פתרון מטלה 09 — אנליזה על יריעות, 80426

30 במאי 2025

שאלה 1

תהי $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה עם שפה. נסמן $M^\circ = M \setminus \partial M$.

סעיף א׳

נראה ש־M° היא צפופה ב־M.

הוכחה. M° צפופה ב־M אם ורק אם כל נקודה ב־M היא ערך גבולי של סדרה ב־$M \setminus \partial M$. עבור נקודות ב־M הטענה נכונה באופן טריוויאלי, לכן מספיק שנמצא סדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq M^\circ$ המתכנסת ל־$x \in \partial M$ לכל x כזה. נניח ש־$x \in \partial M$ ונניח ש־$\alpha : U \to M$ פרמטריזציה מקומית של x, כלומר $p \in U \subseteq \mathbb{H}^k$ כאשר $p = \alpha^{-1}(x)$. פרמטריזציה משמרת שפה, כלומר $\alpha(y) \in \partial M \iff y \in \partial U$, אבל U פתוחה ולכן קיים $\epsilon > 0$ כך ש־$B(p, \epsilon) \cap \mathbb{H}^k \subseteq U$. נבחר נקודה $x_1 \in B(p, \epsilon) \cap U \cap (\mathbb{H}^k)^\circ$ וכן נקודה $x_n \in B(p, \frac{\epsilon}{n}) \cap U \cap (\mathbb{H}^k)^\circ$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נקבל סדרה כך ש־$x_n \to x$ וכן $x_n \in M^\circ$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כפי שרצינו. □

סעיף ב׳

נראה שאם $k = n$ אז M° היא קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$.

הוכחה. ראינו בהרצאה ש־M° היא יריעה ללא שפה ממימד $n = k$, וכן ראינו שיריעות $M^n \subseteq \mathbb{R}^n$ הן קבוצות פתוחות ב־$\mathbb{R}^n$.

הטענה נובעת באופן ישיר מקיום פרמטריזציה מקומית. אם $x \in M^\circ$ אז קיימת פרמטריזציה $\alpha : U \to M^\circ$ כך ש־$U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, ו־α הומיאומורפיזם ולכן בפרט פתוחה ו־$\alpha(U) \subseteq M$ פתוחה במובן המטרי. נסיים את ההוכחה עם סגירות פתוחות לאיחוד ואיחוד כלל הסביבות הפתוחות לכל נקודה ב־M°. □

סעיף ג׳

נראה שאם $U \subseteq M$ קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ אז $U \subseteq M^\circ$.

הוכחה. נתון כי $U \subseteq M$ ו־$\deg U = n$ ולכן $\deg M = n$. לכל נקודה $x \in U$ יש פרמטריזציה מקומית וכמו בסעיף הקודם היא פתוחה ולכן מעידה ש־$x \in M^\circ$ כקבוצה פתוחה (הנחה שמותר לעשות בשל תוצאת הסעיף הקודם). □

סעיף ד׳

נסיק שאם M תת־קבוצה סגורה של $\mathbb{R}^n$ ו־$\dim M = n$ אז ההגדרות של שפה ופנים של יריעות ושל קבוצות מזדהות.

הוכחה. נוכל להסיק ישירות מהסעיף הקודם שפנים של יריעה וקבוצה מזדהים כאשר $\dim M = n$. ביתר פירוט, אם $U \subseteq M$ פתוחה אז בפרט $U \subseteq M^\circ$ ולכן M° תת־קבוצה פתוחה מקסימלית של M, כלומר היא עומדת בהגדרה המטרית המדויקת של פנים. נקבל על־ידי חיסור קבוצות והעובדה ש־$M = \overline{M}$ ש־$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$, כלומר גם השפה מזדהה עם ההגדרה המטרית. □

שאלה 2

תהי $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה עם שפה, נניח ש־$q \in \partial M$ ותהי פרמטריזציה $\alpha : V \to W$ כך ש־$V \subseteq \mathbb{H}^k$ פתוחה ו־$q \in W \subseteq M$. נניח גם ש־$\tilde{W}$ ־$\tilde{\alpha} : \tilde{V} \to$ הרחבה חלקה שלה, כלומר $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ ו־$\dim \tilde{W} = k$.

נניח ש־$y : [0, \varepsilon) \to \tilde{V}$ היא מסילה חלקה כך ש־$y(0) = y_0 = \alpha^{-1}(q)$, וש־$d\tilde{\alpha}_{y_0}(y'(0)) = X(q)$ מקיימת $\langle X(q), \nu(q) \rangle < 0$, כאשר ν הנורמל החיצוני של M.

נראה שקיים $\delta > 0$ כך ש־$y(t) \in \mathbb{H}^k$ עבור $t \in [0, \delta]$, ובפרט ש־$\tilde{\alpha}(y(t)) = \alpha(y(t)) \in M$.

הוכחה. אנו נראה שהקורדינטה האחרונה של $y'(0)$ חיובית. נפעיל תהליך גרם־שמידט על $X(q)$ ונקבל,

$$X(q) = \langle X(q), \nu(q) \rangle \nu(q) + Y(q)$$

כאשר $Y(q) \in T_q \partial M$ מאורתוגונליות הנורמל החיצוני והמשיק לשפה. בהתאם הקורדינטה האחרונה של $dY(q)$ אפס כווקטור בנגזרת השפה, $\langle X(q), \nu(q) \rangle$ ערך שלילי ו־$\nu(q)$ שלילי בקורדינטה האחרונה, ולכן $X(q)$ חיובי בקורדינטה האחרונה.

עתה נסיק כי קיים $\delta > 0$ כך ש־$y(t) \in \mathbb{H}^k$, זאת שכן הוא נע מעלה בקורדינטה האחרונה ומוגדר בכל אלו שאינן האחרונות. בפרט $\tilde{\alpha}(y(t)) = \alpha(y(t))$, שכן מהנתון ההרחבה היא עבור ערכים שליליים. □

שאלה 3

סעיף א'

תהי $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה קומפקטית עם שפה. נניח ש־$f, g : M \to \mathbb{R}$ רציפות וש־$c \in \mathbb{R}$. נראה שמתקיים,

$$\int_M (\alpha f + g)\, d\operatorname{vol}_k \alpha \int_M f\, d\operatorname{vol}_k + \int_M g\, d\operatorname{vol}_k$$

הוכחה. נניח ש־$\{\alpha_i : U_i \to W_i\}_{i=1}^N$ פרמטריזציות מקומיות המכסות את M, כלומר $M = \bigcup_{i=1}^N W_i$. נניח גם ש־$\{\varphi_i : M \to W_i\}_{i=1}^N$ חלוקת יחידה עבור $\{W_i\}$. אז מהגדרת האינטגרל,

$$\int_M (cf + g)\, d\operatorname{vol}_k = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))(cf + g)(\alpha_i(x))V(D\alpha_i|_x)\, dx$$

נבחין כי זהו אינטגרל רב משתני רגיל ולכן לינארי מתכונות האינטגרל, כלומר,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))(cf + g)(\alpha_i(x))V(D\alpha_i|_x)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^N \left(c\int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))f(\alpha_i(x))V(D\alpha_i|_x)\, dx + \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))g(\alpha_i(x))V(D\alpha_i|_x)\, dx \right)
\end{aligned}$$

אבל גם סכומים סופיים הם לינאריים ונסיק,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \left(c\int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))f(\alpha_i(x))V(D\alpha_i|_x)\, dx + \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))g(\alpha_i(x))V(D\alpha_i|_x)\, dx \right) \\
&= \left(c\sum_{i=1}^N \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))f(\alpha_i(x))V(D\alpha_i|_x)\, dx \right) + \sum_{i=1}^N \left(\int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))g(\alpha_i(x))V(D\alpha_i|_x)\, dx \right)
\end{aligned}$$

והביטוי האחרון איננו אלא,

$$\alpha \int_M f\, d\operatorname{vol}_k + \int_M g\, d\operatorname{vol}_k$$

כפי שרצינו. $\square$

סעיף ב'

משפט פוביני, נניח ש־M^m ו־N^n יריעות, ונניח כי $f, g : M \times N \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אז,

$$\int_{M\times N} f\, d\operatorname{vol}_{m+n} = \int_M \left(\int_N f\, d\operatorname{vol}_n \right)\, d\operatorname{vol}_m = \int_N \left(\int_M f\, d\operatorname{vol}_m \right)\, d\operatorname{vol}_n$$

הוכחה. נניח ש־$\{\alpha_i : U_i \to W_i\}_{i=1}^k$ פרמטריזציות מקומיות המכסות את $M \times N$, כלומר $M \times N = \bigcup_{i=1}^k W_i$.
נניח גם ש־$\{\varphi_i : M \times N \to W_i\}_{i=1}^k$ חלוקת יחידה עבור $\{W_i\}$. נניח כי $U_i = U_i^M \times U_i^N$ עבור $U_i^N \subseteq \mathbb{H}^n, U_i^M \subseteq \mathbb{H}^m$ לכל $i \le k$.
נסמן פירוק דומה ל־W_i, וכן עבור α_i, φ_i לכל i.
מהגדרה,

$$\begin{aligned}
\int_{M\times N} f\, d\operatorname{vol}_{m+n} &= \sum_{i=1}^k \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x))f(\alpha_i(x))V(D\alpha_i|_x)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{U_i^M \times U_i^N} \varphi_i(\alpha_i(x,y))f(\alpha_i(x,y))V(D\alpha_i|_{(x,y)})\, d(x,y)
\end{aligned}$$

כאשר $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$ בביטוי האחרון. זהו סכום סופי של אינטגרלים רב־משתניים ולכן משפט פוביני חל בהם, נראה את אחת הגרסות כדי

לחסוך בנייר,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}\int_{U_i^M\times U_i^N}\varphi_i(\alpha_i(x,y))f(\alpha_i(x,y))V(D\alpha_i|_{(x,y)})\,dx\,dy\\
&\overset{(1)}{=}\sum_{i=1}^{k}\int_{U_i^M}\left(\int_{U_i^N}\varphi_i(\alpha_i(x,y))f(\alpha_i(x,y))V(D\alpha_i|_{(x,y)})\,dy\right)\,dx\\
&\overset{(2)}{=}\sum_{i=1}^{k}\int_{U_i^M}\left(\sum_{j=1}^{k}\int_{U_i^N}\varphi_i^M(\alpha_i^M(x))\varphi_j^N(\alpha_j^N(y))f(\alpha_i(x,y))V(D\alpha_i|_{(x,y)})\,dy\right)\,dx\\
&\overset{(3)}{=}\sum_{i=1}^{k}\int_{U_i^M}\left(\varphi_i^M(\alpha_i^M(x))\sum_{j=1}^{k}\int_{U_i^N}\varphi_j^N(\alpha_j^N(y))f(\alpha_i(x,y))V(D\alpha_i^N|_{y})\,dy\right)V(D\alpha_i^M|_{(x)})\,dx\\
&=\sum_{i=1}^{k}\int_{U_i^M}\left(\varphi_i^M(\alpha_i^M(x))\int_N f(x,y)\,d\,\mathrm{vol}_n\right)V(D\alpha_i^M|_{(x)})\,dx\\
&=\int_M\left(\int_N f\,d\,\mathrm{vol}_n\right)\,d\,\mathrm{vol}_m
\end{aligned}
$$

כאשר,

1. משפט פוביני לאינטגרלים רב־משתניים
2. הוספת סכום ומציין יחידה
3. כפליות דטרמיננטת בלוקים

$\square$

שאלה 4

תהי M^k יריעה קומפקטית ונניח ש־M_1^k, M_2^k שתי יריעות קומפקטיות עם שפה המקיימות,

$$M_1 \cup M_2 = M, \quad M_1 \cap M_2 = \partial M_1 = \partial M_2 = \Gamma$$

נניח ש־$f : M \to \mathbb{R}$ רציפה, אנו נראה כי,

$$\int_M f \, d\operatorname{vol}_k = \int_{M_1} f \, d\operatorname{vol}_k + \int_{M_2} f \, d\operatorname{vol}_k$$

הוכחה. נניח ש־$\{\alpha_i : U_i \to W_i\}_{i=1}^l$ פרמטריזציות מקומיות של M המכסות אותה. נניח גם כי כל פרמטריזציה מושרית מנקודה ב־Γ או זרה ל־Γ. מותר לנו להניח כך שכן נוכל לקחת כיסוי פתוח מפרמטריזציות של Γ (היא קומפקטית) והרחבת הכיסוי לכל M ושימוש בחיתוכים סופיים. נניח ש־$\{\varphi_i : M \to W_i\}_{i=1}^l$ כיסוי יחידה הכפוף ל־$\{W_i\}$. מההנחה הנוספת נוכל גם להניח בלי הגבלת הכלליות כי קיימים $l_1 < l_2 < l$ כך ש־$W_i \subseteq M_1$ עבור $1 \le i \le l_1$, $W_i \subseteq M_2$ עבור $l_1 < i \le l_2$ ולכל $l_2 < i \le l$ ש־α_i מושרית מנקודה ב־Γ.

ממשפט מהתרגול לכל $l_2 < i \le l$, הפרמטריזציה α_i מקיימת,

$$\alpha_i(\mathbb{H}^k \cap U_i) \subseteq M_1, \qquad \alpha_i((-\mathbb{H}^k) \cap U_i) \subseteq M_2$$

ונסמן את שתי הפרמטריזציות המקומיות המושרות הללו α_i^1, α_i^2 בהתאמה.

נגדיר גם פירוק של φ_i ל־φ_i^1, φ_i^2 על־ידי מכפלה במציין 1_{M_1} ובמציין 1_{M_2} בהתאמה. עתה אנו מוכנים ויכולים לבחון את האינטגרל,

$$\begin{aligned}
&\int_M f \, d\operatorname{vol}_k \\
=&\sum_{i=1}^{l} \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x)) f(\alpha_i(x)) V(D\alpha_i|_x) \, dx \\
=&\sum_{i=1}^{l_1} \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x)) f(\alpha_i(x)) V(D\alpha_i|_x) \, dx \\
&+ \sum_{i=l_1+1}^{l_2} \int_{U_i} \varphi_i(\alpha_i(x)) f(\alpha_i(x)) V(D\alpha_i|_x) \, dx \\
&+ \sum_{i=l_2+1}^{l} \int_{U_i} \varphi_i^1(\alpha_i(x)) f(\alpha_i(x)) V(D\alpha_i|_x) \, dx \\
&+ \sum_{i=l_2+1}^{l} \int_{U_i} \varphi_i^2(\alpha_i(x)) f(\alpha_i(x)) V(D\alpha_i|_x) \, dx \\
=& \sum_{1 \le i \le l_1, l_2 < i \le l} \int_{U_i} \varphi_i^1(\alpha_i(x)) f(\alpha_i(x)) V(D\alpha_i|_x) \, dx \\
&+ \sum_{l_1 < i \le l} \int_{U_i} \varphi_i^2(\alpha_i(x)) f(\alpha_i(x)) V(D\alpha_i|_x) \, dx \\
=& \sum_{1 \le i \le l_1, l_2 < i \le l} \int_{U_i^1} \varphi_i^1(\alpha_i^1(x)) f(\alpha_i^1(x)) V(D\alpha_i^1|_x) \, dx \\
&+ \sum_{l_1 < i \le l} \int_{U_i^2} \varphi_i^2(\alpha_i^2(x)) f(\alpha_i^2(x)) V(D\alpha_i^2|_x) \, dx \\
=& \int_{M_1} f \, d\operatorname{vol}_k + \int_{M_2} f \, d\operatorname{vol}_k \,.
\end{aligned}$$

□