

פתרון מטלה 4 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

31 במאי 2024



שאלה 1

i.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})}{\sin x} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \cdot \cos(\frac{1}{x}) \cdot (\frac{-1}{x^2})}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - x \cdot \cos(\frac{1}{x})}{\cos x} \\ &\stackrel{(2)}{=} \left. \frac{2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - x \cdot \cos(\frac{1}{x})}{\cos x} \right|_{x=0} \\ &= \frac{0-0}{1} = 0\end{aligned}$$

1. כלל לופיטל, נובע מאיפוס \sin באפס ומאיפוס x^2 באפס.

2. פונקציה רציפה

ii.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx) \cdot \cos(cx)} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \cos(ax)}{b \cdot \cos(bx) \cos(cx) - c \cdot \sin(bx) \sin(cx)} \\ &= \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1 - c \cdot 0} \\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{2} \cos x}{x - \frac{1}{2} \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x \frac{1}{2} \cos x}{x^2 - x \frac{1}{2} \sin x} \\ &= \frac{x^2 + 0}{x^2 - 0} = 1\end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2(x) - 1}{1 - \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(x)}{1 - \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\sin(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\cos(x)} \\ &= \frac{2}{\cos^3(0)} = 2\end{aligned}$$

שאלה 2

תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- $x_0 \in \mathbb{R}$.

סעיף א'

נסביר מדוע קיים $\delta > 0$ כך ש- f גזירה בסביבה $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

נבחן את פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אנו יודעים כי היא גזירה בנקודה $x = x_0$ מהנתון, ולכן על-פי הגדרת הנגזרת נובע כי קיים $\delta > 0$ כך ש- f' מוגדרת ורציפה ב- $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. מכאן נובע ישירות כי הפונקציה f מוגדרת רציפה ובהכרח גם גזירה בסביבה זו.

סעיף ב'

נוכיח כי הגבול קיים במובן הצר:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

הוכחה. נבחן את הגדרת הנגזרת:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

וידוע כי הנגזרת הזו היא בעצמה גזירה, דהינו:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 - h) - f'(x_0)}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + h - h) - f(x_0 - h)}{-h} - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x_0 - h) - f(x_0 + h) + 2f(x_0)}{-h^2} \\ f''(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) + f(x_0 + h) - 2f(x_0)}{h^2} \end{aligned}$$

וקיבלנו כי הגבול קיים ומוגדר.

□

שאלה 3

יהי $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו.

סעיף א'

נוכיח כי מתקיים הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

הוכחה. נשים לב כי הן המונה והן המכנה שואפים לאינסוף, ונוכל להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

ומצאנו כי הגבול מתקיים.

נשתמש במשפט ההצבה עבור $x = u^\alpha$ ונקבל:

$$\lim_{u^\alpha \rightarrow \infty} \frac{\ln u^\alpha}{u^\alpha} = \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha \frac{\ln u}{u^\alpha} = \alpha \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u^\alpha} = 0$$

ולכן בפרט נקבל שמתקיים $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u^\alpha} = 0$.

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x} = 0$$

הוכחה. קיבלנו כי מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lim x}{x^\alpha} = 0$$

ונשים לב שלכל $x > 1$ מתקיים $0 < \ln^\beta(x) < \ln(x)$ על-פי חוקי חזקות, ולכן מכלל הסנדוויץ' נקבל

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lim^\beta x}{x^\alpha} = 0$$

נציב $\alpha = 1$ ונסמן את β כ- α ונקבל גם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lim^\alpha x}{x} = 0$$

כנדרש.

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים הגבול $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{p(u)}{e^u}$ לכל פולינום p .

הוכחה. נשתמש בגבול שקיבלנו בסעיף הקודם יחד עם ההצבה $x = e^t$ ונקבל את הגבול

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha(e^t)}{e^t} = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\alpha}{e^t} = 0$$

עתה יהי פולינום $p(x) = \sum_{n=1}^k p_n x^n$. לכן נוכל לקבוע גם כי $k p_{\max} x^k \leq \sum_{n=1}^k p_n x^n \leq k p_{\max} x^k$.

נסיק מאי-שוויון זה כי לכל $x > 0$ מתקיים $0 < \frac{p(x)}{e^x} < |k p_{\max}| \frac{x^k}{e^x}$.

ממשפט הסנדוויץ' והגבול הקודם נקבל

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$$

□

סעיף ד'

נוכיח כי $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ ואף כי $\lim_{u \rightarrow 0^+} u^\alpha \ln u = 0$.

הוכחה. נבחן את הביטוי בצורה $\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. נבחין כי בשאיפה לאפס הן המונה והן המכנה שואפים למינוס אינסוף, ולכן נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

ומצאנו כי הגבול אכן מתקיים.

אילו נגדיר $x = u^\alpha$ ונשתמש בכלל ההצבה נקבל

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} u^\alpha \ln(u^\alpha) = 0 \implies \alpha \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} u^\alpha \ln u = 0 \implies \lim_{u \rightarrow 0^+} u^\alpha \ln u = 0$$

□

ומצאנו כי שני הגבולות נכונים לכל $\alpha > 0$.

שאלה 4

נחשב את פולינומי טיילור הבאים:

סעיף א'

נגדיר $f(x) = x^{2024}$, $n = 2020$, $a = 0$

ולכן

$$P_{n,f,a}(x) = \sum_{i=0}^{2020} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} (x-0)^i = \sum_{i=0}^{2020} \frac{0}{i!} (x-0)^i = 0$$

הפולינום המתקבל הוא פולינום האפס, ולכן הוא אומנם מדויק כאשר $x = 0$, ואכן עבור $|x| < 1$ אנו יודעים כי x^{2024} הוא ערך קטן ביותר, ונוכל לקרבו על-ידי 0.

סעיף ב'

תהי

$$f(x) = 3x - x^3 + x^6 - x^7 \cos x$$

עבור $n = 5$ סביב הנקודה $a = 0$.

נבחין כי עבור $0 \leq k \leq 5$ מתקבל כי $(x^7 \cos x)^{(k)}$ הוא פונקציה המוכפלת ב- x , זאת אנו למדים מאינדוקציה על נגזרת מכפלת פונקציות. בהתאם $(x^7 \cos x)^{(k)}(0) = 0$ ולמעשה האיבר המחובר הזה לא משפיע כלל על פולינום הטיילור שעלינו לחשב.

באופן דומה לסעיף הקודם נקבל כי גם x^6 לא משפיע על הפולינום ולכן נקבל

$$P_{5,f,0}(x) = 3x - x^3$$

גם במקרה זה הקירוב מסייע לנו להבין את גרף הפונקציה עבור $x < 1$, בו החזקות הגבוהות תורמות פחות לשינוי הפונקציה f .

שאלה 5

יהי $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ותהי f פונקציה גזירה n פעמים ב- $x = 0$.

סעיף א'

נתון ש- $g(x) = f(-x)$, נחשב את הפולינום $P_{n,g,0}$ על-ידי הפולינום $P_{n,f,0}$.

נבחין כי $g = f \circ h$ כאשר $h(x) = -x$, ולכן נגזרת הביטוי היא $h'(x) = (f' \circ h) \cdot h'$, אך כמובן $h'(x) = -1$ ונקבל $g'(x) = -f'(-x)$.
נוכל אם כן להוכיח באינדוקציה שמתקיים $g^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(-x)$.

נראה עתה כי

$$P_{n,g,0} = \sum_{i=0}^n \frac{g^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i f^{(i)}(0)}{i!} x^i = P_{n,f \circ h,0}$$

סעיף ב'

מצאנו בהרצאה כי עבור $f(x) = \frac{1}{1-x}$ מתקיים

$$P_{n,f,0} = \sum_{i=0}^n x^i$$

נשתמש בפולינום זה כדי למצוא את $P_{n,g,0}$ כאשר $g(x) = \frac{1}{1+x}$.

נשים לב כי מתקיים $g = f \circ h$ עבור h מהסעיף הקודם ולכן נובע:

$$P_{n,g,0} = P_{n,f \circ h,0} = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^i$$

סעיף ג'

נגדיר עתה $h(x) = \ln(1+x)$ ונחשב את פולינום טיילור שלה סביב 0.

נבחין כי $h'(x) = \frac{1}{1+x} = g(x)$ מהסעיף הקודם.

בהתאם נראה כי $h^{(k)}(x) = h^{(k-1)}(x)$ וכי $h(0) = \ln 1 = 0$ ונסיק

$$P_{n,h,0} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i x^{i+1}}{i+1}$$

שאלה 6

יהי $m \in \mathbb{N}$ ותהי פונקציה f גזירה אינסוף פעמים בנקודה $a = 0$. לכל $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, נסמן $P_k = P_{k,f,0}$.

סעיף א'

i.

נוכיח שהקבוצה $A = \text{Sp}\{f^{(k)}(x^m)h(x) \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, h \in \mathbb{R}[x]\}$ סגורה תחת פעולת הגזירה ואף כי הפונקציה g המוגדרת על-ידי $g(x) = f(x^m)$ גזירה אינסוף פעמים ב-0.

הוכחה. יהי $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ו- $h \in \mathbb{R}[x]$, לכן $f^{(k)}(x^m)h(x) \in A$. נגזור את הביטוי ונקבל

$$\begin{aligned} (f^{(k)}(x^m)h(x))' &= (f^{(k)}(x^m))'h(x) + f^{(k)}(x^m)h'(x) \\ &= f^{(k+1)}(x^m)h(x) \cdot (x^m)' + f^{(k)}(x^m)h'(x) \\ &= f^{(k+1)}(x^m)h(x) \cdot mx^{m-1} + f^{(k)}(x^m)h'(x) \end{aligned}$$

אנו יודעים כי מרחב הפולינומים סגור לכפל ולגזירה, ולכן נובע כי $mx^{m-1}h(x), h'(x) \in \mathbb{R}[x]$. מכאן נסיק ישירות כי $(f^{(k)}(x^m)h(x))' \in A$.

עתה נבחין כי עבור $h(x) = 1$ נקבל $g(x) = f(x^m) \cdot 1 \in A$, ומצאנו כי הקבוצה סגורה לגזירה, ולכן נוכל להוכיח באינדוקציה כי: $\forall k \in \mathbb{N} : g^{(k)} \in A$. □

ii.

יהי $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, נוכיח ש- $P_n(x^m) = Q(x)$ שקול ל- $P_{nm,g,0}$.

הוכחה. נבחן את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - P_n(x^m)}{x^{mn}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^m) - P_n(x^m)}{x^{mn}}$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t = x^m$ ונקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^m) - P_n(x^m)}{x^{mn}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - P_n(t)}{t^n} = 0$$

על-פי המשפט לקירובי טיילור בנקודה. לכן נובע כי גם

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - P_n(x^m)}{x^{mn}} = 0$$

ולכן על-פי ההגדרה $P_n(x^m)$ הוא קירוב טיילור מסדר nm עבור g ב- $x = 0$. □

סעיף ב'

נחשב את פולינום טיילור של $g(x) = \frac{1}{1+x^m}$ סביב אפס.

נבחין כי עבור $f(x) = \frac{1}{1+x}$ מתקבל ש- $g(x) = f(x^m)$.

בסעיף 5' מצאנו גם כי

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i x^{i+1}}{i+1}$$

ולכן מהסעיף הקודם נובע

$$P_{nm,g,0} = P_n(x^m) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i x^{m(i+1)}}{i+1}$$

סעיף ג'

נחשב את פולינום טיילור מסדר $2n+1$ של $h(x) = \arctan x$ סביב 0.

נבחין כי $h'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ על-פי המטלות הקודמות. לכן נסיק מהסעיף הקודם כי

$$P_{2n,h',0}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i x^{2(i+1)}}{i+1}$$

נשתמש בכלל שמצאנו בכיתה עבור פולינום טיילור ונגזרת:

$$(P_{2n+1,h,0}(x))' = P_{2n,h',0}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i x^{2(i+1)}}{i+1}$$

ונשים לב שמקרה זה מתקיים כאשר:

$$P_{2n+1,h,0}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{2n+1}$$