פתרון מטלה 06 — אנליזה על יריעות, 80426

7 במאי 2025

שאלה 1

תהי $U\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהי $\varphi:U\to\mathbb{R}^n$ כך ש־$(\varphi(U),\varphi)$ היא יריעה פרמטרית רגולרית k־מימדית. נראה שלכל $x_0\in U$ קיימת סביבה $U'\subseteq U$ $x_0\in$ כך ש־$\varphi(U')$ היא יריעה.

הוכחה. יהי $x_0\in U$ ונבחין כי $\deg(D\varphi\mid_{x_0})=k$, לכן תנאי משפט הפונקציה ההפוכה חלים, זאת שכן נוכל לבחון את ההעתקה לתוך $\varphi(U)$ תוך שימוש בהעתקה אורתוגונלית מתאימה, וקיימת סביבה $x_0\in U'\subseteq U$ בה הפונקציה φ היא הפיכה. נגדיר $\psi=\varphi\restriction U'$, אז ψ הפיכה, וכן מהרחבה למשפט הפונקציה ההפוכה היא גם גזירה, כלומר φ היא דיפאומורפיזם, בפרט ψ היא הומיאומורפיזם, כלומר היא הפיכה, גזירה, ופתוחה, וכמובן רגולרית כצמצום של העתקה רגולרית.

נגדיר את $M=\psi(U')$, ונטען כי זוהי יריעה k־מימדית. לכל נקודה $x_1\in M$, נבחין כי נוכל לבחור את ψ ולקבל את התנאים הדרושים להגדרת יריעה, ולכן M אכן יריעה. $\square$

שאלה 2

תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית, ותהי $\alpha : U \to W$ פרמטריזציה מקומית סביב $p \in M$.
נראה שקיימת קבוצה פתוחה $\tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ ו־$\psi : \tilde{W} \to U$ חלקה, כך ש־$p \in \tilde{W}$ וגם,

$$\forall q \in \alpha^{-1}(\tilde{W}),\ \psi(\alpha(q)) = q$$

הוכחה. נניח ש־$p = \alpha(x_0)$ עבור $x_0 \in U$. נניח ללא הגבלת הכלליות ש־k השורות הראשונות של $D\varphi\mid_{x_0}$ בלתי־תלויות לינארית, מותר לנו להניח כן שכן אחרת נוכל לכפול בהעתקה אורתוגונלית מתאימה, וכי נתון כי M יריעה ולכן ההעתקה α היא רגולרית. נגדיר את הקבוצה $\tilde{U} = U \times \mathbb{R}^{n-k}$ וכן נגדיר את ההעתקה $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ על־ידי,

$$\tilde{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1, \dots, x_k) + \sum_{i=k+1}^{n} x_i \cdot e_i$$

עבור e_i איבר הבסיס הסטנדרטי עבור $1 \le i \le n$. מבדיקה ישירה מתקיים,

$$D\tilde{\varphi}\mid_{(x_0,0)} = \begin{pmatrix} D\varphi\mid_{x_0} & 0 \\ \vdots & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

כלומר זוהי מטריצה כך שהיא מרחיבה את $D\varphi\mid_{x_0}$ על־ידי מטריצת היחידה. נבחין כי החישוב מתקבל ישירות מההגדרה בהתאם למימד. אנו יודעים כי דרגת המטריצה $n = (n-k) + k$, כלומר זוהי מטריצה רגולרית, ולכן הנגזרת היא בעלת דטרמיננטה לא אפס, ונוכל להסיק שתנאי משפט הפונקציה ההפוכה חלים. נסיק כי קיימת $U_0 \times V_0 \subseteq \tilde{U}$ כך ש־$x_0 \in U_0 \subseteq U$, וקיימת $p \in \tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^n$, כך ש־$\tilde{\alpha} : U_0 \times V_0 \to \tilde{W}$ דיפאומורפיזם. נגדיר את $\psi : \tilde{W} \to U$ על־ידי $\psi = \pi_k \circ \tilde{\alpha}^{-1}$ עבור $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ההטלה של k האיברים הראשונים. נבחין כי ממשפט ההעתקה ההפוכה ψ היא העתקה גזירה, ומהפעלה חוזרת ונשנית נקבל שהיא גזירה מכל סדר, קרי היא פונקציה חלקה. לבסוף נובע שעבור $q \in U_0 = \alpha^{-1}(\tilde{W})$ מתקיים $\psi(\alpha(q)) = q$. $\square$

שאלה 3

תהי M יריעה k־מימדית ב־$\mathbb{R}^n$, נגדיר את האגד המשיק,

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M, v \in T_pM\}$$

סעיף א׳

נראה ש־TM היא יריעה $2k$־מימדית.

הוכחה. תהי נקודה $p \in M$ כלשהי, נבחין כי M יריעה ולכן קיימת פרמטריזציה מקומית $\alpha : U \to M$ כך ש־$p = \alpha(0)$ (ללא הגבלת הכלליות). נגדיר את הפונקציה $\overline{\alpha} : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n}$ על־ידי $\overline{\alpha}(q, v) = (\alpha(q), d\alpha\mid_p(v))$. לכל $u \in T_pM$ נבחין כי קיים $v \in \mathbb{R}^k$ כך ש־$u = T_p(M) \cdot v$, ולכן $\overline{\alpha}(0, v) = (p, u)$, כלומר $\overline{\alpha}$ חשודה כפרמטריזציה של (p, u).

אנו יודעים כי α הפיכה, וכן $d\alpha\mid_p$ היא העתקה לינארית רגולרית ולכן הפיכה אף היא ב־T_pM, ולכן נסיק שגם $\overline{\alpha}$ היא הפיכה. אנו גם יודעים כי α חלקה ורגולרית, וכן כל העתקה לינארית היא חלקה, ומרגולריות α נסיק שנגזרתה רגולרית אף היא בתחום, ולכן נסיק שגם $\overline{\alpha}$ היא חלקה ורגולרית. עלינו להראות שההעתקה היא פתוחה, אך גם הפעם, α היא העתקה פתוחה, והעתקות לינאריות תמיד פתוחות, ולכן נסיק ש־$\overline{\alpha}$ היא אכן פרמטריזציה מקומית של (p, u).

נסיק אם כן ש־TM היא יריעה $2k$־מימדית ב־$\mathbb{R}^{2n}$. □

סעיף ב׳

נראה שאם M היא תת־קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}^n$, אז $TM = M \times \mathbb{R}^n$.

הוכחה. נבהיר תחילה שכמסקנה מהטענה מהתרגול M היא יריעה n־מימדית, ולכן TM יריעה $2n$־מימדית ב־$\mathbb{R}^{2n}$. לכל $p \in M$ נניח ש־ $\alpha : U \to M$ פרמטריזציה מקומית, אז α רגולרית, דהינו $\dim D\alpha = n$ ולכן היא הפיכה (ממשפט הפונקציה ההפוכה), ובפרט לכל $u \in \mathbb{R}^n$ נסיק ש־$u \in T_pM$. נובע אם כך ש־$\{p\} \times \mathbb{R}^n \in TM$ לכל $p \in M$, ונסיק ש־$TM = M \times \mathbb{R}^n$. □

שאלה 4

תהיינה $M\subseteq\mathbb{R}^m$ ו־$N\subseteq\mathbb{R}^n$ שתי יריעות. תהי $f:M\to N$. נניח ש־$\alpha:U\to W$ פרמטריזציה מקומית של M סביב $p\in M$, ונניח ש־$\beta:A\to B$ פרמטריזציה מקומית של N סביב $f(p)$.

נראה שאם קיימת סביבה פתוחה $U'\subseteq U$ של $\alpha^{-1}(p)$ כך ש־$\beta^{-1}\circ f\circ\alpha:U'\to A$ היא חלקה, אז f חלקה ב־p.

הוכחה. נניח שקיימת סביבה פתוחה U' כך שהתנאי מתקיים. נבחין תחילה כי $\beta^{-1}(f(\alpha(x_0)))=\beta^{-1}(f(p))$ היא נקודה פנימית בהרכבה. אנו גם יודעים שהרכבת פונקציות חלקות היא פונקציה חלקה, לכן גם $\beta\circ\beta^{-1}\circ f\circ\alpha=f\circ\alpha:U'\to N$ היא העתקה חלקה ב־$\alpha^{-1}(p)$. מאותה סיבה בדיוק גם $f\circ\alpha\circ\alpha^{-1}=f:M\to N$ היא חלקה ב־$\alpha^{-1}(\alpha(x_0))=p$ ונקבל ש־f חלקה ב־p, כפי שרצינו. נבהיר ונאמר ש־$\alpha,\beta,\alpha^{-1},\beta^{-1}$ כולן דיפאומורפיזמים חלקים, ולכן הפיכות, חלקות, ומוגדרות בסביבות הנתונות. $\square$