פתרון מטלה 3 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

22 במאי 2024

שאלה 1

נוכיח כי $\forall x \in (-1,0) \cup (0,\infty) : \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

הוכחה. תהי $g(x) = \ln(1+x)$ פונקציה המוגדרת לכל $x > -1$ וגזירה בתחום כאשר $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ על־פי נוסחות גזירה.

נבחר $x_0 = 0$ ו־$x > 0$ כך שגם $x \neq 0$ וממשפט הערך הממוצע נובע

$$\exists c \in (0,x) : g'(c) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

ידוע כי g' פונקציה מונוטונית יורדת עבור $x > -1$ ולכן $g'(x_0) > g'(c) > g'(x)$ ובהתאם:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \implies \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

עבור $-1 < x < 0$ עדיין מתקיים

$$\exists c \in (x,0) : g'(c) = \frac{g(0) - g(x)}{0 - x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

ומתקיים $g'(x) > g'(c) > g(0)$ ולכן משליליות x נסיק

$$\frac{1}{1+x} > \frac{\ln(1+x)}{x} > 1 \implies \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

ומצאנו כי הטענה נכונה לכל $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$. $\square$

שאלה 2

יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש־$a < b < c$. תהי f פונקציה רציפה ב־$[a, b]$ וגזירה ב־$(a, b)\backslash\{c\}$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $f'(x) \geqslant 0$ לכל $x \in (a, b)\backslash\{c\}$ אז f מונוטונית עולה ב־(a, b).

הוכחה. נניח בשלילה כי f איננה מונוטונית עולה בתחום, ולכן קיימים $y > x$ בתחום הנתון המקיימים $f(x) > f(y)$.

ידוע כי הנגזרת חיובית ולכן נובע שבכל נקודה בה הנגזרת מוגדרת הפונקציה עולה, ולכן $x < c < y$.

עתה נבחין כי לכל $x < c$ הנגזרת כן מוגדרת ואי־שלילית ולכן נסיק $f(x) \leqslant f(c)$, ובאופן דומה נקבל כי $f(c) \leqslant f(y)$ ומכאן נסיק $f(x) \leqslant f(y)$ בסתירה להנחה.

לכן f פונקציה מונוטונית עולה בתחום. □

סעיף ב'

נוכיח כי אם $f'(x) > 0$ עבור כל $x \in (a, b)\backslash\{c\}$ אז f מונוטונית עולה ממש ב־(a, b).

הוכחה. נניח בשלילה כי f איננה מונוטונית עולה בתחום, ולכן קיימים $y > x$ בתחום הנתון המקיימים $f(x) \geqslant f(y)$.

ידוע כי הנגזרת חיובית ולכן נובע שבכל נקודה בה הנגזרת מוגדרת הפונקציה עולה, ולכן $x < c < y$.

עתה נבחין כי לכל $x < c$ הנגזרת כן מוגדרת וחיובית ולכן נסיק $f(x) < f(c)$, ובאופן דומה נקבל כי $f(c) < f(y)$ ומכאן נסיק $f(x) < f(y)$ בסתירה להנחה.

לכן f פונקציה מונוטונית עולה ממש בתחום. □

סעיף ג'

נוכיח שאם $\forall x \in (a, c) : f'(x) < 0$ וגם $\forall x \in (c, b) : f'(x) > 0$ אז c מינימום מקומי של f.

הוכחה. על־פי הנתונים f מונוטונית עולה ממש ב־(c, b) ויורדת ממש ב־(a, c), דהינו לכל $x \in (a, b)$ מתקיים $f(c) < f(x)$ ולכן זהו מינימום מקומי. □

שאלה 3

סעיף א'

נתונים $p, q \in \mathbb{R}$ כאשר $0 < p < 1$. נוכיח כי למשוואה $x - p \cdot \sin(x) = q$ יש פתרון ממשי יחיד.

הוכחה. נגדיר $f(x) = x - p\sin(x) - q$ ולכן פתרונות המשוואה שקולים לשורשי הפונקציה.

נשים לב כי היא גזירה ב־$\mathbb{R}$ ואף $f'(x) = 1 - p\cos x$. תמונת $\cos x$ היא $[-1, 1]$ ובהתאם תמונת הפונקציה היא $[1-p, 1+p]$ ועל־פי הגדרת p נובע ש־$f'(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. עוד נבחין כי $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ וגם $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} = \infty$ ולכן נוכל להסיק כי היא יש לה לכל הפחות שורש יחיד $c \in \mathbb{R}$.

ניעזר במונוטויות ונקבל כי לכל $x \in \mathbb{R}, x \neq c$ מתקיים $f(x) \neq f(c) = 0$ וקיבלנו כי קיים שורש יחיד. □

סעיף ב'

נוכיח כי גם אם $p = 1$ עדיין יש ל־f שורש יחיד ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה. במקרה זה תמונת f' היא $[0, 1]$ ולכן f פונקציה מונוטונית עולה ולא עולה ממש.

ההצדקה לקיום שורש $c \in \mathbb{R}$ עודנה נכונה במקרה זה, ונבדוק אם שורש זה הוא יחיד.

אילו $f'(c) > 0$ אז בסביבה של c הפונקציה מונוטונית עולה ממש ונקבל כי זהו שורש יחיד בדומה לסעיף הקודם.

נניח אם כך ש־$f'(c) = 0$. מערך פונקציה הנגזרת שמצאנו ומתכונת פונקציית $\cos$ נסיק כי $f'(x) > 0$ בסביבה מנוקבת סביב $x = c$. ולכן f עולה ממש בסביבה מנוקבת של c ונקבל כי $f(x) \neq f(c)$ בתחום, וקיבלנו כי השורש הוא יחיד. □

שאלה 4

תהי $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

נוכיח כי אם $\lim_{x\to\infty} f(x)=L\in\mathbb{R}$ אז $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

הוכחה. יהי $\epsilon>0$ ו־$M>0$ המקיים שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-L|<\epsilon$, זאת נסיק מהגבול הנתון.

נבחר עוד נקודה $y>0$ ונקבל כי $|f(y)-L|<\epsilon$ ולכן נקבל $|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-L|+|f(y)-L|=2\epsilon$.

בהתאם $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}=2\epsilon|x-y|\leqslant 2\epsilon$ כאשר $|x-y|<1$ הגדרת הנגזרת מתקיימת ונובע $|f'(x)|\leqslant|x-y|$ ומתקיים

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$$

□

שאלה 5

נגדיר $f:[0.\pi]\to[-1,1]$ על־ידי $f(x)=\cos x$.

סעיף א'

נוכיח ש־f חד־חד ערכית ועל.

הוכחה.

$$\forall x,y\in[0,\pi]:f(x)=f(y)\iff\cos x=\cos y\iff x=y+2\pi k\vee x=-y+2\pi k\forall k\in\mathbb{Z}\implies x=y$$

ולכן f חד־חד ערכית.

נשים לב ש־$f(x)$ מונוטונית יורדת בכל תחומה, שכן $f'(x)=\cos'(x)=-\sin x$ וידוע כי $\sin x\leqslant 0$ לכל $x\in[0,\pi]$.

עוד נראה ש־$f(0)=1,f(\pi)=0$ ולכן נוכל להסיק $f([0,\pi])=[0,1]$ ולכן היא על. □

סעיף ב'

נמצא את תחום הגזירות של f^{-1} וביטוי מפורש לערך נגזרתה בתחום.

פתרון. נשים לב תחילה ש־$f^{-1}:[0,1]\to[0,\pi]$.

עוד נבחין שהפונקציה f לא מקבלת אפס אלא בנקודת הקצה $x=\pi$ ולכן נסיק שנגזרת f^{-1} מוגדרת עבור $(0,1)$.

נשתמש בנוסחת נגזרת הופכית עבור $y=\cos x$ ונקבל

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{-\sin x}=-\frac{1}{\sin(\cos^{-1}(x))}$$

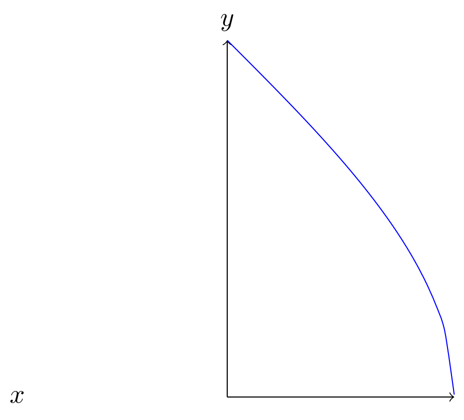
נשתמש בזהות $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ יחד עם $\theta=\cos^{-1}x$ ונקבל $x^2+\sin^2(\cos^{-1}(x))=1\implies\sin(\cos^{-1}(x))=\sqrt{1-x^2}$ ונקבל

$$(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ופונקציה זו אכן מוגדרת ב־$(0,1)$. □

סעיף ג'

נסמן $f^{-1}=\arccos$ ונסרטט את את גרפה על־ידי סרטוט $\cos x$ המוכר לנו בשיקוף על $y=x$ כנלמד בכיתה.



שאלה 6

סעיף א'

נוכיח ש־arcsinh הפיכה.

הוכחה. ניזכר כי

$$\begin{aligned}
&\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\
&\implies 2y = e^x - e^{-x} = e^x - \frac{1}{e^x} \\
&\implies e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\
&\implies e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}
\end{aligned}$$

נפסול את התשובה השלילית ונקבל $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

ידוע לנו כי ln פונקציה מונוטונית עולה ממש, וכך גם x והביטוי $\sqrt{x^2+1}$ ולכן נסיק מההרכבה כי $\sinh^{-1}(x)$ היא פונקציה עולה.

ולכן נסיק עוד נבחין כי על פי כלל ההצבה עבור $t = x + \sqrt{x^2+1}$:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcsinh}(x + \sqrt{x^2+1}) = \lim_{t\to\infty} \ln(t) = \infty$$

באופן דומה נראה כי

$$\lim_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{x + \sqrt{x^2+1}} = 0$$

ולכן נסיק

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcsinh}(x) = -\infty$$

דהינו תמונת הפונקציה היא $(-\infty, \infty)$, והיא עולה ממש, ולכן נסיק שהיא חד־חד ערכית ועל. □

סעיף ב'

i.

נוכיח כי הפונקציה גזירה בעזרת נוסחת נגזרת הפוכה.

נראה

$$x = \sinh y, \operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(y)} = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))}$$

במטלה הקודמת מצאנו כי $\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1$, נציב $\theta = \operatorname{arcsinh}(x)$ ונקבל $(\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)))^2 - x^2 = 1$, נשתמש בשוויון זה ונקבל

$$\operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

.ii

נוכיח כי הפונקציה גזירה ישירות מביטויה האלגברי.

מצאנו כי $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ולכן נגזור על־פי חוקי גזירה:

$$\operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

וקיבלנו נוסחה מפורשת.

שאלה 7

תהי f פונקציה גזירה פעמיים בנקודה $x \in \mathbb{R}$.

סעיף א'

נראה שקיים $\delta > 0$ כך ש־f גזירה בסביבה $(c-\delta, c+\delta)$.

כאמור הפונקציה גזירה פעמיים בנקודה $x = c$, ולכן הפונקציה f' עצמה גזירה ב־$x = c$.

מהגדרת הנגזרת נובע שעל הפונקציה להיות מוגדרת בסביבה של c כדי שהיא תהיה גזירה, שאם לא כן הגבול המגדיר את הנגזרת לא מתקיים, ובהתאם קיבלנו שקיים $\delta > 0$ עבורו f' מוגדרת ב־$(c-\delta, c+\delta)$.

סעיף ב'

נתון $f'(c) = 0, f''(c) > 0$ ונוכיח ש־c מינימום מקומי של f.

הוכחה. נבחן את f', פונקציה זו נגזרתה חיובית בסביבה של c ולכן היא עומדת בתנאי שאלה 5 סעיף ב' ממטלה 1, ונוכל להסיק ש־c מינימום מקומי של f'.

לכן קיימת סביבה של c בה לכל x מתקיים $f'(x) > f'(c) = 0$, דהינו הנגזרת חיובית בסביבה נקובה זו.

נסיק אם כן שבסביבה הנקודה הפונקציה עולה, ולכן $x = c$ הוא מינימום מקומי של f. $\square$

הערה: לא השתמשתי בהגדרה ל־g שכן $g(x) = f(x) + C$ כאשר C קבוע, ולכן ניתן להוכיח גם ללא ההגדרה.

שאלה 8

סעיף א'

תהי $h:(b,\infty)\to\mathbb{R}$, נבחין כי $\lim_{u\to 0^+} h(\frac{1}{u})$ מוגדר אם ורק אם $\lim_{x\to\infty} h(x)$ מוגדר.

הסיבה לכך נעוצה בכלל ההצבה, $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}=\infty$ ולכן נוכל להציב בגבול אחד ולקבל את השני.

תהינה $f,g:(b,\infty)\to\mathbb{R}$ המקיימות

1. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$
2. $\forall x\in(b,\infty) g'(x)\neq 0$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב.

סעיף ב'

נגדיר את הפונקציות $\overline{f},\overline{g}:(0,\frac{1}{b})\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$\overline{f}(u)=f(\frac{1}{u})\overline{g}(u)=g(\frac{1}{u})$$

נשים לב שמכלל ההצבה כמו בסעיף א' נובע גם

$$\lim_{u\to 0^+}\overline{f}(u)=\lim_{u\to 0^+}\overline{g}(u)=0$$

סעיף ג'

נבחין כי נוכל להשתמש בנגזרת הרכבה עבור $f(x),u(x)=\frac{1}{x}$ ונקבל

$$\overline{f}'(u)=f(u(x))'=f'(u(x))\cdot u'(x)=\frac{-f'(u(x))}{x^2}=-u^2f'(u)$$

בפרט מצאנו כי הפונקציה אכן גזירה, ונוכל באותה הדרך למצוא כי גם $\overline{g}$ גזירה בתחום.

נבחין כי

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\overline{f}'(u)}{\overline{g}'(u)}=\lim_{u\to 0^+}\frac{-u^2f'(u)}{-u^2g'(u)}=\lim_{u\to 0^+}\frac{f'(u)}{g'(u)}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(1) על־פי כלל הצבה עבור $x=\frac{1}{u}$.

נבחין גם כי הגבול הימני מוגדר מנתון (3).

סעיף ד'

נבחין כי כלל התנאים עבור כלל לופיטל מתקיימים ונובע

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\overline{f}(u)}{\overline{g}(u)}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\overline{f}'(u)}{\overline{g}'(u)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ולכן כלל לופיטל מתקיים עבור $x\to\infty$ ונקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$