פתרון מטלה 7 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

1 בינואר 2026

שאלה 1

תהי $S^2 \subseteq \mathbb{E}^3$ ספירת היחידה.

סעיף א׳

נמצא פרמטריזציות רגולריות המכסות את היריעה.

פתרון נגדיר את ההעתקה,

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$$

העתקה זו היא המיפוי של נקודה $(x,y) \in \mathbb{E}^2$ לספירה על־ידי שימוש ישיר בהגדרת הספירה של רימן, אותה נתאר מיד.
נסמן $N = (0,0,1)$ ותהי נקודה כלשהי $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. נגדיר את $\varphi(x,y)$ להיות נקודת החיתוך של הישר $L = (1,0,0)t + (x,y,0)s$ עבור $t + s = 1$ עם S^2. נשים לב כי בהכרח יש נקודת חיתוך מלבד N ל־L כנביעה מרציפות ובדיקת הנורמה. נקבל $\|L\| = 1 \iff x^2s^2 + y^2s^2 + t^2 = 1 \iff \|(xs,ys,t)\| = 1$, תוצאת שוויון זה היא בדיוק $\varphi(x,y)$. נסיק אם כך ישירות מתהליך זה ש־φ היא חד־חד ערכית, ונסיק ש־$\bar{\varphi} = \varphi \restriction \operatorname{Im}\varphi$ היא דיפאומורפיזם. משימוש במשפט הפונקציה ההפוכה נוכל גם להסיק ש־$\operatorname{Im}\varphi = S^2 \setminus N$, על־ידי הגדרת ישר בין נקודה ו־N ולקיחת החיתוך עם המישור. נסמן $\psi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ כך ש־$\psi = \varphi^{-1}$.

נוכל לקבל באופן דומה גם להגדיר הטלה כזו עם $N' = (0,0,-1)$, ונקבל בהתאמה העתקה $\phi : S^2 \setminus \{N'\} \to \mathbb{R}^2$ דומה שהיא דיפאומורפיזם.
אם כל לכל נקודה $P \in S$ אם $P = N$ אז נבחר את $U = S \setminus \{N'\}$ ואת ϕ, ואחרת את $U = S \setminus \{N\}$ ואת ψ, ונקבל ש־S יריעה.

סעיף ב׳

נמצא נוסחה מפורשת ל־ψ.

פתרון נניח ש־$P = (x,y,z)$ ונמצא את $\psi(x,y,z) = (u,v)$. נבחין ש־$L = (0,0,1)t + (x,y,z)s$ ונרצה למצוא את $L^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$.
כלומר נבדוק מתי $t + zs = 0$, כלומר נחשוד בערך $t = -zs$ ולכן במקרה זה $L = (xs,ys,0)$, אבל גם $t + s = 1$ ולכן $s = 1 + zs \iff s = \frac{1}{1-z}$. נציב ונקבל,

$$L(t,s) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0)$$

כלומר $u = \frac{x}{1-z}$ וכן $v = \frac{y}{1-z}$.

שאלה 2

נגדיר את הקבוצה,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

ונראה שהיא משטח רגולרי.

הוכחה. תהי $P \in S$, כלומר $P = (x, y, z)$ כך ש־$x^2 + y^2 = 1$. אם $x \neq 0$, נגדיר את ההעתקה $\varphi : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to S$ על־ידי,

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, z + v)$$

נבחין כי,

$$D\varphi|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל ש־$\deg D\varphi|_{(u,v)} = 2$, ולכן φ הפיכה ממשפט הפונקציה ההפיכה. נבחין כי φ על, זאת על־ידי בחירת $v = z$ וכן $u = \operatorname{Arg}(x, y)$, ולכן נקבל ש־$\varphi$ דיפאומורפיזם (חלק). נסיק ש־φ פרמטריזציה מקומית עבור P.

נעבור למקרה $x = 0$, כלומר $P = (0, 1, z)$. במקרה זה נגדיר $\varphi = (-\pi, \pi) \times (-1, 1) \to S$ באותו אופן בדיוק של קודם, ולכן נקבל שוב דיפאומורפיזם חלק, אך הפעם $P \in (\operatorname{dom} \varphi)^\circ$, ולכן φ פרמטריזציה מקומית של P.

נסיק ש־S הוא משטח רגולרי. □

שאלה 3

תהי הנקודה $P_0 = (R, 0, 0)$ ונניח ש־$C = S(P_0, r) \cap (\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R})$ עבור $0 < r < R$. יהי $T \subseteq \mathbb{E}^3$ הטורוס המתקבל כגוף סיבוב של C סביב ציר z.

סעיף א׳

נראה ש־T משטח פרמטרי רגולרי.

הוכחה. נגדיר את ההעתקה,

$$\varphi : [0, 2\pi)^2 \to T, \qquad \varphi(u, v) = (\cos v \cdot (R + r \cos u), \sin v \cdot (R + r \sin u), r \sin u)$$

ונראה שהיא חד־חד ערכית על וגזירה.

חד־חד ערכיות נובעת ישירות מחד־חד ערכיות $(\cos x, \sin x)$ עם u, v.

תהי $(x, y, z) \in T$. אז כגוף סיבוב נובע ש־$(x, y, z) = (x', z', 0)(\cos v, \sin v, 1)$, וכן $(x', z') \in C$ ולכן קיים u כך ש־$(x', z') = r(\cos u, \sin u)$, ומהגדרה נקבל בדיוק ש־$\varphi(u, v) = (x, y, z)$.

לבסוף כהרכבה של פונקציות גזירות φ גזירה ולכן דיפאומורפיזם, נסיק ש־T יריעה פרמטרית חלקה. □

סעיף ב׳

נראה שמתקיים,

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)\}$$

הוכחה. נשתמש בפרמטריזציה ונקבל שהטענה שקולה לטענה,

$$T = \{0 \le u, v < \pi \mid K = 4R^2((\cos v \cdot (R + r \cos u))^2 + (\sin v \cdot (R + r \cos u))^2)\}.$$

עבור,

$$\begin{aligned} K &= \left((\cos v \cdot (R + r \cos u))^2 + (\sin v \cdot (R + r \cos u))^2 + r^2 \sin^2 u + R^2 - r^2\right)^2 \\ &= \left(\cos^2 v \cdot (R + r \cos u)^2 + \sin^2 v \cdot (R + r \cos u)^2 + r^2 \sin^2 u + R^2 - r^2\right)^2 \\ &= \left((R + r \cos u)^2 + r^2 \sin^2 u + R^2 - r^2\right)^2 \\ &= \left(R^2 + 2rR \cos u + r^2 \cos^2 u + r^2 \sin^2 u + R^2 - r^2\right)^2 \\ &= \left(2rR \cos u + 2R^2\right)^2 \\ &= 4R^2(r \cos u + 2R)^2 \\ &= 4R^2(\cos^2 v + \sin^2 v)(r \cos u + 2R)^2 \\ &= 4R^2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

כלומר מצאנו שהטענה אכן מתקיימת. □