פתרון מטלה 11 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

23 ביולי 2024

שאלה 1

סעיף א'

יהי $\mathbb{R} \ni S > 0$ ויהיו האינטגרלים

$$\int_0^1 e^{-t}t^{S-1}\,dt, \qquad \int_1^\infty e^{-t}t^{S-1}\,dt$$

נוכיח כי הם מתכנסים.

הוכחה. נבחין כי במבחן ההשוואה ל-$\int e^{-t}\,dt$ (אשר מתכנס) נקבל כי האינטגרלים הנתונים מתכנסים אם ורק אם $t^{S-1} \xrightarrow{x\to D} L < \infty$.
כאשר $S \leq 1$ כמובן נקבל התכנות מהגרסה המורחבת של מבחן ההשוואה הגבולי מההמטלות הקודמות.
עבור $S > 1$ נשתמש בהשוואה לפונקציה t^{-2} אשר חוסם מלמעלה את הפונקציה הנתונה לכל x רלוונטי, ולכן נסיק כי יש התכנסות גם עבור $S > 1$ ובכלל עבור $0 < S$ כללי. □

סעיף ב'

נגדיר $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ המוגדר על־ידי

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt$$

אשר מצאנו בסעיף הקודם שמתכנס, ונוכיח כי גם $\forall s \in (0,\infty) : \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

הוכחה. □

סעיף ג'

נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $r(n+1) = n!$.

הוכחה. □