

פתרון מטלה 3 – תורת המידה, 80517

8 בנובמבר 2025



שאלה 1

נניח ש- (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה.

סעיף א'

נוכיח שאם $0 \leq f \leq g$ מדירות אז $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ לכל $E \in \mathcal{A}$.

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות $X = E$ אחרת נוכל לקחת $f \cdot \mathbb{1}_E, g \cdot \mathbb{1}_E$. מהגדרה מתקיים,

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int s d\mu \mid s \leq f, s \text{ is simple}\right\}$$

אבל לכל s כזאת נקבל ש- $s \leq f \leq g$, כלומר,

$$\left\{\int s d\mu \mid s \leq f, s \text{ is simple}\right\} \subseteq \left\{\int s d\mu \mid s \leq g, s \text{ is simple}\right\}$$

ולכן נקבל שגם,

$$\sup\left\{\int s d\mu \mid s \leq f, s \text{ is simple}\right\} \leq \sup\left\{\int s d\mu \mid s \leq g, s \text{ is simple}\right\}$$

ובהתאם נסיק $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

□

סעיף ב'

נוכיח שאם $A \subseteq B$ מדירות ו- $0 \leq f$ אז,

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$$

הוכחה. נניח ש- $B = X$ שכן נוכל לקחת כמו בסעיף הקודם מציינים בהתאם.

נניח ש- $s \leq f$ פשוטה ולכן,

$$s(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}$$

עבור $\alpha_n \in \mathbb{R}^+, E_n \in \mathcal{A}$, ובהתאם להגדרה,

$$\int_A s d\mu = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mu(E_n \cap A) \leq \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mu(E_n) = \int s d\mu$$

ולכן נסיק שגם $\int_A f d\mu \leq \int f d\mu$.

□

סעיף ג'

יהי $0 \leq f$ ו- $0 \leq c \leq \infty$ אז נראה ש- $\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu$.

הוכחה. נניח ש- $E = X$ וכן תהי $s \leq f$ פשוטה המסומנת כבסעיף הקודם. אז מתקיים,

$$\int cs d\mu = \sum_{n=1}^N c\alpha_n \cdot \mu(E_n) = c \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \mu(E_n) = c \int s d\mu$$

כלומר התכונה מתקיימת לכל s פשוטה, ובפרט נסיק,

$$\begin{aligned}\int cf \, d\mu &= \sup\left\{\int cs \, d\mu \mid s \leq f, \text{sis simple} \right\} \\ &= \sup\left\{c \int s \, d\mu \mid s \leq f, \text{sis simple} \right\} \\ &= c \sup\left\{\int s \, d\mu \mid s \leq f, \text{sis simple} \right\} \\ &= c \int f \, d\mu\end{aligned}$$

□

כלומר הטענה מתקיימת.

שאלה 2

יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה ונניח ש- $N \subseteq X$ מוכלת בקבוצה ממידה אפס, וכן ש- $f : N^C \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה. נראה שאם $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{C}$ הרחבות מדידות של f אז מתקיים,

$$\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$$

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $N \in \mathcal{A}$ ממידה אפס, כלומר נבחר את הקבוצה שמעידה ש- N מוכלת בקבוצה כזו. נבחן גם את $f : N^C \rightarrow [0, \infty]$, שכן אם הטענה נכונה עבורה, אז מהגדרת האינטגרל על פונקציה מרוכבת, הטענה נובעת ישירות. נניח ש- $s \leq f_1$ פשוטה כך ש- $s = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}$, אז מתקיים,

$$\int s d\mu = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(E_n) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu((E_n \cap N^C) \cup (E_n \cap N)) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(E_n \cap N^C) = \int_{N^C} s d\mu$$

ולכן נסיק שגם,

$$\int f_1 d\mu = \sup\left\{\int s d\mu \mid s \leq f_1, s \text{ is simple}\right\} = \sup\left\{\int_{N^C} s d\mu \mid s \leq f_1, s \text{ is simple}\right\} = \int_{N^C} f_1 d\mu$$

אבל נתון כי $f_1 \equiv f_2$ על N^C , ולכן נובע $\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$. □

שאלה 3

נעסוק עתה בדחיפה קדימה של מידה. יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה ונניח ש- (Y, \mathcal{B}) מרחב מדיד. ותהי $\rho : X \rightarrow Y$ העתקה מדידה. נגדיר את הדחיפה קדימה של μ על-ידי ρ על-ידי,

$$\forall E \in \mathcal{B}, \rho_*\mu(E) = \mu(\rho^{-1}(E))$$

סעיף א'

נראה ש- $\rho_*\mu$ היא מידה.

הוכחה. נניח ש- $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{B}$ סדרת מדידות זרות. אז מהגדרת תמונה הפוכה מתקיים $\rho^{-1}(\biguplus_{n=1}^\infty E_n) = \biguplus_{n=1}^\infty \rho^{-1}(E_n)$. מהגדרת μ כמידה נובע $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty \rho^{-1}(E_n)) = \sum_{n=1}^\infty \mu(\rho^{-1}(E_n))$, כלומר קיבלנו שבדיוק $\rho_*\mu(\bigcup E_n) = \sum_{n=1}^\infty \rho_*\mu(E_n)$ כפי שרצינו. \square

סעיף ב'

נראה שלכל $f : Y \rightarrow [0, \infty]$ מדידה מתקיים,

$$\int_X (f \circ \rho) d\mu = \int_Y f d\rho_*\mu$$

הוכחה. תהי $s \leq f$ פשוטה ונניח ש- $s = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}$, אז מתקיים,

$$\int_Y s d\rho_*\mu = \sum_{n=1}^N \alpha_n \rho_*\mu(E_n) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(\rho^{-1}(E_n)) = \int_X (s \circ \rho) d\mu$$

כלומר הטענה מתקיימת עבור פונקציות פשוטות, ולכן מהגדרת הסופרימום והאינטגרל נסיק שהטענה נכונה גם עבור f מדידה כללית. \square

סעיף ג'

נניח ש- $X = [0, 2\pi]$ ו- $Y = S^1$ עם מרחבים מדידים בורל, ונניח שגם $\rho : X \rightarrow Y$ מוגדרת על-ידי $\rho(x) = e^{ix}$. נניח שקיימת מידת לבג על X , מידה המחזירה עבור קטע את אורכו, ונסמן אותה ב- λ . נתאר את $\rho_*\lambda$.

פתרון המידה $\rho_*\lambda$ היא מידה על S^1 , ונניח ש- $E \subseteq Y$ קבוצה קשירה מסילתית, אז $\rho^{-1}(E)$ הוא קטע ולכן $\lambda(\rho^{-1}(E))$ הוא אורך הקטע המושרה מהקבוצה. כלומר גאומטרית $\rho_*\lambda$ מחזירה עבור קשת במעגל היחידה את האורך שלה.

שאלה 4

יהי (X, \mathcal{A}, μ) מרחב מידה סופי. נראה שלכל $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ מדידה וחסומה מתקיים,

$$\int f \, d\mu = \inf \left\{ \int \varphi \, d\mu \mid f \leq \varphi, \varphi \text{ is simple} \right\}$$

הוכחה. TODO

□