פתרון ממ"ן 15 – חשבון אינפיניטסימלי 1 (20474)

3 בפברואר 2023

שאלה 1

נמצא את נקודות הרציפות והאי־רציפות של הפונקציה

$$f(x) = \lfloor \cos x \rfloor \cos \frac{x}{2}$$

בקטע $(-\pi, \frac{3\pi}{2})$.

הפונקציה $\cos \frac{x}{2}$ רציפה בכל תחום הגדרתה על־פי משפט 5.13. לפי משפט 5.11 נראה כי הפונקציה f רציפה בכל התחום בו $\lfloor \cos x \rfloor$ רציפה.
ידוע כי תמונת הפונקציה $\cos x$ היא $[-1, 1]$, ואנו יודעים כי היא שלילית בתחום $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$, לכן בתחום זה $\lfloor \cos x \rfloor$ ערכה -1. בהתאם בתחום $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ערכה 0. בנקודה 0 ערכה הוא 1. בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$ ערכה הוא 0 ובשאר הקטע ערכה -1.
לכן הפונקציה f רציפה בקטעים $(-\pi, -\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, 0), (0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. בהתאם, נקודות האי־רציפות של הפונקציה בתחום קיימות בערכים $x = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$. נחשב את גבול הפונקציה כאשר $x = -\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \lfloor \cos x \rfloor \cos \frac{x}{2} = \left(\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \lfloor \cos x \rfloor \right) \left(\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \cos \frac{x}{2} \right) = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \lfloor \cos x \rfloor \cos \frac{x}{2} = \left(\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \lfloor \cos x \rfloor \right) \left(\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

לכן $-\frac{\pi}{2}$ נקודת אי־רציפות מסדר ראשון של הפונקציה f. חישוב דומה יניב כי גם הנקודה $x = \frac{\pi}{2}$ היא נקודת אי־רציפות מסדר ראשון של הפונקציה.
עתה נחשב את ערך הגבול בנקודה $x = 0$:

$$\lim{}_x \to 0^- f(x) = \lim_{x \to 0^-} \lfloor \cos x \rfloor \cos \frac{x}{2} = \left(\lim_{x \to 0^-} \lfloor \cos x \rfloor \right) \left(\lim_{x \to 0^-} \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim{}_x \to 0^+ f(x) = \lim_{x \to 0^+} \lfloor \cos x \rfloor \cos \frac{x}{2} = \left(\lim_{x \to 0^+} \lfloor \cos x \rfloor \right) \left(\lim_{x \to 0^+} \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

אך על־פי חישוב $f(0) = 1$, לכן בנקודה $x = 0$ יש לפונקציה נקודת אי־רציפות סליקה.

שאלה 2

סעיף א'

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0.

(i) ננסח את הטענה כי f איננה רציפה ב־x_0 בלשון ϵ, δ:

הפונקציה f לא רציפה ב־x_0 אם ורק אם קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים x כך ש־$|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

(ii) ננסח את הטענה כי f איננה רציפה ב־x_0 בלשון סדרות:

הפונקציה f איננה רציפה ב־x_0 אם ורק אם קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$.

סעיף ב'

תהי הפונקציה f המוגדרת

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

נוכיח שהפונקציה f רציפה כאשר $x_0 = 1$ בלשון ϵ, δ.

לכל $\epsilon > 0$ נמצא δ כך שלכל x שמתקיים $|x - 1| < \delta$ מתקיים גם $|f(x) - 1| < \epsilon$. נשים לב כי עבור כל $x \notin \mathbb{Q}$ מתקיים $f(x) = 1$ ובהתאם $\epsilon > 0 = |f(x) - 1|$ והתנאי מתקיים לכל ϵ ו־δ. עבור ערכי x רציונליים מתקיים $\delta > |x - 1| = |f(x) - 1|$, לכן נגדיר $\delta = \epsilon$, אז מתקיים $|f(x) - 1| < \epsilon$, ובסך־הכול התנאי מתקיים לכל $|x - 1| < \delta$.

מצאנו ערך δ אשר מקיים את אי־השוויון לכל ϵ ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $x_0 = 1$.

סעיף ג'

(i) נוכיח כי הפונקציה f איננה רציפה על־פי ההגדרה מסעיף א' (i)

נמצא $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים ערך x כך ש־$|x| < \delta$ וגם $|f(x)| \geq \epsilon$.

נגדיר $\epsilon = \frac{1}{2}$. על־פי אקסיומת הרציפות קיים מספר ממשי שאיננו רציונלי x_1 כך ש־$0 < x_1 < \delta$. בשל היותו לא רציונלי מתקיים $f(x_1) = 1$ ולכן גם $f(x_1) = 1 \geq \frac{1}{2} = \epsilon$. כמובן שאם מתקיים $0 < x_1 < \delta$ אז גם $|x_1| < \delta$.

מצאנו ϵ העומד בתנאי ולכן על־פי הגדרת סעיף א' (i) הפונקציה f איננה רציפה כאשר $x_0 = 0$.

(ii) נוכיח כי הפונקציה f איננה רציפה על־פי ההגדרה מסעיף א' (ii)

נמצא סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x \underset{n\to\infty}{\to} 0$ כך שלא מתקיים $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

נגדיר $x_n = \frac{\pi}{n}$. הסדרה מוגדרת לכל $n \in \mathbb{N}$, ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} = 0$$

הסדרה (x_n) אי־רציונלית לכל איבריה, לכן מתקיים $f(x_n) = 1$ לכל n. לכן $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 1$, אבל $f(0) = 0$ ולכן הפונקציה f איננה רציפה ב־$x_0 = 0$.

סעיף ד'

נוכיח כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = 1 + (x-1)D(x)$ כאשר $D(x)$ היא פונקציית דיריכלה.

לכל $x \in \mathbb{Q}$ מתקיים $f(x) = x, D(x) = 1$. לכן

$$f(x) = x = 1 + (x-1) \cdot 1 = 1 + (x-1)D(x)$$

לכל $x \notin \mathbb{Q}$ מתקיים $f(x) = 1, D(x) = 0$, לכן מתקיים

$$f(x) = 1 = 1 + (x-1) \cdot 0 = 1 + (x-1)D(x)$$

ראינו כי מתקיים $f(x) = 1 + (x-1)D(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

סעיף ה'

תהי $x_0 \neq 1$ נוכיח כי f איננה רציפה ב־x_0:

נניח בשלילה כי f רציפה בנקודה $x = x_0$. לכן על־פי משפט 5.11 הפונקציה 1 והפונקציה $(x-1)D(x)$ רציפות. באותה השיטה נראה כי $x - 1$ היא רציפה וכי $D(x)$ רציפה, אבל לפי משפט 5.10 $D(x)$ איננה רציפה, בסתירה לטענה, ולכן גם $f(x)$ איננה רציפה.

שאלה 3

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0, \infty)$ המקיימת

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = f(0)$$

נוכיח כי f איננה חד־חד ערכית בקטע $[0, \infty)$.

על־פי שלילת הגדרת החד־חד ערכיות, נצטרך להוכיח כי קיימים שני ערכים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־$a \neq b$ אבל $f(a) = f(b)$ $(*)$.

אילו הפונקציה f היא פונקציה קבועה, אז כמובן שאיננה חד־חד ערכית.

נוכיח כי הפונקציה מקיימת את תנאי $(*)$ כאשר היא איננה קבועה.

נגדיר מספר ממשי $\epsilon > 0$. על־פי הגדרת הגבול 4.54 קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - f(0)| < \epsilon$. נגדיר b מספר כלשהו שמקיים $b > M$.

על־פי הגדרת הרציפות 5.3 קיים $\delta > 0$ כך שלכל x שמקיים $|x - 0| < \delta$ מתקיים גם $|f(x) - f(0)| < \epsilon$. נגדיר a מספר כלשהו המקיים $0 < x < \delta$. כשם שהגדרנו את הערכים a, b עבור ϵ כך נוכל להגדיר אותם גם עבור $\frac{\epsilon}{4}$, נגדירם a_0, b_0. על־פי משפט ערך הביניים של קושי לקטע $[a_1, a]$ קיים c_0 המקיים $f(c_0) = \frac{\epsilon}{2}$. באותה הדרך נוכל להגדיר ערך c_1 המקיים $f(c_1) = \frac{\epsilon}{2}$ מהקטע $[b, b_1]$.

הקטעים הללו אינם חופפים, לכן כמובן $c_0 \neq c_1$, אך $f(c_0) = f(c_1)$, והוכחנו את טענה $(*)$.

שאלה 4

נגדיר:

$$f(x)=\frac{(x+1)\sin x}{x}, g(x)=\frac{x\sin x}{x+1}$$

סעיף א'

נוכיח כי f חסומה בקטע $(0,\infty)$:

נבחן תחילה את התחום $(1,\infty)$. בקטע זה מתקיים:

$$0<1<x\to x<1+x<2x\to 1<\frac{1+x}{x}<2 \tag{\#}$$

תמונת פונקציית $\sin x$ היא $[-1,1]$, לכןמתקיים לכל x בקטע

$$-2<\sin x<2\to -2<\frac{(1+x)\sin x}{x}<4$$

לכן על־פי הגדרה 4.8 הפונקציה חסומה בקטע $(1,\infty)$.

נוכיח כי הפונקציה חסומה גם בקטע $(0,1]$:

קל לראות כי הפונקציה f מוגדרת ורציפה בקטע $(0,\infty)$. נשים לב כי מתקיים:

$$f(x)=\frac{x\sin x}{x}+\frac{\sin x}{x}=\sin x+\frac{\sin x}{x}$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\sin x+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0+1=1$$

מצאנו כי הפונקציה f רציפה כאשר $x_0=0$, לכן היא רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן לפי המשפט הראשון של ויירשטראס גם חסומה בקטע זה, לכן הפונקציה f חסומה גם בקטע $(0,\infty)$.

סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה f מקבלת מקסימום בקטע $(0,\infty)$.

נשים לב כל לכל $0<x<y$ מתקיים:

$$x<y\to x+xy<y+xy\to x(y+1)<y(x+1)\to\frac{y+1}{y}<\frac{x+1}{x} \tag{*}$$

עוד ידוע לנו כי $\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi k)=1$ לכל $k\in\mathbb{N}$. אלו הן נקודות מקסימום אזוריות של הפונקציה $\sin x$ ובשל המכפלה גם של f. בשל $(*)$ כל נקודת מקסימום כזו בפונקציה f קטנה מקודמתה, ולכן איננה נקודת מקסימום. בשל תחומה של f, כאשר $k=0$ ישנה נקודת מקסימום כזו שאין נקודת מקסימום לפניה, ובשל כך אין נקודה גדולה ממנה ב־f. נקודה זו היא $x_0=\frac{\pi}{2}$.

סעיף ג'

נוכיח כי $\sup g\left((0,\infty)\right)=1$ על־פי טענה 3.9.

נוכיח כי 1 הוא חסם מלעיל של $g((0,\infty))$:

$$\begin{aligned}&1<\frac{x+1}{x}\\&\sin x\leq 1<\frac{x+1}{x}\\&\sin x<\frac{x+1}{x}\\&\frac{x\sin x}{x+1}=g(x)<1\end{aligned}\tag{\#}$$

מצאנו כי 1 אכן חסם מלעיל של הפונקציה. עתה נשאר להוכיח כי לכל $\epsilon>0$ קיים $x\in g((0,\infty))$ כך ש־$x>1-\epsilon$.

לפני־כן נראה כי מתקיים הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

על־פי הגבול שמצאנו לכל $\epsilon>0$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים

$$\left|\frac{x}{x+1}-1\right|<\epsilon$$

על־פי הופכיות אי־שוויון(#) מתקיים לכל $x>0$:

$$\frac{x}{x+1}<1\rightarrow-\frac{x}{x+1}>-1\rightarrow 1-\frac{x}{x+1}>0$$

לכן

$$\left|\frac{x}{x+1}-1\right|=1-\frac{x}{x+1}<\epsilon\rightarrow 1-\epsilon<\frac{x}{x+1}$$

נגדיר $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ כאשר $k\in\mathbb{N}$. אז $\sin x=1$ ולכן

$$\begin{aligned}&(1-\epsilon)\sin x<\frac{x}{x+1}\sin\\&1-\epsilon<\frac{x\sin x}{x+1}\end{aligned}$$

מצאנו כי שני התנאים לטענה 3.9 מתקיימים ולכן $\sup g((0,\infty))=1$.

סעיף ד'

נוכיח כי g איננה מקבלת מקסימום בקטע $(0,\infty)$:

נניח בשלילה כי לפונקציה g יש נקודת מקסימום ב־x_0. מתקיים $x_0<x_0+2\pi$ וגם $\sin x_0=\sin(x_0+2\pi)$. על־פי ההופכי של (#) מתקיים:

$$\frac{x_0}{x_0+1}<\frac{x_0+2\pi}{x_0+2\pi+1}\rightarrow\frac{x_0\sin x_0}{x_0+1}<\frac{(x_0+2\pi)\sin(x_0+2\pi)}{x_0+2\pi+1}\rightarrow g(x_0)<g(x_0+2\pi)$$

אנו רואים כי הנקודה x_0 איננה נקודת מקסימום בסתירה לטענה, ולכן אין נקודת מקסימום ל־g בקטע $(0,\infty)$.

שאלה 5

סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ רציפה במידה שווה בקטע $[0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
\epsilon &> \left|\sqrt{1+x_0^2}-\sqrt{1+x_1^2}\right| \\
&= \frac{\left|\left(\sqrt{1+x_0^2}-\sqrt{1+x_1^2}\right)\left(\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}\right)\right|}{\left|\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}\right|} \\
&= \frac{\left|1+x_0^2-1-x_1^2\right|}{\left|\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}\right|} \\
&= \frac{|(x_0+x_1)(x_0-x_1)|}{\left|\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}\right|} \\
&= \frac{|x_0+x_1|}{\left|\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}\right|}|x_0-x_1|
\end{aligned}$$

בקטע הנתון $x_0,x_1>0$ ולכן $x_0+x_1>0$, כמו־כן שורשים אלה מוגדרים בכל הקטע וחיוביים בו:

$$\frac{x_0+x_1}{\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}}|x_0-x_1|<\epsilon$$

לכל $x>0$ מתקיים $\sqrt{x^2+1}>x$. נגדיר את δ:

$$\frac{x_0+x_1}{\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}}|x_0-x_1|<\frac{\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}}{\sqrt{1+x_0^2}+\sqrt{1+x_1^2}}|x_0-x_1|<\delta$$

ולכן

$$|x_0-x_1|<\delta$$

כמו קראינו, במצב זה גם מתקיים

$$|f(x_0)-f(x_1)|<\epsilon$$

ולכן הפונקציה f רציפה במידה שווה בקטע $[0,\infty)$.

סעיף ב'

נוכיח כי הפונקציה המוגדרת רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$:

$$f(x)=(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}$$

הפונקציה f מוגדרת בכל הקטע הנתון ומורכבת ממכפלת והרכבת פונקציות רציפות ולכן רציפה גם (למצוא תירוץ יותר טוב). נראה כי מתקיים:

$$\lim_{x_0\to 0^+} 1-\cos x_0=0$$

הפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ אומנם איננה מתכנסת ב־$x_0=0$, אבל חסומה ב־$[-1,1]$ ולכן על־פי הגדרת היינה לגבול חד־צדדי ומשפט 2.22 מתקיים:

$$\lim_{x_0\to 0^+}(1-\cos x_0)\sin\frac{1}{x_0}=0$$

נמצא את הגבול

$$\lim_{x_0 \to \infty^-} (1 - \cos x_0) \sin \frac{1}{x_0}$$

במקרה זה $\lim_{x\to\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$ על־פי גבול $\underset{x\to 0}{\to} 0$ $\sin x$ והרכבת פונקציה פונקציה עם $\frac{1}{x}$. הפונקציה $1 - \cos x$ חסומה בקטע $[-1, 1]$ ובאופן דומה:

$$\lim_{x_0 \to \infty^-} (1 - \cos x_0) \sin \frac{1}{x_0} = 0$$

יש בספר משפט שמרחיב את משפט 5.49 לקטעים אינסופיים, תשתמש בזה.

סעיף ג'

נוכיח כי לכל $1 \geq x \geq y$ מתקיים

$$y^2 \arctan y - x^2 \arctan x \geq (y^2 - x^2) \arctan x$$
$$y^2 \arctan y \geq y^2 \arctan x$$
$$\arctan y \geq \arctan x$$

על־פי טענה 5.44 ומשפט 5.43 מתקיים $\arctan y \geq \arctan x$ אם $y \geq x$ ולכן אי־השוויון מתקיים.

נוכיח כי הפונקציה f, המוגדרת:

$$f(x) = x^2 \arctan x$$

איננה רציפה במידה שווה בקטע $[1, \infty)$:

נניח בשלילה כי הפונקציה f רציפה במידה שווה לכל $\epsilon > 0$, לכן לכל $x, y \in \mathbb{R}$ שעבורם מתקיים $|x - y| < \delta$, מתקיים

$$\left|y^2 \arctan y - x^2 \arctan x\right| < \epsilon$$

לכן גם מתקיים:

$$\left|(x^2 - y^2) \arctan x\right| < \epsilon$$

הפונקציה $\arctan x$ חיובית לכל $x \geq 0$ ולכן

$$|(x - y)(x + y)| \arctan x = |x - y| \, (x + y) \arctan x < \epsilon$$