פתרון מטלה 1 — תורת המידה, 80517

23 באוקטובר 2025

שאלה 1

תהי קבוצה $X \neq \emptyset$.

סעיף א׳

תהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ כך ש־$X \in \mathcal{A}$ ולכל $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ מתקיים $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{A}$.
נראה ש־$\mathcal{A}$ היא אלגברה על X.

הוכחה. מתקיים $X \in \mathcal{A}$ ולכן גם $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{A}$.
אם $E \in \mathcal{A}$ אז $X \setminus E = E^C \in \mathcal{A}$, כלומר יש סגירות למשלים.
לבסוף נרצה להראות סגירות לאיחוד סופי, נניח ש־$E_1, E_2 \in \mathcal{A}$, אז מתקיים,

$$E_1 \cap E_2 = E_1 \setminus E_2^C$$

אבל $E_2^C \in \mathcal{A}$ ולכן $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{A}$. בהתאם גם $\left(E_1^C \cap E_2^C\right)^C = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$ ולכן יש סגירות לאיחודים סופיים.
מצאנו כי שלוש התכונות של אלגברה חלות על $\mathcal{A}$ ובהתאם היא אלגברה. □

סעיף ב׳

תהיינה $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}^2(X)$ אלגברות על X כך שמתקיים $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$ לכל $n < \omega$.
נוכיח שגם $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{A}_n\}$ אלגברה על X.

הוכחה. בבירור $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ ולכן מספיק לבדוק סגירות למשלים ולאיחוד סופי.
אם $A \in \mathcal{A}$ אז קיים $n < \omega$ מינימלי כך ש־$A \in \mathcal{A}_n$, אבל $\mathcal{A}_n$ אלגברה ולכן $A^c \in \mathcal{A}_n$ וגם $A^C \in \mathcal{A}$.
נניח ש־$A, B \in \mathcal{A}$ ובאופן דומה נבחר $n < \omega$ מינימלי כך ש־$A, B \in \mathcal{A}_n$, אז מתקיים $A \cup B \in \mathcal{A}_n$ ונקבל גם סגירות לאיחוד סופי ב־$\mathcal{A}$. □

סעיף ג׳

נראה כי איחוד שרשרת עולה של σ־אלגברות לא בהכרח σ־אלגברה.
פתרון נגדיר $X = \omega_1$ וכן $X_n = n$, וכן $\mathcal{A}_n = \langle X_n \rangle$, לכל $n < \omega$. מהגדרת ה־σ־אלגברה הנוצרת נקבל ש־$\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$ לכל n. נגדיר $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{A}_n\} = \langle \omega \rangle$, ונטען שזו היא σ־אלגברה. אבל $X_n \in \mathcal{A}$ לכל n ולכן גם $\bigcup_{n<\omega} X_n = \omega \in \mathcal{A}$. אבל טענה זו נכונה אם ורק אם קיים $n < \omega$ כך ש־$\omega \in \mathcal{A}_n$, וזה כמובן לא יתכן.

שאלה 2

תהי $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ־אלגברת בורל ותהי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה.

סעיף א׳

נראה ש־U ניתנת להצגה כאיחוד של אוסף קטעים פתוחים זרים בזוגות.

הוכחה. נניח ש־$U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ חלוקה למחלקת קשירות מסילתית של U. מתקיים $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ לכל $\alpha \neq \beta \in I$ מהגדרת הקשירות. נותר להוכיח שקבוצה קשירה מסילתית ב־$\mathbb{R}$ היא קטע.

נניח בשלילה ש־V קשירה מסילתית אך לא קטע ולכן קיימת $a \notin V$ כך שקיימים $b < a < c$ כאשר $b, c \in V$. אז בהתאמה $V \cap (-\infty, a)$ וכן $V \cap (a, \infty)$ קבוצות פתוחות המהוות חלוקה של V, סתירה. $\square$

סעיף ב׳

נראה ש־$|I| \leq \omega$.

הוכחה. תהי פונקציית בחירה $c : I \to U$ כך ש־$c''I \subseteq \mathbb{Q}$, אז $\omega < |I| \implies \omega \leq |c(U)| > \omega$, וזו כמובן סתירה. $\square$

סעיף ג׳

נסיק ש־$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ נוצרת על־ידי אוסף הקטעים הפתוחים ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה. ידוע כבר כי $\mathbb{B} = \{B(x, r) \mid x \in \mathbb{R}, r > 0\}$ הוא בסיס לטופולוגיה של $\mathbb{R}$ ולכן מהווה גם בסיס ל־$\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
נוכל לראות זאת בעוד דרך, כל $U \in \tau(\mathbb{R})$ היא איחוד בן־מניה של קטעים פתוחים, ולכן אם נבחר את אוסף כל הטעים הפתוחים נקבל שכל U פתוחה היא איחוד של מספר בן־מניה של איברים משם. $\square$

שאלה 3

תהי $f : X_1 \to X_2$ פונקציה ותהי $\mathcal{M}_2$ σ־אלגברה על X_2.
נראה כי $\mathcal{M}_1 = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{M}_2\}$ היא σ־אלגברה על X_1.

הוכחה. $\emptyset, X_2 \in \mathcal{M}_2$ ולכן גם $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(X_2) = X_1 \in \mathcal{M}_1$.
נניח ש־$E \in \mathcal{M}_1$, אז קיימת $F \in \mathcal{M}_2$ כך ש־$E = f^{-1}(F)$ אך גם $F^C \in \mathcal{M}_2$ ולכן גם $E^C = (f^{-1}(F))^C = f^{-1}(F^C) \in \mathcal{M}_1$.
נניח ש־$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_1$ ונסמן $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_2$ כך ש־$f(E_n) = F_n$ לכל $n < \omega$. ידוע כי $\bigcup\{F_n\} \in \mathcal{M}_2$ וכן,

$$f^{-1}(\bigcup\{F_n\}) = \bigcup\{f^{-1}(F_n) \mid n < \omega\} \in \mathcal{M}_1$$

ונסיק כי יש סגירות לאיחוד בן־מניה וש־$\mathcal{M}_1$ היא σ־אלגברה על X_1. □

שאלה 4

יהי מרחב מטרי (X,d) כך שהטופולוגיה τ המושרית ממנו היא σ־אלגברה.
נראה שזהו מרחב דיסקרטי.

הוכחה. תהי נקודה $x \in X$ ונגדיר את הקבוצות הפתוחות,

$$U_n = B(x, \frac{1}{n})$$

לכל $n > 1$. אז מסגירות לחיתוך בן־מניה גם,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{x\} \in \tau$$

כלומר מצאנו ש־$\tau = \mathcal{P}(X)$ כרצוי. □

שאלה 5

תהי X קבוצה ונניח ש־$\mathcal{M}$ היא σ־אלגברה על X כך ש־$|X| \ge \omega$.

סעיף א׳

נראה ש־$\mathcal{M}$ מכילה מספר אינסופי של קבוצות זרות.

הוכחה. נניח ש־$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ סדרת קבוצות מדידות, ונגדיר סדרה חדשה ברקורסיה. נגדיר,

$$Y_1 = \begin{cases} X_1 & X_1 \ne \emptyset \\ X & \text{otherwise} \end{cases} \qquad Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n \cap X_{n+1} & Y_n \cap X_{n+1} \ne \emptyset \\ Y_n \cap X_{n+1}^C & \text{otherwise} \end{cases}$$

אז נקבל ש־$Y_n \ne \emptyset$ וכן ש־$\{Y_n\}$ שרשרת יורדת ביחס ההכלה, ולבסוף נגדיר $Z_n = Y_n \setminus Y_{n+1}$, אז נובע ש־$Z_n \cap Z_m = \emptyset$ לכל $n \ne m$, כלומר זוהי קבוצה בת־מניה של קבוצות מדידות זרות בזוגות. □

סעיף ב׳

נראה ש־$|\mathcal{M}| > \omega$.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $f : 2^\omega \to \mathcal{M}$ על־ידי,

$$f(g) = \bigcup \{Z_n \mid n < \omega, g(n) = 1\}$$

ידוע ש־$\{Z_n\}$ קבוצה של קבוצות מדידות שונות ולכן איחוד בן־מניה שלהן הוא קבוצה מדידה, ונקבל ש־f מעידה על $|\mathcal{M}| = 2^\omega > \omega$. □