

פתרון מטלה 3 – תורה המידה, 80517

8 בנובמבר 2025



שאלה 1

נניח ש- (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה.

סעיף א'

נוכיה שאם g מדידות או $d\mu$ נרחב מידה. $E \in \mathcal{A}$ $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ לכל $f \leq g$.

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות $X = E$ אחרת נוכל לקחת $f \cdot \mathbb{1}_E, g \cdot \mathbb{1}_E$ מהגדרה מתקיים,

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu \mid s \leq f, s \text{ is simple} \right\}$$

אבל לכל s כזו שהיא ש- $s, s \leq f \leq g$, כמובן,

$$\left\{ \int s d\mu \mid s \leq f, s \text{ is simple} \right\} \subseteq \left\{ \int s d\mu \mid s \leq g, s \text{ is simple} \right\}$$

ולכן נקבל שניים,

$$\sup \left\{ \int s d\mu \mid s \leq f, s \text{ is simple} \right\} \leq \sup \left\{ \int s d\mu \mid s \leq g, s \text{ is simple} \right\}$$

ובהתאם נסיק $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

□

סעיף ב'

נוכיה שאם $A \subseteq B$ מדידות ו- $0 \leq f$ אז,

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$$

הוכחה. נניח ש- $B = X$ שכן נוכל לקחת כמו בסעיף הקודם הקודם מציננים בהתאם. נניח ש- $s \leq f$ פשוטה ולכן,

$$s(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}$$

עבור $\alpha_n \in \mathbb{R}^+, E_n \in \mathcal{A}$, ובהתאם להגדרה,

$$\int_A s d\mu = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mu(E_n \cap A) \leq \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mu(E_n) = \int s d\mu$$

ולכן נסיק ש- $\int_A f d\mu \leq \int f d\mu$

□

סעיף ג'

הרי $\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu$, או נראה ש- $0 \leq f \leq 0$ ו- $0 \leq c \leq \infty$.

הוכחה. נניח ש- $f \leq s$ פשוטה המסומנת כבסעיף הקודם. או מתקיים,

$$\int cs d\mu = \sum_{n=1}^N c\alpha_n \cdot \mu(E_n) = c \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mu(E_n) = c \int s d\mu$$

כלומר הטענה מתקיימת לכל s פשוטה, ובפרט נסיק,

$$\begin{aligned}\int cf \, d\mu &= \sup\left\{\int cs \, d\mu \mid s \leq f, s \text{ is simple}\right\} \\ &= \sup\left\{c \int s \, d\mu \mid s \leq f, s \text{ is simple}\right\} \\ &= c \sup\left\{\int s \, d\mu \mid s \leq f, s \text{ is simple}\right\} \\ &= c \int f \, d\mu\end{aligned}$$

כלומר הטענה מתקיימת.

□

שאלה 2

היא (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה וונינה ש- $X \subseteq N \subseteq \mathbb{C}$ מוכלת בקבוצה ממידה אפס, וכן ש- $f : N^C \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה. נראה שאם $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{C}$ הרחבות מדידות של f או מתקיים,

$$\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$$

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $\mathcal{A} \in N$ ממידה אפס, כלומר נבחר את הקבוצה ש- N מוכלת בקבוצה כזו. נבחן אם את $f : N^C \rightarrow [0, \infty]$, שכן אם הטענה נכונה עבורה, אז מהגרת האינטגרל על פונקציה מרוכבת, הטענה Nobueta ישירות. נניח ש- $s \leq f_1 \leq f_2$ פשוטה כך ש- $s = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}$, או מתקיים,

$$\int s d\mu = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(E_n) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu((E_n \cap N^C) \cup (E_n \cap N)) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(E_n \cap N^C) = \int_{N^C} s d\mu$$

ולכן נסיק שגם,

$$\int f_1 d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu \mid s \leq f_1, s \text{ is simple} \right\} = \sup \left\{ \int_{N^C} s d\mu \mid s \leq f_1, s \text{ is simple} \right\} = \int_{N^C} f_1 d\mu$$

. $\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$, ולכן $f_1 \equiv f_2$

□

שאלה 3

נעסק עתה בדחיפה קדימה של מידה. יהיו (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה ונגינה ש- (Y, \mathcal{B}) מרחב מידה. ותהי $\rho : X \rightarrow Y$ העתקה מדידה. נגידר את הדחיפה קדימה של μ על-ידי ρ על-ידי,

$$\forall E \in \mathcal{B}, \rho_*\mu(E) = \mu(\rho^{-1}(E))$$

סעיף א'

נראה ש- $\rho_*\mu$ היא מידה.

הוכחה. נגינה ש- $\rho_*\mu$ סדרת מדידות זורות. אז מהגדרת תמונה הפוכה מתקיים $\{\rho^{-1}(E_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}$. מהגדרת μ כמידה נובע \square $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_*\mu(\rho^{-1}(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\rho^{-1}(E_n))$ כפ"י שרצינו.

סעיף ב'

נראה שלכל $f : Y \rightarrow [0, \infty]$ מדידה מתקיים,

$$\int_X (f \circ \rho) d\mu = \int_Y f d\rho_*\mu$$

הוכחה. תהי $f \leq s$ פשוטה ונגינה ש-, אז מתקיים,
 $\int_Y s d\rho_*\mu = \sum_{n=1}^N \alpha_n \rho_*\mu(E_n) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(\rho^{-1}(E_n)) = \int_X (s \circ \rho) d\mu$

\square ככלומר הטענה מתקימת עבור פונקציית פשוטות, ולכן מהגדרת הסופרימום והאינטגרל נסיק שהטענה נכונה גם עבור f מדידה כללית.

סעיף ג'

נגינה ש- $[0, 2\pi] \xrightarrow{\cdot^{-1}} S^1 = X$ עם מרחבים מדידים בורל, ונגינה שגם $\rho : X \rightarrow Y$ מדידה על-ידי $\rho(x) = e^{ix}$. נגינה שקיימת מידת לבג על X , מידת המחזוירה עבור קטע את אורכו, ונסמן אותה ב- λ . נתאר את $\rho_*\lambda$.

פתרון המידה λ היא מידת על- S^1 , ונגינה ש- $E \subseteq Y$ קבוצה קשירה מסוילית, או $(\rho^{-1}(E))^{\perp}$ הוא אורך הקטע המושרוה מהקבוצה. ככלומר גאומטרית λ מחזוירה עבור קשת במעגל היחידה את האורך שללה.

שאלה 4

היא (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מדידה סופי. נראה שכל

$$\int f d\mu = \inf \left\{ \int \varphi d\mu \mid f \leq \varphi, \varphi \text{ is simple} \right\}$$

□

גוכחה TODO