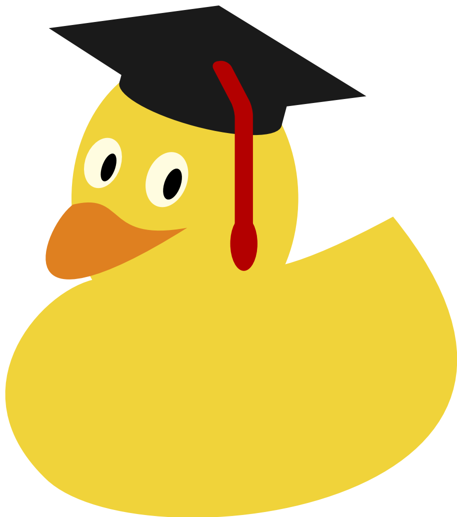
פונקציות מרוכבות — סיכום

3 בנובמבר 2024



תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 31.10.2024

למרצה קוראים עדי. המייל הוא adi.glucksam@mail.huji.ac.il

שיעורי הבית הפעם הם 20 אחוזים מהציון, גם פה עם התחשבות במטלות הטובות ביותר. שעת קבלה של עדי היא בימי ראשון אחרי השיעור, דהינו ב־12:00, במנצ'סטר 303.

1.1 מבוא

נגדיר מספרים מרוכבים על־ידי ההתאמה $(x, y) \mapsto z = x + iy$ כאשר $i = \sqrt{-1}$, הקבוע המדומה. נגדיר מספר סימונים שיעזרו לנו בהמשך.

הגדרה 1.1 (חלק שלם וחלק מדומה) עבור $z = x + iy$ נגדיר $\mathrm{Re}(z) = x$ ו־$\mathrm{Im}(z) = y$, החלק הממשי והחלק המדומה בהתאמה.

נעבור להגדרת הפעולות בשדה המרוכב:

הגדרה 1.2 (חיבור וחיסור מרוכבים) אם $z = x + iy$ ו־$w = a + ib$ אז נגדיר $z \pm w = (x \pm a) + i(y \pm b)$.

הגדרה 1.3 (כפל) כפל בסקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר על־ידי $\alpha \cdot z = \alpha x + i\alpha y$.

כפל של מרוכב במרוכב נגדיר על־ידי $z \cdot w = (x + iy)(a + ib) = xa + xib + iya + iyib = xa - yb + i(xb + ya)$.

הגדרה 1.4 (הצמדה) נגדיר פעולה חדשה שלא קיימת בממשיים, היא הצמדה (conjugation), נסמן $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - y$.

נקבל גם $\overline{\overline{z}} = z$.

במקרה בו $z \in \mathbb{R}$ אז נקבל $x = \overline{z}$ ולמעשה השוויון מתקיים אם ורק אם $z \in \mathbb{R}$.

הגדרה 1.5 (ערך מוחלט) נגדיר ערך מוחלט על־ידי $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

פעולה זו מייצגת את המרחק מהראשית במישור המרוכב, בדומה לאופן פעולת הערך המוחלט בממשיים.

הגדרה 1.6 (חלוקה) חלוקה נגדיר על־ידי $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{1}{|w|^2} z \cdot \overline{w}$.

הערה (מרוכבים כמרחב וקטורי מעל הממשיים) ניתן לבחון את המרוכבים כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}^2$ על־ידי $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ המוגדר

$$z = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ראינו כי אפשר לייצג את המרוכבים על־ידי מרחב וקטורי ממשי, ובאותו אופן ניתן לייצג את המרוכבים גם על־ידי מטריצות ועל־ידי תצוגה פולארית. בתרגול נעסוק בתצוגת המטריצות, ועתה נתעמק בהצגה פולארית.

נוכל לבחון כל מספר כווקטור, דהינו על־ידי עוצמה וזווית. בקורס שלנו זווית היא ב־$(-\pi, \pi]$ והיא מודדת מרחק זוויתי מהכיוון החיובי של ציר ה־x. כל מספר $z = x + iy$ ניתן לייצג על־ידי (r, θ), כאשר $r = |z|$ ו־$\theta = \mathrm{Arg}(z)$. סימון לזה (ובהמשך הקורס הוא יהפוך להגדרה) הוא $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. בהתאם $z = r \cdot e^{i\theta}$.

תרגיל 1.1 1. הראו כי $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

2. האם נכון תמיד ש־$Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$?

3. אם התשובה היא לא, איך זה לא מתנגש עם סעיף 1?

תרגיל 1.2 מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $\sqrt[n]{z} = w$.

פתרון

$$\sqrt[n]{z} = w \iff z = w^n = \left(r \cdot e^{i\theta}\right)^n = r^n \left(e^{i\theta}\right)^n$$

אז נקבל $|w|^n = r^n$ ולכן נקבל $|w| = |z|^{\frac{1}{n}}$.

נקבל בנוסף על־ידי נוסחת דה־מואר (שתגיע בהמשך הקורס)

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta}\left(e^{i\theta}\right)^{n-1} = e^{in\theta}$$

דהינו $Arg(w)n = Arg(z)$ ולכן $Arg(w) = \frac{Arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ עבור $k = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

1.2 תזכורת למטריקות

נוכל להגדיר מטריקה על המרוכבים על־ידי שימוש בערך המוחלט שהגדרנו, דהינו נגדיר $d(z,w)=|z-w|$, והגדרה זו משרה טופולוגיה על המרוכבים ומאפשרת לנו לדון במספר תכונות נוספות:

הגדרה 1.7 (כדור פתוח) נגדיר כדור פתוח במרוכבים על־ידי $B(z,r)=\{w\in\mathbb{C}\mid d(z,w)<r\}$.

ניזכר בהגדרה של קבוצות פתוחות וסגורות:

הגדרה 1.8 (קבוצה פתוחה וסגורה) קבוצה $U\subseteq\mathbb{C}$ תיקרא **פתוחה** אם $\forall z\in U\exists r\in\mathbb{R},B(z,r)\subseteq U$.
קבוצה $F\subseteq\mathbb{C}$ תיקרא **סגורה** אם המשלים שלה $F^C=\mathbb{C}\setminus F$ הוא קבוצה פתוחה.

הגדרה 1.9 (פנים של קבוצה) פנים של $A\subseteq\mathbb{C}$ מוגדר על־ידי $\operatorname{int}(A)=\{z\in A\mid \exists r>0,B(z,r)\subseteq A\}$.

הגדרה 1.10 (חוץ של קבוצה) החוץ של A מוגדר על־ידי $\operatorname{Ext}(A)=\operatorname{int}(\mathbb{C}\setminus A)$.

הגדרה 1.11 (שפה של קבוצה) השפה של A תוגדר להיות $\partial A=\mathbb{C}\setminus(\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{Ext}(A))$.

הגדרה 1.12 (סגור של קבוצה) הסגור של A הוא $A\cup\partial A$,

הגדרה 1.13 (קבוצה חסומה וקבוצה קומפקטית) קבוצה A היא חסומה אם קיים $R>0$ כך ש־$A\subseteq B(0,R)$ וקבוצה K היא קומפקטית אם היא סגורה וחסומה.

2 שיעור 2 — 3.11.2024

2.1 התכנסות ורציפות

הגדרה 2.1 (התכנסות סדרות מרוכבים) תהי סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$, נאמר ש־$z_n \to z$ אם $\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$. נבחין כי זהו גבול מעל הממשיים.

תרגיל 2.1 תהי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ ונסמן $x_n = \mathrm{Re}(z_n), y_n = \mathrm{Im}(z_n)$ אז $x_n \to x \wedge y_n \to y \iff z_n \to z$. כאשר $z = x + iy$.

דוגמה 2.1 תהי $z_n = 2^{1/n} + i2^{-n}$ ונבדוק אם היא מתכנסת. נבחן את הערך הממשי שלה, $x_n = \mathrm{Re}(z_n) = 2^{1/n} \xrightarrow{x\to\infty} 1$. באופן דומה $y_n = \mathrm{Im}(z_n) = 2^{-n} \xrightarrow{x\to\infty} 0$. ולכן $z_n \to 1$.

דוגמה 2.2 אם לעומת זאת $z_n = (-1)^n 2^{1/n} + i2^{-n}$, $x_{2n} = \mathrm{Re}(z_{2n}) = 2^{1/2n} \xrightarrow{x\to\infty} 1$
אבל $x_{2n+1} = \mathrm{Re}(z_{2n+1}) = -2^{1/(2n+1)} \xrightarrow{x\to\infty} -1$. ולכן z_n לא מתכנסת.

הגדרה 2.2 תהי $G \subseteq \mathbb{C}$, ותהי $f : G \to \mathbb{C}$. נאמר ש־f רציפה בסביבת z אם לכל סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$z_n \to z$ מקיימת $f(z_n) \to f(z)$.
נאמר ש־f רציפה (רציפה ב־G) אם לכל $z \in G$ מתקיים ש־f רציפה ב־z.

דוגמה 2.3 נגדיר $f(z) = \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) + i\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}$ ונגדיר $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$.
אנו יודעים שיש התכנסות אם ורק אם יש התכנסות בחלק הממשיים ובחלק המדומה בנפרד, נקבל

$$\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) = x \cdot y$$

ולכן f רציפה כפונקציה מ־$\mathbb{R}^2$ ל־$\mathbb{R}$. נבדוק את החלק המדומה

$$\mathrm{Im}(f) = \frac{\mathrm{Re}\, z}{\mathrm{Im}\, z} = \frac{x}{y}$$

ולכן f רציפה לכל $y \neq 0$. נסיק מהתרגיל כי f אכן רציפה ב־G.

ניזכר בהגדרת הקשירות

הגדרה 2.3 (קשירות) תהי $G \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, התנאים הבאים שקולים:

1. אם $U \subseteq G$ פתוחה וגם $G \setminus U$ פתוחה אז $U = G$ או $U = \emptyset$
2. קשירות פוליגוניאלית: לכל $z, w \in G$ קיים $z \le a_1, \ldots, a_n \le w$ כך ש־$[a_j, a_{j+1}] \subseteq G$.
   נבחין כי $[z, w] = \{t \cdot z + (1-t) \cdot w \mid t \in [0, 1]\}$.
   הרעיון הוא שיש קבוצת כדורים פנימיים בקבוצה שמחברים בין שתי נקודות, מעין יצירת מסלול בין כל שתי נקודות על־ידי יצירת כדורים.
3. כל פונקציה קבועה מקומית היא קבועה.
   ההגדרה לפונקציה קבועה מקומית היא $\forall z \in G, \exists r, B(z, r) \subseteq G \wedge f\mid_{B(z,r)} -c$. בפועל המשמעות היא שבכל קבוצה מבודדת הערך קבוע.

הגדרה 2.4 (תחום) תחום הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

הערה כל $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ניתן לכתוב $G = \biguplus G_i$ ו־G_i תחום.

2.2 הטלה סטריאוגרפית

המטרה היא להטיל את המרחב שמורכב מהמישור המרוכב וציר נוסף לספירת היחידה. נגדיר את ספירת היחידה להיות S^2. במצב זה הצירים x, y מייצגים את המישור המרוכב עצמו, על־ידי $z = x + iy, z = 0$. נגדיר $N = (0, 0, 1)$ הנקודה העליונה של ספירת היחידה. לכל $z \in \mathbb{C}$ נסמן ב־$L_z = \{t \cdot P_z + (1-t)N \mid t \in \mathbb{R}\}$ ונסמן $P_z = (x, y, 0) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), 0)$. בהטלה מהסוג הזה אנו מסתכלים על N בתור אינסוף.
עתה נגדיר $\phi : \mathbb{C} \to S^2$. כל נקודה על L_z היא מהצורה $tP_z + (1-t)N = (tx, ty, (1-t))$ פריט המידע השני הוא שהנקודה צריכה להיות על ספירת היחידה, דהינו $tP_z + (1-t)N \in S^2$, לכן $1 = \|tP_z + (1-t)N\|^2 = t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 \iff 2t = t^2(1 + |z|^2)$,
כאשר $|z|^2 = x^2 + y^2$. במקרה $t = 0$ נקבל את N ולכן הוא לא מעניין, אם $t \neq 0$ אז $t = \frac{2}{1+|z|^2}$. נקבל

$$t \cdot P_z + (1-t)N = \left(\frac{2x}{1+|z|^2}, \frac{2y}{1+|z|^2}, 1 - \frac{2}{1+|z|^2}\right)$$

נחשב את $\phi^{-1}:S^2\to\mathbb{C}$.

עתה $P=(x_0,y_0,z_0)\in S^2$, דהינו $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$, אך עדיין אם $\phi^{-1}(P)=z$ אז $P\in L_z$ ובהתאם $z\in L_p$, כאשר

$$L_p=\{tP+(1-t)N \mid t\in\mathbb{R}\}$$

ולכן

$$\operatorname{Re}(z)=tx_0,\quad \operatorname{Im}(z)=ty_0,\quad \{z=0\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

אם כך נקבל

$$tz+(1-t)=0\iff t(z-1)=-1\implies t=\frac{1}{1-z_0}$$

אז

$$\operatorname{Re}(z)=\frac{x_0}{1-z_0},\quad \operatorname{Im}(z)=\frac{y_0}{1-z_0}$$

אם $z_0=1$ אז הנקודה מתאימה לאינסוף, ולכן נשתמש ב־$\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ במקום ב־$\mathbb{C}$ עצמו.

במקרה זה גם נוכל לקבל מטריקה חדשה.

הגדרה 2.5 $z,w\in\mathbb{C}$, אז נגדיר $\rho(z,w)=\|\phi(z)-\phi(w)\|$.

במקרה זה נקבל $\rho^2(z,w)=\cdots=\frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}$.

גם

$$\rho(z,\infty)=\lim_{w\to\infty}\rho(z,w)=\lim_{w\to\infty}\frac{2|\frac{z}{w}-1|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\frac{1}{w}|^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

תרגיל 2.2 אם $w_n\to\infty$ לא חסום אז $\rho(w_n,\infty)\to 0$.

מה קורה למעגלים ב־S^2 תחת ϕ_{-1}?

נשים לב שאם C מעגל על S^2 אז בהכרח $C=S^2\cap P_C$ עבור P_C מישור כלשהו.

$$P_C=\{(x,y,z)\mid ax+by+cz=d, a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

תהי $z\in\mathbb{C}$ המקיימת $\phi(z)\in C$ אז בפרט $\phi(z)\in P_C$, אז נציג $\phi(z)$ במשוואת המישור

$$d=a\cdot\frac{2\operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2}+b\cdot\frac{2\operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2}+c\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\implies d+c=2a\operatorname{Re}(z)+2b\operatorname{Im}(z)+|z|^2(c-d)$$

נבחן את המקרה ש־$c=d$, נקבל

$$c=a\operatorname{Re}(z)+b\operatorname{Im}(z)=ax+by$$

וזהו למעשה ישר במישור. אם $c\neq d$ אז מקבלים משוואת מעגל

$$c+d=a2x+2by+(x^2+y^2)(c-d)\iff (x-A)^2+(y-B)^2=C^2$$

המשמעות היא שאם $c=d$ אז $N\in P_C$ ואם $c\neq d$ אז $N\notin P_C$.

2.3 דיפרנציאביליות

מעכשיו $F:U_z\to\mathbb{C}$ כאשר U_z סביבה פתוחה של z, לדוגמה כדור פתוח סביב z. נראה תזכורת מ־$\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

f דיפרנציאבילית ב־(x_0,y_0) אם ניתן לחקור את הפונקציה על־ידי חקירת קירוב לינארי שלה, דהינו

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{1}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}\|f(x,y)-f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\|=0$$