פתרון מטלה 04 — מבנים אלגבריים (2), 80446

9 במאי 2025

שאלה 1

תהי L/F הרחבת שדות ויהיו $g,h\in F[x]$. נראה ש־$\gcd_{F[x]}(g,h)=\gcd_{L[x]}(g,h)$, כלומר נראה ש־gcd נשמר תחת הרחבת שדות.

הוכחה. נניח ש־$f=\gcd_{F[x]}(g,h)$. נניח גם ש־$\overline{f}=\gcd_{L[x]}(g,h)$. כל פולינום $l\in F[x]$ הוא בפרט פולינום גם ב־$L[x]$ ולכן אם $l\mid g,h$ אז $l\mid\overline{f}$, אז בפרט גם $f\mid\overline{f}$ במקרה של $l=f$.

המעלה של $\overline{f}$ קטנה משל f, אחרת ניקח את החיסור שלהם כשהם מתוקנים ונקבל פולינום קטן יותר שמחלק את g,h. נניח ש־$f=q\overline{f}+r$. אם $q,r\in F[x]$ אז $\overline{f}\in F[x]$ ונסיק ש־$f=\overline{f}$. נניח אם כך אחרת, אילו $q\in F[x]$ אבל $r\notin F[x]$ אז נקבל ש־$r=q\overline{f}-f\in F[x]$ וקיבלנו סתירה. נניח ש־$q\notin F[x]$.

יהי αx^i מונום המרכיב את q המעיד על $l\notin F[x]$, כלומר $\alpha\in L\setminus F$, ונניח גם כי זהו המונום הגדול ביותר המעיד על־כך, דהינו אם קיים βx^j כך שגם $\beta\notin F$ ו־$j>i$, אז נבחר אותם במקום. לכל $a\in F$, אנו יודעים ש־$a+\alpha,a\cdot\alpha\notin F$, כהיסק מסגירות הכפל לפעולות אלה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$f,\overline{f}$ מתוקנים שניהם. נבחין כי הדרגה של r קטנה מזו של $q\cdot\overline{f}$, וכן נבחין ש־$\alpha x^i x^n$ עבור $n=\deg\overline{f}$ הוא מונום של $q\overline{f}$, ומהגדרת r אין לו איברים מסדר $n+i$. נקבל אם כך ש־$q\cdot\overline{f}\notin F[x]$ וגם ש־$q\overline{f}+r\notin F[x]$, אבל זו סתירה כי $q\overline{f}+r=f\in F[x]$.

קיבלנו ש־$q,r\in F[x]$ ולכן בפרט $f=\overline{f}$. $\square$

שאלה 2

יהי F שדה.

סעיף א׳

יהי $c \in F$ ויהיו $g, h \in F[x]$.

i

נראה ש-$(g+h)' = g' + h'$.

הוכחה. נניח ש-$g = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ וכן ש-$h = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i$, עבור $\alpha_i, \beta_i \in F$, $n \in \mathbb{N}$. נבחין כי אם דרגות הפולינומים לא שוות, אז $\alpha_i = 0$ או $\beta_i = 0$ החל מ-i כלשהו, אך אין משמעות לעובדה זו בחישוב. עתה נבדוק את הזהות,

$$(g+h)' = \sum_{i=1}^{n} i(\alpha_i + \beta_i)x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i x^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} i\beta_i x^{i-1} = g' + h'$$

ולכן הזהות אכן חלה. □

ii

נראה ש-$(c \cdot g)' = c \cdot g'$.

הוכחה. נבדוק,

$$(c \cdot g)' = \left(c \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i\right)' = \left(\sum_{i=0}^{n} c\alpha_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{n} ic\alpha_i x^{i-1} = c\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i x^{i-1} = c \cdot g'$$

וקיבלנו שאכן הזהות מתקיימת. □

iii

נראה שמתקיים, $(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}(g\cdot h)' &= \left(g\cdot\sum_{i=0}^{n}\beta_i x^i\right)' \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} g\cdot\beta_i x^i\right)' \\ &= \sum_{i=0}^{n}\beta_i (g\cdot x^i)' \\ &= \sum_{i=0}^{n}\beta_i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(i+j)x^{i+j-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\beta_i\left(ix^{i-1}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x^j + x^i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j j x^{j-1}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\beta_i\left(ix^{i-1}g + x^i g'\right) \\ &= g\sum_{i=0}^{n}\beta_i i x^{i-1} + g'\sum_{i=0}^{n}\beta_i x^i \\ &= gh' + g'h\end{aligned}$$

□

סעיף ב׳

נוכיח את המקרה הפרטי לכלל לופיטל, אם $a \in F$ שורש של $g \in F[x]$ כך ש־$g(x) = h(x)\cdot(x-a)$, אז $g'(a) = h(a)$.

הוכחה. מתקיים,

$$g'(x) = h'(x)(x-a) + h(x)$$

מהזהויות שמצאנו בסעיף הקודם. נציב ונקבל,

$$g'(a) = h'(a)(a-a) + h(a) = h(a)$$

ומצאנו כי אכן מתקיים השוויון שרצינו להראות. □

שאלה 3

בכל סעיף נגדיר פולינום ונבדוק אם הוא ספרבילי מעל $\mathbb{Q}$, נמצא שורשים מריבוי גדול מאחד.

סעיף א׳

נגדיר $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

פתרון נבחין כי $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ מחלוקת פולינומים והעובדה ש־$f(1) = 0$. לכן נסיק שהפולינום הוא לא ספרבילי וש־1 שורש כפול.

סעיף ב׳

נגדיר $f(x) = x^3 - 7x + 6$.

פתרון עלינו לבדוק את $x = \pm1, \pm2, \pm3$, נקבל מחישוב ש־$f(2) = 0$, ומחילוק פולינומים נקבל,

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$$

ולכן הפולינום הוא ספרבילי.

סעיף ג׳

נגדיר $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

פתרון הפעם עלינו לבדוק את $x = \pm1$ בלבד, ונקבל $f(1) = 0$. מחלוקת פולינומים נקבל $f(x) = (x-1)(x^3-3x^2+3x-1) = (x-1)^4$.
נסיק אם כך שהפולינום לא ספרבילי והריבוי של $x = 1$ הוא 4.

שאלה 4

בכל סעיף נגדיר הרחבת שדות, ונבדוק אם היא נורמלית.

סעיף א׳

נבחן את $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

פתרון יהי $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathbb{Q}})$, אנו רוצים להראות ש־$\sigma(L) = L$. לכל $q \in \mathbb{Q}$ מהגדרה $\sigma(q) = q \in L$. עבור $q = \sqrt{2}$ נבחין כי $\sigma(q) \in \{\pm q\} \subseteq L$ וכך גם עבור $q = \sqrt{3}$, ונסיק כי לכל $q \in L$ גם $\sigma(q) \in L$. קיבלנו אם כך ש־σ משמר את L, ולכן ממשפט השקילות לנורמליות נסיק ש־$L/\mathbb{Q}$ הרחבת שדות נורמלית.

נוכל להשתמש גם בתנאי השלישי של המשפט, יהי $\alpha \in L$ ונרצה להראות ש־$f_{\mathbb{Q},\alpha}$ מתפצל לחלוטין ב־L. עבור $\alpha \in \mathbb{Q}$ נקבל גורם לינארי, ולכן הפיצול טריוויאלי. עבור $\alpha = \sqrt{2}$ נקבל את $f_{\mathbb{Q},\alpha}(x) = x^2 + 2$, ופולינום זה אכן מפצל לחלוטין ל־$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$. באופן דומה נסיק שהטענה נכונה עבור $q = \sqrt{3}$, ועבור צירופים לינאריים שלהם, ונקבל משקילות שאכן ההרחבה נורמלית.

סעיף ב׳

נבדוק את $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

פתרון נגדיר $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, נבחין כי $\omega^3 = 1$. עתה נגדיר את $\sigma : L \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ כ־$\mathbb{Q}$־שיכון כך ש־$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$. נבחין כי $f_{\mathbb{Q},\sqrt[3]{2}}(\omega\sqrt[3]{2}) = 0$ ולכן $\omega \in \overline{\mathbb{Q}}$ ויש הצדקה להגדרה זו.

עלינו להראות שזהו אכן $\mathbb{Q}$־שיכון. עבור $q \in \mathbb{Q}$, מוגדר ש־$\sigma(q) = q$, וכמו־כן $\sigma(\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$ ו־$\sigma(\sqrt[3]{2^2}) = \omega^2\sqrt[3]{2^2}$, נסיק שאכן σ שיכון כפי שרצינו, ונבחין גם ש־$\sigma(L) = \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$.

נגדיר עתה שיכון נוסף, הוא id עצמו, הוא בבירור שיכון של $L \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$, אבל $\mathrm{id}(L) = L \ne \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$. נסיק אם כך שלא מתקיימת ההגדרה של נורמליות.

סעיף ג׳

נבדוק את $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}(\omega) = K$, עבור ω שהוגדר בסעיף הקודם.

פתרון יהי $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(\overline{L})$ ונרצה להראות ש־$\sigma(L) = L$. עבור $q \in \mathbb{Q}$ ועבור ω הטענה נובעת מהגדרת Aut_K. נבחין כי גם $\sigma(\sqrt[3]{2}\omega) = \sigma(\sqrt[3]{2}) \cdot \sigma(\omega) = \sigma(\sqrt[3]{2}) \cdot \omega$ ולכן רק $\sigma(\sqrt[3]{2})$ קובע האם $\sigma(L) = L$. נבחין כי $\sigma(\sqrt[3]{2}) \in \{\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2}, \omega^2\sqrt[3]{2}\} \subseteq L$, ולכן נוכל להסיק שאכן $\sigma(L) = L$. נסיק ממשפט השקילות לנורמליות שאכן L/K הרחבת שדות נורמלית.

שאלה 5

יהיו $a, b, c \in \mathbb{Q}$ כך שלא $a = b = c = 0$. נמצא נוסחה מפורשת ל־$x, y, z \in \mathbb{Q}$ כך שמתקיים,

$$\left(a + b \cdot \sqrt[3]{5} + c \cdot \sqrt[3]{5^2}\right)^{-1} = x + y \cdot \sqrt[3]{5} + z \cdot \sqrt[3]{5^2}$$

פתרון נגדיר את ω של השאלה הקודמת, שורש היחידה הפרימיטיבי מסדר 3. נגדיר,

$$S = (a + b \cdot \omega \sqrt[3]{5} + c \cdot \omega^2 \sqrt[3]{5^2}) \cdot (a + b \cdot \omega^2 \sqrt[3]{5} + c \cdot \omega \sqrt[3]{5^2})$$

נבחין כי $\omega^2 = \overline{\omega}$, וכן $\omega + \omega^2 = 2 \operatorname{Re} \omega = -1$, נובע,

$$\begin{aligned} S &= a^2 + b^2 \cdot \sqrt[3]{5^2} + 5c^2 \sqrt[3]{5} + ab \cdot \omega^2 \sqrt[3]{5} + ac \cdot \omega \sqrt[3]{5^2} + ab \cdot \omega \sqrt[3]{5} + 5bc \cdot \omega^2 + ac \cdot \omega^2 \sqrt[3]{5^2} + 5bc \cdot \omega \\ &= a^2 + b^2 \cdot \sqrt[3]{5^2} + 5c^2 \sqrt[3]{5} - ab \sqrt[3]{5} - ac \sqrt[3]{5^2} - 5bc \end{aligned}$$

ולכן נסיק $S \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. נגדיר גם $\alpha = (a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{5^2})$, ומחישוב ישיר מתקיים,

$$S \cdot \alpha = a^3 + 5b^3 + 25c^3 - 15abc$$

דהינו $S \cdot \alpha \in \mathbb{Q}$, ולכן נוכל לבחור $\frac{S}{S \cdot \alpha}$ ונקבל,

$$\frac{S}{S \cdot \alpha} \cdot (a + b \cdot \sqrt[3]{5} + c \cdot \sqrt[3]{5^2}) = 1 \iff \frac{S}{S \cdot \alpha} = \left(a + b \cdot \sqrt[3]{5} + c \cdot \sqrt[3]{5^2}\right)^{-1}$$

ונוכל להסיק,

$$x = \frac{1}{a^3 + 5b^3 + 25c^3 - 15abc}(a^2 - 5bc), y = \frac{1}{a^3 + 5b^3 + 25c^3 - 15abc}(5c^2 - ab), z = \frac{1}{a^3 + 5b^3 + 25c^3 - 15abc}(b^2 - ac)$$