

## פתרון ממ"ן 12 – אלגברה לינארית 2 (20229)

21 במרץ 2023

## שאלה 1

### סעיף א'

נגדיר

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$$

נבדוק אם כל אחת מן המטריצות נורמליות ואם כן נמצא מטריצה אוניטרית המלכסנת אותן.

נבדוק אם  $A_1$  נורמלית:

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

לכן בהכרח  $A_1 A_1^* = A_1^* A_1$  וכן  $A_1$  נורמלית. נחשב את הפולינום האופייני של  $A_1$ :

$$p(t) = \begin{vmatrix} t & -i \\ i & t \end{vmatrix} = t^2 - (-i)i = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

אז למטריצה שני ערכים עצמיים  $1, -1$ . נמצא את  $V_{-1}$  על-ידי פתרון המערכת:

$$A_1 u = -u \rightarrow (A_1 + I)u = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + iR_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow V_{-1} = \text{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן בבסיס האורתוגונלי של  $V_{-1}$  ישנו רק הווקטור  $\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ .

נמצא את המרחב  $V_1$  באופן דומה:

$$(A_1 - I) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow iR_2, R_2 \rightarrow R_2 - R_1]{R_1 \rightarrow -R_1} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow V_1 = \text{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בבסיס האורתוגונלי של  $V_{-1}$  ישנו הווקטור  $\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ .

בשל כך המטריצה  $P$  המוגדרת להלן מלכסנת אוניטרית את  $A_1$ :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

נחשב את  $A_2^*$ :

$$A_2^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$$

נבדוק אם  $A_2$  נורמלית:

$$A_2 A_2^* = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^* A_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

אנו רואים כי  $A_2 A_2^* \neq A_2^* A_2$  ולכן  $A_2$  איננה נורמלית.

נבדוק אם  $A_3$  נורמלית, תחילה נבחין כי

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix}$$

נבדוק אם היא נורמלית:

$$A_3 A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_3^* A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$

אנו רואים כי המטריצה  $A_3$  אכן נורמלית.

נחשב את הפולינום האופייני של  $A_3$ :

$$p(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -i \\ -1 & t-2-i \end{vmatrix} = (t-1)(t-2-i) + i = t^2 + (-3-i)t + 2 \rightarrow t = \frac{3+i \pm \sqrt{8+6i-8}}{2} = \frac{3+i \pm (\sqrt{3} + \sqrt{3}i)}{2}$$

נשתמש בחישוב שמבוצע בתשובה 3.2.2 עבור המטריצה ולכן המטריצה האוניטרית היא

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}}(1-i) & \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3-\sqrt{3}}}(1-i) \end{pmatrix}$$

## סעיף ב'

נמצא אילו מבין המטריצות המוגדרות להלן חיוביות.

נגדיר

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה ממשית וסימטרית, ולכן גם נורמלית. נחשב את ערכיה העצמיים:

$$p(t) = (t-1)^2 - 1 = t^2 - 2t = t(t-2)$$

לכן ערכיה העצמיים הם 0, 2 והיא חיובית אך לא חיובית לחלוטין.

נגדיר

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

קל לראות כי המטריצה צמודה לעצמה, נחשב את ערכיה העצמיים:

$$p(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

למטריצה ערך עצמי שלילי ולכן היא לא חיובית כלל לפי משפט 3.2.2. נגדיר

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה זו לא צמודה לעצמה, ולכן לא יכולה להיות מטריצה חיובית כלל.

נגדיר

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

גם מטריצה זו לא סימטרית ולכן לא עומדת בהגדרה 1.2.5 כלל.

נגדיר

$$C_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מטריצה זו סימטרית, נחשב את ערכיה העצמיים:

$$p(t) = (t-2)^2 - 1 = t^2 - 4t + 4 - 1 = t^2 - 4t + 3 = (t-3)(t-1)$$

לכן לפי משפט 3.2.2 המטריצה חיובית לחלוטין.

נגדיר

$$C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

גם מטריצה זו לא סימטרית ולכן לא חיובית.

## שאלה 2

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מממד סופי ותהי  $T : V \rightarrow V$  העתקה ליניארית נורמלית.

i

נוכיח כי  $\ker T = \ker T^*$ .

יהי  $u \in \ker T$ , אז מתקיים  $Tu = 0$  ובשל כך גם  $\|u\| = 0$ .

על-פי הגדרת הנורמה מתקיים גם  $(Tu, Tu) = 0$  אז

$$0 = (Tu, Tu) = (u, T^*Tu) = (u, TT^*u) = (T^*u, T^*u) = \|T^*u\|^2 = 0$$

בשל הגדרת המכפלה הפנימית נובע כי  $T^*u = 0$ .

נשים לב כי בשל סימטריות המטריצות הנורמליות נוכל להוכיח באופן דומה גם כי אם  $T^*u = 0$  אז  $Tu = 0$ , ולכן מתקיים  $\ker T = \ker T^*$ .

ii

נוכיח כי  $\operatorname{Im} T = (\ker T)^\perp$ .

על-פי משפט 3.2.1 ההעתקה  $T$  היא לכסינה אוניטרית בפרט ולכן לכסינה בכלל. מסיבה זו כל וקטור ב- $V$  הוא וקטור עצמי לאיזושהו ערך עצמי ב- $T$ .

יהיו  $u \in \operatorname{Im} T$ ,  $v \in \ker T$ . נשים לב כי  $v$  הוא וקטור עצמי של 0, ואילו  $u$  וקטור עצמי לערך עצמי  $\lambda \neq 0$ .

בשל היותם ערכים עצמיים שונים, לפי משפט 3.2.6 הוקטורים אורתוגונליים זה לזה.

נכליל את הטענה הזו ונראה שלכל  $u$  כזה התנאי מתקיים לכל  $v$ , לכן  $u \in (\ker T)^\perp$ .

באופן דומה נוכל להכליל את הטענה על התמונה, ולכן  $\operatorname{Im} T = (\ker T)^\perp$ .

iii

נוכיח כי  $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$ .

על-פי סעיף ii מתקיים

$$\operatorname{Im} T^* = (\ker T^*)^\perp$$

וידוע כי  $\ker T = \ker T^*$  על-פי סעיף i, לכן

$$\operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\perp = \operatorname{Im} T$$

### שאלה 3

יהי  $V$  מרחב מכפלה עצמית מממד סופי ו- $T : V \rightarrow V$  העתקה לינארית המקיימת

$$T^2 = \frac{1}{2}(T + T^*)$$

נוכיח כי  $T$  נורמלית ומתקיים  $T^2 = T$ .

$$TT^* = T(2T^2 - T) = T(2T - I)T = (2T^2 - T)T = T^*T$$

אנו רואים כי  $T$  נורמלית.

נוכיח גם כי  $T^2 = T$ .

יהי  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$  ו- $u$  וקטור עצמי שלו.

לפי למה 3.2.5  $\bar{\lambda}$  ערך עצמי של  $T^*$  ו- $u$  וקטור עצמי שלו, דהינו  $Tu = \lambda u, T^*u = \bar{\lambda}u$ .

עוד אנו יודעים כי  $T^2u = T\lambda u = \lambda^2u$  מתקיים

$$T^2u = \lambda^2u = \frac{1}{2}(\lambda u + \bar{\lambda}u) = \frac{1}{2}(Tu + T^*u)$$

אז נוכל להניח גם כי

$$2\lambda^2 = \lambda + \bar{\lambda}$$

נניח כי המרחב מוגדר מעל  $\mathbb{C}$ , כך שכל מרחב מכפלה פנימית הלכה למעשה מוכל בו. נגדיר  $\lambda = a + bi$ , אז

$$2a^2 + 4abi - 2b^2 = a + bi + a - bi$$

דהינו מתקיים

$$\begin{cases} 2ab = 0 \\ 2a^2 - 2b^2 = 2a \end{cases}$$

אילו  $b \neq 0$ , אז נובע מהמשוואה הראשונה כי  $a = 0$  ומהמשוואה השנייה כי  $b = 0$  בסתירה לטענה, אז מהמשוואה הראשונה אנו למדים כי  $a \neq 0$ .

לכן גם  $b = 0$  ומהמשוואה השנייה נובע ש- $a(a - 1) = 0$ , ידוע כי  $a \neq 0$  ולכן  $a = 1$ . מצאנו כי כלל הערכים העצמיים של  $T, T^2, T^*$  הם 1

בלבד, לכן לכל  $v \in V$  מתקיים  $v = T^2v = Tv$  ובהתאם  $T^2 = T$ .

## שאלה 4

תהי  $H$  מטריצה סימטרית ממשיית מסדר  $n \times n$  ויהי  $\lambda$  הערך העצמי המקסימלי של  $H$ .

נוכיח כי לכל  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|v\| = 1$  מתקיים  $v^t H v \leq \lambda$ .

לא יודע