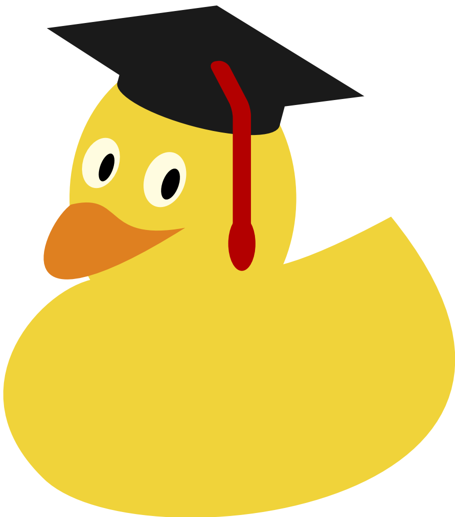
פתרון מטלה 05 — תורת ההסתברות (1), 80420

1 בדצמבר 2024



שאלה 1

עבור $i \in \{0,1\}$ תהי $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}$, ותהי $\mathbb{P}_i$ פונקציית הסתברות בדידה על Ω_i ותהי $X_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ פונקציית הזהות.
נוכיח ש־$X_2 \overset{d}{=} X_1$ אם ורק אם קיימת $S \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$ קבוצה בת־מניה במובן הרחב המקיימת $S = \operatorname{Supp} \mathbb{P}_1 = \operatorname{Supp} \mathbb{P}_2$ וכן $\forall x \in S, \mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$.

הוכחה. נניח ש־$X_2 \overset{d}{=} X_1$, ולכן $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.
נגדיר $S = \operatorname{Supp} \mathbb{P}_1 = \operatorname{Supp} \mathbb{P}_2$ ואנו יודעים כי אלו הן פונקציות בדידות ולכן $|S| \le \aleph_0$, כמובן גם מההגדרה של התומך נסיק $S \subseteq \Omega_1, \Omega_2$ ולכן בפרט $S \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$.
מתקיים $\mathbb{P}_1(X_1 = x) = \mathbb{P}(\{y \in S \mid y \in X_1^{-1}(x)\}) = \mathbb{P}_1(\{y \in S \mid x = y\}) = \mathbb{P}_1(x)$ ולכן נסיק ממהלך זהה על $\mathbb{P}_2$ שגם $\mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$.

נניח את הכיוון השני.
מצאנו כי $\forall x \in S, \mathbb{P}_1(X_1 = x) = \mathbb{P}_1(x)$ ואנו רוצים להראות ש־$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X_1 = x) = \mathbb{P}(X_2 = x)$ אבל מהשוויון נובע שעלינו רק להראות ש־$\mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
כמובן אם $x \in \mathbb{R} \setminus S$ אז $\mathbb{P}_1(x) = 0 = \mathbb{P}_2(x)$, אחרת $x \in S$, אבל אז ישירות מההנחה מתקבל $\mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_2(x)$ ומצאנו כי $X_1 \overset{d}{=} X_2$. $\square$

שאלה 2

נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נוכיח שאם תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חד־חד ערכית, אז $X\overset{d}{=}Y$ אם ורק אם $f(X)\overset{d}{=}f(Y)$.

הוכחה. הכיוון הראשון הוכח כטענה בכיתה, לכן נניח ש־$f(X)\overset{d}{=}f(Y)$.

יהי $x\in\mathbb{R}$, אם קיים $y\in\mathbb{R}$ כך ש־$x=f(y)$ אז נובע $\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(Y=x)\implies\mathbb{P}(f(X)=f(y))=\mathbb{P}(f(Y)=f(y))$.

אם לא קיים y כזה, אז $\mathbb{P}(f(X)=x)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid\omega=X^{-1}(f^{-1}(x))\})=0$ ולכן נסיק $\mathbb{P}(X=x)=0$. $\square$

סעיף ב'

נסתור את הטענה כי אם $X\overset{d}{=}Y$ אז $\mathbb{P}(X=Y)>0$.

פתרון עבור $\Omega=[6]$, $\mathbb{P}$ אחיד,

עוד נגדיר $X=Id, Y=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, אז נקבל $\mathbb{P}(X=n)=\frac{1}{6}=\mathbb{P}(Y=n)$ אבל גם

$$\mathbb{P}(X=Y)=\mathbb{P}(\{n\in[6]\mid X(n)=Y(n)\})=0$$

סעיף ג'

נסתור את הטענה שאם $X\overset{d}{=}Y$ וגם X,Y בלתי־תלויים, אז $\mathbb{P}(X=Y)>0$.

פתרון נגדיר הטלת שתי קוביות הוגנות וגם $X(n,m)=n, Y(n,m)=m+6$, אז המשתנים המקריים בלתי־תלויים, וגם $\mathbb{P}(X=Y)=0$.

סעיף ד'

נוכיח שאם X בלתי־תלוי בעצמו, אז קיים $c\in\mathbb{R}$ שעבורו $\mathbb{P}(X=c)=1$.

הוכחה. נתון שמתקיים

$$\mathbb{P}(X=t,X=s)=\mathbb{P}(X=t)\mathbb{P}(X=s)$$

אבל אם $s\neq t$ אז $\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=s=t\}=\emptyset$ ולכן $\mathbb{P}(X=s)\mathbb{P}(X=t)=0$.

אם $s=t$ אז נקבל

$$\mathbb{P}(X=t,X=t)=\mathbb{P}(X=t)=\mathbb{P}^2(X=t)\iff\mathbb{P}(X=t)=0,1$$

ואילו לא קיים c עבורו $\mathbb{P}(X=c)=1$ אז נסיק $\mathbb{P}(X\in\mathbb{R})=\mathbb{P}(\Omega)=0$ וזו סתירה, לכן c כזה קיים ואף יחיד. ולכן $\square$

סעיף ה'

נוכיח שאם $X^2\overset{d}{=}X$ אז קיים $p\in[0,1]$ שעבורו $X\sim Ber(p)$.

הוכחה. נבחין כי

$$\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(X^2=x)\iff\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x\})=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X^2(\omega)=x\})$$

ועבור $x=0,1$ מתקיים $X(\omega)=X^2(\omega)$.

אילו $x\neq 0,1$ אז נקבל

$$\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(X=\sqrt{x})=\mathbb{P}(X=\sqrt[4]{x})=\cdots$$

ואילו $\mathbb{P}(X=x)\neq 0$ נקבל $\mathbb{P}(\Omega)=\infty$ בסתירה להגדרת פונקציית הסתברות, ולכן $\mathbb{P}(X=x)=0$.

לכן גם $\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)=1$ ובהתאם קיבלנו כי קיים $p\in[0,1]$ כך ש־$X\sim Ber(p)$. $\square$

שאלה 3

יהיה $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.

נוכיח כי מאורעות $A_1, \ldots, A_n$ הם בלתי־תלויים אם ורק אם $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ הם משתנים מקריים בלתי־תלויים.

הוכחה. נבחין כי אילו $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ בלתי־תלויים ונבחר $S_1 = \cdots = S_n = 1$ אז נקבל את קבוצת המאורעות $A_1, \ldots, A_n$.

נניח אם כך ש־$A_1, \ldots, A_n$ בלתי־תלויה. תהינה $S_1, \ldots, S_n \mathcal{F}_\mathbb{R}$. נבחין כי אם $1 \in S_i$ אז $\{1_{A_i}(\omega) \in S_i\} = A_i$ ובהתאם אם $1 \notin S_i$ אז $\{1_{A_i}(\omega) \in S_i\} = \emptyset$.

לכן נגדיר $I = \{i \in [n] \mid 1 \in S_i\}$ ונקבל ש־$\{1_{A_i} \in S_i\}_{i \in [n]} = \{A_i\}_{i \in I}$ וזו כמובן קבוצה בלתי־תלויה מההנחה. $\square$

שאלה 4

יהיו $X \sim Geo(p), Y \sim Gro(q)$ משתנים מקריים בלתי־תלויים.

סעיף א'

נחשב את ההסתברות למאורע $\{X \geq n\}$ עבור $n \in \{1, 2, \dots\}$ כלשהו.

פתרון

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = m) = \sum_{m=n}^{\infty} (1-p)^{m-1} p = p \sum_{m=n+1}^{\infty} (1-p)^m = p \cdot \frac{(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-1}$$

סעיף ב'

נראה שהמשתנה המקרי $Z = \min(X, Y)$ הוא בעל התפלגות $Geo(1-(1-p)(1-q))$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
p_Z(x) &= \mathbb{P}(x = \min(X, Y)) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid x = \min(X(\omega), Y(\omega))\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid (x = X(\omega) \wedge x = Y(\omega)) \vee (x = X(\omega) \wedge x < Y(\omega)) \vee (x = Y(\omega) \wedge x < X(\omega))\}) \\
&\overset{(1)}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid x = X(\omega), x = Y(\omega)\} \uplus \{\omega \in \Omega \mid x = X(\omega), x < Y(\omega)\} \uplus \{\omega \in \Omega \mid x = Y(\omega), x < X(\omega)\}) \\
&= \mathbb{P}(X = x, Y = x) + \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y > x) + \mathbb{P}(Y = x)\mathbb{P}(X > x) \\
&\overset{(2)}{=} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y \geq x) + \mathbb{P}(Y = x)\mathbb{P}(X \geq x) - \mathbb{P}(X = x, Y = x) \\
&= (1-p)^{x-1} p (1-q)^{x-1} + (1-q)^{x-1} q (1-p)^{x-1} - (1-p)^{x-1} p (1-q)^{x-1} q \\
&= (1-p)^{x-1} (1-q)^{x-1} (-pq + p + q) \\
&= (1-(1-p)(1-q))^{x-1} (1-(1-p)(1-q))
\end{aligned}$$

כאשר

1. המאורעות המושרים הם זרים שאם לא כן נקבל סתירה לערך יחיד של X או Y עבור מקרה.
2. נחליף את המאורעות להיות במקרה של גדול ולא גדול ממש, ועל־ידי שימוש בהכלה והדחה נקבל שיש צורך בחיסור המקרה המשותף.

ולכן $\min(X, Y) \sim Geo(1-(1-p)(1-q))$. $\square$

שאלה 5

יהיו שני משתנים מקריים X, Y בלתי־תלויים שנתמכים על $\{0, \ldots, n-1\}$. נסמן $Z = X + Y \mod n$.
נראה ש־X ו־Z בלתי־תלויים אם ורק אם $Y \sim U(\{0, \ldots, n-1\})$.

הוכחה. $\square$