פתרון מטלה 09 — אנליזה פונקציונלית, 80417

7 ביוני 2025

שאלה 1

תהינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות רימן ומחזוריות, ונניח ש־$x_0\in[-\pi,\pi]$. נניח גם ש־$f\equiv g$ בסביבה של x_0. נסמן S_N^f,S_N^g סכום פורייה מסדר N של f,g.

נראה ש־$\lim_{N\to\infty}S_N^f(x_0)=L$ אם ורק אם $\lim_{N\to\infty}S_N^g(x_0)=L$.

הוכחה. נניח ש־$\lim_{N\to\infty}S_N^f(x_0)=L$. נבחין כי $h=f-g$ מקיימת $h\equiv 0$ בסביבת x_0. בפרט הגבול שלה ב־x_0 הוא 0 בלבד. בנוסף,

$$|h(x_0+u)-h(x_0)|=0\le u$$

ונקבל שתנאי ליפשיץ חל, ובהתאם,

$$\lim_{N\to\infty}S_N^{f-g}(x_0)=h(x_0)=0$$

אבל אנו יודעים כי $S_N^{f-g}=S_N^f-S_N^g$ מתכונות ולכן למעשה קיבלנו,

$$\lim_{N\to\infty}S_N^f(x_0)-S_N^g(x_0)=0$$

ולכן מההנחה נובע ש־$\lim_{N\to\infty}S_N^g(x_0)=L$ גם כן.

מטעמי סימטריה ההוכחה עבור הכיוון השני זהה. $\square$

שאלה 2

נוכיח שקיים קבוע $C > 0$ כך שלכל $N > 1$ מתקיים,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(u)|\,du \geq C\ln(N-1)$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(u)|\,du &= \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{u}{2}}\right|\,du \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})u)|}{2\sin\frac{u}{2}}\,du - \int_{-\pi}^{0} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})u)|}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})u)|}{\sin\frac{u}{2}}\,du \\
&\leq \int_{0}^{\pi} \frac{(N+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\,du \\
&= (N+\frac{1}{2})\int_{0}^{\pi} \frac{u}{\sin\frac{u}{2}}\,du
\end{aligned}$$

.

□