פתרון מטלה 06 — משוואות דיפרנציאליות, 80320

23 במאי 2026

שאלה 1

סעיף א'

נגדיר,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

נמצא פתרון כללי למשוואה $x'(t) = Ax(t)$ ונצייר דיאגרמות זרימה מתאימה. נקבע אם הראשית היא נקודת שיווי משקל יציבה או לא.

פתרון נגדיר $P_A(t) = \det(It - A) = (t+5)(t+2) - 4 = (t+6)(t+1)$ פולינום אופייני ולכן A לכסינה וכן $A = P^{-1}\operatorname{diag}(-6,-1)P$ לאיזושהי $P \in M_2(\mathbb{R})$ הפיכה. נחשב את P על־ידי מציאת וקטורים עצמיים,

$$(A+6I)u = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} u = 0 \iff u = \operatorname{Span}\{(1,-1)^t\}$$

וכן,

$$(A+I)u = 0 \iff \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} u = 0 \iff u = \operatorname{Span}\{(1,4)^t\}$$

כלומר אם נגדיר,

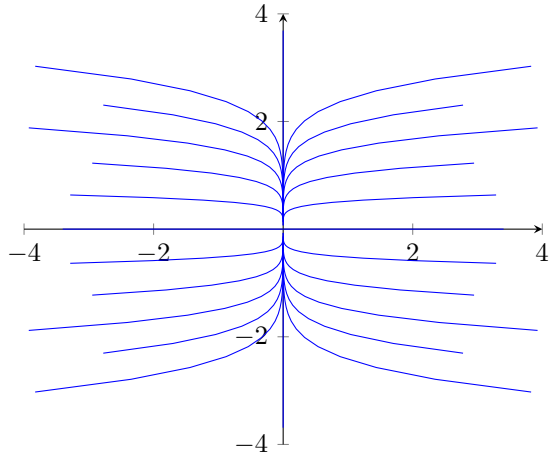
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

היא מטריצה הפיכה המלכסנת את A. ממשפט פתרון משוואות לינאריות נסיק שהפונקציה,

$$x(t) = P^{-1}e^{\operatorname{diag}(-6,-1)t}Px_0 = P^{-1}\operatorname{diag}(e^{-6t}, e^{-t})Px_0$$

הוא הפתרון היחיד למשוואה $x'(t) = Ax(t), x(0) = x_0$.

נשרטט את הזרימה:



כאשר x מתרחק מ־0 בזמן חיובי ומתקרב ל־0 בזמן שלילי.

בהתאם נסיק ש־0 אכן נקודת שיווי משקל לא יציבה בזמן חיובי ויציבה בזמן שלילי.

סעיף ב'

נמיר את המשוואה $x'' + x' - 2x = 0$ במערכת משוואות מסדר ראשון, נמצא פתרון ונצייר דיאגרמה.

פתרון אנו יודעים כי ניתן להמיר על־ידי המטריצה,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

הפעם נקבל,

$$P_A(t) = t(t+1) - 2 = t^2 + t - 2 = (t-1)(t+2)$$

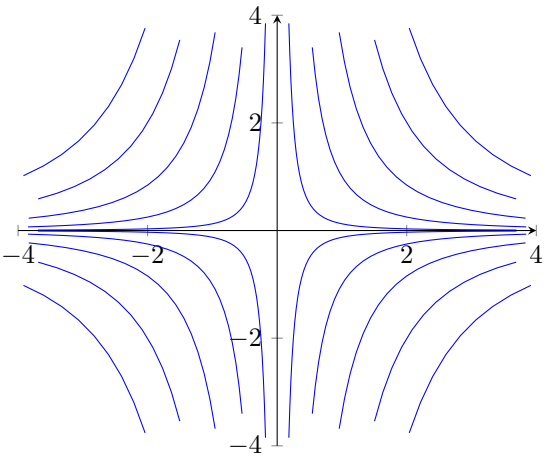
לנוחות הקורא נדלג על חישוב הווקטורים העצמיים ונכריז שעבור,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

מקיימת $A = P^{-1}\operatorname{diag}(1,-2)P$. אז נקבל שהפתרון של $y'(t) = Ay(t), y(0) = y_0$ הוא,

$$y(t) = P^{-1}\operatorname{diag}(e^t, e^{-2t})Py_0$$

נשרטט את הפתרון ל־y אשר שקול ל־x,



והפעם נקבל ש־0 לא נקודת שיווי משקל באף כיוון.

שאלה 2

תהי $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית ונגדיר את בעיית תנאי ההתחלה,

$$\begin{cases} x'(t)=F(x(t)) \\ x(0)=x_0 \end{cases} \tag{1}$$

נניח כי כל הקורדינטות של F אי־שליליות. תהי $U\subseteq\Omega$ כך שגם $\bar{U}\subseteq\Omega$ ונסמן את הפתרון המקסימלי של (1) ב־x. נראה כי אחת מהאפשרויות הבאה מתקיימת:

1. x מגיע לשפה של U בזמן סופי
2. $\lim_{t\to\infty}x(t)\in\bar{U}$ ונקודה זו היא נקודת שיווי משקל של F

הוכחה. מטריכוטומיה או שהמרחק של x מהשפה של Ω שואף לאפס ולכן בפרט x חוצה את U בזמן סופי כלשהו, או ש־$\|x(t)\|\to\infty$ ושוב בפרט מחסימות U היא עוברת אותה, או ש־I לא חסום מימין.

נשאר אם כך להראות שאם I לא חסום מימין אז $\lim_{t\to\infty}x(t)\in\overline{U}$.

נבחין כי $x(t)\in\overline{U}$ לכל $t\geq 0$ מההנחה, אבל $\overline{U}$ חסומה וסגורה ו־x מונוטונית עולה בכל ציר, לכן משימוש במשפט התכנסות חסומה ומונוטונית נקבל שכל ציר מתכנס בנפרד ובסך הכול $x(t)\to z$ לאיזושהי $z\in\overline{U}$.

F היא ליפשיץ מקומית ולכן משמרת גבולות, כלומר $F(x(t))$ מתכנסת ולכן $x'(t)$ אף היא מתכנסת כאשר $t\to\infty$, ומטענה נוספת מאינפי 1 נקבל שבמצב זה גם $x'(t)\to 0$ בלבד. מצאנו אם כך של־F יש גבול חלקי 0 ב־z, אבל היא רציפה ולכן $\lim_{x\to z}F(x)=0$ בלבד, כלומר $F(z)=0$ ו־z היא נקודת שיווי משקל. $\square$

שאלה 3

סעיף א'

נוכיח את שיטת הורדת הסדר: תהי משוואה $a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t)=0$, ונניח ש־$y(t)$ פותרת אותה.
נראה שפונקציה מהצורה $z(t)=v(t)y(t)$ פותרת את המשוואה אם ורק אם $v'(t)$ פותרת משוואה מסדר ראשון.

הוכחה. על־ידי גזירת z נקבל,

$$z'=az''+bz'+cz=a(v''y+2v'y'+vy'')+b(v'y+vy')+cvy=a(v''y+2v'y')+b(v'y)$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש־y פתרון, לכן הפונקציה v' מקיימת את,

$$ayx'+2ay'x+byx=0$$

אם ורק אם vy מקיימת את המשוואה הראשונה ישירות משוויון. □

סעיף ב'

נשתמש בשיטת הורדת הסדר עבור המשוואה $x''=c^2x$ על־ידי שימוש בפתרון $y(t)=e^{ct}$.
פתרון אנו רוצים למצוא $z(t)=v(t)y(t)$ המקיימת אף היא את המשוואה. לצורך כך נרצה לפתור את המשוואה שמצאנו בסעיף הקודם, נציב בה את $y(t)=e^{ct}$ ואת,

$$a(t)=1,\quad b(t)=0,\quad c(t)=-c^2$$

ונקבל,

$$c^{ct}x'(t)+2ce^{ct}x(t)+0=0$$

או לאחר הוצאת גורם משותף והחלפת אגף,

$$x'(t)=-2c\,x(t)$$

והפתרון שלה הוא כמובן $t\mapsto e^{-2ct}$. מצאנו אם כך שהפונקציה v' מקיימת $v'(t)=e^{-2ct}$, אם כך,

$$v(t)=\int_0^t v'(s)\,ds=\frac{1}{-2c}(e^{-2ct}-1)+C=-\frac{1}{2c}e^{-2c}+C$$

היא צורה כללית שפותרת את המשוואה, בפרט,

$$z(t)=v(t)y(t)=(-\frac{1}{2c}e^{-2c}+C)e^{ct}=Ce^{ct}-\frac{1}{2c}e^{-ct}$$

מהווה פתרון נוסף של המשוואה המקורית. נבחין כי זוהי משוואה הומוגנית ולכן גם סגורה תחת מכפלה בסקלר, וכן שהיא סגורה לחיבור פתרונות ולכן נסיק שגם $z(t)=e^{-ct}$ פתרון של המשוואה, ואף ש־$\mathrm{Span}\{e^{ct},e^{-ct}\}$ קבוצה של פתרונות של המשוואה.

סעיף ג'

משוואת אוילר: נגדיר את משוואת אוילר כמשוואה הלינארית,

$$at^2x''(t)+btx'(t)+cx(t)=0$$

ונרצה למצוא r עבורו t^r פתרון של המשוואה.

i

נמצא פתרון למשוואה,

$$t^2x''(t)+7tx'(t)+5x(t)=0$$

פתרון אם $x(t) = t^r$ אז,

$$x'(t) = rt^{r-1}, \quad x''(t) = r(r-1)t^{r-2}$$

נציב ונקבל,

$$r(r-1)t^r + 7rt^r + 5t^r = 0$$

ונקבל או $t^r = 0$ לכל t או,

$$r^2 + 6r + 5 = (r+1)(r+5) = 0$$

נסיק אם כך ש־t^{-1}, t^{-5} הם שני פתרונות של המשוואה הנתונה. בהתאם נקבל את קבוצת הפתרונות,

$$\text{Span}\{t^{-1}, t^{-5}\}$$

נעיר שזוהי קבוצת כל הפתרונות שכן מימד מרחב הפתרונות הוא 2 לפי משפט מהתרגול.

ii

נמצא פתרון כללי למשוואה,

$$t^2x''(t) - 3tx'(t) + 4x(t) = 0$$

פתרון הפעם נקבל באותו תהליך בדיוק,

$$t^r(r^2 - r - 3r + 4) = 0$$

ושוב $t \not\equiv 0$ ולכן t^r לא מתאפס ונובע,

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)(r-2) = 0$$

ולכן t^2 הוא פתרון של המשוואה.

עכשיו נוכל להשתמש בשיטת הורדת הסדר עם $y(t) = t^2$, נסמן ונחשב לקראת הצבה,

$$a(t) = t^2, \quad b(t) = -3t, \quad c(t) = 4, \quad y'(t) = 2t$$

ולכן $z(t) = v(t)t^2$ פתרון אם v' פותרת את,

$$t^2 \cdot t^2x' + 2t^2 \cdot 2tx + (-3t) \cdot t^2x = t^3(tx'(t) + x(t)) = 0$$

שוב נוכל לצמצם ונקבל את המשוואה $tx'(t) + x(t) = 0$. נקבל אם כך על־ידי החלפת אגפים,

$$\frac{x'}{x} = -\frac{1}{t}$$

כלומר זוהי משוואה לוגריתמית ולכן $x(t) = \frac{1}{t}$ מהווה פתרון (יחיד) שלה. בהתאם $v'(t) = \frac{1}{t}$ ונוריד את המינוס בשל סגירות לכפל בסקלר,

$$v(t) = \int \ln|s| \, ds = \ln|t|$$

אז גם $z(t) = v(t)y(t) = t^2 \ln|t|$ פתרון של המשוואה וקבוצת הפתרונות הכללית היא,

$$\text{Span}\{t^2, \ln|t|\}$$

בדיוק.

שאלה 4

נגדיר את המערכת,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + xy - \sqrt{x^2+y^2}(x+y) \\ y - x^2 + \sqrt{x^2+y^2}(x-y) \end{pmatrix}$$

ונבחין כי $(1,0)$ נקודת שיווי משקל של המערכת.

סעיף א'

יהי $(x(t), y(t))$ פתרון, ונסמן $(r(t), \varphi(t))$ הפתרון בקורדינטות פולריות שלו, כלומר,

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t), \qquad y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$$

נראה שמתקיים,

$$r'(t) = r(t)(1 - r(t)), \qquad \varphi'(t) = r(t)(1 - \cos\varphi(t))$$

הוכחה. מתקיים,

$$x' = x + xy - \sqrt{x^2+y^2}(x+y) = r\cos\varphi - r^2\cos\varphi\sin\varphi - r(r\cos\varphi + r\sin\varphi)$$

וכן,

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

ולכן,

$$r' = \frac{2xx' + 2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}(xx' + yy')$$

ולכן לפי השוויונות הנתונים,

$$\begin{aligned} rr' &= x(x + xy - \sqrt{x^2+y^2}(x+y)) + y(y - x^2 + \sqrt{x^2+y^2}(x-y)) \\ &= x^2 + y^2 - \sqrt{x^2+y^2}x^2 + \sqrt{x^2+y^2} - y^2 \\ &= r^2 - r^3 \end{aligned}$$

ונסיק ש־$r' = r(1-r)$.

ידוע לנו כי $\tan\varphi(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$ ולכן,

$$(\tan\varphi)' = \frac{\varphi'}{\cos^2\varphi} = \frac{x'y - xy'}{x^2} = \frac{x'y - xy'}{r^2\cos^2\varphi}$$

ולכן,

$$\begin{aligned} \varphi' r^2 &= x'y - xy' \\ &= (x + xy - \sqrt{x^2+y^2}(x+y))y - x(y - x^2 + \sqrt{x^2+y^2}(x-y)) \\ &= xy^2 - \sqrt{x^2+y^2}(xy + y^2) + x^3 - \sqrt{x^2+y^2}(x^2 - xy) \\ &= x(y^2 + x^2) - \sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2) \\ &= r^2 \cdot r\cos\varphi - r^3 \end{aligned}$$

ולאחר העברת אגפים נקבל $\varphi' = r(1 - \cos\varphi)$. $\square$

סעיף ב'

נראה שקיימת סביבה $(1,0) \in U$ כך שלכל $(a,b) \in U$ הפתרון למשוואה עם תנאי ההתחלה (a,b) מתכנס ל־$(1,0)$ ב־$t \to \infty$.

הוכחה. תחילה נבחין כי בקורדינטות פולריות הנקודה $(1,0)$ מתורגמת ל־$(1,0)$, ונגדיר את $U = B((1,0),1)$ בקורדינטות פולריות, כלומר קבוצה זו מתורגמת לקבוצה פתוחה כלשהי סביב $(1,0)$ ב־$\mathbb{R}^2$.

אם $(a,b) \in U$ אז $0 < r(0) < 2$ ולכן אם $0 < r < 1$ אז $r' > 0$ ואם $1 < r < 2$ אז $1 - r < 0$ ולכן גם $r' < 0$, בשני המקרים הפונקציה תהיה מונוטונית מיחידות ומחסימות על־ידי 1 נקבל $r(t) \to 1$.

נבחין כי בהנחה שלנו גם $0 < \varphi(0) < 2$ ולכן $1 - \cos\varphi$ מקיים אותה תכונה ומתקיים $\varphi(t) \to 0$ תמיד, ונסיק שאכן $x(t)$ המקיימת $x(0) = (a,b) \in U$ תקיים גם $\lim_{t\to\infty} x(t) = (1,0)$. $\square$

סעיף ג'

נראה ש־$(1,0)$ לא נקודת שיווי משקל יציבה.

הוכחה. תהי נקודה $(\cos\alpha, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^2$, ותהי פונקציה x המקיימת את המשוואה עם נקודת התחלה זו, אז מתקיים עבורה $r(0) = 1, \varphi(0) = \alpha$. נציב במשוואות הפולריות ונקבל,

$$r'(0) = 1 \cdot (1-1) = 0, \quad \varphi'(0) = 1 - \cos\alpha.$$

מיחידות נסיק שמתקיים $r(t) = 1$ לכל $t \geq 0$. בנוסף גם $1 - \cos\alpha > 0$ לכל $\alpha \neq 2\pi k$, ולכן $\varphi' > 0$ והפונקציה מונוטונית עולה ומתכנסת ל־2π לכל $0 < \alpha < 2\pi$. נסיק אם כך שלכל $\varepsilon > 0$ שנבחר ולכל $\delta > 0$ נוכל לבחור זווית מספיק קטנה וחיובית כך ש־$(a,b) \in B((1,0),\delta)$ אבל x תנוע על מעגל היחידה נגד כיוון הנקודה $(1,0)$, ובכך תסתור את הגדרת היציבות. $\square$