פתרון מטלה 01 — תורת הקבוצות האקסיומטית, 80650

24 בנובמבר 2024

במטלה זו נניח ZF אלא אם נאמר אחרת.

שאלה 1

נוכיח את משפט הרקורסיה עבור יחסים מבוססים היטב.

תהי מחלקה A ויהי R יחס על A כך שהוא מבוסס היטב ודומה־קבוצה (set-like).

תהי G מחלקת פונקציה כך שכל קבוצה במקור שלה, ונוכיח כי קיימת מחלקה יחודית F כך שמתקיים

$$\forall x \in A, F(x) = G(F \upharpoonright \{y \mid yRx\})$$

הוכחה. אם A ריקה אז סיימנו, אחרת נניח ש־$\tilde{a} \in A$ איבר כלשהו, ולכן מתכונת דמיון־קבוצה נסיק כי $\{x \mid xR\tilde{a}\}$ היא קבוצה, ובתור קבוצה ש־R יחס מבוסס היטב עליה נוכל להסיק כי יש לה מינימום a.

נגדיר מחלקה F כך ש־$F(a) = G(\emptyset)$, ונשתמש בהגדרה זו כבסיס לאינדוקציה על סדרים מבוססים היטב.

עתה נניח ש־$x \in A$, וש־$\{y \in A \mid yRx\} \subseteq \operatorname{dom} F$ ונרצה להראות שמתקיים $F(x) - G(F \upharpoonleft \{y \mid yRx\})$.

מההנחה שלנו נבחין כי $F \upharpoonright \{y \mid yRx\}$ היא מחלקת פונקציה ומאקסיומת הפרדה נוכל להניח כי זו בפרט קבוצה ולכן G מוגדרת עליה, אז נקבל ש־F אכן מוגדרת על x ולכן $x \in \operatorname{dom} F$.

ממשפט האינדוקציה על סדרים מבוססים היטב נסיק כי אכן F מחלקת פונקציה יחידה כך ש־$\operatorname{dom} F = A$ וגם התנאי מתקיים. $\square$

שאלה 2

סעיף א'

יהי R יחס מבוסס היטב, דומה־קבוצה, על מחלקה A. נוכיח שקיימת מחלקת פונקציה יחידה $\operatorname{rank}_R : A \to Ord$ המקיימת

$$\operatorname{rank}_R(x) = \sup\{\operatorname{rank}_R(y) + 1 \mid yRx\}$$

כאשר $\sup \emptyset = 0$.

נוכיח גם ש־$xRy \implies \operatorname{rank}_R(x) < \operatorname{rank}_R(y)$ לכל $x, y \in A$.

הוכחה. נבחר שוב $a \in A$ איבר מינימום, ולכן נגדיר $\operatorname{rank}_R(a) = \sup \emptyset = 0$.

נגדיר G מחלקת פונקציה כך ש־$G(\operatorname{rank}_R \restriction \{y \mid yRx\}) = \sup\{\operatorname{rank}_R(y) + 1 \mid yRx\}$, ולכן ממשפט הרקורסיה לסדרים מבוססים היטב קיימת rank_R יחידה כזו.

נניח עתה כי $x, y \in A$ וגם ש־xRy. נבחין כי $\operatorname{rank}_R(y) + 1 \in \{\operatorname{rank}_R(y') \mid y'Rx\}$ ולכן בהכרח $\operatorname{rank}_R(y) + 1 \leq \operatorname{rank}_R(x)$, דהינו $\operatorname{rank}_R(y) < \operatorname{rank}_R(x)$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח ש־$V_\alpha = \{x \mid \operatorname{rank}_\in(x) < \alpha\}$. נסיק ש־$\operatorname{rank}_\in(x)$ הוא הסודר α הקטן ביותר כך ש־$x \subseteq V_\alpha$ וש־$\forall x, \operatorname{rank}_\in(x) = \operatorname{rank}(x)$ כפי שהגדרנו בכיתה.

הוכחה. נתחיל בהוכחת טענה קשורה, נוכיח כי $\operatorname{rank}_\in(V_\alpha) = \alpha$ לכל $\alpha \in Ord$.

נוכיח באינדוקציה על סודרים, תחילה נבחין כי $\operatorname{rank}_\in(V_0) = \operatorname{rank}_\in(\emptyset) = 0$ והטענה נכונה.

נניח כי הטענה נכונה עבור $\alpha \in Ord$, לכן מהעובדה ש־$V_\alpha \in V_{\alpha+1}$ נובע

$$\operatorname{rank}_\in(V_{\alpha+1}) = \sup\{\operatorname{rank}_\in(x) + 1 \mid x \in V_{\alpha+1}\} = \operatorname{rank}_\in(V_\alpha) + 1 = \alpha + 1$$

נבחין כי מעבר זה נכון מטרנזיטיביות $V_{\alpha+1}$.

עתה נניח כי α סודר גבולי ונניח שהטענה מתקיימת עבור כל $\beta \in \alpha$, ולכן

$$\operatorname{rank}_\in(V_\alpha) = \sup\{\operatorname{rank}_\in(x) + 1 \mid x \in V_\alpha\} = \sup\{\operatorname{rank}_\in(V_\beta) + 1 \mid V_\beta \in V_\alpha\} = \sup\{\beta + 1 \mid \beta \in \alpha\} = \alpha$$

השלמנו את מהלך האינדוקציה ולכן מתקיים $\forall \alpha \in Ord, \operatorname{rank}_\in(V_\alpha) = \alpha$.

נעבור עתה להוכחת הטענה, מהמסקנה של הסעיף הקודם יחד עם השוויון שמצאנו זה עתה מתקיים

$$V_\alpha = \{x \mid x \in V_\alpha\} = \{x \mid \operatorname{rank}_\in(x) < \operatorname{rank}_\in(V_\alpha)\} = \{x \mid \operatorname{rank}_\in(x) < \operatorname{rank}_\in(V_\alpha)\} = \{x \mid \operatorname{rank}_\in(x) < \alpha\}$$

מהשוויון שמצאנו נובע שלכל x מתקיים $\operatorname{rank}_\in(x) = \alpha = \operatorname{rank}_\in(V_\alpha)$, בהתאם נקבל ש־$\operatorname{rank}_\in(x) < \operatorname{rank}_\in(V_{\alpha+1})$ ולכן $x \in V_{\alpha+1}$ (לא הראינו את נכונות טענה זו אך היא נובעת משלילת טענה זו), לכן גם $x \subseteq V_\alpha$, וכמובן מ־$\operatorname{rank}_\in$ נסיק כי זהו גם הסודר הקטן ביותר כך שהכלה זו מתקיימת. אבל למעשה זוהי ההגדרה של rank עצמו, דהינו $\operatorname{rank}_\in(x) = \operatorname{rank}(x)$ לכל x. $\square$

שאלה 3

הגדרה נאמר ש־ω־רקורסיה חלה (holds) אם לכל מחלקת פונקציה G קיימת פונקציה (במובן של קבוצה) f כך ש־$\operatorname{dom} f = \omega$ כך שמתקיים

$$\forall n < \omega, f(n) = G(f \restriction n)$$

נזכור כי $V_\alpha \models \mathbf{Z}$ לכל סודר גבולי $\alpha \geq \omega + \omega$.

סעיף א'

נוכיח ש־$\mathbf{Z}$ לא מוכיח ω־רקורסיה, על־ידי מציאת מודל של $\mathbf{Z}$ אשר יש בו מקרה שנכשל של ω־רקורסיה.

הוכחה. נבחן את המודל $\mathbf{Z} \models \langle V_{\omega+\omega}, \in \rangle$.

נבחין כי $V_\omega \in U$ מטרנזיטיביות, ונגדיר $f(0) = V_\omega$ ו־$\forall n \in \omega, f(n+1) = \mathbb{P}(f(n))$, נבחין כי זו אכן קבוצה לכל מקרה סופי.

אילו היינו מניחים ω־רקורסיה, על־ידי שימוש באקסיומת הפרדה היינו מקבלים כי $\operatorname{rng}\{f(n) \mid n \in \omega\} = \{V_{\omega+\alpha} \mid n \in \omega\} = V_{\omega+\omega}$ היא קבוצה, לכן $U \in U$.

זו כמובן סתירה לאקסיומת היסוד ולכן ω־רקורסיה סותרת את המודל שהגדרנו ל־$\mathbf{Z}$. $\square$

סעיף ב'

תהי φ הטענה "האיחוד של קבוצה בת־מניה כך שהיא מכילה קבוצות בנות־מניה הוא בן־מניה".

נוכיח ש־$\mathbf{ZF} + \varphi$ מוכיח שקיימת קבוצה טרנזיטיבית שמהווה מודל עבור ω־רקורסיה $+ \mathbf{Z}$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על סודרים כי כל סודר הוא בן־מניה, ברור כי ω וכל תת־קבוצה שלו בני־מניה.

נניח ש־α בת־מניה, אז גם $\bigcup \alpha$ בת־מניה, ואיחוד סופי הוא בפרט איחוד בן־מניה ולכן $\alpha + 1$ אף הוא בן־מניה.

נניח ש־α סודר גבולי ושלכל $\beta \in \alpha$ גם β בן־מניה, אז האיחוד הוא בעצמו בן־מניה ואיחוד זה הוא α עצמו, לכן גם הוא בן־מניה.

אם ככה נוכל להסיק שכל סודר הוא בן־מניה, נבחר סודר גבולי כלשהו α שאיננו בן־מניה ללא φ ונבחן את V_α.

כמובן $\mathbf{Z} \models V_\alpha$, לכן עלינו רק להוכיח שהוא מקיים גם את ω־רקורסיה.

נבחין כי כל פונקציית מחלקה G במודל שלנו מתכתבת עם פונקציה $V_\alpha \to V_\alpha$ והיא בת־מניה, לכן נוכל לבנות פונקציה שממפה ω לקבוצות על־פי תנאי הרקורסיה, אבל פונקציה f כזו מקיימת $f \in V_\alpha$.

נוכל אם כך להסיק כי גם במודל עצמו $\langle V_\alpha, \in \rangle$ מקיימת את ω־רקורסיה. $\square$

שאלה 4

סעיף א'

יהי R יחס בינארי על קבוצה X. נוכיח את ההיפוך החלקי של 2 א', דהינו נניח שקיימת פונקציה $f : X \to Ord$ כך שלכל $x, y \in X, yXx \implies f(y) < f(x)$ ונוכיח ש־R מבוסס־היטב.

הוכחה. נתחיל ונראה ש־$f(x) < f(x) \implies xXx$ וזו סתירה ולכן R אנטי־רפלקסיבי. כמו־כן $xXy \wedge yXx \implies f(x) < f(y) < f(x)$ ולכן גם א־סימטרי, ולבסוף $xRy \wedge yRz \implies f(x) < f(y) < f(z)$, אז R לא יחס סדר חד אבל הוא כן משרה סדר חד, ובשל השימוש בסודרים סדר זה קווי ומבוסס היטב. נשתמש בביסוס היטב הזה כדי להוכיח שגם R מבוסס היטב.
תהי $Y \subseteq X$ ונבחר על־ידי אקסיומת החלפה את $f(Y)$, נקבל קבוצת סודרים, אבל $<$ סדר טוב על הסודרים ולכן קיים מינימלי α כלשהו. עתה נגדיר $A = \{y \in Y \mid f(y) = \alpha\}$, ונקבל קבוצה של איברים, זוהי קבוצה לא ריקה ולכן נניח $a \in A$ איבר כלשהו.
אז $a \in Y$ וכן $\forall y \in Y, aRy$ כמסקנה מהטענה הראשונה. □

סעיף ב'

תהינה M, N מחלקות טרנזיטיביות המספקות את **ZF**, כך ש־$N \subseteq M$. יהי R יחס על קבוצה $a \in M$.
נוכיח ש־R הוא מבוסס היטב ב־M אם ורק אם הוא מבוסס היטב ב־N.

הוכחה. נניח ש־R מבוסס היטב ב־M. משאלה 3 נסיק כי קיים $\text{rank}_R : a \to Ord$, כך שגם

$$\forall x, y \in a, xRy \implies \text{rank}_R(x) < \text{rank}_R(y)$$

אנו יודעים ש־R יחס על a ב־N, ואנו יודעים כי גם לכל $x, y \in N$ אם xRy (שקורה כאשר $x, y \in a$) אז $\text{rank}_R(x) < \text{rank}_R(y)$, אז מתוצאת סעיף א' מתקבל ש־R מבוסס היטב ב־N.

הכיוון ההפוך דומה. □