1 רקע

ניזכר בהגדרה של אינדקס חיתוך מודולו 2.

הגדרה 1.1 (אינדקס חיתוך מודולו 2) נניח ש־X יריעה קומפקטית ו־$f : X \to Y$ העתקה חלקה טרנסוורסלית ל־$Z \subseteq Y$ סגורה, ונניח גם ש־$\dim X + \dim Z = \dim Y$. במקרה זה $f^{-1}(Z)$ היא תת־יריעה סגורה ממימד 0 של X, כלומר היא קבוצה סופית. נגדיר את אינדקס החיתוך מודולו 2 של f ו־Z, $I_2(f, Z)$, להיות מספר הנקודות ב־$f^{-1}(Z)$ מודולו 2.

עבור העתקה חלקה כללית $g : X \to Y$ נבחר העתקה חלקה f הומוטופית ל־g וטרנסוורסלית ל־Z ונגדיר $I_2(g, Z) = I_2(f, Z)$, אנו יכולים לבחור כזו בדיוק מהמסקנה הקודמת.

הערה נשתמש בסימון $I(f, Z)$ כמספר נקודות החיתוך (הסופי) לאורך ההרצאה מטעמי נוחות, אך לא נראה אף טענה בנוגע לערך זה.

המסקנה והמשפט הבאים הראו לנו שזוהי הגדרה עקבית.

מסקנה 1.2 אם $f : X \to Y$ העתקה חלקה ו־$\partial f : \partial X \to Y$ טרנסוורסלית ל־$Z \subseteq Y$ אז קיימת העתקה $g : X \to Y$ הומוטופית ל־f כך ש־$\partial f = \partial g$ וגם $g \pitchfork Z$.

בניסוח אחר נקבל שאם $h : \partial X \to Y$ היא העתקה טרנסוורסלית ל־$Z \subseteq Y$ ו־h ניתנת להרחבה לאיזושהי העתקה $X \to Y$, אז בפרט היא יכולה להתרחב להעתקה טרנסוורסלית ל־Z בכל X.

כלומר מצאנו שגם אם f לא טרנסוורסלית ל־Z, היא כן הומוטופית להעתקה כן טרנסוורסלית ל־Z, כל תנאי שהשפה מספיק יפה.

משפט 1.3 *אם $f, g : X \to Y$ הומוטופיות וטרנסוורסליות ל־Z, אז $I_2(g, Z) = I_2(f, Z)$.*

אם $X \subseteq Y$ אנו מקבלים את המקרה המיוחד שבו גם השיכון $i : X \hookrightarrow Y$ מקבלת אינדקס חיתוך מודולו 2, והוא כמובן משומר, נגדיר זאת.

הגדרה 1.4 (אינדקס חיתוך מודולו 2 של תתי־יריעות) אם $X, Z \subseteq Y$ שתי תת־יריעות ממימד משלים, כלומר $\dim X + \dim Z = \dim Y$, וכן X קומפקטית, אז נגדיר $I_2(X, Z) = I_2(i, Z)$.

דוגמה 1.1 אם נבחן את $T = S^1 \times S^1$ טורוס, אז $T \subseteq \mathbb{R}^3$ וגם $\dim T = 2$. נגדיר את שתי תתי־היריעות,

$$X = e^{\pi i} \times S^1, \quad Z = S^1 \times e^{\pi i}$$

אז נקבל $X \cap Z = \{(e^{\pi i}, e^{\pi i})\}$, ולכן על־פי ההגדרה שלנו $I_2(X, Z) = 1$. מהצד השני אם נגדיר,

$$Z = \{(e^{xi}, e^{yi}) \mid x, y \in [0, 2\pi],\ (x - \pi)^2 + (y - \pi)^2 = 1\}$$

אז נקבל $I_2(X, Z) = 0$.

משפט 1.5 (ערמת הרשימות) *נניח ש־y ערך רגולרי של $f : X \to Y$ כאשר X קומפקטית ו־$\dim X = \dim Y$.*
אז $f^{-1}(\{y\})$ הוא קבוצה סופית, ואם נסמן $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_n\}$ אז קיימת סביבה פתוחה $y \subseteq U \subseteq Y$ וסביבות פתוחות וזרות $x_i \subseteq V_i \subseteq X$, כך ש־$f|_{V_i} : V_i \to U$ דיפאומורפיזם חלק.

הוכחה. תהי $x \in X$ נקודה כך ש־$f(x) = y$. y ערך רגולרי ולכן x נקודה רגולרית ובהתאם $Df|_x : T_xX \to T_yY$ על, אבל זוהי העתקה לינארית בין מרחבים ממימד סופי ושווה ולכן היא גם חד־חד ערכית, וקיימת סביבה של $x \in U \subseteq X$ בה נקבל דיפאומורפיזם מקומי.

נשאר אם כן להראות שיש מספר סופי של נקודות כאלה. נניח ש־$\{x_i \mid i < \alpha\} = f^{-1}(\{y\})$ וכן ש־$\{V_i \mid i < \alpha\}$ סדרת פתוחות זרות, אז גם $X \setminus \bigcup_{i<\alpha} V_i$ קומפקטית ולכן גם $Z = f(X \setminus \bigcup V_i) \subseteq Y$ קומפקטית, וכן $y \notin Z$ שכן $y \in V_i$ לכל i.
קיימת תת־סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ כך ש־$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ לאיזושהי $x \in X$, וכן $f(x_n) \to y$, לכן נסיק ש־$f(x) = y$ מקומפקטיות X. אבל התמונה של X קומפקטית ובפרט סגורה ולכן $y \in Z$ בסתירה. $\square$

משפט 1.6 (חיתוך קבוע במקרה הקשיר) *אם $f : X \to Y$ חלקה, X קומפקטית ו־Y קשירה, כך ש־$\dim X = \dim Y$, אז $I_2(f, \{y\})$ קבוע לכמעט כל $y \in Y$.*

הוכחה. ממשפט סארד כמעט כל y היא ערך רגולרי, בפרט f טרנסוורסלית ל־$\{y\}$ כמעט־תמיד ישירות מהגדרת טרנסוורסליות. נבחין כי $\dim\{y\} = 0$ ולכן $\{y\}$ יריעה ממימד־משלים ל־X ביחס ל־Y. ממשפט ערמת הרשימות קיימת סביבה $y \subseteq U$ כך ש־$f^{-1}(U)$ היא איחוד

זר של סביבות $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ פתוחות ב־X כך ש־$f|_{V_i} : V_i \to U$ דיפאומורפיזם חלק. נסיק בהתאם,

$$I_2(f, \{y\}) = \#f^{-1}(\{y\}) = \sum_{i=1}^{n} |(f|_{V_i})^{-1}(z)| = n$$

כלומר מצאנו שלכל נקודה $z \in U$ מתקיים $I_2(f, \{z\}) = n$ בדיוק. בהתאם נוכל להסיק שהפונקציה $z \mapsto I_2(f, \{z\})$ היא קבועה מקומית ו־$Y \to [2]$ אבל Y קשירה ולכן $I_2(f, \{z\})$ קבועה כמעט־תמיד. $\square$

עתה נוכל להגדיר אפיון מעניין במיוחד של f,

הגדרה 1.7 (דרגה מודולו 2) תהי X קומפקטית ו־Y קשירה כך ש־$\dim X = \dim Y$, ונניח ש־$f : X \to Y$ העתקה חלקה. נגדיר את הדרגה מודולו 2 של f להיות הערך הקבוע כמעט־תמיד $I_2(f, \{y\})$ עבור $y \in Y$ ערך רגולרי. נסמן את הדרגה ב־$\deg_2 f$.

דוגמה 1.2 נבחן את $f : S^1 \to S^1$ המוגדרת על־ידי,

$$f(e^{it}) = e^{int}$$

עבור $n \in \mathbb{Z}$ קבוע. הפונקציה f היא חלקה ו־S^1 היא יריעה קומפקטית וקשירה, ואנו יודעים גם שמתקיים,

$$f^{-1}(e^{it}) = \{e^{i\frac{1}{n}k} \mid k \in [n]\}$$

ולכן,

$$\deg_2 f = I_2(f, \{e^{it}\}) = \#f^{-1}(e^{it}) \mod 2 = n \mod 2$$

כלומר מצאנו ש־$\deg_2 f = 1$ אם ורק אם n אי־זוגי.

באופן לא מפתיע, גם דרגה מתנהגת באופן צפוי תחת הומוטופיה.

משפט 1.8 (שימור דרגה מודולו 2 על־ידי הומוטופיה) *אם $f, g : X \to Y$ העתקות חלקות והומוטופיות, X קומפקטית ו־Y קשירה, אז,*

$$\deg_2 f = \deg_2 g$$

הוכחה. ישיר מהגדרה ומשפט השימור תחת הומוטופיה. $\square$

הגדרה 1.9 (על־משטח) יריעה $X \subseteq \mathbb{R}^n$ תיקרא על־משטח (Hypersurface) אם $\dim X = n - 1$.

יהי $X \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח ו־$f : X \to Y$ חלקה, כאשר Y יריעה ממימד n. אנו מעוניינים להבין בהינתן נקודה $z \in \mathbb{R}^n \setminus Y$ לשאול כמה f מתלפפת סביב z. כדי שלא נעבוד קשה מדי, במקום לבחון ישירות את הליפוף, נבנה העתקה של הכיוון של z מכל נקודה $f(x)$, כך נקבל שהליפוף שקול לכמות הסיבובים שאנו עושים בספירה. נגדיר,

$$u : X \to S^{n-1}, \qquad u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}$$

זוהי בדיוק הפונקציה שמחזירה לנו את הכיוון של $f(x)$ מ־z בכל מיקום, בפרט נבחין ש־$\dim X = \dim S^{n-1}$ ולכן $\dim_2 u$ מוגדר. מצאנו אם כך שעד כדי מודולו 2, אנו יודעים בדיוק את הליפוף של f את X סביב z, ונגדיר זאת מפורשות.

הגדרה 1.10 (אינדקס ליפוף מודולו 2) נגדיר את אינדקס הליפוף מודולו 2 ונסמן $W_2(f, z) = \deg_2 u$ להיות דרגת פונקציית הכיוון של f מ־z.

דוגמה 1.3 נבחן את $f : S^1 \to \mathbb{C}$ המוגדרת על־ידי,

$$f(e^{it}) = e^{(in+1)t}$$

אז $0 \notin f(S^1)$ ונבחן את הליפוף סביב הראשית. נגדיר,

$$u(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = \frac{e^{(in+1)t}}{e^t} = e^{int}$$

וקיבלנו בדיוק את הפונקציה מהדוגמה הקודמת, נסיק ש־$W_2(f, 0) = 1$ אם ורק אם n אי־זוגי.

2 אינדקס ליפוף ומשפט ההפרדה

המטרה שלנו בשלב זה היא למצוא תכונות של אינדקס ליפוף מודולו 2. התכונה הראשונה שנראה היא הקשר שבין ערך זה לבין הרחבה חלקה של פונקציות.

משפט 2.1 (שקילות אינדקס ליפוף לחיתוך הרחבה) *יהי $X \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח כך ש־$X = \partial D$ עבור D יריעה קומפקטית עם שפה, ותהי $f : X \to \mathbb{R}^n$ חלקה. נניח שקיימת העתקה $F : D \to \mathbb{R}^n$ חלקה כך ש־$\partial F = f$, כלומר F היא הרחבה חלקה של f ל־D, ותהי z ערך רגולרי של F כך ש־f לא מקבלת את z. במקרה זה F מקבלת את z מספר סופי של פעמים וכן,*

$$W_2(f,z) = \#F^{-1}(\{z\}) \mod 2$$

כלומר f מלפפת את X סביב z כמספר הפעמים ש־F מקבלת את z מודולו 2.

הוכחה. נראה שאם F לא מקבלת את z אז $W_2(f,z) = 0$.
נגדיר את $u : D \to S^{n-1}$ הכיוון שהגדרנו קודם עבור $z \in Y$, נוכל להגדיר אותה לכל D שכן $F(x) \neq z$ ומהווה הרחבה חלקה שלה. ממשפט השפה נקבל ישירות ש־$\deg_2 u = 0$ ולכן גם $W_2(f,z) = 0$.
ביתר פירוט אם נבחן את $u^{-1}(\{y\}) \cap X$, זוהי קבוצה סופית כך שיש הומוטופיה שמעבירה נקודות כאלה בתוך D, היריעות שנוצרות על־ידי הומוטופיה כזו הן ממימד 1 ולכן אינדקס החיתוך שלהן מודולו 2 הוא 0.
עתה נניח ש־$F^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_l\}$ ושסביב כל נקודה y_i קיים כדור $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$, ושהכדורים זרים בזוגות וזרים ל־X.
נראה שאם $f_i : \partial B_i \to \mathbb{R}^n$ כך ש־$f_i = F|_{B_i}$ אז מתקיים,

$$W_2(f,z) = W_2(f_1,z) + \dots + W_2(f_l,z) \mod 2$$

נגדיר את,

$$D' = D \setminus \bigcup_{i=1}^{l} B_i^\circ$$

אז $F_0 = F|_{D'} : D' \to \mathbb{R}^n$ מקיימת $z \notin \operatorname{Im} F$, לכן מהחלק הקודם $W_2(\partial F_0, z) = 0$. יהי y ערך רגולרי של F_0 ונחשב,

$$0 = W_2(\partial F_0, z) = \deg_2 u \equiv_2 \#u^{-1}(\{y\}) \equiv_2 \#(u|_{\partial D})^{-1}(\{y\}) + \sum_{i=1}^{n} \#(u|_{\partial B_i})^{-1}(\{y\}) \equiv_2 W_2(f,z) + \sum_{i=1}^{n} W_2(f_i,z)$$

ולכן נקבל (מזל שב־$\mathbb{F}_2$ מתקיים $x = y \iff x = -y$),

$$W_2(f,z) = W_2(f_1,z) + \dots + W_2(f_n,z)$$

עתה ניזכר כי $z \in \mathbb{R}^n \setminus Y$ ערך רגולרי ולכן ממשפט ערמת הרשימות נוכל לבחור כדורים כאלה, ובפרט נקבל ממנו שהצמצום של F הוא דיפאומורפיזם מקומי ולכן $W_2(f_i,z) = 1$ בדיוק בבחירת סביבות אלה. נובע אם כך,

$$W_2(f,z) = W_2(f_1,z) + \dots + W_2(f_n,z) \mod 2 = n \mod 2 = \#F^{-1}(\{z\})$$

וקיבלנו בדיוק את הרצוי. □

דוגמה 2.1 נבחן את $f : S^1 \to \mathbb{C}$ המוגדרת,

$$f(e^{it}) = e^{it} + 2e^{2it}$$

אבל נוכל להרחיב את f ל־$F : \bar{B}(0,1) \to \mathbb{C}$ המוגדרת על־ידי,

$$F(z) = z + 2z^2$$

בפרט עבור $z = 0$ נקבל,

$$F^{-1}(\{0\}) = \{0, -\frac{1}{2}\}$$

ונסיק $W_2(f,0) = 0$. מהצד השני עבור $z = 2$ נקבל,

$$2 = z + 2z^2 \iff z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{4}$$

אבל רק $\frac{1}{4}(-1+\sqrt{17}) \in \bar{B}(0,1)$ ולכן $W_2(f,2) = 1$.

עתה כשבידנו דרך לחשב את אינדקס הליפוף מודולו 2, נראה תכונה ייחודית שלו.

משפט 2.2 (ההפרדה של ז'ורדן־ברוור) *יהי $X \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח קשיר וקומפקטי, אז $X^C = \mathbb{R}^n \setminus X = D_0 \cup D_1$ עבור שתי קבוצות פתוחות וזרות. D_0 החלק "החיצוני" למשטח ו־D_1 החלק "הפנימי" למשטח.*
בנוסף $\bar{D}_1$ היא יריעה קומפקטית המקיימת $\partial\bar{D}_1 = X$, ומתקיים $W_2(f,z) = 1 \iff z \in D_1$.

את המשפט נוכיח על־ידי ניסוח והוכחה של מספר למות תוך ההנחה ש־X על־משטח קשיר וקומפקטי.

למה 2.3 *לכל $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ ולכל $x \in X$ ו־U כך ש־$x \in U$ סביבה פתוחה שלה ב־$\mathbb{R}^n$ אז קיימת נקודה $y \in U$ כך ש־z, y ניתנות לחיבור במסילה שלא חותכת את X.*

הוכחה. נגדיר $B \subseteq X$ קבוצת הנקודות המקיימות את הטענה, במרחב קשיר אם קבוצה היא סגורה פתוחה ולא ריקה אז $B = X$, לכן נראה את שלוש התכונות הללו.

סגורה: לכל סדרת נקודות ב־B מתכנסת נוכל לבחור סביבות של הנקודות בסדרה, ובהתאם נקבל סביבה עבור הגבול שלהן.

פתוחה: ממשפט סובמרסיה קנונית אנו יודעים שלכל $x \in B$ יש דיפאומורפיזם מקומי כך ש־$x \in V \subseteq X$ נראית כמו $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. בהתאם בסביבה זו מקשירות ושרירותיות בחירת U נקבל שגם $V \subseteq B$, כלומר B היא קבוצה פתוחה.

לא ריקה: אנו יודעים כי X קומפקטית ולכן $d = \operatorname{dist}(X, z)$ מתקבל ובפרט קיימת נקודה $x \in X$ כך ש־$d = \|x - z\|$. נגדיר את המסילה $\gamma = [z, x]$ ונקבל שהיא זרה ל־X ומעידה על $x \in B$. □

למה 2.4 *ל־$\mathbb{R}^n \setminus X$ יש לכל היותר שתי מחלקות קשירות.*

הוכחה. תהי $x \in X$ נקודה כלשהי, ויהי $\varphi : V \to W$ דיפאומורפיזם מקומי כך ש־$V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ו־$W \subseteq X$. ניקח כדור $B \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש־$B \cap X \subseteq W$, ולכן ל־$B \setminus X$ יש בדיוק שתי מחלקות קשירות, נניח ש־$z_0, z_1 \in B \setminus X$ לא קשירות מסילתית.
מהלמה הקודמת עבור x ו־B כל נקודה $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ מתחברת במסילה שלא חותכת את X לנקודה בסביבה של B, בפרט מקשירות מסילתית של שתי המחלקות ב־$B \setminus X$ נסיק שכל נקודה z ניתנת לחיבור במסילה ל־z_0 או z_1. בפרט, $\mathbb{R}^n \setminus X$ מכילה לכל היותר שתי מחלקות קשירות מסילתית. □

למה 2.5 *אם $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n \setminus X$ שייכות לאותה מחלקת קשירות מסילתית, אז $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$.*

הוכחה. תהי $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus X$ כך ש־$\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$. אז בהתאם גם,

$$u_t(x) = \frac{x - \gamma(t)}{\|x - \gamma(t)\|}$$

היא הומוטופיה המעבירה את u מ־z_0 ל־z_1, ולכן $W_2(z_0) = W_2(z_1)$. □

למה 2.6 *עבור $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ ו־$v \in S^{n-1}$ נגדיר,*

$$r = \{z + tv \mid t \geq 0\}$$

הקרן היוצאת מ־z בכיוון v.
במקרה זה r טרנסוורסלית ל־X אם ורק אם v ערך רגולרי של u המתאימה ל־z.

הוכחה. r טרנסוורסלית ל־X אם בכל נקודה $x \in r \cap X$, v בלתי־תלויה לינארית ב־$DX|_x$, אבל גם $u(x) = v$ לכל נקודה כזו מהגדרת u, ולכן r טרנסוורסלית ל־X אם ורק אם v ערך רגולרי של u. □

נבחין כי נובע שכמעט כל קרן היוצאת מ־$z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ נתונה היא טרנסוורסלית ל־X.

למה 2.7 *נניח ש־$w \in r$ נקודה כלשהי שונה מ־z ו־$w \notin X$. נסמן l מספר נקודות החיתוך של r ו־X בין z ל־w, אז מתקיים,*

$$W_2(X, z) = W_2(X, w) + l \mod 2$$

הוכחה. נסמן u_z, u_w פונקציות הכיוון המתאימות, לכן, מהלמה הקודמת v ערך רגולרי של u_z, u_w ולכן מתקיים,

$$W_2(f, z) = \#u_z^{-1}(\{v\}), \quad W_2(f, w) = \#u_w^{-1}(\{v\})$$

מהגדרת r ו־l נקבל אם כך בדיוק את הרצוי. □

למה 2.8 *ישנן בדיוק שתי מחלקות קשירות ל־$\mathbb{R}^n \setminus X$.*

הוכחה. זהו למעשה חיזוק של למה 2.4, עלינו להראות רק שיש לכל הפחות שתי מחלקות קשירות.
על־ידי בחירת z כלשהו, בחינת r, וסימון w לאחר חיתוך בודד עם X, נקבל $W_2(X,z) \neq W_2(X,w)$, אבל אילו z ו־w היו שייכות לאותה מחלקת קשירות אז מלמה 2.5 נסיק שהן שייכות למחלקות שונות, בפרט יש לפחות שתי מחלקות שקילות ובהתאם בדיוק שתיים. □

נסמן,

$$D_0 = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus X \mid W_2(X,z) = 0\}, \qquad D_1 = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus X \mid W_2(X,z) = 1\}$$

נבחין כי אלו הן בדיוק שתי מחלקות הקשירות מלמה 2.8 ומ־2.5.

למה 2.9 *לכל z רחוק מספיק מהראשית מתקיים $W_2(f,z) = 0$.*

הוכחה. X קומפקטית ולכן מוכלת בכדור כלשהו $B(0,R)$. עבור $z \notin B(0,R)$ נוכל להסיק ש־u פונקציית הכיוון המתאימה ל־z מקבלת כיוונים רק בחצי הספירה סביבה הנקודה $u(0)$, ישירות מגאומטריה אוקלידית. בהתאם קיימת סביבה בה u מתאפסת, ולכן בהכרח $W_2(f,z) = 0$. □

נבחין כי D_0, D_1 פתוחות כמחלקות הקשירות של תת־קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}^n$. מצאנו גם ש־D_0 לא חסומה מהלמה האחרונה, וש־D_1 חסומה שכן $\partial D_1 = X$, בפרט $\bar{D}_1 = D_1 \cup X$.

למה 2.10 *D_1 יריעה קומפקטית.*

הוכחה. נשאר להראות ש־D_1 יריעה.
עבור נקודות פנימיות נוכל למצוא סביבה בה קיים דיפאומורפיזם מקומי לזהות, ולכן עלינו לבדוק רק נקודות בשפה. תהי $x \in X$ ונניח ש־$0 \in B \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה כך שקיים דיפאומורפיזם חלק $\varphi : B \to \mathbb{R}^n$ כך ש־$\varphi|_{\mathbb{R}^{n-1}} : \mathbb{R}^{n-1} \cap B \to X$ פרמטריזציה של x ובפרט נניח ש־$\varphi(0) = x$. דיפאומורפיזם משמר מחלקות קשירות ולכן $\varphi(\mathbb{H}^n \cap B), \varphi(-\mathbb{H}^n \cap B)$ שתי מחלקות הקשירות המקומיות סביבה x של $(\mathbb{R}^n \setminus X) \cap \varphi(B)$. בהתאם $\varphi(\mathbb{H}^n \cap B) \subseteq \bar{D}_1$ או $\varphi(-\mathbb{H}^n \cap B) \subseteq \bar{D}_1$ ולכן נוכל להגביל את φ ולקבל פרמטריזציה מקומית של $\bar{D}_1$ ולהסיק שהיא יריעה קומפקטית. □

מסקנה 2.11 גם $\bar{D}_0$ יריעה (לא קומפקטית) עם שפה, ומתקיים $\partial \bar{D}_0 = X$.

לבסוף ניגש לחלק הנוסף של המשפט.

מסקנה 2.12 לכל $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ ואיזושהי קרן r היוצרת מ־z וטרנסוורסלית ל־X, $z \in D_1$ אם ורק אם r חותכת את X כמות אי־זוגית של פעמים.

הוכחה. נבחר נקודה w מספיק רחוקה על r ולכן היא מקיימת $W_2(X,w) = 0$, ולכן מספר נקודות החיתוך של $[z,w]$ עם X שנסמן ב־l מקיים,

$$W_2(X,z) = W_2(X,w) + l \mod 2 = l \mod 2$$

ובהתאם l זוגי אם ורק אם $z \in D_0$. □

3 בורסוק־אולם

משפט 3.1 (בורסוק־אולם) *תהי $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1}$ העתקה חלקה כך שהיא לא שולחת אף נקודה לראשית, ונניח ש־f מקיימת את תנאי הסימטריה,*

$$\forall x \in S^k,\ f(-x) = -f(x)$$

אז $W_2(f,0) = 1$.

את הטענה נוכיח באינדוקציה על k. למקרה $k = 1$ יש מספר הוכחות, נצטט כאן את זו המובאת בספר.

הוכחה. נגדיר את $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ על־ידי $f(x) = e^{ig(x)}$, ונקבל ש־g חלקה ומקיימת $g(2\pi) = g(0) \mod 2\pi$. נסמן $q \in \mathbb{Z}$ המספר אשר מקיים $g(2\pi) = g(0) + 2\pi q$ ונרחיב את הגדרת g ל־$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על־ידי $g(x + 2\pi) = g(x) + 2\pi q$. אם 0 ערך רגולרי של g אז,

$$\deg_2 f = \#f^{-1}(\{0\}) \mod 2 = \#g^{-1}(\{0 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}) \cap [0,2\pi] \mod 2 = q \mod 2$$

ונסיק ש־$\deg_2 g = q \mod 2$, אם 0 לא רגולרי נבחר $\varepsilon > 0$ קרוב אליו מספיק ונקבל את אותה התוצאה.

עתה ניזכר כי $f(-x) = -f(x)$ ולכן גם $g(x+\pi) = g(x)+\pi \mod 2\pi$ ובאותו אופן נגדיר את $q' \in 2\mathbb{Z}+1$ כך ש־$g(x+\pi) = g(x)+\pi q'$. נשתמש בזהות זו,

$$g(2\pi) = g(\pi) + \pi q' = g(0) + 2\pi q'$$

ונסיק $q = q'$ ולכן בפרט $\deg_2 f = 1$.

לבסוף אם $f : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ חלקה ומקיימת את תנאי הסימטריה, אז עבור $z = 0$ נוכל להגדיר את פונקציית הכיוון,

$$u : S^1 \to S^1, \quad u(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

ולכן בפרט u מקיימת את תנאי הסימטריה ולכן $W_2(f,0) = \deg_2 u = 1$. □

עתה משיש לנו את בסיס האינדוקציה, ניגש להוכחה המלאה.

הוכחה. נניח נכונות עבור $k-1$ ותהי $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ חלקה וסימטרית. לצורך ההוכחה נזהה את S^{k-1} כחיתוך של S^k עם הציר האחרון, כלומר $(x_1,\dots,x_k) \mapsto (x_1,\dots,x_k,0)$. נסמן $g = f|_{S^{k-1}}$, ועל־ידי שימוש במשפט סארד נבחר $a \in S^k$ אשר מהווה ערך רגולרי לשתי ההעתקות,

$$u_g = \frac{g}{\|g\|} : S^{k-1} \to S^k, \qquad u_f = \frac{f}{\|f\|} : S^k \to S^k,$$

מטעמי סימטריה נסיק שגם $-a$ ערך רגולרי של שתי הפונקציות. מהגדרת ערך רגולרי ומשיקולי מימד u_g לא יכולה לקבל את a בכלל, ובהתאם גם את $-a$. נסמן $l = \mathbb{R}a$ ונסיק ש־g לא חותכת את הישר בכלל, כשקילות לעובדה ש־$g \pitchfork l$. באופן דומה נבחין כי $f \pitchfork l$. עתה נחשב,

$$W_2(f,0) = \deg_2 u_f = \#u_f^{-1}(\{a\}) \mod 2$$

אבל u_f חותכת את a אותה כמות פעמים שהיא חותכת את $-a$ בדיוק, ולכן,

$$\#u_f^{-1}(\{a\}) = \frac{1}{2}\#f^{-1}(l)$$

שוב מטעמי סימטריה, נוכל להסיק שאם $f = f_+ + f_-$ הצמצומים להמיספרה עליונה ותחתונה S^k_+, S^k_- המוגדרות כך ש־$x_k \geq 0, x_k \leq 0$, אז מתקיים,

$$\#f_+^{-1}(l) = \#f_-^{-1}(l)$$

ולכן בפרט,

$$\#u_f^{-1}(\{a\}) = \frac{1}{2}\#f^{-1}(l) = \#f_+^{-1}(l)$$

כלומר קיבלנו ש־$W_2(f,0) = \#f_+^{-1}(l)$ ונוכל לבחון רק את ההמיספרה העליונה מעתה.

ההפימספרה S^k_+ היא יריעה עם שפה והיא מקיימת $\partial S^k_+ = S^{k-1}$, ואנו רוצים להשתמש בהנחת האינדוקציה, אבל הפונקציה $g : S^{k-1} \to \mathbb{R}^{k+1}$ לא מקיימת את התנאים בשל מימד הטווח, לכן נרצה להטיל אותה ל־$\mathbb{R}^k$ באופן שיאפשר לנו לתקן זאת. נסמן $V = l^\perp$, כלומר $\mathbb{R}^{k+1} = V \oplus l$ ונסמן $\pi : \mathbb{R}^{k+1} \to V$ את ההטלה האורתוגונלית המתאימה. אנו יודעים ש־g לא חותכת את $l = \pi^{-1}(\{0\})$ ולכן הפונקציה $\pi \circ g : S^{k-1} \to V$ לא מתאפסת, ונבחין כי פונקציה זו גם סימטרית שכן π לינארית. אם כך הנחת האינדוקציה חלה על $\pi \circ g$ ולכן $W_2(\pi \circ g, 0) = 1$.

צמצום ללא שינוי מימד מכבד טרנסוורסליות ולכן $f_+ \pitchfork l$ ולכן $\pi \circ f : S^k_+ \to V$ היא טרנסוורסלית ל־$\{0\}$ וכן $(\pi \circ f_+)^{-1}(\{0\}) = f_+^{-1}(l)$.
ממשפט שקילות אינדקס ליפוף נסיק,

$$W_2(\pi \circ g, 0) = \#(\pi \circ f_+)^{-1}(\{0\}) = \# f_+^{-1}(l)$$

לבסוף,

$$W_2(f, 0) = \# f_+^{-1}(l) = W_2(\pi \circ g, 0) = 1$$

ובכך השלמנו את מהלך האינדוקציה. $\square$