פתרון מטלה 2 — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

29 באוקטובר 2025

שאלה 1

יהי (E,V,t) מרחב אפיני ממימד n מעל $\mathbb{F}$.

סעיף א׳

נראה שהאוסף $E \supseteq \{P_i\}_{i\in I}$ בלתי־תלוי אפינית אם ורק אם לכל $i \in I$ האוסף $V \supseteq \{P_j - P_i\}_{i\neq j\in I}$ בלתי־תלויה לינארית מעל V.

הוכחה. נניח ש־$\{P_i\}$ בלתי־תלוי אפינית ויהי $i \in I$. נניח בשלילה גם ש־$B = \{P_j - P_i\}_{i\neq j\in I}$ היא תלויה לינארית, ובפרט נניח שמתקיים,

$$P_0 - P_i \in \mathrm{Sp}\{P_j - P_i \mid j \in I \setminus \{0, i\}\}$$

כאשר $I \ni 0 \neq i$ בלי הגבלת הכלליות. נזכור שמתקיים $P_0 \notin \langle P_j \mid j \neq i\rangle = P_i + W$ מאי־התלות האפינית, כאשר $W \leq V$. אבל $P_0 - P_i \in W$ מהטענה שראינו זה עתה, ולכן בפרט $P_0 \notin P_i + W$ בסתירה, ולכן הקבוצה לא תלויה לינארית.

נניח עתה את הכיוון ההפוך. נראה שמתקיים $P_0 \notin \langle P_j \mid j \neq 0\rangle = P_i + W$ עבור $W \leq V$. נניח בשלילה שאכן $P_0 \in P_i + W$, כלומר קיים $u \in W$ כך שמתקיים $P_0 = P_i + u$, כלומר $P_0 - P_i = u$. אבל הנחנו ש־$u \in \{P_j - P_i \mid j \neq i\}$ היא בלתי־תלויה לינארית, וזו סתירה. $\square$

סעיף ב׳

נראה ש־$\{P_i\}_{0\leq i\leq k}$ בלתי־תלויה אפינית אם ורק אם $\dim \langle P_i\rangle_{i\leq k} = k$.

הוכחה. נניח שהקבוצה בלתי־תלויה אפינית, ולכן $\langle P_i \mid i \leq k\rangle = P_0 + W$ עבור $W \leq V$ ומהסעיף הקודם $\dim W = k$.

בכיוון ההפוך נניח ש־$\dim W = k$. אבל בקבוצה $B = \{P_i - P_0 \mid 0 < i \leq k\}$ יש בדיוק k איברים ולכן $W = \mathrm{Sp}\, B$ מקיים את תנאי סעיף א׳ ונקבל ש־$\{P_i \mid i \leq k\}$ בלתי־תלויה אפינית. $\square$

סעיף ג׳

נראה ש־$\{P_i\}_{0\leq i\leq n}$ בסיס אפיני של E אם ורק אם לכל $i \in I$ מתקיים,

$$(P_i, (P_0 - P_i, \dots, P_n - P_i))$$

היא מערכת יחוס של E.

הוכחה. נניח ש־$(P_0, \dots, P_n)$ בסיס אפיני ולכן $\langle P_0, \dots, P_n\rangle = P + V$ עבור $P_i \in E$ כלשהי (נובע מסעיף ב׳), עבור $i \in I$ נתון. נסיק מסעיף א׳ ש־$V = \mathrm{Sp}\{P_0 - P_i, \dots, P_n - P_i\}$ ולכן נקבל מערכת יחוס.

בכיוון ההפוך מהגדרת מערכות יחוס נקבל ש־$\mathrm{Sp}\{P_0 - P_i, \dots, P_n - P_i\} = V$ ולכן $P_i + V = E$, ובפרט מהנתון אודות כל i נקבל מסעיף א׳ ש־$\{P_i\}$ בסיס אפיני של E. $\square$

שאלה 2

יהיו $(E,V),(F,U),(G,W)$ שלושה מרחבים אפיניים מעל השדה $\mathbb{F}$. תהיינה $f:E\to F, g:F\to G$ העתקות אפיניות.
נראה ש־$g\circ f:E\to G$ העתקה אפינית המקיימת $d(g\circ f)=(dg)\circ(df)$.

הוכחה. נסמן $g\circ f$, נתחיל להראות ש־dh מוגדרת היטב, כלומר שלכל $u\in V$ מתקיים $h(P+u)-h(P)=h(Q+u)-h(Q)$.

$$h(P+u)-h(P)=g(f(P+u))-h(P)=g(f(P)+df(u))-h(P)=g(f(P))+dg(df(u))-h(P)=dg(df(u))$$

הביטוי לא תלוי ב־P ולכן הפונקציה מוגדרת היטב ונבחין כי היא גם לינארית כהרכבת העתקות לינאריות. נסיק בהתאם ש־h היא העתקה אפינית, וישירות מהגדרת dh נקבל מהחישוב שעשינו ש־$dh=(dg)\circ(df)$. □

שאלה 3

תהיינה $f^1, \dots, f^m : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ ותהי $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ המוגדרת על־ידי $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))^t$.

סעיף א׳

נוכיח ש־f לינארית אם ורק אם $f^1, \dots, f^m$ העתקות לינאריות.

הוכחה. נגדיר את ההעתקה הלינארית $H_k : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$ המוגדרת על־ידי $H_k(x_1, \dots, x_m) = x_k$. זוהי העתקת הטלה וידוע שהיא לינארית. נבחין כי מתקיים $H_k \circ f \equiv f^k$ לכל k, אבל f לינארית מהנחה ו־H_k לינארית ולכן ההרכבה שלהן היא לינארית, כלומר f^k לינארית לכל $1 \le k \le n$.

נניח ש־$f^1, \dots, f^n$ לינאריות. נראה ש־f לינארית ישירות מהגדרה. נניח ש־$x, y \in \mathbb{F}^n$ וכן ש־$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, אז מתקיים,

$$f(\alpha x + \beta y) = \begin{pmatrix} f^1(\alpha x + \beta y) \\ \vdots \\ f^m(\alpha x + \beta y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha f^1(x) + \beta f^1(y) \\ \vdots \\ \alpha f^m(x) + \beta f^m(y) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^m(x) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} f^1(y) \\ \vdots \\ f^m(y) \end{pmatrix} = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

ולכן f לינארית. □

סעיף ב׳

נוכיח ש־f העתקה אפינית אם ורק אם $f^1, \dots, f^m$ העתקות אפיניות.

הוכחה. נניח ש־f אפינית.

TODO □