פתרון מטלה 3 — תורת המידה, 80517

8 בנובמבר 2025

שאלה 1

נניח ש־$(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה.

סעיף א׳

נוכיח שאם $0 \le f \le g$ מדידות אז $\int_E f \, d\mu \le \int_E g \, d\mu$ לכל $E \in \mathcal{A}$.

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות $E = X$ אחרת נוכל לקחת $f \cdot \mathbb{1}_E, g \cdot \mathbb{1}_E$.
מהגדרה מתקיים,

$$\int f \, d\mu = \sup\{\int s \, d\mu \mid s \le f, s \text{ is simple}\}$$

אבל לכל s כזאת נקבל ש־$s \le f \le g$, כלומר,

$$\{\int s \, d\mu \mid s \le f, s \text{ is simple}\} \subseteq \{\int s \, d\mu \mid s \le g, s \text{ is simple}\}$$

ולכן נקבל שגם,

$$\sup\{\int s \, d\mu \mid s \le f, s \text{ is simple}\} \le \sup\{\int s \, d\mu \mid s \le g, s \text{ is simple}\}$$

ובהתאם נסיק $\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$. □

סעיף ב׳

נוכיח שאם $A \subseteq B$ מדידות ו־$0 \le f$ אז,

$$\int_A f \, d\mu \le \int_B f \, d\mu$$

הוכחה. נניח ש־$B = X$ שכן נוכל לקחת כמו בסעיף הקודם מציינים בהתאם.
נניח ש־$s \le f$ פשוטה ולכן,

$$s(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}$$

עבור $\alpha_n \in \mathbb{R}^+, E_n \in \mathcal{A}$, ובהתאם להגדרה,

$$\int_A s \, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cdot \mu(E_n \cap A) \le \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cdot \mu(E_n) = \int s \, d\mu$$

ולכן נסיק שגם $\int_A f \, d\mu \le \int f \, d\mu$. □

סעיף ג׳

יהי $0 \le c \le \infty$ ו־$0 \le f$, אז נראה ש־$\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$.

הוכחה. נניח ש־$E = X$ וכן תהי $s \le f$ פשוטה המסומנת כבסעיף הקודם. אז מתקיים,

$$\int cs \, d\mu = \sum_{n=1}^{N} c\alpha \cdot \mu(E_n) = c \sum_{n=1}^{N} \alpha \cdot \mu(E_n) = c \int s \, d\mu$$

כלומר התכונה מתקיימת לכל s פשוטה, ובפרט נסיק,

$$\begin{aligned}\int cf\ d\mu &= \sup\{\int cs\ d\mu \mid s \leq f, s \text{is simple } \}\\ &= \sup\{c\int s\ d\mu \mid s \leq f, s \text{is simple } \}\\ &= c\sup\{\int s\ d\mu \mid s \leq f, s \text{is simple } \}\\ &= c\int f\ d\mu\end{aligned}$$

כלומר הטענה מתקיימת. $\square$

שאלה 2

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה ונניח ש־$N \subseteq X$ מוכלת בקבוצה ממידה אפס, וכן ש־$f : N^C \to \mathbb{C}$ פונקציה. נראה שאם $f_1, f_2 : X \to \mathbb{C}$ הרחבות מדידות של f אז מתקיים,

$$\int f_1 \, d\mu = \int f_2 \, d\mu$$

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$N \in \mathcal{A}$ ממידה אפס, כלומר נבחר את הקבוצה שמעידה ש־N מוכלת בקבוצה כזו. נבחן גם את $f : N^C \to [0, \infty]$, שכן אם הטענה נכונה עבורה, אז מהגדרת האינטגרל על פונקציה מרוכבת, הטענה נובעת ישירות. נניח ש־$s \le f_1$ פשוטה כך ש־$s = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}$, אז מתקיים,

$$\int s \, d\mu = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(E_n) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu((E_n \cap N^C) \uplus (E_n \cap N)) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(E_n \cap N^C) = \int_{N^C} s \, d\mu$$

ולכן נסיק שגם,

$$\int f_1 \, d\mu = \sup\{\int s \, d\mu \mid s \le f_1, s \text{ is simple}\} = \sup\{\int_{N^C} s \, d\mu \mid s \le f_1, s \text{ is simple}\} = \int_{N^C} f_1 \, d\mu$$

אבל נתון כי $f_1 \equiv f_2$ על N^C, ולכן נובע $\int f_1 \, d\mu = \int f_2 \, d\mu$. □

שאלה 3

נעסוק עתה בדחיפה קדימה של מידה. יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה ונניח ש־$(Y,\mathcal{B})$ מרחב מדיד. ותהי $\rho : X \to Y$ העתקה מדידה. נגדיר את הדחיפה קדימה של μ על־ידי ρ על־ידי,

$$\forall E \in \mathcal{B},\ \rho_*\mu(E) = \mu(\rho^{-1}(E))$$

סעיף א׳

נראה ש־$\rho_*\mu$ היא מידה.

הוכחה. נניח ש־$\{E_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{B}$ סדרת מדידות זרות. אז מהגדרת תמונה הפוכה מתקיים $\rho^{-1}(\biguplus_{n=1}^\infty E_n) = \biguplus_{n=1}^\infty \rho^{-1}(E_n)$. מהגדרת μ כמידה נובע $\mu(\bigcup \rho^{-1}(E_n)) = \sum_{n=1}^\infty \mu(\rho^{-1}(E_n))$, כלומר קיבלנו שבדיוק $\rho_*\mu(\bigcup E_n) = \sum_{n=1}^\infty \rho_*\mu(E_n)$ כפי שרצינו. □

סעיף ב׳

נראה שלכל $f : Y \to [0,\infty]$ מדידה מתקיים,

$$\int_X (f \circ \rho)\, d\mu = \int_Y f\, d\rho_*\mu$$

הוכחה. תהי $s \le f$ פשוטה ונניח ש־$s = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}$, אז מתקיים,

$$\int_Y s\ d\ \rho_*\mu = \sum_{n=1}^N \alpha_n \rho_*\mu(E_n) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mu(\rho^{-1}(E_n)) = \int_X (s \circ \rho)\, d\mu$$

כלומר הטענה מתקיימת עבור פונקציות פשוטות, ולכן מהגדרת הסופרימום והאינטגרל נסיק שהטענה נכונה גם עבור f מדידה כללית. □

סעיף ג׳

נניח ש־$X = [0,2\pi]$ ו־$Y = S^1$ עם מרחבים מדידים בורל, ונניח שגם $\rho : X \to Y$ מוגדרת על־ידי $\rho(x) = e^{ix}$. נניח שקיימת מידת לבג על X, מידה המחזירה עבור קטע את אורכו, ונסמן אותה ב־λ. נתאר את $\rho_*\lambda$.

פתרון המידה $\rho_*\lambda$ היא מידה על S^1, ונניח ש־$E \subseteq Y$ קבוצה קשירה מסילתית, אז $\rho^{-1}(E)$ הוא קטע ולכן $\lambda(\rho^{-1}(E))$ הוא אורך הקטע המושרה מהקבוצה. כלומר גאומטרית $\rho_*\lambda$ מחזירה עבור קשת במעגל היחידה את האורך שלה.

שאלה 4

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה סופי. נראה שלכל $f : X \to \mathbb{R}_+$ מדידה וחסומה מתקיים,

$$S_+ = \int f \, d\mu = \inf\left\{ \int \varphi \, d\mu \mid f \leq \varphi, \varphi \text{ is simple} \right\} = S_-$$

הוכחה. נבחין תחילה כי לכל $f \geq s$ פשוטה מתקיים מהנתון $\infty > \int s \, d\mu \geq 0$ ולכן S_- מוגדר ובפרט $0 \leq S_- < \infty$.
נרצה להראות ש־$S_- \leq S_+$. תהיינה $\varphi \geq f \geq s$ פשוטות. בלי הגבלת הכלליות קיימים $\{E_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathcal{A}$ כך ש־$s \restriction E_n, \varphi \restriction E_n$ קבועות לכל n, אחרת נבחר את התחומים של שתי הפונקציות ונחתוך אותם היתוכים סופיים. נסמן $s = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}, \varphi = \sum_{n=1}^N \beta_n \mathbb{1}_{E_n}$, אז מתקיים,

$$S_- - S_+ = \int \varphi \, d\mu - \int s \, d\mu = \int \varphi - s \, d\mu = \int \sum_{n=1}^N E_n(\beta_n - \alpha_n) \, d\mu = \sum_{n=1}^N \mu(E_n)(\beta_n - \alpha_n) \geq 0$$

ולכן נובע ש־$S_- \geq S_+$.
נעבור להראות שגם $S_+ \leq S_-$. מטענה שקולה לקיום סדרת פשוטות מתכנסת נקודתית נסיק שקיימת סדרת פשוטות מונוטונית יורדת $\varphi_n : X \to \mathbb{R}_+$ המתכנסת נקודתית ל־f. יהי $\varepsilon > 0$, אז מתקיים ש־$\{n \in \mathbb{N} \mid \|f - \varphi_n\|_\infty < \varepsilon\}$ אינסופית לכל ε, נבחין כי זהו ניסוח שקול של התכנסות נקודתית. בהתאם נובע גם שקיימת n כך ש־$|\int f \, d\mu - \int \varphi_n \, d\mu| < \varepsilon$ ולכן בהכרח $\inf_{n \in \mathbb{N}} \int \varphi_n \, d\mu \leq S_+$ ובפרט $S_- = S_+$. $\square$

שאלה 5

נמצא דוגמה למרחב מידה $(X, \mathcal{A}, \mu)$, פונקציה מדידה $f : X \to (0, \infty)$ וסדרת פונקציות אי־שליליות $f_n \to f$ כך שהסדרה $\int f_n \, d\mu$ לא מתכנסת ל־$\int f \, d\mu$.

פתרון נגדיר את $X = [0,1], \mathcal{A} = \mathcal{B}X$ וכן את המידה $\mu = \lambda$ מידת לבג שרנו מניחים שקיימת.

נגדיר $f_n = n \cdot \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{n})}$, וכן את $f = 0$. אז לכל $x \in X$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$x < \frac{1}{n}$ ולכן לכל $m > n$ מתקיים $f_n(x) = 0$, נסיק ש־$f_n \to f$.

בנוסף f_n פשוטה לכל n ומתקיים,

$$\int f_n \, d\mu = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

אבל f פשוטה אף היא ומתקיים $\int f \, d\mu = 0 \neq 1$, ובפרט $0 \not\to 1$.