

פתרון מטלה 10 – חישוביות וקוגניציה, 6119

30 בינואר 2026



שאלה 1

סעיף א'

i

נקבל מרציפות שהרעש שקול לאפס ולכן התוצאה והמדידה שוות, כלומר $x = r$, ונסיק שאפשר לבחור את r .

ii

כאשר השונות שואפת לאינסוף נקבל שהרעש הוא אחד ואי־אפשר לבדל נקודה שסביר לבחור.

iii

זהו מצב שקול למצב ש- $x = r_0$ ולכן נקבל שתמיד כדאי לבחור את r_0 .

סעיף ב'

i

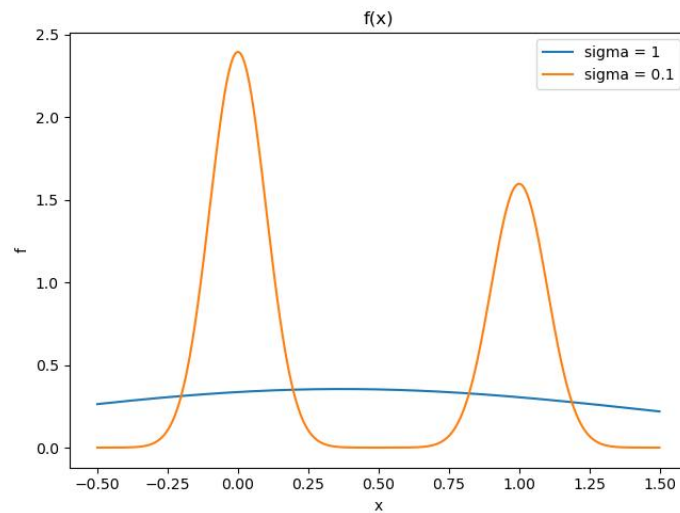
נבחין כי נתון ש- $n \sim N(0, \sigma^2)$ וכן $x = r + n$ ולכן $x | r \sim N(0, \sigma^2)$, כלומר,

$$f(x | r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}\right).$$

ועתה נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה,

$$f(x) = \sum_{r \in \text{Supp } r} f(x | r) \mathbb{P}(r) = f(x | 1) \mathbb{P}(1) + f(x | 0) \mathbb{P}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(p \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}\right) + (1-p) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right).$$

ונציג את $f(x)$ עבור $p = \frac{3}{4}$ ו- $\sigma \in \{0.1, 1\}$.



מהגרף אנו למדים שככל שיש פחות שגיאה כך ניתן לשער מה הנקודה ביתר קלות.

ii

נרצה למצוא את \hat{r} עבור תוצאת מדידה x , כלומר נמצא את הסף עבורו $\hat{r} = 1$.

פתרון נבחין כי ישנן רק שתי אפשרויות, או שנבחר $\hat{r} = 1$ או ש- $\hat{r} = 0$ ולכן עלינו להבין מה ההסתברות בשתי הנקודות האלה בלבד,

$$f(r = 1 | x) = \frac{f(r = 1) f(x | r = 1)}{f(x)} = p \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{f(x)}.$$

ונוכל לקבל תוצאה נומרית עבור ערכים אלה. עבור $p = \frac{1}{2}$ נקבל סימטריה ולא תהיה נקודה כזו.

סעיף ג'

נניח ש- $f(r) \sim N(\mu_r, \sigma_r^2)$.

i

נקבל ש- $f(r, \sigma^2)N(\mu_r, \sigma_r^2)$. אבל בתרגול ראינו שזוהי גם התפלגות נורמלית עם $\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2 \sigma_r^2}{\sigma^2 + \sigma_r^2}$ ו- $\mu_1 = \frac{r\sigma_r^2 + \mu_r \sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_r^2}$. לכן נקבל ש- $\hat{r} = \mu_1$.

ii

לפי הגרף $\mathbb{E}(\hat{r} | r = 1) = \mu_1 = 1$ וקיבלנו ש- $\sigma_r = 1$ וכשנציב,

$$1 = \frac{0 + \mu_r \sigma^2}{1 + \sigma^2} \iff (\mu_r - 1)\sigma^2 = 1.$$

ולכן $\sigma^2 = \frac{1}{\mu_r - 1}$ ונשאר למצוא את μ_r . קיבלנו שעבור $r = 1$ מתקבל $\mathbb{E}(\hat{r}) = \frac{3}{2}$ ולכן,

$$\frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 1 + \mu_r \cdot \frac{1}{\mu_r - 1}}{\frac{1}{\mu_r - 1} + 1} \iff 3 \frac{1 + \mu_r - 1}{\mu_r - 1} = 2 \frac{\mu_r - 1 + \mu_r}{\mu_r - 1} \iff 3\mu_r = 4\mu_r - 2.$$

ונחליץ ש- $\mu_r = 2$.

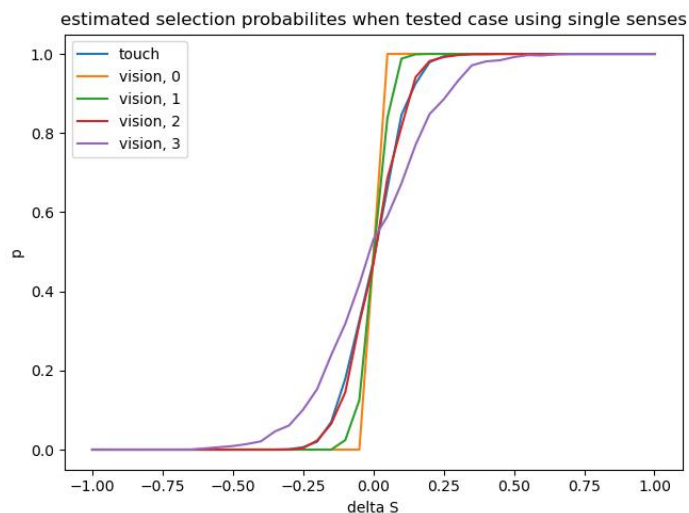
iii

נקבל שהיא פשוט לא שערכה בהקשר לנתונים שהיו לה, שהרי מהשוויונות שמצאנו בסעיפים הקודמים אנו יודעים שהמספר שהיא הייתה אמורה לבחור היה קטן מ-1.

שאלה 2

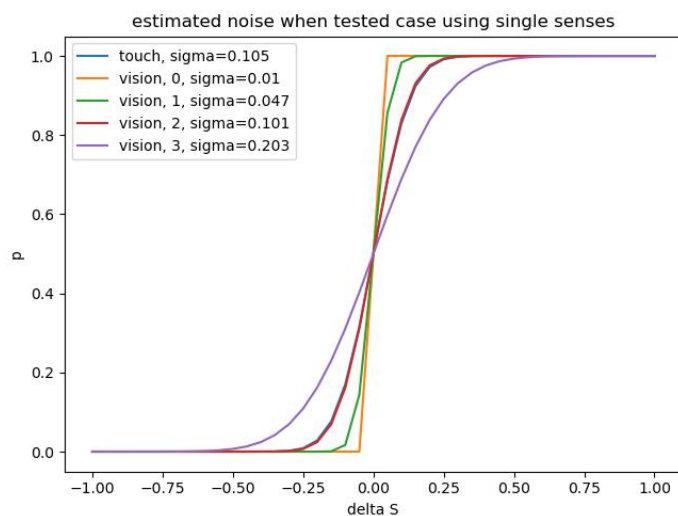
סעיף א'

נציג את העקומות,



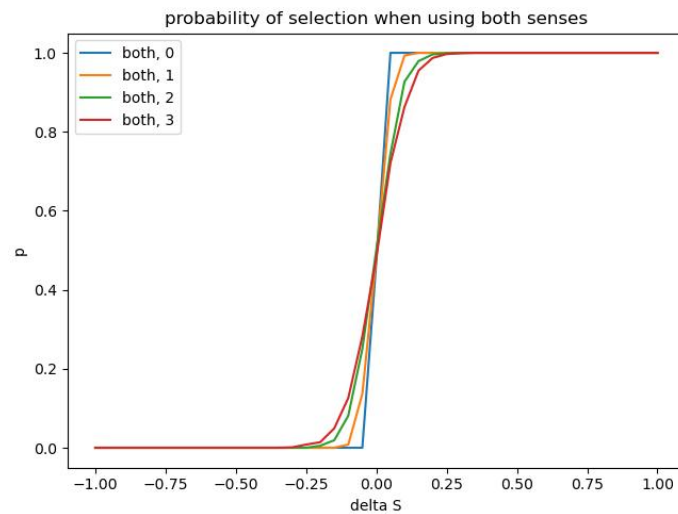
סעיף ב'

נציג את הגרף המתקבל מתהליך החישוב,



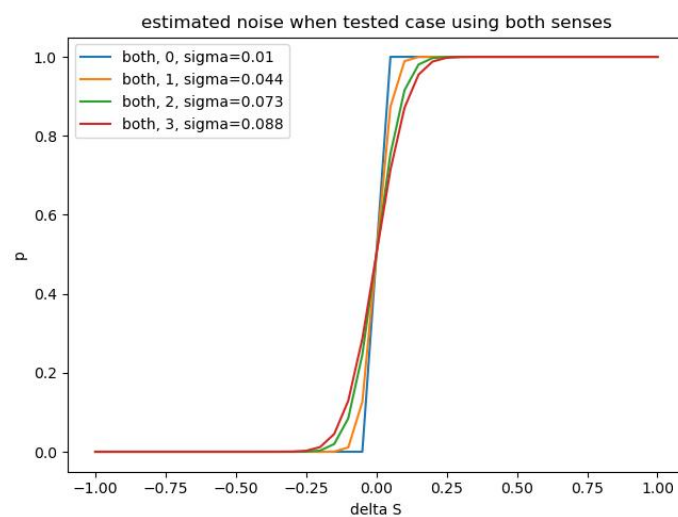
סעיף ג'

נציג את העקומות,



סעיף ד'

נציג את הגרף המתקבל מתהליך החישוב,



סעיף ה'

נציג את כרף התאמת סטיית התקן,

