



دانشکده مهندسی کامپیوتر

دکتر مرضیه ملکی مجد

زمستان ۱۳۹۹

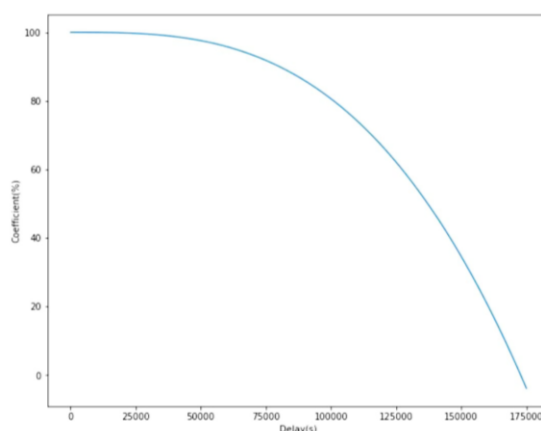
تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین سری اول

تاریخ تحویل: ۲۹ اسفند ساعت ۲۳:۵۹

قوانین:

- سؤالات تئوری نیاز به **اثبات درستی** و **تحلیل زمان اجرا** دارد.
- برای سؤالات تئوری باید تصویر مناسبی از جواب سؤال در کوئرا آپلود کنید.
- جواب سؤالات باید با خودکار **آبی** و بر روی برگه ی **A4** باشد درغیراین صورت تمرین تصحیح نخواهد شد. همچنین امکان تحویل پاسخ سؤالات به صورت تایپ شده وجود دارد.
- بخش های مختلف سؤال را جداگانه بنویسید و مشخص کنید هر قسمت در راستای پاسخ به کدام قسمت است.
- راه حل خود را تمیز و با خط خوانا بنویسید، هرگونه مشکل که منجر به ناخوانا بودن جواب شود **کسر نمره** به همراه دارد.
- در سؤالات تئوری می توانید با استفاده از شبه کد، جواب خود را توضیح بدهید ولی نوشتن کد یا شبه کد به تنهایی نمره ای ندارد.
- در سؤالات عملی، توضیحات دقیق تر در مورد نحوه ی ورودی و خروجی داخل کوئرا داده شده است.
- برای پاسخ های خود اثبات قانع کننده ارائه دهید. (به طور مثال اگر مرتبه زمانی برای یک سؤال می نویسید، درستی آن را نیز اثبات نمایید).
- هرگونه ایده گرفتن از تمرین دیگران و کدهای موجود در اینترنت که موجب تشابه بالای کد شما با دیگری شود، تقلب محسوب می شود و نمره ی منفی برای شما منظور خواهد شد.
- راه حل سؤال های تئوری را به طور مختصر و دقیق توضیح دهید. توضیحات بی مورد و همچنین عدم توضیح (برای یک قسمت از سؤال) هر دو کسر نمره دارد.
- تأخیر در ارسال تمرین ها براساس نمودار زیر محاسبه خواهد شد. محور افقی نمودار، مقدار تأخیر به ثانیه و محور عمودی، ضریب اعمالی در نمره تمرین است.



درمورد این سری تمرین به نکات زیر توجه داشته باشید:

- مبحث اصلی این تمرین، برنامه‌نویسی پویا (Dynamic Programming) می‌باشد و از شما انتظار می‌رود برای پاسخ به سوالات، راه‌حل‌های مرتبط با این مبحث را ارائه دهید.
- توجه داشته باشید که در این سری تمرین باید، به سوالات اول و دوم تنها به صورت تئوری، به سوالات سوم و چهارم به صورت تئوری و عملی و به سوالات پنجم تا هفتم تنها به صورت عملی پاسخ دهید.
- این تمرین دارای یک سوال امتیازی (سوال ۷) می‌باشد.
- پیاده سازی الگوریتم سوال‌های ۳ تا ۷ باید با یکی از زبان‌های مجاز در کوئرا باشد.
- فایل پاسخ تئوری تمرین خود را به صورت **شماره ی دانشجویی_نام و نام خانوادگی_HW1** نام‌گذاری کرده و ارسال کنید. (برای مثال HW1_NameFamily_98000000). دقت کنید درغیراین صورت، تمرین شما تصحیح نخواهد شد.

سوال اول

یک رشته باینری (متشکل از اعداد صفر و یک) را در نظر بگیرید. الگوریتمی برای پیدا کردن یک زیررشته از این رشته که بیشترین اختلاف تعداد صفرها و یکها را داشته باشد (تعداد یکها - تعداد صفرها)، ارائه دهید. توجه داشته باشید که طول رشته ثابت نیست.

❖ به عنوان مثال، برای رشته‌ی «۱۱۰۰۰۰۱۰۰۰۱» زیررشته‌ی مورد نظر به صورت «۱۱۰۰۰۰۱۰۰۰۱» خواهد بود که اختلاف تعداد صفرها و یکها در این حالت ۶ می‌باشد.

سوال دوم

فرض کنید کاغذی به ابعاد $A \times B$ داریم. قصد داریم این کاغذ را به تکه‌مربع‌هایی به اندازه‌های دلخواه برش دهیم. هدف از این مسئله پیدا کردن حداقل مربع‌هایی است که می‌توان از روی کاغذ برش داد. الگوریتم خود را برای حل این مسئله ارائه دهید و همچنین نشان دهید که الگوریتم شما بهینه است.

❖ به عنوان مثال، اگر ابعاد کاغذ 30×36 باشد، از این کاغذ باید بتوان حداقل ۵ مربع برش داد. به این صورت که ۳ مربع به ابعاد 12×12 و دو مربع به ابعاد 18×18 خواهیم داشت.

سوال سوم

فرض کنید n دانش‌آموز داریم که هرکدام از آنها، می‌توانند یا تنها باشند و یا با دانش‌آموز دیگری دوست شوند. هر دانش‌آموز فقط یکبار می‌تواند با کسی دوست شود. الگوریتمی ارائه دهید که تعداد تمامی حالات ممکن که یک دانش‌آموز می‌تواند تنها باشد یا با فرد دیگری دوست شود را محاسبه کند.

❖ به عنوان مثال، حالت‌های ممکن برای ۳ دانش‌آموز به صورت زیر است:

- ۱- هر سه دانش‌آموز تنها باشند. ۲- دانش‌آموز اول تنها باشد و دانش‌آموز دوم و سوم دوست باشند. ۳- دانش‌آموز اول و دوم دوست باشند و دانش‌آموز سوم تنها باشد. ۴- دانش‌آموز اول و سوم دوست باشند و دانش‌آموز دوم تنها باشد.

سوال چهارم

در این سوال، به معرفی یک مسئله‌ی نمونه از پردازش رشته‌ها که به روش برنامه‌نویسی پویا حل می‌گردد، می‌پردازیم.

دو رشته‌ی $X = x_1x_2x_3 \dots x_n$ و $Y = y_1y_2y_3 \dots y_n$ را در نظر بگیرید. قصد داریم با اجرای اعمال ویرایشی روی رشته‌ی X ، آن را به رشته‌ی Y تبدیل کنیم به گونه‌ای که هزینه‌ی مجموع اعمال انجام‌شده کمینه باشد. اعمال ویرایشی مجاز عبارتند از حذف یک کاراکتر از رشته (delete)، درج یک کاراکتر در رشته (insert) و تعویض یک کاراکتر در رشته با کاراکتر دیگر (change).

هزینه‌ی اجرای اعمال حذف و درج را برابر با یک و هزینه‌ی عمل تعویض را برابر با ۲ قرارداد می‌کنیم.

به این روش، اصطلاحاً Minimum Edit Distance (MED) می‌گویند.

❖ به عنوان مثال، چنانچه داشته باشیم $X = abbac$ و $Y = abcbcb$ ، آنگاه با اجرای سه عمل ویرایشی، تبدیل انجام خواهد شد.

الگوریتمی ارائه دهید که کمینه‌ی فاصله‌ی ویرایشی دو رشته‌ی X و Y را محاسبه کند.

سوال پنجم

برخی از دنباله‌های اعداد، دارای خاصیت «پستی بلندی» هستند. برای نمونه دنباله زیر را در نظر بگیرید:

1, 8, 2, 6, 2, 5

اگر هر دو عضو مجاور این دنباله را از همدیگر تفریق کنیم، به دنباله‌ی زیر می‌رسیم:

7, -6, 4, -4, 3

همانطور که مشخص است اعداد دنباله‌ی به دست آمده یکی در میان مثبت و منفی می‌شوند. این گونه دنباله‌ها دارای خاصیت پستی بلندی هستند.

در این سوال، به شما دنباله‌ای از اعداد داده می‌شود و شما باید طول بزرگترین زیردنباله‌ای که این خاصیت در آن وجود دارد را پیدا کنید.

توجه: دقت کنید که مفهوم زیردنباله با زیرمجموعه متفاوت است. به عنوان مثال، $[1, 2, 2, 5]$ و $[1, 5]$ دو زیردنباله از دنباله‌ی فوق هستند اما $[1, 8, 5, 2]$ زیردنباله نیست!

❖ به عنوان مثال، چنانچه دنباله‌ی $[3, 2, 1]$ را داشته باشیم، آنگاه دو زیردنباله‌ی $[3, 2]$ و $[2, 1]$ قابل قبول است که ماکسیمم طول برابر ۲ می‌باشد.

سوال ششم

میلا به تازگی وارد بورس شده است اما متأسفانه هیچ دانشی در مورد تحلیل قیمت سهام‌ها ندارد. دوست او، محسن، قرار است در این کار به او کمک کند. محسن که کارکشته‌ی بورس است، برای هر سهام می‌تواند دنباله‌ای تهیه کند که بیانگر قیمت آن سهم در روزهای آینده است. میلا قصد دارد تمام سرمایه‌ی خود را روی یک سهم قرار دهد و محسن نیز دنباله‌ی مخصوص به آن سهم را در اختیار میلا قرار می‌دهد.

به عنوان نمونه، دنباله‌ی قیمت‌ها می‌تواند به شکل زیر باشد به طوری که هر درایه از آن، قیمت روز i ام را مشخص می‌کند.

prices = [3, 3, 5, 0, 0, 3, 1, 4]

در این سوال، شما باید به میلا کمک کنید. میلا قصد دارد راهی برای اینکه میزان سود او از خرید و فروش سهام در روزهای داده شده بیشینه باشد، پیدا کند. به عنوان نمونه، فرض کنید میلا قصد دارد این سهام در روز چهارم خریداری کند. (۰) اگر میلا در روز ششم سهم خود را بفروشد، ۳ واحد سود می‌کند. ($3 - 0 = 3$)

توجه: میلا حداکثر دو روز می‌تواند خرید و فروش انجام دهد اما این خرید و فروش‌ها نمی‌توانند هم‌زمان باشند. درواقع، زمانی که میلا یک سهام را خریداری می‌کند، تا وقتی آن سهام را نفروشد، نمی‌تواند سهام دیگری خریداری کند. شما باید ماکسیمم میزان سود میلا را از خرید و فروش‌های انجام شده در طول این روزها به دست آورید.

❖ به عنوان مثال، چنانچه دنباله‌ی $[5, 0, 2, 5, 0, 10]$ را برای یک سهم داشته باشیم، با خرید این سهم در روز دوم و فروش آن در روز چهارم ۵ واحد سود و با خرید سهم در روز پنجم و فروش آن در روز ششم ۱۰ واحد سود می‌کنیم که مجموعاً ۱۵ واحد سود داشته‌ایم که مقدار ماکسیمم است.

سوال هفتم (امتیازی)

سارا، خواهرزاده‌ی سمیرا، بسیار بچه‌ی شیطونی است. سمیرا تکلیف الگوریتم دارد و به خاطر سارا، اصلاً نمی‌تواند روی سوالات تمرکز کند. به همین علت، تصمیم می‌گیرد به انباری برود و از بین اسباب‌بازی‌های قدیمی خود چیزی پیدا کند تا کمی سارا را سرگرم کند. اما در همین زمان، سمیرا متوجه وسیله‌ی «عجیب»ی در گوشه‌ی انباری می‌شود و از روی کنجکاوی این دستگاه عجیب را روشن می‌کند. این وسیله‌ی عجیب شامل n سکه است که در زمان‌های خاصی بعد از روشن شدن، از داخل کانال‌های آن، به بیرون پرتاب می‌شود. به عنوان مثال، در زمان $t[i]$ از کانالی که شماره‌ی $x[i]$ دارد، سکه‌ای به بیرون پرتاب می‌شود. کانال‌های این وسیله با فاصله‌ی یک از یکدیگر قرار دارند.

سمیرا دو کاسه را در انباری پیدا می‌کند و قصد دارد ببیند با این دو کاسه تمام سکه‌های آن وسیله عجیب را جمع کند یا نه. کاسه‌ی اول، یک کاسه‌ی عادی است که سمیرا می‌تواند در هر واحد زمانی آن را به اندازه‌ی یک واحد جابه‌جا کند. کاسه‌ی دوم، یک کاسه‌ی جادویی است و به این صورت عمل می‌کند که در هر لحظه می‌تواند از جای قبلی خود برداشته شود و به مکان کنونی کاسه‌ی اول انتقال داده شود اما دیگر قادر به حرکت دادن آن با دستان خود نیستید و در همان مکان ساکن باقی می‌ماند. اگر دوباره بخواهید از کاسه‌ی دوم استفاده کنید، از جای قبلی خود محو شده و دوباره به مکانی که در آن قرار دارید (کاسه‌ی اول در آن قرار دارد) منتقل می‌شود. به عنوان مثال، فرض کنید شما کاسه‌ی جادویی را در زمان t_1 در مکان x_1 قرار دهید (یعنی در زمان t_1 کاسه‌ی اول در مکان x_1 بوده (و در لحظه‌ی t تصمیم می‌گیرید آن را به مکان کنونی کاسه‌ی اول، x_2 منتقل کنید. در این صورت، تمام سکه‌هایی که در مکان x_1 تا زمان t (شامل خود t) بیرون ریخته شده‌اند، جمع‌آوری می‌شوند و هم‌چنین تمام سکه‌هایی که در مکان x_2 از زمان t (شامل خود t) تا زمانی که تغییر بعدی را انجام دهیم بیرون ریخته شده‌اند، جمع‌آوری می‌شوند.

کاسه‌ی اول در زمان ۰ در مکان ۰ قرار دارد. سکه‌ها به محض خارج شدن باید در یکی از کاسه‌ها قرار گیرند وگرنه ارزش خود را از دست می‌دهند. توجه کنید که هیچ دو سکه‌ای در یک زمان آزاد نمی‌شود و هم‌چنین هیچ دو سکه‌ای از یک کانال آزاد نمی‌شوند.

به سمیرا کمک کنید و برنامه‌ای بنویسید که با گرفتن زمان و مکان افتادن سکه‌ها به شما بگوید آیا امکان جمع‌آوری تمامی سکه‌ها وجود دارد یا خیر.

❖ به‌عنوان مثال، در حالتی که تعداد ۳ سکه داشته باشیم و دنباله‌های $t[i]$ و $x[i]$ به‌ترتیب به‌صورت $[2, 5, 6]$ و $[2, 5, 1]$ باشند، در واحد زمان ۱، از کاسه‌ی دوم استفاده کرده و به مکانی که کاسه‌ی اول قرار دارد، منتقل می‌کنیم. در واحد زمان ۲، دو خانه حرکت کرده و در خانه‌ی دوم قرار می‌گیریم و سکه در کاسه میفتد. سپس، ۳ واحد حرکت کرده و به ۵ می‌رسیم و در واحد زمان ۵، سکه‌ی دیگر را جمع می‌کنیم. در زمان ۶، سکه‌ای دیگر آزاد می‌شود که در مکان ۱ قرار دارد و چون کاسه‌ی جادویی را در آنجا قرار داده بودیم، سکه داخل آن میفتد.

موفق باشید.