פתרון מטלה 10 — תורת המידה, 80517

2 בינואר 2026

שאלה 1

נמצא קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ כך שאם $\lambda_E = \lambda|_E$, כלומר המידה המקיימת $\lambda_E(A) = \lambda(E \cap A)$, אז מתקיים,

$$\overline{D}(\lambda_E, \lambda, 0) = 1, \qquad \underline{D}(\lambda_E, \lambda, 0) = 0$$

פתרון אם נגדיר $f = \mathbb{1}_E$ אז נקבל $\lambda_E(A) = \lambda(A \cap E) = \int_A f \, d\lambda$ ואם $A = [a, b]$ אז בפרט $\lambda_E(A) = \int_a^b f(x) \, dx$.
אם $r > 0$ אז נקבל $B = \overline{B}(0, r) = [-r, r]$ ובהתאם,

$$\frac{\lambda_E(B)}{\lambda(B)} = \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} f(x) \, dx$$

נגדיר $a_n = \frac{1}{n^n}$ וכן $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [a_{2k+1}, a_{2k}]$. נקבל אם כך עבור $r = a_n$,

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} f(x) \, dx = \frac{1}{2a_n} \int_0^{a_n} f(x) \, dx = \frac{1}{2a_n} \left(\int_0^{a_{n+1}} f(x) \, dx + \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x) \, dx \right)$$

אם $n = 2k$ אז בהתאם,

$$\frac{1}{2a_n} \left(\int_0^{a_{n+1}} f(x) \, dx + \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x) \, dx \right) \ge \frac{n^n}{2} \left(\frac{1}{n^n} - \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \right) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2}$$

מהצד השני עבור $n = 2k + 1$ נקבל,

$$\frac{1}{2a_n} \left(\int_0^{a_{n+1}} f(x) \, dx + \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x) \, dx \right) = \frac{1}{2a_n} \int_0^{a_{n+1}} f(x) \, dx \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

ובהתאם נובע שעבור $E' = E \cup (-E)$ מתקיים $\underline{D}(\lambda_{E'}, \lambda, 0) = 0$ וכן $\overline{D}(\lambda_E, \lambda, 0) = 2\overline{D}(\lambda_{E'}, \lambda, 0) = 1$.

שאלה 2

תהי μ מידת רדון על $\mathbb{R}^d$ ותהי λ מידת לבג במרחב זה.

נבחן את הנגזרת העליונה,

$$\overline{D}(\mu,\lambda,\cdot):\mathbb{R}^d\to[-\infty,\infty],\qquad \overline{D}(\mu,\lambda,x)=\limsup_{r\to 0}\frac{\mu(\overline{B}(x,r))}{\lambda(\overline{B}(x,r))}$$

ונראה שהיא מדידה בורל.

סעיף א׳

נראה שהפונקציה $f(x)=\mu(\overline{B}(x,r))$ היא רציפה מלמעלה, כלומר שאם $x_i\to x$ סדרה, אז מתקיים,

$$\limsup_{i\to\infty}f(x_i)\le f(x)$$

הוכחה. נזכור כי μ היא רדון ולכן מקיימת רגולריות חיצונית, כלומר,

$$\mu(E)=\sup\{\mu(U)\mid E\subseteq U, U=U^\circ\}$$

תהי $\overline{B}(x,r)\subseteq U$ פתוחה כלשהי ונראה שכמעט לכל i מתקיים $\overline{B}(x_i,r)\subseteq U$. יהי $\varepsilon>0$ ונניח שלכל $i>M$ מתקיים $\|x_i-x\|<\varepsilon$, אז נקבל שגם $p\in\overline{B}(x_i,r)$ אז $\|p-x\|\le\|p-x_i\|+\|x_i-x\|\le r+\varepsilon$. אם U לא מקיימת את הטענה אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $p\notin U$ עבור $\|p-x\|\le r+\varepsilon$ ולכן U לא פתוחה בסתירה.

נסיק שאם U פתוחה כזו ו־M חסם כזה, אז

$lim_{i\to\infty}f(x_i)\le\mu(\bigcup_{i=M}^{\infty}f(x_i))\le\mu(U)$ ומשרירותיות U הטענה נובעת. $\square$

סעיף ב׳

נראה שמתקיים,

$$\overline{D}(\mu,\lambda,x)=\limsup_{r\to 0,r\in\mathbb{Q}}\frac{\mu(\overline{B}(x,r))}{\lambda(\overline{B}(x,r))}$$

כלומר שניתן לקבל את $\overline{D}(\mu,\lambda,x)$ על־ידי ערכי r רציונליים.

הוכחה. ניזכר שלכל $r>0$ מתקיים,

$$\lambda(\overline{B}(x,r))=\int_{\|p-x\|\le r}1\,dx$$

ונוכל להראות באינדוקציה על d ומבער עם משפט פוביני שפונקציה זו רציפה ביחס ל־r.

תהי $r_i\to 0$ סדרת חיוביים ונגדיר $|q_i-r_i|<2^{-i}$ לכל i, קיימים כאלה מצפיפות, וכן נובע ש־$q_i\to 0$. נראה שמתקיים,

$$\frac{\mu(\overline{B}(x,r_i))}{\lambda(\overline{B}(x,r_i))}\xrightarrow{i\to\infty}L\iff\frac{\mu(\overline{B}(x,q_i))}{\lambda(\overline{B}(x,q_i))}\xrightarrow{i\to\infty}L$$

מרציפות λ שמצאנו נובע,

$$\frac{\mu(\overline{B}(x,r_i))}{\lambda(\overline{B}(x,r_i))}\xrightarrow{i\to\infty}L\iff\frac{\mu(\overline{B}(x,r_i))}{\lambda(\overline{B}(x,q_i))}\xrightarrow{i\to\infty}L$$

ונותר להראות עבור המונה. נזכור כי μ מידה ולכן מקיימת מונוטוניות יורדת, כלומר,

$$\mu(\cap_{n=1}^{\infty}E_n)=\inf\mu(E_n)$$

עבור E_n סדרת מדידות יורדת. אם כך ומהגדרת q_i נקבל,

$$\inf\mu(\overline{B}(x,r_i))=\inf\mu(\overline{B}(x,q_i))$$

ונסיק משילוב הטענות שנובע,

$$\frac{\mu(\overline{B}(x,r_i))}{\lambda(\overline{B}(x,r_i))}-\frac{\mu(\overline{B}(x,r_i))}{\lambda(\overline{B}(x,q_i))}\xrightarrow{i\to\infty}0$$

כלומר $\overline{D}$ מקיימת את הטענה. $\square$

סעיף ג׳

נסיק ש-$\overline{D}$ היא מדידה בורל.

הוכחה. בסעיף הקודם מצאנו שההגדרה של $\overline{D}$ חלה גם עם שימוש ברציונליים, ולכן משיקולי עוצמת הסדרות הרציונליות נסיק שלכל $x \in \mathbb{R}^d$ קיימת סדרה $q_i \to 0$ המקיימת,

$$\overline{D}(\mu, \lambda, x) = \lim_{i \to \infty} \frac{\mu(\overline{B}(q_i, x))}{\lambda(\overline{B}(q_i, x))}$$

ולכן מסעיף א׳ ורציפות λ נקבל ש-$\overline{D}$ מדידה. $\square$

שאלה 3

לכל $r > 0$ נגדיר,

$$C(x,r) = \prod_{n=1}^{d} [x_n - r, x_n + r]$$

וכן נגדיר,

$$\mathcal{F} = \{C(x,r) \mid x \in \mathbb{R}^d, r > 0\}$$

ונראה ש־$\mathcal{F}$ מקיימת את תכונת כיסוי בסיקוביץ' החלשה, כלומר נראה שקיים $N = N(d)$ כך שאם $C(x^1, r_1), \dots, C(x^k, r_k) \subseteq \mathcal{F}$ מקיימות,

$$\bigcap_{i=1}^{k} C(x^i, r_i) \neq \emptyset$$

ו־$x^j \notin C(x^i, r_i)$ לכל $i \neq j$, אז מתקיים $k \leq N$.

הוכחה. נגדיר $N = 2^d$ ונראה שהטענה מתקיימת. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$0 \in \bigcap C(x^i, r_i)$. נגדיר את ההעתקה,

$$\xi : \mathbb{R}^d \to \{-1, 1\}^d, \quad \xi_n(x) = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x) - 1$$

כלומר ξ מסווגת לכל נקודה באיזה "רביע" היא.

נניח ש־$\xi(x^i) = \xi(x^j)$ עבור $j \neq i$ כלשהם. מהנתון $0 \in C(x^i, r_i) \cap C(x^j, r_j)$ נסיק שקיים אינדקס $k \leq n$ כך ש־$\xi_n(x^i - r_i) \neq \xi_n(x^i + r_i)$, וכך גם עבור j. אבל בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח ש־$0 \leq x^i_n, x^j_n$ ולכן בהכרח $x^i \in C(x^j, r_j)$ או $x^j \in C(x^i, r_i)$ בסתירה, ולכן נסיק שמתקיים,

$$i \neq j \implies \xi(x^i) \neq \xi(x^j)$$

כלומר $\zeta = \xi \restriction \{x^i \mid i \leq k\}$ חד־חד ערכית, ולכן $k = |\{x^i\}| \leq |\operatorname{Im} \zeta| \leq |\operatorname{rng} \zeta| = |\operatorname{rng} \xi| = 2^d$. $\square$

שאלה 4

נעסוק במקרים בהם משפט הכיסוי של בסיקוביץ' לא מתקיים.

סעיף א'

נראה שמשפט הכיסוי של בסיקוביץ' לא מתקיים עבור קבוצות לא חסומות ב־$\mathbb{R}^d$.

הוכחה. נמצא דוגמה לקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ עם כיסוי בסיקוביץ' ללא תת־כיסוי סופי.

נגדיר $A = \mathbb{R}^d$ וכן $\mathcal{F} = \{\overline{B}(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}^d\}$. נבחין כי $\mathcal{F}$ מוגדר להיות כיסוי בסיקוביץ' ל־A, ולכן נותר להראות שאין לו תת־כיסוי סופי.

נניח ש־$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ תת־כיסוי סופי, אז אם $\mathcal{U} = \{\overline{B}(x^i, 1) \mid i \le k\}$ נבחר $y = x^i$ כך ש־$\|y\|$ מקסימלי, ולכן $U = B(2y, 0)$ סביבה פתוחה וחסומה כך ש־$\bigcup \mathcal{U} \subseteq U$. זוהי כמובן סתירה ל־$\mathbb{R}^d \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. $\square$

סעיף ב'

נניח ש־$d = 2$ ונגדיר את המלבן $R(x, a, b) = [x_1 - a, x_1 + a] \times [x_2 - b, x_2 + b]$. נראה שמשפט הכיסוי של בסיקוביץ' לא מתקיים עבור קבוצות של מלבנים ב־$\mathbb{R}^2$.

הוכחה. יהי $N \in \mathbb{N}$ ויהי $1 > \varepsilon > 0$, נגדיר,

$$\mathcal{F}^N = \{R((3^n, 3^{1-n}), (1 + \varepsilon) \cdot 3^n, (1 + \varepsilon) \cdot 3^{1-n}) \mid n \in [N]\}$$

לכל n מתקיים $3^n - (1+\varepsilon)3^n < 0$ וכן $3^n > 0$ וכן $3^{1-n} - (1+\varepsilon)3^{1-n} < 0$ אבל $e^{1-n} > 0$, נסיק ש־$0 \in \mathcal{F}_n^N$ לכל n ולכן $0 \in \bigcap \mathcal{F}^N$.
נניח ש־$i < j \le N$, אז מתקיים $3^i + (1+\varepsilon)3^i < 2 \cdot 3^i < 3^j$ וכן באופן דומה $3^{1-i} - (1+\varepsilon)3^{1-i} < 3^{1-j}$ ולכן $(3^j, 3^{1-j}) \notin \mathcal{F}_i^N$. מצאנו ש־$\mathcal{F}^N$ מקיים את הדרישות של כיסוי בסיקוביץ' חלש לכל $N \in \mathbb{N}$, ולכן נסיק שמשפט הכיסוי של בסיקוביץ' לא חל על כיסוי במלבנים. $\square$