פתרון מטלה 02 — פונקציות מרוכבות, 80519

15 בנובמבר 2024

שאלה 1

תהינה $f, g : U \to \mathbb{C}$ פונקציות אנליטיות המוגדרות על קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{C}$.

סעיף א'

נוכיח כי $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.

הוכחה. מהגדרת הנגזרת נובע

$$(f+g)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{(f+g)(z) - (f+g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

אבל שני הביטויים הללו נתונים ולכן מאריתמטיקה

$$(f+g)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + g'(z_0)$$

□

סעיף ב'

נוכיח כי $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

הוכחה. מהגדרת הנגזרת ומרציפות פונקציות גזירות נובע

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{(f(z) - f(z_0)) \cdot g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot g(z) + \frac{f(z_0)g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\
&= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\
&= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)
\end{aligned}$$

□

סעיף ג'

נוכיח כי $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$.

הוכחה. מהגדרת הנגזרת נקבל

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{(f \circ g)(z) - (f \circ g)(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\
&= f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)
\end{aligned}$$

□

שאלה 2

עבור הפונקציות הבאות נמצא את נקודות הגזירות ונקבע באילו נקודות היא אנליטית.

סעיף א'

$$f(x+iy) = (x^2+y^2) + i(-x^2+y^2)$$

פתרון נבחין כי אם נגזור את החלק מממשי נקבל

$$\mathrm{Re}(f(x+iy))' = (x^2+y^2)' = (2x, 2y)$$

ובאופן דומה

$$\mathrm{Im}(f(x+iy))' = (-x^2+y^2)' = (-2x, 2y)$$

כמובן $2y = 2y$ בכל התחום, אך $2x = -2x \iff x = 0$ ולכן היא גזירה על הציר המדומה בלבד.
בהתאם אין נקודה פנימית בתחום הגזירות ולכן f לא אנליטית לאף נקודה.

סעיף ב'

$$g(x+iy) = x^2 + 3iy$$

גם הפעם נחשב

$$\mathrm{Re}(g(x+iy))' = (3x^2, 0), \qquad \mathrm{Im}(g(x+iy))' = (0, 3)$$

אין נקודה בה $0 = 3$ ולכן g לא גזירה באף נקודה.

סעיף ג'

$$h(x+iy) = |x^2-y^2| + 2ixy$$

פתרון נבחן את הנגזרות החלקיות כשאר $x^2 \geq y^2$:

$$\mathrm{Re}(h)' = (2x, -2y), \qquad \mathrm{Im}(h)' = (2, 2)$$

ונקבל גזירות כאשר $x = 1, y = -1$ בלבד.
נבחן את הנגזרות החלקיות בשאר המקרים:

$$\mathrm{Re}(h)' = (-2x, 2y), \qquad \mathrm{Im}(h)' = (2, 2)$$

ונקבל $x = -1, y = 1$ בלבד, אך לא מתקיים $1^2 < (-1)^2$ ולכן נוכל להסיק כי $1 - i$ נקודת גזירות יחידה.

סעיף ד'

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, k(z) = az + b\overline{z}$$

פתרון ראינו כבר כי אם $b = 0$ אז k גזירה ואנליטית בכל תחומה.
אילו $a = 0$ נקבל

$$\lim_{z \to z_0} b\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = b \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}$$

ומכאן ניתן לראות כי הצבה של סדרות ממשיות תניב נגזרת 1 והצבת סדרות מדומות תניב -1 ו־k איננה גזירה באף נקודה.
נניח $a, b \neq 0$ ונניח שקיימים ערכים עבורם k גזירה, נקבל אם כך $(az + b\overline{z})'$ גזיר, ומשאלה 1 נסיק $az' + b\overline{z}'$ ביטוי מוגדר, וזו כמובן סתירה לתוצאה שקיבלנו זה עתה.
נסיק שכל עוד $b = 0$ אז k הולומורפית.

שאלה 3

תהי $f : G \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית המוגדרת על תחום $G \subseteq \mathbb{C}$.

סעיף א'

נוכיח כי אם $\forall z \in G, f'(z) = 0$ אז f בהכרח קבועה.

הוכחה. תהינה שתי נקודות $z_0, z_1 \in G$, נניח גם $z_0 \neq z_1$.
נגדיר מסילה $l = [z_0, z_1]$, אז כמובן $l : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ונבחן את הגרסה שלה בשני משתנים $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ במקום.
בגרסה זו נגזרתה מתלכדת עם הנגזרת הכיוונית $Df_{z_1 - z_0} = 0$, ולכן גם $\nabla l = (0, 0)^t$.
ידוע ש־$z_1 \neq z_0 \iff (\mathrm{Re}(z_0) \neq \mathrm{Re}(z_1) \vee \mathrm{Im}(z_0) \neq \mathrm{Im}(z_1))$ נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$\mathrm{Re}(z_0) \neq \mathrm{Re}(z_1)$ ולכן אם $l = (l_1, l_2)$ מספיק שנבחן את l_1.
קיבלנו ש־$l_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ וגם $l'(t) = 0$ לכל $0 \leq t \leq 1$, ולכן $l_1(0) = l_1(1)$ וזאת בסתירה להנחתנו, לכן $z_0 = z_1$ בלבד. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי אם $f(G) \subseteq \mathbb{R}$ אז f בהכרח קבועה.

הוכחה. נראה כי אם $z = x + iy$ אז נובע

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy_0) = \frac{\partial f}{\partial iy}(x_0 + iy_0) = 0$$

דהינו f אנליטית אם ורק אם $f'(z) = 0$ לכל $z \in G$, אז מהסעיף הקודם נובע f קבועה. $\square$

סעיף ג'

נוכיח כי אם $f(\overline{z})$ אנליטית אז f בהכרח קבועה.

הוכחה. מנתון נסיק ישירות כי גם $\overline{f(\overline{\overline{z}})}$ אנליטית, דהינו $\overline{f(z)}$.
אבל ידוע כי גם f גזירה ולכן

$$\frac{\partial f}{\partial iy}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(z) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial iy}(z) = -\frac{\partial f}{\partial iy}(z)$$

ולכן $\frac{\partial f}{\partial iy}(z) = 0$ בלבד, ולכן $f'(z) = 0$ לכל $z \in G$, אז מסעיף א' היא קבועה. $\square$

סעיף ד'

נוכיח כי $\overline{f(\overline{z})}$ אנליטית ונחשב את ערכה.

הוכחה.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\overline{z})}-\overline{f(\overline{z_0})}}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|^2}(\overline{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})})\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{|z-z_0|^2}\overline{(f(\overline{z})-f(\overline{z_0}))(z-z_0)}\\ &= \lim_{z\to z_0}\overline{\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)}\\ &= \overline{\left(\lim_{z\to z_0}\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)}\\ &= \overline{f'(\overline{z})}\end{aligned}$$

□

שאלה 4

נחשב את החלק הממשי, החלק מהדומה, הערך המוחלט ואת השורשים של הפונקציות הנתונות.

סעיף א'

נבחן את $\cos(z)$.

פתרון תחילה נמצא ביטוי בערך ממשי ומדומה לביטוי:

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)})\\ &= \frac{1}{2}(e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y})\\ &= \frac{1}{2}((\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} + (\cos(-x) + i\sin(-x))e^{y})\\ &= \frac{1}{2}(\cos(x)e^{-y} + \cos(x)e^{y}) + i\frac{1}{2}(\sin(x)e^{-y} - \sin(x)e^{y})\end{aligned}$$

נעבור לחישוב הערך המוחלט:

$$\begin{aligned}|\cos(x+iy)| &= \sqrt{(\frac{1}{2}(\cos(x)e^{-y} + \cos(x)e^{y}))^2 + (\frac{1}{2}(\sin(x)e^{-y} - \sin(x)e^{y}))^2}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4}((\cos(x)e^{-y} + \cos(x)e^{y})^2 + (\sin(x)e^{-y} - \sin(x)e^{y})^2)}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(\cos^2(x)e^{-2y} + 2\cos^2(x) + \cos^2(x)e^{2y} + \sin^2(x)e^{-2y} - 2\sin^2(x) + \sin^2(x)e^{2y})}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x)}\end{aligned}$$

לבסוף נבדוק את השורשים על־ידי שימוש בזהות $|\cos(z)| = 0 \iff \cos(z) = 0$, דהינו

$$\frac{1}{2}\sqrt{e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x)} = 0 \iff e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x) = 0 \iff \cos(2x) = \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}$$

אבל כמובן אם $y \neq 0$ נקבל ביטוי קטן מ־-1 ולכן $y = 0$, ו־$\cos(2x) = -1$, דהינו $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

סעיף ב'

נעבור לבדוק את $\sin(z)$.

פתרון ידוע כי $\sin(z) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$, לכן נבצע אותו הליך שעשינו בסעיף הקודם תוך התחשבות בשינוי הסימן ונסיק

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \frac{1}{2i}(\cos(x)e^{-y} - \cos(x)e^{y}) + i\frac{1}{2i}(\sin(x)e^{-y} + \sin(x)e^{y})\\ &= \frac{1}{2}(\sin(x)e^{-y} + \sin(x)e^{y}) + i\frac{1}{2}(\cos(x)e^{y} - \cos(x)e^{-y})\end{aligned}$$

הערך המוחלט הוא:

$$\begin{aligned}|\sin(x+iy)| &= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2(x)(e^{-2y} + 2 + e^{2y}) + \cos^2(x)(e^{y} - 2 + e^{-y})}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{e^{-2y} + e^{2y} - 2\cos(2x)}\end{aligned}$$

לבסוף נקבל שהשורשים הם $z = \pi k$ משיקולים זהים לסעיף הקודם.

סעיף ג'

נחקור את $\tan(z)$:

פתרון נתחיל בחישוב החלק השלם והמדומה על־ידי שימוש בסעיפים הקודמים:

$$\begin{aligned}\tan(x+iy) &= \frac{\frac{1}{2}(\sin(x)e^{-y}+\sin(x)e^{y})+i\frac{1}{2}(\cos(x)e^{y}-\cos(x)e^{-y})}{\frac{1}{2}(\cos(x)e^{-y}+\cos(x)e^{y})+i\frac{1}{2}(\sin(x)e^{-y}-\sin(x)e^{y})}\\ &= \frac{(\sin(x)(e^{-y}+e^{y})+i\cos(x)(e^{y}-e^{-y}))(\cos(x)(e^{-y}+e^{y})-i\sin(x)(e^{-y}-e^{y}))}{e^{-2y}+e^{2y}+2\cos(2x)}\\ &= \frac{\sin(x)\cos(x)((e^{y}+e^{-y})^2-(e^{y}-e^{-y})^2)+i(\sin^2(x)(e^{2y}-e^{-2y})+\cos^2(x)(e^{2y}-e^{-2y}))}{e^{-2y}+e^{2y}+2\cos(2x)}\\ &= \frac{2\sin(2x)+i(e^{2y}-e^{-2y})}{2\cos(2x)+e^{2y}+e^{-2y}}\end{aligned}$$

נעבור לחישוב הערך המוחלט:

$$|\tan(x+iy)| = \frac{\sqrt{4\sin^2(2x)+(e^{2y}-e^{-2y})^2}}{2\cos(2x)+e^{2y}+e^{-2y}}$$

ושורשים כבר חישבנו, שכן $\tan(z)$ מתאפס אם ורק אם $\sin(z)$ מתאפס מהגדרה.

שאלה 5

יהיו $z, w \in \mathbb{C}$.

סעיף א'

נוכיח כי $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

הוכחה.

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = \frac{e^{-2z} + 2e^0 + e^{-2z}}{4} + \frac{e^{-2z} - 2e^0 + e^{2z}}{-4} = 1$$

□

סעיף ב'

נוכיח כי $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.

הוכחה. נחשב

$$\begin{aligned}
\sin(z + w) &= \frac{1}{2i}(e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}) \\
&= \frac{1}{2i}(e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}) \\
&= \frac{1}{4i}(e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{-iw}) \\
&= \frac{1}{4i}(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + \frac{1}{4i}(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw}) \\
&= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)
\end{aligned}$$

□

סעיף ג'

נוכיח את הזהות $\cos(3z) = 4\cos^3(z) - 3\cos(z)$.

הוכחה. נסמן $a = e^{iz}, b = e^{-iz}$, ונבחין כי $ab = e^{iz-iz} = 1$. נשתמש בהגדרת הטריגונומטריות המרוכבות

$$\begin{aligned}
4\cos^3(z) - 3\cos(z) &= 4\frac{(a+b)^3}{2^3} - 3\frac{a+b}{2} \\
&= \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a - 3b}{2} \\
&= \frac{a^3 + 3a + 3b + b^3 - 3a - 3b}{2} \\
&= \frac{e^{i3z} + e^{-i3z}}{2} \\
&= \cos(3z)
\end{aligned}$$

□

שאלה 6

נמצא את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ עבורן $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$ מתכנס.

פתרון נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ על־ידי

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3n+1} & n \equiv 1 \pmod 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

לכן נקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$$

אז נוכל להסיק ממבחן אבל כי הטור מתכנס עבור $z \in \overline{B}(0,1) \setminus \{1\}$.

כמובן עבור $|z| > 1$ נוכל לראות כי הערך המוחלט של הטור מתבדר ולכן גם הטור עצמו.

שאלה 7

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ טור מרוכב מתכנס.

סעיף א'

נוכיח כי אם $|\operatorname{Arg}(\alpha_n)| \le \theta < \frac{\pi}{2}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אז הטור מתכנס בהחלט.

הוכחה. נתון כי $-\theta \le \operatorname{Arg}(\alpha_n) \le \theta$, לכן גם $0 < \cos(\theta) \le \cos(\operatorname{Arg}(\alpha_n)) \le 1$.
עוד נבחין כי $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(\alpha_n)$ מתכנס מהנתון כי הטור המקורי מתכנס, אבל מאי־השוויון הקודם נובע $0 < \operatorname{Re}(\alpha_n)$ ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Re}(\alpha_n)|$ מתכנס אף הוא, מצאנו כי סדרת הערכים הממשיים מתכנסת בהחלט.
נרצה עוד להראות כי $|\operatorname{Im}(\alpha_n)| \le C|\operatorname{Re}(\alpha_n)|$ עבור איזשהו $C \in [0,1]$.
נבחר $m = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\operatorname{Arg}(\alpha_n)|$, אז זהו גם האינפימום של $\cos(\operatorname{Arg}(\alpha_n))$, נגדיר $|\sin(\operatorname{Arg}(\alpha_m))| = C\cos(\operatorname{Arg}(\alpha_m))$ ולכן מהגדרה $|\sin(\operatorname{Arg}(\alpha_n))| \le C\cos(\operatorname{Arg}(\alpha_n))$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אבל אם כך אז $|\operatorname{Im}(\alpha_n)| \le C\operatorname{Re}(\alpha_n)$ לכל n ובהתאם $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Im}(\alpha_n)|$ מתכנס, דהינו מצאנו כי הן הערך הממשי והן הערך המדומה מתכנסים בהחלט, לכן גם $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|$ מתכנס. $\square$

סעיף ב'

נראה כי הטענה לא נכונה אם מניחים שרק $|\operatorname{Arg}(\alpha_n)| < \frac{\pi}{2}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ על־ידי דוגמה נגדית.
פתרון נגדיר $\alpha_n = \frac{1}{n^2} + i(-1)^n \frac{1}{n}$.
לסדרה זו תמיד יש ערך ממשי חיובי ולכן היא מקיימת את תנאי הטענה.
נבחין כי $\operatorname{Re}(\alpha_n) = \frac{1}{n^2} \to 0$ טור מתכנס בהחלט, וגם $\operatorname{Im}(\alpha_n) = \frac{(-1)^n}{n}$ הוא טור לייבניץ ולכן נתכנס, ונקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ מתכנס אף הוא.
לעומת זאת, מחישוב ישיר נקבל

$$|\alpha_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$$

וזו כמובן סדרה ממשית מתבדרת.