פתרון מטלה 4 — תורת המידה, 80517

15 בנובמבר 2025

שאלה 1

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה.

סעיף א׳

נראה שאם f_n סדרת פונקציות מתכנסות במידה לפונקציה f אז קיימת תת־סדרה המתכנסת ל־f כמעט תמיד.

הוכחה. נתון כי $\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ לכל $\varepsilon > 0$. נגדיר $E_{n,k} = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \ge \frac{1}{k}\}$ לכל $n, k \in \mathbb{N}$. לכל k יהי n_k המינימלי כך ש־$\mu(E_{n_k,k}) < 2^{-k}$, אז מהנתון של התכנסות במידה f_{n_k} היא תת־סדרה של f_n. יהי $x \in X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k,k}$, נבחין כי זוהי קבוצה שמשלימה ממידה אפס מההנחות. אז $|f_{n_k} - f| < \varepsilon$ עבור $\varepsilon = 2^{-k}$ ובהתאם נובע ש־$f_{n_k}(x) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$ נקודתית. $\square$

סעיף ב׳

נסיק שאם f_n סדרה מתכנסת כמעט תמיד ל־g_1 וב־L^1 ל־g_2 אז $g_1 =_\mu g_2$.

הוכחה. נראה שהתכנסות ב־L^1 גוררת התכנסות במידה. נניח ש־$\int |f - f_n| \, d\mu \to 0$, ונגדיר את הקבוצה $E_n = \{x \in X \mid |f - f_n| \ge \varepsilon\}$. נניח בשלילה ש־$\mu(E_n) \to L$ עבור $L > 0$, אז הטענה שקולה לטענה $\int \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu \to L$. ובהתאם להגדרה נקבל שגם $\int |f - f_n| \, d\mu \ge \int \mathbb{1}_{E_n} \cdot \varepsilon \to L\varepsilon > 0$, אז קיבלנו סתירה להתאפסות $\int |f - f_n|$ ולכן התכנסות ב־L^1 גוררת התכנסות במידה.

עתה נעבור להוכיח את הטענה הראשית. ההוכחה שראינו זה עתה מראה שאם f גבול ב־L^1 של f_n אז גם f הגבול במידה. ראינו גם בסעיף הקודם שאם f גבול במידה של f_n אז גם f גבול נקודתי כמעט תמיד של f_n. לכן אם $f_n \to f$ וגם $f_n \to \tilde{f}$ כמעט תמיד, אז מספיק להראות ש־$f =_\mu \tilde{f}$. נניח ש־$E = \{x \in X \mid f_n(x) \to f(x)\}$ וכן $E' = \{x \in X \mid f_n(x) \to \tilde{f}\}$. אז $X \setminus E, X \setminus E'$ שתיהן ממידה אפס, ולכן גם $X \setminus (E \cup E')$ ממידה אפס, ונבחין ש־$f_n(x)$ מתכנסת נקודתית בכל נקודה מחוץ לקבוצה זו, מיחידות הגבול נקבל $f(x) = \tilde{f}(x)$ ב־$E \cap E'$, ולכן כמעט תמיד. $\square$

סעיף ג׳

נניח ש־X מרחב מידה סופי, ונראה שאם $f_n \to f$ כמעט תמיד, אז גם $f_n \to f$ במידה.

הוכחה. נסמן $\mu(X) = K$. נבחין כי אם מרחב המידה סופי אז התכנסות במידה מתקיימת אם ורק אם,

$$K - \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) \to K - 0 \iff \mu(\overbrace{\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}}^{E_{n,\varepsilon}}) \to K$$

יהי $y \in X$, אז או שקיים N כך ש־$y \in E_{n,\varepsilon}$ לכל $n > N$, או ש־$y \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,\varepsilon}$. במקרה השני נבחין שזוהי קבוצה שמשלימה ממידה אפס, ולכן נוכל להתעלם ממקרה זה. במקרה הראשון בהתאם מתקיים לכמעט כל y ובהתאם $K \xrightarrow{n\to\infty} \mu(E_{n,\varepsilon})$, כלומר יש התכנסות במידה. $\square$

שאלה 2

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ונניח ש־f, f_n פונקציות מדידות אי־שליליות כך ש־$f_n \to f$ במידה.
נראה שמתקיים,

$$\int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$$

הוכחה. נגדיר סדרה חדשה $g_n(x) = \min\{f_n(x), f(x)\}$, אז מתקיים $g_n \leq f$ לכל n וכן $g_n \to f$ במידה ולכן גם כמעט תמיד. ממשפט ההתכנסות המונוטונית מתקיים $\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu$. אבל $g_n \leq f_n$ ולכן $\int g_n \leq \int f_n$ לכל n, ובעוד הגבול של $\int f_n$ איננו בהכרח מוגדר, כן מתקיים $\int g \leq \liminf \int f_n$. $\square$

שאלה 3

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה, ותהי $f : X \to [0, \infty]$ אינטגרבילית.
נראה שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $E \in \mathcal{A}$ כך ש-$\mu(E) < \delta$ מתקיים $\int_E f \, d\mu < \varepsilon$.

הוכחה. נגדיר $s_n \leq f$ סדרת פשוטות מתכנסת כך ש-$\int f = \lim \int s_n$.
נניח ש-$s_n = \sum_{k=1}^{K_n} \alpha_k^n \mathbb{1}_{E_k^n}$. אז מתקיים $s_n(x) \leq \max\{\alpha_1^n, \ldots, \alpha_{K_n}^n\} = \beta^n$ לכל $x \in X$, ובהתאם נרצה למצוא δ כך שמתקיים,

$$\int_E s \, d\mu \leq \mu(\mathbb{1}_E \cdot \beta^n) \leq \delta\beta^n < \varepsilon$$

ולכן נבחר $\delta = \frac{1}{2} \min\{\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{\beta^n}, 1\}$. □

שאלה 4

יהי (X,ρ) מרחב מטרי קומפקטי מקומית. עבור $\emptyset \neq E \subseteq X$ נגדיר $\rho_E(x) = \inf\{\rho(x,y) \mid y \in E\}$.

סעיף א׳

נראה שלכל E כזו $\rho_E : X \to \operatorname{Im}\rho_E$ רציפה.

הוכחה. תהי $U \subseteq \operatorname{Im}\rho_E$ פתוחה, ונסמן $V = \rho_E^{-1}(U)$, נראה שהיא פתוחה גם כן. נניח ש־$x \in V$, ותהי $z \in B(x,\varepsilon)$ אז,

$$\rho(y,z) \leq \rho(z,x) + \rho(x,y) \leq \varepsilon + \rho(x,y)$$

אבל ידוע ש־$\inf_{y\in E}\rho(x,y) \in U$ ולכן $\inf_{y\in E}\rho(y,z) \in U$ עבור $\varepsilon > 0$ מספיק קטן והעובדה ש־U פתוחה. אז מצאנו שקיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$x \in B(x,\varepsilon) \subseteq V$ ולכן V פתוחה, ובהתאם ρ_E רציפה. $\square$

סעיף ב׳

תהי $K \subseteq X$ תת־קבוצה קומפקטית ו־U קבוצה פתוחה כך ש־$K \subseteq U$. נמצא פונקציה רציפה f המקיימת $f \restriction K = 1$ ו־$f \restriction U^C = 0$, תוך שימוש ב־ρ_E.

פתרון ניקח $D = \inf\{\rho_K(y) \mid y \in U^C\}$, אז מרחק זה מתקבל, ונגדיר $f = 1 - \max\{\frac{\rho_K}{D}, 1\}$. נבחין כי $\rho_K(x) = 0$ כש־$x \in K$, ולכן $f(x) = 1$, כלומר $f \restriction K = 1$. אם $x \in U^C$ אז $\rho_K(x) \geq D$ ולכן $f(x) = 0$ בדיוק.

שאלה 5

יהי $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ הישר הממשי עם מידת לבג. בכל סעיף נגדיר סדרת פונקציות ונבדוק אם היא מתכנסת כמעט תמיד, במידה או ב־L^1.

סעיף א׳

נגדיר,

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-nx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

פתרון נבחין כי $f_n(x) \to 0$ עבור $x < 0$. עבור $x = 0$ נקבל $f_n(x) = n$ ולכן $f_n(x) \to \infty$, וכאשר $x > 0$ אז $f_n(x) \to 0$, כלומר $f_n \to 0$ כמעט תמיד.

$$\int |f - 0| \, d\mu = \int f \, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = n \int_0^{\infty} e^{-nx} \, dx = -e^{-nx}|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1 \to 1$$

כלומר f_n לא מתכנסת ב־L^1.

נותר לבדוק התכנסות במידה,

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = \lambda(\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x \leq -\frac{1}{n} \ln \varepsilon\}) = -\frac{1}{n} \ln \varepsilon - 0 \to 0$$

לכל $\varepsilon > 0$ ולכן $f_n \to f$ במידה.

סעיף ב׳

נגדיר,

$$f(x) = \begin{cases} ne^{-n^2 x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

פתרון

$$\int |f - 0| \, d\mu = n \int_0^{\infty} e^{-n^2 x} \, dx = -\frac{1}{n} e^{-n^2 x}|_0^{\infty} = -\frac{1}{n}(0 - 1) = \frac{1}{n} \to 0$$

ולכן $f_n \to 0$ ב־L^1 ולכן גם במידה וכמעט תמיד.

סעיף ג׳

נגדיר,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{n^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

פתרון נבחין כי $f(x) = 0 \to 0$ עבור $|x| > 1$, ועבור $|x| \leq 1$ נקבל $|f(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ ולכן $f(x) \to 0$, כלומר $f \to 0$ כמעט תמיד.

$$\int f \, d\mu = \frac{1}{n^2} \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{1}{n^2} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3n^2} \to 0$$

ולכן $f_n \to 0$ גם ב־L^1 ובמידה.