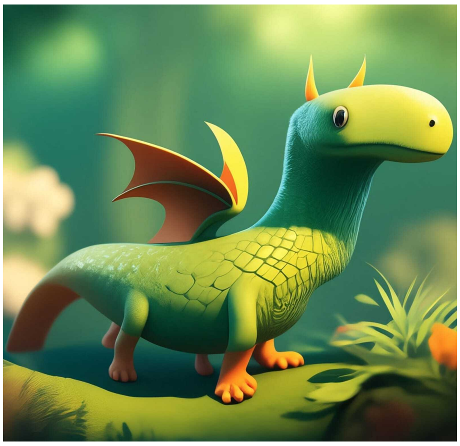
פתרון מטלה 01 — אנליזה על יריעות, 80426

25 במרץ 2025



שאלה 1

תהי המסילה $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על־ידי,

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

סעיף א׳

נחשב את האורך של γ.

פתרון נבחין כי $\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2)$ מחישוב ישיר, וכן מהגדרה,

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1\ dl = \int_0^2 \|\dot{\gamma}(t)\|\ dt = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\ dt = \int_0^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\ dt$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $u = t^2, du = 2tdt$ ונקבל

$$\int_0^2 t\sqrt{4+9t^2}\ dt = \frac{1}{2}\int_0^4 (4+9u)^{\frac{1}{2}}\ dt = \frac{1}{2}(4+9u)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}\bigg|_{u=0}^{u=2} = \frac{1}{3}(40^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}})$$

סעיף ב׳

נחשב את הישר המשיק ואת משיק היחידה ל־γ ב־$t = 1$.

פתרון לפי הגדרת הישר המשיק נחשב ונקבל,

$$l = \mathrm{Sp}\{\dot{\gamma}(1)\} = \mathrm{Sp}\{(2,3)\} = \{(2,3)t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

וכן משיק היחידה הוא

$$\vec{T}_\gamma(1) = \frac{\dot{\gamma}(1)}{\|\dot{\gamma(1)}\|} = \frac{(2,3)}{\sqrt{13}}$$

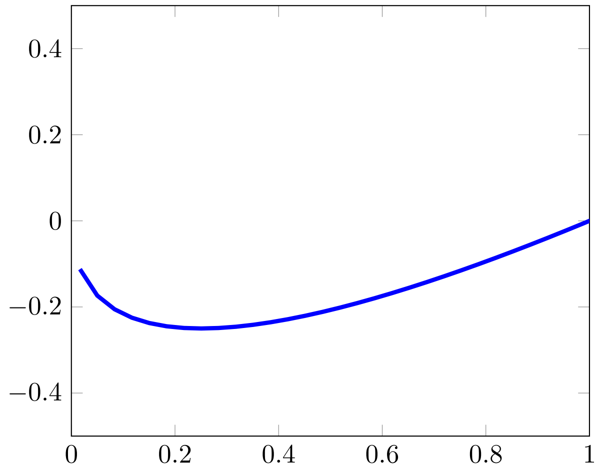
שאלה 2

עבור המסילות הבאות נצייר ונחשב את האינטגרל המסילתי של $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ עם הפונקציות הנתונות.

סעיף א׳

נגדיר $\gamma(t) = (t^2, t^2 - t)$ ונחשב את $\int_\gamma F \, d\gamma$ עבור $F(x,y) = (x^2 y, y - 3x)$.

פתרון עבור הציור נרצה לבצע רפרצטריזציה של γ כך ש־$\gamma \circ \mu = (t, f(t))$, נבחין כי עבור $\mu(t) = \sqrt{t}$ נקבל $f(t) = t - \sqrt{t}$ ב־$[0,1]$ ולכן נוכל לעבור לציור,



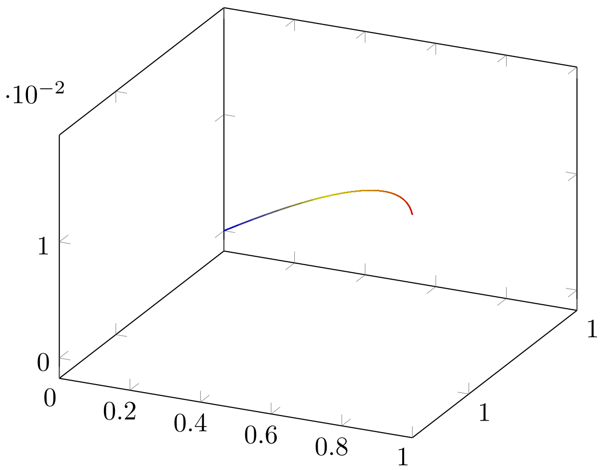
ונעבור לחישוב האינטגרל,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \, d\gamma &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt \\
&= \int_0^1 (t^4(t^2 - t), t^2 - t - 3t^2) \cdot (2t, 2t - 1) \, dt \\
&= \int_0^1 2t^5(t^2 - t) + (2t - 1)(-t - 2t^2) \, dt \\
&= \int_0^1 2t^7 - 2t^6 - 4t^3 - t \, dt \\
&= \frac{2}{8}t^8 - \frac{2}{7}t^7 - t^4 - \frac{1}{2}t^2 \Big|_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{2}{7} - 1 - \frac{1}{2} - 0
\end{aligned}$$

סעיף ב׳

נגדיר $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t)$ וכן $F(x,y,z) = (0, -z, y)$.

פתרון נצייר,



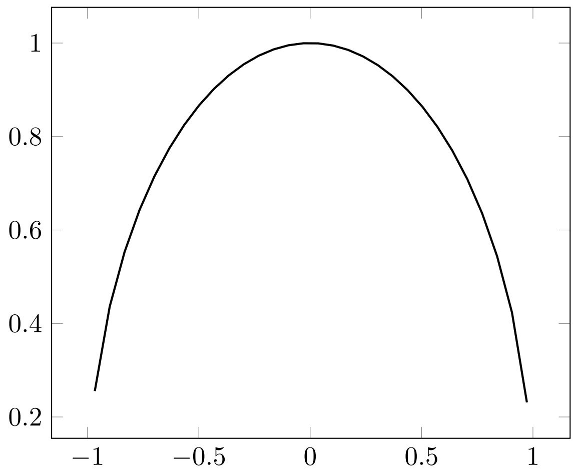
נעבור לחישוב האינטגרל,

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^1 (0,-\sin t,\cos t)\cdot(1,-\sin t,\cos t)\,dt = \int_0^1 \sin^2 t+\cos^2 t\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1$$

סעיף ג׳

נגדיר $\gamma(t)=(2t-1,\sqrt{1-(2t-1)^2})$, ואת הפונקציה $f(x,y)=xy^4$.

פתרון נתחיל בציור,



ונעבור לחישוב האינטגרל. נבצע רפרמטריזציה יחד עם $\mu:[-1,1]\to[0,1]$ על־ידי $\mu(t)=\frac{t+1}{2}$ ונקבל $(\gamma\circ\mu)(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$, ולאחר מכן נקבל $\bar\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על־ידי $\bar\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$. בנוסף גם $\dot{\bar\gamma}(t)=(-\sin t,\cos t)$ וכן $f(\bar\gamma(t))=\cos(t)\sin^4(t)$, לכן

$$\int_{\bar\gamma} f\,ds = \int_0^\pi \cos(t)\sin^4(t)\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}\,dt = \frac{1}{5}\sin^5(t)\Big|_{t=0}^{t=\pi} = 0$$

שאלה 3

תהי מסילה רגולרית $\gamma : [a,b] \to U$ ותהי $\bar{\gamma}$ המסילה נורמלית שלה.
נוכיח שכמות האורך המכוסה על־ידי $\bar{\gamma}$ בכל קטע היא האורך של הקטע, כלומר לכל $s_1 < s_2 \in [0, l(\gamma)]$ מתקיים $l(\bar{\gamma}\mid_{[s_1,s_2]}) = s_2 - s_1$.

הוכחה. נבדוק לפי הגדרה,

$$l(\bar{\gamma}\mid_{[s_1,s_2]}) = \int_{\bar{\gamma}|_{[s_1,s_2]}} 1\ ds \overset{(1)}{=} \int_{s_1}^{s_2} \|\bar{\gamma}(t)\|\ dt = \int_{s_1}^{s_2} 1\ dt = s_2 - s_1$$

כאשר עלינו להצדיק את המעבר (1), הוא נובע מקומפקטיות צמצום הפונקציה והגדרת אינטגרל של קבוצה קומפקטית לפי מאפיין, תוך בחירת המאפיין $1_{[s_1,s_2]}$. $\square$

שאלה 4

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהי מסילה גזירה ברציפות $\gamma : [a,b] \to U$. נניח גם כי $F : U \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי.

סעיף א׳

נראה שלכל $\epsilon > 0$ קיימת $\lambda > 0$ כך שאם $t, s \in [a,b]$ כך ש־$|t-s| < \lambda$ אז,

$$\|(\gamma(t) - \gamma(s)) \cdot F(\gamma(t)) - (t-s)\dot{\gamma}(t) \cdot F(\gamma(t))\| < \frac{\epsilon}{b-a}|t-s|$$

הוכחה. נניח $s < t$ בלי הגבלת הכלליות, ולכן,

$$\begin{aligned}
\|(\gamma(t) - \gamma(s)) \cdot F(\gamma(t)) - (t-s)\dot{\gamma}(t) \cdot F(\gamma(t))\| &= \left\| \left(\int_t^s \dot{\gamma}(x)\ dx \right) \cdot F(\gamma(t)) - \left(\int_t^s \dot{\gamma}(t)\ dx \right) \cdot F(\gamma(t)) \right\| \\
&= \left\| \left(\int_t^s \dot{\gamma}(x)\ dx - \int_t^s \dot{\gamma}(t)\ dx \right) \cdot F(\gamma(t)) \right\| \\
&= \left\| \left(\int_t^s \dot{\gamma}(x) - \dot{\gamma}(t)\ dx \right) \cdot F(\gamma(t)) \right\| \\
&\le \left\| \int_t^s \dot{\gamma}(x) - \dot{\gamma}(t)\ dx \right\| \cdot \|F(\gamma(t))\| \\
&\le \int_t^s \|\dot{\gamma}(x) - \dot{\gamma}(t)\|\ dx \cdot \|F(\gamma(t))\| \\
&= |t-s| \cdot \gamma(l) \cdot \|F(\gamma(t))\|
\end{aligned}$$

נגדיר $\|F(\gamma(t))\|$ $M = \sup_{t \in [a,b]}$ ונגדיר $\lambda = \frac{M}{b-a}$ ונקבל את המבוקש. ☐

סעיף ב׳

נסיק שסכום רימן,

$$S_\gamma(F, T, \{\tau_i\}) = \sum_{i=1}^{n} F(\gamma(\tau_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

מתכנס ל־$\int_a^b \dot{\gamma}(t) \cdot F(\gamma(t))\ dt$ כאשר $\text{Mesh}(\{t_i\}) \to 0$.

הוכחה. נבחין כי האינטגרל הנתון הוא התכנסות טור רימן

$$\int_a^b \dot{\gamma}(t) \cdot F(\gamma(t))\ dt = \lim_{\text{Mesh(t)} \to 0} S(\dot{\gamma}(t) \cdot F(\gamma(t)), [a,b], \{\tau_i\})$$

נניח ש־$\text{Mesh}(t) < \lambda$ ולכן תנאי הסעיף הקודם חלים ומתקיים,

$$\begin{aligned}
&\|S(\dot{\gamma}(t) \cdot F(\gamma(t)), [a,b], \{\tau_i\}) - S_\gamma(F, T, \{\tau_i\})\| \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \left((\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) \cdot F(\gamma(t_{i+1})) - (t_{i+1} - t_i)\dot{\gamma}(t_{i+1}) \cdot F(\gamma(t_{i+1})) \right) \right\| \\
&\le (b-a) \sum_{i=0}^{n-1} \|(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) \cdot F(\gamma(t_{i+1})) - (t_{i+1} - t_i)\dot{\gamma}(t_{i+1}) \cdot F(\gamma(t_{i+1}))\| \\
&< \frac{\epsilon}{b-a}
\end{aligned}$$

לכן כאשר $\text{Mesh}(t) \to 0$ אנו מקבלים $\lambda \to 0$ ובהתאם ההפרש שואף לאפס, והסכומים משתווים, כלומר סכום רימן הנתון אכן שואף לאינטגרל הנתון. ☐