פתרון מטלה 5 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

2 בדצמבר 2025

שאלה 1

יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{F}$.

סעיף א׳

נראה שלכל $l^1, l^2 \in V^\vee$ ולכל $c \in \mathbb{F}$ מתקיים,

$$(l^1 + l^2)(cv) = c(l^1 + l^2)(v)$$

הוכחה. נבחין תחילה ש־$l^i : V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי ולכן העתקה לינארית ובהתאם $l^i(cv) = cl^i(v)$. מתקיים גם $l^1 + l^2 \in V^\vee$ ולכן זו העתקה לינארית גם כן, וקיבלנו את הטענה. □

סעיף ב׳

נניח ש־$l \in V^\vee$ וכן $c \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V$, ונראה שמתקיים,

$$(cl)(v_1 + v_2) = (cl)(v_1) + (cl)(v_2)$$

הוכחה. מהגדרה $cl(u) = l(cu)$ לכל $u \in V$, ולכן בפרט גם,

$$(cl)(v_1 + v_2) = l(c(v_1 + v_2)) = l(c(v_1)) + l(c(v_2)) = (lc)(v_1) + (lc)(v_2)$$

ומצאנו שהטענה חלה. □

שאלה 2

תהי S קבוצה לא ריקה ו־$V = \mathcal{F}(S) = \{f : S \to \mathbb{F}\}$ מרחב הפונקציות. יהיו $s_0 \in S$ ו־$\mathrm{eval}_{s_0} : \mathcal{F}(S) \to \mathbb{F}$ המוגדרת על־ידי $\mathrm{eval}_{s_0}(f) = f(s_0)$ לכל $f \in \mathcal{F}(S)$.

נראה שלכל f ו־$c \in \mathbb{F}$ מתקיים $\mathrm{eval}_{s_0}(cf) = c\,\mathrm{eval}_{s_0}(f)$.

הוכחה.

$$\mathrm{eval}_{s_0}(cf) = (cf)(s_0) = c \cdot f(s_0) = c\,\mathrm{eval}_{s_0}(f)$$

והטענה אכן חלה. □

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$.

סעיף א׳

יהי $v \in V$, נוכיח ש־$v = 0$ אם ורק אם לכל $l \in V^\vee$ מתקיים $\langle l, v \rangle = 0$.

הוכחה. נניח ש־$v = 0$ ויהי $l \in V^\vee$, כלומר $l : V \to \mathbb{F}$ העתקה לינארית. אז מתקיים $l(v) = 0$ מהגדרת ההעתקה הלינארית.

לכיוון ההפוך נניח שלכל $l \in V^\vee$ מתקיים $l(v) = 0$ ונניח בשלילה ש־$v \neq 0$. נרחיב את (v) לבסיס $\mathcal{B} = (v, b_2, \ldots, b_n)$ הפורש את V. בהתאם קיימת העתקה לינארית $l : V \to \mathbb{F}$ כך שמתקיים $l(v) = 1$, אבל $l \in V^\vee$ ולכן $\langle l, v \rangle = 0 \neq 1$ בסתירה. $\square$

סעיף ב׳

יהי $l \in V^\vee$, נוכיח ש־$l = 0$ אם ורק אם לכל $v \in V$ מתקיים $\langle l, v \rangle = 0$.

הוכחה. נניח ש־$l = 0$, אז בהגדרה $\langle l, v \rangle = l(v) = 0$ לכל v.

נניח ש־$\langle l, v \rangle = 0$ לכל $v \in V$ ונניח ש־$l \neq 0$, לכן קיים $u \in \operatorname{Im} l$ כך ש־$u \neq 0$ וכן $l(u) \neq 0$ בסתירה. $\square$

שאלה 4

נראה שלכל $W \leq V^\vee$ מתקיים,

$$\dim_{\mathbb{F}} W + \dim_{\mathbb{F}} W_0 = \dim_{\mathbb{F}} V$$

הוכחה. הגדרנו $W_0 = \{v \in V \mid \forall l \in W,\ l(v) = 0\}$. נניח ש-$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ בסיס של V וכן נסמן $\mathcal{B}^\vee = (b^1, \ldots, b^n)$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$(b^1, \ldots, b^k)$ עם $k \leq n$ הוא בסיס סדור של W. אז מהגדרה מתקיים $l(b^i) = 0$ לכל $l \in W$ ו-$k < i \leq n$, ולכן $b_i \in W_0$. באופן דומה נסיק ש-$b_i \notin W_0$ לכל $i \leq k$ שכן קיים עד לכך ש-$b^i \in W$. קיבלנו אם כך ש-$(b_{k+1}, \ldots, b_n)$ בסיס סדור של W_0. $\square$

שאלה 5

נראה שלכל $L \subseteq V^\vee$ ו־$S \subseteq V$ מתקיים $L_0 \leq V$, $S^0 \leq V^\vee$.

הוכחה. הגדרנו $S^0 = \{l \in V^\vee \mid \forall v \in S,\ l(v) = 0\}$. אם $l, m \in S^0$ אז $(l+m)(v) = l(v) + m(v) = 0 + 0$ לכל $v \in S$, ונוכל להסיק ש־$l + m \in S^0$ גם כן. באופן דומה נוכל להראות שגם $cl \in S^0$ לכל $c \in \mathbb{F}$ ו־$l \in S^0$, לכן S^0 מרחב וקטורי, וכמובן $S^0 \subseteq V^\vee$ ולכן $S^0 \leq V^\vee$. ההוכחה עבור L_0 היא זהה. $\square$

שאלה 6

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$.

סעיף א׳

נראה שאם $U \leq V$ אז $U \subseteq \left(U^0\right)_0$ ונסיק שוויון.

הוכחה. תהי $u \in U$ ותהי $l \in U^0$, אז $l(u) = 0$ מהגדרה, אבל l שרירותי ולכן $u \in \left(U^0\right)_0$ ונסיק $U \subseteq \left(U^0\right)_0 \subseteq U$ ובהתאם יש שוויון. $\square$

סעיף ב׳

נראה שאם $L \leq V^\vee$ אז $L \subseteq \left(L_0\right)^0$ ונסיק שוויון.

הוכחה. באופן דומה לסעיף הקודם נניח ש־$l \in L$ ויהי $v \in L_0$, אז נובע ש־$l(v) = 0$ ולכן $L \subseteq \left(L_0\right)^0$. $\square$

סעיף ג׳

יהיו $U_1, U_2 \leq V$, נראה ש־$U_1 = U_2$ אם ורק אם $U_1^0 = U_2^0$.

הוכחה. נניח ש־$U_1^0 = U_2^0$. נניח ש־$l \in U_1^0$, אז $l(v) = 0$ לכל $v \in U_2^0 = U_1^0$ ולכן $l \in U_2^0$, ומטעמי סימטריה הטענה נובעת.
הצד השני נובע מסעיף א׳. $\square$

סעיף ד׳

עבור $W^1, W^2 \leq V^\vee$ נוכיח ש־$W^1 = W^2$ אם ורק אם $W_0^1 = W_0^2$.

הוכחה. נפעל באופן שקול לסעיף הקודם. נניח ש־$W^1 = W^2$ ויהי $v \in W_0^1$, אז לכל $l \in W^2$ מתקיים $l(v) = 0$ ולכן $v \in W_0^2$ וקיבלנו שוויון האפסים.
בכיוון ההפוך הטענה נובעת ישירות מסעיף ב׳. $\square$

שאלה 7

יהיו $S_1, S_2 \leq V$ ונראה ש-$(S_1 + S_2)^0 = S_1^0 \cap S_2^0$.

הוכחה. $\square$