

ALGEBRA IV: INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS DISCRETAS (525412)

Evaluación Recuperativa  
**Tiempo: 2 Hrs. 30 Mins.**

1. Sean  $(G, *)$  y  $(H, \triangle)$  dos grupos y  $f : G \longrightarrow H$  un homeomorfismo entre ellos.
  - a) Sea  $T$  un subgrupo de  $H$ . Demuestre que  $f^{-1}(T) = \{a \in G : f(a) \in T\}$  es un subgrupo de  $G$ .
  - b) Suponga que  $f$  es sobreyectivo y  $G$  un grupo cíclico. Demuestre que  $H$  es también un grupo cíclico.
  - c) Suponga que  $H = G$  y  $f(a) = a^{-1}, \forall a \in G$ . Demuestre que  $f$  es un isomorfismo si y sólo si  $G$  es grupo Abelian.

2. Dado un digrafo  $G$  sin loops, se define la relación  $R$  en el conjunto de nodos de  $G$  por:

$$\forall x, y \in V(G), \quad x R y \iff x = y \vee \exists \text{ camino en } G \text{ de } x \text{ a } y.$$

- a) Dé un ejemplo de  $G$  con 4 nodos tal que  $R$  no sea una relación de orden ni de equivalencia. Justifique.
  - b) Pruebe que si  $G$  tiene un ciclo, entonces  $R$  no puede ser relación de orden.
  - c) Pruebe que si  $G$  es un grafo fuertemente conexo, entonces  $R$  es una relación de equivalencia y con una sola clase de equivalencia.
3. Dado un grafo  $G$  se define el grafo potencia  $k \in \mathbb{N}$ , denotado por  $G^k$ , por:

$$V(G^k) = V(G), \quad \{a, b\} \in E(G^k) \iff 1 \leq d_G(a, b) \leq k,$$

donde  $d_G(a, b)$  es la distancia en  $G$  entre los nodos  $a$  y  $b$ .

- a) Encuentre un ejemplo de grafo  $G$  con 5 nodos tal que  $G^2 \cong G$ . Justifique.
  - b) Sea  $|V(G)| = n$ . Pruebe que  $G$  es conexo si y sólo si  $G^n \cong K_n$ .
  - c) Demuestre que si  $|V(G)| \geq 3$ , entonces  $G^k$  no es árbol  $\forall k \geq 2$ .
  - d) Pruebe que  $G^2$  no tiene vértices de articulación.