

פתרון מטלה 05 – פונקציות מרוכבות, 80519

7 בדצמבר 2024



שאלה 1

נתאר את צורתן של המסילות הבאות במישור המרוכב ונחשב את אורכן.

סעיף א'

$\gamma(t) = i \sin(t^2)$ עבור $t \in [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$.

פתרון צורתה הקו $[0, i]$, הכיוון שלה הוא תחילה לראשית הצירים ואז ל- $(0, i)$. נוכל כבר להסיק שאורכה הוא בדיוק 2, אך נחשב גם על-ידי ההגדרה:

$$L(\gamma) = \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} |\gamma'(t)| dt = \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(t^2) \cdot 2t dt = |\sin(t^2)|_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 1 + 1$$

סעיף ב'

$\gamma(t) = e^{it}$ עבור $t \in [0, 7\pi]$.

פתרון אנו יודעים מתרגולי עבר כי מסילה זו היא מעגל יחידה (שלוש וחצי פעמים) וכן כיוונה נגד כיוון השעון. גם הפעם אנו כבר יודעים שמתקיים $L(\gamma) = 2\pi \cdot \frac{7}{2}$, אך נחשב בכל זאת:

$$L(\gamma) = \int_0^{7\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{7\pi} |ie^{it}| dt = \int_0^{7\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{7\pi} 1 dt$$

סעיף ג'

$\gamma(t) = te^{\frac{\pi i}{4}}$ עבור $t \in [0, 10]$.

פתרון נבחין כי $e^{\frac{\pi i}{4}}$ הוא ערך קבוע ומשמעותו שלעקומה תהיה זווית של $\frac{\pi}{4}$ מראשית הצירים. עוד אנו יודעים כי יש מכפלה ב- t ולכן זה ישר שאורכו 10, מתחיל בראשית וזו החוצה ממנה בזווית זו מציר ה- x . גם הפעם אנו יודעים את האורך אך נחשב

$$\int_0^{10} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{10} |e^{\frac{\pi i}{4}}| dt = \int_0^{10} 1 dt$$

סעיף ד'

$\gamma(t) = te^{it}$ עבור $t \in [0, 4\pi]$.

פתרון מהסעיפים הקודמים נסיק כי זהו ישר מהראשית שעובר סיבוב ככל שהוא מתרחק ממנה, דהינו זוהי ספירלה נגד כיוון השעון שמתחילה ב-0 ומסתיימת בנקודה $4\pi + i0$. לבסוף נבחין גם שהספירלה מבצעת שני סיבובים שלמים בתחום הגדרתה.

הפעם אין לנו דרך גאומטרית לחשב את השטח ונחשב על-ידי ההגדרה בלבד:

$$\int_0^{4\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{4\pi} |e^{it}(1 + it)| dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + t^2} dt$$

וזהו אינטגרל ממשי ברחישוב שלא הצלחתי לחשב עם הרמז.

שאלה 2

נמצא פרמטריזציה לעקומות הסגורות הבאות ונחשב את אורכן.

סעיף א'

משולש פיצה ברדיוס r המתחיל בראשית, ממשיך על הכיוון החיובי של ציר ה- x ויש לו זווית $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.
פתרון נתחיל ב- $\gamma_1(t) = t$ עבור $t \in [0, 1]$, ובאותו אופן גם $\gamma_3 = e^{it}$ לאותו תחום.
באופן דומה גם $\gamma_2(t) = e^{it}$ עבור $t \in [0, \theta]$, ונגדיר $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ בהתאם להגדרה בהרצאה.
האורך בהתאם לשאלה 1 הוא $2 + \theta$.

סעיף ב'

מלבן בגודל $a \times b$ המתחיל בראשית וממשיך על החלק השלילי של הציר הממשי.
פתרון נגדיר $\gamma_1(t) = -t$ עבור $t \in [0, a]$, ובהתאם $\gamma_2(t) = -a + ti$ עבור $t \in [0, b]$.
נגדיר גם $\gamma_3(t) = t(-a + bi) + (1 - t)(bi)$ עבור $t \in [0, 1]$ ולבסוף $\gamma_4(t) = (1 - t)bi$ עבור $t \in [0, 1]$.
נגדיר את הסכום כבסעיף הקודם γ ומשאלה 1 נובע $L(\gamma) = 2a + 2b$.

סעיף ג'

משולש המתחיל בראשית ויוצר משולש ישר זווית ושווה שוקיים עם צלע בסיס באורך 2 המונחת על החלק החיובי של הציר המדומה.
פתרון נגדיר $\gamma_1(t) = 0(1 - t) + t(2 + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ עבור $t \in [0, 1]$.
נגדיר גם $\gamma_2(t) = (1 - t)(2 + i\frac{\sqrt{2}}{2}) + t(0 + 2i)$ עבור תחום זהה,
ולבסוף נגדיר $\gamma_3(t) = (1 - t)(0 + 2i)$ עבור תחום זהה.
נגדיר $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ וכן $L(\gamma) = 2 + 2\sqrt{2}$.

סעיף ד'

שני מעגלים ברדיוס 1 המשיקים בראשית עם מרכזים על הציר המדומה.
פתרון התרגיל לא ברור, אני מנחש ש- $\gamma(t) = e^{it} + i$ עבור $t \in [0, 4\pi]$ שכן אלה הם שני מעגלים שעוברים בראשית הצירים ומשיקים שם,
וכמובן $L(\gamma) = 4\pi$.

שאלה 3

נגדיר את התחום

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z), 1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2\}$$

נתאר את התחום ונחשב את השטח של $\operatorname{Log}(A)$.

פתרון על-ידי בדיקת התנאים נסיק שמדובר בטרפז שקודקודיו הם $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (0, 2)$.

לכן גם נוכל להסיק ישירות ששטחו הוא $\frac{(1+2) \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$.

נעבור לחישוב השטח של $\operatorname{Log}(A)$ בתחום, כמובן הפונקציה מוגדרת בתחום ולכן יש לנו הצדקה לדבר על שטחה שם, נחשב את השטח בדומה לאופן בו הוא חושב בתרגול.

$$\begin{aligned} \iint_{\operatorname{Log}(A)} 1 \, d|w| &= \iint_A |\operatorname{Log}'(z)|^2 \, d|z| \\ &= \iint_A \frac{1}{z\bar{z}} \, dz \\ &= \iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx \, dy \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^y \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx \right) dy \\ &= \int_1^2 \frac{1}{y} \arctan\left(\frac{y}{y}\right) - 0 \, dy \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot (\log(2) - \log(1)) \end{aligned}$$

שאלה 4

נגדיר $\gamma_0 : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$ על-ידי

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} t & t \in [0, 1] \\ 1 + e^{-\frac{\pi i}{3}}(t-1) & t \in [1, 2] \\ 1 + e^{-\frac{\pi i}{3}} + e^{\frac{\pi i}{3}}(t-2) & t \in [2, 3] \end{cases}$$

משלוש שווה-צלעות, ונגדיר באופן אינדוקטיבי מסילה γ_n להיות המסילה γ_{n-1} כאשר מחליפים כל קטע ישר בה בעותק מוקטן ומסובב של המסילה

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}t & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{3} + \frac{4}{3}e^{\frac{\pi i}{3}}(t - \frac{1}{4}) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{\pi i}{3}} + \frac{4}{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}(t - \frac{1}{2}) & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \frac{2}{3} + \frac{4}{3}(t - \frac{3}{4}) & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

סעיף א'

נוכיח ש- (γ_n) מתכנסת במידה שווה למסילה γ כלשהי.

הוכחה. נבחן את ההפרשים של המסילות, קרי $\gamma_n - \gamma_{n-1}$, ונבחין כי הפרש זה הוא תוספת המשולשים החדשים שנוצרו מכל קו שהיה קודם לכן,

ונוכל להוכיח ישירות מהגדרת α שמתקיים $\max \operatorname{Im} \alpha = \frac{1}{3}$.

עוד נבחין שיש ב- γ_n בדיוק $3 \cdot 4^n$ קטעים C^1 (קטעים ישרים), וכן שאורכם זהה והוא $\frac{1}{3^n}$. כל זאת ניתן להוכיח באינדוקציה על הגדרת המסילות.

אם כך $\max |\gamma_n(t) - \gamma_{n-1}(t)| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n}$ ולכן ממבחן M של ויירשטראס טור ההפרשים מתכנס במידה שווה, כלומר $\gamma_n \rightarrow \gamma$ במידה שווה. \square

סעיף ב'

נוכיח כי $L(\gamma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

הוכחה. למעשה מצאנו שמתקיים $L(\gamma_n) = 3 \cdot 4^n \cdot \frac{1}{3^n} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, וזוהי כמובן סדרה מתבדרת ל- ∞ . \square

סעיף ג'

נסמן ב- A_n את השטח הכלוא ב- γ_n , ונחשב את $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

פתרון. באופן דומה לסעיף א', נבחין שב- $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ ישנם שלושה משולשים חדשים, שטח כל אחד הוא $\frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3})$ לפי חישוב ישיר, ולכן

$$A_n = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{3(4^i - 4^{i-1})}{4 \cdot 9^i} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

על-ידי חישוב כמות המשולשים שנוספים לפי מספר הקווים שמתווספים, כל שני קווים מרכיבים משולש אחד. ולבסוף נקבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{19}{20}$$