פתרון מטלה 03 — תורת ההסתברות (1), 80420

15 בנובמבר 2024

שאלה 1

נאמר שמאורע A מחזק את מאורע B אם $\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B)$.
יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ונוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

סעיף א'

נסתור את הטענה כי אם A מחזק את B ו־B מחזק את C, אז A מחזק את C, על־ידי דוגמה נגדית.
פתרון נניח Ω הטלת שתי קוביות הוגנות, נניח גם A המאורע שיצא 2 בקוביה הראשונה, B המאורע שיצא 2 לפחות בכל קוביה, ו־C המאורע שיצא לפחות 2 בקוביה ב'.
נחשב $\mathbb{P}(B) = \frac{5^2}{6^2} < \frac{5}{6} = \mathbb{P}(B \mid A)$, בנוסף $\frac{5}{6} = \mathbb{P}(C) < 1 = \mathbb{P}(C \mid B)$ אבל $\frac{5}{6} = \mathbb{P}(C) = \frac{5}{6} = \mathbb{P}(C \mid A)$.

סעיף ב'

נוכיח כי אם A מחזק את B אז גם B מחזק את A.

הוכחה. ישירות מהגדרה

$$\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B) \iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} > \mathbb{P}(B) \iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} > \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$$

□

סעיף ג'

נסתור את הטענה כי אם A, B מאורעות המקיימים $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ אז $A \cap B = \emptyset$.
פתרון יהי Ω הטלת מטבע טריק, מטבע שבו תמיד צד א' נבחר.
נגדיר גם $A = \Omega$ ו־B מאורע שיצא צד ב', אז כמובן $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) = 0$, אבל $A \cap B$ הוא המקרה שיצא צד ב', ובפרט איננו מאורע ריק.

סעיף ד'

נסתור את הטענה כיאם $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אחידה, ונניח גם B מאורע כך ש־$\mathbb{P}(B) > 0$, אז $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ מרחב הסתברות אחידה.
פתרון נבחן מרחב הסתברות של הטלת קוביה הוגנת, הוא עומד בכל התנאים, ואם $B = \{1, 2, 3\}$ אז $\mathbb{P}_B(\{1\}) = \frac{1}{3} \ne 0 = \mathbb{P}_B(\{4\})$, דהינו מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ לא אחיד.
נבחין כי $(\Omega \cap B, \mathbb{P}_B)$ הוא כן מרחב הסתברות אחיד.

סעיף ה'

נוכיח שאם $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות לא אחיד ויהי B כך ש־$\mathbb{P}(B) > 0$, אז $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ מרחב הסתברות לא אחיד.

הוכחה. מהנתון נסיק כי Ω לא ריק, ונבחין בין שני מקרים.
אם $\Omega = B$ אז $\mathbb{P} = \mathbb{P}_B$ ולכן סיימנו.
אחרת נגדיר $A = \Omega \setminus B$ ולכן $\mathbb{P}_B(B) = 1 \ne 0 = \mathbb{P}_B(A)$, ולכן מרחב ההסתברות הוא לא אחיד. □

שאלה 2

סעיף א'

בשידה שלוש מגירות, באחת זוג גרביים שחור, בשנייה זוג גרביים לבן, ובשלישית גרב שחור וגרב לבן.

בוחרים מגירה באקראי ובהסתברות אחידה ומוציאים ממנה גרס יחיד באקראי, ונתון כי הוא לבן.

מה ההסתברות שגם הכרב השני במגירה לבן?

פתרון השאלה שקולה לשאלה מה הסיכוי להוציא גרב לבן ואז גרב לבן נוסף, נגדיר $\Omega = \{(w,w),(b,b),(w,b),(b,w)\}$.

נגדיר $A = \{(w,w),(w,b)\}$ המאורע שהגרב הראשון שנבחר הוא לבן, עוד נבחין כי $p(w,w) = p(b,b) = p(w,b) + p(b,w)$ ו־$p(w,b) = p(b,w)$.

נגדיר $B = \{(w,w)\}$ המאורע ששני הגרביים לבנים, ואנו מחפשים את $\mathbb{P}(B \mid A)$, לכן

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

סעיף ב'

נתון דלי עם k כדורים לבנים ו־k כדורים שחורים. מוציאים $n < k$ כדורים ללא החזרה ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף, כדור $n+1$. נחשב מה ההסתברות אם ידוע ש־n הכדורים הראשונים לבנים, מה ההסתברות שהכדור ה־$n+1$ שחור.

פתרון נגדיר $\Omega = \{b,w\}^{2k}$ כל הוצאות כל הכדורים ללא החזרה ועם חשיבות לסדר מהדלי.

נגדיר גם $A = \{\omega \in \Omega \mid \forall 1 \le i \le n, \omega_i = w\}$ המאורע ש־n הכדורים הראשונים הם לבנים, ו־$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega_{n+1} = b\}$ המאורע שהכדור ה־$n+1$ שחור. משיקולים קומבינטוריים נוכל להסיק

$$|\Omega| = \binom{2k}{k}, \qquad |A| = \binom{2k-n}{k-n}, \qquad |B| = \binom{2k-1}{k}, \qquad |A \cap B| = \binom{2k-n-1}{k-n}$$

נחשב

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{\binom{2k-n-1}{k-n}}{\binom{2k-n}{k-n}} = \frac{k}{2k-n}$$

סעיף ג'

נגדיר $\Omega \mathbb{N}, p(n) = 2^{-n}$. מגרילים מספר באקראי לפי p. נחשב את ההסתברות שבהינתן שהמספר שהתקבל מתחלק ב־6, ההסתברות שהוא מתחלק ב־7, וההסתברות שהוא מתחלק ב־4.

פתרון יהי $k \in \mathbb{N}$ ונגדיר $l = \operatorname{lcm}(6,k)$, אז אנו יודעים ש־$6\mathbb{N} \cap k\mathbb{N} = l\mathbb{N}$.

עוד נוכל לחשב שמתקיים לכל $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(m\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-mn} = \frac{2^{-m}}{1 - 2^{-m}} = \frac{1}{2^m - 1}$$

ולכן

$$\mathbb{P}_6(k) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(k\mathbb{N} \mid 6\mathbb{N}) = \frac{\mathbb{P}(l\mathbb{N})}{\mathbb{P}(6\mathbb{N})} = \frac{\frac{1}{2^l - 1}}{\frac{1}{2^6 - 1}} = \frac{2^6 - 1}{2^{\operatorname{lcm}(6,k)} - 1}$$

לבסוף נציב

$$\mathbb{P}_6(7) = \frac{2^6 - 1}{2^{42} - 1}, \qquad \mathbb{P}_6(4) = \frac{2^6 - 1}{2^8 - 1}$$

סעיף ד'

בוחרים אחד מהמספרים $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{4}\}$ בהסתברות אחידה ואז מטילים מטבע מוטה בהתאם לפרמטר שנבחר פעמיים.

נחשב את ההסתברות לכל אחד מהפרמטרים בהינתן שיצא צד א' ואז צד ב'.

פתרון