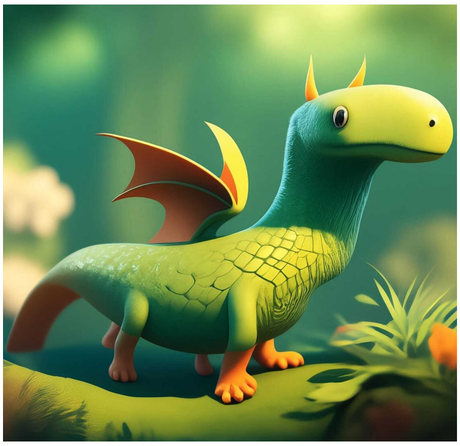
פתרון מטלה 04 — אנליזה פונקציונלית, 80417

28 באפריל 2025



שאלה 1

נראה שהקבוצה,

$$\mathcal{F} = \{g_{a_0,\dots,a_n} \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}\}$$

היא קבוצה צפופה ב־$C[0,1]$ עם נורמת $\|\cdot\|_\infty$.

הוכחה. תהי פונקציה $f \in C[0,1]$. נגדיר $f_n = g_{a_0,\dots,a_n}$ כאשר $a_i = f(\frac{i}{n})$ לכל $0 \le i \le n$, לכל $n \in \mathbb{N}$. נקבל סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית ל־f, זאת ישירות מהעובדה שניתן לבנות סדרת רציונליים לכל ממשי, ונוכל באותו אופן לקבל גם התכנסות במידה שווה. נסיק אם כך ש־f היא ערך גבולה של סדרת הפונקציות, ובהתאם $f \in \overline{\mathcal{F}}$ לכל $f \in C[0,1]$, כלומר $\overline{\mathcal{F}} = C[0,1]$ ובהתאם הקבוצה היא צפופה. $\square$

שאלה 2

נניח ש־$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ היא אינטגרבילית רימן. נראה שקיימים פולינומים p_n כך שמתקיים,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-p_n(x)|^2\,dx=0$$

הוכחה. נגדיר לכל $n\in\mathbb{N}$ את p_n כפולינום הקיים ממשפט הקירוב של ויירשטראס כך ש־$\|f-p_n\|_\infty<\frac{1}{n}$. אנו יודעים כי f אינטגרבילית וכן p_n לכל n, ולכן גם הרכבת פונקציות רציפות עליהם אינטגרבילית, נבחר את החלוקה $\{a+\frac{i}{k}(b-a)\mid 0\le i\le k\}$ לכל $k\in\mathbb{N}$ ונקבל שמתקיים,

$$\int_a^b |f(x)-p_n(x)|^2\,dx=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}|f(x)-p_n(x)|^2\cdot(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n})(b-a)\le\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{k}(b-a)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n}(b-a)=\frac{1}{n}(b-a)$$

כלומר, השתמשנו בסכום רימן שמתכנס לערך האינטגרל (כנביעה מקיום האינטגרל) וקיבלנו חסם לערכו, עתה מתקיים,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-p_n(x)|^2\,dx\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(b-a)=0$$

ובהתאם הסדרה $\{p_n\}$ מקיימת את הטענה. □

שאלה 3

נראה את הלמה של רימן־לבג, נראה שאם $f \in C[a,b]$ אז מתקיים,

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)\ dt = 0$$

הוכחה. נניח ש־f פולינום ונסמן,

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$$

אז עבור $x > 0$ מתקיים,

$$\int_a^b f(t)\sin(xt)\ dt = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b t^i \sin(xt)\ dt$$

נבחין גם כי,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b t^i \sin(xt)\ dt\right| &= \left|\left[-\frac{1}{x}t^i\cos(xt)\right]_{t=a}^{t=b} + \frac{i}{x}\int_a^b t^{i-1}\cos(xt)\ dt\right| \\ &\le \frac{1}{x}\cdot\left((b^i - a^i) + i\int_a^b |t^{i-1}\cos(xt)|\ dt\right) \\ &\le \frac{1}{x}\cdot\big((b^i-a^i) + i(i-1)(b^{i-2}-a^{i-2})\big)\end{aligned}$$

ולכן,

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(xt)\ dt\right| \le \frac{1}{x}\sum_{i=0}^{n} a_i\left((b^i-a^i)+i(i-1)(b^{i-2}-a^{i-2})\right) \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

כלומר מצאנו שהטענה נכונה עבור f פולינום כלשהו.

נניח עתה כי $f \in C[a,b]$ פונקציה כלשהי, ויהיו $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C[a,b]$ פולינומים כך ש־$f \rightrightarrows p_n$. נסיק שלכל $x > 0$ גם $p_n\cdot\sin(xt) \rightrightarrows f\sin(xt)$, וידוע כי פעולת האינטגרל משמרת התכנסות במידה שווה, לכן נקבל שגם,

$$\int_a^b p_n(t)\sin(xt)\ dt \rightrightarrows \int_a^b f(t)\sin(xt)\ dt$$

לכן,

$$0 = \lim_{x\to\infty}\int_a^b p_n(t)\sin(xt)\ dt \rightrightarrows \lim_{x\to\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\ dt$$

ונסיק שהטענה מתקיימת לכל $f \in C[a,b]$. □

שאלה 4

סעיף א'

נראה שאם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינה פולינום, ו־$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פולינומים המתכנסת ל־f במידה שווה ב־$[a,b]$, אז $\deg p_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

הוכחה. אילו P_M קבוצת הפולינומים מדרגה של עד M ו־$\operatorname{dist}(f, P_M) = 0$, אז נובע שקיימת סדרת פולינומים $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P_M$ כך ש־$q_n \rightrightarrows f$. מגזירות כלל הפולינומים נסיק שגם $q_n' \rightrightarrows f'$ ונוכל לחזור על התהליך M פעמים ולקבל ש־$f \in P_M$, בסתירה לעובדה ש־f לא פולינום. לכן נוכל להסיק שהמרחק מתקבל.

אילו גבול הדרגות לא מתכנס לאינסוף, אז נוכל לבחור תת־סדרה שבה הוא מתכנס למספר סופי ונבחר מספר זה שוב להיות M ונקבל ש־f פולינום בסתירה, לכן נוכל להסיק ש־$\lim_{n\to\infty} \deg p_n = \infty$. $\square$

סעיף ב'

נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. נבחין כי הפונקציה f אנליטית לכל $x \in \mathbb{R}$. נוכיח שסדרת פולינומי טיילור של f לא מתכנסת במידה שווה לפונקציה f בקטע $[-1,1]$ בפיתוח סביב $x_0 = 0$.

הוכחה. נבחין כי f היא הרכבה של $\frac{1}{1+x}$ ושל x^2, ולכן נוכל להסיק שמתקיים,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^{2i}$$

כלומר p_n פיתוח טיילור של f לסדר $2n$. נבחין כי $p_n(\pm 1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i = 1$ עבור n אי־זוגי ו־$p_n(\pm 1) = 0$ עבור n זוגי. נסיק אם כך ש־p_n לא מתכנסת נקודתית ב־$x = \pm 1$ ובפרט לא מתכנסת במידה שווה בקטע $[-1,1]$. $\square$

סעיף ג'

נוכיח שלא ניתן לקרב את הפונקציה $f(x) = e^x$ במידה שווה בעזרת פולינומים על כל הישר.

הוכחה. אנו יודעים כי מתקיים $\lim_{x\to\pm\infty} |p(x)| = \infty$ לכל פולינום p, ישירות מאריתמטיקה של גבולות. נניח בשלילה כי $p_n \rightrightarrows f$ עבור איזושהי סדרה $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(\mathbb{R})$ של פולינומים. נקבע $\epsilon = 1$ ויהי $N \in \mathbb{N}$, אז מהטענה לעיל והעובדה ש־$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ נסיק שעבור $n = N+1$ ו־$x < 0$ קטן מספיק, מתקיים $|f(x) - p_n(x)| < 1$. כלומר מצאנו שמתקיימת השלילה להתכנסות במידה שווה, בסתירה להגדרת $\{p_n\}$. $\square$

סעיף ד'

נוכיח שאם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חסומה ולא קבועה, אז לא ניתן לקרב אותה במידה שווה בעזרת פולינומים על כל הישר.

הוכחה. אילו f היא פולינום (לא קבוע) אז מטענה מהסעיף הקודם נובע ש־$\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$ בסתירה לחסימות. נניח אם כך ש־$pN \rightrightarrows f$ עבור $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(\mathbb{R})$ סדרת פולינומים כבסעיף הקודם. נקבע $\epsilon = \frac{M}{2}$ ונקבל שעבור כל $N \in \mathbb{N}$ עבור בחירת $n = N+1$ ובחירת x כך ש־$|p_n(x)| > 2M$ (קיים מהגבול שזה עתה ציינו), מתקיים,

$$|f(x) - p_n(x)| \geq |p_n(x)| - |f(x)| \geq 2M - M = M > \frac{M}{2} = \epsilon$$

ולכן מצאנו שוב את השלילה להגדרת התכנסות במידה שווה ונסיק שלא קיימת סדרת פולינומים כזו. $\square$