פתרון מטלה 06 — תורת הקבוצות (80200)

17 ביוני 2024

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח כי הסדר $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ הוא סדר מבוסס היטב.

הוכחה. תהי $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{N}$ ויהי $\langle B, | \cap | \rangle$ הצמצום של הסדר.
B היא תת־קבוצה של הטבעיים ולכן נוכל להסיק כי יש בה איבר מינימלי ביחס ל־$\leq$.
נסמן איבר זה על־ידי a ונראה כי הוא גם מינימלי על־פי $|$:
נבחין כי לכל איבר ב־$b \in B$ או ש־$b \mid a$, או ש־$a \mid b$, אבל במקרה זה ידוע גם כי $a \leq b$ ולכן מתכונות המחלק נקבל כי $a = b$, או ששני הכיוונים לא מתקיימים, ונקבל כי a מינימלי. $\square$

סעיף ב'

נמצא מינימום ומקסימום ב־$\langle \mathbb{N}, | \rangle$.

עבור מינימום נבדוק ונראה כי 1 מקיים את התנאים.
ידוע כי $1 \mid a$ לכל $a \in \mathbb{N}$ מתכונות הכפל.

נראה כי $0 \in \mathbb{N}$ הוא מקסימום.
על־פי הגדרת המחלק לכל $b \in \mathbb{N}$ נקבל כי $0 \cdot b = 0$ ולכן בהתאם $b \mid 0$, וכמובן ש־0 לא מחלק אף מספר על־פי הגדרה זו.

סעיף ג'

נוכיח שב־$\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$ אין איברים מקסימליים.

הוכחה. נניח בשלילה כי אכן יש איבר מקסימלי בקבוצה, ונסמנו על־ידי t, וידוע כי $1 \leq t$, ולכן $t < 2t$.
נקבל כי $t \mid 2t$ אבל $2t \nmid t$ ובהתאם נובע כי t לא מקסימלי, ובכלל אין מקסימום בסדר זה. $\square$

סעיף ד'

נוכיח כי ב־$\langle \mathbb{N} \setminus \{1\}, | \rangle$ אין מינימום.

הוכחה. נניח בשלילה כי t איבר מינימלי, וידוע כי $2 \leq t$, ונבחן את $2t + 1$.
מהגדרת המחלק נקבל ישירות כי $t \nmid 2t + 1$ ובהתאם t הוא לא מינימום, ובהתאם אין מינימום בקבוצה זו. $\square$

נבדוק מיהם האיברים המינימליים בסדר.
התשובה היא כלל הראשוניים, שכן כל מספר פריק ניתן לפרק לראשוניים, ומהסדר שהגדרנו נקבל כי הראשוניים מחלקים את הפריקים המורכבים מהם.
לעומת זאת, אין מספר שמחלק את הראשוניים מלבד 1, שאיננו בקבוצה, והמספרים עצמם, ולכן הם עומדים בהגדרת המינימלי.

שאלה 3

תהי A קבוצה. נוכיח כי הסדר החלקי $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$ מבוסס היטב אם ורק אם A סופית.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי הסדר החלקי מבוסס היטב ונוכיח כי A סופית.

נניח בשלילה כי A לא סופית. יהי $a_0 \in A$ איבר כלשהו, A אינסופית ולכן נוכל להסיק כי קיים כזה. נגדיר $A_1 = A \setminus \{a_0\}$.

ידוע כי A_1 אינסופית, ולכן נוכל להגדיר a_1 באופן דומה, וכך גם A_2 וכן הלאה.

אילו נקבל עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו כי A_n לא קיים איבר $a_{n+1} \in A$ נקבל סתירה לאינסופיות A עצמה, ולכן נוכל להניח כי $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ היא עצמה קבוצה אינסופית.

עוד נבחין כי $A_n \subseteq A_{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. עתה נסיק מהעובדה שהסדר מבוסס היטב כדי לקבוע כי קיים איבר מינימלי לקבוצה זו, ולכן נקבל כי זהו גם מינימום.

קיבלנו אם כך שקיים A_n כלשהו שהוא מינימלי, דהינו לא קיים $A_n \subset A_{n+1}$ בסתירה לאינסופיות של A.

לכן נסיק כי A היא סופית.

כיוון שני: נניח כי A סופית ונוכיח כי הסדר מבוסס היטב.

תהי $B \subseteq \mathcal{P}(A)$, אז קיים $C \in B$ לו יש מספר מינימלי של איברים, כלל הקבוצות הן סופיות ולכן מותר לנו להניח כן.

לכן מתכונות ההכלה לקבוצות סופיות נוכל להסיק כי לכל $D \in B$ או שאין יחס בין C ו־D, או ש־$D \subseteq C$, ואילו $C \subseteq D$ אז גם $|C| \leq |D|$ וידוע גם $|D| \leq |C|$ ונקבל $C = D$, ומצאנו כי אכן C מינימלית ובהתאם הסדר מבוסס היטב. $\square$

שאלה 7

נמצא סדרים חלקיים $\langle A, \leq_A \rangle, \langle B, \leq_B \rangle$ כך שקיימים שיכונים $f : \langle A, \leq_A \rangle \to \langle B, \leq_B \rangle$ וגם $g : \langle B, \leq_B \rangle \to \langle A, \leq_A \rangle$ אבל שגם $\langle A, \leq_A \rangle \ncong \langle B, \leq_B \rangle$

נבחין כי כל שיכון הוא חד־חד ערכי, ואיזומורפיזם אם הוא גם על, ולכן ננסה למצוא סדרים כך שהשיכון מכל אחד לשני הוא חד־חד ערכי אבל לא על. נבחר את הקבוצות $\mathbb{N}, A = (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ יחד עם יחס הסדר של הטבעיים והיחס $\leq_2 \subseteq A \times A$ המוגדר על־ידי $(a, b) \leq_2 (a'b') \iff a + b \leq a' + b'$. נגדיר $f : \langle \mathbb{N}, \leq \rangle \to \langle \mathbb{N}^2, \leq_2 \rangle$ המוגדרת על־ידי $n \mapsto \langle n + 1, 1 \rangle$ ולכן כמובן נקבל כי $n \leq m \iff n + 1 \leq m + 1 \iff (n + 1, 1) \leq_2 (m + 1, 1)$ וזהו שיכון.

עוד נגדיר $g : \langle A, \leq_2 \rangle \to \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ על־ידי $(a, b) \mapsto a + b$ ולכן $(a, b) \leq (a', b') \iff a + b \leq a' + b'$ ולמעשה מצאנו כי זהו שיכון.

אבל נבחין כי שני השיכונים אינם על, f מסיבות ברורות, ו־g משום שאין זוג סדור אשר מוביל ל־$0 \in \mathbb{N}$.

שאלה 8

נגדיר

$$\langle \mathbb{N}, \trianglelefteq \rangle, \qquad \trianglelefteq = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n = 0 \lor 0 < m \le n\}$$
$$\langle X, \preceq \rangle, \qquad X = \{p^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}, p \text{is prime }\}, \preceq = \{\langle p^n, q^m\rangle \mid p < q \lor (p = q \land n \le m)\}$$

סעיף א'

נוכיח כי אלו הם סדרים טובים ונבדוק אם הם איזומורפיים.

הוכחה. נתחיל ב־$\langle \mathbb{N}, \trianglelefteq \rangle$.

נבחין כי הסדר הוא רפלקסיבי, שכן עבור 0 נקבל $n = 0$ ועבור $n > 0$ נקבל $0 < n \le n$.

נבחין כי הסדר גם אנטי־סימטרי, שכן יהיו שני מספרים $m \ne n$, אז אם $n = 0$ אז $m \trianglelefteq n$, אם $m = 0$ אז $n \trianglelefteq m$ ובכל מצב אחר $m < n$ או $n < m$ ובהתאם הסדר מתקיים לאחד הכיוונים תמיד.

מצאנו כי הסדר הוא סדר קווי, עתה נראה כי הוא גם מבוסס היטב. תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ ונבחן את $\langle A, \trianglelefteq \rangle$, זוהי תת־קבוצה של הטבעיים ולכן קיים איבר מינימלי a, ואם $a = 0$ אז ב־$A \setminus \{a\}$ יש איבר מינימלי או שהקבוצה ריקה. אם הקבוצה ריקה אז מצאנו איבר מינימלי, ואם היא לא ריקה וגם $a = 0$ אז נגדיר את a מחדש להיות המינימלי השני.

בכל מקרה נקבל כי $a > 0$ ולכן לכל מספר $b \in A$ נקבל כי אם $a \le b$ אז גם $a \trianglelefteq b$ ואם $b = 0$ אז מההגדרה גם $a \trianglelefteq b$, וקיבלנו כי a אכן מינימלית. בהתאם נובע כי $\langle \mathbb{N}, \trianglelefteq \rangle$ היא סדר טוב.

נעבור עתה להוכיח כי $\langle X, \preceq \rangle$ הוא סדר טוב אף הוא.

מההגדרה נובע ישירות כי הסדר הוא רפלקסיבי, נבדוק שלמות. יהיו p^n, q^m, ונניח כי $p^n \ne q^m$, אז או ש־$p \ne q$ ולכן הסדר מתקיים לאחד הכיוונים בהגדרה, או ש־$p = q$ ולכן נובע כי $m \ne n$ ושוב הוא מתקיים לאחד הכיוונים בהכרח. מצאנו כי זהו יחס קווי, עתה נוכיח סדר טוב. תהי $Y \subseteq X$ קבוצה לא ריקה, ונבחר קבוצה חדשה $Z = \{p \mid p^n \in Y\}$, זוהי קבוצה של ראשוניים ובפרט של טבעיים, ולכן נוכל לבחור מינימום ביחס לסדר הטבעיים, נסמנו p.

נבחן את $Y^* = \{p^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}, p^n \in Y\}$, ובקבוצה זו קיים מינימלי כמובן ישירות מההגדרה, ולכן נקבע p^n להיות מינימלי זה.

נחזור עתה לבחון את Y עצמה, ונבחין כי לכל q^m בקבוצה זו או $p \ne q$ ולכן גם $p < q$ ונקבל $p^n \preceq q^m$ או ש־$p = q$ ולכן $n \le m$ ועדיין נקבל כי $p^n \preceq q^m$ וקיבלנו כי יש איבר מינימלי ולכן הסדר הוא טוב. $\square$

נבחין כי הסדרים לא איזומורפיים, שכן $3 \preceq 2^n$ לכל n טבעי ולכן ניאלץ לקבוע $f(3) = 0$ כדי שיתקבל $f(2^n) \le f(3)$, אבל גם $5 \preceq 3^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולא נוכל לייצג זאת על־ידי הסדר $\trianglelefteq$.

סעיף ב'

נמצא את קבוצת המספרים שאינם עוקבים לאף מספר בכל קבוצה.

בסדר $\langle \mathbb{N}, \trianglelefteq \rangle$ נראה כי לכל $n > 1$ נוכל לבחור $n - 1$ והוא יהווה עוקב עבורו, לכן רק $0, 1$ חשודים. נבחין כי $1 \trianglelefteq 0$ ולכן 1 לא עוקב לאף מספר. ראינו כי לכל n מתקיים $n \trianglelefteq 0$ ולכן 0 הוא לא עוקב לאף איבר.

נבחן עתה את $\langle X, \preceq \rangle$, ונטען כי $\{p^1 \mid p \text{ is prime}, p > 2\}$ היא קבוצת האיברים שהם לא עוקבים לאף מספר.

יהי p כלשהו, ונבחר $q < p$ ראשוני קודם לו בקבוצת הראשוניים, אז נראה כי $q^n \preceq p$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן נוכל להסיק כי p^1 לא עוקב לאף איבר. בתהליך ההוכחה ראינו כי קבוצת איברים זו מכילה את כל האיברים שאינם עוקבים בלבד.

סעיף ג'

נמצא $A, B \subseteq \mathbb{R}$ כך שיתקיים

$$\langle A, \le_{\mathbb{R}} \rangle \cong \langle \mathbb{N}, \trianglelefteq \rangle, \qquad \langle B, \le_{\mathbb{R}} \rangle \cong \langle X, \preceq \rangle,$$

נגדיר $A=[0,1], B=\{n+\frac{1}{k}\mid n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{N}_{>0}\}$

נגדיר $f:\mathbb{N}\to A$ על־ידי

$$f(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 1-\frac{1}{n} & n>0\end{cases}$$

לכן נקבל $1-\frac{1}{n}\le 1 \iff f(n)\le f(0) \iff n\trianglelefteq 0$, וגם $n\trianglelefteq m \iff 0<n\le m \iff 0<1-\frac{1}{n}\le 1-\frac{1}{m} \iff$ $f(n)\le f(m)$.