נוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + 1).$$

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה.

עבור $n = 1$ נקבל $x - 1 = (x-1)(1)$ כפי שרצינו.

נניח עתה שעבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו מתקיימת הטענה ונבדוק את $n+1$.

$$x^{n+1} - 1 = (x^{n+1} - x) + (x-1) = x(x-1)(x^{n-1} + \cdots + 1) + (x-1) = (x-1)(x^n + \cdots + x) + (x-1) = (x-1)(x^n + \cdots + x + 1)$$

והטענה חלה. $\square$

נראה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

הוכחה. עבור בסיס האינדוקציה נבדוק את $n = 1$,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{3} < 2 \iff 3 < 4.$$

ולכן הטענה מתקיימת.

נניח שהטענה נכונה עבור n ונבדוק את המקרה $n+1$,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{\sqrt{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$$

השלמנו את מהלך האינדוקציה ולכן הטענה נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$. $\square$

נוכיח שאם $a_1 \cdots a_n = 1$ אז $(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n$.

הוכחה. באינדוקציה. עבור $n = 1$ נקבל $a_1 = 1$ ולכן $(1 + a_1) \geq 1 + 1$.

נניח שהטענה נכונה עבור n ותהי סדרה $a_1 \cdots a_{n+1} = 1$, אז בפרט גם $a_1 \cdots a_{n-1} \cdot (a_n a_{n+1}) = 1$ סדרה מאורך n ולכן מתקיים,

$$\overbrace{(1 + a_1) \cdots (1 + a_{n-1})}^{\stackrel{\text{def}}{=} K}(1 + a_n a_{n+1}) \geq 2^n \tag{1}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש־(a_n) סדרה מונוטונית עולה, אחרת נוכל להגדיר מחדש סדרה $b_1 = \min\{a_k\}$ ו־$b_k = \min\{a_k\} \setminus \{b_1, \ldots, b_{k-1}\}$.

אז בפרט מתקיים $a_n a_{n+1} \geq 1$, וכן מתקיים,

$$(1 + a_n)(1 + a_{n+1}) = 1 + a_n + a_{n+1} + a_n a_{n+1} \geq 4 \tag{2}$$

נוכל להציג את (1) גם על־ידי,

$$K((1 + a_n)(1 + a_{n+1}) - a_n - a_{n+1}) \geq 2^n$$

ועל־ידי פתיחת סוגריים והעברת אגפים,

$$\overbrace{K(1 + a_n)(1 + a_{n+1})}^{\stackrel{\text{def}}{=} K'} \geq 2^n + (a_n + a_{n+1})K \stackrel{\text{הנחת האינדוקציה}}{\geq} 2^n + (a_n + a_{n+1})2^{n-1} \stackrel{(2)}{\geq} 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

ולכן הטענה נובעת. $\square$