פתרון מטלה מסכמת — אנליזה על יריעות, 80426

30 ביולי 2025

שאלה 1

נתאר את הוכחת משפט הדיברגנץ ליריעות קומפקטיות עם שפה.

הוכחה. בגרסה ללא השפה האסטרטגיה הייתה בנייה של זרימה מתאימה לשדה הווקטורי הנתון X על־ידי שימוש בזרימה מקומית וקומפקטיות. לבסוף על־ידי שימוש במשפט הווריאציה הראשונה נוכל לקבל שקילות לאינטגרל על הדיברגנץ, היא מקבעת את ערכו לאפס.

עתה נתאר את משפט הדיברגנץ עצמו, ניסוח המשפט הוא חלק משמעותי בהוכחתו, והוא נכתב כעת מתוך התפיסה שיש לזכור אותו בדיוק. תהי $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה קומפקטית עם שפה. נניח גם ש־$X : M \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי משיק ל־M, כלומר ש־$X(p) \in T_p(M)$ לכל $p \in M$. אז מתקיים,

$$\int_M \operatorname{div}_M X \, d\operatorname{vol}_k = \int_{\partial M} \langle X(p), \nu(p) \rangle \, d\operatorname{vol}_{k-1}(p)$$

כלומר ערך האינטגרל הוא ערך האינטגרל בשפה של מכפלה בנורמל חיצוני, שלא במפתיע אין תלות בשפה (ולמעשה כבר עתה יכולנו להוכיח זאת ישירות מחלוקת היריעה לשפתה ולפנימה), והתלות היא בכמה היריעה התרחבה בתהליך X.

לאחר הבנה מעמיקה של המשפט, נוכל להסביר את הוכחתו, היא כיאה לכל משפט רציני מתחילה ברדוקציות. הרדוקציה הראשונה מטרתה לגרוס כי השדה הווקטורי הוא מכווץ בלבד, כלומר,

$$\langle X(p), \nu(p) \rangle < 0$$

ונוכל להשיג אותו על־ידי שימוש בקומפקטיות ובמציאת מקסימום של X על השפה ∂M, נוכל לבנות יריעה חדשה שמזיזה את X פנימה בלבד, ונעשה זאת ככה שנוכל לחשב את האינטגרל בקלות ובהתאם לקבל את הרדוקציה.

עתה נגיע לחלק הבא, שלב הבניות. המטרה שלנו היא לפרק את M בדרך הנוחה ביותר, ונעשה זאת על־ידי הגדרת "משיכת שפה", כלומר נגדיר את הזרימה החד־צדדית שמובטח לנו שקיימת, ונגדיר את היריעה $N_t = \varphi([0,t] \times \partial M)$. המפתח בשלב זה עבורי הוא תפיסה טובה של משמעות N_t, וכאמור ניתן לתאר אותו כמשיכה ש־φ מבצעת על השפה, נוכל לדמיין זאת על־ידי סימון השפה ביריעה, הפעלת φ ובדיקת המיקומים שהשפה עוברת בהם. מבנה זה מאפשר לנו לבצע את הפירוק (עד כדי חיתוך ממידה אפס),

$$M = \varphi_t(M) \cup N_t$$

ובהתאם לטענה האחרונה, נוכל גם להסיק,

$$\operatorname{vol}_k(M) = \operatorname{vol}_k(\varphi_t(M)) + \operatorname{vol}_k(N_t)$$

אם נגזור את הביטוי נקבל אם כך,

$$0 = \frac{d}{dt} \operatorname{vol}_k(\varphi_t(M)) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} \operatorname{vol}_k(N_t) \Big|_{t=0}$$

ועל־ידי שימוש שקול לגרסה ללא שפה במשפט הווריאציה הראשונה גם,

$$\int_M \operatorname{div}_M(X) \, d\operatorname{vol}_k = -\frac{d}{dt} \operatorname{vol}_k(N_t) \Big|_{t=0}$$

כלומר עלינו לנתח את N_t בלבד כדי למצוא את הטענה. אבל ישירות מהגדרת N_t אנו יודעים כי (ופוביני),

$$\operatorname{vol}_k(N_t) = \int_{\partial M} \int_0^t V(D\varphi|_{(x,s)}) \, ds \, d\operatorname{vol}_{k-1}(x)$$

מהמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי נוכל להסיק שגם,

$$-\frac{d}{dt} \operatorname{vol}_k(N_t)|_{t=0} = \int_{\partial M} V(D\varphi|_{(x,0)}) \, d\operatorname{vol}_{k-1}(x)$$

כלומר המשפט כולו שקול לטענה שמתקיים,

$$V(D\varphi|_{(x,0)}) = -\langle X(x), \nu(x) \rangle$$

טענה זו נובעת משימוש בהוכחה סטנדרטית של בחירת בסיס ושימוש באפיון השקול של אופרטור נפח וברדוקציה הראשונה. □

הוכחה זו כתובה כך שהחלקים שניתנים להשלמה עבורי הושמטו, כל מה שנכתב הוא מה שהייתי כותב גם במפתח הוכחה עבור שינונה לקראת מבחן.

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח את משפט הפונקציה ההפוכה לנקודות שפה.

תהינה $M \subseteq \mathbb{R}^m, N \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעות עם שפה. נניח גם ש־$f : M \to N$ העתקה חלקה כך ש־$f(\partial M) \subseteq \partial N$. נסמן $p \in \partial M$ ו־$q \in \partial N$ נקודות כך ש־$f(p) = q$ ו־$Df|_p : T_pM \to T_qN$ איזומורפיזם לינארי.

נראה שקיימות סביבות פתוחות $p \in U \subseteq M$ ו־$q \in V \subseteq N$ כך ש־$f|_U : U \to V$ היא דיפאומורפיזם.

הוכחה. תהי $\alpha : U_0 \to \alpha(U_0)$ פרמטריזציה מקומית של $p \in U_0 \subseteq \mathbb{H}^k$ ב־M עבור $k = \dim M$. נניח ש־$\beta : V_0 \to \alpha(V_0)$ פרמטריזציה מקומית של $q \in V_0 \subseteq \mathbb{H}^k$ ב־N. אם $f^{-1}(V_0) \subseteq U_0$ אז נגדיר $U = f^{-1}(V_0)$ ו־$V = V_0$, על־ידי שימוש באפיון של רציפות. אחרת $U = f^{-1}(V_0) \cap U_0$ היא קבוצה פתוחה

נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$\alpha(0) = p, \beta(0) = q$, זאת שכן נוכל לבצע הזזות וכן מהעובדה שהוכחה במהלך הקורס שמתקיים,

$$\alpha((\{0\}^{k-1} \times \mathbb{R}) \cap U_0) \subseteq \partial M$$

אז $U_0 \cap V_0$ היא קבוצה פתוחה ונסמן,

$$U = \alpha(U_0 \cap V_0), \quad V = \beta(U_0 \cap V_0)$$

כל פרמטריזציה מקומית היא דיפאומורפיזם ולכן הומיאומורפיזם ובהתאם העתקה פתוחה, לכן $U \subseteq M, V \subseteq N$ קבוצות פתוחות. עתה נגדיר את $g : U_0 \cap V_0 \to \mathbb{H}^k$ על־ידי,

$$g = \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$$

אז בהכרח g רגולרית ב־$(0, 0)$ מהנתונים, והיא הפיכה בסביבה פתוחה של הראשית על־ידי שימוש במשפט מאינפי 3 והרחבה רציפה של g. נניח ש־$0 \in U' \subseteq U_0 \cap V_0$ סביבה כזו, אז נוכל לצמצם את U, V בהתאם ל־$\alpha^{-1}(U')$ ו־$\beta^{-1}(g(U'))$. $\square$

סעיף ב'

נניח ש־$M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ללא שפה, ותהי $U \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה כלשהי. נניח ש־$\alpha : U \to M$ היא חלקה כך ש־$D\alpha|_x$ מדרגה k לכל $x \in U$.

נראה ש־α היא העתקה פתוחה.

הוכחה. עבור נקודה כלשהי $x \in U$ מהנתון α רגולרית ב־x ולכן ממשפט הפונקציה ההפיכה $\alpha|_V : V \to \alpha(V)$ היא דיפאומורפיזם הפיך, כאשר $x \in V \subseteq U$ פתוחה. אבל טענה זו נכונה לכל x, כלומר α הפיכה מקומית בכל מקום, ולכן הפיכה ובהתאם גם דיפאומורפיזם ולכן בפרט הומיאומורפיזם ומאפיון שקול העתקה פתוחה. $\square$

סעיף ג'

בהגדרה של יריעות פתוחות פרמטריזציה דורשת את תנאי הפתיחות, אבל בסעיף הקודם מצאנו שפתיחות נובעת מקיום העתקה חלקה לסביבה של היריעה. אנו נסביר עתה את הקשר שבין שתי הטענות הלכאורה מעט סותרות הללו.

פתרון בהוכחת הטענה כבר התבססנו על תכונת הפתיחות המקומית של היריעה, למעשה הטענה שראינו בסעיף ב' היא דרך מצוינת להבין מה היא יריעה. כלומר, נוכל להסיק שיריעה מתנהגת באופן מספיר "יפה" כדי לאפשר לפונקציות רגולריות להיות גם פתוחות באופן ישיר, ובכך הן האובייקט שקושר בין דיפאומורפיזם (ובפרט הומיאומורפיזם ופתיחות) לבין קבוצה במרחב.

שאלה 3

נסמן ב־C את מעגל היחידה במישור xy ב־$\mathbb{R}^3$, כלומר $C = \partial\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$, ונסמן גם את הפרמטריזציה שלו,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

נגדיר את השדה הווקטורי F על $\mathbb{R}^3 \setminus C$ המוגדר על־ידי,

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \frac{x-\gamma(t)}{\|x-\gamma(t)\|^3} \times \gamma'(t)\ dt$$

כאשר,

$$(u_1,u_2,u_3)^t \times (v_1,v_2,v_3)^t = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)^t$$

וכאשר האינטגרל מבוצע קורדינטה־קורדינטה.

סעיף א׳

נראה ש־F הוא משמר מקומית.

הוכחה. תהי $p \in \mathbb{R}^3$, נגדיר $\{e_i\}_{i=1}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ הבסיס הסטנדרטי של המרחב, ונחשב,

$$\begin{aligned}
\nabla\|x-p\|^{-1} &= \nabla\left(\sum_{i=1}^3 (x_i - p_i)^2\right)^{-1/2} \\
&= \sum_{j=1}^3 -\frac{1}{2} \cdot 2(x_j - p_j) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 (x_i - p_i)^2\right)^{-3/2} e_j \\
&= \sum_{j=1}^3 \frac{p_j - x_j}{\|x-p\|^3} e_j \\
&= \frac{p-x}{\|x-p\|^3}
\end{aligned}$$

אנו רוצים להראות שימור מקומי, כלומר שמתקיים,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$$

לכל $i,j \in [3]$. אנו יודעים כי זהו תנאי שקול לאינווריאנטיות של אינטגרלים מסילתיים על מסילות הומוטופיות. מהשוויון שמצאנו קודם לכן מתקיים,

$$F(x) = \int_0^{2\pi} (\nabla\|x-\gamma(t)\|^{-1}) \times \gamma'(t)\ dt$$

אבל לכל מסילה $\mu : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus C$ נקבל,

$$\begin{aligned}
\int_\mu F(x)\ dx &= \int_\mu \int_0^{2\pi} (\nabla\|x-\gamma(t)\|^{-1}) \times \gamma'(t)\ dt\ dx \\
&= \int_0^{2\pi} \int_\mu (\nabla\|x-\gamma(t)\|^{-1}) \times \gamma'(t)\ dx\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_\mu \nabla\|x-\gamma(t)\|^{-1}\ dx\right) \times \gamma'(t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\|\mu(1)-\gamma(t)\|^{-1} - \|\mu(0)-\gamma(t)\|^{-1}\right) \times \gamma'(t)\ dt
\end{aligned}$$

ומתנאים שקולים לשימור מקומי נקבל שהשדה אכן משמר מקומית. $\square$

סעיף ב׳

נגדיר את המסילה $\mu = \mu_R : [-R,R] \to \mathbb{R}^3 \setminus C$ על־ידי,

$$\mu(t) = (0,0,t)$$

ונחשב את האינטגרל המסילתי,

$$I = \int_\mu F\ dl$$

פתרון מהגדרה,

$$I = \int_{-R}^{R} F(\mu(t)) \cdot \mu'(t)\ dt = \int_{-R}^{R} F(0,0,t) \cdot (0,0,1)\ dt = \int_{-R}^{R} F_3(0,0,t)\ dt$$

אבל ישירות מהגדרת מכפלה וקטורית,

$$\begin{aligned} F_3(0,0,t) &= \int_0^{2\pi} \frac{0 - \cos u}{\|(0,0,t) - \gamma(u)\|^3} \cdot (\cos u) - \frac{0 - \sin u}{\|(0,0,t) - \gamma(u)\|^3} \cdot (-\sin u)\ du \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\left(\cos^2 u + \sin^2 u + t^2\right)^{3/2}}\ du \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1 + t^2\right)^{3/2}}\ du \\ &= \frac{-2\pi}{\left(1+t^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

ולכן בהצבה נקבל,

$$I = \int_{-R}^{R} F_3(0,0,t)\ dt = \int_{-R}^{R} \frac{-2\pi}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}\ dt = -2\pi \left[\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right]_{t=-R}^{t=R} = -2\pi \left(\frac{R}{\sqrt{1+R^2}} - \frac{-R}{\sqrt{1+R^2}}\right) = \frac{-4\pi R}{\sqrt{1+R^2}}$$

סעיף ג׳

נגדיר את המשטח,

$$Q_R = [(0,0,-R),(0,0,R)] + [(0,0,R),(2R,0,R)] + [(2R,0,R),(2R,0,-R)] + [(2R,0,-R),(0,0,-R)]$$

ונסמן את המקטעים $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$.

נחשב את,

$$L_\infty = \lim_{R \to \infty} \int_{Q_R} F\ dl$$

פתרון על־ידי שימוש בזהויות מוכרות ובאי־השוויון הנתון $\|u \times v\| \le \|u\| \cdot \|v\|$ נסיק,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mu_2} F(t)\ dt \right\| &\le \int_{\mu_2} \|F(t)\|\ dt \\ &\le \int_{\mu_2} \int_0^{2\pi} \left\| \nabla \|t - \gamma(u)\|^{-1} \right\| \cdot \|\gamma'(u)\|\ du\ dt \\ &= \int_{\mu_2} \int_0^{2\pi} \frac{\|t - \gamma(u)\|}{\|t - \gamma(u)\|^3} \cdot 1\ du\ dt \\ &= \int_{\mu_2} \int_0^{2\pi} \frac{du\ dt}{\|t - \gamma(u)\|^3} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2R} \frac{\mu_2'(u) \cdot dt\ du}{\left|(u - \cos t)^2 + \sin^2 t + R^2\right|^{3/2}} \\ &\xrightarrow{x \to \infty} 0 \end{aligned}$$

באופן שקול נוכל לקבל שאיפה לאפס של $\int_{\mu_4} F(t)\,dt$, ולכן נותר לנו לחשב את האינטגרל המסילתי על μ_3.

$$\begin{aligned}
\int_{\mu_3} F(t)\,dt &= \int_{\mu_3}\int_0^{2\pi} \frac{0-\cos u}{\|(2R,0,t)-\gamma(u)\|^3}\cdot(\cos u) - \frac{2R-\sin u}{\|(2R,0,t)-\gamma(u)\|^3}\cdot(-\sin u)\,du\,dt \\
&= \int_{\mu_3}\int_0^{2\pi} \frac{-\cos^2(u)-\sin^2(u)+2R\sin t}{\|(2R-\cos u)^2+\sin^2(u)+t^2\|^3}\,du\,dt \\
&= \int_{-R}^{R}\int_0^{2\pi} \frac{-1+2R\sin t}{|4R^2-4\cos u+1+t^2|^{3/2}}\,du\,dt \\
&\xrightarrow{R\to\infty} 0
\end{aligned}$$

משיקולי אינפי 2. נסיק אם כן ש־$L_\infty = \lim_{R\to\infty} \frac{-4\pi R}{\sqrt{1+R^2}} = -4\pi$ בלבד.

סעיף ד׳

נראה ש־$\int_{Q_1} F\,dl = L_\infty$ ונסיק ש־F לא משמרת ובהתאם ש־$\mathbb{R}^3 \setminus C$ לא פשוטת קשר.

הוכחה. נגדיר $T_R \overset{\text{def}}{=} Q_R \setminus \{0\}^2 \times [-1,1]$, אז T_{R_1} שקול הומוטופית מסילתית ל־T_{R_2} לכל $R_1, R_2 > \frac{1}{2}$, אבל F שדה משמר מקומית ולכן האינטגרלים שלהם שווים. אז נסיק,

$$\int_{T_1} F\,dl = \int_{T_R} F\,dl \xrightarrow{R\to\infty} L_\infty - I$$

עבור,

$$I = \int_{Q_1} F\,dl = \int_{\mu_1} F\,dl = \frac{-4\pi\cdot 1}{\sqrt{1+1^2}} = -2\sqrt{2}\pi$$

כלומר מצאנו שבדיוק מתקיים $\int_{Q_1} F\,dl = L_\infty$.

אילו הייתה $\mathbb{R}^3 \setminus C$ פשוטת קשר, אז ערך כל אינטגרל מסילתי על לולאה היה 0, לכן ערך אינטגרל זה (שאיננו מתאפס) מהווה סתירה ישירה להנחה כי התחום פשוט קשר. למעשה ידענו זאת כבר כי החבורה היסודית שלו היא $\mathbb{Z} \neq \{1\}$. □

שאלה 4

תהינה $M^k \subseteq \mathbb{R}^m, N^k \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי יריעות.

נגדיר את הדיפאומורפיזם החלק $F : M \to N$ כאיזומטריה אם לכל $p \in M$ ולכל $v, w \in T_p M$ מתקיים,

$$\langle v, w\rangle = \langle dF|_p(v), dF|_p(w)\rangle$$

כלומר ש־$DF|_p : T_p M \to T_{F(p)} N$ היא איזומטריה.

סעיף א׳

נראה שאם $F : M \to N$ איזומטריה וכן M, N שתיהן קומפקטיות,
אז $\mathrm{vol}_k(M) = \mathrm{vol}_k(N)$ וכן לכל מסילה חלקה $\gamma : [a, b] \to M$ מתקיים $L(\gamma) = L(F \circ \gamma)$.

הוכחה. נרצה להשתמש במשפט הדיברגנץ. נוכל לשכן את שתי היריעות באותו מרחב (הגדול מביניהם), ושימוש ב־F לבנייה של φ המעבירה את M ל־N.

נניח ש־$p \in M$ וכן ש־$p \in U \subseteq M$ סביבה פתוחה כך ש־$\alpha : W \to U$ פרמטריזציה מקומית, ו־$W \subseteq \mathbb{H}^k$. אז $\beta = F \circ \alpha$ פרמטריזציה מקומית של $q = F(p) \in N$. נסמן,

$$T_x = D\alpha|_x, \quad S_x = D\beta|_x = (DF|_{\alpha(x)}) \circ D\alpha|_x = (DF|_{\alpha(x)}) \circ T_x$$

אז מתקיים,

$$\begin{aligned} V(T_x) &= \sqrt{\det\left((\langle T_x(e_i), T_x(e_j)\rangle)_{i,j\in[k]}\right)} \\ &= \sqrt{\det\left((\langle DF|_x T_x(e_i), DF|_x T(e_j)\rangle)_{i,j\in[k]}\right)} \\ &= \sqrt{\det\left((\langle S_x(e_i), S_x(e_j)\rangle)_{i,j\in[k]}\right)} \\ &= V(S_x) \end{aligned}$$

ולכן נובע,

$$\int_U 1 \, d\,\mathrm{vol}_k = \int_W 1 \, V(T_x) \, dx = \int_W 1 \, V(S_x) \, dx \int_{F(U)} 1 \, d\,\mathrm{vol}_k$$

ומכאן תוך שימוש בהגדרת היריעה (הגדרת חלוקת יחידה ושימוש חזור בטענה שעתה הוכחנו) נקבל שהנפחים זהים.

נניח ש־$\gamma : [a, b] \to M$, אז,

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \langle DF|_t \gamma'(t), DF|_t \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \|(F \circ \gamma)'(t)\| \, dt = L(F \circ \gamma)$$

ומצאנו כי השוויון מתקיים אף הוא. □

סעיף ב׳

נניח ש־$F : S^n(1) \to S^n(2)$ הדיפאומורפיזם החלק בין ספירה ברדיוס 1 לספירה ברדיוס 2 ב־$\mathbb{R}^{n+1}$, כאשר $F(x) = 2x$. נוכיח כי F היא לא איזומטריה.

הוכחה. נניח בשלילה שהיא איזומטריה ולכן בפרט המסילה $\gamma : [0, 1] \to \{(\cos t, \sin t)\} \times \{0\}^{n-1}$ מקיימת,

$$2\pi = L(\gamma) = L(F \circ \gamma) = 2\pi \cdot 2$$

וזו סתירה. □

סעיף ג׳

תהינה היריעות,

$$M=(0,2\pi)\times(0,1)\subseteq\mathbb{R}^2,\quad N=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1,(x,y)\neq(1,0)\}\times(0,1)\subseteq\mathbb{R}^3$$

שתי היריעות הנתונות הן איזומטריות, אנו נמצא איזומטריה $F:M\to N$ ונסביר על שימושיה.

פתרון נגדיר,

$$F(t,y)=(\cos t,\sin t,y)$$

ונראה שזו אכן איזומטריה. נתחיל להראות שהיא דיפאומורפיזם חלק. היא מוגדרת היטב ישירות מהגדרת היריעות, וכמו כן היא חד־חד ערכית ועל מטענות שראינו לאורך הסמסטר. היא חלקה כהרכבת פונקציות חלקות, ולכן מהווה דיפאומורפיזם חלק.

נסמן $p=(t,y)$. מחישוב עולה כי,

$$DF|_p=\begin{pmatrix}-\sin t & 0\\ \cos t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ואם $v=(v_1,v_2),w=(w_1,w_2)$ אז,

$$DF|_p(v)=\begin{pmatrix}-v_1\sin t\\ v_1\cos t\\ v_2\end{pmatrix},\quad DF|_p(w)=\begin{pmatrix}-w_1\sin t\\ w_1\cos t\\ w_2\end{pmatrix}$$

לבסוף נציב,

$$\langle DF|_p(u),DF|_p(w)\rangle=v_1w_1\sin^2 t+v_1w_1\cos^2 t+v_2w_2=v_1w_1+v_2w_2=\langle v,w\rangle$$

ומצאנו כי מתקיימת ההגדרה לאיזומטריה.

לפעמים אני לוקח דף ומגלגל אותו לטלסקופ, המרחקים על הדף לא משתנים, אבל הדף משנה את צורתו מ־M ל־N.

סעיף ד׳

נניח ש־$U\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה, ונניח ש־$M\subseteq\mathbb{R}^3$ יריעה איזומטרית ל־U. נסמן $\alpha:U\to M$ האיזומטריה ביניהן, ונראה שאם $\alpha(x_0,y_0)=p$ אז,

$$B=\left\{\left.\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial^2\alpha}{\partial^2 x}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial^2\alpha}{\partial^2 y}\right|_{(x_0,y_0)}\right\}$$

אז $T_pM\perp B$.

הוכחה. נחשב,

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y},\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right\rangle&=\left\langle\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\left.\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right|_{(x,y+h)}-\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right),\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right\rangle\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\langle\left.\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right|_{(x,y+h)}-\frac{\partial\alpha}{\partial x},\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right\rangle\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\left\langle\left.\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right|_{(x,y+h)},\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial x},\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right\rangle\right)\\&\overset{(1)}{=}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\left\langle D\alpha|_{(x,y+h)}(1,0),D\alpha|_{(x,y)}(1,0)\right\rangle-\left\langle D\alpha|_{(x,y)}(1,0),D\alpha|_{(x,y)}(1,0)\right\rangle\right)\\&\overset{(2)}{=}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}(1-1)\\&=0\end{aligned}$$

כאשר,

1. נובע מהגדרת הדיפרנציאל
2. שימוש באיזומטריה ובעובדה ש־$(1,0)$ לא מחזיר ערכים על ציר ה־y

באופן שקול נוכל להסיק שגם,

$$\left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right\rangle = 0$$

ולכן לכל $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ סקלרים גם,

$$\beta_1 \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right\rangle + \beta_2 \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right\rangle = 0$$

אבל זה אינו אלא השוויון,

$$\left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}, D\alpha|_{(x,y)}(\beta) \right\rangle = 0$$

עבור $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. נסיק ש־$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \perp T_pM$.

ניזכר ש־$D\alpha : T_pM \to T_pN$ היא איזומטריה, וכן אנו רוצים להראות,

$$\forall v \in T_pM, b \in B,\ \langle v, b \rangle = 0.$$

□