

פתרון מטלה 2 – חישוביות וקוגניציה, 6119

13 בנובמבר 2025



שאלה הינה

סעיף א'

יהי פרטון לינארי N -מיידי הלומד פונקציה לא לינארית.

נבדוק מה ניתן לומר על שגיאת האימון ε_{tr} ועל שגיאת הכללה ε_g לאחר שלמד $N < P$ דוגמות.

פתרון לצורך מענה על השאלה נניח שהפונקציה הנלמדת היא בלתי-לינארית להלוטין, כלומר שם $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N : f$ או לכל $U \subseteq \mathbb{R}^N$ פתוחה לא

קיים העתקה לינארית כך $\exists U \ni f$ לינארית.

במקרה זה נאמר $\varepsilon_g > 0$ וטענו המודיק תלו依 בוקטור המשקولات המסויים שנבחר (תשובה ב'). זאת שכן נוכל לבחור דוגמות שהתנהgotן

יותר קרובה להיות לינארית.

סעיף ב'

נבחן את המשוואה $C\bar{w} = \bar{u}$.

פתרון זה מושווה שנובעת מגוירה של תוחלת השגיאה, כלומר היא פתרון בעיית קיזון (תשובה א').

מטריצה היא רגולרית אם ורק אם $\det C \neq 0$, וכן בהתאם בזורה ייחידה את \bar{w} אם ורק אם $\det(C) \neq 0$ (תשובה ד').

שאלה 1

היא פרספטון לינארי עם ספ' המנסה ללמוד את הפונקציה $X \sim U([-1, 1])$ כאשר $Y_0 = X^3 - X^2$. נניח שלפרספטון שני קלטים, $\bar{x} = (x, 1)$ ובהתאם מתקבל $y = w_1x + w_2$

סעיף א'

$$\mathbb{E}(X^n)$$

נחשב את $\mathbb{E}(Y)$

פתורנו השתמש בטענה כי אם $f(x) = f(X)$

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^n dt = \frac{1}{2(n+1)} x^{n+1} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & x \mod 2 = 0 \\ 0 & x \mod 2 = 1 \end{cases}$$

סעיף ב'

נמצא וקטור משקלות אשר מזעיר את שגיאות הcalculה $\varepsilon_g = \mathbb{E}(\frac{1}{2}(Y - Y_0)^2)$

פתורנו נבחן תחילה כי בניית מה壽יף הקודם נובע,

$$\mathbb{E}(Y_0^2) = \mathbb{E}(X^6 - 2X^5 + X^4) = \mathbb{E}(X^6) - 2\mathbb{E}(X^5) + \mathbb{E}(X^4) = \frac{1}{7} - 2 \cdot 0 + \frac{1}{5} = \frac{12}{35}$$

וכן מחישוב ישיר גם,

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(w_1^2 X^2 + 2w_1 w_2 X + w_2^2) = \frac{w_1^2}{3} + 0 + w_2^2 = \frac{w_1^2 + 3w_2^2}{3}$$

וגם,

$$\mathbb{E}(Y_0 Y) = \mathbb{E}((X^3 - X^2)(w_1 X + w_2)) = \mathbb{E}(w_1 X^4 - w_1 X^3 + w_2 X^3 - w_2 X^2) = w_1 \mathbb{E}(X^4) - w_2 \mathbb{E}(X^2) = \frac{w_1}{5} - \frac{w_2}{3}$$

ניבור לחישוב של שגיאות הcalculה,

$$\varepsilon_g = \mathbb{E}(\frac{1}{2}(Y - Y_0)^2) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y^2 - 2Y_0 Y + Y_0^2) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y_0 Y) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_0^2) = \frac{w_1^2 + 3w_2^2}{6} - \frac{w_1}{5} + \frac{w_2}{3} + \frac{6}{35}$$

נבחן את השגיאה כפונקציה של w_1, w_2 ונגזרו,

$$\frac{\partial \varepsilon_g}{\partial w_1} = \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{5}, \quad \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial w_2} = w_2 + \frac{1}{3}$$

ממשפט קופלי לגורנו, נובע יישורות ש- $\bar{w} = (\frac{3}{5}, -\frac{1}{3})^t$ מינימלי.

סעיף ג'

נחשב את שגיאות הcalculה עבור הווקטור שמצאנו בסעיף הקודם.

$$w_1 = \frac{3}{5}, w_2 = \frac{1}{3}$$

$$\varepsilon_g = \frac{w_1^2 + 3w_2^2}{6} - \frac{w_1}{5} - \frac{w_2}{3} + \frac{6}{35} = \frac{3}{50} + \frac{1}{18} - \frac{3}{25} - \frac{1}{9} + \frac{6}{35} = \frac{88}{1575}$$

כלומר $\varepsilon_g \approx 0.05587$

שאלה 2

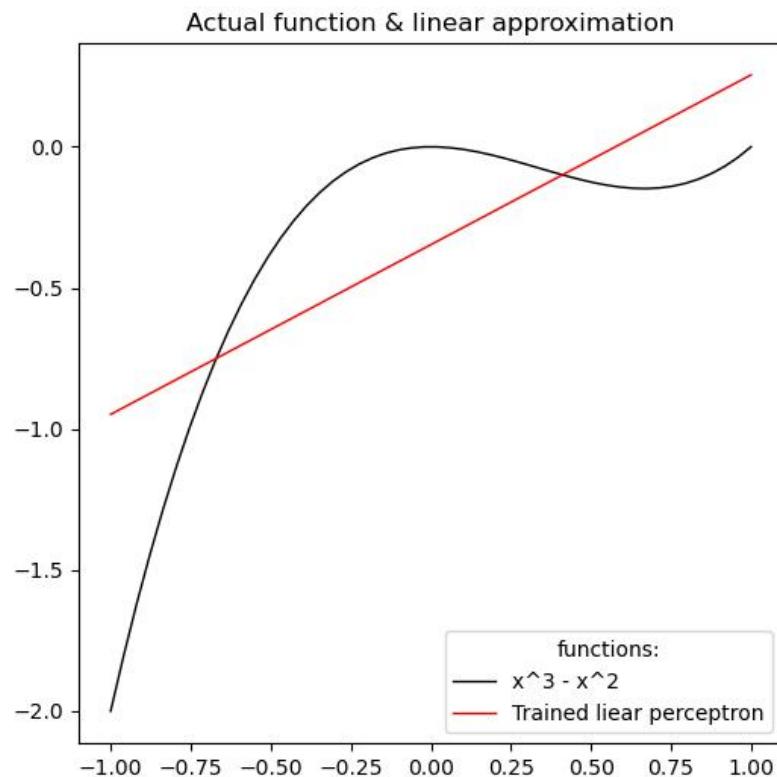
בשאלה הבאה נريין מבחן היישובי לבדיקה פרספטرون לינארי על הפונקציה שהוצגה בשאלה הקודמת. נבחן כי הסעיפים השונים לאו דוקא מתאימים לאו לאוותה הרצאה של המבחן, ובהתאם עלולים להיות הבדלים זעירים בתוצאות.

סעיף ב'

נגידר את המבחן אשר יוצר $P = 500$ דוגמאות לווקטורים מהצורה $(x, U([0, 1]) \sim x)$ וסיווגים בהתאם לפונקציה הלא ליניארית המופיעה בשאלה 1. נפעיל את אלגוריתם האימון על הדוגמאות והסיווגים. בהרצאה שירירותית של קוד המבחן התקבל הווקטור $\bar{w}^t = (0.568, -0.33)^t$ וקטור זה מאד קרוב לווקטור שהושב בשאלה הקודמת, הוא $(0.6, -0.33)^t$ בקירוב עשרוני.

סעיף ג'

מציג את פועלות הפרספטרון המאמן, קרי את ההעתקה הליניארית אותה הוא מבצע, לצד ההעתקה הלא ליניארית אותה הוא לומד מדוגמאות. עבור הרצאה שירירותית של קוד האימון מציג גרף של ההעתקה הליניארית אותה מבצע הפרספטרון לעומת הפונקציה המקורית הנתונה $x^3 - x^2$ בתחום x^3 .



סעיף ד'

היישוב של שגיאת האימון ושגיאת הכללה של ריצה שירירותית מניב את התוצאות,
 $\varepsilon_{\text{tr}} = 0.055, \quad \varepsilon_g = -0.005$
 ערכיהם אלה לא דומים במינוח, אך שניהם קטנים במידה שמאפשרת אותנו להטיל ספק בדיקת החישוב.

סעיף ה'

נريין את הניסוי הממוחשב 100 פעמים לכל מספר מוגנים בין 5 ל-100 בקפיצות של 5. בגרף המצורף מופיע חישוב של שגיאת האימון וההכללה כפונקציה של מספר הדוגמאות.

