פתרון מטלה 7 — תורת המידה, 80517

4 בדצמבר 2025

שאלה 1

נקרא את ההוכחה של משפט אי־שוויון הולדר ואי־שוויון מינקובסקי.

פתרון קראתי.

שאלה 2

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ו־$0 < r < 1$, נגדיר לכל $f : X \to \mathbb{C}$ את הפונקציה,

$$\|f\|_r = \left(\int |f|^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}}$$

ואת $\mathcal{L}^r(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid \|f\|_r < \infty, f \text{ is measurable}\}$. נראה שאם ב־$X$ יש שתי תתי־קבוצות זרות ממידה סופית וחיובית אז $\|\cdot\|_r$ לא מקיימת את אי־שוויון המשולש.

הוכחה. נניח ש־$A, B \in \mathcal{A}$ וכן ש־$A \cap B = \emptyset,\ 0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. עבור $c_a, c_b \in \mathbb{R}_+$ נגדיר $f = c_a \mathbb{1}_A + c_b \mathbb{1}_B$ ונחשב,

$$\|c_a \mathbb{1}_A\|_r = \left(\int |c_a \mathbb{1}_A|^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} = \left(c_a^r \int \mathbb{1}_A^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} = c_a \mu^{\frac{1}{r}}(A)$$

ולכן נסיק שגם $\|c_b \mathbb{1}_B\|_r = c_b \mu^{\frac{1}{r}}(B)$. נגדיר $0 < c < 1$ מספר כלשהו וכן $c_a = c, c_b = 1 - c$ ולכן נקבל,

$$(c_a + c_b)^r = 1^r = 1 \qquad c_a^r + c_b^r > 1.$$

ולכן בהתאמה $(c_a + c_b)^r > c_a^r + c_b^r$, ועתה נגיש לחישוב,

$$\|f\|_r = \left(\int (c_a \mathbb{1}_A + c_b \mathbb{1}_B)^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} > \left(\int (c_a \mathbb{1}_A)^r + (c_b \mathbb{1}_B)^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} = c_a \mu^{\frac{1}{r}}(A) + c_b \mu^{\frac{1}{r}}(B) = \|c_a \mathbb{1}_A\|_r + \|c_b \mathbb{1}_B\|_r$$

כלומר אי־שוויון המשולש לא מתקיים עבור f. $\square$

שאלה 3

נניח ש־$(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה σ־סופי וכן ש־$1 \leq s \leq t \leq \infty$.

סעיף א'

נראה ש־$L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$ אם ורק אם $\mu(X) < \infty$.

הוכחה. נניח ש־$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ כך ש־$X = \biguplus E_n$ וכן ש־$\mu(E_n) < \infty$ לכל n.

נניח ש־$L^t(\mu) \subseteq L^s(\mu)$ לכל t, s כאלה. כלומר אם $\|f\|_t < \infty$ אז גם $\|f\|_s < \infty$ לכל $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה. נגדיר את הסדרה,

$$a_n^t = \int_{E_n} |f|^t \, d\mu$$

ונבחן את $\sum_{n=1}^{k} a_k$, נקבל,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^t = \int |f|^t \, d\mu$$

כלומר אם הטור מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^s$ מתכנס לכל $s \geq t$. נבחין כי מחוקי טורי חזקות נובע שמתקיים $a_n^t \xrightarrow{t\to\infty} 0$ לכמעט כל n. בפרט אם נבחר $f \equiv 1$ נקבל שמתקיים $\mu(X) < \infty$ כפי שרצינו.

נניח ש־$\mu(X) < \infty$, לכן $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$. נבחין כי מתקיים,

$$\|f\|_r = \left(\int |f|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|^r \, d\mu < \infty$$

אבל גם,

$$\int_{E_n} |f|^t \, d\mu \leq \int_{E_n} |f|^s \, d\mu$$

ולכן אם $f \in L^t(\mu)$ אז נובע ש־$f \in L^s(\mu)$. $\square$

סעיף ב'

נראה ש־$L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ אם ורק אם אין ב־$\mathcal{A}$ קבוצות ממידה $\varepsilon > 0$ לכל $\varepsilon > 0$.

הוכחה. נניח ש־$L^s(\mu) \subseteq L^t(\mu)$. נניח ש־$f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$ פשוטה אי־שלילית כלשהי, מותר לנו להניח כן משלמות המרחב ומהעובדה שלכל פונקציה נוכל לקחת את ערכה המוחלט. אז מתקיים,

$$\|f\|_s \leq \sum_{n=1}^{N} \|\|\alpha_n \mathbb{1}_{A_n}\|_s \leq \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mu^{\frac{1}{s}}(A_n) \leq c\|f\|_t.$$

כאשר המעבר הראשון נובע מאי־שוויון מינקובסקי והמעבר האחרון נובע משקילות נורמות ב־$\mathbb{R}$ (והעובדה שנורמה של פונקציה היא ערך ממשי). נסיק שמתקיים,

$$\mu^{\frac{1}{s}}(E_n) \leq c\mu^{\frac{1}{t}}(E_n) \implies \mu^{\frac{1}{s}-\frac{1}{t}}(E_n) \leq c \implies \mu(E_n) \geq c^{\frac{st}{s-t}}$$

ונסיק את הטענה.

בכיוון ההפוך תהי $f \in L^s(\mu)$, ונסמן $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| > n\}$, אז נובע ש־$\mu(A_n) \to 0$. אבל לא קיימות קבוצות ממידה חיובית קטנות מ־ε ולכן $\mu(A_n) = 0$ החל מ־n מסוים. כלומר f פונקציה חסומה ולכן נוכל להסיק ש־$f \in L^t(\mu)$ לכל $t \geq s$. $\square$

שאלה 4

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה, לכל $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה נגדיר את הסופרימום והאינפימום ההכרחיים שלה להיות,

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}((x,\infty))) = 0\}, \qquad \operatorname{ess\,inf} f = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}((-\infty,x))) = 0\}$$

נגדיר לכל $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה גם $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$.

סעיף א'

תהי $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה, ונסמן $K \subseteq \mathbb{R}$ את התומך של $f_*\mu$ המוגדרת על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.
נראה שהאינפימום והסופרימום של K הם $\operatorname{ess\,inf} f, \operatorname{ess\,sup} f$.

הוכחה. נסמן $\alpha = \operatorname{ess\,sup} f$, אז נובע ש־$\alpha \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $\mu(f^{-1}(x,\infty)) = f_*\mu((x,\infty)) > 0$ לכל $x < \alpha$. כלומר לכל קבוצה סגורה $\alpha \subseteq C$ מתקיים ש־$f_*\mu(C) > 0$ ולכן $\alpha \in K$. עוד מהגדרה לכל $\beta > \alpha$ קיימת פתוחה כך ש־$f_*\mu(U) = 0$, לכן $\beta \notin K$ ונובע ש־$\sup K = \alpha$ בדיוק. הטענה סימטרית עבור ess inf. □

סעיף ב'

נראה שלכל f מדידה מתקיים $\|f\|_1 \leq \mu(X) \cdot \|f\|_\infty$.

הוכחה. עבור פונקציה פשוטה $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}$ נקבל,

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \int \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n} \right\|_1 d\mu \\
&= \int \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n} \right|_1 d\mu \\
&= \int \sum_{n=1}^N |\alpha_n| \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^N |\alpha_n| \mu(E_n) \\
&\leq \mu(X) \cdot \max\{\alpha_n\} \\
&= \mu(X) \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית והעובדה שנורמה היא רציפה ולכן מדידה נקבל את הטענה. □

סעיף ג'

נניח ש־f_n, f מדידות כך ש־$\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
נראה של־(f_n) תת־סדרה המתכנסת נקודתית ל־f.

הוכחה. מהגדרת נורמת סופרימום נקבל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $\operatorname{ess\,sup}|f_n - f| < \varepsilon$, כלומר $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ μ־כמעט תמיד. זוהי כמובן התכנסות במידה שווה של f_n ל־f כמעט תמיד ולכן משלמות נורמת סופרימום על $\mathbb{R}_{\geq 0}$ נסיק שקיימת תת־סדרה המתכנסת נקודתית ל־f כמעט תמיד. □

שאלה 5

נניח ש־$(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה סופי וש־$f : X \to \mathbb{C}$ מדידה.

סעיף א'

נראה שאם $\|f\|_\infty = 1$ אז הסדרה $a_n = \int |f|^n \, d\mu$ מתכנסת.

הוכחה. מהשאלה הקודמת מתקיים,

$$\|f\|_1 \leq \mu(X)\|f\|_\infty = \mu(X) < \infty$$

משאלה 3 והטענה כי $\mu(X) < \infty$ נובע שלכל $1 \leq t \leq \infty$ מתקיים $L^\infty(\mu) \subseteq L^t(\mu)$ וכן נתון ש־$f \in L^\infty(\mu)$ ולכן גם $\|f\|_t < \infty$. נתון גם $\|f\|_\infty = 1$ וראינו ש־$\|f\|_t < 1$ לכל $t < \infty$ בשאלה 3, ולכן גם $\|f\|_t^t < 1$, ובפרט נסיק משיקולי חסימות שמתקיים $\|f\|_t^t \to 0$ כפי שרצינו. $\square$

סעיף ב'

תהי f מדידה המקיימת $0 < \|f\|_\infty < \infty$ ונראה שמתקיים,

$$\|f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}$$

הוכחה.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} = \lim_{n\to\infty} \int \frac{|f|^{n+1}}{|f|^n} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int |f|^{1+\frac{1}{n}} \, d\mu.$$

נסמן $M = \|f\|_\infty$, אז מהגדרה מתקיים $|f| \leq M$ כמעט תמיד, ולכן,

$$\|f\|_n^n = \int |f|^n \, d\mu \leq \int M^n \, d\mu = M^n \mu(X)$$

ובהתאם,

$$\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} \leq \frac{M^{n+1}\mu(X)}{M^n \mu(X)} = M$$

מהצד השני מתקיים $M = \operatorname{ess\,sup} |f| = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mu(f^{-1}((x, \infty))) = 0\}$. אז נגדיר $A = f^{-1}((M, \infty))$ ולכן $\mu(A) = 0$. בהתאם נגדיר $A_\varepsilon = f^{-1}((M - \varepsilon, \infty))$ ונקבל $\mu(A_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to\infty} 0$ וכן,

$$\|f\|_n^n = \int |f|^n \, d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} |f|^n \, d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} (M - \varepsilon)^n \, d\mu = (M - \varepsilon)^n \mu((M - \varepsilon, \infty))$$

ונקבל,

$$\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n} \geq \frac{(M - \varepsilon)^{n+1}\mu((M - \varepsilon, \infty))}{(M - \varepsilon)^n \mu((M - \varepsilon, \infty))} = M - \varepsilon$$

ולכן נובע $\|f\|_n^n \to M$. $\square$