

## תורת ההסתברות 1 — סיכום

31 בדצמבר 2024



## תוכן העניינים

4	1 שיעור 1 – 29.10.2024
4	1.1 מבוא הקורס
4	1.2 מרחבי מדגם ופונקציית הסתברות
7	2 תרגול 1 – 31.10.2024
7	2.1 מרחבי הסתברות סופיים ובני-מניה
9	3 שיעור 2 – 31.10.2024
9	3.1 השלמה לטורים דו-מימדיים
9	3.2 תכונות של פונקציות הסתברות
10	3.3 פרדוקס יום ההולדת
11	4 שיעור 3 – 5.11.2024
11	4.1 מכפלת מרחבי הסתברות בדידים
12	4.2 ניסויים דו-שלביים
14	5 תרגול 2 – 7.11.2024
14	5.1 פתרון שאלות הסתברותיות
16	6 שיעור 4 – 7.11.2024
16	6.1 חסמי איחוד ורציפות
17	6.2 עיקרון ההכלה וההדחה
19	7 שיעור 5 – 12.11.2024
19	7.1 הסתברות מותנית
21	8 תרגול 3 – 14.11.2024
21	8.1 הסתברות מותנית
21	8.2 ניסוי דו-שלבי על-ידי הסתברות מותנית
23	9 שיעור 6 – 14.11.2024
23	9.1 אי-תלות
25	10 שיעור 7 – 19.11.2024
25	10.1 אי-תלות
25	10.2 משתנים מקריים
27	11 תרגול 4 – 21.11.2024
27	11.1 אי-תלות
27	11.2 משתנים מקריים
29	12 שיעור 8 – 21.11.2024
29	12.1 משתנים מקריים – המשך
30	12.2 קשרים בין משתנים-מקריים
32	13 שיעור 9 – 25.11.2024

32	13.1 וקטורים מקריים
34	14 תרגול 5 – 28.11.2024
34	14.1 משתנים מקריים
36	15 שיעור 10 – 28.11.2024
36	15.1 התפלגות תחת התניה
38	16 שיעור 11 – 3.12.2024
38	16.1 אי-תלות משתנים מקריים
39	16.2 התפלגות גאומטרית
40	17 תרגול 6 – 5.12.2024
40	17.1 שאלות בנושאי משתנים מקריים בלתי-תלויים
42	18 שיעור 12 – 5.12.2024
42	18.1 התפלגות גאומטרית
42	18.2 התפלגות בינומית
43	18.3 התפלגות פואסון
45	19 שיעור 13 – 10.12.2024
45	19.1 תוחלת
46	19.2 תכונות של תוחלת
48	20 תרגול 7 – 12.12.2024
48	20.1 שאלות ותכונות של תוחלות
50	21 שיעור 14 – 12.12.2024
50	21.1 תוחלת – המשך
51	21.2 שימושים של אי-שוויון מרקוב
52	22 שיעור 15 – 17.12.2024
52	22.1 נוסחה לתוחלות
52	22.2 שונות
55	23 תרגול 8 – 19.12.2024
55	23.1 שימושים למשפט מרקוב
55	23.2 שאלות נבחרות בנושא שונות
57	24 שיעור 16 – 19.12.2024
57	24.1 שונות – המשך
60	25 שיעור 17 – 31.12.2024
60	25.1 בעיית אספן הקופונים
60	25.2 בין הסתברות ללינארית

## 1.1 מבוא הקורס

נלמד לפי ספר שעוד לא יצא לאור שנכתב על-ידי אורי עצמו, הוא עוד לא סופי ויש בו בעיות ואי-דיוקים, תשיג את הספר הזה. כן יש הבדל בין הקורס והספר אז לא לסמוך על הסדר שלו גם כשאתה משיג אותו, אבל זו תוספת מאוד נוחה. יש סימון של כוכביות לחומר מוסף, כדאי לעבור עליו לקראת המבחן כי זה יתן לנו עוד אינטואיציה והעמקה של ההבנה.

נשים לב כי ענף ההסתברות הוא ענף חדש יחסית, שהתפתח הרבה אחרי שאר הענפים הקלאסיים של המתמטיקה, למעשה רק לפני 400 שנה נשאלה על-ידי נזיר במהלך חקר של משחק אקראי השאלה הראשית של העולם הזה, מה ההסתברות של הצלחה במשחק.

נעבור לדבר על פילוסופיה של ההסתברות. מה המשמעות של הטלת מטבע מבחינת הסתברות? ישנה הגישה של השכיחות, שמציגה הסתברות כתוצאה במקרה של חזרה על ניסוי כמות גדולה מאוד של פעמים. יש כמה בעיות בזה, לרבות חוסר היכולת להגדיר במדויק אמירה כזו, הטיות שנובעות מפיזיקה, מטבעות הם לא מאוזנים לדוגמה. הבעיה הראשית היא שלא לכל בעיה אפשר לפנות בצורה כזאת. ישנה גישה נוספת, היא הגישה האובייקטיבית או המתמטית, הגישה הזו בעצם היא תרגום בעיה מהמציאות לבעיה מתמטית פורמלית. לדוגמה נשאל את השאלה מה ההסתברות לקבל 6 בהגרלה של כל המספרים מ-1 עד מיליון. השיטה ההסתברותית קובעת שאם אני רוצה להוכיח קיום של איזשהו אובייקט, לפעמים אפשר לעשות את זה על-ידי הגרלה של אובייקט כזה והוכחה שיש הסתברות חיובית שהוא יוגרל, וזו הוכחה שהוא קיים. מה התחזיות שינבעו מתורת ההסתברות? לדוגמה אי-אפשר לחזות הטלת מטבע בודדת, אבל היא כן נותנת הבנה כללית של הטלת 1000 מטבעות, הסתברויות קטנות מספיק יכולות להיות זניחות ובמקרה זה נוכל להתעלם מהן. לפחות בתחילת הקורס נדבר על תרגום של בעיות מהמציאות לבעיות מתמטיות, זה אומנם חלק פחות ריגורוזי, אבל הוא כן חשוב ליצירת קישור בין המציאות לבין החומר הנלמד.

דבר אחרון, ישנה השאלה הפילוסופית של האם באמת יש הסתברות שכן לא בטוח שיש אקראיות בטבע, הגישה לנושא מבחינה פיזיקלית קצת השתנתה בעת האחרונה וקשה לענות על השאלה הזאת. יש לנו תורות פיזיקליות שהן הסתברותיות בעיקרן, כמו תורת הקוונטים, תורה זו לא סתם הסתברותית, אנחנו לא מנסים לפתור בעיות הסתברותיות אלא ממש משתמשים במודלים סטטיסטיים כדי לתאר מצב בעולם. לדוגמה נוכל להסיק ככה מסקנה פשוטה שאם מיכל גז נפתח בחדר, יהיה ערבוב של הגז הפנימי ושל אוויר החדר, זוהי מסקנה הסתברותית. החלק המדהים הוא שתורת הקוונטים מניחה חוסר דטרמיניזם כתכונה יסודית ועד כמה שאפשר לראות יש ניסויים שמוכיחים שבאמת יש חוסר ודאות בטבע. דהינו שברמה העקרונית הפשוטה באמת אין תוצאה ודאית בכלל למצבים כאלה במציאות.

## 1.2 מרחבי מדגם ופונקציית ההסתברות

**הגדרה 1.1** (מרחב מדגם) מרחב מדגם הוא קבוצה לא ריקה שמהווה העולם להסתברות. נסמנה  $\Omega$ . איבר במרחב המדגם נסמן ב- $\omega \in \Omega$  על-פי רוב.

נוכל להגיד שמרחב המדגם הוא הקבוצה של האיברים שעליה אנחנו שואלים בכלל שאלות, זהו הייצוג של האיברים או המצבים שמעניינים אותנו. בהתאם נראה עכשיו מספר דוגמות שמקשרות בין אובייקטים שאנו דנים בהם בהסתברות ובהגדרה פורמלית של מרחבי מדגם עבורם.

**דוגמה 1.1** (מרחבי הסתברות שונים) נראה מספר דוגמות למצבים כאלה:

- הטלת מטבע תוגדר על-ידי  $\Omega = \{H, T\}$ .
- הטלת שלושה מטבעות תהיה באופן דומה  $\Omega = \{H, T\}^3$ .
- הטלת קוביה היא  $\Omega = [6] = \{1, \dots, 6\}$ .
- הטלת מטבע ואז אם יוצא עץ (H) אז מטילים קוביה ואם יוצא פלי (T) אז מטילים קוביה עם 8 פאות.
- במקרה זה נסמן  $\Omega = \{H, T\} \times \{1, \dots, 8\} = \{H, T, 1, \dots, T, 8\}$  כאשר הכוונה פה היא לזוג סדור  $\langle H, 1 \rangle$ .
- ערבוב חפיסת קלפים, במקרה זה מרחב המדגם שלנו יהיה סימון של הקלפים כרשימה מספרית בלבד, דהינו  $\Omega = S_{52}$ .
- נוכל גם לסמן במקום את  $\Omega = \{1, \dots, 52\}^{52}$ , זהו סימון זהה.

בדוגמה זו קל במיוחד לראות שכל איבר בקבוצה מתאר מצב סופי כלשהו, ואנו יכולים לשאול שאלות הסתברותיות מהצורה מה הסיכוי שנקבל  $\omega$  מסוים מתוך  $\Omega$ , זאת ללא התחשבות בבעיה שממנה אנו מגיעים. נבחן עתה גם דוגמות למקרים שבהם אין לנו מספר סופי של אפשרויות, למעשה מקרים אלה דומים מאוד למקרים שראינו עד כה.

**דוגמה 1.2** (מרחבי מדגם לא סופיים) מטילים מטבע עד שיוצא  $H$ , אז מרחב המדגם הוא  $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . באופן דומה נוכל לבחון מדידת זמן התפרקות חלקיק, היא  $\Omega = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ .

**הגדרה 1.2** (פונקציית הסתברות נקודתית) יהי מרחב מדגם  $\Omega$  ותהי  $p : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  פונקציה כך שמתקיים

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

אז פונקציה זו נקראת **פונקציית הסתברות**.

למעשה פונקציית הסתברות היא מה שאנחנו נזהה עם הסתברות במובן הפשוט, פונקציה זו מגדירה לנו לכל סיטואציה ממרחב המדגם מה הסיכוי שנגיע אליה, כך לדוגמה אם נאמר שהטלת מטבע תגיע בחצי מהמקרים לעץ ובחצי השני לפלי, אז זו היא פונקציית ההסתברות עצמה, פונקציה שמחזירה חצי עבור עץ וחצי עבור פלי, נראה מספר דוגמות.

**דוגמה 1.3** (פונקציית הסתברות להטלת מטבע) נגדיר  $\Omega = \{H, T\}$  ויהי  $0 \leq \alpha \leq 1$ , נגדיר  $p(H) = \alpha, p(T) = 1 - \alpha$ .

**דוגמה 1.4** (פונקציית הסתברות אינסופית) נגדיר  $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  ו-  $p(\omega) = \begin{cases} 2^{-\omega} & \omega \in \mathbb{N} \\ 0 & \omega = \infty \end{cases}$ . בדוגמה זו נקבל  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$  ולכן זו אכן פונקציית הסתברות.

נבחין כי הדוגמה האחרונה מתארת לנו התפלגות של דעיכה, זאת אומרת שלדוגמה אם קיים חלקיק עם זמן מחצית חיים של יחידה אחת, פונקציית הסתברות זו תניב לנו את הסיכוי שהוא התפרק לאחר כמות יחידות זמן כלשהי.

**דוגמה 1.5** נגדיר  $\Omega = \mathbb{N}$  ו-  $p(\omega) = \frac{1}{\omega(\omega+1)}$ , נבחין כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$  אכן  $p(\omega) = \frac{1}{\omega(\omega+1)}$  נבחין כי אכן  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

**הגדרה 1.3** (תומך) התומך של  $p$  הוא  $\text{Supp}(p) = \{\omega \in \Omega \mid p(\omega) > 0\}$ .

נבחין כי התומך הוא למעשה קבוצת האיברים שאפשרי לקבל לפי פונקציית ההסתברות, כל שאר המצבים מקבלים 0, משמעו הוא שאין אפשרות להגיע אליו.

**הערה** נבחין כי תמיד  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ .

**הגדרה 1.4** (מאורע) מאורע הוא תת-קבוצה של מרחב המדגם, קבוצת כל המאורעות תסומן  $\mathcal{F}$ . עבור מאורע  $A$  המאורע המשלים מסומן ב-  $A^C = \Omega \setminus A$ .

**הגדרה 1.5** (פונקציית הסתברות) נגדיר עתה פונקציית הסתברות שאיננה נקודתית. יהי מרחב מדגם  $\Omega$  וקבוצת מאורעות  $\mathcal{F}$ .

תהי  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$  המקיימת את התכונות הבאות:

$$1. \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$2. \text{ לכל } \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \text{ סדרת מאורעות שונים מתקיים}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

דהינו, הפונקציה סכימה בתת-קבוצות בנות מניה.

לפונקציה כזו נקרא **פונקציית ההסתברות** על  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**טענה 1.6** תהי  $p$  פונקציית הסתברות נקודתית על  $\Omega$  אז נגדיר פונקציית הסתברות  $\mathbb{P}_p$  על ידי

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

אז  $\mathbb{P}_p$  היא פונקציית הסתברות.

**הוכחה.** נוכיח ששתי התכונות של פונקציית הסתברות מתקיימות.

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \geq 0$$

שכן זהו סכום אי-שלילי מהגדרת  $p$ , בנוסף נקבל מההגדרה של  $p$  כי

$$\mathbb{P}_p(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

וקיבלנו כי התכונה הראשונה מתקיימת.

תהי  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ , אז נקבל

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_p(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( \sum_{\omega \in A_i} p(\omega) \right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} p(\omega) = \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

ולכן גם התכונה השנייה מתקיימת וקיבלנו כי  $\mathbb{P}_p$  היא אכן פונקציית הסתברות.  $\square$

נשים לב כי בעוד פונקציית הסתברות נקודתית מאפשרת לנו לדון בהסתברות של איבר בודד בקבוצות בנות מניה, פונקציית הסתברות למעשה מאפשרת לנו לדון בהסתברות של מאורעות, הם קבוצות של כמה מצבים אפשריים, ובכך להגדיל את מושא הדיון שלנו. מהטענה האחרונה גם נוכל להסיק שבין שתי ההגדרות קיים קשר הדוק, שכן פונקציית הסתברות נקודתית גוררת את קיומה של פונקציית הסתברות כללית.

## 2 תרגול 1 – 31.10.2024

המתרגל הוא אמיר, amir.behar@mail.huji.ac.il

### 2.1 מרחבי הסתברות סופיים ובני-מניה

ניזכר בהגדרה למרחב הסתברות, המטרה של הגדרה זו היא לתאר תוצאות אפשריות של מצב נתון.

**הגדרה 2.1** (מרחב הסתברות) מרחב הסתברות הוא קבוצה  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  כאשר  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , כך שמתקיים

$$1. \text{ חיוביות: } \forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0$$

$$2. \text{ נרמול: } \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$3. \text{ סיגמא-אדיטיביות: } \forall \{A_i\}_{i=1}^\infty \in \mathcal{F}, (\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \Rightarrow \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i)$$

**תרגיל 2.1** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות,  $A, B \in \mathcal{F}$ , הוכיחו

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

**הוכחה.** נבחין כי  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B)$  וגם  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B)$ . נוכל אם כן לסכום ולקבל

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

נבחין כי השוויון האחרון נובע מהזרות של קבוצות אלה.  $\square$

לאורך פרק זה נגדיר מעתה שמתקיים  $\Omega$  סופית,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$  ואף נגדיר כי ההסתברות אחידה, דהינו  $\forall A \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ , זה כמובן שקול לטענה

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\omega'\})$$

**תרגיל 2.2** מטילים קובייה הוגנת, מה ההסתברות שיצא מספר זוגי?

**פתרון** נגדיר  $\Omega = [6] = \{1, \dots, 6\}$  עם  $\mathbb{P}$  אחידה.

נרצה לחשב את  $A = \{2, 4, 6\}$  ולכן נקבל  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

**תרגיל 2.3** מטילים מטבע הוגן שלוש פעמים, מה ההסתברות שיצא עץ בדיוק פעמיים, ומה ההסתברות שיצא עץ לפחות פעמיים?

**פתרון** נגדיר  $\Omega = \{TTT, TTP, TPT, PTT, \dots\}$

עבור המקרה הראשון נגדיר  $A = \{TTP, TPT, PTT\}$ , ולכן נקבל שההסתברות היא  $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$

במקרה השני נקבל  $B = A \cup \{TTT\}$  ולכן  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$

**תרגיל 2.4** מטילים קובייה הוגנת  $n$  פעמים.

1. מה ההסתברות שתוצאת ההטלה הראשונה קטנה מ-4?

2. מה ההסתברות שתוצאת ההטלה הראשונה קטנה שווה מתוצאת ההטלה השנייה?

3. מה ההסתברות שיצא 1 לפחות פעם אחת?

**פתרון** נגדיר  $\Omega = [6]^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [6]\}$

1. נגדיר  $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_1 < 4\}$  ולכן  $\mathbb{P}(A) = \frac{3 \cdot 6^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{2}$

2. נגדיר  $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_1 \leq x_2\} = \bigcup_{i=1}^6 \{(x_1, i, x_3, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_i \leq i\}$  ולכן נקבל

$$\mathbb{P}(B) = \sum \mathbb{P}(B_i) = \sum \frac{i \cdot 6^{n-2}}{6^n} = \frac{\sum_{i=1}^6 i}{6^2} = \frac{6 \cdot 7}{6^2 \cdot 2} = \frac{7}{12}$$

3. הפעם  $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \exists i, x_i = 1\}$ , בהתאם  $C^C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \forall i, x_i \neq 1\}$

$$\mathbb{P}(C^C) = \frac{5^n}{6^n} \Rightarrow \mathbb{P}(C) = 1 - \frac{5^n}{6^n}$$

**תרגיל 2.5** חמישה אנשים בריאים וחמישה אנשים חולי שפעת עומדים בשורה. מה ההסתברות שחולי השפעת נמצאים משמאל לאנשים הבריאים?

**פתרון** נגדיר  $\Omega$  ככל הסידורים של 0, 1 כשיש חמישה מכל סוג. לכן נקבל  $|\Omega| = \binom{10}{5}$ , שכן  $\Omega = \{X \subset [10] \mid |X| = 5\}$ .  
המאורע הפעם הוא  $A = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$  ובהתאם  $\mathbb{P}(A) = \frac{5!5!}{10!}$ .  
נוכל גם להגדיר  $\Omega = S_{10}$  כאשר חמשת המספרים הראשונים מייצגים בריאים וחמשת האחרונים מייצגים חולים.  
במקרה זה נקבל  $A = \{\pi \in \Omega \mid \pi(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$  ולכן  $|A| = 5!5!$  וכך נקבל  $\mathbb{P}(A) = \frac{5!5!}{10!}$ .



### 3 שיעור 2 — 31.10.2024

#### 3.1 השלמה לטורים דו-מימדיים

נגדיר הגדרה שדרושה לצורך ההרצאה הקודמת כדי להיות מסוגלים לדון בסכומים אינסופיים בני-מניה.

הגדרה 3.1 (סכום קבוצת בת-מניה) אם  $\{a_i\}_{i \in I}$  ו- $a_i \geq 0$  לכל  $i \in I$  אז נגדיר

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} a_i \mid J \subseteq I, J \text{ is finite} \right\}$$

#### 3.2 תכונות של פונקציות הסתברות

נעבור עתה לבחון פונקציות הסתברות ואת תכונותיהן, נתחיל מתרגיל שיוצק תוכן לתומך של פונקציית הסתברות:

תרגיל 3.1 הוכיחו כי אם  $\sum_{i \in I} a_i < \infty$  ו- $a_i \geq 0$  לכל  $i \in I$  אז  $|\{i \in I \mid a_i < 0\}| \leq \aleph_0$ . במילים אחרות הוכיחו כי התומך של  $a$  הוא בן-מניה.

בשיעור הקודם ראינו את ההגדרה והטענה הבאות:

הגדרה 3.2 (פונקציית הסתברות מתאימה לנקודתית) בהינתן פונקציית הסתברות נקודתית  $p$  נגדיר

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

טענה 3.3  $\mathbb{P}_p$  היא פונקציית הסתברות.

טענה זו בעצם יוצרת קשר בין פונקציות הסתברות לפונקציות הסתברות נקודתיות, ומאפשרת לנו לחקור את פונקציות ההסתברות לעומק באופן פשוט הרבה יותר. נשתמש עתה בכלי זה.

הגדרה 3.4 (מרחב הסתברות בדיד) אם  $\mathbb{P}$  פונקציית הסתברות כך שקיימת פונקציית הסתברות נקודתית  $p$  כך  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$ , אז נאמר ש- $\mathbb{P}$  היא בדידה ו- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות בדיד.

טענה 3.5 יש פונקציות הסתברות שאינן בדידות. בפרט, עבור מדגם ההסתברות  $\Omega = [0, 1]$  קיימת פונקציית הסתברות  $\mathbb{P}$  המקיימת

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a \leq b \leq 1 \implies \mathbb{P}([a, b]) = b - a$$

דוגמה 3.1 ידוע כי  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$  ולכן נוכל להגדיר  $\Omega = \mathbb{N}$  ו- $p(n) = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6} n^2}$ , הגדרה זו תניב ש- $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(n) = 1$  ולכן זו פונקציית הסתברות. נחשב את  $\mathbb{P}_p(A)$  עבור  $A = 2\mathbb{N}$ :

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{n \in A} p(n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p(2k) = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6} (2k)^2} = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}$$

נסביר, הגדרנו פונקציית הסתברות של דעיכה, דהיינו שככל שהמספר שאנו מבקשים גדול יותר כך הוא פחות סביר באופן מעריכי (לדוגמה זמן מחצית חיים), ואז שאלנו כמה סביר המאורע שבו נקבל מספר זוגי.

משפט 3.6 (תכונות פונקציית הסתברות)  $\mathbb{P}$  פונקציית הסתברות על  $(\Omega, \mathcal{F})$ , אז

$$1. \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$2. \text{אם } I \text{ קבוצה סופית ו-} \{A_i\}_{i \in I} \text{ מאורעות זרים בוגות, אז } \mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

$$3. \text{אם } A \subseteq B \text{ מאורעות אז } \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

$$4. \mathbb{P}(A) \leq 1 \text{ לכל מאורע } A$$

$$5. \text{לכל מאורע } A \text{ מתקיים } \mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

הוכחה. נוכיח את התכונות

1. נראה כי  $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$  שכן כל איחוד של קבוצות ריקות הוא זר, לכן אילו  $\mathbb{P}(\emptyset) \neq 0$  נקבל ישר סתירה, נסיק כי  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  בלבד.

2. נגדיר  $A_i = \emptyset$  לכל  $i > n$  ונשתמש בסיגמא-אדיטיביות ונקבל

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

3. נשתמש בתכונה 2 על  $B, B \setminus A$ , אלו הן קבוצות זרות כמובן, אם נגדיר  $D = A \cup (B \setminus A)$  נקבל  $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$

4. נובע ישירות מתכונה 3 ומ- $A \subseteq \Omega$

5. ניזכר כי  $A^C = \Omega \setminus A$  ולכן  $\Omega = A \cup A^C$  ונקבל  $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C)$

□

נעבור עתה לאפיון של פונקציות הסתברות בדידות, נבין מתי הן כאלה ומתי לא.

**משפט 3.7 (תנאים שקולים לפונקציית הסתברות בדידה)** אם  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות, התנאים הבאים שקולים:

1.  $\mathbb{P}$  היא פונקציית הסתברות בדידה

2.  $\mathbb{P}$  נתמכת על קבוצות בנות-מניה, כלומר קיימת קבוצה  $A \in \mathcal{F}$  בת-מניה כך ש- $\mathbb{P}(A) = 1$

3.  $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$

4. לכל מאורע  $A \in \mathcal{F}$  מתקיים  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$

**הוכחה.**  $2 \Rightarrow 1$ : נניח ש- $\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$  עבור  $p : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  פונקציית הסתברות נקודתית. נסתכל על  $\text{Supp}(p) = \{\omega \in \Omega \mid p(\omega) > 0\}$  לפי הגדרת הסכום והתרגיל נובע ש- $A = \text{Supp}(p)$  בת-מניה. נקבל

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$4 \Rightarrow 2$ : נניח ש- $\mathbb{P}(S) = 1$  עבור  $S$  בת-מניה. לכן  $\mathbb{P}(S^C) = 0$ . נראה כי  $A$  הוא איחוד זר  $A = (A \cap S) \cup (A \cap S^C)$  ולכן נקבל

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(A \cap S^C) = \mathbb{P}(A \cap S) + 0 = \sum_{\omega \in A \cap S} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

$3 \Rightarrow 4$ : אם נבחר  $A = \Omega$  נקבל את טענה 3.

$1 \Rightarrow 3$ : נגדיר  $p : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  על-ידי  $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$ , נקבל  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$  ולכן  $p$  היא פונקציית הסתברות נקודתית. מהתרגיל והגדרת הסכום נובע ש- $S = \text{Supp}(p)$  היא בת-מניה ומתקיים  $\mathbb{P}(S^C) = 0$ , אז לכל  $A \in \mathcal{F}$  מתקיים

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(A \cap S^C) = \mathbb{P}(A \cap S) = \sum_{\omega \in A \cap S} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \mathbb{P}_p(A)$$

□

### 3.3 פרדוקס יום ההולדת

פרדוקס יום ההולדת הוא פרדוקס מוכר הגורס כי גם בקבוצות קטנות יחסית של אנשים, הסיכוי שלשני אנשים שונים יהיה תאריך יום הולדת זהה הוא גבוה במידה משונה. הפרדוקס נקרא כך שכן לכאורה אין קשר בין מספר הימים בשנה לבין הסיכוי הכל-כך גבוה שמצב זה יקרה, נבחן עתה את הפרדוקס בהיבט הסתברותי.

נניח שכל תאריכי יום ההולדת הם סבירים באותה מידה ונבחן את הפרדוקס. נגדיר  $\Omega = [365]^k$  עבור  $k$  מספר האנשים בקבוצה נתונה כלשהי. נקבל  $p(\omega) = \frac{1}{365^k}$  לכל  $\omega \in \Omega$ . נרצה לחשב את  $\mathbb{P}(A)$  כמאורע שיש לפחות שני אנשים שיש להם יום הולדת באותו יום, דהינו שיש שני ערכים זהים ברשימת המספרים, נגדיר  $A = \{\omega \in \Omega \mid \exists 1 \leq i \neq j \leq k, \omega_i = \omega_j\}$ . בשל המורכבות נבחן את המשלים  $A^C$ , נקבל  $|A^C| = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - (k - 1)) = \frac{365!}{(365 - (k - 1))!}$ . נציב ונחשב:

$$\mathbb{P}(A^C) = \frac{|A^C|}{365^k} = \prod_{i=1}^k \frac{365 - (i - 1)}{365} = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{i - 1}{365}\right)$$

מהנוסחה שקיבלנו נראה שמהעצב  $k = 23$  נקבל שהסתברות היא בערך  $\frac{1}{2}$ , דהינו בקבוצה של 23 אנשים יש סבירות של חצי שלפחות שניים יחגגו יום הולדת באותו יום.

## 4 שיעור 3 — 5.11.2024

### 4.1 מכפלת מרחבי הסתברות בדידים

ניזכר תחילה במרחבי הסתברות אחידים

**הגדרה 4.1** (מרחב הסתברות אחיד) מרחב הסתברות אחיד הוא  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$  המקיים  $p(\omega_1) = p(\omega_2)$  לכל  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ .

$$\mathbb{P}_p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{4.2 מסקנה}$$

נבחין כי במקרים מסוימים ההסתברות שלנו מורכבת משני מאורעות בלתי תלויים, במקרים אלה נרצה להגדיר מכפלה של מרחבי ההסתברות.

**הגדרה 4.3** (מרחב מכפלת הסתברויות) אם  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_{p_1})$  ו- $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_{p_2})$  מרחבי הסתברות בדידים נגדיר  $q : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty)$  על-ידי  $q(\omega_1, \omega_2) = p(\omega_1) \cdot p(\omega_2)$ .

**טענה 4.4** פונקציית הסתברות נקודתית.

**הוכחה.** נשתמש ישירות בהגדרה ונחשב

$$\sum_{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2} q(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2} q(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} \left( \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p_1(\omega_1) p_2(\omega_2) \right) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} p_1(\omega_1) = 1$$

□

עתה כשהוכחנו טענה זו, יש לנו הצדקה אמיתית להגדיר את  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_{1,2}, \mathbb{P}_q)$  כמרחב הסתברות, ונקרא לו מרחב מכפלה.

**טענה 4.5** אם  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_{p_1})$  ו- $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_{p_2})$  מרחבי הסתברות אחידים, אז מרחב המכפלה  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_{1,2}, \mathbb{P}_q)$  אחיד אף הוא.

**הוכחה.**

$$q(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) p_2(\omega_2) = \frac{1}{|\Omega_1|} \cdot \frac{1}{|\Omega_2|} = \frac{1}{|\Omega_1 \times \Omega_2|}$$

□

**הגדרה 4.6** (מאורע שוליים ומאורע מכפלה) במרחב מכפלה המאורעות מהצורה  $A \times \Omega_2$  או  $\Omega_1 \times A$  נקראים שוליים.

מאורע מהצורה  $A \times B$  נקרא מאורע מכפלה.

**טענה 4.7** במרחב מכפלה  $\mathbb{P}_q(A \times B) = \mathbb{P}_{p_1}(A) \cdot \mathbb{P}_{p_2}(B)$ . כפרט  $\mathbb{P}_q(A \times \Omega_2) = \mathbb{P}_{p_1}(A)$ .

**הוכחה.**

$$\sum_{(\omega_1, \omega_2) \in A \times B} q(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega_1 \in A, \omega_2 \in B} q(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega_1 \in A} \left( \sum_{\omega_2 \in B} p_1(\omega_1) p_2(\omega_2) \right) = \sum_{\omega_1 \in A} p_1(\omega_1) \mathbb{P}_{p_2}(B) = \mathbb{P}_{p_1}(A) \mathbb{P}_{p_2}(B)$$

□

**דוגמה 4.1** בהינתן  $n$  הטלות מטבע כלשהו, מה ההסתברות שיצאו  $k$  עצים?

עבור ההטלה הראשונה,  $\Omega_1 = \{0, 1\}$ . עוד נגדיר  $p(1) = \alpha, p(0) = 1 - \alpha$  עבור  $0 \leq \alpha \leq 1$  כלשהו.

בהתאם נקבל  $\Omega = \{0, 1\}^n$  וכן

$$q(\omega_1, \dots, \omega_n) = \prod_{i=1}^n p(\omega_i) = \prod_{i=1}^n \alpha^{\omega_i} \cdot (1 - \alpha)^{1 - \omega_i} = \alpha^{\sum_{i=1}^n \omega_i} (1 - \alpha)^{n - \sum_{i=1}^n \omega_i}$$

נבחין כי היינו יכולים לתאר את המקרה הזה ממש על-ידי  $q(\omega) = \alpha^\omega \cdot (1 - \alpha)^{1 - \omega}$ .

נעבור עתה לבחינת המאורע

$$A = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}$$

נקבל מהביטוי שמצאנו כי

$$\mathbb{P}_q(A) = \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in A} q(\omega_1, \dots, \omega_n) \sum_{\sum_{i=1}^n \omega_i = k} \alpha^{\sum_{i=1}^n \omega_i} (1 - \alpha)^{n - \sum_{i=1}^n \omega_i} = |A| \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} = \binom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k}$$

**דוגמה 4.2** נבחן עתה את המקרה של הטלות הוגנות ובחינת המקרה שחצי מההטלות לפחות יצאו עץ, זאת אומרת שנבחן את הדוגמה הקודמת כאשר

$$\alpha = \frac{1}{2}, n = 2m, k = m. \text{ מנוסחת סטרלינג שאנחנו לא מכירים } m! \simeq \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m \text{ ואז נוכל להסיק}$$

$$\mathbb{P}_q(A) = \binom{2m}{m} \frac{1}{2^m} \simeq \frac{\sqrt{4\pi m} \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{(\sqrt{2\pi m} \left(\frac{k}{e}\right)^m)^2 2^{2m}} = \frac{\sqrt{4\pi m}}{2\pi m} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

## 4.2 ניסויים דו-שלביים

נניח  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_{p_1})$  מרחב הסתברות בדידה עבור הניסוי הראשון, ונניח שיש מרחב הסתברות בדידה עבור הניסוי השני כך שלכל תוצאה בניסוי הראשון, פונקציית ההסתברות תשתנה בהתאם בניסוי השני. לכל  $\omega_1 \in \Omega_1$  יש פונקציית הסתברות נקודתית  $p_{\omega_1} : \Omega_2 \rightarrow [0, \infty)$ . נגדיר את מרחב הניסוי הדו-שלבי  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_{1,2}, \mathbb{P}_q)$ , כאשר  $q(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \cdot p_{\omega_1}(\omega_2)$ .

**טענה 4.8** פונקציית הסתברות

הוכחה.

$$\sum_{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2} q(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} \left( \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p_1(\omega_1) p_{\omega_1}(\omega_2) \right) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} p_1(\omega_1) \left( \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p_{\omega_1}(\omega_2) \right) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} p_1(\omega_1) = 1$$

□

**דוגמה 4.3**  $\Omega_1 = \{H, T\}$  ו- $\Omega_2 = \{1, \dots, 8\}$ , נגדיר  $p_1(H) = p_1(T) = \frac{1}{2}$ . עוד נגדיר

$$p_H(\omega_2) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 1 \leq \omega_2 \leq 6 \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad p_T(\omega_2) = \frac{1}{8}$$

מהגדרה זו נקבל

$$q(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \omega_1 = H, \omega_2 \in [6] \\ 0 & \omega_1 = H, \omega_2 \in \{7, 8\} \\ \frac{1}{16} & \omega_1 = T, \omega_2 \in [8] \end{cases}$$

**משפט 4.9 (חסם האיחוד)** אם  $A, B$  מאורעות אז  $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

הוכחה.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \uplus (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

□

נוכל להשתמש בחסם האיחוד כדי להוכיח גרסה כללית יותר של המשפט:

**משפט 4.10 (אי-שוויון בול)** אם  $A_1, \dots, A_k$  מאורעות, אז  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^k A_i) \leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i)$ .

**דוגמה 4.4** נחזור לבחון את פרדוקס יום ההולדת, הפעם נבחן גרסה כללית יותר של הרעיון. נגדיר  $\Omega = [m]^k$  עם הסתברות אחידה. נגדיר גם

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \exists 1 \leq i < j \leq k, \omega_i = \omega_j\}, \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \text{ אז נבחן את המשלים}$$

$$A^C = \{\omega \in \Omega \mid \forall 1 \leq i, j \leq k, i \neq j \implies \omega_i \neq \omega_j\}$$

נחשב

$$|A^C| = m(m-1) \cdots (m-(k-1))$$

בהתאם

$$\mathbb{P}(A^C) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (m-i)}{m^k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{m-i}{m} = \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{m}\right)$$

נזכור ש- $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$ , ונוכל לקבל

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{m}\right) \leq \prod_{i=0}^{k-1} e^{-\frac{i}{m}} = \exp\left(-\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{k-1} i\right) = e^{-\frac{k(k-1)}{2m}}$$

כאשר  $k$  גדול ביחס ל- $\sqrt{2m}$  מקבלים חסם קרוב ל-0.

נגדיר הפעם  $A = \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i, j \in [k]}} A_{ij}$  עבור  $A_{ij} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j\}$ . וגם

$$i \neq j \implies \mathbb{P}(A_{ij}) = \frac{|A_{ij}|}{m^k} = \frac{m \cdot m^{k-2}}{m^k} = \frac{1}{m}$$

ועתה

$$\mathbb{P}(A) \leq \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in [k]}} \mathbb{P}(A_{ij}) = \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in [k]}} \frac{1}{m} = \binom{k}{2} \frac{1}{m} = \frac{k(k-1)}{2m}$$

לכן אם  $k$  קטן ביחס ל- $\sqrt{2m}$  אז ההסתברות ליום-הולדת משותף קטנה.

## 5 תרגול 2 – 7.11.2024

### 5.1 פתרון שאלות הסתברותיות

נתחיל בבחינת טענה שימושית לביצוע חישובי הסתברות:

טענה 5.1 (נוסחת ההסתברות השלמה) יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות,  $\mathcal{A}$  חלוקה בת־מניה של  $\Omega$ , לכל  $B \in \mathcal{F}$  מתקיים

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A \cap B)$$

נניח שיש מרחב הסתברות ויש חלוקה בת מניה של המרחב, אז לכל מאורע ההסתברות שלו היא הסכום על החלוקה על החיתוך של החלוקה ו־ $A$ .

הוכחה. נשים לב כי  $B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \cap B$  איחוד זר, ולכן הטענה נובעת מסיגמא־אדיטיביות. □

**תרגיל 5.1** קוביה מוטת בעלת 6 פאות עם הסתברות נקודתית  $p(i) = \frac{i}{21}$  מוטלת 5 פעמים.

מה ההסתברות שתוצאת ההטלה הראשונה התקבלה פעם אחת ויחידה?

**פתרון** נגדיר  $\Omega = [6]^5$  ונגדיר  $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_5) = p(x_1) \cdots p(x_5)$ . אנו רוצים לחשב את

$$B = \{(x_1, \dots, x_5) \in \Omega \mid \forall j \neq 1, x_j \neq x_1\}$$

נגדיר חלוקה  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_6\}$  של  $\Omega$  כך ש־ $A_i = \{(i, x_2, \dots, x_5) \in \Omega \mid 1 \leq x_j \leq 6\}$ . נקבל

$$\mathbb{P}(B \cap A_i) = \frac{i}{21} \cdot \left(1 - \frac{i}{21}\right)^4$$

על־ידי שימוש בנוסחת ההסתברות השלמה נקבל

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^6 \frac{i}{21} \left(1 - \frac{i}{21}\right)^4$$

נראה עתה דוגמה לשימוש בחסם האיחוד בן־המניה, אותו נראה בהרצאה הבאה

טענה 5.2 (חסם האיחוד הבן־מניה) אם  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות ו־ $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}$  אז מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

**תרגיל 5.2** משלשלים  $k$  פתקי הצבעה בין  $n$  קלפיות.

מה ההסתברות שאין קלפי עם יותר מפתק אחד?

**פתרון** נגדיר  $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i, x_1 + \dots + x_n = k\}$ . נחשב ונקבל  $|\Omega| = \binom{n+k-1}{k-1}$ .

נגדיר את המאורע,  $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_i \leq 1\}$ .

ננסה לחסום את המשלים,

$$\Omega \setminus A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \exists i, x_i \geq 2\}$$

אם נגדיר  $A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_i \geq 2\}$  אז נוכל להגדיר

$$\Omega \setminus A = \bigcup_{i \in [n]} A_i$$

נחשב את ההסתברות של כל  $A_i$ , מתקבל  $|A_i| = \binom{n+k-3}{k-3}$  מהשיקול של סכימת הפתרונות השלמים תוך התעלמות משני פתקים. לכן

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n+k-3}{k-3}}{\binom{n+k-1}{k-1}} = \frac{k(k-1)}{(k+n-1)(k+n-2)}$$

מחסם האיחוד נובע

$$\mathbb{P}(\Omega - A) \leq \sum_{i=1}^n \frac{k(k-1)}{(k+n-1)(k+n-2)} = n \cdot \frac{k(k-1)}{(n+k-1)(n+k-2)}$$

ועל־ידי מעבר למשלמים שוב נוכל להסיק  $\mathbb{P}(A) \geq 1 - n \cdot \frac{k(k-1)}{(n+k-1)(n+k-2)}$

נזכור כי אנו מנסים להבין את המגמה כאשר המספרים מאוד גדולים, לכן נבחן את המקרה ש- $n \rightarrow \infty$ , אז נובע  $\mathbb{P}(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , דהיינו כאשר יש כמות קלפיות הולכת וגדלה הסיכוי שיהיה פתק יחיד בכל אחת (מספר הפתקים לא משתנה) הולך וגדל ומתקרב לסיכוי מלא. נראה עתה דוגמה לשימוש במרחבי ניסוי דו־שלביים:

**תרגיל 5.3** מה ההסתברות שנגריל מספר  $m$  בין  $1$  ל- $n$ , ואז נגריל עוד מספר והוא יהיה בין  $1$  לבין  $m$ ?

**פתרון** נבנה פונקציית הסתברות עבור הניסוי השני, נניח שבניסוי השני קיבלנו  $m$ :

$$p_m(k) = \begin{cases} \frac{1}{m} & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases}, \quad q(m, k) = \begin{cases} \frac{1}{mn} & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases}$$

נגדיר  $A_k$  המאורע שתוצאת ההגרלה השניה היא  $k$ , לכן

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\{(m, k) \in \Omega \mid m \leq k\}) = \sum_{m=1}^n q(m, k) = \sum_{m=k}^n \frac{1}{mn}$$

נבחין כי המעבר האחרון אכן תקין, שכן קיבענו את המשתנה השני, זאת אומרת שעכשיו במקום להסתכל על מספר שיותר קטן ממספר אחר, אנו בוחנים את המספר החוסם מלמעלה, המספר הגדול יותר.

לדוגמה

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}(A_1) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{mn} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \approx \frac{\log n}{n}$$

נבחן דוגמה ספציפית כהמשך של השאלה הזו, הפעם נגדיר  $m = n/2$ :

**דוגמה 5.1** נגדיר  $B_{n/2}$  להיות המאורע בהתחלה השניה ו- $B$  שבהגרלה השניה יצא מספר גדול מ- $n/2$

$$\mathbb{P}(B_{n/2}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n/2} A_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k \geq \frac{n}{2}} \sum_{m=k}^n \frac{1}{m} = \frac{1}{n} \sum_{m=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n \frac{\frac{n}{2} + 1 - n + m}{m}$$

כמו בשאלה הקודמת, גם הפעם נרצה להבין מגמה כללית, ולכן נבדוק את הביטוי כאשר  $n$  שואף לאינסוף, דהיינו שהמספרים שאפשר להגדיל הולכים וגדלים בכמותם:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_{n/2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n \frac{1 + m - \frac{n}{2}}{m}$$

נבחין כי  $\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} = \log(n) + e + o(\frac{1}{m})$  ולכן

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n \frac{1 + m - \frac{n}{2}}{m} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{n}{2n} (\log(n) - \log(\frac{n}{2}) + o(\frac{1}{n})) + \frac{1}{n} (\log(n) - \log(\frac{n}{2}) + o(\frac{1}{n})) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \log 2 \end{aligned}$$

## 6 שיעור 4 — 7.11.2024

בשיעור הקודם דיברנו על מרחבי מכפלה וניסויים דו-שלביים. ברור לנו כי עלידי שרשור דומה לתהליך של ניסוי דו-שלבי נוכל לבנות ניסוי רב-שלבי. עוד דיברנו על חסם האיחוד, הטענה כי  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$  השימוש של חסם האיחוד מאפשר לנו לפשט חישובים שבהם אנחנו רוצים הבנה כללית של ההתנהגות של מרחב ההסתברות.

### 6.1 חסמי איחוד ורציפות

**הגדרה 6.1** (סדרת מאורעות עולה) סדרת מאורעות  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  נקראת עולה אם  $A_n \subseteq A_{n+1}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

**סימון 6.2** נסמן  $A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

**משפט 6.3** (משפט רציפות פונקציית ההסתברות) אם  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  סדרת מאורעות עולה אז

$$\mathbb{P}(A_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

המשפט נקרא כך בשל ההקבלה שלו לקונספט של רציפות בפונקציות רגילות, עבור  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  היא רציפה ב- $a$  אם ורק אם  $x_n \rightarrow a$  סדרה  $x_n \rightarrow a$  מתקיים  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

**הוכחה.** נגדיר  $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$  כאשר  $B_1 = A_1 \setminus \emptyset = A_1$ .

נראה כי מתקיים  $\biguplus_{n=1}^m B_n = A_m$  איחוד זר:

$\biguplus_{n=1}^m B_n = A_m$  כי לכל  $\omega \in A_m$  יש  $n$  מינימלי כך ש- $\omega \in A_n$ , אבל  $\omega \notin A_{n-1}$ , לכן נוכל להסיק כי  $\omega \in A_n \setminus A_{n-1} = B_n$ . אם  $\omega \in B_n = A_n \setminus A_{n-1}$  אז  $\omega \notin A_{n-1}$  ולכן  $\omega \notin A_k$  לכל  $k < n$ . מסיגמא-אדיטיביות נסיק

$$\sum_{n=1}^m \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_m)$$

וגם

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{n=1}^\infty B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^\infty \left(\biguplus_{n=1}^m B_n\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^\infty A_m\right)$$

מצד שני מהגדרת הגבול

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(B_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{P}(B_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_m)$$

□

**הגדרה 6.4** (סדרת מאורעות יורדת) נגדיר סדרת מאורעות  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  כך שמתקיים  $A_{n+1} \subseteq A_n$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

נוכל להסיק מהעובדה שמשלים של סדרה עולה הוא סדרה יורדת ונקבל

**טענה 6.5**

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

**טענה 6.6** (חסם האיחוד הבן-מניה) אם  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  סדרת מאורעות אז מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

**הוכחה.** נגדיר  $B_m = \bigcup_{n=1}^m A_n$ , זוהי סדרה עולה ולכן

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^\infty B_m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n)$$

□



## 6.2 עיקרון ההכלה וההדחה

טענה 6.7 אם  $A, B$  מאורעות אז

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

הוכחה. נגדיר  $C = A \setminus B, D = A \cap B, E = B \setminus A$  נקבל

$$A = C \uplus D, \quad B = D \uplus E, \quad A \cup B = C \uplus D \uplus E$$

ונקבל

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D), \quad \mathbb{P}(D \cup B) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(E)$$

ולכן

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(E)$$

□

משפט 6.8 (הכלה והפרדה לשלושה מאורעות) עבור שלושה מאורעות  $A, B, C$ :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

משפט 6.9 (הכלה והפרדה ל- $n$  מאורעות) יהיו  $A_1, \dots, A_n$  מאורעות, אז

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots$$

אם נגדיר  $I \subseteq [n]$  לכל  $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$  אז נקבל

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \mathbb{P}(A_I) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \mathbb{P}(A_I)$$

את משפט זה נוכיח בהמשך הקורס.

נראה דוגמה לבעיה קלאסית במקרים אלה.

תרגיל 6.1 (בעיית ההתאמה) מחלקים  $n$  מעטפות ל- $n$  תיבות דואר, אחת לכל תיבה, מה ההסתברות שאף מכתב לא הגיע ליעדו?

פתרון. נגדיר  $\Omega = S_n$  מרחב אחיד.  $A = \{\omega \in \Omega \mid \forall i, \omega(i) \neq i\}$ .

נבחן את המשלים,  $A^C = \{\omega \in \Omega \mid \exists i, \omega(i) = i\} = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ,  $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega(i) = i\}$ . נחשב

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

במקרה של חיתוך עבור  $j < i$  נקבל

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{|A_i \cap A_j|}{|\Omega|} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

נוכל להמשיך את התהליך הזה, ונקבל

$$\mathbb{P}(A_I) = \frac{|\bigcap_{i \in I} A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-|I|)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(|I|-1))}$$

כעת נותר להשתמש בנוסחה להכלה והדחה, ונקבל

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

נשים לב כי רצינו לחשב את המשלים למאורע, לכן

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$$

נקבל שאוסף התמורות ללא נקודת שבת הוא

$$|A^n| = n! \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l!}$$

נגדיר קבוצה חדשה

$$D_k = \{\omega \in S_n \mid \exists i, \omega(i) = i\} = \bigsqcup_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} D_I$$

ונבחין כי

$$D_I = \{\omega \in S_n \mid \forall i \in I, \omega(i) = i, \forall i \notin I, \omega(i) \neq i\}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_k) &= \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \mathbb{P}(D_I) \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \frac{|D_I|}{n!} \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \frac{(n-k)! \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l!}}{n!} \\ &= \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l!} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1}}{k!} \end{aligned}$$

### 7.1 הסתברות מותנית

הגדרה 7.1 (הסתברות מותנית)  $A, B$  מאורעות, ההסתברות המותנית של  $A$  בהינתן  $B$  תוגדר להיות

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

דוגמה 7.1 אם מטילים שתי קוביות מאוזנות, מה ההסתברות שיצא 3 בקוביה הראשונה בהינתן שהסכום הוא 8?

נגדיר כמובן  $\Omega = [6]^2$ , וכן נגדיר  $A = \{(3, i) \in \omega \mid 1 \leq i \leq 6\}$  וכן  $B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ .

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

טענה 7.2 נקבע מאורע  $B$  עם הסתברות  $\mathbb{P}(B) > 0$ , נגדיר  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A | B)$ , דהיינו  $\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ .

אז  $\mathbb{P}_B$  היא פונקציית הסתברות.

הוכחה.  $\mathbb{P}_B(A)$  היא אי-שלילית.

נראה גם

$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

ולבסוף

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \frac{(\mathbb{P}_B(\bigcup_{i \in I} A_i)) \cap B}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_B(\bigcup_{i \in I} A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i \in I} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_B(A_i)$$

□

טענה 7.3 יהיו  $B, C$  מאורעות המקיימים  $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$ , נסמן  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}'_C$  ו- $\mathbb{P}'' = \mathbb{P}_B$ .

אז לכל מאורע  $A$  מתקיים  $\mathbb{P}''(A) = \mathbb{P}(A | B \cap C)$  או בחילוף סימונים  $\mathbb{P}'' = \mathbb{P}_{B \cap C}$ .

הוכחה.

$$\mathbb{P}''(A) = \mathbb{P}'_C(A) = \frac{\mathbb{P}'(A \cap C)}{\mathbb{P}'(C)} = \frac{\mathbb{P}_B(A \cap C)}{\mathbb{P}_B(C)} = \frac{\frac{\mathbb{P}(B \cap (A \cap C))}{\mathbb{P}(B)}}{\frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)}} = \mathbb{P}_{B \cap C}(A)$$

□

מצאנו כי התניה חוזרת היא אסוציאטיבית ולכן נוכל לדבר על הסתברות מותנית בכמה מאורעות ללא התייחסות לסדר שלהם, למעשה התניה מותנית היא קומוטטיבית כפי שאפשר לראות בהוכחה.

מסקנה 7.4 (נוסחת ההסתברות השלמה בהסתברות מותנית) נניח ש- $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  חלוקה בת-מניה של  $\Omega$  ו- $B$  מאורע כלשהו, אז

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B | A_i)$$

הוכחה.

$$\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B | A_i) = \mathbb{P}(A_i) \frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} = \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

ולכן

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (B \cap A_i) = B \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

□

למה 7.5 (כלל בייס) אם  $A, B$  מאורעות עם הסתברות חיובית אז

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}_B(A)$$

הוכחה. ישירות מהגדרה נסיק

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}_B(A)$$

□

מסקנה 7.6 (כלל השרשרת)

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B | A)$$

**תרגיל 7.1** מטילים מטבע הוגן. אם יוצא עץ נוסעים לתל-אביב ואם יוצא פלי אז נוסעים לחיפה. כשנוסעים לתל-אביב יש הסתברות של אחוז אחד לפנצ'ר, ובנסיעה לחיפה יש הסתברות של 2 אחוז לפנצ'ר.

מה ההסתברות לפנצ'ר ומה ההסתברות שנסעו לתל-אביב?

**פתרון** נגדיר  $A$  הוא עץ או לנסוע לתל-אביב ו- $B$  ההסתברות שיהיה פנצ'ר, בהתאם

$$\mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B | A) = 0.01, \mathbb{P}(B | A^C) = 0.02$$

בהתאם

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B | A) + \mathbb{P}(A^C) \mathbb{P}(B | A^C) = \frac{1}{2} \cdot 0.01 + \frac{1}{2} \cdot 0.02 = 0.015$$

באשר לשאלה השנייה נקבל

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}(B | A) = \frac{\frac{1}{2}}{0.015} \cdot 0.01 = \frac{1}{3}$$

נבחין כי התוצאה יצאה מאוד אלגנטית כתוצאה מהמטבע ההוגן, אילו הוא היה לא הוגן היינו מקבלים חישוב שונה במקצת, אך תקף באותה המידה.

**דוגמה 7.2** (מונטי הול) יש שלוש דלתות, בוחרים אחת, מנחה פותח דלת שלא נבחרה ומאחוריה אין כלום, מה שאומר שמאחורי אחת הדלתות הסגורות יש אוצר ובאחרות יש עז. המנחה מציע לכם להחליף את הדלת שבחרתם.

קשה למדל את הבעיה הזו, שכן חסר תיאור והגדרה, אז נאמר שהגרלנו מספר ב- $[3]$ , נניח שבחרנו 1, נניח שהמנחה גם במכוון תמיד בוחר דלת ריקה. נוסיף את ההנחה שאם האוצר מאחורי דלת 1 אז המנחה פותח את 2 או 3, וההסתברויות שוות.

נעבור להגדרה,  $A_i$  המאורע שהאוצר ב- $i$  ו- $B_i$  היא שהמנחה פותח את דלת  $i$ . מהנחות שלנו נובע  $\mathbb{P}(B_3 | A_2) = 1, \mathbb{P}(B_2 | A_3) = 1, \mathbb{P}(B_3 | A_1) = \frac{1}{2}$ . לבסוף נניח כי  $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3}$  לכל שלוש הדלתות. נרצה לחשב את  $\mathbb{P}(A_1 | B_2)$ :

$$\mathbb{P}(A_1 | B_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B_2)} \cdot \mathbb{P}(B_2 | A_1) = \frac{\frac{1}{6}}{\mathbb{P}(B_2)}$$

וגם

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(B_2 | A_1) + \mathbb{P}(A_2) \mathbb{P}(B_2 | A_2) + \mathbb{P}(A_3) \mathbb{P}(B_2 | A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

## 8 תרגול 3 – 14.11.2024

### 8.1 הסתברות מותנית

**תרגיל 8.1** מטילים זוג קוביות הוגנות ושונות. נתון שסכום תוצאותיהן גדול מעשר, מה ההסתברות שבהטלה השנייה יצא 6?

**פתרון** נגדיר  $\Omega = [6]^2$  עם  $\mathbb{P}$  אחידה.

עוד נגדיר  $A = \{(x, y) \in \Omega \mid x + y > 10\}$  וכן  $B = \{(x, 6) \in \Omega\}$ , לכן

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{2}{3}$$

**תרגיל 8.2** אדם מחפש מכתב, זכור לו במעורפל בהסתברות  $0 \leq p \leq 1$  שהניח אותו באחת ממגירות שולחן העבודה.

בשולחן  $n$  מגירות והאדם חיפש ב- $k$  המגירות הראשונות ולא מצא את המכתב.

מה ההסתברות שהמכתב בשולחן?

**פתרון** נגדיר  $A$  להיות המאורע שהמכתב בשולחן ו- $B_k$  המכתב לא באף אחת מ- $k$  המגירות הראשונות. אנו מחפשים את  $\mathbb{P}(A \mid B_k)$ .

לכן

$$\mathbb{P}(A \mid B_k) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(B_k)}$$

עוד אנו יודעים כי

$$\mathbb{P}(A) = p, \mathbb{P}(B_k) = 1 - \frac{kp}{n}$$

אזי

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(B_k)} = \frac{\frac{(n-k)p}{n}}{\frac{n-kp}{n}} = \frac{(n-k)p}{n-kp}$$

**תרגיל 8.3** האדם הוא מתודי והחליט להפסיק את החיפוש אם ההסתברות שהמכתב בשולחן קטנה מ- $\frac{1}{4}$ .

ניח ש- $p = \frac{3}{4}$  ושיש 10 מגירות, כמה מגירות תיבדקנה לכל היותר עד שהאדם יפסיק את החיפוש?

**פתרון**

$$\frac{1}{4} > \mathbb{P}(A \mid B_k) = \frac{(10-k)\frac{3}{4}}{10-\frac{3k}{4}} \iff k > \frac{89}{11}$$

נבדוק לכל היותר 8 מגירות.

### 8.2 ניסוי דו-שלבי על-ידי הסתברות מותנית

**טענה 8.1** נניח שנתון ניסוי דו-שלבי על  $\Omega_1 \times \Omega_2$  עם פונקציית הסתברות נקודתית  $p$  על  $\Omega_1$  ולכל  $\omega \in \Omega_1$  גם  $p_\omega$  היא פונקציית הסתברות

נקודתית על  $\Omega_2$ .

אם  $\mathbb{P}$  היא פונקציה על  $\Omega_1 \times \Omega_2$  המקיימת

$$\mathbb{P}(\{a, x\}) = p(a), \quad \mathbb{P}(\{x, b\} \mid \{(a, x)\}) = p_a(b)$$

אז  $\mathbb{P}$  היא פונקציית הסתברות יחידה המתאימה לניסוי הדו-שלבי.

**הוכחה.** יהי  $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ , מכלל השרשרת נובע

$$\mathbb{P}(\{(a, b)\}) = \mathbb{P}(\{(a, x)\}) \cdot \mathbb{P}(\{(x, b)\} \mid \{(a, x)\}) = p(a) \cdot p_a(b) = q(a, b)$$

עבור  $q$  פונקציית הסתברות נקודתית של  $\mathbb{P}$ . □

נבחין שוב כי בעוד כל ניסוי דו-שלבי, ניתן לבחון אותו כניסוי מותנה, הכיוון ההפוך לא בהכרח מתקיים; לא כל ניסוי מותנה הוא ניסוי דו-שלבי.

נבחן דוגמות לשימוש בקשר זה.

**תרגיל 8.4** בשוק ישנם שלושה סוגי מחשבים. חצי מסוג ראשון, 30% מסוג שני ו-20% מסוג שלישי.

הסיכוי שמחשב מסוג ראשון יתקלקל בשנתו הראשונה הוא עשירית, הסיכוי לסוג שני הוא חמישית והסיכוי למחשב מהסוג השלישי הוא  $\frac{1}{20}$ .

קונים מחשב באקראי מבין מחשבי השוק, מה ההסתברות שהוא יתקלקל בשנתו הראשונה?

**פתרון** נסמן  $C_j$  הוא המאורע שקנינו מחשב מסוג  $j$ -ו  $B$  המאורע שהמחשב התקלקל בשנתו הראשונה.

עוד נתון  $\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(C_2) = \frac{3}{10}, \mathbb{P}(C_3) = \frac{1}{5}$

נתונים לנו גם  $\mathbb{P}(B | C_1) = \frac{1}{10}, \mathbb{P}(B | C_2) = \frac{1}{5}, \mathbb{P}(B | C_3) = \frac{1}{20}$  מנוסחת ההסתברות השלמה נובע

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B | C_1)\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(B | C_2)\mathbb{P}(C_2) + \mathbb{P}(B | C_3)\mathbb{P}(C_3)$$

**תרגיל 8.5** במבחן אמריקאי לכל שאלה 4 אפשרויות ובדיוק 1 נכונה. סטודנטית ניגשת למבחן עם האסטרטגיה הבאה:

- אם היא יודעת את התשובה היא עונה נכונה.

- אם היא לא יודעת את התשובה אז היא בוחרת תשובה אקראית.

נתון כי הסטודנטית יודעת את התשובה ל-90% משאלות הבחינה.

בוחרים שאלה באקראי, ונתון שהסטודנטית ענתה עליה נכון, מה ההסתברות שהיא ידעה את התשובה.

**פתרון** נסמן ב- $A$  את המאורע שהסטודנטית ידעה את התשובה, וב- $B$  את המאורע שהסטודנטית ענתה נכון.

אנו יודעים כי  $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{10}$  וגם כי  $\mathbb{P}(B | A) = 1, \mathbb{P}(B | A^C) = \frac{1}{4}$

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}(B | A) = \frac{\frac{9}{10} \cdot 1}{\mathbb{P}(B | A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B | A^C) \cdot \mathbb{P}(A^C)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{37}{40}} \approx 0.973$$

## 9.1 אי-תלות

**הגדרה 9.1** (מאורעות בלתי-תלויים) מאורעות  $A, B$  המקיימים  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$  יקראו בלתי-תלויים.

הערה נובע שמתקיים

$$\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$$

הערה (תזכורת) אם  $A \subseteq \Omega_1$  ו- $B \subseteq \Omega_2$  ועובדים עם  $\mathbb{P}$  פונקציית הסתברות של מרחב המכפלה  $\Omega_1 \times \Omega_2$ .

אז ראינו שמתקיים  $\mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}_1(A) \cdot \mathbb{P}_2(B) = \mathbb{P}(A \times \Omega_2) \cdot \mathbb{P}(\Omega_1 \times B)$

**דוגמה 9.1** מטילים שתי קוביות, אז  $\Omega = [6]^2$ .

נגדיר  $A = \{4\} \times [6]$  המאורע שיצא 4 בקוביה הראשונה ו- $B$  המאורע שסכום הקוביות הוא 7.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$

וחישוב חיתוך המאורעות יניב

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{|\{(4, 3)\}|}{36} = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

אז המאורעות בלתי-תלויים.

**טענה 9.2** 1. לכל מאורע  $A$ ,  $\emptyset$  בלתי-תלויים וכן  $A$  ו- $\Omega$  בלתי-תלויים.

2. אם  $A$  ו- $B$  בלתי-תלויים ו- $\mathbb{P}(B) > 0$  אז  $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$ .

3. אם  $A$  ו- $B$  בלתי-תלויים אז גם  $A^C$  ו- $B$  בלתי-תלויים.

הוכחה. נוכיח את הטענה השלישית

$$\mathbb{P}(B \cap A^C) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A^C)$$

במעבר הראשון השתמשנו בנוסחת ההסתברות השלמה על החלוקה  $A, A^C$ . □

נראה הגדרה לאי-תלות במספר מאורעות, אך לא ההגדרה שאנו רוצים לעבוד איתה.

**הגדרה 9.3** (אי-תלות בזוגות) אם  $A_1, \dots, A_n$  נקראים בלתי-תלויים בזוגות אם

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

**הגדרה 9.4** (קבוצה בלתי-תלויה) מאורע  $A$  נקרא בלתי-תלוי בקבוצת המאורעות  $B_1, \dots, B_n$  אם לכל  $I \subseteq [n]$  מתקיים

$$\mathbb{P}(A | \bigcap_{i \in I} B_i) = \mathbb{P}(A)$$

דהינו  $A$  ו- $\bigcap_{i \in I} B_i$  בלתי-תלוי.

**תרגיל 9.1** הביאו דוגמה למאורעות  $A, B_1, B_2$  כך ש- $A$  ו- $B_1$  בלתי-תלויים וכך גם  $A$  ו- $B_2$  אבל  $A$  לא בלתי-תלוי בקבוצה  $\{B_1, B_2\}$ .

הראו כי אם  $A, B_1$  בלתי-תלויים וגם  $A, B_2$  בלתי-תלויים וגם  $B_1, B_2$  זרים, אז  $A$  בלתי-תלוי ב- $\{B_1, B_2\}$ .

**טענה 9.5**  $A$  בלתי-תלוי ב- $\{B_1, \dots, B_n\}$  אם ורק אם  $A$  בלתי-תלוי ב- $\{B_1, \dots, B_n, B_1^C, \dots, B_n^C\}$ .

הוכחה. הכיוון השני הוא טריוויאלי, לכן נוכיח את הכיוון הראשון בלבד.

נראה ש- $A$  בלתי-תלוי בקבוצה  $\{B_1, \dots, B_n, B_1\}^C$ . נרצה להראות שלכל  $I \subseteq [n+1]$  מתקיים ש- $A$  ו- $\bigcap_{i \in I} B_i$  בלתי-תלויים.

אם  $n+1 \notin I$  אז לפי ההנחה חוסר התלות כבר מתקיים.

אחרת נגדיר  $J = I \setminus \{n+1\}$  ולכן  $I = J \uplus \{n+1\}$  ומכאן נובע

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} B_i \cap A) &= \mathbb{P}((\bigcap_{i \in J} B_i) \cap B_1^C \cap A) \\
 &= \mathbb{P}(\bigcap_{i \in J} B_i \cap A) - \mathbb{P}(\bigcap_{i \in J} B_i \cap B_1 \cap A) \\
 &= \mathbb{P}(\bigcap_{i \in J} B_i) \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\bigcap_{i \in J} B_i \cap B_1) \mathbb{P}(A) \\
 &= \mathbb{P}(\bigcap_{i \in J} B_i \cap B_1^C) \mathbb{P}(A) \\
 &= \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} B_i) \mathbb{P}(A)
 \end{aligned}$$

□ ומצאנו כי ניתן להוסיף איבר, בשל כך נוכל לבצע את התהליך איטרטיבי ולקבל את המבוקש.

**הגדרה 9.6** (אי-תלות קבוצת מאורעות) קבוצת מאורעות  $\{A_1, \dots, A_n\}$  נקראת בלתי-תלויה אם לכל  $I \subseteq [n]$  מתקיים

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

**מסקנה 9.7** אם  $A_1, \dots, A_n$  בלתי-תלויים, אז גם כל תת-קבוצה של מאורעות היא בלתי-תלויה.

בפרט  $A_1, \dots, A_n$  בלתי-תלויים גורר ש- $A_1, \dots, A_n$  בלתי-תלויים בזוגות.

**טענה 9.8** קבוצת מאורעות  $\{A_1, \dots, A_n\}$  בלתי-תלויה אם ורק אם לכל  $i \in [n]$  מתקיים ש- $A_i$  בלתי-תלויה ב- $\{A_1, \dots, A_n\} \setminus \{A_i\}$ .

**הוכחה.** לכיוון הראשון, נרצה להראות ש- $A_1$  לא תלוי ב- $\{A_2, \dots, A_n\}$ , כלומר לכל  $I \subseteq \{2, \dots, n\}$  רוצים להראות ש- $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i \cap A_1) = \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) \mathbb{P}(A_1)$  על-ידי

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i \cap A_1) = (\prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)) \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) \mathbb{P}(A_1)$$

נעבור לכיוון השני. צריך להראות שלכל  $I \subseteq [n]$  מתקיים  $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$  תהי  $I \subseteq [n] = \{i_1, \dots, i_k\}$  כאשר  $|I| = k$ . לפי ההנחה בלתי-תלוי ב- $\{A_j \mid j \in [n] \setminus \{i_1\}\}$ , לכן נקבל באינדוקציה

$$\mathbb{P}(\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}) = \mathbb{P}(A_{i_1} \cap (\bigcap_{l=2}^k A_{i_l})) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(\bigcap_{l=2}^k A_{i_l}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \mathbb{P}(A_{i_2}) \mathbb{P}(\bigcap_{l=3}^k A_{i_l}) = \dots = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

□



## 10.1 אי-תלות

נראה הגדרה שקולה לאי-תלות

**הגדרה 10.1** (שקולה לאי-תלות)  $A_1, \dots, A_n$  בלתי-תלויים אם ורק אם

$$\forall I \subseteq [n], \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i \in [n] \setminus I} A_i^C\right)\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \prod_{i \in [n] \setminus I} \mathbb{P}(A_i^C)$$

את השקילות של ההגדרות נראה בתרגיל.

מאורעות  $A_1, \dots, A_n$  בלתי-תלויים בהינתן  $B$  אם הם בלתי-תלויים לפי פונקציית ההסתברות המותנית ב- $B$ ,  $\mathbb{P}_B$ .

**דוגמה 10.1** בוחרים מטבע באקראי משך ומטילים אותו  $n$  פעמים.

$A_i$  יצא עץ בהטלה ה- $i$  בלתי-תלוי בהינתן בחירת המטבע,  $B$  המאורע שנבחר מטבע מסוים.

נרצה לנסות לתת הגדרה חדשה עבור מקרים אינסופיים, נראה שיתקיים

$$\forall I \subseteq \mathbb{N}, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

אבל היא לא מועילה לנו, נגדיר במקום זאת

**הגדרה 10.2** (קבוצה בת-מניה בלתי-תלויה)  $A_1, A_2, \dots$  מאורעות הם בלתי-תלויים אם ורק אם

לכל קבוצה סופית  $I$  מתקיים  $\{A_i\}_{i \in I}$  קבוצה בלתי-תלויה.

הערה (מכפלה אינסופית) נגדיר מכפלה אינסופית על-ידי

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} a_i = \prod_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N a_i$$

**טענה 10.3** אם  $A_1, A_2, \dots$  סדרת מאורעות בלתי-תלויים אז

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

הוכחה. נגדיר  $B_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$  סדרה יורדת ולכן מרציפות פונקציית ההסתברות נובע

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

□

**דוגמה 10.2** אם  $A_1, \dots$  בלתי-תלויים ו- $\mathbb{P}(A_i) = p < 1$  אז  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = 0$

לדוגמה בהטלה אינסוף פעמים של מטבע הסיכוי שייצא עץ הוא אפס. דוגמה זו קצת בעייתית שכן כלל לא הראינו כי מרחב זה קיים ומוגדר, אבל המשמעות היא שעבור מרחבי מדגם הולכים וגדלים, אז ההסתברות המבוקשת שואפת להיות אפס.

## 10.2 משתנים מקריים

עד כה היינו צריכים לבצע ניתוח מלא של הסיטואציה כדי להגיע למסקנה, גם אם בהרבה מקרים שונים הגענו לבדיוק אותה המסקנה, המטרה של משתנים מקריים הוא לבודד את הרעיון הזה ולתקוף אותו.

**הגדרה 10.4** (משתנה מקרי) יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות, פונקציה מ- $\Omega$  ל- $\mathbb{R}$  נקראת **משתנה מקרי**.

**סימון 10.5** על-אף שזו פונקציה, נוהג לסמן משתנים מקריים בסימונים שאנו רגילים שמשמשים למשתנים, לדוגמה  $X, Y, Z$ .

הערה השם קצת מטעה, אלו הם לא משתנים, ושווה לחשוב עליהם בתור מצבים מקריים יותר.

**דוגמה 10.3** נניח  $\Omega = \{H, T\}$  הטלת מטבע, ונגדיר את הפונקציה  $\mathbb{R} \rightarrow \Omega$  על-ידי  $f(H) = 2, f(T) = -3$ , זאת במטרה לייצג שאם יוצא עץ נפסיד שלושה מטבעות ואם מתקבל פלי אז נקבל שני מטבעות.

**דוגמה 10.4** נרצה להטיל שתי קוביות ונרצה לדבר על תוצאת אחת ההטלות, נתחיל ונגדיר  $\Omega = [6]^2$ .

נגדיר  $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  על-ידי  $X_1(a, b) = a$ , ובאופן דומה נגדיר  $X_2(a, b) = b$ . יצרנו פונקציות שמהוות משתנה מקרי עבור ההטלה הראשונה ועבור ההטלה השנייה, נגדיר גם עבור הסכום,  $Y(a, b) = a + b$ .

נקבל עתה  $Y = X_1 + X_2$ , ונבחין בכוח האמיתי של הגדרה זו, יש לנו איזושהו קישור מורכב במרחב ההסתברות ללא עבודה ישירות מול המרחב.

**הגדרה 10.6** (משתנה מקרי מושרה ממאורע) אם  $A$  מאורע אז נגדיר  $1_A$  משתנה מקרי על-ידי

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

**טענה 10.7** (תכונות של משתנים מקריים מושרים)  $1_{A^c} = 1 - 1_A$  .1

$$1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$$
 .2

$$1_{A \cup B} = \max\{1_A, 1_B\}$$
 .3

**דוגמה 10.5**  $\Omega = S_n$ ,  $A_i$  המאורע שיש  $i$  נקודות שבת.

$$X_i = 1_{A_i} \text{ ו- } X = \sum_{i=1}^n X_i$$

בדוגמות הקודמות ההטלה הראשונה זוגית  $\{(a, b) \in [6]^2 \mid a \in \{2, 4, 6\}\}$ . נכתוב במקום זאת  $X_1 \in \{2, 4, 6\}$ .

**הגדרה 10.8** (מאורע מושרה ממשתנה מקרי) אם  $X$  משתנה מקרי ו- $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , המאורע  $X \in S$  מוגדר להיות

$$X^{-1}(S) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\}$$

בהתאם נכתוב  $\mathbb{P}(\{x \in S\})$  על-ידי  $\mathbb{P}(X \in S)$ , ובאופן דומה נוכל לציין גם את  $\mathbb{P}(X \leq s)$ ,  $\mathbb{P}(X = s)$  ודומים.

**הגדרה 10.9** (פונקציית הסתברות מושרית ממשתנה מקרי)  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות, ויהי  $X$  משתנה מקרי.

נגדיר פונקציה  $\mathbb{P}_X : \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty)$  על-ידי

$$\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\})$$

$\mathbb{P}_X$  מכונה ההתפלגות של  $X$ .

אם  $\mathbb{P}_X$  נתמכת על  $S$  (כלומר  $\mathbb{P}_X(S) = 1$ ) אז אומרים ש- $X$  נתמך על  $S$ .

**טענה 10.10**  $\mathbb{P}_X$  היא פונקציית הסתברות על  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ .

הוכחה.

$$\forall S, \mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X \in S) \geq 0$$

וכן

$$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

ולבסוף סיגמא-אדיטיביות:

$$\begin{aligned} \forall S_1, S_2, \dots, \mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\right) &= \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\right) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\}) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in S_n\}\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X \in S_n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_X(S_n) \end{aligned}$$

□

# 11 תרגול 4 — 21.11.2024

## 11.1 אי-תלות

נניח מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**תרגיל 11.1** בכד שלושה מטבעות, שניים הוגנים ואחד שמוטבע עץ על שני צדדיו.

שולפים מטבע באקראי ואז מטילים אותו פעמיים.

האם תוצאת ההטלה הראשונה תלויה בתוצאת ההטלה השנייה?

**פתרון** נסמן ב- $A_i$  את המאורע שבהטלה ה- $i$  יצא עץ.

אנו שואלים אם  $A_1, A_2$  הם תלויים, נסמן גם  $F$  המאורע ששלפנו מטבע הוגן.

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 | F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(A_1 | F^C)\mathbb{P}(F^C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

אנו רוצים לבדוק את התלות ולכן נחשב

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 | F^C)\mathbb{P}(F^C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \neq \frac{4}{9} = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$$

ולכן הם תלויים.

**תרגיל 11.2** נגדיר  $\Omega = \mathbb{N}$  ו- $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{c \cdot n^2}$ , כאשר  $c = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

נגדיר  $\forall k \in \mathbb{N}, A_k = k\mathbb{N} = \{kn \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

האם  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  היא תלויה?

**פתרון**

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{kn\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{ck^2n^2} = \frac{1}{ck^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{k^2}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(A_2 | A_4) = 1 \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_2)$$

ולכן המאורעות תלויים ובכלל הקבוצה לא בלתי-תלויה.

**תרגיל 11.3** נגדיר  $P$  קבוצת המספרים הראשוניים, האם  $\{A_p\}_{p \in P}$  בלתי-תלויה?

**פתרון** יהיו  $p_1, \dots, p_m \in P$  ראשוניים, אז מהמשפט היסודי של האריתמטיקה (או פירוק לגורמים ראשוניים)

$$A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m} = A_{p_1 \dots p_m}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m}) = \mathbb{P}(A_{p_1 \dots p_m}) = \frac{1}{(p_1 \dots p_m)^2} = \frac{1}{p_1^2} \dots \frac{1}{p_m^2} = \mathbb{P}(A_{p_1}) \dots \mathbb{P}(A_{p_m})$$

נגדיר גם  $B = \bigcap_{p \in P} A_p^C = \{1\}$  ונחשב

$$\frac{6}{\pi^2} = \frac{1}{c} = \mathbb{P}(B) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

**מסקנה 11.1** נוכל להסיק מסקנה משמעותית נוספת, לכל  $s > 1$  מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \zeta(s)$$

הערך ה- $s$  של פונקציית זטא של רימן, וזו זהות אוילר לפונקציית זטא.

**מסקנה 11.2** מסקנה נוספת היא שבשל אי-רציונליות  $\pi$  נוכל להסיק כי הטור הוא לא טור סופי, לכן יש אינסוף ראשוניים.

## 11.2 משתנים מקריים

אנו רוצים להסתכל על משתנה מקרי כדרך להסתכל מחדש על מרחב ההסתברות ובפרט פונקציית ההסתברות באופן נוסף, זה בתורו יאפשר לנו לפתור בעיות בדרך חדשה ואולי אף פשוטה יותר, כפי שנראה בהמשך.

**דוגמה 11.1** נגדיר  $X$  להיות משתנה מקרי שמתאר סכום הטלת שתי קוביות הוגנות, דהינו נוכל להגדיר  $\mathbb{P} = [6]^2$  ו- $\mathbb{P}$  אחידה. בהתאם נגדיר  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  על-ידי  $(a, b) \mapsto a + b$ .  
לכן

$$\text{rng}(X) = \{2, \dots, 12\}$$

נעבור לחישוב הסתברויות

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \frac{1}{36}, \\ \mathbb{P}(X = 3) &= \frac{2}{36}, \\ \mathbb{P}(X = 4) &= \frac{3}{36}, \\ \mathbb{P}(X = 5) &= \frac{4}{36}, \\ \mathbb{P}(X = 6) &= \frac{5}{36}, \\ \mathbb{P}(X = 7) &= \frac{6}{36}, \\ \mathbb{P}(X = 8) &= \frac{5}{36}\end{aligned}$$

וכן הלאה, בהתאם נוכל להסיק

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \in E) = \mathbb{P}_X(E \cap \text{rng}(X)) = \sum_{i \in E \cap \text{rng}(X)} \mathbb{P}(X = i)$$

נסמן  $X_i$  תוצאת ההטלה ה- $i$ , ולכן  $X = X_1 + X_2$ , נחשב את  $X$  ביחס ל- $X_i$ .

$$\begin{aligned}\forall n \in \{2, \dots, 12\}, \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(X_2 = n - i) \\ &= \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \min\{6 - i, 0\} \\ &= \frac{1}{36} |\{1, \dots, 6\} \cap \{n - 1, \dots, n - 6\}| \\ &\quad \text{אם נגדיר } \text{rng}(Y) = \{0, \dots, 5\} \text{ אז } Y = X \pmod{6} \text{ ונחשב}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall n \in \{0, \dots, 5\}, \mathbb{P}(Y = n) &= \mathbb{P}(X = n \vee X = n + 6 \vee X = n + 12) \\ &= \frac{1}{36} \cdot |\{1, \dots, 6\} \cap \{n + 12, \dots, n - 6\}| \\ &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

### 12.1 משתנים מקריים – המשך

**הגדרה 12.1** (משתנה מקרי בדיד)  $X$  משתנה מקרי נקרא **בדיד** אם  $\mathbb{P}_X$  הוא פונקציית הסתברות בדידה. במקרה זה יש ל- $X$  התפלגות נקודתית  $p_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ .

**הערה** נבחין כי גם אם מרחב ההסתברות הוא לא בדיד, נוכל להגדיר משתנה מקרי בדיד עליו.

**דוגמה 12.1** נגדיר  $X = 1^A$  ונניח  $A \in \mathcal{F}$  ו- $\mathbb{P}(A) = p$ .

אם  $S \subseteq \mathbb{R}$  אז אם  $\{0, 1\} \subseteq S$  אז  $\Omega = X^{-1}(S)$  ואז  $\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

אם  $1 \in S$  אבל  $0 \notin S$  אז  $A = X^{-1}(S)$  ואז  $\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(A) = p$ .

לבסוף אם  $0 \in S$  ו- $1 \notin S$  אז  $A^C = X^{-1}(S)$  ואז  $\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

אם נגדיר  $p_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  על-ידי

$$p_X(s) = \begin{cases} p & s = 1 \\ 1 - p & s = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

אז מתקיים

$$\mathbb{P}_X(S) = \sum_{s \in S} p_X(s)$$

**הגדרה 12.2** (התפלגות ברנולי) משתנה מקרי  $X$  מתפלג ברנולי עם פרמטר  $p$  אם יש לו פונקציית התפלגות נקודתית

$$p_X(s) = \begin{cases} p & s = 1 \\ 1 - p & s = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

במקרה זה נסמן  $X \sim \text{Ber}(p)$ , סימון לא מאוד מועיל או מתכתב עם השימוש הסטנדרטי, אבל אלה הם החיים.

נשאל את עצמנו את השאלה האם כל משתנה מקרי מתפלג ברנולי הוא מצייין של מאורע. אילו נגדיר  $A = X^{-1}(1)$  אז מתקבל  $X = 1_A$ , אנו אומרים ש- $X$  שווה למצייין של  $1_A$  כמעט תמיד, נראה זאת בהמשך הפרק.

נמשיך לעוד מקרים.

**הגדרה 12.3** (משתנה מקרי קבוע) משתנה מקרי  $X$  הוא קבוע אם

$$p_X(s) = \begin{cases} 1 & s = c \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

עבור  $c$  קבוע כלשהו.

**הגדרה 12.4** (משתנה מקרי אחיד) משתנה מקרי  $X$  נקרא אחיד על  $S$  תת-קבוצה סופית של  $\mathbb{R}$  אם

$$p_X(s) = \begin{cases} \frac{1}{|S|} & s \in S \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

במקרה זה נסמן  $X \sim U(S)$ .

**הגדרה 12.5** (התפלגות גאומטרית)  $X$  מתפלג גאומטרית עם פרמטר  $p$  אם

$$p_X(s) = \begin{cases} (1 - p)^{s-1} p & s \in \{1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ונסמן  $X \sim \text{Geo}(p)$ .

לפעמים הגדרה זו תסומן אחרת על-ידי מדידת המקרים שבהם יצאה ההסתברות למאורע הראשון בלבד.

התפלגות זו מתארת את המקרה שניסינו לקבל תוצאה בהסתברות בין שני מקרים וקיבלנו אותה בפעם ה- $s$ .

**הגדרה 12.6** (התפלגות בינומית)  $X$  מתפלג בינומית עם פרמטרים  $n$  ו- $p$  אם

$$p_X(s) = \begin{cases} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} & s \in \{1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ונסמן  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ .

מאפשר לנו לחשב את מספר המטבעות המוטמים שיצאו על צד מסוים. ולבסוף

**הגדרה 12.7** (התפלגות פואסונית)  $X$  מתפלג פואסונית עם פרמטר  $\lambda$  אם

$$p_X(s) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^s}{s!} & s \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ונסמן  $X \sim \text{Po}(\lambda)$ .

בפעם הראשונה ההתפלגות הזו הופיעה בהקשר של מספר החיילים שנהרגו מבעיטה מהסוס שלהם, התפלגות שהייתה מהותית עד מלחמת העולם הראשונה.

## 12.2 קשרים בין משתנים-מקריים

**דוגמה 12.2**  $\Omega = [6]^2$  מרחב אחיד להטלת שתי קוביות, ונגדיר שוב  $Y = X_1 + X_2$  סכום הטלות שתי הקוביות, דהינו

$$X_1(a, b) = a, X_2(a, b) = b, Y(a, b) = a + b$$

בתרגול מצאנו את הערכים של  $p_Y$  לכל ערך אפשרי.

נגדיר גם  $Z = Y \bmod 6$  (ומנוחות נגדיר  $Z \in [6]$ ), ונשאל מה ההתפלגות של  $Z$ .

$$p_Z(1) = \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Y = 7) = \frac{1}{6}$$

באופן דומה

$$p_Z(2) = \mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 8) = \frac{1}{36} + \frac{5}{36} = \frac{1}{6}$$

באופן כללי מתקיים מחישוב כזה ש- $\frac{1}{6}$  לכל  $p_Z(n) = \frac{1}{6}$  נסיק כי  $Z \sim U([6])$ .

**הגדרה 12.8** (הסתברות כמעט תמיד) אם  $A$  מאורע עם הסתברות 1 אז אומרים שהוא מתרחש כמעט תמיד.

**הגדרה 12.9** (משתנים שווים שמעט תמיד) אם  $X$  ו- $Y$  המקיימים ש- $X = Y$  כמעט תמיד אז נסמן  $X \stackrel{a.s.}{=} Y$ .

זה כמובן שקול להגדרה כי  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$  וזה נכון אם ורק אם  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0$ .

**תרגיל 12.1** הוכיחו כי אם  $X \stackrel{a.s.}{=} Y$  וגם  $Y \stackrel{a.s.}{=} Z$  אז גם  $X \stackrel{a.s.}{=} Z$ , דהינו זהו יחס טרנזיטיבי.

**הוכחה.** נשים לב לעובדה הבאה, אם  $X(\omega) = Y(\omega)$  ו- $Y(\omega) = Z(\omega)$  עבור  $\omega \in \Omega$  כלשהו, אז  $X(\omega) = Z(\omega)$ , כלומר

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = Z(\omega)\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Z(\omega)\}$$

ובהתאם גם

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\} \cup \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \neq Z(\omega)\} \supseteq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Z(\omega)\}$$

אז מחסם האיחוד נקבל

$$0 \leq \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Z(\omega)\}) \leq 0 + 0$$

□

**טענה 12.10**  $\stackrel{a.s.}{=}$  הוא יחס שקילות על מרחב כל המשתנים-המקריים על  $\Omega$ .

□

**הוכחה.** ראינו עתה טרנזיטיביות, וסימטריה ורפלקסיביות נובעות ישירות מההגדרה.

**תרגיל 12.2** האם בדוגמה קודם מתקיים  $X_2 \stackrel{a.s.}{=} X_1$ ?

**פתרון** מחישוב מתקיים  $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \frac{1}{6}$  ולכן התשובה היא שלא.

נבחין כי גם  $\mathbb{P}(X_1 \neq Z) \geq \mathbb{P}(X_1 = 2, Z = 3) = \mathbb{P}(\{(2, 1)\}) = \frac{1}{36}$

באופן יותר כללי גם אם יש מאורעות שיש להם אותה ההסתברות, אין הכרח שיהיה קשר לשוויון שלהם כמעט תמיד.

**הגדרה 12.11** (משתנים מקריים שווי התפלגות) אם למשתנים מקריים  $X, Y$  יש אותה פונקציית התפלגות, דהינו  $\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_X$ ,

דהינו מתקיים  $\forall S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}_Y(S) \iff \mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(Y \in S) \iff \mathbb{P}(X^{-1}(S)) = \mathbb{P}(Y^{-1}(S))$

אז נאמר שהם שווי התפלגות ונסמן  $X \stackrel{d}{=} Y$ .

ראינו שיש משתנים מקריים  $X$  ו- $Y$  כך ש- $X \stackrel{a.s.}{\neq} Y$  אבל  $X \stackrel{d}{=} Y$ , האם  $X \stackrel{a.s.}{=} Y$  גורר  $X \stackrel{d}{=} Y$ ? התשובה היא שכן!

**טענה 12.12** אם  $X \stackrel{a.s.}{=} Y$  אז גם  $X \stackrel{d}{=} Y$ .

**הוכחה.** נניח ש- $X \stackrel{a.s.}{=} Y$  ונרצה להוכיח ש- $\forall S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(Y \in S)$

לכל  $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  מתקיים

$$0 \neq \mathbb{P}(X \neq Y) \geq \mathbb{P}(X \in S, Y \notin S) = 0$$

ובהתאם

$$\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X \in S, Y \in S) + \overbrace{\mathbb{P}(X \in S, Y \notin S)}^{=0} = \mathbb{P}(X \in S, Y \in S)$$

כמו-כן גם  $\mathbb{P}(Y \in S) = \mathbb{P}(X \in S, Y \in S)$ .

□

### 13.1 וקטורים מקריים

ניזכר בהגדרה 12.1:

הגדרה (משתנה מקרי בדיד) משתנה מקרי נקרא בדיד אם  $\mathbb{P}_X$  פונקציית הסתברות בדידה, כלומר

$$\forall S \in \mathcal{F}_X, \mathbb{P}_X(S) = \sum_{s \in S} p_X(s)$$

כאשר  $p_X(s) = \mathbb{P}(X = s) = \mathbb{P}(X^{-1}(s)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = s\})$

גם דיברנו על סוגים שונים של התפלגות, לדוגמה

$$\forall i \in [6], p_X(i) = \frac{1}{6} \iff X \sim U([6])$$

או באופן דומה

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$A$  מתרחש כמעט תמיד אם  $\mathbb{P}(A) = 1$ , לכן אם  $\mathbb{P}(X = Y) = 1$  אז נאמר ש- $X = Y$  כמעט תמיד, או נסמן  $X \stackrel{a.s.}{=} Y$ .  
באופן דומה אם  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$  אז נסמן  $X \stackrel{d}{=} Y$  או נאמר ש- $X$  ו- $Y$  שויי התפלגות, וראינו קשר בין שתי ההגדרות.

**דוגמה 13.1** נגדיר הטלת מטבע,  $\Omega = \{H, T\}$  ו- $X = 1_{\{H\}}, Y = 1_{\{T\}}$ , אז  $X \stackrel{d}{=} Y$  שכן

$$p_X(s) = p_Y(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} & s = 0 \\ \frac{1}{2} & s = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

אבל גם  $\mathbb{P}(X = Y) = 0$  ולכן  $X \stackrel{a.s.}{\neq} Y$ .

**טענה 13.1** אם  $X \stackrel{d}{=} Y$  ו- $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$  אז  $f(X) \stackrel{d}{=} f(Y)$ .

*הוכחה.* נגדיר  $W = f(Y), Z = f(X)$ , צריך להוכיח ש- $\mathbb{P}_Z(S) = \mathbb{P}_W(S)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Z(S) &= \mathbb{P}(Z \in S) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \omega \mid Z(\omega) \in S\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \omega \mid f(X(\omega)) \in S\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \omega \mid X(\omega) \in f^{-1}(S)\}) \\ &= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(S)) \\ &= \mathbb{P}_X(f^{-1}(S)) \\ &= \mathbb{P}_Y(f^{-1}(S)) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \omega \mid Y(\omega) \in f^{-1}(S)\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \omega \mid f(Y(\omega)) \in S\}) \\ &= \mathbb{P}(W \in S) \\ &= \mathbb{P}_W(S) \end{aligned}$$

□

**דוגמה 13.2** נניח ש- $X \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$  וגם  $Y \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$ , ונרצה לחשב את  $\mathbb{P}(X = Y)$ .

אין לנו את היכולת לעשות זאת כי אין מספיק מידע.

**הגדרה 13.2** (וקטור מקרי) וקטור מקרי הוא משתנה מקרי לתוך  $\mathbb{R}^n$  במקום ל- $\mathbb{R}$ ,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ .



כלל ההגדרות נשארות זהות פרט להגדרה זו, לדוגמה  $\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X \in S)$ . המוטיב שלנו הוא היכולת לבנות כמה משתנים מקריים ולעבוד איתם כיציר בודד, לדוגמה  $X = (X_1, X_2)$  עבור  $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  משתנים מקריים.

**הגדרה 13.3** (התפלגות משותפת והתפלגויות שוליות) אם  $X_1, \dots, X_n$  משתנים מקריים המוגדרים על  $\Omega$  יחיד אז  $X = (X_1, \dots, X_n)$  הוא וקטור מקרי המוגדר על  $\Omega$  וההתפלגות שלו נקראת ההתפלגות המשותפת של  $X_1, \dots, X_n$ . ההתפלגויות של כל אחד מ- $X_1, \dots, X_n$  נקראות ההתפלגויות השוליות.

השם הזה נובע מהגישה שבה נוכל להבין את ההסתברות של משתנה מקרי בודד מתוך הווקטור על-ידי, אם  $X_1, X_2$  מרחבים מקריים אז

$$\mathbb{P}_{X_1}(S) = \mathbb{P}_{(X_1, X_2)}(S \times \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid (X_1(\omega), X_2(\omega)) \in S\})$$

**דוגמה 13.3** אם  $\Omega = [6]^2$  ו- $X_1(a, b) = a, X_2(a, b) = b$  אז  $X = (X_1, X_2)$  כאשר  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  פונקציית הזהות.

**דוגמה 13.4** נבחן עבור  $E = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s \leq t\}$  את

$$\mathbb{P}_{(X, Y)}(E) = \mathbb{P}(X \leq Y)$$

**הגדרה 13.4** (התפלגות משותפת בדידה) אם לווקטור המקרי התפלגות בדידה, כלומר  $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}$  פונקציית הסתברות בדידה, אז נאמר שההתפלגות המשותפת של  $X_1, \dots, X_n$  בדידה.

**טענה 13.5** ההתפלגות המשותפת של  $X_1, \dots, X_n$  בדידה אם ורק אם ההתפלגות של כל אחד מ- $X_1, \dots, X_n$  בדידה.

*הוכחה.* נוכיח את הכיוון הראשון.

נניח  $\mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n}$  בדידה, אך זה נכון אם ורק אם היא נתמכת על-ידי קבוצה בת-מניה, נבחר קבוצה  $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  כזו.

נסמן ב- $S_1$  את ההטלה של  $S$  על הקורדינטה הראשונה, לכן  $\mathbb{P}_{X_1}(S_1) = \mathbb{P}_{(X_1, X_2)}(S_1 \times \mathbb{R})$  אבל  $S \subseteq S_1 \times \mathbb{R}$ . לכן  $X_1$  נתמך על-ידי קבוצה בת-מניה,  $S_1$ , ולכן הוא בדיד.

נעבור לכיוון השני.

נניח ש- $X_1, X_2$  בדידים, לכן קיימות  $S_1, S_2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  בנות-מניה,

$$\mathbb{P}(X_1 \in S_1) = \mathbb{P}(X_2 \in S_2) = 1$$

$$\text{לכן } \mathbb{P}((X_1, X_2) \in S_1 \times S_2) = \mathbb{P}(X_1 \in S_2, X_2 \in S_2) = 1$$

$$S_1, S_2 \text{ בנות-מניה ולכן נובע ש- } S_1 \times S_2 \text{ בת-מניה.}$$

כמוכן לווקטורים בגודל  $n > 2$  ההוכחה דומה.

□

### 14.1 משתנים מקריים

בהרצאה זו נניח שכל המשתנים המקריים הם בדידים.

**הגדרה 14.1** (התניה במשתנים מקריים בדידים) אם  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  ו- $A \subseteq \Omega$  כך ש- $\mathbb{P}(A) > 0$  אז

$$\forall S \subseteq \mathbb{R}^d, \mathbb{P}_{X|A}(S) = \mathbb{P}(X \in S | A) = \mathbb{P}_A(X \in S)$$

**הגדרה 14.2** (אי-תלות במשתנים מקריים בדידים) אם  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  בלתי-תלויים אם לכל  $S, T \subseteq \mathbb{R}^d$  מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in S, Y \in T) = \mathbb{P}(X \in S) \cdot \mathbb{P}(Y \in T)$$

**תרגיל 14.1** יהיו  $X_1, X_2 \sim Geo(p)$  בלתי-תלויים ונגדיר גם  $Z = X_1 + X_2$ .

1. חשבו את ההתפלגות המשותפת של  $X_1$  ו- $Z$ .

2. הראו ש- $\{1, \dots, n-1\} \mid \{Z = 1\}$  מתפלג אחיד על  $\{1, \dots, n-1\}$ .

**פתרון** תחילה נזכור שאם  $W \sim Geo(p)$  אז  $\text{Supp}(W) = \mathbb{N}$  ו- $\mathbb{P}(W = k) = (1-p)^{k-1}p$ , שכן זוהי ההסתברות שלא הצלחנו  $k-1$  פעמים ובניסיון ה- $k$  הצלחנו, עבור איזושהי פעולה.

1. אנו מגדירים  $X = (X_1, Z)$  וקטור מקרי ואנו רוצים לחשב את ההתפלגות שלו, נחשב את התומך

$$\text{Supp}(X_1, Z) \subseteq \mathbb{N}^2$$

ישירות מההגדרה של הווקטור, אבל אנו יודעים כי תמיד  $X_1 < Z$ , וכן גם אם  $m < n$

$$\begin{aligned} P_{(X_1, Z)}(m, n) &= \mathbb{P}(X_1 = m, Z = n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = m, X_2 = n - m) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = m) \cdot \mathbb{P}(X_2 = n - m) \\ &= (1-p)^{m-1}p(1-p)^{n-m-1}p \\ &= p^2(1-p)^{n-2} \end{aligned}$$

ולכן נסיק

$$P_{(X_1, Z)}(n, n) = \begin{cases} 0 & m \geq n \\ p^2(1-p)^{n-2} & m < n \end{cases}$$

2. נבחן את  $X_1 \mid \{Z = n\}$  ונבין מה התומך.

$$\text{Supp}(X_1 \mid \{Z = 1\}) = \{1, \dots, n-1\}$$

שכן  $Z$  מייצג סכום ולכן מהווה חסם ל- $X_1$  יחד עם  $\text{Supp}(X_1) = \mathbb{N}$ . נעבור לחישוב ההתפלגות

$$\mathbb{P}(X = m \mid Z = n) = \frac{\mathbb{P}(X = m, Z = n)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{\mathbb{P}(Z = n)}$$

אבל

$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

זוהי קונבולוציה, לכן נוכל להסיק

$$\mathbb{P}(X_1 = m \mid Z = n) = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$$

**תרגיל 14.2** מטילים מטבע הוגן, אם יצא 0 מטילים שוב מטבע הוגן ואם יצא 1 מטילים מטבע מוטה עם הסתברות  $p$  ל-1.

נתחו את התפלגות ההטלה השנייה.

**פתרון** נסמן  $X$  תוצאת ההטלה הראשונה ו- $Y$  תוצאת ההטלה השנייה.

מהנתונים נסיק כי  $X \sim Ber(\frac{1}{2})$ . אנו גם יודעים כי גם  $Y$  הוא בהתפלגות ברנולי כלשהי.

לבסוף אנו גם יודעים שמתקיים  $Y | \{X = 0\} \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$  וגם  $Y | \{X = 1\} \sim \text{Ber}(p)$  לכן

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1 | X = 0)\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(Y = 1 | X = 1)\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot p = \frac{1}{4} + \frac{p}{2}$$

**תרגיל 14.3** יהיו  $X \sim \text{Ber}(p)$  ו-  $Y \sim \text{Ber}(q)$  בלתי-תלויים.

חשבו את ההתפלגות של  $X \cdot Y$ .

**פתרון** נתחיל ונראה כי

$$\text{Supp}(XY) = \{0, 1\},$$

וכן גם  $XY$  בהתפלגות ברנולי כלשהי, אך

$$\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = pq$$

ולכן  $XY \sim \text{Ber}(pq)$ .

### 15.1 התפלגות תחת התניה

**הגדרה 15.1** (התפלגות משתנה מקרי בהינתן מאורע) יהי  $X$  משתנה מקרי ו- $A$  מאורע כך ש- $\mathbb{P}(A) > 0$  אז אפשר לדבר על התפלגות  $X$  בהינתן  $A$ . זוהי ההתפלגות של  $X$  תחת  $\mathbb{P}_A$  במקום  $\mathbb{P}$ . במקרה זה

$$\mathbb{P}_{X|A}(S) = \mathbb{P}_A(X \in S) = \mathbb{P}(\{X \in S\} | A)$$

**טענה 15.2** אם  $X \stackrel{d}{=} Y$  ו- $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  כך ש- $\mathbb{P}(X \in S) > 0$  וכן  $\mathbb{P}(Y \in S) > 0$ ,

אז  $X | X \in S \stackrel{d}{=} Y | Y \in S$ .

**דוגמה 15.1** נניח ש- $X, Y \sim U([6])$  ו- $S = [3, \infty)$  אז

$$X | X \in S \sim U(\{3, 4, 5, 6\}), \quad Y | Y \in S \sim U(\{3, 4, 5, 6\})$$

**הגדרה 15.3** (אי-תלות משתנים מקריים)  $X$  ו- $Y$  נקראים בלתי-תלויים אם לכל  $S, T \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  המאורעות  $X \in S, Y \in T$  בלתי-תלויים.

הגדרה זו שקולה להגדרה שמתקיים

$$\mathbb{P}(X \in S, Y \in T) = \mathbb{P}(X \in S) \cdot \mathbb{P}(Y \in T)$$

**טענה 15.4** אם  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים בדידים אז  $X$  ו- $Y$  בלתי-תלויים אם ורק אם לכל  $s, t \in \mathbb{R}$  מתקיים ש- $X = s$  ו- $Y = t$  בלתי-תלויים.

טענה זו שקולה לטענה שמתקיים

$$\mathbb{P}(X = s, Y = t) = \mathbb{P}(X = s) \cdot \mathbb{P}(Y = t)$$

הוכחה. הכיוון הראשון הוא טריוויאלי מבחירת יחידונים ושימוש בהגדרה, לכן נניח את הכיוון השני ונראה כי מתקיים לכל  $S, T \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in S, Y \in T) = \mathbb{P}(X \in S) \mathbb{P}(Y \in T)$$

נבחין כי

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in S, Y \in T) &= \mathbb{P}(X \in S \cap \text{Supp}(X), Y \in T \cap \text{Supp}(Y)) \\ &= \sum_{\substack{s \in S \cap \text{Supp}(X) \\ t \in T \cap \text{Supp}(Y)}} \mathbb{P}(X = s, Y = t) \\ &= \sum_{\substack{s \in S \cap \text{Supp}(X) \\ t \in T \cap \text{Supp}(Y)}} \mathbb{P}(X = s) \mathbb{P}(Y = t) \\ &= \sum_{s \in S \cap \text{Supp}(X)} \left( \sum_{t \in T \cap \text{Supp}(Y)} \mathbb{P}(X = s) \mathbb{P}(Y = t) \right) \\ &= \left( \sum_{s \in S \cap \text{Supp}(X)} \mathbb{P}(X = s) \right) \left( \sum_{t \in T \cap \text{Supp}(Y)} \mathbb{P}(Y = t) \right) \\ &= \mathbb{P}(X \in S) \mathbb{P}(Y \in T) \end{aligned}$$

□

**טענה 15.5** התפלגות  $X + Y$  ו- $X$  ו- $Y$  בלתי-תלויים קובע ביחידות את ההתפלגות המשותפת.

□

הוכחה עבור בדידים.  $p_X$  ו- $p_Y$  בלתי-תלויים קובע את  $p_{(X,Y)}(s, t) = p_X(s)p_Y(t)$ .

**טענה 15.6**  $X, Y, Z$  משתנים מקריים בדידים ונניח שלכל  $s \in \text{Supp}(X)$  מתקיים  $s \stackrel{d}{=} Z | X = s$  אז  $Y \stackrel{d}{=} Z$  ו- $X, Y$  בלתי-תלויים.

הוכחה. מנוסחת ההסתברות השלמה נובע

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = t) &= \sum_{s \in \text{Supp}(X)} \mathbb{P}(X = s) \mathbb{P}(Y = t \mid X = s) \\ &= \sum_{s \in \text{Supp}(X)} \mathbb{P}(X = s) \mathbb{P}(Z = t) \\ &= \mathbb{P}(Z = t)\end{aligned}$$

עבור החלק השני נבחין כי

$$\mathbb{P}(X = s, Y = t) = \mathbb{P}(X = s) \mathbb{P}(Y = t \mid X = s) = \mathbb{P}(X = s) \mathbb{P}(Z = t) = \mathbb{P}(X = s) \mathbb{P}(Y = t)$$

□

**טענה 15.7** אם  $X, Y$  משתנים מקריים בלתי-תלויים ו- $f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$  אז  $f(X), g(Y)$  בלתי-תלויים.

הוכחה. צריך להראות שלכל  $S, T \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  מתקיים

$$\mathbb{P}(f(X) \in S, g(Y) \in T) = \mathbb{P}(f(X) \in S) \mathbb{P}(g(Y) \in T)$$

אבל ראינו כבר כי

$$\mathbb{P}(f(X) \in S, g(Y) \in T) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(S), Y \in g^{-1}(T))$$

אבל גם

$$\mathbb{P}(X \in f^{-1}(S), Y \in g^{-1}(T)) = \mathbb{P}(f(X) \in S) \mathbb{P}(g(Y) \in T)$$

□

**דוגמה 15.2**  $X$  ו- $Y$  בלתי-תלויים אז  $X^2, \frac{1}{Y}$  בלתי-תלויים, זאת שכן  $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ .  $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ . בכיוון ההפוך אם  $X = Y \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$  לא בלתי-תלויים אבל אם  $f(x) = g(y) = 6$  גוררים ש- $f(X)$  ו- $g(Y)$  הם כמעט תמיד 6 ולכן בלתי-תלויים.

**הגדרה 15.8** (קבוצת משתנים מקריים בלתי-תלויה) יהיו  $X_1, \dots, X_n$  משתנים מקריים, אז הם יקראו בלתי-תלויים אם לכל  $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  המאורעות  $\{X_i \in S_i\}_{i \in [n]}$  הם בלתי-תלויים.

**דוגמה 15.3** אם  $X, Y, Z$  הם בלתי-תלויים, האם גם  $X+Y$  ו- $Z$  בלתי-תלויים? אנו צריכים להראות ש- $\mathbb{P}(X+Y = s, Z = t) = \mathbb{P}(X+Y = s) \mathbb{P}(Z = t)$  עבור כל  $s \in \{0, 1, 2\}, t \in \{0, 1\}$ . נבחר לדוגמה את  $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$   $\mathbb{P}(X + Y = 1, Z = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1, Z = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0, Z = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$  ונוכל להמשיך כך ולראות שהטענה אכן מתקיימת.

**15.1 תרגיל** מאורעות  $A_1, \dots, A_n$  הם בלתי-תלויים אם ורק אם  $1_{A_1}, \dots, 1_{A_n}$  הם בלתי-תלויים.

**טענה 15.9**  $X_1, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי-תלויים ונניח שיש אינדקסים  $1 = i_0 < i_1 < \dots < i_k = n$  נגדיר  $Y_0 = (X_{i_0}, \dots, X_{i_1-1}), \dots, Y_k = (X_{i_{k-1}}, \dots, X_{i_k})$ .

### 16.1 אי-תלות משתנים מקריים

נמשיך עם מהלך ההרצאה הקודמת.

**טענה 16.1** יהיו  $X_1, \dots, X_n$  משתנים מקריים (יכולים להיות גם וקטורים מקריים ללא השפעה על ההוכחה) בלתי-תלויים, ויהיו  $1 = b_0 < b_1 < \dots < b_k = n$

$Y_1 = (X_{b_0+1}, \dots, X_{b_1}), \dots, Y_k = (X_{b_{k-1}+1}, \dots, X_{b_k})$  ונגדיר

אז  $Y_1, \dots, Y_k$  בלתי-תלויים.

כדוגמה,  $X_1, \dots, X_7 \rightarrow \overbrace{(X_1, X_2, X_3)}^{Y_1}, \overbrace{(X_4, X_5)}^{Y_2}, \overbrace{(X_6, X_7)}^{Y_3}$

הוכחה במקרה הבדיד.  $Y_i$  הוא וקטור מקרי ממימד  $b_i - b_{i-1}$ , צריך להוכיח שלכל  $s_1, \dots, s_k$  כך ש- $s_1 \in \mathbb{R}^{b_1 - b_0}$  מתקיים

$$\mathbb{P}(\forall i \in k, Y_i = s_i) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(Y_i = s_i)$$

נניח ש- $s_i = (a_{i1}, \dots, a_{id_i})$  ולכן נסיק מחוסר התלות של  $X_i$

$$\prod_{i=1}^k \mathbb{P}(Y_i = s_i) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(\forall 1 \leq j \leq d_i, X_{b_{i-1}+j} = a_{ij}) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{d_i} \mathbb{P}(X_{b_{i-1}+j} = a_{ij})$$

אבל

$$PP(\forall i \in k, Y_i = s_i) = \mathbb{P}(\forall j = 1, \dots, n, X_j = c_j) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j = c_j) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{d_i} \mathbb{P}(X_{b_{i-1}+j} = a_{ij})$$

עבור

$$c = (\overbrace{a_{11}, \dots, a_{1d_1}}^{s_1}, \dots, \overbrace{a_{k1}, \dots, a_{kd_k}}^{s_k})$$

ומצאנו כי השוויון אכן מתקיים ו- $Y_1, \dots, Y_k$  בלתי-תלויים.  $\square$

**מסקנה 16.2**  $X_1, \dots, X_n$  בלתי-תלויים ו- $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_k = n - 1$  כך ש- $Y_i = (X_{b_{i-1}+1}, \dots, X_{b_i})$

ו- $f_1, \dots, f_k$  כאשר  $f_i : \mathbb{R}^{d_i} \rightarrow \mathbb{R}$  אז  $\{f_i(Y_i)\}_{i=1}^k$  בלתי-תלויים.

**דוגמה 16.1** אם  $X_1, \dots, X_n$  בלתי-תלויים אז גם  $X_1 + X_2, \dots, X_3 + X_4, \dots, X_{n-1} + X_n$  כנביעה מהמסקנה,

באופן דומה גם  $X_1 + X_2 + X_3, \dots$  בלתי-תלויים.

כרעיון אנו יכולים לחלק משתנים מקריים לווקטורים בלתי-תלויים, ואז להפעיל פונקציה, שלא משנה את חוסר התלות, על כל הקבוצה.

**דוגמה 16.2** נניח ש- $A_1, \dots, A_5$  מאורעות בלתי-תלויים, אז המאורעות  $A_1 \cap A_2, A_3 \cap A_4, A_5$  בלתי-תלויים, זאת אנו

עושים על-ידי שימוש במשתנים המקריים האופייניים של  $A_i$  ושימוש במסקנה.

נבחין כי דרישת סופיות קבוצת המשתנים המקריים היא לא תנאי הכרחי

**הגדרה 16.3** (קבוצה בת-מניה של משתנים מקריים בלתי-תלויים)  $X_1, X_2, \dots$  משתנים מקריים הם בלתי-תלויים אם לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים

$X_1, \dots, X_n$  בלתי-תלויים.

**טענה 16.4** אם  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  בלתי-תלויים ו- $S_n \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$  אז

$$\mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in S_n) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \in S_n)$$

נשאל את עצמנו אם מצב זה בכלל אפשרי, נראה טענה ללא הוכחה שעונה על שאלה זו.

**טענה 16.5** קיימת סדרת משתנים מקריים כזאת שכולם  $Ber(\frac{1}{2})$ .

**טענה 16.6** סדרה כזו בהכרח לא מוגדרת על מרחב בדיד.

הוכחה. נניח ש- $X_1, \dots$  סדרה כזו ונניח ש- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  בדיד.

נניח ש- $\omega_0 \in \Omega$  ו- $\mathbb{P}(\{\omega_0\}) > 0$ , נסמן  $s_i = X_i(\omega_0)$  אז

$$0 \leftarrow_{n \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \mathbb{P}(\forall i \leq n, X_i = s_i) \geq \mathbb{P}(\forall i \in \mathbb{N}, X_i = s_i) \geq \mathbb{P}(\{\omega_0\}) > 0$$

וקיבלנו סתירה לקיום  $\omega_0$  כזה. □

## 16.2 התפלגות גאומטרית

ניזכר בהגדרה 12.5, אשר מדברת על ניסוי שאנו עושים שוב ושוב עד שאנו מצליחים.

**טענה 16.7** אם  $X_1, X_2, \dots$  משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים  $Ber(p)$  עבור  $0 < p < 1$ ,

ונסמן  $Y = \min\{k \mid X_k = 1\}$  אז  $Y \sim Geo(p)$ .

נבחין כי  $Y$  מייצג בחירת המופע הראשון של 1 בהתפלגות ברנולי, נזכיר כי היא מייצגת הגרלה יחידה, לדוגמה הטלת מטבע בודד. נעבור להוכחה.

**הוכחה.** המאורע  $Y = l$  הוא המאורע  $X_1 = X_2 = \dots = X_{l-1} = 0$  ו- $X_l = 1$ , אבל שלו הם משתנים בלתי-תלויים, לכן

$$\mathbb{P}(X_1 = \dots = X_{l-1} = 0, X_l = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdots \mathbb{P}(X_{l-1} = 0) \mathbb{P}(X_l = 1) = (1-p)^{l-1}p$$

זוהי התפלגות גאומטרית. □

**הערה** הסכום הוא

$$\sum_{l=1}^{\infty} (1-p)^{l-1}p = 1$$

ולכן המקרה שבו אין מינימום כפי שהגדרנו לא רלוונטי להגדרה, וניתן להתעלם ממנו.

מה יקרה אם נגדיר ככה  $Y_1 = Y$  ו- $Y_2$  המשתנה המקרי שעבורו קיבלנו 1 בפעם השנייה וכן הלאה, אז  $Y_2 - Y_1$  וסדרת החיסורים היא בלתי תלויה-אף היא, תוצאה אינטואיטיבית אך לא מובנת מאליה.

## 17.1 שאלות בנושאי משתנים מקריים בלתי-תלויים

**תרגיל 17.1** שתיים מטילות  $n$  מטבעות הוגנים כל אחת באופן בלתי-תלוי.

מה ההסתברות שהן קיבלו אותו מספר תוצאות עץ?

**פתרון** נגדיר  $X_i \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$  ההטלה ה- $i$  של הראשונה, ו- $Y \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$  ההטלה ה- $i$  של השנייה, ונגדיר

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i$$

משתנים המייצגים את מספר הטלות העץ של כל אחת מהשתיים.

אבל זאת דרך מורכבת לפתור את השאלה הזאת, נגדיר במקום זה  $X, Y \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$ , את ההוכחה לשקילות נראה בהרצאה הקרובה. מהגדרה 12.6 נוכל להסיק  $\text{Supp } X = \{0, \dots, n\}$ , ואנו מבקשים לחשב את  $\mathbb{P}(X = Y)$ , נחשב על-ידי

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k = Y) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

**טענה 17.1** יהיו  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  ו- $Y \sim \text{Bin}(m, p)$  בלתי-תלויים, אז  $X + Y \sim \text{Bin}(n + m, p)$ .

**הוכחה.** נבחין תחילה ש- $\text{Supp } X + Y = \{0, \dots, n + m\}$  וכן

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^{n+m} \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \binom{n+m}{k} \end{aligned}$$

כאשר עלינו להוכיח את השוויון האחרון, זאת נעשה בתרגיל הבא. □

## 17.2 תרגיל (זהות ונדרמונדה) מתקיים

$$\sum_{i=0}^{n+m} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

**פתרון** נבחין כי  $\binom{n+k}{k}$  הוא קומבינטורית שקול לבחירה  $k$  ערכים מתוך קבוצה בגודל  $m$  וקבוצה בגודל  $n$ .

במקביל  $\binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$  הוא היכולת לבחור  $i$  מתוך  $m$  ועוד השארית  $k-i$  מהקבוצה השנייה.

נבחין כי זוהי הוכחה קומבינטורית ואפשרי להוכיח גם אלגברית את השוויון הנתון.

**טענה 17.2** ניזכר בהגדרה 12.7 יהיו  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  ו- $Y \sim \text{Pois}(\lambda + \eta)$  בלתי-תלויים, אז  $X + Y \sim \text{Pois}(\lambda + \eta)$ .

ניזכר בהתפלגות פואסון עם דוגמה. אם מגיעים לבית-חולים בממוצע  $\lambda = 10$  אנשים ביום, אז התפלגות פואסון היא השאלה כמה אנשים הגיעו ביום ספציפי לבית-החולים.

בהתאם השאלה שאנו שואלים מדברת על מקרה שבו יש שני בתי-חולים ואנו שואלים על כמה אנשים הגיעו ביום.

ברור לנו אם כן שטענה זו הגיונית, נעבור להוכחה.



הוכחה. תחילה  $\text{Supp}(X + Y) = \mathbb{N} \cup \{0\}$  ונניח  $k \in \text{Supp}(X + Y)$  ונחשב

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = k - n) \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \frac{e^{-\eta} \eta^{k-n}}{(k-n)!} \\ &= e^{-(\lambda+\eta)} \sum_{n=0}^k \frac{\lambda^n \eta^{k-n}}{n!(k-n)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\eta)}}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} \lambda^n \eta^{k-n} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\eta)}}{k!} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \lambda^n \eta^{k-n} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\eta)}}{k!} (\lambda + \eta)^k\end{aligned}$$

□

**טענה 17.3** נניח  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  ו- $Y$  משתנה מקרי המקיים

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, Y \mid \{X = n\} \sim \text{Bin}(n, p)$$

אז  $Y \sim \text{Pois}(\lambda p)$

הוכחה. הפעם  $\text{Supp } Y = \mathbb{N} \cup \{0\}$

נניח ש- $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ונחשב את  $\mathbb{P}(Y = k)$  על-ידי שימוש בנוסחת ההסתברות השלמה.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+k} (1-p)^m}{m!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m (1-p)^m}{m!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{e^{-\lambda p} p^k (p\lambda)^k}{k!}\end{aligned}$$

□

## 18 שיעור 12 — 5.12.2024

### 18.1 התפלגות גאומטרית

**טענה 18.1** אם  $X_i \sim Ber(p)$  אז  $Y = \min k \mid X_k = 1$  אז  $Y \sim Geo(p)$ .

**משפט 18.2** (תכונת חוסר הזיכרון)  $X$  משתנה מקרי הנתמך על  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(X > 1) > 0$ . אז התנאים הבאים שקולים:

1.  $X \sim Geo(p)$  עבור  $0 < p < 1$  כלשהו.
2. לכל  $l \in \mathbb{N}$  מתקיים  $X \stackrel{d}{=} X - l \mid X > l$ . כלומר  $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = k + l \mid X > l)$  לכל  $l \in \mathbb{N}$ .
3.  $X \stackrel{d}{=} X - 1 \mid X > 1$ . כלומר לכל  $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  מתקיים  $\mathbb{P}(X \in S) = \mathbb{P}(X - 1 \in S \mid X > 1)$ .

נראה טענה קודמת שתעזור לנו בהוכחת המשפט

**טענה 18.3** אם  $X$  משתנה מקרי שנתמך על  $\mathbb{N}$  אז התנאים הבאים שקולים:

1.  $X \sim Geo(p)$
2.  $\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$

הוכחה. 2  $\Rightarrow$  1:

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} p = (1 - p)^n \sum_{l=1}^{\infty} (1 - p)^{l-1} p = (1 - p)^n$$

1  $\Rightarrow$  2:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n - 1) - \mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^{n-1} - (1 - p)^n = (1 - p)^{n-1} (1 - (1 - p))$$

□

הוכחת המשפט. 2  $\Rightarrow$  1: נניח  $l, k \in \mathbb{N}$ :

$$(1 - p)^{k-1} p = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X - l = k \mid X - l > 0) = \frac{\mathbb{P}(X = l + k)}{\mathbb{P}(X > l)} = \frac{(1 - p)^{l+k-1} p}{(1 - p)^l} = (1 - p)^{l-1} p$$

3  $\Rightarrow$  2 מיידי.

1  $\Rightarrow$  3: נסמן  $p = \mathbb{P}(X = 1)$  ונראה ש- $X \sim Geo(p)$  על-ידי כך שנראה  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X < n) = (1 - p)^n$  והטענה.

נוכיח באינדוקציה. עבור  $n = 1$  נובע  $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p$ .

נניח שהטענה נכונה ל- $n$  ונראה

$$\mathbb{P}(X > n + 1) = \mathbb{P}(X > 1) \mathbb{P}(X > n + 1 \mid X > 1) = (1 - p) \mathbb{P}(X - 1 > n \mid X > 1) = (1 - p) \mathbb{P}(X > n) = (1 - p)(1 - p)^n$$

□

### 18.2 התפלגות בינומית

נעבור לדבר על התפלגויות בינומיות כפי שהגדרנו בהגדרה 12.6.

**טענה 18.4** אם  $X_1, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי תלויים מתפלגים  $Ber(p)$ , אז  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  מתפלג  $Bin(n, p)$ .

הוכחה.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{\substack{v \in \{0,1\}^n \\ \sum v_i = k}} \mathbb{P}(X_1 = v_1, \dots, X_n = v_n) \\
 &= \sum_{\substack{v \in \{0,1\}^n \\ \sum v_i = k}} \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(X_i = v_i) \\
 &= \sum_{\substack{v \in \{0,1\}^n \\ \sum v_i = k}} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
 \end{aligned}$$

□

ניזכר בטענה 17.1 ונוכיח אותה הפעם בדרך פורמלית ולא על-ידי אינטואיציה.

הוכחה. נניח שיש  $Z_1, \dots, Z_{n+m}$  משתנים מקריים בלתי-תלויים  $Ber(p)$  כך שמתקיים

$$X' = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad Y' = \sum_{i=n+1}^{n+m} Z_i$$

או  $X' + Y' = \sum_{i=1}^{n+m} Z_i$  לפי הטענה

$$X' \sim Bin(n, p), \quad Y' \sim Bin(m, p)$$

וכן

$$X' + Y' \sim Bin(n + m, p)$$

לפי הטענה מההרצאה הקודמת  $X'$  ו- $Y'$  בלתי-תלויים.

אבל  $X' \stackrel{d}{=} Y' \stackrel{d}{=} X \stackrel{d}{=} Y$  ו- $X \sim Y$  בלתי-תלויים וגם  $X', Y'$  בלתי-תלויים, אז  $(X', Y') \stackrel{d}{=} (X, Y)$ . לבסוף נובע  $X + Y \stackrel{d}{=} X' + Y'$ . □

### 18.3 התפלגות פואסון

נעבור להתפלגות 12.7 ונבחן אותה

**טענה 18.5** נניח  $\lambda > 0$  ונגדיר  $X_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$  עבור  $n > \lambda$ ,

אז לכל  $k \in \mathbb{N}$  מתקיים

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y = k)$$

עבור  $Y \sim Pois(\lambda)$ .

הוכחה.

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^0 \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$$

באופן דומה

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \binom{n}{1} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^1 \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \cdot \lambda$$

ונעבור למקרה הכללי

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \underbrace{\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k}_{\frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot 1$$

□

נחזור לטענה שראינו בתרגיל הבית:

**טענה 18.6** אם  $X \sim \text{Pois}(\lambda_1)$  ו-  $Y \sim \text{Pois}(\lambda_2)$  בלתי-תלויים אז  $X + Y \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

הפעם אפשר יהיה להוכיחה על-ידי הטענה החדשה שראינו.

**דוגמה 18.1** נניח  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  משתנים מקריים בלתי-תלויים  $U([26])$  המייצגים את קבלת כל אחת מהאותיות באנגלית, אז

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_{1000} = 1) = \frac{1}{26^{1000}} = \mathbb{P}(X_{1001} = 1, \dots, X_{2000} = 1)$$

ההסתברות שיצא טקסט שמורכב מהאות  $a$  1000 פעמים. הרעיון הוא שאין קשר בין המיקום שבו אנו שואלים עם הטקסט הופיע, אלא רק מהו אורך הטקסט, בהתאם

$$\mathbb{P}(\neg \exists k, X_{1000k+1} = 1, \dots, X_{1000k+1000} = 1) = \left(1 - \frac{1}{26^{1000}}\right)^n \rightarrow 0$$

ולכן בסופו של דבר הטקסט הזה בהכרח יופיע.

### 19.1 תוחלת

הגדרה 19.1 (תוחלת במשתנים מקריים בדידים)  $X$  משתנה מקרי בדיד. התוחלת של  $X$  היא

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{s \in \mathbb{R}} s \mathbb{P}(X = s)$$

הערה אם הטור  $\sum_{s \in \mathbb{R}} s \mathbb{P}(X = s)$  לא מתכנס בהחלט, אז נאמר שאין תוחלת ל- $X$ .

דוגמה 19.1 נניח ש- $\Omega = [100]$  מרחב הסתברות אחיד, מייצג קבוצת תלמידים.

נגדיר  $X(\omega)$  הציון של תלמיד  $\omega$  במבחן.

אז  $\mathbb{E}(X)$  יהיה ממוצע הציונים בכיתה.

טענה 19.2 אם  $X$  מוגדר על מרחב הסתברות בדיד, אז  $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$

הוכחה. מההגדרה של מרחב הסתברות בדיד נוכל להשתמש בתומך ואז נובע

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{s \in \mathbb{R}} s \mathbb{P}(X = s) = \sum_{s \in \mathbb{R}} s \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = s}} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{s \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = s}} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$$

□

טענה 19.3 אם  $X_1, \dots, X_n$  משתנים מקריים בדידים ו- $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}}$ , אז  $Y = f(X_1, \dots, X_n)$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n} f(s_1, \dots, s_n) \mathbb{P}(X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n)$$

הוכחה. כמקודם נשתמש בתומך וכך נראה את השוויון.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{s \in \mathbb{R}} s \mathbb{P}(Y = s) \\ &= \sum_{s \in \mathbb{R}} s \sum_{\substack{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n \\ f(s_1, \dots, s_n) = s}} \mathbb{P}(X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n) \\ &= \sum_{s \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n \\ f(s_1, \dots, s_n) = s}} f(s_1, \dots, s_n) \mathbb{P}(X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n) \\ &= \sum_{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n} f(s_1, \dots, s_n) \mathbb{P}(X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n) \end{aligned}$$

□

דוגמה 19.2 נניח  $X \sim \text{Ber}(p)$  אז

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = p$$

דוגמה 19.3 אם  $X \sim U([n])$  אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

דוגמה 19.4 אם  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

דוגמה 19.5 נניח  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$  אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

ולבסוף גם

**דוגמה 19.6** נניח  $X \sim Geo(p)$  ולכן

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

את החישוב עצמו שמוכיח את הטענה הזאת נעשה בהמשך.

**דוגמה 19.7** נניח  $X \sim Geo(\frac{1}{2})$  ונגדיר  $Y = 2^X$ .

בהתאם  $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2}$  וכן  $\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{4}$  וכן הלאה, כך ש- $\mathbb{P}(Y = 2^k) = \frac{1}{2^k}$ . נחשב את התוחלת:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{s \in \{2, 4, 8, \dots\}} 2^k \mathbb{P}(Y = 2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

ולכן אין תוחלת.

יכולנו להחליף את הגדרת  $Y$  להיות  $Y = (-2)^X$  והיינו מקבלים טור שלא מתכנס בכלל.

הערה אפשר להרחיב את התוחלת ותכונותיה למקרים אינסופיים, אנו לא נעשה זאת.

## 19.2 תכונות של תוחלת

**טענה 19.4** (תכונות של תוחלת) אם  $X, Y$  משתנים מקריים בעלי תוחלת, אז:

1. אם  $X \geq 0$  כמעט תמיד אז  $\mathbb{E}(X) \geq 0$ . אם בנוסף  $\mathbb{P}(X > 0) > 0$  אז  $\mathbb{E}(X) > 0$ .

2. לינאריות: אם  $a, b \in \mathbb{R}$  אז אם  $Z = aX + bY$  יש תוחלת והיא  $\mathbb{E}(Z) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ .

הוכחה. 1. אם  $X \geq 0$  כמעט תמיד אז כל המחזורים אי-שליליים ולכן  $\mathbb{E}(X) \geq 0$ .

אם בנוסף  $\mathbb{P}(X > 0) > 0$  אז קיים  $s > 0$  כך ש- $\mathbb{P}(S = s) > 0$  ולכן  $s\mathbb{P}(X = s) > 0$  ולכן הסכום חיובי.

2. נגדיר  $f(x, y) = ax + by$  עבור  $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}}$ . אז

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(f(x, y)) \\ &= \sum_{(s, t) \in \mathbb{R}^2} f(s, t) \mathbb{P}(X = s, Y = t) \\ &= \sum_{(s, t) \in \mathbb{R}^2} (as + bt) \mathbb{P}(X = s, Y = t) \\ &= a \left( \sum_{(s, t) \in \mathbb{R}^2} s \mathbb{P}(X = s, Y = t) \right) + b \left( \sum_{(s, t) \in \mathbb{R}^2} t \mathbb{P}(X = s, Y = t) \right) \\ &= a \left( \sum_{s \in \mathbb{R}} \sum_{t \in \mathbb{R}} s \mathbb{P}(X = s, Y = t) \right) + b \left( \sum_{t \in \mathbb{R}} \sum_{s \in \mathbb{R}} t \mathbb{P}(X = s, Y = t) \right) \\ &= a \sum_{s \in \mathbb{R}} s \mathbb{P}(X = s) + b \sum_{t \in \mathbb{R}} t \mathbb{P}(Y = t) \\ &= a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

□

**מסקנה 19.5** אם  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים בעלי תוחלת ו- $Y \leq X$  כמעט תמיד, אז  $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X)$ .

הוכחה. נגדיר  $Z = X - Y$  ואז  $Z \geq 0$  כמעט תמיד ולכן  $\mathbb{E}(Z) \geq 0$  ואז  $X = Y + Z$  ולכן  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z) \geq \mathbb{E}(Y)$ . □

**דוגמה 19.8** נעבור לראות את החישוב של תוחלת להתפלגות בינומית: נגדיר  $X \sim Bin(n, p)$  ונגדיר  $X_1, \dots, X_n$  משתנים מקריים  $Ber(p)$ ,

ויהי  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , לכן  $X \sim Bin(n, p)$  וכן

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = np$$

**הגדרה 19.6** (תוחלת מותנית)  $X$  משתנה מקרי ו- $A$  מאורע, כך ש- $\mathbb{P}(A) > 0$ , אז

$$\mathbb{E}(X | A) = \sum_{s \in \mathbb{R}} s \mathbb{P}(X = s | A)$$

**טענה 19.7**

$$\mathbb{E}(X | A) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot 1_A)}{\mathbb{P}(A)}$$

הוכחה.

$$\mathbb{E}(X | A) = \sum_{s \in \mathbb{R}} s \mathbb{P}(X = s | A) = \sum_{s \in \mathbb{R}} s \frac{\mathbb{P}(X = s, A)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{s \in \mathbb{R}} s \frac{\mathbb{P}(X \cdot 1_A = s)}{\mathbb{P}(A)}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהגדרת המציין ובדיקה ידנית של המקרים בהם  $s \in A, s \notin A$ , כלומר

$$\mathbb{P}(X = s, A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = s, \omega \in A\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = s, 1_A(\omega) = 1\})$$

□

**טענה 19.8** אם  $A_1, \dots, A_n$  חלוקה של  $X$  משתנה מקרי בעל תוחלת, אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X \cdot 1_{A_k})$$

הוכחה. מאותו מעבר כמו בהוכחה הקודמת נסיק

$$X = \sum_{k=1}^n X \cdot 1_{A_k}$$

□

ואז משתמש בתכונת הליניאריות של תוחלות ונקבל את המבוקש.

**טענה 19.9** (נוסחת התוחלת השלמה) אם  $A_1, \dots, A_n$  חלוקה ו- $\mathbb{P}(A_k) > 0$  לכל  $k$  אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \mathbb{E}(X | A_k)$$

הוכחה. על-ידי הטענות הקודמות נובע

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X \cdot 1_{A_k}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \mathbb{E}(X | A_k)$$

□

**דוגמה 19.9** נניח  $X \sim \text{Geo}(p)$  ו- $A_1 = \{X = 1\}$  וכן  $A_2 = \{X > 1\}$ , אז  $\{A_1, A_2\}$  הם אכן חלוקה של  $\Omega$ .

נחשב את התוחלת:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{E}(X | A_1) + \mathbb{P}(A_2) \mathbb{E}(X | A_2) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot \mathbb{E}(X | X > 1)$$

אבל אז מתכונת חוסר הזיכרון

$$p \cdot 1 + (1 - p) \cdot \mathbb{E}(X | X > 1) = p + (1 - p) \cdot (\mathbb{E}(X - 1 | X > 1) + \mathbb{E}(1 | X > 1)) = p + (1 - p) \cdot (\mathbb{E}(X) + 1)$$

ולכן קיבלנו את השוויון  $\mathbb{E}(X) = p + (1 - p)(\mathbb{E}(X) + 1)$ , ממנו נובע  $0 = p + (1 - p) - p\mathbb{E}(X)$ , לכן  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ .

### 20.1 שאלות ותכונות של תוחלות

באנגלית תוחלת היא Expectancy, מילה שמתארת בצורה יותר נאמנה את מושג התוחלת.

**דוגמה 20.1** נניח ש- $X \sim Geo(p)$ , ונחשב את התוחלת של  $X$ .

יש להעריך את הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n)$ .

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

נגדיר  $f \in (0, 1)$  את  $f(q) = \frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$  ולכן  $f$  אנליטית ומתכנסת במידה שווה על תת-קבוצות של התחום שלה. אז

$$\frac{1}{(1-q)^2} = f'(q) = \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$

אם נציב  $q = 1 - p$  אז נובע

$$p \sum_{n=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

**דוגמה 20.2** אם  $X \sim Bin(n, p)$  ואם נגדיר  $Y \sim Bin(n-1, p)$  אז

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-m-1)!m!} p^{m+1} (1-p)^{n-m-1} \\ &= np \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!m!} p^m (1-p)^{n-m-1} \\ &= np \mathbb{P}(y \in \text{Supp } Y) \\ &= np \end{aligned}$$

**דוגמה 20.3** (תוחלת של משתנה מקרי היפר-גאומטרי) ניזכר בשאלה: בכד יש  $a$  כדורים אדומים ו- $b$  כדורים שחורים ושולפים  $k$  כדורים ללא החזרה לכד.

$X$  משתנה מקרי שסופר את מהספר הכדורים האדומים.

נגדיר  $X_i$  המשתנה המקרי שבשליפה ה- $i$  יצא כדור אדום, ו- $X = \sum_{i=1}^k X_i$ . נוכל להגדיר גם  $\Omega = \{(y_1, \dots, y_k) \mid i \neq j \Rightarrow y_i \neq y_j\}$  כאשר מסמנים את הכדורים האדומים ב- $\{1, \dots, a\}$  וכן את השחורים ב- $\{a+1, \dots, b\}$ . אז

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(y_i \leq a) = \sum_{j=1}^a \mathbb{P}(y_i = j) = \sum_{j=1}^a \frac{1}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{k \cdot a}{a+b}$$

נעבור לבחינת דוגמה לשימוש בנוסחת התוחלת השלמה, אותה ראינו בהרצאה האחרונה.

**תרגיל 20.1** מטילים קובייה הוגנת שוב ושוב עד שיוצא 1.

מה תוחלת סכום ערכי הקובייה?

**פתרון** נגדיר  $X$  משתנה מקרי שסוכם את מספר סיבובי המשחק, לכן  $X \sim Geo(\frac{1}{6})$ .

נגדיר גם  $Y_i$  להיות תוצאת ההטלה ה- $i$ , אם היא התקיימה.



בנוסף  $Y = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$ , הערך המעניין אותנו, סכום הקובייה בסוף המשחק.

$$Y_i \mid X = n \sim \begin{cases} U(2, \dots, 6) & i < n \\ 1 & i = n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

ולכן נשתמש בנוסחת התוחלת השלמה

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y \mid X = n) \cdot \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i \mid X = n) \right) \cdot \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n 4 + 1 \right) \cdot \left( \frac{5}{6} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} (4n - 3) \left( \frac{5}{6} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{6} \left( 4 \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{5}{6} \right)^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5}{6} \right)^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left( 4 \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{6} \right)^2} - 3 \cdot 6 \right) \\ &= 21 \end{aligned}$$

### 21.1 תוחלת — המשך

נבחין כי מתקיימת הטענה הבאה, אך לא נוכיח אותה שכן אין בכך ערך לימודי:

טענה 21.1 (נוסחת התוחלת השלמה הבת-מניה) אם  $X, Y$  משתנים מקריים בדידים, אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(Y = t) \mathbb{E}(X | Y = t)$$

נבחן תכונה נוספת.

טענה 21.2 (תוחלת מכפלת משתנים מקריים בלתי-תלויים) אם  $X, Y$  משתנים מקריים בלתי-תלויים ובעלי תוחלת, אז

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

נבחין שבשונה מלינאריות תוחלת, במקרה הזה אנו צריכים את חוסר-התלות.

הוכחה. לפי נוסחת התוחלת השלמה

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(Y = t) \mathbb{E}(XY | Y = t)$$

בהינתן  $Y = t$  ההתפלגות של  $Y$  מתרכזת כולה ב- $t$ , כלומר

$$\mathbb{P}(Y = s | Y = t) = \begin{cases} 1 & s = t \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

לכן בהינתן  $Y = t$  מתקבל  $XY \stackrel{a.s.}{=} Xt$  ובהתאם

$$XY | Y = t \stackrel{a.s.}{=} Xt | Y = t$$

לכן

$$\mathbb{E}(XY | Y = t) = \mathbb{E}(Xt | Y = t) = t\mathbb{E}(X | Y = t) = t\mathbb{E}(X)$$

ומשילוב השוויונות שמצאנו נובע

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(Y = t) t \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$$

□

נעבור לדון במה בכלל המשמעות של תוחלת. עד כה מצאנו תכונות שלה, ואף הגדרות שקולות, אך מה המשמעות של התוחלת בהקשר הסתברותי? באיזה מובן עלינו להתחשב בתוחלת במקרה שבו אנו יודעים את ערכה, כשהיא חיובית? נעבור להליך שנותן לנו מידע בהסתברות מתוך מידע על תוחלות.

משפט 21.3 (אי-שוויון מרקוב) יהי  $X$  משתנה מקרי אי-שלילי (דהינו  $X \stackrel{a.s.}{\geq} 0$ ) ובעל תוחלת. אז לכל  $a > 0$  מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

הוכחה. נבחן את החלוקה  $\{X < 0\}, \{0 \leq X < a\}, \{X \geq a\}$ , זוהי חלוקה של  $\Omega$ , נסמן אותם גם ב- $A_0, A_1, A_2$  בהתאמה.

$$\mathbb{E}(X) = \overbrace{\mathbb{E}(X1_{A_0})}^{=0} + \mathbb{E}(X1_{A_1}) + \mathbb{E}(X1_{A_2})$$

נוכל לקבל תוצאה דומה עם נוסחת התוחלת השלמה.

המחבר השני הוא אי-שלילי מהגדרות שהנחנו, והמחבר השלישי מקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a | X \geq a) = 1 \implies \mathbb{E}(X | X \geq a) \geq \mathbb{E}(a | X \geq a) = a$$

□

ולכן חסום על-ידי  $a \mathbb{P}(a \in X)$ .

## 21.2 שימושים של אי-שוויון מרקוב

**דוגמה 21.1** נניח ש- $X \sim Geo(\frac{1}{2})$ , אז  $\mathbb{E}(X) = 2$  ובהתאם  $\mathbb{P}(X \geq 4) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .  
נוכל לחשב את ההסתברות עצמה על-ידי  $\mathbb{P}(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{8}$ .  
קיבלנו שהחסם שנובע מאי-שוויון מרקוב לא מאוד מועיל לנו.

אם  $Y = X - 1$  ואנו מחפשים את  $Y \geq 0$  אז  $\mathbb{E}(Y) = 1$ .  
במקרה זה  $\mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(Y \geq 3) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{3} = \frac{1}{3}$ .  
אז קיבלנו חסם יותר טוב לערך, זאת אומרת שיש לנו דרך נוספת להשתמש באי-שוויון.

**דוגמה 21.2** אם  $X \sim Po(\lambda)$  ואנו מחפשים את  $\mathbb{P}(X \geq 1)$ .  
אנו כבר יודעים ש- $\mathbb{E}(X) = \lambda$ , ולכן  $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{1} = \lambda$ .  
אם  $\lambda \geq 1$  אז מצאנו שהחסם הוא 1, והוא לא ממש מועיל לנו.  
מצד שני  $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda}$ .  
לכן  $\lambda \leq 1 - e^{-\lambda}$  ו- $1 - \lambda \leq e^{-\lambda}$ . באופן כללי ראינו שהחסם אכן די מדויק עבור מקרים רבים של ערכי  $\lambda$ .

**דוגמה 21.3**  $n$  מכתבים מגיעים ל- $n$  תיבות דואר ובוחרים תמורה מקרית על  $[n]$ .  
נבחן את  $X$  מספר נקודות השבת של התמורה.

$$X = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$$

כאשר  $A_i$  המאורע של נקודת שבת של התמורה ב- $i$ , כלומר  $\sigma(i) = i$ .  
נחשב גם  $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{a}$  ולכן  $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(1_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ .

**דוגמה 21.4** נחזור לפרדוקס יום ההולדת,  $X_i \sim U([n])$  בלתי-תלויים עבור  $i \in [k]$ , כאשר המשתנה המקרי מייצג את הסיכוי שלאדם ה- $i$  יש יום הולדת.

$X$  הוא מספר ימי ההולדת המשותפים,

$$X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} 1_{\{X_i = X_j\}}$$

ונוכל גם לכתוב

$$\mathbb{P}(X_i = X_j) = \sum_{l=1}^m \mathbb{P}(X_i = l, X_j = l) = \sum_{l=1}^m \mathbb{P}(X_i = l) \mathbb{P}(X_j = l) = \sum_{l=1}^m \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m}$$

ונובע

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbb{P}(X_i = X_j) = \binom{k}{2} \frac{1}{m}$$

ולבסוף

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{1} = \binom{k}{2} \frac{1}{m}$$

זוהי הכללה של חסם האיחוד.

**דוגמה 21.5** יהיו  $A_1, \dots, A_N$  קבוצות,  $|A_i| \geq n$  ו- $N < 2^{n-1}$ , אז קיימת קבוצה  $B$  כך ש- $B \cap A_i \neq \emptyset$  ו- $A_i \not\subseteq B$   $\forall 1 \leq i \leq N$ .

נגדיר  $A = \bigcup_{i=1}^N A_i$ . יהיו  $X_a \sim Ber(\frac{1}{2})$  בלתי תלויים לכל  $a \in A$  ונגדיר  $B = \{a \mid X_a = 1\}$ .  
נחשב את ההסתברות  $\mathbb{P}(A_i \subseteq B) = \mathbb{P}(\forall a \in A_i, X_a = 1) = (\frac{1}{2})^{|A_i|} \leq \frac{1}{2^n}$ .  
מצד שני  $\mathbb{P}(A_i \cap B \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\forall a \in A_i, X_a = 0) = (\frac{1}{2})^{|A_i|} \leq \frac{1}{2^n}$  אז

$$\mathbb{P}(\exists 1 \leq i \leq N, A_i \subseteq B \vee A_i \cap B = \emptyset) \leq \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A_i \subseteq B) + \mathbb{P}(A_i \cap B = \emptyset) \leq N \cdot (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}) = \frac{N}{2^{n-1}} < 1$$

ולכן קיימת  $B$  כזאת.

## 22.1 נוסחה לתוחלות

נתחיל בנוסחה קטנה שתעזור לנו לפתח אינטואיציה, אך לא נשתמש בה רבות.

טענה 22.1 (נוסחת הזנב לתוחלות) אם  $X$  משתנה מקרי שנתמך על ידי  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  אז

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X \geq n)$$

הוכחה. ממשפט פוביני לסכומים מרובים

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = n) \right) = \sum_{\substack{n, k \in \mathbb{N} \\ k \leq n}} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$$

□

## 22.2 שונות

באנגלית Variance. אנו רוצים לשאול את השאלה כמה הסתברות רחוקה בעצם מהתוחלת, כך שנוכל לאפיין את שתי התכונות באופן מוצלח יותר אחת על ידי השנייה. לדוגמה אם  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 5$  אבל  $X = 5$  כמעט תמיד ומצד שני  $\mathbb{P}(Y = 5000000) = \frac{1}{10^6}$  ו- $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \frac{1}{10^6}$  בעלות תוחלת זהה אבל בכירור שונות בתכלית.

הגדרה 22.2 (שונות)  $X$  משתנה מקרי בעל תוחלת  $\mu = \mathbb{E}(X)$ , אז השונות של  $X$  היא

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2)$$

דוגמה 22.1 במקרה שראינו זה עתה

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - 5)^2) = 0$$

בעוד שמתקיים

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}((Y - 5)^2) = (5000000 - 5)^2 \cdot \frac{1}{10^6} + (0 - 5)^2 \cdot (1 - \frac{1}{10^6}) \approx 25000000$$

כפי שאנו רואים, הפעם השונות מייצגת את ההבדל המשמעותי שבין שני המשתנים המקריים.

נוסיף הגדרה שלא נעסוק בה אך שרבים מאיתנו שמעו בעבר, והוא מושג סטיית התקן, מושג שמשמש רבות בסטטיסטיקה.

הגדרה 22.3 (סטיית תקן) סטיית התקן של  $X$  היא  $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ .

נראה הגדרה נוספת לשונות שמשומשת אף היא, הגדרה זו שקולה להגדרה שראינו

הגדרה 22.4 (הגדרה שקולה לשונות) נגדיר את השונות להיות

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

הוכחת השקילות. נסמן  $\mu = \mathbb{E}(X)$  ולכן מתכונות התוחלת

$$\mathbb{E}((X - \mu)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2X\mu) + \mathbb{E}(\mu^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

□

ומצאנו כי מתקיים השוויון שחיפשנו.

טענה 22.5 (תכונות של שונות) כלל התכונות הבאות מתקיימות עבור  $X$  משתנה מקרי בעל תוחלת:

1.  $\text{Var}(X) \geq 0$  ו- $\text{Var}(X) = 0$  אם  $X$  קבוע כמעט תמיד. השונות היא חיובית ואם המשתנה המקרי קבוע, אז השינוי שהיא מייצגת הוא אפס

סביב התוחלת, היא גם ההסתברות.

2.  $\text{Var}(X) = \text{Var}(X + a)$  לכל  $a \in \mathbb{R}$ . השונות לא מושפעת מהזזה, היא תכונה כללית.

3.  $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$ . מתיחה של המשתנה המקרי מגדילה אפילו יותר את השונות, נבחין כי השונות מייצגת את הטווח סביב התוחלת,

ונוכל להסתכל עליה כשטח של איזשהו רדיוס סביב התוחלת, ככה נקבל את הריבוע.

הוכחה. 1.  $\mathbb{E}((X - \mu)^2) \geq 0$  ולכן גם  $\mathbb{E}((X - \mu)^2) \geq 0$  גם

$$X - \mu \stackrel{a.s.}{=} 0 \iff (X - \mu)^2 \stackrel{a.s.}{=} 0 \iff \mathbb{E}((X - \mu)^2) = 0$$

2. נגדיר  $Y = X + a$  ולכן  $\mathbb{E}(Y) = \mu + a$  ואז

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}((Y - (\mu + a))^2) = \mathbb{E}(((X + a) - (\mu + a))^2) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \text{Var}(X)$$

3. נגדיר  $Y = aX$  ובהתאם  $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X) = a\mu$  ולכן

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}((Y - a\mu)^2) = \mathbb{E}((aX - a\mu)^2) = a^2 \mathbb{E}((X - \mu)^2) = a^2 \text{Var}(X)$$

□

נבחין כי בעוד שאנו יודעים כי תוחלות הן לינאריות, זהו לא המקרה עבור שונות, ננסה לחשב שונות של סכום משתנים מקריים. נחשב את  $\text{Var}(X + Y)$  עבור  $Y$  עבור  $\mu = \mathbb{E}(X)$ ,  $\nu = \mathbb{E}(Y)$ . נעבור לחישוב השונות

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \mathbb{E}(((X + Y) - (\mu + \nu))^2) \\ &= \mathbb{E}(((X - \mu) + (Y - \nu))^2) \\ &= \mathbb{E}((X - \mu)^2 + 2(X - \mu)(Y - \nu) + (Y - \nu)^2) \\ &= \mathbb{E}((X - \mu)^2) + 2\mathbb{E}((X - \mu)(Y - \nu)) + \mathbb{E}((Y - \nu)^2) \end{aligned}$$

ניתן שם לביטוי לחלק הביטוי שיצא לנו, ונגדיר

הגדרה 22.6 (שונות משותפת) נגדיר

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mu)(Y - \nu))$$

עבור  $\mu = \mathbb{E}(X)$ ,  $\nu = \mathbb{E}(Y)$

כאשר Cov הוא קיצור ל-Covariance, הוא בתורו קיצור למילה Cooperative Variance. ולכן נוכל לקבל מסקנה 22.7 עבור משתנים מקריים  $X, Y$  בעלי תוחלת, מתקיים

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y)$$

טענה 22.8 אם  $X$  ו- $Y$  בלתי-תלויים ובעלי שונות, אז  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

הוכחה. נראה בהמשך שאם ל- $X$  ול- $Y$  יש שונות אז  $\text{Cov}(X, Y)$  מוגדר (כלומר הטור מתכנס בהחלט).

נניח כרגע שזה נכון ולכן

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mu)(Y - \nu)) \stackrel{(1)}{=} \mathbb{E}(X - \mu)\mathbb{E}(Y - \nu) = 0 \cdot 0 = 0$$

כאשר

1.  $X - \mu$  ו- $Y - \nu$  בלתי-תלויים, מאי-תלות של  $X, Y$  עצמם.

□

דוגמה 22.2 אם  $X = c$  כמעט תמיד אז  $\mathbb{E}(X) = c$  ו- $\text{Var}(X) = 0$ .

דוגמה 22.3 נניח  $X \sim \text{Ber}(p)$  ולכן  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$ .

אם  $X \sim \text{Ber}(p)$  אז  $1 - X \sim \text{Ber}(1 - p)$  ואז  $\text{Var}(1 - X) = \text{Var}(-X) = (-1)^2 \text{Var}(X) = \text{Var}(X)$  זאת אומרת, לא מפתיע שהשונות היא סימטרית במקרה זה עבור שני המשתנים.

דוגמה 22.4 אם  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , אז נוכל להשתמש ישירות בהגדרת השונות, אבל נשתמש בעובדה שמשנתה בינומי הוא סכום של משתנים ברנולי, כלומר  $X_i \sim \text{Ber}(p)$  בלתי-תלויים עבור  $1 \leq i \leq n$  אז אם  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  גם  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , ולכן

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = np(1 - p)$$

**דוגמה 22.5** נניח עתה  $X \sim Poi(\lambda)$ , ונחשב על-ידי ההגדרה השקולה והעובדה שאנו כבר יודעים ש- $\mathbb{E}(X) = \lambda$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((k-1) + 1) \lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) \lambda^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda^2 + \lambda\end{aligned}$$

ולכן נסיק  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda$

## 23 תרגול 8 – 19.12.2024

### 23.1 שימושים למשפט מרקוב

**תרגיל 23.1** מטילים מטבע מוטה עם הסתברות  $p$  לעץ, 20 פעמים, חסמו את ההסתברות שהרצף עץ יצא פחות מפעמיים.

**פתרון** נגדיר  $\Omega = \{0, 1\}^{20}$  וכן  $X = 1_{\{\omega_i = \omega_{i+1} = 1\}}$  וגם  $X = \sum X_i$ , אנו רוצים לחשב את  $\mathbb{P}(X \leq 1)$ . נבחין כי  $X_i \sim \text{Ber}(p^2)$  וכן  $\mathbb{E}(X) = \sum \mathbb{E}(X_i) = 19p^2$ , שכן  $0 \leq X \leq 19$ .  

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(19 - X \geq 18) \leq \frac{\mathbb{E}(19 - X)}{18} = \frac{19 - 19p^2}{18}$$

### 23.2 שאלות נבחרות בנושא שונות

נתחיל ונבחין ששונות היא תבנית בילינארית (תבנית ריבועית), ובשל כך היא מקיימת את הטענה שהיא אי-שלילית, היא אדישה להזזות קבועות ויש לה כיול ריבועי,

**דוגמה 23.1** אם  $X \sim U([6])$  משתנה מקרי להטלת קובייה הוגנת, אז  $\mathbb{E}(X) = 3\frac{1}{2}$  וכן  

$$\text{Var}(X) = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{35}{12} \approx 3$$

זאת אומרת שהשונות באמת מתכתבת עם המרחק של הערכים מהתוחלת.

**תרגיל 23.2** יהי  $X \sim \text{Geo}(q)$ , חשבו את  $\text{Var}(X)$ .

**פתרון** אנו יודעים ש- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{q}$  ופיתוח טיילור, מתקיים  
 עוד אנו יודעים מאנליטיות  $\frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

נשתמש בנוסחה זו ונובע

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)q(1-q)^{n-1} = q(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(1-q)^{n-2} = q(1-q) \frac{2}{q^3}$$

ולכן  $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2(1-q)}{q^2} + \frac{1}{q}$  נעבור לחישוב השונות

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2(1-q)}{q^2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q^2} = \frac{2(1-q) + q - 1}{q^2} = \frac{1-q}{q^2}$$

ניזכר בשונות משותפת, נבחין כי מביילינאריות השונות מתקיים

$$\begin{aligned} \text{Var}(X+Y) &= \text{Cov}(X+Y, X+Y) \\ &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

בהתאם גם

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

**תרגיל 23.3** חשבו את השונות ואת התוחלת של מספר נקודות השבת בתמורה מקרית על  $\{1, \dots, n\}$ .

**פתרון** נגדיר  $X_i$  נקודת השבת במקום ה- $i$ .  $X_i \sim \text{Ber}(\frac{1}{n})$  ו- $X = \sum X_i$ . בהתאם

$$\mathbb{E}(X) = n \frac{1}{n} = 1$$

אם  $i \neq j$  אז  $\mathbb{P}(X_i = 1) \mathbb{P}(X_j = 1) = \frac{1}{n^2} \neq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \mathbb{P}(X_i, X_j = 1)$ , כלומר אנו רואים כי משתנים אלה תלויים.

$$\text{Var}(X_i) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

ובן

$$i \neq j \implies \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n^2}$$

לכן

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n^2}\right) \\&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \binom{n}{2} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) \\&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \frac{n!}{2!(n-2)!} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) \\&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) \\&= 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{n-1}{n} \\&= 1\end{aligned}$$



## 24 שיעור 16 – 19.12.2024

### 24.1 שונות – המשך

נרחיב את הטענה מההרצאה הקודמת.

**טענה 24.1** עבור משתנים מקריים  $X, Y$  בעלי תוחלת מתקיים

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

הוכחה.

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(Y)X + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

□

**הערה** אם  $X$  ו- $Y$  בלתי-תלויים אז  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**הגדרה 24.2** (משתנים מקריים בלתי-מתואמים) אם מתקיים  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  אז נאמר ש- $X$  ו- $Y$  בלתי-מתואמים.

נבחין כי זהו תנאי הרבה יותר חלש מאי-תלות.

**טענה 24.3** (תכונות של שונות משותפת) לכל שני משתנים מקריים  $X, Y$  בעלי-תוחלת מתקיימות התכונות הבאות

$$1. \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$2. \text{Cov}(a + X, Y) = \text{Cov}(X, Y)$$

$$3. \text{Cov}(aX, Y) = a \cdot \text{Cov}(X, Y)$$

$$4. \text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X)$$

$$5. \text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$$

**הוכחה.** התכונה הראשונה טריוויאלית ונובעת מההגדרה, ולכן נוכיח את התכונה השנייה.

$$\mathbb{E}(((a + X) - \mathbb{E}(a + X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

נוכיח את התכונה החמישית.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(((X + Y) - \mathbb{E}(X + Y))(Z - \mathbb{E}(Z))) &= \mathbb{E}(((X - \mathbb{E}(X)) + (Y - \mathbb{E}(Y)))(Z - \mathbb{E}(Z))) \\ &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Z - \mathbb{E}(Z))) + \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))(Z - \mathbb{E}(Z))) \end{aligned}$$

□

**טענה 24.4** נניח ש- $X_1, \dots, X_n$  משתנים מקריים בעלי תוחלת, אז

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Cov}\left(X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

□

**דוגמה 24.1** מטילים מטבע הוגן  $n$  פעמים וסופרים את מספר ה- $HH$ , נחשב את התוחלת ואת השונות.

נגדיר  $\{X_i\}_{i=1}^n$  משתנים מקריים  $Ber(\frac{1}{2})$  בלתי-תלויים, ונגדיר  $Y_i = X_i + X_{i+1}$  עבור  $i = 1, \dots, n-1$ . נגדיר גם  $Y = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$ .

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1}) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(Y_i) = \frac{n-1}{4}$$

וכן

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Var}(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$$

ונעבור לחישוב אלה האחרונים.

$$\text{Var}(Y_i) = \frac{3}{16}$$

נבחן דוגמה ספציפית למקרה שהמשתנים שונים,

$$\text{Cov}(Y_1, Y_7) = \text{Cov}(X_1X_2, X_7X_8)$$

לכל  $j > i + 1$  המשתנים  $Y_i = X_iX_{i+1}$  ו- $Y_j = X_jX_{j+1}$  בלתי-תלויים (בתור פונקציות מעל משתנים מקריים בקבוצות זרות), לכן  $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ .

נשאר המקרה  $j = i + 1$ .

$$\forall 1 \leq i \leq n-2, \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \text{Cov}(X_iX_{i+1}, X_{i+1}X_{i+2}) = \mathbb{E}(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$\text{Var}(Y) = (n-1)\frac{3}{16} + 2(n-2)\frac{1}{16} = o(n)$$

ניזכר באי-שוויון מרקוב 21.3 ונגדיר אי-שוויון חדש

**משפט 24.5 (אי-שוויון צ'בישב)** נניח ש- $X$  משתנה מקרי בעל שונות (ולכן בעל תוחלת), אז

$$\forall \lambda > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}$$

הוכחה. נשים לב ש- $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda\} = \{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \lambda^2\}$ .

נגדיר  $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$  ואז  $0 \leq Y$  וכן  $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \text{Var}(X)$  ולכן מ-21.3

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda^2) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}$$

□

**דוגמה 24.2** מטילים מטבע הוגן  $10^6$  פעמים.  $X$  מספר העצים ואנו רוצים לדעת מה ההסתברות ש- $495000 < X < 505000$ . אנו יודעים ש- $X \sim \text{Bin}(10^6, \frac{1}{2})$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(495000 < X < 505000) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 495000 \vee X \geq 505000) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|X - 500000| \geq 5000) \\ &\geq \frac{\text{Var}(X)}{5000^2} \end{aligned}$$

אנו גם יודעים שמתקיים

$$X = \sum_{i=1}^{10^6} X_i \implies \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{10^6} \text{Var}(X_i) = 10^6 \cdot \frac{1}{4}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(|X - 500000| \geq 5000) \leq \frac{\text{Var}(X)}{5000^2} = \frac{10^6 \cdot \frac{1}{4}}{5000^2} = \frac{1}{100}$$

ולכן ההסתברות הזאת גדולה מ-0.99, זאת אומרת שמצאנו חסם מאוד טוב למספר ההטלות שקיבלו עץ באופן יחסי.

**דוגמה 24.3** אם נחזור לדוגמה איתה פתחנו את ההרצאה, אז נוכל לקבוע

$$\text{Var}(Y_n) < 100n \quad \mathbb{E}(Y_n) = \frac{n-1}{4}$$

אז

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\frac{n-1}{4}} - 1\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\frac{Y_n}{\frac{n-1}{4}}\right)}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}(Y_n)}{\epsilon^2\left(\frac{n-1}{4}\right)^2} \leq \frac{o(n)}{\frac{\epsilon^2}{16}(n-1)^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

משפט 24.6 (החוק החלש של המספרים הגדולים) תהי  $X_1, X_2, \dots$  סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים שווי התפלגות ובעלי תוחלת  $\mu$ . אם  $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ , אז לכל  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הוכחה. נוכיח בהנחת קיום שונות, כאשר ניתן להוכיח גם ללא הנחה זו.

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = \mu$$

ולכן

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(Y_n)}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i)}{n^2 \epsilon^2} = \frac{n \text{Var}(X_1)}{n^2 \epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

### 25.1 בעיית אספן הקופונים

**תרגיל 25.1** (אספן הקופונים) יהי אספן קופונים אשר מקבל כל יום קופון כלשהו מבין מספר קופונים אפשריים, מה החסם שמעיד שהאספן השיג את כל הקופונים?

**פתרון** נגדיר  $X_1, \dots, X_m$  משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים אחיד  $U([n])$ , כלומר  $m$  מספר סוגי הקופונים ו- $n$  מספר השליפות, ואנו רוצים לחסום את  $\mathbb{P}(\forall k \in [n], \exists i \in [m], X_i = k)$ . נבחן את המאורע המשלים,  $\mathbb{P}(\exists k \in [n], \forall i \in [m], X_i \neq k) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k)$  כאשר האיחוד איננו זר ו- $A_k = \{i \in [m], X_i \neq k\}$ , אפשר לחסום זאת עם חסם האיחוד,

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n (1 - \frac{1}{n})^m = n(1 - \frac{1}{n})^m$$

אנו רוצים להבין מתי הביטוי שהתקבל שואף ל-0, נשים לב שידוע כי  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$ , ולכן

$$n(1 - \frac{1}{n})^m \leq n(e^{-\frac{1}{n}})^m = ne^{-\frac{m}{n}}$$

אז אם  $m = \lceil cn \log n \rceil$  ו- $c > 1$  אז

$$ne^{-\frac{m}{n}} = ne^{-c \log n} = nn^{-c} = n^{1-c} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

נבחין כי חסם האיחוד הוא מקרה פרטי של אי-שוויון מרקוב. נעבור לחישוב של תוחלת ושונות של כמה קופונים האספן לא השיג, נסמן ב- $Y$  את מספר הקופונים החסרים, וכן  $Y = \sum_{k=1}^n Y_k$  כאשר  $Y_k = 1_{A_k}$ . מהחישובים שעשינו עד כה נוכל להסיק

$$\mathbb{E}(Y) = n(1 - \frac{1}{n})^m$$

שכן מאי-שוויון מרקוב  $\mathbb{P}(Y \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{1}$ . נראה שבהצבה של  $m$  שקטן ממה שמצאנו (יחד עם  $c < 1$ ) חסמנו מלמעלה את  $\mathbb{P}(Y = 0)$ . נעבור לחישוב השונות של  $Y$ ,

$$\text{Var}(Y_k) = (1 - \frac{1}{n})^m (1 - (1 - \frac{1}{n})^m) \leq (1 - \frac{1}{n})^m = \mathbb{E}(Y_k)$$

וכן

$$\begin{aligned} k \leq l, \text{Cov}(Y_k, Y_l) &= \mathbb{E}(Y_k \cdot Y_l) - \mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(Y_l) \\ &= (1 - \frac{2}{n})^m - (1 - \frac{1}{n})^{2m} \\ &= (1 - \frac{2}{n})^m - ((1 - \frac{1}{n})^2)^m \\ &= (1 - \frac{2}{n})^m - ((1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})^2)^m \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

ולכן  $\text{Var}(Y) \leq n(1 - \frac{1}{n})^m = \mathbb{E}(Y)$  (מחקנו את האיברים השליליים) ובהתאם

$$\frac{\text{Var}(Y)}{(\mathbb{E}(Y))^2} \leq \frac{1}{\mathbb{E}(Y)}$$

נשאר למצוא מתי  $\mathbb{E}(Y) \rightarrow \infty$ , עבור  $m = cn \log n$  כאשר  $c > 1$  נובע

$$\log(n(1 - \frac{1}{n})^m) = \log(n) + m \log(1 - \frac{1}{n}) = \log(n) + cn \log(1 - \frac{1}{n}) \rightarrow \infty$$

כאשר את המקרה  $c = 1$  אין לנו היכולת להראות.

### 25.2 בין הסתברות ללינארית

**טענה 25.1**  $X$  משתנה מקרי בעל שונות ו- $f(a) = \mathbb{E}((X - a)^2)$ , אז  $f$  מקבלת מינימום ב- $a = \mathbb{E}(X)$ .

הוכחה.

$$f(a) = \mathbb{E}((X - a)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2aX + a^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2a\mathbb{E}(X) + a^2$$

ולכן

$$f'(a) = -2\mathbb{E}(X) + 2a$$

ונובע ש- $f'(\mathbb{E}(X)) = 0$ .

□

אנו נתקלים בקושי של הקשר בין משתנים מקריים, תוחלת ושונות עם אלגברה לינארית.

**הגדרה 25.2** (קבוצת כל המשתנים המקריים) נגדיר את  $L_2$  להיות קבוצת כל המשתנים המקריים (במרחב הסתברות כלשהו) בעלי שונות, כאשר אנו מזהים משתנים מקריים ששווים כמעט תמיד.

**טענה 25.3**  $L_2$  הוא מרחב מכפחה פנימית עם  $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ .

לפני שניגש להוכחה נבחן דוגמה שתבהיר לנו את הטענה.

**דוגמה 25.1** נגדיר  $\Omega = [n]$  עם הסתברות אחידה, אז אם  $X$  משתנה מקרי אז  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , כלומר  $L_2 = \mathbb{R}^\Omega$ . מתקיים

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega) Y(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} X(k) Y(k)$$

וזו אכן מכפלה פנימית.

נעבור להוכחה.

**הוכחה.** מהגדרת התוחלת של  $\mathbb{E}(XY)$  קל להוכיח כי  $\langle aX, Y \rangle = a\langle X, Y \rangle$  וכן ש- $\langle X+Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle$ , ואף  $\mathbb{E}(X^2) = \|X\|^2$ .  
 $\langle X, X \rangle = \mathbb{E}(X^2) = \text{Var}(X) + \mathbb{E}(X)^2$  ו- $\langle X, Y \rangle = \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$  אז  $\mathbb{E}(X) = 0$  אם ומצטמצמים לתת-מרחב של המשתנים המקריים של  $\mathbb{E}(X) = 0$ .  
 נשים לב כי הפעולה של התוחלת היא פונקציה ולכן  $\mathbb{E} : L_2 \rightarrow \mathbb{R}$  לינארית ונחשוב על  $\mathbb{R}$  כ- $K$  כאשר  $K$  כל המשתנים המקריים הקבועים. נזהה את התוחלת על-ידי הטלה אורתוגונלית. כלומר  $\mathbb{E}(X)$  אורתוגונלי ל- $X - \mathbb{E}(X)$  וזה ברור כי  $\langle X - \mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X) \rangle = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))\mathbb{E}(X)) = 0$ .  
 את ההוכחה הפורמלית נעשה עם משפט קושי-שוורץ. לכל  $X, Y \in L_2$ , נראה

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

נגדיר

$$\bar{X} = \frac{X}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2)}}, \quad \bar{Y} = \frac{Y}{\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}}$$

ואז  $\mathbb{E}(\bar{X}^2) = \mathbb{E}(\bar{Y}^2) = 1$ . ניזכר שאם  $X, Y$  אי-שלייליים אז  $0 \leq XY \leq \frac{X^2+Y^2}{2}$  ונניח שהמשתנים המקריים שלנו אי-שלייליים. אז

$$\mathbb{E}(\bar{X}\bar{Y}) \leq \mathbb{E}\left(\frac{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(\bar{X}^2) + \mathbb{E}(\bar{Y}^2)) = 1$$

□

## הגדרות ומשפטים

4	הגדרה 1.1 (מרחב מדגם) . . . . .
5	הגדרה 1.2 (פונקציית הסתברות נקודתית) . . . . .
5	הגדרה 1.3 (תומך) . . . . .
5	הגדרה 1.4 (מאורע) . . . . .
5	הגדרה 1.5 (פונקציית הסתברות) . . . . .
7	הגדרה 2.1 (מרחב הסתברות) . . . . .
9	הגדרה 3.1 (סכום קבוצת בת־מניה) . . . . .
9	הגדרה 3.2 (פונקציית הסתברות מתאימה לנקודתית) . . . . .
9	הגדרה 3.4 (מרחב הסתברות בדיד) . . . . .
9	משפט 3.6 (תכונות פונקציית הסתברות) . . . . .
10	משפט 3.7 (תנאים שקולים לפונקציית הסתברות בדידה) . . . . .
11	הגדרה 4.1 (מרחב הסתברות אחיד) . . . . .
11	הגדרה 4.3 (מרחב מכפלת הסתברויות) . . . . .
11	הגדרה 4.6 (מאורע שוליים ומאורע מכפלה) . . . . .
12	משפט 4.9 (חסם האיחוד) . . . . .
12	משפט 4.10 (אי־שוויון בול) . . . . .
14	טענה 5.1 (נוסחת ההסתברות השלמה) . . . . .
14	טענה 5.2 (חסם האיחוד הבן־מניה) . . . . .
16	הגדרה 6.1 (סדרת מאורעות עולה) . . . . .
16	משפט 6.3 (משפט רציפות פונקציית ההסתברות) . . . . .
16	הגדרה 6.4 (סדרת מאורעות יורדת) . . . . .
16	טענה 6.6 (חסם האיחוד הבן־מניה) . . . . .
17	משפט 6.8 (הכלה והפרדה לשלושה מאורעות) . . . . .
17	משפט 6.9 (הכלה והפרדה ל־ $n$ מאורעות) . . . . .
19	הגדרה 7.1 (הסתברות מותנית) . . . . .
23	הגדרה 9.1 (מאורעות בלתי־לויים) . . . . .
23	הגדרה 9.3 (אי־תלות בזוגות) . . . . .
23	הגדרה 9.4 (קבוצה בלתי־תלויה) . . . . .
24	הגדרה 9.6 (אי־תלות קבוצת מאורעות) . . . . .
25	הגדרה 10.1 (שקולה לאי־תלות) . . . . .
25	הגדרה 10.2 (קבוצה בת־מניה בלתי־תלויה) . . . . .
25	הגדרה 10.4 (משתנה מקרי) . . . . .
26	הגדרה 10.6 (משתנה מקרי מושרה ממאורע) . . . . .
26	טענה 10.7 (תכונות של משתנים מקריים מושרים) . . . . .
26	הגדרה 10.8 (מאורע מושרה ממשתנה מקרי) . . . . .
26	הגדרה 10.9 (פונקציית הסתברות מושרית ממשתנה מקרי) . . . . .
29	הגדרה 12.1 (משתנה מקרי בדיד) . . . . .
29	הגדרה 12.2 (התפלגות ברנולי) . . . . .
29	הגדרה 12.3 (משתנה מקרי קבוע) . . . . .
29	הגדרה 12.4 (משתנה מקרי אחיד) . . . . .
29	הגדרה 12.5 (התפלגות גאומטרית) . . . . .
29	הגדרה 12.6 (התפלגות בינומית) . . . . .

30	הגדרה 12.7 (התפלגות פואסונית) . . . . .
30	הגדרה 12.8 (הסתברות כמעט תמיד) . . . . .
30	הגדרה 12.9 (משתנים שווים שמעט תמיד) . . . . .
31	הגדרה 12.11 (משתנים מקריים שווי התפלגות) . . . . .
32	הגדרה 13.2 (וקטור מקרי) . . . . .
33	הגדרה 13.3 (התפלגות משותפת והתפלגויות שוליות) . . . . .
33	הגדרה 13.4 (התפלגות משותפת בדידה) . . . . .
34	הגדרה 14.1 (התניה במשתנים מקריים בדידים) . . . . .
34	הגדרה 14.2 (אי־תלות במשתנים מקריים בדידים) . . . . .
36	הגדרה 15.1 (התפלגות משתנה מקרי בהינתן מאורע) . . . . .
36	הגדרה 15.3 (אי־תלות משתנים מקריים) . . . . .
37	הגדרה 15.8 (קבוצת משתנים מקריים בלתי־תלויה) . . . . .
38	הגדרה 16.3 (קבוצה בת־מניה של משתנים מקריים בלתי־תלויים) . . . . .
42	משפט 18.2 (תכונת חוסר הזיכרון) . . . . .
45	הגדרה 19.1 (תוחלת במשתנים מקריים בדידים) . . . . .
46	טענה 19.4 (תכונות של תוחלת) . . . . .
47	הגדרה 19.6 (תוחלת מותנית) . . . . .
47	טענה 19.9 (נוסחת התוחלת השלמה) . . . . .
50	טענה 21.1 (נוסחת התוחלת השלמה הבת־מניה) . . . . .
50	טענה 21.2 (תוחלת מכפלת משתנים מקריים בלתי־תלויים) . . . . .
50	משפט 21.3 (אי־שוויון מרקוב) . . . . .
52	טענה 22.1 (נוסחת הזנב לתוחלת) . . . . .
52	הגדרה 22.2 (שונויות) . . . . .
52	הגדרה 22.3 (סטיית תקן) . . . . .
52	הגדרה 22.4 (הגדרה שקולה לשונויות) . . . . .
52	טענה 22.5 (תכונות של שונויות) . . . . .
53	הגדרה 22.6 (שונויות משותפת) . . . . .
57	הגדרה 24.2 (משתנים מקריים בלתי־מתואמים) . . . . .
57	טענה 24.3 (תכונות של שונויות משותפת) . . . . .
58	משפט 24.5 (אי־שוויון צ'בישב) . . . . .
59	משפט 24.6 (החוק החלש של המספרים הגדולים) . . . . .
61	הגדרה 25.2 (קבוצת כל המשתנים המקריים) . . . . .