פתרון מטלה 08 — מבנים אלגבריים 1 (80445)

6 ביולי 2024

שאלה 1

נוכיח שחבורה מגודל n היא פתירה במקרים הבאים.

סעיף א'

נוכיח כאשר $n < 60$.

הוכחה. הוכחנו כי אם G חבורה מסדר $|G| = n$ אז G חבורה אבלית ולכן פתירה או לא אבלית וגם לא פשוטה.
נניח אם כן כי היא לא אבלית ולא פשוטה ולכן נניח כי $N \triangleleft G$ תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית שלה.
אם G/N לא פשוטה אז ממשפט ההתאמה נוכל למצוא עוד תת־חבורה נורמלית גדולה יותר ב־G וכך נוכל לבצע עד שנקבל N מירבית, עבורה G/N פשוטה ולכן ציקלית ואבלית.
נוכל לבדוק כך כל גורם הרכב ונסיק כי G פתירה. □

סעיף ב'

נוכיח כאשר $n = p^r$ כאשר p ראשוני, דהינו כאשר G חבורת p.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על r.
כאשר $r = 0, 1$ החבורה טריוויאלית ולכן פתירה ובגודל p ולכן ציקלית ולכן גם אבלית ופתירה בהתאמה.
נניח כי כל חבורה מסדר p^r היא פתירה ונוכיח כי גם $|G| = p^{r+1}$ היא פתירה.
הוכחנו כי ל־G יש תת־חבורה מגודל p^r, נסמן אותה H, ולכן H פתירה, ונבחין כי $|G/H| = p$ ולכן גורם ההרכב הוא אבלי, ולכן נסיק ממשפט ההרחבה כי גם G עצמה פתירה. □

סעיף ג'

נוכיח כאשר $n = pq$ עבור p, q ראשוניים כלשהם.

הוכחה. כאשר $p = q$ נקבל מתוצאת הסעיף הקודם כי הטענה נכונה, ולכן נניח $p \ne q$.
ממשפט סילו הראשון והשלישי נקבל כי P, Q חבורות p־סילו ו־q־סילו בהתאמה קיימות ו־$P, Q \triangleleft G$ ממשפט סילו השני ושיקולי גודל.
נוכל גם להסיק $|P| = p, |Q| = q$ ולכן שתי החבורות הן ציקליות ואבליות.
נקבל כי $|G/P| = q$ ולכן אבלי, וכמובן גם $|P/\{e\}| = p$ אבלי וקיבלנו כי G פתירה. □

סעיף ד'

נוכיח כאשר n אי־זוגי, מתוך הנחה שכל חבורה סופית פשוטה ולא ציקלית היא זוגית.

הוכחה. נבחן את הסדרה התת־נורמלית של G, נגדיר $\{e\} = G_r \triangleleft \cdots \triangleleft G_0 = G$.
נוכל להסיק כי הסדר של G_i הוא אי־זוגי לכל i. נגדיר את הסדרה להיות סדרת הרכב, ולכן נקבל כי G_i/G_{i+1} היא פשוטה לכל i.
אם נניח כי חבורה זו היא לא ציקלית, ואנו יודעים כי היא פשוטה וסופית, אז נקבל כי היא זוגית, ואז ממשפט ההתאמה נקבל כי קיימת תת־חבורה זוגית ונורמלית של G בסתירה לאי־זוגיותה, ולכן נסיק כי גורם ההרכב ציקלי. נקבל אם כן שהוא גם אבלי ולכן תת־סדרה זו היא אבלית ובהתאם G פתירה. □

שאלה 2

נחשב את החבורה הנגזרת ואת האבליזציה של החבורות הנתונות הבאות.

סעיף א'

עבור החבורה D_4.

נתחיל ונבחין כי $[\sigma^n, \sigma^k] = \sigma^n\sigma^k\sigma^{-n}\sigma^{-k} = \sigma^{n+k-n-k} = e$.
מחישוב נקבל גם $[\tau\sigma^k, \tau\sigma^n] = e$, ולכן נותר לבדוק רק את המקרה $[\tau\sigma^k, \sigma^n] = \tau\sigma^k\sigma^n\tau\sigma^k\sigma^{-n} = \sigma^{-k-n+k-n} = \sigma^{-2n}$. נסיק אם כן ש־$D_4' = \langle\sigma^2\rangle$. נקבל כי $|D_4^{ab}| = 4$ ומחישוב ישיר של המחלקות נקבל כי $D_4^{ab} = \{e, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$.

סעיף ב'

עבור Q_8 חבורת הקווטרניונים.

נתחיל מבחינה של איברים זהים: $[i,i] = iii^{-1}i^{-1}$ ואנו יודעים כי $ij = -ji = k$ ונקבל 1 ולכן כל הקומוטטורים של אותו איבר הם נייטרליים.
נבדוק $[i,j] = ij(-i)(-j) = 1$, ונותר לבדוק את המקרה $[-i,j] = (-i)ji(-j) = kjjiki = ijji = 1$ ונסיק כי $Q_8' = \{1\}$ ובהתאם $Q_8^{ab} = Q_8$.

סעיף ג'

עבור A_4.

אנו יודעים כי A_4 מורכב מהזהות, מחזורים מהצורה $(i\ j\ k)$ ו־$(i\ j)(k\ l)$, ונקבל כי ההופכיים שלהם בהתאמה הם $e, (i\ k\ j), (i\ j)(k\ l)$ בהתאמה.
מצאנו בתרגול כי A_4 מכילה מחלקות צמידות כמו S_4, דהינו לפי גודל וכמות מחזורים בלבד, ולכן איחוד של תת־חבורות אלה בתצורה כלשהי היא הנגזרת.
מספיק אם כן שנראה כי איבר ממחזור זוגי כפול ואיבר שהוא מחזור בגודל שלוש נמצאים בנגזרת. נבדוק את המחזורים מגודל זוגי כפול, כמובן איברים מתחלפים עם עצמם ולכן עלינו לבדוק רק את המקרה $[(i\ j)(k\ l), (i\ k)(j\ l)] = (i\ j)(k\ l)(i\ k)(j\ l)(i\ j)(k\ l)(i\ k)(j\ l) = id$ וקיבלנו כי אין מחזורים כאלה בנגזרת. נבדוק $[(1\ 2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)] = (2\ 1\ 4)(1\ 2)(3\ 4) = (2\ 4\ 3)$ ומצאנו כי קיימת תמורה שהיא מחזור בגודל שלוש ולכן נקבל כי $A_4' = \{id, (i\ j\ k)\}$.
נעבור לבדיקת האבליזציה, נבחין כי $|A_4|/|A_4'| = 12/6 = 2$ ונסיק כי הקבוצת מורכבת ממחלקת המחזורים בגודל שלוש ומחלקת המחזורים הזוגיים בגודל שתיים.

סעיף ד'

עבור S_n לכל $n \geq 2$, כאשר מניחים ש־A_n פשוטה עבור $n \geq 5$.

עבור S_1, S_2 נקבל כי הנגזרת והאבליזציה הן טריוויאליות.
עבור S_3 התת־חבורה הנורמלית הגדולה ביותר היא A_3 על־פי חישוב ישיר ולכן נסיק כי $S_3' = A_3$ ונקבל S_3^{ab} מחולק לפי פירוק המחזורים בלבד.
עבור S_4 נקבל כמובן כי $S_4' = A_4$ ואת השאר נסיק מהסעיף הקודם.
עבור $n \geq 5$ נקבל $A_n \triangleleft S_n$ בלבד, ולכן נסיק $S_n' = A_n$, וידוע כי A_n פשוטה ולכן נותר לחשב את S_n^{ab}.
נקבל מלגרנז' כי $|S_n|/|S_n'| = |S_n^{ab}| = \frac{n!}{\frac{1}{2}n!} = 2$, ונסיק כי המחלקות הן A_n ו$(S_n \setminus A_n) \cup \{e\}$ בלבד.

שאלה 3

תהי G חבורה. נגדיר תת־חבורה $H \leq G$ **כאופיינית** אם $\forall\varphi \in \mathrm{Aut}(G) : \varphi(H) \leq H$.

סעיף א'

נוכיח כי כל תת־חבורה אופיינית היא נורמלית ונראה דוגמה לתת־חבורה נורמלית שאיננה אופיינית.

הוכחה. תהי G חבורה ו־$H \leq G$ אופיינית.
נבחן את האוטומורפיזמים הפנימיים ואת פעולת ההצמדה וממטלה 5 נסיק כי $gHg^{-1} \subseteq H$ ולכן מהתנאים המספיקים לתתי־חבורות נורמליות נקלב $H \triangleleft G$. $\square$

נראה דוגמה לתת־חבורה נורמלית שאיננה אופיינית. נבחן את Q_8 ונבחין כי $H \triangleleft G$ $\{e, i, -1, -i\}$ על־פי מטלה 4.
לעומת זאת אם נגדיר $\varphi(i) = j$ ושאר האיברים נקבעים על־פי מעבר זה או נייטרלי אז נקבל כי $\varphi(H) \not\leq H$.

סעיף ב'

נוכיח כי אם H היא תת־חבורה אופיינית של G ו־K תת־חבורה אופיינית של H, אז גם H תת־חבורה אופיינית של G.

הוכחה. יהי $\varphi_G \in \mathrm{Aut}(G), \varphi_H \in \mathrm{Aut}(H)$ אז נקבל כי $\varphi_G(H) \leq H, \varphi_H(K) \leq K$.
עתה נוכיח כי ניתן לבנות את φ_H כצמצום של φ_G וכך נקבל כי הטענה נכונה.
למעשה, אנו יודעים כי זה נכון שכן הומומורפיזמים משמרים מבנה של חבורה, ולכן נוכל להסיק כי גם נורמליות משתמרת ונקבל כי כל $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ניתן לצמצום על H. $\square$

סעיף ג'

נוכיח ש־$G^{(n)}$ היא אופיינית ב־G לכל $n \geq 1$.

הוכחה. נשים לב שאם G' אופיינית ב־G אז מהטענה של הסעיף הקודם נקבל באינדוקציה כי $G^{(n)}$ אופיינית אף היא ב־G, לכן מספיק שנוכיח כי G' עצמה היא אופיינית ב־G בלבד.

יהי $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ו־$a, b \in G$ כך ש־$\varphi(a) = a', \varphi(b) = b'$, נראה כי

$$\varphi([a, b]) = \varphi(aba^{-1}b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b) = a'b'(a')^{-1}(b')^{-1} = [a', b'] \in G'$$

לכן נוכל להסיק מהסגירות לכפל כי $\varphi(G') \leq G'$ ולכן G' אופיינית ונורמלית. $\square$

סעיף ד'

נוכיח שאם G היא חבורה פתירה לא טריוויאלית אז יש לה תת־חבורה לא טריוויאלית נורמלית פתירה שהיא *אבלית*.

הוכחה. נתון כי G פתירה ולכן סדרת הנגזרות שלה מסתיימת ב־$\{e\}$, נניח כי $G^{(r)}$ הנגזרת הלא טריוויאלית האחרונה בסדרה, דהינו $G^{(r+1)} = \{e\}$.
נשים לב ש־$G^{(r)}/G^{(r+1)}$ אבלית וגם $G^{(r)}/G^{(r+1)} = G^{(r)}/\{e\} = G^{(r)}$ ולכן מצאנו כי יש נגזרת אבלית ל־G.
מהטענה של סעיף א' וסעיף ג' נקבל כי $G^{(r)} \triangleleft G$ והיא כמובן פתירה מהטענה על פתירות תת־סדרות, ומצאנו כי היא לא טריוויאלית, נורמלית, פתירה ואבלית. $\square$

שאלה 4

נוכיח שלכל שדה $\mathbb{F}$, החבורה $B_n(\mathbb{F}) \le GL_n(\mathbb{F})$, חבורת המטריצות המשולשיות העליות ההפיכות, היא פתירה.

הוכחה. מאלגברה לינארית אנו יודעים כי מכפלת שתי מטריצות משולשיות מניבה באלכסון את מכפלת האלכסונים בלבד, ולכן נוכל להסיק כי

$$\begin{aligned}\forall B, B' \in B_n(\mathbb{F}) : [B, B'] = BB'B^{-1}(B')^{-1} \in B_n(\mathbb{F}) \wedge \operatorname{diag}(BB'B^{-1}(B')^{-1}) \\ = \operatorname{diag}(B)\operatorname{diag}(B')(\operatorname{diag}(B))^{-1}(\operatorname{diag}(B'))^{-1} = I_n \\ \implies [B, B'] \in U_n(\mathbb{F})\end{aligned}$$

ולכן מצאנו כי $B_n'(\mathbb{F}) = U_n(\mathbb{F})$, כאשר זו האחרונה היא חבורת המטריצות המשולשיות שאלכסונן 1.
תהינה שתי מטריצות $A, B \in U_n(\mathbb{F})$ ואנו יודעים כי $A, B \sim I_n$, לכן נסיק כי קיימות M_A, M_B הפיכות כך שמתקיים

$$M_A A M_A^{-1} = M_B B M_B^{-1} = I$$

עתה נחשב

$$[A, B] = ABA^{-1}B^{-1} = M_A^{-1}M_A \cdot M_B^{-1}M_B \cdot M_A M_A^{-1} M_B M_B^{-1} = M_A^{-1}M_A M_B M_B^{-1} = I_n$$

ונסיק כי $U_n'(\mathbb{F}) = \{e\}$ ולכן נסיק כי $B_n(\mathbb{F})$ פתירה. $\square$