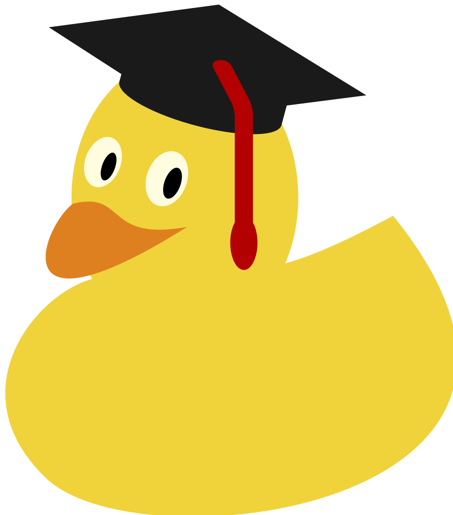
# פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

2 באוגוסט 2023



## שאלה 1

נחשב את האינטגרלים הבאים

### סעיף א'

#### דרך א'

$$\int x^3(1-3x^2)^{10}dx$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t=3x^2, dt=6x\,dx$:

$$\int x^3(1-3x^2)^{10}dx = \int \frac{1}{18}t(1-t)^{10}dt = \frac{1}{18}\int t(t-1)^{10}dt$$

נשתמש שוב בכלל ההצבה עבור $u=t-1, du=dt$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{18}\int t(t-1)^{10}dt &= \frac{1}{18}\int (u+1)u^{10}du = \frac{1}{18}(\frac{1}{12}u^{12}+\frac{1}{11}u^{11})+C\\ &= \frac{1}{216}(t-1)^{12}+\frac{1}{198}(t-1)^{11}+C = \frac{1}{216}(t-1)^{12}+\frac{1}{198}(t-1)^{11}+C\\ &= \frac{1}{216}(3x^2-1)^{12}+\frac{1}{198}(3x^2-1)^{11}+C\end{aligned}$$

ומצאנו כי

$$\int x^3(1-3x^2)^{10}dx = \frac{1}{216}(3x^2-1)^{12}+\frac{1}{198}(3x^2-1)^{11}+C$$

#### דרך ב'

דרך נוספת אפשרית שאשמח לקבל עליה ביקורת.

$$\begin{aligned}\int x^3(1-3x^2)^{10}dx &= \int x^3\left(\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-3x^2)^k\right)dx && \text{פירוק בינומי}\\ &= \int\left(\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-3)^k x^{2k+3}\right)dx && \text{כינוס מקדמים}\\ &= C+\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\frac{1}{2k+4}(-3)^k x^{2k+4} && \text{נחשב איבר איבר}\\ &= C+x^4\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\frac{(-3)^k}{2k+4}x^{2k}\end{aligned}$$

### סעיף ב'

$$\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

נשים לב כי לכל $x$ בתחום ההגדרה של הפונקציה מתקיים $x=\sin\arcsin x$ ולכן

$$\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin\arcsin(x)e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t = \arcsin x, dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int \frac{\sin \arcsin(x) e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sin(t) e^t dt$$

נשתמש באינטגרציה בחלקים עבור $u' = \sin t, v = e^t$:

$$\int \sin(t) e^t dt = -\cos(t) e^t + \int \cos(t) e^t dt$$

ושוב אינטגרציה בחלקים עבור $u' = \cos t, v = e^t$:

$$-\cos(t)e^t + \int \cos(t)e^t dt = -\cos(t)e^t + \sin(x)e^t - \int \sin(t)e^t dt = \int \sin(t)e^t dt$$

ומהשוויון נובע

$$\int \sin(t)e^t = \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t))e^t + C = \frac{1}{2}(\sin(\arcsin x) - \cos(\arcsin x))e^{\arcsin x} + C$$

ועל־פי זהויות טריגונומטריות

$$\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2})e^{\arcsin x} + C$$

### סעיף ג'

אינטגרציה בחלקים עבור $u' = e^{2x}, v = (x-1)^2$

אינטגרציה בחלקים עבור $u' = e^{2x}, v = x$

$$\begin{aligned}
\int (x-1)^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{2}e^{2x}(x-1)^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x}(2x-2)dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}(x-1)^2 + \int e^{2x}dx - \int e^{2x}xdx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}(x-1)^2 + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}x + \int \frac{1}{2}e^{2x}dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - 3x + 2) + \frac{1}{4}e^{2x} + C \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - 3x + 2\frac{1}{2}) + C
\end{aligned}$$

### סעיף ד'

$$\int \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}} dx$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t = x + 2, dt + dx$

$$\int \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}} dx = \int \frac{4t-7}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt = 2\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt - 7\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt$$

נחשב את האינטגרלים המתקבלים בנפרד:

$$\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $u = t^2 + 1, du = 2t\,dt$:

$$\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} dt = \int \frac{du}{u^{3/2}} = \int u^{-3/2} du = -2u^{-1/2} = \frac{-2}{\sqrt{t^2+1}}$$

עבור האינטגרל

$$\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t=\tan u, dt=\frac{du}{\cos^2 u}$ ונקבל

$$\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt=\int \frac{1}{\cos^2 u\sqrt{(\tan^2 u+1)^3}}du=\int \frac{1}{\cos^2 u\sqrt{(\cos^{-2})^3}}du=\sin u=\sin\arctan t+C=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+C$$

ולכן עבור האינטגרל המקורי נקבל

$$2\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt-7\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt=2\frac{-2}{\sqrt{t^2+1}}-7\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{-7t-4}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{-7x-18}{\sqrt{x^2+4x+5}}+C$$

נציב ונחשב

$$\int_{-2}^{-1}\frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}}dx=\left.\frac{-7x-18}{\sqrt{x^2+4x+5}}\right|_{-2}^{-1}=\frac{-7(-1)-18}{\sqrt{(-1)^2+4(-1)+5}}-\frac{-7(-2)-18}{\sqrt{(-2)^2+4(-2)+5}}=4-\frac{11}{\sqrt{2}}$$

### סעיף ה'

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2}e^{|x|}(1+x^3+\sin x)dx=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}e^{|x|}(x^3+\sin x)dx+\int_{-\ln 2}^{\ln 2}e^{|x|}dx$$

נגדיר

$$f(x)=e^{|x|}(1+\sin x)$$

מחישוב עולה כי

$$f(-x)=e^{|-x|}(-x^3-\sin x)=-f(x)$$

ולכן

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)dx=\int_{-\ln 2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\ln 2}f(x)dx=-\int_{0}^{\ln 2}f(x)dx+\int_{0}^{\ln 2}f(x)dx=0$$

עוד נראה כי

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2}e^{|x|}dx=\int_{-\ln 2}^{0}e^{|x|}dx+\int_{0}^{\ln 2}e^{|x|}dx=\int_{-\ln 2}^{0}e^{-x}dx+\int_{0}^{\ln 2}e^{x}dx=2\int_{0}^{\ln 2}e^{x}dx=2(e^{\ln 2}-1)=2$$

ולכן

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2}e^{|x|}(1+x^3+\sin x)dx=2$$

## שאלה 2

עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים נקבע אם הוא מתכנס בהחלט, בתנאי, או כלל לא.

### סעיף א'

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$$

ידוע כי $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ולכן

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx + \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{x \to \infty} (2\sqrt{x} - 0) = \infty$$

אבל גם $\cos^2 x = \sin^2(x + \pi/2)$, לכן שני האינטגרלים המחוברים מתבדרים יחד או מתכנסים יחד, ואנו יודעים כי חיבורם מתבדר, ולכן גם

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx = \infty$$

דהינו האינטגרל מתבדר.

### סעיף ב'

$$\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)(\ln(x+1))^3} dx$$

נשים לב כי

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)(\ln(x+1))^3} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{(x^2 - 1)\ln^3 2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1/x}{2x \ln^3 2} = \frac{1}{2 \ln^3 2}$$

(1) רציפות

ולכן כל אינטגרל מהצורה

$$\int_1^k \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)(\ln(x+1))^3} dx$$

כאשר $k > 1$ הוא אינטגרל מתכנס, שכן זהו אינטגרל מערכים סופיים.

נגדיר $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ונראה כי הגבול

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)(\ln(x+1))^3} / g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x(x^2 - 1)(\ln(x+1))^3} = 0$$

הוא גבול מתכנס לאפס, ולכן ממשפט 3.16* נובע כי האינטגרל הנתון מתכנס אם ורק אם האינטגרל של $g(x)$ מתכנס.

נחשב על־פי אינטגרציה בחלקים

$$\int_k^\infty g(x) = \frac{-\ln x}{x} - \int_k^\infty \frac{-1}{x^2} = \left. \frac{-\ln x - 1}{x^2} \right|_k^\infty = 0 - \frac{-\ln k - 1}{k^2}$$

מצאנו כי האינטגרל מתכנס בהתאם למשפט ההשוואה הגבולי.

נשים לב כי הפונקציה הנתונה חיובית לכל ערך בתחום, ולכן האינטגרל מתכנס בהחלט.

### סעיף ג'

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\sin\left(2\sqrt{x}\right)dx$$

בתחום $x\in(0,1]$ מהזהות $t\geq \sin t$ והזהות על הגבול $\lim_{t\to 0}\sin t/t$ נובע כי $0<\sin(2\sqrt{x})/\sqrt{x}\leq 1$ לכל $x$ בתחום, ולכן

$$0<\frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\sin\left(2\sqrt{x}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt[4]{x}+1)\cdot 1=\frac{1}{x^{3/4}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

מלמה 3.2 נובעת התכנסות האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{3/4}}+\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

נשים לב כי כלל תנאי מבחן ההשוואה חלים ונובעת התכנסות האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\sin\left(2\sqrt{x}\right)dx$$

נגדיר

$$f(x)=\frac{1}{x^{3/4}}+\frac{1}{x^{1/4}},g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(2\sqrt{x})$$

מאינפי 1 אנו למדים כי הפונקציה $f(x)$ היא מונוטונית יורדת, ומחישוב עולה כי מתקיים הגבול $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.

נחשב את האינטגרל

$$\int_1^x g(t)dt$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $t=u^2,dt=2u\,du$ ונקבל כי

$$\int_1^x g(t)dt=\int_1^{\sqrt{x}}\frac{1}{u}\sin(2u)\cdot 2u\,du=\int_1^{\sqrt{x}}2\sin(2u)\,du=-\cos(2u)|_1^{\sqrt{x}}=-\cos(2\sqrt{x})+\cos(2)$$

מצאנו כי האינטגרל חסום לכל $x\geq 1$, ולכן הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ מקיימות את תנאי מבחן דיריכלה ונובעת התכנסות האינטגרל

$$\int_1^\infty f(x)g(x)\,dx=\int_1^\infty \frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\sin\left(2\sqrt{x}\right)dx$$

מאדיטיביות האינטגרל נובע כי שני האינטגרלים המתכנסים מקיימים

$$\int_0^1 \frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\sin\left(2\sqrt{x}\right)dx+\int_1^\infty \frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\sin\left(2\sqrt{x}\right)dx=\int_0^\infty \frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\sin\left(2\sqrt{x}\right)dx$$

ולכן האינטגרל מתכנס.

נשים לב כי

$$\int_1^\infty \left|\frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\sin\left(2\sqrt{x}\right)\right|dx=\int_1^\infty \frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\left|\sin\left(2\sqrt{x}\right)\right|dx$$

נבחין כי מתקיים בתחום

$$\frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\left|\sin\left(2\sqrt{x}\right)\right|\geq\frac{1}{\sqrt{x}}\left|\sin\left(2\sqrt{x}\right)\right|$$

ומדוגמה 3.12 נוכל להסיק את התבדרות האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\left|\sin\left(2\sqrt{x}\right)\right|dx$$

ולכן ממבחן השוואה נובע כי האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\left|\sin\left(2\sqrt{x}\right)\right|dx$$

לא מתכנס ובהתאם האינטגרל המקורי מתכנס בתנאי.

## שאלה 3

תהי פונקציה $f$ אינטגרבילית בקטע $[0,a]$ לכל $a>0$ ומתקיים $|f(x)|\le\sqrt{x}$ לכל $x\ge 0$.
נגדיר $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, ונוכיח כי האינטגרל המוגדר על־ידי

$$\int_0^\infty \frac{F(x)}{\pi+x^3}dx \tag{1}$$

מתכנס.

*הוכחה.* ידוע כי $|f(x)|\le\sqrt{x}$ לכל $x\ge 0$ ולכן ממבחן ההשוואה נובע אי השוויון

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|dt \le \int_0^x \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

נקבל גם

$$\frac{F(x)}{\pi+x^3} \le \frac{2\sqrt{x^3}}{3\pi+3x^3} < \frac{2\sqrt{x^3}}{3x^3} = \frac{2}{3\sqrt{x^3}} \tag{2}$$

מטענה 3.2 נובעת התכנסות האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{2}{3\sqrt{x^3}}dx$$

ולכן ממבחן ההשוואה נובעת התכנסות האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{F(x)}{\pi+x^3}dx$$

כמו־כן נבחן את האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{F(x)}{\pi+x^3}dx$$

זהו כמובן אינטגרל מסוים של פונקציה רציפה ולכן הוא מתכנס ובעל ערך סופי, ומתקיים

$$\int_1^\infty \frac{F(x)}{\pi+x^3}dx + \int_0^1 \frac{F(x)}{\pi+x^3}dx = \int_0^\infty \frac{F(x)}{\pi+x^3}dx$$

דהינו מצאנו כי האינטגרל $(1)$ מתכנס. **מש"ל**

## שאלה 4

### סעיף א'

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה וחיובית בקטע $[a,\infty)$.

נפריך את הטענה כי אם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז קיים $0<c<1$ כך שהאינטגרל

$$\int_a^\infty (f(x))^p dx$$

מתכנס לכל $c\le p\le 1$.

*הוכחה.* נגדיר

$$f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$$

מתקיים

$$\int f(x)dx=\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx$$

נבצע איטנגרציה בחלקים עבור $u'=\frac{1}{x}, v=\ln^{-2}x$:

$$\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx=\frac{1}{\ln x}-\int \ln(x)(-2)\ln^{-3}(x)\frac{1}{x}dx=\frac{1}{\ln x}+2\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx$$

ואחרי העברת אגפים נקבל

$$\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx=\int f(x)dx=-\frac{1}{\ln x}$$

ולכן גם

$$\int_e^\infty f(x)=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^\infty=1$$

עתה נבחן את $f^p(x)$ כאשר $0<p<1$.

נגדיר את הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x}$, כידוע

$$\int_e^\infty g(x)dx=\ln x|_e^\infty=\infty$$

נבדוק את גבול חלוקת $f^p$ ב־$g$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^p(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^p\ln^{2p}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1-p}}{\ln^{2p}x}=\infty$$

ולכן מהגרסה הגבולית של מבחן ההשוואה נוכל להסיק כי $\int_e^\infty f^p(x)dx=\infty$ לכל $0<p<1$ בסתירה לטענה. **מש"ל**

### סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם $f(x)$ רציפה ב־$[a,\infty)$, האינטגרל $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס וקיים הגבול $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$,

אז האינטגרל $\displaystyle\int_a^\infty f^2(x)dx$ מתכנס.

*הוכחה.* נגדיר

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

נחשב

$$\int f(x)dx = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \int \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$$

ונשים לב כי

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

ולכן ממבחן ההשוואה ולמה 3.12 נובע כי

$$\int_1^\infty f(x)dx = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) - \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$$

הוא אינטגרל מתכנס. נבחן את האינטגרל של $f^2(x)$

$$\int f^2(x)dx = \int \frac{\cos^2 x}{x}dx = \ln x \cos^2 x - \int \ln x \cdot 2\cos x \sin x dx = \ln x \cos^2 x - \int \ln x \sin 2x dx$$

עוד נראה כי

$$\ln x \sin 2x \leq \ln x$$

ולכן ממבחן ההשוואה נובע ישירות כי

$$\ln x \cos^2 x - \int \ln x \sin 2x dx \geq \ln(\cos^2(x)) - \frac{1}{x}$$

כמובן שהגבול $\lim_{x\to\infty} \ln(\cos^2(x)) - \frac{1}{x} = \infty$ ולכן ממבחן ההשוואה נובעת התבדרות האינטגרל

$$\int_1^\infty f^2(x)dx$$

מצאנו כי האינטגרל מתכנס בסתירה לטענה. **מש"ל**

## שאלה 5

תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות ב־$[0,\infty)$ אשר עבורן מתקיים:

$g(x)$ חסומה ובעלת נגזרת רציפה ב־$[0,\infty)$ כך ש־$g'(x) < g(x)$ לכל $x \geq 0$,

קיים $M$ כך שמתקיים לכל $t \geq 0$

$$\left|\int_0^t e^x f(x)dx\right| \leq M$$

נוכיח את התכנסות האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

*הוכחה.* נגדיר $g_0(x) = \frac{g(x)}{e^x}$, ונחשב את נגזרתה

$$g_0'(x) = \frac{g'(x)e^x - g(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{g'(x) - g(x)}{e^x}$$

נתון כי $g'(x) - g(x) < 0$ ולכן $g_0$ יורדת לכל $x \geq 0$.

$g_0(x)$ היא חלוקת פונקציה חסומה בפונקציה מונוטונית עולה, ולכן

$$\lim_{x\to\infty} g_0(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

מצאנו כי $g_0(x)$ מקיימת את התנאי הראשון של מבחן דיריכלה.

נגדיר $f_0(x) = e^x f(x)$. נתון כי

$$\left|\int_0^t f_0(x)dx\right| \leq M$$

דהינו האינטגרל של $f_0(x)$ חסום לכל ערך, ולכן $f_0$ ממלאת את התנאים למבחן דיריכלה יחד עם $g_0(x)$.

עתה נבחין כי

$$f_0(x)g_0(x) = f(x)g(x)\frac{e^x}{e^x} = f(x)g(x)$$

ולכן נובע כי מתכנס האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

מש"ל

## שאלת רשות

יהיו $0 < a < b$. נוכיח את התכנסות האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

*הוכחה.* נראה כי

מהגדרת האינטגרל המורחב
$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx - \int_0^\infty \frac{e^{-bx}}{x} dx$$

$$= \lim_{k \to 0} \int_k^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx - \int_k^\infty \frac{e^{-bx}}{x} dx$$

נשים לב כי הביטויים שקולים
$$\begin{vmatrix} t_1 = x/a & dt_1 = dx/a \\ t_2 = x/b & dt_2 = dx/b \end{vmatrix} = \lim_{k \to 0} \int_{ak}^\infty \frac{e^{-t_1}}{t_1} dt_1 - \int_{bk}^\infty \frac{e^{-t_2}}{t_2} dt_2$$

על־פי גבול אינטגרל מוכלל ניתן לראות כי
$$= \lim_{k \to 0} \int_{ak}^{bk} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

נשים לב כי $k$ קבוע באיטגרל
$$\begin{vmatrix} t = ku \\ dt = kdu \end{vmatrix} = \lim_{k \to 0} \int_a^b \frac{e^{-ku}}{ku} k\, du$$

קיבלנו ביטוי עבורו הפונקציה הפנימית בלבד תלויה ב־$k$
$$= \int_a^b \lim_{k \to 0} \frac{e^{-ku}}{u} du$$

$$= \int_a^b \frac{1}{u} du = \ln u\Big|_a^b = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

מצאנו כי האינטגרל מוגדר וכי

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{a}{b}$$

**מש"ל**