UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

**ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142**
PRACTICA 15. Sistemas de Ecuaciones

**Problema 1.** Decida si los sistemas que siguen son imcompatibles o compatibles. En el último caso, decida si son determinados o indeterminados; encuentre la solución

a) $\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 8 \\ 3x & - & y & = & 4 \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ x & + & 3y & = & 8 \\ 2x & + & 2y & = & 10 \end{array}\right|$ c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \end{array}\right|$

**Problema 2.** Para qué valores de $\alpha$ y $\beta$, el sistema que sigue es compatible. Encuentre la solución.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & + & u & = & 1 \\ & + & y & - & 2z & + & 2t & - & 3u & = & 2\alpha \\ & & & & +z & - & 2t & + & u & = & -2\beta \end{array}\right|$$

**Problema 3.** Encuentre condiciones sobre el dato $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ y también sobre el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que el sistema que sigue sea compatible determinado e indeterminado.

$$\left.\begin{array}{rcl} (1-\lambda)x + y + z & = & a \\ x + (1-\lambda)y + z & = & b \\ x + y + (1-\lambda)z & = & c \end{array}\right|$$

**Problema 4.** Si $(x, y, z)$ es una solución del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x2 + a_{33}x_3 & = & b_3, \end{array}\right|$$

decida si para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ no nulos, el sistema que sigue es compatible. En caso afirmativo, exhiba una solución.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ \gamma(a_{21} - \alpha a_{11})x_1 & + & \gamma(a_{22} - \alpha a_{12})x_2 & + & \gamma(a_{23} - \alpha a_{13})x_3 & = & \gamma(b_2 - \alpha b_1) \\ \beta a_{31}x_1 & + & \beta a_{32}x_2 & + & \beta a_{33}x_3 & = & \beta b_3 \end{array}\right|$$

**Problema 5.** Encuentre condiciones sobre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, de modo que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (ux + by, cx + dy)$, sea biyectiva.

**Problema 6.** Qué condiciones debe imponer sobre los reales $a, b, c$ de modo que el sistema tenga solución. Escriba el conjunto solución en términos de $a, b, c$ y los parámetros que sean necesarios.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr}
-2x & - & y & - & z & + & 3t & = & b \\
x & - & y & + & 3z & - & 2t & = & a \\
2x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & c \\
 & & & & 2z & + & 10t & = & 0
\end{array}\right|$$

**Solución** Sistema compatible para $b + c = 0$.

$$S = \{(\frac{a-b-25t}{6}, \frac{-(a+2b+t)}{3}, -5t, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

**Problema 7.** Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ el sistema posee solución no trivial.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr}
\alpha x & + & & & z & + & 4t & = & 0 \\
2x & + & y & - & z & + & 3t & = & 0 \\
 & & y & + & z & & & = & 0
\end{array}\right|$$

**Problema 8. Aplicación a un problema de productividad.** En una pequeña ciudad hay un productor de alimentos para animales (producto A), un agricultor que cría vacunos (producto B), un productor de cuero (producto C), y una fabrica de zapatos (producto D). Las demandas internas y externas de cada uno de los productos vienen dadas en la siguiente tabla (por ejemplo, la fabrica de zapatos necesita 0.3 pesos de cuero para producir 1 peso de zapato) :

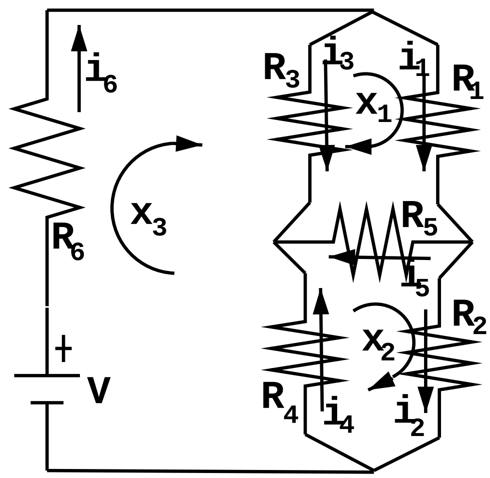
| INSUMOS \ PRODUCTOS | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0.80 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0.60 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0.30 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 |

Cada productor debe satisfacer dos tipos de demanda : la demanda de los restantes productores y la propia, y la demadnda del resto del mercado. Esta última demanda en millones de pesos mensuales es la siguiente :

| PRODUCTO | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| DEMANDA EXTERNA | 1.00 | 3.00 | 1.50 | 2.50 |

Se desea determinar la cantidad que debe producir mensualmente cada productor con el objeto de satisfacer la demanda total de su producto. Escriba esto como un sistema de ecuaciones y resuélvalo (**Sol. :** $A = 4.48$, $B = 4.35$, $C = 2.25$, $D = 2.50$ en millones de pesos).

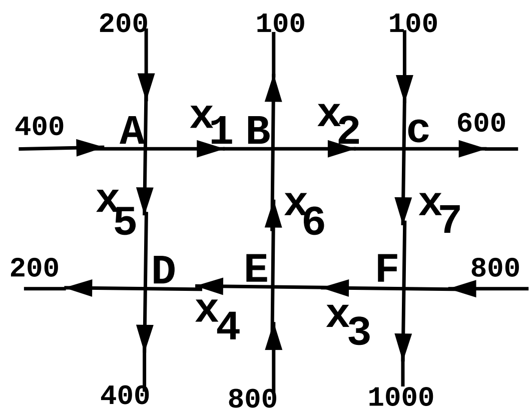
**Problema 9. Aplicación a un problema de circuito eléctrico.** Considere la siguiente red de resistencias (llamada puente de Weathstone, ver Figura 1), donde $x_i$ es la corriente que circula en la red a través del circuito $i$, $\forall i \in \{1,2,3\}$, y $R_1, R_2, \cdots, R_6, V$ son las resistencias (en ohms) y el voltaje (en volts), respectivamente. Aplicando la ley de OHM y la ley del voltaje de KIRCHHOFF, se obtiene el siguiente sistema lineal de 3 ecuaciones con incógnitas $x_1, x_2$ y $x_3$:




$$\begin{array}{rcl} (R_1+R_3+R_5)\ x_1 - R_5\ x_2 - R_3\ x_3 & = & 0, \\ -R_5\ x_1 + (R_2+R_4+R_5)\ x_2 - R_4\ x_3 & = & 0, \\ -R_3\ x_1 - R_4\ x_2 + (R_3+R_4+R_6)\ x_3 & = & V. \end{array}$$

Resuelva este sistema de ecuaciones para $R_1 = R_4 = 2$, $\quad R_2 = 4$, $\quad R_3 = 1$, $\quad R_5 = R_6 = 10$, $\quad$ y $V = 15$ (**Solución :** $x_3 = \frac{5}{4}$, $\quad x_2 = \frac{5}{12}$ $\quad$ y $\quad x_1 = \frac{5}{12}$).

**Problema 10. Aplicación a un problema de trafico vehicular.** Dadas las calles de la Figura 2, cada una de las cuales es de una sola dirección (la indicada por la flecha) se indica el número de automóviles que entran y salen por las distintas vías de acceso en el transcurso de mayor tráfico. Se desea reparar el tramo **CF** sin causar congestiones de tránsito. Con tal objeto conviene determinar el menor número de vehículos que pueden circular por **CF** (en la hora de mayor tráfico) sin causar congestiones en alguna parte de la red.




Sean $x_1$,$x_2$, $x_3$,$x_4$, $x_5$,$x_6$, $x_7$ el número de vehiculos que circulará por cada uno de los tramos indicados en la figura. Para evitar congestiones en el tránsito se debe verificar que el número de automóviles que llega a una intersección sea igual al número de automóviles que la deja.

a) Escriba este problema como un sistema de ecuaciones.
b) Verifique que este sistema es compatible, indeterminado, y que las soluciones pueden escribirse en términos de $x_6$ y $x_7$.
c) Interesa elegir la solución donde $x_7$ sea el menor valor posible (de modo de reparar el tramo **CF**), tomando en consideración el hecho que el número de vehiculos por tramo $x_i$ debe tener siempre, un valo $\geq 0$. Encuentre $x_7$ y diga que medida en concreto se debe adoptar para lograr ese valor mínimo.

**Solución :** a)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_5 & & & = & 600 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_6 & = & 100 \\ x_2 & - & x_7 & & & = & 500 \\ x_7 & - & x_3 & & & = & 200 \\ x_3 & - & x_4 & - & x_6 & = & -800 \\ x_4 & + & x_5 & & & = & 600 \end{array}$$

c) si $x_3 = 0$ entonces $x_7 = 200$ ; para que ello ocurra, la medida en concreto es cerrar el tramo **EF** !

**Problema 11. Aplicación a reacciones químicas.** Considere la reacción química:

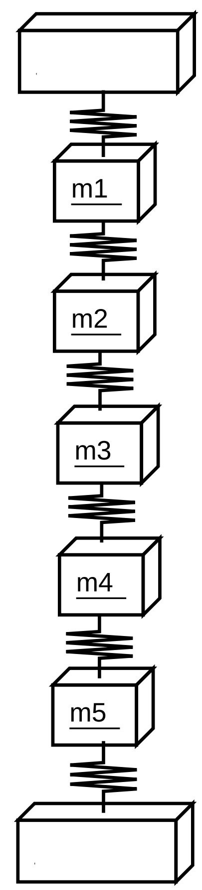
$$x_1\ Cu_2S + x_2\ H^+ + x_3\ NO_3^- \to x_4\ C_u^{2+} + x_5\ NO + x_6\ S_8 + x_7\ H_2O,$$

donde $x_1, x_2, \cdots, x_7$ son enteros positivos (incógnitas) que denotan el número de moléculas de cada compuesto. El problema es determinar estos valores de modo que la reacción esté balanceada, lo cual significa que el **número de átomos** de cada elemento y la **carga eléctrica total** Q se mantienen. Así, estableciendo este principio de equilibrio, obtenga las ecuaciones del sistema, y diga si se trata de un sistema incompatible, compatible determinado. o indeterminado.

**Solución:** se obtiene un sistema compatible indeterminado cuya solución se puede escribir por ejemplo en términos de $x_7$ :

$$x_6 = \frac{3}{64}x_7,\ x_5 = \frac{1}{2}x_7,\ x_4 = \frac{3}{4}x_7,\ x_3 = \frac{1}{2}x_7,\ x_2 = 2x_7,\ x_1 = \frac{3}{8}x_7.$$

Ahora, puesto que las soluciones de interés son **enteros positivos**, debemos tomar $x_7 = 64p$, con $p \in I\!N$, de donde las soluciones de (3) quedan dadas por: $x_7 = 64p$, $x_6 = 3p$, $x_5 = 32p$, $x_4 = 48p$, $x_3 = 32p$, $x_2 = 128p$, y $x_1 = 24p$, en particular se puede elegir $p = 1$.




**Problema 12. Aplicación a un problema de mecánica de equilibrio.** Considere el sistema de masa resorte descrito en la figura 3 de 5 masas $m1, \ldots, m5$ suspendidas entre resortes como muestra la figura. Suponiendo que los resortes verifican la llamada ley de Hooke, con una misma constante $k$, los desplazamientos $x_1, \ldots, x_5$ están dados por una condición de equilibrio que involucra la gravedad. Así, para $m_1$ está es $-kx_1 + k(x_2 - x_1) + m_1 g = 0$, para $m_2$ es $-k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) + m_2 g = 0$, para $m_3$ es $-k(x_3 - x_2) + k(x_4 - x_3) + m_3 g = 0$, para $m_4$ es $-k(x_4 - x_3) + k(x_5 - x_4) + m_4 g = 0$, y finalmente para $m_5$ es $-k(x_5 - x_4) + k(0 - x_5) + m_5 g = 0$. Escriba el sistema de ecuaciones y resuelvalo suponiendo que $g/k = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$, $m_5 = 5$ (**Solución :** $x_1 = 35/6$, $x_2 = 32/3$, $x_3 = 27/2$, $x_4 = 40/3$, $x_5 = 55/6$).

17.07.2003
MSC/msc