פתרון מטלה 05 — אנליזה על יריעות, 80426

2 במאי 2025

שאלה 1

סעיף א׳

תהי ההעתקה הלינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ המוגדרת על־ידי,

$$T(x,y,z)=(x+3z,y+x+z,2y+x,z)$$

ויהי תת־המרחב $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x=y\}$. נגדיר $S=T\restriction H$, נחשב את $V(S)$.

פתרון נגזור ונקבל,

$$DT=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&1&1\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

אבל במרחב H מתקיים $x=y$ ולכן נובע,

$$S(x,x,z)=(x+3z,2x+z,3x,z)$$

כלומר קיבלנו כי $S:H\to\mathbb{R}^4$ היא העתקה ממימד 2 למימד 4, ונסיק,

$$DS=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\3&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ולכן נובע שמתקיים,

$$V(S)=\sqrt{\begin{vmatrix}14&5\\5&11\end{vmatrix}}=\sqrt{129}$$

סעיף ב׳

עבור $i\in\{1,2,3\}$ יהיו U_i מרחבי וקטוריים ממימד k, ותהינה ההעתקות $T:U_1\to U_2, S:U_2\to U_3$. נראה שמתקיים

$$V(ST)=V(S)V(T)$$

הוכחה.

$$V(ST)=\sqrt{|(ST)^tST|}=\sqrt{|T^tS^tST|}=\sqrt{|T^t|\cdot|S^tS|\cdot|T|}=\sqrt{|T^t|}V(S)\sqrt{|T|}=V(S)V(T)$$

כאשר השתמשנו בכפליות הדטרמיננטה, בחילופיות הכפל, וכן באפיון שחלוף כפל. □

שאלה 2

סעיף א׳

תהי $(X, \varphi : U \to \mathbb{R}^n)$ יריעה פרמטרית k־מימדית כך ש־$U \subseteq \mathbb{R}^k$ וכן $X \subseteq \mathbb{R}^n$ עבור $n \geq k$ כלשהם.
נניח ש־k השורות הראשונות של $D\varphi \mid_u$ בלתי תלויות לינארית. נראה שקיימת קבוצה פתוחה $V \subseteq U$, דיפאומורפיזם $\psi : W \to V$, עבור $W \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה, ופונקציה חלקה $h : W \to \mathbb{R}^{n-k}$, כך שמתקיים,

$$\forall w \in W,\ (w, h(w)) = (\varphi \circ \psi)(w)$$

הוכחה. נגדיר $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ עבור $\varphi_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ו־$\varphi_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$. נתון כי k השורות הראשונות של $D\varphi$ בלתי תלויות לינארית, כלומר φ_1 בעלת נגזרת ממימד k, ובהתאם היא הפיכה בכל נקודה ודיפאומורפיזם ממשפט הפונקציה ההפוכה. נגדיר את ψ להיות פונקציה הפוכה של φ_1 בסביבה פתוחה ב־X, נסמנה W, ונסמן את תמונתה ב־V. נגדיר את הפונקציה $h : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ כפונקציה המקיימת,

$$\forall w \in W,\ (w, h(w)) = (\varphi \circ \psi)(w)$$

קיימת כזו כצמצום מקומי של φ_2. עלינו להראות ש־h היא חלקה, אך זה נובע מהפעלה חוזרת ונשנית של משפט הפונקציה ההפוכה (ובהתאם, צמצום ראשוני של W, V בהתאם) בדומה להוכחה עבור מסילות. □

סעיף ב׳

תהי $(X, \varphi : U \to \mathbb{R}^k)$ יריעה פרמטרית k־מימדית רגולרית ב־$u \in U$. נראה שקיימים V, W, ψ, h כבסעיף הקודם, ו־$A \in O_n(\mathbb{R})$ (כלומר A העתקה אורתוגונלית) כך שמתקיים,

$$\forall w \in W,\ (w, h(w)) = A\varphi(\psi(w))$$

הוכחה. נתון כי $\dim(D\varphi \mid_u) = k$ כהגדרת הרגולריות בנקודה, ואנו רוצים למצוא העתקה כך ש־$AD\varphi \mid_u$ תהיה מטריצה ש־k השורות הראשונות שלה בלתי־תלויות לינארית. נוכל לבחור אם כך את A כך שתזיז את k השורות שמובטח שבלתי־תלויות מהרגולריות לשורות הראשונות, ונקבל ש־$A\varphi$ תקיים את תנאי הסעיף הקודם, כמבוקש. □

שאלה 3

סעיף א׳

תהי יריעה פרמטרית n־מימדית (X,φ) עבור $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ כך ש־$U \subseteq \mathbb{R}^n$, כך שמתקיים,

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n,u(x_1,\ldots,x_n)).$$

עבור $u : U \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה כלשהי.

פתרון היא אכן קיימת.

סעיף ב׳

נראה ש־(X,φ) היא רגולרית.

הוכחה. מתקיים,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{\partial u}{dx_1} & \frac{\partial u}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial u}{dx_n} \end{pmatrix}$$

כלומר מטריצת היחידה ולאחריה ∇u. לכל $x \in U$ נקבל ש־$\dim D\varphi \mid_x = n$, זאת שכן עמודות המטריצה בלתי־תלויות לינארית (ואף קנוניות).
נסיק אם כך ש־(X,φ) רגולרית בכל נקודה ולכן רגולרית. □

סעיף ג׳

נראה שמתקיים,

$$\mathrm{vol}_n(X) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx$$

הוכחה. נתחיל בחישוב $V(D\varphi \mid_x)$,

$$V(D\varphi \mid_x) = \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} u_1u_1 & \cdots & u_1u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & \cdots & u_nu_n \end{pmatrix} + I_n\right)} = \sqrt{\det\Big((\nabla u)^t(\nabla u) + I_n\Big)}$$

נבחין כי מתקיים,

$$((\nabla u)^t(\nabla u)) \cdot (\nabla u)^t = (\nabla u)^t \cdot \|\nabla u\|^2$$

ולכן זהו וקטור עצמי של המטריצה, ונוכל להסיק כי זהו הערך העצמי היחיד של המטריצה הסימטרית הזו, זאת שכן,

$$((\nabla u)^t(\nabla u)) \cdot v = \alpha v \iff \forall i, u_i(\nabla u \cdot v) = \alpha v_i \iff v = \frac{\nabla u \cdot v}{\alpha} u$$

אבל מטריצה סימטרית תמיד לכסינה, ולכן גם $(\nabla u)^t(\nabla u) + I_n$ לכסינה ומתקיים,

$$\sqrt{\det\Big((\nabla u)^t(\nabla u) + I_n\Big)} = \sqrt{|\nabla u|^2 + 1}$$

כנביעה מנוסחה לחישוב דטרמיננטת מטריצה לכסינה אורתוגונלית. □

סעיף ד׳

תהי נקודה $x \in U$, נראה שמתקיים $T_x(X) = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, g(x) \rangle = 0\}$, כאשר,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \left(\frac{-\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{-\partial u}{\partial x_n}, 1 \right)$$

הוכחה. מהגדרה,

$$T_x(X) = \operatorname{Im}(D\varphi \mid_x) = \{D\varphi \mid_x (v) \mid v \in \mathbb{R}^n\} = \{(v_1, \ldots, v_n, \langle \nabla u, v \rangle) \mid v \in \mathbb{R}^n\} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v_{n+1} = \langle \nabla v, f(x) \rangle\}$$

עבור $f(x) = \left(\frac{-\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{-\partial u}{\partial x_n}, 0 \right)$. בהעברת אגפים נקבל,

$$T_x(X) = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 = \langle \nabla v, g(x) \rangle\}$$

עבור $g(x) = \left(\frac{-\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{-\partial u}{\partial x_n}, 1 \right)$, כאשר נוכל לכפוך בסקלר $\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$ בשל לינאריות המכפלה הפנימית. $\square$

סעיף ה׳

נגדיר את טורוס הסיבוב $(X, \varphi : (0, \pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^4)$ המוגדר על־ידי,

$$\varphi(\theta, \nu) = (2 + \sin \nu)(\cos \theta, \sin \theta, 0) + (0, 0, \cos \nu)$$

ונחשב את $T_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(X)$.

פתרון לא ממש ברור מה ההגדרה עבור המימד הרביעי, לכן נניח שיש רק שלושה. נבחין כי,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} (2 + \sin \nu)(-\sin \theta) & \cos \theta \cos \nu \\ (2 + \sin \nu)(\cos \theta) & \sin \theta \cos \nu \\ 0 & -\sin \nu \end{pmatrix}$$

וכן $\varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, 3, 0)$, לכן,

$$T_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(X) = T_{(0,3,0)}(X) = \operatorname{Im}(D\varphi \mid_{(0,3,0)}) = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Sp}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

סעיף ו׳

נמצא נוסחה עבור $\operatorname{vol}_2 X$.

פתרון נחשב את אלמנט הנפח.

$$V(D\varphi) = \sqrt{(D\varphi)^t D\varphi} = \sqrt{\begin{vmatrix} (2 + \sin \nu)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 2 + \sin \nu$$

ולכן,

$$\int_X 1 \, d\operatorname{vol}_2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^3 2 + \sin \nu \, dr \, d\nu \, d\theta$$