פתרון מטלה 09 — מבוא לטופולוגיה, 80516

7 ביוני 2025

שאלה 1

יהי Y מרחב טופולוגי. נראה ש־Y קשיר מסילתית אם ורק אם לכל מרחב X ולכל שתי פונקציות קבועות $f, g : X \to Y$ מתקיים $f \sim g$, כלומר הפונקציות הומוטופיות.

הוכחה. נניח שהמרחב Y קשיר מסילתית ונניח ש־f, g פונקציות קבועות כלשהן. נניח ש־$f = c_a, g = c_b$ עבור $a, b \in Y$, ולכן קיימת מסילה $\gamma : I \to Y$ רציפה כך ש־$\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ עבור $I = [0, 1]$. נגדיר $h : I \times X \to Y$ על־ידי $h(t, x) = \gamma(t)$, ונבחין תחילה כי זו אכן פונקציה רציפה. מתקיים גם $h(0) = c_a = f$ ו־$h(1) = c_b = g$ מהגדרה, ולכן זוהי הומוטופיה המעידה $f \sim g$.

נניח שכל שתי פונקציות קבועות כנתון הן הומוטופיות. נניח ש־$a, b \in Y$ שתי נקודות כלשהן, אז קיימת $h : I \times X \to Y$ המעידה על הומוטופיה $c_a \sim c_b$. נגדיר $\gamma : I \to Y$ על־ידי $\gamma(t) = h(t, x)$ עבור $x \in X$ קבוע כלשהו. הפונקציה γ רציפה, וכן $\gamma(0) = h(0, x) = c_a(x) = a$ ובאופן דומה $\gamma(1) = b$ ונסיק כי זוהי מסילה רציפה ולכן a, b קשירות מסילתית לכל $a, b \in Y$. $\square$

שאלה 2

יהיו $f,g : S^n \to S^n$ פונקציות רציפות מספירת היחידה כך ש־$|f(x) - g(x)| < 2$ לכל $x \in S^n$.
נראה ש־$f \sim g$.

הוכחה. נבחין כי לכל $x \in S^n$ נתון ש־$f(x) \neq -g(x)$. נגדיר $\gamma_0^x(t) = f(x)(1-t) + g(x)t$, לכל x קיימת מסילה יחידה כזאת. נבחין כי $\gamma_0^x(t) \neq 0$ לכל $t \in I$, אחרת בהכרח נוכל לבדוק ולקבל $f(x) = -g(x)$ בסתירה לנתון. נגדיר אם כך את המסילה $\gamma^x(t) = \frac{\gamma_0^x(t)}{\|\gamma_0^x(t)\|}$ ונקבל מסילה רציפה $\gamma^x : I \to S^n$ המעידה על קשירות מסילתית. ישירות מהגדרת המסילה (והיותה קאנונית על S^n) נסיק שההעתקה $h : I \times S^n \to S^n$ המוגדרת על־ידי,

$$h(t,x) = \gamma^x(t)$$

היא העתקה רציפה, וכן,

$$h(0,x) = \gamma^x(t) = \frac{\gamma_0^x(0)}{\|\gamma_0^x(0)\|} = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x)$$

זאת שכן $f(x) \in S^1$ ובהכרח $\|f(x)\| = 1$ בהתאם. נוכל להראות באופן זהה שגם $h(1,x) = g(x)$ לכל $x \in S^n$. $\square$

שאלה 3

יהיו $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ מסילות רציפות במרחב הטופולוגי X.
נראה שאם מתקיים $\beta_1 * \gamma_1 \sim_p \beta_2 * \gamma_2$ וגם $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$ אז $\beta_1 \sim_p \beta_2$.
$\sim_p$ משמעו הומוטופיה מסילתית.

הוכחה. נניח ש־$h, k : I \times I \to X$ הומוטופיות המעידות על הנתון בהתאמה. נבחר k^{-1} המוגדרת על־ידי היפוך המסילות γ_1, γ_2, ונבחן את ההומוטופיה המסילתית $l = h * k^{-1}$ המעידה על $\beta_1 * \gamma_1 * \gamma_1^{-1} \sim_p \beta_2 * \gamma_2 * \gamma_2^{-1}$. נקבל $l(0, t) = h(0, t) = \beta_1(t)$ ובאופן דומה גם $l(1, t) = \beta_2(t)$. מתקיים גם,

$$l(s, 0) = (h * k^{-1})(s, 0) = h(s, 0) = \beta_1(0)$$

ומהצד השני גם,

$$l(s, 1) = k^{-1}(s, 1) = k(s, 0) = \gamma_1(0) = \beta_1(1)$$

ונבחין כי $\beta_1(0) = \beta_2(0), \beta_1(1) = \beta_2(1)$ משוויונות אלה ומההומוטופיה. □

שאלה 4

נסמן $E = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ ו־$B = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. נגדיר את ההעתקה $p : E \to B$ על־ידי,
$$p(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

סעיף א׳

נוכיח ש־p העתקת כיסוי.

הוכחה. נבחין כי p רציפה כרציפה קורדינטה קורדינטה.
תהי נקודה $(x, y) \in B$. נגדיר $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ וכן $\theta = \operatorname{Arg}(x, y)$ עבור Arg הענף הראשי של הארגומנט. קיים $\delta > 0$ כך ש־$B((x, y), \delta) \subseteq B$ וכן $U_0 = \{(\|(x', y')\|, \operatorname{Arg}(x', y')) \in E \mid (x', y') \in B((x, y), \delta)\}$ קבוצה פתוחה, זאת שכן $p(U) = B((x, y), \delta)$ בדיוק. נבחין כי גם $U_n = \{(r, \theta + 2\pi n) \mid (r, \theta) \in U_0\}$ היא קבוצה פתוחה $U_n \subseteq E$ כך ש־$p(U_n) = B((x, y), \delta)$. ישירות מהגדרת e^{it} נסיק כי גם,
$$p^{-1}(B((x, y), \delta)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_z$$
וקיבלנו כי p היא אכן העתקת כיסוי. $\square$

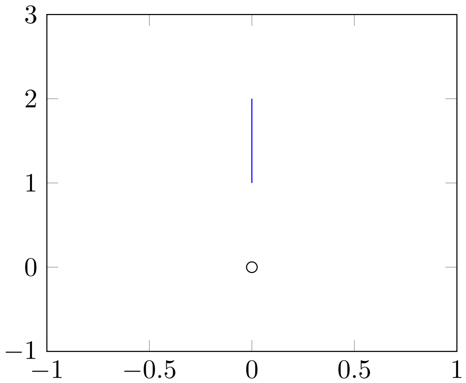
סעיף ב׳

בכל תת־סעיף נשרטט מסילה מוגדרת ב־B ואת אחת ההרמות שלה ל־E.

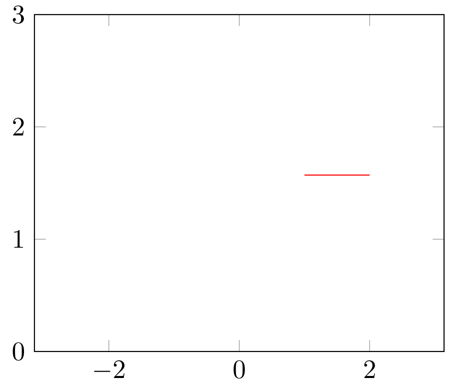
i

$$f : I \to B, \quad f(t) = (0, 2 - t).$$

פתרון נצייר את $f(B) \subseteq B$,



ונעבור להרמה של f כך ש־$\tilde{f}(0) = (2, \frac{\pi}{2})$. מתקיים $p(\tilde{f}(0)) = (0, 2)$ כפי שרצינו ונבחין כי,
$$\tilde{f}(t) = (2 - t, \frac{\pi}{2})$$
מחישוב ישיר של ההפיכה ל־p. נעבור לשרטוט.

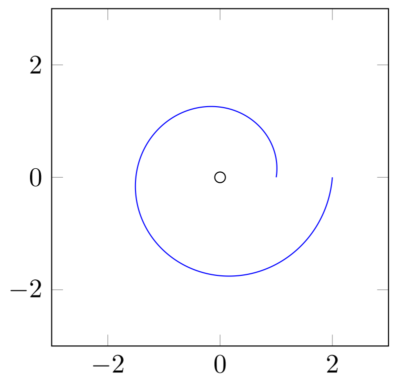


ii

נגדיר,

$$g : I \to B, \quad g(t) = ((1+t)\cos(2\pi t), (1+t)\sin(2\pi t)) = p(1+t, 2\pi t)$$

פתרון נשרטט את $g(I) \subseteq B$,



המסילה מוגדרת באופן ישיר על־ידי המסילה $\tilde{g}(t) = (1+t, 2\pi + 2\pi t)$ ולכן נבחר הרמה זו,