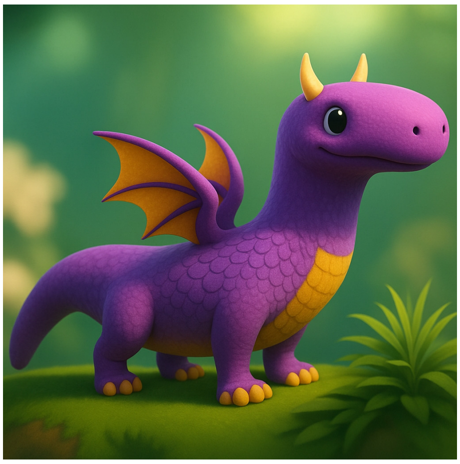
פתרון מבחן בית — גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית, 80560

20 בינואר 2026



תוכן העניינים

שאלה 1

יהי (E, V) מרחב אפיני.

סעיף א׳

תהי $S \subseteq E$ קבוצה ותהי $S' = \langle S \rangle$ תת־היריעה הנוצרת על־ידי S. נראה שמתקיים,

$$S' = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda^i P_i \mid \sum_{i}^{n} \lambda^i = 1, P_1, \dots, P_n \in S \right\}.$$

הוכחה. מהגדרת תת־יריעה נניח ש־$S' = Q + W$ עבור $Q \in E$ ו־$W \le E$ תת־מרחב וקטורי. ממשפט מהכיתה נוכל לקבע $Q = P_i$ לאיזשהו i, בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$Q = P_1$. נבחין ש־$P_i - P_1 \in W$ לכל $1 < i \le n$, יהי וקטור $\lambda^2(P_2 - P_1) + \cdots + \lambda^n(P_n - P_1) \in W$, אז גם $L = P_1 + \lambda^2(P_2 - P_1) + \cdots + \lambda^n(P_n - P_1) \in S'$. עתה נקבל ממשפט אינווריאנטיות לבחירת נקודת יחוס שגם $L = P_0 + (1 - (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n))P_1 + \lambda^2 P_2 + \cdots + \lambda^n P_n$, נגדיר $\lambda^1 = 1 - (\lambda^2 + \cdots + \lambda^n)$. קיבלנו שמתקיים $\lambda^1 + \cdots + \lambda^n = 1$ וכן $L = \sum_{i=1}^n \lambda^i P_i$ ולכן קיבלנו הכלה בכיוון אחד.

בכיוון ההפוך נניח ש־$P = \sum_{i=1}^n \lambda^i P_i$ עבור סקלרים מתאימים ונקבל ישירות משימוש בצד השני שבחירת הנקודה $u = \lambda^2(P_2 - P_1) + \cdots + \lambda^n(P_n - P_1)$ מקיים $u \in W$ ולכן $P = P_1 + u \in S'$. □

סעיף ב׳

נראה שאם $L \subseteq E$ קבוצת נקודות, אז L תת־יריעה אפינית אם ורק אם לכל $P, Q \in L$ מתקיים $\langle P, Q \rangle \subseteq L$.

הוכחה. נניח ש־S תת־יריעה אפינית, אז בפרט מתקיים,

$$\left\{ \sum_{i=1}^{2} \lambda^i P_i \mid \sum_{i}^{2} \lambda^i = 1, P_1, P_2 \in S \right\} \subseteq S.$$

בפרט עבור $P, Q \in L$ נקבל ש־$\langle P, Q \rangle \subseteq L$.

נניח את טענת הכיוון ההפוך. תהי $P_0 \in L$ ונסמן $W = L - P_0$, נראה ש־$W \le V$. יהי $u \in W$, ו־$\alpha \in \mathbb{F}$, אז $\langle P_0, P_0 + u \rangle \subseteq L$ ולכן $\operatorname{Span}\{u\} \in L$ ונובע שגם $\alpha u \in L$. נניח ש־$u, v \in W$ ונראה ש־$u + v \in W$. נסמן $P_1 = P_0 + u$ וכן $P_2 = P_0 + v$, נקבל שגם $\langle P_1, P_2 \rangle \subseteq L$, כלומר $P_1 + (v - u)t \in L$, כלומר $P_0 + u + (v - u)t \in L$ ולכן $u + (v - u)t \in W$. נבחר $t = -1$ ונקבל ש־$2u - v \in W$, ומסגירות לכפל בסקלר נקבל שגם $u + v \in W$ ולכן $W \le V$ תת־מרחב וקטורי כפי שרצינו. □

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$.

סעיף א׳

נראה שלכל $v \in V$ מתקיים,

$$\forall l \in V^\vee,\ \langle l, v\rangle = 0 \iff v = 0.$$

הוכחה. נניח ש־$v = 0$ ויהי $l \in V^\vee$, כלומר $l : V \to \mathbb{F}$ העתקה לינארית. אז מתקיים $l(v) = 0$ מהגדרת ההעתקה הלינארית.

לכיוון ההפוך נניח שלכל $l \in V^\vee$ מתקיים $l(v) = 0$ ונניח בשלילה ש־$v \neq 0$. נרחיב את (v) לבסיס $\mathcal{B} = (v, b_2, \dots, b_n)$ הפורש את V. בהתאם קיימת העתקה לינארית $l : V \to \mathbb{F}$ כך שמתקיים $l(v) = 1$, אבל $l \in V^\vee$ ולכן $\langle l, v\rangle = 0 \neq 1$ בסתירה. $\square$

סעיף ב׳

יהי $l \in V^\vee$, נוכיח ש־$l = 0$ אם ורק אם לכל $v \in V$ מתקיים $\langle l, v\rangle = 0$.

הוכחה. נניח ש־$l = 0$, אז בהגדרה $\langle l, v\rangle = l(v) = 0$ לכל v.

נניח ש־$\langle l, v\rangle = 0$ לכל $v \in V$ ונניח ש־$l \neq 0$, לכן קיים $u \in \operatorname{Im} l$ כך ש־$u \neq 0$ וכן $l(u) \neq 0$ בסתירה. $\square$

סעיף ג׳

נראה שלכל $W \le V^\vee$ מתקיים,

$$\dim_{\mathbb{F}} W + \dim_{\mathbb{F}} W_0 = \dim_{\mathbb{F}} V$$

הוכחה. הגדרנו $W_0 = \{v \in V \mid \forall l \in W,\ l(v) = 0\}$. נניח ש־$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס של V וכן נסמן $\mathcal{B}^\vee = (b^1, \dots, b^n)$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$(b^1, \dots, b^k)$ עם $k \le n$ הוא בסיס סדור של W. אז מההגדרה מתקיים $l(b^i) = 0$ לכל $l \in W$ ו־$k < i \le n$, ולכן $b_i \in W_0$. באופן דומה נסיק ש־$b_i \notin W_0$ לכל $i \le k$ שכן קיים עד לכך ש־$b^i \in W$. קיבלנו אם כך ש־$(b_{k+1}, \dots, b_n)$ בסיס סדור של W_0. $\square$

סעיף ד׳

יהיו $S_1, S_2 \le V$ ונראה ש־$(S_1 + S_2)^0 = S_1^0 \cap S_2^0$.

הוכחה. יהי $l \in (S_1 + S_2)^0$, אז $l(v+u) = l(v) + l(u) = 0$ לכל $u \in S_1, v \in S_2$. נבחין כי $0 \in S_1, S_2$ כתת־מרחבים ולכן נקבל שגם $l(v) = 0, l(u) = 0$ לכל u, v כאלה, ונסיק $l \in S_1^0, l \in S_2^0$ ובפרט נמצא בחיתוך.

מהצד השני נניח ש־$l \in S_1^0 \cap S_2^0$, אז בפרט $l(u) = l(v) = 0$ לכל $u \in S_1, v \in S_2$, ולכן גם $l(u+v) = l(u) + l(v) = 0$ ונסיק ש־$l \in (S_1 + S_2)^0$. $\square$

סעיף ה׳

נראה שאם $L^1, L^2 \le V^\vee$ אז $(L^1 \cap L^2)_0 = L_0^1 + L_0^2$.

הוכחה. מהסעיף הקודם נסיק $L^1 \cap L^2 = (L_0^1 + L_0^2)^0$, ולכן $(L^1 \cap L^2)_0 = (L_0^1 + L_0^2)^0_0 = L_0^1 + L_0^2$ מזהויות שהוכחנו. $\square$

שאלה 3

עקום חלק עם פרמטריזציה לפי אורך $c : I \to \mathbb{E}^3$ נקרא בי־רגולרי אם $\forall t \in I,\ c''(t) \neq 0$. נסמן $v = c'$ ונגדיר את הנורמל על־ידי $n = \frac{c''}{|c''|}$ ואת הבי־נורמל על־ידי $b = v \wedge n$. נבחין כי (v, n, b) בסיס אורתונורמלי.

סעיף א׳

נראה שקיימים $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים,

$$\begin{pmatrix} v' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

הוכחה. נבחין שהטענה שקולה לשוויון,

$$\begin{pmatrix} v' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \kappa n + 0 \\ -\kappa v + 0 + \tau b \\ 0 - \tau n + 0 \end{pmatrix}.$$

כלומר הטענה שקולה לשוויונות,

$$v' = \kappa n, \qquad n' = -\kappa v + \tau b, \qquad b' = -\tau n.$$

ראינו בכיתה ש־$\kappa = \kappa(t)$ העקמומיות בנקודה אכן קיימת, וש־$\kappa n = v'$. נזכיר כי טענה זו נובעת מהעובדה ש־$\|v'\| = 1$ ולכן $v \perp v'$ מהעובדה שהפרמטריזציה היא לפי אורך.

נבחין שגם $\|v\| = 1, \|n\| = 1$ ולכן $\|b\| = 1 \cdot 1 - |v \cdot n| = 1$, וכן $v \cdot b = 0$ ולכן ניתן להסיק של־b' יש רק רכיב אורתוגונלי. נקבל שגם $(v \cdot b)' = v' \cdot b + v \cdot b' = 0$ אבל $v' \cdot b = n \cdot b \cdot |c''| = 0$ ולכן נסיק ש־$b' \cdot v = 0$, ובהתאם מתקיים $b' = -\tau n$ לאיזשהו $\tau = \tau(t)$. נשים לב כי יכולנו להגדיר גם ללא המינוס.

מתקיים,

$$0 = \begin{vmatrix} v & n & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} v & b & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & v & n \end{vmatrix}.$$

כלומר גם $n = b \wedge v$ ולכן מחוקי גזירה,

$$n' = b' \wedge v + b \wedge v' = (-\tau n) \wedge v + b \wedge (\kappa n) = -\tau (n \wedge v) + \kappa (b \wedge n) = \tau b - \kappa v.$$

כפי שרצינו. $\square$

סעיף ב׳

תהי $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ העתקה אפינית שומרת מרחק וכיוון, כלומר $f(x) = Ax + b$ עבור $A \in SO_3(\mathbb{R})$ ו־$b \in \mathbb{R}^3$.
נראה ש־$f \circ c$ ו־c בעלות עקמומיות ופיתול משותפים.

הוכחה. נגזור את $f \circ c$ ונסמן ב־v_1,

$$v_1 = (f \circ c)' = (f' \circ c) \cdot c' = Av.$$

שכן $f' \equiv A$. בהתאם גם $(f \circ c)'' = Av'$ ולכן אם נסמן n_1, b_1 הנורמל והבי־נורמל של $f \circ c$ אז נקבל,

$$n_1 = \frac{Av'}{|Av'|} = \frac{Av'}{|v'|} = An.$$

נסמן עתה גם κ_1, τ_1 העקמומיות והפיתול של $f \circ c$ ונקבל,

$$v_1' = \kappa_1 n_1 \iff Av' = \kappa_1 An \iff v' = \kappa_1 n.$$

ונסיק ש־$\kappa = \kappa_1$.

נעבור לבדיקה של b_1,

$$b_1 = v_1 \wedge n_1 = (Av) \wedge (An).$$

כלומר,

$$0 = \begin{vmatrix} Av & An & b_1 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} v & n & A^{-1} b_1 \end{vmatrix}.$$

כאשר המעבר האחרון נובע ישירות מהגדרת העתקות לינאריות בהצגה מטריצאלית. נשתמש בהפיכות A כדי להסיק,

$$A \begin{vmatrix} v & n & A^{-1} b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & n & A^{-1} b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & n & b \end{vmatrix}.$$

ונקבל ש־$b_1 = Ab$ ולכן,

$$b_1' = -\tau_1 n_1 \iff Ab' = -\tau_1 An.$$

ונסיק ש־$\tau_1 = \tau$ כפי שרצינו. □

נבחין שאם f משנה כיוון אז לא נוכל לבצע את המעבר $-\tau An = A(-\tau n)$, ונקבל בהתאם שהעקמומיות והפיתול משנים גם הם סימן.

סעיף ג׳

נראה ש־$c(I)$ ניתנת לשיכון במישור אם ורק אם $\tau = 0$.

הוכחה. נניח ש־$c(I)$ ניתנת לשיכון במישור, בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח ש־$c(I) \subseteq \mathbb{E}^2 \times \{0\}$, זאת תוך שימוש בסעיף הקודם והגדרת A מתאימה. בהתאם נובע ש־$v \subseteq \mathbb{E}^2 \times \{0\}$ אף היא, אחרת נקבל שקיים $t \in I$ כך ש־$c(t) \notin \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. אבל $v' = \kappa n$ ולכן n אף היא משוכנת במישור, כלומר $n(I) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, ובהתאם מהגדרה $b \subseteq \{(0,0,\pm 1)\}$ בלבד, שהרי (v,n,b) בסיס אורתונורמלי וגם $(v,n) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ אורתונורמלי. b רציפה למרחב דיסקרטי סופי ולכן קבועה, ובפרט $b' \equiv 0$, אבל $b' = -\tau n$ ולכן $\tau \equiv 0$ בלבד.

נניח בכיוון ההפוך ש־$\tau \equiv 0$ ולכן $b' \equiv 0$ וגם $n' = -\kappa v$ בלבד, אבל גם $v' = \kappa n$. נובע אם כך ש־b הוא קבוע, נסמן $S \subseteq \mathbb{R}^3$ המישור הווקטורי האנך ל־b ונקבל ש־$v(I), n(I) \subseteq S$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, אם נסמן $c = (c^1, c^2, c^3)^t$ אז נקבל ש־$(c^3)' \equiv 0$, ולכן $c^3(I) = \{P\}$ עבור $P \in \mathbb{E}$, כלומר $c(I) \subseteq \mathbb{E}^2 \times \{P\}$. □

סעיף ד׳

יהי $c : I \to \mathbb{E}^3$ עקום רגולרי כלשהו. נראה שמתקיים,

$$\kappa(t) = \frac{|c'(t) \wedge c''(t)|}{|c'(t)|^3}.$$

וכן שאם c הוא בי־רגולרי אז גם,

$$\tau(t) = \frac{\begin{vmatrix} c'(t) & c''(t) & c^{(3)}(t) \end{vmatrix}}{|c'(t) \wedge c''(t)|^2}.$$

הוכחה. נגדיר רפרמטריזציה לפי אורך של c, $\tilde{c} : J \to \mathbb{E}^3$, ונגדיר את הדיפאומורפיזם $\varphi : J \to I$ כך ש־$\tilde{c} = c \circ \varphi$. בהתאם נובע ש־$\tilde{c}' = (c' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ מכלל השרשרת. $\tilde{c}$ היא פרמטריזציה לפי אורך ולכן,

$$\tilde{v}' = \tilde{\kappa}\tilde{n} \iff \tilde{c}'' = \tilde{\kappa}\frac{\tilde{c}''}{|\tilde{c}''|} \implies \tilde{\kappa} = \|\tilde{c}''\|.$$

אז נובע,

$$\tilde{\kappa} = \|\tilde{c}''\| = \|((c' \circ \varphi) \cdot \varphi')'\| = \|(c' \circ \varphi)'\varphi' + (c' \circ \varphi)\varphi''\| = \|(c'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (c' \circ \varphi)\varphi''\|.$$

אבל $\varphi' = \frac{1}{\|c' \circ \varphi\|}$ מהגדרתה ובהתאם $\varphi'' = \frac{-(c'' \circ \varphi)\varphi'}{\|c' \circ \varphi\|^2} = \frac{-(c'' \circ \varphi)}{\|c' \circ \varphi\|^3}$,

$$\tilde{\kappa} = \frac{|\|c'' \circ \varphi\|\|c' \circ \varphi\| - (c' \circ \varphi)(c'' \circ \varphi)|}{\|c' \circ \varphi\|^3} = \frac{|c' \circ \varphi \wedge c'' \circ \varphi|}{\|c' \circ \varphi\|^3}.$$

כאשר הזהות האחרונה הוכחה בתרגיל.

מסעיף א' $\tilde{b}' = -\tilde{\tau}\tilde{n}$. נחשב,

$$\tilde{b}' = (\tilde{v} \wedge \tilde{n})' = \tilde{v}' \wedge \tilde{n} + \tilde{v} \wedge \tilde{n}' = \tilde{\kappa}\tilde{n} \wedge \tilde{n} + \tilde{v} \wedge (-\tilde{\kappa}\tilde{v} + \tilde{\tau}\tilde{b}) = \tilde{\kappa}(\tilde{n} \wedge \tilde{n}) - \tilde{\kappa}(\tilde{v} \wedge \tilde{v}) + \tilde{\tau}(\tilde{v} \wedge \tilde{b}) = \tilde{\tau}(\tilde{v} \wedge \tilde{b}).$$

אם הפרמטריזציה היא לפי אורך אז,

$$-\tau n = b' \iff \tau n \cdot n = -n \cdot b' = -n(v \wedge n)' = -n(v' \wedge n + v \wedge n') = 0 - n(v \wedge n').$$

כלומר $\tau = -n \cdot (v \wedge n')$. אז,

$$\begin{aligned}
\tau &= -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{c''}{\|c''\|}\right)'\right) \\
&= -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{1}{\|c''\|}c''' - \frac{\|c''\|'}{\|c''\|^2}c''\right)\right) \\
&= -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{1}{\|c''\|}c''' - \frac{\|c''\|'}{\|c''\|^2}c''\right)\right) \\
&\overset{(1)}{=} -\frac{c''}{\|c''\|}\left(c' \times \left(\frac{1}{\|c''\|}c'''\right)\right) \\
&= -\frac{c''}{\|c''\|^2}(c' \times c''') \\
&= \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c''\|^2} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \wedge c''\|^2} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{\begin{vmatrix} c' & c'' & c''' \end{vmatrix}}{\|c' \wedge c''\|^2}.
\end{aligned}$$

כאשר,

1. $c'' \cdot (c' \times c'') = 0$
2. מהנוסחה הראשונה וההנחה שהפרמטריזציה לפי אורך
3. זהות

וקיבלנו שהנוסחה נכונה למקרה זה.

נעבור למקרה הכללי, נניח ש־$\tilde{c} = c \circ \varphi$ רפרמטריזציה לפי אורך, ולכן,

$$\tilde{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{c}' & \tilde{c}'' & \tilde{c}''' \end{vmatrix}}{\|\tilde{c}' \wedge \tilde{c}''\|^2} = \frac{(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''}{\|(c \circ \varphi)' \wedge (c \circ \varphi)''\|^2}.$$

נזכור כי מצאנו שמתקיים $(c \circ \varphi)' = (c' \circ \varphi)\varphi', \qquad (c \circ \varphi)'' = (c'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (c' \circ \varphi)\varphi''$ ולכן,

$$(c \circ \varphi)''' = (c''' \circ \varphi)(\varphi')^3 + (c'' \circ \varphi)2\varphi'\varphi'' + (c'' \circ \varphi)\varphi'\varphi'' + (c' \circ \varphi)\varphi''' = (c''' \circ \varphi)(\varphi')^3 + 3(c'' \circ \varphi)\varphi'\varphi'' + (c' \circ \varphi)\varphi'''.$$

ובהתאם נחשב,

$$\tilde{c}' \wedge \tilde{c}'' = (c \circ \varphi)' \wedge (c \circ \varphi)'' = (c' \circ \varphi)\varphi \wedge ((c'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (c' \circ \varphi)\varphi'') = (\varphi')^3(c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi).$$

ולכן גם,

$$(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}''' = (\varphi')^3((c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)) \cdot ((c''' \circ \varphi)(\varphi')^3 + 3(c'' \circ \varphi)\varphi'\varphi'' + (c' \circ \varphi)\varphi''') = (\varphi')^6((c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)) \cdot (c''' \circ \varphi).$$

נציב,

$$\tau \circ \varphi = \frac{(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''}{\|(c \circ \varphi)' \wedge (c \circ \varphi)''\|^2} = \frac{(\varphi')^6((c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)) \cdot (c''' \circ \varphi)}{(\varphi')^{2 \cdot 3}\|(c' \circ \varphi) \wedge (c'' \circ \varphi)\|^2}.$$

וקיבלנו שהטענה נכונה גם במקרה הכללי. $\square$

שאלה 4

נניח ש־$S \subseteq \mathbb{E}^3$ משטח רגולרי ו־$f : U \to S$ פרמטריזציה מקומית ל־$p \in S$, ונניח ש־$f(u) = p$. יהיו $c, d : I \to S$ עקומים רגולריים ונסמן $c = f \circ \gamma, d = f \circ \phi$, כאשר $\gamma(0) = \phi(0) = u$.

סעיף א׳

נראה ש־f היא קונפורמית אם ורק אם $E = G, F = 0$, כאשר E, F, G מקדמי התבנית היסודית הראשונה I.

הוכחה. נגדיר את הזווית בין שני העקומים ב־u על־ידי הזווית של $\gamma'(0), \phi'(0)$, זווית זו מוגדרת להיות $\cos\theta =$ □