

פתרון מטלה 03 — מבנים אלגבריים (2), 80446

2 במאי 2025



שאלה 1

תהי L/F הרחבת שדות ויהיו $g, h \in F[x]$. נראה ש- $\gcd_{L[x]}(g, h) = \gcd_{F[x]}(g, h)$. כלומר נראה ש- \gcd נשמר תחת הרחבת שדות.

הוכחה. נניח ש- $f = \gcd_{F[x]}(g, h)$. נניח גם ש- $\bar{f} = \gcd_{L[x]}(g, h)$. כל פולינום $l \in F[x]$ הוא בפרט פולינום גם ב- $L[x]$ ולכן אם $l \mid g, h$ אז $\bar{f} \mid l$ או בפרט גם $\bar{f} \mid f$ במקרה של $l = f$.

המעלה של \bar{f} קטנה משל f , אחרת ניקח את החיסור שלהם כשהם מתוקנים ונקבל פולינום קטן יותר שמחלק את g, h . נניח ש- $f = q\bar{f} + r$ עם $q, r \in F[x]$ או $\bar{f} \in F[x]$ ונסיק ש- $f = \bar{f}$. נניח אם כך אחרת, אילו $q \in F[x]$ אבל $r \notin F[x]$ אז נקבל ש- $r = q\bar{f} - f \in F[x]$ וקיבלנו סתירה. נניח ש- $q \notin F[x]$.

יהי αx^i מונום המרכיב את q המעיד על $l \notin F[x]$, כלומר $\alpha \in L \setminus F$, ונניח גם כי זהו המונום הגדול ביותר המעיד על-כך, דהינו אם קיים βx^j כך שגם $\beta \notin F$ ו- $j > i$, אז נבחר אותם במקום. לכל $a \in F$, אנו יודעים ש- $a + \alpha, a \cdot \alpha \notin F$, כהיסק מסגירות הכפל לפעולות אלה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- \bar{f}, f מתוקנים שניהם. נבחין כי הדרגה של r קטנה מזו של $q \cdot \bar{f}$, וכן נבחין ש- $\alpha x^i x^n$ עבור $n = \deg \bar{f}$ הוא מונום של $q\bar{f}$, ומהגדרת r אין לו איברים מסדר $i + n$. נקבל אם כך ש- $q \cdot \bar{f} \notin F[x]$ וגם $q\bar{f} + r \notin F[x]$, אבל זו סתירה כי $q\bar{f} + r = f \in F[x]$. קיבלנו ש- $q, r \in F[x]$ ולכן בפרט $f = \bar{f}$. \square

שאלה 2

יהי F שדה.

סעיף א'

יהי $c \in F$ ויהיו $g, h \in F[x]$.

i

נראה ש- $(g + h)' = g' + h'$.

הוכחה. נניח ש- $g = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ וכן ש- $h = \sum_{i=0}^n \beta_i x^i$, עבור $\alpha_i, \beta_i \in F, n \in \mathbb{N}$. נבחין כי אם דרגות הפולינומים לא שוות, אז $\alpha_i = 0$ או $\beta_i = 0$ החל מ- i כלשהו, אך אין משמעות לעובדה זו בחישוב. עתה נבדוק את הזהות,

$$(g + h)' = \sum_{i=1}^n i(\alpha_i + \beta_i)x^{i-1} = \sum_{i=1}^n i\alpha_i x^{i-1} + \sum_{i=1}^n i\beta_i x^{i-1} = g' + h'$$

ולכן הזהות אכן חלה. □

ii

נראה ש- $(c \cdot g)' = c \cdot g'$.

הוכחה. נבדוק,

$$(c \cdot g)' = \left(c \cdot \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \right)' = \left(\sum_{i=0}^n c\alpha_i x^i \right)' = \sum_{i=1}^n ic\alpha_i x^{i-1} = c \sum_{i=1}^n i\alpha_i x^{i-1} = c \cdot g'$$

וקיבלנו שאכן הזהות מתקיימת. □

iii

נראה שמתקיים, $(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
 (g \cdot h)' &= \left(g \cdot \sum_{i=0}^n \beta_i x^i \right)' \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n g \cdot \beta_i x^i \right)' \\
 &= \sum_{i=0}^n \beta_i (g \cdot x^i)' \\
 &= \sum_{i=0}^n \beta_i \sum_{j=1}^n \alpha_j (i+j) x^{i+j-1} \\
 &= \sum_{i=0}^n \beta_i \left(ix^{i-1} \sum_{j=1}^n \alpha_j x^j + x^i \sum_{j=1}^n \alpha_j j x^{j-1} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \beta_i (ix^{i-1} g + x^i g') \\
 &= g \sum_{i=0}^n \beta_i ix^{i-1} + g' \sum_{i=0}^n \beta_i x^i \\
 &= gh' + g'h
 \end{aligned}$$

□

סעיף ב'

נוכיח את המקרה הפרטי לכלל לופיטל, אם $a \in F$ שורש של $g \in F[x]$ כך ש- $g(x) = h(x) \cdot (x - a)$ אז $g'(a) = h(a)$.

הוכחה. מתקיים,

$$g'(x) = h'(x)(x - a) + h(x)$$

מהזהויות שמצאנו בסעיף הקודם. נציב ונקבל,

$$g'(a) = h'(a)(a - a) + h(a) = h(a)$$

□

ומצאנו כי אכן מתקיים השוויון שרצינו להראות.

שאלה 3

בכל סעיף נגדיר פולינום ונבדוק אם הוא ספרבילי מעל \mathbb{Q} , נמצא שורשים מריבוי גדול מאחד.

סעיף א'

$$\text{נגדיר } f(x) = x^3 - 3x + 2$$

פתרון נבחין כי $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ מחלוקת פולינומים והעובדה ש- $f(1) = 0$. לכן נסיק שהפולינום הוא לא ספרבילי וש-1 שורש כפול.

סעיף ב'

$$\text{נגדיר } f(x) = x^3 - 7x + 6$$

פתרון עלינו לבדוק את $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, נקבל מחישוב ש- $f(2) = 0$, ומחילוק פולינומים נקבל,

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$$

ולכן הפולינום הוא ספרבילי.

סעיף ג'

$$\text{נגדיר } f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

פתרון הפעם עלינו לבדוק את $x = \pm 1$ בלבד, ונקבל $f(1) = 0$. מחלוקת פולינומים נקבל $f(x) = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = (x-1)^4$. נסיק אם כך שהפולינום לא ספרבילי והריבוי של $x = 1$ הוא 4.

