פתרון מטלה 10 — מבנים אלגבריים (2), 80446

21 ביוני 2025

שאלה 1

יהי $f \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי־פריק מדרגה 3 ויהי L שדה הפיצול שלו.
נראה ש־$[L : \mathbb{Q}] = 3$ אם ורק אם D_f ריבוע ב־$\mathbb{Q}$, ושאחרת $[L : \mathbb{Q}] = 6$.

הוכחה. תהי $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, אז בהכרח $G \le S_3$ וטרנזיטיבית, לכן $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ או $G \simeq S_3$.
אם $[L : \mathbb{Q}] = 3$ אז $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ולכן קיים אוטומורפיזם $\sigma \in G$ כך ש־$G = \langle\sigma\rangle$.

$$\sigma(\sqrt{D_f}) = \prod_{1\le i<j\le 3} (\sigma(x_i) - \sigma(x_j)) = \prod_{1\le i<j\le 3} (x_i - x_j) = \sqrt{D_f}$$

כלומר זוהי נקודת שבת של σ ולכן $\sqrt{D_f} \in \mathbb{Q}$.

נניח ש־$\sqrt{D_f}$ ריבוע ב־$\mathbb{Q}$. נניח גם ש־$\sigma \in S_3 \setminus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, כלומר $\sigma = (x_1\ x_2)$ בלי הגבלת הכלליות, מההנחה שלנו גם,

$$\sigma(\sqrt{D_f}) = \sqrt{D_f}$$

אבל,

$$\sigma(\sqrt{D_f}) = \sigma(x_1 - x_2)\sigma(x_1 - x_3)\sigma(x_2 - x_3) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) = -\sqrt{D_f}$$

וזו סתירה, לכן $\sigma \notin G$, ובהכרח רק $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, כלומר $[L : \mathbb{Q}] = 3$.

אילו התנאי לא מתקיים, אז $G \simeq S_3$ ולכן,

$$[L : \mathbb{Q}] = |G| = |S_3| = 6$$

כפי שרצינו. $\square$

שאלה 2

יהיו F שדה ממציין שונה מ־2, $f \in F[x]$ פולינום ספרבילי אי־פריק ומתוקן, ו־L שדה הפיצול של f מעל F. נסמן ב־$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ את שורשי f ב־L ונגדיר $K = F(\sqrt{D_f})$. נראה שמתקיים,

$$\mathrm{Gal}(L/K) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F) \mid \mathrm{sgn}(\sigma \restriction \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) = 1\}$$

כלומר ש־$\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(L/F) \cap A_n$ עד כדי איזומורפיזם.

הוכחה. בתרגול ראינו כי $F \in \sqrt{D_f} \iff G \subseteq A_n$ לכל שדה F. לכן K מקיימת $\mathrm{Gal}(L/K) \subseteq A_n$, ומהתאמת גלואה בפרט $\mathrm{Gal}(L/K) \subseteq \mathrm{Gal}(L/F) \cap A_n$. נותר אם כן להראות שזהו שוויון.

תהי $\sigma \in (\mathrm{Gal}(L/F) \cap A_n) \setminus \mathrm{Gal}(L/K)$, כלומר $\sigma \restriction K \ne \mathrm{id}_K$. אבל $\sigma(\sqrt{D_f}) = \pm\sqrt{D_f}$ בלבד, ובמקרה זה נקבל $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ ישירות מהגדרת הסימן, ולכן $\sigma \notin A_n$, ונוכל להסיק שאין σ כזו.

בהתאם נסיק $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(L/F) \cap A_n$. $\square$

שאלה 3

יהיו F שדה, $f \in F[x]$ פולינום ספרבילי אי־פריק ומתוקן, ו־L שדה הפיצול של f מעל F.
נניח גם ש־$p = \operatorname{char} F$ וכן ש־$p = 0$ או שעבור $n = |\operatorname{Gal}(L/F)|$ מתקיים $p \nmid n$. תהי $H \leq \operatorname{Gal}(L/F)$.

סעיף א׳

נגדיר את ההעתקה הלינארית $A_H : L \to L$ על־ידי,

$$A_H(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \sigma(x)$$

נראה ש־A_H היא הטלה על L^H, כלומר ש־$\operatorname{Im}(A_H) = L^H$ ו־$A_H \restriction L^H = \operatorname{id}_{L^H}$.

הוכחה. תהי $\tau \in H$, אז מתקיים,

$$\tau(A_H(x)) = \tau(\frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \sigma(x)) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in \tau H} \sigma(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \sigma(x) = A_H(x)$$

כנביעה מ־$\tau H = H$, שכן חבורות גלואה תמיד טרנזיטיביות. נסיק ש־$A_H(x) \in L^H = \{x \in L \mid \forall \sigma \in H,\ \sigma(x) = x\}$.
יהי $x \in L^H$, כלומר $\sigma(x) = x$ לכל $\sigma \in H$, לכן,

$$A_H(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} \sigma(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in H} x = \frac{1}{|H|} x \cdot |H| = x$$

וקיבלנו ש־$A_H \restriction L^H = \operatorname{id}_{L^K}$. □

סעיף ב׳

נסיק שאם $B = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס ל־L מעל F אז $\operatorname{Sp}\{A_H(b_1), \dots, A_H(b_n)\} = L^H$.

הוכחה. יהי $x \in L^H$ ונניח שמתקיים,

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$$

אז מתקיים גם,

$$x = A_H(x) = \sum_{i=1}^n A_H(\alpha_i b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_H(b_i)$$

נובע ש־$L^H \subseteq \operatorname{Sp}\{A_H(b_1), \dots, A_H(b_n)\}$.
מהצד השני אם $x \in \operatorname{Sp}\{A_H(b_1), \dots, A_H(b_n)\}$ אז,

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_H(b_i) = A_H\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right) \in L^H$$

מלינאריות A_H, ולכן מצאנו שיש שוויון. □

סעיף ג׳

נמצא דוגמה ל־F, f, L, H כמוגדר לעיל, ו־$\alpha \in L$ כך ש־$L = F(\alpha)$ אבל שגם,

$$F(A_H(\alpha)) \subsetneq L^H$$

פתרון נגדיר,

$$F = \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^3 - 2, \quad \alpha = \xi_3 \sqrt[3]{2}, \quad L = F(\alpha), \quad L^H = F(\xi_3)$$

נגדיר בהתאמה,

$$H = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\xi_3 \to \xi_3^i \mid 0 \le i \le 2\}$$

ולכן נוכל להסיק,

$$A_H(\alpha) = \frac{1}{3} \sum_{\sigma \in H} \sigma(\alpha) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2} \xi_3^i \sqrt[3]{2} = 0$$

ולכן,

$$F(A_H(\alpha)) = F(0) = F \subsetneq L$$