UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION IV
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142)

P1. Encuentre todos los vectores unitarios $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ que sean ortogonales al vector $(1,0,1)^t$ y que formen un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ con el eje X. **(10 Ptos.)**

Solución
Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^t \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \text{ unitario} &\implies a_1^1 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ \vec{a} \perp (1,0,1)^t &\implies a_1 + a_3 = 0 \\ \vec{a} \text{ forma un ángulo de } \frac{\pi}{4} &\implies a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

De todo lo anterior $a_2 = 0$, $a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $a_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Asi el vector pedido es $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^t$.

P2. Determine la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por el punto $P_0(1,2,-3)$ y es perpendicular a los planos

$$\Pi_1 \,:\, 2x - y + 3z = 1 \qquad , \qquad \Pi_2 \,:\, x + 2y + z = 0\,.$$

(15 Ptos.)

Solución

Sean $\vec{n}$ un vector normal al plano Π buscado, y $\vec{n_1}, \vec{n}_2$ vectores normales a los planos Π_1 y Π_2, respectivamente.

En el presente caso se tiene que $\vec{n_1} = (2,-1,3)$ y $\vec{n}_2 = (1,2,1)$.

En vista que

- $\Pi \perp \Pi_1$, se tiene que $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$;
- $\Pi \perp \Pi_2$, se tiene que $\vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 0$;

de donde se deduce que $\vec{n} // \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-7,1,5)$.

Luego, escogiendo $\vec{n} = (-7,1,5)$, se tiene que un punto $P(x,y,z) \in \Pi$ si y sólo si $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$, lo cual nos conduce a la ecuación cartesiana del plano:

$$\Pi \,:\, 7x - y - 5z = 20\,.$$

P3. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto l.i.. Pruebe que $B_1 = \{v_1 + v_2, v_2, v_3 - v_1\}$ es l.i.. **(15 Ptos.)**

Solución

$$\begin{aligned}
\alpha(v_1+v_2)+\beta v_2+\gamma(v_3-v_1)=\theta &\Longrightarrow \alpha v_1+\alpha v_2+\beta v_2+\gamma v_3-\gamma v_1=\theta\\
&\Longrightarrow (\alpha-\gamma)v_1+(\alpha+\beta)v_2+\gamma v_3=\theta\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha \quad\quad - \gamma & = & 0\\ \alpha+\beta \quad\quad\quad & = & 0\\ \gamma & = & 0 \end{array}\right|\\
&\Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0
\end{aligned}$$

De aqui el conjunto el l.i..

P4. En el espacio vectorial $V = P_3(\mathbb{R})$ considere los siguientes subespacios:

$$\begin{aligned} W &= \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V : a + b - c = 0 \wedge a + c = 0\} \\ U &= \langle\{1, x + x^2, x - x^2, 1 + x\}\rangle. \end{aligned}$$

a) Encuentre una base de W e indique su dimensión.
Solución

$$\begin{aligned} W &= \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V : a + b - c = 0 \wedge a + c = 0\} \\ &= \{p(x) = a + bx - ax^2 + dx^3 \in V : 2a + b = 0\} \\ &= \{p(x) = a - 2ax - ax^2 + dx^3 : a, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1 - 2x - x^2) + dx^3 : a, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle\{1 - 2x - x^2, x^3\}\rangle \end{aligned}$$

Veamos que $\{1 - 2x - x^2, x^3\}$ en l.i..

$$a(1 - 2x - x^2) + bx^3 = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$$

Por todo lo anterior $\{1 - 2x - x^2, x^3\}$ es base de W y dim(W)=2.

b) Pruebe que $V = W + U$.
Solución
$W + U$ esta generado por la unión de las bases de U y W.
Busquemos una base de U. En efecto,

$$a + b(x + x^2) + c(x - x^2) + d(1 + x) = 0 \implies \left.\begin{array}{rrrrl} a & & & +d & = 0 \\ & b & +c & +d & = 0 \\ & b & -c & & = 0 \end{array}\right|$$

$$\implies a = 2c, \quad b = c, \quad d = -2c, c \in \mathbb{R}.$$

De aqui una base para U es $\{1, x + x^2, 1 + x\}$.
Notemos que $W + U$ esta generado por $\{1, x + x^2, 1 + x, 1 - 2x - x^2, x^3\}$. Busquemos a partir de este conjunto una base

$$a + b(x + x^2) + c(1 + x) + d(1 - 2x - x^2) + ex^3 = 0$$

$$\implies \left.\begin{array}{rrrrrl} a & & +c & +d & & = 0 \\ & b & +c & -2d & & = 0 \\ & b & & -d & & = 0 \\ & & & & e & = 0 \end{array}\right|$$

$$\implies a = 2d, b = d, c = d, e = 0, d \in \mathbb{R}.$$

De lo anterior una base para $W + U$ es $\{1, x + x^2, 1 + x, x^3\}$, asi dim($W$ + U)=4=dim(V). Luego $V = W + U$.

c) ¿Es $W \oplus U = V$? (justifique).

(20 Ptos.)

Solución

Como dim(W)=2 y dim(U)=3 se tiene que la suma nos es directa, pues necesariamente dim($W \cap U$)=1.