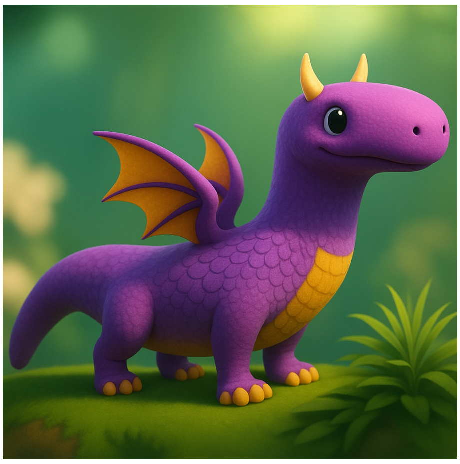
פתרון מטלה 5 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

2 בדצמבר 2025



שאלה 1

יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{F}$.

סעיף א׳

נראה שלכל $l^1, l^2 \in V^\vee$ ולכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים,

$$(l^1 + l^2)(cv) = c(l^1 + l^2)(v)$$

הוכחה. נבחין תחילה ש־$l^i : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי ולכן העתקה לינארית ובהתאם $l^i(cv) = cl^i(v)$. מתקיים גם $l^1 + l^2 \in V^\vee$ ולכן זו העתקה לינארית גם כן, וקיבלנו את הטענה. $\square$

סעיף ב׳

נניח ש־$l \in V^\vee$ וכן $c \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V$, ונראה שמתקיים,

$$(cl)(v_1 + v_2) = (cl)(v_1) + (cl)(v_2)$$

הוכחה. מהגדרה $cl(u) = l(cu)$ לכל $u \in V$, ולכן בפרט גם,

$$(cl)(v_1 + v_2) = l(c(v_1 + v_2)) = l(c(v_1)) + l(c(v_2)) = (lc)(v_1) + (lc)(v_2)$$

ומצאנו שהטענה חלה. $\square$

שאלה 2

תהי S קבוצה לא ריקה ו־$V = \mathcal{F}(S) = \{f : S \to \mathbb{F}\}$ מרחב הפונקציות. יהיו $s_0 \in S$ ו־$\mathrm{eval}_{s_0} : \mathcal{F}(S) \to \mathbb{F}$ המוגדרת על־ידי $\mathrm{eval}_{s_0}(f) = f(s_0)$ לכל $f \in \mathcal{F}(S)$.
נראה שלכל f ו־$c \in \mathbb{F}$ מתקיים $\mathrm{eval}_{s_0}(cf) = c\,\mathrm{eval}_{s_0}(f)$.

הוכחה.

$$\mathrm{eval}_{s_0}(cf) = (cf)(s_0) = c \cdot f(s_0) = c\,\mathrm{eval}_{s_0}(f)$$

והטענה אכן חלה. □

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$.

סעיף א׳

יהי $v \in V$, נוכיח ש־$v = 0$ אם ורק אם לכל $l \in V^\vee$ מתקיים $\langle l, v \rangle = 0$.

הוכחה. נניח ש־$v = 0$ ויהי $l \in V^\vee$, כלומר $l : V \to \mathbb{F}$ העתקה לינארית. אז מתקיים $l(v) = 0$ מהגדרת ההעתקה הלינארית.

לכיוון ההפוך נניח שלכל $l \in V^\vee$ מתקיים $l(v) = 0$ ונניח בשלילה ש־$v \neq 0$. נרחיב את (v) לבסיס $\mathcal{B} = (v, b_2, \dots, b_n)$ הפורש את V. בהתאם קיימת העתקה לינארית $l : V \to \mathbb{F}$ כך שמתקיים $l(v) = 1$, אבל $l \in V^\vee$ ולכן $\langle l, v \rangle = 0 \neq 1$ בסתירה. $\square$

סעיף ב׳

יהי $l \in V^\vee$, נוכיח ש־$l = 0$ אם ורק אם לכל $v \in V$ מתקיים $\langle l, v \rangle = 0$.

הוכחה. נניח ש־$l = 0$, אז בהגדרה $\langle l, v \rangle = l(v) = 0$ לכל v.

נניח ש־$\langle l, v \rangle = 0$ לכל $v \in V$ ונניח ש־$l \neq 0$, לכן קיים $u \in \operatorname{Im} l$ כך ש־$u \neq 0$ וכן $l(u) \neq 0$ בסתירה. $\square$

שאלה 4

נראה שלכל $W \leq V^\vee$ מתקיים,

$$\dim_{\mathbb{F}} W + \dim_{\mathbb{F}} W_0 = \dim_{\mathbb{F}} V$$

הוכחה. הגדרנו $W_0 = \{v \in V \mid \forall l \in W,\ l(v) = 0\}$. נניח ש־$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס של V וכן נסמן $\mathcal{B}^\vee = (b^1, \dots, b^n)$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$(b^1, \dots, b^k)$ עם $k \leq n$ הוא בסיס סדור של W. אז מהגדרה מתקיים $l(b^i) = 0$ לכל $l \in W$ ו־$k < i \leq n$, ולכן $b_i \in W_0$. באופן דומה נסיק ש־$b_i \notin W_0$ לכל $i \leq k$ שכן קיים עד לכך ש־$b^i \in W$. קיבלנו אם כך ש־$(b_{k+1}, \dots, b_n)$ בסיס סדור של W_0. $\square$

שאלה 5

נראה שלכל $L \subseteq V^\vee$ ו־$S \subseteq V$ מתקיים $L_0 \leq V$, $S^0 \leq V^\vee$.

הוכחה. הגדרנו $S^0 = \{l \in V^\vee \mid \forall v \in S,\ l(v) = 0\}$. אם $l, m \in S^0$ אז $(l+m)(v) = l(v) + m(v) = 0 + 0$ לכל $v \in S$, ונוכל להסיק ש־$l + m \in S^0$ גם כן. באופן דומה נוכל להראות שגם $cl \in S^0$ לכל $c \in \mathbb{F}$ ו־$l \in S^0$, לכן S^0 מרחב וקטורי, וכמובן $S^0 \subseteq V^\vee$ ולכן $S^0 \leq V^\vee$. ההוכחה עבור L_0 היא זהה. □

שאלה 6

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$.

סעיף א׳

נראה שאם $U \leq V$ אז $U \subseteq (U^0)_0$ ונסיק שוויון.

הוכחה. תהי U $u \in$ ותהי $l \in U^0$, אז $l(u) = 0$ מהגדרה, אבל l שרירותי ולכן $u \in (U^0)_0$ ונסיק $U \subseteq (U^0)_0 \subseteq U$ ובהתאם יש שוויון. □

סעיף ב׳

נראה שאם $L \leq V^\vee$ אז $L \subseteq (L_0)^0$ ונסיק שוויון.

הוכחה. באופן דומה לסעיף הקודם נניח ש-$l \in L$ ויהי $v \in L_0$, אז נובע ש-$l(v) = 0$ ולכן $L \subseteq (L_0)^0$. □

סעיף ג׳

יהיו $U_1, U_2 \leq V$, נראה ש-$U_1 = U_2$ אם ורק אם $U_1^0 = U_2^0$.

הוכחה. נניח ש-$U_1^0 = U_2^0$. נניח ש-$l \in U_1^0$, אז $l(v) = 0$ לכל $v \in U_2^0 = U_1^0$ ולכן $l \in U_2^0$, ומטעמי סימטריה הטענה נובעת.
הצד השני נובע מסעיף א׳. □

סעיף ד׳

עבור $W^1, W^2 \leq V^\vee$ נוכיח ש-$W^1 = W^2$ אם ורק אם $W_0^1 = W_0^2$.

הוכחה. נפעל באופן שקול לסעיף הקודם. נניח ש-$W^1 = W^2$ ויהי $v \in W_0^1$, אז לכל $l \in W^2$ מתקיים $l(v) = 0$ ולכן $v \in W_0^2$ וקיבלנו שוויון האפסים.
בכיוון ההפוך הטענה נובעת ישירות מסעיף ב׳. □

שאלה 7

סעיף א׳

יהיו $S_1, S_2 \leq V$ ונראה ש־$(S_1+S_2)^0 = S_1^0 \cap S_2^0$.

הוכחה. יהי $l \in (S_1+S_2)^0$, אז $l(v+u) = l(v)+l(u) = 0$ לכל $u \in S_1, v \in S_2$. נבחין כי $0 \in S_1, S_2$ כתת־מרחבים ולכן נקבל שגם $l(v) = 0, l(u) = 0$ לכל u, v כאלה, ונסיק $l \in S_1^0, l \in S_2^0$ ובפרט נמצא בחיתוך.

מהצד השני נניח ש־$l \in S_1^0 \cap S_2^0$, אז בפרט $l(u) = l(v) = 0$ לכל $u \in S_1, v \in S_2$, ולכן גם $l(u+v) = l(u)+l(v) = 0$ ונסיק ש־$l \in (S_1+S_2)^0$. $\square$

סעיף ב׳

נראה שאם $L^1, L^2 \leq V^\vee$ אז $(L^1 \cap L^2)_0 = L_0^1 + L_0^2$.

הוכחה. מהסעיף הקודם נסיק $(L_0^1+L_0^2)^0 = L^1 \cap L^2$, ולכן $(L^1 \cap L^2)_0 = (L_0^1+L_0^2)^0_0 = L_0^1 + L_0^2$ מזהויות שהוכחנו. $\square$