UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES II 525222
TAREA 4-A

P1 Sea f una función continua por tramos en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Considere la función

$$F : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt - a_0 x$$

donde $2\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$.

(a) Demuestre que $F \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ y $F(-\pi) = F(\pi)$

(b) Establecer que

$$\forall\, x, a \in [-\pi, \pi] \ : \ \int_{a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a) + a_0(x - a)$$

(c) Establecer que la Serie de Fourier de F converge uniformemente en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

(d) Determinar la sucesión de los coeficiente de Fourier $\{A_0, A_n, B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de F en función de los coeficientes de Fourier de f.
(*Indicación: El valor de $F(-\pi)$ y la convergencia uniforme de la Serie de Fourier de F determinan el coeficiente A_0.*)

(e) Concluya que:

$$\forall\, a \in [-\pi, \pi] : \ \int_{a}^{x} f(t)dt = a_0(x - a) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a}^{x} \{a_n cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)\}\, dt$$

(f) Analizando las preguntas anteriores, decida si es posible concluir que:

El resultado anterior es independiente si la suma parcial

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \{a_n cos(nx) + b_n sen(nx)\}$$

converge uniformemente o puntualmente a f. Es decir, el resultado es válido aun si f' es no acotada en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

(g) Si re-escribimos $F(x) = \int_0^x f(t)dt - a_0 x$. Muestre que la Serie de Fourier de F es

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n sen(nx) - b_n cos(nx))$$

donde $\{a_0, a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son los coeficientes de Fourier de la función continua por tramos f. Observar que en (c) se ha establecido que dicha serie converge uniformemente.

$\big($*Indicación:* $A_0 = \frac{1}{2\pi}\langle F, 1\rangle$.$\big)$

(h) *Ilustración* Considere los coeficientes de Fourier de la función

$$f \in L^2([-\pi,\pi]),\ x \in [-\pi,\pi] \longmapsto f(x) = x$$

para establecer las siguientes sumas:

$$(i)\ \ \frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^n}{n^2}cos(nx) \qquad (ii)\ \ \frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2 x}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^n}{n^3}sen(nx)$$

TAREA 4-B

- Encontrar la serie de Fourier de $f(x) = \frac{(\pi - x)^2}{4}$ sobre $[0, 2\pi]$. Mostrar que esta serie se puede diferenciar término a término en todo intervalo $[\delta, 2\pi - \delta],\ \delta > 0$ y deducir que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(nx)}{n}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

- Si a no es un entero, establecer que:

$$\forall x \in]0, 2\pi[: \pi cos(ax) = \frac{sen(2a\pi)}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{asen(2a\pi(cos(nx) + n(cos(2a\pi) - 1)sen(nx)}{a^2 - n^2}.$$