פתרון מטלה 03 — אנליזה על יריעות, 80426

14 באפריל 2025

שאלה 1

יהי $\vec{F}:U\to\mathbb{R}^2$ עבור $U\subseteq\mathbb{R}^2$ שדה וקטורי. נניח שלכל מלבן $R\subseteq U$ האינטגרל בין שני הקצוות שווה לאינטגרל בין שני הקצוות האחרים. נראה ש-$\vec{F}$ משמר.

הוכחה. האסטרטגיה שלנו היא להשתמש בחלוקה למלבנים לכל מסילה כללית $\gamma:[a,b]\to U$ במטרה להראות שהאינטגרל על המסילה תלוי רק בנקודות קצה.

תהיינה $\gamma_1,\gamma_2:[a,b]\to U$ מסילות כלשהן כך שהן חולקות נקודות קצה. עבור $N\in\mathbb{N}$ נגדיר את הסדרה $\{x_n\}_{n=0}^N\subseteq U$ כך ש-$x_n=\gamma_1(a+(b-a)\frac{n}{N})$, כלומר זוהי חלוקה של המסילה. נבנה סדרת מלבנים כך שבין x_i,x_{i+1} נמצא מלבן לכל i, כך שנקודות אלה הן אלכסון המלבן, מטעמי נוחות נבחר את האלכסון הנותר כך שלכל המלבנים תהיה אוריינטציה זהה. נניח גם ש-$ABCD$ מלבן שאלכסונו הוא $\gamma_1(a),\gamma_1(b)$ עם אוריינטציה זהה לזו של המלבנים בחלוקה. לבסוף נאריך את המלבנים בסדרה כך שצלע שלהם תשב על המלבן $ABCD$. מהנתון נובע שאם B_i הקודקודים של המלבנים בסדרה כפי שבחרנו, אז,

$$\int_{\gamma_{ADC}}\vec{F}\,dl=\sum_{i=0}^N\int_{\gamma_{x_iB_ix_{i+1}}}\vec{F}\,dl$$

ונקבל,

$$\int_{\gamma_{ADC}}\vec{F}\,dl\lim_{N\to\infty}\int_{\gamma_{ADC}}\vec{F}\,dl=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^N\int_{\gamma_{x_iB_ix_{i+1}}}\vec{F}\,dl=\int_{\gamma_1}\vec{F}\,dl$$

אבל גם,

$$\int_{\gamma_{ADC}}\vec{F}\,dl=\int_{\gamma_2}\vec{F}\,dl$$

משיקולים ודמים, ולכן נובע ש-$\vec{F}$ משמר. □

שאלה 2

נניח ש־$\vec{F}(x,y,z) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z)$, בתחום $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\}$.

סעיף א׳

נראה ש־$\vec{F}$ משמר.

הוכחה. אילו קיימת $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ המעידה על שימור $\vec{F}$, אז מתקיים,

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi = \frac{x}{x^2+y^2} \implies \varphi = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \varphi_{yz}$$

באותו אופן נסיק כי גם,

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi = \frac{y}{x^2+y^2} \implies \varphi = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \varphi_{xz}$$

ולבסוף שגם,

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi = z \implies \varphi = \frac{1}{2}z^2 + \varphi_{xy}$$

נבחין אם כך שאם נגדיר $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2) + z^2)$ אז נקבל בתחום ש־φ היא פונקציה רציפה וגזירה, וכן ש־$\nabla\varphi = \vec{F}$, ולכן מהתנאי השקול לשימור נובע ש־$\vec{F}$ אכן משמר. $\square$

סעיף ב׳

נחשב את $\int_\gamma \vec{F}\,dl$ עבור $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ כאשר $t \in [0, 2\pi]$.

פתרון נבחין כי התחום של המסילה הוא לא פשוט קשר, ולכן עלינו לחשב את האינטגרל ישירות מהגדרה,

$$\int_\gamma \vec{F}\,dl = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\frac{\cos t}{1}, \frac{\sin t}{1}, t^2) \cdot (-\sin t, \cos t, 2t)\,dt = \int_0^{2\pi} 0 + 2t^2\,dt = \frac{2}{3}t^3\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{2^4\pi}{3}$$

שאלה 3

נניח ש־$U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום פתוח.

סעיף ב׳

נראה שמחלקות הקשירות המסילתית של U הן קבוצות פתוחות, וכן שכל רכיב קשירות מסילתית הוא קשיר מסילתית.

הוכחה. נניח ש־$\{A_i\}_{i \in I} \subseteq U$ הן מחלקות הקשירות המסילתית, אז בהכרח $U = \biguplus_{i \in I} A_i$, כלומר זוהי חלוקה של U. אילו נניח שקיימת A_i לא פתוחה נקבל סתירה ישירה לפתיחות של U, לכן נסיק ש־A_i פתוחה לכל $i \in I$.

נניח עתה ש־$A \subseteq U$ הוא רכיב קשירות מסילתית, ונראה שהוא קשיר מסילתית. לכל $x, y \in A$ מתקיים $x \sim y$, כלומר יש מסילה ביניהם, ולכן מצאנו שהקבוצה A קשירה מסילתית. $\square$

סעיף ג׳

נראה שמחלקות הקשירות של U הן קבוצות פתוחות, וכן שכל רכיב קשירות הוא קשיר.

הוכחה. החלק הראשון זהה בהוכחתו לזה שבסעיף הקודם.

נניח ש־$A \subseteq U$ רכיב קשירות. בהוכחה של יחס שקילות בתרגול ראינו כי אם A, B קבוצות קשירות כך שהן לא זרות, אז איחודן קשיר. נקבע אם כך $x \in A$, ונגדיר גם $B_y \subseteq A$ הקבוצה הקשירה המעידה על $x \simeq y$ לכל $y \in A$. נבחין כי בהכרח $U = \bigcup_{y \in A} B_y$, זאת שכן כל נקודה של U מופיעה באיחוד, וכן אילו יש נקודה באיחוד שלא ב־A אז קיבלנו סתירה להיותה רכיב קשירות. נקבל מהטענה הקודמת ש־U היא איחוד לא זר של קבוצות קשירות ולכן קשירה. $\square$

סעיף ד׳

נראה שקבוצת מחלקות הקשירות (המסילתית) של U היא בת־מניה.

הוכחה. נניח ש־$\{A_i\}_{i \in I}$ רכיבי הקשירות (המסילתית), אז לכל $i \in I$ גם A_i היא פתוחה וקשירה (מסילתית). יהי $\epsilon > 0$ כך ש־$\epsilon < \mathrm{diam}(A_i)$ לכל $i \in I$. נניח בשלילה ש־$|I| > \aleph_0$, ולכן נובע ש־$B_\epsilon(x_i)$ עבור כדורים המוכלים במחלקות הקשירות (המסילתית) היא בעצמה קבוצה של כדורים זרים, אבל ידוע כי ϵ־כיסוי של $\mathbb{R}^n$ הוא בן־מניה בסתירה. $\square$

שאלה 4

עבור $a,b > 0$ תהי $E_{a,b} = \{(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ האליפסה עם הפרמטרים a,b. נשתמש במשפט גרין לתחומים פשוטים כדי להראות שמתקיים $\operatorname{Area}(E_{a,b}) = \pi ab$.

פתרון נגדיר את שתי הפונקציות $f,g : [-a,a] \to \mathbb{R}$ על־ידי,

$$f(x) = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad g(x) = -f(x)$$

נבחין כי $\operatorname{rng}\gamma_f \cup \operatorname{rng}\gamma_g = \partial E_{a,b}$, כלומר תנאי משפט גרין חלים עבור פונקציות אלה, כאשר $f(\pm a) = g(\pm a)$ ולכן אין דרישת הגדרת ישרים חוסמים מוספים. נעבור לחישוב השטח, נגדיר $\vec{F}(x,y) = (0,x)$ ונסיק ממשפט גרין שמתקיים. נבחין כי $\gamma_f(t) = (t, b\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}})$, ולכן גם $\vec{F}(\gamma_f(t)) = (0,t)$. מהצד השני מתקיים $\gamma_f'(t) = (1, \frac{-bt}{a^2\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}})$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Area}(E_{a,b}) &= \int_{\gamma_f} \vec{F}\, dl - \int_{\gamma_g} \vec{F}\, dl \\
&= 2\frac{b}{a^2} \cdot \int_{-a}^{a} \frac{-t^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2}}\, dt \\
&= bt\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} - \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)\Bigg|_{t=-a}^{t=a} \\
&= ab\pi
\end{aligned}$$