

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ALGEBRA I (520135)
PRACTICA 11 (inducción y progresiones)

Problema 1

Pruebe por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$

- a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = n(4n^2-1)$ b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$
- c) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
- d) $2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \dots + 2n(2n+2) = \frac{4n(n+1)(8n+2)}{3}$

Problema 2

Sea $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, una progresión de números reales y d una constante real positiva, tales que

$$a_0 = 0 \qquad a_n = a_{n-1} + d \cdot n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demuestre, usando inducción, que $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n \leq d \cdot n^2$

Problema 3

Sea $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$, una sucesión de números reales, llamada la sucesión de Fibonacci, tales que:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$

- a) $\sum_{i=1}^n u_i = u_{n+2} - 1$ b) $\sum_{i=1}^n u_{2i-1} = u_{2n}$
- c) $\sum_{i=1}^n u_{2i} = u_{2n+1} - 1$ d) $\sum_{i=1}^n u_i^2 = u_n \cdot u_{n+1}$

Problema 4

a) El cuarto término en el desarrollo de $(x+5)^{11}$

b) El término constante (si existe) en el desarrollo de $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$

c) Los términos centrales del desarrollo de $\left(y + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{15}$

d) Los términos que contienen $\frac{x^2}{y^3}$ y $\frac{x}{y}$ si existen en el desarrollo de $\left(xy^2 - \frac{x}{y}\right)^{16}$

Problema 5

Si $a_1 = 0$ y $d = 3$ en una progresión aritmética, ¿cuánto vale a_8 ?

Problema 6

Si $a_{10} = 14$ y $d = -2$, calcular a_1 .

Problema 7

Al excavar tierra para hacer un túnel se pagan \$700 por el primer metro y \$95 de aumento por cada metro sucesivo. ¿Cuánto se pagará por el décimo metro excavado? Calcular el total abonado por los 10 metros excavados.

Problema 8

¿Es 5, 15, 45, 135, 405 ... una progresión geométrica?

Problema 9

Sabiendo que el primer término de una P.A. es 3, el último 25 y el número de términos 12, determinar la diferencia y la suma de los términos.

Problema 10

Hallar los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero, sabiendo que forman P.A. con diferencia igual a 25° .

Problema 11

Si los números a, b, c son distintos y están en P. G. Demostrar que los números

$\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c}$ están en P. A.

Problema 12

Una pelota se deja caer de una altura de 9 mts. Si cada vez rebota un tercio de la altura desde la cual ha caído esa vez. ¿Cuánto rebotará la sexta vez? ¿Cuál será la distancia total recorrida al tocar el suelo por octava vez?

Problema 13

En una progresión geométrica de primer término 7 y razón 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?

Problema 14

Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24,...

Problema 15

Halla cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros es 28 y la suma de los dos últimos 175.