פתרון מטלה 07 — אנליזה על יריעות, 80426

14 במאי 2025

שאלה 1

ניזכר כי TM הוא האגד המשיק של היריעה M. תהי $\pi : TM \to M$ ההעתקה $(x,v) \mapsto x$, ונגדיר $s : M \to TM$ על־ידי $s(x) = (x,0)$.
תהי $f : M \to N$ חלקה, אז נקבל ש־$df : TM \to TN$ העתקה המוגדרת על־ידי $df(x,v) = (f(x), Df|_x(v))$.

סעיף א׳

נראה ש־π, s חלקות.

הוכחה. נבחין כי שתי הפונקציות הן לינאריות ולכן בפרט חלקות, אבל נוכיח את הטענה ישירות מהגדרה.

נניח ש־$M^k \subseteq \mathbb{R}^m$. אז $TM \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$. תהי $(p,v) \in TM$ ונבחן את $\overline{\pi} : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^m$ הרחבה רציפה של $\pi : TM \to M$. כלומר, נגדיר ש־$\overline{\pi} \restriction TM = \pi$, וכן $\overline{\pi}(x,u) = x$, זוהי העתקה לינארית $\mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^m$, כלומר העתקה לינארית אוקלידית, ולכן היא חלקה.

נבצע תהליך דומה ל־s, נגדיר $\overline{s} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+k}$ על־ידי $\overline{s}(x) = (x,0)$, אז בבירור $\overline{s} \restriction M = s$, ו־$\overline{s}$ חלקה ומעידה על s כהעתקה חלקה. ☐

סעיף ב׳

נראה ש־df היא חלקה.

הוכחה. נניח ש־$N^l \subseteq \mathbb{R}^n$. אז $f \subseteq (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}^m}$ וכן $Df|_x : T_x(M) \to T_{f(x)}(N)$, כלומר $Df|_x \subseteq (\mathbb{R}^l)^{\mathbb{R}^k}$, לכל $x \in M$.
הפעם נרצה לבנות את ההרחבה כך שקיימת פונקציה חלקה $\overline{df} : U \to \mathbb{R}^{n+l}$ כך ש־$U \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$ פתוחה, וכן ש־$\overline{df} \restriction TM = df$. נניח ש־$(p,v) \in TM$ ונרצה להראות ש־df חלקה ב־(x,v). ידוע כי f חלקה ולכן קיימת $\overline{f} : U_0 \to \mathbb{R}^n$ חלקה, עבור $p \in U_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחה. לכל $x \in U_0$ נבחין כי $D\overline{f}|_x$ היא העתקה לינארית ולכן חלקה אף היא. נגדיר אם כך את $\overline{df}(x,v) = (\overline{f}(x), D\overline{f}|_x(v))$ ונקבל שזו העתקה חלקה, אבל $\overline{df} \restriction TM = df$ ישירות מהגדרת הנגזרת על יריעה, ולכן פונקציה זו מעידה כי df בעצמה חלקה. ☐

שאלה 2

ניזכר כי,

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

היא קבוצת ההעתקות הלינאריות $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ההפיכות והאורתוגונליות.

סעיף א'

נראה ש־$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ היא יריעה.

הוכחה. צריך להראות ש־$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ פתוחה ב־$M_n(\mathbb{R})$. נגדיר $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ על־ידי $f(A) = \det(A)$. נשים לב כי מתקיים,

$$\begin{aligned}
Df|_{I_n}(B) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(I_n + hB) - f(I_n)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\det(I_n + hB) - \det(I_n)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1 + hB_{1,1})\det(I_{n-1} + hB_{i>1,j>1}) + h(\ldots) - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1 + hB_{1,1})\cdots(1 + hB_{n,n}) - 1}{h} + o(h) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 + h\,\mathrm{tr}(B) - 1}{h} + o(h) \\
&= \mathrm{tr}(B)
\end{aligned}$$

נבחין כי $\det(A + hB) = \det(A)\cdot\det(I_n + hA^{-1}B)$ עבור כל $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ונוכל להסיק מהתוצאה האחרונה כי,

$$Df|_A = \det(A)\cdot\mathrm{tr}(A^{-1}B)$$

לכן לכל A כזו נוכל להסיק שהנגזרת על, נראה זאת על־ידי בחירת $B = A\cdot\mathrm{diag}(\frac{r}{\det(A)}, 1, \ldots, 1)$ לכל $r \in \mathbb{R}$. נוכל להסיק אם כך שכל מטריצה הפיכה היא נקודה רגולרית של ההעתקה, ובפרט 1 ערך רגולרי, זאת שכן אם $\det(A) \neq 0$ אז היא הפיכה, בפרט במקרה $\det(A) = 1$.
נבחין גם כי $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{1\})$ ולכן ממשפט הפונקציה הסתומה ליריעות נקבל שזו אכן יריעה. $\square$

סעיף ב'

נחשב את $\dim \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

פתרון נבחין כי $\dim \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = n^2$ וכן $\dim \mathbb{R} = 1$ ולכן מהמשפט שהשתמשנו בו זה עתה נובע ש־$\dim \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$.

סעיף ג'

נבדוק אם $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ קומפקטית.

פתרון נגדיר את המטריצה $A_r = \mathrm{diag}(r, \frac{1}{r}, 1, \ldots, 1)$, זוהי מטריצה אלכסונית והפיכה לכל $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. נבחין כי $\|A_r\|_\infty = |r|$ ולכן לכל $r > 0$ נוכל למצוא מטריצה $A_{r+1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ לא חסומה ב־$B_r(0)$. נסיק ש־$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ לא קומפקטית.

שאלה 4

נגדיר $M_a^2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2=1, z^2+w^2=(x+a)^2\}$.

סעיף א׳

נראה ש־M_3^2 היא יריעה.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ על־ידי,

$$g(x,y,z,w) = (x^2+y^2, z^2+w^2-(x+a)^2)$$

אז נקבל ש־$M_a^2 = g^{-1}(\{(1,0)\})$. ממשפט הפונקציה הסתומה ליריעות מספיק שנוכיח ש־$(1,0)$ ערך רגולרי של f. נגזור את הפונקציה,

$$Dg|_{(x,y,z,w)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ -2(x+a) & 0 & 2z & 2w \end{pmatrix}$$

ונקבל כי לכל הצבת ערך יש לפחות שתי שורות בלתי תלויות־לינארית, כלומר הנקודה רגולרית לכל נקודה,
ובפרט אם $(x,y,z,w) \in f^{-1}(\{(1,0)\})$. נסיק ממשפט הפונקציה הסתומה שאכן M_3^2 יריעה. □

סעיף ב׳

נראה ש־M_0^2 איננה יריעה.

הוכחה. נניח בשלילה ש־M_0^2 יריעה, ונגדיר,

$$f : M \to S^1, \qquad f(x,y,z,w) = (x,y)$$

זוהי העתקה חלקה כהעתקת צמצום ולכל $q \in S^1$ ערך רגולרי גם $f^{-1}(q)$ יריעה. אבל מהגדרת f נקבל שכל ערך ב־S^1 היא רגולרית, זאת שכן,

$$Df\mid_{(x,y,z,w)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן בפרט $f^{-1}(\{(0,1)\})$ יריעה, ממימד 2. אבל,

$$f(x,y,z,w) = (0,1) \iff x^2+y^2=1, w^2+z^2=x^2, x=0, y=1 \iff x=0, y=1, z=0, w=0$$

כלומר זוהי יריעה ממימד 0, בסתירה למשפט הפונקציה הסתומה. □

שאלה 5

נגדיר את העתקת הופ כ־$h : S^3(1) \to S^2(\frac{1}{2})$ המוגדרת על־ידי,

$$h(z,w) = (z\overline{w}, \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2))$$

נראה כי אכן תמונתה היא ב־$S^2(\frac{1}{2})$ ושכל $q \in S^2(\frac{1}{2})$ היא ערך רגולרי של h.

הוכחה. נבחין כי $\frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2) \in \mathbb{R}$ וכן ש־$z\overline{w} \in \mathbb{C}$ ולכן h משוכנת ב־$\mathbb{R}^3$. עוד נבחין כי,

$$|h(z,w)|^2 = z\overline{w}w\overline{z} + \frac{1}{4}|z|^4 - \frac{1}{2}|zw|^2 + \frac{1}{4}|w|^4 = \frac{1}{4}|z|^4 + \frac{1}{2}|zw|^2 + \frac{1}{4}|w|^4 = \left(\frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2)\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right)^2$$

ונובע שתמונת h היא ב־$S^2(\frac{1}{2})$ בלבד.

נעבור לבדיקת רגולריות. נגזור את איברי המספרים המרוכבים,

$$Dh|_{(z,w)} = Dh|_{(z_r,z_i,w_r,w_i)} = \begin{pmatrix} w_r & -w_i & z_r & -z_i \\ w_i & w_r & z_i & z_r \\ \frac{1}{2}z_r & \frac{1}{2}z_i & \frac{1}{2}w_r & \frac{1}{2}w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{w} & \overline{z} \\ i\overline{w} & i\overline{z} \\ \frac{1}{2}z & \frac{1}{2}w \end{pmatrix}$$

והנקודה (z,w) רגולרית אם ההעתקה היא על $T_{h(z,w)}(S^2(\frac{1}{2})) \simeq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. אבל נבחין כי עמודותיה בלתי־תלויות לינארית עבור כל $(z,w) \neq 0$, וכן $0 \notin S^3(1)$, ולכן נסיק שהיא רגולרית בכל נקודה. נובע אם כך שלכל $q \in S^2(\frac{1}{2})$ אכן כל מקורותיה רגולריים וכן היא ערך רגולרי. $\square$