פתרון מטלה 12 — פונקציות מרוכבות, 80519

25 בינואר 2025

שאלה 1

תהי $f: U_a^* \to \mathbb{C}$ אנליטית עם קוטב מסדר $m \geq 1$ ב־$z = a$.
נראה שקיימים $\epsilon, r > 0$ כך שלכל $|w| > r$ קיימים בדיוק m פתרונות למשוואה $f(z) = w$ ב־$B^*(a, \epsilon)$.

הוכחה. נגדיר $g(z) = f(z)(z-a)^m$, לכן $g \in Hol(U_a)$. הסדר של $z = a$ הוא m ולכן מהגרסה המקומית של משפט רושה נובע שקיימים ϵ, r עבורם לכל $w \in B^*(g(a), r)$ יש בדיוק m פתרונות למשוואה $g(z) = w$. □

שאלה 2

נמצא כמה פתרונות כולל ריבוי יש למשוואות הבאות בתחומים הנתונים.

סעיף א׳

$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ ב־$B(0,1)$.

פתרון נגדיר $f(z) = z^7 - 5z^4 + z^4 - 2$ וגם $g(z) = z^7 - 5z^4$ ונבחין כי אם $|z| = 1$ אז,

$$|f(z) - g(z)| \le |z^2| + |2| = 3 \le |z^4| \cdot |z^2 - 5|$$

ולכן ממשפט רושה בכדור $B(0,1)$ אותו מספר אפסים לשתי הפונקציות, וכן

$$g(z) = 0 \iff z = 0, z^3 - 5 = 0$$

אפס הוא שורש מריבוי 4, וכן ישנם שלושה שורשים שלא בתחום, לכן יש ארבעה שורשים ל־f בתחום.

סעיף ב׳

$z^5 + 2z^3 - z^2 + z - \alpha = 0$ בתחום $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, עבור $\alpha \in \mathbb{R}$.

פתרון נגדיר ריבועים שצלעם התחתונה מונחת על ציר ה־x כך שגודל צלעם r והם ממורכזים.

נגדיר $f(z) = z^5 + 2z^3 - z^2 + z - \alpha$.

נגדיר $g(z) = z^5 + 2z^3$ ונקבל שלכל r מספיק גדול $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ על שפת הריבוע, ובהתאם משפט רושה חל ונובע שמספר השורשים בריבוע הוא 5 שורשים לרבות ריבוי. מתוך שורשים אלה שלושה הם על הראשית והשניים הנותרים הם על הציר הממשי, ולכן יש בתחום אפס שורשים. נסיק אם כך שכאשר $r \to \infty$ אז מספר הפתרונות של המשוואה נשאר אפס.

סעיף ג׳

$e^z = 3z^n$ בחצי המישור $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 1\}$ עבור $n \in \mathbb{N}$.

פתרון נגדיר $f(z) = e^z - 3z^n$ ונחקור את שורשיה.

נבחין שבמעגל היחידה מתקיים

$$|f(z) + 3z^n| = |e^z| \le e \le 3 = |-3z^n|$$

ולכן לפונקציה אותה כמות שורשים כמו ל־$-3z^n$, אך לזו האחרונה שורש מריבוי n באפס בלבד. נעבור לבחון ריבועים $[1-2r, 1] \times [-r, r]$.

בריבועים אלה,

$$|f(z) + 3z^n| = |e^z| \le 1 \le |r| \le |-3z^n|$$

ולכן גם בתחום זה הריבוי הוא זהה, ונוכל להסיק שכאשר $r \to \infty$ מספר השורשים נשאר n.

שאלה 3

תהי $f : G \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית, ויהי $z_0 \in G$ כך ש־$f'(z_0) \neq 0$.
נראה שקיים $r > 0$ כך ש־$\overline{B}(z_0, r) \subseteq G$ ו־$f\mid_{B(z_0,r)}$ הפיכה עם הופכית הנתונה על־ידי

$$f\mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}\,dz$$

הוכחה. נוכל להסיק ש־$f(z_0) \neq 0$, אחרת היינו יכולים להסיק ש־f קבועה. משפט הפונקציה הפוכה חל ולכן קיים $r > 0$ כך ש־f הפיכה ב־$B(z_0, r) \subseteq G$. ממשפט קושי נובע

$$f\mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f\mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(z)}{z-w}\,dz$$

נשתמש במשפט ההצבה עם $z \to f\mid_{B(z_0,r)}(z)$ וכן $dz \to f\mid_{B(z_0,r)}(z)'dz$ ונקבל

$$f\mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f\mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(f\mid_{B(z_0,r)}(z))}{f\mid_{B(z_0,r)}(z)-w}\cdot f\mid_{B(z_0,r)}(z)'\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f\mid_{B(z_0,r)}{}^{-1}(z)}{z-w}\,dz$$

כפי שרצינו. $\square$

שאלה 4

נוכיח את משפט שוורץ־פיק על חצי המישור העליון H.

תהי $f : H \to H$ אנליטית לא קבועה, נראה שאי־השוויונות הבאים מתקיימים,

- $\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{f(z_2)-\overline{f(z_1)}}\right| \leq \left|\frac{z_2-z_1}{z_2-\overline{z_1}}\right|$ לכל $z_1, z_2 \in H$.
- $|f'(z)| \leq \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z}$ לכל $z \in H$.

נראה בנוסף שאם יש שוויון בנקודה מסוימת באחד מאי־השוויונות לעיל אז $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ עבור $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$.

הוכחה. ניזכר ב־$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ העתקה המעבירה את H ל־D, ונקבל ש־$\varphi \circ f$ מקיימת את משפט שוורץ־פיק. לכן מתקיים,

$$\left|\frac{\varphi(f(z_2)) - \varphi(f(z_1))}{1 - \varphi(f(z_1))\overline{\varphi(f(z_2))}}\right| \leq \left|\frac{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}{1 - \varphi(z_1)\overline{\varphi(z_2)}}\right|$$

מחישוב ישיר של φ מתקבל,

$$\left|\frac{f(z_2) - f(z_1)}{f(z_2) - \overline{f(z_1)}}\right| = \left|\frac{\frac{f(z_2)-i}{f(z_2)+i} - \frac{f(z_1)-i}{f(z_1)+i}}{1 - \frac{f(z_1)-i}{f(z_1)+i}\frac{(\overline{f(z_2)}+i)^2}{(f(z_2)-i)(\overline{f(z_2)}+i)}}\right| \leq \left|\frac{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}{1 - \varphi(z_2)\overline{\varphi(z_1)}}\right| = \left|\frac{\frac{f(z_2)-i}{f(z_2)+i} - \frac{f(z_1)-i}{f(z_1)+i}}{1 - \frac{f(z_1)-i}{f(z_1)+i}\frac{(\overline{f(z_2)}+i)^2}{(f(z_2)-i)(\overline{f(z_2)}+i)}}\right| = \left|\frac{z_2 - z_1}{z_2 - \overline{z_1}}\right|$$

באופן דומה נקבל מהמשפט עבור $\varphi \circ f$ שמתקיים,

$$|(\varphi \circ f)'(z)| \leq \frac{1 - |\varphi(f(z))|^2}{1 - |z|^2}$$

נבחין כי $\varphi'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}$ ולכן,

$$|\varphi'(f(z))f'(z)| = \left|\frac{-2i}{(f(z)+i)^2}f'(z)\right| \leq \frac{1 - |\varphi(f(z))|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} = \frac{1 - \left|\frac{(f(z)-i)^2}{(f(z)+i)^2}\right|}{1 - \left|\frac{(z-i)^2}{(z+i)^2}\right|}$$

ולכן,

$$\begin{aligned}
|2f'(z)| &\leq |(z+i)^2|\frac{|(f(z)+i)^2| - |(f(z)-i)^2|}{|(z+i)^2| - |(z-i)^2|} \\
&= |(z+i)^2|\frac{\operatorname{Re}^2(f(z)+i) + \operatorname{Im}^2(f(z)+i) - \operatorname{Re}^2(f(z)-i) - \operatorname{Im}^2(f(z)-i)}{|(z+i)^2| - |(z-i)^2|} \\
&= |(z+i)^2|\frac{2\operatorname{Im} f(z)}{2\operatorname{Im} z}
\end{aligned}$$

$\square$