פתרון מטלה 2 — תורת המידה, 80517

3 בנובמבר 2025

שאלה 1

יהי מרחב מידה $(X, \mathcal{B}, \mu)$. נאמר שתכונה מתקיימת כמעט תמיד ב־X אם מספר הנקודות שלא מקיימות את התכונה הוא ממידה 0. תהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}$ סדרה מדידות המקיימת,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

נוכיח כי התכונה $\varphi(x) = |\{n \in \mathbb{N} \mid x \in A_n\}| < \infty$ מתקיימת כמעט תמיד.

הוכחה. תהי $B = \{x \in X \mid \neg\varphi(x)\} \subseteq X$. נבחין כי $x \in B$ אם ורק אם $x \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = B_k$ לכל $k \in \mathbb{N}$. במילים אחרות, מתקיים $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. נשים לב שמהגדרה $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$, ולכן מתקיים,

$$\mu(B) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

כאשר השוויון האחרון נובע מהנתון אודות הסדרה $\{A_n\}$ והטענה אודות התאפסות סדרת זנבות של טור מתכנס בהחלט. $\square$

שאלה 2

יהי מרחב מידה $(X,\mathcal{B},\mu)$ ונגדיר,

$$\mathcal{N}=\{E\subseteq X \mid \exists N\in\mathcal{B}, \mu(N)=0, E\subseteq N\}$$

וכן את האוסף $\bar{\mathcal{B}}=\{A\cup E \mid A\in\mathcal{B}, E\in\mathcal{N}\}$ ואת $\bar{\mu}:\bar{\mathcal{B}}\to[0,\infty]$ על־ידי $\bar{\mu}(A\cup E)=\mu(A)$ לכל $A\in\mathcal{B}, E\in\mathcal{N}$.

סעיף א׳

נוכיח כי $\bar{\mathcal{B}}$ היא σ־אלגברה.

הוכחה. ידוע כי $X\in\mathcal{B}$ ולכן גם $X\in\bar{\mathcal{B}}$, באופן דומה ידוע ש־$\mu(\emptyset)=0$ ולכן $\emptyset\in\mathcal{N}$, וכמובן גם $\emptyset\in\mathcal{B}$, ונסיק שגם $\emptyset\in\bar{\mathcal{B}}$.

נראה ש־$\bar{\mathcal{B}}$ סגור למשלים. נניח ש־$A\cup E\in\bar{\mathcal{B}}$ עבור $A\in\mathcal{B}, E\in\mathcal{N}$, ולכן מתקיים $X\setminus(A\cup E)=(X\setminus A)\cap(X\setminus E)$. ידוע ש־$\mathcal{B}\subseteq\bar{\mathcal{B}}$ ולכן $X\setminus A\in\bar{\mathcal{B}}$, וכן כל קבוצה המכילה קבוצה מדידה חיובית מכילה קבוצה מקסימלית כזו ולכן גם $X\setminus E\in\bar{\mathcal{B}}$ ומספיק להראות שהקבוצה סגורה לחיתוך סופי.

$$(A\cup E)\cap(A'\cup E')=(A\cap A')\cup(E\cap E')$$

אבל $\mathcal{B}$ היא σ־אלגברה וחיתוך מידות 0 הוא מידה 0 ולכן $\bar{\mathcal{B}}$ סגורה למשלים.

מסגירות לחיתוך סופי נסיק שמספיק להוכיח סגירות לאיחוד בן־מניה של קבוצות זרות, ולכן נניח ש־$\{A_i\cup E_i\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\bar{\mathcal{B}}$, אז,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\cup E_n=(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$$

ומסגירות של $\mathcal{B}$ לאיחוד בן־מניה ומהעובדה שמתקיים,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)=0$$

נסיק סגירות לאיחוד בן־מניה, ולכן $\bar{\mathcal{B}}$ היא σ־אלגברה. □

סעיף ב׳

נוכיח ש־$\bar{\mu}$ מוגדרת היטב.

הוכחה. נניח שמתקיים $A\cup E=A'\cup E'\in\bar{\mathcal{B}}$ עבור $A,A'\in\mathcal{B}, E,E'\in\mathcal{N}$, ונראה שמתקיים,

$$\bar{\mu}(A\cup E)=\bar{\mu}(A'\cup E')$$

נניח בשלילה שמתקיים $\bar{\mu}(A\cup E)\neq\bar{\mu}(A'\cup E')$ ולכן מהגדרה $\mu(A)\neq\mu(A')$. בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$\mu(A)>\mu(A')$ ולכן גם $\mu(A\setminus A')>0$. ידוע ש־$A\cup E=A'\cup E'$ ולכן מהנתון הקודם,

$$(A\setminus A')\cup(E\setminus A')(A\cup E)\setminus A'=(A'\cup E')\setminus A'=E'\setminus A'$$

אבל $E\setminus A'$ מוכלת בקבוצה ממידה 0 ולכן נסיק,

$$0<\bar{\mu}(A\setminus A')=\bar{\mu}(E'\setminus A')=\mu(\emptyset)=0$$

וקיבלנו סתירה, לכן $\bar{\mu}$ מוגדרת היטב.

נראה ש־$\bar{\mu}$ היא σ־אדיטיבית ולכן פונקציית מידה. נניח ש־$\{A_n\cup E_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\bar{\mathcal{B}}$ זרות, ונבדוק,

$$\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\cup E_n)=\bar{\mu}((\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n))=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(A_n\cup E_n)$$

ומצאנו כי $\bar{\mu}$ אכן פונקציית מידה. □

סעיף ג׳

נראה שאם $\hat{\mu}$ פונקציית מידה כך ש־$\hat{\mu}(A)=\mu(A)$ מקיימת $\hat{\mu}\equiv\bar{\mu}$.

הוכחה. תהי $A \cup E \in \bar{\mathcal{B}}$, ונניח בלי הגבלת הכלליות שהאיחוד הוא זר (אחרת נצמצם את E). אז מתקיים $\hat{\mu}(A \cup E) = \hat{\mu}(A) + \hat{\mu}(E) = \mu(A) + \hat{\mu}(E)$. כלומר, הטענה שקולה לטענה ש־$\hat{\mu}(E) = 0$ לכל $E \in \mathcal{N}$.

נניח בשלילה שקיים $E \in \mathcal{L}$, ובהתאם $E \supseteq E'$ ממידה 0, כך ש־$0 < \hat{\mu}(E)$. נבחין כי $E' \in \mathcal{B}$ ולכן $\hat{\mu}(E) < \hat{\mu}(E') = \mu(E) = 0$ בסתירה. $\square$

שאלה 3

יהי מרחב מידה (X,Σ,μ) וסדרת קבוצות מדידות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$. נזכיר את ההגדרה,

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

סעיף א׳

נראה שמתקיים $\liminf A_n, \limsup A_n \in \Sigma$.

הוכחה. נבחין כי נתון ש־$A_n \in \Sigma$ לכל n, ולכן מסגירות לאיחוד בן־מניה גם $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \Sigma$. באופן דומה מסגירות לחיתוך בן־מניה נקבל שגם $\limsup A_n \in \Sigma$. ההוכחה עבור $\liminf$ זהה. $\square$

סעיף ב׳

נראה ש־$\mu(\liminf A_n) \le \liminf \mu(A_n)$.

הוכחה. נסמן $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, אז $\{B_n\}$ היא סדרה יורדת, ולכן מטענה שראינו,

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \le \liminf A_n$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהגדרת הגבול התחתון. $\square$

סעיף ג׳

נראה שאם מרחב המידה הוא סופי אז מתקיים גם $\mu(\limsup A_n) \ge \limsup \mu(A_n)$.

הוכחה. נבחין כי מחוקי דה־מורגן מתקיים,

$$\liminf A_n^C = (\limsup A_n)^C$$

ולכן הטענה נובעת מהטענה של הסעיף הקודם, אבל רק בהנחה שעדיין חלה הטענה אודות שקילות מידה לגבול, והיא מתקיימת במקרה זה רק כאשר המידה של איחוד הקבוצות סופי, זה נובע כמובן מהטענה ש־$\mu(X) < \infty$. $\square$

שאלה 4

יהי (X,Σ) מרחב מדיד.

סעיף א׳

נניח ש־$f_n : X \to [-\infty,\infty]$ סדרה של פונקציות מדידות. נגדיר $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ וכן $E = \operatorname{dom} f$.
נראה ש־$E \in \Sigma$ וכן ש־f היא מדידה.

הוכחה. נבחין כי $\liminf f_n(x) = \limsup f_n(x) \iff x \in E$ ולכן נגדיר $G = \limsup f_n, g = \liminf f_n$, הוכחנו בהרצאה ששתי הפונקציות מוגדרות ומדידות, וכן מתקיים $E = \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} G$. נתון כי מותר להניח ש־$E$ מדידה במצב הזה כקבוצה המקיימת,

$$E = \{x \in X \mid g(x) = G(x)\}$$

נגדיר את $f : E \to [-\infty,\infty]$ על־ידי $f(x) = \liminf f_n(x)$, אבל מהגדרה מתקיים $f(x) = \limsup f_n(x) = \lim f_n(x)$ כרצוי. בהכרח f מדידה בתחומה. □

סעיף ב׳

נגדיר את הפונקציה $d_n : [0,1] \to \{0,1\}$ כפונקציה המחזירה את ערך הספרה ה־n לאחר לאחר הנקודה העשרונית של x בפיתוח בינארי.
נגדיר את הקבוצה,

$$A = \left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(x)}{n} = \frac{1}{2} \mid x \in [0,1] \right\}$$

ונוכיח שהיא מדידה בורל.

הוכחה. נראה ש־d_n רציפה לכל n. נבחן את $d_n^{-1}(\{0\})$, כלומר אוסף המספרים שבייצוג בינארי שלהם הספרה ה־n אחרי הנקודה היא 0. ידוע כי $[0,1]$ היא פתוחה, וכפל הוא פונקציה רציפה, ולכן $[0,1] \cdot 2^{-n}$ היא רציפה. חיבור היא פונקציה רציפה גם כן ולכן $e + 2^{-n}[0,1]$ פתוחה לכל e מספר שלו יש ייצוג בינארי על־ידי $n-1$ ספרות, ולכן נסיק ש־d_n רציפה. נובע שהיא גם מדידה בורל.

נגדיר $f_n : [0,1] \to \{0,1\}$ על־ידי $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(x)}{n}$, מרציפות d_n נסיק ש־f_n מדידה לכל n. נגדיר את $f : [0,1] \to [0,1]$ על־ידי $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, אז מסעיף א׳ היא מדידה בורל גם כן.

ידוע כי $[0,1]$ הוא מרחב האוסדורף ולכן יחידונים הם סגורים, ונסיק עם סגירות למשלים שיחידונים הם קבוצות מדידות, ולכן $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$ מדידה. □

שאלה 5

נגדיר את ה־σ־אלגברה הבאה,

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{R} \mid |E| \le \aleph_0 \vee |E^C| \le \aleph_0\}$$

סעיף א׳

נגדיר פונקציה $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ על־ידי,

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & |E| \le \aleph_0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

נראה ש־μ היא מידה על $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

הוכחה. עלינו להראות ש־μ היא σ־אדיטיבית.

יהיו $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ קבוצות מדידות זרות ובנות־מניה, אז מאקסיומת הבחירה מתקיים $|\bigcup_{n=1}^\infty A_n| = \aleph_0$ בלבד, נסיק,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = 0 = \sum_{n=1}^\infty 0 = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$$

אילו נניח שלפחות שתיים מן הקבוצות לא בנות־מניה, אז המשלים שלהן בן־מניה ומשיקולי עוצמה הן לא יכולות להיות זרות, לכן המקרה היחיד האפשרי שהוא לא המקרה שהוצג הוא שקבוצה אחת לא בת־מניה, ללא הגבלת הכלליות $|E_1^C| \le \aleph_0$. במקרה זה מתקיים $|\bigcup A_n| = |\mathbb{R}|$ ולכן $\mu(\bigcup A_n) = 1$, ומהצד השני,

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^\infty \mu(A_n) = 1 + 0$$

ולכן μ היא אכן פונקציית מידה. $\square$

סעיף ב׳

נמצא את כל הפונקציות המדידות $\mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{A})$ ונחשב את האינטגרל שלהן.

פתרון נזכור כי $\mathbb{R}$ מרחב האוסדורף ולכן יחידונים הם מדידים.

תהי פונקציה $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ ונניח שקיימות שתי נקודות שונות $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־$|f^{-1}(\{a\})| = |f^{-1}(\{b\})| = |\mathbb{R}|$. אז נובע ש־$f^{-1}(\{a\}) \subseteq \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\{b\})$, כלומר $f^{-1}(\{b\}) \notin \mathcal{A}$ ולכן f לא מדידה.

נניח עתה ש־$\forall x \in \mathbb{R},\ |f^{-1}(\{x\})| = \aleph_0$. נסמן $E = f^{-1}([0, 1])$, אז נטען ש־$|E| = |\mathbb{R}|$. אחרת נוכל להגדיר סדרת $E_n = f^{-1}([n, n+1])$ עבור $n \in \mathbb{Z}$, אם $|E_n| = |\mathbb{R}|$ לאיזשהו n נבחר אותו, אחרת נקבל שמתקיים $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ אבל $|f^{-1}(\mathbb{R})| = \aleph_0$ וזו סתירה. אז נובע ש־$|E| = |\mathbb{R}|$, ונגדיר סדרת קטעים $E = F_1 \supsetneq F_2 \supsetneq \cdots$ על־ידי חציית הקטעים ושימוש בטיעון דומה, ולבסוף מסגירות לחיתוך בן־מניה נקבל שקיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש־$|f^{-1}(\{a\})| = |\mathbb{R}|$ בסתירה.

נסיק שאם f מדידה אז קיימת לכל היותר נקודה יחידה $a \in \mathbb{R}$ כך ש־$|A| = |\mathbb{R}|$ עבור $A = f^{-1}(\{a\})$. ידוע כי $\mathbb{R} \setminus A$ קבוצה בת־מניה, ולכן התמונה ההפוכה של כל נקודה ב־$f(\mathbb{R} \setminus A)$ היא לכל היותר בת־מניה. לכן נסיק שקבוצת הפונקציות המדידות $\mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{A})$ הן קבוצת הפונקציות שאינן קבועות לכל היותר בכמות בת־מניה של נקודות.

נניח ש־$\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ סדרת הקבוצות שעליהן f קבועה וש־$|A_n| \le \aleph_0$. נסמן גם $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־$f(A_n) = \{a_n\}$.

אז מתקיים $A \cup \bigcup_{n=1}^\infty A_n = \mathbb{R}$, וזהו איחוד זר בן־מניה. בהתאם נובע שבדיוק,

$$f = a \cdot \mathbb{1}_A + \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \cdot \mathbb{1}_{A_n}$$

כלומר f היא פונקציה מדידה פשוטה, ולכן מהגדרה,

$$\int f \, d\mu = a \cdot \mu(A) + \sum_{n=1}^\infty a_n \cdot \mu(A_n) = a \cdot 1 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cdot 0 = a$$