פתרון מטלה 08 — מבוא ללוגיקה, 80423

27 בדצמבר 2024

שאלה 1

תהי L שפה לתחשיב יחסים, תהי φ נוסחה ונניח ש־$x \in Var$.

סעיף א׳

נוכיח שלכל מבנה $\mathcal{A}$ ל־L ולכל השמה $\sigma : Var \to A$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$, אם ורק אם לכל מבנה והשמה כאלה מתקיים $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(\sigma)$.

הוכחה. נניח את הכיוון הראשון, נקבע $\mathcal{A}$ כלשהו ונבחין כי $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$ לכל הצבה σ כזו. לכן בפרט לכל הצבה, גם $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma[x : a])$ לכל $a \in A$.
אבל במצב זה נבחין כי לכל $a \in A$ הטענה מתקיימת, כלומר $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(\sigma)$, ומצאנו כי הטענה אכן חלה.

לכיוון ההפוך נקבע שוב $\mathcal{A}$ כזה המקיים את הטענה והפעם נקבל שאם $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(\sigma)$ אז בפרט לכל $a \in A$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma[x : a])$. נוכל אם כן לבנות כל $\sigma : Var \to A$ כך ש־$\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שלכל מבנה $\mathcal{A}$ ל־L ולכל השמה $\sigma : Var \to A$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$ אם ורק אם לכל הכללה ψ של φ ולכל מבנה $\mathcal{A}$ ל־L מתקיים $\mathcal{A} \models \psi$.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה.
נבחין כי בסיס האינדוקציה הוא למעשה טענת הסעיף הקודם, ולכן נסיק שהיא אכן חלה.
נניח ש־$FV(\varphi) = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ וכן ש־$\psi = \forall x_0 \dots \forall x_{n-2} \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ ושהטענה חלה עבור פסוקים אלה, ונבחן את $\phi = \forall x_{n-1} \psi(x_{n-1})$. אז מאותה הוכחה של סעיף א׳ נובע שהטענה מתקיימת עבור ϕ ביחס ל־ψ ולכן השלמנו את מהלך האינדוקציה. $\square$

שאלה 2

תהי $L = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ שפה לתחשיב פסוקים, $\alpha \in form_L$.
תהי L' שפה לתחשיב יחסים ו־$\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1} \in form_{L'}$.
תהי $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$ נוסחה המתקבלת מהחלפת כל מופע של p_i ב־φ_i בו־זמנית.

סעיף א׳

נוכיח שזוהי אכן נוסחה.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על מבנה הפסוק בתחשיב פסוקים.
עבור הבסיס נניח ש־$\alpha = p_i$ עבור $i \in [n]$, ולכן מההגדרה $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}} = \varphi_i$ וזוהי כמובן נוסחה.
נניח שהטענה מתקיימת עבור α ונבחן את $(\neg\alpha)$. נניח $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}} = \psi$, ולכן מההגדרה $(\neg\alpha)^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}} = (\neg\psi)$ וזוהי כמובן נוסחה.
באופן דומה אם α, β מקיימות את הטענה אז קיימות החלפות ψ_0, ψ_1 בהתאמה עבורן, וברור ש־$(\psi_0 \square \psi_1)$ נוסחה לכל $\square \in \mathcal{B}$, אבל זוהי גם תוצאת ההחלפה של $(\alpha \square \beta)$, ולכן השלמנו את מהלך האינדוקציה והטענה אכן מתקיימת. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שאם α טאוטולוגיה אז גם $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$ היא טאוטולוגיה כנוסחה ב־L.

הוכחה. נבחין כי יש משמעות לשאילת שאלה זו בשל תוצאת הסעיף הקודם. נניח ש־$f : form_L \to form_{L'}$ ההחלפה שהגדרנו קודם לכן, ונגדיר גם $g : form_{L'} \to form_{L'_{prop}}$ הבנייה שהגדרנו בהרצאה להחלפת נוסחות יסודיות. נבחין ש־$g \circ f$ היא פונקציה $form_L \to form_{L'_{prop}}$ פונקציית החלפה בין שפות בתחשיב פסוקים המקיימות את טענת שאלה 1 במטלה 3, לכן הרכבה זו משמרת שקילות טאוטולוגית. כלומר אם α טאוטולוגיה אז גם $(g \circ f)(\alpha)$ כפי שרצינו להראות. $\square$

סעיף ג׳

נסיק שנוסחה בשפה לתחשיב יחסים היא טאוטולוגיה אם ורק אם היא מהצורה $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$ עבור טאוטולוגיה α ושפה כלשהי לתחשיב פסוקים L'.

הוכחה. נניח את הכיוון הראשון ולכן משאלה 1 במטלה 3 נוכל להחליף את פסוקיה היסודיים בכל נוסחה תקינה על־פי המוגדר ונקבל נוסחה שהיא טאוטולוגיה מעל תחשיב פסוקים.

נקבל נוסחה שהיא תוצאת החלפה עבור של טאוטולוגיה נסיק מהסעיף הקודם את המבוקש. $\square$

שאלה 3

תהי שפה L לתחשיב פסוקים ויהיו $\psi_0, \psi_1 \in form_L$, נוכיח שאם $\vdash \psi_0$ וגם $\vdash (\psi_0 \to \psi_1)$ אז $\vdash \psi_1$.

הוכחה. נתון כי קיים עץ היסק עבור $\psi_0, (\psi_0 \to \psi_1)$, עץ זה הוא סופי ואנו יכולים לשרשר אותו לתוך עצים אחרים, אז נבנה את עץ ההיסק

1. $\neg\psi_1$
2. פיצול למקרים על ψ_0
   (a) ψ_0
   (b) פיצול למקרים על $(\psi_0 \to \psi_1)$
      i. $(\psi_0 \to \psi_1)$
      ii. ψ_1, כלל היסק לגרירה (מודוס פוננס) וסתירה
      i. $\neg(\psi_0 \to \psi_1)$
      ii. חזרה על כלל העץ עבור $(\psi_0 \to \psi_1)$, למעשה כל מה שמופיע החל מפה יופיע כהמשכים של כלל העלים בעץ הזה, מטעמי נוחות לא נכתוב זאת כך
      iii. $(\psi_0 \to \psi_1)$ וסתירה
   (a) $\neg\psi_0$
   (b) חזרה על כלל העץ עבור ψ_0, למעשה כל מה שמופיע החל מפה יופיע כהמשכים של כלל העלים בעץ הזה, מטעמי נוחות לא נכתוב זאת כך
   (c) ψ_0 וסתירה

הגענו לסתירה בכל ענף ולכן עץ היסק זה מעיד על $\vdash \psi_1$. □

שאלה 4

תהי L שפה לתחשיב פסוקים ויהיו $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \in form_L$, בסעיפים הבאים נכתוב עצי היסק במערכת ההיסק KEP עבור כל טענה.

סעיף א׳

$\psi_0 \vdash (\psi_0 \vee \psi_1)$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(\psi_0 \vee \psi_1)$
2. $\neg\psi_0$, כללי איווי
3. ψ_0, הוספת הנחה, וסתירה

סעיף ב׳

$(\psi_0 \vee \psi_1) \vdash (\psi_1 \vee \psi_0)$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(\psi_1 \vee \psi_0)$
2. $\neg\psi_0$, כללי איווי
3. $(\psi_0 \vee \psi_1)$, הוספת הנחה
4. ψ_0, כללי איווי וסתירה

נבחין כי יכולנו גם לפצל למקרים על ערך ψ_0 ו־ψ_1 כדי לבנות עץ היסק שמתיישב יותר טוב עם הדרך שבה אנו מוכיחים.

סעיף ג׳

$((\psi_0 \vee \psi_1) \vee \psi_2) \vdash (\psi_0 \vee (\psi_1 \vee \psi_2))$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(\psi_0 \vee (\psi_1 \vee \psi_2))$
2. $\neg(\psi_1 \vee \psi_2)$, כללי איווי
3. $\neg\psi_2$, כללי איווי
4. $((\psi_0 \vee \psi_1) \vee \psi_2)$, הוספת הנחה
5. ψ_2, כללי איווי, וסתירה

סעיף ד׳

$((\psi_0 \wedge \psi_1) \wedge \psi_2) \vdash (\psi_0 \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2))$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(\psi_0 \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2))$
2. $(\psi_0 \wedge \psi_1) \wedge \psi_2$, הוספת הנחה
3. ψ_2, כללי גימום
4. פיצול למקרים ψ_0
   (a) ψ_0
   (b) $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$, כללי גימום

(c) פיצול למקרים ψ_1

i. ψ_1

ii. $\neg\psi_2$, כללי גימום וסתירה

i. $\neg\psi_1$

ii. $(\psi_0 \wedge \psi_1)$ כללי גימום מ־2

iii. ψ_1, כללי גימום, וסתירה

(a) $\neg\psi_0$

(b) $\psi_0 \wedge \psi_1$, כללי גימום מ־2

(c) ψ_0, כללי גימום, סתירה

סעיף ה׳

$\vdash (((\psi_0 \vee \psi_1) \wedge \psi_2) \leftrightarrow ((\psi_0 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2)))$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(((\psi_0 \vee \psi_1) \wedge \psi_2) \leftrightarrow ((\psi_0 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2)))$.

2. פיצול למקרים $((\psi_0 \vee \psi_1) \wedge \psi_2)$

(a) $((\psi_0 \vee \psi_1) \wedge \psi_2)$

(b) ψ_2

(c) $\neg((\psi_0 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2))$, כללי גרירה דו־כיוונית

(d) $\neg(\psi_0 \wedge \psi_2)$

(e) פיצול למקרים על ψ_0

i. ψ_0

ii. $\neg\psi_2$, כללי גימום, וסתירה

i. $\neg\psi_0$

ii. $\psi_0 \vee \psi_1$, כללי גימום מ־a

iii. ψ_1, כללי איווי

iv. $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$, כללי איווי

v. $\neg\psi_2$, כללי גימום, סתירה

(a) $\neg((\psi_0 \vee \psi_1) \wedge \psi_2)$

(b) $\neg(\psi_0 \vee \psi_1)$, כללי גימום

(c) $\neg\psi_0$, כללי איווי

(d) $(\psi_0 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2)$, כללי גרירה דו־כיוונית

(e) פיצול למקרים על $(\psi_0 \wedge \psi_2)$

i. $\psi_0 \wedge \psi_2$

ii. ψ_0, כללי גימום, סתירה

i. $\neg(\psi_0 \wedge \psi_2)$

ii. $\psi_1 \wedge \psi_2$, כללי איווי

iii. ψ_1, כללי גימום

iv. $\neg\psi_1$, כללי איווי ל־b, וסתירה

סעיף ו'

$(\psi_0 \rightarrow \psi_1), (\psi_1 \rightarrow \psi_0) \vdash (\psi_0 \leftrightarrow \psi_1)$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(\psi_0 \leftrightarrow \psi_1)$
2. פיצול למקרים על ψ_0
   (a) ψ_0
   (b) $\neg\psi_1$, כללי גרירה דו־כיוונית
   (c) $\psi_0 \rightarrow \psi_1$, הוספת הנחה
   (d) ψ_1, כללי גרירה, סתירה
   (a) $\neg\psi_0$
   (b) ψ_1, כללי גרירה דו־כיוונית
   (c) $\psi_1 \rightarrow \psi_0$, הוספת הנחה
   (d) $\neg\psi_1$, חוקי גרירה, סתירה

סעיף ז'

$\vdash ((\psi_0 \wedge (\neg\psi_0)) \rightarrow (\psi_1 \wedge (\neg\psi_1)))$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg((\psi_0 \wedge (\neg\psi_0)) \rightarrow (\psi_1 \wedge (\neg\psi_1)))$
2. $\psi_0 \wedge (\neg\psi_0)$, חוקי גרירה
3. ψ_0, חוקי גימום
4. $\neg\psi_0$, חוקי גימום, סתירה

סעיף ח'

$\vdash (\psi_0 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_0))$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(\psi_0 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_0))$
2. ψ_0, כללי גרירה
3. $\neg(\psi_1 \rightarrow \psi_0)$, כללי גרירה ל־1
4. $\neg\psi_0$, כללי גרירה, וסתירה

סעיף ט'

$\vdash (((\neg\psi_0) \rightarrow (\neg\psi_1)) \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_0))$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(((\neg\psi_0) \rightarrow (\neg\psi_1)) \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_0))$
2. $(\neg\psi_0) \rightarrow (\neg\psi_1)$, כללי גרירה
3. $\neg(\psi_1 \rightarrow \psi_0)$, כללי גרירה ל־1

4. ψ_1, כללי גרירה
5. $\neg\psi_0$, כללי גרירה
6. $\neg\psi_1$, כללי גרירה ל־2, וסתירה

סעיף י׳

$\vdash ((\psi_0 \to (\psi_1 \to \psi_2)) \to ((\psi_0 \to \psi_1) \to (\psi_0 \to \psi_2)))$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg((\psi_0 \to (\psi_1 \to \psi_2)) \to ((\psi_0 \to \psi_1) \to (\psi_0 \to \psi_2)))$
2. $\psi_0 \to (\psi_1 \to \psi_2)$, חוקי גרירה
3. $\neg((\psi_0 \to \psi_1) \to (\psi_0 \to \psi_2))$, חוקי גרירה ל־1
4. $\psi_0 \to \psi_1$, חוקי גרירה
5. $\neg(\psi_0 \to \psi_2)$, חוקי גרירה
6. ψ_0, חוקי גרירה
7. $\neg\psi_2$, חוקי גרירה
8. ψ_1, חוקי גרירה ל־4
9. $\psi_1 \to \psi_2$, חוקי גרירה ל־2
10. ψ_2, חוקי גרירה, וסתירה

שאלה 5

נאמר שכלל היסק ניתן להשמטה אם כל שפה L לתחשיב פסוקים ולכל קבוצת פסוקים Σ ופסוק φ כך ש־$\Sigma \vdash \varphi$ קיים עץ היסק לטענה כך שהכלל אינו מופיע בה, לכל כלל בסעיפים הבאים נוכיח שהוא ניתן להשמטה.

סעיף א׳

$\frac{(A\rightarrow B),(\neg B)}{(\neg A)}$

הוכחה. כדי להראות שכלל היסק ניתן להשמטה די שנראה שבכל עץ בו הוא מופיע, ניתן לבנות עץ חדש ללא הכלל, כך שתוצאתו תמשיך להיות תקפה. לשם כך אנו נניח שישנו עץ היסק בו יש שימוש בטענה זו, ועתה נבנה עץ שיחליף את העץ הזה ושמשתמש בכללי ההיסק הנתונים לנו כרגע

1. $A \rightarrow B$, כלל החזרה
2. חלוקה למקרים על A
   (a) A
   (b) B, כללי גרירה ל־1
   (c) $\neg B$, כלל החזרה, וסתירה
   (a) $\neg A$
   (b) נקודת ההחלפה השנייה

מצאנו עץ היסק שניתן להחליף את כלל ההיסק הרצוי בו, כך שהטענות נשארות ללא שינוי, נבחין שוב כי זוהי פעולת החלפה עבור עצים בינאריים, וכי היא תקפה, בסעיפים הבאים נשתמש באותה הטענה בדיוק, אך ללא הסבר זה נקודת ההחלפה השנייה היא כלל חלקי העץ שמגעים אחרי ההיסק שהחלפנו, צלע זו תוחלף בו, וכך יתקבל עץ היסק מלא כך שאכן יש סתירה בעל ענף. □

סעיף ב׳

$\frac{(A\leftrightarrow B),A}{B}$

הוכחה. נבנה את חלק עץ ההיסק להחלפה

1. $A \leftrightarrow B$, כלל החזרה
2. A, כלל החזרה
3. פיצול למקרים על B
   (a) B
   (b) נקודת ההחלפה השנייה
   (a) $\neg B$
   (b) $\neg A$, כללי הגרירה הדו־כיוונית ל־1, וסתירה

□

סעיף ג׳

$\frac{(A\leftrightarrow B),(\neg B)}{(\neg A)}$

הוכחה. גם הפעם נבנה את עץ ההיסק המחליף

1. $A \leftrightarrow B$, כלל החזרה
2. $\neg B$, כלל החזרה

3. פיצול למקרים על A

(a) A

(b) B, כללי גרירה דו־כיוונית ל־1, וסתירה

(a) $\neg A$

(b) נקודת ההחלפה השנייה

$\square$