פתרון מטלה 07 — מבוא ללוגיקה, 80423

16 בדצמבר 2024

שאלה 1

יהיו $mathcalA, B$ מבנים ל־L ויהי איזומורפיזם $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ושם עצם $t \in term_L$.
נוכיח שלכל השמה $\sigma : Var \to A$ מתקיים

$$f(t^{\mathcal{A}}(\sigma)) = t^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma)$$

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על שמות עצם.
נניח כי $t \in const_L$, ולכן מהגדרה של איזומורפיזם ושל השמה על קבועים

$$f(t^{\mathcal{A}}(\sigma)) = f(t^{\mathcal{A}}) = t^{\mathcal{B}} = t^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma)$$

נניח ש־$t \in Var$ ולכן מאותן ההגדרות נובע

$$f(t^{\mathcal{A}}(\sigma)) = f(\sigma(t)) = t^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma)$$

והשלמנו את בסיס האינדוקציה, נותר לבדוק את המהלך.
יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $F \in Func_{L,n}$ סימן פונקציה n־מקומי, ונניח $t_0, \ldots, t_{n-1} \in term_L$ כך שהם מקיימים את טענת האינדוקציה, אז.
נגדיר $t = F(t_0, \ldots, t_{n-1})$ ולכן מהגדרת איזומורפיזם, השמה עבור סימני פונקציה ויחד עם הנחת האינדוקציה נובע

$$f(t^{\mathcal{A}}(\sigma)) = f(F^{\mathcal{A}}(t_0^{\mathcal{A}}(\sigma), \ldots, t_{n-1}^{\mathcal{B}}(\sigma))) = F^{\mathcal{B}}(f(t_0^{\mathcal{A}}(\sigma)), \ldots, f(t_{n-1}^{\mathcal{B}}(\sigma))) = F^{\mathcal{B}}(t_0^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma), \ldots, t_{n-1}^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma)) = t^{\mathcal{B}}(f \circ \sigma)$$

והשלמנו את מהלך האינדוקציה. □

שאלה 2

נניח ש־L מכילה אינסוף סימני יחס חד־מקומיים $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
יהי מבנה $\mathcal{A} = \langle A, I\rangle$ כך ש־$A = \{0\}$ ו־$P_n^{\mathcal{A}} = \emptyset$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
נוכיח שלכל פסוק $\varphi \in sent_L$ כך ש־$\mathcal{A} \models \varphi$ קיים מבנה $\mathcal{B}$ ל־L כך ש־$\mathcal{B} \models \varphi$ וגם $\mathcal{A} \ncong \mathcal{B}$.

הוכחה. יהי פסוק φ כזה, ונגדיר $X_p = \{P_n \mid P_n \in \varphi\}$, קבוצת סימני היחס אשר מופיעים ב־φ (בסימון זה התייחסנו ל־φ כסדרה).
יהי $k \in \mathbb{N} \setminus \{i \in \mathbb{N} \mid P_i \in X_p\}$ כלשהו (הגדרה זו לא מצריכה בחירה).
נגדיר מבנה חדש $\mathcal{B} = \langle A, J\rangle$ כך ש־$I = J$ מלבד $P_k^{\mathcal{B}} = A \times A$.
נוכל להוכיח באינדוקציה על יחסים שמתקיים $\models\varphi$, אבל עבור הפסוק $\phi = \forall x\ P_k(x)$ נקבל $\mathcal{A} \not\models \phi$ בעוד $\mathcal{B} \models \phi$ ולכן בפרט $\mathcal{A} \ncong \mathcal{B}$. $\square$

שאלה 3

יהיו $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ מבנים ל־L ויהי ψ פסוק ללא כמתים ו־φ פסוק כך שעבור המשתנים $x_0, \dots, x_{k-1} \in Var$ מתקיים $\varphi = \forall x_0, \dots, \forall x_{k-1} \psi$.

סעיף א׳

נפריך את הטענה שאם $\mathcal{A} \models \varphi$ אז $\mathcal{B} \models \varphi$.

פתרון נגדיר L שפת השוויון ו־$A = \{0\}, B = \{0, 1\}$, ונגדיר גם $\psi(x, y) = x = y$, לכן φ מתלכדת עם $\varphi_{\leq 1}$ מהמטלה הקודמת.

בהתאם נבחין כי $\mathcal{A} \models \varphi$ אבל $\mathcal{B} \not\models \varphi$, זאת שכן $\psi(0, 1)$ לא מתקיים.

סעיף ב׳

נוכיח שאם $\mathcal{B} \models \varphi$ אז גם $\mathcal{A} \models \varphi$.

הוכחה. לכל השמה $\sigma : Var \to A$, נובע מהשיכון הנתון ומהעובדה ש־ψ חסר כמתים כי

$$\mathcal{A} \models \psi^{\mathcal{A}}(\sigma) \iff \mathcal{B} \models \psi^{\mathcal{B}}(\sigma) \iff \mathcal{B} \models \varphi$$

כאשר הגדרנו את σ מחדש כהרחבת הטווח, וכאשר הגרירה האחרונה נובעת מבדיקת הצבה ישירה והגדרת הקיום.

בהתאם מצאנו כי $\mathcal{A} \models \varphi$. $\square$

שאלה 4

תהי S מחלקה של מבנים ל־L.

סעיף א׳

נניח ש־$\mathcal{A}$ מבנה ל־L.
נוכיח שמתקיים $\mathcal{A} \in Mod(Th(S))$ אם ורק אם $\forall\varphi \in Th(\mathcal{A}), \exists\mathcal{B} \in S, \mathcal{B} \models \varphi$.

הוכחה. נניח ש־$\mathcal{A} \in Mod(Th(S))$ ונראה שלכל $\varphi \in Th(\mathcal{A})$ קיים מבנה $\mathcal{B} \in S$ כך ש־$\mathcal{B} \models \varphi$.
יהי φ כזה, מהגדרת Mod אנו יודעים כי $Th(\mathcal{A}) = Th(S)$, ולכן $\forall\mathcal{B} \in S, \mathcal{B} \models \varphi$ בהגדרה, ולכן מספיק שנבחר אחד מהם באופן שרירותי.
לכיוון ההפוך נניח שלכל $\mathcal{A} \models \varphi$ קיים $\mathcal{B} \in S$ כך שגם $\mathcal{B} \models \varphi$ ונרצה להראות ש־$\mathcal{A} \in Mod(Th(S))$.
כדי לעשות זאת נרצה להראות ש־$\mathcal{A} \models Th(S)$. יהי $\varphi \in Th(S)$. נניח בשלילה ש־$\varphi \notin Th(\mathcal{A})$ ולכן $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ ובהתאם קיים $\mathcal{B} \in S$ כך ש־$\mathcal{B} \models \neg\varphi$.
אבל זוהי כמובן סתירה, שכן $\mathcal{B} \models \varphi$, ולכן $\mathcal{A} \models \varphi$, ונסיק כי $\mathcal{A} \models Th(S)$. □

סעיף ב׳

נניח ש־$L = \{R\}$ עבור R סימן יחס דו־מקומי.
נניח ש־S היא מחלקת המבנים הסופיים $\mathcal{B}$ ל־L כך ש־$R^{\mathcal{B}}$ הוא יחס סדר קווי על B.
נראה ש־$Mod(Th(S))$ היא לא מחלקת הקבוצות הסדורות קווית על־ידי דוגמה נגדית.
פתרון נבחן את $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ השלמים יחד עם הסדר הרגיל שלהם.
זהו כמובן מבנה של קבוצה סדורה קווית, ולכן $\mathcal{A} \in Mod(Th(S))$ אם זו האחרונה מחלקת הקבוצות הסדורות קווית.
מצד שני, כל מבנה ב־S הוא סופי ולכן מקיים את תכונת קיום מינימום, קרי $\varphi = \exists x, \forall y, R(x, y)$, וכן $\varphi \in Th(S)$ בהתאם.
אבל $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, כלומר אין איבר שהוא מינימום ב־$\mathbb{Z}$, ולכן בפרט המחלקה לעיל איננה מחלקת הקבוצות הסדורות קווית.

סעיף ג׳

תהי L השפה מהסעיף הקודם ונניח ש־S היא מחלקת המבנים הסופיים ל־L.
נוכיח ש־$Mod(Th(S))$ היא מחלקת המבנים ל־L.

הוכחה. ניזכר בתוצאת המטלה הקודמת, הגדרנו $\varphi_{=n}$ הפסוק שמתקיים אם ורק אם גודל העולם הוא n.
נניח ש־$\varphi_{=n} \in Th(S)$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו, נגדיר $A = [n+1]$ ולכן $\mathcal{A} = \langle A, A \times A \rangle \in S$ ובהתאם $\mathcal{A} \not\models \varphi_{=n}$.
למעשה, $\mathcal{A} \models \neg\varphi_{=n}$, ונוכל להסיק ש־$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{=n} \notin Th(S)$ ולכן גם מבנים מגודל שאינו סופי נמצאים ב־$Mod(Th(S))$.
נוכל להוכיח את הטענה באופן מלא על־ידי שימוש בטענה כי כל פסוק ניתן להצגה כפסוק נורמלי, דהינו פסוק כמורכב מכמתים בלבד ונוסחה חסרת כמתים, ושימוש בנוסחה זו כדי לבנות נוסחה שמייצגת את שלילת הנוסחה המקורית. בהתאם נוכיח באינדוקציה שאם יש מבנה שמקיים את הנוסחה עבור קבוצת איברים כלשהי מעולמו, אז אפשר לבנות עם אותו עולם גם קבוצה שלא מקיימת את הנוסחה, זאת תוך שימוש ביחס המשלים של היחס שמוגדר במבנה המקורי. נקבל כך ש־$Th(S) = \emptyset$ ולכן כל מבנה $\mathcal{A}$ לשפה L מתקיים בהכרח $\mathcal{A} \models Th(S)$. □

שאלה 5

יהי $t \in term_L$ שם עצם ללא משתנים ויהי $x \in Var$.

סעיף א׳

נוכיח שלכל נוסחה $\varphi \in form_L$ שם העצם t כשר להצבה במקום x ב־φ.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על מבנה הנוסחה.

נניח ש־$\varphi = R(t_0, \ldots, t_{n-1})$ נוסחה אטומית כך ש־$R \in Rel_{L,n}$ ו־$t_0, \ldots, t_{n-1} \in term_L$. אז מהגדרת כשרות להצבה נובע שההצבה אכן כשרה.

נעבור למהלך האינדוקציה. למעשה, מהגדרת כשרות להצבה, הצבה ביחסים דו־מקומיים החד־מקומי הם חוקיים תחת הנחת האינדוקציה, ולכן מספיק שנבחן את המקרה של כמתים.

נניח את הנחת האינדוקציה עבור ψ ונבחן את $\varphi = \forall v\, \varphi$. נבחין כי ב־$\psi_t^x$ המשתנה x לא מופיע (בהתאם לעובדה שאין משתנים ב־t) ולכן אם x משתנה חופשי ב־φ אז סיימנו.

במקרה שבו הוא חופשי $x \neq v$, ולכן נניח ש־$v = x$, ובמקרה זה x לא חופשי ב־φ ולכן מההגדרה $\varphi_t^x = \varphi$.

המקרה עבור $\exists$ זהה, ולכן סיימנו את מהלך האינדוקציה ונובע שתמיד חוקי להציב שם עצם חסר משתנים בנוסחה. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שאם בנוסף $FV(\varphi) \subseteq \{x\}$ אז φ_t^x פסוק, קרי ההצבה כשרה גם כן.

הוכחה. במקרה בו x אכן משתנה חופשי ב־φ אז מההגדרה φ_t^x אכן פסוק, ולכן נניח שאין משתנים חופשיים ב־φ, כלומר φ פסוק. אבל כל פסוק הוא בפרט נוסחה, ולכן מהסעיף הקודם נובע ישירות שההצבה בו היא עדיין הצבה כשרה. $\square$