תורת המודלים 1 — סיכום

2 בנובמבר 2025

תוכן העניינים

0 שיעור הכנה

0.1 מעט תורת הקבוצות

הגדרה 0.1 (מונה) סודר α נקרא מונה אם לכל $\beta < \alpha$ אין העתקה על $f : \beta \to \alpha$ (שקול לאי־קיום פונקציה חד־חד ערכית).

דוגמה 0.1 כל הסודרים הסופיים הם מונים, וכך גם ω.

דוגמה 0.2 $\omega + 1, \omega + 2, \ldots$ הם לא מונים כי נוכל לבנות פונקציה $f : \omega + n \to \omega$ חד־חד ערכית.

נגדיר לדוגמה גם את $\omega_1 = \aleph_1$ להיות המונה הבא אחרי ω.

משפט 0.2 (אי־חסימות מונים) *לכל מונה κ יש מונה $\mu > \kappa$.*

הוכחה. בהנחת אקסיומת הבחירה נסדר את $\mathcal{P}(\kappa)$ בסדר טוב בטיפוס סדר α. אז אין העתקה על מ־κ ל־α. יהי $\mu > 0$ הסודר הראשון כך שאין העתקה על מ־κ ל־μ ונטען כי μ מונה.
אם μ אינו מונה, אז יש $\beta < \mu$ והעתקה חד־חד ערכית ועל $g : \kappa \to \beta$, והרכבת הפונקציות מספקת סתירה. □

ישנה גם הוכחה ללא אקסיומת הבחירה אבל לא נביא אותה בסיכום זה.

הגדרה 0.3 (מונה עוקב) המונה הראשון שגדול ממונה κ נקרא העוקב של κ ומסומן κ^+.

הערה אם A קבוצת מונים, אז גם $\bigcup A$ מונה.

אנו יכולים לבחון את $\omega = \aleph_0$ וכן את $\aleph_0^+ = \aleph_1$ וכן הלאה, ולבסוף נוכל להגדיר גם את $\aleph_\omega = \sup\{\aleph_n \mid n < \omega\}$, וכן $\aleph_\omega^+ = \aleph_{\omega+1}$.

משפט 0.4 (הירכיית אלף) *כל מונה הוא $\aleph_\alpha$ עבור איזשהו סודר α.*

הוכחה. נניח ש־κ מונה, אז $\kappa \le \aleph_\kappa$ (ניתן להוכחה באינדוקציה טרנספיניטית). לכן קיים γ הסודר הראשון כך ש־$\kappa \le \aleph_\gamma$. אם $\kappa < \aleph_\gamma$ אז נחלק למקרים. אם $\gamma = \delta + 1$ אז $\aleph_\gamma = \aleph_\delta^+$ אבל $\aleph_\delta < \kappa < \aleph_{\delta+1}$ ואז $\kappa = \aleph_\delta$. אם γ גבולי, אז $\aleph_\gamma = \sup\{aleph_\beta \mid \beta < \gamma\}$ ולכן יש $\beta < \gamma$ כך ש־$\kappa \le \aleph_\beta$ כסתירה. לכן נסיק ש־$\kappa = \aleph_\gamma$. □

מסקנה 0.5 אם α סודר ו־$\kappa \le \alpha$ מונה ומקסימלי מבין המונים $\le \alpha$, אז $|\alpha| = |\kappa| = \kappa$.

הוכחה. באינדוקציה. □

הגדרה 0.6 (מונה סדיר) מונה אינסופי κ יקרא סדיר (regular) אם אין $\mu < \kappa$ ופונקציה $f : \mu \to \kappa$ כך ש־$\sup \operatorname{rng} f = \kappa$.

ניצוק תוכן להגדרה זו.

טענה 0.7 *מונה κ הוא סדיר אם ורק אם אין פירוק של κ כאיחוד של קבוצות $\kappa = \bigcup\{A_i \mid i < \mu\}$ כך ש־$\mu < \kappa$ וכן $|A_i| < \kappa$.*

דוגמה 0.3 ω הוא סדיר, תחת אקסיומת הבחירה גם ω_1 הוא סדיר. נניח ש־$f : \mu \to \omega_1$ עבור $\mu < \omega_1$ וכן $\sup \operatorname{rng} f = \bigcup\{f(\delta) \mid \delta < \mu\}$ כאשר $f(\delta)$ בן־מניה. אבל מאקסיומת הבחירה איחוד בן־מניה של קבוצות בנות־מניה הוא גם בן־מניה.

הגדרה 0.8 מונה κ יקרא חריג אם הוא אינסופי ואינו סדיר.

דוגמה 0.4 $\aleph_\omega$ הוא מונה חריג. נגדיר $f(n) = \omega_n = \aleph_n$ כאשר $f : \omega \to \aleph_\omega$.

טענה 0.9 *לכל מונה אינסופי κ מתקיים* $|\kappa \times \kappa| = |\kappa|$.

הוכחה. נספק סקיצה כללית. נוכיח באינדוקציה על מונים אינסופיים.
ל־ω זה ידוע וקל.
נניח ש־κ מונה כך שהטענה נכונה למונים קטנים ממנו. נגדיר סדר טוב על $\kappa \times \kappa$ באופן הבא,

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle \le (\gamma, \delta) \iff & (\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}) \\ & \vee(\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge \alpha < \gamma) \\ & \vee(\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge \alpha = \gamma \wedge \beta \le \delta)\end{aligned}$$

נשים לב כי מתחת ל־$\langle\alpha,\beta\rangle$ יש פחות מ־κ איברים,

$$\leq |\alpha+1|\times|\beta+1|\leq|\mu_1\times\mu_2|\leq|\mu\times\mu|<\kappa$$

עבור $\mu=\max(\mu_1,\mu_2)<\kappa$. הסדר שהגדרנו איזומורפי לסודר $\delta\leq\kappa$ ולכן $|\kappa\times\kappa|\leq\kappa$. $\square$

מסקנה 0.10 לכל מונה κ מתקיים $|\kappa^{<\omega}|=\kappa$.

משפט 0.11 (מונה עוקב הוא סדיר) *אם κ מונה אז κ^+ מונה סדיר.*

הוכחה. נניח בשלילה שלא ותהי $f:\mu\to\kappa^+$ כך ש־$\bigcup\{f(\alpha)\mid\alpha<\mu\}=\kappa^+$.
באמצעות בחירה לכל α נבחר $H_\alpha:\kappa\twoheadrightarrow f(\alpha)+1$ וכן $H(\alpha,\beta)=H_\alpha(\beta)$ עבור $H:\mu\times\kappa\twoheadrightarrow\kappa^+$, וזו כמובן סתירה. $\square$

1 שיעור 1 — 19.10.2025

1.1 רקע

שעת קבלה בימי ראשון בשתיים־עשרה. יהיו כשישה תרגילים ומטלה מסכמת. תורת המודלים היא תחום בלוגיקה שעוסקת בניתוח של תורות ושל מודלים המתקבלים מהם. נראה דוגמה למשפט שנובע מתחום זה.

דוגמה 1.1 משפט אקס־גרותנדיק, הגורס כי אם פונקציה $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ כך שכל קורדינטה שלה היא פולינום ב־n משתנים. נניח ש־f חד־חד ערכית, אז f היא גם על.

זהו משפט מוזר מאוד ומפתיע. הדרך להוכיח אותו היא כזו, נניח שיש לנו סדרה של פולינומים כך שהם חד־חד ערכיים ולא על, אז הכישלון שנקבל הוא על־ידי פסוק מסדר ראשון בשפת תורת החוגים φ כך ש־$\mathbb{C} \models \varphi$.

$$\exists a_0, \dots, \exists a_N \; \forall \bar{x} \forall \bar{y} \; (a_0 x_0 \cdots = a_0 y_0 \cdots) \to \bar{x} = \bar{y} \land \exists \bar{z} \forall \bar{x} \neg \bigwedge_{i<N} a_0 \bar{x} = z_i$$

נבחין כי מתקיימת העובדה שנוכיח בהמשך,

הערה התורה של שדה סגור אלגברית ממציין נתון היא שלמה. בפרט כל שדה סגור אלגברית ממציין 0 מקיים את φ.

מההערה ושלמות נסיק שכל שדה מספיק סגור אלגברית ממימד מספיק גדול מקיים את φ. בפרט ל־p ראשוני מספיק גדול φ $\overline{\mathbb{F}}_p \models \varphi$. נסתכל על מקדמים של הפולינום הבעייתי $a_0, \dots, a_N$ ונקבל שהם שייכים ל־$\tilde{\mathbb{F}} = \mathbb{F}_p[a_0, \dots, a_N]$ שדה סופי כלשהו. נניח ש־$z_0, \dots, z_{n-1}$ מעידה על הפולינומים האלו, אז,

$$\tilde{\mathbb{F}}[z_0, \dots, z_{n-1}] = \tilde{\tilde{\mathbb{F}}} \subseteq \overline{\mathbb{F}}_p$$

אז $f \restriction \tilde{\tilde{\mathbb{F}}}$ חד־חד ערכית ולכן על ולכן $\bar{z}$ מתקבל כסתירה.

הרעיון המגניב הוא שהצלחנו למצוא טענה מאוד מורכבת על־ידי שימוש במודלים שונים מאותו עולם.

בקורס עצמו אנחנו נוכיח טענות בעולם של תורת המודלים, המשפטים המרכזיים הם:

- משפט Vaught: תהי T תורה בת־מניה שלמה, אז לא יתכן של־T יש בדיוק שני מודלים לא איזומורפיים בני־מניה עד כדי איזומורפיזם
- משפט מורלי (Morley): יהי κ מונה לא בן־מניה, T תורה מעל שפה בת־מניה, אז T היא $\aleph_1$־קטגורית אם ורק אם T היא κ־קטגורית

1.2 תזכורת למושגים והגדרות

הגדרה 1.1 (שפה) אוסף של סימני קבועים יחסים ופונקציות.

הגדרה 1.2 (שמות עצם) שמות עצם הם אובייקט סינטקטי שמורכב מסימני פונקציה קבועים ומשתנים.

הגדרה 1.3 (משתנה חופשי) משתנים חופשיים, נסמן $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ כאשר המשתנים $x_0, \dots, x_{n-1}$ חופשיים ב־φ.

נוכל גם לדבר על המשתנים החופשיים של פסוק, ונסמן באופן דומה $t(x_0, \dots, x_{n-1})$.

הגדרה 1.4 (פסוק) פסוק הוא נוסחה ללא משתנים חופשיים.

הגדרה 1.5 (השמה) בהינתן נוסחה $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ ומבנה $\mathcal{A}$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$, אז $\mathcal{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ בהתאם להגדרת האמת והחישוב הרקורסיבית שראינו בקורסים קודמים.

הגדרה 1.6 (הומומורפיזם של מבנים) בהינתן שני מבנים $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ בשפה L, אז נסמן פונקציה $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ כפונקציה בין העולמות כך שהיא הומומורפיזם, כלומר היא מכבדת פונקציות קבועים ויחסים במובן הבא,

$$\bar{a} \in R^{\mathcal{A}} \implies f(\bar{a}) \in R^{\mathcal{B}}$$

שיכון הוא מקרה בו גם הכיוון השני מתקיים.

איזומורפיזם הוא שיכון שהוא גם על.

אוטומורפיזם הוא איזומורפיזם בין מבנה לעצמו.

הגדרה 1.7 (תת־מבנה) נסמן תת־מבנה של מבנים על־ידי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ אם $\mathrm{id} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ שיכון. בפרט הקבוצה A סגורה תחת הפונקציות של B ומכילה את כל הקבועים.

משפט 1.8 (משפט הקומפקטיות) *נניח ש־Σ קבוצת פסוקים בשפה L כך שלכל $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ סופית היא ספיקה, אז Σ ספיקה.*

הגדרה 1.9 (תורה) תורה היא קבוצת פסוקים סגורה למסקנות. תורה T היא עקבית אם $\bot \notin T$, ממשפט השלמות הגדרה זו שקולה לקיום מודל ל־T.

תורה T היא שלמה אם לכל פסוק φ מתקיים $\varphi \in T$ או $\neg\varphi \in T$.

לדוגמה אם $\mathcal{A}$ מבנה, אז $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ שלמה.

הגדרה 1.10 (שקילות) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ אם $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$ ו־$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ אם יש איזומורפיזם. מתקיים $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

הגדרה 1.11 $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ נקראת שיכון אלמנטרי אם לכל נוסחה $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ ו־$a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ אז,

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff \mathcal{B} \models \varphi(f(a_0), \dots, f(a_{n-1}))$$

אם $f = \mathrm{id}$ אז נגיד ש־$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ תת־מודל אלמנטרי.

הערה נניח ש־$\langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega \rangle$ שרשרת מבנים כך ש־$\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$, אז יש דרך אחת להגדיר את איחוד המבנים $\mathcal{A}_\omega = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{A}_n$ כך ש־$\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_\omega$. נעיר כי גם אם נוסיף את ההנחה ש־$\mathcal{A}_n \equiv \mathcal{A}_{n+1}$ לא בהכרח נקבל שגם $\mathcal{A}_\omega \equiv \mathcal{A}_n$.
לדוגמה עבור $L = \{\le\}$ ו־$\mathcal{A}_n = \{z \in \mathbb{Z} \mid -n \le z\}$ אז $\mathcal{A}_\omega = \mathbb{Z}$ אבל התורות אכן שונות.

הגדרה 1.12 (קטגוריות) נאמר שתורה T היא κ־קטגורית אם לכל $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ אז מתקיים,

$$|A| = |B| \implies \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$$

הערה סודר α נקרא מונה אם לא קיים $\beta < \alpha$ ופונקציה $f : \beta \to \alpha$ על.
לכל מונה שונה מ־0 קיים מונה גדול יותר ומינימלי המסומן κ^+ ומכונה המונה העוקב של κ.
נסמן $\aleph_1 = (\aleph_0)^+$.

משפט 1.13 *נניח ש־$\langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega \rangle$ כך ש־$\mathcal{A}_n \prec \mathcal{A}_{n+1}$ אז $\mathcal{A}_n \prec \mathcal{A}_\omega$.*

הוכחה. קודם כל נשים לב לעובדה השימושית הבאה, אם $\mathcal{M} \prec \mathcal{N} \prec \mathcal{K}$ אז $\mathcal{M} \prec \mathcal{K}$. נובע שלכל $n < m$ מתקיים $\mathcal{A}_n \prec \mathcal{A}_m$. נוכיח את הטענה באינדוקציה על מבנה הנוסחה, לכל $n < \omega$ ולכל $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathcal{A}_n$ מתקיים,

$$\mathcal{A}_n \models \psi(a_0, \dots, a_{m-1}) \mathcal{A}_\omega \models \psi(a_0, \dots, a_{m-1})$$

עבור ψ אטומית הטענה נובעת מכך שאלו הם תתי־מבנים. אם הטענה נכונה עבור ψ היא נכונה גם עבור שלילה וכך גם לקשרים הבינאריים.
נניח ש־$\varphi = \exists x_0\ \psi$ כאשר $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$. אם $\mathcal{A}_n \models \varphi(a_1, \dots, a_{m-1})$ אז $\mathcal{A}_n \models \exists x_0\ \psi(x_0, \dots, a_{m-1})$ ולכם יש $a_0 \in \mathcal{A}_n$ כך שמתקיים $\mathcal{A}_n \models \psi(a_0, \dots, a_{m-1})$. מהנחת האינדוקציה נקבל שגם $\mathcal{A}_\omega \models \psi(a_0, \dots, a_{m-1})$ ולכן $\mathcal{A}_\omega \models \exists x_0\ \psi(x_0, a_0, \dots, a_{m-1})$.
בכיוון השני נניח ש־$\mathcal{A}_\omega \models \exists x_0\ \psi(x_0, a_1, \dots, a_{m-1})$. לכן קיים $b \in A_\omega$ כך שמתקיים $\mathcal{A}_\psi \models \psi(b, a_1, \dots, a_{m-1})$ ובהתאם קיים $k < \omega$ כלשהו כך ש־$n \le k$ ומתקיים $b \in A_k$. מהנחת האינדוקציה $\mathcal{A}_\omega \models \psi(b, a_1, \dots, a_{m-1})$ ולכן מאינדוקציה $\mathcal{A}_k \models \psi(b, a_1, \dots, a_{m-1})$ ולבסוף גם,

$$\mathcal{A}_n \prec \mathcal{A}_k \exists x_0\ \psi(x_0, a_1, \dots, a_{m-1})$$

ונסיק שמתקיים גם,

$$\mathcal{A}_n \models \exists x_0\ \psi(x_0, a_1, \dots, a_{m-1})$$

כפי שרצינו. $\square$

משפט 1.14 **(מבחן טרסקי־ווט)** *נניח ש־$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ תת־מבנה כך שלכל נוסחה $\varphi(x, x_0, \dots, x_{n-1})$ ופרמטרים $a_0, \dots, a_{n-1} \in M$ כך שמתקיים,*

$$\mathcal{N} \models \exists x\ \varphi(x, a_0, \dots, a_{n-1}) \implies \exists b \in M,\ \mathcal{N} \models \varphi(b, a_0, \dots, a_{n-1})$$

אם ורק אם תקיים $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

הוכחה. אם $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ ומתקיים,

$$\mathcal{N} \models \exists x\ \varphi(x, a_0, \dots, a_{n-1}) \implies \mathcal{M} \models \exists x\ \varphi(x, a_0, \dots, a_{n-1})$$

ולכ קיים $b \in M$ כך שמתקיים $\varphi^{\mathcal{M}}(b, a_0, \dots, a_{n-1})$ ולכן בהכרח גם $\mathcal{N} \models \varphi(b, a_0, \dots, a_{n-1})$.

נעבור לכיוון השני, ושוב נוכיח באמצעות אינדוקציה על מבנה הנוסחה $\varphi(x_0,\dots,x_{n-1})$, שכן $a_0,\dots,a_{n-1}\in M$ אז,
$$\mathcal{M}\models\varphi(a_0,\dots,a_{n-1}) \iff \mathcal{N}\models\varphi(a_0,\dots,a_{n-1})$$
עבור נוסחות אטומיות וקשרים בינאריים הטענה כמובן טריוויאלית מהגדרה ולכן נניח שמתקיים,
$$\varphi=\exists x\ \psi(x,x_1,\dots,x_{n-1})$$
וכן שמתקיים $\mathcal{M}\models\varphi(a_1,\dots,a_{n-1})$. לכן,
$$\exists b\in M,\ \mathcal{M}\models\psi(b,a_1,\dots,a_{n-1})$$
ולכן $\mathcal{N}\models\psi(b,a_1,\dots,a_{n-1})$ וכן $\mathbb{N}\models\varphi(a_1,\dots,a_{n-1})$.
בכיוון השני נניח שמתקיים,
$$\mathcal{N}\models\exists x\ \psi(x,a_1,\dots,a_{n-1})$$
אבל אז מטרסקי־ווט נקבל שקיים $b\in M$ כך ש־$\mathcal{N}\models\psi(b,a_1,\dots,a_{n-1})$ ומהנחת האינדוקציה על ψ נקבל,
$$\mathcal{M}\models\psi(b,a_1,\dots,a_{n-1}) \implies \mathcal{M}\models\varphi(a_1,\dots,a_{n-1})$$
וסיימנו את מהלך האינדוקציה. $\square$

מסקנה 1.15 נניח ש־$L=\{=\}$ ונניח ש־$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ מבנים אינסופיים בשפה L. אז $\mathcal{A}\prec\mathcal{B}$.

הוכחה. נשתמש במבחן טרסקי־ווט (מעכשיו נכתוב גם TV). נניח ש־$a_0,\dots,a_{n-1}\in A$ וכן שמתקיים,
$$\mathcal{B}\models\exists x\ \varphi(a_0,\dots,a_{n-1})$$
יהי $b\in B$ שמעיד על כך, אם $b\in\{a_0,\dots,a_{n-1}\}$ אז בכל מקרה סיימנו.
נבחר $c\in A\setminus\{a_0,\dots,a_{n-1}\}$ ונגדיר אוטומורפיזם של $\mathcal{B}$ על־ידי,
$$f(z)=\begin{cases} c & z=b \\ b & z=c \\ z & \text{otherwise}\end{cases}$$
לכן f אוטומורפיזם ובפרט שיכון אלמנטרי ומתקיים $f(a_i)=a_i$. נסיק שמתקיים,
$$\mathcal{B}\models\varphi(f(b),f(a_0),\dots,f(a_{n-1}))$$
ולכן תנאי המבחן חלים. $\square$

מסקנה 1.16 (לוונהיים־סקולם היורד) נניח ש־$\mathcal{A}$ הוא L־מבנה ו־κ מונה כך ש־$\aleph_0+|L|\le\kappa\le|A|$, אז קיים $\mathcal{B}\prec\mathcal{A}$ כך ש־$|B|=\kappa$.

הוכחה. לכל נוסחה $\varphi(x_0,\dots,x_n)$ נגדיר פונקציה $F_\varphi:A^n\to A$ על־ידי,
$$F_\varphi(a_0,\dots,a_n)=\begin{cases} b & \mathcal{A}\models\varphi(b,a_1,\dots,a_n) \\ c & \mathcal{A}\models\neg\exists x\ \varphi(x,a_1,\dots,a_n)\end{cases}$$
עבור ערך שרירותי c. עתה, תהי $X\subseteq A$ כך ש־$|X|=\kappa$, נגדיר,
$$X_0=X, X_{n+1}=\{F_\varphi(a_1,\dots,a_m)\mid a_1,\dots,a_m\in X_n,\ \varphi\in\text{form}\}\cup X_n$$
לכל n, אז $|X_{n+1}|=\kappa$ תמיד. נסמן $B=\bigcup_{n<\omega}X_n$, אז,
$$\kappa\le|B|\le\kappa+\aleph_0=\kappa$$
מתקיים $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ כי אם F סימן פונקציה ו־$\bar{c}\in B^n$ אז $F(\bar{c})\in B$ כי הוא העדות היחידה לנוסחה $x=F(\bar{c})$. בהתאם $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ מקיים את TV ישירות מהבניה. אם $b_1,\dots,b_n\in B$ ו־φ נוסחה אז יש $b_1,\dots,b_n\in X_m$, העדות ל־TV תהיה ב־$X_{m+1}\subseteq B$. $\square$

2 שיעור 2 — 26.10.2025

2.1 לוונהיים־סקולם

הגדרה 2.1 (פונקציית סקולם) אם $\varphi(x_0,\dots,x_{n-1})$ נוסחה כלשהי, אז פונקציה $F_\varphi : N \to M$ כך ש־$\mathcal{M} \models \exists x\ \varphi(x, a_1,\dots,a_{n-1})$ אז $b = F_\varphi(a_1,\dots,a_{n-1})$ כך ש־$\mathcal{M} \models \varphi(b, a_1,\dots,a_{n-1})$.

וננסח שוב את קריטריון טרסקי־ווט תוך שימוש בהגדרה זו.

משפט 2.2 **(ניסוח שקול ללוונהיים־סקולם היורד)** *$F_\varphi(X^n) \subseteq X$ לכל $X \subseteq M$ ולכל $\varphi(x_0,\dots,x_{n-1})$ אז $X \prec \mathcal{M}$.*

ותוך שימוש באפיון זה הוכחנו את משפט לוונהיים־סקולם היורד.

משפט 2.3 **(לוונהיים־סקולם העולה)** *יהי $\mathcal{M}$ מודל אינסופי ו־$\kappa > |M|, |L|$, אז קיים $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ מודל כך ש־$|N| = \kappa$.*

נגדיר הגדרה שתשמש אותנו בהוכחת המשפט.

הגדרה 2.4 (העשרה בקבועים) עבור מודל $\mathcal{M}$ ו־$A \subseteq M$ נסמן ב־L_A את ההעשרה של L על־ידי קבועים $\{d_a \mid a \in A\}$ ואת $\mathcal{M}_A$ את ההעשרה של פירוש הקבועים כך ש־$d_a^{\mathcal{M}_A} = a$.

סימון 2.5 $\operatorname{diag}(\mathcal{M}) = \operatorname{Th}(\mathcal{M}_M)$.

עתה נוכל לעבור להוכחה.

הוכחה. נתחיל בלבנות $\tilde{\mathcal{N}}$ כך שיש שיכון אלמנטרי $j : \mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{N}}$ וש־$|\tilde{N}| = \kappa$. נבחן את ההעשרה L_M בקבועים הנוספים $\{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ ואת התורה,

$$T = \operatorname{diag}(M) \cup \{c_\alpha \neq c_\beta \mid \alpha < \beta < \kappa\}$$

מקומפקטיות ל־T יש מודל. בנוסף מלוונהיים־סקולם היורד יש מודל כזה שעוצמתו היא $\kappa = \aleph_0 + \kappa + |L_M|$ ונסמנו $\tilde{\mathcal{N}}$. נגדיר $j(a) = d_a^{\tilde{\mathcal{N}}}$ ואז לפי הגדרת $\operatorname{diag}(\mathcal{M})$ אם ψ נוסחה ו־$\psi(d_{a_0},\dots,d_{a_{n-1}}) \in \operatorname{diag}(\mathcal{M}) \iff \mathcal{M} \models \psi(a_0,\dots,a_{n-1})$. וכל זה נכון אם ורק אם $\tilde{\mathcal{N}} \models \psi(d_{a_0},\dots,d_{a_{n-1}}) \iff \tilde{\mathcal{N}} \models \psi(j(a_0),\dots,j(a_{n-1}))$. כעת נתקן את $\tilde{\mathcal{N}}$ כך ש־$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ עבור $\tilde{\mathcal{N}} \cong \mathcal{N}$. קודם כל בלי הגבלת הכלליות $\tilde{N} \cap M = \emptyset$ ונגדיר $N = (\tilde{N} \setminus \operatorname{rng} j) \cup M$ ונגדיר את ההעתקה,

$$f : \tilde{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}, \quad f(x) = \begin{cases} x & x \notin \operatorname{rng} j \\ j^{-1}(x) & x \in \operatorname{rng} j \end{cases}$$

כלומר, הגדרנו את $\mathcal{N}$ כך שהיא תהיה איזומורפיזם. □

הגדרה 2.6 (קטגוריות) יהי κ מונה, תורה T תיקרא κ־קטגורית אם יש מודל יחיד $T \models \mathcal{N}$ כך ש־$|N| = \kappa$ עד כדי איזומורפיזם.

משפט 2.7 *נניח ש־T היא תורה בשפה L ול־T אין מודלים סופיים. אם בנוסף T היא κ־קטגורית עבור $|L| \le \kappa$ אז T שלמה.*

הוכחה. נניח ש־φ פסוק כך ש־$T \cup \{\varphi\}$ עקבית, ונניח בשלילה שגם $T \cup \{\neg\varphi\}$ עקבית.
אז מלוונהיים־סקולם העולה יש שני מודלים $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ מעוצמה $\kappa \le \aleph_0 + |L|$ כך שמתקיים,

$$\mathcal{M}_0 \models T \cup \{\varphi\}, \quad \mathcal{M}_1 \models T \cup \{\neg\varphi\}$$

אבל $\mathcal{M}_0 \cong \mathcal{M}_1$ וזו סתירה. □

דוגמה 2.1 DLO, תורת הסדרים הקוויים הצפופים ללא נקודות קצה, בשפה $\{<\}$.

$$\forall x \forall y (x < y \to \exists z\ x < z < y), \quad \forall x \exists y\ (y < x) \land \exists z (x < z)$$

יחד עם הפסוקים שמגדירים ש־$<$ הוא סדר קווי חד.

משפט 2.8 **(קנטור)** *DLO היא $\aleph_0$־קטגורית.*
יתר על־כן, אם $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{DLO}$ כך ש־$|M| = |N| = \aleph_0$ ומתקיים,

$$\mathcal{M} \models a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1}, \quad \mathcal{N} \models b_0 < b_1 < \cdots < b_{n-1}$$

אז קיים איזומורפיזם $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ המקיים $\sigma(a_i) = b_i$.

הוכחה. נשתמש בהוכחת ההלוך ושוב (back and forth), נמנה את איברים M ו־N,

$$M = \{a_i \mid i < \omega\}, \quad N = \{b_i \mid i < \omega\}$$

ונבנה ברקורסיה על ω סדרת פונקציות σ_i משמרות סדר. עבור $i = 0$ נגדיר $\sigma_0(a_i) = b_i$. נניח שבנינו את σ_k ו־k זוגי. נבחן את $j < \omega$ המינימלי כך ש־$a_j \notin \operatorname{dom} \sigma_k$. יש שלוש אפשרויות כאלה.

האפשרות הראשונה היא שיש $d_0, d_1 \in \operatorname{dom} \sigma_k$ כך ש־$d_0 < a_j < d_1$ וזה הטווח המינימלי, כלומר $d_0 = \max\{x \in \operatorname{dom} \sigma_k \mid a_j < x\}$.
נבחן את $\sigma(d_0) < \sigma_k(d_1)$ ונבחר $e \in N$ שמקיים $\sigma_k(d_0) < e < \sigma_k(d_1)$. אז נגדיר $\sigma_{k+1} = \sigma_k \cup \{\langle a_j, e\rangle\}$. שתי האפשרויות האחרות הן ש־a_j מעל או מתחת לכל $\operatorname{dom} \sigma_k$, ואז בהתאם נבחר נקודות מעבר לתחום זה, אשר קיימות מעצם חוסר קיום נקודות קצה.
עבור k אי־זוגי נבחן את σ_k^{-1} וכמו במקרה הקודם נוסיף את b_j עם j מינימלי שאיננו ב־$\operatorname{dom} \sigma_k^{-1} = \operatorname{rng} \sigma_k$ באופן משמר סדר.
נגדיר $\sigma = \bigcup_{k<\omega} \sigma_k$, זוהי פונקציה משמרת סדר חד־חד ערכית ועל. □

2.2 כותרת כלשהי

למה 2.9 (הפרדה) *נניח ש־T_1, T_2 תורות בשפה L. Σ אוסף פסוקים ב־L שסגור תחת גימום ואיווי ומכיל את $\top, \bot$ (כאשר ההכלה הזו חשובה רק למקרה הלא עקבי). אז התנאים הבאים שקולים:*

1. *יש $\varphi \in \Sigma$ כך ש־$T_1 \models \varphi, T_2 \models \neg\varphi$*
2. *לכל זוג מודלים $\mathcal{M}_1 \models T_1, \mathcal{M} \models T_2$ יש פסוק $\varphi \in \Sigma$ כך ש־$\mathcal{M}_1 \models \varphi, \mathcal{M}_2 \models \neg\varphi$*

הוכחה. $2 \implies 1$ ברור, ולכן נניח את תנאי 2.
נקבע את $\mathcal{M}_* = \mathcal{M}_1$, אז התורה,

$$T_2 \cup \{\varphi_{\mathcal{M}_*, \mathcal{M}_2} \mid \mathcal{M}_2 \models T_2\}$$

היא לא עקבית, אחרת אם $\mathcal{N}$ מקיים אותה אז $\mathcal{N} \models T_2$ אבל $\mathcal{N} \models \varphi_{\mathcal{M}_*, \mathcal{N}}$ וזו סתירה. לכן מקומפקטיות יש סדרה סופית של מבנים $\mathcal{M}_2^0, \ldots, \mathcal{M}_2^{n-1} \models T_2$ כך שמתקיים,

$$T_2 \cup \{\varphi_{\mathcal{M}_*, \mathcal{M}_2^0, \ldots, \mathcal{M}_2^{n-1}}\} \models \bot$$

נסמן $\Sigma \ni \psi_{\mathcal{M}_*} = \bigwedge_{i<n} \varphi_{\mathcal{M}_*, \mathcal{M}_2^i} \models \mathcal{M}_*$. כעת נבחן את $T_1 \cup \{\neg\psi_{\mathcal{M}_*} \mid \mathcal{M}_* \models T_1\}$. היא לא עקבית ולכן $T_1 \models \neg \bigwedge_{i<n} (\neg\psi_{\mathcal{M}_*}) \equiv$
$\bigvee_{i<n} \psi_{\mathcal{M}_*^i} \in \Sigma$. אבל $T_2 \models \neg \bigvee_{i<n} \psi_{\mathcal{M}_*^i}$ כרצוי. □

נסתכל על זוג מבנים $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, אז אם φ פסוק מהצורה של $\forall x\ \psi$ עבור ψ חסר כמתים, אז נכונותו ב־$\mathcal{N}$ תגרור את נכונותו ב־$\mathcal{M}$. אנו רוצים להגדיר תכונה שגוררת שכל תת־מודל מקיים את התורה של המודל המקורי. נראה שזהו למעשה המצב שבו זה קורה.

סימון 2.10 נניח ש־$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ מבנים ו־Δ קבוצת נוסחות. נסמן $f : \mathcal{M} \to_\Delta \mathcal{N}$ אם לכל נוסחה $\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \Delta$,

$$\mathcal{M} \models \psi(a_0, \ldots, a_{n-1}) \implies \mathcal{N} \models \psi(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}))$$

למה 2.11 *תהי Δ קבוצת פסוקים סגורה תחת גימום, איווי הוספת כמת קיים והחלפת שמות משתנים. נניח ש־$\mathcal{M}$ מודל ו־T תורה, אז התנאים הבאים שקולים:*

1. *לכל $\varphi \in \Delta \cap \operatorname{Th}(\mathcal{M})$, $T \cup \{\varphi\}$ עקבית*
2. *יש מודל של T ושיכון $f : \mathcal{M} \to_\Delta \mathcal{N}$*

הוכחה. $1 \implies 2$ טריוויאלי שכן $\mathcal{N} \models T \cup (\operatorname{Th}(\mathcal{M}) \cap \Delta)$, ולכן נוכיח את $2 \implies 1$.
נבחן את $T \cup \{\psi(d_{a_0}, \ldots, d_{a_{n-1}}) \mid \psi \in \Delta, \mathcal{M} \models \psi(a_0, \ldots, a_{n-1})\}$ בשפה המועשרת. נניח בשלילה שהיא לא עקבית. אז $T \models$
$\neg \bigwedge \psi_i(d_{a_0}, \ldots, d_{a_{n-1}})$ כאשר $\rho = \bigwedge \psi_i \in \Delta$. אז ממשפט הכללה על־ידי קבועים נסיק ש־$T \models \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}\ \neg\rho$, כלומר $T \models$
$\neg\exists x_0 \cdots \exists x_{n-1}\ \rho(x_0, \ldots, x_{n-1})$. אבל $\mathcal{M} \models \exists x_0 \cdots \exists x_{n-1}\ \rho$ בסתירה ל־1. □

מסקנה 2.12 יהיו T_1, T_2 תורות, אז התנאים הבאים שקולים:

1. יש פסוק מהצורה $\varphi = \forall x\ \psi$ כש־φ חסר כמתים (פסוק גלובלי) כך ש־$T_1 \models \varphi, T_2 \models \neg\varphi$
2. אין מודל של T_2 שהוא תת־מודל של T_1

הוכחה. $1 \implies 2$. נבחר Δ להיות פסוקים קיומיים, כלומר $\exists x\, \psi$ עבור ψ חסרי כמתים (עד כדי שקילות). נראה שלכל מודל $\mathcal{M}_1 \models T_1, \mathcal{M}_2 \models$ T_2 יש פסוק גלובלי שמפריד ביניהם. אחרת כל פסוק קיומי ש־$\mathcal{M}_2$ מספק עקבי עם T_1. לכן מהלמה הקודמת נקבל שיכון מ־$\mathcal{M}_2$ למודל של T_1 בסתירה. נגדיר את Σ להיות הפסוקים ששקולים לפסוקים גלובליים, גם הם סגורים תחת גימום ואיווי, ונקבל פסוק מפריד כמבוקש. $\square$

למעשה מצאנו אפיון סינטקטי שמאפיין את ההבדל האפשרי בין מבנים ותתי־מבנים.

3 שיעור 3 — 2.11.2025

3.1 משפט ווש

נעסוק בבנייה חשובה מאוד בעולם המודלים.

הגדרה 3.1 (מסנן) אוסף $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ של תתי־קבוצות של קבוצה X יקרא מסנן אם מתקיימות התכונות:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. אם $A \in \mathcal{F}$ ו־$A \subseteq B$ אז $B \in \mathcal{F}$
3. אם $A, B \in \mathcal{F}$ אז גם $A \cap B \in \mathcal{F}$

ההגדרה הזו באה לתאר לנו מהן קבוצות "גדולות", כלומר איך אנחנו יכולים לדבר באופן אבסטרקטי על המובן הגאומטרי שחלק מאוסף נחשב לגדול וחלק לא. לכן נרצה להניח שאוסף ריק לא יכול להיות גדול, וכן סגירות ללקיחת קבוצות גדולות יותר וסגירות לחיתוך. חשוב להסתכל על מסנן בתור אוסף של קבוצות שגדולות במובן של תורת המידה, כלומר אוסף שמכיל כמעט כל איבר.

דוגמה 3.1 $\mathcal{F} = \{X\}$ עבור X, האוסף שבו רק הקבוצה בשלמותה תיחשב לקבוצה גדולה.

דוגמה 3.2 נניח ש־$\emptyset \neq x \subseteq X$, אז $\mathcal{F}_x = \{y \subseteq X \mid x \subseteq y\}$ הוא מסנן, ואף נקרא המסנן הראשי.

דוגמה 3.3 נניח ש־$Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ עם תכונת החיתוך הסופי, ונגדיר,

$$\mathcal{H} = \{y \subseteq X \mid x_1, \dots, x_n \in X, \bigcap_{1 \le i \le n} x_i \subseteq y\}$$

אף הוא מסנן.

נעבור להגדרה המשלימה והחשובה מאוד.

הגדרה 3.2 (על־מסנן) תהי X קבוצה ויהי $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ מסנן, אז הוא נקרא על־מסנן אם בנוסף לכל $x \subseteq X$ או ש־$x \in \mathcal{U}$ או ש־$X \setminus x \in \mathcal{U}$.

זהו למעשה מסנן שמקיים את התכונה המהותית שכל קבוצה היא או גדולה, או קטנה במובן שהמשלים שלה הוא גדול.

הגדרה 3.3 (מכפלה) תהי $\langle \mathcal{M}_i \mid i \in I \rangle$ סדרת מבנים בשפה L. נגדיר את המכפלה,

$$\mathcal{N} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$$

כך שמתקיים $N = \prod_{i \in I} M_i$, כלומר העולם מורכב מהמכפלה הקרטזית של העולמות של סדרת המבנים.
לכל $R \in L$ יסמן יחס n־מקומי נגדיר,

$$\langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle \in R^{\mathcal{N}} \iff \forall i \in I,\ \langle f_0(i), \dots, f_{n-1}(i) \rangle \in R^{\mathcal{M}_i}$$

וכן לכל $F \in L$ סימן פונקציה n־מקומית, אז מתקיים,

$$(F^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1}))(i) = F^{\mathcal{M}_i}(f_0(i), \dots, f_{n-1}(i))$$

נסיק אם כך שמכפלה היא מודל שמהווה בצורה ישירה מכפלה של מודלים אחרים. אבל מבנה זה לא בהכרח משמר את התורה של המודלים המוכפלים, נראה דוגמה.

דוגמה 3.4 נניח ש־F_0, F_1 מודלים של שדות, ונניח גם שהשדות לא טריוויאליים.
נגדיר את $F_0 \times F_1$, אז מודל זה הוא לא שדה, זאת שכן לאיבר $\langle 0_{F_0}, 1_{F_1} \rangle$ הוא שונה מאפס ואין לו הופכי.

המטרה שלנו היא למצוא דרך להכפיל שתשמר את המבנה והתורה באיזשהו אופן. המטרה שלנו היא למצוא דרך ליצור מכפלה ככה שהצורה נשמרת אבל שאנחנו לא מורידים יותר מדי איברים, אלא כמות שמספיקה כדי לא לשבור את התורה. ווש (Łoś) הצליח במשימה זו, זאת על־ידי שימוש במסננים.

הגדרה 3.4 (יחס שקילות על מסנן) יהי $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ מסנן, ונניח ש־$\langle \mathcal{M}_i \mid i \in I \rangle$ סדרה של L־מבנים, ו־$\mathcal{N}$ מכפלתם.
נאמר ש־$f \sim_{\mathcal{F}} g$ עבור $f, g \in N$ אם,

$$\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$$

טענה 3.5 *היחס $\sin_{\mathcal{F}}$ הוא יחס שקילות.*

הגדרה 3.6 (מכפלה מושרית מחלוקה) תהי $\langle \mathcal{M}_i \mid i \in I \rangle$ סדרת L־מבנים, ונגדיר את המודל $\mathcal{N}/\mathcal{F}$ כך שהעולם הוא $N/\sim_{\mathcal{F}}$.
נגדיר גם שאם R יחס n־מקומי, אז מתקיים,

$$\langle [f_0], \dots, [f_{n-1}] \rangle \in R^{\mathcal{N}/\mathcal{F}} \iff \{ i \in I \mid \langle f_0(i), \dots, f_{n-1}(i) \rangle \in R^{\mathcal{M}_i} \} \in \mathcal{F}$$

אם $F \in L$ סימן פונקציה n־מקומית, אז נגדיר,

$$F^{\mathcal{N}/\mathcal{F}}([f_0], \dots, [f_{n-1}]) = [F^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1})]$$

כלומר הפעם איחדנו חלק מהאיברים על־ידי הגדרה של שקילות עליהם, והשתמשנו במסנן כדי לייצג את החלוקה הזאת. אנחנו מדברים באיזשהו מובן על קבוצות האיברים הגדולים ומסתכלים על קבוצות אלה כאיברים שלנו. לא ראינו שהגדרה זו בכלל תקפה, יכול להיות שהיא לא מוגדרת היטב.

טענה 3.7 *$R^{\mathcal{N}/\mathcal{F}}, F^{\mathcal{N}/\mathcal{F}}$ מוגדרות היטב.*

סימון 3.8 אם $f, g \in N$ אז נסמן $e_{fg} = \{ i \in I \mid f(i) = g(i) \}$.

תרגיל 3.1 הוכיחו את הטענה.

ראינו כי ההגדרה החדשה של מכפלה מרחיבה את ההגדרה הראשונה שלנו, וראינו גם שההגדרה הראשונה לא מצליחה לשמר את המבנה של המודל. המסקנה שלנו היא שאם אנחנו רוצים לשמר את המבנה, אנחנו צריכים ללכת לכיוון ההפוך.

הגדרה 3.9 (על־מכפלה וחזקה) תהיינה $\langle \mathcal{M}_i \mid i \in I \rangle$ סדרת של L־מבנים, ויהי על־מסנן $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$, אז $\mathcal{N} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / \mathcal{U}$ נקרא על־מכפלה.
אם $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_j$ לכל $i, j \in I$ אז נקרא ל־$\mathcal{N}$ על־חזקה.

למה 3.10 *תהי M_i סדרת מודלים ו־$\mathcal{U}$ על־מסנן. נניח ש־$f_0, \dots, f_{n-1} \in N$ ו־$t(x_0, \dots, x_{n-1})$ שם עצם מעל L. אז מתקיים,*

$$t^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}([f_0], \dots, [f_{n-1}]) = [t^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1})]_{\mathcal{U}}$$

הוכחה. באינדוקציה על t. אם $t = x$ אז,

$$t^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}([f]) = [f] = [t^{\mathcal{N}}(f)]$$

אם $t = F^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}(t_0, \dots, t_{n-1})$ אז מתקיים,

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}([f_0], \dots, [f_{n-1}]) &= F^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}(t_0^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}([f_0], \dots, [f_{n-1}]), \dots, t_0^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}([f_0], \dots, [f_{n-1}])) \\ &= F^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}([t_0^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1})], \dots, [t_{n-1}^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1})]) \\ &= [F^{\mathcal{N}}(t_0^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1}))] \\ &= [t^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1})] \end{aligned}$$

והשלמנו את מהלך האינדוקציה. □

משפט 3.11 (ווש) *נניח ש־$\langle \mathcal{M}_i \mid i \in I \rangle$ סדרת L־מודלים ו־$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ על־מסנן.*
אז אם $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ אז,

$$\mathcal{N}/\mathcal{U} \models \varphi([f_0], \dots, [f_{n-1}]) \iff \{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi(f_0(i), \dots, f_{n-1}(i)) \} \in \mathcal{U}$$

הוכחה. באינדוקציה על מבנה הנוסחה.
נתחיל בנוסחה אטומית, $\varphi = R(t_0(x), \dots, t_{n-1}(x))$, אז מתקיים,

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}/\mathcal{U} \models \varphi([f_0], \dots, [f_{n-1}]) \\ \iff & (t_0^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}([f_0], \dots, [f_{n-1}]), \dots, t_{n-1}^{\mathcal{N}/\mathcal{U}}([f_0], \dots, [f_{n-1}])) \in R^{\mathcal{N}/\mathcal{U}} \\ \iff & ([t_0^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1})], \dots, [t_{n-1}^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1})]) \in R^{\mathcal{N}/\mathcal{U}} \\ \iff & \{ i \in I \mid (t_0^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1})(i), \dots, t_{n-1}^{\mathcal{N}}(f_0, \dots, f_{n-1})(i)) \in R^{\mathcal{M}_i} \} \in \mathcal{U} \\ \iff & \{ i \in I \mid t^{\mathcal{M}_i}(f_0(i), \dots, f_{n-1}(i)) \in R^{\mathcal{M}_i} \} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

נניח שהטענה נכונה ל־φ ונבדוק את $\neg\varphi$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}/\mathcal{U} \models \varphi([f_0], \ldots, [f_{n-1}]) \\ \iff &\{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi(f_0(i), \ldots, f_{n-1}(i))\} \in \mathcal{U} \\ \iff &\{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \neg\varphi(f_0(i), \ldots, f_{n-1}(i))\} \notin \mathcal{U}\end{aligned}$$

נניח שהטענה נכונה ־φ, ψ, אז,

$$\mathcal{N}/\mathcal{U} \models (\varphi \wedge \psi)([f_0], \ldots, [f_{n-1}]) \iff (\mathcal{N}/\mathcal{U} \models \varphi(\ldots)) \wedge (\mathcal{N}/\mathcal{U} \models \psi(\ldots))$$

וזה נכון אם ורק אם $\{i \in I \mid \varphi(\ldots)\} \in \mathcal{U}$ וגם עבור ψ, אבל $\mathcal{U}$ סגורה לחיתוך ולכן גם $\{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models (\varphi \wedge \psi)(\ldots)\} \in \mathcal{U}$.
נעבור לחלק האחרון ונניח ש־$\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \exists x_n\ \varphi(x_0, \ldots, x_n)$.
נניח ש־$\mathcal{N}/\mathcal{U} \models \psi([f_0], \ldots, [f_{n-1}])$ ולכן קיים $[g] \in N/\mathcal{U}$ כך ש־$\varphi^{\mathbb{N}/\mathcal{U}}([f_0], \ldots, [f_{n-1}], [g])$. אז מהנחת האינדוקציה,

$$A = \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi(f_0(i), \ldots, f_{n-1}(i), g(i))\} \in \mathcal{U}$$

לכל $i \in A$ נקבל ש־$\mathcal{M}_i \models \exists v\ \varphi(f_0(i), \ldots, f_{n-1}(i), v)$ ולכן גם,

$$\{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \psi(f_0(i), \ldots, f_{n-1}(i))\} \in \mathcal{U}$$

וסיימנו את הכיוון הראשון.
נניח בכיוון ההפוך ש־$B = \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \psi([f_0], \ldots, [f_{n-1}])\} \in \mathcal{U}$. לכל $i \in B$ נבחר $g_i \in \mathcal{M}_i$ כך שמתקיים,

$$\mathcal{M}_i \models \psi(f_0(i), \ldots, f_{n-1}(i), g_i)$$

עבור $i \in I \setminus B$ נבחר b_i שרירותי. נגדיר את הפונקציה $g(i) = g_i$ לכל $i \in I$ ולכן $g \in \mathcal{N}$, אז מהנחת האינדוקציה,

$$\mathcal{N}/\mathcal{U} \models \varphi([f_0], \ldots, [f_{n-1}], [g]) \implies \mathcal{N}/\mathcal{U} \models \psi([f_0], \ldots, [f_{n-1}])$$

והטענה נובעת. $\square$

משפט 3.12 (הקומפקטיות) *אם T תורה ספיקה סופית אז היא ספיקה.*

הוכחה. נסמן $I = \{S \subseteq T \mid |S| < \omega\}$. לכל $S \in I$ נגדיר את המודל $\mathcal{M}_S$, קיים כזה מהספיקות הסופית. לכל $t \in I$ נסמן $Y_t = \{w \in I \mid w \supseteq t\}$. לאוסף $\{X_s \mid s \in I\}$ יש את תכונת החיתוך הסופי. יהי $\mathcal{U}$ על־מסנן מעל I כך ש־$X_S \in \mathcal{U}$ לכל $S \in I$.
נגדיר את $\mathcal{N} = \prod_{S \in I} \mathcal{M}_S/\mathcal{U}$ ונטען ש־$\mathcal{N} \models T$.
יהי $\varphi \in T$ אז $X_{\{\varphi\}} \in \mathcal{U}$ ולכן $X_{\{\varphi\}} \subseteq \{t \in I \mid M_t \models \varphi\} \in \mathcal{U}$. ממשפט ווש $\mathcal{N} \models \varphi$. $\square$

מסקנה 3.13 יהי κ מונה אינסופי ויהי $\mathcal{A}$ מודל. נסמן $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ לכל $i \in \kappa$. יהי $\mathcal{U}$ על־מסנן מעל κ, ויהי $\iota : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\kappa/\mathcal{U}$ על־ידי $\iota(a) = [c_a]$. אז ι שיכון אלמנטרי.

הוכחה. עבור נוסחה φ מתקיים,d

$$\mathcal{A}^\kappa/\mathcal{U} \models \varphi(\iota(a_0), \ldots, \iota(a_{n-1})) \iff \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})\} \in \mathcal{U} \iff \mathcal{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

$\square$

הגדרות ומשפטים