פתרון מטלה 8 — תורת המידה, 80517

12 בדצמבר 2025

שאלה 1

נניח ש־$(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד ו־$T : X \to X$ מדידה. הגדרנו מידה על X להיות T־אינווריאנטית אם מתקיים $T_*\mu = \mu$. נאמר גם שמידה T־אינוריאנטית היא ארגודית אם לכל $A \in \mathcal{A}$ המקיימת $T^{-1}(A) = A$ מתקיים ש־A היא μ־טריוויאלית, כלומר $\mu(A) = 0 \vee \mu(A^C) = 0$.

סעיף א׳

תהי $A \in \mathcal{A}$ ונגדיר את סדרת הקבוצות $A_1 = A$ ו־$A_{n+1} = T^{-1}(A_n)$.
נראה ש־$A^- = \liminf A_n, A^+ = \limsup A_n$ הן T־אינווריאנטיות.

הוכחה. מהגדרה עלינו להראות ש־$T^{-1}(A^-) = A^-, T^{-1}(A^+) = A^+$.

$$T^{-1}(A^-) = T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \overset{(1)}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \overset{(2)}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} T^{-1}(A_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_{k+1} = A^-$$

כאשר $(1), (2)$ נובעים מתכונות תמונה הפוכה והמעבר האחרון נובע מתכונות הגבול התחתון. המהלך עבור A^+ שקול. □

סעיף ב׳

נניח ש־μ מידת הסתברות ארגודית. נראה שאם $T^{-1}(A) = A$ כמעט תמיד אז $\mu(A) \in \{0,1\}$.

הוכחה. נתון ש־μ ארגודית, כלומר אם $E \in \mathcal{A}$ וכן E היא T־אינווריאנטית אז $\mu(A) \in \{0,1\}$. נגדיר $A_1 = A, A_{n+1} = T^{-1}(A_n)$, מתקיים $A_1 = A_2$ כמעט תמיד, וכן אם $A_1 = A_n$ כמעט תמיד אז גם $A_n = A_{n+1}$ כמעט תמיד ולכן $A_1 = A_{n+1}$ כמעט תמיד, נסיק ש־$A = A_n$ כמעט תמיד לכל n. מהסעיף הקודם $A^- = \liminf A_n, A^+ = \limsup A_n$ הן T־אינווריאנטיות ולכן $\mu(A^+), \mu(A^-) \in \{0,1\}$.

$$\mu(A^-) = \mu(\liminf A_n) \le \liminf \mu(A_n) = \liminf \mu(A) = \mu(A)$$

אבל $\mu(A^-) \in \{0,1\}$ ואם $\mu(A^-) = 1$ אז נקבל $\mu(A) = 1$ וסיימנו, לכן נניח ש־$\mu(A^-) = 0$. המרחב הוא מרחב הסתברות ולכן,

$$\mu(A^+) = \mu(\limsup A_n) \ge \limsup \mu(A_n) = \mu(A)$$

אם $\mu(A^+) = 0$ אז שוב נקבל $\mu(A) = 0$ ולכן נניח ש־$\mu(A^+) = 1$. אם $A = A_n$ כמעט תמיד אז גם $A = A \cap A = A_n \cap A_{n+1}$ כמעט תמיד ובאינדוקציה $A = \bigcap_{n=1}^{k} A_n$ כמעט תמיד, נסיק שגם $\mu(A) = \mu(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{n=1}^{k} A_n)$.

$$0 = \mu(A^-) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$$

ולכן נקבל שבמצב זה $\mu(A) = 0$ כפי שרצינו. □

סעיף ג׳

נאמר שפונקציה $f : X \to \mathbb{R}$ היא T־אינווריאנטית אם $f = f \circ T$.
נראה שמידה T־אינווריאנטית μ היא ארגודית אם ורק אם כל הפונקציות ה־T־אינווריאנטיות המדידות שוות לפונקציה קבועה כלשהי כמעט בכל מקום.

הוכחה. נניח ש־μ ארגודית ותהי $f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה ו־T־אינווריאנטית כלשהי, נראה ש־f קבועה כמעט תמיד. נניח בשלילה שלא, כלומר קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mu(f^{-1}(a)) > 0, \mu(f^{-1}(b)) > 0$. נבחין כי $T^{-1}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(a)$ ולכן $f^{-1}(a) \subseteq X$ קבוצה T־אינוריאנטית ובהתאם $\mu(f^{-1}(a)) = 0$ או $\mu(X \setminus f^{-1}(a)) = 0$, אבל $\mu(f^{-1}(a)) > 0$ ולכן $\mu(X \setminus f^{-1}(a)) = 0$. אבל $f^{-1}(b) \subseteq X \setminus f^{-1}(a)$ ולכן $0 < \mu(f^{-1}(b)) \le \mu(X \setminus f^{-1}(a)) = 0$ בסתירה.

נניח עתה שכל f כזו קבועה כמעט תמיד ונראה ש־μ ארגודית. תהי $A \in \mathcal{A}$ המקיימת $T^{-1}(A) = A$, נראה ש־$\mu(A) = 0$ או $\mu(A^C) = 0$.
TODO □