פתרון מטלה מסכמת — אנליזה על יריעות, 80426

20 באוגוסט 2025

שאלה 1

נתאר את הוכחת משפט הדיברגנץ ליריעות קומפקטיות עם שפה.

הוכחה. בגרסה ללא השפה האסטרטגיה הייתה בנייה של זרימה מתאימה לשדה הווקטורי הנתון X על־ידי שימוש בזרימה מקומית וקומפקטיות. לבסוף על־ידי שימוש במשפט הווריאציה הראשונה נוכל לקבל שקילות לאינטגרל על הדיברגנץ, היא מקבעת את ערכו לאפס.

עתה נתאר את משפט הדיברגנץ עצמו, ניסוח המשפט הוא חלק משמעותי בהוכחתו, והוא נכתב כעת מתוך התפיסה שיש לזכור אותו בדיוק. תהי $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה קומפקטית עם שפה. נניח גם ש־$X : M \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי משיק ל־M, כלומר ש־$X(p) \in T_p(M)$ לכל $p \in M$. אז מתקיים,

$$\int_M \operatorname{div}_M X \, d\operatorname{vol}_k = \int_{\partial M} \langle X(p), \nu(p) \rangle \, d\operatorname{vol}_{k-1}(p)$$

כלומר ערך האינטגרל הוא ערך האינטגרל בשפה של מכפלה בנורמל חיצוני, שלא במפתיע אין תלות בפנים (ולמעשה כבר עתה יכולנו להוכיח זאת ישירות עם אדיטיביות האינטגרל וחלוקה לשפה ופנים), והתלות היא בכמה היריעה התרחבה עם X.

לאחר הבנה מעמיקה של המשפט, נוכל להסביר את הוכחתו, היא כיאה לכל משפט מרכזי באנליזה מתחילה ברדוקציות. הרדוקציה שאנו נעשה היא זו שתאפשר לנו להניח שהשדה הווקטורי X הוא מכוון בלבד, ובכך נוכל להשתמש באסטרטגיה שנראה בהמשך. פורמלית נוכיח כי,

$$\langle X(p), \nu(p) \rangle < 0$$

ונוכל להשיג אותו על־ידי שימוש בקומפקטיות ובמציאת מקסימום של X על השפה ∂M, נוכל לבנות יריעה חדשה שמזיזה את X פנימה בלבד, ונעשה זאת ככה שנוכל לחשב את האינטגרל בקלות ובהתאם לקבל את הרדוקציה.

עתה נגיע לחלק הבא, שלב הבניות. המטרה שלנו היא לפרק את M בדרך הנוחה ביותר, ונעשה זאת על־ידי הגדרת "משיכת שפה", כלומר נגדיר את הזרימה החד־צדדית שמובטח לנו שקיימת, ונגדיר את היריעה $N_t = \varphi([0, t] \times \partial M)$. המפתח בשלב זה עבורי הוא תפיסה טובה של משמעות N_t, וכאמור ניתן לתאר אותו כמשיכה ש־φ מבצעת על השפה, נוכל לדמיין זאת על־ידי סימון השפה ביריעה, הפעלת φ ובדיקת המיקומים שהשפה עוברת בהם. מבנה זה מאפשר לנו לבצע את הפירוק (עד כדי חיתוך ממידה אפס),

$$M = \varphi_t(M) \cup N_t$$

ובהתאם לטענה האחרונה, נוכל גם להסיק,

$$\operatorname{vol}_k(M) = \operatorname{vol}_k(\varphi_t(M)) + \operatorname{vol}_k(N_t)$$

אם נגזור את הביטוי נקבל אם כך,

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \operatorname{vol}_k(\varphi_t(M)) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} \operatorname{vol}_k(N_t) \right|_{t=0}$$

ועל־ידי שימוש שקול לגרסה ללא שפה במשפט הווריאציה הראשונה גם,

$$\int_M \operatorname{div}_M(X) \, d\operatorname{vol}_k = - \left. \frac{d}{dt} \operatorname{vol}_k(N_t) \right|_{t=0}$$

כלומר עלינו לנתח את N_t בלבד כדי למצוא את הטענה. אבל ישירות מהגדרת N_t אנו יודעים כי (על־ידי שימוש בפוביני),

$$\operatorname{vol}_k(N_t) = \int_{\partial M} \int_0^t V(D\varphi|_{(x,s)}) \, ds \, d\operatorname{vol}_{k-1}(x)$$

מהמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי נוכל להסיק שגם,

$$-\frac{d}{dt} \operatorname{vol}_k(N_t)|_{t=0} = \int_{\partial M} V(D\varphi|_{(x,0)}) \, d\operatorname{vol}_{k-1}(x)$$

כלומר המשפט כולו שקול לטענה שמתקיים,

$$V(D\varphi|_{(x,0)}) = -\langle X(x), \nu(x) \rangle$$

טענה זו נובעת משימוש בהוכחה סטנדרטית של בחירת בסיס ושימוש באפיון השקול של אופרטור נפח וברדוקציה הראשונה. □

הוכחה זו כתובה כך שהחלקים שניתנים להשלמה עבורי הושמטו, כל מה שנכתב הוא מה שהייתי כותב גם במפתח הוכחה עבור שינונה לקראת מבחן.

שאלה 2

סעיף א'

נוכיח את משפט הפונקציה ההפוכה לנקודות שפה.

תהינה $M \subseteq \mathbb{R}^m, N \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעות עם שפה. נניח גם ש־$f : M \to N$ העתקה חלקה כך ש־$f(\partial M) \subseteq \partial N$. נסמן $p \in \partial M$ ו־$q \in \partial N$ נקודות כך ש־$f(p) = q$ ו־$Df|_p : T_pM \to T_qN$ איזומורפיזם לינארי.

נראה שקיימות סביבות פתוחות $p \in U \subseteq M$ ו־$q \in V \subseteq N$ כך ש־$f|_U : U \to V$ היא דיפאומורפיזם.

הוכחה. נסמן $k = \dim M$. תהי $\alpha : W_0 \to M$ פרמטריזציה מקומית כך ש־ $W_0 \subseteq \mathbb{H}^k$, ראינו כי אם נקודה שייכת לשפה אז הפרמטריזציה של השפה של $\mathbb{H}^k$ הולכת לשפה של היריעה, וכן $0 \in \partial\mathbb{H}^k$ נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$p = \alpha(0)$. נסמן גם $\beta : \Omega_0 \to N$ פרמטריזציה מקומית סביב q, גם הפעם נניח $\Omega_0 \subseteq \mathbb{H}^k, \beta(0) = q$. נגדיר את הפונקציה $g : U_0 \to \mathbb{H}^k$ עבור $U_0 \subseteq \mathbb{H}^k$ על־ידי,

$$g = \beta^{-1} \circ f \circ \alpha$$

כאשר U_0 הוא סביבה פתוחה (בטופולוגיה המושרית) אשר ידוע שקיימת מבחירת סביבה קטנה מספיק. מההנחה שלנו מתקיים $g(0) = 0$ וכן,

$$\forall x \in \partial\mathbb{H}^k,\ g(x) \in \partial\mathbb{H}^k$$

לבסוף גם נבחין כי 0 נקודה רגולרית של g, הסיבה היא שנתון ש־f רגולרית בנקודה זו במובן של מרחבים מטריים, וכן פרמטריזציות הן הפיכות מקומית. לכן מספיק להוכיח את הטענה עבור מקרה זה, כלומר ביצענו תרגום של הבעיה לבעיה במרחבים מטריים.

נבנה פונקציה חדשה המבוססת על g,

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x_k \geq 0 \\ \sigma(g(\sigma(x))) & x_k < 0 \end{cases}$$

עבור $\sigma : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ כך ש־$\sigma_i = \mathrm{id}$ לכל $1 \leq i < k$ ו־$\sigma_k(x) = -x$, כלומר זוהי ההעתקה שהופכת על הציר האחרון. משימוש בכלל השרשרת נקבל ש־h היא פונקציה דיפרנציאבילית בכל נקודה ב־$U_1 = U_0 \cup \{-x | x \in U_0\}$, ובפרט היא דיפרנציאבילית ב־$x = 0$ ומתקיים,

$$Dh|_0 = Dg|_0$$

נבחין כי בבנייה זו השתמשנו בעובדה $\forall x \in U_0^\circ,\ g(x) \in (\mathbb{H}^k)^\circ$ וכן בעובדה החשובה לא פחות ש־$\forall x \in \partial U_0,\ g(x) \in \partial\mathbb{H}^k$. אבל נתון כי $Dg|_0$ רגולרית ולכן גם $Dh|_0$ רגולרית וקיימת סביבה פתוחה בה h מוגדרת סביב 0, לכן משפט הפונקציה ההפוכה חל וקיימת סביבה $U_2 \subseteq U_1$ כך ש־$h|_{U_2} : U_2 \to U_2$ הפיכה ולכן גם דיפאומורפיזם חלק. לבסוף נגדיר $U = U_2 \cap U_0$ ונקבל ש־$g \restriction U = h \restriction U$ ולכן g דיפאומורפיזם חלק תחת הצמצום. □

סעיף ב'

נניח ש־$M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ללא שפה, ותהי $U \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה כלשהי. נניח ש־$\alpha : U \to M$ היא חלקה כך ש־$D\alpha|_x$ מדרגה k לכל $x \in U$.

נראה ש־α היא העתקה פתוחה.

הוכחה. עבור נקודה כלשהי $x \in U$ מהנתון α רגולרית ב־x ולכן ממשפט הפונקציה ההפוכה $\alpha|_{V_x} : V_x \to \alpha(V)$ היא דיפאומורפיזם הפיך, כאשר $x \in V_x \subseteq U$ פתוחה. אם כך נוכל לבחור V_x לכל x ונקבל כיסוי פתוח של U, כך שבכל איבר בכיסוי הפונקציה α היא דיפאומורפיזם חלק ממשפט הפונקציה ההפוכה. בפרט נקבל ש־$\alpha : U = \bigcup_{x \in U} V_x \to \alpha(U)$ היא דיפאומורפיזם חלק. אבל טענה זו נכונה לכל x, כלומר α הפיכה מקומית בכל מקום, ולכן הפיכה ובהתאם גם דיפאומורפיזם ולכן בפרט הומיאומורפיזם ומאפיון שקול העתקה פתוחה. □

סעיף ג'

בהגדרה של יריעות פתוחות פרמטריזציה דורשת את תנאי הפתיחות, אבל בסעיף הקודם מצאנו שפתיחות נובעת מקיום העתקה חלקה לסביבה של היריעה. אנו נסביר עתה את הקשר שבין שתי הטענות הלכאורה מעט סותרות הללו.

פתרון בהוכחת הטענה כבר התבססנו על תכונת הפתיחות המקומית של היריעה, למעשה הטענה שראינו בסעיף ב' היא דרך מצוינת להבין מה היא יריעה. כלומר, נוכל להסיק שיריעה מתנהגת באופן מספיק "יפה" כדי לאפשר לפונקציות רגולריות להיות גם פתוחות באופן ישיר, ובכך הן האובייקט

שקושר בין דיפאומורפיזם (ובפרט הומיאומורפיזם ופתיחות) לבין קבוצה במרחב.

שאלה 3

נסמן ב־C את מעגל היחידה במישור xy ב־$\mathbb{R}^3$, כלומר $C = \partial\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$, ונסמן גם את הפרמטריזציה שלו,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

נגדיר את השדה הווקטורי F על $\mathbb{R}^3 \setminus C$ המוגדר על־ידי,

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \frac{x-\gamma(t)}{\|x-\gamma(t)\|^3} \times \gamma'(t)\ dt$$

כאשר,

$$(u_1,u_2,u_3)^t \times (v_1,v_2,v_3)^t = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)^t$$

וכאשר האינטגרל מבוצע קורדינטה־קורדינטה.

סעיף א׳

נראה ש־F הוא משמר מקומית.

הוכחה. ניזכר כי F משמר מקומית אם ורק אם,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

לכל $i,j \in [3]$.

תהי $p \in \mathbb{R}^3$, נגדיר $\{e_i\}_{i=1}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ הבסיס הסטנדרטי של המרחב, ונחשב,

$$\begin{aligned}
\nabla\|x-p\|^{-1} &= \nabla\left(\sum_{i=1}^3 (x_i-p_i)^2\right)^{-1/2} \\
&= \sum_{j=1}^3 -\frac{1}{2}\cdot 2(x_j-p_j)\cdot\left(\sum_{i=1}^3 (x_i-p_i)^2\right)^{-3/2} e_j \\
&= \sum_{j=1}^3 \frac{p_j-x_j}{\|x-p\|^3} e_j \\
&= \frac{p-x}{\|x-p\|^3}
\end{aligned}$$

לכן אם נסמן $\phi(x) = \frac{1}{\|x\|}$ אז,

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \nabla\phi(x-\gamma(t)) \times \gamma'(t)\ dt$$

נבחין כי $\nabla\phi(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$ ונחשב את הלפלסיאן,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x) = \frac{x_1}{\|x\|^3} \implies \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\phi(x) = \frac{\|x\|^3 - 3x_1^2\|x\|}{\|x\|^6}$$

ולכן נובע,

$$\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial x_1}\phi + \frac{\partial}{\partial x_2}\phi + \frac{\partial}{\partial x_3}\phi = \frac{3\|x\|^3 - 3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\|x\|}{\|x\|^6} = 0$$

עתה נחשב,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3} &= \partial_2\int_0^{2\pi}(\partial_1\phi(x-\gamma(t))\cos t+\partial_2\phi(x-\gamma(t))\sin t)\;dt-\partial_3\int_0^{2\pi}(-\partial_3\phi(x-\gamma(t))\sin t)\;dt \\ &= \int_0^{2\pi}\partial_2(\partial_1\phi(x-\gamma(t))\cos t+\partial_2\phi(x-\gamma(t))\sin t)+\partial_3(\partial_3\phi(x-\gamma(t))\sin t)\;dt \\ &= \int_0^{2\pi}\partial_2\partial_1\phi(x-\gamma(t))\cos t+\partial_2^2\phi(x-\gamma(t))\sin t+\partial_3^2\phi(x-\gamma(t))\sin t\;dt \\ &= \int_0^{2\pi}\partial_1\partial_2\phi(x-\gamma(t))\cos t-\partial_1^2\phi(x-\gamma(t))\sin t\;dt \\ &= \partial_1\int_0^{2\pi}\partial_2\phi(x-\gamma(t))\cos t-\partial_1\phi(x-\gamma(t))\sin t\;dt \\ &= \partial_1\int_0^{2\pi}\frac{(x_2-\sin t)\cos t-(x_1-\cos t)\sin t}{\|x-\gamma(t)\|^3}\;dt \\ &= \partial_1\int_0^{2\pi}\frac{\langle x,\gamma'(t)\rangle}{\|x-\gamma(t)\|^3}\;dt\end{aligned}$$

אבל זהו אינו אלא אינטגרל מסילתי, כלומר,

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}=\partial_1\int_{S^1}\nabla\phi(x)\;dl=0$$

ישירות משימוש בפוטנציאל באינטגרציה. נוכל להסיק באותו תהליך בדיוק שגם,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}=\partial_3\int_{S^1}\nabla\phi(x)\;dl=0$$

וכן,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}=\partial_2\int_{S^1}\nabla\phi(x)\;dl=0$$

לכן מהגדרת שימור מקומי נסיק ש־F משמר מקומית ב־$\mathbb{R}^3\setminus C$. $\square$

סעיף ב׳

נגדיר את המסילה $\mu=\mu_R:[-R,R]\to\mathbb{R}^3\setminus C$ על־ידי,

$$\mu(t)=(0,0,t)$$

ונחשב את האינטגרל המסילתי,

$$I=\int_\mu F\;dl$$

פתרון מהגדרה,

$$I=\int_{-R}^R F(\mu(t))\cdot\mu'(t)\;dt=\int_{-R}^R F(0,0,t)\cdot(0,0,1)\;dt=\int_{-R}^R F_3(0,0,t)\;dt$$

אבל ישירות מהגדרת מכפלה וקטורית,

$$\begin{aligned}F_3(0,0,t) &= \int_0^{2\pi}\frac{0-\cos u}{\|(0,0,t)-\gamma(u)\|^3}\cdot(\cos u)-\frac{0-\sin u}{\|(0,0,t)-\gamma(u)\|^3}\cdot(-\sin u)\;du \\ &= -\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 u+\cos^2 u}{(\cos^2 u+\sin^2 u+t^2)^{3/2}}\;du \\ &= -\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\;du \\ &= \frac{-2\pi}{(1+t^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

ולכן בהצבה נקבל,

$$I = \int_{-R}^{R} F_3(0,0,t)\,dt = \int_{-R}^{R} \frac{-2\pi}{(1+t^2)^{3/2}}\,dt = -2\pi\left[\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right]_{t=-R}^{t=R} = -2\pi\left(\frac{R}{\sqrt{1+R^2}} - \frac{-R}{\sqrt{1+R^2}}\right) = \frac{-4\pi R}{\sqrt{1+R^2}}$$

סעיף ג׳

נגדיר את המשטח,

$$Q_R = [(0,0,-R),(0,0,R)] + [(0,0,R),(2R,0,R)] + [(2R,0,R),(2R,0,-R)] + [(2R,0,-R),(0,0,-R)]$$

ונסמן את המקטעים μ_1,μ_2,μ_3,μ_4.

נחשב את,

$$L_\infty = \lim_{R\to\infty}\int_{Q_R} F\,dl$$

פתרון על־ידי שימוש בזהויות מוכרות ובאי־השוויון הנתון נסיק,

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{\mu_2} F(t)\,dt\right\| \leq \int_{\mu_2} \|F(p)\|\;dl \\
&\overset{(1)}{\leq} \int_{\mu_2}\int_0^{2\pi} \frac{\|p-\gamma(t)\|}{\|p-\gamma(t)\|^3}\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt\,dl \overset{(2)}{=} \int_{\mu_2}\int_0^{2\pi} \frac{dt\,dl}{\|p-\gamma(t)\|^2} \\
&= \int_0^{2R}\int_0^{2\pi} \frac{|\mu_2'(u)|\cdot dt\,du}{\|\mu_2(u)-\gamma(t)\|^2} = \int_0^{2R}\int_0^{2\pi} \frac{dt\,du}{(\cos t-u)^2+\sin^2 t+R^2} \\
&= \int_0^{2R}\int_0^{2\pi} \frac{dt\,du}{u^2+2u\cos t+1+R^2} \overset{(3)}{\leq} \int_0^{2R}\int_0^{2\pi} \frac{dt\,du}{(u-1)^2+R^2} \\
&\overset{(4)}{=} \frac{2\pi}{R}\int_0^{2R} \frac{du}{\left(\frac{u-1}{R}\right)^2+1} = \frac{2\pi}{R}\cdot\left[\arctan\left(\frac{u-1}{R}\right)\right]_{u=0}^{u=2R} \\
&\leq \frac{2\pi^2}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0
\end{aligned}$$

כאשר,

1. אי־השוויון הנתון, $\|u\times v\| \leq \|u\|\cdot\|v\|$
2. $\gamma'(t) = (-\sin t,\cos t,0)$ ולכן גם $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+0} = 1$
3. מתקיים $0 \leq 2u\cos t + 2u \leq 4u$ ולכן נוכל להקטין את המכנה על־ידי הסרת הביטוי תוך כדי הוספת $2u-2u$
4. הפונקציה לא תלויה יותר ב־t ולכן האינטגרל הוא על בביטוי קבוע

נבחין כי המקרה של $\int_{\mu_4} F\,dl$ הוא שקול לחלוטין מטעמי סימטריה, ולכן נוכל להסיק שגם אינטגרל זה שואף לאפס כאשר $R\to\infty$.
נותר לנו אם כך לחשב את $\int_{\mu_3} F\,dl$, כאשר נשתמש בהגדרת המכפלה הווקטורית,

$$\begin{aligned}
\int_{\mu_3} F(t)\,dt &= \int_{\mu_3}\int_0^{2\pi} \frac{0-\cos u}{\|(2R,0,t)-\gamma(u)\|^3}\cdot(\cos u) - \frac{2R-\sin u}{\|(2R,0,t)-\gamma(u)\|^3}\cdot(-\sin u)\,du\,dt \\
&= \int_{\mu_3}\int_0^{2\pi} \frac{-\cos^2(u)-\sin^2(u)+2R\sin t}{\|(2R-\cos u)^2+\sin^2(u)+t^2\|^3}\,du\,dt \\
&= \int_{-R}^{R}\int_0^{2\pi} \frac{-1+2R\sin t}{|4R^2-4\cos u+1+t^2|^{3/2}}\,du\,dt \\
&\xrightarrow{R\to\infty} 0
\end{aligned}$$

משיקולי חסימה על־ידי אינטגרל מהצורה של הסעיף הקודם. נסיק אם כן ש־$L_\infty = \lim_{R\to\infty}\frac{-4\pi R}{\sqrt{1+R^2}} = -4\pi$ בלבד.

סעיף ד׳

נראה ש־$\int_{Q_1} F\,dl = L_\infty$ ונסיק ש־F לא משמרת ובהתאם ש־$\mathbb{R}^3 \setminus C$ לא פשוטת קשר.

הוכחה. נגדיר את $T_R = Q_R \setminus \{0\}^2 \times [-1,1]$, כלומר הריבוע ללא הקטע העובר דרך המעגל, וניזכר בהגדרה מסעיף ב׳ של μ המסילה בדיוק על הקטע החסר, כלומר,

$$T_R + \mu = Q_R$$

בהתאם מאדיטיביות האינטגרל מתקיים,

$$\int_{Q_R} F\,dl = \int_{T_R} F\,dl + \int_\mu F\,dl$$

נניח ש־$R_1, R_2 \geq \frac{1}{2}$, ונבנה את ההעתקה $H : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3 \setminus C$ על־ידי,

$$H(s,t) = T_{R_1(1-s)+R_2 s}(t).$$

מהאופן בו הגדרנו את T_s נקבל שזו פונקציה רציפה כך ש־$H(0) \equiv T_{R_1}, H(1) \equiv T_{R_2}$ וכן $H(s,0) = (0,0,-1), H(s,1) = (0,0,1)$.
כלומר H היא הומוטופיה מסילתית רציפה המעידה על שקילות הומוטופית של T_{R_1} ו־T_{R_2}, ולכן משימור מקומי של F ב־$\mathbb{R}^3 \setminus C$ נסיק שמתקיים,

$$\int_{T_1} F\,dl = \int_{T_2} F\,dl$$

בפרט אם נציב $R_1 = 1, R_2 = R$ ונשתמש בשוויון שמצאנו קודם,

$$\int_{T_1} F\,dl = \int_{T_R} F\,dl = \int_{Q_R} F\,dl - \int_\mu F\,dl \xrightarrow{x\to\infty} L_\infty - \int_\mu F\,dl$$

כלומר מצאנו שמתקיים,

$$\int_{T_1} F\,dl = L_\infty - \int_\mu F\,dl \iff \int_{T_1} F\,dl + \int_\mu F\,dl = \int_{Q_1} F\,dl = L_\infty$$

נבחין כי המסילה Q_1 היא לולאה, ולכן אם $\mathbb{R}^3 \setminus C$ היה פשוט קשר, אז הלולאה הייתה הומוטופית מסילתית ללולאה טריוויאלית, כלומר,

$$\forall t \in [0,1],\ \gamma(t) = (0,0,0)$$

והיינו מקבלים,

$$\int_{Q_1} F\,dl = 0 \neq L_\infty$$

כלומר זוהי סתירה, לכן $\mathbb{R}^3 \setminus C$ הוא לא תחום פשוט קשר.
למעשה כבר ידענו זאת, מתקיים $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C, 0) \simeq \mathbb{Z}$, בפרט החבורה היסודית היא לא טריוויאלית. דרך לראות זאת היא ליצור נסג עיוות של המרחב ל־$B(2,0) \setminus C$, ואז עוד נסג עיוות שמחזיר מרחב מהצורה $S^1 \cup C$ כך שהם חולקים נקודה יחידה. □

שאלה 4

תהינה $M^k \subseteq \mathbb{R}^m, N^k \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי יריעות.
נגדיר את הדיפאומורפיזם החלק $F : M \to N$ כאיזומטריה אם לכל $p \in M$ ולכל $v, w \in T_pM$ מתקיים,

$$\langle v, w\rangle = \langle dF|_p(v), dF|_p(w)\rangle$$

כלומר ש־$DF|_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ היא איזומטריה.

סעיף א׳

נראה שאם $F : M \to N$ איזומטריה וכן M, N שתיהן קומפקטיות,
אז $\mathrm{vol}_k(M) = \mathrm{vol}_k(N)$ וכן לכל מסילה חלקה $\gamma : [a, b] \to M$ מתקיים $L(\gamma) = L(F \circ \gamma)$.

הוכחה. נניח ש־$p \in M$ וכן ש־$p \in U \subseteq M$ סביבה פתוחה כך ש־$\alpha : W \to U$ פרמטריזציה מקומית, ו־$W \subseteq \mathbb{H}^k$. אז $\beta = F \circ \alpha$ פרמטריזציה מקומית של $q = F(p) \in N$. נסמן,

$$T_x = D\alpha|_x, \quad S_x = D\beta|_x = (DF|_{\alpha(x)}) \circ D\alpha|_x = (DF|_{\alpha(x)}) \circ T_x$$

אז מתקיים,

$$\begin{aligned} V(T_x) &= \sqrt{\det\left((\langle T_x(e_i), T_x(e_j)\rangle)_{i,j\in[k]}\right)} \\ &= \sqrt{\det\left((\langle DF|_x T_x(e_i), DF|_x T(e_j)\rangle)_{i,j\in[k]}\right)} \\ &= \sqrt{\det\left((\langle S_x(e_i), S_x(e_j)\rangle)_{i,j\in[k]}\right)} \\ &= V(S_x) \end{aligned}$$

ולכן נובע,

$$\int_U 1 \; d\,\mathrm{vol}_k = \int_W 1 \; V(T_x) \; dx = \int_W 1 \; V(S_x) \; dx \int_{F(U)} 1 \; d\,\mathrm{vol}_k$$

ומכאן תוך שימוש בהגדרת היריעה (הגדרת חלוקת יחידה ושימוש חוזר בטענה שעתה הוכחנו) נקבל שהנפחים זהים.
נניח ש־$\gamma : [a, b] \to M$, אז,

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \; dt = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle \; dt = \int_a^b \langle DF|_t \gamma'(t), DF|_t \gamma'(t)\rangle \; dt = \int_a^b \|(F \circ \gamma)'(t)\| \; dt = L(F \circ \gamma)$$

ומצאנו כי השוויון מתקיים אף הוא. □

סעיף ב׳

נניח ש־$F : S^n(1) \to S^n(2)$ הדיפאומורפיזם החלק בין ספירה ברדיוס 1 לספירה ברדיוס 2 ב־$\mathbb{R}^{n+1}$, כאשר $F(x) = 2x$. נוכיח כי F היא לא איזומטריה.

הוכחה. נניח בשלילה שהיא איזומטריה ולכן בפרט המסילה $\gamma : [0, 1] \to \{(\cos t, \sin t)\} \times \{0\}^{n-1}$ מקיימת,

$$2\pi = L(\gamma) = L(F \circ \gamma) = 2\pi \cdot 2$$

וזו סתירה. □

סעיף ג׳

תהינה היריעות,

$$M = (0, 2\pi) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2, \quad N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, (x, y) \neq (1, 0)\} \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$$

שתי היריעות הנתונות הן איזומטריות, אנו נמצא איזומטריה $F: M \to N$ ונסביר על שימושיה.

פתרון נגדיר,

$$F(t, y) = (\cos t, \sin t, y)$$

ונראה שזו אכן איזומטריה. נתחיל להראות שהיא דיפאומורפיזם חלק. היא מוגדרת היטב כהרכבת פונקציות, היא חד־חד ערכית מחד־חד ערכיות של $(\cos t, \sin t) \simeq e^{it}$ וכי בקורדינטה השלישית היא הזהות, והיא על על־ידי בחירה של $(\mathrm{Arg}(x, y), t)$. היא חלקה כהרכבת פונקציות חלקות, ולכן מהווה דיפאומורפיזם חלק.

נסמן $p = (t, y)$. מחישוב עולה כי,

$$DF|_p = \begin{pmatrix} -\sin t & 0 \\ \cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואם $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2)$ אז,

$$DF|_p(v) = \begin{pmatrix} -v_1 \sin t \\ v_1 \cos t \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad DF|_p(w) = \begin{pmatrix} -w_1 \sin t \\ w_1 \cos t \\ w_2 \end{pmatrix}$$

לבסוף נציב,

$$\langle DF|_p(u), DF|_p(w) \rangle = v_1 w_1 \sin^2 t + v_1 w_1 \cos^2 t + v_2 w_2 = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \langle v, w \rangle$$

ומצאנו כי מתקיימת ההגדרה לאיזומטריה.

לפעמים אני לוקח דף ומגלגל אותו לטלסקופ, המרחקים על הדף לא משתנים, אבל הדף משנה את צורתו מ־M ל־N.

סעיף ד׳

נניח ש־$U \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה, ונניח ש־$M \subseteq \mathbb{R}^3$ יריעה איזומטרית ל־U.

נסמן $\alpha : U \to M$ האיזומטריה ביניהן, ונראה שאם $\alpha(x_0, y_0) = p$ ואם,

$$B = \left\{ \left. \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial^2 \alpha}{\partial^2 x} \right|_{(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial^2 \alpha}{\partial^2 y} \right|_{(x_0, y_0)} \right\}$$

אז $T_p M \perp B$.

הוכחה. נחשב,

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial y} \langle (1, 0), (1, 0) \rangle \\ &\overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial y} \langle D\alpha(1, 0), D\alpha(1, 0) \rangle \\ &\overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right\rangle \end{aligned}$$

כאשר,

1. נגזרת של ערך קבוע
2. איזומטריה
3. ישירות מהגדרת הנגזרות החלקיות ביחס לדיפרנציאל

באופן שקול נוכל להסיק שגם,

$$\left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = 0$$

ולכן לכל $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ סקלרים גם,

$$\beta_1 \left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, \frac{\partial\alpha}{\partial x} \right\rangle + \beta_2 \left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = 0$$

אבל זה אינו אלא השוויון,

$$\left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, D\alpha|_{(x,y)}(\beta) \right\rangle = 0$$

עבור $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. נסיק ש-$T_pM \perp \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}$.

באופן דומה מתקיים,

$$\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = \langle D\alpha(1,0), D\alpha(0,1)\rangle = \langle (1,0), (0,1)\rangle = 0$$

אבל גם,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle + 0$$

ולבסוף באופן שקול לחלוטין נקבל שגם,

$$\left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}, \frac{\partial\alpha}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = 0$$

ונוכל באותו אופן כמו במקרה הראשון לקבל שאכן $B \perp T_pM$. □

סעיף ה׳

נסיק שלכל איזומטריה $\alpha : U \to M$ מתקיים,

$$\left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y} \right\rangle \equiv 0$$

הוכחה. תחילה נבחין כי מתקיים,

$$\left\langle \frac{\partial^3\alpha}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3\alpha}{\partial y\partial x^2}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^3\alpha}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3\alpha}{\partial x^2\partial y}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = \left\langle 0, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = 0$$

ישירות ממשפט קלרו. מאדיטיביות מכפלה פנימית,

$$\left\langle \frac{\partial^3\alpha}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3\alpha}{\partial y\partial x^2}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^3\alpha}{\partial x^2\partial y}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^3\alpha}{\partial y\partial x^2}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = 0$$

ונבחין כי גם,

$$\left\langle \frac{\partial^3\alpha}{\partial x^2\partial y}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = 0 - \left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y} \right\rangle$$

כאשר השוויון האחרון נובע ישירות מהעובדה שמתקיים,

$$\left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}, D\alpha(0,1) \right\rangle$$

ושימוש בסעיף הקודם. באותו אופן נוכל להסיק כי גם,

$$\left\langle \frac{\partial^3\alpha}{\partial y\partial x^2}, \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} \right\rangle$$

לאחר הצבה בשוויון הראשון שמצאנו נקבל בדיוק את המבוקש. □