1 מבוא

המטרה שלנו היא להתייחס למושג המספר כמורכב מרצף ספרות, ולכן נתחיל בהגדרה הבאה.

הגדרה 1.1 (עולם מספרים מוכללים) נאמר כי קבוצה X היא עולם מספרים מוכללים אם קיים $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ כך ש-$X = [b]^{\mathbb{Z}}$ כאשר $[b] = \{0, \dots, b-1\}$.

סימון 1.2 בהינתן קבוצת מספרים מוכללים X נסמן $\mathcal{B}(X) = b$ עבור $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ היחיד עבורו $X = [b]^{\mathbb{Z}}$. במקרה זה גם נסמן X_b.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי קיים b יחיד כזה.

הגדרה 1.3 תהי $c_0 \in X_b$, אז נאמר ש-$c_0 = 0_b = 0$ ונקרא לו אפס.

עתה נרצה להגדיר את החיבור והכפל.

הגדרה 1.4 תהי $A_0 : X_b^2 \to X_b^2$ הפונקציה המוגדרת,

$$A_0(f,g)(n) = \left\langle (f(x) + g(x)) \mod b, \begin{cases} 1 & f(x) + g(x) \geq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right\rangle$$

ונגדיר את $+ : X_b^2 \to X$ כך ש-$f + g = h$ אם $A_0^n(f,g) = \langle h, 0 \rangle$ עבור הרכבת פונקציות n פעמים.

משפט 1.5 **(חיבור מוגדר היטב)** *אם X_b עולם מספרים מוכלל אז $\mathrm{dom}(+) = X_b^2$, כלומר שהחיבור מוגדר לכל ערך.*

הוכחה. נבחין כי מהגדרה נובע ש-$A_0(f,g) = \langle f', g' \rangle$ אז $g' \in X_2$ וכן $f' \in X_{b-1}$, ולכן באינדוקציה על b נקבל ש-$A_0^{b+1}(f,g) = A_0^b(f,g)$. □

תרגיל 1.2 הגדירו את הכפל באופן דומה.

עתה כשיש לנו ערכים ופעולות, נרצה להגדיר מהו מספר סופי, נתחיל בסגור לפעולות.

סימון 1.6 עבור $A \subseteq X_b$ נסמן $\mathrm{trf}(A) = \mathrm{tr}_{\{+,\cdot\}}(A)$ כקבוצה המינימלית $A \subseteq A'$ כך ש-$\forall x, y \in A', x + y, x \cdot y \in A'$.

הגדרה 1.7 (עולם מספרים סופיים) יהי X_b עולם מספרים מוכללים. נגדיר את הקבוצה $A_b \subseteq X_b$ על-ידי,

$$A_b = \{f \in X_b \mid \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N,\ f(n) = 0\}$$

טענה 1.8 $\mathrm{trf}\, A_b = A_b$.

הוכחה. נובע ישירות ממשפט 1.5. □

הגדרה 1.9 (אורך של מספר סופי) עבור $f \in A_b$ נסמן $L(f) = N$ אם $N \in \mathbb{N}$ מינימלי כך ש-$f(n) =$ לכל $n > N$.

2 ייצוג של מספרים סופיים

בחלק זה נעסוק תחילה בייצוג של מספרים טבעיים, ולכן נעבור להגדרה על מהו מספר טבעי מוכלל.

הגדרה 2.1 תהי הקבוצה $Z_b \subseteq X_b$ הקבוצה המוגדרת על־ידי,

$$N_b = \{f \in X_b \mid \forall n < 0,\ f(n) = 0\}$$

נסמן $N_b = Z_b \cap A_b$.

תרגיל 2.1 הוכיחו ש־$N_b = \operatorname{trf} N_b$.

הגדרה 2.2 תהי $T : N_b \to \mathbb{N}$ המוגדרת על־ידי

$$T(f) = \sum_{n \in \operatorname{Supp} f} b^n \cdot f(n)$$

ונקרא לה פונקציית פענוח הטבעיים.

למה 2.3 *T משמרת חיבור,*

$$T(f + g) = T(f) + T(g)$$

לכל $f, g \in N_b$.

תרגיל 2.2 הוכיחו זאת.

משפט 2.4 (ייצוג טבעי יחיד) *יהי $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ונגדיר את הפונקציה, לכל $x \in \mathbb{N}$ קיימת $f \in N_b$ יחידה כך שמתקיים $x = T(f)$.*

הוכחה. המקרה ש־$x = 0$ טריוויאלי על־ידי בחירת $f = 0$, ולכן נניח ש־$x > 0$.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על x. נניח ש־$x = 1$. נגדיר את $f_1 \in N_b$ כך שמתקיים,

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אז הטענה מתקיימת ונשאר לראות יחידות, לכן נניח ש־$f_1 \neq g \in N_b$, לכן או ש־$g(0) > f_1(0)$ ולכן $T(g) \neq 1$. אחרת קיים $n > 0$ כך ש־$g(n) \neq 0$ ונסיק ש־$T(g) > 1$.

נניח שהטענה נכונה ל־$x \in \mathbb{N}$ ונראה שהיא נכונה גם ל־$x + 1$. נניח ש־$T(f) = x$ ונסמן $g = f + f_1$, לכן מלינאריות של T (צריך להוכיח) הטענה נובעת. צריך גם להראות שיחידות נשארת. □

עתה נרצה להוכיח את הטענה עבור $\mathbb{Q}$.