

גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית – סיכום

9 בדצמבר 2025



תוכנית העניינים

4	שיעור 1 – 20.10.2025	1
4	1.1 מבוא	1.1
4	1.2 הגישה הסינחתית	1.2
4	1.3 הגישה האנגלטית	1.3
4	1.4 מרחבים אפיניים	1.4
6	שיעור 2 – 21.10.2025	2
6	2.1 מרחבים אפיניים – המשך	2.1
7	2.2 תתי-מרחבים אפיניים	2.2
9	שיעור 3 – 27.10.2025	3
9	3.1 העתקות אפיניות	3.1
10	3.2 יוצרים ובסיסים	3.2
11	שיעור 4 – 28.10.2025	4
11	4.1 קורדיינטות – המשך	4.1
12	שיעור 5 – 3.11.2025	5
12	5.1 מרחבים אפיניים ממשיים	5.1
13	5.2 עקוםים במרחב אפיני ממשי	5.2
14	שיעור 6 – 4.11.2025	6
14	6.1 קמירות במרחבים אפיניים	6.1
15	שיעור 7 – 10.11.2025	7
15	7.1 פרמטריזציה לפי אורך	7.1
15	7.2 עקומות	7.2
16	שיעור 8 – 11.11.2025	8
16	8.1 עקומות – המשך	8.1
17	שיעור 9 – 17.11.2025	9
17	9.1 עקומות	9.1
18	שיעור 10 – 18.11.2025	10
19	שיעור 11 – 24.11.2025 – 11	11
19	11.1 תרגילים	11.1
20	שיעור 12 – 25.11.2025 – 12	12
20	12.1 מרחבים דואליים	12.1
21	שיעור 13 – 1.12.2025 – 13	13
21	13.1 מרחבים דואליים	13.1
23	שיעור 14 – 2.12.2025 – 14	14

23	14.1
23	14.2
24	15 8.12.2025 – 15
24	15.1
24	15.2
25	15.3
26	16 9.12.2025 – 16
26	16.1

1 שיעור 1 – 20.10.2025**1.1 מבוא**

גאומטריה היא אבן יסוד של החבורה שלנו, והיא לוקחת חלק בכל תהליך בניהה תכנון ומדידה. לאורך ההיסטוריה היה חקר של גאומטריה באיזשהו אופן נאיבי, אך אנו עוסקים בחקר של הגאומטריה באופן האקסיומטי שלה. אנו עוסקים בחקר של צורות החלוקות, ככלומר שאפשר לטלף אותן, תוך שימוש בכלים שראיתנו אנגליזה. הרעיון בקורס הוא לgesht בצורה אלמנטרית לבועות לאו דווקא מרכיבות בגישה שהיא גאומטרית. הצורות שנחקרו הן יריעות, ככל הנראה יריעות החלוקות.

1.2 הגישה הסינטטית

המתמטיקה המודרנית מתבססת על תורה הקבוצות, שכן עלינו לספק הגדרה קבוצתית הולמת למושג המשור.

הגדירה 1.1 (ישרים מקבילים) שני ישרים נקראים מקבילים אם הם מתלדים או אינם נחתכים.

הגדירה 1.2 (קולינאריות) נאמר שקווצה של נקודות הן קולינאריות כאשר כל הנקודות שייכות לישר אחד.

הגדירה 1.3 (משור אפיני) זוג סדור (\mathcal{P}, \mathcal{L}) כאשר \mathcal{P} קבוצה שאת ערכיה נכנה נקודות ו- \mathcal{L} קבוצה של קבוצות של נקודות, אותן נכנה ישרים. זוג סדור זה יקרא משור אפיני אם הוא מקיים את התכונות הבאות,

1. לכל שתי נקודות יש ישר יחיד המכיל את שתיהן

2. לכל ישר ונקודה קיימן ישר יחיד מקביל לישר העובר דרך הנקודה

3. קיימות שלוש נקודות שאינן קולינאריות

מעבר למשפט יסודי שمدגים את אופי המשור האפיני.

משפט 1.4 (מספר נקודות מינימלי במשור אפיני) יהי מרחב אפיני (\mathcal{L}, \mathcal{P}), אז \mathcal{P} לפחות 4 נקודות

הוכחה. יהיו $P, Q, R \in \mathcal{P}$ נקודות שונות ולא קולינאריות. נסמן גם $\langle P, Q \rangle, m = \langle P, R \rangle$, $m' = \langle Q, R \rangle$ שני הישרים העוברים דרך הנקודות המתאימות.

נסמן את $P \in l \in \mathcal{L}$, וגם את $m' \cap l' \in R, m \parallel m'$. אנו טוענים כי $S \in \{P\}$ קיימת וכי היא נקודה רביעית.

נטען טענה עוז, והוא $Sh' \parallel l'$. אילו $Sh' \parallel l'$? או מטרנוויות יחס השקילות המושרעה מיחס ההקבלה היה נובע כי $m \parallel m' \parallel l' \parallel l$, אבל אז מהתמונה השנייה של משור אפיני היה מתקבל $Sh' = l$ בסתיויה לבחירת P, Q, R .

אם $S \in \{P, Q\}$ או היה נובע $Sh' = l$ ולכן גם $l \in R, S \in \{P, R\}$, בסתיויה. אם באופן שקול $S \in \{P, R\}$ או נקבע סטירה דומה, ולכן נותר להגיה $Sh' = l$. קיימת ושונה מ- P, Q, R . \square

שני התרגילים הבאים יאפשרו לנו לתרגל את הגישה הסינטטית.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי כל ישר מכיל לפחות שתי נקודות שונות.

תרגיל 1.2 הוכיחו כי יחס ההקבלה בין ישרים הוא יחס שקילות.

נבחן את המודול אשר כולל את $P, Q, R, S \in \mathcal{L}$. זה המודול המינימלי אשר עומד בהגדרת המשור האפיני, ולמעשה מהו זה הדוגמה הפשוטה ביותר לאחד כזה.

1.3 הגישה האנגליתית

עתה כאשר בחנו את המשור מבחינה סינטטית אנו יכולים לעבור לבחון את המרחב באופן אנגלי.

הגדירה 1.5 (מודול אנגלי) יהי \mathbb{F} שדה ונסמן $\mathcal{P} = \mathbb{F}^2$ וכן את הישרים שהם קבוצות השורשים של משוואות מהצורה $ax + by + c = 0$ עבור $a, b, c \in \mathbb{F}$ ו- $0 \neq a, b$. במקרה זה ישרים מקבילים אם ורק אם a, b המגדירים את הישרים שווים.

1.4 מרחבים אפיניים

נראה עתה את ההגדרה שתאפשר לנו לדון במרחבים, בנקודות ובכיוונים, קרוי וקטוריים.

הגדעה 1.6 (מרחב אפיני) היא \mathbb{F} שדה. מרחב אפיני נתון על-ידי שלשה (E, V, t) כאשר E קבוצה של נקודות, V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , ו- t אשר מסומנת גם v (מלשון translation, היא פונקציית החזזה, מקיימת את התכונות הבאות,

.1. אסוציאטיביות: $P \in E, v, w \in V \quad (P + v) + w = P + (v + w)$ לכל $P \in E + v = P$ לכל

.2. איבר נייטרלי: $P + 0 = P$ לכל

.3. חד-חד ערכיות ברכיב השני: לכל $P, Q \in E$ קיים $v \in V$ ייחד כך שקיימים $t_P(v) = Q$, נסמן

סימן 1.7 נסמן את ההשמה החלקית של t על-ידי t_P עבור $P \in E$ נתונה, כלומר,

$$t_P(v) = t(P, v) = P + v$$

דוגמה 1.1 יהיו $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ו- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

. $(F, c) \mapsto F + c$ ולבסוף גם $V = \mathbb{R}$, וכן $E = \{F : I \rightarrow \mathbb{R} \mid F' = f\}$

או זהו מרחב אפיני, והמשמעותו הוא בדיקת 1.

21.10.2025 – 2 שיעור 2

2.1 מרחבים אפיניים – המשך

המשך לראות דוגמאות למרחבים אפיניים.

דוגמה 2.1 נבחר את,

$$E = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{F}^n \mid x^1 + \dots + x^n = 1\}$$

יחד עם,

$$V = \{(\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{F}^n \mid \xi^1 + \dots + \xi^n = 0\}$$

ופונקציית ההזזה,

$$t(x, \xi) = x + \xi = (x^1 + \xi^1, \dots, x^n + \xi^n)$$

זהו מרחב אפיני, הוכחה שזו המצב מושארת לקורא.

דוגמה 2.2 אם V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} או $t : V \times V \rightarrow (V, V, t)$ עברו V המוגדרת על ידי סכום, הוא מרחב אפיני.

uczór עתה ונגיד שמרחב אפיני באיזשהו מובן הוא מרחב וקטורי, אבל ללא הקונספט של ראשית, ובכך הוא מאפשר גמישות רבה יותר, בהמשך נראה שהקשר בין המונחים חזק אף יותר, ושאחד משורה את השני.

המרחב האפיני מרכיב מפונקציית התרגומים, אנו רוצים לשאול את השאלה ההפוכה עתה, מהו הווקטור היחיד שתרגם נקודת נקודת אחרת. בהתאם, ניגש להגדרה הבאה.

הגדרה 2.1 פונקציית הפרש (difference function) יי מרחב אפיני (E, V, t) , פונקציה $v : E \times E \rightarrow V$ תיקרא פונקציית הפרש אם לכל מתקיים,

$$t(P, v(P, Q)) = Q$$

כלומר היא הפונקציה שמתואמת לנקודות P ו- Q את הווקטור היחיד w המקיים

$$v(P, Q) = Q - P$$

.**טימן 2.2** נגיד $v_P : E \rightarrow V$ להשמה החלקית $v_P(Q) = v(P, Q) = Q - P$

הערה אם V ממש פונקציות הפרש, או מתקיים,

$$\forall P, Q \in E, v(P, Q) = v'(P, Q)$$

ישירות מהגדרת המרחב האפיני, לכן נאמר על v שהוא פונקציית ההפרש היהודית למרחב.

טענה 2.3 (תכונות של פונקציית ההפרש) אם $v : E \times E \rightarrow V$ פונקציית ההפרש אז מתקיים,

$$1. \text{ לכל } P, Q, R \in E \text{ מתקיים } (Q - P) + (R - Q) = R - P$$

2. לכל $P \in E$ הפונקציה $v_P : E \rightarrow V$ המוגדרת על ידי $v_P(Q) = v(P, Q) = Q - P$ היא פונקציה חד-חד ערכית ועל

הוכחה. 1. ישירות מאקסימום מרחב אפיני,

$$P + ((Q - P) + (R - Q)) = (P + (Q - P)) + (R - Q) = Q + (R - Q) = R$$

2. עבור $w \in V$ תהי $Q = P + w$ אז,

$$v_P(Q) = Q - P = v$$

ולכן הפונקציה היא על. נניח ש- $R \in E$ עבור $v_P(Q) = v_P(R)$, אז

$$Q - P = R - P \implies Q = P + (Q - P) = P + (R - P) = R$$

ובולנו חד-חד ערכיות.

נבחן כי בזמן שפונקציית ההפרש שוברת את הסימטריה שהתרגלנו אליה בפונקציית התרגום, אך היא מהוות משלים שללה, הטענה הבאה מציגה לנו את הקשר ההדוק שבין הרעיונות.

טענה 2.4 עבור $P \in E$ הפונקציות v_P ו- t_P הן הופכיות אחת לשנייה.

לוכחה.

$$E \xrightarrow{v_R} V \xrightarrow{t_R} E$$

לכל $Q \in E$ מתקיים,

$$Q \mapsto Q - P \mapsto P + (Q - P) = Q$$

וכן,

$$V \xrightarrow{t_P} E \xrightarrow{v_P} V$$

ומתקיים,

$$v \mapsto P + v \mapsto (P + v) - P = v$$

□

עתה אנו רוצים להגדר מרחב וקטורי מעל המרחב האפיני שלנו, נבחן את $E \times E$ וنمפה את הנקודות ל- $V \times V$ על-ידי שימוש ב- $v_P \times t_P$. נבחן את,

$$E \times E \xrightarrow{v_P \times t_P} V \times V \xrightarrow{+} V \xrightarrow{t_P} E \xleftarrow{+} E \times E$$

כלומר, נבחן את המיפוי,

$$(Q, R) \mapsto (Q - P, R - P) \xrightarrow{+} (Q - P) + (R - P) \xleftarrow{t_P} P + (Q - P) + (R - P)$$

מכאן יש לנו הפתוח להגדרה הבאה. את המבנה זהה נוגה לכנות $E_P = (E, P, +_P, \cdot_P)$ וזהו אכן מרחב וקטורי.

הגדירה 2.5 (מרחב וקטורי מושרה מנוקודה) יהי (E, V, t) מרחב אפיני ותהי $P \in E$ נקודה כלשהי. עברו $+_P : E \times E \rightarrow E$ המוגדרת על-ידי,

$$\forall Q, R \in E, Q +_P R = Q + R - P$$

ור- $E_P : \mathbb{F} \times E \rightarrow E$ המוגדרת על-ידי,

$$\forall \alpha \in F, Q \in E, \alpha \cdot_P Q = \alpha \cdot (Q - P) + P$$

המרחב $(E, P, +_P, \cdot_P)$ הוא מרחב וקטורי המושרה מהמרחב האפיני והנקודה.

תרגיל 2.1 הוכיחו כי זהו אכן מרחב וקטורי.

2.2 תתי-מרחבים אפיניים

כבר רأינו שמרחב אפיני באיזשהו עולם מתנהג ומדובר בשפה של מרחבים וקטוריים, ובזיהוק כמו בהם, גם כאן נרצה לעסוק בתתי-מרחבים, בהתאם להגדרת תת-המרחב האפיני.

הגדירה 2.6 (תת-מרחב אפיני) יהי מרחב אפיני (E, V) . קובוצה $L \subseteq E$ תיקרא תת-מרחב אפיני אם $L = \emptyset$ או שקיים $L \subseteq W \leq V$ כך שמתקיים,

$$L = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$$

נקרא גם ירעה אפינית או ירעה לינארית, ולמעשה נשמש בשמות אלה יותר.

דוגמה 2.3 נבחן את $E = \mathbb{R}^2$ ונגדר את,

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

נבחן כי L הוא לא תת-מרחב של המרחב הלינארי E , אך אנו לא בוחנים את E ואת L כמרחבים לינאריים, אלא כמרחבים אפיניים. במקרה זה אמם נבחר את $P = (0, 1)$ או $W = \text{Span}\{(1, -1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \leq \mathbb{R}^2$ ונקבל הערת אם $L = P + W$ תת-מרחב אפיני, אז,

$$W = L - P = \{Q - P \mid Q \in L\}$$

בהתאם גם $Q - P = w \in W$ עבור $w \in W$ כלשהו, נובע ש-

משפט 2.7 (חוויות תת-מרחב לינארי פורט) $W' \leq V$ אם ורק אם $P + W = Q + W'$ עבור $P, Q \in E$ ו- $Q - P \in W$.

הוכחה מושארת במסגרת התרגילים הבאים.

תרגיל 2.2 הוכיחו כי $P \in W$ אם ורק אם

$.Q - P \in W = Q + W$ או $Q + W = Q + W'$ או נובע $W = W'$.

תרגיל 2.3 הוכיחו כי אם L מרחב הכוונים או המרחב המשיק של $W = W(L)$

בהתאם נסמן $\dim_{\mathbb{F}} W = \dim_{\mathbb{F}} L$ כמידת-

תרגיל 2.4 הוכיחו כי היתוך של תת-היריעות הוא תת-יריעה.

הגדלה 2.9 אם $S \subseteq E$ קבועה של נקודות, או נאמר ש- L הוא תת-הירעה האפנית הנוצרת על-ידי S אם L הוא הירעה המינימלית בミידה המכילה את כל הנקודות.

דוגמה 2.4 אם $E = \mathbb{R}^2$ או תת-הירעה הנוצרת על-ידי $\{(0, 0), (1, 0)\}$ היא הירעה $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$

הגדלה 2.10 קבועה של נקודות תיירא בלתי-תלויה אפנית אם אין נקודה ששhicת למרחב האפיני שנוצר על-ידי יתר הנקודות.

דוגמה 2.5 במרחב \mathbb{R}^3 הקבוצות הבאות בלתי-תלויות אפנית:

$$\{(0, 1, 0)\}, \quad \{(0, 1, 0), (1, 0, 0)\}, \quad \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

אך לא יכול להיות שתהיה קבועה בגודל 4 כזו אם הנקודות הן לא קולינאריות.

משפט 2.11 ידי (E, V) מרחב אפיני. תהי (P_1, \dots, P_r) סדרת סקלרים ב- \mathbb{F} עם התכונה $\lambda^1 + \dots + \lambda^n = 1$. אז לכל $P_0, P'_0 \in E$ מתקיים

$$P_0 + \lambda^1(P_1 - P_0) + \lambda^2(P_2 - P_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P_0) = P'_0 + \lambda^1(P_1 - P'_0) + \lambda^2(P_2 - P'_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P'_0)$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} & P_0 + \lambda^1(P_1 - P_0) + \lambda^2(P_2 - P_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P_0) \\ &= P'_0 + (P_0 - P'_0) + \lambda^1((P_1 - P'_0) + (P'_0 - P_0)) + \dots + \lambda^r((P_r - P'_0) + (P'_0 - P_0)) \\ &= P'_0 + (P_0 - P'_0) + (\lambda^1 + \dots + \lambda^r)(P'_0 - P_0) + \lambda^1(P_1 - P'_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P'_0) \end{aligned}$$

□

סימן 2.12 נסמן את הנקודה היחידה הזו שאינה תלולה בראשית בסימון $\lambda^1 P_1 + \dots + \lambda^r P_r$. זה נקרא צירוף אפיני והוא התחליף שלנו לצירופים לינאריים, והוא אף סגור להם.

27.10.2025 – 3 שיעור 3

3.1 העתקות אפיניות

עד כה יש לנו את המרחב האפיני (E, V) , ונדרט את המודול הסטנדרטי.

הגדלה 3.1 (מודול אפיני סטנדרטי) נסמן $\mathbb{A}^n = \mathbb{R}^n$ כאשר $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}^n, \mathbb{R}^n)$, ונסמן את הערכים בו בעזרת $x, \xi \in \mathbb{A}^n$. פונקציית הצירוף $f(x, \xi)$ מוגדר על-ידי חיבור.

עתה נעבור לעסוק בעתקות משמרות מבנה.

הגדלה 3.2 (העתקה אפינית) נניח Sh - E , Sh - F . העתקה אפינית, המסומנת $F \rightarrow E$, נתונה על-ידי זוג פונקציות $\varphi : V \rightarrow U$ ו- $f : E \rightarrow F$

$$\forall P \in E \forall v \in V, f(P + v) = f(P) + \varphi(v)$$

הערה תוק שימוש בהגדלה הדואלית שלנו נסיק שמתקיים, $f(P + v) = f(P) + \varphi(v) \iff f(P + v) - f(P) = \varphi(v)$. נובע אם כך φ נקבעת ביחידות עבור הfonקציה f .

סימן 3.3 נסמן φ ונאמר Sh - φ הוא הדיפרנציאל של f .

הסיבה שאנחנו קוראים ל- Sh - φ כך היא שפונקציות f שונות יכולות להיות בעלות דיפרנציאל זהה, והן תיבדלנה בקבוע בלבד, ככלומר הדיפרנציאל מהנוגכ כי שהיינו מצפים מדיפרנציאל באנגליה. נעבור למספר דוגמאות להעתקות אפיניות.

דוגמה 3.1 פונקציה קבועה, ככלומר $f(P) = f(Q)$ לכל $P, Q \in E$ או Sh - $\varphi = 0_{Hom(V, U)}$.

דוגמה 3.2 הזזה. נבחן את המקרה $E = F, V = U$, ככלומר בבחינת אנ-domorfizm, לכל $w \in V$ נגדר את העתקה $t_w : E \rightarrow E$ על-ידי $P \mapsto P + w$.

נבדוק שהיא אכן אפינית, אם $P \in E, v \in V$ אז,

$$t_w(P + v) - t_w(P) = (P + v) + w - (P + w) = (P + w) + v - (P + w) = v$$

כאמור,

$$(P + v) + w = P + (v + w) = P + (w + v) = (P + w) + v$$

שירותות מהאקסומה השנייה ושימוש בקומוטטיביות החיבור במרחבים וקטוריים. ככלומר $v \in V$ או בסימן שלנו Sh - $d t_w = id_V$.

דוגמה 3.3 פונקציות הומוטטיות (homothecy). יהיו $O \in F, \lambda \in \mathbb{F}$, או נגדר את הfonקציה $h_{O, \lambda} : E \rightarrow F$ על-ידי ההכפלה של וקטור פי λ במרחב O , ככלומר,

$$h_{O, \lambda}(P) = O + \lambda(P - O)$$

ומתקיים Sh - $dh_{O, \lambda} = \lambda id_V$.

תרגיל 3.1 הוכיחו כי פונקציה הומוטטית היא העתקה אפינית.

דוגמה 3.4 נניח Sh - $E = \mathbb{A}^m$ ו- Sh - $F = \mathbb{A}^m$. נגדר את העתקה $A \rightarrow \mathbb{A}^m$ על-ידי,

$$x \mapsto A \cdot x + b$$

עבור $b \in F$ ו- $A \in Mat_{n,m}(\mathbb{F})$. במקרה זה הדיפרנציאל הוא העתקה הלינארית המיוצגת על-ידי A .

תרגיל 3.2 הוכיחו שהרכבה של העתקות אפיניות היא אפינית.

$$Sh(d(g \circ f)) = Sh(dg \circ df)$$

הגדלה 3.4 (איזומורפיזם אפיני) תиירא איזומורפיזם אפיני אם קיימת העתקה אפינית $g : F \rightarrow E$ כך שמתקיים,

$$g \circ f = id_E \quad f \circ g = id_F$$

במקרה Sh - $E = F$ נקרא להעתקה אוטומורפיזם אפיני, ונסמן ב- $Aut(E)$ להיוות חבורת האוטומורפיזמים מעל המרחב האפיני E .

3.2 יוצרים ובסיסים

הגדעה 3.5 (תת-יריעה נוצרת) נתונה ש- $S \subseteq E$ תת-קובוצת, או $\langle S \rangle$ היא תת-יריעה הנוצרת על-ידי S , והוא חיתוך כל היריעות המכילות את S .

$$\forall S, \subseteq L \subseteq E \implies \langle S \rangle \subseteq L$$

משפהה S של נקודות נקראת יוצרת של E אם $\langle S \rangle = E$.

הגדעה 3.6 (בסיס אפיני) $\{P_0, \dots, P_n\}$ תיקרא סדרה בלתי-תלויה אפנית כאשר $n = \dim \langle P_0, \dots, P_n \rangle$ ומכנה את $\{P_0, \dots, P_n\}$ בסיס אפיני ובלתי-תלויה אפנית.

מעבר עתה לדבר על קורדינטות.

הגדעה 3.7 (מערכת יהוס) יהיו E מETYMD סופי מעל \mathbb{F} . מערכת יהוס מעל E נתונה על-ידי זוג (O, \mathcal{B}) כאשר $O \in E$ ו- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ סדרה של V .

טענה 3.8 בהינתן מערכת יהוס (O, \mathcal{B}) לכל $P \in E$ קיימת הצגה ייחידה $x \in \mathbb{F}^n$ עבור

הגדעה 3.9 (קורדינטה) נקרא הקורדינטות של P במערכת היהוס (O, \mathcal{B}) כ- $x = (x^1, \dots, x^n)$.

28.10.2025 — 4 שיעור 4

4.1 קורדינטות — המשך

הגדירה 4.1 (מפה ופרמטריזציה למרחב וקטורי) אם V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} כך ש- $n = \dim V$, או נenna את העתקה $x : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ מפה, העתקה כפונקצייתית בקורדינטות. המיפוי ההפוך $V \rightarrow \mathbb{F}^n$ יכונה פרמטריזציה של V .

משפט 4.2 (מרחב וקטורי מושחה) תהי V קבוצה ותהי $\text{Coor}(V) = \{f : V \rightarrow \mathbb{F}^n \mid f \text{ is bijection}\}$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו, כך שמתקיים שלכל $x, y \in \text{Coor}(V)$ מתקיים,

$$y \circ x^{-1} \in GL_n(\mathbb{F})$$

בתנאים אלה ניתן להגדיר על הקבוצה V מבנה של מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} יחד עם הרכבתה שלכל $x \in \text{Coor}(V)$ הוא איזומורפיים לינאריים.

$$\begin{aligned} & \text{הוכחה. תהי } x \in \text{Coor}(V). \text{ נגידר את החיבור על-ידי,} \\ & +_V : V \times V \rightarrow V, \quad v +_V u = x^{-1}(x(v) +_{\mathbb{F}^n} x(u)) \\ & \text{ולכן,} \end{aligned}$$

$$\cdot_V : \mathbb{F} \times V \rightarrow V, \quad \alpha \cdot_V u = x^{-1}(\alpha x(u))$$

זכור ש- x הוא איזומורפיים לינאריים ולכן,

$$x(v + w) = x(x^{-1}(x(w) + x(v))) = x(v) + x(w)$$

ובאופן דומה,

$$x(\alpha u) = x(x^{-1}(\alpha x(u))) = \alpha \cdot x(u)$$

ונשאר לנו להראות שהפונקציות שקיבלנו הן יחידות, כלומר $x, y \in \text{Coor}(V)$ נניח ש- x , ונרצה להראות שמתקיים,

$$x^{-1}(x(v) + x(w)) = y^{-1}(y(v) + y(w))$$

ובאופן דומה שווינו של הכפל. נסמן $y \circ x^{-1} = \lambda_Q$. נפעיל על שני הצדדים את הפונקציה y ונקבל,

$$y(v) + y(w) = y(x^{-1}(x(v) + x(w))) = \lambda_Q(x(v) + x(w))$$

אבל λ היא לינארית ולכן נקבל,

$$y(v) + y(w) = \lambda_Q(x(v)) + \lambda_Q(x(w)) = y(v) + y(w)$$

ומצאננו שאכן יש שווינו. \square

הגדירה 4.3 (מפה אפינית) יהיו (E, V) מרחב אפיני n -ממדי. מערכת קורדינטות על A היא איזומורפיים $\mathbb{A}^n \rightarrow E$ אפיני. במקורה זה $x(u) = A \cdot u + b \in \mathbb{A}^n$ עבור $u \in V$ ו- $b \in \mathbb{A}^n$. נגידר גם את הקבוצה $GA_n(\mathbb{F})$ כקבוצת ה- x -ים הללו.

למשפט שראינו יש אנלוגיה לגרסה האפינית. הפעם במקום נקבע שתי נקודות האפס ובכך נקבל שמתקיים תנאי המשפט עבור המרחבים הוקטוריים.

5 שיעור 5 — 3.11.2025

5.1 מרחבים אפיניים ממשיים

בחלק זה והלאה נעסק במישים, ככלומר מעטה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. הדבר הראשון שנעסק בו יהיה הנורמה.
הגדרה 5.1 (נורמה) יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} . נורמה מעל V היא פונקציה $V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיים את התכונות,

1. חיזוביות בהחלט: $v = 0 \iff \|v\| = 0 \quad \forall v \in V, 0 \leq \|v\|$

2. הומוגניות: $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

3. אי-שוויון המשולש: $\forall v, u \in V, \|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$

נראה מספר דוגמאות לנורמות במקרה \mathbb{R}^p .

דוגמה 5.1 $\|x\|_{\infty} = \max\{|x_1|, \dots, |x_p|\}$, נורמת הסופרים או נורמת אינסוף.

דוגמה 5.2 $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_p|$ היא נורמת 1.

דוגמה 5.3 הנורמה האוקלידית. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$

במרחבים סופיים מעל \mathbb{R} ישנו משפט הגורס כי כל הנורמות שקולות, ככלומר לדוגמה $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_{\infty}$ באופן אנלוגי גם $\|x\|_2 \leq \sqrt{p}\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_{\infty}$.

הגדרה 5.2 (מטריקה) עבור קבוצה X נגדיר פונקציית מרחק, או מטריקה, כפונקציה המקיים את התכונות:

1. חיזוביות בהחלט: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$

2. סימטריה: $\forall x, y \in X, \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. אי-שוויון המשולש: $\forall x, y, z \in X, \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

כל נורמה משרה מטריקה, ככלומר כל מרחב נורמי הוא בפרט מרחב מטרי. אם על V מוגדרת נורמה אז על $E = (V, \rho)$ מוגדרת פונקציית מרחק. ככלומר, נוכל להשרות מרחק גם על מרחב אפיני.

הגדרה 5.3 (בדור) במרחב מטרי כללי (X, ρ) נגדיר כדור (פתוח) על-ידי,

$$B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

ונסמן לעיתים את הכדור גם על-ידי r .

במקרה של נורמה כMOV נקבל את הטענה השקולה שמתקיים,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \|x - y\| < r\}$$

זוכיר גם את ההגדרות המשלימות לכדור פתוח.

הגדרה 5.4 (כדור סגור וספירה) נגדיר את הכדור הסגור על-ידי,

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\} \quad S(x, r) = \partial B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) = r\}$$

ונגיד גם התכונות במרחב אפיני.

הגדרה 5.5 (סדרה וסדרה מתכנסת) אם $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E = (V, \rho)$ מרחב אפיני מעל \mathbb{R} וכן סדרת נקודות.

נאמר שהסדרה מתכנסת לנקודה $P \in E$ כאשר $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\| = 0$ בMOV המשני.

ובהתאם נצטט משפט חשוב שיעזר לנו.

משפט 5.6 (התכנסות וההתכנסות קורדינטתית) ב מקרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, l \subseteq \mathbb{R}^p$ אם $E = \mathbb{R}^p$ ואם סדרה וסדרה מתכנסת לנקודה, או מתקיים,

$$x_n \rightarrow l \iff \forall i \leq p, x_n^i \rightarrow l^i$$

כלומר, הסדרה מתכנסת אם ורק אם היא מתכנסת קורדינטתית קורדינטת.

$$|x_n^i - l^i| \leq \|x_n - l\| \leq C|x_n^i - l^i|$$

המשפט נובע ישרוות מהטענה כי

$$\|x_n - l\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_n^i - l^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^p |x_n^i - l^i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^p |x_n^i - l^i|} = \|x_n^i - l^i\|$$

5.2 עקומים במרחב אפיני ממשי

הkoncept של עקומים במרחב הוא koncept שקצת קשה לעתים לדבר עליו. עקום הרי הוא רעיון מאוד כללי. בשל כך, נתחילה בדיון על מסילות. לפני שניגש להגדירה הפורמלית נאמר שהמטרה שלנו היא לאפיני אובייקטים שהם קשיירים מיסילתיים במרחב, וכן מהווים באיזשהו מובן תמונה של קטע. זאת אומרת שהם מתנהגים בערך כמו חוט שוז במרחב.

הגדרה 5.7 (מיסילה) מסילה (עקום פרמטרי) ב- \mathbb{A}^n היא פונקציה $I \rightarrow \mathbb{A}^n$, עבור $\mathbb{R} \subseteq I$ קטע וכך ש- α גזירה. כלומר כשלכל I מתקיים,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = L$$

הוא גבול מוגדר וסופי. נסמן גבול זה ב- $\dot{\alpha}(t) = \alpha'(t)$ את ערך הנגזרת בנקודת פונקציה של $t \in I$. המסילה תיקרא רגולרית כאשר $0 \neq \alpha'(t)$ לכל $t \in I$.

כמובן, עתה משראינו את ההגדירה, נעבור לדוגמות.

דוגמה 5.4 כל הבאים הם מסילות:

1. ישרים (פרמטריים): אם $L \leq E$ יש או $L = P + \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ עבור $v \in V$. בהתאם נוכל להגיד פונקציה $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ כך ש- $\alpha(t) = P + tv$. נבחן כי,

$$\alpha'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P + (t+s)v - P - tv}{s} = v$$

ולכן המסילה רגולרית ובפרט $\alpha'(t) = v$.

2. נגיד את $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ על-ידי $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ כאשר $r < r \in \mathbb{R}$. זהו מסילה כך שתמונהה היא מעגל ברדיוס r במישור. הפעם נקבל ש- $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, כלומר גם הפעם המסילה היא רגולרית.

דרך פשוטה במיוחד לראות זאת היא על-ידי בחינת $r \|\alpha'(t)\| = \|\alpha'(t)\|$. $\ddot{\alpha}(t) = \alpha''(t) = -r(\cos t, \sin t)$ באותו אופן נקבל גם $\ddot{\alpha}(t) = \alpha''(t) = -r(\cos t, \sin t)$.

3. במרחב נגיד את המסילה $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ על-ידי $\alpha(\cos t, \sin t, t)$, זהו למעשה ספירלה. גם הפעם נוכל לראות כי זהו מסילה רגולרית. בעולם של ירידות, בפרט של מסילות, לא מעניינות אותנו תכונות שתלויות בפרמטריזציה, כלומר במסילה כפונקציה התלויה ב- t . אנו מבקשים לעסוק בתמונה, במסלול של המסילה, כלומר בחלוקת $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ ב- $\text{Im } \alpha \subseteq E$.

הגדרה 5.8 (אורך של מסילה) תה $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ מסילה רגולרית. נגיד את האורך של המסילה באופן הבא,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

זהו הגדרה שאולי היגונית גאומטרית, אבל נרצה להראות שהיא אכן מקיימת את הקונספט של מרחק. נגיד הגדירה שבשימוש תוכיה את עצמה כSKUOLA.

הגדרה 5.9 תה $\mathcal{P} = (t_0, \dots, t_k)$ חלוקה של $[a, b]$, כלומר $t_0 < t_1 < \dots < t_n = a, t_k = b$ ומתקיים $t_n < t_{n+1}$. בהינתן $\alpha : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, או גדרה את היישר הפוליגוני כמסילה שנוצרת על-ידי סדרת הנקודות $(\alpha(t_0), \dots, \alpha(t_k))$.

$$L_\alpha(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$$

ובהתאם נסה את המשפט שמקשר את ההגדרות.

משפט 5.10 אם $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ מתקיים,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathcal{P}, (\lambda(\mathcal{P}) < \delta) \implies (|L(\alpha) - L_\alpha(\mathcal{P})| < \varepsilon)$$

כלומר עבור על חלוקה \mathcal{P} של $[a, b]$ כך ש- $\delta < \Delta(\mathcal{P})$ המרחק בין שני סוגים המרחק חסומים על-ידי ε .

אומנם את הוכחה לא נביא, אך נרמזו ונגיד שם נבחן את ההגדרה של האינטגרל לפי קושי, ונשותמש במשפט לגרנו', נוכל להוכיח את הטענה.

4.11.2025 — 6 שיעור 6

6.1 קמיות במרחבים אפיניים

הגדעה 6.1 (קמיות במרחב אפיני) עבור מרחב אפיני (E, V) מעל הממשיים, צירוף אפיני (convex) של $P_0, P_1, \dots, P_k \in E$ הוא $\lambda^0 P_0 + \dots + \lambda^k P_k$ עבור $\lambda^0, \dots, \lambda^k \in \mathbb{R}$ כך ש- $0 \leq \lambda^i \leq 1$ לכל $0 \leq i \leq k$.

הגדעה 6.2 (קטע אפיני) בהינתן $P, Q \in E$ הקטע $[P, Q] \subseteq E$ המוגדר עליידי,

$$[P, Q] = \{R \in E \mid R = \lambda P + \mu Q \mid \lambda + \mu = 1, 0 \leq \lambda, \mu\}$$

הגדעה 6.3 (קובוצה קמורה) קבוצה $C \subseteq E$ של נקודות תיקרא קמורה (convex) אם $[P, Q] \subseteq C$ לכל $P, Q \in C$.

באופן טבעי נוכל להגיד קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}$ קמורה של ממשיים. נרצה להגיד גאומטרית לקובוצת קמיות אפינית, ואז בהתאם להוכחה שהיא שcolaה לגגרו הקטועים של קבוצה.

הגדעה 6.4 (סגור קמור אפיני) אם $A \subseteq E$ קבוצה של נקודות, אז נאמר שהקובוצה $C \subseteq E$ המקיימת,

$$C = \bigcap_{\substack{A \subseteq K \subseteq E \\ K \text{ is convex}}} K$$

10.11.2025 – 7 שיעור 7

7.1 פרמטריזציה לפי אורך

אנו עוסקים בעקומים פרמטריים רגולריים, קרי במסילות רגולריות, $\mathbb{A}^n \rightarrow I$. הדרישה שלנו היא ש- α תהיה גזירה אינסוף פעמים, כלומר חלקה, ונדרوش ש- $0 = \alpha'(t)$ לכל $t \in I$. נוכל גם לדבר על $A = \alpha(I) \subseteq \mathbb{A}^n$, וזהו למעשה העוקם עצמו, נקרא לאובייקט זה גם מסלול. בהינתן שתי מסילות אנו רוצים להבין מתי מתקיים $\text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\hat{\alpha})$ עברו שתי מסילות, כלומר אנחנו מנסים להבין מתי שתי מסילות הולכה למעשה למעשה מייצגות אותו אובייקט ביקום.

הגדרה 7.1 (דיפאומורפיזם) פונקציה $Y \rightarrow X$ היא דיפאומורפיזם אם היא הפיכה, גזירה, והיפיכת גזירה. דיפאומורפיזם חלך יהווה דיפאומורפיזם כך שהוא גזיר אינסוף פעמים.

הערה מושפט העתקה היפה נובע שם דיפאומורפיזם הוא חלק אז גם הפונקציה ההיפיכה שלו היא דיפאומורפיזם חלק. באופן דומה רגולריות של הדיפאומורפיזם הוא תכונה שחלה על הפונקציה ההיפיכה גם כן.

גדרה 7.2 (רפרמטריזציה) בהונן $I \rightarrow \mathbb{A}^n$: φ מסילה חלקה רגולרית, I, J , קטעים, ו- φ דיפאומורפים. במצב זה נאמר $\varphi = \tilde{\alpha} \circ \alpha$ היא רפרמטריזציה שולחה של α , עוד נאמר ש- $\tilde{\alpha}$ היא רפרמטריזציה של α .

דוגמיה 7.1 נניח ש- $\alpha : J \rightarrow \mathbb{A}^2$ נתונה על ידי $\varphi : J \rightarrow I$. נגיד $\alpha(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t))^T$. אז $\tilde{\alpha}$ פונקציה המוגדרת על ידי $\tilde{\alpha}(t) = 2\alpha'(2t)$. $\tilde{\alpha}(t) = (\alpha^1(2t), \alpha^2(2t))^T$ בהתאם ונקבל שגם

סימן 7.3 אם $\psi' > 0$ אז נאמר שהיא שומרת על כיוון, אחרת נאמר שהיא משנה כיוון.

משפט 7.4 (קיום פרמטריזציה לפי אורך) יהי עקום פרמטרי n -עומד $\mathbb{A}^n \rightarrow I$: c פרמטריזציה שקיימת לכל $s^{-1} \equiv \|c\|$. פרמטריזציה זו נקראת פרמטריזציה לפי אורך.

הוכחה. נסמן $t_0 \in I$ שרוירותי. נגדיר את $\psi(t) = \int_{t_0}^t \|c'(u)\| du$, ונ顯ל כך את פונקציית האורך m_{-0} בכל נקודה. לפי FTC (המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי) ψ גזירה ומתקיים $0 > \|c'(t)\| = \psi'(t)$. ככלומר ψ רגולרית ומונוטונית, ולכן הפיכה. נגדיר (I, J, ψ, \tilde{c}) כהצגה של פונקציה רציפה בקטע I . יה-על-כן, ψ היא דיפאומורפיזם, ואך דיפאומורפיזם חילק, נסמן ψ^{-1} . נגדיר $\varphi = \tilde{c} \circ \psi^{-1}$. זהו או J קטע כהמוניה של פונקציה רציפה בקטע. הרמיטיות של ψ מושגת באמצעות הדרישה $\psi(t_0) = 0$. מוגדרת $\tilde{c}(t) = \psi^{-1}(t)$. מוגדרת φ כהצגה של פונקציה רציפה בקטע I . מוגדרת \tilde{c} מתקיים,

$$\tilde{c}'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{\psi'(\varphi(t))}$$

□ $\|\tilde{c}'(t)\| = \|c'(\varphi(t))\| \cdot \frac{1}{\|\psi'(\varphi(t))\|} = 1$ ולכן **7.2 נגידר את עליידי** $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{A}^2$ כאשר $r > 0$ מתקיים $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^t$ ו $c'(t) = (-r \sin t, r \cos t)^t$. או $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{A}^2$ כאשר $r > 0$ מתקיים $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^t$ ו $c'(t) = (-r \sin t, r \cos t)^t$. ובהתאם נקבל מהמשפט שאם $\varphi(t) = \frac{t}{r}$ לכל t . בהתאם גם $L(c) = \int_0^{2\pi} \|c'(t)\| dt = 2\pi r$ ו $\|\tilde{c}'(t)\| = r$ נוכל להגיד את $\tilde{c}(t) = (r \cos(\frac{t}{r}), r \sin(\frac{t}{r}))^t$, כלומר $\tilde{c}(s) = (c \circ \varphi)(s) = c(\varphi(s)) = c(\frac{s}{r})$.

7.2 עקומותיות

עתה נרצה לדון בהבדל שבין אובייקטים במישור לבין אובייקטים בעקומות. אם $c : I \rightarrow \mathbb{A}^2$ לדוגמה רגולרית, אז נשים לב שnochol להגדיר את הישיר המשיק בנקודה, $t \in I$, ולקבל מישור אפיני. אם c פרמטריזציה לפ' אורך, אז בפרט נקבל שהוקטור המגדר את המשיק הוא נורמלי. נרצה למצוא את הוקטור האורתוגונלי שלו, במטרה להבין את התחנכות של הפונקציה ביחס לשני הוקטורים הללו. בהתאם וורל להריגו כמה אסום מתקיים רק במקרה שבו c הינו ישר.

הדרה 7.5 (בסיס אורתוגונלי של נגורות) תהי מסילה $c : I \rightarrow \mathbb{A}^2$ רגולרית לפי אורך ותהי $t_0 \in I$.
 $c'(t) \cdot c'(t) = v(t) = c'(t)$ וכן $c''(t) \cdot c'(t) + c'(t) \cdot c''(t) = 0$, כלומר $c''(t) \perp c'(t)$.
 $c''(t) = k(t)n(t)$ ונסיק ש- k גדרי. אז $c''(t) \equiv 0$ או $k \equiv 0$.
 $n(t) = n(t_0)$ ו- $n(t_0)$ אורתוגונלי ל- $c'(t_0)$.

11.11.2025 – 8 שיעור 8**8.1 עקומות – המשך**

. $c''(t) = (0, 2)^t$ $\|c'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$ ובהתאם $c'(t) = (1, -2t)^t$ או $c(t) = (t, 9 - t^2)^t$ עבור $t \in [-3, 3]$. אולם $c(t) = (t, 9 - t^2)^t$ לא נוכל להשתמש בה בפשתות. אבל c היא לא לפיה אורך ולכן לא נוכל להשתמש בה בפשתות.

17.11.2025 — 9 שיעור 9

9.1 עקומותיות

18.11.2025 – 10 שיעור 10

משפט 10.1 תהי $\mathbb{R} \rightarrow I : v_0 = (v_0^1, v_0^2)^t \in \mathbb{R}^{2-ו}$ נירה $0 \leq r \leq k$ פעמיים. בהינתן נקודה $s_0 \in I$ ונקודה $P_0 = (P^1, P^2) \in \mathbb{E}^2$ כך ש- $1 = \|v_0\|$, או קיימת מסילה $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ לפי אורך c עם פונקציית עקומות $c'(s_0) = P_0$. אם $c(s_0) = P_0$, $c'(s_0) = v_0$ על-ידי k .

$$c(s) = \begin{pmatrix} P^1 + \int_{s_0}^s \left(\cos \left(\int_{s_0}^t k(u) du + \theta_0 \right) \right) dt \\ P^2 + \int_{s_0}^s \left(\sin \left(\int_{s_0}^t k(u) du + \theta_0 \right) \right) dt \end{pmatrix}$$

כאמור

וככה. נת힐 הוכחה הקום. נגיד $c(s_0) = P_0$ ונגדיר את הנזרת בהתאם לדרישות המופיעות במשפט. נשים לב ש- $1 \in I$ לכל $s \in I$ ו- $c''(s) = l(s)n(s)$ ישרות מהישוב.

נניח כי גם $d : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ עומדת בתנאים, ונוכיח בפונקציה $f(s) = (c^1)'(s) - (d^1)'(s)$ וב- $(c^2)'(s) - (d^2)'(s)$. אז נקבל ש- $f(s_0) = g(s_0) = 0$, ולכן $f'(s_0) = g'(s_0) = k(s)f(s) - k(s)g(s) = 0$. אבל $f^2 + g^2 = \frac{1}{2}(f^2 + g^2)(s) = 0$ וולכן $f(s) = 0 = g(s)$ ו- $f'(s) = g'(s) = 0$. \square

משפט 10.2 תהי $I : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ מסילה רגולרית לפי אורך. אזי קיימת $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- θ יחידה עד כדי הuzzות ב- $2\pi k$.

24.11.2025 – 11 שיעור 11

11.1 תרגילים

25.11.2025 – 12 שיעור 12

12.1 מרחבים דו-אליים

הגדירה 12.1 (מרחיב דוואלי) יהי V מרחב וקטורי ממימד $N \in n$ מעל שדה \mathbb{F} . נגידו,

$$V^\vee = \hom_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$$

ונקרא $\lambda \cdot V$ המרחב הדואלי נקרא תבנית ליינארית (linear form) או פונקציונל (functional).

דוגמיה 12.1 $V^\vee = (\mathbb{F}^{\text{col}^n})^\vee = \{M_{n \times 1}(\mathbb{F})\}$ הנטקנות הליניארית מממד n למימד 1.

טענה 12.2 במקורה זה אם $a \in V^\vee$ אז קיימים וקטור V וונכל לסדר $l(x) = a^t x = a^t a = \sum a_i x_i$

הוכחה. נסמן $a = (a_j)_{i=1}^n$ עבור n נגדיר $1 \leq j \leq n$ $a_j = l(e_j)$

$$l(x) = l(e_1x^1 + \cdots + e_nx^n) = x^1l(e_1) + \cdots + x^n l(e_n) = x^1a_1 + \cdots + x^n a_n = a^t x = l_a(x)$$

ומצאו שacen

הערה בהתאם נקבל $(\mathbb{F}_{\text{col}}^n)^\top \simeq (\mathbb{F}_{\text{row}}^n)$. כלומר באיזשהו מובן מרחב דו-אילי הוא גם דו-אילי במובן הסימוני.

דוגמא 12.2 יהי V ו- \mathcal{B} בסיס סדור. אם $v = \mathcal{B}x$ אז נוכל להגיד v הוא תבנית לכל j .

דוגמה 12.3 עבור $0 \neq S$ כלשיי נגדיר את הקבוצה,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(S, \mathbb{F}) = \{f : S \rightarrow \mathbb{F}\}$$

עבור $f, g \in \mathcal{F}$ נגיד $f + g$ (בנוסף דומה $k \cdot f$) מרחיב לינארי מעל \mathbb{F} . נקבע אם \mathcal{F} סה"כ $(\mathcal{F}, +, \cdot)$

עבור $s_0 \in S$ נגדיר,

$$\text{eval}_{s_0} : \mathcal{F}(S) \rightarrow \mathbb{F}, \quad f \mapsto f(s_0)$$

.eval_{s₀} ∈ F[∨] in

דוגמה 12.4 נתנו $S = I \subseteq \mathbb{R}$ ופונקציית $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f'(s_0)$, או $V = C^1(I)$ ונתנו $s_0 \in I$. אוסף הנקודות $x \in S$ אשר $f'(x) = f'(s_0)$ נקרא集ת נגיעה של f ב-

באופן דומה אם $V = \mathcal{R}([a, b])$ מרחב הפונקציות האינטגרביליות רימן, נוכל להגיד גם את $\int_a^b f dx$ גם זו תבנית.

1.12.2025 – 13 שיעור 13

13.1 מרחבים דו-אליים

נניח ש- V מרחב וקטורי ממיד סופי מעל \mathbb{F} . תורה זו מוגדרת גם עבור מקרים של ממד לא סופי, אבל ישנו מספר הבדלים שנציגן אך לא נחקרו. הגדרנו את $V^\vee = \text{hom}(V, \mathbb{F})$ כמרחב הדואלי של V .

הגדירה 13.1 (בסיס דואלי) יהיו b_1, \dots, b_n בסיס של V . נגידר $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס דואלי של V . נקרא אפרירורית לקובוצה $(b^1, \dots, b^n) = \mathcal{B}^\vee$ בסיס דואלי של V .

הערה אם $v \in V$ אז מתקיים $v = \mathcal{B}x$ עבור $x \in \mathbb{F}_{\text{col}}^n$. בהתאם $b^i(v) = x^i$.

משפט 13.2 (קיים בסיס דואלי) \mathcal{B}^\vee בסיס של V^\vee .

הוכחה. נתוחיל באינטואיטיבות. נניח ש- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס דואלי של V .

$$0_{\mathbb{F}} = 0_{V^\vee}(b_j) = \left(\sum_{i=1}^n a_i b^i \right)(b_j) = \sum_{i=1}^n a_i b^i(b_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j$$

וביקלנו אינטואיטיבות.

נعتبر להוכחה פרישה. עבור $l \in V^\vee$ תבנית יהו $l(v) = l(b_1) + \dots + l(b_n)$. נראה ש- l מופיע בפונקציות מתלכדות על איברי הבסיס \mathcal{B} , זאת ישירות מлинאריות.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b^i \right)(b_j) = a_j = l(b_j)$$

וביקלנו שאכן הבסיס \mathcal{B}^\vee פורש את V^\vee . \square

נבחין כי נוכל ליצור צימוד $\mathbb{F} \rightarrow V^\vee \times V \rightarrow V$ על ידי $(v, l) \mapsto l(v)$ ונסמן את הפעולה הזאת באופן דומה למכפלת פנימית על-ידי $\langle l, v \rangle$. נקבל

$$l = b^1 l(b_1) + \dots + b^n l(b_n) = \sum_{i=1}^n b^i \langle l, b_i \rangle + \dots + b_n l(b_n) = v = \sum_{i=1}^n b_i \langle b^i, v \rangle$$

משפט 13.3 (שקלות לאיפוס במרחב דואלי) לכל וקטור V מתקיים $v = 0_V \iff \forall l \in V^\vee, l(v) = 0$ ולכל $l \in V^\vee, l(0_V) = 0$.

משפט 13.4 (קיים לבסיס דואלי) לכל (b^1, \dots, b^n) בסיס של V קיים בסיס של V^\vee כך שמתאים $\mathcal{B}^\vee = (b^1, \dots, b^n)$

הוכחה. תהי חבנית $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_{\text{col}}^n$ המוגדרת על-ידי $\varphi(v) = (b^1(v), \dots, b^n(v))^t$. נבחין כי φ א-ורק אם $b^i(v) = 0$ לכל i , אבל בהתאם הטענה מתקימת רק כאשר $v = 0$, שכן $\dim \ker \varphi = 0$, ולכן φ איזומורפיים לינאריים. לכן אם $\{b_1, \dots, b_n\}$ תמנתה $\{e_1, \dots, e_n\}$ כך שהאחרון הוא הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{F}^n אז $b^i(b_j) = \delta_{ij}$ בדיק כי שרטינו. \square

הגדירה 13.5 (מאפסים) לכל $S \subseteq V$ נגידר

$$S^0 = \{l \in V^\vee \mid \forall s \in S, l(s) = 0\} \subseteq V^\vee$$

ונקרא S^0 המאפס של S .

משפט 13.6 (תכונות מאפס) לכל $S, T \subseteq V$ מתקיים $S^0 \subseteq T^0 \subseteq V^0$. 1

$S^0 = \text{Span}^0(S)$, כלומר S^0 הוא אופרטור למרחב הדואלי

$$S \subseteq T \implies T^0 \subseteq S^0 .3$$

משפט 13.7 היה $\dim U + \dim U^0 = \dim V$, $U \subseteq V$

הוכחה. יהיו (b_1, \dots, b_n) בסיס של V כך שגם (b_1, \dots, b_k) בסיס של U , כאשר $n \leq k$. נקבע $\mathcal{B} = (b^1, \dots, b^n)$ בסיס של V^\vee ונטען $B^\vee = (b^{k+1}, \dots, b^n)$ בסיס של U^0 . יהי $l \in V^0$ אז $l(b_i) = 0$ אבל $l(b_i) = b^1 l(b_1) + \dots + b^n l(b_n)$. נקבע $l(b_i) = (b^{k+1}, \dots, b^n)$ בסיס של U^0 . נובע אם כך $\dim U^0 = \dim \text{Span}(b^{k+1}, \dots, b^n) \leq k$

הדרה 13.8 (קובוצת האפסים) תהי $L \subseteq V^\vee$, אז נגידר,

$$L_0 = \{v \in V \mid \forall l \in L, l(v) = 0\}$$

קובוצת זו תיקרא קובוצת האפסים של L .

משפט 13.9 לכל $L, M \subseteq V^\vee$ מתקיים,

$$L_0 \leq V .1$$

$$L_0 = \text{Span}_0(L) .2$$

$$L \subseteq M \implies M_0 \subseteq L_0 .3$$

.**dim** $W + \dim W_0 = \dim V$, אז מתקיים **13.10** יי' $W \subseteq V^\vee$

אם $S \subseteq V$ או מהו $(S^0)_0$? נקבל $S \subseteq (S^0)_0 = \text{Span}(S)$. בהתאם נקבל שמתקיים

הדרה 13.11 (העתקה דו-אלילית) תהי $f : V \rightarrow W$ העתקה לינארית בין מרחבים, ותהי $l \in W^\vee$ תבנית. אז נגידר את העתקה הדו-אלילית של f

ליהיות $f^\vee : W^\vee \rightarrow V^\vee$, כאשר בהתאם

. $\langle f^\vee(l), v \rangle = \langle l, f(v) \rangle$

2.12.2025 — 14 שיעור 14

14.1 מאפסים

נמשיך לדון במאפסים ותכונותיהם.

מסקנה 14.1 אם $W_1 = W_2 \iff W_1^0 = W_2^0$ או מתקיים $W_1, W_2 \leq V$

כלומר אנו יכולים לדון בתתי-מרחבים על-ידי שימוש במאפסים, ישנה שקילות שמאפשרת לנו להרחב את הדין שלנו גם בתתי-מרחבים באופן כללי.

14.2 העתקות דואליות

נמשיך את הדין שלנו על העתקות אלה.

משפט 14.2 יהיו V, W מרחבים לינאריים כך שה- \mathcal{B} בסיסם בהתאם ו- $\mathcal{D}^\vee, \mathcal{B}^\vee$ הבסיסים הדואליים בהתאם. אם $A : V \rightarrow W$ מרחב לינארית ו- $f : \mathcal{B}$ בסיסם \mathcal{D} , $A = [f] = A^t$ בסיסם \mathcal{B}^\vee .

הו V מרחב אוקלידי, כלומר מרחב לינארי מימיד סופי מעל \mathbb{R} עם מכפלה פנימית \mathbb{R} : $\langle \cdot, \cdot \rangle$. לכל $V \in \mathbb{V}$ קיימת העתקה,

$$l_v : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad l_v(w) = \langle v, w \rangle$$

כלומר $\langle \cdot, \cdot \rangle = l_v$. נשים לב שה- $l_v \in V^\vee$. המשמעות היא שקיים צימוד מלא בין V ל- V^\vee , על-ידי $v \mapsto l_v$, ולכן $V \simeq V^\vee$. בהתאם לדוגמה ב- \mathbb{R}^3 אם נגיד (v) אמ $l(v) = \det(x \ y \ v)$ עבור $x, y \in \mathbb{R}_{\text{col}}^3$ קבועים, נקבל העתקה לינארית ולכן לכל $z \in \mathbb{R}^3$ קיים $x \wedge y \in \mathbb{R}^3$ כך ש- $l(z) = 0$. זהו למעשה המכפלה החיצונית, המכפלה הוקטורית.

8.12.2025 — 15 שיעור 15

15.1 תבניות ביילינאריות

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} .

הגדעה 15.1 (תבנית ביילינארית) תבנית ביילינארית על V היא פונקציה $V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ כך שהפונקציה $(v, w) \mapsto g(v, w)$ עבור $v, w \in V$ היא פונקציה ליניארית.

דוגמה 15.1 אם $l^1, l^2 \in \text{hom}(V, \mathbb{F})$ אז גם $(v, w) \mapsto l_1(v)l^2(w)$ אף היא תבנית ביילינארית.

דוגמה 15.2 עבור $A \in M_m(\mathbb{F})$, $\text{tr}(X^t AY) = \text{tr}(AY)$ גדריר $A \in M_n(\mathbb{F})$, זהה פונקציה משמרת לינאריות מרכיבת עליידי פונקציונל לינארי, ולכן תבנית ביילינארית.

דוגמה 15.3 כאשר $V = \mathbb{F}_{\text{col}}^n$ או $A \in M_n(\mathbb{F})$ אז זוהי תבנית ביילינארית כמקרה פרטי של הדוגמה הקודמת.

במקרה שבו $n=2$ ו- $\text{id} = \text{diag}(1, 1)$ או נקבע $A = \text{diag}(1, 1) = \text{id}$ זוהי המכפלת הפנימית הסטנדרטיבית כאשר \mathbb{R} או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. אם לעומת זאת $A = \text{diag}(1, -1)$ זוהי מכפלת הפנימית החשובה בפייזיקה. ישנו גם המקרה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ נקראת התבנית ההיפרבולית. אם גדריר $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ או נקבע x, y , קלומר זוהי דטרמיננטה של מטריצה ריבועית כאשר עמודותיה הן הוקטורים x, y , $g_S(x, y) = x^1y^2 - x^2y^1 = \det(x, y)$

15.2 מטריצת גرم

או באנגלית Matrix Gram. אם V מרחב וקטורי מממד סופי מעל \mathbb{F} ו- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n) : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ בסיס סדור, אז \mathcal{B} מבטא g כתבנית ביילינארית.

הגדעה 15.2 (מטריצת גرم) אם $g_{ij} = g(b_i, b_j) \in M_n(\mathbb{F})$ אז המטריצת $G = [g_{ij}]$ נקראת מטריצת גرم של g בסיס \mathcal{B} .

אם $v \in V$ אז נוכל לכתוב $v = \mathcal{B}x$ עבור וקטור קורדינטות x , באופן דומה אם $w \in V$ אז נוכל לסמן $w = \mathcal{B}y$. במצב זה,

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^n b_i x^i, \sum_{j=1}^n b_j y^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j g(b_i, b_j) = x^t G y$$

טענה 15.3 אם g מבטא \mathcal{B} של \mathcal{B}' , אז \mathcal{B}' מטריצת גرم בסיס \mathcal{B} של \mathcal{B} , כלומר $\mathcal{B}' = P^t G P$ עבור $P \in GL_n(\mathbb{F})$.

עתה נרצה לשאול את השאלה האם במקבשת מה קורה \mathcal{B}' כאשר אנו משנים את הבסיס. תהי $P \in GL_n(\mathbb{F})$, היא תהיה מטריצת מעבר P כולם לכל וקטור קורדינטות x נקבע Px' או בקרה זה $Px' = Px$. אז $g(v, w) = (Px')^t G (Py') = (x')^t (P^t G P) y' = x^t G y$.

טענה 15.4 אם \mathcal{B}' בסיסים כך $\mathcal{B}' = P^t G P$ מטריצת מעבר, וכן g מבטא \mathcal{B} של \mathcal{B}' , אז G מטריצת גرم של \mathcal{B} .

הגדעה 15.5 (מטריצות חופפות) נאמר ששתי מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ הן חופפות (congruent) אם קיימת $P \in GL_n(\mathbb{F})$ כך $P^t A P = B$.

תרגיל 15.1 הוכיחו כי זה יחס שקילות.

אם g מבטא \mathcal{B} של \mathcal{B}' אז גדריר \mathcal{B}' מטריצת גرم G .

הגדעה 15.6 (תבנית ביילינארית סימטרית) g נקראת סימטרית אם $g = g^t$ ואנטי-סימטרית כאשר $g = -g^t$.

תרגיל 15.2 g היא סימטרית אם ורק אם G סימטרית וכן ואנטי-סימטרית אם ורק אם G אנטי-סימטרית.

הגדעה 15.7 (תבנית אורתוגונלית) ההיינה V מרחב וקטורי ו- \mathbb{F} תבנית ביילינארית סימטרית. נסמן $u \perp v$ כאשר $u \cdot v = 0$ ונאמר u, v אורתוגונליות ביחס ל- g .

אם $U, W \subseteq V$ או $W \perp U$ כאשר $w \in W$, $u \in U$, $u \perp w$ נסמן $U^\perp = \{w \in V \mid \forall u \in U, u \perp w\}$.

הגדעה 15.8 (גרעין של תבנית ביילינארית) הגרעין של g מוגדר עליידי $V^\perp = \ker g$.

הגדעה 15.9 (ניוזן) נאמר ש- g לא מנוגנת כאשר $\ker g = \{0\}$.

$U \leq V$ נקרא לא מנוון כאשר $g|_{U \times U}$ לא מנוונת, אחרת U נקרא איזוטרופי.

נניח ש- $V = \mathbb{R}^2$ ו- $g = g_L$, כלומר $g(x, x) = (x^1)^2 - (x^2)^2$. ב מקרה זה נקבל $g(x, y) = x^1y^1 - x^2y^2$. בהתאם $g(0, 0) = 0$ ו $g(x_1, x_2) = \{x \mid x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$. אם נבחן את $U = \{x \mid |x_1 - x_2| = 0\}$ אז נקבל ש רק $x_1 = x_2$, כלומר $g(0, 0) = 0$ ולכן זה קבוצה לא מנוונת.

15.3 תבנית ריבועית

נניח ש- V ו- g תבנית ביילינגרית סימטרית על V .

הדרה 15.10 (תבנית ריבועית) נגידר את התבנית הריבועית $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ $q : V \rightarrow \mathbb{F}$ על ידי $q(v) = g(v, v)$.

נשים לב שגם q שאמם $G = [g]_{\mathcal{B}} = [g_{ij}]$ או מתקיים $q(kv) = k^2q(v)$ $\forall k \in \mathbb{F}, v \in V$.
 $q(v) = x^t G x = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x^i x^j g_{ij}$.
 $q_E(x) = 2x^1 x^2 - (x^2)^2$ ולבסוף גם $q_H(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2$. נקבל כך גם $q_L(x) = (x^1)^2 - (x^2)^2$. בפרט אנו רואים שב במקרה שבו קודם נקבע 0 ב- q_H , ככלומר הוא באמת לא מתנהגת כמו נורמה.

9.12.2025 — 16 שיעור 16

16.1 לכsoon חנויות ביילינאריות

נניח ש- V מרחב וקטורי סופי-מידי מעל השדה \mathbb{F} , ו- $\mathbb{F} \times V \rightarrow V : g$ תבנית ביילינארית סימטרית. נרצה לעסוק בשאלת הלכsoon בהקשר של g , כלומר האם יש בסיס \mathcal{B} המטריצה המייצגת של g היא אלכסונית.

משפט 16.1 (נוסחת הפולרייזציה) אם $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ מתקיים,

$$g(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$$

תרגיל 16.1 הוכיחו משפט זה.

הגדעה 16.2 (בסיס אורתוגונלי) בסיס $(b_1, \dots, b_n) = \mathcal{B}$ נקרא אורתוגונלי כאשר $g(b_i, b_j) = 0$ לכל $i \neq j$.

משפט 16.3 (קיים בסיס אורתוגונלי) לכל V ו- g סימטרית כאשר $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ קיים בסיס אורתוגונלי.

הוכחה. אם $g = 0$ אז כל בסיס הוא אורתוגונלי. אחרת נניח באינדוקציה על מימד V , כלומר נניח נכונות עבור מערכות ממימד קטן מ- n ונסיק את נכונות הטענה עבור n כאשר $g \neq 0$. אם $g(b, b) = 0$, טענה זו נכונה שכן אם $g \neq 0$ או קיימים v, w כך ש- $g(v + w, v + w) = g(v, w) + g(w, v) = 0$, אז גם $g(v, w) = 0$.

היא $U = \text{Span}\{b\}$ ונتابון ב- U^\perp ונתען שמתקיים $v_0 \in U^\perp$ ונשים לב כי $v_0 \in U^\perp$, נבדוק,

$$g(b, v_0) = g(b, v) - g(b, b) \frac{g(b, v)}{g(b, b)} = 0$$

ולכן אכן מצאנו שמתקיים $v_0 \in U^\perp$. נוכל אם כן לכתוב $b = v_0 + \frac{g(b, v)}{g(b, b)}b$ וקטור v נותר להראות $U \cap U^\perp = \emptyset$. נניח ש- $v \in U \cap U^\perp$ אז $v = kb$ ו- $g(b, v) = g(b, kb) = kg(b, b) = k$. בהתאם נקבל $k \in \mathbb{F}$ ו- $v = kb$, אבל גם $g(b, v) = 0$ ולכן $k = 0$ ו- $v = 0$.

נראה ש- $1 = \dim U^\perp = \dim V - \dim U$. לפי הנחת האינדוקציה למצום של g על U^\perp קיים בסיס אורתוגונלי, אם $b_1 = b$ הבסיס מקיים את טענה המשפט. \square

מסקנה 16.4 אם $D = [g]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ עבור \mathbb{F} אז מתקיים,

$$g(v, u) = x^t D y = x^1 d_1 y^1 + \dots + x^n d_n y^n$$

בהתאם גם d_n מתקיים $q(v) = (x^1)^2 d_1 + \dots + (x^n)^2 d_n$.

מצאנו שלכל g יש בסיס אורתוגונלי, כלומר $g(b_i, b_j) = 0$ לכל $i \neq j$, אבל במצב זה מטריצה גרם בהכרח אלכסונית, ונסה זאת כמסקנה. $D = P^t A P$ כאשר $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו- $P \in GL_n(\mathbb{F})$ קיימות $D \in M_n(\mathbb{F})$ אלכסונית כך ש-

נעבור לחיפוש אחר דרכי למציאת בסיס מלכון כזה.

הגדעה 16.6 (בסיס אורתונורמלי) אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ אז בסיס $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ נקרא אורתונורמלי אם $g(b_i, b_j) \in \{1, 0, -1\}$ לכל $i, j \leq n$.

דוגמה 16.1 כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נגיד,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל $g((x, y, z)^t) = -x^2 - 4xy + 2y^2 + 8xz + 4yz + z^2$, ועתה נרצה לבצע השלמה לריבוע. למעשה יכולנו לחשב מפורלינים כזה בדיקות המטריצה המתאימה לו, כלומר יש התאמה חד-חד ערכית ועל בין מטריצות ותבניות ריבועיות (ולכן גם חנויות ביילינאריות). אז נחשב $g(x, y, z) = -(x + 2y + 4z)^2 + 6y^2 + 15z^2 - 12yz = -(x + 2y + 4z)^2 + 6(y - z)^2 + 9z^2$, כלומר $g(x, y, z) = -(x + 2y + 4z)^2 + 6(y - z)^2 + 9z^2$ ונקבל $g(u, v, w) = -u^2 + 6v^2 + 9w^2$ בהתאם, $u = x + 2y + 4z, v = y - z, w = z$.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

כלומר אם עבדנו במקור בסיס \mathcal{B} עתה מצאנו בסיס מלכון' \mathcal{B}' , וכן ידוע לנו ש- $Q\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ ' עבר המטריצה שהיישבנו זה עתה, או אם $I = PQ$ אז P היא מטריצת המעבר המלכונת.

אילו לא היו לנו ריבועים בביטוי המקורי, אז היינו יכולים להשתמש במעבר מהצורה $v - u = x, y = u + v$ ולקבל בסיס בו יש ריבועים וכן שהוא ניתן לשינוי פעולה הפעיכה. אנו יודעים שכפל של מטריצה אלמנטרית מימין מאפשרת לנו לבצע פעולות שורה, אם נכפול במטריצה המשוכפלת משמאלו נקבל את אותה הפעולה אבל על העמודות, ובהתאם אין זה מפתיע אותנו שמתќבל בדיק $D = P^t AP$. ונכל להשתמש בפעולות שעשינו במהלך מציאת הבסיס המלכון והן מרכיבות הלכה למעשה את P .

הגדרות ומשפטים

4	הגדירה 1.1 (ישרים מקבילים)
4	הגדירה 1.2 (קולינאריות)
4	הגדירה 1.3 (מיشور אפיני)
4	משפט 1.4 (מספר נקודות מינימלי במיشور אפיני)
4	הגדירה 1.5 (מודל אנלטי)
5	הגדירה 1.6 (מרחיב אפיני)
6	הגדירה 2.1 (פונקציית הפרש)
6	טענה 2.3 (תכונות של פונקציית ההפרש)
7	הגדירה 2.5 (מרחיב וקטורימושרה מנוקודה)
7	הגדירה 2.6 (חת-מרחיב אפיני)
7	משפט 2.7 (יחידות חת-מרחיב לנائي פורס)
8	הגדירה 2.8 (מרחיב משיק)
8	הגדירה 2.9
8	הגדירה 2.10
8	משפט 2.11
9	הגדירה 3.1 (מודל אפיני סטנדרטי)
9	הגדירה 3.2 (העתקה אפינית)
9	הגדירה 3.4 (אייזומורפיים אפיני)
10	הגדירה 3.5 (חת-יריעה נוצרת)
10	הגדירה 3.6 (בסיס אפיני)
10	הגדירה 3.7 (מערכת יהוס)
10	הגדירה 3.9 (קורדיינטה)
11	הגדירה 4.1 (מפה ופרמטריזציה למרחיב וקטורי)
11	משפט 4.2 (מרחיב וקטורימושרה)
11	הגדירה 4.3 (מפה אפינית)
12	הגדירה 5.1 (נורמה)
12	הגדירה 5.2 (מטריקה)
12	הגדירה 5.3 (כדור)
12	הגדירה 5.4 (כדור סגור וספירה)
12	הגדירה 5.5 (סדרה וסדרה מתכנסת)
12	משפט 5.6 (התכנסות וההתכנסות קורדיננטה)
13	הגדירה 5.7 (מסילה)
13	הגדירה 5.8 (אורך של מסילה)
13	הגדירה 5.9
13	משפט 5.10
14	הגדירה 6.1 (קמירות במרחיב אפיני)
14	הגדירה 6.2 (קטע אפיני)
14	הגדירה 6.3 (קבוצה קמורה)
14	הגדירה 6.4 (סגור קמור אפיני)
15	הגדירה 7.1 (דיפיאומורפיזם)
15	הגדירה 7.2 (רפרטורייזציה)
15	משפט 7.4 (קיים פרמטריזציה לפי אורך)

15	הגדירה 7.5 (בסיס אורחותוגוני של נגזרת)
18	משפט 10.1
18	משפט 10.2
20	הגדירה 12.1 (מרחב דואלי)
21	הגדירה 13.1 (בסיס דואלי)
21	משפט 13.2 (קיים בסיס דואלי)
21	משפט 13.3 (שיקולות לאיפוס במרחב דואלי)
21	משפט 13.4 (קיים בסיס לבסיס דואלי)
21	הגדירה 13.5 (מאפסים)
21	משפט 13.6 (תכונות מאפס)
21	משפט 13.7
22	הגדירה 13.8 (קובוצת האפסים)
22	משפט 13.9
22	משפט 13.10
22	הגדירה 13.11 (העתקה דואלית)
23	משפט 14.2
24	הגדירה 15.1 (חבנית ביילינארית)
24	הגדירה 15.2 (מטריצת גורם)
24	הגדירה 15.5 (מטריצות חופפות)
24	הגדירה 15.6 (חבנית ביילינארית סימטרית)
24	הגדירה 15.7 (חבנית אורחותוגונלית)
24	הגדירה 15.8 (גרעין של חבנית ביילינארית)
24	הגדירה 15.9 (ניוון)
25	הגדירה 15.10 (חבנית ריבועית)
26	משפט 16.1 (נוסחת הפולריזציה)
26	הגדירה 16.2 (בסיס אורחותוגוני)
26	משפט 16.3 (קיים בסיס אורחותוגוני)
26	הגדירה 16.6 (בסיס אורחותונורמלוי)