# מבוא לטופולוגיה – סיכום

2025 באפריל 8



תוכן העניינים

## תוכן העניינים

3	24.3.2025-1 שיעור	1
3	מבוא מבוא 1.1	
6	25.3.2025-2 שיעור	2
6	מופולוגיה — המשך במשך 2.1	
8	31.3.2025 - 3 שיעור	3
8	סגירות 3.1	
9	3.2 השלמות לרציפות	
11	7.4.2025-4 שיעור	4
11	4.1 אקסיומות ההפרדה	
14	8.4.2025 — 5 שיעור	5
14	- אקסיומות ההפרדה המשך המשך המשך	

#### 24.3.2025 - 1 שיעור 1

#### מבוא 1.1

 $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  ומערים, באינפי 1 מתבוננים ב $\mathbb{R}$  והגדרנו את מושג הגבול של סדרות, ולאחריו את המושג של פונקציה רציפה בעפר דיברנו על מרחבים מטריים, באינפי 1 המושג באינפי 3 כבר ראינו את את ווו $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$  מתקיים מתקיים אם ולכל  $x \in \mathbb{R}$  אם לכל אם לכל הייתה ש־f תיקרא המושג הכללי והרחב יותר של רציפות במרחבים מטריים. ניזכר בהגדרה של מרחב מטרי.

המקיימת, מטריקה) הנקראת מטריקה (הנקראת מטרי(X,d) באשר א קבוצה לא ריקה (מרחב מטרי) מרחב מטרי(X,d) האשר א המקיימת,

- $x, y \in X$  לכל d(x, y) = d(y, x) .1
- $d(x,y)=0\iff x=y$  וכך  $\forall x,y\in X, d(x,y)\geq 0$  .2
- $\forall x,y,z\in X, d(x,y)\leq d(x,y)+d(y,z)$  אי־שוויון המשולש, .3

#### דוגמה 1.1 נראה דוגמות למרחבים מטריים,

- d(x,y)=|x-y| יחד עם  $\mathbb{R}$  .1  $d_2(ar{x},ar{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2}$  המוגדרת על־ידי  $(\mathbb{R}^n,d_2)$  .2
- $d_{\infty}(\bar{x},\bar{y})=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$ , אינסוף, ואת מטריקת  $d_p(\bar{x},\bar{y})=\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p\right)^{rac{1}{p}}$  את מוכל עבור  $\mathbb{R}^n$  נוכל עבור 3.
- $ho(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) g(x)|$  קבוצת את המטריקה עבור  $[a,b] o \mathbb{R}$  עבור הרציפות הפונקציות הרציפות עבור  $[a,b] o \mathbb{R}$

נראה את ההגדרה הפורמלית של רציפות,

קדים  $\delta>0$  קיים  $\epsilon>0$  עבור אם לכל הא רציפה שיf רציפה אז נאמר שיf עבור f:X o Y עבור f:X o Y עבור הגדרה 1.2 (רציפות) אז נאמר שי  $\rho(f(x'), f(x)) < \epsilon$  אז  $d(x', x) < \delta$  מאם

אבל יותר קל לדבר במונחים של קבוצות פתוחות.

 $B(r,x) = B_r(x) = \{z \in X \mid d(x,z) < r\}$  הגדרה מטרי, נסמן מרחב מטרי, עבור עבור (Z,d) עבור (בדור) אגדרה 1.3

 $f^{-1}(V)=\{x\in X\mid f(x)\in T$ מתקיים ב־Y מתקיים אם לכל עביפות הגדרה אברה אברה לרציפות תיקרא f:X o Y (הגדרה לרציפות) אברה 1.5 הגדרה לכל אביפות היקרא רציפות היקרא אביפות היקרא אביפות האברה לכל אביפות האבים האבי X- קבוצה פתוחה ב־V

הבאים, התנאים התנאים התנאים, au כך שמתקיימים התנאים הבאים, טופולוגיה, על au הגדרה 1.6 (טופולוגיה), חהי au קבוצה (לא ריקה), טופולוגיה על au היא אוסף

- $\bigcup_{\alpha\in I}U_{\alpha}\in au$  אז  $\forall lpha\in I,U_{lpha}\in au$  כך שיס, I כך אינדקסים לקבוצת אינדקסים א אוז כלומר אם סגור לאיחוד, כלומר אם 2.
  - $U\cap V\in au$  מתקיים מופיים, כלומר לכל לכל טוער מופיים, סופיים סופיים מגור לחיתוכים 3.

. הגדרה על X, יקרא מרחב טופולוגיי לא ריקה ו־au טופולוגיי אוג (X, יקרא מרחב טופולוגיי לא ריקה ו־X מרחב טופולוגיי אוג (מרחב טופולוגיי) אוג (מרחב טו

 $U\in\Omega$  לכל  $f^{-1}(U)\in au$  בעשם הגדרנו כבר מתי פונקציה f:X o Y עבור מרחבים טופולוגיים (X, au), איז היא רציפה, כאשר בעצם הגדרנו לכל מ סימון 1.8 איברי au יקראו קבוצות פתוחות.

הא היא קבוצה אם A איז המשלים של A או מרחב המשלים אם A, כלומר המשלים אם האברה אם הגורה, אברה אם האברה או היא קבוצה המשלים של האחר המשלים או מרחב טופולוגי אז תת־קבוצה Aפתוחה.

דוגמה באופן טריוויאלי כנביעה ערי, כלומר נגדיר טופולוגיה אין  $au=\{U\subseteq X\mid \forall x\in U\exists r>0, B(x,r)\subseteq U\}$  יהי מטרי, נגדיר זה מטרי, נגדיר אין דוגמה 1.2 יהי מהמרחב המטרי.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי אכן זהו מרחב טופולוגי.

. יהי X קבוצה כלשהי, אז ניתן להגדיר על X טופולוגיה  $\{\emptyset,X\}$  יהי עופולוגיה טופולוגיה טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה אז ניתן להגדיר על X

. בולה אויה נגדיר  $au_1=\mathcal{P}(X)$  נגדיר עבור קבוצה  $au_2$  עבור קבוצה  $au_3$  עבור קבוצה אויה נגדיר בולה נגדיר עבור דומה אוי עבור קבוצה אויה אויים ביינו דיים ביינו אויים ביינו ביינו אויים ביינו אויינו אויים ביינו אויים ב

24.3.2025 - 1 שיעור 1 מבוא 1.1

f: מתי איז שהיא רציפה התשובה היא שהיא היא הוא f: מתי א היא f: ווהי א רציפה תמיד. ווהי רציפה מתיד. מתי א מתי f: ווהי מתי חלי. ווהי רציפה מתיד. מתי א דוגמה 1.5 מתי א מתיד. מתי חלי. רציפה, תלוי בהגדרת הפונקציה, אבל במקרה שבו היא אכן רציפה, אז היא רציפה לעומה ההיא. לעומת אבל במקרה אבל האריא. לעומת האריא רציפה  $(Y, au) o (X, au_1)$ רציפה.  $f:(X,\tau_1) o (Y, au)$ 

הערה לא כל טופולוגיה נובעת ממטריקה. לדוגמה הטופולוגיה הטריוויאלית על מרחב עם לפחות 2 נקודות.

. הקבוצה פתוחה קבוצה B(x,r) הקבוצה פתוחה.

 $\mathcal{F}=\{A\subseteq\mathbb{C}^n\mid\exists\{f_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n],A=\{(p_1,\ldots,p_n)\mid\forall i\in\mathbb{N}$  עבור איזשהו  $X=\mathbb{C}^n$  נגדיר 1.6 נגדיר 1.6 נגדיר  $I, f_i(p_1, \ldots, p_n) = 0\}$ 

, בסיס לטופולוגיה של X של תתי־קבוצות של בסיס לטופולוגיה בסיס לטופולוגיה בסיס לטופולוגיה בסיס לטופולוגיה בסיס לטופולוגיה בסיס בסיס לטופולוגיה בסיס לטופולוג

 $x \in B$ כך ש־  $B \in \mathcal{B}$  יש  $x \in X$  .1

 $x \in C \subseteq A \cap B$ יש כך כך שי $x \in A \cap B$  ולכל  $A, B \in \mathcal{B}$  .2

טענה 1.11 עבור בסיס  $\mathcal{B}$  היא טופולוגיה,  $au_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X \mid U \text{ is a union of elements of } \mathcal{B}\}$  היא טופולוגיה,

$$\forall \alpha \in I, B_{\alpha} \in \mathcal{B}, U = \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha}$$

, אז מתקיים, אז איז סופי, אז אם ער אז או ער אז אוכחה. וכן וכן  $U=\bigcup_{lpha\in I}B_lpha\in\mathcal{B}$  אז אז אז אם סופי, אז אם סגורה לחיתוך סופי, אז אם ער אז אז ער אז אז ער אז אז מתקיים, אונים, אונים,

$$U \cap V = (\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha}) \cap (\bigcup_{\beta \in J} A_{\beta}) = \bigcup_{\alpha, \beta \in I \times J} B_{\alpha} \cap A_{\beta} = D$$

 $U\cap V=(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)\cap(\bigcup_{\beta\in J}A_\beta)=\bigcup_{\alpha,\beta\in I\times J}B_\alpha\cap A_\beta=D$  כך ש־ $C_{\alpha_0,\beta_0}\subseteq \mathcal{B}$  ישנם  $C_{\alpha_0,\beta_0}\in \mathcal{B}$  ישנם  $C_{\alpha_0,\beta_0}\in \mathcal{B}$  ישנם  $C_{\alpha_0,\beta_0}\in \mathcal{B}$  ישנם  $C_{\alpha_0,\beta_0}\in \mathcal{B}$  ישנם אבל מהגדרת הבסיס פוימת קבוצה אבל מהגדרת הבסיס פוימת הבסיס פו . סופי. לכן הזיתות מצאנו בהתאם התאם ובהתאם  $D\subseteq igcup_{(x,lpha,eta)} C_{x,lpha,eta}$  לכן לכן  $B_{lpha_0}\cap A_{eta_0}$ 

 $\{B(x,rac{1}{n})\subseteq X\mid x\in$  אם מטרי, אז  $\{B(x,r)\subseteq X\mid x\in X, r>0\}$  הוא טופולוגיה. אבל עכשיו נוכל להגדיר גם את מטרי, אז הערה . המטרי לטופולוגיה שהגדרנו למרחב הטופולוגיה לאותה לטופולוגיה לטופולוגיה לטופולוגיה לאותה לטופולוגיה לאותה לטופולוגיה לאותה לאותה לטופולוגיה ל

תרגיל 1.2 הוכיחו שזהו אכן בסיס עבור המרחב הטופולוגי הנתון.

 $C = \{a + d\mathbb{Z} \mid a, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0\}$ , נניח ש" $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ , ונגדיר את הבסיס להיות אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, כלומר  $X = \mathbb{Z}$  $p\in p+dq\mathbb{Z}\subseteq$  אז  $p\in (a+d\mathbb{Z})\cap (b+q\mathbb{Z})$ , וננים כי זהו אכן בסיס (לטופולוגיה). נתבונן בזוג קבוצות ב $a+d\mathbb{Z},b+q\mathbb{Z}$ , וננים כי זהו אכן בסיס (לטופולוגיה).  $. au_C$  נגדיר טופולוגיית. ( $a+d\mathbb{Z}$ )  $\cap$  ( $b+q\mathbb{Z}$ )

קבוצות סגורות הן משלימים לקבוצות פתוחות.

כל סדרה אריתמטית דו־צדדית אינסופית היא גם פתוחה וגם סגורה. בפרט חיתוך סופי של סדרות אריתמטיות הוא סגור. לכן המשלים שלו הוא פתוח. מסקנה 1.12 (משפט אוקלידס) יש אינסוף מספרים ראשוניים.

$$\bigcup_{i=1}^k p_i \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$$

ולכן נובע ש־ $\{-1,1\}$  קבוצה פתוחה וזו כמובן סתירה.

טענה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי) עניח ש(X, au) מרחב טופולוגי, לכל  $\emptyset 
eq Y \subseteq X$  מרחב טופולוגי, מרחב טופולוגי, נניח ש(X, au) מרחב טופולוגי, לכל  $. au_Y = \{W \in au \mid W \subseteq Y\}$  אז  $Y \in au$  אם  $Y \in au$ 

טענה 1.14 (טופולוגיית מכפלה) נניח ש־ $(X_1, au_1)$  ו־ $(X_2, au_2)$  מרחבים טופולוגיים, אז נגדיר טופולוגיית מכפלה  $(X_1, au_1, au_1)$  על־ידי

$$\tau_{1,2} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2 \}$$

אז בסיס והטופולוגיית על־ידו נקראת על־ידו המכפלה. המכפלה דיטופולוגיית המכפלה דוא ד $au_{1,2}$  אז

דוגמה 1.8 נוכל לבנות כך מכפלה של כמות סופית או אינסופית של מכפלות טופולוגיות. עבור אוסף אינסופי (בן־מניה או לא בהכרח) אנו צריכים

24.3.2025 - 1 שיעור 1 1.1 מבוא

אז נגדיר אז גר<br/>ה $\alpha \in I$ עבור ( $X_{\alpha}, au_{\alpha}$ ) של נגדיר להיזהר, נניח

$$au_b=\{\prod_{lpha\in I}U_lpha\mid oralllpha\in I, U_lpha\in au_lpha\}$$
 אנקרא שנקרא טופולוגיית הקופסה. לעומת זאת נוכל להגדיר גם את

$$\tau_p = \{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha = X_\alpha \text{ for almost all } \alpha \in I \}$$

$$.\prod_{\alpha\in I}=\{f:I\to\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha\mid \forall \alpha\in I, f(x)\in X_\alpha\}$$
 כלומר

#### 25.3.2025 - 2 שיעור 2

#### טופולוגיה – המשך 2.1

Z=בשיעור הקודם דיברנו על מכפלה של טופולוגי, אז נתבונן שאם I קבוצת אינדקסים ולכל  $lpha\in I$  גם מרחב טופולוגי, אז נתבונן ביI בשיעור הקודם דיברנו על מכפלה של טופולוגיה על I.

**הערה** מגדירים.

$$\prod_{\alpha \in I} X_{\alpha} = \{ f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_{\alpha}, \forall \alpha \in I, f(\alpha) \in X_{\alpha} \}$$

לאחר מכן נוכל להגדיר טופולוגיית מכפלה,

,הבסים, נגדיר את הבסים (טופולוגיית מכפלה) 2.1 הגדרה

$$\mathcal{B}_{\text{box}} = \{ \prod_{\alpha \in I} U_{\alpha} \mid \forall \alpha \in I, U_{\alpha} \subseteq X_{\alpha}, U_{\alpha} \in \tau_{\alpha} \}$$

ואת הבסיס.

$$\mathcal{B}_{\text{prod}} = \{ \prod_{\alpha \in I} V_{\alpha} \mid \forall \alpha \in I, V_{\alpha} \in \tau_{\alpha}, V_{\alpha} \subseteq X_{\alpha}, |\{\beta \in I \mid V_{\beta} \neq X_{\beta}\}| < \infty, V_{\alpha} = X_{\alpha} \text{ for almost every } \alpha \}$$

אלו הן מכפלות של טופולוגיות המהוות טופולוגיה.

$$\pi_lpha(f)=f(lpha)$$
 אז שנן הטלהו ל $lpha\in I,\pi_lpha:Z o X_lpha$  הטלות שנן אז ל $Z=\prod_{lpha\in I}X_lpha$  אז הגדרה (העתקות הטלה) אז הגדרה

 $\pi_{lpha}^{-1}(U_{lpha})\in au$  יתקיים תהינה ב־ $X_{lpha}$  יתקיים שכל ההטלות עריך שלכל הרוצים אכן יקיימו אכן יקיימו עריים אכן יקיימו הביס, ערכל ההטלות הביס, אנו רוצים אכן יקיימו אכן יקיימו אכן יקיימו אכן יקיימו אכן יתקיים ב־ $X_{lpha}$  אבל זהו לא בסיס, אבל זהו לא בסיס, אבל נבחין כי $X_{lpha}$  אבל זהו לא בסיס,

$$C = \{ U_{\alpha} \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_{\beta} \mid \pi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) \in \tau \}$$

.] C=Xע כך של תת־קבוצות של X תהי קבוצה X קבוצה תהי קבוצה תהיקבוצות של עד תר־קבוצות הגדרה (מת־בסיס לטופולוגיה).

נגדיר את הסופיים הסופיים של איברי אוסף להיות כלומר  $\mathcal{B}_C = \{\bigcap A \mid A \subseteq C, |A| < \infty\}$  הייות של איברי מתחבסים המושרה אוסף פתוחות) פתוחות פתוחות הוא בסים.

 $au_1\subseteq au_2$  אם אם  $au_2$  הותר חלשה יותר שר אומרים על אומרים על  $au_1$  שם אם קבוצה  $au_1$  אם אומרים על אומרים על אומרים אומרים אם  $au_1$ 

, מרחב מושרה מתאים לכל i. נרצה להתבונן במכפלתם, ונגדיר ( $X_i, au_i$ ) מרחב ( $X_i, au_i$ ) לכל לכל  $X_i, au_i$  לכל לכל  $X_i, au_i$  שהגדרנו זה עתה. אז נוכל להתבונן ב־ $(\prod X_i, au_{\mathrm{prod}})$  שהגדרנו זה עתה.

 $x,y\in Z$  לכל  $Z=\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$  עם מטריקה מצוא מטריקה מרצה מרצה מטריים מטריים מטריים מטריים בהינתן מכפלה) מרצה אז נגדיה (מטריקה מכפלה) באשר אז נגדיר, אז נגדיר,

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

ברור שפונקציה זו מוגדרת, וברור אף כי היא מקיימת את התכונה השנייה של מטריקות, אך לא ברור שהיא מקיימת את אי־שוויון המשולש, זהו תרגיל שמושאר לקורא.

.  $\mathcal{B}_{prod}$ טענה שווה ל-מכפלה שורית עם מטריקת מרכפלה מרחבים מרחבים עבור  $(X_i, au_i)$  עבור עבור  $Z = \prod_{i=1}^\infty X_i$  שענה 2.6 מענה

 $au_
ho=\mathcal{B}_{
m prod}$  בסיס, אז נוכל להגדיר טופולוגיה (Z,
ho) מרחב מטרי, ו־ $\mathcal{B}_
ho=\{B(x,r)\mid x\in Z, r>0\}$  בסיס, אז נוכל להגדיר שטופולוגיה נקבעת ביחידות על־ידי בסיס שלה, לכן מספיק להראות שכל  $B\in\mathcal{B}_{
m prod}$  שייכת ל־ $T_{
m prod}$  שייכת ל־ $T_{
m prod}$ . נוסיף ונבהיר שטופולוגיה נקבעת ביחידות על־ידי בסיס שלה, לכן מספיק להראות את שקילות הבסיסים.

נתחיל בתנאי הראשון, ונקבע  $U_k\in au_k$  כלשהו. מספיק להראות שקבוצה מהצורה  $U_k imes\prod_{i\neq k}X_i$  פתוחה בי0 עבור  $U_k\in \mathbb{N}$  בית עבור בונסם ביל להרחיב הוכחה זו באופן סיסטמתי להיות על כל קבוצה סופית של קבוצות פתוחות. יהי 1 1 על להרחיב הוכחה זו באופן סיסטמתי להיות על כל קבוצה סופית של קבוצות פתוחות. יהי 1 ועישנו 1 על מרחב זה 1 שישנו 1 על מרחב זה 1 על מרחב 1 שישנו 1 על מרחב ביתוחה ולכן ישנו 1 ביות פתוח בי1 ביתוחה בי1 מדר פתוח בי1 ביתוחה ולכן ישנו 1 ביתוחה שישנו 1 ביתוח בי1 ביתוח בי

25.3.2025 - 2 שיעור 2 25.3.2025 טופולוגיה – המשך

קיים  $Z=\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$  ב־ $\frac{s}{2^k}$  סביב  $\frac{s}{2^k}$  את הכדור ברדיוס או לכן נבחן את המפלה כולו. איז א ומתקיים ברחב מרחב ומתקיים את התנאי לבסיס. נניח ש" $y=(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\in B_{\frac{s}{2^k}}(x)$  אז המטרה שלנו היא להראות שהכדור שעתה בחרנו מקיים את התנאי לבסיס. נניח ש"כולו היא להראות שהכדור שעתה בחרנו מקיים את התנאי לבסיס.

$$\frac{s}{2^k} > \rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} \ge \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

$$\Rightarrow s > \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

$$\Rightarrow \rho_k(x_k, y_k) < r$$

$$\Rightarrow y_k \in B_r(x_k) \subseteq U_k$$

, נעבור לתנאי השני, נתבונן בכדור הפתוח סביב Z סביב,  $B_r(x)$  , $x\in Z$  כאשור השני, נתבונן בכדור הפתוח מוגדר להיות,

$$B_r(x) = \left\{ y \in Z \mid \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} < r \right\}$$

, על־ידי, המוגדרת על־ידי, כלומר הזנב של את טור הזנב לומר נחסום את כלומר כלומר המוגדרת אר המוגדרת על־ידי, כלומר ב $V\subseteq Z$  ההי כל על כלומר כלומר הזנב את כלומר כלומר כלומר כלומר ביש המוגדרת על־ידי, כלומר כלומר כלומר ביש המוגדרת על־ידי, כלומר ביש המוגדרת ביש המוגדרת על־ידי, כלומר ביש המוגדרת ביש ביש המוגדרת

$$V = \left\{ (y_1,\ldots,y_M) \in \prod_{i=1}^M \mid \sum_{i=1}^M rac{1}{2^i} rac{
ho_i(x_i,y_i)}{1+
ho_i(x_i,y_i)} < rac{r}{2} 
ight\}$$
ואנו טוענים כי  $V imes \prod_{i=M+1}^\infty X_i \subseteq B_r(x)$  ואנו טוענים כי

П

#### 31.3.2025 - 3 שיעור 3

#### 3.1 סגירות

בדיוק כמו במרחבים מטריים, גם במרחב טופולוגי נרצה לדון במניפולציות על קבוצות במרחב, נתחיל בהגדרת הקונספט של סגור של קבוצה במרחב מופולוגי

A של הסגור את הסגור. נגדיר על קבוצה  $A\subseteq X$  הגדרה ותהי קבוצה מרחב טופולוגי) היי היי (סגור של קבוצה כשלהי. הסגור של  $A\subseteq X$  מרחב טופולוגי) מרחב טופולוגיA את את הסגור המכילה את A, כלומר,

$$\overline{A} = \bigcap_{X \setminus F \in \tau} F$$

בהתאם נקבל מספר תכונות ראשוניות ודומות לתכונות שראינו בעבר,

למה 3.2 התכונות הבאות מתקיימות,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
 .1

. כאשר במקרה זה אין בהכרח שוויון.  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$  . 2

, אז מתקיים, אז מתקיים,  $A=\mathbb{Q}, B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$  וכן  $X=\mathbb{R}$  שוויון, נגדיר שוויון, מתקיים, אז מתקיים, אז מתקיים,

$$\emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

טענה 3.3 אם (X, au) מרחב טופולוגי ו(X, au) אז,

$$x \in \overline{A} \iff \forall U \in \tau, x \in U \to U \cap A \neq \emptyset$$

Aאם ורק אם כל קבוצה פתוחה ביב הנקודה לא Aאם ורק אם כל קבוצה פתוחה סביב הנקודה לא A

 $x
otin \overline{A}\iff \exists U\in au, x\in U\land U\cap A=\emptyset$  הטענה, כלומר שלילת את נראה הוכחה. נראה הוכחה

A- אבל  $\overline{A}$  פתוחה וזרה מהגדרתה  $X\setminus \overline{A}$  אבל  $x\in X\setminus \overline{A}$  ולכן ולכן  $x\notin \overline{A}$ 

 $x
otin \overline{A}$  בכיוון השני אם יש  $X
otin \overline{A}\subseteq F$  פתוחה כך ש־ $X
otin U\cap A=\emptyset$  אז ע $X
otin \overline{A}\subseteq F$  סגורה ומכילה את  $X
otin \overline{A}\subseteq F$  ובהכרח

 $A^\circ = igcup_{U \in au, U \subset A} U$ , הגדרה את הפנים את נגדיר את נגדיר ושפה) אנדרה 3.4 הגדרה

כלומר הפנים הוא איחוד כל הקבוצות הפנימיות הפתוחות של A, ובשל הסגירות של הטופולוגיה לאיחוד, נקבל כך את הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר שחלקית ל- $A = \overline{A} \setminus A^\circ$  היותר  $A = \overline{A} \setminus A^\circ$ 

נבחין בהגדרה של סביבה ונשתמש בהגדרה זו כדי להגדיר מונח חדש.

 $.x \in U \subseteq L$ יש כך ער פרימת קבוצה פתוחה  $t \in U \subseteq L$ יש כל באמר של באמר הא מביבה של נקודה) נאמר של  $t \in L$ 

אם אם הצטברות של היא נקודת הצטברות  $x\in A$ ו תת־קבוצה כלשהי, והי $x\in A$ ו נקודת הצטברות של חדוב טופולוגי, תהי $x\in A$ ו תת־קבוצה כלשהי, ו־ $x\in A$ ו נקודה מ־x שונה מ־x, כלומר,

$$\forall U \in \tau, x \in U \implies \exists y \in (U \setminus \{x\}) \cap A$$

A את קבוצת נקודות ההצטברות של A'

נרצה להסתכל על נקודות הצטברות כנקודות שלא משנה כמה קרוב אנחנו מסתכלים אליהן, עדיין נוכל למצוא בסביבתן נקודות נוספות. במובן הזה ברור שהן נמצאות בקרבת נקודות בפנים, אך עלולות להיות גם נקודות לא פנימיות שמקיימות טענה כזו.

 $\overline{A}=A\cup A'$  מענה 3.7 מתקיים

היא אוסף כל  $\overline{A}$  היא אוסף הטענה ש־ $\overline{A}$  או או $\overline{A}$  או אז או  $\overline{A}$  או אוסף היא אוסף מביבה של x יש נקודה מ $\overline{A}$  שונה מ־ $\overline{A}$  אז או אוסף היא אוסף מביבה של  $\overline{A}$  או אוסף לאר היק נובע ש־ $\overline{A}$  או אוסף כל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  איז אוסף כל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  איז אוסף כל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  איז אוסף כל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  איז אוסף כל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  איז אוסף כל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  היא אוסף כל סביבה שלהן המכילה אוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  היא אוסף כל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  היא אוסף כל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  היא אוסף כל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  היא אום בכל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  היא אום בכל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  בחיתוך לא ריק נובע ש־ $\overline{A}$  היא אום בכל סביבה שלהן המכילה את  $\overline{A}$  היא אום בכל סביבה שלח ביד היא אום ביד הי

בכיוון השני נניח ש". $x\in A$  אז לכל  $x\notin A$  כך ש". $x\in A$  מתקיים  $x\in A$  אם אם  $x\in A$  אם אז לכל  $x\in A$  אז לכל  $x\in A$  אז לכל  $x\in A\cup A'$  מתקיים  $x\in A\cup A'$  מרכי משני  $x\in A\cup A'$  מרכי משני מש". $\overline{A}=A\cup A'$ 

31.3.2025 - 3 שיעור 3 שיעור 3

#### 3.2 השלמות לרציפות

f:X o Y ופונקפט של רציפות ופונקציה איז מרחב טופולוגי ויX קבוצה כלשהי, ופונקציה איז בחול בחליני ויזכר בהגדרה לדון בקונספט של רציפות באופן רחב יותר. בהינתן להגדיר טופולוגיה על X כך שיf רציפה.

X איא מהבסיס משרית מושרית עליו ולהגדיר לבסיס ולהרחיבה הרחיבה היא תת־בסיס, היא הת־בסיס, ואפשר הרחיבה לבסיס ולהגדיר עליו  $\{f^{-1}(U) \mid U \in au_Y\}$ 

. ביותר על X עבורה f רציפה עבור טופולוגיה או, וזו הטופולוגיה וו על דעותר או f לוגיה לענה f מענה f לישור על f

 $\{U\subseteq Y\mid f^{-1}(U)\in au_X\}$  את נוכל להגדיר f:X o Y נוכל עם פונקציה עם יחד עם וקבוצה לשהי ווו ויוו הטופולוגיה וווו הטופולוגיה ביותר על עם ביותר על עם עם עם ועם ועם לבנות בסיס וטופולוגיה על f באופן דומה ביותר על עם ביותר ע

טענה 3.9 (שקילות לרציפות) יהיו מרחבים טופולוגיים ( $X, au_X$ ), ותהי אז התנאים הבאים שקולים, יהיו מרחבים טופולוגיים (שקילות לרציפות)

- 1.2 רציפה לפי f .1
- $X^{-1}$  סגורה  $f^{-1}(F)$  , $F\subseteq Y$  סגורה ב-2. .2 הגדרה זו עוזרת לנו לדון בקבוצות סגורות במקום פתוחות
- Xבסיס לטופולוגיה של Y אז לכל  $B\in\mathcal{B}$  מתקיים ש $f^{-1}(B)$  פתוחה ב- B מתקיים של לנו לדון בכיסים ובכך לפשט את העבודה עם טופולוגיות הגדרה זו מאפשרת לנו לדון בבסיסים ובכך לפשט את העבודה עם טופולוגיות
- x של סביבה  $f^{-1}(W)$  מתקיים שf(x) של  $W\subseteq Y$  סביבה של  $x\in X$  לכל .4
- רציפה.  $f\mid_{U_{\alpha}}:U_{\alpha}\to Y$  מתקיים  $\alpha\in\Omega$  מתקיים  $\gamma$ , ער  $\gamma$ , ער  $\gamma$ , ער אומר  $\gamma$ , כלומר אווער  $\gamma$ , ער אומר אווער  $\gamma$ , ער אומר אווער  $\gamma$ , ער אווער אווער פון אינים כיסוי פתוח אווער פון אינים אווער אווער
  - . רציפה.  $f\mid_{F_i}:F_i\to Y$  הכל כיסוי סגור עבור  $f\mid_{F_i}:F_i\to Y$  עבור עבור עבור עבור עבור עבור  $X=\bigcup_{i=1}^n F_i$  רציפה. A
    - $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$  מתקיים  $A \subseteq X$  לכל.

. תוחות שירות על קבוצות הרציפות של משלימים הגדרה שירות מהגדרה שירות פתוחות. בובע ישירות מהגדרה של משלימים והגדרת מהגדרה שירות מהגדרה שירות מהגדרה של משלימים והגדרת הרציפות על קבוצות פתוחות.

- היא איחוד השני כל קבוצה הטענה. לכיוון השני כך להראות היא קבוצה פתוחה, ונוכל כך להראות את נכונות הטענה. לכיוון השני כל קבוצה היא איחוד  $f^{-1}(\bigcup U_{\alpha}) = \bigcup f^{-1}(U_{\alpha})$ , של קבוצות מהבסיס,  $U_{\alpha}$ , ור
- $x\in f^{-1}(U)\subseteq$  ש־ט פתוחה, לכן נובע ש־ט  $f(x)\in U\subseteq W$  אז קיימת אז קיימת של  $f(x)\in W\subseteq Y$  וכן  $f(x)\in W\subseteq Y$  אז פתוחה.  $f^{-1}(U)$  כאשר כאשר באטר פתוחה.
- היא  $f^{-1}(U)$  הנחה אז צריך להראות שר $f^{-1}(U)$  פתוחה. תהי תהי  $f^{-1}(U)$  אם צריך להראות שר $f^{-1}(U)$  פתוחה אז צריך להראות אז צריך להראות פתוחה, ונסיק שר $f^{-1}(U)=\bigcup_{x\in f^{-1}(U)}V_x$  פתוחה, ונסיק שר $f^{-1}(U)=\bigcup_{x\in f^{-1}(U)}V_x$  פתוחה, ונסיק שר $f^{-1}(U)$ 
  - . נוכל לבחור כיסוי טריוויאלי. נוכל לבחור נוכל כיסוי נוכל נוכל 5
- - . נבחר את לכיסוי סגור של עצמה.  $1 \Longrightarrow 6$
- עששינו בימה למהלך ההוכחה רציפה. כעת ההוכחה לההלך שעשינו  $f\mid_{F_i}: F_i \to Y$ , ונניח גם שלכל של כיסוי סגור סופי אל כיסוי סגור כיסוי סגור אפיון רציפות בעזרת  $f\mid_{F_i}: F_i \to Y$ , אבל כעת אפיון רציפות בעזרת  $f\mid_{F_i}: F_i \to Y$ , ואיחוד סופי על סגורות הוא סגור.
- $f(x) \notin \overline{f(A)}$  שילה שי $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ , נניח בשלילה שי $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ , יהי  $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ , יהי  $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$ , נניח בשלילה שי $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  אבל  $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  פתוחה ב־ $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  אבל  $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  פתוחה ב- $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  אבל  $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  פתוחה ב- $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  אבל  $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  וקיבלנו  $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  אבל  $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  פתוחה ב- $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  אבל  $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  פתוחה ב- $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  אבל  $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$  וקיבלנו
  - סגורה, אז,  $F \subseteq Y$  מגורה, אז.  $7 \implies 2$

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \overset{\text{finith}}{\subseteq} \subseteq \overline{F} \overset{\text{finith}}{=} F \ \Longrightarrow \ \overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$$

31.3.2025 - 3 שיעור 3 שיעור 3

, לכן,  $f^{-1}(F)\subseteq\overline{f^{-1}(F)}$ מהגדרת סגור נוכל להסיק ש

$$\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$$

Xבפרט  $f^{-1}(F)$  סגורה ב-

נבחן תכונה מעניינת שלא תשרת אותנו רבות, אך כן מעלה שאלות,

I=[0,1] עבור f:I imes X o X הציבה עופציה שי ש (Contractible) אם ש־ עבור עבור אמר מרחב טופולוגי, נאמר ש־ X כוויץ אם יש פונקציה רציפה איז יהי איז מרחב טופולוגי, נאמר איז X כך ש־ X בעבור X הגדרה עבור X העבור X הגדרה עבור X הגדרה עבור X האיז ישר X בעבור X הגדרה עבור X הגדרה עבור X בעבור X האיז ישר X בעבור X האיז ישר X בעבור X בעבור X האיז ישר X בעבור X בעבור X האיז ישר X בעבור X האיז ישר X בעבור X בעב

 $x\mapsto x_1$  כסמן גם  $f_t:X\mapsto X$  כאשר הפונקציה הקבועה וכן נקבל  $f_t:X\mapsto X$  כאשר כאשר בסמן גם

f(t,x)=(1-t)x נגדיר על־ידי המוגדרת f:I imes I o I ואת את מה 3.2 נגדיר 3.2 נגדיר

. נגדיר  $\mathbb R$  כוויצה בדיוק באותו על־ידי  $f:I imes \mathbb R$  נגדיר שגם  $\mathbb R$  נגדיר על־ידי  $f:I imes \mathbb R$  ונקבל שגם  $X = \mathbb R$ 

תרגיל  $S^1$  כוויץ. הראו מרגיל 3.1

נחזור לדבר על פונקציות רציפות.

f(x)(i)=xכך לכל  $f:(\mathbb{R}, au_\mathbb{R}) o(\mathbb{R}^\mathbb{N}, au)$  לכל לכל 3.2 נתבונן בי

הקופסה. עופולוגיית אי לא רציפה הופלוגיית המכפלה, טופולוגיית הקופסה כהעתקה כאשר לא רציפה או לא רציפה הראו שי f

פתרון בתבונן ב $T_n$  בעופולוגיית הקופסה היא לא קבוצה פתוחה, אך עד הקופסה היא לא פתרון פתרון אדן אדי קבוצה פתוחה, אך  $T_n$  בעופר פתוחה, אך בעופר היא לא רציפה. רציפה, לכן בטופולוגיית הקופסה היא לא רציפה.

לעומת זאת בטופולוגיית המכפלה היא אכן רציפה.

רציפה ערכית די־חד ערכית  $f:X\to Y$  היא העתקה איז מופולוגיים שני מרחבים בין שני מרחבים הומיאומורפיזם) הומיאומורפיזם בין שני מרחבים טופולוגיים איז היא היא.

ביניהן. f:X o Y ביניהן הומיאומורפיות אם ביניהן ביניהן יש הומיאומורפיות אומיאומורפיות אם ביניהן אומיאומורפיות אומיאורפיות אומיאומורפיות אומיא אומיא אומיאומורפיות אומיאומורפיות אומיאומורפיות אומיאומורפיות אומיאומורפיות אומיא אומיאומורפיות אומיא איני איניא אומיא איניי אומיא אומיא איניי איני איניי אומיא אומיא אומיא איניי איניי אומיא איניי אומיא איניי איניי איניי איניי איניי איניי אומיא איניי איני איניי איניי איניי איניי איניי איניי איניי איניי איניי

אנו נרצה להסתכל על הומיאומורפיזם כאיזומורפיזם של מרחבים טופולוגיים.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

. ולכן האי גם על, ואכן המרחבים הומיאומורפים.  $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0, f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 1$  ולכן המרחבים הומיאומורפים.

 $z\mapsto rac{z-i}{z+i}$  על־ידי  $\psi:\eta o D$  נגדיר גם  $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$  ואת ואת  $\eta=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid x,y\in\mathbb{R},y>0\}$  נגדיר את נגדיר את הוכחה כי זהו אכן הומיאומורפיזם מושארת לקורא.

נבחין כי הדוגמה האחרונה אינה אלא העתקת מביוס, העתקה קונפורמית ואנליטית.

. המרחבים בין שני המרחבים כי אין אונים כי אין טוענים אונים אנו אונים א

נבחן אבל הערכית ועל, ארכית ערכית ועל, ארכית דיחד ערכית ועל, ארכית ארכית לדוגמה, לדוגמה, לדוגמה, לא לדוגמה, לא לדוגמה, לוועל, ארכית לא לדוגמה, לוועל, ארכית ועל, ארכית ועל, ארכית ארכית ועל, ארכית וע

נניח שיש העתקה חד־חד ערכית אך מן הצד מיJיהוציא מיJנקודה יחידה, אז נקבל איחוד זר של שתי קבוצות זרות, אך מן הצד השני הוצאת נקודה יחידה מהמעגל משאיר אותו כקבוצה קשירה. ההוכחה המלאה אומנם סבוכה יותר, אך הצבענו פה על הבדל מהותי בין שני המרחבים.

. הראו כי  $\mathbb{R}^2$  לא הומיאומורפים תרגיל 3.3 הראו כי

?האם גם  $\mathbb{R}^2$  ו- $\mathbb{R}^3$  הומיאומורפים

 $f(U)\subseteq Y$  מתקיים (סגורה) פתוחה לכל אם לכל (סגורה) העתקה תיקרא העתקה f:X o Y העתקה העתקה פתוחה (סגורה) ב-3.12 העתקה פתוחה (סגורה) ב-Y

. המוגדרת ולא סגורה היא רציפה, היא היא  $f(x)=x^2$ ידי על-ידי המוגדרת המוגדר העיפה, זוגמה היא הוגדרת לידי המוגדרת המוג

. האבל אבל אבל רציף, הוא הוא  $x\mapsto x$ ידי על־ידי המוגדר ( $0,1)\hookrightarrow\mathbb{R}$  השיכון השיכון אבל דוגמה 3.7

. ביפה. אך אך אד סגורה, סגורה היא טריוויאלית טריוויאלית המוגדרת  $\{a,b\} o \{a,b\}$ 

#### 7.4.2025 - 4 שיעור 4

### אקסיומות ההפרדה 4.1

 $x\in U,v\in V$  וכן  $U\cap V=\emptyset$  מתקיים מתקיים מרחב מופולוגי, אם מפרידות בין מפרידות עד מפרידות ניתנים להרחבה) אם איבריה או נאמר ש־ $x,y\in X$  ניתנות להפרדה.

באופן דומה להפרדה בא ניתנות להפרדה ביתנות  $A\subseteq X, x\in X$  כאלה. באופן דומה באופן ביתנות להפרדה ביתנות להפרדה ביתנות להפרדה באופן ביתנות להפרדה ביתנות להפרדה ביתנות להפרדה ביתנות להפרדה ביתנות ביתנות להפרדה ביתנות להפרדה ביתנות להפרדה ביתנות להפרדה ביתנות ביתנות להפרדה ביתנות ביתנות להפרדה ביתנות להפרדה ביתנות ביתנות

 $i \in \{0,1,2,3,4\}$  עבור  $T_i$  עבור את האקסיומה את היא מרחב א יקרא מרחב  $T_i$  עבור מרחב (T מרחב אגדרה בה הגדרה א יקרא מרחב א י

 $T_i$ , נגדיר את האקסיומות

- אחת אד לא את הנקודות שמכילה שמכילה פתוחה קבוצה עי  $x,y\in X$  לכל , $T_0$
- השנייה את הנקודה המכילה את המכילה את המכילה את אחת הנקודות את אחת המכילה את קיימת פתוחה את אחת אחת אחת אחת לא את גען אז קיימת אז קיימת  $x \in U, y \notin U$  בך ש־ $U \in \tau$  אז קיימת אז אז הראשונה. כלומר אם אז קיימת דער אם בין אז קיימת אחת המכילה את אחת המכילה את המכילה המכילה המכילה את המכילה את המכילה את המכילה את המכילה את המכילה ה
- - - הפרדה להפרדה אות וכל שכל שכל שכל ניתנות נורמלי, כלומר מכל ניתנות אות אות וכל ניתנות נורמלי, כלומר שכל  $A,B\subseteq X$  הוא המרחב הוא  $T_1$

הגורה. קבוצה אם אם כל  $\{x\}\subseteq X$  הערה אם ורק אם מתקיים אם  $T_1$ 

טענה 4.3 (גרירת מרחבי  $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$  כלומר מייצג סדר גרירה. לענה 4.3 (גרירת מרחבי ליצג סדר גרירה מענה 5.3 (גרירת מרחבי ליצג סדר גרירה.

V טענה  $A\subseteq U$  קיימת למרחב פתוחה A קיימת קבוצה פתוחה אם ורק אם לכל קבוצה סגורה A וורמלי מרחב טופולוגי X נורמלי אם ורק אם לכל קבוצה סגורה  $A\subseteq V\subseteq \overline{V}\subseteq U$ 

כך שמתקיים, אז קיימת קבוצה פתוחה ער כך ער אז קיימת קבוצה אז השני, נניח ש $A,B\subseteq X\setminus B$  קבוצות סגורות זרות ולכן בכיוון השני, נניח ש

$$A\subseteq V\subseteq \overline{V}\subseteq X\setminus B$$

 $A(X \setminus \overline{V}) = \emptyset$ ונובע גם שונובע  $B \subseteq X \setminus \overline{V}$  ולכן

למה 4.5 ([0,1] יהי X מרחב [0,1] אז אם לכל זוג קבוצות סגורות זרות אוייטון) יהי [0,1] מיהי [0,1] אז אם לכל זוג קבוצות אוריטון [0,1] אז אם לכל זוג קבוצות אוריטון [0,1] אז אם לכל זוג קבוצות אוריטון אז אוייט פונקציה רציפה ווער איייט אז אוייט אז אוייט אז אוייט אז אז איייט פונקציה רציפה אז אוריטון [0,1] אז אם לכל זוג קבוצות סגורות זרות אוייט אז אוייט פונקציה רציפה ווער איייט אז אוייט אז אוייט אז איייט פונקציה רציפה ווער איייט פונקציה רציפה ווער אז איייט פונקציה רציפה ווער אז איייט פונקציה רציפה ווער איייט פונקציה ווער אייט פונקציה ווער איייט פונקציה ווער אייט פונ

הוכחה.

טענה  $\Delta_X = \{(x,y) \mid x,y \in X\} \subseteq X imes מרחב האוסדורף (<math>T_2$ ) אם אם X מרחב האוסדורף שנה אם אם X אם אם אם אם אם אם אוסדורף לאוגיית המכפלה.

נבחין כי  $(U_{x,y}\cap V_{x,y})\cap\Delta_X=\emptyset$  מרחב האוסדורף. לכל  $x\in U_{x,y}$  יש  $x
eq U_{x,y}$  ו־ $x\in U_{x,y}$  פתוחות זרות, כלומר

$$X \times X \setminus \Delta_X = \bigcup_{x \neq y} (U_{x,y} \times V_{x,y})$$

וזוהי קבוצה פתוחה.

בכיוון השני נניח ש־ $(x,y)\in (X\times X)\setminus \Delta_X$  או א  $x\neq y$  פתוחה, אם א פתוחה, אז  $X\times X\setminus \Delta_X$  סגורה, אז בכיוון השני נניח ש־ $(x,y)\in U\times V\subseteq X^2\setminus \Delta_X$  ואף ש־ $(x,y)\in U\times V\subseteq X^2\setminus \Delta_X$  פתוחות כך ש־ער פתוחות בר

 $T_i$  מענה Y עבור Y עבור Y אם X הוא מרחב X הוא מרחב X אם X אם X הוא מרחב X

. עבור  $T_1$  ההוכחה היא טריוויאלית.

. עבור  $T_2$  ההוכחה היא טריוויאלית

7.4.2025-4 שיעור 4 שיעור 4

עבור  $A\subseteq Y$  יהי  $y\in Y$  יהי כן. יהי גם כן. יהי אתת־המרחב שנראה שתת־המרחב לכן רגולרי, לכן מספיק שנראה אתת־המרחב הוא רגולרי ביז  $y\in Y$  ויהי בין דעבוע מפרידות בין  $y\notin C$  שור אנו יודעים  $y\notin C$  של בין אנו יודעים בין א לכן קיימות ביX פתוחות ב־X מפרידות בין  $y\notin C$  לכן  $y\notin C$  ויבע מפרידות בין אור בין

C,Dש ש־ער אפשר מדוע מדוע אבל אבל אבל , $A=C\cap Y,B=D\cap Y$  אז סגורות, אז סגורות מדוע אפשר אבל אבל השני נניח מדוע סגורות, אז זרות.

 $.T_4$  טענה זו לא נכונה עבור  $.T_4$ 

באלה. למצוא דוגמות רבות למרחבים כאלה. J. Arthur Seebach של Counter examples in Topology

X imes Y טענה X imes Y אז גם X imes Y מרחבים X, Y מרחבים עבור X, Y אם אם X imes Y

x,y אנו שלכל שבור להראות הטענה ברורה, אנו הטענה  $T_1$  עבור  $T_1$ 

$$\{(x,y)\} = (X \times (Y \setminus \{y\})) \cup ((X \setminus \{x\}) \times Y)$$

סגורה.

עבור  $T_2$  הטענה קלה גם כן.

 $(x,y) \notin A$ רט וכן  $A\subseteq X \times Y$ ר שימוש בולרי. נניח שי $X \times Y$ ר שימוש בולריים ועלינו להראות  $X \times Y$ ר שימוש בולרי. נניח שי $X \times Y$ ר הם X,Yר הם X,Yר הם X,Yר הם X,Yר הם X,Yר הם ורק אם לכל בעבור  $X \in U$ ר פתוחה ויש עוש בעבור בעבור אם ורק אם לכל בעבור אם ורק אם לכל בעבור עבועות פתוחה ויש עוש בעבור בעבועות פתוחות בעבועות פתוחות בעבועות פתוחות בעבועות בעבועו

כך  $C\subseteq U=Z\setminus \overline{V}$  כך, וכן  $z\in V\subseteq \overline{V}\subseteq Z\setminus C$ שי פתוחה פתוחה ע שי א ע סגורה, סגורה, סגורה, כיוון השני של הלמה נניח שי  $z\in Z,z\notin C$  סגורה, טיר שי שי  $z\in Z$ 

 $T_4$  טענה 4.9 אם מרחב מטרי, אז הוא מרחב (X, 
ho) אם

 $\rho(x,E)>0$  אם  $x\notin E$  אם סגורה ווים.  $\rho(x,E)=\inf\{\rho(x,y)\mid y\in E\}$  אנדיר  $x\in X$  או  $X\in X$  של X הוכחה.  $X\in X$  הוכחה.  $X\in X$  של X של X

נעבור לדוגמות.

 $\{X,\emptyset\}$  אם הטופולוגיה  $\{x,y\}$  , $T_0$  לא 4.1 דוגמה 1.4

 $\{\emptyset, \{x\}, X\}$  עבור  $\{x,y\}, T_0$  אם הטופולוגיה עבור  $\{x,y\}, T_0$ 

. עבור שמשלימן שמשלימן כל הקבוצות המושרית המושרית והטופולוגיה או הטופולוגיה או עבור  $X=\mathbb{N}$  נגדיר לא ד $T_2$ 

 $\mathbb{R}$  את הנקודות הבא, קבוצת את המרחב נסמן ולא  $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$  נסמן לכור עבור  $T_3$ 

$$\mathcal{B} = \left\{ (a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ (a, b) \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

 $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$ יש לוודא שזה אכן בסיס. היא הטופולוגיה המכילה את הטופולוגיה הקגילה של  $\mathbb{R}$ , היא עדינה יותר ומכילה האוסדורף ולכן האוסדורף. נראה שר  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  לא  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  בחין כי  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  סגורה, ונראה כי לא ניתן להפריד בינה לבין  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$ . נניח שר  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  וונקבל סתירה,  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  סגורה,  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  סגורה, שב  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  מכילה איבר בסיס, לכן  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  מכילה קבוצה מהצורה  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  עבור  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  פתוחה אז  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  מכילה איבר בסיס, לכן  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  מכילה  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  ולכן  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  כאשר  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  מוודה או  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  ולכן  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  כאשר  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  מוודה שב  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  ולכן  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  מוודה שב  $\mathbb{R}_{\frac{1}{N}}$  מוודה שב סיס.

7.4.2025-4 שיעור 4 4

 $\mathbb{R}^2_L$ מה מה מופולוגיה המושרית על 4.1 מה 4.1

פתרון הטופולוגיה הדיסקרטית.

 $\mathbb{R}^2_L$ ב־בת סגורה היא  $A\subseteq L$  מסיק שכל תת-קבוצה נסיק

### 8.4.2025 - 5 שיעור 5

#### אקסיומות ההפרדה — המשך 5.1

בשיעור הקודם דיברנו על הדוגמה הבאה, נמשיך לדון בה היום,

בנוסף הגדרנו את הקבוצה  $\mathbb{R}^2_L$  על  $\mathbb{R}^2_L$  היא הטופולוגיה המושרית מר $\mathbb{R}^2_L$  על  $\mathbb{R}^2_L$  היא הטופולוגיה  $\mathbb{R}^2_L$  אתי  $\mathbb{R}^2_L$  הסקנו גם שכל  $\mathbb{R}^2_L$  היא סגורה ב־ $\mathbb{R}^2_L$  כלומר לכל  $\mathbb{R}^2_L$  יש קבוצה  $\mathbb{R}^2_L$  סגורה כך ש $\mathbb{R}^2_L$  נניח שר $\mathbb{R}^2_L$  היא  $\mathbb{R}^2_L$  היא  $\mathbb{R}^2_L$  היא מגורות סגורות סגורות ב־ $\mathbb{R}^2_L$  ולכן גם  $\mathbb{R}^2_L$  סגורה ב־ $\mathbb{R}^2_L$  היא  $\mathbb{R}^2_L$  היא  $\mathbb{R}^2_L$  היא  $\mathbb{R}^2_L$  היא  $\mathbb{R}^2_L$  היא סגורות זרות ניתנות להפרדה. בפרט לכל  $\mathbb{R}^2_L$  של קבוצות פתוחות זרות  $\mathbb{R}^2_L$  על  $\mathbb{R}^2_L$  כך שר $\mathbb{R}^2_L$  ער בפרט לכל  $\mathbb{R}^2_L$  היש קבוצות פתוחות זרות  $\mathbb{R}^2_L$  ער ברע היש  $\mathbb{R}^2_L$  בפרט לכל  $\mathbb{R}^2_L$  אם נבחר את  $\mathbb{R}^2_L$  אז גם  $\mathbb{R}^2_L$  אז גם  $\mathbb{R}^2_L$  הוכך ער  $\mathbb{R}^2_L$  אז גם  $\mathbb{R}^2_L$  ולכן  $\mathbb{R}^2_L$  ובהתאם  $\mathbb{R}^2_L$  ולהפך אם  $\mathbb{R}^2_L$  אז  $\mathbb{R}^2_L$  ווהי ער ברע ברע הער של  $\mathbb{R}^2_L$  אם בוחר אם  $\mathbb{R}^2_L$  אורכן  $\mathbb{R}^2_L$  אורכן  $\mathbb{R}^2_L$  אורכן  $\mathbb{R}^2_L$  הערכום בוחר אם  $\mathbb{R}^2_L$  הערכום ברע הערכום ברע

מענה 5.1  $\psi$  חד־חד ערכית, ולכן מקבלת סתירה.

ולכן  $A\subseteq V_A$  שכן  $A\subseteq V_A$  שכן  $A\subseteq V_A$  עם גם  $A\ne \emptyset$  גם  $A\ne \emptyset$  כי  $A\ne \emptyset$  אז  $A\ne \emptyset$  אז  $A\ne \emptyset$  אז  $A\ne \emptyset$  גם  $A\ne \emptyset$  ערכיות, נניח חד־חד ערכיות, נניח ש־ $A\ne \emptyset$  בי  $A\ne \emptyset$  בי  $A\ne \emptyset$  כך ש"ל  $A\ne \emptyset$  אז בלי הגבלת הכלליות יש  $A\ne \emptyset$  כך ש"ל  $A\ne \emptyset$  כך ע"ל  $A\ne \emptyset$  כך ש"ל  $A\ne \emptyset$  כך ע"ל  $A\ne \emptyset$  אז בלי הגבלת הכלליות יש  $A\ne \emptyset$  ווו אף קבוצה פתוחה. נסיק ש"ל  $A\ne \emptyset$  ובהתאם  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ובהתאם  $A\ne \emptyset$  ובהתאם  $A\ne \emptyset$  ובהתאם  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ובהתאם  $A\ne \emptyset$  ובהתאם  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ובהתאם  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  וו אף  $A\ne \emptyset$  ובהתאם  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ולכן נובע ש"ל  $A\ne \emptyset$  ווו אף  $A\ne \emptyset$  ובהתאם  $A\ne \emptyset$  ווו אף לבריים ש"ל  $A\ne \emptyset$  ווו אף לבריים ש"ל לבריים ש"

וזה בלתי  $\mathcal{P}(L)\hookrightarrow\mathcal{P}(D)\hookrightarrow L$  אז נוכל לבנות איז  $|\mathbb{R}|=|L|$ , אבל שיכון שיכון שיכון  $\mathbb{R}$ . יש לנו שיכון שיכון לנו שיכון  $\mathcal{P}(D)\hookrightarrow\mathbb{R}$ , אפשרי.

נעבור להוכחת הלמה של אוריסון, למה 4.5.

 $C_0$  כ בחין כי  $C_0$  בניח ש־X מרחב הלמה של אוריסון. נניח ש־X מרחב היהיו בקבועה וכן  $C_0=C$  וכן וכן  $C_0=C$  ויהיו בחין מרחב מרחב בעד מרחב מורה ובקבועה פתוחה. נגדיר כך באופן רקורסיבי קבועות פרוחה ובקבועה פתוחה. נגדיר כך באופן רקורסיבי קבועות מורה ובקבועה פתוחה. נגדיר כך באופן רקורסיבי קבועות אורים פרוחה ובקבועה פתוחה באופן רקורסיבי קבועות פרוח ווידים פרוחה ובקבועה פרוחה באופן רקורסיבי קבועות פרוח ווידים פרוחה ובקבועה פרוחה באופן רקורסיבי קבועות פרוח ווידים פרוחה ובקבועה פרוחה ובקבועה פרוחה באופן רקורסיבי קבועות פרוח ווידים פרוח ווידים

$$C_0 \subseteq V_{\frac{1}{2^n}} \subseteq C_{\frac{1}{2^n}} \subseteq V_{\frac{2}{2^n}} \subseteq C_{\frac{2}{2^n}} \dots$$

ונגדיר לכל  $x \in X$  את הפונקציה,

$$f(x) \begin{cases} \inf\{t \in [0,1] \mid x \in V_t\} & \exists t, x \in V_t \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

 $C=C_0\subseteq V_{\frac{1}{2^n}}$  נשים לב ש" f רציפה. נשים f רכל f(x)=1 לכל f(x)=1 לכל f(x)=0 רביפה. נשים לב האור, כלומר f(x)=0 לכל f(x)=1 ולכן נובע ש" f(x)=1 נותר אם כן להראות רציפות. אנו יודעים בעבור f(x)=1 נותר שב לבדוק את הרציפות שבל f(x)=1 ולכן עלינו לבדוק תת־קבוצות של f(x)=1, אבל מספיק לבדוק את הרציפות עבור תת־בסיס של הקטע, שכל מקור של קבוצה f(x)=1 ולכן עלינו לבדוק תת־הבסיס f(x)=1 (f(x)=1) אבל מספיק לבדוק את תת־הבסיס f(x)=1 שמתקיים, נניח שמתקיים,

$$x \in f^{-1}([0,b))$$

 $f^{-1}([0,b))\subseteq$  אז נובע  $x\notin V_s$  לכן  $x\notin V_s$  לכן קיים t כך שים t מספר דיאדי (מהצורה הדרושה). לכן  $t\in V_s$  לכל  $t\in V_s$  לכן קיים  $t\in t$  מספר דיאדי (מהצורה הדרושה). לכן  $t\in V_s$  לכל  $t\in V_s$  אז עבאנו שי $t\in V_s$  מספר דיאדי  $t\in V_s$  אז עבאנו שי $t\in V_s$  אז  $t\in V_s$  אז עבאנו שי $t\in V_s$  אז עבאנו שי $t\in V_s$  אז עבאנו שי $t\in V_s$  אז עבאנו  $t\in V_s$  אז אז מעאנו שי $t\in V_s$  אז עביפות קיימים ב $t\in V_s$  אז עביפות קיימים בך שי $t\in V_s$  מתקיים  $t\in V_s$  עונבע שי $t\in V_s$  ונובע שי $t\in V_s$  מתקיים  $t\in V_s$  מתקיים  $t\in V_s$  מובע שי $t\in V_s$  עונבע שי $t\in V_s$  מובע עביפות  $t\in V_s$  מתקיים  $t\in V_s$  מתקיים  $t\in V_s$  ונובע שי $t\in V_s$  עונבע שי $t\in V_s$  מובע שי $t\in V_s$  מרקיים  $t\in V_s$  מתקיים  $t\in V_s$  מובע שי $t\in V_s$  עונבע שי $t\in V_s$ 

הגדרות ומשפטים

## הגדרות ומשפטים

3	•	•	•	•	٠	٠	•	•	•	•	•	 •	•	•	•	•	 •	•	•	 •	•	•	 •	•	 •	٠	•	 	•	•	•	•		ירה 1.1 (מרחב מטרי)	הגז
3																																		(רציפות) 1.2	
3																									 			 						(כדור) 1.3	הגז
3																									 			 						ירה 1.4 (קבוצה פתוחה) 1.4	הגז
3																									 			 						רה 1.5 (הגדרה שקולה לרציפות)	הגז
3																									 			 						ירה 1.6 (טופולוגיה) 1.6	הגז
3																									 			 						(מרחב טופולוגי) 1.7	הגז
3																									 			 						(קבוצה סגורה) 1.9	הגז
4																									 			 						(בסיס לטופולוגיה) 1.10	הגז
4																									 			 						נה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי)	טע
4																									 			 						נה 1.14 (טופולוגיית מכפלה)	טע
6																									 			 						(טופולוגיית מכפלה) 2.1	הגז
6																									 			 						ירה 2.2 (העתקות הטלה)	הגז
6																									 			 						רה 2.3 (תת־בסיס לטופולוגיה)	הגז
6																									 			 						רה 2.4 (טופולוגיה חלשה)	הגז
6																									 			 						ירה 2.5 (מטריקת מכפלה)	הגז
8																									 			 			גי)	לו	ופו	ירה 3.1 (סגור של קבוצה במרחב ט	הגז
8																															•			(פנים ושפה) 3.4	
8																									 			 						רה 3.5 (סביבה של נקודה)	הגז
8																																		רה 3.6 (נקודת הצטברות)	
9																																		(שקילות לרציפות) 3.9 נה 3.9 (שקילות לרציפות)	
10																																		ירה 3.10 (מרחב כוויץ)	
10																																		רה 3.11 (הומיאומורפיזם)	
10																																		ירה 3.12 (העתקה פתוחה וסגורה)	
11																																		ירה 4.1 (איברים ניתנים להרחבה)	
11																																		ירה 4.2 (מרחב T ביינים אוני)	
11																																		נה 4.3 (גרירת מרחבי T ב	
11																																		נה 4.4 (שקילות למרחב נורמלי)	
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	 •	•	•	•	•	 •	•	•	 •	•	•	 •	•	 •	•	•	 	•	•	•	•		. ( =   2 / 1.1 / 12	