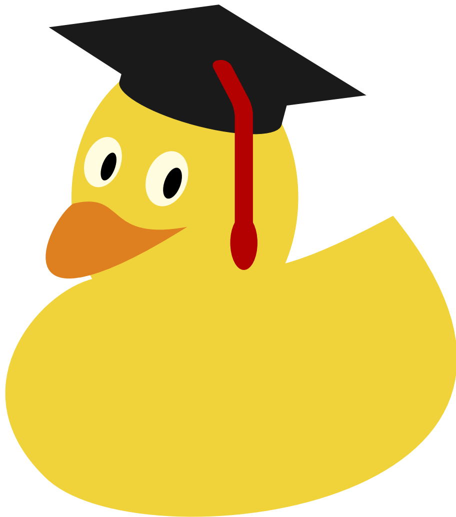
# פתרון מטלה 1 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (80132–2)

6 במאי 2024



# שאלה 1

## סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$ גזירה בנקודה $x_0 = 3$.

על־פי הגדרת הנגזרת הגבול הבא צריך להתקיים:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((3+h)^3 + 5(3+h)^2 + 1 - 3^3 - 5\cdot 3^2 - 1) \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((3+h)^3 + 5(3+h)^2 - 62) \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(3^3 + 3\cdot 3^2 h + 3\cdot 3^1 h^2 + h^3 + 5\cdot 3^2 + 5\cdot 6h + 5h^2 - 62) \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(27h + 9h^2 + h^3 + 30h + 5h^2) \\
=&\lim_{h\to 0} 57 + 14h + h^2 \\
=&57 + 14\cdot 0 + 0^2 = 57
\end{aligned}$$

מצאנו כי הגבול מתקיים ולכן הפונקציה גזירה בנקודה ואף מתקיים $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = 57$.

## סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x}$ גזירה בנקודה $x_0 = 2$:

*הוכחה.* נגזרת מוגדרת בנקודה אם ורק אם הגבול הבא מתקיים:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt[3]{2+h} - \sqrt[3]{2}\right) \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt[3]{2+h} - \sqrt[3]{2}\right) \frac{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{2+h-2}{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(2+h)^2} + \sqrt[3]{2(2+h)} + \sqrt[3]{2^2}} \\
=&\frac{1}{\sqrt[3]{(2+2)^2} + \sqrt[3]{2(2+2)} + \sqrt[3]{2^2}} \\
=&\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}
\end{aligned}$$

מצאנו כי הגבול מתקיים ולכן נובע כי $f'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$. **מש"ל**

## סעיף ג'

נראה את הטענה כי הפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor$ גזירה בכל נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ על־ידי דוגמה נגדית: נגדיר $x_0 \in \mathbb{Z}$, ידוע כי הפונקציה $f$ איננה רציפה בנקודות $x_0$, ולכן עומדת בסתירה לטענה כי הן גזירות בנקודה זו.

## שאלה 2

תהי $f$ פונקציה המוגדרת על־ידי

$$f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

### סעיף א'

נראה כי הפונקציה גזירה מימין בנקודה $x_0 = 0$:

לכל סביבה ימנית של 0 ב־$f$ מתקיים $f(x) = -x$, ואנו כמובן יודעים כי ביטוי זה גזיר וערך נגזרתו הוא $-1$, לכן נסיק כי גם $f$ גזירה מימין בנקודה.

### סעיף ב'

נחשב את הפונקציה $f \circ f$:

עבור $x < 0$ נקבל $f(x) = 1$ ובהתאם $f(1) = -1$ ולכן $(f \circ f)(x) = -1$.

עבור $0 \leq x$ נקבל $f(x) = -x$, ובהתאם $f(-x) = 1$ ולכן $(f \circ f)(x) = 1$. נראה כי מתקיים

$$f \circ f = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \end{cases}$$

### סעיף ג'

תהי פונקציה $g$ אשר מוגדרת בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$, וגזירה מימין בנקודה, ותהי פונקציה $h$ המוגדרת בסיבבה מלאה של $x_1 = g(x_0)$ וגזירה מימין ב־$x_1$. נוכיח כי $h \circ g$ גזירה מימין אף היא בנקודה $x_0$:

*הוכחה.* הלכה למעשה טענה זו נובעת ישירות ממשפט הרכבת פונקציות בגבולות חלקיים.

ידוע כי $g$ גזירה מימן ולכן גם רציפה מימין בנקודה ולכן

$$\lim_{x \to x_0^+} g(x) = g(x_0) = x_1, \lim_{x \to x_1^+} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

נשתמש במשפט ההרכבה:

$$\lim_{g(x) \to x_1^+} \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{x - g(x_0)} = \lim_{x \to x_1^+} \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{x - g(x_0)}$$

והגבול כמובן מוגדר **מש"ל**

## שאלה 3

### סעיף א'

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0+3h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}2\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{2h}-3\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h}\\
=&2f'(x_0)-3f'(x_0)=-f'(x_0)
\end{aligned}$$

### סעיף ב'

נגדיר את הפונקציה $g(x)=|x|$ ונבחן את הנקודה $x_0=0$.

אנו כבר יודעים כי הפונקציה איננה גזירה בנקודה זו, למרות זאת מתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h}=0$$

דהינו, הגבול מתקיים וערכו 0 בסתירה לאי־קיום הנגזרת בנקודה זו.

## שאלה 4

תהינה $f, g$ פונקציות המוגדרות בסביבה של $x_0 \in \mathbb{R}$.

### סעיף א'

נוכיח כי אם $f(x_0) = g(x_0)$ וגם $f'_-(x_0) = g'_+(x_0)$ אז הפונקציה $h(x) = \begin{cases} f(x) & x < x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$ גזירה ב־$x_0$:

*הוכחה.* הפונקציה $h$ מתלכדת בסביבתה הימנית עם $g$ ובשמאלית עם $f$ ולכן מתקיימים הגבולות:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) = g'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$$

וקיבלנו כי $h'(x_0)$ מוגדרת שכן שני הגבולות החלקיים מתכנסים לאותו ערך ולכן גם הגבול הכללי מתקיים. **מש"ל**

### סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם $fg$ ו־$f$ גזירות בנקודה $x_0$ אז גם $g$ גזירה בנקודה זו על־ידי דוגמה נגדית:

נגדיר $f(x) = 0$ ו־$g(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

כמובן שמתקיים $f(x)g(x) = 0$ לכל $x$ בתחום הגדרתן, וברור כי $f'(0) = 0$, אך $g$ איננה גזירה ב־$x_0 = 0$.

### סעיף ג'

נסתור את הטענה כי אילו $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ וגם $f$ לא גזירה ב־$x_0$ ו־$g$ גזירה בכל נקודה אז $g \circ f$ איננה גזירה ב־$x_0$ עם דוגמה נגדית.

נגדיר שוב $g(x) = 0$ ו־$f(x) = |x|$ עבור $x_0 = 0$. ברור למה תנאי הטענה מתקיימים אך כמובן $g \circ f = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכן גם גזירה בתחום זה.

## שאלה 5

תהי $h$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$.

### סעיף א'

נתון כי קיימת $\delta > 0$ כך שמתקיים $h(x) < h(x_0)$ לכל $x \in (x_0, x_0+\delta)$.
נוכיח כי $0 \leq h'(x_0)$

*הוכחה.* נניח בשלילה כי $h'(x_0) < 0$. לכן מתקיים

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} < 0$$

על־פי הגדרת הגבול הנתון, נובע כי ל־$\epsilon = \delta$ קיים $\delta_0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ המקיים $0 < x - x_0 < \delta_0$ מתקיים

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} < 0 \wedge x - x_0 \implies h(x) - h(x_0) < 0 \implies h(x) < h(x_0)$$

בסתירה לטענה, לכן לא מתקיים $h'(x_0) < 0$ ובהתאם נובע כי $h'(x_0) \geq 0$. **מש"ל**

### סעיף ב'

נניח כי $h'(x_0) > 0$ ונוכיח $\exists\delta : \forall x \in (x_0, x_0+\delta) : h(x) > h(x_0)$.

*הוכחה.* למעשה, זוהי הוכחה דומה להוכחה של הסעיף הקודם, מתקיים הגבול החד־צדדי:

$$h'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} > 0$$

נבחר $\epsilon > 0$ אשר עבורו נתונה $\delta_0$ עבורה לכל $x \in \mathbb{R}$ המקיים $0 < x - x_0 < \delta_0$ מתקיים:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} > 0 \implies h(x) - h(x_0) > 0 \implies h(x) > h(x_0)$$

ולבסוף נגדיר $\delta = \delta_0$.

את הכיוון ההפוך נוכיח באותה הדרך בדיוק עבור הפונקציה $h^*(x) = -h(x)$ והנקודה $x_1 = -x_0$, ונראה כי הטענה מתקיימת במלואה. **מש"ל**