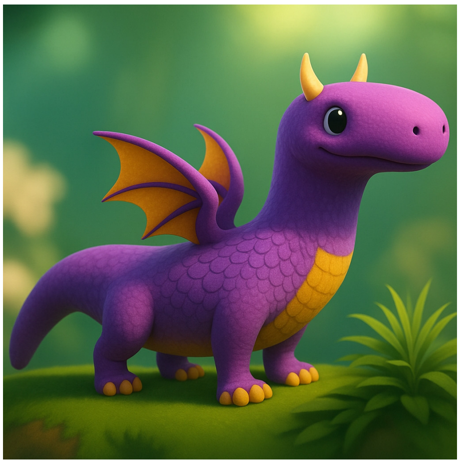
פתרון מטלה 8 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

3 בינואר 2026



שאלה 1

תהי $S=S^2(0,1)$ ספירת היחידה, נחשב את התבנית היסודית בהצגה מטריצאלית תוך שימוש בפרמטריזציה,

$$\varphi(\theta,\phi)=(\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\phi)$$

פתרון

$$D\varphi|_{(\theta,\phi)}=\begin{pmatrix}-\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta\\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta\\ 0 & -\sin\phi\end{pmatrix}$$

ונזכור כי הגדרנו,

$$g_{ij}=\langle D_i\varphi_{(\theta,\phi)},D_j\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle$$

ולכן,

$$\begin{aligned}G&=\begin{pmatrix}\langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)},D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)},D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle\\ \langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)},D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)},D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\sin^2\phi\sin^2\theta+\sin^2\phi\cos^2\theta & 0\\ 0 & \cos^2\phi\cos^2\theta+\cos^2\phi\sin^2\theta+\sin^2\phi\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\sin^2\phi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

שאלה 2

יהיו $0 < r < R$ ממשיים.

סעיף א׳

נמצא הצגה פרמטרית לטורוס במרחב האוקלידי המתקבל על־ידי סיבוב של המעגל במישור y, z עם מרכז בנקודה $(0, R, 0)$ ורדיוס r סביב ציר z.

פתרון למעשה כבר מצאנו אחת במטלה הקודמת, נצטט,

$$\varphi(u,v) = (\cos(v) \cdot (R + r\cos u), \sin(v) \cdot (R + r\cos u), r\sin u)$$

אך זוהי פרמטריזציה כך ש־$\varphi(u, 0)$ הוא מעגל סביב $(R, 0, 0)$ ולכן נשנה ונגדיר,

$$\varphi(u,v) = (\sin(v) \cdot (R + r\cos u), \cos(v) \cdot (R + r\cos u), r\sin u)$$

הפעם מבדיקה ישירה נקבל,

$$\varphi(\{0\} \times [0, 2\pi]) = S((0, R, 0), r) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2$$

כמבוקש.

סעיף ב׳

נמצא משוואה המגדירה את הטורוס.

פתרון במטלה הקודמת הראינו כי,

$$\varphi([0,2\pi]^2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)\}$$

ולכן המשוואה $(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$ היא משוואה של הטורוס.

סעיף ג׳

נגדיר את הפרמטריזציה,

$$\varphi(\theta, \phi) = ((R + r\cos\phi)\cos\theta, (R + r\cos\phi)\sin\theta, r\sin\phi)$$

ונחשב את התבנית היסודית הראשונה שלה.

פתרון

$$D\varphi|_{(\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\phi)\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} \langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)}, D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)}, D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle \\ \langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)}, D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)}, D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) & (R + r\cos\phi)r\sin\phi(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) \\ (R + r\cos\phi)r\sin\phi(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) & r^2\sin^2\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + r^2\cos^2\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שאלה 3

יהי S היפרבולואיד הנתון על־ידי המשוואה $x^2+y^2-z^2=1$.
נחשב את התבנית היסודית הראשונה בהצגה מטריצאלית הפרמטריזציה,

$$\varphi(t,u)=(\cosh t\cos u,\cosh t\sin u,\sinh t)$$

פתרון

$$D\varphi|_{(t,u)}=\begin{pmatrix}\sinh t\cos u & -\cosh t\sin u\\ \sinh t\sin u & \cosh t\cos u\\ \cosh t & 0\end{pmatrix}$$

ולכן,

$$\begin{aligned}G&=\begin{pmatrix}\langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)},D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)},D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle\\ \langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)},D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)},D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\sinh^2 t+\cosh^2 t & 0\\ 0 & \cosh^2 t\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cosh(2t) & 0\\ 0 & \cosh^2 t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

שאלה 4

יהי S היפרבולואיד הנתון על־ידי המשוואה $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.
נחשב את התבנית היסודית הראשונה בהצגה מטריצאלית הפרמטריזציה,

$$\varphi(t, u) = (\sinh t \cos u, \sinh t \sin u, \cosh t)$$

פתרון

$$D\varphi|_{(t,u)} = \begin{pmatrix} \cosh t \cos u & -\sinh t \sin u \\ \cosh t \sin u & \sinh t \cos u \\ \sinh t & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} \langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)}, D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)}, D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle \\ \langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)}, D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)}, D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh^2 t + \sinh^2 t & 0 \\ 0 & \sinh^2 t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שאלה 5

יהי S החרוט הנתון על־ידי $x^2 + y^2 = z^2, z > 0$. נחשב את התבנית היסודית הראשונה עבור הפרמטריזציה,

$$\varphi(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$$

פתרון

$$D\varphi|_{(\theta,r)} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$