פתרון מטלה 2 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

30 באוקטובר 2025

שאלה 1

יהי (E,V,t) מרחב אפיני ממימד n מעל $\mathbb{F}$.

סעיף א'

נראה שהאוסף $E \supseteq \{P_i\}_{i\in I}$ בלתי־תלוי אפינית אם ורק אם לכל $i \in I$ האוסף $V \supseteq \{P_j - P_i\}_{i\neq j\in I}$ בלתי־תלויה לינארית מעל V.

הוכחה. נניח ש־$\{P_i\}$ בלתי־תלוי אפינית ויהי $i \in I$. נניח בשלילה גם ש־$B = \{P_j - P_i\}_{i\neq j\in I}$ היא תלויה לינארית, ובפרט נניח שמתקיים,

$$P_0 - P_i \in \mathrm{Sp}\{P_j - P_i \mid j \in I \setminus \{0, i\}\}$$

כאשר $I \ni 0 \neq i$ בלי הגבלת הכלליות. נזכור שמתקיים $P_0 \notin \langle P_j \mid j \neq i\rangle = P_i + W$ מאי־התלות האפינית, כאשר $W \leq V$. אבל $P_0 - P_i \in W$ מהטענה שראינו זה עתה, ולכן בפרט $P_0 \notin P_i + W$ בסתירה, ולכן הקבוצה לא תלויה לינארית.

נניח עתה את הכיוון ההפוך. נראה שמתקיים $P_0 \notin \langle P_j \mid j \neq 0\rangle = P_i + W$ עבור $W \leq V$. נניח בשלילה שאכן $P_0 \in P_i + W$, כלומר קיים $u \in W$ כך שמתקיים $P_0 = P_i + u$, כלומר $P_0 - P_i = u$. אבל הנחנו ש־$u \in \{P_j - P_i \mid j \neq i\}$ היא בלתי־תלויה לינארית, וזו סתירה. □

סעיף ב'

נראה ש־$\{P_i\}_{0\leq i\leq k}$ בלתי־תלויה אפינית אם ורק אם $\dim \langle P_i\rangle_{i\leq k} = k$.

הוכחה. נניח שהקבוצה בלתי־תלויה אפינית, ולכן $\langle P_i \mid i \leq k\rangle = P_0 + W$ עבור $W \leq V$ ומהסעיף הקודם $\dim W = k$.

בכיוון ההפוך נניח ש־$\dim W = k$. אבל בקבוצה $B = \{P_i - P_0 \mid 0 < i \leq k\}$ יש בדיוק k איברים ולכן $W = \mathrm{Sp}\, B$ מקיים את תנאי סעיף א' ונקבל ש־$\{P_i \mid i \leq k\}$ בלתי־תלויה אפינית. □

סעיף ג'

נראה ש־$\{P_i\}_{0\leq i\leq n}$ בסיס אפיני של E אם ורק אם לכל $i \in I$ מתקיים,

$$(P_i, (P_0 - P_i, \ldots, P_n - P_i))$$

היא מערכת יחוס של E.

הוכחה. נניח ש־$(P_0, \ldots, P_n)$ בסיס אפיני ולכן $\langle P_0, \ldots, P_n\rangle = P + V$ עבור $P_i \in E$ כלשהי (נובע מסעיף ב'), עבור $i \in I$ נתון. נסיק מסעיף א' ש־$V = \mathrm{Sp}\{P_0 - P_i, \ldots, P_n - P_i\}$ ולכן נקבל מערכת יחוס.

בכיוון ההפוך מהגדרת מערכות יחוס נקבל ש־$\mathrm{Sp}\{P_0 - P_i, \ldots, P_n - P_i\} = V$ ולכן $P_i + V = E$, ובפרט מהנתון אודות כל i נקבל מסעיף א' ש־$\{P_i\}$ בסיס אפיני של E. □

שאלה 2

יהיו $(E,V),(F,U),(G,W)$ שלושה מרחבים אפיניים מעל השדה $\mathbb{F}$. תהיינה $f:E\to F, g:F\to G$ העתקות אפיניות.
נראה ש־$g\circ f:E\to G$ העתקה אפינית המקיימת $d(g\circ f)=(dg)\circ(df)$.

הוכחה. נסמן $g\circ f$, נתחיל להראות ש־dh מוגדרת היטב, כלומר שלכל $u\in V$ מתקיים $h(P+u)-h(P)=h(Q+u)-h(Q)$.

$$h(P+u)-h(P)=g(f(P+u))-h(P)=g(f(P)+df(u))-h(P)=g(f(P))+dg(df(u))-h(P)=dg(df(u))$$

הביטוי לא תלוי ב־P ולכן הפונקציה מוגדרת היטב ונבחין כי היא גם לינארית כהרכבת העתקות לינאריות. נסיק בהתאם ש־h היא העתקה אפינית, וישירות מהגדרת dh נקבל מהחישוב שעשינו ש־$dh=(dg)\circ(df)$. □

שאלה 3

תהיינה $f^1,\dots,f^m:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}$ ותהי $f:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ המוגדרת על־ידי $f(x)=(f^1(x),\dots,f^m(x))^t$.

סעיף א׳

נוכיח ש־f לינארית אם ורק אם $f^1,\dots,f^m$ העתקות לינאריות.

הוכחה. נגדיר את ההעתקה הלינארית $H_k:\mathbb{F}^m\to\mathbb{F}$ המוגדרת על־ידי $H_k(x_1,\dots,x_m)=x_k$. זוהי העתקת הטלה וידוע שהיא לינארית. נבחין כי מתקיים $H_k\circ f\equiv f^k$ לכל k, אבל f לינארית מהנחה ו־H_k לינארית ולכן ההרכבה שלהן היא לינארית, כלומר f^k לינארית לכל $1\le k\le n$.

נניח ש־$f^1,\dots,f^n$ לינאריות. נראה ש־f לינארית ישירות מהגדרה. נניח ש־$x,y\in\mathbb{F}^n$ וכן ש־$\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, אז מתקיים,

$$f(\alpha x+\beta y)=\begin{pmatrix}f^1(\alpha x+\beta y)\\ \vdots\\ f^m(\alpha x+\beta y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha f^1(x)+\beta f^1(y)\\ \vdots\\ \alpha f^m(x)+\beta f^m(y)\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}f^1(x)\\ \vdots\\ f^m(x)\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}f^1(y)\\ \vdots\\ f^m(y)\end{pmatrix}=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

ולכן f לינארית. □

סעיף ב׳

נוכיח ש־f העתקה אפינית אם ורק אם $f^1,\dots,f^m$ העתקות אפיניות.

הוכחה. נניח ש־f אפינית. מההנחה נסיק שאם $P\in E$ אז $f(P+x)-f(P)$ היא העתקה לינארית. אם נשתמש שוב ב־H_k כמו בסעיף הקודם נקבל ש־$f_k(P+x)-f_k(P)$ אף היא העתקה לינארית. לבסוף מאי־שתלות בבחירת נקודה של f נוכל להסיק שגם אין תלות בבחירת נקודה ב־f_k, כלומר ההעתקה היא אכן אפינית. נעיר את ההערה החשובה שעלינו לבנות את H_k כדיפרנציאל של העתקה אפינית כלשהו, נעשה זאת על־ידי הגדרת ההעתקה $Q\mapsto Q+H_k(Q-P)$.

בכיוון ההפוך נניח ש־$f^1,\dots,f^n$ אפיניות, ותהי $P\in E$, אז,

$$f(P+u)-f(P)=\begin{pmatrix}f^1(P+u)-f^1(P)\\ \vdots\\ f^m(P+u)-f^m(P)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}df^1\\ \vdots\\ df^m\end{pmatrix}$$

ונקבל שהדיפרנציאל הוא לינארי ולא תלוי ב־P, ולכן f אפינית. □

שאלה 4

יהיו $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו־$b \in \mathbb{A}^m$.

סעיף א׳

נראה ש־$f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ המוגדרת על־ידי $f(x) = b + Ax$ היא העתקה אפינית.

הוכחה. תהי $P \in \mathbb{F}^n$ ונחשב,

$$f(P + x) - f(P) = b + A(P + x) - b - A(P) = AP + Ax - AP = Ax$$

כלומר מצאנו ש־df לינארית ולא תלויה בבחירת נקודה, ולכן f אפינית. $\square$

סעיף ב׳

נראה כי כל העתקה אפינית $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ מקיימת $f \equiv x \mapsto b + Ax$ עבור b, A כלשהן.

הוכחה. נתון ש־$T = df$ היא העתקה לינארית $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, ולכן היא שקולה למכפלה במטריצה $n \times m$, נסמן מטריצה זו ב־A. נסמן גם $b = f(0)$, ונרצה להראות ש־$f(x) = b + Ax$. נבחין כי $f(x) = f(0 + x) = f(0) + df(x) = b + Ax$, ולכן מאינווריאנטיות נסיק את הטענה. $\square$

סעיף ג׳

נניח ש־$m = n$ ונוכיח ש־f איזומורפיזם אפיני אם ורק אם $A \in GL_n(\mathbb{F})$.

הוכחה. נניח ש־f איזומורפיזם ונניח ש־$g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ מעידה על כך, כלומר $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$. אז מתקיים $g(x) = b' + A'x$ כמסקנה מסעיף ב׳. מתקיים,

$$g(f(0)) = 0 \iff g(b) = 0 \iff b' + A'b = 0 \iff b' = -A'b$$

ובאותו אופן,

$$0 = f(g(0)) = b + A(b') \iff b = -Ab'$$

וכן,

$$x = g(f(x)) = g(b + Ax) = b' + A'b + A'Ax = b' - b' + A'Ax = A'Ax$$

ושוב באופן שקול נסיק שגם $AA'x = x$, כלומר $A' = A^{-1}$ ולכן $A \in GL_n(\mathbb{F})$.

נניח עתה ש־$A \in GL_n(\mathbb{F})$ ונגדיר $A' = A^{-1}$ וכן $b' = -A'b$ ואת ההעתקה $g(x) = b' + A'x$. מתקיים,

$$f(g(x)) = b + A(b' + A'x) = b + Ab' + AA'x = b - AA'b + x = x$$

ובאותו אופן בדיוק נקבל שגם $g(f(x)) = x$, כלומר $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$, ונובע ש־$f$ איזומורפיזם אפיני. $\square$

שאלה 5

נמצא $P \in L$ ו־$W \leq \mathbb{Q}^4$ כך ש־$P + W$ תהיה תת־יריעה אפינית הכוללת את פתרונות המערכת,

$$\begin{array}{cccc} x & +2y+z & -w= & 6 \\ -2x & -4y-z & +w= & -9 \\ x & +2y+z & = & 4 \end{array}$$

פתרון תחילה נדרג תחילה נדרג לצורך פישוט,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & -1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

ולכן נסיק ש־$x + 2y = 3$, $z = 1, w = -2$. בהתאם נגדיר $P = (3, 0, 1, -2)$ וכן $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{Q}^4 \mid x + 2y = 0\} = \operatorname{Sp}\{(-2, 1, 0, 0)\}$.