UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS NUMERICO III 525442
CERTAMEN 1.

Problema 1. (1.0 ptos) Considere el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 2x\,, & x \in (0,10) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Se introduce una partición de $[0,10]$, generado por los puntos $x_i := i\,h$, $i = 0,...,N$, $h = 10/N$, siendo $N \in I\!N$, y se aplica el método de Euler, obteniéndose las aproximaciones y_i, $i = 0,...,N$.
a) Determine en forma precisa la solución exacta $y(x)$ y el error de discretización local $\tau_h(x_i;y)$, $i = 0,...,N-1$.
b) Calcula $|y(x_i) - y_i|$, $i = 0,...,N$, y muestra la convergencia del método para $h \to 0$.
Pauta
a) La solución de este PVI está dada por la función $\boxed{y(x) = x^2,\ x \in [0,10].}$ Considerando el método de Euler, las iteraciones asociadas a este método para nuestro PVI se reducen a:

$$y_{j+1} = y_j + h\,f(x_j,y_j) = y_j + 2\,h\,x_j\,, \qquad y_0 = 0\,, \qquad j = 0,...,N-1\,. \tag{1}$$

Luego, el error de discretización local en el punto x_i, $i = 0,...,N-1$, está dado por

$$\tau_h(x_i;y) = \frac{1}{h}(y(x_i+h) - y(x_i)) - 2\,x_i = h\,, \qquad \forall\, i = 0,...,N-1\,.$$

b) Teniendo en cuenta que $x_j = j\,h$, de (1) se desprende que $y_{j+1} = y_j + 2\,h^2\,j$, de lo cual resulta

$$\sum_{j=0}^{k} y_{j+1} = \sum_{j=0}^{k} y_j + 2\,h^2 \sum_{j=0}^{k} j \Rightarrow y_j = h^2\,j\,(j-1)\,, j = 0,...,N\,.$$

Esto nos conduce a

$$|y(x_i) - y_i| = |i^2\,h^2 - h^2\,(i-1)\,i| = x_i\,h \le 10\,h\,, \qquad i = 0,...,N\,,$$

lo cual permite concluir que $\max\limits_{0\le i\le N} |y(x_i) - y_i| \le 10\,h \to 0$, a medida que $h \to 0$, es decir las aproximaciones generadas por el método de Euler converge a la solución exacta a medida que el tamaño de paso decrece.

Problema 2. (1.5 ptos) Considérese el método multipaso

$$y_{j+2} + a_1\,y_{j+1} + a_0\,y_j = h\,[b_0\,f(x_j,y_j) + b_1\,f(x_{j+1},y_{j+1})]\,.$$

a) Determine a_0, b_0 y b_1 en función de a_1, de manera que resulte un método consistente por lo menos de orden 2.
b) ¿Para qué valores de a_1 es el método estable? Justifique.
c) ¿Se puede elegir a_1 de manera que se tenga un método estable de orden 3?

Pauta

Considerando que la solución $y(x)$ es suficientemente suave, tenemos que el error de discretización local $\tau_h(x;y)$ tiene el desarrollo:

$$\begin{aligned}\tau_h(x;y) &= \frac{1}{h}(1+a_1+a_0)\,y(x) + (2+a_1-b_0-b_1)\,y'(x) + \left(2+\frac{a_1}{2}-b_1\right) h\,y''(x) \\ &+ \left(\frac{4}{3}+\frac{a_1}{6}-\frac{b_1}{2}\right) h^2\,y'''(x) + \left(\frac{2}{3}+\frac{a_1}{24}-\frac{b_1}{6}\right) h^3\,y^{(iv)}(x) + \mathcal{O}(h^4)\end{aligned} \tag{2}$$

a) Para que el método sea consistente por lo menos de orden 2, requerimos

$$1+a_1+a_0=0\,, \qquad 2+a_1-b_0-b_1=0\,, \qquad 2+\frac{a_1}{2}-b_1=0\,,$$

cuya solución (en términos de a_1) es

$$a_0=-1-a_1\,, \qquad b_0=\frac{a_1}{2}\,, \qquad b_1=2+\frac{a_1}{2}\,. \tag{3}$$

b) $\boxed{\textbf{Estabilidad}}$: consideremos el polinomio $\psi(\mu):=\mu^2+a_1\,\mu+a_0$, el cual usando el hecho que $a_0=-1-a_1$ (ver (3)), se puede expresar como $\psi(\mu)=(\mu-1)(\mu+1+a_1)$. Luego, sus raíces son $\mu_1=1$ y $\mu_2=-1-a_1$. Luego, el método multipaso lineal $\boxed{\textbf{consistente}}$ será estable si satisface la condición de estabilidad. Para que esto ocurra, basta con encontrar para que valores de a_1:
i) $|1+a_1|\leq 1$, lo cual se verifica si $a_1\in[-2,0]$.
ii) $\psi'(1)\neq 0$. Esto es cierto para todo los $a_1\in[-2,0]$, a excepción de $a_1=-2$.
Lo anterior entonces nos permite concluir que el método será estable si $a_1\in(-2,0]$.
c) Para que el método sea de orden (de consitencia) 3, se debería tener que

$$1+a_1+a_0=0\,, \qquad 2+a_1-b_0-b_1=0\,, \qquad 2+\frac{a_1}{2}-b_1=0\,, \qquad \frac{4}{3}+\frac{a_1}{6}-\frac{b_1}{2}=0\,,$$

lo cual es cierto si

$$a_0=-5\,, \qquad b_0=2\,, \qquad b_1=4\,, \qquad a_1=4\,,$$

pero como $a_1=4\notin(-2,0]$, entonces no se puede escoger a_1 tal que el método sea estable de orden 3.

Problema 3. (1.0 ptos) Muestre que el método ABM presentado en clase es convergente.

Pauta

El método ABM se puede escribir como $y_{j+3}-y_{j+2}=h\,F(h,f)(x_j;y_{j+3},y_{j+2},y_{j+1},y_j)$, siendo

$$F(h,f)(x_j;y_{j+3},y_{j+2},y_{j+1},y_j) :=$$

$$\frac{1}{24}\Big\{9\,f\Big(x_{j+3},y_{j+2}+\frac{h}{12}[23\,f(x_{j+2},y_{j+2})-16\,f(x_{j+1},y_{j+1})+5\,f(x_j,y_j)]\Big) \tag{4}$$

$$+19\,f(x_{j+2},y_{j+2})-5\,f(x_{j+1},y_{j+1})+f(x_j,y_j)\Big\}\,.$$

Es claro ver que este esquema es un método multipaso no lineal, por lo que para demostrar su convergencia, hemos de verificar antes las siguientes hipótesis:
i) El método es consistente, lo cual fue demostrado en clase.
ii) $F(h,0)(x;y_3,y_2,y_1,y_0)=0$, lo cual es de inmediata verificación.
iii) A partir de cierto $h_0>0$, $F(h,f)(x_j;\cdot)$ verifica una condición tipo Lipschitz, para $h<h_0$. En efecto, considerando que $f(x,\cdot)$ es Lipschitz-continua (con constante L) y tomando $h<h_0\leq 1$, se obtiene

$$|F(h,f)(x;y_3,y_2,y_1,y_0)-F(h,f)(x;z_3,z_2,z_1,z_0)|\leq\ M\sum_{i=0}^{3}|y_i-z_i|\,,$$

para todo $x\in[a,b]$, $y_i,z_i\in\mathbf{R}$, $i=0,...,3$, siendo $M:=M(L,h_0)$.
Luego, por un resultado visto en clase, este método será convergente si y sólo si satisface la condición de estabilidad. En este caso, $\psi(\mu):=\mu^3-\mu^2=\mu^2(\mu-1)$ satisface dicha condición, por lo que queda garantizada la convergencia del método.

Problema 4. (1.5 ptos) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} u'=-\frac{101}{2}\,u+\frac{99}{2}\,v\,, & u(0)=3\,,\\ v'=\frac{99}{2}\,u-\frac{101}{2}\,v\,, & v(0)=1\,. \end{cases}$$

a) ¿Qué puede decir sobre la rigidez del sistema?
b) Describa el esquema que resulta al aplicar el método de Euler. ¿Cómo hay que escoger la longitud de paso en este método para que las aproximaciones numéricas se comporten cualitativamente como la solución exacta?

Pauta

El sistema puede escribirse como $X'=A\,X$, con $X(0)=X_0$, siendo

$$X=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}-\frac{101}{2} & \frac{99}{2}\\ \frac{99}{2} & -\frac{101}{2}\end{pmatrix},\qquad X_0=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

a) Determinando los valores propios de A, éstos son $\lambda_1=-1<0$ y $\lambda_2=-100<0$, con lo cual el índice de rigidez del sistema es $S:=\dfrac{\max\{|\mathrm{Re}(\lambda_1)|,|\mathrm{Re}(\lambda_2)|\}}{\min\{|\mathrm{Re}(\lambda_1)|,|\mathrm{Re}(\lambda_2)|\}}=100\gg 1$, lo cual indica que el sistema lineal es **rígido**.
b) Método de Euler:

$$X_{j+1}=X_j+h\,f(X_j,Y_j)\,,\qquad X_0=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},$$

el cual conduce al sistema

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_{j+1} \\ v_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -\frac{101}{2}u_j + \frac{99}{2}v_j \\ \frac{99}{2}u_j - \frac{101}{2}v_j \end{pmatrix}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \\ \\ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Intervalo de Estabilidad del método: $\zeta := h\,\lambda \in (-2, 0)$. Luego,
i) Si $\lambda_1 = -1$, entonces $h \in (0; 2)$
ii) Si $\lambda_2 = -100$, entonces $h \in (0; 0,02)$
De esta manera, el tamaño de paso no debe salir del intervalo $(0; 0,02)$ para que las aproximaciones se comporten como la solución real.

Problema 5. (1.0 ptos) Determine explícitamente la región de estabilidad absoluta del método del trapecio: $y_{j+1} = y_j + \dfrac{h}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})]$.
Pauta
Consideremos la ecuación de prueba

$$\begin{cases} y' = \lambda\, y\,, \qquad \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \\ \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación de diferencias obtenida por la aplicación del método del trapecio a este problema, para lo cual consideramos $y_j = \mu^j$, resulta

$$\mu^{j+1} = \mu^j + \frac{h}{2}(\lambda\,\mu^j + \lambda\,\mu^{j+1}) \Rightarrow \mu = \frac{1 + \frac{\zeta}{2}}{1 - \frac{\zeta}{2}} =: F(\zeta)\,,$$

siendo $\zeta := h\,\lambda$. En vista que $\mathrm{Re}(\zeta) < 0$, esto implica que $|\mu| < 1$, por lo que la región de estabilidad absoluta del método del trapecio es

$$B = \{\zeta \in \mathbf{C} | \qquad |F(\zeta)| < 1\} = \{\zeta \in \mathbf{C} | \qquad \mathrm{Re}(\zeta) < 0\} = \mathbf{C}^-\,,$$

es decir, el método del trapecio es absolutamente estable.

21.09.2004
RBP/rbp