# פתרון מטלה 04 — תורת הקבוצות האקסיומטית, 80650

7 בדצמבר 2024

## שאלה 1

נניח ZFC, ונניח גם $\kappa$ מונה רגולרי לא בן־מניה, נבחין כי מהמטלה הקודמת נובע $H(k^+)$ הוא מודל של $\text{ZFC} - \text{Power set}$.

יהי $p \in H(\kappa^+)$, נראה שקיים סל"ח $C \subseteq \kappa$ כך שלכל $\delta \in C$ קיים $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$p \in M$ וגם $M \cap \kappa = \delta$.

*הוכחה.* תהי נוסחה $\varphi(x, y_0, \dots, y_{m-1})$ נוסחה כלשהי בשפת תורת הקבוצות.
לכן מטענה מההרצאה קיימת פונקציית סקולם $F_\varphi : H(\kappa^+)^m \to H(\kappa^+)$.
נגדיר סדרה $\langle G_n \mid n \in \omega \rangle$ בדומה להגדרה שהייתה בהרצאה לנוסחות כאלה, עבור כלל הנוסחות הסופיות $\varphi \models H(\kappa^+)$.
יהי $\alpha < \kappa$ סודר, ונגדיר $R(\alpha) = \{G_n(p, \gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}) \mid n < \omega, \gamma_0, \dots, \gamma_{m-1} < \alpha\} \cap \kappa$.
מההגדרה שנתנו ל־$R$ נובע ישירות כי $R(\alpha) \prec H(\kappa^+)$.
נראה כי $R(\alpha) < \kappa$, זאת נוכל להוכיח באינדוקציה על $G_n$ ומבנה הנוסחה.
יהי סל"ח $\delta < \kappa$ ונראה ש־$R(\delta) = \delta$. למעשה הנוסחה שמגדירה את החסימות מוכלת ב־$\langle G_n \rangle$ ולכן הטענה נכונה.
ולכן $p$ מקיים את הנדרש. $\square$

## שאלה 2

יהי $N = H(\kappa^+) \prec M$ ויהיו $a_0, \dots, a_{n-1} \in H(\kappa^+)$.
נוכיח ש־$\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \in M$ אם ורק אם $\forall i < n, a_i \in M$.
נראה גם שטענה זו לא בהכרח תתקיים עבור קבוצה בת־מניה של איברים.

*הוכחה.* נניח ש־$a = \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \in M$. נגדיר $\varphi(x, y) = x \in y$ ולכן $N \models \varphi(a, a_i)$ וזה נכון אם ורק אם $M \models \varphi(x, a_i)$, וזה מתקיים עבור $0 \le i < n$ ולכן מצאנו כי הטענה חלה.

נניח עתה כי $a_0, \dots, a_{n-1} \in M$. נגדיר נוסחה

$$\varphi(x, y_0, \dots, y_{n-1}) = \left(\bigwedge_{i=0}^{n-1} y_i \in x\right) \wedge \forall z \in x (z = y_0 \vee \dots \vee z = y_1)$$

נבחין כי היא אכן נוסחה סופית (גם אם לא נכתבה כך) וכן $N \models \varphi(a, a_0, \dots, a_{n-1})$ ולכן $M \models \varphi(a, a_0, \dots, a_{n-1})$ וקיבלנו ש־$a \in M$.

משאלה 1 נוכל להסיק כי עבור $\omega < \kappa$ קיים $H(\kappa^+) \prec M$ כך ש־$\omega \subseteq M$, ואז כמובן שהטענה לא נכונה. $\square$

## שאלה 3

תהי $S \subseteq \kappa$, ונראה ש־$S$ קבוצת שבת אם ורק אם לכל $p \in H(\kappa^+)$ קיים תת־מבנה אלמנטרי $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$p \in M$ וגם $M \cap \kappa \in S$.

*הוכחה.* נניח ש־$S$ קבוצת שבת ויהי $p \in H(\kappa^+)$.
עוד נגדיר $C$ הסל"ח שקיים עבור $p$ לפי שאלה 1, ויהי $\delta \in C \cap S$, אז קיים $M \prec H(\kappa^+)$ עבורו $p \in M$ וגם $M \cap \kappa = \delta \in S$.
נניח עתה כי לכל $p \in H(\kappa^+)$ קיים תת־מבנה אלמנטרי $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$p \in M$ וגם $M \cap \kappa \in S$ ונראה ש־$S$ קבוצת שבת.
עתה יהי $C \subseteq \kappa$ סל"ח, כמובן $C \in H(\kappa^+)$ ולכן אם $p \in C$ כלשהו, אז נובע מההנחה ש־$\exists M, p \in M,\ M \cap \kappa \in S \implies p \in S$. $\square$

## שאלה 4

יהי $H(\kappa^+) \prec M$ כך ש־$M \cap \kappa = \delta \in \kappa$.
נוכיח שלכל $C \in M$ סל"ח ב־$\kappa$, מתקיים $\delta \in C$.

*הוכחה.* נבחין כי $M \cap C = M \cap \kappa \cap C = \delta \cap C$, ונבחן את $\varphi(x,y) = \sup(x) = y$, אנו יודעים כי $\varphi(C,\kappa)$ מההגדרה של $C$.
נשים לב כי אם $\kappa \in M$ אז $\kappa = \delta \in \delta$ בסתירה להנחה שלנו.
אם $\sup(\delta \cap C) = \delta$ אז $\delta \in C$ כפי שרצינו ולכן נניח אחרת, אבל אז בהכרח $\sup(\delta \cap C) < \delta$ שכן אם $\sup(\delta \cap C) > \delta$ זו תהיה סתירה לאקסיומת היסוד.
בנוסף מהשוויון שמצאנו נובע $\sup(M \cap C) = \sup(\delta \cap C) < \delta$, דהינו $M \models \varphi(C,\alpha)$ עבור $\alpha < \delta$ כלשהו.
אבל $H(\kappa^+) \models \varphi(C,\alpha) \iff M \models \varphi(C,\alpha)$, ו־$C$ סל"ח ולכן $\sup C = \kappa$, אז $\alpha = \kappa$ וקיבלנו סתירה להנחה, לכן $\delta \in C$. □

## שאלה 5

תהי $S \subseteq \kappa$ קבוצת שבת ותהי $f : S \to \kappa$ פונקציה יורדת.
יהי $M \prec H(\kappa^+)$ כך ש־$M \cap \kappa = \delta \in S$ ו־$\{f, S\} \in M$.
נגדיר $\gamma = f(\delta)$, נוכיח ש־$X = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma\}$ היא קבוצת שבת ותת־קבוצה של $\kappa$.
נסיק שהלמה של פודור חלה.

*הוכחה.* אנו כבר יודעים מההגדרה ש־$X \subseteq \kappa$, ונניח בשלילה שהיא לא קבוצת שבת, לכן קיים $C \subseteq \kappa$ סל"ח, כך ש־$C \cap X = \emptyset$.
ידוע ש־$M \cap \kappa \in \kappa \implies M \cap \kappa = \delta \in S \subseteq \kappa$ ולכן תנאי השאלה הקודמת חלים ומתקיים $\delta \in C$.
$\gamma = f(\delta)$ ולכן $\delta \in X$ ובהתאם $X \cap \delta \neq \emptyset$ בסתירה להנחת השלילה. ☐