



دانشکده مهندسی کامپیوتر

دکتر مرضیه ملکی مجد

بهار ۱۴۰۰

تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

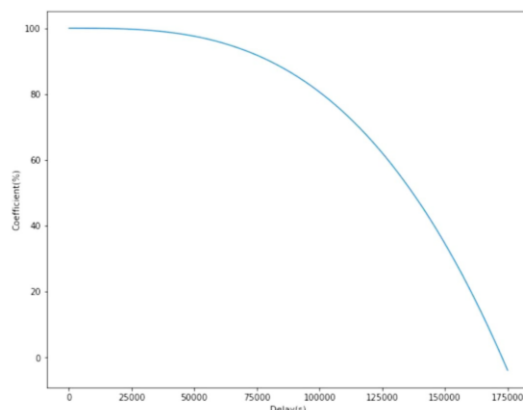
تمرین سری سوم

تاریخ تحویل: ۳ اردیبهشت ساعت ۲۳:۵۹

تیم طراح: دانیال بازمانده - سیدسینا ضیایی - محمدامین قسوری - مصطفی محمدعلی ابراهیم

قوانین:

- سؤالات تئوری نیاز به **اثبات درستی** و **تحلیل زمان اجرا** دارد.
- برای سؤالات تئوری باید تصویر مناسبی از جواب سؤال در کوئرا آپلود کنید.
- پاسخ سؤالات تئوری باید با خودکار **آبی** (و یا رنگ‌های دیگری که در تصویر کم‌رنگ نباشند مانند **مشکی**) و ترجیحاً بر روی برگه‌ی **A4** باشد. (استفاده از برگه‌های خط‌دار که خط‌های آن از نوشته شما پررنگ‌تر نباشد و نوشته‌های پشت برگه بر روی برگه اثر نگذارد، مانعی ندارد.) همچنین امکان تحویل پاسخ سؤالات به صورت تایپ‌شده وجود دارد.
- بخش‌های مختلف سؤال را جداگانه بنویسید و مشخص کنید هر قسمت در راستای پاسخ به کدام قسمت است.
- راه حل خود را تمیز و با خط خوانا بنویسید، هرگونه مشکل که منجر به ناخوانا بودن جواب شود **کسر نمره** به همراه دارد.
- در سؤالات تئوری می‌توانید با استفاده از شبه کد، جواب خود را توضیح بدهید ولی نوشتن کد یا شبه کد به تنهایی نمره‌ای ندارد.
- در سؤالات عملی، توضیحات دقیق‌تر در مورد نحوه‌ی ورودی و خروجی داخل کوئرا داده شده است.
- برای پاسخ‌های خود اثبات قانع‌کننده ارائه دهید. (به طور مثال اگر مرتبه زمانی برای یک سؤال می‌نویسید، درستی آن را نیز اثبات نمایید.)
- هرگونه ایده گرفتن از تمرین دیگران و کدهای موجود در اینترنت که موجب تشابه بالای کد شما با دیگری شود، تقلب محسوب می‌شود و نمره‌ی منفی برای شما منظور خواهد شد.
- راه حل سؤال‌های تئوری را به طور مختصر و دقیق توضیح دهید. توضیحات بی مورد و همچنین عدم توضیح (برای یک قسمت از سؤال) هر دو کسر نمره دارد.
- تأخیر در ارسال تمرین‌ها براساس نمودار زیر محاسبه خواهد شد. محور افقی نمودار، مقدار تأخیر به ثانیه و محور عمودی، ضریب اعمالی در نمره تمرین است.



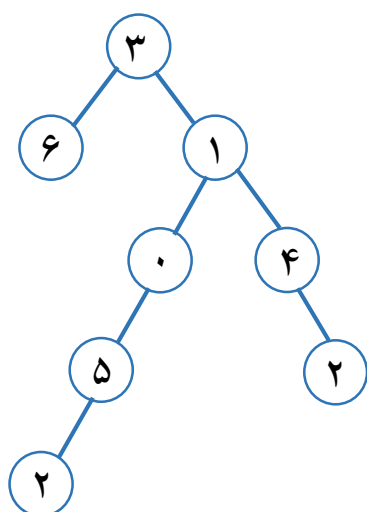
درمورد این سری تمرین به نکات زیر توجه داشته باشید:

- مبحث اصلی این تمرین، الگوریتم‌های مقدماتی گراف (BFS, DFS, Topological Sort, SCC) می‌باشد و از شما انتظار می‌رود برای پاسخ به سوالات، راه‌حل‌های مرتبط با این مبحث را ارائه دهید.
- توجه داشته باشید که در این سری تمرین باید، به سوالات اول تا سوم تنها به صورت تئوری، به سوالات چهارم تا ششم تنها به صورت عملی و به سوال هفتم به صورت تئوری و عملی پاسخ دهید.
- این تمرین دارای یک سوال امتیازی (سوال ۷) می‌باشد.
- پیاده‌سازی الگوریتم سوال‌های ۴ تا ۷ باید با یکی از زبان‌های مجاز در کوئرا باشد.
- فایل پاسخ تئوری تمرین خود را به صورت **شماره ی دانشجویی_نام و نام خانوادگی_HW3** نام‌گذاری کرده و ارسال کنید. (برای مثال HW3_NameFamily_98000000). دقت کنید درغیراین صورت، تمرین شما تصحیح نخواهد شد.

سوال اول

یک گراف فاقد دور را در نظر بگیرید که دارای V راس و E یال می باشد. راس S را راس ابتدایی این گراف قرارداد می کنیم. با بهره گیری از الگوریتم های پیمایش گرافی که تاکنون آموخته اید، الگوریتمی ارائه دهید که مجموع کمینه ی مقدار عناصر (اعداد روی رئوس گراف) را برای هر عمق دلخواه محاسبه کند. پیچیدگی زمانی و مکانی الگوریتم خود را توضیح دهید.

❖ به عنوان مثال، در گراف روبرو با شروع از گره ۳ و در عمق صفر، مقدار کمینه ی به دست آمده، مقدار خود گره یعنی ۳ می باشد. در عمق ۲، این مقدار برابر با ۴ و در عمق ۳ برابر با ۷ می باشد.



Input-node(S): 1

Depth: 0

Min-Element -> 1

Depth: 1

Min-Element -> 0

Depth: 2

Min-Element -> 2

Sum-of-mins-at-depth-2 = 3

Input-node(S): 0

Depth: 0

Min-Element -> 0

Depth: 1

Min-Element -> 1

Depth: 2

Min-Element -> 2

Depth: 3

Min-Element -> 2

Sum-of-mins-at-depth-3 = 5

سوال دوم

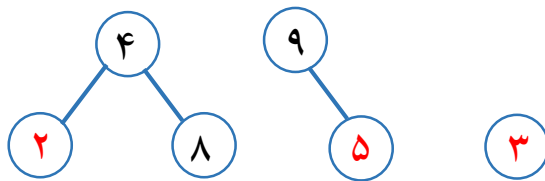
یک گراف را دوبخشی (Bipartite) گوئیم هرگاه بتوان رئوس گراف را به دو مجموعه مستقل از هم U و V تقسیم کرد، به طوری که هر یال (u, v) دلخواه، یا راسی از مجموعه U را به راسی از مجموعه V متصل کند و یا راسی از مجموعه V را به مجموعه U . به عبارت دیگر، برای هر یال دلخواه (u, v) ، یا u متعلق به U است و v به V ، یا u متعلق به V است و v به U . هم چنین می توان گفت هیچ یالی وجود ندارد که رئوس داخل یک مجموعه را به هم متصل کند.

الگوریتمی ارائه دهید که بررسی کند آیا یک گراف Bipartite هست یا خیر.

سوال سوم

فرض کنید آرایه‌ی n عضوی A را داریم که A_i نشان‌دهنده‌ی value راس $(i+1)$ ام یک گراف غیرجهت‌دار می‌باشد. الگوریتمی ارائه دهید که مجموع کمینه‌ی value ها را در بین تمامی مولفه‌های همبندی (connected component) این گراف بیابد. (اگر گراف شامل راسی باشد که به هیچ راس دیگری متصل نباشد، آن راس را به عنوان یک component مستقل با یک راس در نظر بگیرید.)

❖ به عنوان نمونه، در گراف روبه‌رو مجموع کمینه value ها در هریک از مولفه‌های همبندی برابر است با $2+3+5=8$.



سوال چهارم

فرض کنید راه‌پله‌ای با تعداد n پله داریم که پله‌های آن از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. اگر از پله‌ی S شروع به راه رفتن کنیم و دو عدد A و B به ترتیب، تعداد پله‌های قابل بالا و پایین رفتن باشند، برنامه‌ای بنویسید که تعداد پله‌های منحصر به فردی که یک شخص می‌تواند روی آن‌ها قدم بگذارد را محاسبه کند و ترتیب پله‌ها را نیز نمایش دهد.

❖ به عنوان مثال، چنانچه تعداد کل پله‌ها ۱۰ تا و پله شروع ۲ و تعداد قدم‌های ممکن به صورت $A = 5$ و $B = 7$ باشد، از پله ۲ با ۵ قدم به پله ۷ و یا با ۷ قدم به پله ۹ و از پله ۹ با ۵ قدم به پله ۴ می‌رسیم. پس تعداد پله‌های منحصر به فرد ۴ تا و ترتیب پله‌ها به صورت ۲ و ۴ و ۷ و ۹ هستند.

سوال پنجم

در شرکت محمد و دوستان، n سیستم وجود دارد که در اتاق‌های مختلف مجموعه پخش شده‌اند. محمد مسئول قسمت شبکه هست و حسابی کار بلد. منتهی اخیرا وسواس خاصی پیدا کرده و حرف‌های عجیب و غریبی می‌زند. محمد معتقد است اگر تعداد زوج سیستم با هم ارتباط داشته باشند، امنیت خیلی بالایی به وجود خواهد آمد و برای آنکه امنیت شبکه داخلی شرکت رو بالاتر ببره، می‌خواهد تا جایی که می‌تواند ارتباط بین کامپیوترها را قطع کند تا به دسته‌هایی با تعداد زوج تقسیم شوند. واضح است که هرچقدر ارتباط بیشتری را بتواند قطع کند، تعداد بیشتر از مجموعه‌هایی با تعداد زوج می‌توانند به وجود بیایند. ارتباط بین کامپیوترها در این شرکت به صورت یک درخت است و که گره‌های این درخت، سیستم‌ها و ارتباط بین سیستم‌ها با یکدیگر با یال‌های درخت نمایش داده می‌شود. برنامه‌ای بنویسید که بگوید محمد حداکثر چند ارتباط را می‌تواند قطع کند.

سوال ششم

در یک روز بارونی، آقای نقطه در هنگام رفتن به سرکار، به یکسری چاله‌های آب که در کنار هم قرار دارند، برخورد کرده است. این چاله‌ها را می‌توانیم به شکل یک ماتریس $n \times m$ نمایش دهیم که نشان‌دهنده‌ی یک ناحیه مربعی شکل روی زمین هستند. در صورتی که مقدار هریک از اعضای این ماتریس، برابر " " باشد، آقای نقطه خودش را در داخل آن می‌تواند ببیند پس در آن نقطه چاله آب داریم و در صورتی که مقدار آن برابر "*" باشد، در آن ناحیه مربعی شکل خشکی داریم.

به عنوان مثال، در نمونه زیر، یک ماتریس آمده است که نشان می‌دهد در منطقه‌ی $[0, 3]$ یک چاله‌ی آب داریم ولی مناطق مجاور آن همگی خشک هستند.

```
***.*.
```

```
...*..
```

حال آقای نقطه می خواهد بداند با حذف کردن هر کدام از نواحی خشکی و قرار دادن چاله آب بجای آن، چه دریاچه‌هایی ایجاد می‌شوند. دریاچه به تعداد یک یا بیشتر از یک چاله آب می‌گویند که در کنار هم قرار گرفته‌اند و هم‌چنین سائز دریاچه نیز به تعداد چاله‌های آن بستگی دارد. (خانه‌های مجاور ۴ تا محاسبه می‌شوند؛ چپ، راست، بالا و پایین)

برنامه‌ای بنویسید تا بر روی هر منطقه‌ی خشک عددی چاپ کند که نشان‌دهنده‌ی این است که اگر این منطقه به چاله آب تبدیل شود، دریاچه حاوی این نقطه چه سائزی دارد.

توجه کنید که باقیمانده عدد به‌دست‌آمده را در جدول قرار دهید. به عنوان مثال، اگر سائز دریاچه ۱۰ است، باید عدد ۰ قرار داده شود.

سوال هفتم (امتیازی)

فرض کنید یک اتاق $m \times n$ برای قرنطینه‌ی افراد مشکوک به کرونا در نظر گرفته شده است. هریک از خانه‌های ماتریس متناظر با این اتاق شامل یکی از حالت‌های «خالی، دیوار، آدم با تست کرونای مثبت و آدم با تست کرونای منفی» می‌باشد. تنها راه خروج از این اتاق در خانه‌ای با مختصات (m, n) قرار دارد. هر آدم می‌تواند به یکی از خانه‌های بالا، پایین، چپ و یا راست برود. هم‌چنین وجود یک آدم در یک خانه‌ی جدول، راه عبور از آن خانه را مسدود نمی‌کند.

الگوریتمی ارائه دهید که با اضافه کردن دیوارهایی به خانه‌های این اتاق، مانع خارج شدن افراد با کرونای مثبت از اتاق شوید. در صورتی که این کار امکان‌پذیر نباشد، الگوریتم باید عدم امکان را گزارش کند.

توجه کنید که تمامی آدم‌های سالم باید بتوانند از اتاق خارج شوند ولی افراد قرنطینه‌شده نباید بتوانند از اتاق خارج شوند هر چند تردد آن‌ها در اتاق مشکلی ندارد. هم‌چنین امکان اضافه کردن دیوار در خانه‌ی (m, n) وجود دارد.

موفق باشید.