פתרון מטלה 07 — מבנים אלגבריים 1 (80445)

1 ביולי 2024

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי חבורה מסדר 45 היא לא פשוטה.

הוכחה. נבחן את $Syl_5(G)$ עבור G כלשהי המקיימת $|G| = 45$.
ממשפט סילו השלישי נקבל כי $n_5 = 1 \pmod 5$ ולכן נסיק $n_5 = 1, 6, 26$ ואלה האופציות היחידות מטעמי גודל החבורה.
אנו גם יודעים כי $n_5 \mid 9$ ולכן $n_5 = 1$ בלבד וממשפט סילו השני נוכל להסיק כי קיימת תת־חבורה נורמלית מסדר 5 ובהתאם G לא פשוטה. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי אם חבורה מסדר 30 אז היא לא פשוטה.

הוכחה. תהי G חבורה כך ש־$|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
ממשפטי סילו הראשון והשלישי נסיק כי $n_3 = 1, 10$. אם $n_3 = 1$ ממשפט סילו השני נסיק כי G לא פשוטה ולכן נניח כי $n_3 = 10$.
נגדיר $Syl_3(G) = \{P_1, \dots, P_{10}\}$ ונסיק כי $P_i \simeq \mathbb{Z}_{/3}$ לכל $i \in [10]$ ולכן גם לכל $i \neq j \in [10]$ נקבל $P_i \cap P_j = \{e\}$.
נסיק אם כן כי קיימים 20 איברים מסדר 3 ב־G.

באופן דומה נקבל כי $n_5 = 1, 6$ ולכן נניח כי $n_5 = 6$ בלבד, ונקבל כי ישנן שש חבורות מסדר 5 ולכן ישנם 25 איברים מסדר 5 בסתירה למה שמצאנו זה עתה, ולכן או $n_5 = 1$ או $n_3 = 1$ ובכל מקרה G לא פשוטה. $\square$

שאלה 2

תהי G חבורה מסדר סופי ו־p ראשוני.

סעיף א'

נוכיח כי כל תת־חבורת־p שנסמן $Q \leq G$ מוכלת בחבורת p־סילו של G.

הוכחה. מלמה שהוכחה בהרצאה נסיק כי קיים $g \in G$ כך ש־$gQg^{-1} \leq P$ כאשר P תת־חבורה p־סילו של G.
אנו יודעים ממשפט סילו השני כי כל חבורות p־סילו צמודות, ולכן גם g^{-1} מצמיד את P ל־P' חבורה p־סילו כלשהי, ונקבל

$$g^{-1}gQg^{-1}g = Q \leq g^{-1}Pg = P'$$

□

סעיף ב'

תהי $H \leq G$ תת־חבורה. נוכיח כי כל תת־חבורה p־סילו $P_H \leq H$ מוכלת בתת־חבורת p־סילו $P_G \leq G$.

הוכחה. P_H היא חבורת p על־פי הגדרה וכמובן $P_H \leq H \leq G \implies P_H \leq G$ ולכן תנאי הסעיף הקודמים מתקיימים ונובע כי P_H מוכלת באיזושהי חבורה p־סילו $P_G \leq G$. □

סעיף ג'

תהי $N \triangleleft G$ תת־חבורה נורמלית. נוכיח כי לכל חבורת p־סילו $P \leq G$, החבורה $P \cap N$ היא תת־חבורה p־סילו של N ו־PN/N היא תת־חבורה p־סילו של G/N.

הוכחה. אנו יודעים כי N היא איחוד של מחלקות צמידות של G, ואנו יודעים גם כי ל־G מחלקות צמידות של תת־חבורות p־סילו של G.
אילו N מורכבת ממחלקת הצמידות של P אז בהתאם $P = P \cap N$, ולכן חיתוך זה הוא חבורת p, וחבורת p־סילו של G, ולכן משיקולי גודל בוודאי שגם תת־חבורת p־סילו של N.
נניח אם כן כי N לא מורכבת ממחלקת הצמידות של P, ולכן כמובן נוכל להסיק כי $P \cap N = \{e\}$ וכמובן הטענה נכונה באופן ריק.

מצאנו כי $P \cap N$ תת־חבורה p־סילו של N, נוכיח כי PN/N תת־חבורה p־סילו של G/N.
ממשפט האיזומורפיזם השני נקבל $PN/N \simeq P/(P \cap N)$, ולכן נקבל $PN/N \simeq P$ או $PN/N \simeq \{e\}$.
במקרה השני כמובן נקבל כי זו היא תת־חבורה p־סילו של G/N, ולכן נבדוק את המקרה הראשון בלבד.
נקבל $PN/N \leq G/N$ והיא חבורת p, ונוכל להסיק מהגדלים של החבורות כי היא אף p־סילו. □

שאלה 3

סעיף א'

לכל p ראשוני נמצא את החבורות p־סילו של D_6.

נבחין כי $|D_6| = 12 = 2^2 \cdot 3$.

לכן לכל ראשוני גדול מ־3 חבורת p־סילו היא טריוויאלית, דהינו D_6 עצמו.

נראה כי $n_2 = 1 (\mod 2), n_2 \mid 3$ ולכן נסיק $n_2 = 1, 3$. נראה כי $\langle \sigma^3, \tau \rangle$ היא חבורה המקיימת את התנאי, ולכן אם קיימות שתי חבורות כאלה נוספות הן צמודות לזו. מבדיקה ידנית של הצמדות נגלה כי זוהי החבורה הכזו היחידה.

נעבור למצוא את 3, נקבל $n_3 = 1 (\mod 3), n_3 \mid 4$ ולכן $n_3 = 1, 4$, ואנו יודעים כי $\langle \sigma^2 \rangle$ חבורה המקיימת את הטענה, ומבדיקה היא צמודה רק לעצמה, ולכן מצאנו את כל החבורות p־סילו של D_6.

סעיף ב'

לכל ראשוני p נמצא את כל החבורות p־סילו של A_4.

אנו כבר יודעים כי $|A_4| = 12 = 2^2 \cdot 3$, וכי $n_2 = 1, 3, n_3 = 1, 4$, כשעלינו לגלות מה הערך הנכון.

נבחין כי $\langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$ מבדיקה ישירה היא חבורה מגודל 4 ולכן מהווה 2־סילו, ומבדיקה ישירה נגלה כי הוא היחיד.

נמצא 3־סילו, לדוגמה $\langle (1\ 2\ 3) \rangle$, ולכן כמובן גם $\langle (2\ 3\ 4) \rangle, \langle (1\ 3\ 4) \rangle, \langle (1\ 2\ 4) \rangle$ ואלו הם כל ה־3־סילו.

סעיף ג'

נוכיח כי לא קיימת פעולה נאמנה של חבורת הקווטרניונים Q על קבוצה עם 4 איברים.

הוכחה. תהי קבוצה X כך ש־$|X| = 4$, ונניח בשלילה כי קיימת פעולה נאמנה $Q \circlearrowright X$.

נראה כי $|Q| = 8 = 2^3$ ולכן היא חבורת 2, ובהתאם $Z(Q)$ לא טריוויאלי, ונגדיר $g \in Z(Q)$ איבר לא נייטרלי כלשהו.

הפעולה איזומורפית ל־$Q \to \mathrm{Sym}(X)$ ואנו יודעים כי $Z(\mathrm{Sym}(X))$ הוא טריוויאלי, ונקבל סתירה בבנייה. □

שאלה 4

תהי G חבורה מסדר סופי ו־p ראשוני.

סעיף א'

נוכיח כי אם $p^k \mid |G|$ אז G מכילה תת־חבורה מסדר p^k.

הוכחה. נגדיר P חבורת p־סילו של G, ולכן $|P| = p^n$, אם $k = n$ אז נובע מסילו הראשון ולכן נוכל להניח כי $k < n$.
נבחין כי ממשפט קושי נובע גם כי קיימת חבורה כזו אם $k = 1$ ולכן נוכל להניח כי גם $1 < k$.
נגדיר $Q \le G$ כך ש־$|Q| = p$ (ממשפט קושי) ונסיק גם $Q \le P$ משאלה 2.
לכן $|P/Q| = p^{n-1}$ ולכן ממשפט ההתאמה ישנה תת־חבורה של P מגודל $n - 1$.
נוכל אם כן לסיים את ההוכחה באינדוקציה. ☐

סעיף ב'

נוכיח כי G איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות q־סילו (עבור ראשוניים שונים) אם ורק אם G מכילה תת־חבורה q־סילו נורמלית לכל ראשוני q.

הוכחה. נגדיר $q_1, \dots, q_r$ הראשוניים המחלקים את $|G|$, ולכן $n_i > 0$ לכל $1 \le i \le r$, בנוסף נגדיר $P_1, \dots, P_r$ חבורות q_i־סילו של G.

כיוון ראשון: נניח כי $G \simeq P_1 \times \dots \times P_r$.
יהי P_i' חבורת q־סילו של G, לכן P_i, P_i' צמודות.
אנו יודעים כי $P_i \simeq P_i e_i$ עבור e בסיס סטנדרטי, וכן אם $g \in G$ מקיים $gP_i'g^{-1} = P_i$ אז נסיק כי $P_i \simeq gP_ie_ig^{-1} = P_i'e_i$ ונסיק $P_i = P_i'$ ולכן P_i יחיד ונובע $P_i \triangleleft G$.
מצאנו כי לכל q_i ראשוני $P_i \triangleleft G$ כמבוקש.

כיוון שני: נניח כי $P_i \triangleleft G$ וכי P_i יחידה ממשפט סילו השני.
אנו יודעים כי $G = P_1 \cdots P_n$ מטעמי גודל, וכי $P_i \triangleleft G$, ונבחין כי לכל $1 \le i \le n$ נקבל

$$P_i \cap (\prod_{1 \le j \le n, j \ne i} P_j) = \{e\}$$

שאם לא כן מספר האיברים ב־P_i לא היה q_i^k כלשהו, ולכן משפט הכפל הישר המורחב (שהוכחנו בתרגיל 5) תקף ונקבל כי הטענה נכונה. ☐

סעיף ג'

נוכיח כי אם G חבורת p, היא היא איזומורפית לתת־חבורה של $U_n(\mathbb{F}_p)$ עבור n טבעי כלשהו.

הוכחה. נבנה תת־חבורה של $U_n(\mathbb{F}_p)$ שתעמוד בדרישות לאיזומורפיה עם G.
נשתמש בתוצאת שאלה 7 מתרגיל 5 כדי לפרק את החבורה למעשה למרכזה ולשאר האיברים.
נתחיל מטיפול במרכז, אנו יודעים כי $p \mid Z(G)$ ולכן נחלק את האלכסון הראשי למספר איברים שונים כחזקת $Z(G)$, וכך נקבל איברים חילופיים ב־$U_n(\mathbb{F}_p)$. ☐

שאלה 5

תהי G חבורה מסדר סופי וזוגי ונניח כל החבורות 2־סילו שלה הן ציקליות.

סעיף א'

נסמן $|G| = 2^r m$ ונבחן את השיכון $f : G \hookrightarrow S_{2^r m}$ שמתקבל ממשפט קיילי, נוכיח כי ההרכבה

$$G \xrightarrow{f} S_{2^r m} \xrightarrow{\text{sgn}} \{\pm 1\}$$

המסומנת על־ידי φ היא לא טריוויאלית.

הוכחה. אנו יודעים כי אם P_2 תת־חבורה 2־סילו אז $|P_2| = 2^r$ וכן היא ציקלית, ולכן $g \in P_2, f(g) = \sigma \implies f(g^n) = \sigma^n \forall n \in [2^r]$.
דהינו, מצאנו כי בתמונה של f נמצאים מחזורים מאורך 2^r, ולכן הם מכפלות של מחזורים מגודל זה ומחזור אחר מגודל זוגי, שאם לא כן אז סימנם יהיה שלילי.
מבחינה של תת־חבורות p־סילו של m, נוכל לקבוע כי קיימים לפחות עוד m ערכים בתמונה של, וכאן ניתקל בקושי.
יכולים להיות רק m מחזורים בגודל 2^r בלתי תלויים, ולכל אחד יש הרכבה עם מחזור זוגי בגודל לפחות 2, נקבל אם כן כי m התמורות הנוספות מתלכדות עם לפחות אחד האיברים, ואנו יודעים כי התוצאה תהיה מחזור זוגי ומחזור אי־זוגי.
לכן נוכל להסיק כי קיים לפחות איבר אחד בתמונה שסימנו שלילי. $\square$

סעיף ב'

נסיק כי $\mathbb{Z}_{/2}$ היא החבורה הפשוטה היחידה מסדר זוגי שמכילה תת־חבורה 2־סילו ציקלית.

הוכחה. נניח כי G חבורה מסדר סופי וזוגי ולכן $|G| = 2^r m$ כאשר $r \geq 1$, אז תנאי הסעיף הקודם חלים וכמובן נקבל כי φ לא טריוויאלית.
נקבל ממשפט האיזומורפיזם הראשון שהגרעין של f הוא תת־חבורה נורמלית ולכן G איננה פשוטה. $\square$