נוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + 1).$$

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה.

עבור $n = 1$ נקבל $x - 1 = (x-1)(1)$ כפי שרצינו.

נניח עתה שעבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו מתקיימת הטענה ונבדוק את $n+1$.

$$x^{n+1}-1 = (x^{n+1}-x)+(x-1) = x(x-1)(x^{n-1}+\cdots+1)+(x-1) = (x-1)(x^n+\cdots+x)+(x-1) = (x-1)(x^n+\cdots+x+1)$$

והטענה חלה. □

נראה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

הוכחה. עבור בסיס האינדוקציה נבדוק את $n = 1$,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{3} < 2 \iff 3 < 4.$$

ולכן הטענה מתקיימת.

נניח שהטענה נכונה עבור n ונבדוק את המקרה $n+1$,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{\sqrt{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$$

השלמנו את מהלך האינדוקציה ולכן הטענה נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$. □

נוכיח שאם $a_1\cdots a_n = 1$ אז $(1+a_1)\cdots(1+a_n) \ge 2^n$.

הוכחה. באינדוקציה. עבור $n = 1$ נקבל $a_1 = 1$ ולכן $(1+a_1) \ge 1+1$.

נניח שהטענה נכונה עבור n ותהי סדרה $a_1\cdots a_{n+1} = 1$, אז בפרט גם $a_1\cdots a_{n-1}\cdot(a_n a_{n+1}) = 1$ סדרה מאורך n ולכן מתקיים,

$$\overbrace{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})}^{\stackrel{\text{def}}{=}K}(1+a_n a_{n+1}) \ge 2^n \tag{1}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש־(a_n) סדרה מונוטונית עולה, אחרת נוכל להגדיר מחדש סדרה $b_1 = \min\{a_k\}$ ו־$b_k = \min\{a_k\}\setminus\{b_1,\ldots,b_{k-1}\}$.

אז בפרט מתקיים $a_n a_{n+1} \ge 1$, וכן מתקיים,

$$(1+a_n)(1+a_{n+1}) = 1 + a_n + a_{n+1} + a_n a_{n+1} \ge 4 \tag{2}$$

נוכל להציג את (1) גם על־ידי,

$$K((1+a_n)(1+a_{n+1}) - a_n - a_{n+1}) \ge 2^n$$

ועל־ידי פתיחת סוגריים והעברת אגפים,

$$\overbrace{K(1+a_n)(1+a_{n+1})}^{\stackrel{\text{def}}{=}K'} \ge 2^n + (a_n+a_{n+1})K \stackrel{\text{הנחת האינדוקציה}}{\ge} 2^n + (a_n+a_{n+1})2^{n-1} \stackrel{(2)}{\ge} 2^n + 2\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

ולכן הטענה נובעת. □

נוכיח שלכל סדרה מתכנסת $a_n \to L$ יש מקסימום או מינימום.

הוכחה. נניח שמתקיים $A < L$. במקרה זה יש גם מינימום וגם מקסימום, אבל נראה קיום מינימום בלבד מטעמי סימטריה. נגדיר $\varepsilon = \frac{L-A}{2}$ ויהיה $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,

$$\begin{aligned} & |a_n - L| < \varepsilon = \frac{L-A}{2} \\ \iff & -\frac{L-A}{2} < a_n - L < \frac{L-A}{2} \\ \iff & -(L-A) < 2a_n - 2L < L - A \\ \iff & A - L < 2a_n - 2L < L - A \\ \implies & A + L < 2a_n \\ \iff & \frac{A+L}{2} < a_n \end{aligned}$$

כלומר מצאנו שלכל $n > N$ מתקיים $\frac{A+L}{2} < a_n$.

נגדיר $M = \min_{1 \le n \le N} a_n$, אז לכל $1 \le n \le N$ מתקיים $M \le a_n$ מהגדרת M. נוכל להסיק ש-$A \le M \le \frac{A+L}{2}$ אחרת M מהווה מינימום של הסדרה. אז $M \le a_n$ לכל $n > N$, אבל גם עבור $1 \le n \le N$ מצאנו ש-$M \ge a_n$ ולכן $a_n \ge M$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נשים לב שבמקרה זה גם נובע $A = M$.

נעבור למקרה בו $A = L$. אם $L < B$ אז נוכל להשתמש בטיעון זהה עם $\varepsilon = \frac{B-L}{2}$. אחרת נקבל $A = L = B$, כלומר (a_n) היא קבועה ולכן $A = \min a_n$. $\square$