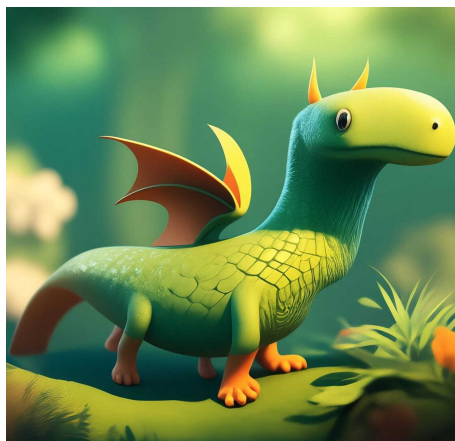


## אנליזה פונקציונלית — סיכום

26 במרץ 2025



**תוכן העניינים**

3	1 שיעור 1 – 26.3.2025
3	1.1 רקע . . . . .

## 26.3.2025 – 1 שיעור 1

### 1.1 רקע

אנליזה פונקציונלית היא כמו אלגברה לינארית. בקורס זה נחקור מרחבים וקטוריים והעתקות עליהם, אבל על מרחבים מורכבים יותר והעתקות מורכבות יותר. נתחיל בשאלה,

**תרגיל 1.1** יהי  $(X, \rho)$  מרחב מטרי כלשהו, ונניח ש- $A \subseteq X$ . נניח גם ש- $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$ . מהם התנאים ההכרחיים על  $A$  כך ש- $(a_n)$  תכלול תת-סדרת קושי?

נעבור לדוגמה וטענות מאינפי 1 לרענן את זכרוננו.

**דוגמה 1.1** המרחב המטרי הכי אינטואיטיבי הוא  $X = \mathbb{R}$  ו- $\rho(x, y) = |x - y|$ .

**טענה 1.1** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  כך ש- $A$  חסומה, ותהי  $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$ , אז יש ל- $(a_n)$  תת-סדרת קושי.

**הוכחה.**  $A \subseteq [-R, R]$  עבור  $R \in \mathbb{R}$ . נתחיל בהגדרה של  $\Delta_0 = A$  ולכן יש אינסוף נקודות של הסדרה, וכן נבחר כי  $|A_0| = 2R$ . נבחן את הקטעים החוצים את  $\Delta_0$ , הם  $[0, R]$ ,  $[-R, 0]$ , נבחר את זה מביניהם שמכיל אינסוף נקודות של  $(a_n)$  להיות  $\Delta_1$ , וכך נמשיך ונגדיר סדרה  $(\Delta_n)$ . נובע שהסדרה הנתונה היא סדרה יורדת, במובן ש- $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ . מתקיים גם  $|\Delta_n| = \frac{|\Delta_0|}{2^n}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ , ובכל  $\Delta_n$  יש אינסוף נקודות של  $(a_n)$ . נבחר  $a_{n_1} \in \Delta_1$  וכך באופן כללי גם  $a_{n_k} \in \Delta_k$ , לכן נובע  $|a_{n_k} - a_{n_l}| \leq \frac{1}{2^k}$  עבור  $l \geq k$ . לכן נובע שאכן ישנה תת-סדרת קושי בסדרה  $(a_n)$ .  $\square$

**הערה** טענה זו נכונה גם כאשר מסתכלים על מרחב  $(\mathbb{R}^n, \rho)$  עבור  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ .

**הגדרה 1.2** (מרחב נורמי) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{F}$  עבור  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , ותהי פונקציה  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  המקיימת,

$$1. \quad x = 0_V \iff \|x\| = 0$$

$$2. \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$3. \quad \forall x, y \in V, \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

אז  $(V, \|\cdot\|)$  יקרא מרחב נורמי עם נורמה  $\|\cdot\|$ .

**הגדרה 1.3** (מרחב  $l_2$ ) נגדיר את הקבוצה  $l_2 = \{x = (x_1, \dots) \mid \forall k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty\}$  נגדיר גם,

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^\infty x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

אז המרחב הנורמי  $l_2$  הוא הקבוצה והנורמה הללו.

נבחין כי עלינו להוכיח שזהו אכן מרחב נורמי לפי ההגדרה.

**משפט 1.4** (אי-שוויון קושי-שווארץ) מתקיים,

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

**סימון 1.5** נסמן  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

**הוכחה.** עבור  $t \in \mathbb{F}$  סקלר כלשהו,

$$0 \leq \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle t^2$$

עובדה ידועה היא  $V^2 - 4AC \leq 0 \implies At^2 + Bt + C \geq 0$  ולכן,

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

ולכן,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

ואם נגדיר  $x'_i = |x_i|$  וכן  $y'_i = |y_i|$  אז מאי-השוויון הנתון נובע,

$$\sum_{i=1}^n |x'_i| \cdot |y'_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

□

נעבור להוכחת ההגדרה של  $l_2$ , כלומר ההוכחה שהנורמה שהגדרנו היא אכן נורמה.

הוכחה.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

□

עתה משקיבלנו ש- $l_2$  הוא אכן מרחב נורמי, נוכל לדון בתכונותיו.

**דוגמה 1.2** במרחב  $(l_2, \|\cdot\|)$  נגדיר את שפת כדור היחידה במרחב,

$$S = \{x \in l_2 \mid \|x\| = 1\}$$

נבחין כי  $S$  קבוצה חסומה ב- $l_2$ . נבחר  $(l_n)_{n=1}^{\infty}$  המוגדרת על-ידי  $l_n = (0, \dots, 1, \dots)$  כאשר  $l_n^n = 1, l_n^m = 0$  לכל  $m \neq n$ . כמובן מתקיים  $\|l_n\| = 1$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ , ולכן סדרת הנקודות חסומה ב- $S$ .

**טענה 1.6**  $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq l_2$  איינה כוללת תת-סדרת קושי.

□

הוכחה. נבחין כי  $\|l_n - l_m\| = \sqrt{2}$  לכל  $n \neq m$ .

**סימון 1.7** (כדור) עבור מרחב מטרי  $(X, \rho)$ , נסמן  $B_r(x) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$ .

**הגדרה 1.8** (קבוצה חסומה לחלוטין) יהי מרחב מטרי  $(X, \rho)$  מרחב מטרי ותהי  $A \subseteq X$ , אז נאמר ש- $A$  חסומה לחלוטין (Totally bounded) אם לכל  $\epsilon > 0$  קיים מספר סופי של נקודות  $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq X$ , כך שמתקיים  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{\epsilon}(x_i)$ .

מיד נראה שימוש בהגדרה זו במשפט, ובכך ניתן הצדקה להגדרה הלכאורה משונה הזאת.

**משפט 1.9** (שקילות לחסימות לחלוטין) יהי מרחב מטרי  $(X, \rho)$  ותהי  $A \subseteq X$ , אז התנאים הבאים שקולים,

1.  $A$  חסומה לחלוטין.

2. בכל סדרה של  $A$  ניתן לבחור תת-סדרת קושי.

משפט זה הוא משפט חשוב ומרכזי, ועל הקורא לשנן את הוכחתו. את ההוכחה אומנם נראה בהרצאות הבאות, אך נראה עתה שימושים למשפט זה. נעבור למשפט פחות חשוב ומרכזי,

**משפט 1.10** נניח ש- $X = \mathbb{R}^m$ , וכן ש- $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$ , אז אם  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  חסומה, אז היא חסומה לחלוטין.

הוכחה. נחסום את  $A$  על-ידי קובייה מספיק גדולה, נחלק את הקובייה לתת-קוביות מספיק קטנות (ההצדקה מגיעה מאינפי 3), ונוכל לחסום כל קובייה כזו בכדור. נסמן  $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}^m$  את מרכזי הקוביות ונקבל  $A \subseteq \bigcup_{j=1}^N B_{\epsilon}(x_j)$  מהגדרת החלוקה של הקובייה החוסמת.

□

**הגדרה 1.11** ב- $(l_2, \|\cdot\|)$  נגדיר את הקבוצה,

$$\Pi = \{x = (x_1, \dots) \in l_2 \mid \forall i \in \mathbb{N}, |x_i| \leq \frac{1}{2^{i-1}}\}$$

אם  $x \in \Pi$  אז  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ , ובהתאם בהכרח  $\Pi \subseteq l_2$ .

**משפט 1.12** הקבוצה  $\Pi$  חסומה לחלוטין.

**הוכחה.** תהי  $(x_1, \dots) \in \Pi$  ונגדיר  $x_n^* = (x_1, \dots, x_n, \dots, 0, 0, \dots)$ . נגדיר גם  $\Pi_n^* = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \mid |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\}$ . הקבוצה  $\Pi_n^*$  חסומה לחלוטין, זאת שכן הקבוצה שקולה לקבוצה ב- $\mathbb{R}^n$ , ונבחין כי היא חסומה, ולכן ההוכחה שראינו קודם עודנה תקפה ובהתאם  $\Pi_n^*$  חסומה לחלוטין.

נבחין כי

$$\|x - x_n^*\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i-2}} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{4}{4^i} = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$$

ולכן  $\|x - x_n^*\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ . יהי  $\epsilon > 0$ , אז  $\Pi_n^*$  חסומה לחלוטין ולכן קיימים  $y^1, \dots, y^n \in l_2$  כך שמתקיים,

$$\Pi_n^* \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{\epsilon}(y^i)$$

נניח ש- $x_n^* \in B_{\epsilon}(y^i)$  ונוכל לבחור  $n$  כך שמתקיים  $\|x - x_n^*\| < \epsilon$ , אז

$$\|x - y^i\| \leq \|x - x_n^*\| + \|x_n^* - y^i\| < 2\epsilon$$

נובע ש- $\Pi \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{2\epsilon}(y^i)$ . □

נבחין כי עתה ראינו שב- $l_2$  במרחב נורמי יש קבוצות חסומות, זהו אכן מרחב מעניין.

**הגדרות ומשפטים**

3	הגדרה 1.2 (מרחב נורמי) . . . . .
3	הגדרה 1.3 (מרחב l2) . . . . .
3	משפט 1.4 (אי-שוויון קושי-שווארץ) . . . . .
4	הגדרה 1.8 (קבוצה חסומה לחלוטין) . . . . .
4	משפט 1.9 (שקילות לחסימות לחלוטין) . . . . .
4	משפט 1.10 . . . . .
5	הגדרה 1.11 . . . . .
5	משפט 1.12 . . . . .