פתרון מטלה 9 — תורת המידה, 80517

27 בדצמבר 2025

שאלה 1

יהי $(X, \mathcal{A}, \nu)$ מרחב מידה σ־סופי עם הפירוק $X = \biguplus_{n=1}^{\infty} X_n$ עם $\nu(X_n) < \infty$, ונגדיר,
$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(E \cap X_n)}{2^n(\nu(X_n) + 1)}$$
ראינו כי μ סופית וכן ש־$\mu \ll \nu$.

סעיף א׳

נראה ש־μ ו־ν שקולות.

הוכחה. מהגדרת שקילות מספיק להוכיח שגם $\nu \ll \mu$, כלומר ש־$\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$.
תהי $E \in \mathcal{A}$ כך ש־$\mu(E) = 0$. מאי־שליליות נובע שמתקיים,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\nu(E \cap X_n)}{2^n(\nu(X_n) + 1)} = 0$$
אבל המכנה חיובי בהחלט לכל n ולכן בפרט נובע ש־$\nu(E \cap X_n) = 0$. לבסוף מ־σ־אדיטיביות נקבל,
$$\nu(E) = \nu(\biguplus_{n=1}^{\infty} E \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap X_n) = 0$$
כמבוקש. $\square$

סעיף ב׳

נחשב את נגזרות רדון־ניקודים $\frac{d\nu}{d\mu}$ ו־$\frac{d\mu}{d\nu}$.
פתרון נסמן $h = \frac{d\nu}{d\mu}$, כלומר,
$$\int f\ d\nu = \int fh\ d\mu$$
לכל f מדידה.
אם נבחר $f = \mathbb{1}_{X_n}$ אז בפרט נקבל,
$$\nu(X_n) = \int f\ d\nu = \int fh\ d\mu = \int_{X_n} \frac{h}{2^n(\nu(X_n) + 1)}\ d\nu$$
כאשר המעבר האחרון נובע ממעבר דרך פשוטות. אז קיבלנו שמתקיים,
$$\int_{X_n} h\ d\nu = \nu(X_n) 2^n(\nu(X_n) + 1)$$
ובאותו אופן נובע שגם,
$$\int_E h\ d\mu = \nu(E) 2^n(\nu(X_n) + 1)$$
כלומר,
$$\int_E 2^n(\nu(X_n) + 1)\ d\nu = \int_E h\ d\nu$$
עבור $E \subseteq X_n$ ולכן נסיק ש־$h(x) = 2^n(\nu(X_n) + 1)$ עבור $x \in X_n$.
מהצד השני נוכל להסיק שגם,
$$\frac{d\mu}{d\nu}(x) = \frac{1}{2^n(\nu(X_n) + 1)}$$
עבור n כך ש־$x \in X_n$.

שאלה 2

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ותהי $T : X \to X$ העתקה משמרת מידה, כלומר $T_* \mu = \mu$. תהי $f \in L^1(\mu)$ ונגדיר σ־אלגברה $\operatorname{inv}(T) \subseteq \mathcal{A}$ על־ידי,

$$\operatorname{inv}(T) = \{E \in \mathcal{A} \mid T^{-1}(E) = E\}$$

נזכיר את הגדרת התוחלת המותנית, אם $f \in L^1$ ובהינתן $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ σ־אלגברה אז נגדיר את $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$ להיות הפונקציה היחידה המדידה לפי $\mathcal{B}$ המקיימת,

$$\forall B \in \mathcal{B},\ \int_B \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})\, d\mu = \int_B f\, d\mu$$

וכן שמתקיים $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}) = \frac{d\mu_f}{d\mu}$ ב־$(X, \mathcal{B})$.

סעיף א׳

נראה ש־$g = \mathbb{E}(f \mid \operatorname{inv}(T))$ היא T־אינווריאנטית.

הוכחה. עלינו להראות ש־$g = g \circ T$ כמעט תמיד. נגדיר $E = \{x \mid g(x) \neq g(T(x))\}$ ונקבל שהטענה שקולה לטענה,

$$\mu(E) = 0.$$

נבחין שמתקיים $E = \{x \mid g(T^{-1}(x)) \neq g(x)\}$, כלומר $E \in \operatorname{inv}(T)$. בהתאם נובע,

$$\int_E |g - g \circ T|\, d\mu = \int_E |f - f \circ T|\, d\mu = \int_E |f - f \circ T|\, dT_* \mu = \int_E |f \circ T - f \circ T^2|\, d\mu = \int_{\limsup E} |f - f \circ T|\, d\mu = 0$$

כאשר המעבר האחרון נובע ממעבר לפונקציה פנימית. □

סעיף ב׳

נניח ש־T היא הפיכה וכי T^{-1} מדידה, ונראה שכל N ממידה 0 מוכלת בקבוצה אינווריאנטית ממידה 0.

הוכחה. נגדיר $N_0 = N$ וכן $N_{n+1} = T^{-1}(N_n)$. בהתאם נובע ש־$\mu(N_n) = 0$ לכל n. נסיק אם כך שגם $M = \limsup N_n$ היא קבוצה מדידה וש־$\mu(M) = 0$, אבל מהמטלה הקודמת נובע שהיא T־אינווריאנטית. □

סעיף ג׳

נניח ש־μ שלמה ותהי $\mathcal{C} = \overline{\operatorname{inv}(T)}$ ההשלמה של $\operatorname{inv}(T)$. נמצא את הקבוצות המרכיבות אותה.

פתרון תהי $E \in \mathcal{A}$. אז $\liminf E_n, \limsup E_n \in \mathcal{C}$ עבור $E_n = T^n(E)$. אם $\limsup E_n \setminus E$ ממידה 0 אז נוכל להסיק ש־$E \in \mathcal{C}$, ונרצה להראות שהטענה נכונה לכיוון ההפוך גם. תהי $E \in \mathcal{C}$, אז קיימת $E^1 \in \operatorname{inv}(T)$ $E \supseteq E^1$ כך ש־$E^0 = E \setminus E^1$ היא קבוצה ממידה 0. נבחין כי מהסעיף הקודם נובע ש־$E^0 \subseteq \limsup E_n$ וכן מהפיכות T נוכל להסיק שמתקיים $\limsup E_n = \limsup E_n^0 + \limsup_n^1$, לכן הטענה נובעת.

שאלה 3

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב הסתברות ו־$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ תת־σ־אלגברה.

סעיף א׳

נראה ש־$L^2(\mathcal{B}) \subseteq L^2(\mathcal{A})$.

הוכחה. תהי $[f] \in L^2(\mathcal{B})$, אז $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה ב־$\mathcal{B}$ וכן $\|f\|_2 < \infty$. אבל $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{A}$ ולכן גם f מדידה ב־$\mathcal{A}$, אבל $\|f\|_2 < \infty$ כנביעה מיחידות האינטגרל ולכן $[f] \in L^2(\mathcal{A})$ כפי שרצינו. □

סעיף ב׳

נניח ש־$f \in L^2(\mathcal{A})$ ו־$g \in L^2(\mathcal{B})$ חיוביות, ונגדיר את μ_f, μ_{fg} להיות מידות האינטגרציה המתאימות ל־f, fg.
נראה ש־$\mu_{fg} \ll \mu_f$ וכן ש־$\frac{d\mu_{fg}}{d\mu_f} = g$.

הוכחה. תהי $E \in \mathcal{A}$ כך ש־$\mu_f(E) = 0$ ונראה ש־$\mu_{fg}(E) = 0$.

$$0 = \mu_f(E) = \int_E f \, d\mu$$

נתון כי $f, g > 0$ ולכן אם $s \leq f$ פשוטה אז $\int_E s \, d\mu = 0$, כלומר $s \restriction E =_\mu 0$. אם כך נסיק שאם $r \leq g$ פשוטה, אז $sr \restriction E =_\mu 0$ ובהתאם משרירותיות s, r נובע ש־$\mu_{fg}(E) = 0$.

נעבור לחלק השני של הטענה, תהי $h \geq 0$ מדידה כלשהי.

$$\int h \, d\mu_{fg} = \int hfg \, d\mu = \int hg \, d\mu_f$$

כלומר קיבלנו שישירות מהגדרת נגזרת רדון־ניקודים מתקיים $g = \frac{d\mu_{fg}}{\mu_f}$. □

סעיף ג׳

נראה ש־f, g הן L^1 (בהתאמה) וכן נראה שמתקיים,

$$\mathbb{E}(fg \mid \mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$$

הוכחה. ניזכר ש־μ מידת הסתברות וכן ש־$f, g > 0$ ולכן $\|f\|_1 < \infty \iff \|f\|_2 < \infty$, כלומר שתי הפונקציות הן אכן L^1.

נניח ש־$h = \mathbb{E}(fg \mid \mathcal{B})$.

$$\int_E h \, d\mu_{fg} = \int_E hg \, d\mu_f = \int_E hgf \, d\mu.$$

נבחין כי אם $E \in \mathcal{A}$ אז מתקיים,

$$\int_E \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}) \, d\mu = \int_E f \, d\mu \implies \int_E g\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}) \, d\mu = \int_E gf \, d\mu = \int_E 1 \, d\mu_{fg}$$

וגם,

$$\int_E \mathbb{E}(fg \mid \mathcal{B}) \, d\mu = \int_E fg \, \mu = \int_E g \, \mu_f$$

ומשילוב השוויונות הטענה נובעת. □

סעיף ד׳

נראה ש־$\mathbb{E}(fg \mid \mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$ גם ללא ההנחה ש־$f, g > 0$ ונסיק שלכל $f \in L^2(\mathcal{A})$ הפונקציה $\mathbb{E}_f = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$ היא ההטלה האורתוגונלית של f על $L^2(\mathcal{B})$. כלומר נראה שמתקיים,

$$\forall g \in L^2(\mathcal{B}), \ \langle f - \mathbb{E}_f, g \rangle = 0$$

הוכחה. נוכל להשתמש בהגדרת מדידות ל־$\mathbb{C}$ כפירוק של פונקציות $0 \leq$ כדי לחזק את הטענה להיות נכונה עבור $f : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, אך נותר להראות את נכונותה גם עבור $f : X \to \mathbb{C}$, כלומר עלינו לאפשר מיפוי לאפס. נוכל לעשות זאת על־ידי הגדרה דומה לזו שראינו עבור שימוש במדידות $0 \leq$ כדי להגדיר את $\mathbb{C}$ אבל כך שאם $f = u^+ - u^- + iv^+ - iv^-$ אז נבחר את $u^+ + 1, u^- + 1$ ובכך נקבל את המבוקש.

מצאנו שמתקיים $\mathbb{E}(fg \mid \mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$ לכל $f \in L^2(\mathcal{A}), g \in L^2(\mathcal{B})$. נחשב,

$$\langle f - \mathbb{E}_f, g \rangle = \int (f - \mathbb{E}_f) g \, d\mu = \int fg - \mathbb{E}_f g \, d\mu = \int fg - \mathbb{E}(fg \mid \mathcal{B}) \, d\mu = \int fg - fg \, d\mu = 0$$

ונסיק ש־$\mathbb{E}_f$ היא ההעתקה האורתוגונלית של f על $L^2(\mathcal{B})$. $\square$

שאלה 4

סעיף א'

נניח ש־μ, ν מידות רדון על מרחב טופולוגי קומפקטי מקומית ו־σ־קומפקטי.
נראה שאם לכל U פתוחה מתקיים $\nu(U) = \mu(U)$ אז $\mu = \nu$.

הוכחה. מתקיים $\mu = \nu \iff \forall E \in \mathcal{A},\ \mu(E) = \nu(E)$ ולכן תהי $E \in \mathcal{A}$ מדידה. מרגולריות חיצונית של מידות רדון מתקיים,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid E \subseteq U, U \text{ is open}\} = \inf\{\nu(U) \mid E \subseteq U, U \text{ is open}\} = \nu(E)$$

וקיבלנו שוויון. □

סעיף ב'

תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ פונקציה C^1, חד־חד ערכית ועל כך ש־$\det(Df|_x) \ne 0$ לכל $x \in \mathbb{R}^n$. נסמן $\lambda_f = f_*\lambda$ עבור λ מידת לבג.
נראה ש־$\lambda_f \ll \lambda$ ונחשב את $h = \frac{d\lambda_f}{d\lambda}$.

הוכחה. ממשפט הפונקציה ההפוכה נובע ש־f היא דיפאומורפיזם C^1, ובפרט ניתן להשתמש בה במשפט החלפת משתנה. תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ מדידה עם $\lambda(E) = 0$. אז מתקיים,

$$\begin{aligned}
\lambda_f(E) &= \lambda(f^{-1}(E)) \\
&= \int_{f^{-1}(E)} 1\ d\lambda \\
&= \inf\left\{\int_{f^{-1}(U)} 1\ dx \mid E \subseteq U \in \tau\right\} \\
&= \inf\left\{\int_{f^{-1}(f(U))} |J(x)|\ dx \mid E \subseteq U \in \tau\right\} \\
&= \inf\left\{\int_{U} |J(x)|\ dx \mid E \subseteq U \in \tau\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

כנביעה מהתכנסות אינטגרל רימן בקבוצות ממידה אפס.

נעבור לחישוב h. אנו רוצים למצוא פונקציה המקיימת לכל g מדידה,

$$\int g\ d\lambda_f = \int gh\ d\lambda$$

בפרט עבור פתוחה U מתקיים,

$$\int_U g\ d\lambda_f = \int_U g\ df_*\lambda \overset{(1)}{=} \int_{f^{-1}(U)} g \circ f\ d\lambda = \int_{f^{-1}(U)} g \circ f\ dx \overset{(2)}{=} \int_U g \cdot |J^{-1}|\ dx = \int_U g \cdot |J^{-1}|\ d\lambda$$

כאשר,

1. נובע מטענה שהוכחה במטלה 2
2. החלפת משתנה

אז קיבלנו שעבור פתוחות $d\lambda_f = |J^{-1}|\ d\lambda$, ומסעיף א' והנכונות עבור פתוחות נוכל להסיק ש־$h = |J^{-1}|$ בדיוק. □