פתרון מטלה 5 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132)

5 ביוני 2024

שאלה 1

ניעזר בפולינום טיילור כדי למצוא קירוב רציונלי ל-$\cos\frac{1}{4}$ כך שהשגיאה לא תהיה מעל 10^{-12}.

פתרון. בכיתה מצאנו כי

$$P_{n,\cos,0}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

ונבחן את השארית בצורת לגרנז'

$$R_n=\frac{\cos^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}x^{k+1}$$

ובהתאם

$$|R_n|\le\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{4^{k+1}(k+1)!}$$

אם כן נמצא $k\in\mathbb{N}$ עבורו $4^{k+1}(k+1)!\ge 10^{12}$, נבחין כי תנאי זה מתקיים עבור $k=9$ ולכן

$$\cos\frac{1}{4}=\sum_{k=0}^{5}\frac{(-1)^k}{(2n)!}x^{2k}+R_n,\qquad |R_n|<10^{-12}$$

□

שאלה 2

נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\sin(x)-x}{\sin^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2x}{2\sin^3(x)}$$

נבחין כי נגזרותיה הראשונות של $\sin(2x)$ הן $\sin(2x), 2\cos(2x), -4\sin(2x)$ ובהתאם עבור $x=0$ נקבל $0, 2, 0$ ולכן הגבול שקול לביטוי

$$\lim_{x\to 0}\frac{0+2x-0+R_{3,\sin(2x),0}(x)-2x}{2\sin^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{2\sin^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)/x^3}{2\sin^3(x)/x^3}=\frac{0}{2}=0$$

שאלה 3

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(x)=\sin(x^{10})$ ונחשב את $f^{(2024)}(0), f^{(2025)}(0), f^{(2026)}(0)$.

נשתמש בתוצאת סעיף 6א' מהמטלה הקודמת ונקבל כי $\forall k\geq 0:(f(x))^{(k)}=f^{(k)}(x)h(x)$ כאשר h פולינום כלשהו.

נציב ונקבל אף ש־$f^{(k)}(0)=\sin^{(k \mod 4)}(0)h(0)$. נבחין עתה כי $2024 \mod 4=0, 2026 \mod 4=2$ ולכן נקבל $f^{(2024)}=f^{(2026)}=\sin(0)h(0)=0$.

נשאר עתה לחשב את $f^{(2025)}$.