פתרון מטלה 05 — אנליזה פונקציונלית, 80417

9 במאי 2025

שאלה 1

יהי $T:C[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציונל מתמטי (כלומר העתקה לינארית) רציף ונניח שלכל $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים,
$$T(x^k)=\frac{1}{k+1}$$
נראה שלכל $f\in C[0,1]$ מתקיים,
$$T(f)=\int_0^1 f(x)\,dx$$
הוכחה. ממשפט הקירוב של ויירשטראס אנחנו יודעים שקיימים $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq C[0,1]$ סדרת פולינומים המתכנסים במידה שווה ל־f.
אנו גם יודעים שאופרטורים לינאריים משמרים התכנסות במידה שווה, ולכן $T(p_n)\rightrightarrows T(f)$. אילו נניח ש־$p_n(x)=\sum_{i=0}^{N}\alpha_n^i x^i$ אז נובע,
$$T(p_n)=\sum_{i=0}^{N}\alpha_n^i\cdot\frac{1}{k+1}=\int_0^1\alpha_n^i\cdot x^i$$
ולכן נובע ש־$T(p_n)=\int_0^1 p_n(x)\,dx$ לכל $n\in\mathbb{N}$. אבל אינטגרל משמר התכנסות במידה שווה ונובע,
$$T(f)=\lim_{n\to\infty}T(p_n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 p_n(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$$
ונסיק שהטענה אכן מתקיימת. $\square$

שאלה 2

עבור $k \in \mathbb{N}$, נראה שאוסף הפולינומים צפוף במרחב $C^k[0,1]$ בנורמה על C^k המוגדרת על־ידי,

$$\|f\|_k = \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)} - p_n^{(j)}\|_\infty$$

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על k. עבור $k = 0$ הטענה מתלכדת עם משפט הקירוב של ויירשטראס ולכן סיימנו.

נניח שהטענה נכונה עבור $k - 1$ ונבדוק את הטענה עבור k.

נגדיר $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C^k[0,1]$ סדרת פולינומים כך ש־$f^{(k)} \rightrightarrows p_n$. נגדיר את הסדרה $\{p_n^1\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C^k[0,1]$ על־ידי,

$$p_n^1(x) = f^{(k-1)}(0) + \int_0^x p(x)\,dx$$

אנו יודעים כי לכל פולינום אינסוף קדומות וכי אף הן פולינומים, וכן ש־$\frac{d}{dx}p_n^1 = p_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. מטענה מתרגול 4 נובע,

$$p_n^1 \rightrightarrows f^{(k-1)}(0) + \int_0^x f^{(k)}(x)\,dx = f^{(k-1)}(x) + f^{k-1}(0) - f^{k-1}(0) = f^{(k-1)}(x)$$

אבל מהנחת האינדוקציה נובע ש־$f^{(i)} \rightrightarrows p_n^i$ לכל $0 \le i < k$ וסיימנו. $\square$

שאלה 3

במרחב $C[0,1]$ עם נורמת $\|\cdot\|_\infty$ נגדיר $W = \mathrm{Sp}\{x, x^2, \dots\}$ ו־$D = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = 0\}$.
נראה ש־$\overline{W} = D$.

הוכחה. תהי סדרת פולינומים מתכנסת במידה שווה $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subseteq W$, ונסמן $p_n \rightrightarrows f$, אז $\lim_{n\to\infty} p_n(0) = f(0)$. אבל אנו יודעים כי $x \mid p_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ מהגדרת W ולכן $p_n(0) = 0$ בלבד, ונסיק $f(0) = 0$, כלומר $f \in D$, ונקבל $\overline{W} \subseteq D$.

ממשפט הקירוב של ויירשטראס אנו יודעים כבר כי קבוצת הפולינומים צפופה ב־$C[0,1]$. תהי $f \in D$ ותהי $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C[0,1]$ סדרת פולינומים כך ש־$f \rightrightarrows p_n$ ממשפט הקירוב. נגדיר גם את סדרת הפונקציות $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C[0,1]$ על־ידי $g_n(x) = p_n(0)$. אנו יודעים ש־$p_n(0) \to f(0) = 0$ ולכן הסדרה $\{g_n\}$ מתכנסת במידה שווה, ובהתאם גם $\{p_n - g_n\}$ היא סדרת פולינומים מתכנסת במידה שווה. נסיק ש־$p_n - g_n \rightrightarrows f$, ונשאר להראות ש־$\{p_n - g_n\} \subseteq D$. יהי $n \in \mathbb{N}$ ונניח ש־$p_n(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_i^n x^n$, אז $g_n(x) = \alpha_0^n$ ובהתאם $(p_n - g_n)(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^n x^n$ ולכן $p_n \in W$. כלומר $f \in \overline{W}$.

מצאנו אם כך ש־$\overline{W} = D$. $\square$

שאלה 4

יהי (K,ρ) מרחב מטרי קומפקטי. נראה ש־$\mathrm{Lip}(K)$ צפופה ב־$C(K)$.

הוכחה. נזכיר כי,

$$\mathrm{Lip}(K)=\{f\in C(K,\mathbb{R})\mid \exists L>0,\forall x,y\in X,|f(x)-f(y)|\le L\cdot\rho(x,y)\}$$

וראינו בתרגול כי זוהי אלגברה של פונקציות רציפות, אנו נראה כי היא אף מפרידה נקודות ולא מתאפסת ב־K.

נניח ש־$x,y\in K$ וכן ש־$x\neq y$, ונרצה להראות שקיימת $f\in\mathrm{Lip}(K)$ כך ש־$f(x)\neq f(y)$. נגדיר $f(t)=\rho(t,x)$ לכל $t\in K$. באינפי 3 ראינו כי פונקציה זו רציפה, וכמובן מהגדרתה היא 1־ליפשיצית, כלומר $f\in\mathrm{Lip}(K)$. אבל מהגדרת המטריקה $f(x)=\rho(x,x)=0$ אבל $f(y)\neq 0 \iff \rho(x,y)\neq 0 \iff x\neq y$, ולכן f מפרידה את x,y.

נראה כי $\mathrm{Lip}(K)$ לא מתאפסת ב־K. נגדיר את $f(x)=1$, זוהי פונקציה קבועה ולכן 0־ליפשיצית, אבל לכל $x\in K$ גם $f(x)\neq 0$, ולכן מעידה ש־$\mathrm{Lip}(K)$ לא מתאפסת ב־K.

נסיק ממשפט סטון־ויירשטראס כי $\mathrm{Lip}(K)$ צפופה ב־$C(K)$. $\square$