Propagación del error[1]

Al calcular las integrales

$$I_n := \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \qquad \text{para } \ n = 1, 2, ...$$

usando integración por partes se llega a la relación

$$I_n = 1 - nI_{n-1} \qquad \text{para } \ n = 2, 3, ... \tag{1}$$

donde,

$$I_1 := \int_0^1 x e^{x-1} dx = e^{-1} = 0{,}36787944 \ .$$

Si en vez de I_1 se usa en (1) la aproximación $\hat{I}_1 = 0{,}367879$ (correctamente redondeada a 6 dígitos) se obtienen:

$$\hat{I}_2 = 0{,}264242, \qquad ... \qquad \hat{I}_9 = -0{,}067287 \ < \ 0.$$

Ya que la fórmula (1) es exacta para números reales, el error en $\hat{I}_9$ se debe a la propagación del error introducido en $\hat{I}_1$. Para ver esta propagación sea:

$$\epsilon := I_1 - \hat{I}_1 = e^{-1} - 0{,}367879 \leq 4{,}5 \times 10^{-7}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_2 &= 1 - 2\hat{I}_1 = 1 - 2(I_1 - \epsilon) = I_2 + (-2)(-\epsilon) \\
\hat{I}_3 &= 1 - 3\hat{I}_2 = 1 - 3(I_2 + (-2)(-\epsilon)) = I_3 + (-3)(-2)(-\epsilon) \\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\hat{I}_9 &= 1 - 9\hat{I}_8 = I_9 + (-9)\cdots(-3)(-2)(-\epsilon) \\
&= I_9 - (9!)\ \epsilon. \qquad\qquad 9! = 362{,}880
\end{aligned}$$

[1] Forsythe-Malcom-Moller; Çomputer Methods ...", 1977.

Un algoritmo como el de (1), donde el error crece en cada paso, se dice *inestable*.

Note que la relación (1) se puede *reformular* para obtener el algoritmo recursivo:

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n} \qquad \text{para} \;\; n = m, m-1, ..., 3, 2 \tag{2}$$

en el cual, en cada paso, el error en I_m será dividido por n. En consecuencia este algoritmo no amplifica los errores, luego es *estable*.

Para determinar un m apropiado, note que:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

luego si se toma $m = 20$ e $\hat{I}_{20} = 0$, Ud. puede verificar que de (2) se obtine $\hat{I}_9 = 0{,}0916$.