולכן מהבנייה של לוגריתם אנליטי שראינו בתרגול נובע שקיים לוגריתם h, ואנו יודעים שהוא נקבע על־ידי נקודה יחידה (טענה מהתרגול), לכן נגדיר $h(z_0) = g(z_0)$.

עתה, קיבלנו כי ϵ של הסעיף הקודם הוא ערך ממשי, וכך גם $\frac{\epsilon}{3}$, נגדיר

$$\sup_{z_1, z_2 \in \overline{B}(z_0, r)} |h(z_1) - h(z_2)| = \rho$$

ולכן נוכל לקבוע את r כך ש־ρ יקטן בהתאם, ומטופולוגיה של כדורים סגורים במרחב אוקלידי נוכל להסיק כי קיים r כך ש־$\rho < \frac{\epsilon}{3}$. □

סעיף ג'

נוכיח כי קיימת קבוצה פתוחה $K \subseteq U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ולוגריתם אנליטי $l : U \to \mathbb{C}$ כך ש־$l|_K = g$.

הוכחה. נבחר ϵ־כיסוי פתוח של K שאנו יודעים שקיים, ונקבל מהסעיף הקודם שקיימת h רציפה במידה שווה על K עבור הכיסוי הזה, ונגדיר $\tilde{h}$ על־ידי אוסף פונקציות זה.

מהרציפות נסיק כי קיימת פונקציה רציפה $\bar{h}$ כך שמתקיים $\bar{h} : U \to \mathbb{C}$ אשר היא לוגריתם אנליטי וכך ש־U פתוחה ו־$K \subseteq U$ ומקיימת את הטענה. □

שאלה 2

נוכיח שניתן להגדיר לוגריתם אנליטי לפונקציה $f(z)=\cos(z)-2$ בתחום $U=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<\mathrm{Re}(z)<2\pi\}$

הוכחה. מספיק שנוכיח שהפונצקיה f היא חד־חד ערכית ועל בתחום ונוכל להסיק כי קיימת פונקציית לוגריתם יחידה עבורה הטענה מתקיימת.
נבדוק חד־חד ערכיות, נניח $z=x+iy, z'=x'+iy'$, מחישוב נובע

$$f(z)=\frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2}-2,\qquad f(z')=\frac{e^{ix'-y'}+e^{-ix'+y'}}{2}-2$$

נניח עתה $f(z)=f(z')$ ולכן

$$e^{ix-y}+e^{-ix+y}=e^{ix'-y'}+e^{-ix'+y'}$$

לכן נסיק כי $y=y', x=x'+2\pi k$, אבל ידוע ש־$0<x<2\pi$ ולכן $x=x'$ וקיבלנו ש־$z=z'$, לכן f חד־חד ערכית.
נניח $f(z)=w$ ולכן

$$\cos(z)=w+2\iff e^{iz}+e^{-iz}=2w+4\iff e^{2iz}+e^{iz}(-2w-4)+1=0$$

נבדוק אם יש ל־f שורשים ב־U:

$$f(z)=0\iff\cos z=2\iff e^{iz}+e^{-iz}=4\iff e^{2iz}-4e^{iz}+1=0\iff e^{iz}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}\iff z=-i\log(2\pm\sqrt{3})$$

ערכים אלה לא בתחום ולכן f חד־חד ערכית על ולא מקבלת אפס בתחום ובהתאם ניתן להגדיר לוגריתם יחיד l כך שיתקיים $e^{l(z)}=f(z)$. $\square$

שאלה 3

נמצא תחום $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ וענף של הארגומנט $\arg : G \to \mathbb{R}$ כך שיתקיים $\arg(G) = [0, \infty)$.

פתרון נגדיר $G = \mathbb{C} \setminus \{te^{t\theta} \mid t \geq 0\}$.

בקבוצה זו נגדיר גם $\arg(1) = 0$ ולכן נובע $\arg$ כך שהוא רציף החל מ־0, זאת שכן שני ערכים z_1, z_2 כך ש־$\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2), |z_1| = |z_2| + 2\pi k$ נמצאים משני צידי הספירלה, ולכן התנאי מתקיים.

נרחיב ונתבסס על הגדרת הלוגריתם לפי הגדרת תחום בו האקספוננט הוא חד־חד ערכי ועל, נגדיר $S_l = \{t + \log(t) \mid t \in (0, \infty)\}$ ונקבל ש־$\exp|_{S_l}$ היא חד־חד ערכית ועל. בהתאם קיבלנו ענף של הלוגריתם שגם הוא חד־חד ערכי ועל, וארגומנט שנובע מההגדרה שמוגדר בתחום המבוקש.

שאלה 4

סעיף א'

תהינה $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ נקודות שונות, ונוכיח כי קייצת העתקת מביוס יחידה $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ המקיימת

$$h(z_1) = 0, \qquad h(z_2) = 1, \qquad h(z_3) = \infty$$

הוכחה. נניח את ההנחה ונסיק שמתקיים

$$az_1 + b = 0, \qquad cz_3 + d = 0, \qquad az_2 + b = cz_2 + d$$

נגדיר $a = k$ באופן שרירותי ולכן

$$b = -kz_1, \qquad cz_2 + d = kz_2 - kz_1$$

נחסר מהשוויון השני את אחד השוויונות הראשונים ואז

$$cz_2 + d - cz_3 - d = c(z_2 - z_3) = -k(-z_2 + z_1) - 0$$

ולכן

$$c = -k\frac{-z_2 + z_1}{z_2 - z_3}$$

ולבסוף

$$d = -cz_3 = kz_3\frac{-z_2 + z_1}{z_2 - z_3}$$

אז ההעתקה מקיימת

$$h(z) = \frac{kz - kz_1}{-k\frac{-z_2+z_1}{z_2-z_3}z + kz_3\frac{-z_2+z_1}{z_2-z_3}} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

ומצאנו ביטוי שקול ל־h התלוי ב־z_1, z_2, z_3 בלבד, לכן כל ביטוי של h שקול לביטוי זה ונקבע ביחידות על־ידי ערכים אלה. □

סעיף ב'

נוכיח כי העתקות מביוס מעבירות מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים על הספירה של רימן.

הוכחה. אם $mz + n = 0$ ונבדוק $mh(z) + n = 0$, נקבל $m(az + b) + n(cz + d) = 0$ וזה אכן מעגל מוכלל בספירת רימן.
בנוסף $m = (z - n)^2$ מעגל ונקבל $(az + b - n(cz + d))^2 = n(cz + d) \iff (h(z) - n)^2 = m$ וזו משוואת מעגל מוכלל בספירה של רימן (מעבר כזה נעשה בהרצאה). □

סעיף ג'

נמצא העתקת מביוס המעבירה את חצי המישור העליון $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ לדיסק היחידה $B(0, 1)$.

פתרון בכיתה נטענה הטענה שההעתקה $h(z) = i\frac{1-z}{1+z}$ מבצעת את המיפוי ההפוך בדיוק מזה שאנו נדרשים למצוא.
אנו גם יודעים כי העתקה זו נקבעת על־ידי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}$$

זו מטריצה הפיכה ומהטענה שהוצגה אף היא בכיתה $(h_A)^{-1} = h_{A^{-1}}$ ולכן נחשב ונמצא כי

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

ולכן ההעתקה שמקיימת את הדרישה היא

$$h_{A^{-1}}(z) = \frac{z - i}{-z - i} = \frac{i - z}{z + i}$$

סעיף ד'

נמצא פונקציה אנליטית המעבירה את חצי דיסק היחידה העליון $B(0,1) \cap H$ לדיסק היחידה $B(0,1)$.

פתרון תוצאת הסעיף הקודם תקפה גם פה, שכן h שמצאנו אנליטית.

שאלה 5

נגדיר את הענף הראשי של arctan על־ידי

$$\arctan(z) = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}(\frac{1+iz}{1-iz})$$

סעיף א'

נמצא את תחום ההגדרה המקסימלי שבו arctan אנליטית.

פתרון נבחין כי $\frac{1}{2i}$ קבוע ולא משפיע על הגזירות.

הלוגריתם של $\frac{1+iz}{1-iz}$ גזיר בתחום הגזירות של הפונקציה עצמה ללא השורשים שלה לפי משפט מההרצאה שלא הוכח, ולכן מספיק לבדוק את גזירות ביטוי זה.

גם חלוקת פונקציות אנליטית, ולכן הפונקציה לא גזירה כאשר $\frac{1+iz}{1-iz} = 0$ או כאשר $1 - iz = 0$, דהינו

$$z = \frac{-1}{i} \iff z = i, \qquad z = -i$$

ולכן arctan אנליטית ב־$\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

סעיף ב'

נחשב את הערך $\arctan(2-i)$.

פתרון נחשב

$$\begin{aligned}
\arctan(2-i) &= \frac{1}{2i}\operatorname{Log}(\frac{1+i(2-i)}{1-i(2-i)}) \\
&= \frac{1}{2i}\operatorname{Log}(\frac{2+i2}{-i2}) \\
&= \frac{1}{2i}\operatorname{Log}(-1+i) \\
&= \frac{1}{2i}(\log|-1+i| + i\operatorname{Arg}(-1+i)) \\
&= \frac{1}{2i}(\log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}) \\
&= \frac{3\pi}{8} - i\frac{\log 2}{4}
\end{aligned}$$