תורת ההסתברות 1 — סיכום

31 באוקטובר 2024

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 29.10.2024

1.1 מבוא הקורס

נלמד לפי ספר שעוד לא יצא לאור שנכתב על־ידי אורי עצמו, הוא עוד לא סופי ויש בו בעיות ואי־דיוקים, תשיג את הספר הזה. כן יש הבדל בין הקורס והספר אז לא לסמוך על הסדר שלו גם כשאתה משיג אותו, אבל זו תוספת מאוד נוחה. יש סימון של כוכביות לחומר מוסף, כדאי לעבור עליו לקראת המבחן כי זה יתן לנו עוד אינטואיציה והעמקה של ההבנה.

נשים לב כי ענף ההסתברות הוא ענף חדש יחסית, שהתפתח הרבה אחרי שאר הענפים הקלאסיים של המתמטיקה, למעשה רק לפני 400 שנה נשאלה על־ידי נזיר במהלך חקר של משחק אקראי השאלה הראשית של העולם הזה, מה ההסתברות של הצלחה במשחק.

נעבור לדבר על פילוסופיה של ההסתברות. מה המשמעות של הטלת מטבע מבחינת הסתברות? ישנה הגישה של השכיחות, שמציגה הסתברות כתוצאה במקרה של חזרה על ניסוי כמות גדולה מאוד של פעמים. יש כמה בעיות בזה, לרבות חוסר היכולת להגדיר במדויק אמירה כזו, הטיות שנובעות מפיזיקה, מטבעות הם לא מאוזנים לדוגמה. הבעיה הראשית היא שלא לכל בעיה אפשר לפנות בצורה כזאת. ישנה גישה נוספת, היא הגישה האוביקטיבית או המתמטית, הגישה הזו בעצם היא תרגום בעיה מהמציאות לבעיה מתמטית פורמלית. לדוגמה נשאל את השאלה מה ההסתברות לקבל 6 בהגרלה של כל המספרים מ־1 עד מיליון. השיטה ההסתברותית קובעת שאם אני רוצה להוכיח קיום של איזשהו אוביקט, לפעמים אפשר לעשות את זה על־ידי הגרלה של אוביקט כזה והוכחה שיש הסתברות חיובית שהוא יוגרל, וזו הוכחה שהוא קיים. מה התחזיות שינבעו מתורת ההסתברות? לדוגמה אי־אפשר לחזות הטלת מטבע בודדת, אבל היא כן נותנת הבנה כללית של הטלת 1000 מטבעות, הסתברויות קטנות מספיק יכולות להיות זניחות ובמקרה זה נוכל להתעלם מהן. לפחות בתחילת הקורס נדבר על תרגום של בעיות מהמציאות לבעיות מתמטיות, זה אומנם חלק פחות ריגורזי, אבל הוא כן חשוב ליצירת קישור בין המציאות לבין החומר הנלמד.

דבר אחרון, ישנה השאלה הפילוסופית של האם באמת יש הסתברות שכן לא בטוח שיש אקראיות בטבע, הגישה לנושא מבחינה פיזיקלית קצת השתנתה בעת האחרונה וקשה לענות על השאלה הזאת. יש לנו תורות פיזיקליות שהן הסתברותיות בעיקרן, כמו תורת הקוונטים, תורה זו לא סתם הסתברותית, אנחנו לא מנסים לפתור בעיות הסתברותיות אלא ממש משתמשים במודלים סטטיסטיים כדי לתאר מצב בעולם. לדוגמה נוכל להסיק ככה מסקנה פשוטה שאם מיכל גז נפתח בחדר, יהיה ערבוב של הגז הפנימי ושל אוויר החדר, זוהי מסקנה הסתברותית. החלק המדהים הוא שתורת הקוונטים מניחה חוסר דטרמניזם כתכונה יסודית ועד כמה שאפשר לראות יש ניסויים שמוכיחים שבאמת יש חוסר ודאות בטבע. דהינו שברמה העקרונית הפשוטה באמת אין תוצאה ודאית בכלל למצבים כאלה במציאות.

1.2 מרחבי מדגם ופונקציית הסתברות

הגדרה 1.1 (מרחב מדגם) מרחב מדגם הוא קבוצה לא ריקה שמהווה העולם להסתברות.
נסמנה Ω. איבר במרחב המדגם נסמן ב־$\omega \in \Omega$ על־פי רוב.

נוכל להגיד שמרחב במדגם הוא הקבוצה של האיברים שעליה אנחנו שואלים בכלל שאלות, זהו הייצוג של האיברים או המצבים שמעניינים אותנו. בהתאם נראה עכשיו מספר דוגמות שמקשרות בין אובייקטים שאנו דנים בהם בהסתברות ובהגדרה פורמלית של מרחבי מדגם עבורם.

דוגמה 1.1 (מרחבי הסתברות שונים) נראה מספר דוגמות למצבים כאלה:

- הטלת מטבע תוגדר על־ידי $\Omega = \{H, T\}$.
- הטלת שלושה מטבעות תהיה באופן דומה $\Omega = \{H, T\}^3$.
- הטלת קוביה היא $\Omega = [6] = \{1, \dots, 6\}$.
- הטלת מטבע ואז אם יוצא עץ (H) אז מטילים קוביה ואם יוצא פלי (T) אז מטילים קוביה עם 8 פאות.
במקרה זה נסמן $\Omega = \{H1, H2, H3, \dots, H6, T1, \dots, T8\} = \{H, T\} \times \{1, \dots, 8\}$ כאשר הכוונה פה היא לזוג סדור $\langle H, 1\rangle$.
- ערבוב חפיסת קלפים, במקרה זה מרחב המדגם שלנו יהיה סימון של הקלפים כרשימה מספרית בלבד, דהינו $\Omega = S_{52}$.
נוכל גם לסמן במקום את $\Omega = \{1, \dots, 52\}^{52}$, זהו סימון זהה.

בדוגמה זו קל במיוחד לראות שכל איבר בקבוצה מתאר מצב סופי כלשהו, ואנו יכולים לשאול שאלות הסתברותיות מהצורה מה הסיכוי שנקבל ω מסוים מתוך Ω, זאת ללא התחשבות בבעיה שממנה אנו מגיעים. נבחן עתה גם דוגמות למקרים שבהם אין לנו מספר סופי של אפשרויות, למעשה מקרים אלה דומים מאוד למקרים שראינו עד כה.

דוגמה 1.2 (מרחבי מדגם לא סופיים) מטילים מטבע עד שיוצא H, אז מרחב המדגם הוא $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
באופן דומה נוכל לבחון מדידת זמן התפרקות חלקיק, היא $\Omega = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

הגדרה 1.2 (פונקציית הסתברות נקודתית) יהי מרחב מדגם Ω ותהי $p : \Omega \to [0, \infty)$ פונקציה כך שמתקיים
$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$
אז פונקציה זו נקראת **פונקציית הסתברות**.

למעשה פונקציית הסתברות היא מה שאנחנו נזהה עם הסתברות במובן הפשוט, פונקציה זו מגדירה לנו לכל סיטואציה ממרחב המדגם מה הסיכוי שנגיע אליה, כך לדוגמה אם נאמר שהטלת מטבע תגיע בחצי מהמקרים לעץ ובחצי השני לפלי, אז זו היא פונקציית ההסתברות עצמה, פונקציה שמחזירה חצי עבור עץ וחצי עבור פלי, נראה מספר דוגמות.

דוגמה 1.3 (פונקציית הסתברות להטלת מטבע) נגדיר $\Omega = \{H, T\}$ ויהי $0 \le \alpha \le 1$, נגדיר $p(H) = \alpha, p(T) = 1 - \alpha$.

דוגמה 1.4 (פונקציית הסתברות אינסופית) נגדיר $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ו־$p(\omega) = \begin{cases} 2^{-\omega} & \omega \in \mathbb{N} \\ 0 & \omega = \infty \end{cases}$. בדוגמה זו נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ ולכן זו אכן פונקציית הסתברות.

נבחין כי הדוגמה האחרונה מתארת לנו התפלגות של דעיכה, זאת אומרת שלדוגמה אם קיים חלקיק עם זמן מחצית חיים של יחידה אחת, פונקציית הסתברות זו תניב לנו את הסיכוי שהוא התפרק לאחר כמות יחידות זמן כלשהי.

דוגמה 1.5 נגדיר $\Omega = \mathbb{N}$ ו־$p(\omega) = \frac{1}{\omega(\omega+1)}$, נבחין כי אכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

הגדרה 1.3 (תומך) התומך של p הוא $\text{Supp}(p) = \{\omega \in \Omega \mid p(\omega) > 0\}$.

נבחין כי התומך הוא למעשה קבוצת האיברים שאפשרי לקבל לפי פונקציית ההסתברות, כל שאר המצבים מקבלים 0, משמעו הוא שאין אפשרות להגיע אליו.

הערה נבחין כי תמיד $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

הגדרה 1.4 (מאורע) מאורע הוא תת־קבוצה של מרחב המדגם, קבוצת כל המאורעות תסומן $\mathcal{F}$. עבור מאורע A המאורע המשלים מסומן ב־$A^C = \Omega \setminus A$.

הגדרה 1.5 (פונקציית הסתברות) נגדיר עתה פונקציית הסתברות שאיננה נקודתית. יהי מרחב מדגם Ω וקבוצת מאורעות $\mathcal{F}$.
תהי $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ המקיימת את התכונות הבאות:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ סדרת מאורעות שונים מתקיים
$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)$$
דהינו, הפונקציה סכימה בתת־קבוצות בנות מניה.

לפונקציה כזו נקרא **פונקציית ההסתברות** על $(\Omega, \mathcal{F})$.

טענה 1.6 *תהי p פונקציית הסתברות נקודתית על Ω אז נגדיר פונקציית הסתברות $\mathbb{P}_p$ על־ידי*
$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$
אז $\mathbb{P}_p$ היא פונקציית הסתברות.

הוכחה. נוכיח ששתי התכונות של פונקציית הסתברות מתקיימות.
$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \ge 0$$
שכן זהו סכום אי־שלילי מהגדרת p, בנוסף נקבל מההגדרה של p כי
$$\mathbb{P}_p(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$
וקיבלנו כי התכונה הראשונה מתקיימת.

תהי $\{A\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, אז נקבל

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_p(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{\omega\in A_i} p(\omega) \right) = \sum_{\omega\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} p(\omega) = \mathbb{P}_p(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$$

ולכן גם התכונה השנייה מתקיימת וקיבלנו כי $\mathbb{P}_p$ היא אכן פונקציית הסתברות. $\square$

נשים לב כי בעוד פונקציית הסתברות נקודתית מאפשרת לנו לדון בהסתברות של איבר בודד בקבוצות בנות מניה, פונקציית הסתברות למעשה מאפשרת לנו לדון בהסתברות של מאורעות, הם קבוצות של כמה מצבים אפשריים, ובכך להגדיל את מושא הדיון שלנו. מהטענה האחרונה גם נוכל להסיק שבין שתי ההגדרות קיים קשר הדוק, שכן פונקציית הסתברות נקודתית גוררת את קיומה של פונקציית הסתברות כללית.

2 תרגול 1 — 31.10.2024

המתרגל הוא אמיר, amir.behar@mail.huji.ac.il

2.1 מרחבי הסתברות סופיים ובני־מניה

ניזכר בהגדרה למרחב הסתברות, המטרה של הגדרה זו היא לתאר תוצאות אפשריות של מצב נתון.

הגדרה 2.1 (מרחב הסתברות) מרחב הסתברות הוא קבוצה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ כאשר $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, כך שמתקיים

1. חיוביות: $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0$
2. נרמול: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. על־אדיטיביות: $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i)$

תרגיל 2.1 יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, $A, B \in \mathcal{F}$, הוכיחו

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

הוכחה. נבחין כי $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B)$ וגם $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B)$. נוכל אם כן לסכום ולקבל

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

נבחין כי השוויון האחרון נובע מהזרות של קבוצות אלה. $\square$

לאורך פרק זה נגדיר מעתה שמתקיים Ω סופית, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ ואף נגדיר כי ההסתברות אחידה, דהינו $\forall A \ \ \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, זה כמובן שקול לטענה

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\omega'\})$$

תרגיל 2.2 מטילים קוביה הוגנת, מה ההסתברות שיצא מספר זוגי?

פתרון נגדיר $\Omega = [6] = \{1, \dots, 6\}$, עם $\mathbb{P}$ אחידה.
נרצה לחשב את $A = \{2, 4, 6\}$ ולכן נקבל $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

תרגיל 2.3 מטילים מטבע הוגן שלוש פעמים, מה ההסתברות שיצא עץ בדיוק פעמיים, ומה ההסתברות שיצא עץ לפחות פעמיים?

פתרון נגדיר $\Omega = \{TTT, TTP, TPT, PTT, \dots\}$.
עבור המקרה הראשון נגדיר $A = \{TTP, TPT, PTT\}$, ולכן נקבל שההסתברות היא $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.
במקרה השני נקבל $B = A \cup \{TTT\}$ ולכן $P(B) = \frac{1}{2}$.

תרגיל 2.4 מטילים קוביה הוגנת n פעמים.

1. מה ההסתברות שתוצאת ההטלה הראשונה קטנה מ־4?
2. מה ההסתברות שתוצאת ההטלה הראשונה קטנה שווה מתוצאת ההטלה השנייה?
3. מה ההסתברות שיצא 1 לפחות פעם אחת?

פתרון נגדיר $\Omega = [6]^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [6]\}$.

1. נגדיר $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_1 < 4\}$ ולכן $\mathbb{P}(A) = \frac{3 \cdot 6^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{2}$.
2. נגדיר $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_1 \leq x_2\} = \bigcup_{i=1}^{6} \{(x_1, i, x_3, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_i \leq i\}$, ולכן נקבל
$$\mathbb{P}(B) = \sum \mathbb{P}(B_i) = \sum \frac{i \cdot 6^{n-2}}{6^n} = \frac{\sum_{i=1}^{6} i}{6^2} = \frac{6 \cdot 7}{6^2 \cdot 2} = \frac{7}{12}$$
3. הפעם $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \exists i, x_i = 1\}$, בהתאם $C^C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid \forall i, x_1 \neq 1\}$.
לכן נקבל $\mathbb{P}(C^C) = \frac{5^n}{6^n} \implies \mathbb{P}(C) = 1 - \frac{5^n}{6^n}$.

תרגיל 2.5 חמישה אנשים בריאים וחמישה אנשים חולי שפעת עומדים בשורה. מה ההסתברות שחולי השפעת נמצאים משמאל לאנשים הבריאים?

פתרון נגדיר Ω ככל הסידורים של $0, 1$ כשיש חמישה מכל סוג. לכן נקבל $|\Omega| = \binom{10}{5}$, שכן $\Omega = \{X \subset [10] \mid |X| = 5\}$.
המאורע הפעם הוא $A = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ ובהתאם $\mathbb{P}(A) = \frac{5!5!}{10!}$.

נוכל גם להגדיר $\Omega = S_{10}$ כאשר חמשת המספרים הראשונים מייצגים בריאים וחמשת האחרונים מייצגים חולים.
במקרה זה נקבל $A = \{\pi \in \Omega \mid \pi(\{1,2,3,4,5\}) \subseteq \{1,2,3,4,5\}\}$ ולכן $|A| = 5!5!$ וכך נקבל $\mathbb{P}(A) = \frac{5!5!}{10!}$.

3 שיעור 2 — 31.10.2024

3.1 השלמה לטורים דו־מימדיים

נגדיר הגדרה שדרושה לצורך ההרצאה הקודמת כדי להיות מסוגלים לדון בסכומים אינסופיים בני־מניה.

הגדרה 3.1 אם $\{a_i\}_{i\in I}$ ו־$a_i \geq 0$ לכל $i \in I$ אז נגדיר

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} \mid J \subseteq I, J \text{ is finite}\right\}$$

3.2 תכונות של פונקציות הסתברות

נעבור עתה לבחון פונקציות הסתברות ואת תכונותיהן, נתחיל מתרגיל שיוצק תוכן לתומך של פונקציית הסתברות:

תרגיל 3.1 הוכיחו כי אם $\sum_{i\in I} a_i < \infty$ ו־$a_i \geq 0$ לכל $i \in I$ אז $|\{i \in I \mid a_i < 0\}| \leq \aleph_0$. במילים אחרות הוכיחו כי התומך של a הוא בן־מניה.

בשיעור הקודם ראינו את ההגדרה והטענה הבאות:

הגדרה 3.2 בהינתן פונקציית הסתברות נקודתית p נגדיר

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$$

טענה 3.3 *$\mathbb{P}_p$ היא פונקציית הסתברות.*

טענה זו בעצם יוצרת קשר בין פונקציות הסתברות לפונקציות הסתברות נקודתיות, ומאפשרת לנו לחקור את פונקציות ההסתברות לעומק באופן פשוט הרבה יותר. נשתמש עתה בכלי זה.

הגדרה 3.4 (מרחב הסתברות בדיד) אם $\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות כך שקיימת פונקציית הסתברות נקודתית p כך ש־$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$, אז נאמר ש־$\mathbb{P}$ היא בדידה ו־$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ **מרחב הסתברות בדיד**.

טענה 3.5 *יש פונקציות הסתברות שאינן בדידות. בפרט, עבור מדגם ההסתברות $\Omega = [0, 1]$ קיימת פונקציית הסתברות $\mathbb{P}$ המקיימת*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a \leq b \leq 1 \implies \mathbb{P}([a, b]) = b - a$$

דוגמה 3.1 ידוע כי $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$ ולכן נוכל להגדיר $\Omega = \mathbb{N}$ ו־$p(n) = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6} n^2}$, הגדרה זו תניב ש־$\sum_{n\in\mathbb{N}} p(n) = 1$ ולכן זו פונקציית הסתברות. נחשב את $\mathbb{P}_p(A)$ עבור $A = 2\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{n\in A} p(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p(2k) = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6}(2k)^2} = \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{4}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}$$

נסביר, הגדרנו פונקציית הסתברות של דעיכה, דהינו שככל שהמספר שאנו מבקשים גדול יותר כך הוא פחות סביר באופן מעריכי (לדוגמה זמן מחצית חיים), ואז שאלנו כמה סביר המאורע שבו נקבל מספר זוגי.

משפט 3.6 (תכונות פונקציית הסתברות) *$\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות על $(\Omega, \mathcal{F})$, אז*

1. *$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$*
2. *אם I קבוצה סופית ו־$\{A_i\}_{i\in I}$ מאורעות זרים בזוגות, אז $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$*
3. *אם $A \subseteq B$ מאורעות אז $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$*
4. *$\mathbb{P}(A) \leq 1$ לכל מאורע A*
5. *לכל מאורע A מתקיים $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$*

הוכחה. נוכיח את התכונות

1. נראה כי $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$ שכן כל איחוד של קבוצות ריקות הוא זר, לכן אילו $\mathbb{P}(\emptyset) \neq 0$ נקבבל ישר סתירה, נסיק כי $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ בלבד.

2. נגדיר $A_i = \emptyset$ לכל $i > n$ ונשתמש בסיגמא־אדיטיביות ונקבל
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$
3. נשתש בתכונה 2 על $B, B \setminus A$, אלו הן קבוצות זרות כמובן, אם נדגיר $D = A \cup (B \setminus A)$ נקבל $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$.
4. נובע ישירות מתכונה 3 ומ־$A \subseteq \Omega$.
5. ניזכר כי $A^C = \Omega \setminus A$ ולכן $\Omega = A \cup A^C$ ונקבל $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C)$.

□

נעבור עתה לאפיון של פונקציות הסתברות בדידות, נבין מתי הן כאלה ומתי לא.

משפט 3.7 (תנאים שקולים לפונקציית הסתברות בדידה) *אם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, התנאים הבאים שקולים:*

1. *$\mathbb{P}$ היא פונקציית הסתברות בדידה*
2. *$\mathbb{P}$ נתמכת על קבוצות בנות־מניה, כלומר קיימת קבוצה $A \in \mathcal{F}$ בת־מניה כך ש־$\mathbb{P}(A) = 1$*
3. *$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$*
4. *לכל מאורע $A \in \mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$*

הוכחה. $2 \implies 1$: נניח ש־$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$ עבור $p : \Omega \to [0, \infty)$ פונקציית הסתברות נקודתית. נסתכל על $\text{Supp}(p) = \{\omega \in \Omega \mid p(\omega) > 0\}$, לפי הגדרת הסכום והתרגיל נובע ש־$A = \text{Supp}(p)$ בת־מניה. נקבל
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$
$4 \implies 2$: נניח ש־$\mathbb{P}(S) = 1$ עבור S בת־מניה. לכן $\mathbb{P}(S^C) = 0$. נראה כי A הוא איחוד זר $A = (A \cap S) \cup (A \cap S^C)$ ולכן נקבל
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(A \cap S^C) = \mathbb{P}(A \cap S) + 0 = \sum_{\omega\in A\cap S} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$
$3 \implies 4$: אם נבחר $A = \Omega$ נקבל את טענה 3.

$1 \implies 3$: נגדיר $p : \Omega \to [0, \infty)$ על־ידי $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$, נקבל $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$ ולכן p היא פונקציית הסתברות נקודתית. מהתרגיל והגדרת הסכום נובע ש־$S = \text{Supp}(p)$ היא בת־מניה ומתקיים $\mathbb{P}(S^C) = 0$, אז לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(A \cap S^C) = \mathbb{P}(A \cap S) = \sum_{\omega\in A\cap S} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p(\omega) = \mathbb{P}_p(A)$$

□

3.3 פרדוקס יום ההולדת

פרדוקס יום ההולדת הוא פרדוקס מוכר הגורס כי גם בקבוצות קטנות יחסית של אנשים, הסיכוי שלשני אנשים שונים יהיה תאריך יום הולדת זהה הוא גבוה במידה משונה. הפרדוקס נקרא כך שכן לכאורה אין קשר בין מספר הימים בשנה לבין הסיכוי הכל־כך גבוה שמצב זה יקרה, נבחן עתה את הפרדוקס בהיבט הסתברותי.

נניח שכל תאריכי יום ההולדת הם סבירים באותה מידה ונבחן את הפרדוקס. נגדיר $\Omega = [365]^k$ עבור k מספר האנשים בקבוצה נתונה כלשהי. $p(\omega) = \frac{1}{365^k}$ לכל $\omega \in \Omega$. נקבל $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_p(A) = \frac{|A|}{365^k}$. נרצה לחשב את A כמאורע שיש לפחות שני אנשים שיש להם יום הולדת באותו יום, דהינו שיש שני ערכים זהים ברשימת המספרים, נגדיר $A = \{\omega \in \Omega \mid \exists 1 \leq i \neq j \leq k, \omega_i = \omega_j\}$. בשל המורכבות נבחן את המשלים A^C, נקבל $|A^C| = 365 \cdot 364 \cdots (365 - (k-1)) = \frac{365!}{(365-(i-1))!}$. נציב ונחשב:
$$\mathbb{P}(A^C) = \frac{|A^C|}{365^k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{365 - (i-1)}{365} = \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{i-1}{365})$$
מהנוסחה שקיבלנו נראה שמהצבה $k = 23$ נקבל שההסתברות היא בערך $\frac{1}{2}$, דהינו בקבוצה של 23 אנשים יש סבירות של חצי שלפחות שניים יחגגו יום הולדת באתו יום.