פתרון מטלה 9 — חישוביות וקוגניציה, 6119

13 בינואר 2026

שאלה 1

סעיף א'

נמצא נקודת שיווי משקל נאש עבור שתי נהגות שצריכות לבחור כבישים כאשר מטריצת הערך היא,

$$M = \begin{pmatrix} AA & AB \\ BA & BB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (13,14) & (11,11) \\ (12,12) & (14,13) \end{pmatrix}$$

פתרון נבחין כי אין לנהגת א' או לנהגת ב' בחירה שתמיד תטיב איתן ולכן אין פתרון יחיד למערכת. אם האסטרטגיה היא M_{AA} אז לנהגת א' משתלם להחליף ל־M_{BA}, אם וזהו שיווי משקל. באופן דומה עבור האסטרטגיה M_{BB} אז לשתי הנהגות משתלם להחליף ונקבל שגם M_{BA} נקודת שיווי משקל.

סעיף ב'

נניח שיש 4000 נהגות ושני כבישים, ונניח גם שהעלות לנהוג בכל כביש מיוצגת על־ידי,

$$T_A(N_A) = \frac{N_A}{100} + 45, \qquad T_B(N_B) = \frac{N_B}{100} + C$$

עבור T_A, T_B זמן הנסיעה בכביש ו־N_A, N_B מספר הנהגות בכל כביש, ו־C פרמטר.

i

נבדוק עבור איזה C קיימת נקודת שיווי משקל נאש מעורבת והומוגנית בה כל אחת מהנהגות בוחרת בכביש A בסיכוי $p = \frac{3}{4}$, ומה יהיה זמן הנסיעה הממוצע.

פתרון נחשב את תוחלת זמן ההמתנה,

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_A(N_A) + T_B(N_B)).$$

ונתון כי $N_A + N_B = 4000$ וכן $N_A \sim \text{Bin}(N,p) = \text{Bin}(4000, \frac{3}{4})$. מפיתוח הנוסחה הראשונה ושימוש בנוסחת תוחלת ברנולי נקבל,

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{100}\mathbb{E}(N_A) + 45 + \frac{1}{100}\mathbb{E}(N_B) + C = \frac{1}{100}(\mathbb{E}(N_A) + \mathbb{E}(N - N_A)) + 45 + C = \frac{1}{100} \cdot 40 + 45 + C = 85 + C.$$

באופן דומה נקבל שנהגת מסוימת תקבל,

$$\mathbb{E}(T_A) = \frac{1}{100}N \cdot p + 45, = 40 \cdot \frac{3}{4} + 45 = 75 \qquad \mathbb{E}(T_B) = 40 \cdot \frac{1}{4} + C = 10 + C.$$

ולכן יש שיווי משקל אם ורק אם $C = 65 \iff 10 + C = 75$.

ii

נתאר את הקשר בין ממצאי הניסוי לבין ממצאי ניסוי חוק ההתאמה.

פתרון לא ברור לי מה הוא חוק ההתאמה.

סעיף ג'

נניח ש־$C = 65$ ונניח שתמיד 3000 נהגות בוחרות ב־A ו־1000 נהגות בוחרות B, נבדוק אם אסטרטגיה זו היא נקודת שיווי משקל של נאש.

פתרון במקרה זה אין לנהגות שום בחירה ולכן זהו שיווי משקל באופן ריק. אם נניח שהן יכולות לשנות את שמן ובהתאם לשנות את הכביש שהן נוהגות בו תמיד, אז נקבל שכרגע התוחלות זהות ואם הן תעבורנה כביש אז הוא יהיה איטי יותר, ולכן זוהי אכן נקודת שיווי משקל.

סעיף ד'

נניח ש־$C = 65$ והבחירה נתונה בידי הנהגות. נניח שסכימת הבחירות נתונה על־ידי הגרף,

$$G = ((\text{begin}, \text{end}, A, B), \{(\text{begin}, A, \frac{N_A}{100}), (\text{begin}, B, 65), (A, B, 0), (A, \text{end}, 45), (B, \text{end}, \frac{N_B}{100})\}).$$

i

נמצא את נקודת שיווי משקל של נאש במצב החדש.

פתרון עלינו למצוא את התוחלת של בחירת כביש A (בהסתברות p) ואת בחירת קיצור הדרך בהסתברות q. נתאר את התוחלת של כל אחד מהמצבים,

$$\mathbb{E}(T_B) = \mathbb{E}(\frac{N_B + N_{A,1}}{100} + 65) = \frac{1}{100}(1-p)N + 65 = 40(qp + (1-p)) + 65.$$

נעבור לכביש A עם הבחירה להשתמש בקיצור הדרך,

$$\mathbb{E}(T_{A,1}) = \frac{1}{100}\mathbb{E}(N_A) + 0 + \frac{1}{100}\mathbb{E}(N_B) = \frac{1}{100}Np \cdot q + 0 + \frac{1}{100}N((1-p) + pq) = 40pq + 40(1-p) + 40pq.$$

ולבסוף הבחירה לא לעבור מכביש A,

$$\mathbb{E}(T_{A,2}) = \frac{1}{100}\mathbb{E}(N_A) + 45 = 40p + 45.$$

אנו רוצים למצוא מתי אף אפשרות לא עדיפה, כלומר מתי התוחלת שווה בשלושת המקרים.

$$80pq + 40(1-p) = 40p + 45 \iff 80pq = 80p + 5 \iff q = 1 + \frac{1}{16p}.$$

ולכן,

$$40p + 45 = 40(qp + (1-p)) + 65 \iff 40p = 40pq + 40(1-p) + 20 \iff p = \frac{62.5}{80} = 0.78125.$$

ובהתאם גם $q = \frac{1}{16p} = 0.08$.

ii

נבדוק האם כדאי לבנות את קיצור הדרך.

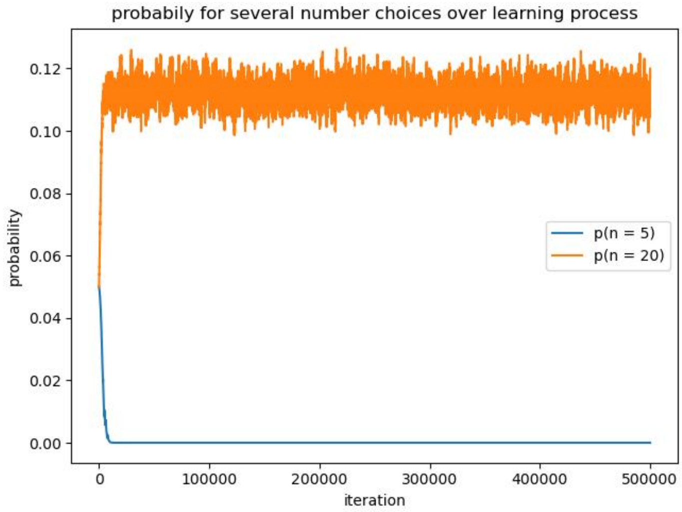
פתרון התשובה היא שלא, בהתאם לתוצאות תת־הסעיף הקודם.

שאלה 2

סעיף א׳

נציג גרף של $\mathbb{P}(n=5), \mathbb{P}(n=20)$ כפונקציה של שלב האימון.

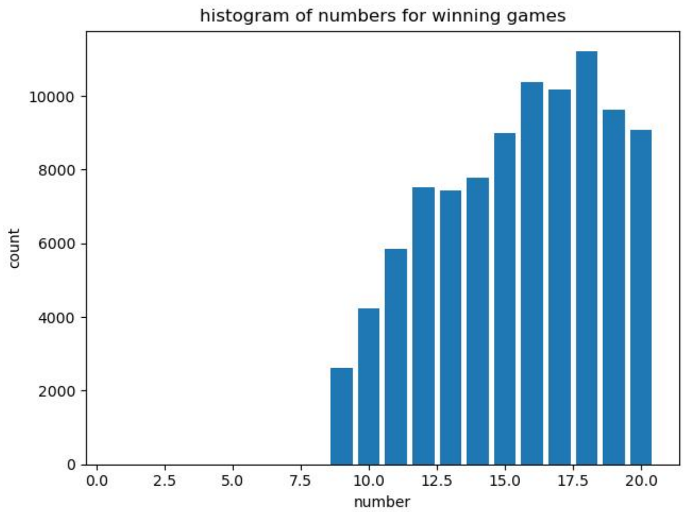
פתרון נציג את הגרף:



סעיף ב׳

נציג גרף של מספר הזכיות עבור בחירה של כל מספר מבין המשחקים.

פתרון נציג את הגרף:



סעיף ג׳

נתאר את הגרף מהסעיף הקודם ונדון בבחירה במספרים גבוהים לעומת מספרים נמוכים.

פתרון נבחין תחילה שהמפרים הזוכים הם בין מחצית המספרים הגבוהה יותר, כלומר לא משתלם לבחור מספרים נמוכים מאוד במצב של שיווי משקל שכן בחירת מספרים גבוהים יותר בדרך־כלל תשתלם יותר. אנו גם רואים שבחירת 18 היא בחירה שמניבה נצחונות יותר פעמים מאשר בחירת 20, זוהי תוצאה שתואמת את המודל שהוצג בכיתה.