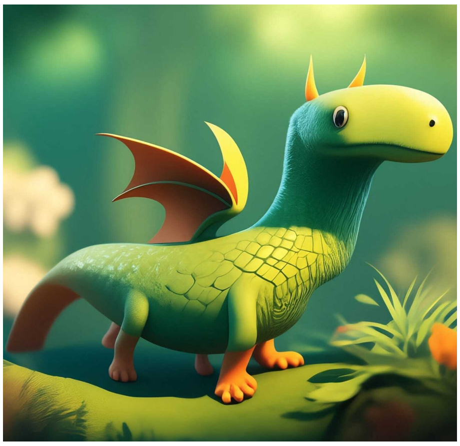
פתרון מטלה 02 — אנליזה על יריעות, 80426

1 באפריל 2025



שאלה 1

תהי U קבוצה פתוחה וקשירה ב־$\mathbb{R}^n$, בשאלה זו נוכיח ש־U קשירה באופן חלק.

סעיף ב'

נגדיר את היחס $\sim\subseteq U^2$ על־ידי $x \sim y$ אם ורק אם יש מסילה חלקה בין שתי הנקודות ב־U.
נראה שזהו יחס שקילות.

הוכחה. נראה שמתקיימים שלושת התנאים המגדירים יחס שקילות.

- **רפלקסיביות:** יהי $x \in U$, אז המסילה $\gamma : [x, x] \to x$ היא מסילה חלקה באופן ריק, ולכן נוכל להסיק ש־$x \sim x$.
- **סימטריה:** יהיו $x, y \in U$ כך ש־$x \sim y$, ותהי $\gamma : [0, 1] \to U$ המעידה על כך. נגדיר את המסילה $\mu : [0, 1] \to U$ כך ש־$\mu(t) = \gamma(1-t)$. נבחין כי $\mu(0) = y, \mu(1) = x$ וממשפט הרכבת פונקציות וחלקות $1 - t$ נוכל להסיק ש־μ חלקה, ובכך מעידה על $y \sim x$.
- **טרנזיטיביות:** נניח ש־$x \sim y, y \sim z$ וכן ש־$\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to U$ מעידות על כך בהתאמה. נגדיר את הפונקציה $h : [0, 1] \to [0, 1]$ המוגדרת על־ידי,
$$h(x) = \begin{cases} e \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$
בהרצאה ראינו כי היא חלקה וכן שהיא מתאפסת באפס, ונגדיר מסילה חדשה $\mu : [0, 2] \to U$ על־ידי,
$$\mu(t) = \begin{cases} \gamma_1(1 - h(1 - t)) & t \in [0, 1] \\ \gamma_2(h(t - 1)) & \text{else} \end{cases}$$
מהגדרתה כהרכבת פונקציות חלקות היא חלקה, אך עלינו להצדיק את הטענה כי היא חלקה גם ב־$t = 1$. אנו יודעים כי $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = y$ מהגדרתן, וכן ממשפט נגזרת הרכבת פונקציות אנו יודעים כי $\lim_{t\to1^-} \mu(t) = 0 = \lim_{t\to1^+} \mu(t)$ מבדיקה ישירה והטענות מההרצאה על h.

בהתאם מצאנו כי $\sim$ אכן יחס שקילות. $\square$

סעיף ג'

תהי $A = U/\sim$, נראה שכל $W \in A$ היא פתוחה.

הוכחה. נתחיל ונבהיר ש־A היא חלוקה של U ולכן חלוקה של הנקודות בה לקבוצות, בהתאם $W \subseteq U$ קבוצה כלשהי, ונרצה להראות שהיא פתוחה. תהי $x \in W$ נקודה כלשהי, ויהי $B(x, \epsilon) \subseteq U$ עבור $\epsilon > 0$ כלשהו, אנו יודעים כי קיים כדור כזה מפתיחות U ב־$\mathbb{R}^n$. לכל $y \in B(x, \epsilon)$ נבנה $\gamma : [0, 1] \to U$ על־ידי $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$, זוהי כמובן מסילה חלקה ומעידה על $x \sim y$. לכן נוכל להסיק ש־$B(x, \epsilon) \subseteq W$, ובהתאם W היא קבוצה פתוחה. $\square$

סעיף ד'

נסיק ש־$A = \{U\}$.

הוכחה. נראה שכל $W \in A$ היא קבוצה סגורה. תהי $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq W$ כך ש־$\lim_{i\to\infty} x_n = x$ עבור $x \in U$. נוכל לבנות סדרת מסילות $\gamma_i : [0, 1] \to U$ המעידות על $x_i \sim x_{i+1}$, ונגדיר $\mu_i : [0, 1] \to U$ על־ידי $\mu_i = \sum_{j=1}^{i} \gamma_i$. מטרנזיטיביות נסיק שקיימת μ_i חלקה, לכן ממשפט ויירשטראס להתכנסות במידה שווה גם $\mu = \lim_{i\to\infty} \mu_i$ מוגדרת וחלקה, ומקיימת $\mu(0) = x_1, \mu(1) = x$, לכן $x \in W$. נסיק אם כך ש־W היא פתוחה (סעיף קודם) וסגורה, ולכן $W \in \{U, \emptyset\}$, אבל מהגדרתה כמחלקת שקילות לא יתכן שהיא ריקה, לכן $W = U$. $\square$

שאלה 2

סעיף א׳

תהינה $A, B \in \mathbb{R}^n$. נראה שהמסילה הקצרה ביותר המחברת את A, B היא מסילה ישרה.

הוכחה. נתחיל בחישוב אורך המסילה הישרה בין הנקודות, נגדיר $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ על־ידי $\lambda(t) = (1-t)A + tB$, ונחשב,

$$\int_\lambda 1 \; dl = \int_0^1 \|B - A\| \; dl = \|B - A\|$$

תוצאה זו כמובן לא אמורה להפתיע אותנו, זאת שכן המסילה הישרה מתלכדת עם הגדרת הנורמה במרחב.

נניח ש־$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ מסילה כך ש־$\gamma(0) = A, \gamma(1) = B$, ונבחין כי מתקיים,

$$\|A - B\| = \left| \int_0^1 \dot{\gamma}(t) \; dt \right| \le \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \; dt = \int_\gamma 1 \; dl$$

ישירות מאי־שוויון קושי־שוורץ והמשפט היסודי. □

סעיף ב׳

נראה שיש שוויון במהלך של הסעיף הקודם אם ורק אם $\gamma(t) \in \{sB - (1-s)A \mid s \in [0,1]\}$ לכל $t \in [a,b]$.

הוכחה. נניח שמתקיים שוויון, ונניח בשלילה שיש נקודה $x_0 \in \gamma([a,b])$ כך ש־$x_0 \notin \lambda([0,1])$, ונניח גם ש־$\gamma(t_0) = x_0$,

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 \; dl = \int_0^{t_0} \|\dot{\gamma}(t)\| \; dt + \int_{t_0}^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \; dt \ge \|x_0 - A\| + \|B - x_0\| > \|B - A\|$$

כאשר המעברים האחרונים מוצדקים על־ידי סעיף א׳ ואי־שוויון המשולש. קיבלנו סתירה לטענה, לכן אין x_0 כזה, וקיבלנו $\operatorname{Im}\gamma = \operatorname{Im}\lambda$.

נניח שהתנאי השני מתקיים עבור γ, וניזכר כי היא חד־חד ערכית, ולכן קיים דיפאומורפיזם φ כך ש־$\bar{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, עבור המסילה באורך סטנדרטי, כלומר $\|\dot{\bar{\gamma}}\| = 1$. נסיק שמתקיים $\bar{\gamma} = \lambda$, ונסיק מהחלק הראשון של ההוכחה של סעיף א׳ את המבוקש. □

שאלה 3

יהי שדה וקטורי $\vec{F}:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2$ המוגדר על־ידי $\vec{F}(x,y)=\frac{(-y,x)}{r^2}$ עבור $r=\|(x,y)\|$.

סעיף א׳

נניח ש־$n\in\mathbb{N}$ ותהי $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על־ידי $\gamma(t)=(\cos(2\pi nt),\sin(2\pi nt))$.
נראה ש־$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{\gamma}=2\pi n$.

הוכחה. נחשב,

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{\gamma}=\int_0^1 \vec{F}(t)\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt=2\pi n\int_0^1 \frac{(-\sin(2\pi nt),\cos(2\pi nt))}{\cos^2(2\pi nt)+\sin^2(2\pi nt)}\cdot(-\sin(2\pi nt),\cos(2\pi nt))\,dt=2\pi n\int_0^1 1\,dt=2\pi n$$

ונובע ישירות מהגדרה שהטענה נכונה. □

סעיף ב׳

נראה ש־$\vec{F}$ היא משמרת מקומית אבל לא משמרת.

הוכחה. נבחין כי,

$$\frac{\partial\vec{F}_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\partial\vec{F}_y}{\partial x}$$

כלומר $\vec{F}$ מקיים את התנאי לשימור מקומי. למרות זאת, בסעיף הקודם מצאנו שעבור $n=1$ מתקיים $\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{\gamma}\neq 0$, וזאת למרות ש־ $\vec{F}(0)-\vec{F}(0)=0$, כלומר $\vec{F}$ היא משמרת מקומית אבל לא משמרת. □

סעיף ג׳

תהי $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ מסילה סגורה גזירה ברציפות. נניח שקיימת קרן $R=\mathbb{R}_{>0}\cdot v$ עבור $v\in\mathbb{R}^2$ כך ש־$\gamma([0,1])\subseteq\mathbb{R}^2\setminus R$.
נראה ש־$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{\gamma}=0$.

הוכחה. נגדיר $\vec{G}=\vec{F}\restriction\mathbb{R}^2\setminus R$. התחום המדובר הוא פשוט קשר וכן $\vec{G}$ משמרת מקומית בתחום, לכן תנאי משפט התנאי המספיק לגרירת שימור משימור מקומי חל, ונובע כי $\vec{G}$ היא משמרת, בהתאם נובע,

$$\int_\gamma \vec{G}\,d\vec{\gamma}=\vec{G}(0)-\vec{G}(0)=0$$

אבל בכל $x\in\gamma([0,1])$ מתקיים $\vec{G}(x)=\vec{F}(x)$, ונוכל להסיק כי גם האינטגרלים שלהם מזדהים בתחום. □