הגדרה 0.1 (רציפות במידה שווה) תהי f רציפה במידה שווה, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אז $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

הגדרה 0.2 (רציפות חסומה במידה שווה) תהי f רציפה במידה שווה, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $0 < \delta < 1$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אז $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

טענה 0.3 *פונקציה $f : I \to \mathbb{R}$ רציפה במידה שווה אם ורק אם היא רציפה חסומה במידה שווה.*

הוכחה. נניח ש־f רציפה חסומה במידה שווה ויהי $\varepsilon > 0$. אז קיימת $0 < \delta < 1$ המקיימת את טענת הרציפות. בפרט $\delta > 0$ ומעידה על רציפות במידה שווה.

נניח ש־f רציפה במידה שווה. יהי $\varepsilon > 0$ ותהי $\delta > 0$ המקיימת את טענת הרציפות. אם $\delta < 1$ אז סיימנו, ולכן נניח ש־$1 < \delta$. נגדיר $\delta_1 = \frac{1}{2}$, אז מתקיים,

$$\forall x, y \in I,\ |x-y| < \delta_1 \implies |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

כלומר קיבלנו ש־δ_1 מעיד על נכונות הרציפות במידה שווה, וזהו ערך חסום. □

הערה נבחר $\delta_1 = \min\{\delta, \frac{1}{2}\}$, אז אם $|x-y| < \delta_1$ בהכרח גם $|x-y| < \frac{1}{2}$ וגם $|x-y| < \delta$, אבל אז גם $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ בהתאם להגדרה. נוכל אם כל להניח בלי הגבלת הכלליות ש־$\delta \le \frac{1}{2}$ ולכן בהכרח,

$$1 - \delta^2 < 1$$