פתרון מטלה 09 — משוואות דיפרנציאליות, 80320

6 ביוני 2026

שאלה 1

תהי מערכת שטורם־ליוביל,

$$\frac{d}{dt}(p(t)\frac{d}{dt}u(t)) + (q(t)+\lambda)u(t) = 0, \quad u(a) = u(b) = 0$$

עבור $p > 0$.

סעיף א'

יהי $V = C([a,b])$ מרחב הפונקציות הרציפות ונגדיר מכפלה פנימית על V על־ידי,

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(x)v(x)\,dx$$

ונגדיר את $W = C_0^1([a,b])$ מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות ב־$[a,b]$ המתאפסות בקצוות, ונגדיר את $D : W \to V$ על־ידי $Du = u'$.
נראה ש־D אופרטור אנטי־סימטרי, כלומר,

$$\forall u, v \in W, \quad \langle Du, v\rangle = -\langle u, Dv\rangle$$

הוכחה. תהיינה $f, g \in W$, אז מתקיים,

$$\langle Df, g\rangle = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = -\langle f, Dg\rangle$$

על־ידי משפט אינטגרציה בחלקים, כאשר $f(x)g(x)|_a^b = 0$ שכן $f(a) = f(b) = 0$ מההנחה כי $f \in W$. □

סעיף ב'

הפעם נסמן $V = C([a,b]), W = C_0^2([a,b])$ מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות פעמיים המתאפסות בקצוות, ויהי $\Delta = D^2$ אופרטור הגזירה פעמיים. נראה ש־$\Delta : W \to V$ הוא אופרטור סימטרי ונסיק כי האופרטור $S : W \to V$ המוגדר על־ידי,

$$Su(t) = \frac{d}{dt}(p(t)\frac{d}{dt}u(t)) + q(t)u(t)$$

הוא אופרטור סימטרי גם כן.

הוכחה. תהיינה $f, g \in C_0^2([a,b])$ ושוב נחשב,

$$\langle \Delta f, g\rangle = \langle D^2 f, g\rangle = -\langle Df, Dg\rangle = (-1)^2\langle f, D^2 g\rangle = \langle f, \Delta g\rangle$$

כאשר השתמשנו אנטי־סימטריה שמצאנו בסעיף הקודם והעובדה שאם $f \in C_0^2([a,b])$ אז בפרט $f \in C_0^1([a,b])$.

אנו מניחים כי p, q גזירות ברציפות פעמיים, וכן $C_0^2([a,b])$ סגורה לכפל בפונקציה גזירה ברציפות פעמיים, לכן כהרכבת פונקציות ושני האופרטורים מהסעיפים האחרונים נסיק שגם S סימטרית. □

סעיף ג'

נוכיח שאם $T : W \to V$ אופרטור סימטרי ו־$u, v \in W$ וקטורים עצמיים עם ערך עצמי שונה אז $u \perp v$.
נסיק שאם u, v פותרות את המערכת עבור ערכים עצמיים שונים אז,

$$\int_a^b u(t)v(t)\,dt = 0$$

הוכחה. נסמן $Tu = \lambda u, Tv = \mu v$ ולכן $\lambda \neq \mu$. מסימטריה,

$$\lambda\langle u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = \mu\langle u, v\rangle$$

נקבל אם כך ש־$(\lambda+\mu)\langle u, v\rangle = 0$ ובפרט מההנחה שמדובר בווקטורים עצמיים של ערכים עצמיים שונים נוכל להניח ש־$\lambda + \mu \neq 0$ (אחרת נקבל עד כדי היפוך הווקטור ערך עצמי זהה) ש־$u \perp v$.

בסעיף הקודם מצאנו ש־S סימטרי, אז אם u, v פתרונות עבור λ, μ שונים אז בפרט המכפלה הפנימית שהגדרנו בסעיף א' מתאפסת וקיבלנו את המבוקש. □

שאלה 2

תהיינה p, q פונקציות גזירות ברציפות כך ש־$p > 0$ ונגדיר את הבעיה,

$$\frac{d}{dt}(p(t)\frac{d}{dt}u(t)) + (q(t)+\lambda)u(t) = 0, \quad u(a) = u(b) = 0$$

לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ נגדיר את $u_\lambda(t)$ להיות הפתרון לבעיה,

$$\frac{d}{dt}(p(t)\frac{d}{dt}u(t)) + (q(t)+\lambda)u(t) = 0, \quad u(a) = 0, u'(a) = 1$$

וניזכר בהגדרת הקורדינטות הפולריות,

$$p(t)u'_\lambda(t) = r_\lambda(t)\cos\theta_\lambda(t), \quad u_\lambda(t) = r_\lambda(t)\sin\theta_\lambda(t)$$

נראה ש־$\lambda \mapsto \theta_\lambda(b)$ היא פונקציה רציפה.

הוכחה. נזכור שמצאנו בכיתה ש־θ_λ מקיימת את המשוואה הבאה,

$$\theta'_\lambda(t) = (q(t)+\lambda)\sin^2\theta_\lambda(t) + \frac{1}{p(t)}\cos^2\theta_\lambda(t),$$

כלומר זוהי פונקציה שמקיימת משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וגזירה ברציפות, ולכן אם נגדיר,

$$F(x,y,\lambda) = (q(y)+\lambda)\sin^2(x) + \frac{1}{p(t)}\cos^2(x)$$

אז $\theta'_\lambda(t) = F(\theta_\lambda(t), t, \lambda)$ ובפרט קיימת U פתוחה מקסימלית כך ש־$\Phi(\tau^0_\lambda, t)$ זרימה, ולכן בפרט ממשפט רציפות זרימות היא רציפה בשלושת משתניה. נעיר כי את המשפט הוכחנו עבור משוואות הומוגניות, אך משקילות נקבל נכונות גם במקרה זה, ובפרט נקבל רציפות במשתנה השלישי בהצבה במשתנה השני b, כלומר $\lambda \mapsto \theta_\lambda(b)$ רציפה. $\square$

שאלה 3

בשאלה זו נוכיח שבקורדינטות פולריות מתקיימת הנוסחה,

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r}\partial_r(rF_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi F_\varphi$$

יהי $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שדה וקטורי גזיר, נסמן $\hat{x} = (1,0), \hat{y} = (0,1)$ וקטורי היחידה, ונסמן את הפירוק של F,

$$F = F_x\hat{x} + F_y\hat{y}$$

נגדיר קורדינטות גליליות על־ידי,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

ונגדיר את וקטורי היחידה של המערכת הגלילית על־ידי $\hat{r}, \hat{\varphi}$ ונבחין כי הם מקיימים,

$$\hat{r}(x,y) = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \hat{\varphi} = \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

וכן נסמן גם,

$$F = F_r\hat{r} + F_\varphi\hat{\varphi}$$

נסמן גם ∂_x, ∂_y נגזרות במערכת הקרטזית וכן $\partial_r, \partial_\varphi$ נגזרות במערכת הגלילית.

סעיף א'

נראה כי,

$$F_r = \cos\varphi F_x + \sin\varphi F_y = \frac{x}{r}F_x + \frac{y}{r}F_y, \qquad F_\varphi = -\sin\varphi F_x + \cos\varphi F_y = -\frac{y}{r}F_x + \frac{x}{r}F_y$$

הוכחה. ישירות מהגדרת ההטלות,

$$F_x = F_r\cos F_\varphi, \quad F_y = F_r\sin F_\varphi$$

ולכן נקבל,

$$F_x\cos\varphi + F_y\cos\varphi = F_r\cos^2\varphi + F_r\sin^2\varphi = F_r$$

אבל גם $r\cos\varphi = x \iff \frac{x}{r} = \cos\varphi$ וכך גם $\frac{y}{r}F_y = \sin\varphi$ וקיבלנו את השוויון הראשון.

נשתמש ב־$F = F_\varphi\hat{\varphi} + F_r\hat{r}$ והעברת אגפים ונקבל את השוויון השני. □

סעיף ב'

נראה שמתקיים,

$$\partial_r = \cos\varphi\partial_x + \sin\varphi\partial_y = \frac{x}{r}\partial_x + \frac{y}{r}\partial_y, \qquad \partial_y = -r\sin\varphi\partial_x + r\cos\varphi\partial_y = -y\partial_x + x\partial_y$$

הוכחה.

$$\partial_r F = \partial_r F(r,\varphi) = \frac{d}{dr}F_r(r,\varphi) = \cos\varphi F_x + \sin\varphi F_y$$

כאשר השתמשנו בהגדרת האופרטור, הגדרת ההטלות ולבסוף בסעיף א'. אותו תהליך בדיוק מניב את כלל השוויונות. □

סעיף ג'

נראה כי,

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r}\partial_r(rF_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi(F_\varphi)$$

הוכחה. הגדרנו את הדיברגנץ עבור שדות וקטוריים $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ על־ידי,

$$\operatorname{div} F = \partial_x F_x + \partial_y F_y$$

ועתה נבדוק את הביטויים,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\partial_r(rF_r) &= \frac{1}{r}(\frac{x}{r}\partial_x(rF_r) + \frac{y}{r}\partial_y(rF_r)) \\
&= \frac{1}{r^2}(x\partial_x(xF_x + yF_y) + y\partial_y(xF_x + yF_y)) \\
&= \frac{1}{r^2}(x(1\cdot F_x + x\partial_x F_x + y\partial_x F_y) + y(x\partial_y F_x + F_y + y\partial_y F_y)) \\
&= \frac{1}{r^2}(xF_x + yF_y + x^2\partial_x F_x + y^2\partial_y F_y + xy(\partial_x F_y + \partial_y F_x))
\end{aligned}$$

וכן,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\partial_\varphi F_\varphi &= \frac{1}{r}(-y\partial_x F_\varphi + x\partial_y F_\varphi) \\
&= \frac{1}{r}(-y\partial_x(-\frac{y}{r}F_x + \frac{x}{r}F_y) + x\partial_y(-\frac{y}{r}F_x + \frac{x}{r}F_y)) \\
&= \frac{1}{r^2}(-y\partial_x(-yF_x + xF_y) + \frac{xy}{r^2}\partial_x(\cdots) + x\partial_y(-yF_x + xF_y) - \frac{xy}{r^2}(\cdots)) \\
&= \frac{1}{r^2}(-y\partial_x(-yF_x + xF_y) + x\partial_y(-yF_x + xF_y)) \\
&= \frac{1}{r^2}(-y(-y\partial_x F_x + F_y + x\partial_x F_y) + x(-F_x - y\partial_y F_x + x\partial_y F_y)) \\
&= \frac{1}{r^2}(-yF_y - xF_x + y^2\partial_x F_x + x^2\partial_y F_y - xy(\partial_x F_y + \partial_y F_x))
\end{aligned}$$

ולכן מתקבל,

$$\frac{1}{r}\partial_r(rF_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi(F_\varphi) = \frac{2}{r^2}(y^2\partial_x F_x + x^2\partial_y F_y)$$

ומהגדרה כעקבה של מטריצה מתאימה נסיק בפרט את הזהות. $\square$