מבוא לטופולוגיה — סיכום

19 במאי 2025

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 24.3.2025

1.1 מבוא

בעבר דיברנו על מרחבים מטריים, באינפי 1 מתבוננים ב־$\mathbb{R}$ והגדרנו את מושג הגבול של סדרות, ולאחריו את המושג של פונקציה רציפה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ההגדרה הייתה ש־$f$ תיקרא רציפה אם לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. באינפי 3 כבר ראינו את המושג הכללי והרחב יותר של רציפות במרחבים מטריים. ניזכר בהגדרה של מרחב מטרי.

הגדרה 1.1 (מרחב מטרי) מרחב מטרי הוא זוג (X, d) כאשר X קבוצה לא ריקה ו־$d : X \times X \to \mathbb{R}$ פונקציה (הנקראת מטריקה) המקיימת,

1. $d(x, y) = d(y, x)$ לכל $x, y \in X$
2. $\forall x, y \in X, d(x, y) \ge 0$ וכן $x = y \iff d(x, y) = 0$
3. אי־שוויון המשולש, $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \le d(x, y) + d(y, z)$

דוגמה 1.1 נראה דוגמות למרחבים מטריים,

1. $\mathbb{R}$ יחד עם $d(x, y) = |x - y|$
2. $(\mathbb{R}^n, d_2)$ המוגדרת על־ידי $d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$
3. נוכל עבור $\mathbb{R}^n$ להגדיר את $d_p(\bar{x}, \bar{y}) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ ואת מטריקת אינסוף, $d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$
4. עבור $C([a, b])$ קבוצת הפונקציות הרציפות $[a, b] \to \mathbb{R}$ עבור $a < b$, ונגדיר את המטריקה $\rho(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$

נראה את ההגדרה הפורמלית של רציפות,

הגדרה 1.2 (רציפות) תהי $f : X \to Y$ עבור $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים, אז נאמר ש־f רציפה אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $d(x', x) < \delta$ אז $\rho(f(x'), f(x)) < \epsilon$.

אבל יותר קל לדבר במונחים של קבוצות פתוחות.

הגדרה 1.3 (כדור) עבור (X, d) מרחב מטרי, נסמן $B(r, x) = B_r(x) = \{z \in X \mid d(x, z) < r\}$.

הגדרה 1.4 (קבוצה פתוחה) יהי (X, d) מרחב מטרי, תת־קבוצה $U \subseteq X$ תיקרא פתוחה אם לכל $x \in U$ קיים $r > 0$ כך ש־$x \in B(x, r) \subseteq U$.

הגדרה 1.5 (הגדרה שקולה לרציפות) $f : X \to Y$ תיקרא רציפה אם לכל $V \subseteq Y$ קבוצה פתוחה ב־Y מתקיים $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ קבוצה פתוחה ב־X.

הגדרה 1.6 (טופולוגיה) תהי X קבוצה (לא ריקה), **טופולוגיה** על X היא אוסף $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, כך שמתקיימים התנאים הבאים,

1. $X, \emptyset \in \tau$
2. τ סגור לאיחוד, כלומר אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ לקבוצת אינדקסים I, כך ש־$\forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau$ אז $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau$
3. τ סגור לחיתוכים סופיים, כלומר לכל $U, V \in \tau$ מתקיים $U \cap V \in \tau$

הגדרה 1.7 (מרחב טופולוגי) זוג (X, τ) כאשר X קבוצה לא ריקה ו־τ טופולוגיה על X, יקרא מרחב טופולוגי.

הערה בעצם הגדרנו כבר מתי פונקציה $f : X \to Y$ עבור מרחבים טופולוגיים $(X, \tau), (Y, \Omega)$ היא רציפה, כאשר $f^{-1}(U) \in \tau$ לכל $U \in \Omega$.

סימון 1.8 איברי τ יקראו קבוצות פתוחות.

הגדרה 1.9 (קבוצה סגורה) אם (X, τ) מרחב טופולוגי אז תת־קבוצה $A \subseteq X$ תיקרא סגורה אם $X \setminus A \in \tau$, כלומר המשלים של A היא קבוצה פתוחה.

דוגמה 1.2 יהי (X, d) מרחב מטרי, נגדיר $\tau = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \exists r > 0, B(x, r) \subseteq U\}$, כלומר נגדיר טופולוגיה באופן טריוויאלי כנביעה מהמרחב המטרי.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי אכן זהו מרחב טופולוגי.

דוגמה 1.3 יהי X קבוצה כלשהי, אז ניתן להגדיר על X טופולוגיה $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$. טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה טריוויאלית.

דוגמה 1.4 נגדיר $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$ עבור קבוצה X, גם קבוצה זו היא טופולוגיה, והיא נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית.

דוגמה 1.5 נניח ש־(Y,τ) מרחב טופולוגי, ותהי $f:(Y,\tau)\to(X,\tau_0)$, מתי f היא רציפה? התשובה היא שהיא רציפה תמיד. מתי $f:(Y,\tau)\to(X,\tau_1)$ רציפה? תלוי בהגדרת הפונקציה, אבל במקרה שבו היא אכן רציפה, אז היא רציפה בכל טופולוגיה שהיא. לעומת זאת כל $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau)$ היא רציפה.

הערה לא כל טופולוגיה נובעת ממטריקה. לדוגמה הטופולוגיה הטריוויאלית על מרחב עם לפחות 2 נקודות.

הערה נניח $x,y\in X$ אז נבחר $r=\frac{1}{2}d(x,y)$ ואז $y\notin B(x,r)$ ולכן $\emptyset\neq B(x,r)\neq X$, קל לראות שביחס לטופולוגיה שמושרית מהמטריקה d, הקבוצה $B(x,r)$ קבוצה פתוחה.

דוגמה 1.6 נגדיר $X=\mathbb{C}^n$ עבור איזשהו $n\in\mathbb{N}$ ונגדיר $\mathcal{F}=\{A\subseteq\mathbb{C}^n\mid\exists\{f_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n],A=\{(p_1,\dots,p_n)\mid\forall i\in I,f_i(p_1,\dots,p_n)=0\}\}$.

הגדרה 1.10 (בסיס לטופולוגיה) בסיס לטופולוגיה הוא אוסף $\mathcal{B}$ של תתי־קבוצות של X כך שמתקיים,

1. לכל $x\in X$ יש $B\in\mathcal{B}$ כך ש־$x\in B$
2. לכל $A,B\in\mathcal{B}$ ולכל $x\in A\cap B$ יש $C\in\mathcal{B}$ כך ש־$x\in C\subseteq A\cap B$

טענה 1.11 *עבור בסיס $\mathcal{B}$ האוסף $\tau_{\mathcal{B}}=\{U\subseteq X\mid U\text{ is a union of elements of }\mathcal{B}\}$ היא טופולוגיה,*

$$\forall\alpha\in I,B_\alpha\in\mathcal{B},U=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$$

הוכחה. מכיוון ש־$\tau_{\mathcal{B}}$ סגורה לחיתוך סופי, אז אם $U,V\in\tau_{\mathcal{B}}$ אז $U=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\in\mathcal{B}$ וכן $V=\bigcup_{\beta\in J}A_\beta,A_\beta\in\mathcal{B}$, אז מתקיים,

$$U\cap V=(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)\cap(\bigcup_{\beta\in J}A_\beta)=\bigcup_{\alpha,\beta\in I\times J}B_\alpha\cap A_\beta=D$$

לכן לכל $x\in U\cap V$ ישנם $\alpha_0\in I,\beta_0\in J$ כך ש־$x\in B_{\alpha_0}\cap A_{\beta_0}$, אבל מהגדרת הבסיס קיימת קבוצה $C_{\alpha_0,\beta_0}\in\mathcal{B}$ כך ש־$C_{\alpha_0,\beta_0}\subseteq B_{\alpha_0}\cap A_{\beta_0}$. לכן $D\subseteq\bigcup_{(x,\alpha,\beta)}C_{x,\alpha,\beta}$. בהתאם מצאנו סגירות לחיתוך סופי. $\square$

הערה יהי (X,d) מרחב מטרי, אז $\{B(x,r)\subseteq X\mid x\in X,r>0\}$ הוא טופולוגיה. אבל עכשיו נוכל להגדיר גם את $\{B(x,\frac{1}{n})\subseteq X\mid x\in X,n\in\mathbb{N}\}$, זהו בסיס לטופולוגיה לאותה הטופולוגיה שהגדרנו למרחב המטרי.

תרגיל 1.2 הוכיחו שזהו אכן בסיס עבור המרחב הטופולוגי הנתון.

דוגמה 1.7 נניח ש־$X=\mathbb{Z}$, ונגדיר את הבסיס C להיות אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, כלומר $C=\{a+d\mathbb{Z}\mid a,d\in\mathbb{Z},d\neq 0\}$. אנו טוענים כי זהו אכן בסיס (לטופולוגיה). נתבונן בזוג קבוצות ב־C, $a+d\mathbb{Z},b+q\mathbb{Z}$, ונניח ש־$p\in(a+d\mathbb{Z})\cap(b+q\mathbb{Z})$ אז $p\in p+dq\mathbb{Z}\subseteq(a+d\mathbb{Z})\cap(b+q\mathbb{Z})$. נגדיר טופולוגיית τ_C.

קבוצות סגורות הן משלימים לקבוצות פתוחות.

כל סדרה אריתמטית דו־צדדית אינסופית היא גם פתוחה וגם סגורה. בפרט חיתוך סופי של סדרות אריתמטיות הוא סגור. לכן המשלים שלו הוא פתוח.

מסקנה 1.12 (משפט אוקלידס) יש אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה. נניח בשלילה כי יש מספר סופי של ראשוניים, $p_1,\dots,p_k$ עבור $k\in\mathbb{N}$. נבחן את $\bigcup_{i=1}^k p_i\mathbb{Z}$, זוהי קבוצה פתוחה וגם סגורה, לכן

$$\bigcup_{i=1}^k p_i\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$$

ולכן נובע ש־$\{-1,1\}$ קבוצה פתוחה וזו כמובן סתירה. $\square$

טענה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי) *נניח ש־(X,τ) מרחב טופולוגי, לכל $\emptyset\neq Y\subseteq X$ נגדיר $\tau_Y=\{U\cap Y\mid U\in\tau\}$. אז τ_Y היא טופולוגיה. אם $Y\in\tau$ אז $\tau_Y=\{W\in\tau\mid W\subseteq Y\}$.*

טענה 1.14 (טופולוגיית מכפלה) *נניח ש־(X_1,τ_1) ו־(X_2,τ_2) מרחבים טופולוגיים, אז נגדיר טופולוגיה על מרחב המכפלה $X_1\times X_2$ על־ידי*

$$\tau_{1,2}=\{U_1\times U_2\mid U_1\in\tau_1,U_2\in\tau_2\}$$

אז $\tau_{1,2}$ הוא בסיס והטופולוגיה המוגדרת על־ידו נקראת טופולוגיית המכפלה.

דוגמה 1.8 נוכל לבנות כך מכפלה של כמות סופית או אינסופית של מכפלות טופולוגיות. עבור אוסף אינסופי (בן־מניה או לא בהכרח) אנו צריכים

להיזהר, נניח ש־(X_α, τ_α) עבור $\alpha \in I$, אז נגדיר

$$\tau_b = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

זהו בסיס לטופולוגיה שנקרא טופולוגיית הקופסה. לעומת זאת נוכל להגדיר גם את

$$\tau_p = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha = X_\alpha \text{ for almost all } \alpha \in I\}$$

כלומר $\prod_{\alpha \in I} = \{f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid \forall \alpha \in I, f(x) \in X_\alpha\}$.

2 שיעור 2 — 25.3.2025

2.1 טופולוגיה — המשך

בשיעור הקודם דיברנו על מכפלה של טופולוגיות, אמרנו שאם I קבוצת אינדקסים ולכל $\alpha \in I$ גם (X_α, τ_α) מרחב טופולוגי, אז נתבונן ב־$Z = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ונרצה להגדיר טופולוגיה על Z.

הערה מגדירים,

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha, \forall \alpha \in I, f(\alpha) \in X_\alpha\}$$

לאחר מכן נוכל להגדיר טופולוגיית מכפלה,

הגדרה 2.1 (טופולוגיית מכפלה) נגדיר את הבסיס,

$$\mathcal{B}_{\text{box}} = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I, U_\alpha \subseteq X_\alpha, U_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

ואת הבסיס,

$$\mathcal{B}_{\text{prod}} = \{\prod_{\alpha \in I} V_\alpha \mid \forall \alpha \in I, V_\alpha \in \tau_\alpha, V_\alpha \subseteq X_\alpha, |\{\beta \in I \mid V_\beta \neq X_\beta\}| < \infty, V_\alpha = X_\alpha \text{ for almost every } \alpha\}$$

אלו הן מכפלות של טופולוגיות המהוות טופולוגיה.

הגדרה 2.2 (העתקות הטלה) אז $Z = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ אז ישנן הטלות $\forall \alpha \in I, \pi_\alpha : Z \to X_\alpha$ המוגדרת על־ידי $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$.

אנו רוצים שכל ההטלות π_α תהינה רציפות. כדי שהן אכן יקיימו רציפות צריך שלכל $U_\alpha \in \tau_\alpha$ (קבוצה פתוחה ב־X_α) יתקיים $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau$, כלומר המקור יהיה קבוצה פתוחה ב־Z. אבל נבחין כי $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta$ אבל זהו לא בסיס,

$$C = \{U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta \mid \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau\}$$

הגדרה 2.3 (תת־בסיס לטופולוגיה) תהי קבוצה X, קבוצה C של תת־קבוצות של X כך ש־$X = \bigcup C$.
נגדיר את הבסיס המושרה מתת־בסיס להיות $\mathcal{B}_C = \{\bigcap A \mid A \subseteq C, |A| < \infty\}$, כלומר אוסף החיתוכים הסופיים של איברי C (הן קבוצות פתוחות) הוא בסיס.

הגדרה 2.4 (טופולוגיה חלשה) אם X קבוצה ו־τ_1, τ_2 טופולוגיות על X אומרים ש־τ_1 חלשה יותר מ־τ_2 אם $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

דוגמה 2.1 יהיו מרחבים מטריים (X_i, ρ_i) לכל $i \in \mathbb{N}$, ונגדיר (X_i, τ_i) מרחב טופולוגי מושרה מתאים לכל i. נרצה להתבונן במכפלתם, $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$. אז נוכל להתבונן ב־$(\prod X_i, \tau_{\text{prod}})$ שהגדרנו זה עתה.

הגדרה 2.5 (מטריקת מכפלה) בהינתן סדרת מרחבים מטריים (X_i, ρ_i) עבור $i \in \mathbb{N}$ מרצה למצוא מטריקה על $Z = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$. לכל $x, y \in Z$ כאשר $x = (x_i), y = (y_i)$ אז נגדיר,

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

ברור שפונקציה זו מוגדרת, וברור אף כי היא מקיימת את התכונה השנייה של מטריקות, אך לא ברור שהיא מקיימת את אי־שוויון המשולש, זהו תרגיל שמושאר לקורא.

טענה 2.6 *הטופולוגיה המושרית על $Z = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ עבור (X_i, τ_i) מרחבים טופולוגיים יחד עם מטריקת המכפלה שווה ל־$\mathcal{B}_{prod}$.*

הוכחה. (Z, ρ) מרחב מטרי, ו־$\mathcal{B}_\rho = \{B(x, r) \mid x \in Z, r > 0\}$ בסיס, אז נוכל להגדיר טופולוגיה $\tau_{\mathcal{B}_\rho} = \tau_\rho$. כדי להראות ש־$\tau_\rho = \mathcal{B}_{\text{prod}}$ מספיק להראות שכל $B \in \mathcal{B}_{\text{prod}}$ שייכת ל־τ_ρ וכל $C \in \mathcal{B}_\rho$ שייכת ל־τ_{prod}. נוסיף ונבהיר שטופולוגיה נקבעת ביחידות על־ידי בסיס שלה, לכן מספיק להראות את שקילות הבסיסים.

נתחיל בתנאי הראשון, ונקבע $k \in \mathbb{N}$ כלשהו. מספיק להראות שקבוצה מהצורה $U_k \times \prod_{i \neq k} X_i$ פתוחה ב־τ_ρ עבור $U_k \in \tau_k$ היא קבוצה פתוחה ב־τ_ρ, זאת שכן נוכל להרחיב הוכחה זו באופן סיסטמתי להיות על כל קבוצה סופית של קבוצות פתוחות. יהי $x \in U_k \times \prod_{i \neq k} X_i$ ונסמן את ההטלה על מרחב זה $\pi_j : U_j \times \prod_{i \neq k} X_i \to U_j$, כלומר $\pi_j(x) = x_j$ לכל $j \in \mathbb{N}$. אנו יודעים ש־$x_k \in U_k$ וש־U_k פתוחה ולכן ישנו $r > 0$ כך ש־$B_r(x_k) \subseteq U_k$ כדור פתוח ב־X_k.

קיים $s > 0$ כך שאם $t \geq 0$ ומתקיים $s < \frac{t}{1+t}$ אז $t < r$, ולכן נבחן את הכדור ברדיוס $\frac{s}{2^k}$ סביב x ב־$Z = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ מרחב המכפלה כולו.
המטרה שלנו היא להראות שהכדור שעתה בחרנו מקיים את התנאי לבסיס. נניח ש־$y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B_{\frac{s}{2^k}}(x)$, אז

$$\begin{aligned}
\frac{s}{2^k} &> \rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} \\
&\implies s > \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} \\
&\implies \rho_k(x_k,y_k) < r \\
&\implies y_k \in B_r(x_k) \subseteq U_k
\end{aligned}$$

נעבור לתנאי השני, נתבונן בכדור הפתוח סביב $x \in Z$, $B_r(x)$, כאשור נחזור ונבהיר כי כדור זה מוגדר להיות,

$$B_r(x) = \left\{ y \in Z \mid \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} < r \right\}$$

יהי $M \in \mathbb{N}$ כך ש־$\sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} < \frac{r}{2}$, כלומר נחסום את טור הזנב של המטריקה ρ. תהי $V \subseteq Z$ המוגדרת על־ידי,

$$V = \left\{ (y_1,\dots,y_M) \in \prod_{i=1}^{M} \mid \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} < \frac{r}{2} \right\}$$

ואנו טוענים כי $V \times \prod_{i=M+1}^{\infty} X_i \subseteq B_r(x)$. □

3 שיעור 3 — 31.3.2025

3.1 סגירות

בדיוק כמו במרחבים מטריים, גם במרחב טופולוגי נרצה לדון במניפולציות על קבוצות במרחב, נתחיל בהגדרת הקונספט של סגור של קבוצה במרחב טופולוגי.

הגדרה 3.1 (סגור של קבוצה במרחב טופולוגי) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, ותהי קבוצה $A \subseteq X$ תת־קבוצה כשלהי. נגדיר את הסגור של A כקבוצה הסגורה הקטנה ביותר המכילה את A, כלומר,

$$\overline{A} = \bigcap_{X \setminus F \in \tau} F$$

בהתאם נקבל מספר תכונות ראשוניות ודומות לתכונות שראינו בעבר,

למה 3.2 *התכונות הבאות מתקיימות,*

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, *כאשר במקרה זה אין בהכרח שוויון.*

דוגמה 3.1 נראה דוגמה למקרה בו בהכרח אין שוויון, נגדיר $X = \mathbb{R}$ וכן $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, אז מתקיים,

$$\emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

טענה 3.3 *אם (X, τ) מרחב טופולוגי ו־$A \subseteq X$, אז,*

$$x \in \overline{A} \iff \forall U \in \tau, x \in U \to U \cap A \neq \emptyset$$

כלומר נקודה נמצאת בסגור של A אם ורק אם כל קבוצה פתוחה סביב הנקודה לא זרה ל־A.

הוכחה. נראה את שלילת הטענה, כלומר $x \notin \overline{A} \iff \exists U \in \tau, x \in U \wedge U \cap A = \emptyset$.
נניח ש־$x \notin \overline{A}$ ולכן $x \in X \setminus \overline{A}$ אבל $X \setminus \overline{A}$ פתוחה וזרה מהגדרתה ל־A.
בכיוון השני אם יש $x \in U$ פתוחה כך ש־$U \cap A = \emptyset$ אז $F = X \setminus U$ סגורה ומכילה את A, בהתאם $\overline{A} \subseteq F$ ובהכרח $x \notin \overline{A}$. $\square$

הגדרה 3.4 (פנים ושפה) נגדיר את הפנים של A להיות, $A^\circ = \bigcup_{U \in \tau, U \subseteq A} U$.
כלומר הפנים הוא איחוד כל הקבוצות הפנימיות הפתוחות של A, ובשל הסגירות של הטופולוגיה לאיחוד, נקבל כך את הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר שחלקית ל־A. נגדיר את השפה של A להיות $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

נבחין בהגדרה של סביבה ונשתמש בהגדרה זו כדי להגדיר מונח חדש.

הגדרה 3.5 (סביבה של נקודה) נאמר ש־$L \subseteq X$ היא סביבה של x אם קיימת קבוצה פתוחה $U \in \tau$ כך ש־$x \in U \subseteq L$.

הגדרה 3.6 (נקודת הצטברות) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, תהי $A \subseteq X$ תת־קבוצה כלשהי, ו־$x \in A$. נאמר ש־x היא נקודת הצטברות של A אם כל סביבה של x מכילה נקודה מ־A שונה מ־x, כלומר,

$$\forall U \in \tau, x \in U \implies \exists y \in (U \setminus \{x\}) \cap A$$

נסמן ב־A' את קבוצת נקודות ההצטברות של A.

נרצה להסתכל על נקודות הצטברות כנקודות שלא משנה כמה קרוב אנחנו מסתכלים אליהן, עדיין נוכל למצוא בסביבתן נקודות נוספות. במובן הזה ברור שהן נמצאות בקרבת נקודות בפנים, אך עלולות להיות גם נקודות לא פנימיות שמקיימות טענה כזו.

טענה 3.7 *מתקיים $\overline{A} = A \cup A'$.*

הוכחה. אם $x \in A \cup A'$ אז או $x \in A \subseteq \overline{A}$ או $x \in A'$. ובכל סביבה של x יש נקודה מ־A שונה מ־x. בפרט לאור הטענה ש־$\overline{A}$ היא אוסף כל הנקודות שבכל סביבה שלהן המכילה את A בחיתוך לא ריק נובע ש־$A' \subseteq \overline{A}$, לכן נובע ש־$A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

בכיוון השני נניח ש־$x \in \overline{A}$, אז לכל $U \in \tau$ כך ש־$x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$. אם $x \in A$ אז בוודאי ש־$x \in A \cup A'$. אם $x \notin A$ אז לכל $U \in \tau$ כך ש־$x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$. מ־$x \notin A$ נובע גם ש־$U \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$ ולכן $x \in A'$. אז מצאנו ש־$\overline{A} \subseteq A \cup A'$, ונובע משני החלקים ש־$\overline{A} = A \cup A'$. $\square$

3.2 השלמות לרציפות

ניזכר בהגדרה 1.2, נרצה לדון בקונספט של רציפות באופן רחב יותר. בהינתן (Y,τ_Y) מרחב טופולוגי ו־X קבוצה כלשהי, ופונקציה $f:X\to Y$, ניתן להגדיר טופולוגיה על X כך ש־f רציפה.
הקבוצה $\{f^{-1}(U)\mid U\in\tau_Y\}$ היא תת־בסיס, ואפשר להרחיבה לבסיס ולהגדיר עליו טופולוגיה מושרית מהבסיס על X.

טענה 3.8 *f רציפה עבור טופולוגיה זו, וזו הטופולוגיה החלשה ביותר על X עבורה f רציפה.*

בכיוון השני, בהינתן מרחב טופולוגי (X,τ_X) וקבוצה כלשהי Y יחד עם פונקציה $f:X\to Y$, נוכל להגדיר את $\{U\subseteq Y\mid f^{-1}(U)\in\tau_X\}$ להיות תת־בסיס וממנו נוכל שוב לבנות בסיס וטופולוגיה על Y. באופן דומה f רציפה ביחס לטופולוגיה זו וזו הטופולוגיה החזקה ביותר על Y כך ש־f רציפה.

טענה 3.9 (שקילות לרציפות) *יהיו מרחבים טופולוגיים $(X,\tau_X),(X,\tau_Y)$ ותהי $f:X\to Y$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *f רציפה לפי 1.2*
2. *לכל קבוצה סגורה $F\subseteq Y$, $f^{-1}(F)$ סגורה ב־X*
   הגדרה זו עוזרת לנו לדון בקבוצות סגורות במקום פתוחות
3. *אם $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה של Y אז לכל $B\in\mathcal{B}$ מתקיים ש־$f^{-1}(B)$ פתוחה ב־X*
   הגדרה זו מאפשרת לנו לדון בבסיסים ובכך לפשט את העבודה עם טופולוגיות
4. *לכל $x\in X$ ולכל סביבה $W\subseteq Y$ של $f(x)$ מתקיים ש־$f^{-1}(W)$ סביבה של x*
5. *קיים כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ של X, כלומר $\forall\alpha,U_\alpha\in\tau,X=\bigcup_{\alpha\in\Omega}U_\alpha$, כך שלכל $\alpha\in\Omega$ מתקיים $f\mid_{U_\alpha}:U_\alpha\to Y$ רציפה.*
6. *קיים כיסוי סגור סופי $X=\bigcup_{i=1}^n F_i$ עבור F_i סגורות עבור $1\le i\le n$, כך שכל $f\mid_{F_i}:F_i\to Y$ רציפה.*
7. *לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$*

הוכחה. $2\iff1$: נובע ישירות מהגדרה של משלימים והגדרת הרציפות על קבוצות פתוחות.

$3\iff1$: בכיוון הראשון כל איחוד קבוצות מהבסיס הוא קבוצה פתוחה, ונוכל כך להראות את נכונות הטענה. לכיוון השני כל קבוצה היא איחוד של קבוצות מהבסיס, U_α, ו־$f^{-1}(\bigcup U_\alpha)=\bigcup f^{-1}(U_\alpha)$.

$4\implies1$: אם $x\in X$ וכן $f(x)\in W\subseteq Y$ סביבה של $f(x)$ אז קיימת $f(x)\in U\subseteq W$ כך ש־U פתוחה, לכן נובע ש־$x\in f^{-1}(U)\subseteq f^{-1}(W)$ כאשר $f^{-1}(U)$ פתוחה.

$1\implies4$: אם $U\subseteq Y$ פתוחה אז צריך להראות ש־$f^{-1}(U)$ פתוחה. תהי $x\in f^{-1}(U)$, אז U סביבה ל־$f(x)$ ולכן לפי ההנחה $f^{-1}(U)$ היא סביבה של x, כלומר קיימת $x\in V_x\subseteq f^{-1}(U)$ פתוחה, ונסיק ש־$f^{-1}(U)=\bigcup_{x\in f^{-1}(U)}V_x$ פתוחה.

$5\implies1$: נוכל לבחור כיסוי טריוויאלי.

$1\implies5$: נניח שיש כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ של X כך ש־$f\mid_{U_\alpha}:U_\alpha\to Y$ רציפה לכל $\alpha\in\Omega$. תהי $W\subseteq Y$ פתוחה, אז $f^{-1}(W)\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Omega}f^{-1}\mid_{U_\alpha}(W)$. מההנחה $U_\alpha\cap f^{-1}(W)=f^{-1}\mid_{U_k}(W)$ פתוחה ב־U_α ומשום ש־U_α פתוחה ב־X נובע ש־$f^{-1}\mid_{U_\alpha}(W)$ פתוחה ב־X ולכן $f^{-1}(W)$ פתוחה ב־X.

$6\implies1$: נבחר את X ככיסוי סגור של עצמה.

$1\implies6$: נניח ש־$X=\bigcup_{i=1}^n F_i$ כיסוי סגור סופי של X, ונניח גם שלכל i, $f\mid_{F_i}:F_i\to Y$ רציפה. כעת ההוכחה דומה למהלך שעשינו ב־$1\implies5$, אבל כעת אפיון רציפות בעזרת L, ואיחוד סופי על סגורות הוא סגור.

$7\implies1$: נתון כי f רציפה, אנו רוצים להראות ש־$f(\overline{A})=\overline{f(A)}$. יהי $x\in\overline{A}$, נראה כי $f(x)\in\overline{f(A)}$, נניח בשלילה ש־$f(x)\notin\overline{f(A)}$, אז יש סביבה פתוחה $f(x)\in U$ כך ש־$U\cap f(A)=\emptyset$. f רציפה ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה ב־X וקיים $A\cap f^{-1}(U)=\emptyset$, אבל $x\in f^{-1}(U)$ וקיבלנו $x\notin\overline{A}$.

$2\implies7$: תהי $F\subseteq Y$ סגורה, אז,

$$f(\overline{f^{-1}(F)})\overset{\text{ההנחה}}{\subseteq}\subseteq\overline{F}\overset{\text{סגורה }F}{=}F\implies\overline{f^{-1}(F)}\subseteq f^{-1}(F)$$

מהגדרת סגור נוכל להסיק ש־$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$, לכן,

$$\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$$

ובפרט $f^{-1}(F)$ סגורה ב־X. □

נבחן תכונה מעניינת שלא תשרת אותנו רבות, אך כן מעלה שאלות.

הגדרה 3.10 (מרחב כוויץ) יהי X מרחב טופולוגי, נאמר ש־X כוויץ (Contractible) אם יש פונקציה רציפה $f : I \times X \to X$ עבור $I = [0, 1]$ כך ש־$\forall x \in X, f(0, x) = x$ וקיימת נקודה $x_1 \in X$ כך ש־$\forall x \in X, f(1, x) = x_1$.
נסמן גם $f_t(t, x)$ כאשר $f_t : X \to X$, נקבל $f_0 = Id$ וכן f_1 הפונקציה הקבועה $x \mapsto x_1$.

דוגמה 3.2 נגדיר $X = I$ ואת $f : I \times I \to I$ המוגדרת על־ידי $f(t, x) = (1 - t)x$.
נגדיר $X = \mathbb{R}$ ואת $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על־ידי $f(t, x) = (1 - t)x$ ונקבל שגם $\mathbb{R}$ כוויצה בדיוק באותו האופן.

תרגיל 3.1 הראו כי S^1 לא כוויץ.

נחזור לדבר על פונקציות רציפות.

תרגיל 3.2 נתבונן ב־$f : (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tau)$ כך ש־$f(x)(i) = x$ לכל $i \in \mathbb{N}$.
הראו ש־f רציפה או לא רציפה כהעתקה כאשר τ טופולוגיית המכפלה, וכאשר τ טופולוגיית הקופסה.

פתרון נתבונן ב־$U = \prod_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, זוהי קבוצה פתוחה, אך $f^{-1}(U) = 0$, וזו כמובן לא קבוצה פתוחה, לכן בטופולוגיית הקופסה היא לא רציפה, לכן בטופולוגיית הקופסה היא לא רציפה.
לעומת זאת בטופולוגיית המכפלה היא אכן רציפה.

הגדרה 3.11 (הומיאומורפיזם) הומיאומורפיזם בין שני מרחבים טופולוגיים X, Y היא העתקה $f : X \to Y$ כך ש־f חד־חד ערכית ועל, f רציפה ו־f^{-1} רציפה אף היא.
X ו־Y יקראו הומיאומורפיות אם יש הומיאומורפיזם $f : X \to Y$ ביניהן.

אנו נרצה להסתכל על הומיאומורפיזם כאיזומורפיזם של מרחבים טופולוגיים.

דוגמה 3.3 נגדיר $X = \mathbb{R}, Y = (0, 1)$, ואת $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$ המוגדרת על־ידי $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$, אז,

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

ולכן f גזירה, ואף חד־חד ערכית, לבסוף $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0, f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 1$ ולכן היא גם על, ואכן המרחבים הומיאומורפים.

דוגמה 3.4 נגדיר את $\eta = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ ואת $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. נגדיר גם $\psi : \eta \to D$ על־ידי $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.
ההוכחה כי זהו אכן הומיאומורפיזם מושארת לקורא.

נבחין כי הדוגמה האחרונה אינה אלא העתקת מביוס, העתקה קונפורמית ואנליטית.

דוגמה 3.5 נבחן את $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ואת $J = [0, 2\pi]$, אנו טוענים כי אין הומיאומורפיזם בין שני המרחבים הללו.
נבחן את הפונקציה $t \mapsto e^{it}$ לדוגמה, $[0, 2\pi] \to S^1$ לא חד־חד ערכית, מהצד השני $[0, 2\pi) \to S^1$ חד־חד ערכית ועל, אבל

נניח שיש העתקה חד־חד ערכית $\alpha : J \to S^1$, ונוציא מ־J נקודה יחידה, אז נקבל איחוד זר של שתי קבוצות זרות, אך מן הצד השני הוצאת נקודה יחידה מהמעגל משאיר אותו כקבוצה קשירה. ההוכחה המלאה אומנם סבוכה יותר, אך הצבענו פה על הבדל מהותי בין שני המרחבים.

תרגיל 3.3 הראו כי $\mathbb{R}$ ו־$\mathbb{R}^2$ לא הומיאומורפים.
האם גם $\mathbb{R}^2$ ו־$\mathbb{R}^3$ הומיאומורפים?

הגדרה 3.12 (העתקה פתוחה וסגורה) העתקה $f : X \to Y$ תיקרא העתקה פתוחה (סגורה) אם לכל $U \subseteq X$ פתוחה (סגורה) מתקיים $f(U) \subseteq Y$ פתוחה (סגורה) ב־Y.

דוגמה 3.6 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(x) = x^2$ היא רציפה, סגורה ולא פתוחה.

דוגמה 3.7 השיכון $\mathbb{R} \hookrightarrow (0, 1)$ המוגדר על־ידי $x \mapsto x$ הוא רציף, תפוח אבל לא סגור.

דוגמה 3.8 $\{a, b\} \to \{a, b\}$ המוגדרת טריוויאלית היא פתוחה, סגורה אך לא רציפה.

4 שיעור 4 — 7.4.2025

4.1 אקסיומות ההפרדה

מטרתנו היא לאפיין את הקונספט של הפרדה, כלומר מתי אנו יכולים לחסום חלקים שונים במרחב הטופולוגי בקבוצות פתוחות. במקרים המטריים אף ראינו בעבר כמה הפרד היא מועילה, היא פתח לדיון נרחב.

הגדרה 4.1 (איברים ניתנים להפרדה) יהי X מרחב טופולוגי ונניח ש־$x, y \in X$. נאמר ש־x, y ניתנים להפרדה אם קיימות קבוצות פתוחות $U, V \subseteq X$ כך שהקבוצות האלה זרות, וכן $x \in U, y \in V$.
עבור $x \in X, A \subseteq X$ נאמר שהקבוצה והאיבר ניתנים להפרדה אם $x \in U, A \subseteq V$ כאלה.
לבסוף נאמר ש־$A, B \subseteq X$ כך ש־$A \cap B = \emptyset$ ניתנות להפרדה אם $A \subseteq U, B \subseteq V$ פתוחות וזרות.

עתה משהגדרנו את הקונספט הכללי של הפרדה, נגדיר באופן בהיר ועקבי סוגים שונים של "רמת" ההפרדה שמרחב טופולוגי מקיים.

הגדרה 4.2 (אקסיומות הפרדה) מרחב טופולוגי X יקרא מרחב T_i אם הוא מקיים את האקסיומה T_i עבור $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, עבור האקסיומות המוגדרות להלן.

- T_0, לכל $x, y \in X$ יש קבוצה פתוחה שמכילה את אחת הנקודות אך לא את האחרת
- T_1, לכל שתי נקודות $x, y \in X$ קיימת פתוחה המכילה את אחת הנקודות ולא את האחרת, וקבוצה פתוחה המכילה את הנקודה השנייה אך לא את הראשונה. כלומר אם $x \neq y$ אז קיימת $U \in \tau$ כך ש־$x \in U, y \notin U$
- T_2, אם לכל זוג נקודות $x \neq y \in X$ יש קבוצות פתוחות זרות $U, V \subseteq X$ כך ש־$x \in U, y \in V$. אם X מקיים את T_2 אז הוא יקרא מרחב האוסדורף. בשפה שהגדרנו קודם, נאמר שבמרחב האוסדורף כל שתי נקודות ניתנות להפרדה
- T_3, אם המרחב הוא T_1 וגם X **רגולרי**, כלומר לכל $x \in X$ וקבוצה סגורה $x \notin A \subseteq X$, x, A ניתנות להפרדה
- T_4, אם המרחב הוא T_1 וכן X **נורמלי**, כלומר שכל זוג תת־קבוצות סגורות $A, B \subseteq X$ ניתנות להפרדה

נעבור למספר טענות הנוגעות לסוגי ההפרדה השונים.

טענה 4.3 *T_1 מתקיים אם ורק אם כל $\{x\} \subseteq X$ קבוצה סגורה.*

הוכחה. נקבע נקודה $x \in X$, אז לכל $x \neq y \in X$ קיימת קבוצה פתוחה $U_y \subseteq X$ כך ש־$x \notin U_y$. מסגירות לאיחוד נקבל שגם $U = \bigcup_{y \in X, y \neq x} U_y$ היא קבוצה פתוחה. לכן U^C סגורה. אבל מההגדרה שסיפקנו ל־U נקבל ש־$U^C = \{x\}$. $\square$

טענה 4.4 **(גרירת אקסיומות ההפרדה)** *מתקיים $T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$, כלומר אם מרחב מטרי הוא T_n, אז הוא גם T_i לכל $i < n$.*

בעוד שלא נוכיח טענה זו, נבהיר כי היא נובעת ישירות מהגדרת ההפרדה. נבחין כי המספור הוא עתה לא ארעי כפי שאולי היינו שוגים לחשוב, אלא האקסיומות מסודרות לפי "כוחן" בהפרדת דברים במרחב. נמשיך ונראה טענה שתיצוק משמעות למרחבים נורמליים.

טענה 4.5 **(שקילות למרחב נורמלי)** *מרחב טופולוגי X נורמלי אם ורק אם לכל קבוצה סגורה A וקבוצה פתוחה $A \subseteq U$ קיימת קבוצה פתוחה V כך ש־$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*
כלומר לכל קבוצה סגורה וקבוצה פתוחה שמכילה אותה, יש קבוצה פתוחה ביניהן כך שגם הסגור שלה ביניהן.

הוכחה. בכיוון הראשון נניח ש־X נורמלי וכן ש־$A \subseteq U$ קבוצה סגורה המוכלת בקבוצה פתוחה. $A, X \setminus U$ סגורות וזרות, ולכן יש קבוצות פתוחות V, W כך ש־$A \subseteq V \subseteq X \setminus W \subseteq U, X \setminus U \subseteq W$ כך ש־$W \cap V = \emptyset$. נובע ש־$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$.
בכיוון השני, נניח ש־$A, B \subseteq X$ קבוצות סגורות זרות ולכן $A \subseteq X \setminus B$, נסמן $U = X \setminus B$, אז קיימת קבוצה פתוחה V כך שמתקיים,

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus B$$

ולכן $B \subseteq X \setminus \overline{V}$ ונובע גם ש־$V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$. $\square$

טענה 4.6 **(תנאי שקול למרחב האוסדורף)** *X מרחב האוסדורף, כלומר מרחב T_2, אם ורק אם $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ תת־קבוצה סגורה בטופולוגיית המכפלה.*

הוכחה. נניח ש־X מרחב האוסדורף. לכל $x \neq y$ יש $x \in U_{x,y}$ ו־$y \in V_{x,y}$ פתוחות זרות, כלומר $(U_{x,y} \cap V_{x,y}) \cap \Delta_X = \emptyset$. נבחין כי,

$$X \times X \setminus \Delta_X = \bigcup_{x \neq y} (U_{x,y} \times V_{x,y})$$

ובטופולוגיית המכפלה זוהי קבוצה פתוחה.

בכיוון השני נניח ש־Δ_X סגורה, אז $X \times X \setminus \Delta_X$ פתוחה, אם $x \neq y$ אז $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$. לכן לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה יש U, V פתוחות כך ש־$(x, y) \in U \times V \subseteq X^2 \setminus \Delta_X$ ואף ש־$U \cap V = \emptyset$. □

טענה 4.7 (אקסיומות הפרדה בתתי־מרחבים) *עבור $i \in \{1, 2, 3\}$ אם X הוא מרחב T_i ו־$Y \subseteq X$, תת־מרחב אז גם Y הוא מרחב T_i.*

הוכחה. עבור $i \in \{1, 2\}$ הטענה נובעת ישירות מהגדרת אקסיומות ההפרדה T_i, לכן נעבור להוכחת הטענה עבור T_3.
נניח ש־X הוא T_3, נזכור שמרחב כזה הוא T_1 וכן רגולרי, לכן מספיק שנראה שתת־המרחב הוא רגולרי גם כן. יהי $y \in Y$ ויהי $A \subseteq Y$ סגורה כך ש־$y \notin A$. לכן יש קבוצה סגורה $C \subseteq X$ כך ש־$A = C \cap Y$. עוד אנו יודעים ש־$y \notin C$, לכן קיימות U, V פתוחות ב־X מפרידות בין y ל־C, כלומר $y \in U$ ו־$C \subseteq V$, וכן $U \cap V = \emptyset$, אז $A \subseteq V \cap Y$ ו־$y \in U \cap Y$. □

הערה טענה זו לא נכונה עבור T_4. Counter examples in Topology של J. Arthur Seebach הוא ספר שבו נוכל למצוא דוגמות רבות למרחבים כאלה.

טענה 4.8 (אקסיומות הפרדה במרחבי מכפלה) *אם X, Y מרחבים T_i עבור $i \in \{1, 2, 3\}$ אז גם $X \times Y$ הוא מרחב T_i.*

הוכחה. עבור T_1 אם $(x, y) \in X \times Y$, אז נוכל להגדיר את הקבוצה,

$$(X \times (Y \setminus \{y\})) \cup ((X \setminus \{x\}) \times Y)$$

זוהי קבוצה סגורה מהגדרת טופולוגיית המכפלה.

נעבור להוכחת הטענה עבור T_3. נניח ש־X, Y הם T_3, כלומר T_1 ורגולריים ועלינו להראות ש־$X \times Y$ רגולרי.
נניח ש־$A \subseteq X \times Y$ סגורה וכן ש־$(x, y) \notin A$. נגדיר למה, ש־Z מרחב רגולרי אם ורק אם לכל $z \in U \subseteq Z$ עבור U פתוחה ויש $z \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ פתוחה. תוך שימוש בלמה, נסמן $W = (X \times Y) \setminus A$ פתוחה, $(x, y) \in W$, אז נובע שקיימות קבוצות פתוחות $x \in U_x \subseteq X$ ו־$y \in U_Y \subseteq Y$ כך ש־$(x, y) \in U_X \times U_Y \subseteq W$. מרגולריות נסיק שיש V_X, V_Y פתוחות כך ש־$x \in V_X \subseteq \overline{V}_X \subseteq U_X$ ו־$y \in V_Y \subseteq \overline{V}_Y \subseteq U_Y$ פתוחות. אז מתקיים $(x, y) \in V_X \times V_Y \subseteq \overline{V_X \times V_Y} = \overline{V}_X \times \overline{V}_Y \subseteq U_X \times U_Y$.

נעבור להוכחת הלמה, לכיוון הראשון $z \in U \subseteq Z$, נסמן $C = Z \setminus U$ סגורה, $z \notin C$ ולכן סגורות זרות V, W כך ש־$z \in V, C \subseteq W, Z \setminus W \subseteq U$. אז $z \in V \subseteq \overline{V} \subseteq Z \setminus W \subseteq U$.

בכיוון השני של הלמה נניח ש־C סגורה, $z \in Z, z \notin C$, אז יש V פתוחה כך ש־$z \in V \subseteq \overline{V} \subseteq Z \setminus C$, וכן $C \subseteq U = Z \setminus \overline{V}$ כך ש־$U \cap V = \emptyset$. □

האפיון האחרון והחשוב שנראה עתה למרחבים המקיימים אקסיומות הפרדה הוא הקשר למרחבים מטריים.

טענה 4.9 (הפרדה במרחבים מטריים) *אם (X, ρ) מרחב מטרי, אז הוא מרחב T_4.*

הוכחה. נניח ש־$E \subseteq X$ תת־קבוצה כלשהי ו־$x \in X$. נרחיב את הגדרת המטריקה להגדרת הקוטר, כלומר נאמר שמתקיים,

$$\rho(x, E) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in E\}$$

אם E סגורה ו־$x \notin E$ אז $\rho(x, E) > 0$ כמסקנה מטענה מאינפי 3.
נניח ש־$A, B \subseteq X$ סגורות זרות, $\rho(b, A) > 0, \forall b \in B,\ \rho(a, B) > 0, \forall a \in A,$ אז $U = \bigcup_{a \in A} B_{\rho(a,B)}(a)$ ו־$V = \bigcup_{b \in B} B_{\rho(b,A)}(b)$ הן פתוחות וזרות. □

נעיר שהכיוון ההפוך נקרא מרחב מטריזבילי, ונעסוק בנושא זה בהמשך הקורס. נעבור לדוגמות.

דוגמה 4.1 אם $X = \{x, y\}$ עם הטופולוגיה $\{X, \emptyset\}$, אז X הוא לא T_0 ולכן לא מקיים אף אקסיומת הפרדה.

דוגמה 4.2 נגדיר $X = \{x, y\}$ עם הטופולוגיה $\{\emptyset, \{x\}, X\}$. במקרה זה X הוא מרחב T_0 אבל לא T_1.

דוגמה 4.3 נגדיר $X = \mathbb{N}$ והטופולוגיה המושרית מהבסיס של כל הקבוצות שמשלימן סופי, כלומר $\mathcal{B} = \{A \subseteq X \mid |X \setminus A| < \omega\}$. במקרה זה X הוא מרחב T_1 אבל לא T_2.

דוגמה 4.4 נראה מרחב שהוא T_2 אבל לא T_3.

נגדיר את המרחב הטופולוגי $\mathbb{R}_{\frac{1}{\mathbb{N}}}$ כמרחב מעל הקבוצה $\mathbb{R}$, יחד עם הבסיס,

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\} \cup \left\{(a,b) \setminus \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \mid x, y \in \mathbb{R}, x < y\right\}$$

ההוכחה ש־$\mathcal{B}$ מושארת לקורא.

נבחין כי זוהי טופולוגיה עדינה יותר של $\mathbb{R}$, וזו האחרונה היא מרחב האוסדורף, לכן נוכל להסיק שגם $\mathbb{R}_{\frac{1}{\mathbb{N}}}$ מרחב האוסדורף.

נראה ש־$\mathbb{R}_{\frac{1}{\mathbb{N}}}$ לא T_3. נבחין כי $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ סגורה, ונראה כי לא ניתן להפריד בינה לבין 0. נניח ש־$0 \in U$ ו־$K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ פתוחות זרות ונקבל סתירה. אם $0 \in U$ פתוחה אז U מכילה איבר בסיס, לכן U מכילה קבוצה מהצורה $(a_0, b_0) \setminus K$ עבור $a_0 < 0 < b_0$. קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{m} < b_0$, ואז $(a_0, \frac{1}{m}) \setminus K \subseteq U$. $\frac{1}{2m} \in K \subseteq V$ ולכן $(a_1, b_1) \subseteq V$ כאשר $a_1 < \frac{1}{2m} < b_1$. $U \cap V \supseteq ((a_0, \frac{1}{m}) \setminus K) \cap (a_1, b_1) \neq \emptyset$, וקיבלנו סתירה.

דוגמה 4.5 נראה דוגמה למרחב שהוא T_3 אבל לא T_4.

נסמן את $\mathbb{R}_L$, הטופולוגיה הנוצרת על $\mathbb{R}$ עם הבסיס $L = \{[a,b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. אז $\mathbb{R}_L$ הוא מרחב T_4 ולכן בפרט גם T_3. אז $\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_L$ היא בהכרח T_3 מטענה שראינו קודם על מכפלות מרחבי הפרדה.

נרצה להראות ש־$\mathbb{R}_L^2$ היא לא מרחב T_4. נבחין כי הטופולוגיה המושרית על L מ־$\mathbb{R}_L^2$ היא הטופולוגיה הדיסקרטית, ולכן כל תת־קבוצה $A \subseteq L$ היא סגורה ב־$\mathbb{R}_L^2$, בשיעור הבא נראה את המשך הסתירה ל־T_4.

5 שיעור 5 — 8.4.2025

5.1 אקסיומות ההפרדה — המשך

נמשיך בהוכחת הסתירה עבור הדוגמה האחרונה מהשיעור הקודם.

הוכחה. בנוסף הגדרנו את הקבוצה $L = \{(-x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_L^2$, זוהי קבוצה סגורה, וכן הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}_L^2$ על L היא הטופולוגיה הדיסקרטית על L. הסקנו גם שכל $A \subseteq L$ היא סגורה ב־L, כלומר לכל $A \subseteq L$ יש קבוצה $C_A \subseteq \mathbb{R}_L^2$ סגורה כך ש־$A = L \cap C_A$. שתי האחרונות סגורות ב־$\mathbb{R}_L^2$ ולכן גם A סגורה ב־$\mathbb{R}_L^2$. נניח ש־$\mathbb{R}_L^2$ היא T_4, בפרט זהו מרחב נורמלי, ולכן כל שתי קבוצות סגורות זרות ניתנות להפרדה. בפרט לכל $A \subseteq L$ יש קבוצות פתוחות זרות $U_A, V_A \subseteq \mathbb{R}_L^2$ כך ש־$A \subseteq U_A, L \setminus A \subseteq V_A$. נקבע לכל $A \subseteq L$ זוג קבוע כזה (וניצור מיפוי). נתבונן ב־$D = \{(r, s) \mid r, s \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}_L^2$, ונגדיר $\psi(A) = U_A \cap D$, כלומר $\psi : \mathcal{P}(L) \to \mathcal{P}(D)$. אם נבחר את $A = \emptyset$ אז גם $U_A = \emptyset$ ובהתאם $\psi(\emptyset) = \emptyset$, ולהפך אם $A = L$ אז $V_A = \emptyset$, $U_A = \mathbb{R}_L^2$ ולכן $\psi(A) = \mathbb{R}_L^2$.
ψ חד־חד ערכית, ולכן מקבלת סתירה, ונותר לנו להוכיח שהיא אכן חד־חד ערכית.

נניח ש־$\emptyset \neq A \subsetneq L$, אז $\psi(A) \neq \emptyset$ כי D צפופה ו־$U_A \neq \emptyset$. גם $V_A \neq \emptyset$, שכן $L \setminus A \subseteq V_A$, ולכן נסיק ש־$V_A \cap D \neq \emptyset$. עתה נניח ש־$\emptyset \neq A, B \subsetneq L$ כך ש־$A \neq B$, אז בלי הגבלת הכלליות יש $a \in A$ כך ש־$a \notin B$. נובע אם כך ש־$a \in L \setminus B \subseteq V_B$ ו־$a \in A \subseteq U_A$ ולכן נובע ש־$a \in U_A \cap V_B$, וזו אף קבוצה פתוחה. נסיק ש־$U_A \cap V_B \neq \emptyset$, אז $p \in U_A \cap V_B \cap D$ מקיימת $p \in \psi(A)$ ו־$p \notin \psi(B)$ ובהתאם $\psi(A) \neq \psi(B)$.

D קבוצה בת־מניה ו־L היא מהעוצמה של $\mathbb{R}$. יש לנו שיכון $\mathcal{P}(D) \hookrightarrow \mathbb{R}$, אבל $|L| = |\mathbb{R}|$, אז נוכל לבנות $\mathcal{P}(L) \hookrightarrow \mathcal{P}(D) \hookrightarrow L$ וזה בלתי אפשרי. $\square$

נסיים עם למה משמעותית במיוחד במרחבי T_4.

למה 5.1 (הלמה של אוריסון) *אם X מרחב טופולוגי T_4, אז לכל זוג קבוצות סגורות זרות $C, D \subseteq X$, קיימת פונקציה רציפה $f : X \to [0, 1]$ כך ש־$f\mid_C = 1, f\mid_D = 0$.*

הוכחה. נניח ש־X מרחב T_4, ויהיו $C_0 = C$ וכן $V_1 = X \setminus D$, עבור הקבוצות הסגורות הזרות $C, D \subseteq X$. נבחין כי C_0 סגורה ו־V_1 פתוחה, ולכן קיימות קבוצות $C_0 \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq C_{\frac{1}{2}} \subseteq V_1$. שוב מדובר בקבוצה סגורה ובקבוצה פתוחה. נגדיר כך באופן רקורסיבי קבוצות $C_{\frac{k}{2^n}}, V_{\frac{k}{2^n}}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$0 < k < 2^n$, לכן,

$$C_0 \subseteq V_{\frac{1}{2^n}} \subseteq C_{\frac{1}{2^n}} \subseteq V_{\frac{2}{2^n}} \subseteq C_{\frac{2}{2^n}} \dots$$

ונגדיר לכל $x \in X$ את הפונקציה,

$$f(x) \begin{cases} \inf\{t \in [0, 1] \mid x \in V_t\} & \exists t, x \in V_t \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

אנו טוענים ש־f מקיימת את האמור, כלומר $f(x) = 0$ לכל $x \in C$, וכן $f(x) = 1$ לכל $x \in D$, ו־f רציפה. נשים לב ש־$C = C_0 \subseteq V_{\frac{1}{2^n}}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן נובע ש־$f(x) = 0$. נבחין גם שעבור $x \in D$ נובע ש־$x \notin V_t$ לאף t ולכן $f(x) = 1$. נותר אם כן להראות רציפות. אנו יודעים כי $f : X \to [0, 1]$ ולכן עלינו לבדוק תת־קבוצות של $[0, 1]$, אבל מספיק לבדוק את הרציפות עבור תת־בסיס של הקטע, שכל מקור של קבוצה פתוחה הוא פתוח. נבחר את תת־הבסיס $\mathcal{B} = \{[0, b) \mid 0 < b \le 1\} \cup \{(b, 1] \mid 0 \le b < 1\}$. נתבונן ב־$[0, b)$, כזה, נניח שמתקיים,

$$x \in f^{-1}([0, b))$$

אז נובע ש־$f(x) < b$, לכן קיים t כך ש־$f(x) < t < b$ מספר דיאדי (מהצורה הדרושה). לכן $x \notin V_s$ לכל $s < t$, ולכן נקבל ש־$\bigcup V_t \subseteq f^{-1}([0, b))$. נניח ש־$x \in \bigcup_t V_t$ אז יש $t_0 < b$ כך ש־$x \in V_t$ ולכן $f(x) < t_0 < b$ ונוע ש־$x \in f^{-1}([0, b))$ כפי שרצינו. אז מצאנו ש־$f^{-1}((b, 1])$ פתוחה אם ורק אם $f^{-1}([0, b])$ סגורה, ולכן אנו טוענים שמתקיים $f^{-1}([0, b]) = \bigcap_{b<t} C_t$. אם $x \notin f^{-1}([0, b])$ אז $b < f(x) \le 1$, אז מצפיפות קיימים t_1, t_2 דיאדיים כך ש־$b < t_1 < t_2 < f(x)$ ולכן $x \notin V_{t_2}$ וכן $C_{t_1} \subseteq V_{t_1}$ ולכן $x \notin \bigcap_{b<t} C_t$. אם $x \in f^{-1}([0, b])$ אז $0 \le f(x) \le b < 1$ לכל $b < t$ מתקיים $x \in V_t \subseteq C_t$ ונובע ש־$x \in \bigcap_{b<t} C_t$. $\square$

6 שיעור 6 — 21.4.2025

6.1 אקסיומות מנייה

ראינו עד כה מספר שימושים לבסיסים של טופולוגיה, הגדרה 1.10. עתה נגדיר הגדרה משלימה לבסיס בהקשר מקומי.

הגדרה 6.1 (בסיס לטופולוגיה בנקודה) אם X מרחב טופולוגי ו־$x \in X$ נקודה כלשהי, אז קבוצה של קבוצות פתוחות $\{U_i\}_{i \in I}$ כך ש־$x \in U_i$ לכל $i \in I$, תיקרא בסיס לטופולוגיה או בסיס לקבוצות פתוחות של x אם לכל קבוצה פתוחה $x \in V$ קיים i כך ש־$x \in U_i \subseteq V$.

בהתאם נגדיר את ההגדרה המהותית הראשונה שעוסקת במנייה.

הגדרה 6.2 (אקסיומת המנייה הראשונה) נאמר שמרחב X מקיים את אקסיומת המנייה הראשונה אם לכל $x \in X$ קיים בסיס לפתוחות של x כך שהבסיס בן־מנייה.

הגדרה 6.3 (אקסיומת המנייה השנייה) נאמר שמרחב X מקיים את אקסיומת המנייה השנייה אם קיים בסיס בן־מניה ל־X.

הגדרה 6.4 (מרחב לינדולף) X יקרא מרחב לינדולף, אם לכל כיסוי פתוח של X יש כיסוי בן־מניה.
כלומר אם $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ כיסוי פתוח, אז קיימת $J \subseteq I$ כך ש־$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$.

הגדרה 6.5 (מרחב ספרבילי) X נקרא ספרבילי אם יש ב־X תת־קבוצה צפופה בת־מניה.

עתה משהגדרנו שפה לדבר בה על הקונספט של מנייה במרחבים טופולוגיים, נוכל לעבור למספר טענות.

טענה 6.6 *מרחב רגולרי המקיים את אקסיומת המנייה השנייה הוא נורמלי.*
בפרט מרחב T_3 המקיים את אקסיומת המנייה השנייה הוא T_4.

הוכחה. נניח ש־X רגולרי המקיים את אקסיומת המנייה השנייה. יהי $\mathcal{B}$ בסיס בן־מניה. אנו רוצים להראות נורמליות, נניח ש־$A, B \subseteq X$ זרות וסגורות (ולא ריקות). ואנו רוצים למצוא להן הפרדה. לכל $a \in A$ כך ש־$a \notin \mathcal{B}$ יש קבוצה פתוחה U_a כך ש־$a \in U_a \subseteq \overline{U}_a \subseteq X \setminus B$. ניתן לבחור את U_a כך ש־$U_a \in \mathcal{B}$ ולכן האוסף $\{U_a \mid a \in A\}$ הוא בן־מניה, ונוכל לכתוב אותו על־ידי $\{U_{a_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, כאשר $a_n \in A$ לכל n. קיבלנו ש־$a \in U_a \subseteq \overline{U}_a \subseteq A \setminus B$ האוסף $\{U_a \mid a \in A\}$ מכסה את A אבל גם $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a = \bigcup_{n=1}^\infty U_{a_n}$. באותו אופן אפשר למצוא קבוצות פתוחות $V_b \in \mathcal{B}$ כך ש־$b \in B$ כך ש־$b \in V_b \subseteq \overline{V}_b \subseteq X \setminus A$ וסדרה $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subseteq B$, כך ש־$\{V_b\} = \{V_b \mid b \in B\}$ ו־$\{V_{b_n}\}$ הוא כיסוי של B.

לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $S_k = U_{a_k} \setminus \bigcup_{i=1}^k \overline{V}_{b_i}$ וכן $T_k = V_{b_k} \setminus \bigcup_{i=1}^k \overline{U}_{a_k}$. שתי אלה קבוצות פתוחות לכל k, ונגדיר בהתאם $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ וכן $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$, גם אלה קבוצות פתוחות. נבחין כי $A \subseteq S, B \subseteq T$. נזכור ש־$\overline{V}_b \subseteq X \setminus A$ ונבדוק ש־$S \cap T = \emptyset$. אם החיתוך לא ריק, אז קיים$m, n \in \mathbb{N}$ כך ש־$S_n \cap T_m \neq \emptyset$, בלי הגבלת הכלליות $n \le m$ ולכן נובע,

$$S_m = U_{b_k} \setminus \bigcup_{i=1}^k \overline{T}_i \supseteq T_n$$

וזו סתירה. □

נרצה לדון בקשר שבין מרחבים מטריים למרחבים טופולוגיים.

הגדרה 6.7 (מרחב מטריזבילי) מרחב טופולוגי X נקרא מטריזבילי אם קיימת מטריקה על X שמשרה את הטופולוגיה.

כבר ראינו שכל מטריקה משרה טופולוגיה שמקיימת את T_4, עתה נרצה להבין מתי בדיוק טופולוגיה אכן מושרית מאיזושהי מטריקה.
הערה תת־מרחב של מרחב מטריזבילי הוא מטריזבילי.

משפט 6.8 (משפט המטריזביליות של אורסון) *אם X מרחב טופולוגי T_3 המקיים את אקסיומת המנייה השנייה, אז X מטריזבילי.*

הוכחה. הרעיון הכללי הוא לשכן במרחב מטרי ב־$[0,1]^{\mathbb{N}}$ עם טופולוגיית המכפלה עם המטריקה,

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

ולבנות העתקה $\psi : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ כך ש־ψ חד־חד ערכית והפיכה מ־X ל־$\psi(X)$.

לכל $x, y \in X$ כך ש־$y \neq x$ יש פתוחות זרות $U_{xy}, W_{xy} \subseteq \mathcal{B}$ כך ש־$x \in U_{xy}, y \in W_{xy}$. ניתן למצוא קבוצות בסיס $x \in V_{xy} \subseteq$

$\overline{V}_{xy} \subseteq U_{xy}$. נתבונן באוסף כל הזוגות $\Lambda = \{(u,u) \in \mathcal{B}^2 \mid \emptyset \not\subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U\}$. אז Λ בת־מניה. מהלמה של אוריסון קיימת פונקציה $f = f_{(u,v)} : X \to [0,1]$ כך ש־$f \mid_{X \setminus U} = 1$ ו־$f \mid_{\overline{V}} = 0$. אנו מקבלים סדרת פונקציות $\{f_{(u,v)} \mid (u,v) \in \Lambda\} = \{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. נגדיר $\psi : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ על־ידי $\psi(x)(k) = g_k(x)$. אנו טוענים כי ψ היא רציפה, חד־חד ערכית וכן ש־$\psi : X \to \psi(X)$ היא הומיאומורפיזם. רציפות בטופולוגיית המכפלה שקולה לרציפות בכל קורדינטה, לכן מרציפות g_k לכל k נקבל רציפות ψ. חד־חד ערכיות נובעת מכך שלכל $x, y \in X$ כך ש־$y \neq x$ יש $V, U \in \mathcal{B}$ כך ש־$x \in V \subseteq \overline{V}, y \in X \setminus U$. יש $g_k = f_{(v,u)}$ ו־$g_k(x) = 0, g_k(y) = 1$. נשאר להראות הומיאומורפיזם. אנו יודעים ש־ψ חד־חד ערכית, וצריך להראות שלכל ש־$\psi^{-1} : E \to X$ היא רציפה כאשר $E = \psi(X)$, כלומר צריך להראות שלכל $W \subseteq X$ פתוחה, שגם $\psi(W)$ פתוחה ב־E. לכל $x \in W$ קיימת $U \in \mathcal{B}$ כך ש־$x \in U \subseteq W$, וקיימת $V \in \mathcal{B}$ כך ש־$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. יהי $k(x) \in \mathbb{N}$ כך ש־$g_{k(x)} = f_{(v,u)}$ ומתקיים, $g_{k(x)}(x) = 0$ וכן $g_{k(x)} \mid_{X \setminus U} = 1$. אז $x \in g^{-1}([0,1)) \subseteq U \subseteq W$ ונובע ש־$W = \bigcup_{x \in W} g_{k(x)}^{-1}([0,1))$. $g_{k(x)} = \pi_{k(x) \circ \psi}$ ולכן $g_{k(x)}^{-1} = \psi^{-1} \circ \pi_{k(x)}^{-1}$ ולכן,

$$W = \bigcup_{x \in W} \psi^{-1}(\pi_{k(x)}^{-1}([0,1))) = \psi^{-1}(\bigcup_{x \in W} \pi_{k(x)}^{-1}([0,1)))$$

ונובע $\psi(W) = (\bigcup_{x \in W} \pi_{k(x)}^{-1}([0,1))) \cap E$. $\square$

6.2 קשירות

הגדרה 6.9 (קשירות) מרחב טופולוגי X יקרא קשיר אם לא ניתן להציג אותו כאיחוד של שתי קבוצות פתוחות זרות לא ריקות.

הערה באופן שקול גם אם לא ניתן להציג את המרחב כאיחוד זר של קבוצות סגורות. זאת שכם אם $X = U \cup V$ אז $U^C \cap V^C = \emptyset$ וכן אם $U \cap V = \emptyset$ אז $U^C \cup V^C = X$ וכמובן U^C, V^C פתוחות.

דוגמה 6.1 מהן תתי־הקבוצות הקשירות של $\mathbb{R}$? התשובה היא קטעים, $(a,b), [a,b], (a,b], [a,b)$.

הערה מרחב טופולוגי X הוא קשיר אם ורק אם כל פונקציה רציפה $f : X \to \{0,1\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית, היא קבועה.

טענה 6.10 (תכונות של קשירות) *התכונות הבאות מתקיימות,*

1. *אם $f : X \to Y$ רציפה ו־X קשיר אז $f(X)$ קשירה*
2. *אם $A \subseteq X$ קשירה אז $\overline{A}$ קשירה*
3. *למת כוכב, אם $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ תתי־קבוצות קשירות וקיים $\beta \in I$ כך ש־$A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ ב־X לכל $\alpha \in I$ אז $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ קשירה*
4. *אם $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ קבוצת מרחבים טופולוגיים קשירים אז $Y = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ קשירה*

הוכחה. נוכיח את טענה 2. נניח ש־$\overline{A}$ לא קשירה, לכן נובע שיש $f : \overline{A} \to \{0,1\}$ לא קבועה. בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$f(A) = \{0\}$, אבל $\{0\} \subseteq \{0,1\}$ סגורה ולכן $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ סגורה ונובע ש־$\overline{A} \subseteq f^{-1}(\{0\})$ וזו סתירה.

נעבור להוכחת טענה 4. נתונים $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ מרחבים טופולוגיים ונרצה להראות ש־Y קשיר. אם A, B מרחבים טופולוגיים קשירים אז $A \times B$ קשיר, כנביעה מטענה 3, שכן,

$$A \times B = (\bigcup_{a \in A} \{a\} \times B) \cup (\bigcup_{b \in B} A \times \{b\})$$

נרצה למצוא תת־קבוצה של Y שתהיה צפופה וקשירה. נקבע $f \in Y$, כאשר $f : I \to \bigcup X_\alpha$. יש f כזו מאקסיומת הבחירה. נגדיר את $Z = \{h \in Y \mid |\{\alpha \in I \mid h(\alpha) \neq f(\alpha)\}| < \infty\} = \bigcup_{F \subseteq I, |F| < \infty} P_F$ כאשר $P_F = \{h \in Y \mid h(\alpha) = f(\alpha) \forall \alpha \notin F\}$. אנו טוענים שתי טענות, הראשונה היא שלכל F סופית P_F קשירה, השנייה היא ש־$Z = \bigcup P_F$ קשירה והשלישית היא ש־Z צפופה. נבחין כי $P_F \cong \prod_{y \in F} X_y$ מהגדרת טופולוגיית המכפלה.

נבהיר שמטרתנו הייתה למצוא קבוצה צפופה $Z \subseteq Y$ ולהשתמש בטענה על סגור של צפופה. עשינו זאת על־ידי הוכחה למקרים סופיים עם למת הכוכב. בשלב הבא לכל $F \subseteq I$ סופית המכפלה $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = Y_F$ קשירה ונקבע $f \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. נגדיר $Z_F = \{h \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = Y \mid \forall \beta \notin F, h(\beta) = f(\beta)\}$, אז Z_F בעצם סוג של שווה ל־$Y_F \times \{f_F\}$ עבור $f_F : I \setminus F \to \bigcup_{\alpha \in I \setminus F} X_\alpha$, ו־$f_F(\alpha) = f(\alpha)$. אם נגדיר $Z = \bigcup_{F \subseteq I, |F| < \omega} Z_F$ נקבל קבוצה קשירה, זאת שכן $f \in Z_F$ לכל F שכן מתקיימים התנאים של למת כוכב. Z צפופה ולכן מספיק להתבונן בבסיס $\mathcal{B}$ של הטופולוגיה ולהראות שלכל $\emptyset \neq B \in \mathcal{B}$ מתקיים $Z \cap B \neq \emptyset$. נתבונן בבסיס שהגדרנו בעזרתו את טופולוגיית המכפלה, כל קבוצה בבסיס הזה היא מהצורה $\prod_{\alpha \in F} U_\alpha \times \prod_{\beta \notin F} X_\beta$, כאשר $F \subseteq I$ סופית ו־$\emptyset \neq U_\alpha \subseteq X_\alpha$ לכל $\alpha \in I$. קיימת $g \in B$ כך ש־$g(\beta) = f(\beta)$

לכל $\beta \notin F$. מ־$\mathcal{B} \neq \emptyset$ נובע שקיימת איזושהי $h \in B$, אז נגדיר,

$$B \ni g(\alpha) = \begin{cases} h(\alpha) & \alpha \in F \\ f(\alpha) & \alpha \notin F \end{cases}$$

נטען כי $g \in Z$, זאת שכן $g \in Z_F \subseteq Z$. $\square$

7 שיעור 7 — 22.5.2025

7.1 קשירות — המשך

הגדרה 7.1 (קשירות מקומית) נאמר שהמרחב הטופולוגי X הוא קשיר מקומית בנקודה $x \in X$ אם לכל סביבה W של x יש קבוצה פתוחה וקשירה $x \in U \subseteq W$. נאמר ש־X קשיר מקומית אם x קשיר מקומית לכל $x \in X$.

הגדרה 7.2 (רכיב קשירות) רכיב הקשירות של x במרחב הטופולוגי X הוא תת־הקבוצה הקשירה המקסימלית אשר מכילה את x.

הערה אכן קיימת קבוצה כזו בשל הסגירות לאיחוד של הטופולוגיה, נבחר את Z $\bigcup_{x \in Z \subseteq X}$.

דוגמה 7.1 מה הוא רכיב הקשירות של $\frac{1}{3}$ ב־$\mathbb{Q}$? התשובה היא ש־$\{\frac{1}{3}\}$.

הגדרה 7.3 (מסילה) מסילה ב־X היא פונקציה רציפה $\alpha : [a, b] \to X$ כך ש־$a, b \in \mathbb{R}, a < b$. נאמר שזוהי מסילה בין $\alpha(a)$ ל־$\alpha(b)$, וכן שהמסילה α מחברת את שתי הנקודות הללו.

הגדרה 7.4 (קשירות מסילתית) נאמר שהמרחב הטופולוגי X הוא קשיר מסילתית אם לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה $\alpha : [0, 1] \to X$ כך ש־$\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$.

הגדרה 7.5 (קשירות מסילתית מקומית) המרחב X קשיר מסילתית מקומית ב־x אם לכל סביבה W של x יש קבוצה פתוחה $x \in U \subseteq W$ כך ש־U קשירה מסילתית.

בהתאם X קשיר מסילתית מקומית אם x קשיר מסילתית מקומית לכל $x \in X$.

נתעניין להבין מה הקשר בין ארבעת מושגי הקשירות שראינו זה עתה. נתחיל בתכונה חשובה של קשירות מסילתית.

טענה 7.6 *אם X קשיר מסילתית ו־$f : X \to Y$ רציפה אז $f(X)$ קשירה מסילתית.*

הוכחה. יהיו $p, q \in f(X)$, אז קיימות נקודות $p', q' \in X$ כך ש־$f(p') = p, f(q') = q$ וכן יש מסילה $\alpha : [0, 1] \to X$ כך ש־$\alpha(0) = p'$ ו־$\alpha(1) = q'$. הרכבת פונקציות רציפות היא רציפה ולכן $f \circ \alpha$ מסילה המקשרת את p ל־q. □

עתה נראה את הקשר בין קשירות וקשירות מסילתית.

טענה 7.7 *אם X קשיר מסילתית אז X קשיר.*

הוכחה. אם X לא קשיר אז יש פונקציה רציפה $f : X \to \{0, 1\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית כך ש־$f(X) = \{0, 1\}$ אבל $\{0, 1\}$ לא קשיר מסילתית כי $[0, 1]$ קשיר. □

נבחין כי קשירות לא גוררת קשירות מסילתית, נראה דוגמה מתאימה.

דוגמה 7.2 נתבונן בגרף של $\sin \frac{1}{x}$ עבור $0 < x \le 1$, G. זוהי תת־קבוצה של $\mathbb{R}^2$, ונניח ש־X הסגור של גרף זה ב־$\mathbb{R}^2$. נבחין כי $X = G \cup \{0\} \times [-1, 1]$. סגור של קבוצה קשירה הוא קשיר ולכן סגור זה אכן קשיר. מהצד השני הוא לא קשיר מסילתית, לא קיימת מסילה $\alpha : [0, 1] \to X$ כך ש־$\alpha(0) = (0, 0), \alpha(1) = (1, \sin 1)$.

8 שיעור 8 — 28.4.2025

8.1 קשירות — סגירת פינות

דוגמה 8.1 נראה מרחב קשיר אך איננו קשיר מקומית. זהו מרחב המסרק,

$$(\{0\} \times [0,1]) \cup \{[0,1] \times \{0\}\} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$$

מן הצד השני ראינו גם כי קשירות לא גוררת קשירות מסילתית.

דוגמה 8.2 הצמצום של $\mathbb{R}^2$ לגרף של $\sin\frac{1}{x}$ ב־$(0,1]$,

$$Y = (\{0\} \times [0,1]) \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \le 1\}$$

מרחב זה הוא קשיר שכן הוא צמצום של מרחב קשיר והגרף רציף כתמונה של פונקציה רציפה ממרחב קשיר (קטע).

נניח בשלילה ש־Y קשיר מסילתית ולכן יש בפרט מסילה $\alpha : [0,1] \to Y$ כך שמתקיים,

$$\alpha(0) = (0,0), \qquad \alpha(1) = (1, \sin 1)$$

נגדיר גם $\delta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ ולכן $\alpha_1(0) = 0, \alpha_1(1) = 1$. ממשפט ערך הביניים קיים $0 < t_1 < 1$ כך ש־$\alpha_1(t_1) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$. נמצא $0 < t_2 < t_1$ כך שמתקיים,

$$\alpha(t_2) = (?, -1)$$

ואז נוכל למצוא $0 < t_3 < t_2$ כך ש־$\alpha(t_3) = (?, 1)$. נוכל לבנות ככה סדרה של נקודות כאלה ונקבל שלנקודות אלה יש גבול $(0,0)$ ולכן מאפיון היינה לגבולות נקבל,

$$\alpha(0) = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

אבל גבול זה לא קיים.

טענה 8.1 *אם X קשיר וקשיר מסילתית מקומית אז X קשיר מסילתית.*

הוכחה. יהי $x_0 \in X$ ונתבונן במחלקת הקשירות המסילתית של x_0 ונסמנו A. אנו יודעים ש־$x_0 \in A$ ולכן $A \ne \emptyset$ ואנו יודעים גם כי A פתוחה, זאת שכן לכל $a \in A$ עבור $a \in X$ אנו יודעים כי A קשיר מסילתית ולכן בפרט ישנה סביבה של a ב־X.
נטען גם כי A סגורה, הראינו שבמרחב קשיר מסילתית מקומית כל רכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה פתוחה, אבל זה גורר שכל רכיב קשירות מסילתית הוא גם קבוצה סגורה כמשלים של איחוד קבוצות פתוחות, הן רכיבי הקשירות המסילתית האחרים.
אז $A \in \{X, \emptyset\}$ אבל $x_0 \in A$ ונסיק ש־$X = A$. □

8.2 קומפקטיות

הגדרה 8.2 (קומפקטיות) מרחב טופולוגי X יקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X יש תת־כיסוי סופי.
המשמעות היא שלכל אוסף קבוצות פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כך ש־$X = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ אז קיים $I_0 \subseteq I$ סופי כך ש־$X = \bigcup_{\alpha\in I_0} U_\alpha$.
תת־קבוצה $K \subseteq X$ תיקרא קומפקטית אם היא מרחב קומפקטי כתת־מרחב של X, זה נכון באופן דומה עבור כיסוי פתוח המכיל את K.

נראה הגדרה שקולה בניסוח של קבוצות סגורות,

הגדרה 8.3 (שקילות לקומפקטיות) X מרחב טופולוגי קומפקטי אם ורק אם לכל אוסף $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של תתי־קבוצות סגורות ב־X כך שיש להן את תכונת החיתוך הסופי, כלומר ש־$\bigcap_{\alpha\in I_0} F_\alpha \ne \emptyset$ לכל $I_0 \subseteq I$ סופית, אם F_0 סגורה לכל α ו־$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$ אז יש $I_0 \subseteq I$ סופית כך שמתקיים,

$$\bigcap_{\alpha\in I_0} F_\alpha = \emptyset$$

הערה ראינו בקורסים קודמים שתת־קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אם ורק אם A סגורה וחסומה.

עבור המקרה של $A \subseteq \mathbb{R}$ נניח שמתקיים,

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n) = \mathbb{R}$$

ולכן קיים $I \subseteq \mathbb{N}$ סופי כך ש־$A \subseteq \bigcup_{n\in I}(-n,n)$. לכל $a,b \in A$ כך ש־$b \neq a$ אנו יודעים כי $\mathbb{R}$ האוסדורף ולכן קיימות $a \in U_a$ ו־$b \in V_a$ וכן $U_a \cap V_a = \emptyset$. אז $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a$ ומקומפקטיות A יש תת־כיסוי סופי כזה, כלומר $A \subseteq \bigcup_{i=1}^N U_{a_n}$ וכן $b \in \bigcap_{i=1}^N V_{a_i}$ ולכן,

$$V \cap (\bigcup_{i=1}^N U_{a_n}) = \emptyset$$

ונובע ש־$V \cap A = \emptyset$ וכן $V \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ ולכן $\mathbb{R} \setminus A$ פתוחה. לכיוון ההפוך נראה טענה יותר כללית בהמשך.

הוכחנו כרגע טענה חזקה יותר, כל תת־קבוצה קומפקטית A במרחב טופולוגי האוסדורף X היא סגורה.

הערה קיימים מרחבים טופולוגיים עם תת־קבוצה קומפקטית שאינה סגורה. לדוגמה $X = \{a,b\}$ עם הטופולוגיה הטריוויאלית, אז $A = \{a\}$ היא קומפקטית אבל לא סגורה.

טענה 8.4 *אם X קומפקטית ו־$A \subseteq X$ סגורה אז A קומפקטית.*

הוכחה. נניח כי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של פתוחות כך שהן מכסות את A, אז

$$X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$$

וקיבלנו כי יש למרחב תת־סיכוי סופי. כלומר יש $I_0 \subseteq I$ סופית כך שמתקיים,

$$X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{\alpha\in I_0} U_\alpha$$

ולכן $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in I_0} U_\alpha$. □

טענה 8.5 *תמונה רציפה של מרחב קומפקטי היא קומפקטית, כלומר אם X מרחב קומפקטי ו־$f : X \to Y$ פונקציה רציפה מ־X למרחב טופולוגי Y אז $f(X) \subseteq Y$ היא קומפקטית.*

הוכחה. נניח ש־$f(X) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ אז $X \subseteq f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha)$, ולכן יש תת־כיסוי סופי כזה, כלומר קיימת $I_0 \subseteq I$ סופית כך ש־$X \subseteq \bigcup_{\alpha\in I_0} f^{-1}(U_\alpha)$ ולכן $f(X) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I_0} U_\alpha$. □

טענה 8.6 *אם X מרחב האוסדורף קומפקטי אז X מרחב רגולרי.*

הוכחה. רגולריות מתקיימת אם ורק אם T_0 וגן אפשר להפריד בין כל קבוצה סגורה A ונקודה $b \notin A$.

אז אם $A \subseteq X$ סגורה עבור X קומפקטי אז נובע ש־A קומפקטית, כל $a \in A$ כך ש־$b \neq a$ נובע שיש פתוחות $a \in U_a, b \in V_a$ עבור U_a, V_a זרות. אנו יודעים כי $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a$ ולכן קיימות נקודות $a_1, \ldots, a_N \in A$ כך ש־$A \subseteq \bigcup_{i=1}^N U_{a_i} = U$, וכן $b \in V = \bigcap_{i=1}^N V_{a_i}$. U, V פתוחות זרות כך ש־$A \subseteq U$ ו־$b \in V$. □

מסקנה 8.7 אם X מרחב טופולוגי קומפקטי ו־Y מרחב טופולוגי האוסדורף, $f : X \to Y$ רציפה חד־חד ערכית ועל, אז f היא הומיאומורפיזם.

הוכחה. עלינו להראות רק ש־f מקיימת ש־f^{-1} רציפה, ונקבל שכלל התנאים להומיאומורפיזם חלים. לכל תת־קבוצה סגורה $C \subseteq X$ עלינו להראות ש־$(f^{-1})^{-1}(C) \subseteq Y$ סגורה. X קומפקטית ו־C סגורה ולכן היא קומפקטית ולכן נובע ש־$f(C)$ קומפקטית אבל Y האוסדורף ולכן $f(C)$ סגורה. □

טענה 8.8 *אם X מרחב האוסדורף קומפקטי אז X מרחב נורמלי.*

הוכחה. נניח ש־$A, B \in X$ קתי קבוצות סגורות וזרות, אז לכל $b \in B$ מתקיים $b \notin A$ ולכן יש $b \in V_b$ ו־$A \subseteq U_b$ פתוחות זרות, ו־$B \subseteq \bigcup_{b\in B} U_b$ קומפקטית כי היא סגורה במרחב קומפקטי ולכן $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{b_i}$ כיסוי פתוח סופי, וכן $A \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_{b_i}$, ושתי הקבוצות הללו מפרידות בין A ל־B ופתוחות. □

טענה 8.9 *X מרחב טופולוגי קומפקטי ו־$f : X \to \mathbb{R}$ רציפה, אז,*

1. *$f(X)$ חסומה (וסגורה)*
2. *יש ל־f מקסימום ומינימום*
3. *נניח X מטריזבילי ותהי ρ המטריקה אז f רציפה במידה שווה.*

הוכחה. נוכיח את הטענות,

1. ראינו ש־$f(X) \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית ותת־קבוצה קומפקטית של $\mathbb{R}$ היא סגורה וחסומה.

2. נניח ש־$M = \sup_{x \in X} f(x)$ מתקבל וסופי, נסמן גם $A = f(X)$, אז מההגדרה M הוא הסופרימום של A ולכן כל $x \in X$ מקיים ש־$f(x) \leq M$ וגם לכל $\epsilon > 0$, יש $a \in A$ כך ש־$M - \epsilon \leq a = f(x)$. נובע אם כך ש־$A \cap [M - \epsilon, M] \neq \emptyset$. יש אוסף של תתי־קבוצות סגורות $F_{\epsilon_i} = A \cap [M - \epsilon_i, M]$ לכל $\epsilon_n > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$,
$$\bigcup_{i=1}^{n} F_{\epsilon_i} = A \cap [M - \delta, M]$$
עבור $\delta = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$. נובע אם כך,
$$A \cap \{M\} = \bigcap_{\epsilon > 0} (A \cap [M - \epsilon, M]) = \bigcap_{\epsilon > 0} F_\epsilon \neq \emptyset$$
ולכן נסיק ש־$M \in A = f(X)$.

3. מושאר כתרגיל, אבל רמז הוא מספר לבג לכיסוי.

□

8.3 קומפקטיות במרחבים מטריים

לא נגדיר אך ניזכר במספר הגדרות חשובות מעולם המרחבים המטריים, הן סדרות קושי, שלמות, חסימות לחלוטין. בהינתן שאנו מכירים את המונחים הללו, נעבור למשפט, אך לפני זה נגדיר מונח חדש שיעזור לנו בהוכחת משפט זה.

הגדרה 8.10 (התכנסות סדרה במרחב טופולוגי) סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ עבור מרחב טופולוגי X מתכנסת ל־x אם לכל סביבה פתוחה $x \in U$ מתקיים $x_n \in U$ לכמעט כל n, כלומר קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ אז $x_n \in U$.

הגדרה 8.11 (מספר לבג) יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי מטרי, ויהי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של X. אז $\lambda > 0$ נקרא מספר לבג של הכיסוי אם לכל $x \in X$ קיים $\alpha \in I$ כך ש־$B_\lambda(x) \subseteq U_\alpha$.

הערה במקרה של מרחבים מטריים קומפקטיים, תמיד יש מספר לבג. כדי לראות זאת, לכל $n \in \mathbb{N}$ יש $x \in X$ כך ש־$B_{\frac{1}{n}}(x) \not\supseteq U_\alpha$ לכל $\alpha \in I$. נגדיר $x_{n_k} \to y \in X$ מקומפקטיות סדרתית ונקבל סתירה.

הערה באופן כללי קומפקטיות לא גוררת קומפקטיות סדרתית וגם לא להיפך.

דוגמה 8.3 נראה דוגמה שמצביה שקומפקטיות סדרתית לא גוררת קומפקטיות. נגדיר $I = [0, 1]$ וכן $X = \{0, 1\}^I$ עם טופולוגיית המכפלה. X קומפקטי כמקרה פרטי של משפט טיכונוף שנוכיח בהמשך. נגדיר $Y = \{x = (x_i)_{i \in I} \in X \mid |\{\alpha \in I \mid x = 1\}| \leq \aleph_0\}$ כתת־מרחב של X עם הטופולוגיה המושרית ממנו. אנו טוענים כי Y קומפקטי סדרתית אבל לא קומפקטי.

נראה ש־Y לא קומפקטי, לכל $\alpha \in I$ נסמן $U_\alpha = \{x \in X \mid x_\alpha = 0\}$ פתוחה, וכן $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. מצד שני, לכל $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$,
$$Y \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$
כדי להראות קומפקטיות סדרתית, לכל $y_n \in Y$, $J_n \subseteq [0, 1]$ בת־מניה מ־$y_n(\alpha) = 0$ לכל $\alpha \notin J$ עבור J_n עבור $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ עבור $y_n \in \{0, 1\}^J$.

משפט 8.12 (שקילות לקומפקטיות במרחבים מטריים) *יהי X מרחב מטרי, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *X קומפקטי*
2. *X קומפקטי סדרתית*
3. *X שלם וחסום לחלוטין*

הסדר בו נוכיח את המשפט יהיה $1 \implies 2 \implies 3 \implies 2 \implies 1$.

9 שיעור 9 — 29.4.2025

9.1 קומפקטיות — תכונות

נמשיך במתן דוגמות.

דוגמה 9.1 נראה דוגמה למרחב קומפקטי סדרתית שאינו קומפקטי. נגדיר $I = [0,1]$ וכן $X\{0,1\}^I$, X קומפקטי ממשפט טיכונוף שנוכיח בהמשך. נגדיר גם $Y = \{x = (x_i)_{i \in I} \in X \mid |\{\alpha \in I \mid x = 1\}| \le \aleph_0\}$. אנו טוענים כי Y לא קומפקטית אבל כן קומפקטית סדרתית. לכל $\alpha \in I$ נגדיר $U_\alpha = \{x \in X \mid x_\alpha = 0\}$ קבוצה פתוחה, וכן זהו כיסוי של Y, כלומר $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. אבל אין תת־כיסוי סופי של Y, על־ידי קבוצות מהצורה U_α, זאת שכן אם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ נקודות, אז,

$$\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \subseteq \{x \in X \mid \exists 1 \le i \le n, x_\alpha = 0\}$$

ובמקרה זה נבחר $Z = Z_\alpha$ עבור,

$$Z_\alpha = \begin{cases} 1 & \alpha = \alpha_i, 1 \le i \le n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח עתה כי Y קומפקטית סדרתית. תהי $\{y^n\}_{n=1}^\infty \subseteq Y$ כאשר $y^n = (y_\alpha^n)_{\alpha \in I}$ לכל n. נגדיר,

$$J_n = \{\alpha \in I \mid y_\alpha^n = 1\}$$

ונבחין כי $|J_n| \le \aleph_0$, נגדיר גם $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$. נתבונן במרחב הטופולוגי $\{0,1\}^J$, זהו מרחב קומפקטי מכיוון ש־J בתמונה ו־$\{0,1\}$ מרחב מטרי. רעינו שיש מטריקה על $\{0,1\}^J$ שמתאימה לטופולוגיית המכפלה. נגדיר את ההטלות $Z_n = \pi(y_n)$ כאשר $\pi : \{0,1\}^I \to \{0,1\}^J$. מרחב מטרי קומפקטי הוא קומפקטי סדרתית ולכן יש תת־סדרה n_k כך ש־Z^{n_k} סדרה מתכנסת, נשאר לנו לבדוק שנובע שגם y^{n_k} מתכנסת.

דוגמה 9.2 נראה דוגמה למרחב קומפקטי שאינו קומפקטי סדרתית.

נגדיר $X = I^I$, כלומר $f : I \to I$ מקיימת $f \in X$. מטיכונוף שוב X קומפקטי. נגדיר סדרת איברים $\{f_n\}_{i=1}^\infty \subseteq X$ כאשר $f_n : [0,1] \to [0,1]$. כל $t \in [0,1]$ ניתן לכתוב כפיתוח בינארי, $t = 0.t_1t_2t_3\dots$ עבור $t_i \in \{0,1\}$, ומתקיים, $t = \sum_{i=1}^\infty \frac{t^i}{2^i}$. נוכל למשל לבחור את הפיתוח האינסופי $0.111\dots$. נגדיר עתה $f_n(t) = t_n$, כלומר סדרת הפונקציות שמחלצות את הספרה ה־n מהמספר שהן מקבלות. נניח של־$\{f_n\}$ יש תת־סדרה מתכנסת $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subseteq \{f_n\}$. נגדיר $s = 0.s_1s_2\dots$ כאשר,

$$s_m = \begin{cases} 1 & m = n_{2k} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ונחשב,

$$f_{n_k}(s) = \begin{cases} 1 & k \in 2\mathbb{N} \\ 0 & k \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

ולכן f_{n_k} לא מתכנסת.

מצאנו שתי דוגמות שאכן מעידות על זה שקומפקטיות וקומפקטיות סדרתית לא גוררות אחת את השנייה במרחבים כלליים.

משפט 9.1 (משפט טיכונוף) *מכפלה של מרחבים טופולוגיים קומפקטיים היא קומפקטית, כלומר אם X_α מרחב קומפקטי לכל $\alpha \in I$, אז $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ עם טופולוגיית המכפלה הוא קומפקטי.*

הוכחה. יהיו X_1, X_2 מרחבים טופולוגיים קומפקטיים, ונוכיח ש־$X_1 \times X_2$ קומפקטי. נניח בשלילה שאכן X_1, X_2 קומפקטיים אבל ש־$Y = X_1 \times X_2$ לא קומפקטי. לכן יש $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ כיסוי פתוח של Y כך שאין לו תת־כיסוי סופי. נראה שיש נקודה $y = (a,b) \in Y$ כך שאין קבוצת בסיס פתוחה שמכילה את y אשר ניתנת לכיסוי על־ידי מספר סופי של קבוצות מהאוסף $\{W_\omega\}_{\omega \in \Omega}$, וזה בלתי אפשרי כי $y \in Y = \bigcup_{\omega \in \Omega} W_\omega$ ולכן יש $\beta \in \Omega$ כך ש־$y \in W_\omega$ ו־W_β פתוחה ולכן מכילה קבוצת בסיס שמכילה את y.

נטען כי יש $a \in X_1$ כך שלא קיימת קבוצה פתוחה $a \in U \subseteq X_1$ כך ש־$U \times X_2$ מוכלת באיחוד סופי של קבוצות מ־$\{W_\omega\}_{\omega \in \Omega}$. נניח בשלילה ונקבל שלכל $a \in X_1$ יש קבוצה פתוחה $a \in U_a \subseteq X_1$ כך שקיים תת־כיסוי סופי של $U_a \times X_2$ על־ידי קבוצות מהכיסוי הנתון. נבחן את $X = \bigcup_{a \in X_1} U_a$, כיסוי פתוח, אבל X_1 קומפקטית ולכן קיימות $a_1, \dots, a_n \in X_1$ כך ש־$X = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$. כל $U_{a_i} \times X_2$ היא פתוחה, ולכן מצאנו כיסוי סופי ל־Y. זאת כמובן סתירה בשל ההנחה כי אין תת־כיסוי סופי.

עתה נטען כי יש $b \in X_2$ כך שלכל קבוצה פתוחה $a \in U \subseteq X_1$ ולכל פתוחה $b \in V \subseteq X_2$, הקבוצה $U \times V$ לא ניתנת לכיסוי סופי על־ידי קבוצות מהכיסוי $\{W_\omega\}_{\omega \in \Omega}$. נניח בשלילה שלכל b יש V_b ו־U_b כך ש־$U_b \times V_b$ ניתנת לכיסוי סופי כזה. לכן $X_2 = \bigcup_{b \in X_2} V_b$ ו־X_2 קומפקטית ולכן ישנם $b_1, \dots, b_k \in X_2$ כך ש־$X_2 = \bigcup_{i=1}^k V_{b_i}$. נגדיר גם $U = \bigcap_{i=1}^k U_{b_i} \subseteq X_1$, מתקיים $U \times X_2 = U \times \bigcup_{i=1}^k V_{b_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{b_i} \times V_{b_i}$, אך זו האחרונה ניתנת לכיסוי סופי, ולכן קיבלנו ש־$U \times X_2$ ניתנת לכיסוי סופי, ו־$a \in U$, וזו סתירה לבחירת a מהטענה הקודמת. $\square$

10 שיעור 10 — 5.5.2025

10.1 קומפקטיות — משפט טיכונוף

ניזכר בכמה הגדרות שמגיעות אליהו מתורת הקבוצות.

הגדרה 10.1 (קבוצה סדורה) סדר על קבוצה, או קבוצה סדורה, הוא הזוג הסדור $(X, \leq)$, כאשר X קבוצה ו־$\leq \subseteq X^2$ יחס דו־מקומי רפלקסיבי, אנטי־סימטרי וטרנזיטיבי.

הגדרה 10.2 (סדר טוב) סדר טוב הוא סדר קווי, כלומר יש יחס לפחות לאחד הכיוונים בין כל שני איברים בקבוצה, וכן שלכל תת־קבוצה של X יש מינימלי ביחס הסדר.

עיקרון הסדר הטוב מעיד שלכל קבוצה יש סדר טוב כלשהו שמוגדר עליה, והוא שקול לאקסיומת הבחירה.

בשיעור הקודם הוכחנו את משפט טיכונוף למקרה הסופי, עתה נראה את ההוכחה עבור המקרה הכללי. נבחין כי משפט טיכונוף שקול לאקסיומת הבחירה (ולעיקרון הסדר הטוב), ולכן במהלך ההוכחה נהיה מחויבים להשתמש באקסיומה.

הוכחה. נניח בשלילה ש־$Y = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ אינה קומפקטית, כלומר יש כיסוי פתוח שאין לו תת־כיסוי סופי, נסמן את הכיסוי הזה $\mathcal{F}$. נבנה באינדוקציה לכל $\gamma \in I$ איזשהו $a_\gamma \in X_\gamma$ כך שאם U בסיס טופולוגי ל־Y, המכילה תת־הקבוצה,

$$\prod_{\alpha \leq \gamma} \{X_\alpha\} \times \left(\prod_{\gamma < \alpha} X_\alpha\right) \tag{1}$$

או את,

$$\prod_{\alpha < \gamma} \{a_\alpha\} \times \prod_{\gamma \leq \alpha} X_\alpha \tag{2}$$

אז U אינה ניתנת לכיסוי על־ידי אוסף סופי של $\mathcal{F}$. נבנה את a_γ באינדוקציה טרנספיניטית (אינדוקציה על סודרים). נניח שהגדרנו את a_α לכל $\alpha < \gamma$, אז מתקיים שלכל בסיס שמכילה את $\prod_{\alpha<\gamma}\{X_\alpha\} \times \prod_{\gamma \leq \alpha} X_\alpha$ אינה ניתנת לכיסוי על־ידי תת־אוסף סופי מ־$\mathcal{F}$ (ונבהיר, זו הנחת האינדוקציה). זה הזמן להעיר שבעולם של סודרים, יהיו סודרים עוקבים, אלו שמתקבלים מהוספת 1 לאיבר קיים כלשהו, ויש איברים גבוליים, עליהם נסתכל כאיברים אינסופיים, גבול בראי החיבור של איברים אחרים. כדי להתמודד עם הקושי הזה ולהשתמש באינדוקציה טרנספיניטית, מסתכלים על איברים גבוליים אלה או כאיברים מינימליים בקבוצה המתאימה להם, או כסופרימום של קבוצת האיברים הקטנים מהם, כך נוכל לאפיין את המספרים הללו משני הכיוונים.

אנחנו רוצים לבחור $a_\gamma \in X_\gamma$ כך שיתקיים שכל קבוצת בסיס המקיימת את (1), ניתנת לכיסוי על־ידי תת־אוסף סופי של $\mathcal{F}$ ואז מצאנו a_γ כנדרש. או שלכל $a_\gamma \in X_\gamma$ יש קבוצת בסיס $W_{a_\gamma} \supseteq \prod_{\alpha \leq \gamma}\{a_\gamma\} \times \prod_{\alpha > \gamma} X_\alpha$ ויש ל־W_{a_γ} תת־כיסוי סופי על ידי איברי $\mathcal{F}$. כלומר או שיש קבוצה כפי שרצינו או שמתקיימת שלילת הטענה. נבחין כי,

$$a_\gamma \in \pi\gamma(W_{a_\gamma})$$

קבוצה פתוחה, אז מתקיים,

$$X_\gamma = \bigcup_{\alpha_\gamma \in X_\gamma} \pi_\gamma(W_{a_\gamma})$$

אז יש תת־כיסוי סופי,

$$X_\gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \pi_\gamma(W_{a_\gamma^i})$$

לכן לקבוצה $\bigcup_{i=1}^k W_{a_\gamma^i}$ יש תת־כיסוי סופי על־ידי איברי $\mathcal{F}$. נגדיר,

$$V_i = \left(\prod_{j=1}^{k} \pi_{\gamma<}(W_{a_\gamma^i})\right) \times \pi_\gamma(W_{a_\gamma^i}) \times \prod_{\alpha > \gamma} X_\alpha$$

כאשר $\pi_{\gamma<} : Y \to \prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha$. אז,

$$\bigcup_{i=1}^{k} V_i = \left(\bigcap_{j=1}^{k} \pi_{\gamma<}(W_{a_\gamma^j})\right) \times \left(\bigcup \pi_\gamma(W_{a_\gamma^i})\right) \times \prod_{\alpha>\gamma} X_\gamma$$

ולכן,

$$\bigcup_{i=1}^{k} V_i = \left(\bigcap_{j=1}^{k} \pi_{\gamma^<}(W_{a^i_\gamma})\right) \times \left(\prod_{\alpha\geq\gamma} X_\alpha\right)$$

וקיבלנו סתירה כי הנחנו שהקבוצה הזו לא ניתנת לכיסוי סופי בעזרת איברי $\mathcal{F}$, ובכל זאת מצאנו כיסוי סופי כזה.

לכן באינדוקציה טרנספיניטית מקבלים $a_\gamma \in X_\gamma$ לכל $\gamma \in I$ כך ש־(1) מתקיים,

$$Y = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \ni f = (a_\gamma)_{\gamma\in I}$$

ולכן יש איבר בסיס $f \in W \subseteq L$ כאשר $W = \prod_{\alpha\in I} S_\alpha$, ולכמעט כל α, $S_\alpha = X_\alpha$ וכל S_α פתוחה. יש $\gamma_0 \in I$ כך שלכל $\alpha > \gamma_0$ מתקיים $S_\alpha = X_\alpha$ ולכן קיבלנו איבר בסיס,

$$\prod_{\alpha\leq\gamma_0} \{a_\alpha\} \times \prod_{\alpha>\gamma_0} X_\alpha \subseteq L$$

וסתירה. □

אנו כבר יודעים כי אנו יכולים לראות קומפקטיות גם כך שאם Z קומפקטי אז לכל L אוסף סופי של קבוצות סגורות ב־Z עם תכונת החיתוך הסופי, יש חיתוך לא טריוויאלי.

הגדרה 10.3 (תכונת החיתוך הסופי) נאמר שלאוסף L של תתי־קבוצות של קבוצה Z יש את תכונת החיתוך הסופי, אם לכל תת־קבוצה סופית של L יש חיתוך לא טריוויאלי.

יהיה נוח להסתכל על אפיון אחר,

טענה 10.4 (שקילות לקומפקטיות) *מרחב טופולוגי Z הוא קומפקטי אם לכל אוסף L של תתי־קבוצות Z עם תכונת החיתוך הסופי, מתקיים ש־$\bigcap_{A\in L} \overline{A} \neq \emptyset$.*

נעבור למספר טענות לקראת משפט שנראה בהמשך.

טענה 10.5 *אם לאוסף קבוצות $L \subseteq \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ יש את תכונת החיתוך הסופי, אז גם ל־$L_\beta = \{\pi_\beta(A) \mid A \in L\}$ יש את תכונת החיתוך הסופי ביחס ל־X_β.*

אומנם לא נוכיח טענה זו, אבל נשים לב שהיא נובעת באופן ישיר מהאפיון הנוסף לקומפקטיות ושימוש בקבוצות הסגורות המושרות מהסגור שהגדרנו על L.

טענה 10.6 *אם L אוסף תתי־קבוצות של Y המקיים את תכונת החיתוך הסופי, אז L מוכל באוסף תתי־הקבוצות של Y עם תכונת החיתוך הסופי, כך שהאוסף מקסימלי.*

הוכחה. נסתכל באוסף Ω של כל תתי־הקבוצות $\Omega = \{C_\alpha\}$, $L \subseteq C \subseteq \mathcal{P}(Y)$, המקיימות את תכונת החיתוך הסופי, זו קבוצה לא ריקה סדורה חלקית על־ידי הכלה, ולכן מהלמה של צורן נובע שאכן יש איבר מקסימלי כזה. □

נראה טענה כללית נוספת ובעלת חשיבות.

טענה 10.7 *אם M אוסף מקסימלי של תתי־קבוצות של איזושהי קבוצה R שיש לו את תכונת החיתוך הסופי,*

1. *לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל $A_1, \ldots, A_m \in M$, גם $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in M$*
2. *אם $B \subseteq R$ ולכל $A \in M$, אם $A \cap B \neq \emptyset$ אז $B \in M$*

גם כאן, ההוכחה היא ברורה ונובעת מהמקסימליות, ומושארת כתרגיל לקורא.

נעבור להוכחה נוספת למשפט טיכונוף, תוך שימוש בטענות שראינו זה עתה.

הוכחה. $Y = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ כאשר X_α קומפקטי לכל $\alpha \in I$, ונניח ש־$L \subseteq \mathcal{P}(Y)$ עם תכונת החיתוך הסופי. יש $L \subseteq M \subseteq \mathcal{P}(Y)$ מקסימלי עם תכונת החיתוך הסופי.

לכל α נגדיר $M_\alpha = \{\pi_\alpha(A) \mid A \in M\}$.

ל־$M_\alpha \subseteq \mathcal{P}(X_\alpha)$ יש את תכונת החיתוך הסופי. נובע ש־X_α קומפקטי ו־$\bigcap_{A\in M_\alpha} \overline{A} \neq \emptyset$. נבחר לכל α את $y_\alpha \in \bigcap_{A\in M_\alpha} \overline{A}$.

אנו נוכיח כי הנקודה $y = (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = Y$ מקיימת,

$$y \in \bigcap_{B \in M} \overline{B} \subseteq \bigcap_{A \in L} \overline{A}$$

תהי $B \in M$ ונראה ש־$y \in \overline{B}$. כלומר, כל פתוחה שמכילה את y חותכת את B. מספיק להראות שכל קבוצת בסיס $Y \supseteq W \ni y$ שמקיימת $W \cap B \neq \emptyset$. כל קבוצת בסיס W היא חיתוך של מספר סופי של קבוצות $V_\beta = Z_\beta \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\alpha$ עבור $Z_\beta \subseteq X_\beta$ פתוחה. מטענה 10.7 נובע שמספיק להוכיח שכל V_β כזו כך ש־$y \in V_\beta$ ($y_\beta \in Z_\beta$) חותכת כל קבוצה D באוסף M. אבל M מקסימלי ולכן אם $V_\beta \cap D \neq \emptyset$ לכל $D \in M$ גם $V_\beta \in M$. נובע ש־$W \in M$ כי היא חיתוך של מספר סופי של Z_β, אך אלה ב־M. נסיק ש־W חותך כל איבר ב־M.

$y_\beta \in Z_\beta$ עבור Z_β פתוחה, ולכן $y_\beta \in \bigcap_{A \in M_\beta} \overline{A}$ וכן $D \in M$, $A = \pi_\beta(D)$. נובע שלכל $D \in M$, גם $y_\beta \in \pi_\beta(D)$, אז גם $y_\beta \in Z_\beta \cap \pi_\beta(D)$, בפרט חיתוך זה לא ריק. לכן גם $y \in \pi_\beta^{-1}(Z_\beta) = V_\beta \cap D$, וחיתוך זה לא ריק, כפי שרצינו להראות. $\square$

11 שיעור 11 — 6.5.2025

בהינתן מרחב טופולוגי X האם יש מרחב קומפקטי שמכיל את X? נענה על שאלה זו בהרצאה הקרובה. נתחיל בהגדרת הרעיון באופן פורמלי.

הגדרה 11.1 (קומפקטיזציה) קומפקטיזציה Y של X היא מרחב קומפקטי Y כך ש־$X \subseteq Y$ וגם $Y = \overline{X}$.

ועתה משיש לנו טרמינולוגיה מתאימה, נוסיף הגדרה שתעזור לנו.

הגדרה 11.2 (מרחב טופולוגי קומפקטי מקומית) מרחב טופולוגי X נקרא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה $x \in X$ יש סביבה קומפקטית, כלומר קיימת $x \in C \subseteq X$ קומפקטית וקיימת $x \in W \subseteq C$ פתוחה ב־X.

דוגמה 11.1 נגדיר את $X = (0,1)$, ונרצה למצוא קומפקטיזציה של X. יש שני מרחבים המהווים קומפקטיזציה ל־X, הם S^1 ו־$[0,1]$.

משפט 11.3 (תנאי מרחב קומפקטי מקומית לקומפקטיות) *אם X מרחב טופולוגי קומפקטי מקומית והאוסדורף, אז המרחב $\hat{X} = Y = X \cup \{\infty\}$ (עבור $\infty \notin X$ נקודה חדשה כלשהי), עם הטופולוגיה,*

$$\hat{\tau} = \tau \cup \{Y \setminus K \mid K \subseteq X, K \text{ is compact}\}$$

הוא מרחב קומפקטי והאוסדורף.

הוכחה. נראה תחילה ש־$\hat{\tau}$ טופולוגיה, כלומר סגורה לאיחודים וסגורה לחיתוך סופי. נניח ש־$\{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \hat{\tau}$, אז קבוצה זו שקולה ל־$\{V_\alpha \mid V_\alpha = T \setminus K_\alpha\} \cup \{V_\alpha \mid V_\alpha \in \tau\}$, כאשר $K_\alpha \subseteq X$ קומפקטית. נסמן את זו הראשונה Ω ואת זו השנייה Λ. נבחין כי,

$$\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = \bigcup_{V \in \Lambda} V \cup \bigcup_{V \in \Omega} V = U \cup \bigcup_{U \in \Omega} U$$

אבל מההגדרה קיימת $J \subseteq I$ כך שמתקיים,

$$\bigcup_{\alpha \in J} (Y \setminus K_\alpha) = Y \setminus \bigcap_{\alpha \in J} K_\alpha$$

זאת שכן X האוסדורף וכל K_α היא סגורה, לכן גם $\bigcap K_\alpha$ סגורה ולכן קומפקטית כמוכלת ב־K_{α_0}. נובע ש־$V \cup \bigcup_{U \in \Omega} U = V \cup (Y \setminus K)$ עבור K קומפקטית.

$\hat{\tau}$ סגורה לחיתוכים סופיים, כנביעה מהשלמה לאיחודים.

$\hat{\tau}$ משרה את τ על X, תת־קבוצה $A \subseteq X$ היא פתוחה בטופולוגיה המושרית על X מ־$\hat{\tau}$ אם יש פתוחה $V \in \hat{\tau}$ כך ש־$A = X \cap V$. אם $V \in \tau$ אז בוודאי $X \cap V = V \in \tau$. אם $V = Y \setminus K$ אז,

$$A = X \cap V = X \cap (Y \setminus K) = X \setminus K \in \tau$$

כי K סגורה, זאת שכן K קומפקטית ו־X האוסדורף.

$(Y, \hat{\tau})$ מרחב האוסדורף כי אם $y, y' \in Y$ ו־$y, y' \neq \infty$, כלומר $y, y' \in X$, אז קיימות פתוחות $U, W \in \tau \subseteq \hat{\tau}$ המפרידות את y, y', כלומר $U \cap W = \emptyset$, $y \in U, y' \in W$. אם $y' = \infty$ ו־$y \in X$, X קומפקטית מקומית ולכן יש $y \in W \subseteq C$ קומפקטית ב־X. לכן $y \in W, Y \setminus C$ והן פתוחות ב־$\hat{\tau}$.

נראה ש־$(Y, \hat{\tau})$ קומפקטית. נניח ש־$L = \{V_\alpha\}$ כיסוי פתוח של Y. יש $\infty \in V_{\alpha_0} = Y \setminus K$, ולכן $\{V_\alpha \cap X \mid V_\alpha \in L\}$ כיסוי פתוח של $K \subseteq X$. $\{V_\alpha \cap X \mid V_\alpha \in L\}$ כיסוי פתוח של K שכן K קומפקטית, לכן יש $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ כך שמתקיים,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N (V_{\alpha_i} \cap X)$$

ונסיק ש־$Y = \bigcup_{i=1}^N V_{\alpha_i}$. $\square$

מצאנו קומפקטיזציה על־ידי הוספת נקודה יחידה.

הערה אם X אינו קומפקטי אז $Y = \overline{X}$, אחרת $\overline{X} = X$ בלבד, ו־∞ נקודה מבודדת.

המטרה שלנו עתה היא להראות שאם X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומי אז יש מרחב קומפקטי, נסמן $\check{X}$, ב־$\check{X}$ כך ש־$z : X \hookrightarrow \check{X}$, ו־$z : X \to z(X)$ הומיאומורפיזם, ו־$\overline{z(X)} = \check{X}$, וכן שכל פונקציה רציפה וחסומה של X ניתנת להרחבה לפונקציה רציפה של $\check{X}$. נגדיר $F = C(X, [0,1])$, אוסף כל הפונקציות הרציפות מ־X ל־$[0,1]$. נגדיר $z : X \to [0,1]^F$, עם טופולוגיית המכפלה, אז נקבל שלכל $x \in X$ ולכל $f \in F$, מתקיים $z(x)(f) = f(x)$. הסגור של התמונה $z(X)$ תסומן ב־$\check{X}$ וזוהי קומפקטיזציה של X.

12 שיעור 12 — 12.5.2025

12.1 קומפקטיזציה

נמשיך עם המשפט שדנו בו בשיעור הקודם.

משפט 12.1 (סטון־צ'ק) *אם X מרחב טופולוגי האוסדורף קומפקטי מקומית אז קיים מרחב טופולוגי קומפקטי האוסדורף Y כך שקיים שיכון $f : X \hookrightarrow Y$ כך ש־$\overline{f(X)} = Y$, וכל פונקציה רציפה וחסומה על X ניתנת להרחבה לפונקציה רציפה על Y כך שההרחבה יחידה.*

הוכחה. נבחן את $F = C(X, [0,1])$ אוסף הפונקציות הרציפות $X \to [0,1]$. נתבונן במרחב המכפלה $[0,1]^F$. ממשפט טיכונוף זהו מרחב קומפקטי וכמו־כן הוא האוסדורף. נגדיר העתקה $\iota : X \to [0,1]^F$ על־ידי $\iota(x)(f) = f(x)$ לכל $f \in F, x \in X$. נגדיר גם $Y = \overline{\iota(X)}$.

Y קומפקטית כי היא תת־קבוצה סגורה של מרחב קומפקטי, וכן Y היא האוסדורף כתת־מרחב של מרחב האוסדורף.

$X \hookrightarrow Y$ שיכון אם ורק אם היא העתקה חד־חד ערכית כך ש־$X \to \iota(X)$ הומיאומורפיזם, אז נבדוק.

עבור חד־חד ערכיות תהינה $x_1, x_2 \in X$ כך ש־$x_2 \neq x_1$. אנו טוענים כי קיימת $f \in F$ כך ש־$f(x_2) \neq f(x_1)$. בהינתן טענה זו נסיק ש־$\iota(x_1)(f) \neq \iota(x_2)(f)$ ולכן $\iota(x_1) \neq \iota(x_2)$.

יש U_1, U_2 פתוחות ב־X כך ש־$x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ וגם $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ מהאוסדורף. ניזכר בלמה של אוריסון, עבור מרחב קומפקטי והאוסדורף. נבנה פונקציה רציפה על $C_1 \cup C_2$ קבוצות סגורות קומפקטיות סביב U_1, U_2, כך שמהלמה של אוריסון יתקיים $f(C_1) = 0, f(C_2) = 1$.

נותר להראות ש־$\iota : X \to \iota(X)$ היא הומיאומורפיזם. כלומר צריך להראות שכל קבוצה פתוחה $W \subseteq X$ מקיימת ש־$\iota(W) \subseteq \iota(X)$ היא פתוחה, וגם להראות ש־ι רציפה.

נניח ש־$W \subseteq X$ פתוחה ולא ריקה, אנו רוצים להראות ש־$\iota(W)$ פתוחה. תהי $x \in W$, אז $\iota(x) \in \iota(W)$. נובע מ־$x \in W$ שיש $f \in F$ כך ש־$f(x) = 0$ וכן ש־$f \restriction X \setminus U = 1$ עבור $U \supseteq W$.

נמשיך ונטען כי $V = \pi_f^{-1}([0,1])$ היא פתוחה כך ש־$\iota(x) \in V \cap \iota(X) \subseteq \iota(W)$. נבהיר כי $\pi_f : [0,1]^F \to [0,1]$.

תהי $g : X \to \mathbb{R}$ רציפה ונרצה להרחיבה ל־Y. אנו יודעים כי X קומפקטית ולכן g חסומה ונסמן $M > 0$ כך ש־$|g(x)| \leq M$ לכל $x \in X$. נגדיר גם $f(x) = \frac{1}{M} g(x) + \frac{1}{2}$. נתבונן בפונקציה $s : [0,1]^F \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $s(h) = M(h(f) - \frac{1}{2})$, אז קל לראות לכל $x \in X$ מתקיים $s(\iota(x)) = g(x)$ ולכן $s \restriction Y$ הרחבה רציפה של g.

אם $\tilde{F} = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ is bounded and continuous}\}$ אז נבחן את $\prod_{f \in \tilde{F}} [a_f, b_f]$ עבור $a_f = \inf\{f(x) \mid x \in X\}, b_f = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$. $\square$

סימון 12.2 נסמן את המרחב Y שבנינו ב־$\beta(X)$.

משפט 12.3 (הרחבה רציפה לפונקציות במרחבים קומפקטיים מקומית) *יהי X מרחב קומפקטי מקומית האוסדורף, C קומפקטי והאוסדורף. אז כל פונקציה רציפה $\varphi : X \to C$ ניתנת להרחבה רציפה $\hat{\varphi} : \beta(X) \to C$.*

הוכחה. קיימת קבוצת אינדקסים J כך שיש שיכון $X \to C \hookrightarrow [0,1]^J$. לכל $j \in J$ יש פונקציה $g_j = \pi_j \circ \varphi : X \to [0,1]$. אז ניתן להרחיב את g_j ל־$\hat{g}_j : \beta(X) \to [0,1]$ באופן רציף. נסמן $\tilde{g} : \beta(X) \to [0,1]^J$ הפונקציה הרציפה כך ש־$\tilde{g} \restriction X = g$. אז $\tilde{g}(\beta(X)) \subseteq C$ שכן $\beta(X) = \overline{X}$ כאשר בוחנים את X כתת־קבוצה של $\beta(X)$. אנו מסיקים ש־$\tilde{g}(\overline{X}) \subseteq \overline{\tilde{g}(X)} \subseteq \overline{C} = C$. $\square$

טענה 12.4 *נניח ש־X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית ו־Y_1, Y_2 קומפקטיות האוסדורף עם שיכונים $X \hookrightarrow Y_i$ צפופים כך שכל פונקציה רציפה וחסומה מ־X ל־$\mathbb{R}$ ניתנת להרחבה רציפה של Y_i, אז Y_1, Y_2 הומיאומורפים.*

הגדרה 12.5 (קבוצה דלילה) יהי X מרחב טופולוגי. קבוצה $A \subseteq X$ תיקרא **דלילה** אם $(\overline{A})^\circ = \emptyset$, כלומר לסגור שלה יש פנים ריק.

דוגמה 12.1 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (קבוצות קנטור הסטנדרטיות ב־$\mathbb{R}$ הן דלילות).

מהצד השני $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ לא דלילה.

הגדרה 12.6 (קטגוריה ראשונה ושנייה) קבוצה תיקרא מהקטגוריה הראשונה אם היא איחוד בן־מניה של קבוצות דלילות, אחרת נאמר שהיא מהקטגוריה השנייה.

משפט 12.7 (בייר) *יהי X מרחב קומפקטי האוסדורף או מרחב מטרי שלם,*

אז לכל אוסף בן־מניה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות דלילות מתקיים שלאיחוד $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ יש פנים ריק.

הערה המשפט שקול לטענה שאם $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ הן קבוצות פתוחות וצפופות אז $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ צפופה.

הוכחה. המשפט הוא למעשה שני משפטים על שני תנאים שונים, אנו נוכיח את המקרה של מרחב קומפקטי האוסדורף, והמקרה השני מושאר כתרגיל ומשתמש בעקרונות דומים.

נניח ש־X מרחב קומפקטי האוסדורף ונניח ש־$\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ קבוצות דלילות. בלי הגבלת הכלליות נניח ש־A_n סגורות, אחרת נבחר את $\overline{A}_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נוכיח ש־$\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ בעלת פנים ריק. תהי $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה לא ריקה ונראה ש־$U \not\subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. נבנה סדרת קבוצות פתוחות $\{V_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ באופן הבא: X קומפקטי והאוסדורף ולכן נורמלי, A_1 דלילה וסגורה ונגדיר $U_1 = U \cap (X \setminus A_1)$ קבוצה פתוחה. נובע ש־$a_1 \in V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq U_1$ עבור $a_1 \in X$ ו־V_1 פתוחה. אז $\overline{V}_1 \cap A_1 = \emptyset$ ואנו יודעים כי A_2 דלילה, אז $U_2 = V_1 \cap (X \setminus A_2) \neq \emptyset$ פתוחה. אז קיימת $a_2 \in V_2$ נקודה וקבוצה פתוחה כך ש־$a_2 \in V_2 \subseteq \overline{V}_2 \subseteq V_1$. נבחין כי $\overline{V}_2 \cap A_2 = \emptyset$. נמשיך כך ונבנה סדרת קבוצות פתוחות,

$$a_n \in V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq U_{n-1}$$

ו־$\overline{V}_n \cap A_n = \emptyset$. האוסף $\{\overline{V}_n\}$ הוא אוסף קבוצות סגורות המקיימות שכל מספר סופי מביניהן לא ריק ולכן,

$$\bigcap_{n=1}^\infty \overline{V}_n \neq \emptyset$$

ויהי $b \in \bigcap \overline{V}_n$. נסיק ש־$b \notin \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, אבל $b \in U$ ונקבל שאכן $U \not\subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. $\square$

הגדרה 12.8 (מרחב מושלם) מרחב X נקרא מושלם אם כל נקודה $x \in X$ היא נקודת הצטברות $X \setminus \{x\}$.

מסקנה 12.9 נניח ש־X מרחב קומפקטי האוסדורף מושלם, אז X לא בן־מניה.

הגדרה 12.10 (תכונת בייר) נאמר שמרחב X הוא מרחב בייר אם מתקיים שלאיחוד בן־מניה של קבוצות דלילות אין פנים.

תרגיל 12.1 נניח ש־X מרחב בייר ו־Y מרחב מטרי, ונניח ש־$f_n : X \to Y$ היא סדרת פונקציות רציפות על X כך שלכל $x_0 \in X$ מתקיים $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת ל־$f(x_0)$, אז f רציפה בקבוצה צפופה של נקודות.

נראה רמז לתרגיל; יהי $\epsilon > 0$, ונגדיר $B_n(\epsilon) = \{x \in X \mid \forall m,n \in \mathbb{N},\ d(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon\}$ אז לכל $\epsilon > 0$ מתקיים $X = \bigcup_{N=1}^\infty B_N(\epsilon)$, זוהי קבוצה סגורה עם פנים, ולכן לאיזושהי קבוצה באיחוד אמור להיות פנים.

13 שיעור 13 — 13.5.2025

13.1 השלמות לקומפקטיזציה

X מרחב בייר (לאיחוד בן־מניה של דלילות יש פנים ריק). נניח ש־Y מרחב מטרי וגם ש־$f_n : X \to Y$ רציפות ויש $f : X \to Y$ כלשהי, ונניח שלכל $x \in X$ גם $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. אז $\{x \in X \mid f \text{ is continuous at } x\}$ צפופה ב־X.

הוכחה. תת־קבוצה פתוחה של מרחב בייר היא מרחב בייר (ביחס לטופולוגיה המושרית עליה), נגדיר גם,

$$\forall \epsilon > 0, N \in \mathbb{N},\ B_N(\epsilon) = \{x \in X \mid \forall n, m \geq N,\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon\}$$

אז $X = \bigcup_{N=1}^\infty B_N(\epsilon)$ וכן נובע ש־$U(\epsilon) = \bigcup_{N=1}^\infty B_N^\circ$ פתוחה וצפופה. f רציפה ב־$\bigcap_{k=1}^\infty U(\frac{1}{k})$ צפופה כי X מרחב בייר.
סוף ההוכחה מושאר כתרגיל. $\square$

13.2 משחק מזור

עתה נדון במשחק מזור (Mazur).

הגדרה 13.1 (משחק מזור) אנו מניחים כי יש לנו שני שחקנים, א' וב'. נניח גם כי קיימת $A \subseteq [0,1] = I_0$. כל שחקן בתורו בוחר קטע סגור $I_n \subseteq I_{n-1}$. שחקן א' יבחר את $I_1 \subseteq I_0$ וב' יבחר $I_1 \subseteq I_2$ וכן הלאה. נגדיר ששחקן א' מנצח אם ורק אם $A \cap \bigcap_{n=1}^\infty I_n \neq \emptyset$.

תרגיל 13.1 האם יש אסטרטגיית ניצחון? אם יש, מה התנאים שלה ולמי?

13.3 מבוא לטופולוגיה אלגברית

נחזור עתה למרחבי מנייה. נניח ש־X מרחב טופולוגי ו־$R \subseteq X \times X$ יחס שקילות על X.

סימון 13.2 נסמן מחלקות שקילות של R ב־X על־ידי,

$$[x] = [x]_R = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$$

וכן נסמן,

$$X/R = \{[x] \mid x \in X\}$$

וכן $\pi : X \to X/R$ על־ידי $\pi(x) = [x]$.

אנו רוצים למצאו טופולוגיה על X/R החזקה ביותר כך ש־π היא רציפה. נגדיר $L \subseteq X/R$ להיות פתוחה אם ורק אם $\pi^{-1}(L) \subseteq X$ פתוחה.
באופן דומה נוכל להגדיר בצורה כזו טופולוגיה בהינתן פונקציה $f : X \to Y$ שהיא על Y.

דוגמה 13.1 בהינתן $X = [0,1]$ נוכל להגדיר $R = \{(0,1)\}$ ונקבל ש־$[0] = \{0,1\}$ ובהתאם X/R יתנהג למעשה כמו מעגל.

דוגמה 13.2 עבור $X = \mathbb{R}$ נוכל להגדיר $x \sim x + n$ לכל $n \in \mathbb{Z}$, ובמקרה זה נקבל שקילות למעגל שוב. נהוג לסמן גם $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ עבור $\mathbb{R}/\sim$.

הגדרה 13.3 (אוקלידיות מקומית) מרחב טופולוגי X יקרא אוקלידי מקומית (ממימד n) אם לכל $x \in X$ יש סביבה פתוחה $x \in U \subseteq X$ כך שמתקיים,

- U הומיאומורפית לכדור היחידה הפתוח ב־$\mathbb{R}^n$
- U הומיאומורפית ל־$\mathbb{R}^n$
- U הומיאומורפית לקבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$

כאשר התנאים הללו שקולים.

הגדרה 13.4 (יריעה טופולוגית) מרחב טופולוגי X יקרא יריעה טופולוגית (ממימד n) אם מתקיימות התכונות הבאות,

1. X אוקלידי מקומית ממימד n
2. X האוסדורף
3. X מרחב מנייה שנייה

נראה מספר דוגמות ליריעות.

דוגמה 13.3 כל תת־קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}^n$ היא יריעה טופולוגית ממימד n.

דוגמה 13.4 נבחין כי $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, הוא למעשה שפת הריבוע, היא לא יריעה.

דוגמה 13.5 בקבוק קליין הוא יריעה.

דוגמה 13.6 גרף של פונקציה רציפה $f : U \to \mathbb{R}$ עבור $U \subseteq \mathbb{R}^n$, הוא יריעה, כלומר,

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in U\}$$

היא יריעה טופולוגית.

נבחין כי עבור $n = 1$ יש רק סוג אחד של יריעה קומפקטית, המעגל. עבור $n = 2$ יש לנו את הספירה, את הטורוס, מתומן הקסם ואת בקבוק קליין.
בהרצאות הבאות ניכנס לתחום הטופולוגיה האלגברית, ונפתח כלים לאפיון של מרחבים כאלה.

14 שיעור 14 — 19.5.2025

14.1 מבוא לטופולוגיה אלגברית — החבורה היסודית

המטרה שלנו היא להיות מסוגלים לענות על השאלה הבאה,

תרגיל 14.1 איך מבדילים בין מרחבים טופולוגיים? כלומר, נניח שנתונים X, Y מרחבים טופולוגיים, ואנו רוצים לענות על השאלה האם הם הומיאומורפיים.

בעולם של אלגברה לינארית לדוגמה אפיינו בצורה מדויקת שקילות של מרחבים לינאריים, פה המצב מורכב ומסועף יותר, ונצטרך להבין לעומק האובייקטים שאנו דנים בהם כדי שנוכל לאפיין אותם.

תרגיל 14.2 האם S^2 הספירה הדו־מימדית ו־T^2 הטורוס הדו־מימדי הם הומיאומורפיים?

פתרון כל מסילה סגורה ב־S^2 ניתן לכווץ לנקודה, אבל לא כל מסילה סגורה בטורוס ניתן לכווץ באותו האופן.

נתחיל בהגדרות.

הגדרה 14.1 (הומוטופיה) יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו־$f_0, f_1 : X \to Y$ העתקות רציפות. אז הומוטופיה מ־f_0 ל־f_1 היא העתקה רציפה $H : [0,1] \times X \to Y$ כך שמתקיים,

$$\forall x \in X,\ H(0,x) = f_0(x), H(1,x) = f_1(x)$$

לפעמים נכתוב גם $H_s(x) = H(s,x)$.

דוגמה 14.1 בהרצאות קודמות הגדרנו שמרחב כוויץ אם יש הומוטופיה מהעתקת הזהות $f_0(x) = x$ להעתקה קבועה $f_1(x) = x_0$ עבור $x_0 \in X$ כלשהו.

סימון 14.2 הגדרנו מסילה על־ידי $\gamma : [0,1] \to X$, ובהינתן $p, q \in X$ אז נסמן,

$$\Omega(X,p,q) = \{\gamma : [0,1] \to X \mid \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, \gamma \text{ is continuous path}\}$$

מרחב כל המסילות הרציפות מ־p ל־q.

הגדרה 14.3 (מסילות הומוטופיות) תהינה שתי מסילות $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X,p,q)$ הן הומוטופיות אם יש הומוטופיה ביניהן, כלומר אם קיימת $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ כך ש־H רציפה ולכל $t \in [0,1]$,

$$H(0,t) = \gamma_0(t), \quad H(1,t) = \gamma_1(t), \quad \forall s \in [0,1],\ H(s,0) = p = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), H(s,1) = q = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$$

הרעיון הוא שיש לנו דרך "להעביר" כל מסילה בין הנקודות באופן רציף מאחת לשנייה. הרעיון לא זר למי שלמד אנליזה על יריעות, שם השתמשנו בכלי דומה לזה כדי לאפיין קשר בין מסילות, ראינו שאם כל שתי מסילות הומוטופיות בשדה משמר מקומית, אז הוא משמר.

טענה 14.4 *היחס $\sim$ על $\Omega(X,p,q)$, המוגדר על־ידי $\gamma_0 \sim \gamma_1$ אם ורק אם קיימת הומוטופיה ביניהן, הוא יחס שקילות.*

הוכחה. **רפלקסיביות**, בהינתן $\gamma \in \Omega(X,p,q)$ נבחר $H(s,t) = \gamma(t)$.

סימטריה, נניח ש־$\gamma_0 \sim \gamma_1$, ותהי H הומוטופיה המעידה על כך. נגדיר $G(s,t) = H(1-s,t)$, אז זו הומוטופיה המעידה על $\gamma_1 \sim \gamma_0$.

טרנזיטיביות, נניח ש־$\gamma_0 \sim \gamma_1, \gamma_1 \sim \gamma_2$, ונניח ש־$H, G$ מעידות על כך בהתאמה. נרצה להגדיר הומוטופיה מ־γ_0 ל־γ_2, נגדיר על־ידי,

$$F(s,t) = \begin{cases} H(2s,t) & s \in [0,\frac{1}{2}] \\ G(2s-1,t) & \text{otherwise} \end{cases}$$

עלינו לבדוק שאכן F מוגדרת היטב, כלומר לבדוק את המקרה $s = \frac{1}{2}$, ולהראות ש־F רציפה. נובע ש־F הומוטופיה מלמת ההדבקה, אותה נגדיר ונוכיח עתה. □

למה 14.5 (למת הדבקה) *נניח ש־Y מרחב טופולוגי ונניח ש־$A \cup B = Y$ עבור קבוצות סגורות. תהי $f : Y \to Z$ פונקציה כך ש־$f \restriction A$ רציפה וכן $f \restriction B$ רציפה. אז נובע ש־f רציפה.*

הוכחה. צריך לבדוק שלכל סגורה $C \subseteq Z$ מתקיים $f^{-1}(C)$ סגורה גם כן. אבל,

$$f^{-1}(C)(f^{-1}(C) \cap A) \cup (f^{-1}(C) \cap B) = (f \restriction A)^{-1}(C) \cup (f \restriction B)^{-1}(C)$$

ולכן הטענה נובעת ישירות. □

הגדרה 14.6 (החבורה היסודית של מרחב טופולוגי) באנגלית Fundamental group, נסמן $\pi_1(X,p,q)=\Omega(X,p,q)/\sim$.
אם $p=q$ אז נסמן גם $\Omega(X,p)=\Omega(x,p,p)$ ובהתאם גם $\pi_1(X,p)=\Omega(x,p)/\sim$.
נגדיר $\pi_1(X,p)$ החבורה היסודית של המרחב המנוקב (X,p).

נשים לב כי זוהי הגדרה אפריורית, כלומר לא הראינו בשום צורה שזוהי אכן חבורה, וכרגע זהו רק שם. אנו רוצים עתה להראות שזו אכן חבורה ושהגדרה זו תלויה בטופולוגיה שלנו בלבד.

דוגמה 14.2 נתבונן במרחב $\mathbb{R}^2$ וב־$p,q\in\mathbb{R}^2$. כל זוג מסילות מ־p ל־q הן הומוטופיות, זאת שכן לכל γ_0,γ_1 נוכל להגדיר,

$$H(s,t)=\gamma_1(t)\cdot s+\gamma_0(t)\cdot(1-s)$$

נקבל ש־$H:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^2$, זוהי אכן הומוטופיה כהרכבת פונקציות רציפות, ולכן $p\sim q$. נסיק גם ש־$\pi_1(\mathbb{R}^2,p)=\mathbb{R}^2$.

נראה דוגמה למרחב בו לא כל המסילות הומוטופיות.

דוגמה 14.3 נבחן הפעם את $X=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. נגדיר $\gamma_0(t)=e^{\pi it}$ ו־$\gamma_1(t)=1+e^{\pi i-\pi it}$, ולמרות שאין לנו עדיין את היכולת להוכיח זאת, אלו הן מסילות לא הומוטופיות. מי שלמד את הקורס פונקציות מרוכבות כבר יודע שמהגרסה המורחבת למשפט האינטגרל של קושי נובע שהאינטגרל המסילתי של שתי המסילות שונה, ובהמשך נראה טיעון שדומה לטיעון זה עבור הוכחת אי־השקילות.

ניזכר בהגדרת החבורה,

הגדרה 14.7 (חבורה) חבורה $(G,\cdot)$ היא זוג הכולל קבוצה ופעולה $\cdot:G^2\to G$ כך שמתקיים,

1. **אסוציאטיביות**, לכל $a,b,c\in G$ מתקיים $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
2. **קיום איבר ניטרלי**, קיים $e\in G$ כך ש־$e\cdot g=g\cdot e=g$ לכל $g\in G$
3. **קיום הופכי**, לכל $g\in G$ קיים $h\in G$ כך ש־$g\cdot h=h\cdot g=e$ עבור e האיבר הנייטרלי

הערה האיבר ההופכי של $g\in G$ הוא יחיד.

הגדרה 14.8 (שרשור של מסילות) נניח ש־X מרחב טופולוגי ו־$a,b,c\in X$. נניח גם ש־$\alpha\in\Omega(X,a,b),\beta\in\Omega(X,b,c)$. אז נגדיר מסילה המסומנת $\alpha*\beta$ כך ש־$\alpha*\beta\in\Omega(X,a,c)$ כך ש־$\alpha*\beta:[0,1]\to X$ מוגדרת על־ידי,

$$(\alpha*\beta)(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \beta(st-1) & \text{otherwise}\end{cases}$$

נבחין כי $\alpha*\beta$ מוגדרת היטב מלמת ההדבקה.

הערה נניח ש־$x_0,x_1,x_2,x_3\in X$ ותהינה $\alpha\in\Omega(X,x_0,x_1),\beta\in\Omega(X,x_1,x_2),\gamma\in\Omega(X,x_2,x_3)$. אז $\alpha*(\beta*\gamma),(\alpha*\beta)*\gamma\in\Omega(X,x_0,x_3)$ מסילות לאו דווקה שוות.

טענה 14.9 *נניח ש־$\alpha\sim\alpha'\in\Omega(X,a,b)$ וכן ש־$\beta\sim\beta'\in\Omega(X,b,c)$. אז $\alpha*\beta\sim\alpha'*\beta'$.*

את ההוכחה לא נראה, אבל היא נובעת ישירות מהגדרת מחלקות השקילות.

מסקנה 14.10 אפשר להגדיר את פעולת השרשור על מחלקות הומוטופיה, כלומר הפעולה מוגדרת היטב על מחלקות שקילות.
נסמן במקרה זה $[\alpha]*[\beta]=[\alpha*\beta]$ עבור נציגים כלשהם.

טענה 14.11 *לכל $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0,x_1)$, $[\beta]\in\pi(X,x_1,x_2)$ ו־$\gamma\in\pi_1(X,x_2,x_3)$ מתקיים,*

$$([\alpha]*[\beta])*[\gamma]=[\alpha]*([\beta]*[\gamma])$$

הגדרה 14.12 (רפרמטריזציה של מסילה) תהי $\alpha:[0,1]\to X$ מסילה. מסילה $\beta:[0,1]\to X$ תיקרא רפרמטריזציה של α אם קיימת פונקציה רציפה $\psi:[0,1]\to[0,1]$ כך ש־$\psi(0)=0,\psi(1)=1$ ו־$\beta=\alpha\circ\psi$.

טענה 14.13 *אם β רפרמטריזציה של α אז $\alpha\sim\beta$ (שקול ל־$[\alpha]=[\beta]$).*

הוכחה. ψ היא רפרמטריזציה על המכפלה $\iota:[0,1]\to[0,1]$, כאשר $\iota(t)=t$, ומתקיים $\psi=\iota\circ\psi$. אז $\psi\in\Omega([0,1],0,1)$. כל שתי מסילות

עם אותן נקודות קצה בקבוצה קמורה הן הומוטופיה. אם כך $\alpha, \beta : [0,1] \to A$ עבור A קבוצה קמורה, ונגדיר,

$$H(s,t) = s\beta(t) + (1-s)\alpha(t) \in A$$

אז מבדיקה ישירה נסיק שאכן H היא הומוטופיה ולכן מעידה על $\alpha \sim \beta$. □

מסקנה 14.14 $\pi_1(X, x_0)$ היא חבורה יחד עם פעולת השרשור.

הוכחה. הפעולה $*$ שהגדרנו על $\pi_1(X, x_0)$ מקיימת שלכל $u, v, w \in \pi_1(X, x_0)$ מתקיים $(uv)w = u(vw)$, כלומר אסוציאטיביות.
המסילה הקבועה $c_{x_0}(t) = x_0$ לכל $t \in [0,1]$ היא איבר ניטרלי ביחס לפעולה, כלומר נגדיר $e = [c_{x_0}]$ ונבחין כי לכל $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ מתקיים $\gamma = \gamma * e = e * \gamma$.
בהינתן מסילה $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_1)$ נגדיר מסילה $\overline{\alpha} \in \Omega(\Omega, x_1, x_0)$ על־ידי $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$, ולכן $\alpha * \overline{\alpha} = c_{x_0}$. כלומר לכל $u \in \pi_1(X, x_0)$ קיים $v \in \pi_1(X, x_0)$ כך ש־$u * v = v * u = e$. □

נסיים בטענה המושארת כתרגיל לקורא.

טענה 14.15 *אם X מרחב כוויץ אז $\pi_1(X, x_0)$ היא החבורה הטריוויאלית.*

הגדרות ומשפטים