פתרון ממ"ן 13 – אלגברה לינארית 2 (20229)

11 במאי 2023

שאלה 1

יהי $V = M_{n\times n}^{\mathbb{R}}$ ותהי $f : V \times V \to \mathbb{R}$ אשר מוגדרת $f(A,B) = \text{tr}(A^t MB)$ לכל $A, B \in V$.

סעיף א'

נמצא תנאי מספיק והכרחי על M כך ש־f תהיה תבנית סימטרית.

על־פי שאלה 4.1.2 ההעתקה f היא בילינארית. נראה כי

$$f(A,B) = \text{tr}(A^t MB) = \text{tr}((A^t MB)^t) = \text{tr}((MB)^t A) = \text{tr}(B^t M^t A)$$

אילו הייתה M סימטרית אז $M = M^t$ ובהתאם גם

$$\text{tr}(B^t M^t A) = \text{tr}(B^t MA) = f(A,B) = f(B,A)$$

דהינו, תנאי מספק והכרחי כדי ש־f תהיה תבנית סימטרית הוא ש־M תהיה מטריצה סימטרית.

סעיף ב'

נגדיר $n = 2$, E הבסיס הסטנדרטי של V,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

נמצא את $[f]_E$:

על־פי שאלה 4.1.13 מתקיים

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

סעיף ג'

נמצא הצגה של f כסכום של תבנית בילינארית סימטרית ותבנית בילינארית אנטי־סימטרית עבור הנתונים אשר הוגדרו בסעיף הקודם.

נגדיר

$$g_1(A,B) = \frac{1}{2}(f(A,B) + f(B,A)), \qquad g_2(B,A) = \frac{1}{2}(f(A,B) - f(B,A))$$

על־פי שאלה 4.2.3 g_1, g_2 הן תבניות בילינאריות סימטרית ואנטי־סימטרית בהתאמה, ומחישוב ישיר מתקבל כי

$$f = g_1 + g_2$$

שאלה 2

נוכיח כי תבנית בילינארית $f \neq 0$ ניתנת להצגה כמכפלה של שתי תבניות לינאריות:

$$f(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j\right)$$

אם ורק אם הדרגה של f היא 1, נסמן גם $\rho f = 1$.

הוכחה. נניח כי f ניתנת להצגה כמכפלת שתי תבניות לינאריות כפי כמתואר לעיל בבסיס נתון ונוכיח כי $\rho f = 1$.

נגדיר את הבסיס $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, אז המטריצה המייצגת את f היא

$$[f]_W = \begin{pmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & \cdots & b_1c_n \\ b_2c_1 & b_2c_2 & \cdots & b_2c_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_nc_1 & b_nc_2 & \cdots & b_nc_n \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי כלל השורות תלויות לינארית, ואנו יודעים כי חייבת להיות לפחות שורה אחת שונה מאפס (שאם לא כן $f = 0$) ולכן $\rho f = 1$.

נניח כי $\rho f = 1$ ונוכיח כי קיימות שתי תבניות לינאריות עבורן f היא מכפלתן.

מדרגה זו נובע כי קיים בסיס W עבורו $[f]_W$ היא מטריצה בה כלל השורות תלויות לינארית בווקטור יחיד, נסמנו ב־b, ונגדיר (c_n) סדרת סקלרים אשר מהווים המקדמים של הווקטור במטריצת הייצוג

$$[f]_W = \begin{pmatrix} b_1c_1 & \cdots & b_1c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_nc_1 & \cdots & b_nc_n \end{pmatrix}$$

ובהתאם לפי מסקנה 4.1.6 מתקיים

$$f(x,y) = [x]_W[f]_W[y]_W = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i x_i c_j y_j = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j\right)$$

מש"ל

שאלה 3

תהי תבנית על $\mathbb{R}^2$ המוגדרת על־ידי:

$$f\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$$

סעיף א'

נוכיח כי f תבנית בילינארית.

מטענה 4.1.4 נובע ש־f תבנית בילינארית, ונבנה לה מטריצת ייצוג:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

מלמה 4.2.2 נובע ש־f תבנית סימטרית. נמצא בסיס בו f מיוצגת על־ידי מטריצה אלכסונית.

התבנית הריבועית המסומכת ל־f היא

$$q(x) = f(x,x) = f((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1+2x_2)^2$$

נגדיר משתנה חדש $z \in \mathbb{R}^2$, על־פי ערך q נגדיר $z_1 = x_1 + 2x_2$, ולכן בהתאם $q(z) = z_1^2 + 0z_2$. נבחר $z_2 = x_2$ ונראה כי

$$f(z,z') = z_1z_1'$$

בהתאם מטריצת הייצוג לפי z של f היא

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נגדיר W הבסיס שמקיים $[f]_W = B$. אז מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי ל־W היא לפי שיטת לגרנז':

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מחישוב עולה כי $x_2 = z_2$ וכי $x_1 = z_1 - 2z_2$ ולכן בהתאם

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ובהתאם להגדרת מטריצת המעבר גם $W = ((1,0),(-2,1))$.

סעיף ב'

נבדוק את נכונות נוסחת המעבר מן הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ ל־W.

על־פי משפט 4.5.1 התבנית f מקיימת

$$A = [f]_E = M^t[f]_W M = M^t B M$$

נציב:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שוויון זה אכן מתקיים בחישוב ישיר, ולכן בהתאם נוסחת המעבר על־ידי שימוש במטריצת המעבר M נכונה.

שאלה 4

סעיף א'

תהי תבנית ריבועית $q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כאשר $n\in\mathbb{N}$ המוגדרת על־ידי

$$q(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

נמצא ל־q תבנית אלכסונית.

נגדיר $A=[q]_E$ מטריצת ייצוג סימטרית לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$, מהגדרת q נובע:

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12&\dots\\ \frac12&1&\frac12&\dots\\ \frac12&\frac12&1&\dots\\ \vdots&&\ddots&\ddots\end{pmatrix}$$

בשל היות המטריצה A סימטרית אז אנו יודעים כי היא חופפת למטריצה אלכסונית, וחפיפה בממשיים מתלכדת עם דמיון אורתוגונלי, נחשב את ערכיה העצמיים של A:

$$\begin{vmatrix}t-1&-\frac12&-\frac12&\dots\\ -\frac12&t-1&-\frac12&\dots\\ -\frac12&-\frac12&t-1&\dots\\ \vdots&&\ddots&\ddots\end{vmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+\sum_{i=2}^{n}R_i}\begin{vmatrix}t-\frac{n+1}{2}&t-\frac{n+1}{2}&t-\frac{n+1}{2}&\dots\\ -\frac12&t-1&-\frac12&\dots\\ -\frac12&-\frac12&t-1&\dots\\ \vdots&&\ddots&\ddots\end{vmatrix}$$

$$\to\left(t-\frac{n+1}{2}\right)\begin{vmatrix}1&1&1&\dots\\ -\frac12&t-1&-\frac12&\dots\\ -\frac12&-\frac12&t-1&\dots\\ \vdots&&\ddots&\ddots\end{vmatrix}\xrightarrow{R_i\to R_i+R_1/2|1<i\le n}\left(t-\frac{n+1}{2}\right)\begin{vmatrix}1&1&1&\dots\\ 0&t-\frac12&0&\dots\\ 0&0&t-\frac12&\dots\\ \vdots&&\ddots&\ddots\end{vmatrix}$$

$$\to\left(t-\frac{n+1}{2}\right)\left(t-\frac12\right)^{n-1}$$

אז כלל ערכיה העצמיים הם $\frac12,\frac{n+1}{2}$. נוכל בדרך דומה לתהליך מציאת הערך העצמי $\frac{n+1}{2}$ להגיע למסקנה כי $(1,1,\dots)$ וקטור עצמי של הערך.
נחשב את המרחב העצמי של $\frac12$:

$$Ax=\frac12x$$

ובהמרה למערכת משוואות הומוגנית

$$\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&\frac12&\dots\\ \frac12&\frac12&\frac12&\dots\\ \frac12&\frac12&\frac12&\dots\\ \vdots&&\ddots&\ddots\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&\frac12&\dots\\ 0&0&0&\dots\\ 0&0&0&\dots\\ \vdots&&\ddots&\ddots\end{pmatrix}\to\mathrm{Sp}\{(1,0,0,\dots,-1),(0,1,0,\dots,-1),\dots,(0,0,0,\dots,1,-1)\}$$

קל לבדוק כי מצאנו n וקטורים בלתי תלויים, ולכן A חופפת למטריצה האלכסונית

$$\begin{pmatrix} \frac{n+1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

נמצא תבנית בילינארית סימטרית הקוטבית ל־q.

למעשה, המטריצה A כבר מייצגת העתקה כזו:

$$p(x,y) = \frac{n+1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2}x_2y_2 + \cdots + \frac{1}{2}x_ny_n$$

סעיף ב'

נמצא בסיס שבו התבנית הריבועית q היא בעלת צורה אלכסונית.

בסעיף הקודם מצאנו מטריצה אלכסונית כמו גם ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים שלהם, של מטריצת הייצוג של התבנית.

כדי למצוא מטריצת לכסון אוניטרית נצטרך למצוא גם בסיס אורתונורמלי מתאים, אותו נוכל לבנות מהבסיס הקיים:

$$B = ((1,1,\dots),(1,0,0,\dots,-1)\dots)$$

נגדיר u_i הווקטור הנורמלי ה־i.

$$u_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\dots)$$

נשים לב כי הווקטור הראשון אורתוגונלי לכל שאר הווקטורים, לכן כדי לנרמל את הבסיס נוכל לבצע הליך גרם־שמידט רק לווקטורים העצמיים של $\frac{1}{2}$.

$$u_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,\dots,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\dots,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

נשים לב כי מכפלת כל שני וקטורים עצמיים שונים של $\frac{1}{2}$ היא 1 בשל האיבר המשותף האחרון שלהם וחוסר התלות ללא התיחסות אליו.

$$v_3 = (0,1,0,\dots,-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}u_2 = (-\frac{1}{2},1,0,\dots,-\frac{1}{2})$$
$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,0,\dots,-1)$$

ניתן להוכיח באינדוקציה שהביטוי $(b_n,u_m)u_m$ כאשר $m<n$ שווה ל־$(0,\dots,-1,0,\dots,1)$.

בהתאם, לכל i כאשר $2 \le i \le n$ מתקיים $v_i = (-1,\dots,i-1,0,\dots,-1)$.

לאחר נרמול נקבל כי $u_i = \frac{1}{\sqrt{i^2-i+1}}(-1,\dots,i-1,0,\dots,-1)$.

נגדיר בסיס $(u_1,u_2,\dots)$. בסיס זה הוא אורתונורמלי אשר בו לתבנית הריבועית q צורה אלכסונית כפי שמופיעה בסעיף א'.

שאלה 5

סעיף א'

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ כך ש־$\dim V \geq 2$.

נוכיח שאם $q : V \to \mathbb{C}$ תבנית ריבועית, אז קיים $v \neq 0$ כך ש־$q(v) = 0$.

הוכחה. תהי $q : V \to \mathbb{C}$ תבנית ריבועית ויהי $v \in V \neq 0$.

נגדיר W בסיס אורתונורמלי עבורו מטריצת הייצוג של q אלכסונית.

מגודל ממד V נובע כי סדר המטריצה A לפחות 2, נגדיר λ_1, λ_2 שני איברי האלכסון הראשונים.

נגדיר $[v]_W = \left(\sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_1} i, 0, \ldots\right)^t$. נציב:

$$q(v) = \lambda_1 \left(\sqrt{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_2 \left(\sqrt{\lambda_1} i\right)^2 + 0 \ldots = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \cdot (-1) = 0$$

מצאנו וקטור $v \neq 0$ אשר עבורו $q(v) = 0$. **מש"ל**

סעיף ב'

התכונה המתקיימת בסעיף א' מעל $\mathbb{C}$ לא חלה תמיד מעל $\mathbb{R}$, דהינו עבור תבנית ריבועית $q : V \to \mathbb{R}$, כאשר V מרחב מעל $\mathbb{R}$ עבורו $\dim V \geq$ לא קיים וקטור $v \neq 0$ עבורו $q(v) = 0$.

הוכחה. בשל השקילות בין תבניות ריבועיות מעל בסיסים שונים נוכל להראות כי תכונה זו לא מתקיימת עבור בסיס W עבורו q אלכסונית.

במצב זה $q(v) = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \cdots$.

מתכונות $\mathbb{R}$ נובע כי $\lambda_i v_i^2 \geq 0$ לכל $1 \leq i \leq \dim V$, ובפרט $\lambda_i v_i^2 =$ אם ורק אם λ_i או v_i שווים ל־0. דהינו, $q(v) = 0$ אם ורק אם $v_i = 0$ או שיש ל־q ערך עצמי 0.

אילו נניח כי אין ל־q ערך עצמי 0 אז התכונה הנדונה לא חלה כלל. **מש"ל**