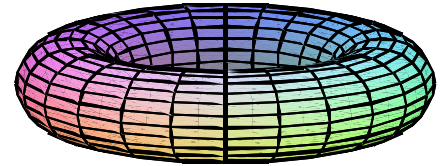


EVALUACIÓN 2. CÁLCULO III. 525211.



1. La superficie del Toro de la Figura está definida paramétricamente como

$$\begin{cases} x = \cos \theta (R + r \cos \varphi) \\ y = \sin \theta (R + r \cos \varphi) \\ z = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{con } \theta, \varphi \in [0, 2\pi]. \\ R > r > 0 \text{ (constantes)} \end{array}$$

- Pruebe que existe una vecindad de $(x, y, z) = (R, 0, r)$ en la superficie del Toro, en la que se puede despejar z en términos de x e y : $z = f(x, y)$.
 - Calcule $\nabla f(x, y)$ en términos de θ y φ .
 - ¿ Existe una vecindad de $(R, 0, r)$ en la que se pueda despejar x en términos de y y z ? justifique su respuesta.
2. Mediante el cambio de variable de coordenadas toroidales a cilíndricas :

$$\begin{aligned} \Phi : [0, r) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) &\longrightarrow \text{Interior del Toro en coord. Cilíndricas} \\ (\xi, \theta, \varphi) &\longmapsto (\rho, \theta, z) = (R + \xi \cos \varphi, \theta, \xi \sin \varphi) \end{aligned}$$

Calcule el Volumen del Toro de la Figura usando las coordenadas toroidales.

3. **Multiplicadores de Lagrange y Geometría Óptica.** Se envía un haz de luz desde un faro en $A \in \mathbb{R}^3$ hacia un punto $X \in \mathbb{R}^3$ sobre la superficie del mar. Desde X , el rayo de luz se refleja hacia un punto B sobre la superficie del agua, y se refracta hacia un punto C , dentro del agua. La luz se mueve en línea recta en cada medio (aire, agua), de modo que el tiempo de refracción :

$$t(X) = \frac{1}{v_1} \|A\vec{X}\| + \frac{1}{v_2} \|X\vec{C}\|,$$

sea mínimo respecto de X , con v_1, v_2 , las velocidades de la luz, en el aire, y en el agua respectivamente. Suponga que la superficie del agua está parametrizada por $F(X) = 0$, donde $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase \mathcal{C}^1 .

- Pruebe que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que,
$$\frac{1}{v_1} \frac{A\vec{X}}{\|A\vec{X}\|} - \frac{1}{v_2} \frac{X\vec{C}}{\|X\vec{C}\|} = \lambda \nabla F(X).$$

Suponga que el tiempo de reflexión se comporta igual, reemplazando C por B , y v_2 por v_1 .

- Deduzca la primera ley que dice que : *Los rayos de reflexión, de refracción, y de incidencia, y la normal a la superficie del mar en el punto X , se encuentran en un mismo plano.*
- Proyectando sobre la superficie del agua, deduzca la segunda ley que dice que : *los ángulos de incidencia y de reflexión con respecto de la normal a la superficie del agua son iguales, mientras que los ángulos de incidencia θ_i y de refracción bajo el agua θ_r , verifican la relación conocida como ley de Snell : $\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{v_2}{v_1}$.*

Duración : 120 minutos.

MSC/msc

(28-Mayo-2004)