פתרון מטלה 10 — אנליזה פונקציונלית, 80417

16 ביוני 2025

שאלה 1

לכל $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות ו־2π־מחזוריות נגדיר,

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)\, du$$

סעיף א׳

נראה שאם $g \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ אז $f * g \in C[-\pi, \pi]$.

הוכחה. מהנתון g רציפה, 2π־מחזורית ובפרט אינטגרבילית רימן. עוד נתון כי f אינטגרבילית, לאו דווקא רציפה, אך מחזורית. נבחין כי $f(x-u)g(u)$ היא פונקציה אינטגרבילית ומתקיים,

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)\, du$$

היא פונקציה רציפה בכל נקודה, ואילו היא לא רציפה בנקודה, אז זוהי נקודת אי־רציפות מסדר שני ובפרט גם ל־$|f|$ בהכרח שואפת לאינסוף באחד מהקצוות של הנקודה הזו. אבל במקרה זה היא לא אינטגרבילית רימן. $\square$

סעיף ב׳

נראה שאם $g \in \tilde{C}^1[-\pi, \pi]$ אז $f * g \in C^1[-\pi, \pi]$, וכן שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים,

$$(f * g)'(x) = (f * g')(x)$$

הוכחה. אם $F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(u)\, du$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)\, du = -F(x-u)g(u)|_{u=-\pi}^{u=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -F(x-u)g'(u)\, du = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} F(x-u)g'(u)\, du$$

כלומר,

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x-u)g'(u)\, du = (F * g')(x) = (g' * F)(x)$$

F רציפה כקדומה ו־g' רציפה שכן $g \in C^1[-\pi, \pi]$. לכן,

$$\begin{aligned}
(f * g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((f * g)(x+h) - (f * g)(x)) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u) - f(x-u-h)g(u+h)\, du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u) - f(x-u-h)g(u) + f(x-u-h)(g(u) - g(u+h))\, du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x-u-h))g(u) + f(x-u-h)(g(u) - g(u+h))\, du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((f(x-u) - f(x-u-h)) * g(u)) + \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g'(u)\, du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((F(x-u) - F(x-u-h)) * g'(u)) + (f * g')(x) \\
&= (f * g')(x)
\end{aligned}$$

והטענה נובעת ממחזוריות ומגזירות הפונקציה הקדומה של f. $\square$

שאלה 2

סעיף א׳

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים,

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{C}{n}$$

ובנוסף הסדרה $y_m = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n$ המתכנסת ל־$A \in \mathbb{R}$. נראה שגם הסדרה x_n מתכנסת ל־A.

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$C = 1, A = 0$, זאת שכן חלוקה בקבוע וחיסור בקבוע לא משפיעים על התכנסות. נניח בשלילה ש־x_n לא מתכנסת ל־0, לכן קיים $\delta > 0$ כך שקיימת תת־סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־$x_{n_k} \ge \delta$ לכל k (בלי הגבלת הכלליות). מהנחת השלילה על ההתכנסות לכל k יש אינסוף ערכי $n > n_k$ כך ש־$x_n > \frac{\delta}{2}$, ולכן נוכל להסיק מהצפיפות שלהם ועבור n_k גדול מספיק יחד עם,

$$|x_{n+m} - x_n| \le \frac{m}{n}$$

שבהכרח $x_n > \frac{\delta}{2}$ תמיד, כלומר אם נבחר $\epsilon = \frac{1}{n}$ עבור n זה נקבל ש־y_{n_k} חסומה על־ידי $\frac{\delta}{2}$ אבל $\frac{\delta}{2} < x_n$ ואף $x_{n_k} > \delta$. נסיק אם כך ש־$y_n \frac{\delta}{2}$ עבור n גדול מספיק, וזו סתירה. □

סעיף ב׳

נסיק שאם f אינטגרבילית רימן בקטע $[-\pi, \pi]$ אז קיים $C > 0$ כך שלכל n, מקדמי פורייה של f מקיימים,

$$|a_n|, |b_n| \le \frac{C}{n}$$

ואם יש $x_0 \in [-\pi, \pi]$ כך שמתקיים $K_M * f(x_0) \to A$ אז גם $D_n * f(x_0) \to A$.

הוכחה. בהגדרה של אינטגרביליות רימן דרשנו חסימות, לכן נניח ש־f חסומה, וכן ממטלות קודמות ושימוש בכלל נגזרת טור פורייה (תוך שימוש באינטגרציה בחלקים וגזירת האופרטורים הטריגונומטריים) נקבל חסימות כמבוקש. בפרט אם קיים x_0 כזה, אז אנו עומדים בדרישות המדייקות של סעיף א׳ ונסיק שאכן יש התכנסות. □

שאלה 3

סעיף א׳

נראה שאם V סוף־מימדי ו־$U\subseteq V$ סגורה, אז לכל $v\in V$ קיים $u\in U$ כך ש־$\|u-v\|=\operatorname{dist}(U,v)$.

הוכחה. מהנתון לכל $\epsilon>0$ קיים $u_\epsilon\in U$ כך ש־$\|v-u_\epsilon\|\le\operatorname{dist}(U,v)$. בפרט עבור $\epsilon=\frac{1}{n}$ נקבל $u_n=u_{\frac{1}{n}}$ איבר המקיים זאת, ולכן $U\supseteq\{u_n\}_{n=1}^\infty$ סדרה כך ש־$\operatorname{dist}(U,v)\to\|v-u_n\|$. נבחר $U'=U\cap\overline{B}(v,2\operatorname{dist}(U,v))$, אז $u_n\in U'$ לכמעט כל n, וזו קבוצה סגורה וחסומה, לכן היא קומפקטית ויש לה תת־סדרה מתכנסת u_{n_k}, הנקודה הגבולית שלה u מקיימת $U\supseteq U'\ni u$, ובנוסף $\|u-v\|\le\operatorname{dist}(U,v)+\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$, לכן בפרט $\|u-v\|=\operatorname{dist}(U,v)$ ונובע שהמרחק אכן מתקבל. $\square$

סעיף ב׳

במרחב $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$ נמצא דוגמה לקבוצה $U\subseteq\mathbb{R}^2$ סגורה וקמורה ולאיבר $v\in\mathbb{R}^2$ כך שקיימים אינסוף $u\in U$ המקיימים $\|u-v\|_\infty=\operatorname{dist}(U,v)$.

פתרון נבחר את הדיסק $U=\overline{A}_1^2(0)$ ואת הנקודה $v=0$, אז $\operatorname{dist}(U,v)=1$ וכן $\|v-u\|_\infty=1$ לכל $u\in\partial B(0,1)$. נבחין כי טענה זו נכונה עבור כל נורמה, בפרט עבור $\|\cdot\|_\infty$.