פתרון מטלה 08 — אנליזה פונקציונלית, 80417

31 במאי 2025

שאלה 2

נחשב את מקדמי טור פורייה של הפונקציה האינטגרבילית,

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2}$$

עבור,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

פתרון נבחין כי הפונקציה f היא אי־זוגית, לכן $a_n = 0$ לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. מספיק שנחשב את b_n אם כך,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(x)(\pi - |x|) \cdot \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\pi \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx - \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx \right) \\ &= \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{\pi} \left[-x \cdot \frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx \\ &= \mp \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \pm \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2 \pi} [\sin(nx)]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ולכן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx)$$

טור פורייה של f.

שאלה 3

נגדיר טור ונחשב את סכומו על־ידי שימוש בזהות פרסבל.

סעיף א׳

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ונסיק את ערך הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

פתרון נגדיר את הפונקציה $f(x) = x$, אז מאי־זוגיות $a_n = 0$ לכל n, ונחשב את b_n,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \mp \frac{2}{\pi n}$$

ולכן משוויון פרסבל,

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 + \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

אבל,

$$\frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi}{12} \pi^3 = \frac{\pi^2}{6}$$

נבחין כי,

$$\frac{\pi^2}{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

ולכן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

סעיף ב׳

נחשב את הטור,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

פתרון נגדיר $f(x) = |x|$. זוהי פונקציה זוגית ולכן $b_n = 0$ לכל n. נחשב את a_n,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$$

וכן,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2x\, dx = \pi$$

ומשוויון פרסבל,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{\pi^3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^4} |(-1)^n - 1|$$

כלומר,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} |(-1)^n - 1| = \frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \frac{\pi^4}{8} = \frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^4}{8} = \frac{\pi^4}{24}$$

שאלה 4

נוכיח את מבחן M של ויירשטראס. נניח ש־$I \subseteq \mathbb{R}$ קטע, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(I)$ ו־$\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ סדרת חסמים כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\|f_n\|_\infty < M_n$. נראה שהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ גוררת שהפונקציה f המוגדרת על־ידי,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

מוגדרת היטב ב־I, רציפה והטור מתכנס אליה במידה שווה.

הוכחה. לכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x) < \sum_{n=1}^{N} M_n$$

ישירות מהנתונים ולכל $x \in I$, לכן ממבחן הסנדוויץ' לגבולות ממשיים נקבל ש־f מוגדרת בכל I ושההתכנסות היא במידה שווה (שכן לא הייתה תלות ב־x).

נותר להראות ש־f רציפה. יהי $\varepsilon > 0$, אז,

$$|f(x) - f(y)| \le \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| + \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(y) \right| + \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(y) - f(y) \right|$$

מהתכנסות במידה שווה קיים $N \in \mathbb{N}$ (נבחר מקסימלי) כך שמתקיים,

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left| f(y) - \sum_{n=1}^{N} f_n(y) \right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

וכן מרציפות f_n לכל $N \ge n$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|x - y| < \delta$ מתקיים,

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(y) \right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

ולכן $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$ ומצאנו כי f רציפה במידה שווה ובפרט רציפה. $\square$

שאלה 5

תהי $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ כך ש־$f' \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$. נסמן ב־$a_n^f, b_n^f$ את מקדמי טור פורייה של f וב־a_n', b_n' את מקדמי טור פורייה של f'.

סעיף א׳

נראה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$a_n^f = -\frac{1}{n} b_n', \qquad b_n^f = -\frac{1}{n} a_n'$$

הוכחה. על־ידי אינטגרציה בחלקים,

$$a_n^f = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\ dx = \frac{1}{n\pi} [f(x) \sin(nx)]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx)\ dx$$

אבל f' שווה בקצוות ו־$\sin$ אי־זוגית ולכן,

$$a_n^f = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx)\ dx = -\frac{1}{n} b_n'$$

ההוכחה עבור a_n^f זהה. $\square$

סעיף ב׳

ידוע כי $(a_n')_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in l^2$ ונסיק ש־$(a_n^f)_{n=1}^\infty, (b_n^f)_{n=1}^\infty \in l^1$ ובפרט שטור פורייה של f מתכנס במידה שווה.

הוכחה. אנו יודעים כי הטור,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n')^2$$

מתכנס, אבל מסעיף א׳,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n')^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (n b_n^f)^2$$

ממבחן ההשוואה,

$$\frac{|b_n^f|}{(n b_n^f)^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

ולכן גם,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^f|$$

הוא טור מתכנס, כלומר הטור $\sum_{n=1}^\infty b_n^f$ מתכנס בהחלט. נוכל להראות באופן זהה שגם $\sum_{n=1}^\infty a_n^f$ מתכנס בהחלט. נשים לב שישירות ממבחן M של ויירשטראס יחד עם התכנסות טורי המקדמים נובע שטור פורייה של f מתכנס במידה שווה. $\square$

סעיף ג׳

נסיק שהטור של f מתכנס ל־f במידה שווה.

הוכחה. ראינו כבר כי הטור מתכנס במידה שווה, אבל עלינו להראות שהוא מתכנס ל־f. ב־$\|\cdot\|_2$ אנו כבר יודעים כי הטור מתכנס ל־f, כלומר,

$$\left\| f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right\|_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right|^2 dx \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

אבל מתקיים,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right|^2\,dx\\
=&\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right|\cdot\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right|\,dx\\
\leq&\int_{-\pi}^{\pi}\left|\max\{f(x)\}+\sum_{n=1}^{N}a_n+b_n\right|\cdot\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right|\,dx\\
=&\left|\max\{f(x)\}+\sum_{n=1}^{N}a_n+b_n\right|\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right|\,dx
\end{aligned}$$

ומהתכנסות במידה שווה של הטור נובע ישירות,

$$\sup\left|f(x)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right|\xrightarrow{N\to\infty}0$$

כפי שרצינו. $\square$