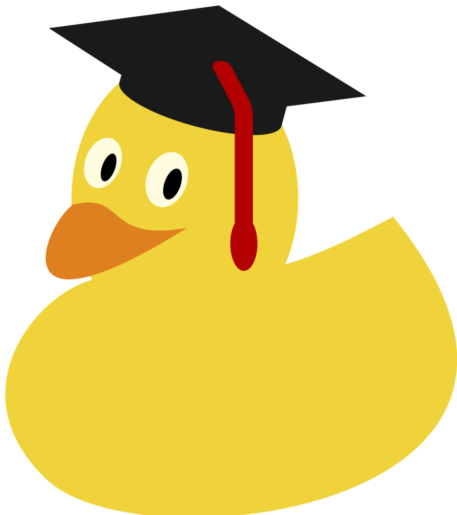
פתרון מטלה 04 — פונקציות מרוכבות, 80519

29 בנובמבר 2024



שאלה 1

תהי $U \subseteq \mathbb{C}$ ונוכיח את הזהויות הבאות עבור $f, g \in C^1(U)$.

סעיף א'

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}$$

הוכחה. נבחן ישירות מהגדרת הגבול

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial z} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(z+h) - f(z))g(z+h) + f(z)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(z+h) - f(z))g(z+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(z)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} g(z+h) \frac{f(z+h) - f(z)}{h} + \lim_{h \to 0} f(z) \frac{g(z+h) - g(z)}{h} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial z}
\end{aligned}$$

□

סעיף ב'

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g\right) \frac{\partial g}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \circ g\right) \frac{\partial \overline{g}}{\partial z}$$

הוכחה. נבצע חישובים חלקיים:

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x} = \frac{\partial f(g, \overline{g})}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ g\right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \overline{g}}{\partial x}\right)$$

וכן גם

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ g\right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial \overline{g}}{\partial y}\right)$$

ולבסוף אנו יודעים כי

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ומהרכבת שלושת השוויונות האחרונים נקבל את השוויון המבוקש:

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g\right) \frac{\partial g}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \circ g\right) \frac{\partial \overline{g}}{\partial z}$$

□

סעיף ג'

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

הוכחה. נשתמש באופרטור Wirtinger של f ונגזור לפי $\overline{z}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{z}} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial\overline{f}}{\partial x} + i\frac{\partial\overline{f}}{\partial y}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial(u-iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u-iv)}{\partial y}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}) \\
&= \frac{1}{2}\overline{(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y})} \\
&= \frac{1}{2}\overline{(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y})} \\
&= \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}
\end{aligned}$$

□

שאלה 2

נמצא את כל הנקודות בהן הפונקציות הנתונות גזירות.

סעיף א'

נגדיר $f(z) = \sin(\overline{z})$.

פתרון נבחין כי כאופרטור Wirtinger מתקיים

$$f(z,\overline{z}) = \sin(\overline{z}) = \frac{e^{i\overline{z}} - e^{-i\overline{z}}}{2i} = \frac{e^{i(x-iy)} - e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix+y} - e^{-ix-y}}{2i}$$

ובתרגול ראינו כי הפונקציה גזירה אם ורק אם $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, לכן נבדוק:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2i}(ie^{ix+y} + ie^{-ix-y} + i(e^{ix+y} + e^{-ix-y}))) = \frac{1}{2}(e^{ix+y} + e^{-ix-y}) = \cos(\overline{z})$$

בדיעבד זה נובע ישירות.

נבדוק איפוס

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \cos(\overline{z})$$

וממטלה 2 נסיק שאלו הן הנקודות $z = \frac{\pi}{2} + \pi k + 0i$.

סעיף ב'

נגדיר $g(z) = e^{|z-1|^2}$.

פתרון נבחין כי מתקיים $e^{|z-1|^2} = e^{(z-1)\overline{(z-1)}} = e^{z\overline{z}-z-\overline{z}+1}$ ולכן

$$g(z,\overline{z}) = \exp(z\overline{z} - z - \overline{z} + 1)$$

ובהתאם

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = (z-1)\exp(z\overline{z} - z - \overline{z} + 1)$$

אז מתקיים

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = 0 \iff (z-1)g(z,\overline{z}) = 0 \iff z = 1, g(z,\overline{z}) = 0$$

אבל g לא מתאפסת כאקספוננט ממשי, ולכן g גזירה ב־$z = 1$ בלבד.

סעיף ג'

נגדיר $h(z) = \overline{\text{Log}(z)} - |z|^2$.

פתרון במקרה זה מתקיים

$$h(z,\overline{z}) = \log(\sqrt{z\overline{z}}) - \text{Arg}(z) - z\overline{z}$$

ולכן

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = \frac{\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{\overline{z}}}}{\sqrt{z\overline{z}}} - z = \frac{1}{2\overline{z}} - z$$

נשווה לאפס

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = 0 \iff 1 = 2z\overline{z} \iff |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ולכן הפונקציה גזירה על המעגל $\partial B(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

שאלה 3

נגדיר

$$f(z)=\begin{cases}\left(\frac{z}{|z|}\right)^4 & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$$

ונוכיח כי f דיפרנציאבילית כפונקציה ממשית ב־$\mathbb{C}\setminus\{0\}$, מקיימת את משוואות קושי־רימן ב־$z=0$ ולמרות זאת אינה גזירה באף נקודה.

הוכחה. כדי ש־f תהיה דיפרנציאבילית בתחום הנתון, די לבדוק את הנגזרות החלקיות שלה בתחום:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^4=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}\right)^2\\ &=2\left(\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{(2x+2iy)(x^2+y^2)-2x(x+iy)^2}{(x^2+y^2)^2}=4\frac{(x+iy)^3}{(x^2+y^2)^3}\cdot(y^2-ixy)\end{aligned}$$

וכן באופן דומה גם

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2\left(\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{(-2y+2ix)(x^2+y^2)-2y(x+iy)^2}{(x^2+y^2)^2}=4\frac{(x+iy)^3}{(x^2+y^2)^3}\cdot(ix^2-yx)$$

מצאנו ביטוי רציף בתחום לשתי הפונקציות ולכן נסיק כי f אכן דיפרנציאבילית.

עוד נבחין כי הפונקציה כפונקציה ממשית היא רציפה ב־0 ונחשב את הנגזרות החלקיות שם בהתאם לביטויים שמצאנו:

$$\frac{\partial f}{\partial z}\ |_0=\lim_{x\to 0}4\frac{x^3}{x^6}\cdot 0=0$$

ובאותו אופן נקבל גם $\frac{\partial f}{\partial y}\ |_0=0$ ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית ב־$z=0$ ומשוואות קושי־רימן מתקיימות (עבור 0).

לבסוף נבחין שממשוואות קושי־רימן עבור הנגזרות שמצאנו מתקבל שהפונקציה גזירה $y^2=-yx$ וכן $-xy=yx$ וזה כמובן מתקיים רק ב־0, אך הפונקציה כלל לא רציפה בנקודה זו לפי בחירת סדרה מתאימה ושימוש באפיון היינה לגבולות. □

שאלה 4

בכל סעיף נגדיר פונקציה ונוכיח שהיא הרמונית, ולאחר מכן נחשב את הצמוד ההרמוני שלה.

סעיף א'

נגדיר $u_1(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y)$.

הוכחה. נחשב

$$\nabla u_1 = (e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y), e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y))$$

ולכן

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x(y\cos y + x\sin y + 2\sin y) + e^x(-\sin y - \sin y - y\cos y - x\sin y) = e^x(0) = 0$$

אז u_1 היא אכן פונקציה הרמונית, ונעבור לחישוב הצמוד ההרמוני שלה. נגדיר

$$\begin{aligned} v_1(x,y) &= C - \int_0^x \frac{\partial u_1}{\partial y}(t,0)\,dt + \int_0^y \frac{\partial u_1}{\partial x}(0,t)\,dt \\ &= C - \int_0^x e^t(1-0+t)\,dt + \int_0^y e^0(t\cos t + 0 + \sin t)\,dt \\ &= C - xe^x + y\sin y \end{aligned}$$

ולכן $v_1(x,y) = y\sin y - xe^x$ המשלים ההרמוני של u_1. □

סעיף ב'

נגדיר $u_2(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 6xy - 3x$.

הוכחה. נגזור

$$\nabla u_2 = (3x^2 - 3y^2 + 6y - 3, -6xy + 6x)$$

ולכן

$$\triangle u_2 = 6x - 6x = 0$$

ואכן הפונקציה הרמונית, נעבור לחישוב המשלים

$$v_2(x,y) = C - \int_0^x \frac{\partial u_2}{\partial y}(t,0)\,dt + \int_0^y \frac{\partial u_2}{\partial x}(0,t)\,dt = C - 3x^2 - y^3 + 3y^2 - 3y$$

ולכן הצמוד ההרמוני הוא $v_2(x,y) = -3x^2 - y^3 + 3y^2 - 3y$. □

סעיף ג'

נגדיר $u_3(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

הוכחה. הפעם

$$\nabla u_3 = (\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2})$$

ולכן

$$\triangle u_3 = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)2x(y^2-x^2) + -2x(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)2y(-2xy)}{(x^2+y^2)^4} = 0$$

ולכן הפונקציה הרמונית ונשאר לחשב את המשלים ההרמוני שלה.

$$\begin{aligned} v_3(x,y) &= C - \int_1^x \frac{\partial u_3}{\partial y}(t,0)\,dt + \int_0^y \frac{\partial u_3}{\partial x}(1,t)\,dt \\ &= C - \int_1^x \frac{0}{\left(t^2+0^2\right)^2}\,dt + \int_0^y \frac{t^2-1^2}{\left(1^2+t^2\right)^2}\,dt \\ &= C + \arctan y - 2\int_0^y \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt \\ &= C - \frac{y}{y^2+1} \end{aligned}$$

ולכן $v_3(x,y) = -\frac{y}{y^2+1}$. $\square$

שאלה 5

יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום ו־$u, v : G \to \mathbb{R}$ פונקציות הרמוניות כך ש־v צמודה הרמונית של u.

סעיף א'

נוכיח כי אם w צמודה הרמונית נוספת של u אז $v - w$ בהכרח קבועה.

הוכחה. נבחין כי הן $u + iv$ והן $u + iw$ פונקציות אנליטיות ולכן מתקיים מקושי־רימן

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

אבל גם

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

ולכן נובע ישירות

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

ולכן v ו־w זהות עד כדי קבוע, דהינו $v - w$ פונקציה קבועה. □

סעיף ב'

נוכיח כי אם u גם צמודה הרמונית של v אז u, v בהכרח קבועות.

הוכחה. נתון כי $u + iv$ אנליטית וכן $v + iu$ אנליטית, לכן מתקיים

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

אבל גם

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

ולכן נובע

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

ונובע $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ובאותו אופן נקבל את איפוס כל שאר הנגזרות החלקיות, ולכן u, v פונקציות קבועות. □

סעיף ג'

נוכיח כי אם $u^2 + v^2 = 1$ אז u, v בהכרח קבועות.

הוכחה. מהנתון נובע

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2) = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ובאופן דומה

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

ובשילוב זהה לסעיף הקודם עם משוואות קושי־רימן נובע כי u, v קבועות. □

סעיף ד'

נוכיח כי $u^2 - v^2$ ו־uv הרמוניות.

הוכחה. נחשב את הלפלסיאן של הפונקציות החדשות:

$$\begin{aligned}\triangle(u^2-v^2) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2-v^2)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2-v^2)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2u\frac{\partial u}{\partial x}-2v\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(2u\frac{\partial u}{\partial y}-2v\frac{\partial v}{\partial y})\\ &= 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\\ &= 0\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון היה שימוש בלפלסיאנים של u, v.

באופן דומה נבחן את הלפלסיאן של uv:

$$\begin{aligned}\triangle uv &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}uv+\frac{\partial^2}{\partial y^2}uv\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}v+\frac{\partial v}{\partial x}u)+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial y}u)\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}v+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}u\\ &= 2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\ &\overset{C.S.}{=} 2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-2\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

שאלה 6

יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ כדור פתוח ו־$h \in C^2(G)$. נוכיח כי $h(z) = f(z) + \overline{g(z)}$ עבור פונקציות אנליטיות $f, g : G \to \mathbb{C}$ אם ורק אם $h = u + iv$ עבור $u, v : G \to \mathbb{R}$ הרמוניות.

הוכחה. נניח ש־$h = f + \overline{g}$ עבור f, g אנליטיות בתחום.

לכן מטענה מהכיתה נובע $f = u + i\tilde{u}$ ו־$g = v + i\tilde{v}$ עבור $u, v \in Harm(G)$.

בהתאם נובע ש־$h = (u + v) + i(\tilde{u} - \tilde{v})$, אבל גם $u + v, \tilde{u} - \tilde{v} \in Harm(G)$ וקיבלנו את הרצוי.

נניח ש־$h = u + iv$ עבור $u, v \in Harm(G)$.

נגדיר $f = u_f + iv_f, g = u_g + iv_g$ כך שמתקיים

$$h = u + iv = f + \overline{g} = (u_f + u_g) + i(v_f - v_g)$$

ולכן

$$u = u_f + u_g, \qquad v = v_f - v_g$$

נגזור את הביטויים ונשתמש בקושי־רימן:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial x} &&= \frac{\partial v_f}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u_f}{\partial y} + \frac{\partial u_g}{\partial y} &&= -\frac{\partial v_f}{\partial y} - \frac{\partial v_g}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v_f}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x} &&= -\frac{\partial u_f}{\partial y} + \frac{\partial u_g}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v_f}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial y} &&= \frac{\partial u_f}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial x}
\end{aligned}$$

לכן נוכל להסיק ש־$\frac{\partial u_f}{\partial x} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})$, ועל־ידי אינטגרציה נמצא ביטוי ל־u_f.

נחזור על תהליך זה ונקבל f, g כמבוקש. $\square$