פתרון ממ"ן 16 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

8 בספטמבר 2023

שאלה 1

סעיף א'

נחשב את הגבולות הבאים או נראה כי אינם מתקיימים

1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^4+y^4)$$

נשים לב כי לכל $|x,y|<1$ מתקיים $x^4+y^4<x+y$. לכן נובע

$$|(x+y)\ln(x^4+y^4)| \le |x+y|\ln(|x+y|)$$

נגדיר $t=|x+y|$ ונקבל

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x+y|\ln(|x+y|) = \lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{t\to 0^+} -x = 0$$

ולכן נקבל מכלל הסנדוויץ' כי גם הגבול המקורי מתכנס לאפס.

2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

נניח כי סדרת הנקודות $(p_n=(x_n,y_n))$ מתכנסת ל־L, ולכן מהגדרת היינה לגבולות בשני משתנים נובע שהגבול מתכנס עבור $p_n=(\frac{1}{n},0)$:

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = \frac{\frac{0^3}{n}}{\frac{1}{n^2}+0^6} = L = 0$$

כמו־כן, הגבול מתכנס עבור הסדרה $p_n=(\frac{1}{n^3},\frac{1}{n})$:

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = \frac{\frac{1}{n^3\cdot n^3}}{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^6}} = L = \frac{1}{2}$$

אז מצאנו כי עבור סדרות שונות הגבול מתכנס לערכים שונים ובהתאם להגדרת היינה הגבול לא מתכנס בנקודה.

סעיף ב'

נבדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב־$\mathbb{R}^2$:

1

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

לכל נקודה $p_0=(x_0,y_0)$ כאשר $x_0,y_0\neq 0$ נראה כי נובע מרציפות והגדרת היינה להתכנסות כי

$$\lim_{p\to p_0} f(p) = \frac{\lim_{(x,y)\to p_0} xy}{\lim_{(x,y)\to p_0} x^2+y^2} = \frac{x_0y_0}{x_0^2+y_0^2} = f(p_0)$$

אז מצאנו כי f רציפה לכל $p\neq\mathbf{0}$.

מדוגמה 7.13 עולה כי ל־f אין גבול בנקודה $\mathbf{0}$ ולכן בהכרח גם איננה מתכנסת בנקודה.

2

$$\begin{cases} \frac{\sin(2x^2+2y^2)}{e^{x^2+y^2}-1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

נגדיר $t = x^2 + y^2$ ונגדיר פונקציה חדשה g המקיימת:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2t)}{e^t-1} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

מתקיים $g(t) = f(x,y)$ לכל t. g היא כמובן רציפה לכל $x > 0$, ולכן נבדוק את גבולה ב־0 בעזרת לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x)}{e^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos(2x)}{e^x} = \frac{2}{1} = 2$$

אז מצאנו כי g רציפה לכל $|t| \geq 0$ ובהתאם f רציפה בכל המישור.

שאלה 2

נמצא את כל הנקודות $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ בהן הפונקציה $f(x,y) = \sqrt{|xy^3|}$ היא דיפרנציאבילית.

נמצא את הנגזרות החלקיות של f כאשר xy חיובי וכאשר הוא שלילי:

$$xy \geq 0, f_x(x,y) = \frac{y^3}{2\sqrt{xy^3}} = \frac{y^2}{2\sqrt{xy}}$$
$$xy < 0, f_x(x,y) = \frac{-y^3}{2\sqrt{-xy^3}} = \frac{-y^2}{2\sqrt{-xy}}$$
$$xy \geq 0, f_y(x,y) = \frac{3xy^2}{2\sqrt{xy^3}} = \frac{3xy}{2\sqrt{xy}} = \frac{3}{2}\sqrt{xy}$$
$$xy < 0, f_y(x,y) = \frac{-3xy}{2\sqrt{-xy}} = \frac{-3}{2}\sqrt{-xy}$$

נשים לב כי עבור $x \neq 0, y \neq 0$ כל נקודה שייכת לזוג נגזרות חלקיות ורציפה בהן ובהתאם לתנאי המספיק לדיפרנציאביליות f דיפרנציאבילית בנקודה (x,y).

נבדוק את התכנסות הנגזרות כאשר y הוא ערך קבוע לא אפס ו־$x = 0$:

מונה f_x הוא רציף ושואף לערך סופי, בעוד המכנה שואף לאינסוף לכל y ולכן f_x לא רציפה בנקודות אלה, וממשפט 7.63 אנו יכולים להסיק כי f לא דיפרנציאבילית בתחום זה.

נבדוק את התכנסות הנגזרות כאשר x הוא ערך קבוע ו־$y = 0$:

בנקודות אלה f_x כמובן רציפה, שכן המונה שלה מתאפס והמכנה רציף ולא מתאפס. כמו־כן גם f_y פונקציה רציפה ומתאפסת באוסף הנקודות. לכן f דיפרנציאבילית באוסף הנקודות $(x,0)$.

מצאנו כי f דיפרנציאבילית לכל $\mathbb{R}^2$ חוץ מהנקודות $(0,t)$ כאשר $t \neq 0$.

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח כי $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ היא הרמונית לכל $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

הוכחה. נחשב את נגזרותיה החלקיות מסדר שני של u בתחום:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2} \\ u_{xx}(x,y) &= \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ u_y(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2} \\ u_{yy}(x,y) &= \frac{2x^2+2y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

נבדוק

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

ומצאנו כי f הרמונית בתחום $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. **מש"ל**

סעיף ב'

נגדיר $f(x,y) = u(x^2-y^2, y^2-x^2)$ כאשר $u(t,s)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל נקודה.

נוכיח כי $x\,f_y + y\,f_x = 0$ לכל x,y.

הוכחה. נגדיר $t(u,v) = u^2 - v^2$, ולכן $f(p) = u(t(p), -t(p))$. נחשב את נגזרותיה החלקיות של f על־פי כלל השרשרת המוכלל מהתוספת לחומר של יחידה 7:

$$f_x(x,y) = u_x t_u + u_y t_v = u_x(x,y)\cdot 2x + u_y(x,y)\cdot(-2y) = 2x(u_x(x,y) - u_y(x,y))$$

ובאופן דומה נקבל גם

$$f_y(x,y) = u_x t_v + u_y(-t_v) = (-2x)u_x - (-2x)u_y = 2y(-u_x(x,y) + u_y(x,y))$$

ונקבל כי

$$xf_y + yf_x = 2xy(u_x(x,y) - u_y(x,y)) + 2yx(-u_x(x,y) + u_y(x,y)) = 0$$

ומצאנו כי השוויון מתקיים. **מש"ל**

סעיף ג'

נמצא את הקצב בו משתנה שטח מלבן אשר ברגע נתון אורכו 15 מטרים והוא קטן ב־3 מטרים לשנייה,
ואשר רוחבו הוא 6 מטרים והוא גדל ב־2 מטרים לשנייה.

נגדיר $f(x,y) = xy$ פונקציית השטח של מלבן.

עוד נגדיר $h(t)$ פונקציית הגובה של המלבן לפי זמן ו־$w(t)$ פונקציית הרוחב של המלבן לפי זמן.

נגדיר $F(t) = f(h(t), w(t))$ פונקציית השטח של המלבן הנתון לפי זמן.

נגדיר את הרגע הנתון בשאלה בתור $t = 0$ ולכן $h(0) = 15, h'(0) = -3, w(0) = 6, w'(0) = 2$.

נשים לב כי $f_x(x,y) = y, f_y(x,y) = x$ ולכן מכלל השרשרת בשני משתנים נובע כי

$$F'(t) = f_x(h(t), w(t)) \cdot h'(t) + f_y(h(t), w(t)) \cdot w'(t) = w(t)h'(t) + h(t)w'(t)$$

נציב

$$F'(0) = 6 \cdot (-3) + 15 \cdot 2 = 12$$

סעיף ד'

תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית במישור כולו.

נוכיח כי לכל שתי נקודות $p_1 = (x_1, y_1)$ ו־$p_2 = (x_2, y_2)$, בקטע המחבר בין p_1 ל־p_2 קיימת נקודה p_c כך שמתקיים

$$f(p_2) - f(p_1) = f_x(p_c)(x_2 - x_1) + f_y(p_c)(y_2 - y_1)$$

הוכחה. תהי $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המוגדרת על־ידי

$$l(t) = p_1 + (p_2 - p_1)t = (x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t)$$

ונגדיר גם $g(t) = f(l(t))$. נשים לב כי l היא הישר העובר דרך הנקודות p_1 ו־p_2, והפונקציה אף מקיימת $l(0) = p_1, l(1) = p_2$.

בד בבד הפונקציה g היא "החתך" של f עבור ערכי הנקודות על הישר t, דהינו זו פונקציה ממשתנה אחד.

ממשפט הערך הממוצע של החשבון הדיפרנציאלי נובע כי קיים ערך t_c אשר מקיים

$$g'(t_c)(1 - 0) = g(1) - g(0) = f(p_2) - f(p_1) \tag{1}$$

כאשר $0 < t_c < 1$.

נחשב את $g'(t)$ על־פי כלל השרשרת בשני משתנים:

$$\begin{aligned} g'(t) =& \frac{d}{dx} f(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t) \\ =& f_x(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t) \cdot (x_1 + (x_2 - x_1)t)' \\ &+ f_y(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t) \cdot (y_1 + (y_2 - y_1)t)' \\ =& f_x(l(t))(x_2 - x_1) + f_y(l(t))(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

ועל־ידי שימוש בנוסחה זו ב־(1) נקבל

$$f_x(l(t_c))(x_2 - x_1) + f_y(l(t_c))(y_2 - y_1) = f(p_2) - f(p_1)$$

נגדיר $p_c = l(t_c)$, ברור כי הנקודה נמצאת בין p_1 לבין p_2, ונקבל כי

$$f_x(p_c)(x_2 - x_1) + f_y(p_c)(y_2 - y_1) = f(p_2) - f(p_1)$$

והוכחנו את הטענה. **מש"ל**

שאלה 4

סעיף א'

מטייל עולה על הר שצורתו נתונה על־ידי הנוסחה

$$h(x,y) = 1000 - 0.05x^2 - 0.04y^2$$

נתון כי המטייל נמצא בנקודה $(60,100)$, נמצא את הכיוון עליו ללכת כדי להגיע לפסגה מהר ככל האפשר.
המטייל יגיע לפסגה במהירות הגבוהה ביותר אם ילך בדרך התלולה ביותר, ולכן עלינו למצוא את הכיוון בו הנגזרת הכיוונית היא הגבוהה ביותר.
נשים לב כי

$$f_x(x,y) = -0.1x, f_y(x,y) = -0.08y$$

נחשב את הגרדיאנט של h:

$$\nabla f(60,100) = (f_x(60,100), f_y(60,100)) = (-6,-8)$$

נחשב את הווקטור הנורמלי:

$$u = \frac{(-6,-8)}{\|(-6,-8)\|} = (-0.6,-0.8)$$

ולכן הכיוון שעל המטייל ללכת בו הוא $(-0.6,-0.8)$.

סעיף ב'

נמצא את הנקודה על המישור $x+2y+z=1$ הקרובה ביותר לראשית הצירים.
נשים לב כי $z = 1-x-2y$ ולכן נגדיר פונקציה $z(x,y) = 1-x-2y$ ונקבל כי לכל $x,y \in \mathbb{R}$ הנקודה $(x,y,z(x,y))$ על המישור הנתון.
על־פי נוסחת המרחק בין נקודות (פיתגורס) בין נקודה על המישור לבין נקודת האפס הוא:

$$d_0(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2(x,y)} = \sqrt{x^2+y^2+(1-x-2y)^2}$$

כמובן שהפונקציה d_0 מקבלת מינימום ומקסימום באותן הנקודות כמו d_0^2, ולכן נגדיר $d(x,y) = d_0^2(x,y)$ ונחקור אותה.
נמצא את נקודת המינימום של הפונקציה הנתונה בעזרת משפט 7.58, דהינו נמצא נקודות בהן שתי הנגזרות החלקיות מתאפסות.

$$d_x(x,y) = 2x - 2(1-x-2y) = -2+4x+4y, d_y(x,y) = 2y - 4(1-x-2y) = -4+4x+10y,$$

נמיר למטריצת מקדמים ונפתור

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

ומצאנו כי יש למערכת פתרון יחיד $(\frac{1}{6},\frac{1}{3})$.
נחשב את הנגזרת השנייה $d_{xx}(x,y) = 4$, ולכן ממשפט 7.72 נובע כי $(\frac{1}{6},\frac{1}{3})$ היא נקודת מינימום של הפונקציה ובה המרחק מהראשית הוא הקטן ביותר על המישור.

שאלה 5

נוכיח או נפריך את הטענות הבאות:

סעיף א'

נוכיח כי אם p_0 נקודת מינימום מקומי של $f(x,y)$ ו־f דיפרנציאבילית בנקודה זו, אז $(D_v f)(p_0) = 0$ עבור כל כיוון v.

הוכחה. ממשפט 7.58 נובע כי $f_x(p_0) = f_y(p_0) = 0$.
נגדיר $v = (v_x, v_y)$ וקטור יחידה כלשהו, ממשפט 7.67 נובע כי

$$(D_v f)(p_0) = v_x \cdot f_x(p_0) + v_y \cdot f_y(p_0) = 0v_x + 0v_y = 0$$

מש"ל

סעיף ב'

נסתור את הטענה כי אם $\nabla f(p_0) = (0,0)$ אז $(D_v f)(p_0) = 0$ עבור כל כיוון v.

דוגמה נגדית. נגדיר $p_0 = 0$ וגם

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

בהתבסס על דוגמה 7.13 נגדיר סדרת נקודות $(\frac{1}{n}, 0)$ וניעזר בה לחישוב

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{n \to \infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2} + 0^2} = 0$$

ובחישוב דומה נקבל גם $f_y(0,0) = 0$, לכן $\nabla f(p_0) = (0,0)$.
נחשב עתה את הנגזרת הכיוונית של f עבור $v = (\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$ על־ידי הגדרה 7.59 וסדרת הנקודות $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + vt) - f(p_0)}{t} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}{t} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} = \infty$$

ומצאנו כי לא קיימת נגזרת כיוונית ב־p_0 לכיוון v בסתירה לתנאי הטענה. **מש"ל**

סעיף ג'

נפריך את הטענה כי אם פונקציה $f(x,y)$ רציפה בקבוצה $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$ אז יש ל־f מינימום ב־A.

דוגמה נגדית. נגדיר $f(p) = \frac{1}{\|p\|}$.
פונקציה זו כמובן מוגדרת ב־$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ובפרט ב־A.
נשים לב כי נקודה $p = (x,y)$ בקבוצה A אם ורק אם $\|(x,y)\| \geq 1$, ונראה כי גם $p_1 = (x+1, y+1)$ מקיימת $\|p_1\| > \|p\| \geq 1$ ולכן מהגדרת f גם $f(p_1) < f(p)$,
ומצאנו לכל נקודה של f ב־A נקודה עם ערך קטן ממנה, דהינו אין ל־f מינימום ב־A כלל בסתירה לטענה. **מש"ל**