פתרון מטלה 5 — תורת המידה, 80517

21 בנובמבר 2025

שאלה 1

נגדיר תוך שימוש במשפט ההצגה של ריס את מידת לבג על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ כמידה המרחיבה את הפונקציונל הלינארי המוגדר על־ידי אינטגרל רימן. נסמן אותה ב־λ.

סעיף א׳

נראה ש־λ אינוואריאנטית להזזה.

הוכחה. תהי קבוצה $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ מדידה, ונניח ש־$r \in \mathbb{R}$ מספר כלשהו, נראה שמתקיים $\lambda(E) = \lambda(E + r)$.
מ־σ־אדיטיביות נוכל להניח ש־E קשירה מסילתית ובפרט קטע $E = [a, b]$ (אחרת נחלק את E למספר בן־מניה של מחלקות קשירות). נבחין כי עתה E היא קבוצה קומפקטית ולכן $\lambda(E) < \infty$. ידוע שמתקיים $\Lambda f = \int f \, d\lambda$, ולכן בפרט עבור $\mathbb{1}_E$ נקבל,

$$\lambda(E) = \int \mathbb{1}_E \, d\lambda = \Lambda \mathbb{1}_E = \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_E(x) \, dx = \int_a^b 1 \, dx = b - a$$

אבל בהתאם נקבל,

$$\lambda(E + r) = \int_{a+r}^{b+r} 1 \, dx = b - a$$

ולכן נסיק שלכל E מדידה כללית מתקיים גם $\lambda(E) = \lambda(E + r)$.
בפרט נסיק $\lambda([0, 1]) = 1 - 0 = 0$. □

סעיף ב׳

תהי $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ חסומה ואינטגרבילית רימן. נראה כי $\int f \, dx = \int f \, d\lambda$.

הוכחה. תהי פונקציית מדרגות s המקרבת את f עד כדי $\varepsilon > 0$. נסמן את החלוקה שלה ב־$P = (p_0, \dots, p_n)$ ולכן,

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(p_{k-1}, p_k)} s_k$$

עבור $s_k \in \mathbb{R}$ סקלרים. אז $s \restriction (p_{k-1}, p_k)$ קבועה ולכן בפרט רציפה ואינטגרבילית ולכן אינטגרל רימן ולבג שלה מזדהים. מאדיטיביות האינטגרלים נקבל שגם עבור s האינטגרלים מזדהים. נניח עתה ש־$\{s^i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדרגות המקיימות $f = \lim_{i \to \infty} s^i$, ונניח בלי הגבלת הכלליות שהסדרה היא מונוטונית עולה, זאת שכן נוכל להגדיר את s^i כך שהחלוקה של s^{k+1} היא עידון החלוקה של s^k לכל k. נקבל שמתקיים,

$$\int f \, dx = \lim \int s^k \, dx = \lim \int s^k \, d\lambda = \int f \, d\lambda$$

וקיבלנו הזדהות של האינטגרלים לפונקציה אינטגרבילית כללית. □

סעיף ג׳

נניח ש־μ היא מידת רדון אינוואריאנטית להזזה על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, ונסיק ש־$\mu = \alpha\lambda$ עבור $\alpha > 0$.

הוכחה. נבחין כי מאינוואריאנטיות להזזה של μ, אם $[a, b]$ קטע, אז $\mu([\frac{b-a}{2}, b]) = \mu([a, \frac{b-a}{2}])$ שכן האורכים שווים עד כדי הזזה ב־$\frac{b-a}{2}$, באינדוקציה נסיק שמתקיים $\mu([0, 2]) = \mu([0, 1]) + \mu([1, 2]) = 2\mu([0, 1])$. באופן דומה $\mu([0, \beta]) = \beta\mu([0, 1])$ עבור $\beta \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ולכן באינדוקציה $\mu([a, b]) = \mu([0, 1]) \cdot (b - a)$ לכל $a, b \in \mathbb{Q}$, ומסגירות לגבולות גם ל־$a, b \in \mathbb{R}$. נסמן $\alpha = \mu([0, 1])$ ונקבל ש־$\mu([a, b]) = \alpha\lambda([a, b])$. □

סעיף ד׳

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ונגדיר את הפונקציונל הלינארי $\mathrm{ev}_{x_0} : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ המוגדר על־ידי,

$$\mathrm{ev}_{x_0}(f) = f(x_0)$$

נראה כי קיימת מידה המושרית ממשפט ריס יחד עם $\mathrm{ev}_{\mathrm{x}_0}$ ונמצא את המידה μ הנוצרת.

הוכחה. אילו $f \geq 0$ אז $f(x_0) \geq 0$ מהגדרה ולכן גם $\mathrm{ev}_{\mathrm{x}_0}(f) = f(x_0) \geq 0$, כלומר $\mathrm{ev}_{\mathrm{x}_0}$ פונקציונל לינארי חיובי. בהתאם תנאי משפט ההצגה של ריס מתקיים ו־μ מידה יחידה המקיימת,

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}),\ \mathrm{ev}_{\mathrm{x}_0}(f) = \int f\ d\mu$$

נניח ש־E קבוצה מדידה, אז מתקיים,

$$\mu(E) = \int \mathbb{1}_E\ d\mu = \mathrm{ev}_{\mathrm{x}_0}(\mathbb{1}_E) = \mathbb{1}_E(x_0)$$

כלומר $\mu = \delta_{x_0}$, מידת דיראק. □

שאלה 2

נחשב את הגבולות הבאים.

סעיף א׳

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n f_n\ dx$$

כאשר $f_n(x)=(1-\frac{x}{n})^n e^{x/2}$

פתרון נבחין כי נתקיים $(1-\frac{x}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x}$, ולכן גם $f = e^{-x/2} \to f$. נבחין כי גם f_n מונוטונית יורדת וכן $f_n(0)=1, f_n(n)=0$, ולכן f_n נשלטות על־ידי c_2, וממשפט ההתכנסות הנשלטת,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n f_n\ dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n f_n\ d\lambda=\int_{(0,\infty)} f\ d\lambda=\int_0^\infty e^{-x/2}\ dx=-2\cdot(0-1)=2$$

סעיף ב׳

נסמן $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n e^{-\frac{x}{2}}$ ונמצא את $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f_n\ dx$.

פתרון נבחין כי הפעם f_n היא מונוטונית עולה מהגדרה, וכן $f_n(0)=1$, לכן נוכל להניח שמתקיים $\int_0^n f_n\ dx\ge n$.

בהתאם $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f_n\ dx=\infty$.

שאלה 3

תהי μ מידת בורל על מרחב טופולוגי X, ונגדיר,

$$\mathrm{Supp}(\mu) = \{x \in X \mid \forall U \in \tau_X, x \in U \implies \mu(U) > 0\}$$

כלומר קבוצת הנקודות שכל סביבה פתוחה שלהן ממידה חיובית. נאמר ש־μ נתמכת ב־$\mathrm{Supp}(\mu)$.

סעיף א'

נניח ש־$X = \mathbb{R}^d$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, ונראה ש־$C = \mathrm{Supp}(\mu)$ היא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר כך ש־$\mu(C^C) = 0$.

הוכחה. נבחין כי $W = X \setminus C$ היא קבוצת הנקודות $x \in X$ כך שקיימת פתוחה $x \in U$ כך ש־$\mu(U) = 0$, כלומר W קבוצת הנקודות ששייכות לקבוצה ממידה אפס כלשהי. בהתאם אם נסמן $x \in U_x$ קבוצה פתוחה ממידה אפס, אז נקבל $W = \bigcup_{x \in W} U_x$, כלומר W פתוחה ולכן C סגורה. מספיק שנראה ש־W מקסימלית כך ש־$\mu(U) = 0$. נניח שקיימת V פתוחה ממידה אפס כך ש־$V \not\subseteq W$, אז $V = \bigcup_{x \in V} U_x \cap V$, אבל לכל $x \in V$ כזה $x \in W$ מהגדרה ולכן גם $U_x \subseteq W$ וכן $V \subseteq W$ בסתירה. □

סעיף ב'

תהי $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ מסילה רציפה, נבדוק איפה הדחיפה קדימה $\varphi_* \lambda$ נתמכת.

פתרון נסמן $I = [0,1]$. תהי $x \in \varphi(I)$, אז $C_x = \{x\}$ היא סגורה שכן $\varphi(I)$ האוסדורף, אבל $\varphi_* \lambda(C_x) = \lambda(\varphi^{-1}(x))$. מהגדרת בסיס לסגורות נוכל להסיק ש־$\lambda(\varphi^{-1}(x)) > 0 \iff \exists 0 \le a < b \le 1,\ [a,b] \subseteq \varphi^{-1}(x)$, כלומר אם קיים קטע סגור לא מנוון כך ש־$\varphi \restriction [a,b] = c_x$.

סעיף ג'

תהי $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^\infty$ מניה, ונגדיר,

$$\mu = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \delta_{q_n}$$

כאשר δ_{q_n} מידת דיראק, ונבדוק איפה μ נתמכת.

פתרון תהי נקודה $x \in \mathbb{Q}$ ונבדוק אם לכל $C \ni x$ סגורה מתקיים $\mu(C) > 0$. לכל $C \ni x$ סגורה נסיק מנורמליות שגם $C \setminus \{x\} = C' \uplus \{x\}$ שתי סגורות, וכן,

$$\mu(C) = \mu(C') + \mu(\{x\}) > 2^{-n}$$

עבור $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$x = q_n$, לכן נסיק ש־$x \in \mathrm{Supp}(\mu)$, כלומר $\mathrm{Supp}(\mu) = \mathbb{Q}$.

סעיף ד'

נראה שלכל קבוצה קומפקטית $K \subseteq \mathbb{R}$ קיימת מידת הסתברות בורל הנתמכת עליה.

הוכחה. בשאלה 1 סעיף ב' ראינו שכל מידת רדון על $\mathbb{R}$ היא מהצורה $\alpha\lambda$ עבור $\alpha > 0$ ו־λ מידת לבג. λ הוא רדון ולכן $\alpha := \lambda(K) < \infty$ ממשי חיובי. אם נסמן $\mu' = \frac{1}{\alpha}\lambda$ אז נקבל ש־$\mu(K) = 1$, כלומר $\mu = \mu' \restriction \mathcal{P}(K) \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ היא מידה (כצמצום של מידה) המקיימת $\mu(K) = 1$ וכן $\mathrm{Supp}(\mu) = K$ בדיוק. □