UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO: 521234

Guía de Ejercicios No 9

1. Analice las series siguientes en cuanto a convergencia absoluta, convergencia condicional o divergencia:

$(a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} i^n \qquad (b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{i^{2n}}{n} \qquad (c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2i}{n^3}$

$(d)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{i^{4n}}{(2n)!} \qquad (e)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(1-i)^{2n}}{n!} \qquad (f)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+i} + \frac{1}{n+1+i}\right)$

2. Dado el término general indicado de una serie de potencias, encuentre el radio de convergencia y especifique el círculo de convergencia:

$(a)\ \frac{(z-i)^n}{3^n} \qquad (b)\ \frac{e^n z^n}{n!} \qquad (c)\ \frac{z^n}{2^n} \qquad (d)\ \frac{(2n)!-z^n}{(n!)^2} \qquad (e)\ \frac{n^2(z-i)^n}{2^n}$

3. Desarrolle la función dada en una serie de potencias alrededor del respectivo centro, y determine el radio y círculo de convergencia:

$(a)\ f(z) = \frac{z^2}{2+z}, \quad c = 0.$ $\qquad (b)\ f(z) = \frac{1}{z}, \quad c = i.$

$(c)\ f(z) = e^{-z}, \quad c = i.$ $\qquad (d)\ f(z) = e^{-z}Ln(z), \quad c = i.$

$(e)\ f(z) = \frac{1-z}{1+2z}, \quad c = 0.$ $\qquad (f)\ f(z) = (z-1)^2e^z, \quad c = 1.$

$(g)\ f(z) = \frac{\text{sen}(z)}{z-\pi}, \quad c = \pi.$ $\qquad (h)\ f(z) = \frac{e^z}{z}, \quad c = 1-2i.$

4. Encuentre el desarrollo en serie de la función dada en la región indicada, o en torno al punto z_0 dado.

$(a)\ f(z) = \frac{1}{z+3}, \quad R: |z| > 3;$ $\qquad (b)\ f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}, \quad R: 1 < |z-2| < 4;$

$(c)\ f(z) = \text{sen}(\frac{1}{z}), \quad R: 0 < |z| < \infty;$ $\qquad (d)\ f(z) = \frac{\cos(z-1)}{z-1}, \quad R: 0 < |z-1| < \infty;$

$(e)\ f(z) = \frac{z^2}{(z+i)^2}, \quad z_0 = i;$ $\qquad (f)\ f(z) = e^{z^{1/2}}, \quad R: 0 < |z| < \infty;$

$(g)\ f(z) = \frac{\sinh(z)}{z^2}, \quad R: 0 < |z| < \infty;$ $\qquad (h)\ f(z) = \frac{z+i}{(z-2i)^3}, \quad z_0 = 2i$

$(i)\ f(z) = \frac{1}{z^3-2z^2+z}, \quad R: 0 < |z-1| < 1;$ $\qquad (j)\ f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-i}, \quad R: 0 < |z| < 1$

5. Determine el tipo de cada singularidad de la función dada:

$$(a) \quad f(z) = \tfrac{z^2-3z+2}{z-2}; \qquad (b) \quad f(z) = \tfrac{\cos(z-1)}{z^2}; \qquad (c) \quad f(z) = \tfrac{1}{(z-1)(z-2)^2};$$

$$(d) \quad f(z) = \cos\left(\tfrac{1}{z}\right); \qquad (e) \quad f(z) = \tfrac{e^{2z}-1}{z^4}; \qquad (f) \quad f(z) = \tfrac{2}{z^2} + \tfrac{3}{z-\pi};$$

$$(g) \quad f(z) = \tfrac{cos(z+i)-1}{(z+i)^4}$$

6. Verifique que el punto z_0 es un cero de la función dada, y determine su orden:

$$(a) \quad f(z) = z^2 - 1, \quad z_0 = -1; \qquad (b) \quad f(z) = \operatorname{sen}(z), \quad z_0 = 0;$$

$$(c) \quad f(z) = \cos(z), \quad z_0 = \tfrac{\pi}{2}; \qquad (d) \quad f(z) = z^4 - 2z^3 + 2z - 1, \quad z_0 = 1.$$

7. Encuentre el residuo de la función dada en cada singularidad:

$$(a) \quad f(z) = \tfrac{e^{2z}-1}{z}; \qquad (b) \quad f(z) = \tfrac{z^2-1}{(z-2)(z+1)(z+\pi)};$$

$$(c) \quad f(z) = \tfrac{ze^z}{z^4-z^2}; \qquad (d) \quad f(z) = \tfrac{sen(z-1)}{(z-1)^3};$$

$$(e) \quad f(z) = \tfrac{\sinh(z)}{z^2}; \qquad (f) \quad f(z) = \tfrac{\cos(z-\pi)+1}{z^5}$$

8. Evalúe mediante residuos la integral de la función dada según la trayectoria indicada con orientación positiva:

$$(a) \quad f(z) = \tfrac{(z^2+1)e^z}{(z+i)(z-1)^3}, \quad R: |z-2| = 3; \qquad (b) \quad f(z) = e^{1/z}, \quad R: |z| = 6;$$

$$(c) \quad f(z) = \tfrac{z}{z^4-1}, \quad R: |z| = 4; \qquad (d) \quad f(z) = \tfrac{\tan(z)}{z^3}, \quad R: |z| = 1;$$

$$(e) \quad f(z) = \tfrac{e^{3z}+\cos(2z)}{z(z-1)}, \quad R: |z-1| = 2; \qquad (f) \quad f(z) = \tfrac{e^z}{z^3-2z^2+z}, \quad R: |z| = 2;$$

$$(g) \quad f(z) = \tfrac{\sinh(z)}{z^6}, \quad R: |z| = 1; \qquad (h) \quad f(z) = \tanh(z), \quad R: |z| = 1.$$

9. Use residuos para evaluar:

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos(t)}; \qquad (b) \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{5-4\cos(t)}dt; \qquad (c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2};$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} \qquad (e) \int_0^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}(x)}{x^2+4}dx; \qquad (f) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

Concepción, 21 de Octubre de 2005.
FPV/cln/fpv.