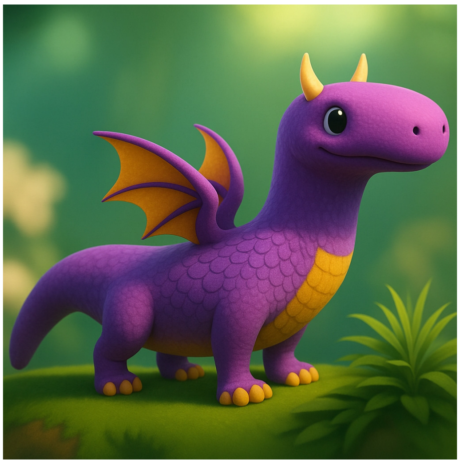
פתרון מטלה 04 — מבוא לטופולוגיה, 80516

8 במאי 2025



שאלה 1

יהי X מרחב טופולוגי ותהי $A \subseteq X$ קשירה. נראה שכל B המקיימת $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ היא קשירה.

הוכחה. נניח בשלילה ש־B לא קשירה, ויהיו $B \subseteq B_0 \uplus B_1$ קבוצות פתוחות זרות המעידות על כך. בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$A \subseteq B_0$ (לא יתכן שגם $A \cap B_1 \neq \emptyset$). B_1 פתוחה ולכן B_1^C סגורה ובפרט $\overline{A} \setminus B_1$ קבוצה סגורה המכילה את A, אבל $\overline{A}$ מינימלית בהכלתה את A, לכן נובע $\overline{A} = \overline{A} \setminus B_1$, כלומר $B_1 \cap \overline{A} = \emptyset$. נסיק אם כן ש־$B_1 = \emptyset$ בלבד, אבל B_0, B_1 לא ריקות מהגדרת הקשירות, ולכן קיבלנו סתירה. □

שאלה 3

ניזכר ונגדיר שמרחב מטרי חסום אם הוא מוכל בכדור.

סעיף א׳

יהי (X,ρ) מרחב מטרי קומפקטי, נראה שהוא חסום.

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$ ונגדיר $U_x = B(x,\epsilon)$ לכל $x \in X$. אז $\bigcup_{x\in X} U_x = X$ הוא כיסוי פתוח, ולכן מקומפקטיות יש תת־כיסוי סופי $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_x$ עבור $x_1,\ldots,x_n \in X$ ו־$n \in \mathbb{N}$. נגדיר $d = \sup_{i\le n} \rho(x_1,x_i)$ ונבחן את $B(x_1, r+\epsilon)$. כל נקודה $x \in X$ מקיימת $x \in B(x_i,\epsilon)$ עבור איזשהו i, וכן $\rho(x_1,x) \le \rho(x_1,x_i) + \rho(x_i,x) \le r+\epsilon$ ולכן $x \in B(x_1, r+\epsilon)$, כלומר כדור זה חוסם את X. $\square$

סעיף ב׳

נמצא דוגמה למרחב מטרי חסום שאינו קומפקטי.

פתרון נתחיל בהבחנה שאנו יודעים, במרחבים מטריים קומפקטיות שקולה לקומפקטיות סדרתית, לכן מספיק שנמצא מרחב מטרי חסום ולא קומפקטי סדרתי. נגדיר $X = (0,1)$ יחד עם המטריקה הסטנדרטית $\rho(x,y) = |x-y|$, ונבחין כי $X = B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. נגדיר $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ על־ידי $x_n = \frac{1}{n}$, ב־$\mathbb{R}$ נקבל ש־$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, לכן $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב־X, ואילו יש לה תת־סדרה מתכנסת, אז היא מתכנסת ל־0 ולכן לא מתכנסת ב־X גם, כלומר הסדרה מעידה על אי־קומפקטיות סדרתית. נסיק אם כך ש־(X,ρ) הוא מרחב מטרי חסום אך לא קומפקטי.

שאלה 4

נראה שאם X אינסופית אז טופולוגיית המשלים בן־המנייה, כלומר $A \subseteq X$ פתוחה אם ורק אם $|X \setminus A| \le \omega$, היא לא קומפקטית.

הוכחה. נסמן $\kappa = |X|$ ונגדיר $f : \kappa \to X$ כדי להימנע משימוש בבחירה. וידוע ש־$\omega \le \kappa$ מהגדרת ω כסודר אינסופי מינימלי. לכן נוכל להסיק גם ש־$\kappa = \kappa + \omega$, כלומר קיימת תת־קבוצה $Y \subseteq X$ כך ש־$|X \setminus Y| = \omega$ וכן $|Y| = \kappa$. נגדיר $f : \omega \to X \setminus Y$ העתקה חד־חד ערכית ועל, ונגדיר $U_n = Y \cup \{f(n)\}$ לכל $n < \omega$. נבחין כי $|X \setminus U_n| = |(X \setminus Y) \setminus \{f(n)\}| = |X \setminus Y| = \omega$ ולכן U_n קבוצה פתוחה לכל $n < \omega$. נובע אם כך,

$$\bigcup_{n<\omega} U_n = \bigcup_{n<\omega} Y \cup \{f(n)\} = Y \cup \bigcup_{n<\omega} \{f(n)\} = Y \cup f(\mathbb{N}) = X$$

כלומר זהו כיסוי פתוח של X. לכל תת־קבוצה סופית $I \subseteq \omega$ נבחר $m = S(\sup I)$ ונקבל $f(m) \notin \bigcup_{n\in I} U_n$, כלומר מצאנו איבר שלא נמצא בתת־כיסוי סופי המושרה מ־I לכל I שנבחר. נסיק ש־X לא קומפקטית. $\square$

שאלה 5

יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי ותהי $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$ סדרה, נסמן $A_N = \{x_n \mid N \leq n \in \mathbb{N}\}$. נראה ש־$\bigcap_{N=0}^{\infty} \overline{A_N} \neq \emptyset$.

הוכחה. מהתנאי השקול לקומפקטיות, לכל אוסף קבוצות סגורות של X אשר מקיים את תכונת החיתוך הסופי, יש חיתוך לא ריק. נרצה אם כך להראות שתכונת החיתוך הסופי חלה. נניח ש־$I \subseteq \mathbb{N}$ כך ש־$|I| < \omega$. נגדיר $M = \sup I$, מסופיות נובע ש־M מתקבל, וכן מהגדרת A_N נקבל שלכל $N \in I$ גם $N \leq M$ ולכן $x_M \in A_N$. נובע ש־$x_M \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$, כלומר החיתוך שלהם לא ריק, ובהתאם תכונת החיתוך הסופי אכן נשמרת. נסיק אם כך שגם $\bigcap_{N=0}^{\infty} \overline{A_N} \neq \emptyset$. $\square$

שאלה 6

תהי קבוצה S לא ריקה, ו־$D \subseteq \mathcal{P}(S)$ משפחת קבוצות המקיימת את תכונת החיתוך הסופי. נוכיח שקיים מסנן $\langle D \rangle$ כך ש־$D \subseteq \langle D \rangle$ וכך שאם F מסנן המקיים $D \subseteq F$, אז גם $\langle D \rangle \subseteq F$.

הוכחה. נתחיל בהוכחה עבור המקרה $D = \emptyset$. במקרה זה נגדיר $\langle D \rangle = \{S\}$, ונבחין כי אוסף זה מקיים $S \in \langle D \rangle, \emptyset \notin \langle D \rangle$, וכן מקיים באופן ריק סגירות לחיתוך ולקבוצות מכילות. כל מסנן $D \subseteq F \subseteq \mathcal{P}(S)$ מקיים $S \in F$ ולכן $\langle D \rangle \subseteq F$ ולכן סיימנו.

נניח ש־$D \neq \emptyset$. נגדיר את הקבוצה $\langle D \rangle$ כסגירות לחיתוך ולהוספת איברים מעל D. כלומר נגדיר $D \subseteq \langle D \rangle$ וכן לכל $A, B \in \langle D \rangle$ גם $A \cap B \in \langle D \rangle$ וכן לכל $\langle D \rangle \ni A \subseteq B \subseteq S$ גם $B \in \langle D \rangle$. נראה ש־$\langle D \rangle$ מסנן. ידוע ש־D לא ריקה ולכן קיים $A \in D$, אבל $A \subseteq S$ ולכן $S \in \langle D \rangle$. אם $\emptyset \in D$ אז D לא מקיימת את תכונת החיתוך הסופי, לכן נסיק ש־$\emptyset \notin D$, וכן לכל $A, B \in D$ ידוע ש־$A \cap B \neq \emptyset$, ואף לכל $A \in \langle D \rangle$ לא מתקיים $A \subsetneq \emptyset$, לכן נוכל להסיק ש־$\emptyset \notin \langle D \rangle$. הקבוצה $\langle D \rangle$ סגורה לחיתוך סופי מהגדרתה ככזו, וכן סגורה ללקיחת קבוצות מכילות גם מהגדרה, לכן נסיק ש־$\langle D \rangle$ אכן מסנן.

נניח ש־$D \subseteq F$ מסנן כלשהו מעל S. לכל $A, B \in D$ גם $A, B \in F$ ולכן $A \cap B \in F$, וכן לכל $A \in D$ ו־$A \subseteq B$ גם $B \in F$, ולכן לכל $A \in \langle D \rangle$ נסיק ש־$A \in F$, כלומר $\langle D \rangle \subseteq F$. $\square$

שאלה 7

תהי S קבוצה ויהי $F \subseteq \mathcal{P}(S)$ מסנן על S. יהיו R קבוצה נוספת ו־$f : S \to R$ פונקציה כלשהי. נגדיר $f_*F = \{A \subseteq R \mid f^{-1}(A) \in F\}$, ונוכיח כי זהו מסנן מעל R.

הוכחה. $f^{-1}(R) = S \in F$ מהגדרת f, לכן נובע ש־$R \in f_*F$. נבחין גם כי $\emptyset \notin F$ ולכן $\emptyset \notin f_*F$ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin f_*F$.
נניח ש־$A, B \in f_*F$, אז $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in F$ מהגדרת F. יהי $s \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, אז $f(s) \in A, B$ ונובע שבפרט גם $f(s) \in A \cap B$. נקבל אם כך ש־$s \in f^{-1}(f(s)) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$, ולכן $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$ ולכן $f^{-1}(A \cap B) \in F$ ו־$A \cap B \in f_*F$.
נניח ש־$A \in f_*F$, בהתאם $f^{-1}(A) \in F$, ונניח ש־$A \subseteq B$, אז גם $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) \in F$ ולכן $B \in f_*F$.
מצאנו אם כן ש־f_*F מסנן מעל R. $\square$