

פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

1 במאי 2023

שאלה 1

נמצא את נקודות הרציפות והאי־רציפות של הפונקציה f המוגדרת:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \tan \frac{\pi x}{2}$$

בתחום \mathbb{R} ונמיינן.

על־פי משפט 5.13 הפונקציה $\tan \frac{\pi x}{2}$ רציפה בכל תחום הגדרתה, ועל־פי הגדרת הפונקציה אנו יודעים כי היא איננה מוגדרת בערכים

$$\{1 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

מהגדרת החלק השלם והפונקציה x אנו יודעים כי $\lfloor x \rfloor$ רציפה בכל תחום הגדרתה, ולא מוגדרת בנקודות $x \in \mathbb{Z}$. על־פי משפט 5.11 גם f רציפה

בכל תחום הגדרתה, והיא כמובן לא מוגדרת ב־ \mathbb{Z} . אז כלל הנקודות החשודות באי־רציפות הן $x \in \mathbb{Z}$.

נגדיר מעתה $k \in \mathbb{Z}$. אנו יודעים כי כאשר $x = 1 + 2k$ אז הפונקציה $f(k)$ איננה מוגדרת, וכי $\lim_{x \rightarrow k^\pm} f(x) = \pm\infty$, לכן בנקודות אלה ל־ f נקודות אי־רציפות ממין שני.

כאשר $x = 2k$ אנו יודעים כי $\tan \frac{\pi x}{2}$ רציפה, ואילו $\lfloor x \rfloor$ מקיימת

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = k - 1 = \left(\lim_{x \rightarrow k^+} \lfloor x \rfloor \right) + \left(\lim_{x \rightarrow k^+} \tan \frac{\pi x}{2} \right) = k - 1 + 0 = k - 1$$

וגם

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = k - 1 = k + 0 = k$$

לכן על־פי הגדרה 5.22 הנקודות $x = 2k$ הן נקודות אי־רציפות ממין ראשון ב־ f .

שאלה 2

סעיף א'

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0 .

(i) ננסה את הטענה כי f איננה רציפה ב- x_0 בלשון ϵ, δ :

הפונקציה f לא רציפה ב- x_0 אם ורק אם קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים x כך ש- $|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

(ii) ננסה את הטענה כי f איננה רציפה ב- x_0 בלשון סדרות:

הפונקציה f איננה רציפה ב- x_0 אם ורק אם קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$.

סעיף ב'

נגדיר g פונקציה הרציפה ב- x_0 ופונקציה f המוגדרת $f(x) = g(x)D(x)$.

נוכיח כי אם $g(x_0) = 0$ אז f רציפה ב- x_0 .

מטענה 5.3 נובע כי לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|g(x)| < \epsilon$.

על-פי הגדרת פונקציית דיריכלה אנו יודעים כי $D(x) \in \{0, 1\}$ לכל $x \in \mathbb{R}$, לכן תמיד מתקיים $D(x) \leq 1$. אז כמובן שמתקיים גם $|g(x)|D(x) \leq |g(x)| < \epsilon$ ולכן גם $f(x) = g(x)D(x)$ רציפה ב- x_0 .

סעיף ג'

נגדיר $x_0 \in \mathbb{R}$ אשר עבורו $g(x_0) \neq 0$, כמובן גם g רציפה ב- x_0 .

(i) נוכיח כי הפונקציה f איננה רציפה ב- x_0 על-פי ההגדרה מסעיף א' (i)

הוכחה. נמצא $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים ערך x כך ש- $|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

נקבע $\epsilon < 1$, ויהי $\delta > 0$ אשר עבורו $|x - x_0| < \delta$.

מהגדרת פונקציית דיריכלה ואקסיומת הרצף, אנו יכולים להסיק כי קיים מספר x_1 אשר מקיים $|x_0 - x_1| < \delta$, ואשר הוא אי-רציונלי. מש"ל

(ii) נוכיח כי הפונקציה f איננה רציפה ב- x_0 על-פי ההגדרה מסעיף א' (ii)

הוכחה. נמצא סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$.

נגדיר (x_n) סדרה אינסופית של מספרים אי-רציונליים, $x_1 < x_0$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ כאשר $1 < n$ גם

$$x_n < x_{n+1} < x_0$$

הגדרה זו אפשרית כמובן על-פי צפיפות הממשיים.

על-פי הגדרת הגבול עבור סדרות, מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

אבל אנו יודעים שלכל n גם $f(x_n) = 0$ מהגדרת פונקציית דיריכלה, לכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \neq f(x_0)$$

מש"ל

שאלה 3

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0, \infty)$.

נוכיח כי אם לכל $x > 0$ מתקיים $|f(x)| > x$, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ או $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

הוכחה. תחילה נראה כי הפונקציה $f(x)$ היא חיובית לכל x או שלילית לכל x בתחום.

נניח בשלילה כי $f(x)$ משנה סימן כאשר $x = x_0$. נניח כי קיים a כך ש- $a < x_0$ וגם $f(a) < -a$ וכי קיים $b > x_0$ כך ש- $f(b) > b$.

ממשפט ערך הביניים של קושי נובע כי קיים מספר c כזה ש- $f(c) = 0$ בניגוד לנתון כי $|f(x)| > x > 0$.

יכולנו להגדיר את שינוי הסימן ההפוך וההוכחה הייתה נשארת זהה, לכן לא נפגעת הגבלת הכלליות.

אז אנו יכולים להסיק כי לכל x מתקיים $f(x) > x$, או לחילופין לכל x מתקיים $-f(x) > x$.

מהגדרת השאיפה לאינסוף ומינוס אינסוף בפונקציות נובע ישירות כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

או

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

מש"ל

שאלה 4

תהי f פונקציה רציפה בקטע $\mathbb{R}_{0\geq} = [0, \infty)$ ויהי $L \in \mathbb{R}$. ידוע כי מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

סעיף א'

נוכיח כי אם f מקבלת מינימום ב- $\mathbb{R}_{0\geq}$ אז קיים $x_0 \geq 0$ כך ש- $f(x_0) \leq L$.

הוכחה. נקבע כי x_1 היא נקודת מינימום של $f(x)$ וכי $f(x_1) = c$.

נבחן שני מקרים, כאשר $c \leq L$ אז כמובן שקיים x_0 כזה, והוא כאשר $x_0 = x_1$.

לכן עלינו רק לבחון את המקרה בו $c > L$.

מהגדרת הגבול בלשון M, ϵ נובע כי עבור $\epsilon = |c - L| = c - L$ קיים M כך ש- $|f(x) - L| < c - L$ לכל $x > M$.

אילו היה מתקיים $c > L > f(x)$ והגענו לסתירה לטענה כי x_1 נקודת מינימום.

$$f(x) - L < c - L \rightarrow f(x) < c$$

מש"ל

הגענו לסתירה לטענה כי x_1 היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$ ולכן לא יתכן כי $c > L$ ובהתאם יתכן רק כי $c \leq L$.

סעיף ב'

נוכיח כי אם קיים $x_0 \geq 0$ כך ש- $f(x_0) < L$ אז f מקבלת מינימום ב- $\mathbb{R}_{0\geq}$.

הוכחה. בשל הגבול של $f(x)$ באינסוף אנו יכולים להסיק כי קיים $M \in \mathbb{R}_{0\geq}$ עבורו לכל $x > M$ מתקיים $f(x_0) < x$.

מהמשפט השני של ויירשטראס על הקטע $[0, M]$ נובע כי בקטע זה ישנה נקודת מינימום x_1 .

מש"ל

כמובן שמתקיים $f(x_0) \geq f(x_1)$, ולכן בהתאם לכל $x > M$ נסיק כי $f(x_1) < x$, ולכן x_1 נקודת מינימום בכל הקטע $\mathbb{R}_{0\geq}$.

סעיף ג'

נוכיח כי אם קיים $x_0 \geq 0$ כך ש- $f(x_0) = L$ אז f מקבלת מינימום ב- $\mathbb{R}_{0\geq}$.

הוכחה. אילו f פונקציה קבועה אז כמובן שהיא מקבלת מינימום, ולכן נניח כי f פונקציה רציפה שאיננה קבועה.

אילו קיימת נקודה x_1 עבורה $f(x_1) \leq L$ אז על-פי סעיף ב' הפונקציה מקבלת מינימום.

נניח כי לא קיימת נקודה $x_1 \neq x_0$ אשר מקיימת $f(x_1) \leq f(x_0)$, אז זוהי כמובן הגדרת המינימום ובמקרה זה f מקבלת מינימום ב- x_0 .

מש"ל

עצמה.

שאלה 5

תהי פונקציה f המוגדרת

$$f(x) = \frac{(2x + \sin x) \arctan x}{x^2}$$

נבדוק האם הפונקציה f מקבלת מינימום ב- $(0, \infty)$.

מהגדרה 5.44 ומהגדרה 5.45 ניתן להסיק כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

לכן נוכל להסיק בנקל מהאריתמטיקה של הגבולות כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

מהגדרת כלל רכיביה האלגבריים של f אנו למדים כי היא רציפה.

מסעיף א' בשאלה 4 אנו למדים כי אם ב- f ישנה נקודת מינימום, אז גם קיים $x_0 \geq 0$ כך ש- $f(x_0) \leq 0$. אנו יודעים מהגדרת $\arctan x, x^2$ כי

חיוביות לכל $x > 0$. באופן דומה, ניתן להסיק כי $2x + \sin x$ חיובי לכל $x > 0$ מהגדרת $\sin x$.

לכן $f(x) > 0$ לכל $x > 0$, ובהתאם ההנחה כי יש ל- f נקודת מינימום סותרת את הטענה כי x_0 אשר מקיים את התנאי קיים בתחום.

לכן אין ל- f מינימום בתחום $(0, \infty)$.

שאלה 6

סעיף א'

הוכיחו כי הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

רציפה במידה שווה בקטע $[0, \infty)$.

הוכחה. נראה כי לכל $a \geq 1$ מתקיים

$$0 \leq a \rightarrow a^2 \leq a^2 + a \rightarrow a \leq \sqrt{a^2 + a} \rightarrow a + \frac{1}{2} \leq \sqrt{a^2 + a} + \frac{1}{2} \leq 2\sqrt{a^2 + a}$$

לכן לכל $x_1, x_2 \geq 1$ מתקיים גם

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 1 &\leq 2\sqrt{x_1^2 + x_1} + 2\sqrt{x_2^2 + x_2} \\ \frac{x_1 + x_2 + 1}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}} &\leq 2 \end{aligned}$$

יהי $\delta > 0$ ו- x_1, x_2 כך ש- $|x_1 - x_2| < \delta$.

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x_1^2 + x_1} - \sqrt{x_2^2 + x_2} \right| &= \left| \frac{(\sqrt{x_1^2 + x_1} - \sqrt{x_2^2 + x_2})(\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}} \right| \\ &= \left| \frac{x_1^2 + x_1 - x_2^2 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}} \right| \\ &= \left| \frac{(x_1 + x_2 + 1)(x_1 - x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}} \right| \\ &= \left| \frac{x_1 + x_2 + 1}{\sqrt{x_1^2 + x_1} + \sqrt{x_2^2 + x_2}} \right| |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

נניח כי גם $x_1, x_2 \geq 1$ ולכן

$$\left| \sqrt{x_1^2 + x_1} - \sqrt{x_2^2 + x_2} \right| = 2|x_1 - x_2| < 2\delta$$

יהי $\epsilon > 0$, אם נגדיר $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ אז לכל $x_1, x_2 \in [1, \infty)$, אשר עבורם $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, אז מהגדרה 5.46 נובע כי $f(x)$ רציפה במידה שווה בקטע.

מש"ל ממשפט קנטור אנו יכולים להסיק כי $f(x)$ רציפה במידה שווה גם ב- $[0, \infty)$

סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

רציפה במידה שווה בקטע $(0, \infty)$.

הוכחה.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x}} \sin x$$

על-פי 5.14

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \cdot 1 = 0$$

על-פי משפט 4.45

אנו יודעים כי $\sin x$ היא פונקציה חסומה, ולכן גם $\sin \frac{1}{x}$ חסומה, לכן ממשפט 4.53 נובע כי

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

מש"ל

משני הגבולות האלה ומשפט 5.49 נובע כי $f(x)$ רציפה במידה שווה בקטע $(0, \infty)$.

סעיף ג'

נפריך את הטענה כי הפונקציה

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

רציפה במידה שווה בקטע $(0, 1)$.

הוכחה. נניח בשלילה כי $f(x)$ רציפה במידה שווה, ויהיו ϵ, δ אשר מקיימים את הגדרה 5.46.

נקבע

$$x_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + 2\pi k}, x_2 = \frac{1}{-\frac{1}{2}\pi + 2\pi k}$$

כאשר $k \in \mathbb{N}$. בשל הקשר בין k לבין גודל המכנה, קיים k כך ש- $|x_1 - x_2| < \delta$.

מש"ל

אך כמובן ש- $|f(x_1) - f(x_2)| = |1 - (-1)| = 2 > \epsilon$, בסתירה לטענה כי קיים ערך δ לכל ϵ .