

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

I. Tập hợp – các phép toán trên tập hợp.

Câu 1 : Giả sử $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$. Hãy chỉ ra các khẳng định đúng trong số các khẳng định dưới đây :

- a) $1 \in A$ b) $\{1\} \in A$ c) $\{1\} \subset A$
 d) $\{\{1\}\} \subset A$ e) $\{\{2\}\} \in A$ f) $\{2\} \subset A$

Câu 2 : Hãy liệt kê các phần tử trong các tập hợp dưới đây :

$$A = \{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \left\{ n + \frac{1}{n} \mid n \in \{1; 2; 3; 5; 7\} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{n^2 + n} \mid n \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11\} \right\}$$

Câu 3 : Xét các tập hợp con của \mathbb{Z} :

$$A = \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{2n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$C = \{2p - 3 \mid p \in \mathbb{Z}\}, \quad D = \{3r + 1 \mid r \in \mathbb{Z}\}$$

$$E = \{3s + 2 \mid s \in \mathbb{Z}\}, \quad F = \{3t - 2 \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

Hãy xác định các khẳng định đúng trong số các khẳng định sau đây

- a) $A = B$ b) $A = C$ c) $B = C$
 d) $D = E$ e) $D = F$ f) $E = F$

Câu 4 : Trong số các tập hợp dưới đây, tập hợp nào khác \emptyset ?

- a) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 7 = 3\}$
 b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x + 5 = 9\}$
 c) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 4 = 6\}$
 d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 6\}$
 e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5 = 4\}$

f) $\{x \in R \mid x^2 + 3x + 3 = 0\}$

Câu 5 : Xét 4 tập hợp con của tập hợp vũ trụ $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{1, 2, 4, 8\}$

$C = \{1, 2, 3, 5, 7\}, \quad D = \{2, 4, 6, 8\}$

Hãy xác định các tập hợp dưới đây:

a) $(A \cup B) \cap C$ b) $A \cup (B \cap C)$

c) $\overline{C} \cup \overline{D}$ d) $\overline{C \cap D}$

e) $(A \cup B) \cap \overline{C}$ f) $A \cup (B \cap \overline{C})$

g) $(B \cap \overline{C}) \cap \overline{D}$ h) $B \cap \overline{C \cap D}$

i) $(A \cup B) \cap \overline{C \cap D}$

Câu 6 : Dùng các quy luật của Lý thuyết tập hợp để đơn giản các biểu thức dưới đây:

a) $A \cap (B \cap \overline{A})$

b) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$

Câu 7: Cho A, B, C, D là các tập hợp, chứng minh rằng:

a) $A \cap (B - A) = \emptyset$

b) $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$

c) $A - B = A \cap \overline{B}$

Câu 8: Cho $A = \{1, 5\}$ và $B = \{a, b, c, d\}$. Tìm

a. $A \times B$

b. $B \times A$

c. A^2

Câu 9: Cho tập $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{0, 1\}$. Tìm

a. $A \times B \times C$

b. $B \times B \times B$

Câu 10: Giả sử tập vũ trụ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Biểu diễn các tập dưới đây bằng các chuỗi bit.

- a. $\{3, 4, 5\}$
- b. $\{1, 3, 6, 10\}$
- c. $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

Câu 11: Dùng tập vũ trụ như bài tập trên, tìm các tập biểu diễn bởi các chuỗi sau:

- a. 11110 01111
- b. 01011 11000
- c. 10000 00001

Câu 12: Cho $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hãy dùng các chuỗi bit để tìm giao và hợp của tập $A = \{2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ và $B = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$.

II. Nguyên lý cộng. Nguyên lý nhân. Nguyên lý chuồng bồ câu.

Câu 1: Một sinh viên có thể chọn một đề tài từ 1 trong 3 danh sách các đề tài. Số đề tài trong 3 danh sách các đề tài lần lượt là 23, 15, 20. Hỏi sinh viên có bao nhiêu cách để chọn 1 đề tài.

Câu 2: Trong đoạn từ 1 đến 1000 có bao nhiêu số hoặc là số lẻ hoặc là số chính phương?

Câu 3: Đếm số chuỗi nhị phân độ dài 8 có hai bit đầu 00 hoặc 11.

Câu 4: Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 8 không chứa 6 số 0 liên nhau?

Câu 5: Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 hoặc bắt đầu bởi 3 số 1, hoặc kết thúc bởi 4 số 0?

Câu 6: Một lớp học có 5 sinh viên nữ, 10 sinh viên nam. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 sinh viên bao gồm 1 nam và 1 nữ tham gia vào đại hội sinh viên?

Câu 7 : Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái và số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau?

Câu 8: Cho tập $X=\{1,2,3,4,5,0\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 2.

Câu 9: Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài n .

Câu 10: Một mã gồm 6 ký tự, trong đó gồm 3 chữ cái rồi đến 3 chữ số. Hỏi có bao nhiêu mã khác nhau?

Câu 11: Chứng tỏ rằng trong một lớp có 30 sinh viên thì ít nhất có 2 sinh viên có tên bắt đầu bằng cùng một chữ cái?

Câu 12: Số các học viên của một lớp học ít nhất là bao nhiêu để ít nhất hai học viên có số điểm như nhau trong kỳ thi môn Toán học rời rạc, nếu dự định thang điểm là $0 \rightarrow 10$?

Câu 13: CMR: Trong số những người có mặt trên trái đất, phải tìm được hai người có hàm răng giống nhau. (Giả sử trên hành tinh có trên 6 tỉ người)

Câu 14: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. CMR: Ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10)

Bài 15: Số lượng mã vùng tối thiểu phải là bao nhiêu để đảm bảo cho 25 triệu máy điện thoại trong một bang ở Bắc Mỹ có số điện thoại khác nhau, nếu mỗi số đó gồm 10 chữ số. (Giả sử số điện thoại có dạng NXX-NXX-XXXX, trong đó 3 chữ số đầu là mã vùng, N là 1 chữ số có giá trị từ 2 đến 9, và X từ 0 đến 9).

Bài 16: Có 5 loại học bổng khác nhau, hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 sinh viên cùng nhận một loại học bổng.

III. Hoán vị, tổ hợp và chỉnh hợp. Công thức nhị thức Newton.

Câu 1: Gọi P_n là số hoán vị của n phần tử. Chứng minh:

a) $P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}$

b) $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + (n-1)P_{n-1} = P_n$

Câu 2: Nhóm 10 ứng cử viên vào 3 vị trí (Trưởng phòng, Phó phòng và Thư kí)

a) Hỏi có bao nhiêu cách bổ nhiệm 3 người vào 3 vị trí trên?

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 người để xếp vào 3 vị trí trên?

Câu 3: Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách lập ban cán sự lớp gồm:

a) 3 học sinh.

b) 3 học sinh gồm 1 nam và 2 nữ

c) 3 học sinh trong đó có ít nhất 1 nam.

Câu 4: Một tạp chí thể thao định cho ra 22 kì báo chuyên đề về 22 đội bóng. Mỗi kì chỉ viết về 1 đội bóng. Hỏi có bao nhiêu cách sao cho:

a) Kì báo đầu tiên nói về đội bóng A?

b) Hai kì báo liên tiếp nói về 2 đội bóng A và B?

Câu 5: Có 4 nữ sinh tên là Huệ, Hồng, Lan, Hương và 4 nam sinh là An, Bình, Hạnh, Phúc cùng ngồi quanh một bàn tròn có 8 chỗ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?

b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu nam và nữ ngồi xen kẽ nhau nhưng hai bạn Hồng và An không chịu ngồi cạnh nhau?

Câu 6: Mỗi người sử dụng máy tính dùng password có 6 -> 8 ký tự. Các ký tự có thể là chữ số hoặc chữ cái, mỗi password phải có ít nhất 01 chữ số. Tìm tổng số password có thể có? (phân biệt chữ hoa chữ thường)

Câu 7: Cho 7 điểm trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng

a) Có bao nhiêu đường thẳng mà mỗi đường thẳng đi qua 2 trong 7 điểm nói trên?

b) Có bao nhiêu tam giác với các đỉnh là 3 trong 7 điểm nói trên?

Câu 8: Cho 2 đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Có bao nhiêu cách để tạo thành 1 tam giác?

Câu 9: Tìm hệ số x^8 trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$

Câu 10: Tìm số hạng chứa x^{37} trong khai triển $(x^2 - xy)^{20}$

Câu 11: Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển:

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^7$$

Câu 12: Tìm số hạng đứng giữa trong các khai triển sau $(x^3 + xy)^{21}$

Câu 13: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển đa thức của: $[1 + x^2(1 - x)]^8$

IV. Hoán vị lặp và tổ hợp lặp.

Câu 1: Có bao nhiêu chuỗi ký tự khác nhau có thể lập được từ các chữ trong từ MISSISSIPPI, yêu cầu phải dùng với tất cả các chữ (độ dài chuỗi là 11).

Câu 2: Một dãy bit gồm 4 bit: 2 bit ở trạng thái 0, 2 bit ở trạng thái 1. Hỏi có bao nhiêu dãy bit khác nhau?

Câu 3: Với các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 lập được bao nhiêu số có 10 chữ số mà trong mỗi số chữ số 2 có mặt đúng 3 lần, chữ số 4 có mặt đúng 2 lần và các chữ số khác mỗi chữ số có mặt đúng 1 lần.

Câu 4: Trong một cửa hàng có bán 3 mẫu nón: nam, nữ, trẻ em. Hỏi có mấy cách để chọn 2 cái nón trong cửa hàng đó?

Câu 5: Giả sử ta có 3 đầu sách : Toán, Tin, Lý và mỗi đầu sách có ít nhất 6 bản photocopy. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 quyển?

Câu 6: Xếp 42 quyển sách vào 3 ngăn tủ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho:

- Ngăn tủ nào cũng có sách?
- Có ít nhất một ngăn tủ không có sách?
- Ngăn thứ 2 phải có 10 quyển sách?
- Tổng số sách ngăn 2 và ngăn 3 là 18?

Câu 7: Tìm số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 bình khác nhau, biết rằng bình 1 chứa ít nhất 5 viên bi, bình 2 và 3 chứa nhiều nhất 6 viên?

Câu 8: Phương trình: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ có bao nhiêu bộ nghiệm nguyên không âm?

Câu 9: Cho phương trình $x + y + z + t = 20$. Phương trình có bao nhiêu bộ nghiệm nguyên thỏa $x \geq 1, y > 2, z > 3, t > 4$.