UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 9 (Números Complejos)

1. Pruebe que para todo $z \in \mathbb{C}$: **(En práctica a) y f))**

   a) $z \neq 0 \Longrightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$,

   b) $Re(z) \leq |z|, \quad Im(z) \leq |z|$,

   c) $z \neq 0 \Longrightarrow z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$,

   d) $Im(iz) = Re(z)$,

   e) $\overline{z^2} = (\overline{z})^2$,

   f) $(z - \overline{z})^2$ es un complejo real menor o igual que 0.

2. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$: **(En práctica c))**

   a) $i^{4n} = 1$, b) $i^{4n+1} = i$, c) $i^{4n+2} = -1$, d) $i^{4n+3} = -i$.

3. Lleve los siguientes números complejos a su forma binomial: **(En práctica d))**

   a) $\dfrac{1}{2+3i}$,

   b) $-4(1 + \dfrac{i}{12}) + 4(1 - \dfrac{1}{12i})$,

   c) $i + \dfrac{1}{i^{11}}$,

   d) $\dfrac{1+2i}{(1-2i)(-1-i)}$.

4. Demuestre la generalización de la desigualdad triangular para un número finito de términos. Esto es:
   $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Pruebe que $|z_1 + z_2| \geq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$ y deduzca que **(En práctica a))**

   a) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

   b) $|z_1 - z_2| \geq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$.

   Indicación: Use $|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$.

6. Pruebe que $|Im(1 - \overline{z} + z^2)| < 3$, para $|z| < 1$. **(En práctica)**

7. Encuentre los valores de $z = x + yi$ tal que: **(En práctica a) y e))**

   a) $z^2 = i$,

   b) $|z - 4| = z$,

   c) $iz = x + 1 + 2yi$,

   d) $\left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = 0$,

   e) $|z| = 1 - 2x + yi$,

   f) $|z| - z = 1 + 2i$.

8. Describir el conjunto de puntos z que satisfacen la condición dada. **(E.P. d) y f))**

   a) $|z| \leq 2$

   b) $|z - 5i| = 0$;

   c) $|z + 1 - 2i| > 3$.

   d) $Im(z - 4 + 2i) \leq 3$;

   e) $Re\left(\dfrac{1}{z}\right) \leq \dfrac{1}{2}$

   f) $Re((1+i)z) < 0$.

9. Calcule:

   a) $(1+i)^{40}$, b) $(1-i)^{21}$, c) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{16}$.

10. Escriba las siguientes expresiones en la forma binomial y en la forma polar. **(d) y f))**

    a) $(-2+2i)^5$, c) $(1+i)^{\frac{-1}{4}}$, e) $\left[2cis\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]^{-4}$,

    b) $\left[3cis\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]^4$, d) $\frac{(1-i)^{13}}{1+i^{13}}$, f) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

11. Utilice la fórmula de De Moivre para demostrar que: **(En práctica)**

    a) $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$, b) $\operatorname{sen}(3\alpha) = -4\operatorname{sen}^3(\alpha) + 3\operatorname{sen}(\alpha)$.

12. Para $a, b \in \mathbb{R}$, considere el producto $(1+ai)(1+bi)$ y el argumento de cada uno de los factores para: **(En práctica b))**

    a) Verificar que: $\operatorname{arc\,tg}(a) + \operatorname{arc\,tg}(b) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

    b) Demostrar que: $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\right)$.

    c) Encontrar una fórmula para: $\operatorname{arc\,tg}(a) + \operatorname{arc\,tg}(b) + \operatorname{arc\,tg}(c)$.

13. Resuelva las siguientes ecuaciones: **(En práctica d) y f))**

    a) $z^2 + i = \sqrt{3}$, c) $z^4 - i = 1$, e) $z^{\frac{2}{3}} - i = 0$,

    b) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$, d) $5z^2 + 2z + 10 = 0$, f) $z^8 - \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = 0$.

14. Determine todos los valores posibles de las siguientes expresiones: **(En práctica b))**

    a) $\sqrt[4]{1+i}$, b) $\sqrt{4\sqrt{3}-4i}$, c) $\sqrt[3]{8}$, d) $\sqrt[5]{-i}$.

15. Pruebe que: $\forall n \in \mathbb{N}: \quad (1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

16. Pruebe que: $\forall z \neq 0 \in \mathbb{C}, \forall p \in \mathbb{Q}: \quad |z^p| = |z|^p$. Use este resultado para calcular:

    a) $|(1-i)^{10}|$, b) $|\sqrt[10]{8i-8}|$. **(En práctica b))**

17. Pruebe que si $t \in \mathbb{R}$:

    a) $|e^{it}| = 1$; c) $\overline{e^{it}} = e^{-it}$;

    b) $(e^{it})^n = e^{nti}$; d) $\frac{1}{\cos(t) + i\operatorname{sen}(t)} = \cos(t) - i\operatorname{sen}(t)$.

RRS/RNG/JMS/AGS/LNB/JSA/BBM/LRS/ags
semestre otoño 2006.