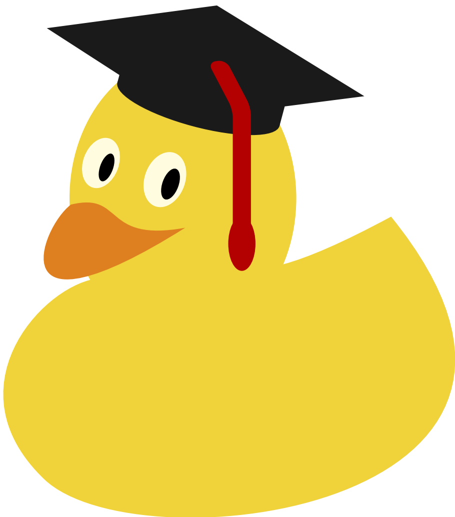
פתרון מטלה 04 — תורת הקבוצות האקסיומטית, 80650

13 בדצמבר 2024



שאלה 1

נניח ZFC, ונניח גם κ מונה רגולרי לא בן־מניה, נבחין כי מהמטלה הקודמת נובע $H(k^+)$ הוא מודל של $\mathrm{ZFC} - \text{Power set}$.

יהי $p \in H(\kappa^+)$, נראה שקיים סל"ח $C \subseteq \kappa$ כך שלכל $\delta \in C$ קיים $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$p \in M$ וגם $M \cap \kappa = \delta$.

הוכחה. *מצאנו בהרצאה כי קבוצת הנוסחות של תורת הקבוצות היא בת־מניה, נגדיר לכל נוסחה φ את פונקציית סקולם שלה f_φ שמצאנו שקיימת* (שימוש בבחירה).

נבנה סדרה בת־מניה $\langle G_n \mid n < \omega\rangle$ של פונקציות סקולם סגורה להרכבה, נבחין כי היא אכן סגורה להרכבה כהוכחה באינדוקציה על מבנה הפסוק.

נגדיר $S(\alpha) = \{G_n(\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, p) \mid n < \omega, \gamma_0, \dots, \gamma_{m-1} < \alpha\}$ ונבחין כי לכל $\alpha < \kappa$ מתקיים $S(\gamma) \prec H(\kappa^+)$ ממשפט 6.3.

נבחין כי $|S(\alpha)| \le \omega \times |\alpha| \le \kappa$ ולכן גם $|S(\alpha)| = |S(\alpha) \cap \kappa|$, לכן נגדיר $R(\alpha) = S(\alpha) \cap \kappa$ עדיין מגדיר תת־מודלים אלמנטריים.

עוד נראה כי לכל $p \in R(\alpha)$ מהסגירות לנוסחות, ונגדיר.

לבסוף נגדיר $h(\alpha) = \sup R(\alpha)$ וגם $C = \operatorname{rng} h$, ונקבל ש־$\kappa = \sup C$ וכן ש־C סגורה, זאת ישירות מההגדרה, ולכן מצאנו כי זהו סל"ח המקיים את כל הנדרש. $\square$

שאלה 2

יהי $H(\kappa^+)$ ויהיו $M \prec N = H(\kappa^+)$ ויהיו $a_0, \ldots, a_{n-1} \in H(\kappa^+)$.
נוכיח ש־$\{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \in M$ אם ורק אם $\forall i < n, a_i \in M$.
נראה גם שטענה זו לא בהכרח תתקיים עבור קבוצה בת־מניה של איברים.

הוכחה. נניח ש־$a = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \in M$. נבחן את $\varphi(x,y) = x \in y$, ידוע ש־$N \models \varphi(a_i, a)$, ולכן בפרט $\exists x, \varphi(x,a)$ ומהשיכון הנתון גם $M \models \exists x, \varphi(x,a)$, אבל בהתאם $N \models \varphi(x,a)$ ולכן $x = a_i$ עבור $0 \leq i < n$, לכן $M \models a_i \in a$. נוכל להמשיך עתה בתהליך זה ולבנות n נוסחות ובכך נשלים $M \models \forall i, a_i \in a$.

נבחין כי תהליך זה בדיוק עלול להיכשל במקרים שאינם סופיים. למעשה, אנו יודעים כי קיים מודל $|M| = \omega$ עבור $H(\kappa^+)$ ולכן אם נבחר את ω_1 ונגדיר עם סעיף א' שהוא מוכל ב־M, נקבל סתירה ל־$|M| = \omega$. $\square$

שאלה 3

תהי $S \subseteq \kappa$, ונראה ש־S קבוצת שבת אם ורק אם לכל $p \in H(\kappa^+)$ קיים תת־מבנה אלמנטרי $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$p \in M$ וגם $M \cap \kappa \in S$.

הוכחה. נניח ש־S קבוצת שבת ויהי $p \in H(\kappa^+)$.
עוד נגדיר C הסל"ח שקיים עבור p לפי שאלה 1, ויהי $\delta \in C \cap S$, אז קיים $M \prec H(\kappa^+)$ עבורו $p \in M$ וגם $M \cap \kappa = \delta \in S$.

נניח עתה כי לכל $p \in H(\kappa^+)$ קיים תת־מבנה אלמנטרי $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$p \in M$ וגם $M \cap \kappa \in S$ ונראה ש־S קבוצת שבת.
יהי סל"ח $C \subseteq \kappa$ ויהי $\alpha \in C$ סודר גבולי שסגור ב־C. אז קיים בהתאם מודל $\alpha \in M \prec H(\kappa^+)$, נבנה סדרה לא חסומה ב־$M$ של α על־ידי הגדרת נוסחות מהצורה $\varphi(x, y) = x < y$.
שימוש בפונקציות סקולם מתאימות ושימוש בתכונות ב־$H(\kappa^+)$ של α יניב לנו סדרה עולה לא חסומה ב־M של סודרים, ובהתאם נוכל להסיק $M \cap p \cap C = M \cap C$ מקיים סגירות ולכן $M \cap \kappa \in C$.
מצד שני $M \cap \kappa \in S$ ולכן בפרט $S \cap C \neq \emptyset$ ומצאנו כי S אכן קבוצת שבת.

$\square$

שאלה 4

יהי $H(\kappa^+) \prec M$ כך ש־$M \cap \kappa = \delta \in \kappa$.

נוכיח שלכל $C \in M$ סל"ח ב־κ, מתקיים $\delta \in C$.

הוכחה. נבחין כי $\delta \cap C = M \cap \kappa \cap C = M \cap C$, ונבחן את $\varphi(x, y) = \sup(x) = y$, אנו יודעים כי $\varphi(C, \kappa)$ מההגדרה של C.

נשים לב כי אם $\kappa \in M$ אז $\kappa = \delta \in \delta$ בסתירה להנחה שלנו.

אם $\sup(\delta \cap C) = \delta$ אז $\delta \in C$ כפי שרצינו ולכן נניח אחרת, אבל אז בהכרח $\sup(\delta \cap C) < \delta$ שכן אם $\sup(\delta \cap C) > \delta$ זו תהיה סתירה לאקסיומת היסוד.

בנוסף *מהשוויון* שמצאנו נובע $\sup(M \cap C) = \sup(\delta \cap C) < \delta$, דהינו $M \models \varphi(C, \alpha)$ עבור $\alpha < \delta$ כלשהו.

אבל $H(\kappa^+) \models \varphi(C, \alpha) \iff M \models \varphi(C, \alpha)$, ו־$C$ סל"ח ולכן $\sup C = \kappa$, אז $\alpha = \kappa$ וקיבלנו סתירה להנחה, לכן $\delta \in C$. $\square$

שאלה 5

תהי $S \subseteq \kappa$ קבוצת שבת ותהי $f : S \to \kappa$ פונקציה יורדת.
יהי $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$M \cap \kappa = \delta \in S$ ו־$\{f, S\} \in M$.
נגדיר $f(\delta) = \gamma$, נוכיח ש־$X = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma\}$ היא קבוצת שבת ותת־קבוצה של κ.
נסיק שהלמה של פודור חלה.

הוכחה. אנו כבר יודעים מההגדרה ש־$X \subseteq \kappa$, ונניח בשלילה שהיא לא קבוצת שבת, לכן קיים $C \subseteq \kappa$ סל"ח, כך ש־$C \cap X = \emptyset$.
ידוע ש־$M \cap \kappa = \delta \in S \subseteq \kappa \implies M \cap \kappa \in \kappa$ ולכן תנאי השאלה הקודמת חלים ומתקיים $\delta \in C$.
$f(\delta) = \gamma$ ולכן $\delta \in X$ ובהתאם $X \cap \delta \neq \emptyset$ בסתירה להנחת השלילה. □