פתרון מטלה 05 — אנליזה פונקציונלית, 80417

9 במאי 2025

שאלה 1

יהי $T: C[0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציונל מתמטי (כלומר העתקה לינארית) רציף ונניח שלכל $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים,

$$T(x^k) = \frac{1}{k+1}$$

נראה שלכל $f \in C[0,1]$ מתקיים,

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

הוכחה. ממשפט הקירוב של ויירשטראס אנחנו יודעים שקיימים $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C[0,1]$ סדרת פולינומים המתכנסים במידה שווה ל-f.
אנו גם יודעים שאופרטורים לינאריים משמרים התכנסות במידה שווה, ולכן $T(p_n) \rightrightarrows T(f)$. אילו נניח ש-$p_n(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_n^i x^i$ אז נובע,

$$T(p_n) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_n^i \cdot \frac{1}{k+1} = \int_0^1 \alpha_n^i \cdot x^i$$

ולכן נובע ש-$T(p_n) = \int_0^1 p_n(x)\, dx$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אבל אינטגרל משמר התכנסות במידה שווה ונובע,

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T(p_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$$

ונסיק שהטענה אכן מתקיימת. $\square$

שאלה 2

נראה שאוסף הפולינומים צפוף במרחב $C^k[0,1]$ בנורמה על C^k.

הוכחה. נרצה להשתמש במשפט סטון־ויירשטראס. $\square$