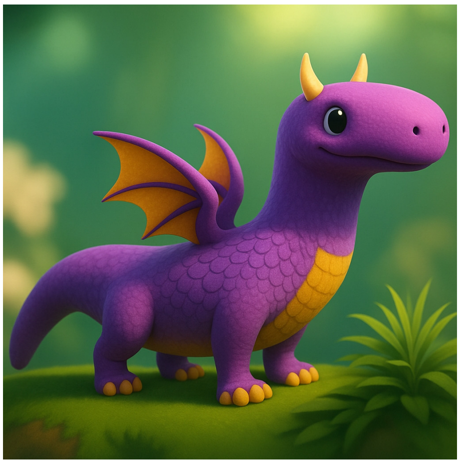
פתרון מטלה 3 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

8 בנובמבר 2025



שאלה 0

סעיף א׳

יהי (E,V,t) מרחב אפיני ותהיינה $P_1,\dots,P_n \in E$ נקודות ולכל $1 \le j \le n$ נגדיר גם $\lambda_j^1+\cdots+\lambda_j^n=\eta^1+\cdots+\eta^n=1$.
נגדיר את $R_j=\sum_{i=1}^n \lambda_j^i P_i$.
נראה ש־$Q=\sum_{j=1}^n \eta^j R_j$ צירוף אפיני של הנקודות $P_1,\dots,P_n$.

הוכחה. מתקיים,

$$Q=\sum_{j=1}^n \eta^j R_j=\sum_{j=1}^n \eta^j \sum_{i=1}^n \lambda_j^i P_i=\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \eta^j \lambda_j^i P_i=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta^j \lambda_j^i P_i=\sum_{i=1}^n P_i \cdot \sum_{j=1}^n \eta^j \lambda_j^i$$

נגדיר $\mu^i=\sum_{j=1}^n \eta^j \lambda_j^i$ ועלינו להוכיח ש־$\mu^1+\cdots+\mu^n=1$. נראה,

$$\sum_{i=1}^n \mu^i=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta^j \lambda_j^i=\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \eta^j \lambda_j^i=\sum_{j=1}^n \eta^j=1$$

מהנתונים. $\square$

סעיף ב׳

יהי (E,V,t) מרחב אפיני ממימד n ונניח ש־$(P_0,\dots,P_n)$ בסיס אפיני סדור.
לכל $P \in E$ קיימים $(x^0,\dots,x^n) \subseteq V$ יחידים כך ש־$x^0+\cdots+x^n=1$ וכן $P=x^0P_0+\cdots+x^nP_n$.
נקרא ל־$(x_0,\dots,x_n)$ הקורדינטות הבריצנטריות של P בבסיס הנתון.

נראה שהאוסף הסדור $(Q_0,\dots,Q_k) \subseteq E$ הוא בלתי־תלוי אפינית אם ורק אם מטריצת הקורדינטות הבריצנטריות של הנקודות ביחס לבסיס אפיני היא $k+1$.

הוכחה. נסמן $Q_i=y_0^iP_0+\cdots+y_n^iP_n$ עבור $1 \le i \le k$.
נניח ש־$(Q_0,\dots,Q_k)$ בלתי־תלוי אפינית ונניח בשלילה שמטריצת הקורדינטות הבריצנטריות שלה תלויה לינארית, ללא הגבלת הכלליות נניח שמתקיים, אז נובע שמתקיים,

$$(x_k^0,\dots,x_k^k)=\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i (x_i^0,\dots,x_i^k)$$

עבור $\lambda_i \in \mathbb{F}$. אז מהגדרה,

$$Q_k=\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i Q_i$$

וזו סתירה להנחה ש־$(Q_0,\dots,Q_k)$ בלתי־תלוי אפינית.

בכיוון ההפוך נניח שהמטריצה היא בלתי־תלוי לינארית, ונניח שהאוסף כן תלוי, לכן בלי הגבלת הכלליות מתקיים,

$$Q_k=\lambda_0Q_0+\cdots+\lambda_{k-1}Q_k$$

אבל בהתאם נוכל לעבור לקורדינטות הבריצנטריות ולקבל סתירה זהה. $\square$

שאלה 1

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור ויהי (E, V, t) מרחב אפיני. נאמר שצירוף קמור של $P_1, \dots, P_n$ הוא $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$ כך ש־$0 \le \lambda_i, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.
נסמן $\operatorname{Con}\{P_1, \dots, P_n\}$ קבוצת כל הצירופים הקמורים של הנקודות $P_1, \dots, P_n$.
קבוצה $C \subseteq E$ תיקרא קמורה אם לכל $P, Q \in C$ מתקיים $[P, Q] \subseteq C$.

סעיף א׳

נראה שקבוצה $C \subseteq E$ היא קמורה אם ורק אם היא מכילה את כל הצירופים הקמורים של נקודות שלה, כלומר $C = \operatorname{cl}_{\operatorname{Con}} C$.

הוכחה. נניח ש־C קמורה ונניח ש־$P_1, \dots, P_n \in C$. נניח גם ש־$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ וכן $0 \le \lambda_1, \dots, \lambda_n$ וכן $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. נגדיר $Q_1 = P_1$ וכן $Q_{k+1} = \mu_{k+1} P_{k+1} + (1 - \mu_k k + 1) Q_k$, כך שמתקיים $\mu_i (1 - \mu_{i-1}) \cdots (1 - \mu_1) = \lambda_i$, קיימת כזאת כפתרון של המשוואה. בהתאם נקבל ש־$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = \mu_1 P_1 + \cdots + \mu_n P_n$, ומספיק להראות ש־$Q_i \in C$ לכל i. עבור $i = 1$ הטענה טריוויאלית, ואם הטענה נכונה עבור Q_i אז $[Q_i, P_{i+1}] \subseteq E$ ולכן גם $Q_{i+1} \in E$ והטענה נובעת מאינדוקציה.

נניח ש־$C = \operatorname{cl}_{\operatorname{Con}} C$, ונניח ש־$P, Q \in C$, נרצה להראות שגם $[P, Q] \subseteq C$. נבחין כי $[P, Q] = \{\lambda P + \mu Q, \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \ge 0\}$, אבל מההנחה מתקיים $\lambda P + \mu Q \in C$ לכל בחירה כזו, כלומר $[P, Q] \subseteq C$ כרצוי. $\square$

סעיף ב׳

נראה שחיתוך של קמורות הוא קמור.

הוכחה. נניח ש־$(C_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ קמורות ונגדיר את הקבוצה $C = \bigcap_{i \in I} C_i$, נראה כי C קמורה. נניח ש־$P, Q \in C$, אז נובע ש־$P, Q \in C_i$ לכל $i \in I$. בהתאם נובע ש־$[P, Q] \subseteq C_i$ ולכן גם $[P, Q] \subseteq C$ מהגדרת החיתוך. $\square$

שאלה 2

תהי $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ מסילה. לכל $\mathcal{P} \subseteq [a,b]$ חלוקה נסמן $L(\mathcal{P})$ את אורך הפוליגון המושרה מהחלוקה.

סעיף א׳

נראה ש־$L(\mathcal{P}) \le L(\alpha)$.

הוכחה. נזכור כי הגדרנו,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt = \underline{\int_a^b} \|\alpha'(t)\| \, dt = \overline{\int_a^b} \|\alpha'(t)\| \, dt$$

וכן אם $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$ כך ש־$t_0 = a, t_n = b$ אז מתקיים,

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \frac{\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}} \le \overline{S}(\alpha, \mathcal{P})$$

כאשר $\overline{S}$ סכום דרבו עליון. נובע ממונוטוניות של $\overline{S}$ שמתקיים $L(\mathcal{P}) \le L(\alpha)$. ◻

סעיף ב׳

נוכיח שמתקיים $L(\alpha) = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P})$.

הוכחה. נבחין כי מתקיים $\sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}) = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \to 0} L(\mathcal{P})$ וכן,

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \left\| \frac{\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})} \right\|$$

הוא סכום רימן ומהעובדה שמתקיים $\lambda\mathcal{P} \to 0$ נסיק שמתקיים,

$$L(\mathcal{P}) \xrightarrow{\lambda\mathcal{P} \to 0} \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

כאשר הערך שואף לנגזרת ישירות מהגדרת הנגזרת והעובדה ש־$\lambda\mathcal{P}$ מתאפס. ◻

סעיף ג׳

נוכיח ש־$L(\alpha) \ge L([\alpha(a), \alpha(b)])$.

הוכחה. נבחין כי $\mathcal{P} = \{a, b\}$ היא החלוקה כך ש־$L(\mathcal{P}) = L([\alpha(a), \alpha(b)])$ וכן מתקיים $\lambda\mathcal{P} = b - a$, ולכן הטענה נובעת מהסעיף הקודם. ◻

שאלה 3

סעיף א׳

נגדיר $\alpha : [0,b] \to \mathbb{R}^2$ על־ידי $\alpha(t) = (t, \cosh t)$ ונחשב את אורכה.

פתרון מתקיים,

$$L(\alpha) = \int_0^b \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_0^b \|1 + \sinh t\| \, dt = \int_0^b \sqrt{1 + \sinh^2 t} \, dt = \int_0^b \cosh t \, dt = \sinh t|_0^b = \sinh(b)$$

כלומר $L(\alpha) = \sinh(b)$.

סעיף ב׳

נגדיר את $\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על־ידי $\alpha(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$ עבור $a > 0$. נחשב את $L(\alpha)$.

פתרון הפעם,

$$\begin{aligned}
L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \|a(1 - \cos t, \sin t)\| \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos t} \, dt \\
&= 2\sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sin(\frac{t}{2}) \, dt \\
&= 2\sqrt{2}a \cdot (-2)\cos(\frac{t}{2}) \, dt \Big|_0^{2\pi} \\
&= 8\sqrt{2}a
\end{aligned}$$