פתרון מטלה 07 — אנליזה פונקציונלית, 80417

23 במאי 2025

שאלה 1

עבור מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ נגדיר $A^* = \overline{A^t}$. על המרחב $M_n(\mathbb{C})$ נגדיר את ההעתקה $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B)$.

סעיף א׳

נראה כי $(M_n(\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ הוא מרחב מכפלה פנימית.

הוכחה. נבדוק את ארבעת התנאים שמגדירים מכפלה פנימית.

1. סימטריה בהצמדה,
$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B) = \operatorname{tr}(\overline{A^t}B) = \operatorname{tr}(B^t\overline{A}) = \overline{\operatorname{tr}(\overline{B^t}\overline{\overline{A}})} = \overline{\langle B, A\rangle}$$
כאשר השתמשנו בתכונות של העקבה ושל הצמדה.
2. הומוגניות באיבר השני,
$$\langle A, \alpha B\rangle = \operatorname{tr}(A^*\alpha B) = \operatorname{tr}(\alpha A^*B) = \alpha\langle A, B\rangle$$
כאשר השתמשנו בהומוגניות מכפלת מטריצות.
3. לינאריות באיבר השני,
$$\langle A, B + C\rangle = \operatorname{tr}(A^*(B + C)) = \operatorname{tr}(A^*B + A^*C) = \operatorname{tr}(A^*B) + \operatorname{tr}(A^*C) = \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$$
כנביעה מלינאריות העקבה ומפילוג כפל מטריצות.
4. אי־שליליות,
$$\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{a_{l,k}}a_{l,k} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|a_{l,k}\|^2 \geq 0$$
ואם $\langle A, A\rangle = 0$ אז $a_{l,k} = 0 \iff \|a_{l,k}\| = 0$ לכל l, k ונסיק $A = 0$.

אז בהתאם $\langle\cdot,\cdot\rangle$ היא מכפלה פנימית ונובע שהמרחב הוא אכן מרחב מכפלה פנימית. □

סעיף ב׳

נסיק כי אם A, B מטריצות מרוכבות מאותו סדר אז $|\operatorname{tr}(A^*B)|^2 \leq \operatorname{tr}(A^*A) \cdot \operatorname{tr}(B^*B)$.

הוכחה. נגדיר $\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$, ולכן מאי־שוויון קושי־שוורץ מתקיים,
$$|\langle A, B\rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$
כלומר,
$$|\operatorname{tr}(A^*B)| \leq \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A) \cdot \operatorname{tr}(B^*B)}$$
ולכן גם, $|\operatorname{tr}(A^*B)|^2 \leq \operatorname{tr}(A^*A) \cdot \operatorname{tr}(B^*B)$. □

שאלה 2

יהי H מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית ב־H. נסמן $M = \text{Sp}\{e_n\}$. נוכיח כי $x \in \overline{M}$ אם ורק אם,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x \rangle e_n$$

הוכחה. נניח ש־$x \in \overline{M}$. לכן קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ כך ש־$x_n \to x$. לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ ו־α_i^n עבור $1 \le i \le N$ כך שמתקיים,

$$x_n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^n e_i$$

אבל מתכונת הקירוב האופטימלי של טורי פורייה נובע,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle e_i \right\| \le \|x - x_n\|$$

ולכן נסיק מכלל הסנדוויץ',

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x \rangle e_n$$

נניח עתה כי,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x \rangle e_n$$

ונראה ש־$x \in \overline{M}$. נגדיר סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ על־ידי,

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle e_i$$

אז מהגדרה $x_n \to x$ אבל גם $x_n \in M$ ולכן $x \in \overline{M}$. □

שאלה 3

יהי $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ קטע. נראה שלא קיימת מערכת אורתוגונלית של פונקציות רציפות חיוביות למרחב $C[a,b]$ עם המכפלה הפנימית.

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

כלומר אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C[a,b]$ מערכת אורתוגונלית, אז קיים $n \in \mathbb{N}$ ו־$x \in [a,b]$ כך ש־$f_n(x) = 0$.

הוכחה. אילו f, g רציפות וחיוביות אז ממונוטוניות האינטגרל,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\ dx \leq \int_a^b f(c)g(c)\ dx = f(c)g(c)(b-a) > 0$$

עבור c הנקודה בה $f \cdot g$ מקבלת מינימום (חיובי) ב־$[a,b]$. בפרט $\langle f, g\rangle \neq 0$ תמיד, ולא יכולה להיות סדרת פונקציות אורתוגונליות כאלה. $\square$

שאלה 4

יהי $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ קטע. בתרגול הגדרנו מערכת אורתוגונלית של פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq C[a,b]$, מצאנו גם כי שורשי p_n ממשיים לכל $n\in\mathbb{N}$.

סעיף א׳

נראה שלכל n, לפולינום p_n יש n שורשים פשוטים, כלומר שהריבוי שלהם הוא 1.

הוכחה. נסמן $p_n=\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)^{\beta_k}$ עבור α_k ממשיים. אם כל השורשים פשוטים סיימנו, לכן נניח אחרת.
קיים $l\leq k$ כך ש־$\beta_l>1$, אז נגדיר,

$$q_n(x)=(x-\alpha_l)^{\beta_l-2}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}(x-\alpha_k)$$

כלומר זהו הפולינום p_n לאחר שחולק ב־$(x-\alpha_l)^2$, זהו אכן פולינום שכן $\beta_l\geq 2$.
q_n צמצום של p_n ולכן $\deg q_n<\deg p_n$ ונסיק $\langle q_n,p_n\rangle=0$. מהצד השני,

$$q_n(x)p_n(x)=(x-\alpha_l)^{2\beta_l-2}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}(x-\alpha_k)^2$$

כל הגורמים בפולינום הם ריבועיים, ונסיק,

$$\langle p_n,q_n\rangle=\int_a^b p_n(x)q_n(x)\,dx>0$$

בסתירה ל־$\langle p_n,q_n\rangle=0$, ולכן $\beta_l=1$ בלבד. □

סעיף ב׳

נראה שלכל $n\in\mathbb{N}$ כל השורשים של p_n שייכים ל־(a,b).

הוכחה. נניח ש־α_k השורשים של p_n עבור $1\leq k\leq n$. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n. עבור $n=0$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי. עתה נניח שעבור n כלשהו $\alpha_k\in(a,b)$ לכל $1\leq k<n$. נניח בשלילה ש־$\alpha_n\notin(a,b)$, וללא הגבלת הכלליות נגדיר שגם $\alpha_n>b$, לכן $x-\alpha_n$ חיובי לחלוטין ב־$[a,b]$. נגדיר,

$$q_n(x)=\prod_{k=1}^{n-1}(x-\alpha_k)$$

ולכן,

$$\langle p_n,q_n\rangle=\int_a^b p_n(x)q_n(x)\,dx=\int_a^b(x-\alpha_n)\prod_{k=1}^{n-1}(x-\alpha_k)^2>0$$

זאת שכן הפונקציה רציפה ואי־שלילית, ובעלת ערכים חיוביים. אבל $\deg q_n<\deg p_n$ ולכן גם $\langle p_n,q_n\rangle=0$ וקיבלנו סתירה, לכן $\alpha_n\in(a,b)$. □