פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

3 בפברואר 2023

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי מתקיים הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{n^2-4}=3$$

נוכיח כי הגבול מתקיים על־פי הגדרת הגבול בלשון ϵ, N. על־פי ההגדרה, לכל $\epsilon > 0$ עלינו למצוא ערך N עבורו לכל $n > N$ מתקיים אי־השוויון

$$\left|\frac{3n^2-4}{n^2-4}-3\right| = \left|\frac{3n^2-4-3n^3+12}{n^2-4}\right| = \left|\frac{8}{n^2-4}\right| < \epsilon \tag{1}$$

נשים לב כי לכל $n > 2$ ערך המונה והמכנה באגף השמאלי הוא חיובי, לכן בוודאי גם הערך הפנימי לערך המוחלט חיובי, ונוכל להשמיט את הערך המוחלט:

$$\begin{aligned}
&\frac{8}{n^2-4} < \epsilon \\
&\frac{8}{\epsilon} < n^2-4 \\
&\frac{8}{\epsilon}+4 < n^2 \\
&2\sqrt{\frac{2}{\epsilon}+1} < n
\end{aligned}$$

נגדיר

$$N = \max\left(3, 2\sqrt{\frac{2}{\epsilon}+1}\right)$$

הראינו כי לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שעבור כל $n > N$ מתקיים אי־שוויון (1) ולכן מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{n^2-4}=3$$

סעיף ב'

(i) יהיו (a_n) סדרה ו־L מספר ממשי. ננסח בלשון ϵ, N את הטענה

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq L$$

תחילה נצרין את הטענה:

$$\neg\forall\epsilon > 0(\exists N \in \mathbb{N}(\forall n > N(|a_n - L| < \epsilon)))$$

נפשט את הפסוק:

$$\exists\epsilon > 0(\forall N \in \mathbb{N}(\exists n > N(|a_n - L| \geq \epsilon)))$$

ננסח פסוק זה במילים:

הטענה $\lim_{n\to\infty} a_n \neq L$ מתקיימת אם ורק אם קיים $\epsilon > 0$ עבורו לכל N טבעי קיים $n > N$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \epsilon$.

(ii) על־פי הגדרת התבדרות (2.13) סדרה נקראת מתבדרת כאשר אין מספר L שעבורו מתקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ננסח את הטענה בעזרת הגדרת התכנסות בלשון ϵ, N:

סדרה (a_n) היא מתבדרת אם ורק אם לכל L ממשי קיים $\epsilon > 0$ עבורו לכל N טבעי קיים $n > N$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \epsilon$.

סעיף ג'

נוכיח שהסדרה $a_n = \langle\sqrt{n}\rangle$ מתבדרת בלשון ϵ, N.

נוכיח כי לכל L ממשי שנבחר קיים $\epsilon > 0$ שעבורו לכל N טבעי קיים $n > N$ שעבורו $|a_n - L| \geq \epsilon$.

תחילה נבחין כי לכל n מתקיים $0 \leq a_n \leq 1$, על־פי הגדרת החלק השברי. לכן לכל L שאיננו בתחום $[-1, 1]$ ו־$\epsilon = 1$ קיים n שהוא שורש שלם של מספר טבעי וגדול מ־N כלשהו.

הראינו כי התנאי נכון מלבד בתחום $[-1, 1]$, נותר עתה לראות את נכונותו אף בתחום. נגדיר $\epsilon = |L|$ ו־n להיות ריבוע מספר טבעי הגדול מ־N.

במקרה זה $a_n = 0$ ובהתאם אי־השוויון $|a_n - L| \geq \epsilon$ מתאפס ל־$|L| \geq \epsilon = |L|$ והתנאי מתקיים, לכן הסדרה (a_n) מתבדרת.

שאלה 2

נחשב את הגבולות הבאים, או נוכיח שאינם קיימים:

למה א'

לכל $k \in \mathbb{N}$ ו־$h \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h}{n^k} = 0$$

על־פי אריתמטיקה של גבולות וטענה 2.10:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h}{n^k} = 0 = \lim_{n\to\infty} h \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^k = h0^k = 0$$

סעיף א'

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 5n^5 + 9}{2n^4 - 4n^7 - \pi} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3/n^7 - 5n^5/n^7 + 9/n^7}{2n^4/n^7 - 4n^7/n^7 - \pi/n^7} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^4 - 5/n^2 + 9/n^7}{2/n^3 - 4 - \pi/n^7} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{0}{-4} && \text{על־פי למה א'} \\
&= 0
\end{aligned}$$

סעיף ב'

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 5n^5 + 9}{2n^4 - 4n^5 - \pi} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3/n^5 - 5n^5/n^5 + 9/n^5}{2n^4/n^5 - 4n^5/n^5 - \pi/n^5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2 - 5 + 9/n^5}{2/n - 4 - \pi/n^5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-5}{-4} && \text{על־פי למה א'} \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

סעיף ג'

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2-2n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n\sqrt{1-\frac{2}{n}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} \qquad (1)\end{aligned}$$

נוכיח כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1\pm\frac{2}{n}}=1$$

לכל n מתקיים:

$$1<1\pm\frac{2}{n}<(1\pm\frac{2}{n})^2$$

נפעיל שורש:

$$1<\sqrt{1\pm\frac{2}{n}}<1\pm\frac{2}{n}$$

על־פי משפט 2.32:

$$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1\pm\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}1\pm\frac{2}{n}=1$$

נציב ב־(1):

$$\frac{4}{1+1}=2$$

סעיף ד'

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n(1-\frac{n^2}{2^n})}=\lim_{n\to\infty}2\sqrt[n]{1-\frac{n^2}{2^n}}$$

אילו מוגדר הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{n^2}{2^n}}=L \qquad (1)$$

אז על־פי האריתמטיקה של הגבולות ערך הגבול המבוקש $2L$. נוכיח כי גבול זה מתקיים ונמצאהו. הביטוי $\frac{n^2}{2^n}$ מוגדר וחיובי לכל n ולכן

$$1-\frac{n^2}{2^n}<1$$

נבצע שורש:

$$\sqrt[n]{1-\frac{n^2}{2^n}}<\sqrt[n]{1}=1 \qquad (2)$$

אנו רואים כי לסדרה בגבול (1) מתקיים שכמעט כל איבר שלה קטן מ־1.

על־פי מסקנה 2.49 מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$$

לכן לכמעט לכ n מתקיים

$$\frac{n^2}{2^n}<\frac{1}{2}\to 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1-\frac{n^2}{2^n}$$

לאחר הפעלת שורש:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}}<\sqrt[n]{1-\frac{n^2}{2^n}}$$

על־פי טענה 2.35 ואריתמטיקה של הגבולות:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=1 \tag{3}$$

משילוב טענות (2) ו־(3) ועל־פי משפט 2.32 מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{n^2}{2^n}}=1$$

משילוב בטענה (1) אנו מקבלים:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n-n^2}=2$$

סעיף ה'

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}$$

נכתוב מחדש את ערך הסדרה:

$$\frac{n}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}=\frac{n}{n+2}n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}$$

מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+2}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}\right)$$

אם ורק אם שני הגבולות מתקיימים על־פי האריתמטיקה של הגבולות, לכן נוכיח ששני הגבולות קיימים ונמצא את ערכם.

תחילה נוכיח את התכנסות הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+2}$$

מתקיים:

$$\frac{n^2}{n+2}=\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

על־פי האריתמטיקה של גבולות אינסופיים.

נוכיח כי הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}$$

מתקיים אף הוא.

על־פי משפט 2.51 אם הגבול קיים אז מתקיים גם

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=\frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}}=\frac{1}{1+0}=1$$

ראינו כי הגבול מתקיים ושווה ל־0, לכן מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}=\infty\cdot 1=\infty$$

דהינו, על־פי האריתמטיקה של גבולות אינסופיים הגבול שואף לאינסוף, וכמובן מתכנס במובן הרחב.

שאלה 3

יהיו (a_n) ו־(b_n) סדרות כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$ (1).

סעיף א'

נוכיח כי אם כמעט כל אברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל אברי (b_n) חיוביים. נניח בשלילה כי כמעט כל אברי (b_n) הם שליליים. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > 0$ ו־$b_n < 0$, לכן $a_n b_n < 0$, אבל ידוע כי לכל $n > N$ גם מתקיים $a_n b_n > 0$ על־פי (1). זוהי סתירה ולכןכמעט כל אברי (b_n) מקיימים $b_n > 0$. נראה באופן דומה כי לא יתכן ש־$b_n = 0$ כמעט לכל n. במצב זה הסדרה תתכנס ל־0, ונתון כי זהו לא המצב, לכן אם כמעט כל איבר ב־(a_n) חיובי, אז גם כמעט כל איבר ב־(b_n) חיובי.

סעיף ב'

נראה כי אם הסדרות (a_n) ו־(b_n) חיוביות, אז לא בהכרח לפחות אחת מהן מתכנסת.

נגדיר

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{אי־זוגי } n \\ 3 & \text{זוגי } n \end{cases}, b_n = \frac{1}{a_n}$$

ניתן לראות כי לכל n מתקיים $a_n b_n = 1$, ולכן מכפלת הסדרות מתכנסת ל־1. לעומת זאת, הסדרות (a_n) ו־(b_n) שתיהן מתבדרות:
לכל n מתקיים $a_n = (-1)^n + 2$, ועל־פי טענה 2.14 סדרה זו היא הזזה של סדרה מתבדרת, ומתבדרת בעצמה. הסדרה (b_n) מוגדרת לפי a_n לכל n, ומתבדרת גם היא.

סעיף ג'

נוכיח כי אם $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ אז $\lim_{n\to\infty} = 0$. על־פי הגדרת שאיפה לאינסוף, כמעט לכל n מתקיים $b_n > 0$, לכן בגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

מוגדר וערכו לפי האריתמטיקה של הגבולות האינסופיים היא 0.

סעיף ד'

נראה כי אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז לא תמיד $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. נגדיר

$$a_n = \frac{1}{-n}, b_n = -n$$

לכן $a_n b_n = 1$ לכל n ו־$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אבל $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

סעיף ה'

נוכיח כי אם (a_n) סדרה חיובית, אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $b_n > \frac{1}{2a_n}$.

על־פי הגבול (1) כמעט לכל n מתקיים

$$|a_n b_n - 1| < \frac{1}{2}$$

לכן גם

$$-\frac{1}{2} < a_n b_n - 1 < \frac{1}{2} \to 1 - \frac{1}{2} < a_n b_n < 1 + \frac{1}{2}$$

לכן בפרט

$$a_n b_n > \frac{1}{2}$$

ידוע כי (a_n) חיובית ולכן נחלק בערכה:

$$b_n > \frac{1}{2a_n}$$

סעיף ו'

נוכיח כי אם (a_n) חיובית ואפסה אז $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

בדומה לסעיף ג' מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n b_n}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

על־פי האריתמטיקה של הגבולות האינסופיים.

סעיף ז'

נוכיח כי אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ אז $\lim_{n\to\infty} |b_n| = 1$.

בהכפלת הגבול (1) בעצמו נקבל

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 b_n^2 = 1^2 = 1$$

ידוע כי $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$, לכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 b_n^2}{a_n^2} = \frac{1}{1} \to \lim_{n\to\infty} b_n^2 = 1$$

לכן לכל $\epsilon > 0$ כמעט לכל n מתקיים

$$|b_n^2 - 1| < \epsilon$$

לפי נוסחת הכפל המקוצר מתקיים

$$||b_n| - 1|\,||b_n| + 1| < \epsilon$$

הביטוי $||b_n| + 1| > 1$ לכל n, לכן

$$||b_n| - 1| < ||b_n| - 1|\,||b_n| + 1| < \epsilon$$

לכן בפרט

$$||b_n| - 1| < \epsilon$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = 1$$