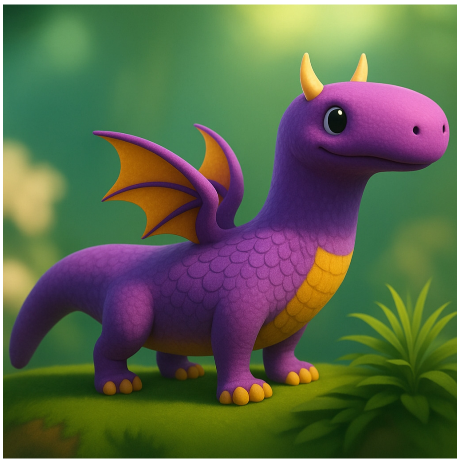
פתרון מטלה 04 — מבוא לטופולוגיה, 80516

7 במאי 2025



שאלה 1

יהי X מרחב טופולוגי ותהי $A \subseteq X$ קשירה. נראה שכל B המקיימת $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ היא קשירה.

הוכחה. נניח בשלילה ש־B לא קשירה, ויהיו $B \subseteq B_0 \uplus B_1$ קבוצות פתוחות זרות המעידות על כך. בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$A \subseteq B_0$ (לא יתכן שגם $A \cap B_1 \neq \emptyset$). B_1 פתוחה ולכן B_1^C סגורה ובפרט $\overline{A} \setminus B_1$ קבוצה סגורה המכילה את A, אבל $\overline{A}$ מינימלית בהכלתה את A, לכן נובע $\overline{A} \setminus B_1 = \overline{A}$, כלומר $B_1 \cap \overline{A} = \emptyset$. נסיק אם כן ש־$B_1 = \emptyset$ בלבד, אבל B_0, B_1 לא ריקות מהגדרת הקשירות, ולכן קיבלנו סתירה. $\square$

שאלה 3

ניזכר ונגדיר שמרחב מטרי חסום אם הוא מוכל בכדור.

סעיף א׳

יהי (X, ρ) מרחב מטרי קומפקטי, נראה שהוא חסום.

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$ ונגדיר $U_x = B(x, \epsilon)$ לכל $x \in X$. אז $\bigcup_{x \in X} U_x = X$ הוא כיסוי פתוח, ולכן מקומפקטיות יש תת־כיסוי סופי $X = \bigcup_{i=1}^n U_x$ עבור $x_1, \dots, x_n \in X$ ו־$n \in \mathbb{N}$. נגדיר $d = \sup_{i \le n} \rho(x_1, x_i)$ ונבחן את $B(x_1, r + \epsilon)$. כל נקודה $x \in X$ מקיימת $x \in B(x_i, \epsilon)$ עבור איזשהו i, וכן $\rho(x_1, x) \le \rho(x_1, x_i) + \rho(x_i, x) \le r + \epsilon$ ולכן $x \in B(x_1, r + \epsilon)$, כלומר כדור זה חוסם את X. $\square$

סעיף ב׳

נמצא דוגמה למרחב מטרי חסום שאינו קומפקטי.

פתרון נתחיל בהבחנה שאנו יודעים, במרחבים מטריים קומפקטיות שקולה לקומפקטיות סדרתית, לכן מספיק שנמצא מרחב מטרי חסום ולא קומפקטי סדרתי. נגדיר $X = (0, 1)$ יחד עם המטריקה הסטנדרטית $\rho(x, y) = |x - y|$, ונבחין כי $X = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. נגדיר $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ על־ידי $x_n = \frac{1}{n}$, ב־$\mathbb{R}$ נקבל ש־$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, לכן $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב־X, ואילו יש לה תת־סדרה מתכנסת, אז היא מתכנסת ל־0 ולכן לא מתכנסת ב־X גם, כלומר הסדרה מעידה על אי־קומפקטיות סדרתית. נסיק אם כך ש־(X, ρ) הוא מרחב מטרי חסום אך לא קומפקטי.

שאלה 4

נראה שאם X אינסופית אז טופולוגיית המשלים בן־המנייה, כלומר $A \subseteq X$ פתוחה אם ורק אם $|X \setminus A| \leq \omega$, היא לא קומפקטית.

הוכחה. נסמן $\kappa = |X|$ ונגדיר $f : \kappa \to X$ כדי להימנע משימוש בבחירה. נגדיר $X_0 = X$, ולכל n גם $X_{n+1} = X_n \setminus f(n)$, נבחין כי $X \setminus X_n = f''n$ ובפרט קבוצה פתוחה. $\square$