פתרון מטלה 05 — מבוא ללוגיקה, 80423

3 בדצמבר 2024

שאלה 1

סעיף א'

נגדיר פעולות וקבועים על $sent_L$ על־ידי

$$\varphi+\psi=(\varphi\vee\psi),\quad \varphi\cdot\psi=(\varphi\wedge\psi),\quad -\varphi=(\neg\varphi),\quad 0=\perp,\quad 1=(\neg\perp)$$

נראה שהקבוצה $sent_L$ יחד עם פעולות אלה היא לא אלגברה בוליאנית.

פתרון תהי שפה $L=\{P\}$, אז מהשלמה נובע

$$(P\wedge(\neg P))=P\cdot(-P)=0=(\neg(P\to P))$$

ואלה הן כמובן סדרות שונות של סימנים, לכן קיבלנו סתירה להנחה שספיגה מתקיימת, ובהתאם גם סתירה להנחה כי זו היא אלגברה בוליאנית.

סעיף ב'

נראה כי כל אחת מהפעולות שהגדרנו זה עתה מכבדת את יחס השקילות הטאוטולוגית.

הוכחה. למען הקריאות נסמן $\equiv$ כשכוונתנו $\equiv_{tau}$ לשאלה זו.
נניח ש־$\varphi,\varphi'\in sent_L$ ונניח גם $\varphi\equiv\varphi'$, לכן

$$(-\varphi)=(\neg\varphi)\equiv(\neg\varphi')=(-\varphi')$$

כאשר המעבר השני נובע ממהלכים שראינו עבור ההגדרה הרקורסיבית לחישוב ערך אמת.
באותו אופן אם גם $\psi,\psi'\in sent_L$ ו־$\psi\equiv\psi'$ אז מתקיים לכל

$$\varphi\cdot\psi=(\varphi\wedge\psi)\equiv(\varphi'\wedge\psi')=\varphi'\cdot\psi'$$

ולבסוף גם

$$\varphi+\psi=(\varphi\vee\psi)\equiv(\varphi'\vee\psi')=\varphi'+\psi'$$

ולכן מצאנו שהפעולות המוגדרות אכן מכבדות את יחס שקילות זה. □

סעיף ג'

נגדיר $X=sent_L/\equiv$ ונגדיר את הפעולות הבאות

$$[\varphi]_\equiv\tilde{+}[\psi]_\equiv=[\varphi+\psi]_\equiv\quad[\varphi]_\equiv\tilde{\cdot}[\psi]_\equiv=[\varphi\cdot\psi]_\equiv\quad\tilde{-}[\varphi]_\equiv=[-\varphi]_\equiv$$

ונוכיח ש־X יחד עם הפעולות החדשות היא אלגברה בוליאנית.

הוכחה. נבחין כי יש שתי דרכים להוכיח טענה זו, הדרך הראשונה נובעת מהגדרת האלגברה הבוליאנית, לדוגמה ההוכחה שהפעולות הדו־מקומיות קומוטטיביות ואסוציאטיביות.
נבחר נציגים φ,ψ, אז $\varphi+\psi\in[\varphi+\psi]_\equiv$ וכן $\varphi+\psi=(\varphi\vee\psi)$, אך איווי אסוציאטיבי וקומוטטיבי כפי שראינו בהרצאות הקודמות.
באופן דומה נוכל להראות את כל התנאים המתאימים.

ההוכחה השנייה מתבססת על סעיף ג' של תרגיל 4.
הגדרה שקולה לחלוקה שראינו היא $\{\Sigma\subseteq sent_L\mid\forall v:P\to\{\mathbb{T},\mathbb{F}\},\forall\varphi,\psi\in\Sigma,\overline{v}(\varphi)=\overline{v}(\psi)\}$.
תוצאת הסעיף היא ש־B_X היא אלגברה בוליאנית, אבל מההגדרה הזו יחד עם ההגדרה השקולה שראינו זה עתה, נובע כי הפעולות שהגדרנו על מחלוקה הזו יוצרים אלגברה בוליאנית, והאחת שאנו רוצים למצוא בדיוק. □

שאלה 2

תהי $X \subseteq \mathbb{N}$ ויהיה $n_0 \in \mathbb{N}$ קבוע.

נגדיר $L = \{P_{n,m,i} \mid n, m \in X, n < m, i \in \{0,1\}\}$ שפה לתחשיב פסוקים ונגדיר גם

$$\Sigma_0^X = \{(P_{n,m,0} \leftrightarrow (\neg P_{n,m,1})) \mid n, m \in X, n < m\}$$

וכן גם

$$\Sigma_1^{X,n_0} = \left\{ \left(\neg \left(\bigwedge_{\{n,m \in A \mid n<m\}} P_{n,m,i} \right) \right) \middle| i \in \{0,1\}, A \subseteq X, |A| = n_0 \right\}$$

והאיחוד $\Sigma^{X,n_0} = \Sigma_0^X \cup \Sigma_1^{X,n_0}$.

נוכיח שהקבוצה Σ^{X,n_0} ספיקה אם ורק אם קיימת צביעה $c : [X]^2 \to \{0,1\}$ כך שאין קבוצה מונוכרומטית $A \subseteq X$ בגודל n_0.

הוכחה. נניח ש־Σ^{X,n_0} ספיקה, קיימת הערכת אמת v המספקת את Σ_0^X ואת Σ_1^{X,n_0}.

נגדיר קבוצה חדשה $c = \{\langle \{n,m\}, i \rangle \mid v(P_{n,m,i}) = \mathbb{T}\}$, נבחין כי c יחס וגם ש־$\operatorname{dom} c = [X]^2$, זאת שכן Σ_0^X מסופקת על־ידי v ולכן לכל $\{n,m\}$ מתקיים $v(P_{n,m,0}) = \mathbb{T}$ או $v(P_{n,m,1}) = \mathbb{T}$, כאשר $n < m$. מאותה טענה גם נובע ש־c מקיימת את תנאי הפונקציה, זאת בשל הגרירה הדו־כיוונית לשלילה, לכן $c : [X]^2 \to \{0,1\}$.

תהי $A \subseteq X$ כך ש־$|X| = n_0$ ויהי $i \in \{0,1\}$, אז קיימים $n, m \in X$ כך ש־$P_{n,m,j} \models \Sigma_1^{X,n_0}$ עבור $j \neq i$, כלומר $c(\{n,m\}) \neq i$. זוהי כמובן ההגדרה לפונקציית צביעה המקיימת את התנאי על אי־מונוכרומטיות קבוצות מגודל n_0.

בכיוון ההפוך נניח כי קיימת $c : [X]^2 \to \{0,1\}$ המקיימת את התנאים ונוכיח ספיקות.

נגדיר את הערכת האמת

$$v(P_{n,m,i}) = \begin{cases} \mathbb{T} & c(\{n,m\}) = i \\ \mathbb{F} & \text{else} \end{cases}$$

ונוכיח כי היא מספקת את Σ^{X,n_0}.

עבור $\varphi \in \Sigma_0^X$ נבחין כי $\{n,m\} \in \operatorname{dom} c$ וגם מתנאי הפונקציה לא יתכן שיש שתי צביעות שונות לצימוד זה, ולכן נוכל להסיק $\overline{v}(\varphi) = \mathbb{T}$.

עבור $\varphi \in \Sigma_1^{X,n_0}$ נניח $A \subseteq X, |A| = n_0$ הקבוצה שמגדירה את φ, ויהי צבע i, אז קיים $n, m \in X$ כך ש־$c(\{n,m\}) \neq i$ ולכן $v(P_{n,m,i}) = \mathbb{F}$ ונקבל $\overline{v}(\varphi) = \mathbb{T}$.

מצאנו אם כן ש־v מספקת את Σ_0^X ואת Σ_1^{X,n_0} ולכן היא מספקת את Σ^{X,n_0}. $\square$

שאלה 3

תהי L שפה לתחשיב יחסים.

סעיף א׳

נגדיר קבוצה X, פונקציה $f : const_L \cup Var \to X$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $F \in Func_{L,n}$ פונקציה $\epsilon_F : X^n \to X$, כך שהפונקציה $\overline{f} : term_L \to X$ מתקבלת ממשפט ההגדרה ברקורסיה עבור שמות עצם, ומחזירה לכל שם עצם את קבוצת המשתנים המופיעים בו.
נוכיח שהפונקציה הזו מקיימת את הדרישות שלנו.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על שמות עצם שהפונקציה אכן מקיימת את הנדרש.

במקרה הבסיס, $t \in const_L \cup Var$, אם $t \in const_L$ אז $f(t) = \emptyset$, ואילו $t \in Var$ אז $f(t) = \{t\}$ והפונקציה מקיימת את הנדרש.

יהי $t = F(t_1, \ldots, t_n)$ עבור $F \in Func_{L,n}$, אז נגדיר $\epsilon_F(X_1, \ldots, X_n) = \bigcup_{i\in[n]} X_i$ ולכן עבור ההנחה כי X_i מייצגים את הערך הנכון נקבל את איחוד המשתנים וזהו אכן הביטוי שאנו מחפשים. □

סעיף ב׳

נגדיר קבוצה Y, פונקציה $g : atom_L \cup Var \to X$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ פונקציות $\epsilon_\forall, \epsilon_\exists : Var \times Y \to Y$, פונקציה $\epsilon_\neg : Y \to Y$, ולכל $\square \in B$ גם $\epsilon_\square : Y^2 \to Y$ כך שהפונקציה $\overline{g} : form_L \to Y$ המתקבלת ממשפט הרקורסיה לנוסחות תתאים את מספר המשתנים המופיעים ב־φ.
נוכיח כי פונקציה זו מקיימת את הנדרש.

הוכחה. נגדיר את g כך שלכל E יחס n מקומי כך ש־$\varphi = E(t_1, \ldots, t_n)$ יתקיים $g(\varphi) = \bigcup_{i\in[n]} \overline{f}(t_i)$.
עוד נגדיר $\epsilon_\forall(v, Y) = \epsilon_\exists(v, Y) = Y \cup \{v\}$, וכן $\epsilon_\neg(Y) = Y$ ו־$\epsilon_\square(Y_1, Y_2) = Y_1 \cup Y_2$.
ממשפט ההגדרה ברקורסיה על יחסים נקבל ש־$\overline{g}$ קיימת ויחידה.

נוכיח באינדוקציה שהיא מקיימת את הטענות.
כבסיס נניח $\varphi \in atom_L$ ולכן $\varphi = E(t_1, \ldots, t_n)$ עבור E יחס n מקומי ו־t_i שמות עצם, אז מההגדרה נובע ישירות.
נניח כי הטענה נכונה עבור φ ונבחן את $\forall v\varphi$, מתקיים $\overline{g}(\forall v\varphi) = \epsilon_\forall(v, \overline{g}(\varphi))$ ופונקציה זו מקיימת את הטענה, ההוכחה ל־$\exists$ זהה.
עבור $\varphi = \neg\psi$ מתקיים מהנחת האינדוקציה וההגדרה $\overline{g}(\varphi) = \overline{g}(\psi)$ וזה אכן נכון.
עבור $\square \in B$ אם $\varphi = (\psi_1 \square \psi_2)$ אז מהנחת האינדוקציה וההגדרה מתקיים $\overline{g}(\varphi) = \overline{g}(\psi_1) \cup \overline{g}(\psi_2)$ והטענה עדיין תקפה.

השלמנו את מהלך האינדוקציה ולכן הפונקציה אכן מקיימת את הרצוי. □

שאלה 4

תהי L שפת תורת הקבוצות.

סעיף א׳

נבדוק כמה מבנים יש ל־L שעולמם הוא $A = \{1\}$.

מטעמי קריאות נגדיר את שפת תורת הקבוצות (E) במקום $(\in)$.

פתרון בשפת תורת הקבוצות יחס סדר דו־מקומי יחיד E, ולכן $E \in \mathcal{P}(A \times A) \iff E \subseteq A \times A$.

בהתאם אם $X_A = \{E \mid E \subseteq A \times A\}$ אז $|X| = |\mathcal{P}(A \times A)| = 2^{|A \times A|} = 2^{|A|^2}$.

נותר אם כך להציב וקבל שאם העולם A יש בדיוק 2 מודלים ל־$\langle A, E \rangle$.

סעיף ב׳

נחשב כמה מבנים יש ל־L שעולמם הוא הקבוצה $\{1, 2\}$ ועבור קבוצה $[n]$.

פתרון כפי שראינו בסעיף הקודם מתקיים $|X_{[2]}| = 2^{4^2} = 16$ וכן $|X_{[n]}| = 2^{n^2}$.