

פתרון מטלה 02 – חשבון אינפיניטסמלי 3 (80415)

17 במאי 2024



שאלה 1

יהי X מרחב מטרי ו- $A \subseteq X$.

סעיף א'

נוכיח כי $A^\circ = A$ אם ורק אם היא פתוחה.

הוכחה. כיוון ראשון: נניח כי $A^\circ = A$. נובע כי כל נקודה ב- A היא גם נקודה פנימית ב- A ולכן ניתן ליצור כדור סביבה המוכל ב- A , ועל-כן היא עומדת בהגדרה של קבוצה פתוחה.

כיוון שני: נניח כי A קבוצה פתוחה. נניח בשלילה כי $A \neq A^\circ$ ולכן קיימת נקודה ב- A שהיא לא נקודה פנים, ולכן אי אפשר ליצור כדור סביבה המוכל ב- A . אבל זאת סתירה להיותה של A קבוצה פתוחה, ולכן $A = A^\circ$. \square

סעיף ב'

נוכיח כי $\bar{A} = A$ אם ורק אם A קבוצה סגורה.

הוכחה. כיוון ראשון: נניח כי מתקיים $\bar{A} = A$. תהי $\{x_n\} \in A$ סדרת נקודות מתכנסת ל- x , מהשוויון נובע כי $x \in A$, ולכן נסיק כי A סגורה. כיוון שני: נניח כי A קבוצה סגורה. באופן דומה לסעיף הקודם נניח כי $\bar{A} \neq A$ ולכן ישנה סדרת נקודות $\{x_n\} \in A$ שמתכנסת לנקודה $x \notin A$, בסתירה לסגירות של A , ולכן נובע $A = \bar{A}$. \square

סעיף ג'

נוכיח את השוויון $(A^\circ)^C = \overline{A^C}$.

הוכחה. נשים לב כי מההגדרה המשלים לקבוצה פתוחה הוא קבוצה סגורה, וידוע כי A° היא קבוצה פתוחה, על-כן המשלים שלה הוא קבוצה סגורה. הקבוצה A^C מכילה את אוסף כל הנקודות שאינן ב- A , לרבות נקודות קצה שלה, וידוע כי היא קבוצה סגורה ולכן היא שקולה לקבוצה $\overline{A^C}$. \square

סעיף ד'

נוכיח כי $\partial A = \partial(A^C)$.

הוכחה. נראה כי

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap (A^\circ)^C = \bar{A} \cap \overline{A^C} = \overline{A^C} \cap ((A^C)^\circ)^C = \overline{A^C} \setminus (A^C)^\circ = \partial(A^C)$$

\square

שאלה 2

יהיו (X, ρ) מרחב נורמי, $x_0 \in X$ ו- $r > 0$, ונתון $D = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leq r\}$ כדור סגור מתאים.

סעיף א'

נוכיח כי $D^\circ = B(x_0, r)$.

הוכחה. תהי $x \in D$ נקודה פנימית, ונניח בשלילה כי $\rho(x, x_0) = r$. לכל $r_0 > 0$ שנבחר $B(x, r_0) \not\subseteq D$ שכן $\rho(y, x) + \rho(x, x_0) > r$.

לכן x לא נקודה פנימית של D ובהתאם $D^\circ = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\} = B(x_0, r)$. □

סעיף ב'

אנו יודעים כי $\partial D = \overline{D} \setminus D^\circ$. ידוע לנו כי D הוא כדור סגור ולכן גם $\overline{D} = D$ ומצאנו כי $D^\circ = B(x_0, r)$ ולכן נובע

$$D \setminus D^\circ = \{x \in X \mid x \leq r \wedge \neg x < r\} = \{x \in X \mid x \leq r \wedge x \geq r\} = \{x \in X \mid x = r\} = \partial D = S(x_0, r)$$

שאלה 3

נגדיר את הפונקציות $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ על-ידי

$$f(x, y) = xy, g(x, y) = x + y$$

נוכיח על-פי הגדרה כי f רציפה על-פי הגדרה.

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$ ונקודות $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

נראה כי $\rho(f(p_0), f(p_0 + h)) < \epsilon \iff |(x_0 + h)(y_0 + h) - x_0 y_0| = |h| \cdot |x_0 + y_0 + h| < \epsilon$
 אז נגדיר $\delta_0 = \frac{\epsilon}{|x_0 + y_0 + h|}$ ונקבל $\delta_0 = \frac{\epsilon}{|x_0 + y_0 + h|}$ ונקבל כי הטענה מתקיימת ולכן f רציפה בכל נקודה $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
 \square

נוכיח כי g אף היא רציפה על-פי הגדרה.

הוכחה. נראה כי

$$\rho(f(p_0), f(p_0 + h)) < \epsilon \iff |x_0 + h + y_0 + h - x_0 - y_0| = 2|h| < \epsilon$$

לכן נגדיר $\delta_1 = \sqrt{2}\epsilon$ ונקבל בדומה להוכחה הקודמת כי $2|h| < \epsilon$ כפי שהיה עלינו למצוא.
 \square

שאלה 4

יהי (X, ρ) מרחב מטרי ונגדיר $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x, y) = \rho(x, y)$ פונקציית המרחק במרחב לממשיים האי-שליליים. נוכיח כי f רציפה.

הוכחה. נבחר קטע פתוח $(a, b) \in \mathbb{R}^+$ ונבחין כי $f^{-1}((a, b)) = \{x, y \in X \times X \mid a < \rho(x, y) < b\}$ ונשים לב כי זוהי קבוצה לא סופית של איחוד קבוצות פתוחות.

זאת שכן ההגדרה מתלכדת עם כדורים פתוחים סביב x וחיתוך קבוצה סגורה מהם, כך שניתן ליצור כדור פתוח סביב כל נקודה בקבוצה. כל קבוצה פתוחה ב- \mathbb{R} היא איחוד של קטעים פתוחים ולכן גם התמונה ההפוכה של כל קבוצה פתוחה היא איחוד קבוצות פתוחות ולכן מהווה קבוצה פתוחה.

לכן נובע כי f היא פונקציה רציפה.

□

שאלה 5

נגדיר $X_1 = (C[0, 1], \|\cdot\|_1)$, $X_2 = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ ויהי פונקציה $\Lambda : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי $\Lambda(f) = f(1)$.

סעיף א'

נפריך את הטענה כי Λ רציפה כפונקציה $X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ על-ידי דוגמה נגדית:

דוגמה נגדית. נגדיר סדרת פונקציות $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq C[0, 1]$ על-ידי

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 - \frac{2}{n} \\ \frac{n-0}{1-(1-\frac{1}{2})} (x - 1 + \frac{2}{n}), & 1 - \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

הפונקציה מוגדרת להיות 0 ואז משולש שבסיסו הולך וקטן ושמשתיים ב- n $f_n(1) = n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כך ששטחו הוא $\frac{1}{n}$ ובעקבות כך גם האינטגרל שלו.

אילו נגדיר $f(x) = 0$ אז מתקיים $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

על-פי ההגדרה $\|f - f_n\|_1 = \frac{1}{n}$ ולכן הסדרה (f_n) מקיימת את התנאים להיות סדרת היינה, אבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Lambda(f) - \Lambda(f_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |0 - n| = \infty$$

ומצאנו סדרה הסותרת את ההתכנסות של הפונקציה.

סעיף ב'

נוכיח כי Λ היא רציפה כפונקציה $X_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$ ופונקציה $f_0 \in C[0, 1]$. נראה כי על-פי הגדרת הרציפות $|f(1) - f_0(1)| < \epsilon \iff |\Lambda(f) - \Lambda(f_0)| < \epsilon$.

$$\|f - f_0\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - f_0(x)| < \delta \implies |f(1) - f_0(1)| < \epsilon \text{ נבחר } \delta = \epsilon \text{ נגדיר}$$

מצאנו כי הגדרת הרציפות מתקיימת ולכן Λ רציפה ב- X_2 .

שאלה 6

נגדיר

$$X = [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}, \quad Y = S_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ונגדיר $f : X \rightarrow Y$ על-ידי

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

סעיף א'

נוכיח כי f רציפה.

הוכחה. על-פי טענה מהתרגול הפונקציה f רציפה אם ורק אם היא רציפה באגפים השונים.

נגדיר $f_i = \pi_i \circ f$ פירוק לאגפים, ונראה כי $f_1(t) = \cos t$ פונקציה רציפה וגם $f_2(t) = \sin t$ רציפה אף היא, ולכן f רציפה בכללותה. ☐

סעיף ב'

נוכיח כי f פונקציה פתוחה.

הוכחה. יהי $(a, b) \subseteq X$ כדור פתוח.

מהגדרת \cos אנו יכולים להסיק כי $\cos^{-1} b < f_1(t) < \cos^{-1} a$ וכמובן זהו כדור פתוח. נוכל אם כן לחבר כל כמות של כדורים פתוחים ב- X ולקבל חיבור כדורים ב- Y . כמובן שהטענה הזו מתקיימת גם עבור האגף השני שכן \sin אף היא רציפה ומקיימת את הטענה.

בהתאם לכל קבוצה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה גם $f(U)$ פתוחה. ☐

סעיף ג'

נוכיח כי f פונקציה סגורה.

הוכחה. נובע ישירות ממשפט ויירשטראס לתמונות פונקציות רציפות על האגפים השונים של f . ☐

סעיף ד'

נוכיח כי f היא חד-חד ערכית ועל Y .

הוכחה. נניח בשלילה כי f איננה חד-חד ערכית, לכן קיים $x, y \in X$ כך ש- $x < y$ אבל $f(x) = f(y)$.

מסיבה זו נקבל כי $\cos x = \cos y$ וגם $\sin x = \sin y$. מכפל השוויונות נקבל $\cos(x+y) = 0$ וכן $\cos x \cos y - \sin x \sin y = 0$.

בהתאם $x+y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. באופן דומה נקבל גם $\sin(x+y) = 0$ ולכן $x+y = 0, \pi$ וקיבלנו סתירה, לכן f חד-חד ערכית.

נבחר נקודה $(x, y) \in Y$. גאומטרית נוכל לבחור את הזווית שהקרן לנקודה הזאת מהמרכז יוצרת עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ועל-פי הגדרה

זוהי הזווית t עבורה $(x, y) = (\cos t, \sin t)$. מצאנו כי f חד-חד ערכית ועל. ☐

סעיף ה'

נוכיח כי הפונקציה ההופכית f^{-1} היא רציפה אף היא.

הוכחה. למעשה, כבר הוכחנו טענה זו בסעיף ב', ראינו שכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ גם $(f^{-1})^{-1}(U)$ פתוחה, ולכן נובע כי f^{-1} רציפה. ☐

שאלה 7

יהי K מרחב מטרי קומפקטי ו- $f : K \rightarrow K$ העתקה מכווצת.

סעיף א'

נוכיח כי ל- f יש נקודת שבת.

הוכחה. יהי $x \in K$, ונגדיר $f_n : K \rightarrow K$ על-ידי

$$f_n(x) = (\circ_n f)(x) = (f \circ f_{n-1})(x)$$

נגדיר סדרה חדשה $(a_n)_{n=1}^\infty$ על-ידי

$$a_n = f_n(x)$$

על-פי הגדרת הכיוון מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$

$$\rho(f_2(x), f_1(x)) < \rho(f_1(x), x), \quad \rho(f_{n+1}(x), f_n(x)) < \rho(f_n(x), f_{n-1}(x))$$

מהקומפקטיות נסיק כי ל- (a) יש תת-סדרה מתכנסת, נגדיר $(n_k)_{k=1}^\infty$ ונקבל כי $a_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ ערך סופי כלשהו.

נוכל כמובן להסיק עבור ההגדרה של a כי $L = f(L)$, ולכן גם $\rho(f_{n+1}(x), f_n(x)) < \rho(L, f(L)) < \rho(L, f(L))$ ונסיק $0 \leq \rho(L, f(L)) < \rho(L, f(L))$ טבעי, ונסיק $\rho(L, f(L)) < \rho(L, f(L))$ והגדרת הכיוון נשמרה. \square

סעיף ב'

נוכיח כי נקודת השבת של f היא יחידה.

הוכחה. נבחר שני ערכים $x, y \in X$. נגדיר (a) כמו בסעיף הקודם וסדרה (b) שקולה המקיימת $b_n = f_n(y)$. נסיק מיידית מהכיוון כי לכל $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \rho(a_{n+1}, b_{n+1}) < \rho(a_n, b_n)$$

מאי-שוויון זה נסיק מונוטוניות יורדת וחסיונות ולכן אם הסדרות מתכנסות אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. המרחב X קומפקטי ולכן נוכל למצוא תת-סדרה מתכנסת של (a) ותת-סדרה מתכנסת של (b) המוגדרת על-פי האינדקסים לתת-הסדרה הראשונה, לצורך הפשטות נגדיר (n_k) סדרת אינדקסים עבורה בהתאם לשוויון הקודם

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = L$$

ומצאנו כי נקודת השבת $L \in X$ איננה תלויה בבחירת $x \in X$ ולכן היא יחידה. \square