UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

MAT 521 218 **EXAMEN REPETICIÓN**

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
FPV/FChH/LNB/HMM/fpv **(24.07.2002)**

Problema N^o1. Determinar las regiones $\mathcal{D}$ del plano, tal que, para todo $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ se puede garantizar una única curva solución de:

$$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0, \qquad y(x_0) = y_0$$

En particular, si es posible, determinar explícitamente la curva solución que pase por el punto $(1, 2)$, indicando el respectivo intervalo de definición.

(20 pts.)

Solución

- (8 **Puntos**) Primero escribimos $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+4xy}{2(x^2+y)} := f(x, y)$. Enseguida observamos que la función racional f y su derivada parcial f_y son contínuas en cualquier subconjunto abierto $\mathcal{D} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x^2\}$. En consecuencia, el Teorema de Existencia y Unicidad nos permite garantizar una única curva solución que pasa por cada punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.
- (4 **Puntos**) Para el punto $(1, 2)$, podemos considerar por ejemplo

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.$$

- (8 **Puntos**) La Ecuación Diferencial es Exacta. En efecto, definimos $M(x, y) = 3x^2 + 4xy$ y $N(x, y) = 2x^2 + 2y$, es evidente que se satisface el criterio de exactitud: $M_y = N_x$. En cosecuencia, existe una función $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ y una constante c tal que $F_x = M, \quad F_y = N$, y $F(x, y) = c$ para todo $(x, y) \in \mathcal{D}$. Las dos primeras condiciones, siguiendo el procedimiento usual, determinan que $F(x, y) = 2x^2y + y^2 + x^3$. Así, la solución es definida implicítamente por:

$$F(x, y) = 2x^2y + y^2 + x^3 = c.$$

Finalmente, como $y(1) = 2$ se tiene que $c = 9$. Para determinar, explicítamente la única solución, resolvemos la ecuación cuadratica en y:

$$y^2 + 2x^2y + (x^3 - 9) = 0.$$

esto es

$$y = \frac{-2x^2 + \sqrt{8x^4 + 36 - 4x^3}}{2}, \quad x \geq 1.$$

Problema $N^o 2$. Considere un estanque. Al inicio el estanque contiene 150 galones de salmuera con 8 libras de sal. Salmuera que contiene 3 lb/gal de sal entra al estanque a una tasa de 13 gal/seg. La mezcla de salmuera en el estanque fluye hacia afuera a una tasa de 7 gal/seg.

¿Cuánta sal hay en el estanque en el instante t?

(20 pts.)

Solución.

- (10 **Puntos**) Sea $q(t)$ la cantidad de sal en el instante t, medidos en segundos, que contiene el estanque. Con los datos del problema se debe resolver el siguientes PVI:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= 13[\frac{gal}{seg}] \cdot 3[\frac{lb}{gal}] - 7[\frac{gal}{seg}] \cdot \frac{q\,[lb]}{150\,[gal] + (13\,[\frac{gal}{seg}] - 7\,[\frac{gal}{seg}])t\,[seg]} \\ q(0) &= 8\ [lb] \\ \text{es decir} & \\ \frac{dq}{dt} &= 39 - \frac{7q}{150+6t},\ q(0) = 8. \end{aligned}$$

- (10 **Puntos**) La EDO resultante es lineal de primer orden. La solución es

$$q(t) = 3(150+6t) + \frac{C}{(150+6t)^{\frac{7}{6}}},$$

donde la constante de integración C se determina con la condición inicial $q(0) = 8$, la cual es $C = -(442)(150)^{\frac{7}{6}}$. Por lo tanto, la cantidad de sal en el estanque en el instante t es

$$q(t) = 3(150+6t) - (442)(150)^{\frac{7}{6}} \frac{1}{(150+6t)^{\frac{7}{6}}}.$$

Problema N^o3. La solución homogénea de la *ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes variables:*

$$xy'' + (x-1)y' - y = 4x^3e^{-x}, \quad x \neq 0$$

es $y_h(x) = c_1(x-1) + c_2e^{-x}$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Determinar, la única curva solución que intersecta al eje X en $x = 1$ con una pendiente de 45^o.

(20 pts.)

Solución

- (6 **Puntos**) El Problema de Valores Iniciales Normalizado es:

$$y'' + \frac{x-1}{x}y' - \frac{1}{x}y = 4x^2e^{-x}, x \neq 0$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

- (7 **Puntos**) La solución general es $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Donde la solución particular, y_p, es construida por el Método de Variación de Parámetros de Lagrange: $y_p(x) = v_1(x)(x-1) + v_2(x)e^{-x}$ y las funciones v_1 y v_2 satisfacen el sistema:

$$\begin{bmatrix} (x-1) & e^{-x} \\ 1 & -e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4x^2e^{-x} \end{bmatrix}.$$

Como $x \neq 0$ este sistema es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4xe^{-x} \\ 4x(x-1) \end{bmatrix}.$$

luego $v_1(x) = 4\int_1^x te^{-t}dt$ y $v_2(x) = 4\int_1^x t(t-1)dt$. Nota: Alternativamente puede aplicarse regla de Cramer...)

- (7 **Puntos**) Enseguida la condición $y_p(1) = y_p'(1) = 0$ implica que las constantes c_1 y c_2 se determinan de la condición:

$$0 = y(1) = y_h(1) \quad \text{y} \quad 1 = y'(1) = y_h'(1).$$

Lo que implica que $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$. Por tanto la única solución es

$$y(x) = (x-1) + y_p(x), \quad x \neq 0.$$

(Es decir, se ha determinado completamente la solución sin requerir calcular explicítamente las funciones v_1 y v_2).

Problema N^o4. Construir la solución general de la ecuación de Euler no homogénea:

$$x^3y''' + xy' - y = 3x, x \neq 0$$

(20 pts.)

Solución

- (6 **Puntos**) Es suficiente resolver la ecuación para x positivo y después simplemente reemplazar x por $|x|$. Realizamos el cambio de variables $x = e^t, t \in \mathbb{R}$. En consecuencia, la función $z(t) = y(x)$ satisface la ecuación diferencial:

$$(D(D-1)(D-2) + D - 1)\, z = 3e^t$$
$$(D-1)^3 z = 3e^t$$

cuya solución homogénea es $z_h(t) = (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^t$.

- (7 **Puntos**) Para construir la solución particular usamos el anulador $L_1 = (D-1)$ de $h(t) = 3e^t$. Así, $z_p(t) = At^3e^t$, donde A es determinado de la condición $(D-1)^3z_p = 3e^t$. En efecto, basta observar que:

$$3e^t = (D-1)^3 z_p = A(D-1)^3 t^3 e^t = Ae^t D^3 t^3 = 6Ae^t \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

(Sorpresa: $(D-1)^3z_p = (e^tDe^{-t})^3z_p = e^tD^3e^{-t}z_p$)
Nota: Alternativamente, el cálculo directo $(D-1)^3z_p = 3e^t$... permite determinar el valor de A.)

- (7 **Puntos**) Transformamos la solución general:

$$z(t) = (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^t + \frac{1}{2}t^3e^{-t}$$

vía $t = \ln x, x > 0$, para obtener:

$$y(x) = (c_1 + c_2 \ln x + c_3(\ln x)^2)x + \frac{1}{2}x(\ln x)^3, x > 0.$$

Finalmente, la solución general del problema propuesto es:

$$y(x) = (c_1 + c_2 \ln|x| + c_3(\ln|x|)^2)x + \frac{1}{2}x(\ln|x|)^3, x \neq 0.$$

Problema $N^o 5$. Resuelva el siguiente PVI:

$$y'' + y = f(t),\ y(0) = y'(0) = 0,$$

$$\text{donde} \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ -t+2 & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad t > 2. \end{cases}$$

(20 pts.)

Solución

- (5 **Puntos**) La función f se escribe en términos de los escalones unitarios u_1 y u_2 como
$$f(t) = 1 - u_1(t)(t-1) + u_2(t)(t-2).$$
- (5 **Puntos**) Aplicando Transformada de Laplace se tiene
$$\begin{aligned} (s^2+1)\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \\ \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)} + \frac{e^{-2s}}{s^2(s^2+1)}. \end{aligned}$$
- (5 **Puntos**) Utilizando la descomposición en fracciones praciales:
$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s^2+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}, \qquad A=1,\ B=-1\ C=0 \\ \frac{1}{s^2(s^2+1)} &= \frac{D}{s} + \frac{E}{s^2} + \frac{Fs+G}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}, \qquad D=0,\ E=1,\ F=0,\ G=-1, \end{aligned}$$
se tiene que
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)(t) &= 1 - \cos t \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right)(t) &= t - \sin t. \end{aligned}$$
- (5 **Puntos**) Por lo tanto la solución del PVI es
$$y(t) = 1 - \cos t - \{(t-1) - \sin(t-1)\}\, u_1(t) + \{(t-2) - \sin(t-2)\}\, u_2(t).$$