טענה 0.1 *יהי* $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *לכל* $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *קיים* $N \in \mathbb{N}$ *יחיד וסדרה יחידה* $\{x_n\}_{n=0}^{N} \subseteq \{0, \ldots, b-1\}$*, כך שמתקיים,*

$$x = \sum_{n=0}^{N} b^n \cdot x_n$$

ו־$b_N \neq 0$.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על x.

נניח ש־$x = 1$. אילו $N > 0$ אז $x_N \geq 1$ ומתקיים,

$$\sum_{n=0}^{N} b^n \cdot x_n \geq b^N \cdot x_n \geq b$$

ולכן בהכרח $N = 0$ בלבד. נובע אם כך ש־$x = x_0$ עבור $0 \leq x_0 < N$, ולכן $x_0 = 1$ בלבד.

נניח שהטענה נכונה עבור $1 \leq y < x$ לכל y כזה ונוכיח את הטענה על x. נגדיר,

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} \mid b^{n+1} > x\}$$

קיים כזה מהסדר הטוב על הטבעיים (ולכן הטענה לא נכונה ב־PA). נגדיר גם,

$$x_N = \max\{n \in [b] \mid x \leq b^N \cdot n\}$$

נסמן $y = x - b^N \cdot x_N$, אז $y < x$ ולכן מהנחת האינדוקציה קיים $M \leq N$ ו־$\{y_n\}_{n=0}^{M}$ כך שמתקיים,

$$y = \sum_{n=0}^{M} b^n \cdot y_n$$

אז נגדיר $x_n = y_n$ לכל $0 \leq n \leq M$ ו־$x_n = 0$ עבור $M < n < N$. נקבל,

$$\sum_{n=0}^{N} b^n \cdot x_n = b^N \cdot x_N + \sum_{n=0}^{M} b^n \cdot x_n = b^N \cdot x_N + y = x$$

לכן מצאנו N וסדרה המקיימות את הטענה, עלינו להראות יחידות.

נניח ש־N' ו־$\{x'_n\}_{n=0}^{N'}$ מקיימים את הטענה. אז מהחישוב שראינו של N בהכרח נובע $N = N'$. אם $N = 0$ אז $b^0 \cdot x_0 = x = b^0 \cdot x'_0$ ונובע $x_0 = x'_0$ בלבד. עתה נניח שהטענה נכונה עבור רישא של הסדרה, $x_n = x'_n$ לכל $n < m \leq N$, ונבחן את m. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$x_n = 0$ לכל $n < m$ ולכן,

$$x = \sum_{n=m}^{N} b^n \cdot x_n = b^m \sum_{n=m}^{N} b^{n-m} \cdot x_n$$

ונוכל באופן דומה לקבל ש־$x_m = x'_m$ עבור $y = \sum_{n=m}^{N} b^{n-m} \cdot x_n$.

נסיק שאכן $x_n = x'_n$ לכל $n \leq N$, וסיימנו להוכיח יחידות. $\square$