פתרון מטלה 4 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

3 ביוני 2024

שאלה 1

.i

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin(\dfrac{1}{x})}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}$$
$$\stackrel{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$
$$\stackrel{(2)}{=} 1\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$
$$= 1$$

1. אם הגבול קיים אז תהיה לנו הצדקה לפרק את הגבול למכפלת גבולות, נבדוק
2. גבול ידוע, והרכבת פונקציות על $t = \frac{1}{x}$.

.ii

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)\cdot\cos(cx)} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos(ax)}{b\cdot\cos(bx)\cos(cx)-c\cdot\sin(bx)\sin(cx)}$$
$$= \frac{a\cdot 1}{b\cdot 1 - c\cdot 0}$$
$$= \frac{a}{b}$$

.iii

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{2}\cos x}{x-\frac{1}{2}\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\frac{1}{2}\cos x}{x}}{1-\frac{\frac{1}{2}\sin x}{x}}$$
$$= \frac{1-0}{1-0} = 1$$

.iv

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2(x)-1}{1-\cos(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)}{1-\cos(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\tan(x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\sin(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos(x)}$$
$$= \frac{2}{\cos^3(0)} = 2$$

שאלה 2

תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב־$x_0 \in \mathbb{R}$.

סעיף א'

נסביר מדוע קיים $\delta > 0$ כך ש־f גזירה בסביבה $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

נבחן את פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אנו יודעים כי היא גזירה בנקודה $x = x_0$ מהנתון, ולכן על־פי הגדרת הנגזרת נובע כי קיים $\delta > 0$ כך ש־f' מוגדרת ורציפה ב־$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. מכאן נובע ישירות כי הפונקציה f מוגדרת רציפה ובהכרח גם גזירה בסביבה זו.

סעיף ב'

נוכיח כי הגבול קיים במובן הצר:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

הוכחה. נבחן את הגדרת הנגזרת:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

וידוע כי הנגזרת הזו היא בעצמה גזירה, דהינו:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 - h) - f'(x_0)}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0 + h - h) - f(x_0 - h) - f(x_0 + h) + f(x_0)}{h}}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-f(x_0 - h) - f(x_0 + h) + 2f(x_0)}{-h^2} \\ f''(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) + f(x_0 + h) - 2f(x_0)}{h^2} \end{aligned}$$

וקיבלנו כי הגבול קיים ומוגדר. $\square$

שאלה 3

יהי $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו.

סעיף א'

נוכיח כי מתקיים הגבול:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$

הוכחה. נשים לב כי הן המונה והן המכנה שואפים לאינסוף, ונוכל להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ומצאנו כי הגבול מתקיים.

נשתמש במשפט ההצבה עבור $x = u^\alpha$ ונקבל:

$$\lim_{u^\alpha\to\infty} \frac{\ln u^\alpha}{u^\alpha} = \lim_{u\to\infty} \alpha\frac{\ln u}{u^\alpha} = \alpha \lim_{u\to\infty} \frac{\ln u}{u^\alpha} = 0$$

ולכן בפרט נקבל שמתקיים $\lim_{u\to\infty} \frac{\lim u}{u^\alpha} = 0$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שמתקיים

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x} = 0$$

הוכחה. קיבלנו כי מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lim x}{x^\alpha} = 0$$

ונשים לב שלכל $x > 1$ מתקיים $0 < \ln^\beta(x) < \ln(x)$ על־פי חוקי חזקות, ולכן מכלל הסנדוויץ' נקבל

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lim^\beta x}{x^\alpha} = 0$$

נציב $\alpha = 1$ ונסמן את β כ־α ונקבל גם

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lim^\alpha x}{x} = 0$$

כנדרש. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שמתקיים הגבול $\lim_{u\to\infty} \frac{p(u)}{e^u}$ לכל פולינום p.

הוכחה. נשתמש בגבול שקיבלנו בסעיף הקודם יחד עם ההצבה $x = e^t$ ונקבל את הגבול

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln^\alpha(e^t)}{e^t} = 0 \implies \lim_{t\to\infty} \frac{t^\alpha}{e^t} = 0$$

עתה יהי פולינום $p(x) = \sum_{n=1}^k p_n x^n$. לכן נוכל לקבוע גם כי $\sum_{n=1}^k p_n x^n \le \sum_{n=1}^k p_{\max} x^k = kp_{\max} x^k$.

נסיק מאי־שוויון זה כי לכל $x > 0$ מתקיים $0 < \frac{p(x)}{e^x} < |kp_{\max}|\frac{x^k}{e^x} \implies 0 < p(x) < |kp_{\max}|x^k$.

ממשפט הסנדוויץ' והגבול הקודם נקבל

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$$

$\square$

סעיף ד'

נוכיח כי $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ ואף כי $\lim_{u\to 0^+} u^\alpha \ln u = 0$.

הוכחה. נבחן את הביטוי בצורה $\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. נבחין כי בשאיפה לאפס הן המונה והן המכנה שואפים למינוס אינסוף, ולכן נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

ומצאנו כי הגבול אכן מתקיים.

אילו נגדיר $x = u^\alpha$ ונשתמש בכלל ההצבה נקבל

$$\lim_{u\to 0^+} u^\alpha \ln(u^\alpha) = 0 \implies \alpha \cdot \lim_{u\to 0^+} u^\alpha \ln u = 0 \implies \lim_{u\to 0^+} u^\alpha \ln u = 0$$

ומצאנו כי שני הגבולות נכונים לכל $\alpha > 0$. $\square$

שאלה 4

נחשב את פולינומי טיילור הבאים:

סעיף א'

נגדיר $f(x) = x^{2024}, n = 2020, a = 0$,

ולכן

$$P_{n,f,a}(x) = \sum_{i=0}^{2020} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i = \sum_{i=0}^{2020} \frac{0}{i!}(x-0)^i = 0$$

הפולינום המתקבל הוא פולינום האפס, ולכן הוא אומנם מדויק כאשר $x=0$, ואכן עבור $|x| < 1$ אנו יודעים כי x^{2024} הוא ערך קטן ביותר, ונוכל לקרבו על־ידי 0.

סעיף ב'

תהי

$$f(x) = 3x - x^3 + x^6 - x^7 \cos x$$

עבור $n=5$ סביב הנקודה $a=0$.

נבחין כי עבור $0 \leq k \leq 5$ מתקבל כי $(x^7 \cos x)^{(k)}$ הוא פונקציה המוכפלת ב־x, זאת אנו למדים מאינדוקציה על נגזרת מכפלת פונקציות.

בהתאם $(x^7 \cos x)^{(k)}(0) = 0$ ולמעשה האיבר המחובר הזה לא משפיע כלל על פולינום הטיילור שעלינו לחשב.

באופן דומה לסעיף הקודם נקבל כי גם x^6 לא משפיע על הפולינום ולכן נקבל

$$P_{5,f,0}(x) = 3x - x^3$$

גם במקרה זה הקירוב מסייע לנו להבין את גרף הפונקציה עבור $x < 1$, בו החזקות הגבוהות תורמות פחות לשינוי הפונקציה f.

שאלה 5

יהי $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ותהי f פונקציה גזירה n פעמים ב־$x = 0$.

סעיף א'

נתון ש־$g(x) = f(-x)$, נחשב את הפולינום $P_{n,g,0}$ על־ידי הפולינום $P_{n,f,0}$.

נבחין כי $g = f \circ h$ כאשר $h(x) = -x$, ולכן נגזרת הביטוי היא $g' = (f' \circ h) \cdot h'$, אך כמובן $h'(x) = -1$ ונקבל $g'(x) = -f'(-x)$.
נוכל אם כן להוכיח באינדוקציה שמתקיים $g^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(-x)$.
נראה עתה כי

$$P_{n,g,0} = \sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i f^{(i)}(0)}{i!} x^i = P_{n,f\circ h,0}$$

סעיף ב'

מצאנו בהרצאה כי עבור $f(x) = \frac{1}{1-x}$ מתקיים

$$P_{n,f,0} = \sum_{i=0}^{n} x^i$$

נשתמש בפולינום זה כדי למצוא את $P_{n,g,0}$ כאשר $g(x) = \frac{1}{1+x}$.

נשים לב כי מתקיים $g = f \circ h$ עבור h מהסעיף הקודם ולכן נובע:

$$P_{n,g,0} = P_{n,f\circ h,0} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i$$

סעיף ג'

נגדיר עתה $h(x) = \ln(1+x)$ ונחשב את פולינום טיילור שלה סביב 0.

נבחין כי $h'(x) = \frac{1}{1+x} = g(x)$ מהסעיף הקודם.
בהתאם נראה כי $h^{(k)}(x) = h^{(k-1)}(x)$ וכי $h(0) = \ln 1 = 0$ ונסיק

$$P_{n,h,0} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{i+1}}{i+1}$$

שאלה 6

יהי $m \in \mathbb{N}$ ותהי פונקציה f גזירה אינסוף פעמים בנקודה $a = 0$. לכל $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, נסמן $P_k = P_{k,f,0}$.

סעיף א'

i.

נוכיח שהקבוצה $A = \mathrm{Sp}\{f^{(k)}(x^m)h(x) \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, h \in \mathbb{R}[x]\}$ סגורה תחת פעולת הגזירה ואף כי הפונקציה g המוגדרת על־ידי $g(x) = f(x^m)$ גזירה אינסוף פעמים ב־0.

הוכחה. יהי $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ו־$h \in \mathbb{R}[x]$, לכן $f^{(k)}(x^m)h(x) \in A$. נגזור את הביטוי ונקבל

$$\begin{aligned}(f^{(k)}(x^m)h(x))' &= (f^{(k)}(x^m))'h(x) + f^{(k)}(x^m)h'(x)\\ &= f^{(k+1)}(x^m)h(x) \cdot (x^m)' + f^{(k)}(x^m)h'(x)\\ &= f^{(k+1)}(x^m)h(x) \cdot mx^{m-1} + f^{(k)}(x^m)h'(x)\end{aligned}$$

אנו יודעים כי מרחב הפולינומים סגור לכפל ולגזירה, ולכן נובע כי $mx^{m-1}h(x), h'(x) \in \mathbb{R}[x]$.
מכאן נסיק ישירות כי $(f^{(k)}(x^m)h(x))' \in A$.

עתה נבחין כי עבור $h(x) = 1$ נקבל $g(x) = f(x^m) \cdot 1 \in A$, ומצאנו כי הקבוצה סגורה לגזירה, ולכן נוכל להוכיח באינדוקציה כי $\forall k \in \mathbb{N}$: $g^{(k)} \in A$. ☐

ii.

יהי $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, נוכיח ש־$Q(x) = P_n(x^m)$ שקול ל־$P_{nm,g,0}$.

הוכחה. נבחן את הגבול

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - P_n(x^m)}{x^{mn}} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x^m) - P_n(x^m)}{x^{mn}}$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t = x^m$ ונקבל

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x^m) - P_n(x^m)}{x^{mn}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - P_n(t)}{t^n} = 0$$

על־פי המשפט לקירובי טיילור בנקודה. לכן נובע כי גם

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - P_n(x^m)}{x^{mn}} = 0$$

ולכן על־פי ההגדרה $P_n(x^m)$ הוא קירוב טיילור מסדר nm עבור g ב־$x = 0$. ☐

סעיף ב'

נחשב את פולינום טיילור של $g(x) = \frac{1}{1+x^m}$ סביב אפס.

נבחין כי עבור $f(x) = \frac{1}{1+x}$ מתקבל ש־$g(x) = f(x^m)$.

בסעיף 5א' מצאנו גם כי

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{i+1}}{i+1}$$

ולכן מהסעיף הקודם נובע

$$P_{nm,g,0} = P_n(x^m) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{m(i+1)}}{i+1}$$

סעיף ג'

נחשב את פולינום טיילור מסדר $2n+1$ של $h(x) = \arctan x$ סביב 0.

נבחין כי $h'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ על־פי המטלות הקודמות. לכן נסיק מהסעיף הקודם כי

$$P_{2n,h',0}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2(i+1)}}{i+1}$$

נשתמש בכלל שמצאנו בכיתה עבור פולינום טיילור ונגזרת:

$$(P_{2n+1,h,0}(x))' = P_{2n,h',0}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2(i+1)}}{i+1}$$

ונשים לב שמקרה זה מתקיים כאשר:

$$P_{2n+1,h,0}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{2n+1}$$