

פתרון מטלה 04 – אנליזה על יריעות, 80426

25 באפריל 2025



שאלה 1

תהי $U = (0, 1)^2$ ותהי ההעתקה $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי $\varphi(x, y) = (x, y, e^{x+y})$. נסמן $X = \text{Im } \varphi$ וב- $d \text{vol}_2$ את אלמנט הנפח, נחשב את,

$$\int_X \sqrt{2z^2 + 1} \, d \text{vol}_2$$

פתרון אם נסמן $f(x, y, z) = \sqrt{2z^2 + 1}$ אז נקבל שמתקיים,

$$\int_X \sqrt{2z^2 + 1} \, d \text{vol}_2 = \int_U f(\varphi(u)) V(D\varphi|_u) \, du$$

נחשב את הנגזרת של φ ,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$$

מתוך כוונה להשתמש בלמה לחישוב $V(D\varphi)$ נחשב,

$$V(D\varphi) = \sqrt{(D\varphi)^t D\varphi} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 + e^{2(x+y)} & e^{2(x+y)} \\ e^{2(x+y)} & 1 + e^{2(x+y)} \end{vmatrix}} = \sqrt{1 + 2e^{2(x+y)}}$$

ולכן נציב,

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \sqrt{2e^{2(x+y)} + 1} \cdot \sqrt{1 + 2e^{2(x+y)}} \, dx \, dy &= \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} 2e^{2x} e^{2y} \, dx \, dy + 1 \\ &= 2 \left(\int_{(0,1)} e^{2x} \, dx \right) \left(\int_{(0,1)} e^{2y} \, dy \right) + 1 \\ &= 1 + \left(\left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{4} \cdot (e^4 - 2e^2 + 1) \end{aligned}$$

שאלה 2

סעיף א'

תהי פונקציה $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ גזירה ברציפות, ויהי גוף הסיבוב שלה,

$$\Sigma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [a, b], \sqrt{x^2 + y^2} = f(z)\}$$

נראה ש- (φ, Σ_f) היא יריעה דו־מימדית, כאשר,

$$\varphi(t, z) = (f(z) \cos t, f(z) \sin t, z)$$

$$\text{עבור } K = [0, 2\pi] \times [a, b].$$

הוכחה. נבחין כי הקבוצה עליה φ מוגדרת היא קבוצה סגורה (למעשה דיסק סגור), בסתירה להגדרה של יריעה, כשנדבר על היריעה נוכל להתכוון לדיסק הפתוח ובכך לפתור את הבעיה. עלינו להראות ש- $\varphi(K) = \Sigma_f$.

$$(x, y, z) = \varphi(t, z) \implies \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{f^2(z) \cos^2 t + f^2(z) \sin^2 t} = \sqrt{f^2(z)} = f(z)$$

כאשר המהלך האחרון נובע מהעובדה ש- f חיובית לחלוטין. נובע ש- $\varphi(K) \subseteq \Sigma_f$. תהי $(x, y, z) \in \Sigma_f$, אז נבחר $t = \text{Arg}(x + iy)$ ונקבל מהגדרת הארגומנט ש- $\varphi(t, z) = (x, y, z)$, לכן גם $\varphi(K) \supseteq \Sigma_f$, ונסיק $\varphi(K) = \Sigma_f$ כפי שרצינו. \square

נחשב את $\text{vol}_2(\Sigma_f)$.

פתרון נחשב את $V(D\varphi)$,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} -f(z) \sin t & f'(z) \cos t \\ f(z) \cos t & f'(z) \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$\begin{aligned} V(D\varphi) &= \sqrt{\begin{vmatrix} f^2(z) \sin^2 t + f^2(z) \cos^2 t & -f(z)f'(z) \sin t \cos t + f(z)f'(z) \sin t \cos t \\ -f(z)f'(z) \sin t \cos t + f(z)f'(z) \sin t \cos t & (f'(z))^2 \cos^2 t + (f'(z))^2 \sin^2 t + 1 \end{vmatrix}} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} f^2(z) & 0 \\ 0 & (f'(z))^2 + 1 \end{vmatrix}} = f(z) \sqrt{(f'(z))^2 + 1} \end{aligned}$$

מהגדרת הנפח,

$$\text{vol}(\Sigma_f) = \int_K V(D\varphi|_u) du = 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{(f'(z))^2 + 1} dz$$

סעיף ב'

נחשב את,

$$\int_{\Sigma_f} x^2 + y^2 d\text{vol}_2$$

פתרון. אנו כבר יודעים את ערך $V(D\varphi)$ ולכן נותר להציב,

$$\int_{\Sigma_f} x^2 + y^2 d\text{vol}_2 = \int_K f^2(z) \cdot f(z) \sqrt{(f'(z))^2 + 1} dz dt = 2\pi \int_a^b f^3(z) \sqrt{(f'(z))^2 + 1} dz$$

שאלה 3

סעיף א'

נחשב את מרכז המסה של,

$$S_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z, y, x \geq 0\}$$

פתרון נתחיל בחישוב השטח של העקומה, נגדיר $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, נחשב את $D\varphi$,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

ובהתאם נקבל שגם,

$$V(D\varphi) = \sqrt{(D\varphi)^t D\varphi} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} & \frac{xy}{1-x^2-y^2} \\ \frac{xy}{1-x^2-y^2} & 1 + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

השטח מתקבל אם כך על-ידי,

$$\text{vol}_2(S_+^2) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot r dr = \frac{\pi}{4} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{\pi}{4} 2\sqrt{1} = \frac{\pi}{2}$$

מטעמי סימטריה מספיק שנבדוק את אחד מהצירים בלבד, נבחר את ציר ה- x . אנו יודעים ש- $\int_{S_+^2} x d\text{vol}_2$ ו- $x_{cm} = \frac{1}{\text{vol}_2(S_+^2)} \int_{S_+^2} x d\text{vol}_2$, ולכן,

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cdot \frac{r \cos \theta}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} [\sin \theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ולכן מרכז המסה הוא $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

סעיף ב'

נראה שאם $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעות פרמטריות זרות עם אותו מימד, אז $M \cup N$ היא יריעה פרמטרית כך שמרכז המסה שלה הוא הממוצע המשוכלל,

$$\vec{c}_{M \cup N} = \frac{\text{vol}(M)\vec{c}_M + \text{vol}(N)\vec{c}_N}{\text{vol}(M) + \text{vol}(N)}$$

הוכחה. נניח ש- φ_M, φ_N הפרמטריזציה של היריעות M, N בהתאמה. נרצה לבחור פרמטריזציה $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ כך ש- $\varphi(U) = M \cup N$, אך $\text{dom } \varphi_M, \text{dom } \varphi_N$ לא בהכרח זרות.

נוכיח אם כן שקיים דיפאומורפיזם $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow (-1, 1)^d$. נגדיר $\psi_i(x_i) = \frac{2}{\pi} \arctan x_i$ ונקבל מתכונות \tan שאכן ψ פונקציה רציפה, הפיכה וכן מגזירות \tan שהיא דיפאומורפיזם.

נוכל אם כן להניח ש- $\text{dom } \varphi_M \cap \text{dom } \varphi_N = \emptyset$, שאם לא כן, נוכל לבחור $\psi \circ \varphi_N$ ו- $\psi \circ \varphi_M$ כאשר $1^d = (1, \dots, 1)$.

נסיק שקיימים תחומים זרים U_M, U_N כך ש- $U_M = \varphi_M, \varphi \upharpoonright U_N = \varphi_N$. בהתאם נוכל לחשב את נפח $N \cup M$,

$$\begin{aligned} \text{vol}_d(M \cup N) &= \int_{U_N \sqcup U_M} V(D\varphi) d\text{vol}_d u \\ &= \int_{U_N} V(D\varphi) d\text{vol}_d + \int_{U_M} V(D\varphi) d\text{vol}_d u \\ &= \int_{U_N} V(D\varphi_N) d\text{vol}_d + \int_{U_M} V(D\varphi_M) d\text{vol}_d u \\ &= \text{vol}_d(M) + \text{vol}_d(N) \end{aligned}$$

נעבור לחישוב מרכז המסה $\vec{c}_{M \cup N}$.

$$\vec{c}_{M \cup N} = \frac{1}{\text{vol}_d(M \cup N)} \int_{M \sqcup N} \vec{u} d\text{vol}_d \vec{u} = \frac{1}{\text{vol}_d(M \cup N)} \left(\int_M \vec{u} d\text{vol}_d \vec{u} + \int_N \vec{u} d\text{vol}_d \vec{u} \right) = \frac{\text{vol}(M)\vec{c}_M + \text{vol}(N)\vec{c}_N}{\text{vol}(M) + \text{vol}(N)}$$

כאשר המעבר האחרון נובע ישירות מההגדרה של \vec{c}_M ו- \vec{c}_N . □

סעיף ג'

נחשב את מרכז המסה של החרוט הסגור,

$$\{\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - z \mid 0 < z < 1\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$

פתרון נבחין כי החרוט הסגור אינו אלא יריעה פרמטרית של חרוט פתוח ושל עיגול, שתיהן יריעות ממימד 2 ב- \mathbb{R}^3 . נסמן את החרוט ב- M ואת העיגול ב- N , וכן נבחין שמטעמי סימטריה $\vec{c}_N = 0$, ו- $\text{vol}_2(N) = \pi$. נעבור אם כך לחישוב הנפח של M . נגדיר $\varphi : B_1(0) \rightarrow M$ על-ידי $\varphi(x, y) = (x, y, 1 - \sqrt{x^2 + y^2})$. נעבור לחישובים הכרחיים עבור חישוב האינטגרל,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}$$

וכן,

$$V(D\varphi) = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & 1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \end{vmatrix}} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

ועתה נעבור לחישוב הנפח,

$$\text{vol}_2(M) = \int_{B_1(0)} V(D\varphi|_u) d\text{vol}_2 u = \int_{B_1(0)} \sqrt{2} du = \sqrt{2} \cdot \pi$$

נחשב את מרכז המסה, נבחין שמטעמי סימטריה $c_M^x = c_M^y = 0$ ועלינו לחשב רק את ציר ה- z .

$$c_M^z = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_M z d\text{vol}_2 u = \frac{1}{\pi} \int_{B(0,1)} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{\pi} \left(\pi - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta \right) = \frac{1}{\pi} \left(\pi - 2\pi \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

ולבסוף נשתמש בתוצאת סעיף ב' ונקבל,

$$\vec{c}_{M \cup N} = \frac{\sqrt{2}\pi \cdot (0, 0, \frac{1}{3}) + \pi(0, 0, 0)}{\sqrt{2}\pi + \pi} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{3(\sqrt{2} + 1)} \right)$$

שאלה 4

תהי $(\varphi, M \subseteq \mathbb{R}^m)$ ו- $(\psi, N \subseteq \mathbb{R}^n)$ שתי יריעות פרמטריות. תהינה $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות. נגדיר $h : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ על-ידי $h(x, y) = f(x)g(y)$. נראה שמתקיים,

$$\int_{M \times N} h \, d\text{vol}_{n+m} = \left(\int_M f \, d\text{vol}_m \right) \cdot \left(\int_N g \, d\text{vol}_n \right)$$

הוכחה. נניח ש- $\text{dom } \varphi = U_M, \text{dom } \psi = U_N$. נגדיר גם $\sigma : U_M \times U_N \rightarrow M \times N$ על-ידי $\sigma(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$. נסיק ממכפלת מרחבים מטריים ש- σ דיפאומורפיזם ולכן מתקיים, נניח ש- $u = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ עבור $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\int_{M \times N} h \, d\text{vol}_{n+m} = \int_{U_M \times U_N} h(\sigma(u)) V(D\sigma|_u) \, du = \int_{U_M \times U_N} f(\varphi(x))g(\psi(y)) V(D\sigma|_{(x,y)}) \, d(x, y)$$

אילו $V(D\sigma) = V(D\varphi) \cdot V(D\psi)$ אז ממשפט פוביני של אינפי 3 נובע ישירות,

$$\begin{aligned} \int_{U_M \times U_N} f(\varphi(x))g(\psi(y)) V(D\sigma|_{(x,y)}) \, d(x, y) &= \int_{U_M} f(\varphi(x)) V(D\varphi|_x) \, dx \cdot \int_{U_N} g(\psi(y)) V(D\psi|_y) \, dy \\ &= \left(\int_M f \, d\text{vol}_m \right) \cdot \left(\int_N g \, d\text{vol}_n \right) \end{aligned}$$

מלינארית אנו יודעים שדטרמיננטת מטריצות בלוקים שווה למכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים כמטריצות, לכן מספיק שנראה שאכן $(D\sigma)^t(D\sigma)$ מטריצת בלוקים. למעשה, הגדרנו את σ כך ש- $\sigma(x, 0) = (\varphi(x), 0)$ ולכן נוכל להסיק שאכן $\frac{\partial \sigma}{\partial y_i} = 0$ לכל $1 \leq i \leq m$, ונסיק שאכן,

$$V(D\sigma) = V(D\varphi) \cdot V(D\psi)$$

ונסיק שהשוויון אכן קיים. □