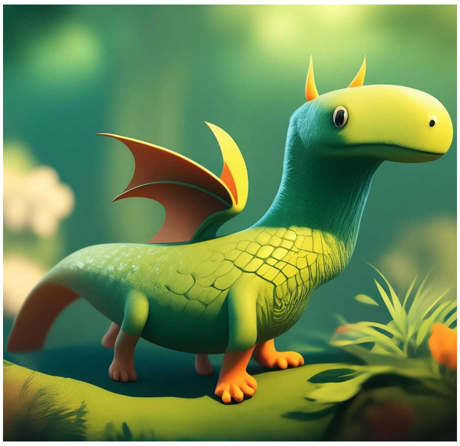
פתרון מטלה 01 — אנליזה על יריעות, 80426

24 במרץ 2025



שאלה 1

תהי המסילה $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על־ידי,

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

סעיף א׳

נחשב את האורך של γ.

פתרון נבחין כי $\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2)$ מחישוב ישיר, וכן מהגדרה,

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 \; dl = \int_0^2 \|\dot{\gamma}(t)\| \; dt = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4} \; dt = \int_0^2 t\sqrt{4 + 9t^2} \; dt$$

נשתמש בכלל ההצבה עבור $u = t^2, du = 2tdt$ ונקבל

$$\int_0^2 t\sqrt{4 + 9t^2} \; dt = \frac{1}{2} \int_0^4 (4 + 9u)^{\frac{1}{2}} \; dt = \frac{1}{2}(4 + 9u)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}\Big|_{u=0}^{u=2} = \frac{1}{3}(40^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}})$$

סעיף ב׳

נחשב את הישר המשיק ואת משיק היחידה ל־γ ב־$t = 1$.

פתרון לפי הגדרת הישר המשיק נחשב ונקבל,

$$l = \mathrm{Sp}\{\dot{\gamma}(1)\} = \mathrm{Sp}\{(2,3)\} = \{(2,3)t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

וכן משיק היחידה הוא

$$\vec{T}_\gamma(1) = \frac{\dot{\gamma}(1)}{\|\dot{\gamma(1)}\|} = \frac{(2,3)}{\sqrt{13}}$$

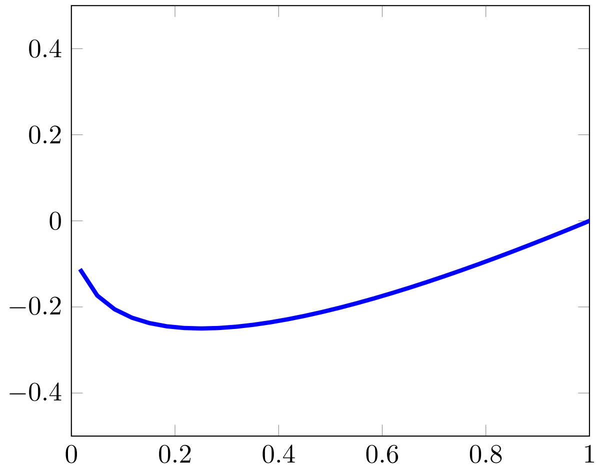
שאלה 2

עבור המסילות הבאות נצייר ונחשב את האינטגרל המסילתי של $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ עם הפונקציות הנתונות.

סעיף א׳

נגדיר $\gamma(t) = (t^2, t^2 - t)$ ונחשב את $\int_\gamma F\ d\gamma$ עבור $F(x,y) = (x^2 y, y - 3x)$.

פתרון עבור הציור נרצה לבצע רפרצטריזציה של γ כך ש־$\gamma \circ \mu = (t, f(t))$, נבחין כי עבור $\mu(t) = \sqrt{t}$ נקבל $f(t) = t - \sqrt{t}$ ב־$[0,1]$ ולכן נוכל לעבור לציור,



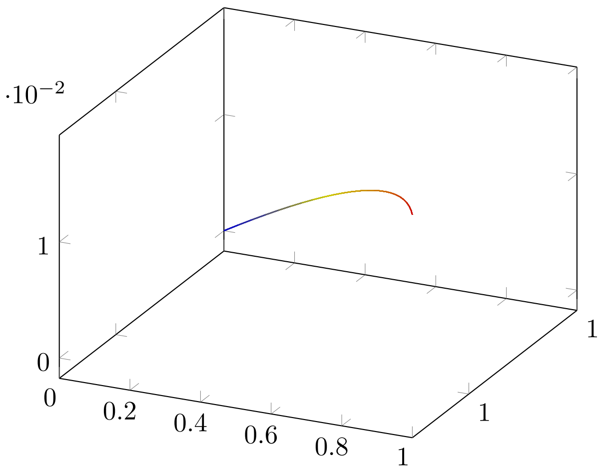
ונעבור לחישוב האינטגרל,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F\ d\gamma &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\ dt \\
&= \int_0^1 (t^4(t^2 - t), t^2 - t - 3t^2) \cdot (2t, 2t - 1)\ dt \\
&= \int_0^1 2t^5(t^2 - t) + (2t - 1)(-t - 2t^2)\ dt \\
&= \int_0^1 2t^7 - 2t^6 - 4t^3 - t\ dt \\
&= \frac{2}{8}t^8 - \frac{2}{7}t^7 - t^4 - \frac{1}{2}t^2 \Big|_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{2}{7} - 1 - \frac{1}{2} - 0
\end{aligned}$$

סעיף ב׳

נגדיר $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t)$ וכן $F(x,y,z) = (0, -z, y)$.

פתרון נצייר,



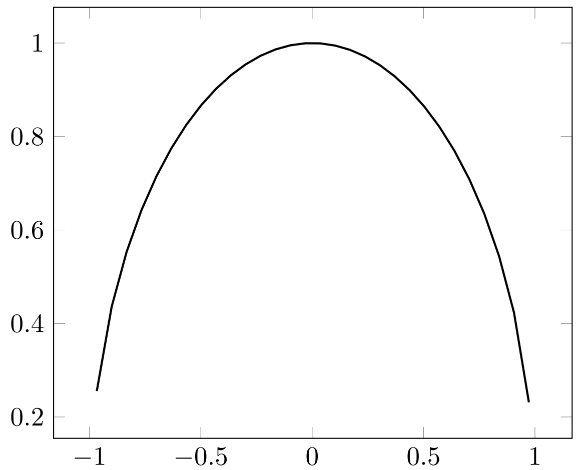
נעבור לחישוב האינטגרל,

$$\int_\gamma F\ d\gamma = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\ dt = \int_0^1 (0,-\sin t,\cos t)\cdot(1,-\sin t,\cos t)\ dt = \int_0^1 \sin^2 t+\cos^2 t\ dt = \int_0^1 1\ dt = 1$$

סעיף ג׳

נגדיר $\gamma(t)=(2t-1,\sqrt{1-(2t-1)^2})$, ואת הפונקציה $f(x,y)=xy^4$.

פתרון נתחיל בציור,



ונעבור לחישוב האינטגרל. נבצע רפרמטריזציה יחד עם $\mu:[-1,1]\to[0,1]$ על־ידי $\mu(t)=\frac{t+1}{2}$ ונקבל $(\gamma\circ\mu)(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$, ולאחר מכן נקבל $\bar\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על־ידי $\bar\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$. בנוסף גם $\dot{\bar\gamma}(t)=(-\sin t,\cos t)$ וכן $f(\bar\gamma(t))=\cos(t)\sin^4(t)$, לכן

$$\int_{\bar\gamma} f\ ds = \int_0^\pi \cos(t)\sin^4(t)\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}\ dt = \frac{1}{5}\sin^5(t)\Big|_{t=0}^{t=\pi} = 0$$

שאלה 3

תהי $\gamma : [a,b] \to U$ מסילה רגולרית ותהי $\bar{\gamma}$ המסילה נורמלית שלה.
נוכיח שכמות האורך המכוסה על־ידי $\bar{\gamma}$ בכל קטע היא האורך של הקטע, כלומר לכל $s_1 < s_2 \in [0, l(\gamma)]$ מתקיים $l(\bar{\gamma} \mid_{[s_1,s_2]}) = s_2 - s_1$.

הוכחה. $\square$