UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142.

PRACTICA 25. Aplicaciones Lineales.

Problema 1.Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $T: V \longrightarrow V$ una aplicación lineal tal que $T(T(v)) = T(v), \forall v \in V$. Demuestre que $V = Kert(T) \bigoplus Im(T)$.

Problema 2. Considere la proyección ortogonal P de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$,

$$P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow S, \quad v \mapsto P(v) = proy_S v$$

Encuentre: **[En práctica]**
2.1) Núcleo y nulidad de P.
2.2) Imagen y rango de P.
2.3) La imagen y el núcleo de P, cuando S es un subespacio cualquiera de $\mathbb{R}^3$.

Problema 3. Considere las bases $B_1 = \{(2,0,0),(0,3,0),(0,0,4)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $B_2 = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Defina la aplicación lineal T tal que $[T]_{B_1}^{B_2} = A$.

Problema 4. Considere la base $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{3x+3x^2, -1+3x+2x^2, 3+7x+2x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ y $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal cuya matriz asociada en la base B es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Encuentre:
4.1) $[T(v_1)]_B, [T(v_2)]_B$ y $[T(v_3)]_B$. 4.2) $T(v_1), T(v_2)$y $T(v_3)$, 4.3) $T(1+x^2)$.

Problema 5. Sea V el espacio generado por $u_1 = \operatorname{sen}(x), u_2 = cos\ (x)$. **[En práctica]**

5.1) Demuestre que $v_1 = 2\operatorname{sen}(x) + cos\ (x), v_2 = 3cos\ (x)$ forman una base para V.

5.2) Encuentre la matriz de transición de $B = \{u_1, u_2\}$ a $B' = \{v_1, v_2\}$.

5.3) Calcule el vector de coordenadas $[h]_B$, para $h = 2\operatorname{sen}(x) - 5cos\ (x)$ y calcule $[h]_{B'}$ como $P[h]_B$.

5.4) Compruebe su respuesta calculando directamente $[h]_{B'}$.

5.5) Encuentre la matriz de transición de B' a B.

Problema 6. Se dice que una matriz es ortogonal si $A^{-1} = A^t$. Se puede probar que son equivalentes:
i) $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal.
ii) Los vectores fila de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
ii) Los vectores columna de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

6.1) Demuestre que si B_1 y B_2 son bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$, entonces la matriz de paso es ortogonal.

6.2) Determinar si las siguientes matrices son ortogonales.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 7. Encuentre la matriz de T con respecto a B y utilice teorema dado en clase para calcular la matriz de T con respecto a B'.

7.1) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal sobre el plano XY, $B = \{(2,0,0), (0,3,0), (0,0,4)\}$ y B' la base canónica.

7.2) $T : P_1(\mathbb{R}) \longrightarrow P_1(\mathbb{R})$, $\quad T(a_0 + a_1 x) = a_0 + a_1(x+1)$, $B = \{6 + 3x, 10 + 2x\}$ y $B' = \{2, 3 + 2x\}$.

7.3) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad T(x,y,z) = (x + 2y - z, -y, x + 7z)$. B la base canónica y $B' = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$. **[En práctica 7.2 y 7.3]**

14.11.2002.
ACQ/LNB/acq.