פתרון מטלה 10 — מבוא לטופולוגיה, 80516

12 ביוני 2025

שאלה 1

נניח ש־$0 < n \in \mathbb{N}$, נראה כי התנאים הבאים שקולים,

1. לכל $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ רציפה קיים $x \in S^n$ כך ש־$f(x) = f(-x)$
2. לא קיימת פונקציה רציפה אי־זוגית $S^n \to S^{n-1}$

הוכחה. $2 \implies 1$, נניח בשלילה שקיימת $g : S^n \to S^{n-1}$ אי־זוגית, קרי $f(-x) = -f(x)$ לכל $x \in S^n$. תהי פונקציה המהווה הרחבה רציפה של g, $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ (קיימת מהלמה של אוריסון), אז קיימת $x \in S^n$ כך ש־$f(x) = f(-x)$, אבל $f \restriction S^n = g$ ולכן $g(x) \in S^{n-1}$ ובפרט $g(x) = g(-x) = -g(x)$. נסיק אם כך ש־$g(x) = g(-x) = 0$ בלבד, אבל $0 \notin S^{n-1}$ בסתירה לקיום g.

$1 \implies 2$, תהי $f : S^n \to \mathbb{R}^n$. נגדיר,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

נבחין כי הפונקציה g היא אי־זוגית. אילו $g(x) = 0$ ל־x כלשהו, אז $f(x) = f(-x)$ וסיימנו, לכן נניח אחרת. לכן בפרט נוכל להגדיר,

$$h(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$$

ונקבל פונקציה $h : S^n \to S^{n-1}$ רציפה, ובהכרח גם אי־זוגית, בסתירה ישירה להנחה שלנו, ולכן h לא קיימת, ובהתאם g בעלת שורש. $\square$

שאלה 2

נניח את משפט בורסוק-אולם ונוכיח שאין שיכון $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

הוכחה. נניח בשלילה ש-$f : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ שיכון. אז קיים $x \in S^n$ כך ש-$f(x) = f(-x)$, אבל מחד-חד ערכיות השיכון $x \neq -x \implies f(x) \neq f(-x)$ ולכן $x = 0$ בלבד, אבל $0 \notin S^n$, וזו סתירה להנחה שלנו. $\square$

שאלה 3

נגדיר את $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ויהי פולינום $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$.

סעיף א׳

אם $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציפה כך ש־$|z| = r \implies q(z) \neq 0$ עבור $r \geq 0$ כלשהו. אז הפונקציה,

$$f_r^q : I \to S^1, \quad f_r^q(s) = \frac{q(re^{2\pi is})/q(r)}{|q(re^{2\pi is})/q(r)|}$$

היא פונקציה רציפה.

סעיף ב׳

יהי $R > |a_{n-1}| + \cdots + |a_0| + 1$, לכל $0 \leq t \leq 1$ נגדיר פולינום,

$$p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)$$

ונגדיר את הפונקציה $h : I^2 \to S^1$ המוגדרת על־ידי $h(t, s) = f_R^{p_t}(s)$. נראה כי h היא הומוטופיה מ־$s \mapsto e^{2\pi ins}$ ל־f_R^p.

הוכחה. ברור כי h רציפה, ולכן עלינו רק לבדוק את התנאים להומוטופיה.

$$h(0, s) = f_R^{z^n}(s) = \frac{R^n e^{2\pi ins}/R^n}{|R^n e^{2\pi ins}/R^n|} = \frac{e^{2\pi ins}}{|e^{2\pi ins}|} = e^{2\pi ins}$$

מהצד השני,

$$h(1, s) = f_R^p$$

ישירות מאיך שהגדרנו את p_t וההתלכדות $p_1 = p$. לבסוף גם,

$$h(t, 0) = f_R^{p_t}(0) = \frac{p_t(R)/p_t(R)}{|p_t(R)/p(R)|} = 1$$

ובאופן דומה נקבל גם $h(t, 1) = 1$. □

סעיף ג׳

נסיק שאם $n \geq 1$ אז f_R^p לא הומוטופית ללולאה קבועה.

הוכחה. הומוטופיה היא יחס טרנזיטיבי, לכן מספיק שנראה שאין הומוטופיה בין הלולאה $t \mapsto e^{2\pi int}$ ללולאה הקבועה 0. למעשה זו טענה שהוכחה בכיתה על־ידי שימוש בכיסוי של המעגל על־ידי הישר הממשי. □

סעיף ד׳

נסיק את המשפט היסודי של האלגברה.

הוכחה. נניח בשלילה שהוא לא מתקיים, כלומר קיים פולינום ממעלה חיובית אשר אין לו שורש. נסמן פולינום זה כ־p, ונבחין כי f_R^p מוגדרת לכל s, ונגדיר,

$$h(t, s) = f_{\gamma(s)}^p(t)$$

עבור מסילה $\gamma = [0, R]$. זוהי כמובן פונקציה רציפה ישירות מהגדרה ולכן יש הומוטופיה בין f_0^p לבין f_R^p. אבל זו סתירה לסעיף הקודם, ולכן נסיק שלא קיים פולינום כזה. □