# מבוא לטופולוגיה – סיכום

2025 במרץ 2025



תוכן הענייניו	זוכן העניינים
---------------	---------------

העניינים	תוכן

3	מיעור 1 – 24.3.2025 – 1 מיעור	W
3		.1

#### 24.3.2025 - 1 שיעור 1

#### מבוא 1.1

 $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  ומערים, באינפי 1 מתבוננים ב $\mathbb{R}$  והגדרנו את מושג הגבול של סדרות, ולאחריו את המושג של פונקציה רציפה בעפר דיברנו על מרחבים מטריים, באינפי 1 המושג באינפי 3 כבר ראינו את את ווו $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$  מתקיים מתקיים אם ולכל  $x \in \mathbb{R}$  אם לכל אם לכל הייתה ש־f תיקרא המושג הכללי והרחב יותר של רציפות במרחבים מטריים. ניזכר בהגדרה של מרחב מטרי.

המקיימת, מטריקה) הנקראת מטריקה (הנקראת מטרי(X,d) באשר א קבוצה לא ריקה (מרחב מטרי) מרחב מטרי(X,d) האשר א המקיימת,

- $x,y \in X$  לכל לכל d(x,y) = d(y,x) .1
- $d(x,y)=0\iff x=y$  וכן  $\forall x,y\in X, d(x,y)\geq 0$  .2
- $\forall x,y,z\in X, d(x,y)\leq d(x,y)+d(y,z)$  אי־שוויון המשולש. 3

### דוגמה 1.1 נראה דוגמות למרחבים מטריים,

- d(x,y)=|x-y| יחד עם  $\mathbb{R}$  .1  $d_2(ar x,ar y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2}$  המוגדרת על-ידי  $(\mathbb{R}^n,d_2)$  .2
- $d_{\infty}(ar{x},ar{y})=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$ , אינסוף, ואת מטריקת מטריקת  $d_p(ar{x},ar{y})=\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p\right)^{rac{1}{p}}$  את מטריקת אינסוף. 3
- $ho(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) g(x)|$  קבוצת את המטריקה עבור  $[a,b] o \mathbb{R}$  עבור הרציפות הפונקציות הרציפות עבור  $[a,b] o \mathbb{R}$

נראה את ההגדרה הפורמלית של רציפות,

קדים  $\delta>0$  קיים  $\epsilon>0$  עבור אם לכל הא רציפה שיf רציפה אז נאמר שיf עבור f:X o Y עבור f:X o Y עבור הגדרה 1.2 (רציפות) אז נאמר שי  $\rho(f(x'), f(x)) < \epsilon$  אז  $d(x', x) < \delta$  מאם

אבל יותר קל לדבר במונחים של קבוצות פתוחות.

 $B(r,x) = B_r(x) = \{z \in X \mid d(x,z) < r\}$  הגדרה מטרי, נסמן מרחב מטרי, עבור עבור (בדור) 1.3 הגדרה 1.3

 $f^{-1}(V)=\{x\in X\mid f(x)\in T$ מתקיים ב־Y מתקיים אם לכל עביפות הגדרה לכל f:X o Y מתקיים f:X o YX- קבוצה פתוחה ב־V

הבאים, התנאים התנאים התנאים, au כך שמתקיימים התנאים הבאים, טופולוגיה, על au הגדרה 1.6 (טופולוגיה), חהי au קבוצה (לא ריקה), טופולוגיה על au היא אוסף

- $\bigcup_{\alpha\in I}U_{\alpha}\in au$  אז  $\forall lpha\in I,U_{lpha}\in au$  כך שיס, I כך אינדקסים לקבוצת אינדקסים א אוז כלומר אם סגור לאיחוד, כלומר אם 2.
  - $U\cap V\in au$  מתקיים מופיים, כלומר לכל לכל טומר סופיים, סופיים מוכים סגור לחיתוכים au .3

. הגדרה אל מרחב טופולוגיה על X, יקרא א קבוצה אר קבוצה לא קבוצה לא כאשר אוגי (מרחב טופולוגי) זוג אוגי (מרחב טופולוגי) אוגי (מרחב טופולוגי) זוג אוגי (מרחב טופולוגי) זוג

 $U\in\Omega$  לכל  $f^{-1}(U)\in au$  כבר מתי כבר היא רציפה, איז הערה ענב טופולוגיים עבור מרחבים עבור f:X o Y לכל מתי פונקציה הערה בעצם הגדרנו כבר מתי סימון 1.8 איברי au יקראו קבוצות פתוחות.

היא קבוצה איז A אם המשלים של  $X\setminus A\in au$  אם תיקרא סגורה אם T אם תיקרא קבוצה איז תת-קבוצה T איז תת-קבוצה T אם תיקרא סגורה אורה.

דוגמה באופן טריוויאלי כנביעה ערי, נגדיר טופולוגיה באופן אין  $au=\{U\subseteq X\mid \forall x\in U\exists r>0, B(x,r)\subseteq U\}$  מרחב מטרי, נגדיר יהי 1.2 דוגמה 1.2 היי מהמרחב המטרי.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי אכן זהו מרחב טופולוגי.

. יהי X קבוצה כלשהי, אז ניתן להגדיר על X טופולוגיה  $\{\emptyset,X\}$  יהי עופולוגיה טופולוגיה טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה אז ניתן להגדיר על X

. ביסקרטית. עבור הטופולוגיה הייסקרטית. גם קבוצה או היא קבוצה עבור קבוצה עבור עבור עבור  $au_1=\mathcal{P}(X)$  נגדיר נגדיר בוגמה 1.4 נגדיר

f: מתי מיד. שהיא רציפה התשובה היא שהיא רציפה f: מתי מתי היא f: ותהי f: ותהי תהיי, ותהי ותהי חבים מתיד. מתי f: מתי היא שהיא רציפה מתיד. מתי f: מתי מתיד. מתי חבים מתיד.

24.3.2025 - 1 שיעור 1

לעומת זאת שהיא. לעומת רציפה, אז היא רציפה בכל מפולוגיה לעומת הפונקציה, אבל במקרה שבו היא אכן רציפה, אז היא רציפה תלוי בהגדרת הפונקציה, אבל במקרה שבו היא אכן רציפה, אז היא רציפה. לעומת זאת לעומת זאת לעומת זאת כל  $f:(X, au_1) o (Y, au)$ 

הערה לא כל טופולוגיה נובעת ממטריקה. לדוגמה הטופולוגיה הטריוויאלית על מרחב עם לפחות 2 נקודות.

 $\mathcal{F}=\{A\subseteq\mathbb{C}^n\mid\exists\{f_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n],A=\{(p_1,\ldots,p_n)\mid\forall i\in\mathbb{N}\$ ונגדיר  $n\in\mathbb{N}$  עבור איזשהו  $X=\mathbb{C}^n$  נגדיר  $X=\mathbb{C}^n$  נגדיר  $X=\mathbb{C}^n$  עבור איזשהו  $X=\mathbb{C}^n$  ונגדיר בול נגדיר איזשהו  $X=\mathbb{C}^n$  נגדיר ונגדיר איזשהו  $X=\mathbb{C}^n$  ונגדיר איזשהו  $X=\mathbb{C}^n$ 

, בסיס לטופולוגיה של X של תתי־קבוצות של בסיס לטופולוגיה בסיס לטופולוגיה בסיס לטופולוגיה) בסיס לטופולוגיה ב

- $x \in B$ כך ש־  $B \in \mathcal{B}$  יש  $x \in X$  .1
- $x \in C \subseteq A \cap B$ כך ש־  $C \in \mathcal{B}$  יש  $x \in A \cap B$  ולכל  $A, B \in \mathcal{B}$  .2

טענה 1.11 עבור בסיס  $\mathcal{B}$  היא טופולוגיה,  $au_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X \mid U \text{ is a union of elements of } \mathcal{B}\}$  היא טופולוגיה,

$$\forall \alpha \in I, B_{\alpha} \in \mathcal{B}, U = \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha}$$

, אז מתקיים, אז א $V=igcup_{eta\in J}A_eta,A_eta\in\mathcal{B}$  וכן עו $U=igcup_{lpha\in I}B_lpha\in\mathcal{B}$  אז אז אם עורה לחיתוך סופי, אז אם עורה עוד אז עוברה מכיוון ש־

$$U \cap V = (\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha}) \cap (\bigcup_{\beta \in J} A_{\beta}) = \bigcup_{\alpha, \beta \in I \times J} B_{\alpha} \cap A_{\beta} = D$$

 $C_{lpha_0,eta_0}\subseteq$ ער ש־ב  $C_{lpha_0,eta_0}\in\mathcal{B}$  ישנם קיימת קבוצה אבל מהגדרת הבסיס מר בך שר מהגדרת כך שר מר כך ער מר כך מר מהגדרת מצאנו סגירות לחיתוך סופי. בהתאם מצאנו סגירות לחיתוך סופי.  $D\subseteq\bigcup_{(x,lpha,eta)}C_{x,lpha,eta}$ 

 $\{B(x, \frac{1}{n}) \subseteq X \mid x \in \mathcal{X} \text{ א מרחב מטרי, אז } \{B(x, r) \subseteq X \mid x \in X, r > 0\}$  הוא מטרי, אז מרחב מטרי, אז  $\{B(x, r) \subseteq X \mid x \in X, r > 0\}$  הוא מטרי. אווערה הטופולוגיה שהגדרנו למרחב המטרי.

תרגיל 1.2 הוכיחו שזהו אכן בסיס עבור המרחב הטופולוגי הנתון.

 $C=\{a+d\mathbb{Z}\mid a,d\in\mathbb{Z},d
eq0\}$  נניח ש־ $X=\mathbb{Z}$ , ונגדיר את הבסיס C להיות אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, כלומר  $X=\mathbb{Z}$ , ונגדיר את הבסיס  $X=\mathbb{Z}$ , ונגדיר אוסף הסדרות העריתמטיות הדו־צדדיות, כלומר  $Y=\{a+d\mathbb{Z}\mid a,d\in\mathbb{Z},d\neq0\}$  אז  $Y=\{a+d\mathbb{Z}\}$  אונ טוענים כי זהו אכן בסיס (לטופולוגיה). נתבונן בזוג קבוצות ב־ $X=\{a+d\mathbb{Z}\}$ , ונניח ש־ $X=\{a+d\mathbb{Z}\}$  אז  $Y=\{a+d\mathbb{Z}\}$  אז  $Y=\{a+d\mathbb{Z}\}$  ונניח  $Y=\{a+d\mathbb{Z}\}$  ונגדיר טופולוגיית  $Y=\{a+d\mathbb{Z}\}$  ונגדיר טופולוגיית  $Y=\{a+d\mathbb{Z}\}$  ונגדיר טופולוגיית  $Y=\{a+d\mathbb{Z}\}$  ונגדיר טופולוגיית  $Y=\{a+d\mathbb{Z}\}$  ונניח שרים אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, כלומר  $Y=\{a+d\mathbb{Z}\}$  ווניח שרים אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, בחים אוסף הסדרות האריתמטיות האריתמטיות הדו־צדדיות, בחים אוסף הדיים אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, בחים אוסף הדיים אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, בחים אוסף הדיים אוסף הד

קבוצות סגורות הן משלימים לקבוצות פתוחות.

כל סדרה אריתמטית דו־צדדית אינסופית היא גם פתוחה וגם סגורה. בפרט חיתוך סופי של סדרות אריתמטיות הוא סגור. לכן המשלים שלו הוא פתוח. מסקנה 1.12 (משפט אוקלידס) יש אינסוף מספרים ראשוניים.

קבוצה פתוחה קבוצה קוהי, את נניח את נבחן את עבור  $p_1,\ldots,p_k$  עבור אשוניים, אוהי את מספר מניח מספר מניח מספר של אווויים, עבור אוווים, עבור אוווים, לכן אוווים, לכן אוווים, אוווים מספר מווים, אוווים, או

$$\bigcup_{i=1}^k p_i \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$$

П

. הירה סתיבן וזו פתוחה קבוצה  $\{-1,1\}^-$  ולכן נובע ש

טענה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי) נניה ש־(X, au) מרחב טופולוגי, לכל  $Y\subseteq Y\subseteq X$  טענה עניה ש־(X, au) מרחב טופולוגים מרחב טופולוגים עניה  $au_Y=\{W\in au\mid W\subseteq Y\}$  אם  $au
eq Y\in Y$  אז  $au_Y=\{W\in au\mid W\subseteq Y\}$  אז איז אום au

טענה 1.14 (טופולוגיית מכפלה) נניח ש־ $(X_1, au_1)$  ו־ $(X_2, au_2)$  מרחבים טופולוגיים, אז נגדיר טופולוגיית מכפלה נניח ש־ $(X_1, au_1)$  ו־ $(X_1, au_1)$  מרחבים טופולוגיים, אז נגדיר טופולוגיית מכפלה

$$\tau_{1,2} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2 \}$$

. אז בסיס והטופולוגיית המגדרת על־ידו נקראת אופולוגיית המכפלה.  $au_{1,2}$  אז

דוגמה 1.8 נוכל לבנות כך מכפלה של כמות סופית או אינסופית של מכפלות טופולוגיות. עבור אוסף אינסופי (בן־מניה או לא בהכרח) אנו צריכים

24.3.2025 - 1 שיעור 1 1.1 מבוא

אז נגדיר אז גר<br/>ה $\alpha \in I$ עבור ( $X_{\alpha}, au_{\alpha}$ ) של נגדיר להיזהר, נניח

$$au_b=\{\prod_{lpha\in I}U_lpha\mid oralllpha\in I, U_lpha\in au_lpha\}$$
 אם בסיס לטופולוגיה שנקרא טופולוגיית הקופסה. לעומת זאת נוכל להגדיר גם את

$$\tau_p = \{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha = X_\alpha \text{ for almost all } \alpha \in I \}$$

$$.\prod_{\alpha\in I}=\{f:I\to\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha\mid \forall \alpha\in I, f(x)\in X_\alpha\}$$
 כלומר

הגדרות ומשפטים

## הגדרות ומשפטים

3	 			 					•			 													(,	טר	: מ	רחב	(מו	1.1	ה	נדר	ī
3	 			 								 		 												. (	ת)	ציפו	ר:	1.2	ה 2	נדר	ī
3	 			 								 		 													. (	דור)	(⊂ז	1.3	ה 3	נדר	ī
3	 			 								 		 										(;	111	פתו	7	בוצו	(קו	1.4	ה 1	נדר	ī
3	 			 										 						(	פות	ציכ	٦,	7 7	ולז	<b>ט</b> ק	7 7	גדרו	(הו	1.5	ה כ	נדר	ī
3	 			 								 		 												יה)	וגי	ופוק	(טו	1.6	ה כֿ	נדר	ī
3	 			 										 										(גי	לו.	ופו	: ט	רחב	(מו	1.7	ה 7	נדר	ī
3	 			 										 																1.9	ה (	נדר	ī
4	 			 								 		 								(;	ניד	לו	פו.	'טו	ז כ	בסי	1) 1	.10	ה (	נדר	17
4	 			 								 		 							(גי	ולו	ופו	ט :	חב	מרו	ם	מצו	(צ	1.1	3 ;	צנד	טי
4	 			 								 		 								(;	לד	כפ	מ:	יית	וגי	ופוק	(טו	1.1	4;	צנד	טי