פתרון מטלה 06 — מבוא לטופולוגיה, 80516

15 במאי 2025

שאלה 2

סעיף א׳

יהיו מרחבים טופולוגיים X, Y כך ש־X קומפקטי ו־Y האוסדורף. נניח גם כי $f : X \to Y$ רציפה. נראה ש־f העתקה סגורה.

הוכחה. נבחין כי $f(X)$ היא תת־קבוצה קומפקטית של Y. אם קיימים $y \in Y \setminus f(X)$ אז הם לא משפיעים על הרציפות של f או על תכונת האוסדורף, לכן נניח ללא הגבלת הכלליות ש־$f(X) = Y$. נניח ש־$C \subseteq X$ סגורה, אז היא קומפקטית, לכן גם $f(C)$ קומפקטית, וכן $f(C)$ האוסדורף, ולכן גם סגורה. $\square$

סעיף ב׳

יהיו מרחבים טופולוגיים X, Y כך ש־X קומפקטי ו־Y האוסדורף. נניח ש־$f : X \to Y$ היא רציפה וחד־חד ערכית. נראה ש־f היא הומיאומורפיזם בין X והתמונה $f(X) \subseteq Y$.

הוכחה. כמו בסעיף הקודם מטעמי פשטות נניח ש־$f(X) = Y$, נוכל אחרת להגדיר $Y' = f(X)$ וההוכחה תישאר זהה. נובע אם כך ש־f חד־חד ערכית ועל Y, ורציפה. אז נובע ממשפט מההרצאה שאכן f הומיאומורפיזם. $\square$

שאלה 3

בשאלה זו נדון בקבוצת קנטור. נגדיר את C להיות קבוצת קנטור.

סעיף ב׳

נגדיר את הפונקציה $f:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to C$ על־ידי,

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2s_n}{3^{n+1}}$$

נוכיח ש־f חד־חד ערכית ועל.

הוכחה. נזכור שהגדרנו את $C=\bigcap_{n=0}^{\infty}C_n$ עבור $C_{n+1}=\frac{1}{3}C_n\cup(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_n)$, וכן אנו יודעים כי $x\in C_n$ אם ורק אם אפשר לכתוב אותו בפיתוח טרינרי ללא הספרה 1 ב־n הספרות הראשונות.

נראה חד־חד ערכיות. נניח ש־$s,s':\mathbb{N}\to\{0,1\}$ כך ש־$s\neq s'$, ונניח ש־$m\in\mathbb{N}$ מעיד על כך, כלומר $s(m)\neq s'(m)$. נניח גם ללא הגבלת הכלליות ש־$s(m)=0<1=s'(m)$. אז מהגדרת f נקבל ש־$f(s')-f(s)\geq\frac{1}{3^{m+1}}$, כאשר אי־השוויון נקבע בשל הייצוג הטרינרי של המספרים ואי־יחידות הייצוג. נסיק מאי־השוויון שבפרט $f(s)\neq f'(s)$.

נבדוק על. נניח ש־$x\in C$ ונניח ש־$x=0.x_1x_2\dots$ ייצוג טרינרי, כלומר $x_i\in\{0,1,2\}$ לכל $i\in\mathbb{N}$. נגדיר $s:\{0,1\}\to\mathbb{N}$ על־ידי $s(n)=\frac{x_n}{2}$ לכל n. נבחין כי כמסקנה מהעובדה $x_i\in\{0,2\}$ בלבד, ולכן גם $\frac{x_i}{2}\in\{0,1\}$ בלבד. מהגדרת הייצוג הטרינרי והגדרת f, מתקיים $f(s)=0.x_1x_2\ldots=x$ כפי שרצינו. $\square$

סעיף ג׳

נראה ש־f הומיאומורפיזם ממרחב מהכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ עם טופולוגיית מכפלה מעל טופולוגיה דיסקרטית.

הוכחה. נראה ש־$f^{-1}:C\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ רציפה. נניח ש־$U\subseteq\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ פתוחה, ונניח ש־m אינדקס שאחריו $U_n=\{0,1\}$ לכל $n>m$. כלומר לכל $x\in(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)$ נסיק ש־$B_{\frac{1}{3^m}}(x)\subseteq f(U)$. זהו כמובן איחוד סופי של קבוצות פתוחות ולכן נסיק ש־$f(U)$ פתוחה, ולכן f^{-1} רציפה.

נבחין כי $C=\bigcap_{n=0}^{\infty}C_n$ עבור $C_n\subseteq[0,1]$ סגורה ולכן C סגורה וחסומה ולכן קומפקטית. נבחין גם כי טופולוגיה דיסקרטית תמיד גוררת האוסדורף, וכן מכפלת מרחבים משמרת תכונת האוסדורף, ולכן $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ מרחב האוסדורף. נסיק על־ידי שאלה 2 סעיף ב׳ ש־f הומיאומורפיזם. $\square$

סעיף ד׳

נוכיח שקבוצת קנטור היא בלתי קשירה לחלוטין, דהינו רכיבי הקשירות שלה הם יחידונים.

הוכחה. ראינו בהרצאה שאם f רציפה אז תמונת קבוצה קשירה היא קשירה, נרחיב את הטענה לשני הכיוונים ונקבל שקבוצה $U\subseteq\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ היא קשירה אם ורק אם $f(U)\subseteq C$ קשיר.

אם כך מספיק להראות שכל יחידון הוא רכיב קשירות ב־$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. יהי $s:\mathbb{N}\to\{0,1\}$, ותהי $s\subseteq U$ סביבה פתוחה שלו. אז נבחר את הצמצום $U_1=U\cap\{f:\mathbb{N}\to\{0,1\}\mid f(m)=s(m)\}$ ל־m שרירותי כך ש־$U_1\subsetneq U$. לכן נוכל להסיק ש־U לא קשיר ובפרט לא רכיב קשירות של s. נסיק שרכיב הקשירות U של s מקיים $\forall f\in U,\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)=s(n)$, ובהכרח $U=\{s\}$. $\square$

שאלה 4

סעיף א׳

נראה ש־$\mathbb{R}$ קומפקטי מקומית.

הוכחה. תהי $x \in \mathbb{R}$, אז נבחר $C_x = [x-1, x+1]$, נבחין כי $x \in (x-1, x+1) \subseteq C_x$, כלומר זוהי קבוצה סגורה המכילה סביבה פתוחה של x. אנו יודעים כי $\mathbb{R}$ מרחב מטרי, ולכן קומפקטיות שקולה במרחב זה לסגירות וחסימות, ואכן C_x חסומה וסגורה, ולכן קומפקטית. $\square$

סעיף ב׳

בכל תת־סעיף נגדיר מרחב ונראה שהוא לא קומפקטי מקומית.

i

נבחן את $\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

הוכחה. נראה ש־$\mathbb{Q}$ לא קומפקטי מקומית בסביבת q. נניח ש־$q \in U \subseteq K$ עבור U פתוחה ו־K קומפקטית. K קומפקטית במרחב מטרי ולכן גם קומפקטי סדרתית. יהי $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ כך ש־a פנימי לקטע $\overline{K}$ מעל הממשיים, ונגדיר איזושהי סדרת נקודות $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$ כך ש־$q_n \to a$. נקבל ש־$a \in K$ בסתירה ל־$a \notin \mathbb{Q}$. $\square$

ii

נגדיר את המרחב $X = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}^2$.

הוכחה. הכדור הסגור $\overline{B}_1((1,1)) \subseteq \mathbb{R}^2$ משרה קבוצה סגורה $C \subseteq X$. נבחין כי בעוד ש־$(0,1) \in \overline{B}_1((1,1))$, זהו לא המצב ב־$C$. אם נניח ש־$X$ קומפקטי מקומית אז בפרט הוא קומפקטי בקבוצה סגורה וחסומה כדוגמת C, כלומר C קומפקטית, ולכן גם קומפקטית סדרתית. נגדיר את הסדרה $C \supseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ על־ידי $x_n = (\frac{1}{n}, 1)$. זוהי סדרה מתכנסת ב־$\mathbb{R}^2$ ולכן יש לה גבול יחיד, אבל ב־X היא לא מתכנסת ובפרט אין לה אף גבול חלקי, בסתירה לקומפקטיות סדרתית. $\square$

סעיף ג׳

נגדיר את המרחב X^I כאשר I אינסופית ו־X מרחב לא קומפקטי אך שייתכן שקומפקטי מקומית.

הוכחה. מטרתנו היא לבנות כיסוי שלא ניתן לצמצום לתת־כיסוי סופי על־ידי בחינת קורדינטה שרירותית. תהי $f \in X^I$ נקודה כלשהי, ונניח גם ש־$f \in U$ פתוחה, ונראה שכל $U \subseteq K$ היא לא קומפקטית. אנו יודעים כי U פתוחה ולכן קיימת $I_0 \subseteq I$ סופית כך שלכל $\alpha \in I \setminus I_0$, $U_\alpha = X$, בפרט גם $K_\alpha = X$. נניח ש־$\{U^\beta\}_{\beta \in J} \subseteq X$ כיסוי פתוח של K, עבור J קבוצת אינדקסים אינסופית, ונגדיר

$$V_\delta^\beta = \prod_{\gamma \in I} \begin{cases} U_\gamma^\beta & \gamma \neq \alpha \\ W^\delta & \gamma = \alpha \end{cases}$$

כאשר $\{W^\delta\}_{\delta \in \mathbb{N}} \subseteq X$ כיסוי פתוח שאינו ניתן לצמצום לתת־כיסוי סופי (המעיד על X לא קומפקטית). לכן $\{V_\delta^\beta\}_{\delta \in \mathbb{N}, \beta \in J} \subseteq X^I$ הוא כיסוי פתוח של K, אבל אין לו תת־כיסוי סופי, אחרת בפרט יש תת־כיסוי סופי ל־X. $\square$