נגדיר $\Omega = [6]$ עם הסתברות אחידה $\mathbb{P}$. נגדיר $X(\omega) = \omega$ ו־$Y(\omega) = \omega$

$$SuppX = [6] \qquad SuppY = [6]$$

נגדיר $Z = X + Y$.

$$SuppZ = 2 \cdot [6]$$

עכשיו נגדיר $X$ הטלת קובייה ו־$Y$ הטלת קובייה שנייה. עכשיו $\Omega = [6]^2$.

$$X((a,b)) = a, \qquad Y((a,b)) = b, \qquad Z((a,b)) = a+b \qquad SuppZ = [12]$$

נחשב

$$\mathbb{P}(Z=4) = \mathbb{P}(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}) = \frac{3}{36} = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) = 4\})$$

$Supp\ X = Supp\ Y = \{0, \dots, n-1\}$ וגם $Z = X + Y \mod n$.

$$Supp\ Z = Supp\ X = \{0, \dots, n-1\}$$

נניח ש־$X, Z$ בלתי־תלויים. נראה ש־$\mathbb{P}(Y = \omega) = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) \cdot \mathbb{P}(Z=l) &= \mathbb{P}(X=k, Z=l) \\
&= \mathbb{P}(X=k, X+Y \mod n = l) \\
&= \mathbb{P}(X=k, X+Y = l+an) \\
&= \mathbb{P}(X=k, X+Y \in \{l, l+n\}) \\
&= \mathbb{P}(X=k, k+Y \in \{l, l+n\}) \\
&= \mathbb{P}(X=k, Y \in \{l-k, l-k+n\}) \\
&= \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y \in \{l-k, l-k+n\})
\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(Z=l) = \mathbb{P}(Y \in \{l-k, l-k+n\})$$

נחפש את

$$\mathbb{P}(Y=m)$$

נקבל $m = l-k$ או $m = l-k+n$.

$$\mathbb{P}(Y=m) = \mathbb{P}(Z=l)$$

נכתוב $l = m+k$ או $l = m+k-n$.

$$\mathbb{P}(Y=m) = \mathbb{P}(Z=m+k)$$

נגדיר $k = i, j$ אז

$$\mathbb{P}(Y=m) = \mathbb{P}(Z=m+i) = \mathbb{P}(Z=m+j)$$

לדוגמה אם $m = 0$ אז

$$\mathbb{P}(Z=i) = \mathbb{P}(Z=j)$$

לכל $0 \le i, j \le n-1$. לכן

$$\mathbb{P}(Z=l) = \frac{1}{n}$$

אז נובע

$$\mathbb{P}(Y=m) = \frac{1}{n}$$