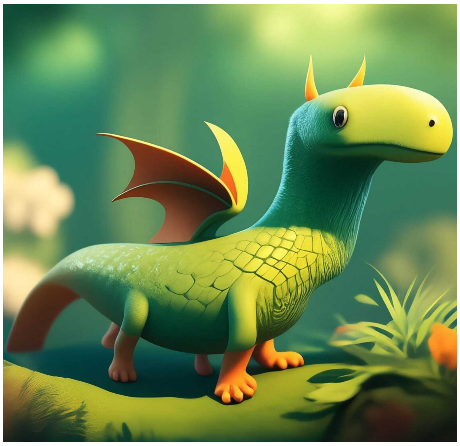
פתרון מטלה 03 — אנליזה פונקציונלית, 80417

18 באפריל 2025



שאלה 1

בשאלה זו נוכיח את משפט הקיום של פאנו. יהיו $a<b, c<d$ ממשיים ותהי $F:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ פונקציה K־ליפשיצית. נניח ש־$(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$, ונבקש להוכיח שקיים $h>0$ ופונקציה גזירה $f:[x_0-h,x_0+h]\to[c,d]$ כך ש־$f(x_0)=y_0$ ומתקיים,

$$\forall x\in[x_0-h,x_0+h], f'(x)=F(x,f(x))$$

סעיף א'

נגדיר סדרת פונקציות על־ידי $f_0(x)=y_0$ וכן,

$$f_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,f_n(t))\,dt$$

נראה שקיים $h>0$ כך ש־$f_n:[x_0-h,x_0+h]\to[c,d]$ מוגדרת היטב ורציפה לכל n.

הוכחה. יהי $h>0$ כלשהו כך ש־f_1 מוגדרת ורציפה, כלומר שמתקיים,

$$\forall x\in[x_0-h,x_0+h],\ f_1(x)\in[c,d]$$

בהכרח יש כזה, שכן f_1 פונקציה רציפה. ידוע כי F היא K־ליפשיצית, לכן עבור $0<h<\frac{1}{K}$ גם $\|F\|_\infty<1$, כלומר הפונקציה חסומה על־ידי 1 ובתחום, נצמצם את h שבחרנו לסביבה זו. נשתמש בהגדרה זו כבסיס אינדוקציה עבור הטענה שכל פונקציה f_n מוגדרת ורציפה, נרצה להוכיח באינדוקציה שמתקיים $|f_n(x)-f_n(x_0)|\le|x-x_0|$, כאשר טענה זו אף היא נובעת מהמהלך שראינו זה עתה.

נניח ש־$f_n:[x_0-h,x_0+h]\to[c,d]$ מוגדרת ורציפה ומקיימת את אי־השוויון, ונגדיר את f_{n+1} כמוגדר לעיל, אנו יודעים כי זוהי פונקציה רציפה ישירות מהגדרתה כאינטגרל לפונקציה רציפה. נבדוק אם היא מקיימת את אי־השוויון,

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x)-f_{n+1}(x_0)|&=\left|\int_{x_0}^{x}F(t,f_n(t))\,dt\right|\\&\le\int_{x_0}^{x}|F(t,f_n(t))|\,dt\\&\le\int_{x_0}^{x}1\,dt\\&=|x-x_0|\end{aligned}$$

כלומר היא אכן מקיימת אותו, וכן נובע שהיא מוגדרת בתחום שרצינו מההגדרה המקורית של h כך ש־$B_h(y_0)\subseteq[c,d]$. □

סעיף ב'

נוכיח ש־$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה במידה אחידה ורציפה במידה אחידה.
נסיק ממשפט ארצלה שיש לה תת־סדרה מתכנסת במידה שווה.

הוכחה. למעשה מצאנו שכל פונקציה בסדרה חסומה על־ידי h בתהליך הוכחת סעיף א', ולכן עלינו להראות רציפות במידה אחידה בלבד. לכל $x,y\in[x_0-h,x_0+h]$ ולכל $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(y)|&=\left|\int_{x_0}^{x}F(t,f_{n-1}(t))\,dt-\int_{x_0}^{y}F(t,f_{n-1}(t))\,dt\right|\\&=\left|\int_{x}^{y}F(t,f_{n-1}(t))\,dt\right|\\&\le\int_{x}^{y}|F(t,f_{n-1}(t))|\,dt\\&\le|x-y|\end{aligned}$$

ולכן אם $\epsilon>0$ אז נוכל להגדיר $\delta=\epsilon$ ונקבל $|f_n(x)-f_n(y)|<\epsilon$ לכל $|x-y|<\delta$, כלומר מצאנו רציפות במידה אחידה.

ממשפט ארצלה נובע שלכל סדרה בקבוצה $\{f_n\}$ יש תת־סדרת קושי, בפרט קיימת $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\{f_n\}$ סדרת קושי, בפרט סדרה זו מתכנסת במידה שווה. □

סעיף ג׳

נוכיח שהסדרה $\{F(x, f_{n_k}(x))\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה.

הוכחה. נניח ש־$f_{n_k} \rightrightarrows f$ עבור $f : [a,b] \to [c,d]$ רציפה. נראה שהסדרה היא סדרת קושי.

$$|F(x, f_{n_k}(x)) - F(y, f_{n_k}(y))| \le K\sqrt{(x-y)^2 + (f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y))^2} \le K|x-y|(1+1) = 2K|x-y|$$

ולכן לכל $\epsilon > 0$ נוכל לבחור $\delta = \frac{\epsilon}{2K}$ ונקבל שאכן הסדרה היא סדרת קושי. נבחין כי מצאנו ש־$f_{n_k} \rightrightarrows f$ וכן נובע ש־$f'_{n_k} \rightrightarrows f'$, כלומר הפונקציה f היא רציפה וגזירה, מקיימת $f(x_0) = y_0$ מההתכנסות נקודתית של הסדרה הקבועה $f_n(x_0) = y_0$, וכן מרציפות F נובע $F(x, f(x)) \rightrightarrows f_{n_k}$, ולכן f מקיימת את כל התנאים למשפט הקיום של פאנו. $\square$

שאלה 2

תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C^1[0,1]$ ונניח שקיים קטע $[a,b] \subseteq [0,1]$ ושקיימת סדרה $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ שואפת לאינסוף כך שלכל n ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים,

$$f_n'(x) \geq M_n$$

נראה שהסדרה $\{f_n\}$ לא רציפה במידה אחידה.

הוכחה. נראה את שלילת הגדרת רציפות במידה אחידה. נקבע $\epsilon > 0$ ותהי $\delta > 0$ כלשהי, יהי גם $x = a+\delta$, אז $|f_n(a)-f_n(x_0)| \geq M_n|a-x_0|$, מהנתון ש־$M_n \to \infty$ נסיק שנוכל לבחור N כך שלכל $n > N$ מתקיים $M_n|a-x_0| > \epsilon$. נסיק אם כך שהסדרה $\{f_n\}$ לא רציפה במידה אחידה. □

טענה זו לכאורה מהווה סתירה לדוגמה 1 מתרגול 3, אך נבחין הבחנה חשובה. בטענה זו נתון תחום קבוע בו הנגזרת שואפת לאינסוף, זאת בעוד בדוגמה 1 התחום בו הנגזרת שאפה לאינסוף הלך וקטן, כלומר סדרת פונקציות זו לא מקיימת את תנאי הטענה שהוכחנו זה עתה.

שאלה 3

תהי הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(\mathbb{R})$ המוגדרת על־ידי,

$$f_n(x) = \frac{1}{(x-n)^2+1}$$

סעיף א׳

נראה שהסדרה חסומה במידה אחידה, רציפה במידה אחידה ומתכנסת נקודתית לפונקציית האפס.

הוכחה. נבחין כי $(x-n)^2+1 \geq 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן $f_n(x) \leq 1$, כלומר הסדרה $\{f_n\}$ חסומה במידה אחידה. נבחין כי גם אם $|x-y| < \delta$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \left| \frac{-2n(x+y) + x^2 - y^2}{((x-n)^2+1)((y-n)^2+1)} \right| \leq |x-y| \cdot 1$$

כלומר אם $\epsilon > 0$ אז נוכל להגדיר $\delta = \epsilon$ ונקבל שהסדרה $\{f_n\}$ גם רציפה במידה שווה. לבסוף נבחין כי אם $x \in \mathbb{R}$ קבוע, אז $(x-n)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ ולכן $f_n(x) \to 0$, כלומר $f_n \to 0$ בהתכנסות נקודתית. □

סעיף ב׳

נראה כי הסדרה לא מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס.

הוכחה. נקבע $\epsilon = \frac{1}{2}$ ויהי $N \in \mathbb{N}$ כלשהו, אז לכל $n > N$ ולכל $x = n$ מתקיים,

$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{1+0} = 1 \geq \epsilon$$

דהינו מצאנו כי מתקיימת השלילה של התכנסות במידה שווה. □

שאלה 4

יהי $P \subseteq C[0,1]$ מרחב הפולינומים המוגדרים על הקטע $[0,1]$ עם נורמת סופרימום. ידוע כי P הוא מרחב נורמי, נראה כי מרחב זה אינו שלם (אינו בנך).

הוכחה. נראה שקיימת סדרה של פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P$ כך שהיא מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f \in C[0,1]$ כך ש-$f \notin P$. נגדיר,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

אנו יודעים כי זהו פיתוח טיילור של $\exp$ וכן ש-$p_n \to \exp$ בהתכנסות נקודתית. מטענה מתרגול 2 נובע גם כי $p_n \rightrightarrows \exp$. לבסוף נטען כי $\exp \notin P$, זאת מהטענה הידועה שלכל $p \in P$ מתקיים $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \infty$. $\square$