פתרון ממ"ן 17 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

9 במאי 2023

שאלה 1

תהי f פונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}$ המקבלת מקסימום מקומי בנקודה x_0.

נוכיח כי אם אין ל־f נקודות קיצון נוספות אז f מקבלת מקסימום בנקודה x_0.

הוכחה. ידוע כי x_0 נקודת מקסימום מקומי של x_0, לכן קיימת סביבה של x_0 בה ערך הפונקציה הוא מקסימלי.

נסמן תחום זה כערכים $|x - x_0| \leq \delta$.

זהו כמובן תחום סגור ולכן על־פי המשפט השני של ויירשטראס לפונקציה יש נקודת מקסימום ומינימום. כמובן שנקודת המקסימום בקטע זה מתלכדת עם המקסימום המקומי. אנו יודעים כי לא קיימות נקודות קיצון נוספות, דהינו לכל δ לא קיים בתחום נקודת קיצון נוספת ובהתאם x_0 נשארת נקודת הקיצון ולכן המקסימום.

נניח בשלילה עתה כי קיים x_1 כך ש־$f(x_0) < f(x_1)$.

נבחר δ כך שמתקיים $|x_0 - x_1| \leq \delta$, אז בתחום זה $f(x_0) > f(x)$ לכל x, ובפרט גם $f(x_0) > f(x_1)$ בבתירה לטענה.

אז x_0 נקודת מקסימום של $f(x)$. **מש"ל**

שאלה 2

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). נניח כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך שמתקיים

$$(f(c)-f(a))(f(b)-f(c))<0$$

נוכיח כי קיימת נקודה $t\in(a,b)$ עבורה $f'(t)=0$.

הוכחה. מאי־השוויון נובע ישירות כי $f(a)<f(c)$ או $f(c)<f(b)$ בלבד.

ללא פגיעה בכלליות ההוכחה נוכל להניח כי אחד השוויונות מתקיימים, ועל־ידי היפוך תפקידי a,b להגיע למצב שהושמט.

נניח כי $f(a)<f(c)$ ולכן לא יתכן כי $f(c)<f(b)$, ואף לא יתכן כי $f(c)=f(b)$ כנביעה מאי־השוויון הנתון, לכן $f(c)<f(b)$.

מהמשפט השני של ויירשטראס נובע כי בתחום $[a,b]$ קיים מינימום ל־f, אך בשל $f(c)$ אנו יכולים להסיק כי הוא לא ב־a או ב־b. נגדיר t נקודת המינימום בקטע $[a,b]$ עבור f, ולכן ממשפט פרמה נובע כי $f'(t)=0$. **מש"ל**

שאלה 3

תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$ המקיימת $0 \leq f'(x) \leq 1$ לכל $x \in [0,1]$.

נוכיח כי קיימת נקודה $x_0 \in [0,1]$ כך שמתקיים

$$f'(x_0) = \frac{3x_0}{\sqrt{3x_0^2+6}}$$

הוכחה. נגדיר פונקציה $g(x) = \sqrt{3x^2+6}$.

$$g'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+6}}$$

נשים לב כי $g'(0) = 0$ וכי $g'(1) = 1$.

ל-$g'(x)$ יש פונקציה קדומה, ולכן ממשפט דארבו נובע כי אני ארנבת מדבר. **מש"ל**