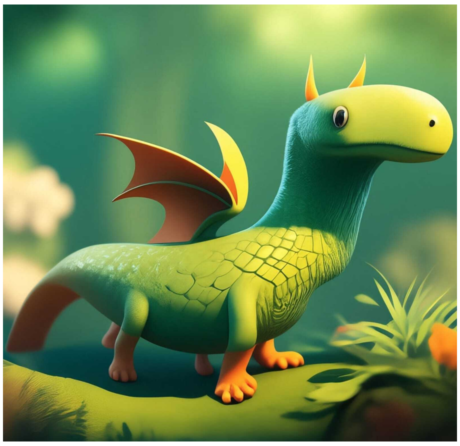
פתרון מטלה 01 — מבנים אלגבריים (2), 80446

28 במרץ 2025



שאלה 1

תהי L/K הרחבת שדות כך ש־$[L:K]=7$. נראה שלכל איבר $\alpha\in L\setminus K$ מתקיים $L=K[\alpha]$.

הוכחה. נבחין כי מהגדרה $K[\alpha]\subseteq L$, וכן כמובן $K\subseteq K[\alpha]$. נוכל להניח גם ש־$K[\alpha]$ הוא שדה, זאת שכן α הפיך, ולכן מתקיים $7=[L:K]=[L:K[\alpha]]\cdot[K[\alpha]:K]$. נבחין כי $[K[\alpha]:K]>1$, אחרת $\alpha\in K$, ולכן מראשוניות נסיק ש־$[L:K[\alpha]]=1$, כלומר $L=K[\alpha]$. □

שאלה 2

יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי, נראה שיש p ראשוני ו־$n \in \mathbb{N}$ כך ש־$|\mathbb{F}| = p^n$.

הוכחה. נגדיר $p = \operatorname{char} \mathbb{F}$, אילו $p = 0$ אז $|\mathbb{F}| = \infty$ בסתירה, לכן נסיק ש־$p \in \mathbb{N}$. נוכל אם כן להניח ש־p ראשוני ומלמה מההרצאה נובע אף ש־$\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}$. אילו קיים ראשוני $q \mid |\mathbb{F}|$, אז קיים איבר בשדה מהסדר הזה, לכן נסיק ש־$q = p$ בלבד, ולכן $|\mathbb{F}| = p^n$ עבור איזשהו $n \in \mathbb{N}$. $\square$

שאלה 3

תהי L/K הרחבת שדות ותהי $S = \{s_i \mid 1 \le i \le m\} \subseteq L$.

סעיף א׳

נוכיח כי יש K־הומומורפיזם יחיד $\varphi : K[t_1, \dots, t_m] \to K[S]$ כך ש־$\varphi(t_i) = s_i$ לכל i.

הוכחה. נניח כי φ, ψ הומומורפיזמים המקיימים את הנתונים, אז $\forall i, \varphi(t_i) = \psi(t_i)$ מהגדרה. שתי ההעתקות סגורות לחיבור ולכפל, לכן אם $p_1, p_2 \in K[S]$ כך ש־$\varphi(p_j) = \psi(p_j)$ אז $\varphi(\alpha p_1 + \beta p_2) = \psi(\alpha p_1 + \beta p_2)$. לכן נותר שנבדוק הזדהות במונומים מתוקנים, כלומר איבר מהצורה $t_1^{\beta_1} \cdots t_m^{\beta_m}$,

$$\varphi(t_1^{\beta_1} \cdots t_m^{\beta_m}) = \varphi(t_1^{\beta_1}) \cdots \varphi(t_m^{\beta_m}) = \varphi(t_1)^{\beta_1} \cdots \varphi(t_m)^{\beta_m} = \psi(t_1)^{\beta_1} \cdots \psi(t_m)^{\beta_m} = \psi(t_1^{\beta_1} \cdots t_m^{\beta_m})$$

וקיבלנו כי אכן שתי ההעתקות מזדהות על כל התחום, כלומר $\varphi = \psi$. $\square$

סעיף ב׳

נפריך את הטענה כי יש K־הומומורפיזם יחיד $\varphi : K(t_1, \dots, t_m) \to K(S)$ כך ש־$\varphi(t_i) = s_i$ לכל i.

פתרון נבחן את $\varphi : \mathbb{R}(x) \to K(\{i\}) = \mathbb{C}$ עבור $K = \mathbb{R}, L = \mathbb{C}$. נניח שקיים φ כזה, אז מתקיים $\varphi(x) = i$, ובהתאם נוכל להסיק בדומה לסעיף הקודם ש־$\varphi(f) = f(i)$ לכל פונקציה רציונלית $f \in \mathbb{R}(x)$. לבסוף נובע $\varphi(\frac{1}{x^2+1}) = \frac{1}{i^2+1} = \frac{1}{0}$, כלומר הפונקציה לא מוגדרת היטב, וזו סתירה להנחת הקיום שלה.

שאלה 4

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $f \in \mathbb{F}[x]$ פולינום מעל השדה.

סעיף א׳

נוכיח שאם $\deg f = 1$ אז f ראשוני.

הוכחה. $\square$