פתרון מטלה 10 — תורת ההסתברות (1), 80420

17 בינואר 2025

שאלה 1

יהי X משתנה מקרי שהמומנט ה־k שלו קיים וסופי.
נוכיח שלכל $c > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)|^k)}{c^k}$$

הוכחה. נבחין כי הקבוצות הבאות שקולות,

$$\{|X-\mathbb{E}(X)| \geq c\} = \{|X-\mathbb{E}(X)|^k \geq c^k\}$$

ולכן מאי־שוויון מרקוב והעובדה שנתון כי המומנט ה־k של X מוגדר,

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq c) = \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|^k \geq c^k) \leq \frac{\mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)|^k)}{c^k}$$

$\square$

שאלה 2

נחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של $U([k])$ ונקבע את תחום הגדרתה.

פתרון נניח ש־$X \sim U([k])$ ולכן עלינו למצוא את $M_X(t)$ לכל $t \in \mathbb{R}$ או להראות ש־$M_X(t)$ לא מוגדר.

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) \\
&= \sum_{s \in \operatorname{Supp} e^{tX}} s\mathbb{P}(e^{tX} = s) \\
&= \sum_{s \in \{e^{tn} \mid n \in [k]\}} s\mathbb{P}(e^{tX} = s) \\
&= \sum_{n=1}^{k} e^{tn}\mathbb{P}(e^{tX} = e^{tn}) \\
&= \sum_{n=1}^{k} e^{tn}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{k} \cdot e^t \frac{e^{tk} - 1}{e^t - 1} \\
&= \frac{e^{t(k+1)} - e^t}{k(e^t - 1)}
\end{aligned}$$

ולכן $M_X(t) = \frac{e^{t(k+1)} - e^t}{k(e^t-1)}$, אבל מצאנו בחישוב שלכל $t \neq 0$ הביטוי מוגדר, ולכן $M_X(t) : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

שאלה 3

יהי X משתנה מקרי עם פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t)=at+b$ עבור $a,b\in\mathbb{R}$.

נמצא את ערכי a,b ואת התפלגות X.

פתרון נתחיל בהצבה,

$$M_X(0)=\mathbb{E}(e^{0X})=\mathbb{E}(1)=1=a\cdot 0+b$$

ולכן $b=1$. עוד אנו יודעים ש־$M_X'(0)=\mathbb{E}(X)$ אבל $M_X'(t)=a$ ולכן $\mathbb{E}(X)=a$, וכן $\mathbb{E}(X^2)=M_X''(0)=0$ ולכן

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=0-a^2$$

ומאי־שליליות השונות נובע ש־$a=0$ בלבד, כלומר $M_X(t)=1$ וכן $\mathbb{E}(X)=0,\mathrm{Var}(X)=0$, כלומר $X=0$.

שאלה 4

יהי $X \sim Poi(\lambda)$, נראה שלכל $c > 1$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq c\lambda) \leq \frac{e^{c\lambda-\lambda}}{c^{c\lambda}}$$

הוכחה. בהרצאה מצאנו שמתקיים $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, לכן מאי־שוויון צ'רנוף לכל $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq c\lambda) \leq \frac{M_X(t)}{e^{tc\lambda}} = \frac{e^{c\lambda(e^t-1)}}{e^{tc\lambda}}$$

לכן בפרט כאשר $t = \log c$ מתקיים,

$$\mathbb{P}(X \geq c\lambda) \leq \frac{e^{\lambda(e^{\log c}-1)}}{e^{\log(c)c\lambda}} = \frac{e^{\lambda c-\lambda}}{c^{c\lambda}}$$

כפי שרצינו. □

שאלה 5

יהי $n \in \mathbb{N}$ ונגדיר טבלה בגודל $n \times n$, נעבור על כל צלע בטבלה ונמחק אותה בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן בלתי־תלוי.
יהי X מספר הריבועים שלא נמחקה אף צלע שלהם, נוכיח על־ידי שימוש באי־שוויון הופדינג שלכל $c > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{n^2}{16} + cn) \leq 2e^{-\frac{c^2}{4}}$$

הוכחה. נגדיר $Y_{i,j} \sim Ber(\frac{1}{2})$ האם הצלע ה־i, j קיימת (מטעמי סימטריה מותר לנו לבחור כן).
נגדיר גם $X_{i,j} = Y_{i,j} \cdot Y_{i+1,j} \cdot Y_{i,j+1} \cdot Y_{i+1,j+1} \sim Ber(\frac{1}{16})$ המייצג שהריבוע ה־i, j קיים.
נשים לב ש־$|X_{i,j}| \leq 1$ מההגדרה ולכן יהיה לנו תוקף לאי־שוויון הופדינג בהמשך.
לבסוף גם $X = \sum_{1 \leq i,j \leq n} X_{i,j}$.
נראה דוגמה למבנה של טבלה כזו,

A	B	A
B	A	B
A	B	A

כדי להשתמש באי־שוויון הופדינג נחלק את המשבצות לקבוצות בלתי־תלויות, נקרא למשבצת $X_{i,j}$ זוגית אם ורק אם $i + i \equiv 0 \mod 2$, ונבחין שהקבוצה S_0 קבוצת המשבצות הזוגיות ו־S_1 קבוצת המשבצות האי־זוגיות בלתי־תלויות. נגדיר פורמלית,

$$S_0 = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i+j \equiv 0 \mod 2}} X_{i,j}, \qquad S_1 = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i+j \equiv 1 \mod 2}} X_{i,j}$$

וכן $X = S_0 + S_1$. נבחן את S_0,

$$\mathbb{E}(S_0) = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i+j \equiv 0 \mod 2}} \mathbb{E}(X_{i,j}) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{16} & n \equiv 0 \mod 2 \\ \frac{n^2+1}{2} \cdot \frac{1}{16} & n \equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$

וכן באופן דומה נובע

$$\mathbb{E}(S_1) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{16} & n \equiv 0 \mod 2 \\ \frac{n^2-1}{2} \cdot \frac{1}{16} & n \equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$

אילו נניח ש־$n \equiv 0 \mod 2$ אז

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq \frac{n^2}{16} + cn) &\leq \mathbb{P}(S_0 - \frac{n^2}{32} \geq \frac{1}{2}cn) + \mathbb{P}(S_1 \geq \frac{n^2}{32} + \frac{1}{2}cn) \\ &= \mathbb{P}(S_0 - \frac{n^2}{32} \geq \frac{1}{2}cn) + \mathbb{P}(S_1 \geq \frac{n^2}{32} + \frac{1}{2}cn) \\ &\leq \exp(-\frac{\frac{1}{4}c^2n^2}{2\frac{n^2}{2}}) + \exp(-\frac{\frac{1}{4}c^2n^2}{2\frac{n^2}{2}}) \\ &= 2\exp(-\frac{c^2}{4}) \end{aligned}$$

כפי שרצינו להוכיח, לכן נותר לנו להניח ש־$n \equiv 1 \mod 2$, במקרה זה

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq \frac{n^2}{16} + cn) &\leq \mathbb{P}(S_0 \geq \frac{n^2+1}{32} + \frac{1}{2}cn + \frac{c}{2}) + \mathbb{P}(S_1 \geq \frac{n^2-1}{32} + \frac{1}{2}cn - \frac{1}{2}c) \\ &\leq \exp(\frac{\frac{1}{4}c^2(n+1)^2}{2\frac{n^2+1}{2}}) + \exp(\frac{\frac{1}{4}c^2(n-1)^2}{2\frac{n^2-1}{2}}) \\ &= \exp(-\frac{c^2(n+1)^2}{4(n^2+1)}) + \exp(-\frac{c^2(n-1)^2}{4(n^2-1)}) \\ &= 2\exp(-\frac{c^2}{4}) \end{aligned}$$

כפי שרצינו.

נבחין כי ישנה דרך נוספת להוכחת הטענה. נניח שהצלעות של הטבלה הן בלתי־תלויות, דהינו הטבלה מהצורה:

C	B	A
C	B	A
C	B	A

נבחין שמתקיים

$$\mathbb{E}(Y_{i,j}) = \frac{1}{4}$$

ולכן

$$\mathbb{E}(X_{i,j}) = \mathbb{E}(Y_{i,j}) \cdot \mathbb{E}(Y_{i+1,j}) \cdot \mathbb{E}(Y_{i,j+1}) \cdot \mathbb{E}(Y_{i+1,j+1}) = \frac{1}{16}$$

ובהתאם

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{1\leq i,j\leq n} X_{i,j} = \frac{n^2}{16}$$

וכמובן גם מההגדרה לכל $1 \leq i, j \leq n$ גם $|X_{i,j}| \leq 1$, אז תנאי אי־שוויון הופדינג חלים ומתקיים

$$\mathbb{P}(X - \frac{n^2}{16} \geq cn) = \mathbb{P}(X \geq cn + \frac{n^2}{16}) \leq e^{-\frac{c^2n^2}{2n^2}} \leq 2e^{-\frac{c^2}{4}}$$

כפי שרצינו להראות. $\square$

שאלה 6

שיכור עומד על ציר המספרים, בכל יום הוא צועד צעד אחד שמאלה בהסתברות p או שני צעדים ימינה בהסתברות $1-p$, באופן בלתי־תלוי בימים הקודמים.

נוכיח שההסתברות שהשיכור נמצא בראשית ביום ה־$3n$ דועכת מעריכית לכל $p \neq \frac{2}{3}$.

הוכחה. נגדיר X_n המשתנה המקרי המייצג כמה זז השיכור ביום ה־n, כלומר

$$\mathbb{P}(X_n = s) = \begin{cases} p & s = -1 \\ 1-p & s = 2 \end{cases}$$

וכן נגדיר $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$, סך המרחק שזז השיכור לאורך n ימים. נבחין ש־$\frac{X_n+1}{3} \sim Ber(1-p)$, ולכן $\frac{Y_n+n}{3} \sim Bin(n, 1-p)$. לכן נסיק

$$\mathbb{E}(\frac{Y_n+n}{3}) = n(1-p) \iff \mathbb{E}(Y_n+n) = n(3-3p) \iff \mathbb{E}(XY_n) = n(2-3p)$$

ולכן $\mathbb{E}(Y_n - n(2-3p)) = 0$, וכן $\frac{1}{3}|X_n - (2-3p)| \leq 1$ כמעט תמיד, ולכן

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) \leq \mathbb{P}(Y_n \geq 0) = \mathbb{P}(\frac{1}{3}(Y_n - n(2-3p)) \geq \frac{1}{3}n(2-3p)) \leq \exp(-\frac{n^2(2-3p)^2}{9 \cdot 2n}) \xrightarrow[p\neq\frac{2}{3}]{n\to\infty} e^{-\infty} = 0$$

ומצאנו שביום ה־n הסיכוי שהשיכור נמצא בראשית דועך לאפס לכל $p \neq \frac{2}{3}$, לכן בפרט ביום ה־$3n$ הוא גם דועך. $\square$