טענה 0.1 *קיימת הרחבת שדות* $K/\mathbb{Q}$ *כך שהיא הרחבת גלואה ו־*$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

הוכחה. נתחיל בהגדרה $\zeta = \xi_{11}$ שורש היחידה הפרימיטיבי מסדר 11 ב־$\mathbb{Q}$. נגדיר גם $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ ונקבל ש־$L/\mathbb{Q}$ היא הרחבה ציקלוטומית וגלואה, ומתקיים,

$$[L : \mathbb{Q}] = |(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times| = 10$$

וכן אנו יודעים כי הרחבות ציקלוטומיות הן בעלות חבורת גלואה ציקלית ולכן,

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

עשינו את כל זה כי אנחנו רוצים למצוא את החבורה $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, אז מספיק למצוא חבורה ככה שהיא תת־חבורה שלה, ואכן,

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \le \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$$

אבל אנחנו צריכים למצוא את המבנה של H, לא רק להגיד שקיימת כזאת, אז נגדיר,

$$H = \langle \zeta \mapsto \zeta^2 \rangle = \{\zeta \mapsto \zeta^{2n} \mid 1 \le n \le 5\}$$

זוהי אכן חבורת אוטומורפיזמים כפי שרצינו ומתקיים $|H| = 5$. אבל ממשפט התאמת גלואה מתקיים L/L^H היא הרחבת גלואה כך ש־$[L : L^H] = 5$. בשלב הזה בגדול סיימנו את השאלה כי מצאנו הרחבת שדות כמו שביקשו, אבל בתרגול ראינו דרך לבנות ממש את השדה הזה.

נגדיר $\alpha = \sum_{n=1}^5 \zeta^{2n}$, הדבר הזה מקיים,

$$\forall \sigma \in H,\ \sigma(\alpha) = \sum_{n=1}^5 \sigma(\zeta^{2n}) = \alpha$$

מטעמי סימטריה, אז $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq L^H$ ממש מהגדרת L^H כשדה שבט של H, ונסיק,

$$\mathbb{Q}(\alpha) = L^H$$

ומצאנו ש־$\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\alpha)$ הרחבת גלואה כך ש־$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\alpha)) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. $\square$