פתרון מטלה 10 — אנליזה על יריעות, 80426

7 ביוני 2025

שאלה 1

תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה קומפקטית, ונניח ש־$f : M \to \mathbb{R}$ חלקה. יהי $\xi : M \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי.

סעיף א׳

נראה שקיימת סביבה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ של M והעתקה חלקה $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ כך ש־$\tilde{f}|_M = f$.

הוכחה. לכל $x \in M$ קיימת פרמטריזציה מקומית של M, כלומר $\alpha_x : U_x \to M$ חלקה, ויש לה הרחבה חלקה לקבוצה פתוחה $x \in V_x \subseteq \mathbb{R}^n$. מהפיכות משמאל נסיק שגם $f|_{U_x}$ ניתנת להרחבה, ונסמן g_x כהרחבה זו. M קומפקטית ו־$M \subseteq \bigcup_{x \in M} U_x$ ולכן קיים תת־כיסוי סופי $M \subseteq \bigcup_{i=1}^N U_x$. זוהי משפחת קבוצות פתוחות חסומה ולכן יש לה חלוקת יחידה $\{h_i\}_{i=1}^N$, ונגדיר את הפונקציה $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ עבור $U = \bigcup_{i=1}^N U_{x_i}$ על־ידי,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^N h_i(x) g_{x_i}(x)$$

ונקבל ש־$\tilde{f}|_M = f$ ישירות מהגדרתה מחלוקת היחידה והשוויון בסביבות המקומיות. □

סעיף ב׳

נסיק שקיימת סביבה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ של M ושדה וקטורי $\tilde{\xi} : U \to \mathbb{R}^n$ כך ש־$\tilde{\xi}|_M = \xi$.

הוכחה. נבחין כי קיים פירוק $\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$ כך ש־$\xi_i : M \to \mathbb{R}$ חלקה לכל $1 \le i \le n$. מהסעיף הקודם נובע שקיימת סביבה פתוחה U_i כך ש־ξ_i ניתנת להרחבה חלקה ל־U_i. עתה נבחר $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ ונקבל קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ כך ש־ξ ניתנת להרחבה קורדינטה קורדינטה בה לפונקציה $\tilde{\xi} : U \to \mathbb{R}^n$.

נבחין כי טענה זו נכונה רק עבור מימד סופי. □

סעיף ג׳

נראה שקיימות הרחבות $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ המרחיבות את f, ξ בהתאמה.

הוכחה. בסעיף א׳ הגדרנו חלוקת יחידה של קבוצה פתוחה $M \subseteq U$. עתה נגדיר חלוקת יחידה של $\mathbb{R}^n$ על־ידי הרחבת חלוקת היחידה שהגדרנו בסעיף א׳, יחד עם הקבוצה $W = \mathbb{R}^n \setminus C$ עבור $C \subseteq U$ סגורה כך ש־$M \subsetneq C$. נגדיר את הפונקציה F על־ידי,

$$F(x) = \left(\sum_{i=1}^N \tilde{f}|_{U_i}(x) \alpha_i(x) \right) + \alpha_W(x) \cdot 0$$

ונקבל פונקציה חלקה כך שהיא מתאפסת מחוץ לסביבה של U. התהליך עבור X זהה. □

שאלה 2

סעיף א׳

יהיו $0 < a < b < \pi$, ונגדיר את היריעה $N_{a,b} = S^{n-1} \times [a, b] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
נראה ש־$\varphi : N_{a,b} \to S^n$ הנתונה על־ידי $\varphi(x, y) = (x \sin y, \cos y)$ דיפאומורפיזם על תמונתה, כאשר $x \in \mathbb{R}^{n-2}, y \in \mathbb{R}$.

הוכחה. מתקיים,

$$\|\varphi(x, y)\|^2 = \|(x \sin y, \cos y)\|^2 = \|x\|^2 \sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

ישירות מהעובדה כי $x \in S^{n-2}$. לכן $\varphi(x, y) \in S^n$ והפונקציה מוגדרת היטב. זוהי גם פונקציה חלקה כהרכבת חלקות, ונותר לבדוק חד־חד ערכיות, ממשפט הפונקציה ההפוכה נסיק דיפאומורפיזם לתמונה.
נניח ש־$y \ne y', x \ne x'$, אם $\cos y \ne \cos y'$ אז סיימנו, אחרת $y = y' = \frac{\pi}{2}$ בלבד (ישירות מתחום ההגדרה). במקרה זה נקבל $\sin y = \sin y' = 1$ ולכן $x \sin y \ne x' \sin y'$ וקיבלנו חד־חד ערכיות. אם גם $x = -x'$ □

סעיף ב׳

נסמן $M_{a,b} = \varphi(N_{a,b})$. נראה שאם $f : S^n \to \mathbb{R}$ רציפה אז,

$$\int_{M_{a,b}} f(x)\, dx = \int_a^b (\sin y)^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(x \sin y, \cos y)\, d\,\mathrm{vol}_{n-1}(x)\, dy$$

הוכחה. ישירות מהגדרת אינטגרל, שימוש ב־φ ומשפט פוביני נקבל,

$$\int_{M_{a,b}} f(x)\, dx = \int_a^b \int_{S^{n-1}} f(x \sin y, \cos y) V(D\varphi|_{(x,y)})\, d\,\mathrm{vol}_{n-1}(x)\, dy$$

ולכן מספיק שנראה ש־$V(D\varphi|_{(x,y)}) = (\sin y)^{n-1}$. נובע ישירות מחישוב. □

סעיף ג׳

נסמן $N = S^{n-1} \times (0, \pi)$ ונגדיר $\varphi : N \to S^n$ כמקודם. נראה ש־$S^n \setminus \varphi(N)$ ממידה 0.

הוכחה. נבחין ש־$\varphi(S^{n-1} \times [0, \pi]) = S^n$ (אילו היינו מרחיבים את ההגדרה) וכן,

$$L = \varphi(S^{n-1} \times \{0, \pi\}) = \varphi(S^{n-1} \times \{0\}) = \{(x \sin 0, \cos 0) \mid x \in S^{n-2}\} = S^{n-2} \times \{0\}$$

כלומר $S^n \setminus \varphi(N) = L$ עבור L יריעה ממימד $n - 1$, ובפרט קבוצה ממידה 0. □

סעיף ד׳

נסיק שאם $f : S^n \to \mathbb{R}$ רציפה אז,

$$\int_{M_{a,b}} f(x)\, dx = \int_a^b (\sin y)^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(x \sin y, \cos y)\, d\,\mathrm{vol}_{n-1}(x)\, dy$$

הוכחה. מתקבל באופן זהה לחלוטין לסעיף ב׳. □

שאלה 4

סעיף א'

תהי $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה קומפקטית עם שפה. נניח ש־$x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ נקודה ו־$p \in M$ כך שמתקיים,

$$\|p - x\| = \min_{q \in M} \|q - x\|$$

נראה ש־$p - x$ היא אנכית ל־T_pM.

הוכחה. אנו רוצים להראות שלכל $v \in T_pM$ מתקיים $\langle v, p - x \rangle = 0$. באופן שקול נרצה להראות שלכל מסילה $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ כך ש־$\gamma(0) = p$ מתקיים $\langle \gamma'(0), v - x \rangle = 0$. נניח שקיימת מסילה כזו כך שמתקבל ערך שונה מאפס. אז מהגדרת מכפלה פנימית קיים $0 < \varepsilon < \delta$ (בלי הגבלת הכלליות) כך ש־$\langle \gamma(\varepsilon), v - x \rangle < \langle \gamma(0), v - x \rangle$, וזו סתירה להגדרת $p = \gamma(0)$. $\square$

סעיף ב'

נמצא דוגמה ליריעה עם שפה $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ כך שהטענה שהוכחנו זה עתה לא חלה בה.

פתרון נבחר את חצי הספירה $\mathbb{H}^n \cap S^{n+1}$ ואת הנקודה $x = (1, 0, \ldots, -\epsilon)$ נקודה קרובה מאוד לקוטב. בבירור עבור המישור המשיק המורחב נקבל ש־$x - p$ נמצאת במישור המשיק, אבל אם נבחן את המישור המשיק עם התייחסות למשיק חד־צדדי בשפה נקבל שאכן יש אנכיות.

סעיף ג'

במטלה קודמת ראינו כי אם $M = \partial U$ יריעה חלקה המהווה שפה עבור קבוצה פתוחה, קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$\varphi(t, p) = t\nu(p) + p$ דיפאומורפיזם. עתה נראה כי לכל $0 < \delta < \varepsilon$ מתקיים,

$$\varphi([-\delta, 0] \times M) = \{x \in \overline{U} \mid \operatorname{dist}(x, M) \leq \delta\}$$

הוכחה. יהי $0 < \delta < \varepsilon$, ותהי $p \in M$, כלומר $p \in \partial U$ ובפרט $p \in \overline{U}$. אז נובע ישירות ש־$p \in \varphi([-\delta, 0] \times M)$, ועתה נגדיר,

$$x = \varphi(-\delta, p) = p - \delta\nu(p)$$

אז מתקיים מהגדרת המרחק,

$$\operatorname{dist}(x, M) \leq \operatorname{dist}(x, p) = \langle x, p \rangle = \|\delta\nu(p)\| = \delta \cdot 1$$

ולכן בפרט $x \in \varphi([-\delta, 0] \times M)$ וסיימנו על־ידי בחירת $\delta' < \delta$. $\square$

סעיף ד'

נארה ש־$V(D\varphi|_{(0,x)}) = 1$ לכל $x \in M$.

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות שאנו עובדים בבסיס כך שרק המימדים הראשונים תלויים במישור המשיק של M ב־x. במקרה זה,

$$D\varphi|_{(t,x)} I_n + \begin{pmatrix} tI_k & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן בפרט $D\varphi|_{(0,x)} = I_n$ לכל x, ומפה הטענה נובעת ישירות. $\square$

סעיף ה'

נסיק שמתקיים,

$$\operatorname{vol}_{n-1}(M) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \operatorname{vol}_n(N_\delta) = -\frac{d}{d\delta}|_{\delta=0} \operatorname{vol}_n(N_\delta)$$

הוכחה.

$$\operatorname{vol}_{n-1}(M) = \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x)) \cdot 1 \cdot D(V1)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))\, dx$$

מהצד השני,

$$\frac{1}{\delta} \operatorname{vol}_n(N_\delta) = \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i} \varphi_i(\varphi([-\delta, 0] \times \alpha_i(x)))\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i} \delta\varphi_i(\alpha_i(x))\, dx$$

מפוביני ולכן,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \operatorname{vol}_n(N_\delta) = \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))\, dx$$

וזאת הנגזרת ישירות מההגדרה. □

סעיף ו׳

נראה שהטענה שמצאנו זה עתה מתקיימת עבור מעגלים וספירות.

פתרון עבור מעגל $s = 2\pi$ מצד אחד, ומהצד השני,

$$-\frac{d}{d\delta}|_{\delta=0} \operatorname{vol}_n(N_\delta) = -\frac{d}{d\delta}|_{\delta=0}(\pi - \pi\delta^2) = 2\pi\delta|_{\delta=0} = 2\pi$$

והחישוב לספירה דומה.