UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142.

SOLUCION CERTAMEN 3.

Problema 1. Aplique operaciones elementales de filas para calcular la inversa de la matriz (10 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

y el valor de su determinante.

Solución. Utilizando operaciones elementales por filas se tiene:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{7} \quad \mathbf{ptos}.)$$

El valor de su determinante, utilizando: la definición, matrices equivalentes por filas o el hecho que A es una matriz triangular, es

$$det(A) = 2 \cdot 24 - 0 + 0 = 48. \qquad (\mathbf{3} \quad \mathbf{ptos}.)$$

Problema 2. Sea V el espacio vectorial real $P_1(\mathbb{R})$, con las operaciones usuales de polinomios. Demuestre que el conjunto (15 puntos)

$$U = \{p \in P_1(\mathbb{R}) : \int_0^1 p(x)dx \geq 0\}$$

no es un subespacio de V.

Solución. Sea $p(x) = 2$ en U y $k = -1 \in \mathbb{R}$, entonces $\int_0^1 2dx = 2 \geq 0$ y $\int_0^1 (-1) \cdot 2dx = -\int_0^1 2dx = 2 < 0$. Luego, $k \cdot p \notin U$.

En consecuencia, el conjunto U no es un subespacio de V pues no cumple con la propiedad $iii)$ de subespacio. **(15 puntos)**

Problema 3. En el espacio vectorial real $V = M_2(\mathbb{R})$, con las operaciones usuales de matrices, considere el conjunto (25 puntos)

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b = c \right\}$$

y el subespacio

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + d = 0 \right\}$$

3.1. Demuestre que U_1 es un subespacio vectorial de V.

Solución. Para U_1 se tiene

$i)$. La matriz nula está en U_1. Luego, U_1 no es vacío. **(3 ptos.)**
$ii)$. Sean $A, B \in U_1$. Esto es

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \text{con} \quad b = c, f = g.$$

Luego, $b + f = c + g$ y así

$$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \in U_1$$

(6 ptos.)

$iii)$. Sean $A \in U_1, k \in \mathbb{R}$, entonces $b = c$. Luego, $kb = kc$ y así

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \in U_1.$$

Finalmente, de $i), ii)$ y $iii)$. se tiene que U_1 es un subespacio de V. **(6 ptos.)**

3.2. Encuentre el conjunto $U_1 \cap U_2$ y diga, fundamentando su respuesta, si él es o no un subespacio vectorial de V.

Solución.

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b = c, a + d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ahora, $U_1 \cap U_2$ es un subespacio de V pues toda intersección de subespacios es un subespacio.

(10 ptos.)

Problema 4. Para $a, b, k \in \mathbb{R}$, considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & kz & = & a \\ x & + & ky & + & z & = & b \\ kx & + & y & + & z & = & a \end{array}\right|$$

Encuentre los valores de k, a y b para los cuales: (20 puntos)

4.1. el sistema tiene solución única.

4.2. el sistema no tiene solución (es incompatible).

Solución.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & a \\ 1 & k & 1 & b \\ k & 1 & 1 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & a \\ 0 & k-1 & 1-k & b-a \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & a-ka \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & a \\ 0 & k-1 & 1-k & b-a \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & b-ka \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & a \\ 0 & k-1 & 1-k & b-a \\ 0 & 0 & -(k-1)(k+2) & b-ka \end{array}\right)$$

(8 ptos.)

4.1. El sistema tiene solución única ssi $r(A) = r(A|B) = n = 3$. De acuerdo con las matrices equivalentes por filas se tiene que esto es equivalente con:

$$-(k-1)(k+2) \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow k \neq 1, k \neq -2, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, el sistema tiene solución única ssi $k \neq 1, k \neq -2$ y a y b son números reales arbitrarios. **(6 ptos.)**

4.2. El sistema no tiene solución ssi $r(A) \neq r(A|B)$. De acuerdo con las matrices equivalentes por filas se tiene que esto es equivalente con: $(k-1)(k+2) = 0$ y $b - ka \neq 0$. En consecuencia, el sistema no tiene solución ssi

$$(k - 1 = 0 \wedge b - a \neq 0) \vee (k + 2 = 0 \wedge b - ka \neq 0).$$

Es decir, ssi

$$(k = 1 \wedge a \neq b) \quad \vee \quad (k = -2 \wedge b \neq -2a). \qquad \textbf{(6 ptos.)}$$

Problema 5. Considere el plano $\Pi_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$ y un punto $P_0(1, y_0, -2)$. (30 puntos)

5.1. Determine $y_0 > 0$ tal que $d(P_0, \Pi_1) = 5\sqrt{2}$. Enseguida, encuentre la ecuación de la recta L_1 perpendicular a Π_1 y que pasa por P_0.

Solución. Para el plano Π_1 su vector normal es $\vec{n} = [0, 1, 1]$ y $P_1 = (0, 1, -1) \in \Pi_1$. Luego,

$$d(P_0, \Pi_1) = \frac{|[0,1,1] \cdot [1, y_0 - 1, -1]|}{||[0,1,1]||} = 5\sqrt{2} \Longleftrightarrow |y_0 - 2| = 10.$$

De donde, dado que $y_0 > 0$, se obtiene que $y_0 = 12$. **(10 ptos.)**

Ahora, el vector $\vec{n} = [0, 1, 1]$ es un vector director para la recta L_1 y $P_0(1, 12, -2) \in L_1$. Luego, la ecuación de la recta es

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(8 ptos.)

5.2. Encuentre la ecuación del plano Π_2 que contiene al punto $B(2,1,0)$ y a la recta

$$L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solución. Para $t = 0, P(1,-1,1) \in L_2$ y para $t = 1, Q(2,0,0) \in L_2$. Además $B(2,1,0) \notin L_2$. Luego, los vectores $\overrightarrow{QP} = [-1,-1,1]$ y $\overrightarrow{QB} = [0,1,0]$ generan el plano. **(6 ptos.)**

Haciendo $[-1,-1,1] \times [0,1,0] = [-1,0,-1] = \vec{n}$, que es un vector director para el plano Π_2 y considerando el punto $B(2,1,0)$ en el plano, se obtiene la ecuación del plano buscado

$$-1(x-2) + (-1)(z-0) = 0.$$

Así

$$\Pi_2 : \quad x + z = 2.$$ (**6ptos**.)

Octubre de 2002.
ACQ/JMS/JSA/acq.