פתרון מטלה 11 — אנליזה על יריעות, 80426

15 ביוני 2025

שאלה 1

תהי $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ו־$f : M \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה ו־$X : M \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי חלק.

סעיף א׳

נראה שמתקיים,

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{l} df_p(E_i)E_i$$

כאשר $\{E_i\}_{i=1}^{l}$ הוא איזשהו בסיס אורתונורמלי ל־$T_p(M)$, כאשר $\dim T_p(M) = l \le k$.

הוכחה. מהגדרה,

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{k} df_p(e_i)e_i$$

עבור $\{e_i\}_{i=1}^{k}$ הבסיס הסטנדרטי ל־$\mathbb{R}^k$. נניח שמתקיים,

$$E_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^i e_j$$

לכל i. ישירות מהגדרת נגזרת והעובדה ש־$\alpha_i^j = 0$ לכל $l < i \le k$ ולכל j,

$$\sum_{i=1}^{l} df_p(E_i)E_i = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} df_p(\alpha_j^i e_j)\alpha_j^i e_j = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l} df_p(\alpha_j^i e_j)\alpha_j^i e_j = \sum_{j=1}^{k} df_p(e_j)e_j$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהנתון כי $\{E_i\}$ בסיס אורתונורמלי. $\square$

סעיף ב׳

נראה שמתקיים,

$$\operatorname{div}_M(fX) = f \operatorname{div}_M X + \langle \nabla f, X\rangle$$

הוכחה. ניזכר בהגדרה,

$$\operatorname{div}_M(f(p)X(p)) = \sum_{i=1}^{k} \langle D_{e_i} fX|_p, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle f_{e_i}(p)X(p) + f(p)D_{e_i}X|_p, e_i\rangle$$

מהרחבה לדיפרנציאל של מכפלת פונקציות מקורסים קודמים. תוך שימוש בסעיף הקודם ובלי הגבלת הכלליות נוכל להניח שהבסיס פורש את T_pM ולכן,

$$\sum_{i=1}^{k} \langle f_{e_i}(p)X(p) + f(p)D_{e_i}X|_p, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle f_{e_i}(p)X(p), e_i\rangle + \langle f(p)D_{e_i}X|_p, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} f_{e_i}(p)\langle X(p), e_i\rangle + f(p)\langle D_{e_i}X|_p, e_i\rangle$$

אבל ישירות מהגדרת ייצוג לפי בסיסים אורתונורמליים נקבל,

$$\operatorname{div}_M(f(p)X(p)) = f(p)\operatorname{div}_M X(p) + \langle \nabla f(p), X(p)\rangle$$

וקיבלנו את המבוקש. $\square$

סעיף ג׳

תהי $N^{k-1} \subseteq M$ תת־יריעה. יהי $p \in N$, ונגדיר $\nu \in T_pM$ איזשהו וקטור יחידה נורמלי ל־T_pN. נראה שמתקיים,

$$\operatorname{div}_N X(p) = \operatorname{div}_M X(p) - \langle DX_p(\nu), \nu\rangle$$

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$e_k = \nu$, מותר לנו להניח כך מסעיף א' (אחרת נבנה בסיס אורתונורמלי של T_pN ונרחיב אותו עם ν). מתקיים,

$$\operatorname{div}_M X(p) = \sum_{i=1}^{k} \langle D_{e_i} X|_p, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{k-1} \langle D_{e_i} X|_p, e_i \rangle + \langle D_{e_k} X|_p, e_k \rangle = \operatorname{div}_N X(p) + \langle D_\nu X|_p, \nu \rangle$$

ומעשה זוהי הטענה עצמה. □

שאלה 2

סעיף א׳

יהי השדה הווקטורי $Y : S^1 \to \mathbb{R}^2$ המוגדר על־ידי $Y(x) = x$. נחשב את $\operatorname{div}_{S^1} Y$ ישירות ובאמצעות הסעיף הקודם.

פתרון **ישירות**, מתקיים,

$$Y(\cos\alpha, \sin\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad DY|_{(\cos\alpha,\sin\alpha)} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$\operatorname{div}_{S^1} Y(p) = \sum_{i=1}^{2} \langle D_{e_i} Y|_p, e_i \rangle = -\sin\alpha + \cos\alpha.$$

שאלה 1, היריעה S^1 היא חד־מימדית ולכן מספיק שנמצא $\nu \perp T_p S^1$, כמובן שאם,

$$p = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

אז,

$$\nu = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

הוא וקטור נורמלי כזה, ולכן,

$$\operatorname{div}_{S^1} Y(p) = 0 + \langle DX_p(\nu), \nu \rangle = -\sin\alpha + \cos\alpha$$

סעיף ב׳

ניזכר בדיפאומורפיזם $\varphi : S^{n-1} \times (0, \pi) \to S^n \setminus \{(0, \dots, \pm 1)\}$ המוגדר על־ידי,

$$\varphi(x, y) = (x \sin y, \cos y)$$

ונגדיר שדה וקטורי $X : S^n \setminus \{(0, \dots, \pm 1)\} \to \mathbb{R}^{n+1}$ על־ידי,

$$(X \circ \varphi)(x, y) = (-x \sin y \cos y, \sin^2 y)$$

נחשב את $\operatorname{div}_{S^n} X$.

פתרון השאלה לא מוגדרת היטב

שאלה 3

סעיף א׳

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $X : U \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי חלק. נגדיר $p \in U$ ו־$\varphi_t^X(p) : I_{\max}^{p,X} \to U$ הזרימה שלה. נגדיר $Y = -X$ ו־$\varphi_t^Y(p) : I_{\max}^{p,Y} \to U$ הזרימה המתאימה. נראה כי $I_{\max}^{p,Y} = -I_{\max}^{p,X}$ וכן שמתקיים,

$$\varphi_t^Y(p) = \varphi_{-t}^X(p)$$

הוכחה. אילו נניח בשלילה ש־$I_{\max}^{p,Y} < -I_{\max}^{p,X}$ שונים (בלי הגבלת הכלליות), אז נקבל ש־$\varphi_{-\delta}^Y(p)$ ניתנת להרחבה. טענה זו נכונה לשני הכיוונים ולכן נקבל,

$$I_{\max}^{p,Y} \le -I_{\max}^{p,X}, \quad I_{\max}^{p,Y} \ge -I_{\max}^{p,X}$$

ובהתאם שוויון בלבד. החלק השני נובע ישירות מהצבה t_0 ו־$-t_0$ נקבל את הטענה ממשפט 11.6 בסיכום הקורס. □

סעיף ב׳

יהי $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שדה וקטורי המוגדר על־ידי $X(x) = x^2$. נראה שמתקיים,

$$\varphi_t(p) = \frac{p}{1 - pt}$$

ונסיק ש־$I_{\max}^p \ne \mathbb{R}$ כל תנאי ש־$p \ne 0$.

הוכחה. תהי $p \in \mathbb{R}$ כלשהי, אז $X(p) = p^2$ ולכן $\varphi_0(p) = p$ ו־$\frac{d}{dt}\varphi_t(p)|_{t=0} = p^2$. מתקיים,

$$\frac{d}{dt}\frac{p}{1 - pt} = p \cdot (-p) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(1 - pt)^2} = (\varphi_t(p))^2 = X(\varphi_t(p))$$

כלומר התנאי מתקיים ולכן זוהי אכן הזרימה. ממשפט היחידות זוהי גם ההרחבה היחידה.

במקרה $p = 0$ נקבל $\varphi_t(0) = 0$ ולכן $I_{\max}^0 = \mathbb{R}$. אחרת, $\varphi_{\frac{1}{p}}(p)$ לא מוגדר, ולכן בפרט $I_{\max}^p \subseteq (-\frac{1}{p}, \frac{1}{p})$. □

שאלה 4

תהי $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה קומפקטית עם שפה, ו־$X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי כך שלכל $p \in M$ מתקיים $X(p) \in T_p(M)$, ולכל $q \in \partial M$, מתקיים $\langle X(q), \nu(q) \rangle < 0$. תהי $p \in M$ ותהי ההעתקה $t \mapsto \varphi_t(p)$ עבור $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ הזרימה של X המתחילה ב־p.

סעיף א׳

נראה ש־$\varphi_t(p) \in M$ או שעבור,

$$s_0 = \sup\{t \in (-\varepsilon, 0] \mid \varphi_t(p) \notin M\}$$

מתקיים $\varphi_{s_0}(p) \in \partial M$.

הוכחה. עבור $t \in [0, \varepsilon)$ הטענה נובעת ישירות ממשפט שהוכח בהרצאה. לכל $s_0 < t$ נקבל ממקומיות ומשאלה 2 שגם מתקיים $\varphi_t(p) \in M$, ולכן נותר לבדוק את $t = s_0$. אנו יודעים כי לכל $t < s_0$ מתקיים $\varphi_t(p) \notin M$ וכן מתקיים $\varphi_{s_0}(p) \in M$ מקומפקטיות, ולכן מהגדרה שקולה לשפת יריעה נקבל $s_0 \in \partial M$. □

סעיף ב׳

נראה שלכל $t \in (0, \varepsilon)$ מתקיים $\varphi_t(p) \in M \setminus \partial M$.

הוכחה. נובע מהמשפט לגבי יריעות ללא שפה. אם ניקח $N = M^\circ$ ו־$\phi_t(p)$ הזרימה על N, אז מיחידות נקבל $\phi \equiv \varphi$. בהתאם גם $\phi_t(p)$ מוגדר על $[0, \varepsilon)$ מההגדרה. □