פתרון מטלה 6 — תורת המידה, 80517

27 בנובמבר 2025

שאלה 1

נגדיר את מידת קנטור עבור $0 < Q_1 < Q_2 < 1$ על־ידי $C_0 = [0,1]$ וכן $C_{n+1} = Q_1 C_n \cup (Q_2 + (1-Q_2)C_n)$ ולבסוף $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.
לכן כל C_n היא איחוד זר של 2^n קטעים, נסמן אותם ב־$\mathcal{T}_n$.

סעיף א׳

נגדיר $Q_1 = \frac{1}{3}, Q_2 = \frac{2}{3}$. נגדיר,

$$E_0 = \{0\}, \quad E_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \mid a_k \in \{0,2\} \right\}$$

ונוכיח שמתקיים,

$$E_{n+1} = \frac{E_n}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{E_n}{3} \right)$$

ונסיק כי לכל n הקבוצה E_n היא הקצוות השמאליים של הקטעים ב־$\mathcal{T}_n$.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n. עבור $n = 0$ הטענה טריוויאלית כהגדרה.

נניח ש־E_n מקיים את הטענה ונבדוק את E_{n+1}.

$$\frac{E_{n+1}}{3} = \left\{ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{3^k} \mid a_k \in \{0,2\} \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{3^k} \mid a_1 = 0, a_k \in \{0,2\} \right\}$$

ולכן גם,

$$\frac{2}{3} + \frac{E_{n+1}}{3} = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{3^k} \mid a_1 = 2, a_k \in \{0,2\} \right\}$$

ולכן נקבל בדיוק,

$$\frac{E_n}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{E_n}{3} \right) = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{3^k} \mid a_k \in \{0,2\} \right\} = E_{n+1}$$

וסיימנו את מהלך האינדוקציה.

מצאנו ש־E_{n+1} מוגדר באותו אופן כמו C_{n+1} אבל מוגבל לקצה השמאלי של הקטע הראשון ולכן באינדוקציה נובע שגם E_n קבוצת הקצוות השמאליים. □

סעיף ב׳

יהי $n \in \mathbb{N}$ ו־$t = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{3^k} \in E_n$ ונניח ש־$T \in \mathcal{T}_n$ הקטע כך ש־$t \in T$ הקצה השמאלי שלו. עבור $m > n$ נבדוק כמה איברים $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \in E_m$ מקיימים $a_k = b_k$ לכל $1 \le k \le n$. נסיק שמספר זה הוא $|T \cap E_m|$.

הוכחה. למעשה השאלה שקולה לשאלת גודל הפיתוח של E_m כאשר E_n הוא הצעד הראשון, זאת שכן אם $a_k = b_k$ לכל $k \le n$ אז רק a_k עבור $n < k \le m$ לא קבועים. בהתאם נסיק שהמספר הוא 2^{m-n}. מאופן הבנייה שתואר לעיל נוכל להסיק שמספר זה הוא בדיוק $|T \cap E_m|$, כאשר הוכחה פורמלית תהיה באינדוקציה ושימוש בנוסחה המתארת את E_m ו־T מהסעיף הקודם. □

סעיף ג׳

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את הפונקציונל Λ_n על $C_c(\mathbb{R})$ על־ידי,

$$\Lambda_n f = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in E_n} f(x)$$

נראה שלכל $f \in C_c(\mathbb{R})$ הסדרה $\Lambda_n f$ מתכנסת.

הוכחה. נניח ש־$m > n$. נגדיר את $g|_T = \sup_{x\in T} f(x)$ ואת $h|_T = \inf_{x\in T} f(x)$ לכל $T \in \mathcal{T}$. אז מתקיים,

$$\Lambda_n g = 2^{-n} \sum_{x\in E_n} g(x) = 2^{-n} \sum_{T\in\mathcal{T}} \sum_{x\in E_n\cap T} g(x) = 2^{-n} \sum_{T\in\mathcal{T}} 2^{n-m} g(x) = 2^{-m} \sum_{T\in\mathcal{T}} g(x) = \Lambda_m g$$

ובאופן דומה נקבל שגם $\Lambda_n h = \Lambda_m h$. נבחין גם כי $h \le f \le g$ מהגדרה ואף $g - h < \varepsilon$ שכן נוכל לבחור $T \in \mathcal{T}$ עם קוטר מספק. אם $n < m_1, m_2$ אז נקבל בהתאם,

$$\Lambda_n h \le \Lambda_{m_i} \le \Lambda_n g$$

ולכן כדי להראות את תכונת קושי מספיק שנראה שמתקיים $\Lambda_n(g - h) < \varepsilon \cdot \mathrm{vol}(T)$. אבל בסעיף א' ראינו שמתקיים $\mathrm{vol}(T) \le (\frac{2}{3})^{-N}$ עבור $N < \frac{1}{\varepsilon}$ בלי הגבלת הכלליות. אז נקבל,

$$\Lambda_n(g - h) = 2^{-n} \sum_{x\in E_n} g(x) - h(x) = 2^{-n}\varepsilon \le \varepsilon\, \mathrm{vol}(T)$$

כפי שרצינו, ולכן הטענה נובעת. □

סעיף ד'

נגדיר $\Lambda f = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n f$. נראה שזהו פונקציונל לינארי חיובי, נגדיר מידה יחד איתו, נחשב את התומך של המידה ואת מידת הקטע $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$.

הוכחה. מהסעיף הקודם הפונקציונל מוגדר היטב, נניח ש־$f \ge 0$, אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$\Lambda_n f = \frac{1}{2^n} \sum_{x\in E_n} f(x) \ge 0$$

ולכן נסיק שגם הגבול משמר את החיוביות ובהתאם הפונקציונל הוא חיובי. בהתאם ממשפט ההצגה של ריס קיימת ויחידה מידה μ המקיימת,

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}),\ \int f\, d\mu = \Lambda f$$

נעבור לחישוב $\mathrm{Supp}\,\mu$, כלומר נחשב את קבוצת הנקודות $A \in \mathbb{R}$ כך שלכל סגורה סביב אחת הנקודות יש מידה לא אפס. נניח ש־$x \in \mathbb{R}$ ונניח ש־$x \in D$ סגורה כלשהי. אז מתקיים,

$$\mu(D) = \int \mathbb{1}_D\, d\mu = \Lambda \mathbb{1}_D = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n \mathbb{1}_D = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{x\in E_n} \mathbb{1}_D = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} |E_n \cap D|$$

אבל מהסעיפים הקודמים נסיק שאם קיים $T \in \mathcal{T}$ כך ש־$T \subseteq D$ אז $|E_n \cap D| \ge 2^m$ עבור m כך ש־T מאורך 3^{-m}. נניח שלא קיים T כזה, אז נקבל $\mu(D) = 0$, כלומר $\mu(D) = C$ בדיוק.

נעבור לחישוב של $\mu(T)$ עבור $T = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$. נשים לב כי $T \subseteq C_2$ וכי הוא מחלקת קשירות מסילתית שם, כלומר $T \in \mathcal{T}$ בדיוק. בהתאם נקבל שגם $\Lambda_n \mathbb{1}_T = 2^{-n} \cdot 2^{n-2} = \frac{1}{4}$ מסעיף ב', ולכן גם $\Lambda \mathbb{1}_T = \frac{1}{4}$ ואף $\mu(T) = \frac{1}{4}$. □

סעיף ה'

נגדיר $\varphi_0(x) = \frac{x}{3}, \varphi_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$ ונראה ש־$\mu = \frac{1}{2}(\varphi_0)_*\mu + \frac{1}{2}(\varphi_2)_*\mu$.

הוכחה. נזכור כי $(\varphi_i)_*\mu(E) = \mu(\varphi_i^{-1}(E))$ עבור $i \in \{0, 2\}$. נסמן $A_i = \varphi_i^{-1}(E)$ ולכן,

$$(\varphi_i)_*\mu(E) = \mu(A_i) = \int \mathbb{1}_{A_i}\, d\mu = \Lambda \mathbb{1}_{A_i} = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n \mathbb{1}_{A_i} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{x\in E_n} \mathbb{1}_{A_i} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} |E_n \cap \varphi_i^{-1}(E)|$$

אבל מהגדרת φ_i התמונות ההפוכות שלהם לקבוצה נתונה זרות, כלומר $\varphi_0^{-1}(E) \cap \varphi_2^{-1}(E) = \emptyset$ וכן,

$$\begin{aligned}
(\varphi_0)_*\mu(E) + (\varphi_2)_*\mu(E) &= \lim_{n\to\infty} 2^{-n} |E_n \cap \varphi_0^{-1}(E)| + |E_n \cap \varphi_2^{-1}(E)| \\
&= \lim_{n\to\infty} 2^{-n} |E_n \cap (\varphi_0^{-1}(E) \cup \varphi_2^{-1}(E))| \\
&= \lim_{n\to\infty} 2^{-n} |E_n \cap E| \\
&= \mu(E)
\end{aligned}$$

כפי שרצינו, כאשר המעבר האחרון נובע מבדיקה ישירה של φ_i. □

שאלה 2

יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית ו־σ־קומפקטי. נניח ש־$\varphi : C_c(X) \to \mathbb{C}$ פונקציונל לינארי חיובי. נסמן $\mathcal{M}$ היא σ־אלגברה ו־μ המידה הנובעות עבור φ ממשפט ההצגה של ריס.

סעיף א׳

נראה שאם $E \in \mathcal{M}$ ו־$\varepsilon > 0$ אז קיימות סגורה F ופתוחה V כך ש־$F \subseteq E \subseteq V$ ומתקיים $\mu(V \setminus E) < \varepsilon$.

הוכחה. נשתמש בהגדרה כסופרימום ואינפימום כדי לקבל שתי קבוצות כאלה עם $\frac{\varepsilon}{2}$.

ידוע שהמרחב הוא קומפקטי מקומית ו־σ־קומפקטי ולכן קיים כיסוי $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ של קומפקטיות כך ש־$E \subseteq \bigcup K_n$. מסגירות לחיתוך סופי נוכל להוכיח את הטענה אם כך על $\{E \cap K_n\}$, כלומר מספיק להוכיח את הטענה על קבוצות חסומות.

ממהלך הוכחת משפט ההצגה אנו גם יודעים שמתקיים,

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E, K \text{ is compact}\}$$

ולכן קיימת $K \subseteq E$ סגורה (וקומפקטית) כך ש־$\mu(E \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$.

מהצד השני אנו גם יודעים שמתקיים,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid V \supseteq E, V \text{ is open}\}$$

ולכן בפרט קיימת פתוחה $E \subseteq V$ כך ש־$\mu(V \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$.

משילוב שתי הטענות ו־ω־אדיטיביות של μ מתקיים,

$$\mu(V \setminus K) = \mu(E \setminus K) + \mu(V \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ולבסוף נוכל לבחור איחודים של קבוצות אלה ולקבל את המבוקש. □

סעיף ב׳

נראה שאם $E \in \mathcal{M}$ אז קיימות $A, B \subseteq X$ כך שA היא F_σ ו־G_δ המקיימות $A \subset E \subset B$ וכן,

$$\mu(A \setminus A) = 0$$

הוכחה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $A_n \subseteq E \subseteq B_n$ להיות הקבוצות הפתוחות והסגורות מסעיף א׳ המקיימות,

$$\mu(B_n \setminus A_n) \leq \frac{1}{n}$$

נגדיר בהתאם $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ ו־$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, אז A היא F_σ ו־B היא G_δ ומתקיים,

$$\mu(B \setminus A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n \setminus A_n) = 0$$

ישירות מהגדרת μ כמידת רדון. □

שאלה 3

יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי, ונסמן ב־$P(X)$ את קבוצת מידות ההסתברות על $(X, \mathcal{B}_X)$. תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ צפופה, אז ראינו שהפונקציה $d : (P(X))^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת,

$$d(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|f_n\|_\infty} \left| \int f_n \, d\mu - \int f_n \, d\nu \right|$$

היא מטריקה.

סעיף א׳

הגדרנו ש־$\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ (מתכנס חלש) אם לכל $f \in C(X)$ מתקיים,

$$\int f \, d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f \, d\mu$$

נראה שהתכנסות חלשה־$*$ שקולה להתכנסות במטריקה d.

הוכחה. תהי סדרת מידות $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(X)$ ו־$\mu \in P(X)$.

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu \iff \forall f \in C(X), \int f \, d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f \, d\mu$$

אבל $f \in \overline{\{f_n\}}$ ולכן הטענה נכונה אם ורק אם קיימת $\{f^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{f_n\}$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ במטריקת סופרימום. אז,

$$\iff \forall f \in C(X), \int f^m \, d\mu_n \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} \int f \, d\mu \iff \left| \int f^m \, d\mu_n - \int f \, d\mu \right| \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} 0 \iff \mu_n \to_d \mu$$

כאשר המעבר האחרון נובע ממשפט המטריזביליות. □

סעיף ב׳

נגדיר את ההעתקה $\Delta : X \to P(X)$ על־ידי $\Delta x = \delta_x$, ונראה שהיא רציפה.

הוכחה. עלינו להראות שעבור $x_0 \in X$ וסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ כך ש־$x_n \to x$ מתקיים $\Delta x_n \to \Delta x$. מסעיף א׳ הטענה שקולה ל־$\delta_{x_n} \xrightarrow{*} \delta_x$.
תהי $f \in C(X)$, אז,

$$\int f \, d\delta_{x_n} = f(x_n)$$

מהגדרה, אבל $x_n \to x$ וגם f רציפה ולכן $f(x_n) \to f(x_0)$, אבל $\int f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)$. לכן $\int f \, d\delta_{x_n} \to \int f \, d\delta_{x_0}$ לכל $f \in C(X)$ ולכן הסדרה מתכנסת גם ב־d וקיבלנו רציפות. □

שאלה 4

יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית.

סעיף א׳

נראה ש־$P(X)$ קמורה.

הוכחה. נניח ש־$0 < t < 1$ ו־$\mu, \nu \in P(X)$. אז מתקיים,

$$(\mu(1-t) + \nu t)(X) = \mu(X)(1-t) + \nu(X)t = 1 - t + t = 1$$

ולכן מהגדרה $P(X)$ קמורה. $\square$

סעיף ב׳

נניח ש־$T : X \to X$ רציפה. נראה שאם μ, ν שתי מידות הסתברות T־אינווריאנטיות שונות, אז יש אינסוף כאלה.

הוכחה. נתון ש־μ, ν הן T־אינווריאנטיות, כלומר,

$$\forall E \in \mathcal{B}_X, \quad \mu(E) = \mu(T^{-1}(E)), \quad \nu(E) = \nu(T^{-1}(E))$$

תהי $t \in (0, 1)$ ונגדיר $\xi = \mu(1-t) + \nu t$, אז $\xi \in P(X)$ מהסעיף הקודם. בנוסף,

$$\xi(T^{-1}(E)) = \mu(T^{-1}(E))(1-t) + \nu(T^{-1}(E))t = \mu(E)(1-t) + \nu(E)t = \xi(E)$$

ומצאנו ש־ξ היא T־אינווריאנטית. בהתאם מצאנו $2^{\aleph_0}$ מידות T־אינווריאנטיות, לכל $t \in (0, 1)$. $\square$

סעיף ג׳

נניח ש־$X = [0, 1]$ ו־$T(x) = x^2$. נתאר את כל מידות ההסתברות ה־T־אינווריאנטיות.

פתרון נסמן $E_\varepsilon = [0, \varepsilon]$ עבור $\varepsilon \in (0, 1)$. תהי μ מידת הסתברות T־אינווריאנטית, אז מתקיים,

$$\mu(E_\varepsilon) = \mu(T^{-1}(E_\varepsilon)) = \mu(T^{-n}(E_\varepsilon)) = \mu([0, \varepsilon^{\frac{1}{2^n}}]) \xrightarrow{n\to\infty} \mu([0, 1]) = 1$$

כלומר מצאנו ש־$\mu(E_\varepsilon) = 1$ לכל ε, ולכן בהכרח $\mu = \delta_0$ בלבד.