

# מבנים אלגבריים 1

10 ביוני 2024



## תוכן העניינים

4	1 שיעור 1 — 6.5.2024
4	1.1 מבוא לחבורות
4	1.2 דוגמות
6	2 תרגול 1 — 7.5.2024
6	2.1 חבורות ותתי-חבורות
7	2.2 חבורת התמורות
7	חזרה לתמורות
7	תתי-חבורות של חבורת התמורות
7	מחזוריים
9	3 שיעור 2 — 8.5.2024
9	3.1 מבוא לאיזומורפיות
12	4 שיעור 3 — 15.5.2024
12	4.1 תתי-חבורות
13	4.2 מחלקות (Cosets)
15	5 שיעור 4 — 20.5.2024
15	5.1 סדר
16	5.2 פעולות של חבורה על קבוצה
18	6 תרגול 3 — 21.5.2024
18	6.1 שאלות מתרגיל 1
18	שאלה 1
18	שאלה 4
19	6.2 מחלקות שקילות
19	6.3 משפט לגרנז'
20	6.4 שאלה 4 סעיף א'
21	7 שיעור 5 — 22.5.2024
21	7.1 פעולות על קבוצות
24	8 שיעור 6 — 27.5.2024
24	8.1 מקבעים של פעולות
27	9 תרגול 4 — 28.5.2024
27	9.1 צביעות
27	9.2 טטרהדרון
29	10 שיעור 7 — 29.5.2024
29	10.1 חבורות $p$
29	תזכורת: מרכז של חבורה
29	10.2 הומומורפיזמים

33	שיעור 8 – 3.6.2024 11
33	11.1 הומומורפיזמים
34	11.2 חבורת המנה
35	תרגול 5 – 4.6.2024 12
35	12.1 תת-חבורות נורמליות
36	שיעור 9 – 5.6.2024 13
36	13.1 משפטי האיזומורפיזם
39	שיעור 10 – 10.5.2024 14
39	14.1 מכפלות

## 1 שיעור 1 — 6.5.2024

### 1.1 מבוא לחבורות

הקורס עוסק בעיקרו בתורת החבורות, ממנה גם מתחילים.

חבורה (באנגלית Group) היא מבנה מתמטי.

ברעיון חבורה מייצגת סימטריה, אוסף השינויים שאפשר לעשות על אובייקט ללא שינוי שלו, קרי שהוא ישאר שקול לאובייקט במקור.

מה הן הסימטריות שיש לריבוע? אני יכול לסובב ולשקף אותו בלי לשנות את הצורה המתקבלת והיא תהיה שקולה. חשוב להגיד שהפעולות האלה שקולות שכן התוצאה הסופית זהה למקורית.

אפשר לסובב ספציפית אפס, תשעים מאה שמונים ומאתיים שבעים מעלות, נקרא לפעולות האלה A, B, C בהתאמה.

בנוסף אפשר לשקף סביב ציר האמצע, ציר האמצע מלמעלה, ועל האלכסונים, ניתן גם לאלה שמות, נקרא לפעולות אלה D, E, F, G, H. אלה הפעולות הבסיסיות ואי אפשר לעשות פעולה שלא בקבוצה הזאת, אבל אפשר להרכיב את הפעולות האלה והתוצאה הסופית תהיה שקולה לפעולה מהקבוצה.

נגדיר את הפעולות:

$$D_4 = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}, \circ : D_4 \times D_4 \rightarrow D_4$$

נראה כי הרכבת פעולות שקולה לפעולה קיימת:

$$E \circ G = C, E \circ B = H, B \circ F = F$$

חשוב לשים לב שהפעולה הזאת לא חילופית:  $X \circ Y \neq Y \circ X$ .

היא כן קיבוצית:  $X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z$ .

תכונה נוספת היא קיום האיבר הנייטרלי, במקרה הזה A. איבר זה לא משפיע על הפעולה הסופית, והרכבה איתו מתבטלת ומשאירה רק את האיבר השני:

$$\forall X \in D_4 : A \circ X = X \circ A = X$$

התכונה האחרונה היא קיום איבר נגדי:

$$\forall X \in D_4 \exists Y \in D_4 : X \circ Y = Y \circ X = A$$

**הגדרה 1.1** (חבורה) חבורה היא קבוצה G עם  $\circ : G \times G \rightarrow G$  ואיבר  $e \in G$  כך שמתקיימות התכונות הבאות:

1. אסוציאטיביות (חוק הקיבוץ):  $\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ .

2. קיום איבר נייטרלי: לכל  $x \in G$  מתקיים  $x \circ e = e \circ x = x$ .

3. קיום איבר נגדי: לכל  $x \in G$  קיים  $y \in G$  כך שמתקיים  $x \circ y = y \circ x = e$ .

חשוב לציין כי זו היא לא הגדרה מינימלית, ניתן לצמצם אותה, לדוגמה להגדיר שלכל איבר יש הופכי משמאל בלבד (יש להוכיח שקילות).

**למה 1.2** (קיום איבר נייטרלי יחיד) אם  $e_1, e_2 \in G$  נייטרליים אז  $e_1 = e_2$ .

□ הוכחה.  $e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$

דהינו, קיים איבר נייטרלי יחיד.

### 1.2 דוגמות

הקורס מבוסס על הספר "מבנים אלגבריים" מאת דורון פודר, אלכס לובוצקי ואהוד דה שליט, אך יש הבדלים, חשוב לשים לב אליהם. ניתן לקרוא שם דוגמות.

דוגמות כלליות לחבורות, עבור  $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$  שדה:

1. חבורה החיבורית היא  $(\mathbb{F}, +, 0)$

2. החבורה הכפלית היא  $(\mathbb{F}, \cdot, 1)$

הסימון הכי נפוץ לפעולה של החבורה היא כפל או נקודה או לא בכלל:  $xy = x \cdot y$ .

**הגדרה 1.3** (חבורה קומוטטיבית) חבורה  $G$  תיקרא קומוטטיבית או חילופית (על שם המתטיקאי אבל) אם  $xy = yx$  לכל  $x, y \in G$ . חשוב להבין, למה שסימטריות תהינה חילופיות.

**דוגמה 1.1** (לחבורות קומוטטיביות)  $(\mathbb{Z}, +, 0)$  חבורת החיבור מעל השלמים, היא חבורה קומוטטיבית. באופן דומה גם  $(\mathbb{Z}_n, +, 0)$ .

**דוגמה 1.2** (חבורות לא קומוטטיביות) נבחין במספר דוגמות לחבורות שאין בהן חילופיות.

- $(D_4, \circ, A)$  אשר מייצג את הריבוע עליו דובר בתחילת ההרצאה
- $S_n$  תמורות על  $1, \dots, n$  עם הרכבה.
- תמורה היא פעולה שמחליפה שני איברים כפונקציה, לדוגמה  $s(1) = 2, s(2) = 1, s(n) = n$ .  
 $S_n$  הוא מקרה פרטי של תמורות על קבוצה  $\{1, \dots, n\}$
- $\text{Sym}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ ועל}\}$  (הופכית, חח"ע ועל  $f$ )
- תמורות הן סימטריה של קבוצה, כל תמורה היא העתקה חד-חד ערכית ועל שמשמרת את מבנה הקבוצה.
- $GL_n(\mathbb{F})$  מטריצות  $n \times n$  הפיכות מעל שדה  $\mathbb{F}$ .
- אם  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$  אז  
 $GL(V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ ערכית וחד}\}$
- נשים לב כי  $GL_n(\mathbb{F}) \cong GL(\mathbb{F}^n)$ , דהינו הם איזומורפיים. זה לא אומר שהם שווים, רק שיש להם בדיוק אותן תכונות.
- גם בקבוצות שתי קבוצות עם אותו גודל הן איזומורפיות אך לא שקולות.

## 2 תרגול 1 – 7.5.2024

### 2.1 חבורות ותתי-חבורות

#### 2.1 דוגמה

$(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$	לא חבורה בגלל 0
$(M_{n \times n}(\mathbb{R}), \circ, I_n)$	לא חבורה בגלל מטריצות רגולריות ומטריצת האפס לדוגמה
$(\mathbb{Z}_4, +_4, 0)$	אכן חבורה
$(\mathbb{Z}_3, +_3, 0)$	אכן חבורה
$(\mathbb{Z}_4^*, \cdot, 1)$	לא חבורה, $2 \cdot 2 = 0$
$(\mathbb{Z}_3^*, \cdot, 1)$	אכן חבורה, מבוסס על מספר ראשוני

הערה לא קשורה: הסימון של כוכבית מסמן הסרת כלל האיברים הלא הפיכים מהקבוצה. כל שלישיה  $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot, 1)$  היא חבורה בתנאי ש- $p$  הוא ראשוני.

#### 2.1 (בסיסיות של חבורות)

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2 \quad \text{יחידות האיבר הנייטרלי}$$

$$x \in G, y, y_1 = x^{-1} : y = y \cdot e = xy_1 = e \cdot y_1 = y_1 \quad \text{יחידות ההופכי}$$

תהי  $G$  חבורה,  $g = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$  ביטוי לא תלוי בהצבת סוגריים, טענה זו אפשר להוכיח באינדוקציה. לכל  $n, m \in \mathbb{N}$  מתקיים גם  $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$  ואף  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ .

**הגדרה 2.2** (תת-חבורה) תהי חבורה  $(G, \cdot, e_G)$ , ותהי  $H \subseteq G$  תת-קבוצה, אז  $(H, \cdot_G, e_G)$  תיקרא תת-חבורה אם היא מהווה חבורה תקינה. נסמן  $H \leq G$ .

**דוגמה 2.2**  $(2\mathbb{Z}, +, 0) \leq (\mathbb{Z}, +, 0)$  חבורת הזוגיים בחיבור היא תת-חבורה של השלמים.  
 $(\text{diag}_n(\mathbb{R}), \circ, I_n) \leq (GL_n(\mathbb{R}), \circ, I_n)$  חבורת המטריצות האלכסוניות היא תת-חבורה של המטריצות.  
 $(GL_n(\mathbb{Q}), \circ, I_n) \leq (GL_n(\mathbb{R}), \circ, I_n)$  מטריצות הפיכות מעל הרציונליים חלקיות למטריצות הפיכות מעל הממשיים.

**טענה 2.3** (מקוצר לתת-חבורה) תהי  $G$  חבורה ותהי קבוצה  $H \subseteq G$  אז  $H \leq G$  (תת-חבורה של  $G$ ) אם ורק אם:

- $e_G \in H$ , איבר היחידה נמצא ב- $H$ .
- $\forall x \in H : x^{-1} \in H$ , לכל איבר גם האיבר ההופכי לו נמצא בקבוצה.
- $\forall x, y \in H : x \cdot y \in H$ , הקבוצה סגורה לכלל האיברים בה.

#### 2.3 דוגמה

$$(\mathbb{N}_0, +, 0) \not\leq (\mathbb{Z}, +, 0) \quad 1 \in \mathbb{N}_0 \wedge -1 \notin \mathbb{N}_0$$

$$\{0, 2, 4, 6, 8\} \subseteq (\mathbb{Z}_{10}, +_{10}, 0) \quad \text{כלל התנאים מתקיימים}$$

**טענה 2.4** (תת-חבורה לחבורה סופית) אם חבורה היא סופית, אז תנאי 2 איננו הכרחי לתתי-חבורות.

הוכחה. תהי  $G$  חבורה סופית ותהי  $H \subseteq G$  אשר מקיימת את סעיפים 1 ו-3 בקריטריון. יהי  $x \in H$ , נבחין כי  $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$  בעקבות סעיף 3 של הקריטריון. לכן קיימים שני מספרים  $n, m \in \mathbb{N}$  כך ש- $m < n$  אשר מקיימים  $x^n = x^m$ . כמובן מתקיים  $x^n \cdot x^{-m} = e$  ומהסגירות לכלל נובע כי  $x^{n-m} \in H$  ומצאנו כי התנאי השני מתקיים.

□

## 2.2 חבורת התמורות

תהי  $X$  קבוצה, אז  $\text{Sym}(X)$  היא קבוצת הפונקציות החד-חד ערכיות ועל מ- $X$  לעצמה.  $(\text{Sym}(X), \circ, Id)$  היא חבורה, מורכבת מכלל התמורות, הרכבת פונקציות ופונקציית הזהות. אם  $X$  היא קבוצה סופית אז  $S_n = \text{Sym}(X)$ , ובדרך כלל נגדיר  $X = [n] = \{1, \dots, n\}$  וחבורת התמורות תהיה  $(S_n, \circ, Id)$ .

**הגדרה 2.5** (סדר של חבורה) סדר של חבורה הוא מספר האיברים בחבורה. אילו  $G$  אז נגיד שסדר החבורה הוא אינסוף. נסמן את הסדר  $|G|$ .

אילו  $G$  חבורה ו- $x \in G$ , הסדר של  $x$  הוא  $n \in \mathbb{N}$  המינימלי כך שמתקיים  $x^n = e$ , נסמנו  $|x|$  או  $\sigma(x)$ .

### חזרה לתמורות

נשים לב שמתקיים  $|S_n| = n!$ .  $\sigma \in S_n$  נכתוב את התמורה כך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

לדוגמה  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . אילו  $\sigma \in S_n$  ו- $i \in [n]$  נקיים  $\sigma(i) = i$  אז  $i$  נקרא **נקודת שבט** של  $\sigma$ . בדוגמה שנתנו,  $\sigma(3) = 3$  ולכן זוהי נקודת שבט של  $\sigma$ .

### תתי-חבורות של חבורת התמורות

דוגמה ראשונה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq S_3$$

היא תת-חבורה של  $S_3$  שכן כללי הקריטריון מתקיימים מבדיקה. גם  $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$  היא תת-חבורה, שכן  $\sigma(\tau(1)) = \tau(\sigma(1)) = 1$ . לעומת זאת  $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) \in \{1, 2, 3\}\}$  איננה חבורה. נראה כי אם  $\sigma, \tau$  המקיימות  $\tau(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(4) = 2$  וכל השאר נקודות שבט,  $\sigma(\tau(1)) = 4$  שלא נמצא בקבוצה על-פי הגדרתה.

### מחזורים

מחזור הוא רצף של איברים שהתמורה מחזירה כרצף, זאת אומרת שהתמורה עבור האיבר הראשון במחזור תחזיר את השני, השני את השלישי וכן הלאה.

**הגדרה 2.6** מחזור פשוט  $\sigma \in S_n$  יקרא **מחזור  $l$ -אם** קיימים  $x_1, \dots, x_l \in [n]$  כך שלכל  $0 \leq i < l$  מתקיים  $\sigma(x_i) = x_{i+1}$  ו- $\sigma(x_l) = x_1$ .

**טענה 2.7** כל תמורה היא הרכבה של מספר כלשהו של מחזורים, ההוכחה מסתמכת על היכולת לשרשר את ערכי המחזור משרשראות שאינן נוגעות אחת לשנייה.

### דוגמה 2.4 נבחין כי אם

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

אז נוכל להרכיב  $\sigma = (1645)(2)(37)$ . נשים לב למקרה מיוחד, יהי  $\sigma \in S_n$  כך ש- $\sigma$  הוא  $l$ -מחזור, ונגדיר  $\sigma = (x_1 x_2 \dots x_l)$ . בהינתן  $\tau \in S_n$  מתקיים

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau(x_1) \tau(x_2) \dots \tau(x_n))$$

זאת שכן לדוגמה  $\sigma(\tau^{-1}(\tau(x_1))) = \sigma(x_1)$  ובהתאם  $(\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1})(x_1) = \tau(x_1)$ .



### 3 שיעור 2 — 8.5.2024

#### 3.1 מבוא לאיזומורפיות

המטרה שלנו היא להבין מתי שתי חבורות שונות הן שקולות, ולחקור את מושג האיזומורפיות. נבחן את  $\mathbb{Z}/2$  ואת  $(\{\pm 1\}, \cdot)$  ובשתייהן יש רק שני איברים, אחד נייטרלי ואחד לא, ובשתייהן הפעולות מתנהגות אותו דבר בדיוק.

$$1 \leftrightarrow -1, 1 \leftrightarrow 0$$

עוד דוגמה היא  $(\mathbb{R}, +)$  ו- $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ .

$$(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\exp} (\mathbb{R}^{>0}, \cdot), \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

**הגדרה 3.1 (הומומורפיזם)** עבור  $G$  ו- $H$  חבורות, הומומורפיזם מ- $G$  ל- $H$  היא פונקציה  $\varphi : G \rightarrow H$  שמקיימת:

$$1. \varphi(e_G) = e_H$$

$$2. \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

$$3. \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$$

**למה 3.2 (תנאי הכרחי להומומורפיזם)**  $\varphi : G \rightarrow H$  היא הומומורפיזם אם ורק אם לכל  $x, y \in G$  מתקיים  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ .

**הוכחה.** נראה ששלושת התכונות מתקיימות:

$$1. \text{ נבחר } x \in G \text{ ונראה כי } e_H = \varphi(e_G) \iff \varphi(x) = \varphi(e_G x) = \varphi(e_G)\varphi(x) \iff \varphi(x) = \varphi(e_G)x = e_H x = x$$

2. נתון

$$3. \varphi(e_G) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = e_H \implies \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$$

ומצאנו כי שלושת התנאים מתקיימים.

□

**הגדרה 3.3 (איזומורפיזם)** איזומורפיזם מ- $G$  ל- $H$  הוא הומומורפיזם חד-חד ערכי ועל ומסומן  $\varphi : G \xrightarrow{\sim} H$ .

**למה 3.4 (הופכי לאיזומורפיזם)** עבור  $\varphi : G \xrightarrow{\sim} H$  גם ההופכי הומומורפיזם (ולכן גם איזומורפיזם).

**הוכחה.** נראה כי לכל  $x, y \in H$ :

$$\varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(\varphi^{-1}(y))) = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)$$

ומצאנו כי התנאי ההכרחי להומומורפיזם מתקיים.

□

**מסקנה 3.5 (תנאי הכרחי לאיזומורפיזם)** המומומורפיזם  $\varphi : G \rightarrow H$  הוא איזומורפיזם אם ורק אם קיים הומומורפיזם  $\psi : H \rightarrow G$  כך שמתקיים  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id$ .

**הגדרה 3.6 (איזומורפיות)** נגדיר שתי חבורות כאיזומורפיות אם ורק אם קיים איזומורפיזם ביניהן.

נשים לב שמספר האיזומורפיזמים בין החבורות, גם אם הוא אינסופי, הוא חסר משמעות, ובמקום אנו מסתכל על עצם האיזומורפיות.

דוגמה לחבורות איזומורפיות הן  $\mathbb{Z}/2 \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$  כפי שראינו בהתחלה.

חשוב לשים לב שגם אם יש כמות איברים זהה בין החבורות, הן לא בהכרח תהינה איזומורפיות, לדוגמה  $GL_2(\mathbb{F}_2)$ , חבורת המטריצות ההפיכות מעל שדה עם שני איברים. יש בשורה העליונה 3 אפשרויות, ובשורה השנייה 2 ולכן יש 6 איברים בחבורה הזו. גם ב- $S_3$  יש בדיוק שישה איברים, אבל  $GL_2(\mathbb{F}_2) \not\cong S_3$ . גם החבורה החיבורית  $\mathbb{Z}/6$  היא חבורה עם שישה איברים. החבורה הראשונה לא קומוטטיבית והשנייה כן, כי כפל מטריצות לא ניתן לשינוי סדר.

**למה 3.7 (הרכבת הומומורפיזמים)**  $\varphi : G \rightarrow H$  ו- $\psi : H \rightarrow K$  שני הומומורפיזמים, אז גם  $\psi \circ \varphi : G \rightarrow K$  הוא הומומורפיזם.

□

$$\text{הוכחה. } \forall x, y \in G : (\psi \circ \varphi)(xy) = \psi(\varphi(xy)) = \psi(\varphi(x)\varphi(y)) = \psi(\varphi(x))\psi(\varphi(y)) = (\psi \circ \varphi)(x)(\psi \circ \varphi)(y)$$

**מסקנה 3.8 (הרכבת איזומורפיזמים)** הרכבה של איזומורפיזמים היא איזומורפיזם.

**הגדרה 3.9 (אוטומורפיזם)** אוטומורפיזם של  $G$  הוא איזומורפיזם  $G \xrightarrow{\sim} G$ . נסמן ב- $Aut(G)$  את קבוצת האוטומורפיזמים של  $G$ .

למה 3.10 (חבורת האוטומורפיזמים)  $Aut(G)$  היא חבורה ביחס להרכבה.

הוכחה. הרכבה היא אסוציאטיבית, העתקת הזהות מוכלת בקבוצה ונייטרלי להרכבה, והוכחנו שלכל אוטומורפיזם  $\varphi$  יש הופכי  $\varphi^{-1} \in Aut(G)$ .  
□

מהי  $Aut(\mathbb{Z})$ ? לדוגמה  $\varphi(n) = n + 1$ . פונקציה זו איננה אוטומורפיזם שכן  $\varphi(1) + \varphi(3) = 6, \varphi(1+3) = \varphi(4) = 5$ .  
פונקציית הזהות היא אוטומורפיזם, והפונקציה  $\varphi(n) = -n$  על-פי בדיקה ישירה של הגדרות.  
נבחן את פונקציית הכפל בקבוע,  $\varphi(n) = 2n$ , נראה כי  $\varphi(n) + \varphi(m) = 2n + 2m, \varphi(n+m) = 2(n+m) = 2n + 2m$ , הומומורפיזם, אבל לא כל איבר שייך לקבוצה השנייה ולכן לא אוטומורפיזם.

$$Aut(\mathbb{Z}) = \{Id, -Id\} \cong \mathbb{Z}/2$$

טענה 3.11 (ערך)  $Aut(\mathbb{Z}) = \{Id, -Id\}$

הוכחה. יהי  $\varphi: \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ , ראשית נראה כי  $\varphi(n) = n\varphi(1)$ . עבור  $n = 0$  ברור, עבור  $n > 1$  נראה כי  $\varphi(n) = \varphi(1 + \dots + 1) = \varphi(1) + \dots + \varphi(1) = n\varphi(1)$ .  
עבור  $n \leq 1$  נשתמש ב- $\varphi(-1) = -1$  ובהתאם  $\varphi(-n) = (-n)\varphi(1)$ . תתקן אחר כך את הסימנים.  
לכן  $\varphi(1) = \pm 1 \implies \varphi = \pm Id$ .  
□

הגדרה 3.12 (מכפלת חבורות) אם  $G$  ו- $H$  הן חבורות, המכפלה הישרה ל  $G$  ו- $H$  או  $G \times H$  היא החבורה שמקיימת  $G \times H = \{(x, y) \mid x \in G, y \in H\}$  עם הפעולה  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$  והנייטרלי  $e = (e_G, e_H) \in G \times H$ .  
נראה בהמשך שמתקיים  $\mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . אבל  $\mathbb{Z}/4 \not\cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ .

הגדרה 3.13 (תת-חבורה)  $G$  חבורה, ותהי תת-קבוצה  $H \subseteq G$  נקראת תת-חבורה אם

$$1. e \in H$$

$$2. x, y \in H \implies xy \in H$$

$$3. x \in H \implies x^{-1} \in H$$

נשים לב כי תת-קבוצה  $H \subseteq G$  היא תת-חבורה אם ורק אם  $H$  חבורה ביחס לאותה פעולה של  $G$ .  
מסמנים  $H \leq G$  תת-חבורה.  
דוגמות:

$$\bullet \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\} \leq D_4$$

$$\bullet \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\} \leq S_n$$

$$- \text{תהי } G \text{ חבורה סופית אז } Aut(G) \leq Sym(G) \cong S_n$$

$$\bullet SL_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F}) \text{ מטריצות עם דטרמיננטה 1 הן חלקיות למטריצות הפיכות.}$$

$$\bullet B_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F}) \text{ מטריצות משולשיות עליונות עם אלכסון 1 הן חלקיות אף הן להפיכות.}$$

$$\bullet O_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F}) \text{ חבורת המטריצות האורתוגונליות חלקיות לחבורת המטריצות ההפיכות. } O_n(\mathbb{F}) = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid I_n = A^t A\}$$

למה 3.14 (חיתוך תת-חבורות) לכל קבוצה  $S$  ומשפחה  $\{H_\alpha \leq G \mid \alpha \in S\}$  של תת-חבורה של  $G$  אז  $\bigcap_{\alpha \in S} H_\alpha \leq G$  תת-חבורה.  
הערה קטנה: משפחה היא קבוצה של קבוצות ככה שאפשר לזהות כל אחת לפי מספר, אפשר להשתמש בלמה גם בקבוצות כרגיל.

$$\bullet \text{ הוכחה. } e \in H_\alpha \text{ לכל } \alpha \in S \text{ ולכן } e \in \bigcap_{\alpha \in S} H_\alpha$$

$$\bullet x, y \in \bigcap_{\alpha \in S} H_\alpha \text{ אם ורק אם } x, y \in H_\alpha \text{ מתקיים לכל } \alpha \text{ ולכן } xy \in H_\alpha \text{ ובהתאם } xy \in \bigcap_{\alpha \in S} H_\alpha$$

ומצאנו כי זוהי חבורה.  
□

$$\text{למשל } SO_n = SL_n(\mathbb{R}) \cap O_n \leq GL_n(\mathbb{R})$$

**הגדרה 3.15** (תת-חבורה נוצרת)  $G$  חבורה ו- $S \subseteq G$ , תתי-קבוצה, התת-חבורה הנוצרת על-ידי  $S$  מוגדרת להיות:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq H \leq G} H$$

נשים לב כי על-פי הלמה האחרונה מתקבל כי זוהי אכן תת-חבורה.

## 4 שיעור 3 – 15.5.2024

### 4.1 תת-חבורות

הגדרה 4.1 (תת-חבורה נוצרת) תהי  $S \subseteq G$  תת-קבוצה לחבורה, נגדיר

$$\langle S \rangle = \bigcup_{S \subseteq H \leq G} H \leq G$$

למה 4.2 (תת-חבורה מינימלית)  $S \subseteq G$  התת-חבורה המינימלית  $\langle S \rangle$  היא התת-חבורה המינימלית של  $G$  המכילה את  $S$ .

קצת קשה לעבור על זה, איזה אפיון נוסף יש לדבר הזה?

טענה 4.3 (תת-חבורה נוצרת מפורשת) אז  $S \subseteq G$

$$\langle S \rangle = \overline{S} \equiv \{x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} \mid x_i \in S, \epsilon_i = \pm 1\}$$

הוכחה. כיוון ראשון: נניח שעבור תת-חבורה  $H$  המכילה של  $S$  סגורות  $H$  לכלל והופכי גוררת שהקבוצה  $\overline{S}$  הנתונה מוכלת ב- $H$ . מצד שני נראה שזוהי כבר תת-חבורה.

$$1 \in \overline{S} \text{ מכפלה ריקה.}$$

$$x, y \in \overline{S} \text{ אז נסמן}$$

$$x = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}, y = y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2} \cdots y_n^{\epsilon_n}, xy = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2} \cdots y_n^{\epsilon_n}$$

$$x \in \overline{S} \text{ אז}$$

$$x^{-1} = x_1^{-\epsilon_1} x_2^{-\epsilon_2} \cdots x_n^{-\epsilon_n},$$

$$(xy)(x^{-1}y^{-1}) = xyx^{-1}y^{-1} = xx^{-1} = 1 \text{ וידוע כי}$$

□

הגדרה 4.4 (שלמות תת-חבורה יוצרת) אם  $\langle S \rangle = G$  אומרים ש- $S$  יוצרת את  $G$ .

דוגמה 4.1 מתקיים  $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$ .  $\langle -1 \rangle = d\mathbb{Z}$  כקונספט כללי  $\langle d \rangle$ .

מה לגבי  $\mathbb{Z}/n$ ? מתקיים  $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}/n$ ?

הגדרה 4.5 (חבורה ציקלית) חבורה  $G$  נקראת ציקלית אם היא נוצרת על-ידי איבר אחד, דהינו קיים  $x \in G$  כך ש- $\langle x \rangle = G$ .

טענה 4.6 כל חבורה ציקלית  $G$  מקיימת  $G \cong \mathbb{Z}$  או  $G \cong \mathbb{Z}/n$  הוכחה בתרגיל.

דוגמה 4.2  $G = D_4$

נגדיר את  $\sigma$  להיות סיבוב בתשעים מעלות, ואת  $\tau$  להיות היפוך על ציר האיקס.

$$\langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$$

$$\langle \tau \rangle = \{e, \tau\}$$

אנחנו יכולים להכפיל כל שני איברים משתי הקבוצות שסימנו עכשיו.

$$D_4 = \langle \sigma, \tau \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\}$$

$$\tau\sigma = \sigma^3\tau, \sigma^4 = e, \tau^2 = e$$

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^3 = \sigma^{-1} \text{ ונראה כי}$$

טענה 4.7 (תת-חבורות של  $\mathbb{Z}$ ) לכל  $H \leq \mathbb{Z}$  קיים  $d \geq 0$  יחיד כך ש- $H = d\mathbb{Z}$ .

הוכחה. אם  $H \neq \{0\}$  אז קיים  $d \in H$  וניקח את  $d$  להיות המינימלי שמקיים את אי-השוויון.

$$\langle d \rangle = d\mathbb{Z} \subseteq H$$

מצד שני, עבור  $a \in H$  וידוע  $a > 0$  אז נכתוב  $a = nd + r$  כאשר  $0 \leq r < d$  שארית.

$$r = a - nd \in H \text{ מהמינימליות של } d \text{ נובע כי } r = 0 \text{ ולכן } a = nd \in d\mathbb{Z}.$$

□

יחידות של זה: תרגיל נגלה בהמשך שתת-חבורה של חבורה ציקלית היא בעצמה ציקלית.

**הגדרה 4.8 (gcd)** עבור שני מספרים  $a, b \in \mathbb{Z}$  שלא שניהם 0 נגדיר  $\gcd(a, b) = d$  מחלק משותף מקסימלי כך שמתקיים:  $d \mid a, b$  וגם לשלכל  $m \mid a, b$  מתקיים גם  $m \mid d$ .

הוכחה.  $\langle a, b \rangle = d\mathbb{Z}$ , לאיזשהו  $d \geq 0$  יחיד.

נראה ש- $d = \gcd(a, b)$ .

מצד אחד  $a, b \in d\mathbb{Z}$  ולכן  $d \mid a, b$ .

מצד שני אם  $a, b \mid n$  אז  $\{a, b\} \subseteq n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ . ולכן  $m \mid d$  והוא מחלק מקסימלי.

□

**דוגמה 4.3** עבור  $2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle = \langle 6, 10 \rangle$

**מסקנה 4.9** (הלמה של Bézout) לכל  $a, b \in \mathbb{Z}$  קיימים  $n, m \in \mathbb{Z}$  עבורם  $\gcd(a, b) = na + mb$ .

## 4.2 מחלקות (Cosets)

**הגדרה 4.10** (מחלקה ימנית ושמאלית) תהי  $G$  חבורה ו- $H \leq G$  ו- $x \in G$ . נגדיר את המחלקה המשלאתי של  $x$  על-ידי

$$xH = \{xh \mid h \in H\}$$

ואת המחלקה הימנית של  $x$  בהתאם

$$Hx = \{hx \mid h \in H\}$$

תרגיל: להוכיח שהמחלקה הימנית והשמאלית הן איזומורפיות. וזה לא נכון במונואיד.

**למה 4.11 (שיוך למחלקה)**  $y \in xH \iff yH = xH$

הוכחה.

$$y \in xH \iff y = xh \iff x^{-1}y \in H \iff y^{-1}x \in H \iff x \in yH, y \in xH \iff xH = yH$$

□

**מסקנה 4.12** לכל  $x, y \in G$  מתקיים

$$xH = yH \text{ (אם ורק אם } x^{-1}y \in H \text{)}$$

$$\text{או } xH \cup yH = \emptyset$$

□

הוכחה. אם  $z \notin xH \cup yH$  אז מהלמה הקודמת  $yH = xH$ .

**טענה 4.13 (כיסוי זר)**  $G \leq H$  התת-קבוצות מהצורה  $xH$  עבור  $x \in G$  מהוות כיסוי זר של  $G$ .

□

הוכחה. נשאר לשים לב  $x \in xH$  ולכן כיסוי ומהמסקנה זר.

**טענה 4.14** לכל  $x, y \in G$  יש התאמה חד-חד ועל ערכית של קבוצות  $xH \xrightarrow{\sim} yH$

בפרט אם  $H$  סופית אז לכל המחלקות אותו גודל,  $|xH| = |yH|$ .

הוכחה. נגדיר  $\varphi : xH \rightarrow yH$  על-ידי  $\varphi(z) = yx^{-1}z$ .

ונגדיר פונקציה חדשה  $\psi : yH \rightarrow xH$  על-ידי  $\psi(z) = xy^{-1}z$ .

אז מתקיים  $\psi = \varphi^{-1}$  ובהתאם נובע כי  $\varphi$  איזומורפיזם.

□

**הגדרה 4.15** (אוסף מחלקות)  $H \leq G$  אז נסמן

$$G/H = \{xH \mid x \in G\}, H \backslash G = \{Hx \mid x \in G\}$$

אוסף המחלקות השמאליות והימניות בהתאמה.

**משפט 4.16 (משפט לאגרנז')** אם  $G$  חבורה סופית, אז לכל  $H \leq G$  מתקיים  $|H| \mid |G|$ .

הוכחה. ל- $G$  יש כיסוי זר על-ידי מחלקות שמאליות של  $H$  ולכן הגודל של  $|G| = |H| \cdot |G/H|$ .  
 הגודל של  $|G/H| = |G|/|H|$ .

**סימון 4.17**  $|G/H| = |G : H|$  האינדקס של  $H$  ב- $G$ .

**דוגמה 4.4** המחלקות של  $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ :

$$3\mathbb{Z} + 0 = 3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z} + 1, 3\mathbb{Z} + 2$$

הקבוצה  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  היא השאריות האפשריות בחלוקה לשלוש.

□

## 5.1 סדר

הגדרה 5.1 (סדר של חבורה)  $G$  חבורה ו- $x \in G$  מסומן  $o(x)$  הוא המספר הקטן ביותר כך ש- $x^n = e$ ,  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ , או  $\infty$  אם לא קיים  $n$  כזה.

למה 5.2 (סדר)

$$o(x) = |\langle x \rangle|$$

הוכחה. נוכיח שאם  $o(x)$  סופי אז

$$\langle x \rangle = \{1, x, x^2, \dots, x^{o(x)-1}\} \quad (1)$$

ואם  $o(x) = \infty$  אז

$$\langle x \rangle = \{1, x, x^2, \dots\} \cup \{x^{-1}, x^{-2}, \dots\} \quad (2)$$

הוכחה ל-(1).

(1) תת-חבורה:

$$x^k \cdot x^m = x^{(m+k) \bmod o(x)}.$$

$$(x^n)^{-1} = x^{o(x)-n}.$$

כל ההאיברים שונים כי אם  $x^k = x^m$  ל- $0 \leq k < m \leq o(x)$  אז

$$1 = x^0 = x^{m-k}$$

ונקבל  $1 \leq m-k < o(x)$  בסתירה למינימליות של  $o(x)$ .

הוכחה ל-(2):

אם  $H = \langle x \rangle$

סופיות נתונה בקבוצה.

$$\{1, x, x^2, \dots\} \subseteq H$$

מסופיות קיימים  $0 \leq k < m$  עבורם

$$x^k = x^m \implies x^{m-k} = 1$$

ולכן ל- $x$  יש סדר סופי, משובך היונים.

2 תרגיל.

מסקנה 5.3 (משפט לגרנז' לחבורה סופית)  $G$  חבורה סופית, אז לכל  $x \in G$  מתקיים

$$o(x) \mid |G|$$

מסקנה 5.4 אם קיים  $x \in G$  עבורו  $o(x) = |G|$  אז  $G$  ציקלית.

טענה 5.5 (בסיס למשפט השאריות הסיני) לכל  $a, b \geq 1$  זרים אז  $\gcd(a, b) = 1$  מתקיים

$$\mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b \cong \mathbb{Z}/ab$$

הוכחה. נראה שהסדר של  $x = (1, 1) \in \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$  הוא  $ab$  ונסיק מההבחנה.

$$x^{ab} = (ab, ab) = (0, 0) = 1$$

ראשית,  $x^n = 1$  אז  $x^n = (n, n) \in \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$  כלומר

$$0 = n \in \mathbb{Z}/a, \quad 0 = n \in \mathbb{Z}/b$$

ולכן  $a \mid n$ ,  $b \mid n$  ולכן  $ab \mid n$ .

$$|\mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b| = |\mathbb{Z}/a| \cdot |\mathbb{Z}/b| = ab$$

מכיוון ש- $ab$  נובע ש- $\mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$  ציקלית מגודל  $ab$  ולכן איזומורפית ל- $\mathbb{Z}/ab$ .

## 5.2 פעולות של חבורה על קבוצה

נתעסק בחבורות לא אבליות ואיך הן מופיעות כסימטריות פעמים רבות. הסיבה שאנחנו מתעסקים בחבורות היא לראות את הפעולות שלהן על דברים.

**הגדרה 5.6** (פעולה) פעולה של חבורה  $G$  על קבוצה  $X$  זו פונקציה  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  כך שמתקיים:

$$1. \quad x \in X \quad 1 \cdot x = x$$

$$2. \quad x \in X, g, h \in G \quad h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$$

סימון:  $G \curvearrowright X$ . באנגלית Group action.

**דוגמה 5.1** (לפעולות) מספר פעולות:

$$1. \quad S_n \text{ פועלת על הקבוצה } X = \{1, 2, \dots, n\} \text{ על-ידי}$$

$$S_n \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

$$\text{כאשר } (\sigma, k) \mapsto \sigma(k)$$

$$2. \quad D_n \leq S_n \text{ כפי שהגדרנו בתרגיל.}$$

$D_n$  פועלת על  $\{1, 2, \dots, n\}$  באותו אופן כמו  $S_n$ , והיא אינטואיטיבית שקולה לביצוע פעולה סימטרית נתונה על מצב מסוים של הריבוע.

$$3. \quad \mathbb{R}^n \curvearrowright GL_n(\mathbb{R}) \text{ על-ידי}$$

$$GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (A, v) \mapsto Av$$

קבלת וקטור ומטריצה וכפל הווקטור במטריצה.

$$\mathbb{R}^n \curvearrowright O_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R}) \text{ פעולה אורתוגונלית על וקטורים, שקול למעשה ל-} S^{n-1}.$$

$$\mathbb{R} \text{ אף היא פעולה על } SO_2(\mathbb{R}) = O_2(\mathbb{R}) \cap SL_2(\mathbb{R})$$

**הערה:** הסימון  $O(n) = O_n(\mathbb{R})$  הוא קבוצת האורתוגונליים על  $\mathbb{R}$ , באופן דומה  $SO_n(\mathbb{R})$  קבוצת האורתוגונליים עם דטרמיננטה 1.

4. דוגמה 0: המקרה הטריוויאלי, כל חבורה  $G$  ולכל קבוצה  $X$  יש את הפעולה הטריוויאלית של  $G$  על  $X$  והיא

$$g \cdot x = x, \forall g \in G, x \in X$$

הרציונל מאחורי ההגדרה הזאת הוא שאנחנו יכולים לפרק את החבורות מתוך פעולות שאנחנו כבר מכירים ולחקור את התכונות של הפעולות האלה באופן ריגורוזי ושיטתי. נשים לב לדוגמה ש- $\{D_1, D_2\} \curvearrowright D_4$ , אנחנו יכולים לחקור את המקרה היחסית טריוויאלי הזה של סימטריה גאומטרית על-ידי הגדרת הפעולה המתאימה.

**הגדרה 5.7** (אינבולוציה) נבחן את הפעולה של  $\mathbb{Z}/2$  על  $X$ . האיבר הנייטרלי לא עושה כלום ולכן קל להגדיר אותו, יש להגדיר פעולה רק עבור איבר לא נייטרלי.

זה אותו דבר בגדול כמו פונקציה  $\tau : X \rightarrow X$  שמקיימת  $\tau \circ \tau = Id_X$ , זאת שכן

$$\mathbb{Z}/2 \times X \rightarrow X, \quad g \cdot x \mapsto \begin{cases} x, & g = 0 \\ \tau(x), & g = 1 \end{cases}$$

לפונקציה כזאת קוראים אינבולוציה, פעולה שריבועה הוא  $Id$ , באנגלית Involution, וכבר ראינו פונקציות רבות כאלה.

כדוגמה יש לנו לפחות שלוש פעולות של  $\mathbb{Z}/2$  על  $\mathbb{R}^2$  כאלה

$$\tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}, \quad \tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}, \quad \tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

**הגדרה 5.8** (הפעולה הרגולרית)  $G$  חבורה, הפעולה הרגולרית (השמאלית) של  $G$  על  $G$  שנתונה על-ידי

$$g \cdot x = gx$$

פעולה המוגדרת על-ידי הכפל של החבורה. זוהי כמובן פעולה והסימון הוא  $G \curvearrowright G$ .

האם פעולה ימנית גם עומדת בהגדרת הפעולה?

נבדוק את  $G \times G \rightarrow G$  המוגדרת על-ידי  $(g, x) \mapsto xg$ :



נבדוק אסוציאטיביות

$$h \cdot (g \cdot x) = h \cdot (xg) = (xg)h, \quad (hg) \cdot x = x(hg), \quad (xg)h \neq x(hg)$$

ומצאנו כי הביטויים לא שווים ואין שמירה על אסוציאטיביות כחלק מהגדרת הפעולה, ולכן כמובן זוהי לא פעולה.

$$(g, x) \mapsto xg^{-1}$$

נשתמש במקום זאת בהופכית ונגדיר

פעולה זאת היא אכן פעולה מוגדרת והיא נקראת הפעולה הרגולרית הימנית.

יש עוד פעולה מעניינת של חבורה על עצמה, על-ידי הצמדה

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g, x) \mapsto xgx^{-1}$$

היא פעולת ההצמדה, נחקור אותה בתרגיל. באנגלית Conjugacy. באופן דומה הפעולה היא conjugate.

בהינתן פעולה של  $G \curvearrowright X$  נגדיר פונצקיה  $f : G \rightarrow \text{Sym}(X) \subseteq \text{End}(X)$  על-ידי

$$f(g)(x) = g \cdot x$$

זאת שכן  $G \times X \rightarrow X$  שקול ל- $\{X \rightarrow X\}$ .

**טענה 5.10 (הצמדה היא הומומורפיזם)**  $f$  היא הומומורפיזם של חבורות.

הוכחה.

$$f(hg)(x) = (hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = f(h)(g \cdot x) = f(h)(f(g)(x)) = (f(h) \cdot f(g))(x)$$

□

למה  $f(g) \in \text{Sym}(X)$ ?

$$f(g) \cdot f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = f(1) = Id \quad \text{גם} \quad f(g^{-1}) \cdot f(g) = f(g^{-1}g) = f(1) = Id$$

כדי שיעור הבא נגדיר המון דברים על פעולות על קבוצות, אז צריך להבין את זה ואת הדוגמות באופן מאוד כבד ושלם.

## 6 תרגול 3 – 21.5.2024

### 6.1 שאלות מתרגיל 1

שאלה 1

$$\text{End}(X) = \{f : X \rightarrow X\}$$

והיה צריך להוכיח שזה מונואיד. וזה חבורה רק כשהקבוצה היא הקבוצה הריקה או יחידון או משהו כזה. הסעיף השני הוא שיהא  $M$  מונואיד כך שלכל  $x \in M$  קיים הופכי משמאל ומראים ש- $M$  חבורה.

פתרון. יש לי  $x \in M$  וצריך להראות שקיים  $y \in M$  כך ש- $xy = yx = e$ .

נתון קיום של  $y \in M$  כך ש- $yx = e$  ואנחנו רוצים להראות שגם  $xy \in M$ .

$$xy = e \implies (xy)^2 = e = x(yx)y = xy = e$$

ולכן  $\exists t \in M : tz = e$  ונקבל  $z = tz^2 = tz = e$ .

עכשיו נגיד שיש לנו מונואיד  $M$  כך ש- $x \in M$  ול- $x$  יש הופכי מימין והופכי משמאל וצריך להראות שהם שווים.

פתרון. קיימים  $y, z$  כך ש- $xz = yx = e$ .

לכן

$$z = ez = (yx)z = y(xz) = y$$

□

הסעיף האחרון הוא לתת דוגמה לאיבר במונואיד עם הופכי משמאל ולא מימין.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ n-1, & n > 1 \end{cases} \text{ ו- } f(x) = x+1 \text{ נבחר את } \text{End}(\mathbb{N})$$

### שאלה 4

סעיף ב', צריך להראות שזה איזומורפי

$$\varphi : (\mathbb{R}^\times, \cdot) \rightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{R}^+$$

ואנחנו משתמשים בבינאריות של  $\mathbb{Z}/2$ , ואנחנו יודעים שלוגריתם משמר פעולות.

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1, \ln |x|), & x < 0 \\ (0, \ln |x|), & x > 0 \end{cases}$$

ועכשיו לסעיף ג':

צריך למצוא פונקציה

$$\varphi : GL_2(\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\sim} S(\{v_1, v_2, v_3\}), \quad v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1)$$

$$\varphi(T) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(T)\varphi(S) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ S(v_1) & S(v_2) & S(v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ T(S(v_1)) & T(S(v_2)) & T(S(v_3)) \end{pmatrix}$$

וזה מן הסתם עובד די טוב. אז בקיצור זה איזומורפיזם. ועכשיו נתחיל באשכרה תרגול.

## 6.2 מחלקות שקילות

**הגדרה 6.1** תהא  $G$  חבורה, ו- $H \leq G$ . מחלקות השקילות השמאליות של  $H$  הן קבוצות מהצורה  $gH, g \in G$ .

למה 6.2 (תכונות מחלקות שקילות) תהי  $H \leq G$  חבורה ותת-חבורה, אז הטענות הבאות מתקיימות:

$$1. \quad gH = H \iff g \in H$$

$$2. \quad \text{אם } H \text{ סופית אז לכל } g \in G \text{ מתקיים } |gH| = |H|.$$

$$3. \quad \forall g \in G : gH = Hg \iff gHg^{-1} \subseteq H$$

$$4. \quad \text{ישנה התאמה בין הקבוצות } gH \text{ ל-} Hg^{-1}.$$

**הגדרה 6.3** (אינדקס) תהי  $H \leq G$  חבורה ותת-חבורה.

נגדיר  $[G : H]$  להיות מספר המחלקות השמאליות של  $H$ . אם מספר זה אינסופי אז נגדיר את האינדקס  $[G : H] = \infty$ . מספר זה נקרא אינדקס של  $H$  ב- $G$ .

**דוגמה 6.1** נתבונן ב- $D_3$ . חבורת הסימטריות על משולש שווה צלעות. יש לנו שלושה צירי סימטריה, ויש לנו שלושה סיבובים לעשות.

$$D_3 = \{r, r^2, f, fr, fr^2\}$$

$$\text{וזה מן הסתם מקיים } D_3 = \langle r, f \rangle$$

$$\text{נגדיר } H_1 = \{e, f_2\}, H_2 = \{e, r, r^2\}$$

נראה כי מחלקות שקילות הן:

$$rH_1 = \{r, rf\}, r^2H_1 = \{r^2, r^2f\}, H_1 = H_1$$

ומהצד השני:

$$H_1r = \{r, fr\}, H_1r^2 = \{r^2, fr^2\}$$

ועבור  $H_2$ :

$$fH_2 = \{f, fr, fr^2\}, \text{etc}$$

עתה נדבר על סדר.

## 6.3 משפט לגרנז'

**הגדרה 6.4** (סדר של איבר) תהא  $G$  חבורה סופית ו-,  $g \in G$  נגדיר את הסדר של  $g$ . או  $|g| = \text{ord}(g)$  הוא המינימום של המספרים הטבעיים כך ש- $g^n = e$ .

**משפט 6.5** (משפט לגרנז') תהא  $G$  חבורה סופית ו- $H$  תת-חבורה של  $G$ . אז

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$$

$$\text{ובפרט } |H| \mid |G|.$$

**מסקנה 6.6** תהא  $G$  סופית ו- $g \in G$  אז  $|G| \mid \text{ord}(g)$ .

**הוכחה.** על-ידי התבוננות ב- $H = \langle g \rangle$ .

למה 6.7  $|H| = \text{ord}(g)$ .

**הוכחה.** נגדיר  $\varphi : \mathbb{Z}/\text{ord}(g) \rightarrow H$  על-ידי  $\varphi(b) = g^b$ .

נראה כי  $\varphi$  חד-חד ערכית ועל.

היו  $n, m \in \mathbb{Z}/\text{ord}(g)$  ונניח כי  $\varphi(n) = \varphi(m)$ , אזי  $g^n = g^m$  ולכן  $g^{n-m} = e$  ולכן  $n - m = 0$ , שאם לא כן יש סתירה למינימליות של

$$\text{ord}(g)$$

מה החבורה הנוצרת על-ידי  $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

יהא  $n \in \mathbb{Z}$  נחלק את  $n$  עם שארית בסדר של  $g$ ,  $n = m \cdot \text{ord}(g) + r$ ,  $r \in \mathbb{Z}/\text{ord}(g)$  ולכן  $g^n = g^{m \cdot \text{ord}(g) + r} = g^r$ .  
הראינו כי  $|H| = \text{ord}(g)$  ולכן הסדר של  $|G|$   $\text{ord}(g)$ .

**מסקנה 6.8** תהיה  $G$  חבורה סופית.

$$\forall g \in G, g^{|G|} = e$$

הוכחה. לפי המסקנה הקודמת

$$g^{|G|} = g^{k \cdot \text{ord}(g)} = g^{\text{ord}(g)} = e$$

**מסקנה 6.9** יהיה  $p$  ראשוני, ו- $G$  חבורה מסדר  $p$ . אז

1.  $G$  ציקלית.

2.  $G$  איזומורפית ל- $\mathbb{Z}/p$ .

3. כל החבורות מגודל  $p$  איזומורפיות.

הוכחה.  $G$  היא לא חבורה טריוויאלית בגלל  $p$  ולכן נוכל להגדיר  $g \in G \setminus \{e\}$ .

נשים לב כי  $\text{ord}(g) < p$  אך מצד שני  $|\langle g \rangle| = \text{ord}(g)$ .

לכן  $\langle g \rangle = G$ ,  $|\langle g \rangle| = p$ .

סעיף ב' בתרגיל 2.

**משפט 6.10 (משפט פרמה הקטן)** יהיה  $p$  ראשוני, ו- $a \in \mathbb{Z}$ , אם  $\gcd(a, p) = 1$  אז  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

הוכחה. נתבונן בחבורה הכפלית של  $\mathbb{Z}/p$ , מסומנת  $\mathbb{Z}/p^\times$  שהוא השדה בלי 0

הגודל של  $\mathbb{Z}/p^\times$  הוא  $p-1$  ולכן לכל  $x$  בחבורה הזאת  $x^{p-1} = 1$ .

כעת נחלק את  $a$  ב- $p$  עם שארית, ונקבל  $a = np + r$  כאשר  $0 < r \leq p-1$ , וזה נכון כי הם זרים, דהינו  $r \in \mathbb{Z}/p^\times$ .  
נשים לב כי

$$a^{p-1} = (np + r)^{p-1} \implies a^{p-1} = (mp + r)^{p-1} \pmod{p} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} (mp)^i r^{p-1-i} \pmod{p} = r^{p-1} \pmod{p}$$

לכן  $a^{p-1} = r^{p-1} = 1$ .

## 6.4 שאלה 4 סעיף א'

היה צריך למצוא תת-חבורה של  $GL_n(\mathbb{F})$  שאיזומורפית ל- $S_n$ .

פתרון. אוסף מטריצות הפרמוטציה,  $\{ \text{בכל שורה או עמודה יש איבר בודד שאיננו אפס והוא אחת} \}$ ,  $H = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid \dots\}$ .

המטריצות האלה הן כידוע מטריצות שפשוט מחליפות אגפים בווקטורים ולמעשה זה פשוט תמורה על הווקטורים מסדר  $n$ .

$S_n = S([n])$  ולכן נגדיר  $\varphi: H \rightarrow S_n$  על-ידי התמורה שפועלת על  $\varphi(A) = A$ .

## 7 שיעור 5 — 22.5.2024

נניח שיש לי  $G$  חבורה סופית. מלגרז' נובע ש- $|G|$  נובע ש- $|H|$   $H \leq G \implies$  משפט קושי אומר שאם  $|G|$  ראשוני אז קיימת חבורה  $H \leq G$  כך ש- $|H| = p$ . למעשה קיים  $x \in G$  עם  $o(x) = p$ .

### 7.1 פעולות על קבוצות

**סימון 7.1** בהינתן  $G \curvearrowright X$  נסמן עבור  $x, y \in X$  את  $x \sim y$  כיחס שמתקיים אם  $\exists g \in G : g \cdot x = y$ .

במילים פשוטות, שני איברים בקבוצה הם דומים אם קיים איבר בחבורה שמוביל מאחד מהם לשני. רעיונית מדובר בסימטריה, ולכן הגיוני לשאול אם שני מצבים הם סימטריים ללא קשר למה הפעולה שמשרה את הסימטריה.

**טענה 7.2 (יחס שקילות בפעולה על קבוצות)**  $\sim$  הוא יחס שקילות.

**הוכחה.** נבחין כי הגדרת יחס השקילות מתקיימת:

• רפלקסיבי  $e \cdot x = x$ .

• סימטרי:  $x \sim y \implies \exists g \in G : g \cdot x = y \implies g^{-1} \cdot y = x \implies y \sim x$ .

• טרנזיטיבי:  $x \sim y, y \sim z \implies \exists g, h \in G : gx = y, hy = z \implies (hg)x = h(gx) = hy = z \implies x \sim z$ .

□

משמעות הדבר היא שסימטריות הן שקולות. שוב, מדובר ברעיון מאוד הגיוני שכן אם בוחנים את הכול בעיניים של סימטריה. כלל המצבים סימטריים בזוגות גם סימטריים בכללי.

**הגדרה 7.3 (מסלולים)** בהינתן  $G \curvearrowright X$ , המסלולים של  $G$  הם מחלקות השקילות של  $\sim$  והמסלול של  $x \in X$  הוא

$$O(x) = \{y \in X \mid y \sim x\} = \{y \in X \mid \exists g \in G : g \cdot x = y\}$$

**סימון:** קבוצת המסלולים מסומנת  $G \backslash X$ .

**מסקנה 7.4**  $X = \bigcup_{O \in G \backslash X} O$ , דרך מזעזעת להגיד שהקבוצה המקורית מורכבת מהחלוקה למסלולים שלה.

מהותית אנו מדברים פה על החלוקה של  $X$  לפי השקילות, בכל קבוצה יהיו רק איברים ששקולים אחד לשני.

**הגדרה 7.5 (נקודת שבת)**  $x \in X$  נקודת שבת של  $G$  אם  $|O(x)| = 1$ .

כלומר  $\forall g \in G : g \cdot x = x$ .

הרעיון הוא שהפעולה על איבר מסוים תמיד מחזירה אותו עצמו, ללא קשר לאיזו סימטריה מהחבורה אנחנו בוחרים.

**הגדרה 7.6 (טרנזיטיבית)** פעולה  $G \curvearrowright X$  נקראת טרנזיטיבית אם  $|G \backslash X| = 1$ .

הפעולה היא טרנזיטיבית אם יש רק קבוצת מסלולים (שהיא חלוקת שקילות) אחת, דהינו שכל איבר בקבוצה סימטרי לכל איבר אחר.

**מסקנה 7.7**  $H \backslash G$  קבוצת המסלולים של  $H \curvearrowright G$  רגולרית משמאל שקולה ל- $H \backslash G$  קבוצת המחלקות הימניות של  $H$  ב- $G$ .

באופן דומה  $G/H$  המסלולים של הפעולה  $H \curvearrowright G$  הרגולרית מימין.

יש פה התכנסות מאוד אלגנטית גם של הרעיון של מחלקות ימניות ושל השקילויות מבחינת רגולרית משמאל, זו הרי מהותית מגדירה הכפלה של האיברים משמאל, ולכן גם המסלולים מעל התת-חבורה הם המחלקות האלה.

**דוגמה 7.1** נבחין בכמה פעולות שונות וחשובות:

1.  $G \curvearrowright G$  פעולה רגולרית שמאלית.  $\forall x, y \in G, x \sim y \iff \exists g \in G : gx = y$  ותמיד קיים  $g$  כזה והוא אף יחיד,  $g = yx^{-1}$ . לכן יש מסלול אחד והפעולה טרנזיטיבית.

2. יהי  $H \leq G$ , ונבחן את  $H \curvearrowright G$ , רגולרית משמאל, הפעם  $Hx = Hy \iff yx^{-1} \in H \iff \exists h \in H : hx = y \iff x \sim y$  מחלקות ימניות.

מצאנו הפעם כי יש מסלול בין איברים רק אם הם באותה מחלקה ימנית (על אף שמדובר על רגולרית שמאלית). נראה את המסקנה האחרונה.

3.  $\mathbb{R}^2 \curvearrowright GL_2(\mathbb{R})$  מטריצות הפיכות פועלות על המרחב  $\mathbb{R}^2$ .

מסלולים:  $\{\{0\}, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ .

ביתר פירוט, מטריצות הפיכות משמרות את האי-איפוס, אבל כן נוכל להגיע מכל וקטור לכל וקטור אחר עם המטריצה הנכונה. לעומת זאת וקטור אפס ישאר אפס מכל מטריצה שתוכפל בו, ולכן הוא לא סימטרי לאף וקטור אחר בפעולה.

4.  $O_2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ , ידוע כי  $O_2(\mathbb{R}) \leq GL_2(\mathbb{R})$ . הפעם כל וקטור צריך להגיע רק לווקטור מאותו גודל.

מסלולים:  $\{\{0\}, \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = a\} \mid a > 0\}$ .

לכל וקטור שנבחר, כל מטריצה בחבורה משמרת את הנורמה שלו, אבל לא את הכיוון, ובהתאם נוכל להסיק שכל שני וקטורים עם אותה נורמה שקולים ונמצאים באותה קבוצה.

5.  $S_n \subset \{1, \dots, n\}$  הפעולה הזו היא טרנזיטיבית.

זה די טריוויאלי בגדול, נוכל לסדר מחדש את רשימת המספרים בכל דרך על-ידי איזושהי תמורה, ובהתאם כל הסדרים דומים אחד לשני ויש ביניהם מסלול.

6. כל הדגלים שמחולקים לשלושה פסים בשלושה צבעים, וכל האופציות לבחור את שלוש הצבעים. יש מן הסתם שמונה דגלים כאלה.

אפשר להגדיר פעולה  $\mathbb{Z}/2$  של סיבוב ב- $180^\circ$  ואז אפשר לראות אילו דגלים מתקשרים לאילו דגלים אחרים. יש שישה מסלולים.

**הגדרה 7.8 (מקבע)** תהינה  $G \subset X$ , עבור  $g \in G$ , נגדיר את המקבע להיות  $Fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$ .

עוד סימון הוא  $X^g$ , אבל לא מומלץ להשתמש בו, הוא יחסית מבלבל.

עבור איבר בחבורה, המקבע הוא כל האיברים בקבוצה שהפעולה לא משנה, הם לא בהכרח נקודות שבת כי אנחנו מדברים פה בהקשר של סימטריה ספציפית.

**הגדרה 7.9 (מייצב)** יהיו  $G \subset X$ , אז נגדיר את המייצב של  $x \in X$  להיות  $Stab(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$ , באנגלית Stabilizer.

סימון נוסף הוא  $G_x$ .

במילים זוהי קבוצת איברי החבורה שלא משנים את  $x$ , או לחילופין שולחים אותו לעצמו.

האינטואיציה היא שיש איברים שסימטריות מסוימות פשוט לא משפיעות עליהם, ובהתאם המייצב הוא קבוצת הסימטריות הכאלה שניטרליות לאיבר שבחרנו.

**למה 7.10 (מייצב הוא תת-חבורה)**  $G_x$  תת-חבורה של  $G$ .

**הוכחה.** נבדוק את הגדרת תת-החבורה:

1. איבר נייטרלי:  $e \cdot x = x \implies e \in G_x$ .

2. סגירות לכפל:  $\forall g, h \in G, g \cdot x, h \cdot x = x \implies (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x \implies gh \in G_x$ .

3. קיום הופכי:  $g \in G \implies g \cdot x = x \implies x = g^{-1} \cdot x \implies g^{-1} \in G_x$ .

מצאנו כי כלל התכונות מתקיימות ולכן  $G_x$  המייצב של  $x$  הוא תת-חבורה של  $G$ . □

**הגדרה 7.11 (פעולה חופשית)**  $G \subset X$  נקראת חופשית אם  $G_x = \{e\}$  לכל  $x \in X$ . במילים אחרות, הפעולה לעולם לא שולחת איבר לעצמו.

היא נקראת נאמנה אם  $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$ , החיתוך הזה בכללי גם נקרא גרעין.

נאמנה זה שם קצת מוזר אבל הוא בגדול מבטיח שאין איבר בחבורה שכל איברי הקבוצה נייטרליים אליו, חוץ מהאיבר הנייטרלי עצמו.

עניין הגרעין הוא די דומה למה שקורה בלינאריות גם, איבר שהפעולה איתו לא משפיעה על אף איבר בקבוצה.

**הגדרה 7.12** נבחן את  $G \subset G$  על-ידי הצמדה.

$$O(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$$

המסלול של  $x$  הוא קבוצת האיברים שמקיימים  $gxg^{-1} = y$ , באופן מאוד דומה למטריצות דומות. נקרא למסלול הזה מחלקת צמידות.

**הגדרה 7.13 (מרכז)** ישנו המרכז של  $G$  והוא  $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg\} \iff gx = xg$ . באנגלית Centralizer.

מרכז הוא סוג של מייצב במקרה שבו  $X = G$ .

**משפט 7.14 (מסלול-מייצב)**  $G \subset X$  ו- $x \in X$ .  $|O(x)| = [G : G_x]$ . זה נכון גם כשהחבורה לא סופית.  $O(x) \cong G/G_x$ .

בפרט אם  $G$  סופית אז  $|O(x)| = \frac{|G|}{|G_x|}$  ונובע שהגודל של כל מסלול מחלק את גודל החבורה.

במילים הטענה היא שהמסלול של  $x$ , שהוא מספר האיברים שאפשר להגיע אליהם ממנו, שווה לאינדקס של המייצב, דהינו מספר מחלקות השקילות

השונות שאפשר ליצור בעזרת מחלקות שמאליות עם התת-חבורה שלא מושפעת מ- $x$ .

הוכחה. נגדיר  $f: G/G_x \rightarrow O(x)$  ונראה שהיא חד-חד ערכית ועל.

נבחר  $f(gG_x) = g \cdot x$ . זה לא בהכרח מוגדר היטב ולכן נבדוק למה זה כן.

אם יש איבר  $g' \in gG_x$  אז  $g' = g \cdot h$  כך ש- $h \in G_x$ . מתקיים ש- $g \cdot x \stackrel{h \in G_x}{=} ghx = g' \cdot x$ .

על: לפי הגדרה.

□ חד-חד ערכי: נניח ש- $g'G_x = gG_x \stackrel{\text{סגירות להופכי}}{\implies} (g')^{-1}g \in G_x \implies (g')^{-1}g \cdot x = x \implies g' \cdot x = f(g'G_x) = f(gG_x) = g \cdot x$ .

**דוגמה 7.2** תהינה חבורה  $H \leq G$  ותת-חבורתה, יש פעולה "רגולרית" של  $G$  על  $G/H$ :

$$g \cdot (xH) = (g \cdot x)H$$

**משפט 7.15 (משפט קושי)** יהיו  $G$  חבורה סופית ו- $p$  ראשוני כך ש- $p \mid |G|$ . אז קיים  $x \in G$  כך ש- $\text{ord}(x) = p$ .

הוכחה. נגדיר פעולה של החבורה  $\mathbb{Z}/p$  על הקבוצה  $X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 g_2 \dots g_p = e\}$ .

הפעולה פועלת על-ידי שיפט ציקלי:  $u \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  אז  $k \cdot (g_1, \dots, g_p) = (g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_p, g_1, \dots, g_k)$ .

אז  $k(g_{k+1}, \dots, g_p) = e$  וגם  $(g_{k+1}, \dots, g_p)(g_1, \dots, g_k) = e$ .

נבחין כי כלל המסלולים בפעולה הם אחד משני סוגים:

• מסלולים בגודל  $p$ . אם לא כל האיברים זהים, מעגל שלם יקח ככמות האיברים והיא מוגדרת להיות  $p$ .

• מסלולים בגודל 1. אם כל האיברים זהים אז שיפט יחזיר את האיבר עצמו.

$$|O(x)| \mid p \iff |O(x)| = 1, p$$

עתה נבחין כי אם ישנו מסלול בגודל  $p$  אז הוא כמובן ממלא את טענת ההוכחה ולכן נניח שאין כזה.

נראה כי מסלול בגודל 1 הוא מסלול שמקיים  $(g_1, \dots, g_p) = (g_2, \dots, g_p, g_1)$  כלומר  $(g, \dots, g)$  כולומר  $g^p = e$ .

$$|X| = \sum_{O \in \mathbb{Z}/p \backslash X} |O| \quad \text{והתאם מהאיחוד הזר נקבל גם} \quad X = \bigcup_{O \in \mathbb{Z}/p \backslash X} O$$

אם  $(e, \dots, e)$  היה נקודת השבת היחידה אז  $\sum_{O \in \mathbb{Z}/p \backslash X} |O| = 1 \pmod{p}$ , שכן כל מסלול כולל  $p$  חילופים ונקודת השבת היחידה הייתה תורמת 1 בלבד.

□ לכן מצד אחד  $|G|^{p-1} \mid p$  ומצד שני  $|G|^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p}$  ולכן קיים  $x \neq e$  עם  $x^n = e$ .

**הערה** ההוכחה מוויקיפדיה הרבה יותר ברורה.

### 8.1 מקבעים של פעולות

ניזכר בהגדרת המקבע,  $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$ , דהינו האיברים ב- $X$  שלא משתנים על-ידי הסימטריה  $g$ .

לדוגמה עבור החבורה  $D_4$  ו- $X = \{1, 2, 3, 4\}$  אוסף קודקודי ריבוע נבחן את  $g$  סיבוב על האלכסון:  $g = (1\ 3)$  ואת  $h = (1\ 2)(3\ 4)$  שיקוף על האמצע. אז כמובן המקבע של  $g$  ב- $X$  הוא  $X^g = \{1, 3\}$  אוסף הקודקודים שלא מושפעים מהסימטריה  $g$ . באופן דומה  $X^h = \emptyset$ , דהינו הסימטריה  $h$  תמיד משנה את כל הקודקודים ובהתאם המקבע הוא ריק.

**למה 8.1 (הלמה של ברנסייד)** תהיה חבורה סופית  $G$  ופעולה  $G \curvearrowright X$  כאשר  $X$  סופית גם היא. יהי  $g \in G$  ונסמן  $Fix(g) = X^g = \{x \in X \mid gx = x\} \subseteq X$ .

אז מספר המסלולים (מסומן גם  $X/G$ ) הוא

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

דהינו ממוצע כמות האיברים שנשארים במקום היא ככמות המסלולים השונים.

הוכחה. תהי חבורה סופית  $G$ . עבור  $X$  סופית ופעולה  $G \curvearrowright X$  נגדיר

$$E(X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

נוכיח כי  $E(X) = |X/G|$ .

נשים לב שאם  $X, Y$  קבוצות זרות עם פעולה של  $G$ , אז נובע מהזרות ומהגדרת המסלולים של הקבוצות כי

$$(X \sqcup Y)/G = X/G \sqcup Y/G \implies |(X \sqcup Y)/G| = |X/G| + |Y/G|$$

עוד נראה כי  $(X \sqcup Y)^g = X^g \sqcup Y^g$   $\forall g \in G$  ולכן גם  $|X^g| + |Y^g| = |(X \sqcup Y)^g|$ , ונוכל להסיק ש- $E(X) + E(Y) = E(X \sqcup Y)$ . נסיק כי אילו הלמה נכונה עבור  $X, Y$  זרים, אז היא מתקיימת גם עבור איחודם  $X \sqcup Y$ .

תהי  $X$  קבוצה כלשהי, נוכל לכתוב גם

$$X = \bigsqcup_{O \in G \backslash X} O$$

במילים ש- $X$  היא איחוד זר של קבוצות המסלולים השונות שמוגדרות על-ידי הפעולה  $G \curvearrowright X$ .

על-כן מהטענה שהוכחנו זה עתה מספיק להוכיח את הטענה כאשר ל- $X$  יש מסלול יחיד  $O$ ,  $x = O$ , ובמקרה הכללי נוכל לאחד איחוד זר של מסלולים.

נניח מעתה כל  $X \neq \emptyset$  עם מסלול יחיד (פעולה טרנזיטיבית). במקרה הזה צריך להוכיח

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = E(X) = 1$$

נגדיר עבור  $x \in X, g \in G$  את  $s(g, x)$  על-ידי

$$s(g, x) = \begin{cases} 1, & gx = x \\ 0, & gx \neq x \end{cases}$$

דהינו  $s$  מחזירה 1 אם  $g$  מקבעת את  $x$ . ואנו יודעים כי  $\{g \in G \mid gx = x\} = \{g \in G \mid s(g, x) = 1\}$ . לכן נוכל להסיק שמתקיים

$$|X^g| = \sum_{x \in X} s(g, x)$$

ועתה נציב ונקבל כי

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} s(g, x) = \sum_{x \in X} \sum_{g \in G} s(g, x) \stackrel{(1)}{=} \sum_{x \in X} |G_x| \stackrel{(2)}{=} |X| \cdot |G_x| = |G|$$

(1) נובע ישירות מההגדרה של מייצב  $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ .

(2) ממשפט מסלול-מייצב נקבל כי  $|G| = |G_x| \cdot |O(x)|$  אבל ידוע שהפעולה טרנזיטיבית ולכן  $O(x) = X$   $\forall x \in X$ , לכן  $|G| = |X| \cdot |G_x|$ .

קיבלנו כי  $|E(X)| = 1$  ולכן נוכל להסיק כי הטענה מתקיימת תמיד.  $\square$



**דוגמה 8.1** בתזכורת הראינו כי עבור  $D_4$  ו- $X = \{1, 2, 3, 4\}$  מתקיים  $|X^g| = 2, |X^h| = 0$ . נחשב את כלל המקבעים ונקבל על-פי הלמה:

$$\frac{1}{8}(4 + 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 1 = |D_4 \setminus X|$$

דהינו  $D_4$  טרנזיטיבית לפי הלמה, שכן יש לה רק מסלול אחד.

דוגמה נוספת היא בחירת  $G$  סופית ופעולה שלה על עצמה עם הצמדה.

לכן  $g(h) = ghg^{-1}$  ונשים לב כי המקבע הוא  $C(g) = G^g = \{h \in G \mid ghg^{-1} = h\}$ . כמות מחלקות הצמידות – היא מספר המסלולים על-פי הצמדה – ניתנת לחישוב על-ידי

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C(g)|$$

**הגדרה 8.2** (מרכז חבורה) נגדיר את המרכז של חבורה  $G$ , המסומן  $Z(G)$ , להיות קבוצת האיברים שנייטרליים לסדר ההכפלה בהם:

$$Z(G) = \{h \in G \mid \forall g \in G : gh = hg\}$$

לחילופין הגדרה שקולה היא קבוצת האיברים שצמודים לעצמם בלבד.

נגדיר גם  $C_x$  מחלקת הצמידות של  $x$ , דהינו

$$C_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$$

**טענה 8.3** (מרכז הוא תת-חבורה) תהי  $G$  חבורה, אז  $Z(G) \subseteq G$  היא תת-חבורה.

הוכחה. נראה כי תכונות החבורה חלות על  $Z(G)$ :

1. איבר נייטרלי:  $\forall g \in G : eg = ge \implies e \in Z(G)$

2. סגירות לכפל:  $\forall a, b \in G : \forall g \in G, abg = agb = gab \implies ab \in Z(G)$ .

3. סגירות להופכי:  $n \in Z(G) : ng = gn \implies \forall g \in G n^{-1}g = gn^{-1}$

לכן  $Z(G)$  חבורה וחלקית ל- $G$  ולכן נובע  $Z(G) \leq G$ .

□

**למה 8.4** (חיתוך מרכזים) תהי  $G$  חבורה, ניזכר כי המרכז של  $x \in G$  מוגדר על-ידי

$$C_G(x) = C(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = g\}$$

ומתקיים

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C(x)$$

□

הוכחה. נובע ישירות מההגדרות

לכן נשים לב שחיתוך המרכזים הוא המרכז של החבורה, והיא תת-חבורה אבלית.

**סימון 8.5** (מחלקות צמידות) תהי חבורה  $G$ , אז נסמן את אוסף מחלקות הצמידות שלה:

$$\text{cong}(G) := \{X \subseteq G \mid \forall x, y \in X \exists g \in G : x = ygg^{-1}\}$$

נשים לב שמרכז עבור צמידות מסומן באופן מיוחד עבור  $G \setminus G$  עם פעולת ההצמדה.

כל איבר ב- $\text{cong}(G)$  הוא קבוצה שכלל האיברים בה צמודים זה לזה. נשתמש בהגדרת המרכז ונכתוב גם

$$\text{cong}(G) = \{X \subseteq G \mid \forall x, y \in X : y \in C(x)\}$$

ונסמן  $[g] \in \text{cong}(G)$  איבר כלשהו מייצג מכל מחלקת צמידות.

נסמן גם  $C_h$  מחלקת הצמידות של  $h$  ומתקיים

$$C_h = \{g \in G \mid \exists k \in G : khk^{-1} = g\}$$

**טענה 8.6** (נוסחת המחלקות) תהי חבורה סופית  $G$ , אז מתקיים

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{[h] \in \text{cong}(G), h \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C_h|}$$

הוכחה. תחילה נבחין כי נוכל לפרק את  $G$ :

$$G = \bigsqcup_{[h] \in \text{cong}(G)} C_h$$

ונבחין כי לכל  $h \in G$  מתקיים

$$h \in Z(G) \iff |C_h| = 1 \iff \forall g \in G : ghg^{-1} = h$$

אז נוכל לראות כי

$$G = Z(G) \sqcup \bigsqcup_{[h] \in \text{cong}(G), h \notin Z(G)} C_h$$

ומכאן נסיק

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{[h] \in \text{cong}(G), h \notin Z(G)} |C_h| \stackrel{\text{מסלול-מייצב}}{=} |Z(G)| + \sum_{[h] \in \text{cong}(G), h \notin Z(G)} \frac{|G|}{|G_h| (= |C_G(h)|)}$$

□

## 9.1 צביעות

**הגדרה 9.1** (צביעה) תהי קבוצה  $X$  ותהי צביעה עם  $m$  צבעים, אז **צביעה** של  $X$  עם  $m$  היא פונקציה  $f: x \rightarrow [m]$ .

הרעיון פה הוא שאנחנו יכולים לקחת את הקבוצה ולסווג לכל איבר בה צבע (מספר) ומן הסתם יש לנו  $[m]^{|X|}$  צביעות רעיוניות כאלה.

**טענה 9.2 (צביעה מעל פעולה)** תהי קבוצה  $X$  ו- $G \curvearrowright X$  חבורה ופעולה המסומנת על-ידי  $\cdot$ , ויהי  $[m]^X$  אוסף הצביעות ב- $m$  של  $X$ . אז הפונקציה  $[m]^X \rightarrow [m]^X \times G: f \mapsto f \cdot g$  המוגדרת על-ידי

$$\forall g \in G, f \in [m]^X, \forall x \in X: g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

היא פעולה של  $G$  על  $[m]^X$ .

**הוכחה.** אנו צריכים לבדוק ששתי התכונות של פעולה של החבורה על הקבוצה מתקיימות.

• נייטרליות האיבר הנייטרלי:  $\forall f \in [m]^X, x \in X: e \cdot f(x) = f(e^{-1} \cdot x) = f(x)$ .

• סגירות לכפל:  $\forall f \in [m]^X, x \in X: g \cdot (h \cdot f)(x) = (h \cdot f)(g^{-1} \cdot x) = f(h^{-1} g^{-1} \cdot x) = (gh) \cdot f(x)$ .

ומצאנו כי התנאים לפעולה מתקיימים ומתקיים  $G \curvearrowright [m]^X$ . □

מה שבעצם עשינו פה הוא להרחיב פעולה של  $G$  על  $X$  להשרות פעולה מעל אוסף הצביעות השונות שלו, ועשינו את זה על-ידי שימוש בכפל בהופכי. מאוד חשוב לשים לב שאנחנו מקבלים את הצביעה כפונקציה של אוסף האיברים ב- $X$  לאוסף הצבעים, אבל זה עדיין איבר בקבוצת הצביעות.

**הגדרה 9.3** (שימור צביעה) נגדיר שצביעה  $f \in [m]^X$  נשמרת על-ידי  $g \in G$  אם  $f \in \text{Fix}(g)$ , דהינו  $f \cdot g = f$ .

## 9.2 טטרהדרון

נבחן עתה את הטטרהדרון (ארבעון) שמרכזו הוא  $0 \in \mathbb{R}^3$  ושקודקודיו מסומנים על-ידי  $v_0, \dots, v_3$  ונגדיר אותו מעתה להיות  $\Delta^3$ . ונגדיר את חבורת הסימטריה  $\text{Sym}(\Delta^3)$  להיות אוסף האיזומטריות הלינאריות שמשמרות את הטטרהדרון:

$$\text{Sym}(\Delta^3) = \{T \in GL_3(\mathbb{R}) \mid |\det T| = 1, T\Delta^3 = \Delta^3\}$$

ונגדיר גם את חבורת הסימטריות האיזומטריות שנוצרות על-ידי פעולות נוקשות:

$$\text{Sym}_+(\Delta^3) = \{T \in \text{Sym}(\Delta^3) \mid \det T = 1\}$$

נשים לב כי כל  $T \in \text{Sym}(\Delta^3)$  היא למעשה תמורה בין קודקודי הטטרהדרון. יותר מזה גם נשים לב כי אם שתי העתקות סימטריות משנות את הקודקודים באופן זהה אז הן מתנהגות באופן זהה.

נגדיר אם כן את התורה  $\sigma_T$  כתמורה שמזוזה את הקודקודים על-פי  $T \in \text{Sym}(\Delta^3)$ .

**טענה 9.4 (פעולות סימטריות על הקודקודים)** הפעולה  $\text{Sym}(\Delta^3) \times \{v_0, \dots, v_3\} \rightarrow \{v_0, \dots, v_3\}: (T, v_i) \mapsto T \cdot v_i = T(v_i)$  היא פעולה על הקבוצה  $\{v_0, \dots, v_3\}$ . □

**הוכחה.** בתרגיל

**מסקנה 9.5** (איזומורפיות הסימטריות) הפונקציה  $\varphi: \text{Sym}(\Delta^3) \rightarrow S(\{v_0, \dots, v_3\})$  המוגדרת על-ידי  $\varphi(T) = \sigma_T$  היא איזומורפיזם.

**הוכחה.** מספיק להוכיח ש- $\varphi$  היא הומומורפיזם ושכל מחזור מהצורה  $(v_i, v_j)$  הוא בתמונת  $\varphi$ . העובדה שהיא הומומורפיזם נובעת מיידית מהיותה פעולה על הקבוצה. יהיו  $i \neq j$  המתארים קודקודים, אז ישנו מישור העובר בין שני הקודקודים האחרים ודרך  $\frac{v_i + v_j}{2}$ . השיקוף סביב מרחב זה שולח את  $v_i$  ל- $v_j$  והפוך, בלי להשפיע על שאר הקודקודים. לכן  $(v_i, v_j) \in \varphi(\text{Sym}(\Delta^3))$ . נראה כי  $\varphi(\text{Sym}(\Delta^3))$  היא תת-חבורה של  $S(\{v_0, \dots, v_3\})$  ולכן היא מכילה קבוצה יוצרת, ומכאן נקבל  $\varphi(\text{Sym}(\Delta^3)) = S(\{v_0, \dots, v_3\})$ , מהטענות הקודמות נקבל גם חד-חד ערכיות. □

מעתה נתייחס באופן שקול ל- $T \in \text{Sym}(\Delta^3)$  ו- $\sigma_T$ .

**מסקנה 9.6** (טרנזיטיביות הפעולה) הפעולה של  $\text{Sym}(\Delta^3)$  על הקודקודים היא טרנזיטיבית.

הוכחה. נסיק מכך שכל  $(v_i, v_j) \in \text{Sym}(\Delta^3)$  שהמסלול של הגעה מכל קודקוד לכל קודקוד הוא יחיד, ולכן ככלל יש מסלול יחיד בפעולה.  $\square$

נבחן עתה את הפעולה של  $\text{Sym}(\Delta^3)$  על  $[m]^X$  כאשר  $X = \{v_0, \dots, v_3\}$  כפי שהגדרנו בחלק הקודם.

**טענה 9.7 (מקבצי הסימטריות)** יהי  $T \in \text{Sym}(\Delta^3)$ , אז נוכיח כי  $|Fix(T)|$  תלוי בסוג המחזור של  $T$  בלבד.

הוכחה. נכתוב את כלל סוגי המחזורים ב- $\text{Sym}(\Delta^3)$  על-פי אורכם:

1 1 1 1  
2 1 1  
2 2  
3 1  
4

מספר התמורות מכל סוג ב- $S_4$  הן 1, 6, 3, 8, 6, 1 בהתאמה. עתה נחשב את הצביעות המשתמרות על כל מקרה.

עבור 1 1 1 1 ישנה רק תמורת הזהות, ובהתאם היא משמרת את הצבע של כל קודקוד, ולכן  $|Fix(e)| = m^4$ .

עתה נבחן מחזור בגודל 2, דהינו  $\sigma = (i, j)$ . התמורה הזו תשמר את הצביעה של קודקודים אם ורק אם  $v_i, v_j$  הם מאותו הצבע. לכן לשני הקודקודים  $v_i, v_j$  יכולות להיות  $m$  צביעות שונות כך שהתמורה תשמר את הצביעה, כאשר שאר הקודקודים בלתי תלויים, ולכן במקרה זה ישנן  $m^3$  צביעות משתמרות.

באופן דומה יש  $m^2$  צביעות משתמרות עבור שרשרת שני מחזורים מגודל 2.

כאשר בוחנים מחזורים בגודל 3 אז יכולה להיות רק צביעה אחת לשלושת הקודקודים כך שהצביעה תשתמר, ולקודקוד הנותר הצבע חופשי, ונקבל  $m^2$ .

עבור תמורות שהן מחזור בודד מגודל 4 אז על כלל הקודקודים להיות באותו צבע, ונקבל כמובן את מספר הצבעים עצמו  $m$ .  $\square$

נשתמש בלמה של ברנסייד כדי לחשב את מספר המסלולים של סימטריות על קודקודים על צביעות שונות של הקודקודים.

$$|\text{Sym}(\Delta^3) \backslash [m]^X| = \frac{1}{|\text{Sym}(\Delta^3)|} \sum_{T \in \text{Sym}(\Delta^3)} |Fix(T)| = \frac{1m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m}{24}$$

**מסקנה 9.8** (מסלולים מעל צביעה) בעוד הפעולה של הסימטריות על  $X$  היא טרנזיטיבית, הפעולה מעל הצביעות היא עצמה לא כזו בהכרח, דהינו הטרנזיטיביות של פעולה לא מעידה על טרנזיטיביות הצביעה מעליה.

**טענה 9.9 (כמות הצביעות בסימטריות חיוביות)** נבחן את הפעולה של  $\text{Sym}_+(\Delta^3)$  על הצביעות של הקודקודים ונחשב את כמות המסלולים השונים בה.

פתרון. נובע ממשפט לגרנו' סיבובים ללא היפוך יכולים להיות מורכבים רק מסיבוב סביב אחת הפאות, ולכן רק ממחזורים מהצורה  $(i j k)$ . יש כמובן 8 סיבובים אפשריים כאלה (סביב כל פאה יש שניים). לכן יש בחבורה  $\text{Sym}_+(\Delta^3)$  לפחות 9 איברים יחד עם הנייטרלי, וממשפט לגרנו' נובע כי  $24 \in \text{Sym}_+(\Delta^3)$  ולכן  $\text{Sym}_+(\Delta^3) \in \{12, 24\}$ .

אבל אנו יודעים כי  $|\text{Sym}_+(\Delta^3)| < |\text{Sym}(\Delta^3)|$  שכן ישנן העתקות שהופכות את הצורה, ולכן נקבל  $|\text{Sym}_+(\Delta^3)| = 12$ . נחפש אם כן את שלוש התמורות החסרות. נשים לב כי תמורות מהצורה  $(i j)(l l)$  מוכלות גם הן ב- $\text{Sym}_+(\Delta^3)$  שכן הן הופכות את סימן הדטרמיננטה פעמיים. לכן נוכל לבחור את התמורה בין שלושה זוגות כפולים של קודקודים ונקבל את שלוש התמורות החסרות.  $\square$

**הגדרה 9.10** (מספר המסלולים בסימטריות סיבוביות) נשתמש בלמה של ברנסייד ונקבל כי מספר המסלולים של  $\text{Sym}_+(\Delta^3)$  על  $[m]^X$  היא

$$|\text{Sym}_+(\Delta^3) \backslash [m]^X| = \frac{1}{|\text{Sym}_+(\Delta^3)|} \sum_{T \in \text{Sym}_+(\Delta^3)} |Fix(T)| = \frac{1m^4 + 11m^2}{12}$$

הערה (צביעה של פאות) נשים לב כי ישנן ארבע פאות ולכן נוכל לקשר כל פאה לקודקוד ונקבל כי מספר הצביעות של פאות שקול למספר הצביעות של הקודקודים.

### 10.1 חבורות p

תזכורת: מרכז של חבורה

המרכז של חבורה  $Z(G)$  הוא תת-חבורה נורמלית של איברים שמתחלפים עם כלל האיברים בחבורה המקורית.

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G, gh = hg\}$$

**הגדרה 10.1** (חבורת p) תהי חבורה סופית  $G$ , אז נקרא ל- $G$  חבורת  $p$  אם קיים  $p$  ראשוני ו- $n \in \mathbb{N}$  כך שמתקיים  $|G| = p^n$ .

**טענה 10.2** (מרכז של חבורת p) אם  $G$  חבורת  $p$  ו- $|G| \neq 1$  (לא טריוויאלית) אז  $|Z(G)| > 1$ .

הוכחה. למעשה נוכיח ש- $|Z(G)| \geq p$  ולכן  $|Z(G)| \geq p$ .

נשתמש בנוסחת המחלקות

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{[h] \in \text{cong}(G), n \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C_G(h)|}$$

ידוע כבר כי  $|G|$  מתחלק ב- $p$  ומספיק לבדוק את הסכום ולקבל את החלוקה.

כמובן ש- $|G|$  מחולק על-ידי  $p$ , ולכן גם חלוקתו בגודל מרכז מחולק ב- $p$  או ב-1.

אם  $|C(h)| = |G|$  אז  $C(h) = G$  ולכן  $h \in Z(G)$ . ולכן נניח ש- $|C(h)| < |G|$  בלי להגביל את כלליות ההוכחה ונקבל כי  $p \mid \frac{|G|}{|C(h)|}$  וקיבלנו  $\square$

**דוגמה 10.1** עבור  $S_3$ , נקבל  $|S_3| = 6$ , והמרכז כולל רק את האיבר הטריוויאלי ולכן  $|Z(S_3)| = 1$ , מחלקות הצמידות בתמורות הן תמורות שקולות מחזור ולכן ישנן שלוש מחלקות צמידות, מתוכן שתיים לא במרכז. אז נקבל

$$6 = 1 + \frac{6}{3} + \frac{6}{2}$$

### 10.2 הומומורפיזמים

ניזכר בהגדרת ההומומורפיזם. תהינה  $G, H$  חבורות אז הומומורפיזם  $\varphi : G \rightarrow H$  היא העתקה שמקיימת

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$$

ומכאן נובע גם  $\varphi(e_G) = e_H$  וגם  $\varphi(g^{-1}) = \varphi^{-1}(g)$ .

**הגדרה 10.3** אם  $\varphi$  חד-חד ערכית אז נאמר שהיא מונומורפיזם.

אם היא על היא תיקרא אפימורפיזם.

אם היא חד-חד ערכית ועל היא תיקרא איזומורפיזם.

**הגדרה 10.4** (גרעין) יהי  $\varphi$  הומומורפיזם  $\varphi : G \rightarrow H$ . הגרעין של  $\varphi$  ושמו  $\ker(\varphi)$  מוגדר להיות

$$\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$$

כלל האיברים שהעתקה שולחת לאיבר הנייטרלי.

**הגדרה 10.5** (תמונה) יהי  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם, התמונה של  $\varphi$  המסומנת  $\text{Im}(\varphi)$  מוגדרת על-ידי

$$\text{Im}(\varphi) = \{h \in H \mid \exists y \in G : \varphi(y) = h\}$$

בדומה לתמונה של פונקציות.

**טענה 10.6** (גרעין ותמונה הם תת-חבורות) אם  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם אז:

1.  $\text{Im}(\varphi)$  תת-חבורה של  $H$ .

2.  $\ker(\varphi)$  תת-חבורה של  $G$ .

הוכחה. נתחיל בטענה הראשונה, על-פי הגדרת תת-חבורה:

1. איבר נייטרלי:  $e_h = \varphi(e_G) \implies e_h \in \text{Im}(\varphi)$
  2. סגירות לכפל:  $h_1, h_2 \in \text{Im}(\varphi) \implies \exists g_1, g_2 : \varphi(g_1) = h_1, \varphi(g_2) = h_2$
  3. סגירות להופכי:  $h \in \text{Im}(G) \implies \exists g \in \varphi(G) = h \implies \varphi(g) = h^{-1} \implies h^{-1} \in \text{Im}(\varphi)$
- ונוכיח את הטענה השנייה באופן דומה:

1. איבר נייטרלי:  $\varphi(e_G) = e_H$  נובע מ- $e_G \in \ker(\varphi)$
2. סגירות לכפל:  $g_1, g_2 \in \ker(\varphi) \implies \varphi(g_1) = e_H, \varphi(g_2) = e_H \implies \varphi(g_1 g_2) = e_H e_H \implies g_1 g_2 \in \ker(\varphi)$
3. סגירות להופכי:  $g \in \ker(\varphi) \implies \varphi(g) = e_H \implies \varphi(g^{-1}) = \varphi^{-1}(g) = e_H$

□

**טענה 10.7 (תנאי מספיק לאפימורפיזם ומונומורפיזם) אם  $\varphi$  הומומורפיזם אז:**

1.  $\text{Im}(\varphi) = H$  אם  $\varphi$  על (אפימורפיזם).
2.  $\ker(\varphi) = \{e\}$  אם ורק אם  $\varphi$  חד-חד ערכית (מונומורפיזם).

**הוכחה.** טענה 1 היא טריוויאלית ונובעת מההגדרה, נוכיח את הטענה השנייה.

אם  $\varphi$  חד-חד ערכית אז הטענה ברורה.

נניח כעת כי  $\ker(\varphi)$  הוא טריוויאלי ונוכיח כי  $\varphi$  חד-חד ערכית.

נניח בשלילה כי  $\exists g_1, g_2 \in G : g_1 \neq g_2, \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$

נסתכל על  $g_2 g_1^{-1} \neq e_G$  אבל  $\varphi(g_2 g_1^{-1}) = \varphi(g_2) \varphi(g_1^{-1}) = \varphi(g_2) \varphi^{-1}(g_1) = e_H$

□

נראה עתה מספר דוגמות להומומורפיזמים:

**דוגמה 10.2** (דטרמיננטה) נשים לב כי הדטרמיננטה המוגדרת על-ידי  $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$  היא הומומורפיזם, שכן  $|AB| = |A| \cdot |B|$ .  
נראה גם כי  $\text{Im}(| \cdot |) = \mathbb{R}^\times$  וגם  $\ker(| \cdot |) = SL_n(\mathbb{R})$ .

**דוגמה 10.3** (מטריצה שקולה למרוכבים) יהי הומומורפיזם  $\varphi : C^\times \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$  המוגדר על-ידי

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

נוכיח כי זהו הומומורפיזם:

$$\varphi(a + ib)\varphi(c + id) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} = \varphi(ac - bd + i(ad + bc)) = \varphi((a + ib)(c + id))$$

זוהי למעשה העתקה איזומורפית למרוכבים המשמרת כפל מרוכבים.

**דוגמה 10.4** (העתקות לינאריות) כל העתקה לינארית  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  היא לינארית ולכן הומומורפיזם.

**דוגמה 10.5** (בלוקי ז'ורדן) ההעתקה  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$  המוגדרת על-ידי

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

היא הומומורפיזם, נוכיח:

$$\varphi(a)\varphi(b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi(a+b)$$

נשים לב כי העתקה זו מגדירה עבור כל מספר את בלוק הז'ורדן המתאים אליו, דהינו בלוק ז'ורדן משמר את תכונתו בכפל.

**דוגמה 10.6** (מטריצה בתמורה) נגדיר את ההעתקה  $\varphi : S_n \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  על-ידי

$$\tau \mapsto P_\tau, \quad (P_\tau)_{ij} = \delta_{i \tau(j)}$$

כאשר  $\delta_{ij}$  מוגדרת על-ידי

$$(\delta_{ij}) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

זוהי למעשה פונקציה המקשרת תמורה למטריצה הפיכה, על-ידי שינוי סדר השורות להיות על-פי התמורה. נוכיח כי זהו הומומורפיזם:

$$\varphi(\tau)\varphi(\sigma) = P_\tau P_\sigma = \sum_{k=1}^n (P_\tau)_{ik} (P_\sigma)_{kj} = \delta_{i \tau(\sigma(j))}$$

ולכן  $P_\tau P_\sigma = P_{\tau \circ \sigma}$  וקיבלנו כי ההעתקה היא הומומורפיזם.

נוכל לראות כי זהו גם איזומורפיזם, דהינו יש יצוג יחיד לכל תמורה כמטריצה בצורה הנתונה, והפוך.

**דוגמה 10.7** (צמצום להומומורפיזם) אם  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם, אז עבור  $H' \subseteq H$  היא תת-חבורה ומתקיים

$$\varphi' : G \rightarrow H', \quad \varphi'(g) = \varphi(g)$$

**דוגמה 10.8** (שרשור הומומורפיזמים) אם  $\varphi : G \rightarrow H$  וגם  $\phi : H \rightarrow K$  שני הומומורפיזמים, אז גם  $\phi \circ \varphi : G \rightarrow K$  הומומורפיזם. נוכיח:

$$\phi \circ \varphi(g_1 g_2) = \phi(\varphi(g_1 g_2)) = \phi(\varphi(g_1) \varphi(g_2)) = (\phi \circ \varphi)(g_1) (\phi \circ \varphi)(g_2)$$

**דוגמה 10.9** (סימן של תמורה) נבחן את שרשור ההומומורפיזמים:

$$S_n \xrightarrow{P} GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^\times$$

תמונת השרשור היא  $\{-1, 1\}$  בלבד, נשתמש בהומומורפיזם זה כדי להגדיר סימן לתמורות.

לתמורות עם סימן חיובי נקרא תמורות זוגיות ולשליליות נקרא אי-זוגיות.

נגדיר את ההעתקה:

$$sign : S_n \rightarrow \{1, -1\} \cong \mathbb{R}/2$$

ואף נגדיר את תת-חבורת התמורות החיוביות

$$A_n := \ker(sign)$$

אוסף התמורות הזוגיות.

כך לדוגמה  $|A_3| = 3 = |\{e, (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\}|$ .

**דוגמה 10.10** (פעולה על חבורה) תהי קבוצה  $X$  ותהי פעולה  $G \curvearrowright X$ . הפעולה ניתנת להגדרה על-ידי ההעתקה  $\varphi : G \rightarrow \text{Sym}(X)$ , שכן  $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$ . לכן פעולות על קבוצות שקולות להומומורפיזמים מחבורות לסימטריות של  $X$ . נוכיח:

הוכחה. נגדיר

$$\varphi(g) \in \text{Sym}(X), \quad \varphi(g) = fx$$

נבחן את  $\varphi(g_1 g_2)$  על-ידי הצבה:

$$\varphi(g_1 g_2)(x) = (g_1 g_2)(x) = g_2(g_1(x)) = \varphi(g)(g_2(x)) = \varphi(g_1)(\varphi(g_2)(x)) = (\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2))(x)$$

□

זאת למעשה טענה חזקה במיוחד, שכן היא קושרת כל פעולה על חבורה להומומורפיזם בין חבורה לסימטריות של קבוצה ומאפשרת לנו להסיק עוד מסקנות על הפעולה.

**דוגמה 10.11** (שיכון) יהי חבורה ותת-חבורה שלה  $H \leq G$ .

אז אפשר לבנות את העתקת השיכון ונקבל  $\varphi(h \in H) = h \in G$  ונקבל  $\text{Im}(\varphi) = H$ , דהינו כל תת-חבורה יכולה להיות תמונה להומומורפיזם כלשהו.

**טענה 10.8** (צמצם לגרעין) יהי  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם.

לכל מתקיים  $g \in G$

$$g \ker(\varphi) g^{-1} = \ker(\varphi)$$

הוכחה. יהי  $h \in \ker(\varphi)$  ו- $g \in G$  אז

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)e_H\varphi^{-1}(g) = e_H$$

וקיבלנו כי השוויון מתקיים.

**הגדרה 10.9** (תת-חבורה נורמלית)  $N \leq G$  תת-חבורה של חבורה  $G$  נקראת **נורמלית** אם לכל  $g \in G$  מתקיים  $gNg^{-1} = N$ . נסמן  $N \trianglelefteq G$ .

נבחין כי מההגדרה נובע כי כל איבר ב- $N$  הוא חילופי לשאר איברי  $G$ .

נשים לב כי מצאנו שלכל  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם נובע מיידית ש- $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$ .

**משפט 10.10 (משפט האיזומורפיזם הראשון)** יהי  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם, אז  $\text{Im}(\varphi) \cong G/\ker(\varphi)$ . דהיינו התמונה של הומומורפיזם והמחלקות השמאליות של הגרעין הן איזומורפיות.

הוכחה. נסמן  $N = \ker(\varphi)$  אז

$$gN \mapsto \varphi(g)\varphi(N) = \varphi(g) \in \text{Im}(\varphi)$$

נוכל לבחור נציג לכל מחלקה שכן:

$$\forall g_1, g_2 \in G : g_1N = g_2N \iff g_1g_2^{-1} \in N \iff \varphi(g_1g_2^{-1}) = e_H \iff \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$$

ומצאנו כי זהו הומומורפיזם. קל לראות כי הוא אף הפיך, ולכן גם איזומורפיזם.



## 11 שיעור 8 – 3.6.2024

### 11.1 הומומורפיזמים

**טענה 11.1 (תנאי התמונה לאיזומורפיזם)** העתקה  $f : G \rightarrow H$  היא חד-חד ערכית אם ורק אם  $G \xrightarrow{\sim} \text{Im}(f)$ .

**דוגמה 11.1** (דוגמות להומומורפיזמים)  $D_n \hookrightarrow S_n$  על-פי הגדרה.

גם  $P \cdot S_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{F})$  מטריצות הפרמוטציה היא שיכון ואף אחד מאוד חשוב.

ראינו כי  $P : S_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{F}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^\times$  שמייצג סימן עבור תמורות.

ראינו גם את  $\mathbb{C}^\times \hookrightarrow GL_2(\mathbb{R})$  על-ידי  $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ .

ניזכר כי מצאנו קשר בין פעולה לבין הומומורפיזם וננסחו כלמה.

**למה 11.2 (הומומורפיזם ופעולה)** הומומורפיזם  $G \xrightarrow{f} \text{Sym}(X)$  היא זהה לפעולה  $G \curvearrowright X$  כך שמתקיים

$$\forall g \in G, \pi_g \in \text{Sym}(X) : \pi_g(x) = g \cdot x, \pi_g \circ \pi_h = \pi_{gh}$$

ונסיק  $f(g) = \pi_g$  הומומורפיזם.

עוד נבחין כי  $\ker(f) = \{g \in G \mid \pi_g = \text{Id}_X\}$  ונסיק כי  $gx = x \forall x \in X \iff g \in \ker(f)$  ולכן  $\ker(f) = \bigcap_{x \in X} G_x$ .

**משפט 11.3** משפט קיילי לכל חבורה  $G$  קיימת קבוצה  $X$  ושיכון  $G \hookrightarrow \text{Sym}(X)$ .

אם  $|G| = n$  אז יש שיכון  $G \hookrightarrow S_n$ .

הוכחה.  $G$  פועלת רגולרית (משמאל) על  $G$ . כלומר  $\forall x \in G : G_x = \{e\}$  שכן  $gx = x \iff g = e$ .

בפרט אם  $f : G \rightarrow \text{Sym}(G)$  הומומורפיזם המתאים אז  $\ker(f) = \bigcap_{x \in G} G_x = \{e\}$  וקיבלנו כי  $f$  חד-חד ערכית.  $\square$

**דוגמה 11.2** נקבל כי  $D_n \hookrightarrow S_{2n}$ , עוד נקבל מהמשפט שאפשר ליצור את השיכון  $S_n \hookrightarrow S_{n!}$ . זה לא הכי עוזר לנו אבל זה כן אפשרי, אנו רואים כי המשפט מבטיח שיכון אבל הוא עלול להיות די חסר תועלת ומהיכרות עם החבורה נוכל לבנות שיכון מוצלח יותר.

**סימון 11.4** העתקה חד-חד ערכית מסומנת  $\hookrightarrow$ , העתקה על מסומנת  $\twoheadrightarrow$ .

**טענה 11.5 (תנאי לתת-חבורה נורמלית)** התנאים הבאים הם שקולים ואם אחד מהם מתקיים אז  $N$  תת-חבורה נורמלית.

$$1. \forall g \in G : gNg^{-1} \subseteq N$$

$$2. \forall g \in G : ggNg^{-1} = N$$

$$3. \forall g \in G : gN = Ng$$

ההוכחה בתרגיל.

**מסקנה 11.6** לא קיים הומומורפיזם  $f : S_3 \rightarrow H$  כך שמתקיים  $\ker(f) = \{Id, (1\ 2)\}$ .

הוכחה. נבחנו כי  $\{Id, (1\ 2)\}$  היא לא תת-חבורה נורמלית של  $S_3$  כי  $(1\ 3)(1\ 2)(3\ 1) = (1)(2\ 3)$ .  $\square$

דהינו לא כל תת-חבורה יכולה לשמש כגרעין, נשאל את עצמנו האם כל תת-חבורה נורמלית היא גרעין של הומומורפיזם כלשהו, על שאלה זו נענה עתה.

**טענה 11.7 (תמונת תת-חבורה נורמלית)** כאשר  $f : G \rightarrow H$  הומומורפיזם ו- $N = \ker(f)$  אז  $f^{-1}(f(x)) = xN$  היא המחלקה  $xN$ .

יתרה מכך הפונקציה  $\text{Im}(f) \rightarrow G/N$  המוגדרת על-ידי  $h \mapsto f^{-1}(h)$  היא חד-חד ערכית ועל.

הוכחה. תחילה נבחין כי מתקיים

$$f(x)^{-1}f(y) = x^{-1}y \in N \iff xN = yN$$

נראה כי ההעתקה היא על:

$$f^{-1}(f(x)) = xN$$

נראה כי ההעתקה היא גם חד-חד ערכית, עבור  $f(x), f(y) \in \text{Im}(f)$  מתקיים  
 $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = yN \iff x^{-1}y \in N \iff f(x^{-1}y) = e$

□

## 11.2 חבורת המנה

תהינה  $N \triangleleft G$  ונגדיר  $G/N$  מבנה של חבורה.

**טענה 11.8 (מכפלת מחלקות)**  $N$  נורמלית אם ורק אם  $\forall x, y \in G : (xN) \cdot (yN) = (xy)N$

□

הוכחה.  $(xN)(yN) = x(Ny)N \stackrel{\text{נורמליות}}{=} x(yN)N = (xy)(NN) = (xy)N$

**טענה 11.9 (חבורת כפל מחלקות)**  $G/N$  עם הכפל של מחלקות היא חבורה עם האיבר הנייטרלי  $eN$ .

הוכחה. נבדוק את התנאים לחבורה:

1. איבר נייטרלי:  $\forall x \in N : (eN)(xN) = xN = (xN)(eN)$

2. אסוציאטיביות:  $((xN)(yN))(zN) = ((xy)z)N = (xyz)N = (xN)(yN)(zN)$

3. סגירות להופכי:  $(xN)(x^{-1}N) = (xx^{-1})N = eN$

□

**טענה 11.10** תהי הפונקציה  $\pi : G \rightarrow G/N$  המוגדרת על-ידי  $x \mapsto xN$

הפונקציה  $\pi$  היא הומומורפיזם כך שגם  $\ker(\pi) = N$

הוכחה.  $\pi(x) \cdot \pi(y) = (xN)(yN) = (xy)N = \pi(xy)$

עוד נבחין כי  $xN = \pi(x) = N \iff x \in N$

□

**דוגמה 11.3** נבחין בחבורות המנה הבאות:

1. עבור החבורה  $\mathbb{Z}$ . זוהי חבורה אבלית ולכן כל תת-חבורה שלה היא נורמלית ומתקיים  $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ .

בהתאם  $\mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbb{Z}\}$

ונראה גם  $(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = ((a+b) + n\mathbb{Z}) = (a+b \bmod n) + n\mathbb{Z}$

2. ראינו בתרגול כי  $GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^\times$ ,  $A \cdot SL_n(\mathbb{F}) \mapsto \det(A)$

ואנחנו רואים כי  $\det : GL_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^\times$  וגם כי  $SL_n(\mathbb{F}) = \ker(\det)$

12.1 תת-חבורות נורמליות

דוגמה 12.1 תהי  $H \subseteq GL_n(\mathbb{F})$  חבורת הייזנברג, המוגדרת על-ידי

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$$

נבחין כי זו אכן חבורה שכן מטריצות מולשיות סגורות לפעולת הכפל ומכילות הופכי.

נגדיר גם

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F} \right\}$$

נבחין כי  $Z \trianglelefteq H$  ואף מתקיים  $H/Z \cong \mathbb{F}^2$ .

למה 12.1 תזכורת: אם  $|G| = p$  אז  $G$  היא ציקלית.

למה 12.2 אם  $|G| = p^2$  כאשר  $p$  ראשוני, אז  $G$  אבלית.

הוכחה. ידוע כי  $Z(G)$  לא טריוויאלית, ולפי משפט לגרנז' מתקיים  $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$ . אז נקבל כי  $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$ .

נקבל כי  $G/Z(G)$  היא מגודל 1 או מגודל  $p$ . לכן נקבל כי החלוקה הזו היא ציקלית ואז נובע כי היא אבלית.  $\square$

נבחין כי לא בהכרח כל  $G$  ציקלית היא מגודל  $p^2$ . לדוגמה  $(\mathbb{Z}/p)^2$  היא לא ציקלית כלל שכן לא כל האיברים הם מסדר  $p$  ועל-כן אי-אפשר ליצור את החבורה מאיבר בודד. נשים לב לכן גם ש- $(\mathbb{Z}/p)^2 \not\cong \mathbb{Z}/p^2$ .

טענה 12.3 יהי  $p$  ראשוני ו- $G$  חבורה. אם  $|G| = p^2$  אז  $G$  איזומורפית לאחת החבורות

$$\mathbb{Z}/p^2, \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$$

אם  $|G| = p^3$  בהתאם היא איזומורפית לאחת החבורות

$$\mathbb{Z}/p^3, \mathbb{Z}/p^2 \times \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$$

## 13 שיעור 9 — 5.6.2024

בשבוע הבא השיעור בשני יועבר על ידי יונתן והשיעור ברביעי לא יתקיים בעקבות שבועות.

### 13.1 משפטי האיזומורפיזם

בשיעור הקודם דיברנו על זה שאם יש לנו הומומורפיזם  $f: G \rightarrow H$  אז  $\ker(f) \leq G$ . מצד שני אם  $N \leq G$  אז קיים  $\pi: G \rightarrow G/N$  העתקה מהחבורה למחלקות השמאליות של  $N$  על-ידי כפל תת-חבורות וזוהי חבורה. מה שאמרנו זה ששתי הטענות הן כמעט הופכיות אחת לשנייה. מצאנו כי  $\ker(\pi) = N$ . נבחין כי  $N \subseteq G, N \in G/N$ . בזמן שאי-אפשר לשחזר את הפונקציה המקורית, אנחנו כן יכולים להסיק על התמונה שלה על-פי הגרעין.

**משפט 13.1 (משפט האיזומורפיזם הראשון)** תהינה  $G, H$  חבורות, ו- $f: G \rightarrow H$  הומומורפיזם או נוכח  $G/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(f)$ .  
אף קיים איזומורפיזם יחיד  $\alpha$  כך ש- $\alpha \circ \pi = f$ .

**הוכחה.** בנינו פונקציה חד-חד ערכית ועל  $\alpha: G/\ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$  על-ידי  $\alpha(x \ker(f)) = f(x)$ .  
נראה ש- $\alpha$  הומומורפיזם.

$$\alpha(x \ker(f))\alpha(y \ker(f)) = f(x)f(y) = f(xy) = \alpha((xy) \ker(f))$$

נותר להוכיח את היחידות של  $\alpha$ .

לכל  $y \in G/\ker(f)$  קיים  $x \in G$  כך ש- $y = x \ker(f)$  ולכן

$$\alpha(y) = \alpha(x \ker(f)) = \alpha(\pi(x)) = f(x)$$

וקיבלנו כי  $f = \alpha \circ \pi$  וזהו אכן איזומורפיזם יחיד.

□

מתברר שכל הומומורפיזם בעולם הם הרכבה של חלוקה למחלקות גרעין, הליכה לתמונה ואז הפעלת אוטומורפיזם כלשהו.

**דוגמה 13.1** יהי  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } n} \mathbb{Z}/n$  וראינו כי  $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$  ונקבל  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n$  ממשפט האיזומורפיזם הראשון.

**דוגמה 13.2** יהי  $\mathbb{R}^\times \xrightarrow{\det} GL_n(\mathbb{R})$  הומומורפיזם שהוא על. הגרעין הוא הדטרמיננטות עם גודל 1, דהינו  $GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^\times$ .  
 $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$ .

**דוגמה 13.3**  $GL_n(\mathbb{R})$ , ונראה את המרכז  $Z(GL_n(\mathbb{R})) = \{aI_n \mid a \in \mathbb{R}^\times\}$ , המטריצות הסקלריות.  
נחלק עתה את חבורה במרכז ונקבל

$$GL_n(\mathbb{R})/Z(GL_n(\mathbb{R})) := PGL_n(\mathbb{R})$$

**דוגמה 13.4** אם יש שתי חבורות  $G, H$ , נבחן את  $G \times H \xrightarrow{\pi_G} G$  כאשר  $H \xleftarrow{\pi_H} G \times H$ ,  $\pi_H(gh) = h^{-1} \pi_G(gh) = g$ .

$$\ker(\pi_H) = G \times \{e\} \text{ ובאופן דומה } \ker(\pi_G) = \{(e, h) \mid h \in H\} = \{e\} \times H$$

ממשפט האיזומורפיזם הראשון אנו מקבלים כי  $H \cong (G \times H)/(G \times \{e\})$ , גם אינטואיטיבית זה מאוד הגיוני שכן אנו מקבצים לפי איברי  $G$ .

**הערה** אם  $G$  סופית ו- $N \leq G$  אז  $|G| = |N| \cdot |G/N|$  כנביעה ממשפט לגרנז'.

בהינתן שתי חבורות  $G, H$ , אז נוכל לבנות חבורה  $E$  כך ש- $G \leq E$  כך ש- $E/G \xrightarrow{\sim} H$ . כך לדוגמה אם נבחן את  $\mathbb{Z}_2 = G = H$  אז נוכל להגדיר  $E = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  או גם  $E = \mathbb{Z}_4$ , ולכן נקבל  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_2$  אשר מקיימת את הטענה.

בהינתן חבורות  $G, H, K$  והומומורפיזמים  $K \xrightarrow{\alpha} G, K \xrightarrow{\beta} H$  אז נוכל לבנות גם  $K \xrightarrow{(\alpha, \beta)} G \times H$  על-ידי  $(\alpha, \beta)(x) = (\alpha(x), \beta(x))$ .  
הגרעין מקיים במקרה זה  $\ker(\alpha, \beta) = \ker(\alpha) \cap \ker(\beta)$ .

$$\ker(\pi) = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \text{lcm}(a, b)\mathbb{Z} \text{ ונקבל } \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b \text{ נוכל להגדיר } \mathbb{Z}/b \xleftarrow{\pi_b} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_a} \mathbb{Z}/a$$

**מסקנה 13.2**  $\mathbb{Z}/\text{lcm}(a, b) \cong \text{Im}(\pi) \leq \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$  ואם  $\gcd(a, b) = 1$  אז  $\text{lcm}(a, b) = ab$  ונקבל את משפט השאריות הסיני:

$$\mathbb{Z}/ab \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$$

נבחן עתה על  $G, G/N$  בלבד, ומה המבנה שלה. נגדיר כי  $G \xrightarrow{\pi} G/N$ . אם  $K \leq G$  אז בהתאם  $\pi(K) \leq G/N$  כנביעה ישירה מהעובדה ש- $\pi$  הומומורפיזם.

אם  $L \leq G/N$  אז  $\pi^{-1}(L) \geq N$ , שכן כל איבר בחבורת המנה מיתרגם למספר איברים (למעשה מחלקות שקילות שלמות) בחבורה המקורית,

וכל תת־חבורה מכילה איבר נייטרלי שמיתרגם לחבורה  $N$  עצמה במקור. נסמן את התמונה על־ידי  $\bar{\pi}(K) = \{\pi(x) \mid x \in K\}$  מטעמי נוחות.

**משפט 13.3** תהי  $G$  חבורה ו־ $N \trianglelefteq G$  תת־חבורה נורמלית שלה, אז

$$\{K \leq G \mid N \leq K\} \xrightarrow{\bar{\pi}} \{L \leq G/N\} \quad \{L \leq G/N\} \xrightarrow{\pi^{-1}} \{K \leq G \mid N \leq K\}$$

הוכחה. **כיוון ראשון:** יהי  $L \leq G/N$  ונקבל מהגדרת  $\pi$  כי

$$\bar{\pi}(\pi^{-1}(L)) \subseteq L$$

מצד שני נטען כי  $L \subseteq \bar{\pi}(\pi^{-1}(L))$  שכן  $y \in L \implies y = \pi(x)$  שכן  $y \in L \implies y = \pi(x)$   $x \in \pi^{-1}(L)$  לכן  $y = \pi(x) \in \bar{\pi}(\pi^{-1}(L))$ .

**כיוון שני:** תהי  $N \leq K \leq G$  ונחשב

$$K \xrightarrow{\text{לפי הגדרה}} \pi^{-1}(\bar{\pi}(K)) \xrightarrow{(1)} K$$

ונסביר את (1):

$$\bar{\pi}(K) = \{\pi(x) \mid x \in K\} = \{xN \mid x \in K\}$$

ולכן

$$\pi^{-1}(\bar{\pi}(K)) = \bigcup_{x \in K} \pi^{-1}(xN) = \bigcup_{x \in K} xN \subseteq K$$

□

**הערה** שתי הפונקציות  $\pi^{-1}$ ,  $\bar{\pi}$  משמרות הכלה.

**סימון 13.4** אם  $N \subseteq K \leq G$  אז נסמן  $\bar{\pi}(K) = K/N$ .

**משפט 13.5** (משפט האיזומורפיזם השלישי) תהי  $N \trianglelefteq G$  אז לכל  $N \trianglelefteq K \leq G$  מתקיים

$$K \trianglelefteq G \iff K/N \trianglelefteq G/N$$

ובמקרה זה

$$G/K \cong (G/N)/(K/N)$$

הוכחה. נניח  $K/N \trianglelefteq G/N$  ונסתכל על ההומומורפיזם

$$G \xrightarrow{\pi} G/N \xrightarrow{\varphi} (G/N)/(K/N)$$

אז

$$\ker(\varphi \circ \pi) = \pi^{-1}(\ker(\varphi)) = \pi^{-1}(K/N) = K$$

ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל  $G/K \xrightarrow{\sim} (G/N)/(K/N)$ .

שכן קיבלנו כי  $G/\ker(\varphi \circ \pi) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(\varphi \circ \pi)$ .

כיוון שני: נניח כי  $N \trianglelefteq K \trianglelefteq G$  ונסתכל על הפונקציה

$$\alpha : G/N \rightarrow G/K, \quad xN \mapsto (xN)K = x(NK) = xK$$

ונראה ש־ $\alpha$  הומומורפיזם.

פונקציה זו היא בבירור הומומורפיזם שכן מדובר על כפל חבורות. נבחין כי

$$\ker(\alpha) = \{xN \mid xK = K\} = \{xN \mid x \in K\} = K/N$$

ונוכל להסיק ממשפט האיזומורפיזם הראשון כי

$$(G/N)/(K/N) \xrightarrow{\sim} G/K$$

□

**דוגמה 13.5** נגדיר את ההומומורפיזם  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . אנו יודעים כי  $n\mathbb{Z} \leq d\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$  לכל  $d \mid n$ , ולכן נוכל להשתמש במשפט האיזומורפיזם השלישי

ונקבל

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/_d$$

ולמעשה הצלחנו לפשט משמעותית את חבורת המנה הזו.

### 14.1 מכפלות

**הגדרה 14.1** (מכפלה ישרה) יהיו  $X, Y$  חבורות, נגדיר על  $X \times Y$  מבנה של חבורה על-ידי

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

**דוגמה 14.1**  $\mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/m$  אם ורק אם  $\text{gcd}(m, n) = 1$ .

**דוגמה 14.2** אם  $A$  חבורה אבלית ו- $H, K$  תתי-חבורות של  $A$  כך ש- $HK = A$  ו- $H \cap K = \{e\}$  אז  $A \cong H \times K$  כפי שמצאנו בהרצאות הקודמות.

**משפט 14.2** תהי  $G$  חבורה ו- $X, Y \leq G$  אז  $\varphi(x, y) = xy$  הוא איזומורפיזם אם ורק אם מתקיימים התנאים הבאים:

$$1. G = XY$$

$$2. X \cap Y = \{e\}$$

$$3. X, Y \trianglelefteq G$$

**הוכחה.** נראה כי 1 שקול להיות  $\varphi$  על:

אם  $\varphi$  על, אז  $\text{Im}(\varphi) = X \cdot Y = G$

אם  $XY = G$  אז נקבל  $\text{Im}(\varphi) = XY = G$

נניח כי  $\varphi$  חד-חד ערכית. נניח ש- $g \in X \cap Y$  אז  $g = e$   $\implies \varphi(g, e) = ge = eg = \varphi(e, g) \implies g = e$

מצד שני נניח כי  $X \cap Y = \{e\}$ , ונניח כי  $x_1 y_1 = x_2 y_2$  ונקבל  $x_2^{-1} x_1 = y_2 y_1^{-1}$  ונקבל כי  $x_1 = x_2$   $\implies x_2^{-1} x_1 = e$  ונקבל באופן דומה כי גם  $y_1 = y_2$ .

נניח ש- $\varphi$  היא איזומורפיזם. אנחנו רוצים להראות כי  $\forall g \in G, gXg^{-1} = X, gYg^{-1} = Y$ . בפרט  $\varphi$  היא הומומורפיזם, לכן  $\varphi(x_1, y_1) \cdot \varphi(x_2, y_2) = \varphi(x_1 x_2, y_1 y_2)$  ולכן נקבל  $x_1 y_1 x_2 y_2 = x_1 x_2 y_1 y_2$ , נובע כי  $y_1 x_2 = x_2 y_1$  ובהתאם  $\forall x \in X, y \in Y : xy = yx$ . יהיה  $g \in G$  וידוע כי ההעתקה על ולכן קיימים  $x, y$  כך ש- $g = xy$  ולכן אנחנו יודעים ש- $gXg^{-1} = xyXy^{-1}x^{-1} = xYx^{-1} = X$  נעשה תהליך דומה ל- $Y$ .

נניח ששלושת התנאים מתקיימים, וצריך להראות כי  $\forall x \in X, y \in Y : xy = yx$   $\iff y_1 x_2 = x_2 y_1 \iff x_1 y_1 x_2 y_2 = x_1 x_2 y_1 y_2$ . אנחנו צריכים להראות כי  $x^{-1}(y^{-1}xy) = e$  ולכן  $xy = yx$  ולכן  $x^{-1} \in X, y^{-1}xy \in Y$  ולכן  $x^{-1}y^{-1}xy \in X, Y$  ולכן נובע  $x^{-1}y^{-1}xy = e$   $\implies xy = yx$ .  $\square$

**טענה 14.3**  $D_4$  היא לא איזומורפית למכפלה ישרה של תת-חבורות ממש שלה.

**הוכחה.** נניח בשלילה ש- $X, Y \leq D_4$  כך ש- $\varphi : X \times Y \rightarrow D_4$  המוגדרת על-ידי  $\varphi(x, y) = xy$  היא איזומורפיזם.

ראינו כי תת-החבורה הנורמלית היחידה מגודל 2 של  $D_4$  היא  $\langle \sigma^2 \rangle$  ולכן נניח כי  $Y = \langle \sigma^2 \rangle$ .

בנוסף ב- $X$  חייב להיות איבר מסדר ארבע, דהיינו  $\sigma^3$ , האיברים היחידים מסדר 4 ולכן  $\sigma \in X$  ונקבל כי  $X \cap Y \neq \{e\}$ .

חייב להיות איבר מסדר ארבע ב- $X$ , נוכיח שלא. נניח שלא ונקבל כי  $(xy)^2 = x^2 y^2 = e$ , וקיבלנו כי לא יתכן שהסדר של  $x$  הוא שתיים בלבד.

קיבלנו גם כי  $\tau \notin X, Y$  ולכן בהכרח  $\varphi$  לא על  $D_4$ .  $\square$

ברצוננו להגדיר מבנה של חבורה על מכפלה  $X \cdot Y$  כאשר  $X, Y \leq D_4$  כך ש- $\varphi$  כן תהיה איזומורפיזם. נתבונן ב- $X = \langle \sigma \rangle, Y = \langle \tau \rangle$ . נראה

כי  $XY = D_4$  וגם כי  $X \cap Y = \{e\}$ , לכן  $\varphi : X \times Y \rightarrow D_4$  שהגדרנו על-ידי  $\varphi(x, y) = xy$  היא חד-חד ערכית ועל.

ננסה להגדיר פעולה חדשה על תת-חבורות שתניב מבנה חבורה. נגדיר על  $X \times Y$  מבנה של חבורה על-ידי

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1(y_1 x_2 y_1^{-1}), y_1 y_2) \in X \times Y$$

**טענה 14.4** המבנה שהגדרנו הוא אכן חבורה.

הוכחה. אסוציאטיביות:

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) &= (x_1 y_1 x_2 y_1^{-1}, y_1 y_2)(x_3, y_3) \\ &= (x_1 y_1 x_2 y_1^{-1} y_1 y_2 x_3 y_2^{-1} y_1^{-1}, y_1 y_2 y_3) \\ &= (x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_2^{-1} y_1^{-1}, y_1 y_2 y_3) \\ &= (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

קיום איבר יחידה:

$$(x, y) \cdot (e, e) = (e y e y^{-1}, y) = (x, y)$$

ובאופן דומה גם

$$(e, e) \cdot (x, y) = (e e x e^{-1}, y) = (x, y)$$

קיום הופכי: נחפש ל- $(x_1, y_1)$  איבר הופכי:

$$y_1 y_2 = e \implies y_2 = y_1^{-1}, \quad x_1 y_1 x_2 y_1^{-1} = e \implies x_2 = y_1^{-1} x_1^{-1} y_1$$

מצאנו איבר כזה ולכן זוהי אכן חבורה.  $\square$

$\varphi : X \times Y \rightarrow D_4$  המוגדרת על-ידי  $\varphi(x, y) = xy$  היא איזומורפיזם לפי מה שמצאנו,  $\varphi$  חד-חד ערכית ונבדוק הומומורפיזם.

$$\varphi(x_1, y_1) \varphi(x_2, y_2) = x_1 y_1 x_2 y_2, \quad \varphi((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) = \varphi(x_1 y_1 x_2 y_1^{-1}, y_1 y_2) = x_1 y_1 x_2 y_2 = \varphi(x_1, y_1) \cdot \varphi(x_2, y_2)$$

**הגדרה 14.5** (מכפלה פנימית חצי ישרה) תהי  $G$  חבורה ויהיו  $H, K \leq G$  כך ש- $G = HK$ .

נגדיר את הפעולה הבינארית על  $H \times K$  על-ידי

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 k_1 h_2 k_1^{-1}, k_1 k_2)$$

פעולה זו נקראת המכפלה הפנימית החצי ישרה, ונסמן את החבורה שנוצרת על-ידי  $H \rtimes K$ .

**הערה** סדר המכפלה חשוב, ולא בהכרח  $H \rtimes K$  איזומורפי ל- $K \rtimes H$ .

**משפט 14.6** תהי  $G$  חבורה ו- $H, K \leq G$  כך ש- $G = HK$ ,  $H \cap K = \{e\}$ .

אז  $\varphi : H \rtimes K \rightarrow G$  המתקבלת על-ידי  $\varphi(h, k) = h \cdot k$  היא איזומורפיזם.

הוכחה. נבדוק ונקבל

$$\varphi(h_1, k_1) \cdot \varphi(h_2, k_2) = h_1 k_1 h_2 k_2, \quad \varphi((h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2)) = \varphi(h_1 k_1 h_2 k_1^{-1}, k_1 k_2) = h_1 k_1 h_2 k_2 = \varphi(h_1, k_1) \cdot \varphi(h_2, k_2)$$

וקיבלנו מהחד-חד ערכיות ועל כי זהו איזומורפיזם.  $\square$

**מסקנה 14.7** תהי  $D_n$  החבורה ההידרלית מסדר  $n$  ונגדיר  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ n)$  ונגדיר  $\tau(k) = n - k + 1$  אז

$$D_n \cong \langle \sigma \rangle \rtimes \langle \tau \rangle$$

דהינו,  $D_n$  איזומורפית לחבורה של זוגות סדורים של שתי תת-החבורות יחד עם פעולת הכפל הפנימי החצי ישר.

**הגדרה 14.8** (מכפלה חצי ישרה חיצונית) יהיו  $H, K$  חבורות כלשהן. נניח כי  $\theta : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  וכי  $\theta$  היא הומומורפיזם.

נגדיר על  $H \times K$  פעולה בינארית על-ידי

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 \cdot \theta(k_1)(h_2), k_1 k_2)$$

פעולה זו על המכפלה  $H \times K$  משרה מבנה של חבורה ונסמן חבורה זו על-ידי  $H \rtimes_{\theta} K$ , נקרא לה המכפלה החצי ישרה החיצונית כאשר  $K$  פועלת

על  $H$  ביחס ל- $\theta$ .

**משפט 14.9** תהי  $G$  חבורה, אז  $G$  איזומורפית למכפלה חצי ישרה חיצונית רק אם קיימים  $H, K$  חבורות כך שקיימים הומומורפיזמים  $\pi : G \rightarrow K$

$$\pi \circ s = \text{id}_H \text{ כך } K, s : K \rightarrow G$$

הוכחה. נניח כי  $G = H \rtimes_{\theta} K$  אז נצטרך למצוא  $\pi : G \rightarrow K, s : K \rightarrow G$  אז נגדיר

$$\pi(h, k) = k, s(k) = (e, k)$$



ונקבל מבדיקה ישירה כי אלו הם הומומורפיזמים, ואף  $\pi(s(k)) = k$ .  
 כעת נניח כי קיימת  $\pi : G \rightarrow K$  ו- $s : K \rightarrow G$  כך ש- $s$ ,  $\pi$  הומומורפיזמים ואף כי  $\pi \circ s = id_K$ .  
 נגדיר  $H = \ker \pi$  ונגדיר  $\theta(k)(h) = s(K)hs^{-1}(k)$  ולכן נובע  $\theta$  היא הומומורפיזם ל- $Aut(H)$  וגם  $s$  הומומורפיזם.

$$\varphi(h, k) = h \cdot s(k)$$

נוכיח כי  $\varphi$  חד-חד ערכית אם היא הומומורפיזם.

נניח ש- $\varphi(h, k) = e$  אז נקבל  $h \cdot s(k) = e$  וגם  $s(k) = h^{-1} \in H$  אבל אם  $s(k) \in H = \ker(\pi)$  נקבל  $k = \pi(s(k)) = e$ . קיבלנו כי  $k = e_K$  ולכן גם  $h = e_G$ .

על: אנו מחפשים ל- $G$  איברים כך ש- $h \cdot s(k) = g$ . נגדיר  $k = \pi(g)$  וידוע לנו כי  $k\pi^{-1}(s(k)) = \pi(g)\pi(s^{-1}(k)) = \pi(g \cdot s^{-1}(k))$ .  
 $kk^{-1}$

□

הערה יתר על-כן,  $G \cong H \rtimes_{\theta} K$  כאשר  $H = \ker \pi$ .

**דוגמה 14.3** נגדיר  $\pi : S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  על-ידי  $\pi(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$  ונגדיר  $s : \mathbb{Z}_2 \rightarrow S_n$  על-ידי  $s(\tau^n) = \tau^n$ .  
 אז  $\pi \circ s = id_K$  ולכן  $S_n$  תהיה מכפלה חצי ישרה חיצונית, ונקבל

$$S_n \cong \ker(\text{sign}) \rtimes \mathbb{Z}_2$$

**דוגמה 14.4** נתבונן ב- $FL_n(\mathbb{F})$  ו- $\mathbb{F}^\times$ ,  $\pi : GL_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^\times$ ,  $\tau(A) = \det(A)$ , ולכן

$$\det(s(x)) = x, s(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} s(xy) = s(x)s(y)$$