פתרון מטלה 03 — מבוא לטופולוגיה, 80516

14 באפריל 2025

שאלה 2

בכל אחד מן הסעיפים הבאים נגדיר מרחב טופולוגי (X,τ) ותת־קבוצה $A\subseteq X$ ונמצא את $A^\circ, \partial A$.

סעיף א׳

נגדיר $X=\mathbb{R}, \mathcal{B}_\tau=\{[a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$, כלומר הישר של זורגנפריי, יחד עם $A=(0,1]$.

פתרון נבחין כי $\{[a,b) \mid 0<a<b<1\}\subseteq\mathcal{B}_\tau$ היא קבוצת איברי הבסיס החלקיים ל־A, ולכן גם כל קבוצה $U\subseteq A$ פתוחה היא איחוד מהקבוצה שהצגנו, נובע אם כך מהגדרה שמתקיים,

$$A^\circ=\bigcup\{[a,b) \mid 0<a<b\le 1\}=(0,1)$$

נבחן עתה את $(A^C)^\circ$. אנו יודעים ש־$A^C=(-\infty,0]\cup(1,\infty)$, ונוכל מהליך זהה לזה שעשינו עבור הקבוצה המקורית לקבוע כי $(A^C)^\circ=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$, ולכן $\overline{A}=[0,1]$. נסיק ש־$\partial A=\{0,1\}$.

סעיף ב׳

נגדיר $X=\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הקו־סופית, והקבוצה $A=[0,1)$.

פתרון נתחיל ונבחין ש־$|A|=|\mathbb{R}|$, לכן $A\in\tau$, כלומר $A=A^\circ$. בטופולוגיה הקו־סופית כל קבוצה סגורה היא מגודל סופי או X, לכן לא קיימת קבוצה סגורה מלבד X כך שהיא מכילה את A, נסיק אם כן ש־$\overline{A}=\mathbb{R}$. לבסוף נובע ש־$\partial A=A^C$.

סעיף ג׳

נגדיר $X=C[0,1]$ יחד עם מטריקת סופרימום, ונגדיר את τ להיות הטופולוגיה המושרית ממטריקה זו.

נגדיר גם $A=\{f\in C[0,1] \mid \exists x\in[0,1], f(x)\in[0,1]\}$.

פתרון תהי $f\in A$, נרצה להבין אם $f\in A^\circ$. אנו רוצים לבחון אם קיים $\epsilon>0$ כך ש־$B(f,\rho)\subseteq A$. אם $g\in B(f,\epsilon)$ אז לכל $x\in[0,1]$ מתקיים $|f(x)-g(x)|<\epsilon$, ולכן אם $f(x)\in(0,1)$ עבור איזשהו x, אז בהכרח קיים ϵ כזה. אילו $f(x)\in\{0,1\}$ עבור איזשהו x בלבד ו־$f(x)\notin(0,1)$, אז תמיד נוכל לבחור $g(x)=f(x)+\epsilon$ ונקבל ש־$g\notin A$. נסיק שמתקיים,

$$A^\circ=\{f\in C[0,1] \mid \exists x\in[0,1], f(x)\in(0,1)\}$$

נטען גם ש־A קבוצה סגורה, זאת שכן $A^C=\{f\in C[0,1] \mid \forall x, f(x)\notin[0,1]\}$, ומשיקולים דומים קיים כדור מוכל סביב כל פונקציה בקבוצה זו. לכן נסיק,

$$\partial A=\{f\in X \mid \exists x\in[0,1], f(x)\in\{0,1\}, \forall y, f(y)\notin(0,1)\}$$

שאלה 3

יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מרחבים טופולוגיים ותהי $f : X \to Y$ העתקת מנה. נניח ש־$\sim_f$ יחס השקילות על X המוגדר על־ידי $x \sim_f Y \iff f(x) = f(y)$. נסמן ב־$p$ את ההטלה של X ל־$X/\sim_f$. נוכיח כי קיים ויחיד הומיאומורפיזם $i : (Y,\sigma) \to (X/\sim_f, p_*\tau)$ כך ש־$i \circ f = p$.

הוכחה. נגדיר i כזה. לכל $y \in Y$ יהי $x \in X$ כך ש־$y = f(x)$, ידוע כי f על ולכן יש כזה. נגדיר אם כך $i(y) = [x]_{\sim_f}$. נבחין כי הגדרה זו לא תלויה בבחירת x, שכן אם $y = f(x')$ גם כן, אז $[x] = [x']$. זוהי אם כן גם העתקה חד־חד ערכית, אחרת נקבל ש־f לא מקיימת את תנאי הפונקציה, וכן i על ישירות מהגדרת יחס השקילות $\sim_f$. לבסוף ישירות מהגדרת העתקת מנה נסיק ש־i היא העתקה פתוחה ורציפה, ולכן גם הומיאומורפיזם.

עתה נרצה להוכיח ש־i מקיימת את הטענה האמורה, וכי אם j הומיאומורפיזם המקיים את הדרישה אף הוא, אז $i = j$. יהי $x \in X$, אז $i(f(x)) = p(x) = [x]_{\sim_f}$ ישירות מהגדרה. לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ כך ש־$[x] = i(y)$, לכן גם $[x] = j(y) = j(f(x))$, וקיבלנו $i(x) = j(x)$, ונסיק $i = j$. לכן i הומיאומורפיזם יחיד. $\square$

שאלה 4

בשאלה זו נעסוק ב־$\mathbb{R}P^n$.

סעיף א׳

נוכיח כי $\mathbb{R}P^1$ הומיאומורפי ל־S^1.

הוכחה. מטעמי נוחות נבחן את שני המרחבים מעל המרוכבים, נניח ש־$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, אז $[z] = \{tz \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. נגדיר $f([z]) = z^2$ עבור הנציג המקיים $|z| = 1$. נבחין כי זוהי הגדרה עקבית, זאת שכן אם $w \sim z$ אבל $z \neq w$, אז $|z| = |w| = 1$ וכן $-z = w$, אז $z^2 = w^2$. העתקה זו כמובן גם חד־חד ערכית כפולינום מרוכב ועל מאותה הסיבה. זוהי גם העתקה רציפה ל־$\mathbb{C}$ ולכן גם לצמצום של המרחב.

נרצה אם כך להראות שהיא פתוחה. נניח ש־$U^* \subseteq \mathbb{R}P^1$ קבוצה פתוחה, אז נבחר את $U \subseteq \mathbb{C}$ קבוצת הנציגים של U^* כך ש־$\forall x \in U, |x| = 1$. נגדיר גם ש־$x, -x \in U$, ונקבל קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{C}$, ולכן תמונתה פתוחה אף היא ב־$\mathbb{C}$ וכן צמצומה פתוח. נסיק ש־f היא הומיאומורפיזם. $\square$

סעיף ב׳

יהי $n \in \mathbb{N}$, נראה ש־$\mathbb{R}P^n$ הוא מנה של S^n.

הוכחה. נגדיר את ההעתקה $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$ על־ידי $f([x]) = \{tx \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. זוהי העתקה מוגדרת היטב מטעמי כיסוי כל הנציגים בישר, והיא על ישירות מבחירת נציג בטווח.

אנו רוצים להראות כי $U \subseteq \mathbb{R}P^n$ היא פתוחה אם ורק אם $f^{-1}(U)$ פתוחה. הטופולוגיות על שני המרחבים בנויים על מנה של $\mathbb{R}^{n+1}$, ולכן אם U קבוצה פתוחה אז בהכרח $\bigcup[U]$ פתוחה ב־$\mathbb{R}^{n+1}$, אבל במקרה זה נובע ישירות ש־$\bigcup[U]/\sim$ עבור היחס המשרה את S^n פתוחה אף היא. נסיק כי אכן מתקיימת הדרישה, ולכן $\mathbb{R}P^n$ הוא מנה של S^n. $\square$