פתרון ממ"ן 11 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

15 ביולי 2023

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי

$$\frac{2}{3\pi} \le \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{1}{\pi}$$

הוכחה. תחילה נגדיר

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

זוהי כמובן פונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית. נגדיר גם $g(x) = \frac{x^2}{2\pi}$ ונראה כי מתקיים $g(x) \ge f(x)$ לכל $x \ge 2\pi$. ממשפט 1.26 נובע כי

$$\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx \le \int_{2\pi}^{3\pi} g(x)dx = \frac{x}{\pi}\Big|_{2\pi}^{3\pi} = \frac{1}{\pi}$$

נגדיר גם

$$h(x) = \frac{\sin x}{3\pi}$$

כמובן שבתחום האינטגרל המונה של f ו־h זהים, אך $x \le 3\pi$ בתחום, ולכן גם $h(x) \le f(x)$ לכל התחום, ומתקיים

$$\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx \ge \int_{2\pi}^{3\pi} h(x)dx = \frac{-\cos x}{3\pi}\Big|_{2\pi}^{3\pi} = \frac{2}{3\pi}$$

אז מצאנו כי

$$\frac{2}{3\pi} \le \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{1}{\pi}$$

מש"ל

סעיף ב'

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,2]$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$a_n = \int_{1/n}^{2/n} f(x)dx$$

נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} na_n = f(0)$

הוכחה. נגדיר $F(x)$ הפונקציה הקדומה של $f(x)$, לכן על־פי הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסמלי מתקיים

$$\int_{1/n}^{2/n} f(x)dx = a_n = F(2/n) - F(1/n)$$

מהגדרת הגבול לפי היינה ועל־פי משפט הרכבת פונקציות בגבול מאינפי 1 נקבל עבור הרכבת הפונקציה $g(t) = \frac{1}{t}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} na_n &= \lim_{t\to 0} \frac{F(2t) - F(t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{F(2t) - F(2\cdot 0) - F(t) + F(0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} 2\frac{F(2t) - F(2\cdot 0)}{2t} - \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} \\
&= 2f(0) - f(0)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} na_n = f(0)$$

מש"ל

סעיף ג'

נגדיר

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sqrt{\arctan t}\, dt$$

נוכיח כי $f(x) < \sqrt{\arctan(x+1)}$ לכל $x \geq 0$.

הוכחה. ידוע כי $g(x) = \sqrt{\arctan x}$ היא פונקציה עולה וחסומה, לכן $g(x) < g(x+1)$

להסביר למה המשיק לפונקציה g תמיד מעל הפונקציה עצמה.

נשים לב כי x ערך קבוע באינטגרל

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+1} g(t)\, dt &\leq \int_x^{x+1} g'(x+1)(t-x-1) + g(x+1)\, dt \\
&= g'(x+1)\frac{t^2}{2} - g'(x+1)(x+1)t + g(x+1)t\Big|_x^{x+1} \\
&= g'(x+1)(2x+1)/2 - g'(x+1)(x+1) + g(x+1) \\
&= \frac{-g'(x+1)}{2} + g(x+1) \\
&< g(x+1)
\end{aligned}$$

מצאנו כי $f(x) < g(x+1)$.

מש"ל

שאלה 2

נחשב את

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} t^2 \arctan(e^t)dt}{\sqrt{x^3}}$$