פתרון מטלה 06 — אנליזה על יריעות, 80426

13 במאי 2025

שאלה 1

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ותהי $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ כך ש־$(\varphi(U), \varphi)$ היא יריעה פרמטרית רגולרית k־מימדית. נראה שלכל $x_0 \in U$ קיימת סביבה $x_0 \in U' \subseteq U$ כך ש־$\varphi(U')$ היא יריעה.

הוכחה. יהי $x_0 \in U$ ונניח ש־U' סביבה פתוחה $U' \subseteq U$ בה $\varphi \mid_{U'}$ היא רגולרית אף היא (נבחין כי אנו יכולים לבחור $U' = U$ בחלק נרחב מהמקרים), וכן חד־חד ערכית, אנו יודעים שקיימת כזו מהגדרת הרגולריות. כדי להראות ש־$\varphi(U')$ היא יריעה, עלינו להראות שלכל בחירת $x \in \varphi(U')$ נוכל לבחור את U' כסביבה פתוחה בה יש פרמטריזציה מקומית. תהי $x \in \varphi(U')$ כזו, ונבחר את $\varphi_0 = \varphi \mid_{U'}$, נראה כי היא אכן פרמטריזציה. $x \in \varphi_0(U')$ ישירות מבחירת הסביבה, ולכן עלינו רק להראות ש־φ_0 היא חד־חד ערכית, על ופתוחה, נבחין כי היא חלקה כצמצום של פונקציה חלקה, ורגולרית מאותה הסיבה. הגדרנו את U' כך שיתקיים U_0 חד־חד ערכית, והגדרנו את $\varphi(U')$ כצמצום של פונקציה חד־חד ערכית ולכן היא על, ונוכל להסיק ש־φ_0 היא הפיכה. כדי להראות שהיא גם דיפאומורפיזם, כלומר שהפיכתה גזירה (וחלקה) נרצה להשתמש במשפט הפונקציה ההפוכה, ולשם כך נשתמש בשיטה מההרצאה. קיימת העתקה לינארית אורתוגונלית כך שנקבל $T\varphi(U_0) \subseteq \mathbb{R}^k$ במובן $\mathbb{R}^k = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall i > k, u_i = 0\}$, ונוכל להשתמש במשפט הפונקציה ההפוכה על ההרכבה הזו. העתקות לינאריות רגולריות הן דיפאומורפיזם ולכן נוכל להסיק שגם ההרכבה דיפאומורפיזם ולכן גם φ_0 עצמה. נבחין כי φ_0^{-1} גזירה ולכן רציפה ובפרט נובע ש־φ_0 הומיאומורפיזם כפי שרצינו להראות. $\square$

שאלה 2

תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית, ותהי $\alpha:U\to W$ פרמטריזציה מקומית סביב $p\in M$.
נראה שקיימת קבוצה פתוחה $\tilde{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ ו־$\psi:\tilde{W}\to U$ חלקה, כך ש־$p\in\tilde{W}$ וגם,

$$\forall q\in\alpha^{-1}(\tilde{W}),\ \psi(\alpha(q))=q$$

הוכחה. נניח ש־$p=\alpha(x_0)$ עבור $x_0\in U$. נניח ללא הגבלת הכלליות ש־k השורות הראשונות של $D\varphi\mid_{x_0}$ בלתי־תלויות לינארית, מותר לנו להניח כן שכן אחרת נוכל לכפול בהעתקה אורתוגונלית מתאימה, וכי נתון כי M יריעה ולכן ההעתקה α היא רגולרית. נגדיר את הקבוצה $\tilde{U}=U\times\mathbb{R}^{n-k}$ וכן נגדיר את ההעתקה $\tilde{\alpha}:\tilde{U}\to\mathbb{R}^n$ על־ידי,

$$\tilde{\alpha}(x_1,\dots,x_n)=\alpha(x_1,\dots,x_k)+\sum_{i=k+1}^{n}x_i\cdot e_i$$

עבור e_i איבר הבסיס הסטנדרטי עבור $1\le i\le n$. מבדיקה ישירה מתקיים,

$$D\tilde{\varphi}\mid_{(x_0,0)}=\begin{pmatrix}D\varphi\mid_{x_0} & 0\\ \vdots & \mathrm{id}\end{pmatrix}$$

כלומר זוהי מטריצה כך שהיא מרחיבה את $D\varphi\mid_{x_0}$ על־ידי מטריצת היחידה. נבחין כי החישוב מתקבל ישירות מההגדרה בהתאם למימד. אנו יודעים כי דרגת המטריצה $n=(n-k)+k$, כלומר זוהי מטריצה רגולרית, ולכן הנגזרת היא בעלת דטרמיננטה לא אפס, ונוכל להסיק שתנאי משפט הפונקציה ההפוכה חלים. נסיק כי קיימת $U_0\times V_0\subseteq\tilde{U}$ כך ש־$x_0\in U_0\subseteq U$, וקיימת $p\in\tilde{W}\subseteq\mathbb{R}^n$, כך ש־$\tilde{\alpha}:U_0\times V_0\to\tilde{W}$ דיפאומורפיזם. נגדיר את $\psi:\tilde{W}\to U$ על־ידי $\psi=\pi_k\circ\tilde{\alpha}^{-1}$ עבור $\pi_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ ההטלה של k האיברים הראשונים. נבחין כי ממשפט ההעתקה ההפוכה ψ היא העתקה גזירה, ומהפעלה חוזרת ונשנית נקבל שהיא גזירה מכל סדר, קרי היא פונקציה חלקה. לבסוף נובע שעבור $q\in U_0=\alpha^{-1}(\tilde{W})$ מתקיים $\psi(\alpha(q))=q$. $\square$

שאלה 3

תהי M יריעה k־מימדית ב־$\mathbb{R}^n$, נגדיר את האגד המשיק,

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M, v \in T_pM\}$$

סעיף א׳

נראה ש־TM היא יריעה $2k$־מימדית.

הוכחה. תהי נקודה $p \in M$ כלשהי, נבחין כי M יריעה ולכן קיימת פרמטריזציה מקומית $\alpha : U \to M$ כך ש־$\alpha(0) = p$ (ללא הגבלת הכלליות). נגדיר את הפונקציה $\overline{\alpha} : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n}$ על־ידי $\overline{\alpha}(q, v) = (\alpha(q), d\alpha\mid_p (v))$. לכל $u \in T_pM$ נבחין כי קיים $v \in \mathbb{R}^k$ כך ש־$u = T_p(M) \cdot v$, ולכן $\overline{\alpha}(0, v) = (p, u)$, כלומר $\overline{\alpha}$ חשודה כפרמטריזציה של (p, u).

אנו יודעים כי α הפיכה, וכן $d\alpha\mid_p$ היא העתקה לינארית רגולרית ולכן הפיכה אף היא ב־T_pM, ולכן נסיק שגם $\overline{\alpha}$ היא הפיכה. אנו גם יודעים כי α חלקה ורגולרית, וכן כל העתקה לינארית היא חלקה, ומרגולריות α נסיק שנגזרתה רגולרית אף היא בתחום, ולכן נסיק שגם $\overline{\alpha}$ היא חלקה ורגולרית. עלינו להראות שההעתקה היא פתוחה, אך גם הפעם, α היא העתקה פתוחה, והעתקות לינאריות תמיד פתוחות, ולכן נסיק ש־$\overline{\alpha}$ היא אכן פרמטריזציה מקומית של (p, u).

נסיק אם כן ש־TM היא יריעה $2k$־מימדית ב־$\mathbb{R}^{2n}$. $\square$

סעיף ב׳

נראה שאם M היא תת־קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}^n$, אז $TM = M \times \mathbb{R}^n$.

הוכחה. נבהיר תחילה שכמסקנה מהטענה מהתרגול M היא יריעה n־מימדית, ולכן TM יריעה $2n$־מימדית ב־$\mathbb{R}^{2n}$. לכל $p \in M$ נניח ש־: α $U \to M$ פרמטריזציה מקומית, אז α רגולרית, דהינו $\dim D\alpha = n$ ולכן היא הפיכה (ממשפט הפונקציה ההפוכה), ובפרט לכל $u \in \mathbb{R}^n$ נסיק ש־$u \in T_pM$. נובע אם כך ש־$\{p\} \times \mathbb{R}^n \in TM$ לכל $p \in M$, ונסיק ש־$TM = M \times \mathbb{R}^n$. $\square$

שאלה 4

תהיינה $M \subseteq \mathbb{R}^m$ ו־$N \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי יריעות. תהי $f : M \to N$. נניח ש־$\alpha : U \to W$ פרמטריזציה מקומית של M סביב $p \in M$, ונניח ש־$\beta : A \to B$ פרמטריזציה מקומית של N סביב $f(p)$.

נראה שאם קיימת סביבה פתוחה $U' \subseteq U$ של $\alpha^{-1}(p)$ כך ש־$\beta^{-1} \circ f \circ \alpha : U' \to A$ היא חלקה, אז f חלקה ב־p.

הוכחה. נניח שקיימת סביבה פתוחה U' כך שהתנאי מתקיים. נבחין תחילה כי $\beta^{-1}(f(\alpha(x_0))) = \beta^{-1}(f(p))$ היא נקודה פנימית בהרכבה. אנו גם יודעים שהרכבת פונקציות חלקות היא פונקציה חלקה, לכן גם $\beta \circ \beta^{-1} \circ f \circ \alpha = f \circ \alpha : U' \to N$ היא העתקה חלקה ב־$\alpha^{-1}(p)$. מאותה סיבה בדיוק גם $f \circ \alpha \circ \alpha^{-1} = f : M \to N$ היא חלקה ב־$\alpha^{-1}(\alpha(x_0)) = p$ ונקבל ש־f חלקה ב־p, כפי שרצינו. נבהיר ונאמר ש־$\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$ כולן דיפאומורפיזמים חלקים, ולכן הפיכות, חלקות, ומוגדרות בסביבות הנתונות. $\square$