

גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית – סיכום

19 בינואר 2026



תוכנית העניינים

4	שיעור 1 – 20.10.2025	1
4	1.1 מבוא	1.1
4	1.2 הגישה הסינחתית	1.2
4	1.3 הגישה האנגלטית	1.3
4	1.4 מרחבים אפיניים	1.4
6	שיעור 2 – 21.10.2025	2
6	2.1 מרחבים אפיניים – המשך	2.1
7	2.2 תתי-מרחבים אפיניים	2.2
9	שיעור 3 – 27.10.2025	3
9	3.1 העתקות אפיניות	3.1
10	3.2 יוצרים ובסיסים	3.2
11	שיעור 4 – 28.10.2025	4
11	4.1 קורדיינטות – המשך	4.1
12	שיעור 5 – 3.11.2025	5
12	5.1 מרחבים אפיניים ממשיים	5.1
13	5.2 עקוםים במרחב אפיני ממשי	5.2
14	שיעור 6 – 4.11.2025	6
14	6.1 קמירות במרחבים אפיניים	6.1
15	שיעור 7 – 10.11.2025	7
15	7.1 פרמטריזציה לפי אורך	7.1
15	7.2 עקומות	7.2
16	שיעור 8 – 11.11.2025	8
16	8.1 עקומות – המשך	8.1
17	שיעור 9 – 17.11.2025	9
17	9.1 עקומות	9.1
18	שיעור 10 – 18.11.2025	10
19	שיעור 11 – 24.11.2025 – 11	11
19	11.1 תרגילים	11.1
20	שיעור 12 – 25.11.2025 – 12	12
20	12.1 מרחבים דואליים	12.1
21	שיעור 13 – 1.12.2025 – 13	13
21	13.1 מרחבים דואליים	13.1
23	שיעור 14 – 2.12.2025 – 14	14

23	מאמפים	14.1
23	העתקות דואליות	14.2
24	שיעור 15 – 8.12.2025	15
24	tabnوت בידלנאריות	15.1
24	מטריצת גרם	15.2
25	tabnית ריבועית	15.3
26	שיעור 16 – 9.12.2025	16
26	לכון tabnות בידלנאריות	16.1
28	שיעור 17 – 15.12.2025	17
28	משתחים חלקים	17.1
29	שיעור 18 – 16.12.2025	18
29	משתחים רגולריים	18.1
30	שיעור 19 – 29.12.2025	19
30	מישור משיק	19.1
31	שיעור 20 – 30.12.2025	20
31	tabnית היסודית הראשונה	20.1
32	שיעור 21 – 5.1.2026	21
32	tabnית היסודית הראשונה – המשך	21.1
32	אורך וטחה של עקומים ומשתחים	21.2
34	שיעור 22 – 6.1.2026	22
34	אורך וטחה על משטה	22.1
34	טחה של משטה	22.2
35	שיעור 23 – 12.1.2026	23
35	עקומות	23.1
36	שיעור 24 – 13.1.2026	24
37	שיעור 25 – 19.1.2026	25
37	עקומות	25.1

1 שיעור 1 – 20.10.2025**1.1 מבוא**

גאומטריה היא אבן יסוד של החבורה שלנו, והיא לוקחת חלק בכל תהליך בניהה תכנון ומדידה. לאורך ההיסטוריה היה חקר של גאומטריה באיזשהו אופן נאיבי, אך אנו עוסקים בחקר של הגאומטריה באופן האקסיומטי שלה. אנו עוסקים בחקר של צורות החלוקות, ככלומר שאפשר לטלף אותן, תוך שימוש בכלים שראיתנו אנגליזה. הרעיון בקורס הוא לgesht בצורה אלמנטרית לבועות לאו דווקא מרכיבות בגישה שהיא גאומטרית. הצורות שנחקרו הן יריעות, ככל הנראה יריעות החלוקות.

1.2 הגישה הסינטטית

המתמטיקה המודרנית מתבססת על תורה הקבוצות, שכן עלינו לספק הגדרה קבוצתית הולמת למושג המשור.

הגדירה 1.1 (ישרים מקבילים) שני ישרים נקראים מקבילים אם הם מתלדים או אינם נחתכים.

הגדירה 1.2 (קולינאריות) נאמר שקווצה של נקודותן קולינאריות כאשר כל הנקודות שייכות לישר אחד.

הגדירה 1.3 (משור אפיני) זוג סדור (\mathcal{P} , \mathcal{L}) כאשר \mathcal{P} קבוצה שאת ערכיה נכנה נקודות ו- \mathcal{L} קבוצה של קבוצות של נקודות, אותן נכנה ישרים. זוג סדור זה יקרא משור אפיני אם הוא מקיים את התכונות הבאות,

1. לכל שתי נקודות יש ישר יחיד המכיל את שתיהן

2. לכל ישר ונקודה קיימן ישר יחיד מקביל לישר העובר דרך הנקודה

3. קיימות שלוש נקודות שאינן קולינאריות

מעבר למשפט יסודי שمدגים את אופי המשור האפיני.

משפט 1.4 (מספר נקודות מינימלי במשור אפיני) יהי מרחב אפיני (\mathcal{L} , \mathcal{P}), אז \mathcal{P} לפחות 4 נקודות

הוכחה. יהיו $P, Q, R \in \mathcal{P}$ נקודות שונות ולא קולינאריות. נסמן גם $\langle P, Q \rangle = l = \langle P, R \rangle$, $m = \langle P, Q \rangle$, $n = \langle Q, R \rangle$.

נסמן את $P \in l \cap m \cap n = l' \parallel l' \parallel l$, וגם את $m' \cap S = S \in \mathcal{L}$. אנו טוענים כי S קיימת וכי היא נקודה רביעית.

נתען טענה עוזר, והוא $l' \parallel m' \parallel n$. אילו $l' \parallel m' \parallel n$? אז מתרנוויות יחס השקילות המושರה מיחס ההקבלה היה נובע כי $m' \parallel l' \parallel n$, אבל אז מהתמונה השנייה של משור אפיני היה מתקיים $S = l$ בסתיויה לבחירת P, Q, R .

אם $S \in \{P, Q\}$ או $S \in \{Q, R\}$ או $S \in \{P, R\}$, נקבל סתיויה דומה, ולכן להגיה $S = P, Q, R$.
□

שני התרגילים הבאים יאפשרו לנו לתרגל את הגישה הסינטטית.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי כל ישר מכיל לפחות שתי נקודות שונות.

תרגיל 1.2 הוכיחו כי יחס ההקבלה בין ישרים הוא יחס שקילות.

נבחן את המודול אשר כולל את P, Q, R, S ואת הישרים $\langle P, Q \rangle, \langle P, R \rangle, \langle P, S \rangle, \langle Q, R \rangle, \langle Q, S \rangle, \langle R, S \rangle$. זה המודול המינימלי אשר עומד בהגדרת המשור האפיני, ולמעשה מהוות הדוגמה הפשוטה ביותר לאחד כזה.

1.3 הגישה האנגליתית

עתה כאשר בחנו את המשור מבחינה סינטטית אנו יכולים לעבור לבחון את המרחב באופן אנגלי.

הגדירה 1.5 (מודול אנגלי) יהי \mathbb{F} שדה ונסמן $\mathbb{F}^2 = \mathcal{P}$ וכן את הישרים שהם קבוצות השורשים של משוואות מהצורה $ax + by + c = 0$ עבור $a, b, c \in \mathbb{F}$ ו- $0 \neq a, b$. במקרה זה ישרים מקבילים אם ורק אם a, b המגדירים את הישרים שווים.

1.4 מרחבים אפיניים

נראה עתה את ההגדרה שתאפשר לנו לדון במרחבים, בנקודות ובכיוונים, קרי וקטוריים.

הגדעה 1.6 (מרחב אפיני) היא \mathbb{F} שדה. מרחב אפיני נתון על-ידי שלשה (E, V, t) כאשר E קבוצה של נקודות, V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , ו- t אשר מסומנת גם v (מלשון translation, היא פונקציית החזזה, מקיימת את התכונות הבאות,

.1. אסוציאטיביות: $P \in E, v, w \in V \quad (P + v) + w = P + (v + w)$ לכל $P \in E + 0 = P$ לכל

.2. איבר נייטרלי: $P \in E$

.3. חד-חד ערכיות ברכיב השני: לכל $P, Q \in E$ קיים $v \in V$ ייחד כך שקיימים $t_P(v) = Q$, נסמן

סימן 1.7 נסמן את ההשמה החלקית של t על-ידי t_P עבור $P \in E$ נתונה, כלומר,

$$t_P(v) = t(P, v) = P + v$$

דוגמה 1.1 יהיו $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ו- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

. $(F, c) \mapsto F + c$ ולבסוף גם $V = \mathbb{R}$, וכן $E = \{F : I \rightarrow \mathbb{R} \mid F' = f\}$ נסמן

או זהו מרחב אפיני, והמשמעותו הוא בדיקת 1.

21.10.2025 – 2 שיעור 2

2.1 מרחבים אפיניים – המשך

המשך לראות דוגמאות למרחבים אפיניים.

דוגמה 2.1 נבחר את,

$$E = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{F}^n \mid x^1 + \dots + x^n = 1\}$$

יחד עם,

$$V = \{(\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{F}^n \mid \xi^1 + \dots + \xi^n = 0\}$$

ופונקציית ההזזה,

$$t(x, \xi) = x + \xi = (x^1 + \xi^1, \dots, x^n + \xi^n)$$

זהו מרחב אפיני, הוכחה שזו המצב מושארת לקורא.

דוגמה 2.2 אם V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} או $t : V \times V \rightarrow (V, V, t)$ עברו V המוגדרת על ידי סכום, הוא מרחב אפיני.

uczór עתה ונגיד שמרחב אפיני באיזשהו מובן הוא מרחב וקטורי, אבל ללא הקונספט של ראשית, ובכך הוא מאפשר גמישות רבה יותר, בהמשך נראה שהקשר בין המונחים חזק אף יותר, ושאחד משורה את השני.

המרחב האפיני מרכיב מפונקציית התרגומים, אנו רוצים לשאול את השאלה ההפוכה עתה, מהו הווקטור היחיד שתרגם נקודת נקודת אחרת. בהתאם, ניגש להגדרה הבאה.

הגדרה 2.1 פונקציית הפרש (difference function) יי מרחב אפיני (E, V, t) , פונקציה $v : E \times E \rightarrow V$ תיקרא פונקציית הפרש אם לכל מתקיים,

$$t(P, v(P, Q)) = Q$$

כלומר היא הפונקציה שמתואמת לנקודות P ו- Q את הווקטור היחיד w המקיים

$$v(P, Q) = Q - P$$

.**טימן 2.2** נגיד $v_P : E \rightarrow V$ להשמה החלקית $v_P(Q) = v(P, Q) = Q - P$

הערה אם V ממש פונקציות הפרש, או מתקיים,

$$\forall P, Q \in E, v(P, Q) = v'(P, Q)$$

ישירות מהגדרת המרחב האפיני, לכן נאמר על v שהוא פונקציית ההפרש היהודית למרחב.

טענה 2.3 (חכונות של פונקציית ההפרש) אם $v : E \times E \rightarrow V$ פונקציית ההפרש אז מתקיים,

$$1. \text{ לכל } P, Q, R \in E \text{ מתקיים } (Q - P) + (R - Q) = R - P$$

2. לכל $P \in E$ הפונקציה $v_P : E \rightarrow V$ המוגדרת על ידי $v_P(Q) = v(P, Q) = Q - P$ היא פונקציה חד-חד ערכית ועל

הוכחה. 1. ישירות מאקסימום מרחב אפיני,

$$P + ((Q - P) + (R - Q)) = (P + (Q - P)) + (R - Q) = Q + (R - Q) = R$$

2. עבור $w \in V$ תהי $Q = P + w$ אז,

$$v_P(Q) = Q - P = v$$

ולכן הפונקציה היא על. נניח ש- $R \in E$ עבור $v_P(Q) = v_P(R)$, אז

$$Q - P = R - P \implies Q = P + (Q - P) = P + (R - P) = R$$

ובולנו חד-חד ערכיות.

נבחן כי בזמן שפונקציית ההפרש שוברת את הסימטריה שהתרגלנו אליה בפונקציית התרגום, אך היא מהוות משלים שלה, הטענה הבאה מציגה לנו את הקשר ההדוק שבין הרעיונות.

טענה 2.4 עבור $P \in E$ הפונקציות v_P ו- t_P הן הופכיות אחת לשנייה.

לוכחה.

$$E \xrightarrow{v_R} V \xrightarrow{t_R} E$$

לכל $Q \in E$ מתקיים,

$$Q \mapsto Q - P \mapsto P + (Q - P) = Q$$

וכן,

$$V \xrightarrow{t_P} E \xrightarrow{v_P} V$$

ומתקיים,

$$v \mapsto P + v \mapsto (P + v) - P = v$$

□

עתה אנו רוצים להגדר מרחב וקטורי מעל המרחב האפיני שלנו, נבחן את $E \times E$ וنمפה את הנקודות ל- $V \times V$ על-ידי שימוש ב- $v_P \times t_P$. נבחן את,

$$E \times E \xrightarrow{v_P \times t_P} V \times V \xrightarrow{+} V \xrightarrow{t_P} E \xleftarrow{+} E \times E$$

כלומר, נבחן את המיפוי,

$$(Q, R) \mapsto (Q - P, R - P) \xrightarrow{+} (Q - P) + (R - P) \xleftarrow{t_P} P + (Q - P) + (R - P)$$

מכאן יש לנו הפתחה להגדרה הבאה. את המבנה הזה נוהג לכנות $E_P = (E, P, +_P, \cdot_P)$ וזהו אכן מרחב וקטורי.

הגדירה 2.5 (מרחב וקטורי מושרה מנוקודה) יהי (E, V, t) מרחב אפיני ותהי $P \in E$ נקודה כלשהי. עברו $+_P : E \times E \rightarrow E$ המוגדרת על-ידי,

$$\forall Q, R \in E, Q +_P R = Q + R - P$$

ור- $E_P : \mathbb{F} \times E \rightarrow E$ המוגדרת על-ידי,

$$\forall \alpha \in F, Q \in E, \alpha \cdot_P Q = \alpha \cdot (Q - P) + P$$

המרחב $(E, P, +_P, \cdot_P)$ הוא מרחב וקטורי המושרה מהמרחב האפיני והנקודה.

תרגיל 2.1 הוכיחו כי זהו אכן מרחב וקטורי.

2.2 תתי-מרחבים אפיניים

כבר רأינו שמרחב אפיני באיזשהו עולם מתנהג ומדובר בשפה של מרחבים וקטוריים, ובזיהוק כמו בהם, גם כאן נרצה לעסוק בתתי-מרחבים, בהתאם להגדרת תת-המרחב האפיני.

הגדירה 2.6 (תת-מרחב אפיני) יהי מרחב אפיני (E, V) . קובוצה $L \subseteq E$ תיקרא תת-מרחב אפיני אם $L = \emptyset$ או שקיים $L \subseteq W \leq V$ כך שמתקיים,

$$L = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$$

נקרא גם ירעה אפינית או ירעה לינארית, ולמעשה נשמש בשמות אלה יותר.

דוגמה 2.3 נבחן את $E = \mathbb{R}^2$ ונגדר את,

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

נבחן כי L הוא לא תת-מרחב של המרחב הלינארי E , אך אנו לא בוחנים את E ואת L כמרחבים לינאריים, אלא כמרחבים אפיניים. במקרה זה אמם נבחר את $P = (0, 1)$ או $W = \text{Span}\{(1, -1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \leq \mathbb{R}^2$ ונקבל הערת אם $L = P + W$ תחת-מרחב אפיני, אז,

$$W = L - P = \{Q - P \mid Q \in L\}$$

בהתאם גם $Q - P = w \in W$ עבור $w \in W$ כלשהו, נובע ש-

משפט 2.7 (חוויות תת-מרחב לינארי פורט) $W' \leq V$ אם ורק אם $P + W = Q + W'$ עבור $P, Q \in E$ ו- $Q - P \in W$.

הוכחה מושארת במסגרת התרגילים הבאים.

תרגיל 2.2 הוכיחו כי $P \in W$ אם ורק אם

$.Q - P \in W = Q + W$ או $Q + W = Q + W'$ או נובע $W = W'$.

תרגיל 2.3 הוכיחו כי אם L מרחב הכוונים או המרחב המשיק של $W = W(L)$

בהתאם נסמן $\dim_{\mathbb{F}} W = \dim_{\mathbb{F}} L$ כמידת-

המרחבי המשיק L תחת-

היריעה. **תרגיל 2.4** הוכיחו כי היתוך של תת-hiriyot הינו תת-

הדרה 2.9 אם $S \subseteq E$ קבועה של נקודות, אז נאמר ש- S הוא תת-

hiriyah האפנית הנוצרת על-ידי S אם L הינו היריעה המינימלית בミידה

המכילה את כל הנקודות.

דוגמה 2.4 אם $E = \mathbb{R}^2$ או תת-

hiriyah האפנית הנוצרת על-ידי $\{(0, 0), (1, 0)\}$ הינו היריעה

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

הדרה 2.10 קבועה של נקודות תיקרא בלתי-

toloiyah אפנית אם אין נקודה ששhicת למרחבי האפיני שנוצר על-ידי יתר הנקודות.

דוגמה 2.5 במרחב \mathbb{R}^3 הקבוצות הבאות בלתי-

toloiyah אפנית:

$$\{(0, 1, 0)\}, \quad \{(0, 1, 0), (1, 0, 0)\}, \quad \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

אך לא יכול להיות שתהיה קבועה בגודל 4 כזו אם הנקודות הן לא קולינאריות.

משפט 2.11 יהיו (E, V) מרחב אפיני. תהי (P_1, \dots, P_r) סדרת סקלרים ב- \mathbb{F} עם התכונה $\lambda^1 + \dots + \lambda^n = 1$

או $P_0, P'_0 \in E$ מתקיים.

$$P_0 + \lambda^1(P_1 - P_0) + \lambda^2(P_2 - P_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P_0) = P'_0 + \lambda^1(P_1 - P'_0) + \lambda^2(P_2 - P'_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P'_0)$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} & P_0 + \lambda^1(P_1 - P_0) + \lambda^2(P_2 - P_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P_0) \\ &= P'_0 + (P_0 - P'_0) + \lambda^1((P_1 - P'_0) + (P'_0 - P_0)) + \dots + \lambda^r((P_r - P'_0) + (P'_0 - P_0)) \\ &= P'_0 + (P_0 - P'_0) + (\lambda^1 + \dots + \lambda^r)(P'_0 - P_0) + \lambda^1(P_1 - P'_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P'_0) \end{aligned}$$

□

סימן 2.12 נסמן את הנקודה היחידה הזו שאינה תלולה בראשית בסימון P_r

זה נקרא צירוף אפיני והוא התחליף שלנו לצירופים לינאריים, והוא אף סגור להם.

27.10.2025 – 3 שיעור 3

3.1 העתקות אפיניות

עד כה יש לנו את המרחב האפיני (E, V) , ונדרט את המודול הסטנדרטי.

הגדלה 3.1 (מודול אפיני סטנדרטי) נסמן $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}^n, \mathbb{R}^n)$ כאשר $\mathbb{A}^n = \mathbb{R}^n$, ונסמן את הערכים בו בעזרת $x, \xi \in \mathbb{A}^n$. פונקציית הצירוף תוגדר על-ידי חיבור.

עתה נעבור לעסוק בעתקות משמרות מבנה.

הגדלה 3.2 (העתקה אפינית) נניח $\varphi : (E, V), (F, U)$ מצל שדה מסוית \mathbb{F} . העתקה אפינית, המסומנת $F \rightarrow E$, נתונה על-ידי זוג פונקציות $\varphi : V \rightarrow U$ ו- $f : E \rightarrow F$

$$\forall P \in E \forall v \in V, f(P+v) = f(P) + \varphi(v)$$

הערה תוך שימוש בהגדלה הדואלית שלנו נשים שמתקיים, $f(P+v) = f(P) + \varphi(v) \iff f(P+v) - f(P) = \varphi(v)$. נובע אם כך φ נקבעת ביחידות עבור הfonקציה f .

סימן 3.3 נסמן φ ונאמר φ הוא הדיפרנציאל של f .

הסיבה שאנחנו קוראים ל- φ כך היא שפונקציות f שונות יכולות להיות בעלות דיפרנציאל זהה, והן תיבדלנה בקבוע בלבד, ככלומר הדיפרנציאל מהנוגכ כי שהיינו מצפים מדיפרנציאל באנגליה. נעבור למספר דוגמאות להעתקות אפיניות.

דוגמה 3.1 פונקציה קבועה, ככלומר $f(P) = f(Q) = 0$ לכל $P, Q \in E$. במקרה זה $\varphi \equiv 0_V$ או $\varphi = 0_{\text{Hom}(V, U)}$.

דוגמה 3.2 פונקציה קבועה. נבחן את המקרה $E = F, V = U$, ככלומר בבחינת אנ-domorfizm, לכל $w \in V$ נגידר את העתקה $t_w : E \rightarrow E$ על-ידי $P \mapsto P + w$

נבדוק שהיא אכן אפינית, אם $P \in E, v \in V$ אז,

$$t_w(P+v) - t_w(P) = (P+v) + w - (P+w) = (P+w) + v - (P+w) = v$$

כאמור,

$$(P+v) + w = P + (v+w) = P + (w+v) = (P+w) + v$$

שירותות מהאקסומה השנייה ושימוש בקומוטטיביות החיבור במרחבים וקטוריים. ככלומר $v \in V$ או בסימן שלנו $dt_w = \text{id}_V$.

דוגמה 3.3 פונקציות הומוטטיות (homothecy). יהיו $O \in F, \lambda \in \mathbb{F}$, או נגידר את הfonקציה $h_{O,\lambda} : E \rightarrow F$ על-ידי ההכפלה של וקטור פי λ במרחב O , ככלומר,

$$h_{O,\lambda}(P) = O + \lambda(P - O)$$

ומתקיים $dh_{O,\lambda} = \lambda \text{id}_V$.

תרגיל 3.1 הוכיחו כי פונקציה הומוטטית היא העתקה אפינית.

דוגמה 3.4 נניח $\varphi : F = \mathbb{A}^m \rightarrow E = \mathbb{A}^n$, ו- $\varphi = A \cdot x + b$. נגידר את העתקה $A \in \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{F})$ על-ידי,

$$x \mapsto A \cdot x + b$$

עבור $b \in F$ ו- $A \in \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{F})$. במקרה זה φ הוא העתקה הלינארית המיוצגת על-ידי A .

תרגיל 3.2 הוכיחו שהרכבה של העתקות אפיניות היא אפינית.

$$d(g \circ f) = dg \circ df$$

הגדלה 3.4 (איזומורפיזם אפיני) תиירא איזומורפיזם אפיני אם קיימת העתקה אפינית $g : F \rightarrow E$ כך שמתקיים,

$$g \circ f = \text{id}_E \quad f \circ g = \text{id}_F$$

במקרה $E = F$ נקרא להעתקה אוטומורפיזם אפיני, ונסמן ב- $\text{Aut}(E)$ להיוות חבורת האוטומורפיזמים מעל המרחב האפיני E .

3.2 יוצרים ובסיסים

הגדעה 3.5 (תת-יריעה נוצרת) נתונה ש- $S \subseteq E$ תת-קובוצת, או $\langle S \rangle$ היא תת-יריעה הנוצרת על-ידי S , והוא חיתוך כל היריעות המכילות את S .

$$\forall S, \subseteq L \subseteq E \implies \langle S \rangle \subseteq L$$

משפהה S של נקודות נקראת יוצרת של E אם $\langle S \rangle = E$.

הגדעה 3.6 (בסיס אפיני) $\{P_0, \dots, P_n\}$ תיקרא סדרה בלתי-תלויה אפנית כאשר $n = \dim \langle P_0, \dots, P_n \rangle$ ומכנה את $\{P_0, \dots, P_n\}$ בסיס אפיני ובלתי-תלויה אפנית.

מעבר עתה לדבר על קורדינטות.

הגדעה 3.7 (מערכת יהוס) יהיו E מETYMD סופי מעל \mathbb{F} . מערכת יהוס מעל E נתונה על-ידי זוג (O, \mathcal{B}) כאשר $O \in E$ ו- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ סדרה של V .

טענה 3.8 בהינתן מערכת יהוס (O, \mathcal{B}) לכל $P \in E$ קיימת הצגה ייחידה $x \in \mathbb{F}^n$ עבור $P = O + \sum_{i=1}^n b_i x^i$.

הגדעה 3.9 (קורדינטה) נקראו הקורדינטות של P במערכת היהוס (O, \mathcal{B}) היחיד כך ש- $x = (x^1, \dots, x^n)$.

28.10.2025 — 4 שיעור 4

4.1 קורדינטות — המשך

הגדעה 4.1 (מפה ופרמטריזציה למרחב וקטורי) אם V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} כך ש- $n = \dim V$, או נenna את העתקה $x : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ מפה, העתקה כפובה תלויה בקורדינטה. המיפוי ההפוך $V \rightarrow \mathbb{F}^n$ יכונה פרמטריזציה של V .

משפט 4.2 (מרחב וקטורי מושחה) תהי V קבוצה ותהי $\{f : V \rightarrow \mathbb{F}^n \mid f \text{ is bijection}\}$ עברו \mathbb{N} כלשהו, כך שמתקיים שלכל $x, y \in \text{Coor}(V)$

$$y \circ x^{-1} \in GL_n(\mathbb{F})$$

בתנאים אלה ניתן להגדיר על הקבוצה V מבנה של מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} יחד עם הاكוננה שלכל $x \in \text{Coor}(V)$ הוא איזומורפיים לינאריים.

$$\begin{aligned} & \text{הוכחה. תהי } x \in \text{Coor}(V). \text{ נגידר את החיבור על-ידי,} \\ & +_V : V \times V \rightarrow V, \quad v +_V u = x^{-1}(x(v) +_{\mathbb{F}^n} x(u)) \\ & \text{ולכן,} \end{aligned}$$

$$\cdot_V : \mathbb{F} \times V \rightarrow V, \quad \alpha \cdot_V u = x^{-1}(\alpha x(u))$$

זכור ש- x הוא איזומורפיים לינאריים ולכן,

$$x(v + w) = x(x^{-1}(x(w) + x(v))) = x(v) + x(w)$$

ובאופן דומה,

$$x(\alpha u) = x(x^{-1}(\alpha x(u))) = \alpha \cdot x(u)$$

ונשאר לנו להראות שהפונקציות שקיבלנו הן יחידות, ככלומר שאין משמעות לבחירת x . נניח ש- $y, z \in \text{Coor}(V)$, ונרצה להראות שמתקיים,

$$x^{-1}(x(v) + x(w)) = y^{-1}(y(v) + y(w))$$

ובאופן דומה שווין של הכפל. נסמן $\circ x^{-1} = \lambda_Q$ על שני הצדדים את הפונקציה y ונקבל,

$$y(v) + y(w) = y(x^{-1}(x(v) + x(w))) = \lambda_Q(x(v) + x(w))$$

אבל λ היא לינארית ולכן נקבל,

$$y(v) + y(w) = \lambda_Q(x(v)) + \lambda_Q(x(w)) = y(v) + y(w)$$

ומצאננו שאכן יש שווין. \square

הגדעה 4.3 (מפה אפינית) יהיו (E, V) מרחב אפיני n -ממדי. מערכת קורדינטות על A היא איזומורפיים $\mathbb{A}^n \rightarrow E$ x אפיני. במקרה זה $x(u) = b + Au$ עבור $u \in \mathbb{A}^n$ ו- $b \in \mathbb{A}^n$. נגידר גם את הקבוצה $GA_n(\mathbb{F})$ כקבוצת ה- x -ים הללו.

למשפט שראינו יש אנלוגיה לגרסה האפינית. הפעם במקום נקבע שתי נקודות האפס ובכך נקבל שמתקיים תנאי המשפט עבור המרחבים הוקטוריים.

5 שיעור 5 — 3.11.2025

5.1 מרחבים אפיניים ממשיים

בחלק זה והלאה נעסק במישים, ככלומר מעטה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. הדבר הראשון שנעסק בו יהיה הנורמה.
הגדרה 5.1 (נורמה) יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} . נורמה מעל V היא פונקציה $V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיים את התכונות,

1. חיזוביות בהחלט: $v = 0 \iff \|v\| = 0 \quad \forall v \in V, 0 \leq \|v\|$

2. הומוגניות: $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

3. אי-שוויון המשולש: $\forall v, u \in V, \|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$

נראה מספר דוגמאות לנורמות במקרה \mathbb{R}^p .

דוגמה 5.1 $\|x\|_{\infty} = \max\{|x_1|, \dots, |x_p|\}$, נורמת הסופרים או נורמת אינסוף.

דוגמה 5.2 $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_p|$ היא נורמת 1.

דוגמה 5.3 הנורמה האוקלידית. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$

במרחבים סופיים מעל \mathbb{R} ישנו משפט הגורס כי כל הנורמות שקולות, ככלומר לדוגמה $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_{\infty}$ באופן אנלוגי גם $\|x\|_2 \leq \sqrt{p}\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_{\infty}$.

הגדרה 5.2 (מטריקה) עבור קבוצה X נגדיר פונקציית מרחק, או מטריקה, כפונקציה המקיים את התכונות:

1. חיזוביות בהחלט: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$

2. סימטריה: $\forall x, y \in X, \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. אי-שוויון המשולש: $\forall x, y, z \in X, \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

כל נורמה משרה מטריקה, ככלומר כל מרחב נורמי הוא בפרט מרחב מטרי. אם על V מוגדרת נורמה אז על $E = (V, \rho)$ מוגדרת פונקציית מרחק. ככלומר, נוכל להשרות מרחק גם על מרחב אפיני.

הגדרה 5.3 (בדור) במרחב מטרי כללי (X, ρ) נגדיר כדור (פתוח) על-ידי,

$$B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

ונסמן לעיתים את הכדור גם על-ידי r .

במקרה של נורמה כMOVIN נקבל את הטענה השקולה שמתקיים,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \|x - y\| < r\}$$

זוכיר גם את ההגדרות המשלימות לכדור פתוח.

הגדרה 5.4 (כדור סגור וספירה) נגדיר את הכדור הסגור על-ידי, $\overline{B(x, r)} = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$.

$$\partial B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) = r\}$$

נגדיר גם התכונות במרחב אפיני.

הגדרה 5.5 (סדרה וסדרה מתכנסת) אם $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ מרחב אפיני מעל \mathbb{R} וכן סדרת נקודות.

נאמר שהסדרה מתכנסת לנקודה $P \in E$ כאשר $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\| = 0$ במובן המשני.

ובהתאם נצטט משפט חשוב שיעזר לנו.

משפט 5.6 (התכנסות וההתכנסות קורדינטתית) ב מקרה $E = \mathbb{R}^p$ אם $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, l \subseteq \mathbb{R}^p$ סדרה ונקודה, או מתקיים,

$$x_n \rightarrow l \iff \forall i \leq p, x_n^i \rightarrow l^i$$

כלומר, הסדרה מתכנסת אם ורק אם היא מתכנסת קורדינטתית קורדינטת.

$$|x_n^i - l^i| \leq \|x_n - l\| \leq C|x_n^i - l^i|$$

המשפט נובע ישרות מהטענה כי

$$\|x_n - l\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_n^i - l^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^p |x_n^i - l^i|^2} = \sqrt{C^2} = C$$

5.2 עקומים במרחב אפיני ממשי

הkoncept של עקומים במרחב הוא koncept שקצת קשה לעתים לדבר עליו. עקום הרי הוא רעיון מאוד כללי. בשל כך, נתחילה בדיון על מסילות. לפני שניגש להגדירה הפורמלית נאמר שהמטרה שלנו היא לאפיני אובייקטים שהם קשיירים מיסילתיים במרחב, וכן מהווים באיזשהו מובן תמונה של קטע. זאת אומרת שהם מתנהגים בערך כמו חוט שוז במרחב.

הגדרה 5.7 (מיסילה) מסילה (עקום פרמטרי) ב- \mathbb{A}^n היא פונקציה $I \rightarrow \mathbb{A}^n$, עבור $\mathbb{R} \subseteq I$ קטע וכך ש- α גזירה. כלומר כשלכל I מתקיים,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = L$$

הוא גבול מוגדר וסופי. נסמן גבול זה ב- $\dot{\alpha}(t) = \alpha'(t)$ את ערך הנגזרת בנקודת פונקציה של $t \in I$. המסילה תיקרא רגולרית כאשר $0 \neq \alpha'(t)$ לכל $t \in I$.

כמובן, עתה משראינו את ההגדירה, נעבור לדוגמות.

דוגמה 5.4 כל הבאים הם מסילות:

1. ישרים (פרמטריים): אם $L \leq E$ יש או $L = P + \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ עבור $v \in V$. בהתאם נוכל להגיד פונקציה $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ כך ש- $\alpha(t) = P + tv$. נבחן כי,

$$\alpha'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P + (t+s)v - P - tv}{s} = v$$

ולכן המסילה רגולרית ובפרט $\alpha'(t) = v$.

2. נגיד את $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ על-ידי $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ כאשר $r < r \in \mathbb{R}$. זהו מסילה כך שתמונהה היא מעגל ברדיוס r במישור. הפעם נקבל ש- $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, כלומר גם הפעם המסילה היא רגולרית.

דרך פשוטה במיוחד לראות זאת היא על-ידי בחינת $r \|\alpha'(t)\| = \|\alpha'(t)\|$. $\ddot{\alpha}(t) = \alpha''(t) = -r(\cos t, \sin t)$ באותו אופן נקבל גם $\ddot{\alpha}(t) = \alpha''(t) = -r(\cos t, \sin t)$.

3. במרחב נגיד את המסילה $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ על-ידי $\alpha(\cos t, \sin t, t)$, זהו למעשה ספירלה. גם הפעם נוכל לראות כי זהו מסילה רגולרית. בעולם של ירידות, בפרט של מסילות, לא מעניינות אותנו תכונות שתלויות בפרמטריזציה, כלומר במסילה כפונקציה התלויה ב- t . אנו מבקשים לעסוק בתמונה, במסלול של המסילה, כלומר בחלוקת $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ ב-

הגדרה 5.8 (אורך של מסילה) תה $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ מסילה רגולרית. נגיד את האורך של המסילה באופן הבא,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

זהו הגדרה שאולי היגונית גאומטרית, אבל נרצה להראות שהיא אכן מקיימת את הקונספט של מרחק. נגיד הגדירה שבשימוש תוכיה את עצמה כSKUOLA.

הגדרה 5.9 תה $\mathcal{P} = (t_0, \dots, t_k)$ חלוקה של $[a, b]$, כלומר $t_0 < t_1 < \dots < t_n = a, t_k = b$. בהינתן $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ מסילה, או נגיד את היישר הפוליגונלי כמסילה שנוצרת על-ידי סדרת הנקודות $(\alpha(t_0), \dots, \alpha(t_k))$.

$$L_\alpha(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$$

ובהתאם ננסה את המשפט שמקשר את ההגדירות.

משפט 5.10 אם $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ מתקיים,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathcal{P}, (\lambda(\mathcal{P}) < \delta) \implies (|L(\alpha) - L_\alpha(\mathcal{P})| < \varepsilon)$$

כלומר עבור על חלוקה \mathcal{P} של $[a, b]$ כך ש- $\delta < (\mathcal{P})$ המרחק בין שני סוגים המרחק חסומים על-ידי ε .

אומנם את הוכחה לא נביא, אך נרמזו ונגיד שם נבחן את ההגדירה של האינטגרל לפי קושי, ונשותמש במשפט לגרנו', נוכל להוכיח את הטענה.

4.11.2025 — 6 שיעור 6

6.1 קמיות במרחבים אפיניים

הגדעה 6.1 (קמיות במרחב אפיני) עבור מרחב אפיני (E, V) מעל הממשיים, צירוף אפיני (convex) של $P_0, P_1, \dots, P_k \in E$ הוא $\lambda^0 P_0 + \dots + \lambda^k P_k$ עבור $\lambda^0, \dots, \lambda^k \in \mathbb{R}$ כך ש- $0 \leq \lambda^i \leq 1$ לכל $0 \leq i \leq k$.

הגדעה 6.2 (קטע אפיני) בהינתן $P, Q \in E$ הקטע $[P, Q] \subseteq E$ המוגדר עליידי,

$$[P, Q] = \{R \in E \mid R = \lambda P + \mu Q \mid \lambda + \mu = 1, 0 \leq \lambda, \mu\}$$

הגדעה 6.3 (קובוצה קמורה) קבוצה $C \subseteq E$ של נקודות תיקרא קמורה (convex) אם $[P, Q] \subseteq C$ לכל $P, Q \in C$.

באופן טבעי נוכל להגיד קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}$ קמורה של ממשיים. נרצה להגיד גאומטרית לקובוצת קמיות אפינית, ואז בהתאם להוכחה שהיא שcolaה לגגרו הקטועים של קבוצה.

הגדעה 6.4 (סגור קמור אפיני) אם $A \subseteq E$ קבוצה של נקודות, אז נאמר שהקובוצה $C \subseteq E$ המקיימת,

$$C = \bigcap_{\substack{A \subseteq K \subseteq E \\ K \text{ is convex}}} K$$

7.1 פרטוריזציה לפי אורך 10.11.2025 — שיעור 7

7.1.1 פרטוריזציה לפי אורך

אנו עוסקים בעקומים פרטוריים רגולריים, קרי בمسילות רגולריות, $A^n \rightarrow I : \alpha$. הדרישה שלנו היא ש- α תהיה גזירה אינסוף פעמיים, כלומר חלקה, ונדרש ש- $\alpha'(t) \neq 0$ לכל $t \in I$. נוכל גם לדבר על $A^n \subseteq A = \alpha(I) \subseteq \mathbb{A}^n$, וזה למשה העקום עצמו, נקרא לאובייקט זה גם מסלול. בהינתן שתי מסילות אנו רוצים להבין מתי מתקיים $\text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\tilde{\alpha})$ מתי שתי מסילות הלהה למשה מייצגות אותו אובייקט ביקום.

הגדרה 7.1 (דיפאומורפיזם) פונקציה $X \rightarrow Y : \varphi$ תיקרא דיפאומורפיזם אם היא הפיכה, גזירה, והפיכתה גזירה. דיפאומורפיזם חלק יהיה דיפאומורפיזם כך שהוא גזיר אינסוף פעמיים.

הערה משפט העתקה ההפוכה נובע שאם דיפאומורפיזם הוא חלק אז גם הפונקציה ההפיכה שלו היא דיפאומורפיזם חלק. באופן דומה רגולריות של הדיפאומורפיזם הוא תכונה שלחה על ההפונקציה ההפיכה גם כן.

הגדרה 7.2 (פרטורייזציה) בהינתן $A^n \rightarrow I : \alpha$ ו- $I \rightarrow J : \varphi$ מסילה חלקה רגולרית, J , I , קטעים, ו- φ דיפאומורפיזם. במצב זה נאמר ש- $\varphi \circ \alpha = \tilde{\alpha}$ היא פרטורייזציה שcolaה ל- α , עוד נאמר ש- $\tilde{\alpha}$ היא רפרטיזציה של α .

דוגמה 7.1 נינה ש- $\psi : I \rightarrow \mathbb{A}^2$: ψ נתונה על ידי $\psi(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t))^T$. נגיד I נגיד $J \rightarrow I$: φ על-ידי $2u \mapsto u$. אז $\tilde{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{A}^2$: $\tilde{\alpha}(t) = 2\alpha'(2t)$, $(\alpha^1(2t), \alpha^2(2t))^T$. בהתאם נקבל ש- $\tilde{\alpha}(t) = 2\alpha'(2t)$.

הערה במקרה הדו-מידי אם $\psi = \psi'$ אז מתקיים $\varphi \circ \psi' = \varphi \circ \psi$. ולכן בפרט ψ' לא מתאפסת ושומרת על סימן. סימן 7.3 אם $0 > \psi'$ אז נאמר שהוא שומרת על כיוון, אחרת נאמר שהוא משנה כיוון.

משפט 7.4 (קיים פרטורייזציה לפי אורך) יהי עקום פרטורי $A^n \rightarrow I : c$ עקום חלק רגולרי. אז קיימת n $J \rightarrow \tilde{c} : \tilde{c}$ פרטורייזציה שcolaה ל- c . כלומר $\tilde{c} \equiv \tilde{c}'$. פרטורייזציה זו נקראת פרטורייזציה לפי אורך.

הוכחה. נסמן $I \in I$ שבירוחוי. נגיד את $\tilde{c}(t) = \int_{t_0}^t \|c'(u)\| du$ בכל נקודה. לפי FTC (המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי) ψ גזירה ומתקיים $0 < \psi'(t) = \|c'(t)\|$. כמובן ψ רגולרית ומונוטונית, ולכן הפיכה. נגיד $(I) \psi = \psi$ אז J קטע כתמונה של פונקציה רציפה בקטע. יתר-על-כן, ψ היא דיפאומורפיזם, ואף דיפאומורפיזם חלק, נסמן $\varphi^{-1} \psi = \varphi$. נגיד $\varphi \circ \tilde{c} = c$, זה אומר $\varphi \circ \tilde{c}(t) = \tilde{c}(t)$. מהגדרת \tilde{c} מתקיים,

$$\tilde{c}'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{\psi'(\varphi(t))}$$

ולכן $\|\tilde{c}'(t)\| = \|c'(\varphi(t))\| \cdot \frac{1}{\|\psi'(\varphi(t))\|}$. \square

דוגמה 7.2 נגיד את $\mathbb{A}^2 \rightarrow I : c$ על-ידי $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^T$ כאשר $r > 0$. אז מתקיים $c'(t) = (-r \sin t, r \cos t)^T$ ולכן $\|c'(t)\| = r$. ובהתאם גמ' נקבל מהמשפט ש- $\tilde{c}(t) = (r \cos(\frac{t}{r}), r \sin(\frac{t}{r}))^T$. כמובן להגדר את $\tilde{c}(s) = (c \circ \varphi)(s) = c(\varphi(s)) = c(\frac{s}{r})$.

7.2 עקומות

עתה נרצה לדון בהבדל שבין אובייקטים במישור לבין רגולריות, או נשים לב שנוכל להגיד את היר המשיק בנקודת, $c(t_0) + tc'(t_0) = c(t_0) + t c'(t_0)$ לכל $t \in \mathbb{R}$ לכל $t_0 \in I$: c לדוגמה רגולרית, או בפרט נקבע שהוקטור המגדר את המשיק הוא נורמלי. נרצה למצוא את הוקטור האורתוגונלי שלו, במטרה להבין את ההסתנהות של הפונקציה ביחס לשני הוקטורים הללו. בהתאם נוכל להבין כמה עקום מתקעם בהתאם לקשר בין הנגזרת השנייה לבין האורתוגונלי לנגזרת.

הגדרה 7.5 (בסיס אורתוגונלי של נגזרת) תהי מסילה $I \rightarrow \mathbb{A}^2$: c רגולרית לפי אורך ותהי $t_0 \in I$. נסמן $v(t) = c'(t)$ וכון $n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c'(t)$ והוא בסיס אורתוגונלי של הנגזרת בנקודת. אז $1 = \|c'(t)\|$ וכון $v(t) \cdot c'(t) = 0$ וכון $v(t) \cdot n(t) = (v(t), n(t))$ הוא בסיס אורתוגונלי של הנגזרת בנקודת. נסמן $k(t) = c''(t)$ וכון $c''(t) \cdot c'(t) = k(t) n(t)$. אז נסיק ש- $c''(t) \cdot c'(t) + c'(t) \cdot c''(t) \equiv 0$, 1 , $c''(t) = k(t) n(t)$. או נגיד $I \rightarrow \mathbb{R}$ על-ידי $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ אם ורק אם $2c''(t) \cdot c'(t) + c'(t) \cdot c''(t) \equiv 0$. פונקציה זו נקראת העקומות (המכוונות) של c .

11.11.2025 – 8 שיעור 8**8.1 עקומות – המשך**

. $c''(t) = (0, 2)^t$ $\|c'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$ ובהתאם $c'(t) = (1, -2t)^t$ או $c(t) = (t, 9 - t^2)^t$ עבור $t \in [-3, 3]$. אולם $c(t) = (t, 9 - t^2)^t$ לא נוכל להשתמש בה בפשתות. אבל c היא לא לפיה אורך ולכן לא נוכל להשתמש בה בפשתות.

17.11.2025 — 9 שיעור 9

9.1 עקומותיות

18.11.2025 — 10 שיעור 10

משפט 10.1 *תהי $I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גירה $0 \leq r \geq k$ קבועה. בהינתן נקודה I ונקודה $s_0 \in I$ קיימת מסילה $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ אשר אורך $c(s_0) = P_0$, $c'(s_0) = v_0$ ו $\|v_0\| = 1$, אם קיימת עקמומיות הנתונה על ידי $.k$.*

חידה. יתר-כל-כך,

$$c(s) = \begin{pmatrix} P^1 + \int_{s_0}^s \left(\cos \left(\int_{s_0}^t k(u) du + \theta_0 \right) \right) dt \\ P^2 + \int_{s_0}^s \left(\sin \left(\int_{s_0}^t k(u) du + \theta_0 \right) \right) dt \end{pmatrix}$$

כאשר $0 \leq \theta_0 < 2\pi$

הוכחה. נתחיל בהוכחת הקיום. נגידר את הנגזרת בהתאם לדרישות המופיעות במשפט. נשים לב ש- $1 = \|c'(s)\|$ לכל I ו- $c''(s) = l(s)n(s)$ ישירות מחישוב.

נניח כי גם $g(s) = (c^2)'(s) - (d^2)'(s)$ עומדת בתנאים, ונتابון בפונקציה $f(s) = (c^1)'(s) - (d^1)'(s)$ או נקבל $f(s_0) = g(s_0) = 0$, ולכן $f^2 + g^2 = \frac{1}{2}(f^2 + g^2)(s) = k(s)f(s) f'(s) = -k(s)g(s) g'(s)$ פונקציה קבועה. אבל $f(s_0) = 0$ ולכן $f = 0 = g$ בלבך. \square

משפט 10.2 *תהי $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ מסילה רגולרית לפי אורך. אז קיימת $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- θ יהווה עד כדי הזזה ב- $2\pi k$.*

24.11.2025 – 11 שיעור 11

11.1 תרגילים

25.11.2025 – 12 שיעור 12

12.1 מרחבים דו-אליים

הגדירה 12.1 (מרחיב דוואלי) יהי V מרחב וקטורי ממימד $N \in n$ מעל שדה \mathbb{F} . נגידו,

$$V^\vee = \hom_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$$

ונקרא $\lambda \cdot V$ המרחב הדואלי נקרא תבנית ליינארית (linear form) או פונקציונל (functional).

דוגמיה 12.1 $V^\vee = (\mathbb{F}^{\text{col}^n})^\vee = \{M_{n \times 1}(\mathbb{F})\}$ ההעתקות הליניאריות מממד n לממד 1.

טענה 12.2 במקורה זה אם $a \in V^\vee$ אז קיימים וקטור V וונכל לסדר $l = l_a$ כך שמתקיים $l(x) = a^t x$

הוכחה. נסמן $a = (a_j)_{i=1}^n$ עבור n נגדיר $1 \leq j \leq n$ $a_j = l(e_j)$

$$l(x) = l(e_1x^1 + \cdots + e_nx^n) = x^1l(e_1) + \cdots + x^n l(e_n) = x^1a_1 + \cdots + x^na_n = a^tx = l_a(x)$$

. $l = l_a$ ומצאו שacen

הערה בהתאם נקבל $(\mathbb{F}_{\text{col}}^n)^\top \simeq (\mathbb{F}_{\text{row}}^n)$. כלומר באיזשהו מובן מרחב דו-אילי הוא גם דו-אילי במובן הסימוני.

דוגמא 12.2 יהי V ו- \mathcal{B} בסיס סדור. אם $v = \mathcal{B}x$ אז נוכל להגיד v הוא תבנית לכל j .

דוגמה 12.3 עבור $0 \neq S$ כלשיי נגדיר את הקבוצה,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(S, \mathbb{F}) = \{f : S \rightarrow \mathbb{F}\}$$

עבור $f, g \in \mathcal{F}$ נגיד $f + g$ (בנוסף דומה $k \cdot f$) מרחיב לינארי מעל \mathbb{F} . נקבע אם \mathcal{F} סה"כ $(\mathcal{F}, +, \cdot)$

עבור $s_0 \in S$ נגדיר,

$$\text{eval}_{s_0} : \mathcal{F}(S) \rightarrow \mathbb{F}, \quad f \mapsto f(s_0)$$

`.evals0 ∈ F∨` ន

דוגמה 12.4 נתנו $S = I \subseteq \mathbb{R}$ וונניח ש- $f' : S \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציונל ליניארי.

באופן דומה אם $V = \mathcal{R}([a, b])$ מרחב הפונקציות האינטגרביליות רימן, נוכל להגיד גם את $\int_a^b f dx$ גם זו תבנית.

1.12.2025 – 13 שיעור 13

13.1 מרחבים דו-אליים

נניח ש- V מרחב וקטורי ממיד סופי מעל \mathbb{F} . תורה זו מוגדרת גם עבור מקרים של ממד לא סופי, אבל ישנו מספר הבדלים שנציגן אך לא נחקרו. הגדרנו את $V^\vee = \text{hom}(V, \mathbb{F})$ כמרחב הדואלי של V .

הגדירה 13.1 (בסיס דואלי) יהיו b_1, \dots, b_n בסיס של V . נגידר $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס דואלי של V . נקרא אפרירורית לקובוצה $(b^1, \dots, b^n) = \mathcal{B}^\vee$ בסיס דואלי של V .

הערה אם $v \in V$ אז מתקיים $v = \mathcal{B}x$ עבור $x \in \mathbb{F}_{\text{col}}^n$. בהתאם $b^i(v) = x^i$.

משפט 13.2 (קיים בסיס דואלי) \mathcal{B}^\vee בסיס של V^\vee .

הוכחה. נתוחיל באינטואיטיבות. נניח ש- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס דואלי של V .

$$0_{\mathbb{F}} = 0_{V^\vee}(b_j) = \left(\sum_{i=1}^n a_i b^i \right)(b_j) = \sum_{i=1}^n a_i b^i(b_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j$$

וביקלנו אינטואיטיבות.

נعتبر להוכחה פרישה. עבור $l \in V^\vee$ תבנית יהו $l(v) = l(b_1) + \dots + l(b_n)$. נראה ש- l מופיע בבדיקה על איברי הבסיס \mathcal{B} , זאת ישירות מlinearיות.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b^i \right)(b_j) = a_j = l(b_j)$$

וביקלנו שגם הבסיס \mathcal{B}^\vee פורש את V^\vee . \square

נבחין כי נוכל ליצור צימוד $\mathbb{F} \rightarrow V^\vee \times V \rightarrow V$ על ידי $(v, l) \mapsto l(v)$ ונסמן את הפעולה הזאת באופן דומה למכפלה פנימית על-ידי $\langle v, l \rangle$. נקבל

$$l = b^1 l(b_1) + \dots + b^n l(b_n) = \sum_{i=1}^n b^i \langle l, b_i \rangle + \dots + b_n l(b_n) = v = \sum_{i=1}^n b_i \langle b^i, v \rangle$$

משפט 13.3 (שקלות לאיפוס במרחב דואלי) לכל וקטור V מתקיים $v \in V$ מתקיים $l(v) = 0_{\mathbb{F}}$ אם ורק אם $l \in V^\vee$ מתקיים $l(v) = 0_V$.

$$l = 0_{V^\vee} \iff \forall v \in V, l(v) = 0_{\mathbb{F}}$$

משפט 13.4 (קיים לבסיס דואלי) לכל (b^1, \dots, b^n) בסיס של V קיים בסיס של V^\vee כך שמתאים,

$$\mathcal{B}^\vee = (b^1, \dots, b^n)$$

הוכחה. תהי חבנית $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_{\text{col}}^n$ המוגדרת על-ידי $\varphi(v) = (b^1(v), \dots, b^n(v))^t$. נבחין כי φ מתקימת רק כאשר $v \in \ker \varphi = 0$ אם ורק אם $b^i(v) = 0$ לכל i , אבל בהתאם הטענה מתקימת רק אם $\dim \ker \varphi = 0$, כלומר φ איזומורפיים לינאריים. לכן אם $\dim \ker \varphi = n$ תומנתה $\varphi(e_1, \dots, e_n) = (b^1(e_1), \dots, b^n(e_n)) = \delta_{ij}$ בדיק כי שרטינו. \square

הגדרה 13.5 (מאפסים) לכל $S \subseteq V$ נגידר

$$S^0 = \{l \in V^\vee \mid \forall s \in S, l(s) = 0\} \subseteq V^\vee$$

ונקרא S^0 המאפס של S .

משפט 13.6 (תכונות מאפס) לכל $S, T \subseteq V$ מתקיים

$$S^0 \subseteq T^0 \subseteq V^\vee .1$$

$$S^0 = \text{Span}^0(S) .2$$

$$S \subseteq T \implies T^0 \subseteq S^0 .3$$

$$\dim U + \dim U^0 = \dim V .U \leq V .U$$

הוכחה. יהיו (b_1, \dots, b_n) בסיס של V כך שגם (b_1, \dots, b_k) בסיס של U , כאשר $n \geq k$.

נחבון ב- $B^\vee = (b^1, \dots, b^n)$ ונטען ש- B^\vee בסיס של U^\vee . יהיו $l \in U^\vee$ ו- $l(b_i) = 0$ אבל $l(b_k) \neq 0$.

ונבעם $l(b_k) = \sum_{i=1}^k l(b_i) = \sum_{i=1}^k b^i l(b_i) = b^k l(b_k) \neq 0$.

$\dim U + \dim U^0 = \dim V$ ו- $U \leq V$.

מבחן ב- $S^0 = \text{Span}(b^1, \dots, b^n)$ ו- $l \in S^0$ נובע אם $\sum_{i=1}^k l(b_i) = 0$.

הגדעה 13.8 (קובוצת האפסים) תהי $L \subseteq V^\vee$, אז נגידר,

$$L_0 = \{v \in V \mid \forall l \in L, l(v) = 0\}$$

קובוצת האפסים של L זו תקרא קובוצת האפסים של L .

משפט 13.9 לכל $L, M \subseteq V^\vee$ מתקיים,

$$L_0 \subseteq V .1$$

$$L_0 = \text{Span}_0(L) .2$$

$$L \subseteq M \implies M_0 \subseteq L_0 .3$$

.**dim** $W + \dim W_0 = \dim V$, אז מתקיים **13.10** יי' $W \subseteq V^\vee$

אם $S \subseteq V$ או מהו $(S^0)_0 = \text{Span}(S)$? נקבל $S \subseteq (S^0)_0 = \text{Span} S$. בהתאם נקבל שמתקיים

הגדעה 13.11 (העתקה דו-אלילית) תהי $f : V \rightarrow W$ העתקה לינארית בין מרחבים, ותהי $l \in W^\vee$ תבנית. אז נגידר את העתקה הדו-אלילית של f

ליהיות $f^\vee : W^\vee \rightarrow V^\vee$, כאשר בהתאם $f^\vee = l \circ f$,

בשפת סימון מכפלה פנימית נקבל $\langle f^\vee(l), v \rangle = \langle l, f(v) \rangle$.

2.12.2025 — 14 שיעור 14

14.1 מאפסים

נמשיך לדון במאפסים ותכונותיהם.

מסקנה 14.1 אם $W_1 = W_2 \iff W_1^0 = W_2^0$ או מתקיים $W_1, W_2 \leq V$ גם $W_1 = W_2$.

כזכור אנו יכולים לדון בתתי-מרחבים על-ידי שימוש במאפסים, ישנה שקילות שמאפשרת לנו להרחיב את הדיון שלנו גם בתתי-מרחבים באופן כללי.

14.2 העתקות דואליות

נמשיך את הדיון שלנו על העתקות אלה.

משפט 14.2 יהיו V, W מרחבים לינאריים כך שה- \mathcal{B} בסיסם בהתאם ו- \mathcal{D}^\vee , \mathcal{B}^\vee הבסיסים הדואליים בהתאם. אם $A : V \rightarrow W$ מרחב לינארית ו- $f : V \rightarrow W$ בבסיסים \mathcal{D}, \mathcal{B} בהתאם אז $[f^\vee] = A^t$.

הו V מרחב אוקלידי, כזכור מרחב לינארי מימיד סופי מעל \mathbb{R} עם מכפלה פנימית \mathbb{R} : $\langle \cdot, \cdot \rangle$. לכל $V \in \mathbb{R}$ קיימת העתקה,

$$l_v : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad l_v(w) = \langle v, w \rangle$$

כזכור $\langle \cdot, \cdot \rangle = l_v$ נשים לב שה- $l_v \in V^\vee$. המשמעות היא שקיים צימוד מלא בין V ל- V^\vee , על-ידי $v \mapsto l_v$, ולכן $V \simeq V^\vee$. בהתאם לדוגמה ב- \mathbb{R}^3 אם נגדיר $l(v) = \det(x \ y \ v)$ עבור $x, y \in \mathbb{R}_{\text{col}}^3$ קבועים, נקבל העתקה לינארית ולכן לכל $z \in \mathbb{R}^3$ קיים $x \wedge y \in \mathbb{R}^3$ כך ש- $l(z) = 0$. זהו למעשה המכפלה החיצונית, המכפלה הוקטורית.

8.12.2025 — 15 שיעור 15

15.1 תבניות ביילינאריות

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} .

הגדעה 15.1 (תבנית ביילינארית) תבנית ביילינארית על V היא פונקציה $V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ כך שהפונקציה $(v, w) \mapsto g(v, w)$ עבור $v, w \in V$ היא פונקציה ליניארית.

דוגמה 15.1 אם $l^1, l^2 \in \text{hom}(V, \mathbb{F})$ אז גם $(v, w) \mapsto l_1(v)l^2(w)$ אף היא תבנית ביילינארית.

דוגמה 15.2 עבור $A \in M_m(\mathbb{F})$, $\text{tr}(X^t AY) = \text{tr}(AY)$ גדריר $A \in M_n(\mathbb{F})$, זהה פונקציה משמרת לינאריות מרכיבת עליידי פונקציונל לינארי, ולכן תבנית ביילינארית.

דוגמה 15.3 כאשר $V = \mathbb{F}_{\text{col}}^n$ או $A \in M_n(\mathbb{F})$ אז זוהי תבנית ביילינארית כמקרה פרטי של הדוגמה הקודמת.

במקרה שבו $n=2$ ו- $\text{id} = \text{diag}(1, 1)$ או נקבע $A = \text{diag}(1, 1) = \text{id}$ זוהי המכפלת הפנימית הסטנדרטיבית כאשר \mathbb{R} או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. אם לעומת זאת $A = \text{diag}(1, -1)$ זוהי מכפלת הפנימית החשובה בפייזיקה. ישנו גם המקרה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ נקראת התבנית ההיפרבולית. אם גדריר $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ או נקבע x, y , קלומר זוהי דטרמיננטה של מטריצה ריבועית כאשר עמודותיה הן הוקטורים x, y , $g_S(x, y) = x^1y^2 - x^2y^1 = \det(x, y)$

15.2 מטריצת גرم

או באנגלית Matrix Gram. אם V מרחב וקטורי מממד סופי מעל \mathbb{F} ו- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n) : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ בסיס סדור, אז \mathcal{B} מביאת תבנית ביילינארית.

הגדעה 15.2 (מטריצת גرم) אם $g_{ij} = g(b_i, b_j) \in M_n(\mathbb{F})$ אז המטריצת גرم של \mathcal{B} בסיס \mathcal{B} .

אם $v \in V$ אז נוכל לכתוב $v = \mathcal{B}x$ עבור וקטור קורדינטות x , באופן דומה אם $w \in V$ אז נוכל לסמן $w = \mathcal{B}y$. במצב זה,

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^n b_i x^i, \sum_{j=1}^n b_j y^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j g(b_i, b_j) = x^t G y$$

טענה 15.3 אם g מביאת תבנית ביילינארית ו- G מטריצת גرم בסיס \mathcal{B} שלו, אז לכל $v, w \in V$ מתקיים $v^t G w = g(v, w)$ ובהתאם מגדירה ביחידות את g .

עתה נרצה לשאול את השאלה האם בקשר מה קורה ל- G כאשר אנו משנים את הבסיס. תהי $P \in GL_n(\mathbb{F})$, היא תהיה מטריצת מעבר' $\mathcal{B}' = P\mathcal{B}$ כולם לכל וקטור קורדינטות x נקבע $x' = Px$. אז במקרה זה $g(v, w) = g(Px', Py') = (x')^t (P^t G P) y' = (x')^t G y'$.

טענה 15.4 אם \mathcal{B}' בסיסים כך $\mathcal{B}' = P\mathcal{B}$ מטריצת מעבר, וכן g מביאת תבנית ביילינארית, אז אם G מטריצת גرم מעל \mathcal{B} , אז $P^t G P$ מטריצת גرم בסיס \mathcal{B}' .

הגדעה 15.5 (מטריצות חופפות) נאמר ששתי מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ הן חופפות (congruent) אם קיימת $P \in GL_n(\mathbb{F})$ כך $P^{-1}AP = B$.

תרגיל 15.1 הוכיחו כי זהו יחס שקילות.

אם g מביאת תבנית ביילינארית על V אז גדריר \mathcal{B} מטריצת גرم G .

הגדעה 15.6 (תבנית ביילינארית סימטרית) g נקראת סימטרית אם $g(v, w) = g(w, v)$ ואנטי-סימטרית כאשר $g(v, w) = -g(w, v)$.

תרגיל 15.2 הינו סימטרית אם G סימטרית וכן אנטיסימטרית אם ורק אם G אנטיסימטרית.

הגדעה 15.7 (תבנית אורתוגונלית) ההיינה V מרחב וקטורי ו- \mathbb{F} תבנית ביילינארית סימטרית. נסמן $u \perp v$ כאשר $u^t v = 0$ ונאמר u, v אורתוגונליות ביחס ל- g .

אם $U, W \subseteq V$ אז $W \perp U$ כאשר $\forall u \in U, w \in W, u^t w = 0$. נסמן $U^\perp = \{w \in V \mid \forall u \in U, u^t w = 0\}$.

הגדעה 15.8 (גרעין של תבנית ביילינארית) הגרעין של g מוגדר עליידי $V^\perp = \ker g$.

הגדעה 15.9 (ניוזן) נאמר ש- g לא מנוגנת כאשר $\ker g = \{0\}$.

$U \leq V$ נקרא לא מנוון כאשר $g|_{U \times U}$ לא מנוונת, אחרת U נקרא איזוטרופי.

נניח ש- $V = \mathbb{R}^2$ ו- $g = g_L$, כלומר $g(x, x) = (x^1)^2 - (x^2)^2$. ב מקרה זה נקבל $g(x, y) = x^1y^1 - x^2y^2$. בהתאם $g(0, 0) = 0$ ו $g(x_1, x_2) = \{x \mid x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$. אם נבחן את $U = \{x \mid |x_1 - x_2| = 0\}$ אז נקבל ש רק $x_1 = x_2$, כלומר $g(0, 0) = 0$ ולכן זה קבוצה לא מנוונת.

15.3 תבנית ריבועית

נניח ש- V ו- g תבנית ביילינגרית סימטרית על V .

הדרה 15.10 (תבנית ריבועית) נגידר את התבנית הריבועית $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ $q : V \rightarrow \mathbb{F}$ על ידי $q(v) = g(v, v)$.

נשים לב שגם q שאמם $G = [g]_{\mathcal{B}} = [g_{ij}]$ או מתקיים $q(kv) = k^2q(v)$ $\forall k \in \mathbb{F}, v \in V$.
 $q(v) = x^t G x = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x^i x^j g_{ij}$.
 $q_E(x) = 2x^1 x^2 - (x^2)^2$ ולבסוף גם $q_H(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2$. נקבל כך גם $q_L(x) = (x^1)^2 - (x^2)^2$. בפרט אנו רואים שבמקרה של g_H ישנו וקטורים שמקבלים 0 ב- q_H , כלומר הוא באמת לא מתנהגת כמו נורמה.

9.12.2025 — 16 שיעור 16

16.1 לכsoon חנויות ביילינאריות

נניח ש- V מרחב וקטורי סופי-מידי מעל השדה \mathbb{F} , ו- $\mathbb{F} \times V \rightarrow V : g$ תבנית ביילינארית סימטרית. נרצה לעסוק בשאלת הלכsoon בהקשר של g , כלומר האם יש בסיס \mathcal{B} המטריצה המייצגת של g היא אלכסונית.

משפט 16.1 (נוסחת הפולרייזציה) אם $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ מתקיים,

$$g(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$$

תרגיל 16.1 הוכיחו משפט זה.

הגדעה 16.2 (בסיס אורתוגונלי) בסיס $(b_1, \dots, b_n) = \mathcal{B}$ נקרא אורתוגונלי כאשר $g(b_i, b_j) = 0$ לכל $i \neq j$.

משפט 16.3 (קיים בסיס אורתוגונלי) לכל V ו- g סימטרית כאשר $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ קיים בסיס אורתוגונלי.

הוכחה. אם $g = 0$ אז כל בסיס הוא אורתוגונלי. אחרת נוכיה באינדוקציה על מימד V , כלומר נניח נכונות עבור מערכות מימד קטן מ- n ונסיק את נכונות הטענה עבור n כאשר $g \neq 0$. אם $g(b, b) = 0$, טענה זו נכונה שכן אם $g \neq 0$ או קיימים v, w כך ש- $g(v + w, v + w) = g(v, w) + g(w, v) = 0$, אז גם $g(v, w) = 0$.

היא $U = \text{Span}\{b\}$ ונتابון ב- U^\perp ונתען שמתקיים $v_0 \in U^\perp$ ושים לב כי $v_0 \in U^\perp$, נבדוק,

$$g(b, v_0) = g(b, v) - g(b, b) \frac{g(b, v)}{g(b, b)} = 0$$

ולכן אכן מצאנו שמתקיים $v_0 \in U^\perp$. נוכל אם כן לכתוב $b = v_0 + \frac{g(b, v)}{g(b, b)}b$ וקטור v נותר להראות $U \cap U^\perp = \emptyset$. נניח ש- $v \in U \cap U^\perp$ אז $g(b, v) = 0$, אבל $g(b, kb) = kg(b, b) = k$ כלומר $v = kb$, אבל גם $g(b, v) = 0$ ולכן $k = 0$.

נראה ש- $1 = \dim U^\perp = \dim V - \dim U$. לפי הנחת האינדוקציה למצום של g על U^\perp קיים בסיס אורתוגונלי, אם $b_1 = b$ הבסיס מקיים את טענה המשפט. \square

מסקנה 16.4 אם $D = [g]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ עבור $d_i \in \mathbb{F}$ אז מתקיים,

$$g(v, u) = x^t D y = x^1 d_1 y^1 + \dots + x^n d_n y^n$$

בהתאם גם $d_n \neq 0$ ו- $g(v) = (x^1)^2 d_1 + \dots + (x^n)^2 d_n$

מצאנו שלכל g יש בסיס אורתוגונלי, כלומר $g(b_i, b_j) = 0$ לכל $i \neq j$, אבל במצב זה מטריצה גרם בהכרח אלכסונית, נסה זאת כמסקנה.

מסקנה 16.5 כאשר $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ לכל $D \in M_n(\mathbb{F})$ קיימות $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו- $P \in GL_n(\mathbb{F})$ כך ש- A אלכסונית.

נעבור לחיפוש אחר דרכי למציאת בסיס מלכון כזה.

הגדעה 16.6 (בסיס אורתונורמלי) אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ אז בסיס $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ נקרא אורתונורמלי אם $g(b_i, b_j) \in \{1, 0, -1\}$ לכל $i, j \leq n$.

דוגמה 16.1 כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נגיד,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל $g((x, y, z)^t) = -x^2 - 4xy + 2y^2 + 8xz + 4yz + z^2$, ועתה נרצה לבצע השלמה לריבוע. למעשה יכולנו לחשב מפורלינים כזה בדיקות המטריצה המתאימה לו, כלומר יש התאמה חד-חד ערכית ועל בין מטריצות ותבניות ריבועיות (ולכן גם חנויות ביילינאריות).

או נחשב $g(x, y, z) = -(x + 2y + 4z)^2 + 6y^2 + 15z^2 - 12yz = -(x + 2y + 4z)^2 + 6(y - z)^2 + 9z^2$, כלומר $g(x, y, z) = -(x + 2y + 4z)^2 + 6(y - z)^2 + 9z^2$ ונקבל

$g(u, v, w) = -u^2 + 6v^2 + 9w^2$ ונקבל $u = x + 2y + 4z, v = y - z, w = z$, בהתאם,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

כלומר אם עבדנו במקור בסיס \mathcal{B} עתה מצאנו בסיס מלכון' \mathcal{B}' , וכן ידוע לנו ש- $Q\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ ' עבר המטריצה שהיישבנו זה עתה, או אם $I = PQ$ אז P היא מטריצת המעבר המלכונת.

אילו לא היו לנו ריבועים בביטוי המקורי, אז היינו יכולים להשתמש במעבר מהצורה $v - u = x, y = u + v$ ולקבל בסיס בו יש ריבועים וכן שהוא ניתן לשינוי פעולה הפעיכה. אנו יודעים שכפל של מטריצה אלמנטרית מימין מאפשרת לנו לבצע פעולות שורה, אם נכפול במטריצה המשוכפלת משמאלו נקבל את אותה הפעולה אבל על העמודות, ובהתאם אין זה מפתיע אותנו שמתќבל בדיק $D = P^t AP$. ונכל להשתמש בפעולות שעשינו במהלך מציאת הבסיס המלכון והן מרכיבות הלכה למעשה את P .

15.12.2025 — 17 שיעור 17

17.1 משטחים חלקים

ניבור לדבר על משטחים חלקים, כלומר אובייקטים למרחב שעבור כל נקודה שלהם יש סביבה של גאודיאה המתנהגת כמו מרחב אפיני. עד כה דיברנו על מסילות, הן באיזשהו מובן עמוק מミיד 1, ובאמת הגדרנו אותן כחלקות ולכון כמתנהגות באופן לנארי בסביבות מאוד קטנות. בהתאם נגיד,

הגדרה 17.1 (משטח חלק) $S \subseteq \mathbb{E}^3$, $U \subseteq \mathbb{E}^2$, קיימות $P \in S$ ו- $V \subseteq U$ פתוחות כך שקייםת חילקה $f : U \rightarrow S \cap V$

הומיאומורפיות f .

.2. חד- חד ערכית לכל $u \in U$

דוגמה 17.1 מישורים אפיניים, כלומר אם $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^3$ ו- $\{P + u \mid u \in U\}$

. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid z = f(x, y)\}$ א- $f : U \rightarrow \mathbb{E}^1$ פתוחה ו- f חילקה או

16.12.2025 — 18 שיעור 18

18.1 משטחים רגולריים

משפט 18.1 (שקלות למשטח רגולרי) $S \subseteq \mathbb{E}^3$ נקרא משטח רגולרי אם מתקיימים אחד מבין התנאים הבאים:

1. לכל $P \in S$ קיימת $P \in V \subseteq \mathbb{E}^2$ סביבה פתוחה כך $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ המקיימת,

$$\text{כלומר } f(U) \cong V \cap S \quad (a)$$

$$x \in \text{dom } f, \deg Df|_x = 2 \quad (b)$$

2. לכל $P \in S$ קיימת $P \in V \subseteq \mathbb{E}^3$ סביבה פתוחה כך שותקים ,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

עבור פונקציה המקיים,

$$V \text{ חלקה ב-} (a)$$

3. לכל $P \in S$ קיימת $P \in V \subseteq \mathbb{E}^3$ סביבה פתוחה וקיימת $U \subseteq \mathbb{E}^3$ קבוצה פתוחה כך $U \cap V = g : U \rightarrow S$ חלקה כך שלכל

$$z = g(x, y) \text{ מותקים } (x, y, z) \in S \cap V$$

דוגמה 18.1 עבור $S = S(0, 1) = \{(x, y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ספירת היחידה בין שנוכל לכסות את הקבוצה על-ידי $f(x, y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ ולקביל מהאפיון השקול למשטח שהספרה היא אכן משטח. מהצד השני נוכל גם להגיד את $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

29.12.2025 — 19

19.1 מישור משיק

נבחן את השילשה הסדורה (U, f, V) אשר מהווה פרמטריזציה מקומית של משטח רגולרי, או $\mathbb{E}^2 \subseteq U$ וכן $V \subseteq \mathbb{E}^3$. אם נבחן את $T_u V = \{u\} \times \mathbb{R}^2$ או נקבל קבוצה ב- \mathbb{E}^3 , זהו המישור המשיק של הנקודה $U \in u$. נוכל באופן שקול להסתכל על $T_P \mathbb{E}^3$, ואם $V \cap U \neq \emptyset$ כך $f : U \rightarrow V$ נרצת לבחון את $(T_P S = Df|_u(T_u V), \text{אבל והי הצגה פרמטרית ולא גאומטרית.}$

הגדעה 19.1 (מישור משיק) אם $S \subseteq \mathbb{E}^3$ משטח רגולרי, אז נגידיר את המישור המשיק לנקודה $S \in P \in \mathbb{E}^3$ על-ידי $T_P S = Df|_u(T_u V)$ פתוחה ו- $V \subseteq \mathbb{E}^3$ פרמטריזיה. במקרה זה גם $P = f(u) \in U \subseteq \mathbb{E}^2$

משפט 19.2 (אפין שקול למישור משיק) אם S משטח רגולרי וכן $P \in S$ אז מתקיים,

$$T_P S = \{c'(t_0) \mid c : I \rightarrow S \text{ regular path}, c(t_0) = P\}$$

כלומר מישור משיק מתלבך עם ערכי הנגזרות של מסילות העברות דרך הנקודה.

30.12.2025 — 20 שיעור 20

20.1 התבנית היסודית הראשונה

הגדירה 20.1 (התבנית היסודית הראשונה) נניח ש- $S \subseteq \mathbb{E}^3$ משטח רגולרי ו- $P \in S$. נגידר את התבנית היסודית הראשונה בטור המישור הייחיד העובר ב- P ובעל דיפרנציאל זהה ל- P ב- S .

עבור $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית, נגידר $I_p = \langle , \rangle|_{T_P S \times T_P S}$ להוות התבנית היסודית הראשונה של S ב- P . כאשר,

$$T_P(S) = \{P + f'(t_0) \mid f : I \rightarrow S, f(t_0) = P\}$$

המישור המשיק ל- P ב- S .

דוגמה 20.1 אם $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ המוגדרת על-ידי $f(u^1, u^2) = P + u^1 \xi + u^2 \eta$ כאשר η, ξ בלתי-תלויים ב- \mathbb{R}^3 .

דוגמה 20.2 אם S נתון על-ידי המשוואה $z = 0$ או נוכל להגיד $U = \mathbb{E}^2, V = \mathbb{E}^3$ וכאן $f : (u^1, u^2) \mapsto u^1 e_1 + u^2 e_2$ ונקבל שהתבנית ניתנת להצגה עם מטריצת גرم $G = I_2$.

5.1.2026 – 21 שיעור 21

21.1 התבנית היסודית הראשונה – המשך

כרגע אנו עוסקים במשתחים במרחב האוקלידי, כרגע נסמן $U \rightarrow \mathbb{E}^3$ עם $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ כפרמטריזציה מקומית. בשיעור הקודם דיברנו על התבנית היסודית הראשונה, כלומר לכל $p \in U$ נסמן $I_p \in \mathbb{R}^3$ הנקוציה פנימית $I_p \mapsto p$, זו הנקוציה אשר פועלת על המישור המשיק ל- p במשתח הנחות. כמו כן גם את המישור המשיק של p עליידי שימוש מכפלה פנימית, כלומר $Df|_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 = T_{f(p)}\mathbb{R}^3$, והוא תיאר המשיק לנאר. באופן מוחשי זה הייצוג של המישור האוקלידי על יריעה דו-ממדית, ובו אנו יכולים שוב לשאלות על גודלים וזווית ובודהה. נזכיר גם כי כבר דיברנו על הבניות ביילינאריות סימטריות, ואף ראיינו שקיים לה הבנית ריבועית, היא פנקוציה שמייחסת סקלר לכל כטוטר, הוא הריבוע של הנורמה של הוקטור. לבסוף גם הזכרנו שאנו יכולים בקורסינטה, או בכל להגדיר את מטריצת גראם (התלויה בקורסינטה) של התבנית הבילינארית. עבור $g = I_p$ והבסיס הסטנדרטי (e_1, e_2) הפורש את \mathbb{R}^2 , אז נקבל,

$$(e_1, e_2) \xrightarrow{Df|_p} (Df|_p(e_1), Df|_p(e_2))$$

אלו הם וקטורים בלתי-תלויים מהגדרת המשטח, ועלינו להבין את התנהוגותם. נסמן (x, y, z) או נקבל, בהתאם נוכל לקבל שמטריצת הייצוג היא,

$$g_{11}(p) = D_1 f|_p \cdot D_1 f|_p, \quad g_{12} = D_1 f|_p \cdot D_2 f|_p = g_{21}, \quad g_{22}(p) = D_2 f|_p \cdot D_2 f|_p$$

בשים לב ש- (p) היא בעצם פנקוציה המקבלת שני פרמטרים ומחרורה סקלר, כלומר $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, בהתאם נוכל לקבל שאם מתקיים,

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

או הלאה למעשה $G(p) \in M_2(\mathbb{R})$ היא הבנית ביילינארית. כלומר $G : U \rightarrow M_2(\mathbb{R})$. בהתאם נוכל להגדיר מטריקה חדשה במרחב.

הגדעה 21.1 (מטריקה רימנית במישור) תהי $U \subseteq \mathbb{E}^2$ פתוחה. מטריקה רימנית על U היא פנקוציה $g : U \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ כאשר נסמן,

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

כך ש- $\mathbb{R}^2 \rightarrow U$, אשר מקיימת את התכונה ש- g_{ij} חלקה, וכן ש- $g(p)$ היא הבנית ביילינארית חיובית בהחלט, לכל $p \in U$.

אם נשכח לרוגע את המשטח, בהגדרה שראינו זה עתה ישנו מבנה קיים בפרמטריזציה כללית, ועל-ידי שימוש בתבנית יסודית הראשונה נוכל ליצור הילכה למעשה מטריקה רימנית כזו. כלומר אנחנו משתמשים במכפלה הפנימית של \mathbb{R}^2 כדי להגדיר לכל נקודה התבנית ביילינארית, וכך נקבל בדיקת מטריקה רימנית.

זה גם אומר שנוכל עליידי שינוי קורסינטה להגיע למצב שבו $\text{id} = G(p)$ בבדיקה, זאת שכן היא חיובית בהחלט.

21.2 אורך ושטח של עקומים ומשטחים

נניח ש- $S \subseteq \mathbb{E}^3$ משטח חלק, והוא עקום $I : c : S \rightarrow \mathbb{E}^3$ כך ש- $c(I) \subseteq I$. אם גם $f : U \rightarrow f(U)$ פרמטריזיה מקומית אז נוכל לבחון או קיימת φ המקיימת $\varphi \circ c = f$, כלומר נוכל להשתמש בפרמטריזציה כדי לייצג את העקום. נזכיר גם שהגדרנו את האורך של עקום, אם $I = [a, b]$,

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$$

אבל בהתאם נוכל לקבל,

$$c'(t) = Df|_{\varphi(t)} \circ \varphi'(t)$$

ובהצגה מטריצאלית נחשב ונקבל,

$D_1 f^1(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + D_2 f^1(\varphi(t)) \varphi^2(t) + D_1 f^2(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) + D_2 f^2(\varphi(t)) \varphi^2(t) + D_1 f^3(\varphi(t)) \varphi'(t) + D_2 f^3(\varphi(t)) \varphi^2(t)$

נזכיר כי התבנית היסודית הראשונה בנוייה כך ש- \dots $G = D_1 f^1 D_1 f^1 + \dots$ ולכן מתקיים,

$$\|c'(t)\| = g_{11}(\varphi(t))(\varphi^1(t))^2 + g_{21}(\varphi(t))\varphi^1(t)\varphi^2(t) + g_{22}(\varphi(t))(\varphi^2(t))^2$$

כלומר ישנו קשר הדוק בין תבנית יסודית ראשונה ובין המרחק של עקום במשטה.

6.1.2026 – 22 שיעור 22

22.1 אורך ושטח על משטח

נמשיך בדיוון שלנו על מידות מרחקים של עוקמים מסווגים במסטחים. המטרה שלנו היא במקום לבנות את המסלולות מ- I ל- S , לבנות אותן לפטריאויצה U . בהתאם אם $c = f \circ \varphi : U \rightarrow S$ ו- $f : I \rightarrow U$ או נקבל,

$$c'(t) = Df|_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) = \begin{pmatrix} D_1 f(\varphi(t)) & D_2 f(\varphi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_1(t) \\ \varphi'_2(t) \end{pmatrix}$$

אבל נזכיר כי אנו מהפכים את $\langle c'(t), c'(t) \rangle$, ובהתאם

$$\|c'(t)\|^2 = (c'(t))^t c'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(t) & \varphi'_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 f(\varphi(t)) \\ D_2 f(\varphi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_1(t) \\ \varphi'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}\varphi(t) & g_{12}\varphi(t) \\ g_{21}\varphi(t) & g_{22}\varphi(t) \end{pmatrix}$$

22.2 שטח של משטח

להציג שטח זה קשה.

הערה נזכיר שמתקיים $|v \wedge w|^2 = |v|^2|w|^2 - (v \cdot w)^2$.

נשים לב כי אפשר לייצג שטח על-ידי,

$$\text{vol}_2(f(R)) = \int_R \|D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)\| du$$

ולכן,

$$\|D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)\|^2 = \langle D_1 f(u), D_1 f(u) \rangle \cdot \langle D_2 f(u), D_2 f(u) \rangle - \langle D_1 f(u), D_2 f(u) \rangle^2 = E(u)G(u) - F^2(u)$$

עבור (E, F, G) נסיק שמתקיים $I(p) = (\frac{E}{F}, \frac{F}{G})$.

$$\text{vol}_2(f(R)) = \int_R \sqrt{E(u)G(u) - F^2(u)} du$$

הגדרה 22.1 (פונקציה שומרת שטח) יהיו $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{E}^3$ משטחים (פטריאוים). נקראת שומרת שטח אם עבור $F : S_1 \rightarrow S_2$ ו- $f_1 : U \rightarrow S_1, f_2 : U \rightarrow S_2$ מתקיים,

$$\forall R \subseteq U, \text{vol}_2(f_1(U)) = \text{vol}_2(f_2(U))$$

במקרה זה נקבל שוגם $S = S^2(\mathbb{R})$. לדוגמה כאשר $E_1(u)G_1(u) - F_1^2(u) = F_2(u)G_2(u) - F_2^2(u)$ ספירת היחידה וכן $(0, \pi)$ נגדיר,

$$f : U \rightarrow S, \quad f(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)^t$$

בהתאם המטריצה המייצגת את התבנית היסודית הראשונה היא 1

12.1.2026 – 23 שיעור 23

עיקומיות 23.1

אנו יודעים שבewood שהנגזרת הראשונה מעידה על סדר השינוי של פונקציה, הנגזרת השנייה היא שערוך טוב לקבץ השינוי בשיפוע, כלומר הינה ש- $\mathbb{E}^3 \rightarrow U$: f משטה פרמטרי, ותהי $U \in (a, b)$, או מנוסחת טילור נקבל, אפשרות לנו לחזור את העקומות של גרפ. נניח ש-

$$f((a,b)+(h,k)) - f(a,b) = D_1 f(a,b) \cdot h + D_2 f(a,b) \cdot k + \frac{1}{2} (D_1^2 f(a,b) \cdot h^2 + D_1 D_2 f(a,b) \cdot hk + D_2^2 f(a,b) \cdot k^2) + R(h,k)$$

אבל נוכל לכתוב בפורמט של חיבורית ריבועית,

$$f((a, b) + (h, k)) - f(a, b) = D_1 f(a, b) \cdot h + D_2 f(a, b) \cdot k + \frac{1}{2}(h, k) \begin{pmatrix} D_1^2 f & D_1 D_2 f \\ D_2 D_1 f & D_2^2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + R(h, k)$$

אם נכתוב $n = \frac{D_1 f \wedge D_2 f}{|D_1 f \wedge D_2 f|}$

$$n(f((a, b) + (h, k)) - f(a, b)) = 0 + \frac{1}{2}(n, k) \begin{pmatrix} D_1^2 f & D_1 D_2 f \\ D_2 D_1 f & D_2^2 f \end{pmatrix} n + R(h, k)(n, k)^t n$$

הגדירה 23.1 (התבונת היסטורית השניה) *הו* $\rightarrow U$ *משתחה פרמטרי* (*מקומי*) *רגולרי*.

$$L = D_1^2 f \cdot n, \quad M = D_1 D_2 f \cdot n = D_2 D_1 f \cdot n, \quad N = D_2^2 f \cdot n$$

כasher,

$$n : U \rightarrow S^2, \quad n(u) = \frac{D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)}{|D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)|}$$

דוגמה 23.1 נבחן את המשויר. נגדיר $f(t, s) = p + tu + sv$. במקרה זה $p \in \mathbb{E}^3$, $u, v \in \mathbb{R}^3$ עבור $t, s \in \mathbb{R}$. בהתאם נקבל $D_1 f \equiv u$, $D_2 f \equiv v$. נקבל שגם $L = M = N = 0$ וכחומר $n(t, s) = \frac{u \wedge v}{|u \wedge v|}$. $D_1^2 f \equiv D_2^2 \equiv D_1 D_2 f \equiv 0$.

הערה מתקיים $D_i^2f \cdot n + D_1f \cdot D_1n = 0$ ולכן $D_if \cdot n : U \rightarrow \mathbb{E}^1$ מוגדרת הנורמל. במצב זה נקבל שגם $D_1f \cdot n = 0$.

נוסף למשום בכלי חדש זה. אם $c \in I$ פירוק של I הוא $c = nc + c''$, נניח שזווי פרמטריזציה לפי אורך שלו. במקורה זה מתקיים $\|c'\| = 1$ וכן $c(0) = P$. נסיק ש- $c' \equiv 0$. או $nc = 0$. נובע ש- $c'' = an + b(n \wedge c)$. כלומר $c'' = (c'' \cdot n) + (c'' \cdot n \wedge c')$.

$$(D_1 f, D_2 f) \cdot (\phi'_1, \phi'_2) = D_1 f \phi'_1 + D_2 f \phi'_2$$

נקבל לבסוף שמתכונים

13.1.2026 – 24 שיעור 24

נמשיך בדיאן של השיעור הקודם. נניח ש- $S \subseteq \mathbb{E}^3$ משטח פרמטרי חלק, ותהי $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ פרמטריזציה מקומית, כלומר $U \subseteq \mathbb{E}^2$ פתוחה. נסמן $\text{II}_P \in S$ את המישור המשיק ב- S , $T_P S$, את התבנית הראשונה על-ידי I_P ואת התבנית השנייה על-ידי II_P .

דוגמה 24.1 24.1 נסוק בגרף של פונקציה. נניח ש- $f : U \rightarrow \mathbb{E}^1$ היא פונקציה סקלרית. נגדיר את המשטח $S = G_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$. נגדיר $F : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ הפרמטריזציה של S ולכון נקבל,

$$D_1 F = (1, 0, D_1 f)^t, \quad D_2 F = (0, 1, D_2 f)^t$$

ולכן,

$$n = (-D_1 f, -D_2 f, 1)^t \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (D_1 f)^2 + (D_2 f)^2}}$$

עבור לחישוב לkrאאת התבנית היסודית השנייה,

$$D_1^2 F = (0, 0, D_1^2 f)^t, \quad D_2^2 F = (0, 0, D_2^2 f)^t, \quad D_1 D_2 F = (0, 0, D_1 D_2 f)^t$$

עתה נצטרך לכפול סקלרית ב- n ,

$$L = D_1^2 f, \quad M = D_1 D_2 f, \quad N = D_2^2 f$$

וקיבילנו,

$$\text{II}_F = \begin{pmatrix} D_1^2 f & D_1 D_2 f \\ D_2 D_1 f & D_2^2 f \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (D_1 f)^2 + (D_2 f)^2}}$$

זהו בדיקון ההטיין של f .

19.1.2026 – 25 שיעור 25

25.1 עקומותיות

תהי $S \subseteq \mathbb{E}^3$ יריעה במרחב,

הגדרות ומשפטים

4	הגדירה 1.1 (ישרים מקבילים)
4	הגדירה 1.2 (קולינאריות)
4	הגדירה 1.3 (מיشور אפיני)
4	משפט 1.4 (מספר נקודות מינימלי במיشور אפיני)
4	הגדירה 1.5 (מודל אנלטי)
5	הגדירה 1.6 (מרחיב אפיני)
6	הגדירה 2.1 (פונקציית הפרש)
6	טענה 2.3 (תכונות של פונקציית ההפרש)
7	הגדירה 2.5 (מרחיב וקטורימושרה מנוקודה)
7	הגדירה 2.6 (חת-מרחיב אפיני)
7	משפט 2.7 (יחידות חת-מרחיב לינארי פורס)
8	הגדירה 2.8 (מרחיב משיק)
8	הגדירה 2.9
8	הגדירה 2.10
8	משפט 2.11
9	הגדירה 3.1 (מודל אפיני סטנדרטי)
9	הגדירה 3.2 (העתקה אפינית)
9	הגדירה 3.4 (אייזומורפיים אפיני)
10	הגדירה 3.5 (חת-יריעה נוצרת)
10	הגדירה 3.6 (בסיס אפיני)
10	הגדירה 3.7 (מערכת יהוס)
10	הגדירה 3.9 (קורדיינטה)
11	הגדירה 4.1 (מפה ופרמטריזציה למרחיב וקטורי)
11	משפט 4.2 (מרחיב וקטורימושרה)
11	הגדירה 4.3 (מפה אפינית)
12	הגדירה 5.1 (נורמה)
12	הגדירה 5.2 (מטריקה)
12	הגדירה 5.3 (כדור)
12	הגדירה 5.4 (כדור סגור וספירה)
12	הגדירה 5.5 (סדרה וסדרה מתכנסת)
12	משפט 5.6 (התכנסות וההתכנסות קורדיננטה)
13	הגדירה 5.7 (מסילה)
13	הגדירה 5.8 (אורך של מסילה)
13	הגדירה 5.9
13	משפט 5.10
14	הגדירה 6.1 (קמירות במרחיב אפיני)
14	הגדירה 6.2 (קטע אפיני)
14	הגדירה 6.3 (קבוצה קמורה)
14	הגדירה 6.4 (סגור קמור אפיני)
15	הגדירה 7.1 (דיפיאומורפיזם)
15	הגדירה 7.2 (רפרטורייזציה)
15	משפט 7.4 (קיים פרמטריזציה לפי אורך)

15	הגדירה 7.5 (בסיס אורחותגוני של נזרת)
18	משפט 10.1
18	משפט 10.2
20	הגדירה 12.1 (מרחב דו-אלי)
21	הגדירה 13.1 (בסיס דו-אלי)
21	משפט 13.2 (קיים בסיס דו-אלי)
21	משפט 13.3 (שיקולות לאיפוס במרחב דו-אלי)
21	משפט 13.4 (קיים בסיס לבסיס דו-אלי)
21	הגדירה 13.5 (מאפסים)
21	משפט 13.6 (תכונות מאפס)
21	משפט 13.7
22	הגדירה 13.8 (קובוצת האפסים)
22	משפט 13.9
22	משפט 13.10
22	הגדירה 13.11 (העתקה דו-אלית)
23	משפט 14.2
24	הגדירה 15.1 (חבנית ביילינארית)
24	הגדירה 15.2 (מטריצת גורם)
24	הגדירה 15.5 (מטריצות חופפות)
24	הגדירה 15.6 (חבנית ביילינארית סימטרית)
24	הגדירה 15.7 (חבנית אורחותגונית)
24	הגדירה 15.8 (גרעין של חבנית ביילינארית)
24	הגדירה 15.9 (ניוון)
25	הגדירה 15.10 (חבנית ריבועית)
26	משפט 16.1 (נוסחת הפולריזציה)
26	הגדירה 16.2 (בסיס אורחותגוני)
26	משפט 16.3 (קיים בסיס אורחותגוני)
26	הגדירה 16.6 (בסיס אורחותונורמלי)
28	הגדירה 17.1 (משטה חלק)
29	משפט 18.1 (שיקולות למשטה רגולרי)
30	הגדירה 19.1 (מיישור משיק)
30	משפט 19.2 (אפויון שקול למיישור משיק)
31	הגדירה 20.1 (החבנית היישודית הראשונה)
32	הגדירה 21.1 (מטריקה רימנית מיישור)
34	הגדירה 22.1 (פונקציה שומרת שטח)
35	הגדירה 23.1 (החבנית היישודית השנייה)