פתרון מטלה 07 — מבוא לטופולוגיה, 80516

23 במאי 2025

שאלה 1

תהי $f:X=[0,1]\to[0,1]^2=Y$ רציפה ועל. נראה ש־f אינה חד־חד ערכית.

הוכחה. נניח בשלילה ש־f גם חד־חד ערכית. נבחין כי שני המרחבים הם מרחבי בייר *ממשפט הקטגוריה של בייר*, כלומר אין לקבוצות מקטגוריה שנייה פנים. בנוסף אנו יודעים כי שני המרחבים הם האוסדורף וקומפקטיים ולכן f סגורה ונובע שהיא הומיאומורפיזם.

נגדיר $Z=\{\frac{1}{2}\}\times[0,1]\subseteq Y$, זוהי קבוצה דלילה, זאת שכן $Z=\overline{Z}$ אבל אין בה אף כדור פתוח. לכן גם $f^{-1}(Z)\subseteq X$ היא קבוצה דלילה. בפרט היא מקטגוריה ראשונה ולכן $X_0=X\setminus f^{-1}(Z)$ היא מקטגוריה שנייה ובעלת פנים ריק. אבל $Y\setminus Z$ מורכבת משני רכיבי קשירות מסילתית ולכן גם X_0 מורכבת משני רכיבי קשירות מסילתית ובפרט מורכבת משני קטעים פתוחים ב־$[0,1]$. בפרט הפנים של קטעים אלה לא ריק, וקיבלנו סתירה. $\square$

שאלה 3

יהי X מרחב טופולוגי, $A \subseteq X$ תיקרא G_δ ב־X אם היא חיתוך בן־מניה של פתוחות מ־X.

סעיף א׳

יהי X מרחב בייר ותהי $A \subseteq X$ קבוצה G_δ צפופה ב־X. נראה ש־A מרחב בייר.

הוכחה. נניח ש־$B \subseteq A$ פתוחה, אז $B' \subseteq X$ פתוחה כך ש־$B = B' \cap A$. אבל בהתאם B' היא קבוצה G_δ ב־X. עתה נניח ש־B_α קבוצות פתוחות וצפופות ב־A, אז $B'_\alpha \subseteq X$ פתוחות וצפופות ב־X כך ש־$B_\alpha = A \cap B'_\alpha$, לכל $\alpha \in \mathbb{N}$. X הוא מרחב בייר ולכן $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} B'_\alpha$ צפופה ב־X ובפרט $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} B_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} B'_\alpha \cap A$ צפופה ב־A, ולכן A מרחב בייר. $\square$

סעיף ב׳

נמצא דוגמה למרחב בייר X ו־$A \subseteq X$ קבוצת G_δ שאינה מרחב בייר.

פתרון נגדיר $X = (\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cup (\mathbb{Q} \times \{0\})$. המרחב $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ הוא מרחב מטרי שלם ולכן בייר. הקבוצה $\mathbb{H}$ כמובן פתוחה וכן לכל רציונלי גם $(q, 0) \in B((q, 1), 1)$ ולכן נוכל להסיק ש־X היא G_δ ב־$\mathbb{H}$ וצפופה ולכן מרחב בייר.

נגדיר עתה $A = \mathbb{Q} \times \{0\}$. זוהי קבוצה סגורה ב־$X$ כ־$\partial\mathbb{H}$, ומאפיון קבוצות סגורות במרחבים מטריים נובע שגם G_δ. לעומת זאת A היא לא קבוצת בייר כטענה מהתרגול, ולכן מהווה דוגמה כפי שרצינו.

שאלה 4

סעיף א׳

יהי X מרחב בייר T_1 עם כמות בת־מניה של נקודות. נראה שקיימת ב־X נקודה מבודדת.

הוכחה. אם קיים יחידון פתוח ב־X אז סיימנו, לכן נניח שאין כאלה. יהי $x_0 \in X$, אז לכל $y \neq x_0$ קיימת סביבה פתוחה $y \in U_y \subseteq X$ כך ש־$x \notin U_y$, זאת כנביעה מ־T_1. מסגירות לאיחודים נסיק ש־$\bigcup_{y \neq x_0} U_y$ קבוצה פתוחה, ולכן $\{x_0\}$ קבוצה סגורה. אז נובע ש־$\{x_0\}$ היא קבוצה דלילה לכל $x_0 \in X$. נסיק ש־$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ והעובדה ש־X בת־מניה כי היא קבוצה מקטגוריה ראשונה. אבל X מרחב בייר ולקבוצות מקטגוריה ראשונה אין פנים, כלומר $X^\circ = X = \emptyset$ בלבד. אבל $|X| = \aleph_0$ בסתירה ל־$X = \emptyset$, ולכן נסיק שקיים יחידון פתוח. $\square$

סעיף ב׳

נראה ש־$\mathbb{R}$ אינו איחוד בן־מניה זר של קטעים סגורים וחסומים.
כלומר עבור קטעים זרים וחסומים $[a_n, b_n]$ ל־$n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

הוכחה. נניח בשלילה שקיימים קטעים כאלה, ונגדיר $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n, b_n\}$. הקבוצה X היא קבוצה בת־מניה ו־T_1 מזרות הקטעים. זהו גם מרחב מטרי כמרחב המושרה מ־$\mathbb{R}$, ומדיסקרטיות הוא אף שלם, ולכן ממשפט הקטגוריה של בייר נסיק שהוא מרחב בייר. נובע אם כך מסעיף א׳ שקיימת ב־X נקודה מבודדת. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־a_l היא הנקודה הזו, לכן נובע שיש סביבה פתוחה של a_l בה אין נקודות b_n לאף n, כלומר $(a_l - \epsilon, a_l) \cap [a_l, b_l]$ קבוצה ריקה, ובפרט $a_l - \epsilon$ לא נמצאת באף קטע. $\square$