תורת ההסתברות 2 — סיכום

3 ביוני 2026

תוכן העניינים

1 שיעור 1 — 25.3.2026 3

1.1 מבוא הקורס 3

1.2 פרקולציה 4

2 שיעור 2 — 15.4.2026 5

2.1 ממידה להסתברות 5

3 שיעור 3 — 29.4.2026 8

3.1 משתנים מקריים 8

4 שיעור 4 — 6.5.2026 10

4.1 התכנסות 10

4.2 החוק החזק והחלש של המספרים הגדולים 10

5 שיעור 5 — 13.5.2026 13

5.1 התכנסות — המשך 13

5.2 פרדוקס המעטפות 13

5.3 משפט הקירוב של ויירשטראס 14

5.4 הימורים 14

5.5 אי־תלות בזוגות 15

6 שיעור 6 — 20.5.2026 16

6.1 שרשרות מרקוב 16

7 שיעור 7 — 27.5.2026 18

7.1 שרשרות מרקוב 18

8 שיעור 8 — 3.6.2026 20

8.1 שרשרות מרקוב 20

8.2 צימודים 20

8.3 פילטרציה 21

1 שיעור 1 — 25.3.2026

1.1 מבוא הקורס

הקורס מבוסס על הספר Probability with Martingales של Williams. במהלך הקורס נלמד שלושה נושאים, קצת סותרים באיזשהו מובן. נתחיל מללמוד הסתברות בהתבסס על תורת המידה, כך נבסס תוצאות שנלמדו בקורס הקודם. בחלק השני נלמד נושאים מתקדמים בהסתברות, כדוגמת משפט הגבול המרכזי (אותו ראינו אבל לא הוכחנו), פורייה מרטינגלים ושרשרות מרקוב. בחלק האחרון נגיע לנושאים ומחקר בעולם ההסתברות, נלמד על הילוכים מקריים, פרוקלציה וכן הלאה.

נעבור לדוגמות דווקא מהחלק האחרון, כדי להדגים רעיונות אותם אנו רוצים לראות.

דוגמה 1.1 (הילוכים מקריים) באנגלית (Simple) Random Walk. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מקריים שווי־התפלגות כך ש־$X_n \sim U(\{-1,1\})$ ונגדיר $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. הסיבה שאנחנו קוראים למושג הזה הילוך היא שהערכים המתקבלים מהסכימה מהלכים על הישר הממשי, אנו מעוניינים לשאול שאלות כמו $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 0$. אנו גם יכולים לבדוק את הערך $\mathbb{P}(\exists n > 0\ Y_n = 0)$, ברור כי ערך זה הוא לפחות חצי שכן הוא מקיים $\geq \mathbb{P}(Y_2 = 0) = \frac{1}{2}$. למעשה ערך זה שווה ל־$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\exists 0 < n < m\ Y_n = 0) = 1$, ונאמר שבמקרה זה ההילוך המקרי נשנה. אם X_n היו מתפלגים אחרת, לדוגמה $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ עבור $0 \leq p \leq 1$ אז $\mathbb{P}(\exists n > 0\ Y_n = 0) < 1$.

נבחן את $\mathbb{P}(Y_{2n} = 0)$ זוהי ההסתברות שיש בדיוק n משתנים X_k המקבלים 1,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{2n} = 0) &= \mathbb{P}(\exists I \subseteq [2n], |I| = n\ \forall i\ X_i = 1 \iff i \in I) \\
&= \sum_{|I|=n, I\subseteq[2n]} \mathbb{P}(\forall i\ X_i = 1 \iff i \in I) \\
&= \sum_{|I|=n, I\subseteq[2n]} \frac{1}{2^{2n}} \\
&= \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \\
&\overset{(1)}{\approx} \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n\right)^2 \cdot 2^{2n}} \\
&= \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}
\end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מנוסחת סטירלינג, כלומר ש־$k! \approx \sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k$. לכן $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(Y_{2n} = 0) = \infty$. קיבלנו את התוצאה שמספר החזרות לראשית הוא אינסוף.

נעבור למקרה $\mathbb{P}(X_i = 1) = p > \frac{1}{2}$. אי־שוויון הופדינג טוען שאם $Z_1, \ldots, Z_n$ משתנים מקריים בלתי־תלויים עם $\mathbb{E}(Z_i) = 0$ לכל i וכן ש־$|Z_i| \leq 1$, אז לכל $a > 0$ מתקיים,

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n Z_i \geq a) \leq \exp(-\frac{a^2}{2n})$$

צ'בישב היה נותן לנו חסם $\leq \frac{n}{a^2}$ במקום. נגדיר $Z_i = \frac{X_i - (2p-1)}{2}$ כדי לנרמל ונקבל שמתקיים $\sum_{i=1}^k Z_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k X_i - n(p - \frac{1}{2})$, אז

מתקיים,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n = 0) &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = 0)\\ &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} Z_1 = -n(p-\frac{1}{2}))\\ &\le \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} -Z_i \ge n(p-\frac{1}{2}))\\ &\le \exp(-\frac{n^2(p-\frac{1}{2})^2}{2n})\\ &= \exp(-\frac{(p-\frac{1}{2})^2}{2}\cdot n)\end{aligned}$$

כלומר ההסתברות דועכת אקספוננציאלית, ובהתאם $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(Y_n=0)<\infty$. מצאנו שיש הבדל מהותי בין המקרים $p=\frac{1}{2}$ והמקרים $p\neq\frac{1}{2}$.

אם נסמן $q=\mathbb{P}(\forall n>0\ Y_n=0)$, כלומר ההסתברות שלעולם לא נחזור לאפס. התפלגות מספר החזרות לראשית היא גאומטרית $\mathrm{Geo}(q)$. אם $q=0$ אז בהסתברות 1 חוזרים לראשית אינסוף פעמים. אם $q>0$ אז תוחלת מספר החזרות לראשית היא $\frac{1}{q}<\infty$. כש־$p=\frac{1}{2}$ התוחלת היא אינסוף ואחרת התוחלת סופית. לכן אם $p=\frac{1}{2}$ אז $q=0$ (נשנה) ואם $p\neq\frac{1}{2}$ אז $q>0$ (חולף). זוהי לא הוכחה פורמלית, אבל היא מבהירה לנו את הקונספט הכללי עליו אנו מדברים.

הגדרה 1.1 (הילוך מקרי פשוט על גרף) באנגלית (Simple Random Walk (SRW על גרף. נניח ש־$G=(V,E)$ גרף פשוט וקשיר עם דרגות סופיות ויהי v_0 קודקוד כלשהו. SRW היא סדרת קודקודים מקריים בגרף, כאשר $X_0=v_0$ כמעט תמיד, בהינתן ש־$X_0=v_0, X_1=v_1,\dots,X_n=v_n$ מגרילים באופן אחיד בין השכנים של v_n.

דוגמה 1.2 עתה נוכל לדבר על $q=\mathbb{P}(\forall n>0\ X_n\neq v_0)$, כלומר הפעם ההילוך הוא לאורך גרף, אם $q=0$ אז ההילוך נשנה ואם $q>0$ אז ההילוך חולף.

אם $G=\mathbb{Z}^2$ אז ההילוך נשנה, כדי להראות זאת עלינו להראות שתוחלת מספר החזרות לראשית הוא אינסופי, נבחין כי $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_n=v_0)=\infty$ שכן $\mathbb{P}(X_n=v_0)\approx\frac{c}{n}$. כדי לפתור את הבעיה הזו אנו נבחן את המקרה שבו ההילוך הוא בלתי תלוי על שני הצירים, התוצאה תהיה תנועה על רשת מסוימת שנראית בדיוק כמו $\mathbb{Z}^2$, ולכן נקבל את המבוקש כמכפלה של בלתי־תלויים.

מה יקרה במקרה $G=\mathbb{Z}^d$ עבור $d>2$? השיטה של $d=2$ לא עובדת יותר, אבל הטענה עדיין נכונה, כלומר $\mathbb{P}(X_n=v_0)\approx\frac{c}{n^{\frac{d}{2}}}$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_n=v_0)=\infty$ ולכן ההילוך חולף.

מה שראינו עתה הוא תוצאה בסיסית אחת בעולם שלם. באופן כללי האם גרף הוא נשנה או לא היא תכונה של הגרף ולא של נקודת ההתחלה.

1.2 פרקולציה

נעבור לנושא אחר אך קשור. נניח שיש לנו גרף G קשיר ואינסופי, לדוגמה $\mathbb{Z}^2$. לכל קשת נגריל בהסתברות p צביעה בכחול או אדום, באופן בלתי תלוי. יש לנו כמה שאלות שאנחנו יכולים לשאול, לדוגמה מה ההסתברות שהגרף הכחול קשיר, הסתברות זו היא 0 אם $p<1$, זאת שכן ההסתברות שנקודה כלשהי נתונה היא מבודדת היא $1-p^4$. נעבור לשאלה מה ההסתברות שבגרף הכחול יש רכיב קשירות אינסופי, זוהי שאלה מורכבת הרבה יותר, נסמן $\theta(p)$ כהסתברות ביחס ל־p, ונבחין ש־θ היא מונוטונית עולה חלש. יהיו $0\le p_1<p_2\le 1$ ונצבע כל קשת בהסתברות p_1 בכחול כהה, בהסתברות p_2-p_1 נצבע בכחול בהיר וב־$1-p_2$ לא נצבע בכלל. אם נבחן את $\theta(p_1)$ נקבל את המצב המקורי עם p_1, אם נבחן את שני גווני הכחול נקבל את $\theta(p_2)$, נגדיר את המורע A להיות קיום רכיב קשירות אינסופי כחול בהיר ו־B רכיב קשירות כזה כחול (שני הגוונים). אז $A\subseteq B$ ולכן $\theta(p_1)=\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(B)=\theta(p_2)$. נקרא לרעיון זה צימוד (Coupling). משפט קולומורוב אומר שאם A מאורע זנב (לא מושפע משום קבוצה סופית של קורדינטות) אז $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$, נסיק ש־$\theta(p)\in\{0,1\}$ ומונוטונית ונסמן את נקודת השינוי ב־p_c. האם $0<p_c<1$? מה ערך $\theta(p_c)$? אלו הן שאלות שאנו עדיין לא יכולים לענות עליהן עכשיו. אם $G=\mathbb{Z}$ אז $p_c=1$. התשובה היא ש־$p_c=\frac{1}{2},\theta(\frac{1}{2})=0$ עבור $G=\mathbb{Z}^2$ וזה מקרה נדיר שבו יש לנו ערך ולא רק חסם כללי.

2 שיעור 2 — 15.4.2026

2.1 ממידה להסתברות

עתה כשאנו מכירים את תורת המידה, אנו יכולים לבסס מחדש את תורת ההסתברות עם כלים של מידה, לדוגמה מרחב הסתברות הוא מרחב מידה כך ש־$\mu(\Omega) = 1$. בנוסף נגדיר שמשתנה מקרי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ כפונקציה מדידה. נאמר גם שנעסוק רק בקבוצות מדידות בורל. גם הגדרנו את $\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X^{-1}(S))$ להיות התפלגות X, וכן $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} 1 \, d\mathbb{P}_X$. עתה ניגש למלאכה הפורמלית.

נניח מעתה ש־Ω קבוצה לא ריקה

הגדרה 2.1 (אלגברה) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ היא אלגברה על Ω אם מתקיים,

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. לכל $A \in \mathcal{F}$ גם $A^C \in \mathcal{F}$
3. $\mathcal{F}$ סגורה לאיחוד זר סופי

נאמר ש־$\mathcal{F}$ היא σ־אלגברה אם היא סגורה לאיחוד זר בן־מניה.

הגדרה 2.2 (מרחב מדיד) מרחב מדיד $(\Omega, \mathcal{F})$ הוא קבוצה Ω ו־σ־אלגברה עליה.

דוגמה 2.1 איחודים סופיים של קטעים $(a, b) \subseteq (0, 1]$ היא אלגברה.

דוגמה 2.2 עבור $\Omega = \{0, 1\}^\mathbb{N}$ איחודים סופיים של קבוצות צילינדריות, כלומר,

$$\forall a \in \{0, 1\}^\mathbb{N}, \quad C_a = \{x \in \Omega \mid \forall 1 \le i \le n, \ x = a_i\}$$

היא אלגברה. במקרה זה לדוגמה $C_{0,1,0}$ היא קבוצת כל הסדרות שמתחילות ברישא $(0, 1, 0)$.

הגדרה 2.3 (סיגמא־אלגברה נוצרת) לכל $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ נגדיר את $\sigma(S)$ להיות ה־σ־אלגברה המינימלית שמכילה את S.

נבחין כי האופן שקול אפשר להגדיר את ה־σ־אלגברה הנוצרת באופן קונסטרוקטיבי.

דוגמה 2.3 עבור $S = \{A\}$ מתקיים $\sigma(S) = \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$.

דוגמה 2.4 עבור $A \subseteq \mathbb{N}$ נאמר שיש לה צפיפות $a \in [0, 1]$ אם,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [n]|}{n} = a$$

נגדיר את $\mathcal{F}$ כאוסף כל הקבוצות בעלות צפיפות, האם $\mathcal{F}$ היא σ־אלגברה? התשובה היא שלא שכן כל יחידון הוא בעל צפיפות. האם $\mathcal{F}$ היא אלגברה?

הגדרה 2.4 (מידת הסתברות) בהינתן מרחב מדיד $(\Omega, \mathcal{F})$, כלומר $\mathcal{F}$ היא σ־אלגברה, פונקציה $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ היא מידת הסתברות אם,

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(A) \ge 0$ לכל $A \in \mathcal{F}$
3. σ־אדיטיביות: אם $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}$ זרות רז $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n)$
4. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

אם μ מוגדרת על אלגברה $\mathcal{F}$ ומקיימת סגירות לאיחוד זר בן־מניה אז נקרא לה **קדם־מידה**.

משפט 2.5 (ההרחבה של קרתאודורי) *אם $\mathcal{F}_0$ אלגברה על Ω ו־μ_0 קדם־מידה סופית אז קיימת מידה יחידה וסופית μ על $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$ שמרחיבה את μ_0.*

דוגמה 2.5 עבור $\Omega = \{0, 1\}^\mathbb{N}$ ו־$\mathcal{F}_0$ האיחודים הסופיים של צילינדרים, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$ נגדיר,

$$\forall a \in \Omega^{<\omega}, \quad \mu(C_a) = 2^{-|a|}$$

כלומר נקבל את האורך של הסדרה הסופית a, ונקבל את ההסתברות של הטלת מטבע מספר סופי של פעמים וקבלת הסדרה a. המשפט נותן לו מידת הסתברות μ המרחיבה את μ_0, עתה נוכל לדבר על מאורעות ממידה אפס.

מה הקשר בין μ למידת לבג על $(0, 1]$? התשובה היא שהמידה של סדרה שווה למידה שלו כמספר בייצוג בינארי עשרוני במידת לבג, ואלו מרחבים שקולים עד כדי מידה 0.

הגדרה 2.6 (גבול עליון ותחתון של מאורעות) עבור $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ סדרת מאורעות (מדידות) נגדיר,

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \qquad \liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

ההצדקה להגדרה זו היא שאם נגדיר את סדרת הפונקציות $\mathbb{1}_{A_n}$ אז נקבל,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$$

ניזכר במספר טענות,

למה 2.7 (הראשונה של בורל־קנטלי) *אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$\sum_{n\in\mathbb{N}} < \infty$ אז $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = 0$.*

נראה דוגמה נגדית לגרירה ההפוכה,

דוגמה 2.6 אם נבחר את $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ אז נקבל $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$ ולכן הסכום מתבדר אבל גם $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{0\}$ ומהסתברות 0.

למה 2.8 *אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ מאורעות בלתי־תלויים כך ש־$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ אז $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.*

בקורס הקודם הגדרנו אי־תלות בדרך ישירה,

הגדרה 2.9 (אי־תלות של מאורעות) אם $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ סדרת מאורעות, אז נאמר שהיא בלתי־תלויה אם לכל $I \subseteq \mathbb{N}$ סופית מתקיים,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

אבל נוכל להרחיב את ההגדרה לאי־תלות כללית יותר,

הגדרה 2.10 (אי־תלות סיגמא־אלגברה) אם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ו־$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ הן תת־σ־אלגברות, אז נאמר שהן בלתי־תלויות אם לכל $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$ מתקיים,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$$

מאורעות A_1, A_2 יקראו בלתי־תלויים אם $\sigma(A_1)$ ו־$\sigma(A_2)$ הן בלתי־תלויות.

הגדרה 2.11 (אי־תלות קבוצת סיגמא־אלגברות) אם I קבוצת אינדקסים כלשהי, $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ תת־σ־אלגברות במרחב, אז נאמר שהן בלתי־תלויות אם לכל $J \subseteq I$ סופית מתקיים ולכל בחירה של $A_j \in \mathcal{F}_j$ לכל $j \in J$ מתקיים,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

מאורעות $\{A_i\}_{i\in I}$ יקראו בלתי־תלויים אם $\{\sigma(A_i)\}_{i\in I}$ בלתי־תלויה.

נחזור ללמה השנייה ונוכיח אותה.

הוכחה. נבחין כי מתקיים,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left(\liminf_{n\to\infty} A_n^C\right)^C$$

ולכן אנו רוצים להראות שמתקיים $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n^C) = 0$, כלומר $\mathbb{P}(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^C) = 0$, אבל מרציפות,

$$\mathbb{P}(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^C) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^C)$$

אבל עבור סכומים חלקיים נקבל,

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{M} A_n^C) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=m}^{M} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \leq \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\sum_{n=m}^{M} \mathbb{P}(A_n)\right) \to 0$$

כאשר אי־השוויון האחרון נובע מאי־שוויון ברנולי $1 + x \leq e^x$. בהתאם קיבלנו את המבוקש. □

הגדרה 2.12 (סיגמא־אלגברת זנב) נניח ש־$(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד ו־$\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת תת־σ־אלגברות. נגדיר את σ־אלגברת הזנב של $\{\mathcal{F}_n\}$ על־ידי,

$$\mathcal{T} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma(\mathcal{F}_m, \mathcal{F}_{m+1}, \ldots)$$

כאשר נגדיר $\sigma(A_1, A_2, \ldots) = \sigma(A_1 \cup A_2 \cup \cdots)$. למאורע $A \in \mathcal{T}$ נקרא מאורע זנב.

הערה ההגדרה של σ־אלגברת זנב לא תלויה בסדר $\{\mathcal{F}_n\}$.

דוגמה 2.7 נגדיר שוב $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ וכן $\mathcal{F}_n = \sigma(B_n)$ כאשר $B_n = \{x \in \Omega \mid x_n = 0\}$. נבחין כי $A = \{(0,0,\ldots)\} \notin \mathcal{T}$, שכן אם $B \in \mathcal{T}_2$ ו־$y \in B$ אז גם $y' \in B$ כאשר $y = y'$ מלבד הקורדינטה הראשונה. לעומת זאת, המאורע $B = \{x \in \Omega \mid \exists m \forall n > m,\ x_n = 0\}$ מקיים $B \in \mathcal{T}_m$.

משפט 2.13 (חוק 0,1 של קולמוגורוב) *אם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ו־$\mathcal{F}_n$ סדרת תת־σ־אלגברות בלתי־תלויה, ו־$A \in \mathcal{T}$ מאורע זנב, אז,*

$$\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$$

דוגמה 2.8 נבחן את הגרף $\mathbb{Z}^2$ עם צביעה אקראית בשני צבעים, ושאלנו בשיעור הקודם מה ההסתברות שיש רכיב קשירות אינסופי באחד הצבעים, עתה נטען שזהו מאורע זנב.

3 שיעור 3 — 29.4.2026

נמשיך לעסוק במשפט 2.13 ונראה דוגמה למקרה שהמשפט מייצג.

דוגמה 3.1 יהי $G = (V, E)$ גרף אינסופי קשיר עם דרגות סופיות, ונגדיר $\Omega = \{0,1\}^E$ כמרחב מכפלה של צביעות, כאשר ההסתברות לצביעה 1 היא p ו־$1-p$ עבור 0. עבור $w \in \Omega$ נגדיר $E' = \{e \in E \mid w_e = 1\}$ ונגדיר את תת־הגרף (V, E'). נסמן $F_e = \sigma(A_e)$ עבור $A_e = \{w \in \Omega \mid w_e = 1\}$. קיים ב־$(V, E')$ רכיב קשירות אינסופי הוא מאורע זנב. נבחין כי $A \in T_n$ אם ורק אם x, y שונים רק ב־$n-1$ הקורדינטות הראשונות אז או ש־$x, y \in A$ או ש־$x, y \notin A$ (תרגיל). נעבור לדון במקרה של $\mathbb{Z}^2$. נסיק שאם $f(p) = \cap_p(B) \cap \{0,1\}$ אז f פונקציה עולה חלש וכן $f(0) = 0, f(1) = 1$ ולכן קיים $0 \le p_c \le 1$ נקודת אי־רציפות. אם B^C כל המאורעות עם רכיבי קשירות סופיים בלבד ו־D_v המאורע ש־v נמצא ברכיב קשירות סופי אז נקבל ש־$B^C = \bigcap_{v \in V} D_v$ וכן $D_v = \biguplus_{i \in \mathbb{N}} D_v^i$. נטען ש־$\frac{1}{3} \le p_c$ אם ורק אם לכל $p < \frac{1}{3}$ מתקיים $f(p) = 0$. יהי $p < \frac{1}{3}$, אז הסתברות המאורע שקיים מסלול אינסופי פשוט שמתחיל ב־v ונרצה למצוא את ההסתברות שקיים מסלול כזה באורך n.

טענה 3.1 *תהי $\mathcal{F}$ σ־אלגברה ו־$\mathcal{F}_0$ אלגברה כך ש־$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. לכל $A \in \mathcal{F}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת $A_0 \in \mathcal{F}_0$ כך ש־$0 \le \mathbb{P}(A \triangle A_0) < \varepsilon$.*

תרגיל 3.1 הוכיחו טענה זו.

יהי $A \in T$ ויהי $\varepsilon > 0$ אז,

$$A \in \sigma(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \sigma(\bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{F}_k))$$

לפי הטענה קיימת $A_0 \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \sigma(\cdots)$ כך ש־$\mathbb{P}(A \triangle A_0) < \varepsilon$. קיים m_0 כך ש־$A_0 \in \sigma(\bigcup_{k=1}^{m_0} \mathcal{F}_k)$ ו־$A \in T_{m_0}$ בהתאם. לכן $\mathbb{P}(A \cap A_0) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_0)$, נסמן $p = \mathbb{P}(A)$ ולכן $\forall \varepsilon > 0, p - \varepsilon \le p(p+\varepsilon) = p^2 + p\varepsilon$.

משפט 3.2 (אינווריאנטיות להזזה בהסתברות) *תהי $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ מידת מכפלה, $A \in \mathcal{F}$ מאורע אינווריאנטי, אם לכל x, $x \in A$ אם ורק אם $S(x) \in A$ כאשר $S(x)$ הזזה של הסדרה. אם A אינווריאנטי אז $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.*

3.1 משתנים מקריים

אם $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אז משתנה מקרי הוא פונקציה מדידה מ־Ω ל־$\mathbb{R}$. תנאי מספיק למדידות הפונקציה X הוא שלכל $t \in \mathbb{R}$ יתקיים $X^{-1}((-\infty, t)) \in \mathcal{F}$. אם X, Y משתנים מקריים אז (X, Y) פונקציה מדידה מ־Ω ל־$\mathbb{R}^2$, ואם $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים מקריים אז גם $(X_1, X_2, \ldots)$ פונקציה מדידה על $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

אם נחזור לדוגמה של קודם נוכל להגדיר את $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ לפי הגרף $G = (V, E)$. נניח שלכל $e \in E$ יש משתנה מקרי X_e המקריים $\mathbb{P}(X^{-1}(\{0,1\})) = 1$. נקבל כך ש־$\{x_e\}_{e \in E}$ יוצר וקטור מקרי מ־Ω ל־$\{0,1\}^E$.

מסקנה 3.3 כל פונקציה רציפה היא מדידה (בורל), והרכבה משמרת מדידות, לכן נסיק שאם X, Y משתנים מקריים אז גם $X+Y, X \cdot Y$ משתנים מקריים, $\max(X, Y)$ וכן הלאה. אם $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים אז גם $\sup_n X_n$ משתנה מקרי, שכן $\forall n,\ X_n \le t \iff \sup_n X_n \le t$. נסיק שגם $\limsup_{n\to\infty} X_n$ פונקציה מדידה ולכן משתנה מקרי גם כן. לכן גם $\{w \in \Omega \mid \limsup_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n\}$ מדידה.

X משתנה מקרי אז ההתפלגות של X היא הדחיפה קדימה של $\mathbb{P}$ דרך X, $\mathbb{P}_X$. נגדיר את התוחלת על־ידי,

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}_X(x)$$

ראינו גם מה קורה כשאנחנו מרכיבים פונקציה על X במקרה זה.

אם X, Y משתנים מקריים אז נאמר שהם בלתי־תלויים אם $\sigma(X), \sigma(Y)$ בלתי־תלויות, כאשר $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{F}\}$. זה שקול ל־$\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$, ואם הם בלתי־תלויים אז גם $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

נאמר ש־$X_1, \ldots, X_n$ בלתי־תלויים בזוגות אם לכל $i \ne j$ X_i, X_j בלתי־תלויים. אם זה מתקיים אז גם $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)$.

למה 3.4 *אם $\{A_n\}$ בלתי־תלויים בזוגות ו־$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) = \infty$ אז $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.*

הוכחה. נגדיר $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ בלתי־תלויים בזוגות ו־$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. נראה שמתקיים,

$$\mathbb{P}((\bigcup_{i=1}^n A_i)^C) = \mathbb{P}(Y_n = 0) \to 0$$

מתקיים מצ'בישב,

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) \leq \mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)|) \leq \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{(\mathbb{E}(Y_n))^2}$$

וכן,

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i = \mathbb{E}(Y_n)$$

ומשילוב שתי הטענות נקבל ש־$\mathbb{P}(Y_n = 0) \to 0$, לכן $\mathbb{P}((\bigcup_{i=m}^{\infty} A_i)^C) = 0$. □

תרגיל 3.2 נניח ש־$A_1, \ldots, A_n$ מאורעות בלתי־תלויים בזוגות כך ש־$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}$ לכל $i \leq n$. מה יכולה להיות $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$?

4 שיעור 4 — 6.5.2026

4.1 התכנסות

בשיעור הקודם דיברנו על σ־אלגברות אי־תלות משתנים מקריים, בורל קנטלי השני בהנחת אי־תלות בזוגות. עתה נדבר על התכנסות.

הגדרה 4.1 (התכנסות כמעט תמיד) $X_n \xrightarrow{\text{a.s}} X$ אם $\mathbb{P}(X_n \to X) = 1$.

הגדרה 4.2 (התכנסות בהסתברות) נסמן $X_n \xrightarrow{p} X$ אם $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ לכל $\varepsilon > 0$.

במידה ראינו משפטי התכנסות על אינטגרלי לבג, ננסח תוצאות שלהם בניסוח הסתברותי.

משפט 4.3 (התכנסות תוחלת) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ *אז,*

1. *קיים M כך ש־$|X_n| \le M$ לכל n (כמעט־תמיד) גורר ש־$\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$*
2. *אם $0 \le X_1 \le \cdots$ אז $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$ (במובן הרחב גם)*
3. *אם קיים Y עם תוחלת סופית כך ש־$|X_n| \le Y$ לכל n אז $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$*

טענה 4.4 *אם $X_n \to X$ כמעט תמיד אז $X_n \to X$ בהסתברות.*

הוכחה. נגדיר $A_n^\varepsilon = \{|X_n - X| \le \varepsilon\}$, אז $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ אם ורק אם,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n^\varepsilon) = 1$$

לעומת זאת, $X_n \xrightarrow{p} X$ אם ורק אם $\mathbb{P}(A_n^\varepsilon) \to 1$ לכל $\varepsilon > 0$. מהלמה של פאטו נקבל ש־$1 = \mathbb{P}(\liminf A_n^\varepsilon) \le \liminf \mathbb{P}(A_n^\varepsilon) \le 1$ □

הכיוון ההפוך של הגרירה הזאת הוא לא נכון, נראה דוגמה נגדית.

דוגמה 4.1 נגדיר $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ עבור A_n בלתי־תלויים כך ש־$\mathbb{P}(A_n) = p_n$ כך ש־$p_n \to 0$ ו־$\sum_{n=1}^\infty p_n = \infty$ (לדוגמה $p_n = \frac{1}{n}$). אז $X_n \xrightarrow{p} 0$ אבל לא $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ מבורל קנטלי.

טענה 4.5 *אם $X_n \xrightarrow{p} X$ אז קיימת תת־סדרה X_{n_k} המקיימת $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$.*

הוכחה. נגדיר $B_n^\varepsilon = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$ ונסמן $p_n = \mathbb{P}(B_n)$ אז $p_n \to 0$ לפי הגדרת התכנסות בהסתברות. נבחר תת־סדרה n_k כך ש־$\sum_{k=1}^\infty p_{n_k} < \infty$ ואז מבורל־קנטלי הראשון נקבל $|X_n - X| \le \varepsilon$ החל ממקום מסוים ולכן,

$$X - \varepsilon \le \liminf X_{n_k} \le \limsup X_{n_k} \le X + \varepsilon$$

זה נכון לכל $\varepsilon > 0$ ולכן יש שוויון, השאר נובע מטיעון אלכסון של סדרות. □

הגדרה 4.6 (מטריקה על משתנים מקריים) עבור X, Y משתנים מקריים מעל $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ נגדיר את,

$$d(X, Y) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \mathbb{P}(|X - Y| > \varepsilon) < \varepsilon\}$$

תרגיל 4.1 הראו כי זוהי אכן מטריקה, והיא מגדירה $X_n \xrightarrow{p} X$.

אין מרחב מטרי שבו התכנסות סדרת משתנים מקריים שקולה להתכנסות כמעט תמיד. ננסח טענה טופולוגית שלא נוכיח,

טענה 4.7 *במרחב טופולוגי או מטרי $a_n \to a$ אם ורק אם לכל תת־סדרה n_k יש תת־תת־סדרה $a_{n_{k_i}} \to a$.*

אם נבחן את X_n מהדוגמה אז $X_n \not\xrightarrow{\text{a.s.}} X$ אבל $X_n \xrightarrow{p} 0$ ולכן $X_{n_k} \xrightarrow{p} 0$ לכל תת־סדרה, ולפי הטענה שהוכחנו על תתי־סדרות מתכנסות, נוכל לקחת תת־סדרה $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ ונקבל את המסקנה הבאה,

מסקנה 4.8 התכנסות כמעט תמיד איננה טופולוגית או מטרית.

4.2 החוק החזק והחלש של המספרים הגדולים

משפט 4.9 (החוק החזק של המספרים הגדולים) *אם X_n משתנים מקריים שווי־התפלגות ובלתי־תלויים ובעלי תוחלת μ אז,*

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{p} \mu$$

כאשר $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

הוכחה (תחת אי־תלות בזוגות). נניח שקיימת שונות למשתנים המקריים σ^2,

$$\mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) + \overbrace{\mathrm{Cov}(\cdots)}^{=0} = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$$

בהתאם,

$$\mathbb{P}(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \varepsilon) \le \frac{\mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

מצ'בישב.

עתה נניח רק ש־$X_i \ge 0$. יהי $M > 0$ כלשהו, נגדיר $X_i' = X_i \mathbb{1}_{\{X_i \le M\}}$ ו־$X_i'' = X_i \mathbb{1}_{\{X_i > M\}}$ ולכן $X_i = X_i' + X_i''$. נקבל,

$$0 \le X_i' \le M$$

נסמן $\mathbb{E}(X_i') = \mu', \mathbb{E}(X_i'') = \mu''$ ולכן גם $\mu = \mu' + \mu''$, ונבחין כי נקבל של־X_i' שונות סופית $(\sigma_i')^2$.

נראה שלכל $\varepsilon > 0$ קיים M כך ש־$\mathbb{E}(X_i'') \le \varepsilon$. נבחן את הסדרה $X_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \le M\}}$ אז היא מתכנסת מונוטונית ל־X_i ולכן $\mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \le M\}}) \to \mu$ אז $\mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{\{X_1 > M\}}) \to 0$.

נסמן $S_n' = \sum_{i=1}^{n} X_i'$ ואת S_n'' באופן דומה, ויהי $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\frac{1}{n}S_n - \mu| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|S_n - n\mu| > \varepsilon n) \\
&\le \mathbb{P}(|S_n' - n\mu'| > \frac{\varepsilon}{2}n) + \mathbb{P}(|S_n'' - n\mu''| > \frac{\varepsilon}{2}n) \\
&\overset{(1)}{\le} \frac{(\sigma')^2}{(\frac{\varepsilon}{2})^2 n} + \frac{n\mu''}{\frac{\varepsilon}{2}n}
\end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מצ'בישב ומרקוב. נבחר M כך ש־$\mu'' \le (\frac{\varepsilon}{2})^2$ ונקבל,

$$\frac{(\sigma')^2}{(\frac{\varepsilon}{2})^2 n} + \frac{\mu''}{\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

בשלב האחרון נניח ש־X בעל תוחלת ונפרק $X_i^+ = X_i \mathbb{1}_{\{X_i \ge 0\}}$ וכן $X_i^- = X_i \mathbb{1}_{\{X_i \le 0\}}$ ולכן $X_i = X_i^- + X_i^+$. בהתאם גם $\mu = \mu^- + \mu^+$.
בהתאם גם $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^+ \xrightarrow{p} \mu^+$ ואותו הדבר על μ^-. □

עתה נעבור לחוק החזק.

משפט 4.10 (החוק החזק של המספרים הגדולים) *אם X_n משתנים מקריים שווי־התפלגות וכלתי־תלויים, אם הם בעלי תוחלת μ אז $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xrightarrow{a.s.}$ μ.*

הוכחה. נניח תוחלת אפס בלי הגבלת הכלליות על־ידי מעבר למשתנה מקרי ממורכז. נבחן את $A_{n^2}^{\varepsilon}$, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_{n^2}^{\varepsilon}) < \infty$ ולכן,

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} A_{n^2}^{\varepsilon}) = 0 \iff \mathbb{P}(\liminf A_{n^2}^{\varepsilon}) = 1$$

אם $n^2 \le k \le (n+1)^2$ אז,

$$|\sum_{i=n^2+1}^{k} X_i| = |S_k - S_{n_k^2}| \le M \cdot 2n_k$$

ולכן,

$$\left|\frac{S_k}{k} - \frac{S_{n_k^2}}{n_k^2}\cdot\frac{n_k^2}{k}\right| \le \frac{M2n_k}{k} \to 0$$

נראה שאם $X_i \ge 0$ שווי־התפלגות עם תוחלת μ רז $\mathbb{P}(\limsup \frac{S_n}{n} \ge 4\mu) = 0$. יהי $k \in \mathbb{N}$ ונרצה לחסום את $\mathbb{P}(\frac{S_{2^k}}{2^k} > 2\mu)$. נגדיר,

$$X_i' = X_i \mathbb{1}_{\{X_i \le 2^k\}}, \quad X_i'' = X_i \mathbb{1}_{\{X_i > 2^k\}}$$

אז,

$$\mathbb{P}(S_{2^k} > 2\mu 2^k) \le \mathbb{P}(S_{2^k}' > 2\mu 2^k) + \mathbb{P}(S_{2^k}'' > 0)$$

נחסום אותם בנפרד,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S'_{2^k} > 2\mu 2^k) &\le \mathbb{P}(S'_{2^k} - 2^k\mu' > 2\mu 2^k - 2^k\mu') \\ &\le \mathbb{P}(|S'_{2^k} - 2^k\mu'| \ge 2^k\mu) \\ &\overset{\text{צ'בישב}}{\le} \frac{\mathrm{Var}(S'_{2^k})}{2^{2^k}\mu^2} \\ &= \frac{\mathrm{Var}(X'_i)}{2^k\mu^2} \\ &\le \frac{\mathbb{E}(X_1^2\mathbb{1}_{\{X_1\le 2^k\}})}{2^k\mu^2}\end{aligned}$$

קיבלנו אם כך מאי־השוויון הקודם,

$$\mathbb{P}(S_{2^k} > 2\mu 2^k) \le \mathbb{P}(S'_{2^k} > 2\mu 2^k) + \mathbb{P}(S''_{2^k} > 0) \le \frac{\mathbb{E}(X_1^2\mathbb{1}_{\{X_1\le 2^k\}})}{2^k\mu^2} + 2^k\mathbb{P}(X_1 > 2^k)$$

נסמן $p_k = \mathbb{P}(2^k < X_1 \le 2^{k+1})$ לכל $k \in \mathbb{N}$ ועבור $k = 0$ נסמן $p_0 = \mathbb{P}(X_1 \le 2)$. בהתאם,

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k p_k \le 2\mu$$

מתקיים,

$$\mathbb{P}(X_1 > 2^k) = \sum_{j=k}^{\infty} p_j, \quad \mathbb{E}(X_1^2\mathbb{1}_{\{X_1\le 2^k\}}) \le 4\sum_{j=0}^{k-1} p_j 2^{2j}$$

וכן,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_1 > 2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sum_{j=k}^{\infty} p_j = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{k=1}^{j} 2^k \le 2\sum_{j=1}^{\infty} p_j 2^j \le 4\mu < \infty$$

כלומר הטור סופי.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k-1} p_j 2^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j 2^{2j}\sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j 2^{2j}\cdot 2^{-j}\cdot 2 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j 2^j < \infty$$

אז במסתכם מצאנו ש־$\sum_{k=1}^{\infty} PP(\frac{1}{2^k}2_{2^k} > 2\mu) < \infty$, לכן מבורל־קנטלי הראשון נקבל שממקום מסוים,

$$\frac{S_{2^k}}{2^k} \le 2\mu$$

נשים לב שאם $2^k < n \le 2^{k+1}$ אז $S_{2^k} \le S_n \le S_{2^{k+1}}$ ולכן,

$$\frac{S_n}{n} \le \frac{S_{2^{k+1}}}{n} = \frac{S_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\cdot\frac{2^{k+1}}{n} \le 2\cdot\frac{S_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$

□

5 שיעור 5 — 13.5.2026

5.1 התכנסות — המשך

נעבור להוכחת המשפט החזק לאחר שסיימנו את הלמה הרלוונטית בשיעור הקודם.

הוכחה. נניח ש־$X_i \geq 0$ ויהי $\varepsilon > 0$, נבחר M מספיק גדול כך שאם,

$$X_i' = X_i \mathbb{1}_{\{X_i \leq M\}}, \qquad X_i'' = X_i \mathbb{1}_{\{X_i > M\}}$$

אז

$$\mathbb{E}(X_i') > \mu - \varepsilon, \qquad \mathbb{E}(X_i'') < \varepsilon$$

ונסמן,

$$S_n = S_n' + S_n'', \qquad S_n' = \sum_{i=1}^{n} X_i', \qquad S_n'' = \sum_{i=1}^{n} X_i''$$

ועתה נקבל,

$$\begin{aligned}
\mu - \varepsilon &< \mathbb{E}(X_1') \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{S_n'}{n} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n'}{n} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n'}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{S_n''}{n} \\
&\leq \mathbb{E}(X_1') + 4\mathbb{E}(X_1'') \\
&\leq \mu + 4\varepsilon
\end{aligned}$$

עבור X_i כלליים נפרק $X_i^+ = X_i \mathbb{1}_{\{X_i \geq 0\}}$ וכן $X_i^- = X_i \mathbb{1}_{\{X_i < 0\}}$ ואז $X_i = X_i^+ - X_i^-$. □

אם $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} a$ אז $a = \mathbb{E}(X_i)$, מהצד השני אם ל־X_i אין תוחלת אז $\frac{S_n}{n}$ לא מתכנסת. אם $0 \leq X_i$ ו־$\mathbb{E}(X_i) = \infty$ אז $\frac{S_n}{n} \to \infty$ כמעט תמיד.
קיימים משתנים מקריים X_i בלתי־תלויים ושווי התפלגות ללא תוחלת כך ש־$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} a \in \mathbb{R}$.

5.2 פרדוקס המעטפות

נניח שאנו מקבלים שתי מעטפות, באחת יש a כסף ובשנייה $2a$, נקבל מעטפה אחת באקראי וראינו בה b, אז בשנייה יש או $2b$ או לחילופין $\frac{b}{2}$ כסף, ובהסתברות שווה.

בהתאם תוחלת המעטפה השנייה היא $\frac{1}{2} \cdot 2b + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{5b}{4} > b$, כלומר לכאורה עלינו תמיד לבקש להחליף את המעטפה.

הפתרון הוא שאנחנו לא יכולים שלא להגדיר באופן ברור מהו a, גם לו יש התפלגות ואנו צריכים להתחשב בה. הפעם נסמן $X \geq 0$ סכום הכסף במעטפה ובהתאם $2X$ במעטפה השנייה, כאשר X משתנה מקרי, ונניח שהוא בדיד. נסמן את המדידה של המעטפה הראשונה Y. שתי האפשרויות בהתאם הן ש־$Y = X$ או ש־$Y = 2X$.

נניח ש־$\mathbb{P}(X = 1) = p_a > 0$. נרצה לבדוק אם יש התפלגות בדידה על X כך שנקבל תוצאה נכונה. אנו מניחים שמתקיים,

$$\mathbb{P}(Y = a) = \mathbb{P}(X = a)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(X = \frac{a}{2})\frac{1}{2}$$

ורוצים $\mathbb{P}(X = a \mid Y = a) = \frac{1}{2}$. נחשב,

$$\mathbb{P}(X = a \mid Y = a) = \frac{\mathbb{P}(X = a, Y = a)}{\mathbb{P}(Y = a)} = \frac{\mathbb{P}(X = a)\frac{1}{2}}{\mathbb{P}(X = a)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(X = \frac{a}{2})\frac{1}{2}} = \frac{p_a}{p_a + \frac{p_a}{2}} \implies p_{\frac{a}{2}} = p_a$$

וזו כמובן סתירה.

עתה נניח ש־$Z \sim \text{Geo}(\frac{1}{2})$, בהתאם,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z = k) = 2^{-k}$$

ונניח ש־$X = 3^Z$ וננסה לחשב שוב את ההתפלגות של המעטפה השנייה. אם $Y = 3^k$ אז או ש־$X = 3^k$ או ש־$X = 3^{k-1}$. הפעם נקבל תוך הנחת $k > 1$,

$$\mathbb{P}(X = 3^k \mid Y = 3^k) = \frac{\mathbb{P}(X = 3^k)\frac{1}{2}}{\mathbb{P}(X = 3^k)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(X = 3^{k-1})\frac{1}{2}} = \frac{\mathbb{P}(Z = k)}{\mathbb{P}(Z = k) + \mathbb{P}(Z = k-1)} = \frac{2^{-k}}{2^{-k} + 2^{-(k-1)}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

כלומר,

$$\mathbb{P}(X = 3^k \mid Y = 3^k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & k > 1 \\ 1 & k = 1 \end{cases}$$

לכן אם $k > 1$ אז $\mathbb{E}(\text{second envelope} \mid Y = 3^k) = \frac{1}{3} \cdot 3^{k+1} + \frac{2}{3} \cdot 3^{k-1} = 3^k \cdot \frac{11}{9}$. כלומר שוב קיבלנו שמשתלם להחליף מעטפה, שוב באופן פרדוקסלי. הסיבה לפרדוקס היא שהתוחלת עצמה היא לא סופית, ולכן התוצאה לא משמעותית כפי שהיא נראית.

5.3 משפט הקירוב של ויירשטראס

ראינו בקורסים קודמים שהפולינומים צפופים ברציפות, נעסוק בנושא זה מזווית הסתברותית.

הגדרה 5.1 (פולינום ברנשטיין) אם $f \in C([0,1])$ אז נגדיר,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

נקרא פולינום ברנשטיין מסדר n של f.

הערה מתקיים $B_n(p) = \mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n}))$ עבור $S_n \sim \text{Bin}(p, n)$.

טענה 5.2 $\|B_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

הוכחה. f רציפה ולכן חסומה ונסמן $M < \infty$ חסם כלשהו, f גם רציפה במידה שווה. מרציפות במידה שווה לכל $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{|x-y|<\varepsilon} |f(x) - f(y)| \to 0$$

וכן,

$$\begin{aligned}
\forall p \in [0,1],\ \|B_n(p) - f(p)\| &= |\mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n}) - f(p))| \\
&\le \mathbb{E}(|f(\frac{S_n}{n}) - f(p)|) \\
&\le \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| \ge \varepsilon) \cdot 2M + \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| < \varepsilon) \cdot \mathbb{E}(|f(\frac{S_n}{n}) - f(p)|) \\
&\le \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \cdot 2M + 1 \cdot M(\varepsilon) \\
&\xrightarrow[\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}]{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

□

5.4 הימורים

נסמן $p > \frac{1}{2}$ ונהמר $a > 0$ בהסתברות p, נפסיד a בהסתברות $1-p$. נקבל $Y_i \sim \text{Ber}(p)$ בלתי־תלויים. נגדיר את $X_n = X_{n-1} + a_n(2Y_n - 1)$ וכן $X_0 = 1$ ולכן,

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_0) + a(2p-1), \quad E(X_2) = \mathbb{E}(X_1) + a_2(2p-1)$$

מתקיים,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i - \log X_{i-1} = \frac{1}{n}\log X_n = \log \sqrt[n]{X_n}$$

ולכן במקרה שלנו,

$$f_p(a) = p\log(1+a) + (1-p)\log(1-a), \quad f_p'(a) = \frac{p}{1+a}(1-p)\frac{1}{1-a}, \quad f_p'(a) = 0 \iff p(1-a) = (1-p)(1+a)$$

ולכן $a = 2p - 1$, כלומר מצאנו שלא משתלם להשקיע או להמר בכל פעם את כל כספנו, אלא משתלם להשקיע מספר מסוים וחלקי של הכסף.

5.5 אי־תלות בזוגות

נניח ש־$X_i \sim U(\{-1,1\})$ עבור $i \in [n]$ בלתי־תלויים בזוגות, ונבדוק את,

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = n) \leq \mathbb{P}(|\sum_{i=1}^{n} \geq n) \leq \frac{\operatorname{Var}\sum_{i=1}^{n} X_i}{n^2} = \frac{1}{n}$$

נרצה להבין אם זהו החסם הטוב ביותר לערך זה.

טענה 5.3 *נגדיר $Y_i \sim U(\{-1,1\})$ בלתי־תלויים עבור $i \in [k]$ ונגדיר לכל $\emptyset \neq I \subseteq [k]$ את,*

$$X_I = \prod_{i \in I} Y_i$$

אז $X_I \sim U(\{-1,1\})$ והם בלתי־תלויים בזוגות.

הוכחה. לחלק הראשון מספיק להראות ש־$\mathbb{E}(X_I) = 0$, אבל,

$$\mathbb{E}(X_I) = \mathbb{E}(\prod_{i \in I} Y_i) = \prod_{i \in I}\mathbb{E}(Y_i) = \prod 0 = 0$$

נראה שהם בלתי־תלויים בזוגות, יהיו $I \neq J$ לא ריקות, אז,

$$X_I \cdot X_J = X_{I \triangle J}$$

ולכן,

$$\mathbb{E}(X_I X_J) = 0$$

אם $Z_1, Z_2 \sim U(\{-1,1\})$ הם בלתי־מתואמים ($\mathbb{E}(Z_1 Z_2) = 0$) אז הם בלתי־תלויים (תרגיל). □

אתה נשאל מה ערך,

$$\mathbb{P}(\forall \emptyset \neq I \subseteq [k]\ X_I = 1) = \mathbb{P}(\forall i \in [k]\ Y_i = 1) = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n+1}$$

כלומר מצאנו חסם יותר טוב באופן זניח לשאלה המקורית שלנו.

6 שיעור 6 — 20.5.2026

6.1 שרשרות מרקוב

נתחיל מתיאור של מצב. נניח שצפרדע עומדת על פרח ויכולה לעבור לפרח אחר לחזור וכן הלאה. ההסתברות לעבור מפרח א' לפרח ב' היא q וההסתברות לעבור מפרח ב' לפרח א' היא p, ואנו רוצים להבין מה הסיכוי שתהיה בפרח מסוים לאורך זמן. נקבל בהתאם שאם X_n משתנה מקרי המתאר את מיקום הצפרדע באיטרציה ה־n אז מתקיים,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = W \mid X_t = E, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = p \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = E \mid X_t = W, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = q$$

ניזכר שאם A, B, C מאורעות כך ש־$A \cap B = \emptyset$ ו־$\mathbb{P}(C \mid A) = \mathbb{P}(C \mid B) = p$ אז $\mathbb{P}(C \mid A \cup B) = p$. נקבל אם כך שמתקיים,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = W \mid X_n = E) = p, \qquad \mathbb{P}(X_{n+1} = E \mid X_n = W) = q$$

בדיוק, כלומר אנו לא תלויים במה שקרה לפני האיטרציה האחרונה. נסמן $\mu_n(E) = \mathbb{P}(X_n = E), \mu_n(W) = \mathbb{P}(X_n = W)$ ולכן,

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1}(E) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = E) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = E \mid X_n = W)\mathbb{P}(X_n = W) + \mathbb{P}(X_{n+1} = E \mid X_n = E)\mathbb{P}(X_n = E) \\
&= q\mu_n(W) + (1-p)\mu_n(E)
\end{aligned}$$

ולכן גם $\mu_{n+1}(W) = (1-q)\mu_n(W) + p\mu_n(E)$. אם נגדיר,

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

נקבל שמתקיים $\mu_{n+1} = \mu_n \cdot P$ ולכן גם $\mu_n = \mu_0 P^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אם נקבל התכנסות על $n \to \infty$ אז קיים $\mu = (r, 1-r)$ כך שמתקיים $\mu = \mu P$ ולכן נובע ש־$r = (1-p)r + q(1-r)$ ולכן $r = \frac{q}{p+q}$. בהתאם $\mu = (\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q})$. עתה נניח ש־$\mu_n \to \mu$ ולכן,

$$\Delta_{n+1} = \mu_{n+1}(E) - \frac{q}{p+q} = (1-p)\mu_n(E) + q(1-\mu_n(E)) - \frac{q}{p+q} = q + (1-p-q)(\mu_n(E) - \frac{q}{p+q})$$

ונובע,

$$\Delta_{n+1} = (1-p-q)\Delta_n$$

ולכן גם,

$$\Delta_n = (1-p-q)\Delta_0$$

$X_0, X_1, \dots$ המשתנים המקריים שמקבלים ערכים ב־S קבוצת המצבים עבור S בדידה עם טופולוגיה ־σ־אלגברה בדידה.

הגדרה 6.1 (שרשרת מרקוב) $X_0, X_1, \dots$ היא שרשרת מרקוב עם מטריצת מעבר $P \in M_{S \times S}$ אם,

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = s_{t+1} \mid X_t = s_t, X_{t-1} = s_{t-1}, \dots, X_0 = s_0) = P_{s_{t+1}, s_t}$$

לכל t ולכל $s_0, \dots, s_{t+1} \in S$.

למעשה,

$$P(s_{t+1}, s_t) = \mathbb{P}(X_{t+1} = s_{t+1} \mid X_t = s_t)$$

בלבד מאותה הסיבה של קודם. התפלגות על S היא וקטור עם ערכים אי־שליליים שסכומם 1, ו־Δ_S נקרא סימפלקס קבוצת כל ההתפלגויות על S.

הגדרה 6.2 (סטציונרית) $\mu \in \Delta_S$ נקראת סטציונרית אם $\mu = \mu P$.

טענה 6.3 *אם S סופית אז קיימת התפלגות סטציונרית.*

הוכחה. ניקח $\mu_0 \in \Delta_S$ כלשהי ונגדיר $\mu_t = \mu_0 P^t$, נגדיר,

$$\Delta_S \ni \nu_t = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} \mu_i$$

אבל Δ_S קומפקטית ולכן יש תת־סדרה מתכנסת $\nu_{t_k} \to \nu$, נרצה להראות ש־ν היא סטציונרית.

$$\nu_t P = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{y} \mu_i P = \frac{1}{t}\sum_{i=2}^{t+1} \mu_i$$

ונקבל,

$$\nu(P-I) = \nu_t P - \nu_t = \frac{1}{t}(\nu_{t+1} - \nu_t)$$

ולכן $\nu(P-I) \to 0$ ובפרט $\nu_{t_k}(P-I) \to 0$ ולכן $\nu(P-I) = \nu P - \nu$. □

דוגמה 6.1 יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט לא מכוון עם דרגות סופיות. מטריצת המעבר של הילוך מקרי פשוט על G היא,

$$P(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{\deg u} & u \sim v \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

טענה 6.4 *המידה $\mu(v) = \deg v$ היא סטציונרית, $\mu = \mu P$.*

הוכחה.

$$(\mu P)(v) = \sum_{u \in V} \mu(u) P(u,v) = \sum_{u \sim v} \deg(u) \cdot \frac{1}{\deg u} = \deg v = \mu(v)$$

□

אם G סופי אז אפשר לנרמל ולקבל התפלגות ב־Δ_V, אם G אינסופי אז זה לא עובד.
נרחיב עתה את הדוגמה ונניח ש־G בעל משקולות, כלומר קיימת $C : E \to \mathbb{R}^+$ ונגדיר,

$$\pi(u) = \sum_{u \sim v} C_{uv}$$

ונגדיר,

$$P(u,v) = \frac{C_{uv}}{\pi(u)}$$

טענה 6.5 *זוהי מטריצה מקרית ו־π היא סטציונרית, כלומר $\pi = \pi P$.*

7 שיעור 7 — 27.5.2026

7.1 שרשרות מרקוב

נמשיך את הדיון על שרשרות בהתאם להגדרה שסיפקנו בהרצאה הקודמת. נניח ש־$X_0, \dots$ סדרת משתנים מקריים שמקבלים ערכים בקבוצה S הבדידה. הגדרנו גם את $P \in M_{S\times S}$ כך שלכל $s_0, \dots, s_1 \in S$ מתקיים,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} \mid \forall i \le n,\ X_i = s_i) = P(s_n, s_{n+1})$$

ולכן בפרט גם המטריצה היא סטוכסטית, כלומר $\forall x,\ \sum_{y\in S} P(x,y) = 1$. גם הראינו שאם $\mu_0 \in \Delta_S$ ו־$\mu_0 \sim X_0$ אז $X_n \sum \mu_n = \mu_0 P^n$.
הוכחנו שלכל P סטוכסטית קיימת $\pi \in \Delta_S$ כך ש־$\pi = \pi P$ (סטציונרית) על S סופית.
עתה נרצה להראות שמתקיים,

$$\mathbb{P}_s(X_n = t) = P^n(s,t)$$

$$\mathbb{P}_s(X_{n+1} = t) = \sum_{r\in S} \mathbb{P}_s(X_n = n)\mathbb{P}_s(X_{n+1}t \mid X_n = r) = \sum_{r\in S} P^n(s,r)P(r,t) = (P^n \cdot P)(s,t) = P^{n+1}(s,t)$$

הגדרה 7.1 (איברים ניתנים להגעה) בהינתן P נאמר שאפשר להגיע מ־x ל־y עבור $x, y \in S$ אם קיים n כך ש־$P^n(x,y) > 0$.

הגדרה 7.2 (שרשרת אי־פריקה) שרשרת נקראת אי־פריקה אם אפשר להגיע מכל מצב לכל מצב

משפט 7.3 (יחידות התפלגות אי־פריקה) *אם P אי־פריקה ו־S סופית אז ההתפלגות הסטציונרית היא יחידה.*

הוכחה. נראה שאם P אי־פריקה אז מימד המרחב העצמי של 1 הוא 1. נסמן את $h = (1, \dots, 1)$ וקטור עצמי כזה, כלומר $h = Ph$. בהתאם,

$$h(x) = \sum_y P(x,y)h(y) = \mathbb{E}_x(h(X_1))$$

נגדיר $M = \max_{x\in S} h(x)$ ונסמן x_0 כך ש־$h(x_0) = M$, אז,

$$M = h(x_0) = \sum_u P(x_0,y)h(y) \le \sum_y P(x_0,y)M = M$$

ולכן $P(x_0,y) = P(x_0,y)M$ לכל y. נובע שלכל y עבורו $0 < P(x_0,y)$ מתקיים $P(y) = M$. P אי־פריקה ולכן אפשר להגיע מכל x לכל y ונובע ש־$h \equiv M$. □

אנו יודעים ש־$\pi = \pi P$ ולכן ממשפט זה נסיק שהוא היחיד במקרה זה.
תהי P שרשרת־מרקוב על S סופית, עבור x נסמן,

$$\mathbb{N} \supseteq A_x = \{n > 0 \mid P^n(x,x) < 0\}.$$

ונסמן $a_x = \gcd A_x$ להיות המחזור של x.
A_x סגורה לחיבור כי $P^n P^m = P^{n+m}$ ולכן אם $0 < P^n(x,x)$ וגם $0 < P^m(x,x)$ אז גם $0 < P^{n+m}(x,x)$.

טענה 7.4 *אם $A \subseteq \mathbb{N}$ סגורה לחיבור אז $|\gcd(A)\mathbb{N} \setminus A| < \infty$.*

טענה 7.5 *אם P אי־פריקה אז כל ה־a_x שווים.*

הוכחה. יהיו $x, y \in S$ ונרצה להראות ש־$a_x = a_y$.
יש n כך ש־$P^n(x,y) > 0$ ויש m כך ש־$P^m(y,x) > 0$. אן $k \in A_x$ אז $m + n + k \in A_y$ כי,

$$P^{n+m+k}(y,y) = P^m(y,x)P^k(x,x)P^n(x,y) > 0$$

לכן $\gcd(A_y) \le \gcd(A_x)$ ומסימטריה $a_y = a_x$. □

מסקנה 7.6 אם P אי־פריקה אז $\forall x,\ a_x = a$ לאיזשהו $a \in \mathbb{N}$, נקרא לו המחזור של P.

משפט 7.7 *אם P אי־פריקה על S סופית ולא מחזורית (כלומר $a = 1$) אז לכל $\mu_0 \in \Delta_S$ מתקיים $\mu_n = \mu_0 P^n \to \pi$ עבור π המידה הסטציונרית היחידה.*

הוכחה. נניח ש־$P(x,y) > 0$ לכל x,y. במקרה זה קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $x,y \in S$ מתקיים $P(x,y) \geq \varepsilon\pi(y)$. לכן אם $\mu_0 \in \Delta_S$ ונסמן $\mu_0 = \nu_0$ אז קיים $\nu_1 \in \Delta_S$ כך שמתקיים,

$$\nu_0 P = \varepsilon\pi + (1-\varepsilon)\nu_1.$$

ולכן קיים גם ν_2 כך שגם,

$$\nu_1 P = \mu_1 P = \varepsilon\pi + (1-\varepsilon)\nu_2.$$

ונמשיך ככה לקבל סדרה,

$$\nu_n P = \varepsilon\pi + (1-\varepsilon)\nu_{n+1}.$$

נקבל,

$$\mu_n = (1-(1-\varepsilon)^n)\pi + (1-\varepsilon)^n\nu_n.$$

ולכן,

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1} &= \mu P \\
&= (1-(1-\varepsilon)^n)\pi + (1-\varepsilon)^n\nu_n P \\
&= (1-(1-\varepsilon)^n)\pi + (1-\varepsilon)^n(\varepsilon\pi + (1-\varepsilon)\nu_{n+1}) \\
&= (1-(1-\varepsilon)^n - (1-\varepsilon)^n\varepsilon)\pi + (1-\varepsilon)^{n+1}\nu_{n+1}.
\end{aligned}$$

עתה נניח ש־P לא מחזורית ולכן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall x,y \in S,\ P^n(x,y) > 0$ כי מאי־פריקות קיים n כך ש־$0 < P^n(x,y)$ ומהטענה הקודמת מתקיים $0 < P^n(x,x)$ עבור כל n גדול מספיק. לכן,

$$P^{n+m}(x,y) \geq P^m(x,x)P^n(xmy) > 0.$$

ונובע ש־$P^r(x,y) > 0$ לכל x,y לאיזשהו $r \in \mathbb{N}$. מתקיים $\pi = \pi P^r$ ולפי המקרה הקודם לשרשרת P^r נקבל $\mu P^{rn} \to \pi$ ובאופן דומה גם $\mu P^{rn+k} = (\mu P^k)P^{rn} \to \pi$ לכל $0 \leq k < r$. □

הגדרה 7.8 (גרף קיילי) אם G חבורה ו־$B \subseteq G$ סימטרית, כלומר $b \in B \implies b^{-1} \in B$. נגדיר גרף קיילי עם קבוצת יוצרים B עם הקשר $x \sim y \iff xy^{-1} \in B$. אם G סופית אז התפלגות אחידה היא סטציונרית.

8 שיעור 8 — 3.6.2026

8.1 שרשרות מרקוב

נניח שוב ש־S סופית ו־$\mu, \pi \in \Delta_S \subseteq \mathbb{R}^S$, כאשר,

$$\Delta_S = \{x \in \mathbb{R}^S \mid \sum_{s \in S} x_s = 1, x_s \geq 0\}.$$

טענה 8.1 *יהיו $\mu, \nu \in \Delta_S$,*

$$\max_{f: S \to [0,1]} \mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(f(Y)) \|\mu - \nu\|_1 = \sum_{s \in S} |\mu(s) - \nu(s)|.$$

כאשר $X \sim \mu, Y \sim \nu$.

הוכחה. מהגדרת התוחלת,

$$\mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(f(Y)) = \sum_{s \in S} f(s)(\mu(s) - \nu(s)) \leq \sum_{s \in S} 1 \cdot |\mu(s) - \nu(s)| = \|\mu - \nu\|_1.$$

□

8.2 צימודים

הגדרה 8.2 (צימוד) תהיינה $\mu, \nu \in \Delta_S$, אז הצימוד של μ ו־ν הוא זוג משתנים־מקריים (X, Y) שמקבלים ערכים ב־S, כך ש־$X \sim \mu, Y \sim \nu$, כלומר,

$$\mathbb{P}(X = s) = \mu(s), \qquad \mathbb{P}(Y = s) = \nu(s).$$

טענה 8.3 *אם (X, Y) הוא צימוד של (μ, ν) אז,*

$$\|\mu - \nu\|_1 \leq \mathbb{P}(X \neq Y).$$

הוכחה. תהי $f : S \to [-1, 1]$, אז,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(f(Y)) &= \mathbb{E}(f(X) - f(Y)) \\
&= \mathbb{E}(f(X) - f(Y) \mid X = Y)\mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{E}(f(X) - f(Y) \mid X \neq Y)\mathbb{P}(X \neq Y) \\
&\leq 2\mathbb{P}(X \neq Y).
\end{aligned}$$

□

נרצה צימוד של μ_n ו־$\pi = \nu_n$ (אם $\nu_0 = \pi$), הצימוד: מגרילים את $X_0 \sim \mu_0$ ואת $Y_0 \sim \nu_0 = \pi$ באופן בלתי־תלוי. נגדיר שרשרת מרקוב על $S \times S$ עם הסתברויות מעבר,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((X_{n+1}, Y_{n+1}) = (x_{n+1}, y_{n+1}) \mid \forall i \leq n,\ (X_i, Y_i) = (x_i, y_i)) \\
&= \begin{cases} P(x_n, x_{n+1}) \cdot P(y_n, y_{n+1}) & x_n \neq y_n \\ P(x_n, x_{n+1}) & x_n = y_n, x_{n+1} = y_{n+1} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}.
\end{aligned}$$

בהגדרה זו X_n היא שרשרת מרקוב עם הסתברות P וכך גם Y_n ובפרט (X_n, Y_n) היא צימוד של (μ_n, ν_n). נסמן $A_n = \{X_n \neq Y_n\}$ ונשים לב שזו סדרה יורדת. נניח ש־$P(s, s') > 0$ לכל $s, s' \in S$ ואז קיים $a > 0$ כך ש־$P(s, s') \geq a > 0$ ולכן $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) \leq 1 - a$.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = Y_{n+1} \mid \forall i \leq n,\ X_i = x_i, Y_i = y_i) \geq \sum_{s \in S} P(x_n, s)P(y_n, s) \geq |S|a^2 > 0.$$

ולכן $\mathbb{P}(A_n) \leq (1 - |S|a^2)^n$.

8.3 פילטרציה

הגדרה 8.4 (פילטרציה) יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד. פילטרציה היא סדרה עולה של תת־σ־אלגברות של $\mathcal{F}$, $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

אם $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ תהליך מקרי אז $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$, אז $\{\mathcal{F}_n\}$ נקראת הפילטרציה הטבעית.

הגדרה 8.5 (זמן עצירה) אם $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד ו־$\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ פילטרציה אז $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ נקרא זמן עצירה ביחס לפילטרציה $\{\mathcal{F}_n\}$ אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

באופן שקול אם $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$.

המטרה שלנו היא להסתכל על זה כפונקציה שמתארת תנאי עצירה של סדרת פעולות, בהתאם היא צריכה להיות מדידה אחורנית בלבד. לדוגמה הטלת מטבע עד שצד א' יצא.

דוגמה 8.1 נגדיר X_i סדרת משתנים מקריים ונגדיר,

$$\tau = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 1\}.$$

אז $\tau \le n$ אם ורק אם $\exists i \le n,\ X_i = 1$.

הגדרה 8.6 (מאורעות שנגמרים אחרי זמן סופי) אם τ זמן עצירה, אז נגדיר,

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ A \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

משפט 8.7 (תכונת מרקוב החזקה) *תהי $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ שרשרת מרקוב על S עם מטריצת מעבר P. עבור $s \in S$ ו־τ זמן עצירה ביחס לפילטרציה הטבעית נגדיר $Y_n = X_{\tau+n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ (אם $\tau = \infty$ אז נגדיר את Y_n שרירותית).*
בהינתן $\tau < \infty$ ו־$X_\tau = s$ אז $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא שרשרת־מרקוב שמתחילה ב־s עם מטריצת מעבר P והיא בלתי־תלויה ב־$\mathcal{F}_\tau$.

הוכחה. תהי $x_0, \dots, x_n \in S$ כך ש־$x_n = s$ ו־$A = \{(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)\} \subseteq \{\tau = n\}$ לכן $A \subseteq \{X_\tau = s\}$. תהי גם $y_0, \dots, y_n \in S$ כך ש־$y_0 = s$ ונסמן $B = \{(Y_0, \dots, Y_n) = (y_0, \dots, y_n)\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B \mid \tau < \infty, X_\tau = s) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(\tau < \infty, X_\tau = s)} \\
&= \frac{\mathbb{P}((X_0, \dots, X_{n+m}) = x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)}{\mathbb{P}(\tau < \infty, X_\tau = s)} \\
&= \frac{\mu_0(x_0) \prod_{i=1}^{n-1} P(x_i, x_{i+1}) \prod_{j=0}^{m-1} P(y_i, y_{i+1})}{\mathbb{P}(\tau < \infty, X_\tau = s)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(\tau < \infty, X_\tau = s)} \cdot \mathbb{P}(B).
\end{aligned}$$

□

הגדרות ומשפטים

הגדרה 1.1 (הילוך מקרי פשוט על גרף) 4
הגדרה 2.1 (אלגברה) 5
הגדרה 2.2 (מרחב מדיד) 5
הגדרה 2.3 (סיגמא־אלגברה נוצרת) 5
הגדרה 2.4 (מידת הסתברות) 5
משפט 2.5 (ההרחבה של קרתאודורי) 5
הגדרה 2.6 (גבול עליון ותחתון של מאורעות) 5
הגדרה 2.9 (אי־תלות של מאורעות) 6
הגדרה 2.10 (אי־תלות סיגמא־אלגברה) 6
הגדרה 2.11 (אי־תלות קבוצת סיגמא־אלגברות) 6
הגדרה 2.12 (סיגמא־אלגברת זנב) 6
משפט 2.13 (חוק 0,1 של קולמוגורוב) 7
משפט 3.2 (אינווריאנטיות להזזה בהסתברות) 8
הגדרה 4.1 (התכנסות כמעט תמיד) 10
הגדרה 4.2 (התכנסות בהסתברות) 10
משפט 4.3 (התכנסות תוחלת) 10
הגדרה 4.6 (מטריקה על משתנים מקריים) 10
משפט 4.9 (החוק החזק של המספרים הגדולים) 10
משפט 4.10 (החוק החזק של המספרים הגדולים) 11
הגדרה 5.1 (פולינום ברנשטיין) 14
הגדרה 6.1 (שרשרת מרקוב) 16
הגדרה 6.2 (סטציונרית) 16
הגדרה 7.1 (איברים ניתנים להגעה) 18
הגדרה 7.2 (שרשרת אי־פריקה) 18
משפט 7.3 (יחידות התפלגות אי־פריקה) 18
משפט 7.7 18
הגדרה 7.8 (גרף קיילי) 19
הגדרה 8.2 (צימוד) 20
הגדרה 8.4 (פילטרציה) 21
הגדרה 8.5 (זמן עצירה) 21
הגדרה 8.6 (מאורעות שנגמרים אחרי זמן סופי) 21
משפט 8.7 (תכונת מרקוב החזקה) 21