פתרון ממ"ן 16 – אלגברה לינארית 2 (20229)

4 ביוני 2023

שאלה 1

תהי מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

סעיף א'

נמצא צורת ז'ורדן G של A ומטריצה הפיכה P כך שיתקיים $P^{-1}AP = G$.

נמצא את הפולינום האופייני של A:

$$|A| = (t-6)t + 9 = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

אז $P(t) = (t-3)^2$ ול־A יש ערך עצמי יחיד 3, ולכן ממשפט 11.9.2 נובע כי $A - 3I$ היא מטריצה נילפוטנטית. חישוב ישיר מראה כי

$$(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן אינדקס הנילפוטנטיות שלה הוא 2.

נשתמש באלגוריתם החישוב אשר מופיע בסעיף 11.7 על $A - 3I$ כדי למצוא בסיס אשר בו A היא בצורת ז'ורדן.

נגדיר $B_1 = \ker A - 3I = \mathrm{Sp}\{(3,1)\}$. נשלים את B_1 לבסיס של $\mathbb{R}^3$ על־ידי הקבוצה $E_2 = \{(1,0)\}$, נקבע גם $D_2 = E_2$. נגדיר $D_1 = \{(A-3I)D_2\} = \{(3,1)\}$ ולכן הביסיס $D = D_1 \cup D_2 = \{(3,1),(1,0)\}$ בסיס בו $A - 3I$ מטריצה בעלת צורת ז'ורדן.

ממשפט 11.9.2 נובע כי D בסיס בו גם A מקבלת צורת ז'ורדן, נחשב:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

סעיף ב'

נחשב את A^{100} ואת G^{100}. תחילה נחשב את G^{100}. ממסקנה 10.1.7 ומטענה 11.3.6 תוך שימוש בהערה 11.3.7 נובע כי

$$J^{100} = J_2(3)^{100} = \sum_{k=0}^{1} \binom{100}{k} 3^{100-k} J_2(0)^k = \binom{100}{0} 3^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \binom{100}{1} 3^{99} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$$

משאלה 8.2.3 א' נובע כי

$$A^{100} = P^{-1} J^{100} P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

סעיף ג'

נמצא נוסחה עבור a_n, כאשר נתון

$$a_n = \begin{cases} a & n = 0 \\ b & n = 1 \\ 6a_{n+1} - 9a_n & n > 1 \end{cases}$$

מחישוב ישיר ניתן לראות כי מתקיים

$$A\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6a_{n+1}-9a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}$$

לכן נוכל להוכיח באינדוקציה כי

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3^n&n3^n+3^n\\3^n&n3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(1+n)3^n&-n3^n\\n3^{n-1}&(1-n)3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}\\ \rightarrow a_n&=b(1+n)3^n-na3^n\end{aligned}$$

שאלה 2

יהי $V = \mathbb{C}^n$ מרחב אוניטרי ממֵמד סופי ותהי העתקה לינארית $T : V \to V$.

ידוע כי כל וקטור עצמי של T הוא גם וקטור עצמי של T^*.

נוכיח כי T העתקה נורמלית.

הוכחה. יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ הערכים העצמיים של T.

יהי i מספר כך ש־$1 \le i \le n$, ונגדיר את V_i להיות המרחב בעצמי של λ_i לכל i.

אנו יודעים כי לכל $u \in V_i$ מתקיים $Tu = \lambda_i u \in V_i$ ולכן נגדיר $T_i : V_i \to V_i$ צמצום של T ל־V_i.

מהגדרתה נובע ש־T_i היא העתקה סקלרית ולכן מטריצת יצוגה דומה ל־$\lambda_i I_n$, מהגדרה 3.1.1 נובע כי היא לכסינה אוניטרית ונורמלית.

מסיבה זו נוכל גם לקבוע כי קיים בסיס אורתונורמלי $B_i \subseteq V_i$ אשר מלכסן אוניטרית את T_i.

מנורמליות T_i על־פי למה 3.2.5 נובע גם כי לכל $u \in V_i$

$$T_i^* u = \overline{\lambda_i} u \tag{1}$$

יהיו i, j כך ש־$1 \le i, j \le n, i \ne j$, ויהיו וקטורים $v_i \in V_i, v_j \in V_j$.

אנו יודעים כי כל וקטור עצמי של T הוא גם וקטור עצמי של T^*, אז

$$(Tv_i, v_j) = \lambda_i (v_i, v_j) = (v_i, T^* v_j) \overset{8.4.8}{=} (v_i, T_j^* v_j) \overset{(1)}{=} (v_i, \overline{\lambda_j} v_j) \overset{1.2.3}{=} \lambda_j (v_i, v_j)$$

ולכן בהתאם

$$(\lambda_i - \lambda_j)(v_i, v_j) = 0$$

ידוע כי $\lambda_i \ne \lambda_j$ ולכן בהכרח $(v_i, v_j) = 0$ ובהתאם כל שני וקטורים עצמיים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

אנו יודעים כי B_i ו־B_j בלתי תלויות לינארית, ועתה נובע גם כי $B_i \perp B_j$, לכן גם

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

הוא אורתונורמלי, בלתי תלוי לינארית, ומהגדרת B_i מהווה קבוצת יוצרים ל־V.

אנו יודעים כי לכל $b \in B$ $Tb = \alpha b$ ולכן מהגדרת האלכסוניות T תיוצג כמטריצה אלכסונית בבסיס B.

לכן מהגדרה 3.1.1 נובע כי T לכסינה אוניטרית ולכן גם נורמלית. **מש"ל**

שאלה 3

סעיף א'

נמצא צורת ז'ורדן למטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

נתחיל בחישוב ערכיה העצמיים בעזרת פולינום אופייני:

$$P(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & t+6 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & t-1 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & t-8 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ 2 & t+6 & -13 \\ 1 & 4 & t-8 \end{vmatrix}$$
$$= (t-1)((t-1)(t+6)(t-8) - 39 - 24 + 3(t+6) - 6(t-8) + 52(t-1)) = (t-1)^4$$

ל־A ערך עצמי יחיד 1 אשר ריבויו האלגברי הוא 4.

נחשב את הריבוי הגאומטרי של 1 עבור A על־ידי חישוב ממד מרחב הפתרונות של $(A-I)u = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \rho(A-I) = 2$$

אז הריבוי הגאומטרי של 1 הוא 2.

מהגדרה 9.10.1 נובע ש־$A-I$ נילפוטנטית, נחשב את אינקס הנילפוטנטיות שלה על־ידי חישוב ישיר של A^k.

מחישוב ב־WolfarmAlpha מוצאים כי $(A-I)^3 = 0, (A-I)^2 \neq 0$, לכן אינדקס הנילפוטנטיות של $A-I$ הוא 3.

מטענה 11.8.1 אנו מסיקים כי מספר מטריצות הז'ורדן היסודיות המופיעות במטריצת הז'ורדן הדומה ל־A היא 2 ומטריצת הז'ורדן הגדולה ביותר היא בגודל 3. לכן A דומה למטריצה הבאה

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ב'

נגדיר מטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

נמצא צורת ז'ורדן J של המטריצה B ומטריצה הפיכה P המקיימת $B = P^{-1}JP$.

מתהליך חישוב הפולינום האופייני של A אנו למדים כי $P_B(t) = (t-1)^3$.

מחישוב ישיר אנו מקבלים כי $\rho(B-I) = 2$, וגם כי אינדקס הנילפוטנטיות של $A - I$ הוא 3.

בשל נתונים אלה אנו יכולים להסיק מטענה 11.8.1

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

עתה נמצא את המטריצה P:

המטריצה P המקיימת את התנאי היא מטריצת בין $B - I$ לבין $J_3(0)$.

נגדיר בסיס $W = (w_1, w_2, w_3)$ בסיס הז'ורדן של $B - I$ וכמובן גם של B.

ידוע כי

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן על־פי הגדרת הבסיס W צריך להתקיים $(B-I)w_3 = w_2$. נגדיר $w_3 = (1,0,0)$ מטעמי פשטות, ולכן

$$(B-I)w_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

בהתאם להגדרת w_3 נובע כי $w_2 = (0, -2, -1)$.

על־פי הגדרת W מתקיים גם $(B-I)w_2 = w_1$, נחשב

$$(A-I)w_2 = w_1 = (3,3,1)$$

נשים לב כי אכן מתקיים $(B-I)w_1 = 0$ על־פי חישוב ישיר, ואכן W בסיס ז'ורדן של B.

מהגדרת מטריצת מעבר נקבע

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

תהי A מטריצה ריבועית מסדר 7 בעלת ערך עצמי יחיד $\lambda \in \mathbb{C}$.

ידוע כי $\rho(A-\lambda I)^2 = 1$ וכי $\rho(A-\lambda I) = 2$.

נמצא את צורת ז'ורדן ואת הפולינום המינימלי של A.

מטענה 9.12.1 נובע כי $B = A - \lambda I$ מטריצה נילפוטנטית, ומטענה 9.11.5 אנו מסיקים כי אינדקס הנילפוטנטיות של B הוא 3.

על־פי טענה 11.8.1 מספר מטריצות הז'ורדן היסודיות המופיעות בצורת ז'ורדן של A הוא 5, וגם כי מטריצת ז'ורדן היסודית הגדולה ביותר היא מסדר 3. נוכל להסיק מכל האמור לעיל כי B דומה למטריצת ז'ורדן הבאה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ובהתאם ממשפט 11.9.2 נובע כי A דומה למטריצת ז'ורדן הבאה

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

על־פי טענה 9.12.1 על־כן נובע גם כי $M_A(x) = (x-\lambda)^3$.

שאלה 5

תהי $A \in M_3(\mathbb{C})$ בעלת ערכים עצמיים ממשיים בלבד.

ידוע כי צורת ז'ורדן של A^3 היא

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נמצא את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של A ונציג צורת ז'ורדן שלה.

חישוב ישיר מניב כי הפולינום האופייני של A^3 הוא $p_3(t) = (t-8)^2(t-1)$.

על־פי שאלה 11.3.2 מהקורס הקודם והעובדה כי כלל ערכיה העצמיים של A הם ממשיים נובע כי ערכיה העצמיים של A הם $1, 2$.

על־ידי שימוש בדרך חישוב החזקה בשאלה 1 סעיף ב' ושילוב זהויות דטרמיננטה, אנו יכולים להסיק כי הפולינום האופייני של A הוא

$$p(t) = (t-2)^2(t-1)$$

מטענה 11.3.2 נובע כי הפולינום המינימלי של A שווה לפולינום האופייני שלה,

$$M_A(t) = (t-2)^2(t-1)$$

לבסוף נובע ממשפט 11.10.1 כי למטריצה A צורת ז'ורדן ומהפולינום המינימלי אנו יכולים להסיק כי מטריצת ז'ורדן זו היא

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$