פתרון ממ"ן 11 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

20 בפברואר 2023

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי $a = k + m\sqrt{2}$ כאשר $k, m \in \mathbb{N}$ הוא מספר אי־רציונלי.

משפט 1.21 גורס כי $\sqrt{2}$ איננו רציונלי, לכן לא קיימים מספרים $p, q \in \mathbb{Z}$ כך ש־$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. אליו היה המספר $m\sqrt{2}$ מספר רציונלי אז היה מתקיים $m\sqrt{2} = \frac{mp}{q}$ בניגוד לאי־רציונליות $\sqrt{2}$, לכן $m\sqrt{2}$ מספר אי־רציונלי. נגדיר $p', q' \in \mathbb{Z}$, מתקיים:

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

לכן מספר כל חיבור מספרים רציונליים הוא מספר רציונלי, אילו הייתה התוצאה $k + m\sqrt{2}$ רציונלית אז היה נגזר כי גם $m\sqrt{2}$ רציונלית, בסתירה להיותו אי־רציונלי. לכן המספר a אי־רציונלי.

סעיף ב'

נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ המספר $(1 + \sqrt{2})^n$ לא רציונלי באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: המספר $(1 + \sqrt{2})^1$ הוא כמובן מספר אי־רציונלי בהתאם לסעיף א'.

מהלך האינדוקציה: נניח כי $(1 + \sqrt{2})^n = k + m\sqrt{2}, k, m \in \mathbb{N}$ אי־רציונלי. מתקיים

$$(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})^n (1 + \sqrt{2}) = (k + m\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = k + m\sqrt{2} + k\sqrt{2} + 2m = (k + 2m) + (m + k)\sqrt{2}$$

ידוע כי $k + 2m, m + k \in \mathbb{N}$ ולכן $(1 + \sqrt{2})^{n+1}$ הוא מספר אי־רציונלי על־פי סעיף א' והושלם מהלך האינדוקציה.

שאלה 2

סעיף א'

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ נוכיח שמתקיים:

$$\left|\sqrt{|a|+1}-\sqrt{|b|+1}\right| \leq \frac{|a-b|}{2}$$

מתקיים לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

נגדיר

$$x=|a|+1, y=|b|+1$$

אז

$$\left|\sqrt{|a|+1}-\sqrt{|b|+1}\right|=\frac{|a|+1-|b|-1}{\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}}=\frac{|a|-|b|}{\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}}$$

בשל הגדרת הערך המוחלט מתקיים

$$0 \leq |a| \to 1 \leq |a|+1 \to \sqrt{1}=1 \leq \sqrt{|a|+1}$$

ולכן תמיד מתקיים

$$2 \leq \sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}$$

בשל הופעת הביטוי במכנה מתקיים:

$$\left|\sqrt{|a|+1}-\sqrt{|b|+1}\right|=\frac{|a|-|b|}{\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}} \geq \frac{|a|-|b|}{2}$$

לפי טענה 1.51:

$$\left|\sqrt{|a|+1}-\sqrt{|b|+1}\right| \geq \frac{|a-b|}{2}$$

סעיף ב'

נוכיח

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2+\left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2=a^2$$

לכל מספר ממשי n מתקיים $a^2=|a| \cdot |a|$ לפי טענה 1.48 סעיף 6. נשתמש בטענה זו ונפתח סוגריים:

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2+\left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2=\frac{a^2+2a|a|+a^2}{4}+\frac{a^2-2a|a|+a^2}{4}=\frac{4a^2+2a|a|-2a|a|}{4}=a^2$$

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח כי לכל $x,y \in \mathbb{R}$ אם $x \le y$ אז $\lfloor x \rfloor \le \lfloor y \rfloor$.

נניח כי $x \le y$. נגדיר $x' = \langle x \rangle, y' = \langle y \rangle$ החלקים השבריים של x, y בהאתמה. מתקיים $x = \lfloor x \rfloor + x', y = \lfloor y \rfloor + y'$ לכן

$$\lfloor x \rfloor + x' \le \lfloor y \rfloor + y'$$

אילו $x' \le y'$ הטענה מתקיימת, לכן נניח $x' > y'$. מתקיים $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$, אחרת יתכן כי החלק השלם של המספרים יהיה זהה, אך החלק השברי x' יהיה גדול מ־y' ויגרור $x > y$ בסתירה להנחה. אז מתקיים בכל מקרה $\lfloor x \rfloor \le \lfloor y \rfloor$.

סעיף ב'

(i) נפתור את המשוואה

$$\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor^2 = 25$$
$$(\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor^2 + 5)(\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor^2 - 5) = 0$$
$$\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor = \pm 5$$

על־פי טענה 1.64(1)

$$\pm 5 \le x - \frac{1}{2} < \pm 5 + 1$$
$$\pm 5 + \frac{1}{2} \le x < \pm 5 + 1\frac{1}{2}$$
$$-4\frac{1}{2} \le x < -3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2} \le x < 6\frac{1}{2}$$

(ii)

$$\lfloor x^2 \rfloor = 9$$
$$9 \le x^2 < 10$$
$$9 \le x^2 \wedge x^2 < 10$$
$$0 \le x^2 - 9 \wedge x^2 - 10 < 0$$
$$0 \le (x-3)(x+3) \wedge (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10}) < 0$$
$$(x \ge 3 \vee x \le -3) \wedge (x < \sqrt{10} \vee x > -\sqrt{10})$$
$$3 \le x < \sqrt{10}, -\sqrt{10} < x \le -3$$

שאלה 4

סעיף א'

תהי הקבוצה

$$A = \left\{ q\sqrt{3} \mid q \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q} \right\}$$

נוכיח כי A צפופה בקטע $[0,1]$.

ידוע כי $\mathbb{Q}$ צפופה ב־$[0,1]$. נגדיר $f:\mathbb{Q}\to A$ המוגדרת $f(x)=x\sqrt{3}$. ניתן לראות כי f על וחד־חד ערכית ולכן הפיכה. לכל שני מספרים $a,b\in A$ אשר מקיימים $a<b$ מתקיים גם $f^{-1}(x)<f^{-1}(y)$, והרי אלו הם מספרים רציונליים אשר ידוע כי צפופים, נבחר מספר c אשר מקיים $f^{-1}(x)<c<f^{-1}(y)$, ונשים לב כי גם מתקיים $x<f(c)<y$. מצאנו כי A צפופה לכל שני מספרים שונים המוכלים בה, לכן היא גם צפופה בתחום $[0,1]$.

סעיף ב'

ננסח הגדרה לחוסר רציפות של קבוצה A בקטע I. תחילה נצרין את הטענה:

$$\neg\forall x,y\in I(x<y\to\exists a\in A(x<a\wedge a<y))$$

נפשט את הפסוק:

$$\exists x,y\in I(x<y\wedge\forall a\in A(x\geq a\vee a\geq y))$$

ננסח את הפסוק שהתקבל:

קבוצה A תיקרא לא צפופה ב־I אם קיימים שני מספרים $x,y\in I$ כך ש־$x<y$ וגם לכל איבר a ב־A מתקיים ש־$a\leq x$ או ש־$a\geq y$.

סעיף ג'

נוכיח כי קבוצת השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 3 אינה צפופה בקטע $[-1,1]$.

נגדיר $a=0.3, b=0.4$, ברור כי $a<b$, $a,b\in[-1,1]$, אך לכל מספר $x\in A$ מתקיים או $x\leq a$ או $x\geq b$, שכן כל מספר שלא עומד בהגדרה זו חייב להיות מהתצורה $0.3\ldots$ ולכן איננו שייך ל־A. אז לפי הגדרת סעיף ב' הקבוצה A איננה צפופה ב־$[-1,1]$.