פתרון מטלה 1 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

23 באוקטובר 2025

שאלה 0

יהי $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ מישור אפיני בגישה סינתטית.

סעיף א׳

נוכיח כי במישור האפיני יש לפחות שלושה ישרים שונים.

הוכחה. נסמן ב־P, Q, R, S את 4 הנקודות הלא קולינאריות שנתון ושמצאנו שקיימות. מצאנו במהלך הוכחה ש־$l = \langle P, Q \rangle$ ו־$m = \langle P, R \rangle$ יחד עם $l' \parallel l \ni R$ וכן $m \parallel m' \ni S$ הם ישרים שונים. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שלא קיים ישר ללא נקודות.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים ישר כזה $l \in \mathcal{L}$. נניח גם ש־$P, Q, R \in \mathcal{P}$ נקודות לא קולינאריות, וכן נסמן $m = \langle P, Q \rangle, n = \langle P, R \rangle$, אז ידוע ש־$n \not\parallel m$. נגדיר את המשיקים $l \parallel l' \ni Q$ וכן את $l \parallel l'' \ni R$, אז בהכרח $l'' \parallel l'$ וכן $Q \in l' \cap m$ וגם $R \in l'' \cap R$. אילו $m \parallel l$ וגם $n \parallel l$ אז נקבל ש־$l' = l''$ ולכן P, Q, R קולינאריות בסתירה, ולכן $m \parallel \neg l$ וקיימת נקודת חיתוך. $\square$

סעיף ג׳

נוכיח כי לכל ישר לפחות שתי נקודות שונות.

הוכחה. יהי ישר $l \in \mathcal{L}$, ותהי $P \in l$ נקודה כלשהי שידוע שקיימת מהסעיף הקודם. נניח שוב ש־$P, Q, R \in \mathcal{P}$ נקודות לא קולינאריות ונגדיר את $m = \langle P, Q \rangle$.
נסמן גם את $n = \langle Q, R \rangle$, אם $l \parallel \neg n$ אז סיימנו, שכן $Q \in l$ או $R \in l$, לכן נניח ש־$l \parallel n$. נגדיר את המשיק $m \parallel m' \ni R$, אז $m' \not\parallel l$ בהכרח ולכן יש להם נקודת חיתוך. $\square$

סעיף ד׳

נראה כי לכל שני ישרים כמות זהה של נקודות.

הוכחה. נניח ש־$l_0, l_1 \in \mathcal{L}$ ישרים מקבילים, ונניח ש־$P_0 \in l_0, P_1 \in l_1$.
אם $l_0 = l_1$ אז סיימנו, לכן נניח ש־$l_0 \neq l_1$, כלומר הנקודות המרכיבות אותם שונות.
נגדיר את הישר $m = \langle P_0, P_1 \rangle$, בהכרח $l_0, l_1 \not\parallel m$. תהי נקודה $Q \in l_0$, אז נגדיר את $Q \in n \parallel m$, מתקיים $l_1 \not\parallel n$ ולכן יש להם נקודת חיתוך $Q' \in l_1$.

נניח עתה ש־$Q_0, Q_1 \in l_0$ וכן ש־$Q'_0, Q'_1 \in l_1$ מתאימות אליה, נראה ש־$Q_0 \neq Q_1 \implies Q'_0 \neq Q'_1$. נניח ש־$Q'_0 = Q'_1$, וכן נניח ש־$Q_0 \neq Q_1$, אז $o = \langle Q_0, Q'_0 \rangle, p = \langle Q_1, Q'_0 \rangle$ הם ישרים לא מקבילים. אבל $o \parallel m \parallel p \implies o \parallel p$ בסתירה. $\square$

סעיף ה׳

נראה שלכל שני ישרים נחתכים יש אותה כמות של נקודות.

הוכחה. נפעל באופן זהה לסעיף הקודם. אם $l_0, l_1 \in \mathcal{L}$ כך ש־$l_0 \cap l_1 = \{O\}$ אז קיימות נקודות שונות $P_0, P_1 \in \mathcal{P}$ כך ש־$P_0 \in l_0, P_1 \in l_1$, מכאן ההוכחה זהה תוך שימוש ב־$m = \langle P_0, P_1 \rangle$. $\square$

סעיף ו׳

נסיק שלכל הישרים במישור האפיני יש אותה כמות של נקודות.

הוכחה. נסמן שתי נקודות כלשהן $P, Q \in \mathcal{P}$ ואת $l = \langle P, Q \rangle$. יהי $m \in \mathcal{L}$ ישר כלשהו. אם $l \parallel m$ אז יש להם אותו מספר נקודות בהתאם לסעיף ד׳. אם $l \not\parallel m$ אז מסעיף ה׳ יש לישרים אותו מספר נקודות. $\square$

שאלה 1

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי (E, V, t) מרחב אפיני.

תהי $P \in E$ ו־$(E, +_P, \cdot_P)$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ שראשיתו P, נסמן כ־E_P.

נוכיח שההעתקה $v_P : E_P \to V$ היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

הוכחה. נוכיח תחילה ש־v_P העתקה לינארית. נניח ש־$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ וכן ש־$Q, R \in E_P$, אז מתקיים,

$$\begin{aligned} v_P(\alpha Q +_P \beta R) &= v(P, \alpha Q +_P \beta R) \\ &= \alpha Q +_P \beta R - P \\ &= \alpha \cdot_P +Q \beta \cdot_P R - 2P \\ &= \alpha(Q - P) + P + \beta(R - P) + P - 2P \\ &= \alpha v_P(Q) + \beta v_P(R) \end{aligned}$$

תוך שימוש בהגדרות המופיעות בסיכום.

ראינו ש־v_P היא העתקה הפיכה בהרצאה ולכן היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים. $\square$

שאלה 2

סעיף א׳

יהיו $W, W' \leq V$ תתי־מרחבים אפיניים ו־$P, Q \in E$ נקודות. נראה ישירות כי מתקיים,

$$P + W = Q + W' \iff W = W' \wedge Q - P \in W$$

הוכחה. נראה תחילה ש־$Q - P \in W \iff P + W = Q + W$.

נניח ש־$P + W = Q + W$, אז,

$$P + W - Q = Q + W - Q = \{w + Q - Q \mid w \in W\} = \{w \mid w \in W\} = W$$

ולכן בפרט $P + Q \in W$.

נניח ש־$Q - P \in W$, אז מתקיים,

$$P + W = P - Q + Q + W = Q + W$$

ונסיק את הטענה הראשונה.

עתה נראה שאם $R + W = R + W'$ אז $W = W'$. יהי $w \in R + W$, אז קיים $w' \in W$ כך ש־$w = R + w'$, וידוע כי גם $w \in W'$ ולכן קיים גם $w'' \in W'$ כך ש־$w = R + w''$. אז בהתאם מתקיים $w'' = w'$ ולכן $W = W'$.

עתה נעבור להוכחת טענת השאלה, נניח ש$P + W = Q + W'$. מתקיים,

$$P + W = Q + W' \iff P - Q + W = Q - Q + W' \iff P - P + W = Q - P + W'$$

ולכן נובע ש־$W = W'$ ומטענת העזר הראשונה נובע שגם $P - Q \in W$.

נעבור לכיוון השני ונניח ש־$W = W'$ וכן ש־$P - Q \in W$. אז הטענה נובעת ישירות מטענת העזר הראשונה. $\square$

סעיף ב׳

תהי $F = P + W \leq E$ תת־יריעה עבור $P \in E$ ו־$W \leq V$.

נראה שלכל $Q \in F$ מתקיים $F = Q + W$.

הוכחה. נבחין כי $Q = P + w \iff Q \in F$ עבור $w \in W$. בהתאם $Q - P = w \in W$ ולכן מסעיף הקודם נובע $Q + W = P + W = F$. $\square$

שאלה 3

הגדרה 0.1 יהיו (F_1, W_1) ו־(F_2, W_2) שתי תת־יריעות.
נאמר שהן מקבילות אם $W_1 = W_2$ ונסמן $F_1 \parallel F_2$.

נוכיח את משפט אוקלידס: לכל $F \subseteq E$ תת־יריעה ו־$P \in E \setminus F$ קיימת $P \in F' \subseteq E$ תת־יריעה יחידה מקבילה ל־F.

הוכחה. נניח שמתקיים $F = Q + W$ עבור $Q \in E$ ו־$W \leq V$.
בהתאם $F' = P + W$ היא תת־יריעה של E, מהגדרתה היא מקבילה ל־F.

נותר אם כן להוכיח יחידות, נניח שגם $F'' \leq E$ תת־יריעה מקבילה ל־F, ונסיק ש־$F'' = P + W = F'$ מהשאלה הקודמת. ☐

שאלה 4

תהיינה תת־יריעות $F_1, F_2 \leq E$.

נראה כי $F_1 \parallel F_2 \iff \exists v \in V,\ F_1 + v = F_2$ וכן שאם $F \leq E$ אז לכל $v, w \in V$ מתקיים $v - w \in W \iff F + v = F + w$.

הוכחה. נסמן $F_1 = P_1 + W_1, F_2 = P_2 + W_2$.

נניח ש־$F_1 + v = F_2$ עבור $v \in V$, אז מתקיים $P_1 + W_1 + v = P_2 + W_2$ ולכן נובע ש־$W_1 = W_2$ (משאלה 3) ובהתאם $F_1 \parallel F_2$.

נניח ש־$F_1 \parallel F_2$, כלומר $W_1 = W_2$. נסמן $v = P_1 - P_2 \in V$, אז מתקיים $P_1 + W_1 + v = P_1 + P_2 - P_1 + W_1 = P_2 + W_2$, כלומר $F_1 + v = F_2$.

נניח עתה ש־$F \leq E$ ויהיו $v, w \in V$. נניח גם ש־$F = P + W$.

אם $F + v = F + w$ אז $P + v + W = P + w + W$ ולכן $(P - v) - (P - w) \in W$.

נניח בכיוון ההפוך ש־$v - w \in W$, אז תת־היריעות מקבילות ובהכרח $F + v = F + w$. □

שאלה 5

תהי $S \subseteq E$ ונגדיר,

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq F \leq E} F$$

כלומר נאמר ש־S יוצרת את תת־היריעה $\langle S \rangle$.

נוכיח כי $\langle S \rangle \leq E$ וכן שהיא מינימלית ביחס ההכלה ביחס לתת־היריעות המכילות את S.

הוכחה. אם $S = \emptyset$ אז היא תת־יריעה והיא מינימלית ביחס ההכלה, לכן נניח ש־$S \neq \emptyset$, ותהי $P \in S$ נקודה כלשהי. מתקיים $P \in F$ לכל $S \subseteq F \leq E$ ולכן $F = P + W$ עבור $W \leq V$. נוכל אם כן להסיק שמתקיים,

$$\langle S \rangle = P + \bigcap_{S - P \subseteq W \leq V} W$$

כלומר $\langle S \rangle = P + \langle S - P \rangle$, כאשר $\langle S - P \rangle$ הוא תת־מרחב וקטורי הנוצר על־ידי $S - P$. נסמן $W' = \langle S - P \rangle$ ונסיק ש־$S = P + W' \leq E$.

נשאר להוכיח שתת־יריעה זו היא מינימלית ביחס ההכלה, אך טענה זו נובעת ישירות ממינימליות ביחס להכלה של תת־מרחב וקטורי נוצר. $\square$