פתרון מטלה 06 — פונקציות מרוכבות, 80519

14 בדצמבר 2024

שאלה 1

נחשב את האינטגרלים המסילתיים הנתונים.

סעיף א׳

$$\int_\gamma (2z - 3\overline{z} + 1)\, dz$$

עבור $\gamma = 3\cos t + 2i\sin t$ ב־$t \in [0, 2\pi]$.

פתרון נתחיל בחישוב הכרחי:

$$\gamma'(t) = -3\sin t + 2i\cos t$$

ונעבור לחישוב האינטגרל

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (2z - 3\overline{z} + 1)\, dz &= \int_0^{2\pi} (2(3\cos t + 2i\sin t) - 3(3\cos t - 2i\sin t) + 1)(-3\sin t + 2i\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-3\cos t + 10i\sin t + 1)(-3\sin t + 2i\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2}\sin(2t) - 6 - 24i\sin^2 t - 10\sin(2t) - 3\sin t + 2i\cos t\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -6 - 6(e^{it} - e^{-it})^2\, dt \\
&= -6\int_0^{2\pi} -1 + e^{2it} + e^{-2it}\, dt \\
&= -6\left[-t - \frac{i}{2}e^{2it} + \frac{i}{2}e^{-2it}\right]_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו באינטגרל של פונקציה טריגונומטרית אפס בתחום.

סעיף ב׳

$$\int_\gamma \cos(\mathrm{Re}(z))\, dz$$

עבור $\gamma(t) = i + e^{it}$ עבור $t \in [-\pi, \pi]$.

פתרון נובע $\gamma'(t) = ie^{it}$ ונבחין כי $\cos(\cos(t)) = -\cos(\cos(t))$ והפונקציה הזו זוגית, לכן

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \cos(\mathrm{Re}(z))\, dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mathrm{Re}(i + e^{it})) \cdot ie^{it}\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(t)) \cdot ie^{it}\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(t))(i\cos t - \sin t)\, dt \\
&= i\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(t))\cos t\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(t))\sin t\, dt \\
&= i\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(t))\cos t\, dt - 0 \\
&= 2i\int_{0}^{\pi} \cos(\cos(t))\cos t\, dt \\
&= 2i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\cos(u-\pi/2))\cos(u-\pi/2)\, dt \\
&= 2i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\sin(u))\sin(u)\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

סעיף ג׳

$$\int_\gamma \left(\frac{\mathrm{Log}(z)}{z}\right)^2 dz$$

עבור $\gamma = e^{-it}$ ב־ $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

פתרון הפעם $\gamma'(t) = -ie^{-it}$ ולכן

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(\frac{\mathrm{Log}(z)}{z}\right)^2 dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathrm{Log}(e^{-it})}{e^{it}}\right)^2 \cdot (-ie^{-it})\, dt \\
&= i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2 e^{-3it}\, dt \\
&= \left[t^2\frac{e^{-3it}}{-3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} te^{-3it}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3} + \left[t\frac{e^{-3it}}{-3i}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{9i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-3it}\, dt \\
&= \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{27\cdot 2}
\end{aligned}$$

זאת בשל חישוב ישיר, והעובדה ש־ $e^{-\frac{\pi}{6}i} - e^{-\frac{\pi}{6}i} = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

שאלה 2

תהי $f : G \to \mathbb{C}$ רציפה ותהי $\gamma : [a,b] \to G$ מסילה.

סעיף א׳

נסמן $M = \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|$ ו־$L(\gamma)$ אורך המסילה γ.
נראה כי מתקיים

$$\left|\int_\gamma f(z)\ dz\right| \le M \cdot L(\gamma)$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\ dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt\right| \\ &\le \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\ dt \qquad (1) \\ &= \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\ dt \\ &\le \int_a^b M \cdot |\gamma'(t)|\ dt \qquad (2) \\ &= M \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt \\ &= M \cdot L(\gamma)\end{aligned}$$

כאשר

1. טענה ששאבנו מאינטגרלים ממשיים מרובי משתנים, ההוכחה עבור המקרה המרוכב זהה לחלוטין.
2. מאינפי 3.

ובכך הראינו כי אי־השוויון אכן חל. □

סעיף ב׳

נוכיח כי לכל פונקציה על, מונוטונית עולה וגזירה ברציפות למקוטעין $\mu : [c,d] \to [a,b]$ מתקיים

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_{\gamma\circ\mu} f(z)\ dz$$

הוכחה. נבחין תחילה ש־μ היא פונקציה הפיכה מההגדרה שלה.
נעבור לבחינת האינטגרל

$$\int_{\gamma\circ\mu} f(z)\ dz = \int_c^d f(\gamma(\mu(t))) \cdot (\gamma\circ\mu)'(t)\ dt = \int_c^d f(\gamma(\mu(t))) \cdot \gamma'(\mu(t)) \cdot \mu'(t)\ dt$$

אבל מכלל ההצבה האינטגרלי עבור μ^{-1} נובע

$$\int_c^d f(\gamma(\mu(t))) \cdot \gamma'(\mu(t)) \cdot \mu'(t)\ dt = \int_a^b f(\gamma(\mu(\mu^{-1}(t)))) \cdot \gamma'(\mu(\mu^{-1}(t)))\ dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_\gamma f(z)\ dz$$

כפי שרצינו. □

סעיף ג׳

נניח ש־f אנליטית ב־G ונוכיח שמתקיים

$$\int_\gamma f'(z)\ dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

הוכחה. על־ידי שימוש באינטגרל רימן, באדיטיביות האינטגרל ובתכונה שהוכחנו בסעיף א', נוכל לשחזר את ההוכחה של אינפי 2 לנוסחה היסודית הכללית.

בקצרה, נוכל לחלק את המסילה למספר הולך וגדל של תת־מסילות כך שנקודות הקצה הן היחידות שמשפיעות על גודל האינטגרל המלא, זאת תוך שימוש ברציפות הפונקציה ונגזרתה. □

שאלה 3

סעיף א'

נמצא דוגמה לפונקציה אנליטית $f : G \to \mathbb{C}$ ולשתי נקודות שונות $z_0, z_1 \in G$ כך שלכל $z \in G$ מתקיים
$$f'(z) \neq \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}$$

פתרון נגדיר $f(z) = e^z$ ולכן $f'(z) = e^z$, ובנוסף נגדיר $z_1 = 2\pi i, z_0 = 0$ ולכן
$$\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{1 - 1}{2\pi i - 0} = 0$$
אבל אנו יודעים כי $e^z \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$, ולכן נוכל להסיק כי $f'(z) \neq 0$ גם כן.

סעיף ב'

תהי $f : G \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית ו־$z_0, z_1 \in G$ נקודות שונות כך ש־$[z_0, z_1] \subseteq G$.
נראה שמתקיים
$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} \right| \leq \max_{z \in [z_0, z_1]} |f'(z)|$$

הוכחה. נגדיר את המסילה $\gamma = [z_0, z_1]$, ולכן
$$\left| \int_\gamma f'(z)\, dz \right| = |f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| = |f(z_1) - f(z_0)|$$
מצד שני מ־ML נובע גם
$$\left| \int_\gamma f'(z)\, dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in [z_0, z_1]} |f'(z)| = |z_1 - z_0| \cdot \max_{z \in [z_0, z_1]} |f'(z)|$$
ולכן נובע משוויונות אלה
$$|f(z_1) - f(z_0)| \leq |z_1 - z_0| \cdot \max_{z \in [z_0, z_1]} |f'(z)| \iff \left| \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} \right| \leq \max_{z \in [z_0, z_1]} |f'(z)|$$
כמבוקש. $\square$

שאלה 4

יהיו $G, H \subseteq \mathbb{C}$ תחומים ותהי $f : G \times H \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה בשני משתנים.
נאמר ש־$f(z,w)$ אנליטית ב־z אם הנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z,w)-f(z_0,w)}{z-z_0}$ קיימת ורציפה בכל נקודה בתחום.
נגדיר עבור מסילה $\gamma : I \to H$ את הפונקציה $\varphi : G \to \mathbb{C}$ על־ידי

$$\varphi(z) = \int_\gamma f(z,w)\,dw$$

סעיף א׳

נקבע $z_0 \in G$ ונגדיר את הפונקציה $F_{z_0} : G \times H \to \mathbb{C}$ על־ידי

$$F_{z_0}(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z,w)-f(z_0,w)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w) & z = z_0 \end{cases}$$

נראה ש־F_{z_0} רציפה כפונקציה בשני משתנים.

הוכחה. בנקודות $z \neq z_0$ היא רציפה כהרכבת פונקציות רציפות, ולכן מספיק שנבדוק את המקרה $z = z_0$.

$$\lim_{z \to z_0} F_{z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z,w)-f(z_0,w)}{z-z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w) = F_{z_0}(z_0)$$

ולכן היא אכן רציפה. □

סעיף ב׳

נוכיח כי φ אנליטית כך שמתקיים

$$\varphi'(z_0) = \int_\gamma F_{z_0}(z_0,w)\,dw = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w)\,dw$$

הוכחה. נבדוק את הגדרת הנגזרת

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{\int_\gamma F_{z_0}(z,w)\,dw - \int_\gamma F_{z_0}(z_0,w)\,dw}{z-z_0} \\ &= \lim_{z \to z_0} \int_\gamma \frac{F_{z_0}(z,w)-F_{z_0}(z_0,w)}{z-z_0}\,dw \\ &= \lim_{z \to z_0} \int_\gamma F_{z_0}(z,w)\,dw \\ &= \int_\gamma \lim_{z \to z_0} F_{z_0}(z,w)\,dw \\ &= \int_\gamma F_{z_0}(z_0,w)\,dw \\ &= \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w)\,dw \end{aligned}$$

כאשר כלל המעברים נובעים משוויונות נתונים וחוקי אינטגרלים מרובי משתנים שאנו כבר מכירים.
בהתאם מרציפות האינטגרל והפונקציה F_{z_0} נסיק כי φ' אכן מוגדרת. □

סעיף ג׳

נסיק כי $\psi(z) = \int_0^{2\pi} \cos(ze^{it})\,dt$ אנליטית.

הוכחה. נגדיר $f(z,w) = \frac{\cos(zw)}{iw}$ וגם $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ דכ ש־$t \mapsto e^{it}$ ולכן

$$\varphi(z) = \int_\gamma f(z,w)\,dw = \int_0^{2\pi} f(z,e^{it})ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(ze^{it})}{ie^{it}}ie^{it}\,dt = \psi(z)$$

ולכן מסעיף ב' נובע ש־ψ אכן אנליטית. $\square$