פתרון ממ"ן 11 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

3 בפברואר 2023

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי לכל n טבעי מתקיים

$$\binom{2n}{n} \le 4^n$$

תחילה נראה כי על־פי חוקי חזקות מתקיים

$$4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n}$$

על־פי נוסחת הבינום של ניטון

$$(1+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} 1^i 1^{2n-i}$$

נוכל לרשום מחדש את השוויון כך:

$$4^n = \left(\sum_{i=0, i\neq n}^{2n} \binom{2n}{i} \right) + \binom{2n}{n}$$

ביטוי הסכום המופיע תמיד שווה ערך לאפס או יותר, לכן בכל מקרה יתקיים

$$\binom{2n}{n} \le 4^n$$

סעיף ב'

נוכיח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n+1}$$

תחילה נוכיח את הזהות הבאה:

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n}{n} \frac{2n+1}{2} \tag{1}$$

נשתמש בהגדרת הבינום:

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)n!} = \frac{(2n+1)(2n)!}{n!} = \binom{2n}{n} \frac{2n+1}{2}$$

נשתמש בזהות (1) על אי־השוויון המקורי:

$$\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n+1}$$
$$\binom{2n}{n}(2n+1) \ge 4^n$$
$$2\binom{2n+2}{n+1} \ge 4^n \tag{2}$$

לכן כדי להוכיח את נכונות אי־השוויון המקורי נוכל להוכיח את נכונות (2).

בסיס האינדוקציה: נציב בביטוי (2) את $n=1$:

$$2\binom{2+2}{1+1} = 12 \ge 4 = 4^1$$

בעזרת חישוב דומה נראה כי אי־השוויון מתקיים גם עבור $n = 2$.

אנו רואים כי אי־השוויון אכן מתקיים ובכך הנחנו בסיס לאינדוקציה.

מעבר האינדוקציה: נניח כי אי־השוויון מתקיים ונוכיח כי הוא גורר את נכונות אי השיוויון בהצבה $n + 1$.

נשים לב תחילה כי אי־השוויון הבא מתקיים לכל $n > 2$:

$$\frac{2n+3}{2} \geq 4 \tag{3}$$

הראינו כי אי־השוויון מתקיים לערכים $n = 1, 2$ ולכן נניח ש־$n > 2$. נוכל לפי כללי אי־שוויונות להכפיל את אגפי אי־שוייון (2) ב־(3) מבלי לפגוע בנכונות הביטוי:

$$2\binom{2n+2}{n+1}\frac{2n+3}{2} \geq 4^n \cdot 4$$

נשתמש בזהות (1):

$$2\binom{2n+4}{n+2} \geq 4^{n+1}$$

אנו רואים כי מהנחת האינדוקציה עבור n אי־השוויון מתקיים גם עבור $n + 1$, ולכן אי־השיוויון נכון לכל n טבעי.

שאלה 2

נוכיח שעבור כל שני מספרים ממשיים a, b כאשר $b \neq 0$, אם $|a-b| \leq b^2$ אז $|\frac{a}{b}| \leq |b|+1$.

נשתמש בטענה 1.48 סעיף 6 ונראה כי מתקיים:

$$|a-b| \leq |b| \cdot |b|$$

$$\frac{|a-b|}{|b|} \leq |b|$$

$$\left|\frac{a-b}{b}\right| \leq |b| \qquad \text{טענה 1.48}$$

$$\left|\frac{a}{b}-1\right| \leq |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}-1\right|+1 \leq |b|+1$$

$$\left|\frac{a}{b}-1+1\right| \leq |b|+1 \qquad \text{אי־שוויון המשולש}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| \leq |b|+1$$

אי־השוויון אכן מתקיים בתנאי זה.

סעיף ב'

נוכיח

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2+\left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2=a^2$$

לכל מספר ממשי n מתקיים $a^2=|a|\cdot|a|$ לפי טענה 1.48 סעיף 6. נשתמש בטענה זו ונפתח סוגריים:

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2+\left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2=\frac{a^2+2a|a|+a^2}{4}+\frac{a^2-2a|a|+a^2}{4}=\frac{4a^2+2a|a|-2a|a|}{4}=a^2$$

שאלה 3

סעיף א'

נפתור את אי־השוויון

$$\lfloor |x+1| - |x| \rfloor \geq x^2$$

כאשר $x \geq 0$ מתקיים $|x+1| - |x| = x + 1 - x = 1$. ולכן אי־השוויון שקול לביטוי $1 \geq x^2$. לכן $0 \leq x \leq 1$ היא חלק מקבוצת הפתרונות של אי־השוויון.

כאשר $-1 \leq x < 0$ מתקיים $|x+1| - |x| = 1 + x + x = 1 + 2x$ בשל החלק השלם כל תנאי ש־$x \leq -\frac{1}{2}$ החלק השלם יהיה -1, ולאי־השוויון לא יהיה פתרון בממשיים, בכל מצב אחר החלק השלם יהיה אפס ואי־השוויון יתקיים רק כאשר $x = 0$ בסתירה להנחה ש־$x < 0$.

כאשר $x < -1$ מתקיים $|x+1| - |x| = -x - 1 + x = -1$ זהו כמובן מספר שלם ולכן אי־השוויון שקול ל־$-1 \geq x^2$, ולאי־שוויון זה אין פתרון בממשיים.

מצאנו כי אי־השוויון מתקיים רק כאשר $0 \leq x \leq 1$.

סעיף ב'

(i) נפתור את המשוואה $\lfloor x \rfloor^2 = 16$. על־ידי העברת אגף ומציאת שורשים נקבל $(\lfloor x \rfloor - 4)(\lfloor x \rfloor + 4) = 0$. לכן $\lfloor x \rfloor = \pm 4$. על־פי טענה 1.64 סעיף 2 תנאים אלה מתקיימים רק כאשר $x - 1 < 4 \leq x$ או $x - 1 < -4 \leq x$.

(ii) נפתור את המשוואה $\lfloor x^2 \rfloor = 3$. על־פי טענה 1.64 2 המשוואה מתקיימת כאשר $x^2 - 1 < 3 \leq x^2$. אי־השוויון $3 \leq x^2$ מתקיים כאשר $\sqrt{3} \leq |x|$. אי־השוויון $x^2 - 1 < 3$ שקול ל־$(x+2)(x-2) < 0$. תנאי זה מתקיים כאשר $-2 < x < 2$.

החיתוך בין שני התנאים הוא שהמשוואה מתקיימת כאשר $-2 < x \leq -\sqrt{3}$ או כאשר $\sqrt{3} \leq x < 2$.

שאלה 4

סעיף א'

תהיה A קבוצת ממשיים הצפופה בקטע $(1,\infty)$. נגדיר

$$B = \left\{ \frac{a}{n} \middle| a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$$

נוכיח כי הקבוצה B צפופה בקטע $(0,1)$.

נגדיר x,y מספרים ממשיים כך ש־$x,y \in B$ ו־$0 < x < y < 1$. קיים מספר טבעי n כך שמתקיים $1 < nx < ny < n$, נראה כי קיים מספר טבעי הגדול מהמספר ההופכי ל־x, והוא אכן מקיים את תנאי אי־השוויון. שני המספרים nx, ny איברים ב־A ושייכים ומתקיים $nx, ny \in (1,\infty)$, לכן בשל הצפיפות קיים מספר $c \in A$ כך ש־$nx < c < ny$. נחלק את שלושת האגפים ב־n ונקבל $x < c/n < y$, לכן הקטע $(0,1)$ צפוף ב־B.

סעיף ב'

ננסח הגדרה לחוסר רציפות של קבוצה A בקטע I. תחילה נצרין את הטענה:

$$\neg \forall x,y \in I(x < y \to \exists a \in A(x < a \wedge a < y))$$

נפשט את הפסוק:

$$\exists x,y \in I(x < y \wedge \forall a \in A(x \geq a \vee a \geq y))$$

ננסח את הפסוק שהתקבל:

קבוצה A תיקרא לא צפופה ב־I אם קיימים שני מספרים $x,y \in I$ כך ש־$x < y$ וגם לכל איבר a ב־A מתקיים ש־$a \leq x$ או ש־$a \geq y$.

סעיף ג'

תהי A קבוצה של מספרים ממשיים המוכלת בקטע $(1,\infty)$ וצפופה בו. נוכיח כי הקבוצה C המוגדרת להלן אינה צפופה בקטע $[0,1]$.

$$C = \left\{ \frac{a}{n^2(a+1)} \middle| a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$$

על־פי ההגדרה שהנחנו בסעיף ב', כדי שהקבוצה C תהיה לא צפופה ב־$[0,1]$ אם קיימים שני מספרים $x,y \in C$ כך שלא קיים מספר $c \in [0,1]$ כך שמתקיים גם $x < c < y$. ננסה למצוא מספרים x,y כאלה.

עבור כל $a \in A$ מתקיים:

$$1 < a < a+1 \tag{1}$$

נחלק את הביטוי ב־$a+1$:

$$\frac{1}{a+1} < \frac{a}{a+1} < 1$$

ננצל שוב את טענה (1) ונראה כי:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} < \frac{a}{a+1} < 1 \tag{2}$$

נגדיר n מספר טבעי כלשהו ונחלק את אי־השוויון בריבועו:

$$\frac{1}{2n^2} < \frac{a}{n^2(a+1)} < \frac{1}{n^2}$$

נשים לב כי האגף האמצעי באי־השוויון הוא איבר ב־C, לכן נגדיר אותו להיות c:

$$\frac{1}{2n^2} < c < \frac{1}{n^2}$$

נשים לב כי עבור כל c כאשר $n > 1$ מתקיים:

$$0 < c < \frac{1}{4} \tag{3}$$

מאי־השוויונות (2) ו־(3) אנו רואים כי אין c המקיים:

$$\frac{1}{4} < c < \frac{1}{2}$$

לכן נגדיר $x = \frac{1}{4}$ ו־$y = \frac{1}{2}$, ראינו כי אין איבר ב־C אשר גדול מ־x וקטן מ־y ולכן היא לא צפופה ב־$[0,1]$.