פתרון מטלה 8 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

28 ביוני 2024

שאלה 1

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x^2}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

נוכיח כי f גזירה בקטע הסגור $[0,1]$ אך לא ליפשיצית בקטע זה.

הוכחה. ברור כי f גזירה בכל הנקודות שהן לא $x=0$, ולכן נבדוק את הנגזרת בנקודה זו בלבד:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x\sin(\frac{1}{x^2})=0$$

ומצאנו כי $f'(0)=0$.

נניח בשלילה כי f היא M־ליפשיצית, לכן בפרט מתקיים

$$|f(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}})-f(\frac{1}{\sqrt{2\pi k+\frac{1}{2}\pi}})|\leq M|\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi k+\frac{1}{2}\pi}}|$$

דהינו

$$\frac{1}{2\pi k+\frac{1}{2}\pi}\leq M\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi^2k^2+\pi^2k}}$$

ונוכל לראות שעבור k עולים, גם M נחסם מלמטה על־יד מספרים הולכים וגדלים, ולכן נוכל להסיק כי M סופי כזה לא קיים והפונקציה איננה ליפשיצית. $\square$

שאלה 2

תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[-1,1]\setminus\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}\\ 1 & x\in\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}\end{cases}$$

סעיף א'

נוכיח כי f אינטגרבילית ב־$[-1,1]$ ונחשב את $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$.

נשים לב כי בקטע $[0,1]$ הפונקציה שווה לפונקציה משאלה 3 במטלה 7, ולכן נוכל להסיק כי היא אינטגרבילית וכי ערך האינטגרל שלה בקטע הוא 0.

עוד נראה כי $\forall x\in[-1,0]:f(x)=1$ ולכן נוכל להסיק כי גם $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=1$, ונקבל מאדיטיביות האינטגרל

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx=1$$

סעיף ב'

תהי $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

i.

נראה כי הפונקציה מוגדרת היטב, שכן מצאנו כי הפונרציה f היא אינטגרבילית, ולכן נוכל להסיק כי F מוגדרת בכל התחום.

ii.

נחשב נוסחה מפורשת ל־F:

$$F(x)=\begin{cases}-x & -1\le x\le 0\\ 1 & 0<x\le 1\end{cases}$$

על־פי הסעיפים הקודמים.

iii.

נוכיח כי f בעלת נקודת אי־רציפות מסוג שני בנקודה 0.

הוכחה. אנו יודעים כבר כי

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 1=1$$

ואילו נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty},(b_n)_{n=1}^{\infty}$ על־ידי

$$a_n=\frac{1}{n},\qquad b_n=\frac{\sqrt{2}}{n}$$

אז נקבל כי $f(a_n)\xrightarrow{n\to\infty}1$ ואילו $f(b_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$ ולכן נוכל להסיק כי f כלל לא רציפה מימין בנקודה. $\square$

נבחין כי F איננה גזירה ב־$x=0$, זאת נסיק ישירות מנוסחתה המפורשת שמצאנו.

שאלה 3

נשתמש בסכומי רימן ונחשב את הערך של

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)$$

עבור $0 < p \in \mathbb{R}$ כלשהו.

נבחין כי מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$$

דהינו, מצאנו כי זהו סכום רימן על החלוקה השווה של $[0,1]$ של x^p, ולכן נוכל להסיק כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}\right) = \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$$

שאלה 4

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על כל תת־קטע סגור וחסום של $\mathbb{R}$ המקיימת $\int_a^{a+1} f(x)\,dx = 0$ לכל $a\in\mathbb{R}$.

סעיף א'

נמצא דוגמה ל־f אי־שלילית המקיימת את הנתון ואיננה מתאפסת באף קטע של $\mathbb{R}$.

נבחר

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ \cos^2 x & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

אז מהתרגילים הקודמים אנו יודעים כי $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ לכל $a\le b$, וכמובן אין קטע חלקי ל־$\mathbb{R}$ בו f היא זהותית אפס.

סעיף ב'

נמצא דוגמה ל־f רציפה המקיימת את הנתון ושאיננה פונקציית האפס.

נגדיר $f(x)=\sin(\pi x)$, ולכן

$$\int_a^{a+1}\sin(\pi x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\mid_a^{a+1} = -\frac{1}{\pi}(\cos(\pi a+\pi)-\cos(\pi a)) = 0$$

וכמובן שהפונקציה רציפה ולא אפס.

סעיף ג'

נוכיח כי לא תיתכן f רציפה המקיימת את הנתון ובנוסף $f(x)\ne 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכחה. מערך הביניים נוכל להסיק כי $f(x)<0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ או $f(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, על־ידי בחירת השלילי לפונקציה נוכל להניח כי $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)>0$.

יהי $a\in\mathbb{R}$, אז בקטע הסגור $[a,a+1]$ מוויירשטראס השני נסיק כי ישנו מינימום $m>0$ עבורו $f(x)>m$ לכל x בתחום.

עתה נבחן את $h(x)=f(x)-m$, היא כמובן חיובית בתחום, ולכן נסיק $\int_a^{a+1} h(x)\,dx>0$, אילו נניח בשלילה $\int_a^{a+1} f(x)\,dx=0$ אז נקבל סתירה ללינאריות האינטגרל.

לכן לא יתכן כי f עומדת בתנאים. $\square$

סעיף ד'

נמצא דוגמה לפונקציה המקיימת את הנתון כך שבנוסף גם $f(x)\ne 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}\cos(\pi x) & x\in\mathbb{R}\setminus\{k\mid k\in\mathbb{N}\}\\ 1 & x\in\{k\mid k\in\mathbb{N}\}\end{cases}$$

נבחין כי הפונקציה אכן לא מתאפסת באף נקודה, היא אינטגרבילית בכל קטע סגור וחסום שכן היא בעצמה חסומה,

וכמובן בכל קטע $[a,a+1]$ היא זהה ל־$\cos(\pi x)$ מלבד לכל היותר שתי נקודות, ולכן האינטגרלים של הפונקציות זהים, ומצאנו כי הטענה מתקיימת עבור פונקציה זו.

סעיף ה'

נניח כי f פולינום, ונוכיח כי $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=0$.

הוכחה. פולינומים סגורים לגזירה ולכן גם לאינטגרציה, ונוכל להניח כי ל־f פונקציה קדומה F אשר היא בעצמה גם פולינום, ונוכיח כי אם $F(a+1)-F(a)=0$ לכל $a\in\mathbb{R}$ אז בהכרח $F(x)=0$.

יהי k מעלת הפולינום, אז $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}=b$, עבור $b\in\mathbb{R}$ כלשהו, אילו $b\neq 0$ נקבל כי הפונקציה חיובית לחלוטין או שלילית לחלוטין לכמעט כל x, ולכן נסיק $b=0$.

נקבל כי מעלת הפולינום היא $k-1$, וכך נוכל להראות באינדוקציה כי $k=0$ וכמובן $F(x)=0$. $\square$

שאלה 5

נמצא את תחום הגזירות של הפונקציה

$$G(x)=\int_{\sin x}^{x^2} e^{t^2}\,dt$$

ונמצא ביטוי מפורש ללא סימן אינטגרל לנגזרת של G.

אנו יודעים כי האינטגרל של פונקציה הוא תמיד רציף, ואנו יודעים כי e^{t^2} חיובית רציפה, לכן נוכל להסיק משיקולי חלוקה כי גם האינטגרל שלה הוא חיובי, וכמובן גזיר ל־e^{t^2} עצמה.

עבור $x>1$ נקבל $x^2>\sin x$ ולכן נוכל להסיק כי G גזירה, ובאופן דומה נקבל כי היא גזירה אף ב־$x<0$, נותר לבדוק את $x=0$ עצמה.

נבחין כי הנגזרת של $\int e^{t^2}\,dt$ שואפת ל־1 משני הצדדים, לכן מספיק שנבחר $0<x<1$, אז $\sin x>x^2$ ונקבל כי הסימן מתהפך, והפונקציה לא תהיה גזירה בנקודות $x=0,1$.

נגדיר $F(t)=\int e^{t^2}\,dt$, ולכן $F'(t)=e^{t^2}$, נראה כי $G(x)=F(x^2)-F(\sin x)$, ולכן נגזור לפי כלל השרשרת ונקבל

$$G'(x)=2xF'(x^2)-\cos(x)F'(\sin(x))=e^{x^4}-\cos(x)e^{\sin^2(x)}$$

סעיף א'

i.

נגדיר

$$G(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}+\int_0^{1/x}\frac{dt}{1+t^2}$$

נוכיח כי G קבועה בקרן $(0,\infty)$ ונחשב את ערכה שם.

נוכל להשתמש בשיטה דומה לסעיף הקודם ולקבל כי

$$G'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

מצאנו כי הנגזרת היא אפס תמיד ולכן נוכל להסיק כי הפונקציה G קבועה בקטע זה.

אנו גם יודעים ש־$\arctan(x)'=\frac{1}{1+x^2}$ ולכן נוכל להסיק כי

$$G(1)=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=2\arctan(x)\mid_0^1=2\frac{\pi}{2}$$

ידוע כי G קבועה ולכן נוכל להסיק כי $G(x)=\pi$ לכל $x\in(0,\infty)$.

ii.

נוכיח כי G קבועה גם בקרן $(-\infty,0)$ וכי ערכה שם הוא $-\pi$.

הוכחה. נראה כי $G(-x)=-G(x)$ מחוקי אינטגרלים, ולכן נוכל כמובן להניח כי $\forall x<0: G(x)=-G(-x)=-\pi$. □

שאלה 6

סעיף א'

נוכיח כי לכל $-1 < x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$$

הוכחה. נשתמש במשפט היסודי של החשבון האינפינטסמלי, ונקבל כי

$$\ln(x+1)' = \frac{1}{1+x}$$

ולכן מאינטגרציה לשני האגפים נקבל

$$\ln(x+1) + C = \int \frac{dt}{1+t}$$

נציב כמובן בקטע $[0,x]$ ונקבל

$$\ln(x+1) - \ln(1) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

$\square$

נבחין כי ערך הסכום

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2) - \ln(1)$$

סעיף ב'

נוכיח כי $\forall x > -1 : \ln(1+x) \le x$.

הוכחה. נפרק למקרים, תחילה נניח כי $x > 0$ ונקבל נקבל $x + 1 > 1$ ובהתאם גם $0 < \frac{1}{1+x} < 1$, וממונוטוניות האינטגרל נקבל גם

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} \le \int_0^t dt \implies \ln(1+x) \le x$$

נניח עתה כי $-1 < x < 0$ ונקבל גם $0 < x+1 < 1$ ולכן $1 < \frac{1}{x+1}$, ונקבל

$$\int_0^x dt \le \int_0^x \frac{dt}{t+1} \implies \ln(1+x) \le x$$

$\square$

סעיף ג'

נוכיח כי $\forall 0 < x : x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x)$.

הוכחה. יהי $x > 0$, אז $1 - x < 1 < \frac{1}{x+1}$ כפי שמצאנו בסעיף הקודם, ומתהליך זהה לסעיף הקודם נקבל ישירות כי $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x)$. $\square$

שאלה 7

נחשב את האינטגרלים הבאים:

סעיף א'

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

נשתמש בשיטת ההצבה עבור $t=\cos x, dt=-\sin x\ dx$ ונקבל

$$-\int \frac{dt}{1+t^2}=-\arctan(t)=-\arctan(\cos x)$$

סעיף ב'

$$\int x(x+1)^{95}\ dx$$

נגדיר $t=x-1, dt=dx$ ונקבל

$$\int (t-1)t^{95}\ dt=\int t^{96}-t^{95}\ dt=\frac{1}{97}t^{97}-\frac{1}{96}t^{96}=\frac{1}{97}(x-1)^{97}-\frac{1}{96}(x-1)^{96}$$

סעיף ג'

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx$$

נגדיר $t=e^x, dt=e^x dx$ ולכן נקבל

$$\int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t}\int \frac{1}{\frac{1}{t}+1}\cdot\frac{dt}{t^2}$$

נגדיר גם $u=\frac{1}{t}, du=\frac{-dt}{t^2}$ ולכן

$$\int \frac{1}{u+1}du=\ln(u+1)=\ln(\frac{1}{t}+1)=\ln(\frac{1}{e^x}+1)$$

סעיף ד'

$$\int \sin^5(x)dx=\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x\ dx$$

נגדיר $\cos x=t, -\sin x dx=dt$ ונקבל

$$-\int \left(1-t^2\right)^2\ dt=\int -t^4+2t^2-1\ dt=\frac{-t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}-1=\frac{-\cos^5(x)}{5}+\frac{2\cos^3(x)}{3}-1$$

סעיף ה'

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

נגדיר $t=\sqrt{x}, dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ ונקבל

$$\int \frac{2dt}{1+t^2}=2\arctan(t)=2\arctan(\sqrt{x})$$

סעיף ו'

$$\int \arctan(x)\ dx=x\arctan(x)-\int \frac{x}{1+x^2}\ dx$$

נגדיר $t = x^2, dt = 2x\ dx$ ונקבל

$$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+t) = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$