פתרון מטלה 07 — מבנים אלגבריים (2), 80446

27 במאי 2025

שאלה 1

נסמן $F=\mathbb{Q}(s)$ ויהי K שדה הפיצול של $x^n-s\in F[x]$.
נראה ש־$\operatorname{Aut}(K/F)\simeq(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\ltimes_\theta(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, כאשר,

$$\theta:(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\to\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\qquad\theta(k)(n)=kn$$

הוכחה. בתרגול ראינו כי מכפלה חצי־ישרה זו היא איזומורפית לחבורת הפונקציות,

$$G=\{f:\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\mid\exists c,d,\ \forall x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ f(x)=cx+d\}$$

אנו נראה אם כך ש־$\operatorname{Aut}(K/F)\simeq G$. בתרגול כבר ראינו כי קיים שיכון כזה, כלומר מצאנו שזהו הומומורפיזם חד־חד ערכי, ולכן עלינו רק להראות שהומומורפיזם זה הוא גם על. תהי $f\in G$, ונניח ש־c,d קבועים כך ש־$f(x)=cx+d$. אנו יודעים כי $\xi_n^c\in K$ ולכן $\xi_n^m x\mapsto\xi_n^{mc+d}x^c$ הוא אוטומורפיזם תקין, כאשר ההוכחה לטענה זו זהה לזו שראינו בתרגול. נסמן ב־ψ אוטומורפיזם זה ונקבל ש־$\operatorname{Aut}(K/F)\ni\psi\mapsto f\in G$ בדיוק, ובכך נקבל שהומומורפיזם זה אכן על, ובהתאם הוא אוטומורפיזם. $\square$

שאלה 2

תהי $L/\mathbb{Q}$ הרחבה אלגברית נוצרת סופית. נראה שב־L יש מספר סופי של שורשי יחידה.

הוכחה. נניח בשלילה שב־L יש אינסוף שורשי יחידה. בפרט יש אינסוף שורשי יחידה פרימיטיביים, שאם לא כן יש כמות סופית של שורשי יחידה.

TODO $\square$