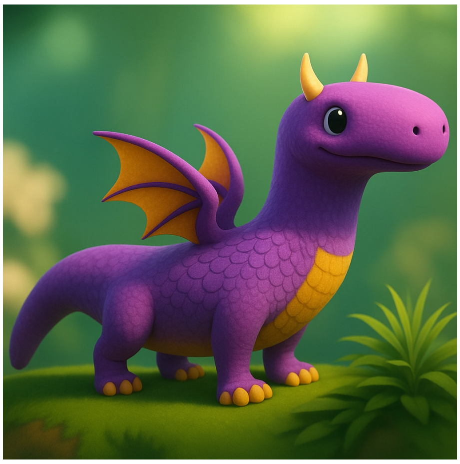
פתרון מבחן בית — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

22 בינואר 2026



תוכן העניינים

שאלה 1

יהי (E, V) מרחב אפיני.

סעיף א׳

תהי $S \subseteq E$ קבוצה ותהי $S' = \langle S \rangle$ תת־היריעה הנוצרת על־ידי S. נראה שמתקיים,

$$S' = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda^i P_i \mid \sum_i^n \lambda^i = 1, P_1, \dots, P_n \in S \right\}$$

הוכחה. נראה הכלה דו־כיוונית, נניח תחילה ש־$P = \lambda^1 P_1 + \dots + \lambda^n P_n$ עבור $\lambda^1 + \dots + \lambda^n = 1$ $P_1, \dots, P_n \in S,$, ונראה ש־$P \in S'$.
נבחר $Q \in S$ שונה מ־$P_1, \dots, P_n$, אם אין כזאת אז בכל מקרה סיימנו, ממשפט אינווריאנטיות לצירוף אפיני נקבל,

$$P = Q + \lambda^1(P_1 - Q) + \dots + \lambda^n(P_n - Q)$$

ולכן קיבלנו שמהגדרת $S' = Q + W$ עבור $W \le E$ אכן $P \in S'$.

לכיוון ההפוך נראה שאם $P \in S'$ אז קיימות $P_1, \dots, P_n, \lambda^1 + \dots + \lambda^n = 1$ המקיימות $P = \lambda^1 P_1 + \dots + \lambda^n P_n$. נקבע נקודה שרירותית $Q \in S$ וכן נסמן שוב $S' = Q + W$, נניח ש־$\dim W = n$ ולכן קיימות $P_1, \dots, P_n \in S$ כך ש־$((P_1 - Q), \dots, (P_n - Q)) \subseteq W$ בסיס שלו. נבחין כי אם $Q \in \{P_1, \dots, P_n\}$ אז המרחב סופי ובפרט גם $P \in \{P_1, \dots, P_n\}$ ולכן נוכל להניח אחרת.
עתה נקבל $P - Q \in W \iff P \in S'$ ולכן $P - Q = \alpha^1(P_1 - Q) + \dots + \alpha^n(P_n - Q)$ עבור $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbb{F}$. נסיק,

$$P = (P - Q) + Q = Q + \alpha^1(P_1 - Q) + \dots + \alpha^n(P_n - Q)$$

נסמן נקודה נוספת $P_{n+1} \in S$ (שוב נניח שיש כזו אחרת סיימנו) ונבנה את מערכת המשוואות,

$$\lambda^1 + \dots + \lambda^{n+1} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i(P_i - Q) = P - Q$$

זוהי מערכת משוואות מדרגה מלאה ובשל קיום הצירוף $\alpha^1 P^1 + \dots + \alpha^n P^n$ נסיק שיש פתרון למשוואה.
קיבלנו הכלה דו־כיוונית ולכן הטענה חלה. $\square$

סעיף ב׳

נראה שאם $L \subseteq E$ קבוצת נקודות, אז L תת־יריעה אפינית אם ורק אם לכל $P, Q \in L$ מתקיים $\langle P, Q \rangle \subseteq L$.

הוכחה. נניח ש־L תת־יריעה אפינית, אז מהסעיף הקודם נובעת סגירות לצירופים אפיניים, בפרט לצירופים של שתי נקודות,

$$\left\{ \sum_{i=1}^2 \lambda^i P_i \mid \sum_i^2 \lambda^i = 1, P_1, P_2 \in L \right\} \subseteq L$$

עבור $P, Q \in L$ נקבל ש־$\langle P, Q \rangle \subseteq L$ כהגדרת קבוצה זו.

נניח בכיוון ההפוך שלכל $P, Q \in L$ גם $\langle P, Q \rangle \subseteq L$.
תהי $P_0 \in L$ ונסמן $W = L - P_0$, נראה ש־$W \le V$ ובכך נקבל ש־L תת־יריעה אפינית.
יהי $u \in W$, ו־$\alpha \in \mathbb{F}$, אז $\langle P_0, P_0 + u \rangle \subseteq L$, אבל $\langle P_0, P_0 + u \rangle = P_0 + \operatorname{Span}\{u\}$ ולכן $\operatorname{Span}\{u\} \subseteq L$ ו־$\alpha u \in W$. קיבלנו סגירות לכפל בסקלר, נעבור להראות סגירות לחיבור.
נניח ש־$u, v \in W$ וש־$\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ ונראה ש־$u + v \in W$. נסמן $P_1 = P_0 + u$ וכן $P_2 = P_0 + 2v$, נקבל שגם $\langle P_1, P_2 \rangle \subseteq L$, כלומר $P_1 + (2v - u)t \in L$ לכל $t \in \mathbb{F}$, לכן גם $P_0 + u + (2v - u)t \in L$ ולכן $u + (v - u)t \in W$. נבחר $t = \frac{1}{2}$ ונקבל ש־$u + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}(u + v) \in W$, ומסגירות לכפל בסקלר שמצאנו נקבל שגם $u + v \in W$.
נסיק ש־W הוא תת־מרחב לינארי, לכן $P_0 + W = L$ מרחב אפיני.

נעיר שדרשנו בהוכחה זו שמציין השדה יהיה שונה מ־2, נראה שהטענה לא חלה במקרה זה. נגדיר $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ וכן $E = V = \mathbb{F}_2^2$, ולבסוף גם

$L = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ ונראה שלכל $P, Q \in E$ מתקיים $\langle P, Q\rangle \subseteq L$. הבדיקה נעשית במעבר על כלל האפשרויות,

$$\langle (0,0),(1,0)\rangle = (0,0) + \mathrm{Span}\{(1,0)\} = \{(0,0),(1,0)\}$$
$$\langle (0,0),(0,1)\rangle = \{(0,0),(0,1)\}$$
$$\langle (1,0),(0,1)\rangle = \{(1,0),(0,1)\}$$

וקיבלנו ש־L אכן מקיימת את התנאי, נראה ש־L היא לא תת־יריעה אפינית. נניח בשלילה שהיא כן ולכן $L = (0,0) + W = W$ עבור $W \le \mathbb{F}^2$, כלומר בשל בחירת מרחב הנקודות נוכל לזהות את L כמרחב לינארי, ובמקרה זה $(1,0),(0,1) \in W$ אבל $(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin W$ בסתירה. $\square$

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$ ו־$V^\vee$ המרחב הדואלי של V.

סעיף א׳

נראה שלכל $v \in V$ מתקיים,

$$\forall l \in V^\vee,\ \langle l, v\rangle = 0 \iff v = 0$$

הוכחה. נניח ש־$v = 0$ ויהי $l \in V^\vee$, כלומר $l : V \to \mathbb{F}$ העתקה לינארית. אז מתקיים $l(v) = 0$ מהגדרת ההעתקה הלינארית.

לכיוון ההפוך נניח שלכל $l \in V^\vee$ מתקיים $l(v) = 0$ ונניח בשלילה ש־$v \ne 0$. נרחיב את (v) לבסיס $\mathcal{B} = (v, b_2, \dots, b_n)$ הפורש את V. בהתאם קיימת העתקה לינארית $l : V \to \mathbb{F}$ כך שמתקיים $l(v) = l(b_i) = 1$, אבל $l \in V^\vee$ ולכן מההנחה $\langle l, v\rangle = 0 \ne 1$ בסתירה. $\square$

סעיף ב׳

יהי $l \in V^\vee$, נוכיח ש־$l = 0$ אם ורק אם לכל $v \in V$ מתקיים $\langle l, v\rangle = 0$.

הוכחה. נניח ש־$l = 0$, אז בהגדרה $\langle l, v\rangle = l(v) = 0$ לכל v.

נניח ש־$\langle l, v\rangle = 0$ לכל $v \in V$ ונניח ש־$l \ne 0$, לכן קיים $u \in \operatorname{Im} l$ כך ש־$u \ne 0$ וכן $l(u) \ne 0$ בסתירה. $\square$

סעיף ג׳

נראה שלכל $W \le V^\vee$ מתקיים,

$$\dim_{\mathbb{F}} W + \dim_{\mathbb{F}} W_0 = \dim_{\mathbb{F}} V$$

הוכחה. הגדרנו $W_0 = \{v \in V \mid \forall l \in W,\ l(v) = 0\}$. נניח ש־$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס של V וכן נסמן $\mathcal{B}^\vee = (b^1, \dots, b^n)$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$(b^1, \dots, b^k)$ עם $k \le n$ הוא בסיס סדור של W. אז מהגדרה מתקיים $l(b^i) = 0$ לכל $l \in W$ ו־$k < i \le n$, ולכן $b_i \in W_0$. באופן דומה נסיק ש־$b_i \notin W_0$ לכל $i \le k$ שכן קיים עד לכך ש־$b^i \in W$. קיבלנו אם כך ש־$(b_{k+1}, \dots, b_n)$ בסיס סדור של W_0. $\square$

סעיף ד׳

יהיו $S_1, S_2 \le V$ ונראה ש־$(S_1 + S_2)^0 = S_1^0 \cap S_2^0$.

הוכחה. יהי $l \in (S_1 + S_2)^0$, אז $l(v + u) = l(v) + l(u) = 0$ לכל $u \in S_1, v \in S_2$. נבחין כי $0 \in S_1, S_2$ כתת־מרחבים ולכן נקבל שגם $l(v) = 0, l(u) = 0$ לכל u, v כאלה, ונסיק $l \in S_1^0, l \in S_2^0$ ובפרט נמצא בחיתוך.

מהצד השני נניח ש־$l \in S_1^0 \cap S_2^0$, אז בפרט $l(u) = l(v) = 0$ לכל $u \in S_1, v \in S_2$, ולכן גם $l(u + v) = l(u) + l(v) = 0$ ונסיק ש־$l \in (S_1 + S_2)^0$. $\square$

סעיף ה׳

נראה שאם $L^1, L^2 \le V^\vee$ אז $(L^1 \cap L^2)_0 = L_0^1 + L_0^2$.

הוכחה. מהסעיף הקודם נסיק $L^1 \cap L^2 = (L_0^1 + L_0^2)^0$, ולכן $(L^1 \cap L^2)_0 = (L_0^1 + L_0^2)^0_0 = L_0^1 + L_0^2$ מזהויות שהוכחנו. $\square$

שאלה 3

עקום חלק עם פרמטריזציה לפי אורך $c : I \to \mathbb{E}^3$ נקרא בי־רגולרי אם $\forall t \in I,\ c''(t) \neq 0$. נסמן $v = c'$ ונגדיר את הנורמל על־ידי $n = \frac{c''}{|c''|}$ ואת הבי־נורמל על־ידי $b = v \wedge n$. נבחין כי (v, n, b) בסיס אורתונורמלי.

סעיף א׳

נראה שקיימים $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים,

$$\begin{pmatrix} v' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

הוכחה. נבחין שהטענה שקולה לשוויון,

$$\begin{pmatrix} v' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \kappa n + 0 \\ -\kappa v + 0 + \tau b \\ 0 - \tau n + 0 \end{pmatrix}$$

כלומר הטענה שקולה לשוויונות,

$$v' = \kappa n, \qquad n' = -\kappa v + \tau b, \qquad b' = -\tau n$$

ראינו בכיתה ש־$\kappa = \kappa(t)$ העקמומיות בנקודה אכן קיימת, וש־$v' = \kappa n$. נזכיר כי טענה זו נובעת מהעובדה ש־$\|v'\| = 1$ ולכן $v \perp v'$ מהעובדה שהפרמטריזציה היא לפי אורך.

נבחין שגם $\|v\| = 1, \|n\| = 1$ ולכן $\|b\| = 1 \cdot 1 - |v \cdot n| = 1$, וכן $v \cdot b = 0$ ולכן ניתן להסיק של־b' יש רק רכיב אורתוגונלי. נקבל שגם $(v \cdot b)' = v' \cdot b + v \cdot b' = 0$ אבל $v' \cdot b = n \cdot b \cdot |c''| = 0$ ולכן נסיק ש־$b' \cdot v = 0$, ובהתאם מתקיים $b' = -\tau n$ לאיזשהו $\tau = \tau(t)$. נשים לב כי יכולנו להגדיר גם ללא המינוס.

מתקיים,

$$0 = \begin{vmatrix} v & n & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} v & b & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & v & n \end{vmatrix}$$

כלומר גם $n = b \wedge v$ ולכן מחוקי גזירה,

$$n' = b' \wedge v + b \wedge v' = (-\tau n) \wedge v + b \wedge (\kappa n) = -\tau(n \wedge v) + \kappa(b \wedge n) = \tau b - \kappa v$$

כפי שרצינו. $\square$

סעיף ב׳

תהי $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ העתקה אפינית שומרת מרחק וכיוון, כלומר $f(x) = Ax + b$ עבור $A \in SO_3(\mathbb{R})$ ו־$b \in \mathbb{R}^3$.
נראה ש־$f \circ c$ ו־c בעלות עקמומיות ופיתול משותפים.

הוכחה. נגזור את $f \circ c$ ונסמן ב־v_1,

$$v_1 = (f \circ c)' = (f' \circ c) \cdot c' = Av$$

שכן $f' \equiv A$. בהתאם גם $(f \circ c)'' = Av'$ ולכן אם נסמן n_1, b_1 הנורמל והבי־נורמל של $f \circ c$ אז נקבל,

$$n_1 = \frac{Av'}{|Av'|} = \frac{Av'}{|v'|} = An$$

נסמן עתה גם κ_1, τ_1 העקמומיות והפיתול של $f \circ c$ ונקבל,

$$v_1' = \kappa_1 n_1 \iff Av' = \kappa_1 An \iff v' = \kappa_1 n$$

ונסיק ש־$\kappa = \kappa_1$.

נעבור לבדיקה של b_1,

$$b_1 = v_1 \wedge n_1 = (Av) \wedge (An)$$

כלומר,

$$0 = \begin{vmatrix} Av & An & b_1 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} v & n & A^{-1}b_1 \end{vmatrix}$$

כאשר המעבר האחרון נובע ישירות מהגדרת העתקות לינאריות בהצגה מטריצאלית. נשתמש בהפיכות A כדי להסיק,

$$A \begin{vmatrix} v & n & A^{-1}b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & n & A^{-1}b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & n & b \end{vmatrix}$$

ונקבל ש־$b_1 = Ab$ ולכן,

$$b_1' = -\tau_1 n_1 \iff Ab' = -\tau_1 An$$

ונסיק ש־$\tau_1 = \tau$ כפי שרצינו. $\square$

נבחין שאם f משנה כיוון אז לא נוכל לבצע את המעבר $-\tau An = A(-\tau n)$, ונקבל בהתאם שהעקמומיות והפיתול משנים גם הם סימן.

סעיף ג׳

נראה ש־$c(I)$ ניתנת לשיכון במישור אם ורק אם $\tau = 0$.

הוכחה. נניח ש־$c(I)$ ניתנת לשיכון במישור. נסמן n_0 וקטור המקיים $n_0 \perp c(I)$ ונניח ש־$\|n_0\| = 1$. נבחין ש־$n_0 \perp v$ אחרת מערך הממוצע נקבל שיש ל־c נקודה מחוץ למישור. מאותו שיקול בדיוק נקבל שגם $n_0 \perp n$ ולכן $b \equiv \pm n_0$, נניח על־ידי שינוי n_0 ש־$b \equiv n_0$. נעיר ש־b רציף ולכן לא יתכן שהוא מקבל גם n_0 וגם $-n_0$. אנו יודעים ש־$b' \equiv 0$ כנגזרת של קבועה וכן ש־$0 = b' = -\tau n$, אבל n לא מתאפסת ולכן $\tau \equiv 0$ בלבד.

בכיוון ההפוך נניח ש־$\tau \equiv 0$, אבל $n \neq 0$ ולכן $b' \equiv 0$ בלבד. בהתאם נסיק ש־b קבוע, כלומר קיים וקטור n_0 קבוע כך ש־$n_0 \perp c', c''$ בכל I. מכאן נובע ש־$c(I)$ משוכן במישור. כדי להראות זאת נניח ש־$0 \in C(I)$ ויהי בסיס אורתוגונלי (e_1, e_2, n_0), אז נקבל ש־$D_{n_0} c = 0$ ולכן π_{n_0} פונקציה קבועה ובפרט $\pi_{n_0} \equiv 0$, כאשר π_{n_0} ההטלה לציר. $\square$

סעיף ד׳

יהי $c : I \to \mathbb{E}^3$ עקום רגולרי כלשהו. נראה שמתקיים,

$$\kappa(t) = \frac{|c'(t) \wedge c''(t)|}{|c'(t)|^3}$$

וכן שאם c הוא בי־רגולרי אז גם,

$$\tau(t) = \frac{\begin{vmatrix} c'(t) & c''(t) & c^{(3)}(t) \end{vmatrix}}{|c'(t) \wedge c''(t)|^2}$$

הוכחה. נגדיר רפרמטריזציה לפי אורך של c, $\tilde{c} : J \to \mathbb{E}^3$, ונגדיר את הדיפאומורפיזם $\varphi : J \to I$ כך ש־$\tilde{c} = c \circ \varphi$. בהתאם נובע ש־$\tilde{c}' = (c' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ מכלל השרשרת. $\tilde{c}$ היא פרמטריזציה לפי אורך ולכן,

$$\tilde{v}' = \tilde{\kappa}\tilde{n} \iff \tilde{c}'' = \tilde{\kappa}\frac{\tilde{c}''}{|\tilde{c}''|} \implies \tilde{\kappa} = \|\tilde{c}''\|$$

אז נובע,

$$\tilde{\kappa} = \|\tilde{c}''\| = \|((c' \circ \varphi) \cdot \varphi')'\| = \|(c' \circ \varphi)'\varphi' + (c' \circ \varphi)\varphi''\| = \|(c'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (c' \circ \varphi)\varphi''\|$$

אבל $\varphi' = \frac{1}{\|c' \circ \varphi\|}$ מהגדרתה ובהתאם $\varphi'' = \frac{-(c'' \circ \varphi)\varphi'}{\|c' \circ \varphi\|^2} = \frac{-(c'' \circ \varphi)}{\|c' \circ \varphi\|^3}$,

$$\tilde{\kappa} = \frac{|\|c'' \circ \varphi\|\|c' \circ \varphi\| - (c' \circ \varphi)(c'' \circ \varphi)|}{\|c' \circ \varphi\|^3} = \frac{|c' \circ \varphi \wedge c'' \circ \varphi|}{\|c' \circ \varphi\|^3}$$

כאשר הזהות האחרונה הוכחה בתרגיל.

מסעיף א' $\tilde{b}' = -\tilde{\tau}\tilde{n}$. נחשב,

$$\tilde{b}' = (\tilde{v} \wedge \tilde{n})' = \tilde{v}' \wedge \tilde{n} + \tilde{v} \wedge \tilde{n}' = \tilde{\kappa}\tilde{n} \wedge \tilde{n} + \tilde{v} \wedge (-\tilde{\kappa}\tilde{v} + \tilde{\tau}\tilde{b}) = \tilde{\kappa}(\tilde{n} \wedge \tilde{n}) - \tilde{\kappa}(\tilde{v} \wedge \tilde{v}) + \tilde{\tau}(\tilde{v} \wedge \tilde{b}) = \tilde{\tau}(\tilde{v} \wedge \tilde{b})$$

אם הפרמטריזציה היא לפי אורך אז,

$$-\tau n = b' \iff \tau n \cdot n = -n \cdot b' = -n(v \wedge n)' = -n(v' \wedge n + v \wedge n') = 0 - n(v \wedge n')$$

כלומר $\tau = -n \cdot (v \wedge n')$. אז,

$$\begin{aligned}
\tau &= -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{c''}{\|c''\|}\right)'\right) \\
&= -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{1}{\|c''\|}c''' - \frac{\|c''\|'}{\|c''\|^2}c''\right)\right) \\
&= -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{1}{\|c''\|}c''' - \frac{\|c''\|'}{\|c''\|^2}c''\right)\right) \\
&\overset{(1)}{=} -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{1}{\|c''\|}c'''\right)\right) \\
&= -\frac{c''}{\|c''\|^2}(c' \times c''') \\
&= \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c''\|^2} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \wedge c''\|^2} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{\begin{vmatrix} c' & c'' & c''' \end{vmatrix}}{\|c' \wedge c''\|^2}
\end{aligned}$$

כאשר,

1. $c'' \cdot (c' \times c'') = 0$
2. מהנוסחה הראשונה וההנחה שהפרמטריזציה לפי אורך
3. זהות

וקיבלנו שהנוסחה נכונה למקרה זה.

נעבור למקרה הכללי, נניח ש־$\tilde{c} = c \circ \varphi$ רפרמטריזציה לפי אורך, ולכן,

$$\tilde{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{c}' & \tilde{c}'' & \tilde{c}''' \end{vmatrix}}{\|\tilde{c}' \wedge \tilde{c}''\|^2} = \frac{(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''}{\|(c \circ \varphi)' \wedge (c \circ \varphi)''\|^2}$$

נזכור כי מצאנו שמתקיים $(c \circ \varphi)'' = (c'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (c' \circ \varphi)\varphi''$, $\quad (c \circ \varphi)' = (c' \circ \varphi)\varphi'$ ולכן,

$$(c \circ \varphi)''' = (c''' \circ \varphi)(\varphi')^3 + (c'' \circ \varphi)2\varphi'\varphi'' + (c'' \circ \varphi)\varphi'\varphi'' + (c' \circ \varphi)\varphi''' = (c''' \circ \varphi)(\varphi')^3 + 3(c'' \circ \varphi)\varphi'\varphi'' + (c' \circ \varphi)\varphi'''$$

ובהתאם נחשב,

$$\tilde{c}' \wedge \tilde{c}'' = (c \circ \varphi)' \wedge (c \circ \varphi)'' = (c' \circ \varphi)\varphi \wedge ((c'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (c' \circ \varphi)\varphi'') = (\varphi')^3(c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)$$

ולכן גם,

$$(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}''' = (\varphi')^3((c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)) \cdot ((c''' \circ \varphi)(\varphi')^3 + 3(c'' \circ \varphi)\varphi'\varphi'' + (c' \circ \varphi)\varphi''') = (\varphi')^6((c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)) \cdot (c''' \circ \varphi)$$

נציב,

$$\tau \circ \varphi = \frac{(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''}{\|(c \circ \varphi)' \wedge (c \circ \varphi)''\|^2} = \frac{(\varphi')^6((c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)) \cdot (c''' \circ \varphi)}{(\varphi')^{2 \cdot 3}\|(c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)\|^2}$$

וקיבלנו שהטענה נכונה גם במקרה הכללי. $\square$

שאלה 4

נניח ש־$S \subseteq \mathbb{E}^3$ משטח רגולרי ו־$f : U \to S$ פרמטריזציה מקומית ל־$p \in S$, ונניח ש־$f(u) = p$. יהיו $c, d : I \to S$ עקומים רגולריים ונסמן $c = f \circ \gamma, d = f \circ \phi$, כאשר $\gamma(0) = \phi(0) = u$.

סעיף א׳

נראה ש־f היא קונפורמית אם ורק אם $E = G, F = 0$, כאשר E, F, G מקדמי התבנית היסודית הראשונה I.

הוכחה. נגדיר את הזווית בין שני העקומים ב־u על־ידי הזווית של $\gamma'(0), \phi'(0)$, זווית זו מוגדרת להיות $\cos\theta = \frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\| \cdot \|\phi'(0)\|}$.

נניח ש־f היא קונפורמית, כלומר מתקיים,

$$\arccos \frac{\langle c'(0), d'(0) \rangle}{\|c'(0)\| \cdot \|d'(0)\|} = \arccos \frac{\langle f'(\gamma((0)))\gamma'(0), f'(\phi((0)))\phi'(0) \rangle}{\|c'(0)\| \cdot \|d'(0)\|} = \arccos \frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\| \cdot \|\phi'(0)\|}$$

לכל שני עקומים c, d כאלה. נבחין כי arccos חד־חד ערכית ועל, ולכן התנאי שקול לתנאי,

$$\frac{\langle c'(0), d'(0) \rangle}{\|c'(0)\| \cdot \|d'(0)\|} = \frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\| \cdot \|\phi'(0)\|}$$

נבחין גם כי מתקיים,

$$\langle c'(0), d'(0) \rangle = \langle Df|_{\gamma(0)} \cdot \gamma'(0), Df|_{\phi(0)} \cdot \phi'(0) \rangle = \langle Df|_u \cdot \gamma'(0), Df|_u \cdot \phi'(0) \rangle = I_p(\gamma'(0), \phi'(0))$$

כלומר מתקיים,

$$\frac{I_p(\gamma'(0), \phi'(0))}{I_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) \cdot I_p(\phi'(0), \phi'(0))} = \frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\|^2 \cdot \|\phi'(0)\|^2}$$

עתה נציב מספר עקומים בזהות שקיבלנו. עבור עקומים לפי אורך ואנכים נקבל,

$$\frac{I_p(\gamma'(0), \phi'(0))}{I_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) \cdot I_p(\phi'(0), \phi'(0))} = 0 \implies I_p(\gamma'(0), \phi'(0)) = 0 \implies F = 0$$

אז עבור עקומים כלליים נקבל שמתקיים,

$$\frac{E\gamma_1'(0)\phi_1'(0) + G\gamma_2'(0)\phi_2'(0)}{E((\gamma_1'(0))^2 + (\phi_1'(0))^2) + G((\gamma_2'(0))^2 + (\phi_2'(0))^2)} = \frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\|^2 \cdot \|\phi'(0)\|^2}$$

אם $E \ne G$ נוכל לבנות עקומים שנגזרתם $(E - G, 1), (1, 1)$ ונקבל סתירה לשוויון האחרון, ולכן בהכרח $E = G$.

נניח בכיוון ההפוך ש־$E = G, F = 0$ ונקבל תוך שימוש במהלכים זהים למהלך הקודם,

$$\frac{\langle c'(0), d'(0) \rangle}{\|c'(0)\| \cdot \|d'(0)\|} = \frac{E\gamma_1'(0)\phi_1'(0) + G\gamma_2'(0)\phi_2'(0)}{E((\gamma_1'(0))^2 + (\phi_1'(0))^2) + G((\gamma_2'(0))^2 + (\phi_2'(0))^2)} = \frac{\gamma_1'(0)\phi_1'(0) + \gamma_2'(0)\phi_2'(0)}{(\gamma_1'(0))^2 + (\phi_1'(0))^2 + (\gamma_2'(0))^2 + (\phi_2'(0))^2}$$

אבל האחרון אינו אלא,

$$\frac{\langle \gamma'(0), \phi'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\|^2 \cdot \|\phi'(0)\|^2}$$

ולכן f קונפורמית. □

סעיף ב׳

נאמר ש־$f : U \to S$ היא שומרת שטח אם לכל $R \subseteq U$ מתקיים $\mathrm{vol}_2(R) = \mathrm{vol}_2(f(R))$.

נראה ש־f שומרת שטח אם ורק אם $EG - F^2 = 1$.

הוכחה. נניח ש־f היא שומרת שטח. נזכור שמתקיים,

$$\mathrm{vol}_2(f(R)) = \iint_R (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}\ dl, \qquad \mathrm{vol}_2(R) = \mathrm{vol}(R) = \iint_R 1\ dl$$

כלומר,

$$\mathrm{vol}_2(f(R)) = \mathrm{vol}(R) \iff \iint_R (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} - 1\ dl = 0$$

ובהתאם $(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}=1$ λ-כמעט תמיד, עבור λ מידת לבג על אופרטור הנפח vol_2 מעל $\mathbb{E}^3$. נזכור ש-f רציפה ולכן הטענה נכונה תמיד.

נניח בכיוון ההפוך ש-$EG-G^2=1$, אז נקבל שמתקיים,

$$\mathrm{vol}_2(R)=\iint_R (EG-F^2)^{\frac{1}{2}}\ dl=\iint_R 1\ dl=\mathrm{vol}(R)$$

כלומר f משמרת שטח. $\square$

סעיף ג׳

נראה ש-f קונפורמית ושומרת שטח אם ורק אם היא איזומטריה מקומית, כלומר שמתקיים,

$$\forall u\in U\forall v,w\in\mathbb{R}^2,\ \langle v,w\rangle=I_{f(u)}(Df|_u v,Df|_u w)$$

הוכחה. נניח ש-f קונפורמית ושומרת שטח, אז מתקיים $E=G,F=0$ וכן $E^2=1$, אבל I תבנית חיובית לחלוטין ולכן $E=1$ בלבד, כלומר $I_p=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. אז $E_p=(D_1f|_p)^2=1$ ולכן נסיק $D_1f|_p\in\{\pm\}$, הטענה נכונה גם על D_2f.
בהתאם מתקיים,

$$I_{f(u)}(Df|_u v,Df|_u w)=v^tI_2w=\langle v,w\rangle$$

כפי שרצינו.

בכיוון ההפוך נניח את השוויון ונקבל,

$$I_{f(u)}(Df|_u v,Df|_u w)=Ev^1w^1+F(v^2w^1+v^1w^2)+Gv^2w^2=v^1w^1+v^2w^2=\langle v,w\rangle$$

ונקבל ש-$E=G=1,F=0$ ההצבה היחידה שנכונה תמיד, משקילות שמצאנו בסעיפים א׳ וב׳ נקבל ש-f היא קונפורמית ומשמרת שטח. $\square$

שאלה 5

סעיף א׳

יהיו $0 < r < R$ ויהי המשטח הפרמטרי $\varphi : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{E}^3$ המוגדר על־ידי,

$$\varphi(\theta, \phi) = ((R + r\cos\phi)\cos\theta, (R + r\cos\phi)\sin\theta, r\sin\phi)$$

פתרון נחשב את התבנית היסודית הראשונה של φ,

$$D\varphi|_{(\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\phi)\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} \langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)}, D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)}, D_1\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle \\ \langle D_1\varphi_{(\theta,\phi)}, D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle & \langle D_2\varphi_{(\theta,\phi)}, D_2\varphi_{(\theta,\phi)}\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) & (R + r\cos\phi)r\sin\phi(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) \\ (R + r\cos\phi)r\sin\phi(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) & r^2\sin^2\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + r^2\cos^2\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

עתה נעבור לחישוב השטח על־ידי נוסחת השטח התלויה בתבנית הראשונה,

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(\operatorname{Im}\varphi) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(R + r\cos\phi)^2 r^2}\, d\theta\, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R + r\cos\phi)r\, d\theta\, d\phi \\ &= r\int_0^{2\pi} 1\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} R + r\cos\phi\, d\phi \\ &= 2\pi r\int_0^{2\pi} R + r\cos\phi\, d\phi \\ &= 2\pi r(R\phi + r\sin\phi)\ |_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \\ &= 4\pi^2 rR \end{aligned}$$

מצאנו ששטח הטורוס הפרמטרי הוא $4\pi^2 rR$.

סעיף ב׳

יהיו $0 \le \phi_0 \le \phi_1 \le \pi$, נחשב את השטח של $\varphi : [0, 2\pi] \times [\phi_0, \phi_1] \to \mathbb{E}^3$ המוגדר על־ידי,

$$f(\theta, \phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

פתרון זהו חלק של ספירת היחידה S^2 הכלוא בין המישורים $z_0 = \cos\phi_0, z_1 = \cos\phi_1$. נחשב את התבנית היסודית הראשונה,

$$Df = \begin{pmatrix} -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta \\ 0 & -\sin\phi \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$E = (D_1 f)^2 = (-\sin\phi\sin\theta)^2 + (\sin\phi\cos\theta)^2 + 0^2 = \sin^2\phi$$
$$F = (D_1 f)(D_2 f) = -\sin\phi\sin\theta\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\cos\theta\cos\phi\sin\theta + 0 = 0$$
$$G = (\cos\phi\cos\theta)^2 + (\cos\phi\sin\theta)^2 + \sin^2\phi = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

כלומר,

$$I = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נעבור לחישוב השטח,

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(\operatorname{Im}\varphi) &= \int_{\phi_0}^{\phi_1}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\phi \\
&= \int_{\phi_0}^{\phi_1}\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\phi}\, d\theta\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} 1\, d\theta \cdot \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sin\phi\, d\phi \\
&= 2\pi \cdot (-\cos\phi)\ |_{\phi=\phi_0}^{\phi=\phi_1} \\
&= 2\pi(-\cos\phi_1 + \cos\phi_0)
\end{aligned}$$

כלומר מצאנו ששטח החתך הוא $2\pi(\cos\phi_0 - \cos\phi_1)$.

נבחין שקיבלנו שהשטח הוא $2\pi(z_1 - z_0)$, כלומר השטח לא תלוי בערכם אלא רק בהפרש שלהם, כלומר בגובה שלהם.

שאלה 6

יהיו $0 < r < R$ ויהי המשטח הפרמטרי $\varphi : (0, 2\pi)^2 \to \mathbb{E}^3$ המוגדר על־ידי,

$$\varphi(\theta, \phi) = ((R + r\cos\phi)\cos\theta, (R + r\cos\phi)\sin\theta, r\sin\phi)$$

נסמן את הטורוס הנוצר על־ידי הפרמטריזציה ב־$T = \varphi((0, 2\pi)^2)$.

סעיף א׳

נחשב את מקדמי התבנית היסודית השנייה.

פתרון מצאנו את ערך הנגזרת והתבנית היסודית הראשונה של הטורוס בשאלה 5,

$$D\varphi|_{(\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\phi)\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

וכן,

$$I = \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

וכן ונחשב גם את הנורמל,

$$n(u) = \frac{D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)}{|D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)|}$$

ולכן נחשב את $D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)$,

$$D_1 f(u) \wedge D_2 f(u) = \begin{pmatrix} r(R + r\cos\phi)\cos\phi\cos\theta \\ r(R + r\cos\phi)\cos\phi\sin\theta \\ r(R + r\cos\phi)\sin\phi \end{pmatrix}$$

נבחין שדילגנו על שלב הפישוט לצורך הקריאות. בהתאם גם,

$$|D_1 f(u) \wedge D_2 f(u)| = r(R + r\cos\phi)\sqrt{\cos^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi} = r(R + r\cos\phi)$$

ולכן נקבל,

$$n(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

וכן,

$$D_1 n = \begin{pmatrix} -\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D_2 n = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta \\ -\sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

נעבור לחישוב מקדמי התבנית היסודית השנייה,

$$L = -D_1 f \cdot D_1 n = -(R + r\cos\phi)\sin\theta\cos\phi\sin\theta - (R + r\cos\phi)\cos\theta\cos\phi\cos\theta = -(R + r\cos\phi)\cos\phi$$

$$M = -D_1 f \cdot D_2 n = (R + r\cos\phi)\sin\theta\sin\phi\cos\theta - (R + r\cos\phi)\cos\theta\sin\phi\sin\theta + 0 = 0$$

$$N = -D_2 f \cdot D_2 n = -r\sin^2\phi\cos^2\theta - r\sin^2\phi\sin^2\theta - r\cos^2\phi = -r\sin^2\phi - r\cos^2\phi = -r$$

כלומר מצאנו שמתקיים,

$$II = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\phi)\cos\phi & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

סעיף ב׳

נחשב את עקמומיות גאוס ואת העקמומיות הממוצעת.

פתרון נשתמש בנוסחות שמצאנו בשאלה 7 כדי לחשב את הערכים הללו.

$$K = \frac{\det II}{\det I} = \frac{r(R + r\cos\phi)\cos\phi}{r^2(R + r\cos\phi)^2} = \frac{\cos\phi}{r(R + r\cos\phi)}$$

ועל־ידי שימוש בנוסחה שקיבלנו עבור עקמומיות ממוצעת,

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(II \cdot I^{-1}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} -(R + r\cos\phi)\cos\phi & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^{-2} & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\phi}{R + r\cos\phi} + \frac{1}{r}\right)$$

סעיף ג׳

נמצא נקודות על הטורוס שבהן עקמומיות גאוס מקיימת $K > 0, K = 0, K < 0$.

פתרון נשתמש בערך המפורש שמצאנו בסעיף הקודם,

$$K = 0 \iff \frac{\cos\phi}{r(R + r\cos\phi)} = 0 \iff \cos\phi = 0$$

ולכן $\phi = \frac{\pi}{2}$ מקיים את הטענה, נבחר $(\pi, \frac{\pi}{2})$ כנקודה בה העקמומיות היא אפס, נבחין כי יכולנו להגיע לתוצאה זו גם באופן גאומטרי לגמרי, זו נקודה שנמצאת בדיוק במגע שבין טורוס לרצפה, שם העקמומיות מאוזנת.

נסיק מהחישוב הקודם שגם $\cos\phi < 0 \iff K < 0$ ונבחר את הנקודה (π, π), זוהי נקודה בחלק הפנימי של הטורוס. לבסוף גם נבחר $(\pi, \frac{\pi}{3})$ כנקודה בה מתקיים $K > 0$, זוהי נקודה בחלק החיצוני של הטורוס.

שאלה 7

תהי $n : U \to S^2$ העתקת גאוס של $f : U \to \mathbb{E}^3$, המוגדרת על־ידי,

$$n = \frac{D_1 f \wedge D_2 f}{|D_1 f \wedge D_2 f|}$$

ונגדיר $W : T_p S \to T_p S$ על־ידי,

$$W(D_i f) = -D_i n$$

עבור $i \in \{1, 2\}$.

סעיף א׳

נראה ש־W הוא אופרטור צמוד לעצמו של $T_p S$, כלומר,

$$I_p(W(u), v) = I_p(u, W(v))$$

לכל $u, v \in T_p S$.

הוכחה. נסמן $u = D|_p f(u_x, u_y), v = D|_p f(v_x, v_y)$ ולכן,

$$W(u) = W(D|_p f(u_x, u_y)) = -D|_p n(u_x, u_y)$$

ולכן גם,

$$W(v) = -D|_p n(v_x, v_y)$$

ולכן,

$$\begin{aligned}
I_p(W(u), v) &= \langle W(u), v\rangle \\
&= \langle -D|_p n(u_x, u_y), D|_p f(v_x, v_y)\rangle \\
&= \langle -D_1 n(u_x), D_1 f(v_x)\rangle + \langle -D_2 n(u_y), D_1 f(v_x)\rangle + \langle -D_1 n(u_x), D_2 f(v_y)\rangle + \langle -D_2 n(u_y), D_2 f(v_y)\rangle \\
&= u_x v_x \langle -D_1 n, D_1 f\rangle + u_y v_x \langle -D_2 n, D_1 f\rangle + u_x v_y \langle -D_1 n, D_2 f\rangle + u_y v_y \langle -D_2 n, D_2 f\rangle \\
&= u_x v_x \langle D_1 f, -D_1 n\rangle + u_y v_x \langle D_2 f, -D_1 n\rangle + u_x v_y \langle D_1 f, -D_2 n\rangle + u_y v_y \langle D_2 f, -D_2 n\rangle \\
&= \langle -D|_p f(u_x, u_y), D|_p n(v_x, v_y)\rangle \\
&= \langle u, W(v)\rangle \\
&= I_p(u, W(v))
\end{aligned}$$

וקיבלנו שהטענה אכן נכונה. $\square$

סעיף ב׳

נראה כי לכל $u, v \in T_p S$ מתקיים,

$$II_p(u, v) = I_p(W(u), v) = I_p(u, W(v))$$

הוכחה. מספיק להראות את הטענה לכל איבר בנפרד, נסמן,

$$II_p = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \qquad I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

ולכן נרצה להראות שמתקיים,

$$L(u, v) = E(W(u), v), \quad M(u, v) = F(W(u), v), \quad N(u, v) = G(W(u), v)$$

נשים לב כי $\langle n, D_i f\rangle = 0$ מהגדרת n כאנך של המישור המשיק, אם נגזור את הביטוי נקבל,

$$D_j \langle n, D_i f\rangle = D_j 0 = 0$$

אז תוך שימוש בנגזרת מכפלה נקבל,

$$D_j\langle n, D_i f\rangle = \langle D_j n, D_i f\rangle + \langle n, D_j D_i f\rangle = 0 \implies \langle D_j n, D_i f\rangle = -\langle n, D_j D_i f\rangle$$

עבור $i, j \in \{1,2\}$. עבור בחירת $i = 1, j = 1$ נקבל,

$$E(W(\cdot), \cdot) = \langle D_1 n, D_1 f\rangle = \langle n, D_1^2 f\rangle = L$$

כלומר מצאנו שהטענה מתקיימת עבור E, L, ותוך שימוש בשוויון זה נוכל להסיק את הטענה לכל שאר המקדמים גם כן. □

סעיף ג׳

נראה כי המטריצה אשר מייצגת את W בבסיס $(D_1 f, D_2 f)$ היא,

$$[W]_{(D_1 f, D_2 f)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

הוכחה. בסעיף הקודם מצאנו שמתקיים,

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(D_1 f) \\ W(D_2 f) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(D_1 f) \\ W(D_2 f) \end{pmatrix}$$

כאשר השתמשנו בחיוביות בהחלט של I במעבר האחרון. □

סעיף ד׳

יהי (e_1, e_2) בסיס אורתונורמלי של W ונניח שהוא מקבל את הערכים העצמיים (κ_1, κ_2) בהתאמה. נראה שלכל $u = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta \in T_p S$ מתקיים,

$$\kappa_{\text{normal}}(u) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta$$

הוכחה. נראה את הטענה בשתי דרכים. הדרך הראשונה היא גאומטרית, אנו יודעים שהתבנית היסודית השנייה מייצגת עקמומיות בנקודה, ואם נשתמש במעבר מדיפרנציאל להצגה כיוונית נקבל בדיוק את הגדרת הנורמל, כלומר,

$$\kappa_n(u) = I\!I(u) = I(W(u), u) \tag{1}$$

מתקיים על־פי ההנחה,

$$W(e_1) = \kappa_1 e_1, \qquad W(e_2) = \kappa_2 e_2$$

ולכן מלינאריות W גם,

$$W(u) = \kappa_1 \cos\theta + \kappa_2 \sin\theta$$

ולכן תוך שימוש בשוויון (1) מתקבל,

$$\kappa_n(u) = \langle \kappa_1 e_1 \cos\theta + \kappa_2 e_2 \sin\theta, e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta\rangle = \kappa_1 e_1 e_1 \cos^2\theta + (\kappa_1 + \kappa_2) e_1 e_2 \sin\theta\cos\theta + \kappa_2 e_2 e_2 \sin^2\theta$$

אבל (e_1, e_2) בסיס אורתונורמלי ולכן נקבל,

$$\kappa_n(u) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta$$

וקיבלנו את נכונות הטענה.

כמובטח, נעבור לדרך השנייה, היא למעשה הבסיס לדרך הראשונה. הגדרנו את הנורמל לעקומה כנורמל $\kappa_n(u)$ העקום הנוצר מחיתוך המשטח עם המישור האפיני הנוצר על־ידי n ו־u. אילו נגדיר $c : I \to S$ עקום עם פרמטריזציה לפי אורך בהתאם נקבל שאם $c(0) = p$ אז $c'(0) = u$ ולכן גם $c' \cdot n = 0$, כלומר n מתלכד עם c''. אז $c'' = \kappa_n n$ ותוך שימוש בפיתוח טיילור שראינו בכיתה נוכל להסיק שאכן $\kappa_n = I\!I(u)$ בדיוק. □

סעיף ה׳

נניח ש־$\kappa_1 \geq \kappa_2$ ונסיק שאלו הם ערכי העקמומיות המקסימלית והמינימלית בהתאמה.

הוכחה. נבחין כי מהסעיף הקודם קיימת התאמה בין זוויות ווקטורים הנורמליים ב־T_pS, לכן מספיק לבחון אותם. נגדיר את,

$$h(\theta) = \kappa_n(u(\theta)) = \kappa_n(e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta$$

נבחין כי בהתאם להגדרתה h מקבלת כל ערך עקמומיות נורמלית ולכן מספיק לחקור אותה כפונקציה $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. בנוסף זוהי פונקציה π־מחזורית ולכן נבדוק רק את התחום $[0, \pi]$. נגזור ונקבל,

$$h'(\theta) = -2\kappa_1 \cos\theta \sin\theta + 2\kappa_2 \sin\theta \cos\theta = \sin(2\theta)(\kappa_2 - \kappa_1)$$

ולכן $h' = 0 \iff \theta = 0, \frac{\pi}{2}$ ומבדיקה ישירה נקבל ש־$\theta = 0$ מקסימום ובה מתקבל $h(0) = \kappa_1$ וכן $\theta = \frac{\pi}{2}$ מינימום ושם $h(\frac{\pi}{2}) = \kappa_2$. נסיק ש־$\kappa_1, \kappa_2$ הן העקמומיויות הראשיות וכן e_1, e_2 הכיוונים הראשיים. □

סעיף ו׳

נגדיר את עקמומיות גאוס K להיות המכפלה $\kappa_1 \cdot \kappa_2$ עבור העקמומיויות הראשיות. נגדיר את העקמומיות הממוצעת $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$.
נסיק שמתקיים,

$$K = \det\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\right) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

וכן,

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

הוכחה. ניזכר בטענה מלינארית 1, אם $M \in M_2(\mathbb{R})$ לכסינה עם λ_1, λ_2 ערכים עצמיים, אז מתקיים $\det M = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, בפרט אם $T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^2)$ אופרטור לינארי ו־M מטריצת הייצוג שלו באיזשהו בסיס, אז $\det M$ עדיין מקיימת את הטענה. מצאנו שבבסיס $(D_1 f, D_2 f)$ המטריצה המייצגת של W היא,

$$J = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

וכן מצאנו בסעיף הקודם ש־$K = \kappa_1\kappa_2$ היא מכפלת הערכים העצמיים, ולכן,

$$K = \det J$$

נעבור לחישוב נוסחה ישירה,

$$K = \det J = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

כאשר השתמשנו בכפליות הדטרמיננטה ודטרמיננטת מטריצה הופכית.

נעבור לעקמומיות הממוצעת. עוד טענה מלינארית היא ש־$\operatorname{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2$, כלומר העקבה היא תמיד סכום הערכים העצמיים, לכן,

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} J$$

וקיבלנו את המבוקש. נשתמש בנוסחה ידועה למטריצה הופכית מסדר 2 ונקבל,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{tr} J &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{EG - F^2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + LE & -FM + EN \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

וקיבלנו את המבוקש. □

סעיף ז'

נראה שאם התבנית היסודית השנייה מתאפסת בכל נקודה אז המשטח הוא חלק ממישור.

הוכחה. מסעיף ב' נובע שלכל $p \in S$ ולכל $u, v \in T_pS$ מתקיים,

$$0 = II_p(u, v) = \langle W(u), v \rangle = \langle -nu, v \rangle$$

נסיק אם כך ש-$D|_p f \perp D_1 n, D_2 n$, או במילים אחרות $D_1 n, D_2 n \perp T_pS$, אבל הגדרנו את n כך ש-$n \perp T_pS$ ו-$\|n\| = 1$ ולכן $D_1 n, D_2 n \perp n$ ונקבל ש-$D|_p n = 0$ בלבד. טענה זו נכונה לכל $p \in S$ ולכן n היא קבועה, ונסמן $n \equiv n_0$. בהתאם גם $D_1 f, D_2 f \perp n_0$ בכל נקודה, ותוך שימוש בטיעון שקול לשאלה 3 סעיף ג' נקבל ש-S ניתנת לשיכון במישור. $\square$