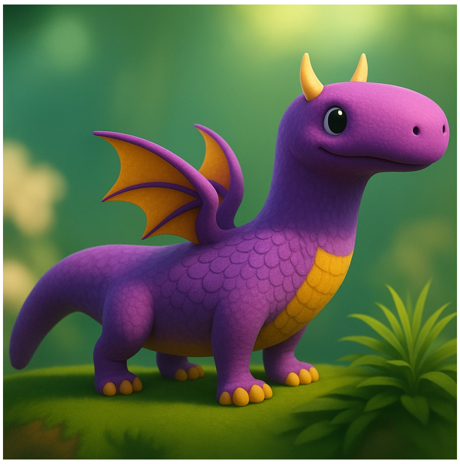
פתרון מטלה 6 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

13 בדצמבר 2025



שאלה 1

תהי $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המכפלה החיצונית, כלומר ההעתקה המתאימה עבור (x, y) ל־$\varphi = z \mapsto \det(x, y, z)$ את הווקטור היחיד v המקיים $l_v = \varphi$.

סעיף א׳

נראה ש־$\wedge$ בי־לינארית.

הוכחה. נזכור כי מתקיים $\det(x + x', y, z) = \det(x, y, z) + \det(x', y, z)$ ולכן אם $(x \wedge y) = u, (x' \wedge y) = u'$ אז,

$$u \cdot z = \det(x, y, z), \quad u' \cdot z = \det(x', y, z) \implies (u + u') \cdot z = \det(x + x', y, z)$$

התהליך זהה עבור y. □

סעיף ב׳

נראה ש־$x \wedge y = -y \wedge x$.

הוכחה. ידוע שמתקיים $\det(x, y, z) = -\det(y, x, z)$ ולכן הטענה נובעת ישירות תוך שימוש במהלך של הסעיף הקודם. □

סעיף ג׳

נראה ש־$x \cdot (x \wedge y) = 0 = (x \wedge y) \cdot y$.

הוכחה. ידוע כי $(x \wedge y) \cdot y = \det(x, y, y) = 0$ כדטרמיננטה של מטריצה לא הפיכה. הצד השני נובע מסימטריה של מכפלה פנימית ממשית. □

סעיף ד׳

נראה ש־$x \wedge y = 0$ אם ורק אם $\{x, y\}$ תלויה לינארית.

הוכחה. נניח ש־$x \wedge y = 0$, אז נקבל $\det(x, y, z) = 0$ לכל z, אם נבחר $z \notin \operatorname{Span}\{x, y\}$ נקבל שבהכרח x, y פרופורציונליים.

בכיוון ההפוך הטענה נובעת ישירות מדטרמיננטה של מטריצה לא הפיכה. □

סעיף ה׳

נוכיח שאם $x \wedge y \neq 0$ אז $(x, y, x \wedge y)$ בסיס סדור חיובי.

הוכחה. נבחין כי $\|x \wedge y\| \neq 0$ ולכן $\det(x, y, x \wedge y) \neq 0$ ולכן מטריצה זו הפיכה ובהתאם מרחב העמודות שלה הוא בלתי־תלוי לינארית. □

סעיף ו׳

נראה ש־$(x \wedge y) \wedge z = (x \cdot z)y - (y \cdot z)x$.

הוכחה. מתקיים $(x \wedge y) \cdot w = \det(x, y, w)$ וכן $((x \wedge y) \wedge z) \cdot w = \det(x \wedge y, z, w)$, נפתח את הגדרת הדטרמיננטה ונסיים. □

סעיף ז׳

נראה שתקיים,

$$(x \wedge y) \cdot (z \wedge w) = \begin{vmatrix} x \cdot z & x \cdot w \\ y \cdot z & y \cdot w \end{vmatrix}$$

הוכחה. ישירות מפתיחת הדטרמיננטה. $\square$

סעיף ח׳

נראה שמתקיים,

$$|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2$$

הוכחה. נציב בנוסחה מהשאלה הקודמת ונקבל,

$$(x \wedge y) \cdot (x \wedge y) = \begin{vmatrix} x \cdot x & x \cdot y \\ y \cdot x & y \cdot y \end{vmatrix} = |x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2$$

$\square$

סעיף ט׳

נסמן (i, j, k) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. נראה שמתקיים $i \wedge j = k, j \wedge k = i, k \wedge i = j$.

הוכחה. מתקיים $(i \wedge j) \cdot w = \det(i, j, w) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & w_2 \\ 0 & w_3 \end{vmatrix} = w_3 = k \cdot w$. שני המקרים הנוספים שקולים. $\square$

סעיף י׳

נראה שמתקיים,

$$x \wedge y = \begin{pmatrix} x^2y^3 - x^3y^2 \\ x^3y^1 - x^1y^3 \\ x^1y^2 - x^2y^1 \end{pmatrix}$$

הוכחה. באופן דומה לסעיף הקודם,

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \cdot w &= \det(x\ y\ w) \\ &= \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & w^1 \\ x^2 & y^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & w^3 \end{vmatrix} \\ &= w^1 \begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix} - w^2 \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix} + w^3 \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} \\ &= w^1(x^2y^3 - x^3y^2) - w^2(x^1y^3 - x^3y^1) + w^3(x^1y^2 - x^2y^1) \\ &= \begin{pmatrix} x^2y^3 - x^3y^2 \\ x^3y^1 - x^1y^3 \\ x^1y^2 - x^2y^1 \end{pmatrix} \cdot w \end{aligned}$$

ישירות משימוש בכללי חישוב דטרמיננטה. $\square$

שאלה 2

תהיינה $A \in M_2(\mathbb{R}), B \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ עבור A סימטרית, ו־$c \in \mathbb{R}$.
שניונית במישור $\mathbb{A}^2$ היא קבוצה מהצורה,

$$Q(\iota) = \{x \in \mathbb{A}^2 \mid \iota(x)^t A \iota(x) + B\iota(x) + c = 0\}$$

נגיד גם ששתי שניוניות $Q, Q' \subseteq \mathbb{A}^2$ הן שקולות אפינית אם קיימת $f \in GA_2(\mathbb{R})$ העתקה אפינית הפיכה כך ש־$Q(\mathrm{id}) = Q'(f)$.
נראה ששניונית שקולה אפינית לאחת מהאפשרויות הבאות: אליפסה, היפרבולה, פרבולה, זוג ישרים אנכים, זוג ישרים מקבילים, נקודה או הקבוצה הריקה.

הוכחה. נגדיר את התבנית $q(x) = x^t Ax + Bx$ כך ש־$Q = \{q(x) + c = 0\}$, אז $x^t Ax + Bx$ תבנית ריבועית ולכן קיים בסיס כך שהיא שווה ל־$x^t \operatorname{diag}(c_1, c_2)x$, כאשר $c_1, c_2 \in \{1, 0, -1\}$. אם במצב זה P מטריצת המעבר המתאימה אז $Q(P)$ היא שקולה שניונית שקולה, כלומר נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות שמתקיים,

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid c_1 x^2 + c_2 y^2 + c = 0\}$$

במצב זה $c \in \mathbb{R}$, אבל נוכל להרכיב מטריצה סקלרית $\operatorname{diag}(\frac{1}{c}, \dots, \frac{1}{c})$ ולקבל ש־Q שקול לשניונית בה $c \in \{1, 0, -1\}$ בלבד, ולכן נניח גם כך בלי הגבלת הכלליות. נבחין כי בהתאם לערכי c_1, c_2, Q היא קבוצת הפתרונות של אחת המשוואות הבאות בלבד,

$$x^2 + y^2 + c = 0, \quad x^2 - y^2 + c = 0, \quad x^2 + y = 0, \quad x^2 + c = 0$$

עבור $c \in \{1, 0, -1\}$.

נעבור לבחון כל מקרה ובכך לסיים את ההוכחה. אם $Q = \{x^2 + y^2 + c = 0\}$ אז אם $c = 0$ אז נקבל $Q = \{0\}$, אם $c = 1$ אז נקבל $Q = \emptyset$.
אם $c = -1$ אז נקבל ש־Q הוא מעגל, כלומר שכל שניונית מצורה זו היא אליפסה.

נניח ש־$Q = \{x^2 - y^2 + c = 0\}$. אם $c \in \{-1, 1\}$ אז נקבל ש־Q היא היפרבולה, ואחרת נקבל ש־Q היא ישרים מצטלבים.

נניח ש־$Q = \{x^2 + y = 0\}$, אז נקבל ש־Q היא פרבולה.

לבסוף נניח ש־$Q = \{x^2 + c = 0\}$ אז אם $c = -1$ נקבל ישרים מקבילים, אם $c = 0$ אז נקבל ש־Q שקולה לישר בודד, ואם $c = 1$ אז נקבל ש־$Q = \emptyset$ שוב. $\square$

נסמן $A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{smallmatrix}\right)$ ונמצא תנאי שקובע אילו צורות לא מנוונות (אליפסה היפרבולה או פרבולה) מתקבלות.
פתרון נסמן ε_1 להיות הסימן של α ונקבל,

$$(x\ y)A(x, y)^t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \varepsilon_1 \left(\sqrt{\varepsilon_1 \alpha} x + \frac{\varepsilon_1 \beta}{\sqrt{\varepsilon_1 \alpha}} y\right)^2 + \left(-\varepsilon_1 \frac{\beta^2}{\alpha} + \gamma\right) y^2$$

מצאנו שאם שני המקדמים חיוביים, כלומר אם $\alpha > 0$ וגם $-\beta^2 + \gamma > 0$ אז מתקבלת אליפסה, כלומר נקבל אליפסה אם ורק אם $\alpha > 0, \gamma > \beta^2$.
באופן דומה אם $\alpha > 0, \gamma < \beta^2$ נקבל היפרבולה ואם $\gamma = \beta^2$ נקבל פרבולה.

שאלה 3

נמיין שניוניות במישור אוקלידי, כלומר הפעם נבחן שניוניות עד־כדי שקילות אוקלידית, כלומר נגיד ש־Q ו־Q' שקולות אוקלידית אם $f \in GA_2(\mathbb{R})$ שומרת מרחק המקיימת $Q(f) = Q'$.

פתרון המקרה דומה לשאלה הקודמת, אך הפעם לא נוכל לבצע פקטור גודל, כלומר ש־$Q = \{ax^2 + by^2 + c = 0\}$ עבור $a, b, c \in \mathbb{R}$. בשל היכולת לחלק או לכפול את המשוואה בלי לשנות את מרחב תוצאותיה, נוכל להניח ש־$c \in \{1, 0, -1\}$. בהתאם נקבל ש־Q שקול לפתרון אחת המשוואות,

$$ax^2 + by^2 + c = 0, \quad ax^2 - by^2 + c = 0, \quad ax^2 + by = 0, \quad ax^2 + c = 0$$

באופן שקול למקרה הקודם.

שאלה 4

נמיין אפינית ואוקלידית את השניוניות הבאות ונמצא להן משוואה סטנדרטית.

סעיף א׳

נגדיר $Q = \{4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0\}$.

פתרון נבחין כי,

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = (2x - y - 1)^2 - 10y - 5$$

אז מצאנו ש־Q מתאימה למשוואת פרבולה $x^2 - y = 0$.

נוכל להסיק אם כך שהיא שקולה אוקלידית למשוואה מהצורה $ax^2 + by^2 + c = 0$.

סעיף ב׳

נגדיר $Q = \{5x^2 + 8xy + 5y^2 - 3x + y - 2 = 0\}$.

פתרון מחפיפה של $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ נקבל את ההעתקה $w \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 5^{-1/2} & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{smallmatrix}\right) w$.

ממנה נסיק ש־$Q \cong \{x^2 + y^2 - \frac{3}{\sqrt{5}}x + \frac{8}{\sqrt{5}}y - 2 = 0\} = \{(x - \frac{3}{2\sqrt{5}})^2 + (y + \frac{4}{\sqrt{5}})^2 - 5 - \frac{13}{20} = 0\}$. נסיק ש־$Q$ מתאים למשוואה הסטנדרטית $x^2 + y^2 - 1 = 0$ וזוהי משוואת אליפסה.

באופן שקול נקבל שגם $ax^2 + by^2 - 1 = 0$ משוואה סטנדרטית האוקלידית.