פתרון מטלה 04 — מבוא לטופולוגיה, 80516

25 באפריל 2025

שאלה 1

יהי (X,ρ) מרחב מטרי. נוכיח כי התנאים הבאים שקולים,

1. X מקיים את אקסיומת המנייה השנייה
2. X הוא מרחב לינדלוף
3. X ספרבילי

הוכחה. $1 \implies 2$. אקסיומת המנייה גוררת את כל אקסיומות המנייה האחרות, לכן בפרט X מרחב לינדלוף.

$2 \implies 3$. נרצה למצוא קבוצה צפופה בת־מנייה ב־X. נוכל לכסות את המרחב על־ידי כדורי $\epsilon > 0$ לכל נקודה במרחב, לכן בפרט יש כיסוי בן־מניה של כל המרחב על־ידי קבוצות פתוחות לכל ϵ כזה. נניח ש־$\{B(x_n^m, \epsilon_m)\}_{n=1}^\infty$ קבוצה כזו עבור $\epsilon_m = \frac{1}{m}$ לכל m. נגדיר את הקבוצה $A = \{x_n^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, זוהי כמובן קבוצה בת־מניה, ונטען ש־A צפופה ב־X. נניח ש־$x \in X$, אם $x \in A$ אז סיימנו, אחרת לכל $m \in \mathbb{N}$ קיים $n(m) \in \mathbb{N}$ כך ש־$x \in B(x_{n(m)}^m, \frac{1}{m})$ מהגדרת הכיסויים, ולכן הסדרה $(x_{n(m)}^m)_{m=1}^\infty$ מתכנסת ל־x ולכן $x \in \overline{A}$. נסיק אם כך שאכן A צפופה ובת־מניה ומעידה כי X ספרבילי.

$3 \implies 1$. נגדיר את הקבוצה $\mathcal{B} = \{B(a, \frac{1}{n}) \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$ עבור A קבוצה צפופה ב־X שקיימת מספרביליות. אנו טוענים כי $\mathcal{B}$ בסיס בן־מניה ל־X. $|\mathcal{B}| = |\mathbb{N} \times A| = \aleph_0$, ולכן נשאר להראות כי זהו אכן בסיס לטופולוגיה של X, אך למעשה זו טענה שהוכחה בהרצאה, ולכן נוכל להסיק ש־X מקיימת את אקסיומת המנייה השנייה. $\square$

שאלה 2

סעיף א׳

יהי X מרחב מנייה שנייה ויהי $A \subseteq X$, נראה שגם A מרחב מנייה שנייה.

הוכחה. יהי $\mathcal{B}$ בסיס בן־מניה של X, ויהי $\mathcal{B}_0 = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$, זוהי קבוצה בת־מנייה, ואנו טוענים שאף בסיס של A. נניח ש־$U \subseteq A$ קבוצה פתוחה, אז קיימת $V \subseteq X$ כך ש־$U = V \cap A$ וכן V פתוחה ב־X. בהתאם $V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ עבור I קבוצת אינדקסים כך ש־$V_\alpha \in \mathcal{B}$ לכל $\alpha \in I$. לכן נובע ש־$U = (\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha) \cap A = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \cap A = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ עבור $U_\alpha \in \mathcal{B}_0$. נסיק אם כך שאכן $\mathcal{B}_0$ בסיס לטופולוגיה של A, וראינו כבר כי הוא בן מנייה, ולכן A מרחב מנייה שנייה. $\square$

סעיף ב׳

נבחן את המרחב המטרי $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ עם המטריקה $\rho(x,y) = \sup\{|x(n) - y(n)| \mid n \in \mathbb{N}\}$.
נראה שהוא אינו ספרבילי, אינו לינדלוף ואינו מנייה שנייה.

הוכחה. נבחן את הקבוצה $X \supseteq A = \{f \in X \mid \forall n, f(n) \in \{0,1\}\}$, כלומר הסדרות שתמונתן חלקית ל־$\{0,1\}$. לכל $x, y \in A$, מתקיים $x = y \iff \rho(x,y) = 0$, מהגדרת המטריקה אך גם $x \neq y \iff \rho(x,y) = 1$, כלומר זוהי המטריקה הדיסקרטית, ולכן היא משרה טופולוגיה דיסקרטית.

נניח בשלילה ש־X מרחב מנייה שנייה (ולכן שקול לשאר ההגדרות כנביעה משאלה 1), ולכן מסעיף א׳ נובע שגם A מרחב מנייה שנייה. לכן קיים בסיס בן־מנייה ל־A, אבל כל יחידון צריך להופיע בבסיס, זאת שכן כל איבר בטופולוגיה הוא איחוד של איברי הבסיס, לכן נסיק ש־A הוא הבסיס היחיד של A. נבחין כי $|A| = 2^{\mathbb{N}} > \aleph_0$, ולכן ל־$A$ אין בסיס בן־מנייה בסתירה להיותו מרחב מנייה שנייה. נסיק שאכן X איננו מרחב מנייה שנייה, אינו לינדלוף, ואינו ספרבילי. $\square$

שאלה 3

נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{N}^2$ כך ש־U פתוחה אם ורק אם $(0,0) \notin U$ או שקיים n כך שלכל $m > n$ הקבוצה $\{k \in \mathbb{N} \mid (m,k) \notin U\}$ היא סופית. מרחב זה נקרא מרחב ארנס־פורט, נראה כי הוא לא מרחב מנייה שנייה.

הוכחה. תהי $M \subseteq \mathbb{N}$, נגדיר את הקבוצה $A = \{(m,k) \in \mathbb{N}^2 \mid m \in M, k \in \mathbb{N}\} \cup \{(m,k+1) \in \mathbb{N}^2 \mid m \notin M, k \in \mathbb{N}\}$. לכל $m \in \mathbb{N}$ הקבוצה $\{k \in \mathbb{N} \mid (m,k) \notin A\} \in \{\emptyset, \{0\}\}$ ובפרט סופית ולכן A קבוצה פתוחה. נגדיר את הפונקציה $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \tau$ עבור τ הטופולוגיה שהגדרנו על־ידי מיפוי כל קבוצה M לקבוצה A המתאימה לה. זוהי פונקציה חד־חד ערכית, זאת שכן אם $M_0 \neq M_1$ אז ללא הגבלת הכלליות $m \in M_0 \setminus M_1$ ואז $(m,0) \in f(M_0)$ אבל מההגדרה $(m,0) \notin f(M_1)$. נסיק ש־$\aleph_0 < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\tau|$.

נניח ש־$\mathcal{B}$ בסיס בן־מנייה לנקודה $(0,0)$. לכל $f(M)$ יש קבוצה פתוחה $U \in \mathcal{B}$ כך ש־$(0,0) \in U \subseteq f(M)$. $\mathcal{B}$ בת־מנייה ולכן קיימת U כך שיש אינסוף ערכי $f(M)$ המכילים את U. כלומר אם נקבע $A = f(M)$ ונגדיר את הסדרה $A_0 = A, A_1 = A_0 \setminus \{(1,k) \mid k \in \mathbb{N}\}, A_2 = \dots$ אז נקבל ש־$U \subseteq A_i$ לכל $i \in \mathbb{N}$, בפרט $U \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$. אבל $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ לא מקיימת את התנאי של הסופיות ובפרט לא קבוצה פתוחה, נסיק ש־U אף היא לא פתוחה, בסתירה ל־$U \in \mathcal{B}$. נסיק שמרחב זה הוא לא מנייה שנייה. $\square$

שאלה 4

נוכיח שמכפלה סופית של מרחבים ספרביליים היא ספרבילית.

הוכחה. נניח ש־X, Y מרחבים ספרביליים ונבחן את $Z = X \times Y$. נניח גם ש־$A \subseteq X, B \subseteq Y$ קבוצות צפופות בנות־מניה המעידות על הספרביליות. נגדיר $C = A \times B$, זוהי קבוצה בת־מניה כמכפלה סופית של קבוצות בנות־מניה, אנו נראה שהיא צפופה ב־Z. ניעזר בטענה שקבוצה היא צפופה אם ורק אם היא חותכת כל קבוצה פתוחה במרחב, ונניח ש־$U = U_X \times U_Y \subseteq Z$ פתוחה, לכן מהגדרת מכפלות סופיות למרחבים טופולוגיים U_X, U_Y פתוחות ב־X, Y. בהתאם $U_X \cap A, U_Y \cap B$ קבוצות לא ריקות, נניח ש־$x \in X, y \in Y$ איברים המעידים על כך. אז $(x, y) \in (A \cap U_X) \times (B \cap U_Y) = (A \times B) \cap (U_X \cap U_Y) = C \cap U$, כלומר החיתוך של כל קבוצה פתוחה עם C לא ריק, ולכן היא צפופה ב־Z. $\square$

שאלה 6

נוכיח שטופולוגיית הקופסה על $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אינה קשירה.

הוכחה. נגדיר $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f(n) \le 0\}$ וכן $B = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f(n) > 0\}$. לכל $n \in \mathbb{N}$, נבחין כי $A_n = \{f(n) \mid f \in A\}$ היא הקבוצה $(-\infty, 0]$,

TODO: Complete. $\square$

שאלה 7

סעיף א׳

נמצא דוגמה למרחב קשיר מקומית שאיננו קשיר.

פתרון נגדיר $X = \{0, 1\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית. המרחב איננו קשיר שכן $X = \{0\} \cup \{1\}$ ובמרחב דיסקרטי כל יחידון הוא פתוח. מן הצד השני המרחב קשיר מקומית ב־0, זאת שכן כל קבוצה כך ש־$A \subseteq X$ וגם $0 \in A$, אז $\{0\} \subseteq A$ וכן $\{0\}$ פתוחה.

סעיף ב׳

לכל $0 < n \in \mathbb{N}$ נסמן $l_n = \{(t, \frac{t}{n}) \mid t \in [0,1]\}$ ונסמן $l = [0,1] \times \{0\}$. נגדיר את המרחב $X = l \cup \bigcup_{n>0} l_n$ ונראה שהוא קשיר אך לא קשיר מקומית.

הוכחה. נבחין כי לכל $n \in \mathbb{N}$ הקבוצה l_n היא קטע ולכן קשירה כמסקנה מהתרגול. גם l הוא קטע ולכן גם הוא קשיר. נבחין כי לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $(0,0) \in l_n$ וכן ש־$l \ni (0,0)$, ולכן מלמת כוכב המרחב הוא קשיר (ואף קשיר מסילתית).

נראה שהמרחב איננו קשיר מקומית. נבחן את הקבוצה הפתוחה $U = B((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{4}) \cap X$, זוהי קבוצה פתוחה כצמצום קבוצה פתוחה במרחב המטרי $\mathbb{R}^2$. מהצד השני נבחין כי $U = \{(t,t) \mid t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\} \cup \{(t, \frac{t}{2}) \mid t \in (\frac{1}{2}, \frac{7}{10})\}$. כלומר U הוא איחוד קטעים זרים ופתוחים ולכן לא קשיר מקומית. $\square$