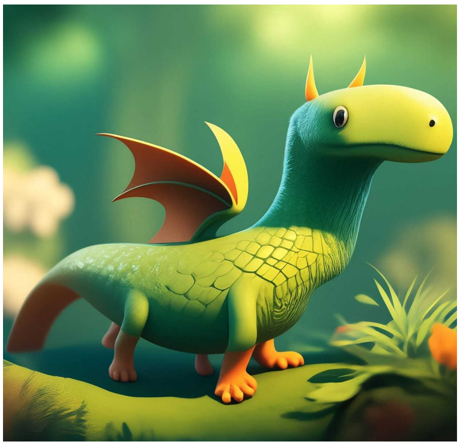
פתרון מטלה 03 — מבנים אלגבריים (2), 80446

28 באפריל 2025



שאלה 1

יהי p ראשוני ו־$n \in \mathbb{N}$, ויהי הפולינום הציקלוטומי מסדר p^n,

$$\frac{x^{p^n}-1}{x^{p^{n-1}}-1} \in \mathbb{Q}[x]$$

סעיף א׳

נראה שזהו אכן פולינום.

הוכחה. נראה ש־$x^{p^{n-1}}-1 | x^{p^n}-1$. ניזכר בזהות $(1+x+\cdots+x^{n-1})(x-1) = x^n - 1$ הנכונה לכל $x \in \mathbb{C}$. לכן בפרט בהצבה $(x^{p^n})^k - 1 = (1 + x^{p^n} + \cdots + (x^{p^n})^{k-1})(x^{p^n}-1)$, נוכל להציב $k = p$ ונובע,

$$\frac{x^{p^{n+1}}-1}{x^{p^n}-1} = 1 + x^{p^n} + \cdots + (x^{p^n})^{p-1}$$

ובפרט זהו פולינום כפי שרצינו להראות. נבחין שעבור $n = 0$ הטענה נובעת ישירות מהזהות. $\square$

סעיף ב׳

נוכיח שהפולינום הוא אי־פריק על־ידי שימוש בקריטריון אייזנשטיין.

הוכחה. כלל מקדמי הפולינום הם 1 ולכן לא נוכל להשתמש בקריטריון ישירות, נציב $x = y + 1$ ונקבל,

$$\frac{x^{p^n}-1}{x^{p^{n-1}}-1} = \frac{(y+1)^{p^n}-1}{(y+1)^{p^{n-1}}-1} = 1 + (y+1)^{p^n} + \cdots + (y+1)^{(p-1)p^n} = \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=0}^{ip^n}\binom{ip^n}{j}y^j = \sum_{j=0}^{(p-1)p^n}\sum_{i=j/p^n}^{p-1}\binom{ip^n}{j}y^j$$

ולכן המקדם של y^i הוא $\sum_{i=j/p^n}^{p-1}\binom{ip^n}{j}$, כאשר בפרט $a_{(p-1)p^n} = 1$, ולכן $p \mid a_i$ לכל $i < (p-1)p^n$ אבל $p \nmid a_{(p-1)p^n}$. נבחין גם כי $a_0 = p$ ולכן $p^2 \nmid a_0$, וקריטריון אייזנשטיין חל וגורר שהפולינום הציקלוטומי מסדר p^n אי־פריק. $\square$

שאלה 2

נפרק את $f(x)=x^4+4\in\mathbb{Q}[x]$ לפולינומים אי־פריקים מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון נבחין כי מעל $\mathbb{C}$ ל־f, נסמן $\omega=e^{\frac{2\pi i}{4}}=e^{\frac{1}{2}\pi i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ולכן,

$$f(x)=(x-\sqrt{2})(x-\omega\sqrt{2})(x-\omega^2\sqrt{2})(x-\omega^3\sqrt{2}i)$$

כלומר השורשים של f הם $\omega^i\sqrt{2}$ עבור $i\in\{0,1,2,3\}$. כל פולינום $g\in\mathbb{Q}[x]$ כך ש־$g\mid f$ הוא מכפלת חלק מהגורמים הלינאריים הללו, ולכן מספיק לבדוק את $2^4-1=15$ הצירופים הללו. כלל הפולינומים מסדר 1 הם מכפלות של $\sqrt{2}$ ולכן נוכל להסיק ישירות שאינם פירוק של f מעל $\mathbb{Q}$. באופן דומה לא יתכן שיהיה פולינום מחלק מדרגה 3, אחרת נקבל שאיברו החופשי הוא $2\sqrt{2}\omega_i$ עבור i כלשהו. נותר אם כן לבדוק את 6 הפולינומים מסדר 2. נוכל לפסול פולינומים שלא משלימים ל־ω בחזקה זוגית, אחרת האיבר החופשי שלהם יהיה מרוכב ובפרט לא רציונלי, ונשאר לבדוק שני פולינומים בלבד,

$$(x-\omega\sqrt{2})(x-\omega^3\sqrt{2})=x^2-\sqrt{2}(\omega+\omega^3)x+2$$

אבל מתקיים,

$$\omega+\omega^3=\frac{i+1+(-1+i)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

ונקבל את הפולינום x^2-2x+2. מבדיקה ישירה נקבל ש־$x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$. עבור המקרה השני נקבל,

$$(x-\sqrt{2})(x-\omega^2\sqrt{2})=x^2-\sqrt{2}(1+\omega^2)x+2$$

כלומר המקדם של x הוא $\sqrt{2}(i+1)$ וזהו לא מספר רציונלי.

שאלה 3

יהיו $p_1,\dots,p_n\in\mathbb{N}$ ראשוניים שונים. נראה ש־$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_n}):\mathbb{Q}]=2^n$ ושהקבוצה,

$$\mathcal{B}=\left\{\sqrt{\prod_{i\in S}p_i}\middle|S\subseteq\{1,\dots,n\}\right\}$$

היא בסיס ל־$\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_n})$ מעל $\mathbb{Q}$.

הוכחה. אנו יודעים שמתקיים,

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_n}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}):\mathbb{Q}]\cdots[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_n}):\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_{n-1}})]$$

והפולינום $f_i(x)=x^2-p_i$ מהווה פולינום מינימלי עבור כל ראשוני כזה,

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_i}):\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_{i-1}})]=2$$

לכל i. נסיק אם כך ש־$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_n}):\mathbb{Q}]=2^n$.

נוכיח את כי $\mathcal{B}$ בסיס ל־$\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_n})$ באינדוקציה על n. עבור $n=1$ הטענה נובעת מהגדרה, כלומר $\{\sqrt{p_1}\}$ בסיס של $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$. נניח כי הטענה נכונה עבור n ונבדוק את $n+1$. יהי $\alpha\in\operatorname{Sp}_{\mathbb{Q}}\mathcal{B}_n$. אילו $\alpha=0$ אז גם $\alpha=0\neq p_{n+1}$, אילו $\alpha=a\sqrt{s}$ עבור $\sqrt{s}\in\mathcal{B}_n$ אז $\alpha^2=a^2s\in\mathbb{Q}$ ולכן לא יתכן שנגיע ל־$\sqrt{p_{n+1}}$. נניח אם כך ש־$\alpha=a_1s_1+\cdots+a_ks_k$, כאשר $a_i\neq 0$ לכל i. α^2 הוא חיבור של שורשי מספרים שונים ולכן לא מספר רציונלי, ונוכל להסיק שבפרט $\alpha\neq\sqrt{p_{n+1}}$. לכן נובע ש־$p_{n+1}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_n})$ ובהתאם $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_{n+1}})=\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_n})(\sqrt{p_{n+1}})$ וכן

$$\mathcal{B}_{n+1}=\left\{\sqrt{\prod_{i\in S}p_i}\middle|S\subseteq\{1,\dots,n+1\}\right\}$$

$\square$

שאלה 4

בכל סעיף נגדיר את α ונחשב את $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

סעיף א׳

$\alpha = \sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$.

פתרון TODO

שאלה 5

נראה ש־$f(x) = x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ אי־פריק, אבל ש־$f(x+a)$ לא מקיים את קריטריון אייזנשטיין לאף $a \in \mathbb{Z}$ ולאף p ראשוני.

הוכחה. נבחין כי לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $f(x+a) = x^2 + 2ax + (a^2+4)$. נבחין גם כי $a^2+4 = (a+2)^2 - 2a$. על הראשוני p לחלק את $2a$, לכן $p = 2$ או $2 < p \mid a$. אם $2 < p$ אז $p \mid 2a$ אבל $p \nmid a+2$, ולכן בהכרח $p \nmid a^2+4$, ובהכרח $p = 2$. נבחין כי $2 \nmid 1$ ולכן התנאי עבור המקדם של המעלה הגדולה ביותר כן חל, ולכן נראה ש־$4 = p^2 \mid a^2+4$. אם a מספר זוגי, אז בפרט $4 \mid a^2$ וכן גם $4 \mid a^2+4$, ולכן תנאי הקריטריון לא חלים. נניח ש־a אי־זוגי, נובע שגם $a+2$ אי־זוגי וכן גם $(a+2)^2$ אי־זוגי, לעומת זאת $2a$ זוגי, ולכן $a^2+4 = (a+2)^2 - 2a$ מספר אי־זוגי, כלומר $2 \nmid a^2+4$ בסתירה לדרישה ש־$p \mid a_0$. נסיק אם כך שתנאי הקריטריון לא חלים גם במקרה $p = 2$, לכן לא קיים p עבורו התנאים מתקיימים, לכל a. $\square$