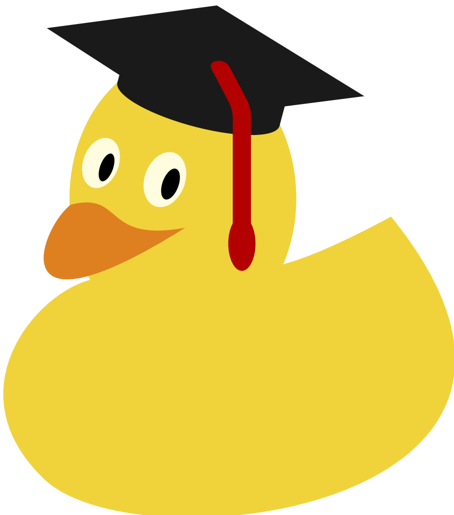
פתרון מטלה 10 — תורת הקבוצות (80200)

24 ביולי 2024



שאלה 1

נוכיח שלכל סודר α מתקיים $\alpha \le \omega_\alpha$.

הוכחה. נתחיל בבדיקת הטבעיים, מהגדרה נקבל כי $\omega_n \in \omega = \mathbb{N} \in n$ ולכן $\omega_n \le n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
עבור $\omega^+ \le \alpha \le \omega$ נקבל $\omega_\alpha \le \omega^+$ כמובן. נוכל כמובן באופן דומה לחסום כל סודר α במונים ולקבל שהמונה ω_α גדול מהם על־פי הגדרה. $\square$

שאלה 2

נוכיח שלכל סודר α קיים סודר $\alpha \geq \beta$ כך ש־$\beta = \omega_\beta$.

הוכחה. נגדיר מחלקת פונקציה $\xi \to \omega_\xi$ ולכן ממשפט הרקורסיה עבור α נקבל כי קיימת הקבוצה $\delta = \{\alpha, \omega_\alpha, \omega_{\omega_\alpha}, \dots\}$.
מההגדרה של סודר גבולי נקבל ש־$\omega_\delta = \bigcup_{\beta\in\delta} \beta = \delta$. $\square$

שאלה 3

נוכיח שמחלקת המונים היא מחלקה נאותה.

הוכחה. □