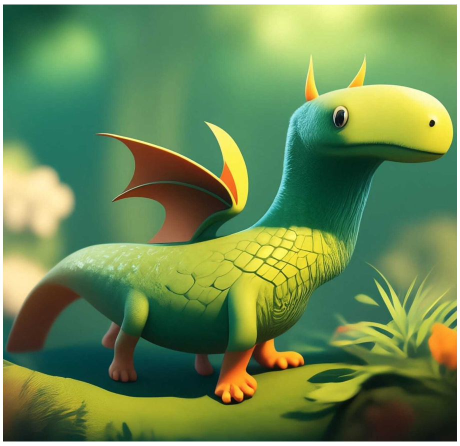
מבוא לטופולוגיה — סיכום

26 במרץ 2025



תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 24.3.2025

1.1 מבוא

בעבר דיברנו על מרחבים מטריים, באינפי 1 מתבוננים ב־$\mathbb{R}$ והגדרנו את מושג הגבול של סדרות, ולאחריו את המושג של פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. ההגדרה הייתה ש־$f$ תיקרא רציפה אם לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל x $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$. באינפי 3 כבר ראינו את המושג הכללי והרחב יותר של רציפות במרחבים מטריים. ניזכר בהגדרה של מרחב מטרי.

הגדרה 1.1 (מרחב מטרי) מרחב מטרי הוא זוג (X,d) כאשר X קבוצה לא ריקה ו־$d:X\times X\to\mathbb{R}$ פונקציה (הנקראת מטריקה) המקיימת,

1. $d(x,y)=d(y,x)$ לכל $x,y\in X$
2. $\forall x,y\in X, d(x,y)\ge 0$ וכן $x=y \iff d(x,y)=0$
3. אי־שוויון המשולש, $\forall x,y,z\in X, d(x,y)\le d(x,y)+d(y,z)$

דוגמה 1.1 נראה דוגמות למרחבים מטריים,

1. $\mathbb{R}$ יחד עם $d(x,y)=|x-y|$
2. $(\mathbb{R}^n,d_2)$ המוגדרת על־ידי $d_2(\bar{x},\bar{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2}$
3. נוכל עבור $\mathbb{R}^n$ להגדיר את $d_p(\bar{x},\bar{y})=(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ ואת מטריקת אינסוף, $d_\infty(\bar{x},\bar{y})=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$
4. עבור $C([a,b])$ קבוצת הפונקציות הרציפות $[a,b]\to\mathbb{R}$ עבור $a<b$, ונגדיר את המטריקה $\rho(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$

נראה את ההגדרה הפורמלית של רציפות,

הגדרה 1.2 (רציפות) תהי $f:X\to Y$ עבור $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים, אז נאמר ש־f רציפה אם ורק אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x',x)<\delta$ אז $\rho(f(x'),f(x))<\epsilon$.

אבל יותר קל לדבר במונחים של קבוצות פתוחות.

הגדרה 1.3 (כדור) עבור (X,d) מרחב מטרי, נסמן $B(r,x)=B_r(x)=\{z\in X\mid d(x,z)<r\}$.

הגדרה 1.4 (קבוצה פתוחה) יהי (X,d) מרחב מטרי, תת־קבוצה $U\subseteq X$ תיקרא פתוחה אם לכל $x\in U$ קיים $r>0$ כך ש־$x\in B(x,r)\subseteq U$.

הגדרה 1.5 (הגדרה שקולה לרציפות) $f:X\to Y$ תיקרא רציפה אם לכל $V\subseteq Y$ קבוצה פתוחה ב־Y מתקיים $f^{-1}(V)=\{x\in X\mid f(x)\in V\}$ קבוצה פתוחה ב־X.

הגדרה 1.6 (טופולוגיה) תהי X קבוצה (לא ריקה), **טופולוגיה** על X היא אוסף $\tau\subseteq\mathcal{P}(X)$, כך שמתקיימים התנאים הבאים,

1. $X,\emptyset\in\tau$
2. τ סגור לאיחוד, כלומר אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ לקבוצת אינדקסים I, כך ש־$\forall\alpha\in I, U_\alpha\in\tau$ אז $\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha\in\tau$
3. τ סגור לחיתוכים סופיים, כלומר לכל $U,V\in\tau$ מתקיים $U\cap V\in\tau$

הגדרה 1.7 (מרחב טופולוגי) זוג (X,τ) כאשר X קבוצה לא ריקה ו־τ טופולוגיה על X, יקרא מרחב טופולוגי.

הערה בעצם הגדרנו כבר מתי פונקציה $f:X\to Y$ עבור מרחבים טופולוגיים $(X,\tau),(Y,\Omega)$ היא רציפה, כאשר $f^{-1}(U)\in\tau$ לכל $U\in\Omega$.

סימון 1.8 איברי τ יקראו קבוצות פתוחות.

הגדרה 1.9 אם (X,τ) מרחב טופולוגי אז תת־קבוצה $A\subseteq X$ תיקרא סגורה אם $X\setminus A\in\tau$, כלומר המשלים של A היא קבוצה פתוחה.

דוגמה 1.2 יהי (X,d) מרחב מטרי, נגדיר $\tau=\{U\subseteq X\mid\forall x\in U\exists r>0, B(x,r)\subseteq U\}$, כלומר נגדיר טופולוגיה באופן טריוויאלי כנביעה מהמרחב המטרי.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי אכן זהו מרחב טופולוגי.

דוגמה 1.3 יהי X קבוצה כלשהי, אז ניתן להגדיר על X טופולוגיה $\tau_0=\{\emptyset,X\}$. טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה טריוויאלית.

דוגמה 1.4 נגדיר $\tau_1=\mathcal{P}(X)$ עבור קבוצה X, גם קבוצה זו היא טופולוגיה, והיא נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית.

דוגמה 1.5 נניח ש־(Y,τ) מרחב טופולוגי, ותהי $f:(Y,\tau)\to(X,\tau_0)$, מתי f היא רציפה? התשובה היא שהיא רציפה תמיד. מתי f :

$(X,\tau_1) \to (Y,\tau)$ רציפה? תלוי בהגדרת הפונקציה, אבל במקרה שבו היא אכן רציפה, אז היא רציפה בכל טופולוגיה שהיא. לעומת זאת כל $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau)$ היא רציפה.

הערה לא כל טופולוגיה נובעת ממטריקה. לדוגמה הטופולוגיה הטריוויאלית על מרחב עם לפחות 2 נקודות.

הערה נניח $x,y\in X$ אז נבחר $r=\frac{1}{2}d(x,y)$ ואז $y\notin B(x,r)$ ולכן $\emptyset\neq B(x,r)\neq X$, קל לראות שביחס לטופולוגיה שמושרית מהמטריקה d, הקבוצה $B(x,r)$ קבוצה פתוחה.

דוגמה 1.6 נגדיר $X=\mathbb{C}^n$ עבור איזשהו $n\in\mathbb{N}$ ונגדיר $\mathcal{F}=\{A\subseteq\mathbb{C}^n \mid \exists\{f_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n], A=\{(p_1,\dots,p_n)\mid \forall i\in I, f_i(p_1,\dots,p_n)=0\}\}$.

הגדרה 1.10 (בסיס לטופולוגיה) בסיס לטופולוגיה הוא אוסף $\mathcal{B}$ של תתי־קבוצות של X כך שמתקיים,

1. לכל $x\in X$ יש $B\in\mathcal{B}$ כך ש־$x\in B$
2. לכל $A,B\in\mathcal{B}$ ולכל $x\in A\cap B$ יש $C\in\mathcal{B}$ כך ש־$x\in C\subseteq A\cap B$

טענה 1.11 *עבור בסיס $\mathcal{B}$ האוסף $\tau_{\mathcal{B}}=\{U\subseteq X\mid U \textit{ is a union of elements of } \mathcal{B}\}$ היא טופולוגיה,*

$$\forall\alpha\in I, B_\alpha\in\mathcal{B}, U=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$$

הוכחה. מכיוון ש־$\tau_{\mathcal{B}}$ סגורה לחיתוך סופי, אז אם $U,V\in\tau_{\mathcal{B}}$ אז $U=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\in\mathcal{B}$ וכן $V=\bigcup_{\beta\in J}A_\beta, A_\beta\in\mathcal{B}$, אז מתקיים,

$$U\cap V=(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)\cap(\bigcup_{\beta\in J}A_\beta)=\bigcup_{\alpha,\beta\in I\times J}B_\alpha\cap A_\beta=D$$

לכן לכל $x\in U\cap V$ ישנם $\alpha_0\in I,\beta_0\in J$ כך ש־$x\in B_{\alpha_0}\cap A_{\beta_0}$, אבל מהגדרת הבסיס קיימת קבוצה $C_{\alpha_0,\beta_0}\in\mathcal{B}$ כך ש־$C_{\alpha_0,\beta_0}\subseteq B_{\alpha_0}\cap A_{\beta_0}$. לכן $D\subseteq\bigcup_{(x,\alpha,\beta)}C_{x,\alpha,\beta}$. בהתאם מצאנו סגירות לחיתוך סופי. □

הערה יהי (X,d) מרחב מטרי, אז $\{B(x,r)\subseteq X\mid x\in X, r>0\}$ הוא טופולוגיה. אבל עכשיו נוכל להגדיר גם את $\{B(x,\frac{1}{n})\subseteq X\mid x\in X, n\in\mathbb{N}\}$, זהו בסיס לטופולוגיה לאותה הטופולוגיה שהגדרנו למרחב המטרי.

תרגיל 1.2 הוכיחו שזהו אכן בסיס עבור המרחב הטופולוגי הנתון.

דוגמה 1.7 נניח ש־$X=\mathbb{Z}$, ונגדיר את הבסיס C להיות אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, כלומר $C=\{a+d\mathbb{Z}\mid a,d\in\mathbb{Z}, d\neq 0\}$. אנו טוענים כי זהו אכן בסיס (לטופולוגיה). נתבונן בזוג קבוצות ב־C, $a+d\mathbb{Z}, b+q\mathbb{Z}$, ונניח ש־$p\in(a+d\mathbb{Z})\cap(b+q\mathbb{Z})$ אז $p\in p+dq\mathbb{Z}\subseteq(a+d\mathbb{Z})\cap(b+q\mathbb{Z})$. נגדיר טופולוגיית τ_C.

קבוצות סגורות הן משלימים לקבוצות פתוחות.

כל סדרה אריתמטית דו־צדדית אינסופית היא גם פתוחה וגם סגורה. בפרט חיתוך סופי של סדרות אריתמטיות הוא סגור. לכן המשלים שלו הוא פתוח.

מסקנה 1.12 (משפט אוקלידס) יש אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה. נניח בשלילה כי יש מספר סופי של ראשוניים, $p_1,\dots,p_k$ עבור $k\in\mathbb{N}$. נבחן את $\bigcup_{i=1}^k p_i\mathbb{Z}$, זוהי קבוצה פתוחה וגם סגורה, לכן

$$\bigcup_{i=1}^k p_i\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$$

ולכן נובע ש־$\{-1,1\}$ קבוצה פתוחה וזו כמובן סתירה. □

טענה 1.13 (צמצום מרחב טופולוגי) *נניח ש־(X,τ) מרחב טופולוגי, לכל $\emptyset\neq Y\subseteq X$ נגדיר $\tau_Y=\{U\cap Y\mid U\in\tau\}$. אז τ_Y היא טופולוגיה. אם $Y\in\tau$ אז $\tau_Y=\{W\in\tau\mid W\subseteq Y\}$.*

טענה 1.14 (טופולוגיית מכפלה) *נניח ש־(X_1,τ_1) ו־(X_2,τ_2) מרחבים טופולוגיים, אז נגדיר טופולוגיה על מרחב המכפלה $X_1\times X_2$ על־ידי*

$$\tau_{1,2}=\{U_1\times U_2\mid U_1\in\tau_1, U_2\in\tau_2\}$$

אז $\tau_{1,2}$ הוא בסיס והטופולוגיה המוגדרת על־ידו נקראת טופולוגיית המכפלה.

דוגמה 1.8 נוכל לבנות כך מכפלה של כמות סופית או אינסופית של מכפלות טופולוגיות. עבור אוסף אינסופי (בן־מניה או לא בהכרח) אנו צריכים

להיזהר, נניח ש־(X_α, τ_α) עבור $\alpha \in I$, אז נגדיר

$$\tau_b = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

זהו בסיס לטופולוגיה שנקרא טופולוגיית הקופסה. לעומת זאת נוכל להגדיר גם את

$$\tau_p = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha = X_\alpha \text{ for almost all } \alpha \in I\}$$

כלומר $\prod_{\alpha \in I} = \{f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid \forall \alpha \in I, f(x) \in X_\alpha\}$.

2 שיעור 2 — 25.3.2025

2.1 טופולוגיה — המשך

בשיעור הקודם דיברנו על מכפלה של טופולוגיות, אמרנו שאם I קבוצת אינדקסים ולכל $\alpha \in I$ גם (X_α, τ_α) מרחב טופולוגי, אז נתבונן ב־$Z = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ונרצה להגדיר טופולוגיה על Z.

הערה מגדירים,

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha, \forall \alpha \in I, f(\alpha) \in X_\alpha\}$$

לאחר מכן נוכל להגדיר טופולוגיית מכפלה,

הגדרה 2.1 (טופולוגיית מכפלה) נגדיר את הבסיס,

$$\mathcal{B}_{\text{box}} = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I, U_\alpha \subseteq X_\alpha, U_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

ואת הבסיס,

$$\mathcal{B}_{\text{prod}} = \{\prod_{\alpha \in I} V_\alpha \mid \forall \alpha \in I, V_\alpha \in \tau_\alpha, V_\alpha \subseteq X_\alpha, |\{\beta \in I \mid V_\beta \neq X_\beta\}| < \infty, V_\alpha = X_\alpha \text{ for almost every } \alpha\}$$

אלו הן מכפלות של טופולוגיות המהוות טופולוגיה.

הגדרה 2.2 (העתקות הטלה) אז $Z = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ אז ישנן הטלות $\forall \alpha \in I, \pi_\alpha : Z \to X_\alpha$ המוגדרת על־ידי $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$.

אנו רוצים שכל ההטלות π_α תהינה רציפות. כדי שהן אכן יקיימו רציפות צריך שלכל $U_\alpha \in \tau_\alpha$ (קבוצה פתוחה ב־X_α) יתקיים $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau$, כלומר המקור יהיה קבוצה פתוחה ב־Z. אבל נבחין כי $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta$ אבל זהו לא בסיס,

$$C = \{U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta \mid \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau\}$$

הגדרה 2.3 (תת־בסיס לטופולוגיה) תהי קבוצה X, קבוצה C של תת־קבוצות של X כך ש־$X = \bigcup C$.

נגדיר את הבסיס המושרה מתת־בסיס להיות $\mathcal{B}_C = \{\bigcap A \mid A \subseteq C, |A| < \infty\}$, כלומר אוסף החיתוכים הסופיים של איברי C (הן קבוצות פתוחות) הוא בסיס.

הגדרה 2.4 (טופולוגיה חלשה) אם X קבוצה ו־τ_1, τ_2 טופולוגיות על X אומרים ש־τ_1 חלשה יותר מ־τ_2 אם $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

דוגמה 2.1 יהיו מרחבים מטריים (X_i, ρ_i) לכל $i \in \mathbb{N}$, ונגדיר (X_i, τ_i) מרחב טופולוגי מושרה מתאים לכל i. נרצה להתבונן במכפלתם, $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$. אז נוכל להתבונן ב־$(\prod X_i, \tau_{\text{prod}})$ שהגדרנו זה עתה.

הגדרה 2.5 (מטריקת מכפלה) בהינתן סדרת מרחבים מטריים (X_i, ρ_i) עבור $i \in \mathbb{N}$ מרצה למצוא מטריקה על $Z = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$. לכל $x, y \in Z$ כאשר $x = (x_i), y = (y_i)$ אז נגדיר,

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

ברור שפונקציה זו מוגדרת, וברור אף כי היא מקיימת את התכונה השנייה של מטריקות, אך לא ברור שהיא מקיימת את אי־שוויון המשולש, זהו תרגיל שמושאר לקורא.

טענה 2.6 *הטופולוגיה המושרית על $Z = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ עבור (X_i, τ_i) מרחבים טופולוגיים יחד עם מטריקת המכפלה שווה ל־$\mathcal{B}_{\text{prod}}$.*

הוכחה. (Z, ρ) מרחב מטרי, ו־$\mathcal{B}_\rho = \{B(x, r) \mid x \in Z, r > 0\}$ בסיס, אז נוכל להגדיר טופולוגיה $\tau_{\mathcal{B}_\rho} = \tau_\rho$. כדי להראות ש־$\tau_\rho = \mathcal{B}_{\text{prod}}$ מספיק להראות שכל $B \in \mathcal{B}_{\text{prod}}$ שייכת ל־τ_ρ וכל $C \in \mathcal{B}_\rho$ שייכת ל־τ_{prod}. נוסיף ונבהיר שטופולוגיה נקבעת ביחידות על־ידי בסיס שלה, לכן מספיק להראות את שקילות הבסיסים.

נתחיל בתנאי הראשון, ונקבע $k \in \mathbb{N}$ כלשהו. מספיק להראות שקבוצה מהצורה $U_k \times \prod_{i \neq k} X_i$ פתוחה ב־τ_ρ עבור $U_k \in \tau_k$ היא קבוצה פתוחה ב־τ_ρ, זאת שכן נוכל להרחיב הוכחה זו באופן סיסטמתי להיות על כל קבוצה סופית של קבוצות פתוחות. יהי $x \in U_k \times \prod_{i \neq k} X_i$ ונסמן את ההטלה על מרחב זה $\pi_j : U_j \times \prod_{i \neq k} X_i \to U_j$, כלומר $\pi_j(x) = x_j$ לכל $j \in \mathbb{N}$. אנו יודעים ש־$x_k \in U_k$ וש־U_k פתוחה ולכן ישנו $r > 0$ כך ש־$B_r(x_k) \subseteq U_k$ כדור פתוח ב־X_k.

קיים $s > 0$ כך שאם $t \geq 0$ ומתקיים $s < \frac{t}{1+t}$ אז $t < r$, ולכן נבחן את הכדור ברדיוס $\frac{s}{2^k}$ סביב x ב־$Z = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ מרחב המכפלה כולו.
המטרה שלנו היא להראות שהכדור שעתה בחרנו מקיים את התנאי לבסיס. נניח ש־$y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B_{\frac{s}{2^k}}(x)$, אז

$$\begin{aligned}
&\frac{s}{2^k} > \rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} \\
&\implies s > \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} \\
&\implies \rho_k(x_k,y_k) < r \\
&\implies y_k \in B_r(x_k) \subseteq U_k
\end{aligned}$$

נעבור לתנאי השני, נתבונן בכדור הפתוח סביב $x \in Z$, $B_r(x)$, כאשור נחזור ונבהיר כי כדור זה מוגדר להיות,

$$B_r(x) = \left\{ y \in Z \mid \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} < r \right\}$$

יהי $M \in \mathbb{N}$ כך ש־$\sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} < \frac{r}{2}$, כלומר נחסום את טור הזנב של המטריקה ρ. תהי $V \subseteq Z$ המוגדרת על־ידי,

$$V = \left\{ (y_1,\dots,y_M) \in \prod_{i=1}^{M} \mid \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} < \frac{r}{2} \right\}$$

ואנו טוענים כי $V \times \prod_{i=M+1}^{\infty} X_i \subseteq B_r(x)$. □

הגדרות ומשפטים