פתרון מטלה 04 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

31 במאי 2024

שאלה 1

נוכיח מהגדרה כי הפונקציות הבאות הן דיפרנציאביליות ונמצא את הדיפרנציאל שלהן.

סעיף א'

תהי $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית ו־$b\in\mathbb{R}^m$, ונבדוק את הפונקציה $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ המוגדרת על־ידי

$$f(x)=Tx+b$$

נבחין כי

$$\lim_{v\to 0}\frac{f(x+v)-f(x)-Sv}{\|v\|}=\lim_{v\to 0}\frac{T(x+v)+b-Tx-b-Sv}{\|v\|}=\lim_{v\to 0}\frac{Tv-Sv}{\|v\|}$$

ונבחין כי עבור $T=S$ גבול זה אכן מתקיים, ולכן f דיפרנציאבילית בכל נקודה ונגזרתה T.

סעיף ב'

תהי $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$g(x)=\|x\|^2=\langle x,x\rangle$$

נבדוק את הגבול כאשר נגדיר את הנורמה להיות מכפלה פנימית:

$$\begin{aligned}\lim_{v\to 0}\frac{g(x+v)-g(x)-Tv}{\|v\|}&=\lim_{v\to 0}\frac{\langle x+v,x+v\rangle-\|x\|^2-Tv}{\|v\|}\\&=\lim_{v\to 0}\frac{\|x\|^2+\|v\|^2+2\langle x,v\rangle-\|x\|^2-Tv}{\|v\|}\\&=\lim_{v\to 0}\frac{\|v\|^2+2\langle x,v\rangle-Tv}{\|v\|}\\&=\lim_{v\to 0}\|v\|+\frac{2\langle x,v\rangle-Tv}{\|v\|}\end{aligned}$$

ונקבל כי הגבול מתקיים אילו $T=2x$ ובהתאם $Tv=\langle x,v\rangle$.

שאלה 2

תהי פונקציה $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ונסמן ב־$f_1,\ldots,f_m$ את רכיביה. תהי $p\in\mathbb{R}^n$. נוכיח ש־f גזירה אם ורק אם כל הרכיבים שלה גזירים ב־p.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי f גזירה ב־p ותהי T נגזרת שלה, לכן מתקיים

$$\lim_{v\to 0}\frac{f(p+v)-f(p)-Tv}{\|v\|}=0$$

אנו יודעים כי העתקות לינאריות משרות נורמות מהמטלה הקודמת ולכן נוכל לקבוע כי עבור העתקה לינארית $S:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ כי

$$\lim_{v\to 0}S(\frac{f(p+v)-f(p)-Tv}{\|v\|})=0 \implies \lim_{v\to 0}\frac{Sf(p+v)-Sf(p)-STv}{\|v\|}=0$$

עתה נגדיר $S=\pi_i$ עבור $1\le i\le m$ ונקבל

$$\lim_{v\to 0}\frac{f_i(p+v)-f_i(p)-(Tv)_i}{\|v\|}=0$$

בפרט עבור $t\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_i(p+te_i)-f_i(p)-|t|(Te_i)_i}{|t|}=0$$

והגדרת הנגזרת מתקיימת ונקבל $f_i'(t)=(Te_i)_i$.

כיוון שני: נניח כי f_i גזירה לכל $1\le i\le m$ ונסמן $T_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נגזרת זו.

נגדיר $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ התעתקה לינארית המוגדרת על־ידי $Tv=(T_1v,T_2v,\ldots,T_mv)^t$. עתה נבחן את הגבול

$$\begin{aligned}\lim_{v\to 0}\frac{f(p+v)-f(p)-Tv}{\|v\|}&=\lim_{v\to 0}\frac{f(p+v)-f(p)-Tv}{\|v\|}\\&=\lim_{v\to 0}\frac{(f_1(p+v)-f_1(p)-T_1v,\ldots,f_m(p+v)-f_m(p)-T_mv)^t}{\|v\|}\\&=\lim_{v\to 0}\left(\frac{f_1(p+v)-f_1(p)-T_1v}{\|v\|},\ldots,\frac{f_m(p+v)-f_m(p)-T_mv}{\|v\|}\right)^t\qquad=(0,\ldots,0)^t\end{aligned}$$

התכנסות בנפרד בכלל האגפים על־פי הגדרות הנגזרות T_i וקיבלנו כי T דיפרנציאל של f ב־p. $\square$

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח שאם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ גזירה בנקודה $p\in\mathbb{R}^n$ אז היא רציפה ב־p.

הוכחה. נניח כי f גזירה ב־p ונגזרתה T, לכן

$$\lim_{v\to 0}\frac{f(p+v)-f(p)-Tv}{\|v\|}=0$$

ואנו יודעים כי $\|v\|\xrightarrow{v\to 0}0$ ולכן גם

$$\lim_{v\to 0}\|v\|\cdot\frac{f(p+v)-f(p)-Tv}{\|v\|}=\lim_{v\to 0}\cdot f(p+v)-f(p)-Tv=0$$

אבל אנחנו יודעים השיעור כי $Tv\xrightarrow{v\to 0}0$ ולכן בהכרח

$$\lim_{v\to 0}\cdot f(p+v)-f(p)-Tv\lim_{v\to 0}\cdot f(p+v)-f(p)=0$$

ונקבל בהתאם גם כי

$$\lim_{v\to p}\cdot f(v)=f(p)$$

דהינו הפונקציה רציפה ב־p. □

סעיף ב'

נוכיח כי אם $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ גזירות בנקודה p אז גם $f+g$ גזירה בנקודה זו ומתקיים $D(f+g)\mid_p=Df\mid_p+Dg\mid_p$.

הוכחה. נגדיר T,S נגזרות f,g בהתאמה בנקודה p, לכן מתקיים

$$\lim_{v\to 0}\frac{f(p+v)-f(p)-Tv}{\|v\|},\lim_{v\to 0}\frac{g(p+v)-g(p)-Sv}{\|v\|}$$

ולכן נוכל לחבר את הגבולות ונקבל

$$\begin{aligned}\lim_{v\to 0}\frac{f(p+v)-f(p)-Tv}{\|v\|}+\frac{g(p+v)-g(p)-Sv}{\|v\|} &= \lim_{v\to 0}\frac{f(p+v)-f(p)-Tv+g(p+v)-g(p)-Sv}{\|v\|}\\ =\lim_{v\to 0}\frac{(f+g)(p+v)-(f(p)+g(p))-(T+S)v}{\|v\|} &= D(f+g)\mid_p=Df\mid_p+Dg\mid_p\end{aligned}$$

□

שאלה 4

סעיף א'

תהי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על־ידי

$$f(x,y,z)=(x^2y^3z^4,x^8-\cos(xy))$$

נמצא את נגזרתה של f.

$$Df=\begin{pmatrix}2xy^3z^4 & 8x^7+y\sin(xy)\\ 3x^2y^2z^4 & x\sin(xy)\\ 4x^2y^3z^3 & 0\end{pmatrix}$$

נשים לב כי f מוגדרת על־ידי פונקציות רציפות וגזירות ולכן גם היא רציפה וגזירה בכל תחומה.

סעיף ב'

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f(x,y)=\begin{cases}x^{\frac{n}{5}}\sin(\frac{y}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

נמצא את הערכים של $n\in\mathbb{N}$ עבורם הפונקציה גזירה ב־$(0,0)$.

נתחיל במציאת Df ב־$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned}Df&=\left(\frac{n}{5}x^{\frac{n}{5}-1}\sin(\frac{y}{x})+x^{\frac{n}{5}}\cos(\frac{y}{x})\cdot\frac{-y}{x^2},x^{\frac{n}{5}}\cos(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}\right)\\&=\left(\frac{n}{5}x^{\frac{n}{5}-1}\sin(\frac{y}{x})-x^{\frac{n}{5}-1}y\cos(\frac{y}{x}),x^{\frac{n}{5}-1}\cos(\frac{y}{x})\right)\end{aligned}$$

ועלינו למצוא ערכי n כך שהפונקציה רציפה באפס. נשים לב כי כלל איברי שני הביטויים הם מכפלה של $x^{\frac{n}{5}-1}$ והם ביטויים חסומים או אפסות (y), ולכן מספיק שיתקיים $x^{\frac{n-5}{5}}\xrightarrow{x\to 0}0$.

גבול זה כמובן מתקיים כל תנאי ש־$n\neq 5$, ולכן התנאי ההכרחי לגזירות f ב־$(0,0)$ הוא $n\neq 5$.

שאלה 5

סעיף א'

זבוב נמצא בנקודה $p = (0, 0, 5)$ בחדר שהטמפרטורה בו נתונה על־ידי הפונקציה

$$T(x, y, z) = e^x + 2y + z^2 - 7z$$

נמצא את הווקטור אליו יעוף הזבוב כדי להתחמם.

נחשב תחילה את הגרדיאנט של T בנקודה.

$$DT = (e^x, 2, 2z - 7)$$

ובהתאם נציב ונקבל כי $\nabla p = (1, 2, 3)$.

לכן עלינו למצוא $v \in \mathbb{R}^3$ כך ש־$\langle \nabla p, v \rangle > 0$, ונקבל $\{\frac{1}{\sqrt{5t^2 + 2ts + 10s^2}}(-2t - 3s, t, s) \mid s, t > 0\}$.

כדי להתחמם במהירות הגבוהה ביותר הזבוב יבחר את הכיוון $(0, 0, 1)$.

סעיף ב'

תהי נמלה המוכלת בשולחן המוגדר על־ידי $z = 5$, נחשב את הכיוון אליו היא צריכה ללכת כדי להתחמם.

נשים לב כי נוכל להשתמש בקבוצת הפתרונות מהסעיף הקודם ולהציב $s = 0$ ולקבל כי עליה ללכת בכיוון $(0, 1, 0)$ (כך היא אכן לא תצטרך לעוף, ואין סתירה לנתון כי היא איננה מעופפת).

נוכל כמובן גם להגדיר פונצקיה חדשה על־ידי $\tilde{T}(x, y) = T(x, y, 5) = e^x + 2y + 3$ ונקבל עבורה $\nabla \tilde{T} p = (4, 5)$ ומכאן נסיק ישירות כי עליה ללכת בכיוון $(1, 0)$ או $(0, 1)$ או כל שילוב חיובי שלהם.

שאלה 6

נגדיר

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

סעיף א'

עבור כל $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ נראה שהנגזרת המכוונת $\partial_v f\mid_{(0,0)}$ קיימת ונחשב אותה.

$$\partial_v f\mid_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv)-t(0)}{\|tv\|}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3a^3}{t^2(a^2+b^2)}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3a^3-0}{t^3(a^2+b^2)}=\frac{a^3}{a^2+b^2}$$

ומצאנו כי הנגזרת המכוונת לכל כיוון ב־$(0,0)$ מוגדרת.

סעיף ב'

נוכיח ש־f לא גזירה ב־$(0,0)$.

הוכחה. נניח בשלילה כי היא גזירה ונשתמש באפיון היינה לגבולות, נגדיר שתי סדרות נקודות $(p_n)_{n=1}^{\infty},(q_n)_{n=1}^{\infty}$ על־ידי

$$p_n=(\frac{1}{n},0),\qquad q_n=(0,\frac{1}{n})$$

נבחין כי

$$f(p_n)=\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+0}=\frac{1}{n},\qquad f(q_n)=\frac{0}{0+\frac{1}{n^2}}=0$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}f(p_n)=\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}f(q_n)=0$$

הגבול של f בנקודה הוא לא יחיד ולכן הגבול כלל לא מתקיים, דהינו היא לא רציפה ולכן גם לא גזירה בנקודה זו. $\square$