פתרון מטלה 08 — חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

5 ביולי 2024

שאלה 1

תהי D קבוצת החמישיות הסדורות $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$ שעבורן יש למשוואה $ax^4+bx^3+cx^2+dx^1+e=0$ יש פתרון ממשי.

סעיף א'

נוכיח ש־$(1,2,-4,3,-2)$ נקודה פנימית של D.

הוכחה. נגדיר $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$f(a,b,c,d,e,x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx^1+e$$

נראה כי $f(1,2,-4,3,-2,1)=0$ ונבדוק את הנגזרת בנקודה לפי x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

ונקבל כי היעקוביאן (בגודל 1) בנקודה הוא $J(1,2,-4,3,-2,1)=4+6-8+6=8\neq 0$.

לכן משפט הפונקציה הסתומה מתקיים וניתן להגדיר את x על־ידי (a,b,c,d,e) ונוכל להסיק כי נקודה זו פנימית ב־D. $\square$

סעיף ב'

נמצא נקודה ב־D שאיננה פנימית.

אם נקודה לא פנימית אז בהכרח היעקוביאן בה מתאפס, ולכן נקבל

$$J(a,b,c,d,e,x)=0\implies 4x^3+3bx^2+2cx+d=0$$

נבנה נקודה כזו, נגדיר $x=1,a=1,b=1,c=1,d=-9$. נקבל מהשוויון $f(1,1,1,-9,e,1)=0$ כי $e=6$ וקיבלנו ערך קצה.

שאלה 2

נגדיר

$$f(x,y,z,w)=(xz-yw+e^x,\sin(xy)+x^2-y^2+z^3-w^3)$$

ונגדיר את מערכת המשוואות

$$f_1(x,y,z,w)=0,\qquad f_2(x,y,z,w)=6$$

נוכיח כי המערכת מגדירה את z,w כפונקציות של x,y בסביבה כלשהי של

$$(x_0,y_0,z_0,w_0)=(0,1,2,1)$$

ונחשב את הנגזרות $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial x}$ בנקודה $(x_0,y_0)=(0,1)$.

הוכחה. נתחיל ונחשב ישירות כי $f(x_0,y_0,z_0,w_0)=(0,-6)$.
נבחין כי הפונקציה מוגדרת על־ידי רכיבים גזירים ולכן אף היא גזירה ונקבל

$$\frac{\partial f}{\partial(z,w)}=\begin{pmatrix}x & -y\\ 3z^2 & -3w^2\end{pmatrix}$$

נחשב את היעקוביאן ונקבל

$$J=3yz^2-3xw^2$$

נציב את הנקודה ונקבל $J(0,1,2,1)=3(1\cdot 2^2-0\cdot 1^2)=12\neq 0$, ולכן משפט הפונקציה הסתומה חל ונקבל כי המערכת אכן מגדירה פונקציה של z,w כתלות ב־x,y.
נעבור עתה לחישוב הנגזרות.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=0,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=0$$

ולכן נקבל

$$z+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial w}{\partial x}+e^x=0,\qquad y\sin(xy)+2x+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3w^2\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

נציב $(0,1)$ ונקבל כמובן

$$2-\frac{\partial w}{\partial x}+1=0,\qquad 12\frac{\partial z}{\partial x}-3\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

ולכן נקבל כי $\frac{\partial w}{\partial x}=3$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{4}$.
נגזור עתה על־פי y ונקבל

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-w-y\frac{\partial w}{\partial y}=0\implies 0-1-1\frac{\partial w}{\partial y}=0\implies \frac{\partial w}{\partial y}=-1$$

□

שאלה 3

תהי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות, ונניח ש־f מתאפסת בראשית, ושכל הנגזרות החלקיות הראשונות בראשית לא מתאפסות.

סעיף א'

נוכיח שאפשר לחלץ כל אחד מהמשתנים x,y,z כפונקציה של שני המשתנים האחרים בסביבת הראשית.

הוכחה. ידוע לנו כי $\frac{\partial f}{\partial z}$ לא אפס, ולכן יחד עם כל ההנחות שעשינו משפט הפונקציה הסתומה חל (יחד עם היעקוביאן של איבר אחד של נגזרת זו) ונקבל כי z ניתן לתיאור כפונקציה של x,y. נוכל כמובן לבצע אותו תהליך עבור שני המשתנים הנוספים וקיבלנו כי כל משתנה ניתן לביטוי על־ידי שני האחרים. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שהחילוצים הללו מקיימים בראשית

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

הוכחה. אם נגדיר $f(x,y,z(x,y))$ אז בגזירה על־ידי כלל ההצבה יחד עם $g(x,y)=(x,y,z(x,y))$ נקבל

$$\nabla f(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}),Dg\mid_{(x,y)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\\frac{\partial z}{\partial x}&\frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל מהמשפט כי

$$\nabla f\circ g\mid_{(x,y)}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\\frac{\partial z}{\partial x}&\frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}=(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y})$$

נוכל אם כן לקבל באופן דומה כי גם

$$\nabla f(x,y(x,z),z)=(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z})$$

וכמובן גם

$$\nabla f(x(y,z),y,z)=(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z})$$

ועל־ידי השוואת האגפים הימניים והשמאליים נוכל לקבל את הנוסחה שהתבקשנו למצוא. $\square$

שאלה 4

תהי $f:\mathbb{R}^{d+1}\to\mathbb{R}$ פונקציה C^2 בסביבת (a,b) כאשר $a\in\mathbb{R}^d, b\in\mathbb{R}$, וידוע כי $f(a,b)=0$ ו־$\partial_{d+1}f(a,b)\neq 0$.
נוכיח כי החילוץ g שמתקבל ממשפט הפונקציה הסתומה הוא C^2.

הוכחה. נתחיל ונראה שעל־פי המשפט, g היא C^1, ולכן עלינו להראות רק שנגזרותיה הן גם C^1.
נניח בשלילה כי g לא C^2, לכן נוכל להסיק כי נגזרת שנייה של g לא מתקיימת לפחות עבור נגזרת חלקית אחת.
אם כן, נבחר את הכיוון הזה ונקבל כי גם הנגזרת של הפונקציה f בכיוון זה לא גזירה, שכן מצאנו כי f ניתנת לכתיבה על־ידי g זו באגפה ה־$d+1$.
קיבלנו סתירה כמובן ל־$f\in C^2$ ולכן נוכל להסיק כי g עצמה היא C^2. □

שאלה 5

תהי $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}^d$ תיבה, ו־$f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

סעיף א'

נניח ש־f אינטגרבילית. יהי $\varepsilon > 0$.
נוכיח שקיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה מתאימה $P = (P_1, \dots, P_d)$ שעבורה הפרמטר של כל P_i קטן מ־δ,
ושאם נסמן $C_1, \dots, C_k$ את התיבות המתקבלות אז לכל בחירת נקודות $p_1 \in C_1, \dots, p_k \in C_k$ מתקיים

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(p_i) \cdot \operatorname{vol}(C_i) - \int_A f \right| < \varepsilon$$

הוכחה.

$$\forall \delta > 0, \forall P, \lambda(P) < \delta \implies \forall p_i \in P_i : f(p_i) \le \sup_{p \in P_i}(p), \operatorname{vol}(C_i) \le \delta \operatorname{vol}(C_\lambda) \implies \sum_{i=1}^{k} f(p_i) \operatorname{vol}(C_i) \le \delta \sum_{i=1}^{k} M_i |C_i|$$

נקבל אם כן כי

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(p_i) \cdot \operatorname{vol}(C_i) - \int_A f \right| \le \left| \delta \overline{S}(f, P) - \int_A f \right| < \varepsilon$$

וכמובן מהגדרת האינטגרל קיים $\delta > 0$ עבורו אי־שוויון זה מתקיים. $\square$

סעיף ב'

יהיו $\varepsilon > 0$ ו־$I \in \mathbb{R}$. נניח שיש חלוקה P של A עם תיבות $C_1, \dots, C_k$ כך שלכל בחירת נקודות $p_i \in C_i$ לכל $0 < i \le k$ מתקיים

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(p_i) \cdot \operatorname{vol}(C_i) - I \right| < \varepsilon$$

נוכיח כי $I - \varepsilon \le \underline{\int_A} f \le \overline{\int_A} f \le I + \varepsilon$.

הוכחה. מצאנו קודם כי

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(p_i) \cdot \operatorname{vol}(C_i) - I \right| \le \left| \overline{S}(f, P) - I \right| < \varepsilon$$

ולכן נוכל להסיק כי גם

$$|\underline{S}(f, P) - I| < \varepsilon$$

וכמובן על־ידי חיבור המשוואות וחוקי ערך מוחלט נוכל לקבל כי הטענה נכונה. $\square$