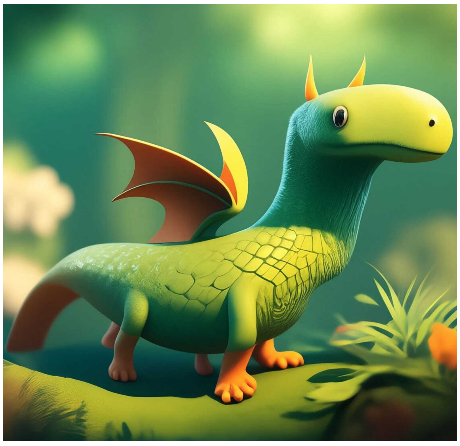
# מבוא לטופולוגיה — סיכום

7 באפריל 2025



# תוכן העניינים

# 1 שיעור 1 — 24.3.2025

## 1.1 מבוא

בעבר דיברנו על מרחבים מטריים, באינפי 1 מתבוננים ב־$\mathbb{R}$ והגדרנו את מושג הגבול של סדרות, ולאחריו את המושג של פונקציה רציפה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ההגדרה הייתה ש־$f$ תיקרא רציפה אם לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. באינפי 3 כבר ראינו את המושג הכללי והרחב יותר של רציפות במרחבים מטריים. ניזכר בהגדרה של מרחב מטרי.

**הגדרה 1.1** (מרחב מטרי) מרחב מטרי הוא זוג $(X, d)$ כאשר $X$ קבוצה לא ריקה ו־$d : X \times X \to \mathbb{R}$ פונקציה (הנקראת מטריקה) המקיימת,

1. $d(x, y) = d(y, x)$ לכל $x, y \in X$
2. $\forall x, y \in X, d(x, y) \ge 0$ וכן $x = y \iff d(x, y) = 0$
3. אי־שוויון המשולש, $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \le d(x, y) + d(y, z)$

**דוגמה 1.1** נראה דוגמות למרחבים מטריים,

1. $\mathbb{R}$ יחד עם $d(x, y) = |x - y|$
2. $(\mathbb{R}^n, d_2)$ המוגדרת על־ידי $d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$
3. נוכל עבור $\mathbb{R}^n$ להגדיר את $d_p(\bar{x}, \bar{y}) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ ואת מטריקת אינסוף, $d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$
4. עבור $C([a, b])$ קבוצת הפונקציות הרציפות $[a, b] \to \mathbb{R}$ עבור $a < b$, ונגדיר את המטריקה $\rho(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$

נראה את ההגדרה הפורמלית של רציפות,

**הגדרה 1.2** (רציפות) תהי $f : X \to Y$ עבור $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים, אז נאמר ש־$f$ רציפה אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $d(x', x) < \delta$ אז $\rho(f(x'), f(x)) < \epsilon$.

אבל יותר קל לדבר במונחים של קבוצות פתוחות.

**הגדרה 1.3** (כדור) עבור $(X, d)$ מרחב מטרי, נסמן $B(r, x) = B_r(x) = \{z \in X \mid d(x, z) < r\}$.

**הגדרה 1.4** (קבוצה פתוחה) יהי $(X, d)$ מרחב מטרי, תת־קבוצה $U \subseteq X$ תיקרא פתוחה אם לכל $x \in U$ קיים $r > 0$ כך ש־$x \in B(x, r) \subseteq U$.

**הגדרה 1.5** (הגדרה שקולה לרציפות) $f : X \to Y$ תיקרא רציפה אם לכל $V \subseteq Y$ קבוצה פתוחה ב־$Y$ מתקיים $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ קבוצה פתוחה ב־$X$.

**הגדרה 1.6** (טופולוגיה) תהי $X$ קבוצה (לא ריקה), **טופולוגיה** על $X$ היא אוסף $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, כך שמתקיימים התנאים הבאים,

1. $X, \emptyset \in \tau$
2. $\tau$ סגור לאיחוד, כלומר אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ לקבוצת אינדקסים $I$, כך ש־$\forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau$ אז $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau$
3. $\tau$ סגור לחיתוכים סופיים, כלומר לכל $U, V \in \tau$ מתקיים $U \cap V \in \tau$

**הגדרה 1.7** (מרחב טופולוגי) זוג $(X, \tau)$ כאשר $X$ קבוצה לא ריקה ו־$\tau$ טופולוגיה על $X$, יקרא מרחב טופולוגי.

**הערה** בעצם הגדרנו כבר מתי פונקציה $f : X \to Y$ עבור מרחבים טופולוגיים $(X, \tau), (Y, \Omega)$ היא רציפה, כאשר $f^{-1}(U) \in \tau$ לכל $U \in \Omega$.

**סימון 1.8** איברי $\tau$ יקראו קבוצות פתוחות.

**הגדרה 1.9** (קבוצה סגורה) אם $(X, \tau)$ מרחב טופולוגי אז תת־קבוצה $A \subseteq X$ תיקרא סגורה אם $X \setminus A \in \tau$, כלומר המשלים של $A$ היא קבוצה פתוחה.

**דוגמה 1.2** יהי $(X, d)$ מרחב מטרי, נגדיר $\tau = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \exists r > 0, B(x, r) \subseteq U\}$, כלומר נגדיר טופולוגיה באופן טריוויאלי כנביעה מהמרחב המטרי.

**תרגיל 1.1** הוכיחו כי אכן זהו מרחב טופולוגי.

**דוגמה 1.3** יהי $X$ קבוצה כלשהי, אז ניתן להגדיר על $X$ טופולוגיה $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$. טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה טריוויאלית.

**דוגמה 1.4** נגדיר $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$ עבור קבוצה $X$, גם קבוצה זו היא טופולוגיה, והיא נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית.

**דוגמה 1.5** נניח ש־$(Y,\tau)$ מרחב טופולוגי, ותהי $f:(Y,\tau)\to(X,\tau_0)$, מתי $f$ היא רציפה? התשובה היא שהיא רציפה תמיד. מתי $f:(Y,\tau)\to(X,\tau_1)$ רציפה? תלוי בהגדרת הפונקציה, אבל במקרה שבו היא אכן רציפה, אז היא רציפה בכל טופולוגיה שהיא. לעומת זאת כל $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau)$ היא רציפה.

**הערה** לא כל טופולוגיה נובעת ממטריקה. לדוגמה הטופולוגיה הטריוויאלית על מרחב עם לפחות 2 נקודות.

**הערה** נניח $x,y\in X$ אז נבחר $r=\frac{1}{2}d(x,y)$ ואז $y\notin B(x,r)$ ולכן $\emptyset\neq B(x,r)\neq X$, קל לראות שביחס לטופולוגיה שמושרית מהמטריקה $d$, הקבוצה $B(x,r)$ קבוצה פתוחה.

**דוגמה 1.6** נגדיר $X=\mathbb{C}^n$ עבור איזשהו $n\in\mathbb{N}$ ונגדיר $\mathcal{F}=\{A\subseteq\mathbb{C}^n\mid\exists\{f_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n],A=\{(p_1,\dots,p_n)\mid\forall i\in I,f_i(p_1,\dots,p_n)=0\}\}$.

**הגדרה 1.10** (בסיס לטופולוגיה) בסיס לטופולוגיה הוא אוסף $\mathcal{B}$ של תתי־קבוצות של $X$ כך שמתקיים,

1. לכל $x\in X$ יש $B\in\mathcal{B}$ כך ש־$x\in B$.
2. לכל $A,B\in\mathcal{B}$ ולכל $x\in A\cap B$ יש $C\in\mathcal{B}$ כך ש־$x\in C\subseteq A\cap B$.

**טענה 1.11** *עבור בסיס $\mathcal{B}$ האוסף $\tau_{\mathcal{B}}=\{U\subseteq X\mid U\text{ is a union of elements of }\mathcal{B}\}$ היא טופולוגיה,*

$$\forall\alpha\in I,B_\alpha\in\mathcal{B},U=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$$

*הוכחה.* מכיוון ש־$\tau_{\mathcal{B}}$ סגורה לחיתוך סופי, אז אם $U,V\in\tau_{\mathcal{B}}$ אז $U=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\in\mathcal{B}$ וכן $V=\bigcup_{\beta\in J}A_\beta,A_\beta\in\mathcal{B}$, אז מתקיים,

$$U\cap V=(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)\cap(\bigcup_{\beta\in J}A_\beta)=\bigcup_{\alpha,\beta\in I\times J}B_\alpha\cap A_\beta=D$$

לכן לכל $x\in U\cap V$ ישנם $\alpha_0\in I,\beta_0\in J$ כך ש־$x\in B_{\alpha_0}\cap A_{\beta_0}$, אבל מהגדרת הבסיס קיימת קבוצה $C_{\alpha_0,\beta_0}\in\mathcal{B}$ כך ש־$C_{\alpha_0,\beta_0}\subseteq B_{\alpha_0}\cap A_{\beta_0}$. לכן $D\subseteq\bigcup_{(x,\alpha,\beta)}C_{x,\alpha,\beta}$. בהתאם מצאנו סגירות לחיתוך סופי. $\square$

**הערה** יהי $(X,d)$ מרחב מטרי, אז $\{B(x,r)\subseteq X\mid x\in X,r>0\}$ הוא טופולוגיה. אבל עכשיו נוכל להגדיר גם את $\{B(x,\frac{1}{n})\subseteq X\mid x\in X,n\in\mathbb{N}\}$, זהו בסיס לטופולוגיה לאותה הטופולוגיה שהגדרנו למרחב המטרי.

**תרגיל 1.2** הוכיחו שזהו אכן בסיס עבור המרחב הטופולוגי הנתון.

**דוגמה 1.7** נניח ש־$X=\mathbb{Z}$, ונגדיר את הבסיס $C$ להיות אוסף הסדרות האריתמטיות הדו־צדדיות, כלומר $C=\{a+d\mathbb{Z}\mid a,d\in\mathbb{Z},d\neq0\}$. אנו טוענים כי זהו אכן בסיס (לטופולוגיה). נתבונן בזוג קבוצות ב־$C$, $a+d\mathbb{Z},b+q\mathbb{Z}$, ונניח ש־$p\in(a+d\mathbb{Z})\cap(b+q\mathbb{Z})$ אז $p\in p+dq\mathbb{Z}\subseteq(a+d\mathbb{Z})\cap(b+q\mathbb{Z})$. נגדיר טופולוגיית $\tau_C$.

קבוצות סגורות הן משלימים לקבוצות פתוחות.

כל סדרה אריתמטית דו־צדדית אינסופית היא גם פתוחה וגם סגורה. בפרט חיתוך סופי של סדרות אריתמטיות הוא סגור. לכן המשלים שלו הוא פתוח.

**מסקנה 1.12** (משפט אוקלידס) יש אינסוף מספרים ראשוניים.

*הוכחה.* נניח בשלילה כי יש מספר סופי של ראשוניים, $p_1,\dots,p_k$ עבור $k\in\mathbb{N}$. נבחן את $\bigcup_{i=1}^k p_i\mathbb{Z}$, זוהי קבוצה פתוחה וגם סגורה, לכן

$$\bigcup_{i=1}^k p_i\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$$

ולכן נובע ש־$\{-1,1\}$ קבוצה פתוחה וזו כמובן סתירה. $\square$

**טענה 1.13** **(צמצום מרחב טופולוגי)** *נניח ש־$(X,\tau)$ מרחב טופולוגי, לכל $\emptyset\neq Y\subseteq X$ נגדיר $\tau_Y=\{U\cap Y\mid U\in\tau\}$. אז $\tau_Y$ היא טופולוגיה. אם $Y\in\tau$ אז $\tau_Y=\{W\in\tau\mid W\subseteq Y\}$.*

**טענה 1.14** **(טופולוגיית מכפלה)** *נניח ש־$(X_1,\tau_1)$ ו־$(X_2,\tau_2)$ מרחבים טופולוגיים, אז נגדיר טופולוגיה על מרחב המכפלה $X_1\times X_2$ על־ידי*

$$\tau_{1,2}=\{U_1\times U_2\mid U_1\in\tau_1,U_2\in\tau_2\}$$

*אז $\tau_{1,2}$ הוא בסיס והטופולוגיה המוגדרת על־ידו נקראת טופולוגיית המכפלה.*

**דוגמה 1.8** נוכל לבנות כך מכפלה של כמות סופית או אינסופית של מכפלות טופולוגיות. עבור אוסף אינסופי (בן־מניה או לא בהכרח) אנו צריכים

להיזהר, נניח ש־$(X_\alpha, \tau_\alpha)$ עבור $\alpha \in I$, אז נגדיר

$$\tau_b = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

זהו בסיס לטופולוגיה שנקרא טופולוגיית הקופסה. לעומת זאת נוכל להגדיר גם את

$$\tau_p = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha = X_\alpha \text{ for almost all } \alpha \in I\}$$

כלומר $\prod_{\alpha \in I} = \{f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid \forall \alpha \in I, f(x) \in X_\alpha\}$.

# 2 שיעור 2 — 25.3.2025

## 2.1 טופולוגיה — המשך

בשיעור הקודם דיברנו על מכפלה של טופולוגיות, אמרנו שאם $I$ קבוצת אינדקסים ולכל $\alpha \in I$ גם $(X_\alpha, \tau_\alpha)$ מרחב טופולוגי, אז נתבונן ב־$Z = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ונרצה להגדיר טופולוגיה על $Z$.

**הערה** מגדירים,

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha, \forall \alpha \in I, f(\alpha) \in X_\alpha\}$$

לאחר מכן נוכל להגדיר טופולוגיית מכפלה,

**הגדרה 2.1** (טופולוגיית מכפלה) נגדיר את הבסיס,

$$\mathcal{B}_{\text{box}} = \{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I, U_\alpha \subseteq X_\alpha, U_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

ואת הבסיס,

$$\mathcal{B}_{\text{prod}} = \{\prod_{\alpha \in I} V_\alpha \mid \forall \alpha \in I, V_\alpha \in \tau_\alpha, V_\alpha \subseteq X_\alpha, |\{\beta \in I \mid V_\beta \neq X_\beta\}| < \infty, V_\alpha = X_\alpha \text{ for almost every } \alpha\}$$

אלו הן מכפלות של טופולוגיות המהוות טופולוגיה.

**הגדרה 2.2** (העתקות הטלה) אז $Z = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ אז ישנן הטלות $\forall \alpha \in I, \pi_\alpha : Z \to X_\alpha$ המוגדרת על־ידי $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$.

אנו רוצים שכל ההטלות $\pi_\alpha$ תהינה רציפות. כדי שהן אכן יקיימו רציפות צריך שלכל $U_\alpha \in \tau_\alpha$ (קבוצה פתוחה ב־$X_\alpha$) יתקיים $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau$, כלומר המקור יהיה קבוצה פתוחה ב־$Z$. אבל נבחין כי $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta$ אבל זהו לא בסיס,

$$C = \{U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta \mid \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \tau\}$$

**הגדרה 2.3** (תת־בסיס לטופולוגיה) תהי קבוצה $X$, קבוצה $C$ של תת־קבוצות של $X$ כך ש־$\bigcup C = X$.
נגדיר את הבסיס המושרה מתת־בסיס להיות $\mathcal{B}_C = \{\bigcap A \mid A \subseteq C, |A| < \infty\}$, כלומר אוסף החיתוכים הסופיים של איברי $C$ (הן קבוצות פתוחות) הוא בסיס.

**הגדרה 2.4** (טופולוגיה חלשה) אם $X$ קבוצה ו־$\tau_1, \tau_2$ טופולוגיות על $X$ אומרים ש־$\tau_1$ חלשה יותר מ־$\tau_2$ אם $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

**דוגמה 2.1** יהיו מרחבים מטריים $(X_i, \rho_i)$ לכל $i \in \mathbb{N}$, ונגדיר $(X_i, \tau_i)$ מרחב טופולוגי מושרה מתאים לכל $i$. נרצה להתבונן במכפלתם, $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$. אז נוכל להתבונן ב־$(\prod X_i, \tau_{\text{prod}})$ שהגדרנו זה עתה.

**הגדרה 2.5** (מטריקת מכפלה) בהינתן סדרת מרחבים מטריים $(X_i, \rho_i)$ עבור $i \in \mathbb{N}$ נרצה למצוא מטריקה על $Z = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$. לכל $x, y \in Z$ כאשר $x = (x_i), y = (y_i)$ אז נגדיר,

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

ברור שפונקציה זו מוגדרת, וברור אף כי היא מקיימת את התכונה השנייה של מטריקות, אך לא ברור שהיא מקיימת את אי־שוויון המשולש, זהו תרגיל שמושאר לקורא.

**טענה 2.6** *הטופולוגיה המושרית על $Z = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ עבור $(X_i, \tau_i)$ מרחבים טופולוגיים יחד עם מטריקת המכפלה שווה ל־$\mathcal{B}_{\text{prod}}$.*

*הוכחה.* $(Z, \rho)$ מרחב מטרי, ו־$\mathcal{B}_\rho = \{B(x, r) \mid x \in Z, r > 0\}$ בסיס, אז נוכל להגדיר טופולוגיה $\tau_{\mathcal{B}_\rho} = \tau_\rho$. כדי להראות ש־$\tau_\rho = \mathcal{B}_{\text{prod}}$ מספיק להראות שכל $B \in \mathcal{B}_{\text{prod}}$ שייכת ל־$\tau_\rho$ וכל $C \in \mathcal{B}_\rho$ שייכת ל־$\tau_{\text{prod}}$. נוסיף ונבהיר שטופולוגיה נקבעת ביחידות על־ידי בסיס שלה, לכן מספיק להראות את שקילות הבסיסים.

נתחיל בתנאי הראשון, ונקבע $k \in \mathbb{N}$ כלשהו. מספיק להראות שקבוצה מהצורה $U_k \times \prod_{i \neq k} X_i$ פתוחה ב־$\tau_\rho$ עבור $U_k \in \tau_k$ היא קבוצה פתוחה ב־$\tau_\rho$, זאת שכן נוכל להרחיב הוכחה זו באופן סיסטמתי להיות על כל קבוצה סופית של קבוצות פתוחות. יהי $x \in U_k \times \prod_{i \neq k} X_i$ ונסמן את ההטלה על מרחב זה $\pi_j : U_j \times \prod_{i \neq k} X_i \to U_j$, כלומר $\pi_j(x) = x_j$ לכל $j \in \mathbb{N}$. אנו יודעים ש־$x_k \in U_k$ וש־$U_k$ פתוחה ולכן ישנו $r > 0$ כך ש־$B_r(x_k) \subseteq U_k$ כדור פתוח ב־$X_k$.

קיים $s>0$ כך שאם $t\geq 0$ ומתקיים $s<\frac{t}{1+t}$ אז $t<r$, ולכן נבחן את הכדור ברדיוס $\frac{s}{2^k}$ סביב $x$ ב־$Z=\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ מרחב המכפלה כולו.
המטרה שלנו היא להראות שהכדור שעתה בחרנו מקיים את התנאי לבסיס. נניח ש־$y=(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\in B_{\frac{s}{2^k}}(x)$, אז

$$\begin{aligned}
&\frac{s}{2^k}>\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}\geq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}\\
&\implies s>\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}\\
&\implies \rho_k(x_k,y_k)<r\\
&\implies y_k\in B_r(x_k)\subseteq U_k
\end{aligned}$$

נעבור לתנאי השני, נתבונן בכדור הפתוח סביב $x\in Z$, $B_r(x)$, כאשור נחזור ונבהיר כי כדור זה מוגדר להיות,

$$B_r(x)=\left\{y\in Z\mid\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}<r\right\}$$

יהי $M\in\mathbb{N}$ כך ש־$\frac{r}{2}<\sum_{i=M+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}$, כלומר נחסום את טור הזנב של המטריקה $\rho$. תהי $V\subseteq Z$ המוגדרת על־ידי,

$$V=\left\{(y_1,\dots,y_M)\in\prod_{i=1}^{M}\mid\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{2^i}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}<\frac{r}{2}\right\}$$

ואנו טוענים כי $V\times\prod_{i=M+1}^{\infty}X_i\subseteq B_r(x)$. $\square$

# 3 שיעור 3 — 31.3.2025

## 3.1 סגירות

בדיוק כמו במרחבים מטריים, גם במרחב טופולוגי נרצה לדון במניפולציות על קבוצות במרחב, נתחיל בהגדרת הקונספט של סגור של קבוצה במרחב טופולוגי.

**הגדרה 3.1** (סגור של קבוצה במרחב טופולוגי) יהי $(X, \tau)$ מרחב טופולוגי, ותהי קבוצה $A \subseteq X$ תת־קבוצה כשלהי. נגדיר את הסגור של $A$ כקבוצה הסגורה הקטנה ביותר המכילה את $A$, כלומר,

$$\overline{A} = \bigcap_{X \setminus F \in \tau} F$$

בהתאם נקבל מספר תכונות ראשוניות ודומות לתכונות שראינו בעבר,

**למה 3.2** *התכונות הבאות מתקיימות,*

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, *כאשר במקרה זה אין בהכרח שוויון.*

**דוגמה 3.1** נראה דוגמה למקרה בו בהכרח אין שוויון, נגדיר $X = \mathbb{R}$ וכן $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, אז מתקיים,

$$\emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

**טענה 3.3** *אם $(X, \tau)$ מרחב טופולוגי ו־$A \subseteq X$, אז,*

$$x \in \overline{A} \iff \forall U \in \tau, x \in U \to U \cap A \neq \emptyset$$

*כלומר נקודה נמצאת בסגור של $A$ אם ורק אם כל קבוצה פתוחה סביב הנקודה לא זרה ל־$A$.*

*הוכחה.* נראה את שלילת הטענה, כלומר $x \notin \overline{A} \iff \exists U \in \tau, x \in U \land U \cap A = \emptyset$.
נניח ש־$x \notin \overline{A}$ ולכן $x \in X \setminus \overline{A}$ אבל $X \setminus \overline{A}$ פתוחה וזרה מהגדרתה ל־$A$.
בכיוון השני אם יש $x \in U$ פתוחה כך ש־$U \cap A = \emptyset$ אז $F = X \setminus U$ סגורה ומכילה את $A$, בהתאם $\overline{A} \subseteq F$ ובהכרח $x \notin \overline{A}$. □

**הגדרה 3.4** (פנים ושפה) נגדיר את הפנים של $A$ להיות, $A^\circ = \bigcup_{U \in \tau, U \subseteq A} U$.
כלומר הפנים הוא איחוד כל הקבוצות הפנימיות הפתוחות של $A$, ובשל הסגירות של הטופולוגיה לאיחוד, נקבל כך את הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר שחלקית ל־$A$. נגדיר את השפה של $A$ להיות $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

נבחין בהגדרה של סביבה ונשתמש בהגדרה זו כדי להגדיר מונח חדש.

**הגדרה 3.5** (סביבה של נקודה) נאמר ש־$L \subseteq X$ היא סביבה של $x$ אם קיימת קבוצה פתוחה $U \in \tau$ כך ש־$x \in U \subseteq L$.

**הגדרה 3.6** (נקודת הצטברות) יהי $(X, \tau)$ מרחב טופולוגי, תהי $A \subseteq X$ תת־קבוצה כלשהי, ו־$x \in A$. נאמר ש־$x$ היא נקודת הצטברות של $A$ אם כל סביבה של $x$ מכילה נקודה מ־$A$ שונה מ־$x$, כלומר,

$$\forall U \in \tau, x \in U \implies \exists y \in (U \setminus \{x\}) \cap A$$

נסמן ב־$A'$ את קבוצת נקודות ההצטברות של $A$.

נרצה להסתכל על נקודות הצטברות כנקודות שלא משנה כמה קרוב אנחנו מסתכלים אליהן, עדיין נוכל למצוא בסביבתן נקודות נוספות. במובן הזה ברור שהן נמצאות בקרבת נקודות בפנים, אך עלולות להיות גם נקודות לא פנימיות שמקיימות טענה כזו.

**טענה 3.7** *מתקיים* $\overline{A} = A \cup A'$.

*הוכחה.* אם $x \in A \cup A'$ אז או $x \in A \subseteq \overline{A}$ או $x \in A'$. ובכל סביבה של $x$ יש נקודה מ־$A$ שונה מ־$x$. בפרט לאור הטענה ש־$\overline{A}$ היא אוסף כל הנקודות שבכל סביבה שלהן המכילה את $A$ בחיתוך לא ריק נובע ש־$A' \subseteq \overline{A}$, לכן נובע ש־$A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

בכיוון השני נניח ש־$x \in \overline{A}$, אז לכל $U \in \tau$ כך ש־$x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$. אם $x \in A$ אז בוודאי ש־$x \in A \cup A'$. אם $x \notin A$ אז לכל $U \in \tau$ כך ש־$x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$. מ־$x \notin A$ נובע גם ש־$U \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$ ולכן $x \in A'$. אז מצאנו ש־$\overline{A} \subseteq A \cup A'$, ונובע משני החלקים ש־$\overline{A} = A \cup A'$. □

## 3.2 השלמות לרציפות

ניזכר בהגדרה 1.2, נרצה לדון בקונספט של רציפות באופן רחב יותר. בהינתן $(Y, \tau_Y)$ מרחב טופולוגי ו־$X$ קבוצה כלשהי, ופונקציה $f : X \to Y$, ניתן להגדיר טופולוגיה על $X$ כך ש־$f$ רציפה.
הקבוצה $\{f^{-1}(U) \mid U \in \tau_Y\}$ היא תת־בסיס, ואפשר להרחיבה לבסיס ולהגדיר עליו טופולוגיה מושרית מהבסיס על $X$.

**טענה 3.8** *$f$ רציפה עבור טופולוגיה זו, וזו הטופולוגיה החלשה ביותר על $X$ עבורה $f$ רציפה.*

בכיוון השני, בהינתן מרחב טופולוגי $(X, \tau_X)$ וקבוצה כלשהי $Y$ יחד עם פונקציה $f : X \to Y$, נוכל להגדיר את $\{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \tau_X\}$ להיות תת־בסיס וממנו נוכל שוב לבנות בסיס וטופולוגיה על $Y$. באופן דומה $f$ רציפה ביחס לטופולוגיה זו וזו הטופולוגיה החזקה ביותר על $Y$ כך ש־$f$ רציפה.

**טענה 3.9 (שקילות לרציפות)** *יהיו מרחבים טופולוגיים $(X, \tau_X), (X, \tau_Y)$ ותהי $f : X \to Y$, אז התנאים הבאים שקולים,*

1. *$f$ רציפה לפי 1.2*
2. *לכל קבוצה סגורה $F \subseteq Y$, $f^{-1}(F)$ סגורה ב־$X$*
   *הגדרה זו עוזרת לנו לדון בקבוצות סגורות במקום פתוחות*
3. *אם $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה של $Y$ אז לכל $B \in \mathcal{B}$ מתקיים ש־$f^{-1}(B)$ פתוחה ב־$X$*
   *הגדרה זו מאפשרת לנו לדון בבסיסים ובכך לפשט את העבודה עם טופולוגיות*
4. *לכל $x \in X$ ולכל סביבה $W \subseteq Y$ של $f(x)$ מתקיים ש־$f^{-1}(W)$ סביבה של $x$*
5. *קיים כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ של $X$, כלומר $X = \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha$, $\forall \alpha, U_\alpha \in \tau$, כך שלכל $\alpha \in \Omega$ מתקיים $f\mid_{U_\alpha} : U_\alpha \to Y$ רציפה.*
6. *קיים כיסוי סגור סופי $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$ עבור $F_i$ סגורות עבור $1 \le i \le n$, כך שכל $f\mid_{F_i} : F_i \to Y$ רציפה.*
7. *לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$*

*הוכחה.* $2 \iff 1$: נובע ישירות מהגדרה של משלימים והגדרת הרציפות על קבוצות פתוחות.

$3 \iff 1$: בכיוון הראשון כל איחוד קבוצות מהבסיס הוא קבוצה פתוחה, ונוכל כך להראות את נכונות הטענה. לכיוון השני כל קבוצה היא איחוד של קבוצות מהבסיס, $U_\alpha$, ו־$f^{-1}(\bigcup U_\alpha) = \bigcup f^{-1}(U_\alpha)$.

$4 \implies 1$: אם $x \in X$ וכן $f(x) \in W \subseteq Y$ סביבה של $f(x)$ אז קיימת $f(x) \in U \subseteq W$ כך ש־$U$ פתוחה, לכן נובע ש־$x \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(W)$ כאשר $f^{-1}(U)$ פתוחה.

$1 \implies 4$: אם $U \subseteq Y$ פתוחה אז צריך להראות ש־$f^{-1}(U)$ פתוחה. תהי $x \in f^{-1}(U)$, אז $U$ סביבה ל־$f(x)$ ולכן לפי ההנחה $f^{-1}(U)$ היא סביבה של $x$, כלומר קיימת $x \in V_x \subseteq f^{-1}(U)$ פתוחה, ונסיק ש־$f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x$ פתוחה.

$5 \implies 1$: נוכל לבחור כיסוי טריוויאלי.

$1 \implies 5$: נניח שיש כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ של $X$ כך ש־$f\mid_{U_\alpha} : U_\alpha \to Y$ רציפה לכל $\alpha \in \Omega$. תהי $W \subseteq Y$ פתוחה, אז $f^{-1}(W) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Omega} f^{-1}\mid_{U_\alpha}(W)$. מההנחה $U_\alpha \cap f^{-1}(W) = f^{-1}\mid_{U_k}(W)$ פתוחה ב־$U_\alpha$ ומשום ש־$U_\alpha$ פתוחה ב־$X$ נובע ש־$f^{-1}\mid_{U_\alpha}(W)$ פתוחה ב־$X$ ולכן $f^{-1}(W)$ פתוחה ב־$X$.

$6 \implies 1$: נבחר את $X$ ככיסוי סגור של עצמה.

$1 \implies 6$: נניח ש־$X = \bigcup_{i=1}^n F_i$ כיסוי סגור סופי של $X$, ונניח גם שלכל $i$, $f\mid_{F_i} : F_i \to Y$ רציפה. כעת ההוכחה דומה למהלך שעשינו ב־$1 \implies 5$, אבל כעת אפיון רציפות בעזרת $L$, ואיחוד סופי על סגורות הוא סגור.

$7 \implies 1$: נתון כי $f$ רציפה, אנו רוצים להראות ש־$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. יהי $x \in \overline{A}$, נראה כי $f(x) \in \overline{f(A)}$, נניח בשלילה ש־$f(x) \notin \overline{f(A)}$, אז יש סביבה פתוחה $f(x) \in U$ כך ש־$U \cap f(A) = \emptyset$. $f$ רציפה ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה ב־$X$ וקיים $A \cap f^{-1}(U) = \emptyset$, אבל $x \in f^{-1}(U)$ וקיבלנו $x \notin \overline{A}$.

$2 \implies 7$: תהי $F \subseteq Y$ סגורה, אז,

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \overset{\text{ההנחה}}{\subseteq} \subseteq \overline{F} \overset{F \text{ סגורה}}{=} F \implies \overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$$

מהגדרת סגור נוכל להסיק ש־$f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$, לכן,
$$\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$$
ובפרט $f^{-1}(F)$ סגורה ב־$X$. □

נבחן תכונה מעניינת שלא תשרת אותנו רבות, אך כן מעלה שאלות,

**הגדרה 3.10** (מרחב כוויץ) יהי $X$ מרחב טופולוגי, נאמר ש־$X$ כוויץ (Contractible) אם יש פונקציה רציפה $f : I \times X \to X$ עבור $I = [0,1]$ כך ש־$\forall x \in X, f(0,x) = x$ וקיימת נקודה $x_1 \in X$ כך ש־$\forall x \in X, f(1,x) = x_1$.
נסמן גם $f_t(t,x)$ כאשר $f_t : X \to X$, נקבל $f_0 = Id$ וכן $f_1$ הפונקציה הקבועה $x \mapsto x_1$.

**דוגמה 3.2** נגדיר $X = I$ ואת $f : I \times I \to I$ המוגדרת על־ידי $f(t,x) = (1-t)x$.
נגדיר $X = \mathbb{R}$ ואת $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על־ידי $f(t,x) = (1-t)x$ ונקבל שגם $\mathbb{R}$ כוויצה בדיוק באותו האופן.

**תרגיל 3.1** הראו כי $S^1$ לא כוויץ.

נחזור לדבר על פונקציות רציפות.

**תרגיל 3.2** נתבונן ב־$f : (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tau)$ כך ש־$f(x)(i) = x$ לכל $i \in \mathbb{N}$.
הראו ש־$f$ רציפה או לא רציפה כהעתקה כאשר $\tau$ טופולוגיית המכפלה, וכאשר $\tau$ טופולוגיית הקופסה.

**פתרון** נתבונן ב־$U = \prod_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, זוהי קבוצה פתוחה, אך $f^{-1}(U) = 0$, וזו כמובן לא קבוצה פתוחה, לכן בטופולוגיית הקופסה היא לא רציפה, לכן בטופולוגיית הקופסה היא לא רציפה.
לעומת זאת בטופולוגיית המכפלה היא אכן רציפה.

**הגדרה 3.11** (הומיאומורפיזם) הומיאומורפיזם בין שני מרחבים טופולוגיים $X, Y$ היא העתקה $f : X \to Y$ כך ש־$f$ חד־חד ערכית ועל, $f$ רציפה ו־$f^{-1}$ רציפה אף היא.
$X$ ו־$Y$ יקראו הומיאומורפיות אם יש הומיאומורפיזם $f : X \to Y$ ביניהן.

אנו נרצה להסתכל על הומיאומורפיזם כאיזומורפיזם של מרחבים טופולוגיים.

**דוגמה 3.3** נגדיר $X = \mathbb{R}, Y = (0,1)$, ואת $f : \mathbb{R} \to (0,1)$ המוגדרת על־ידי $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$, אז,
$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$
ולכן $f$ גזירה, ואף חד־חד ערכית, לבסוף $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0, f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 1$ ולכן היא גם על, ואכן המרחבים הומיאומורפים.

**דוגמה 3.4** נגדיר את $\eta = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ ואת $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. נגדיר גם $\psi : \eta \to D$ על־ידי $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.
ההוכחה כי זהו אכן הומיאומורפיזם מושארת לקורא.

נבחין כי הדוגמה האחרונה אינה אלא העתקת מביוס, העתקה קונפורמית ואנליטית.

**דוגמה 3.5** נבחן את $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ואת $J = [0, 2\pi]$, אנו טוענים כי אין הומיאומורפיזם בין שני המרחבים הללו.
נבחן את הפונקציה $t \mapsto e^{it}$ לדוגמה, $[0,2\pi] \to S^1$ לא חד־חד ערכית, מהצד השני $[0,2\pi) \to S^1$ חד־חד ערכית ועל, אבל

נניח שיש העתקה חד־חד ערכית $\alpha : J \to S^1$, ונוציא מ־$J$ נקודה יחידה, אז נקבל איחוד זר של שתי קבוצות זרות, אך מן הצד השני הוצאת נקודה יחידה מהמעגל משאיר אותו כקבוצה קשירה. ההוכחה המלאה אומנם סבוכה יותר, אך הצבענו פה על הבדל מהותי בין שני המרחבים.

**תרגיל 3.3** הראו כי $\mathbb{R}$ ו־$\mathbb{R}^2$ לא הומיאומורפים.
האם גם $\mathbb{R}^2$ ו־$\mathbb{R}^3$ הומיאומורפים?

**הגדרה 3.12** (העתקה פתוחה וסגורה) העתקה $f : X \to Y$ תיקרא העתקה פתוחה (סגורה) אם לכל $U \subseteq X$ פתוחה (סגורה) מתקיים $f(U) \subseteq Y$ פתוחה (סגורה) ב־$Y$.

**דוגמה 3.6** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(x) = x^2$ היא רציפה, סגורה ולא פתוחה.

**דוגמה 3.7** השיכון $\mathbb{R} \hookrightarrow (0,1)$ המוגדר על־ידי $x \mapsto x$ הוא רציף, תפוח אבל לא סגור.

**דוגמה 3.8** $\{a,b\} \to \{a,b\}$ המוגדרת טריוויאלית היא פתוחה, סגורה אך לא רציפה.

# 4 שיעור 4 — 7.4.2025

## 4.1 אקסיומות ההפרדה

**הגדרה 4.1** (איברים ניתנים להרחבה) נאמר ש־$U$ ו־$V$ מפרידות בין $x, y \in X$ מרחב טופולוגי, אם מתקיים $U \cap V = \emptyset$ וכן $x \in U, v \in V$.
אם קיימות כאלה, אז נאמר ש־$x, y$ ניתנות להפרדה.
באופן דומה נאמר ש־$A \subseteq X, x \in X$ ניתנות להפרדה אם קיימות $A \subseteq U, x \in V$ כאלה.

**הגדרה 4.2** (מרחב T) מרחב טופולוגי $X$ יקרא מרחב $T_i$ אם הוא מקיים את האקסיומה $T_i$ עבור $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

נגדיר את האקסיומות $T_i$,

- $T_0$, לכל $x, y \in X$ יש קבוצה פתוחה שמכילה את אחת הנקודות אך לא את האחרת
- $T_1$, לכל שתי נקודות $x, y \in X$ קיימת פתוחה המכילה את אחת הנקודות ולא את האחרת, וקבוצה פתוחה המכילה את הנקודה השנייה אך לא את הראשונה. כלומר אם $x \neq y$ אז קיימת $U \in \tau$ כך ש־$x \in U, y \notin U$
- $T_2$ (מרחב האוסדורף), אם לכל זוג נקודות $x \neq y \in X$ יש קבוצות פתוחות זרות $U, V \subseteq X$ כך ש־$x \in U, y \in V$, כאשר משמעות היותן זרות היא ש־$U \cap V = \emptyset$
- $T_3$, אם המרחב הוא $T_1$ וגם $X$ **רגולרי**, כלומר לכל $x \in X$ וקבוצה סגורה $A \subseteq X$, $x \notin A$, $x, A$ ניתנות להפרדה
- $T_4$, אם המרחב הוא $T_1$ וכן $X$ **נורמלי**, כלומר שכל זוג תת־קבוצות סגורות $A, B \subseteq X$ ניתנות להפרדה

**הערה** $T_1$ מתקיים אם ורק אם כל $\{x\} \subseteq X$ קבוצה סגורה.

**טענה 4.3** **(גרירת מרחבי T)** *נבחין כי* $T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$*, כלומר המספר מייצג סדר גרירה.*

**טענה 4.4** **(שקילות למרחב נורמלי)** *מרחב טופולוגי $X$ נורמלי אם ורק אם לכל קבוצה סגורה $A$ וקבוצה פתוחה $U \supseteq A$ קיימת קבוצה פתוחה $V$ כך ש־$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

*הוכחה.* בכיוון הראשון נניח ש־$X$ נורמלי וכן ש־$A \subseteq U$ קבוצה סגורה המוכלת בקבוצה פתוחה. $A, X \setminus U$ סגורות וזרות, ולכן יש קבוצות פתוחות $V, W$ כך ש־$A \subseteq V \subseteq X \setminus W \subseteq U, X \setminus U \subseteq W$ כך ש־$W \cap V = \emptyset$. נובע ש־$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$.

בכיוון השני, נניח ש־$A, B \subseteq X$ קבוצות סגורות זרות ולכן $A \subseteq X \setminus B$, נסמן $U = X \setminus B$, אז קיימת קבוצה פתוחה $V$ כך שמתקיים,

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus B$$

ולכן $B \subseteq X \setminus \overline{V}$ ונובע גם ש־$V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$. □

**למה 4.5** **(הלמה של אוריסון)** *יהי $X$ מרחב $T_4$, אז אם לכל זוג קבוצות סגורות זרות $C, D \subseteq X$, אז יש פונקציה רציפה $f : X \to [0, 1]$ כך ש־$f |_C = 1, f |_D = 0$.*

*הוכחה.* □

**טענה 4.6** *אם $X$ מרחב האוסדורף ($T_2$) אם ורק אם $\Delta_X = \{(x, y) \mid x, y \in X\} \subseteq X \times X$ תת־קבוצה סגורה בטופולוגיית המכפלה.*

*הוכחה.* נניח ש־$X$ מרחב האוסדורף. לכל $x \neq y$ יש $x \in U_{x,y}$ ו־$y \in V_{x,y}$ פתוחות זרות, כלומר $(U_{x,y} \cap V_{x,y}) \cap \Delta_X = \emptyset$. נבחין כי

$$X \times X \setminus \Delta_X = \bigcup_{x \neq y} (U_{x,y} \times V_{x,y})$$

וזוהי קבוצה פתוחה.

בכיוון השני נניח ש־$\Delta_X$ סגורה, אז $X \times X \setminus \Delta_X$ פתוחה, אם $x \neq y$ אז $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$. לכן לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה יש $U, V$ פתוחות כך ש־$(x, y) \in U \times V \subseteq X^2 \setminus \Delta_X$ ואף ש־$U \cap V = \emptyset$. □

**טענה 4.7** *עבור $i \in \{1, 2, 3\}$ אם $X$ הוא מרחב $T_i$ ו־$Y \subseteq X$, תת־מרחב אז גם $Y$ הוא מרחב $T_i$.*

*הוכחה.*
- עבור $T_1$ ההוכחה היא טריוויאלית.
- עבור $T_2$ ההוכחה היא טריוויאלית.

- עבור $T_3$, נזכור שמרחב כזה הוא $T_1$ וכן רגולרי, לכן מספיק שנראה שתת־המרחב הוא רגולרי גם כן. יהי $y \in Y$ ויהי $A \subseteq Y$ סגורה כך ש־$y \notin A$. לכן יש קבוצה סגורה $C \subseteq X$ כך ש־$A = C \cap Y$. עוד אנו יודעים ש־$y \notin C$, לכן קיימות $U, V$ פתוחות ב־$X$ מפרידות בין $y$ ל־$C$, $y \in U$ ו־$C \subseteq V$, וכן $U \cap V = \emptyset$, אז $A \subseteq V \cap Y$ ו־$y \in U \cap Y$.

בכיוון השני נניח ש־$A, B \subseteq Y$ וש־$C, D \subseteq X$ סגורות, אז $A = C \cap Y, B = D \cap Y$, אבל לא ברור מדוע אפשר לדרוש ש־$C, D$ זרות.

□

**הערה** טענה זו לא נכונה עבור $T_4$.

Counter examples in Topology של J. Arthur Seebach הוא ספר שבו נוכל למצוא דוגמות רבות למרחבים כאלה.

**טענה 4.8** *אם $X, Y$ מרחבים $T_i$ עבור $i \in \{1, 2, 3\}$ אז גם $X \times Y$ הוא מרחב $T_i$.*

*הוכחה.* עבור $T_1$ הטענה ברורה, אנו רוצים להראות שלכל $x, y$,

$$\{(x, y)\} = (X \times (Y \setminus \{y\})) \cup ((X \setminus \{x\}) \times Y)$$

סגורה.

עבור $T_2$ הטענה קלה גם כן.

נוכיח עבור $T_3$. נניח ש־$X, Y$ הם $T_3$, כלומר $T_1$ ורגולריים ועלינו להראות ש־$X \times Y$ רגולרי. נניח ש־$A \subseteq X \times Y$ סגורה וכן ש־$(x, y) \notin A$. נגדיר למה, ש־$Z$ מרחב רגולרי אם ורק אם לכל $z \in U \subseteq Z$ עבור $U$ פתוחה ויש $z \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ פתוחה. תוך שימוש בלמה, נסמן $W = (X \times Y) \setminus A$ פתוחה, $(x, y) \in W$, אז נובע שקיימות קבוצות פתוחות $x \in U_x \subseteq X$ ו־$y \in U_Y \subseteq Y$ כך ש־$(x, y) \in U_X \times U_Y \subseteq W$. מרגולריות נסיק שיש $V_X, V_Y$ פתוחות כך ש־$x \in V_X \subseteq \overline{V}_X \subseteq U_X$ ו־$y \in V_Y \subseteq \overline{V}_Y \subseteq U_Y$ פתוחות. אז מתקיים $(x, y) \in V_X \times V_Y \subseteq \overline{V_X \times V_Y} = \overline{V}_X \times \overline{V}_Y \subseteq U_X \times U_Y$.

נעבור להוכחת הלמה, לכיוון הראשון $z \in U \subseteq Z$, נסמן $C = Z \setminus U$ סגורה, $z \notin C$ ולכן סגורות זרות $V, W$ כך ש־$z \in V, C \subseteq W, Z \setminus W \subseteq U$. אז $z \in V \subseteq \overline{V} \subseteq Z \setminus W \subseteq U$.

בכיוון השני של הלמה נניח ש־$C$ סגורה, $z \in Z, z \notin C$, אז יש $V$ פתוחה כך ש־$z \in V \subseteq \overline{V} \subseteq Z \setminus C$, וכן $C \subseteq U = Z \setminus \overline{V}$ כך ש־$U \cap V = \emptyset$.
□

**טענה 4.9** *אם $(X, \rho)$ מרחב מטרי, אז הוא מרחב $T_4$.*

*הוכחה.* תת־קבוצה $E$ של $X$ ו־$x \in X$, נגדיר $\rho(x, E) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in E\}$. אם $E$ סגורה ו־$x \notin E$ אז $\rho(x, E) > 0$. נניח ש־$A, B \subseteq X$ סגורות זרות, $\forall a \in A,\ \rho(a, B) > 0, \forall b \in B,\ \rho(b, A) > 0$, אז $U = \bigcup_{a \in A} B_{\rho(a,B)}(a)$ ו־$V = \bigcup_{b \in B} B_{\rho(b,A)}(b)$ הן פתוחות וזרות.
□

נעבור לדוגמות.

**דוגמה 4.1** לא $T_0$, $\{x, y\}$ עם הטופולוגיה $\{X, \emptyset\}$.

עבור $T_0$ ולא $T_1$, $\{x, y\}$ עם הטופולוגיה $\{\emptyset, \{x\}, X\}$.

עבור $T_1$ ולא $T_2$ נגדיר $X = \mathbb{N}$ והטופולוגיה המושרית מהבסיס של כל הקבוצות שמשלימן סופי.

עבור $T_2$ ולא $T_3$ נסמן $\mathbb{R}_{\frac{1}{\mathbb{N}}}$ את המרחב הבא, קבוצת הנקודות היא $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \left\{(a, b) \setminus \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

יש לוודא שזה אכן בסיס. היא הטופולוגיה המכילה את הטופולוגיה הקגילה של $\mathbb{R}$, היא עדינה יותר ומכילה האוסדורף ולכן האוסדורף. נראה ש־$\mathbb{R}_{\frac{1}{\mathbb{N}}}$ לא $T_3$, נבחין כי $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ סגורה, ונראה כי לא ניתן להפריד בינה לבין $0$. נניח ש־$0 \in U$ ו־$K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ פתוחות זרות ונקבל סתירה. אם $0 \in U$ פתוחה אז $U$ מכילה איבר בסיס, לכן $U$ מכילה קבוצה מהצורה $(a_0, b_0) \setminus K$ עבור $a_0 < 0 < b_0$. קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{m} < b_0$, ואז $(a_0, \frac{1}{m}) \setminus K \subseteq U$. $\frac{1}{2m} \in K \subseteq V$ ולכן $(a_1, b_1) \subseteq V$ כאשר $a_1 < \frac{1}{2m} < b_1$. $((a_0, \frac{1}{m}) \setminus K) \cap (a_1, b_1) \neq \emptyset$, $U \cap V \supseteq$ וקיבלנו סתירה.

עבור $T_3$ ולא $T_4$, נסמן את $\mathbb{R}_L$, הטופולוגיה הנוצרת על $\mathbb{R}$ עם הבסיס $L = \{[a,b) \mid a < b, a,b \in \mathbb{R}\}$. אז $\mathbb{R}_L$ הוא מרחב $T_4$ ולכן בפרט גם $T_3$. אז $\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_L$ היא בהכרח $T_3$, אבל נרצה להוכיח ש־$\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_L$ היא לא $T_4$.

**תרגיל 4.1** מה הטופולוגיה המושרית על $L$ מ־$\mathbb{R}_L^2$?

**פתרון** הטופולוגיה הדיסקרטית.

נסיק שכל תת־קבוצה $A \subseteq L$ היא סגורה ב־$\mathbb{R}_L^2$.

## הגדרות ומשפטים