# פתרון מטלה 00 — תורת הקבוצות האקסיומטית, 80650

9 בנובמבר 2024

במטלה זו נניח את סט האקסיומות Foundation — Z.

## שאלה 1

נוכיח שאם $A$ מחלקה לא ריקה, אז $\bigcap A$ קבוצה.

*הוכחה.* נבחין תחילה כי $\bigcap A$ מחלקה (שעלולה להיות ריקה), עוד נתון כי $A$ עצמה לא ריקה ולכן תהי $a \in A$ קבוצה כלשהי. עתה נשתמש בסכמת הפרדה ונקבל $\{x \in a \mid x \in \bigcap A\}$ קבוצה, אבל מהגדרת החיתוך אם $x \in a \implies \forall b \in A, b \in x \iff x \in A$ וסיימנו. $\square$

## שאלה 2

נוכיח כי לכל $a,b$ קבוצות, גם $a \times b = \{\langle x,y \rangle = \{\{x\},\{x,y\}\} \mid x \in a, y \in b\}$ קבוצה.

*הוכחה.* מאקסיומת קבוצת חזקה נבחין כי $\mathcal{P}(a)$ קיימת, מסכמת הפרדה עבור $\varphi = \forall w,z \in x, w = z$ נקבל קבוצת יחידונים עבור קבוצות ב־$a$, דהינו $c_0 = \{\{x\} \mid x \in a\}$. מאקסיומת האיחוד ומאקסיומת הזוגות הלא סדורים קיימת הקבוצה $c_1 = \{\{x,y\} \mid x,y \in a \cup b\}$, וכן קיימת $c_0 \cup c_1$. עתה נגדיר $c_2 = \mathcal{P}(c_0 \cup c_1)$ ואת הטענה $\varphi = \forall u \in x(\exists z_0, z_1 \in u \wedge z_0 \in z_1 \wedge z_0 \subseteq z_1 \wedge \forall z_2 \in u(z_2 = z_0 \vee z_2 = z_1))$. ונקבל מסכמת הפרדה את קבוצת הקבוצות בגודל 2 כך שקבוצה אחת חלקית לשנייה, נשאר להשתמש שוב בסכמת הפרדה עבור $\psi = \forall u \in x, \exists z_0, z_1(z_0 \in a \wedge z_1 \in b \wedge z_0, z_1 \in u)$ וקיבלנו את הקבוצה המבוקשת. $\square$

## שאלה 3

עתה נוכיח את טענת השאלה הקודמת כאשר לא מניחים את אקסיומת קבוצת החזקה אך מניחים את אסיומת סכמת החלפה.

*הוכחה.* מאקסיומת הזוג הלא סדור יש לנו הצדקה להגדיר את פונקציית המחלקה

$$F_y(x) = \{x, y\}$$

מאקסיומת החלפה נקבל שעבור $y \in b$ כלשהו, $c_y = \{\{x, y\} \mid x \in a\}$ היא קבוצה, ולכן יש לנו הצדקה להגדיר פונקציית מחלקה נוספת

$$G(y) = \{c_y \mid y\}$$

ונקבל $d = \{c_y \mid y \in b\}$ קבוצה, ונבחין כי גם האיחוד $\bigcup d$ קבוצה, עתה נשתמש בסכמת החלפה עם $H(\{x, y\}) = \{\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle\}$ ובאיחוד ונקבל את הקבוצה הדרושה. $\square$

# שאלה 4

נפתור את הסעיפים הבאים תוך שימוש ב־$Z$.

## סעיף א'

נמצא נוסחה $\Delta_0$, $\varphi_1(x)$ כך ש־$x$ סודר אם ורק אם $\varphi_1(x)$.

**פתרון** נגדיר נוסחה כך ש־$x$ סדר טוב יחד עם $\in$ אם ורק אם $\psi_0(x)$.

$$\psi_0(x) = \forall a \in \mathcal{P}(x)(\exists b \in a(\forall c \in a(b \in c)))$$

נגדיר נוסחה $\psi_1(x)$ אשר מתקיימת אם ורק אם $x$ קבוצה טרנזיטיבית.

$$\psi_1(x) = \forall a \in x(\forall b \in a(b \in x))$$

לבסוף נגדיר $\varphi(x) = \psi_1(x) \wedge \psi_1(x)$.

## סעיף ב'

נמצא נוסחה $\Delta_0$, $\varphi_2(x, y)$ כך ש־$x = \bigcup y$ אם ורק אם $\varphi_2(x)$.

**פתרון** נגדיר את הנוסחה בהתאם להגדרת האיחוד

$$\varphi_2(x, y) = (\forall a \in x(\exists b \in y(a \in b))) \wedge (\forall a \in y(\forall b \in a(b \in x)))$$

נמצא נוסחה $\Delta_0$, $\varphi_3(x)$ כך ש־$x$ הוא סודר עוקב אם ורק אם $\varphi_3(x)$.

**פתרון** נוכל להשתמש ב־$\varphi_1(x)$ כדי לוודא ש־$x$ אכן סודר, ונכתוב נוסחה נוספת לבדיקה שהוא אכן עוקב לסודר אחר:

$$\psi(x) = \exists a \in x(x = a \cup \{a\})$$

נוסחה זו כמובן מקבל משמעות בעקבות אקסיומת הזוג הלא סדור. לבסוף נגדיר $\varphi_3(x) = \varphi_1(x) \wedge \psi(x)$.

## סעיף ג'

נמצא נוסחה $\Delta_0$, $\varphi_4(x)$ כך ש־$x = \omega$ אם ורק אם $\varphi_4(x)$.

**פתרון** נשתמש בעובדה ש־$\omega$ הסודר הגבולי הראשון, ולכן כל $n \in \omega$ הוא סודר עוקב או הקבוצה הריקה:

$$\varphi_4(x) = \forall a \in x(\varphi_3(a) \vee a = \emptyset)$$

## שאלה 5

יהיו $B \subseteq A$ קבוצות טרנזיטיביות לא ריקות.

### סעיף א'

תהי נוסחה $\varphi(y_0, \ldots, y_{n-1})$ מהצורה $\forall x\psi$ כאשר $\psi$ היא $\Delta_0$, ויהיו $p_0, \ldots, p_{n-1} \in A$.
נוכיח כי $\langle B, \in\rangle \models \varphi(p_0, \ldots, p_{n-1})$ גורר ש־$\langle A, \in\rangle \models \varphi(p_0, \ldots, p_{n-1})$.

*הוכחה.* אפשר להראות ש־$\varphi(p_0, \ldots, p_{n-1}) \vdash \forall x \in B\psi$ ולכן גם $\varphi(p_0, \ldots, p_{n-1}) \models \forall x \in B\psi$ ומהלמה שנלמדה בכיתה נקבל כי הטענה מתקיימת, לכן בפרט גם $\forall x \in A\psi$, ושוב מהלמה נקבל $\langle A, \in\rangle \models \forall x \in A\psi$, אבל $\models_A \forall x \in A\ x$, דהינו טענה זו חלה תמיד, ולכן נוכל לקבל גם $\varphi(p_0, \ldots, p_{n-1}) \vdash \forall x \in A\psi$. בהתאם נקבל $\langle A, \in\rangle \models \varphi(p_0, \ldots, p_{n-1})$. $\square$

### סעיף ב'

הפעם תהי $\varphi(y_0, \ldots, y_{n-1})$ מהצורה $\exists x\psi$ עבור אותה $\psi$ וכאשר $p_0, \ldots, p_{n-1} \in A$. נוכיח שהפעם $\langle A, \in\rangle \models \varphi(p_0, \ldots, p_{n-1})$ גורר $\langle B, \in\rangle \models \varphi(p_0, \ldots, p_{n-1})$.

*הוכחה.* נוכל לבחון את הפסוק $\exists x \in A\psi(p_0, \ldots, p_{n-1})$, הוא כמובן עומד בתנאי הלמה ולכן $\langle B, \in\rangle \models \exists x \in A\psi(p_0, \ldots, p_{n-1})$. אבל אז מתקיים $\exists x \in A\psi(p_0, \ldots, p_{n-1}) \models \exists x\psi$ דהינו $\langle B, \in\rangle \models \varphi$. $\square$