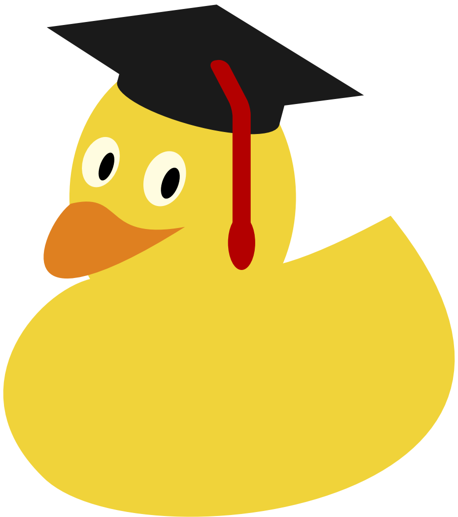
פתרון מטלה 02 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

16 במאי 2024



שאלה 1

יהי X מרחב מטרי ו־$A \subseteq X$.

סעיף א'

נוכיח כי $A = A^\circ$ אם ורק אם היא פתוחה.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $A = A^\circ$. נובע כי כל נקודה ב־A היא גם נקודה פנימית ב־A ולכן ניתן ליצור כדור סביבה המוכל ב־A, ועל־כן היא עומדת בהגדרה של קבוצה פתוחה.

כיוון שני: נניח כי A קבוצה פתוחה. נניח בשלילה כי $A^\circ \neq A$ ולכן קיימת נקודה ב־A שהיא לא נקודה פנים, ולכן אי אפשר ליצור כדור סביבה המוכל ב־A. אבל זאת סתירה להיותה של A קבוצה פתוחה, ולכן $A = A^\circ$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $A = \overline{A}$ אם ורק אם A קבוצה סגורה.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי מתקיים $A = \overline{A}$. תהי $\{x_n\} \in A$ סדרת נקודות מתכנסת ל־x, מהשוויון נובע כי $x \in A$, ולכן נסיק כי A סגורה.

כיוון שני: נניח כי A קבוצה סגורה. באופן דומה לסעיף הקודם נניח כי $A \neq \overline{A}$ ולכן ישנה סדרת נקודות $\{x_n\} \in A$ שמתכנסת לנקודה $x \notin A$, בסתירה לסגירות של A, ולכן נובע $A = \overline{A}$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח את השוויון $\overline{A^C} = (A^\circ)^C$.

הוכחה. נשים לב כי מההגדרה המשלים לקבוצה פתוחה הוא קבוצה סגורה, וידוע כי A° היא קבוצה פתוחה, על־כן המשלים שלה הוא קבוצה סגורה. הקבוצה A^C מכילה את אוסף כל הנקודות שאינן ב־A, לרבות נקודות קצה שלה, וידוע כי היא קבוצה סגורה ולכן היא שקולה לקבוצה $\overline{A^C}$. $\square$

סעיף ד'

נוכיח כי $\partial A = \partial(A^C)$.

הוכחה. נראה כי

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (A^\circ)^C = \overline{A} \cap \overline{A^C} = \overline{A^C} \cap ((A^C)^\circ)^C = \overline{A^C} \setminus (A^C)^\circ = \partial(A^C)$$

$\square$

שאלה 2

יהיו (X,ρ) מרחב נורמי, $x_0 \in X$ ו־$r > 0$, ונתון $D = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leq r\}$ כדור סגור מתאים.

סעיף א'

נוכיח כי $D^\circ = B(x_0, r)$.

הוכחה. תהי $x \in D$ נקודה פנימית, ונניח בשלילה כי $\rho(x, x_0) = r$. לכל $r_0 > 0$ שנבחר $B(x, r_0) \not\subseteq D$ שכן $\rho(y, x) + \rho(x_0, x) > r$.
לכן x לא נקודה פנימית של D ובהתאם $D^\circ = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\} = B(x_0, r)$. □

סעיף ב'

אנו יודעים כי $\partial D = \overline{D} \setminus D^\circ$. ידוע לנו כי D הוא כדור סגור ולכן גם $D = \overline{D}$ ומצאנו כי $D^\circ = B(x_0, r)$ ולכן נובע

$$D \setminus D^\circ = \{x \in X \mid x \leq r \wedge \neg x < r\} = \{x \in X \mid x \leq r \wedge x \geq r\} = \{x \in X \mid x = r\} = \partial D = S(x_0, r)$$

שאלה 3

נגדיר את הפונקציות $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$f(x,y) = xy, g(x,y) = x + y$$

נוכיח על־פי הגדרה כי f רציפה על־פי הגדרה.

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$ ונקודות $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
נראה כי $\rho(f(p_0), f(p_0+h)) < \epsilon \iff |(x_0+h)(y_0+h) - x_0y_0| = |h| \cdot |x_0+y_0+h| < \epsilon$,
אז נגדיר $\delta_0 = \frac{\epsilon}{|x_0+y_0+h|}$ ונקבל $\rho(p_0, p_0+h) < \delta_0 \iff \sqrt{(x_0+h-x_0)^2 + (y_0+h-y_0)^2} = \sqrt{2}|h||x_0+y_0+h| < \epsilon$
ונקבל כי הטענה מתקיימת ולכן f רציפה בכל נקודה $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. $\square$

נוכיח כי g אף היא רציפה על־פי הגדרה.

הוכחה. נראה כי

$$\rho(f(p_0), f(p_0+h)) < \epsilon \iff |x_0 + h + y_0 + h - x_0 - y_0| = 2|h| < \epsilon$$

לכן נגדיר $\delta_1 = \sqrt{2}\epsilon$ ונקבל בדומה להוכחה הקודמת כי $2|h| < \epsilon$ כפי שהיה עלינו למצוא. $\square$

שאלה 4

יהי (X,ρ) מרחב מטרי ונגדיר $f: X\times X\to\mathbb{R}^+, f(x,y)=\rho(x,y)$ פונקציית המרחק במרחב לממשיים האי־שליליים. נוכיח כי f רציפה.

הוכחה. נבחר קטע פתוח $(a,b)\in\mathbb{R}^+$ ונבחין כי $f^{-1}((a,b))=\{x,y\in X\times X \mid a<\rho(x,y)<b\}$ ונשים לב כי זוהי קבוצה לא סופית של איחוד קבוצות פתוחות.

זאת שכן ההגדרה מתלכדת עם כדורים פתוחים סביב x וחיתוך קבוצה סגורה מהם, כך שניתן ליצור כדור פתוח סביב כל נקודה בקבוצה.

כל קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}$ היא איחוד של קטעים פתוחים ולכן גם התמונה ההפוכה של כל קבוצה פתוחה היא איחוד קבוצות פתוחות ולכן מהווה קבוצה פתוחה.

לכן נובע כי f היא פונקציה רציפה. $\square$

שאלה 5

נגדיר $X_1 = (C[0,1], \|\cdot\|_1), X_2 = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ותהי פונקציה $\Lambda : C[0,1] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $\Lambda(f) = f(1)$.

סעיף א'

נפריך את הטענה כי Λ רציפה כפונקציה $X_1 \to \mathbb{R}$ על־ידי דוגמה נגדית:

דוגמה נגדית. נגדיר סדרת פונקציות $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq C[0,1]$ על־ידי

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 - \frac{2}{n} \\ \frac{n-0}{1-(1-\frac{1}{n^2})}(x - 1 + \frac{2}{n}), & 1 - \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

הפונקציה מוגדרת להיות 0 ואז משולש שבסיסו הולך וקטן ושמסתיים ב־$f_n(1) = n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כך ששטחו הוא $\frac{1}{n}$ ובעקבות כך גם האינגרל שלו.

אילו נגדיר $f(x) = 0$ אז מתקיים $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$.

על־פי ההגדרה $\|f - f_n\|_1 = \frac{1}{n}$ ולכן הסדרה (f_n) מקיימת את התנאים להיות סדרת היינה, אבל

$$\lim_{n\to\infty} |\Lambda(f) - \Lambda(f_n)| = \lim_{n\to\infty} |0 - n| = \infty$$

ומצאנו סדרה הסותרת את ההתכנסות של הפונקציה. □

סעיף ב'

נוכיח כי Λ היא רציפה כפונקציה $X_2 \to \mathbb{R}$.

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$ ופונקציה $f_0 \in C[0,1]$. נראה כי על־פי הגדרת הרציפות $|f(1) - f_0(1)| < \epsilon \iff |\Lambda(f) - \Lambda(f_0)| < \epsilon$.

נגדיר $\delta = \epsilon$ נבחן $|f(1) - f_0(1)| < \epsilon \implies \|f - f_0\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - f_0(x)| < \delta$.

מצאנו כי הגדרת הרציפות מתקיימת ולכן Λ רציפה ב־X_2. □

שאלה 6

נגדיר

$$X = [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}, \quad Y = S_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ונגדיר $f : X \to Y$ על־ידי

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

סעיף א'

נוכיח כי f רציפה.

הוכחה. על־פי טענה מהתרגול הפונקציה f רציפה אם ורק אם היא רציפה באגפיה השונים.
נגדיר $f_i = \pi_i \circ f$ פירוק לאגפים, ונראה כי $f_1(t) = \cos t$ פונקציה רציפה וגם $f_2(t) = \sin t$ רציפה אף היא, ולכן f רציפה בכללותה. □

סעיף ב'

נוכיח כי f פונקציה פתוחה.

הוכחה. יהי $(a, b) \subseteq X$ כדור פתוח.
מהגדרת cos אנו יכולים להסיק כי $\cos^{-1} b < f_1(t) < \cos^{-1} a$ וכמובן זהו כדור פתוח. נוכל אם כן לחבר כל כמות של כדורים פתוחים ב־X ולקבל חיבור כדורים ב־Y. כמובן שהטענה הזו מתקיימת גם עבור האגף השני שכן sin אף היא רציפה ומקיימת את הטענה.
בהתאם לכל קבוצה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה גם $f(U)$ פתוחה. □

סעיף ג'

נוכיח כי f פונקציה סגורה.

הוכחה. נובע ישירות ממשפט ויירשטראס לתמונות פונקציות רציפות על האגפים השונים של f. □

סעיף ד'

נוכיח כי f היא חד־חד ערכית ועל Y.

הוכחה. נניח בשלילה כי f איננה חד־חד ערכית, לכן קיים $x, y \in X$ כך ש־$x < y$ אבל $f(x) = f(y)$.
מסיבה זו נקבל כי $\cos x = \cos y$ וגם $\sin x = \sin y$. מכפל השוויונות נקבל $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y) = 0$.
בהתאם $x + y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. באופן דומה נקבל גם $\sin(x + y) = 0$ ולכן $x + y = 0, \pi$ וקיבלנו סתירה, לכן f חד־חד ערכית.
נבחר נקודה $(x, y) \in Y$. גאומטרית נוכל לבחור את הזווית שהקרן לנקודה הזאת מהמרכז יוצרת עם הכיוון החיובי של ציר ה־x, ועל־פי הגדרה זוהי הזווית t עבורה $(x, y) = (\cos x, \sin y)$. מצאנו כי f חד־חד ערכית ועל. □

סעיף ה'

נוכיח כי הפונקציה ההופכית f^{-1} היא רציפה אף היא.

הוכחה. למעשה, כבר הוכחנו טענה זו בסעיף ב', ראינו שכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ גם $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U)$ פתוחה, ולכן נובע כי f^{-1} רציפה. □