# פתרון מטלה -03 פונקציות מרוכבות,

2024 בנובמבר 21



#### שאלה 1

 $g:K o\mathbb{C}$  קבוצה לוגריתם כי קיים נניח קומפקטית, קבוצה קבוצה א קבוצה לוגריתם אוניח להי

#### 'סעיף א

, 
$$\epsilon=\inf\{|g(z_1)-g(z_2)-2\pi il|\mid l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, z_1,z_2\in K\}$$
 נגדיר נגדיר ונוכיח כי  $\epsilon>0$  וווכיח כי

הוכבים של מרוכבים היימת עדרה של  $\epsilon=0$  אז קיימת היימת של הוכבים  $\epsilon^2=(\log|z_1|-\log|z_2|)^2+(\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2)-2\pi l)^2$  הוכחה. נבחין כי  $\epsilon=0$  אז קיימת סדרה של מרוכבים  $\epsilon=0$  אז קיימת סדרה של מרוכבים ביימת ביימת שלהם שואף למרחק  $\epsilon=0$ 

מתכנסות את שמקיימות הסדרות שלה ובהתאם הגבוליות כל הנקודות מכילה את מכילה את לכן היא מכילה את את את שמקיימות ולכן כי  $\epsilon=0$  את מסומה, לכן היא מכילה את מכילה את כל הנקודות ב $z_1,z_2\in K$ 

אילו מתקבל שהארגומנט שתומך ב-g, ולכן מתקבל הארגומנט מתירה לרציפות של האנומנט אילו אילו מרקבל הארגומנט ולכן מתקבל הארגומנט אילו  $|\arg(z_1)-\arg(z_2)|\geq 2\pi$  אילו מתכנסים, דהינו  $e\geq 2\pi$  אך אז נקבל  $g\geq 2\pi$ , וזו סתירה.

#### 'סעיף ב

לכל  $|h(z_1)-h(z_2)|<rac{\epsilon}{2}$  קיים  $h(z_0)=g(z_0)$  כך ש־ $h:B(z_0,r)\to\mathbb{C}$  וליטי אנליטי r>0 קיים קיים פונסיה לכל  $z_0\in K$  כר נוכיה בוניה אנליטי  $z_0\in K$  לכל וובניס בין אוניים בין אוניים בין אוניים אנליטי בין אוניים אנליטי בין אוניים אנליטי בין אוניים בין אוניים אנליטי בין אוניים אוניים אנליטי בין אוניים אנליטי בין אוניים אוניים אוניים אנליטי בין אוניים אוני

הוכחה. תחילה נגדיר h, ואנו יודעים שהוא נקבע על־ידי שראינו בתרגול נובע שקיים לוגריתם h, ואנו יודעים שהוא נקבע על־ידי  $h(z_0)=g(z_0)$ , נקודה יחידה (טענה מהתרגול), לכן נגדיר  $h(z_0)=g(z_0)$ 

עתה, קיבלנו כי של הסעיף הקודם הוא ערך ממשי, וכך גם  $\epsilon$  לי עתה, קיבלנו עתה,

$$\sup_{z_1,z_2\in \overline{B}(z_0,r)} |h(z_1)-h(z_2)| = \rho$$

היקטן כך ש' כך ש' כך ער מטופולוגיה מכדורים כדורים סגורים של כדורים התאם, ומטופולוגיה של בהתאם פרחב מכדורים סגורים מסגורים אוקלידי פרחב התאם, ומטופולוגיה של כדורים סגורים במרחב האוקלידי פרחב התאם, ומטופולוגיה של כדורים סגורים במרחב האוקלידי פרחב התאם, ומטופולוגיה של כדורים האוקלידי פרחב האוקלידי פרחב האוקלידי פרחב האוקלידי במרחב האוקלידי פרחב האוקלידי במרחב האוק

#### 'סעיף ג

 $|L|_K=g$ בר כך שי $l:U o\mathbb{C}$  אנליטי אנליטי ולוגריתם אנליטי אולוגריתם אנליטי כך ער פתוחה נוכיח נוכיח נוכיח אנליטי

הוכחה.

### שאלה 2

נוכים. בתחומים בתחומים בתחומים הניתן הכל בכל בכל לפונקציה לפונקציה בתחומים בתחומים שניתן הגדיר לוגריתם אנליטי

## 'סעיף א

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 2\pi\}$$
 עבור

הוכחה.