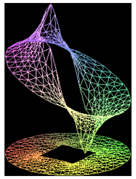
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

520142

Primer Semestre



CAPITULO 5

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Números Complejos

Definición: Números Complejos

Se define el conjunto de los números complejos, el cual se denota por $\mathbb{C}$, como el conjunto de pares ordenados $z = (x, y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Se provee a $\mathbb{C}$ de las siguientes operaciones binarias internas.

- **Adición ($+$):** $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- **Multiplicación ($\cdot$):** $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Estas operaciones tienen las siguientes propiedades:

Números Complejos

Propiedades de la adición:

$\forall z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, se tiene:

C1	Conmutatividad de la adición	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
C2	Asociatividad de la adición	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
C3	Existencia del neutro aditivo $0 = (0, 0)$	$z + 0 = 0 + z = z$
C4	Existencia del inverso aditivo Para cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ existe $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ tal que	$z + (-z) = -z + z = 0$

Números Complejos

Propiedades de la multiplicación:

$\forall z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, se tiene:

C5	Conmutatividad de la multiplicación	$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
C6	Asociatividad de la multiplicación	$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
C7	Existencia del neutro multiplicativo $1 = (1, 0)$	$1 \cdot z = (1, 0) \cdot (x, y) = z$
C8	Existencia del inverso multiplicativo z^{-1} para todo $z \neq 0$	$z \cdot z^{-1} = 1$

Además, se tiene:

C9	Distributividad de la multiplicación con respecto a la adición	$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Observaciones

- El inverso multiplicativo de $z = (x, y) \neq (0, 0)$ es

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

- Notación: $\dfrac{w}{z} = wz^{-1}$.
- El neutro aditivo y el neutro multiplicativo son únicos.
- El inverso aditivo y el inverso multiplicativo son únicos.
- El neutro aditivo es absorvente: $z \cdot (0, 0) = (0, 0)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
- El conjunto $\mathbb{C}$ con sus operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ se denota $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, y constituye una estructura que se llama **Cuerpo de los números complejos**.

Números Complejos

Observación. El conjunto $S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ corresponde a la recta real, y las operaciones de $\mathbb{C}$ restringidas a S coinciden con la suma y multiplicación de los números reales. Por esto identificamos S con $\mathbb{R}$ y el complejo $(x, 0)$ con el real x.

$$x = (x, 0), \qquad 1 = (1, 0), \qquad 0 = (0, 0).$$

Definiciones: Dado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

- Los números reales x e y se llaman **Parte Real y Parte Imaginaria de** z, respectivamente. En este caso se escribe

$$Re(z) = x, \qquad Im(z) = y.$$

- Los números complejos $z = (x, 0)$ se llaman **complejos reales** y los números complejos $z = (0, y)$ se llaman **imaginarios puros**.
  El complejo, $(0, 1)$ es la **unidad imaginaria** y se denota por i.

Números Complejos

Forma binómica o algebraica

- Utilizando la unidad imaginaria i, el número complejo $z = (x, y)$ se puede escribir como

$$z = x + yi\,,$$

la cual se llama **forma binómica o algebraica** de z.

- Con esta notación las operaciones de adición y multiplicación de números complejos se escriben como sigue:

$(+)$: $\quad (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$

$(\cdot)$: $\quad (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$

- Además, para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $z = x + yi \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\lambda \cdot z = \lambda x + (\lambda y)i.$$

Números Complejos

Definición. Se llama **conjugado** de un número complejo $z = x + yi$ al número complejo

$$\overline{z} = x - yi$$

Propiedades. Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:

- $Re(z) = Re(\overline{z})$, $Im(\overline{z}) = -Im(z)$.
- $z + \overline{z} = 2Re(z), \quad z - \overline{z} = 2iIm(z).$
- $z \cdot \overline{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 \in \mathbb{R}$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}.$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$
- $\overline{z} = z \iff z = x$ es un complejo real.
- $\overline{z} = -z \iff z = iy$ es un imaginario puro.

Números Complejos

Definición. Se llama **módulo** de un número complejo $z = x + yi$ al número real no negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

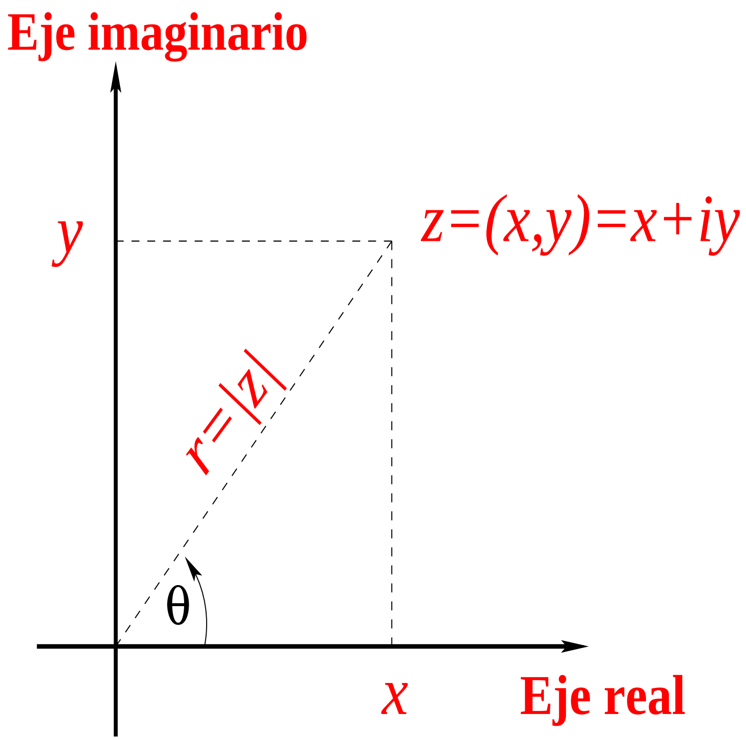
Propiedades. Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:

- $|z| \geq 0.$
- $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0.$
- $|z + w| \leq |z| + |w|.$
- $|zw| = |z||w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad w \neq 0.$
- $Re(z) \leq |z|, \qquad Im(z) \leq |z|.$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2.$

Números Complejos

Plano Complejo.

Todo número complejo $z = x + iy$ se puede representar en el plano XY por el punto (x, y).



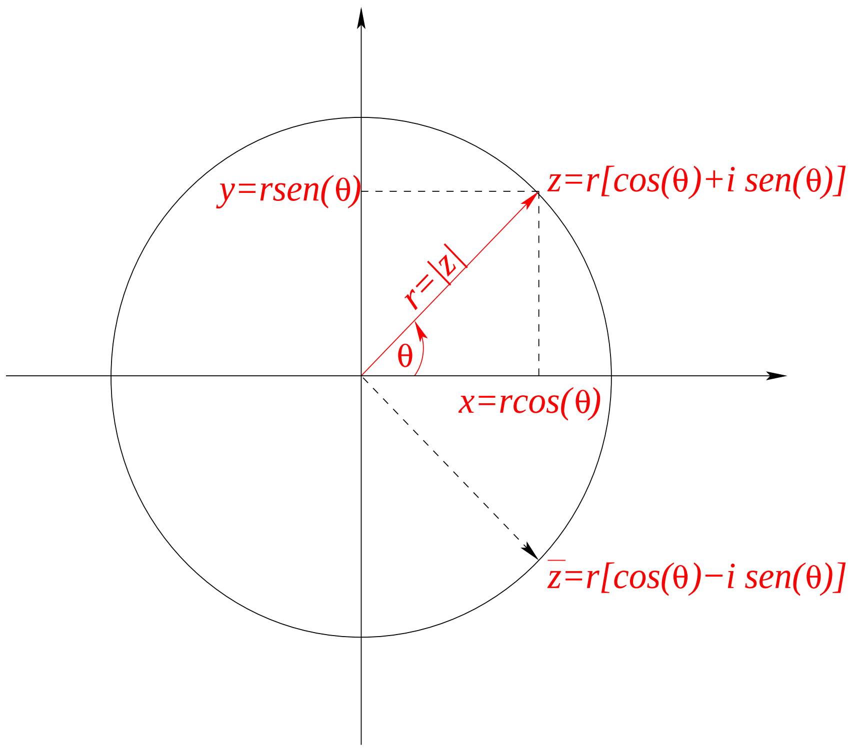
De donde $x = rcos(\theta)$,
$y = rsen(\theta)$.
θ y r se llaman coordenadas polares de (x, y).

Números Complejos

Forma Polar o trigonométrica de un número complejo.

Si r y θ son las coordenadas polares de z, entonces la forma polar de z es

$\boxed{z = r(cos\,(\theta) + isen\,(\theta))}$ o, abreviadamente, $\boxed{z = r\,cis(\theta)}$



r es el módulo de z ($r = |z|$),
θ se llama argumento de z y se denota $\theta = arg(z)$.

Números Complejos

Forma Polar de un número complejo.

Observamos que $r\,cis(\theta) = r\,cis(\theta + 2k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Por lo que $arg(z)$ puede tomar una infinidad de valores:

$$\boxed{arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Se llama **Valor Principal del Argumento** del número complejo z, y se denota $Arg(z)$, al valor del argumento que se encuentra en $[-\pi, \pi]$.

Propiedad Si $r\,cis(\theta) = d\,cis(\alpha)$ con $r \neq 0$, entonces

$$r = d \text{ y } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \theta = \alpha + 2k\pi$$

Números Complejos

Forma Polar de un número complejo.

$$Arg(z) = \begin{cases} Arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si} \quad z \in \text{I o IV cuadrante} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad Re(z) = 0 \text{ e } Im(z) > 0 \\ Arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si} \quad z \in \text{II cuadrante} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad Re(z) = 0 \text{ e } Im(z) < 0 \\ Arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si} \quad z \in \text{III cuadrante} \end{cases}$$

Ejemplo:

Para el número complejo $z = -1 - i$ del III cuadrante, se tiene:

$$Arg(-1-i) = Arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) - \pi = Arctan(1) - \pi = -\frac{3\pi}{4}\,.$$

De esta forma:

$$arg(-1-i) = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

y así

$$-1 - i = \sqrt{2}\,cis(\frac{-3\pi}{4})$$

Multiplicación y división en forma polar

Dados dos números complejos

$$z_1 = r_1(cos\,(\theta_1) + isen\,(\theta_1)) \text{ y}$$
$$z_2 = r_2(cos\,(\theta_2) + isen\,(\theta_2)),$$

se tiene:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(cos\,(\theta_1 + \theta_2) + isen\,(\theta_1 + \theta_2))}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{r_1}{r_2}(cos\,(\theta_1 - \theta_2) + isen\,(\theta_1 - \theta_2))}$$

Por inducción se puede demostrar que:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdot .. \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot .. \cdot r_n\, cis\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right)}$$

Definición. Potencias de números complejos.

Dado un número complejo z y un número natural n se define z^n de manera recursiva por:

$$z^0 = 1, \qquad z^n = z^{n-1} \cdot z$$

Se define además: $z^{-n} = (z^{-1})^n$.

Teorema.

Dado $\quad z = |z|(cos\,(\theta) + isen\,(\theta)) \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \qquad z^n = |z|^n(cos\,(n\theta) + isen\,(n\theta))$$

Números Complejos

Observaciones:

- El teorema anterior proporciona una fórmula simple para encontrar potencias enteras de un número complejo.

- Del teorema se sigue que

$$(r(cos\,(\theta) + isen\,(\theta)))^n = r^n(cos\,(n\theta) + isen\,(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

En particular, si $r = 1$ entonces

$$\boxed{(cos\,(\theta) + isen\,(\theta))^n = cos\,(n\theta) + isen\,(n\theta), \quad n \in \mathbb{N}}$$

la cual se conoce como Teorema o **Fórmula de De Moivre**

Números Complejos

Definición. Raíces de números complejos.

Dado un número complejo $z = |z|\, cis(\theta)$ y un número natural n, se llama **raíz n-ésima de z** a todo número complejo w tal que $w^n = z$.

Si $w = |w|\, cis(\alpha)$, entonces

$$w^n = z \Longleftrightarrow |w|^n\, cis(n\alpha) = |z|\, cis(\theta).$$

De donde:

$$|w| = |z|^{\frac{1}{n}}, \qquad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema. Todo número complejo $z = |z|\, cis(\theta)$, $z \neq 0$, tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas, con módulos $|z|^{\frac{1}{n}}$ y argumentos dados por:

$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Observaciones:

- Son particularmente importantes las raíces n-ésimas de la unidad, esto es, las raíces de $z = 1$. De acuerdo al teorema, con $|z| = 1$ y $\theta = 0$, las n **raíces de la unidad** son:

$$w_k = cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

  Notar que una de estas raíces es 1 y que todas ellas se ubican sobre la circunferencia unitaria.

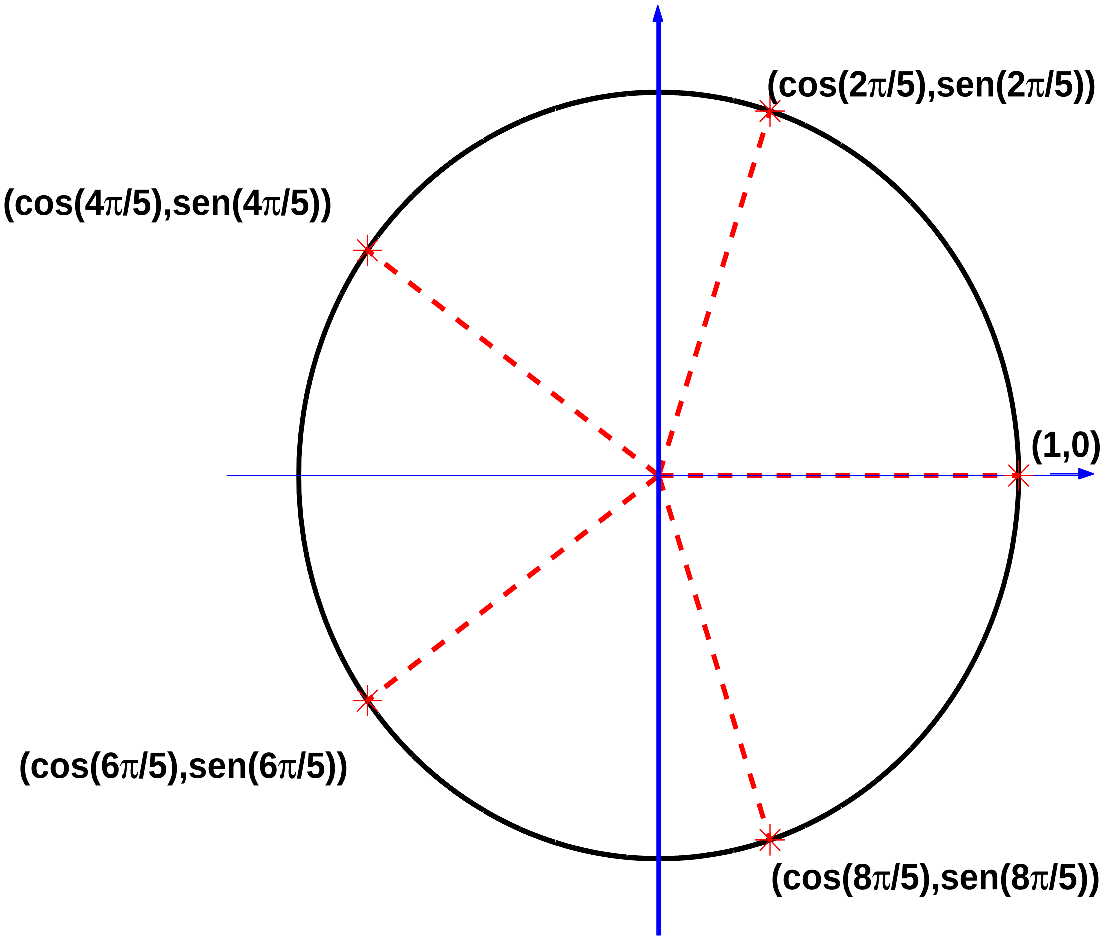
- Sean $u_1, u_2, ..., u_n$ las n raíces de la unidad, y sea w una raíz n-ésima cualquiera de un número complejo z. Entonces, las raíces de z están dadas por

$$wu_1, wu_2, ..., wu_n$$

Números Complejos

Ejemplos:

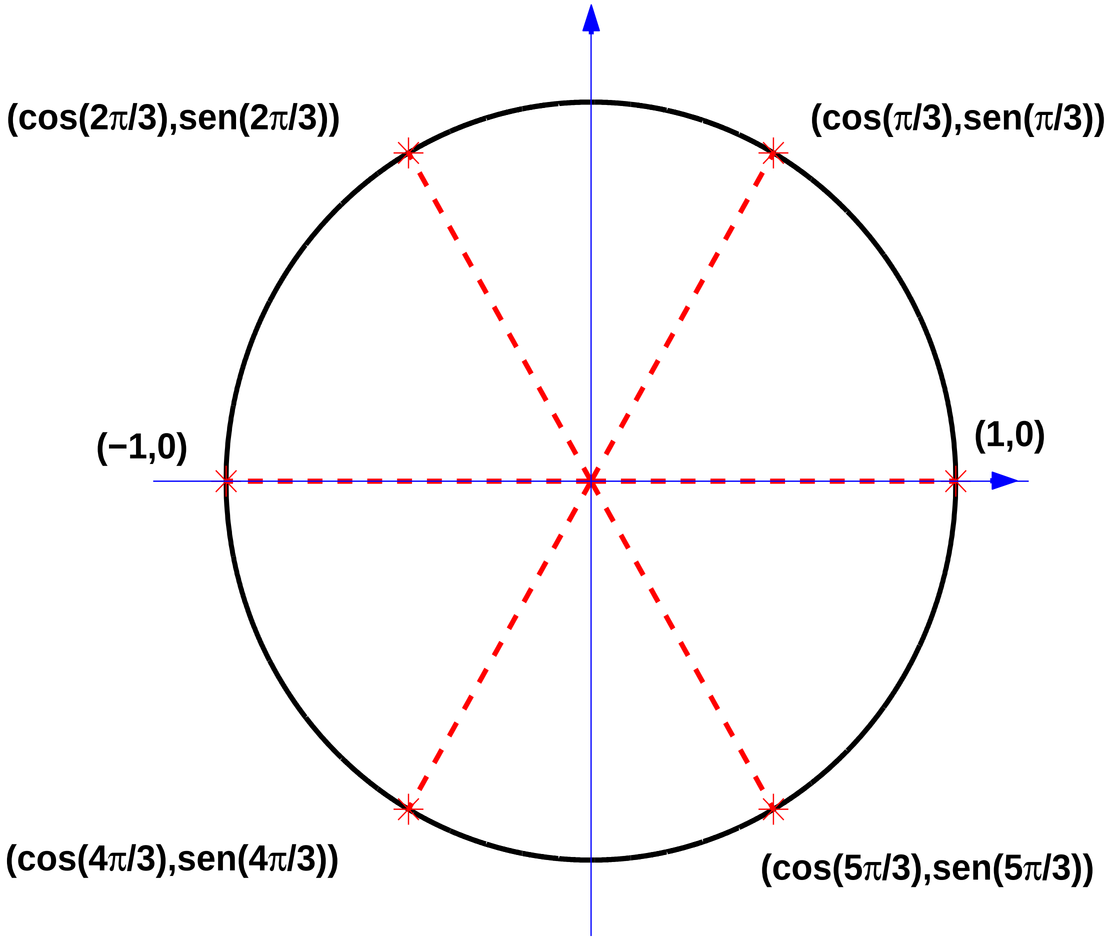
- Raíces quintas de la unidad



Números Complejos

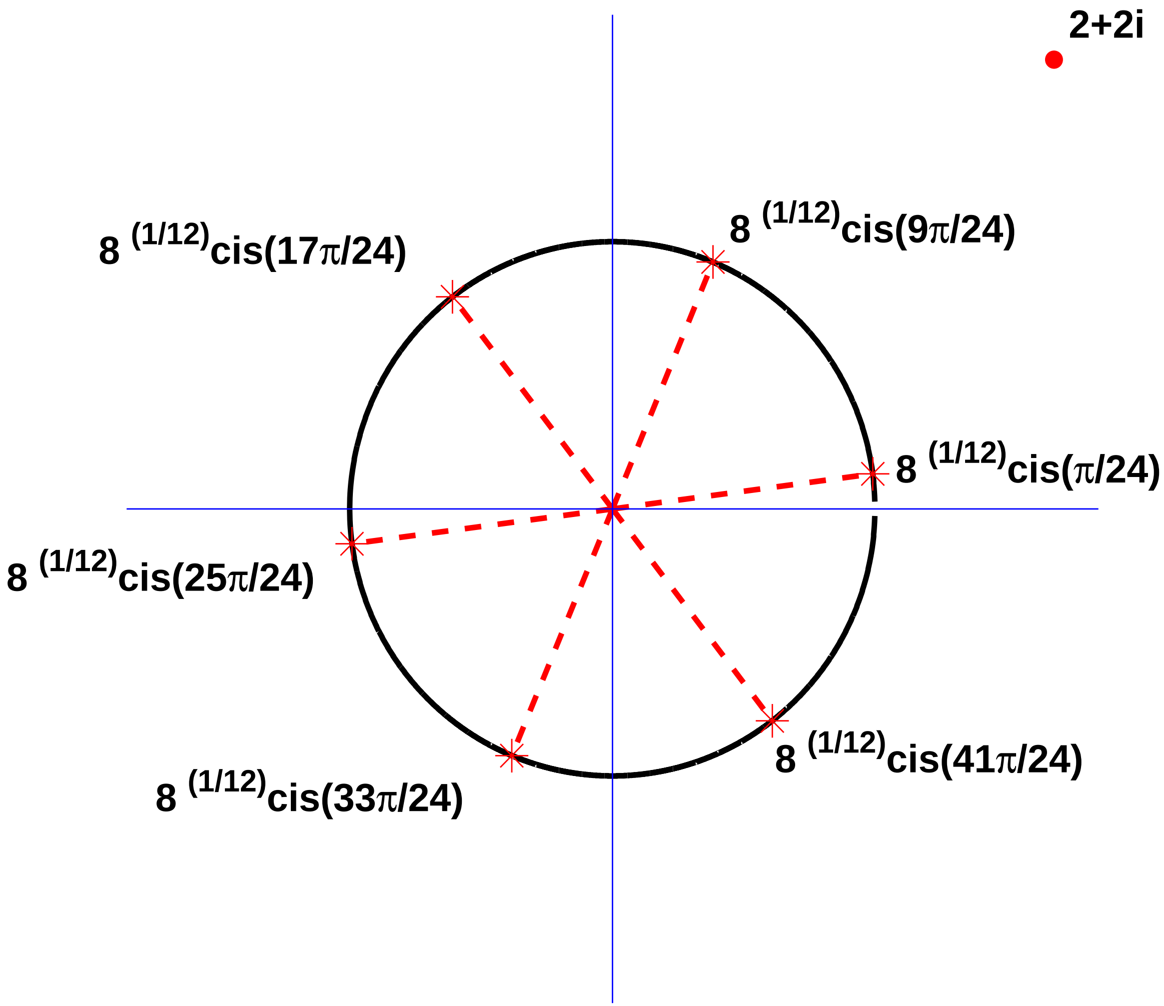
Ejemplos:

- Raíces sextas de la unidad



Números Complejos

- Raíces sextas de $2+2i$



Números Complejos

- Utilizando la definición de potencia entera m y la definición de raíz n-ésima de z, se define la potencia racional $\frac{m}{n}$ como sigue:

$$z^{\frac{m}{n}} = |z|^{\frac{m}{n}} \left(cos\left(\frac{m\theta + 2km\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{m\theta + 2km\pi}{n}\right)\right)$$

o bien

$$w_k = |z|^{\frac{m}{n}}\, cis\left(\frac{m\theta}{n} + \frac{2km\pi}{n}\right),$$

para todo $k \in \{0, 1, ...n - 1\}$.

Números Complejos

Forma exponencial

Usando la Fórmula de Euler:

$$\boxed{e^{i\theta} = cos\,(\theta) + isen\,(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}\,.}$$

Podemos expresar un número complejo $z = r(cos\,(\theta) + isen\,(\theta))$ como:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

Ésta se llama **forma exponencial** de z.

Gracias a los teoremas demostrados anteriormente, la forma exponencial de un número complejo satisface las siguientes propiedades:

$$re^{i\theta}se^{i\alpha} = rse^{i(\theta+\alpha)}$$

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Números Complejos

Observaciones:

Utilizando la **Fórmula de Euler** tenemos que:

$$\boxed{e^{i\theta} = cos\left(\theta\right) + isen\left(\theta\right)}$$

$$\boxed{e^{-i\theta} = cos\left(\theta\right) - isen\left(\theta\right)}$$

Sumando y despejando $cos(\theta)$ obtenemos:

$$\boxed{cos\left(\theta\right) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

Restando y despejando $sen(\theta)$ obtenemos:

$$\boxed{sen\left(\theta\right) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Números Complejos

Ejemplo

Dado $w = r\mathrm{cis}(\theta)$, calcule $\left|\dfrac{r}{w} - \overline{w}\right|$.

Solución

Sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} &= \frac{1}{r}\mathrm{cis}(-\theta) \\ \overline{w} &= r\ \mathrm{cis}(-\theta). \end{aligned}$$

De aqui

$$\begin{aligned} \left|\frac{r}{w} - \overline{w}\right| &= |\mathrm{cis}(-\theta) - r\ \mathrm{cis}(-\theta)| \\ &= |1 - r|. \end{aligned}$$

Ejemplo

El número complejo $1 + 3i$ es una raíz cúbica de z. A partir de esto y usando las raíces cúbicas de la unidad, obtenga las otras 2 raíces de z y expréselas en forma binomial.

Solución

Se sabe que las raíces de un número complejo se pueden escribir como:

$$w_k = w_0 u_k,$$

donde u_k es una raíz de la unidad. Por lo tanto, si tomamos w_0 como $1 + 3i$ podemos obtener las otras raíces multiplicando por las raíces de la unidad.

En éste caso éstas son:

$$\begin{aligned} u_0 &= \mathrm{cis}(0), \\ u_1 &= \mathrm{cis}(\tfrac{2\pi}{3}), \\ u_2 &= \mathrm{cis}(\tfrac{4\pi}{3}). \end{aligned}$$

Calculando:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \\ u_1 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i, \\ u_2 &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i. \end{aligned}$$

Luego las dos raíces restantes de z son:

$$(1+3i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}) i$$

y

$$(1+3i)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}) i.$$