

נתונה הפונקציה

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x^2) \tan^{-1}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

נבדוק אם הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$:

$$h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} \cdot \tan^{-1}(\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot x \tan^{-1}(\frac{1}{x})$$

אנו כמובן יודעים כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$ על-פי הרכבת הגבול, לכן מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot x \tan^{-1}(\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot x \tan^{-1}(\frac{1}{x}) = 0$$

שכן קיבלנו גבול חסומה ואפסה.

ובסך הכול הפונקציה גזירה ב- $x = 0$ ומתקיים $h'(0) = 0$.