פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

27 בפברואר 2023

שאלה 1

סעיף א'

נוכיח בלשון ϵ, N כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n+1}{n}} = 2 \tag{1}$$

נשים לב תחילה כי מתקיים

$$\frac{4n+1}{n} = \frac{\frac{4n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} = \frac{4+\frac{1}{n}}{1} = 4+\frac{1}{n}$$

לכל $n \neq 0$. לכן נוכל להוכיח את קיום הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}} = 2$$

נגדיר $\epsilon > 0$ מספר ממשי. על־פי הגדרת הגבול צריך להתקיים:

$$\left|\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right| < \epsilon$$

תוכן השורש הוא תמיד לפחות 4, ולכן תוצאתו תמיד גדולה מ־2, בהתאם תוכן הערך המוחלט חיובי תמיד ומתקיים:

$$\left|\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right| = \sqrt{4+\frac{1}{n}}-2 < \epsilon$$

לכל $n > N$ כאשר $N \in \mathbb{N}$. נשים לב כי

$$\left(2+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2 = 4+2\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n} > 4+\frac{1}{n} = \left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}\right)^2 \to \sqrt{4+\frac{1}{n}} < 2+\sqrt{\frac{1}{n}}$$

נקבע

$$\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2 < 2+\sqrt{\frac{1}{n}}-2 = \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

נגדיר

$$N = \left\lceil\frac{1}{\epsilon^2}\right\rceil$$

במצב זה הגבול (1) מתקיים לכל $\epsilon > 0$.

סעיף ב'

(i) יהיו (a_n) סדרה ו־L מספר ממשי. ננסח בלשון ϵ, N את הטענה

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq L$$

תחילה נצרין את הטענה:

$$\neg\forall\epsilon > 0(\exists N \in \mathbb{N}(\forall n > N(|a_n - L| < \epsilon)))$$

נפשט את הפסוק:

$$\exists\epsilon > 0(\forall N \in \mathbb{N}(\exists n > N(|a_n - L| \geq \epsilon)))$$

ננסח פסוק זה במילים:

הטענה $\lim_{n\to\infty} a_n \neq L$ מתקיימת אם ורק אם קיים $\epsilon > 0$ עבורו לכל N טבעי קיים $n > N$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \epsilon$.

(ii) על־פי הגדרת התבדרות (2.13) סדרה נקראת מתבדרת כאשר אין מספר L שעבורו מתקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ננסח את הטענה בעזרת הגדרת התכנסות בלשון ϵ, N:

סדרה (a_n) היא מתבדרת אם ורק אם לכל L ממשי קיים $\epsilon > 0$ עבורו לכל N טבעי קיים $n > N$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \epsilon$.

סעיף ג'

נוכיח שהסדרה (a_n) מתבדרת בלשון ϵ, N, כאשר

$$a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n+2}$$

נוכיח כי לכל L ממשי שנבחר קיים $\epsilon > 0$ שעבורו לכל N טבעי קיים $n > N$ שעבורו $|a_n - L| \geq \epsilon$.

מתקיים על־פי חישוב ישיר

$$n = 2 \to a_n = \frac{3}{4}$$
$$n = 3 \to a_n = -\frac{2}{5}$$

נגדיר $N = 1, \epsilon = \frac{1}{4}$. אם $L \geq 1$ אז $|a_2 - L| > \epsilon$ והתנאי מתקיים. אילו $L \leq 0$ אז $|a_3 - L| < \epsilon$ והתנאי מתקיים גם כן.

כאשר $0 < L < \frac{3}{4}$ נגדיר $\epsilon = a_2 - L$ ונראה כי התנאי מתקיים שכן מספר זה מקיים את התנאי $\epsilon > 0$. כאשר $\frac{3}{4} \leq L < 1$ אז נגדיר את $\epsilon = L - a_3$ ובהתאם התנאי עדיין יתקיים. בסך־הכול ראינו כי הסדרה מתבדרת לכל $L \in \mathbb{R}$ ולכן מתבדרת לפי הגדרה ב'(ii).

שאלה 2

נחשב את הגבולות הבאים, או נוכיח שאינם קיימים:

סעיף א'

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+(-1)^n}-n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+(-1)^n}+n\right)\left(\sqrt{n^2+(-1)^n}-n\right)}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n-n^2}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}\end{aligned}$$

נוכל לראות כי מכנה הגבול חיובי וגדול מ־$2n-1$ כמעט לכל n ולכן המכנה שואף ל־∞, כאשר המונה חסום ב־1, לכן לפי משפט 2.22 והאריתמטיקה של הגבולות לקבוע כי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+(-1)^n}-n=0$$

סעיף ב'

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^6-1}{n^4-\pi n^5+5n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3/n^6-2n^6/n^6-1/n^6}{n^4/n^6-\pi n^5/n^6+5n/n^6} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3/n^3-2-1/n^6}{1/n^2-\pi/n+5/n^5} \\ &= \frac{-2}{0^+} && \text{על־פי אריתמטיקה של הגבולות} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

לכן הסדרה מתכנסת ל־$-\infty$ במובן הרחב.

סעיף ג'

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}n^2-1}{n^4} &\leq \frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4} \leq \frac{\sqrt{3}n^2}{n^4} \\ \frac{\sqrt{3}/n^2-1/n^4}{1} &\leq \frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4} \leq \frac{\sqrt{3}}{n^2}\end{aligned}$$

נראה כי גם

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{n^2}-\frac{1}{n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{n^2}=0$$

לכן לפי כלל הסנדוויץ' מתקיים גם

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4}=0$$

סעיף ד'

לפי אי־שוויון הממוצעים

$$(1)\ \sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n} 2n-1}{\prod_{i=1}^{n} 2n}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{2n-1}{2n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{2n-1}{2n}}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n-1}{2n \cdot n} \leq n \cdot \frac{2n-1}{2n \cdot n} = \frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}$$

נשים לב כי (1) הוא שורש של מספר גדול מ־1 ולכן נוכל להניח כי הוא גדול שווה ל־1. עוד נראה כי

$$\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1$$

לכן לפי כלל הסנדוויץ' סדרה (1) מתכנסת ל־1.

שאלה 3

יהיו (a_n) ו־(b_n) סדרות כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \infty$ (1).

סעיף א'

נוכיח כי אם כמעט כל אברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל אברי (b_n) חיוביים. נניח בשלילה כי כמעט כל אברי (b_n) הם שליליים. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > 0$ ו־$b_n < 0$, לכן $a_nb_n < 0$, אבל ידוע כי לכל $n > N$ גם מתקיים $a_nb_n > 0$ על־פי (1). זוהי סתירה ולכןכמעט כל אברי (b_n) מקיימים $b_n > 0$. נראה באופן דומה כי לא יתכן ש־$b_n = 0$ כמעט לכל n. במצב זה הסדרה תתכנס ל־0, ונתון כי זהו לא המצב, לכן אם כמעט כל איבר ב־(a_n) חיובי, אז גם כמעט כל איבר ב־(b_n) חיובי.

סעיף ב'

נראה כי אם הסדרות (a_n) ו־(b_n) חיוביות, אז לא בהכרח לפחות אחת מהן מתכנסת.

נגדיר

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{אי־זוגי } n \\ 3 & \text{זוגי } n \end{cases}, b_n = \frac{1}{a_n}$$

ניתן לראות כי לכל n מתקיים $a_nb_n = 1$, ולכן מכפלת הסדרות מתכנסת ל־1. לעומת זאת, הסדרות (a_n) ו־(b_n) שתיהן מתבדרות:

לכל n מתקיים $a_n = (-1)^n + 2$, ועל־פי טענה 2.14 סדרה זו היא הזזה של סדרה מתבדרת, ומתבדרת בעצמה. הסדרה (b_n) מוגדרת לפי a_n לכל n, ומתבדרת גם היא.

סעיף ג'

נוכיח כי אם $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ אז $\lim_{n\to\infty} = 0$. על־פי הגדרת שאיפה לאינסוף, כמעט לכל n מתקיים $b_n > 0$, לכן בגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_nb_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

מוגדר וערכו לפי האריתמטיקה של הגבולות האינסופיים היא 0.

סעיף ד'

נראה כי אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז לא תמיד $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. נגדיר

$$a_n = \frac{1}{-n}, b_n = -n$$

לכן $a_nb_n = 1$ לכל n ו־$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אבל $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

סעיף ה'

נוכיח כי אם (a_n) סדרה חיובית, אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $b_n > \frac{1}{2a_n}$.

על־פי הגבול (1) כמעט לכל n מתקיים

$$|a_nb_n - 1| < \frac{1}{2}$$

לכן גם

$$-\frac{1}{2} < a_nb_n - 1 < \frac{1}{2} \to 1 - \frac{1}{2} < a_nb_n < 1 + \frac{1}{2}$$

לכן בפרט

$$a_nb_n > \frac{1}{2}$$

ידוע כי (a_n) חיובית ולכן נחלק בערכה:

$$b_n > \frac{1}{2a_n}$$

סעיף ו'

נוכיח כי אם (a_n) חיובית ואפסה אז $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

בדומה לסעיף ג' מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_nb_n}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_nb_n}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

על־פי האריתמטיקה של הגבולות האינסופיים.

סעיף ז'

נוכיח כי אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ אז $\lim_{n\to\infty} |b_n| = 1$.

בהכפלת הגבול (1) בעצמו נקבל

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2b_n^2 = 1^2 = 1$$

ידוע כי $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$, לכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2b_n^2}{a_n^2} = \frac{1}{1} \to \lim_{n\to\infty} b_n^2 = 1$$

לכן לכל $\epsilon > 0$ כמעט לכל n מתקיים

$$|b_n^2 - 1| < \epsilon$$

לפי נוסחת הכפל המקוצר מתקיים

$$||b_n| - 1|\,||b_n| + 1| < \epsilon$$

הביטוי $||b_n| + 1| > 1$ לכל n, לכן

$$||b_n| - 1| < ||b_n| - 1|\,||b_n| + 1| < \epsilon$$

לכן בפרט

$$||b_n| - 1| < \epsilon$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = 1$$