

PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN OCTAVE

1. EDO y PVI

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden junto a la exigencia de que la función solución pase por un punto en particular se denomina problema de valores iniciales (PVI). Un PVI genérico tiene la forma

$$\left. \begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \right\}$$

Los ejemplos

$$\left. \begin{aligned} y'(x) &= y(x) \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} y'(x) &= \sin(x) \\ y(1) &= 2 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} y'(x) &= \cos(x) + y(x) \\ y(-1) &= 1 \end{aligned} \right\},$$

son PVI de orden uno. Estos problemas tienen por solución funciones de una variable y que deben satisfacer simultáneamente su EDO y su condición inicial.

Una EDO se dice de orden superior si involucra derivadas de orden mayor o igual que dos en su expresión. Por ejemplo

$$y''(x) + P(x)y(x) = F(x)$$

es una EDO de orden dos. Mediante sustituciones toda EDO de orden superior se puede reescribir como un sistema de EDO de orden uno. A modo de ejemplo la EDO

$$2x''(t) - x'(t) - 3x(t) = \cos(t)$$

se transforma en el sistema

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ \frac{\cos(t) + 3u_1(t) + u_2(t)}{2} \end{bmatrix}$$

mediante la sustitución $u_1(t) = x(t)$ y $u_2(t) = x'(t)$.

1.1. Solución numérica de PVI

Entendemos por solución numérica de un PVI como una colección de puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ donde $x_0 < \dots < x_n$ y, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, $y_i \approx y(x_i)$.

Para obtener aproximaciones de y entre los nodos es necesario realizar algún tipo de interpolación. Para construir la gráfica de la solución, lo más común es utilizar la interpolación por funciones lineales a trozos (que es lo que el comando `plot` de OCTAVE hace por defecto).

1.1.1. Método de Euler o RK11

Los siguientes códigos muestran la implementación de los métodos numéricos de más bajo orden vistos en la teoría del curso. El primero es el método de Euler y el segundo el de Euler implícito. Ambos pertenecen a la categoría de los métodos de Runge–Kutta de rango y orden 1.

En particular, para aproximar la solución del PVI

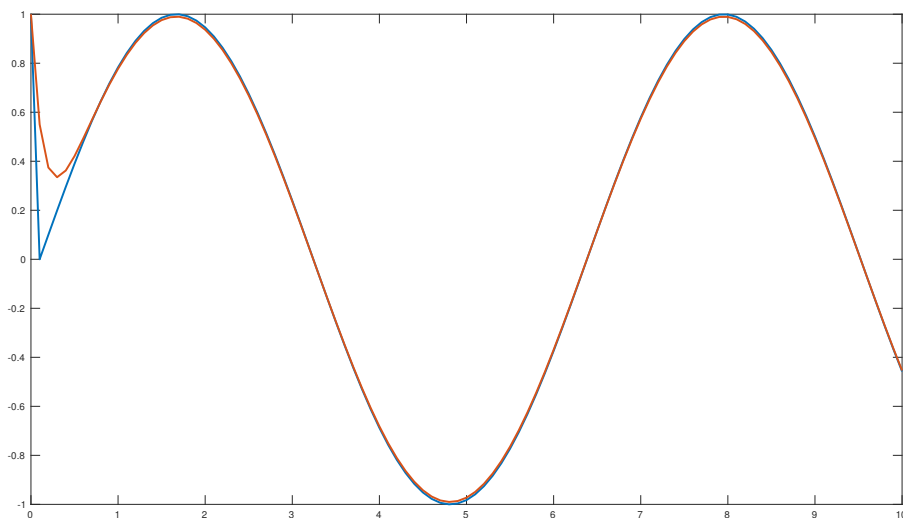
$$\left. \begin{aligned} y'(x) &= 10(\sin(x) - y(x)) \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

en el intervalo $[0, 10]$ implementamos

```
1 h=0.1; %Tamano de paso
2 x=0:h:10; %Vector de nodos
3 y(1)=1; %Condicion inicial
4 for i=2:length(x) %Euler explicito
5     y(i)=y(i-1)+h*10*(sin(x(i-1))-y(i-1));
6 endfor
7 plot(x,y); %Grafica de la solucion numerica
```

```
1 h=0.1; %Tamano de paso
2 x=0:h:10; %Vector de nodos
3 y(1)=1; %Condicion inicial
4 for i=2:length(x) %Euler implicito
5     y(i)=(y(i-1)+h*10*sin(x(i)))/(1+h*10);
6 endfor
7 plot(x,y); %Grafica de la solucion numerica
```

En el siguiente gráfico se representa la solución exacta del PVI y la aproximación producida por los métodos recién descritos.



2. Métodos numéricos para PVI con funciones propias de OCTAVE

OCTAVE tiene dos funciones base para el cálculo de soluciones numéricas de P.V.I. esta son `ode23` y `ode45`.

La función `ode45` opera bien con la mayoría de los problemas de EDO y en general debe ser la primera elección de función para resolver una EDO. Esta función es una implementación de una variación de los métodos de Runge Kuta.

Las EDO del tipo *stiff* resultan difíciles de resolver numéricamente mediante métodos explícitos. En la práctica, se puede identificar si un problema es *stiff* o no *stiff* utilizando una función para problemas no *stiff*, como `ode45`, y viendo si esta es incapaz de converger a una solución o si los cálculos son extremadamente lentos.

Ciertos parámetros se pueden controlar para las funciones `ode23` y `ode45` usando la función `odeset`, algunas de estas son

InitialStep	Primer paso de la malla	Obligar a que el primer paso de la malla construida sea un valor fijo.
MaxStep	Tamaño de paso máximo	Obligar que las distancias entre nodos consecutivos de una malla sea menor que cierto valor.
RelTol	Tolerancia del error relativo	Obligar que el error de cada problema local sea menor que cierto valor.
AbsTol	Tolerancia del error absoluto	Obligar que el mayor error local sea menor que cierto valor.

Por ejemplo, el **programa**

```

1 fvdP = @(t,y) [exp(-0.05*t)*cos(t)];
2 opt = odeset (OutputFcn, @odeplot, RelTol, 1e-10);
3 sol = ode45 (fvdP, [0 50*pi], [2], opt);

```

resuelve usando la función `ode45` el P.V.I.

$$\left| \begin{array}{l} y'(t) = e^{-0,05t} \cos(t) \\ y(0) = 2 \end{array} \right|$$

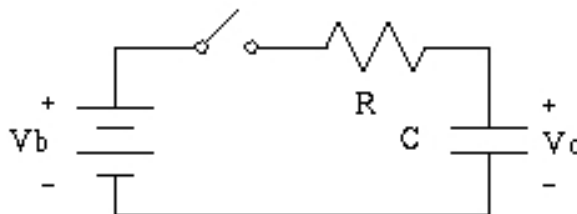
con un error relativo menor a 10^{-10} , muestra el resultado mediante una animación de los cálculos de cada nodo de la solución numérica. y graba la solución numérica en la variable `sol`.

3. Ejemplos de uso de los *solver* numéricos de OCTAVE

A continuación introducimos diversos fenómenos que se pueden modelar mediante un PVI y ejemplificamos el uso de las funciones que OCTAVE posee para aproximar su solución.

3.1. Carga de un circuito RC

Un circuito RC es diagramado según



La carga del capacitor de este circuito depende de la diferencia de potencial eléctrico V_e entregada por la fuente, la resistencia medida en Ohms $[\Omega]$ y la capacidad eléctrica del capacitor medida en Faradios $[\mu F]$. Este fenómeno es modelado por la ley de Kirchoff en el PVI

$$\left| \begin{array}{l} C \frac{d}{dt} q(t) + \frac{q(t)}{R} = V_e(t), \\ q(0) = q_0. \end{array} \right|$$

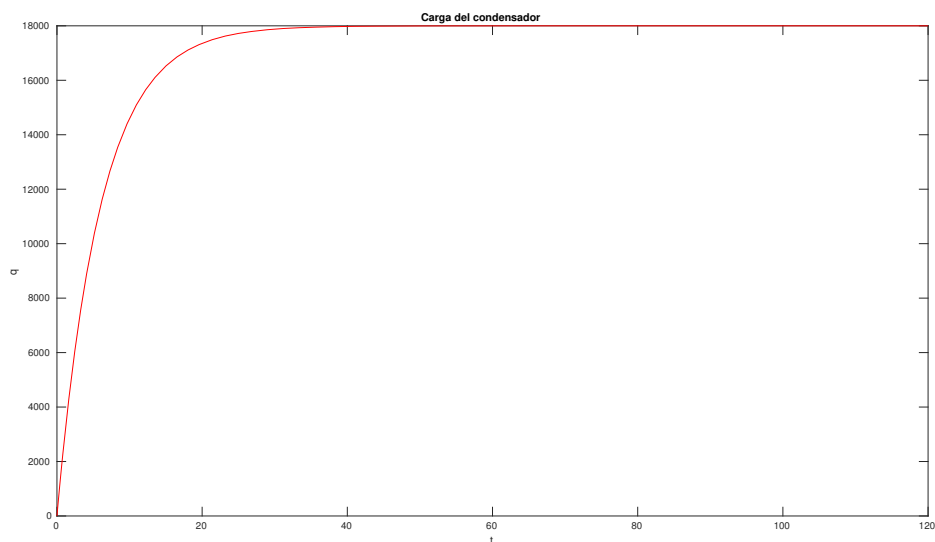
Las siguientes instrucciones de OCTAVE aproximan la solución de este problema

```

1 %DATOS
2 V0=12;           %Voltaje de la fuente
3 R=1.5*10^(3);    %Resistencia electrica
4 C=4*10^(-3);     %Capacidad del capacitor
5 tf=120;          %Tiempo final
6 f=@(t,x) V0/C-x/(R*C); %Funcion del modelo
7
8 tiempo=[0 tf];   %intervalo de tiempo
9 q0=0;            %Carga inicial
10 [t,q]=ode45(f,tiempo,q0); %Solucion numerica
11 plot(t,q,'r')
12 xlabel('t')
13 ylabel('q');
14 title('Carga del condensador')

```

El gráfico generado por este programa es



3.2. Ecuación de conservación

Del balance de masa en un sistema cerrado se deriva la relación

$$\left(\begin{array}{c} \text{La razón de} \\ \text{cambio de } Q(t), \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{La razón a la} \\ \text{que entra } Q(t) \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{La razón a la} \\ \text{que sale } Q(t) \end{array} \right).$$

Este principio tiene varias aplicaciones en química, física e ingeniería.

3.2.1. Disolución química

En química una cantidad se suele medir en unidades de masa como son gramos, kilogramos o en cantidades como los moles. El volumen se puede medir en litros, metros cúbicos u otras derivadas. La concentración de un soluto en un solvente se suele medir en unidades derivadas de estas como $[gr/L]$. El flujo de un solvente se puede medir en unidades de caudal como $[L/s]$ o $[L/h]$.

Un tanque de $1500[L]$ contiene inicialmente $600[L]$ de agua con $1[Kg]$ de sal disuelto en ella. En un momento se le empieza a agregar agua a una razón de $9[L/h]$ con una concentración de sal de $0,5[g/L]$.

Si esta solución bien mezclada sale del tanque a $6[L/h]$, ¿cuánta sal hay en el estanque cuando éste se llena?

Este problema se modela mediante el PVI

$$\begin{cases} q'(t) = 0,5[g/L] \cdot 9[L/h] - \frac{q(t)}{600+3t}[g/h], \\ q(0) = 1000[g]. \end{cases}$$

donde $q(t)$ es la cantidad de sal en el estanque medida en gramos y t es las horas transcurrida desde el inicio de la disolución.

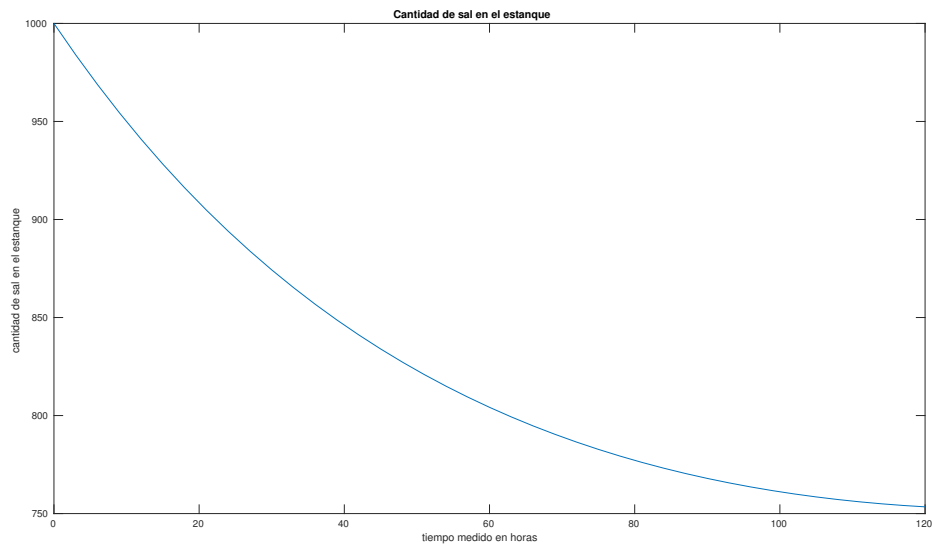
El siguiente código ejemplifica el uso de `ode45` para la solución de este problema

```

1 V0=600; %Volumen inicial
2 q0=1000; %Sal inicial
3 Qin=9; %Caudal de entrada
4 Qout=6; %Caudal de salida
5 Cin=0.5; %Concentracion de entrada
6 f=@(t,q) Qin*Cin-q/(V0+(Qin-Qout)*t)*Qout;
7 [t,q]=ode45(f,[0,120],q0);
8 plot(t,q,'-');
9 xlabel('tiempo medido en horas');
10 ylabel('cantidad de sal en el estanque');
11 title('Cantidad de sal en el estanque');

```

El gráfico generado por este programa es



3.3. Vaciado estanques

El vaciado de un estanque es un proceso en régimen no estacionario debido a que tenemos una salida de masa de un sistema a una velocidad variable que dependerá de la altura del fluido en el estanque. Sin embargo, mediante el balance de energía para una partícula de masa m en el fluido,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \implies v = \sqrt{2gh}.$$

La última ecuación es conocida en hidrodinámica como la ley de Torricelli y establece la velocidad o flujo de salida v de un estanque a través de un agujero que está a una profundidad h . En la práctica esta ley

no considera la presencia de fuerzas disipativas, lo que motiva a corregir esta relación en la forma

$$v = c\sqrt{2gh},$$

donde $c \in [0, 1]$ se llama *coeficiente de descarga*.

Supongamos que un estanque cilíndrico para combustible de $5[m]$ de altura y $1000[L]$ de capacidad se encuentra lleno. Desde un momento se le hace una perforación circular de diámetro $2[mm]$ en un cara inferior, por donde empieza a escurrir petróleo.

Este problema se modela mediante el PVI

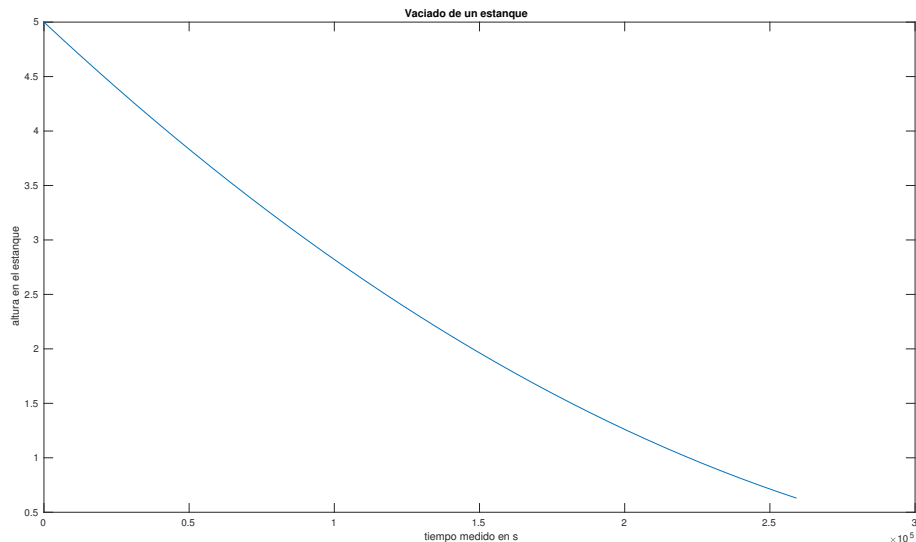
$$\begin{cases} \frac{1}{5}h'(t) = -\pi r^2 \cdot \sqrt{2gh(t)}, \\ h(0) = 5[m], \end{cases}$$

donde $h(t)$ es la altura de la columna de petróleo en el estanque en función del tiempo t medido en segundos, r es el radio de la perforación y g es la aceleración de gravedad.

El siguiente código ejemplifica el uso de `ode45` para la solución de este problema

```

1  Ab=1/5; %Superficie de la base del estanque
2  Vtot=1; %Volumen total del estanque
3  r=0.002; %Radio de la perforacion
4  g=9.81; %Aceleracion de gravedad
5  dh=@(t,h) -Ab/Vtot*pi*r^2*sqrt(2*g*h);
6  [t,h]=ode45(dh,[0,60*60*24*3],5);
7  plot(t,h)
8  xlabel('tiempo medido en s');
9  ylabel('altura en el estanque');
10 title('Vaciado de un estanque');
```



3.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Un PVI de orden n

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), & x \in [a, b], \\ y(a) = z_{01}, y'(a) = z_{02}, \dots, y^{(n-1)}(a) = z_{0n}, \end{cases}$$

se puede expresar como un sistema de n ecuaciones de primer orden al definir:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix} =: \mathbf{f}(x, \mathbf{z}).$$

Además, las condiciones iniciales quedan:

$$\mathbf{z}(a) = \begin{pmatrix} z_1(a) \\ z_2(a) \\ \vdots \\ z_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{01} \\ z_{02} \\ \vdots \\ z_{0n} \end{pmatrix} = \mathbf{z}_0.$$

Luego, el PVI

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}), & x \in [a, b], \\ \mathbf{z}(a) = \mathbf{z}_0, \end{cases}$$

es un sistema de EDO de primer orden, al que se pueden aplicar los métodos y comandos antes vistos.

Por el mismo procedimiento, un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior también puede expresarse mediante un sistema de EDO de primer orden.

3.4.1. Modelo de presa-depredador

Suponga que $R(t)$ modela la cantidad de conejos en una isla y $F(t)$ modela la cantidad de zorros en una isla. Se puede suponer que existen ciertas relaciones entre los cambios en las poblaciones de conejos y zorros que podemos resumir en el sistema

$$\begin{aligned} R'(t) &= a_1 R(t) - a_2 F(t) R(t), \\ F'(t) &= -a_3 F(t) + a_4 F(t) R(t), \end{aligned}$$

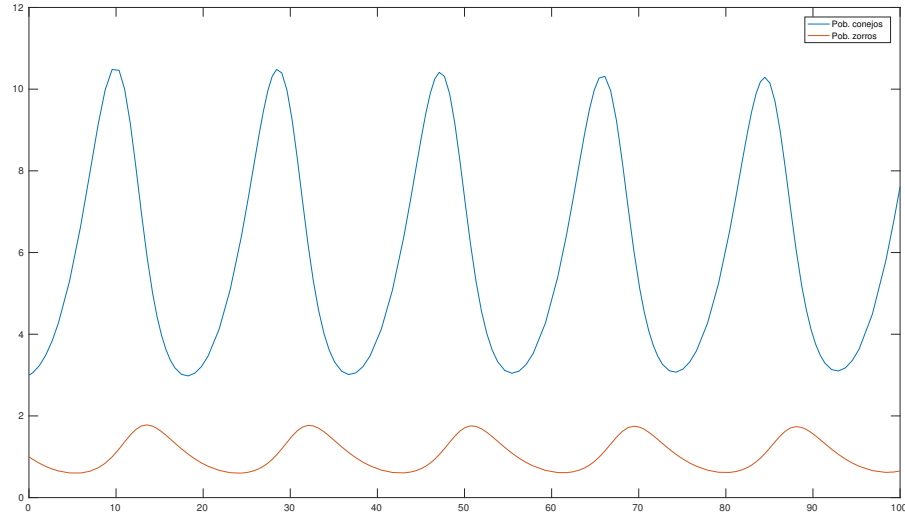
donde $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ son constantes fijas que están relacionadas con la reproducción de los zorros y conejos y cómo unos alimentan a los otros.

En este contexto las condiciones iniciales $R(0)$ y $F(0)$ representan las poblaciones iniciales de conejos y zorros en la isla.

El siguiente ejemplo muestra una modelación para ciertos parámetros y condiciones iniciales

```

1 a1=0.4;
2 a2=0.37;
3 a3=0.3;
4 a4=0.05;
5 f=@(t,x)[a1*x(1)-a2*x(1)*x(2);-a3*x(2)+a4*x(1)*x(2)];
6 [t,f]=ode15s(f,[0,100],[3,1])
7 plot(t,f(:,1),t,f(:,2));
8 legend('Pob. conejos','Pob. zorros')
```



3.4.2. Sistemas masa-resorte

El PVI

$$\left. \begin{aligned} mx''(t) + kx(t)' + Rx(t) &= f(t), \\ x(0) &= x_0, \\ x'(0) &= x_1, \end{aligned} \right\}$$

modela el movimiento de un sistema masa-resorte-amortiguador ideal cuya masa es $m[kg]$, su resorte es de constante $R[N/m]$ y el amortiguador es de coeficiente de difusión $k[N/(m/s)]$.

Este PVI se puede replantear como el sistema de EDO

$$\left. \begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), \\ u_2'(t) &= \frac{1}{m} (f(t) - ku_2(t) - Ru_1(t)), \\ u_1(0) &= x_0, \\ u_2(0) &= x_1, \end{aligned} \right\}$$

mediante la sustitución $u_1(t) = x(t)$, $u_2(t) = x'(t)$. Matricialmente las EDO del sistema se pueden pensar como

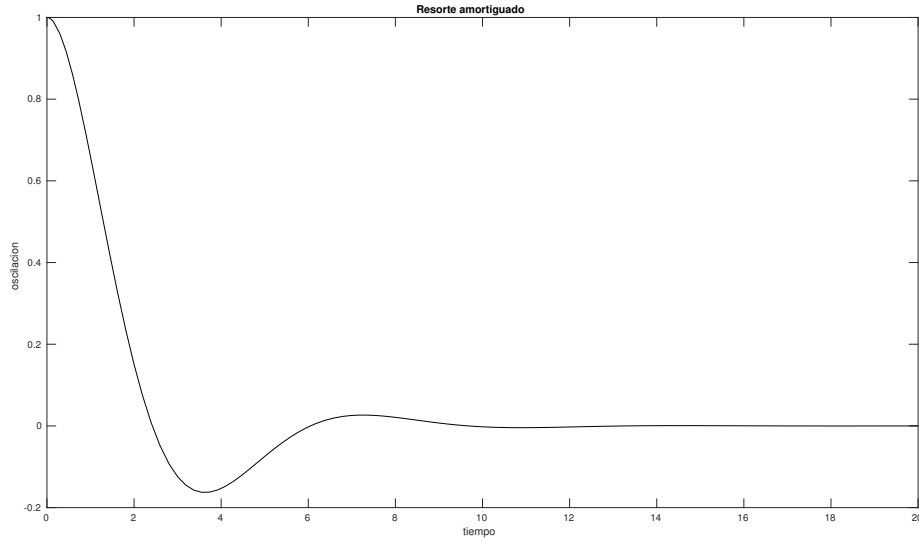
$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ \frac{1}{m} (f(t) - ku_2(t) - Ru_1(t)) \end{bmatrix}$$

Esta es la forma de la función que se debe ingresar a OCTAVE para resolver el sistema.

El siguiente código ejemplifica la modelación del movimiento de un resorte usando funciones de OCTAVE .

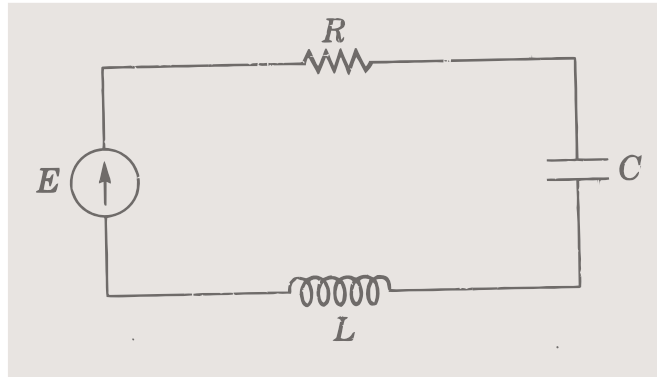
```

1 k=1;
2 r=1;
3 m=1;
4 f=@(t,x) [x(2);1/m*(-k*x(2)-r*x(1))];
5 [t,f]=ode45(f,[0,20],[1,0]);
6 plot(t,f(:,1),'-k');
7 xlabel('tiempo');
8 ylabel('oscilacion');
9 title('Resorte amortiguado');
```

3.4.3. Circuitos RLC

Una fuerza electromotriz (por ejemplo, una batería o un alternador) produce un flujo de corriente en un circuito cerrado. Esta corriente provoca una caída de tensión o voltaje en los elementos por inducción, capacidad y resistencia al circular a través de ellos.



Las leyes básicas, válidas para estos casos y para dicha caída de tensión son:

1. En el elemento de resistencia, la ley de Ohm, establece que la resistencia se opone al paso de corriente produciendo una caída en la fuerza electromotriz proporcional a la intensidad de corriente, según

$$E_R = Ri,$$

donde R es una constante propia de la resistencia e i es la intensidad de corriente.

2. En la bobina o inductancia, esta se opone a cualquier cambio en la corriente, produciendo una caída en la fuerza electromotriz de magnitud

$$E_L = L \frac{di}{dt},$$

donde L es una constante llamado inductancia de la bobina y t es el tiempo.

3. En la capacitancia, capacitor o condensador del circuito se almacena una carga q , la carga acumulada se resiste a la entrada de nueva carga, lo que conlleva una caída de la fuerza electromotriz que viene dada por

$$E_C = \frac{q}{c},$$

donde C es una constante propia del capacitor y q es la carga acumulada en el capacitor. Como la corriente es el ritmo de flujo de carga, y por ello el ritmo al que la carga se acumula en el condensador, se tiene que

$$i = \frac{dq}{dt}$$

y se puede escribir que

$$E_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

Para formar las E.D.O. que aparecen en este tipo de circuitos eléctricos se usa la ley de Kirchhof, la cual establece que

La suma de las caídas de tensión a lo largo de un circuito cerrado en un sentido fijo es cero.

Así, se establece que para el circuito de la figura anterior

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E$$

y como $i = \frac{dq}{dt}$, se tiene que

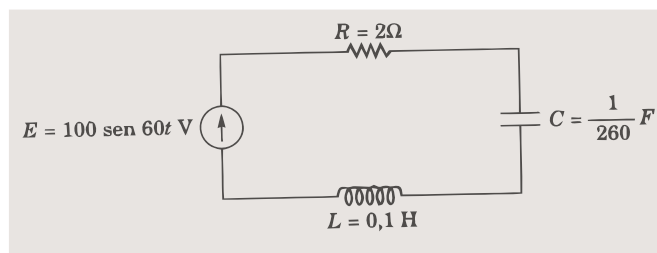
$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden, la cual modela la carga en el circuito o en el capacitor q en función del tiempo transcurrido.

Usando lo anterior el P.V.I.

$$\left. \begin{aligned} 0,1q''(t) + 2q'(t) + 260q(t) &= 100\text{sen}(60t), \\ q(0) &= 0, \\ q'(0) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

modela la carga acumulada en el capacitor del circuito

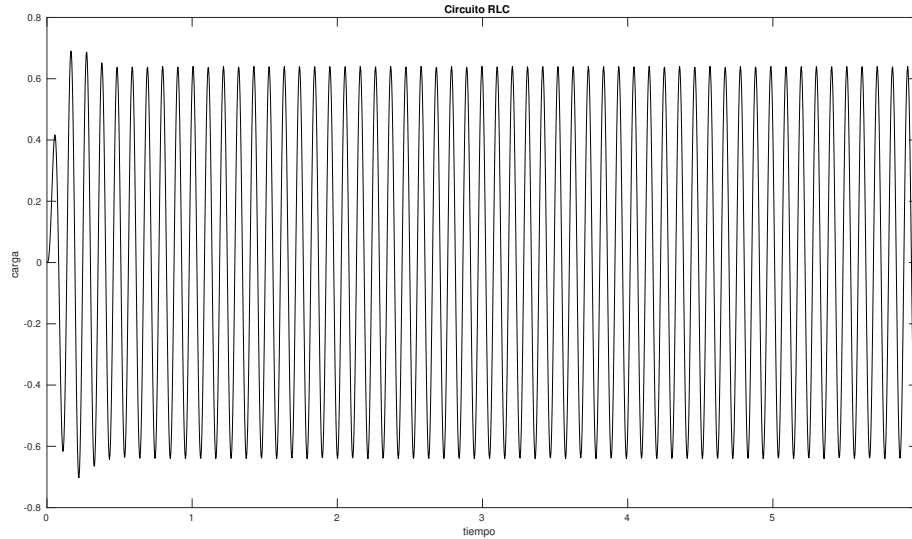


y la solución de este P.V.I. se calcula siguiendo las instrucciones del siguiente rutero de OCTAVE

```

1 c=1/260;
2 r=2;
3 l=0.1;
4 f=@(t,q) [q(2);(100*sin(60*t)-q(1)/c-r*q(2))/l];
5 [t,q]=ode45(f,[0,20],[0,0]);
6 plot(t,q(:,1),'-k');
7 xlabel('tiempo');
8 ylabel('carga');
9 title('Circuito RLC');
```

con lo cual se determina la solución numérica



4. Ejercicios

1. Programe el método de Euler explícito e implícito para resolver los problemas

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} y' = \sin(2x) + y \\ y(0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} y' = \cos(3x) \\ y(0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$c) \quad \left. \begin{array}{l} y'' - y' - 2y = \sin(2x) + y' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right\}$$

2. La EDO

$$y' = y^2 - y^3$$

modela el radio de una bola de fuego $y(t)$ en función del tiempo de combustión. La idea es que este radio es proporcional a la superficie de la bola de fuego e inversamente proporcional a su volumen. Las llamas crecen rápidamente y, a medida que alcanzan su volumen final, dejan de crecer.

Resuelva numéricamente el PVI

$$\left. \begin{array}{l} y' = y^2 - y^3 \\ y'(0) = \delta \end{array} \right\}$$

considerando $\delta = 0,1$, $\delta = 0,05$, $\delta = 0,001$ y $\delta = 10^{-8}$.

3. Un circuito consta de una fuerza electromotriz alterna dada por

$$E(t) = 100 \sin(200t) [V]$$

una resistencia de $40[\Omega]$, una bobina de $0,25[H]$ y un condensador de $4 \times 10^{-4}[F]$ conectados en serie. Si la corriente inicial es cero y la carga inicial del capacitor es $0,01[C]$, hallar la expresión de la corriente para $t > 0$.

4. Un paracaidista de $80[kg]$ se suelta desde un avión a una altura de $600[m]$. Después de $5[s]$ el paracaidista se abre.

La altura del paracaidista, en función del tiempo, $y(t)[m]$ se modela por el PVI

$$\left. \begin{array}{l} y'' = -g + \frac{1}{m}\alpha(t), \\ y(0) = 600, \\ y'(0) = 0, \end{array} \right\}$$

donde $g = 9,81[m/s^2]$ es la aceleración de gravedad, $m = 80[kg]$ es la masa del paracaidista y $\alpha(t)$ es la resistencia del aire, la cual es proporcional al cuadrado de la velocidad del paracaidista, pero esta cambia cuando el paracaídas se abre según

$$\alpha(t) = \begin{cases} K_1 y'(t)^2, & \text{si } t < 5[s] \\ K_2 y'(t)^2, & \text{si } t \geq 5[s] \end{cases}.$$

- a) Calcule la solución analítica en caída libre del paracaidista ($K_1 = K_2 = 0$). ¿Cuánto tiempo se demora el paracaidista en llegar a tierra? ¿Cuál es la velocidad del impacto?. Grafique la altura versus el tiempo.
- b) Resuelva numéricamente considerando

$$K_1 = 1/15, \quad K_2 = 4/15.$$

¿A qué altura se abre el paracaídas? ¿Cuanto se demora en llegar al suelo? ¿Cuál es la velocidad del impacto? Grafique la altura versus el tiempo.

5. Consideremos un modelo, propuesto por Kermack y McKendrick en 1927 para describir la propagación de una epidemia en un grupo de N personas en un período de T semanas. Si $S(t)$ es el número de personas sanas al cabo de t semanas, $E(t)$, el número de personas enfermas y $M(t)$, el de personas muertas, las ecuaciones que describen la evolución en el tiempo de $S(t)$, $E(t)$ y $M(t)$ son

$$\begin{aligned} S' &= -c S E, \\ E' &= c S E - m E, \\ M' &= m E, \end{aligned}$$

donde c y m son las constantes que describen la rapidez con que la enfermedad se transmite y la rapidez con que las personas enfermas mueren respectivamente.

Observe que

$$\frac{dS}{dM} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{dM} = -\frac{c}{m} S \Rightarrow S = S_0 e^{-\frac{c}{m} M}$$

si suponemos que el número inicial de personas muertas a causa de la enfermedad es cero y S_0 denota el número inicial de personas sanas.

Además,

$$S' + E' + M' = 0 \Rightarrow S + E + M = \text{constante},$$

e igual al número de personas N en el grupo considerado.

Con esto se tiene que

$$E = N - S - M = N - S_0 e^{-\frac{c}{m} M} - M$$

y

$$M' = m \left(N - S_0 e^{-\frac{c}{m} M} - M \right), \quad M(0) = 0, \quad t \in [0, 10]. \quad (\text{PVI})$$

- a) Resuelva el problema de valores iniciales (**PVI**) con `ode45` suponiendo $N = 3000$, $E(0) = 150$, $m = 1,8$ y $c = 0,001$. Llame antes a `odeset` para hacer `AbsTol` igual a 10^{-8} y `RelTol` igual a 10^{-4} .
- b) Dibuje, en un mismo gráfico, el número de personas sanas, muertas y enfermas en el período considerado (de 10 semanas).
- c) ¿Al cabo de cuántas semanas aproximadamente se mantiene casi constante el número de personas sanas, enfermas y muertas en el grupo considerado?

- d) ¿Cuál es el número de personas que ha muerto a causa de la enfermedad 8 semanas después de comenzada la epidemia?

La resolución de PVI para sistemas de EDO se realiza mediante los mismos comandos. En tal caso, $\mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y})$ debe ser una función a valores vectoriales (es decir un **vector columna** de funciones) e \mathbf{y} un **vector columna** de variables de la misma dimensión. Además, la condición inicial \mathbf{y}_0 también debe ser un **vector columna** de la misma dimensión

6. Considere un ecosistema simple consistente de conejos con una cantidad más que suficiente de alimento y zorros que depredan los conejos para su alimentación. Un modelo clásico debido a Volterra describe este ecosistema mediante el siguiente par de ecuaciones no lineales de primer orden:

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} = 2c - \alpha cz, & c(0) = c_0, \\ \frac{dz}{dt} = -z + \alpha cza, & z(0) = z_0, \end{cases}$$

donde t es el tiempo medido en años, $c = c(t)$ es el número de conejos y $z = z(t)$ el número de zorros, ambos en el instante t , y α es una constante positiva que mide la probabilidad de interacción entre miembros de las dos especies.

- a) Cuando $\alpha = 0$, conejos y zorros no interactúan. Resuelva la ecuación diferencial a lo largo de un año en el caso en que inicialmente hay 100 animales de cada especie. Compruebe que en tal caso los conejos hacen lo que mejor saben hacer, mientras los zorros se van muriendo de hambre.
- b) Calcule la evolución de ambas poblaciones a lo largo de 12 años en el caso en que la constante de interacción es $\alpha = 0.01$ y que la población inicial es de 300 conejos y 150 zorros. ¿Qué conclusión puede extraer en este caso?
- c) Repita la simulación anterior pero con poblaciones iniciales de 15 conejos y 22 zorros. ¿Cuál es ahora la conclusión?
7. La litotricia extracorpórea por ondas de choque (LEC) es un tratamiento no invasivo que utiliza un pulso acústico para romper los cálculos renales (litiasis renal) y los cálculos biliares (piedras en la vejiga o en el hígado).

El LEC puede generar cierto daño colateral. Las ondas de choque así como las burbujas (de aire) de cavitación formadas por la agitación de la orina, pueden ocasionar daño a capilares, hemorragia del parenquima renal o subcapsular. Esto puede generar consecuencias a largo plazo tales como insuficiencia renal e hipertensión.

El radio R de las burbujas formadas después de t microsegundos de comenzado el tratamiento es $R(t) = 3 \times 10^{-6} r(t)$ metros, donde r es la solución a la siguiente ecuación diferencial, propuesta en 1998 por Howle, Shearer y Zhong,

$$rr'' + \frac{3}{2} (r')^2 = r^{-3\gamma} - 1, \quad r(0) = A, \quad r'(0) = 0 \quad (\text{LEC})$$

en la que $\gamma = 1,4$ es el exponente adiabático.

- a) Convierta (LEC) a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- b) Resuelva el problema de valores iniciales resultante con $t \in [0, 20]$ y suponiendo $A = 2,5$.

- c) Grafique la aproximación resultante y observe que es una función periódica, ¿cuál es el período aproximado de la misma? ¿Entre qué valores oscila el radio R de la burbuja?

8. Considere el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y'(x) &= 100(1 - y(x)), \quad x \in [0, 5], \\ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

- a) Resuelva este problema con `ode45` y `ode15s` tomando `AbsTol` = 1e-6 y `RelTol` = 1e-4. ¿En cuántos subintervalos divide `ode45` el intervalo de integración $[0, 5]$ para resolver este problema? ¿En cuántos lo divide `ode15s`? Observe que `ode15s` necesita dividir $[0, 5]$ en muchos menos subintervalos que `ode45`, a pesar de que las tolerancias con que ambos métodos calculan son las mismas. Este comportamiento es típico de problemas *stiff*.
- b) Grafique los tamaños de paso generados por ambos métodos y la solución exacta a este problema $y(t) = e^{-100t} + 1$.

Observe que la solución exacta de este problema varía rápidamente desde el valor inicial hasta un valor cercano a 1, pero para $t \geq 0,1$ se mantiene casi constante. Es de esperarse que a partir de 0,1 un método numérico para resolver este problema tome en $[0, 0,1]$ tamaños de paso pequeños, para poder reproducir la variación de la solución exacta, pero a partir de 0,1 use tamaños de paso mucho mayores.

Sin embargo, en los gráficos de los tamaños de paso usados por `ode45` y `ode15s`, sólo `ode15s` exhibe el comportamiento esperado. El comportamiento de `ode45` es el típico de métodos no adecuados para resolver problemas *stiff* al usarse para resolver problemas *stiff*.

9. Consideremos el Problema de Valores Iniciales

$$x' = -3tx^2 + \frac{1}{1+t^3}, \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 5]$$

cuya solución exacta es

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3}.$$

- a) Resuelva el problema con `ode45` y los pares de valores de `AbsTol` y `RelTol` en la tabla 1 y complétela.

RelTol	AbsTol	máx _i x _i - x(t _i)
1e-2	1e-4	
1e-3	1e-5	
1e-4	1e-6	
1e-5	1e-7	

Cuadro 1: Comportamiento de `ode45`

Observe que no siempre se cumple que $\max_i |x_i - x(t_i)| \leq \text{AbsTol}$, sin embargo, disminuyendo los valores de `AbsTol` y `RelTol` la solución calculada por `ode45` se acerca a la solución exacta del problema.

- b) Con los valores devueltos en último llamado a `ode45` grafique la solución exacta y los tamaños de paso con los que ha calculado `ode45`, es decir, si usted llamó a `ode45` de este modo

1 `[t,x] = ode45(...)`

escriba

```

1 figure(1)
2 plot(t,t./(1+t.^3))
3 figure(2)
4 plot(t(1:end-1),t(2:end)-t(1:end-1))

```

Observe que en el tramo en el que la solución exacta del problema varía más rápidamente los tamaños de paso con los que calcula `ode45` son más pequeños.

10. Considere el siguiente Problema de Valores Iniciales:

$$\begin{cases} x' = 3 \sin(t)x + 2ty + 1 & t \in [0, 1.5] \\ y'' = 2x + t^2y' - 5y + e^t & t \in [0, 1.5] \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Para resolver este problema, utilizaremos el Método de Euler implícito, en cual considera una partición del intervalo $[0, 1.5]$ en N subintervalos de tamaño h , donde:

$$t_i = (i - 1)h, \quad i = 1, \dots, N + 1 \quad \text{con} \quad h = \frac{1.5}{N}.$$

El algoritmo del método de Euler implícito queda:

Dado \mathbf{y}_1
 Para $i = 1, \dots, N$
 | $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{F}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1})$

- a) Utilizando un cambio de variables apropiado, escriba el PVI asociado como un sistema de EDO de primer orden, con sus respectivas condiciones iniciales.
- b) Escriba el sistema de ecuaciones lineales que define el esquema de Euler implícito para las EDO del item anterior:
- c) Escriba un programa tipo rutero en ambiente OCTAVE que realice las siguientes tareas:
 - 1) Resuelva el problema utilizando el esquema de Euler implícito, considerando $N = 100$.
 - 2) Resuelva el problema utilizando el comando `ode45`, utilizando la misma partición definida en el item anterior.
 - 3) En una misma figura grafique $x(t)$ obtenidos por el método de Euler implícito y el comando `ode45`.
 - 4) En otra figura grafique $y(t)$ obtenidos por el método de Euler implícito y el comando `ode45`.
- d) Un proyectil de masa m se arroja desde un punto del plano (x_0, y_0) , con una velocidad inicial dada por el vector (v_0^x, v_0^y) . La trayectoria del proyectil se rige por las ecuaciones dadas por la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} mx'' &= \gamma v^x \\ my'' &= mg - \gamma v^y \end{aligned}$$

donde g es la aceleración de gravedad $g = 9,81[m/s^2]$, y γ es una constante de roce con el medio en que se realiza el lanzamiento. Formule este problema en forma de un sistema de orden uno.

Considerando $m = 10[Kg]$ y $\gamma = 0,2[Kg/s]$ y suponiendo que el proyectil se lanza desde $30[m]$ de altura con una velocidad inicial horizontal de $40[m/s]$, ¿Qué distancia recorre antes de tocar el piso?

Haga un programa que permita responder esta pregunta, utilizando el metodo de Euler implícito para resolver el sistema.