פתרון מטלה 11 — תורת המידה, 80517

9 בינואר 2026

שאלה 1

תהיינה μ, λ מידות רדון על $\mathbb{R}^d$, ויהי $0 < t < \infty$.
נראה שאם $A \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצת בורל המקיימת,

$$\forall x \in A,\ \overline{D}(\mu, \lambda, x) \geq t$$

אז מתקיים $\mu(A) \geq t \cdot \lambda(A)$.

הוכחה. יהי $x \in A$, מהגדרה מתקיים,

$$K = \overline{D}(\mu, \lambda, x) = \limsup_{r \to 0^+} \frac{\mu(\overline{B}(x,r))}{\lambda(\overline{B}(x,r))} \geq t$$

יהי $\varepsilon > 0$ וסדרה $r_n \to 0$ כך שמתקיים,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\mu(\overline{B}(x,r_n))}{\lambda(\overline{B}(x,r_n))} > K - \varepsilon$$

מהגדרת $\limsup$ נובע שקיימים אינסוף n־ים עבורם הטענה מתקיימת, לכן נניח בלי הגבלת הכלליות ש־r_n היא תת־סדרה המקבלת את ערך הגבול ובהתאם,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu(\overline{B}(x,r_n))}{\lambda(\overline{B}(x,r_n))} > K - \varepsilon \leq t - \varepsilon$$

נגדיר $r_x = r_n$ עבור n מספיק גדול עבור ε, כלומר מתקיים $\mu(\overline{B}(x, r_x)) \geq (t-\varepsilon)\lambda(\overline{B}(x, r_x))$.
נגדיר,

$$\mathcal{F}_A = \{\overline{B}(x, r_x) \mid x \in A\}$$

זהו כיסוי בסיקוביץ'. בנוסף נוכל להגדיר את r_x כך שיתקיים,

$$\inf\{r \mid \overline{B}(x,r) \in \mathcal{F}_A\} = 0$$

ולכן נסיק שקיים אוסף כדורים זרים $\{B_n\} \subseteq \mathcal{F}_A$ המקיים,

$$\mu(A \setminus \bigcup B_n) = \lambda(A \setminus \bigcup B_n) = 0$$

אבל גם מצאנו שמתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(B_n) \geq (t - \varepsilon)\lambda(B_n)$$

ולכן הטענה נובעת. $\square$

שאלה 2

תהי μ מידת קנטור המופיעה במטלה 6, ותהי $C \subseteq [0,1]$ קבוצת קנטור. נגדיר את $F : [0,1] \to [0,1]$ על־ידי $F(x) = \mu([0,x))$.

סעיף א׳

נראה ש־F רציפה ומונוטונית.

הוכחה. נניח ש־$x_n \to x_0$ סדרת ערכים $\subseteq [0,1]$ ונראה שמתקיים $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$. נסמן $f_n = \mathbb{1}_{[0,x_n)}$

$$F(x_n) = \mu([0,x_n)) = \int f_n \, d\mu = \Lambda f_n = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^m} \sum_{x \in E_m} f_n(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^m} \sum_{x\in E_m, x<x_n} 1$$

ומרציפות של קבוצות מונוטוניות עולות נקבל רציפות. משימוש בנוסחה האחרונה נוכל לקבל ישירות גם מונוטוניות עולה. □

סעיף ב׳

נראה ש־$F(0) = 0, F(1) = 1$.

הוכחה. מתקיים,

$$F(0) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^m} \sum_{x\in E_m, x<0} 1 = 0$$

ולכן נשאר להראות ש־$F(1) = 1$. נראה שאינדוקציה ש־$\forall x \in E_n,\ x < 1$. עבור $n = 0$ הטענה נכונה טריוויאלית. נניח נכונות עבור n ונקבל,

$$E_{n+1} = \frac{E_n}{3} \cup (\frac{2}{3} + \frac{E_n}{3})$$

ולכן כמובן $\frac{E_n}{3}$ מקיים את הטענה ישירות מאינדוקציה, ואם $x \in \frac{2}{3} + \frac{E_n}{3}$ אז נקבל $x = \frac{2}{3} + \frac{y}{3}$ עבור $y < 1$ והטענה נובעת. מהנוסחה לגודל $|E_n|$ נובע ש־$F(1) = 1$. □

סעיף ג׳

נראה ש־F גזירה ב־λ־כמעט כל x, ונחשב את נגזרתה בנקודות אלה.

הוכחה. קיימת נגזרת ל־F ב־$x \in [0,1]$ אם ורק אם,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Lambda(\mathbb{1}_{[0,x+h)} - \mathbb{1}_{[0,x-h)})}{\lambda(\overline{B}(x,h))} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Lambda(\mathbb{1}_{[x-h,x+h)} - \mathbb{1}_{[0,x-h)})}{\lambda(\overline{B}(x,h))} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mu(\overline{B}(x,h))}{\lambda(\overline{B}(x,h))} \\
&= D(\mu, \lambda, x).
\end{aligned}$$

כלומר נסיק שהנגזרת, אם קיימת, היא שקולה ל־$D(\mu,\lambda,x)$. ממשפט הגזירה של בסיקוביץ׳ נובע ש־$D(\mu,\lambda,x)$ מוגדרת λ־כמעט תמיד. נותר אם כך לחשב את ערך הנגזרת.

נניח ש־$x \notin C$, אז נקבל ש־$\mu(\overline{B}(x,r)) = 0$ לכל $r > 0$ קטן מספיק, לכן נסיק ש־$F'(x) = 0$ במקרים אלה. נבחין גם כי $\lambda(C) = 0$ ולכן מצאנו את ערך הנגזרת λ־כמעט תמיד. □

שאלה 3

נעסוק במשפט שטיינהאוס. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ונגדיר את קבוצת ההפרש של A,

$$\mathcal{D}(A) = \{x - y \mid x, y \in A\}$$

נניח ש־λ היא מידת לבג על $\mathbb{R}^d$.

סעיף א׳

נראה שאם $\lambda(A) > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כך ש־$B(0, \delta) \subseteq \mathcal{D}(A)$.

הוכחה. מהגדרת מידת לבג כמידת רדון מתקיים $\lambda(A) = \sup\{\lambda(C) \mid C \subseteq A, C \text{ is compact}\}$ ולכן תהי $C \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^d$ קומפקטית כך ש־$\lambda(C) > 0$, ונניח ש־$\operatorname{diam} C = r$. תהי $x \in B(0, r)$, אז $A \cap (A + x) = \emptyset \iff x \in \mathcal{D}(A)$ ישירות מהגדרת $\mathcal{D}(A)$, אבל $\|x\| < r$ ולכן $A \cap (A + x) \neq \emptyset$ ולכן $x \in \mathcal{D}(A)$ ונסיק $B(0, r) \subseteq \mathcal{D}(A)$. $\square$

סעיף ב׳

נראה שאם $A \subsetneq \mathbb{R}^d$ היא קבוצה מדידה כך ש־$(A, +)$ חבורה חיבורית לא טריוויאלית, אז מתקיים $\lambda(A) = 0$.

הוכחה. אם קיים $r > 0$ כך ש־$B(0, r) \subseteq A$ אז נקבל מסגירות לחיבור שלכל $x \in \mathbb{R}^d$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{x}{n} \in A$ ולכן גם $x \in A$, כלומר $A = \mathbb{R}^d$ בסתירה להנחה, לכן לא קיים r כזה. מסעיף א׳ נובע ש־$\lambda(A) = 0$. $\square$

שאלה 4

תהי μ מידת רדון על $\mathbb{R}^d$ ונגדיר את $P \subseteq \mathbb{R}$ על־ידי,

$$P = \{r > 0 \mid \mu(\partial B(0,r)) > 0\}$$

בשאלה זו נראה ש־$|P| = \aleph_0$.

סעיף א׳

נניח ש־$|P| > \aleph_0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את $P_n \subsetneq P$ על־ידי,

$$\mu(\partial B(0,r)) > \frac{1}{n}$$

נראה שקיים $R > 0$ ו־$n \in \mathbb{N}$ כך ש־$P_n \cap (0,R)$ אינסופית.

הוכחה. מעיקרון שובך היונים לסודרים נסיק שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$|P_n| > \aleph_0$. אילו נניח ש־$P_n \cap (0,R)$ סופית לכל R אז נוכל להגדיר מנייה ל־P_n באופן הבא: נגדיר $p_{n,1}$ להיות המנייה של הקבוצה הסופית $P_n \cap (0,1)$, ובאופן אינדוקטיבי לכל k נגדיר $p_{n,k}$ להיות המנייה של הקבוצה הסופית $(P_n \cap (0,k)) \setminus (0,k-1)$, ובכל נקבל ש־$\{p_{n,k} \mid n,k < \omega\}$ היא מנייה של P_n ולכן $|P_n| = \aleph_0$ בסתירה, לכן קיים $R > 0$ כך ש־$P_n \cap (0,R)$ לא סופית. נבחין שמההוכחה נובע ש־$|P_n| = |P|$ בדיוק. □

סעיף ב׳

נסיק ש־P היא לכל היותר בת־מניה.

הוכחה. נניח בשלילה ש־$|P| > \aleph_0$ אבל $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ ולכן נובע ש־$P_n \cap (0,R)$ מעוצמה $2^{\aleph_0}$ עבור n, R מהסעיף הקודם. אבל,

$$\begin{aligned}
\mu(B(0,R)) &= \mu\left(\bigcup_{0<r<R} \partial B(0,r)\right) \\
&\ge \mu\left(\bigcup_{\substack{0<r<R \\ r\in P}} \partial B(0,r)\right) \\
&\ge \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\partial B(0,r_k)) \mid \{r_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq (0,R)\right\} \\
&\ge \frac{1}{n} \cdot \infty \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

בסתירה לעובדה ש־$\mu(B(0,R)) \le \mu(\overline{B}(0,R)) < \infty$ כקבוצה קומפקטית ב־$\mathbb{R}^d$. □

שאלה 5

נשתמש במשפט הגזירה של בסיקוביץ' כדי להוכיח את משפט לבג־רדון ניקודים עבור מידות רדון ב־$\mathbb{R}^d$.
תהיינה μ, λ מידות רדון על $\mathbb{R}^d$, נראה שקיימות מידות μ_a, μ_s כך שמתקיים,

$$\mu_a \ll \lambda, \quad \mu_s \perp \lambda, \quad \mu = \mu_a + \mu_s$$

וכן נראה שקיימת פונקציה אינטגרבילית מקומית לפי λ המקיימת $d\mu_a = f\ d\lambda$.

הוכחה. נגדיר את הקבוצות $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \underline{D}(\mu, \lambda, x) < \infty\}, B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \underline{D}(\mu, \lambda, x) = \infty\}$.
נגדיר את המידות $\mu_a = \mu|_A, \mu_s = \mu|_B$, אז מתקיים $A \uplus B = \mathbb{R}^d$ ולכן $\mu = \mu_a + \mu_s$.
ממשפט הגזירה של בסיקוביץ' $\mu_a \ll \lambda$ אם ורק אם $\underline{D}(\mu_a, \lambda, x) < \infty$ μ־כמעט תמיד, אבל מהגדרת μ_a הטענה מתקיימת תמיד.
נשים לב שמתקיים $\mu_s(A) = 0$ ועלינו להראות ש־$\lambda(B) = 0$ כדי לקבל שגם $\lambda \perp \mu_s$. נבחין כי $t \geq \underline{D}(\mu_s, \lambda, x) \geq \overline{D}(\mu_s, \lambda, x)$ לכל $t \in (0, \infty)$ ו־$x \in B$ ולכן נובע שגם $\mu_s(B) \geq t \cdot \lambda(B)$, נסיק מ־$t \to \infty$ ו־σ־סופיות של $\mathbb{R}^d$ שאכן $\lambda(B) = 0$.
ממשפט הגזירה של בסיקוביץ' נובע ש־$\frac{d\mu_a}{d\lambda} = D(\mu_a, \lambda, x) = f(x)$ μ_a־כמעט־תמיד. $\square$