מבוא לטופולוגיה – סיכום

2025 באפריל 28



תוכן העניינים

תוכן העניינים

3	24.3.2025 - 1 שיעור	1
3	מבוא מבוא 1.1	
6	25.3.2025 - 2 שיעור	2
6		
8	31.3.2025 - 3 שיעור	3
8	3.1	
9	מות לרציפות	
11	7.4.2025-4 שיעור	4
11	4.1 אקסיומות ההפרדה	
14	8.4.2025 - 5 שיעור	5
14	ההפרדה — המשך משך 5.1	
15	21.4.2025-6 שיעור	6
15	6.1 אקסיומות מנייה	
16	6.2 קשירות 6.2	
18	22.5.2025 - 7 שיעור	7
18	1.1 קשירות — המשך המשך המשך המשך 7.1	
19	28.4.2025 - 8 שיעור	8
19	8.1 קשירות — סגירת פינות	
19	8.2 קומפקטיות	
21	8.3 קומפקטיות במרחבים מטריים	

24.3.2025 - 1 שיעור 1

מבוא 1.1

 $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ ומערים, באינפי 1 מתבוננים ב \mathbb{R} והגדרנו את מושג הגבול של סדרות, ולאחריו את המושג של פונקציה רציפה בעפר דיברנו על מרחבים מטריים, באינפי 1 המושג באינפי 3 כבר ראינו את את ווו $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$ מתקיים מתקיים אם ולכל $x \in \mathbb{R}$ אם לכל אם לכל הייתה ש־f תיקרא המושג הכללי והרחב יותר של רציפות במרחבים מטריים. ניזכר בהגדרה של מרחב מטרי.

המקיימת, מטריקה) הנקראת מטריקה (הנקראת מטרי(X,d) באשר א קבוצה לא ריקה (מרחב מטרי) מרחב מטרי(X,d) האשר א המקיימת,

- $x,y \in X$ לכל d(x,y) = d(y,x) .1
- $d(x,y)=0\iff x=y$ וכך $\forall x,y\in X, d(x,y)\geq 0$.2
- $\forall x,y,z\in X, d(x,y)\leq d(x,y)+d(y,z)$ אי־שוויון המשולש, .3

דוגמה 1.1 נראה דוגמות למרחבים מטריים,

- d(x,y)=|x-y| יחד עם \mathbb{R} .1 $d_2(ar{x},ar{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2}$ המוגדרת על־ידי (\mathbb{R}^n,d_2) .2
- $d_{\infty}(\bar{x},\bar{y})=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$, אינסוף, ואת מטריקת $d_p(\bar{x},\bar{y})=\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p\right)^{rac{1}{p}}$ את מוכל עבור \mathbb{R}^n נוכל עבור 3.
- $ho(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) g(x)|$ קבוצת את המטריקה עבור $[a,b] o \mathbb{R}$ עבור הרציפות הפונקציות הרציפות עבור $[a,b] o \mathbb{R}$

נראה את ההגדרה הפורמלית של רציפות,

קדים $\delta>0$ קיים $\epsilon>0$ עבור אם לכל הא רציפה שיf רציפה אז נאמר שיf עבור f:X o Y עבור הגדרה 1.2 (רציפות) אז נאמר שיf עבור אבור עבור האיז עבור מטריים, אז נאמר שי $\rho(f(x'), f(x)) < \epsilon$ אז $d(x', x) < \delta$ מאם

אבל יותר קל לדבר במונחים של קבוצות פתוחות.

 $B(r,x) = B_r(x) = \{z \in X \mid d(x,z) < r\}$ הגדרה מטרי, נסמן מרחב מטרי, עבור עבור (בדור) 1.3 הגדרה 1.3

 $f^{-1}(V)=\{x\in X\mid f(x)\in T$ מתקיים ב־Y מתקיים אם לכל עביפות הגדרה לכל f:X o Y (הגדרה לרציפות) אולה לרציפות הגדרה 1.5 מתקיים X- קבוצה פתוחה ב־V

הבאים, התנאים התנאים התנאים, au כך שמתקיימים התנאים הבאים, טופולוגיה, על au הגדרה 1.6 (טופולוגיה), חהי au קבוצה (לא ריקה), טופולוגיה על au היא אוסף

- $\bigcup_{\alpha\in I}U_{\alpha}\in au$ אז $\forall lpha\in I,U_{lpha}\in au$ כך שיס, I כך לקבוצת אינדקסים לקבוצת או למר אם סגור לאיחוד, כלומר אם 2.
 - $U\cap V\in au$ מתקיים מופיים, כלומר לכל לכל טומר סופיים, סופיים מוכים סגור לחיתוכים au .3

. הגדרה אל מרחב טופולוגיה על X, יקרא א קבוצה אר קבוצה לא קבוצה לא כאשר אוגי (מרחב טופולוגי) זוג אוגי (מרחב טופולוגי) אוגי (מרחב טופולוגי) זוג אוגי (מרחב טופולוגי) זוג אוגי (מרחב טופולוגי) אוגי (מרחב טופ

 $U\in\Omega$ לכל $f^{-1}(U)\in au$ בעשם הגדרנו כבר מתי פונקציה f:X o Y עבור מרחבים טופולוגיים (X, au), איז היא רציפה, כאשר בעצם הגדרנו לכל מ סימון 1.8 איברי au יקראו קבוצות פתוחות.

הא היא קבוצה אם A איז המשלים של A או מרחב המשלים אם A, כלומר המשלים אם האברה אם הגורה, אברה אם האברה או היא קבוצה המשלים של האחר המשלים או מרחב טופולוגי אז תת־קבוצה Aפתוחה.

דוגמה באופן טריוויאלי כנביעה ערי, כלומר נגדיר טופולוגיה אין $au=\{U\subseteq X\mid \forall x\in U\exists r>0, B(x,r)\subseteq U\}$ יהי מטרי, נגדיר זה מטרי, נגדיר אין דוגמה 1.2 יהי מהמרחב המטרי.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי אכן זהו מרחב טופולוגי.

. יהי X קבוצה כלשהי, אז ניתן להגדיר על X טופולוגיה $\{\emptyset,X\}$ יהי עופולוגיה טופולוגיה טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה אז ניתן להגדיר על X

. בולה אויה נגדיר $au_1=\mathcal{P}(X)$ נגדיר עבור קבוצה au_2 עבור קבוצה au_3 עבור קבוצה אויה נגדיר בולה נגדיר עבור דומה אוי עבור קבוצה אויה אויים ביינו דיים ביינו אויים ביינו ביינו אויים ביינו אויינו אויים ביינו אויים ב

24.3.2025 - 1 שיעור 1 מבוא 1.1

f: מתי איז שהיא רציפה התשובה היא שהיא היא הוא f: מתי א היא f: ווהי א רציפה תמיד. ווהי רציפה מתיד. מתי א מתי f: ווהי חלי. ווהי רציפה מתיד. מתי א דוגמה 1.5 מתי א מתיד. רציפה, תלוי בהגדרת הפונקציה, אבל במקרה שבו היא אכן רציפה, אז היא רציפה לעומה ההיא. לעומת אבל במקרה אבל האריא. לעומת האריא רציפה $(Y, au) o (X, au_1)$ רציפה. $f:(X,\tau_1) o (Y, au)$

הערה לא כל טופולוגיה נובעת ממטריקה. לדוגמה הטופולוגיה הטריוויאלית על מרחב עם לפחות 2 נקודות.

. הקבוצה פתוחה קבוצה B(x,r) הקבוצה פתוחה.

 $\mathcal{F}=\{A\subseteq\mathbb{C}^n\mid\exists\{f_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n],A=\{(p_1,\ldots,p_n)\mid\forall i\in\mathbb{N}$ עבור איזשהו $X=\mathbb{C}^n$ נגדיר 1.6 נגדיר 1.6 נגדיר $I, f_i(p_1, \ldots, p_n) = 0\}$

 $x \in B$ כך ש־ $B \in \mathcal{B}$ יש $x \in X$.1

 $x \in C \subseteq A \cap B$ יש כך כך שי $x \in A \cap B$ ולכל $A, B \in \mathcal{B}$.2

טענה 1.11 עבור בסיס \mathcal{B} היא טופולוגיה, $au_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X \mid U \text{ is a union of elements of } \mathcal{B}\}$ היא טופולוגיה,

$$\forall \alpha \in I, B_{\alpha} \in \mathcal{B}, U = \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha}$$

, אז מתקיים, אז איז סופי, אז איז סופי, אז אם ער וכן וכן $U=\bigcup_{lpha\in I}B_lpha\in\mathcal{B}$ אז אז אז אם סופי, אז אז סופי, אז אז מתקיים, מכיוון ש־ $au_\mathcal{B}$ סגורה לחיתוך סופי, אז אם אז מתקיים,

$$U \cap V = (\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha}) \cap (\bigcup_{\beta \in J} A_{\beta}) = \bigcup_{\alpha, \beta \in I \times J} B_{\alpha} \cap A_{\beta} = D$$

 $U\cap V=(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)\cap(\bigcup_{\beta\in J}A_\beta)=\bigcup_{\alpha,\beta\in I\times J}B_\alpha\cap A_\beta=D$ כך ש־ $C_{\alpha_0,\beta_0}\subseteq \mathcal{B}$ ישנם $C_{\alpha_0,\beta_0}\in \mathcal{B}$ ישנם $C_{\alpha_0,\beta_0}\in \mathcal{B}$ ישנם $C_{\alpha_0,\beta_0}\in \mathcal{B}$ ישנם $C_{\alpha_0,\beta_0}\in \mathcal{B}$ ישנם אבל מהגדרת הבסיס פוימת קבוצה אבל מהגדרת הבסיס פוימת הבסיס פו . סופי. לכן הזיתות מצאנו בהתאם התאם ובהתאם $D\subseteq igcup_{(x,lpha,eta)} C_{x,lpha,eta}$ לכן לכן $B_{lpha_0}\cap A_{eta_0}$

 $\{B(x,rac{1}{n})\subseteq X\mid x\in$ אם מטרי, אז $\{B(x,r)\subseteq X\mid x\in X, r>0\}$ הוא טופולוגיה. אבל עכשיו נוכל להגדיר גם את מטרי, אז הערה . המטרי לטופולוגיה שהגדרנו למרחב הטופולוגיה לאותה לטופולוגיה לטופולוגיה לטופולוגיה לאותה לטופולוגיה לאותה לטופולוגיה לאותה לאותה לטופולוגיה ל

תרגיל 1.2 הוכיחו שזהו אכן בסיס עבור המרחב הטופולוגי הנתון.

 $C = \{a + d\mathbb{Z} \mid a, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0\}$, נניח ש" $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, ונגדיר את הבסיס להיות אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, כלומר $X = \mathbb{Z}$ $p\in p+dq\mathbb{Z}\subseteq$ אז $p\in (a+d\mathbb{Z})\cap (b+q\mathbb{Z})$, וננים כי זהו אכן בסיס (לטופולוגיה). נתבונן בזוג קבוצות ב $a+d\mathbb{Z},b+q\mathbb{Z}$, וננים כי זהו אכן בסיס (לטופולוגיה). $. au_C$ נגדיר טופולוגיית. ($a+d\mathbb{Z}$) \cap ($b+q\mathbb{Z}$)

קבוצות סגורות הן משלימים לקבוצות פתוחות.

כל סדרה אריתמטית דו־צדדית אינסופית היא גם פתוחה וגם סגורה. בפרט חיתוך סופי של סדרות אריתמטיות הוא סגור. לכן המשלים שלו הוא פתוח. מסקנה 1.12 (משפט אוקלידס) יש אינסוף מספרים ראשוניים.

לכן את קבוצה פתוחה קבוצה לכן, את נניח את עבור p_1,\ldots,p_k עבור אשוניים, או נניח בשלילה כי שמספר סופי של ראשוניים, עבור או עבור וניח את עבור את או מספר מופי של ראשוניים.

$$\bigcup_{i=1}^k p_i \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$$

ולכן נובע ש־ $\{-1,1\}$ קבוצה פתוחה וזו כמובן סתירה.

טענה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי) עניח ש(X, au) מרחב טופולוגי, לכל $\emptyset
eq Y \subseteq X$ מרחב טופולוגי, מרחב טופולוגי(X, au) מרחב טופולוגיה מענה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי) מרחב טופולוגיה מרחב טופולוגיה מרחב טופולוגיה מרחב טופולוגיה מרחב טופולוגיה מרחב טופולוגיה. $. au_Y = \{W \in au \mid W \subseteq Y\}$ אז $Y \in au$ אם $Y \in au$

טענה 1.14 (טופולוגיית מכפלה) נניח ש־ (X_1, au_1) ו־ (X_2, au_2) מרחבים טופולוגיים, אז נגדיר טופולוגיית מכפלה (X_1, au_1, au_1) על־ידי

$$\tau_{1,2} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2 \}$$

אז בסיס והטופולוגיית על־ידו נקראת על־ידו המכפלה. המכפלה דיטופולוגיית המכפלה דוא ד $au_{1,2}$ אז

דוגמה 1.8 נוכל לבנות כך מכפלה של כמות סופית או אינסופית של מכפלות טופולוגיות. עבור אוסף אינסופי (בן־מניה או לא בהכרח) אנו צריכים

24.3.2025 - 1 שיעור 1 1.1 מבוא

אז נגדיר ($\alpha \in I$ עבור (X_{α}, au_{α}) אז נגדיר להיזהר, נניח ש

$$au_b=\{\prod_{lpha\in I}U_lpha\mid oralllpha\in I, U_lpha\in au_lpha\}$$
 אנקרא שנקרא טופולוגיית הקופסה. לעומת זאת נוכל להגדיר גם את

$$\tau_p = \{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha = X_\alpha \text{ for almost all } \alpha \in I \}$$

$$.\prod_{\alpha\in I}=\{f:I\to\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha\mid \forall \alpha\in I, f(x)\in X_\alpha\}$$
 כלומר

25.3.2025 - 2 שיעור 2

טופולוגיה – המשך 2.1

Z=בשיעור הקודם דיברנו על מכפלה של טופולוגי, אז נתבונן שאם I קבוצת אינדקסים ולכל $lpha\in I$ גם מרחב טופולוגי, אז נתבונן ביI בשיעור הקודם דיברנו על מכפלה של טופולוגיה על I.

הערה מגדירים.

$$\prod_{\alpha \in I} X_{\alpha} = \{ f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_{\alpha}, \forall \alpha \in I, f(\alpha) \in X_{\alpha} \}$$

לאחר מכן נוכל להגדיר טופולוגיית מכפלה,

,הבסים, נגדיר את הבסים (טופולוגיית מכפלה) 2.1 הגדרה

$$\mathcal{B}_{\text{box}} = \{ \prod_{\alpha \in I} U_{\alpha} \mid \forall \alpha \in I, U_{\alpha} \subseteq X_{\alpha}, U_{\alpha} \in \tau_{\alpha} \}$$

ואת הבסיס.

$$\mathcal{B}_{\text{prod}} = \{ \prod_{\alpha \in I} V_{\alpha} \mid \forall \alpha \in I, V_{\alpha} \in \tau_{\alpha}, V_{\alpha} \subseteq X_{\alpha}, |\{\beta \in I \mid V_{\beta} \neq X_{\beta}\}| < \infty, V_{\alpha} = X_{\alpha} \text{ for almost every } \alpha \}$$

אלו הן מכפלות של טופולוגיות המהוות טופולוגיה.

$$\pi_lpha(f)=f(lpha)$$
 אז שנן הטלהו ל $lpha\in I,\pi_lpha:Z o X_lpha$ הטלות שנן אז ל $Z=\prod_{lpha\in I}X_lpha$ אז הגדרה (העתקות הטלה) אז הגדרה

 $\pi_{lpha}^{-1}(U_{lpha})\in au$ יתקיים תהינה ב־ X_{lpha} יתקיים שכל ההטלות עריך שלכל הרוצים אכן יקיימו אכן יקיימו עריים אכן יקיימו הביס, ערכל ההטלות הביס, אנו רוצים אכן יקיימו אכן יקיימו אכן יקיימו אכן יקיימו אכן יתקיים ב־ X_{lpha} אבל זהו לא בסיס, אבל זהו לא בסיס, אבל נבחין כי X_{lpha} אבל זהו לא בסיס,

$$C = \{ U_{\alpha} \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_{\beta} \mid \pi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) \in \tau \}$$

.] C=Xע כך של תת־קבוצות של X תהי קבוצה X קבוצה תהי קבוצה תהיקבוצות של עד תר־קבוצות הגדרה (מת־בסיס לטופולוגיה).

נגדיר את הסופיים הסופיים של איברי אוסף להיות כלומר $\mathcal{B}_C = \{\bigcap A \mid A \subseteq C, |A| < \infty\}$ הייות של איברי מתחבסים המושרה אוסף פתוחות) פתוחות פתוחות הוא בסים.

 $au_1\subseteq au_2$ אם אם au_2 הותר חלשה יותר שר אומרים על אומרים על au_1 שם אם קבוצה au_1 אם אומרים על אומרים על אומרים אם au_1

, מרחב מושרה מתאים לכל i. נרצה להתבונן במכפלתם, ונגדיר (X_i, au_i) מרחב (X_i, au_i) לכל לכל X_i, au_i לכל לכל X_i, au_i שהגדרנו זה עתה. אז נוכל להתבונן ב־ $(\prod X_i, au_{\mathrm{prod}})$ שהגדרנו זה עתה.

 $x,y\in Z$ לכל $Z=\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ עם מטריקה מצוא מטריקה מרצה מטריים מטריים מטריים מטריים בהינתן מרפלה) מרצה (מטריקה מכפלה) אז נגדיה, אז נגדיר, אז נגדיר,

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

ברור שפונקציה זו מוגדרת, וברור אף כי היא מקיימת את התכונה השנייה של מטריקות, אך לא ברור שהיא מקיימת את אי־שוויון המשולש, זהו תרגיל שמושאר לקורא.

. \mathcal{B}_{prod} טענה שווה ל-מכפלה שורית עם מטריקת מרובים מופולוגיים עבור (X_i, au_i) עבור עבור עבור $Z = \prod_{i=1}^\infty X_i$ שענה 2.6 מענה

 $au_
ho=\mathcal{B}_{
m prod}$ בסיס, אז נוכל להגדיר טופולוגיה (Z,
ho) מרחב מטרי, ו־ $\mathcal{B}_
ho=\{B(x,r)\mid x\in Z, r>0\}$ בסיס, אז נוכל להגדיר שטופולוגיה נקבעת ביחידות על־ידי בסיס שלה, לכן מספיק להראות שכל $B\in\mathcal{B}_{
m prod}$ שייכת ל־ $T_{
m prod}$ שייכת ל־ $T_{
m prod}$. נוסיף ונבהיר שטופולוגיה נקבעת ביחידות על־ידי בסיס שלה, לכן מספיק להראות את שקילות הבסיסים.

נתחיל בתנאי הראשון, ונקבע $U_k\in au_k$ כלשהו. מספיק להראות שקבוצה מהצורה $U_k imes\prod_{i\neq k}X_i$ פתוחה בי0 עבור $U_k\in \mathbb{N}$ בית עבור בונסם ביל להרחיב הוכחה זו באופן סיסטמתי להיות על כל קבוצה סופית של קבוצות פתוחות. יהי 1 1 על להרחיב הוכחה זו באופן סיסטמתי להיות על כל קבוצה סופית של קבוצות פתוחות. יהי 1 ושי1 פתוחה ולכן ישנו 1 על מרחב זה 1 על מרחב זה 1 שי1 פתוחה ולכן ישנו 1 בין מוחה בי1 מרחב בי1 בין מוחה ביים מ

25.3.2025 - 2 שיעור 2 25.3.2025 טופולוגיה – המשך

קיים $Z=\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ ב־ $\frac{s}{2^k}$ סביב $\frac{s}{2^k}$ את הכדור ברדיוס או לכן נבחן את המפלה כולו. איז א ומתקיים ברחב מרחב ומתקיים את התנאי לבסיס. נניח ש" $y=(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\in B_{\frac{s}{2^k}}(x)$ אז המטרה שלנו היא להראות שהכדור שעתה בחרנו מקיים את התנאי לבסיס. נניח ש"כולו היא להראות שהכדור שעתה בחרנו מקיים את התנאי לבסיס.

$$\frac{s}{2^k} > \rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} \ge \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

$$\Rightarrow s > \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

$$\Rightarrow \rho_k(x_k, y_k) < r$$

$$\Rightarrow y_k \in B_r(x_k) \subseteq U_k$$

, נעבור לתנאי השני, נתבונן בכדור הפתוח סביב Z סביב, $B_r(x)$, $x\in Z$ כאשור השני, נתבונן בכדור הפתוח מוגדר להיות,

$$B_r(x) = \left\{ y \in Z \mid \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} < r \right\}$$

, על־ידי, המוגדרת על־ידי, כלומר הזנב של את טור הזנב לומר נחסום את כלומר כלומר המוגדרת אר המוגדרת על־ידי, כלומר ב $V\subseteq Z$ ההי כל על כלומר כלומר כלומר הזנב את כלומר כלומר כלומר ביש המוגדרת על־ידי, כלומר כלומר כלומר ביש המוגדרת על־ידי, כלומר ביש המוגדרת ביש המוגדרת על־ידי, כלומר ביש המוגדרת ביש ביש המוגדרת

$$V = \left\{ (y_1,\ldots,y_M) \in \prod_{i=1}^M \mid \sum_{i=1}^M rac{1}{2^i} rac{
ho_i(x_i,y_i)}{1+
ho_i(x_i,y_i)} < rac{r}{2}
ight\}$$
ואנו טוענים כי $V imes \prod_{i=M+1}^\infty X_i \subseteq B_r(x)$ ואנו טוענים כי

П

31.3.2025 - 3 שיעור 3

3.1 סגירות

בדיוק כמו במרחבים מטריים, גם במרחב טופולוגי נרצה לדון במניפולציות על קבוצות במרחב, נתחיל בהגדרת הקונספט של סגור של קבוצה במרחב מופולוגי

A של הסגור את הסגור. נגדיר על קבוצה $A\subseteq X$ הגדרה ותהי קבוצה מרחב טופולוגי) היי היי (סגור של קבוצה כשלהי. הסגור של $A\subseteq X$ מרחב טופולוגי) מרחב טופולוגיA את את הסגור המכילה את A, כלומר,

$$\overline{A} = \bigcap_{X \setminus F \in \tau} F$$

בהתאם נקבל מספר תכונות ראשוניות ודומות לתכונות שראינו בעבר,

למה 3.2 התכונות הבאות מתקיימות,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
 .1

. כאשר במקרה זה אין בהכרח שוויון. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. 2

, אז מתקיים, אז מתקיים, $A=\mathbb{Q}, B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ וכן $X=\mathbb{R}$ שוויון, נגדיר שוויון, מתקיים, אז מתקיים, אז מתקיים,

$$\emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

טענה 3.3 אם (X, au) מרחב טופולוגי ו- $A\subseteq X$, אז,

$$x \in \overline{A} \iff \forall U \in \tau, x \in U \to U \cap A \neq \emptyset$$

Aאם ורק אם כל קבוצה פתוחה ביב הנקודה לא Aאם ורק אם כל קבוצה פתוחה סביב הנקודה לא A

 $x
otin \overline{A}\iff \exists U\in au, x\in U\land U\cap A=\emptyset$ הטענה, כלומר שלילת את נראה הוכחה. נראה הוכחה

A- אבל \overline{A} פתוחה וזרה מהגדרתה $X\setminus \overline{A}$ אבל $x\in X\setminus \overline{A}$ ולכן ולכן $x\notin \overline{A}$

 $x
otin \overline{A}$ בכיוון השני אם יש $X
otin \overline{A}\subseteq F$ פתוחה כך ש־ $X
otin U\cap A=\emptyset$ אז ע $X
otin \overline{A}\subseteq F$ סגורה ומכילה את $X
otin \overline{A}\subseteq F$ ובהכרח

 $A^\circ = igcup_{U \in au, U \subset A} U$, הגדרה את הפנים את נגדיר את נגדיר ושפה) אנדרה 3.4 הגדרה

כלומר הפנים הוא איחוד כל הקבוצות הפנימיות הפתוחות של A, ובשל הסגירות של הטופולוגיה לאיחוד, נקבל כך את הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר שחלקית ל- $A = \overline{A} \setminus A^\circ$ היותר $A = \overline{A} \setminus A^\circ$

נבחין בהגדרה של סביבה ונשתמש בהגדרה זו כדי להגדיר מונח חדש.

 $.x \in U \subseteq L$ יש כך ער פרימת קבוצה פתוחה $t \in U \subseteq L$ יש כל באמר של באמר איז מביבה של נקודה) נאמר של $t \in L$

אם אם הצטברות של היא נקודת הצטברות $x\in A$ ו תת־קבוצה כלשהי, והי $x\in A$ ו נקודת הצטברות של חדוב טופולוגי, תהי $x\in A$ ו תת־קבוצה כלשהי, ו־ $x\in A$ ו נקודה מ־x שונה מ־x, כלומר,

$$\forall U \in \tau, x \in U \implies \exists y \in (U \setminus \{x\}) \cap A$$

A את קבוצת נקודות ההצטברות של A'

נרצה להסתכל על נקודות הצטברות כנקודות שלא משנה כמה קרוב אנחנו מסתכלים אליהן, עדיין נוכל למצוא בסביבתן נקודות נוספות. במובן הזה ברור שהן נמצאות בקרבת נקודות בפנים, אך עלולות להיות גם נקודות לא פנימיות שמקיימות טענה כזו.

 $\overline{A}=A\cup A'$ מענה 3.7 מתקיים

היא אוסף כל \overline{A} היא אוסף הטענה ש־ \overline{A} או או \overline{A} או אז או \overline{A} או אוסף היא אוסף מביבה של x יש נקודה מ \overline{A} שונה מ־ \overline{A} אז או אוסף היא אוסף מביבה של \overline{A} או אוסף לאר היק נובע ש־ \overline{A} או אוסף כל סביבה שלהן המכילה את \overline{A} בחיתוך לא ריק נובע ש־ \overline{A} אל נובע ש־ \overline{A} לכן נובע ש־ \overline{A} אונה מבילה אומר המכילה את מבילה אומר מביבה שלהן המכילה את מבילה אומר מביבה שלהן המכילה אומר מביבה שלה מביבה שלהן המכילה אומר מביבה שלה מביבה שלהן המכילה אומר מביבה שלה מביבה שלה מביבה שלה מביבה שלחור מביבה שלה מביבה שלה מביבה שלחים המביבה שלחים המ

בכיוון השני נניח ש". $x\in A$ אז לכל $x\notin A$ כך ש". $x\in A$ מתקיים $x\in A$ אם אם $x\in A$ אם אז לכל $x\in A$ אז לכל $x\in A$ אז לכל $x\in A\cup A'$ מתקיים $x\in A\cup A'$ מרכי משני $x\in A\cup A'$ מרכי משני מש". $\overline{A}=A\cup A'$

31.3.2025 - 3 שיעור 3 שיעור 3

3.2 השלמות לרציפות

f:X o Y ופונקפט של רציפות ופונקציה איז מרחב טופולוגי ויX קבוצה כלשהי, ופונקציה איז בחול בחליני ויזכר בהגדרה לדון בקונספט של רציפות באופן רחב יותר. בהינתן להגדיר טופולוגיה על X כך שיf רציפה.

X איא מהבסיס משרית מושרית עליו ולהגדיר לבסיס ולהרחיבה הרחיבה היא תת־בסיס, היא הת־בסיס, ואפשר הרחיבה לבסיס ולהגדיר עליו $\{f^{-1}(U) \mid U \in au_Y\}$

. ביותר f עבורה f עבורה f עבורה f עבורה f טענה f אינים עבורה f עבורה f עבורה f טענה אינים עבורה f

 $\{U\subseteq Y\mid f^{-1}(U)\in au_X\}$ את נוכל להגדיר f:X o Y נוכל עם פונקציה עם יחד עם וקבוצה לשהי ווו ויוו הטופולוגיה וווו הטופולוגיה ביותר על עם ביותר על עם עם עם ועם ועם לבנות בסיס וטופולוגיה על f באופן דומה ביותר על עם ביותר ע

טענה 3.9 (שקילות לרציפות) יהיו מרחבים טופולוגיים (X, au_X), ותהי אז התנאים הבאים שקולים, יהיו מרחבים טופולוגיים (שקילות לרציפות)

- 1.2 רציפה לפי f .1
- X^{-1} סגורה $f^{-1}(F)$, $F\subseteq Y$ סגורה ב-2. .2 הגדרה זו עוזרת לנו לדון בקבוצות סגורות במקום פתוחות
- Xבסיס לטופולוגיה של Y אז לכל $B\in\mathcal{B}$ מתקיים ש $f^{-1}(B)$ פתוחה ב- B מתקיים של לנו לדון בכיסים ובכך לפשט את העבודה עם טופולוגיות הגדרה זו מאפשרת לנו לדון בבסיסים ובכך לפשט את העבודה עם טופולוגיות
- x של סביבה $f^{-1}(W)$ מתקיים שf(x) של $W\subseteq Y$ סביבה של $x\in X$ לכל .4
- רציפה. $f\mid_{U_{\alpha}}:U_{\alpha}\to Y$ מתקיים $\alpha\in\Omega$ מתקיים γ , ער γ , ער γ , ער אומר γ , כלומר אווער γ , ער כלומר אווער γ , ער אווער אווער ביסוי פתוח γ , ער אווער אווער ביסוי פתוח γ , ער אווער ביסוי פתוח אווער אווער אווער ביסוי פתוח אווער אווער אווער ביסוי פתוח אווער איינער אווער אייער אווער איינער אווער אווער אווער איינער אווער אייער אווער אווער אווער אווער אווער אווער איינער אווער אווער אווער אווער איינער אווער איינער איינער איינער איינער איינער איינער אייער איינער איינער
 - . רציפה. $f\mid_{F_i}:F_i\to Y$ כך שכל $1\leq i\leq n$ כורות עבור $1\leq i\leq n$ עבור $1\leq i\leq n$ עבור עבור $1\leq i\leq n$ עבור $1\leq i\leq n$
 - $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ מתקיים $A \subseteq X$ לכל.

. תוחות שירות על קבוצות הרציפות של משלימים הגדרה שירות מהגדרה שירות פתוחות. בובע ישירות מהגדרה של משלימים והגדרת מהגדרה שירות מהגדרה שירות מהגדרה של משלימים והגדרת הרציפות על קבוצות פתוחות.

- היא איחוד השני כל קבוצה הטענה. לכיוון השני כך להראות היא קבוצה פתוחה, ונוכל כך להראות את נכונות הטענה. לכיוון השני כל קבוצה היא איחוד $f^{-1}(\bigcup U_{\alpha}) = \bigcup f^{-1}(U_{\alpha})$, של קבוצות מהבסיס, U_{α} , ור
- $x\in f^{-1}(U)\subseteq$ ש־ט פתוחה, לכן נובע ש־ט $f(x)\in U\subseteq W$ אז קיימת של f(x) אז סביבה של $f(x)\in W\subseteq Y$ וכן $f(x)\in W$ פתוחה. $f^{-1}(U)$ פתוחה.
- היא $f^{-1}(U)$ הנחה אז צריך להראות שר $f^{-1}(U)$ פתוחה. תהי תהי $f^{-1}(U)$ אם צריך להראות שר $f^{-1}(U)$ פתוחה אז צריך להראות אז צריך להראות פתוחה, ונסיק שר $f^{-1}(U)=\bigcup_{x\in f^{-1}(U)}V_x$ פתוחה, ונסיק שר $f^{-1}(U)=\bigcup_{x\in f^{-1}(U)}V_x$ פתוחה, ונסיק שר
 - . נוכל לבחור כיסוי טריוויאלי. נוכל לבחור נוכל כיסוי נוכל וויאלי. ביסוי נוכל לבחור נוכל לבחור נוכל לבחור נוכל לבחור כיסוי טריוויאלי.
- - . נבחר את לכיסוי סגור של עצמה. $1 \Longrightarrow 6$
- עששינו בימה למהלך ההוכחה רציפה. כעת ההוכחה לההלך שעשינו $f\mid_{F_i}: F_i \to Y$, ונניח גם שלכל של כיסוי סגור סופי אל כיסוי סגור כיסוי סגור אפיון רציפות בעזרת $f\mid_{F_i}: F_i \to Y$, אבל כעת אפיון רציפות בעזרת $f\mid_{F_i}: F_i \to Y$, ואיחוד סופי על סגורות הוא סגור.
- $f(x) \notin \overline{f(A)}$ שילה שי $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$, נניח בשלילה שי $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$, יהי $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$, יהי $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$, נניח בשלילה שי $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ אבל $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ פתוחה ב־ $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ אבל $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ פתוחה ב- $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ אבל $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ פתוחה ב- $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ אבל $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ וקיבלנו $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ אבל $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ פתוחה ב- $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ אבל $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ פתוחה ב- $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ אבל $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ וקיבלנו
 - סגורה, אז, $F \subseteq Y$ מגורה, אז. $7 \implies 2$

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \overset{\text{finith}}{\subseteq} \subseteq \overline{F} \overset{\text{finith}}{=} F \ \Longrightarrow \ \overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$$

31.3.2025 - 3 שיעור 3 שיעור 3

, לכן, $f^{-1}(F)\subseteq\overline{f^{-1}(F)}$ מהגדרת סגור נוכל להסיק ש

$$\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$$

Xבפרט $f^{-1}(F)$ סגורה ב-

נבחן תכונה מעניינת שלא תשרת אותנו רבות, אך כן מעלה שאלות,

I=[0,1] עבור f:I imes X o X הציבה עופציה שי ש (Contractible) אם ש־ עבור עבור אמר מרחב טופולוגי, נאמר ש־ X כוויץ אם יש פונקציה רציפה איז יהי איז מרחב טופולוגי, נאמר איז X כך ש־ X בעבור X הגדרה עבור X העבור X הגדרה עבור X הגדרה עבור X האיז ישר X בעבור X הגדרה עבור X בעבור X בעבור X האיז ישר X בעבור X

 $x\mapsto x_1$ כסמן גם $f_t:X\mapsto X$ כאשר הפונקציה הקבועה וכן נקבל $f_t:X\mapsto X$ כאשר כאשר בסמן גם

f(t,x)=(1-t)x נגדיר על־ידי המוגדרת f:I imes I o I ואת את מה 3.2 נגדיר 3.2 נגדיר

. נגדיר $\mathbb R$ כוויצה בדיוק באותו על־ידי $f:I imes\mathbb R$ נגדיר אופן. נגדיר על־ידי $f:I imes\mathbb R$ ונקבל שגם $X=\mathbb R$

תרגיל S^1 כוויץ. הראו מרגיל 3.1

נחזור לדבר על פונקציות רציפות.

f(x)(i)=xכך לכל $f:(\mathbb{R}, au_\mathbb{R}) o(\mathbb{R}^\mathbb{N}, au)$ לכל לכל 3.2 נתבונן בי

הקופסה. עופולוגיית אי לא רציפה הופלוגיית המכפלה, טופולוגיית הקופסה כהעתקה כאשר לא רציפה או לא רציפה הראו שי f

פתרון בתבונן ב T_n בעופולוגיית הקופסה היא לא קבוצה פתוחה, אך עד הקופסה היא לא פתרון פתרון אדן אדי קבוצה פתוחה, אך T_n בעופר פתוחה, אך בעופר היא לא רציפה. רציפה, לכן בטופולוגיית הקופסה היא לא רציפה.

לעומת זאת בטופולוגיית המכפלה היא אכן רציפה.

רציפה ערכית די־חד ערכית $f:X\to Y$ היא העתקה איז מופולוגיים שני מרחבים בין שני מרחבים הומיאומורפיזם (הומיאומורפיזם הומיאומורפיזם בין שני מרחבים טופולוגיים אונים היא. $f:X\to Y$ היא היא.

אנו נרצה להסתכל על הומיאומורפיזם כאיזומורפיזם של מרחבים טופולוגיים.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

. ולכן האי גם על, ואכן המרחבים הומיאומורפים. $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0, f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 1$ ולכן המרחבים הומיאומורפים.

 $z\mapsto rac{z-i}{z+i}$ על־ידי $\psi:\eta o D$ נגדיר גם $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ ואת ואת $\eta=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid x,y\in\mathbb{R},y>0\}$ נגדיר את נגדיר את הוכחה כי זהו אכן הומיאומורפיזם מושארת לקורא.

נבחין כי הדוגמה האחרונה אינה אלא העתקת מביוס, העתקה קונפורמית ואנליטית.

. המרחבים בין שני המרחבים כי אין אונים כי אין טוענים אונים אנו אונים א

נבחן אבל הערכית ועל, ארכית ערכית ועל, ארכית דיחד ערכית ועל, ארכית אדר דיחד ערכית לדוגמה, לדוגמה, לדוגמה לא וועל, ארכית לא לדוגמה, ארכית ועל, ארכית ועל, ארכית ועל, ארכית ארכית ועל, ארכית

נניח שיש העתקה חד־חד ערכית אך מן הצד מיJיהוציא מיJנקודה יחידה, אז נקבל איחוד זר של שתי קבוצות זרות, אך מן הצד השני הוצאת נקודה יחידה מהמעגל משאיר אותו כקבוצה קשירה. ההוכחה המלאה אומנם סבוכה יותר, אך הצבענו פה על הבדל מהותי בין שני המרחבים.

. הראו כי \mathbb{R}^2 לא הומיאומורפים תרגיל 3.3 הראו כי

?האם גם \mathbb{R}^2 ו- \mathbb{R}^3 הומיאומורפים

 $f(U)\subseteq Y$ מתקיים (סגורה) פתוחה לכל אם לכל (סגורה) העתקה תיקרא העתקה f:X o Y העתקה העתקה פתוחה (סגורה) ב-3.12 העתקה פתוחה (סגורה) ב-Y

. המוגדרת ולא סגורה היא רציפה, היא היא $f(x)=x^2$ ידי על-ידי המוגדרת המוגדר העיפה, זוגמה היא הוגדרת לידי המוגדרת המוג

. האבל אבל אבר רציף, הוא הוא $x\mapsto x$ ידי על־ידי המוגדר ($0,1)\hookrightarrow\mathbb{R}$ השיכון 3.7 הנומה השיכון

. ביפה. אך אך אד סגורה, סגורה היא טריוויאלית טריוויאלית המוגדרת $\{a,b\} o \{a,b\}$

 \Box

7.4.2025 - 4 שיעור 4

אקסיומות ההפרדה 4.1

מטרתנו היא לאפיין את הקונספט של הפרדה, כלומר מתי אנו יכולים לחסום חלקים שונים במרחב הטופולוגי בקבוצות פתוחות. במקרים המטריים אף ראינו בעבר כמה הפרד היא מועילה, היא פתח לדיון נרחב.

הגדרה אם להפרדה אם x,y ניתנים להפרדה אם קיימות קבוצות שה איני מאר $x,y \in X$. נאמר ש $x,y \in X$ ניתנים להפרדה אם קיימות קבוצות פתוחות $x,y \in X$ בארכונות האלה זרות, וכן $x,y \in X$.

עבור $x \in U, A \subseteq V$ אם להפרדה ניתנים והאיבר שהקבוצה נאמר נאמר $x \in X, A \subseteq X$ עבור

. וזרות. $A\subseteq U, B\subseteq V$ ביתנות להפרדה ניתנות $A\cap B=\emptyset$ כך ש־ $A, B\subseteq X$ לבסוף נאמר ש

עתה משהגדרנו את הקונספט הכללי של הפרדה, נגדיר באופן בהיר ועקבי סוגים שונים של "רמת" ההפרדה שמרחב טופולוגי מקיים.

האקסיומות את עבור $i\in\{0,1,2,3,4\}$ עבור עבור את מקיים את מקיים את יקרא מרחב איקרא יקרא מרחב מופולוגי א יקרא מרחב את יקרא מרחב את יקרא מרחב א יקרא יקרא מרחב וופולוגי א יקרא מרחב את המוגדרות להלן.

- אחרת אך את הנקודות אחת שמכילה פתוחה פתוחה קבוצה $x,y\in X$ לכל , T_0
- השנייה את הנקודה המכילה את המכילה את המכילה את אחת הנקודות את אחת המכילה את קיימת פתוחה את אחת אחת אחת אחת אחת $x,y\in X$ קיימת פתוחה אם אד על את הראשונה. כלומר אם אז קיימת $tx\neq y$ אז קיימת אחת לא את הראשונה.
- - ניתנות להפרדה x, אונם X בותנות להפרדה x, אונם X בותנות להפרדה x, אונם X ביתנות להפרדה המרחב הוא T_3
 - ניתנות להפרדה $A,B\subseteq X$ אם המרחב אם שכל זוג תלי, כלומר כלומר ניתנות להפרדה אם T_1 אם המרחב הוא T_4

נעבור למספר טענות הנוגעות לסוגי ההפרדה השונים.

סענה $\{x\}\subseteq X$ סענה אם ורק אם לתקיים אם מחקיים אם T_1

U=u בקבל שגם $x\notin U_y$ כך ש $U_y\subseteq X$ פתוחה קבוצה פתוחה עלכל $X\ni y\neq x$ אז לכל $X\in X$ אז לכל האכרות נקבע נקודה $U^C=\{x\}$ היא קבוצה פתוחה. לכן סגורה. אבל מההגדרה שסיפקנו ל-U נקבל ש $U^C=\{x\}$ היא קבוצה פתוחה. לכן סגורה.

טענה 4.4 אם מרחב מטרי הוא T_n אז הוא גם $T_1 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ מענה 4.4 אז הוא גם T_n אז הוא גם T_n אז הוא גם ווענה 4.4 אקסיומות ההפרדה) מענה T_n אז הוא גם ווענה T_n אז הוא גם ווענה א

בעוד שלא נוכיח טענה זו, נבהיר כי היא נובעת ישירות מהגדרת ההפרדה. נבחין כי המספור הוא עתה לא ארעי כפי שאולי היינו שוגים לחשוב, אלא האקסיומות מסודרות לפי "כוחן" בהפרדת דברים במרחב. נמשיך ונראה טענה שתיצוק משמעות למרחבים נורמליים.

V סענה $A\subseteq U$ קיימת למרחב פתוחה A וורק אם לכל קבוצה סגורה A וורק אם לכל קבוצה פתוחה אם פתוחה $A\subseteq U$ מענה $A\subseteq U$ מענה לכל קבוצה פתוחה $A\subseteq V\subseteq \overline{V}\subseteq U$

כלומר לכל קבוצה סגורה וקבוצה פתוחה שמכילה אותה, יש קבוצה פתוחה ביניהן כך שגם הסגור שלה ביניהן.

, כך שמתקיים, פתוחה על קיימת קבוצה פתוחה על אז קיימת קבוצה על גויח השני, נניח ש $A,B\subseteq X\setminus B$ בכיוון זרות ולכן אז קבוצות סגורות סגורות ולכן אז קיימת אז קבוצות פתוחה אז קבוצות פתוחה על כך שמתקיים,

$$A \subset V \subset \overline{V} \subset X \setminus B$$

 $V\cap (X\setminus \overline{V})=\emptyset$ ונובע גם ונובע $B\subseteq X\setminus \overline{V}$ ולכן

טענה 4.6 (תX imes X) שקול למרחב האוסדורף, X imes X מרחב האוסדורף, כלומר מרחב X imes X מענה פולוגיית המכפלה.

7.4.2025-4 שיעור 4 שיעור 4

, כי, נבחין כי, $U_{x,y}\cap V_{x,y})\cap \Delta_X=\emptyset$ מרחב האוסדות, כלומר $y\in V_{x,y}$ וי $x\in U_{x,y}$ שי x
eq y לכל לכל מרחב האוסדורף. לכל מרחב האוסדורף. לכל מרחב האוסדורף.

$$X \times X \setminus \Delta_X = \bigcup_{x \neq y} (U_{x,y} \times V_{x,y})$$

ובטופולוגיית המכפלה זוהי קבוצה פתוחה.

בכיוון השני נניח ש־ $(x,y)\in (X\times X)\setminus \Delta_X$ או א x
eq y פתוחה, אם $X\times X\setminus \Delta_X$ או הגדרת טופולוגיית בכיוון השני נניח ש־ $(x,y)\in U\times V\subseteq X^2\setminus \Delta_X$ ואף ש־ $(x,y)\in U\times V\subseteq X^2\setminus \Delta_X$ פתוחות כך ש־ $(x,y)\in U\times V\subseteq X^2\setminus \Delta_X$

 T_i טענה Y_i או גם אז גם אז גם Y_i הוא מרחב אז גם א גם א גם א גם א גם א גם או גם אז גם אז גם אז גם אז מרחב אז גם אז מרחב אז גם אז מרחב ווא מרחב אז גם א

. T_3 בעבור הטענה נובעת ישירות מהגדרת אקסיומות ההפרדה עבור הטענה נובעת ישירות הטענה וובעת אקסיומות ההפרדה וובעת ישירות מהגדרת אקסיומות החובעת ישירות מהגדרת אקסיומות אקסיומות וובעת ישירות הטענה וובעת ישירות מהגדרת אקסיומות החובעת ישירות הטענה וובעת ישירות המענה עבור החובעת ישירות המענה עבור החובעת ישירות החובעת החובעת החובעת החובעת ישירות החובעת הח

נניח ש־X הוא T_3 נניח ש $Y\in Y$ יהי ע $Y\in Y$ יהי ע $Y\in Y$ הוא רגולרי הוא המת־המרחב שנראה שתת־המרחב הוא דונן ויקי ע $Y\in Y$ ויהי ע $Y\in Y$ ויהי ע $Y\in Y$ מפרידות בין ע $Y\in Y$ ש־X לכן יש קבוצה סגורה ב־X מפרידות בין ע $Y\in Y$ ש־X לכן יש קבוצה סגורה ב־X מפרידות בין ע $Y\in Y$ וויקי ע $Y\in Y$ הער עוד עוד ע $Y\in Y$ ויקימות ע $Y\in Y$ הער עוד עוד עוד עוד עוד ער עוד ער עוד עוד עוד עוד ער עוד ער עוד עוד ער ער עד ער עד ער ער עד עד ער עד עד ער עד עד ער עד עד ער עד עד ער עד עד עד ער עד עד ער עד עד ער ער עד ער ער עד ער עד ער

הוא דוגמות רבות נוכל למצוא אדוגמות למרחבים של Counter examples in Topology $.T_4$ הוא ספר שבו נוכל למצוא דוגמות למרחבים למרחבים כאלה.

X אוז גם $X \times Y$ אז גם $i \in \{1,2,3\}$ טענה X אם מרחבים מכפלה) אם או מרחבי מכפלה אז גם X אוז גם אז איז גם אוז מרחבים מענה און מענה און מרחבים מכפלה

, הקבוצה, את נוכל להגדיר אז או נוכל $(x,y)\in X imes Y$ אם אם עבור את הקבוצה.

$$(X \times (Y \setminus \{y\})) \cup ((X \setminus \{x\}) \times Y)$$

זוהי קבוצה סגורה מהגדרת טופולוגיית המכפלה.

. רגולרי $X \times Y$ יש שלינו להראות ועלינו ורגולריים אם T_1 הם X, Yיש הנניח נניח להראות עבור להוכחת אם X, Yיש הניח הטענה עבור להוכחת הטענה אונים או

נניח ש"ל $z\in U\subseteq Z$ סגורה וכן ש"ל $z\in U\subseteq Z$ סגורה ורק אם לכל $z\in U\subseteq Z$ סגורה ורק אם לכל $z\in U\subseteq Z$. נניח ש"ל סגורה וכן עבור $z\in U\subseteq Z$. נניח ש"ל $z\in U\subseteq Z$ פתוחה. תוך שימוש בלמה, נסמן בלמה, נסמן $w=(X\times Y)\setminus X$ פתוחה. תוך שימוש בלמה, נסמן $v=(X\times Y)\setminus X$ פתוחות כך ש"ל $v=(X\times Y)$ ברע בי $v=(X\times Y)$ בתוחות. אז מתקיים עוד מתקיים $v=(X\times Y)$ ברע בי $v=(X\times Y)$ ברע בי $v=(X\times Y)$ בתוחות. אז מתקיים בי $v=(X\times Y)$

 $z\in V, C\subseteq W, Z\setminus W\subseteq$ בי כך כך אורות זרות מגורות סגורה, סגורה, כב עבור נסמן בעבור להוכחת מגורה, כב עבור להוכחת מגורה, בעבור להוכחת מגורה, בעבור להוכחת מגורה, בעבור לכיוון הראשון בעבור כב עבור כב בעבור כב עבור בעבור בע

האפיון האחרון והחשוב שנראה עתה למרחבים המקיימים אקסיומות הפרדה הוא הקשר למרחבים מטריים.

 T_4 מענה (אז מטריי, אז אז מטריים) אם מטריים מטריי, אז הוא מרחב מטנה (א מענה 1.4 הפרדה במרחבים מטריים)

הוכחה. נניח ש $X \subseteq X$ תת־קבוצה כלשהי ו $X \in X$. נרחיב את הגדרת המטריקה להגדרת הקוטר, כלומר נאמר שמתקיים,

$$\rho(x, E) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in E\}$$

.3 מטענה מטענה כמסקנה כמסקנה אז p(x,E)>0 אז או $x\notin E$ מסענה מטענה ב

 $V=igcup_{b\in B}B_{
ho(b,A)}(b)$ ו בניח ש $U=igcup_{a\in A}B_{
ho(a,B)}(a)$ אז אי $a\in A,\
ho(a,B)>0, \forall b\in B,\
ho(b,A)>0$ בניח זרות. $A,B\subseteq X$ הן פתוחות וזרות.

נעיר שהכיוון ההפוך נקרא מרחב מטריזבילי, ונעסוק בנושא זה בהמשך הקורס. נעבור לדוגמות.

 T_1 אבל א T_2 אבל הוא מרחב X הוא במקרה הא X במקרה אבל א $X=\{x,y\}$ עם הטופולוגיה אבל א גדיר $X=\{x,y\}$

7.4.2025-4 שיעור 4 שיעור 4 4

במקרה הה בסיס של כל הקבוצות שמשלימן סופי, כלומר מהבסיס של המושרית מהבסיס של במקרה מהבסיס על נגדיר $X=\mathbb{N}$ נגדיר במקרה נגדיר $X=\mathbb{N}$ במקרה זה הוא מרחב במקרה לא במקרה המושרית מהבסיס של כל הקבוצות שמשלימן היא מרחב במקרה המושרית מהבסיס של כל הקבוצות מהבסיס במקרה המושרית במקרה במקרה המושרית במקרה במקרה

 $.T_3$ אבל אבל אבר שהוא מרחב מרחב 4.4 נראה דוגמה 4.4 אבל אבר

, יחד עם הבסיס, \mathbb{R} הקבוצה מעל כמרחב כמרחב הטופולוגי הבסיס, נגדיר את נגדיר במיסופולוגי $\mathbb{R}_{\frac{1}{m}}$

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\} \cup \{(a,b) \setminus \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \mid x, y \in \mathbb{R}, x < y\}$$

ההוכחה ש־ \mathcal{B} מושארת לקורא.

. נבחין אוסדורף, שגם שגם שגם להסיק לכן מרחב האוסדורף, אוסדורה האחרונה של $\mathbb{R}_{\frac{1}{n}}$ מרחב האוסדורף, לכן נוכל להסיק שגם

נראה ש־ $\mathbb{R}_{\frac{1}{n}}$ לא $\mathbb{R}_{\frac{1}{n}}$ (כי $\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ סגורה, ונראה כי לא ניתן להפריד בינה לבין 0. נניח ש־ $0\in U$ בחין כי $\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ סגורה, ונראה כי לא ניתן להפריד בינה לבין 0. נניח ש־0 כו 0 כי 0 פתוחה אז 0 מכילה איבר בסיס, לכן 0 מכילה קבוצה מהצורה 0 עבור 0 עבור 0 פתוחה אז 0 ש־0 פתוחה אז 0 מכילה איבר בסיס, לכן 0 מכילה קבוצה לבן 0 מכילה 0 בינה 0 פתוחה אז 0 פתוחה איבר בסיס, לכן 0 מכילה איבר בסיס, לכן 0 מכילה 0 פתוחה אז 0 פתוחה אז 0 פתוחה איבר בסיס, לכן 0 מכילה איבר בסיס, לכן 0 מכילה 0 פתוחה אז 0 פתוחה אז 0 פתוחה איבר בסיס, לכן 0 מכילה איבר בסיס, לוביר בסיס, לוביה איבר בסיס, לו

$.T_4$ אבל אבל האהא שהוא למרחב לא דוגמה נראה נראה 4.5 נראה אבל אבל אבל אבל אבל האחוא אבל לא

 $\mathbb{R}_L imes \mathbb{R}_L$ אז T_3 בפרט גם הנוצרת על T_4 הוא מרחב \mathbb{R}_L אז הוא $L=\{[a,b)\mid a< b, a,b\in\mathbb{R}\}$ עם הבסיס עם הנוצרת על T_3 היא בהכרח מטענה שראינו קודם על מכפלות מרחבי הפרדה.

היא $A\subseteq L$ הטופולוגיה נבחין כל תת־קבוצה היא הטופולוגיה היא מרחב \mathbb{R}^2_L היא מושרית על מי \mathbb{R}^2_L היא הטופולוגיה בחין כל תת־קבוצה בחין כי הטופולוגיה המשך הסתירה ל־ T_4 :

8.4.2025 - 5 שיעור 5

אקסיומות ההפרדה — המשך 5.1

נמשיך בהוכחת הסתירה עבור הדוגמה האחרונה מהשיעור הקודם.

הוא הטופולוגיה המושרית מ־ \mathbb{R}^2_L על A היא הטופולוגיה קבוצה בנוסף הגדרנו את הקבוצה $L=\{(-x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2_L$ אוהי המושרית מ" $L=\{(-x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2_L$ על A היא הטופולוגיה המושרית על $A=L\cap C_A$ הסקנו גם שכל $A\subseteq L\cap C_A$ היא סגורה ב"L=1, כלומר לכל $A\subseteq L$ יש קבוצה $C_A\subseteq\mathbb{R}^2_L$ ולכן גם A סגורה ב"L=1, נניח ש"L=1 היא היא L=1 היא מרחב נורמלי, ולכן כל שתי קבוצות סגורות זרות ניתנות להפרדה. בפרט לכל $A\subseteq L$ היש קבוצות פתוחות זרות $A\subseteq L$ נניח ש"A=1, נכך ש"A=1, בפרט לכל A=1 ווג קבוע כזה (וניצור מיפוי). בפרט לכל A=1 אז גם A=1 אז גם A=1 אז גם A=1 הוכר את A=1 אז גם A=1 ולכן A=1 ולכן A=1 אז גם A=1 היא הטופולוגיה המושרית בנוסף היא מור בות המוחב בנוסף היא מורה ב"A=1 היש המוחב בנוסף היא מורה ב"A=1 היש המוחב בנוסף היא מורה ב"A=1 היא מורה ב"A=1 היש המוחב בנוסף היא מורה ב"A=1 היא מוחב בנוסף היא מורה ב"A=1 הוא מוחב בנוסף היא מורה ב"A=1 הוא מוחב בנוסף היא מורה ב"A=1 הוא מוחב בנוסף היא מורה ב"A=1 היא מוחב בנוסף היות בנוסף היא מוחב בנוסף היים בנוסף היא מוחב בנוסף היא מוחב בנוסף היים בנוסף היא מוחב בנוסף היא מוחב

. ערכית, ולכן הד־חד שהיא שהכיח לנו להוכיח ונותר מתירה, ולכן מקבלת ערכית, ולכן ψ

נניח ש־ $V_A\cap D\neq\emptyset$, אז $\emptyset\neq A$, אז $\emptyset\neq A$ כי $U_A\neq\emptyset$ כי $U_A\neq\emptyset$. גם $U_A\neq\emptyset$, אם שכן $U_A\neq\emptyset$, אז $U_A\neq\emptyset$ כי $U_A\neq\emptyset$ כי $U_A\neq\emptyset$ כי $U_A\neq\emptyset$ כי $U_A\neq\emptyset$ בפופה וי $U_A\neq\emptyset$ בוכע שכן $U_A\neq\emptyset$ כך ש־ $U_A\neq\emptyset$ ו־ $U_A\neq\emptyset$ ו־ $U_A\neq\emptyset$ ו־בהתאם $U_A\neq\emptyset$ ו־בהתאם $U_A\neq\emptyset$ ויו אף קבוצה פתוחה. נסיק ש־ $U_A\neq\emptyset$ ש־ $U_A\cap U_B\neq\emptyset$ אז $U_A\cap U_B\neq\emptyset$ מקיימת $U_A\neq\emptyset$ ו־ $U_A\cap U_B\neq\emptyset$ ובהתאם $U_A\neq\emptyset$ ויו אף $U_A\cap U_B\neq\emptyset$ ווו אף $U_A\cap U_A\neq\emptyset$ ווו אף $U_A\cap U_A\neq\emptyset$ ווו אף $U_A\cap U_A\neq\emptyset$ ווו אף $U_A\cap U_A\neq\emptyset$ ווו

וזה בלתי $\mathcal{P}(L)\hookrightarrow\mathcal{P}(D)\hookrightarrow L$ אז נוכל לבנות איז $|\mathbb{R}|=|L|$ אבל שיכון שיכון שיכון \mathbb{R} . יש לנו שיכון שיכון שיכון $\mathcal{P}(D)\hookrightarrow\mathbb{R}$ אפשרי.

 T_4 במרחבי במיוחד משמעותית נסיים עם למה

f:X o [0,1] אם X מרחב טופולוגי T_4 , אז לכל זוג קבוצות סגורות זרות $C,D\subseteq X$, קיימת פונקציה רציפה T_4 אז לכל זוג קבוצות סגורות T_4 אוריסון) אם T_4 מרחב טופולוגי T_4 אז לכל זוג קבוצות סגורות זרות T_4 אוריסון.

קהוח, עבור ווער C_0 כי סטורה C_0 נניח ש־ C_0 מניח ש־ C_0 נניח ש־ C_0 וכן C_0 וכן C_0 וכן C_0 סטורה אלכן פרוחה. נניח ש־ C_0 מרחב באופן רקורסיבי קבוצות מדובר בקבוצה סגורה ובקבוצה פתוחה. נגדיר כך באופן רקורסיבי קבוצות C_0 שוב מדובר בקבוצה סגורה ובקבוצה פתוחה. נגדיר כך באופן רקורסיבי קבוצות C_0 שוב מדובר בקבוצה סגורה ובקבוצה פתוחה. נגדיר כך באופן רקורסיבי קבוצות C_0 שוב מדובר בקבוצה סגורה ובקבוצה פתוחה. נגדיר כך באופן רקורסיבי קבוצות C_0 שוב מדובר בקבוצה סגורה ובקבוצה פתוחה. נגדיר כך באופן רקורסיבי קבוצות ווער מדי מדובר בקבוצה מדובר בקבוצה מדובר בקבוצה פתוחה. נגדיר כך באופן רקורסיבי קבוצות מדובר בקבוצה בקבוצה מדובר בקבוצה מדובר בקבוצה מדובר בקבוצה מדובר בקבוצה בקבוצה

$$C_0 \subseteq V_{\frac{1}{2^n}} \subseteq C_{\frac{1}{2^n}} \subseteq V_{\frac{2}{2^n}} \subseteq C_{\frac{2}{2^n}} \dots$$

ונגדיר לכל $x \in X$ את הפונקציה,

$$f(x) \begin{cases} \inf\{t \in [0,1] \mid x \in V_t\} & \exists t, x \in V_t \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

אנו טוענים ש־f מקיימת את האמור, כלומר f(x)=C לכל f(x)=1, וכן f(x)=f(x)=0 הציפה. נשים לב ש־f(x)=f(x)=0 אנו טוענים ש־f(x)=f(x)=0 מקיימת את האמור, כנחין גם שעבור f(x)=x נובע ש־f(x)=x לאף f(x)=x נובע ש־f(x)=x נובע ש־f(x)=x נובע ש־f(x)=x נובע ש־להראות רציפות. אנו יודעים בחיל מקור של קבוצה שכל מקור של קבוצה של f(x)=x מספיק לבדוק את הרציפות עבור תת־בסיס של הקטע, שכל מקור של קבוצה פתוחה הוא פתוח. נבחר את תת־הבסיס f(x)=x ווא לכל f(x)=x מספיק לבדוק את הרציפות עבור ב"f(x)=x מחוח. בחר את תת־הבסיס f(x)=x ווא לכל f(x)=x מספיק לבדוק את הרציפות עבור תת־הבסיס של הקטע, שכל מקור של קבוצה שמתקיים, פתוחה הוא פתוח.

$$x \in f^{-1}([0,b))$$

 $f^{-1}([0,b))\subseteq$ אז נובע ש $f^{-1}([0,b))\subseteq$ אז לכן קיים $f^{-1}([0,b))$ מספר דיאדי (מהצורה הדרושה). לכן $f^{-1}([0,b])$ לכן קיים $f^{-1}([0,b])$ מספר דיאדי (מהצורה $f^{-1}([0,b])$ נניח שר $f^{-1}([0,b])$ אז שו מצאנו ש $f^{-1}([0,b])$ ווע שר $f^{-1}([0,b])$ אז מצאנו ש $f^{-1}([0,b])$ אז $f^{-1}([0,b])$ או $f^{-1}([0,b])$

21.4.2025 - 6 שיעור 6

6.1 אקסיומות מנייה

ראינו עד כה מספר שימושים לבסיסים של טופולוגיה, הגדרה 1.10. עתה נגדיר הגדרה משלימה לבסיס בהקשר מקומי.

בהתאם נגדיר את ההגדרה המהותית הראשונה שעוסקת במנייה.

הגדרה אם לכל $x\in X$ קיים בסיס לפתוחות של מקיים את מקיים את מקיים ממרחב בסיס לפתוחות של המנייה הראשונה אם לכל לכל מקיים בסיס לפתוחות של משבסיס בן־מנייה.

הגדרה 6.3 (אקסיומת המנייה השנייה) נאמר שמרחב X מקיים את אקסיומת המנייה השנייה השנייה (אקסיומת המנייה באים בן־מניה ל־X

הגדרה 6.4 מרחב לינדולף) X יקרא מרחב לינדולף, אם לכל כיסוי פתוח של X יש כיסוי בן־מניה.

 $X\subseteq \bigcup_{lpha\in J}U_lpha$ בלומר אם כך כיסוי פתוח, אז פייסוי כיסוי אב כלומר אב כלומר כיסוי אז כיסוי פתוח, אז פייסוי

עתה משהגדרנו שפה לדבר בה על הקונספט של מנייה במרחבים טופולוגיים, נוכל לעבור למספר טענות.

טענה 6.6 מרחב רגולרי המקיים את אקסיומת המנייה השנייה הוא נורמלי.

 T_4 המקיים את אקסיומת המנייה השנייה ד T_3 בפרט מרחב

הוכחה. נניח ש־X רגולרי המקיים את אקסיומת המנייה השנייה. יהי \mathcal{B} בסיס בן־מניה. אנו רוצים להראות נורמליות, נניח ש־X רגולרי המקיים את אקסיומת המנייה השנייה. יהי \mathcal{B} בסיס בן־מניה. אנו רוצים להראות וואנו רוצים למצוא להן הפרדה. לכל $a\in A$ כך ש־ $a\notin B$ יש קבוצה פתוחה $a\in U_a\subseteq \overline{U}_a\subseteq X\setminus B$ כאשר $a\in U_a\subseteq A$ (כאשר $a\in A$), כאשר $a\in A$ וואכן האוסף $a\in A$ האוסף $a\in A$ האוסף $a\in A$ הווע על־ידי $a\in A$ (בחור את בן־מניה, ונוכל לכתוב אותו על־ידי $a\in A$ (באות אופן אפשר למצוא קיבלנו ש־ $a\in A$ באותו אופן $a\in A$ האוסף $a\in A$ (באומף אופף אפשר למצוא פתוחות $a\in A$ כך ש־ $a\in A$ וסדרה $a\in A$ וסדרה $a\in A$ כך ש־ $a\in A$ וסדרה $a\in A$ וסדרה $a\in A$ וסדרה $a\in A$ כר ש־ $a\in A$ כר ש־ $a\in A$ כר ש־ $a\in A$ וסדרה $a\in A$ וסדרה $a\in A$ וסדרה $a\in A$ כר ש־ $a\in A$ כר ש־ $a\in A$ כר ש־ $a\in A$ כר ש־ $a\in A$ וסדרה $a\in A$ וסדרם ש־ $a\in A$ וסדרם ווחות $a\in A$ ווחות מורב במור ווחות מורב במורב במור ווחות מורב במור ווחות מורב במורב במור ווחות מורב במורב במורב

לכל $S=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}S_k$ נגדיר בהתאם $S_k=U_{a_k}\setminus\bigcup_{i=1}^k\overline{U}_{a_k}$ וכן $S_k=U_{a_k}\setminus\bigcup_{i=1}^k\overline{V}_{b_i}$ נגדיר בהתאם לכל $S_k=U_{a_k}\setminus\bigcup_{i=1}^k\overline{V}_{b_i}$ ונבדיר אז $K\in\mathbb{N}$ אז החיתוך לא ריק, אז $T=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}T_k$ אם החיתוך לא ריק, אז $T=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}T_k$ בי אלה קבוצות פתוחות. נבחין כי $T_k=U_{b_k}\setminus\bigcup_{i=1}^k\overline{V}_{b_i}$ ונבדוק ש־ $T_k=U_{b_k}\setminus\bigcup_{i=1}^k\overline{V}_{b_i}$ אם החיתוך לא ריק, אז $T_k=U_{b_k}\setminus\bigcup_{i=1}^k\overline{V}_{b_i}$ ולכן נובע,

$$S_m = U_{b_k} \setminus \bigcup_{i=1}^k \overline{T}_i \supseteq T_n$$

וזו סתירה.

נרצה לדון בקשר שבין מרחבים מטריים למרחבים טופולוגיים.

הגדרה 6.7 (מרחב מטריזבילי) מרחב טופולוגיX נקרא מטריזבילי אם קיימת מטריקה על X שמשרה את הטופולוגיה.

כבר ראינו שכל מטריקה משרה טופולוגיה שמקיימת את T_4 , עתה נרצה להבין מתי בדיוק טופולוגיה אכן מושרית מאיזושהי מטריקה. T_4 תת־מרחב של מרחב מטריזבילי הוא מטריזבילי.

משפט 6.8 (משפט המטריזביליות של אורסון) אם X מרחב טופולוגי T_3 המקיים את אקסיומת המנייה השנייה, אז X מטריזבילי.

, המכפלה עם המכפלה וויע סופולוגיית עם במרחב מטרי במרחב במרחב המכפלה הוא הכללי הרעיון הכללי הוא לשכן במרחב מטרי ב

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

 $\psi(X)$ ל־ל מ־ל העתקה ערכית ערכית לי ע $\psi:X o [0,1]^{\mathbb{N}}$ ולבנות העתקה

 $x\in V_{xy}\subseteq$ בסיס בחצות למצוא ניתן ניתן $x\in U_{xy},y\in W_{xy}$ כך כך ער ער x
eq yיש פתוחות זרות $x\neq y$ יש פתוחות לכל לכל

21.4.2025 - 6 שיעור 6 6.2 קשירות

אוריסון קיימת של אוריסון בת־מניה. הברמניה. אז $\Lambda=\{(u,u)\in\mathcal{B}^2\mid\emptyset\not\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq U\}$ אוריסון באוסף כל מבונן באוסף $\overline{V}_{xy}\subseteq U_{xy}$ רציפות. רציפות איא הומיאומורפיזם. על־ידי $\psi:X o\psi(X)$ על־ידי ערכית טוענים כי ψ היא היא ענים כי ψ היא הומיאומורפיזם. על־ידי $\psi:X o[0,1]^\mathbb{N}$ בטופולוגיית המכפלה שקולה לרציפות בכל קורדינטה, לכן מרציפות g_k לכל g_k מרציפות בכל קורדינטה, לכן מרציפות שלכל g_k לכל מרציפות בכל הציפות שלכל אוניית המכפלה בכל הציפות מכך שלכל אוניית המכפלה בכל הציפות מכך שלכל אוניית במחשבים במושבים במחשבים במושבים במחשבים במושבים במחשבים במחשבים במושבים במחשבים במושבים במושב ש"ע $g_k(y)=1, g_k(x)=0$ ו־ם. אנו $g_k=f_{(v,u)}$ יש $x\in V\subseteq \overline{V}, y\in X\setminus U$ בראות הומיאומורפיזם. אנו $x\in V\subseteq V$ $W\subseteq X$ אלכל צריך להראות אלכל ביץ, כלומר באיפה כאשר איז $\psi^{-1}:E o X$ יודעים שלכל אריד, וצריך להראות שלכל ש $k(x)\in\mathbb{N}$ יהי $x\in V\subseteq\overline{V}$ בר ש־ $V\in\mathcal{B}$ כך שימת $X\in U\subseteq W$ כך שימת ער קיימת $X\in U\subseteq W$ פתוחה ב־ $X\in U\subseteq W$. יהי מימת פתוחה ב- $X\in V\subseteq W$ $\int_{x\in W}g_{k(x)}^{-1}([0,1))=W$ ונובע ש־ $x\in g^{-1}([0,1))\subseteq U\subseteq W$ אז $g_{k(x)}\mid_{X\setminus U}=1$ וכן ומתקיים, $g_{k(x)}(x)=0$ וכן ש־ $g_{k(x)}(x)=0$ אז ווובע ש ,ולכן, $g_{k(x)}^{-1}=\psi^{-1}\circ\pi_{k(x)}^{-1}$ ולכן ולכן $g_{k(x)}=\pi_{k(x)\circ\psi}$

$$W = \bigcup_{x \in W} \psi^{-1}(\pi_{k(x)}^{-1}([0,1))) = \psi^{-1}(\bigcup_{x \in W} \pi_{k(x)}^{-1}([0,1)))$$

 $.\psi(W)=(igcup_{x\in W}\pi_{k(x)}^{-1}([0,1)))\cap E$ ונובע

6.2 קשירות

הגדרה 6.9 (קשירות) מרחב טופולוגי X יקרא קשיר אם לא ניתן להציג אותו כאיחוד של שתי קבוצות פתוחות זרות לא ריקות.

הערה באופן שקול גם אם לא ניתן להציג את המרחב כאיחוד זר של קבוצות סגורות. זאת שכם אם לא ניתן להציג את המרחב כאיחוד זר של קבוצות אורה. הארה באופן שקול גם אם לא ניתן להציג את המרחב כאיחוד זר של קבוצות סגורות. הארה באופן שקול גם אם לא ניתן להציג את המרחב כאיחוד זר של הפוצות סגורות. תו. פתוחות, U^C , V^C וכמובן $U^C \cup V^C = X$ אז $U \cap V = \emptyset$

(a,b),[a,b],(a,b],[a,b] מהן תתי־הקבוצות של \mathbb{R} התשובה היא קטעים, (a,b), מהן תתי־הקבוצות הקשירות של

היא קבועה. היא קשיר אם היסקרטית, היא הדיסקרטית, עם היא או או הדיסקרטית, היא קבועה. הערה מרחב מרחב מרחב או ורק אם כל פונקציה כל פונקציה הציפה להיא או היא קבועה.

טענה 6.10 (תכונות של קשירות) התכונות הבאות מתקיימות,

- קשירה f(X) אם f:X o Y קשיר f:X o Y אם .1
 - קשירה אז \overline{A} קשירה אז $A\subseteq X$ השירה.
- קשירה $\bigcup_{\alpha\in I}A_{\alpha}$ אז $\alpha\in I$ כך ש־ $A_{\alpha}\cap A_{\beta}
 eq\emptyset$ כך ש־ $\beta\in I$ כך שירה קשירות וקיים אז $\{A_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ לכל 3.
 - קשירה $Y=\prod_{\alpha\in I}X_{\alpha}$ אם קשירים או מרחבים טופולוגיים קבוצת אם $\{X_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$.4

אבל $f(A)=\{0\}$ אבל הכלליות נניח ש־ \overline{A} לא קשירה, לכן נובע שיש $f:\overline{A} o \{0,1\}$ לא קבועה. בלי הגבלת מענה 2. נוכיח את טענה 2. נוכיח את טענה 2. הייסור, לכן נובע שיש . חזו סתירה ולכן $\overline{A}\subseteq f^{-1}(\{0\})$ שי סגורה ונובע אילכן חזו סתירה ולכן $A\subseteq f^{-1}(\{0\})$ סגורה ולכן וזו סתירה.

A imes B אז שירים קשירים טופולוגיים מרחבים אם A,B אם עדר. שיר להראות ונרצה ונרצה טופולוגיים מרחבים או מרחבים ל $\{X_{lpha}\}_{lpha \in I}$ מרחבים או נעבור להוכחת טענה A,B מרחבים טופולוגיים ונרצה להראות ש קשיר, כנביעה מטענה 3, שכן,

$$A \times B = (\bigcup_{a \in A} \{a\} \times B) \cup (\bigcup_{b \in B} A \times \{b\})$$

 $A\times B=(\bigcup_{a\in A}\{a\}\times B)\cup (\bigcup_{b\in B}A\times \{b\})$ נרצה למצוא תת־קבוצה של $f:I\to \bigcup X_\alpha$ כאשר קבע, $f\in Y$ נקבע, נגדיר. נגדיר אפופה של אתריקבוצה של למצוא הבחירה. נקבע $P_F = \{h \in Y \mid h(\alpha) = f(\alpha) \forall \alpha \notin F\}$ כאשר $Z = \{h \in Y \mid |\{\alpha \in I \mid h(\alpha) \neq f(\alpha)\}| < \infty\} = \bigcup_{F \subseteq I, |F| < \infty} P_F$ אנו טוענים שתי שרא שרC קשירה היא שרC קשירה היא שרC קשירה היא שרכל קשירה היא שרכל קשירה היא שרבר קשירה, השנייה היא שרבר קשירה אנו טוענים שתי טענות, הראשונה היא שלכל C. מהגדרת מופולוגיית מהגדרת מהגדרת אהכפלה. $P_F\cong\prod_{y\in F}X_y$

נבהיר שמטרתנו הייתה למצוא קבוצה צפופה על ולהשתמש בטענה על סגור על סגור על צפופה. עשינו זאת על-ידי הוכחה למקרים סופיים עם למת $Z_F=\{h\in\prod_{lpha\in I}X_lpha=Y\mid$ נגדיר גדיר הבא הכוכב. בשלב הבא המכפלה קשירה המכפלה קשירה המכפלה הבא הכוכב. בשלב הבא הכוכב. בשלב הבא המכפלה המכפלה המכפלה אורה המכפלה המכפל המכפלה המכפלה המכפלה המכפ אם נגדיר , $f_F(lpha)=f(lpha)$, או $f_F:I\setminus F o igcup_{lpha\in I\setminus F}X_lpha$ עבור $Y_F imes\{f_F\}$, שווה לי עבור Z_F או $\forall eta\notin F, h(eta)=f(eta)\}$ נקונן מספיק להתבונן אפופה ולכן קבוצה שכן אפופה לכל על מתקיימים מתקיימים לכל $f \in Z_F$ אשכן שכן קבוצה קשירה, אפופה ולכן לכל ב $Z = \bigcup_{F \subseteq I, |F| < \omega} Z_F$ בבסים שהגדרנו בעזרתו את טופולוגיית מתקיים $\emptyset
eq B \in \mathcal{B}$ מתקיים שהגדרנו במיס שהגדרנו מחלכל במיס שלכל מתקיים שלכל מתקיים שלכל מתקיים שלכל מתקיים שלכל מחלכם של מתקיים שלכל מתקים שלכל מתקיים שלכל מתקים שלכל מתקים של מתקים g(eta)=f(eta)כך ש־ $g\in B$ כך לכל $\emptyset
eq U_lpha\subseteq X_lpha$ סופית ו $F\subseteq I$ סופית כאשר הוא מהצורה $g\in B$ כך ש־ $g\in B$ סופית ו $g\in B$ סופית הזה היא מהצורה מהצורה משר לכל ב

21.4.2025 - 6 שיעור 6 6.2

, אז נגדיר, או היושהי איזושהי מ־ $\emptyset
eq \emptyset$, מ־ $\emptyset : A \notin F$ לכל

$$B \ni g(\alpha) = \begin{cases} h(\alpha) & \alpha \in F \\ f(\alpha) & \alpha \notin F \end{cases}$$

 $g\in Z_F\subseteq Z$ נטען כי $g\in Z$, זאת שכן

22.5.2025 - 7 שיעור 7

7.1 קשירות – המשך

הגדרה לכל סביבה W של x של $x\in X$ אם לכל סביבה אוא קשיר מקומית הוא קשיר מקומית נאמר שהמרחב הטופולוגי הוא קשיר מקומית לכל $x\in X$ אם לכל סביבה של x של x של המקומית אם x קשיר מקומית לכל $x\in X$

x את מכילה אשר המקסימלית הקשירות הקבוצה הת־הקבוצה במרחב במרחב במרחב x במרחב הכיב קשירות) רכיב הקשירות של x

. $\bigcup_{x \in Z \subset X} Z$ את אכן קיימת אכן הטופולוגיה, לאיחוד אסגירות הסגירות בשל הסגירות אכן אכן הערה

. $\{\frac{1}{3}\}$ ־ש היא התשובה התשובה ב־ \mathbb{Q} ? ב־לוגמה 7.1 מה הוא רכיב הקשירות של

lpha(a) ל־lpha(a) נאמר שזוהי מסילה ביA היא פונקציה רציפה lpha(a) כך ש־lpha(a) כך ש־lpha(a) נאמר שזוהי מסילה בין lpha(a) ל־lpha(a) הגדרה lpha(a) מסילה lpha(a) היא פונקציה רציפה lpha(a) כך ש־lpha(a) כך ש־lpha(a) נאמר שזוהי מסילה בין lpha(a) ל-lpha(a) ל-lpha(a) האמסילה lpha(a) מסילה בין lpha(a) היא פונקציה רציפה lpha(a) ל-lpha(a) כך ש־lpha(a) כך ש־lpha(a) נאמר שזוהי מסילה בין lpha(a) ל-lpha(a) ל-lp

 $\alpha:[0,1] o X$ קיימת מסילה $x,y\in X$ קיימת מסילתית הוא קשיר הוא קשיר הוא קשיר מסילתית) קשיר פאמרחב מסילה אוא הגדרה $\alpha(0)=x, \alpha(1)=y$

כך $x\in U\subseteq W$ המרחה של x יש קבוצה לכל סביבה אם לכל מקומית קשיר מסילתית המרחב א קשיר מסילתית מקומית ב־x אם לכל סביבה איש של על המרחב א קשירה מסילתית.

 $x \in X$ קשיר מסילתית מקומית אם x קשיר מסילתית מקומית לכל בהתאם

נתעניין להבין מה הקשר בין ארבעת מושגי הקשירות שראינו זה עתה. נתחיל בתכונה חשובה של קשירות מסילתית.

מענה 7.6 אם X קשירה מסילתית וf:X o Y רציפה אז f:X o X קשירה מסילתית.

lpha(0)=p' כך ש־ lpha:[0,1] o X מסילה עש מסילה f(p')=p, f(q')=q כך כך p', $q'\in X$ כך ש־ p, $q\in f(X)$ הוכחה. יהיו aירי מסילה המקשרת את aירי aירי מסילה היא רציפות היא רציפות היא רציפה ולכן aירי מסילה מסילה מסילה aירי aירי מסילה מסיל

עתה נראה את הקשר בין קשירות וקשירות מסילתית.

. מענה 7.7 אם X קשיר מסילתית אז X קשיר

לא קשיר $f(X)=\{0,1\}$ אבל $f(X)=\{0,1\}$ אבל דיסקרטית כך שי $f:X \to \{0,1\}$ אבל אבל אבל קשיר אז אם אם הוכחה. אם לא קשיר אז יש פונקציה רציפה לו אבל היים הטופולוגיה הדיסקרטית כך לא קשיר.

נבחין כי קשירות לא גוררת קשירות מסילתית, נראה דוגמה מתאימה.

X=0 נבחין כי \mathbb{R}^2 נבחין ארף הסגור של גרף הסגור של \mathbb{R}^2 , ונניח של \mathbb{R}^2 , ווהי תת-קבוצה של \mathbb{R}^2 , זוהי תת-קבוצה של \mathbb{R}^2 , ונניח של הסגור אל קשיר מסילתית, א קיימת מסילה אכן קשיר. מהצד השני הוא א קשיר מסילתית, א קיימת מסילה \mathbb{R}^2 , סגור של קבוצה קשירה הוא קשיר ולכן סגור זה אכן קשיר. מהצד השני הוא א קשיר מסילתית, א קיימת מסילה $\alpha(0)=(0,0), \alpha(1)=(1,\sin 1)$ כך שר $\alpha:[0,1]\to X$

28.4.2025 - 8 שיעור 8

- קשירות פינות - 8.1

דוגמה 8.1 נראה מרחב קשיר אך איננו קשיר מקומית. זהו מרחב המסרק,

$$(\{0\}\times[0,1])\cup\{[0,1]\times\{0\}\}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\}\times[0,1]$$

מן הצד השני ראינו גם כי קשירות לא גוררת קשירות מסילתית.

,(0,1]ב בי $\frac{1}{x}$ של לגרף של \mathbb{R}^2 הצמצום אבמצום 8.2 ב־

$$Y = (\{0\} \times [0,1]) \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$$

מרחב זה הוא קשיר שכן הוא צמצום של מרחב קשיר והגרף רציף כתמונה של פונקציה רציפה ממרחב קשיר (קטע).

,נניח בשלילה שY קשיר מסילתית ולכן יש בפרט מסילה $\alpha:[0,1] o Y$ כך שמתקיים,

$$\alpha(0) = (0,0), \qquad \alpha(1) = (1, \sin 1)$$

נמצא . $lpha_1(t_1)=rac{1}{2}$ כך ש־ $rac{1}{2}$ ס כך $t_1<1$ ממשפט ערך הביניים קיים $lpha_1(t_1)=0$ ולכן $\delta(t)=(lpha_1(t),lpha_2(t))$ ממשפט ערך הביניים קיים $\delta(t)=(lpha_1(t),lpha_2(t))$ נמצא $lpha_1(t_1)=(lpha_1(t_1),lpha_2(t))$ נמצא $lpha_1(t_1)=(lpha_1(t_1),lpha_2(t))$ משמתקיים,

$$\alpha(t_2) = (?, -1)$$

ואכן מאפיון ענקבל שלנקודות האה נקודות ככה סדרה של לבנות ככה מדרה של נוכל לבנות אלה יש גבול ($\alpha(t_3)=(?,1)$ שלנקודות היינה לגבולות נקבל.

$$\alpha(0) = \lim_{n \to \infty} t_n = \lim_{n \to \infty} (-1)^n$$

אבל גבול זה לא קיים.

מענה 8.1 אם X קשיר וקשיר מסילתית מקומית אז א קשיר מסילתית.

, הותוחה, אנו יודעים גם אנו יודעים אנו אנו יודעים ש־ $A \neq \emptyset$ ולכן אנו יודעים ש־ $A \neq 0$ ונתבונן במחלקת הקשירות של $a \in A$ ונסמנו אנו יודעים מסילתית ולכן בפרט ישנה סביבה של $a \in A$ אנו יודעים כי $a \in A$ אנו יודעים כי $a \in A$ אנו יודעים כי $a \in A$

נטען גם כי A סגורה, הראינו שבמרחב קשיר מסילתית מקומית כל רכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה פתוחה, אבל זה גורר שכל רכיב קשירות מסילתית האחרים. מסילתית האחרים.

A=Xונסיק ש־ $A\in\{X,\emptyset\}$ אז

8.2 קומפקטיות

. הגדרה של X יש תת־כיסוי פופי. אם לכל כיסוי פתוח של א יש תת־כיסוי סופי. מרחב טופולוגי א יקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של א יש תת־כיסוי סופי.

 $X=igcup_{lpha\in I_0}U_lpha$ שים סופי כך אז קיים $X=igcup_{lpha\in I}U_lpha$ כך שר $\{U_lpha\}_{lpha\in I}$ כך פרוח המכיל את איז היא שלכל אוסף קומפקטית אם היא מרחב קומפקטי כתת־מרחב של X, זה נכון באופן דומה עבור כיסוי פתוח המכיל את $K\subseteq X$ תיקרא קומפקטית אם היא מרחב קומפקטי

נראה הגדרה שקולה בניסוח של קבוצות סגורות,

הסופי, את תכונת החיתוך את לכל אוסף את הרחב מופולוגי קומפקטי אם ורק אם לכל אוסף החיתוך של תתי־קבוצות סגורות ב־X 8.3 אגדרה את מכונת החיתוך את חים, או החיתוך את חים, או של הורק לכל $I_0\subseteq I$ סופית, אם F_0 סגורה לכל $I_0\subseteq I$ אז יש או שור החיתוך סגורה לכל $I_0\subseteq I$ סופית, אם החיתוך מגורה לכל מורה לכל

$$\bigcap_{\alpha \in I_0} F_\alpha = \emptyset$$

. הטומה אם ורק אם ורק אם קומפקטית היא היא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ הערה שתת-קבוצה הערה האינו בקורסים היא הערה היא הערה היא הערה וחסומה.

עבור המקרה של $A \subseteq \mathbb{R}$ עבור המקרה של

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) = \mathbb{R}$$

28.4.2025 - 8 שיעור 8

$$V \cap (\bigcup_{i=1}^{N} U_{a_n}) = \emptyset$$

. בהמשך. יותר כללית בהמשך ולכן $V \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ ולכן ולכן $V \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ וכן וכן ער ש־ $V \cap A = \emptyset$

היא סגורה, אוסדורף האוסדורף מכרחב A הוכחנו החזקה לתת-קבוצה לתת-קבוצה הוכחנו כרגע מענה חזקה וותר, כל הת-קבוצה הוכחנו

היא $A=\{a\}$ היא הטריוויאלית, אז הטריוויאלית, קיימים מרחבים איימים קיימים האינה סגורה. לדוגמה האינה קומפקטית עם תת-קבוצה קומפקטית אינה סגורה. לדוגמה אבל לא סגורה.

טענה A אם X קומפקטית ו $A\subseteq X$ סגורה אז א קומפקטית.

$$X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha}$$

וקיבלנו כי יש למרחב תת־סיכוי סופי. כלומר יש $I_0\subseteq I$ סופית כך שמתקיים,

$$X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{\alpha \in I_0} U_{\alpha}$$

 $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I_{\alpha}} U_{\alpha}$ ולכן

טענה 8.5 תמונה רציפה של מרחב קומפקטי היא קומפקטית, כלומר אם X מרחב קומפקטי וf:X o Y פונקציה רציפה מX למרחב טופולוגי f:X o Y אז אז $f(X)\subseteq Y$ אז אז f(X)

טענה 8.6 אם X מרחב האוסדורף קומפקטי אז X מרחב רגולרי.

 $.b \notin A$ ונקודה סגורה סגורה בין להפריד אפשר וגן אפשר חב ורק אם ורק אם מתקיימת רגולריות הוכחה. רגולריות אפשר אפ

 U_a,V_a עבור $a\in U_a,b\in V_a$ שיש פתוחות פובע שיש פתוחות כל $a\in A$ כך שי $a\in A$ קומפקטית, נובע שיA קומפקטית, או נובע שי $A\in U$ סגורה עבור $A\subseteq U$ סגורה עבור או נובע שיA קומפקטית, או פתוחות או וובעים כי $A\subseteq U$ וובע שיים או וובעים כי $A\subseteq U$ וובעים כי

. היא הומיאומורפיזם ערכית ערכית ערכית הד-חד ערכית f:X o Y, האוסדורף, ערכית מסקנה איז f היא מסקנה מסקנה אום מסקנה אום מסקנה אום מרחב מופולוגי קומפקטי ו

עלינו עלינו להראות רק ש־f מקיימת ש־ f^{-1} רציפה, ונקבל שכלל התנאים להומיאומורפיזם חלים. לכל תת־קבוצה סגורה f^{-1} רציפה, ונקבל שכלל התנאים להומיאומורפיזם חלים. לכל מקיימת ש־ f^{-1} סגורה. f^{-1} סגורה עלינו להראות ש־ f^{-1} סגורה. f^{-1} סגורה להומיאומורפיזם מגורה ולכן היא קומפקטית ו־ f^{-1} סגורה. f^{-1} סגורה.

. מרחב מרחב אז א מרחב האוסדורף קומפקטי אז א מרחב נורמלי. מענה 8.8 אם אם מ

 $B\subseteq$ ו זרות, זרות, אז לכל $b\notin A$ מתקיים $b\notin A$ מתקיים $b\in B$ פתוחות זרות, אז לכל $A,B\in X$ קתי קבוצות סגורות וזרות, אז לכל $B\subseteq U_b$ מתקיים $A,B\in X$ קתי קבוצות הללו מפרידות הללו מפרידות הללו מפרידות הא סגורה במרחב קומפקטי ולכן $B\subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{b_i}$ כיסוי פתוח סופי, וכן $A,B\subseteq X$ ושתי הקבוצות הללו מפרידות בין A ל $B\subseteq X$ ופתוחות.

טענה $f:X o\mathbb{R}$ רציפה, אז, רציפה, אז מרחב מופולוגי קומפקטי וX

- הסומה (וסגורה) הסומה f(X) .1
- מקסימום ומינימום f^- מקסימום 2.
- . מטריזבילי במידה f המטריקה ρ המטריזבילי מטריזבילי נניח X

הוכחה. נוכיח את הטענות,

. היא סגורה חסומה. \mathbb{R} היא קומפקטית ותת-קבוצה הוחסומה. $f(X)\subseteq\mathbb{R}$ היא סגורה וחסומה.

מקיים $x\in X$ מקיים של A ולכן כל A ולכן הוא הסופרימום של A ונניח שA ונניח שA מתקבל וסופי, נסמן גם A מתקבל וסופי, נסמן גם A מתקבל וסופי, משר A מתקבל וגם לכל A וא מרי־קבוצות סגורות A ולכל A וא מרי־קבוצות סגורות בייט אוסף שלכל A וא מרי־קבוצות המור ווא מקר בייט אוסף אומיים בייט אוסף שלכל A ווא מהור בייט אוסף שלכל A ווא מההגדרה בייט אוסף אומיים מחור בייט אוסף שלכל A ווא מההגדרה בייט אוסף מחור בייט אום

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_{\epsilon_i} = A \cap [M - \delta, M]$$

עבור $\delta = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ נובע אם כך,

$$A\cap\{M\}=\bigcap_{\epsilon>0}(A\cap[M-\epsilon,M])=\bigcap_{\epsilon>0}F_\epsilon\neq\emptyset$$

 $M\in A=f(X)$ ולכן נסיק ש

3. מושאר כתרגיל, אבל רמז הוא מספר לבג לכיסוי.

8.3 קומפקטיות במרחבים מטריים

לא נגדיר אך ניזכר במספר הגדרות חשובות מעולם המרחבים המטריים, הן סדרות קושי, שלמות, חסימות לחלוטין. בהינתן שאנו מכירים את המונחים הללו, נעבור למשפט, אך לפני זה נגדיר מונח חדש שיעזור לנו בהוכחת משפט זה.

הכיסוי אם הכיסוי לבג אז (מספר לבג) אז $\lambda>0$ אז אז X>0 אז מספר לבג של הכיסוי מטרי, ויהי ויהי איז מטרי, ויהי מספר לבג של אז מספר לבג אז מספר לבג של הכיסוי אם אז מספר לבג של מספר לבג של הכיסוי אם $B_\lambda(x)\subseteq U_\alpha$ מספר לבג של לכל אז קיים X=0 אז קיים מספר לבג של הכיסוי אם מספר לבג של הכיסוי מספר לבג של הכיסוי אם מספר לבג של הכיסוי אם מספר לבג של הכיסוי מספר מספר לבג של הכיסוי מספר לבג של הכיסוי מספר לבג של הכיסוי מספר לבג של הכיסוי מספר מספר

 $lpha\in I$ לכל $U_lpha
ot\equiv B_{rac{1}{n}}(x)$ כך שי $x\in X$ שי $n\in\mathbb{N}$ לכל לראות זאת, לכל מספר לבג. כדי לראות מספר לבג. כדי לראות מספר מסריים מטריים קומפקטיים, תמיד שמספר לבג. כדי לראות זאת, לכל מקומפקטיות סדרתית ונקבל סתירה.

הערה באופן כללי קומפקטיות לא גוררת קומפקטיות סדרתית וגם לא להיפך.

X בואה דוגמה שמצביה שקומפקטיות סדרתית לא גוררת קומפקטיות. נגדיר I=[0,1] וכן I=[0,1] עם טופולוגיית המכפלה. אוכרת דוגמה אוכרים של משפט טיכונוף שנוכיח בהמשך. נגדיר $Y=\{x=(x_i)_{i\in I}\in X\mid |\{\alpha\in I\mid x=1\}|\leq \aleph_0\}$ כתת־מרחב של עם הטופולוגיה המושרית ממנו. אנו טוענים כי Y קומפקטי סדרתית אבל לא קומפקטי.

 $(\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in I$ נסמן לכל מצד שני, לכל $Y\subseteq igcup_{lpha\in I}U_lpha$ וכן פתוחה, וכן $U_lpha=\{x\in X\mid x_lpha=0\}$ נסמן לכל מצד מצר לא קומפקטי, לכל ל

$$Y \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

 $y_n \in \left\{0,1
ight\}^J$ עבור $J = igcup_{n=1}^\infty J_n$ עבור $lpha \notin J$ לכל לכל $y_n(lpha) = 0$ בת־מניה מ־ $J_n \subseteq [0,1]$ עבור לכל עבור סדרתית, לכל מתחב מטרי, אז התנאים הבאים שקולים,

- ו. X קומפקטי
- קומפקטי סדרתית X .2
- שלם וחסום לחלוטין X .3

 $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ הסדר בו נוכיח את המשפט היה הסדר בו נוכיח

הגדרות ומשפטים

הגדרות ומשפטים

3		17
3		הו
3	(כדור) בדרה 1.3 (כדור)	הו
3	דרה 1.4 (קבוצה פתוחה)	17
3	שקולה לרציפות)	17
3	בדרה 1.6 (טופולוגיה)	17
3	דרה 1.7 (מרחב טופולוגי)	הו
3		הו
4	בדרה 1.10 (בסים לטופולוגיה)	17
4	ענה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי)	טז
4	צנה 1.14 (טופולוגיית מכפלה)	טז
6	בדרה 2.1 (טופולוגיית מכפלה)	הו
6		הו
6	(תת־בסיס לטופולוגיה)	הו
6		הו
6		הו
8	סגור של קבוצה במרחב טופולוגי)	הו
8	3.4 (פנים ושפה) זרה 3.4 (פנים ושפה)	הו
8	של נקודה) מביבה של נקודה) מביבה של נקודה 3.5 (סביבה של נקודה)	17
8		17
9	גנה 3.9 (שקילות לרציפות)	טז
10	(מרחב כוויץ)	הו
10	(הומיאומורפיזם)	17
10	2.10 העתקה פתוחה וסגורה)	הו
11	לאיברים ניתנים להפרדה)	17
11		הו
11	צנה 4.4 (גרירת אקסיומות ההפרדה)	טז
11	ענה 4.5 (שקילות למרחב נורמלי)	טז
11	צנה 4.6 (תנאי שקול למרחב האוסדורף)	טז
12	צנה 4.7 (אקסיומות הפרדה בתתי־מרחבים)	טז
12	ענה 4.8 (אקסיומות הפרדה במרחבי מכפלה)	טז
12	צנה 4.9 (הפרדה במרחבים מטריים)	טז
15	בדרה 6.1 (בסיס לטופולוגיה בנקודה)	הו
15		הו
15		הו
15		הו
15	ספרבילי)	הו
15	בדרה 6.7 (מרחב מטריזבילי)	17
15	שפט 6.8 (משפט המטריזביליות של אורסון)	מי
16	\ldots דרה 6.9 (קשירות)	הו
16	צגה 6.10 (תכונות של קשירות)	טז
18	דרה 7.1 (קשירות מקומית)	הג

הגדרות ומשפטים

נדרה 7.2 (רכיב קשירות)
מסילתית מקומית)
8.3 בדרה
מרחב מופולוגי)
נדרה 8.11 (מספר לבג)
2 12 Marin