

גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית – סיכום

8 בדצמבר 2025



תוכנית העניינים

4	שיעור 1 – 20.10.2025	1
4	1.1 מבוא	1.1
4	1.2 הגישה הסינחתית	1.2
4	1.3 הגישה האנגלטית	1.3
4	1.4 מרחבים אפיניים	1.4
6	שיעור 2 – 21.10.2025	2
6	2.1 מרחבים אפיניים – המשך	2.1
7	2.2 תתי-מרחבים אפיניים	2.2
9	שיעור 3 – 27.10.2025	3
9	3.1 העתקות אפיניות	3.1
10	3.2 יוצרים ובסיסים	3.2
11	שיעור 4 – 28.10.2025	4
11	4.1 קורדיינטות – המשך	4.1
12	שיעור 5 – 3.11.2025	5
12	5.1 מרחבים אפיניים ממשיים	5.1
13	5.2 עקוםים במרחב אפיני ממשי	5.2
14	שיעור 6 – 4.11.2025	6
14	6.1 קמירות במרחבים אפיניים	6.1
15	שיעור 7 – 10.11.2025	7
15	7.1 פרמטריזציה לפי אורך	7.1
15	7.2 עקומות	7.2
16	שיעור 8 – 11.11.2025	8
16	8.1 עקומות – המשך	8.1
17	שיעור 9 – 17.11.2025	9
17	9.1 עקומות	9.1
18	שיעור 10 – 18.11.2025	10
19	שיעור 11 – 24.11.2025 – 11	11
19	11.1 תרגילים	11.1
20	שיעור 12 – 25.11.2025 – 12	12
20	12.1 מרחבים דואליים	12.1
21	שיעור 13 – 1.12.2025 – 13	13
21	13.1 מרחבים דואליים	13.1
23	שיעור 14 – 2.12.2025 – 14	14

23	מאמפים	14.1
23	העתקות דואליות	14.2
24	שיעור 15 – 8.12.2025	15
24	tabnوت בידנאריות	15.1
24	מטריצת גרם	15.2
25	tabnית ריבועית	15.3

1 שיעור 1 – 20.10.2025**1.1 מבוא**

גאומטריה היא אבן יסוד של החבורה שלנו, והיא לוקחת חלק בכל תהליך בניהה תכנון ומדידה. לאורך ההיסטוריה היה חקר של גאומטריה באיזשהו אופן נאיבי, אך אנו עוסקים בחקר של הגאומטריה באופן האקסיומטי שלה. אנו עוסקים בחקר של צורות החלוקות, ככלומר שאפשר לטלף אותן, תוך שימוש בכלים שראיתנו אנגליזה. הרעיון בקורס הוא לgesht בצורה אלמנטרית לבועות לאו דווקא מרכיבות בגישה שהיא גאומטרית. הצורות שנחקרו הן יריעות, ככל הנראה יריעות החלוקות.

1.2 הגישה הסינטטית

המתמטיקה המודרנית מתבססת על תורה הקבוצות, שכן עלינו לספק הגדרה קבוצתית הולמת למושג המשור.

הגדירה 1.1 (ישרים מקבילים) שני ישרים נקראים מקבילים אם הם מתלדים או אינם נחתכים.

הגדירה 1.2 (קולינאריות) נאמר שקווצה של נקודות הן קולינאריות כאשר כל הנקודות שייכות ליישר אחד.

הגדירה 1.3 (משור אפיני) זוג סדור (\mathcal{P} , \mathcal{L}) כאשר \mathcal{P} קבוצה שאת ערכיה נכנה נקודות ו- \mathcal{L} קבוצה של קבוצות של נקודות, אותן נכנה ישרים. זוג סדור זה יקרא משור אפיני אם הוא מקיים את התכונות הבאות,

1. לכל שתי נקודות יש ישר יחיד המכיל את שתיהן

2. לכל ישר ונקודה קיימן ישר יחיד מקביל לישר העובר דרך הנקודה

3. קיימות שלוש נקודות שאינן קולינאריות

מעבר למשפט יסודי שمدגים את אופי המשור האפיני.

משפט 1.4 (מספר נקודות מינימלי במשור אפיני) יהי מרחב אפיני (\mathcal{L} , \mathcal{P}), אז \mathcal{P} לפחות 4 נקודות

הוכחה. יהיו $P, Q, R \in \mathcal{P}$ נקודות שונות ולא קולינאריות. נסמן גם $\langle P, Q \rangle = l = \langle P, R \rangle$, $m = \langle P, Q \rangle$, $n = \langle Q, R \rangle$.

נסמן את $P \in l \cap m \cap n = l' \parallel l' \parallel l$, וגם את $m' \cap S \in P$. אנו טוענים כי S קיימת וכי היא נקודה רביעית.

נתען טענה עוזר, והוא $l' \parallel m' \parallel n$. אילו $l' \parallel m' \parallel n$? אז מתרנוויות יחס השקילות המושರה מיחס ההקבלה היה נובע כי $m' \parallel l' \parallel n$, אבל אז מהתמונה השנייה של משור אפיני היה מתקיים $S = l$ בסתיויה לבחירת P, Q, R .

אם $S \in \{P, Q\}$ או היה נובע $S = l$ ולכן גם $l \in R$, בסתיויה. אם באופן שקול $S \in \{P, R\}$ או נקבע סטירה דומה, ולכן נותר להגיה $S = P, Q, R$.
□

שני התרגילים הבאים יאפשרו לנו לתרגל את הגישה הסינטטית.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי כל ישר מכיל לפחות שתי נקודות שונות.

תרגיל 1.2 הוכיחו כי יחס ההקבלה בין ישרים הוא יחס שקילות.

נבחן את המודול אשר כולל את P, Q, R, S ואת הישרים $\langle Q, R \rangle, \langle P, S \rangle, \langle P, Q \rangle, \langle P, R \rangle, l, l', m, m'$. זה המודול המינימלי אשר עומד בהגדרת המשור האפיני, ולמעשה מהוות הדוגמה הפשוטה ביותר לאחד כזה.

1.3 הגישה האנגליתית

עתה כאשר בחנו את המשור מבחינה סינטטית אנו יכולים לעבור לבחון את המרחב באופן אנגלי.

הגדירה 1.5 (מודול אנגלי) יהי \mathbb{F} שדה ונסמן $\mathbb{F}^2 = \mathcal{P}$ וכן את הישרים שהם קבוצות השורשים של משוואות מהצורה $ax + by + c = 0$ עבור $a, b, c \in \mathbb{F}$ ו- $0 \neq a, b$. במקרה זה ישרים מקבילים אם ורק אם a, b המגדירים את הישרים שווים.

1.4 מרחבים אפיניים

נראה עתה את ההגדרה שתאפשר לנו לדון במרחבים, בנקודות ובכיוונים, קרי וקטוריים.

הגדעה 1.6 (מרחב אפיני) היא \mathbb{F} שדה. מרחב אפיני נתון על-ידי שלשה (E, V, t) כאשר E קבוצה של נקודות, V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , ו- t אשר מסומנת גם v (מלשון translation, היא פונקציית החזזה, מקיימת את התכונות הבאות,

.1. אסוציאטיביות: $P \in E, v, w \in V \quad (P + v) + w = P + (v + w)$ לכל $P \in E + v = P$ לכל

.2. איבר נייטרלי: $P + 0 = P$ לכל

.3. חד-חד ערכיות ברכיב השני: לכל $P, Q \in E$ קיים $v \in V$ ייחד כך שקיימים $t_P(v) = Q$, נסמן

סימן 1.7 נסמן את ההשמה החלקית של t על-ידי t_P עבור $P \in E$ נתונה, כלומר,

$$t_P(v) = t(P, v) = P + v$$

דוגמה 1.1 יהיו $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ו- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

. $(F, c) \mapsto F + c$ ולבסוף גם $V = \mathbb{R}$, וכן $E = \{F : I \rightarrow \mathbb{R} \mid F' = f\}$

או זהו מרחב אפיני, והמשמעותו הוא בדיקת 1.

21.10.2025 – 2 שיעור 2

2.1 מרחבים אפיניים – המשך

המשך לראות דוגמאות למרחבים אפיניים.

דוגמה 2.1 נבחר את,

$$E = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{F}^n \mid x^1 + \dots + x^n = 1\}$$

יחד עם,

$$V = \{(\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{F}^n \mid \xi^1 + \dots + \xi^n = 0\}$$

ופונקציית ההזזה,

$$t(x, \xi) = x + \xi = (x^1 + \xi^1, \dots, x^n + \xi^n)$$

זהו מרחב אפיני, הוכחה שזו המצב מושארת לקורא.

דוגמה 2.2 אם V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} או $t : V \times V \rightarrow (V, V, t)$ עברו V המוגדרת על ידי סכום, הוא מרחב אפיני.

uczór עתה ונגיד שמרחב אפיני באיזשהו מובן הוא מרחב וקטורי, אבל ללא הקונספט של ראשית, ובכך הוא מאפשר גמישות רבה יותר, בהמשך נראה שהקשר בין המונחים חזק אף יותר, ושאחד משורה את השני.

המרחב האפיני מרכיב מפונקציית התרגומים, אנו רוצים לשאול את השאלה ההפוכה עתה, מהו הווקטור היחיד שתרגם נקודת נקודת אחרת. בהתאם, ניגש להגדרה הבאה.

הגדרה 2.1 פונקציית הפרש (difference function) יי מרחב אפיני (E, V, t) , פונקציה $v : E \times E \rightarrow V$ תיקרא פונקציית הפרש אם לכל מתקיים,

$$t(P, v(P, Q)) = Q$$

כלומר היא הפונקציה שמתואמת לנקודות P ו- Q את הווקטור היחיד w המקיים

$$v(P, Q) = Q - P$$

.**טימן 2.2** נגיד $v_P : E \rightarrow V$ להשמה החלקית $v_P(Q) = v(P, Q) = Q - P$

הערה אם V ממש פונקציות הפרש, או מתקיים,

$$\forall P, Q \in E, v(P, Q) = v'(P, Q)$$

ישירות מהגדרת המרחב האפיני, לכן נאמר על v שהוא פונקציית ההפרש היהודית למרחב.

טענה 2.3 (חכונות של פונקציית ההפרש) אם $v : E \times E \rightarrow V$ פונקציית ההפרש אז מתקיים,

$$1. \text{ לכל } P, Q, R \in E \text{ מתקיים } (Q - P) + (R - Q) = R - P$$

2. לכל $P \in E$ הפונקציה $v_P : E \rightarrow V$ המוגדרת על ידי $v_P(Q) = v(P, Q) = Q - P$ היא פונקציה חד-חד ערכית ועל

הוכחה. 1. ישירות מאקסימום מרחב אפיני,

$$P + ((Q - P) + (R - Q)) = (P + (Q - P)) + (R - Q) = Q + (R - Q) = R$$

2. עבור $w \in V$ תהי $Q = P + w$ אז,

$$v_P(Q) = Q - P = v$$

ולכן הפונקציה היא על. נניח ש- $R \in E$ עבור $v_P(Q) = v_P(R)$, אז

$$Q - P = R - P \implies Q = P + (Q - P) = P + (R - P) = R$$

ובולנו חד-חד ערכיות.

נבחן כי בזמן שפונקציית ההפרש שוברת את הסימטריה שהתרגלנו אליה בפונקציית התרגום, אך היא מהוות משלים שלה, הטענה הבאה מציגה לנו את הקשר ההדוק שבין הרעיונות.

טענה 2.4 עבור $P \in E$ הפונקציות v_P ו- t_P הן הופכיות אחת לשנייה.

הוכחה.

$$E \xrightarrow{v_R} V \xrightarrow{t_R} E$$

לכל $Q \in E$ מתקיים,

$$Q \mapsto Q - P \mapsto P + (Q - P) = Q$$

וכן,

$$V \xrightarrow{t_P} E \xrightarrow{v_P} V$$

ומתקיים,

$$v \mapsto P + v \mapsto (P + v) - P = v$$

□

עתה אנו רוצים להגדר מרחב וקטורי מעל המרחב האפיני שלנו, נבחן את $E \times E$ וنمפה את הנקודות ל- $V \times V$ על-ידי שימוש ב- $v_P \times t_P$. נבחן את,

$$E \times E \xrightarrow{v_P \times t_P} V \times V \xrightarrow{+} V \xrightarrow{t_P} E \xleftarrow{+} E \times E$$

כלומר, נבחן את המיפוי,

$$(Q, R) \mapsto (Q - P, R - P) \xrightarrow{+} (Q - P) + (R - P) \xleftarrow{t_P} P + (Q - P) + (R - P)$$

מכאן יש לנו הפתוח להגדרה הבאה. את המבנה זהה נוגה לכנות $E_P = (E, P, +_P, \cdot_P)$ וזהו אכן מרחב וקטורי.

הגדירה 2.5 (מרחב וקטורי מושרה מנוקודה) יהי (E, V, t) מרחב אפיני ותהי $P \in E$ נקודה כלשהי. עברו $+_P : E \times E \rightarrow E$ המוגדרת על-ידי,

$$\forall Q, R \in E, Q +_P R = Q + R - P$$

ור- $E_P : \mathbb{F} \times E \rightarrow E$ המוגדרת על-ידי,

$$\forall \alpha \in F, Q \in E, \alpha \cdot_P Q = \alpha \cdot (Q - P) + P$$

המרחב $(E, P, +_P, \cdot_P)$ הוא מרחב וקטורי המושרה מהמרחב האפיני והנקודה.

תרגיל 2.1 הוכיחו כי זהו אכן מרחב וקטורי.

2.2 תתי-מרחבים אפיניים

כבר רأינו שמרחב אפיני באיזשהו עולם מתנהג ומדובר בשפה של מרחבים וקטוריים, ובdioוק כמו בהם, גם כאן נרצה לעסוק בתתי-מרחבים, בהתאם להגדרת תת-המרחב האפיני.

הגדירה 2.6 (תת-מרחב אפיני) יהי מרחב אפיני (E, V) . קובוצה $L \subseteq E$ תיקרא תת-מרחב אפיני אם $L = \emptyset$ או שקיים $L \subseteq W \leq V$ $P \in L$ כך שמתקיים,

$$L = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$$

נקרא גם ירעה אפינית או ירעה לינארית, ולמעשה נשמש בשמות אלה יותר.

דוגמה 2.3 נבחן את $E = \mathbb{R}^2$ ונגדר את,

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

נבחן כי L הוא לא תת-מרחב של המרחב הלינארי E , אך אנו לא בוחנים את E ואת L כמרחבים לינאריים, אלא כמרחבים אפיניים. במקרה זה אמ

ן נבחר את $P = (0, 1)$ או $W = \text{Sp}\{(1, -1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \leq \mathbb{R}^2$ או נקבל

הערה אם $L = P + W$ תת-מרחב אפיני, אז,

$$W = L - P = \{Q - P \mid Q \in L\}$$

בהתאם גם $w \in W$ עבור $Q \in L \Rightarrow Q = P + w \in W$ כלשהו, נובע ש-

משפט 2.7 (חוויות תת-מרחב לינארי פורט) $W' \leq V$ $P, Q \in E$ ור' אם $P + W = Q + W'$ ו- $W = W'$

הוכחה מושארת במסגרת התרגילים הבאים.

תרגיל 2.2 הוכיחו כי $P \in W$ אם ורק אם

$$Q - P \in W \iff Q + W = Q + P \iff Q = P + W$$

תרגיל 2.3 הוכיחו כי אם $R' \in W$ אז נובע $W' = W$.

הגדה 2.8 (מרחב משיק) $L = W(L)$ נקרא מרחב הכוונים או המרחב המשיק של L .

בהתאם נסמן $\dim_{\mathbb{F}} W = \dim L$ כמימד תתי-המרחב.

תרגיל 2.4 הוכיחו כי חיתוך של תתי-היריעות הוא תתי-יריעה.

הגדה 2.9 אם $S \subseteq E$ קבוצה של נקודות, אז נאמר ש- L הוא תתי-היריעה האפנית הנוצרת על-ידי S אם L הוא היריעה המינימלית בミידה המכילה את כל הנקודות.

דוגמה 2.4 אם $E = \mathbb{R}^2$ או תתי-היריעה הנוצרת על-ידי $\{(0, 0), (1, 0)\}$ היא היריעה $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.

הגדה 2.10 קבוצה של נקודות תיקרא בלתי-תלויה אפנית אם אין נקודה ששhicת למרחב האפיני שנוצר על-ידי יתר הנקודות.

דוגמה 2.5 במרחב \mathbb{R}^3 הקבוצות הבאות בלתי-תלויות אפנית:

$$\{(0, 1, 0)\}, \quad \{(0, 1, 0), (1, 0, 0)\}, \quad \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

אך לא יכול להיות שתהיה קבוצה בגודל 4 כזו אם הנקודות הן לא קולינאריות.

משפט 2.11 ידי (E, V) מרחב אפיני. תהי (P_1, \dots, P_r) סדרת סקלרים ב- \mathbb{F} עם התכונה $\lambda^1 + \dots + \lambda^n = 1$. אז לכל $P_0, P'_0 \in E$ מתקיים

$$P_0 + \lambda^1(P_1 - P_0) + \lambda^2(P_2 - P_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P_0) = P'_0 + \lambda^1(P_1 - P'_0) + \lambda^2(P_2 - P'_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P'_0)$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} & P_0 + \lambda^1(P_1 - P_0) + \lambda^2(P_2 - P_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P_0) \\ &= P'_0 + (P_0 - P'_0) + \lambda^1((P_1 - P'_0) + (P'_0 - P_0)) + \dots + \lambda^r((P_r - P'_0) + (P'_0 - P_0)) \\ &= P'_0 + (P_0 - P'_0) + (\lambda^1 + \dots + \lambda^r)(P'_0 - P_0) + \lambda^1(P_1 - P'_0) + \dots + \lambda^r(P_r - P'_0) \end{aligned}$$

□

סימן 2.12 נסמן את הנקודה היחידה הזו שאינה תלולה בראשית בסימון P_r .
זה נקרא צירוף אפיני והוא התחליף שלנו לצירופים לינאריים, והוא אף סגור להם.

27.10.2025 – 3 שיעור 3

3.1 העתקות אפיניות

עד כה יש לנו את המרחב האפיני (E, V) , ונדרט את המודול הסטנדרטי.

הגדלה 3.1 (מודול אפיני סטנדרטי) נסמן $\mathbb{A}^n = \mathbb{R}^n$ כאשר $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}^n, \mathbb{R}^n)$, ונסמן את הערכים בו בעזרת $x, \xi \in \mathbb{A}^n$. פונקציית הצירוף $f(x, \xi)$ מוגדר על-ידי חיבור.

עתה נעבור לעסוק בעתקות משמרות מבנה.

הגדלה 3.2 (העתקה אפינית) נניח Sh - E , Sh - F . העתקה אפינית, המסומנת $F \rightarrow E$, נתונה על-ידי זוג פונקציות $\varphi : V \rightarrow U$ ו- $f : E \rightarrow F$

$$\forall P \in E \forall v \in V, f(P + v) = f(P) + \varphi(v)$$

הערה תוק שימוש בהגדלה הדואלית שלנו נסיק שמתקיים, $f(P + v) = f(P) + \varphi(v) \iff f(P + v) - f(P) = \varphi(v)$. נובע אם כך φ נקבעת ביחידות עבור הfonקציה f .

סימן 3.3 נסמן φ ונאמר Sh - φ הוא הדיפרנציאל של f .

הסיבה שאנחנו קוראים ל- Sh - φ כך היא שפונקציות f שונות יכולות להיות בעלות דיפרנציאל זהה, והן תיבדלנה בקבוע בלבד, ככלומר הדיפרנציאל מהנוגכ כי שהיינו מצפים מדיפרנציאל באנגליה. נעבור למספר דוגמאות להעתקות אפיניות.

דוגמה 3.1 פונקציה קבועה, ככלומר $f(P) = f(Q)$ לכל $P, Q \in E$ או Sh - $\varphi = 0_{Hom(V, U)}$.

דוגמה 3.2 הזזה. נבחן את המקרה $E = F, V = U$, ככלומר בבחינת אנ-domorfizm, לכל $w \in V$ נגדר את העתקה $t_w : E \rightarrow E$ על-ידי $P \mapsto P + w$.

נבדוק שהיא אכן אפינית, אם $P \in E, v \in V$ אז,

$$t_w(P + v) - t_w(P) = (P + v) + w - (P + w) = (P + w) + v - (P + w) = v$$

כאמור,

$$(P + v) + w = P + (v + w) = P + (w + v) = (P + w) + v$$

שירותות מהאקסומה השנייה ושימוש בקומוטטיביות החיבור במרחבים וקטוריים. ככלומר $v \in V$ או בסימן שלנו Sh - $d t_w = id_V$.

דוגמה 3.3 פונקציות הומוטטיות (homothecy). יהיו $O \in F, \lambda \in \mathbb{F}$, או נגדר את הfonקציה $h_{O, \lambda} : E \rightarrow F$ על-ידי ההכפלה של וקטור פי λ במרחב O , ככלומר,

$$h_{O, \lambda}(P) = O + \lambda(P - O)$$

ומתקיים Sh - $dh_{O, \lambda} = \lambda id_V$.

תרגיל 3.1 הוכיחו כי פונקציה הומוטטית היא העתקה אפינית.

דוגמה 3.4 נניח Sh - $E = \mathbb{A}^m$ ו- Sh - $F = \mathbb{A}^m$. נגדר את העתקה $A \rightarrow \mathbb{A}^m$ על-ידי,

$$x \mapsto A \cdot x + b$$

עבור $b \in F$ ו- $A \in Mat_{n,m}(\mathbb{F})$. במקרה זה הדיפרנציאל הוא העתקה הלינארית המיוצגת על-ידי A .

תרגיל 3.2 הוכיחו שהרכבה של העתקות אפיניות היא אפינית.

$$Sh(d(g \circ f)) = Sh(dg \circ df)$$

הגדלה 3.4 (איזומורפיזם אפיני) תиירא איזומורפיזם אפיני אם קיימת העתקה אפינית $g : F \rightarrow E$ כך שמתקיים,

$$g \circ f = id_E \quad f \circ g = id_F$$

במקרה Sh - $E = F$ נקרא להעתקה אוטומורפיזם אפיני, ונסמן ב- $Aut(E)$ להיוות חבורת האוטומורפיזמים מעל המרחב האפיני E .

3.2 יוצרים ובסיסים

הגדעה 3.5 (תת-יריעה נוצרת) נתונה ש- $S \subseteq E$ תת-קובוצת, או $\langle S \rangle$ היא תת-יריעה הנוצרת על-ידי S , והוא חיתוך כל היריעות המכילות את S .

$$\forall S, \subseteq L \subseteq E \implies \langle S \rangle \subseteq L$$

משפהה S של נקודות נקראת יוצרת של E אם $\langle S \rangle = E$.

הגדעה 3.6 (בסיס אפיני) $\{P_0, \dots, P_n\}$ תיקרא סדרה בלתי-תלויה אפנית כאשר $n = \dim \langle P_0, \dots, P_n \rangle$ ומכנה את $\{P_0, \dots, P_n\}$ בסיס אפיני ובלתי-תלויה אפנית.

מעבר עתה לדבר על קורדינטות.

הגדעה 3.7 (מערכת יהוס) יהיו E מETYMD סופי מעל \mathbb{F} . מערכת יהוס מעל E נתונה על-ידי זוג (O, \mathcal{B}) כאשר $O \in E$ ו- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ סדרה של V .

טענה 3.8 בהינתן מערכת יהוס (O, \mathcal{B}) לכל $P \in E$ קיימת הצגה ייחידה $x \in \mathbb{F}^n$ עבור $P = O + \sum_{i=1}^n b_i x^i$.

הגדעה 3.9 (קורדינטה) נקראו הקורדינטות של P במערכת היהוס (O, \mathcal{B}) היחיד כך ש- $x = (x^1, \dots, x^n)$.

28.10.2025 — 4 שיעור 4

4.1 קורדינטות — המשך

הגדעה 4.1 (מפה ופרמטריזציה למרחב וקטורי) אם V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} כך ש- $n = \dim V$, או נenna את העתקה $x : V \rightarrow \mathbb{F}^n$ מפה, העתקה כפובה תלויה בקורדינטה. המיפוי ההפוך $V \rightarrow \mathbb{F}^n$ יכונה פרמטריזציה של V .

משפט 4.2 (מרחב וקטורי מושחה) תהי V קבוצה ותהי $\{f : V \rightarrow \mathbb{F}^n \mid f \text{ is bijection}\}$ עברו \mathbb{N} כלשהו, כך שמתקיים שלכל $x, y \in \text{Coor}(V)$

$$y \circ x^{-1} \in GL_n(\mathbb{F})$$

בתנאים אלה ניתן להגדיר על הקבוצה V מבנה של מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} יחד עם הاكוננה שלכל $x \in \text{Coor}(V)$ הוא איזומורפיים לינאריים.

$$\begin{aligned} & \text{הוכחה. תהי } x \in \text{Coor}(V). \text{ נגדיר את החיבור על-ידי,} \\ & +_V : V \times V \rightarrow V, \quad v +_V u = x^{-1}(x(v) +_{\mathbb{F}^n} x(u)) \\ & \text{ולכן,} \end{aligned}$$

$$\cdot_V : \mathbb{F} \times V \rightarrow V, \quad \alpha \cdot_V u = x^{-1}(\alpha x(u))$$

זכור ש- x הוא איזומורפיים לינאריים ולכן,

$$x(v + w) = x(x^{-1}(x(w) + x(v))) = x(v) + x(w)$$

ובאופן דומה,

$$x(\alpha u) = x(x^{-1}(\alpha x(u))) = \alpha \cdot x(u)$$

ונשאר לנו להראות שהפונקציות שקיבלנו הן יחידות, ככלומר שאין משמעות לבחירת x . נניח ש- $y, z \in \text{Coor}(V)$, ונרצה להראות שמתקיים,

$$x^{-1}(x(v) + x(w)) = y^{-1}(y(v) + y(w))$$

ובאופן דומה שווין של הכפל. נסמן $\circ x^{-1} = \lambda_Q$ על שני הצדדים את הפונקציה y ונקבל,

$$y(v) + y(w) = y(x^{-1}(x(v) + x(w))) = \lambda_Q(x(v) + x(w))$$

אבל λ היא לינארית ולכן נקבל,

$$y(v) + y(w) = \lambda_Q(x(v)) + \lambda_Q(x(w)) = y(v) + y(w)$$

ומצאננו שאכן יש שווין. \square

הגדעה 4.3 (מפה אפינית) יהיו (E, V) מרחב אפיני n -ממדי. מערכת קורדינטות על A היא איזומורפיים $\mathbb{A}^n \rightarrow E$ x אפיני. במקרה זה $x(u) = b + Au$ עבור $u \in \mathbb{A}^n$ ו- $b \in \mathbb{A}^n$. נגדיר גם את הקבוצה $GA_n(\mathbb{F})$ כקבוצת ה- x -ים הללו.

למשפט שראינו יש אנלוגיה לגרסה האפינית. הפעם במקום נקבע שתי נקודות האפס ובכך נקבל שמתקיים תנאי המשפט עבור המרחבים הוקטוריים.

5 שיעור 5 — 3.11.2025

5.1 מרחבים אפיניים ממשיים

בחלק זה והלאה נעסק במישים, ככלומר מעטה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. הדבר הראשון שנעסק בו יהיה הנורמה.
הגדרה 5.1 (נורמה) יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} . נורמה מעל V היא פונקציה $V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיים את התכונות,

1. חיזוביות בהחלט: $v = 0 \iff \|v\| = 0 \quad \forall v \in V, 0 \leq \|v\|$

2. הומוגניות: $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

3. אי-שוויון המשולש: $\forall v, u \in V, \|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$

נראה מספר דוגמאות לנורמות במקרה \mathbb{R}^p .

דוגמה 5.1 $\|x\|_{\infty} = \max\{|x_1|, \dots, |x_p|\}$, נורמת הסופרים או נורמת אינסוף.

דוגמה 5.2 $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_p|$ היא נורמת 1.

דוגמה 5.3 הנורמה האוקלידית. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$

במרחבים סופיים מעל \mathbb{R} ישנו משפט הגורס כי כל הנורמות שקולות, ככלומר לדוגמה $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_{\infty}$ באופן אנלוגי גם $\|x\|_2 \leq \sqrt{p}\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_{\infty}$.

הגדרה 5.2 (מטריקה) עבור קבוצה X נגדיר פונקציית מרחק, או מטריקה, כפונקציה המקיים את התכונות:

1. חיזוביות בהחלט: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$

2. סימטריה: $\forall x, y \in X, \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. אי-שוויון המשולש: $\forall x, y, z \in X, \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

כל נורמה משרה מטריקה, ככלומר כל מרחב נורמי הוא בפרט מרחב מטרי. אם על V מוגדרת נורמה אז על $E = (V, \rho)$ מוגדרת פונקציית מרחק. ככלומר, נוכל להשרות מרחק גם על מרחב אפיני.

הגדרה 5.3 (בדור) במרחב מטרי כללי (X, ρ) נגדיר כדור (פתוח) על-ידי,

$$B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

ונסמן לעיתים את הכדור גם על-ידי r .

במקרה של נורמה כMOV נקבל את הטענה השקולה שמתקיים,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \|x - y\| < r\}$$

זוכיר גם את ההגדרות המשלימות לכדור פתוח.

הגדרה 5.4 (כדור סגור וספירה) נגדיר את הכדור הסגור על-ידי,

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\} \quad S(x, r) = \partial B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) = r\}$$

נגדיר גם התכונות במרחב אפיני.

הגדרה 5.5 (סדרה וסדרה מתכנסת) אם $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E = (V, \rho)$ מרחב אפיני מעל \mathbb{R} וכן סדרת נקודות.

נאמר שהסדרה מתכנסת לנקודה $P \in E$ כאשר $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\| = 0$ בMOV המשני.

ובהתאם נצטט משפט חשוב שיעזר לנו.

משפט 5.6 (התכנסות וההתכנסות קורדינטתית) ב מקרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, l \subseteq \mathbb{R}^p$ אם $E = \mathbb{R}^p$ ואם סדרה וסדרה מתכנסת לנקודה $x_n \rightarrow l \iff \forall i \leq p, x_n^i \rightarrow l^i$

כלומר, הסדרה מתכנסת אם ורק אם היא מתכנסת קורדינטתית קורדינטתית.

$$|x_n^i - l^i| \leq \|x_n - l\| \leq C|x_n^i - l^i|$$

המשפט נובע ישרוות מהטענה כי

5.2 עקומים במרחב אפיני ממשי

הkoncept של עקומים במרחב הוא koncept שקצת קשה לעתים לדבר עליו. עקום הרי הוא רעיון מאוד כללי. בשל כך, נתחילה בדיון על מסילות. לפני שניגש להגדירה הפורמלית נאמר שהמטרה שלנו היא לאפיני אובייקטים שהם קשיירים מיסילתיים במרחב, וכן מהווים באיזשהו מובן תמונה של קטע. זאת אומרת שהם מתנהגים בערך כמו חוט שוז במרחב.

הגדרה 5.7 (מיסילה) מסילה (עקום פרמטרי) ב- \mathbb{A}^n היא פונקציה $I \rightarrow \mathbb{A}^n$, עבור $\mathbb{R} \subseteq I$ קטע וכך ש- α גזירה. כלומר כשלכל I מתקיים,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = L$$

הוא גבול מוגדר וסופי. נסמן גבול זה ב- $\dot{\alpha}(t) = \alpha'(t)$ את ערך הנגזרת בנקודת פונקציה של $t \in I$. המסילה תיקרא רגולרית כאשר $0 \neq \alpha'(t)$ לכל $t \in I$.

כמובן, עתה משראינו את ההגדירה, נעבור לדוגמות.

דוגמה 5.4 כל הבאים הם מסילות:

1. ישרים (פרמטריים): אם $L \leq E$ יש או $L = P + \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ עבור $v \in V$. בהתאם נוכל להגיד פונקציה $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ כך ש- $\alpha(t) = P + tv$. נבחן כי,

$$\alpha'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P + (t+s)v - P - tv}{s} = v$$

ולכן המסילה רגולרית ובפרט $\alpha'(t) = v$.

2. נגיד את $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ על-ידי $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ כאשר $r < r \in \mathbb{R}$. זהו מסילה כך שתמונהה היא מעגל ברדיוס r במישור. הפעם נקבל ש- $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, כלומר גם הפעם המסילה היא רגולרית.

דרך פשוטה במיוחד לראות זאת היא על-ידי בחינת $r \|\alpha'(t)\| = \|\alpha'(t)\|$. $\ddot{\alpha}(t) = \alpha''(t) = -r(\cos t, \sin t)$ באותו אופן נקבל גם $\ddot{\alpha}(t) = \alpha''(t) = -r(\cos t, \sin t)$.

3. במרחב נגיד את המסילה $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ על-ידי $\alpha(\cos t, \sin t, t)$, זהו למעשה ספירלה. גם הפעם נוכל לראות כי זהו מסילה רגולרית. בעולם של ירידות, בפרט של מסילות, לא מעניינות אותנו תכונות שתלויות בפרמטריזציה, כלומר במסילה כפונקציה התלויה ב- t . אנו מבקשים לעסוק בתמונה, במסלול של המסילה, כלומר בחלוקת $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ ב- $\text{Im } \alpha \subseteq E$.

הגדרה 5.8 (אורך של מסילה) תה $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ מסילה רגולרית. נגיד את האורך של המסילה באופן הבא,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

זהו הגדרה שאולי היגונית גאומטרית, אבל נרצה להראות שהיא אכן מקיימת את הקונספט של מרחק. נגיד הגדירה שבשימוש תוכיה את עצמה כSKUOLA.

הגדרה 5.9 תה $\mathcal{P} = (t_0, \dots, t_k)$ חלוקה של $[a, b]$, כלומר $t_0 < t_1 < \dots < t_n = a, t_k = b$ ומתקיים $t_n < t_{n+1}$. בהינתן $\alpha : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ או גדרה את היישר הפוליגוני כמסילה שנוצרת על-ידי סדרת הנקודות $(\alpha(t_0), \dots, \alpha(t_k))$.

$$L_\alpha(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$$

ובהתאם נסה את המשפט שמקשר את ההגדרות.

משפט 5.10 אם $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ או מתקיים,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathcal{P}, (\lambda(\mathcal{P}) < \delta) \implies (|L(\alpha) - L_\alpha(\mathcal{P})| < \varepsilon)$$

כלומר עבור על חלוקה \mathcal{P} של $[a, b]$ כך ש- $\delta < (\mathcal{P})$ המרחק בין שני סוגים המרחק חסומים על-ידי ε .

אומנם את הוכחה לא נביא, אך נרמזו ונגיד שם נבחן את ההגדרה של האינטגרל לפי קושי, ונשותמש במשפט לגרנו', נוכל להוכיח את הטענה.

4.11.2025 — 6 שיעור 6**6.1 קמיות במרחבים אפיניים**

הגדעה 6.1 (קמיות במרחב אפיני) עבור מרחב אפיני (E, V) מעל הממשיים, צירוף אפיני (convex) של $P_0, P_1, \dots, P_k \in E$ הוא $\lambda^0 P_0 + \dots + \lambda^k P_k$ עבור $\lambda^0, \dots, \lambda^k \in \mathbb{R}$ כך ש- $0 \leq \lambda^i \leq 1$ לכל $0 \leq i \leq k$.

הגדעה 6.2 (קטע אפיני) בהינתן $P, Q \in E$ הקטע $[P, Q] \subseteq E$ המוגדר עליידי,

$$[P, Q] = \{R \in E \mid R = \lambda P + \mu Q \mid \lambda + \mu = 1, 0 \leq \lambda, \mu\}$$

הגדעה 6.3 (קובוצה קמורה) קבוצה $C \subseteq E$ של נקודות תיקרא קמורה (convex) אם $[P, Q] \subseteq C$ לכל $P, Q \in C$.

באופן טבעי נוכל להגיד קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}$ קמורה של ממשיים. נרצה להגיד גאומטרית לקובוצת קמיות אפינית, ואז בהתאם להוכחה שהיא שcolaה לגגרו הקטועים של קבוצה.

הגדעה 6.4 (סגור קמור אפיני) אם $A \subseteq E$ קבוצה של נקודות, אז נאמר שהקבוצה $C \subseteq E$ המקיימת,

$$C = \bigcap_{\substack{A \subseteq K \subseteq E \\ K \text{ is convex}}} K$$

7.1 פרטוריזציה לפי אורך 10.11.2025

7.1.1 פרטוריזציה לפי אורך

אנו עוסקים בעקומים פרטוריים רגולריים, קרי בمسילות רגולריות, $A^n \rightarrow I : \alpha$. הדרישה שלנו היא ש- α תהיה גזירה אינסוף פעמיים, ככלומר חלקה, ונדרש ש- $\alpha'(t) \neq 0$ לכל $t \in I$. נוכל גם לדבר על $A^n \subseteq A = \alpha(I) \subseteq \mathbb{A}^n$, וזה למשה העקום עצמו, נקרא לאובייקט זה גם מסלול. בהינתן שתי מסילות אנו רוצים להבין מתי מתקיים $\text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\tilde{\alpha})$ מתי שתי מסילות הלהה למשה מייצגות אותו אובייקט ביקום.

הגדרה 7.1 (דיפאומורפיזם) פונקציה $X \rightarrow Y : \varphi$ תיקרא דיפאומורפיזם אם היא הפיכה, גזירה, והפיכתה גזירה. דיפאומורפיזם חלק יהיה דיפאומורפיזם כך שהוא גזיר אינסוף פעמיים.

הערה משפט העתקה ההפוכה נובע שאם דיפאומורפיזם הוא חלק אז גם הפונקציה ההפיכה שלו היא דיפאומורפיזם חלק. באופן דומה רגולריות של הדיפאומורפיזם הוא תכונה שלחה על ההפונקציה ההפיכה גם כן.

הגדרה 7.2 (פרטורייזציה) בהינתן $A^n \rightarrow I : \alpha$ ו- $I \rightarrow J : \varphi$ מסילה חלקה רגולרית, J , I , קטעים, ו- φ דיפאומורפיזם. במצב זה נאמר ש- $\varphi \circ \alpha = \tilde{\alpha}$ היא פרטורייזציה שcolaה ל- α , עוד נאמר ש- $\tilde{\alpha}$ היא רפרטיזציה של α .

דוגמה 7.1 נינה ש- $\psi : I \rightarrow \mathbb{A}^2$: ψ נתונה על ידי $\psi(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t))^T$. נגיד I נגיד $J \rightarrow I$: φ על-ידי $2u \mapsto u$. אז $\tilde{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{A}^2$: $\tilde{\alpha}(t) = 2\alpha'(2t)$, $(\alpha^1(2t), \alpha^2(2t))^T$. בהתאם נקבל ש- $\tilde{\alpha}(t) = 2\alpha'(2t)$.

הערה במקרה הדו-מידי אם $\psi = \psi'$ אז מתקיים $\varphi \circ \psi' = \varphi \circ \psi$. ולכן בפרט ψ' לא מתאפסת ושומרת על סימן. סימן 7.3 אם $0 > \psi'$ אז נאמר שהוא שומרת על כיוון, אחרת נאמר שהוא משנה כיוון.

משפט 7.4 (קיים פרטורייזציה לפי אורך) יהי עקום פרטורי $A^n \rightarrow I : c$ עקום חלק רגולרי. אז קיימת $\tilde{c} : J \rightarrow \mathbb{A}^n$ פרטורייזציה שcolaה ל- c . כלומר $\tilde{c} \equiv c$.

הוכחה. נסמן $I \in \mathcal{I}$ שבירוחוי. נגיד את $\tilde{c}(t) = \int_{t_0}^t \|c'(u)\| du$ בכל נקודה. לפי FTC (המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי) ψ גזירה ומתקיים $0 > \psi'(t) = \|c'(t)\|$. כמובן ψ רגולרית ומונוטונית, ולכן הפיכה. נגיד $(I) \psi = \varphi$ אז J קטעהה של פונקציה רציפה בקטע. יתר-על-כן, ψ היא דיפאומורפיזם, ואף דיפאומורפיזם חלק, נסמן $\varphi^{-1} \circ \psi = \varphi$. נגיד $\varphi \circ \tilde{c} = c$, זה אומר $\tilde{c} \circ \varphi = c$. מהגדרת \tilde{c} מתקיים,

$$\tilde{c}'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{\psi'(\varphi(t))}$$

ולכן $\|\tilde{c}'(t)\| = \|c'(\varphi(t))\| \cdot \frac{1}{\|\psi'(\varphi(t))\|} = 1$.

דוגמה 7.2 נגיד את $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{A}^2$ על-ידי $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^T$ כאשר $r > 0$. אז מתקיים $c'(t) = (-r \sin t, r \cos t)^T$ ולכן $\|c'(t)\| = r$. ובהתאם נקבל מהמשפט ש- $\tilde{c} : J = [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{A}^2$: $\tilde{c}(t) = (r \cos(\frac{t}{r}), r \sin(\frac{t}{r}))^T$. כמובן $\tilde{c}(s) = (c \circ \varphi)(s) = c(\varphi(s)) = c(\frac{s}{r})$.

7.2 עקומות

עתה נרצה לדון בהבדל שבין אובייקטים במישור לבין רגולריות, או נשים לב שנוכל להגיד את היר המשיק בנקודת, $c(t_0) + tc'(t_0) = c(t_0) + t c'(t_0)$ לכל $t \in \mathbb{R}$. נגיד $c : I \rightarrow \mathbb{A}^2$: $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^T$ רגולרית לאובייקט אפיני. אם c פרטורייזציה לפי אורך, אז בפרט נקבל שהוקטור המגדר את המשיק הוא נורמלי. נרצה למצוא את הוקטור האורתוגונלי שלו, במטרה להבין את ההסתנהות של הפונקציה ביחס לשני הוקטורים הללו. בהתאם נוכל להגיד את הוקטור האורתוגונלי לנגורת.

הגדרה 7.5 (בסיס אורתוגונלי של נגורת) תהי מסילה $c : I \rightarrow \mathbb{A}^2$ רגולרית לפי אורך ותהי $t_0 \in I$. נסמן $v(t) = c'(t) \cdot c'(t) = c'(t) \cdot v(t)$, $n(t) = (v(t), n(t))$, אז $v(t), n(t)$ הוא בסיס אורתוגונלי של הנגורת בנקודת. אז $1 = \|c'(t)\|^2$ וכן $c'(t) \cdot c'(t) = 1$, $c''(t) = k(t)n(t)$, $k(t) = c''(t) \cdot c'(t) + c'(t) \cdot c''(t) \equiv 0$, ונסיק $c''(t) \cdot c'(t) \equiv 0$. אם ו רק אם $2c''(t)c'(t) + c'(t) \cdot c''(t) \equiv 0$, פונקציה זו נקראת העקומות (המכוונות) של c .

11.11.2025 – 8 שיעור 8**8.1 עקומות – המשך**

. $c''(t) = (0, 2)^t$ $\|c'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$ ובהתאם $c'(t) = (1, -2t)^t$ או $c(t) = (t, 9 - t^2)^t$ עבור $t \in [-3, 3]$. אולם $c(t) = (t, 9 - t^2)^t$ לא נוכל להשתמש בה בפשתות. אבל c היא לא לפיה אורך ולכן לא נוכל להשתמש בה בפשתות.

17.11.2025 — 9 שיעור 9

9.1 עקומותיות

18.11.2025 — 10 שיעור 10

משפט 10.1 תהי $I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גירה $0 \leq r \geq k$ פעמיים. בהינתן נקודה I ונקודה $s_0 \in I$ וקטור $v_0 = (v_0^1, v_0^2)^t \in \mathbb{R}^2$ ו- $P_0 = (P^1, P^2) \in \mathbb{E}^2$ ממשיים. אם קיימת מסילה $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ אשר אורך $c(s_0) = P_0$, $c'(s_0) = v_0$ ו- $\|c(s)\| = 1$, אז קיימת מסילה $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ אשר אורך $c(s_0) = P_0$, $c'(s_0) = v_0$ ו- $\|c(s)\| = 1$. אם c יתירה, יתרככל-כזו.

$$c(s) = \begin{pmatrix} P^1 + \int_{s_0}^s \left(\cos \left(\int_{s_0}^t k(u) du + \theta_0 \right) \right) dt \\ P^2 + \int_{s_0}^s \left(\sin \left(\int_{s_0}^t k(u) du + \theta_0 \right) \right) dt \end{pmatrix}$$

כאשר $0 \leq \theta_0 < 2\pi$

הוכחה. נתחיל בהוכחת הקיום. נגדיר את הנגזרת בהתאם לדרישות המופיעות במשפט. נשים לב ש- $1 = \|c'(s)\|$ לכל $s \in I$ ו- $c''(s) = l(s)n(s)$ ישירות מחישוב.

נניח כי גם $g : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ עומדת בתנאים, ונتابון בפונקציה $f(s) = (c^1)'(s) - (d^1)'(s)$ וב- $g(s) = (c^2)'(s) - (d^2)'(s)$. או נקבל $f(s_0) = g(s_0) = 0$, ולכן $f^2 + g^2 = \frac{1}{2}(f^2 + g^2)(s) = k(s)f(s)g(s)$, ו- $f'(s) = -k(s)g(s)$, $g'(s) = k(s)f(s)$. אבל $f(s_0) = 0$ ו- $g(s_0) = 0$, ולכן $f = 0 = g$ בלבך. \square

משפט 10.2 תהי $c : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ מסילה רגולרית לפי אורך. אז קיימת $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- θ יתירה, $c'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))^t$ ו- $\dot{\theta}(s) = 2\pi k$.

24.11.2025 – 11 שיעור 11

11.1 תרגילים

25.11.2025 — 12 שיעור 12

12.1 מרחבים דואליים

הגדירה 12.1 (מרחב דואלי) יהי V מרחב וקטורי ממימד $N \in \mathbb{N}$ מעל שדה \mathbb{F} . נגידר,

$$V^\vee = \text{hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$$

ונקרא ל- V^\vee המרחב הדואלי של V . לאיבר במרחב הדואלי נקרא תבנית לינארית (linear form) או פונקציונל (functional).

דוגמה 12.1 $V^\vee = (\mathbb{F}_{\text{col}^n})^\vee = \{M_{n \times 1}(\mathbb{F})\}$, הheitenות הלינאריות ממימד n למימד 1.

טענה 12.2 במקורה זה אם $l \in V^\vee$ אז קיים וקטור $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{F}^n$ ויכול למסן $l(x) = a^t x$.

הוכחה. נסמן $a = (a_j)_{j=1}^n$ עבור $1 \leq j \leq n$. נגידר $a_j = l(e_j)$, אז

$$l(x) = l(e_1 x^1 + \dots + e_n x^n) = x^1 l(e_1) + \dots + x^n l(e_n) = x^1 a_1 + \dots + x^n a_n = a^t x = l_a(x)$$

ומצאנו שאכן $l = l_a$. \square

הערה בהתחם נקבע $(\mathbb{F}_{\text{row}}^n)^\vee \simeq (\mathbb{F}_{\text{col}}^n)$. ככלומר באיזשהו מובן מרחב דואלי הוא גם דואלי במובן הסימון.

דוגמה 12.2 V ו- V^\vee בסיס סדור. אם $v = \mathcal{B}x = (b_1, \dots, b_n) \subseteq V$ אז נוכל להגיד $v^j = x_j$, כאשר x_j היא התבנית לכל j .

דוגמה 12.3 עבור $S \neq \emptyset$ קלשוי נגידר את הקבוצה,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(S, \mathbb{F}) = \{f : S \rightarrow \mathbb{F}\}$$

עבור $f, g \in \mathcal{F}$ נגידר $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$ וweitן דומה $(k \cdot f)(s) = k \cdot f(s)$. נקבע אם כך \mathcal{F} מרחב לינארי מעל \mathbb{F} .

עבור $s_0 \in S$ נגידר,

$$\text{eval}_{s_0} : \mathcal{F}(S) \rightarrow \mathbb{F}, \quad f \mapsto f(s_0)$$

או $\text{eval}_{s_0} \in \mathcal{F}^\vee$.

דוגמה 12.4 גנית $S = I \subseteq \mathbb{R}$ ונניח $f \mapsto f'(s_0), V = C^1(I)$, אז אף היא פונקציונל לינארי.

באופן דומה אם $V = \mathcal{R}([a, b])$ מרחב הפונקציות האינטגרביליות רימן, נוכל להגיד גם את $\int_a^b f dx$ זו תבנית.

1.12.2025 — 13 שיעור 13

13.1 מרחבים דו-אליים

נניח ש- V מרחב וקטורי ממיד סופי מעל \mathbb{F} . תורה זו מוגדרת גם עבור מקרים של ממד לא סופי, אבל ישנו מספר הבדלים שנציגן אך לא נחקרו. הגדרנו את $(V/\mathbb{F})^\vee = \text{hom}(V/\mathbb{F}, \mathbb{F})$.

הגדירה 13.1 (בסיס דו-אללי) יהיו b_1, \dots, b_n בסיס של V . נגידר $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס דו-אללי של V . נקרא אפרירורית לקובוצה $(b^1, \dots, b^n) = \mathcal{B}^\vee$ בסיס דו-אללי של V .

הערה אם $v \in V$ אז מתקיים $v = \mathcal{B}x$ עבור $x \in \mathbb{F}_{\text{col}}^n$. בהתאם $b^i(v) = x^i$.

משפט 13.2 (קיים בסיס דו-אללי) \mathcal{B}^\vee בסיס של V .

הוכחה. נתוחיל באינטואיטיבות. נניח ש- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס דו-אללי של V . נסמן את הפעולה הזאת באופן פנימית על-ידי $a_1b^1 + \dots + a_nb^n = 0_{V^\vee}$, אז $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$.
 $0_{\mathbb{F}} = 0_{V^\vee}(b_j) = \left(\sum_{i=1}^n a_i b^i \right)(b_j) = \sum_{i=1}^n a_i b^i(b_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j$
 וקיים איזומורפיזם $\mathcal{B}^\vee = \left(\sum_{i=1}^n a_i b^i \right)(b_j) = a_j = l(b_j)$.

נעביר להוכחה פרישה. עבור $l \in V^\vee$ תבנית יהו $l(v) = \sum_{i=1}^n a_i b^i(v)$. נראה ש- $a_i = l(b_i)$ לכל i . מופיע בבדיקה ששתי הפונקציות מתלכדות על איברי הבסיס \mathcal{B} , זאת ישירות מлинאריות.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b^i \right)(b_j) = a_j = l(b_j)$$

□ וקיים איזומורפיזם \mathcal{B}^\vee פרישת V .

נבחן כי ניתן ליצור צימוד $\mathcal{B} \rightarrow V^\vee \times V$ על-ידי $(l, v) \mapsto l(v)$ ונסמן את הפעולה הזאת באופן דומה למכפלת פנימית על-ידי $\langle l, v \rangle$. נקבל $\langle l, b_1 \rangle = b^1 l(b_1) + \dots + b^n l(b_n) = \sum_{i=1}^n b^i \langle l, b_i \rangle + \dots + b_n l(b_n) = v = \sum_{i=1}^n b_i \langle b^i, v \rangle$

משפט 13.3 (שקלות לאיפוס במרחב דו-אללי) לכל וקטור V מתקיים $0_V \in V$ מתקיים $l(v) = 0_V \iff \forall l \in V^\vee, l(v) = 0_V$ לכל $l \in V^\vee$ מתקיים $l = 0_{V^\vee} \iff \forall v \in V, l(v) = 0_{V^\vee}$.

משפט 13.4 (קיים לבסיס דו-אללי) לכל $(b^1, \dots, b^n) = \mathcal{B}^\vee$ בסיס של V קיים לבסיס $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ מתקיים $b^i(v) = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} v^j$.

הוכחה. תהי חבנית $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}_{\text{col}}^n$ המוגדרת על-ידי $\varphi(v) = (b^1(v), \dots, b^n(v))^t$. נבחן כי φ מתקימת רק כאשר $v \in \ker \varphi = 0$ אם ורק אם $b^i(v) = 0$ לכל i , אבל בהתאם הטענה מתקימת רק אם $\ker \varphi = 0$, שכן $\dim \ker \varphi = 0$, ולכן φ איזומורפית לינארית. לכן אם $\ker \varphi = 0$ אז φ מתקינה $\varphi(b_i) = \delta_{ij}$ בדיקת כפיה שרצינו. □

הגדירה 13.5 (מאפסים) לכל $S \subseteq V$ נגידר $S^0 = \{l \in V^\vee \mid \forall s \in S, l(s) = 0\}$

$$S^0 = \{l \in V^\vee \mid \forall s \in S, l(s) = 0\} \subseteq V^\vee$$

ונקרא S^0 המאפס של S .

משפט 13.6 (תכונות מאפס) לכל $S, T \subseteq V$ מתקיים $S^0, T^0 \subseteq V^\vee$ $S^0 \cup T^0 = (S \cup T)^0$.

ולכן $S^0 = \text{Sp}^0(S)$, כלומר S^0 הוא אופרטור למרחב הדו-אללי.

משפט 13.7 (יחס בין S^0 ו- $\text{Sp}^0(S)$) $\text{Sp}^0(S) = S^0$.

$$S \subseteq T \implies T^0 \subseteq S^0.$$

משפט 13.7 (יחס בין S^0 ו- $\text{Sp}^0(S)$) $\dim U + \dim U^0 = \dim V$.

הוכחה. יהי (b_1, \dots, b_n) בסיס של V כך שגם (b_1, \dots, b_k) בסיס של U , כאשר $n \geq k$. נקבעו $B = (b^1, \dots, b^n)$ בסיס של V והוא מוגדר על-ידי $b^i = b^1 l(b_1) + \dots + b^n l(b_n)$. נקבעו $U^0 = \text{Sp}(b^{k+1}, \dots, b^n)$ בסיס של V והוא מוגדר על-ידי $U^0 = \{l \in V^\vee \mid \forall i > k, l(b_i) = 0\}$.

הדרה 13.8 (קובוצת האפסים) תהי $L \subseteq V^\vee$, אז נגידר,

$$L_0 = \{v \in V \mid \forall l \in L, l(v) = 0\}$$

קובוצה זו תיקרא קובוצת האפסים של L .

משפט 13.9 לכל $L, M \subseteq V^\vee$ מתקיים,

$$L_0 \leq V .1$$

$$L_0 = \text{Sp}_0(L) .2$$

$$L \subseteq M \implies M_0 \subseteq L_0 .3$$

.dim $W + \dim W_0 = \dim V$, אז מתקיים 13.10. יי

אם $S \subseteq V$ אז מהו $(S^0)_0 = \text{Sp}(S^0)_0 = \text{Sp} S$? נקבל $\text{Sp}(S^0)_0 = \text{Sp} S$. בהתאם נקבל שמתקיים

הדרה 13.11 (העתקה דו-אלילית) תהי $f : V \rightarrow W$ העתקה לינארית בין מרחבים, ותהי $l \in W^\vee$ תבנית. אז נגידר את העתקה הדו-אלילית של f

ליהיות $f^\vee : W^\vee \rightarrow V^\vee$, כאשר בהתאם $f^\vee = l \circ f$.

בשפת סימון מכפלה פנימית נקבל $\langle f^\vee(l), v \rangle = \langle l, f(v) \rangle$.

2.12.2025 — 14 שיעור 14

14.1 מאפסים

נמשיך לדון במאפסים ותכונותיהם.

מסקנה 14.1 אם $W_1 = W_2 \iff W_1^0 = W_2^0$ או מתקיים $W_1, W_2 \leq V$ גם $W_1 = W_2$.

כזכור אנו יכולים לדון בתתי-מרחבים על-ידי שימוש במאפסים, ישנה שקילות שמאפשרת לנו להרחיב את הדיון שלנו גם בתתי-מרחבים באופן כללי.

14.2 העתקות דואליות

נמשיך את הדיון שלנו על העתקות אלה.

משפט 14.2 יהיו V, W מרחבים לינאריים כך שה- \mathcal{B} בסיסם בהתאם ו- \mathcal{D}^\vee , \mathcal{B}^\vee הבסיסים הדואליים בהתאם. אם $A : V \rightarrow W$ מרחב לינארית ו- $f : V \rightarrow W$ בבסיסים \mathcal{D}, \mathcal{B} בהתאם אז $[f^\vee] = A^t$.

הו V מרחב אוקלידי, כזכור מרחב לינארי מימיד סופי מעל \mathbb{R} עם מכפלה פנימית \mathbb{R} : $\langle \cdot, \cdot \rangle$. לכל $V \in \mathbb{R}$ קיימת העתקה,

$$l_v : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad l_v(w) = \langle v, w \rangle$$

כזכור $\langle \cdot, \cdot \rangle = l_v$ נשים לב שה- $l_v \in V^\vee$. המשמעות היא שקיים צימוד מלא בין V ל- V^\vee , על-ידי $v \mapsto l_v$, ולכן $V \simeq V^\vee$. בהתאם לדוגמה ב- \mathbb{R}^3 אם נגדיר $l(v) = \det(x \ y \ v)$ עבור $x, y \in \mathbb{R}_{\text{col}}^3$ קבועים, נקבל העתקה לינארית ולכן לכל $z \in \mathbb{R}^3$ קיים $x \wedge y \in \mathbb{R}^3$ כך ש- $l(z) = 0$. זהו למעשה המכפלה החיצונית, המכפלה הוקטורית.

8.12.2025 — 15 שיעור 15

15.1 תבניות ביילינאריות

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} .

הגדעה 15.1 (תבנית ביילינארית) תבנית ביילינארית על V היא פונקציה $V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ כך שהפונקציה $(v, w) \mapsto g(v, w)$ עבור $v, w \in V$ היא פונקציה לינארית.

דוגמה 15.1 אם $l^1, l^2 \in \text{hom}(V, \mathbb{F})$ אז גם $(v, w) \mapsto l_1(v)l^2(w)$ אף היא התבנית ביילינארית.

דוגמה 15.2 עבור $A \in M_m(\mathbb{F})$, $\text{tr}(X^t AY) = \text{tr}(AY)$ נגידיר $A \in M_n(\mathbb{F})$, זהה פונקציה משמרת לינאריות מרכיבת על-ידי פונקציונל לינארי, ולכן התבנית ביילינארית.

דוגמה 15.3 כאשר $V = \mathbb{F}_{\text{col}}^n$ (V הוא מרחב וקטורי של הדוגמאות) אז $g_A(x, y) = x^t A y$ או $A \in M_n(\mathbb{F})$ אז $g_A(x, y) = x^t A y = x^t y$, זו הינה התבנית ביילינארית כמקרה פרטי של הדוגמאות הקודמות.

במקרה שבו $n=2$ ו- $\text{id} = \text{id}_{\mathbb{F}}$ אז נקבל $A = \text{diag}(1, 1) = \text{id}_n$ או $A = \text{diag}(1, -1) = -\text{id}_n$. $g_E(x, y) = x^t y = x \cdot_E y = x^1 y^1 + x^2 y^2$, וזה המכפלה הפנימית הסטנדרטיבית כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. אם לעומת זאת $A = \text{diag}(1, -1)$, $g_L(x, y) = x \cdot_L y = x^1 y^1 - x^2 y^2$, וזה מכפלה פנימית החשובה בפייזיקה. ישנו גם המקרה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, נקראת התבנית ההיפרבולית. אם נגידיר x או נקבל $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$, נאמר $g_H(x, y) = x^1 y^2 + x^2 y^1$, נאמר $g_S(x, y) = x^1 y^2 - x^2 y^1 = \det(x^t y)$.

15.2 מטריצת גרם

או באנגלית Gram. אם V מרחב וקטורי מממד סופי מעל \mathbb{F} ו- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n) : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ בסיס סדור, אז \mathcal{B} היא התבנית ביילינארית.

הגדעה 15.2 (מטריצת גרם) אם $g_{ij} = g(b_i, b_j) \in M_n(\mathbb{F})$ אז המטריצה $G = [g_{ij}]$ נקראת מטריצת גרם של \mathcal{B} .

אם $w \in V$ אז נוכל לכתוב $w = \mathcal{B}x$ עבור וקטור קורדינטות x , באופן דומה אם $w = \mathcal{B}y$ אז נוכל לסמך y . במקרה זה,

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^n b_i x^i, \sum_{j=1}^n b_j y^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j g(b_i, b_j) = x^t G y$$

טענה 15.3 אם g היא התבנית ביילינארית ו- G מטריצת גרם בסיס \mathcal{B} שלו, אז לכל $v \in V$ מתקיים $v = \mathcal{B}x$, $w = \mathcal{B}y$ ו- $v^t G y = g(v, w)$ מגדירה ביחידות את g .

עתה נרצה לשאול את השאלה האם בקשר מה קורה ל- G כאשר אנו משנים את הבסיס. תהי $P \in GL_n(\mathbb{F})$, היא תהיה מטריצת מעבר' $\mathcal{B}' = P\mathcal{B}$ כולם לככל וקטור קורדינטות x נקבל' $x = Px'$. אז במקרה זה $g(v, w) = g(Px', Py') = (x')^t (P^t G P) y' = (x')^t G y'$.

טענה 15.4 אם \mathcal{B}' בסיסים כך $\mathcal{B}' = P\mathcal{B}$ מטריצת מעבר', וכן g היא התבנית ביילינארית, אז אם G מטריצת גרם מעל \mathcal{B} , אז $P^t G P$ מטריצת גרם בסיס \mathcal{B}' .

הגדעה 15.5 (מטריצות חופפות) נאמר ששתי מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ הן חופפות (congruent) אם קיימת $P \in GL_n(\mathbb{F})$ כך $P^{-1}AP = B$.

תרגיל 15.1 הוכיחו כי זהו יחס שקילות.

אם g היא התבנית ביילינארית על V אז נגידיר \mathcal{B} 。

הגדעה 15.6 (תבנית ביילינארית סימטרית) g נקראת סימטרית אם $g = g^t$ ואנטי-סימטרית כאשר $g = -g^t$.

תרגיל 15.2 g היא סימטרית אם ורק אם G סימטרית וכן ואנטי-סימטרית אם ורק אם G אנטי-סימטרית.

הגדעה 15.7 (תבנית אורתוגונלית) ההיינה V מרחב וקטורי ו- \mathbb{F} תבנית ביילינארית סימטרית. נסמן $u \perp v$ כאשר $u^t v = 0$. ונאמר $u \perp v$ אורתוגונליות ביחס ל- g .

אם $U, W \subseteq V$ אז $W \perp U$ כאשר $\forall u \in U, w \in W, u^t w = 0$. $U^\perp = \{w \in V \mid \forall u \in U, u^t w = 0\}$

הגדעה 15.8 (גרעין של התבנית ביילינארית) הגרעין של g מוגדר על-ידי $V^\perp = \ker g$.

הגדעה 15.9 (ניוזן) נאמר ש- g לא מנוגנת כאשר $\ker g = \{0\}$.

$U \leq V$ נקרא לא מנוון כאשר $g|_{U \times U}$ לא מנוונת, אחרת U נקרא איזוטרופי.

נניח ש- $V = \mathbb{R}^2$ ו- $g = g_L$, כלומר $g(x, x) = (x^1)^2 - (x^2)^2$. ב מקרה זה נקבל $g(x, y) = x^1y^1 - x^2y^2$. בהתאם $g(0, 0) = 0$ ו $g(x_1, x_2) = \{x \mid x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$. אם נבחן את $U = \{x \mid |x_1 - x_2| = 0\}$ אז נקבל ש רק $x_1 = x_2$, כלומר $g(0, 0) = 0$ ולכן זה קבוצה לא מנוונת.

15.3 תבנית ריבועית

נניח ש- V ו- g תבנית ביילינגרית סימטרית על V .

הדרה 15.10 (תבנית ריבועית) נגידר את התבנית הריבועית $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ $q : V \rightarrow \mathbb{F}$ על ידי $q(v) = g(v, v)$.

נשים לב שגם q שאמם $G = [g]_{\mathcal{B}} = [g_{ij}]$ או מתקיים $q(kv) = k^2q(v)$ $\forall k \in \mathbb{F}, v \in V$.
 $q(v) = x^t G x = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x^i x^j g_{ij}$.
 $q_E(x) = 2x^1 x^2 - (x^2)^2$ ולבסוף גם $q_H(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2$. נקבל כך גם $q_L(x) = (x^1)^2 - (x^2)^2$. בפרט אנו רואים שב במקרה שבו קודם נקבע 0 ב- q_H , ככלומר הוא באמת לא מתנהגת כמו נורמה.

הגדרות ומשפטים

4	הגדירה 1.1 (ישרים מקבילים)
4	הגדירה 1.2 (קולינאריות)
4	הגדירה 1.3 (מיشور אפיני)
4	משפט 1.4 (מספר נקודות מינימלי במיشور אפיני)
4	הגדירה 1.5 (מודל אנלטי)
5	הגדירה 1.6 (מרחיב אפיני)
6	הגדירה 2.1 (פונקציית הפרש)
6	טענה 2.3 (תכונות של פונקציית ההפרש)
7	הגדירה 2.5 (מרחיב וקטורימושרה מנוקודה)
7	הגדירה 2.6 (חת-מרחיב אפיני)
7	משפט 2.7 (יחידות חת-מרחיב לנائي פורס)
8	הגדירה 2.8 (מרחיב משיק)
8	הגדירה 2.9
8	הגדירה 2.10
8	משפט 2.11
9	הגדירה 3.1 (מודל אפיני סטנדרטי)
9	הגדירה 3.2 (העתקה אפינית)
9	הגדירה 3.4 (אייזומורפיים אפיני)
10	הגדירה 3.5 (חת-יריעה נוצרת)
10	הגדירה 3.6 (בסיס אפיני)
10	הגדירה 3.7 (מערכת יהוס)
10	הגדירה 3.9 (קורדיינטה)
11	הגדירה 4.1 (מפה ופרמטריזציה למרחיב וקטורי)
11	משפט 4.2 (מרחיב וקטורימושרה)
11	הגדירה 4.3 (מפה אפינית)
12	הגדירה 5.1 (נורמה)
12	הגדירה 5.2 (מטריקה)
12	הגדירה 5.3 (כדור)
12	הגדירה 5.4 (כדור סגור וספירה)
12	הגדירה 5.5 (סדרה וסדרה מתכנסת)
12	משפט 5.6 (התכנסות וההתכנסות קורדיננטה)
13	הגדירה 5.7 (מסילה)
13	הגדירה 5.8 (אורך של מסילה)
13	הגדירה 5.9
13	משפט 5.10
14	הגדירה 6.1 (קמירות במרחיב אפיני)
14	הגדירה 6.2 (קטע אפיני)
14	הגדירה 6.3 (קבוצה קמורה)
14	הגדירה 6.4 (סגור קמור אפיני)
15	הגדירה 7.1 (דיפיאומורפיזם)
15	הגדירה 7.2 (רפמטריזציה)
15	משפט 7.4 (קיים פרמטריזציה לפי אורך)

15	הגדירה 7.5 (בסיס אורתוגונלי של נגזרת)
18	משפט 10.1
18	משפט 10.2
20	הגדירה 12.1 (מרחב דואלי)
21	הגדירה 13.1 (בסיס דואלי)
21	משפט 13.2 (קיים בסיס דואלי)
21	משפט 13.3 (שיקולות לאיפוס במרחב דואלי)
21	משפט 13.4 (קיים בסיס לבסיס דואלי)
21	הגדירה 13.5 (מאפסים)
21	משפט 13.6 (תכונות מאפס)
21	משפט 13.7
22	הגדירה 13.8 (קובוצת האפסים)
22	משפט 13.9
22	משפט 13.10
22	הגדירה 13.11 (העתקה דואלית)
23	משפט 14.2
24	הגדירה 15.1 (חבנית ביילינארית)
24	הגדירה 15.2 (מטריצת גורם)
24	הגדירה 15.5 (מטריצות חופפות)
24	הגדירה 15.6 (חבנית ביילינארית סימטרית)
24	הגדירה 15.7 (חבנית אורתוגונלית)
24	הגדירה 15.8 (גרעין של חבנית ביילינארית)
24	הגדירה 15.9 (ניון)
25	הגדירה 15.10 (חבנית ריבועית)