פתרון מטלה 03 — פונקציות מרוכבות, 80519

21 בנובמבר 2024

שאלה 1

תהי $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ קבוצה קומפקטית, ונניח כי קיים לוגריתם רציף $g : K \to \mathbb{C}$.

סעיף א'

נגדיר $\epsilon = \inf\{|g(z_1) - g(z_2) - 2\pi il| \mid l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, z_1, z_2 \in K\}$,
ונוכיח כי $\epsilon > 0$.

הוכחה. נבחין כי $\epsilon^2 = (\log|z_1| - \log|z_2|)^2 + (\mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2) - 2\pi l)^2$ ולכן אם נניח בשלילה ש־$\epsilon = 0$ אז קיימת סדרה של מרוכבים כך שערכם המוחלט מתכנס והארגומנט שלהם שואף למרחק $2\pi k$.
עוד נתון כי K קומפקטית ולכן סגורה וחסומה, לכן היא מכילה את כל הנקודות הגבוליות שלה ובהתאם הסדרות שמקיימות את $\epsilon = 0$ מתכנסות למספרים $z_1, z_2 \in K$.
אילו $|\arg(z_1) - \arg(z_2)| \geq 2\pi$ אז נקבל מהגדרת הארגומנט סתירה לרציפות של הענף של האגומנט שתומך ב־g, ולכן מתקבל שהארגומנטים מתכנסים, דהינו $z_1 = z_2$, אך אז נקבל $\epsilon \geq 2\pi$, וזו סתירה. □

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $z_0 \in K$ קיים $r > 0$ ולוגריתם אנליטי $h : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ כך ש־$h(z_0) = g(z_0)$ ובנוסף $|h(z_1) - h(z_2)| < \frac{\epsilon}{2}$ לכל $z_1, z_2 \in B(z_0, r)$.

הוכחה. תחילה נגדיר $0 < r < 2\pi$ ולכן מהבנייה של לוגריתם אנליטי שראינו בתרגול נובע שקיים לוגריתם h, ואנו יודעים שהוא נקבע על־ידי נקודה יחידה (טענה מהתרגול), לכן נגדיר $h(z_0) = g(z_0)$.
עתה, קיבלנו כי ϵ של הסעיף הקודם הוא ערך ממשי, וכך גם $\frac{\epsilon}{2}$, נגדיר

$$\sup_{z_1, z_2 \in \overline{B}(z_0, r)} |h(z_1) - h(z_2)| = \rho$$

ולכן נוכל לקבוע את r כך ש־ρ יקטן בהתאם, ומטופולוגיה של כדורים סגורים במרחב אוקלידי נוכל להסיק כי קיים r כך ש־$\rho < \frac{\epsilon}{2}$. □

סעיף ג'

נוכיח כי קיימת קבוצה פתוחה $K \subseteq U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ולוגריתם אנליטי $l : U \to \mathbb{C}$ כך ש־$g = l|_K$.

הוכחה. □

שאלה 2

נוכיח בכל סעיף שניתן להגדיר לוגריתם אנליטי לפונקציה $f(z) = \cos(z) - 2$ בתחומים הנתונים.

סעיף א'

עבור $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 2\pi\}$

הוכחה. $\square$