פתרון מטלה 10 — אנליזה פונקציונלית, 80417

15 ביוני 2025

שאלה 1

לכל $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות ו־2π־מחזוריות נגדיר,

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)\, du$$

סעיף א׳

נראה שאם $g \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ אז $f * g \in C[-\pi, \pi]$.

הוכחה. מהנתון g רציפה, 2π־מחזורית ובפרט אינטגרבילית רימן. עוד נתון כי f אינטגרבילית, לאו דווקה רציפה, אך מחזורית. נבחין כי $f(x-u)g(u)$ היא פונקציה אינטגרבילית ומתקיים,

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)\, du$$

היא פונקציה רציפה בכל נקודה, ואילו היא לא רציפה בנקודה, אז זוהי נקודת אי־רציפות מסדר שני ובפרט גם ל־$|f|$ בהכרח שואפת לאינסוף באחד מהקצוות של הנקודה הזו. אבל במקרה זה היא לא אינטגרבילית רימן. $\square$

סעיף ב׳

נראה שאם $g \in \tilde{C}^1[-\pi, \pi]$ אז $f * g \in C^1[-\pi, \pi]$, וכן שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים,

$$(f * g)'(x) = (f * g')(x)$$

הוכחה. אם $F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(u)\, du$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)\, du = -F(x-u)g(u)|_{u=-\pi}^{u=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -F(x-u)g'(u)\, du = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} F(x-u)g'(u)\, du$$

כלומר,

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x-u)g'(u)\, du = (F * g')(x) = (g' * F)(x)$$

F רציפה כקדומה ו־g' רציפה שכן $g \in C^1[-\pi, \pi]$. לכן,

$$\begin{aligned}
(f * g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((f * g)(x+h) - (f * g)(x)) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u) - f(x-u-h)g(u+h)\, du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u) - f(x-u-h)g(u) + f(x-u-h)(g(u) - g(u+h))\, du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x-u-h))g(u) + f(x-u-h)(g(u) - g(u+h))\, du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((f(x-u) - f(x-u-h)) * g(u)) + \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g'(u)\, du \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((F(x-u) - F(x-u-h)) * g'(u)) + (f * g')(x) \\
&= (f * g')(x)
\end{aligned}$$

והטענה נובעת ממחזוריות ומגזירות הפונקציה הקדומה של f. $\square$

שאלה 2

סעיף א׳

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים,

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{C}{n}$$

ובנוסף הסדרה $y_m = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n$ המתכנסת ל־$A \in \mathbb{R}$. נראה שגם הסדרה x_n מתכנסת ל־A.

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$C = 1, A = 0$, זאת שכן חלוקה בקבוע וחיסור בקבוע לא משפיעים על התכנסות. נניח בשלילה ש־x_n לא מתכנסת ל־0, לכן קיים $\delta > 0$ כך שקיימת תת־סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־$\delta \le x_{n_k}$ לכל k (בלי הגבלת הכלליות). מהנחת השלילה על ההתכנסות לכל k יש אינסוף ערכי $n > n_k$ כך ש־$\frac{\delta}{2} < x_n$, ולכן נוכל להסיק מהצפיפות שלהם ועבור n_k גדול מספיק יחד עם,

$$|x_{n+m} - x_n| \le \frac{m}{n}$$

שבהכרח $\frac{\delta}{2} < x_n$ תמיד, כלומר אם נבחר $\epsilon = \frac{1}{n}$ עבור n זה נקבל ש־y_{n_k} חסומה על־ידי $\frac{\delta}{2}$ אבל $\frac{\delta}{2} < x_n$ ואף $\delta < x_{n_k}$. נסיק אם כך ש־$\frac{\delta}{2} y_n$ עבור n גדול מספיק, וזו סתירה. □

סעיף ב׳

נסיק שאם f אינטגרבילית רימן בקטע $[-\pi, \pi]$ אז קיים $C > 0$ כך שלכל n, מקדמי פורייה של f מקיימים,

$$|a_n|, |b_n| \le \frac{C}{n}$$

ויש $x_0 \in [-\pi, \pi]$ כך שמתקיים $K_M * f(x_0) \to A$ אז גם $D_n * f(x_0) \to A$.

הוכחה. TODO □

שאלה 3

סעיף א׳

נראה שאם V סוף־מימדי ו־$U \subseteq V$ סגורה, אז לכל $v \in V$ קיים $u \in U$ כך ש־$\|u-v\| = \operatorname{dist}(U, v)$.

הוכחה. מהנתון לכל $\epsilon > 0$ קיים $u_\epsilon \in U$ כך ש־$\|v - u_\epsilon\| \le \operatorname{dist}(U, v)$. בפרט עבור $\epsilon = \frac{1}{n}$ נקבל $u_n = u_{\frac{1}{n}}$ איבר המקיים זאת, ולכן $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subseteq U$ סדרה כך ש־$\operatorname{dist}(U, v) \to \|v - u_n\|$. נבחר $U' = U \cap \overline{B}(v, 2\operatorname{dist}(U, v))$, אז $u_n \in U'$ לכמעט כל n, וזו קבוצה סגורה וחסומה, לכן היא קומפקטית ויש לה תת־סדרה מתכנסת u_{n_k}, הנקודה הגבולית שלה u מקיימת $u \in U' \subseteq U$, ובנוסף $\|u - v\| \le \operatorname{dist}(U, v) + \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, לכן בפרט $\|u - v\| = \operatorname{dist}(U, v)$ ונובע שהמרחק אכן מתקבל. □

סעיף ב׳

במרחב $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ נמצא דוגמה לקבוצה $U \subseteq \mathbb{R}^2$ סגורה וקמורה ולאיבר $v \in \mathbb{R}^2$ כך שקיימים אינסוף $u \in U$ המקיימים $\|u - v\|_\infty = \operatorname{dist}(U, v)$.

פתרון נבחר את הדיסק $U = \overline{A}_1^2(0)$ ואת הנקודה $v = 0$, אז $\operatorname{dist}(U, v) = 1$ וכן $\|v - u\|_\infty = 1$ לכל $u \in \partial B(0, 1)$.