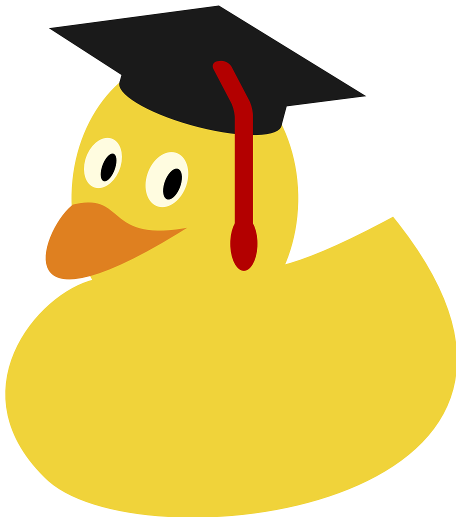
פתרון מטלה 03 — מבוא ללוגיקה, 80423

18 בנובמבר 2024



שאלה 1

תהי $L = \{p_i \mid i < n\}$ שפה לתחשיב פסוקים, ותהי L' שפה נוספת כזו. בנוסף יהיו הפסוקים $\alpha \in sent_L, \beta_0, \ldots, \beta_{n-1} \in sent_{L'}$.
נגדיר $\alpha^{p_0,\ldots,p_{n-1}}_{\beta_0,\ldots,\beta_{n-1}} \in sent_{L'}$ כפסוק המתקבל מהחלפת כל מופע של p_i ב־β_i.

סעיף א'

נוכיח כי הפונקציה ניתנת להגדרה ברקורסיה.

הוכחה. נגדיר פונקציה $g : L \to sent_{L'}$ על־ידי $g(p_i) = \beta_i$ לכל $i < n$.
נגדיר $\epsilon_\neg : sent_{L'} \to sent_{L'}$ על־ידי $\epsilon_\neg(\varphi) = (\neg\varphi)$. נבחין כי זהו סימון בלבד, קיצרנו את הכתיב $\epsilon_\neg(\varphi) = \langle(\neg\rangle \frown \varphi \frown \langle)\rangle$, וכך נמשיך ונעשה מטעמי קריאות.
עבור כל $\square \in \mathcal{B}$ נגדיר $\epsilon_\square : sent^2_{L'} \to sent_{L'}$ על־ידי $\epsilon_\square(\varphi, \phi) = (\varphi\square\phi)$.
ממשפט ההגדרה ברקורסיה נובע כי קיימת $\bar{g} : sent_L \to sent_{L'}$ יחידה המקיימת את דרישות ההחלפה, ומתקיים $\bar{g}(\alpha) = \alpha^{p_0,\ldots,p_{n-1}}_{\beta_0,\ldots,\beta_{n-1}}$. $\square$

סעיף ב'

תהי פונקציית הערכת אמת $v : L' \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$. אילו $u : L \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ כך ש־$u(p_i) = \bar{v}(\beta_i)$ אז נוכיח כי מתקיים $\bar{u}(\alpha) = \bar{v}(\bar{g}(\alpha))$.

הוכחה. הפונקציה u משרה ממשפט הרקורסיה להערכות אמת פונקציה יחידה $\bar{u} : sent_L \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$, ועלינו להראות כי השוויון המבוקש מתקיים, נעשה זאת באינדוקציה על מבנה הפסוק.
נתחיל מבסיס האינדוקציה ונניח כי הפסוק הוא פסוק יסודי, אז מתקיים $\bar{u}(p_i) = u(p_i) = \bar{v}(\beta_i) = \bar{v}(\bar{g}(\alpha))$ וקיבלנו כי השוויון מתקיים מהגדרת g.
נניח עתה כי השוויון מתקיים עבור φ ונוכיח כי הוא מתקיים גם עבור $(\neg\varphi)$. מהגדרת הפונקציות הרקורסיביות $\bar{u}, \bar{v}$ נסיק כי

$$\bar{u}(\neg\varphi) = V_\neg(\bar{u}(\varphi)) = V_\neg(\bar{v}(\bar{g}(\varphi))) = \bar{v}(\neg\bar{g}(\varphi))$$

ומצאנו כי השוויון מתקיים, לכן נותר לנו רק להניח כי הוא מתקיים עבור ψ ולהראות כי לכל $\square \in \mathcal{B}$ השוויון מתקיים עבור $(\varphi\square\phi)$:

$$\bar{u}(\varphi\square\psi) = V_\square(\bar{u}(\varphi), \bar{u}(\psi)) = V_\square(\bar{v}(\bar{g}(\varphi)), \bar{v}(\bar{g}(\psi))) = \bar{v}(\bar{g}(\varphi)\square\bar{v}(\bar{g}(\psi)))$$

ולכן השוויון מתקיים והוכחנו את מהלך האינדוקציה, אז נסיק כי השוויון אכן חל. $\square$

סעיף ג'

נסיק שאם α טאוטולוגיה אז גם $\bar{g}(\alpha)$ טאוטולוגיה, וכן אם $\beta \equiv_{tau} \alpha$ אז גם $\bar{g}(\alpha) \equiv_{tau} \bar{g}(\beta)$.

הוכחה. נניח ש־α טאוטולוגיה, אז לכל u הערכת אמת מתקיים $\bar{u}(\alpha) = \mathbb{T}$, ותהי v הערכת אמת ל־L'.
מהסעיף הקודם נסיק כי קיימת u הערכת אמת כך ש־$\bar{u}(\alpha) = \bar{v}(\bar{g}(\alpha))$, אבל $\bar{u}(\alpha) = \mathbb{T}$, לכן גם $\bar{v}(\bar{g}(\alpha)) = \mathbb{T}$, דהינו היא אכן טאוטולוגיה.
נניח עתה שמתקיים $\beta \equiv_{tau} \alpha$, אז לכל הערכת אמת u של L מתקיים $\bar{u}(\alpha) = \bar{u}(\beta)$.
תהי v הערכת אמת של L', אז עבור u מתאימה של v נקבל

$$\bar{v}(\bar{g}(\alpha)) = \bar{u}(\alpha) = \bar{u}(\beta) = \bar{v}(\bar{g}(\beta))$$

ולכן $\bar{g}(\alpha) \equiv_{tau} \bar{g}(\beta)$. $\square$

סעיף ד'

נסתור את הטענה כי יתכן ש־$\bar{g}(\alpha)$ טאוטולוגיה ו־α אינה טאוטולוגיה על־ידי דוגמה נגדית.
פתרון נניח $n = 1$ וכן $L = L'$, עוד נניח $\beta_0 = (p_0 \to p_0)$, לכן β_0 טאוטולוגיה, נגדיר $\alpha = p_0$ ונקבל ש־α יכולה לקבל אמת ושקר, אבל $\bar{g}(\alpha) = (p_0 \to p_0)$ וזו כמובן טאוטולוגיה.

שאלה 2

יהי $G = (V, E)$ גרף. נאמר ש־G גרף סופי מקומית אם לכל $v \in V$ מתקיים שקבוצת השכנים $N(v) = \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$ היא סופית. נאמר ש־G הוא דו־צדדי אם ישנה חלוקה $V = V_0 \uplus V_1$ של הקודקודים כך שאם $u, w \in V$ מקיימים vEw אז הם לא שניהם ב־V_0 או ב־V_1. עבור גרף דו־צדדי $G = (V_0 \uplus V_1, E)$ נגדיר צימוד מושלם ב־G להיות פונקציה חד־חד ערכית $f : V_0 \to V_1$ כך שלכל $v \in V_0$ מתקיים $vEf(v)$.

תהי השפה $L = \{p_{v,w} : v \in V_0, w \in V_1, vEw\}$ שפה לתחשיב פסוקים, ונסמן

$$\Sigma_0 = \{(\neg(p_{v,w_1} \cap p_{v,w_2})) \mid v \in V, w_1 \neq w_2\}$$
$$\Sigma_1 = \{(\neg(p_{v_1,w} \cap p_{v_2,w})) \mid w \in V, v_1 \neq v_2\}$$
$$\Sigma_2 = \left\{ \left(\bigvee_{k=0}^{n_v-1} p_{v,w_k} \right) \mid v \in V, N(v) = \{w_0, \ldots, w_{n_v-1}\} \right\}$$

וכן $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

סעיף א'

נוכיח שאם הקבוצה Σ ספיקה אז יש לגרף G צימוד מושלם.