

## פתרון מטלה 02 – פונקציות מרוכבות, 80519

15 בנובמבר 2024



## שאלה 1

תהינה  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציות אנליטיות המוגדרות על קבוצה פתוחה  $U \subseteq \mathbb{C}$ .

### סעיף א'

נוכיח כי  $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ .

הוכחה. מהגדרת הנגזרת נובע

$$(f + g)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f + g)(z) - (f + g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

אבל שני הביטויים הללו נתונים ולכן מאריתמטיקה

$$(f + g)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + g'(z_0)$$

□

### סעיף ב'

נוכיח כי  $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ .

הוכחה. מהגדרת הנגזרת ומרציפות פונקציות גזירות נובע

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0)) \cdot g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot g(z) + \frac{f(z_0)g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) \end{aligned}$$

□

### סעיף ג'

נוכיח כי  $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$ .

הוכחה. מהגדרת הנגזרת נקבל

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \circ g)(z) - (f \circ g)(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0) \end{aligned}$$

□

## שאלה 2

עבור הפונקציות הבאות נמצא את נקודות הגזירות ונקבע באילו נקודות היא אנליטית.

### סעיף א'

$$f(x + iy) = (x^2 + y^2) + i(-x^2 + y^2)$$

פתרון נבחין כי אם נגזור את החלק מממשי נקבל

$$\operatorname{Re}(f(x + iy))' = (x^2 + y^2)' = (2x, 2y)$$

ובאופן דומה

$$\operatorname{Im}(f(x + iy))' = (-x^2 + y^2)' = (-2x, 2y)$$

כמובן  $2y = 2y$  בכל התחום, אך  $x = 0 \iff 2x = -2x$  ולכן היא גזירה על הציר המדומה בלבד. בהתאם אין נקודה פנימית בתחום הגזירות ולכן  $f$  לא אנליטית לאף נקודה.

### סעיף ב'

$$g(x + iy) = x^2 + 3iy$$

גם הפעם נחשב

$$\operatorname{Re}(g(x + iy))' = (3x^2, 0), \quad \operatorname{Im}(g(x + iy))' = (0, 3)$$

אין נקודה בה  $3 = 0$  ולכן  $g$  לא גזירה באף נקודה.

### סעיף ג'

$$h(x + iy) = |x^2 - y^2| + 2ixy$$

פתרון נבחן את הנגזרות החלקיות כשאר  $x^2 \geq y^2$ :

$$\operatorname{Re}(h)' = (2x, -2y), \quad \operatorname{Im}(h)' = (2, 2)$$

ונקבל גזירות כאשר  $x = 1, y = -1$  בלבד.

נבחן את הנגזרות החלקיות בשאר המקרים:

$$\operatorname{Re}(h)' = (-2x, 2y), \quad \operatorname{Im}(h)' = (2, 2)$$

ונקבל  $x = -1, y = 1$  בלבד, אך לא מתקיים  $1^2 < (-1)^2$  ולכן נוכל להסיק כי  $1 - i$  נקודת גזירות יחידה.

### סעיף ד'

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, k(z) = az + b\bar{z}$$

פתרון ראינו כבר כי אם  $b = 0$  אז  $k$  גזירה ואנליטית בכל תחומה.

אילו  $a = 0$  נקבל

$$\lim_{z \rightarrow z_0} b \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = b \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}$$

ומכאן ניתן לראות כי הצבה של סדרות ממשיכות תניב גזירת 1 והצבת סדרות מדומות תניב  $-1$  ו- $k$  איננה גזירה באף נקודה.

נניח  $a, b \neq 0$  ונניח שקיימים ערכים עבורם  $k$  גזירה, נקבל אם כך  $(az + b\bar{z})'$  גזיר, ומשאלה 1 נסיק  $az' + b\bar{z}'$  ביטוי מוגדר, וזו כמובן סתירה לתוצאה שקיבלנו זה עתה.

נסיק שכל עוד  $b = 0$  אז  $k$  הולומורפית.

### שאלה 3

תהי  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה אנליטית המוגדרת על תחום  $G \subseteq \mathbb{C}$ .

#### סעיף א'

נוכיח כי אם  $\forall z \in G, f'(z) = 0$  אז  $f$  בהכרח קבועה.

הוכחה. תהינה שתי נקודות  $z_0, z_1 \in G$ , נניח גם  $z_0 \neq z_1$ .

נגדיר מסילה  $l = [z_0, z_1]$ , אז כמובן  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , ונבחן את הגרסה שלה בשני משתנים  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  במקום.

בגרסה זו נגזרתה מתלכדת עם הנגזרת הכיוונית  $Df_{z_1-z_0} = 0$ , ולכן גם  $\nabla l = (0, 0)^t$ .

ידוע ש- $(\operatorname{Re}(z_0) \neq \operatorname{Re}(z_1) \vee \operatorname{Im}(z_0) \neq \operatorname{Im}(z_1)) \iff z_0 \neq z_1$  נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $\operatorname{Re}(z_0) \neq \operatorname{Re}(z_1)$  ולכן אם  $l = (l_1, l_2)$  מספיק שנבחן את  $l_1$ .

קיבלנו ש- $l_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  וגם  $l'(t) = 0$  לכל  $0 \leq t \leq 1$ , ולכן  $l_1(0) = l_1(1)$  וזאת בסתירה להנחתנו, לכן  $z_0 = z_1$  בלבד.  $\square$

#### סעיף ב'

נוכיח כי אם  $f(G) \subseteq \mathbb{R}$  אז  $f$  בהכרח קבועה.

הוכחה. נראה כי אם  $z = x + iy$  אז נובע

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy_0) = \frac{\partial f}{\partial iy}(x_0 + iy_0) = 0$$

דהינו  $f$  אנליטית אם ורק אם  $f'(z) = 0$  לכל  $z \in G$ , אז מהסעיף הקודם נובע  $f$  קבועה.  $\square$

#### סעיף ג'

נוכיח כי אם  $f(\bar{z})$  אנליטית אז  $f$  בהכרח קבועה.

הוכחה. מנתון נסיק ישירות כי גם  $\overline{f'(\bar{z})}$  אנליטית, דהינו  $\overline{f'(z)}$ .

אבל ידוע כי גם  $f$  גזירה ולכן

$$\frac{\partial f}{\partial iy}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(z) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial iy}(z) = -\frac{\partial f}{\partial iy}(z)$$

ולכן  $\frac{\partial f}{\partial iy}(z) = 0$  בלבד, ולכן  $f'(z) = 0$  לכל  $z \in G$ , אז מסעיף א' היא קבועה.  $\square$

#### סעיף ד'

נוכיח כי  $\overline{f(\bar{z})}$  אנליטית ונחשב את ערכה.

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{f(z) - f(z_0)}}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|^2} \overline{(f(z) - f(z_0))} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|z - z_0|^2} \overline{(f(z) - f(z_0))(z - z_0)} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \overline{\left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right)} \\
&= \overline{\left( \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right)} \\
&= \overline{f'(z_0)}
\end{aligned}$$

□

## שאלה 4

נחשב את החלק הממשי, החלק מהדומה, הערך המוחלט ואת השורשים של הפונקציות הנתונות.

### סעיף א'

נבחן את  $\cos(z)$ .

פתרון תחילה נמצא ביטוי בערך ממשי ומדומה לביטוי:

$$\begin{aligned}\cos(x + iy) &= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y) \\ &= \frac{1}{2}((\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} + (\cos(-x) + i\sin(-x))e^y) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(x)e^{-y} + \cos(x)e^y) + i\frac{1}{2}(\sin(x)e^{-y} - \sin(x)e^y)\end{aligned}$$

נעבור לחישוב הערך המוחלט:

$$\begin{aligned}|\cos(x + iy)| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\cos(x)e^{-y} + \cos(x)e^y)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(\sin(x)e^{-y} - \sin(x)e^y)\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}((\cos(x)e^{-y} + \cos(x)e^y)^2 + (\sin(x)e^{-y} - \sin(x)e^y)^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(\cos^2(x)e^{-2y} + 2\cos^2(x) + \cos^2(x)e^{2y} + \sin^2(x)e^{-2y} - 2\sin^2(x) + \sin^2(x)e^{2y})} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x)}\end{aligned}$$

לבסוף נבדוק את השורשים על-ידי שימוש בזהות  $|\cos(z)| = 0 \iff \cos(z) = 0$ , דהינו

$$\frac{1}{2}\sqrt{e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x)} = 0 \iff e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x) = 0 \iff \cos(2x) = \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}$$

אבל כמובן אם  $y \neq 0$  נקבל ביטוי קטן מ-1 ולכן  $y = 0$  ו- $\cos(2x) = -1$ , דהינו  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ .

### סעיף ב'

נעבור לבדוק את  $\sin(z)$ .

פתרון ידוע כי  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ , לכן נבצע אותו הליך שעשינו בסעיף הקודם תוך התחשבות בשינוי הסימן ונסיק

$$\begin{aligned}\sin(x + iy) &= \frac{1}{2i}(\cos(x)e^{-y} - \cos(x)e^y) + i\frac{1}{2i}(\sin(x)e^{-y} + \sin(x)e^y) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x)e^{-y} + \sin(x)e^y) + i\frac{1}{2}(\cos(x)e^y - \cos(x)e^{-y})\end{aligned}$$

הערך המוחלט הוא:

$$\begin{aligned}|\sin(x + iy)| &= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2(x)(e^{-2y} + 2 + e^{2y}) + \cos^2(x)(e^y - 2 + e^{-y})} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{e^{-2y} + e^{2y} - 2\cos(2x)}\end{aligned}$$

לבסוף נקבל שהשורשים הם  $z = \pi k$  משקולים זהים לסעיף הקודם.

### סעיף ג'

נחקור את  $\tan(z)$ :

פתרון נתחיל בחישוב החלק השלם והמדומה על-ידי שימוש בסעיפים הקודמים:

$$\begin{aligned}\tan(x + iy) &= \frac{\frac{1}{2}(\sin(x)e^{-y} + \sin(x)e^y) + i\frac{1}{2}(\cos(x)e^y - \cos(x)e^{-y})}{\frac{1}{2}(\cos(x)e^{-y} + \cos(x)e^y) + i\frac{1}{2}(\sin(x)e^{-y} - \sin(x)e^y)} \\ &= \frac{(\sin(x)(e^{-y} + e^y) + i\cos(x)(e^y - e^{-y}))(\cos(x)(e^{-y} + e^y) - i\sin(x)(e^{-y} - e^y))}{e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x)} \\ &= \frac{\sin(x)\cos(x)((e^y + e^{-y})^2 - (e^y - e^{-y})^2) + i(\sin^2(x)(e^{2y} - e^{-2y}) + \cos^2(x)(e^{2y} - e^{-2y}))}{e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x)} \\ &= \frac{2\sin(2x) + i(e^{2y} - e^{-2y})}{2\cos(2x) + e^{2y} + e^{-2y}}\end{aligned}$$

נעבור לחישוב הערך המוחלט:

$$|\tan(x + iy)| = \frac{\sqrt{4\sin^2(2x) + (e^{2y} - e^{-2y})^2}}{2\cos(2x) + e^{2y} + e^{-2y}}$$

ושורשים כבר חישבנו, שכן  $\tan(z)$  מתאפס אם ורק אם  $\sin(z)$  מתאפס מהגדרה.

## שאלה 5

יהיו  $z, w \in \mathbb{C}$ .

### סעיף א'

נוכיח כי  $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ .

הוכחה.

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = \frac{e^{-2z} + 2e^0 + e^{2z}}{4} + \frac{e^{-2z} - 2e^0 + e^{2z}}{-4} = 1$$

□

### סעיף ב'

נוכיח כי  $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ .

הוכחה. נחשב.

$$\begin{aligned}\sin(z+w) &= \frac{1}{2i}(e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}) \\ &= \frac{1}{4i}(e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{-iw}) \\ &= \frac{1}{4i}(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + \frac{1}{4i}(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw}) \\ &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)\end{aligned}$$

□

### סעיף ג'

נוכיח את הזהות  $\cos(3z) = 4\cos^3(z) - 3\cos(z)$ .

הוכחה. נסמן  $a = e^{iz}$ ,  $b = e^{-iz}$ , ונבחין כי  $ab = e^{iz-iiz} = 1$ . נשתמש בהגדרת הטריגונומטריות המרוכבות

$$\begin{aligned}4\cos^3(z) - 3\cos(z) &= 4\frac{(a+b)^3}{2^3} - 3\frac{a+b}{2} \\ &= \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a - 3b}{2} \\ &= \frac{a^3 + 3a + 3b + b^3 - 3a - 3b}{2} \\ &= \frac{e^{i3z} + e^{-i3z}}{2} \\ &= \cos(3z)\end{aligned}$$

□



## שאלה 6

נמצא את כל הנקודות  $z \in \mathbb{C}$  עבורן  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$  מתכנס.

פתרון נגדיר  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$  על-ידי

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3n+1} & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

לכן נקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$$

אז נוכל להסיק ממבחן אבל כי הטור מתכנס עבור  $z \in \overline{B}(0, 1) \setminus \{1\}$ .

כמובן עבור  $|z| > 1$  נוכל לראות כי הערך המוחלט של הטור מתבדר ולכן גם הטור עצמו.

## שאלה 7

יהי  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$  טור מרוכב מתכנס.

### סעיף א'

נוכיח כי אם  $|\operatorname{Arg}(\alpha_n)| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$  אז הטור מתכנס בהחלט.

**הוכחה.** נתון כי  $-\theta \leq \operatorname{Arg}(\alpha_n) \leq \theta$ , לכן גם  $0 < \cos(\theta) \leq \cos(\operatorname{Arg}(\alpha_n)) \leq 1$ . עוד נבחין כי  $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(\alpha_n)$  מתכנס מהנתון כי הטור המקורי מתכנס, אבל מאי־השוויון הקודם נובע  $0 < \operatorname{Re}(\alpha_n)$  ולכן  $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Re}(\alpha_n)|$  מתכנס אף הוא, מצאנו כי סדרת הערכים הממשיים מתכנסת בהחלט.

נרצה עוד להראות כי  $|\operatorname{Im}(\alpha_n)| \leq C |\operatorname{Re}(\alpha_n)|$  עבור איזשהו  $C \in [0, 1]$ . נבחר  $m = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\operatorname{Arg}(\alpha_n)|$ , אז זהו גם האינפימום של  $\cos(\operatorname{Arg}(\alpha_n))$ , נגדיר  $C = \cos(\operatorname{Arg}(\alpha_m))$  ולכן מהגדרה  $|\sin(\operatorname{Arg}(\alpha_m))| = C \cos(\operatorname{Arg}(\alpha_m))$  נובע  $|\operatorname{Im}(\alpha_n)| \leq C \operatorname{Re}(\alpha_n)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ . אבל אם כך אז  $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Im}(\alpha_n)|$  מתכנס, ובהתאם  $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|$  מתכנס.  $\square$

### סעיף ב'

נראה כי הטענה לא נכונה אם מניחים שרק  $|\operatorname{Arg}(\alpha_n)| < \frac{\pi}{2}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$  על־ידי דוגמה נגדית.

**פתרון** נגדיר  $\alpha_n = \frac{1}{n^2} + i(-1)^n \frac{1}{n}$ .

לסדרה זו תמיד יש ערך ממשי חיובי ולכן היא מקיימת את תנאי הטענה.

נבחין כי  $\operatorname{Re}(\alpha_n) = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$  טור מתכנס בהחלט, וגם  $\operatorname{Im}(\alpha_n) = \frac{(-1)^n}{n}$  הוא טור לייבניץ ולכן נתכנס, ונקבל  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  מתכנס אף הוא. לעומת זאת, מחישוב ישיר נקבל

$$|\alpha_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$$

ולכן הטור של סדרה זו מתבדר כטור ממשי.