אנליזה פונקציונלית — סיכום

1 במאי 2025

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 26.3.2025

1.1 רקע

אנליזה פונקציונלית היא כמו אלגברה לינארית. בקורס זה נחקור מרחבים וקטוריים והעתקות עליהם, אבל על מרחבים מורכבים יותר והעתקות מורכבות יותר. נתחיל בשאלה,

תרגיל 1.1 יהי (X, ρ) מרחב מטרי כלשהו, ונניח ש־$A \subseteq X$. נניח גם ש־$(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$.
מהם התנאים ההכרחיים על A כך ש־(a_n) תכלול תת־סדרת קושי?

נעבור לדוגמה וטענות מאינפי 1 לרענן את זכרוננו.

דוגמה 1.1 המרחב המטרי הכי אינטואיטיבי הוא $X = \mathbb{R}$ ו־$\rho(x, y) = |x - y|$.

טענה 1.1 *תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־A חסומה, ותהי $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$, אז יש ל־$(a_n)$ תת־סדרת קושי.*

הוכחה. $A \subseteq [-R, R]$ עבור $R \in \mathbb{R}$. נתחיל בהגדרה של $A = \Delta_0$ ולכן יש אינסוף, ולכן יש בקטע Δ_0 אינסוף נקודות של הסדרה, וכן $|\Delta_0| = 2R$. נבחן את הקטעים החוצים את Δ_0, הם $[-R, 0], [0, R]$, נבחר את זה מביניהם שמכיל אינסוף נקודות של (a_n) להיות Δ_1, וכך נמשיך ונגדיר סדרה (Δ_n). נובע שהסדרה הנתונה היא סדרה יורדת, במובן ש־$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$, מתקיים גם $|\Delta_n| = \frac{|\Delta_0|}{2^n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ובכל Δ_n יש אינסוף נקודות של (a_n). נבחר $a_{n_1} \in \Delta_1$ וכך באופן כללי גם $a_{n_k} \in \Delta_k$, לכן נובע $|a_{n_k} - a_{n_l}| \le \frac{1}{2^k}$ עבור $l \ge k$. לכן נובע שאכן ישנה תת־סדרת קושי בסדרה (a_n). $\square$

הערה טענה זו נכונה גם כאשר מסתכלים על מרחב $(\mathbb{R}^n, \rho)$ עבור $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

הגדרה 1.2 (מרחב נורמי) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ עבור $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ותהי פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ המקיימת,

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0_V$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\forall x, y \in V, \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

אז $(V, \|\cdot\|)$ יקרא מרחב נורמי עם נורמה $\|\cdot\|$.

הגדרה 1.3 (מרחב l2) נגדיר את הקבוצה $l_2 = \{x = (x_1, \dots) \mid \forall k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty\}$. נגדיר גם,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^\infty x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

אז המרחב הנורמי l_2 הוא הקבוצה והנורמה הללו.

נבחין כי עלינו להוכיח שזהו אכן מרחב נורמי לפי ההגדרה.

משפט 1.4 (אי־שוויון קושי־שווארץ) *מתקיים,*

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i| \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

סימון 1.5 נסמן $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

הוכחה. עבור $t \in \mathbb{F}$ סקלר כלשהו,

$$0 \le \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle t^2$$

עובדה ידועה היא $At^2 + Bt + C \ge 0 \implies B^2 - 4AC \le 0$ ולכן,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

ולכן,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

ואם נגדיר $x_i' = |x_i|$ וכן $y_i' = |y_i|$ אז מאי־השוויון הנתון נובע,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i'| \cdot |y_i'| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

□

נעבור להוכחת ההגדרה של l_2, כלומר ההוכחה שהנורמה שהגדרנו היא אכן נורמה.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\implies \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

□

עתה משקיבלנו ש־l_2 הוא אכן מרחב נורמי, נוכל לדון בתכונותיו.

דוגמה 1.2 במרחב $(l_2, \|\cdot\|)$ נגדיר את שפת כדור היחידה במרחב,

$$S = \{x \in l_2 \mid \|x\| = 1\}$$

נבחין כי S קבוצה חסומה ב־l_2. נבחר $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על־ידי $l_n = (0, \dots, 1, \dots)$ כאשר $l_n^n = 1, l_n^m = 0$ לכל $m \neq n$. כמובן מתקיים $\|l_n\| = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן סדרת הנקודות חסומה ב־S.

טענה 1.6 $l_2 \supseteq (l_n)_{n=1}^{\infty}$ *אינה כוללת תת־סדרת קושי.*

הוכחה. נבחין כי $\|l_n - l_m\| = \sqrt{2}$ לכל $n \neq m$. □

סימון 1.7 (כדור) עבור מרחב מטרי (X, ρ), נסמן $B_r(x) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$.

הגדרה 1.8 (קבוצה חסומה לחלוטין) יהי מרחב מטרי (X, ρ) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$, אז נאמר ש־A חסומה לחלוטין (Totally bounded) אם לכל $\epsilon > 0$ קיים מספר סופי של נקודות $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq X$, כך שמתקיים $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\epsilon(x_i)$.

מיד נראה שימוש בהגדרה זו במשפט, ובכך ניתן הצדקה להגדרה הלכאורה משונה הזאת.

משפט 1.9 (שקילות לחסימות לחלוטין) *יהי מרחב מטרי (X, ρ) ותהי $A \subseteq X$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *A חסומה לחלוטין.*
2. *בכל סדרה של A ניתן לבחור תת־סדרת קושי.*

משפט זה הוא משפט חשוב ומרכזי, ועל הקורא לשנן את הוכחתו. את ההוכחה אומנם נראה בהרצאות הבאות, אך נראה עתה שימושים למשפט זה. נעבור למשפט פחות חשוב ומרכזי,

משפט 1.10 (שקילות חסימות במרחבים האוקלידיים) *נניח ש־$X = \mathbb{R}^m$, וכן ש־$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$, אז אם $A \subseteq \mathbb{R}^m$ חסומה, אז היא חסומה לחלוטין.*

הוכחה. נחסום את A על־ידי קובייה מספיק גדולה, נחלק את הקובייה לתת־קוביות מספיק קטנות (ההצדקה מגיעה מאינפי 3), ונוכל לחסום כל קובייה כזו בכדור. נסמן $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}^m$ את מרכזי הקוביות ונקבל $A \subseteq \bigcup_{j=1}^N B_\epsilon(x_j)$ מהגדרת החלוקה של הקובייה החוסמת. $\square$

טענה 1.11 *ב־$(l_2, \|\cdot\|)$ נגדיר את הקבוצה,*

$$\Pi = \{x = (x_1, \dots) \in l_2 \mid \forall i \in \mathbb{N}, |x_i| \le \frac{1}{2^{i-1}}\}$$

אם $x \in \Pi$ אז $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty$, ובהתאם בהכרח $\Pi \subseteq l_2$.
הקבוצה Π חסומה לחלוטין.

הוכחה. תהי $(x_1, \dots) \in \Pi$, ונגדיר $x_n^* = (x_1, \dots, x_n, \dots, 0, 0, \dots)$. נגדיר גם $\Pi_n^* = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \mid |x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}\}$.
הקבוצה Π_n^* חסומה לחלוטין, זאת שכן הקבוצה שקולה לקבוצה ב־$\mathbb{R}^n$, ונבחין כי היא חסומה, ולכן ההוכחה שראינו קודם עודנה תקפה ובהתאם Π_n^* חסומה לחלוטין.
נבחין כי

$$\|x - x_n^*\|^2 = \sum_{i=n+1}^\infty x_i^2 \le \sum_{i=n+1}^\infty \frac{1}{2^{2i-2}} = \sum_{i=n+1}^\infty \frac{4}{4^i} = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$$

ולכן $\|x - x_n^*\| \le \frac{1}{2^{n-1}}$. יהי $\epsilon > 0$, אז Π_n^* חסומה לחלוטין ולכן קיימים $y^1, \dots, y^n \in l_2$ כך שמתקיים,

$$\Pi_n^* \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(y^i)$$

נניח ש־$x_n^* \in B_\epsilon(y^i)$ ונוכל לבחור n כך שמתקיים $\|x - x_n^*\| < \epsilon$, אז

$$\|x - y^i\| \le \|x - x_n^*\| + \|x_n^* - y^i\| < 2\epsilon$$

נובע ש־$\Pi \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{2\epsilon}(y^i)$. $\square$

נבחין כי עתה ראינו שב־l_2 במרחב נורמי יש קבוצות חסומות, זהו אכן מרחב מעניין.

2 שיעור 2 — 2.4.2025

2.1 חסימות לחלוטין

נראה את הוכחתם של שני משפטים שמומלץ לזכור. המשפט הראשון הוא משפט 1.9, בקורס זה נקרא לו משפט האוסדורף, זאת למרות שזהו רק משפט חלקי למשפט המוכר כמשפט בשם זה. נעבור להוכחה.

הוכחה. נניח ש־(X,ρ) מרחב מטרי ו־$A \subseteq X$ חסומה לחלוטין, לכן ניתן לכסות את הקבוצה A על־ידי מספר סופי של כדורים. נניח ש־$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq A$ ונבחר $\epsilon = 1$ התחלתי. מכאן נסיק שקיים כדור $B^1_{\epsilon=1}$ הכולל אינסוף נקודות בסדרה. נגדיר $V^1 = A \cap B^1_{\epsilon=1}$ ונסיק $\operatorname{diam}(V^1) = \sup_{x,y\in V^1} \rho(x,y) \le 2$. אז V^1 כולל מספר אינסופי של נקודות של $\{x_n\}$. אין ספק ש־V^1 חסומה לחלוטין. נפעל עכשיו באופן דומה על $B^1_{\epsilon=1}$, הקבוצה V^1 חסומה לחלוטין ולכן ניתן לכסות אותה על־ידי מספר סופי של כדורים עבור $\epsilon = \frac{1}{2}$. נבחר כדור שמכיל אינסוף נקודות של הסדרה ב־V^1, נסמנו $B^2_{\epsilon=\frac{1}{2}}$, ונגדיר גם $V^2 = V^1 \cap B^2_{\epsilon=\frac{1}{2}}$. הפעם $\operatorname{diam}(V^2) \le 1$ ולכן V^2 חסומה לחלוטין וכוללת מספר אינסופי של נקודות של $\{x_n\}$. נחזור על תהליך זה אינסוף פעמים.

בכתוצאה מהתהליך נקבל $\ldots \supset V^k \supset \cdots \supset V^2 \supset V^1$ וכן ש־$\operatorname{diam}(V^k) \le \frac{2}{k}$, ואף ש־$V^k$ כולל אינסוף נקודות של $\{x_n\}$. נבחר $x_{n_1} \in V^1, x_{n_2} \in V^2, \ldots$ ונקבל תת־סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subseteq A$ כך ש־$\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+l}}) \le \frac{2}{k} \to 0$, זאת שכן $x_{n_k}, x_{n_{k+l}} \in V^k$. קיבלנו אם כן שתת־הסדרה היא קושי.

נעבור לכיוון השני, נניח שלכל סדרה יש תת־סדרת קושי ב־A. נניח בשלילה כי A אינה חסומה לחלוטין, לכן קיים $\epsilon > 0$ עבורו אין כיסוי סופי של כדורים. מספיק להוכיח כי ישנה סדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq A$ שאינה כוללת תת־סדרת קושי. נבחר $x_1 \in A$. לכן נוכל להסיק שקיימת $x_2 \in A$ כך ש־$\rho(x_1,x_2) \ge \epsilon$. נמשיך כך להשתמש באי־החסימות עבור ϵ כדי לבנות סדרה של אינסוף נקודות כאלה, כלומר $\rho(x_n,x_m) \ge \epsilon$ לכל $n,m \in \mathbb{N}$ כך ש־$n \ne m$. לסדרה $\{x_n\}$ אין תת־סדרת קושי, בסתירה להנחה. □

2.2 מרחבים מטריים חשובים

הגדרה 2.1 (מרחב הפונקציות הרציפות) נגדיר את המרחב המטרי $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ עבור $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}$ ו־$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. זהו מרחב נורמי.

הגדרה 2.2 (חסימות במידה אחידה) נניח ש־$\Phi \subseteq C[a,b]$ ונניח שקיים $K > 0$ כך שמתקיים $|\varphi(x)| \le K$ לכל $x \in [a,b]$ ולכל $\varphi \in \Phi$, כאשר K אינו תלוי ב־x, φ. במקרה זה נאמר ש־Φ חסומה במידה אחידה.

דוגמה 2.1 נגדיר $\Phi = \{\sin(nx)\}_{n=1}^\infty$, וידוע כי $|\sin(nx)| \le 1$, אז Φ חסומה לחלוטין.

דוגמה 2.2 נגדיר $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$ עבור $n \in \mathbb{N}$, אז,

$$\forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| < 1$$

ולכן נאמר ש־$\{f_n\}$ חסומה במידה אחידה.

הגדרה 2.3 (רציפות במידה אחידה) באנגלית Eqicontinuous family of functions. נניח ש־$\Phi \subseteq C[a,b]$ עבור כל $\epsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\epsilon)$ (כלומר ערך δ תלוי רק ב־ϵ), כך שמתקיים,

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b], \varphi \in \Phi\ |x_1 - x_2| \le \delta(\epsilon) \implies |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le \epsilon$$

במקרה זה Φ נקראת רציפה במידה אחידה.

דוגמה 2.3 נחזור לדוגמה האחרונה שלנו, ונבדוק אם היא רציפה במידה אחידה,

$$|f_n(\frac{1}{n}) - f_n(0)| = 1$$

ולכן $\{f_n\}$ אינה רציפה במידה אחידה.

טענה 2.4 *נניח ש־$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C[a,b]$. נניח שקיים $K > 0$ כך ש־$|f_n(x)| \le K$ עבור כל $x \in [a,b], n \in \mathbb{N}$. נניח גם ש־$|f_n'(x)| \le K$. אז הקבוצה $\{f_n\}$ חסומה במידה אחידה וגם רציפה במידה אחידה.*

הוכחה. נבחין כי מתקיים, $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \le |f'(y)| \cdot |x_1 - x_2| \le K|x_1 - x_2|$.
לכן ניתן לבחור $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{K}$, והוא לא תלוי בפונקציות או בערכי n. □

3 שיעור 3 — 9.4.2025

3.1 תכונות מרחבי פונקציות

משפט 3.1 (משפט ארצלה) *נניח ש־$\Phi \subseteq (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *לכל סדרה $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Phi$ קיימת תת־סדרת קושי. כלומר קיימת $\{f_{n_k}\}$ כך ש־$\|f_{n_k} - f_{n_{k+l}}\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$ עבור כל $l \in \mathbb{N}$.*
2. *Φ חסומה במידה אחידה ורציפה במידה אחידה.*

הוכחה. בכיוון הראשון נניח שלכל סדרה יש תת־סדרת קושי. ממשפט 1.9 נסיק ישירות ש־Φ חסומה לחלוטין. נבחר $\epsilon > 0$ ולכן $\Phi \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(f_i)$. תהי $\varphi \in \Phi$, אז קיים $1 \le i \le N$ כך ש־$\varphi \in B_\epsilon(f_i)$,

$$\|\varphi\|_\infty = \|\varphi - f_i + f_i\|_\infty \le \|\varphi - f_i\|_\infty + \|f_i\|_\infty \le \epsilon + \|f_i\|_\infty$$

מסדרות קושי נוכל להסיק שקיימים,

$$\forall x \in [a,b],\ |f_1(x)| \le K_1, \dots, |f_N(x)| \le K_N$$

ולכן נגדיר $K = \max\{K_1, \dots, K_N\}$, לכן מתקיים $\|\varphi\|_\infty \le \epsilon + K$, נובע ש־$\Phi$ חסומה במידה אחידה.

נעבור להוכחת רציפות במידה שווה.

הפונקציות $f_1, \dots, f_N$ רציפות בקטע $[a,b]$, לכן רציפות בו במידה שווה, ונובע שקיימים $\delta_1(\epsilon), \dots, \delta_N(\epsilon) > 0$ כך שמתקיים,

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \le \delta_i(\epsilon) \implies |f_i(x) - f_i(y)| \le \epsilon$$

נגדיר $\delta = \min\{\delta_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. קיים $i \in \{1, \dots, N\}$ כך ש־$\varphi \in B_\epsilon(f_i)$, לכן,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \overbrace{|\varphi(x) - f_i(x)|}^{\le \|\varphi - f_i\|_\infty} + \overbrace{|f_i(x) - f_i(y)|}^{\le \epsilon} + \overbrace{|f_i(y) - \varphi(y)|}^{\le \|\varphi - f_i\|_\infty}$$

נניח גם ש־$|x-y| \le \delta(\epsilon)$ ולכן,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon),\ |x-y| \le \delta(\epsilon) \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| \le 3\epsilon$$

כלומר, מצאנו רציפות במידה שווה.

נעבור עתה לכיוון השני, נניח ש־Φ חסומה ורציפה במידה שווה. יהי $\epsilon > 0$ ו־$\delta(\epsilon) > 0$ כך שמתקיים,

$$|x-y| \le \delta(\epsilon) \implies \forall \varphi \in \Phi,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \le \epsilon$$

נגדיר את הסדרות כך ש־$y_{i+1} - y_i \le \epsilon$ וכן סדרה כך ש־$x_{i+1} - x_i \le \delta(\epsilon)$, ונגדיר גם $x_0 = a, x_n = b$ וכן $y_0 = -K, y_m = K$. ברור כי אכן קיימות סדרות סופיות כאלה, ונבחן את הנקודות האלה כמשרות חלוקה על החלק המתאים במישור. המטרה שלנו היא לחלק את הגרף של φ תוך שימוש בתיבות שהגדרנו. נגדיר את הפונקציה ψ כך שהיא עוברת דרך נקודות בתיבות הללו כך שהיא מקרבת את גרף ϕ אך קטנה ממנה תמיד, כלומר נבחר את החיתוכים $\varphi(x_i)$ ואת הנקודות y_i הגדולות ביותר שמתחת לנקודות אלה. עתה נבדוק את $\|\varphi - \psi\|_\infty$ עבור $x \in [a,b]$,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(x) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| + |\psi(x_i) - \psi(x)| \le \epsilon + \epsilon + |\psi(x_i) - \psi(x_{i+1})| \le 2\epsilon + 3\epsilon$$

כלומר קיבלנו ש־$\|\varphi - \psi\|_\infty \le 5\epsilon$, כלומר ניתן לחסום $\Psi \subseteq \bigcup_{\psi \in \Gamma} B_{5\epsilon}(\psi)$ עבור Γ קבוצת המצולעים שעוברים דרך הנקודות ברשת שהגדרנו, כלומר זוהי קבוצה סופית. □

הגדרה 3.2 (מרחב מטרי שלם) מרחב מטרי (X, ρ) יקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת לנקודה במרחב המטרי.

משפט 3.3 (שלמות מרחב הפונקציות הרציפות) *המרחב $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ הוא מרחב מטרי שלם.*

הוכחה. תהי סדרה $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C[a,b]$ ונניח כי סדרה זו היא סדרת קושי. כלומר

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n, m \ge N(\epsilon) \|f_n - f_m\|_\infty \le \epsilon$$

נובע שלכל $x \in [a,b]$ גם $|f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon$, זאת מהגדרת הנורמה על מקסימום. אם נבחר $x \in [a,b]$ אז $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, כלומר זוהי סדרת ממשיים ומשלמות הממשיים והעובדה כי זוהי סדרת קושי נסיק שקיים $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = y_x$. לכל x נגדיר $f(x) = y_x$, כלומר נבנה פונקציה שמתקבלת מהנקודות הגבוליות של סדרת הפונקציות. כאשר $m \to \infty$ מתקיים,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon),\ \forall x \in [a,b],\ |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$$

ולכן,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \forall n \geq N(\epsilon), \forall x \in [a,b], \max |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

אז נובע ש־$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ כפי שרצינו. $\square$

ניזכר במשפט שאנו כבר יודעים

משפט 3.4 (משפט ויירשטראס להתכנסות במידה שווה) *אם* $\{f_n\}_{n=1}^\infty C[a,b]$*, ו־*$f_n \rightrightarrows f$ *(כלומר הסדרה מתכנסת במידה שווה) אז* f *רציפה.*

ונראה משפט שקשור אליו וחשוב לא פחות.

משפט 3.5 (שלמות l2) *המרחב המטרי* $(l_2, \|\cdot\|)$*, שנזכיר שמוגדר על־ידי,*

$$l_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \,\middle|\, \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty \right\}, \qquad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^\infty x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

הוא מרחב מטרי שלם.

הוכחה. תהי סדרה $\{x^n\}_{n=1}^\infty \subseteq l_2$, ונניח שזוהי סדרת קושי. אז אנו יודעים כי,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \forall n, m \geq N(\epsilon), \|x^n - x^m\|^2 \leq \epsilon \implies \sum_{i=1}^\infty (x_i^n - x_i^m)^2 \leq \epsilon^2$$

נשתמש בתנאי ההכרחי להתכנסות בהחלט של טורים ממשיים ונקבל שעובר כל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon),\ (x_i^n - x_i^m)^2 \leq \epsilon^2$$

אם נקבע i אז נקבל סדרה $\{x_i^n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$ סדרת קושי, ונגדיר $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$. נגדיר את הסדרה $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$. נקבל שמתקיים $(x_i^n - x_i)^2 \leq \epsilon^2$ לכל $n > N(\epsilon)$ ולכל $i \in \mathbb{N}$. נבחר M כלשהו, אז מתקיים,

$$\sum_{i=1}^M (x_i^n - x_i^m)^2 \leq \epsilon^2$$

ונובע,

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^M (x_i^n - x_i^m)^2 = \sum_{i=1}^M (x_i^n - x_i)^2 \leq \epsilon^2$$

אז מתקיים,

$$\sum_{i=1}^\infty (x_i^n - x_i)^2 \leq \epsilon^2$$

בהתאם מתקיים, $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|^2 = 0$, נבדוק,

$$\sum_{i=1}^\infty x_i^2 = \sum_{i=1}^\infty (x_i - x_i^n + x_i^n)^2 = 2\sum_{i=1}^\infty (x_i - x_i^n)^2 + 2\sum_{i=1}^\infty (x_i^n)^2 < \infty$$

כלומר מצאנו סדרה גבולית והוכחנו שהיא במרחב שלנו. $\square$

מסקנה 3.6 נניח ש־$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C[a,b]$ סדרה חסומה במידה שווה ורציפה במידה שווה, אז קיימת תת־סדרה $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subseteq \{f_n\}$ שמתכנסת במידה שווה לפונקציה $f \in C[a,b]$.

משפט 3.7 (אנלוגי למשפט ארצלה ל־l2) *נניח ש־*$\Phi \subseteq l_2$*, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. Φ *חסומה לחלוטין*
2. (a) *קיים* $K > 0$ *כך ש־*$\|\varphi\| \leq K$ *לכל* $\varphi \in \Phi$*, כלומר* Φ *חסומה*

   (b) $\lim_{M\to\infty} \left(\sup_{x\in\Phi} \sum_{i=M}^\infty x_i^2 \right) = 0$

ננסה להבין את התנאי שהרגע הגדרנו,

דוגמה 3.1 נגדיר את $S \subseteq l_2$ על־ידי $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$. ב־S נמצאות הסדרות $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ כאשר $e_n^n = 1$ בלבד. בהתאם מתקיים $\sup_{x\in S} \sum_{i=M}^\infty x_i^2 = 1$, לכן התנאי השני לא מתקיים ובהתאם לא יתכן ש־S חסומה לחלוטין.

דוגמה 3.2 נגדיר את $H = \{x \in l_2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\}$. הפעם נקבל,

$$\sum_{i=M}^{\infty} x_i^2 = \sum_{i=M}^{\infty} \frac{1}{4^{i-1}} = \frac{4}{4^M} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \xrightarrow{M\to\infty} 0$$

ולכן התנאי השני עבור חסימות לחלוטין מתקיים.

4 שיעור 4 — 23.4.2025

4.1 תכונות מרחבי סדרות

נסיים את הפרק הזה בתכונות חשובות במרחב $(l_2, \|\cdot\|)$ עליו דנו בשיעורים הקודמים.

משפט 4.1 (משפט ארצלה ל־l2) *נניח ש־$K \subseteq l_2$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *K חסומה לחלוטין*
2. (a) *הקבוצה K חסומה במרחב המטרי $(l_2, \|\cdot\|)$, ו*
   (b) $\lim_{M\to\infty} \sup_{x\in K} \sum_{j=M}^{\infty} x_j^2 = 0$

לפני שניגש להוכחת המשפט, נוכיח טענה כללית שתעזור לנו.

טענה 4.2 *נניח ש־(X, ρ) מרחב ממטרי כלשהו ונניח ש־$Q \subseteq X$ חסומה לחלוטין. אז Q היא חסומה ב־(X, ρ).*

הוכחה. תהי נקודה $x_0 \in X$, Q חסומה לחלוטין ולכן $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(x_i)$ עבור $N \in \mathbb{N}$ ו־$x_1, \dots, x_N \in X$.
נגדיר $R = \max\{\rho(x_0, x_1), \dots, \rho(x_0, x_N)\}$. אם $q \in Q$ אז $q \in B_\epsilon(x_i)$ עבור איזשהו i, נובע שגם,

$$\rho(q, x_0) \le \rho(q, x_i) + \rho(x_i, x_0) \le \epsilon + R$$

לכל $q \in Q$, נסיק שמתקיים $\rho(q, x_0) \le R + \epsilon$. □

נעבור להוכחת המשפט.

הוכחת המשפט. $2 \implies 1$, טענה (a) נובעת מיד מהטענה שהוכחנו זה עתה. נעבור להוכחת (b). יהי $\epsilon > 0$, K קבוצה חסומה לחלוטין, ב־l_2 ולכן,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(x^n)$$

נבחין כי,

$$\sum_{j=1}^\infty \left(x_j^1\right)^2 < \infty, \dots, \sum_{j=1}^\infty \left(x_j^N\right)^2 < \infty$$

אז קיימים $M_1, \dots, M_N$ התלויים ב־ϵ בלבד כך שמתקיים,

$$\sum_{i=M_1}^\infty \left(x_i^1\right)^2 \le \epsilon, \dots, \sum_{i=M_N}^\infty \left(x_i^N\right)^2 \le \epsilon$$

עבור $x = (x_1, \dots) \in K$ מתקיים $x \in B_\epsilon(x^n)$ וכן $\|x - x^n\|^2 \le \epsilon^2 \le 2\epsilon$ ולכן,

$$\sum_{i=M}^\infty x_i^2 = \sum_{i=M}^\infty (x_i - x_i^n + x_i^n)^2 \le 2\sum_{i=M}^\infty (x_i - x_i^n)^2 + 2\sum_{i=M}^\infty (x_i^n)^2$$

אז,

$$\forall \epsilon > 0, \exists M, \forall x \in K, \ \sum_{i=M}^\infty x_i^2 \le 2\epsilon^2 + 2\epsilon$$

ולכן למעשה מצאנו שמתקיים,

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{x\in K} \sum_{i=M}^\infty x_i^2 = 0$$

$1 \implies 2$, נניח ש־K חסומה וכן שקיים הגבול (b). יהי $\epsilon > 0$ ונבחר M כך שמתקיים,

$$\sup_{x\in K} \sum_{i=M}^\infty x_i^2 \le \epsilon^2$$

ולכן בפרט לכל $x \in K$, מתקיים $\sum_{i=M}^\infty x_i^2 \le \epsilon^2$ נגדיר $\pi_M : K \to \pi_M(K) \subseteq \left(\mathbb{R}^M\right)^\circ$ על־ידי $\pi_M(x) = (x_1, \dots, x_M, 0, \dots)$. אז $\pi_M(K)$ חסומה ב־$\mathbb{R}^M$ ולכן $\pi_M(K)$ חסומה לחלוטין ב־$\mathbb{R}^M$. נעיר שבמקרה זה $\mathbb{R}^M = \{(x_1, \dots, x_M, 0, \dots)\}$.

נובע שקיימים $y^1,\dots,y^N\in(\mathbb{R}^M)^\circ$ כך שמתקיים,

$$\pi_M(K)\subseteq\bigcup_{n=1}^N B_\epsilon(y^n)$$

אז אם $x\in K$, מתקיים $\pi_M(x)\in B_\epsilon(y^n)$, נסיק,

$$\|x-y^n\|^2=\sum_{i=1}^M(x-y_i^n)^2+\sum_{i=M+1}^\infty x_i^2\le\|\pi_M(x)-y^n\|^2+\epsilon^2\le2\epsilon^2$$

בהתאם נובע ש־$K\subseteq\bigcup_{n=1}^N B_{\sqrt{2}\epsilon}(y^n)$. □

4.2 קירובים

בעולם של אנליזה פונקציונלית עלינו למצוא דרך לקרב פונקציות מורכבות על־ידי פונקציות פשוטות יותר, זאת כדי שנוכל לעבוד במרחבים ההרבה יותר מורכבים שבהם וקטור הוא פונקציה. עוד משהו שחשוב שנוכל לעשות הוא לקרב במידה שווה את הפונקציות, זאת שכן קירוב נקודתי לא מספר לנו מספיק על הפונקציות.

משפט 4.3 (משפט הקירוב של ויירשטראס) *לכל $f\in C[0,1]$ קיימת סדרת פולינומים $(P_n)_{n=1}^\infty$ כך שמתקיים $P_n\rightrightarrows f$.*

הוכחה. נתחיל ברידוד של הבעיה, נניח ש־$g(x)=f(x)-f(0)-x(f(1)-f(0))$, אז נובע ש־$f(x)=g(x)+f(0)+x(f(1)-f(0))$, אך החלק המוסף הוא פולינום, ולכן נוכל לבחון את הקירוב ל־g בלבד. נקבל שנוכל להניח ללא הגבלת הכלליות ש־$f(0)=f(1)=0$.
נגדיר פונקציה חדשה,

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & x\in[0,1]\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus[0,1]\end{cases}$$

פונקציה זו מוגדרת על הממשיים והיא רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$ בשל ההנחה שעשינו.
לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-y|\le2\delta$ אז $|F(x)-F(y)|\le\epsilon$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$. בשלב הבא נגדיר את סדרת הפולינומים שלנו,

$$P_n(x)=\int_{-1}^1F(x+u)Q_n(u)\,du$$

כאשר $Q_n(u)=C_n(1-u^2)^n$ כאשר C_n קבוע מנרמל כך שיתקיים $\int_{-1}^1Q_n(u)\,du=1$.
נבחין כי $F(x+u)\ne0$ כאשר $x+u\in[0,1]$, או בהתאם כאשר $u\in[-x,1-x]$. נשתמש בהגדרת התומך ונקבל שמתקיים,

$$P_n(x)=\int_{-x}^{1-x}F(x+u)Q_n(u)\,du=\int_0^1F(t)Q_n(t-x)\,dt$$

אבל Q_n פולינום ונסיק שגם P_n פולינום (מדוע?). נבחין כי,

$$\begin{aligned}&|P_n(x)-F(x)|\\&=\left|\int_{-1}^1F(x+u)Q_n(u)\,du-\int_{-1}^1F(x)Q_n(u)\,du\right|\\&\le\int_{-1}^1|F(x+u)-F(x)|Q_n(u)\,du\\&\le\int_{-1}^{-\delta}|F(x+u)-F(x)|Q_n(u)\,du+\int_{-\delta}^{\delta}|F(x+u)-F(x)|Q_n(u)\,du+\int_{\delta}^1|F(x+u)-F(x)|Q_n(u)\,du\end{aligned}$$

נסמן את שלושת האינטגרלים הללו I_1,I_2,I_3 בהתאמה, ונבדוק,

$$I_2\le\epsilon\int_{-\delta}^{\delta}Q_n\,du\le\epsilon\int_{-1}^1Q_n(u)\,du\le\epsilon$$

עבור I_3, אנו יודעים ש־F חסומה ונסמן $|F(x)|\le M$ עבור $M>0$ כלשהו, אז,

$$I_3\le2M\int_\delta^1Q_n(u)\,du=2MC_n\int_\delta^1(1-u^2)^n\,du\le2MC_n(1-\delta^2)^n(1-\delta)\le2MC_n(1-\delta^2)^n$$

נרצה להעריך את C_n,
$$C_n \int_{-1}^{1} \left(1-u^2\right)^n \, du = 1$$
אז,
$$\int_{-1}^{1} \left(1-u^2\right)^n \, du \ge \int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1-u^2\right)^n \, du = 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1-u^2\right)^n \, du \ge 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 1-u^2 \, du = 2\left[\frac{1}{\sqrt{n}} - n\frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
ולכן נסיק ש־$C_n \le \sqrt{n}$. בהתאם נקבל חסם ל־I_3 ומטעמי סימטריה גם ל־I_1, ונוכל להסיק שלכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שמתקיים,
$$|F(x) - P_n(x)| \le \epsilon + 4M\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
כלומר קיים $M_0 > 0$ כל ש־$|F(x) - P_n(x)| \le 2\epsilon$ לכל $x \in \mathbb{R}, n > M_0$, ולכן $P_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$ ובפרט $P_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$ כפי שרצינו. □

הגדרות ומשפטים