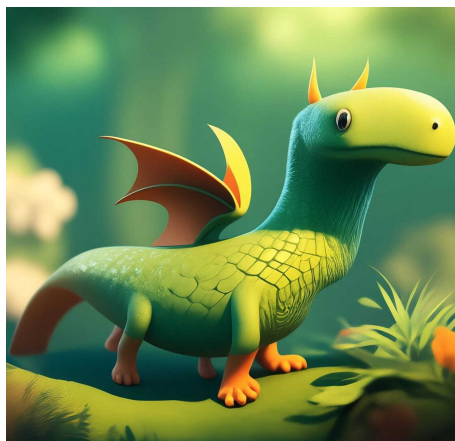


מבוא לטופולוגיה – סיכום

31 במרץ 2025



תוכן העניינים

3	1 שיעור 1 – 24.3.2025
3	1.1 מבוא
6	2 שיעור 2 – 25.3.2025
6	2.1 טופולוגיה – המשך
8	3 שיעור 3 – 31.3.2025
8	3.1 סגירות
9	3.2 השלמות לרציפות

24.3.2025 – 1 שיעור 1

1.1 מבוא

בעבר דיברנו על מרחבים מטריים, באינפי 1 מתבוננים ב- \mathbb{R} והגדרנו את מושג הגבול של סדרות, ולאחריו את המושג של פונקציה רציפה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. ההגדרה הייתה ש- f תיקרא רציפה אם לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ עבור $|x - y| < \delta$. באינפי 3 כבר ראינו את המושג הכללי והרחב יותר של רציפות במרחבים מטריים. נזכר בהגדרה של מרחב מטרי.

הגדרה 1.1 (מרחב מטרי) מרחב מטרי הוא זוג (X, d) כאשר X קבוצה לא ריקה ו- $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה (הנקראת מטריקה) המקיימת,

$$1. \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \text{לכל } x, y \in X$$

$$2. \quad d(x, y) \geq 0 \quad \text{וכן } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$3. \quad \text{אי-שוויון המשולש, } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

דוגמה 1.1 נראה דוגמות למרחבים מטריים,

$$1. \quad \mathbb{R} \text{ יחד עם } d(x, y) = |x - y|$$

$$2. \quad (\mathbb{R}^n, d_2) \text{ המוגדרת על-ידי } d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

$$3. \quad \text{נוכל עבור } \mathbb{R}^n \text{ להגדיר את } d_p(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ ואת מטריקת אינסוף, } d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

$$4. \quad \text{עבור } C([a, b]) \text{ קבוצת הפונקציות הרציפות } [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ עבור } a < b, \text{ ונגדיר את המטריקה } \rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

נראה את ההגדרה הפורמלית של רציפות,

הגדרה 1.2 (רציפות) תהי $f: X \rightarrow Y$ עבור (X, d) , (Y, ρ) מרחבים מטריים, אז נאמר ש- f רציפה אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $d(x, x') < \delta$ אז $\rho(f(x'), f(x)) < \epsilon$.

אבל יותר קל לדבר במונחים של קבוצות פתוחות.

הגדרה 1.3 (כדור) עבור (X, d) מרחב מטרי, נסמן $B(r, x) = B_r(x) = \{z \in X \mid d(x, z) < r\}$

הגדרה 1.4 (קבוצה פתוחה) יהי (X, d) מרחב מטרי, תת-קבוצה $U \subseteq X$ תיקרא פתוחה אם לכל $x \in U$ קיים $r > 0$ כך ש- $B(x, r) \subseteq U$.

הגדרה 1.5 (הגדרה שקולה לרציפות) $f: X \rightarrow Y$ תיקרא רציפה אם לכל $V \subseteq Y$ קבוצה פתוחה ב- Y מתקיים $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ קבוצה פתוחה ב- X .

הגדרה 1.6 (טופולוגיה) תהי X קבוצה (לא ריקה), טופולוגיה על X היא אוסף $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, כך שמתקיימים התנאים הבאים,

$$1. \quad X, \emptyset \in \tau$$

$$2. \quad \text{כלומר אם } \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \text{ לקבוצת אינדקסים } I, \text{ כך ש-} \forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau \text{ אז } \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$$

$$3. \quad \text{כלומר לכל } U, V \in \tau \text{ מתקיים } U \cap V \in \tau$$

הגדרה 1.7 (מרחב טופולוגי) זוג (X, τ) כאשר X קבוצה לא ריקה ו- τ טופולוגיה על X , יקרא מרחב טופולוגי.

הערה: בעצם הגדרנו כבר מתי פונקציה $f: X \rightarrow Y$ עבור מרחבים טופולוגיים (X, τ) , (Y, Ω) היא רציפה, כאשר $f^{-1}(U) \in \tau$ לכל $U \in \Omega$.

סימון 1.8 איברי τ יקראו קבוצות פתוחות.

הגדרה 1.9 (קבוצה סגורה) אם (X, τ) מרחב טופולוגי אז תת-קבוצה $A \subseteq X$ תיקרא סגורה אם $X \setminus A \in \tau$, כלומר המשלים של A היא קבוצה פתוחה.

דוגמה 1.2 יהי (X, d) מרחב מטרי, נגדיר $\tau = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \exists r > 0, B(x, r) \subseteq U\}$, כלומר נגדיר טופולוגיה באופן טריוויאלי כנביעה מהמרחב המטרי.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי אכן זהו מרחב טופולוגי.

דוגמה 1.3 יהי X קבוצה כלשהי, אז ניתן להגדיר על X טופולוגיה $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$. טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה טריוויאלית.

דוגמה 1.4 נגדיר $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$ עבור קבוצה X , גם קבוצה זו היא טופולוגיה, והיא נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית.

דוגמה 1.5 נניח ש- (Y, τ) מרחב טופולוגי, ותהי $f : (Y, \tau) \rightarrow (X, \tau_0)$, f מתי f היא רציפה? התשובה היא שהיא רציפה תמיד. מתי $f : (Y, \tau) \rightarrow (X, \tau_1)$ רציפה? תלוי בהגדרת הפונקציה, אבל במקרה שבו היא אכן רציפה, אז היא רציפה בכל טופולוגיה שהיא. לעומת זאת כל $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau)$ היא רציפה.

הערה: לא כל טופולוגיה גובעת ממטריקה. לדוגמה הטופולוגיה הטריטוריאליה על מרחב עם לפחות 2 נקודות.

הערה: נניח $x, y \in X$ אז נבחר $r = \frac{1}{2}d(x, y)$ ואז $y \notin B(x, r)$ ולכן $\emptyset \neq B(x, r) \neq X$ קל לראות שביחס לטופולוגיה שמושרית מהמטריקה d , הקבוצה $B(x, r)$ קבוצה פתוחה.

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{C}^n \mid \exists \{f_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], A = \{(p_1, \dots, p_n) \mid \forall i \in \text{נגדיר } n \in \mathbb{N} \text{ עבור איזשהו } X = \mathbb{C}^n \text{ נגדיר } 1.6 \text{ דוגמה } .I, f_i(p_1, \dots, p_n) = 0\}\}$$

הגדרה 1.10 (בסיס לטופולוגיה) בסיס לטופולוגיה הוא אוסף \mathcal{B} של תתי-קבוצות של X כך שמתקיים,

1. לכל $x \in X$ יש $B \in \mathcal{B}$ כך ש- $x \in B$

2. לכל $A, B \in \mathcal{B}$ ולכל $x \in A \cap B$ יש $C \in \mathcal{B}$ כך ש- $x \in C \subseteq A \cap B$.

טענה 1.11 עבור בסיס \mathcal{B} האוסף $\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X \mid U \text{ is a union of elements of } \mathcal{B}\}$ היא טופולוגיה,

$$\forall \alpha \in I, B_\alpha \in \mathcal{B}, U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$$

הוכחה. מכיוון ש- τ_B סגורה לחיתוך סופי, אז אם $U, V \in \tau_B$ אז $U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \in \mathcal{B}$ וכן $V = \bigcup_{\beta \in J} A_\beta, A_\beta \in \mathcal{B}$, אז מתקיים,

$$U \cap V = (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta \in J} A_\beta) = \bigcup_{\alpha, \beta \in I \times J} B_\alpha \cap A_\beta = D$$

לכן לכל $x \in U \cap V$ ישנם $\alpha_0 \in I, \beta_0 \in J$ כך ש- $x \in B_{\alpha_0} \cap A_{\beta_0}$, אבל מהגדרת הבסיס קיימת קבוצה $C_{\alpha_0, \beta_0} \subseteq B_{\alpha_0} \cap A_{\beta_0}$ כך ש- $x \in C_{\alpha_0, \beta_0}$.
 \square $B_{\alpha_0} \cap A_{\beta_0} \subseteq D \subseteq \bigcup_{(x, \alpha, \beta)} C_{x, \alpha, \beta}$ לכן $B_{\alpha_0} \cap A_{\beta_0} \subseteq D$. בהתאם מצאנו סגירות לחיתוך סופי.

הערה יהי (X, d) מרחב מטרי, אז $\{B(x, r) \subseteq X \mid x \in X, r > 0\}$ הוא טופולוגיה. אבל עכשיו נוכל להגדיר גם את $\{B(x, \frac{1}{n}) \subseteq X \mid x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ זהו בסיס לטופולוגיה לאותה הטופולוגיה שהגדרנו למרחב המטרי.

תרגיל 1.2 הוכיחו שזהו אכן בסיס עבור המרחב הטופולוגי הנתון.

דוגמה 1.7 נניח $X = \mathbb{Z}^-$, ונגדיר את הבסיס C להיות אוסף הסדרות האריתמטיות הדו-צדדיות, כלומר $C = \{a + d\mathbb{Z} \mid a, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0\}$.
אנו טוענים כי זהו אכן בסיס (לטופולוגיה). נתבונן בזוג קבוצות ב- C , $a + d\mathbb{Z}, b + q\mathbb{Z}$, ונניח ש- $p \in (a + d\mathbb{Z}) \cap (b + q\mathbb{Z})$ אז $p \in p + dq\mathbb{Z} \subseteq$
 $(a + d\mathbb{Z}) \cap (b + q\mathbb{Z})$. נגדיר טופולוגיית τ_C .

$(a + d\mathbb{Z}) \cap (b + q\mathbb{Z})$. נגדיר טופולוגיית τ_C .

קבוצות סגורות הן משלימים לקבוצות פתוחות.

כל סדרה אריתמטית דו-צדדית אינסופית היא גם פתוחה וגם סגורה. בפרט חיתוך סופי של סדרות אריתמטיות הוא סגור. לכן המשלים שלו הוא פתוח.

מסקנה 1.12 (משפט אוקלידס) יש אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה. נניח בשלילה כי יש מספר סופי של ראשוניים, p_1, \dots, p_k עבור $k \in \mathbb{N}$. נבחן את $\bigcup_{i=1}^k p_i \mathbb{Z}$ וזהו קבוצה פתוחה וגם סגורה, לכן

$$\bigcup_{i=1}^k p_i \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$$

ולכן נובע ש- $\{-1, 1\}$ קבוצה פתוחה וזו כמוכן סתירה. \square

טענה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי) נניח ש- (X, τ) מרחב טופולוגי, לכל $\emptyset \neq Y \subseteq X$ נגדיר $\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$. אז τ_Y היא טופולוגיה. אם $Y \in \tau$ אז $\tau_Y = \{W \in \tau \mid W \subseteq Y\}$.

$$\tau_Y = \{W \in \tau \mid W \subseteq Y\} \text{ and } Y \in \tau \Leftrightarrow$$

מענה 1.14 (טופולוגיית מכפלה) נניח ש- (X_1, τ_1) ו- (X_2, τ_2) מרחבים טופולוגיים, אז נגדיר טופולוגיה על מרחב המכפלה $X_1 \times X_2$ על-ידי

$$\tau_{1,2} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$$

אז $\tau_{1,2}$ הוא בסיס והטופולוגיה המוגדרת על-ידו נקראת טופולוגיית המכפלה.

דוגמה 1.8 נוכל לבנות כך מכפלה של כמות סופית או אינסופית של מכפלות טופולוגיות. עבור אוסף אינסופי (בן-מניה או לא בהכרח) אנו צריכים

להיזהר, נניח ש- (X_α, τ_α) עבור $\alpha \in I$, אז נגדיר

$$\tau_b = \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau_\alpha \right\}$$

זהו בסיס לטופולוגיה שנקרא טופולוגיית הקופסה. לעומת זאת נוכל להגדיר גם את

$$\tau_p = \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha = X_\alpha \text{ for almost all } \alpha \in I \right\}$$

כלומר $\prod_{\alpha \in I} = \{f : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid \forall \alpha \in I, f(\alpha) \in X_\alpha\}$.

25.3.2025 – שיעור 2

2.1 טופולוגיה – המשך

בשיעור הקודם דיברנו על מכפלה של טופולוגיות, אמרנו שאם I קבוצת אינדקסים ולכל $\alpha \in I$ גם (X_α, τ_α) מרחב טופולוגי, אז נתבונן ב- $Z = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ונרצה להגדיר טופולוגיה על Z .
הערה מגדירים,

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha, \forall \alpha \in I, f(\alpha) \in X_\alpha\}$$

לאחר מכן נוכל להגדיר טופולוגיית מכפלה,

הגדרה 2.1 (טופולוגיית מכפלה) נגדיר את הבסיס,

$$\mathcal{B}_{\text{box}} = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I, U_\alpha \subseteq X_\alpha, U_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

ואת הבסיס,

$$\mathcal{B}_{\text{prod}} = \{\prod_{\alpha \in I} V_\alpha \mid \forall \alpha \in I, V_\alpha \in \tau_\alpha, V_\alpha \subseteq X_\alpha, |\{\beta \in I \mid V_\beta \neq X_\beta\}| < \infty, V_\alpha = X_\alpha \text{ for almost every } \alpha\}$$

אלו הן מכפלות של טופולוגיות המהוות טופולוגיה.

הגדרה 2.2 (העתקות הטלה) אז $Z = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ אז ישנן הטלות $\pi_\alpha : Z \rightarrow X_\alpha, \forall \alpha \in I$ המוגדרות על-ידי $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$.

אנו רוצים שכל ההטלות π_α תהינה רציפות. כדי שהן יקיימו רציפות צריך שלכל $U_\alpha \in \tau_\alpha$ (קבוצה פתוחה ב- X_α) יתקיים $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau$ כלומר המקור יהיה קבוצה פתוחה ב- Z . אבל נבחין כי $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta$ אבל זהו לא בסיס,

$$C = \{U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta \mid \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau\}$$

הגדרה 2.3 (תת-בסיס לטופולוגיה) תהי קבוצה X , קבוצה C של תת-קבוצות של X כך ש- $\bigcup C = X$.

נגדיר את הבסיס המושרה מתת-בסיס להיות $\mathcal{B}_C = \{\bigcap A \mid A \subseteq C, |A| < \infty\}$, כלומר אוסף החיתוכים הסופיים של איברי C (הן קבוצות פתוחות) הוא בסיס.

הגדרה 2.4 (טופולוגיה חלשה) אם X קבוצה ו- τ_1, τ_2 טופולוגיות על X אומרים ש- τ_1 חלשה יותר מ- τ_2 אם $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

דוגמה 2.1 יהיו מרחבים מטריים (X_i, ρ_i) לכל $i \in \mathbb{N}$, ונגדיר (X_i, τ_i) מרחב טופולוגי מושרה מתאים לכל i . נרצה להתבונן במכפלתם, $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$. אז נוכל להתבונן ב- $(\prod X_i, \tau_{\text{prod}})$ שהגדרנו זה עתה.

הגדרה 2.5 (מטריקת מכפלה) בהינתן סדרת מרחבים מטריים (X_i, ρ_i) עבור $i \in \mathbb{N}$ מרצה למצוא מטריקה על $Z = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$. לכל $x, y \in Z$ כאשר $x = (x_i), y = (y_i)$ אז נגדיר,

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

ברור שפונקציה זו מוגדרת, וברור אף כי היא מקיימת את התכונה השנייה של מטריקות, אך לא ברור שהיא מקיימת את אי-שוויון המשולש, זהו תרגיל שמושאר לקורא.

טענה 2.6 הטופולוגיה המושרית על $Z = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ עבור (X_i, τ_i) מרחבים טופולוגיים יחד עם מטריקת המכפלה שווה ל- $\mathcal{B}_{\text{prod}}$.

הוכחה. (Z, ρ) מרחב מטרי, ו- $\mathcal{B}_\rho = \{B(x, r) \mid x \in Z, r > 0\}$ בסיס, אז נוכל להגדיר טופולוגיה $\tau_{\mathcal{B}_\rho} = \tau_\rho$. כדי להראות ש- $\tau_\rho = \mathcal{B}_{\text{prod}}$ מספיק להראות שכל $B \in \mathcal{B}_{\text{prod}}$ שייכת ל- τ_ρ וכל $C \in \mathcal{B}_\rho$ שייכת ל- τ_{prod} . נוסף ונבהיר שטופולוגיה נקבעת ביחידות על-ידי בסיס שלה, לכן מספיק להראות את שקילות הבסיסים.

נתחיל בתנאי הראשון, ונקבע $k \in \mathbb{N}$ כלשהו. מספיק להראות שקבוצה מהצורה $U_k \times \prod_{i \neq k} X_i$ פתוחה ב- τ_ρ עבור $U_k \in \tau_k$ היא קבוצה פתוחה ב- τ_ρ , זאת שכן נוכל להרחיב הוכחה זו באופן סיסטמטי להיות על כל קבוצה סופית של קבוצות פתוחות. יהי $x \in U_k \times \prod_{i \neq k} X_i$ ונסמן את ההטלה על מרחב זה $\pi_j : U_j \times \prod_{i \neq j} X_i \rightarrow U_j$, כלומר $\pi_j(x) = x_j$ לכל $j \in \mathbb{N}$. אנו יודעים ש- $x_k \in U_k$ ו- U_k פתוחה ולכן ישנו $r > 0$ כך ש- $B_r(x_k) \subseteq U_k$.

קיים $s > 0$ כך שאם $t \geq 0$ ומתקיים $\frac{t}{1+t} < s$ אז $t < r$, ולכן נבחר את הכדור ברדיוס $\frac{s}{2^k}$ סביב x ב- X_i $Z = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ מרחב המכפלה כולו. המטרה שלנו היא להראות שהכדור שעתה בחרנו מקיים את התנאי לבסיס. נניח ש- $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B_{\frac{s}{2^k}}(x)$ אז

$$\begin{aligned} \frac{s}{2^k} > \rho(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} \\ \Rightarrow s &> \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} \\ \Rightarrow \rho_k(x_k, y_k) &< r \\ \Rightarrow y_k &\in B_r(x_k) \subseteq U_k \end{aligned}$$

נעבור לתנאי השני, נתבונן בכדור הפתוח סביב $x \in Z$, $B_r(x)$, כאשר נחזור ונבהיר כי כדור זה מוגדר להיות,

$$B_r(x) = \left\{ y \in Z \mid \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} < r \right\}$$

יהי $M \in \mathbb{N}$ כך ש- $\sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} < \frac{r}{2}$, כלומר נחסום את טור הזנב של המטריקה ρ . תהי $V \subseteq Z$ המוגדרת על-ידי,

$$V = \left\{ (y_1, \dots, y_M) \in \prod_{i=1}^M X_i \mid \sum_{i=1}^M \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} < \frac{r}{2} \right\}$$

ואנו טוענים כי $V \times \prod_{i=M+1}^{\infty} X_i \subseteq B_r(x)$.

□

31.3.2025 – 3 שיעור 3

3.1 סגירות

בדיוק כמו במרחבים מטריים, גם במרחב טופולוגי נרצה לדון במניפולציות על קבוצות במרחב, נתחיל בהגדרת הקונספט של סגור של קבוצה במרחב טופולוגי.

הגדרה 3.1 (סגור של קבוצה במרחב טופולוגי) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, ותהי קבוצה $A \subseteq X$ תת-קבוצה כשלהי. נגדיר את הסגור של A כקבוצה הסגורה הקטנה ביותר המכילה את A , כלומר,

$$\overline{A} = \bigcap_{X \setminus F \in \tau} F$$

בהתאם נקבל מספר תכונות ראשוניות ודומות לתכונות שראינו בעבר,

למה 3.2 התכונות הבאות מתקיימות,

$$1. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$2. \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}, \text{ כאשר במקרה זה אין בהכרח שוויון.}$$

דוגמה 3.1 נראה דוגמה למקרה בו בהכרח אין שוויון, נגדיר $X = \mathbb{R}$ וכן $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ אז מתקיים,

$$\emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

טענה 3.3 אם (X, τ) מרחב טופולוגי ו- $A \subseteq X$, אז,

$$x \in \overline{A} \iff \forall U \in \tau, x \in U \rightarrow U \cap A \neq \emptyset$$

כלומר נקודה נמצאת בסגור של A אם ורק אם כל קבוצה פתוחה סביב הנקודה לא זרה ל- A .

הוכחה. נראה את שלילת הטענה, כלומר $x \notin \overline{A} \iff \exists U \in \tau, x \in U \wedge U \cap A = \emptyset$

נניח ש- $x \notin \overline{A}$ ולכן $x \in X \setminus \overline{A}$ אבל $X \setminus \overline{A}$ פתוחה וזרה מהגדרתה ל- A .

בכיוון השני אם יש $U \ni x$ פתוחה כך ש- $U \cap A = \emptyset$ אז $F = X \setminus U$ סגורה ומכילה את A , בהתאם $\overline{A} \subseteq F$ ובהכרח $x \notin \overline{A}$ \square

הגדרה 3.4 (פנים ושפה) נגדיר את הפנים של A להיות, $A^\circ = \bigcup_{U \in \tau, U \subseteq A} U$

כלומר הפנים הוא איחוד כל הקבוצות הפנימיות הפתוחות של A , ובשל הסגירות של הטופולוגיה לאיחוד, נקבל כך את הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר שחלקית ל- A . נגדיר את השפה של A להיות $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

נבחין בהגדרה של סביבה ונשתמש בהגדרה זו כדי להגדיר מונח חדש.

הגדרה 3.5 (סביבה של נקודה) נאמר ש- $L \subseteq X$ היא סביבה של x אם קיימת קבוצה פתוחה $U \in \tau$ כך ש- $x \in U \subseteq L$.

הגדרה 3.6 (נקודת הצטברות) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, תהי $A \subseteq X$ תת-קבוצה כלשהי, ו- $x \in A$. נאמר ש- x היא נקודת הצטברות של A אם כל סביבה של x מכילה נקודה מ- A שונה מ- x , כלומר,

$$\forall U \in \tau, x \in U \implies \exists y \in (U \setminus \{x\}) \cap A$$

נסמן ב- A' את קבוצת נקודות ההצטברות של A .

נרצה להסתכל על נקודות הצטברות כנקודות שלא משנה כמה קרוב אנחנו מסתכלים אליהן, עדיין נוכל למצוא בסביבתן נקודות נוספות. במובן הזה ברור שהן נמצאות בקרבת נקודות בפנים, אך עלולות להיות גם נקודות לא פנימיות שמקיימות טענה כזו.

טענה 3.7 מתקיים $\overline{A} = A \cup A'$

הוכחה. אם $x \in A \cup A'$ אז או $x \in A$ או $x \in A'$. ובכל סביבה של x יש נקודה מ- A שונה מ- x . בפרט לאור הטענה ש- \overline{A} היא אוסף כל הנקודות שבכל סביבה שלהן המכילה את A בחיתוך לא ריק נובע ש- $A' \subseteq \overline{A}$, לכן נובע ש- $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

בכיוון השני נניח ש- $x \in \overline{A}$, אז לכל $U \in \tau$ כך ש- $x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$. אם $x \in A$ אז בודאי ש- $x \in A \cup A'$. אם $x \notin A$ אז לכל $U \in \tau$ כך ש- $x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$. מ- A' נובע גם ש- $U \cap A \neq \emptyset$ ולכן $x \in A'$. אז מצאנו ש- $\overline{A} \subseteq A \cup A'$, ונובע משני החלקים ש- $\overline{A} = A \cup A'$ \square

3.2 השלמות לרציפות

ניזכר בהגדרה 1.2, נרצה לדון בקונספט של רציפות באופן רחב יותר. בהינתן (Y, τ_Y) מרחב טופולוגי ו- X קבוצה כלשהי, ופונקציה $f: X \rightarrow Y$, ניתן להגדיר טופולוגיה על X כך ש- f רציפה.

הקבוצה $\{f^{-1}(U) \mid U \in \tau_Y\}$ היא תת-בסיס, ואפשר להרחיבה לבסיס ולהגדיר עליו טופולוגיה מושרית מהבסיס על X .

טענה 3.8 רציפה עבור טופולוגיה זו, וזו הטופולוגיה החלשה ביותר על X עבורה f רציפה.

בכיוון השני, בהינתן מרחב טופולוגי (X, τ_X) וקבוצה כלשהי Y יחד עם פונקציה $f: X \rightarrow Y$, נוכל להגדיר את $\{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \tau_X\}$ להיות תת-בסיס וממנו נוכל לשוב לבנות בסיס וטופולוגיה על Y . באופן דומה f רציפה ביחס לטופולוגיה זו וזו הטופולוגיה החזקה ביותר על Y ש- f רציפה.

טענה 3.9 (שקילות לרציפות) יהיו מרחבים טופולוגיים $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ ותהי $f: X \rightarrow Y$, אז התנאים הבאים שקולים,

1. f רציפה לפי 1.2

2. לכל קבוצה סגורה $F \subseteq Y$, $f^{-1}(F)$ סגורה ב- X

הגדרה זו עוזרת לנו לדון בקבוצות סגורות במקום פתוחות

3. אם \mathcal{B} בסיס לטופולוגיה של Y אז לכל $B \in \mathcal{B}$ מתקיים ש- $f^{-1}(B)$ פתוחה ב- X

הגדרה זו מאפשרת לנו לדון בבסיסים ובכך לפשט את העבודה עם טופולוגיות

4. לכל $x \in X$ ולכל סביבה $W \subseteq Y$ של $f(x)$ מתקיים ש- $f^{-1}(W)$ סביבה של x

5. קיים כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ של X , כלומר $X = \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha$, $\forall \alpha, U_\alpha \in \tau$, כך שלכל $\alpha \in \Omega$ מתקיים $f|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow Y$ רציפה.

6. קיים כיסוי סגור סופי $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$ עבור F_i סגורות עבור $1 \leq i \leq n$, כך שכל $f|_{F_i}: F_i \rightarrow Y$ רציפה.

7. לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

הוכחה. $2 \iff 1$: נובע ישירות מהגדרה של משלימים והגדרת הרציפות על קבוצות פתוחות.

$3 \iff 1$: בכיוון הראשון כל איחוד קבוצות מהבסיס הוא קבוצה פתוחה, ונוכל כך להראות את נכונות הטענה. לכיוון השני כל קבוצה היא איחוד של קבוצות מהבסיס, ו- $f^{-1}(\bigcup U_\alpha) = \bigcup f^{-1}(U_\alpha)$.

$4 \implies 1$: אם $x \in X$ וכן $f(x) \in W \subseteq Y$ אז קיימת $U \subseteq W$ כך ש- $f(x) \in U$ פתוחה, לכן נובע ש- $x \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(W)$ כאשר $f^{-1}(U)$ פתוחה.

$1 \implies 4$: אם $U \subseteq Y$ פתוחה אז צריך להראות ש- $f^{-1}(U)$ פתוחה. תהי $x \in f^{-1}(U)$, אז U סביבה ל- $f(x)$ ולכן לפי ההנחה $f^{-1}(U)$ היא סביבה של x , כלומר קיימת $V_x \subseteq f^{-1}(U)$ פתוחה, ונסיק ש- $V_x = f^{-1}(U) \cap V_x$ פתוחה.

$5 \implies 1$: נוכל לבחור כיסוי טריוויאלי.

$1 \implies 5$: נניח שיש כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ של X כך ש- $f|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow Y$ רציפה לכל $\alpha \in \Omega$. תהי $W \subseteq Y$ פתוחה, אז $f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(U_\alpha)$ ו- $f|_{f^{-1}(U_\alpha)}: f^{-1}(U_\alpha) \rightarrow Y$ רציפה. מכאן $f|_{f^{-1}(U_\alpha)}: f^{-1}(U_\alpha) \rightarrow Y$ רציפה ומשום ש- U_α פתוחה ב- X נובע ש- $f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(W) = f^{-1}(U_\alpha \cap W)$ פתוחה ב- X . מכאן $f^{-1}(W) = \bigcup_{\alpha \in \Omega} f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(W)$ פתוחה ב- X .

$6 \implies 1$: נבחר את X ככיסוי סגור של עצמה.

$1 \implies 6$: נניח ש- $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$ כיסוי סגור סופי של X , ונניח גם שלכל i , $f|_{F_i}: F_i \rightarrow Y$ רציפה. כעת ההוכחה דומה למהלך שעשינו ב-1 $\implies 5$, אבל כעת אפיון רציפות בעזרת L , ואיחוד סופי על סגורות הוא סגור.

$7 \implies 1$: נתון כי f רציפה, אנו רוצים להראות ש- $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. יהי $x \in \overline{A}$, נראה כי $f(x) \in \overline{f(A)}$. נניח בשלילה ש- $f(x) \notin \overline{f(A)}$, אז יש סביבה פתוחה U של $f(x)$ כך ש- $U \cap f(A) = \emptyset$. f רציפה ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X וקיים $A \cap f^{-1}(U) = \emptyset$, אבל $x \in f^{-1}(U)$ וקיבלנו $x \notin \overline{A}$.

$2 \implies 7$: תהי $F \subseteq Y$ סגורה, אז,

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \stackrel{\text{הנחה}}{\subseteq} \overline{f(f^{-1}(F))} \stackrel{\text{סגורה } F}{=} \overline{F} \stackrel{F \subseteq Y}{=} F \implies \overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$$

מהגדרת סגור נוכל להסיק ש- $f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$, לכן,

$$\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$$

ובפרט $f^{-1}(F)$ סגורה ב- X .

□

נבחן תכונה מעניינת שלא תשרת אותנו רבות, אך כן מעלה שאלות,

הגדרה 3.10 (מרחב כוויץ) יהי X מרחב טופולוגי, נאמר ש- X כוויץ (Contractible) אם יש פונקציה רציפה $f : I \times X \rightarrow X$ עבור $I = [0, 1]$

כך ש- $f(0, x) = x$ וקיימת נקודה $x_1 \in X$ כך ש- $f(1, x) = x_1$ $\forall x \in X$. נסמן גם $f_t(t, x)$ כאשר $f_t : X \rightarrow X$ וכן $f_0 = Id$ וכן f_1 הפונקציה הקבועה $x \mapsto x_1$.

דוגמה 3.2 נגדיר $X = I$ ואת $f : I \times I \rightarrow I$ המוגדרת על-ידי $f(t, x) = (1-t)x$. נגדיר $X = \mathbb{R}$ ואת $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ על-ידי $f(t, x) = (1-t)x$ ונקבל שגם \mathbb{R} כוויץ בדיוק באותו האופן.

תרגיל 3.1 הראו כי S^1 לא כוויץ.

נחזור לדבר על פונקציות רציפות.

תרגיל 3.2 נתבונן ב- $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tau)$ $f : (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tau)$ כך ש- $f(x)(i) = x$ לכל $i \in \mathbb{N}$.

הראו ש- f רציפה או לא רציפה כהעתקה כאשר τ טופולוגיית המכפלה, וכאשר τ טופולוגיית הקופסה.

פתרון נתבונן ב- $U = \prod_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, זוהי קבוצה פתוחה, אך $f^{-1}(U) = 0$, וזו כמובן לא קבוצה פתוחה, לכן בטופולוגיית הקופסה היא לא רציפה, לכן בטופולוגיית הקופסה היא לא רציפה. לעומת זאת בטופולוגיית המכפלה היא אכן רציפה.

הגדרה 3.11 (הומיאומורפיזם) הומיאומורפיזם בין שני מרחבים טופולוגיים X, Y היא העתקה $f : X \rightarrow Y$ כך ש- f חד-חד ערכית ועל, רציפה ו- f^{-1} רציפה אף היא.

X ו- Y יקראו הומיאומורפיזם אם יש הומיאומורפיזם $f : X \rightarrow Y$ ביניהן.

אנו נרצה להסתכל על הומיאומורפיזם כאיזומורפיזם של מרחבים טופולוגיים.

דוגמה 3.3 נגדיר $X = \mathbb{R}, Y = (0, 1)$ ואת $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ המוגדרת על-ידי $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$, אז,

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

ולכן f גזירה, ואף חד-חד ערכית, לבסוף $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ ולכן היא גם על, ואכן המרחבים הומיאומורפיזם.

דוגמה 3.4 נגדיר את $\eta = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ ואת $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. נגדיר גם $\psi : \eta \rightarrow D$ על-ידי $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. ההוכחה כי זהו אכן הומיאומורפיזם מושארת לקורא.

נבחין כי הדוגמה האחרונה אינה אלא העתקת מבוס, העתקה קונפורמית ואנליטית.

דוגמה 3.5 נבחן את $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ואת $J = [0, 2\pi]$, אנו טוענים כי אין הומיאומורפיזם בין שני המרחבים הללו.

נבחן את הפונקציה $t \mapsto e^{it}$ לדוגמה, $[0, 2\pi] \rightarrow S^1$ לא חד-חד ערכית, מהצד השני $[0, 2\pi] \rightarrow S^1$ חד-חד ערכית ועל, אבל

נניח שיש העתקה חד-חד ערכית $\alpha : J \rightarrow S^1$, ונציא מ- J נקודה יחידה, אז נקבל איחוד זר של שתי קבוצות זרות, אך מן הצד השני הוצאת נקודה יחידה מהמעגל משאיר אותו כקבוצה קשירה. ההוכחה המלאה אומנם סבוכה יותר, אך הצבענו פה על הבדל מהותי בין שני המרחבים.

תרגיל 3.3 הראו כי \mathbb{R} ו- \mathbb{R}^2 לא הומיאומורפיזם.

האם גם \mathbb{R}^2 ו- \mathbb{R}^3 הומיאומורפיזם?

הגדרה 3.12 (העתקה פתוחה וסגורה) העתקה $f : X \rightarrow Y$ תיקרא העתקה פתוחה (סגורה) אם לכל $U \subseteq X$ פתוחה (סגורה) מתקיים $f(U) \subseteq Y$ פתוחה (סגורה) ב- Y .

דוגמה 3.6 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי $f(x) = x^2$ היא רציפה, סגורה ולא פתוחה.

דוגמה 3.7 השיכון $\mathbb{R} \hookrightarrow (0, 1)$ המוגדר על-ידי $x \mapsto x$ הוא רציף, תפוח אבל לא סגור.

דוגמה 3.8 $\{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$ המוגדרת טריוויאלית היא פתוחה, סגורה אך לא רציפה.

הגדרות ומשפטים

3	הגדרה 1.1 (מרחב מטרי)
3	הגדרה 1.2 (רציפות)
3	הגדרה 1.3 (כדור)
3	הגדרה 1.4 (קבוצה פתוחה)
3	הגדרה 1.5 (הגדרה שקולה לרציפות)
3	הגדרה 1.6 (טופולוגיה)
3	הגדרה 1.7 (מרחב טופולוגי)
3	הגדרה 1.9 (קבוצה סגורה)
4	הגדרה 1.10 (בסיס לטופולוגיה)
4	טענה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי)
4	טענה 1.14 (טופולוגיית מכפלה)
6	הגדרה 2.1 (טופולוגיית מכפלה)
6	הגדרה 2.2 (העתקות הטלה)
6	הגדרה 2.3 (תת-בסיס לטופולוגיה)
6	הגדרה 2.4 (טופולוגיה חלשה)
6	הגדרה 2.5 (מטריקת מכפלה)
8	הגדרה 3.1 (סגור של קבוצה במרחב טופולוגי)
8	הגדרה 3.4 (פנים ושפה)
8	הגדרה 3.5 (סביבה של נקודה)
8	הגדרה 3.6 (נקודת הצטברות)
9	טענה 3.9 (שקילות לרציפות)
10	הגדרה 3.10 (מרחב כוויץ)
10	הגדרה 3.11 (הומיאומורפיזם)
10	הגדרה 3.12 (העתקה פתוחה וסגורה)