גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית — סיכום

23 באוקטובר 2025

תוכן העניינים

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 20.10.2025

1.1 מבוא

גאומטריה היא אבן יסוד של החברה שלנו, והיא לוקחת חלק בכל תהליך בנייה תכנון ומדידה. לאורך ההיסטוריה היה חקר של גאומטריה באיזשהו אופן נאיבי, אך אנו נעסוק בחקר של הגאומטריה באופן האקסיומטי שלה. אנו נעסוק בחקר של צורות חלקות, כלומר שאפשר ללטף אותן, תוך שימוש בכלים שראינו באנליזה. הרעיון בקורס הוא לגשת בצורה אלמנטרית לבעיות לאו דווקא מורכבות בגישה שהיא גאומטרית. הצורות שנחקור הן יריעות, ככל הנראה יריעות חלקות.

1.2 הגישה הסינתטית

המתמטיקה המודרנית מתבססת על תורת הקבוצות, לכן עלינו לספק הגדרה קבוצתית הולמת למושג המישור.

הגדרה 1.1 (ישרים מקבילים) שני ישרים נקראים מקבילים אם הם מתלכדים או אינם נחתכים.

הגדרה 1.2 (קולינאריות) נאמר שקבוצה של נקודות הן קולינאריות כאשר כל הנקודות שייכות לישר אחד.

הגדרה 1.3 (מישור אפיני) זוג סדור $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ כאשר $\mathcal{P}$ קבוצה שאת ערכיה נכנה נקודות ו־$\mathcal{L}$ קבוצה של קבוצות של נקודות, אותן נכנה ישרים. זוג סדור זה יקרא מישור אפיני אם הוא מקיים את התכונות הבאות,

1. לכל שתי נקודות יש ישר יחיד המכיל את שתיהן
2. לכל ישר ונקודה קיים ישר יחיד מקביל לישר העובר דרך הנקודה
3. קיימות שלוש נקודות שאינן קולינאריות

נעבור למשפט יסודי שמדגים את אופי המישור האפיני.

משפט 1.4 (**מספר נקודות מינימלי במישור אפיני**) *יהי מרחב אפיני $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, אז ב־$\mathcal{P}$ לפחות 4 נקודות.*

הוכחה. יהיו $P, Q, R \in \mathcal{P}$ נקודות שונות ולא קולינאריות. נסמן גם $l = \langle P, Q \rangle, m = \langle P, R \rangle$ שני הישרים העוברים דרך הנקודות המתאימות. נסמן את $P \ni m' \parallel m, R \ni l \parallel l'$, וגם את $\{S\} = l' \cap m'$ עבור $S \in P$. אנו טוענים כי S קיימת וכי היא נקודה רביעית.

נטען טענת עזר, והיא ש־$l' \nparallel m'$. אילו $l' \parallel m'$ אז מטרנזיטיביות יחס השקילות המושרה מיחס ההקבלה היה נובע כי $l \parallel l' \parallel m' \parallel m$, אבל אז מהתכונה השנייה של מישור אפיני היה מתקבל ש־$l = m$ בסתירה לבחירת P, Q, R.

אם $S \in \{P, Q\}$ אז היה נובע ש־$l = l'$ ולכן גם $R \in l$, בסתירה. אם באופן שקול $S \in \{P, R\}$ אז נקבל סתירה דומה, ולכן נותר להניח ש־S קיימת ושונה מ־P, Q, R. $\square$

שני התרגילים הבאים יאפשרו לנו לתרגל את הגישה הסינתטית.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי כל ישר מכיל לפחות שתי נקודות שונות.

תרגיל 1.2 הוכיחו כי יחס ההקבלה בין ישרים הוא יחס שקילות.

נבחן את המודל אשר כולל את P, Q, R, S ואת הישרים $l, l', m, m', \langle Q, R \rangle, \langle P, S \rangle$. זהו המודל המינימלי אשר עומד בהגדרת המישור האפיני, ולמעשה מהווה הדוגמה הפשוטה ביותר לאחד כזה.

1.3 הגישה האנליטית

עתה כאשר בחנו את המישור מבחינה סינתטית אנו יכולים לעבור לבחון את המרחב באופן אנליטי.

הגדרה 1.5 (מודל אנליטי) יהי $\mathbb{F}$ שדה ונסמן $\mathcal{P} = \mathbb{F}^2$ וכן את הישרים שהם קבוצת השורשים של משוואות מהצורה $ax + by + c = 0$ עבור $a, b, c \in \mathbb{F}$ ו־$a, b \neq 0$. במקרה זה ישרים מקבילים אם ורק אם a, b המגדירים את הישרים שווים.

1.4 מרחבים אפיניים

נראה עתה את ההגדרה שתאפשר לנו לדון במרחבים, בנקודות ובכיוונים, קרי ווקטורים.

הגדרה 1.6 (מרחב אפיני) יהי $\mathbb{F}$ שדה. מרחב אפיני נתון על־ידי שלשה (E, V, t) כאשר E קבוצה של נקודות, V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ו־$t : E \times V \to E$ אשר מסומנת גם $(P, v) \mapsto P + v$. t מלשון translation, היא פונקציית ההזזה, מקיימת את התכונות הבאות,

1. אסוציאטיביות: $(P + v) + w = P + (v + w)$ לכל $P \in E, v, w \in V$
2. איבר נייטרלי: $P + 0 = P$ לכל $P \in E$
3. חד־חד ערכיות ברכיב השני: לכל $P, Q \in E$ קיים $v \in V$ יחיד כך שמתקיים $P + v = Q$, נסמן $v = \overrightarrow{PQ}$

סימון 1.7 נסמן את ההשמה החלקית של t על־ידי t_P עבור $P \in E$ נתונה, כלומר,

$$t_P(v) = t(P, v) = P + v$$

דוגמה 1.1 יהיו $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ו־$f : I \to \mathbb{R}$ רציפה.
נסמן $E = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F' = f\}$ וכן $V = \mathbb{R}$, ולבסוף גם $(F, c) \mapsto F + c$.
אז זהו מרחב אפיני, והמימד שלו הוא בדיוק 1.

2 שיעור 2 — 21.10.2025

2.1 מרחבים אפיניים — המשך

נמשיך לראות דוגמות למרחבים אפיניים.

דוגמה 2.1 נבחר את,

$$E = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{F}^n \mid x^1 + \cdots + x^n = 1\}$$

יחד עם,

$$V = \{(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{F}^n \mid \xi^1 + \cdots + \xi^n = 0\}$$

ופונקציית ההזזה,

$$t(x, \xi) = x + \xi = (x^1 + \xi^1, \ldots, x^n + \xi^n)$$

זהו מרחב אפיני, ההוכחה שזהו המצב מושארת לקורא.

דוגמה 2.2 אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ אז (V, V, t) עבור $t : V \times V \to V$ המוגדרת על־ידי סכום, הוא מרחב אפיני.

נעצור עתה ונגיד שמרחב אפיני באיזשהו מובן הוא מרחב וקטורי, אבל ללא הקונספט של ראשית, ובכך הוא מאפשר גמישות רבה יותר, בהמשך נראה שהקשר בין המונחים חזק אף יותר, ושאחד משרה את השני.
המרחב האפיני מורכב מפונקציית התרגום, אנו רוצים לשאול את השאלה ההפוכה עתה, מהו הווקטור היחיד שמתרגם נקודה לנקודה אחרת. בהתאם, ניגש להגדרה הבאה.

הגדרה 2.1 (פונקציית הפרש) יהי מרחב אפיני (E, V, t), פונקציה $v : E \times E \to V$ תיקרא פונקציית הפרש אם לכל $P, Q \in E$ מתקיים,

$$t(P, v(P, Q)) = Q$$

כלומר היא הפונקציה שמתאימה לנקודות P ו־Q את הווקטור היחיד w המקיים $P + w = Q$.
נסמן גם $v(P, Q) = Q - P$.

סימון 2.2 נגדיר $v_P : E \to V$ להשמה החלקית $v_P(Q) = v(P, Q) = Q - P$.
הערה אם $v, v' : E \times E \to V$ שתי פונקציות הפרש, אז מתקיים,

$$\forall P, Q \in E,\ v(P, Q) = v'(P, Q)$$

ישירות מהגדרת המרחב האפיני, לכן נאמר על v שהיא פונקציית ההפרש היחידה והייחודית למרחב.

טענה 2.3 (תכונות של פונקציית ההפרש) *אם $v : E \times E \to V$ פונקציית ההפרש אז מתקיים,*

1. *לכל $P, Q, R \in E$ מתקיים $(Q - P) + (R - Q) = R - P$*
2. *לכל $P \in E$ הפונקציה $v_P : E \to V$ המוגדרת על־ידי $v_P(Q) = Q - P = v(P, Q)$ היא פונקציה חד־חד ערכית ועל*

הוכחה. 1. ישירות מאקסיומות מרחב אפיני,

$$P + ((Q - P) + (R - Q)) = (P + (Q - P)) + (R - Q) = Q + (R - Q) = R$$

2. עבור $w \in V$ תהי $Q = P + w$ אז,

$$v_P(Q) = Q - P = v$$

ולכן הפונקציה היא על. נניח ש־$v_P(Q) = v_P(R)$ עבור $R \in E$, אז,

$$Q - P = R - P \implies Q = P + (Q - P) = P + (R - P) = R$$

וקיבלנו חד־חד ערכיות. □

נבחין כי בזמן שפונקציית ההפרש שוברת את הסימטריה שהתרגלנו אליה בפונקציית התרגום, אך היא מהווה משלים שלה, הטענה הבאה מציגה לנו את הקשר ההדוק שבין הרעיונות.

טענה 2.4 *עבור $P \in E$ הפונקציות v_P ו־t_P הן הופכיות אחת לשנייה.*

הוכחה.

$$E \overset{v_P}{\mapsto} V \overset{t_P}{\mapsto} E$$

לכל $Q \in E$ מתקיים,

$$Q \mapsto Q - P \mapsto P + (Q - P) = Q$$

וכן,

$$V \overset{t_P}{\mapsto} E \overset{v_P}{\mapsto} V$$

ומתקיים,

$$v \mapsto P + v \mapsto (P + v) - P = v$$

□

עתה אנו רוצים להגדיר מרחב וקטורי מעל המרחב האפיני שלנו, נבחן את $E \times E$ ונמפה את הנקודות ל־$V \times V$ על־ידי שימוש ב־$v_P \times v_P$. נבחן את,

$$E \times E \xrightarrow{v_P \times v_P} V \times V \xrightarrow{+} V \xrightarrow{t_P} E \xleftarrow{+} E \times E$$

כלומר, נבחן את המיפוי,

$$(Q, R) \mapsto (Q - P, R - P) \overset{+}{\mapsto} (Q - P) + (R - P) \overset{t_P}{\leftarrow} P + (Q - P) + (R - P)$$

מכאן יש לנו הפתח להגדרה הבאה. את המבנה הזה נהוג לכנות $E_P = (E, P, +_P, \cdot_P)$ וזהו אכן מרחב וקטורי.

הגדרה 2.5 (מרחב וקטורי מושרה מנקודה) יהי (E, V, t) מרחב אפיני ותהי $P \in E$ נקודה כלשהי. עבור $+_P : E \times E \to E$ המוגדרת על־ידי,

$$\forall Q, R \in E,\ Q +_P R = Q + R - P$$

ו־$\cdot_P : \mathbb{F} \times E \to E$ המוגדרת על־ידי,

$$\forall \alpha \in F, Q \in E,\ \alpha \cdot_P Q = \alpha \cdot (Q - P) + P$$

המרחב $(E, P, +_P, \cdot_P)$ הוא מרחב וקטורי המושרה מהמרחב האפיני והנקודה.

תרגיל 2.1 הוכיחו כי זהו אכן מרחב וקטורי.

2.2 תתי־מרחבים אפיניים

כבר ראינו שמרחב אפיני באיזשהו עולם מתנהג ומדבר בשפה של מרחבים וקטוריים, ובדיוק כמו בהם, גם כאן נרצה לעסוק בתת־מרחבים, נתחיל בהגדרת תת־המרחב האפיני.

הגדרה 2.6 (תת־מרחב אפיני) יהי מרחב אפיני (E, V). קבוצה $L \subseteq E$ תיקרא תת־מרחב אפיני אם $L = \emptyset$ או שקיימים $P \in L$ ו־$W \leq V$ כך שמתקיים,

$$L = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$$

נקרא גם יריעה אפינית או יריעה לינארית, ולמעשה נשתמש בשמות אלה יותר.

דוגמה 2.3 נבחן את $E = \mathbb{R}^2$ ונגדיר את,

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

נבחין כי L הוא לא תת־מרחב של המרחב הלינארי E, אך אנו לא בוחנים את E ואת L כמרחבים לינאריים, אלא כמרחבים אפיניים. במקרה זה אם נבחר את $W = \mathrm{Sp}\{(1, -1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \leq \mathbb{R}^2$ וכן את $P = (0, 1)$ אז נקבל $L = P + W$.

הערה אם $L = P + W$ תת־מרחב אפיני, אז,

$$W = L - P = \{Q - P \mid Q \in L\}$$

בהתאם גם $Q = P + w \implies Q \in L$ עבור $w \in W$ כלשהו, נובע ש־$Q - P = w \in W$.

משפט 2.7 (יחידות תת־מרחב לינארי פורס) *$P + W = Q + W'$ עבור $P, Q \in E$ ו־$W, W' \leq V$ אם ורק אם* $W = W'$ ו־$Q - P \in W$.

ההוכחה מושארת במסגרת התרגילים הבאים.

תרגיל 2.2 הוכיחו כי $P+W=Q+W$ אם ורק אם $Q-P\in W$.

תרגיל 2.3 הוכיחו כי אם $R+W=R+W'$ אז נובע ש־$W=W'$.

הגדרה 2.8 (מרחב משיק) $W=W(L)$ נקרא מרחב הכיוונים או המרחב המשיק של L.

בהתאם נסמן $\dim_{\mathbb{F}} L=\dim_{\mathbb{F}} W$ כמימד תת־המרחב.

תרגיל 2.4 הוכיחו כי חיתוך של תתי־יריעות הוא תת־יריעה.

הגדרה 2.9 אם $S\subseteq E$ קבוצה של נקודות, אז נאמר ש־L הוא תת־היריעה האפינית הנוצרת על־ידי S אם L הוא היריעה המינימלית במימדה המכילה את כלל הנקודות.

דוגמה 2.4 אם $E=\mathbb{R}^2$ אז תת־היריעה הנוצרת על־ידי $\{(0,0)\}$ היא היריעה $\{(0,0)\}$, תת־היריעה הנוצרת על־ידי $\{(0,1),(1,0)\}$ היא היריעה $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y=0\}$.

הגדרה 2.10 קבוצה של נקודות תיקרא בלתי־תלויה אפינית אם אין נקודה ששייכת למרחב האפיני שנוצר על־ידי יתר הנקודות.

דוגמה 2.5 במרחב $\mathbb{R}^3$ הקבוצות הבאות בלתי־תלויות אפינית:

$$\{(0,1,0)\},\quad \{(0,1,0),(1,0,0)\},\quad \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$$

אך לא יכול להיות שתהיה קבוצה בגודל 4 כזו אם הנקודות הן לא קולינאריות.

משפט 2.11 *יהי (E,V) מרחב אפיני. תהי $(P_1,\dots,P_r)$ סדרת נקודות ב־E ותהי $(\lambda^1,\dots,\lambda^n)$ סדרת סקלרים ב־$\mathbb{F}$ עם התכונה ש־$\lambda^1+\cdots+\lambda^n=1$. אז לכל $P_0,P_0'\in E$ מתקיים,*

$$P_0+\lambda^1(P_1-P_0)+\lambda^2(P_2-P_0)+\cdots+\lambda^r(P_r-P_0)=P_0'+\lambda^1(P_1-P_0')+\lambda^2(P_2-P_0')+\cdots+\lambda^r(P_r-P_0')$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}&P_0+\lambda^1(P_1-P_0)+\lambda^2(P_2-P_0)+\cdots+\lambda^r(P_r-P_0)\\=&P_0'+(P_0-P_0')+\lambda^1((P_1-P_0')+(P_0'-P_0))+\cdots+\lambda^r((P_r-P_0')+(P_0'-P_0))\\=&P_0'+(P_0-P_0')+(\lambda^1+\cdots+\lambda^r)(P_0'-P_0)+\lambda^1(P_1-P_0')+\cdots+\lambda^r(P_r-P_0')\end{aligned}$$

□

סימון 2.12 נסמן את הנקודה היחידה הזו שאיננה תלויה בראשית בסימון $\lambda^1P_1+\cdots+\lambda^rP_r$.

זה נקרא צירוף אפיני והוא התחליף שלנו לצירופים לינאריים, והוא אף סגור להם.

הגדרות ומשפטים