אנליזה פונקציונלית — סיכום

11 ביוני 2025

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 26.3.2025

1.1 רקע

אנליזה פונקציונלית היא כמו אלגברה לינארית. בקורס זה נחקור מרחבים וקטוריים והעתקות עליהם, אבל על מרחבים מורכבים יותר והעתקות מורכבות יותר. נתחיל בשאלה,

תרגיל 1.1 יהי (X,ρ) מרחב מטרי כלשהו, ונניח ש־$A \subseteq X$. נניח גם ש־$(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$.
מהם התנאים ההכרחיים על A כך ש־(a_n) תכלול תת־סדרת קושי?

נעבור לדוגמה וטענות מאינפי 1 לרענן את זכרוננו.

דוגמה 1.1 המרחב המטרי הכי אינטואיטיבי הוא $X = \mathbb{R}$ ו־$\rho(x,y) = |x-y|$.

טענה 1.1 *תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־A חסומה, ותהי $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$, אז יש ל־$(a_n)$ תת־סדרת קושי.*

הוכחה. $A \subseteq [-R,R]$ עבור $R \in \mathbb{R}$. נתחיל בהגדרה של $A = \Delta_0$ ולכן יש אינסוף, ולכן יש בקטע Δ_0 אינסוף נקודות של הסדרה, וכן $|\Delta_0| = 2R$. נבחן את הקטעים החוצים את Δ_0, הם $[-R,0], [0,R]$, נבחר את זה מביניהם שמכיל אינסוף נקודות של (a_n) להיות Δ_1, וכך נמשיך ונגדיר סדרה (Δ_n). נובע שהסדרה הנתונה היא סדרה יורדת, במובן ש־$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$, מתקיים גם $|\Delta_n| = \frac{|\Delta_0|}{2^n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ובכל Δ_n יש אינסוף נקודות של (a_n). נבחר $a_{n_1} \in \Delta_1$ וכך באופן כללי גם $a_{n_k} \in \Delta_k$, לכן נובע $|a_{n_k} - a_{n_l}| \le \frac{1}{2^k}$ עבור $l \ge k$. לכן נובע שאכן ישנה תת־סדרת קושי בסדרה (a_n). □

הערה טענה זו נכונה גם כאשר מסתכלים על מרחב $(\mathbb{R}^n, \rho)$ עבור $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

הגדרה 1.2 (מרחב נורמי) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ עבור $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ותהי פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ המקיימת,

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0_V$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\forall x,y \in V, \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

אז $(V, \|\cdot\|)$ יקרא מרחב נורמי עם נורמה $\|\cdot\|$.

הגדרה 1.3 (מרחב l2) נגדיר את הקבוצה $l_2 = \{x = (x_1, \dots) \mid \forall k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty\}$. נגדיר גם,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^\infty x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

אז המרחב הנורמי l_2 הוא הקבוצה והנורמה הללו.

נבחין כי עלינו להוכיח שזהו אכן מרחב נורמי לפי ההגדרה.

משפט 1.4 (אי־שוויון קושי־שווארץ) *מתקיים,*

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i| \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

סימון 1.5 נסמן $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

הוכחה. עבור $t \in \mathbb{F}$ סקלר כלשהו,

$$0 \le \langle x+ty, x+ty \rangle = \langle x,x \rangle + 2t\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle t^2$$

עובדה ידועה היא $At^2 + Bt + C \ge 0 \implies B^2 - 4AC \le 0$ ולכן,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

ולכן,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

ואם נגדיר $x_i' = |x_i|$ וכן $y_i' = |y_i|$ אז מאי־השוויון הנתון נובע,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i'| \cdot |y_i'| \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

□

נעבור להוכחת ההגדרה של l_2, כלומר ההוכחה שהנורמה שהגדרנו היא אכן נורמה.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \\
&\le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\implies \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

□

עתה משקיבלנו ש־l_2 הוא אכן מרחב נורמי, נוכל לדון בתכונותיו.

דוגמה 1.2 במרחב $(l_2, \|\cdot\|)$ נגדיר את שפת כדור היחידה במרחב,

$$S = \{x \in l_2 \mid \|x\| = 1\}$$

נבחין כי S קבוצה חסומה ב־l_2. נבחר $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על־ידי $l_n = (0, \dots, 1, \dots)$ כאשר $l_n^n = 1, l_n^m = 0$ לכל $m \ne n$. כמובן מתקיים $\|l_n\| = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן סדרת הנקודות חסומה ב־S.

טענה 1.6 *$(l_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq l_2$ אינה כוללת תת־סדרת קושי.*

הוכחה. נבחין כי $\|l_n - l_m\| = \sqrt{2}$ לכל $n \ne m$. □

סימון 1.7 (כדור) עבור מרחב מטרי (X, ρ), נסמן $B_r(x) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$.

הגדרה 1.8 (קבוצה חסומה לחלוטין) יהי מרחב מטרי (X, ρ) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$, אז נאמר ש־A חסומה לחלוטין (Totally bounded) אם לכל $\epsilon > 0$ קיים מספר סופי של נקודות $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq X$, כך שמתקיים $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\epsilon(x_i)$.

מיד נראה שימוש בהגדרה זו במשפט, ובכך ניתן הצדקה להגדרה הלכאורה משונה הזאת.

משפט 1.9 (שקילות לחסימות לחלוטין) *יהי מרחב מטרי (X, ρ) ותהי $A \subseteq X$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *A חסומה לחלוטין.*
2. *בכל סדרה של A ניתן לבחור תת־סדרת קושי.*

משפט זה הוא משפט חשוב ומרכזי, ועל הקורא לשנן את הוכחתו. את ההוכחה אומנם נראה בהרצאות הבאות, אך נראה עתה שימושים למשפט זה. נעבור למשפט פחות חשוב ומרכזי,

משפט 1.10 (שקילות חסימות במרחבים האוקלידיים) *נניח ש־$X = \mathbb{R}^m$, וכן ש־$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$, אז אם $A \subseteq \mathbb{R}^m$ חסומה, אז היא חסומה לחלוטין.*

הוכחה. נחסום את A על־ידי קובייה מספיק גדולה, נחלק את הקובייה לתת־קוביות מספיק קטנות (ההצדקה מגיעה מאינפי 3), ונוכל לחסום כל קובייה כזו בכדור. נסמן $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}^m$ את מרכזי הקוביות ונקבל $A \subseteq \bigcup_{j=1}^N B_\epsilon(x_j)$ מהגדרת החלוקה של הקובייה החוסמת. $\square$

טענה 1.11 *ב־$(l_2, \|\cdot\|)$ נגדיר את הקבוצה,*

$$\Pi = \{x = (x_1, \dots) \in l_2 \mid \forall i \in \mathbb{N}, |x_i| \le \frac{1}{2^{i-1}}\}$$

אם $x \in \Pi$ אז $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty$, ובהתאם בהכרח $\Pi \subseteq l_2$.
הקבוצה Π חסומה לחלוטין.

הוכחה. תהי $(x_1, \dots) \in \Pi$, ונגדיר $x_n^* = (x_1, \dots, x_n, \dots, 0, 0, \dots)$. נגדיר גם $\Pi_n^* = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \mid |x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}\}$. הקבוצה Π_n^* חסומה לחלוטין, זאת שכן הקבוצה שקולה לקבוצה ב־$\mathbb{R}^n$, ונבחין כי היא חסומה, ולכן ההוכחה שראינו קודם עודנה תקפה ובהתאם Π_n^* חסומה לחלוטין.
נבחין כי

$$\|x - x_n^*\|^2 = \sum_{i=n+1}^\infty x_i^2 \le \sum_{i=n+1}^\infty \frac{1}{2^{2i-2}} = \sum_{i=n+1}^\infty \frac{4}{4^i} = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$$

ולכן $\|x - x_n^*\| \le \frac{1}{2^{n-1}}$. יהי $\epsilon > 0$, אז Π_n^* חסומה לחלוטין ולכן קיימים $y^1, \dots, y^n \in l_2$ כך שמתקיים,

$$\Pi_n^* \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(y^i)$$

נניח ש־$x_n^* \in B_\epsilon(y^i)$ ונוכל לבחור n כך שמתקיים $\|x - x_n^*\| < \epsilon$, אז

$$\|x - y^i\| \le \|x - x_n^*\| + \|x_n^* - y^i\| < 2\epsilon$$

נובע ש־$\Pi \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{2\epsilon}(y^i)$. $\square$

נבחין כי עתה ראינו שב־l_2 במרחב נורמי יש קבוצות חסומות, זהו אכן מרחב מעניין.

2 שיעור 2 — 2.4.2025

2.1 חסימות לחלוטין

נראה את הוכחתם של שני משפטים שמומלץ לזכור. המשפט הראשון הוא משפט 1.9, בקורס זה נקרא לו משפט האוסדורף, זאת למרות שזהו רק משפט חלקי למשפט המוכר כמשפט בשם זה. נעבור להוכחה.

הוכחה. נניח ש־(X,ρ) מרחב מטרי וש־$A \subseteq X$ חסומה לחלוטין, לכן ניתן לכסות את הקבוצה A על־ידי מספר סופי של כדורים. נניח ש־$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ ונבחר $\epsilon = 1$ התחלתי. מכאן נסיק שקיים כדור $B^1_{\epsilon=1}$ הכולל אינסוף נקודות בסדרה. נגדיר $V^1 = A \cap B^1_{\epsilon=1}$ ונסיק $\operatorname{diam}(V^1) = \sup_{x,y\in V^1} \rho(x,y) \le 2$. אז V^1 כולל מספר אינסופי של נקודות של $\{x_n\}$. אין ספק ש־V^1 חסומה לחלוטין. נפעל עכשיו באופן דומה על $B^1_{\epsilon=1}$, הקבוצה V^1 חסומה לחלוטין ולכן ניתן לכסות אותה על־ידי מספר סופי של כדורים עבור $\epsilon = \frac{1}{2}$. נבחר כדור שמכיל אינסוף נקודות של הסדרה ב־V^1, נסמנו $B^2_{\epsilon=\frac{1}{2}}$, ונגדיר גם $V^2 = V^1 \cap B^2_{\epsilon=\frac{1}{2}}$. הפעם $\operatorname{diam}(V^2) \le 1$ ולכן V^2 חסומה לחלוטין וכוללת מספר אינסופי של נקודות של $\{x_n\}$. נחזור על תהליך זה אינסוף פעמים.
בכתוצאה מהתהליך נקבל $\ldots \supset V^k \supset \cdots \supset V^2 \supset V^1$ וכן ש־$\operatorname{diam}(V^k) \le \frac{2}{k}$, ואף ש־$V^k$ כולל אינסוף נקודות של $\{x_n\}$. נבחר $x_{n_1} \in V^1, x_{n_2} \in V^2, \ldots$ ונקבל תת־סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ כך ש־$\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+l}}) \le \frac{2}{k} \to 0$, זאת שכן $x_{n_k}, x_{n_{k+l}} \in V^k$. קיבלנו אם כן שתת־הסדרה היא קושי.

נעבור לכיוון השני, נניח שלכל סדרה יש תת־סדרת קושי ב־A. נניח בשלילה כי A אינה חסומה לחלוטין, לכן קיים $\epsilon > 0$ עבורו אין כיסוי סופי של כדורים. מספיק להוכיח כי ישנה סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ שאינה כוללת תת־סדרת קושי. נבחר $x_1 \in A$. לכן נוכל להסיק שקיימת $x_2 \in A$ כך ש־$\rho(x_1,x_2) \ge \epsilon$. נמשיך כך להשתמש באי־החסימות עבור ϵ כדי לבנות סדרה של אינסוף נקודות כאלה, כלומר $\rho(x_n,x_m) \ge \epsilon$ לכל $n,m \in \mathbb{N}$ כך ש־$n \ne m$. לסדרה $\{x_n\}$ אין תת־סדרת קושי, בסתירה להנחה. □

2.2 מרחבים מטריים חשובים

הגדרה 2.1 (מרחב הפונקציות הרציפות) נגדיר את המרחב המטרי $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ עבור $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}$ ו־$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. זהו מרחב נורמי.

הגדרה 2.2 (חסימות במידה אחידה) נניח ש־$\Phi \subseteq C[a,b]$ ונניח שקיים $K > 0$ כך שמתקיים $|\varphi(x)| \le K$ לכל $x \in [a,b]$ ולכל $\varphi \in \Phi$, כאשר K אינו תלוי ב־x, φ. במקרה זה נאמר ש־Φ חסומה במידה אחידה.

דוגמה 2.1 נגדיר $\Phi = \{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$, וידוע כי $|\sin(nx)| \le 1$, אז Φ חסומה לחלוטין.

דוגמה 2.2 נגדיר $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$ עבור $n \in \mathbb{N}$, אז,

$$\forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| < 1$$

ולכן נאמר ש־$\{f_n\}$ חסומה במידה אחידה.

הגדרה 2.3 (רציפות במידה אחידה) באנגלית Eqicontinuous family of functions. נניח ש־$\Phi \subseteq C[a,b]$ עבור כל $\epsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\epsilon)$ (כלומר ערך δ תלוי רק ב־ϵ), כך שמתקיים,

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b], \varphi \in \Phi\ |x_1 - x_2| \le \delta(\epsilon) \implies |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le \epsilon$$

במקרה זה Φ נקראת רציפה במידה אחידה.

דוגמה 2.3 נחזור לדוגמה האחרונה שלנו, ונבדוק אם היא רציפה במידה אחידה,

$$|f_n(\frac{1}{n}) - f_n(0)| = 1$$

ולכן $\{f_n\}$ אינה רציפה במידה אחידה.

טענה 2.4 *נניח ש־$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C[a,b]$. נניח שקיים $K > 0$ כך ש־$|f_n(x)| \le K$ עבור כל $x \in [a,b], n \in \mathbb{N}$. נניח גם ש־$|f'_n(x)| \le K$. אז הקבוצה $\{f_n\}$ חסומה במידה אחידה וגם רציפה במידה אחידה.*

הוכחה. נבחין כי מתקיים, $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \le |f'(y)| \cdot |x_1 - x_2| \le K|x_1 - x_2|$.
לכן ניתן לבחור $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{K}$, והוא לא תלוי בפונקציות או בערכי n. □

3 שיעור 3 — 9.4.2025

3.1 תכונות מרחבי פונקציות

משפט 3.1 (משפט ארצלה) *נניח ש־$\Phi \subseteq (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *לכל סדרה $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Phi$ קיימת תת־סדרת קושי. כלומר קיימת $\{f_{n_k}\}$ כך ש־$\|f_{n_k} - f_{n_{k+l}}\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$ עבור כל $l \in \mathbb{N}$.*
2. *Φ חסומה במידה אחידה ורציפה במידה אחידה.*

הוכחה. בכיוון הראשון נניח שלכל סדרה יש תת־סדרת קושי. ממשפט 1.9 נסיק ישירות ש־Φ חסומה לחלוטין. נבחר $\epsilon > 0$ ולכן $\Phi \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\epsilon(f_i)$. תהי $\varphi \in \Phi$, אז קיים $1 \le i \le N$ כך ש־$\varphi \in B_\epsilon(f_i)$,

$$\|\varphi\|_\infty = \|\varphi - f_i + f_i\|_\infty \le \|\varphi - f_i\|_\infty + \|f_i\|_\infty \le \epsilon + \|f_i\|_\infty$$

מסדרות קושי נוכל להסיק שקיימים,

$$\forall x \in [a,b],\ |f_1(x)| \le K_1, \dots, |f_N(x)| \le K_N$$

ולכן נגדיר $K = \max\{K_1, \dots, K_N\}$, לכן מתקיים $\|\varphi\|_\infty \le \epsilon + K$, נובע ש־$\Phi$ חסומה במידה אחידה.

נעבור להוכחת רציפות במידה שווה.

הפונקציות $f_1, \dots, f_N$ רציפות בקטע $[a,b]$, לכן רציפות בו במידה שווה, ונובע שקיימים $\delta_1(\epsilon), \dots, \delta_N(\epsilon) > 0$ כך שמתקיים,

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \le \delta_i(\epsilon) \implies |f_i(x) - f_i(y)| \le \epsilon$$

נגדיר $\delta = \min\{\delta_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. קיים $i \in \{1, \dots, N\}$ כך ש־$\varphi \in B_\epsilon(f_i)$, לכן,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \overbrace{|\varphi(x) - f_i(x)|}^{\le \|\varphi - f_i\|_\infty} + \overbrace{|f_i(x) - f_i(y)|}^{\le \epsilon} + \overbrace{|f_i(y) - \varphi(y)|}^{\le \|\varphi - f_i\|_\infty}$$

נניח גם ש־$|x-y| \le \delta(\epsilon)$ ולכן,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon),\ |x-y| \le \delta(\epsilon) \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| \le 3\epsilon$$

כלומר, מצאנו רציפות במידה שווה.

נעבור עתה לכיוון השני, נניח ש־Φ חסומה ורציפה במידה שווה. יהי $\epsilon > 0$ ו־$\delta(\epsilon) > 0$ כך שמתקיים,

$$|x-y| \le \delta(\epsilon) \implies \forall \varphi \in \Phi,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \le \epsilon$$

נגדיר את הסדרות כך ש־$y_{i+1} - y_i \le \epsilon$ וכן סדרה כך ש־$x_{i+1} - x_i \le \delta(\epsilon)$, ונגדיר גם $x_0 = a, x_n = b$ וכן $y_0 = -K, y_m = K$. ברור כי אכן קיימות סדרות סופיות כאלה, ונבחן את הנקודות האלה כמשרות חלוקה על החלק המתאים במישור. המטרה שלנו היא לחלק את הגרף של φ תוך שימוש בתיבות שהגדרנו. נגדיר את הפונקציה ψ כך שהיא עוברת דרך נקודות בתיבות הללו כך שהיא מקרבת את גרף ϕ אך קטנה ממנה תמיד, כלומר נבחר את החיתוכים $\varphi(x_i)$ ואת הנקודות y_i הגדולות ביותר שמתחת לנקודות אלה. עתה נבדוק את $\|\varphi - \psi\|_\infty$ עבור $x \in [a,b]$,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(x) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| + |\psi(x_i) - \psi(x)| \le \epsilon + \epsilon + |\psi(x_i) - \psi(x_{i+1})| \le 2\epsilon + 3\epsilon$$

כלומר קיבלנו ש־$\|\varphi - \psi\|_\infty \le 5\epsilon$, כלומר ניתן לחסום $\Psi \subseteq \bigcup_{\psi \in \Gamma} B_{5\epsilon}(\psi)$ עבור Γ קבוצת המצולעים שעוברים דרך הנקודות ברשת שהגדרנו, כלומר זוהי קבוצה סופית. □

הגדרה 3.2 (מרחב מטרי שלם) מרחב מטרי (X, ρ) יקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת לנקודה במרחב המטרי.

משפט 3.3 (שלמות מרחב הפונקציות הרציפות) *המרחב $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ הוא מרחב מטרי שלם.*

הוכחה. תהי סדרה $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C[a,b]$ ונניח כי סדרה זו היא סדרת קושי. כלומר

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n, m \ge N(\epsilon) \|f_n - f_m\|_\infty \le \epsilon$$

נובע שלכל $x \in [a,b]$ גם $|f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon$, זאת מהגדרת הנורמה על מקסימום. אם נבחר $x \in [a,b]$ אז $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, כלומר זוהי סדרת ממשיים ומשלמות הממשיים והעובדה כי זוהי סדרת קושי נסיק שקיים $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = y_x$. לכל x נגדיר $f(x) = y_x$, כלומר נבנה פונקציה שמתקבלת מהנקודות הגבוליות של סדרת הפונקציות. כאשר $m \to \infty$ מתקיים,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon),\ \forall x \in [a,b],\ |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$$

ולכן,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \forall n \geq N(\epsilon), \forall x \in [a,b], \max |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

אז נובע ש־$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ כפי שרצינו. □

ניזכר במשפט שאנו כבר יודעים

משפט 3.4 (משפט ויירשטראס להתכנסות במידה שווה) *אז אם $\{f_n\}_{n=1}^\infty C[a,b]$, ו־$f_n \rightrightarrows f$ (כלומר הסדרה מתכנסת במידה שווה) אז f רציפה.*

ונראה משפט שקשור אליו וחשוב לא פחות.

משפט 3.5 (שלמות l2) *המרחב המטרי $(l_2, \|\cdot\|)$, שנזכיר שמוגדר על־ידי,*

$$l_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \middle| \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty \right\}, \qquad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^\infty x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

הוא מרחב מטרי שלם.

הוכחה. תהי סדרה $\{x^n\}_{n=1}^\infty \subseteq l_2$, ונניח שזוהי סדרת קושי. אז אנו יודעים כי,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \forall n, m \geq N(\epsilon), \|x^n - x^m\|^2 \leq \epsilon \implies \sum_{i=1}^\infty (x_i^n - x_i^m)^2 \leq \epsilon^2$$

נשתמש בתנאי ההכרחי להתכנסות בהחלט של טורים ממשיים ונקבל שעובר כל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon),\ (x_i^n - x_i^m)^2 \leq \epsilon^2$$

אם נקבע i אז נקבל סדרה $\{x_i^n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$ סדרת קושי, ונגדיר $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$. נגדיר את הסדרה $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$. נקבל שמתקיים $(x_i^n - x_i)^2 \leq \epsilon^2$ לכל $n > N(\epsilon)$ ולכל $i \in \mathbb{N}$. נבחר M כלשהו, אז מתקיים,

$$\sum_{i=1}^M (x_i^n - x_i^m)^2 \leq \epsilon^2$$

ונובע,

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^M (x_i^n - x_i^m)^2 = \sum_{i=1}^M (x_i^n - x_i)^2 \leq \epsilon^2$$

אז מתקיים,

$$\sum_{i=1}^\infty (x_i^n - x_i)^2 \leq \epsilon^2$$

בהתאם מתקיים, $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|^2 = 0$, נבדוק,

$$\sum_{i=1}^\infty x_i^2 = \sum_{i=1}^\infty (x_i - x_i^n + x_i^n)^2 = 2\sum_{i=1}^\infty (x_i - x_i^n)^2 + 2\sum_{i=1}^\infty (x_i^n)^2 < \infty$$

כלומר מצאנו סדרה גבולית והוכחנו שהיא במרחב שלנו. □

מסקנה 3.6 נניח ש־$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C[a,b]$ סדרה חסומה במידה שווה ורציפה במידה שווה, אז קיימת תת־סדרה $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subseteq \{f_n\}$ שמתכנסת במידה שווה לפונקציה $f \in C[a,b]$.

משפט 3.7 (אנלוגי למשפט ארצלה ל־l2) *נניח ש־$\Phi \subseteq l_2$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *Φ חסומה לחלוטין*
2. (a) *קיים $K > 0$ כך ש־$\|\varphi\| \leq K$ לכל $\varphi \in \Phi$, כלומר Φ חסומה*
   (b) $\lim_{M\to\infty} \left(\sup_{x\in\Phi} \sum_{i=M}^\infty x_i^2 \right) = 0$

ננסה להבין את התנאי שהרגע הגדרנו,

דוגמה 3.1 נגדיר את $S \subseteq l_2$ על־ידי $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$. ב־S נמצאות הסדרות $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ כאשר $e_n^n = 1$ בלבד. בהתאם מתקיים $\sup_{x\in S} \sum_{i=M}^\infty x_i^2 = 1$, לכן התנאי השני לא מתקיים ובהתאם לא יתכן ש־S חסומה לחלוטין.

דוגמה 3.2 נגדיר את $H=\{x\in l_2\mid \forall n\in\mathbb{N}, |x_n|\leq\frac{1}{2^{n-1}}\}$. הפעם נקבל,

$$\sum_{i=M}^{\infty}x_i^2=\sum_{i=M}^{\infty}\frac{1}{4^{i-1}}=\frac{4}{4^M}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\xrightarrow{M\to\infty}0$$

ולכן התנאי השני עבור חסימות לחלוטין מתקיים.

4 שיעור 4 — 23.4.2025

4.1 תכונות מרחבי סדרות

נסיים את הפרק הזה בתכונות חשובות במרחב $(l_2, \|\cdot\|)$ עליו דנו בשיעורים הקודמים.

משפט 4.1 (משפט ארצלה ל־l2) *נניח ש־$K \subseteq l_2$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *K חסומה לחלוטין*
2. (a) *הקבוצה K חסומה במרחב המטרי $(l_2, \|\cdot\|)$, ו*
   (b) $\lim_{M\to\infty} \sup_{x\in K} \sum_{j=M}^{\infty} x_j^2 = 0$

לפני שניגש להוכחת המשפט, נוכיח טענה כללית שתעזור לנו.

טענה 4.2 *נניח ש־(X, ρ) מרחב ממטרי כלשהו ונניח ש־$Q \subseteq X$ חסומה לחלוטין. אז Q היא חסומה ב־(X, ρ).*

הוכחה. תהי נקודה $x_0 \in X$, Q חסומה לחלוטין ולכן $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\epsilon(x_i)$ עבור $N \in \mathbb{N}$ ו־$x_1, \dots, x_N \in X$. נגדיר $R = \max\{\rho(x_0, x_1), \dots, \rho(x_0, x_N)\}$. אם $q \in Q$ אז $q \in B_\epsilon(x_i)$ עבור איזשהו i, נובע שגם,

$$\rho(q, x_0) \le \rho(q, x_i) + \rho(x_i, x_0) \le \epsilon + R$$

לכל $q \in Q$, נסיק שמתקיים $\rho(q, x_0) \le R + \epsilon$. □

נעבור להוכחת המשפט.

הוכחת המשפט. $2 \implies 1$, טענה (a) נובעת מיד מהטענה שהוכחנו זה עתה. נעבור להוכחת (b). יהי $\epsilon > 0$, K קבוצה חסומה לחלוטין, ב־l_2 ולכן,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\epsilon(x^n)$$

נבחין כי,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_j^1)^2 < \infty, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} (x_j^N)^2 < \infty$$

אז קיימים $M_1, \dots, M_N$ התלויים ב־ϵ בלבד כך שמתקיים,

$$\sum_{i=M_1}^{\infty} (x_i^1)^2 \le \epsilon, \dots, \sum_{i=M_N}^{\infty} (x_i^N)^2 \le \epsilon$$

עבור $x = (x_1, \dots) \in K$ מתקיים $x \in B_\epsilon(x^n)$ וכן $\|x - x^n\|^2 \le \epsilon^2 \le 2\epsilon$ ולכן,

$$\sum_{i=M}^{\infty} x_i^2 = \sum_{i=M}^{\infty} (x_i - x_i^n + x_i^n)^2 \le 2\sum_{i=M}^{\infty} (x_i - x_i^n)^2 + 2\sum_{i=M}^{\infty} (x_i^n)^2$$

אז,

$$\forall \epsilon > 0, \exists M, \forall x \in K, \ \sum_{i=M}^{\infty} x_i^2 \le 2\epsilon^2 + 2\epsilon$$

ולכן למעשה מצאנו שמתקיים,

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{x\in K} \sum_{i=M}^{\infty} x_i^2 = 0$$

$1 \implies 2$, נניח ש־K חסומה וכן שקיים הגבול (b). יהי $\epsilon > 0$ ונבחר M כך שמתקיים,

$$\sup_{x\in K} \sum_{i=M}^{\infty} x_i^2 \le \epsilon^2$$

ולכן בפרט לכל $x \in K$, מתקיים $\sum_{i=M}^{\infty} x_i^2 \le \epsilon^2$ נגדיר $\pi_M : K \to \pi_M(K) \subseteq (\mathbb{R}^M)^\circ$ על־ידי $\pi_M(x) = (x_1, \dots, x_M, 0, \dots)$. אז $\pi_M(K)$ חסומה ב־$\mathbb{R}^M$ ולכן $\pi_M(K)$ חסומה לחלוטין ב־$\mathbb{R}^M$. נעיר שבמקרה זה $\mathbb{R}^M = \{(x_1, \dots, x_M, 0, \dots)\}$.

נובע שקיימים $y^1, \dots, y^N \in (\mathbb{R}^M)^\circ$ כך שמתקיים,

$$\pi_M(K) \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} B_\epsilon(y^n)$$

אז אם $x \in K$, מתקיים $\pi_M(x) \in B_\epsilon(y^n)$, נסיק,

$$\|x - y^n\|^2 = \sum_{i=1}^{M} (x - y_i^n)^2 + \sum_{i=M+1}^{\infty} x_i^2 \le \|\pi_M(x) - y^n\|^2 + \epsilon^2 \le 2\epsilon^2$$

בהתאם נובע ש־$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} B_{\sqrt{2}\epsilon}(y^n)$. □

4.2 קירובים

בעולם של אנליזה פונקציונלית עלינו למצוא דרך לקרב פונקציות מורכבות על־ידי פונקציות פשוטות יותר, זאת כדי שנוכל לעבוד במרחבים ההרבה יותר מורכבים שבהם וקטור הוא פונקציה. עוד משהו שחשוב שנוכל לעשות הוא לקרב במידה שווה את הפונקציות, זאת שכן קירוב נקודתי לא מספר לנו מספיק על הפונקציות.

משפט 4.3 (משפט הקירוב של ויירשטראס) *לכל $f \in C[0,1]$ קיימת סדרת פולינומים $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $P_n \rightrightarrows f$.*

הוכחה. נתחיל ברידוד של הבעיה, נניח ש־$g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$, אז נובע ש־$f(x) = g(x) + f(0) + x(f(1) - f(0))$, אך החלק המוסף הוא פולינום, ולכן נוכל לבחון את הקירוב ל־g בלבד. נקבל שנוכל להניח ללא הגבלת הכלליות ש־$f(0) = f(1) = 0$.
נגדיר פונקציה חדשה,

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases}$$

פונקציה זו מוגדרת על הממשיים והיא רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$ בשל ההנחה שעשינו.
לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - y| \le 2\delta$ אז $|F(x) - F(y)| \le \epsilon$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$. בשלב הבא נגדיר את סדרת הפולינומים שלנו,

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} F(x+u) Q_n(u)\, du$$

כאשר $Q_n(u) = C_n (1 - u^2)^n$ כאשר C_n קבוע מנרמל כך שיתקיים $\int_{-1}^{1} Q_n(u)\, du = 1$.
נבחין כי $F(x+u) \ne 0$ כאשר $x + u \in [0,1]$, או בהתאם כאשר $u \in [-x, 1-x]$. נשתמש בהגדרת התומך ונקבל שמתקיים,

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} F(x+u) Q_n(u)\, du = \int_{0}^{1} F(t) Q_n(t - x)\, dt$$

אבל Q_n פולינום ונסיק שגם P_n פולינום (מדוע?). נבחין כי,

$$\begin{aligned}
&|P_n(x) - F(x)| \\
&= \left| \int_{-1}^{1} F(x+u) Q_n(u)\, du - \int_{-1}^{1} F(x) Q_n(u)\, du \right| \\
&\le \int_{-1}^{1} |F(x+u) - F(x)| Q_n(u)\, du \\
&\le \int_{-1}^{-\delta} |F(x+u) - F(x)| Q_n(u)\, du + \int_{-\delta}^{\delta} |F(x+u) - F(x)| Q_n(u)\, du + \int_{\delta}^{1} |F(x+u) - F(x)| Q_n(u)\, du
\end{aligned}$$

נסמן את שלושת האינטגרלים הללו I_1, I_2, I_3 בהתאמה, ונבדוק,

$$I_2 \le \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} Q_n\, du \le \epsilon \int_{-1}^{1} Q_n(u)\, du \le \epsilon$$

עבור I_3, אנו יודעים ש־F חסומה ונסמן $|F(x)| \le M$ עבור $M > 0$ כלשהו, אז,

$$I_3 \le 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(u)\, du = 2MC_n \int_{\delta}^{1} (1 - u^2)^n\, du \le 2MC_n (1 - \delta^2)^n (1 - \delta) \le 2MC_n (1 - \delta^2)^n$$

נרצה להעריך את C_n,

$$C_n \int_{-1}^{1} \left(1-u^2\right)^n du = 1$$

אז,

$$\int_{-1}^{1} \left(1-u^2\right)^n du \geq \int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1-u^2\right)^n du = 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1-u^2\right)^n du \geq 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} 1-u^2\, du = 2\left[\frac{1}{\sqrt{n}} - n\frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

ולכן נסיק ש־$C_n \leq \sqrt{n}$. בהתאם נקבל חסם ל־I_3 ומטעמי סימטריה גם ל־I_1, ונוכל להסיק שלכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שמתקיים,

$$|F(x) - P_n(x)| \leq \epsilon + 4M\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כלומר קיים $M_0 > 0$ כל ש־$|F(x) - P_n(x)| \leq 2\epsilon$ לכל $x \in \mathbb{R}, n > M_0$, ולכן $P_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$ ובפרט $P_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$ כפי שרצינו. $\square$

5 שיעור 5 — 7.5.2025

5.1 קירובים במרחבים מטריים

ראינו את משפט ויירשטראס לקירוב פונקציות ב־$C([a,b])$. נניח עתה ש־(X,ρ) מרחב מטרי כלשהו, ונניח ש־$K\subseteq X$,
נבחן את $C(K)=\{f:K\to\mathbb{R}\mid f\text{ is continuous}\}$.
נגדיר את הנורמה $\|f\|_\infty=\sup_{x\in K}|f(x)|$, ואנו יודעים כי $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ הוא מרחב נורמי. המטרה שלנו היא למצוא גרסה כללית יותר של משפט ויירשטראס, הוא משפט סטון־ויירשטראס, כך שתהי $A\subseteq C(K)$ הצפופה ב־$C(K)$. לשם כך ננסה להכליל את הקונספט של פולינומים.

הגדרה 5.1 (אלגברה) נניח ש־$A\subseteq C(K)$ עבור $K\subseteq X$ במרחב המטרי (X,ρ). אם התנאים הבאים מתקיימים,

1. אם $f,g\in A$ אז $f+g\in A$
2. אם $f,g\in A$ אז $fg\in A$
3. אם $f\in A$ ו־$\alpha\in\mathbb{R}$ אז $\alpha f\in A$

אז נאמר ש־A היא אלגברה.

הגדרה 5.2 (הפרדת נקודות) נניח ש־$A\subseteq C(K)$ אלגברה, אם עבור כל $x,y\in K$ כך ש־$x\neq y$ קיימת פונקציה $f\in A$ כך ש־$f(x)\neq f(y)$ אז נאמר ש־A מפרידה נקודות ב־K.

הגדרה 5.3 (אלגברה שאינה מתאפסת באף נקודה) נניח ש־$A\subseteq C(K)$, אם עבור כל $x\in K$ קיימת פונקציה $f\in A$ כך ש־$f(x)\neq 0$, אז נאמר ש־A אינה מתאפסת באף נקודה.

עתה נראה מספר דוגמות להגדרות אלה.

דוגמה 5.1 $A=C(K)$ עבור $K\subseteq\mathbb{R}$, נבחין כי זוהי אכן אלגברה, כנביעה מהסגירות של מרחב הפונקציות לאלגברה.

1. A מפרידה נקודות, זאת שכל לכל x נוכל לבחור את $f(x)=x$
2. A אינה מתאפסת באף נקודה, ההוכחה לזה היא בחירת $f(x)=c$ עבור $c\neq 0$ כלשהו.

דוגמה 5.2 הפעם נגדיר את $A=P$ מרחב הפולינומים, הפעם גם A מפרידה בין נקודות ואינה מתאפסת באף נקודה.

נעבור לדוגמה נגדית.

דוגמה 5.3 נגדיר $A\subseteq C[-1,1]$ כך שמתקיים,

$$A_{\text{even}}=\{f\in C[-1,1]\mid f\text{ is continuous},\forall x\in[-1,1],f(x)=f(-x)\}$$

קבוצת הפונקציות הזוגיות. זוהי בבירור אלגברה, שכן מכפלת פונקציות זוגיות היא זוגית וכך גם חיבורן. אבל A_{even} לא מפרידה בין נקודות.

הגדרה 5.4 (קבוצה קומפקטית) נניח ש־(X,ρ) מרחב מטרי, ותהי $K\subseteq X$. נאמר ש־K קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח של K יש תת־כיסוי סופי. כלומר אם $K\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ עבור קבוצת אינדקסים כלשהי I של קבוצות פתוחות U_α, במקרה זה קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_N\in I$ כך שמתקיים $K\subseteq\bigcup_{i=1}^N U_{\alpha_i}$.

משפט חשוב שמגיע אלינו מטופולוגיה ולא נוכיח במסגרת קורס זה הוא המשפט הבא.

משפט 5.5 (הגדרות שקולות של קומפקטיות) *יהי (X,ρ) מרחב מטרי ויהי $K\subseteq X$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *K קומפקטית*
2. *K קומפקטי סדרתית, כלומר כל סדרה ב־K מכילה תת־סדרה מתכנסת לנקודה בקבוצה K*
3. *K שלמה, דהינו חסומה לחלוטין וחסומה*

משפט 5.6 (סטון־ויירשטראס) *נניח ש־(X,ρ) מרחב מטרי, $K\subseteq X$ קבוצה קומפקטית המשרה $C(K)=\{f:K\to\mathbb{R}\mid f\text{ is continuous}\}$. נגדיר גם $\|f\|_\infty=\sup_{x\in K}|f(x)|$. במרחב הנורמי $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$.*
נניח גם ש־$A\subseteq C(K)$ אלגברה מפרידה בין נקודות ושאינה מתאפסת באף נקודה, אז $\overline{A}=C(K)$.

לפני שניגש להוכחת המשפט, נגדיר ונוכיח מספר למות.

למה 5.7 *נניח ש־$A\subseteq C(K)$ ונניח ש־A אלגברה מפרידה בין נקודות שאינה מתאפסת באף נקודה.*

נניח ש־$x, y \in K$ כך ש־$x \neq y$, וכן ש־$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
אז קיימת $f \in A$ כך ש־$f(x) = c_1, f(y) = c_2$.

הוכחה. קיימות $g, h_1, h_2 \in A$ כך שמתקיים,

$$g(x) \neq g(y), \quad h_1(x) \neq 0, \quad h_2(y) \neq 0$$

נגדיר את הפונקציות $u(t) = h_2(t)(g(t) - g(y)) \in A$ וכן $v(t) = h(t)(g(t) - g(y)) \in A$, כאשר השייכות ל־$A$ נובעת מהיותה אלגברה. מתקיים,

$$u(x) = 0, \quad u(y) \neq 0, \quad v(x) \neq 0, \quad v(y) = 0$$

נגדיר עתה,

$$f(t) = c_1 \frac{v(t)}{v(x)} + c_2 \frac{u(t)}{u(y)}$$

אז מתקיים $f(x) = c_1, f(y) = c_2$. □

נסמן למה זו ב־$(*)$.

למה 5.8 *אם A אלגברה אז גם $\overline{A}$ אלגברה, וכן $|f| \in \overline{A}$ לכל $f \in A$.*

הוכחה. נניח ש־$f, g \in \overline{A}$, נראה כי גם $f + g, f \cdot g, \alpha f \in \overline{A}$. קיימות סדרות $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq A$ ו־$\{g_n\}_{n=1}^\infty \subseteq A$ כך ש־$f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$. אז,

$$\|f + g - f_n - g_n\|_\infty \le \|f - f_n\|_\infty + \|g - g_n\|_\infty \to 0$$

ולכן $f + g \in \overline{A}$. נבחין כי גם,

$$\|f \cdot g - f_n \cdot g_n\|_\infty = \|f \cdot g - f_n \cdot g + f \cdot g_n - f_n \cdot g_n\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \|g - g_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty \cdot \|f - f_n\|_\infty \to 0$$

וכן $f \cdot g \in \overline{A}$ בהתאם.

נבחין כי $\{|f(t)| \mid t \in K\}$ היא קבוצה חסומה ב־$\mathbb{R}$, ולכן $f(t) \in [-d, d] \subseteq \mathbb{R}$ לכל $t \in K$ ועבור $d > 0$. נקבע $\epsilon > 0$, אז קיים p_n כך שמתקיים,

$$\forall x \in [-d, d], |g(x) - p_n(x)| < \epsilon$$

נסיק ש־$|g(f(t)) - p_n(f(t))| < \epsilon$ שכן $|g(f(t))| < |f(t)|, p_n(f(t)) \in \overline{A}$, ונובע ש־$|f| \in \overline{A}$. □

למה 5.9 *נניח ש־A אלגברה. אם $f_1, \dots, f_n \in A$ אז נראה ש־φ, ψ המוגדרות על־ידי,*

$$\varphi(t) = \max\{f_1(t), \dots, f_n(t)\}, \qquad \psi(t) = \min\{f_1(t), \dots, f_n(t)\}$$

אז $\varphi, \psi \in \overline{A}$.

הוכחה. נוכיח עבור $n = 2$, וההרחבה היא באינדוקציה.

$$\varphi(t) = \max\{f_1(t), f_2(t)\} = \frac{1}{2}(|f_1 + f_2| + |f_1 - f_2|), \quad \psi(t) = \min\{f_1(t), f_2(t)\} = \frac{1}{2}(|f_1 + f_2| - |f_1 - f_2|)$$

ומהלמה האחרונה נובע שאכן $\varphi, \psi \in \overline{A}$ כפי שרצינו. □

נסמן למה זו ב־(#).

הוכחת משפט 5.6. בשלב הראשון יהי $\epsilon > 0$, תהי $f \in C(K)$ ונניח ש־$x \in K$. נרצה לבנות פונקציה g_x כך שמתקיים,

- $g_x \in \overline{A}$
- $g_x(x) = f(x)$
- $g_x(t) > f(t) - \epsilon$ לכל $t \in K$

עבור כל $y \in K$ קיימת $(*)$ פונקציה $h_y \in A$ כך ש־$h_y(y) = f(y)$ ו־$h_y(x) = f(x)$.
נגדיר את הקבוצה,

$$J_y = \{t \in K \mid h_y(t) > f(t) - \epsilon\}$$

אנו יודעים כי $h_y(y) = f(y) > f(y) - \epsilon$ ולכן $y \in J_y$. הקבוצה J_y היא פתוחה מהגדרתה ב־K, נוכל לראות זאת מהטופולוגיה המושרית על K מ־X. נבחין כי הקבוצות J_y מכסות את K, כלומר,

$$K = \bigcup_{y \in K} J_y$$

כיסוי פתוח של K, אבל מקומפקטיות K והאפיון השקול לקומפקטיות במרחבים מטריים נובע שיש תת־כיסוי סופי ל־K. נסמן,

$$K = \bigcup_{i=1}^n J_{y_i}$$

עבור $y_i \in K$ לכל $1 \le i \le n$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

נגדיר $g_x = \max\{h_{y_1}, \dots, h_{y_n}\}$ בנורמה $\|\cdot\|_\infty$. נובע ש־$g_x \in \overline{A}$ מ־(#). נבחין גם כי $h_{y_1}(x) = \cdots = h_{y_n}(x)$ ולכן נוכל להסיק שבפרט $g_x(x) = f(x)$. לכל $t \in K$ אנו יודעים כי $t \in J_{y_i}$ עבור איזשהו i, ולכן,

$$g_x(t) \ge h_{y_i}(t) > f(t) - \epsilon$$

כאשר קיים i כזה מהעובדה שיש כיסוי סופי.

בשלב השני נרצה למצוא $\varphi \in \overline{A}$ כך שיתקיים,

$$\|\varphi - f\|_\infty < \epsilon$$

נגדיר $\hat{J}_x = \{t \in K \mid g_x(t) < f(t) + \epsilon\}$. אבל,

$$g_x(x) = f(x) < f(x) + \epsilon$$

ולכן $x \in \hat{J}_x$. נוכל שוב להגדיר $K = \bigcup_{x \in K} \hat{J}_x$ ושוב קיימים $x_1, \dots, x_n$ כך שמתקיים,

$$J = \bigcup_{i=1}^n \hat{J}_{x_i}$$

ונגדיר $\varphi(t) = \min\{g_{x_1}(t), \dots, g_{x_n}(t)\}$ לכל $t \in K$, מ־(#) נובע שאכן $\varphi \in \overline{A}$. לכל $t \in K$ קיים i כך ש־$t \in \hat{J}_{x_i}$, ונשים לב שמתקיים,

$$g_{x_i}(t) < f(t) + \epsilon$$

ולכן בפרט $\varphi(t) \le g_{x_i}(t) < f(t) + \epsilon$. וכן, $\varphi(t) = g_{x_i}(t) > f(t) - \epsilon$. נסיק שמתקיים,

$$f(t) - \epsilon < \varphi(t) < f(t) + \epsilon$$

לכל $t \in K$. נובע ש־$|\varphi(t) - f(t)| \le 2\epsilon$ לכל $t \in K$, ולכן גם $\sup |\varphi(t) - f(t)| \le 2\epsilon$ לכל $\epsilon > 0$. $\square$

6 שיעור 6 — 14.5.2025

6.1 מבוא לטורי פורייה

עד כה יכולנו להשתמש בטורי טיילור, היתרון בהם הוא שהם מתנהגים בצורה מאוד טבעית, ובקשר לפונקציה. החיסרון העיקרי הוא שטור טיילור הוא מקומי בלבד, ובהרבה מקרים לא נוכל להשתמש בו, בטח ובטח שלא בקירוב טוב. בפרק הקודם הצלחנו למצוא מערכת קירוב יותר מוצלחת מבחינת חישוב, אך כזו שלא מצביעה מפורשות על הפונקציות המקרבות. ננסה לשפר את המצב הזה. ניזכר בהגדרות מלינארית.

הגדרה 6.1 (מרחב מכפלה פנימית) נניח ש־V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$, ותהי פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, כך שמתקיימים התנאים,

1. $\forall x, y \in V, \overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$
2. $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R},\ \langle x, \alpha y\rangle = d\langle x, y\rangle$
3. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ ואם $\langle x, x\rangle = 0$ אז $x = 0_V$

משפט 6.2 (מרחב נורמי מושרה ממרחב מכפלה פנימית) *$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית, ונגדיר,*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

אז $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי.

הוכחה. נראה שזוהי אכן נורמה,

1. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ישירות מהגדרה
2. $\|x\| = 0$ אם ורק אם $x = 0_V$ משיקולים דומים
3. $$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$$
4. עבור $t \in \mathbb{R}$,
$$0 \leq \langle x + ty, x + ty\rangle = \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t(\mathrm{Re}\langle x, y\rangle)$$
ואז,
$$D = B^2 - 4AC = 4(\mathrm{Re}\langle x, y\rangle)^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$
ונסיק את אי־שוויון המשולש.

□

הגדרה 6.3 (סדרה אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית) נניח ש־$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. תהי $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ כך שמתקיים,

1. $k \neq l \implies \langle v_k, v_l\rangle = 0$
2. $v_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$

אז נקרא ל־$\{v_n\}$ סדרה אורתוגונלית.

הערה ההגדרה האחרונה ניתנת לצמצום למקרה של סדרות סופיות.

משפט 6.4 (הפיתגורי) *נניח ש־$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית, ונניח ש־$\{v_n\}_{n=1}^{N}$ סדרה אורתונורמלית סופית, כלומר אורתוגונלית ו־$\langle v_n, v_n\rangle = 1$ לכל $1 \leq n \leq N$. אז,*

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} |\langle x, v_n\rangle|^2\right) + \|x - \sum_{n=1}^{N} |\langle v_n, x\rangle|^2\|^2$$

הוכחה.

$$x = \overbrace{\left(\sum_{n=1}^{N}\langle v_n, x\rangle v_n\right)}^{u=} + \overbrace{\left(x - \sum_{n=1}^{N}\langle v_n, x\rangle v_n\right)}^{v=}$$

ולכן גם,

$$\langle u, v\rangle = \langle\sum_{n=1}^{N}\langle v_n, x\rangle v_n, x - \sum_{n=1}^{N}\langle v_n, x\rangle v_n\rangle = \sum_{n=1}^{N}\langle x, v_n\rangle\langle v_n, x\rangle - \sum_{n=1}^{N}\langle x, v_n\rangle\langle v_n, x\rangle = 0$$

ולכן $\langle x, x\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle$. $\square$

מסקנה 6.5 (אי־שוויון בסל) לכל $x \in V$,

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{N}|\langle x, v_n\rangle^2$$

בפרט גם,

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, v_n\rangle^2$$

לסדרות אורתונורמליות אינסופיות.

מסקנה 6.6 (אי־שוויון שוורץ) מתקיים $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ לכל $y \neq 0_V$.

הוכחה. נגדיר $v_1 = \frac{y}{\|y\|}$, אז,

$$\|x\|^2 \geq |\langle x, v_1\rangle|^2 = |\langle x, \frac{y}{\|y\|}\rangle|^2 = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

ונסיק ש־$\|x\| \cdot \langle y\rangle \geq |\langle x, y\rangle|$ $\square$

משפט 6.7 (התכנסות טור פורייה) *נניח ש־$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ו־$\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ סדרה אורתוגונלית. יהי $v \in V$, אז מתקיים,*

$$v = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n v_n$$

עבור $\alpha_n = \frac{\langle v_n, v\rangle}{\|v_n\|^2}$ *לכל* $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה. נניח שאכן $v = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n v_n$, אז $\lim_{N\to\infty}\|v - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n\| = 0$. אז,

$$\left|\langle v_k, v\rangle - \langle v_k, \sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n\rangle\right| = \left|\langle v_k, v - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n\rangle\right| \leq \|v_k\| \cdot \left|v - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

ובהתאם עבור $k \in \mathbb{N}$ נוכל להסיק,

$$\left|\langle v_k, v\rangle - \langle v_k, \sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n\rangle\right| = |\langle v_k, v\rangle - \alpha_k\langle v_k, v_k\rangle| = 0$$

ולכן $\alpha_k = \frac{\langle v_k, v\rangle}{\|v_k\|^2}$. $\square$

הגדרה 6.8 (טור פורייה לפי מערכת אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית) יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית כלשהו מעל $\mathbb{C}$.
נניח גם ש־$\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ סדרה אורתוגונלית במרחב $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. יהי $v \in V$, אז,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle v_n, v\rangle}{\|v_n\|^2}v_n$$

נקרא טור פורייה עבור v. למקדמים $\frac{\langle v_n, v\rangle}{\|v_n\|^2}$ נקרא מקדמי פורייה.

הערה זוהי רק הגדרה, עדיין לא דנו בהתכנסות טורים אלה, או בערכם.

נעבור למשפט שאת הוכחתו מומלץ להכיר.

משפט 6.9 (תכונת הקירוב האופטימלי של טורי פורייה) *יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. נניח ש־$\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ סדרה אורתוגונלית. יהי* $N \in \mathbb{N}$ ו־$v \in V$.

במקרה זה,

$$\min_{\alpha_i\in\mathbb{C}, i\le N}\left\|v-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n\right\|=\left\|v-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle v_n,v\rangle}{\|v_n\|^2}v_n\right\|$$

כלומר בחירת מקדמי פורייה מניבה את הקירוב הטוב ביותר ל־v.

הוכחה.

$$\langle v-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n, v-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n\rangle=\|v\|^2-\sum_{n=1}^{N}\overline{\alpha_n}\langle v_n,v\rangle-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\langle v,v_n\rangle+\sum_{n=}^{N}|\alpha_n|^2+\|v_n\|^2$$

נגדיר את $x_n=\frac{\langle v_n,v\rangle}{\|v_n\|^2}$ להיות מקדם פורייה, אז,

$$\|v-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n\|^2=\|v\|^2-\sum_{n=1}^{N}(\overline{\alpha_n}x_n+\alpha_n\overline{x_n}-|\alpha_n|^2)\cdot\|v_n\|^2$$

וגם,

$$(\alpha_n-x_n)(\overline{\alpha_n}-\overline{x_n})=|\alpha_n|^2-x_n\overline{\alpha_n}-\overline{x_n}\alpha_n+|x_n|^2$$

ולכן,

$$\|v-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n\|^2=\|v\|^2+\sum_{n=1}^{N}\left(|\alpha_n-x_n|^2-|x_n|^2\right)\|v_n\|^2$$

עתה נובע,

$$\min_{\alpha_1,\dots,\alpha_N\in\mathbb{C}}\|v-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n v_n\|^2=\|v\|^2-\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2\|v_n\|^2$$

ונקבל מינימום כאשר $\alpha_n=x_n=\frac{\langle v_n,v\rangle}{\|v_n\|^2}$. □

7 שיעור 7 — 28.5.2025

7.1 מערכות שלמות במרחבי מכפלה פנימית

נניח ש־$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ו־$\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ מערכת אורתוגונלית. לכל $v \in V$ ראינו שמתקיים,

$$v \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle v_n, v\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

כלומר, אנו יכולים לקרב את v עם טור פורייה. אותנו מעניין אם זהו רק קירוב, או שתמיד טור זה מתכנס ל־v. היום נראה את התשובה לתהייה זו.

הגדרה 7.1 (מערכת שלמה במרחב מכפלה פנימית) יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהי מערכת אורתוגונלית $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$. אם לכל $v \in V$ ולכל $\epsilon > 0$ קיימים $N \in \mathbb{N}$ ו־$\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ כך שמתקיים,

$$\left\| v - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i \right\| \le \epsilon$$

אז נאמר ש־$\{v_n\}$ היא **מערכת שלמה** במרחב $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

משפט 7.2 (תנאים שקולים למערכת שלמה) *יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהי מערכת אורתונורמלית $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$. אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *$\{e_n\}$ מערכת שלמה ב־V*
2. *לכל $v \in V$ מתקיים,*

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, v\rangle|^2$$

3. *מתקיים,*

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, v\rangle e_n$$

הוכחה. $2 \implies 1$, נבחר $v \in V$ ויהי $\epsilon > 0$. אז מהנחת השלמות על $\{e_n\}$ יש $N \in \mathbb{N}$ ומקדמים $\alpha_n \in \mathbb{C}$ ל־$n \le N$ כך שמתקיים,

$$\left\| v - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \right\|^2 \le \epsilon^2$$

אז מתקיים מהגדרה,

$$\left\langle v - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n, v - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \right\rangle = \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n}\langle e_n, v\rangle - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle v, e_n\rangle + \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 = (*)$$

נסמן לכל n, $x_n = \langle e_n, v\rangle$, ולכן,

$$(*) = \|v\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |x_n - \alpha_n|^2 - \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2$$

נשים לב כי גם,

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n, \sum_{m=1}^{N} \alpha_m e_m \right\rangle = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \langle \alpha_n e_n, \alpha_m e_m\rangle = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \overline{\alpha_n}\alpha_m \langle e_n, e_m\rangle = \sum_{n=1}^{N} \overline{\alpha_n}\alpha_m$$

נובע,

$$\|v\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \le \left\| v - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \right\|^2 \le \epsilon^2$$

אבל מהצד השני,

$$\|v\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \ge \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

ולכן,

$$0\|v\|^2-\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2\le\epsilon^2$$

מאי־שוויון בסל. נוכל להסיק,

$$\|v\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle e_n,v\rangle|^2$$

$2\implies 3$,

$$\langle v-\sum_{n=1}^{N}x_ne_n,v-\sum_{n=1}^{N}x_ne_n\rangle=\|v\|^2-\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2$$

ולכן,

$$\left\|v-\sum_{n=1}^{N}\langle e_n,v\rangle e_n\right\|^2=\|v\|^2-\sum_{n=1}^{N}|\langle e_n,v\rangle|^2$$

מאי־שוויון פרסיבל, ולכן נובע,

$$\lim_{N\to\infty}\left\|v-\sum_{n=1}^{N}\langle e_n,v\rangle e_n\right\|=0$$

ובפרט,

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\langle e_n,v\rangle e_n$$

נובע אם כך ש־$\{e_n\}$ מערכת שלמה ובכך נקבל גם $3\implies 1$. □

הגדרה 7.3 (מרחב מכפלה פנימית C) נגדיר את מרחב המכפלה הפנימית $(\tilde{C}[-\pi,\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ על־ידי,

$$\tilde{C}[-\pi,\pi]=\{f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}\mid f\in C[-\pi,\pi],f(-\pi)=f(\pi)\}$$

יחד עם המכפלה הפנימית,

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx$$

תרגיל 7.1 הוכיחו כי זוהי אכן מכפלה פנימית.

המטרה שלנו היא למצוא מערכות שלמות במרחב הזה.

הגדרה 7.4 (מערכת אורתונורמלית במרחב C) נגדיר את המערכת,

$$e_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},e_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,e_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\dots,e_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx),e_{2n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx),\dots$$

אנו יודעים כי זוהי אכן מערכת אורתונורמלית.

משפט 7.5 (שלמות מערכת במרחב C) *המערכת* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq\tilde{C}[-\pi,\pi]$ *היא מערכת אורתונורמלית שלמה במרחב* $(\tilde{C}[-\pi,\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

הוכחה. נגדיר,

$$A=\left\{T_n(x)\mid N\in\mathbb{N},a_i,b_i\in\mathbb{R},\ T_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{N}a_k\cos(kx)+\sum_{k=1}^{N}b_k\sin(kx)\right\}$$

פונקציות אלה נקראות פולינומים טריגונומטריים. אנו רוצים להראות שקבוצה זו היא אלגברה. A אינה מתאפסת באף נקודה, זאת שכן נוכל לבחור פונקציה קבועה לא אפס.

בנוסף A מפרידה נקודות. נשים לב כי $\sin x\in A$ מעידה על ההפרדה הזו. אנו יכולים להסתכל על המרחב שבחרנו מחדש כקבוצת הפונקציות מעל $S=\{e^{i\theta}\mid\theta\in[-\pi,\pi]\}$, זאת מהגדרתה. אם $x_2\ne x_1$ אז $\sin(x_1)\ne\sin(x_2)$. זוהי קבוצה סגורה וקומפקטית ב־$\mathbb{R}^2$, ולכן נוכל לקבל באופן דומה שהיא משרה הפרדת נקודות ב־A.

בהתאם נובע ש־$\overline{A}=C[S]$.

יהי $\epsilon > 0$ ותהי $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$, אז $f \in C[S]$ וקיים פולינום טריגונומטרי T_N כך שמתקיים,

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - T_N(x)| < \epsilon$$

לכן גם,

$$\|f - T_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 \, dx \le \epsilon^2 \cdot 2\pi$$

אבל T_n היא צירוף לינארי סופי של וקטורים מהמערכת $\{e_n\}$. $\square$

הגדרה 7.6 (טור פורייה במרחב C) נגדיר את טורי פורייה עבור המרחב $(\tilde{C}[-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ עם המערכת $\{e_n\}$, על־ידי,

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, f \rangle e_n = \langle e_0, f \rangle e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_{2n-1}, f \rangle e_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_{2n}, f \rangle e_{2n}$$

הערה באופן מפורש $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ וכן,

$$\langle e_0, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt$$

ולכן,

$$(\langle e_0, f \rangle e_0)(x) = a_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt$$

באופן דומה $e_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt)$ ולכן,

$$\langle e_{2n-1}, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt$$

ובהתאם,

$$(\langle e_{2n-1}, f \rangle e_{2n-1})(x) = \frac{1}{\pi} \cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt$$

ונסמן $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt$ ולבסוף גם,

$$\langle e_{2n}, f \rangle e_{2n} = \frac{1}{\pi} \sin(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt$$

ונסמן $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt$ ולכן,

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

מסקנה 7.7 מתקיים,

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt) - \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt) \right|^2 dt = 0$$

הוכחה. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת שלמה ב־$(\tilde{C}[-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, לכן,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, f \rangle e_n$$

כלומר,

$$\|f - \sum_{n=0}^{2N} \langle e_n, f \rangle e_n\|^2 \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

אבל,

$$f - \sum_{n=0}^{2N} \langle e_n, f \rangle e_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nt) - \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt) \right|^2 dt$$

כפי שרצינו. $\square$

מסקנה 7.8 (שוויון פרסבל) אם $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ אז,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

הוכחה. אם $v = \sum_{n=0}^{\infty}\langle e_n, v\rangle e_n$ אז גם,

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|\langle e_n, v\rangle|^2.$$

בפרט במרחב $(\tilde{C}[-\pi,\pi], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מתקיים,

$$\langle e_0, f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}a_0$$
$$\langle e_{2n-1}, f\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \sqrt{\pi}a_n$$
$$\langle e_{2n}, f\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \sqrt{\pi}b_n$$

וכן $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$, והמסקנה נובעת. □

8 שיעור 8 — 4.6.2025

8.1 התכנסות נקודתית של טורי פורייה

נתחיל בשאלה שתנחה אותנו,

תרגיל 8.1 תהי $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ כך ש־$f(-\pi) = f(\pi)$. נניח ש־f אינטגרבילית רימן בתחומה.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$$

ונגדיר את טור פורייה,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

האם טור פורייה מתכנס לפונקציה f?

נתחיל לחקור את השאלה הזו.

למה 8.1 (הלמה של רימן) *תהי $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן בכל תחומה.*
אז מתקיים,

$$\lim_{w \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(wt)\, dt = 0, \quad \lim_{w \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(wt)\, dt = 0$$

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$, אז מאינטגרביליות f רימן קיימת חלוקה $-\pi = t_0 < \cdots < t_n = \pi$ כך שמתקיים,

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$$

כאשר,

$$M_i = \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |f(t)|, \quad m_i = \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |f(t)|$$

בהתאם,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(wt)\, dt \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \sin(wt)\, dt \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(t) - m_i) \sin(wt)\, dt + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} m_i \sin(wt)\, dt \right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t) - m_i| \cdot |\sin(wt)|\, dt + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} m_i \cdot |\sin(wt)|\, dt \\
&\le \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{2}{w} \\
&\le \varepsilon + \frac{2}{w} \sum_{i=1}^{n} m_i \\
&\le 2\varepsilon
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באינטגרל של sin כדי לחשב את הטענה, ובאינטגרביליות כדי לחסום. □

מסקנה 8.2 עבור $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקדמי פורייה של פונקציה אינטגרבילית רימן, מתקיים,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

משפט 8.3 (נוסחת דיריכלה) *תהי $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ כך ש־$f(-\pi) = f(\pi)$ ו־f אינטגרבילית, נסמן גם,*

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(nx)$$

אז מתקיים,

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+u)-f(x-u))D_N(u)\,du$$

כאשר,

$$D_N(u)=\frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

נקרא גרעין דיריכלה.

הוכחה. ישירות מהגדרה מתקיים,

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{N}\cos(nt)\cos(nx)+\sin(nt)\sin(nx)\right)$$

וכן,

$$\cos(nt)\cos(nx)+\sin(nt)\sin(nx)=\cos(n(t-x))$$

נסמן $\alpha=t-x$ ונקבל,

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos(n\alpha)=\frac{\sin((N+\frac{1}{2})\alpha)}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

אז נובע,

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin((N+\frac{1}{2})(t-x))}{2\sin(\frac{t-x}{2})}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_N(t-x)\,dt$$

גרעין דיריכלה הוא זוגי ישירות מהגדרתו, כלומר $D_N(u)=D_N(-u)$ ובפרט $D_N(t-x)=D_N(x-t)$. נשתמש בהחלפת משתנה על־ידי,

$$t-x=v,\quad dv=-dt$$

כאשר $v\in[x+\pi,x-\pi]$,

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(x-v)D_N(v)\,dv$$

אבל f פונקציה מחזורית עם מחזור 2π ולכן נובע שמתקיים,

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-v)D_N(v)\,dv$$

נחליף שוב משתנים על־ידי,

$$u=-v,\quad du=-dv$$

ונקבל,

$$\begin{aligned}S_N(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x-v)D_N(v)\,dv+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x-v)D_N(v)\,dv\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+v)D_N(v)\,dv+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x-v)D_N(v)\,dv\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+u)+f(x-u))D_N(u)\,du\end{aligned}$$

□

משפט 8.4 (עיקרון המקומיות) *אם* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *כך ש־*$f(x+2\pi)=f(x)$ *לכל* $x\in\mathbb{R}$ *ו־*f *אינטגרבילית רימן בקטע* $[-\pi,\pi]$. *נסמן,*

$$S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

אז עבור כל $0<\delta\le\pi$, *מתקיים לכל* $x_0\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x_0)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(f(x_0+u)+f(x_0-u))D_N(u)\,du=0$$

הוכחה. מצאנו כי,

$$S_N(x_0) - \frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x_0+u)+f(x_0-u))D_N(u)\,du = \int_\delta^\pi (f(x_0+u)+f(x_0-u))\cdot\frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})}\,du$$
$$= \int_\delta^\pi \varphi(u)\sin((N+\frac{1}{2})u)\,du$$

עבור $\varphi(u) = \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}$. נבחין כי φ אינטגרבילית רימן לפי הלמה של רימן ואף נובע,

$$\lim_{N\to\infty}\int_\delta^\pi \varphi(u)\sin((N+\frac{1}{2})u)\,du = 0$$

והטענה נובעת. □

משפט 8.5 (התכנסות נקודתית של טורי פורייה) *נניח ש־$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מחזורית עם מחזור 2π ובאינטגרבילית רימן. תהי $x_0\in\mathbb{R}$, אז f מקיימת ב־x_0 את תנאי ליפשיץ, כלומר קיים $c>0$ כך שמתקיים,*

$$|f(x_0+u)-f(x_0+0)|\le Cu,\quad |f(x_0-u)-f(x_0-0)|\le Cu$$

לכל $u\in(0,\delta)$. כאשר גם $f(x_0+0)=\lim_{v\to 0} f(x_0+v)$ וכן $f(x_0-0)=\lim_{v\to 0} f(x_0-v)$. מתקיים,

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$$

הוכחה.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{2}$$

נבחר $f(t)=\frac{1}{2}$ ונקבל,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 1$$

וכן,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos(nt)\,dt = 0$$

וכך גם נובע $b_n=0$. ונסיק,

$$S_N(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0+u)+f(x_0-u))D_N(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_N(u)\,du$$

צריך להוכיח שמתקיים,

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x_0) - \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)) = 0$$

נבדוק,

$$S_N(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{u}{2}}(f(x_0+u)+f(x_0-u))\,du$$

בפרט מתקיים,

$$S_N(x_0) = \lim_{N\to\infty}\int_0^\pi (f(x_0+u)-f(x_0+0)+f(x_0-u)-f(x_)-0)\frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{u}{2}}\,du$$

אבל ביטוי זה מתכנס לאפס ולכן לכל $0<\varepsilon<\delta$ הפונקציה φ היא אינטגרבילית. מספיק להוכיח ש־φ חסומה בקטע $[0,\varepsilon]$.

$$|\varphi(u)| \le \frac{|f(x_0+u)-f(x_0+0)|+|f(x_0-u)-f(x_0-0)|}{2\sin\frac{u}{2}} \le \tilde{C}\frac{u}{\pi\sin\frac{u}{2}} \le \frac{\tilde{C}}{\pi}$$

□

9 שיעור 9 — 11.6.2025

9.1 התכנסויות טורי פורייה — המשך

משפט 9.1 (פייר) *נניח ש־$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא פונקציה 2π־מחזורית ואינטגרבילית רימן. נסמן גם,*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(nx) + b_k \sin(nx)$$

עבור,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

נגדיר,

$$\sigma_N(x) = \frac{S_0(x) + \cdots + S_N(x)}{N+1}$$

אז מתקיים,

1. *אם f רציפה ב־x_0 אז $\lim_{N\to\infty} S_N(x_0) = f(x_0)$*
2. *אם f רציפה בכל $\mathbb{R}$ אז $\sigma_N \rightrightarrows f$ כאשר $N \to \infty$*

הוכחה.

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u))D_n(u)\,du$$

עבור,

$$D_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{1}{2} + \cos(u) + \cdots + \cos(\nu)$$

גרעין דיריכלה. אז מתקיים,

$$\int_0^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du = \int_{-\pi}^{0} f(x+u)D_n(u)\,du$$

ולכן נקבל,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,du$$

עתה נשתמש בנוסחה זו ונבדוק את הממוצע,

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(x) = \frac{1}{N+1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\sum_{n=1}^{N} D_n(u)\right)\,du$$

ונסמן את הביטוי בסוגריים כ־$I_N(u)$, נחקור אותו,

$$I_N(u) = \frac{1}{2\sin^2\frac{u}{2}}\sum_{n=0}^{N}\sin(n+\frac{1}{2})u = \frac{1}{2\sin^2\frac{u}{2}}\left(\sin\frac{u}{2} + \cdots + \sin(N+\frac{1}{2})u\right)$$

ניזכר כי,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

ולכן נוכל להסיק,

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

לכן,

$$\begin{aligned} I_N(u) &= \frac{1}{2\sin^2\frac{u}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos u + \frac{1}{2}\cos u - \frac{1}{2}\cos 2u + \cdots + \frac{1}{2}\cos(Nu) - \frac{1}{2}\cos((N+1)u)\right) \\ &= \frac{1}{2\sin^2\frac{u}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos((N+1)u)\right) \\ &= \frac{\sin^2\frac{(N+1)u}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}} \end{aligned}$$

ונחזור לממוצע,

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) K_N(u)\, du$$

עבור,

$$K_N(u) = \frac{\sin^2 \frac{(N+1)u}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}}$$

כאשר K_N נקרא גם גרעין פייר. זהו גרעין שימושי ביותר, שכן הוא אי־שלילי, חסום, ושואף לאפס במרחק מהמרכז. נעבור לחישוב האינטגרל,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(u)\, du &= \frac{1}{\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} I_N(u)\, du \\
&= \frac{1}{\pi(N+1)} \sum_{n=0}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\, du \\
&= \frac{1}{\pi(N+1)} \sum_{n=0}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} + \cos u + \cdots + \cos(nu))\, du \\
&= \frac{1}{\pi(N+1)} \sum_{n=0}^{N} \pi \\
&= 1
\end{aligned}$$

קיבלנו,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_N(u)\, du, \quad \sigma_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+u) - f(x)) K_N(u)\, du$$

עתה נעבור לשימוש בנוסחות אלה.

$$\begin{aligned}
|\sigma_N(x) - f(x)| \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+u) - f(x)| K_N(u)\, du \\
+ \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+u) - f(x)| K_N(u)\, du + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x+u) - f(x)| K_N(u)\, du
\end{aligned}$$

נקרא לאינטגרלים אלה בהתאמה I_1, I_2, I_3. עבור I_3, נבחין כי $|f(x)| \le M$ לכל x שכן f אינטגרבילית ומחזורית, לכן,

$$I_3 \le \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} K_N(u)\, du \le \frac{M}{\pi(N+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{du}{\sin^2 \frac{u}{2}}$$

אבל נבחין כי $\sin \frac{u}{2} \ge \frac{u}{\pi} \ge \frac{\delta}{\pi}$ ולכן,

$$I_3 \le \frac{M}{\pi(N+1)} \frac{\pi^2}{\delta^2} (\pi - \delta)$$

באופן דומה נוכל להסיק,

$$I_1 + I_3 \le \frac{2M}{\pi(N+1)} \cdot \frac{\pi^3}{\delta^2}$$

לבסוף, נעבור להוכחת הטענה.

1 יהי $x \in \mathbb{R}$ כך ש־f רציפה ב־x. יהי $\varepsilon > 0$, אז קיים $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ כך שמתקיים,

$$|u| \le \delta \implies |f(x+u) - f(x)| \le \varepsilon$$

אז נבחר עבור האינטגרל מקודם את δ זו, ולכן נקבל עבור I_2,

$$I_2 \le \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_N(u)\, du \le \varepsilon \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(u)\, du \le \varepsilon$$

כלומר,

$$|\sigma_N(x) - f(x)| \le \varepsilon + \frac{A}{(N+1)\delta^2}$$

עבור A לא תלויה ב־ε ולכן,

$$\lim_{N \to \infty} |\sigma_N(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

ובפרט הגבול מתכנס לאפס.

2 נניח ש־$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה 2π־מחזורית ורציפה בכל תחומה, ונראה התכנסות במידה שווה. f רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$. יהי $\varepsilon > 0$, אז קיים $\delta = \delta(\varepsilon)$ כך שמתקיים,

$$|N| \leq \delta \implies \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x+u) - f(x)| \leq \varepsilon$$

אז מתקיים,

$$|\sigma_N(x) - f(x)| \leq \frac{A}{(N+1)\delta^2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+u) - f(x)| K_N(u)\,du \leq \frac{A}{(N+1)\delta^2} + \varepsilon$$

ישירות מהרציפות במידה שווה. בהתאם,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_N(x) - f(x)| \leq \frac{A}{(N+1)\delta^2} + \varepsilon$$

ונסיק שוב,

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_N(x) - f(x)| \leq 0$$

כלומר $\sigma_N \rightrightarrows f$. □

9.2 מרחקים

הגדרה 9.2 (מרחק במרחב מכפלה פנימית) נניח ש־V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ או מעל $\mathbb{R}$. נניח בנוסף ש־$\|\cdot\|$ נורמה, ויהי $\emptyset \neq U \subseteq V$. לכל $\varphi \in V$ נגדיר את המרחק,

$$\operatorname{dist}(\varphi, U) = \inf_{u \in U} \|\varphi - u\|$$

תרגיל 9.1 האם קיים $u_0 \in U$ כך שמתקיים,

$$\operatorname{dist}(\varphi, U) = \|\varphi - u_0\|$$

כלומר האם המרחק תמיד מתקבל?

מתברר שהתשובה היא שקיים כזה, אבל רק במרחבים סוף־מימדיים.

דוגמה 9.1 נגדיר $V = C[0,1]$ וכן,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

ונבחר,

$$U = \{f \in C[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,dx = 0, f(1) = 0\}$$

ונבחר עבור הפונקציה שלנו,

$$\varphi(x) = 1 - x$$

מתקיים $\int_0^1 \varphi(x)\,dx \neq 0$ ולכן $\varphi \notin U$ אבל $\varphi \in C[0,1]$.

נראה ש־U סגורה ב־V. נניח ש־$\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subseteq U$ סדרה מתכנסת, כלומר $\varphi_n \rightrightarrows \varphi^0$, ונרצה להראות ש־$\varphi^0 \in U$. לכל $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(1) = 0$ ולכן גם $\varphi^0(1) = 0$. מהתכנסות במידה שווה נוכל גם להסיק,

$$\int_0^1 \varphi^0(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = 0$$

ולכן $\varphi^0 \in U$ ו־U אכן סגורה.

עתה נחשב את מרחק φ מ־U. נניח כי $g \in U$, אז,

$$\|\varphi - g\| = \sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x) - g(x)| \geq \int_0^1 |\varphi(x) - g(x)|\,dx \geq \left|\int_0^1 \varphi(x) - g(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 \varphi(x)\,dx\right| = \frac{1}{2}$$

כלומר, $\operatorname{dist}(\varphi, U) \geq \frac{1}{2}$.

נבחר $g_n(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{x^n}{2} + \frac{x-1}{n+1}$. אז $g_n(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + 0 = 0$, וכן,

$$\int_0^1 g_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = 0$$

ולכן $g_n \in U$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אבל,

$$|\varphi(x) - g_n(x)| = \left|\frac{1}{2} - \frac{x^n}{2} - \frac{x-1}{n+1}\right|$$

וכן,

$$\|\varphi - g_n\| = \max_{x\in[0,1]} |\varphi(x) - g_n(x)| \to \frac{1}{2}$$

כלומר, $\operatorname{dist}(\varphi, U) \geq \frac{1}{2}$ בהכרח, ונסיק ש־$\operatorname{dist}(\varphi, U) = \frac{1}{2}$ בלבד.

עתה נראה שלא קיימת פונקציה $g \in U$ כך ש־$\operatorname{dist}(\varphi, U) = \|\varphi - g\| = \frac{1}{2}$. נניח בשלילה שקיימת g כזו. מתקיים $\|\varphi - g\|_\infty = \frac{1}{2}$. מהגדרת U אנו יודעים כי,

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 0, \quad g(1) = 0$$

נגדיר פונקציה חדשה $\psi(x) = \varphi(x) - g(x)$, לכן,

$$\|\psi\|_\infty = \|\varphi - g\|_\infty = \frac{1}{2}$$

אבל,

$$\int_0^1 \psi(x)\,dx = \int_0^1 (\varphi(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

אז,

$$\int_0^1 \psi(x)\,dx = \frac{1}{2} = \|\psi\|_\infty = \int_0^1 \|\psi\|_\infty\,dx$$

אז $\int_0^1 \|\psi\|_\infty - \psi(x) = 0$ ונובע,

$$\psi(x) = \|\psi\|_\infty = \frac{1}{2} \implies \psi(1) = \frac{1}{2}$$

אבל אנו יודעים כי,

$$\psi(1) = \varphi(1) - g(1) = 0$$

וזו סתירה, לכן לא קיימת פונקציה g כזו.

הגדרות ומשפטים