פתרון מטלה 09 — תורת הקבוצות (80200)

13 ביולי 2024

שאלה 1

תהי קבוצה A ונוכיח כי התנאים הבאים שקולים:

1. A טרנזיטיבית
2. $A \subseteq \mathcal{P}(A)$
3. $\bigcup A \subseteq A$

הוכחה. $2 \to 1$: נניח כי A טרנזיטיבית.
נראה ש־$x \in \mathcal{P}(A) \iff x \subseteq A \implies \forall x \in A$.
ההגדרה של הכלה היא כמובן $A \subseteq B \iff x \in B \implies \forall x \in A$ וקיבלנו כי $x \in \mathcal{P}(A) \implies \forall x \in A$ ולכן נסיק כי $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

$3 \to 2$: נניח כי $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.
בחלק הקודם מצאנו $x \in \mathcal{P}(A) \iff x \subseteq A$ ולכן נסיק, ונתון כי $x \in \mathcal{P}(A) \implies \forall x \in A$, ומשרשור הטענות נקבל

$$\forall x \in A \implies x \subseteq A$$

וכמובן גם $A = x \in A \bigcup$ על־פי הגדרה, ולכן נקבל כי גם $A \subseteq A \bigcup$.

$1 \to 3$: נניח כי $\bigcup A \subseteq A$.
יהי $x \in A$, אז נקבל כי $x \subseteq \bigcup A \subseteq A$ מההגדרה של איחוד, וקיבלנו כי $\forall x, x \in A \implies x \subseteq A$. □

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח כי אם A טרנזיטיבית אז גם $\mathcal{P}(A)$ טרנזיטיבית.

הוכחה. נניח כי A טרנזיטיבית ולכן מהשאלה הקודמת נקבל $A \subseteq \mathcal{P}(A)$ ונסיק

$$x \in \mathcal{P}(A) \implies x \subseteq A \subseteq \mathcal{P}(A)$$

ומצאנו כי $\mathcal{P}(A)$ טרנזיטיבית. $\square$

סעיף ב'

נניח כי $A \neq \emptyset$ קבוצה של קבוצות טרנזיטיביות, נוכיח כי $\bigcap A, \bigcup A$ טרנזיטיביות.

הוכחה. תהי $x \in A$, נתון כי היא טרנזיטיבית ולכן משאלה 1 נקבל $\bigcup x \subseteq x$, נפעיל את פעולת האיחוד על שני האגפים ונקבל $\bigcup \bigcup A \subseteq \bigcup A$ ולכן נסיק משאלה 1 כי גם $\bigcup A$ טרנזיטיבית.

יהי $y \in \bigcap A$, דהינו $\forall x \in A \;\; y \in x$, ונבחין כי גם $\forall x \in A \;\; y \in x \implies y \subseteq x \implies y \subseteq \bigcap A$ וקיבלנו כי גם החיתוך הוא טרנזיטיבי. $\square$

שאלה 3

יהי α סודר ונסמן $\alpha+1=s(\alpha)=\alpha\cup\{\alpha\}$.
נוכיח כי $\alpha+1$ סודר וכי הוא העוקב של α.

הוכחה. נבדוק אם $\alpha+1$ הוא טרנזיטיבי.
אם $x\in\alpha+1$ אז נקבל כי $x\in\alpha\vee\alpha\in\{\alpha\}$, דהינו $x\in\alpha$ או $x=\alpha$.
אם $x=\alpha$ אז כמובן $x=\alpha\subseteq\alpha+1$, ואם $x\in\alpha$ אז $x\subseteq\alpha\subseteq\alpha\cup\{\alpha\}=\alpha+1$.
נראה כי $(\alpha+1,\in)$ סדר קווי. אנו כבר יודעים כי $(\alpha,\in)$ סדר קווי וזהו למעשה אותו הסדר עם תוספת של איבר יחיד $\{\alpha\}$, ולכן מספיק לבדוק אותו בסדר זה.
נראה כי אם $x\in\alpha$ אז כמובן $x\in\alpha+1$ כפי שכבר ראינו, ולמעשה הראינו כי תכונת הסדר הקווית נשמרת.
נסיק אם כן ש־$\alpha+1$ הוא סודר.

נוכיח כי $\alpha+1$ הוא העוקב של α. ראינו כבר כי $\alpha\in\alpha+1$, ואנו יודעים כי α איבר מקסימלי ב־$(\alpha,\in)$, ונסיק כי $\forall x\in\alpha\in\alpha+1$.
אם כן החשוד היחידי הוא $x=\{\alpha\}$ עצמו, האיבר היחיד שנוסף ב־$(\alpha+1,\in)$, וכמובן $x\in\alpha+1$ ולכן נסיק כי אין איברים שסותרים את תכונת העוקב, ולכן $\alpha+1$ אכן עוקב של α. $\square$

שאלה 4

סעיף א'

נוכיח שאם $A \neq \emptyset$ קבוצת סודרים אז $\bigcup A, \bigcap A$ סודרים ושמתקיים $\min A = \bigcap A$ וגם $\sup A = \bigcup \alpha$.

הוכחה. בשאלה 2 מצאנו כי שתי קבוצות אלה טרנזיטיביות ולכן מספיק להוכיח כי הן מגדירות יחס סדר קווי יחד עם $\in$ כדי להראות שהן סודרים.
נשתמש בטענה מהתרגול הטוענת כי כל שני סודרים α, β מתקיים $\alpha = \beta$ או $\alpha \in \beta$ וזהו ללא הגבלת הכלליות.
אם $\alpha = \beta$ כמובן $(\alpha \cup \beta, \in)$ הוא סדר קווי, ולכן נניח כי $\alpha \in \beta$.
יהיו $x \in \alpha, y \in \beta$, ואנו יודעים כי $x \in \alpha \in \beta \implies x \in \beta$, ולכן נקבל כי $x, y \in \beta$ ומהסדר הטוב $(\beta, \in)$ נסיק כי $x = y \vee x \in y \vee y \in x$.
נוכל אם כן לבצע אותו הליך באופן רקורסיבי לכל הקבוצות ב־A ונקבל כי $(\bigcup A, \in)$ הוא סדר קווי ולכן $\bigcup A$ סודר.
נעבור לבדוק את הסדר הממוגדר על־ידי $\bigcap A$, יהיו $\alpha, \beta \in A$, אם $\alpha = \beta$ אז $\alpha \cap \beta = \alpha$ ומצאנו כי זהו סודר, ולכן נניח ללא הגבלת הכלליות כי $\alpha \in \beta$.
נוכל אם כן להסיק כי גם $\alpha \subseteq \beta$ ונסיק ישירות ש־$\alpha \cap \beta = \alpha$ ובהתאם גם $\bigcap A$ הוא סודר.
ראינו כי $\alpha \in \beta \implies \alpha \cap \beta = \alpha$ ולכן אם נבחר את הסודר המינימלי ב־A (כפי שמותר לנו לעשות שכן מצאנו ש־Ord סדר קווי עם יחס ההכלה) ונגדירו α. נוכל אם כן להסיק $\forall \beta \in A \ \ \alpha \cap \beta = \alpha$ ולכן נוכל להסיק כי $\min A = \alpha = \bigcap A$.
באופו דומה מצאנו כי $\forall \alpha, \beta \in A \ \ \alpha \in \beta \implies \alpha \cup \beta = \beta$, לכן נקבל כי $\forall \alpha \in A \ \ \alpha \in \bigcup A$ ואם נניח γ סודר כך ש־$\alpha \in \gamma$ לכל $\alpha \in A$ אז נקבל כי גם $\bigcup A \in \gamma$ מהטענה הקודמת, ונוכל להסיק כי $\sup A = \bigcup A$. □

סעיף ב'

נוכיח שאם ל־A אין מקסימום אז $\sup A$ הוא סודר גבולי, דהינו לא קיים α סודר כך ש־$\sup A = \alpha + 1$.

הוכחה. נניח כי ל־A אין מקסימום ונניח בשלילה ש־$\sup A = \alpha + 1$ עבור סודר α כלשהו.
מצאנו כי $\sup A = \bigcup A$ ולכן $\alpha + 1 \in x$ עבור $x \in A$ כלשהו, ולכן מטענות שראינו בהוכחה הקודמת נסיק $\forall y \in A \ \ y \in x$ ומצאנו כי x מקסימום ב־A בסתירה להנחה. □

שאלה 5

סעיף א'

יהי α סודר.

i.

נוכיח שאם $\alpha = \beta + 1$ הוא עוקב אז $\bigcup \alpha = \beta$.

הוכחה. $\square$