פתרון מטלה 08 — אנליזה על יריעות, 80426

21 במאי 2025

שאלה 1

תהינה $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ו־$p \in \mathbb{R}^n$ כך ש־$\varphi_1(p) = \cdots = \varphi_k(p) = 0$ וכן $\{\nabla\varphi_1(p), \dots, \nabla\varphi_n(p)\}$ בלתי תלויה־לינארית.

סעיף א׳

נראה שקיימת סביבה U של p כך שהקבוצה,

$$M = \{x \in U \mid \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_k(x) = 0\}$$

היא יריעה $(n-k)$־מימדית, ונחשב את T_pM ב־p.

הוכחה. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ על־ידי $f(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$. f חלקה ישירות מהגדרתה והנתון אודות φ_i לכל $i \le n$. אנו יודעים ש־$\dim Df \mid_p = k$ ולכן היא רגולרית וממשפט התמונה ההפוכה $f^{-1}(0)$ היא יריעה. נבחין כי זוהי היריעה $N = \{x \in U \mid \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_k(x)\}$, ונוכל לצמצם אותה עם סביבה פתוחה כלשהי $p \in U$ כך ש־$N \cap U$ לא טריוויאלי ולקבל M כזו. נעיר כי ישירות מהמשפט זוהי יריעה $(n-k)$־מימדית. □

נעבור לחישוב T_pM. אנו יודעים ממשפט התמונה ההפוכה שמתקיים,

$$T_pM = \ker df_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\nabla\varphi_1(p), \dots, \nabla\varphi_k(p)) \cdot x = 0\} = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Sp}\{\varphi_1(p), \dots, \varphi_k(p)\}$$

סעיף ב׳

תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ העתקה חלקה כך ש־$f(x) \ge f(p)$ לכל $x \in M$. נראה ש־$\nabla f(p) \perp T_pM$.

הוכחה. נבחין כי $D_u f \ge 0$ לכל u וקטור כיוון ב־M, ולכן נובע בפרט ש־$D_u f = 0$ עבור $u \in T_pM$ ישירות מהגדרה, כלומר נובע ש־$\nabla f(p) \perp T_pM$ כפי שרצינו. □

סעיף ג׳

נראה שהמשלים האורתוגונלי של T_pM הוא $\mathrm{Sp}\{\nabla\varphi_1(p), \dots, \nabla\varphi_k(p)\}$.

הוכחה. ישירות כמסקנה ממשפט התמונה ההפוכה ואורתוגונליות תמונה וגרעין העתקה לינארית,

$$T_pM = \ker\{\nabla\varphi_1(p), \dots, \varphi_k(p)\} \perp \mathrm{Sp}\{\nabla\varphi_1(p), \dots, \varphi_k(p)\}$$

והטענה נובעת ישירות. □

סעיף ד׳

נסיק את נוסחת כופלי לגרנז׳.

הוכחה. נבחין כי אם x מינימום מקומי של f אז היא במשלים האורתוגונלי של T_pM ולכן בלתי תלויה־לינארית בה. □

שאלה 2

נראה שכל יריעה היא תמונה הפוכה של העתקה רגולרית, ונסיק שחיתוך רוחבי של תת־יריעות הוא יריעה.

סעיף א׳

תהי N יריעה ונניח ש־$Z \subseteq N$ תת־יריעה של N. נראה שלכל $p \in Z$ קיימת סביבה פתוחה $p \in U \subseteq N$ ו־$f : U \to \mathbb{R}^l$ חלקה כך ש־$U \cap Z = f^{-1}(\{0\})$ כאשר $l = \dim N - \dim Z$.

הוכחה. נתחיל בהוכחת הטענה עבור המקרה $N = \mathbb{R}^n$ ו־$Z^k \subseteq \mathbb{R}^n$. תהי נקודה $p \in M$ ותהי $\alpha : V \to Z$ פרמטריזציה מקומית כך ש־$V \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה. מקיום הופכי משמאל לפרמטריזציה מקומית נסיק שקיימת $\beta : W \to \mathbb{R}^k$ העתקה חלקה, כאשר $p \in W \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. מתקיים $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$. נגדיר $f(x) = \beta(x) - x$ ונקבל ש־$x \in \alpha(W \cap Z) \iff f(x) = 0$, כלומר $W \cap Z = f^{-1}(\{0\})$.

נעבור למקרה הכללי, נניח ש־$Z^k \subseteq N^h \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותת־יריעה. נניח ש־$p \in Z$ ולכן בפרט $p \in N$ וקיימת פרמטריזציה $\alpha : V \to N$ כך ש־$V \subseteq \mathbb{R}^h$ פתוחה. נבחן את $Z_0 = \alpha^{-1}(Z \cap \alpha(V))$, זוהי יריעה k־מימדית ב־$\mathbb{R}^h$ ולכן מקיימת את תנאי החלק הראשון, וקיימת $f : U \to \mathbb{R}^{h-k}$ כך ש־$U \subseteq \mathbb{R}^h$. נובע אם כך ש־$f \circ \alpha : V \to \mathbb{R}^{h-k}$ העתקה חלקה המקיימת את הטענה, היא חלקה ולכן קיימת לה הרחבה $\tilde{f} : \tilde{V} \to \mathbb{R}^{h-k}$ חלקה כך ש־$\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. נוכל להגדיר אותה כך ש־$x \notin V \implies \tilde{f}(x) \neq 0$, ונקבל ש־$\tilde{f}$ מקיימת את הטענה. $\square$

סעיף ב׳

נסיק שאם X, Y הן תת־יריעות רוחביות של N אז $X \cap Y$ יריעה ממימד $\dim Y + \dim X - \dim N$.

הוכחה. אילו היריעות זרות אז $X \cap Y$ היא יריעה באופן מנוון, ולכן היא 0־מימדית, ומרוחביות אכן $\dim N = \dim X + \dim Y$.

נניח ש־$X \cap Y \neq \emptyset$. נגדיר $f : X \to N$ חלקה על־ידי שיכון. נבחין כי $f^1(Y) \neq \emptyset$, ולכן $X \cap Y = f^{-1}(Y)$ היא יריעה ($\dim Y + \dim X - \dim N$־מימדית ממשפט מהתרגול). $\square$

שאלה 3

סעיף א׳

נניח ש־$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ העתקה חלקה ונניח ש־$a\in\mathbb{R}$ ערך רגולרי של f כך ש־$f^{-1}(\{a\})\neq\emptyset$. נראה ש־$M=\{x\in\mathbb{R}^n\mid f(x)\geq a\}$ היא יריעה n־מימדית עם השפה $f^{-1}(\{a\})$.

הוכחה. נבחין כי $\{x\in\mathbb{R}^n\mid f(x)>a\}$ היא יריעה n־מימדית כמקור של קבוצה פתוחה של פונקציה חלקה (בפרט רציפה). לכן מספיק שנראה שלכל $p\in f^{-1}(\{a\})$ יש פרמטריזציה מקומית (עם שפה) ונוכל להסיק ש־M היא יריעה n־מימדית.

תהי p כזו, אז p היא נקודה רגולרית של f מהגדרת ערך רגולרי, כלומר $Df|_p$ הוא על $\mathbb{R}^n$. אז ניקח את ההעתקה לא יודע

נעיר כי בהוכחה התבססנו על הטענה כי כל יריעה ללא שפה היא יריעה עם שפה. $\square$