פתרון מטלה 06 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

20 ביוני 2024

שאלה 1

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה ותהי $f : A \to \mathbb{R}$ כך שכל הנגזרות החלקיות של f מסדר ראשון ושני קיימות ורציפות ב־A.

סעיף א'

נוכיח כי f גזירה פעמיים.

הוכחה. תהי $x_0 \in A$, נתון כי כל הנגזרות החלקיות שלה מוגדרות, ולכן נובע כי f גזירה ונתון כי היא גם רציפה, דהינו $Df|_{x_0} : A \to \hom(A, \mathbb{R})$ רציפה, ונתון כי היא גם גזירה ברציפות ולכן מאותו משפט נובע גם כי $D^2 f \mid_{x_0}$ גם היא מוגדרת ורציפה. $\square$

סעיף ב'

יהיו $v = (v_1, v_2)$ ו־$w = (w_1, w_2)$ וקטורים ב־$\mathbb{R}^2$, נכתוב את $D^2 f \mid_p (v, w)$.

נבחין כי

$$Df \mid_v x = \nabla f_v(x) = (\partial_x f(v) x, \partial_y f(v) x)$$

כאשר $Df \mid_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

עוד אנו יודעים כי $D^2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, ובהתאם נקבל

$$D^f(v, w) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(v, w) & \partial_{yx} f(v, w) \\ \partial_{xy} f(v, w) & \partial_{yy} f(v, w) \end{pmatrix}$$

שאלה 2

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

סעיף א'

נוכיח כי f גזירה בכל נקודה ונחשב את ∇f.

הוכחה. נראה כי בנקודות $(x,y)\neq(0,0)$ זוהי הרכבת פונקציות רציפות וגזירות ונוכל לחשב ולקבל

$$\nabla f(x,y)=(\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2},\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2})$$

נבדוק את הגבול ב־$(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{\|(x,y)\|^3}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^3}=0$$

ומצאנו כי $\nabla f(0,0)=(0,0)$, וכי הפונקציה גזירה בכל נקודה. □

סעיף ב'

נוכיח כי כל הנגזרות החלקיות מסדר שני של f קיימות ב־$(0,0)$.

הוכחה. נבדוק

$$\partial_{xx}f(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 0^4}{\|(x,0)\|^3}=0$$

ונקבל באופן דומה גם כי $\partial_{yy}f(0,0)=0$.

נותר לבדוק את $\partial_{xy}f(0,0)$, נראה

$$\partial_{xy}f(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4\cdot 0}{\|(x,0)\|^3}=0$$

וקיבלנו כי כל הנגזרות החלקיות מתאפסות בנקודה. □

סעיף ג'

נראה כי f לא גזירה פעמיים ב־$(0,0)$.

הוכחה. נבחן את $g(x,y)=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$, הרכיב הראשון בנגזרת של f, ונבדוק את נגזרתו הכיוונית עבור $v=(1,1)$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t,t)-g(0,0)}{t}=\frac{2t^5}{\sqrt{2}t^5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

דהינו, נגזרת מכוונת זו היא לא אפס בסתירה למה שמצאנו בסעיף הקודם. □

שאלה 3

תהי $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ פונקציה גזירה שלוש פעמים ב-$p\in\mathbb{R}^d$. יהי $\{e_1,\dots,e_d\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$, נכתוב במפורש את $D^3f\mid_p(e_i,e_j,e_k)$.

נבחן תחילה את $Df\mid_p(e_i)$, ונראה כי מתקיים

$$Df\mid_p=\begin{pmatrix}\partial_1 f_1\mid_p & \dots & \partial_d f_1\mid_p\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1 f_m\mid_p & \dots & \partial_d f_m\mid_p\end{pmatrix}$$

ולכן נוכל להציב ולקבל

$$Df\mid_p(e_i)=\begin{pmatrix}\partial_1 f_1\mid_p & \dots & \partial_d f_1\mid_p\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1 f_m\mid_p & \dots & \partial_d f_m\mid_p\end{pmatrix}\cdot e_i=\begin{pmatrix}\partial_i f_1\mid_p\\ \vdots\\ \partial_i f_m\mid_p\end{pmatrix}=\partial_i f\mid_p$$

מחזרה על חישוב זה נקבל

$$D^3f\mid_p(e_i,e_j,e_k)=\partial_k\partial_j\partial_i f\mid_p$$

שאלה 4

סעיף א'

נחשב את פולינום טיילור של $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}\cos(xy)$ עד סדר 4 סביב $(0,0)$.

נבחין כי $e^{-(x^2+y^2)}=e^{-t^2}$ כאשר $t=\|(x,y)\|$, מפיתוח טיילור של האקספוננט נקבל

$$e^{-t^2}=1-0t+\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot t^2+\frac{1}{3!}\cdot 0\cdot t^3+\frac{1}{4!}\cdot(-8)t^4+o(t^4)=1-t^2-\frac{1}{2}t^4+o(t^4)$$

ולכן נסיק גם

$$e^{-(x^2+y^2)}=1-(x^2+y^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2+o(\|(x,y)\|^4)$$

אנו יודעים כי

$$\cos(t)=1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4!}t^4+o(t^4),\qquad xy=xy+o(\|(x,y)\|^4)$$

פיתוח טיילור סטנדרטי ופיתוח טיילור של פולינום. נשתמש בהרכבת פולינומי טיילור ונקבל כי

$$\cos(xy)=1-\frac{x^2y^2}{2}+o(\|(x,y)\|^4)$$

ועתה נכפיל ונקבל

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(1-(x^2+y^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2)(1-\frac{1}{2}(x^2y^2))+o(\|(x,y)\|^4)\\&=1-(x^2+y^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2-\frac{1}{2}(x^2y^2)+o(\|(x,y)\|^4)\end{aligned}$$

סעיף ב'

נמצא פיתוח טיילור של $f(x,y)=e^y\tan x$ עד סדר 3 סביב $(0,\frac{1}{2})$.

נתחיל ונבחין כי

$$e^y=\sqrt{e}+\sqrt{e}(y-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{e}}{2}(y-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{e}}{3!}(y-\frac{1}{2})^3+o(\|(x,y)\|^3)$$

ונחשב ונקבל גם

$$\tan x=x+\frac{1}{3!}x^3+o(\|(x,y)\|^3)$$

לכן נוכל להסיק

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(\sqrt{e}+\sqrt{e}(y-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{e}}{2}(y-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{e}}{3!}(y-\frac{1}{2})^3)(x+\frac{1}{3!}x^3)+o(\|(x,y)\|^3)\\&=\sqrt{e}x+\frac{\sqrt{e}}{3!}x^3+\sqrt{e}x(y-\frac{1}{2})+o(\|(x,y)\|^3)\end{aligned}$$

סעיף ג'

נחשב את פולינום טיילור של $f(x,y,z)=x^3+2z^2-3yz+5z$ סביב $(0,1,2)$ עד סדר 3.

נתחיל בסיבה לבחירת הסדר, היא כמובן על־פי מעלת הפולינום.

נבחין כי פולינום טיילור של פולינום מתכנס לפולינום עצמו, ולכן נוכל לקבוע כי

$$f(x,y,z)=x^3+2z^2-3yz+5z+o(\|(x,y,z)\|^3)$$

שאלה 5

יהיו $a, b, d \neq 0$, נמצא את הנקודה הקרובה ביותר לראשית שעל המישור $ax + by + z = d$.

נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$f(x, y) = d - ax - by$$

לכן הנקודה הקרובה ביותר על המישור היא גם המינימום של $\|(x, y, f(x, y))\|$, מינימום של פונקציה זו זהה למינימום של

$$g(x, y) = \|(x, y, f(x, y))\|^2$$

ולכן מספיק לחקור אותה. תחילה נראה כי

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + (d - ax - by)^2$$

נחפש את נקודות הקיצון של g, אלה תופיענה בנקודות בהן הנגזרות החלקיות מתאפסות, לכן נחשב אותן

$$\nabla g(x, y) = (2x - 2a(d - ax - by), 2y - 2b(d - ax - by))$$

נבדוק התאפסות

$$\begin{aligned}
&(1 + a^2)x + aby - ad = 0 \iff x = \frac{ad - aby}{1 + a^2}, \\
&(1 + b^2)y - bd + ab\frac{ad - aby}{1 + a^2} = 0 \\
&\iff (1 + b^2 - \frac{a^2b^2}{1 + a^2})y = bd - \frac{a^2bd}{1 + a^2} \\
&\iff y = \frac{bd - \frac{a^2bd}{1+a^2}}{1 + b^2 - \frac{a^2b^2}{1+a^2}} \\
&\iff y = \frac{bd}{1 + b^2a + a^2b}
\end{aligned}$$

ומתהליך מקביל והפוך נוכל לקבל גם

$$x = \frac{ad}{1 + a^2b + ab^2}$$

ומצאנו נקודה יחידה חשודה להיות המינימום.

נחשב את $D^2 f\mid_{(x,y)}$:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 2 + 2a^2 & 2ab \\ 2ab & 2 + 2b^2 \end{pmatrix}$$

נשתמש במשפט סילבסטר ונראה כי

$$2 + 2a^2 \geq 0, \quad (2 + 2a^2)(2 + 2b^2) - 4a^2b^2 = 4 + 4a^2 + 4b^2 \geq 0$$

ולכן נקבל כי המטריצה חיובית לחלוטין ונסיק כי הנקודה שמצאנו אכן מינימום מקומי ויחיד ולכן מינימום.

שאלה 6

נמצא ונסווג את הנקודות הקריטיות של הפונקציות הנתונות.

סעיף א'

$$f(x,y) = (x-1)(x-3)(y-1)(y-3)$$

נחשב את הגרדיאנט ונקבל

$$\nabla f(x,y) = (2(x-2)(y-1)(y-3), 2(x-1)(x-3)(y-2))$$

נבדוק איפוס ונקבל

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff (x=2, y \in \{1,3\}) \cap (y=2, x \in \{1,3\}) = \emptyset$$

לכן הנקודות החשודות בקיצון הן $\{(2,2),(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$.

נחשב עתה את הנגזרת השנייה ונקבל

$$D^2 f \mid_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2(y-1)(y-3) & 4(x-2)(y-2) \\ 4(x-2)(y-2) & 2(x-1)(x-3) \end{pmatrix}$$

נציב ונשתמש במשפט סילבסטר ונקבל כי $(2,2)$ מינימום, $(1,3),(3,1),(1,1),(3,3)$ נקודות אוכף.

סעיף ב'

$$f(x,y) = xy \cdot \exp(-8(x^2+y^2))$$

נחשב

$$\nabla f(x,y) = (\exp(-8(x^2+y^2))(y-16x^2y), \exp(-8(x^2+y^2))(x-16xy^2))$$

נשווה לאפס ונקבל נקודות חשודות לקיצון הן $(\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4}), (0,0)$.

נחשב נגזרת שנייה ונקבל

$$D^2 f \mid_{(x,y)} = \begin{pmatrix} e^{-8(x^2+y^2)}(-32xy + (y-16x^2y)^2) & e^{-8(x^2+y^2)}(1-16x^2+(y-16x^2y)(x-16xy^2)) \\ e^{-8(x^2+y^2)}(1-16x^2+(y-16x^2y)(x-16xy^2)) & e^{-8(x^2+y^2)}(-32xy+(x-16y^2x)^2) \end{pmatrix}$$

נבחין כי רכיבי האקספוננט לא משפיעים על החיוביות ולכן נשתמש בבחינת התבנית הבילינארית

$$T = \begin{pmatrix} -32xy + (y-16x^2y)^2 & 1-16x^2+(y-16x^2y)(x-16xy^2) \\ 1-16x^2+(y-16x^2y)(x-16xy^2) & -32xy+(x-16y^2x)^2 \end{pmatrix}$$

על־ידי הצבה וחישוב נקבל כי $(0,0)$ אוכף, $\pm(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ מקסימום מקומי וכי $\pm(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ מינימום מקומי.

סעיף ג'

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy+yz-6x-7y-8z$$

נחשב את הגרדיאנט

$$\nabla f(x,y,z) = (2x+y-6, 2y+x+z-7, 2z+y-8)$$

מפתרון מערכת המשוואות לאפס נקבל נקודה יחידה $(3,0,4)$.

נמצא את הנגזרת בנקודה על־ידי גזירה כפולה ונקבל

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאנו מטריצה המייצגת את הנגזרת השנייה בכל נקודה, ועל־ידי משפט סילבסטר נקבל ישירות כי המטריצה חיובית לחלוטין, ולכן $(3,0,4)$ מינימום מקומי ויחיד ועל־כן מינימום.