נוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + 1).$$

*הוכחה.* נוכיח את הטענה באינדוקציה.

עבור $n = 1$ נקבל $x - 1 = (x-1)(1)$ כפי שרצינו.

נניח עתה שעבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו מתקיימת הטענה ונבדוק את $n+1$.

$$x^{n+1}-1 = (x^{n+1}-x)+(x-1) = x(x-1)(x^{n-1}+\cdots+1)+(x-1) = (x-1)(x^n+\cdots+x)+(x-1) = (x-1)(x^n+\cdots+x+1)$$

והטענה חלה. □

נראה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

*הוכחה.* עבור בסיס האינדוקציה נבדוק את $n = 1$,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{3} < 2 \iff 3 < 4.$$

ולכן הטענה מתקיימת.

נניח שהטענה נכונה עבור $n$ ונבדוק את המקרה $n+1$,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{\sqrt{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$$

השלמנו את מהלך האינדוקציה ולכן הטענה נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$. □