פתרון מטלה 04 — תורת הקבוצות האקסיומטית, 80650

16 בדצמבר 2024

שאלה 1

נניח ZFC, ונניח גם κ מונה רגולרי לא בן־מניה, נבחין כי מהמטלה הקודמת נובע $H(k^+)$ הוא מודל של $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Power\ set}$.

יהי $p \in H(\kappa^+)$, נראה שקיים סל"ח $C \subseteq \kappa$ כך שלכל $\delta \in C$ קיים $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$p \in M$ וגם $M \cap \kappa = \delta$.

הוכחה. מצאנו בהרצאה כי קבוצת הנוסחות של תורת הקבוצות היא בת־מניה, נגדיר לכל נוסחה φ את פונקציית סקולם שלה f_φ שמצאנו שקיימת (שימוש בבחירה).

נבנה סדרה בת־מניה $\langle G_n \mid n < \omega \rangle$ של פונקציות סקולם סגורה להרכבה, נבחין כי היא אכן סגורה להרכבה כהוכחה באינדוקציה על מבנה הפסוק.

נגדיר $S(\alpha) = \{G_n(\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, p) \mid n < \omega, \gamma_0, \dots, \gamma_{m-1} < \alpha\}$ ונבחין כי לכל $\alpha < \kappa$ מתקיים $S(\gamma) \prec H(\kappa^+)$ ממשפט 6.3.

נבחין כי $|S(\alpha)| \le \omega \times |\alpha| \le \kappa$ ולכן גם $|S(\alpha) \cap \kappa| = |S(\alpha)|$, לכן נגדיר $R(\alpha) = S(\alpha) \cap \kappa$ עדיין מגדיר תת־מודלים אלמנטריים.

עוד נראה כי לכל $p \in R(\alpha)$ מהסגירות לנוסחות, ונגדיר.

לבסוף נגדיר $h(\alpha) = \sup R(\alpha)$ וגם $C = \operatorname{rng} h$, ונקבל ש־$\kappa = \sup C$ וכן ש־C סגורה, זאת ישירות מההגדרה, ולכן מצאנו כי זהו סל"ח המקיים את כל הנדרש. $\square$

שאלה 2

יהי $N = H(\kappa^+)$ ויהיו $M \prec N$ ויהיו $a_0, \dots, a_{n-1} \in H(\kappa^+)$.

נוכיח ש־$\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \in M$ אם ורק אם $\forall i < n, a_i \in M$.

נראה גם שטענה זו לא בהכרח תתקיים עבור קבוצה בת־מניה של איברים.

הוכחה. נניח ש־$a = \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \in M$. נבחן את $\varphi(x, y) = x \in y$, ידוע ש־$N \models \varphi(a_i, a)$, ולכן בפרט $\exists x, \varphi(x, a)$ ומהשיכון הנתון גם $M \models \exists x, \varphi(x, a)$, אבל בהתאם $N \models \varphi(x, a)$ ולכן $x = a_i$ עבור $0 \le i < n$, לכן $M \models a_i \in a$. נוכל להמשיך עתה בתהליך זה ולבנות n נוסחות ובכך נשלים $M \models \forall i, a_i \in a$.

נבחין כי תהליך זה בדיוק עלול להיכשל במקרים שאינם סופיים. למעשה, אנו יודעים כי קיים מודל $|M| = \omega$ עבור $H(\kappa^+)$ ולכן אם נבחר את ω_1 ונגדיר עם סעיף א' שהוא מוכל ב־M, נקבל סתירה ל־$|M| = \omega$. $\square$

שאלה 3

תהי $S \subseteq \kappa$, ונראה ש־S קבוצת שבת אם ורק אם לכל $p \in H(\kappa^+)$ קיים תת־מבנה אלמנטרי $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$p \in M$ וגם $M \cap \kappa \in S$.

הוכחה. נניח ש־S קבוצת שבת ויהי $p \in H(\kappa^+)$.
עוד נגדיר C הסל"ח שקיים עבור p לפי שאלה 1, ויהי $\delta \in C \cap S$, אז קיים $M \prec H(\kappa^+)$ עבורו $p \in M$ וגם $M \cap \kappa = \delta \in S$.

נניח עתה כי לכל $p \in H(\kappa^+)$ קיים תת־מבנה אלמנטרי $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$p \in M$ וגם $M \cap \kappa \in S$ ונראה ש־S קבוצת שבת.
יהי סל"ח $C \subseteq \kappa$ ויהי $\alpha \in C$ סודר גבולי שסגור ב־C. אז קיים בהתאם מודל $\alpha \in M \prec H(\kappa^+)$, נבנה סדרה לא חסומה ב־$M$ של α על־ידי הגדרת נוסחות מהצורה $\varphi(x, y) = x < y$.
שימוש בפונקציות סקולם מתאימות ושימוש בתכונות ב־$H(\kappa^+)$ של α יניב לנו סדרה עולה לא חסומה ב־M של סודרים, ובהתאם נוכל להסיק $M \cap p \cap C = M \cap C$ מקיים סגירות ולכן $M \cap \kappa \in C$.
מצד שני $M \cap \kappa \in S$ ולכן בפרט $S \cap C \neq \emptyset$ ומצאנו כי S אכן קבוצת שבת.

□

שאלה 4

יהי $H(\kappa^+) \prec M$ כך ש־$M \cap \kappa = \delta \in \kappa$.
נוכיח שלכל $C \in M$ סל"ח ב־κ, מתקיים $\delta \in C$.

הוכחה. נבחין כי $M \cap C = M \cap C \cap \kappa = C \cap \delta$ לכל $C \subseteq \kappa$.
נניח ש־$\varphi(C) = \forall x \in \kappa, \exists y \in C, x < y < \kappa$ תכונת חוסר החסימות של סל"חים, נבחין כי $\varphi^M = \forall x \in \delta, \exists y \in C \cap \delta x < y < \delta$.
נניח ש־$C \in M$ סל"ח כזה, אז $H(\kappa^+) \models \varphi(C)$ ובהתאם גם $M \models \varphi$.
בהתאם נקבל ש־$\sup(\delta \cap C) = \delta$ ולכן $\delta \in C$. $\square$

שאלה 5

תהי $S \subseteq \kappa$ קבוצת שבת ותהי $f : S \to \kappa$ פונקציה דוחסת.

יהי $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$M \cap \kappa = \delta \in S$ ו־$\{f, S\} \in M$.

נגדיר $\gamma = f(\delta)$, נוכיח ש־$X = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma\}$ היא קבוצת שבת ותת־קבוצה של κ.

נסיק שהלמה של פודור חלה.

הוכחה. משאלה 2 נובע ש־$f, S \in M$.

בנוסף נבחין כי $\gamma = f(\delta) < \delta$ ולכן $\gamma \in \delta$, אז $\gamma \in M$.

נגדיר $\varphi(x)$ הנוסחה שגורסת ש־x סל"ח.

מתקיים $H(\kappa^+) \models \forall C \in M(\varphi(C) \implies \exists \beta, C \cap S = \beta, f(\beta) = \gamma)$ לפי תוצאת טענת שאלה 4.

$H(\kappa^+) \prec M$ ולכן $M \models \forall C(\varphi(C) \implies \exists \beta, C \cap S = \beta, f(\beta) = \gamma)$.

אז מהגדרה גם $M \models \forall C, \varphi(C) \implies X \cap S \neq \emptyset$.

לבסוף שוב מ־$M \prec H(\kappa^+)$ נובע $H(\kappa^+) \models \forall C, \varphi(C) \implies X \cap S \neq \emptyset$, דהינו $X \subseteq \kappa$ קבוצת שבת. $\square$