פתרון מטלה 09 — אנליזה פונקציונלית, 80417

8 ביוני 2025

שאלה 1

תהינה $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות רימן ומחזוריות, ונניח ש־$x_0 \in [-\pi, \pi]$. נניח גם ש־$f \equiv g$ בסביבה של x_0. נסמן S_N^f, S_N^g סכום פורייה מסדר N של f, g.

נראה ש־$\lim_{N\to\infty} S_N^f(x_0) = L$ אם ורק אם $\lim_{N\to\infty} S_N^g(x_0) = L$.

הוכחה. נניח ש־$\lim_{N\to\infty} S_N^f(x_0) = L$. נבחין כי $h = f - g$ מקיימת $h \equiv 0$ בסביבת x_0. בפרט הגבול שלה ב־x_0 הוא 0 בלבד. בנוסף,

$$|h(x_0 + u) - h(x_0)| = 0 \leq u$$

ונקבל שתנאי ליפשיץ חל, ובהתאם,

$$\lim_{N\to\infty} S_N^{f-g}(x_0) = h(x_0) = 0$$

אבל אנו יודעים כי $S_N^{f-g} = S_N^f - S_N^g$ מתכונות ולכן למעשה קיבלנו,

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(x_0) - S_N^g(x_0) = 0$$

ולכן מההנחה נובע ש־$\lim_{N\to\infty} S_N^g(x_0) = L$ גם כן.

מטעמי סימטריה ההוכחה עבור הכיוון השני זהה. $\square$

שאלה 2

נוכיח שקיים קבוע $C > 0$ כך שלכל $N > 1$ מתקיים,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(u)|\, du \geq C \ln(N-1)$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(u)|\, du &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{u}{2}} \right| du \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})u)|}{2\sin\frac{u}{2}}\, du - \int_{-\pi}^{0} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})u)|}{2\sin\frac{u}{2}}\, du \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})u)|}{\sin\frac{u}{2}}\, du \\
&\geq \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})u)|}{\frac{u}{2}}\, du \\
&\geq \int_{0}^{\frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\frac{u}{2}}\, du \\
&\geq 2\ln(N+1)
\end{aligned}$$

□

שאלה 3

סעיף א׳

נראה ש־$A = \mathrm{Sp}\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ היא אלגברה ב־$C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ שלא מתאפסת באף נקודה ומפרידה נקודות, ואף סגורה להצמדה.
נסיק ש־A צפופה ב־$\tilde{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ בנורמה $\|\cdot\|_\infty$.

הוכחה. תחילה נראה ש־A אלגברה. עבור חיבור הטענה טריוויאלית, עבור כפל,

$$e^{inx}\cdot e^{imx} = e^{i(n+m)x}$$

והטענה נובעת גם, ועבור סגירות לכפל בסקלר נובע מהגדרת Sp.

נראה ש־A לא מתאפסת. נבחר $f(x)=1$ על־ידי שימוש ב־$n=0$.

נראה ש־A מפרידה נקודות. מספיק שנבחר $f(x)=e^{ix}$ ונקבל שמלבד $\pm\pi$ הפונקציה היא חד־חד ערכית ועל.

מתקיים גם,

$$\overline{e^{inx}} = \cos(nx) - i\sin(nx) = \cos(-nx) + i\sin(-nx) = e^{-inx}$$

ולכן A סגורה גם להצמדה.

כל תנאי משפט סטון־ויירשטראס המרוכב חלים ולכן A צפופה. □

סעיף ב׳

נסיק שהקבוצה A היא מערכת אורתוגונלית שלמה ב־$\tilde{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ יחד עם המכפלה הפנימית,

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)g(x)\ dx$$

הוכחה. לכל $n\neq m$,

$$\langle e^{inx}, e^{imx}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}e^{imx}\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} = 0$$

ממשפט קושי למסילות סגורות ורציפות במישור המרוכב נסיק ישירות את הערך הסופי 0. אם כך הסדרה היוצרת את A היא מערכת אורתוגונלית ומאופטימליות טורי פורייה ותנאים שקולים למערכות שלמות נקבל ש־A מערכת שלמה. □

סעיף ג׳

עבור $f\in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ נגדיר לכל $n\in\mathbb{Z}$ את מקדם פורייה ביחס למערכת המגדירה את A על־ידי,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\ dx$$

נסיק שאם f ממשית אז מתקיים,

$$\frac{a_0}{2} = c_0,\quad \forall n>0,\ a_n = c_n + c_{-n},\quad \forall n>0,\ b_n = i(c_n - c_{-n})$$

הוכחה. ישירות מהגדרה נקבל,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)\cos(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) + if(x)\sin(nx) - if(x)\sin(nx) + f(x)\cos(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) + if(x)\sin(nx) + if(x)\sin(-nx) + f(x)\cos(-nx)\ dx \\
&= c_n + c_{-n}
\end{aligned}$$

ישירות מהגדרה. נבחין כי נובע ישירות גם $c_0 = \frac{a_0}{2}$ משוויון זה. עבור המקרה של b_n,

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}i\int_{-\pi}^{\pi} i2f(x)\sin(-nx) + f(x)\cos(nx) - f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}i\int_{-\pi}^{\pi} if(x)\sin(nx) + f(x)\cos(nx) - if(x)\sin(-nx) - f(x)\cos(-nx)\,dx \\
&= i(c_n - c_{-n})
\end{aligned}
$$

וקיבלנו כי השוויון נכון. □