פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

27 בפברואר 2023

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח בלשון ϵ, N כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n+1}{n}}=2 \tag{1}$$

נשים לב תחילה כי מתקיים

$$\frac{4n+1}{n}=\frac{\frac{4n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}}=\frac{4+\frac{1}{n}}{1}=4+\frac{1}{n}$$

לכל $n\neq 0$. לכן נוכל להוכיח את קיום הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}}=2$$

נגדיר $\epsilon>0$ מספר ממשי. על־פי הגדרת הגבול צריך להתקיים:

$$\left|\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right|<\epsilon$$

תוכן השורש הוא תמיד לפחות 4, ולכן תוצאתו תמיד גדולה מ־2, בהתאם תוכן הערך המוחלט חיובי תמיד ומתקיים:

$$\left|\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right|=\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2<\epsilon$$

לכל $n>N$ כאשר $N\in\mathbb{N}$. נשים לב כי

$$\left(2+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2=4+2\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}>4+\frac{1}{n}=\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}\right)^2\to\sqrt{4+\frac{1}{n}}<2+\sqrt{\frac{1}{n}}$$

נקבע

$$\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2<2+\sqrt{\frac{1}{n}}-2=\frac{1}{\sqrt{n}}<\epsilon$$

נגדיר

$$N=\left\lceil\frac{1}{\epsilon^2}\right\rceil$$

במצב זה הגבול (1) מתקיים לכל $\epsilon>0$.

סעיף ב'

(i) יהיו (a_n) סדרה ו־L מספר ממשי. ננסח בלשון ϵ, N את הטענה

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq L$$

תחילה נצרין את הטענה:

$$\neg\forall\epsilon>0(\exists N\in\mathbb{N}(\forall n>N(|a_n-L|<\epsilon)))$$

נפשט את הפסוק:

$$\exists\epsilon>0(\forall N\in\mathbb{N}(\exists n>N(|a_n-L|\geq\epsilon)))$$

ננסח פסוק זה במילים:

הטענה $\lim_{n\to\infty}a_n\neq L$ מתקיימת אם ורק אם קיים $\epsilon>0$ עבורו לכל N טבעי קיים $n>N$ כך שמתקיים $|a_n-L|\geq\epsilon$.

(ii) על־פי הגדרת התבדרות (2.13) סדרה נקראת מתבדרת כאשר אין מספר L שעבורו מתקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ננסח את הטענה בעזרת הגדרת התכנסות בלשון ϵ, N:

סדרה (a_n) היא מתבדרת אם ורק אם לכל L ממשי קיים $\epsilon > 0$ עבורו לכל N טבעי קיים $n > N$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \epsilon$.

סעיף ג'

נוכיח שהסדרה (a_n) מתבדרת בלשון ϵ, N, כאשר

$$a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n+2}$$

נוכיח כי לכל L ממשי שנבחר קיים $\epsilon > 0$ שעבורו לכל N טבעי קיים $n > N$ שעבורו $|a_n - L| \geq \epsilon$.

מתקיים על־פי חישוב ישיר

$$n = 2 \to a_n = \frac{3}{4}$$
$$n = 3 \to a_n = -\frac{2}{5}$$

נגדיר $N = 1, \epsilon = \frac{1}{4}$. אם $L \geq 1$ אז $|a_2 - L| > \epsilon$ והתנאי מתקיים. אילו $L \leq 0$ אז $|a_3 - L| < \epsilon$ והתנאי מתקיים גם כן.

כאשר $0 < L < \frac{3}{4}$ נגדיר $\epsilon = a_2 - L$ ונראה כי התנאי מתקיים שכן מספר זה מקיים את התנאי $\epsilon > 0$. כאשר $\frac{3}{4} \leq L < 1$ אז נגדיר את $\epsilon = L - a_3$ ובהתאם התנאי עדיין יתקיים. בסך־הכול ראינו כי הסדרה מתבדרת לכל $L \in \mathbb{R}$ ולכן מתבדרת לפי הגדרה ב'(ii).

שאלה 2

נחשב את הגבולות הבאים, או נוכיח שאינם קיימים:

סעיף א'

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+(-1)^n}-n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+(-1)^n}+n\right)\left(\sqrt{n^2+(-1)^n}-n\right)}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n-n^2}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}\end{aligned}$$

נוכל לראות כי מכנה הגבול חיובי וגדול מ־$2n-1$ כמעט לכל n ולכן המכנה שואף ל־∞, כאשר המונה חסום ב־1, לכן לפי משפט 2.22 והאריתמטיקה של הגבולות לקבוע כי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+(-1)^n}-n=0$$

סעיף ב'

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^6-1}{n^4-\pi n^5+5n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3/n^6-2n^6/n^6-1/n^6}{n^4/n^6-\pi n^5/n^6+5n/n^6}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3/n^3-2-1/n^6}{1/n^2-\pi/n+5/n^5}\\ &= \frac{-2}{0^+} && \text{על־פי אריתמטיקה של הגבולות}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

לכן הסדרה מתכנסת ל־$-\infty$ במובן הרחב.

סעיף ג'

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}n^2-1}{n^4} &\le \frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4}\le\frac{\sqrt{3}n^2}{n^4}\\ \frac{\sqrt{3}/n^2-1/n^4}{1} &\le \frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4}\le\frac{\sqrt{3}}{n^2}\end{aligned}$$

נראה כי גם

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{n^2}-\frac{1}{n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{n^2}=0$$

לכן לפי כלל הסנדוויץ' מתקיים גם

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4}=0$$

סעיף ד'

לפי אי־שוויון הממוצעים

$$(1)\ \sqrt[n]{\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} 2n-1}{\prod\limits_{i=1}^{n} 2n}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{2n-1}{2n}} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2n-1}{2n}}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n-1}{2n \cdot n} \leq n \cdot \frac{2n-1}{2n \cdot n} = \frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}$$

נשים לב כי (1) הוא שורש של מספר גדול מ־1 ולכן נוכל להניח כי הוא גדול שווה ל־1. עוד נראה כי

$$\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1$$

לכן לפי כלל הסנדוויץ' סדרה (1) מתכנסת ל־1.

שאלה 3

יהיו (a_n) ו־(b_n) סדרות כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$ (1).

סעיף א'

נפריך את הטענה כי אם כמעט כל אברי (a_n) ו־(b_n) חיוביים אז אחת משתי הסדרות מתכנסת לאינסוף לפחות על־ידי דוגמה נגדית.

נגדיר

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ זוגי} \\ n & n \text{ אי־זוגי} \end{cases}, b_n = \begin{cases} n & n \text{ זוגי} \\ 1 & n \text{ אי־זוגי} \end{cases}$$

ניתן לראות כי מכפלת הסדרות היא הסדרה $c_n = n$ אשר מקיימת את תנאי (1), אך שתי הסדרות מתבדרות.

סעיף ב'

נוכיח כי אם כמעט כל אברי (b_n) חיוביים אז גם כמעט כל אברי (a_n) חיוביים.

נגדיר כי (b_n) חיובית לכל n לפי משפט 2.44 בלא פגיעה בכלליות ההוכחה. בשל גבול (1) ידוע כי לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n b_n > M$. ידוע כי b_n חיובי וכי M חיובי, אז גם a_n חיובי אף הוא, שאם לא כן לא יתקיים השוויון $a_n b_n > M$. לכן a_n חיובי לכל n.

סעיף ג'

נפריך את הטענה כי $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ בעזרת דוגמה נגדית.

נגדיר

$$a_n = n^3, b_n = \frac{1}{n}$$

לכן

$$a_n b_n = n^2$$

ובהתאם תנאי (1) מתקיים. למרות זאת, לפי טענה 2.10 מתקיים $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ בסתירה לטענה.

סעיף ד'

נוכיח כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $b_n \neq 0$.

הוכחת טענה זו דומה ביותר להוכחת סעיף ב', אנו רואים כי $a_n b_n > M$, ולכן נוכל להניח גם $a_n b_n > 0$, לכן $a_n \neq 0 \wedge b_n \neq 0$.

סעיף ה'

נוכיח כי אם $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

נניח כי הגבול הראשון מתקיים והגבול השני לא בשלילה. אילו a_n מתבדרת אז מכפלת הסדרות תתבדר גם היא, בניגוד ל־(1), לכן נניח ש־(a_n) מתכנסת. אילו הייתה הסדרה מתכנסת למספר סופי, אז לפי האריתמטיקה של הגבולות $a_n b_n$ הייתה מתכנסת אף היא למספר סופי בניגוד ל־(1), לכן (a_n) מתכנסת ל־$\pm\infty$. אנו יודעים כי (b_n) חיובית לכמעט כל n, אילו הייתה (a_n) מתכנסת ל־$-\infty$ אז היא הייתה שלילית לכמעט כל n. במקרה זה, מכפלת הסדרות הייתה שלילית לכמעט כל n, אך אנו יודעים כי היא חיובית על־פי גבול (1) ולכן בסך־הכול $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

סעיף ו'

נפריך את הטענה כי אם $a_n < b_n$ כמעט לכל n אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ בעזרת דוגמה נגדית:

נגדיר

$$a_n = -n, b_n = -n-1, a_nb_n = n(n+1)$$

במקרה זה גבול (1) מתקיים ואף $a_n < b_n$ לכל n אך $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ בסתירה לטענה.

סעיף ז'

נוכיח כי אם $0 < b_n < a_n$ כמעט לכל n אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

על־פי הגדרת שאיפה לאינסוף, לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_nb_n > M$. לכן מתקיים גם $a_na_n > a_nb_n > M$, אז $a_n > \sqrt{M}$. נגדיר $M' = \sqrt{M}$ ואנו רואים כי הגדרת השאיפה חלה על (a_n). לכן

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$