פתרון מטלה 8 — תורת המידה, 80517

12 בדצמבר 2025

שאלה 1

נניח ש־$(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד ו־$T : X \to X$ מדידה. הגדרנו מידה על X להיות T־אינווריאנטית אם מתקיים $T_*\mu = \mu$. נאמר גם שמידה T־אינווריאנטית היא ארגודית אם לכל $A \in \mathcal{A}$ המקיימת $T^{-1}(A) = A$ מתקיים ש־A היא μ־טריוויאלית, כלומר $\mu(A) = 0 \vee \mu(A^C) = 0$.

סעיף א'

תהי $A \in \mathcal{A}$ ונגדיר את סדרת הקבוצות $A_1 = A$ ו־$A_{n+1} = T^{-1}(A_n)$.
נראה ש־$A^- = \liminf A_n, A^+ = \limsup A_n$ הן T־אינווריאנטיות.

הוכחה. מהגדרה עלינו להראות ש־$T^{-1}(A^-) = A^-, T^{-1}(A^+) = A^+$.

$$T^{-1}(A^-) = T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \overset{(1)}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \overset{(2)}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} T^{-1}(A_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_{k+1} = A^-$$

כאשר $(1),(2)$ נובעים מתכונות תמונה הפוכה והמעבר האחרון נובע מתכונות הגבול התחתון. המהלך עבור A^+ שקול. □

סעיף ב'

נניח ש־μ מידת הסתברות ארגודית. נראה שאם $T^{-1}(A) = A$ כמעט תמיד אז $\mu(A) \in \{0,1\}$.

הוכחה. נתון ש־μ ארגודית, כלומר אם $E \in \mathcal{A}$ וכן E היא T־אינווריאנטית אז $\mu(A) \in \{0,1\}$. נגדיר $A_1 = A, A_{n+1} = T^{-1}(A_n)$, מתקיים $A_1 = A_2$ כמעט תמיד, וכן אם $A_1 = A_n$ כמעט תמיד אז גם $A_n = A_{n+1}$ כמעט תמיד ולכן $A_1 = A_{n+1}$ כמעט תמיד, נסיק ש־$A = A_n$ כמעט תמיד לכל n. מהסעיף הקודם $A^+ = \limsup A_n$, $A^- = \liminf A_n$ הן T־אינווריאנטיות ולכן $\mu(A^+), \mu(A^-) \in \{0,1\}$.

$$\mu(A^-) = \mu(\liminf A_n) \le \liminf \mu(A_n) = \liminf \mu(A) = \mu(A)$$

אבל $\mu(A^-) \in \{0,1\}$ ואם $\mu(A^-) = 1$ אז נקבל $\mu(A) = 1$ וסיימנו, לכן נניח ש־$\mu(A^-) = 0$. המרחב הוא מרחב הסתברות ולכן,

$$\mu(A^+) = \mu(\limsup A_n) \ge \limsup \mu(A_n) = \mu(A)$$

אם $\mu(A^+) = 0$ אז שוב נקבל $\mu(A) = 0$ ולכן נניח ש־$\mu(A^+) = 1$. אם $A = A_n$ כמעט תמיד אז גם $A = A \cap A = A_n \cap A_{n+1}$ כמעט תמיד ובאינדוקציה $A = \bigcap_{n=1}^k A_n$ כמעט תמיד, נסיק שגם $\mu(A) = \mu(\lim_{n\to\infty}\bigcap_{n=1}^k A_n)$.

$$0 = \mu(A^-) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty}\mu(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$$

ולכן נקבל שבמצב זה $\mu(A) = 0$ כפי שרצינו. □

סעיף ג'

נאמר שפונקציה $f : X \to \mathbb{R}$ היא T־אינווריאנטית אם $f = f \circ T$.
נראה שמידה T־אינווריאנטית μ היא ארגודית אם ורק אם כל הפונקציות ה־T־אינווריאנטיות המדידות שוות לפונקציה קבועה כלשהי כמעט בכל מקום.

הוכחה. נניח ש־μ ארגודית ותהי $f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה ו־T־אינווריאנטית כלשהי, נראה ש־f קבועה כמעט תמיד. נניח בשלילה שלא, כלומר קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mu(f^{-1}(a)) > 0, \mu(f^{-1}(b)) > 0$. נבחין כי $T^{-1}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(a)$ ולכן $f^{-1}(a) \subseteq X$ קבוצה T־אינווריאנטית ובהתאם $\mu(f^{-1}(a)) = 0$ או $\mu(X \setminus f^{-1}(a)) = 0$, אבל $\mu(f^{-1}(a)) > 0$ ולכן $\mu(X \setminus f^{-1}(a)) = 0$. אבל $f^{-1}(b) \subseteq X \setminus f^{-1}(a)$ ולכן $0 < \mu(f^{-1}(b)) \le \mu(X \setminus f^{-1}(a)) = 0$ בסתירה.

נניח עתה שכל f כזו קבועה כמעט תמיד ונראה ש־μ ארגודית. תהי $A \in \mathcal{A}$ המקיימת $T^{-1}(A) = A$, נראה ש־$\mu(A) = 0$ או $\mu(A^C) = 0$. נגדיר $g = \mathbb{1}_A$ ולכן $g(T(x)) = 1 \iff T(x) \in A \iff x \in T^{-1}(A) \iff x \in A \iff g(x) = 1$, אז g היא T־אינווריאנטית ולכן קבועה. אבל אז נובע $g =_\mu 0$ או $g =_\mu 1$ ובפרט $\mu(A) = 0$ או $g(A^C) = 0$ כמו שרצינו. □

שאלה 2

נוכיח בשלבים את המשפט הבא: יהי X מרחב מדיד ו־$T : X \to X$ מדידה, אז כל שתי מידות הסתברות T־אינווריאנטיות ארגודיות שונות הן סינגולריות אחת לשנייה, ונניח ש־T הפיכה וכן ש־T^{-1} מדידה.

סעיף א׳

תהיינה שתי מידות הסתברות μ, ν כך שהן T־אינווריאנטיות. נסמן את הפירוק של ν לפי μ על־פי משפט לבג־רדון־ניקודים ב־$\nu = \nu_a + \nu_s$.
נראה ש־ν_a, ν_s הן גם T־אינווריאנטיות.

הוכחה. מהגדרת T־אינווריאנטיות נקבל ש־$T_*\mu = \mu$ ו־$T_*\nu = \nu$. לכן אם $T_*\nu = \lambda_a + \lambda_s$ פירוק של $T_*\nu$ לפי $T_*\mu$ אז למעשה $\nu = \lambda_a + \lambda_s$. אבל $T_*\mu = \mu$ ולכן $\lambda_a + \lambda_s$ פירוק רדון־ניקודים של ν מעל μ ומיחידות הפירוק נקבל $\lambda_s = \nu_s, \lambda_a = \nu_a$. אז נקבל $T_*\nu = T_*(\nu_a + \nu_s) = T_*\nu_a + T_*\nu_s = \lambda_a + \lambda_s = \nu_a + \nu_s = \nu$ ובהתאם ν_a, ν_s שתיהן T־אינווריאנטיות. $\square$

סעיף ב׳

נסיק שאם ν ארגודית אז $\nu = \nu_a$ או $\nu = \nu_s$.

הוכחה. נניח בשלילה שלא, לכן קיימת קבוצה מדידה A שעבורה $\nu_s(A), \nu_a(A) > 0$. משאלה 1 סעיף א׳ נוכל לקחת את $\limsup T^n(A)$ ולכן נניח בלי הגבלת הכלליות ש־A היא קבוצה T־אינווריאנטית. אם מתקיים $\nu(A) = 0$ אז נקבל סתירה להנחה ולכן נניח ש־$\nu(A^C) = 0$. נשים לב ש־$\mu \gg \nu_a$ ולכן $\nu_a(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$ ולכן באופן שקול גם $\mu(E) > 0 \implies \nu_a(E) > 0$ ונסיק ש־$\mu(A) > 0$. אבל $\mu \perp \nu_s$, כלומר קיימות B, C מדידות וזרות כך ש־$\mu(B^C) = 0, \nu_s(C^C) = 0$, אבל $\mu(A) > 0$ ולכן $A \subseteq B$ ונסיק ש־$\nu_s(A) = 0$ בסתירה. $\square$

סעיף ג׳

נניח ש־μ ארגודית וש־$\nu = \nu_a$. נגדיר את h להיות נגזרת רדון־ניקודים $\frac{d\nu_a}{d\mu}$.
נראה שמתקיים $\int_A h \, d\mu = \int_A h \circ T \, d\mu$ לכל A מדידה, ונסיק ש־$h =_\mu h \circ T$.

הוכחה. הפונקציה h מקיימת את התכונה $\nu_a(E) = \int_E h \, d\mu$. אבל מסעיף א׳ נובע ש־$\nu_a$ היא T־אינווריאנטית ולכן $\nu_a(E) = T_*\nu_a(E) = \nu_a(T^{-1}(E))$, ולכן,

$$\int_E h \, d\mu = \nu_a(E) = \nu_a(T^{-1}(E)) = \int_{T^{-1}(E)} h \, d\mu = \int_{T^{-1}(E)} h \, dT_*\mu = \int_E h \circ T \, d\mu$$

כפי שרצינו.

נניח בשלילה שלא $h =_\mu h \circ T$ ולכן $E = \{x \in X \mid h(x) \neq h(T(x))\} = \{x \mid h(x) < h(T(x))\} \uplus \{x \mid h(x) > h(T(x))\}$ היא קבוצה ממידה חיובית. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$E = \{h(x) < h(T(x))\}$ היא ממידה חיובית ולכן נקבל ש־$\int_E h \circ T - h \, d\mu > 0$ בסתירה, לכן $h =_\mu h \circ T$. $\square$

סעיף ד׳

נראה ש־$h =_\mu 1$ ונסיק ש־$\mu = \nu$.

הוכחה. נזכור כי h היא פונקציה מדידה, ובסעיף הקודם ראינו שגם T־אינווריאנטית כמעט תמיד, בלי הגבלת הכלליות תמיד על־ידי הגדרת הפונקציה,

$$x \mapsto \begin{cases} x & h(x) = h(T(x)) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ולכן משאלה 1 סעיף ג׳ והעובדה ש־μ מידת הסתברות ארגודית נסיק ש־h היא קבועה כמעט תמיד. נתון כי $1 = \nu(X) = \nu_a(X) = \int h \, d\mu = h \int 1 \, d\mu = h \cdot 1$ ובהתאם $h =_\mu 1$. אז נקבל $\nu(E) = \nu_a(E) = \int_E h \, d\mu = \int_E 1 \, d\mu = \mu(E)$ ובהתאם $\mu = \nu$. $\square$

שאלה 3

סעיף א׳

תהיינה $f,g \in L^1(\mathbb{R})$ פונקציות אינטגרביליות לבג. נגדיר,

$$\mu(E)=\int_E f\,d\lambda,\quad \nu(E)=\int_E g\,d\lambda,$$

המידות המתקבלות כאינטגרל על הפונקציות הללו.

נמצא תנאי מספיק והכרחי לכך ש־$\nu \perp \mu$.

הוכחה. מתקיים $\nu \perp \mu$ אם ורק אם $A,B \subseteq \mathbb{R}$ מדידות לבג וזרות כך ש־$\mu(A^C)=\nu(B^C)=0$. לכן בהתאם נקבל,

$$0=\int_{A^C} f\,d\lambda$$

אבל $f \geq 0$ ולכן $f \restriction A^C =_\lambda 0$. נסיק אם כך ש־$\operatorname{Supp} f \subseteq A, \operatorname{Supp} g \subseteq B$ ובפרט ש־$\operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} g = \emptyset$.

מהצד השני נניח ש־$\operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} g = \emptyset$ ולכן נסמן את הקבוצות הללו בהתאמה A,B ונקבל ש־$A \cap B = \emptyset$ וכן,

$$\mu(A^C)=\int_{A^C} f\,d\mu = 0$$

כלומר $\nu \perp \mu$ לפי הגדרה. □

סעיף ב׳

נניח ש־μ,ν מידות כך ש־$d\nu = h\,d\mu$ כאשר h פונקציה מדידה חיובית ממש. נראה ש־μ ו־ν שקולות.

הוכחה. נזכיר כי μ,ν שקולות כאשר $\forall E \in \mathcal{A},\ \mu(E)=0 \iff \nu(E)=0$. מהגדרה מתקיים,

$$\nu(E)=\int_E h\,d\mu$$

נניח ש־$E \in \mathcal{A}$ מדידה כלשהי וכן ש־$\mu(E)=0$. אז מתקיים גם $\int_E f\,d\mu = 0$ מהגדרת אינטגרל לבג ולכל f מדידה, בפרט הטענה נכונה גם ל־h ולכן $\nu(E)=0$.

נניח בכיוון השני ש־$\nu(E)=0$ ונניח בשלילה ש־$\mu(E)>0$, אז מחיוביות בהחלט של h נקבל ש־$\int_E h\,d\mu > 0$ בסתירה. □

שאלה 4

תהיינה $\mu, \nu_1, \nu_2, \dots$ מידות על X ונגדיר $\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i$.

סעיף א׳

נראה שאם $\mu \perp \nu_i$ לכל $i \geq 1$ אז $\mu \perp \nu$.

הוכחה. לכל $i \geq 1$ נגדיר A_i, B_i מדידות זרות כך ש־$\mu(A_i^C) = \nu_i(B_i^C) = 0$. נגדיר $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. אז A מדידה אף היא וכן,

$$\mu(A^C) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^C) = 0$$

ולכן A, B_i הן קבוצות זרות ומדידות המעידות על $\mu \perp \nu_i$. נגדיר גם $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ולכן,

$$\nu(B^C) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i(B^C) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^C \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i(B_i^C) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$$

כלומר מצאנו ש־$\mu(A^C) = 0, \nu(B^C) = 0$ ונותר להראות ש־A, B זרות כדי לקבל שהן מעידות על $\nu \perp \mu$, אבל זה נובע ישירות מהגדרתן כאיחודים והיתוכים של קבוצות זרות. □

סעיף ב׳

נראה שאם $\mu \gg \upsilon_i$ לכל $i \geq 1$ אז $\mu \gg \nu$.

הוכחה. נתון כי $\mu(E) = 0 \implies \nu_i(E) = 0$ לכל E מדידה. אז נובע גם $\nu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i(E) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$ ובהתאם $\mu \gg \nu$. □