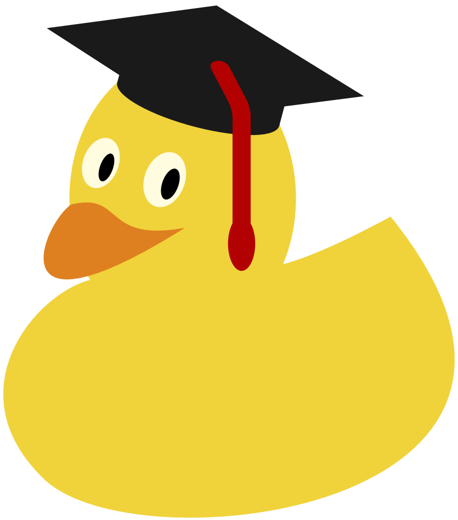
פתרון מטלה 01 — תורת ההסתברות (1), 80420

1 בנובמבר 2024



שאלה 1

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות בדיד, נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נוכיח שאם $A \subseteq \Omega$ מקיימת $\mathbb{P}(A) = 0$ אז לכל $B \subseteq \Omega$ מתקיים $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$.

הוכחה. נבחין כי $D = B \setminus A$ היא זרה באיחוד ל־$A \cap B$, לכן נקבל $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(D \cup (A \cap B)) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(A \cap B)$.
אבל $A \cap B \subseteq A$ ולכן מתכונות פונקציית הסתברות נקבל $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$.
לכן $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B)$. נשתמש בטענה זו ונקבל

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D) = 0 + \mathbb{P}(B)$$

וקיבלנו כי השוויון אכן מתקיים. $\square$

סעיף ב'

נוכיח שאם $A \subseteq B$ אז $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

הוכחה. למעשה תכונה זו הוכחה בהרצאה, נעתיק את ההוכחה:

1. נראה כי $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$ שכן כל איחוד של קבוצות ריקות הוא זר, לכן אילו $\mathbb{P}(\emptyset) \neq 0$ נקבל ישר סתירה, נסיק כי $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ בלבד.
2. נגדיר $A_i = \emptyset$ לכל $i > n$ ונשתמש בסיגמא־אדיטיביות ונקבל
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$
3. נשתמש בתכונה 2 על $B, B \setminus A$, אלו הן קבוצות זרות כמובן, אם נגדיר $D = A \cup (B \setminus A)$ נקבל $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$.

$\square$

סעיף ג'

נסתור את הטענה כי אם $A \subsetneq B$ אז $\mathbb{P}(A) \lneq \mathbb{P}(B)$.
פתרון נגדיר $\Omega = [3]$ ו־$p(1) = p(2) = \frac{1}{2}, p(3) = 0$, ונבחן את $\mathbb{P}_p$.
אם נגדיר $A = \{1\}, B = \{1, 3\}$ נקבל $A \subsetneq B$ אבל $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ בסתירה לטענה.

סעיף ד'

נוכיח שלכל $A, B \subseteq \Omega$ מתקיים $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$

הוכחה. מתכונות פונקציית הסתברות נקבל $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
לאחר החלפת אגפים נקבל

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

שכן מתקיים $\mathbb{P}(X) \leq 1$ לכל $X \in \mathcal{F}$ ובפרט עבור $A \cup B$. $\square$

סעיף ה'

נוכיח כי מתקיים $\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$.

הוכחה. נבחין תחילה כי $A\triangle B = (A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\cup B)\cap(A\cap B)^C$,
נשתמש בשוויון מהסעיף הקודם ונקבל

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\triangle B) &= \mathbb{P}((A\cup B)\cap(A\cap B)^C) \\
&= \mathbb{P}(A\cup B) + \mathbb{P}((A\cap B)^C) - \mathbb{P}((A\cup B)\cup(A\cap B)^C) \\
&= \mathbb{P}(A\cup B) + \mathbb{P}(\Omega\setminus(A\cap B)) - \mathbb{P}(\Omega) \\
&= \mathbb{P}(A\cup B) + \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A\cap B) - 1 \qquad (1) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A\cap B)
\end{aligned}$$

כאשר המעבר (1) נובע מהשוויון $A\cup B\cup(A\cap B)^C = A\cup B\cup A^C\cup B^C = \Omega$ שנובעת מדה־מורגן לקבוצות. $\square$

שאלה 2

נוכיח שקיימת פונקציית הסתברות יחידה על $\Omega = \mathbb{N}$ המקיימת $\mathbb{P}(\{n\}) = 3\mathbb{P}(\{n+1\})$.

הוכחה. נוכיח שקיימת כזאת פונקציית הסתברות, נגדיר $p : \mathbb{N} \to [0,1]$ על־ידי $p(n) = 2 \cdot \frac{1}{3^n}$.
נקבל מנוסחת סכום סדרה הנדסית ש־$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = 1$ ולכן זוהי פונקציית הסתברות נקודתית והיא משרה פונקציית הסתברות $\mathbb{P}_p$ המקיימת את תנאי הטענה. אז הוכחנו שקיימת לכל הפחות פונקציה אחת כזו.

נעבור להוכחת יחידות, נניח ש־$\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ שתי פונקציות הסתברות המקיימות את הטענה.
באינדוקציה על n נקבל כי $\mathbb{P}(\{n\}) = 3^{1-n}\mathbb{P}(\{1\})$. מסיגמא־אדיטיביות נקבל

$$1 = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{1\})3^{1-n} = \mathbb{P}(\{1\}) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{1-n} = \mathbb{P}(\{1\}) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

ולכן נסיק $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{2}{3}$, וממהלך זה נוכל גם להסיק על־ידי סעיף ב' בתנאים שקולים לפונקציית הסתברות בדידה שקיימות פונקציות הסתברות נקודתיות p, p' כך ש־$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p, \mathbb{P}' = \mathbb{P}_{p'}$. אבל קיבלנו אם כך ש־$p(1) = p'(1) = \frac{2}{3}$ ובהתאם להגדרה הרקורסיבית נקבל $p = p'$ ובהתאם $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$, דהינו קיימת פונקציית הסתברות יחידה המקיימת את תנאי הטענה. $\square$

נחשב את $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ ואת $\mathbb{P}(3\mathbb{N})$. כמובן $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$, עבור $3\mathbb{N}$ נקבל

$$\mathbb{P}(3\mathbb{N}) = \sum_{n\in 3\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} p(3n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{3^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{9^n} = \frac{1}{4}$$

שאלה 3

עבור $a : I \to [0,\infty)$ מגדירים

$$\sum_{i\in I} a(i) = \sup\left\{\sum_{i\in J} a(i) \middle| J \subseteq I, |J| < \infty\right\}$$

נוכיח שאם $\sum_{i\in I} a(i) < \infty$ אז התומך של a בן־מניה.

הוכחה. נניח את תנאי הטענה ושקיים סופרימום כזה $C < \infty$, נגדיר $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ קבוצות אינדקסים סופיות כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $C - \frac{1}{k} < \sum_{i\in J_k} a(i)$. נבחין כי אכן קיימות כאלה מהגדרת הסופרימום. עתה נגדיר $J = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k$ קבוצה אינסופית, משיקולי עוצמות אנו יודעים כי היא בת־מניה, ואף

$$\sum_{i\in I} a(i) = \sum_{j\in J} a(j)$$

אילו נניח בשלילה שקיים $i_0 \in I \setminus J$ כך ש־$a(i_0) > 0$ אז נקבל

$$C = \sum_{j\in J\cup\{i_0\}} a(j) > \sum_{j\in J} a(j) = C$$

וקיבלנו סתירה, לכן $a(i_0) = 0$ לכל $i_0 \in I \setminus J$ ובהתאם J הוא התומך של a, אבל אנו יודעים כי J בת־מניה. □

שאלה 4

מטעמי קריאות ולאור דרישת שמירת סדר מופע השאלות, שאלות 1 עד 7 בחלק השני של המטלה תאוגדנה כסעיפים א' עד ז' בשאלה זו.

נבנה מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ לכל סיטואציה בסעיפים הבאים.

סעיף א'

מטילים קוביה הוגנת 10 פעמים, לכן נגדיר $\Omega = [6]^{10}$, שכן כך אנו מתחשבים בכל תוצאת 10 הטלות ולפי סדר, עוד נגדיר $\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$ עבור פונקציית הסתברות נקודתית אחידה $p : [6] \to [0,1]$. המאורע שקיבלנו לפחות פעם אחת 1 הוא $A = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \Omega \mid \exists i \in [10], x_i = 1\}$. נחשב במקום את המשלים, נגדיר מאורע $B = \Omega \setminus A = \{(x_i) \mid \forall i, x_i \neq 1\}$ ולכן נקבל $|B| = 5^{10}$. נקבל אם כן $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega \setminus B) = 1 - \frac{5^{10}}{6^{10}}$.
נחשב את ההסתברות שיצא 1 בדיוק פעם אחת, נגדיר מאורע $C = \{(x_i) \in \Omega \mid \exists! i \in [10], x_i = 1\}$. משיקולים קומבינטוריים נקבל $|C| = 10 \cdot 5^9$ ולכן בהתאם $\mathbb{P}(C) = \frac{10 \cdot 5^9}{6^{10}}$.

סעיף ב'

מטילים שתי קוביות הוגנות, לכן $\Omega = [6]^2$ ו־$\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות אחידה, ונחשב את ההסתברות שסכום התוצאות הוא לפחות 7. נגדיר את המאורע $A = \{(n, m) \in \Omega \mid n + m \geq 7\}$, ונפרק אותו למקרים, נגדיר $A_i = \{(i, n) \in \Omega \mid i + n \geq 7\}$ עבור $1 \leq i \leq 6$ ונקבל $A = \bigcup_{i \in [6]} A_i$.
לכן

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in [6]} A_i) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{6^2} = \frac{1}{6^2} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2}$$

סעיף ג'

נתונה קבוצה של עשרה חודשי לידה ולכן נקבע $\Omega = [12]^{10}$, ונתון כי ההסתברות היא אחידה. נחשב את הסבירות ששני אנשים לפחות נולדו באותו חודש. המאורע הוא $A = \{(x_i) \in \Omega \mid \exists i, j : 1 \leq i < j \leq 10, x_i = x_j\}$. נחשב על־ידי חישוב המשלים, נגדיר $B = \{(x_i) \in \Omega \mid \forall i, j : i \neq j \implies x_i \neq x_j\}$ המאורע שאין שני אנשים שחוגגים ביחד חודש הולדת. משיקולים קומבינטוריים נקבל $|B| = \frac{12!}{2!}$ ולכן $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{12!}{2 \cdot 12^{10}}$.

סעיף ד'

מחלקים 12 תפוזים ל־8 סלסלות, לכן נייצג את הסיטואציה על־ידי מספר התפוזים בכל סלסלה, דהינו נגדיר $\Omega = \{(x_i) \in [12]^8 \mid \sum_{i=1}^{8} = 12\}$.
נחשב את הסיכוי שבכל סלסלה יש לפחות תפוז אחד, נגדיר $A = \{(x_i) \in \Omega \mid \forall 1 \leq i \leq 8, x_1 \geq 1\}$. משיקולים קומבינטוריים נקבל $|\Omega| = \binom{21}{12}$, ובאופן דומה $|A| = \binom{13}{8}$ ולכן $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

סעיף ה'

שולפים 13 קלפים בזה אחר זה מחפיסת קלפים סטנדרטית ללא חשיבות לסדר, לכן $\Omega = \{\omega \in \mathcal{P}([52]) \mid |\omega| = 13\}$. נבחין כי משיקולים קומבינטוריים $|\Omega| = \binom{52}{13}$. נרצה לחשב שארבעה קלפים בדיוק הם מהסוג יהלום, נגדיר שרירותית שקבוצת הקלפים ביהלום מיוצגים על־ידי המספרים 1 עד 13, ולכן $A = \{\omega \in \Omega \mid |\omega \cap [13]| = 4\}$. בהתאם נקבל $|A| = \binom{13}{4} \cdot \binom{52-13}{9}$ וכמובן בהתאם להסתברות אחידה $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

סעיף ו'

נתון כי שמונה בנים ושמונה בנות מתיישבים בשורה, נייצג אותם על־ידי קבוצת מיקומי הבנים, כאשר בשאר המקומות יושבות בנות, דהינו $\Omega = \{X \subseteq [16] \mid |X| = 8\}$. נקבל אם כך $|\Omega| = \binom{16}{8}$. נרצה לחשב את הסיכוי שהבנים והבנות יושבים לסירוגין, למעשה יש רק שתי אפשרויות כאלה, או שיש בן בתחילת השורה או שיש בת, ולכן $A = \{\{1,3,5,7,9,11,13,15\}, \{2,4,6,8,10,12,14\}\}$. בהתאם נקבל $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{\binom{16}{8}}$.

סעיף ז'

להגרלת לוטו יש n כרטיסים ומתוכם k כרטיסים זכו, ידוע שלאדם מסוים יש m כרטיסים, נגדיר שרירותית שלכל כרטיס מספר בין 1 ל־n וש־$k \le n$ הכרטיסים הראשונים הם זוכים, לכן $\Omega = \{X \subseteq [n] \mid |X| = m\}$. כמובן $|\Omega| = \binom{n}{m}$. נבחן את המרוקע שהאדם זכה, דהינו לפחות אחד הכרטיסים זוכה, אז $A = \{\omega \in \Omega \mid |\omega \cap [k]| > 0\}$, מטעמי נוחות נבחן את המאורע המשלים, נגדיר $B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \cap [k] = \emptyset\}$ ונחשב את גודלוונחשבו. זהו המקרה שבו כל m הכרטיסים ממוספרים $k + 1 \le i \le n$ ויש $\binom{n-k-1}{m}$ אפשרויות כאלה, כאשר נגדיר שאם המספר לבחירה שלילי אז תוצאת הביטוי היא 0. נקבל בהתאם שהסיכוי של האדם לזכות הוא $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{\binom{n-k-1}{m}}{\binom{n}{m}}$.

שאלה 5

תהי Ω בת־מניה לא סופית, ונגדיר $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(\Omega) \mid |X| < \infty \vee |X^C| < \infty\}$.
נגדיר $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ על־ידי

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & |A| < \infty \\ 1 & |A^C| < \infty \end{cases}$$

סעיף א'

נוכיח כי $\mathcal{F}$ סגור למשלים ולאיחוד סופי.

הוכחה. יהיה מאורע $A \in \mathcal{F}$, ונבחן את A^C, מהגדרת $\mathcal{F}$ נובע $|A| < \infty \vee |A^C| < \infty$ ובהתאם נקבל $|A^C| < \infty \vee |A| < \infty$ ולכן יש סגירות למשלים ב־$\mathcal{F}$.

נניח $A, B \in \mathcal{F}$, אם $|A|, |B| < \infty$ אז כמובן $|A \cup B| < \infty$ ולכן $A \cup B \in \mathcal{F}$, אם $|A|, |B| = \infty$ אז $A \cup B = (A^C \cap B^C)^C$ אבל A^C ו־B^C שתיהן סופיות ובהכרח גם $A^C \cap B^C$ סופית ולכן נקבל גם $A \cup B \in \mathcal{F}$. נניח $|A|, |B^C| < \infty$, אז $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ אבל B^C סופית ולכן גם החיתוך $A^C \cap B^C$ ולכן $A \cup B \in \mathcal{F}$ בכל מצב והקבוצה סגורה לאיחוד זוגות.

נניח $\{A_i\}_{i=1}^l \subseteq \mathcal{F}$ קבוצת מאורעות סופית, ונבדוק האם $\bigcup_{i=1}^l A_i \in \mathcal{F}$, אכן קיבלנו כי $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ ולכן נוכל להראות באופן אינדוקטיבי שכל איחוד סופי בקבוצה.

מצאנו ש־$\mathcal{F}$ סגורה להשלמה ולאיחוד סופי. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי $\mathbb{P}$ מקיימת $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ושמתקיימת אדיטיביות סופית.

הוכחה. נבחין כי $\emptyset$ היא קבוצה סופית, ולכן מהגדרת $\mathbb{P}$ מתקיים $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. ידוע גם כי $\Omega^C = \Omega \setminus \Omega = \emptyset$ ולכן $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ מהגדרת הפונקציה.

נבדוק קיום אדיטיביות סופית. תהינה $\{A_i\}_{i=1}^l$ קבוצת מאורעות זרים סופית, תחילה נבחין כי לכל היותר מאורע אחד הוא לא סופי בקבוצה זו, נניח בשלילה שיש A_i, A_j זרים ולא סופיים, אז A_i^C, A_j^C סופיים ולכן נוכל לבחור איבר שלא באיחוד שלהם. אם a איבר כזה אז $a \in A_i, A_j$ ולכן קיבלנו סתירה לזרות. נניח A_i סופי לכל $2 \le i \le l$ ו־A_1 יכול להיות סופי ויכול להיות אינסופי. במקרה בו A_1 סופי אז נקבל $\bigcup_{i=1}^l A_i$ סופי אף הוא ולכן $\sum_{i=1}^l \mathbb{P}(A_i) = 0 = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^l)$. במקרה בו A_1 אינסופית, האיחוד של שאר הקבוצות הוא סופי ולכן נקבל $1 = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^l A_i) = \sum_{i=1}^l A_i = \mathbb{P}(A_1) + \sum_{i=2}^l A_i$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שקיים מאורע $A \in \mathcal{F}$ כך ש־$\mathbb{P}(A) = 1$ כך ש־$A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ למאורעות זרים כך ש־$\mathbb{P}(A_i) = 0$ לכל $i \in \mathbb{N}$ ונסיק כי $\mathbb{P}$ איננה סיגמא אדיטיבית.

הוכחה. ידוע כי Ω בת־מניה ולכן $|\mathbb{N}| = |\Omega|$ ובהתאם קיימת $f : \mathbb{N} \to \Omega$ חד־חד ערכית ועל.
נגדיר $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}$ על־ידי $A_i = \{f(i)\}$ לכל $i \in \mathbb{N}$, נקבל בהתאם $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = f(\mathbb{N}) = \Omega$.
לכן נוכל להסיק $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ אבל גם $\mathbb{P}(A_i) = 0$ שכן A_i יחידון ולכן ככלל סופית לכל $i \in \mathbb{N}$, וקיבלנו את המבוקש.

נבחין כי תוצאה זו סותרת באופן ישיר את תכונת הסיגמא־אדיטיביות ולכן $\mathbb{P}$ איננה פונקציית הסתבות. $\square$