פתרון מטלה 1 — חישוביות וקוגניציה, 6119

14 בנובמבר 2025

שאלת הכנה

נניח ש־$y : \mathbb{R}^2 \to [2]$ המוגדר על־ידי $y(\bar{x}) = H(\bar{w} \cdot \bar{x})$ פרספטרון בינארי, נניח ש־$H = \mathbb{1}_{[0,\infty)}$.

סעיף א׳

נניח ש־$w_2 = 0$ וכן ש־$\bar{x} = (7,2)^T$ אז $y(\bar{x}) = 0$, אז ננתח את תוצאת $\bar{z} = (5,-10)^T$.

פתרון מתקיים $y(\bar{x}) = H(w_1 \cdot 7) = 0$ ולכן נסיק $w_1 < 0$, בהתאם נובע $y(\bar{x}) = H(5 \cdot w_1) = 0$ (תשובה ב׳).

סעיף ב׳

כאשר $\bar{w} = (1,1)^T$ אז נמצא את $y^{-1}(\{1\})$.

פתרון נבחין כי מתקיים $0 \le x_1 + x_2 \iff H(\bar{w} \cdot \bar{x}) = 1 \iff y(\bar{x}) = 1$ מהגדרה.

כלומר כאשר $-x_1 \le x_2$ (תשובה ג׳)

סעיף ג׳

נניח ש־$\bar{x}, \bar{z} \in \mathbb{R}^2$ דוגמות כך שמתקיים $\bar{w} \cdot \bar{x}, \bar{w} \cdot \bar{z} \neq 0$.

נבדוק מתי נקבל $y(\bar{x}) \neq y(\bar{z})$.

פתרון נניח ש־$\bar{w} \cdot \bar{x} = \alpha \bar{w} \cdot \bar{z}$ עבור $\alpha < 0$. במקרה זה מתקיים,

$$y(\bar{x}) = \varepsilon \iff H(\bar{w} \cdot \bar{x}) \iff \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\bar{w} \cdot \bar{x}) = \varepsilon \iff \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\alpha \bar{w} \cdot \bar{x}) \neq \varepsilon \iff \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\bar{w} \cdot \bar{z}) \neq \varepsilon \iff y(\bar{z}) \neq \varepsilon$$

כלומר נקבל שהתוצאות בהכרח שונות (תשובה ג׳).

שאלה 1

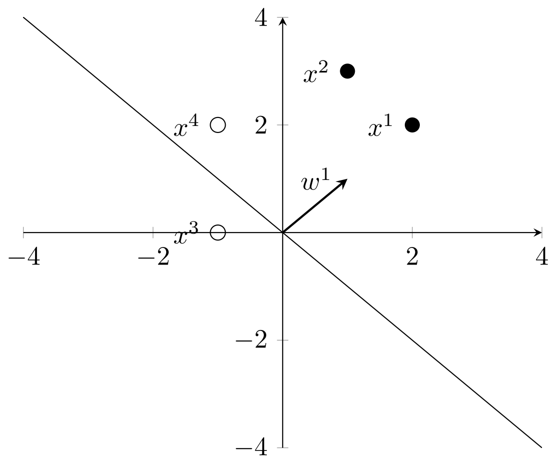
יהי $y = H(\bar{w} \cdot \bar{x})$ פרספטרון בינארי ותהיינה הדוגמות הבאות,

$$y^1 = 1, x^1 = (2,2)^T, \quad y^2 = 1, x^2 = (1,3)^T, \quad y^3 = 0, x^3 = (-1,0)^T, \quad y^4 = 0, x^4 = (-1,2)^T$$

סעיף א׳

נניח ש־$\bar{w}^1 = (1,1)^T$ ונצייר את הנקודות, את וקטור המשקולות ואת הישר המתאים. נתאר את תהליך הלמידה של הפרספטרון בהתאם לדוגמות ואז נתאר את המצב החדש.

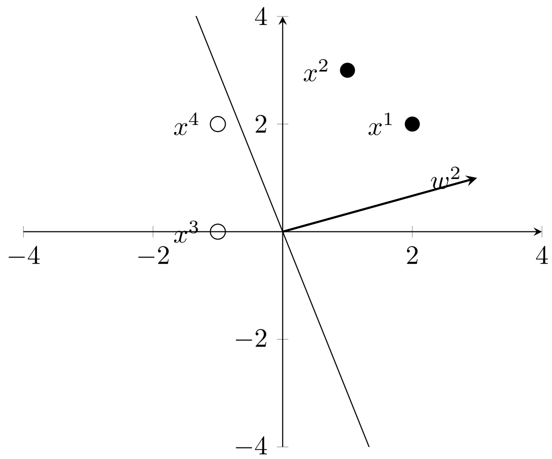
פתרון נתחיל בתיאור:



נרצה להתחיל לבצע את תהליך הלמידה, ונבחין כי $H(w^1 x^1) = y^1 = y^2 = H(w^1 x^2)$ ולכן נדלג עליהם. נבצע את הליך הלמידה עם $\eta = 2$.
נגיע למקרה $y^3 \neq H(w^1 x^3)$ ולכן נגדיר,

$$w^2 = w^1 + \eta(2y^3 - 1)x^3 = (1,1)^T + 2(2 \cdot 0 - 1)(-1,0)^T = (3,1)^T$$

נבדוק ונקבל $H(w^2 \cdot x^4) = y^4$ ולכן סיימנו את המעבר הראשון. נתחיל את המעבר השני ומחישוב ישיר נקבל $H(w^2 \cdot x^n) = y^n$ לכל $n \leq 4$, כלומר סיימנו את הליך האימון. נתאר את המצב החדש:



ונבחין כי גם גאומטרית הישר מסווג נכונה את הדוגמות.

סעיף ב׳

נניח ש־$w \in \mathbb{R}^2$ וכן $y(x) = H(w \cdot x + T)$ פרספטרון בינארי עם סף.
בכל תת־סעיף נמצא ערכי w, T עבורם מתקיימים התנאים הנתונים.

i

$2x_1 + x_2 > 0 \iff y(x) = 1$.

פתרון נגדיר אפריורית $T = 0, w = (2,1)^T$ ונוכיח שהטענה מתקיימת.

מתקיים,

$$2x_1 + x_2 > 0 \iff H(w \cdot x + T) > 0 \iff y(x) = 1$$

כפי שרצינו.

ii

$x_1 - 3x_2 < 4 \iff y = 1$.

פתרון הפעם נגדיר $w = (1,-3)$ ו־$T = -4$ ונבחין כי,

$$x_1 - 3x_2 < 4 \iff w \cdot x + T < 0 \iff y(x) = 1$$

ומצאנו כי הטענה אכן מתקיימת.

סעיף ג׳

ידוע כי פרספטרון מבצע הפרדות לינאריות, אך נוכל להשתמש ברשת לביצוע הפרדות מעין זו.

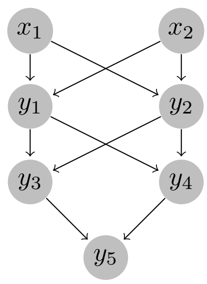
נבנה רשת המקיימת $x_1x_2 > 0 \iff y = 1$, כלומר רשת המסווגת תוכן על־ידי XNOR.

פתרון נגדיר שלושה פרספטרונים בינאריים $y^k(x) : \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}^2$ כאשר $k \in [2]$, המוגדרים על־ידי,

$$w^1 = (1,0)^T, \quad w^2 = (0,1)^T$$

עתה נגדיר את המשקל $w^3 = (1,1)^T$ ונגדיר שכבה שנייה $y^3(x) = H(-w^3x + \frac{1}{4})$ וכן $y^4(x) = H(w^3x + \frac{3}{4})$, הם יהיו השכבה השנייה.

לבסוף נגדיר את $y^5 = ((1,1)^T \cdot x)$ בתור השכבה האחרונה.



נעבור להוכחה שהרשת אכן עובדת.

הוכחה. יהי $x = (x_1, x_2)^T$, אז נקבל $(y^1, y^2)(x) = (H(x_1), H(x_2))^2$. כלומר עתה נוכל להניח שהשכבה הראשונה לא קיימת אך ש־$x \in \{0,1\}^2$. נבחין כי $x^1 = x^2 = 0 \iff \frac{1}{4} > x^1 + x^2 \iff y^3(x) = 1$, באופן דומה נקבל ש־$x^1 = x^2 = 1 \iff y^4(x) = 1$. לבסוף

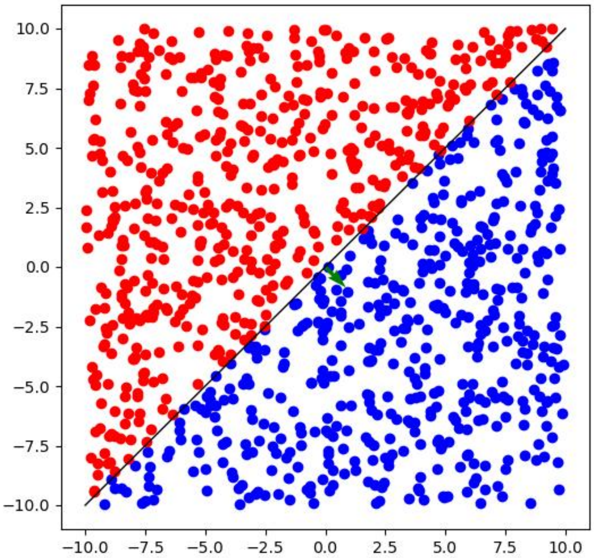
$$(x^1 = x^2 = 1) \lor (x^1 = x^2 = 0) \iff y^3(x) + y^4(x) > 0 \iff (y^5 \circ (y^3, y^4))(x) = 1$$ □

שאלה 2

בשאלה זו נציג את התוצאות של הרצה של מבחן ממוחשב שבו מוגרלות P דוגמות לנקודות בתחום $[-10,10]^2$, עבור כל נקודה נגדיר את הסיווג $y = x_1 > x_2$. המבחן הממוחשב מקבל את הנקודות והסיווגים ועליו לאמן פרספטרון בינארי מתאים.

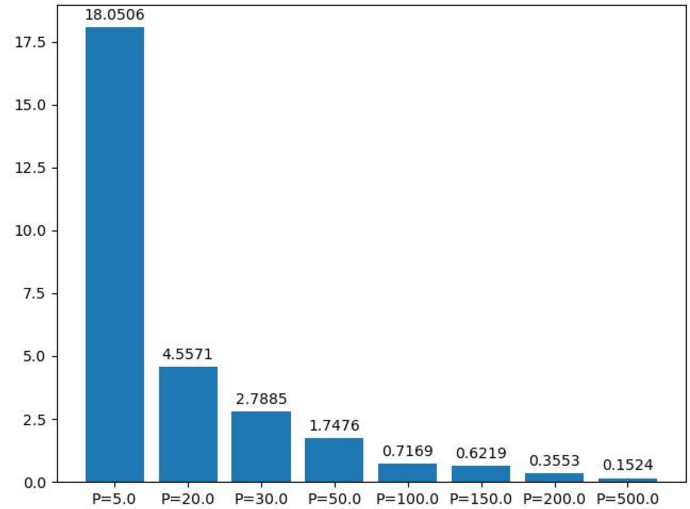
סעיף ג׳

עבור $P = 1000$ נציג את כלל הנקודות שהצגנו לצד הפרספטרון המאומן, נציג את וקטור המשקולות ואת הקו המגדיר אותו.



סעיף ד׳

עבור $P \in \{5, 20, 30, 50, 100, 150, 200, 500\}$ דוגמות נריץ את המבחן $M = 100$ ונחשב את השגיאה הממוצעת של הפרספטרון שאומן.



נבחין שככל שיש יותר דוגמות ככה השגיאה הממוצעת יורדת ושואפת לאפס.