פתרון מטלה 6 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

12 בדצמבר 2025

שאלה 1

תהי $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המכפלה החיצונית, כלומר ההעתקה המתאימה עבור (x, y) ל־$\det(x, y, z) \mapsto z = \varphi$ את הווקטור היחיד v המקיים $l_v = \varphi$.

סעיף א׳

נראה ש־$\wedge$ בי־לינארית.

הוכחה. נזכור כי מתקיים $\det(x + x', y, z) = \det(x, y, z) + \det(x', y, z)$ ולכן אם $(x \wedge y) = u, (x' \wedge y) = u'$ אז,

$$u \cdot z = \det(x, y, z), \quad u' \cdot z = \det(x', y, z) \implies (u + u') \cdot z = \det(x + x', y, z)$$

התהליך זהה עבור y. □

סעיף ב׳

נראה ש־$x \wedge y = -y \wedge x$.

הוכחה. ידוע שמתקיים $\det(x, y, z) = -\det(y, x, z)$ ולכן הטענה נובעת ישירות תוך שימוש במהלך של הסעיף הקודם. □

סעיף ג׳

נראה ש־$x \cdot (x \wedge y) = 0 = (x \wedge y) \cdot y$.

הוכחה. ידוע כי $(x \wedge y) \cdot y = \det(x, y, y) = 0$ כדטרמיננטה של מטריצה לא הפיכה. הצד השני נובע מסימטריה של מכפלה פנימית ממשית. □

סעיף ד׳

נראה ש־$x \wedge y = 0$ אם ורק אם $\{x, y\}$ תלויה לינארית.

הוכחה. נניח ש־$x \wedge y = 0$, אז נקבל $\det(x, y, z) = 0$ לכל z, אם נבחר $z \notin \operatorname{Span}\{x, y\}$ נקבל שבהכרח x, y פרופורציונליים.

בכיוון ההפוך הטענה נובעת ישירות מדטרמיננטה של מטריצה לא הפיכה. □

סעיף ה׳

נוכיח שאם $x \wedge y \neq 0$ אז $(x, y, x \wedge y)$ בסיס סדור חיובי.

הוכחה. נבחין כי $\|x \wedge y\| \neq 0$ ולכן $\det(x, y, x \wedge y) \neq 0$ ולכן מטריצה זו הפיכה ובהתאם מרחב העמודות שלה הוא בלתי־תלוי לינארית. □

סעיף ו׳

נראה ש־$(x \wedge y) \wedge z = (x \cdot z)y - (y \cdot z)x$.

הוכחה. מתקיים $(x \wedge y) \cdot w = \det(x, y, w)$ וכן $((x \wedge y) \wedge z) \cdot w = \det(x \wedge y, z, w)$, נפתח את הגדרת הדטרמיננטה ונסיים. □

סעיף ז׳

נראה שתקיים,

$$(x \wedge y) \cdot (z \wedge w) = \begin{vmatrix} x \cdot z & x \cdot w \\ y \cdot z & y \cdot w \end{vmatrix}$$

הוכחה. ישירות מפתיחת הדטרמיננטה. □

סעיף ח׳

נראה שמתקיים,