פתרון מטלה 01 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

11 במאי 2024

שאלה 1

סעיף א'

נקבע לכל ביטוי האם הוא מגדיר נורמה מעל $\mathbb{R}^2$:

1. $\|(x,y)\| = 2|x| + 3|y|$: לא משמרת כפל בסקלר: $2|\lambda x| + 3|\lambda y| \neq \lambda(2|x| + 3|y|)$, ולכן לא מהווה נורמה.

2. $\|(x,y)\| = x^2 + y^2$ לא משמרת כפל בסקלר באותו אופן ולכן איננה נורמה.

3. $\|(x,y)\| = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$ זוהי אכן נורמה, נראה:

- הפעולה חיובית לכל ערך בשל חיוביות הריבוע, ומתאפסת רק כאשר $x = y = 0$.
- $\|\lambda(x,y)\| = \left(\sqrt{|\lambda x|} + \sqrt{|\lambda y|}\right)^2 = \sqrt{|\lambda|}^2 \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2 = |\lambda|\|(x,y)\|$.
- $\|(x_1,y_1) + (x_2,y_2)\| = \left(\sqrt{|x_1+x_2|} + \sqrt{|y_1+y_2|}\right)^2 = |x_1+x_2| + |y_1+y_2| + 2\sqrt{|x_1+x_2|}\sqrt{|y_1+y_2|}$
$\leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| + 2\sqrt{|x_1+x_2|}\sqrt{|y_1+y_2|} = \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\| + 2\sqrt{|x_1+x_2|}\sqrt{|y_1+y_2|} -$
$2\sqrt{|x_1 y_1|} - 2\sqrt{|x_2 y_2|} \leq \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|$

4. $\|(x,y)\| = |x| + |y| + \sqrt{x^2+y^2}$ היא אכן נורמה, ניתן להסיק זאת ישירות מהרכבה כחיבור של שתי פונקציות נורמה.

סעיף ב'

תהי A קבוצה ויהי X אוסף תתי־הקבוצות הסופיות של A.

לכל $x,y \in X$ נסמן $\rho(x,y) = |x \triangle y|$. נוכיח ש־$\rho$ מטריקה על X.

הוכחה. נוכיח שתכונות המטריקה מתקיימות:

1. $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$ נובע ישירות מהגדרת ההפרש הסימטרי.

2. סימטריה נובעת מסימטריית ההפרש הסימטרי.

3. אי־שוויון המשולש: $x \triangle z = (x \cup z) \setminus (x \cap z) \subseteq (x \cup z \cup y) \setminus (x \cap y \cap z) = (x \cup y) \setminus (x \cap y \cap z) \cup (z \cup y) \setminus (x \cap y \cap z) \subseteq$
$(x \cup y) \setminus (x \cap y) \cup (z \cup y) \setminus (y \cap z) = x \triangle y \cup y \triangle z$ ולכן נוכל להסיק את אי־שוויון המשולש.

מצאנו כי כלל התכונות למטריקה חלות על הפונקציה ρ ולכן היא מהווה מטריקה על קבוצה זו. **מש"ל**

שאלה 2

יהיו $1 \le p \le \infty$, $d \in \mathbb{N}$, נוכיח כי קיים $C > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le C\|x\|_\infty$$

הוכחה. נגדיר $x_m = \max_{i \in d} |x_i|$ ונשים לב כי

$$|x_m|^p \le \sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \le \sum_{i=1}^{d} |x_m|^p = d|x_m|^p$$

דהינו

$$\|x\|_\infty^p \le \|x\|_p^p \le d\|x\|_\infty^p$$

ולכן גם נובע

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le \sqrt[p]{d}\|x\|_\infty$$

ומצאנו מספר $C = \sqrt[p]{d}$ אשר מקיים את אי־השוויון. **מש"ל**

שאלה 3

יהיו $\{(X_i,\rho_i)\}_{i=1}^d$ מרחבים מטריים ותהיה $f:\mathbb{R}_+^d\to\mathbb{R}$ פונקציה חיובית, מקיימת את אי־שוויון המשולש ומונוטונית לכל רכיב.
נסמן $X=X_1\times\cdots\times X_d$ ונגדיר $\rho_f:X\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$\rho_f(\{x_1,\ldots,x_d\},\{y_1,\ldots,y_d\})=f(\rho_1(x_1,y_1,\ldots,\rho_d(x_d,y_d)))$$

סעיף א'

נוכיח כי ρ_f היא מטריקה על X.

הוכחה. נבדוק את תכונות המטריקה:

1. חיוביות: נתון לנו כי לכל רכיב הוא מתאפס אם ורק אם $x_i=y_i$, ונתונה לנו חיוביות ב־f, לכן ρ_f יתאפס אם ורק אם $x=y=0$.
2. סימטריה: נראה כי

$$\rho_f(x,y)=f(\rho_1(x_1,y_1,\ldots,\rho_d(x_d,y_d)))=f(\rho_1(y_1,x_1,\ldots,\rho_d(y_d,x_d)))=\rho_f(y,x)$$

3. אי שוויון המשולש: נתון כי f מקיימת את אי־שוויון המשולש וכלל הרכיבים הם מטריקות ולכן מקיימים את אי־שוויון המשולש ולכן נובע.

מש"ל

סעיף ב'

נראה כי הפונקציה $f(x)=x_1+\ldots+x_d$ מקיימת את תנאי השאלה.
חיוביות: נתון $x_i\geq 0$ לכל $i\in[d]$ ולכן גם חיבור כלל הרכיבים הוא חיובי.
תת־חיבוריות: $f(x+y)=\sum_{i=1}^d x_i+y_i=f(x)+f(y)$.
מונוטוניות בכל רכיב נובעת מהמעבר האחרון.

סעיף ג'

נראה שעבור f הנתונה התכנסות ב־ρ_f שקולה להתכנסות איבר־איבר.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}x_n=y\\
&\iff \forall\epsilon>0\exists N>0\forall n>N,x\in X\implies \rho_f(x,x_n)<\epsilon\\
&\iff \forall\epsilon>0\exists N>0\forall n>N,x\in X\implies \sum_{i=1}^d x_i<\epsilon\\
&\iff \forall\epsilon>0\exists N>0\forall n>N,x\in X,i\in[d]\implies x_i<\frac{\epsilon}{i}\\
&\iff \forall i\in[d]\forall\epsilon>0\exists N>0\forall n>N,x\in X\implies x_i<\epsilon\\
&\iff \forall i\in[d]\lim_{n\to\infty}x_i=y_i,\sum_{i=1}^d y_i=d
\end{aligned}$$

ומצאנו כי ההגדרות שקולות מחיוביות החיבור. **מש"ל**

שאלה 4

נבדוק לכל אחת מהקבוצות הבאות אם היא פתוחה ואם היא סגורה:

סעיף א'

נבחן את $C^1([0,1])$ כתת־קבוצה של $C([0,1])$.

נראה כי הקבוצה איננה פתוחה, שכן לכל $f \in C^1([0,1])$ נוכל לבנות פונקציה חדשה בהינתן $h \in (0,1)$ על־ידי

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq h \\ f(h) - f(x), & h < x \leq 1 \end{cases}$$

פונקציה זו רציפה ונראה כי $\lim_{h\to 1} f^*(x) = f(x)$ ולכן גם $\lim_{h\to 1} \rho(f, f^*) = 0$.

לעומת זאת הפונקציה $f^* \notin C^1([0,1])$ ו־$f^* \in C([0,1])$ כל עוד f איננה פונקציה קבועה, ולכל כדור סביב f נוכל לבחור h כך ש־f^* תהיה בכדור.

נסיק שהקבוצה איננה פתוחה.

נניח בשלילה שהקבוצה הנתונה סגורה, לכן כל סדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in C^1([0,1])$ מקיימת $\lim_{n\to\infty} f_n \in C^1([0,1])$.

נגדיר

$$f_n(x) = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{n}}$$

פונקציה זו היא רציפה וגזירה בתחום $[0,1]$ ולכן מקיימת את התנאים אבל

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + 0} = |x - \frac{1}{2}| = f$$

וידוע כי $f \notin C^1([0,1])$, בסתירה להנחה, לכן הקבוצה איננה סגורה.

מצאנו כי הקבוצה הנתונה איננה פתוחה ואיננה סגורה.

סעיף ב'

נבדוק את הקבוצה $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \leq 1\}$ כתת־קבוצה של $\mathbb{R}^3$.

נבחר $a = (1,0,0)$ ונראה שלכל $r > 0$ מתקיים $B(a,r) = \{(x,y,z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 < r^2\} \not\subseteq A$.

אם נבחר $x = 1, y = 0, z = r/2$ אז כמובן הנקודה המוגדרת מוכלת בכדור, אבל $(x,y,z) \notin A$.

לכן הקבוצה איננה פתוחה.

נבדוק אם הקבוצה סגורה. נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in A$ סדרת נקודות מתכנסת ל־a.

משאלה 3 נובע כי הגבול מתכנס אם ורק אם כל סדרת נקודות (a_n^i) כאשר $1 \leq i \leq 3$ מתכנסת אף היא, ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n^1 + a_n^2 + a_n^3 = a_1 + a_2 + a_3$.

ואנו יודעים כי לכל n מתקיים $a_n^1 + a_n^2 + a_n^3 \leq 1$ ולכן ממשפט הפרוסה נקבל גם $a_1 + a_2 + a_3 \leq 1$ ומצאנו כי A מכילה את כל הנקודות הגבוליות שלה.

לסיכום הקבוצה A היא סגורה ואיננה פתוחה.