

גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית – סיכום

10 בנובמבר 2025



תוכנית העניינים

3	שיעור 1 – 20.10.2025 – 1
3	1.1 מבוא
3	1.2 הגישה הסינחתטית
3	1.3 הגישה האנגלטית
3	1.4 מרחבים אפיניים
5	שיעור 2 – 21.10.2025 – 2
5	2.1 מרחבים אפיניים – המשך
6	2.2 תתי-מרחבים אפיניים
8	שיעור 3 – 27.10.2025 – 3
8	3.1 העתקות אפיניות
9	3.2 יוצרים ובסיסים
10	שיעור 4 – 28.10.2025 – 4
10	4.1 קורדינטות – המשך
11	שיעור 5 – 3.11.2025 – 5
11	5.1 מרחבים אפיניים ממשיים
12	5.2 עוקומים במרחב אפוני ממשי
13	שיעור 6 – 4.11.2025 – 6
13	6.1 קמיות במרחבים אפיניים
14	שיעור 7 – 10.11.2025 – 7
14	7.1 פרמטריזציה לפי אורך
14	7.2 עקומותיות

1 שיעור 1 – 20.10.2025**1.1 מבוא**

גאומטריה היא אבן יסוד של החבורה שלנו, והיא לוקחת חלק בכל תהליך בנייה תכנון ומדידה. לאורך ההיסטוריה היה חקר של גאומטריה באיזשהו אופן נאיבי, אך אנו עוסקים בחקר של הגאומטריה באופן האקסטומטי שלה. אנו עוסקים בחקר של צורות החלוקות, ככלומר שאפשר לטלף אותן, תוך שימוש בכלים שראיםו אנגליזה. הרעיון בקורס הוא לgesht בצורה אלמנטרית לבועות לאו דווקא מרכיבות בגישה שהיא גאומטרית. הצורות שנחקרו הן יריעות, ככל הנראה יריעות החלוקות.

1.2 הגישה הסינתטית

המתמטיקה המודרנית מתבססת על תורה הקבוצות, שכן עלינו לספק הגדרה קבוצתית הולמת למושג המשור.

הגדירה 1.1 (ישרים מקבילים) שני ישרים נקראים מקבילים אם הם מתלדים או אינם נחתכים.

הגדירה 1.2 (קולינאריות) נאמר שקווצה של נקודות הן קולינאריות כאשר כל הנקודות שייכות לישר אחד.

הגדירה 1.3 (משור אפיני) זוג סדור (\mathcal{P}, \mathcal{L}) כאשר \mathcal{P} קבוצה שאת ערכיה נכנה נקודות ו- \mathcal{L} קבוצה של קבוצות של נקודות, אותן נכנה ישרים. זוג סדור זה יקרא משור אפיני אם הוא מקיים את התכונות הבאות,

1. לכל שתי נקודות יש ישר יחיד המכיל את שתיהן

2. לכל ישר ונקודה קיימן ישר יחיד מקביל לישר העובר דרך הנקודה

3. קיימות שלוש נקודות שאינן קולינאריות

מעבר למשפט יסודי שمدגים את אופי המשור האפיני.

משפט 1.4 (מספר נקודות מינימלי במשור אפיני) יהי מרחב אפיני (\mathcal{L}, \mathcal{P}), אז \mathcal{P} לפחות 4 נקודות

הוכחה. יהיו $P, Q, R \in \mathcal{P}$ נקודות שונות ולא קולינאריות. נסמן גם $\langle P, Q \rangle, m = \langle P, R \rangle$, $m' = \langle Q, R \rangle$ שני הישרים העוברים דרך הנקודות המתאימות.

נסמן את $P \in l \in \mathcal{L}$, וגם את $m' \cap l' \in R, m \parallel m'$. אנו טוענים כי $S \in \{P\}$ קיימת וכי היא נקודה רביעית.

נתען טענה עוז, והוא $m' \not\parallel l'$. אילו $m' \parallel l'$ אז מטרנו יוכיחו כי ההקלה היה נובע כי $m \parallel m' \parallel l'$, אבל אז מהתמונה השנייה של משור אפיני היה מתקבל $S = l$ בסתיו לבחירת P, Q, R .

אם $S \in \{P, Q\}$ או היה נובע $S = l$ ולכן גם $l \in R$, בסתיו. אם באופן שקול $S \in \{P, R\}$ או נקבע סטירה דומה, ולכן נותר להגיה $S = P, Q, R$.
□

שני התרגילים הבאים יאפשרו לנו לתרגל את הגישה הסינתטית.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי כל ישר מוביל לפחות שתי נקודות שונות.

תרגיל 1.2 הוכיחו כי יהס ההקלה בין שני ישרים הוא יהס שקולות.

נבחן את המודל אשר כולל את $P, Q, R, S \in \mathcal{L}$. זה המודל המינימלי אשר עומד בהגדרת המשור האפיני, ולמעשה מהוות הדוגמה הפשטת ביתו לאחד כזה.

1.3 הגישה האנגליתית

עתה כאשר בחנו את המשור מבחינה סינתטית אנו יכולים לעבור לבחון את המרחב באופן אנגלי.

הגדירה 1.5 (מודל אנגלי) יהי \mathbb{F} שדה ונסמן $\mathcal{P} = \mathbb{F}^2$ וכן את הישרים שהם קבוצות השורשים של משוואות מהצורה $ax + by + c = 0$ עבור $a, b, c \in \mathbb{F}$ ו- $0 \neq a, b$. במקרה זה ישרים מקבילים אם ורק אם a, b המגדירים את הישרים שווים.

1.4 מרחבים אפיניים

נראה עתה את ההגדרה שתאפשר לנו לדון במרחבים, בנקודות ובכיוונים, קרי וקטוריים.

הגדעה 1.6 (מרחב אפיני) היא \mathbb{F} שדה. מרחב אפיני נתון על-ידי שלשה (E, V, t) כאשר E קבוצה של נקודות, V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , ו- t אשר מסומנת גם v (מלשון translation, היא פונקציית החזזה, מקיימת את התכונות הבאות,

1. אסוציאטיביות: $P \in E, v, w \in V \quad (P + v) + w = P + (v + w)$ לכל $P \in E + v = P$ לכל

2. איבר נייטרלי: $P + 0 = P$

3. חד-חד ערכיות ברכיב השני: לכל $P, Q \in E$ קיים $v \in V$ ייחד כך שקיימים $t_P(v) = Q$, נסמן

סימן 1.7 נסמן את ההשמה החלקית של t על-ידי t_P עבור $P \in E$ נתונה, כלומר,

$$t_P(v) = t(P, v) = P + v$$

דוגמה 1.1 יהיו $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ו- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

. $(F, c) \mapsto F + c$ ולבסוף גם $V = \mathbb{R}$, וכן $E = \{F : I \rightarrow \mathbb{R} \mid F' = f\}$

או זהו מרחב אפיני, והמשמעותו הוא בדיקת 1.

21.10.2025 – 2 שיעור 2

2.1 מרחבים אפיניים – המשך

המשך לראות דוגמאות למרחבים אפיניים.

דוגמה 2.1 נבחר את,

$$E = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{F}^n \mid x^1 + \dots + x^n = 1\}$$

יחד עם,

$$V = \{(\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{F}^n \mid \xi^1 + \dots + \xi^n = 0\}$$

ופונקציית ההזזה,

$$t(x, \xi) = x + \xi = (x^1 + \xi^1, \dots, x^n + \xi^n)$$

זהו מרחב אפיני, הוכחה שזו המצב מושארת לקורא.

דוגמה 2.2 אם V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} או $t : V \times V \rightarrow (V, V, t)$ עברו V המוגדרת על ידי סכום, הוא מרחב אפיני.

נזכיר עתה ונגיד שמרחב אפיני באיזשהו מובן הוא מרחב וקטורי, אבל ללא הקונספט של ראשית, ובכך הוא מאפשר גמישות רבה יותר, בהמשך נראה שהקשר בין המונחים חזק אף יותר, ושאחד משורה את השני.

המרחב האפיני מרכיב מפונקציית התרגומים, אנו רוצים לשאול את השאלה ההפוכה עתה, מהו הווקטור היחיד שתרגם נקודת נקודת אחרת. בהתאם, ניגש להגדרה הבאה.

הגדרה 2.1 פונקציית הפרש (difference function) יי' מרחב אפיני (E, V, t) , פונקציה $v : E \times E \rightarrow V$ תקרא פונקציית הפרש אם לכל מתקיים,

$$t(P, v(P, Q)) = Q$$

כלומר היא הפונקציה שמתואמת לנקודות P ו- Q את הווקטור היחיד w המקיים

$$v(P, Q) = Q - P$$

נסמן גם $v_P(Q) = v(P, Q) = Q - P$ להשמה החלקית v_P .

טענה 2.2 נגיד $v_P : E \rightarrow V$ ששתי פונקציות הפרש, או מתקיים,

$$\forall P, Q \in E, v(P, Q) = v'(P, Q)$$

ישירות מהגדרת המרחב האפיני, לכן נאמר על v שהוא פונקציית ההפרש היהודית למרחב.

טענה 2.3 (חכונות של פונקציית ההפרש) אם $v : E \times E \rightarrow V$ פונקציית ההפרש או מתקיים,

$$1. \text{ לכל } P, Q, R \in E \text{ מתקיים } (Q - P) + (R - Q) = R - P$$

2. לכל $P \in E$ הפונקציה $v_P : E \rightarrow V$ המוגדרת על ידי $v_P(Q) = v(P, Q)$ היא פונקציה חד-חד ערכית ועל

הוכחה. 1. ישירות מאקסימום מרחב אפיני,

$$P + ((Q - P) + (R - Q)) = (P + (Q - P)) + (R - Q) = Q + (R - Q) = R$$

2. עבור $w \in V$ תהי $Q = P + w$ אז,

$$v_P(Q) = Q - P = v$$

ולכן הפונקציה היא על. נניח ש- $R \in E$ עבור $v_P(Q) = v_P(R)$, אז,

$$Q - P = R - P \implies Q = P + (Q - P) = P + (R - P) = R$$

וקיבלנו חד-חד ערכיות.

נבחן כי בזמן שפונקציית ההפרש שוברת את הסימטריה שהתרגלנו אליה בפונקציית התרגום, אך היא מהוות משלים שלה, הטענה הבאה מציגה לנו את הקשר ההדוק שבין הרעיון.

טענה 2.4 עבור $P \in E$ הפונקציות v_P ו- t_P הן הופכיות אחת לשנייה.

הוכחה.

$$E \xrightarrow{v_R} V \xrightarrow{t_R} E$$

לכל $Q \in E$ מתקיים,

$$Q \mapsto Q - P \mapsto P + (Q - P) = Q$$

וכן,

$$V \xrightarrow{t_P} E \xrightarrow{v_P} V$$

ומתקיים,

$$v \mapsto P + v \mapsto (P + v) - P = v$$

□

עתה אנו רוצים להגדר מרחב וקטורי מעל המרחב האפיני שלנו, נבחן את $E \times E$ וنمפה את הנקודות ל- $V \times V$ על-ידי שימוש ב- $v_P \times t_P$. נבחן את,

$$E \times E \xrightarrow{v_P \times t_P} V \times V \xrightarrow{+} V \xrightarrow{t_P} E \xleftarrow{+} E \times E$$

כלומר, נבחן את המיפוי,

$$(Q, R) \mapsto (Q - P, R - P) \xrightarrow{+} (Q - P) + (R - P) \xleftarrow{t_P} P + (Q - P) + (R - P)$$

מכאן יש לנו הפתוח להגדרה הבאה. את המבנה זהה נוגה לכנות $E_P = (E, P, +_P, \cdot_P)$ וזהו אכן מרחב וקטורי.

הגדירה 2.5 (מרחב וקטורי מושרה מנוקודה) יהי (E, V, t) מרחב אפיני ותהי $P \in E$ נקודה כלשהי. עברו $+_P : E \times E \rightarrow E$ המוגדרת על-ידי,

$$\forall Q, R \in E, Q +_P R = Q + R - P$$

ור- $E_P : \mathbb{F} \times E \rightarrow E$ המוגדרת על-ידי,

$$\forall \alpha \in F, Q \in E, \alpha \cdot_P Q = \alpha \cdot (Q - P) + P$$

המרחב $(E, P, +_P, \cdot_P)$ הוא מרחב וקטורי המושרה מהמרחב האפיני והנקודה.

תרגיל 2.1 הוכיחו כי זהו אכן מרחב וקטורי.

2.2 תתי-מרחבים אפיניים

כבר רأינו שמרחב אפיני באיזשהו עולם מתנהג ומדובר בשפה של מרחבים וקטוריים, ובזיהוי כמו בהם, גם כאן נרצה לעסוק בתתי-מרחבים, בהתאם להגדרת תת-המרחב האפיני.

הגדירה 2.6 (תת-מרחב אפיני) יהי מרחב אפיני (E, V) . קובוצה $L \subseteq E$ תיקרא תת-מרחב אפיני אם $L = \emptyset$ או שקיים $L \in E$ ו- $W \leq V$ כך שמתקיים,

$$L = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$$

נקרא גם ירעה אפינית או ירעה לינארית, ולמעשה נשמש בשמות אלה יותר.

דוגמה 2.3 נבחן את $E = \mathbb{R}^2$ ונגדר את,

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

נבחן כי L הוא לא תת-מרחב של המרחב הלינארי E , אך אנו לא בוחנים את E ואת L כמרחבים לינאריים, אלא כמרחבים אפיניים. במקרה זה אמ-

ם נבחר את $P = (0, 1)$ או $W = \text{Sp}\{(1, -1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \leq \mathbb{R}^2$

הערה אם $L = P + W$ תת-מרחב אפיני, אז,

$$W = L - P = \{Q - P \mid Q \in L\}$$

בהתאם גם $w \in W$ עבור $Q \in L \Rightarrow Q = P + w \in W$ כלשהו, נובע ש-

משפט 2.7 (חוויות תת-מרחב לינארי פורט) $W' \leq V$ אם ורק אם $W, W' \subseteq E$ ו- $P + W = Q + W'$.

הוכחה מושארת במסגרת התרגילים הבאים.

תרגיל 2.2 הוכיחו כי $P \in W$ אם ורק אם $.Q - P \in W = Q + W$.

תרגיל 2.3 הוכיחו כי אם $R + W = R + W'$ אז נובע $W = W'$.

הגדה 2.8 (מרחב משיק) $W = W(L)$ נקרא מרחב הכוונים או המרחב המשיק של L .

בהתאם נסמן $\dim_{\mathbb{F}} W = \dim L$ כמידת המרחב.

תרגיל 2.4 הוכיחו כי חיתוך של תת-היריעות הוא תת-יריעה.

הגדה 2.9 אם $S \subseteq E$ קבוצה של נקודות, אז נאמר שה- S הוא תת-הירעה האפינית הנוצרת על-ידי S אם L הוא הירעה המינימלית בミידה המכילה את כל הנקודות.

דוגמה 2.4 אם $E = \mathbb{R}^2$ או תת-הירעה הנוצרת על-ידי $\{(0, 0), (1, 0)\}$ היא הירעה $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.

הגדה 2.10 קבוצה של נקודות תיקרא בלתי-תלויה אפינית אם אין נקודה ששhicת למרחב האפיני שנוצר על-ידי יתר הנקודות.

דוגמה 2.5 במרחב \mathbb{R}^3 הקבוצות הבאות בלתי-תלויות אפיניות:

$$\{(0, 1, 0)\}, \quad \{(0, 1, 0), (1, 0, 0)\}, \quad \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

אך לא יכול להיות שתהיה קבוצה בגודל 4 כזו אם הנקודות הן לא קולינאריות.

משפט 2.11 יהי (E, V) מרחב אפיני. תהי (P_1, \dots, P_r) סדרת סקלרים ב- \mathbb{F} עם התכונה $\lambda^1 + \dots + \lambda^n = 1$. אז לכל $P_0, P'_0 \in E$ מתקיים $P_0 + \lambda^1(P_1 - P_0) + \lambda^2(P_2 - P_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P_0) = P'_0 + \lambda^1(P_1 - P'_0) + \lambda^2(P_2 - P'_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P'_0)$

הוכחה.

$$\begin{aligned} & P_0 + \lambda^1(P_1 - P_0) + \lambda^2(P_2 - P_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P_0) \\ &= P'_0 + (P_0 - P'_0) + \lambda^1((P_1 - P'_0) + (P'_0 - P_0)) + \dots + \lambda^r((P_r - P'_0) + (P'_0 - P_0)) \\ &= P'_0 + (P_0 - P'_0) + (\lambda^1 + \dots + \lambda^r)(P'_0 - P_0) + \lambda^1(P_1 - P'_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P'_0) \end{aligned}$$

□

סימן 2.12 נסמן את הנקודה היחידה הזה שאינה תלולה בראשית בסימון $\lambda^1 P_1 + \dots + \lambda^r P_r$. זה נקרא צירוף אפיני והוא התחליף שלנו לצירופים לינאריים, והוא אף סגור להם.

27.10.2025 – 3 שיעור 3

3.1 העתקות אפיניות

עד כה יש לנו את המרחב האפיני (E, V) , ונדרט את המודול הסטנדרטי.

הגדלה 3.1 (מודול אפיני סטנדרטי) נסמן $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}^n, \mathbb{R}^n)$ כאשר $\mathbb{A}^n = \mathbb{R}^n$, ונסמן את הערכים בו בעזרת $x, \xi \in \mathbb{A}^n$. פונקציית הצירוף $f(x, \xi)$ מוגדר על-ידי חיבור.

עתה נעבור לעסוק בעתקות משמרות מבנה.

הגדלה 3.2 (העתקה אפינית) נניח Sh - E , Sh - F . העתקה אפינית, המסומנת $F \rightarrow E$, נתונה על-ידי זוג פונקציות $\varphi : V \rightarrow U$ ו- $f : E \rightarrow F$

$$\forall P \in E \forall v \in V, f(P + v) = f(P) + \varphi(v)$$

הערה תוק שימוש בהגדלה הדואלית שלנו נסיק שמתקיים, $f(P + v) = f(P) + \varphi(v) \iff f(P + v) - f(P) = \varphi(v)$. נובע אם כך φ נקבעת ביחידות עבור הfonקציה f .

סימן 3.3 נסמן φ ונאמר Sh - φ הוא הדיפרנציאל של f .

הסיבה שאנחנו קוראים ל- Sh - φ כך היא שפונקציות f שונות יכולות להיות בעלות דיפרנציאל זהה, והן תיבדלנה בקבוע בלבד, ככלומר הדיפרנציאל מהנוגכ כי שהיינו מצפים מדיפרנציאל באנגליה. נעבור למספר דוגמאות להעתקות אפיניות.

דוגמה 3.1 פונקציה קבועה, ככלומר $f(P) = f(Q)$ לכל $P, Q \in E$ או Sh - $\varphi = 0_V$.

דוגמה 3.2 הזזה. נבחן את המקרה $E = F, V = U$, ככלומר בבחינת אנ-domorfizm, לכל $w \in V$ נגידר את העתקה $t_w : E \rightarrow E$ על-ידי $P \mapsto P + w$.

נבדוק שהיא אכן אפינית, אם $P \in E, v \in V$ אז,

$$t_w(P + v) - t_w(P) = (P + v) + w - (P + w) = (P + w) + v - (P + w) = v$$

כאמור,

$$(P + v) + w = P + (v + w) = P + (w + v) = (P + w) + v$$

שירותות מהאקסומה השנייה ושימוש בקומוטטיביות החיבור במרחבים וקטוריים. ככלומר $v \in V$ או בסימן שלנו Sh - $d_{t_w} = id_V$.

דוגמה 3.3 פונקציות הומוטטיות (homothecy). יהיו $O \in F, \lambda \in \mathbb{F}$, או נגידר את הfonקציה $h_{O,\lambda} : E \rightarrow F$ על-ידי ההכפלה של וקטור פי λ במרחב O , ככלומר,

$$h_{O,\lambda}(P) = O + \lambda(P - O)$$

ומתקיים Sh - $dh_{O,\lambda} = \lambda id_V$.

תרגיל 3.1 הוכיחו כי פונקציה הומוטטית היא העתקה אפינית.

דוגמה 3.4 נניח Sh - $E = \mathbb{A}^m$ ו- Sh - $F = \mathbb{A}^m$. נגידר את העתקה $A \rightarrow \mathbb{A}^m$, $x \mapsto A \cdot x + b$

$$x \mapsto A \cdot x + b$$

עבור $b \in F$ ו- $A \in Mat_{n,m}(\mathbb{F})$. במקרה זה הדיפרנציאל הוא העתקה הלינארית המיוצגת על-ידי A .

תרגיל 3.2 הוכיחו שהרכבה של העתקות אפיניות היא אפינית.

$$Sh(d(g \circ f)) = Sh(dg \circ df)$$

הגדלה 3.4 (איזומורפיזם אפיני) תиירא איזומורפיזם אפיני אם קיימת העתקה אפינית $g : F \rightarrow E$ כך שמתקיים,

$$g \circ f = id_E \quad f \circ g = id_F$$

במקרה Sh - $E = F$ נקרא להעתקה אוטומורפיזם אפיני, ונסמן ב- $Aut(E)$ להיוות חבורת האוטומורפיזמים מעל המרחב האפיני E .

3.2 יוצרים ובסיסים

הגדעה 3.5 (תת-יריעה נוצרת) נתונה ש- $E \subseteq S \subseteq \langle S \rangle$ היא תת-יריעה הנוצרת על-ידי S , והוא חיתוך כל היריעות המכילות את S .

$$\forall S, \subseteq L \leq E \implies \langle S \rangle \subseteq L$$

משפהה S של נקודות נקראת יוצרת של E אם $\langle S \rangle = E$.

הגדעה 3.6 (בסיס אפיני) $\{P_0, \dots, P_n\}$ תיקרא סדרה בלתי-תלויה אפנית כאשר $n = \dim \langle P_0, \dots, P_n \rangle$ ומכנה את $\{P_0, \dots, P_n\}$ בסיס אפיני ובלתי-תלויה אפנית.

מעבר עתה לדבר על קורדינטות.

הגדעה 3.7 (מערכת יהוס) יהיו E מוגדר סופי מעל \mathbb{F} . מערכת יהוס מעל E נתונה על-ידי זוג (O, \mathcal{B}) כאשר $O \in E$ ו- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ סדרת של V .

טענה 3.8 בהינתן מערכת יהוס (O, \mathcal{B}) לכל $P \in E$ קיימת הצגה ייחודה $P = O + \sum_{i=1}^n b_i x^i$ עבור $x \in \mathbb{F}^n$.

הגדעה 3.9 (קורדינטה) נקראת הקורדינטות של P במערכת היהוס (O, \mathcal{B}) היחידה כך ש- $x = (x^1, \dots, x^n)$ כורדינטה ל-

28.10.2025 — 4 שיעור 4

4.1 קורדינטות — המשך

הגדעה 4.1 (מפה ופרמטריזציה למרחב וקטורי) אם V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} כך ש- $n = \dim V$, או נenna את העתקה $x : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ מפה, העתקה כפובה תלויה בקורדינטה. המיפוי ההפוך $V \rightarrow \mathbb{F}^n$ יכונה פרמטריזציה של V .

משפט 4.2 (מרחב וקטורי מושחה) תהי V קבוצה ותהי $\{f : V \rightarrow \mathbb{F}^n \mid f \text{ is bijection}\}$ עברו \mathbb{N} כלשהו, כך שמתקיים שלכל $x, y \in \text{Coor}(V)$

$$y \circ x^{-1} \in GL_n(\mathbb{F})$$

בתנאים אלה ניתן להגדיר על הקבוצה V מבנה של מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} יחד עם הاكוננה שלכל $x \in \text{Coor}(V)$ הוא איזומורפיים לינאריים.

$$\begin{aligned} & \text{הוכחה. תהי } x \in \text{Coor}(V). \text{ נגדיר את החיבור על-ידי,} \\ & +_V : V \times V \rightarrow V, \quad v +_V u = x^{-1}(x(v) +_{\mathbb{F}^n} x(u)) \\ & \text{וכן,} \end{aligned}$$

$$\cdot_V : \mathbb{F} \times V \rightarrow V, \quad \alpha \cdot_V u = x^{-1}(\alpha x(u))$$

זכור ש- x הוא איזומורפיים לינאריים ולכן,

$$x(v + w) = x(x^{-1}(x(w) + x(v))) = x(v) + x(w)$$

ובאופן דומה,

$$x(\alpha u) = x(x^{-1}(\alpha x(u))) = \alpha \cdot x(u)$$

ונשאר לנו להראות שהפונקציות שקיבלנו הן יחידות, ככלומר שאין משמעות לבחירת x . נניח ש- $y, z \in \text{Coor}(V)$, ונרצה להראות שמתקיים,

$$x^{-1}(x(v) + x(w)) = y^{-1}(y(v) + y(w))$$

ובאופן דומה שווין של הכפל. נסמן $\circ x^{-1} = \lambda_Q$ על שני הצדדים את הפונקציה y ונקבל,

$$y(v) + y(w) = y(x^{-1}(x(v) + x(w))) = \lambda_Q(x(v) + x(w))$$

אבל λ היא לינארית ולכן נקבל,

$$y(v) + y(w) = \lambda_Q(x(v)) + \lambda_Q(x(w)) = y(v) + y(w)$$

ומצאננו שאכן יש שווין. \square

הגדעה 4.3 (מפה אפינית) יהיו (E, V) מרחב אפיני n -ממדי. מערכת קורדינטות על A היא איזומורפיים $\mathbb{A}^n \rightarrow E$ x אפיני. במקרה זה $x(u) = b + Au$ עבור $u \in \mathbb{A}^n$ ו- $b \in \mathbb{A}^n$. נגדיר גם את הקבוצה $GA_n(\mathbb{F})$ כקבוצת ה- x -ים הללו.

למשפט שראינו יש אנלוגיה לגרסה האפינית. הפעם במקום נקבע שתי נקודות האפס ובכך נקבל שמתקיים תנאי המשפט עבור המרחבים הוקטוריים.

5 שיעור 5 — 3.11.2025

5.1 מרחבים אפיניים ממשיים

בחלק זה והלאה נעסק במישים, ככלומר מעטה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. הדבר הראשון שנעסק בו יהיה הנורמה.
הגדרה 5.1 (נורמה) יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} . נורמה מעל V היא פונקציה $V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיים את התכונות,

1. חיזוביות בהחלט: $v = 0 \iff \|v\| = 0 \quad \forall v \in V, 0 \leq \|v\|$

2. הומוגניות: $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

3. אי-שוויון המשולש: $\forall v, u \in V, \|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$

נראה מספר דוגמאות לנורמות במקרה \mathbb{R}^p .

דוגמה 5.1 $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_p|\}$, נורמת הסופרים או נורמת אינסוף.

דוגמה 5.2 $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_p|$ היא נורמת 1.

דוגמה 5.3 הנורמה האוקלידית. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$

במרחבים סופיים מעל \mathbb{R} ישנו משפט הגורס כי כל הנורמות שקולות, ככלומר לדוגמה $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty$ כי כל הנורמות שקולות, וכך גם $\|x\|_2 \leq \sqrt{p}\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$.

הגדרה 5.2 (מטריקה) עבור קבוצה X נגדיר פונקציית מרחק, או מטריקה, כפונקציה המקיים את התכונות:

1. חיזוביות בהחלט: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$

2. סימטריה: $\forall x, y \in X, \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. אי-שוויון המשולש: $\forall x, y, z \in X, \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

כל נורמה משרה מטריקה, ככלומר כל מרחב נורמי הוא בפרט מרחב מטרי. אם על V מוגדרת נורמה אז על $E = (V, \rho)$ מרחב אפיני מעל \mathbb{R} . מוגדרת פונקציית מרחק. ככלומר, נוכל להשרות מרחק גם על מרחב אפיני.

הגדרה 5.3 (בדור) במרחב מטרי כללי (X, ρ) נגדיר כדור (פתוח) על-ידי,

$$B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

ונסמן לעיתים את הכדור גם על-ידי r .

במקרה של נורמה כMOVן קיבל את הטענה השקולה שמתקיים,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \|x - y\| < r\}$$

זוכיר גם את ההגדרות המשלימות לכדור פתוח.

הגדרה 5.4 (כדור סגור וספירה) נגדיר את הכדור הסגור על-ידי,

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\} \quad S(x, r) = \partial B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) = r\}$$

נגדיר גם התכונות במרחב אפיני.

הגדרה 5.5 (סדרה וסדרה מתכנסת) אם (E, V) מרחב אפיני מעל \mathbb{R} וכן $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subseteq E$ סדרה נקודות.

נאמר שהסדרה מתכנסת לנקודת $P \in E$ כאשר $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\| = 0$ במובן המשני.

ובהתאם נצטט משפט חשוב שיעזר לנו.

משפט 5.6 (התכנסות וההתכנסות קורדינטתית) במקרה $E = \mathbb{R}^p$ אם $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq E$ סדרה ונקודה, או מתקיים,

$$x_n \rightarrow l \iff \forall i \leq p, x_n^i \rightarrow l^i$$

כלומר, הסדרה מתכנסת אם ורק אם היא מתכנסת קורדינטתית קורדינטת.

$$|x_n^i - l^i| \leq \|x_n - l\| \leq C|x_n^i - l^i|$$

המשפט נובע ישרות מהטענה כי

$$\|x_n - l\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_n^i - l^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^p |x_n^i - l^i|^2} = \sqrt{C^2} = C$$

5.2 עקומים במרחב אפיני ממשי

הkoncept של עקומים במרחב הוא koncept שקצת קשה לעתים לדבר עליו. עקום הרי הוא רעיון מאוד כללי. בשל כך, נתחילה בדיון על מסילות. לפני שניגש להגדירה הפורמלית נאמר שהמטרה שלנו היא לאפיני אובייקטים שהם קשיירים מיסילתיים במרחב, וכן מהווים באיזשהו מובן תמונה של קטע. זאת אומרת שהם מתנהגים בערך כמו חוט שוז במרחב.

הגדרה 5.7 (מסלול) מסילה (עקום פרמטרי) ב- \mathbb{A}^n היא פונקציה $I \rightarrow \mathbb{A}^n$, עבור $\mathbb{R} \subseteq I$ קטע וכך ש- α גזירה. כלומר כשלכל I מתקיים,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = L$$

הוא גבול מוגדר וסופי. נסמן גבול זה ב- $\dot{\alpha}(t) = \alpha'(t)$ את ערך הנגזרת בנקודת פונקציה של $t \in I$. המסללה תיקרא רגולרית כאשר $0 \neq \alpha'(t)$ לכל $t \in I$.

כמובן, עתה משראינו את ההגדירה, נעבור לדוגמות.

דוגמה 5.4 כל הבאים הם מסילות:

1. ישרים (פרמטריים): אם $L \leq E$ ישו אז $L = P + \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ עבור $v \in V$. בהתאם נוכל להגיד פונקציה $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ כך ש- $\alpha(t) = P + tv$. נבחן כי,

$$\alpha'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P + (t+s)v - P - tv}{s} = v$$

ולכן המסללה רגולרית ובפרט $\alpha'(t) = v$.

2. נגיד את $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ על-ידי $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ כאשר $r < r \in \mathbb{R}$. זהו מסילה כך שתמונהה היא מעגל ברדיוס r במישור. הפעם נקבל ש- $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, כלומר גם הפעם המסללה היא רגולרית.

דרך פשוטה במיוחד לראות זאת היא על-ידי בחינת $r = \|\alpha'(t)\|$.

$$\ddot{\alpha}(t) = \alpha''(t) = -r(\cos t, \sin t)$$

3. במרחב נגיד את המסללה $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ על-ידי $\alpha(\cos t, \sin t, t)$, זהו למעשה ספירלה. גם הפעם נוכל לראות כי זהו מסילה רגולרית.

בעולם של ירידות, בפרט של מסילות, לא מעניינות אותנו תכונות שתלויות בפרמטריזציה, כלומר במסילה כפונקציה התלויה ב- t . אנו מבקשים לעסוק בתמונה, במסלול של המסללה, כולם באובייקט $\mathcal{P} \subseteq E$ $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ מסילה רגולרית. נגיד את האורך של המסללה באופן הבא,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

זהו הגדרה שאולי היגונית גאומטרית, אבל נרצה להראות שהיא אכן מקיימת את הקונספט של מרחק. נגיד הגדירה שבשימוש תוכיה את עצמה כSKUOLA.

הגדרה 5.9 תהיו $\mathcal{P} = (t_0, \dots, t_k)$ חלוקה של $[a, b]$, כלומר $t_0 < t_1 < \dots < t_n = a, t_k = b$. בהינתן $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^p$ מסילה, או נגיד את היישר הפוליגונלי כמסלול שנוצרת על-ידי סדרת הנקודות $(\alpha(t_0), \dots, \alpha(t_k))$.

$$L_\alpha(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$$

ובהתאם ננסה את המשפט שמקשר את ההגדרות.

משפט 5.10 אם $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ מתקיים,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathcal{P}, (\lambda(\mathcal{P}) < \delta) \implies (|L(\alpha) - L_\alpha(\mathcal{P})| < \varepsilon)$$

כלומר עבור על חלוקה \mathcal{P} של $[a, b]$ כך ש- $\delta < (\mathcal{P})$ המרחק בין שני סוגים המרחק חסומים על-ידי ε .

אומנם את הוכחה לא נביא, אך נרמזו ונגיד שם נבחן את ההגדרה של האינטגרל לפי קושי, ונשותמש במשפט לגרנוז', נוכל להוכיח את הטענה.

4.11.2025 — 6 שיעור 6**6.1 קמיות במרחבים אפיניים**

הגדעה 6.1 (קמיות במרחב אפיני) עבור מרחב אפיני (E, V) מעל הממשיים, צירוף אפיני (convex) של $P_0, P_1, \dots, P_k \in E$ הוא $\lambda^0 P_0 + \dots + \lambda^k P_k$ עבור $\lambda^0, \dots, \lambda^k \in \mathbb{R}$ כך ש- $0 \leq \lambda^i \leq 1$ לכל $0 \leq i \leq k$.

הגדעה 6.2 (קטע אפיני) בהינתן $P, Q \in E$ הקטע $[P, Q] \subseteq E$ המוגדר עליידי,

$$[P, Q] = \{R \in E \mid R = \lambda P + \mu Q \mid \lambda + \mu = 1, 0 \leq \lambda, \mu\}$$

הגדעה 6.3 (קובוצה קמורה) קבוצה $C \subseteq E$ של נקודות תיקרא קמורה (convex) אם $[P, Q] \subseteq C$ לכל $P, Q \in C$.

באופן טבעי נוכל להגיד קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}$ קמורה של ממשיים. נרצה להגיד גאומטרית לקובוצת קמיות אפינית, ואז בהתאם להוכחה שהיא שcolaה לגגרו הקטועים של קבוצה.

הגדעה 6.4 (סגור קמור אפיני) אם $A \subseteq E$ קבוצה של נקודות, אז נאמר שהקובוצה $C \subseteq E$ המקיימת,

$$C = \bigcap_{\substack{A \subseteq K \subseteq E \\ K \text{ is convex}}} K$$

10.11.2025 – 7 שיעור 7

7.1 פרמטריזציה לפי אורך

אנו עוסקים בעוקמים פרמטריים רגולריים, קרי במסילות רגולריות, $\mathbb{A}^n \rightarrow I$. הדרישה שלנו היא ש- α תהיה גוראה אינסוף פעמים, כלומר חלקה, ונדרש ש- $0 = \alpha(t) \neq \alpha'(t)$ לכל $t \in I$. נוכל גם לדבר על $A = \alpha(I) \subseteq \mathbb{A}^n$, וזה למעשה העקום עצמו, נקרא לאובייקט זה גם מסלול. בהינתן שתי מסילות אנו רוצים להבין מהי מתקדים $\text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\hat{\alpha})$ עברו שתי מסילות, כלומר אנחנו מנסים להבין מהי מסילות הולכה למעשה מייצגות אותו אובייקט ביקום.

גדרה 7.1 (דיפאומורפיזם) פונקציה $Y \rightarrow X$ נקראת **דיפאומורפיזם אם היא הפיכה, גזירה, והיפיכת גזירה.** דיפאומורפיזם חלך יהא דיפאומורפיזם כך שהוא גזר אינסוסר פעמיים.

הערה מושפט העתקה ההפוכה נובע שם דיפאומורפיזם הוא חלק או גם הפונקציה ההיפיכה שלו היא דיפאומורפיזם חלק. באופן דומה רגולריות של הדיפאומורפיזם הוא תוכנה שחללה על הפונקציה ההיפיכה גם כן.

הגדירה 7.2 (רפרמטריזציה) בהינתן $\varphi : I \rightarrow \mathbb{A}^n$ ו- $I' \rightarrow J$: מיסילה חלקה רגולרית, I, J , קטעים, ו- φ דיפאומורפיזם. במצב זה נאמר $\varphi = \tilde{\alpha} \circ \alpha$ אם φ היא רפרמטריזציה של α , כלומר $\varphi = \tilde{\alpha} \circ \alpha$.

דוגמה 7.1 נניח ש- $\alpha : I \rightarrow \mathbb{A}^2$ נתונה על ידי $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t))^T$. נגיד $\varphi : J \rightarrow I$ על ידי $\varphi(u) = 2u$. אז $\tilde{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{A}^2$ המוגדרת על ידי $\tilde{\alpha}(t) = (\alpha^1(2t), \alpha^2(2t))^T$ בהתאם נקבל שגם $\tilde{\alpha}'(t) = 2\alpha'(2t)$.

7.3 סימן אם $\psi' > 0$ אז נאמר שהיא שומרת על כיוון, אחרת נאמר שהיא משנה כיוון.

משפט 7.4 (קיים פרמטריזציה לפי אורך) יהי עקום פרמטרי n -י $I : c \rightarrow \mathbb{A}^n$ או קיימת $J : \tilde{c} \rightarrow \mathbb{A}^n$ פרמטריזציה שקיימת לכל $\tilde{s}^{-1} \equiv \|\tilde{c}\|$. פרמטריזציה זו נקראת פרמטריזציה לפי אורך.

הוכחה. נסמן $I \in I$ שירירותי. נגדיר את פונקציית האורך $M_0 = \int_{t_0}^t \|c'(u)\| du = \int_{t_0}^t \|\psi'(u)\| du$, ונוכיח כך את פונקציית האורך M_0 בכל נקודה. לפי FTC (המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי) ψ גזירה ומתקיים $0 > \|\psi'(t)\| = \|\psi'(t)\|$. כלומר ψ רגולרית ומונוטונית, ולכן הפיכה. נגדיר $J = \psi(I)$, $J = \psi(I)$, אז J קטע כהমונה של פונקציה רציפה בקטע. יתר-על-כן, ψ היא דיפאומורפיזם, ואף דיפאומורפיזם הילק, נסמן ψ^{-1} . נגדיר $\varphi = c \circ \psi^{-1}$, זהה פרמטריזציה של c , ונוכיח לבודוק ש- $\|\tilde{c}'(t)\| = 1$ לכל $t \in J$. מהגדדרת \tilde{c} מתקיים,

$$\tilde{c}'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{\psi'(\varphi(t))}$$

□ $\|\tilde{c}'(t)\| = \|c'(\varphi(t))\| \cdot \frac{1}{\|\psi'(\varphi(t))\|} = 1$ ולכן **7.2 נגידר את עליידי** $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{A}^2$ כאשר $r > 0$ מתקיים $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^t$ ו $c'(t) = (-r \sin t, r \cos t)^t$. או מילים $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{A}^2$ כאשר $r > 0$ מתקיים $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^t$ ו $c'(t) = (-r \sin t, r \cos t)^t$. ובהתאם למשפט נקבל מהמשפט שאם $L(c) = \int_0^{2\pi} \|c'(t)\| dt = 2\pi r$ אז $\|c'(t)\| = r$ לכל t . בהתאם גם $L(\tilde{c}) = \int_0^{2\pi} \|\tilde{c}'(t)\| dt = 2\pi r$ ולכן $\|\tilde{c}'(t)\| = r$ לכל t . נזכיר את הגדיר את $\tilde{c}(t) = (r \cos(\frac{t}{\omega}), r \sin(\frac{t}{\omega}))^t$, כלומר $\tilde{c}(s) = (c \circ \varphi)(s) = c(\varphi(s)) = c(\frac{s}{\omega})$.

7.2 עיקומותיות

עתה נרצה לדון בהבדל שבין אובייקטים במישור לבין אובייקטים בעקומות. אם $c : I \rightarrow \mathbb{A}^2$ לדוגמה רגולרית, אז נשים לב שnochol להגדיר את הישיר המשיק בנקודה, $c'(t) = c(t_0) + tc'(t_0)$, לכל $t \in I$, ולקבל מישור אפיני. אם c פרמטריזציה לפ' אורך, אז בפרט נקבל שהוקטור המגדר את המשיק הוא נורמלי. נרצה למצוא את הוקטור האורתוגונלי שלו, במטרה להבין את התחנכות של הפונקציה ביחס לשני הוקטורים הללו. בהתאם וורל להריגו כמה אסום מתקיים רק במקרה שבו c הינו ישר.

הדרה 7.5 (בסיס אורתוגונלי של נגזרת) תהי מסילה $c : I \rightarrow \mathbb{A}^2$ רגולרית לפי אורך ותהי $t_0 \in I$.
 $c'(t) \cdot c'(t) = 0$ וכן $v(t) = c'(t)$ ונמצא $(v(t), n(t))$ הוא בסיס אורתוגונלי של הנגזרת בנקודה. אז $\|c'(t)\| = 1$ וכן $c''(t) = k(t)n(t)$ או $c''(t) \perp c'(t)$ ומכאן $c''(t) \cdot c'(t) + c'(t) \cdot c''(t) \equiv 0$, כלומר $2c''(t)c'(t) \equiv 0$.

הגדרות ומשפטים

3	הגדרה 1.1 (ישרים מקבילים)	
3	הגדרה 1.2 (קולינאריות)	
3	הגדרה 1.3 (מיشور אפיני)	
3	משפט 1.4 (מספר נקודות מינימלי במישור אפיני)	
3	הגדרה 1.5 (מודל אנלטי)	
4	הגדרה 1.6 (מרחיב אפיני)	
5	הגדרה 2.1 (פונקציית הפרש)	
5	טענה 2.3 (תכונות של פונקציית ההפרש)	
6	הגדרה 2.5 (מרחיב וקטורימושרה מנוקודה)	
6	הגדרה 2.6 (חת-מרחיב אפיני)	
6	משפט 2.7 (יחידות חת-מרחיב לניארי פורס)	
7	הגדרה 2.8 (מרחיב משיק)	
7	הגדרה	2.9
7	הגדרה	2.10
7	משפט	2.11
8	הגדרה 3.1 (מודל אפיני סטנדרטי)	
8	הגדרה 3.2 (העתקה אפינית)	
8	הגדרה 3.4 (אייזומורפיים אפיני)	
9	הגדרה 3.5 (חת-יריעה נוצרת)	
9	הגדרה 3.6 (בסיס אפיני)	
9	הגדרה 3.7 (מערכת יהוס)	
9	הגדרה 3.9 (קורדיינטה)	
10	הגדרה 4.1 (מפה ופרמטריזציה למרחיב וקטורי)	
10	משפט 4.2 (מרחיב וקטורימושרה)	
10	הגדרה 4.3 (מפה אפינית)	
11	הגדרה 5.1 (נורמה)	
11	הגדרה 5.2 (מטריקה)	
11	הגדרה 5.3 (כדור)	
11	הגדרה 5.4 (כדור סגור וספירה)	
11	הגדרה 5.5 (סדרה וסדרה מתכנסת)	
11	משפט 5.6 (התכנסות וההתכנסות קורדיננטה)	
12	הגדרה 5.7 (מסילה)	
12	הגדרה 5.8 (אורך של מסילה)	
12	הגדרה	5.9
12	משפט	5.10
13	הגדרה 6.1 (קמירות במרחב אפיני)	
13	הגדרה 6.2 (קטע אפיני)	
13	הגדרה 6.3 (קבוצה קמורה)	
13	הגדרה 6.4 (סגור קמור אפיני)	
14	הגדרה 7.1 (דיפאומורפיזם)	
14	הגדרה 7.2 (רפמטריזציה)	
14	משפט 7.4 (קיים פרמטריזציה לפי אורך)	

¹⁴ הגדרה 7.5 (בסיס אורתוגונלי של נגזרת)