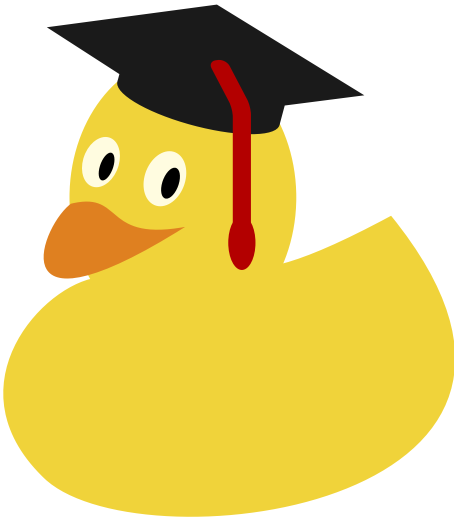
פתרון ממ"ן 11 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

21 ביולי 2023



שאלה 1

סעיף א'

נוכיח כי

$$\frac{2}{3\pi} \leq \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{\pi}$$

הוכחה. תחילה נגדיר

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

זוהי כמובן פונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית. נגדיר גם $g(x) = \frac{x^2}{2\pi}$ ונראה כי מתקיים $g(x) \geq f(x)$ לכל $x \geq 2\pi$. ממשפט 1.26 נובע כי

$$\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx \leq \int_{2\pi}^{3\pi} g(x)dx = \frac{x}{\pi}\Big|_{2\pi}^{3\pi} = \frac{1}{\pi}$$

נגדיר גם

$$h(x) = \frac{\sin x}{3\pi}$$

כמובן שבתחום האינטגרל המונה של f ו־h זהים, אך $x \leq 3\pi$ בתחום, ולכן גם $h(x) \leq f(x)$ לכל התחום, ומתקיים

$$\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx \geq \int_{2\pi}^{3\pi} h(x)dx = \left. \frac{-\cos x}{3\pi} \right|_{2\pi}^{3\pi} = \frac{2}{3\pi}$$

מצאנו כי

$$\frac{2}{3\pi} \leq \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{\pi}$$

מש"ל

סעיף ב'

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0, 2]$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$a_n = \int_{1/n}^{2/n} f(x)dx$$

נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} na_n = f(0)$

הוכחה. נגדיר $F(x)$ הפונקציה הקדומה של $f(x)$, לכן על־פי הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסמלי מתקיים

$$\int_{1/n}^{2/n} f(x)dx = a_n = F(2/n) - F(1/n)$$

מהגדרת הגבול לפי היינה ועל־פי משפט הרכבת פונקציות בגבול מאינפי 1 נקבל עבור הרכבת הפונקציה $g(t) = \frac{1}{t}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} na_n &= \lim_{t\to 0} \frac{F(2t) - F(t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{F(2t) - F(2\cdot 0) - F(t) + F(0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} 2\frac{F(2t) - F(2\cdot 0)}{2t} - \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} \\
&= 2f(0) - f(0)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} na_n = f(0)$$

מש"ל

סעיף ג'

נגדיר

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sqrt{\arctan t}\, dt$$

נוכיח כי $f(x) < \sqrt{\arctan(x+1)}$ לכל $x \geq 0$.

הוכחה. ידוע כי $g(x) = \sqrt{\arctan x}$ היא פונקציה עולה וחסומה, לכן $g(x) < g(x+1)$

מחישוב ישיר של הנגזרת של $g(x)$ נוכל להסיק כי לכל $x > 0$ לכל $x < y$ מתקיים $g'(x) > g'(y)$ ולכן שיפוע משיק לפונצקיה בנקודה גדול משל הפונקציה המקורית לכל נקודה לאחר נקודת ההשקה, ובהתאם בכל תחום זה המשיק גדול מ־g עצמה. לכן

נשים לב כי x ערך קבוע באינטגרל

$$\int_x^{x+1} g(t)\, dt \leq \int_x^{x+1} g'(x+1)(t-x-1) + g(x+1)\, dt$$

נציב ב־t

$$= g'(x+1)\frac{t^2}{2} - g'(x+1)(x+1)t + g(x+1)t\Big|_x^{x+1}$$

$$= g'(x+1)(2x+1)/2 - g'(x+1)(x+1) + g(x+1)$$

ידוע כי הפונקציה עולה ולכן הנגזרת חיובית

$$= \frac{-g'(x+1)}{2} + g(x+1)$$

$$< g(x+1)$$

לכן $f(x) < g(x+1)$, דהינו $f(x) < \sqrt{\arctan(x+1)}$ **מש"ל**

שאלה 2

נחשב את

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^{\sqrt{x}} t^2\arctan(e^t)dt}{\sqrt{x^3}}$$

אנו יודעים כי $\arctan t$ היא פונקציה עולה וחסומה, ואנו יודעים כי

$$\lim_{t\to\infty}\arctan t=\frac{\pi}{2}$$

לכן לכל $M>0$ לכל $t>M$ מתקיים $\frac{\alpha_M\pi}{2}<\arctan t$ כאשר $\alpha_M=\arctan M\cdot\frac{2}{\pi}$ ונובע כי $0<\alpha_M<1$.

אז לכמעט כל x מתקיים גם $\frac{\alpha\pi}{2}t^2\le t^2\arctan(e^t)\le\frac{\pi}{2}t^2$ וממשפט 1.26 נובע

$$\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\alpha\pi}{2}t^2dt\le\int_0^{\sqrt{x}} t^2\arctan(e^t)dt\le\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\pi}{2}t^2dt$$

ידוע כי $(t^3/3)'=t^2$ ולכן מהמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסמלי נובע

$$\frac{\alpha\pi}{2}\sqrt{x^3}\le\int_0^{\sqrt{x}} t^2\arctan(e^t)dt\le\frac{\pi}{2}\sqrt{x^3}$$

מהגדרת הגבול לפונקציות ומהגדרת α נובע כי $\lim_{x\to\infty}\alpha_M=1$.

לכן ממשפט הסנדוויץ' לגבולות נובע כי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\alpha\pi}{2}\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^{\sqrt{x}} t^2\arctan(e^t)dt}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}}=\frac{\pi}{2}$$

שאלה 3

תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בכל קטע סגור חלקי ל־$\mathbb{R}$, ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

נוכיח כי $f \equiv 0$ ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה. על־פי הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסמלי מתקיים

$$f(x) = F(x) - F(0)$$

כאשר $F(x)$ היא הפונקציה הקדומה של $f(x)$, נגזור את השוויון ונקבל כי $f(x) = f'(x)$.

נגדיר $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, ונגזור אותה:

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{f(x) - f(x)}{e^x} = 0$$

לכן $g(x)$ היא פונצקיה קבועה, לכן בהכרח $f(x) = ce^x$. בהתאם גם $F(x) = ce^x$ ומתקיים

$$f(x) = F(x) - F(0) = f(x) - c \to c = 0$$

ולכן $f(x) = 0e^x = 0$. **מש"ל**

שאלה 4

נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor \cos \pi x \rfloor & 0 \leq 0 \leq 1 \\ |x-2| & x > 1 \end{cases}$$

סעיף א'

נוכיח כי f אינטגרבילית בקטע $[0,3]$ אך אין לה פונקציה קדומה בקטע זה.

הוכחה. נשים לב כי בשל הגדרתה מתקיים

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x-2 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

אז על־פי הגדרה 1.15 הפונקציה f מונוטונית למקוטעין בקטע $(0,3]$ ולכן ממשפט 1.17 נובע כי היא אינטגרבילית בקטע זה.
מלמה 1.25 עבור הפונקציה $f(x)$ והפונקציה $g(x)$ המוגדרת על־ידי

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ f(x) & x > 0 \end{cases}$$

נובע כי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע הסגור $[0,3]$.
נניח בשלילה כי קיימת פונקציה קדומה $F(x)$ ל־$f(x)$, ממשפט 8.12 באינפי 1 נובע כי כלל נקודות אי־הרציפות של f הן ממין שני.
נבחין כי $x = 1$ היא נקודת אי־רציפות ב־$f(x)$ ממין ראשון, בסתירה לטענה, ולכן לא קיימת פונקציה F כזו. מש"ל

סעיף ב'

ידוע כי בתחום $[0, \frac{1}{2}]$ מתקיים

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x g(x)dx = \int_0^x 0dx = 0|_0^x = 0$$

בתחום $(\frac{1}{2}, 1]$ מתקיים $f(x) = -1$ ולכן

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^x -1dx = -x|_{\frac{1}{2}}^x = -x + \frac{1}{2}$$

בתחום $(1,2)$ מתקיים $f(x) = 2-x$ ובהתאם

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = F(1) + \int_1^x (2-x)dx = 2x - \frac{x^2}{2}\bigg|_1^x + F(1) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 2$$

בתחום $[2,3]$ ידוע כי $f(x) = x-2$ ולכן

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = F(2) + \int_2^x (x-2)dx = \frac{x^2}{2} - 2x\bigg|_2^x + F(2) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$$

שאלה 5

סעיף א'

נוכיח כי אם f, g פונקציות לא יורדות ואי־שליליות בקטע $[a, b]$ אז fg אינטגרבילית ב־$[a, b]$.

הוכחה. לכל $x, y \in [a, b]$ מתקיים $0 < f(x) \leq f(y)$ וגם $0 < g(x) \leq g(y)$ ולכן בהתאם גם $0 < f(x)g(x) \leq f(y)g(y)$.
אז גם fg היא עולה במובן הרחב וממשפט 1.15 נובע כי היא אינטגרבילית ב־$[a, b]$. **מש"ל**

סעיף ב'

נפריך את הטענה כי אם $f(x)$ פונקציה רציפה ב־$[a, b]$ המקיימת $\int_a^b f(x)dx = 0$ אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש־$f(c) = 0$ בעזרת דוגמה נגדית.

הוכחה. נגדיר $f(x) = 1$, בקטע $[0, 0]$, קטע מנוון אך מוגדר מקיים

$$\int_0^0 f(x)dx = 0$$

אך אין נקודה $c \in \mathbb{R}$ כך ש־$f(c) = 0$, ובפרט אין נקודה כזו ב־$[0, 0]$. **מש"ל**

סעיף ג'

תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ ונגדיר $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, ידוע כי F איננה גזירה בקטע.
נוכיח כי אין ל־f פונקציה קדומה בקטע $[a, b]$

הוכחה. נניח בשלילה כי $G(x)$ היא פונקציה המקיימת $G'(x) = f(x)$, דהינו G היא פונקציה קדומה של f.
אז ממשפט 1.31 נובע כי הפונקציה G ו־F נבדלות ביניהן בקבוע, $F(x) = G(x) + C$.
אבל ידוע כי F איננה גזירה ולכן גם $G(x) + C$ איננה גזירה בסתירה להנחה כי $G'(x) = f(x)$. **מש"ל**

סעיף ד'

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע $[a, b]$ ואינטגרבילית בקטע $[c, b]$ לכל $c \in (a, b)$.
נוכיח כי f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

הוכחה. לכל קטע $[a, c]$ ניתן להגדיר $[a, \frac{a+c}{2}]$ קטע חלקי ממש לקטע הראשון ואשר ידוע כי $[\frac{a+c}{2}, b] \subseteq (\frac{a+c}{2}, c)$.
דהינו בהפרש הקטעים f היא אינטגרבילית. נוכל אם כן לבנות סדרת קטעים אינסופית של קטעים מוכלים ממש אשר בהפרשם f אינטגרבילית.
על־פי הלמה של קנטור בחיתוך סדרת הקטעים נמצא ערך יחיד c_0, וידוע כי f אינטגרבילית בכל הקטע $[a, b]$ מלבד ב־c_0.
עוד נשים לב כי בכל קטע מתקיים $a \in [a, c]$ ולכן נוכל להניח כי $a = c_0$, אז מלמה 1.25 נובע כי f אינטגרבילית בכל הקטע. **מש"ל**

שאלה 6

תהיינה

$$f(x)=\sin x, g(x)=\begin{cases} x & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \pi-x & \frac{\pi}{2}\le x<\frac{3\pi}{2} \\ x-2\pi & \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi \end{cases}$$

נחשב את השטחה הכלוא בין הגרפים של הפונקציות עבור $0\le x\le 2\pi$.

נחשב את האינטגרלים הלא מסוימים תחילה

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=-\cos x$$

נחשב את האינטגרל של g על־פי חלקיו:

$$G(x)=\int_0^x g(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2} & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \pi x-\frac{x^2}{2} & \frac{\pi}{2}\le x<\frac{3\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2}-2\pi x & \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi \end{cases}$$

עוד נשים לב כי

$$\max\{F(x),G(x)\}=\begin{cases} G(x) & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ F(x) & \frac{\pi}{2}\le x<\pi \\ G(x) & \pi\le x<\frac{3\pi}{2} \\ F(x) & \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi \end{cases}$$

ולכן השטח הכלוא בין הגרפים הוא

$$\begin{aligned} S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(g(x)-f(x))dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(x)-g(x))dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(g(x)-f(x))dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(f(x)-g(x))dx \\ &=[G(x)-F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}+[F(x)-G(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+[G(x)-F(x)]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}+[F(x)-G(x)]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ &=G(\frac{\pi}{2})-F(\frac{\pi}{2})-G(0)+F(0)+F(\pi)-G(\pi)-F(\frac{\pi}{2})+G(\frac{\pi}{2}) \\ &+G(\frac{3\pi}{2})-F(\frac{3\pi}{2})-G(\pi)+F(\pi)+F(2\pi)-G(2\pi)-F(\frac{3\pi}{2})+G(\frac{3\pi}{2}) \\ &=2G(\frac{\pi}{2})-2F(\frac{\pi}{2})-G(0)+F(0)+2F(\pi)-2G(\pi)+2G(\frac{3\pi}{2})-2F(\frac{3\pi}{2})+F(2\pi)-G(2\pi) \\ &=\frac{1}{2}\pi^2-4 \end{aligned}$$