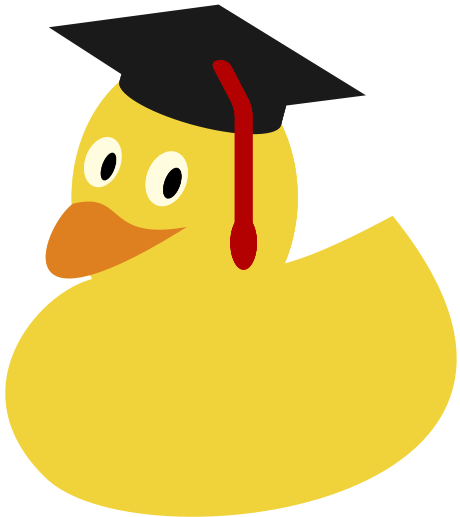
פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

31 ביולי 2023



שאלה 1

נחשב את האינטגרלים הבאים

סעיף א'

$$\begin{aligned}\int x^3(1-3x^2)^{10}dx &= \int x^3\left(\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-3x^2)^k\right)dx\\ &= \int\left(\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-3)^k x^{2k+3}\right)dx\\ &= C+\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\frac{1}{2k+4}(-3)^k x^{2k+4}\\ &= C+x^4\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\frac{(-3)^k}{2k+4}x^{2k}\end{aligned}$$

סעיף ב'

$$\begin{aligned}\int\frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int\frac{\sin\arcsin(x)e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= \int\sin(t)e^t dt\Bigg|_{dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}^{t=\arcsin x}\\ &= -\cos(t)e^t+\int\cos(t)e^t dt && \text{אינטגרציה בחלקים}\\ &= -\cos(t)e^t+\sin(x)e^t-\int\sin(t)e^t dt && \text{אינטגרציה בחלקים}\end{aligned}$$

$$2\int\sin(t)e^t dt=\sin(x)-\cos(t)e^t$$

$$\int\frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x}\right)+C$$

סעיף ג'

$$\begin{aligned}\int(x-1)^2e^{2x}dx &= \frac{1}{2}e^{2x}(x-1)^2-\int\frac{1}{2}e^{2x}(2x-2)dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(x-1)^2+\int e^{2x}dx-\int e^{2x}xdx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(x-1)^2+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}x+\int\frac{1}{2}e^{2x}dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2-3x+2)+\frac{1}{4}e^{2x}\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2-3x+2\frac{1}{2})+C\end{aligned}$$

סעיף ד'

$$\int \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}}dx = \left|\begin{matrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{matrix}\right|$$
$$= \int \frac{4t-7}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt$$
$$= 2\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt - 7\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt$$

נחשב

$$\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt$$
$$\left|\begin{matrix} u = t^2+1 \\ du = 2t \end{matrix}\right|$$
$$= \int \frac{du}{u^{3/2}}$$
$$= \int u^{-3/2}du$$
$$= -2u^{-1/2}$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{t^2+1}}$$

נחשב גם

$$\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt$$
$$\left|\begin{matrix} t = \tan u \\ dt = \frac{du}{\cos^2 u} \end{matrix}\right|$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 u\sqrt{(\tan^2 u+1)^3}}du$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 u\sqrt{(\cos^{-2})^3}}du$$
$$= \sin u = \sin \arctan t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

ולכן נובע כי

$$2\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt - 7\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt = 2\frac{-2}{\sqrt{t^2+1}} - 7\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{-7t-4}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{-7x-18}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

לכן

$$\int_{-2}^{-1} \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}}dx = \left.\frac{-7x-18}{\sqrt{x^2+4x+5}}\right|_{-2}^{-1} = \frac{-7(-2)-18}{\sqrt{(-2)^2+4(-2)+5}} - \frac{-7(-1)-18}{\sqrt{(-1)^2+4(-1)+5}} = -4 + \frac{11}{\sqrt{2}}$$

סעיף ה'

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}(1+x^3+\sin x)dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}(x^3+\sin x)dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}dx$$

נגדיר

$$f(x) = e^{|x|}(1+\sin x)$$

מחישוב עולה כי

$$f(-x) = e^{|-x|}(-x^3-\sin x) = -f(x)$$

ולכן

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx = \int_{-\ln 2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\ln 2} f(x)dx = -\int_{0}^{\ln 2} f(x)dx + \int_{0}^{\ln 2} f(x)dx = 0$$

עוד נראה כי

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}dx = \int_{-\ln 2}^{0} e^{|x|}dx + \int_{0}^{\ln 2} e^{|x|}dx = \int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}dx + \int_{0}^{\ln 2} e^{x}dx = 2\int_{0}^{\ln 2} e^{x}dx = 2(e^{\ln 2}-1) = 4$$

שאלה 2

עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים נקבע אם הוא מתכנס בהחלט, בתנאי, או כלל לא.

סעיף א'

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$$

ידוע כי $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ולכן

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx + \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{x\to\infty} (2\sqrt{x} - 0) = \infty$$

אבל גם $\cos^2 x = \sin^2(x + \pi/2)$, לכן שני האינטגרלים המחוברים מתבדרים יחד או מתכנסים יחד, ואנו יודעים כי חיבורם מתבדר, ולכן גם

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx = \infty$$

דהינו האינטגרל מתבדר.

סעיף ב'

$$\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(x^2-1)(\ln(x+1))^3} dx$$

נשים לב כי

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x \ln x}{(x^2-1)(\ln(x+1))^3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{(x^2-1)\ln^3 2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{2x \ln^3 2} = \frac{1}{2\ln^3 2}$$

ולכן כל אינטגרל מהצורה

$$\int_1^k \frac{x \ln x}{(x^2-1)(\ln(x+1))^3} dx$$

כאשר $k > 1$ הוא אינטגרל מתכנס.

נגדיר $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ונראה כי הגבול

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{(x^2-1)(\ln(x+1))^3} / g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(x^2-1)(\ln(x+1))^3} = 0$$

הוא גבול מתכנס לאפס, ולכן ממשפט 3.16* נובע כי האינטגרל הנתון מתכנס אם ורק אם האינטגרל של $g(x)$ מתכנס. נחשב

$$\int_k^\infty g(x) = \frac{-\ln x}{x} - \int_k^\infty \frac{-1}{x^2} = \left.\frac{-\ln x - 1}{x^2}\right|_k^\infty = 0 - \frac{-\ln k - 1}{k^2}$$

מצאנו כי האינטגרל מתכנס בהתאם למשפט ההשוואה הגבולי.

סעיף ג'

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}(\sqrt[4]{x} + 1)\sin\left(2\sqrt{x}\right) dx$$

נגדיר

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{x}+1}{x},g(x)=\sin\left(2\sqrt{x}\right)$$

בתחום $[1,\infty)$ הפונקציה f מונוטונית יורדת וחיובית בכל התחום, ו־$|g|$ חסומה על־ידי $[0,1]$.
כמו־כן גם $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ ולכן ממבחן דיריכלה האינטגרל

$$\int_1^\infty |f(x)g(x)|dx$$

מתכנס. ידוע מאדיטיביות האינטגרל כי

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx=\int_0^1 f(x)g(x)dx+\int_1^\infty f(x)g(x)dx$$

נראה כי

$$f(x)g(x)=2\frac{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1}\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

ידוע כי בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $0<\sin t<t$ ולכן גם בהכרח $0<\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}<1$.
אז מצאנו כי

$$f(x)g(x)<\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2(x^{1/2}+x^{1/4})}{x^{3/4}}=\frac{4x^{1/4}}{x^{3/4}}<\frac{4}{x^{1/4}}$$

מלמה 3.2 נובע כי האינטגרל

$$\int_0^1\frac{4}{x^{1/4}}dx$$

הוא אינטגרל מתכנס ולכן ממשפט ההשוואה נובע שמתכנס גם

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ולכן האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

מתכנס בהחלט.

שאלה 3

תהי פונקציה f אינטגרבילית בקטע $[0,a]$ לכל $a>0$ ומתקיים $|f(x)| \leq \sqrt{x}$ לכל $x \geq 0$.
נגדיר $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, ונוכיח כי האינטגרל המוגדר על־ידי

$$\int_0^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx \tag{1}$$

מתכנס.

הוכחה. ידוע כי $|f(x)| \leq \sqrt{x}$ לכל $x \geq 0$ ולכן מהמונוטוניות של האינטגרל המסוים (1.26) נובע

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^x \sqrt{t}dt = \left.\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right|_0^x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

מאי־השוויון נובע כי לכל $x \geq 0$ גם

$$\frac{F(x)}{\pi + x^3} \leq \frac{2\sqrt{x^3}}{3\pi + 3x^3} \tag{2}$$

נשים לב כי מונה נגזרת הביטוי הימני הוא

$$\sqrt{x}(\pi + x^3) - \frac{4}{3}x^2\sqrt{x^3}$$

ולכן קיים קבוע $c > 0$ עבורו הביטוי יורד לכל $x \geq c$, וכמו כן ניתן לראות כי זוהי פונקציה אפסה.
עוד נראה כי שתי הפונקציות המופיעות באי־השוויון הן רציפות לכל $x \geq 0$ ובהתאם ניתן להסיק כי הביטוי השמאלי חסום בתחום $[a,\infty)$.
אז ממבחן דיריכלה נובע כי האינטגרל

$$\int_c^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx$$

מתכנס. נבחן את האינטגרל

$$\int_0^c \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx$$

זהו כמובן אינטגרל מסוים של פונקציה רציפה ולכן הוא מתכנס ובעל ערך סופי, ומתקיים

$$\int_c^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx + \int_0^c \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx = \int_0^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx$$

מש"ל

שאלה 4

סעיף א'

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה וחיובית בקטע $[a,\infty)$.

נוכיח כי אם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז קיים $0<c<1$ כך שהאינטגרל

$$\int_a^\infty (f(x))^p dx$$

מתכנס לכל $c \le p \le 1$.

הוכחה. מהגדרת האינטגרל אנו יכולים להסיק כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

מהגבול ומרציפותה בתחום ניתן להסיק ממשפט ויירשטרס השני כי יש לפונקציה מקסימום M,

ומהגבול ניתן להסיק כי אפשר לחסום את הפונקציה בפונקציה מהצורה $M_1 x^{-b}$, כאשר $b>1$ קבוע כלשהו, וכאשר $M_1 \ge M$.

אז מתקיים

$$0 < f(x) < M_1 x^{-b}$$

לכל $x \ge a$. נבחין כי גם

$$0 < f^p(x) < M_1^p x^{-bp}$$

לכל $0<p$, ומלמה 3.12 נסיק כי אם $bp>1$ אז האינטגרל $\int_a^\infty M_1^p x^{-bp}dx$ מוגדר גם הוא ובעקבותיו גם $\int_a^\infty f^p(x)dx$.

אז מצאנו כי עבור $\frac{1}{b} < p \le 1$ האינטגרל מוגדר, נוכל להגדיר $\frac{1}{b} < c < 1$ ערך המקיים את התנאי. **מש"ל**

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם $f(x)$ רציפה ב־$[a,\infty)$, האינטגרל $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס וקיים הגבול $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$,

אז האינטגרל $\displaystyle\int_a^\infty f^2(x)dx$ מתכנס.

הוכחה. נגדיר

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

נחשב

$$\int f(x)dx = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \int \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$$

ונשים לב כי

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

ולכן ממבחן ההשוואה ולמה 3.12 נובע כי

$$\int_1^\infty f(x)dx = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) - \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$$

הוא אינטגרל מתכנס. נבחן את האינטגרל של $f^2(x)$

$$\int f^2(x)dx = \int \frac{\cos^2 x}{x}dx = \ln x \cos^2 x - \int \ln x \cdot 2\cos x \sin x dx = \ln x \cos^2 x - \int \ln x \sin 2x dx$$

עוד נראה כי

$$\ln x \sin 2x \leq \ln x$$

ולכן

$$\ln x \cos^2 x - \int \ln x \sin 2x dx \geq \ln(\cos^2(x) + 1)$$

ולכן ממבחן ההשוואה נקבל כי האינטגרל

$$\int_1^\infty f^2(x)dx$$

איננו מתכנס, בסתירה לטענה. **מש"ל**

שאלה 5

תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות ב־$[0, \infty)$ אשר עבורן מתקיים:

$g(x)$ חסומה ובעלת נגזרת רציפה ב־$[0, \infty)$ כך ש־$g'(x) < g(x)$ לכל $x \geq 0$,

קיים M כך שמתקיים לכל $t \geq 0$

$$\left| \int_0^t e^x f(x) dx \right| \leq M$$

נוכיח את התכנסות האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x) g(x) dx$$

הוכחה. נגדיר $g_0(x) = \frac{g(x)}{e^x}$, ונחשב את נגזרתה

$$g_0'(x) = \frac{g'(x)e^x - g(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{g'(x) - g(x)}{e^x}$$

ידוע כי $g'(x) - g(x) < 0$ ולכן g_0 יורדת לכל $x \geq 0$.

$g_0(x)$ היא חלוקת פונקציה חסומה בפונקציה מונוטונית עולה, ולכן

$$\lim_{x \to \infty} g_0(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

מצאנו כי $g_0(x)$ מקיימת את התנאי הראשון של מבחן דיריכלה.

נגדיר $f_0(x) = e^x f(x)$. נתון כי

$$\left| \int_0^t f_0(x) dx \right| \leq M$$

ידוע כי $f_0(x)$ היא רציפה בתחום $[0, \infty)$, אילו מתקיים

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

כאשר L סופי אז ניתן להוכיח כי f_0 חסומה בתחום. נניח כי גבול זה איננו סופי, דהינו $L = \pm\infty$.

במצב זה האינטגרל

$$\int_0^t f_0(x) dx$$

מייצג פונקציה מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת על־פי אינפי 1, בסתירה לטענה כי אינטגרל זה חסום, ולכן הגבול של f_0 הוא סופי והיא חסומה.

על־כן f_0 ממלאת את התנאים למבחן דיריכלה. עתה נבחין כי

$$f_0(x) g_0(x) = f(x) g(x) \frac{e^x}{e^x} = f(x) g(x)$$

ולכן נובע כי מתקיים האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x) g(x) dx$$

מש"ל

שאלת רשות

יהיו $0 < a < b$. נוכיח את התכנסות האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

הוכחה. נראה כי

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx - \int_0^\infty \frac{e^{-bx}}{x} dx && \text{מהגדרת האינטגרל המורחב} \\
&= \lim_{k \to 0} \int_k^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx - \int_k^\infty \frac{e^{-bx}}{x} dx \\
\left| \begin{matrix} t_1 = x/a & dt_1 = dx/a \\ t_2 = x/b & dt_2 = dx/b \end{matrix} \right| &= \lim_{k \to 0} \int_{ak}^\infty \frac{e^{-t_1}}{t_1} dt_1 - \int_{bk}^\infty \frac{e^{-t_2}}{t_2} dt_2 && \text{נשים לב כי הביטויים שקולים} \\
&= \lim_{k \to 0} \int_{ak}^{bk} \frac{e^{-t}}{t} dt && \text{על־פי גבול אינטגרל מוכלל ניתן לראות כי} \\
\left| \begin{matrix} t = ku \\ dt = kdu \end{matrix} \right| &= \lim_{k \to 0} \int_a^b \frac{e^{-ku}}{ku} k\, du && \text{נשים לב כי } k \text{ קבוע באיטגרל} \\
&= \int_a^b \lim_{k \to 0} \frac{e^{-ku}}{u} du && \text{קיבלנו ביטוי עבורו הפונקציה הפנימית בלבד תלויה ב־}k \\
&= \int_a^b \frac{1}{u} du = \ln u|_a^b = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

מצאנו כי האינטגרל מוגדר וכי

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{a}{b}$$

מש"ל