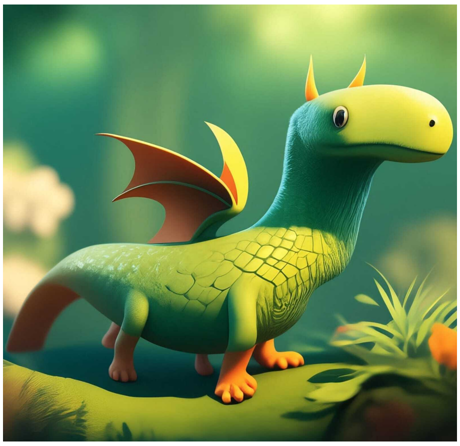
פתרון מטלה 01 — מבוא לטופולוגיה, 80516

26 במרץ 2025



שאלה 1

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ותהי $A \subseteq X$ תת־קבוצה כלשהי.
נגדיר את טופולוגיית תת־המרחב על X להיות $\tau \restriction A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$.

סעיף א׳

נוכיח כי $\tau \restriction A$ היא טופולוגיה על A.

הוכחה. נוכיח ישירות מהגדרת טופולוגיה.
נבחין כי $X \in \tau$ ולכן $A = X \cap A \in \tau \restriction A$, ובאופן דומה גם $\emptyset \in \tau \restriction A$.
נעבור לבדיקת סגירות על איחוד. תהי I קבוצת אינדקסים ונניח ש־$\{X_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau \restriction A$, נניח גם שלכל $\alpha \in I$ קיים $X_\alpha \subseteq X'_\alpha$ כך ש־$X'_\alpha \in \tau$ (קיימים מהגדרה), אז,

$$\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X'_\alpha \cap A = \left(\bigcup_{\alpha \in I} X'_\alpha\right) \cap A$$

אבל τ טופולוגיה ולכן סגורה לאיחוד ובהתאם $\bigcup_{\alpha \in I} X'_\alpha = Y \in \tau$ ולכן $Y \cap A \in \tau \restriction A$.
נסיים ונבדוק סגירות סופית לחיתוכים, נניח ש־$X_i \in \tau \restriction A$ עבור $1 \le i \le n$ עבור $n \in \mathbb{N}$ נתון. נניח גם ש־$X_i \subseteq X'_i \in \tau$ לכל i מהצדקה זהה לזו בחלק הקודם. גם הפעם נובע,

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = \bigcap_{i=1}^{n} X'_i \cap A = \left(\bigcap_{i=1}^{n} X'_i\right) \cap A \in \tau \restriction A$$

ומצאנו משיקולים זהים יש סגירות סופית לחיתוך, ובהתאם $\tau \restriction A$ אכן טופולוגיה. □

סעיף ב׳

נניח שקיימת מטריקה ρ על X כך ש־τ היא הטופולוגיה המושרית מ־ρ.
תהי $A \subset X$, נוכיח ש־ $\tau \restriction A$ מושרית מ־$(A, \rho \restriction A^2)$ כמרחב מטרי.

הוכחה. נבחין כי מתקיים,

$$x \in \tau \restriction A \iff \exists x' \in \tau, x = x' \cap A$$

ונתון כי $\tau_\rho = \tau$, כלומר זוהי טופולוגיה מושרית ממטריקה ρ, ולכן x' קבוצה פתוחה ב־(X,ρ), לכן לכל $p \in x'$ קיים $r > 0$ כך ש־$B_r(p) \subseteq x'$.
בהתאם לזה מתקיים גם $B_r(p) \cap A \subseteq x' \cap A = x$, אבל גם $B_r(p) \cap A = \{z \in A \mid (\rho \restriction A^2)(p,z) < r\}$, כלומר הכדור נשאר פתוח ובהתאם x קבוצה פתוחה במרחב המטרי המצומצם. מצאנו אם כן ש־$x \in \tau \restriction A$ אם ורק אם x פתוחה ב־$(A, \rho \restriction A^2)$ ולכן $\tau \restriction A = \tau_{\rho \restriction A^2}$. □

שאלה 2

נמצא טופולוגיה על $\mathbb{Z}$ שבה אף נקודה אינה קבוצה פתוחה, אך הטופולוגיה המושרית על $\mathbb{N}$ (בקורס זה ללא 0) היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

פתרון נגדיר את הבסיס $\mathcal{B} = \{-ZZ\} \cup \{-\mathbb{Z} \cup \{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, כלומר קבוצות מהצורה $\{-1, -2, \dots\} \cup \{n\}$ לכל n טבעי, והקבוצה $\{-1, \dots\}$. נוודא שזהו אכן בסיס, לכל $z \in \mathbb{Z}$ או $z \in \mathbb{N}$ ואז $-ZZ \cup z \in \mathcal{B}$ או ש־$z < 0$ ולכן בהכרח קיימים איברים מכילים. בנוסף לכל $A, B \in \mathcal{B}$ מתקיים $A \cap B = -\mathbb{Z} \implies A \neq B$ ולכן נוכל לבחור כל איבר ב־$\mathcal{B}$ ולקבל שהתנאי השני לבסיס מתקיים. נגדיר $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$, כלומר הטופולוגיה המושרית מהבסיס $\mathcal{B}$.

נעבור לבדיקת תנאי התרגיל, אין אף נקודה שהיא קבוצה פתוחה, שכן כל איבר $x \in \tau_{\mathcal{B}}$ הוא איחוד של איברי $\mathcal{B}$, לכן בפרט $x \supseteq -\mathbb{Z}$ ואיננו יחידון.
מהצד השני נבחן את $\tau \restriction \mathbb{N}$, הפעם $\{n\} \in \tau \restriction \mathbb{N}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ישירות מבדיקת הבסיס, ולכן זוהי הטופולוגיה הדיסקרטית.

סעיף א׳

נמצא טופולוגיה על $\mathbb{Z}$ שבה אף נקודה אינה קבוצה פתוחה, אך לכל $n \geq 0$, הטופולוגיה המושרית על $\mathbb{Z} \cap [-n, n]$ היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

פתרון נגדיר את הבסיס $\mathcal{B} = \{(\mathbb{Z} \setminus [-n, n]) \cup \{k\} \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \cap [-n+1, n-1]\}$. נבחין כי לכל $m \in \mathbb{Z}$ אכן אפשר לבחור $k = m, n = m+1$, וכן לכל $A, B \in \mathcal{B}$, אם $m \in A \cap B$ אז או ש־m גדול מ־$\max\{n_A, n_B\}$ ונוכל לבחור קבוצה מתאימה, או ש־$k_A = k_B$ ו־$m = k_A$, אז נבחר $k = k_A, n = k+1$.

עתה משהוכחנו שזהו אכן בסיס, נבחן את הטופולוגיה $\tau_{\mathcal{B}}$, ברור כי אין יחידונים בטופולוגיה זו, זאת שכן נוכל לבחור $n \in \mathbb{N}$ גדול מספיק כך שיופיע באיבר לכל איבר ב־$\tau_{\mathcal{B}}$. מן הצד השני, נקבע $n \in \mathbb{N}$ ונבחן את $\tau_{\mathcal{B}} \restriction [-n, n]$, אז הקבוצות $((\mathbb{Z} \setminus [-n-1, n+1]) \cup \{k\}) \cap [-n, n] = \{k\}$ נמצאת ב־$\tau_{\mathcal{B}} \restriction A$.

שאלה 3

סעיף א׳

תהינה $\{\tau_i\}_{i\in I}$ טופולוגיות על קבוצה X.
נוכיח כי גם $\bigcap_{i\in I}\tau_i$ היא טופולוגיה על X.

הוכחה. נוכיח את הטענה ישירות מהגדרת טופולוגיה.
נבחין כי $\forall i\in I,\ X,\emptyset\in\tau_i$ מהגדרה, ולכן $X,\emptyset\in\bigcap_{i\in I}\tau_i$.
נעבור לסגירות לאיחוד, נניח ש־J קבוצת אינדקסים, ונניח כי $X_j\in\bigcap_{i\in I}\tau_i$ לכל $j\in J$. נניח גם ש־$X_j^i\in\tau_i$ כך ש־$X_j=\bigcap_{i\in I}\tau_i$, אז מתקיים,

$$\bigcap_{j\in J}X_i=\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I}X_j^i=\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}X_j^i$$

אבל τ_i סגורה לאיחודים ולכן $\bigcup_{j\in J}X_j^i\in\tau_i$, ובהתאם קבוצה זו היא פתוחה ב־$\bigcap_{i\in I}\tau_i$.
סגירות סופית לחיתוך זהה. □

סעיף ב׳

נסיק שאם P היא אוסף כלשהו של תתי־קבוצות של X אז קיימת טופולוגיה מינימלית τ כך ש־$P\subset\tau$. נקרא ל־τ טופולוגיה מינימלית המכילה את P.

הוכחה. תהי $\Sigma=\{\sigma\in\mathcal{P}(X)\mid P\subset\sigma,\sigma\text{ is a topology over }X\}$, נבחין כי זוהי אכן קבוצה מאקסיומת הפרדה (תכונות טופולוגיה הן מסדר ראשון), ולכן $\bigcap\Sigma=\tau$ טופולוגיה מסעיף א׳. כמובן ש־τ מינימלית ביחס ההכלה מבין איברי Σ ישירות מהגדרה. □

סעיף ג׳

תהי $X=\{a,b,c\}$ ונגדיר $P=\{\{a\},\{a,b\},\{b,c\}\}$, נמצא את הטופולוגיה המינימלית המכילה את P.
פתרון נניח ש־τ הטופולוגיה המקיימת זאת, אז בהכרח $P\subseteq\tau$, וכמובן $\emptyset,X\in\tau$. אנו יודעים ש־τ סגורה לחיתוכים (בקבוצה סופית כל חיתוך הוא סופי), לכן גם $\{b\}\in\tau$, והסגירות לאיחודים לא מוסיפה איברים לקבוצה, ולכן סיימנו.

שאלה 4

יהיו $(X,\tau_X),(Y,\tau_Y)$ מרחבים טופולוגיים.

סעיף א'

נגדיר טופולוגיה τ על $X\sqcup Y$ על־ידי $A\in\tau \iff \exists U\in\tau_X, V\in\tau_Y,\ A=U\sqcup V$.
נראה ש־τ היא טופולוגיה על $X\sqcup Y$.

הוכחה. נבחין כי $\emptyset\in\tau_X,\tau_Y \implies \emptyset\in\tau$ וכן $X\in\tau_X, Y\in\tau_Y$ ולכן $A\in\tau$.
נניח ש־$\{X_i\}\subseteq\tau_X$ וש־$\{Y_i\}\subseteq\tau_Y$ עבור $i\in I$ קבוצת אינדקסים כלשהי. מתקיים $X_i\sqcup Y_i\in\tau$ לכל $i\in I$, וכן מתקיים,

$$\bigcup_{i\in I} X_i\sqcup Y_i=\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\sqcup\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)$$

מתכונות איחוד זר, ונובע מהגדרת τ כי יש סגירות לאיחוד.
נניח ש־$U,U'\in\tau_X, V,V'\in\tau_Y$, אז $(U\sqcup V)\cap(U'\sqcup V')=(U\cap U')\sqcup(V\cap V')$ ולכן נובע ש־τ סגורה גם לחיתוכים סופיים. $\square$

סעיף ב'

נראה שהטופולוגיה τ המושרית על X שווה ל־τ_X ושהטופולוגיה המושרית על Y שווה ל־τ_Y.

הוכחה. מטעמי סימטריה מספיק להראות את נכונות הטענה על X ו־τ_X.

$$U\in\tau_X \iff \exists V\in\tau_Y,\ U\sqcup V\in\tau \iff U\in\tau\restriction X$$

כאשר הצעד הראשון נובע מהגדרת τ והצעד השני נובע מהגדרת הצמצום. $\square$

סעיף ג'

תהיינה X,Y קבוצות, נראה שכל טופולוגיה על $X\sqcup Y$ מתקבלת מטופולוגיה על X וטופולוגיה על Y באופן שתואר בסעיף א'.

הוכחה. נניח ש־$\tau\subseteq\mathcal{P}(X\sqcup Y)$, ונוכיח שהיא שקולה לטופולוגיה המופיעה בסעיף א' עבור איזושהן טופולוגיות τ_X,τ_Y.
נגדיר $\tau'_X=\tau\restriction X$, זהו צמצום של טופולוגיה ולכן בהכרח טופולוגיה, וכן τ'_X טופולוגיה מעל X, אבל אז מסעיף ב' נובע $\tau_X=\tau'_X$, נגדיר כך גם את τ_Y ומצאנו שאכן τ ניתנת לפירוק. $\square$

שאלה 5

נראה ששני האוספים הבאים של קבוצות הם בסיסים לטופולוגיה כלשהי על $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{B}_1 = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$$

הוכחה. TODO $\square$