פתרון מטלה 04 — אנליזה על יריעות, 80426

25 באפריל 2025

שאלה 1

תהי $U=(0,1)^2$ ותהי ההעתקה $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על־ידי $\varphi(x,y)=(x,y,e^{x+y})$.
נסמן $X=\operatorname{Im}\varphi$ וב־$d\operatorname{vol}_2$ את אלמנט הנפח, נחשב את,

$$\int_X \sqrt{2z^2+1}\,d\operatorname{vol}_2$$

פתרון אם נסמן $f(x,y,z)=\sqrt{2z^2+1}$ אז נקבל שמתקיים,

$$\int_X \sqrt{2z^2+1}\,d\operatorname{vol}_2 = \int_U f(\varphi(u))V(D\varphi\mid_u)\,du$$

נחשב את הנגזרת של φ,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$$

מתוך כוונה להשתמש בלמה לחישוב $V(D\varphi)$ נחשב,

$$V(D\varphi)=\sqrt{(D\varphi)^t D\varphi}=\sqrt{\begin{vmatrix} 1+e^{2(x+y)} & e^{2(x+y)} \\ e^{2(x+y)} & 1+e^{2(x+y)} \end{vmatrix}}=\sqrt{1+2e^{2(x+y)}}$$

ולכן נציב,

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} \sqrt{2e^{2(x+y)}+1}\cdot\sqrt{1+2e^{2(x+y)}}\,dx\,dy &= \int_{(0,1)}\int_{(0,1)} 2e^{2x}e^{2y}\,dx\,dy+1 \\
&= 2\left(\int_{(0,1)} e^{2x}\,dx\right)\left(\int_{(0,1)} e^{2y}\,dy\right)+1 \\
&= 1+4\cdot\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 \\
&= 2e^2-1
\end{aligned}$$

שאלה 2

סעיף א׳

תהי פונקציה $f : [a, b] \to (0, \infty)$ גזירה ברציפות, ויהי גוף הסיבוב שלה,

$$\Sigma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [a, b], \sqrt{x^2 + y^2} = f(z)\}$$

נראה ש־(φ, Σ_f) היא יריעה דו־מימדית, כאשר,

$$\varphi(t, z) = (f(z)\cos t, f(z)\sin t, z)$$

עבור $(t, z) \in [0, 2\pi] \times [a, b] = K$.

הוכחה. נבחין כי הקבוצה עליה φ מוגדרת היא קבוצה סגורה (למעשה דיסק סגור), בסתירה להגדרה של יריעה, כשנדבר על היריעה נוכל להתכוון לדיסק הפתוח ובכך לפתור את הבעיה. עלינו להראות ש־$\varphi(K) = \Sigma_f$.

$$(x, y, z) = \varphi(t, z) \implies \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{f^2(z)\cos^2 t + f^2(z) + f^2(z)\sin^2 t} = \sqrt{f^z(z)} = f(z)$$

כאשר המהלך האחרון נובע מהעובדה ש־f חיובית לחלוטין. נובע ש־$\varphi(K) \subseteq \Sigma_f$. תהי $(x, y, z) \in \Sigma_f$, אז נבחר $t = \operatorname{Arg}(x + iy)$ ונקבל מהגדרת הארגומנט ש־$\varphi(t, z) = (x, y, z)$, לכן גם $\varphi(K) \supseteq \Sigma_f$, ונסיק $\varphi(K) = \Sigma_f$ כפי שרצינו. $\square$

נחשב את $\operatorname{vol}_2(\Sigma_f)$.

פתרון נחשב את $V(D\varphi)$,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} -f(z)\sin t & f'(z)\cos t \\ f(z)\cos t & f'(z)\sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$V(D\varphi) = \sqrt{\begin{vmatrix} f^2(z)\sin^2 t + f^2(z)\cos^2 t & -f(z)f'(z)\sin t\cos t + f(z)f'(z)\sin t\cos t \\ -f(z)f'(z)\sin t\cos t + f(z)f'(z)\sin t\cos t & (f'(z))^2\cos^2 t + (f'(z))^2\sin^2 t + 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} f^2(z) & 0 \\ 0 & (f'(z))^2 + 1 \end{vmatrix}} = f(z)\sqrt{(f'(z))^2 + 1}$$

מהגדרת הנפח,

$$\operatorname{vol}(\Sigma_f) = \int_K V(D\varphi\mid_u)\,du = 2\pi\int_a^b f(z)\sqrt{(f'(z))^2 + 1}\,dz$$

סעיף ב׳

נחשב את,

$$\int_{\Sigma_f} x^2 + y^2 \, d\operatorname{vol}_2$$

פתרון אנו כבר יודעים את ערך $V(D\varphi)$ ולכן נותר להציב,

$$\int_{\Sigma_f} x^2 + y^2 \, d\operatorname{vol}_2 = \int_K f^2(z)\cdot f(z)\sqrt{(f'(z))^2 + 1}\,dz\,dt = 2\pi\int_a^b f^3(z)\sqrt{(f'(z))^2 + 1}\,dz$$

שאלה 3

סעיף א׳

נחשב את מרכז המסה של,

$$S^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1, z,y,z \geq 0\}$$

פתרון נתחיל בחישוב השטח של העקומה, נגדיר $\varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, נחשב את $D\varphi$,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

ובהתאם נקבל שגם,

$$V(D\varphi) = \sqrt{(D\varphi)^t D\varphi} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2} & \frac{xy}{1-x^2-y^2} \\ \frac{xy}{1-x^2-y^2} & 1+\frac{y^2}{1-x^2-y^2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

השטח מתקבל אם כך על־ידי,

$$\operatorname{vol}_2(S^2_+) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\cdot r\,dr = \frac{\pi}{4}\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\pi}{4}2\sqrt{1} = \frac{\pi}{2}$$

מטעמי סימטריה מספיק שנבדוק את אחד מהצירים בלבד, נבחר את ציר ה־x. אנו יודעים ש־$x_{cm} = \frac{1}{\operatorname{vol}_2(S^2_+)}\int_{S^2_+} x\,d\operatorname{vol}_2$, ולכן,

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dy\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cdot\frac{r\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}[\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ולכן מרכז המסה הוא $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

סעיף ב׳

נראה שאם $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעות פרמטריות זרות עם אותו מימד, אז $M \cup N$ היא יריעה פרמטרית כך שמרכז המסה שלה הוא הממוצע המשוכלל,

$$\vec{c}_{M\cup N} = \frac{\operatorname{vol}(M)\vec{c}_M + \operatorname{vol}(N)\vec{c}_N}{\operatorname{vol}(M)+\operatorname{vol}(N)}$$

הוכחה. נניח ש־φ_M, φ_N הפרמטריזציה של היריעות M, N בהתאמה. נרצה לבחור פרמטריזציה $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ כך ש־$\varphi(U) = M \cup N$, אך $\operatorname{dom}\varphi_M, \operatorname{dom}\varphi_N$ לא בהכרח זרות.

נוכיח אם כן שקיים דיפאומורפיזם $\psi : \mathbb{R}^d \to (-1,1)^d$. נגדיר $\psi_i(x_i) = \frac{2}{\pi}\arctan x_i$ ונקבל מתכונות $\tan$ שאכן ψ פונקציה רציפה, הפיכה וכן מגזירות $\tan$ שהיא דיפאומורפיזם.

נוכל אם כן להניח ש־$\operatorname{dom}\varphi_M \cap \operatorname{dom}\varphi_N = \emptyset$, שאם לא כן, נוכל לבחור $\psi\circ\varphi_M$ ו־$1^d + \psi\circ\varphi_N$ כאשר $1^d = (1,\dots,1)$.

נסיק שקיימים תחומים זרים U_M, U_N כך ש־$\varphi \restriction U_N = \varphi_N, \varphi \restriction U_M = \varphi_M$. בהתאם נוכל לחשב את נפח $M \cup N$,

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_d(M\cup N) &= \int_{U_N \uplus U_M} V(D\varphi)\, d\,\mathrm{vol}_d\, u \\ &= \int_{U_N} V(D\varphi)\, d\,\mathrm{vol}_d + \int_{U_M} V(D\varphi)\, d\,\mathrm{vol}_d\, u \\ &= \int_{U_N} V(D\varphi_N)\, d\,\mathrm{vol}_d + \int_{U_M} V(D\varphi_M)\, d\,\mathrm{vol}_d\, u \\ &= \mathrm{vol}_d(M) + \mathrm{vol}_d(N)\end{aligned}$$

נעבור לחישוב מרכז המסה $\vec{c}_{M\cup N}$,

$$\vec{c}_{M\cup N} = \frac{1}{\mathrm{vol}_d(M\cup N)}\int_{M\uplus N} \vec{u}\, d\,\mathrm{vol}_d\, \vec{u} = \frac{1}{\mathrm{vol}_d(M\cup N)}\left(\int_M \vec{u}\, d\,\mathrm{vol}_d\, \vec{u} + \int_M \vec{u}\, d\,\mathrm{vol}_d\, \vec{u}\right) = \frac{\mathrm{vol}(M)\vec{c}_M + \mathrm{vol}(N)\vec{c}_N}{\mathrm{vol}(M)+\mathrm{vol}(N)}$$

כאשר המעבר האחרון נובע ישירות מההגדרה של $\vec{c}_M$ ו־$\vec{c}_N$. □

סעיף ג׳

נחשב את מרכז המסה של החרוט הסגור,

$$\{\sqrt{x^2+y^2} = 1 - z \mid 0 < z < 1\} \cup \{x^2+y^2 \le 1, z = 0\}$$

פתרון נבחין כי החרוט הסגור אינו אלא יריעה פרמטרית של חרוט פתוח ושל עיגול, שתיהן יריעות ממימד 2 ב־$\mathbb{R}^3$. נסמן את החרוט ב־M ואת העיגול ב־N, וכן נבחין שמטעמי סימטריה $\vec{c}_N = 0$, וש־$\mathrm{vol}_2(N) = \pi$. נעבור אם כך לחישוב הנפח של M. נגדיר $\varphi : B_1(0) \to M$ על־ידי $\varphi(x,y) = (x, y, 1 - \sqrt{x^2+y^2})$. נעבור לחישובים הכרחיים עבור חישוב האינטגרל,

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

וכן,

$$V(D\varphi) = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} & \frac{xy}{x^2+y^2} \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & 1 + \frac{y^2}{x^2+y^2}\end{vmatrix}} = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

ועתה נעבור לחישוב הנפח,

$$\mathrm{vol}_2(M) = \int_{B_1(0)} V(D\varphi \mid_u)\, d\,\mathrm{vol}_2\, u = \int_{B_1(0)} \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}\cdot\pi$$

נחשב את מרכז המסה, נבחין שמטעמי סימטריה $c_M^x = c_M^y = 0$ ועלינו לחשב רק את ציר ה־z.

$$c_M^z = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_M z\, d\,\mathrm{vol}_2\, u = \frac{1}{\pi}\int_{B(0,1)} 1 - \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{\pi}(\pi - \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\, dr\, d\theta) = \frac{1}{\pi}(\pi - 2\pi\cdot\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

ולבסוף נשתמש בתוצאת סעיף ב׳ ונקבל,

$$\vec{c}_{M\cup N} = \frac{\sqrt{2}\pi\cdot(0,0,\frac{1}{3}) + \pi(0,0,0)}{\sqrt{2}\pi + \pi} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{3(\sqrt{2}+1)}\right)$$

שאלה 4

תהי $(\varphi, M \subseteq \mathbb{R}^m)$ ו־$(\psi, N \subseteq \mathbb{R}^n)$ שתי יריעות פרמטריות. תהינה $f : M \to \mathbb{R}$ ו־$g : N \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות. נגדיר $h : M \times N \to \mathbb{R}$ על־ידי $h(x, y) = f(x)g(y)$. נראה שמתקיים,

$$\int_{M\times N} h \, d\operatorname{vol}_{n+m} = \left(\int_M f \, d\operatorname{vol}_m\right) \cdot \left(\int_N f \, d\operatorname{vol}_n\right)$$

הוכחה. נניח ש־$\operatorname{dom}\psi = U_N, \operatorname{dom}\varphi = U_M$. נגדיר גם $\sigma : U_M \times U_N \to M \times N$ על־ידי $\sigma(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$. נסיק ממכפלת מרחבים מטריים ש־σ דיפאומורפיזם ולכן מתקיים, נניח ש־$u = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ עבור $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\int_{M\times N} h \, d\operatorname{vol}_{n+m} = \int_{U_M\times U_N} h(\sigma(u)) \, V(D\sigma \mid_u) \, du = \int_{U_M\times U_N} f(\varphi(x))g(\psi(y)) \, V(D\sigma \mid_{(x,y)}) \, d(x, y)$$

אילו $V(D\sigma) = V(D\varphi) \cdot V(D\psi)$ אז ממשפט פוביני של אינפי 3 נובע ישירות,

$$\begin{aligned}\int_{U_M\times U_N} f(\varphi(x))g(\psi(y)) \, V(D\sigma \mid_{(x,y)}) \, d(x, y) &= \int_{U_M} f(\varphi(x)) \, V(D\varphi \mid_x) \, dx \cdot \int_{U_N} f(\phi(y)) \, V(D\psi \mid_y) \, dy \\ &= \left(\int_M f \, d\operatorname{vol}_m\right) \cdot \left(\int_N f \, d\operatorname{vol}_n\right)\end{aligned}$$

מלינארית אנו יודעים שדטרמיננטת מטריצות בלוקים שווה למכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים כמטריצות, לכן מספיק שנראה שאכן $(D\sigma)^t(D\sigma)$ מטריצת בלוקים. למעשה, הגדרנו את σ כך ש־$\sigma(x, 0) = (\varphi(x), 0)$ ולכן נוכל להסיק שאכן $\frac{\partial\sigma}{\partial y_i} = 0$ לכל $1 \le i \le m$, ונסיק שאכן,

$$V(D\sigma) = V(D\varphi) \cdot V(D\psi)$$

ונסיק שהשוויון אכן קיים. □