פתרון מטלה 08 — מבנים אלגבריים (2), 80446

31 במאי 2025

שאלה 1

יהי שדה K כך ש־p-rank של השדה הוא 1, כלומר $[K : K^p] = p^1$.

סעיף א׳

נראה שלכל $n \in \mathbb{N}$ יש ל־K בדיוק הרחבה אחת L/K שהיא בלתי־ספרבילית לחלוטין מדרגה p^n, וש־$L = K(a^{1/p^n})$ עבור כל $a \in K \setminus K^p$.

הוכחה. מתכונות p-rank מתקיים,

$$[K^{1/p^n} : K] = [K^{1/p^n} : K^{1/p^{n-1}}] \cdots [K^{1/p} : K] = [K : K^p]^n = p^n$$

ולכן נוכל להגדיר $L = K^{1/p^n}$ ולקבל הרחבה מסדר p^n לש K. נראה כי היא בלתי בלתי־ספרבילית לחלוטין. ממשפט מההרצאה מספיק שנוכיח $L \subseteq K^{1/p^\infty}$, אבל זה ידוע מהגדרת K^{1/p^∞} ולכן L הרחבה בלתי־ספרבילית לחלוטין.

נניח ש־L_0/K הרחבה בלתי־ספרבילית לחלוטין מסדר p^n, נראה ש־$L_0 = L$.
בלתי־ספרביליות לחלוטין שקולה ל־$L_0 \subseteq K^{1/p^\infty}$, ו־$[L_0 : K] = p^n$ מאלץ $L_0 \subseteq K^{1/p^n} \cap K^{1/p^\infty}$ ולכן $L_0 = L$ בלבד.

נניח ש־$a \in K \setminus K^p$ איבר שאיננו שורש p. אז $[K(a^{1/p^n}) : K] = p^n$ בלבד, ולכן מיחידות $L = K(a^{1/p^n})$. □

סעיף ב׳

נוכיח שלכל הרחבה סופית L/K יש שדה ביניים $L/L_i/K$ כך ש־L_i/K בלתי־ספרבילית לחלוטין ו־L/L_i ספרבילית.

הוכחה. אנו יודעים כי $[L : K] = p^m$ עבור $m \in \mathbb{N}$, וכן נבחר $n \le m$ המספר הגדול ביותר כך ש־$L/K^{1/p^n}/K$, ונסמן $L_i = K^{1/p^n}$.
מהסעיף הקודם ברור כי L_i/K בלתי־ספרבילית לחלוטין, ולכן נותר לבדוק את L/L_i. ישירות מהגדרת L_i אנו יודעים כי אין $\alpha \in L_i$ כך ש־α בלתי־ספרבילי, אחרת מלכתחילה $\alpha \in L_i$, ולכן $[L : L_i]_i = 1$ ונובע ש־L/L_i ספרבילי. □

שאלה 2

נמצא שדה ביניים של ההרחבה $\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q}$ מדרגה 2 מעל $\mathbb{Q}$.

סעיף א׳

נמצא תת־חבורה מאינדקס 2 של $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, ונמצא במפורש אוטומורפיזם σ שיוצר אותה.

פתרון נגדיר $H = \langle 2 \rangle \leq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, זוהי תת־חבורה מאינדקס 2. היא מתאימה לאוטומורפיזם $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q})$ המוגדר על־ידי,

$$\sigma(\xi_7) = \xi_7^2$$

סעיף ב׳

נחשב את $z = \sum_{h \in H} h(\xi_7)$ ונראה ש־$h(z) = z$ לכל $h \in H$.

הוכחה. אנו יודעים ש־$\xi_7 \mapsto \xi_7^n$ ל־$n \in H = \{1, 2, 4\}$ ולכן,

$$z = \sum_{h \in H} h(\xi_7) = \sum_{n \in H} \xi_7^n = \xi_7 + \xi_7^2 + \xi_7^4$$

נניח ש־$h \in H$ כך ש־$\xi_7 \mapsto \xi_7^n$, אז מתקיים,

$$h(z) = h(\xi_7) + h(\xi_7^2) + h(\xi_7^4) = \xi_7^n + \xi_7^{2n} + \xi_7^{4n}$$

מהצבה ישירה של $n = 1, 2, 4$ נקבל כי $h(z) = z$. □

סעיף ג׳

נסיק ש־$z \in \mathbb{Q}(\xi_7)^H$ וש־$[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] \leq 2$.

הוכחה. מצאנו כי z נקודת שבת של כל $h \in H$ ולכן $z \in \mathbb{Q}(\xi_7)^H$ מהגדרה.
נסיק ש־$H \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q}(\xi_7)^H)$ וכן ש־$[\mathbb{Q}(\xi_7) : \mathbb{Q}(\xi_7)^H] = |H| = 3$, ולכן מפירוק מגדל הרחבות גם $[\mathbb{Q}(\xi_7)^H : \mathbb{Q}] = 2$. □

סעיף ד׳

נמצא $d \in \mathbb{Z}$ כך ש־$\mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

פתרון

$$\begin{aligned} z^2 + bz + c = 0 &\iff \xi_7^2 + \xi_7^4 + \xi_7^1 + 2(\xi_7^3 + \xi_7^5 + \xi_7^6) + (\xi + \xi_7^2 + \xi_7^4)b + c = 0 \\ &\iff z + 2(-z - 1) + zb + c = 0 \\ &\iff (b - 1)z + (c - 2) = 0 \end{aligned}$$

כלומר $f(x) = x^2 + x + 2$ מקיים $f(z) = 0$ ו־$\deg f = 2$ ולכן $f_{z,\mathbb{Q}} = f$. בהתאם,

$$f(\zeta) = 0 \iff \zeta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2}$$

ונקבל $\zeta \in \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ וזו הרחבה ריבועית ולכן עבור $d = -7$ נקבל $\mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

שאלה 3

יהי K שדה, ו־$f \in K[x]$ אי־פריק וספרבילי. נניח גם כי L שדה פיצול של f מעל K.

סעיף א׳

נראה שאם כל שדה ביניים $L/E/K$ הוא נורמלי אז כל שורש של f יוצר את L מעל K.

הוכחה. יהי α שורש של f, אז $L/K(\alpha)/K$ הרחבה נורמלית, ו־$f_{\alpha,K}$ מתפצל לחלוטין בשדה זה. אבל $f = f_{\alpha,K}$ ישירות מהגדרה, כלומר $K(\alpha) = L$ בלבד. $\square$

סעיף ב׳

נסיק שאם $\mathrm{Gal}(L/K)$ אבלית אז כל שורש של f יוצר את L מעל K.

הוכחה. בחבורה אבלית כל תת־חבורה היא תת־חבורה נורמלית של החבורה, לכן אם $N \le \mathrm{Gal}(L/K)$ אז $N \trianglelefteq \mathrm{Gal}(L/K)$ ו־L^N/K הרחבה נורמלית של K. מהסעיף הקודם נסיק ישירות שכל שורש של f יוצר את L מעל K. $\square$

שאלה 4

נסמן $f(x) = x^4 - 7x^2 + 7 \in \mathbb{Q}[x]$, ונניח כי $L/\mathbb{Q}$ שדה פיצול של f.

סעיף א׳

נסמן,

$$\beta_1 = \frac{7+\sqrt{21}}{2}, \quad \beta_2 = \frac{7-\sqrt{21}}{2}$$

השורשים של $y^2 - 7y + 7 = 0$.

סעיף ב׳

נראה ש־$\mathbb{Q}(\beta_1, \beta_2) = \mathbb{Q}(\beta_1)$ וש־$[\mathbb{Q}(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}) : \mathbb{Q}(\beta_1)] = 4$.

הוכחה. מתקיים,

$$\beta_2 = 7 - \beta_1$$

ו־$7 \in \mathbb{Q}$ לכן $\beta_2 \in \mathbb{Q}(\beta_1)$ ובהתאם $\mathbb{Q}(\beta_1, \beta_2) = \mathbb{Q}(\beta_1)$ ובפרט $\mathbb{Q}(\beta_1) = \mathbb{Q}(\beta_2)$.

כהיסק ישיר גם,

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}) : \mathbb{Q}(\beta_1)] = [\mathbb{Q}(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{\beta_1})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{\beta_1}) : \mathbb{Q}(\beta_1)] = 2 \cdot 2$$

כמסקנה ממטלה 5 שאלה 3 סעיף ב׳. □

סעיף ג׳

נסיק ש־$L = \mathbb{Q}(\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2})$ מדרגה 8 מעל $\mathbb{Q}$.

הוכחה. אנו יודעים כי $[\mathbb{Q}(\beta_1) : \mathbb{Q}] = 2$ כשורש של פולינום אי־פריק ב־$\mathbb{Q}$ מסדר 2, ולכן,

$$[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\beta_1)] \cdot [\mathbb{Q}(\beta_1) : \mathbb{Q}] = 4 \cdot 2$$

וקיבלנו כי הדרגה היא 8. □

סעיף ד׳

נמצא את טיפוס האיזומורפיזם של $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

פתרון אנו יודעים כי $|\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})| = 8$.
אנו גם יודעים כי כל אוטומורפיזם $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ נקבע ביחידות על־ידי המיפוי שלו ל־$\beta_1, \sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}$, ושמיפוי זה בלתי תלוי, לכן נסיק ש־$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}$, חבורת הקוונטרניונים.