

פתרון מטלה 03 – אנליזה על יריעות, 80426

9 באפריל 2025



שאלה 1

יהי $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ עבור $U \subseteq \mathbb{R}^2$ שדה וקטורי. נניח שלכל מלבן $R \subseteq U$ האינטגרל בין שני הקצוות שווה לאינטגרל בין שני הקצוות האחרים. נראה ש- \vec{F} משמר.

הוכחה. האסטרטגיה שלנו היא להשתמש בחלוקה למלבנים לכל מסילה כללית $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ במטרה להראות שהאינטגרל על המסילה תלוי רק בנקודות קצה.

תהינה $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow U$ מסילות כלשהן כך שהן חולקות נקודות קצה. עבור $N \in \mathbb{N}$ נגדיר את הסדרה $\{x_n\}_{n=0}^N \subseteq U$ כך ש- $x_n = \gamma_1(a + (b-a)\frac{n}{N})$ כלומר זוהי חלוקה של המסילה. נבנה סדרת מלבנים כך שבין x_i, x_{i+1} נמצא מלבן לכל i , כך שנקודות אלה הן אלכסון המלבן, מטעמי נוחות נבחר את האלכסון הנותר כך שלכל המלבנים תהיה אוריינטציה זהה. נניח גם ש- $ABCD$ מלבן שאלכסונו הוא $\gamma_1(a), \gamma_1(b)$ עם אוריינטציה זהה לזו של המלבנים בחלוקה. לבסוף נאריך את המלבנים בסדרה כך שצלע שלהם תשב על המלבן $ABCD$. מהנתון נובע שאם B_i הקודקודים של המלבנים בסדרה כפי שבחרנו, אז,

$$\int_{\gamma_{ADC}} \vec{F} dl = \sum_{i=0}^N \int_{\gamma_{x_i B_i x_{i+1}}} \vec{F} dl$$

ונקבל,

$$\int_{\gamma_{ADC}} \vec{F} dl \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{ADC}} \vec{F} dl = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \int_{\gamma_{x_i B_i x_{i+1}}} \vec{F} dl = \int_{\gamma_1} \vec{F} dl$$

אבל גם,

$$\int_{\gamma_{ADC}} \vec{F} dl = \int_{\gamma_2} \vec{F} dl$$

משקולים ודמים, ולכן נובע ש- \vec{F} משמר.

□

שאלה 2

נניח ש- $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z)$ בתחום $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\}$.

סעיף א'

נראה ש- \vec{F} משמר.

הוכחה. אילו קיימת $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ המעידה על שימור \vec{F} , אז מתקיים,

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \varphi_{yz}$$

באותו אופן נסיק כי גם,

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi = \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \varphi_{xz}$$

ולבסוף שגם,

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi = z \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} z^2 + \varphi_{xy}$$

נבחין אם כך שאם נגדיר $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2}(\ln(x^2 + y^2) + z^2)$ אז נקבל בתחום ש- φ היא פונקציה רציפה וגזירה, וכן ש- $\vec{F} = \nabla \varphi$, ולכן מהתנאי השקול לשימור נובע ש- \vec{F} אכן משמר. \square

סעיף ב'

נחשב את $\int_{\gamma} \vec{F} dl$ עבור $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ כאשר $t \in [0, 2\pi]$.

פתרון. נבחין כי התחום של המסילה הוא לא פשוט קשר, ולכן עלינו לחשב את האינטגרל ישירות מהגדרה,

$$\int_{\gamma} \vec{F} dl = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t}{1}, \frac{\sin t}{1}, t^2\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 2t) dt = \int_0^{2\pi} 0 + 2t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{2^4 \pi}{3}$$

שאלה 3

נניח ש- \mathbb{R}^n תחום פתוח.

סעיף ב'

נראה שמחלקות הקשירות המסילתית של U הן קבוצות פתוחות, וכן שכל רכיב קשירות מסילתית הוא קשיר מסילתית.

הוכחה. נניח ש- $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq U$ הן מחלקות הקשירות המסילתית, אז בהכרח $U = \biguplus_{i \in I} A_i$, כלומר זוהי חלוקה של U . אילו נניח שקיימת A_i לא פתוחה נקבל סתירה ישירה לפתיחות של U , לכן נסיק ש- A_i פתוחה לכל $i \in I$.

נניח עתה ש- $A \subseteq U$ הוא רכיב קשירות מסילתית, ונראה שהוא קשיר מסילתית. לכל $x, y \in A$ מתקיים $x \sim y$, כלומר יש מסילה ביניהם, ולכן מצאנו שהקבוצה A קשירה מסילתית. \square

סעיף ג'

נראה שמחלקות הקשירות של U הן קבוצות פתוחות, וכן שכל רכיב קשירות הוא קשיר.

הוכחה. החלק הראשון זהה בהוכחתו לזה שבסעיף הקודם.

נניח ש- $A \subseteq U$ רכיב קשירות. בהוכחה של יחס שקילות בתרגול ראינו כי אם A, B קבוצות קשירות כך שהן לא זרות, אז איחודן קשיר. נקבע אם כך $x \in A$, ונגדיר גם $B_y \subseteq A$ הקבוצה הקשירה המעידה על $x \simeq y$ לכל $y \in A$. נבחין כי בהכרח $U = \bigcup_{y \in A} B_y$, זאת שכן כל נקודה של U מופיעה באיחוד, וכן אילו יש נקודה באיחוד שלא ב- A אז קיבלנו סתירה להיותה רכיב קשירות. נקבל מהטענה הקודמת ש- U היא איחוד לא זר של קבוצות קשירות ולכן קשירה. \square

סעיף ד'

נראה שקבוצת מחלקות הקשירות (המסילתית) של U היא בת-מניה.

הוכחה. נניח ש- $\{A_i\}_{i \in I}$ רכיבי הקשירות (המסילתית), אז לכל $i \in I$ גם A_i היא פתוחה וקשירה (מסילתית). יהי $\epsilon > 0$ כך ש- $\text{diam}(A_i) < \epsilon$ לכל $i \in I$. נניח בשלילה ש- $|I| > \aleph_0$, ולכן נובע ש- $B_\epsilon(x_i)$ עבור כדורים המוכלים במחלקות הקשירות (המסילתית) היא בעצמה קבוצה של כדורים זרים, אבל ידוע כי ϵ -כיסוי של \mathbb{R}^n הוא בן-מניה בסתירה. \square

שאלה 4

עבור $a, b > 0$ תהי $E_{a,b} = \{(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ האליפסה עם הפרמטרים a, b . נשתמש במשפט גרין לתחומים פשוטים כדי להראות שמתקיים $\text{Area}(E_{a,b}) = \pi ab$.

פתרון TODO