

פתרון ממ"ן 13 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

7 באוגוסט 2023



שאלה 1

את הפונקציה $f(x) = \ln x$ מקרבים בקטע $I = [e^2 - 1, e^2 + 1]$ על-ידי הפולינום

$$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{e^2} - \frac{x^2}{2e^4}$$

נראה כי

$$|f(x) - P(x)| < \frac{1}{3(e^2 - 1)^3}$$

לכל $x \in I$

$$\ln x = \ln(e^2 e^{-2} x) = \ln(e^{-2} x) + 2 = \ln((e^{-2} x - 1) + 1) + 2$$

נראה כי

$$t = \frac{x}{e^2} - 1$$

לכן נגדיר

$$\ln x = g(t) = \ln(t + 1) + 2$$

אז מההגדרה נובע

ידוע כי $x \in [e^2 - 1, e^2 + 1]$ ולכן

$$e^2 - 1 \leq x \leq e^2 + 1$$

$$e^2 - 1 \leq e^2(t + 1) \leq e^2 + 1$$

$$1 - e^{-2} \leq t + 1 \leq 1 + e^{-2}$$

$$-1 < -e^{-2} \leq t \leq e^{-2} < 1$$

דהינו $t \in (-1, 1)$ ולכן על-פי פיתוח טיילור של $\ln(t + 1)$ בתחום $(-1, 1)$ אשר מוגדר בעמוד 65 כרך ב' פולינום טיילור מסדר 2 של $g(t)$ הוא

$$P_2(t) = g(0) + t - \frac{1}{2}t^2 = 2 + \frac{x}{e^2} - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{e^2} - 1\right)^2 = 1 + \frac{x}{e^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{e^4} - \frac{2x}{e^2} + 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{e^2} - \frac{x^2}{2e^4} = P(x)$$

לכן על-פי הגדרת השארית

$$R_2(t) = g(t) - P_2(t)$$

על-פי דוגמה 4.4 לכל $t \in (-1, 1)$ מתקיים

$$|R_2(t)| < \frac{|t|^3}{1 - |t|} = \frac{\left(\frac{x}{e^2} - 1\right)^3}{\frac{x}{e^2}} = \frac{(x - e^2)^3}{xe^4}$$

מחקירת הפונקציה עולה כי היא מקבלת מקסימום ב- $x = e^2 + 1$ ולכן

$$|R_2(t)| = |f(x) - P(x)| < \frac{(e^2 + 1 - e^2)^3}{(e^2 + 1)e^4} = \frac{1}{e^6 + e^4}$$

ניתן לבדוק ולראות כי מתקיים לכל $x \in [e^2 - 1, e^2 + 1]$

$$|f(x) - P(x)| < \frac{1}{3(e^2 - 1)^3}$$

שאלה 2

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה $n + 1$ פעמים בקטע $[a, b]$ ו- $f^{(n+1)}(x)$ רציפה ב- $[a, b]$.

נקבע נקודה $x_0 \in [a, b]$ ונסמן ב- $R_n(x)$ את השארית מסדר n של f ב- x_0 .

נוכיח כי לכל $x \in [a, b]$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

הוכחה. נגדיר $P_i(x)$ פיתוח טיילור של $f(x)$ סביב x_0 . נשים לב כי הפונקציה $f(x)$ עומדת בכל הדרישות לפיתוח זה עבור $0 \leq i \leq n$.

נוכיח באינדוקציה את הטענה:

בסיס האינדוקציה: מהמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי נובע כי

$$\int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0) = f(x) - P_0(x) = R_0(x)$$

ומצאנו כי הטענה נכונה עבור $n = 0$.

מהלך האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור $0 < i \leq n$, לכן מתקיים

$$f(x) = P_i(x) + \frac{1}{i!} \int_{x_0}^x f^{(i+1)}(t)(x-t)^i dt$$

עבור הביטוי נבצע אינטגרציה בחלקים, כאשר

$$u = f^{(i+1)}(t)$$

$$dv = (x-t)^i$$

$$du = f^{(i+2)}(t) dt$$

$$v = -\frac{1}{i+1} (x-t)^{i+1}$$

ולכן

$$\begin{aligned} A &= u(t)v(t)dt \\ &= -\frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(t)(x-t)^{i+1} \Big|_{x_0}^x \\ &= -\frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x)(x-x)^{i+1} + \frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{i+1} \\ &= \frac{1}{i+1} f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{i+1} \\ f(x) &= P_i(x) + \frac{1}{i!} \left(A - \frac{1}{i+1} \int_{x_0}^x (-1) f^{(i+2)}(t)(x-t)^{i+1} dt \right) \\ &= P_i(x) + \frac{1}{(i+1)!} \left(f^{(i+1)}(x_0)(x-x_0)^{i+1} + \int_{x_0}^x f^{(i+2)}(t)(x-t)^{i+1} dt \right) \\ &= P_{i+1}(x) + \frac{1}{(i+1)!} \int_{x_0}^x f^{(i+2)}(t)(x-t)^{i+1} dt \end{aligned}$$

מש"ל

והשלמנו את מהלך האינדוקציה.

שאלה 3

נשתמש בפיתוח מקלורן ונחשב את הגבולות הבאים:

סעיף א'

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - (x + 1)}{\tan x - \sin x} \quad (1)$$

נגזור ונחשב פולינומים עבור חלקי הביטוי

$$f(x) = e^x \cos x, f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x, f''(x) = -2e^x \sin x, f^{(3)}(x) = -2e^x (\sin x + \cos x)$$

ונחשב

$$f(0) = 1, f'(1) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -2$$

ולכן ערך המכנה הוא

$$e^x \cos x - (x + 1) = 1 + x - 2\frac{1}{3!}x^3 + R_3(x) - x - 1 = -\frac{1}{3}x^3 + R_3(x)$$

נגזור את הביטוי

$$g(x) = \tan x - \sin x, g'(x) = \cos^{-2}(x) - \cos x,$$

$$g''(x) = 2 \sin x \cos^{-3}(x) + \sin x, g^{(3)}(x) = 2(\cos^{-2}(x) + -3 \sin^2 x \cos^{-4}(x)) + \cos x$$

ונחשב

$$g(0) = 0, g'(0) = 0, g''(0) = 0, g^{(3)}(0) = 3$$

ולכן מכנה הביטוי מקיים

$$\tan x - \sin x = \frac{1}{2}x^3 + S_3(x)$$

ולכן על-פי משפט 4.7 גבול (1) שקול לגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + R_3(x)}{\frac{1}{2}x^3 + S_3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\frac{x^3}{x^3} + \frac{R_3(x)}{x^3}}{\frac{2}{2}\frac{x^3}{x^3} + \frac{S_3(x)}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 + 0}{3 + 0} = -\frac{2}{3}$$

סעיף ב'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 + 1) + \ln(n^2 - 1) - 4 \ln n}{1 - \cos(1/n^2)} \quad (2)$$

נחשב

$$\ln(n^2 + 1) + \ln(n^2 - 1) - 4 \ln n = \ln\left(\frac{n^4 - 1}{n^4}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n^4}\right)$$

לכן ערך גבול (2) שקול לערך הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 - \frac{1}{n^4})}{1 - \cos(\frac{1}{n^2})} \quad (3)$$

על-פי הגדרת היינה לגבול פונקציה ערך גבול (3) לערך גבול לפונקציה זהה. על הגבול בתצורת פונקציה נחיל את משפט הרכבת פונקציות מאינפי 1 עבור $f(x) = \frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{1-\cos x}$$

הוא גבול המתכנס לאותו ערך כמו גבול (2).

נחשב נגזרות עבור המונה

$$f(x) = \ln(1-x^2), f'(x) = -2\frac{x}{1-x^2}, f''(x) = -2\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

ולכן

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = -2$$

נחשב את נגזרות המכנה

$$g(x) = 1 - \cos x, g'(x) = \sin x, g''(x) = \cos x$$

ומחישוב עולה כי

$$g(0) = 0, g'(0) = 0, g''(0) = 1$$

ונובע כי הגבול שקול על-פי משפט 4.7 לביטוי

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{2!}x^2 + R_2(x)}{\frac{1}{2!}x^2 + S_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \frac{R_2(x)}{x^2}}{\frac{1}{2} + \frac{S_2(x)}{x^2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

אז גבול (2) ערכו הוא -2 .

שאלה 4

תהי $f(x)$ פונקציה אי־שלילית גזירה פעמיים בקטע $[-2, 2]$ וידוע שיש ל־ $f(x)$ אפס בקטע זה. עוד ידוע כי $f(-2) = f(2) = \pi$.

נוכיח כי קיימת נקודה $c \in (-2, 2)$ כך שמתקיים $f''(c) \geq \pi/2$

הוכחה. ידוע כי קיימת נקודה $x_0 \in (-2, 2)$ עבורה $f(x_0) = 0$, וידוע כי זוהי נקודת מינימום של הפונקציה ולכן ממשפט פרמה נובע כי

$$f'(x_0) = 0 \text{ גם כן.}$$

לכן פיתוח טיילור של f סביב x_0 הוא

$$P(x) = 0 + 0(x - x_0) + R_1(x) = R_1(x)$$

כאשר $R_1(x)$ פונקציית השארית.

נציג את השארית בצורת לגראנז' בנקודה $x = 2$ ונקבל

$$P(2) = \pi = R_1(2) = \frac{1}{2}f''(\xi_1)(2 - x_0)^2$$

ולכן

$$f''(\xi_1) = \frac{2\pi}{(2 - x_0)^2}$$

באופן דומה נקבל עבור הצגת לאגרנז' בנקודה $x = -2$ כי

$$f''(\xi_2) = \frac{2\pi}{(2 + x_0)^2}$$

נבחין כי על־פי הצגת לאגרנז' $\xi_1, \xi_2 \in (-2, 2)$.

ידוע כי $-2 < x_0 < 2$, נבחן את התחומים הבאים:

1. כאשר $-2 < x_0 < 0$

מתקיים $0 < (x_0 + 2)^2 < 4$ ולכן גם

$$f''(\xi_2) = \frac{2\pi}{(2 + x_0)^2} > \frac{\pi}{2}$$

2. כאשר $x_0 = 0$

מתקיים

$$f''(\xi_2) = \frac{2\pi}{(2 + 0)^2} = \frac{\pi}{2}$$

3. כאשר $0 < x_0 < 2$

מתקיים $0 < (2 - x_0)^2 < 4$ ולכן גם

$$f''(\xi_1) = \frac{2\pi}{(2 - x_0)^2} > \frac{\pi}{2}$$

אז מצאנו כי קיים מספר $\xi \in (-2, 2)$ עבורו

$$f''(\xi) \geq \frac{\pi}{2}$$

מש"ל

שאלה 5

תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בנקודה $x = 1$ ומתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{(x - 1)^2} = 1$$

נמצא את הערכים של f ושל שתי נגזרותיה הראשונות בנקודה $x = 1$.

תחילה נבחין כי תנאי כלל לופיטל מתקיימים פעמיים, ולכן מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 1}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{2} = f''(1)/2 = 1$$

וקיבלנו $f''(1) = 2$.

נבחן את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 1}{2x - 2} = 1$$

הוא כמובן שקול על-פי פיתוח טיילור סביב $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(1) + f''(1)(x - 1) + R_1(x) - 1}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(1) + 2x - 3 + R_1(x)}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1) + f'(1) - 1 + R_1(x)}{2x - 2}$$

ממשפט 4.7 נובע כי $R_1(x)$ איננו משפיע על הגבול, אך אילו $f'(1) - 1 \neq 0$ אז המונה לא יתאפס בנקודה בסתירה לסופיות הגבול, ולכן נובע כי

$$f'(1) = 1$$

לכן לפי פיתוח טיילור ב- $x = 1$ של הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1) + (x - 1) + (x - 1)^2 - x + R_2(x)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1) - 1 + (x - 1)^2 + R_2(x)}{(x - 1)^2} = 1$$

באופן דומה $R_2(x)$ מתאפס בגבול, אך אילו $f(1) - 1 \neq 0$ אז המונה איננו מתאפס בסתירה לסופיות הגבול ולכן $f(1) = 1$.

מצאנו כי $f(1) = f'(1) = 1, f''(1) = 2$.

שאלת רשות

נמצא פולינום מקלורן ממעלה 3 של הפונקציה

$$f(x) = (1+x)^{1/x}, f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e$$

תחילה נשים לב כי

$$f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$$

על-פי כרך ב' של הספר אנו למדים כי

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x)$$

ולכן

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x))} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{R_4(x)}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + R_3(x)} = e(e^{\frac{-x}{2}})(e^{\frac{x^2}{3}})(e^{\frac{-x^3}{4}}) + R_3(x)$$

מפיתוח מקלורן עולה כי

$$\begin{aligned} e^{-x/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + R_3(x) \\ e^{x^2/3} &= 1 + 0x + \frac{1}{3}x^2 + 0x^3 + R_3(x) \\ e^{-x^3/4} &= 1 + 0x + 0x^2 - \frac{1}{4}x^3 + R_3(x) \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} e(e^{\frac{-x}{2}})(e^{\frac{x^2}{3}})(e^{\frac{-x^3}{4}}) + R_3(x) &= e(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3)(1 + \frac{1}{3}x^2)(1 - \frac{1}{4}x^3) + R_3(x) \\ &= e(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^3) + R_3(x) \\ &= e(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{21}{48}x^3) + R_3(x) \end{aligned}$$

ולכן מצאנו כי

$$f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + R_3(x)$$