גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית — סיכום

3 בנובמבר 2025

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 20.10.2025

1.1 מבוא

גאומטריה היא אבן יסוד של החברה שלנו, והיא לוקחת חלק בכל תהליך בנייה תכנון ומדידה. לאורך ההיסטוריה היה חקר של גאומטריה באיזשהו אופן נאיבי, אך אנו נעסוק בחקר של הגאומטריה באופן האקסיומטי שלה. אנו נעסוק בחקר של צורות חלקות, כלומר שאפשר ללטף אותן, תוך שימוש בכלים שראינו באנליזה. הרעיון בקורס הוא לגשת בצורה אלמנטרית לבעיות לאו דווקא מורכבות בגישה שהיא גאומטרית. הצורות שנחקור הן יריעות, ככל הנראה יריעות חלקות.

1.2 הגישה הסינתטית

המתמטיקה המודרנית מתבססת על תורת הקבוצות, לכן עלינו לספק הגדרה קבוצתית הולמת למושג המישור.

הגדרה 1.1 (ישרים מקבילים) *שני ישרים נקראים מקבילים אם הם מתלכדים או אינם נחתכים.*

הגדרה 1.2 (קולינאריות) *נאמר שקבוצה של נקודות הן קולינאריות כאשר כל הנקודות שייכות לישר אחד.*

הגדרה 1.3 (מישור אפיני) *זוג סדור $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ כאשר $\mathcal{P}$ קבוצה שאת ערכיה נכנה נקודות ו־$\mathcal{L}$ קבוצה של קבוצות של נקודות, אותן נכנה ישרים. זוג סדור זה יקרא מישור אפיני אם הוא מקיים את התכונות הבאות,*

1. לכל שתי נקודות יש ישר יחיד המכיל את שתיהן
2. לכל ישר ונקודה קיים ישר יחיד מקביל לישר העובר דרך הנקודה
3. קיימות שלוש נקודות שאינן קולינאריות

נעבור למשפט יסודי שמדגים את אופי המישור האפיני.

משפט 1.4 (מספר נקודות מינימלי במישור אפיני) *יהי מרחב אפיני $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, אז ב־$\mathcal{P}$ לפחות 4 נקודות.*

הוכחה. יהיו $P, Q, R \in \mathcal{P}$ נקודות שונות ולא קולינאריות. נסמן גם $l = \langle P, Q \rangle, m = \langle P, R \rangle$ שני הישרים העוברים דרך הנקודות המתאימות. נסמן את $P \ni m' \parallel m, R \ni l' \parallel l$, וגם את $\{S\} = l' \cap m'$ עבור $S \in P$. אנו טוענים כי S קיימת וכי היא נקודה רביעית.

נטען טענת עזר, והיא ש־$l' \not\parallel m'$. אילו $l' \parallel m'$ אז מטרנזיטיביות יחס השקילות המושרה מיחס ההקבלה היה נובע כי $l \parallel l' \parallel m' \parallel m$, אבל אז מהתכונה השנייה של מישור אפיני היה מתקבל ש־$l = m$ בסתירה לבחירת P, Q, R.

אם $S \in \{P, Q\}$ אז היה נובע ש־$l = l'$ ולכן גם $R \in l$, בסתירה. אם באופן שקול $S \in \{P, R\}$ אז נקבל סתירה דומה, ולכן נותר להניח ש־S קיימת ושונה מ־P, Q, R. □

שני התרגילים הבאים יאפשרו לנו לתרגל את הגישה הסינתטית,

תרגיל 1.1 הוכיחו כי כל ישר מכיל לפחות שתי נקודות שונות.

תרגיל 1.2 הוכיחו כי יחס ההקבלה בין ישרים הוא יחס שקילות.

נבחן את המודל אשר כולל את P, Q, R, S ואת הישרים $l, l', m, m', \langle Q, R \rangle, \langle P, S \rangle$. זהו המודל המינימלי אשר עומד בהגדרת המישור האפיני, ולמעשה מהווה הדוגמה הפשוטה ביותר לאחד כזה.

1.3 הגישה האנליטית

עתה כאשר בחנו את המישור מבחינה סינתטית אנו יכולים לעבור לבחון את המרחב באופן אנליטי.

הגדרה 1.5 (מודל אנליטי) *יהי $\mathbb{F}$ שדה ונסמן $\mathcal{P} = \mathbb{F}^2$ וכן את הישרים שהם קבוצת השורשים של משוואות מהצורה $ax + by + c = 0$ עבור $a, b, c \in \mathbb{F}$ ו־$a, b \neq 0$. במקרה זה ישרים מקבילים אם ורק אם a, b המגדירים את הישרים שווים.*

1.4 מרחבים אפיניים

נראה עתה את ההגדרה שתאפשר לנו לדון במרחבים, בנקודות ובכיוונים, קרי ווקטורים.

הגדרה 1.6 (מרחב אפיני) יהי $\mathbb{F}$ שדה. מרחב אפיני נתון על־ידי שלשה (E,V,t) כאשר E קבוצה של נקודות, V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ו־$t : E \times V \to E$ אשר מסומנת גם $(P,v) \mapsto P+v$. t מלשון translation, היא פונקציית ההזזה, מקיימת את התכונות הבאות,

1. אסוציאטיביות: $(P+v)+w = P+(v+w)$ לכל $P \in E, v,w \in V$
2. איבר נייטרלי: $P+0=P$ לכל $P \in E$
3. חד־חד ערכיות ברכיב השני: לכל $P,Q \in E$ קיים $v \in V$ יחיד כך שמתקיים $P+v=Q$, נסמן $v = \overrightarrow{PQ}$

סימון 1.7 נסמן את ההשמה החלקית של t על־ידי t_P עבור $P \in E$ נתונה, כלומר,

$$t_P(v) = t(P,v) = P+v$$

דוגמה 1.1 יהיו $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ו־$f : I \to \mathbb{R}$ רציפה.
נסמן $E = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F' = f\}$ וכן $V = \mathbb{R}$, ולבסוף גם $(F,c) \mapsto F+c$.
אז זהו מרחב אפיני, והמימד שלו הוא בדיוק 1.

2 שיעור 2 — 21.10.2025

2.1 מרחבים אפיניים — המשך

נמשיך לראות דוגמות למרחבים אפיניים.

דוגמה 2.1 נבחר את,

$$E = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{F}^n \mid x^1 + \dots + x^n = 1\}$$

יחד עם,

$$V = \{(\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{F}^n \mid \xi^1 + \dots + \xi^n = 0\}$$

ופונקציית ההזזה,

$$t(x, \xi) = x + \xi = (x^1 + \xi^1, \dots, x^n + \xi^n)$$

זהו מרחב אפיני, ההוכחה שזהו המצב מושארת לקורא.

דוגמה 2.2 אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ אז (V, V, t) עבור $t : V \times V \to V$ המוגדרת על־ידי סכום, הוא מרחב אפיני.

נעצור עתה ונגיד שמרחב אפיני באיזשהו מובן הוא מרחב וקטורי, אבל ללא הקונספט של ראשית, ובכך הוא מאפשר גמישות רבה יותר, בהמשך נראה שהקשר בין המונחים חזק אף יותר, ושאחד משרה את השני.
המרחב האפיני מורכב מפונקציית התרגום, אנו רוצים לשאול את השאלה ההפוכה עתה, מהו הווקטור היחיד שמתרגם נקודה לנקודה אחרת. בהתאם, ניגש להגדרה הבאה.

הגדרה 2.1 (פונקציית הפרש) יהי מרחב אפיני (E, V, t), פונקציה $v : E \times E \to V$ תיקרא פונקציית הפרש אם לכל $P, Q \in E$ מתקיים,

$$t(P, v(P, Q)) = Q$$

כלומר היא הפונקציה שמתאימה לנקודות P ו־Q את הווקטור היחיד w המקיים $P + w = Q$.
נסמן גם $v(P, Q) = Q - P$.

סימון 2.2 נגדיר $v_P : E \to V$ להשמה החלקית $v_P(Q) = v(P, Q) = Q - P$.

הערה אם $v, v' : E \times E \to V$ שתי פונקציות הפרש, אז מתקיים,

$$\forall P, Q \in E,\ v(P, Q) = v'(P, Q)$$

ישירות מהגדרת המרחב האפיני, לכן נאמר על v שהיא פונקציית ההפרש היחידה והייחודית למרחב.

טענה 2.3 (תכונות של פונקציית ההפרש) *אם $v : E \times E \to V$ פונקציית ההפרש אז מתקיים,*

1. *לכל $P, Q, R \in E$ מתקיים $(Q - P) + (R - Q) = R - P$*
2. *לכל $P \in E$ הפונקציה $v_P : E \to V$ המוגדרת על־ידי $v_P(Q) = Q - P = v(P, Q)$ היא פונקציה חד־חד ערכית ועל*

הוכחה. 1. ישירות מאקסיומות מרחב אפיני,

$$P + ((Q - P) + (R - Q)) = (P + (Q - P)) + (R - Q) = Q + (R - Q) = R$$

2. עבור $w \in V$ תהי $Q = P + w$ אז,

$$v_P(Q) = Q - P = v$$

ולכן הפונקציה היא על. נניח ש־$v_P(Q) = v_P(R)$ עבור $R \in E$, אז,

$$Q - P = R - P \implies Q = P + (Q - P) = P + (R - P) = R$$

וקיבלנו חד־חד ערכיות. □

נבחין כי בזמן שפונקציית ההפרש שוברת את הסימטריה שהתרגלנו אליה בפונקציית התרגום, אך היא מהווה משלים שלה, הטענה הבאה מציגה לנו את הקשר ההדוק שבין הרעיונות.

טענה 2.4 *עבור $P \in E$ הפונקציות v_P ו־t_P הן הופכיות אחת לשנייה.*

הוכחה.

$$E \overset{v_P}{\mapsto} V \overset{t_P}{\mapsto} E$$

לכל $Q \in E$ מתקיים,

$$Q \mapsto Q - P \mapsto P + (Q - P) = Q$$

וכן,

$$V \overset{t_P}{\mapsto} E \overset{v_P}{\mapsto} V$$

ומתקיים,

$$v \mapsto P + v \mapsto (P + v) - P = v$$

□

עתה אנו רוצים להגדיר מרחב וקטורי מעל המרחב האפיני שלנו, נבחן את $E \times E$ ונמפה את הנקודות ל־$V \times V$ על־ידי שימוש ב־$v_P \times v_P$. נבחן את,

$$E \times E \xrightarrow{v_P \times v_P} V \times V \xrightarrow{+} V \xrightarrow{t_P} E \xleftarrow{+} E \times E$$

כלומר, נבחן את המיפוי,

$$(Q, R) \mapsto (Q - P, R - P) \overset{+}{\mapsto} (Q - P) + (R - P) \overset{t_P}{\leftarrow} P + (Q - P) + (R - P)$$

מכאן יש לנו הפתח להגדרה הבאה. את המבנה הזה נהוג לכנות $E_P = (E, P, +_P, \cdot_P)$ וזהו אכן מרחב וקטורי.

הגדרה 2.5 (מרחב וקטורי מושרה מנקודה) יהי (E, V, t) מרחב אפיני ותהי $P \in E$ נקודה כלשהי. עבור $+_P : E \times E \to E$ המוגדרת על־ידי,

$$\forall Q, R \in E,\ Q +_P R = Q + R - P$$

ו־$\cdot_P : \mathbb{F} \times E \to E$ המוגדרת על־ידי,

$$\forall \alpha \in F, Q \in E,\ \alpha \cdot_P Q = \alpha \cdot (Q - P) + P$$

המרחב $(E, P, +_P, \cdot_P)$ הוא מרחב וקטורי המושרה מהמרחב האפיני והנקודה.

תרגיל 2.1 הוכיחו כי זהו אכן מרחב וקטורי.

2.2 תתי־מרחבים אפיניים

כבר ראינו שמרחב אפיני באיזשהו עולם מתנהג ומדבר בשפה של מרחבים וקטוריים, ובדיוק כמו בהם, גם כאן נרצה לעסוק בתת־מרחבים, נתחיל בהגדרת תת־המרחב האפיני.

הגדרה 2.6 (תת־מרחב אפיני) יהי מרחב אפיני (E, V). קבוצה $L \subseteq E$ תיקרא תת־מרחב אפיני אם $L = \emptyset$ או שקיימים $P \in L$ ו־$W \leq V$ כך שמתקיים,

$$L = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$$

נקרא גם יריעה אפינית או יריעה לינארית, ולמעשה נשתמש בשמות אלה יותר.

דוגמה 2.3 נבחן את $E = \mathbb{R}^2$ ונגדיר את,

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

נבחין כי L הוא לא תת־מרחב של המרחב הלינארי E, אך אנו לא בוחנים את E ואת L כמרחבים לינאריים, אלא כמרחבים אפיניים. במקרה זה אם נבחר את $W = \mathrm{Sp}\{(1, -1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \leq \mathbb{R}^2$ וכן את $P = (0, 1)$ אז נקבל $L = P + W$.

הערה אם $L = P + W$ תת־מרחב אפיני, אז,

$$W = L - P = \{Q - P \mid Q \in L\}$$

בהתאם גם $Q = P + w \implies Q \in L$ עבור $w \in W$ כלשהו, נובע ש־$Q - P = w \in W$.

משפט 2.7 (**יחידות תת־מרחב לינארי פורס**) *$P + W = Q + W'$ עבור $P, Q \in E$ ו־$W, W' \leq V$ אם ורק אם $W = W'$ ו־$Q - P \in W$.*

ההוכחה מושארת במסגרת התרגילים הבאים.

תרגיל 2.2 הוכיחו כי $P+W=Q+W$ אם ורק אם $Q-P\in W$.

תרגיל 2.3 הוכיחו כי אם $R+W=R+W'$ אז נובע ש־$W=W'$.

הגדרה 2.8 (מרחב משיק) $W=W(L)$ נקרא מרחב הכיוונים או המרחב המשיק של L.

בהתאם נסמן $\dim_{\mathbb{F}} L=\dim_{\mathbb{F}} W$ כמימד תת־המרחב.

תרגיל 2.4 הוכיחו כי חיתוך של תתי־יריעות הוא תת־יריעה.

הגדרה 2.9 אם $S\subseteq E$ קבוצה של נקודות, אז נאמר ש־L הוא תת־היריעה האפינית הנוצרת על־ידי S אם L הוא היריעה המינימלית במימדה המכילה את כלל הנקודות.

דוגמה 2.4 אם $E=\mathbb{R}^2$ אז תת־היריעה הנוצרת על־ידי $\{(0,0)\}$ היא היריעה $\{(0,0)\}$, תת־היריעה הנוצרת על־ידי $\{(0,1),(1,0)\}$ היא היריעה $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y=0\}$.

הגדרה 2.10 קבוצה של נקודות תיקרא בלתי־תלויה אפינית אם אין נקודה ששייכת למרחב האפיני שנוצר על־ידי יתר הנקודות.

דוגמה 2.5 במרחב $\mathbb{R}^3$ הקבוצות הבאות בלתי־תלויות אפינית:

$$\{(0,1,0)\},\quad \{(0,1,0),(1,0,0)\},\quad \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$$

אך לא יכול להיות שתהיה קבוצה בגודל 4 כזו אם הנקודות הן לא קולינאריות.

משפט 2.11 *יהי (E,V) מרחב אפיני. תהי $(P_1,\dots,P_r)$ סדרת נקודות ב־E ותהי $(\lambda^1,\dots,\lambda^n)$ סדרת סקלרים ב־$\mathbb{F}$ עם התכונה ש־$\lambda^1+\cdots+\lambda^n=1$. אז לכל $P_0,P_0'\in E$ מתקיים,*

$$P_0+\lambda^1(P_1-P_0)+\lambda^2(P_2-P_0)+\cdots+\lambda^r(P_r-P_0)=P_0'+\lambda^1(P_1-P_0')+\lambda^2(P_2-P_0')+\cdots+\lambda^r(P_r-P_0')$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}&P_0+\lambda^1(P_1-P_0)+\lambda^2(P_2-P_0)+\cdots+\lambda^r(P_r-P_0)\\=&P_0'+(P_0-P_0')+\lambda^1((P_1-P_0')+(P_0'-P_0))+\cdots+\lambda^r((P_r-P_0')+(P_0'-P_0))\\=&P_0'+(P_0-P_0')+(\lambda^1+\cdots+\lambda^r)(P_0'-P_0)+\lambda^1(P_1-P_0')+\cdots+\lambda^r(P_r-P_0')\end{aligned}$$

□

סימון 2.12 נסמן את הנקודה היחידה הזו שאיננה תלויה בראשית בסימון $\lambda^1P_1+\cdots+\lambda^rP_r$.

זה נקרא צירוף אפיני והוא התחליף שלנו לצירופים לינאריים, והוא אף סגור להם.

3 שיעור 3 — 27.10.2025

3.1 העתקות אפיניות

עד כה יש לנו את המרחב האפיני (E,V), ונגדיר את המודל הסטנדרטי.

הגדרה 3.1 (מודל אפיני סטנדרטי) נסמן $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}^n, \mathbb{R}^n)$ כאשר $\mathbb{A}^n = \mathbb{R}^n$, ונסמן את הערכים בו בעזרת $(x, \xi) \in \mathbb{A}^n$. פונקציית הצירוף תוגדר על־ידי חיבור.

עתה נעבור לעסוק בהעתקות משמרות מבנה.

הגדרה 3.2 (העתקה אפינית) נניח ש־$(E,V),(F,U)$ מעל שדה משותף $\mathbb{F}$. העתקה אפינית, המסומנת $E \to F$, נתונה על־ידי זוג פונקציות $f : E \to F$ ו־$\varphi : V \to U$ העתקה לינארית, כך שמתקיים,

$$\forall P \in E \forall v \in V,\ f(P+v) = f(P) + \varphi(v)$$

הערה תוך שימוש בהגדרה הדואלית שלנו נסיק שמתקיים, $f(P+v) - f(P) = \varphi(v) \iff f(P+v) = f(P) + \varphi(v)$. נובע אם כך ש־$\varphi$ נקבעת ביחידות עבור הפונקציה f.

סימון 3.3 נסמן $df = \varphi$ ונאמר ש־φ היא הדיפרנציאל של f.

הסיבה שאנחנו קוראים ל־φ כך היא שפונקציות f שונות יכולות להיות בעלות דיפרנציאל זהה, והן תיבדלנה בקבוע בלבד, כלומר הדיפרנציאל מתנהג כפי שהיינו מצפים מדיפרנציאל באנליזה. נעבור למספר דוגמות להעתקות אפיניות.

דוגמה 3.1 פונקציה קבועה, כלומר $f(P) = f(Q)$ לכל $P, Q \in E$. במקרה זה $\varphi \equiv 0_V$ או ש־$\varphi = 0_{\mathrm{Hom}(V,U)}$.

דוגמה 3.2 הזזות. נבחן את המקרה $E = F, V = U$, כלומר בבחינת אנדומורפיזם, לכל $w \in V$ נגדיר את ההעתקה $t_w : E \to E$ על־ידי $P \mapsto P + w$.

נבדוק שהיא אכן אפינית, אם $P \in E, v \in V$ אז,

$$t_w(P+v) - t_w(P) = (P+v) + w - (P+w) = (P+w) + v - (P+w) = v$$

כאשר,

$$(P+v) + w = P + (v+w) = P + (w+v) = (P+w) + v$$

ישירות מהאקסיומה השנייה ושימוש בקומוטטיביות החיבור במרחבים וקטוריים. כלומר $\varphi(v) = v$ לכל $v \in V$, או בסימון שלנו $dt_w = \mathrm{id}_V$.

דוגמה 3.3 פונקציות הומותטיות (homothecy). יהיו $O \in F, \lambda \in \mathbb{F}$, אז נגדיר את הפונקציה $h_{O,\lambda} : E \to F$ על־ידי ההכפלה של וקטור פי λ במרחקו מ־O, כלומר,

$$h_{O,\lambda}(P) = O + \lambda(P - O)$$

ומתקיים $dh_{O,\lambda} = \lambda\, \mathrm{id}_V$.

תרגיל 3.1 הוכיחו כי פונקציה הומותטית היא העתקה אפינית.

דוגמה 3.4 נניח ש־$E = \mathbb{A}^n$ וש־$F = \mathbb{A}^m$. נגדיר את ההעתקה $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ על־ידי,

$$x \mapsto A \cdot x + b$$

עבור $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{F})$ ו־$b \in F$. במקרה זה הדיפרנציאל הוא ההעתקה הלינארית המיוצגת על־ידי A.

תרגיל 3.2 הוכיחו שהרכבה של העתקות אפיניות היא אפינית.
הוכיחו שגם $d(g \circ f) = dg \circ df$.

הגדרה 3.4 (איזומורפיזם אפיני) $f : E \to F$ תיקרא איזומורפיזם אפיני אם קיימת העתקה אפינית $g : F \to E$ כך שמתקיים,

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

במקרה ש־$E = F$ נקרא להעתקה אוטומורפיזם אפיני, ונסמן ב־$\mathrm{Aut}(E)$ להיות חבורת האוטומורפיזמים מעל המרחב האפיני E.

3.2 יוצרים ובסיסים

הגדרה 3.5 (תת־יריעה נוצרת) נניח ש־$S \subseteq E$ תת־קבוצה, אז $\langle S\rangle \leq E$ היא תת־היריעה הנוצרת על־ידי S, והיא חיתוך כל היריעות המכילות את S,

$$\forall S, \subseteq L \leq E \implies \langle S\rangle \subseteq L$$

משפחה S של נקודות נקראת יוצרת של E אם $\langle S\rangle = E$.

הגדרה 3.6 (בסיס אפיני) $\{P_0, \dots, P_n\}$ תיקרא סדרה בלתי־תלויה אפינית כאשר $n = \dim\langle P_0, \dots, P_n\rangle$ ונכנה את $\{P_0, \dots, P_n\}$ בסיס אפיני ובלתי־תלוי אפינית.

נעבור עתה לדבר על קורדינטות.

הגדרה 3.7 (מערכת יחוס) יהי E ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$. מערכת יחוס מעל E נתונה על־ידי זוג $(O, \mathcal{B})$ כאשר $O \in E$ ו־$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס סדור של V.

טענה 3.8 *בהינתן מערכת יחוס $(O, \mathcal{B})$ לכל $P \in E$ קיימת הצגה יחידה $P = O + \sum_{i=1}^n b_i x^i$ עבור $x \in \mathbb{F}^n$.*

הגדרה 3.9 (קורדינטה) ל־$x = (x^1, \dots, x^n)$ היחיד כך ש־$P = O + \mathcal{B}x$ נקרא הקורדינטות של P במערכת הייחוס $(O, \mathcal{B})$.

4 שיעור 4 — 28.10.2025

4.1 קורדינטות — המשך

הגדרה 4.1 (מפה ופרמטריזציה למרחב וקטורי) אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ כך ש־$\dim V = n$, אז נכנה את ההעתקה $x : V \to \mathbb{F}^n$ מפה, העתקה כמובן תלויה בקורדינטה. המיפוי ההפוך $\mathbb{F}^n \to V$ יכונה פרמטריזציה של V.

משפט 4.2 (מרחב וקטורי מושרה) *תהי V קבוצה ותהי $\mathrm{Coor}(V) = \{f : V \to \mathbb{F}^n \mid f \text{ is bijection}\}$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו, כך שמתקיים שלכל $x, y \in \mathrm{Coor}(V)$ מתקיים,*

$$y \circ x^{-1} \in GL_n(\mathbb{F})$$

בתנאים אלה ניתן להגדיר על הקבוצה V מבנה של מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ יחיד עם התכונה שלכל $x \in \mathrm{Coor}(V)$ הוא איזומורפיזם לינארי.

הוכחה. תהי $x \in \mathrm{Coor}(V)$. נגדיר את החיבור על־ידי,

$$+_V : V \times V \to V, \quad v +_V u = x^{-1}(x(v) +_{F^n} x(u))$$

וכן,

$$\cdot_V : \mathbb{F} \times V \to V, \quad \alpha \cdot_V u = x^{-1}(\alpha x(u))$$

נזכור ש־x הוא איזומורפיזם לינארי ולכן,

$$x(v + w) = x(x^{-1}(x(w) + x(v))) = x(v) + x(w)$$

ובאופן דומה,

$$x(\alpha u) = x(x^{-1}(\alpha x(u))) = \alpha \cdot x(u)$$

ונשאר לנו להראות שהפונקציות שקיבלנו הן יחידות, כלומר שאין משמעות לבחירת x. נניח ש־$y \in \mathrm{Coor}(V)$, ונרצה להראות שמתקיים,

$$x^{-1}(x(v) + x(w)) = y^{-1}(y(v) + y(w))$$

ובאופן דומה שוויון של הכפל. נסמן $y \circ x^{-1} = \lambda_Q$. נפעיל על שני הצדדים את הפונקציה y ונקבל,

$$y(v) + y(w) = y(x^{-1}(x(v) + x(w))) = \lambda_Q(x(v) + x(w))$$

אבל λ_Q היא לינארית ולכן נקבל,

$$y(v) + y(w) = \lambda_Q(x(v)) + \lambda_Q(x(w)) = y(v) + y(w)$$

ומצאנו שאכן יש שוויון. □

הגדרה 4.3 (מפה אפינית) יהי (E, V) מרחב אפיני n־מימדי. מערכת קורדינטות על A היא איזומורפיזם $x : E \to \mathbb{A}^n$ אפיני.
במקרה זה $x(u) = b + Au$ עבור $b \in \mathbb{A}^n$ ו־$A \in \mathrm{Aut}(V, \mathbb{F}^n)$. נגדיר גם את הקבוצה $GA_n(\mathbb{F})$ כקבוצת ה־x־ים הללו.

למשפט שראינו יש אנלוגיה לגרסה האפינית. הפעם במקום נקבע שתי נקודות כנקודות האפס ובכך נקבל שמתקיימים תנאי המשפט עבור המרחבים הווקטוריים.

5 שיעור 5 — 3.11.2025

5.1 מרחבים אפיניים ממשיים

בחלק זה והלאה נעסוק בממשיים, כלומר מעתה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. הדבר הראשון שנעסוק בו יהיה הנורמה.

הגדרה 5.1 (נורמה) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נורמה מעל V היא פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ המקיימת את התכונות,

1. חיוביות בהחלט: $\forall v \in V,\ 0 \le \|v\|$ וכן $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. הומוגניות: $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R},\ \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3. אי־שוויון המשולש: $\forall v, u \in V,\ \|v + u\| \le \|v\| + \|u\|$

נראה מספר דוגמות לנורמות במקרה $V = \mathbb{R}^p$.

דוגמה 5.1 $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_p|\}$, נורמת הסופרימום או נורמת אינסוף.

דוגמה 5.2 $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_p|$ היא נורמת 1.

דוגמה 5.3 הנורמה האוקלידית, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$.

במרחבים סופיים מעל $\mathbb{R}$ ישנו משפט הגורס כי כל הנורמות שקולות, כלומר לדוגמה $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le p\|x\|_\infty$.
באופן אנלוגי גם $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{p}\|x\|_\infty$.

הגדרה 5.2 (מטריקה) עבור קבוצה X נגדיר פונקציית מרחק, או מטריקה, כפונקציה $\rho : X^2 \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ כפונקציה המקיימת את התכונות:

1. חיוביות בהחלט: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. סימטריה: $\forall x, y \in X,\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. אי־שוויון המשולש: $\forall x, y, z \in X,\ \rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$

כל נורמה משרה מטריקה, כלומר כל מרחב נורמי הוא בפרט מרחב מטרי. יהי (E, V) מרחב אפיני מעל $\mathbb{R}$. אם על V מוגדרת נורמה אז על E מוגדרת פונקציית מרחק. כלומר, נוכל להשרות מרחק גם על מרחב אפיני.

הגדרה 5.3 (כדור) במרחב מטרי כללי (X, ρ) נגדיר כדור (פתוח) על־ידי,

$$B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

ונסמן לעתים את הכדור גם על־ידי $B_r(x) = B(x, r)$.

במקרה של נורמה כמובן נקבל את הטענה השקולה שמתקיים,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \|x - y\| < r\}$$

נזכיר גם את ההגדרות המשלימות לכדור פתוח.

הגדרה 5.4 (כדור סגור וספירה) נגדיר את הכדור הסגור על־ידי, $\overline{B}(x, r) = \overline{B(x, r)} = \{y \in X \mid \rho(x, y) \le r\}$.
באופן דומה נגדיר את הספירה, $S(x, r) = \partial B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) = r\}$.

נגדיר גם התכנסות במרחב אפיני.

הגדרה 5.5 (סדרה וסדרה מתכנסת) אם (E, V) מרחב אפיני מעל $\mathbb{R}$ וכן $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subseteq E$ סדרת נקודות.
נאמר שהסדרה מתכנסת לנקודה $P \in E$ כאשר $\lim_{n\to\infty} \|P_n - P\| = 0$ במובן הממשי.

ובהתאם נצטט משפט חשוב שיעזור לנו.

משפט 5.6 (התכנסות והתכנסות קורדינטה קורדינטה) *במקרה ש־$E = \mathbb{R}^p$ אם $\{x_n\}_{n=1}^\infty, l \subseteq \mathbb{R}^p$ סדרה ונקודה, אז מתקיים,*

$$x_n \to l \iff \forall i \le p,\ x_n^i \to l^i$$

כלומר, הסדרה מתכנסת אם ורק אם היא מתכנסת קורדינטה קורדינטה.

המשפט נובע ישירות מהטענה כי $|x_n^i - l^i| \le \|x_n - l\| \le C|x_n^i - l^i|$.

5.2 עקומים במרחב אפיני ממשי

הקונספט של עקומים במרחב הוא קונספט שקצת קשה לעתים לדבר עליו. עקום הרי הוא רעיון מאוד כללי. בשל כך, נתחיל בדיון על מסילות. לפני שניגש להגדרה הפורמלית נאמר שהמטרה שלנו היא לאפיין אובייקטים שהם קשירים מסילתית במרחב, וכן מהווים באיזשהו מובן תמונה של קטע, זאת אומרת שהם מתנהגים בערך כמו חוט שזז במרחב.

הגדרה 5.7 (מסילה (עקום פרמטרי) מסילה (עקום פרמטרי) ב־$\mathbb{A}^n$ היא פונקציה $\alpha : I \to \mathbb{A}^n$, עבור $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע וכך ש־α גזירה.
כלומר כשלכל $t \in I$ מתקיים,

$$\lim_{s \to 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = L$$

הוא גבול מוגדר וסופי. נסמן גבול זה ב־$\dot{\alpha}(t) = \alpha'(t)$ את ערך הנגזרת בנקודה כפונקציה של $t \in I$.
המסילה תיקרא **רגולרית** כאשר $\alpha'(t) \neq 0$ לכל $t \in I$.

כמובן, עתה משראינו את ההגדרה, נעבור לדוגמות.

דוגמה 5.4 כל הבאים הם מסילות:

1. ישרים (פרמטריים): אם $L \leq E$ ישר אז $L = P + \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ עבור $P \in E, v \in V$.
בהתאם נוכל להגדיר פונקציה $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ כך ש־$\alpha(t) = P + tv$. נבחין כי,
$$\alpha'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{P + (t+s)v - P - tv}{s} = v$$
ולכן המסילה רגולרית ובפרט $\alpha'(t) = v$.
2. נגדיר את $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ על־ידי $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ כאשר $0 < r \in \mathbb{R}$. זוהי מסילה כך שתמונתה היא מעגל ברדיוס r במישור.
הפעם נקבל ש־$\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, כלומר גם הפעם המסילה היא רגולרית.
דרך פשוטה במיוחד לראות זאת היא על־ידי בחינת $\|\alpha'(t)\| = r$.
באותו אופן נקבל שגם $\ddot{\alpha}(t) = \alpha''(t) = -r(\cos t, \sin t)$.
3. במרחב נגדיר את המסילה $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ על־ידי $\alpha(\cos t, \sin t, t)$, זוהי למעשה ספירלה. גם הפעם נוכל לראות כי זוהי מסילה רגולרית.

בעולם של יריעות, בפרט של מסילות, לא מעניינות אותנו תכונות שתלויות בפרמטריזציה, כלומר במסילה כפונקציה התלויה ב־t. אנו מבקשים לעסוק בתמונה, במסלול של המסילה, כלומר באובייקט $\operatorname{Im} \alpha \subseteq E$. המקרה הראשון שנתרכז בו הוא האורך של עקומה.

הגדרה 5.8 (אורך של מסילה) תהי $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ מסילה רגולרית. נגדיר את האורך של המסילה באופן הבא,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

זוהי הגדרה שאולי הגיונית גאומטרית, אבל נרצה להראות שהיא אכן מקיימת את הקונספט של מרחק. נגדיר הגדרה שבהמשך תוכיח את עצמה כשקולה.

הגדרה 5.9 תהי $\mathcal{P} = (t_0, \ldots, t_k)$ חלוקה של $[a, b]$, כלומר $t_0 = a, t_k = b$ ומתקיים $t_n < t_{n+1}$. בהינתן $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ מסילה, אז נגדיר את הישר הפוליגונלי כמסילה שנוצרת על־ידי סדרת הנקודות $(\alpha(t_0), \ldots, \alpha(t_k))$. אז נגדיר את האורך בהינתן החלוקה $\mathcal{P}$ על־ידי,

$$L_\alpha(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{k} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$$

ובהתאם ננסח את המשפט שמקשר את ההגדרות.

משפט 5.10 *אם $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ אז מתקיים,*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall \mathcal{P}, \ (\lambda(\mathcal{P}) < \delta) \implies (|L(\alpha) - L_\alpha(\mathcal{P})| < \varepsilon)$$

כלומר עבור על חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a, b]$ כך ש־$\Delta(\mathcal{P}) < \delta$ המרחק בין שני סוגי המרחק חסומים על־ידי ε.

אומנם את ההוכחה לא נביא, אך נרמוז ונגיד שאם נבחן את ההגדרה של האינטגרל לפי קושי, ונשתמש במשפט לגרנז', נוכל להוכיח את הטענה.

הגדרות ומשפטים