UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO: 521234

Guía de Ejercicios No 1

1. Mostrar que cada una de las familia de funciones:
$$\left\{1, \cos(\frac{n\pi}{L}x)\right\}, \quad \left\{\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{L}x)\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
es ortogonal en $[0, L]$. Determinar las familias ortonormales respectivas.

2. Una función periódica $f(t)$ de periodo 2 esta definida por
$$f(t) = \begin{cases} 3t & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 3 & \text{si} \quad 1 < t < 2 \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t)$$
   a) Dibuje la gráfica de $f(t)$, de su parte par: $f_p(t) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e impar: $f_i(t) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, para $-4 \leq t \leq 4$.
   b) Determine el desarrollo en serie de Fourier de f, f_p y f_i.
   c) Escriba la desigualdad de Bessel e identidad de Parseval para cada una de estas tres funciones.

3. Para cada una de las siguientes funciones definidas en el intervalo $0 < x < L$, dibuje su extensión par e impar en el intervalo $-L < x < 0$. Determine su desarrollo en series de Fourier de cosenos (SFC) y senos (SFS), respectivamente. Indique el decrecimiento de los n-ésimos coeficientes de Fourier asociados, es decir, determine las constantes positivas A y B y los enteros positivos k y l tal que $|a_n| \leq \frac{A}{n^k} \quad |b_n| \leq \frac{B}{n^l}$. Usualmente este propiedad es *llamada la rapidez de convergencia de la serie de Fourier.*
   a) $f(x) = x$
   b) $f(x) = L - x$
   c) $f(x) = x$, $0 \leq x \leq L/2$; $f(x) = L - x$, $L/2 \leq x \leq L$.

4. Determine la rapidez de convergencia de las Series de Fourier, del ejercicio anterior, aplicando el siguiente resultado:

   Teorema 1 *Sea f una función T-periódica.*
   - *Si f es sólo continua por tramos entonces los coeficientes de Fourier en su representación en Series de Fourier decrecen conforme $1/n$*
   - *Si f es continua en todo $\mathbb{R}$ pero f' es continua por tramos, entonces los coeficientes de Fourier en su representación en Series de Fourier decrecen conforme $1/n^2$.*

- *Si f y sus derivadas de orden r-ésimo orden son continuas pero la $(r+1)$-ésima es continua por tramos entonces los coeficientes de Fourier en su representación en Series de Fourier decrecen conforme $1/n^{r+1}$.*

Nota: Para verificar las propiedades de continuidad es pertinente aplicar la siguiente propiedad de las funciones periódicas: Una función T-periódica g es continua en todo $\mathbb{R}$, si y sólo si, ella es continua en $]-T/2, T/2[$ y $g(-T/2) = g(T/2)$.

5. Encontrar la serie de Fourier de $f(x) = x(1-x), \quad 0 < x < 1$. Observar que existen al menos tres posibilidades:

   a) Considerar la extensión impar de f y luego la SFS respectiva.

   b) Considerar la extensión par de f y luego la SFC respectiva.

   c) Considerar $f(x+1) = f(x)$ y luego su SF respectiva.

   Respuestas:

   - $f(x) = \dfrac{8}{\pi^3} \displaystyle\sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{\text{sen}(k\pi x)}{k^3}$
   - $f(x) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{4}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k=2,4,6,\ldots} \frac{\cos(k\pi x)}{k^2}$
   - $f(x) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^2}$

6. Determine que la serie de Fourier compleja de la función 2π-periódica $f(t) = t^2 (-\pi < t < \pi)$ es: $f(t) = \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2}{n^2}(-1)^n e^{int}$ y su serie de Fourier: $f(t) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$.

7. Considere la función 2π periódica $f(t) = 1$ si $0 < t < \pi$ y $f(t) = 0$ si $-\pi < t < 0$. Usando los coeficientes de Fourier de f y el Teorema de Parseval pruebe que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

8. Los polinomios de Legendre son una familia de polinomios ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$. Ellos son generados por la fórmula $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ y satisfacen $P_0(t) = 1, P_1(t) = t$ y $nP_n(t) = (2n-1)tP_{n-1}(t) - (n-1)P_{n-2}(t) \quad (n = 2, 3, \ldots)$. La relación de ortogonalidad es:

   $$\langle P_n \, , \, P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(t) P_m(t) dt = \begin{matrix} 0 & \text{si} & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si} & n = m \end{matrix} \; .$$

   Defina los coeficientes de Fourier-Legendre de la serie $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t)$. Para la función

   $$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

   determine la suma parcial: $S_3(t) = c_0 P_0(t) + c_1 P_1(t) + c_2 P_2(t) + c_3 P_3(t)$ y represéntela en un mismo gráfico con f. Tener presente que f es una función impar, luego hay que calcular sólo dos coeficientes.

Concepción, 17 de Agosto de 2005.
HMM/FPV/fpv.