גאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית — סיכום

20 באוקטובר 2025

תוכן העניינים

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 20.10.2025

1.1 מבוא

גאומטריה היא אבן יסוד של החברה שלנו, והיא לוקחת חלק בכל תהליך בנייה תכנון ומדידה. לאורך ההיסטוריה היה חקר של גאומטריה באיזשהו אופן נאיבי, אך אנו נעסוק בחקר של הגאומטריה באופן האקסיומטי שלה. אנו נעסוק בחקר של צורות חלקות, כלומר שאפשר ללטף אותן, תוך שימוש בכלים שראינו באנליזה. הרעיון בקורס הוא לגשת בצורה אלמנטרית לבעיות לאו דווקא מורכבות בגישה שהיא גאומטרית. הצורות שנחקור הן יריעות, ככל הנראה יריעות חלקות.

1.2 הגישה הסינתטית

המתמטיקה המודרנית מתבססת על תורת הקבוצות, לכן עלינו לספק הגדרה קבוצתית הולמת למושג המישור.

הגדרה 1.1 (ישרים מקבילים) שני ישרים נקראים מקבילים אם הם מתלכדים או אינם נחתכים.

הגדרה 1.2 (קולינאריות) נאמר שקבוצה של נקודות הן קולינאריות כאשר כל הנקודות שייכות לישר אחד.

הגדרה 1.3 (מישור אפיני) זוג סדור $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ כאשר $\mathcal{P}$ קבוצה שאת ערכיה נכנה נקודות ו־$\mathcal{L}$ קבוצה של קבוצות של נקודות, אותן נכנה ישרים. זוג סדור זה יקרא מישור אפיני אם הוא מקיים את התכונות הבאות,

1. לכל שתי נקודות יש ישר יחיד המכיל את שתיהן
2. לכל ישר ונקודה קיים ישר יחיד מקביל לישר העובר דרך הנקודה
3. קיימות שלוש נקודות שאינן קולינאריות

נעבור למשפט יסודי שמדגים את אופי המישור האפיני.

משפט 1.4 (מספר נקודות מינימלי במישור אפיני) *יהי מרחב אפיני $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, אז ב־$\mathcal{P}$ לפחות 4 נקודות.*

הוכחה. יהיו $P, Q, R \in \mathcal{P}$ נקודות שונות ולא קולינאריות. נסמן גם $l = \langle P, Q\rangle, m = \langle P, R\rangle$ שני הישרים העוברים דרך הנקודות המתאימות. נסמן את $P \ni m' \parallel m, R \ni l' \parallel l$, וגם את $\{S\} = l' \cap m'$ עבור $S \in P$. אנו טוענים כי S קיימת וכי היא נקודה רביעית.

נטען טענת עזר, והיא ש־$l' \not\parallel m'$. אילו $l' \parallel m'$ אז מטרנזיטיביות יחס השקילות המושרה מיחס ההקבלה היה נובע כי $l \parallel l' \parallel m' \parallel m$, אבל אז מהתכונה השנייה של מישור אפיני היה מתקבל ש־$l = m$ בסתירה לבחירת P, Q, R.

אם $S \in \{P, Q\}$ אז היה נובע ש־$l = l'$ ולכן גם $R \in l$, בסתירה. אם באופן שקול $S \in \{P, R\}$ אז נקבל סתירה דומה, ולכן נותר להניח ש־S קיימת ושונה מ־P, Q, R. $\square$

שני התרגילים הבאים יאפשרו לנו לתרגל את הגישה הסינתטית.

תרגיל 1.1 הוכיחו כי כל ישר מכיל לפחות שתי נקודות שונות.

תרגיל 1.2 הוכיחו כי יחס ההקבלה בין ישרים הוא יחס שקילות.

נבחן את המודל אשר כולל את P, Q, R, S ואת הישרים $l, l', m, m', \langle Q, R\rangle, \langle P, S\rangle$. זהו המודל המינימלי אשר עומד בהגדרת המישור האפיני, ולמעשה מהווה הדוגמה הפשוטה ביותר לאחד כזה.

1.3 הגישה האנליטית

עתה כאשר בחנו את המישור מבחינה סינתטית אנו יכולים לעבור לבחון את המרחב באופן אנליטי.

הגדרה 1.5 (מודל אנליטי) יהי $\mathbb{F}$ שדה ונסמן $\mathcal{P} = \mathbb{F}^2$ וכן את הישרים שהם קבוצת השורשים של משוואות מהצורה $ax + by + c = 0$ עבור $a, b, c \in \mathbb{F}$ ו־$a, b \neq 0$. במקרה זה ישרים מקבילים אם ורק אם a, b המגדירים את הישרים שווים.

1.4 מרחבים אפיניים

נראה עתה את ההגדרה שתאפשר לנו לדון במרחבים, בנקודות ובכיוונים, קרי ווקטורים.

הגדרה 1.6 (מרחב אפיני) יהי $\mathbb{F}$ שדה. מרחב אפיני נתון על־ידי שלשה (E, V, t) כאשר E קבוצה של נקודות, V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ו־$t : E \times V \to E$ אשר מסומנת גם $(P, v) \mapsto P + v$. t מלשון translation, היא פונקציית ההזזה, מקיימת את התכונות הבאות,

1. אסוציאטיביות: $(P + v) + w = P + (v + w)$ לכל $P \in E, v, w \in V$
2. איבר נייטרלי: $P + 0 = P$ לכל $P \in E$
3. חד־חד ערכיות ברכיב השני: לכל $P, Q \in E$ קיים $v \in V$ יחיד כך שמתקיים $P + v = Q$, נסמן $v = \overrightarrow{PQ}$

דוגמה 1.1 אם V מרחב וקטורי כלשהו, אז $(V, V, +)$ הוא מרחב אפיני.

דוגמה 1.2 יהיו $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ו־$f : I \to \mathbb{R}$ רציפה.
נסמן $E = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F' = f\}$ וכן $V = \mathbb{R}$, ולבסוף גם $(F, c) \mapsto F + c$.
אז זהו מרחב אפיני, והמימד שלו הוא בדיוק 1.

הגדרות ומשפטים