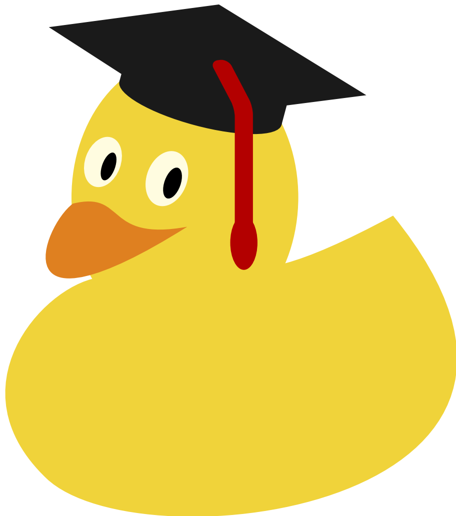
פתרון מטלה 06 — פונקציות מרוכבות, 80519

13 בדצמבר 2024



שאלה 1

נחשב את האינטגרלים המסילתיים הנתונים.

סעיף א׳

$$\int_\gamma (2z - 3\overline{z} + 1)\ dz$$

עבור $\gamma = 3\cos t + 2i\sin t$ ב־$t \in [0, 2\pi]$.

פתרון נתחיל בחישוב הכרחי:

$$\gamma'(t) = -3\sin t + 2i\cos t$$

ונעבור לחישוב האינטגרל

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (2z - 3\overline{z} + 1)\ dz &= \int_0^{2\pi} (2(3\cos t + 2i\sin t) - 3(3\cos t - 2i\sin t) + 1)(-3\sin t + 2i\cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-3\cos t + 10i\sin t + 1)(-3\sin t + 2i\cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2}\sin(2t) - 6 - 24i\sin^2 t - 10\sin(2t) - 3\sin t + 2i\cos t\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} -6 - 6(e^{it} - e^{-it})^2\ dt \\
&= -6\int_0^{2\pi} -1 + e^{2it} + e^{-2it}\ dt \\
&= -6\left[-t - \frac{i}{2}e^{2it} + \frac{i}{2}e^{-2it}\right]_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו באינטגרל של פונקציה טריגונומטרית אפס בתחום.

סעיף ב׳

$$\int_\gamma \cos(\mathrm{Re}(z))\ dz$$

עבור $\gamma(t) = i + e^{it}$ עבור $t \in [-\pi, \pi]$.

פתרון נובע $\gamma'(t) = ie^{it}$ ונבחין כי $\cos(\cos(t)) = -\cos(\cos(t))$ והפונקציה הזו זוגית, לכן

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \cos(\mathrm{Re}(z))\,dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mathrm{Re}(i+e^{it}))\cdot ie^{it}\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(t))\cdot ie^{it}\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(t))(i\cos t - \sin t)\,dt \\
&= i\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(t))\cos t\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(t))\sin t\,dt \\
&= i\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(t))\cos t\,dt - 0 \\
&= 2i\int_{0}^{\pi} \cos(\cos(t))\cos t\,dt \\
&= 2i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\cos(u-\pi/2))\cos(u-\pi/2)\,dt \\
&= 2i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\sin(u))\sin(u)\,dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

סעיף ג׳

$$\int_\gamma \left(\frac{\mathrm{Log}(z)}{z}\right)^2 dz$$

עבור $\gamma = e^{-it}$ ב־ $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

פתרון הפעם $\gamma'(t) = -ie^{-it}$ ולכן

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(\frac{\mathrm{Log}(z)}{z}\right)^2 dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathrm{Log}(e^{-it})}{e^{it}}\right)^2 \cdot (-ie^{-it})\,dt \\
&= i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2 e^{-3it}\,dt \\
&= \left[t^2\frac{e^{-3it}}{-3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} te^{-3it}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3} + \left[t\frac{e^{-3it}}{-3i}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{9i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-3it}\,dt \\
&= \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{27\cdot 2}
\end{aligned}$$

זאת בשל חישוב ישיר, והעובדה ש־$e^{-\frac{\pi}{6}i} - e^{-\frac{\pi}{6}i} = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

שאלה 2

תהי $f: G \to \mathbb{C}$ רציפה ותהי $\gamma : [a,b] \to G$ מסילה.

סעיף א׳

נסמן $M = \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|$ ו־$L(\gamma)$ אורך המסילה γ.
נראה כי מתקיים

$$\left|\int_\gamma f(z)\ dz\right| \leq M \cdot L(\gamma)$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f(z)\ dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt\right| \\
&\leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\ dt && (1) \\
&= \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\ dt \\
&\leq \int_a^b M \cdot |\gamma'(t)|\ dt && (2) \\
&= M \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt \\
&= M \cdot L(\gamma)
\end{aligned}$$

כאשר

1. טענה ששאבנו מאינטגרלים ממשיים מרובי משתנים, ההוכחה עבור המקרה המרוכב זהה לחלוטין.
2. מאינפי 3.

ובכך הראינו כי אי־השוויון אכן חל. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח כי לכל פונקציה על, מונוטונית עולה וגזירה ברציפות למקוטעין $\mu : [c,d] \to [a,b]$ מתקיים

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_{\gamma\circ\mu} f(z)\ dz$$

הוכחה. נבחין תחילה ש־μ היא פונקציה הפיכה מההגדרה שלה.
נעבור לבחינת האינטגרל

$$\int_{\gamma\circ\mu} f(z)\ dz = \int_c^d f(\gamma(\mu(t))) \cdot (\gamma\circ\mu)'(t)\ dt = \int_c^d f(\gamma(\mu(t))) \cdot \gamma'(\mu(t)) \cdot \mu'(t)\ dt$$

אבל מכלל ההצבה האינטגרלי עבור μ^{-1} נובע

$$\int_c^d f(\gamma(\mu(t))) \cdot \gamma'(\mu(t)) \cdot \mu'(t)\ dt = \int_a^b f(\gamma(\mu(\mu^{-1}(t)))) \cdot \gamma'(\mu(\mu^{-1}(t)))\ dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_\gamma f(z)\ dz$$

כפי שרצינו. $\square$

סעיף ג׳

נניח ש־f אנליטית ב־G ונוכיח שמתקיים

$$\int_\gamma f'(z)\ dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

הוכחה. נחלק את המסילה ל־N תת־מסילות באורך שווה ולכן

$$\int_\gamma f'(z)\ dz = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} f'(z)\ dz$$

ובהתאם

$$\left| \int_\gamma f'(z)\ dz \right| \le \sum_{i=1}^{N} \left| \int_{\gamma_i} f'(z)\ dz \right| \le N M_i L(\gamma_1)$$

□