פתרון מטלה 11 — מבוא לטופולוגיה, 80516

21 ביוני 2025

שאלה 1

נניח ש־$g: S^2 \to S^2$ רציפה כך שלכל $x \in S^2$ מתקיים $g(x) \neq g(-x)$. נראה ש־g היא על.

הוכחה. נניח ש־$x_0 \in S^2$ נקודה כך ש־$x_0 \notin g(S^2)$, לכן נוכל לצמצם את טווח g, כלומר מתקיים,

$$g: S^2 \to S^2 \setminus \{x_0\} \simeq \mathbb{R}^n$$

כלומר אם $h: S^2 \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ הומיאומורפיזם (שאנו יודעים שקיים) אז $g_0 = h \circ g : S^2 \to \mathbb{R}^n$ פונקציה רציפה. ממשפט בורסוק־אולם נובע שקיימת נקודה $x_1 \in S^2$ כך שמתקיים,

$$g_0(x_1) = g_0(-x_1) \iff h(g(x_1)) = h(g(-x_1)) \iff g(x_1) = g(-x_1)$$

אבל זוהי סתירה ישירה להנחה שלנו, ולכן לא קיימת x_0 כזו, כלומר g היא על. $\square$

שאלה 2

תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ מטריצה ממשית עם כניסות אי־שליליות, נראה כי ל־A יש וקטור עצמי.

הוכחה. תחילה, אם $\det A = 0$ אז בהכרח 0 ערך עצמי וקיים וקטור לא טריוויאלי בגרעין, ולכן סיימנו. נניח אם כן ש־A רגולרית. נגדיר,

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0\}.$$

ונגדיר את ההעתקה $f : S^2 \cap X \to S^2 \cap X$ על־ידי,

$$f(x, y, z) = \frac{A(x, y, z)^t}{\|A(x, y, z)^t\|}$$

f מוגדרת היטב שכן A רגולרית ואי־שלילית.

אנו יודעים שיש הומיאומורפיזם $\varphi : S^2 \cap X \to D^1$, ולכן נוכל להגדיר $g : D^1 \to D^1$ על־ידי $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. אנו יודעים כי g רציפה כהרכבת רציפות, ולכן משפט נקודת השבת של בראוור מתקיים ויש נקודת שבת ל־g, כלומר קיים $x_0 \in D^1$ כך שמתקיים,

$$g(x_0) = x_0 \iff f(\varphi^{-1}(x_0)) = \varphi^{-1}(x_0)$$

ואם נסמן $u = \varphi^{-1}(x_0)$ כאשר $u \in S^2 \cap X$, אז,

$$f(u) = u \iff Au = \|Au\|u$$

כלומר u וקטור עצמי של A. □

שאלה 3

בכל סעיף נגדיר מרחב ונקבע האם S^1 הוא נסג עיוות שלו.

סעיף א׳

נבחן את הספרה S^2.

פתרון אנו יודעים כי $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, וכן שאם יש נסג עיוות מ־S^2 ל־S^1 אז $\pi_1(S^2) \simeq \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. מהצד השני ראינו כי לכל $n \geq 2$ הספירה S^n היא פשוטת קשר ולכן $\pi_1(S^2)$ טריוויאלית, ובפרט לא $\mathbb{Z}$.

סעיף ב׳

נגדיר את הצילינדר,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

פתרון נגדיר את ההעתקה $H : [0, 1] \times C \to S^1$ על־ידי,

$$H(t, (x, y, z)) = (x, y, (1 - t) \cdot z)$$

ונראה שזהו נסג עיוות.

לכל $(x, y, 0) \in S^1$ מתקיים,

$$H(t, (x, y, 0)) = (x, y, 0)$$

בנוסף,

$$H(0, (x, y, z)) = (x, y, (1 - 0)z) = (x, y, z)$$

ולבסוף גם,

$$H(1, (x, y, z)) = (x, y, 0) \in S^1$$

כלומר H היא אכן נסג עיוות מ־C ל־S^1 (ל־$S^1 \times \{0\}$ אשר הומיאומורפי ל־ S^1).