

פתרון מטלה 04 — מבוא לטופולוגיה, 80516

27 באפריל 2025



שאלה 1

יהי (X, ρ) מרחב מטרי. נוכיח כי התנאים הבאים שקולים,

1. X מקיים את אקסיומת המנייה השנייה

2. X הוא מרחב לינדלוף

3. X ספרבילי

הוכחה. 2 \Rightarrow 1. אקסיומת המנייה גוררת את כל אקסיומות המנייה האחרות, לכן בפרט X מרחב לינדלוף.

3 \Rightarrow 2. נרצה למצוא קבוצה צפופה בת־מנייה ב־ X . נוכל לכסות את המרחב על־ידי כדורי $\epsilon > 0$ לכל נקודה במרחב, לכן בפרט יש כיסוי בת־מנייה של כל המרחב על־ידי קבוצות פתוחות לכל ϵ כזה. נניח ש־ $\{B(x_n^m, \epsilon_m)\}_{n=1}^\infty$ קבוצה כזו עבור $\epsilon_m = \frac{1}{m}$ לכל m . נגדיר את הקבוצה $A = \{x_n^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, זוהי כמובן קבוצה בת־מנייה, ונטען ש־ A צפופה ב־ X . נניח ש־ $x \in X$, אם $x \in A$ אז סיימנו, אחרת לכל $m \in \mathbb{N}$ קיים $n(m) \in \mathbb{N}$ כך ש־ $x \in B(x_{n(m)}^m, \frac{1}{m})$ מהגדרת הכיסויים, ולכן הסדרה $(x_{n(m)}^m)_{m=1}^\infty$ מתכנסת ל־ x ולכן $x \in \overline{A}$. נסיק אם כך שאכן A צפופה ובת־מנייה ומעידה כי X ספרבילי.

1 \Rightarrow 3. נגדיר את הקבוצה $\mathcal{B} = \{B(a, \frac{1}{n}) \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$ עבור A קבוצה צפופה ב־ X שקיימת מספרביליות. אנו טוענים כי \mathcal{B} בסיס בת־מנייה ל־ X . $|\mathcal{B}| = |\mathbb{N} \times A| = \aleph_0$, ולכן נשאר להראות כי זהו אכן בסיס לטופולוגיה של X , אך למעשה זו טענה שהוכחה בהרצאה, ולכן נוכל להסיק ש־ X מקיימת את אקסיומת המנייה השנייה. \square

שאלה 2

סעיף א'

יהי X מרחב מנייה שנייה ויהי $A \subseteq X$, נראה שגם A מרחב מנייה שנייה.

הוכחה. יהי \mathcal{B} בסיס בן-מנייה של X , ויהי $\mathcal{B}_0 = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$, זוהי קבוצה בת-מנייה, ואנו טוענים שאף בסיס של A . נניח ש- $U \subseteq A$ קבוצה פתוחה, אז קיימת $V \subseteq X$ כך ש- $U = V \cap A$ וכן V פתוחה ב- X . בהתאם $V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ עבור I קבוצת אינדקסים כך ש- $V_\alpha \in \mathcal{B}$ לכל $\alpha \in I$. לכן נובע ש- $U = (\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha) \cap A = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \cap A = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ עבור $U_\alpha \in \mathcal{B}_0$. נסיק אם כך שאכן \mathcal{B}_0 בסיס לטופולוגיה של A , וראינו כבר כי הוא בן מנייה, ולכן A מרחב מנייה שנייה. \square

סעיף ב'

נבחן את המרחב המטרי $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ עם המטריקה $\rho(x, y) = \sup\{|x(n) - y(n)| \mid n \in \mathbb{N}\}$. נראה שהוא אינו ספרבילי, אינו לינדלוף ואינו מנייה שנייה.

הוכחה. נבחן את הקבוצה $X \supseteq A = \{f \in X \mid \forall n, f(n) \in \{0, 1\}\}$, כלומר הסדרות שתמונתן חלקית ל- $\{0, 1\}$. לכל $x, y \in A$, מתקיים $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ מהגדרת המטריקה אך גם $\rho(x, y) = 1 \iff x \neq y$ כלומר זוהי המטריקה הדיסקרטית, ולכן היא משרה טופולוגיה דיסקרטית.

נניח בשלילה ש- X מרחב מנייה שנייה (ולכן שקול לשאר ההגדרות כנביעה משאלה 1), ולכן מסעיף א' נובע שגם A מרחב מנייה שנייה. לכן קיים בסיס בן-מנייה ל- A , אבל כל יחידון צריך להופיע בבסיס, זאת שכן כל איבר בטופולוגיה הוא איחוד של איברי הבסיס, לכן נסיק ש- A הוא הבסיס היחיד של A . נבחין כי $|A| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, ולכן ל- A אין בסיס בן-מנייה בסתירה להיותו מרחב מנייה שנייה. נסיק שאכן X אינו מרחב מנייה שנייה, אינו לינדלוף, ואינו ספרבילי. \square

שאלה 3

נגדיר טופולוגיה על \mathbb{N}^2 כך ש- U פתוחה אם ורק אם $(0, 0) \notin U$ או שקיים n כך שלכל $m > n$ הקבוצה $\{k \in \mathbb{N} \mid (m, k) \notin U\}$ היא סופית. מרחב זה נקרא מרחב ארנס-פורט, נראה כי הוא לא מרחב מנייה שנייה.

הוכחה. תהי $M \subseteq \mathbb{N}$, נגדיר את הקבוצה $A = \{(m, k) \in \mathbb{N}^2 \mid m \in M, k \in \mathbb{N}\} \cup \{(m, k+1) \in \mathbb{N}^2 \mid m \notin M, k \in \mathbb{N}\}$. לכל $m \in \mathbb{N}$ הקבוצה $\{k \in \mathbb{N} \mid (m, k) \notin A\} \in \{\emptyset, \{0\}\}$ ובפרט סופית ולכן A קבוצה פתוחה. נגדיר את הפונקציה $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \tau$ עבור τ הטופולוגיה שהגדרנו על-ידי מיפוי כל קבוצה M לקבוצה A המתאימה לה. זוהי פונקציה חד-חד ערכית, זאת שכן אם $M_0 \neq M_1$ אז ללא הגבלת הכלליות $m \in M_0 \setminus M_1$ ואז $(m, 0) \in f(M_0)$ אבל $(m, 0) \notin f(M_1)$. נסיק ש- $|\tau| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < \aleph_0$.

נניח ש- \mathcal{B} בסיס בן-מנייה לנקודה $(0, 0)$. לכל $f(M)$ יש קבוצה פתוחה $U \in \mathcal{B}$ כך ש- $(0, 0) \in U \subseteq f(M)$. \mathcal{B} בת-מנייה ולכן קיימת U כך שיש אינסוף ערכי $f(M)$ המכילים את U . כלומר אם נקבע $A = f(M)$ ונגדיר את הסדרה $A_0 = A, A_1 = A_0 \setminus \{(1, k) \mid k \in \mathbb{N}\}, A_2 = \dots$ אז נקבל ש- $U \subseteq A_i$ לכל $i \in \mathbb{N}$, בפרט $U \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$. אבל $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ לא מקיימת את התנאי של הסופיות ובפרט לא קבוצה פתוחה, נסיק ש- U אף היא לא פתוחה, בסתירה ל- $U \in \mathcal{B}$. נסיק שמרחב זה הוא לא מנייה שנייה. \square

שאלה 4

נוכיח שמכפלה סופית של מרחבים ספרביליים היא ספרבילית.

הוכחה. נניח ש- X, Y מרחבים ספרביליים ונבחן את $Z = X \times Y$. נניח גם ש- $A \subseteq X, B \subseteq Y$ קבוצות צפופות בנות-מניה המעידות על הספרביליות. נגדיר $C = A \times B$, זוהי קבוצה בת-מניה כמכפלה סופית של קבוצות בנות-מניה, אנו נראה שהיא צפופה ב- Z . ניעזר בטענה שקבוצה היא צפופה אם ורק אם היא חותכת כל קבוצה פתוחה במרחב, ונניח ש- $U = U_X \times U_Y \subseteq Z$ פתוחה, לכן מהגדרת מכפלות סופיות למרחבים טופולוגיים U_X, U_Y פתוחות ב- X, Y . בהתאם $U_X \cap A, U_Y \cap B$ קבוצות לא ריקות, נניח ש- $x \in X, y \in Y$ איברים המעידים על כך. אז $C \cap U = (A \times B) \cap (U_X \times U_Y) = (A \cap U_X) \times (B \cap U_Y) \ni (x, y)$ כלומר החיתוך של כל קבוצה פתוחה עם C לא ריק, ולכן היא צפופה ב- Z . \square

שאלה 6

נוכיח שטופולוגיית הקופסה על $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אינה קשירה.

הוכחה. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ קבוצת הפונקציות המתכנסות. לכל $f \in A$ נוכל לבחור $f \in \prod_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(f(n))$ קבוצה פתוחה, ולכן A קבוצה פתוחה. כדי להראות שהמרחב איננו קשיר נצטרך להראות שאף קבוצת הפונקציות שלא מתכנסות, קבוצה שזרה ל- A , היא קבוצה פתוחה. תהי $f \in A^C$, אז נוכל לבחור קבוצה פתוחה באותו אופן, ונבחין שמהגדרת התכנסות כלל הפונקציות בקבוצה הפתוחה שנבנה כלל הפונקציות אכן לא מתכנסות. אז A וגם A^C פתוחות וזרות ומכסות את המרחב, ובהתאם המרחב אינו קשיר. \square

שאלה 7

סעיף א'

נמצא דוגמה למרחב קשיר מקומית שאיננו קשיר.

פתרון נגדיר $X = \{0, 1\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית. המרחב איננו קשיר שכן $X = \{0\} \cup \{1\}$ ובמרחב דיסקרטי כל יחידון הוא פתוח. מן הצד השני המרחב קשיר מקומית ב-0, זאת שכן כל קבוצה כך ש- $A \subseteq X$ וגם $0 \in A$ אז $\{0\} \subseteq A$ וכן $\{0\}$ פתוחה.

סעיף ב'

לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $0 < n$ $l_n = \{(t, \frac{t}{n}) \mid t \in [0, 1]\}$ ונסמן $l = [0, 1] \times \{0\}$. נגדיר את המרחב $X = l \cup \bigcup_{n>0} l_n$ ונראה שהוא קשיר אך לא קשיר מקומית.

הוכחה. נבחין כי לכל $n \in \mathbb{N}$ הקבוצה l_n היא קטע ולכן קשירה כמסקנה מהתרגול. גם l הוא קטע ולכן גם הוא קשיר. נבחין כי לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $(0, 0) \in l_n$ וכן $(0, 0) \in l$, ולכן מלמת כוכב המרחב הוא קשיר (ואף קשיר מסילתית).

נראה שהמרחב איננו קשיר מקומית. נבחן את הקבוצה הפתוחה $U = B((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{4}) \cap X$, זוהי קבוצה פתוחה כצמצום קבוצה פתוחה במרחב המטרי \mathbb{R}^2 . מהצד השני נבחין כי $U = \{(t, \frac{t}{2}) \mid t \in (\frac{1}{2}, \frac{7}{10})\} \cup \{(t, t) \mid t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$. כלומר U הוא איחוד קטעים זרים ופתוחים ולכן לא קשיר מקומית. \square