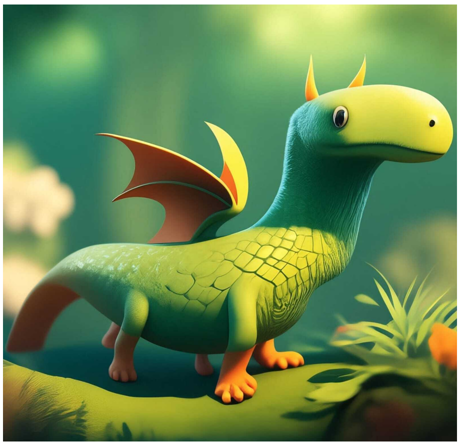
פתרון מטלה 01 — אנליזה פונקציונלית, 80417

29 במרץ 2025



שאלה 1

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. נראה כי A חסומה לחלוטין אם ורק אם היא חסומה. בפרט, אם $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע סגור וחסום אז לכל $\epsilon > 0$ קיימים קטעים סגורים $I_1, \ldots, I_n \subseteq I$ כך ש־$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ ואורכו של כל I_i הוא לכל היותר ϵ.

הוכחה. נניח ש־A חסומה לחלוטין, ונניח ש־$\{B_\epsilon(x_i)\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}$ קבוצת כדורים המעידים על חסימות בהחלט זו עבור $\epsilon > 0$ קבוע כלשהו. נבחר את $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$, זהו איחוד של קבוצות פתוחות ולכן פתוח, וזהו איחוד סופי של קבוצות חסומות ולכן חסומה, וקבוצה זו מכילה ומעידה על חסימות של A מחסימות בהחלט, ולכן קיבלנו ש־A חסומה.

נניח עתה ש־A חסומה ויהי $\epsilon > 0$. קיים $A \supseteq [-r, r]$ עבור $r > 0$ כלשהו כהיסק ישיר מהחסימות של A, ונגדיר $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ כך ש־$x_i = -r + i\frac{\epsilon}{2}$ עבור $n \in \mathbb{N}$ סופי כך ש־$\frac{4r}{\epsilon} > n$. עתה נגדיר $I = \bigcup_{i=0}^{n} B_\epsilon(x_i)$, מבדיקה ישירה נקבל $A \subseteq [-r, r] \subseteq I$, כלומר I היא ϵ־כיסוי של A. נסיק אם כך ש־A חסומה לחלוטין.

נניח עתה ש־I קטע חסום, לכן קיימים לכל $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2}$ קבוצת קטעים $I_1, \ldots, I_n$ כך ש־$I = \bigcup I_i$ כך ש־$l(I_i) = l(B_{\epsilon_0}(x_i)) = \epsilon$, ובהתאם נוכל להסיק את התנאי הנוסף. $\square$

שאלה 2

מרחב מטרי X נקרא ספרבילי אם קיימת קבוצה בת־מניה $A \subseteq X$ שצפופה ב־X.
נוכיח שאם מרחב מטרי חסום לחלוטין אז הוא ספרבילי.

הוכחה. ידוע כי X חסומה לחלוטין ולכן לכל $\epsilon > 0$ קיימת קבוצה נקודות D_ϵ כך ש־$X \subseteq \bigcup_{x \in D_\epsilon} B_\epsilon(x)$. בפרט לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $D_{\frac{1}{n}}$ סופית כזו, ונגדיר $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{\frac{1}{n}}$. מתקיים $D \subseteq X$, ואנו נראה ש־D אף צפופה ב־X. תהי $x \in X$ כלשהי, אם $x \in D$ אז סיימנו, ולכן נניח ש־$x \notin D$. לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $y \in D_{\frac{1}{n}}$ כך ש־$x \in B_{\frac{1}{n}}(y)$ מההסימות בהחלט, ולכן נגדיר $x_n = y$ לכל n. לכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D$, וכן ישירות מהגדרת הגבול מתקיים $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. לכן $x \in \overline{D}$, כלומר $\overline{D} = X$, לכן D צפופה ב־X. $\square$

שאלה 3

יהי (X,ρ) מרחב מטרי. נראה שקבוצה $A \subseteq X$ היא חסומה לחלוטין אם ורק אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ יש תת־סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}$, כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$.

הוכחה. נניח ש־A חסומה לחלוטין ותהי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$. עבור $m = 1$ קיים כיסוי של m־כדורים ל־A, משובך היונים קיים כדור כך שיש אינסוף איברי x_n בכדור, נגדיר y_1 מרכז כדור זה. תת־קבוצה של קבוצה חסומה לחלוטין היא חסומה לחלוטין אף היא, זאת שכן כיסוי של הקבוצה הגדולה יותר הוא בפרט כיסוי של תת־הקבוצה, לכן עבור $m = 2$ קיים $\frac{1}{2}$־כיסוי של $B_1(y_1)$, ובאחד הכדורים בכיסוי יש אינסוף נקודות של $\{x_n\}$, נסמן ב־y_2 את מרכז כדור זה. נמשיך ונגדיר כך סדרה $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq A$ כך שלכל $m \in \mathbb{N}$ יש אינסוף נקודות של $\{x_n\}$ ב־$B_{2^{-m}}(y_m)$. לבסוף נגדיר תת־סדרה של $\{x_n\}$ כך ש־$x_{n_k} \in B_{2^{-k}}(y_k)$ לכל $k \in \mathbb{N}$. זוהי תת־סדרה מוגדרת היטב מקיומם של אינסוף איברי $\{x_n\}$ בכל כדור כזה, לכן בפרט קיימת סדרת אינדקסים מונוטונית. מהגדרת תת־הסדרה גם נובע שלכל k, $\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$, זאת שכן שתי הנקודות מוכלות בכדור $B_{2^{-k}}(y_k)$.

נניח עתה את הכיוון ההפוך. נניח בשלילה שקיים $\epsilon > 0$ עבורו אין ϵ־כיסוי בכדורים של A, אז נבחר סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ המעידה על כך, כלומר מתקיים $\rho(x_n, x_m) \geq \epsilon$ לכל $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$. לסדרה זו יש תת־סדרה כך ש־$\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$ לכל $k \in \mathbb{N}$, בפרט לכל $k > -\log \epsilon$, אבל במקרה זה מתקיים, $2^{-k} < 2^{\log \epsilon} = \epsilon$. לכן יש אינסוף נקודות של $\{x_n\}$ כך שמרחקן קטן מ־ϵ, וזו סתירה להגדרת הסדרה, לכן אין $\epsilon > 0$ כזה, ובהתאם A חסומה לחלוטין. $\square$

שאלה 4

נתבונן במרחב $(C([-\pi,\pi]),\|\cdot\|_2)$, מרחב הפונקציות הרציפות $[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ עם הנורמה,
$$\|f\|_2=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx}$$
נוכיח כי במרחב זה הסדרה $\{\sin(nt)\}_{n=1}^{\infty}$ היא חסומה אבל לא חסומה לחלוטין.

הוכחה. תחילה נוכיח את חסימות סדרת הפונקציות הנתונה,
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|f\|_2=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(x)\,dx}\overset{(1)}{\leq}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx}=\sqrt{2\pi}$$
כאשר (1) נובע מתכונות אינטגרלים.

נעבור להוכחה שלסדרה זו אין תת־סדרת קושי. נניח ש־$\{\sin(n_k t)\}$ תת־סדרת קושי, אז סדרת הנורמות מתכנסת לאפס, לכן לכל $\epsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ עבורו
$$\forall n,m\in\{n_k\mid k>N\},\ \int_{-\pi}^{\pi}(\sin(nt)-\sin(mt))^2\,dt<\epsilon^2 \implies \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)+\sin^2(mt)-2\sin(nt)\sin(mt)\,dt<\epsilon^2$$
אבל $2\sin(nt)\sin(mt)$ סימטרית ולכן לא משפיעה על האינטגרל, ונסיק,
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)\,dt\leq\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)+\sin^2(mt)\,dt<\epsilon^2$$
נחשב את האינטגרל $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)\,dt$,
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)\,dt=\frac{1}{n}\int_{-n\pi}^{n\pi}\sin^2(t)\,dt=\frac{1}{2n}\int_{-n\pi}^{n\pi}1-\cos(2t)\,dt=\frac{1}{2n}\cdot\left[t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{t=-n\pi}^{t=n\pi}=\frac{2n\pi}{2n}=\pi$$
ולכן עבור בחירה $\epsilon=1$ נקבל סתירה. בהתאם נוכל להסיק שאין תת־סדרת קושי לסדרה שבחרנו, ובפרט ממשפט השקילות לחסימות בהחלט (או לחלופין וריאציה של שאלה 3) נובע שהסדרה לא חסומה לחלוטין. $\square$