פתרון מטלה 08 — אנליזה על יריעות, 80426

22 במאי 2025

שאלה 1

תהינה $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ו־$p \in \mathbb{R}^n$ כך ש־$\varphi_1(p) = \cdots = \varphi_k(p) = 0$ וכן $\{\nabla\varphi_1(p), \dots, \nabla\varphi_n(p)\}$ בלתי תלויה־לינארית.

סעיף א׳

נראה שקיימת סביבה U של p כך שהקבוצה,

$$M = \{x \in U \mid \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_k(x) = 0\}$$

היא יריעה $(n-k)$־מימדית, ונחשב את T_pM ב־p.

הוכחה. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ על־ידי $f(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$. f חלקה ישירות מהגדרתה והנתון אודות φ_i לכל $i \le n$. אנו יודעים ש־$\dim Df \mid_p = k$ ולכן היא רגולרית וממשפט התמונה ההפוכה $f^{-1}(0)$ היא יריעה. נבחין כי זוהי היריעה $N = \{x \in U \mid \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_k(x)\}$, ונוכל לצמצם אותה עם סביבה פתוחה כלשהי $p \in U$ כך ש־$N \cap U$ לא טריוויאלי ולקבל M כזו. נעיר כי ישירות מהמשפט זוהי יריעה $(n-k)$־מימדית. $\square$

נעבור לחישוב T_pM. אנו יודעים ממשפט התמונה ההפוכה שמתקיים,

$$T_pM = \ker df_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\nabla\varphi_1(p), \dots, \nabla\varphi_k(p)) \cdot x = 0\} = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Sp}\{\varphi_1(p), \dots, \varphi_k(p)\}$$

סעיף ב׳

תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ העתקה חלקה כך ש־$f(x) \ge f(p)$ לכל $x \in M$. נראה ש־$\nabla f(p) \perp T_pM$.

הוכחה. נבחין כי $D_u f \ge 0$ לכל u וקטור כיוון ב־M, ולכן נובע בפרט ש־$D_u f = 0$ עבור $u \in T_pM$ ישירות מהגדרה, כלומר נובע ש־$\nabla f(p) \perp T_pM$ כפי שרצינו. $\square$

סעיף ג׳

נראה שהמשלים האורתוגונלי של T_pM הוא $\mathrm{Sp}\{\nabla\varphi_1(p), \dots, \nabla\varphi_k(p)\}$.

הוכחה. ישירות כמסקנה ממשפט התמונה ההפוכה ואורתוגונליות תמונה וגרעין העתקה לינארית,

$$T_pM = \ker\{\nabla\varphi_1(p), \dots, \varphi_k(p)\} \perp \mathrm{Sp}\{\nabla\varphi_1(p), \dots, \varphi_k(p)\}$$

והטענה נובעת ישירות. $\square$

סעיף ד׳

נסיק את נוסחת כופלי לגרנז׳.

הוכחה. נבחין כי אם x מינימום מקומי של f אז היא במשלים האורתוגונלי של T_pM ולכן בלתי תלויה־לינארית בה. $\square$

שאלה 2

נראה שכל יריעה היא תמונה הפוכה של העתקה רגולרית, ונסיק שחיתוך רוחבי של תת־יריעות הוא יריעה.

סעיף א׳

תהי N יריעה ונניח ש־$Z \subseteq N$ תת־יריעה של N. נראה שלכל $p \in Z$ קיימת סביבה פתוחה $p \in U \subseteq N$ ו־$f : U \to \mathbb{R}^l$ חלקה כך ש־$U \cap Z = f^{-1}(\{0\})$ כאשר $l = \dim N - \dim Z$.

הוכחה. נתחיל בהוכחת הטענה עבור המקרה $N = \mathbb{R}^n$ ו־$Z^k \subseteq \mathbb{R}^n$. תהי נקודה $p \in M$ ותהי $\alpha : V \to Z$ פרמטריזציה מקומית כך ש־$V \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה. מקיום הופכי משמאל לפרמטרזיציה מקומית נסיק שקיימת $\beta : W \to \mathbb{R}^k$ העתקה חלקה, כאשר $p \in W \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. מתקיים $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$. נגדיר $f(x) = \beta(x) - x$ ונקבל ש־$x \in \alpha(W \cap Z) \iff f(x) = 0$, כלומר $W \cap Z = f^{-1}(\{0\})$.

נעבור למקרה הכללי, נניח ש־$Z^k \subseteq N^h \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותת־יריעה. נניח ש־$p \in Z$ ולכן בפרט $p \in N$ וקיימת פרמטריזציה $\alpha : V \to N$ כך ש־$V \subseteq \mathbb{R}^h$ פתוחה. נבחן את $Z_0 = \alpha^{-1}(Z \cap \alpha(V))$, זוהי יריעה k־מימדית ב־$\mathbb{R}^h$ ולכן מקיימת את תנאי החלק הראשון, וקיימת $f : U \to \mathbb{R}^{h-k}$ כך ש־$U \subseteq \mathbb{R}^h$. נובע אם כך ש־$f \circ \alpha : V \to \mathbb{R}^{h-k}$ העתקה חלקה המקיימת את הטענה, היא חלקה ולכן קיימת לה הרחבה $\tilde{f} : \tilde{V} \to \mathbb{R}^{h-k}$ חלקה כך ש־$\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. נוכל להגדיר אותה כך ש־$\tilde{f}(x) \neq 0 \implies x \notin V$, ונקבל ש־$\tilde{f}$ מקיימת את הטענה. $\square$

סעיף ב׳

נסיק שאם X, Y הן תת־יריעות רוחביות של N אז $X \cap Y$ יריעה ממימד $\dim Y + \dim X - \dim N$.

הוכחה. אילו היריעות זרות אז $X \cap Y$ היא יריעה באופן מנוון, ולכן היא 0־מימדית, ומרוחביות אכן $\dim N = \dim X + \dim Y$.

נניח ש־$X \cap Y \neq \emptyset$. נגדיר $f : X \to N$ חלקה על־ידי שיכון. נבחין כי $f^1(Y) \neq \emptyset$, ולכן $X \cap Y = f^{-1}(Y)$ היא יריעה $(\dim Y + \dim X - \dim N)$־מימדית ממשפט מהתרגול. $\square$

שאלה 3

סעיף א'

נניח ש־$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ העתקה חלקה ונניח ש־$a\in\mathbb{R}$ ערך רגולרי של f כך ש־$f^{-1}(\{a\})\neq\emptyset$. נראה ש־$M=\{x\in\mathbb{R}^n\mid f(x)\geq a\}$ היא יריעה n־מימדית עם השפה $f^{-1}(\{a\})$.

הוכחה. נבחין כי $\{x\in\mathbb{R}^n\mid f(x)>a\}$ היא יריעה n־מימדית כמקור של קבוצה פתוחה של פונקציה חלקה (בפרט רציפה). לכן מספיק שנראה שלכל $p\in f^{-1}(\{a\})$ יש פרמטריזציה מקומית (עם שפה) ונוכל להסיק ש־M היא יריעה n־מימדית. נעיר כי בהוכחה התבססנו על הטענה כי כל יריעה ללא שפה היא יריעה עם שפה.

תהי p כזו, אז p היא נקודה רגולרית של f מהגדרת ערך רגולרי, כלומר $Df|_p$ הוא על $\mathbb{R}^n$.

נבחר בסיס אורתונורמלי כלשהו של $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}=\{b_i\mid i\leq n\}$, אז מהגדרת M לכל $i\leq n$ קיים $\epsilon_i\in\{\pm1\}$ כך ש־$f(p+\epsilon_ib_i)>a$. בטענה זו התבססנו על הרגולריות של f ב־p. אילו נקטין את a נוכל לקבל פרמטריזציה מקומית $\alpha:U\to\hat{M}$, ניקח פרמטריזציה מקומית זו, ועבור כל i, אם $f(p-\epsilon_ib_i)<a$ אז נצמצם את α ל־$\mathbb{H}$ בקורדינטה ה־i. אחרת נסמן את צמצום הפתוחה כך שהקבוצה תישאר פתוחה ביחס ל־$\mathbb{R}$ (כלומר שאין בה שפה). נקבל $\hat{\alpha}:\mathbb{H}^n\to M$ המהווה פרמטריזציה מקומית של p, ולכן נוכל להסיק ש־M אכן יריעה. $\square$

סעיף ב'

נסיק ש־$\overline{B}(0,1)\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ כדור היחידה הסגור הוא יריעה n־מימדית עם שפה כך ששפתו היא S_1^{n-1}.

הוכחה. נגדיר את $f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(v)=-\|v\|_2^2$, זוהי פונקציה חלקה ורגולרית בכל $v\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, בפרט לכל $\|v\|=1$ מתקבלת נקודה רגולרית ולכן 1 ערך רגולרי של f. נסיק שהקבוצה $M=\{v\in\mathbb{R}^{n+1}\mid f(v)\geq-1\}$ היא יריעה n־מימדית עם שפה, בהתאם לסעיף הקודם. אבל $M=\overline{B}(0,1)$ ישירות מהגדרה.

במהלך הסעיף הקודם ותוך שימוש בטענה על שקילות נקודות שפה מההרצאה נסיק ישירות כי,

$$v\in\partial M\iff f(v)=-1\iff\|v\|=1\iff v\in S_1^{n-1}$$

$\square$

שאלה 4

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה כך ש־$\overline{U}$ יריעה k־מימדית עם שפה, ונגדיר $M = \partial\overline{U}$. נניח ש־$\nu : M \to \mathbb{R}^n$ הנורמל החיצוני ל־$\overline{U}$.
נראה שקיים $\epsilon > 0$ וסביבה $V \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של M כך ש־$\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to V$ המוגדרת על־ידי,

$$\varphi(t, x) = x + t\nu(x)$$

היא דיפאומורפיזם.

הוכחה. אנו יודעים כי ν חלקה, לכן נובע שגם φ פונקציה חלקה לכל $\epsilon > 0$.
תהי $p \in M$. קיימת פרמטריזציה מקומית $\alpha : V \to \overline{U}$ בסביבה זו, כאשר $V \subseteq \mathbb{H}^k$ פתוחה.

$$d\varphi_x = \begin{pmatrix} \nu_1(x) & 1 + t\frac{\partial\nu_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & t\frac{\partial\nu_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n(x) & t\frac{\partial\nu_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & 1 + t\frac{\partial\nu_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

השורה הראשונה היא וקטור אורתוגונלי, ובהצבה $t = 0$ ו־$x = p$ נקבל שדרגת הדיפרנציאל $n + 1$ ונסיק שקיימת סביבה $W \subseteq V$ בה φ הפיכה, אבל בסביבה זו מהיותה חלקה נובע שהיא גם דיפאומורפיזם חלק.

נסיק אם כך כי אכן קיימת סביבה פתוחה $(-\epsilon, \epsilon) \times B(p, \delta)$ עבור $\epsilon, \delta > 0$ כלשהם כך ש־φ היא דיפאומורפיזם חלק. אנו יודעים ש־M עם הטופולוגיה המושרית מהצמצום אוקלידית חסומה וסגורה ולכן בפרט קומפקטית. נבחין כי $M \subseteq \bigcup_{p \in M} B(p, \delta_p)$ כיסוי פתוח ולכן קיים תת־כיסוי סופי $M \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(p_i, \delta_i)$. לכל p_i כזה קיים ϵ_i כפי שמצאנו, ונבחר $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N\}$, נקבל שעבור $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to V$ ממשפט הפונקציה ההפוכה φ דיפאומורפיזם חלק. $\square$