

תורת הקבוצות

26 ביוני 2024



תוכן העניינים

4	1 שיעור 1 — 8.5.2024
4	1.1 מבוא
4	1.2 עוצמות
4	1.3 תזכורת על פונקציות
5	1.4 קבוצות סופיות
6	2 שיעור 2 — 15.5.2024
6	2.1 תוצאות ראשונות בשוויון עוצמות
6	הקדמה למשפט קנטור
6	מונח: פיתוח סטנדרטי
6	משפט קנטור
6	אי-שוויון עוצמות
7	2.2 שאלות המשך
7	שאלה 1
7	שאלה 2
7	קבוצה בת-מנייה
7	קבוצה מעוצמת הרצף
7	משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין
7	טענה: עוצמת הטבעיים ומכפלת הטבעיים בעצמם
8	טענה: מכפלת קבוצות בנות מנייה
8	הגדרה: חזקה קרטזית
8	טענה: חזקה קרטזית בת מנייה
8	קבוצת הרציונליים היא בת-מנייה
9	3 שיעור 3 — 22.5.2024
9	3.1 קבוצת הסדרות הסופיות
9	הגדרה
9	טענה: קבוצת הסדרות הסופיות היא בת-מנייה
10	3.2 משפט קנטור על קבוצת החזקה
10	הגדרה
10	דוגמה
10	משפט קנטור
10	עוצמות אינסופיות
10	3.3 פעולות על מחלקות שקילות
10	תזכורת: יחס שקילות
11	דוגמות
11	שאלה מנחה
12	4 שיעור 4 — 29.5.2024
12	4.1 מושג העוצמה
12	תזכורת
12	הגדרה (זמנית): עוצמה
12	דוגמות

12	פעולות חשבון על עוצמות	4.2
13	כפל	
13	הגדרה: כפל עוצמות	
13	דוגמה	
13	פעולת החזקה	
14	הגדרה: פעולת חזקה על עוצמות	
14	דוגמות	
14	טענה:	
14	מסקנה	
14	טענה: שקילות חיבור עוצמות	
15	הגדרה: חיבור עוצמות	
15	הגדרה שקולה	
15	הגדרה: אי־שוויון בין עוצמות	
15	הערה: ניסוח שקול למשפט קנטור־שרדר ברנשטיין	
15	משפט: כללי חשבון בסיסיים	
16	שיעור 5 — 5.6.2024	5
16	5.1 עוצמת המנייה ועוצמת הרצף	
17	5.2 מבוא לתורת הקבוצות האקסיומטית	
18	שיעור 6 — 19.5.2024	6
18	6.1 הגישה האקסיומטית לתורת הקבוצות	
20	6.2 בניית ראשונות ב־ZF	
21	שיעור 7 — 26.6.2024	7
21	7.1 התורה האקסיומטית	
22	7.2 קבוצת הטבעיים	

1 שיעור 1 — 8.5.2024

מרצה: עומר בן-נריה, מייל: omer.bn@mail.huji.ac.il

1.1 מבוא

הקורס בנוי מחצי של תורת הקבוצות הנאיבית, בה מתעסקים בקבוצה באופן כללי ולא ריגורוזי, ומחצי של תורת הקבוצות האקסיומטית, בה יש הגדרה חזקה להכול.

הסיבה למעבר לתורה אקסיומטית נעוצה בפרדוקסים הנוצרים ממתמטיקה לא מוסדרת, לדוגמה הפרדוקס של בנך-טרסקי. עוד דוגמה היא פרדוקס ראסל, אם במתמטיקה שואלים אילו קבוצות קיימות, אינטואיטיבית אפשר להניח שכל קבוצה קיימת, הפרדוקס מתאר שזה לא ממש אופציונלי. נניח שכל קבוצה קיימת, אז ניקח את הקבוצה $y = \{x \mid x \notin x\}$. מה אפשר להגיד על $y \in y$ ועל $y \notin y$, אז נראה כי $y \in y \implies y \notin y, y \notin y \implies y \in y$ ואלו הן סתירות מן הסתם. התוכנית של הילברט, היא ניסיון להגדיר אקסיומטית בסיס רוחבי למתמטיקה, אבל ניתן להוכיח שגם זה לא עובד בלא מעט מקרים. מומלצת קריאה נוספת על Zermelo Frankel ZF בהקשר לסט האקסיומות הבסיסי המקובל היום.

1.2 עוצמות

העוצמה של קבוצה A היא הגודל של A .
שאלות: איך משווים בין גדלים של קבוצות A ו- B ?
הגדרה: נאמר כי זוג קבוצות A ו- B הן שוות עוצמה ונסמן $|A| = |B|$, אם ורק אם יש פונקציה הפיכה $F : A \rightarrow B$.

1.3 תזכורת על פונקציות

סימון: הזוג הסדור של אובייקטים x, y יסומן $\langle x, y \rangle$.
הערה: אם $x \neq y$ אז $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$.
המכפלה הקרטזית של קבוצות A, B היא הקבוצה

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

הגדרה: יחס בין A ל- B קבוצות, הוא תת-קבוצה R של המכפלה הקרטזית, $R \subseteq A \times B$.
הגדרה: פונקציה $F : A \rightarrow B$ היא יחס $F \subseteq A \times B$ המקיים כי $\forall a \in A \exists! b \in B : \langle a, b \rangle \in F$.
הערה חשובה: $\exists!$ קיים מקרה אחד בלבד כך שמתקיימת טענה.
דוגמה 1: $A = \{0, 1\}, B = \{3, \pi\}, R_1 = \{\langle 0, 3 \rangle\}$ לא פונקציה.
דוגמה 2: אותן קבוצות, אבל $R_2 = \{\langle 0, \pi \rangle, \langle 1, \pi \rangle\}$ היא אכן פונקציה.
דוגמה 3: לכל קבוצה X נסמן $Id_X = \{\langle a, a \rangle \mid a \in X\}$ מתקיים $Id_X : X \rightarrow X$ והיא פונקציית הזהות.
הגדרה: יהי יחס $R \subseteq A \times B$ נגדיר $dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B \langle a, b \rangle \in R\}$.
נגדיר $rng(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A \langle a, b \rangle \in R\}$ נקרא לזה גם תמונה של R .
הבחנה: אם $R \subseteq A \times B$ הוא פונקציה מ- A ל- B אז $dom(R) = A$ ועוד נראה כי $rng(R) \subseteq B$.
הגדרות בסיסיות נוספות:

- בהינתן $F : A \rightarrow B$ אז נסמן לכל $a \in A$ את $F(a)$ להיות $b \in B$ היחיד עבורו מתקיים $\langle a, b \rangle \in F$.
- פונקציה $F : A \rightarrow B$ היא חד-חד ערכית אם לכל $a_1 \neq a_2 \in A$ איברים אז מתקיים $F(a_1) \neq F(a_2)$.
- פונקציה $F : A \rightarrow B$ תיקרא על אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש- $\langle a, b \rangle \in R$, או גם $rng(F) = B$.
- בהינתן יחס R נגדיר את היחס ההופכי $R^{-1} \subseteq B \times A$ להיות $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\}$.
- פונקציה $F : A \rightarrow B$ נקראת הפיכה אם היחס ההופכי F^{-1} הוא פונקציה מ- B ל- A ונרשום $F^{-1} : B \rightarrow A$.

תרגיל: $F : A \rightarrow B$ היא הפיכה, אם ורק אם היא חד-חד ערכית ועל B .

מסקנה: אם $F : A \rightarrow B$ היא פונקציה חד-חד ערכית ועל אז גם הפונקציה ההופכית שלה $F^{-1} : B \rightarrow A$ היא חד-חד ערכית ועל.

הוכחה: נתון $F : A \rightarrow B$ ונתון כי היא חד-חד ערכית ועל, נסיק כי F הפיכה גם כן ולכן הגדרת ההפיכה מעידה כי $F^{-1} : B \rightarrow A$ היא פונקציה.

לכן $(F^{-1})^{-1}$ היא פונקציה ולכן F^{-1} היא הפיכה על-פי הגדרה ובהתאם גם חז"ע ועל.

הגדרה: הרכבת יחסים. נניח כי קיימים שני יחסים $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ אז נגדיר $S \circ R \subseteq A \times C$ על-ידי

$$S \circ R = \{ \langle a, c \rangle \mid a \in A, c \in C, \exists b \in B : \langle a, b \rangle \in R \wedge \langle b, c \rangle \in S \}$$

תרגיל: אם $F : A \rightarrow B$ ו- $G : B \rightarrow C$ אז $G \circ F \subseteq A \times C$ הוא יחס שהוא גם פונקציה.

הבחנות שהן גם תרגיל: בהינתן פונקציות כמו שהגדרנו השנייה אז מתקיימים המצבים הבאים:

1. אם F, G הן חד-חד ערכיות, אז גם $G \circ F$ היא חד-חד ערכית.

2. אם F, G על אז גם $G \circ F$ היא על.

3. F, G הפיכות אז $G \circ F$ הפיכה גם היא.

4. F הפיכה אז $F^{-1} \circ F = Id_A$ וגם $F \circ F^{-1} = Id_B$

נחזור לעוצמות:

נראה כי שוויון עוצמות הוא יחס שקילות:

1. אם יש $F : A \rightarrow B$ הפיכה אז גם יש $F^{-1} : B \rightarrow A$ ולכן $|B| = |A| \iff |A| = |B|$. כלומר יחס שוויון עוצמה הוא סימטרי.

2. לכל A מתקיים $|A| = |A|$ שכן $Id_A : A \rightarrow A$ היא הפיכה לעצמה.

3. אם $|A| = |B|$ וגם $|B| = |C|$ אז גם $|A| = |C|$ בגלל היכולת להרכיב פונקציות הפיכות מתאימות.

1.4 קבוצות סופיות

סימון לכל $n \geq 0$ נסמן $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

הגדרה זמנית: הקבוצה A נקראת סופית אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $|A| = |[n]|$.

הבחנה: לכל קבוצה סופית $A \neq \emptyset$ אם A^* מתקבלת מ- A על-ידי השמטת איבר אז $|A| \neq |A^*|$.

טענה: קבוצת כל המספרים הטבעיים $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ אינה סופית.

הוכחה: נסמן $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ונגדיר $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ על-ידי $F(n) = n+1$, בברור F חד-חד ערכית ועל \mathbb{N}^* ולכן $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^*|$.

צריך להשלים את הסוף של ההאצה.

2 שיעור 2 – 15.5.2024

2.1 תוצאות ראשונות בשוויון עוצמות

הקדמה למשפט קנטור

לכל מספר $x \in \mathbb{R}$ יש חלק שלם וחלק שברי כך שמתקיים $x = [x] + \langle x \rangle$.

במקרה זה $[x] = n \in \mathbb{Z}$, כאשר $n \leq x$.

נובע כי $0 \leq x - [x] < 1$. נגדיר $\langle x \rangle = x - [x]$.

כל מספר $\langle x \rangle$ ניתן להצגה כהצגה בצורה

$$\langle x \rangle = 0.x_1x_2 \dots x_k \dots$$

נשים לב כי צורת ההצגה זו היא יחידה פרט למקרה בודד בו "הזנב" של הספרות נגמר ב- $x_k = 0$ או כאשר הזנב נגמר ב- $x_k = 9$.

$$0.359999 \dots = 0.360000 \dots$$

מונח: פיתוח סטנדרטי

לכל מספר x עבורו $\langle x \rangle$ יש פיתוח יחיד נקרא לו פיתוח סטנדרטי.

אחרת אם $\langle x \rangle$ יש שני פיתוחים, אז נבחר את זה המסתיים ב- $x_k = 0$ להיות הסטנדרטי.

משפט קנטור

הוכחה. נראה כי לכל פונקציה $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ או f איננה על \mathbb{R} .

לכל $n \in \mathbb{N}$ נרשום את הפיתוח הסטנדרטי של $\langle f(n) \rangle$:

$$\langle f(n) \rangle = 0.x_0^n x_1^n x_2^n \dots$$

$$\langle f(0) \rangle \quad 0.x_0^0 \quad x_1^0 \quad x_2^0 \quad \dots$$

$$\langle f(1) \rangle \quad 0.x_0^1 \quad x_1^1 \quad x_2^1 \quad \dots$$

$$\langle f(2) \rangle \quad 0.x_0^2 \quad x_1^2 \quad x_2^2 \quad \dots$$

ונבחן את האלכסונים, ונבנה מספר כך שלכל ערך אלכסוני נבחר ספרה שונה מהערך האלכסוני. לכן נוכל לבנות מספר שלא מופיע בכלל ברשימה הזו.

נתבונן כעת במספר $y \in \mathbb{R}$ המוגדר על-ידי הפיתוח $y = 0.y_1y_2 \dots$ כאשר לכל $n \in \mathbb{N}$ אנו מגדירים

$$y_n = \begin{cases} 2, & x_n^n \neq 2 \\ 7, & x_n^n = 2 \end{cases}$$

מכיוון שכל הספרות בפיתוח הנתון הן 2 או 7 אז פיתוח זה הוא הפיתוח הסטנדרטי של y .

לכל $n \in \mathbb{N}$ לא יתכן ש- $y = f(n)$ שכן אחרת $\langle y \rangle = \langle f(n) \rangle$ ומכאן של- $\langle y \rangle$ ול- $\langle f(n) \rangle$ אותו פיתוח סטנדרטי בסתירה לכך ש- $y_n \leq x_n^n$.

מסיקים $\forall n \in \mathbb{N} : y \neq f(n)$ ולכן $y \notin \text{rng}(f)$ ובהתאם f איננה על \mathbb{R} .

הגדרות נוספות:

אי-שוויון עוצמות

עבור קבוצות A, B נאמר שעוצמת A קטנה מעוצמת B או $|A| \leq |B|$ כאשר יש פונקציה חד-חד ערכית $f : A \rightarrow B$.

נאמר שעוצמת A קטנה ממש מעוצמת B אם $|A| \leq |B|$ ו- $|A| \neq |B|$.

מסקנה: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

זאת משום ש- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ולכן $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ והוכחנו במשפט קנטור ש- $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

2.2 שאלות המשך

שאלה 1

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \text{Alg}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$$

מהן עוצמות קבוצות הביניים בין \mathbb{N} ל- \mathbb{R} ?

שאלה 2

האם יש גודל אינסופי מירבי?

קבוצה בת-מנייה

קבוצה A ששוות עוצמה ל- \mathbb{N} תיקרא בת-מנייה.

קבוצה מעוצמת הרצף

קבוצה A ששוות עוצמה ל- \mathbb{R} תיקרא בעוצמת הרצף.

משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין

תהינה שתי קבוצות A, B , אם $|A| \leq |B|$ וגם $|B| \leq |A|$ אז $|A| = |B|$.

הוכחה. נדחה לסוף הפרק, יושלם בהמשך.

טענה: עוצמת הטבעיים ומכפלת הטבעיים בעצמם

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$$

נתאהר שתי הוכחות שונות למשפט.

בניית הנחש.

$$\begin{array}{ccccccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots & (0,n) & \dots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) & \dots \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) & \dots \\ \vdots & & & & & \\ (m,0) & (m,1) & (m,2) & \dots & (m,n) & \dots \end{array}$$

ונעבור על המטריצה הזאת באופן אלכסוני.

נגדיר $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ על-ידי

$$f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$$

שימוש במשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין. נמצא שתי פונקציות

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times$$

את f נגדיר על-ידי $f(n) = (0, n)$.

ונגדיר $g(i,j) = 2^i 3^j$. שתי הפונקציות כמוכן החד-חד ערכיות.

נובע מיחידות הצגת מספרים טבעיים כמכפלת ראשוניים.

טענה: מכפלת קבוצות בנות מנייה

אם A, B קבוצות בנות מנייה, אז גם $A \times B$ בת מנייה.

הוכחה. נתון A, B בנות מנייה אז ניקח פונקציה $h_B : \mathbb{N} \rightarrow B$ חד-חד ערכית על B , וניקח $h_A : \mathbb{N} \rightarrow A$ נקבע פונקציה חד-חד ערכית ועל $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (מטענה קודמת), $f(n) = (i_n, j_n)$, ונגדיר

$$H : \mathbb{N} \rightarrow A \times B, H(n) = (h_A(i_n), h_B(j_n)) \in A \times B$$

נראה כי H חד-חד ערכית, נניח $n \neq m$ אז $f(n) \neq f(m)$ (כי f חד-חד ערכית).

אז או $i_n \neq i_m$ או $j_n \neq j_m$ ונקבל $H(n) \neq H(m)$.

H גם על: $a \in A, b \in B$ וקיימים $i, j \in \mathbb{N}$ כך ש- $a = h_A(i), b = h_B(j)$, נובע מזה שהן על.

ידוע כי יש $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $f(n) = (i, j)$ ולכן מחיבור הטענות נקבל כי $H(n) = (a, b)$.

□

הגדרה: חזקה קרטזית

לכל קבוצה A ו- $k \in \mathbb{N}$ נגדיר A^k באופן הבא:

אילו $k = 1$ אז $A^k = A$ ובמקרה ש- $k > 1$ אז $A^{k+1} = A^k \times A$.

סימון: נסמן את אברי A^k על-ידי (a_1, a_2, \dots, a_k) , זאת למרות שבמציאות הקבוצה מוגדרת כ- $((a_1, a_2), \dots, a_k)$.

טענה: חזקה קרטזית בת מנייה

לכל קבוצה A בת-מנייה ו- $k \geq 1$ טבעי נובע A^k בת-מנייה.

□

הוכחה. באינדוקציה על k ושימוש בטענה האחרונה.

קבוצת הרציונליים היא בת-מנייה

\mathbb{Q} היא בת-מנייה.

הוכחה. נשתמש במשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \implies |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$$

כדי להראות ש- $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$ מספיק לבנות פונקציה חד-חד ערכית לקבוצה בת מנייה כלשהי.

נגדיר $f : \mathbb{Q} \rightarrow A$. לכל מספר רציונלי $z \neq 0$ יש הצגה יחידה בצורה $z = \pm \frac{p}{q}$ כאשר $p, q > 0$ טבעיים זרים.

נגדיר $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ על-ידי

$$f(z) = \begin{cases} (0, 0, 0), & z = 0 \\ (1, p, q), & z > 0 \\ (2, p, q), & z < 0 \end{cases}$$

□

נובע מהגדרתה כי f היא חד-חד ערכית ולכן $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^3| = |\mathbb{N}|$.

3 שיעור 3 — 22.5.2024

3.1 קבוצת הסדרות הסופיות

הגדרה

בהינתן קבוצה A נגדיר

$$\text{seq}(A) = \bigcup_{k \geq 1} A^k$$

קבוצת כל הסדרות הסופיות של A .

טענה: קבוצת הסדרות הסופיות היא בת־מניה

לכל קבוצה בת־מניה A גם $\text{seq}(A)$ היא בת־מניה.

טענת עזר: נניח ש־ B_n סדרת קבוצות ו־ h_n סדרת פונקציות. $h_n : \mathbb{N} \rightarrow B_n$ הפיכה. בפרט מתקבל כי B_n בת־מניה, אז הקבוצה

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{b \mid \exists n \in \mathbb{N}, b \in B_n\}$$

נוכיח ראשית את הטענה בהינתן טענת העזר.

תהי $h : \mathbb{N} \rightarrow A$ הפיכה. נתון כי A בת־מניה, ונגדיר סדרת פונקציות $(h_k)_{k=1}^\infty, h_k : \mathbb{N} \rightarrow A^k$. נבחר $h_1 = h$. בהינתן h_k נגדיר את h_{k+1} באופן הבא:

$$\tilde{h}_{k+1} = h_k \times h_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A^k \times A$$

אנו יודעים כי \tilde{h}_{k+1} הפיכה, ונשתמש בפונקציה ההפיכה $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מהשיעור הקודם ונגדיר

$$h_{k+1} = \tilde{h}_{k+1} \circ f : \mathbb{N} \rightarrow A^{k+1}$$

אז תיארנו סדרה של פונקציות $h_k : \mathbb{N} \rightarrow A^k$ הפיכות ומטענת העזר נסיק $\text{seq}(A) = \bigcup_{k \geq 1} A^k$ היא בת־מניה. נוכיח את טענת העזר:

נשתמש במשפט קנטור־ברנשטיין ונראה כי $|\mathbb{N}| \leq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n|$ הוא א' ו־ $|\mathbb{N}| \geq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n|$ הוא ב'.

א': נתון כי B_0 בת־מנייה, תהי $f_0 : \mathbb{N} \rightarrow B_0$ הפיכה. נשים לב כי ניתן להתייחס ל־ f_0 כפונקציה לאיחוד והיא עדיין חד־חד ערכית, לכן $|\mathbb{N}| \leq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n|$.

עתה לב'. מכיוון ש־ $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ די להראות כי קיימת פונקציה חד־חד ערכית

$$g : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

לכל n נסמן h_n ההופכית של פונקציה על.

נגדיר את g באופן הבא. יהי $b \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ נסמן $n(b) \in \mathbb{N}$ המספר הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $b \in B_{n(b)}$. נשים לב כי $n(b) \in \mathbb{N} \implies g_{n(b)}(b) \in \mathbb{N}$ ובפרט מוגדר.

ניקח

$$g(b) = \langle n(b), g_{n(b)}(b) \rangle$$

נבדוק כי g היא חד־חד ערכית.

יהיו $b \neq b^*$ איברים באיחוד.

נפריד לשני מקרים:

1. אם $n(b) \neq n(b^*)$ בוודאי $g(b) \neq g(b^*)$.

2. אם $n(b) = n(b^*) = m$ אז נסיק ש־ $b, b^* \in B_m$ ו־ $b \neq b^*$. מכיוון ש־ g_m חד־חד ערכית אז נקבל $g_{n(b)}(b) \neq g_{n(b^*)}(b^*)$.

$$g(b) \neq g(b^*) \text{ ובפרט } g_m(b) \neq g_m(b^*) = g_{n(b)}(b)$$

3.2 משפט קנטור על קבוצת החזקה

הגדרה

בהינתן קבוצה A מגדירים

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

דוגמה

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$|\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})| = |2^n|$$

משפט קנטור

לכל קבוצה A מתקיים

$$|\mathcal{P}(A)| > |A|$$

הוכחה. הוכחת $A \leq \mathcal{P}(A)$:

נגדיר פונקציה $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ המוגדרת על-ידי $f(a) = \{a\}$.

f חד-חד ערכית ועונה על המבוקש.

כיוון $|\mathcal{P}(A)| \neq |A|$:

נוכיח כי לא קיימת פונקציה $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ שהיא על $\mathcal{P}(A)$.

תהי g כלשהי, ונגדיר $B \subseteq A$ באופן הבא

$$B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

כמובן ש- $B \in \mathcal{P}(A)$ ונטען כי $B \notin \text{rng}(g)$ ומכאן g -אינה על $\mathcal{P}(A)$.

נניח אחרת, אז יש $a^* \in A$ כך ש- $B = g(a^*)$.

נבדוק האם $a^* \in B$. אם $a^* \notin B$ אז $a^* \notin g(a^*) \xLeftrightarrow{B \text{ הגדרת}} a^* \in g(a^*) \xLeftrightarrow{\text{הנחת השלילה}} a^* \in B$.

קיבלנו סתירה להנחת השלילה ולכן $|\mathcal{P}(A)| \neq |A|$.

□

עוצמות אינסופיות

נקבל עכשיו ש- $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$ ונוכל לקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$|\mathcal{P}^n(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}^{n+1}(\mathbb{N})|$$

נגדיר

$$\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{P}^k(\mathbb{N}) = \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$$

תרגיל:

$$\forall k \in \mathbb{N} \mathcal{P}^k(\mathbb{N}) < \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$$

וכמובן גם

$$\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}))$$

האם קיימת עוצמה גדולה ביותר?

3.3 פעולות על מחלקות שקילות

תזכורת: יחס שקילות

יחס $E \subseteq X \times X$ הוא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמות

$$1. E_1 = \{(a, b) \in (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \mid a^2 = b^2\} \text{ והיחס } X_1 = \mathbb{Z}$$

$$2. E_2 = \{((n, m), (n', m')) \mid n + m' = n' + m\} \text{ ו- } X_2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

בהינתן יחס שקילות E על קבוצה X מגדירים לכל $x \in X$ את

$$[x]_E = \{y \in X \mid (x, y) \in E\}$$

תכונה חשובה, לכל x, x^* אם $[x]_E \cap [x^*]_E \neq \emptyset$ אז $[x]_E = [x^*]_E$.

$$\text{בדוגמה 1 } [1]_E = \{1, -1\} \text{ ו- } [0]_E = \{0\}.$$

בנוגע לדוגמה 2 תרגיל בדקו כי זהו יחס שקילות ונראה כי מחלקות השקילות הן $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \forall (n, m)$ מתקיים רק אחד מהשניים:

$$1. n \geq m \text{ ולכן } (n - m, 0) \in [(n, m)]_{E_2}$$

$$2. n < m \text{ ולכן } (0, m - n) \in [(n, m)]_{E_2}.$$

אנחנו רואים כי לכל $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ מתאים למחלקות שקילות של $[(l, 0)]_{E_2}, [(0, l)]_{E_2}$.

שאלה מנחה

בהינתן פעולה או יחס על קבוצה X , יחס שקילות E מתי ניתן להגדיר פעולה או יחס מושרית על קבוצת מחלקות השקילות?

$$X/E = \{[x]_E \mid x \in X\}$$

תהי $*$ פעולה על זוגות איברי X , דהינו $x_1, x_2 \in X \implies x_1 + x_2 \in X$.

הרעיון, בהינתן מחלקות שקילות $C_1, C_2 \in X/E$ נבקש להגדיר $C_1 * C_2 \in X/E$ נגדיר באופן הבא:

$$C_1 * C_2 = [x_1 + x_2]_E \text{ ו- } x_1 \in C_1, x_2 \in C_2 \text{ וננסה להגדיר}$$

הקושי הוא שכדי לקבל פעולה מוגדרת היטב על מחלקות יש לבדוק כי ההגדרה איננה תלויה בבחירת נציגים. כלומר לכל $x_1, x'_1 \in C_1, x_2, x'_2 \in C_2$

$$C_2 \text{ יתקיים } [x_1 + x_2]_E = [x'_1 + x'_2]_E \text{ ובמקרה כזה נאמר כי הפעולה } * \text{ על } X \text{ מוגדרת היטב על קבוצת המנה } X/E.$$

4 שיעור 4 — 29.5.2024

4.1 מושג העוצמה

תזכורת

בהינתן יחס שקילות E על קבוצה X נסמן $X/E = \{[x]_E \mid x \in X\}$ קבוצת מחלקות השקילות. בהינתן פעולה (יחס) $*$ על X .

$*$ משרהר פעולה מוגדרת הייטב על X/E אם מתקיימת התכונה הבאה:

$$\forall (x_1, x_2) \in E, \forall (y_1, y_2) \in E : (x_1 * y_1, x_2 * y_2) \in E$$

אִי־תלות בנציגים E ביחס לפעולה $*$.

נגדיר את $*$ על X/E על־ידי

$$[x_1]_E * [y_1]_E = [x_1 * y_1]_E$$

נתבונן ביחס

$$E = \{(A, B) \mid \exists f : A \rightarrow B \text{ הפיכה}\}$$

ראינו כי E :

- רפלקסיבי
- סימטרי
- טרנזיטיבי

ולכן E מקיים את התכונות של יחס שקילות.

הגדרה (זמנית): עוצמה

עוצמה היא מחלקת שקילות לפי E .

נסמן ב- $|A|$ את מחלקת השקילות של A . סימונים מקובלים נוספים:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

$$\aleph \text{ או גם מסמנים ב-}\mathfrak{C} \text{ גותית שאני לא יודע לעשות בלאטך.}$$

$$\text{באופן כללי משתמשים באותיות גותיות כדי לסמן את העוצמות של קבוצות, לדוגמה } |A| = \mathfrak{a}, |B| = \mathfrak{b}$$

$$\text{לקבוצה סופית } [n] \text{ נסמן גם } |[n]| = n.$$

דוגמות

$$1. \{1, 2, 3\} \in |[3]|, \{\pi, e, \frac{1}{7}\}$$

$$2. |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0.$$

$$3. \mathfrak{C} = |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{R} \setminus a| = |[0, 1]| \text{ גם}$$

$$4. 0 = |\emptyset|$$

4.2 פעולות חשבון על עוצמות

נבקש להגדיר לכל זוג עוצמות $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ עוצמות נוספות.

חיבור $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, כפל $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ וחזקה $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$.

כפל

נתבונן בפעולת המכפלה הקרטזית \times על קבוצה $A \times B$.
נרצה להראות שהיא מגדירה פעולה מוגדרת היטב למחלקות עוצמה.

הוכחה. צריך להוכיח כי בהינתן A_1, A_2 שוות עוצמה ו- B_1, B_2 שוות עוצמה, אז שמתקיים $|A_1 \times B_1| = |A_2 \times B_2|$. נבחר $f : A_1 \rightarrow A_2$ הפיכה וגם $g : B_1 \rightarrow B_2$ הפיכה שאנו יודעים שקיימות ונבחן את

$$(f \times g) : A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$$

המוגדרת על-ידי

$$(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$$

ולכן $f \times g$ היא חד-חד ערכית ועל $A_2 \times B_2$ שכן f, g הן חד-חד ערכיות ועל בנפרד.
מסקנה: $|A_1 \times B_1| = |A_2 \times B_2|$.

□

הגדרה: כפל עוצמות

בהינתן עוצמות a, b נגדיר $a \cdot b$ באופן הבא:
תהינה A, B קבוצות, $|A| = a, |B| = b$ אז נגדיר $a \cdot b = |A \times B|$.

דוגמה

1. לכל n, m סופיים נראה כי

$$|[n]| \cdot |[m]| = |[n] \times [m]| = |[n \cdot m]|$$

$$2. \aleph_0 \cdot \aleph_0 = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

$$3. \underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0}_k = \aleph_0 \text{ נגדיר } 1 \leq k$$

פעולת החזקה

בהינתן קבוצות A ו- B נתבונן בקבוצה $A^B = \{f : B \rightarrow A\}$.
נבקש ללכוד כי הפעולה הזו לא תלויה בבחירת נציגים ולכן מוגדרת היטב.

הוכחה. צריך להוכיח: אם $|A_1| = |A_2|, |B_1| = |B_2|$ אז נראה כי $|A_1^{B_1}| = |A_2^{B_2}|$.
דהינו

$$|\{f : B_1 \rightarrow A_1\}| = |\{f : B_2 \rightarrow A_2\}|$$

נקבע פונקציות הפיכות $f : A_1 \rightarrow A_2$ ו- $g : B_1 \rightarrow B_2$ הפיכות.

נגדיר $\varphi : A_1^{B_1} \rightarrow A_2^{B_2}$ על-ידי

$$h_1 : B_1 \rightarrow A_1, \varphi(h_1) = f \circ h_1 \circ g^{-1} : B_2 \rightarrow A_2$$

נרצה להראות כי φ הפיכה על-ידי מציגת פונקציה הופכית:

$$\psi(h_2) : A_2^{B_2} \rightarrow A_1^{B_1}, \quad \psi(h_2) = f^{-1} \circ h_2 \circ g$$

נבדוק את הרכבת הפונקציות:

$$\psi \circ \varphi = id_{A_1^{B_1}}$$

$$\varphi \circ \psi = id_{A_2^{B_2}}$$

ונסיק מהקריטריון השקול להפיכות כי φ הפיכה ומתקיים $\varphi^{-1} = \psi$.
נבדוק את ההרכבה הראשונה:

$$\forall h_1 \in A_1^{B_1}, (\psi \circ \varphi)(h_1) = \psi(f \circ h_1 \circ g^{-1}) = f^{-1} \circ f \circ h_1 \circ g^{-1} \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ h_1 \circ (g^{-1} \circ g) = (id_{A_1}) \circ h_1 \circ (id_{B_1}) = h_1$$

והצד השני דומה. \square

הגדרה: פעולת חזקה על עוצמות

בהינתן עוצמות a, b נגדיר עוצמה a^b באופן הבא:
נבחר קבוצות המקיימות $|A| = a, |B| = b$ ונגדיר $a^b = |A^B|$.

דוגמות

- יהיו n, m סופיים, מתקיים $||[n]^{[m]}|| = |[n^m]|$.
- תהי $a = |A|$ ו- $b = 0 = |\emptyset|$. נשים לב כי $f : \emptyset \rightarrow A$ היא פונקציה שכן $\emptyset \subseteq \emptyset \times A$ הוא יחס באופן ריק. הפונקציה היא אכן פונקציה באופן ריק.
נסיק מכך כי מתקיים $A^\emptyset = \{\emptyset\}$ ולכן $a^\emptyset = |\{\emptyset\}| = 1$.

טענה:

לכל קבוצה A מתקיים $2^{|A|} = |\mathcal{P}(A)|$.

הוכחה. על-פי ההגדרה העוצמה $2^{|A|}$ שווה למחלקת העוצמה של $\{0, 1\}^A = \{h : A \rightarrow \{0, 1\}\}$.
לכן כדי להוכיח את הטענה די להראות קיום פונקציה הפיכה בין $\{0, 1\}^A$ לבין $\mathcal{P}(A)$.
נגדיר $\varphi : \{0, 1\}^A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ על-ידי

$$\varphi(h) = h^{-1}(\{1\}) = \{a \in A \mid h(a) = 1\}$$

נוכיח כי φ חד-חד ערכית ועל $\mathcal{P}(A)$:

$$\forall h_1, h_2 : A \rightarrow \{0, 1\}, h_1 \neq h_2, \exists a \in A : h_1(a) \neq h_2(a) \implies a \in h_1^{-1}(\{1\}) \triangle h_2^{-1}(\{1\})$$

בפרט הקבוצות $\varphi(h_1), \varphi(h_2)$ הן שונות.

נוכיח על: יהי $B \subseteq A$ דהינו $B \in \mathcal{P}(A)$. ניקח

$$l_B : A \rightarrow \{0, 1\}, l_B(a) = \begin{cases} 0, & a \notin B \\ 1, & a \in B \end{cases}$$

נובע מהגדרת φ ש- $\varphi(l_B) = B$ והיא על.

הראינו כי קיימת פונקציה הפיכה $\varphi : \{0, 1\}^A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ולכן מתקיים $2^{|A|} = |\mathcal{P}(A)|$. \square

מסקנה

נובע ממשפט קנטור כי לכל עוצמה a מתקיים $a < 2^a$.

טענה: שקילות חיבור עוצמות

יהיו $|A_1| = |A_2|, |B_1| = |B_2|$ אם $\emptyset = A_1 \cap B_1$ וגם $\emptyset = A_2 \cap B_2$. אז $|A_1 \cup B_1| = |A_2 \cup B_2|$.
הוכחה בתרגיל.

הגדרה: חיבור עוצמות

תהינה עוצמות a, b אז נגדיר את $a + b$ באופן הבא:
ניקח קבוצות זרות A, B כך ש- $|A| = a, |B| = b$.
נגדיר את $a + b$ להיות העוצמה $A \cup B$.

הגדרה שקולה

הערה: לכל קבוצה A מתקיים $|\{0\} \times A| = |A| = |\{1\} \times A|$.
לכל זוג A, B קבוצות נראה כי

$$\emptyset = (\{0\} \times A) \cap (\{1\} \times B)$$

ולכן נגדיר

$$|A| + |B| = |(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)|$$

הגדרה: אי־שוויון בין עוצמות

בהינתן עוצמות a, b נגדיר כי $a \leq b$ (או $a < b$)
אם יש נציגים $|A| = a, |B| = b$ כך שקיימת פונקציה חד־חד ערכית $f : A \rightarrow B$ (וגם לא קיימת f כזו שהיא גם על).
נבחין כי ההגדרה איננה תלויה בבחירת נציגים A, B .

הערה: ניסוח שקול למשפט קנטור־שרדר ברנשטיין

ניסוח שקול למשפט הוא שלכל a, b עוצמות אם גם $a \leq b$ וגם $b \leq a$ אז $a = b$.

משפט: כללי חשבון בסיסיים

- לכל a, b עוצמות מתקיים $a + b = b + a$ וגם $a \cdot b = b \cdot a$.
- לכל שלוש עוצמות a, b_1, b_2 מתקיים $a \cdot b_1 + a \cdot b_2 = a(b_1 + b_2)$.
- לכל שלוש עוצמות a, b_1, b_2 מתקיים $a^{b_1 + b_2} = a^{b_1} \cdot a^{b_2}$ וגם $(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 b_2}$.

5 שיעור 5 — 5.6.2024

5.1 עוצמת המנייה ועוצמת הרצף

משפט 5.1 $2^{\aleph_0} = \mathfrak{C} = |(0, 1)|$

הוכחה. נשתמש במשפט CSB, תחילה נראה את $2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{C}$.

ניקח נציגים, עבור 2^{\aleph_0} נבחר $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$ ו- $(0, 1)$ עבור \mathfrak{C} .

נגדיר פונקציה $G : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow (0, 1)$ על-ידי

$$\forall f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}, \quad G(f) = 0.1f(0)f(1)f(2) \dots f(n) \dots$$

בפיתוח עשרוני. יחידות הפיתוח של המספרים המדוברים מבטיח כי G היא חד-חד ערכית.

קיבלנו כי $2^{\aleph_0} = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| \leq |(0, 1)| = \mathfrak{C}$.

עתה נוכיח את אי-השוויון לכיוון השני $\mathfrak{C} \leq 2^{\aleph_0}$.

נשים לב כי $2^{\aleph_0} \leq 10^{\aleph_0} \leq 16^{\aleph_0} = 2^{4 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ ומכאן נסיק כי $2^{\aleph_0} \leq 10^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0}$ ומ- CSB נקבל $2^{\aleph_0} = 10^{\aleph_0}$ ולכן מספיק להוכיח כי

$\mathfrak{C} \leq 10^{\aleph_0}$. נבחר נציגים $(0, 1)$ עבור \mathfrak{C} ואת $\{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$ עבור 10^{\aleph_0} .

נגדיר פונקציה $H : (0, 1) \rightarrow \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא:

לכל $x \in (0, 1)$ ותהי $0.x_0x_1 \dots x_n \dots$ ההצגה הסטנדרטית היחידה של x ונגדיר $H(x) : \mathbb{N} \rightarrow \{0, \dots, 9\}$ על-ידי $H(x)(n) = x_n$.

יחידות ההצגה הסטנדרטית של המספר מבטיחה כי H היא חד-חד ערכית.

H מעידה על כך ש- $2^{\aleph_0} = \mathfrak{C} \leq 10^{\aleph_0}$ כמבוקש.

□

נעבור עתה להוכיח את משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין

משפט 5.2 (משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין) לכל זוג קבוצות A, B אם קיימת פונקציות חד-חד ערכיות $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$ אז קיימת

פונקציה הפיכה $h : A \rightarrow B$.

הוכחה. נוכיח בשני שלבים.

שלב ראשון (רדוקציה): המשפט שקול לטענה הבאה: לכל זוג קבוצות $B \subseteq A$ אם קיימת פונקציה $f : A \rightarrow B$ חד-חד ערכית אז קיימת פונקציה

$h : A \rightarrow B$ הפיכה.

נוכחת הטענה:

תהינה A, B אשר מקיימות את משפט CSB ולכן קיימות $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$ חד-חד ערכיות. נגדיר $B^* = g[B] \subseteq A$. נשים לב כי על-פי

הגדרת B^* נוכל לבחון את $g : B \rightarrow B^*$ וזו פונקציה חד-חד ערכית וכמובן גם על ולכן הפיכה.

נגדיר $f^* = g \circ f : A \rightarrow B^*$ ולכן f^* חד-חד ערכית כהרכבה של f, g חד-חד ערכיות.

נקבל כי A, B^* מקיימות את ההנחות בנוסח שמופיע בטענה. לכן כמסקנה מהנוסח החלופי יש פונקציה $h^* : A \rightarrow B^*$ חד-חד ערכית ועל ונגדיר

$$h = g^{-1} \circ h^*$$

שלב ב', נוכיח את הניסוח השקול שמופיע בשלב א'.

נניח $B \subseteq A$ ותהי פונקציה חד-חד ערכית $f : A \rightarrow B$.

יהיו $B \subseteq A$ ונתונה פונקציה חד-חד ערכית $f : A \rightarrow B$ ונגדיר

$$A^* = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \exists a \in A \setminus B : x = f^n(a)\}$$

מתקיים

$$1. A \setminus B \subseteq A^*$$

$$2. \text{ לכל } x \in A^* \text{ גם } f(x) \in A^*$$

נגדיר $h : A \rightarrow B$ על-ידי

$$h(x) = \begin{cases} x & x \in A \setminus A^* \\ f(x) & x \in A^* \end{cases}$$

h מוגדרת היטב שכן לכל $x \in A^*$ גם $h(x) = f(x) \in B$ כי $f : A \rightarrow B$ ולכל $x \in A \setminus A^*$ מתקיים $h(x) = x \in B$ שכן $A \setminus A^* \subseteq B$.
נוכיח כי h חד-חד ערכית ונפריד למקרים.

אם $x_1, x_2 \in A^*$ אז $h(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = h(x_2)$.

אם $x_1, x_2 \in A \setminus A^*$ אז $h(x_1) = x_1 \neq x_2 = h(x_2)$.

אם $a_1 \in A^*$ ו- $a_2 \in A \setminus A^*$ ללא הגבלת הכלליות אז $h(x_1) = f(x_1) \in A^*$, $h(x_2) = x_2 \notin A^*$ ולכן $h(x_1) \neq h(x_2)$.
נוכיח כי h על B . יהי $b \in B$, ונפריד למקרים.

אם $b \in A \setminus A^*$ אז $h(b) = b$ ואם $b \in A^*$ אז ניקח $a \in A \setminus B$ ו- $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ כך ש- $b = f^n(a)$.

יהי $b' = f^{n-1}(a)$ ונסיק כי $b' = f(b') = f(f^{n-1}(a)) = b$.

□

5.2 מבוא לתורת הקבוצות האקסיומטית

נבחן מספר שאלות פתוחות שיש לנו:

1. יהיו A, B קבוצות כך שקיימת $g : B \rightarrow A$, האם בהכרח $|A| \leq |B|$?

ננסה לענות: נגדיר $a \in A$ ונגדיר $B_a = \{b \in B \mid g(b) = a\} \neq \emptyset$.

הבחנה: אם קיימת פונקציה $f : A \rightarrow B$ כך שלכל $a \in A$ מתקבל $f(a) \in B_a$ אז f חד-חד ערכית כמבוקש ו- $|A| \leq |B|$.

הגדרה 5.3 (אקסיומת הבחירה) לכל סדרת קבוצות לא ריקות $\langle B_i \mid i \in I \rangle$ כאשר I קבוצת אינדקסים קיימת פונקציה (פונקציית בחירה) $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$, כלומר

$$\forall i \in I : f(i) \in B_i$$

תרגיל: הראו כי בהינתן אקסיומת הבחירה כי לכל A, B אם יש $g : B \rightarrow A$ אז $|A| \leq |B|$.

6 שיעור 6 — 19.5.2024

6.1 הגישה האקסיומטית לתורת הקבוצות

הגדרה 6.1 (כללי יסוד) 1. כל האובייקטים המתמטיים הם קבוצות.

2. כל הקבוצות מתוארות בשפה היסודית הכוללת סימנים של $=, \in$, וגם סימנים לוגיים סטנדרטים כמו סוגריים, כמתים, קשרים ומשתנים וכן הלאה.

דוגמה 6.1 המספרים הטבעיים הם קבוצות, שכן הם אובייקטים מתמטיים, נגדיר

$$0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, n + 1 = n \cup \{n\}$$

דוגמה 6.2 זוג סדור הוא קבוצה:

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

דוגמה 6.3 נתאר את הקבוצה הריקה

$$\varphi_0(x) = \forall y : y \notin x$$

תכונה זו משמעותה היא שעבור x לכל קבוצה y אז $y \notin x$.

דוגמה 6.4 הכלה בין קבוצות $x \subseteq y$ תיכתב על-ידי

$$\forall z : z \in x \implies z \in y$$

דוגמה 6.5 כיצד נבטא את הביטוי $x = 1$ בשפה פורמלית?

אנו יודעים כי $1 = \{\emptyset\}$ ובשפה הפורמלית

$$\varphi_1(x) = \exists y : \varphi_0(y) \wedge y \in x \wedge \forall z(z \in x \implies z = y)$$

את הביטוי $x = 2$ נוכל לכתוב על-ידי

$$\varphi_2(x) = \forall z(z \in x \implies (\varphi_0(z) \vee \varphi_1(z))) \wedge \exists x_0(x_0 \in x \wedge \varphi_0(x_0)) \wedge \exists x_1(x_1 \in x \wedge \varphi_1(x_1))$$

הגדרה 6.2 (תכונה) תכונה $p(x)$ של קבוצות היא כזו הניתנת לתיאור בשפה הפורמלית.

דוגמה 6.6 $x \subseteq y$ היא אכן תכונה.

הערה נרשה לעשות שימוש בקבוצות a כחלק מתיאור של תכונה.

דוגמה 6.7 $a = 2$. התכונה $p(x) = x \subseteq 2$ ניתנת לתיאור בשפה הפורמלית.

עתה נשאל את עצמנו, מהן קבוצות?

הניסיון הנאיבי הוא לכל $p(x)$ יש קבוצה $\{x \mid p(x)\}$ (קבוצת האובייקטים שמקיימים p).

ניתקל כך בבעיה, ראינו כי $x \notin x := p(x)$ הוא תכונה אבל לא תיתכן קבוצה $\{x \mid x \notin x\}$.

הגישה שלנו היא לרום רשימת אקסיומות $ZFC = ZF + AC$, שתכולתן לתת לנו תיאור של הקבוצות הקיימות.

הערה באופן כללי, לאוסף מהצורה

$$\{x \mid p(x)\}$$

כאשר $p(x)$ תכונה כלשהי, יקרא מחלקה.

הערה כל קבוצה A היא מחלקה, שכן ניתן לרשום

$$A = \{x \mid x \in A\}$$

מחלקה שאינה קבוצה תיקרא מחלקה נאותה.

דוגמה 6.8

$$\{x \mid x \notin x\}$$

היא מחלקה נאותה על-פי משפט ראסל ו-ZF.

הגדרה 6.3 (המערכת ZF) 1. אקסיומת ההיקפויות: שתי קבוצות שוות אם ורק אם יש בהן אותם איברים,

$$\forall x \forall y (x = y \iff (\forall z, z \in x \iff z \in y))$$

2. אקסיומת הקבוצה הריקה: קיימת קבוצה ריקה

$$\exists x \varphi_0(x)$$

3. אקסיומת הזוג הלא סדור: לכל קבוצות x ו- y קיימת $\{x, y\}$,

$$\forall x \forall y \exists z [x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w (w \in z \implies w = x \vee w = y)]$$

הערה: נסיק קיום יחידונים לכל x על-ידי $\{x, x\} = \{x\}$.

4. אקסיומת האיחוד: לכל קבוצה x קיימת הקבוצה $\cup x$,

$$\forall x \exists y \forall w [w \in y \iff \exists z (z \in x \wedge w \in z)]$$

הערה: נסיק כי לכל זוג קבוצות a, b קיימת הקבוצה $a \cup b$, שכן מאקסיומת הזוגות קיימת הקבוצה $x = \{a, b\}$ ומאקסיומת האיחוד קיימת קבוצה $a \cup b = \cup x$.

5. אקסיומת קבוצת החזקה: לכל קבוצה x קיימת קבוצת חזקה $\mathcal{P}(x)$ (קבוצה שאיבריה הם תתי-קבוצות של x),

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff z \subseteq x)$$

6. אקסיומת הסדירות (ביסוס היטב): אם x קבוצה לא ריקה אז קיים איבר $y \in x$ שהוא מזערי ביחס \in (כלומר אין $z \in x$ כך ש- $z \in y$).

$$\forall x [\neg \varphi_0(x) \implies \exists y (y \in x \wedge \forall z (z \in x \implies \neg z \in y))]$$

מסקנה: לא קיים x כך ש- $x \in x$, שכן אחרת $x = \{a\}$ סותרת את אקסיומת הסדירות.

מסקנה 2: לא יתכן a, b קבוצות כך ש- $b \in a \wedge a \in b$, על-ידי $x = \{a, b\}$.

מסקנה 3: לא תיתכן סדרה אינסופית יורדת ביחס \in של קבוצות, דהינו

$$x_0 \ni x_1 \cdots \ni x_n \ni \dots$$

שכן $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ לא מקיימת את אקסיומת הסדירות.

7. אקסיומת האינסוף: הכנה:

סימון: לכל קבוצה x נגדיר $s(x) = x \cup \{x\}$ (מובטח קיום מתוך האקסיומות הקודמות).

הגדרה: קבוצה I נקראת אינדוקטיבית אם $\emptyset \in I$, וגם $\forall x (x \in I \implies s(x) \in I)$.

האקסיומה משמעותה היא שיש קבוצה אינדוקטיבית,

$$\exists y [\emptyset \in y \wedge \forall x (x \in y \implies s(x) \in y)]$$

8. אקסיומת (סכמת) הפרדה: לכל תכונה $p(x)$ וקבוצה A קיימת קבוצה $\{x \in A \mid p(x)\}$,

נניח כי $p(x)$ היא תכונה מוגדרת על-ידי נוסחה $\varphi(x, a_1, \dots, a_k)$ אז

$$\forall x \forall a_1, \dots, a_k \exists y [\forall z (z \in y \iff z \in x \wedge \varphi(z, a_1, \dots, a_k))]$$

הערה: זו סכמה של אקסיומות במובן שלכל נוסחה (תכונה) כותבים אקסיומה עבורה.

9. אקסיומת (סכמת) החלפה:

הכנה:

נאמר כי תכונה $p(x, y)$ מקיימת את תנאי הפונקציה אם לכל x_1, y_1, x_2, y_2 אם $p(x_1, y_1)$ וגם $p(x_2, y_2)$ וגם $x_1 = x_2$ אז $y_1 = y_2$.

הערה: אם $p(x, y)$ מקיימת את תנאי הפונקציה אז נאמר כי המחלקה $F = \{\langle x, y \rangle \mid p(x, y)\}$ היא מחלקה המקיימת את תנאי הפונקציה.

האקסיומה קובעת כי לכל תכונה $p(x, y)$ המקיימת את תנאי הפונקציה ולכל קבוצה A קיימת קבוצה שהיא

$$F[A] = \{y \mid \exists x \in A \overbrace{\langle x, y \rangle}^{p(x, y)} \in F\}$$

תרגיל: לרשום את האקסיומה (סכמה) בשפה הפורמלית.

תשובה לשאלה המקורית היא שקבוצה היא כל אוסף שהאקסיומות מוכיחות שהוא קבוצה.

6.2 בניות ראשונות ב-ZF

טענה 6.4 לכל קבוצות a, b קיימת קבוצה $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ והיא הזוג הסדור של a, b , מסומן ב- $\langle a, b \rangle$ או (a, b) .

תרגיל 6.1 הראו כי לכל קבוצות a_1, b_1, a_2, b_2 אם $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle$ אז $a_1 = a_2$ וגם $b_1 = b_2$.

טענה 6.5 לכל זוג קבוצות A, B קיימת המכפלה הקרטזית

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

הוכחה. יהיו A, B קבוצות. הראינו כי קיימת הקבוצה $A \cup B$.

מאקסיומת חזקה קיימת קבוצת חזקה $\mathcal{P}(A \cup B)$. נשים לב כי לכל $a \in A, b \in B$ מתקיים $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

גם מאקסיומת החזקה קיימת גם $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, ולכן נשים לב כי לכל $a \in A, b \in B$ מתקיים

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

נשתמש באקסיומת הפרדה עבור התכונה

$$p(z) = \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge z = \langle a, b \rangle)$$

מאקסיומת ההחלפה נסיק כי קיימת קבוצה

$$\{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\} = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid p(z)\}$$

□

7.1 התורה האקסיומטית

תזכורת: לפי הגישה האקסיומטית כל אובייקט הוא קבוצה. ישנה רשימת אקסיומות ZF אשר קובעת כללים למנהן הקבוצות. מחלקה היא אוסף של קבוצות הנתונה על-ידי $p(x)$ תכונה כלשהי. מחלקות נאותות הן מחלקות שאינן קבוצות. באופן פורמלי (בשפה הפורמלית) לא ניתן להשתמש במחלקות נאותות כקבוצות. אף-על-פי כן בהינתן מחלקות $A = \{x \mid p_A(x)\}$ ו- $B = \{x \mid p_B(x)\}$ הנקבעות על-ידי תכונות P_A, P_B אנו רושמים לעיתים באופן לא פורמלי $x \in A$ או $A \subseteq B$. המשמעות של ביטויים אלה הם

$$P_A(x), \quad \forall x(P_A(x) \implies P_B(x))$$

בהתאמה.

סימון 7.1 $V = \{x \mid x = x\}$ מחלקת כל הקבוצות.

טענה 7.2 V אינו קבוצה (היא מחלקה נאותה).

הוכחה. נניח כי V קבוצה ונתבונן בתכונה $p(x) = x \notin x$, מאקסיומת ההפרדה נסיק כי יש קבוצה

$$\{x \in V \mid x \notin x\} = \{x \mid x \notin x\}$$

בסתירה לטיעון הפרדוקס של ראסל. □

בסוף השיעור הקודם הוכחנו את הטענות

טענה 7.3 לכל זוג קבוצות a, b קיימת הקבוצה

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

טענה 7.4 לכל זוג קבוצות X, Y קיימת קבוצת המכפלה הקרטזית

$$X \times Y = \{\langle a, b \rangle \mid a \in X, b \in Y\}$$

טענה 7.5 לכל זוג קבוצות X, Y קיימת קבוצת כל היחסים $R \subseteq X \times Y$

הוכחה. מהטענה הקודמת $X \times Y$ קיימת ונשים לב כי קבוצת כל היחסים בין X ל- Y היא $\mathcal{P}(X \times Y)$, ולכן הקיום נובע מאקסיומת החזקה. □

טענה 7.6 לכל זוג קבוצות X, Y קיימת קבוצת כל הפונקציות $f : X \rightarrow Y$.

הוכחה. כל פונקציה $f : X \rightarrow Y$ היא יחס $f \subseteq X \times Y$ שמקיים את תכונת נפונקציה $p_f(x)$ ומאקסיומת ההפרדה קיימת.

$$\{f \in \mathcal{P}(X \times Y) \mid p_f(f)\}$$

□

טענה 7.7 בהינתן קבוצות X, Y ותכונה $p(x, y)$ שמקיימת את תנאי הפונקציה וכך שלכל $x \in X$ קיים $y \in Y$ כך ש- $p(x, y)$ אז קיימת פונקציה $f : X \rightarrow Y$ המתארת את p .

טענה 7.8 באופן דומה לטענה הקודמת לכל תכונה $p(x, y)$ המקיימת את תכונת יחס השקילות על קבוצה נתונה X אז קיים יחס שקילות $E \subseteq X \times X$ שמתאים לתיאור של $p(x, y)$.

הוכחה כתרגיל.

טענה 7.9 לקבוצת קבוצות $X \neq \emptyset$ קיימת קבוצה

$$\cap X = \{z \mid \forall y \in X : z \in y\}$$

הוכחה. מאקסיומת האיחוד קיימת $\cup X$ ונשים לב כי

$$\{z \mid \forall y \in X : z \notin y\} = \{z \in \cup X \mid \forall y \in X : z \in y\}$$

מאקסיומת ההפרדה קיימת הקבוצה

$$\{z \in \cup X \mid \forall y \in x : z \in y\}$$

ולכן $\cap X$ קיים.

□

7.2 קבוצת הטבעיים

הגדרנו לכל קבוצה x את הקבוצה $s(x) = x \cup \{x\}$, והוכחנו בשיעור הקודם מ-ZF שהיא אכן קיימת לכל x . נרצה להשתמש במושג $s(x)$ כדי להגדיר את המספרים הטבעיים, הרעיון הוא

$$0 = \emptyset, \quad 1 = s(0) = \{\emptyset\}, \quad 2 = s(1) = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \dots$$

תזכורת: אקסיומת האינסוף מבטיחה קיום קבוצה אינדוקטיבית I , כך שמתקיים

$$\emptyset \in I, \quad \forall x \in I, s(x) \in I$$

טענה 7.10 קיימת קבוצה אינדוקטיבית מינימלית I^* ביחס הכלה, כלומר $I^* \subseteq I$ לכל אינדוקטיבית I .

הוכחה. שלב א': נוכיח כי בהינתן $X \neq \emptyset$ קבוצה שאבריה הן קבוצות אינדוקטיביות אז גם $I_x = \cap X$ אינדוקטיבית.

$$\emptyset \in \cap X \text{ כי לכל } I \in X \text{ היא אינדוקטיבית ולכן } \emptyset \in I.$$

באופן דומה לכל $x \in \cap X$ נקבל $x \in I$ לכל $I \in X$ אינדוקטיבית.

$$\text{לכן } s(x) \in I \text{ לכל } I \in X \text{ ולכן } s(x) \in \cap X.$$

שלב ב': ניקח קבוצה אינדוקטיבית כלשהי I_0 , מאקסיומת החזקה והפרדה נסיק שקיימת $X = \{I \subseteq I_0 \mid I \text{ אינדוקטיבית}\}$

$$I_0 \in X \text{ שכן } X \neq \emptyset. \text{ משלב א' נקבל } I^* = \cap X \text{ היא אינדוקטיבית.}$$

שלב ג': נטען כי I^* אינדוקטיבית מינימלית ב- \subseteq .

תהי J קבוצה אינדוקטיבית אז $I_0 \cap J$ אינדוקטיבית ותת-קבוצה של I_0 ולכן שייכת ל- X . נסיק כי $I^* = \cap X \subseteq J \cap I_0 \subseteq J$, כלומר $I^* \subseteq J$.
כמבוקש. □

הגדרה 7.11 (קבוצת הטבעיים) קבוצת הטבעיים \mathbb{N} היא הקבוצה האינדוקטיבית המינימלית (I^* מהטענה האחרונה).

מסקנה 7.12 מספר טבעי היא קבוצה $n \in \mathbb{N}$.

דוגמה 7.1 $0 = \emptyset \in \mathbb{N}$ נקבל גם $1 = s(0) \in \mathbb{N}$.

משפט 7.13 (אינדוקציה על הטבעיים) תהי $p(x)$ תכונה. אם $p(0)$ מתקיים וגם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $p(n) \implies p(n+1)$ אז $p(n)$ מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה. בהינתן תכונה p נגדיר קבוצת הטבעיים המקיימים את p .

$$I_p = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ מתקיים}\} \text{ נשים לב כי מההנחות על } p \text{ מתקיים } 0 = \emptyset \in I_p \text{ ולכל } n \in I_p \text{ גם } s(n) \in I_p.$$

נסיק כי $I_p \supseteq \mathbb{N}$ היא קבוצה אינדוקטיבית.

$$\text{מכיוון ש-}\mathbb{N} \text{ היא אינדוקטיבית מינימלית ב-}\subseteq \text{ נסיק } I_p = \mathbb{N} \text{ ולכן } \forall n \in \mathbb{N} : p(n).$$

□

הגדרה 7.14 (יחס הסדר על הטבעיים) נגדיר עבור קבוצות $n, m \in \mathbb{N}$ את $n < m$ אם ורק אם $n \in m$.

נבקש להראות כי $<$ הוא יחס סדר על הטבעיים וכי הוא סדר טוב.

נוכיח מספר טענות למטרה זו.

טענה 7.15 לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n \subseteq \mathbb{N}$.

□

הוכחה. באינדוקציה על n כמובן $0 = \emptyset \subseteq \mathbb{N}$ נניח כי $n \in \mathbb{N}$ מקיים $n \subseteq \mathbb{N}$ ונקבל $s(n) = n \cup \{n\} \subseteq \mathbb{N}$.

הערה בעבר סימנו לכל $n \in \mathbb{N}$ את הקבוצה $[n] = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

נשים לב כי בפרשנות שלנו ל- \mathbb{N} נקבל $[n] = \{m \in \mathbb{N} \mid m \in n\}$.

טענה 7.16 לכל $n, m \in \mathbb{N}$ אם $n \in m$ אז $s(n) \in m$ או $s(n) = m$.

הוכחה. באינדוקציה על התכונה $p(m)$ לפיה לכל $n \in m$ מתקיים $s(n) = m$ או $s(n) \in m$.
 $p(0)$ נכון באופן ריק.

לצעד האינדוקציה נניח כי $p(m)$ נבדק להראות את $p(s(m))$, כלומר כי לכל $n \in s(m)$ חייב להתקיים $s(n) = s(m)$ או $s(n) \in s(m)$.
 נזכר $s(m) = m \cup \{m\}$. יהי $n \in s(m)$ ונחלק למקרים:

- אם $n \in m$ אז מהנחת האינדוקציה $s(n) = m$ או $s(n) \in m$ ובכל מקרה מכיוון ש- $m \subseteq s(m)$ נסיק כי $s(n) \in s(m)$.
- אם $n = m$ אז $s(n) = s(m)$.

□

טענה 7.17 לכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים ש- $0 \in m$ או ש- $0 = m$.

מושאר כתרגיל.

טענה 7.18 לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $n \in m$ או ש- $m = n$ או ש- $m \in n$.

הוכחה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נתבונן בתכונה $p_n(m)$ שאומרת ש- $n \in m$ או ש- $m = n$ או ש- $m \in n$.

נקבע $n \in \mathbb{N}$ ונוכיח באינדוקציה $p_n(m)$ מתקיים לכל m .

בסיס: $m = 0$ מתקיים מהטענה הקודמת.

נניח $p_m(n)$ ונוכיח $p_n(s(m))$, נפריד בין שלושה מקרים פשוטים:

- אם $n \in m$ אז $n \in s(m)$.
- אם $n = m$ אז $n \in s(m)$.
- אם $m \in n$ אז מטענה קודמת נקבל $s(m) \in n$ או ש- $s(m) = n$.

□