UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA IV: Introducción a las Matemáticas Discretas (525412)

Tarea 2

(Fecha de entrega: 24 de septiembre de 2004 hasta las 12:00 PM.)

1. Sea $(G, *)$ un grupo con e elemento neutro.

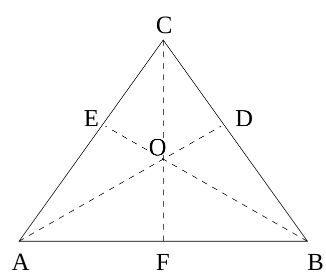
   i) Pruebe que si $\forall a \in G,\ a * a = e$, entonces $(G, *)$ es grupo Abeliano.

   ii) Pruebe que si $\forall g \in G,\ \exists n \in \mathbb{N},\ g^n = e$, entonces el único homeomorfismo $F : (G, \triangle) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ es la función constante $F(g) = 0,\ \forall g \in G$.

   iii) Pruebe que si $a * a = a$, entonces $a = -a,\ \forall a \in G$, donde $-a$ es el inverso de a.

   iv) Suponga que $(G, *)$ es grupo Abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G. Se define el conjunto, $H * K = \{h * k/\ h \in H,\ k \in K\}$. Pruebe que $H * K$ es un subgrupo de G.

2. Sea el triángulo equilátero ABC dado por la figura.



   i) Pruebe que el conjunto de las rotaciones en torno al centro O, en el sentido de los punteros del reloj, en 0, 120 y 240 grados; y las reflexiones en torno a los ejes: $AD,\ BE$ y CF del triángulo ABC forman un grupo $(G, *)$. Construya la tabla de Pitágoras del grupo.

   ii) Construya un isomorfismo entre $(G, *)$ y $(S_3, \circ)$, donde S_3 es el grupo de todas las permutaciones de tres elementos y la operación $\circ$ es la composición de funciones.

   iii) Demuestre que todo subgrupo de $(G, *)$ de orden dos y tres es un grupo cíclico Abeliano.

3. Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac, bd) \quad \text{y} \quad (a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

   con la suma y producto habituales en $\mathbb{R}$.

   i) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad. Es un cuerpo?.

   ii) Pruebe que $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ es cuerpo.
