פתרון מטלה 12 — תורת המידה, 80517

16 בינואר 2026

שאלה 1

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג ו־$t \in \mathbb{R}$. נאמר ש־E היא t־מחזורית אם $E + t = E$.
נראה שאם E היא t_n־מחזורית עבור סדרה $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ כך ש־$t_n \to 0$, אז אחת מבין הקבוצות E, E^C הן ממידה אפס.

הוכחה. מהגדרת מחזוריות מתקיים גם $E + t = E \iff E - t = E \iff E + tn = E$ לכל $n \in \mathbb{N}$ (באינדוקציה) ולכן נוכל להסיק שקבוצה היא t־מחזורית אם ורק אם קיימת קבוצה $A \subseteq [0, t]$ כך ש־$E = \{A + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. בהתאם אם קבוצה E היא t־מחזורית ו־$A \subseteq [0, t]$ מקיימת את התכונה שהצגנו, אז מתקיים $E \restriction [0, t] = A$ מהגדרת הקבוצות ובהתאם נסיק שגם,

$$\lambda(E \restriction [0, t]) = \lambda(A)$$

נוכל אם כך לחלק את E לקבוצות כמעט זרות ולקבל,

$$\lambda(E) = \lambda(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} n + A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda(A)$$

אילו $\lambda(A) = 0$ אז נקבל,

$$\lambda(E) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 0 = 0$$

ואחרת נניח ש־$\lambda(A) > 0$, אבל $A \subseteq [0, t]$ ולכן $0 < \lambda(A) \le t$.

נעבור לטענת השאלה. נסמן A_n הקבוצה שהגדרנו קודם עבור t_n, ולכן $A_n \subseteq [0, t_n]$. אילו קיים n כך ש־$\lambda(A_n) = 0$ אז נקבל ש־$\lambda(E) = 0$ וסיימנו, לכן נניח ש־$0 < \lambda(A_n) \le t_n$. בהתאם גם נובע ש־$0 \le \lambda([0, t_n] \setminus A_n) < t_n$. אבל $t_n \to 0$ ולכן נובע שלכל $\varepsilon > 0$ קיים n כך ש־$0 \le \lambda([0, t_n] \setminus A_n) < \varepsilon$, ומשרירותיות נסיק שלכל קטע $[0, s]$ אם $\lambda([0, s] \cap E) > 0$ אז מתקבלת סתירה על־ידי בחירת ε נקבל ש־$\lambda([0, s] \cap E) = \infty$ בסתירה להגדרת מידת לבג כמידת רדון. נסיק ש־$\lambda(E^C) = 0$ בלבד. □

שאלה 2

תהי $K \subseteq \mathbb{R}^2$ קומפקטית, ונסמן $\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ את המטריקה האוקלידית. נגדיר גם את פונקציית המרחק של נקודה מקבוצה,

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}_+, \qquad d(x, A) = \inf\{\rho(x, a) \mid a \in A\}$$

עבור קבוצות קומפקטיות המרחק מתקבל עבור $a_0 \in K$ כלשהי, נגדיר,

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, K) = 1\}$$

ונגדיר ש־x נקראת נקודת לבג של הפונקציה $\mathbb{1}_A$ אם מתקיים,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x,r)} \mathbb{1}_A(y)\, d\lambda(y) = \mathbb{1}_A(x)$$

סעיף א׳

נראה שאם $x \in A$ אז x היא לא נקודת לבג של $\mathbb{1}_A$.

הוכחה. נראה שהקבוצה A היא סגורה המקיימת $A = \partial A$. תהי $y \in A$, אז מתקיים $d(y, K) = 1$. בהתאם אם $\varepsilon > 0$ אז $B(y, \varepsilon) \not\subseteq A$ אחרת מאי־שוויון המשולש נוכל למצוא נקודה $z \in A$ המקיימת $d(z, K) \ge 1 + \varepsilon$, נסיק ש־$A$ היא חסרת פנים. כמסקנה מאינפי 3 גם נסיק ש־A סגורה, ולכן אכן $A = \partial A$. ממשפט לבג של אינפי 3 נובע ש־A היא חסרת נפח ביחס ל־ρ, ולכן גם $\lambda(A) = 0$, זאת שכן,

$$\lambda(A) = \int \mathbb{1}_A(y)\, d\lambda(y) = \int \mathbb{1}_A(y)\, dy$$

ובפרט נובע שגם,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x,r)} \mathbb{1}_A(y)\, d\lambda(y) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \cdot 0 = 0 \neq 1 = \mathbb{1}_A(x)$$

כפי שרצינו. $\square$

סעיף ב׳

נסיק ש־$\lambda(A) = 0$.

הוכחה. השתמשנו בטענה זו כדי להוכיח את הסעיף הקודם. $\square$

שאלה 3

יהי X מרחב מידה ויהי Y מרחב טופולוגי האוסדורף מנייה שנייה. נניח ש־$f : X \to Y$ פונקציה מדידה ונגדיר את הגרף של f,

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

סעיף א׳

נראה שקבוצת האלכסון $\Delta_Y = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ היא סגורה בטופולוגיית המכפלה, ונראה שהיא מדידה ב־$\mathcal{B}_Y \times \mathcal{B}_Y$.

הוכחה. תהיינה $x, y \in Y$, אז קיימות $U_x, U_y \subseteq \mathcal{T}_Y$ זרות המקיימות $x \in U_x, y \in U_y$. בהתאם $(x, y) \in U_x \times U_y$, וזו האחרונה קבוצה פתוחה בטופולוגיית המכפלה, נסיק ש־Δ_Y סגורה.

בהתאם מהגדרת $\mathcal{B}_Y \times \mathcal{B}_Y$ נובע ש־Δ_Y מדידה ב־σ־אלגברת המכפלה. □

סעיף ב׳

נסיק ש־$G_f \subseteq X \times Y$ היא מדידה.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $g : X \times Y \to Y \times Y$ על־ידי,

$$g(x, y) = (f(x), y)$$

ולכן נובע ש־$G_f = g^{-1}(\Delta_Y)$ ישירות מהגדרה, אבל g מדידה כהרכבת מדידות ולכן מסעיף א׳ נובע ש־G_f מדידה אף היא. □

שאלה 4

תהי $s:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ כך ש־$s(x,y)=x+y$, כלומר העתקת הסכום. תהיינה μ,ν מידות בורל סופיות על $\mathbb{R}^n$ ונגדיר את הקונבולוציה של μ ו־ν על־ידי,

$$\mu*\nu=s_*(\mu\times\nu)$$

סעיף א׳

נראה שלכל $E\subseteq\mathbb{R}^n$ מדידה בורל מתקיים,

$$(\mu*\nu)(E)=\int\mu(E-x)\,d\nu(x)$$

וכי אם $\mu\ll\lambda$ עבור λ מידת לבג, אז גם $\mu*\nu\ll\lambda$.

הוכחה. נבחין כי מהגדרה מתקיים $(\mu*\nu)(E)=(\mu\times\nu)(s^{-1}(E))$ וממשפט הגדרת מידות מכפלה נקבל,

$$(\mu*\nu)(E)=\int_{\mathbb{R}^n}\mu(\left(s^{-1}(E)\right)^x)\,d\nu(x)$$

כאשר,

$$\left(s^{-1}(E)\right)^x=\{a\in\mathbb{R}^n\mid(a,x)\in s^{-1}(E)\}=\{a\in\mathbb{R}^n\mid a+x\in E\}=\{a\in\mathbb{R}^n\mid a\in E-x\}=E-x$$

ולכן קיבלנו שבדיוק,

$$(\mu*\nu)(E)=\int\mu(E-x)\,d\nu(x)$$

נניח ש־$\mu\ll\lambda$ ונראה שגם $\mu*\nu\ll\lambda$. תהי $E\subseteq\mathbb{R}^n$ מדידה לבג כך ש־$\lambda(E)=0$ ולכן גם $\mu(E)=0$. ידוע שמידת לבג אינווריאנטי להזזות ולכן $\lambda(E-x)=0$ ובהתאם גם $\mu(E-x)=0$. נסיק שמתקיים,

$$(\mu*\nu)(E)=\int0\,d\nu=0$$

כלומר מצאנו שגם $\mu*\nu\ll\lambda$. □

סעיף ב׳

נסיק שלכל $f,g\in L^1(\lambda)$ אי־שליליות, המידה $\mu_f*\mu_g$ רציפה בהחלט ביחס למידת לבג וש־$\frac{d(\mu_f*\mu_g)}{d\lambda}=f*g$, כאשר,

$$(f*g)(y)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(y-x)\,d\lambda(x)$$

כלומר הקונבולוציה של מידות מתלכדת עם הקונבולוציה של פונקציות.

הוכחה. כדי להראות ש־$\lambda_f*\lambda_g\ll\lambda$ מספיק להראות ש־$\lambda_f\ll\lambda$ מהסעיף הקודם. נניח ש־$E\subseteq\mathbb{R}^n$ מדידה לבג ו־$\lambda(E)=0$, אז,

$$\lambda_f(E)=\int_E f\,d\lambda=0$$

כמסקנה ממטלות קודמות, ולכן $\lambda_f*\lambda_g\ll\lambda$. נסמן $h=\frac{d(\lambda_f*\lambda_g)}{d\lambda}$ ולכן לכל מדידה לבג E,

$$(\lambda_f*\lambda_g)(E)=\int_E h\,d\lambda$$

אבל מהסעיף הקודם גם,

$$(\lambda_f*\lambda_g)(E)=\int\lambda_f(E-x)\,d\lambda_g(x)=\int g(x)\lambda_f(E-x)\,d\lambda(x)$$

ומשני השוויונות האחרונים נקבל שאכן מתקיים בדיוק,

$$h(x)=f*g$$

כפי שרצינו. □

סעיף ג׳

יהי $y \in \mathbb{R}^n$, נמצא מידה סופית ν כך שלכל μ סופית ולכל E מדידה בורל מתקיים $(\mu * \nu)(E) = \mu(E - y)$.

פתרון נגדיר $\nu = \delta_y$. תהי μ מידה סופית ותהי E קבוצה מדידה, אז מתקיים,

$$(\mu * \nu)(E) = \int \mu(E - x)\, d\nu(x) = \int \mu(E - x)\, d\delta_y = \mu(E - y)$$