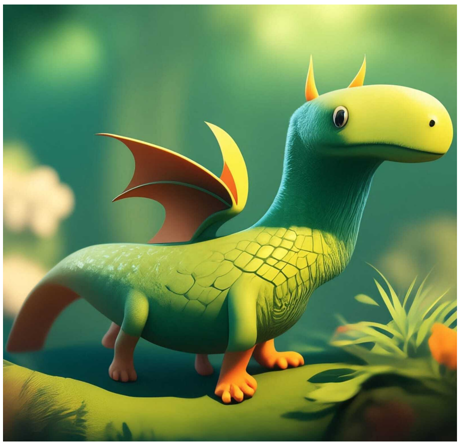
פתרון מטלה 01 — מבוא לטופולוגיה, 80516

27 במרץ 2025



שאלה 1

יהי (X, τ) מרחב טופולוגי ותהי $A \subseteq X$ תת־קבוצה כלשהי.
נגדיר את טופולוגיית תת־המרחב על X להיות $\tau \upharpoonright A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$.

סעיף א׳

נוכיח כי $\tau \upharpoonright A$ היא טופולוגיה על A.

הוכחה. נוכיח ישירות מהגדרת טופולוגיה.
נבחין כי $X \in \tau$ ולכן $A = X \cap A \in \tau \upharpoonright A$, ובאופן דומה גם $\emptyset \in \tau \upharpoonright A$.
נעבור לבדיקת סגירות על איחוד. תהי I קבוצת אינדקסים ונניח ש־$\{X_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau \upharpoonright A$, נניח גם שלכל $\alpha \in I$ קיים $X_\alpha \subseteq X'_\alpha$ כך ש־$X'_\alpha \in \tau$ (קיימים מהגדרה), אז,

$$\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X'_\alpha \cap A = \left(\bigcup_{\alpha \in I} X'_\alpha\right) \cap A$$

אבל τ טופולוגיה ולכן סגורה לאיחוד ובהתאם $\bigcup_{\alpha \in I} X'_\alpha = Y \in \tau$ ולכן $Y \cap A \in \tau \upharpoonright A$.
נסיים ונבדוק סגירות סופית לחיתוכים, נניח ש־$X_i \in \tau \upharpoonright A$ עבור $1 \le i \le n$ עבור $n \in \mathbb{N}$ נתון. נניח גם ש־$X_i \subseteq X'_i \in \tau$ לכל i מהצדקה זהה לזו בחלק הקודם. גם הפעם נובע,

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = \bigcap_{i=1}^{n} X'_i \cap A = \left(\bigcap_{i=1}^{n} X'_i\right) \cap A \in \tau \upharpoonright A$$

ומצאנו משיקולים זהים יש סגירות סופית לחיתוך, ובהתאם $\tau \upharpoonright A$ אכן טופולוגיה. $\square$

סעיף ב׳

נניח שקיימת מטריקה ρ על X כך ש־τ היא הטופולוגיה המושרית מ־ρ.
תהי $A \subset X$, נוכיח ש־ $\tau \upharpoonright A$ מושרית מ־$(A, \rho \upharpoonright A^2)$ כמרחב מטרי.

הוכחה. נבחין כי מתקיים,

$$x \in \tau \upharpoonright A \iff \exists x' \in \tau, x = x' \cap A$$

ונתון כי $\tau_\rho = \tau$, כלומר זוהי טופולוגיה מושרית ממטריקה ρ, ולכן x' קבוצה פתוחה ב־(X, ρ), לכן לכל $p \in x'$ קיים $r > 0$ כך ש־$B_r(p) \subseteq x'$.
בהתאם לזה מתקיים גם $B_r(p) \cap A \subseteq x' \cap A = x$, אבל גם $B_r(p) \cap A = \{z \in A \mid (\rho \upharpoonright A^2)(p, z) < r\}$, כלומר הכדור נשאר פתוח ובהתאם x קבוצה פתוחה במרחב המטרי המצומצם. מצאנו אם כן ש־$x \in \tau \upharpoonright A$ אם ורק אם x פתוחה ב־$(A, \rho \upharpoonright A^2)$ ולכן $\tau \upharpoonright A = \tau_{\rho \upharpoonright A^2}$. $\square$

שאלה 2

נמצא טופולוגיה על $\mathbb{Z}$ שבה אף נקודה אינה קבוצה פתוחה, אך הטופולוגיה המושרית על $\mathbb{N}$ (בקורס זה ללא 0) היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

פתרון נגדיר את הבסיס $\mathcal{B} = \{-ZZ\} \cup \{-\mathbb{Z} \cup \{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, כלומר קבוצות מהצורה $\{-1, -2, \dots\} \cup \{n\}$ לכל n טבעי, והקבוצה $\{-1, \dots\}$. נוודא שזהו אכן בסיס, לכל $z \in \mathbb{Z}$ או ש־$z \in \mathbb{N}$ ואז $z \in \mathcal{B} \cup -ZZ$ או ש־$z < 0$ ולכן בהכרח קיימים איברים מכילים. בנוסף לכל $A, B \in \mathcal{B}$ מתקיים $A \cap B = -\mathbb{Z} \implies A \neq B$ ולכן נוכל לבחור כל איבר ב־$\mathcal{B}$ ולקבל שהתנאי השני לבסיס מתקיים. נגדיר $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$, כלומר הטופולוגיה המושרית מהבסיס $\mathcal{B}$.

נעבור לבדיקת תנאי התרגיל, אין אף נקודה שהיא קבוצה פתוחה, שכן כל איבר $x \in \tau_{\mathcal{B}}$ הוא איחוד של איברי $\mathcal{B}$, לכן בפרט $-\mathbb{Z} \supseteq x$ ואיננו יחידון. מהצד השני נבחן את $\tau \restriction \mathbb{N}$, הפעם $\{n\} \in \tau \restriction \mathbb{N}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ישירות מבדיקת הבסיס, ולכן זוהי הטופולוגיה הדיסקרטית.

סעיף א׳

נמצא טופולוגיה על $\mathbb{Z}$ שבה אף נקודה אינה קבוצה פתוחה, אך לכל $n \geq 0$, הטופולוגיה המושרית על $\mathbb{Z} \cap [-n, n]$ היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

פתרון נגדיר את הבסיס $\mathcal{B} = \{(\mathbb{Z} \setminus [-n, n]) \cup \{k\} \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \cap [-n+1, n-1]\}$. נבחין כי לכל $m \in \mathbb{Z}$ אכן אפשר לבחור $n = m+1, k = m$, וכן לכל $A, B \in \mathcal{B}$, אם $m \in A \cap B$ אז או ש־m גדול מ־$\max\{n_A, n_B\}$ ונוכל לבחור קבוצה מתאימה, או ש־$k_A = k_B$ ו־$m = k_A$, אז נבחר $k = k_A, n = k + 1$.

עתה משהוכחנו שזהו אכן בסיס, נבחן את הטופולוגיה $\tau_{\mathcal{B}}$, ברור כי אין יחידונים בטופולוגיה זו, זאת שכן נוכל לבחור $n \in \mathbb{N}$ גדול מספיק כך שיופיע באיבר לכל איבר ב־$\tau_{\mathcal{B}}$. מן הצד השני, נקבע $n \in \mathbb{N}$ ונבחן את $[-n, n] \restriction \tau_{\mathcal{B}}$, אז הקבוצות $\{k\} = [-n, n] \cap ((\mathbb{Z} \setminus [-n-1, n+1]) \cup \{k\})$ נמצאת ב־$A \restriction \tau_{\mathcal{B}}$.

שאלה 3

סעיף א'

תהינה $\{\tau_i\}_{i\in I}$ טופולוגיות על קבוצה X.
נוכיח כי גם $\bigcap_{i\in I}\tau_i$ היא טופולוגיה על X.

הוכחה. נוכיח את הטענה ישירות מהגדרת טופולוגיה.
נבחין כי $\forall i\in I,\ X,\emptyset\in\tau_i$ מהגדרה, ולכן $X,\emptyset\in\bigcap_{i\in I}\tau_i$.
נעבור לסגירות לאיחוד, נניח ש־J קבוצת אינדקסים, ונניח כי $X_j\in\bigcap_{i\in I}\tau_i$ לכל $j\in J$. נניח גם ש־$X_j^i\in\tau_i$ כך ש־$X_j=\bigcap_{i\in I}\tau_i$, אז מתקיים,

$$\bigcap_{j\in J}X_i=\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I}X_j^i=\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}X_j^i$$

אבל τ_i סגורה לאיחודים ולכן $\bigcup_{j\in J}X_j^i\in\tau_i$, ובהתאם קבוצה זו היא פתוחה ב־$\bigcap_{i\in I}\tau_i$.
סגירות סופית לחיתוך זהה. □

סעיף ב'

נסיק שאם P היא אוסף כלשהו של תתי־קבוצות של X אז קיימת טופולוגיה מינימלית τ כך ש־$P\subset\tau$. נקרא ל־τ טופולוגיה מינימלית המכילה את P.

הוכחה. תהי $\Sigma=\{\sigma\in\mathcal{P}(X)\mid P\subset\sigma,\sigma\text{ is a topology over }X\}$, נבחין כי זוהי אכן קבוצה מאקסיומת הפרדה (תכונות טופולוגיה הן מסדר ראשון), ולכן $\bigcap\Sigma=\tau$ טופולוגיה מסעיף א'. כמובן ש־τ מינימלית ביחס ההכלה מבין איברי Σ ישירות מהגדרה. □

סעיף ג'

תהי $X=\{a,b,c\}$ ונגדיר $P=\{\{a\},\{a,b\},\{b,c\}\}$, נמצא את הטופולוגיה המינימלית המכילה את P.
פתרון נניח ש־τ הטופולוגיה המקיימת זאת, אז בהכרח $P\subseteq\tau$, וכמובן $\emptyset,X\in\tau$. אנו יודעים ש־τ סגורה לחיתוכים (בקבוצה סופית כל חיתוך הוא סופי), לכן גם $\{b\}\in\tau$, והסגירות לאיחודים לא מוסיפה איברים לקבוצה, ולכן סיימנו.

שאלה 4

יהיו $(X,\tau_X),(Y,\tau_Y)$ מרחבים טופולוגיים.

סעיף א׳

נגדיר טופולוגיה τ על $X \sqcup Y$ על־ידי $A \in \tau \iff \exists U \in \tau_X, V \in \tau_Y,\ A = U \sqcup V$.
נראה ש־τ היא טופולוגיה על $X \sqcup Y$.

הוכחה. נבחין כי $\emptyset \in \tau_X, \tau_Y \implies \emptyset \in \tau$ וכן $X \in \tau_X, Y \in \tau_Y$ ולכן $A \in \tau$.
נניח ש־$\{X_i\} \subseteq \tau_X$ וש־$\{Y_i\} \subseteq \tau_Y$ עבור $i \in I$ קבוצת אינדקסים כלשהי. מתקיים $X_i \sqcup Y_i \in \tau$ לכל $i \in I$, וכן מתקיים,

$$\bigcup_{i\in I} X_i \sqcup Y_i = \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \sqcup \left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)$$

מתכונות איחוד זר, ונובע מהגדרת τ כי יש סגירות לאיחוד.
נניח ש־$U, U' \in \tau_X, V, V' \in \tau_Y$, אז $(U \sqcup V) \cap (U' \sqcup V') = (U \cap U') \sqcup (V \cap V')$ ולכן נובע ש־τ סגורה גם לחיתוכים סופיים. $\square$

סעיף ב׳

נראה שהטופולוגיה τ המושרית על X שווה ל־τ_X ושהטופולוגיה המושרית על Y שווה ל־τ_Y.

הוכחה. מטעמי סימטריה מספיק להראות את נכונות הטענה על X ו־τ_X.

$$U \in \tau_X \iff \exists V \in \tau_Y,\ U \sqcup V \in \tau \iff U \in \tau \restriction X$$

כאשר הצעד הראשון נובע מהגדרת τ והצעד השני נובע מהגדרת הצמצום. $\square$

סעיף ג׳

תהיינה X, Y קבוצות, נראה שכל טופולוגיה על $X \sqcup Y$ מתקבלת מטופולוגיה על X וטופולוגיה על Y באופן שתואר בסעיף א׳.

הוכחה. נניח ש־$\tau \subseteq \mathcal{P}(X \sqcup Y)$, ונוכיח שהיא שקולה לטופולוגיה המופיעה בסעיף א׳ עבור איזושהן טופולוגיות τ_X, τ_Y.
נגדיר $\tau'_X = \tau \restriction X$, זהו צמצום של טופולוגיה ולכן בהכרח טופולוגיה, וכן τ'_X טופולוגיה מעל X, אבל אז מסעיף ב׳ נובע $\tau_X = \tau'_X$, נגדיר כך גם את τ_Y ומצאנו שאכן τ ניתנת לפירוק. $\square$

שאלה 5

נראה ששני האוספים הבאים של קבוצות הם בסיסים לטופולוגיה כלשהי על $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{B}_1 = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$$

נראה גם כי שני הבסיסים לא יוצרים את אותה הטופולוגיה על $\mathbb{R}$.

הוכחה. נבדוק את התנאים לקיום בסיס עבור $\mathcal{B}_1$.
נבחין כי $\bigcup \mathcal{B}_1 = \mathbb{R}$, זאת שכן לכל $x \in \mathbb{R}$ הקטע $[x, x+1) \in \mathcal{B}_1$. נניח ש־$A, B \in \mathcal{B}_1$, וכן ש־$x \in A \cap B$, נבחין כי $A = [a, a'), B = [b, b')$ עבור ערכים כלשהם, ונבחר $c = \max\{a, b\}, c' = \min\{a', b'\}$, אז כמובן $C = [c, c') \in \mathcal{B}_1$ וכן $x \in C$, וגם $C = A \cap B$ ולכן בפרט $C \subseteq A \cap B$.

עבור $\mathcal{B}_2$ ההוכחה זהה לחלוטין, זאת נוכל להסיק מצפיפות הרציונליים בממשיים.

לבסוף נראה ש־$\tau_{\mathcal{B}_1} \neq \tau_{\mathcal{B}_2}$. נבחן את $[\sqrt{2}, 3) \in \tau_{\mathcal{B}_1}$ ונוכיח שאיבר זה לא נמצא ב־$\tau_{\mathcal{B}_2}$.
אילו נניח בשלילה שהוא כן נמצא, אז נקבל שקיימת סדרת קטעים $\{[a_i, b_i)\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}_2$ כך ש־$[\sqrt{2}, 3) = \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i)$. בפרט נובע ש־$\sqrt{2} = \min_{i \in I} a_i = \inf \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i)$, כאשר המינימום נובע מהסגירות המקומית של הקטעים, ולכן קיים $i \in I$ כך ש־$\sqrt{2} = a_i$, בסתירה ל־$a_i \in \mathbb{Q}$ לכל $i \in I$. $\square$