פתרון מטלה 06 — אנליזה פונקציונלית, 80417

16 במאי 2025

שאלה 1

יהי $1 \leq p < \infty$ ונגדיר את המרחב l^p להיות מרחב הסדרות הממשיות $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ כך שמתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. נגדיר גם $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$, ראינו בקורסים קודמים כי זוהי נורמה על l^p.

סעיף א׳

נראה שאם $p \neq 2$ אז $\|\cdot\|_p$ אינה מושרית ממכפלה פנימית על l^p.

הוכחה. נניח שקיימת מכפלה פנימית כך ש־$\|x\|_p = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ לכל $x \in l^p$, אז נובע משאלה 4,

$$2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) = \|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2$$

ואילו נבחר $x_n = q^n$ אז,

$$\|x\|_p^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{np}\right)^{2/p} = \left(\frac{q^p}{1-q^p}\right)^{2/p} = \frac{q^2}{(1-q^p)^{2/p}}$$

בפרט עבור $q = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$,

$$\|x+y\|_p^2 = \frac{(\frac{2}{3})^2}{(1-(\frac{2}{3})^p)^{2/p}}, \qquad \|x-y\|_p^2 = \frac{(\frac{1}{6})^2}{(1-(\frac{1}{6})^p)^{2/p}}.$$

ולכן,

$$2 \cdot \left(\frac{(\frac{1}{3})^2}{(1-(\frac{1}{3})^p)^{2/p}} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{(1-(\frac{1}{2})^p)^{2/p}}\right) = \frac{(\frac{2}{3})^2}{(1-(\frac{2}{3})^p)^{2/p}} + \frac{(\frac{1}{6})^2}{(1-(\frac{1}{6})^p)^{2/p}}$$
$$\frac{9}{(3^p-1)^{2/p}} + \frac{4}{(2^p-1)^{2/p}} = \frac{18}{(3^p-2^p)^{2/p}} + \frac{18}{(6^p-1)^{2/p}}$$

ומבדיקה ישירה נקבל שרק $p = 2$ מקיים את הטענה, לכל ערך אחר מתקבלים באופן ישיר מספרים לא רציונליים ובפרט לא מתקבל פתרון של המשוואה. אבל הנחנו ש־$p \neq 2$ ולכן נסיק שאכן לא מתקיים חוק המקבילית, ואין מכפלה פנימית המשרה את הנורמה.

נוכל לפתור בדרך נוספת. נגדיר $x = (1, 0, \dots)$ וכן $y = (0, 1, 0, \dots)$. במקרה זה $\|x\|_p^2 = \|y\|_p^2 = 1$ וכן $\|x+y\|_p^2 = \|x-y\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}}$. מכלל המקבילית נובע,

$$2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) = \|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 \iff 2 = 2^{\frac{2}{p}} \iff p = 2$$

ונסיק שכלל המקבילית מתקיים אם ורק אם $p = 2$, לכן עבור $p \neq 2$ בהכרח הנורמה לא מושרית ממכפלה פנימית. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שנורמת ∞ על המרחב $C[a, b]$ לא מושרית ממכפלה פנימית.

הוכחה. ללא הגבלת הכלליות נוכל לבחון את $C[0, 1]$, זאת שכן עבור ההוכחה שנציג אפשר להגדיר מתיחות של הפונקציות. נגדיר $f(x) = x, g(x) = 1 - x$ ונקבל $\|f\|_\infty^2 = \|g\|_\infty^2 = 1$. בנוסף גם $f + g = 1, f - g = 2x - 1$ ומתקיים $\|f + g\|_\infty^2 = \|f - g\|_\infty^2 = 1$. נסיק ישירות סתירה לכלל המקבילית. $\square$

שאלה 2

יהי $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ויהיו $x \in H$ וכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$.

סעיף א׳

נראה כי אם $\|x_k\| \to \|x\|$ וגם $\langle x, x_k\rangle \to \langle x, x\rangle$ אז $x_k \to x$.

הוכחה. מתקיים,

$$\begin{aligned}\|x - x_k\| &= \langle x - x_k, x - x_k\rangle \\ &= \langle x - x_k, x\rangle + \langle x - x_k, -x_k\rangle \\ &= \overline{\langle x, x - x_k\rangle} + \overline{\langle -x_k, x - x_k\rangle} \\ &= \overline{\langle x, x\rangle} + \overline{\langle x, -x_k\rangle} - \overline{\langle x_k, x\rangle} - \overline{\langle x_k, -x_k\rangle} \\ &= \|x\|^2 - \langle x_k, x\rangle - \overline{\langle x_k, x\rangle} + \|x_k\|^2 \\ &\xrightarrow{k\to\infty} \|x\|^2 - \langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle + \|x\|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

ולכן נסיק ש־$x_k \to x$. □

סעיף ב׳

תהי $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq H$ מערכת אורתונורמלית, נראה שהסדרה $y_k = \langle e_k, x\rangle \cdot e_k$ מתכנסת.

הוכחה. מאי־שוויון בסל נובע,

$$\|x\| \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2$$

ולכן מהתנאי ההכרחי להתכנסות בהחלט של טורים ממשיים נובע,

$$|\langle e_k, x\rangle|^2 \to 0 \implies \langle e_k, x\rangle \to 0$$

נסיק אם כן ש־$\|y_k\| = |\langle e_k, x\rangle| \to 0$. נבחין גם כי $\langle y_k, 0\rangle = 0$ לכל $k \in \mathbb{N}$ ישירות מהומוגניות מכפלה פנימית, ולכן תנאי סעיף א׳ חלים ו־$y_k \to 0$. □

שאלה 3

נוכיח כי הבסיס הסטנדרטי הוא מערכת אורתונורמלית שלמה ב־l^2.

הוכחה. נסמן $\{e^k\} \subseteq l^2$ הבסיס הסטנדרטי, כלומר $n = k \iff e_n^k = 1$ ו־$e_n^k = 0$ אחרת.
לכל $k \neq m$ מתקיים,

$$\langle e^k, e^m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n^k} e_n^m = 0$$

בנוסף מאותה סיבה בדיוק $\langle e^k, e^k \rangle = 1$ לכל $k \in \mathbb{N}$. ונסיק כי זה אכן בסיס אורתונורמלי.

נראה ש־$\overline{\mathrm{Sp}\{e^k \mid k \in \mathbb{N}\}} = l^2$ ונסיק משקילות שהבסיס שלם. נניח ש־$x \in l^2$ סדרה כלשהי, ונרצה לבנות סדרה $\{a^k\} \subseteq \mathrm{Sp}\{e^k\}$ כך ש־$a^k \to x$. נגדיר,

$$a_n^k = \begin{cases} x_n & n \le k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

כלומר $a^k = \sum_{n=1}^{n} x_n e^n$, לכן $a^k \in \mathrm{Sp}\{e^k\}$ לכל $k \in \mathbb{N}$. כמובן גם $a_n^k \to x$ שכן $\|x - a^k\|^2 = \sum_{n=k}^{\infty} x_n^k$. נסיק שאכן הבסיס אורתונורמלי ושלם. $\square$

שאלה 4

יהי $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית.

סעיף א׳

נראה כי נורמה המושרית ממכפלה פנימית מקיימת את חוק המקבילית, כלומר שלכל $x, y \in H$,

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

הוכחה. יהיו $x, y \in H$, אז,

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle$$

וכן,

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle \\
&= \langle x + y, x \rangle + \langle x + y, y \rangle + \langle x - y, x \rangle - \langle x - y, y \rangle \\
&= \overline{\langle x, x + y \rangle} + \overline{\langle y, x + y \rangle} + \overline{\langle x, x - y \rangle} - \overline{\langle y, x - y \rangle} \\
&= \overline{\langle x, x \rangle} + \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle x, x \rangle} - \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\langle y, y \rangle} - \overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\langle y, y \rangle} \\
&= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle
\end{aligned}$$

כפי שרצינו להראות. $\square$

סעיף ב׳

נניח ש־H מרחב מכפלה פנימית ממשי, אנו נראה כי לכל $x, y \in H$,

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

הוכחה. זהו מרחב ממשי ולכן $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, לכן,

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle - (\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle) = 4 \cdot \langle x, y \rangle$$

והנוסחה נובעת ישירות. $\square$