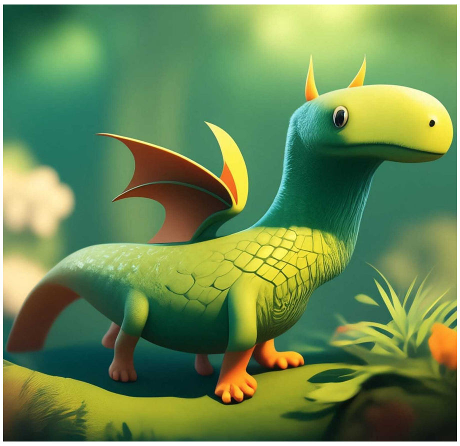
מבוא לטופולוגיה — סיכום

24 במרץ 2025



תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 24.3.2025

1.1 מבוא

בעבר דיברנו על מרחבים מטריים, באינפי 1 מתבוננים ב־$\mathbb{R}$ והגדרנו את מושג הגבול של סדרות, ולאחריו את המושג של פונקציה רציפה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ההגדרה הייתה ש־$f$ תיקרא רציפה אם לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל x $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. באינפי 3 כבר ראינו את המושג הכללי והרחב יותר של רציפות במרחבים מטריים. ניזכר בהגדרה של מרחב מטרי.

הגדרה 1.1 (מרחב מטרי) מרחב מטרי הוא זוג (X, d) כאשר X קבוצה לא ריקה ו־$d : X \times X \to \mathbb{R}$ פונקציה (הנקראת מטריקה) המקיימת,

1. $d(x, y) = d(y, x)$ לכל $x, y \in X$
2. $\forall x, y \in X, d(x, y) \ge 0$ וכן $x = y \iff d(x, y) = 0$
3. אי־שוויון המשולש, $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \le d(x, y) + d(y, z)$

דוגמה 1.1 נראה דוגמות למרחבים מטריים,

1. $\mathbb{R}$ יחד עם $d(x, y) = |x - y|$
2. $(\mathbb{R}^n, d_2)$ המוגדרת על־ידי $d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$
3. נוכל עבור $\mathbb{R}^n$ להגדיר את $d_p(\bar{x}, \bar{y}) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ ואת מטריקת אינסוף, $d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$
4. עבור $C([a, b])$ קבוצת הפונקציות הרציפות $[a, b] \to \mathbb{R}$ עבור $a < b$, ונגדיר את המטריקה $\rho(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$

נראה את ההגדרה הפורמלית של רציפות,

הגדרה 1.2 (רציפות) תהי $f : X \to Y$ עבור $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים, אז נאמר ש־f רציפה אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $d(x', x) < \delta$ אז $\rho(f(x'), f(x)) < \epsilon$.

אבל יותר קל לדבר במונחים של קבוצות פתוחות.

הגדרה 1.3 (כדור) עבור (X, d) מרחב מטרי, נסמן $B(r, x) = B_r(x) = \{z \in X \mid d(x, z) < r\}$.

הגדרה 1.4 (קבוצה פתוחה) יהי (X, d) מרחב מטרי, תת־קבוצה $U \subseteq X$ תיקרא פתוחה אם לכל $x \in U$ קיים $r > 0$ כך ש־$x \in B(x, r) \subseteq U$.

הגדרה 1.5 (הגדרה שקולה לרציפות) $f : X \to Y$ תיקרא רציפה אם לכל $V \subseteq Y$ קבוצה פתוחה ב־Y מתקיים $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ קבוצה פתוחה ב־X.

הגדרה 1.6 (טופולוגיה) תהי X קבוצה (לא ריקה), **טופולוגיה** על X היא אוסף $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, כך שמתקיימים התנאים הבאים,

1. $X, \emptyset \in \tau$
2. τ סגור לאיחוד, כלומר אם $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ לקבוצת אינדקסים I, כך ש־$\forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau$ אז $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$
3. τ סגור לחיתוכים סופיים, כלומר לכל $U, V \in \tau$ מתקיים $U \cap V \in \tau$

הגדרה 1.7 (מרחב טופולוגי) זוג (X, τ) כאשר X קבוצה לא ריקה ו־τ טופולוגיה על X, יקרא מרחב טופולוגי.

הערה בעצם הגדרנו כבר מתי פונקציה $f : X \to Y$ עבור מרחבים טופולוגיים $(X, \tau), (Y, \Omega)$ היא רציפה, כאשר $f^{-1}(U) \in \tau$ לכל $U \in \Omega$.

סימון 1.8 איברי τ יקראו קבוצות פתוחות.

הגדרה 1.9 אם (X, τ) מרחב טופולוגי אז תת־קבוצה $A \subseteq X$ תיקרא סגורה אם $X \setminus A \in \tau$, כלומר המשלים של A היא קבוצה פתוחה.

דוגמה 1.2 יהי (X, d) מרחב מטרי, נגדיר $\tau = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \exists r > 0, B(x, r) \subseteq U\}$, כלומר נגדיר טופולוגיה באופן טריוויאלי כנביעה מהמרחב המטרי.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי אכן זהו מרחב טופולוגי.

דוגמה 1.3 יהי X קבוצה כלשהי, אז ניתן להגדיר על X טופולוגיה $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$. טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה טריוויאלית.

דוגמה 1.4 נגדיר $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$ עבור קבוצה X, גם קבוצה זו היא טופולוגיה, והיא נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית.

דוגמה 1.5 נניח ש־(Y, τ) מרחב טופולוגי, ותהי $f : (Y, \tau) \to (X, \tau_0)$, מתי f היא רציפה? התשובה היא שהיא רציפה תמיד. מתי f :

$(X,\tau_1)\to(Y,\tau)$ רציפה? תלוי בהגדרת הפונקציה, אבל במקרה שבו היא אכן רציפה, אז היא רציפה בכל טופולוגיה שהיא. לעומת זאת כל $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau)$ היא רציפה.

הערה לא כל טופולוגיה נובעת ממטריקה. לדוגמה הטופולוגיה הטריוויאלית על מרחב עם לפחות 2 נקודות.

הערה נניח $x,y\in X$ אז נבחר $r=\frac{1}{2}d(x,y)$ ואז $y\notin B(x,r)$ ולכן $\emptyset\neq B(x,r)\neq X$, קל לראות שביחס לטופולוגיה שמושרית מהמטריקה d, הקבוצה $B(x,r)$ קבוצה פתוחה.

דוגמה 1.6 נגדיר $X=\mathbb{C}^n$ עבור איזשהו $n\in\mathbb{N}$ ונגדיר $\mathcal{F}=\{A\subseteq\mathbb{C}^n\mid\exists\{f_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n],A=\{(p_1,\ldots,p_n)\mid\forall i\in I,f_i(p_1,\ldots,p_n)=0\}\}$.

הגדרה 1.10 (בסיס לטופולוגיה) בסיס לטופולוגיה הוא אוסף $\mathcal{B}$ של תתי־קבוצות של X כך שמתקיים,

1. לכל $x\in X$ יש $B\in\mathcal{B}$ כך ש־$x\in B$
2. לכל $A,B\in\mathcal{B}$ ולכל $x\in A\cap B$ יש $C\in\mathcal{B}$ כך ש־$x\in C\subseteq A\cap B$

טענה 1.11 *עבור בסיס $\mathcal{B}$ האוסף $\tau_{\mathcal{B}}=\{U\subseteq X\mid U\textit{ is a union of elements of }\mathcal{B}\}$ היא טופולוגיה,*

$$\forall\alpha\in I,B_\alpha\in\mathcal{B},U=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$$

הוכחה. מכיוון ש־$\tau_{\mathcal{B}}$ סגורה לחיתוך סופי, אז אם $U,V\in\tau_{\mathcal{B}}$ אז $U=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\in\mathcal{B}$ וכן $V=\bigcup_{\beta\in J}A_\beta,A_\beta\in\mathcal{B}$, אז מתקיים,

$$U\cap V=(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)\cap(\bigcup_{\beta\in J}A_\beta)=\bigcup_{\alpha,\beta\in I\times J}B_\alpha\cap A_\beta=D$$

לכן לכל $x\in U\cap V$ ישנם $\alpha_0\in I,\beta_0\in J$ כך ש־$x\in B_{\alpha_0}\cap A_{\beta_0}$, אבל מהגדרת הבסיס קיימת קבוצה $C_{\alpha_0,\beta_0}\in\mathcal{B}$ כך ש־$C_{\alpha_0,\beta_0}\subseteq B_{\alpha_0}\cap A_{\beta_0}$. לכן $D\subseteq\bigcup_{(x,\alpha,\beta)}C_{x,\alpha,\beta}$. בהתאם מצאנו סגירות לחיתוך סופי. □

הערה יהי (X,d) מרחב מטרי, אז $\{B(x,r)\subseteq X\mid x\in X,r>0\}$ הוא טופולוגיה. אבל עכשיו נוכל להגדיר גם את $\{B(x,\frac{1}{n})\subseteq X\mid x\in X,n\in\mathbb{N}\}$, זהו בסיס לטופולוגיה לאותה הטופולוגיה שהגדרנו למרחב המטרי.

תרגיל 1.2 הוכיחו שזהו אכן בסיס עבור המרחב הטופולוגי הנתון.

דוגמה 1.7 נניח ש־$X=\mathbb{Z}$, ונגדיר את הבסיס C להיות אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, כלומר $C=\{a+d\mathbb{Z}\mid a,d\in\mathbb{Z},d\neq0\}$.
אנו טוענים כי זהו אכן בסיס (לטופולוגיה). נתבונן בזוג קבוצות ב־C, $a+d\mathbb{Z},b+q\mathbb{Z}$, ונניח ש־$p\in(a+d\mathbb{Z})\cap(b+q\mathbb{Z})$ אז $p\in p+dq\mathbb{Z}\subseteq(a+d\mathbb{Z})\cap(b+q\mathbb{Z})$. נגדיר טופולוגיית τ_C.

קבוצות סגורות הן משלימים לקבוצות פתוחות.

כל סדרה אריתמטית דו־צדדית אינסופית היא גם פתוחה וגם סגורה. בפרט חיתוך סופי של סדרות אריתמטיות הוא סגור. לכן המשלים שלו הוא פתוח.

מסקנה 1.12 (משפט אוקלידס) יש אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה. נניח בשלילה כי יש מספר סופי של ראשוניים, $p_1,\ldots,p_k$ עבור $k\in\mathbb{N}$. נבחן את $\bigcup_{i=1}^k p_i\mathbb{Z}$, זוהי קבוצה פתוחה וגם סגורה, לכן

$$\bigcup_{i=1}^k p_i\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$$

ולכן נובע ש־$\{-1,1\}$ קבוצה פתוחה וזו כמובן סתירה. □

טענה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי) *נניח ש־(X,τ) מרחב טופולוגי, לכל $\emptyset\neq Y\subseteq X$ נגדיר $\tau_Y=\{U\cap Y\mid U\in\tau\}$. אז τ_Y היא טופולוגיה.*
אם $Y\in\tau$ אז $\tau_Y=\{W\in\tau\mid W\subseteq Y\}$.

טענה 1.14 (טופולוגיית מכפלה) *נניח ש־(X_1,τ_1) ו־(X_2,τ_2) מרחבים טופולוגיים, אז נגדיר טופולוגיה על מרחב המכפלה $X_1\times X_2$ על־ידי*

$$\tau_{1,2}=\{U_1\times U_2\mid U_1\in\tau_1,U_2\in\tau_2\}$$

אז $\tau_{1,2}$ הוא בסיס והטופולוגיה המוגדרת על־ידו נקראת טופולוגיית המכפלה.

דוגמה 1.8 נוכל לבנות כך מכפלה של כמות סופית או אינסופית של מכפלות טופולוגיות. עבור אוסף אינסופי (בן־מניה או לא בהכרח) אנו צריכים

להיזהר, נניח ש־(X_α, τ_α) עבור $\alpha \in I$, אז נגדיר

$$\tau_b = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

זהו בסיס לטופולוגיה שנקרא טופולוגיית הקופסה. לעומת זאת נוכל להגדיר גם את

$$\tau_p = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha = X_\alpha \text{ for almost all } \alpha \in I\}$$

כלומר $\prod_{\alpha \in I} = \{f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid \forall \alpha \in I, f(x) \in X_\alpha\}$.

הגדרות ומשפטים