פתרון מטלה 08 — מבוא ללוגיקה, 80423

26 בדצמבר 2024

שאלה 1

תהי L שפה לתחשיב יחסים, תהי φ נוסחה ונניח ש־$x \in Var$.

סעיף א׳

נוכיח שלכל מבנה $\mathcal{A}$ ל־L ולכל השמה $\sigma : Var \to A$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$, אם ורק אם לכל מבנה והשמה כאלה מתקיים $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(\sigma)$.

הוכחה. נניח את הכיוון הראשון, נקבע $\mathcal{A}$ כלשהו ונבחין כי $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$ לכל הצבה σ כזו. לכן בפרט לכל הצבה, גם $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma[x : a])$ לכל $a \in A$.
אבל במצב זה נבחין כי לכל $a \in A$ הטענה מתקיימת, כלומר $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(\sigma)$, ומצאנו כי הטענה אכן חלה.

לכיוון ההפוך נקבע שוב $\mathcal{A}$ כזה המקיים את הטענה והפעם נקבל שאם $\mathcal{A} \models \forall x \varphi(\sigma)$ אז בפרט לכל $a \in A$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma[x : a])$. נוכל אם כן לבנות כל $\sigma : Var \to A$ כך ש־$\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שלכל מבנה $\mathcal{A}$ ל־L ולכל השמה $\sigma : Var \to A$ מתקיים $\mathcal{A} \models \varphi(\sigma)$ אם ורק אם לכל הכללה ψ של φ ולכל מבנה $\mathcal{A}$ ל־L מתקיים $\mathcal{A} \models \psi$.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה.
נבחין כי בסיס האינדוקציה הוא למעשה טענת הסעיף הקודם, ולכן נסיק שהיא אכן חלה.
נניח ש־$FV(\varphi) = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ וכן ש־$\psi = \forall x_0 \dots \forall x_{n-2} \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ ושהטענה חלה עבור פסוקים אלה, ונבחן את $\phi = \forall x_{n-1} \psi(x_{n-1})$. אז מאותה הוכחה של סעיף א׳ נובע שהטענה מתקיימת עבור ϕ ביחס ל־ψ ולכן השלמנו את מהלך האינדוקציה. $\square$

שאלה 2

תהי $L = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ שפה לתחשיב פסוקים, $\alpha \in form_L$.
תהי L' שפה לתחשיב יחסים ו־$\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1} \in form_{L'}$.
תהי $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$ נוסחה המתקבלת מהחלפת כל מופע של p_i ב־φ_i בו־זמנית.

סעיף א׳

נוכיח שזוהי אכן נוסחה.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על מבנה הפסוק בתחשיב פסוקים.
עבור הבסיס נניח ש־$\alpha = p_i$ עבור $i \in [n]$, ולכן מההגדרה $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}} = \varphi_i$ וזוהי כמובן נוסחה.
נניח שהטענה מתקיימת עבור α ונבחן את $(\neg\alpha)$. נניח $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}} = \psi$, ולכן מההגדרה $(\neg\psi) = (\neg\alpha)^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$ וזוהי כמובן נוסחה.
באופן דומה אם α, β מקיימות את הטענה אז קיימות החלפות ψ_0, ψ_1 בהתאמה עבורן, וברור ש־$(\psi_0 \square \psi_1)$ נוסחה לכל $\square \in \mathcal{B}$, אבל זוהי גם תוצאת ההחלפה של $(\alpha \square \beta)$, ולכן השלמנו את מהלך האינדוקציה והטענה אכן מתקיימת. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שאם α טאוטולוגיה אז גם $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$ היא טאוטולוגיה כנוסחה ב־L.

הוכחה. נבחין כי יש משמעות לשאילת שאלה זו בשל תוצאת הסעיף הקודם. נניח ש־$f : form_L \to form_{L'}$ ההחלפה שהגדרנו קודם לכן, ונגדיר גם $g : form_{L'} \to form_{L'_{prop}}$ הבנייה שהגדרנו בהרצאה להחלפת נוסחות יסודיות. נבחין ש־$g \circ f$ היא פונקציה $form_L \to form_{L'_{prop}}$ פונקציית החלפה בין שפות בתחשיב פסוקים המקיימות את טענת שאלה 1 במטלה 3, לכן הרכבה זו משמרת שקילות טאוטולוגית. כלומר אם α טאוטולוגיה אז גם $(g \circ f)(\alpha)$ כפי שרצינו להראות. $\square$

סעיף ג׳

נסיק שנוסחה בשפה לתחשיב יחסים היא טאוטולוגיה אם ורק אם היא מהצורה $\alpha^{p_0,\dots,p_{n-1}}_{\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}}$ עבור טאוטולוגיה α ושפה כלשהי לתחשיב פסוקים L'.

הוכחה. נניח את הכיוון הראשון ולכן משאלה 1 במטלה 3 נוכל להחליף את פסוקיה היסודיים בכל נוסחה תקינה על־פי המוגדר ונקבל נוסחה שהיא טאוטולוגיה מעל תחשיב פסוקים.

נקבל נוסחה שהיא תוצאת החלפה עבור של טאוטולוגיה נסיק מהסעיף הקודם את המבוקש. $\square$

שאלה 3

תהי שפה L לתחשיב פסוקים ויהיו $\psi_0, \psi_1 \in form_L$, נוכיח שאם $\vdash \psi_0$ וגם $\vdash (\psi_0 \to \psi_1)$ אז $\vdash \psi_1$.

הוכחה. נתון כי קיים עץ היסק עבור $\psi_0, (\psi_0 \to \psi_1)$, עץ זה הוא סופי ואנו יכולים לשרשר אותו לתוך עצים אחרים, אז נבנה את עץ ההיסק

1. $\neg\psi_1$
2. פיצול למקרים על ψ_0
   (a) ψ_0
   (b) פיצול למקרים על $(\psi_0 \to \psi_1)$
      i. $(\psi_0 \to \psi_1)$
      ii. ψ_1, כלל היסק לגרירה (מודוס פוננס) וסתירה
      i. $\neg(\psi_0 \to \psi_1)$
      ii. חזרה על כלל העץ עבור $(\psi_0 \to \psi_1)$, למעשה כל מה שמופיע החל מפה יופיע כהמשכים של כלל העלים בעץ הזה, מטעמי נוחות לא נכתוב זאת כך
      iii. $(\psi_0 \to \psi_1)$ וסתירה
   (a) $\neg\psi_0$
   (b) חזרה על כלל העץ עבור ψ_0, למעשה כל מה שמופיע החל מפה יופיע כהמשכים של כלל העלים בעץ הזה, מטעמי נוחות לא נכתוב זאת כך
   (c) ψ_0 וסתירה

הגענו לסתירה בכל ענף ולכן עץ היסק זה מעיד על $\vdash \psi_1$. □

שאלה 4

תהי L שפה לתחשיב פסוקים ויהיו $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \in form_L$, בסעיפים הבאים נכתוב עצי היסק במערכת ההיסק KEP עבור כל טענה.

סעיף א׳

$\psi_0 \vdash (\psi_0 \vee \psi_1)$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(\psi_0 \vee \psi_1)$
2. $\neg\psi_0$, כללי איווי
3. ψ_0, הוספת הנחה, וסתירה

סעיף ב׳

$(\psi_0 \vee \psi_1) \vdash (\psi_1 \vee \psi_0)$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(\psi_1 \vee \psi_0)$
2. $\neg\psi_0$, כללי איווי
3. $(\psi_0 \vee \psi_1)$, הוספת הנחה
4. ψ_0, כללי איווי וסתירה

נבחין כי יכולנו גם לפצל למקרים על ערך ψ_0 ו־ψ_1 כדי לבנות עץ היסק שמתיישב יותר טוב עם הדרך שבה אנו מוכיחים.

סעיף ג׳

$((\psi_0 \vee \psi_1) \vee \psi_2) \vdash (\psi_0 \vee (\psi_1 \vee \psi_2))$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(\psi_0 \vee (\psi_1 \vee \psi_2))$
2. $\neg(\psi_1 \vee \psi_2)$, כללי איווי
3. $\neg\psi_2$, כללי איווי
4. $((\psi_0 \vee \psi_1) \vee \psi_2)$, הוספת הנחה
5. ψ_2, כללי איווי, וסתירה

סעיף ד׳

$((\psi_0 \wedge \psi_1) \wedge \psi_2) \vdash (\psi_0 \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2))$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(\psi_0 \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2))$
2. $(\psi_0 \wedge \psi_1) \wedge \psi_2$, הוספת הנחה
3. ψ_2, כללי גימום
4. פיצול למקרים ψ_0
   (a) ψ_0
   (b) $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$, כללי גימום

(c) פיצול למקרים ψ_1

i. ψ_1

ii. $\neg\psi_2$, כללי גימום וסתירה

i. $\neg\psi_1$

ii. $(\psi_0 \wedge \psi_1)$ כללי גימום מ־2

iii. ψ_1, כללי גימום, וסתירה

(a) $\neg\psi_0$

(b) $\psi_0 \wedge \psi_1$, כללי גימום מ־2

(c) ψ_0, כללי גימום, סתירה

סעיף ה׳

$\vdash (((\psi_0 \vee \psi_1) \wedge \psi_2) \leftrightarrow ((\psi_0 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2)))$.

פתרון נבנה את עץ ההיסק המתאים.

1. $\neg(((\psi_0 \vee \psi_1) \wedge \psi_2) \leftrightarrow ((\psi_0 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2)))$.

2. פיצול למקרים $((\psi_0 \vee \psi_1) \wedge \psi_2)$

(a) $((\psi_0 \vee \psi_1) \wedge \psi_2)$

(b) ψ_2

(c) $\neg((\psi_0 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2))$, כללי גרירה דו־כיוונית

(d) $\neg(\psi_0 \wedge \psi_2)$

(e) פיצול למקרים על ψ_0

i. ψ_0

ii. $\neg\psi_2$, כללי גימום, וסתירה

i. $\neg\psi_0$

ii. $\psi_0 \vee \psi_1$, כללי גימום מ־a

iii. ψ_1, כללי איווי

iv. $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$, כללי איווי

v. $\neg\psi_2$, כללי גימום, סתירה

(a) $\neg((\psi_0 \vee \psi_1) \wedge \psi_2)$

(b) $\neg(\psi_0 \vee \psi_1)$, כללי גימום

(c) $\neg\psi_0$, כללי איווי

(d) $(\psi_0 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2)$, כללי גרירה דו־כיוונית

(e) פיצול למקרים על $(\psi_0 \wedge \psi_2)$

i. $\psi_0 \wedge \psi_2$

ii. ψ_0, כללי גימום, סתירה

i. $\neg(\psi_0 \wedge \psi_2)$

ii. $\psi_1 \wedge \psi_2$, כללי איווי

iii. ψ_1, כללי גימום

iv. $\neg\psi_1$, כללי איווי ל־b, וסתירה

סעיף ו׳

$(\psi_0 \to \psi_1), (\psi_1 \to \psi_0) \vdash (\psi_0 \leftrightarrow \psi_1)$.

פתרון TODO

סעיף ז׳

$\vdash ((\psi_0 \wedge (\neg\psi_0)) \to (\psi_1 \wedge (\neg\psi_1)))$.

פתרון TODO

סעיף ח׳

$\vdash (\psi_0 \to (\psi_1 \to \psi_0))$.

פתרון TODO

סעיף ט׳

$\vdash (((\neg\psi_0) \to (\neg\psi_1)) \to (\psi_1 \to \psi_0))$.

פתרון TODO

סעיף י׳

$\vdash ((\psi_0 \to (\psi_1 \to \psi_2)) \to ((\psi_0 \to \psi_1) \to (\psi_0 \to \psi_2)))$.

פתרון TODO

שאלה 5

נאמר שכלל היסק ניתן להשמטה אם לכ שפה L לתחשיב פסוקים ולכל קבוצת פסוקים Σ ופסוק φ כך ש־$\Sigma \vdash \varphi$ קיים עץ היסק לטענה כך שהכלל אינו מופיע בה, לכל כלל בסעיפים הבאים נוכיח שהוא ניתן להשמטה.

סעיף א׳

$$\frac{(A \rightarrow B), (\neg B)}{(\neg A)}$$

הוכחה. TODO $\square$

סעיף ב׳

$$\frac{(A \leftrightarrow B), A}{B}$$

הוכחה. TODO $\square$

סעיף ג׳

$$\frac{(A \leftrightarrow B), (\neg B)}{(\neg A)}$$

הוכחה. TODO $\square$