פתרון מטלה 01 — מבנים אלגבריים 1 (80445)

10 במאי 2024

שאלה 1

סעיף א'

תהי X קבוצה ונוכיח כי הקבוצה

$$End(X) = \{f \mid X \to X\}$$

עם פעולת ההרכבה היא מונואיד.

הוכחה. נראה כי שתי התכונות של מונואיד מתקיימות:

1. אסוציאטיביות: $\forall f, g, h \in End(X), \forall x \in X : ((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x) \implies (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
2. קיום איבר נייטרלי: נשים לב כי פונקציית הזהות מקיימת $\forall f \in End(X) : Id_X \circ f = f \circ Id_X = f$.

מש"ל

סעיף ב'

נתון מונואידי $(M, \cdot, e)$ ואיבר $x \in M$. נראה כי עבואר $y, z \in M$ אם מתקיים ש־y הופכי משמאל ל־x ו־z הופכי מימין של x אז $y = z$.

הוכחה. נתון $xy = zx = e$.

נראה כי נובע גם $z = y \iff z = ze = z(xy) = (zx)y = ey = y$.

ומצאנו כי הטענה נכונה. **מש"ל**

סעיף ג'

יהי מונואיד $(M, \cdot, e)$ ונניח כי לכל איבר ב־M קיים הופכי משמאל, נוכיח כי נובע ש־M חבורה.

הוכחה. נתון כי $\forall x \in M \exists y \in M : xy = e$.

נשים לב כי $y \in M$ ולכן על־פי הנתון גם $\exists z \in M : yz = e$,

ולמעשה טענת הסעיף הקודמת מתקיימת ונסיק מיד כי $z = y$ וכי $xy = yx = e$.

במצב זה כמובן מתקיימת תכונת ההופכי ויחד עם שתי התכונות של המונואיד נובע כי M חבורה. **מש"ל**

סעיף ד'

נמצא דוגמה למונואיד שמכיל איבר $x \in M$ שקיים לו הופכי מימין אך לא משמאל, ואיבר $y \in Y$ שקיים לו הופכי מימין אך לא משמאל.

נשים לב שפעולת ההרכבה היא לא הופכית אלא בתנאים מסוימים, אותם ננצל. נראה כי פונקציה היא הפיכה אם היא חד־חד ערכית ועל, ובהתאם נגדיר פונקציה על שאיננה חד־חד ערכית, ובאופן דומה פונקציה חד־חד ערכית שאיננה על.

נבחר $M = Exp(\mathbb{N})$ מונואיד יחד עם פעולת ההרכבה.

$$x(m) = m + 1, y(m) = \begin{cases} m - 1, & m > 1 \\ 0, & m = 0 \end{cases}$$

נשים לב שאכן x חד־חד ערכית ולא על, וכי g על אך לא חד־חד ערכית, וכמובן $\forall n \in \mathbb{N} (y \circ x)(n) = Id_{\mathbb{N}}(n)$, אך לא קיימת פונקציה הופכית לפונקציות הנתונות מהצדדים האחרים.

שאלה 2

סעיף א'

תהי חבורה G ו־$H \leq G$ תת־חבורה שלה, נוכיח כי תת־קבוצה $K \subseteq H$ היא תת־חבורה של H אם ורק אם היא תת־חבורה של G.

הוכחה. **כיוון ראשון:** נניח כי $K \leq H$.

נראה ששלושת התנאים לקריטריון לתת־חבורה מתקיימים:

1. הכלת האיבר הנייטרלי: מהקריטריון לתתי־חבורות אנו יכולים להסיק כי e_G מוכל ב־H ומהווה איבר מינימלי בה, ונתון כי גם $K \leq H$ ולכן $e_G \in K$.
2. קיום איבר הופכי בקבוצה: נתון נובע ישירות מטרנזיטיביות ההכלה: $K \subseteq H \subseteq G$.
3. סגירות לכפל: נתון כי K חבורה.

כיוון שני: נניח כי $K \leq G$ ונראה כי נובע גם $K \leq H$. גם הפעם נבחן את שלושת התנאים של הקריטריון:

1. $e_G \in K$ על־פי הנתון וידוע כי $e_G \in H$.
2. לכל איבר ב־K יש גם את האיבר ההופכי לו, ונתון כי $K \subseteq H$.
3. כמו בכיוון הראשון

ומצאנו כי מתקיים $K \leq G \iff K \leq H$. **מש"ל**

סעיף ב'

יהא $\mathbb{F}$ שדה. נוכיח כי תת־הקבוצה של המטריצות המשולשיות העליונות ההפיכות $B_n(\mathbb{F}) \subseteq GL_n(\mathbb{F})$ היא תת־חבורה.

הוכחה. נראה ששלושת התנאים לקריטריון לתת־חבורה מתקיימים:

כמובן שמטריצת היחידה היא בהגדרה מטריצה משולשית עליונה.

בלינארית 2 הוכחנו שהמטריצות המשולשיות העליונות מהוות תת־מרחב למטריצות ההפיכות, ולכן נובע ישירות כי

$$\forall A, B \in B_n(\mathbb{F}) : AB \in B_n(\mathbb{F})$$

מהסגירות לכפל של המרחב.

וכמובן שמקיום ההופכי במרחב נובע כי

$$\forall A \in B_n(\mathbb{F}) \implies A^{-1} \in B_n(\mathbb{F})$$

ומצאנו כי שלושת תנאי הקריטריון מתקיימים. **מש"ל**

שאלה 3

סעיף א'

תהינה G,H חבורות, נוכיח כי פונקציה $f:G\to H$ היא הומומורפיזם אם ורק אם מתקיים $\forall x,y\in G: f(xy)=f(x)f(y)$.

הוכחה. נשים לב תחילה שמתקיים $e_H=f(e_G) \iff \forall x,y\in G: f(x)=f(e_Gx)=f(e_G)f(x)$,
וגם כי $f(x^{-1})=f^{-1}(x)e_H=f^{-1}(x) \iff \forall x\in G: f(e_G)=f(xx^{-1})=f(x)f(x^{-1})=e_H$.
ומצאנו כי התנאים להומומורפיזם מתקיימים אם ורק אם מתקיימת הטענה הנתונה. **מש"ל**

סעיף ב'

יהיו $m,n\in\mathbb{N}$ כך ש־$n,m\geq 1$. נוכיח כי הפונקציה $f:\mathbb{Z}/n\to\mathbb{Z}/m$ המוגדרת על־ידי

$$f(a)=a \mod m$$

היא הומומורפיזם אם $m|n$.

הוכחה. נוכיח תחילה שאם $n=km$ כאשר $k\in\mathbb{N}$ אז

$$\forall x,y\in\mathbb{Z},0\leq y<m,0\leq x:((x+ym) \mod mk) \mod m=((x+ym) \mod m) \mod km$$

נראה כי $((x+yk) \mod m) \mod km=x \mod m=x$,
ומצד שני גם $((x+ym) \mod km) \mod m=(x+y'm) \mod m=x$, כאשר $0\leq y'\in\mathbb{Z}$.
מטענה זו נובע גם כי $((x+ym) \mod mk) \mod m=((x+ym) \mod m) \mod km=(x+ym)=x \mod m=x$ עתה
נראה כי מסיבה זו נובע

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}/n: f(a+_n b)=((a+b) \mod n) \mod m=(a+b) \mod m=f(a)+_m f(b)$$

ומצאנו כי נובע $f(ab)=f(a)+f(b)$. **מש"ל**

שאלה 4

סעיף א'

יהי שדה $\mathbb{F}$, נמצא תת־חבורה של $GL_n(\mathbb{F})$ שאיזומורפית לחבורת התמורות S_n.

נבחן את המטריצות האלמנטריות שמשנות את סדר השורות במטריצה. מטריצות אלה הפיכות לעצמן, מטריצת היחידה נייטרלית כלפיהן וכפל המטריצות שומר על אסוציאטיביות, לכן הן מהוות תת חבורה.

נבחין כי באמצעות הכפלת מטריצות אלה נוכל לקבל מטריצות שונות כך שבכל שורה ובכל עמודה יש בדיוק איבר אחד בערך 1 ובסך־הכול יש $n!$ מטריצות שונות שתרכיבנה את החבורה.

נוכל לבנות העתקה f שממפה עבור כל שורה במטריצה את השורה אליה היא הגיעה, וזוהי כמובן תמורה.

כמובן שנוכל בהינתן תמורה g נוכל לבנות מטריצה מהחבורה על־ידי קביעת המיקום בכל שורה כתוצאת התמורה עבור מזהה השורה.

נקבל כי הפעולות הן הופכיות ולכן גם איזומורפיזם.

סעיף ב'

נמצא איזומורפיזם המקיים

$$f : (\mathbb{R}^\times, \cdot) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{R}, +)$$

נגדיר

$$f(x) = (sign(x), abs(x))$$

נבדוק ש־f הומומורפיזם.

נגדיר $y \in \mathbb{R}, y > 0$ ו־$s \in \{0, 1\}$. ניתן לראות כי $\forall x \in \mathbb{R}^\times \exists y, s \implies x = (-1)^s \cdot y$.

$$\forall y_1, y_2 > 0, s_1, s_2 \in \{0, 1\} : f((-1)^{s_1} y_1 \cdot (-1)^{s_2} y_2) = f((-1)^{s_1+s_2} y_1 y_2) = (s_1 s_2, y_1 y_2) = f((-1)^{s_1} y_1) f((-1)^{s_2} y_2)$$

מצאנו כי זהו הומומורפיזם, ולכן עלינו רק להוכיח שהוא הפיך, וזאת נעשה על־ידי בחינת הפונקציה

$$g : \mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^\times, \cdot), g(s, y) = (-1)^s y$$

אפשר לראות כי גם היא הומומורפיזם ומקתיים $f \circ g = g \circ f = Id$ ולכן f איזומורפיזם.

סעיף ג'

נמצא איזומורפיזם

$$f : GL_2(\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\sim} S_3$$

נשים לב כי ישנן רק שש מטריצות בחבורת התחום ונגדיר:

$$f\begin{pmatrix}1,0\\0,1\end{pmatrix} = (1, 2, 3), \qquad f\begin{pmatrix}1,1\\1,0\end{pmatrix} = (1, 3, 2), \qquad f\begin{pmatrix}1,0\\1,1\end{pmatrix} = (2, 1, 3),$$
$$f\begin{pmatrix}1,1\\0,1\end{pmatrix} = (2, 3, 1), \qquad f\begin{pmatrix}0,1\\1,1\end{pmatrix} = (3, 1, 2), \qquad f\begin{pmatrix}0,1\\1,0\end{pmatrix} = (3, 2, 2)$$

מסגירות של כפל מטריצות נובע כי פונקציה זו היא אכן הומומורפיזם, והיא הוגדרה באופן חד־חד ערכי ועל ולכן גם איזומורפיזם.

סעיף ד'

אוי