פתרון מטלה 04 — פונקציות מרוכבות, 80519

28 בנובמבר 2024

שאלה 1

תהי $U \subseteq \mathbb{C}$ ונוכיח את הזהויות הבאות עבור $f, g \in C^1(U)$.

סעיף א'

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}$$

הוכחה. נבחן ישירות מהגדרת הגבול

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial z} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(z+h) - f(z))g(z+h) + f(z)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(z+h) - f(z))g(z+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(z)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} g(z+h)\frac{f(z+h) - f(z)}{h} + \lim_{h \to 0} f(z)\frac{g(z+h) - g(z)}{h} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial z}
\end{aligned}$$

$\square$

סעיף ב'

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g\right) \frac{\partial g}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \circ g\right) \frac{\partial \overline{g}}{\partial z}$$

הוכחה. נבצע חישובים חלקיים:

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x} = \frac{\partial f(g, \overline{g})}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ g\right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \overline{g}}{\partial x}\right)$$

וכן גם

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ g\right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial \overline{g}}{\partial y}\right)$$

ולבסוף אנו יודעים כי

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ומהרכבת שלושת השוויונות האחרונים נקבל את השוויון המבוקש:

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g\right) \frac{\partial g}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \circ g\right) \frac{\partial \overline{g}}{\partial z}$$

$\square$

סעיף ג'

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

הוכחה. נשתמש באופרטור Wirtinger של f ונגזור לפי $\overline{z}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{z}} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial\overline{f}}{\partial x} + i\frac{\partial\overline{f}}{\partial y}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial(u-iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u-iv)}{\partial y}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}) \\
&= \frac{1}{2}\overline{(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y})} \\
&= \frac{1}{2}\overline{(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y})} \\
&= \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}
\end{aligned}$$

$\square$

שאלה 2

נמצא את כל הנקודות בהן הפונקציות הנתונות גזירות.

סעיף א'

נגדיר $f(z) = \sin(\overline{z})$.

פתרון נבחין כי כאופרטור Wirtinger מתקיים

$$f(z, \overline{z}) = \sin(\overline{z}) = \frac{e^{i\overline{z}} - e^{-i\overline{z}}}{2i} = \frac{e^{i(x-iy)} - e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix+y} - e^{-ix-y}}{2i}$$

ובתרגול ראינו כי הפונקציה גזירה אם ורק אם $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, לכן נבדוק:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2i}(ie^{ix+y} + ie^{-ix-y} + i(e^{ix+y} + e^{-ix-y}))) = \frac{1}{2}(e^{ix+y} + e^{-ix-y}) = \cos(\overline{z})$$

בדיעבד זה נובע ישירות.

נבדוק איפוס

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \cos(\overline{z})$$

וממטלה 2 נסיק שאלו הן הנקודות $z = \frac{\pi}{2} + \pi k + 0i$.

סעיף ב'

נגדיר $g(z) = e^{|z-1|^2}$.

פתרון נבחין כי מתקיים $e^{|z-1|^2} = e^{(z-1)\overline{(z-1)}} = e^{z\overline{z}-z-\overline{z}+1}$ ולכן

$$g(z, \overline{z}) = \exp(z\overline{z} - z - \overline{z} + 1)$$

ובהתאם

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = (z-1)\exp(z\overline{z} - z - \overline{z} + 1)$$

אז מתקיים

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = 0 \iff (z-1)g(z, \overline{z}) = 0 \iff z = 1, g(z, \overline{z}) = 0$$

אבל g לא מתאפסת כאקספוננט ממשי, ולכן g גזירה ב־$z = 1$ בלבד.

סעיף ג'

נגדיר $h(z) = \overline{\mathrm{Log}(z)} - |z|^2$.

פתרון במקרה זה מתקיים

$$h(z, \overline{z}) = \log(\sqrt{z\overline{z}}) - \mathrm{Arg}(z) - z\overline{z}$$