

פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

2 באוגוסט 2023



שאלה 1

לכל $x \in [0, 1]$ נגדיר את $f_n(x)$ בצורה הבאה:

$$f_1(x) = x, f_{n+1}(x) = f_n(x) - f_n^3(x)$$

נוכיח שהסדרה $(f_n(x))$ מתכנסת לכל $x \in [0, 1]$ ונבדוק אם היא מתכנסת במידה שווה בקטע זה.

הוכחה. יהי $x_0 \in [0, 1]$, ונגדיר סדרת מספרים (a_n) על-ידי:

$$a_1 = f_1(x_0), a_n = f_n(x_0)$$

אז כמובן שנובע גם

$$a_{n+1} = f_{n+1}(x_0) = f_n(x_0) - f_n^3(x_0) = a_n - a_n^3$$

עתה נוכיח באינדוקציה כי $0 \leq a_n \leq a$ לכל n :

בסיס האינדוקציה: נתון כי $a_1 = f_1(x_0) = x_0$ והטענה מתקיימת.

מהלך האינדוקציה: נניח כי $0 \leq a_n \leq 1$.

מתקיים כמובן גם $0 \leq a_n^3 \leq a_n$, ואחרי העברת אגפים $0 \leq a_n - a_n^3 \leq a_n \leq 1$ והשלמנו את מהלך האינדוקציה.

עוד נראה כי אילו $a_n > 0$ אז כמובן שגם $a_n - a_n^3 < a_n$. במהלך ההוכחה מצאנו כי הסדרה מונוטונית במובן הרחב, ואז ראינו כי היא גם מונוטונית

או שווה לאפס, לכן a_n סדרה מונוטונית יורדת וחסומה, ולכן מתכנסת, דהינו $(f_n(x_0))$ מתכנסת.

מצאנו כי הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 0$.

כמובן שמהגדרת הגבול הזה נובע כי לכל $\epsilon > 0$ שנבחר כמעט לכל n מתקיים

$$f_n(x_0) = |0 - f_n(x_0)| = |f(x_0) - f_n(x_0)| < \epsilon$$

מש"ל

ולכן על-פי הגדרה הסדרה (f_n) מתכנסת לפונקציה $f(x)$ במידה שווה בתחום $[0, 1]$.

שאלה 2

נגדיר

$$f_n(x) = \frac{1}{\sin^2 x + (1 + x^2)^n}$$

תחילה נמצא את ערכיה של $f(x)$:

לכל $x \neq 0$ הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{\infty} = 0$ ומתקיים $f(x) = 0$.
כאשר $x = 0$ אז הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_n(x) = \frac{1}{1}$ ולכן $f(0) = 1$.
נבדוק את התכנסות סדרת הפונקציות $(f_n(x))$ במידה שווה בקטעים הנתונים.

סעיף א'

נבדוק את ההתכנסות במידה שווה בקטע \mathbb{R} .

על-פי הגדרת $f_n(x)$ נובע כי היא רציפה לכל n , נניח בשלילה רציפות במידה שווה ונקבל ממשפט 6.4 כי $f(x)$ רציפה בכל \mathbb{R} , בסתירה לאי-רציפותה ב- $x = 0$.

לכן ההתכנסות היא לא במידה שווה ב- \mathbb{R} .

סעיף ב'

נבדוק את התכנסותה במידה שווה בקטע $(0, 1)$.

בקטע זה הפונקציה $f_n(x)$ היא חיובית מונוטונית יורדת, ידוע כי לכל x בתחום $f(x) = 0$ ולכן $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$.
נבחן את $c_n = \sup\{f_n(x) : x \in (0, 1)\}$. אנו יודעים כי לכל $x \in (0, 1)$ מתקיים $f_n(x) < 1$ וכי לכל $x < 1$ קיים x_0 כך ש- $f_n(x_0) > x$.
לכן מתקיים $c_n = 1$ לכל n ובהתאם $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ ועל-כן מלמה 6.3 נובע כי סדרת הפונקציות לא מתכנסת במידה שווה בקטע.

סעיף ג'

נבדוק את התכנסותה במידה שווה בקטע $[\frac{1}{2023}, \infty)$.

מסעיף ב' אנו יודעים כי הפונקציה $f_n(x)$ היא מונוטונית יורדת בתחום, ולכן היא מקבלת מקסימום בקטע בנקודה $x = \frac{1}{2023}$.
בהתאם גם $c_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [\frac{1}{2023}, \infty)\} = f_n(\frac{1}{2023})$.
הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{\infty} = 0$ כמובן ובהתאם ללמה 6.3 סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה בקטע.

שאלה 3

נבדוק התכנסות במידה שווה בתחום עבור הטורים הבאים:

סעיף א'

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}$$

בתחום התכנסותו.

נראה כי

$$u(x) = x^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

נבדוק את מנת הטור:

$$\left| \frac{e^{-(n+1)x}}{e^{-nx}} \right| = \left| e^{-(n+1)x} \cdot e^{nx} \right| = |e^{-x}| = e^{-x}$$

נוכל כמובן למצוא מספר q המקיים $e^{-x} \leq q < 1$ אם ורק אם $x > 0$ ובהתאם הטור מתכנס על-פי מבחן דאלמבר לכל $x > 0$.
באופן דומה נקבל ממבחן דאלמבר כי לכל $x \leq 0$ הטור מתבדר.

נבחין כי כאשר הטור מתכנס, הוא מהווה חיבור של פונקציות רציפות ולכן רציף גם הוא, ולכן ממשפט דיני לטורים נובע כי $u(x)$ מתכנסת במידה שווה בתחום התכנסותה.

סעיף ב'

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 9^n}$$

בתחום התכנסותו.

ממבחן לייבניץ נובע כי אם $\frac{x^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 9^n}$ היא סדרה אפסה אז הטור מתכנס. נעיר כי הסדרה חיובית ולכן זהו התנאי היחיד ההכרחי.
נחשב את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 9^n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{x^2}{9} \right)^n$$

ולכן הגבול מתכנס לאפס כאשר $\frac{x^2}{9} \leq 1$ ומתבדר אחרת, דהינו הטור מתכנס כאשר $-3 \leq x \leq 3$.
ממבחן המנה של דאלמבר נובע כי עבור כל x שאיננו בתחום זה הטור מתבדר, ומצאנו כי הוא מתכנס רק כאשר $x \in [-3, 3]$.
נבדוק את התכנסותו במידה שווה בתחום זה.

מהסעיף השני והשלישי של מבחן לייבניץ אנו מסיקים כי עבור $m > n > N$ כא-טבעי כלשהו:

$$|S_m - S_n| = |S_m - S - S_n + S| \stackrel{(1)}{\leq} |S_m - S| + |S_n - S| \stackrel{(2)}{\leq} a_{n+1} + a_{m+1} \stackrel{(3)}{\leq} 2a_{N+1}$$

(1) אי שוויון המשולש

(2) ממשפט לייבניץ

(3) סדרה מונוטונית יורדת

לכל $\epsilon > 0$ נוכל למצוא N כך ש- $2a_{N+1} < \epsilon$ בשל אפסות הסדרה,

ולכן ממבחן קושי להתכנסות במידה שווה נובע כי $u(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-3, 3]$.

סעיף ג'

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 (1-x^2)^{n-1}$$

בקטע $[-1, 1]$.

תחילה נראה כי כאשר $x = 0$ גם $u(x) = 0$, ובאופן דומה כאשר $x = \pm 1$ אז $1 - x^2 = 0$ ומתקבל באופן דומה כי $u(x) = 0$.

נניח עתה כי $x \in (-1, 1)$ ונקבע $t = 1 - x^2$:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 (1-x^2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-t)t^{n-1} = (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

זהו כמובן סכום סדרה הנדסית, נבחין כי $x^2 < 1$ ולכן גם $0 < t < 1$ ולכן

$$(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n = (1-t) \frac{1}{1-t} = 1$$

דהינו לכל $x \in (-1, 0)$, $x \in (0, 1)$ מתקיים $u(x) = 1$.

כמובן אם כך שבנקודה $x = 0$ הפונקציה $u(x)$ איננה רציפה, אלא מקבלת נקודת אי־רציפות סליקה, וממשפט 6.4* נסיק כי $u(x)$ לא רציפה במידה

שווה בקטע $[-1, 1]$.

שאלה 4

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & x > -1, x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

נתון

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt$$

נגדיר גם

נפתח את $f(x)$ לטור חזקות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ונמצא את תחום ההתכנסות של הטור.