פתרון מטלה 08 — מבוא לטופולוגיה, 80516

30 במאי 2025

שאלה 1

יהי X מרחב טופולוגי ו־βX קומפקיפיקציית סטון־צ'ך.

סעיף ב'

נניח ש־X דיסקרטי ונראה שאם $U \subseteq \beta X$ פתוחה אז $\mathrm{cl}_{\beta X}(U)$ פתוחה אף היא.

הוכחה. תהי U פתוחה ב־βX, ויהי $\iota : X \to \beta X$ שיכון כך ש־$\iota(X)$ צפופה ב־βX.
אם קיימת קבוצה $V \subseteq X$ כך ש־$U = \iota(V)$ אז מהומיאומורפיות לתמונה של ι נובע ש־V פתוחה. הומיאומורפיזם משמר סגור ולכן נקבל שגם $\iota(\overline{V}) = \overline{U}$, אבל זוהי קבוצה פתוחה במרחב הדיסקרטי X.
נניח עתה ש־$\iota(V) \not\supseteq U$, לכן קיימת קבוצה $V \subseteq X$ כך ש־$\overline{U} = \overline{\iota(V)}$, זאת מצפיפות $\iota(X)$ ב־βX. אבל שוב מאותו שיקול בדיוק נקבל שוב ש־$\overline{U}$ פתוחה. □

סעיף ג'

נניח ש־X דיסקרטי ונראה ש־βX הוא בלתי־קשיר לחלוטין, כלומר נראה שרכיבי הקשירות של המרחב הם יחידונים.

הוכחה. נוכיח תחילה את הטענה כי אם ניתן להפריד כל שתי נקודות על־ידי קבוצה פתוחה סגורה, אז המרחב בלתי קשיר לחלוטין. נניח ש־$A \subseteq Y$ רכיב קשירות במרחב כלשהו המקיים תכונה זו. אילו לא קיימות שתי נקודות $x, y \in A$ כך ש־$x \neq y$ אז סיימנו. אחרת $x \in U \subseteq Y$ פתוחה סגורה כך ש־$y \notin U$. אבל $U \cap A$ פתוחה וסגורה אף היא, ולכן גם $A \setminus U$, וקיבלנו עדות ש־A לא רכיב קשירות, ולכן $A = \{x\}$.

עתה נוכיח את הטענה כי אם Y מרחב האוסדורף כך שהסגור של כל פתוחה הוא גם פתוח, אז Y בלתי קשיר לחלוטין. מהטענה שהראינו זה עתה מספיק שנראה שניתן להפריד כל שתי נקודות על־ידי קבוצה פתוחה סגורה. תהינה שתי נקודות $x, y \in Y$ כך ש־$x \neq y$, אז מהאוסדורף קיימות קבוצות פתוחות $x \in U_x, y \in U_y$ כך ש־$x \notin U_y, y \notin U_x$. אנו טוענים כי $y \notin \overline{U_x}$. U_x פתוחה ולכן $Y \setminus U_x = U_y^C$ סגורה כך ש־$x \in U_y^C, y \notin U_y^C$. אבל מסגירות לחיתוך גם $\overline{U_x} \cap U_y^C$ סגורה כך ש־$y \notin \overline{U_x} \cap U_y^C$, אבל $\overline{U_x}$ היא סגורה מינימלית המכילה את U_x ו־$x \in U_y^C$ ולכן $x \in \overline{U_x} \cap U_y^C$.
לבסוף נבחין כי $\overline{U_x}, \overline{U_y}$ סגורות ופתוחות ולכן גם המשלימים שלהן כאלה, נוכל להסיק ישירות ש־$\overline{U_x} \cap U_y^C$ קבוצה פתוחה וסגורה המפרידה את x ו־y. לכן Y בלתי קשיר לחלוטין.

לבסוף נבחין כי βX הוא מרחב האוסדורף מהגדרת הקומפקטיים קציה, וכן מסעיף א' הסגור של כל פתוחה הוא פתוח, ולכן נסיק ש־βX בלתי קשיר לחלוטין. □

שאלה 2

תהי $p : E \to B$ העתקת כיסוי.

סעיף א׳

תהי $q : B \to X$ העתקת כיסוי כך שלכל $x \in X$ הקבוצה $q^{-1}(\{x\})$ היא סופית.
נראה ש־$q \circ p : E \to X$ העתקת כיסוי.

הוכחה. תהי $x \in X$, אז קיימת סביבה $x \in U \subseteq X$ כך ש־$q^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^N V_n$ עבור $N \in \mathbb{N}$ וכך שהצמצום לכל אחת מהקבוצות הללו $V_n \subseteq B$ פתוחות, הוא הומיאומורפיזם. נבחין כי יש כמות סופית של כאלה שכן $q^{-1}(\{x\})$ סופית, ואילו כמות הקבוצות לא סופית אז בפרט יש אינסוף נקודות שממופות ל־x. נסמן $q^{-1}(\{x\}) = \{b_n\}_{n=1}^N$, וניזכר כי p העתקת כיסוי, ולכן לכל $n \le N$ יש $b_n \in W^n \subseteq B$ כך ש־I^n קבוצת אינדקסים ומתקיים,

$$p^{-1}(W^n) = \bigcup_{\alpha \in I^n} \Omega_\alpha^n$$

עבור $\Omega_\alpha^n \subseteq E$ פתוחה לכל $\alpha \in I^n$. עתה נגדיר $W_0^n = W^n \cap V_n$, זוהי קבוצה פתוחה וכן מהומיאומורפיות מקומית גם,

$$p^{-1}(W_0^n) = \bigcup_{\alpha \in I^n} \Omega_\alpha^n \cap p^{-1}(W_0^n)$$

איחוד זר של פתוחות המעיד כי $q \circ p$ העתקת כיסוי. $\square$

סעיף ב׳

יהי $A \subseteq B$ תת־מרחב, ונגדיר גם $D = p^{-1}(A)$. נראה ש־$p \restriction D : D \to A$ היא העתקת כיסוי.

הוכחה. נרצה להראות שההגדרה עודנה חלה. נניח ש־$a \in A$, אז בפרט $a \in B$ וקיימת סביבה פתוחה $a \in U \subseteq B$ כך ש־$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ עבור $V_\alpha \subseteq E$ פתוחות זרות. נגדיר $U' = U \cap A \subseteq A$ קבוצה פתוחה, נבחין כי $a \in U'$. נגדיר גם $W_\alpha = D \cap V_\alpha$ לכל $\alpha \in I$. נבחין כי W_α פתוחה אף היא, ומתקיים,

$$a \in U' = \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha.$$

ונותר לנו להראות ש־$p \restriction D \restriction W_\alpha$ הומיאומורפיזם. כמובן $p \restriction D \restriction W_\alpha = p \restriction V_\alpha \restriction W_\alpha$ צמצום לפתוחות של הומיאומורפיזם ולכן הומיאומורפיזם. $\square$

שאלה 3

הגדרנו את המרחב המושרה מ־$\mathbb{R}^2$,

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \pm 1)^2 + y^2 = 1\} \simeq \{e^{it} \pm 1 \in \mathbb{C} \mid t \in [0, 2\pi]\}$$

סעיף א׳

נמצא העתקת מנה מ־S^1 ל־X והעתקת מנה מ־X ל־S^1.

פתרון נגדיר $f : S^1 \to X$ על־ידי,

$$f(e^{it}) = \begin{cases} e^{2it} + 1 & 0 \le t < \pi \\ e^{2it} - 1 & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

זוהי פונקציה רציפה כפונקציה מרוכבת, היא רציפה בנקודת הקצה שכן $f(1)$ נקבעת ביחידות. היא על ישירות מהגדרתה על X. זו אף העתקה פתוחה, זאת ישירות מהגדרת קבוצות פתוחות במרחבים המושרים.

לכיוון ההפוך, נגדיר $g : X \to S^1$ על־ידי,

$$g(e^{it} + 1) = e^{i\frac{t}{2}}, \quad g(e^{it} - 1) = e^{i\pi + i\frac{t}{2}}$$

זוהי העתקה רציפה ופתוחה מסיבות זהות למקרה הקודם, ונבחין כי היא אכן על ככיסוי של שני חצאי המעגל.

סעיף ב׳

נוכיח שאין כיסוי של X על־ידי S^1 וגם לא להיפך.

הוכחה. נניח בשלילה ש־$p : S^1 \to X$ העתקת כיסוי. אז קיימת סביבה פתוחה $0 \in U \subseteq X$ כך ש־$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ עבור $V_\alpha \subseteq S^1$. נבחן את הצמצום $p_0 = p \restriction V_\alpha$ עבור איזושהי $\alpha \in I$. בהתאם $p_0 : V_\alpha \to U$ הומיאומורפיזם. נבחן עתה את $V_\alpha \setminus \{p_0^{-1}(0)\} \to X \setminus \{0\}$, זהו הומיאומורפיזם. ב־$V_\alpha \setminus \{p_0^{-1}(0)\}$ יש רכיב קשירות אחד (כלל המעגל להוציא נקודה) או שני רכיבים. ב־$X \setminus \{0\}$ יש בין שניים לארבעה רכיבי קשירות, ולכן נובע שבהכרח יש שני רכיבי קשירות בכל אחד מהמרחבים. אבל משאלה 2 סעיף ב׳ נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות ש־$X \neq U$ ולכן יש לכל הפחות שלושה רכיבי קשירות ל־$U \setminus \{0\}$ וקיבלנו סתירה.

נניח בשלילה ש־$q : X \to S^1$ העתקת כיסוי. נסמן $b = q(0)$, ותהי קבוצה פתוחה $b \in U \subseteq S^1$ כך ש־$q^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ עבור $V_\alpha \subseteq X$. אז קיים $\alpha \in I$ כך ש־$0 \in V_\alpha$. נבחן את ההומיאומורפיזם $q_0 = q \restriction V_\alpha$ עבור α זה, ומשיקולים זהים לחלק הראשון של ההוכחה נקבל סתירה לכיסוי q. $\square$