פתרון מטלה 05 — פונקציות מרוכבות, 80519

8 בדצמבר 2024

שאלה 1

נתאר את צורתן של המסילות הבאות במישור המרוכב ונחשב את אורכן.

סעיף א׳

$\gamma(t) = i\sin(t^2)$ עבור $t \in [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$.

פתרון צורתה הקו $[0,i]$, הכיוון שלה הוא תחילה לראשית הצירים ואז ל־$(0,i)$. נוכל כבר להסיק שאורכה הוא בדיוק 2, אך נחשב גם על־ידי ההגדרה:

$$L(\gamma) = \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} |\gamma'(t)|\,dt = \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(t^2)\cdot 2t\,dt = |\sin(t^2)|_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 1+1$$

סעיף ב׳

$\gamma(t) = e^{it}$ עבור $t \in [0, 7\pi]$.

פתרון אנו יודעים מתרגולי עבר כי מסילה זו היא מעגל יחידה (שלוש וחצי פעמים) וכן כיוונה נגד כיוון השעון. גם הפעם אנו כבר יודעים שמתקיים $L(\gamma) = 2\pi\cdot\frac{7}{2}$, אך נחשב בכל זאת:

$$L(\gamma) = \int_0^{7\pi} |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{7\pi} |ie^{it}|\,dt = \int_0^{7\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \int_0^{7\pi} 1\,dt$$

סעיף ג׳

$\gamma(t) = te^{\frac{\pi i}{4}}$ עבור $t \in [0, 10]$.

פתרון נבחין כי $e^{\frac{\pi i}{4}}$ הוא ערך קבוע ומשמעותו שלעקומה תהיה זווית של $\frac{\pi}{4}$ מראשית הצירים. עוד אנו יודעים כי יש מכפלה ב־t ולכן זה ישר שאורכו 10, מתחיל בראשית וזז החוצה ממנה בזווית זו מציר ה־x. גם הפעם אנו יודעים את האורך אך נחשב

$$\int_0^{10} |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{10} |e^{\frac{\pi i}{4}}|\,dt = \int_0^{10} 1\,dt$$

סעיף ד׳

$\gamma(t) = te^{it}$ עבור $t \in [0, 4\pi]$.

פתרון מהסעיפים הקודמים נסיק כי זהו ישר מהראשית שעובר סיבוב ככל שהוא מתרחק ממנה, דהינו זוהי ספירלה נגד כיוון השעון שמתחילה ב־0 ומסתיימת בנקודה $4\pi + i0$. לבסוף נבחין גם שהספירלה מבצעת שני סיבובים שלמים בתחום הגדרתה.

הפעם אין לנו דרך גאומטרית לחשב את השטח ונחשב על־ידי ההגדרה בלבד:

$$\int_0^{4\pi} |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{4\pi} |e^{it}(1+it)|\,dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt$$

בהצבה $t = \sinh(\theta)$ נקבל

$$\begin{aligned}
\int_0^{4\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt &= \int_0^{\sinh^{-1}(4\pi)} \sqrt{1+\sinh^2(\theta)}\cosh(\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\sinh^{-1}(4\pi)} \cosh(\theta)\cosh(\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\sinh^{-1}(4\pi)} \cosh^2(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sinh^{-1}(4\pi)} \cosh(2\theta)+1\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\sinh^{-1}(4\pi) + \frac{1}{4}\sinh(2\sinh^{-1}(\theta)) \\
&= \frac{1}{2}\sinh^{-1}(4\pi) + 4\pi^2
\end{aligned}$$

שאלה 2

נמצא פרמטריזציה לעקומות הסגורות הבאות ונחשב את אורכן.

סעיף א'

משולש פיצה ברדיוס r המתחיל בראשית, ממשיך על הכיוון החיובי של ציר ה־x ויש לו זווית $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

פתרון נתחיל ב־$\gamma_1(t) = t$ עבור $t \in [0,1]$, ובאותו אופן גם $\gamma_3 = e^{\theta i}t$ לאותו תחום.

באופן דומה גם $\gamma_2(t) = e^{it}$ עבור $t \in [0,\theta]$, ונגדיר $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ בהתאם להגדרה בהרצאה.

האורך בהתאם לשאלה 1 הוא $2 + \theta$.

סעיף ב'

מלבן בגודל $a \times b$ המתחיל בראשית וממשיך על החלק השלילי של הציר הממשי.

פתרון נגדיר $\gamma_1(t) = -t$ עבור $t \in [0,a]$, ובהתאם $\gamma_2(t) = -a + ti$ עבור $t \in [0,b]$.

נגדיר גם $\gamma_3(t) = t(-a+bi) + (1-t)(bi)$ עבור $t \in [0,1]$ ולבסוף $\gamma_4(t) = (1-t)bi$ עבור $t \in [0,1]$.

נגדיר את הסכום כבסעיף הקודם γ ומשאלה 1 נובע $L(\gamma) = 2a + 2b$.

סעיף ג'

משולש המתחיל בראשית ויוצר משולש ישר זווית ושווה שוקיים עם צלע בסיס באורך 2 המונחת על החלק החיובי של הציר המדומה.

פתרון נגדיר $\gamma_1(t) = 0(1-t) + (t)(2 + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ עבור $t \in [0,1]$.

נגדיר גם $\gamma_2(t) = (1-t)(2 + i\frac{\sqrt{2}}{2}) + t(0+2i)$ עבור תחום זהה,

ולבסוף נגדיר $\gamma_3(t) = (1-t)(0+2i)$ עבור תחום זהה.

נגדיר $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ וכן $L(\gamma) = 2 + 2\sqrt{2}$.

סעיף ד'

שני מעגלים ברדיוס 1 המשיקים בראשית עם מרכזים על הציר המדומה.

פתרון התרגיל לא ברור, אני מנחש ש־$\gamma(t) = e^{it} + i$ עבור $t \in [0, 4\pi]$ שכן אלה הם שני מעגלים שעוברים בראשית הצירים ומשיקים שם, וכמובן $L(\gamma) = 4\pi$.

שאלה 3

נגדיר את התחום

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z), 1 \le \mathrm{Im}(z) \le 2\}$$

נתאר את התחום ונחשב את השטח של $\mathrm{Log}(A)$.

פתרון על־ידי בדיקת התנאים נסיק שמדובר בטרפז שקודקודיו הם $(0,2), (2,2), (1,1), (0,1)$.
לכן גם נוכל להסיק ישירות ששטחו הוא $\frac{3}{2} = \frac{(1+2)\cdot 1}{2}$.
נעבור לחישוב השטח של $\mathrm{Log}(A)$ בתחום, כמובן הפונקציה מוגדרת בתחום ולכן יש לנו הצדקה לדבר על שטחה שם, נחשב את השטח בדומה לאופן בו הוא חושב בתרגול.

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{Log}(A)} 1 \; d|w| &= \iint_A |\,\mathrm{Log}'(z)|^2 \; d|z| \\
&= \iint_A \frac{1}{z\overline{z}} \; dz \\
&= \iint_A \frac{1}{x^2+y^2} \; dx \; dy \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^y \frac{1}{x^2+y^2} \; dx \right) \; dy \\
&= \int_1^2 \frac{1}{y} \arctan(\frac{y}{y}) - 0 \; dy \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot (\log(2) - \log(1))
\end{aligned}$$

שאלה 4

נגדיר $\gamma_0 : [0,3] \to \mathbb{C}$ על־ידי

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} t & t \in [0,1] \\ 1 + e^{-\frac{\pi i}{3}}(t-1) & t \in [1,2] \\ 1 + e^{-\frac{\pi i}{3}} + e^{\frac{\pi i}{3}}(t-2) & t \in [1,2] \end{cases}$$

משלוש שווה־צלעות, ונגדיר באופן אינדוקטיבי מסילה γ_n להיות המסילה γ_{n-1} כאשר מחליפים כל קטע ישר בה בעותק מוקטן ומסובב של המסילה

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}t & t \in [0,\frac{1}{4}] \\ \frac{1}{3} + \frac{4}{3}e^{\frac{\pi i}{3}}(t-\frac{1}{4}) & t \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{\pi i}{3}} + \frac{4}{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}(t-\frac{1}{2}) & t \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}] \\ \frac{2}{3} + \frac{4}{3}(t-\frac{3}{4}) & t \in [\frac{3}{4},1] \end{cases}$$

סעיף א׳

נוכיח ש־(γ_n) מתכנסת במידה שווה למסילה γ כלשהי.

הוכחה. נבחן את ההפרשים של המסילות, קרי $\gamma_n - \gamma_{n-1}$, ונבחין כי הפרש זה הוא תוספת המשולשים החדשים שנוצרו מכל קו שהיה קודם לכן, ונוכל להוכיח ישירות מהגדרת α שמתקיים $\max \operatorname{Im} \alpha = \frac{1}{3}$.
עוד נבחין שיש ב־γ_n בדיוק $3 \cdot 4^n$ קטעים C^1 (קטעים ישרים), וכן שאורכם זהה והוא $\frac{1}{3^n}$. כל זאת ניתן להוכיח באינדוקציה על הגדרת המסילות.
אם כך $\max |\gamma_n(t) - \gamma_{n-1}(t)| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n}$ ולכן ממבחן M של ויירשטראס טור ההפרשים מתכנס במידה שווה, כלומר $\gamma_n \to \gamma$ במידה שווה. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח כי $L(\gamma_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} = \infty$.

הוכחה. למעשה מצאנו שמתקיים $L(\gamma_n) = 3 \cdot 4^n \cdot \frac{1}{3^n} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, וזוהי כמובן סדרה מתבדרת ל־∞. $\square$

סעיף ג׳

נסמן ב־A_n את השטח הכלוא ב־γ_n, ונחשב את $\lim_{n\to\infty} A_n$.
פתרון באופן דומה לסעיף א׳, נבחין שב־$\gamma_n - \gamma_{n-1}$ ישנם שלושה משולשים חדשים, שטח כל אחד הוא $\frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3})\frac{1}{3^n}$ לפי חישוב ישיר, ולכן

$$A_n = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}) + \sum_{i=1}^{n} \sin(\frac{\pi}{3})\frac{3(4^n - 4^{n-1})}{4 \cdot 9^n} = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3})(1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{4^{n-1}}{\cdot 9^{n-1}})$$

על־ידי חישוב כמות המשולשים שנוספים לפי מספר הקווים שמתווספים, כל שני קווים מרכיבים משולש אחד. ולבסוף נקבל

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3})(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}}) = \sin(\frac{\pi}{3})\frac{19}{20}$$