Ecuaciones Diferenciales Ordinarias III

- **Problemas de valores de contorno (P.V.C.). El método de ”shooting”.**
- **El método de diferencias finitas.**
- **El método de elementos finitos.**

Problemas de valores de contorno (P.V.C.)

El método de “shooting”

Consideremos el **problema de valores de contorno (P.V.C.)**

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

Para resolver este problema, el primer método que veremos es el **método de “shooting”** (o del disparo): Dado $z \in \mathbb{R}$ consideremos el P.V.I. asociado

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = z. \end{cases}$$

y denotemos por y_z su solución.

La idea del método de “shooting” es encontrar $\bar{z}$ tal que $y_{\bar{z}}(b) = \beta$.

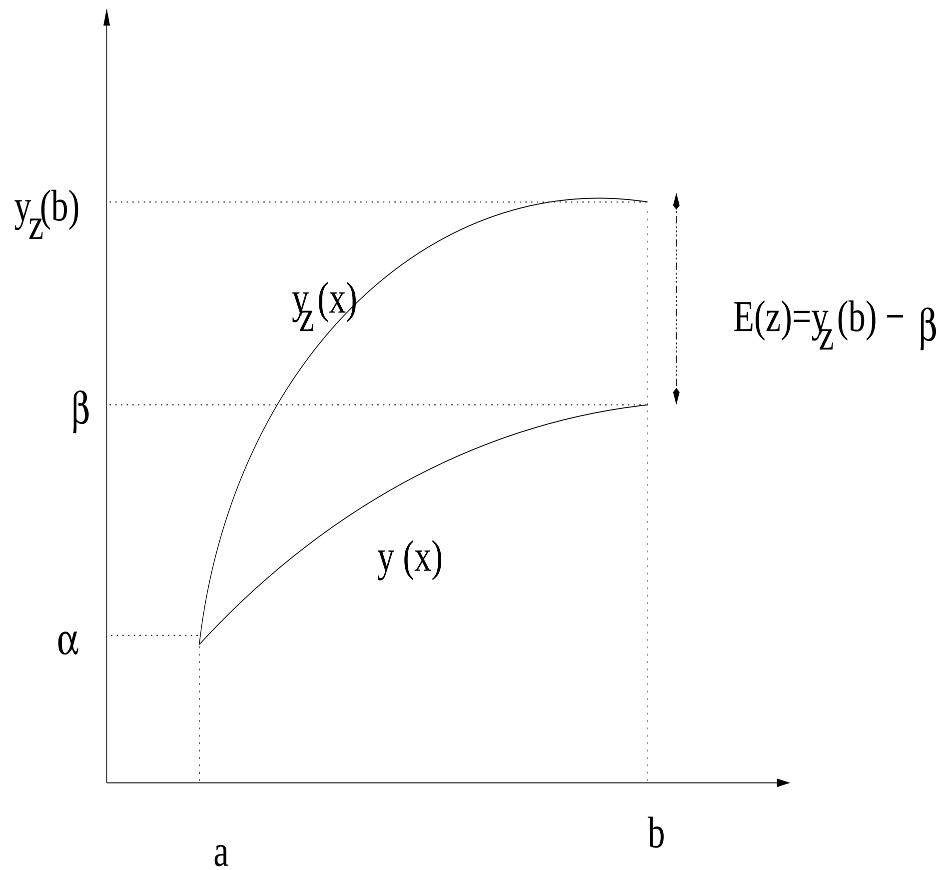
Para esto, si definimos la función

$$E(z) := y_z(b) - \beta, \quad z \in \mathbb{R},$$

vemos que

$$E(z) = 0 \iff y_z(b) = \beta.$$

Se trata entonces de encontrar $\bar{z}$ tal que $E(\bar{z}) = 0$. Es decir, encontrar una raíz para la ecuación (en general no lineal) $E(z) = 0$.



Ejemplo. Se lanza una piedra de masa 1 kg verticalmente hacia arriba. Sobre la piedra actúan la fuerza de gravedad y una fuerza de roce igual a 0.1 kg/s por la velocidad de la piedra. Determinar la altura de la piedra como función del tiempo, sabiendo que al cabo de 3 s la piedra está exactamente a 50 m del punto de partida.

Solución. Sea $h(t)$ la altura de la piedra en el instante $t \geq 0$. El P.V.C. a resolver es:

$$\begin{cases} \ddot{h} = -g - 0.1\dot{h}, \quad t \in (0,3), \\ h(0) = 0, \quad h(3) = 50, \end{cases}$$

donde $g = 9.8\,\text{m/s}^2$.

Para ello debemos averiguar cuál es la velocidad inicial z para que al cabo de 3 s la altura de la piedra sea exactamente de 50 m. Esto conduce al P.V.I. asociado:

$$\begin{cases} \ddot{h} = -g - 0.1\dot{h}, & t \in [0,3], \\ h(0) = 0, & \dot{h}(0) = z, \end{cases}$$

cuya solución analítica puede calcularse en función de z, a saber:

$$h_z(t) = -(10z + 100g)e^{-0.1t} + 10z + 100g - 10gt.$$

Al resolver la ecuación $h_z(3) = 50$, se obtiene $\bar{z} = 34.7$ y sustituyendo este valor en la expresión de $h_z(t)$ se tiene que la altura de la piedra como función del tiempo está dada por

$$h_{\bar{z}}(t) = -(347 + 100g)e^{-0.1t} + 347 + 100g - 10gt = 1327\left(1 - e^{-0.1t}\right) - 98t.$$

En general no se tiene una expresión analítica de la función $E(z)$, pero, dado $z \in \mathbb{R}$, puede usarse cualquiera de los métodos numéricos estudiados para calcular la solución y_z del P.V.I. asociado

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = z, \end{cases}$$

y con ella evaluar $E(z) = y_z(b) - \beta$.

Para resolver la ecuación $E(z) = 0$ puede utilizarse cualquiera de los siguientes métodos:

- El **método de bisección**, para lo cual deberíamos encontrar previamente dos valores z_0 y z_1 tales que $E(z_0) < 0 < E(z_1)$.

- El **método de Newton-Raphson**:

$$z_0\text{: aproximación inicial,}$$
$$z_{k+1} = z_k - \frac{E(z_k)}{E'(z_k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Usar el método de Newton-Raphson es más complejo, pues requiere evaluar

$$E'(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[y_z(b) - \beta\right] = \frac{\partial y_z}{\partial z}(b).$$

En general no se tiene una expresión analítica de la función y_z para calcular esa derivada, pero derivando implícitamente respecto de z en el P.V.I. asociado se obtiene que $u_z := \dfrac{\partial y_z}{\partial z}$ es la solución del siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} u'' = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')u + \dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')u', \quad x \in (a, b), \\ u(a) = 0, \quad u'(a) = 1. \end{cases}$$

Entonces, si se quiere aplicar el método de Newton, en cada paso debe resolverse numéricamente el sistema de E.D.O. de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in (a, b), \\ u'' = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')u + \dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')u', \quad x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = z, \quad u(a) = 0, \quad u'(a) = 1, \end{cases}$$

para así evaluar $E(z) = y_z(b)$ y $E'(z) = u_z(b)$, con (y_z, u_z) la solución calculada de este sistema.

- El **método de la secante**:

$z_0,\ z_1$: aproximaciones iniciales,

$$z_{k+1} = z_k - \frac{E(z_k)}{\dfrac{E(z_k) - E(z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

El método de "shooting" aplicando el método de la secante se puede resumir mediante el siguiente algoritmo:

1. Dar un par de estimaciones iniciales para $\bar{z}$, z_0 y z_1, y resolver los P.V.I. asociados con $z = z_0$ y $z = z_1$ para calcular $E(z_0)$ y $E(z_1)$.

2. Para $k = 1, 2, \ldots$

   (a) $z_{k+1} = z_k - \dfrac{E(z_k)}{\dfrac{E(z_k) - E(z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}}}$.

   (b) Resolver numéricamente el P.V.I. asociado con $z = z_{k+1}$:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = z_{k+1}. \end{cases}$$

   (c) Utilizar la solución numérica obtenida $y_{z_{k+1}}$ para calcular $E(z_{k+1}) = y_{z_{k+1}}(b) - \beta$.

   (d) Si $\left|E(z_{k+1})\right|$ es suficientemente pequeño, entonces terminar: la solución $y_{z_{k+1}}$ es la correcta. Si no, volver a (2).

Ejemplo. Consideremos un problema como el anterior pero en el que la fuerza de roce es no lineal, por ejemplo:

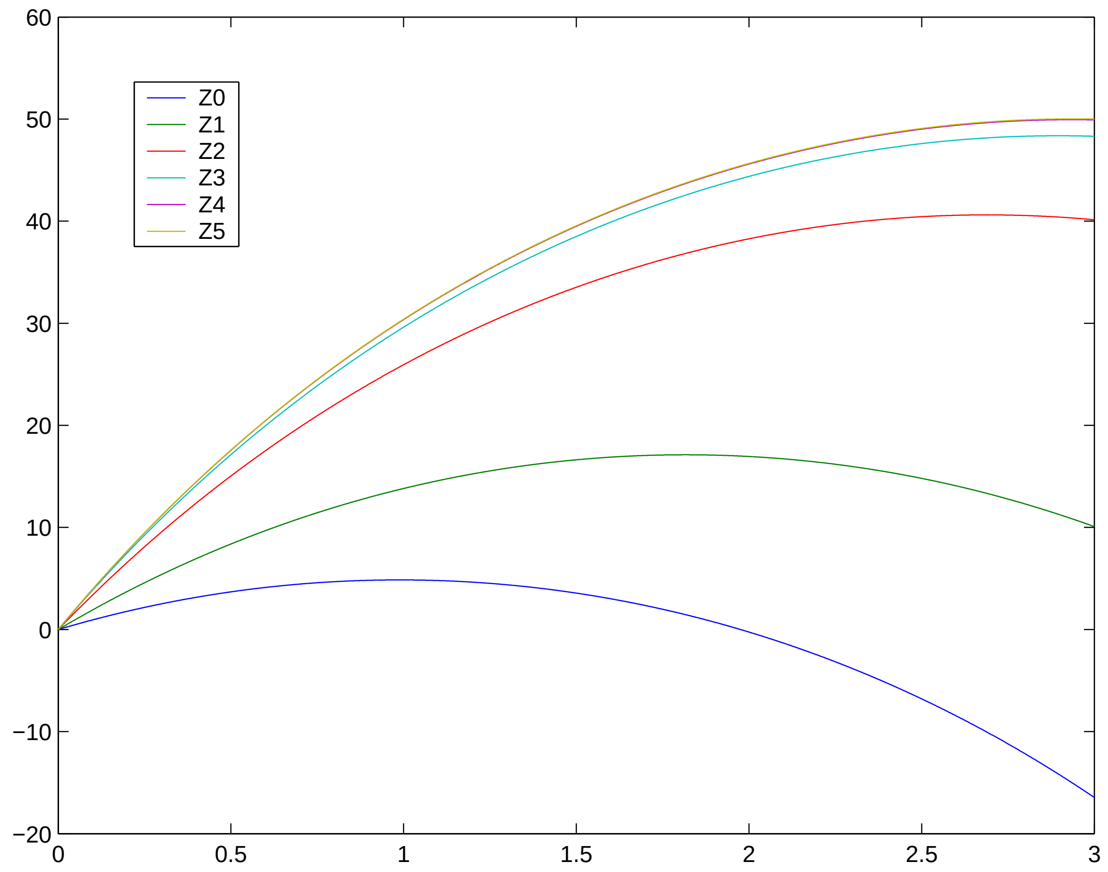
$$\begin{cases} \ddot{h} = -g - 0.01\dot{h}^2, \quad t \in [0,3], \\ h(0) = 0, \quad h(3) = 50. \end{cases}$$

Aplicamos el algoritmo anterior con $z_0 = 10$ y $z_1 = 20$.

Utilizamos el comando `ode45` para resolver el P.V.I.

Iteramos el procedimiento hasta que $|E(z_{k+1})| < 10^{-3}$.

k	z_k	$h_{z_k}(3)$
0	10.0000	-16.4545
1	20.0000	10.0826
2	35.0421	40.1375
3	39.9782	48.3124
4	40.9972	49.9199
5	41.0480	49.9993



Método de Diferencias Finitas

Supongamos que queremos resolver el P.V.C.

$$\begin{cases} -y'' + ry' + ky = f(x), \qquad x \in (a,b), \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \end{cases}$$

donde k y r son constantes positivas. Supondremos que el problema tiene una única solución, la cual es al menos cuatro veces diferenciable.

El método de diferencias finitas se basa en las siguientes aproximaciones para las derivadas de y:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h},$$

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2},$$

las cuales son válidas si h es suficientemente pequeño.

En efecto. Consideremos los siguientes desarrollos de Taylor:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + O(h^4),$$

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + \frac{h^2}{2!}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(x) + O(h^4).$$

Sumándolos se tiene

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2 y''(x) + O(h^4),$$

de donde

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

Por otra parte, restando los desarrollos de Taylor anteriores,

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + O(h^4),$$

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + \frac{h^2}{2!}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(x) + O(h^4),$$

se tiene

$$y(x+h) - y(x-h) = 2hy'(x) + O(h^3),$$

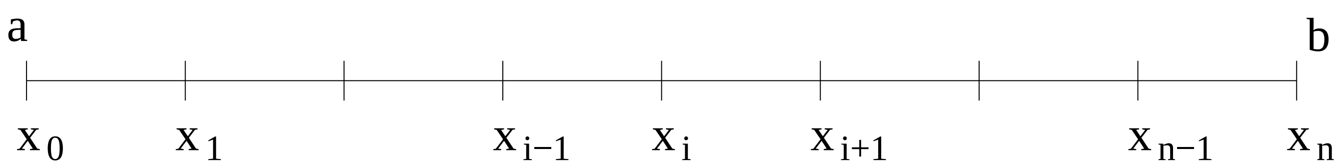
y de aquí

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2).$$

Observación: Las aproximaciones de las derivadas que se obtuvieron reciben el nombre de **diferencias centradas**.

Consideremos una partición uniforme del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud:

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, n.$$



Entonces, las aproximaciones de y' e y'' en los nodos interiores x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, pueden escribirse como sigue:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2),$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2).$$

Sustituyendo estas expresiones en el P.V.C.

$$\begin{cases} -y'' + ry' + ky = f(x), & x \in (a,b), \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, & \end{cases}$$

para cada uno de los nodos interiores x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, se tiene:

$$\begin{cases} -\dfrac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + r\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \\ \qquad\qquad\qquad + ky(x_i) = f(x_i) + \tau_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ y(x_0) = \alpha, \quad y(x_n) = \beta, \end{cases}$$

donde los términos $\tau_i = O(h^2)$ provienen de los errores $O(h^2)$ de la aproximación de las derivadas mediante las diferencias centradas.

Al despreciar los términos τ_i, que se denominan **errores de truncamiento**, el método de diferencias finitas permite aproximar los valores $y(x_i)$ mediante valores y_i que satisfacen

$$\begin{cases} -\dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+r\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+ky_i=f(x_i), \quad i=1,\dots,n-1, \\ y_0=\alpha, \quad y_n=\beta. \end{cases}$$

De esta forma, la resolución numérica del P.V.C. por diferencias finitas se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Multiplicando por h^2, las ecuaciones pueden reescribirse como sigue:

$$\begin{cases} \left(-1-\dfrac{rh}{2}\right)y_{i-1}+\left(2+kh^2\right)y_i+\left(-1+\dfrac{rh}{2}\right)y_{i+1}=h^2f(x_i), \\ \hfill i=1,\dots,n-1, \\ y_0=\alpha, \quad y_n=\beta. \end{cases}$$

Así, definiendo para $i = 1, \ldots, n-1$,

$$a_i := -1 - \frac{rh}{2}, \quad b_i := 2 + kh^2, \quad c_i := -1 + \frac{rh}{2}, \quad f_i = f(x_i),$$

llegamos a la forma matricial del sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n-1}\beta \end{pmatrix}.$$

Observación: Es fácil de verificar que si h es suficientemente pequeño $(h < 2/r)$, entonces la matriz del sistema es de diagonal dominante. Por lo tanto, puede utilizarse el algoritmo de Thomas para resolver el sistema.

Llamemos $\boldsymbol{A}$ a la matriz tridiagonal del sistema anterior, $\boldsymbol{y} := (y_1, \dots, y_{n-1})^{\mathrm{t}}$ al vector de incógnitas y $\boldsymbol{z}$ al segundo miembro. Es decir,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}.$$

Sea $\boldsymbol{y}_{\mathrm{ex}} := (y(x_1), \dots, y(x_{n-1}))^{\mathrm{t}}$ el vector de valores de la solución exacta.

Si no se desprecian los errores de truncamiento se tiene

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_{\mathrm{ex}} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{\tau}, \qquad \text{donde } \|\boldsymbol{\tau}\| = \left\|(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})^{\mathrm{t}}\right\| = O(h^2).$$

Entonces el vector de errores $\boldsymbol{y}_{\mathrm{ex}} - \boldsymbol{y}$ satisface

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{ex}} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_{\mathrm{ex}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\tau} \quad \text{y, por lo tanto,} \quad \boldsymbol{y}_{\mathrm{ex}} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\tau}.$$

Se demuestra que $\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\| \leq C$, con C una constante independiente de h. Por lo tanto, se tiene que

$$\|\boldsymbol{y}_{\mathrm{ex}} - \boldsymbol{y}\| \leq \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\| \|\boldsymbol{\tau}\| = O(h^2).$$

Métodos de Elementos Finitos

Supongamos que queremos resolver el P.V.C.

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \text{en } (a,b), \\ u(a) = 0, & u(b) = 0. \end{cases}$$

Para poder aplicar el método de elementos finitos (M.E.F.) primero debemos obtener la **formulación débil** del problema. Para ello, multiplicamos la E.D.O. por una función v tal que $v(a) = v(b) = 0$, e integramos sobre el intervalo (a,b):

$$-\int_a^b u''(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v(x)\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx.$$

Integrando por partes el primer término vemos que

$$-\int_a^b u''(x)v(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx \;-\; u'(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx,$$

con lo que sustituyendo en la expresión anterior se tiene que la solución u del P.V.C. satisface

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,dx + \int_a^b u(x)v(x)\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx.$$

Esto conduce a la **formulación débil** del P.V.C.:

Hallar $u:\ (a,b)\to\mathbb{R}$ *tal que* $u(a)=u(b)=0$ *y que satisfaga*

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,dx + \int_a^b u(x)v(x)\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx$$

para toda $v:\ (a,b)\to\mathbb{R}$ *tal que* $v(a)=v(b)=0$*.*

El objetivo del método de elementos finitos (M.E.F.) es buscar una aproximación de la función u en un espacio de dimensión finita V_h (llamado **espacio discreto**) que satisfaga la formulación débil con todas las funciones v_h del mismo espacio V_h:

Hallar $u_h \in V_h$ *tal que*

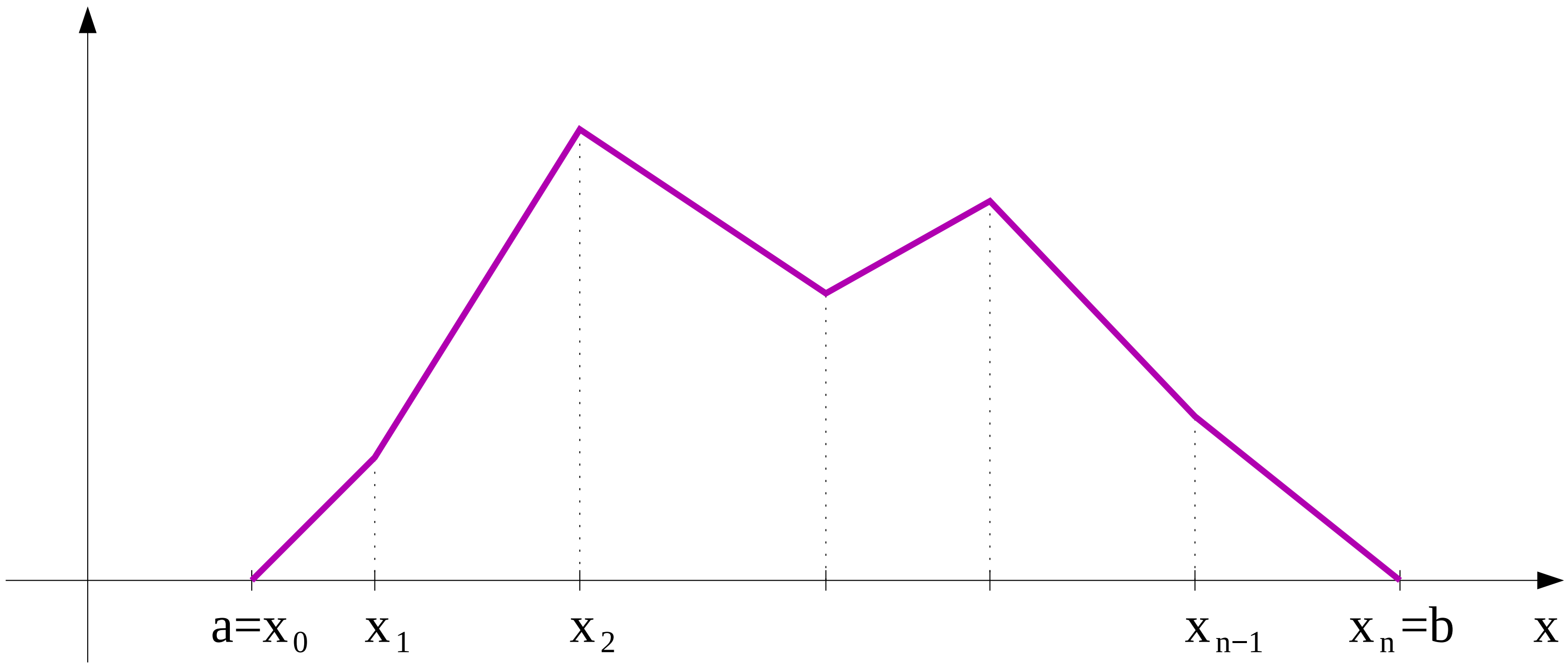
$$\int_a^b u_h'(x) v_h'(x)\, dx + \int_a^b u_h(x) v_h(x)\, dx = \int_a^b f(x) v_h(x)\, dx \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Ésta se denomina la **formulación débil discreta** del P.V.C.

El ejemplo más sencillo de espacio discreto V_h (y el más usado) es el de las funciones continuas y lineales a trozos en una partición arbitraria del intervalo $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, que se anulan en los extremos a y b:

$$V_h := \left\{ v_h \in \mathcal{C}(a,b) : v_h|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_1,\ i = 1,\ldots,n,\ \text{y}\ v_h(a) = v_h(b) = 0 \right\}.$$

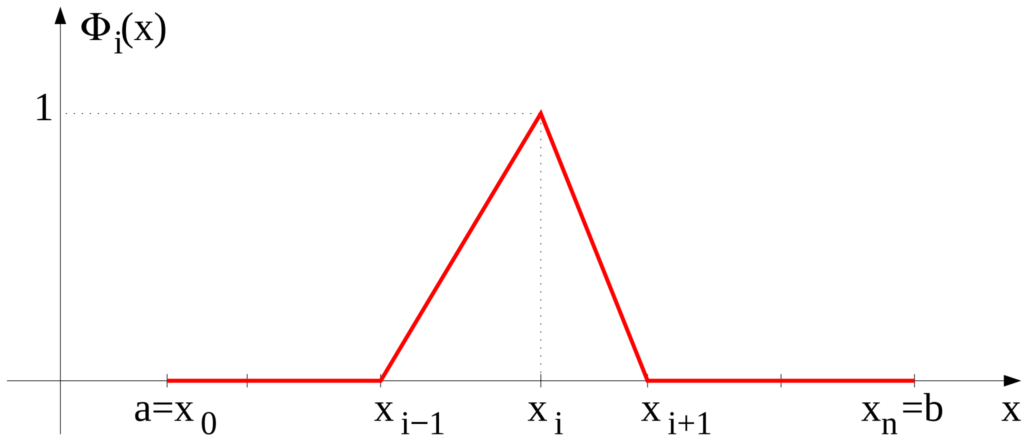
$h = \max\limits_{1\le i\le n} (x_i - x_{i-1})$ denota la norma de la partición.



La dimensión de V_h es $n-1$.

En efecto, la base natural de este espacio está formada por las llamadas funciones techo, $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$, que satisfacen

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$



Estas funciones están definidas por

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Con respecto a esta base, la solución discreta $u_h \in V_h$ puede representarse como

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j(x), \quad \text{con } \alpha_j = u_h(x_j).$$

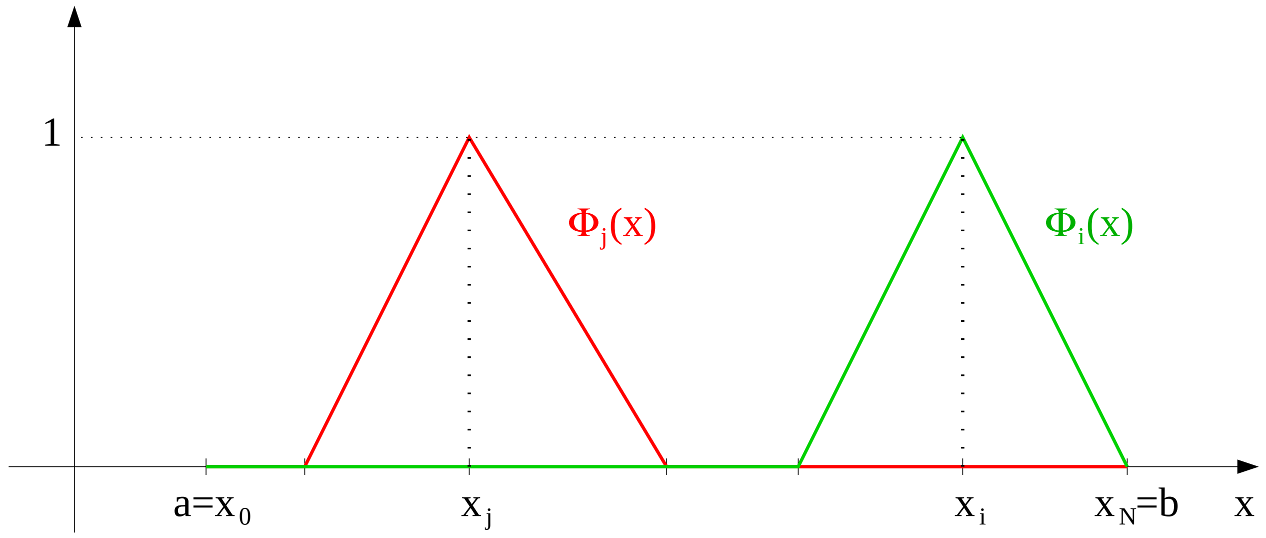
Usando esta expresión de u_h en la formulación débil discreta

$$\int_a^b u_h'(x) v_h'(x)\, dx + \int_a^b u_h(x) v_h(x)\, dx = \int_a^b f(x) v_h(x)\, dx \qquad \forall v_h \in V_h$$

y tomando $v_h = \phi_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, por la linealidad del problema se llega a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_a^b \phi_j'(x) \phi_i'(x)\, dx + \int_a^b \phi_j(x) \phi_i(x)\, dx \right) \alpha_i$$
$$= \int_a^b f(x) \phi_i(x)\, dx, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Éste es un sistema de $(n-1)$ ecuaciones con $(n-1)$ incógnitas $\alpha_i = u_h(x_i)$.



Como se ve en la figura, si $j \notin \{i-1, i, i+1\}$, entonces

$$\int_a^b \phi_j'(x)\phi_i'(x)\,dx = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_a^b \phi_j(x)\phi_i(x)\,dx = 0.$$

Así, vemos que la formulación débil discreta se reduce a resolver un sistema de ecuaciones con matriz tridiagonal y simétrica, que además se demuestra es definida positiva (en ese caso también puede usarse el algoritmo de Thomas para resolver el sistema):

$$
\begin{pmatrix}
a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\
b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\
0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1}
\end{pmatrix},
$$

donde

$$
a_i = \int_a^b \left[\phi_i'(x)\right]^2 \, dx + \int_a^b \left[\phi_i(x)\right]^2 \, dx, \quad i = 1, \ldots, n-1,
$$

$$
b_i = \int_a^b \phi_{i-1}'(x)\phi_i'(x) \, dx + \int_a^b \phi_{i-1}(x)\phi_i(x) \, dx, \quad i = 2, \ldots, n-1,
$$

$$
f_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x) \, dx, \quad i = 1, \ldots, n-1.
$$

Para estimar el error, consideramos la siguiente norma:

$$\|v\| := \left\{ \int_a^b |v(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2} .$$

Teorema: *Sea u la solución del P.V.C. y u_h la solución calculada por el método de elementos finitos y supongamos que u tiene derivada segunda acotada en $[a, b]$. Entonces se tiene la siguiente estimación del error:*

$$\|u - u_h\| \leq Ch^2 \max_{0 \leq x \leq 1} |u''(x)|,$$

$$\|u' - u_h'\| \leq Ch \max_{0 \leq x \leq 1} |u''(x)|,$$

donde C es una constante positiva independiente de h.

Observaciones:

- Si se aplica el método de elementos finitos en una particion uniforme y se calculan las integrales que definen los coeficientes a_i, b_i y f_i por el método de los trapecios, se llega exactamente al mismo sistema de ecuaciones lineales que con el método de diferencias finitas.

- Ambos métodos, diferencias finitas y elementos finitos, se extienden a Ecuaciones en Derivadas Parciales (E.D.P.), que es donde se manifiesta la mayor eficacia del método de elementos finitos.

- El método de "shooting", en cambio, es muy eficiente para resolver P.V.C. para E.D.O., pero no se extiende a E.D.P.

- Para mayor información acerca del método de elementos finitos, y de su aplicación a la resolución de E.D.P., se sugiere el siguiente texto:

E.B. BECKER, G.F. CAREY, J.T. ODEN. *Finite Elements. An Introduction.* Prentice Hall, 1981.