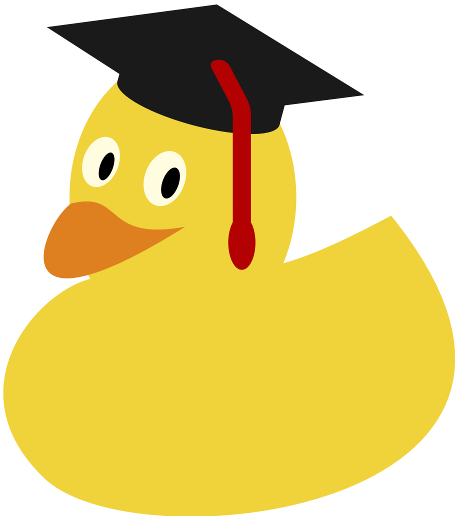
פתרון מטלה 06 — מבנים אלגבריים 1 (80445)

26 ביוני 2024



שאלה 1

סעיף א'

נוכיח שלכל $n \geq 1$, החבורה $\mathbb{Z}_{/n}$ מכילה תת־חבורה יחודית מסדר d לכל $d \mid n$.

הוכחה. יהי $d \mid n$, ונגדיר גם $k = \frac{n}{d}$. אנו יודעים כי $\mathbb{Z}_{/n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ונבחן את $d\mathbb{Z}_{/n}$, דהינו $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ממשפט האיזומורפיזם השלישי נקבל כי $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{/d}$.

נוכל אם כן להניח ש־$d\mathbb{Z}_{/n}$ היא מסדר d אף היא, ואנו יודעים כי היא אכן תת־חבורה של $\mathbb{Z}_{/n}$, נותר להראות כי היא יחידה.

תהי תת־חבורה אחרת H של $\mathbb{Z}_{/n}$ אשר היא מסדר d, אז קיים איבר $a \in H$ כך שהסדר שלו הוא d, זאת אנו יודעים מהתכונות של $\mathbb{Z}_{/n}$, ואנו יודעים כי $a \in d\mathbb{Z}_{/n}$ ולכן נוכל להסיק כי תת־החבורות שוות. □

סעיף ב'

נוכיח כי $a \in \mathbb{Z}_{/n}$ יוצר תת־חבורה מסדר d אם ורק אם $\gcd(a, n) = \frac{n}{d}$.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי a יוצר תת־חבורה מסדר d, ולכן נוכל להסיק מהסעיף הקודם כי $n \mid a \mid d$, ולכן נשתמש במסקנה מהרצאה ונקבל $\gcd(a, d) = 1$, ומכאן נוכל להסיק את המבוקש ישירות.

כיוון שני: נניח כי $\gcd(a, n) = \frac{n}{d}$, לכן נוכל להסיק כי $\frac{n}{d} \in \mathbb{Z}_{/n}$, וכי $\frac{n}{d}$ הוא מסדר d, ולכן נוכל להסיק כי a עצמו יוצר תת־חבורה מסדר זה. □

סעיף ג'

נוכיח כי $Aut(\mathbb{Z}_{/n}) \cong (\mathbb{Z}_{/n})^{\times}$ כאשר זו מוגדרת על־ידי חבורת האלמנטים $1 \leq a \leq n - 1$ אשר הם ראשוניים זרים ל־n עם כפל מודולו n.

שאלה 2

נמצא שני איברים ב־A_5 שהם צמודים תחת S_5 אבל לא תחת A_5.

אנו יודעים כי A_5 מכיל תמורות שהפירוק שלהן למחזורים מכיל רק מחזורים אי־זוגיים וכמות זוגית של מחזורים זוגיים.
עוד אנו יודעים כי איברים הם צמודים ב־S_5 כאשר הפירוק שלהם למחזורים הוא דומה, ולכן נניח כי ישנם שני איברים $\sigma, \tau \in A_5$ אשר הפירוק שלהם אכן זהה. נגדיר

$$\sigma = (1\ 2\ 3), \tau = (2\ 3\ 4)$$

נבחין כי אכן $\sigma, \tau \in A_5$, וגם כי $\phi = (1\ 4)$ הוא האיבר אשר מצמיד אותם, ולכן נוכל להסיק כי הם צמודים ב־S_5, אבל $\phi \notin A_5$ ולכן תחתיתה הם לא צמודים.

סעיף א'

נחלק את A_5 למחלקות צמידות.

A_5 יורש את החלוקה של S_5 ומעדן אותה, לכן עלינו לבדוק רק את החלוקה שמשרה A_5 על מחלקת צמידות כלשהי של S_5.
הסקנו בסעיף הקודם כי שני איברים הם צמודים אם האיבר שמצמיד אותם הוא בעצמו ב־A_5.
נוכל אם כן לחשב את האיברים הצמודים עצמם, מתוך 60 האיברים של החבורה.

שאלה 3

תהי $P_n^{\pm} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ חבורת התמורות המורחבת.

סעיף א'

נוכיח כי $|P_n^{\pm}| = 2^n n!$.

הוכחה. אנו יודעים כי מטריצות התמורות היא קבוצה המונה $n!$ מטריצות, כפי שראינו בתרגול, ואנו יודעים מכפל מטריצות כי $\forall P \in P_n^{\pm} = JA$ כאשר A מטריצת תמורה ו־J אלכסונית כך שאלכסונה מורכב רק מ־± 1.
אנו יודעים כי קיימות 2^n מטריצות J כאלה, ו־$n!$ מטריצות P, ולכן נסיק כי $|P_n^{\pm}| = 2^n n!$. □

סעיף ב'

תהי $P_n \le GL_n(\mathbb{R})$ חבורת מטריצות התמורה, ותהי $R_n \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ חבורות המטריצות J שהגדרנו.
נוכיח כי $P_n^{\pm} = R_n P_n$.

הוכחה. בסעיף הקודם ראינו כי כל מטריצת תמורה מורחבת היא מכפלה של מטריצות כאלה, נסביר כי אילו שורה מסוימת היא שלילית ב־$J \in R_n$ אז העמודה המתקבלת במכפלה JP עבור $P \in P_n$ כלשהי שלילית אף היא. □

סעיף ג'

נוכיח כי P_n מנרמל את R_n וכי $P_n^{\pm} \le GL_n(\mathbb{R})$.

הוכחה. יהי $P \in P_n$, ונבחן את PR_nP^{-1}.
נראה כי עבור אינדקס בו $R \in R_n$ כלשהי חיובית, אז הכפל שקול לכפל מטריצה בהופכית ונקבל שלא היה שינוי.
נניח אם כן שבאינדקס כלשהו הערך הוא שלילי ואז מחוקי כפל בסקלר נקבל כי המכפלה היא רק אלכסון שלילי, ובכל מקרה אנו רואים כי

$$\forall R \in R_n : PR_nP^{-1} = R_n$$

ומצאנו כי הנרמול אכן מתקיים.

נשים לב כי בהינתן $R \in R_n$ נקבל כי $\det R \neq 0$ ואנו יודעים כבר כי $P_n \le GL_n(\mathbb{R})$, ולכן נוכל להסיק כי גם $R_n P_n \le GL_n(\mathbb{R})$. □

סעיף ד'

נוכיח כי $P_n^{\pm} \le O(n)$.

הוכחה. אנו כבר יודעים כי $P_n \le O(n)$ מהגדרת מטריצות אורתוגונליות, וכמובן $R^2 = I$ לכל $R \in R_n$ ולכן $R_n \le O(n)$ ומסגירות לכפל מטריצות של העתקות אורתוגונליות נוכל להסיק גם $P_n^{\pm} \le O(n)$. □

סעיף ה'

נוכיח כי $P_n^{\pm}$ היא $P_n \ltimes R_n$.

הוכחה. נבחר $(P, R), (P', R') \in P_n \times R_n$ ונראה כי

$$(P, R)(P', R') = (PRP'R^{-1}, RR') = (PP', RR') \in P_n \times R_n$$

ונבחין כי מכפלה זו מתנהגת כמו הכפלת מטריצות מסוג זה על־פי חוקי כפל מטריצות. □

שאלה 4

יהי $C_n = ([-1,1])^n \subseteq \mathbb{R}^n$ קוביה n־ממדית, ויהי $G_n \leq O(n)$ חבורת ההעתקות הלינאריות המשמרות את C_n.

סעיף א'

נוכיח כי $P_n^{\pm} \leq G_n$.

הוכחה. תהי $P \in P_n^{\pm}$ מטריצת תמורה מורחבת. מהגדרת מטריצות אלה אנו יכולים להסיק כי היא אורתוגונלית, ולכן עלינו רק לבדוק כי היא משמרת את המבנה של C_n.

תהי V קבוצת הקודקודים ויהי קודקוד $v \in V$ של C_n, נגדיר $v = (v_1, \dots, v_n)$ ונסיק כי $v_i = \pm 1$ לכל $1 \leq i \leq n$.

נבחין כי $Pv \in V$ כנביעה ישירה מהגדרת מטריצות התמורה המורחבות. מהאורתוגונליות נוכל להסיק כי גם המבנה משתמר ונקבל בסך־הכול כי $P \in C_n$, ולכן נוכל להסיק כי חבורה זו מקיימת $P_n^{\pm} \leq G_n$. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי G_n פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $F = \{\epsilon e_i \mid \epsilon \in \{\pm 1\}, 1 \leq i \leq n\}$ יחד עם המייצב $(G_n)_{e_1} \cong G_{n-1}$.

הוכחה. יהיו $f_1, f_2 \in F$, ונגדיר העתקה $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ על־ידי $Tf_1 = f_2$, ונגדיר אותה כך ששאר העמודות ישלימו למטריצת תמורות מורחבת כלשהי, ולכן נקבל $T \in P_n^{\pm}$.

קיבלנו כי f_1, f_2 באותו מסלול ללא קשר לבחירתם, ולכן יש מסלול יחיד לפעולה.

נבדוק עבור אילו $g \in G_n$ נקבל $ge_1 = e_1$. כמובן אלו הן כל ההעתקות T כך ש־$Te_1 = e_1$, כאשר שאר המטריצה נקבעת על־ידי $n-1$ אופציות.

נוכל אם כן להסיק שעבור כל $P \in P_{n-1}^{\pm}$ לבנות מטריצה T אשר תקיים את הטענה ולכן גם נסיק כי $(G_n)_{e_1} = G_{n-1}$. $\square$

סעיף ג'

נסיק כי $G_n = P_n^{\pm}$.

מצאנו כבר כי $P_n^{\pm} \leq G_n$ ולכן מספיק שנראה שאם $g \in G_n$ אז הוא גם ב־$P_n^{\pm}$, זאת נסיק מהסעיף הקודם על־ידי בחירת קורדינטה ובחינת המייצב, ונוכל להסיק כי $g \in P_n^{\pm}$.