פתרון מטלה 09 — אנליזה על יריעות, 80426

30 במאי 2025

שאלה 1

תהי $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה עם שפה. נסמן $M^\circ = M \setminus \partial M$.

סעיף א׳

נראה ש־M° היא צפופה ב־M.

הוכחה. M° צפופה ב־M אם ורק אם כל נקודה ב־M היא ערך גבולי של סדרה ב־$M \setminus \partial M$. עבור נקודות ב־M הטענה נכונה באופן טריוויאלי, לכן מספיק שנמצא סדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq M^\circ$ המתכנסת ל־$x \in \partial M$ לכל x כזה. נניח ש־$x \in \partial M$ ונניח ש־$\alpha : U \to M$ פרמטריזציה מקומית של x, כלומר $p \in U \subseteq \mathbb{H}^k$ כאשר $p = \alpha^{-1}(x)$. פרמטריזציה משמרת שפה, כלומר $\alpha(y) \in \partial M \iff y \in \partial U$, אבל U פתוחה ולכן קיים $\epsilon > 0$ כך ש־$B(p, \epsilon) \cap \mathbb{H}^k \subseteq U$. נבחר נקודה $x_1 \in B(p, \epsilon) \cap U \cap (\mathbb{H}^k)^\circ$ וכן נקודה $x_n \in B(p, \frac{\epsilon}{n}) \cap U \cap (\mathbb{H}^k)^\circ$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נקבל סדרה כך ש־$x_n \to x$ וכן $x_n \in M^\circ$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כפי שרצינו. □

סעיף ב׳

נראה שאם $k = n$ אז M° היא קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$.

הוכחה. ראינו בהרצאה ש־M° היא יריעה ללא שפה ממימד $k = n$, וכן ראינו שיריעות $M^n \subseteq \mathbb{R}^n$ הן קבוצות פתוחות ב־$\mathbb{R}^n$.

הטענה נובעת באופן ישיר מקיום פרמטריזציה מקומית. אם $x \in M^\circ$ אז קיימת פרמטריזציה $\alpha : U \to M^\circ$ כך ש־$U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, ו־α הומיאומורפיזם ולכן בפרט פתוחה ו־$\alpha(U) \subseteq M$ פתוחה במובן המטרי. נסיים את ההוכחה עם סגירות פתוחות לאיחוד ואיחוד כלל הסביבות הפתוחות לכל נקודה ב־M°. □

סעיף ג׳

נראה שאם $U \subseteq M$ קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ אז $U \subseteq M^\circ$.

הוכחה. נתון כי $U \subseteq M$ ו־$\deg U = n$ ולכן $\deg M = n$. לכל נקודה $x \in U$ יש פרמטריזציה מקומית וכמו בסעיף הקודם היא פתוחה ולכן מעידה ש־$x \in M^\circ$ כקבוצה פתוחה (הנחה שמותר לעשות בשל תוצאת הסעיף הקודם). □

סעיף ד׳

נסיק שאם M תת־קבוצה סגורה של $\mathbb{R}^n$ ו־$\dim M = n$ אז ההגדרות של שפה ופנים של יריעות ושל קבוצות מזדהות.

הוכחה. נוכל להסיק ישירות מהסעיף הקודם שפנים של יריעה וקבוצה מזדהים כאשר $\dim M = n$. ביתר פירוט, אם $U \subseteq M$ פתוחה אז בפרט $U \subseteq M^\circ$ ולכן M° תת־קבוצה פתוחה מקסימלית של M, כלומר היא עומדת בהגדרה המטרית המדויקת של פנים. נקבל על־ידי חיסור קבוצות והעובדה ש־$M = \overline{M}$ ש־$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$, כלומר גם השפה מזדהה עם ההגדרה המטרית. □

שאלה 2

תהי $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה עם שפה, נניח ש־$q \in \partial M$ ותהי פרמטריזציה $\alpha : V \to W$ כך ש־$V \subseteq \mathbb{H}^k$ פתוחה ו־$q \in W \subseteq M$. נניח גם ש־$\tilde{\alpha} : \tilde{V} \to \tilde{W}$ הרחבה חלקה שלה, כלומר $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ ו־$\dim \tilde{W} = k$.

נניח ש־$y : [0, \varepsilon) \to \tilde{V}$ היא מסילה חלקה כך ש־$y(0) = y_0 = \alpha^{-1}(q)$, וש־$d\tilde{\alpha}_{y_0}(y'(0)) = X(q)$ מקיימת $\langle X(q), \nu(q) \rangle < 0$, כאשר ν הנורמל החיצוני של M.

נראה שקיים $\delta > 0$ כך ש־$y(t) \in \mathbb{H}^k$ עבור $t \in [0, \delta]$, ובפרט ש־$\tilde{\alpha}(y(t)) = \alpha(y(t)) \in M$.

הוכחה. אנו נראה שהקורדינטה האחרונה של $y'(0)$ שלילית. □