פתרון מטלה 9 — תורת המידה, 80517

26 בדצמבר 2025

שאלה 1

יהי $(X, \mathcal{A}, \nu)$ מרחב מידה σ־סופי עם הפירוק $X = \biguplus_{n=1}^{\infty} X_n$ עם $\nu(X_n) < \infty$, ונגדיר,

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(E \cap X_n)}{2^n(\nu(X_n) + 1)}$$

ראינו כי μ סופית וכן ש־$\nu \ll \mu$.

סעיף א׳

נראה ש־μ ו־ν שקולות.

הוכחה. מהגדרת שקילות מספיק להוכיח שגם $\mu \ll \nu$, כלומר ש־$\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$.

תהי $E \in \mathcal{A}$ כך ש־$\mu(E) = 0$. מאי־שליליות נובע שמתקיים,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\nu(E \cap X_n)}{2^n(\nu(X_n) + 1)} = 0$$

אבל המכנה חיובי בהחלט לכל n ולכן בפרט נובע ש־$\nu(E \cap X_n) = 0$. לבסוף מ־σ־אדיטיביות נקבל,

$$\nu(E) = \nu(\biguplus_{n=1}^{\infty} E \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap X_n) = 0$$

כמבוקש. $\square$

סעיף ב׳

נחשב את נגזרות רדון־ניקודים $\frac{d\nu}{d\mu}$ ו־$\frac{d\mu}{d\nu}$.

פתרון נסמן $h = \frac{d\nu}{d\mu}$, כלומר,

$$\int f\ d\nu = \int fh\ d\mu$$

לכל f מדידה.

אם נבחר $f = \mathbb{1}_{X_n}$ אז בפרט נקבל,

$$\nu(X_n) = \int f\ d\nu = \int fh\ d\mu = \int_{X_n} \frac{h}{2^n(\nu(X_n) + 1)}\ d\nu$$

כאשר המעבר האחרון נובע ממעבר דרך פשוטות. אז קיבלנו שמתקיים,

$$\int_{X_n} h\ d\nu = \nu(X_n) 2^n(\nu(X_n) + 1)$$

ובאותו אופן נובע שגם,

$$\int_E h\ d\mu = \nu(E) 2^n(\nu(X_n) + 1)$$

כלומר,

$$\int_E 2^n(\nu(X_n) + 1)\ d\nu = \int_E h\ d\nu$$

עבור $E \subseteq X_n$ ולכן נסיק ש־$h(x) = 2^n(\nu(X_n) + 1)$ עבור $x \in X_n$.

מהצד השני נוכל להסיק שגם,

$$\frac{d\mu}{d\nu}(x) = \frac{1}{2^n(\nu(X_n) + 1)}$$

עבור n כך ש־$x \in X_n$.

שאלה 2

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ותהי $T : X \to X$ העתקה משמרת מידה, כלומר $T_*\mu = \mu$. תהי $f \in L^1(\mu)$ ונגדיר σ־אלגברה $\operatorname{inv}(T) \subseteq \mathcal{A}$ על־ידי,

$$\operatorname{inv}(T) = \{E \in \mathcal{A} \mid T^{-1}(E) = E\}$$

נזכיר את הגדרת התוחלת המותנית, אם $f \in L^1$ ובהינתן $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ σ־אלגברה אז נגדיר את $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$ להיות הפונקציה היחידה המדידה לפי $\mathcal{B}$ המקיימת,

$$\forall B \in \mathcal{B},\ \int_B \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})\, d\mu = \int_B f\, d\mu$$

וכן שמתקיים $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}) = \frac{d\mu_f}{d\mu}$ ב־$(X, \mathcal{B})$.

סעיף א׳

נראה ש־$g = \mathbb{E}(f \mid \operatorname{inv}(T))$ היא T־אינווריאנטית.

הוכחה. עלינו להראות ש־$g = g \circ T$ כמעט תמיד. נגדיר $E = \{x \mid g(x) \neq g(T(x))\}$ ונקבל שהטענה שקולה לטענה,

$$\mu(E) = 0.$$

נבחין שמתקיים $E = \{x \mid g(T^{-1}(x)) \neq g(x)\}$, כלומר $E \in \operatorname{inv}(T)$. בהתאם נובע,

$$\int_E |g - g \circ T|\, d\mu = \int_E |f - f \circ T|\, d\mu = \int_E |f - f \circ T|\, dT_*\mu = \int_E |f \circ T - f \circ T^2|\, d\mu = \int_{\limsup E} |f - f \circ T|\, d\mu = 0$$

כאשר המעבר האחרון נובע ממעבר לפונקציה פנימית. □

סעיף ב׳

נניח ש־T היא הפיכה וכי T^{-1} מדידה, ונראה שכל N ממידה 0 מוכלת בקבוצה אינווריאנטית ממידה 0.

הוכחה. נגדיר $N_0 = N$ וכן $N_{n+1} = T^{-1}(N_n)$. בהתאם נובע ש־$\mu(N_n) = 0$ לכל n. נסיק אם כך שגם $M = \limsup N_n$ היא קבוצה מדידה וש־$\mu(M) = 0$, אבל מהמטלה הקודמת נובע שהיא T־אינווריאנטית. □

סעיף ג׳

נניח ש־μ שלמה ותהי $\mathcal{C} = \overline{\operatorname{inv}(T)}$ ההשלמה של $\operatorname{inv}(T)$. נמצא את הקבוצות המרכיבות אותה.

פתרון תהי $E \in \mathcal{A}$. אז $\liminf E_n, \limsup E_n \in \mathcal{C}$ עבור $E_n = T^n(E)$. אם $\limsup E_n \setminus E$ ממידה 0 אז נוכל להסיק ש־$E \in \mathcal{C}$, ונרצה להראות שהטענה נכונה לכיוון ההפוך גם. תהי $E \in \mathcal{C}$, אז קיימת $E \supseteq E^1 \in \operatorname{inv}(T)$ כך ש־$E^0 = E \setminus E^1$ היא קבוצה ממידה 0. נבחין כי מהסעיף הקודם נובע ש־$E^0 \subseteq \limsup E_n$ וכן מהפיכות T נוכל להסיק שמתקיים $\limsup E_n = \limsup E_n^0 + \limsup_n^1$, לכן הטענה נובעת.

שאלה 3

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב הסתברות ו־$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ תת־σ־אלגברה.

סעיף א׳

נראה ש־$L^2(\mathcal{B}) \subseteq L^2(\mathcal{A})$.

הוכחה. תהי $[f] \in L^2(\mathcal{B})$, אז $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה ב־$\mathcal{B}$ וכן $\|f\|_2 < \infty$. אבל $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}$ ולכן גם f מדידה ב־$\mathcal{A}$, אבל $\|f\|_2 < \infty$ כנביעה מיחידות האינטגרל ולכן $[f] \in L^2(\mathcal{A})$ כפי שרצינו. □

סעיף ב׳

נניח ש־$f \in L^2(\mathcal{A})$ ו־$g \in L^2(\mathcal{B})$ חיוביות, ונגדיר את μ_f, μ_{fg} להיות מידות האינטגרציה המתאימות ל־f, fg.
נראה ש־$\mu_{fg} \ll \mu_f$ וכן ש־$\frac{d\mu_{fg}}{d\mu_f} = g$.

הוכחה. תהי $E \in \mathcal{A}$ כך ש־$\mu_f(E) = 0$ ונראה ש־$\mu_{fg}(E) = 0$.

$$0 = \mu_f(E) = \int_E f \, d\mu$$

נתון כי $f, g > 0$ ולכן אם $s \leq f$ פשוטה אז $\int_E s \, d\mu = 0$, כלומר $s \restriction E =_\mu 0$. אם כך נסיק שאם $r \leq g$ פשוטה, אז $sr \restriction E =_\mu 0$ ובהתאם משרירותיות s, r נובע ש־$\mu_{fg}(E) = 0$.

נעבור לחלק השני של הטענה, תהי $h \geq 0$ מדידה כלשהי.

$$\int h \, d\mu_{fg} = \int hfg \, d\mu = \int hg \, d\mu_f$$

כלומר קיבלנו שישירות מהגדרת נגזרת רדון־ניקודים מתקיים $g = \frac{d\mu_{fg}}{\mu_f}$. □

סעיף ג׳

נראה ש־f, g הן L^1 (בהתאמה) וכן נראה שמתקיים,

$$\mathbb{E}(fg \mid \mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$$

הוכחה. ניזכר ש־μ מידת הסתברות וכן ש־$f, g > 0$ ולכן $\|f\|_1 < \infty \iff \|f\|_2 < \infty$, כלומר שתי הפונקציות הן אכן L^1.

נניח ש־$h = \mathbb{E}(fg \mid \mathcal{B})$.

$$\int_E h \, d\mu_{fg} = \int_E hg \, d\mu_f = \int_E hgf \, d\mu.$$

נבחין כי אם $E \in \mathcal{A}$ אז מתקיים,

$$\int_E \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}) \, d\mu = \int_E f \, d\mu \implies \int_E g\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}) \, d\mu = \int_E gf \, d\mu = \int_E 1 \, d\mu_{fg}$$

וגם,

$$\int_E \mathbb{E}(fg \mid \mathcal{B}) \, d\mu = \int_E fg \, \mu = \int_E g \, \mu_f$$

ומשילוב השוויונות הטענה נובעת. □

סעיף ד׳

נראה ש־$\mathbb{E}(fg \mid \mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$ גם ללא ההנחה ש־$f, g > 0$ ונסיק שלכל $f \in L^2(\mathcal{A})$ הפונקציה $\mathbb{E}_f = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$ היא ההטלה האורתוגונלית של f על $L^2(\mathcal{B})$. כלומר נראה שמתקיים,

$$\forall g \in L^2(\mathcal{B}), \ \langle f - E_f, g \rangle = 0$$

הוכחה. TODO □