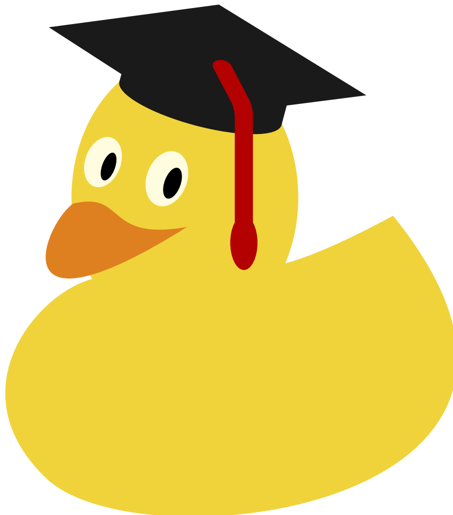
פתרון ממ"ן 12 – חשבון אינפיניטסימלי 2 (20475)

21 ביולי 2023



שאלה 1

נחשב את האינטגרלים הבאים

סעיף א'

$$\begin{aligned}\int x^3(1-3x^2)^{10}dx &= \int x^3\left(\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-3x^2)^k\right)dx\\ &= \int\left(\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-3)^k x^{2k+3}\right)dx\\ &= C+\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\frac{1}{2k+4}(-3)^k x^{2k+4}\\ &= C+x^4\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\frac{(-3)^k}{2k+4}x^{2k}\end{aligned}$$

סעיף ב'

$$\begin{aligned}\int\frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int\frac{\sin\arcsin(x)e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= \int\sin(t)e^t dt\Big|_{dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}^{t=\arcsin x}\\ &= -\cos(t)e^t+\int\cos(t)e^t dt && \text{אינטגרציה בחלקים}\\ &= -\cos(t)e^t+\sin(x)e^t-\int\sin(t)e^t dt && \text{אינטגרציה בחלקים}\end{aligned}$$

$$2\int\sin(t)e^t dt=\sin(x)-\cos(t)e^t$$

$$\int\frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x}\right)+C$$

סעיף ג'

$$\begin{aligned}\int(x-1)^2e^{2x}dx &= \frac{1}{2}e^{2x}(x-1)^2-\int\frac{1}{2}e^{2x}(2x-2)dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(x-1)^2+\int e^{2x}dx-\int e^{2x}xdx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(x-1)^2+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}x+\int\frac{1}{2}e^{2x}dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2-3x+2)+\frac{1}{4}e^{2x}\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2-3x+2\frac{1}{2})+C\end{aligned}$$

סעיף ד'

$$\int \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}}dx = \begin{vmatrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{vmatrix}$$
$$= \int \frac{4t-7}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt$$
$$= 2\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt - 7\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt$$

נחשב

$$\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt$$
$$\begin{vmatrix} u = t^2+1 \\ du = 2t \end{vmatrix}$$
$$= \int \frac{du}{u^{3/2}}$$
$$= \int u^{-3/2}du$$
$$= -2u^{-1/2}$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{t^2+1}}$$

נחשב גם

$$\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt$$
$$\begin{vmatrix} t = \tan u \\ dt = \frac{du}{\cos^2 u} \end{vmatrix}$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 u\sqrt{(\tan^2 u+1)^3}}du$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 u\sqrt{(\cos^{-2})^3}}du$$
$$= \sin u = \sin\arctan t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

ולכן נובע כי

$$2\int \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt - 7\int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}dt = 2\frac{-2}{\sqrt{t^2+1}} - 7\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{-7t-4}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{-7x-18}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

לכן

$$\int_{-2}^{-1} \frac{4x+1}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}}dx = \left.\frac{-7x-18}{\sqrt{x^2+4x+5}}\right|_{-2}^{-1} = \frac{-7(-2)-18}{\sqrt{(-2)^2+4(-2)+5}} - \frac{-7(-1)-18}{\sqrt{(-1)^2+4(-1)+5}} = -4 + \frac{11}{\sqrt{2}}$$

סעיף ה'

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}(1+x^3+\sin x)dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}(x^3+\sin x)dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}dx$$

נגדיר

$$f(x) = e^{|x|}(1+\sin x)$$

מחישוב עולה כי

$$f(-x) = e^{|-x|}(-x^3-\sin x) = -f(x)$$

ולכן

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)dx = \int_{-\ln 2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\ln 2} f(x)dx = -\int_{0}^{\ln 2} f(x)dx + \int_{0}^{\ln 2} f(x)dx = 0$$

עוד נראה כי

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{|x|}dx = \int_{-\ln 2}^{0} e^{|x|}dx + \int_{0}^{\ln 2} e^{|x|}dx = \int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}dx + \int_{0}^{\ln 2} e^{x}dx = 2\int_{0}^{\ln 2} e^{x}dx = 2(e^{\ln 2}-1) = 4$$

שאלה 2

עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים נקבע אם הוא מתכנס בהחלט, בתנאי, או כלל לא.

סעיף א'

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$$

נשים לב כי $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ היא פונקציה מונוטונית יורדת וכי $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

עוד נשים לב כי $g(x) = \cos^2 x$ היא פונקציה חסומה המקיימת $0 \leq g(x) \leq 1$ לכל $0 \leq x$.

לכן ממבחן דיריכלה נובע כי האינטגרל הנתון, אשר מהווה אינטגרל מכפלת הפונקציות f, g מתכנס.

נשים לב כי גם $|f(x)g(x)| = f(x)g(x)$ ולכן האינטגרל גם מתכנס בהחלט.

סעיף ב'

$$\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(x^2-1)(\ln(x+1))^3} dx$$

נגדיר

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

נשים לב כי

$$f'(x) = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} < 0$$

נראה גם כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

ולכן $f(x)$ מונוטונית יורדת ואפסה.

נגדיר גם

$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln^3(x+1)}$$

נראה כי עבור $x \geq 1$:

$$0 < \frac{\ln x}{\ln^3(x+1)} \leq \frac{\ln(x+1)}{\ln^3(x+1)} = \frac{1}{\ln^2(x+1)} \leq 1$$

מצאנו כי $g(x)$ חסומה בתחום $[1, \infty)$.

מצאנו כי הפונקציות f ו־g מקיימות את מבחן דיריכלה ולכן

$$\int_1^\infty f(x)g(x)dx$$

מתכנס. נשים לב כי $f(x) \geq 0$ לכל $x > 1$ ולכן מתקיים $f(x)g(x) = |f(x)g(x)|$ ובהתאם האינטגרל מתכנס בהחלט.

סעיף ג'

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}(\sqrt[4]{x}+1)\sin\left(2\sqrt{x}\right)dx$$

נגדיר

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{x}+1}{x}, g(x)=\sin\left(2\sqrt{x}\right)$$

בתחום $[1,\infty)$ הפונקציה f מונוטונית יורדת וחיובית בכל התחום, ו־$|g|$ חסומה על־ידי $[0,1]$.
כמו־כן גם $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ולכן ממבחן דיריכלה האינטגרל

$$\int_1^\infty |f(x)g(x)|dx$$

מתכנס. ידוע מאדיטיביות האינטגרל כי

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx=\int_0^1 f(x)g(x)dx+\int_1^\infty f(x)g(x)dx$$

נראה כי

$$f(x)g(x)=2\frac{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1}\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

ידוע כי בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $0<\sin t<t$ ולכן גם בהכרח $0<\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}<1$.
אז מצאנו כי

$$f(x)g(x)<\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2(x^{1/2}+x^{1/4})}{x^{3/4}}=\frac{4x^{1/4}}{x^{3/4}}<\frac{4}{x^{1/4}}$$

מלמה 3.2 נובע כי האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{4}{x^{1/4}}dx$$

הוא אינטגרל מתכנס ולכן ממשפט ההשוואה נובע שמתכנס גם

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ולכן האינטגרל

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

מתכנס בהחלט.

שאלה 3

תהי פונקציה f אינטגרבילית בקטע $[0,a]$ לכל $a>0$ ומתקיים $|f(x)| \leq \sqrt{x}$ לכל $x \geq 0$.
נגדיר $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, ונוכיח כי האינטגרל המוגדר על־ידי

$$\int_0^\infty \frac{F(x)}{\pi + x^3} dx \tag{1}$$

מתכנס.

הוכחה. ידוע כי $|f(x)| \leq \sqrt{x}$ לכל $x \geq 0$ ולכן מהמונוטוניות של האינטגרל המסוים (1.26) נובע

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^x \sqrt{t}dt = \left.\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right|_0^x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

מאי־השוויון נובע כי לכל $x \geq 0$ גם

$$\frac{F(x)}{\pi + x^3} \leq \frac{2\sqrt{x^3}}{3\pi + 3x^3}$$

להשתמש במבחן דיריכלה כמו בסעיף הקודם ולסיים עניין. **מש"ל**