# אנליזה פונקציונלית — סיכום

2 באפריל 2025

# תוכן העניינים

# 1 שיעור 1 — 26.3.2025

## 1.1 רקע

אנליזה פונקציונלית היא כמו אלגברה לינארית. בקורס זה נחקור מרחבים וקטוריים והעתקות עליהם, אבל על מרחבים מורכבים יותר והעתקות מורכבות יותר. נתחיל בשאלה,

**תרגיל 1.1** יהי $(X,\rho)$ מרחב מטרי כלשהו, ונניח ש־$A \subseteq X$. נניח גם ש־$(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$.
מהם התנאים ההכרחיים על $A$ כך ש־$(a_n)$ תכלול תת־סדרת קושי?

נעבור לדוגמה וטענות מאינפי 1 לרענן את זכרוננו.

**דוגמה 1.1** המרחב המטרי הכי אינטואיטיבי הוא $X = \mathbb{R}$ ו־$\rho(x,y) = |x-y|$.

**טענה 1.1** *תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־$A$ חסומה, ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, אז יש ל־$(a_n)$ תת־סדרת קושי.*

*הוכחה.* $A \subseteq [-R,R]$ עבור $R \in \mathbb{R}$. נתחיל בהגדרה של $\Delta_0 = A$ ולכן יש אינסוף, ולכן יש בקטע $\Delta_0$ אינסוף נקודות של הסדרה, וכן $|\Delta_0| = 2R$. נבחן את הקטעים החוצים את $\Delta_0$, הם $[-R,0],[0,R]$, נבחר את זה מביניהם שמכיל אינסוף נקודות של $(a_n)$ להיות $\Delta_1$, וכך נמשיך ונגדיר סדרה $(\Delta_n)$. נובע שהסדרה הנתונה היא סדרה יורדת, במובן ש־$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$, מתקיים גם $|\Delta_n| = \frac{|\Delta_0|}{2^n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ובכל $\Delta_n$ יש אינסוף נקודות של $(a_n)$. נבחר $a_{n_1} \in \Delta_1$ וכך באופן כללי גם $a_{n_k} \in \Delta_k$, לכן נובע $|a_{n_k} - a_{n_l}| \le \frac{1}{2^k}$ עבור $l \ge k$. לכן נובע שאכן ישנה תת־סדרת קושי בסדרה $(a_n)$. □

**הערה** טענה זו נכונה גם כאשר מסתכלים על מרחב $(\mathbb{R}^n,\rho)$ עבור $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

**הגדרה 1.2** (מרחב נורמי) יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ עבור $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, ותהי פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ המקיימת,

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0_V$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\forall x,y \in V, \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

אז $(V,\|\cdot\|)$ יקרא מרחב נורמי עם נורמה $\|\cdot\|$.

**הגדרה 1.3** (מרחב l2) נגדיר את הקבוצה $l_2 = \{x = (x_1,\dots) \mid \forall k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$. נגדיר גם,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

אז המרחב הנורמי $l_2$ הוא הקבוצה והנורמה הללו.

נבחין כי עלינו להוכיח שזהו אכן מרחב נורמי לפי ההגדרה.

**משפט 1.4 (אי־שוויון קושי־שווארץ)** *מתקיים,*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**סימון 1.5** נסמן $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

*הוכחה.* עבור $t \in \mathbb{F}$ סקלר כלשהו,

$$0 \le \langle x+ty, x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle t^2$$

עובדה ידועה היא $At^2+Bt+C \ge 0 \implies B^2-4AC \le 0$ ולכן,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

ולכן,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

ואם נגדיר $x_i' = |x_i|$ וכן $y_i' = |y_i|$ אז מאי־השוויון הנתון נובע,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i'| \cdot |y_i'| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

□

נעבור להוכחת ההגדרה של $l_2$, כלומר ההוכחה שהנורמה שהגדרנו היא אכן נורמה.

*הוכחה.*

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\implies \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

□

עתה משקיבלנו ש־$l_2$ הוא אכן מרחב נורמי, נוכל לדון בתכונותיו.

**דוגמה 1.2** במרחב $(l_2, \|\cdot\|)$ נגדיר את שפת כדור היחידה במרחב,

$$S = \{x \in l_2 \mid \|x\| = 1\}$$

נבחין כי $S$ קבוצה חסומה ב־$l_2$. נבחר $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על־ידי $l_n = (0, \dots, 1, \dots)$ כאשר $l_n^n = 1, l_n^m = 0$ לכל $m \neq n$. כמובן מתקיים $\|l_n\| = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן סדרת הנקודות חסומה ב־$S$.

**טענה 1.6** *$(l_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq l_2$ אינה כוללת תת־סדרת קושי.*

*הוכחה.* נבחין כי $\|l_n - l_m\| = \sqrt{2}$ לכל $n \neq m$. □

**סימון 1.7** (כדור) עבור מרחב מטרי $(X, \rho)$, נסמן $B_r(x) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$.

**הגדרה 1.8** (קבוצה חסומה לחלוטין) יהי מרחב מטרי $(X, \rho)$ מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$, אז נאמר ש־$A$ חסומה לחלוטין (Totally bounded) אם לכל $\epsilon > 0$ קיים מספר סופי של נקודות $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq X$, כך שמתקיים $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\epsilon(x_i)$.

מיד נראה שימוש בהגדרה זו במשפט, ובכך ניתן הצדקה להגדרה הלכאורה משונה הזאת.

**משפט 1.9 (שקילות לחסימות לחלוטין)** *יהי מרחב מטרי $(X, \rho)$ ותהי $A \subseteq X$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *$A$ חסומה לחלוטין.*
2. *בכל סדרה של $A$ ניתן לבחור תת־סדרת קושי.*

משפט זה הוא משפט חשוב ומרכזי, ועל הקורא לשנן את הוכחתו. את ההוכחה אומנם נראה בהרצאות הבאות, אך נראה עתה שימושים למשפט זה. נעבור למשפט פחות חשוב ומרכזי,

**משפט 1.10** *נניח ש־$X = \mathbb{R}^m$, וכן ש־$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$, אז אם $A \subseteq \mathbb{R}^m$ חסומה, אז היא חסומה לחלוטין.*

*הוכחה.* נחסום את $A$ על־ידי קובייה מספיק גדולה, נחלק את הקובייה לתת־קוביות מספיק קטנות (ההצדקה מגיעה מאינפי 3), ונוכל לחסום כל קובייה כזו בכדור. נסמן $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}^m$ את מרכזי הקוביות ונקבל $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(x_j)$ מהגדרת החלוקה של הקובייה החוסמת. □

**הגדרה 1.11** ב־$(l_2, \|\cdot\|)$ נגדיר את הקבוצה,
$$\Pi = \{x = (x_1, \dots) \in l_2 \mid \forall i \in \mathbb{N}, |x_i| \le \frac{1}{2^{i-1}}\}$$
אם $x \in \Pi$ אז $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty$, ובהתאם בהכרח $\Pi \subseteq l_2$.

**משפט 1.12** *הקבוצה $\Pi$ חסומה לחלוטין.*

*הוכחה.* תהי $(x_1, \dots) \in \Pi$, ונגדיר $x_n^* = (x_1, \dots, x_n, \dots, 0, 0, \dots)$. נגדיר גם $\Pi_n^* = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \mid |x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}\}$. הקבוצה $\Pi_n^*$ חסומה לחלוטין, זאת שכן הקבוצה שקולה לקבוצה ב־$\mathbb{R}^n$, ונבחין כי היא חסומה, ולכן ההוכחה שראינו קודם עודנה תקפה ובהתאם $\Pi_n^*$ חסומה לחלוטין.
נבחין כי
$$\|x - x_n^*\|^2 = \sum_{i=n+1}^\infty x_i^2 \le \sum_{i=n+1}^\infty \frac{1}{2^{2i-2}} = \sum_{i=n+1}^\infty \frac{4}{4^i} = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$$
ולכן $\|x - x_n^*\| \le \frac{1}{2^{n-1}}$. יהי $\epsilon > 0$, אז $\Pi_n^*$ חסומה לחלוטין ולכן קיימים $y^1, \dots, y^n \in l_2$ כך שמתקיים,
$$\Pi_n^* \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(y^i)$$
נניח ש־$x_n^* \in B_\epsilon(y^i)$ ונוכל לבחור $n$ כך שמתקיים $\|x - x_n^*\| < \epsilon$, אז
$$\|x - y^i\| \le \|x - x_n^*\| + \|x_n^* - y^i\| < 2\epsilon$$
נובע ש־$\Pi \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{2\epsilon}(y^i)$. $\square$

נבחין כי עתה ראינו שב־$l_2$ במרחב נורמי יש קבוצות חסומות, זהו אכן מרחב מעניין.

# 2 שיעור 2 — 2.4.2025

## 2.1 חסימות לחלוטין

נראה את הוכחתם של שני משפטים שמומלץ לזכור. המשפט הראשון הוא משפט 1.9, בקורס זה נקרא לו משפט האוסדורף, זאת למרות שזהו רק משפט חלקי למשפט המוכר כמשפט בשם זה. נעבור להוכחה.

*הוכחה.* נניח ש־$(X,\rho)$ מרחב מטרי ו־$A \subseteq X$ חסומה לחלוטין, לכן ניתן לכסות את הקבוצה $A$ על־ידי מספר סופי של כדורים. נניח ש־$A \supseteq \{x_n\}_{n=1}^\infty$ ונבחר $\epsilon = 1$ התחלתי. מכאן נסיק שקיים כדור $B^1_{\epsilon=1}$ הכולל אינסוף נקודות בסדרה. נגדיר $V^1 = A \cap B^1_{\epsilon=1}$ ונסיק $\operatorname{diam}(V^1) = \sup_{x,y\in V^1} \rho(x,y) \le 2$. אז $V^1$ כולל מספר אינסופי של נקודות של $\{x_n\}$. אין ספק ש־$V^1$ חסומה לחלוטין. נפעל עכשיו באופן דומה על $B^1_{\epsilon=1}$, הקבוצה $V^1$ חסומה לחלוטין ולכן ניתן לכסות אותה על־ידי מספר סופי של כדורים עבור $\epsilon = \frac{1}{2}$. נבחר כדור שמכיל אינסוף נקודות של הסדרה ב־$V^1$, נסמנו $B^2_{\epsilon=\frac{1}{2}}$, ונגדיר גם $V^2 = V^1 \cap B^2_{\epsilon=\frac{1}{2}}$. הפעם $\operatorname{diam}(V^2) \le 1$ ולכן $V^2$ חסומה לחלוטין וכוללת מספר אינסופי של נקודות של $\{x_n\}$. נחזור על תהליך זה אינסוף פעמים.

בכתוצאה מהתהליך נקבל $\ldots \supset V^k \supset \cdots \supset V^2 \supset V^1$ וכן ש־$\operatorname{diam}(V^k) \le \frac{2}{k}$, ואף ש־$V^k$ כולל אינסוף נקודות של $\{x_n\}$. נבחר $x_{n_1} \in V^1, x_{n_2} \in V^2, \ldots$ ונקבל תת־סדרה $A \supseteq \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ כך ש־$\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+l}}) \le \frac{2}{k} \to 0$, זאת שכן $x_{n_k}, x_{n_{k+l}} \in V^k$. קיבלנו אם כן שתת־הסדרה היא קושי.

נעבור לכיוון השני, נניח שלכל סדרה יש תת־סדרת קושי ב־$A$. נניח בשלילה כי $A$ אינה חסומה לחלוטין, לכן קיים $\epsilon > 0$ עבורו אין כיסוי סופי של כדורים. מספיק להוכיח כי ישנה סדרה $A \supseteq \{x_n\}_{n=1}^\infty$ שאינה כוללת תת־סדרת קושי. נבחר $x_1 \in A$. לכן נוכל להסיק שקיימת $x_2 \in A$ כך ש־$\rho(x_1, x_2) \ge \epsilon$. נמשיך כך להשתמש באי־החסימות עבור $\epsilon$ כדי לבנות סדרה של אינסוף נקודות כאלה, כלומר $\rho(x_n, x_m) \ge \epsilon$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש־$n \ne m$. לסדרה $\{x_n\}$ אין תת־סדרת קושי, בסתירה להנחה. $\square$

## 2.2 מרחבים מטריים חשובים

**הגדרה 2.1** (מרחב הפונקציות הרציפות) נגדיר את המרחב המטרי $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ עבור $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}$ ו־$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. זהו מרחב נורמי.

**הגדרה 2.2** (חסימות במידה אחידה) נניח ש־$\Phi \subseteq C[a,b]$ ונניח שקיים $K > 0$ כך שמתקיים $|\varphi(x)| \le K$ לכל $x \in [a,b]$ ולכל $\varphi \in \Phi$, כאשר $K$ אינו תלוי ב־$x, \varphi$. במקרה זה נאמר ש־$\Phi$ חסומה במידה אחידה.

**דוגמה 2.1** נגדיר $\Phi = \{\sin(nx)\}_{n=1}^\infty$, וידוע כי $|\sin(nx)| \le 1$, אז $\Phi$ חסומה לחלוטין.

**דוגמה 2.2** נגדיר $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$ עבור $n \in \mathbb{N}$, אז,

$$\forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| < 1$$

ולכן נאמר ש־$\{f_n\}$ חסומה במידה אחידה.

**הגדרה 2.3** (רציפות במידה אחידה) באנגלית Eqicontinuous family of functions. נניח ש־$\Phi \subseteq C[a,b]$ עבור כל $\epsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\epsilon)$ (כלומר ערך $\delta$ תלוי רק ב־$\epsilon$), כך שמתקיים,

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b], \varphi \in \Phi\ |x_1 - x_2| \le \delta(\epsilon) \implies |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le \epsilon$$

במקרה זה $\Phi$ נקראת רציפה במידה אחידה.

**דוגמה 2.3** נחזור לדוגמה האחרונה שלנו, ונבדוק אם היא רציפה במידה אחידה,

$$|f_n(\frac{1}{n}) - f_n(0)| = 1$$

ולכן $\{f_n\}$ אינה רציפה במידה אחידה.

**טענה 2.4** *נניח ש־$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C[a,b]$. נניח שקיים $K > 0$ כך ש־$|f_n(x)| \le K$ עבור כל $x \in [a,b], n \in \mathbb{N}$. נניח גם ש־$|f'_n(x)| \le K$. אז הקבוצה $\{f_n\}$ חסומה במידה אחידה וגם רציפה במידה אחידה.*

*הוכחה.*

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \le |f'(y)| \cdot |x_1 - x_2| \le K|x_1 - x_2|$$

ולכן ניתן לבחור $\delta(\epsilon)=\frac{\epsilon}{K}$, והוא לא תלוי בפונקציות או בערכי $n$. $\square$

**משפט 2.5 (משפט ארצלה)** *נניח ש־$\Phi\subseteq(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *לכל סדרה $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\Phi$ קיימת תת־סדרת קושי. כלומר קיימת $\{f_{n_k}\}$ כך ש־$\|f_{n_k}-f_{n_{k+l}}\|_\infty\xrightarrow{k\to\infty}0$ עבור כל $l\in\mathbb{N}$.*
2. *$\Phi$ חסומה במידה אחידה ורציפה במידה אחידה.*

*הוכחה.* בכיוון הראשון נניח שלכל סדרה יש תת־סדרת קושי. ממשפט 1.9 נסיק ישירות ש־$\Phi$ חסומה לחלוטין. נבחר $0<\epsilon$ ולכן $\Phi\subseteq\bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(f_i)$. תהי $\varphi\in\Phi$, אז קיים $1\le i\le N$ כך ש־$\varphi\in B_\epsilon(f_i)$,

$$\|\varphi\|_\infty=\|\varphi-f_i+f_i\|_\infty\le\|\varphi-f_i\|_\infty+\|f_i\|_\infty\le\epsilon+\|f_i\|_\infty$$

הפונקציות $f_1,\dots,f_N$ רציפות בקטע $[a,b]$, לכן,

$$\forall x\in[a,b],\ |f_1(x)|\le K_1,\dots,|f_N(x)|\le K_N$$

ולכן נגדיר $K=\max\{K_1,\dots,K_N\}$, לכן מתקיים $\|\varphi\|_\infty\le\epsilon+K$, נובע ש־$\Phi$ חסומה במידה אחידה. $\square$

# הגדרות ומשפטים