



دانشکده مهندسی کامپیوتر

دکتر مرضیه ملکی مجد

بهار ۱۴۰۰

---

تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین سری چهارم

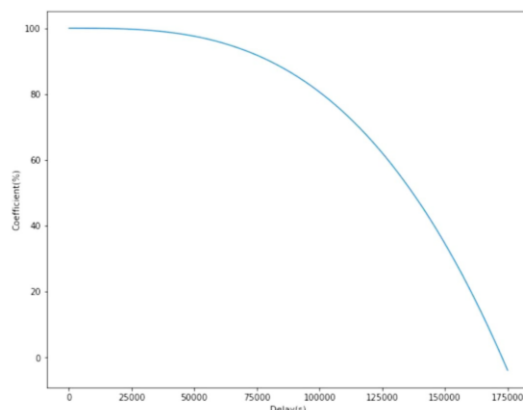
تاریخ تحویل: ۱۳ اردیبهشت ساعت ۵۹:۲۳

تیم طراح: سیدسینا ضیایی - علی صدیقی - رامتین احسانی - امیرحسین احمدی

---

## قوانین:

- سؤالات تئوری نیاز به **اثبات درستی** و **تحلیل زمان اجرا** دارد.
- برای سؤالات تئوری باید تصویر مناسبی از جواب سؤال در کوئرا آپلود کنید.
- پاسخ سؤالات تئوری باید با خودکار **آبی** (و یا رنگ‌های دیگری که در تصویر کم‌رنگ نباشند مانند **مشکی**) و ترجیحاً بر روی برگه‌ی **A4** باشد. (استفاده از برگه‌های خط‌دار که خط‌های آن از نوشته شما پررنگ‌تر نباشد و نوشته‌های پشت برگه بر روی برگه اثر نگذارد، مانعی ندارد.) همچنین امکان تحویل پاسخ سؤالات به صورت تایپ‌شده وجود دارد.
- بخش‌های مختلف سؤال را جداگانه بنویسید و مشخص کنید هر قسمت در راستای پاسخ به کدام قسمت است.
- راه حل خود را تمیز و با خط خوانا بنویسید، هرگونه مشکل که منجر به ناخوانا بودن جواب شود **کسر نمره** به همراه دارد.
- در سؤالات تئوری می‌توانید با استفاده از شبه کد، جواب خود را توضیح بدهید ولی نوشتن کد یا شبه کد به تنهایی نمره‌ای ندارد.
- در سؤالات عملی، توضیحات دقیق‌تر در مورد نحوه‌ی ورودی و خروجی داخل کوئرا داده شده است.
- برای پاسخ‌های خود اثبات قانع‌کننده ارائه دهید. (به طور مثال اگر مرتبه زمانی برای یک سؤال می‌نویسید، درستی آن را نیز اثبات نمایید.)
- هرگونه ایده گرفتن از تمرین دیگران و کدهای موجود در اینترنت که موجب تشابه بالای کد شما با دیگری شود، تقلب محسوب می‌شود و نمره‌ی منفی برای شما منظور خواهد شد.
- راه حل سؤال‌های تئوری را به طور مختصر و دقیق توضیح دهید. توضیحات بی‌مورد و همچنین عدم توضیح (برای یک قسمت از سؤال) هر دو کسر نمره دارد.
- تأخیر در ارسال تمرین‌ها براساس نمودار زیر محاسبه خواهد شد. محور افقی نمودار، مقدار تأخیر به ثانیه و محور عمودی، ضریب اعمالی در نمره تمرین است.



## درمورد این سری تمرین به نکات زیر توجه داشته باشید:

مبحث اصلی این تمرین، الگوریتم‌های MST (Prim و Kruskal) می‌باشد و از شما انتظار می‌رود برای پاسخ به سوالات، راه‌حل‌های مرتبط با این مبحث را ارائه دهید.

توجه داشته باشید که در این سری تمرین باید، به سوال اول تنها به صورت تئوری، به سوال دوم به صورت تئوری و عملی و به سوالات سوم و چهارم تنها به صورت عملی پاسخ دهید.

پیاده سازی الگوریتم سوال‌های ۲ تا ۴ باید با یکی از زبان‌های مجاز در کوئرا باشد.

فایل پاسخ تئوری تمرین خود را به صورت **شماره ی دانشجویی\_نام و نام خانوادگی\_HW4** نام گذاری کرده و ارسال کنید. (برای مثال HW4\_NameFamily\_98000000). دقت کنید درغیراین صورت، تمرین شما تصحیح نخواهد شد.

## سوال اول

فرض کنید گراف  $G$  و درخت فراگیر کمینه‌ی آن ( $T$ ) را داریم. وزن یکی از یال‌های گراف  $G$  را کم می‌کنیم تا گراف  $G'$  به دست آید.

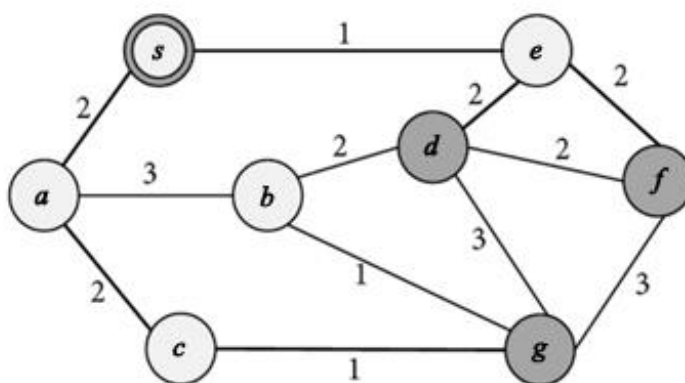
الگوریتمی ارائه دهید که درخت فراگیر کمینه را در گراف  $G'$  پیدا کند. دقت کنید با توجه به اینکه اطلاعات درخت پوشای کمینه در گراف اولیه را داریم، باید در زمانی کمتر از الگوریتم‌های معمول MST، پاسخ را بیابید.

(راهنمایی: این کار در زمان  $O(V+E)$  امکان‌پذیر است)

## سوال دوم

گرافی را در نظر بگیرید که وزن یال‌های آن اعداد صحیح هستند. قصد داریم یک درخت پوشا (Spanning Tree) پیدا کنیم که در آن **حاصل ضرب** یال‌ها کمینه باشد. (به این درخت به اختصار MPST می‌گویند.)

الف) الگوریتمی به این منظور پیشنهاد دهید و با استفاده از آن، مقدار MPST را برای گراف زیر بیابید. (مراحل اجرای الگوریتم را باید نشان دهید.)



ب) آیا در مسئله MPST نیز می‌توانیم مشابه MST از دو روش Kruskal و Prim استفاده کنیم؟ اگر پاسخ شما مثبت است، تفاوت عملکرد این دو روش را بر روی گراف‌های Dense و Sparse و همبند و غیر همبند توضیح دهید.

## سوال سوم

فرض کنید در شرکتی مشغول به کار هستید و کار شما آنالیز مختصات شعب متعدد این شرکت در سطح شهر، برای بدست آوردن بهینه‌ترین راه ممکن جهت اتصال راه‌های ارتباطی بین این شعب تعیین شده است. برنامه‌ای بنویسید که به شما در انجام این کار کمک کند.

❖ در این سوال، مختصات شعب شرکت به عنوان ورودی برنامه به شما داده می‌شود و شما باید کم‌هزینه‌ترین راه ممکن برای اتصال این شعب به یکدیگر را پیدا کنید.

هزینه اتصال هر دو شعبه به یکدیگر برابر با Manhattan Distance بین آنهاست که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\text{Cost} = |X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$$

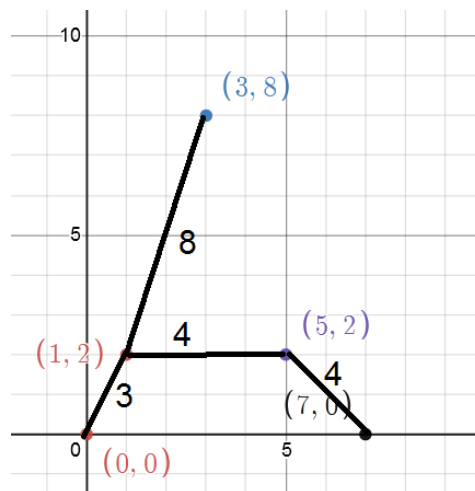
$(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$

این نقاط وقتی **کاملاً** به هم وصل هستند که از هر راس، راهی برای رسیدن به هر راس دیگر وجود داشته باشد.

**توجه:** لزومی به وجود یال مستقیم بین هر دو راس وجود ندارد. اما باید از هر راس، راهی برای رسیدن به هر راس دیگر وجود داشته باشد.

**مثال:** کم‌ترین هزینه برای اتصال این شعب برابر است با:

$$\text{Points} = \{(0,0), (1,2), (3,8), (5,2), (7,0)\} \Rightarrow \text{Cost}: 3 + 4 + 4 + 8 = 19$$



## سوال چهارم

در کشور تازه تاسیس «کورش توپیا»  $n$  شهر وجود دارد. همان طور که می دانید، در هر کشور نیاز است جاده هایی برای جابجایی از هر شهر به هر شهر دیگر وجود داشته باشند. به همین خاطر، «کینگ کورش» به فکر ساخت تعدادی جاده بین شهرها افتاده است. تعدادی از شهرها از قبل به همدیگر راه داشته اند و بین بعضی شهرها نمی توان جاده ای احداث کرد. هزینه ی ساخت جاده های ممکن برآورد شده است. حال کینگ کورش از شما، به عنوان یکی از شهروندان وفادار کورش توپیا، می خواهد در این وضعیت نامناسب اقتصادی هزینه ی ساخت جاده ها را به حداقل برسانید.

توجه کنید که تمامی جاده ها (چه ساخته شده و چه قابل ساخت) دوطرفه هستند و ترتیب شهر مبدا و مقصد فرقی ندارد.

موفق باشید.