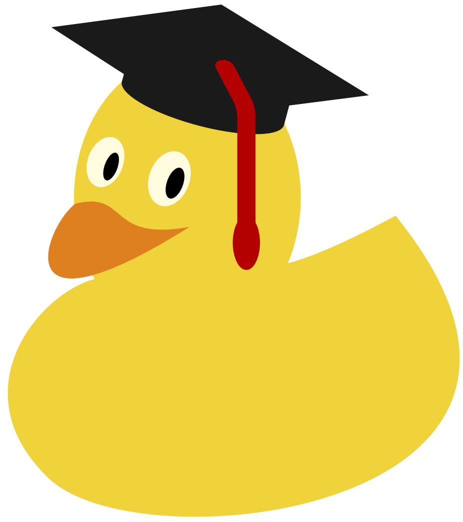
פתרון מטלה 01 — תורת הקבוצות (80200)

11 במאי 2024



שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי אם F קבוצת זוגות סדורים אז F היא פונקציה אם ורק אם $\forall x, y, y' : \langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in F \implies y = y'$.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי F פונקציה.

נגדיר $F : A \to B$, לכן לכל $x \in A$ קיים זוג סדור יחיד ב־F אשר רכיבו השמאלי הוא x. לכן נובע ישירות כי אם $\langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in F$ אז $y = y'$.

כיוון שני: נניח $\forall x, y, y' : \langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in F \implies y = y'$.

נבחר A קבוצת כל ה־x־ים המקיימים את הטענה. לכן $\forall x \in A \exists y : \langle x, y\rangle \in F$.

עתה נשים לב שנתון כי אם y, y' מקיימים את הטענה עבור $x \in A$ כלשהו, אז $y = y'$, ולכן נובע גם $\forall x \in A \exists! y : \langle x, y\rangle \in F$.

לכן F היא פונקציה על־פי הגדרה. **מש"ל**

סעיף ב'

יהיו f, g פונקציות, נוכיח כי $f \cap g$ היא פונקציה.

הוכחה. נגדיר $A = dom(f), B = dom(g)$. אז לכל איבר $c \in A \cap B$ מתקיים מהנתון $f(c) = g(c)$.

לכן קבוצת הזוגות הסדורים $A \cap B$ מכילה זוג סדור אחד ויחיד לכל איבר ב־$A \cap B$ ומההגדרה נקבל כי זוהי פונקציה. **מש"ל**

סעיף ג'

נראה דוגמה לפונקציות f, g כך ש־$f \cup g$ לא פונקציה:

נגדיר $A = \{0, 1\}$, ואת הפונקציות $f, g : A \to A$ על־ידי

$$f(x) = 1, g(x) = 0$$

ולכן נובע

$$f = \{(0, 1), (1, 1)\}, g = \{(0, 0), (1, 0)\}$$

אז

$$f \cup g = \{(0, 1), (1, 1), (0, 0), (1, 0)\}$$

וזוהי כמובן לא פונקציה.

סעיף ד'

נראה דוגמה לפונקציות f, g כך שמתקיים $dom(f \cap g) \neq dom(f) \cap dom(g)$.

נגדיר A כמו בסעיף הקודם ו־$f, g : A \to A$. נגדיר

$$f = \{(0, 1), (1, 0)\}, g = \{(0, 0), (1, 0)\}, f \cap g = \{(1, 0)\}$$

לכן

$$dom(f \cap g) = \{1\} \neq dom(f) \cap dom(g) = \{0, 1\} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$$

שאלה 2

תהי $f: A \to B$. נוכיח כי שלושת התנאים הבאים שקולים:

1. f הפיכה.
2. f חד־חד ערכית ועל.
3. קיימת פונקציה $g: B \to A$ כך ש־$g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$.

הוכחה. **$1 \leftarrow 2$**: ידוע כי f הפיכה ולכן f^{-1} היא פונקציה.

נניח בשלילה ש־f לא חד־חד ערכית ולכן קיימים $a, b \in A$ כך ש־$y = f(a) = f(b), a \neq b$. לכן על־פי הגדרה נובע כי $\langle y, a \rangle, \langle y, b \rangle \in f^{-1}$.

אבל ידוע כי f^{-1} פונקציה והגענו לסתירה, לכן f חד־חד ערכית.

נניח בשלילה ש־f לא על, לכן קיים $y \in B$ כך ש־$\forall a \in A, \langle a, y \rangle \notin f$. אבל ידוע ש־$f^{-1}$ פונקציה ולכן $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$ עבור $x \in A$ כלשהו.

זוהי סתירה ולכן f חד־חד ערכית ועל.

$2 \leftarrow 3$: נניח כי f חד־חד ערכית ועל, ונגדיר $g = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in f\}$. ידוע כי f חד־חד ערכית, ולכן כל איבר באגף ימני של f לא חוזר על עצמו ובהתאם אין חזרה באגף ימני של g, והיא עומדת בהגדרת פונקציה. נניח שקיים $b \in B$ כך ש־$g(b)$ לא מוגדר, לכן אין $a \in A$ כך ש־$b = f(a)$, אך זו סתירה להיותה של g על, ולכן לא קיים b כזה. במילים אחרות, לכל $b \in B$ מתקיים $g(b) = a$ עבור a כלשהו. עתה נראה כי $\forall a \in A, g(f(a)) = g(b) = a$ שכן אם $\langle a, b \rangle \in f$ אז $\langle b, a \rangle \in g$. באופן דומה נראה כי $\forall b \in B, f(g(b)) = f(a) = b$ ולכן מתקיים $g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$.

$3 \leftarrow 1$: נניח כי קיימת פונקציה $g: B \to A$ כך ש־$g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$.

מהנתון נובע כי אם $\langle a, b \rangle \in f$ אז $\langle b, a \rangle \in g$, ונתון כי היא פונקציה. לכן גם $g = f^{-1}$. **מש"ל**

שאלה 3

תהינה $f:A\to B, g:B\to C$.

סעיף א'

נוכיח כי אם g, f הן על, אז גם $g\circ f$ היא על.

הוכחה. יהי $c\in C$, g היא על ולכן קיים $b\in B$ כך ש־$g(b)=c$.
ידוע כי f היא על ולכן קיים $a\in A$ כך ש־$f(a)=b$, ולכן $g(f(a))=c$ ומצאנו כי $g\circ f$ היא על. **מש"ל**

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם g על אז גם $g\circ f$ על על־ידי דוגמה נגדית:
נגדיר $A=B=C=\{0,1\}$, ונגדיר $g=id_A$ ולכן על. עוד נגדיר $f(x)=1$.
נראה כי $g(f(x))=1$ לכל x ולכן לא קיים x כך ש־$g(f(x))=0$ ובהתאם היא לא על.

סעיף ג'

נסתור את הטענה כי אם g היא חד־חד ערכית אם $g\circ f$ היא חד־חד ערכית על־ידי דוגמה נגדית:
נגדיר $A=\{0\}, B=C=\{0,1\}$ וגם $f(0)=0$ ו־$g(x)=0$.
ניתן להבחין כי f חד־חד ערכית, וגם כי $g\circ f$ היא חד־חד ערכית, אבל $g(1)=g(0)$.

שאלה 4

תהינה קבוצות A, B, C, D כך שמתקיים $|A| = |C|, |B| = |D|$.

סעיף א'

נוכיח כי $|A \times B| = |C \times D|$.

הוכחה. משוויון העוצמות נניח שיש שתי פונקציות הפיכות $f : A \to C$ ו־$g : B \to D$.

נגדיר פונקציה חדשה $h : A \times B \to B \times D$ על־ידי $h(a, b) = \langle f(a), g(b) \rangle$.

זוהי כמובן פונקציה הפיכה שכן f, g הפיכות, ולכן מתקיים שוויון העוצמות $|A \times B| = |C \times D|$. **מש"ל**

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי $|A \cup B| = |C \cup D|$ על־ידי דוגמה נגדית:

נגדיר $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}, C = D = \{0, 1\}$.

ברור כי כלל הקבוצות בעלות עוצמה זהה, ובפרט $|A| = |C|, |B| = |D|$, אבל $A \cup B = \{0, 1, 2\}$ ואילו $C \cup D = \{0, 1\}$ ועוצמותיהן לא שוות.

שאלה 5

נוכיח כי אם A, B סופיות, ו־$|A| = n, |B| = m$, אז $|A \times B| = n \cdot m$.

הוכחה. נגדיר $A = [n], B = [m]$, שאם לא כן נוכל להגדיר פונקציה הפיכה בין הקבוצות ועוצמותיהן שוות, לכן לא פגענו בכלליות ההוכחה.

נשים לב כי $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid 0 \leq a < n, 0 \leq b < m\}$

נגדיר $C = \{2^a \cdot 3^b \mid 0 \leq a < n, 0 \leq b < m\}$, בקבוצה זו יש בדיוק nm איברים.

נראה כי הפונקציה $f : A \times B \to C$ המוגדרת על־ידי $f(a, b) = 2^a 3^b$ היא חד־חד ערכית ועל ולכן נקבל כי $|A \times B| = nm$. **מש"ל**

שאלה 6

סעיף א'

נוכיח באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$ שאין פונקציה חד־חד ערכית מ־$[n+1]$ ל־$[n]$.

הוכחה. נבחין כי עבור $n = 1$ הפונקציה היחידה האפשרית היא $f(0) = f(1) = 0$ וזו כמובן לא חד־חד ערכית וזהו בסיס האינדוקציה.
נניח כי טענת האינדוקציה נכונה עבור $n-1$, דהינו אין פונקצה חד־חד ערכית מ־$[n]$ ל־$[n-1]$.
תהי פונקציה שאיננה חד־חד ערכית מ־$[n]$ ל־$[n-1]$, ונבחן את כל הפונקציות המתקבלות ממנה על־ידי הוספת איבר לתחום ולטווח.
נבחר לייצג את הפונקציה כרשימה בתצורה $(f(0), f(1), \ldots, f(n-1))$ ונראה כי אנו יכולים להוסיף את האיבר $n+1$ בין כל אחד מהאיברים, והפונקציה תוגדר כ־$[n] \to [n+1]$ ותישאר לא חד־חד ערכית.
אילו ננסה לשנות ערך קיים ברשימת הערכים להיות $n+1$ כך שלא תהיה חד־חד ערכית, ניאלץ להוסיף מספר קיים בהוספת האיבר החדש, ונקבל שוב פונקציה לא חד־חד ערכית.
קיבלנו כי הפונקציה מ־$[n+1]$ ל־$[n]$ היא לא חד־חד ערכית והשלמנו את מהלך האינדוקציה. **מש"ל**

סעיף ב'

נראה כי אם B סופית, $A \subseteq B$ ו־$A \neq B$ אז A ו־B אינן שוות עוצמה.
ידוע כי $A \subseteq B$ ולכן נוכל לבנות פונקציה חד־חד ערכית מ־A ל־B ונקבל כי $|A| \leq |B|$.
ידוע כי $A \neq B$ ולכן קיים איבר אחד לפחות ב־B שלא נמצא ב־A, וידוע כי שתי הקבוצות סופיות, נוכל להשתמש בסעיף הקודם להראות שאין פונקציה חד־חד ערכית מ־B ל־A ולא מתקיים $|B| \leq |A|$, לכן $|A| < |B|$ בהכרח.

שאלה 7

סעיף א'

נוכיח את השוויון הבא:

$$|\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 0 \mod 3\}| = |\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 0 \mod 4\}|$$

הוכחה. נגדיר פונקציה f בין הקבוצות על־ידי

$$f(x) = 4x/3, f^{-1}(x) = 3x/4$$

נבחין כי הפונקציה והפונקציה ההופכית אכן מקיימות $f \circ g = id, g \circ f = id$ ולכן הפונקציה אכן חד־חד ערכית ועל, ולכן העוצמות אכן שוות. **מש"ל**

סעיף ב'

נוכיח את השוויון

$$\left|\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}\right| = \left|\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}\right|$$

הוכחה. נגדיר את הפונקציה הבאה בין הקבוצות:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

כך שלכל $\frac{1}{n}$ נקבל מ־f את $\frac{1}{n+1}$.
זוהי פונקציה חד־חד ערכית ישירות מהגדרתה, ועל שכן על־פי הגדרת קבוצת הטווח אנו יכולים להגיע לכל איבר החל מהראשון (ניתן להוכיח אינדוקטיבית).
מסיבה זו עוצמת הקבוצות זהה. **מש"ל**

סעיף ג'

נוכיח את שוויון העוצמות

$$|[0, 1]| = |[0, 1)|$$

הוכחה. נגדיר פונקציה דומה לפונקציה בסעיף הקודם, לכל $n \in \mathbb{N}, n > 0$ נגדיר $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ כל מספר ממשי אחר $f(x) = x$.
ראינו למה ההגדרה הראשונה היא חד־חד ערכית ועל לקבוצה $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ ופונקציית הזהות היא כמובן חד־חד ערכית ועל לקבוצת הממשיים בקבוצה שאינם מהתצורה $\frac{1}{n}$ ולכן גם בכולל הקבוצה חד־חד ערכית ועל.
לכן העוצמות אכן שוות. **מש"ל**