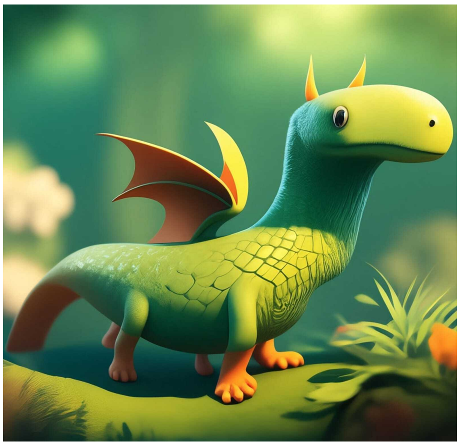
פתרון מטלה 03 — אנליזה פונקציונלית, 80417

17 באפריל 2025



שאלה 1

בשאלה זו נוכיח את משפט הקיום של פאנו. יהיו $a < b, c < d$ ממשיים ותהי $F : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ פונקציה K־ליפשיצית. נניח ש־$(x_0, y_0) \in (a,b) \times (c,d)$, ונבקש להוכיח שקיים $h > 0$ ופונקציה גזירה $f : [x_0 - h, x_0 + h] \to [c,d]$ כך ש־$f(x_0) = y_0$ ומתקיים,

$$\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h], f'(x) = F(x, f(x))$$

סעיף א׳

נגדיר סדרת פונקציות על־ידי $f_0(x) = y_0$ וכן,

$$f_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f_n(t))\, dt$$

נראה שקיים $h > 0$ כך ש־$f_n : [x_0 - h, x_0 + h] \to [c,d]$ מוגדרת היטב ורציפה לכל n.

הוכחה. יהי $h > 0$ כלשהו כך ש־f_1 מוגדרת ורציפה, כלומר שמתקיים,

$$\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h],\ f_1(x) \in [c,d]$$

בהכרח יש כזה, שכן f_1 פונקציה רציפה. נשתמש בהגדרה זו כבסיס אינדוקציה עבור הטענה שכל פונקציה f_n מוגדרת ורציפה.

נניח ש־$f_n : [x_0 - h, x_0 + h] \to [c,d]$ מוגדרת ורציפה, ונגדיר את f_{n+1} כמוגדר לעיל, אנו יודעים כי זוהי פונקציה רציפה ישירות מהגדרתה כאינטגרל לפונקציה רציפה, אך עלינו לבחון את טווחה,

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)| &= \left| \int_{x_0}^{x} F(t, f_n(t))\, dt - \int_{x_0}^{y} F(t, f_n(t))\, dt \right| \\
&= \left| \int_{x}^{y} F(t, f_n(t))\, dt \right| \\
&\le Kd(x - y, f_n(x) - f_n(y)) \\
&\le K2h|x - y|
\end{aligned}$$

TODO $\square$

שאלה 2

תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C^1[0,1]$ ונניח שקיים קטע $[a,b] \subseteq [0,1]$ ושקיימת סדרה $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ שואפת לאינסוף כך שלכל n ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים,

$$f_n'(x) \geq M_n$$

נראה שהסדרה $\{f_n\}$ לא רציפה במידה אחידה.

הוכחה. נראה את שלילת הגדרת רציפות במידה אחידה. נקבע $\epsilon > 0$ ותהי $\delta > 0$ כלשהי, יהי גם $x = a+\delta$, אז $|f_n(a)-f_n(x_0)| \geq M_n|a-x_0|$, מהנתון ש-$M_n \to \infty$ נסיק שנוכל לבחור N כך שלכל $n > N$ מתקיים $M_n|a-x_0| > \epsilon$. נסיק אם כך שהסדרה $\{f_n\}$ לא רציפה במידה אחידה. □

טענה זו לכאורה מהווה סתירה לדוגמה 1 מתרגול 3, אך נבחין הבחנה חשובה. בטענה זו נתון תחום קבוע בו הנגזרת שואפת לאינסוף, זאת בעוד בדוגמה 1 התחום בו הנגזרת שאפה לאינסוף הלך וקטן, כלומר סדרת פונקציות זו לא מקיימת את תנאי הטענה שהוכחנו זה עתה.

שאלה 3

תהי הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(\mathbb{R})$ המוגדרת על־ידי,

$$f_n(x) = \frac{1}{(x-n)^2+1}$$

סעיף א׳

נראה שהסדרה חסומה במידה אחידה, רציפה במידה אחידה ומתכנסת נקודתית לפונקציית האפס.

הוכחה. נבחין כי $(x-n)^2+1 \geq 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f_n(x) \leq 1$, כלומר הסדרה $\{f_n\}$ חסומה במידה אחידה. נבחין כי גם אם $|x-y| < \delta$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \left| \frac{-2n(x+y)+x^2-y^2}{((x-n)^2+1)((y-n)^2+1)} \right| \leq |x-y| \cdot 1$$

כלומר אם $\epsilon > 0$ אז נוכל להגדיר $\delta = \epsilon$ ונקבל שהסדרה $\{f_n\}$ גם רציפה במידה שווה. לבסוף נבחין כי אם $x \in \mathbb{R}$ קבוע, אז $(x-n)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ ולכן $f_n(x) \to 0$, כלומר $f_n \to 0$ בהתכנסות נקודתית. □

סעיף ב׳

נראה כי הסדרה לא מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס.

הוכחה. נקבע $\epsilon = \frac{1}{2}$ ויהי $N \in \mathbb{N}$ כלשהו, אז לכל $n > N$ ולכל $x = n$ מתקיים,

$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{1+0} = 1 \geq \epsilon$$

דהינו מצאנו כי מתקיימת השלילה של התכנסות במידה שווה. □

שאלה 4

יהי $P \subseteq C[0,1]$ מרחב הפולינומים המוגדרים על הקטע $[0,1]$ עם נורמת סופרימום. ידוע כי P הוא מרחב נורמי, נראה כי מרחב זה אינו שלם (אינו בנך).

הוכחה. נראה שקיימת סדרה של פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$ כך שהיא מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f \in C[0,1]$ כך ש-$f \notin P$. נגדיר,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

אנו יודעים כי זהו פיתוח טיילור של $\exp$ וכן ש-$p_n \to \exp$ בהתכנסות נקודתית. מטענה מתרגול 2 נובע גם כי $p_n \rightrightarrows \exp$. לבסוף נטען כי $\exp \notin P$, זאת מהטענה הידועה שלכל $p \in P$ מתקיים $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \infty$. $\square$