טענה 0.1 *קיימת הרחבת שדות $K/\mathbb{Q}$ כך שהיא הרחבת גלואה ו־*$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

הוכחה. נתחיל בהגדרה $\zeta = \xi_{11}$ שורש היחידה הפרימיטיבי מסדר 11 ב־$\mathbb{Q}$. נגדיר גם $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ ונקבל ש־$L/\mathbb{Q}$ היא הרחבה ציקלוטומית וגלואה, ומתקיים,

$$[L : \mathbb{Q}] = |(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times| = 10$$

וכן אנו יודעים כי הרחבות ציקלוטומיות הן בעלות חבורת גלואה ציקלית ולכן,

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

עשינו את כל זה כי אנחנו רוצים למצוא את החבורה $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, אז מספיק למצוא חבורה ככה שהיא תת־חבורה שלה, ואכן,

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \le \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$$

אבל אנחנו צריכים למצוא את המבנה של H, לא רק להגיד שקיימת כזאת, אז נגדיר,

$$H = \langle \zeta \mapsto \zeta^2 \rangle = \{\zeta \mapsto \zeta^{2n} \mid 1 \le n \le 5\}$$

זוהי אכן חבורת אוטומורפיזמים כפי שרצינו ומתקיים $|H| = 5$. אבל ממשפט התאמת גלואה מתקיים L/L^H היא הרחבת גלואה כך ש־$[L : L^H] = 5$. בשלב הזה בגדול סיימנו את השאלה כי מצאנו הרחבת שדות כמו שביקשו, אבל בתרגול ראינו דרך לבנות ממש את השדה הזה.

נגדיר $\alpha = \sum_{n=1}^5 \zeta^{2n}$, הדבר הזה מקיים,

$$\forall \sigma \in H,\ \sigma(\alpha) = \sum_{n=1}^5 \sigma(\zeta^{2n}) = \alpha$$

מטעמי סימטריה, אז $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq L^H$ ממש מהגדרת L^H כשדה שבט של H, ונסיק,

$$\mathbb{Q}(\alpha) = L^H$$

ומצאנו ש־$\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\alpha)$ הרחבת גלואה כך ש־$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\alpha)) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. $\square$

טענה 0.2 *קיימת הרחבה פרידה, לא נורמלית, מסדר 4 כך שאין לה תת־הרחבה מסדר 2.*

הוכחה. תחילה נסמן את הפולינום $f(x) = x^5 - 4x + 2$. זהו פולינום אי־פריק ב־$\mathbb{Q}$ מקריטריון אייזנשטיין עבור $p = 2$. נסמן L שדה הפיצול של f מעל $\mathbb{Q}$. אז $L/\mathbb{Q}$ הרחבה אלגברית פרידה ונורמלית ולכן גלואה.

בנוסף יש לו חמישה שורשים, אבל מבדיקה עם כלי אינפי נקבל שרק שלושה ממשיים, לכן מתקיים,

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq S_5$$

עתה נסמן $E = L^{S_4}, K = L^{S_3}$ ונבחין כי $L/E/K/\mathbb{Q}$ מגדל הרחבות גלואה כך שמתקיים,

$$[L : \mathbb{Q}] = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = [L : E] \cdot [E : K] \cdot [K : \mathbb{Q}]$$

אם $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in L$ השורשים של f, אז מספיק שניקח את $E = L^{\mathrm{Sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_4)}$, ובאופן דומה את $K = L^{\mathrm{Sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_3)}$. אז L/K הרחבה מסדר 4, היא פרידה כהרחבה מעל $\mathbb{Q}$, ונשאר להראות שהיא לא נורמלית. נבחין כי $S_3 \ntrianglelefteq S_5$ ולכן $E/\mathbb{Q}$ לא הרחבה נורמלית, ולכן בפרט גם E/K. $\square$