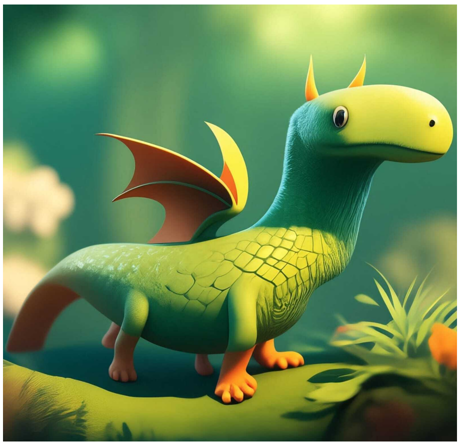
אנליזה פונקציונלית — סיכום

28 במרץ 2025



תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 26.3.2025

1.1 רקע

אנליזה פונקציונלית היא כמו אלגברה לינארית. בקורס זה נחקור מרחבים וקטוריים והעתקות עליהם, אבל על מרחבים מורכבים יותר והעתקות מורכבות יותר. נתחיל בשאלה,

תרגיל 1.1 יהי (X,ρ) מרחב מטרי כלשהו, ונניח ש־$A \subseteq X$. נניח גם ש־$(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$.
מהם התנאים ההכרחיים על A כך ש־(a_n) תכלול תת־סדרת קושי?

נעבור לדוגמה וטענות מאינפי 1 לרענן את זכרוננו.

דוגמה 1.1 המרחב המטרי הכי אינטואיטיבי הוא $X = \mathbb{R}$ ו־$\rho(x,y) = |x-y|$.

טענה 1.1 *תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־A חסומה, ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, אז יש ל־$(a_n)$ תת־סדרת קושי.*

הוכחה. $A \subseteq [-R,R]$ עבור $R \in \mathbb{R}$. נתחיל בהגדרה של $\Delta_0 = A$ ולכן יש אינסוף, ולכן יש בקטע Δ_0 אינסוף נקודות של הסדרה, וכן $|\Delta_0| = 2R$. נבחן את הקטעים החוצים את Δ_0, הם $[-R,0], [0,R]$, נבחר את זה מביניהם שמכיל אינסוף נקודות של (a_n) להיות Δ_1, וכך נמשיך ונגדיר סדרה (Δ_n). נובע שהסדרה הנתונה היא סדרה יורדת, במובן ש־$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$, מתקיים גם $|\Delta_n| = \frac{|\Delta_0|}{2^n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ובכל Δ_n יש אינסוף נקודות של (a_n). נבחר $a_{n_1} \in \Delta_1$ וכך באופן כללי גם $a_{n_k} \in \Delta_k$, לכן נובע $|a_{n_k} - a_{n_l}| \le \frac{1}{2^k}$ עבור $l \ge k$. לכן נובע שאכן ישנה תת־סדרת קושי בסדרה (a_n). $\square$

הערה טענה זו נכונה גם כאשר מסתכלים על מרחב $(\mathbb{R}^n,\rho)$ עבור $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

הגדרה 1.2 (מרחב נורמי) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ עבור $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, ותהי פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ המקיימת,

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0_V$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\forall x,y \in V, \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

אז $(V,\|\cdot\|)$ יקרא מרחב נורמי עם נורמה $\|\cdot\|$.

הגדרה 1.3 (מרחב l2) נגדיר את הקבוצה $l_2 = \{x = (x_1,\dots) \mid \forall k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$. נגדיר גם,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

אז המרחב הנורמי l_2 הוא הקבוצה והנורמה הללו.

נבחין כי עלינו להוכיח שזהו אכן מרחב נורמי לפי ההגדרה.

משפט 1.4 (אי־שוויון קושי־שווארץ) *מתקיים,*

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i| \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

סימון 1.5 נסמן $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

הוכחה. עבור $t \in \mathbb{F}$ סקלר כלשהו,

$$0 \le \langle x+ty, x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle t^2$$

עובדה ידועה היא $At^2 + Bt + C \ge 0 \implies B^2 - 4AC \le 0$ ולכן,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

ולכן,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

ואם נגדיר $x_i' = |x_i|$ וכן $y_i' = |y_i|$ אז מאי־השוויון הנתון נובע,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i'| \cdot |y_i'| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

□

נעבור להוכחת ההגדרה של l_2, כלומר ההוכחה שהנורמה שהגדרנו היא אכן נורמה.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\implies \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

□

עתה משקיבלנו ש־l_2 הוא אכן מרחב נורמי, נוכל לדון בתכונותיו.

דוגמה 1.2 במרחב $(l_2, \|\cdot\|)$ נגדיר את שפת כדור היחידה במרחב,

$$S = \{x \in l_2 \mid \|x\| = 1\}$$

נבחין כי S קבוצה חסומה ב־l_2. נבחר $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על־ידי $l_n = (0, \dots, 1, \dots)$ כאשר $l_n^n = 1, l_n^m = 0$ לכל $m \neq n$. כמובן מתקיים $\|l_n\| = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן סדרת הנקודות חסומה ב־S.

טענה 1.6 *$(l_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq l_2$ אינה כוללת תת־סדרת קושי.*

הוכחה. נבחין כי $\|l_n - l_m\| = \sqrt{2}$ לכל $n \neq m$. □

סימון 1.7 (כדור) עבור מרחב מטרי (X, ρ), נסמן $B_r(x) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$.

הגדרה 1.8 (קבוצה חסומה לחלוטין) יהי מרחב מטרי (X, ρ) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$, אז נאמר ש־A חסומה לחלוטין (Totally bounded) אם לכל $\epsilon > 0$ קיים מספר סופי של נקודות $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq X$, כך שמתקיים $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\epsilon(x_i)$.

מיד נראה שימוש בהגדרה זו במשפט, ובכך ניתן הצדקה להגדרה הלכאורה משונה הזאת.

משפט 1.9 (שקילות לחסימות לחלוטין) *יהי מרחב מטרי (X, ρ) ותהי $A \subseteq X$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *A חסומה לחלוטין.*
2. *בכל סדרה של A ניתן לבחור תת־סדרת קושי.*

משפט זה הוא משפט חשוב ומרכזי, ועל הקורא לשנן את הוכחתו. את ההוכחה אומנם נראה בהרצאות הבאות, אך נראה עתה שימושים למשפט זה. נעבור למשפט פחות חשוב ומרכזי,

משפט 1.10 *נניח ש־$X = \mathbb{R}^m$, וכן ש־$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$, אז אם $A \subseteq \mathbb{R}^m$ חסומה, אז היא חסומה לחלוטין.*

הוכחה. נחסום את A על־ידי קובייה מספיק גדולה, נחלק את הקובייה לתת־קוביות מספיק קטנות (ההצדקה מגיעה מאינפי 3), ונוכל לחסום כל קובייה כזו בכדור. נסמן $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}^m$ את מרכזי הקוביות ונקבל $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(x_j)$ מהגדרת החלוקה של הקובייה החוסמת. □

הגדרה 1.11 ב־$(l_2, \|\cdot\|)$ נגדיר את הקבוצה,

$$\Pi = \{x = (x_1, \dots) \in l_2 \mid \forall i \in \mathbb{N}, |x_i| \le \frac{1}{2^{i-1}}\}$$

אם $x \in \Pi$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, ובהתאם בהכרח $\Pi \subseteq l_2$.

משפט 1.12 *הקבוצה Π חסומה לחלוטין.*

הוכחה. תהי $(x_1, \dots) \in \Pi$, ונגדיר $x_n^* = (x_1, \dots, x_n, \dots, 0, 0, \dots)$. נגדיר גם $\Pi_n^* = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \mid |x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}\}$. הקבוצה Π_n^* חסומה לחלוטין, זאת שכן הקבוצה שקולה לקבוצה ב־$\mathbb{R}^n$, ונבחין כי היא חסומה, ולכן ההוכחה שראינו קודם עודנה תקפה ובהתאם Π_n^* חסומה לחלוטין.

נבחין כי

$$\|x - x_n^*\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i-2}} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{4}{4^i} = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$$

ולכן $\|x - x_n^*\| \le \frac{1}{2^{n-1}}$. יהי $\epsilon > 0$, אז Π_n^* חסומה לחלוטין ולכן קיימים $y^1, \dots, y^n \in l_2$ כך שמתקיים,

$$\Pi_n^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\epsilon(y^i)$$

נניח ש־$x_n^* \in B_\epsilon(y^i)$ ונוכל לבחור n כך שמתקיים $\|x - x_n^*\| < \epsilon$, אז

$$\|x - y^i\| \le \|x - x_n^*\| + \|x_n^* - y^i\| < 2\epsilon$$

נובע ש־$\Pi \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{2\epsilon}(y^i)$. $\square$

נבחין כי עתה ראינו שב־l_2 במרחב נורמי יש קבוצות חסומות, זהו אכן מרחב מעניין.

הגדרות ומשפטים