פתרון מבחן בית — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

21 בינואר 2026

תוכן העניינים

שאלה 1

יהי (E,V) מרחב אפיני.

סעיף א׳

תהי $S \subseteq E$ קבוצה ותהי $S' = \langle S \rangle$ תת־היריעה הנוצרת על־ידי S. נראה שמתקיים,

$$S' = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda^i P_i \mid \sum_{i}^{n} \lambda^i = 1, P_1, \dots, P_n \in S \right\}.$$

הוכחה. מהגדרת תת־יריעה נניח ש־$S' = Q + W$ עבור $Q \in E$ ו־$W \le E$ תת־מרחב וקטורי. ממשפט מהכיתה נוכל לקבע $Q = P_i$ לאיזשהו i, בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$Q = P_1$. נבחין ש־$P_i - P_1 \in W$ לכל $1 < i \le n$, יהי וקטור $\lambda^2(P_2 - P_1) + \cdots + \lambda^n(P_n - P_1) \in W$, אז גם $L = P_1 + \lambda^2(P_2 - P_1) + \cdots + \lambda^n(P_n - P_1) \in S'$. עתה נקבל ממשפט אינווריאנטיות לבחירת נקודת יחוס שגם $L = P_0 + (1 - (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n))P_1 + \lambda^2 P_2 + \cdots + \lambda^n P_n$, נגדיר $\lambda^1 = 1 - (\lambda^2 + \cdots + \lambda^n)$. קיבלנו שמתקיים $\lambda^1 + \cdots + \lambda^n = 1$ וכן $L = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i P_i$ ולכן קיבלנו הכלה בכיוון אחד.

בכיוון ההפוך נניח ש־$P = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i P_i$ עבור סקלרים מתאימים ונקבל ישירות משימוש בצד השני שבחירת הנקודה $u = \lambda^2(P_2 - P_1) + \cdots + \lambda^n(P_n - P_1)$ מקיים $u \in W$ ולכן $P = P_1 + u \in S'$. $\square$

סעיף ב׳

נראה שאם $L \subseteq E$ קבוצת נקודות, אז L תת־יריעה אפינית אם ורק אם לכל $P, Q \in L$ מתקיים $\langle P, Q \rangle \subseteq L$.

הוכחה. נניח ש־S תת־יריעה אפינית, אז בפרט מתקיים,

$$\left\{ \sum_{i=1}^{2} \lambda^i P_i \mid \sum_{i}^{2} \lambda^i = 1, P_1, P_2 \in S \right\} \subseteq S.$$

בפרט עבור $P, Q \in L$ נקבל ש־$\langle P, Q \rangle \subseteq L$.

נניח את טענת הכיוון ההפוך. תהי $P_0 \in L$ ונסמן $W = L - P_0$, נראה ש־$W \le V$. יהי $u \in W$, ו־$\alpha \in \mathbb{F}$, אז $\langle P_0, P_0 + u \rangle \subseteq L$ ולכן $\operatorname{Span}\{u\} \in L$ ונובע שגם $\alpha u \in L$. נניח ש־$u, v \in W$ ונראה ש־$u + v \in W$. נסמן $P_1 = P_0 + u$ וכן $P_2 = P_0 + v$, נקבל שגם $\langle P_1, P_2 \rangle \subseteq L$, כלומר $P_1 + (v - u)t \in L$, כלומר $P_0 + u + (v - u)t \in L$ ולכן $u + (v - u)t \in W$. נבחר $t = -1$ ונקבל ש־$2u - v \in W$, ומסגירות לכפל בסקלר נקבל שגם $u + v \in W$ ולכן $W \le V$ תת־מרחב וקטורי כפי שרצינו. $\square$

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$.

סעיף א׳

נראה שלכל $v \in V$ מתקיים,

$$\forall l \in V^\vee,\ \langle l, v\rangle = 0 \iff v = 0.$$

הוכחה. נניח ש־$v = 0$ ויהי $l \in V^\vee$, כלומר $l : V \to \mathbb{F}$ העתקה לינארית. אז מתקיים $l(v) = 0$ מהגדרת ההעתקה הלינארית.

לכיוון ההפוך נניח שלכל $l \in V^\vee$ מתקיים $l(v) = 0$ ונניח בשלילה ש־$v \neq 0$. נרחיב את (v) לבסיס $\mathcal{B} = (v, b_2, \dots, b_n)$ הפורש את V. בהתאם קיימת העתקה לינארית $l : V \to \mathbb{F}$ כך שמתקיים $l(v) = 1$, אבל $l \in V^\vee$ ולכן $\langle l, v\rangle = 0 \neq 1$ בסתירה. $\square$

סעיף ב׳

יהי $l \in V^\vee$, נוכיח ש־$l = 0$ אם ורק אם לכל $v \in V$ מתקיים $\langle l, v\rangle = 0$.

הוכחה. נניח ש־$l = 0$, אז בהגדרה $\langle l, v\rangle = l(v) = 0$ לכל v.

נניח ש־$\langle l, v\rangle = 0$ לכל $v \in V$ ונניח ש־$l \neq 0$, לכן קיים $u \in \operatorname{Im} l$ כך ש־$u \neq 0$ וכן $l(u) \neq 0$ בסתירה. $\square$

סעיף ג׳

נראה שלכל $W \leq V^\vee$ מתקיים,

$$\dim_{\mathbb{F}} W + \dim_{\mathbb{F}} W_0 = \dim_{\mathbb{F}} V$$

הוכחה. הגדרנו $W_0 = \{v \in V \mid \forall l \in W,\ l(v) = 0\}$. נניח ש־$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס של V וכן נסמן $\mathcal{B}^\vee = (b^1, \dots, b^n)$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$(b^1, \dots, b^k)$ עם $k \leq n$ הוא בסיס סדור של W. אז מהגדרה מתקיים $l(b^i) = 0$ לכל $l \in W$ ו־$k < i \leq n$, ולכן $b_i \in W_0$. באופן דומה נסיק ש־$b_i \notin W_0$ לכל $i \leq k$ שכן קיים עד לכך ש־$b^i \in W$. קיבלנו אם כך ש־$(b_{k+1}, \dots, b_n)$ בסיס סדור של W_0. $\square$

סעיף ד׳

יהיו $S_1, S_2 \leq V$ ונראה ש־$(S_1 + S_2)^0 = S_1^0 \cap S_2^0$.

הוכחה. יהי $l \in (S_1 + S_2)^0$, אז $l(v + u) = l(v) + l(u) = 0$ לכל $u \in S_1, v \in S_2$. נבחין כי $0 \in S_1, S_2$ כתת־מרחבים ולכן נקבל שגם $l(v) = 0, l(u) = 0$ לכל u, v כאלה, ונסיק $l \in S_1^0, l \in S_2^0$ ובפרט נמצא בחיתוך.

מהצד השני נניח ש־$l \in S_1^0 \cap S_2^0$, אז בפרט $l(u) = l(v) = 0$ לכל $u \in S_1, v \in S_2$, ולכן גם $l(u + v) = l(u) + l(v) = 0$ ונסיק ש־$l \in (S_1 + S_2)^0$. $\square$

סעיף ה׳

נראה שאם $L^1, L^2 \leq V^\vee$ אז $(L^1 \cap L^2)_0 = L_0^1 + L_0^2$.

הוכחה. מהסעיף הקודם נסיק $L^1 \cap L^2 = (L_0^1 + L_0^2)^0$, ולכן $(L^1 \cap L^2)_0 = (L_0^1 + L_0^2)^0_0 = L_0^1 + L_0^2$ מזהויות שהוכחנו. $\square$

שאלה 3

עקום חלק עם פרמטריזציה לפי אורך $c : I \to \mathbb{E}^3$ נקרא בי־רגולרי אם $\forall t \in I,\ c''(t) \neq 0$. נסמן $v = c'$ ונגדיר את הנורמל על־ידי $n = \frac{c''}{|c''|}$ ואת הבי־נורמל על־ידי $b = v \wedge n$. נבחין כי (v, n, b) בסיס אורתונורמלי.

סעיף א׳

נראה שקיימים $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים,

$$\begin{pmatrix} v' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

הוכחה. נבחין שהטענה שקולה לשוויון,

$$\begin{pmatrix} v' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \kappa n + 0 \\ -\kappa v + 0 + \tau b \\ 0 - \tau n + 0 \end{pmatrix}.$$

כלומר הטענה שקולה לשוויונות,

$$v' = \kappa n, \qquad n' = -\kappa v + \tau b, \qquad b' = -\tau n.$$

ראינו בכיתה ש־$\kappa = \kappa(t)$ העקמומיות בנקודה אכן קיימת, וש־$\kappa n = v'$. נזכיר כי טענה זו נובעת מהעובדה ש־$\|v'\| = 1$ ולכן $v \perp v'$ מהעובדה שהפרמטריזציה היא לפי אורך.

נבחין שגם $\|v\| = 1, \|n\| = 1$ ולכן $\|b\| = 1 \cdot 1 - |v \cdot n| = 1$, וכן $v \cdot b = 0$ ולכן ניתן להסיק של־b' יש רק רכיב אורתוגונלי. נקבל שגם $(v \cdot b)' = v' \cdot b + v \cdot b' = 0$ אבל $v' \cdot b = n \cdot b \cdot |c''| = 0$ ולכן נסיק ש־$b' \cdot v = 0$, ובהתאם מתקיים $b' = -\tau n$ לאיזשהו $\tau = \tau(t)$. נשים לב כי יכולנו להגדיר גם ללא המינוס.

מתקיים,

$$0 = \begin{vmatrix} v & n & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} v & b & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & v & n \end{vmatrix}.$$

כלומר גם $n = b \wedge v$ ולכן מחוקי גזירה,

$$n' = b' \wedge v + b \wedge v' = (-\tau n) \wedge v + b \wedge (\kappa n) = -\tau(n \wedge v) + \kappa(b \wedge n) = \tau b - \kappa v.$$

כפי שרצינו. $\square$

סעיף ב׳

תהי $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ העתקה אפינית שומרת מרחק וכיוון, כלומר $f(x) = Ax + b$ עבור $A \in SO_3(\mathbb{R})$ ו־$b \in \mathbb{R}^3$.
נראה ש־$f \circ c$ ו־c בעלות עקמומיות ופיתול משותפים.

הוכחה. נגזור את $f \circ c$ ונסמן ב־v_1,

$$v_1 = (f \circ c)' = (f' \circ c) \cdot c' = Av.$$

שכן $f' \equiv A$. בהתאם גם $(f \circ c)'' = Av'$ ולכן אם נסמן n_1, b_1 הנורמל והבי־נורמל של $f \circ c$ אז נקבל,

$$n_1 = \frac{Av'}{|Av'|} = \frac{Av'}{|v'|} = An.$$

נסמן עתה גם κ_1, τ_1 העקמומיות והפיתול של $f \circ c$ ונקבל,

$$v_1' = \kappa_1 n_1 \iff Av' = \kappa_1 An \iff v' = \kappa_1 n.$$

ונסיק ש־$\kappa = \kappa_1$.

נעבור לבדיקה של b_1,

$$b_1 = v_1 \wedge n_1 = (Av) \wedge (An).$$

כלומר,

$$0 = \begin{vmatrix} Av & An & b_1 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} v & n & A^{-1}b_1 \end{vmatrix}.$$

כאשר המעבר האחרון נובע ישירות מהגדרת העתקות לינאריות בהצגה מטריצאלית. נשתמש בהפיכות A כדי להסיק,

$$A \begin{vmatrix} v & n & A^{-1}b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & n & A^{-1}b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & n & b \end{vmatrix}.$$

ונקבל ש־$b_1 = Ab$ ולכן,

$$b_1' = -\tau_1 n_1 \iff Ab' = -\tau_1 An.$$

ונסיק ש־$\tau_1 = \tau$ כפי שרצינו. □

נבחין שאם f משנה כיוון אז לא נוכל לבצע את המעבר $-\tau An = A(-\tau n)$, ונקבל בהתאם שהעקמומיות והפיתול משנים גם הם סימן.

סעיף ג׳

נראה ש־$c(I)$ ניתנת לשיכון במישור אם ורק אם $\tau = 0$.

הוכחה. נניח ש־$c(I)$ ניתנת לשיכון במישור, בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח ש־$c(I) \subseteq \mathbb{E}^2 \times \{0\}$, זאת תוך שימוש בסעיף הקודם והגדרת A מתאימה. בהתאם נובע ש־$v \subseteq \mathbb{E}^2 \times \{0\}$ אף היא, אחרת נקבל שקיים $t \in I$ כך ש־$c(t) \notin \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. אבל $v' = \kappa n$ ולכן n אף היא משוכנת במישור, כלומר $n(I) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, ובהתאם מהגדרה $b \subseteq \{(0, 0, \pm 1)\}$ בלבד, שהרי (v, n, b) בסיס אורתונורמלי וגם $(v, n) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ אורתונורמלי. b רציפה למרחב דיסקרטי סופי ולכן קבועה, ובפרט $b' \equiv 0$, אבל $b' = -\tau n$ ולכן $\tau \equiv 0$ בלבד.

נניח בכיוון ההפוך ש־$\tau \equiv 0$ ולכן $b' \equiv 0$ וגם $n' = -\kappa v$ בלבד, אבל גם $v' = \kappa n$. נובע אם כך ש־b הוא קבוע, נסמן $S \subseteq \mathbb{R}^3$ המישור הווקטורי האנך ל־b ונקבל ש־$v(I), n(I) \subseteq S$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, אם נסמן $c = (c^1, c^2, c^3)^t$ אז נקבל ש־$(c^3)' \equiv 0$, ולכן $c^3(I) = \{P\}$ עבור $P \in \mathbb{E}$, כלומר $c(I) \subseteq \mathbb{E}^2 \times \{P\}$. □

סעיף ד׳

יהי $c : I \to \mathbb{E}^3$ עקום רגולרי כלשהו. נראה שמתקיים,

$$\kappa(t) = \frac{|c'(t) \wedge c''(t)|}{|c'(t)|^3}.$$

וכן שאם c הוא בי־רגולרי אז גם,

$$\tau(t) = \frac{\begin{vmatrix} c'(t) & c''(t) & c^{(3)}(t) \end{vmatrix}}{|c'(t) \wedge c''(t)|^2}.$$

הוכחה. נגדיר רפרמטריזציה לפי אורך של c, $\tilde{c} : J \to \mathbb{E}^3$, ונגדיר את הדיפאומורפיזם $\varphi : J \to I$ כך ש־$\tilde{c} = c \circ \varphi$. בהתאם נובע ש־$\tilde{c}' = (c' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ מכלל השרשרת. $\tilde{c}$ היא פרמטריזציה לפי אורך ולכן,

$$\tilde{v}' = \tilde{\kappa}\tilde{n} \iff \tilde{c}'' = \tilde{\kappa}\frac{\tilde{c}''}{|\tilde{c}''|} \implies \tilde{\kappa} = \|\tilde{c}''\|.$$

אז נובע,

$$\tilde{\kappa} = \|\tilde{c}''\| = \|((c' \circ \varphi) \cdot \varphi')'\| = \|(c' \circ \varphi)'\varphi' + (c' \circ \varphi)\varphi''\| = \|(c'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (c' \circ \varphi)\varphi''\|.$$

אבל $\varphi' = \frac{1}{\|c' \circ \varphi\|}$ מהגדרתה ובהתאם $\varphi'' = \frac{-(c'' \circ \varphi)\varphi'}{\|c' \circ \varphi\|^2} = \frac{-(c'' \circ \varphi)}{\|c' \circ \varphi\|^3}$,

$$\tilde{\kappa} = \frac{|\|c'' \circ \varphi\|\|c' \circ \varphi\| - (c' \circ \varphi)(c'' \circ \varphi)|}{\|c' \circ \varphi\|^3} = \frac{|c' \circ \varphi \wedge c'' \circ \varphi|}{\|c' \circ \varphi\|^3}.$$

כאשר הזהות האחרונה הוכחה בתרגיל.

מסעיף א' $\tilde{b}' = -\tilde{\tau}\tilde{n}$. נחשב,

$$\tilde{b}' = (\tilde{v} \wedge \tilde{n})' = \tilde{v}' \wedge \tilde{n} + \tilde{v} \wedge \tilde{n}' = \tilde{\kappa}\tilde{n} \wedge \tilde{n} + \tilde{v} \wedge (-\tilde{\kappa}\tilde{v} + \tilde{\tau}\tilde{b}) = \tilde{\kappa}(\tilde{n} \wedge \tilde{n}) - \tilde{\kappa}(\tilde{v} \wedge \tilde{v}) + \tilde{\tau}(\tilde{v} \wedge \tilde{b}) = \tilde{\tau}(\tilde{v} \wedge \tilde{b}).$$

אם הפרמטריזציה היא לפי אורך אז,

$$-\tau n = b' \iff \tau n \cdot n = -n \cdot b' = -n(v \wedge n)' = -n(v' \wedge n + v \wedge n') = 0 - n(v \wedge n').$$

כלומר $\tau = -n \cdot (v \wedge n')$. אז,

$$\begin{aligned}
\tau &= -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{c''}{\|c''\|}\right)'\right) \\
&= -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{1}{\|c''\|}c''' - \frac{\|c''\|'}{\|c''\|^2}c''\right)\right) \\
&= -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{1}{\|c''\|}c''' - \frac{\|c''\|'}{\|c''\|^2}c''\right)\right) \\
&\overset{(1)}{=} -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{1}{\|c''\|}c'''\right)\right) \\
&= -\frac{c''}{\|c''\|^2}(c' \times c''') \\
&= \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c''\|^2} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \wedge c''\|^2} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{\begin{vmatrix} c' & c'' & c''' \end{vmatrix}}{\|c' \wedge c''\|^2}.
\end{aligned}$$

כאשר,

1. $c'' \cdot (c' \times c'') = 0$
2. מהנוסחה הראשונה וההנחה שהפרמטריזציה לפי אורך
3. זהות

וקיבלנו שהנוסחה נכונה למקרה זה.

נעבור למקרה הכללי, נניח ש-$\tilde{c} = c \circ \varphi$ רפרמטריזציה לפי אורך, ולכן,

$$\tilde{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{c}' & \tilde{c}'' & \tilde{c}''' \end{vmatrix}}{\|\tilde{c}' \wedge \tilde{c}''\|^2} = \frac{(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''}{\|(c \circ \varphi)' \wedge (c \circ \varphi)''\|^2}.$$

נזכור כי מצאנו שמתקיים $(c \circ \varphi)'' = (c'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (c' \circ \varphi)\varphi''$, $\qquad (c \circ \varphi)' = (c' \circ \varphi)\varphi'$ ולכן,

$$(c \circ \varphi)''' = (c''' \circ \varphi)(\varphi')^3 + (c'' \circ \varphi)2\varphi'\varphi'' + (c'' \circ \varphi)\varphi'\varphi'' + (c' \circ \varphi)\varphi''' = (c''' \circ \varphi)(\varphi')^3 + 3(c'' \circ \varphi)\varphi'\varphi'' + (c' \circ \varphi)\varphi'''.$$

ובהתאם נחשב,

$$\tilde{c}' \wedge \tilde{c}'' = (c \circ \varphi)' \wedge (c \circ \varphi)'' = (c' \circ \varphi)\varphi \wedge ((c'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (c' \circ \varphi)\varphi'') = (\varphi')^3(c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi).$$

ולכן גם,

$$(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}''' = (\varphi')^3((c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)) \cdot ((c''' \circ \varphi)(\varphi')^3 + 3(c'' \circ \varphi)\varphi'\varphi'' + (c' \circ \varphi)\varphi''') = (\varphi')^6((c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)) \cdot (c''' \circ \varphi).$$

נציב,

$$\tau \circ \varphi = \frac{(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''}{\|(c \circ \varphi)' \wedge (c \circ \varphi)''\|^2} = \frac{(\varphi')^6((c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)) \cdot (c''' \circ \varphi)}{(\varphi')^{2\cdot 3}\|(c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)\|^2}.$$

וקיבלנו שהטענה נכונה גם במקרה הכללי. $\square$

שאלה 4

נניח ש־$S \subseteq \mathbb{E}^3$ משטח רגולרי ו־$f : U \to S$ פרמטריזציה מקומית ל־$p \in S$, ונניח ש־$f(u) = p$. יהיו $c, d : I \to S$ עקומים רגולריים ונסמן $c = f \circ \gamma, d = f \circ \phi$, כאשר $\gamma(0) = \phi(0) = u$.

סעיף א׳

נראה ש־f היא קונפורמית אם ורק אם $E = G, F = 0$, כאשר E, F, G מקדמי התבנית היסודית הראשונה I.

הוכחה. נגדיר את הזווית בין שני העקומים ב־u על־ידי הזווית של $\gamma'(0), \phi'(0)$, זווית זו מוגדרת להיות $\cos\theta = \frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\| \cdot \|\phi'(0)\|}$.

נניח ש־f היא קונפורמית, כלומר מתקיים,

$$\arccos \frac{\langle c'(0), d'(0) \rangle}{\|c'(0)\| \cdot \|d'(0)\|} = \arccos \frac{\langle f'(\gamma((0)))\gamma'(0), f'(\phi((0)))\phi'(0) \rangle}{\|c'(0)\| \cdot \|d'(0)\|} = \arccos \frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\| \cdot \|\phi'(0)\|}.$$

לכל שני עקומים c, d כאלה. נבחין כי arccos חד־חד ערכית ועל, ולכן התנאי שקול לתנאי,

$$\frac{\langle c'(0), d'(0) \rangle}{\|c'(0)\| \cdot \|d'(0)\|} = \frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\| \cdot \|\phi'(0)\|}.$$

נבחין גם כי מתקיים,

$$\langle c'(0), d'(0) \rangle = \langle Df|_{\gamma(0)} \cdot \gamma'(0), Df|_{\phi(0)} \cdot \phi'(0) \rangle = \langle Df|_u \cdot \gamma'(0), Df|_u \cdot \phi'(0) \rangle = I_p(\gamma'(0), \phi'(0)).$$

כלומר מתקיים,

$$\frac{I_p(\gamma'(0), \phi'(0))}{I_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) \cdot I_p(\phi'(0), \phi'(0))} = \frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\|^2 \cdot \|\phi'(0)\|^2}.$$

עתה נציב מספר עקומים בזהות שקיבלנו. עבור עקומים לפי אורך ואנכים נקבל,

$$\frac{I_p(\gamma'(0), \phi'(0))}{I_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) \cdot I_p(\phi'(0), \phi'(0))} = 0 \implies I_p(\gamma'(0), \phi'(0)) = 0 \implies F = 0.$$

אז עבור עקומים כלליים נקבל שמתקיים,

$$\frac{E\gamma_1'(0)\phi_1'(0) + G\gamma_2'(0)\phi_2'(0)}{E((\gamma_1'(0))^2 + (\phi_1'(0))^2) + G((\gamma_2'(0))^2 + (\phi_2'(0))^2)} = \frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\|^2 \cdot \|\phi'(0)\|^2}.$$

אם $E \neq G$ נוכל לבנות עקומים שנגזרתם $(E - G, 1), (1, 1)$ ונקבל סתירה לשוויון האחרון, ולכן בהכרח $E = G$.

נניח בכיוון ההפוך ש־$E = G, F = 0$ ונקבל תוך שימוש במהלכים זהים למהלך הקודם,

$$\frac{\langle c'(0), d'(0) \rangle}{\|c'(0)\| \cdot \|d'(0)\|} = \frac{E\gamma_1'(0)\phi_1'(0) + G\gamma_2'(0)\phi_2'(0)}{E((\gamma_1'(0))^2 + (\phi_1'(0))^2) + G((\gamma_2'(0))^2 + (\phi_2'(0))^2)} = \frac{\gamma_1'(0)\phi_1'(0) + \gamma_2'(0)\phi_2'(0)}{(\gamma_1'(0))^2 + (\phi_1'(0))^2 + (\gamma_2'(0))^2 + (\phi_2'(0))^2}.$$

אבל האחרון אינו אלא,

$$\frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\|^2 \cdot \|\phi'(0)\|^2}.$$

ולכן f קונפורמית. $\square$

סעיף ב׳

נאמר ש־$f : U \to S$ היא שומרת שטח אם לכל $R \subseteq U$ מתקיים $\operatorname{vol}_2(R) = \operatorname{vol}_2(f(R))$.

נראה ש־f שומרת שטח אם ורק אם $EG - F^2 = 1$.

הוכחה. נניח ש־f היא שומרת שטח. נזכור שמתקיים,

$$\operatorname{vol}_2(f(R)) = \iint_R (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} \, dl, \qquad \operatorname{vol}_2(R) = \operatorname{vol}(R) = \iint_R 1 \, dl.$$

כלומר,

$$\operatorname{vol}_2(f(R)) = \operatorname{vol}(R) \iff \iint_R (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \, dl = 0.$$

ובהתאם $1 = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}$ λ־כמעט תמיד, עבור λ מידת לבג על אופרטור הנפח vol_2 מעל $\mathbb{E}^3$. נזכור ש־f רציפה ולכן הטענה נכונה תמיד.

נניח בכיוון ההפוך ש־$EG - G^2 = 1$, אז נקבל שמתקיים,

$$\mathrm{vol}_2(R) = \iint_R (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}\ dl = \iint_R 1\ dl = \mathrm{vol}(R).$$

כלומר f משמרת שטח. $\square$

סעיף ג׳

נראה ש־f קונפורמית ושומרת שטח אם ורק אם היא איזומטריה מקומית, כלומר שמתקיים,

$$\forall u \in U \forall v, w \in \mathbb{R}^2,\ \langle v, w \rangle = I_{f(u)}(Df|_u v, Df|_u w).$$

הוכחה. נניח ש־f קונפורמית ושומרת שטח, אז מתקיים $E = G, F = 0$ וכן $E^2 = 1$, אבל I תבנית חיובית לחלוטין ולכן $E = 1$ בלבד, כלומר $I_p = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. אז $E_p = (D_1 f|_p)^2 = 1$ ולכן נסיק $D_1 f|_p \in \{\pm\}$, הטענה נכונה גם על $D_2 f$.

בהתאם מתקיים,

$$I_{f(u)}(Df|_u v, Df|_u w) = v^t I_2 w = \langle v, w \rangle.$$

כפי שרצינו.

בכיוון ההפוך נניח את השוויון ונקבל,

$$I_{f(u)}(Df|_u v, Df|_u w) = E v^1 w^1 + F(v^2 w^1 + v^1 w^2) + G v^2 w^2 = v^1 w^1 + v^2 w^2 = \langle v, w \rangle.$$

ונקבל ש־$E = G = 1, F = 0$ ההצבה היחידה שנכונה תמיד, משקילות שמצאנו בסעיפים א׳ וב׳ נקבל ש־f היא קונפורמית ומשמרת שטח. $\square$

שאלה 5

סעיף א׳

יהיו $0 < r < R$ ויהי המשטח הפרמטרי $\varphi : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{E}^3$ המוגדר על־ידי,

$$\varphi(\theta, \phi) = ((R + r\cos\phi)\cos\theta, (R + r\cos\phi)\sin\theta, r\sin\phi).$$

פתרון נחשב את התבנית היסודית הראשונה של φ,

$$D\varphi|_{(\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\phi)\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} \langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)}, D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)}, D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle \\ \langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)}, D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)}, D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) & (R + r\cos\phi)r\sin\phi(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) \\ (R + r\cos\phi)r\sin\phi(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) & r^2\sin^2\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + r^2\cos^2\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

עתה נעבור לחישוב השטח על־ידי נוסחת השטח התלויה בתבנית הראשונה,

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_2(\operatorname{Im}\varphi) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(R + r\cos\phi)^2 r^2}\, d\theta\, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R + r\cos\phi)r\, d\theta\, d\phi \\ &= r\int_0^{2\pi} 1\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} R + r\cos\phi\, d\phi \\ &= 2\pi r\int_0^{2\pi} R + r\cos\phi\, d\phi \\ &= 2\pi r(R\phi + r\sin\phi)\mid_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \\ &= 4\pi^2 rR \end{aligned}$$

מצאנו ששטח הטורוס הפרמטרי הוא $4\pi^2 rR$.

סעיף ב׳

יהיו $0 \le \phi_0 \le \phi_1 \le \pi$, נחשב את השטח של $\varphi : [0, 2\pi] \times [\phi_0, \phi_1] \to \mathbb{E}^3$ המוגדר על־ידי,

$$f(\theta, \phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

פתרון זהו חלק של ספירת היחידה S^2 הכלוא בין המישורים $z_0 = \cos\phi_0, z_1 = \cos\phi_1$. נחשב את התבנית היסודית הראשונה,

$$Df = \begin{pmatrix} -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta \\ 0 & -\sin\phi \end{pmatrix}.$$

ולכן,

$$
\begin{aligned}
E &= (D_1 f)^2 = (-\sin\phi\sin\theta)^2 + (\sin\phi\cos\theta)^2 + 0^2 = \sin^2\phi \\
F &= (D_1 f)(D_2 f) = -\sin\phi\sin\theta\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\cos\theta\cos\phi\sin\theta + 0 = 0 \\
G &= (\cos\phi\cos\theta)^2 + (\cos\phi\sin\theta)^2 + \sin^2\phi = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1.
\end{aligned}
$$

כלומר,

$$I = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

נעבור לחישוב השטח,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(\operatorname{Im}\varphi) &= \int_{\phi_0}^{\phi_1}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_{\phi_0}^{\phi_1}\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\phi}\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} 1\,d\theta \cdot \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sin\phi\,d\phi \\
&= 2\pi\cdot(-\cos\phi)\,\Big|_{\phi=\phi_0}^{\phi=\phi_1} \\
&= 2\pi(-\cos\phi_1 + \cos\phi_0).
\end{aligned}
$$

כלומר מצאנו ששטח החתך הוא $2\pi(\cos\phi_0 - \cos\phi_1)$.

נבחין שקיבלנו שהשטח הוא $2\pi(z_1 - z_0)$, כלומר השטח לא תלוי בערכם אלא רק בהפרש שלהם, כלומר בגובה שלהם.

שאלה 6

יהיו $0 < r < R$ ויהי המשטח הפרמטרי $\varphi : (0, 2\pi)^2 \to \mathbb{E}^3$ המוגדר על־ידי,

$$\varphi(\theta, \phi) = ((R + r\cos\phi)\cos\theta, (R + r\cos\phi)\sin\theta, r\sin\phi).$$

נסמן את הטורוס הנוצר על־ידי הפרמטריזציה ב־$T = \varphi((0, 2\pi)^2)$.

סעיף א׳

נחשב את מקדמי התבנית היסודית השנייה.

פתרון מצאנו את ערך הנגזרת והתבנית היסודית הראשונה של הטורוס בשאלה 5,

$$D\varphi|_{(\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\phi)\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

וכן,

$$I = \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

וכן ונחשב גם את הנורמל,

$$n(u) = \frac{D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)}{|D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)|}.$$

ולכן נחשב את $D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)$,

$$D_1 f(u) \wedge D_2 f(u) = \begin{pmatrix} r(R + r\cos\phi)\cos\phi\cos\theta \\ r(R + r\cos\phi)\cos\phi\sin\theta \\ r(R + r\cos\phi)\sin\phi \end{pmatrix}.$$

נבחין שדילגנו על שלב הפישוט לצורך הקריאות. בהתאם גם,

$$|D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)| = r(R + r\cos\phi)\sqrt{\cos^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi} = r(R + r\cos\phi).$$

ולכן נקבל,

$$n(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi \end{pmatrix}.$$

וכן,

$$D_1 n = \begin{pmatrix} -\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D_2 n = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta \\ -\sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi \end{pmatrix}.$$

נעבור לחישוב מקדמי התבנית היסודית השנייה,

$$L = -D_1 f \cdot D_1 n = -(R + r\cos\phi)\sin\theta\cos\phi\sin\theta - (R + r\cos\phi)\cos\theta\cos\phi\cos\theta = -(R + r\cos\phi)\cos\phi$$

$$M = -D_1 f \cdot D_2 n = (R + r\cos\phi)\sin\theta\sin\phi\cos\theta - (R + r\cos\phi)\cos\theta\sin\phi\sin\theta + 0 = 0$$

$$N = -D_2 f \cdot D_2 n = -r\sin^2\phi\cos^2\theta - r\sin^2\phi\sin^2\theta - r\cos^2\phi = -r\sin^2\phi - r\cos^2\phi = -r.$$

כלומר מצאנו שמתקיים,

$$II = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\phi)\cos\phi & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}.$$

סעיף ב'

נחשב את עקמומיות גאוס ואת העקמומיות הממוצעת.

פתרון נחשב את עקמומיות גאוס תוך שימוש בנוסחה שהוצגה והתבנית השנייה,

$$K = \frac{\det I}{\det II} = \frac{r(R + r\cos\phi)\cos\phi}{r^2(R + r\cos\phi)^2} = \frac{\cos\phi}{r(R + r\cos\phi)}.$$

נחשב את העקמומיות הממוצעת באופן דומה,

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}(II \cdot I^{-1}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} -(R + r\cos\phi)\cos\phi & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^{-2} & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\phi}{R + r\cos\phi} + \frac{1}{r}\right).$$

סעיף ג'

נמצא נקודות על הטורוס שבהן עקמומיות גאוס מקיימת $K > 0, K = 0, K < 0$.

פתרון נשתמש בערך המפורש שמצאנו בסעיף הקודם,

$$K = 0 \iff \frac{\cos\phi}{r(R + r\cos\phi)} = 0 \iff \cos\phi = 0.$$

ולכן $\phi = \frac{\pi}{2}$ מקיים את הטענה, נבחר $(\pi, \frac{\pi}{2})$ כנקודה בה העקמומיות היא אפס, נבחין כי יכולנו להגיע לתוצאה זו גם באופן גאומטרי לגמרי, זו נקודה שנמצאת בדיוק במגע שבין טורוס לרצפה, שם העקמומיות מאוזנת.

נסיק מהחישוב הקודם שגם $\cos\phi < 0 \iff K < 0$ ונבחר את הנקודה (π, π), זוהי נקודה בחלק הפנימי של הטורוס. לבסוף גם נבחר $(\pi, \frac{\pi}{3})$ כנקודה בה מתקיים $K > 0$, זוהי נקודה בחלק החיצוני של הטורוס.

שאלה 7

תהי $n:U\to S^2$ העתקת גאוס של $f:U\to\mathbb{E}^3$, המוגדרת על־ידי,

$$n=\frac{D_1f\wedge D_2f}{|D_1f\wedge D_2f|}.$$

ונגדיר $W:T_pS\to T_pS$ על־ידי,

$$W(D_if)=-D_in.$$

עבור $i\in\{1,2\}$.

סעיף א׳

נראה ש־W הוא אופרטור צמוד לעצמו של T_pS, כלומר,

$$I_p(W(u),v)=I_p(u,W(v)).$$

לכל $u,v\in T_pS$.

הוכחה. נסמן $u=D|_pf(u_x,u_y),v=D|_pf(v_x,v_y)$ ולכן,

$$W(u)=W(D|_pf(u_x,u_y))=-D|_pn(u_x,u_y).$$

ולכן גם,

$$W(v)=-D|_pn(v_x,v_y).$$

ולכן,

$$\begin{aligned}
I_p(W(u),v)&=\langle W(u),v\rangle\\
&=\langle -D|_pn(u_x,u_y),D|_pf(v_x,v_y)\rangle\\
&=\langle -D_1n(u_x),D_1f(v_x)\rangle+\langle -D_2n(u_y),D_1f(v_x)\rangle+\langle -D_1n(u_x),D_2f(v_y)\rangle+\langle -D_2n(u_y),D_2f(v_y)\rangle\\
&=u_xv_x\langle -D_1n,D_1f\rangle+u_yv_x\langle -D_2n,D_1f\rangle+u_xv_y\langle -D_1n,D_2f\rangle+u_yv_y\langle -D_2n,D_2f\rangle\\
&=u_xv_x\langle D_1f,-D_1n\rangle+u_yv_x\langle D_2f,-D_1n\rangle+u_xv_y\langle D_1f,-D_2n\rangle+u_yv_y\langle D_2f,-D_2n\rangle\\
&=\langle -D|_pf(u_x,u_y),D|_pn(v_x,v_y)\rangle\\
&=\langle u,W(v)\rangle\\
&=I_p(u,W(v))
\end{aligned}$$

וקיבלנו שהטענה אכן נכונה. □

סעיף ב׳

נראה כי לכל $u,v\in T_pS$ מתקיים,

$$I\!I_p(u,v)=I_p(W(u),v)=I_p(u,W(v)).$$

הוכחה. מספיק להראות את הטענה לכל איבר בנפרד, נסמן,

$$I\!I_p=\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix},\qquad I_p=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}.$$

ולכן נרצה להראות שמתקיים,

$$L(u,v)=E(W(u),v),\quad M(u,v)=F(W(u),v),\quad N(u,v)=G(W(u),v).$$

נשים לב כי $\langle n,D_if\rangle=0$ מהגדרת n כאנך של המישור המשיק, אם נגזור את הביטוי נקבל,

$$D_j\langle n,D_if\rangle=D_j0=0.$$

אז תוך שימוש בנגזרת מכפלה נקבל,

$$D_j\langle n, D_i f\rangle = \langle D_j n, D_i f\rangle + \langle n, D_j D_i f\rangle = 0 \implies \langle D_j n, D_i f\rangle = -\langle n, D_j D_i f\rangle.$$

עבור $i, j \in \{1, 2\}$. עבור בחירת $i = 1, j = 1$ נקבל,

$$E(W(\cdot), \cdot) = \langle D_1 n, D_1 f\rangle = \langle n, D_1^2 f\rangle = L.$$

כלומר מצאנו שהטענה מתקיימת עבור E, L, ותוך שימוש בשוויון זה נוכל להסיק את הטענה לכל שאר המקדמים גם כן. □

סעיף ג׳

נראה כי המטריצה אשר מייצגת את W בבסיס $(D_1 f, D_2 f)$ היא,

$$[W]_{(D_1 f, D_2 f)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

הוכחה. בסעיף הקודם מצאנו שמתקיים,

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(D_1 f) \\ W(D_2 f) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(D_1 f) \\ W(D_2 f) \end{pmatrix}.$$

כאשר השתמשנו בחיוביות בהחלט של I במעבר האחרון. □

סעיף ד׳

יהי (e_1, e_2) בסיס אורתונורמלי של W ונניח שהוא מקבל את הערכים העצמיים (κ_1, κ_2) בהתאמה. נראה שלכל $u = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta \in T_p S$ מתקיים,

$$\kappa_{\text{normal}}(u) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta.$$

הוכחה. TODO □