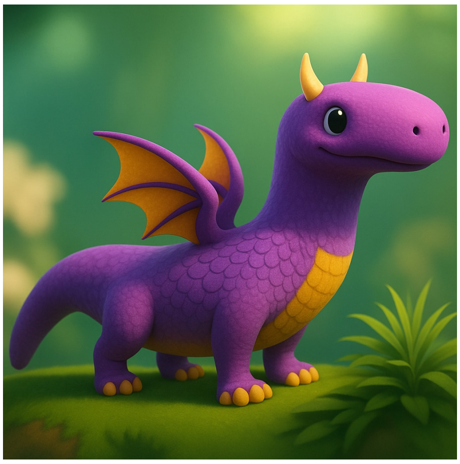
פתרון מטלה 4 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

15 בנובמבר 2025



שאלה 1

תהי $c : I \to \mathbb{A}^2$ מסילה לפי אורך ותהי $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ העתקה משמרת מרחק וכיוון, כלומר $f(x) = Ax + b$ עבור $A \in SO(2)$.
נוכיח ש־$\varphi \circ c$ בעלת אותה עקמומיות.

הוכחה. נזכור כי עבור $t \in I$ הגדרנו את העקמומיות $k(t)$ כך שמתקיים $c''(t) = k(t) \cdot (-c_2'(t), c_1'(t))$.
נבחין כי $f' \equiv A$ מטריצה אורתוגונלית המקיימת $\det A = 1$. נחשב את רכיבים אלה עבור ההרכבה $f \circ c$,

$$(f \circ c)'(t) = f'(c(t)) \cdot c'(t) = A \cdot c'(t) \implies n_{f \circ c}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \cdot c'(t)$$

בנוסף גם,

$$(f \circ c)''(t) = (A \cdot c'(t))' = Ac''(t)$$

ולכן,

$$k_{f \circ c}(t) = \frac{(f \circ c)''(t)}{n_{c \circ f}(t)} = \frac{Ac''(t)}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \cdot c'(t)} = \frac{c''(t)}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot c'(t)} = k_c(t)$$

כלומר מהגדרה מצאנו שהעקמומיות נשמרת תחת הרכבה של f.
נבחין שכל עוד f איזומטריה אז העקמומיות, תכונה יחסית למישור משיק, לא תשתנה. $\square$

שאלה 2

תהי $c : I \to \mathbb{A}^2$ מסילה רגולרית, נוכיח כי מתקיים,

$$k_c(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} c'(t) & c''(t) \end{pmatrix}}{\|c'(t)\|^3}$$

הוכחה. נבחין כי בשונה מהמקרה של פרמטריזציה לפי אורך, הפעם $\|c'\|$ לא קבועה, ולכן אם נגדיר את הבסיס האורתוגונלי $(c'(t), n(t))$ אז $c''(t) = k(t)n(t) + l(t)c'(t)$. בהתאם מהגדרה נקבל ש־$l(t) = \|c'(t)\|'$, אבל,

$$\|c'\|' = \sqrt{c' \cdot c'}' = \frac{c''c' + c'c''}{2\sqrt{c'c'}} = \frac{c' \cdot c''}{\|c'\|}$$

אז נקבל,

$$k = \frac{c'' - lc'}{n} = \frac{c'' - \frac{c'c''}{\|c'\|}c'}{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)c'} = \frac{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)(c''\|c'\| - c'c''c')}{c'\|c'\|}$$

ומכאן המסקנה נובעת מיידית. □

שאלה 3

תהי $c : I \to \mathbb{A}^2$ מסילה לפי אורך ותהי $t_0 \in I$ כך ש־$k(t_0) \neq 0$. נגדיר את המעגל הנושק את c ב־t_0 כמעגל סביב $c(t_0) + \frac{n(t_0)}{k(t_0)}$ ועם הרדיוס $\frac{1}{|k(t_0)|}$.

נראה שאם $d : J \to \mathbb{A}^2$ פרמטריזציה של המעגל בכיוון המתאים, אז למעגל ולמסילה יש נגזרות מסדר ראשון ושני זהות ב־t_0.

הוכחה. נגדיר את המעגל,

$$d(t) = c(t_0) + \frac{n(t_0)}{k(t_0)} + (\cos t, \sin t)\frac{1}{|k(t_0)|}$$

ולכן גם,

$$d'(t) = (-\sin t, \cos t)\frac{1}{|k(t_0)|}, \quad d''(t) = (-\cos t, -\sin t)\frac{1}{|k(t_0)|} \iff d''(t) = -d(t) + c(t_0) + \frac{n(t_0)}{k(t_0)}$$

קיימת נקודה מהגדרה כך שמתקיים $d(s_0) = c(t_0)$, אז נסיק יחד עם $c'' = kn$,

$$d(s_0) = c(t_0) \iff \frac{n(t_0)}{k(t_0)} + (\cos s_0, \sin s_0)\frac{1}{|k(t_0)|} = 0$$

ולכן,

$$d''(s_0) = \frac{n(t_0)}{k(t_0)} = \frac{c''(t_0)}{k^2(t_0)}$$

כלומר כיוון הנגזרות זהה, ולכן משיקולי גודל נקבל שגם זהה. מהמשוואות נסיק שגם הנגזרות שקולות. ☐

שאלה 4

תהי מסילה רגולרית $c : I \to \mathbb{A}^2$, נראה שהמסילה בעלת עקמומיות קבועה אם ורק אם המסילה היא מעגל עם רדיוס $\frac{1}{|k|}$ או קטע ישר.

הוכחה. נניח שהעקמומיות קבועה, כלומר $c''(t) = kn(t)$. אם $k = 0$ אז נקבל $c''(t) = 0$ ולכן $c'(t) = u$ עבור $\|u\| = 1$, ובהתאם c היא קטע. אחרת כפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית $c''(t) = kc'(t)^t$ נקבל שהמסילה היא מעגל.

בכיוון השני נניח ש־c קטע לפי אורך, אז $\|c'\| = 1$ קבועה ולכן $k = 0$. נניח שהמסילה היא מעגל (בלי הגבלת הכלליות) ולכן $c(t) = r(\cos\frac{t}{r}, \sin\frac{t}{r})$ ולכן $\|c'\| = 1$ וכן,

$$c''(t) = -\frac{1}{r}c(t)$$

ולכן,

$$k(t) = \frac{n(t)}{c''(t)} = \frac{c''(t)}{rc'(t)} = \frac{1}{r}$$

כפי שרצינו. $\square$

שאלה 5

נחשב את העקמומיות של המסילות הבאות.

סעיף א׳

נגדיר את $c(t) = (a\cos t, b\sin t)$ עבור $0 < a, b$.

פתרון נחשב,

$$c'(t) = (-a\sin t, b\cos t), \quad c''(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$$

ולכן,

$$k(t) = \frac{\det(c'(t)\ c''(t))}{\|c'(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{vmatrix}}{(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t})^3} = \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t})^3} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

סעיף ב׳

נגדיר $c(t) = (t, \cosh t)$.

פתרון הפעם,

$$c'(t) = (1, \sinh t), \quad c''(t) = (0, \cosh t)$$

ולכן,

$$k(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix}}{(1 + \sinh^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cosh t}{(\cosh t)^{\frac{3}{2}}} = \cosh^{-\frac{1}{2}} t$$

סעיף ג׳

אם $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אז $c(s) = \int_0^s (\cos\theta, \sin\theta)\ ds$.

פתרון הפעם מתקיים,

$$c'(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)), \quad c''(t) = \theta'(t) \cdot (-\sin\theta(t), \cos\theta(t))$$

ולכן,

$$k(t) = \frac{\theta'(t) \cdot \cos^2\theta(t) + \theta'(t)\sin^2\theta(t)}{(\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta(t))^{\frac{3}{2}}} = \theta'(t)$$