UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
Complemento de Cálculo

# Complemento de Cálculo

**(521234)**

**GUIA DE EJERCICIOS N$^o$ 1**

**1er semestre 2002**

# Complemento de Cálculo

*1er semestre 2002*

## Índice General



## 1 Series de Fourier

**Ej. 1:** Obtengase los desarrollos de medio rango senoidales y cosenoidales de cada una de las funciones que siguen :

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a) } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \leq 3 \end{cases} & \text{(b) } f(x) = x, \quad \text{si } 0 < x < p \\
\text{(c) } f(x) = x^2, \quad \text{si } 0 < x < p & \text{(d) } f(x) = \cos(x), \quad \text{si } 0 < x < 2\pi \\
\text{(e) } f(x) = \sin(x), \quad \text{si } 0 < x < 2\pi & \text{(f) } f(x) = e^{-ax}, \quad \text{si } 0 < x < 1 \\
\text{(g) } f(x) = \cos(ax), \quad \text{si } 0 < x < \pi, & \text{donde } a \text{ no un entero} \\
\text{(h) } f(x) = \sin(ax), \quad \text{si } 0 < x < \pi, & \text{donde } a \text{ no un entero}
\end{array}
$$

**Ej. 2:** Elegir una extensi'on periódica de funciones $f$ y $g$. Escribir la expresi'on de los coeficientes de las Series de Fourier asociadas a dichas expresiones.

$$
f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi/4 & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & -2 < x \leq 0 \\ e^{-x} & 0 \leq x < 2 \end{cases}
$$

Estudiar la convergencia de las Series de Fourier de las extensiones periódicas elegidas, en el intervalo de definición $f$ y $g$, respectivamente.

**Ej. 3:** Escribiendo todos los argumentos necesarios, analice el desarrollo en Series de Fourier (a) **SF** $\pi$-periódicas, (b) **SFS** $2\pi$-periódicas, (c) **SFC** $2\pi$-periódicas, para la funci'on :

$$
f(x) = \cos(\frac{x}{2}), \qquad \text{en } [0, \pi]
$$

Especificamente, analice los aspectos de converegencia en $\mathbb{R}$ y la posibilidad de derivar término a término las series obtenidas. *Observación : deje sólo expresadas las definiciones de los coeficientes que definen a cada serie.*

**Ej. 4:** Dada la función $f(x) = x$, $\forall x \in ]-\pi, \pi[$ con $f(-\pi) = f(\pi) = 0$.

1.- Construir la serie de Fourier de dicha función.

2.- A partir de la serie de Fourier obtenida, probar que $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (tener presente la igualdad de Parseval).

3.- Construir a partir de la serie obtenida en 1.-, la serie de Fourier de la función $g(x) = \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in ]-\pi, \pi[$. Señale los fundamentos de la convergencia de la nueva serie obtenida y grafique la función hacia la cual converge la serie en el intervalo $]-2\pi, 2\pi[$.

4.- A partir de la serie de Fourier para $g(x)$, probar que $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ y $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{13\pi^4}{720}$.

**Ej. 5:** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, para $-\pi < x \leq \pi$.

1.- Construya su serie de Fourier y dibuje su gráfico.

2.- Evalue dicha serie en $x = 0$ y $x = \pi$, y luego calcule las sumas $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+4}$ y $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2+4}$.

**Ej. 6:** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{cuando } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{cuando } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1.- Construir una serie $C(x)$ en términos de cosenos $2\pi-$periódicos que aproxime $f(x)$. Converge $C(x)$ en media cuadrática ? puntualmente ? uniformemente ?

2.- Construir una serie $S(x)$ pero ahora en términos de senos $2\pi-$periódicos, y responder las preguntas de convergencia del problema anterior.

3.- Calcular $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$ y $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{16n^4 - 8n^2 + 1}$.

**Ej. 7:** Sea $f(x) = x(1-x)$, $\quad 0 \leq x \leq 1$.

1.- Prolongando $f$ como una función impar en el intervalo $[-1, 1]$, calcule su desarrollo en serie de fourier y deduzca el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^6}$.

2.- Extendiendo la definición de $f$ a todo el intervalo $[-1, 1]$ y considerandola como una función 2-periódica, calcule su desarrollo en serie de fourier y deduzca el valor de la serie para $x = 1$.

## 2 Problemas de Valor Inicial y Fenómenos de Resonancia

**Ej. 8:** Encuentre una solución particular, y la solución general para las siguientes ecuaciones :

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a) } y'' - y = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt & \text{(b) } y'' - y = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt \\
\text{(c) } y'' + y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cos 2nt & \text{(d) } y'' + y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin 2nt \\
\text{(e) } y'' + 2y' + y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 4nt & \text{(f) } y'' - 2y' + y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos 4nt
\end{array}
$$

**Ej. 9:** Sea $f(t)$ es diferenciable por partes con período $2L$, y $y(t)$ solución de $y''(t) + w^2 y(t) = f(t)$.

1.- Si $w^2 = 12$, qué valores de $L$ pueden llevar a la resonancia ?

2.- Si $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin 3n\pi t$, qué valores de $w$ pueden llevar a la resonancia ?

3.- Si $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cos \frac{2n\pi t}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi t}{\sqrt{3}}$, qué valores de $w$ pueden llevar a la resonancia ? cuáles son las frecuencias de $f(t)$.

4.- Suponga que se sabe que el período de $f(t)$ está entre $8\pi$ y $9\pi$. Qué valores de $w$ pueden llevar a la resonancia ?

5.- Suponga que $4 \leq w \leq 5$. Para qué períodos puede $f(t)$ causar resonancia ?

## 3 Polinomios Ortogonales y Problemas de Sturm-Liouville

**Ej. 10:** Desarrollar $f(x) = 4x^4 + 2x^2 + 1$, $-1 \leq x \leq 1$ en términos de una serie de polinomios de Legendre.

**Ej. 11:** Encontrar todos los valores y funciones propias del problema de Sturm-Liouville

$$
\begin{cases}
4y'' - 4y' + (1+\lambda)y = 0; \\
y(-1) + y'(-1)0, \\
y(1) + y'(1) = 0.
\end{cases}
$$

Determinar un producto interno en el que las funciones propias formen un conjunto ortogonal.

**Ej. 12:** Escriba en la forma divergencia (es decir como $(r(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda p(x))y(x) = 0)$ el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' + y = \lambda y, & \text{para } 1 \leq x \leq e^2, \\ y(1) = y(e^2) = 0. \end{cases}$$

Determine los valores propios y la familia ortonormal respectiva asociada a este problema.

**Ej. 13:** Sea $\{Q_n(x)\}_{n\geq 1}$, con $Q_n(x) = \sqrt{1-x^2}P_n'(x)$, para $x \in [-1,1]$, $n = 1, 2, \ldots$ y donde $P_n(x)$ son los polinomios de Legendre, es decir,

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0, \qquad \text{para } -1 \leq x \leq 1.$$

1.- verifique que $\{Q_n(x)\}_{n\geq 1}$ son las funciones propias del siguiente problema de Sturm-Liouville

$$(1-x^2)Q_n''(x) - 2xQ_n'(x) + (\lambda_n - \frac{1}{1-x^2})Q_n(x) = 0, \qquad \text{para } -1 \leq x \leq 1,$$

con $\lambda_n = n(n+1)$ ;

2.- deduzca que la siguiente relación de ortogonalidad :

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \dfrac{2n(n+1)}{2n+1}, & \text{si } n = m \end{cases}$$

**Ej. 14:** Los polinomios de Tchebyshev $T_n(x)$ de segunda especie son las soluciones del problema de Sturm-Liouville $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 = 0$, $y(-1) = y(1) = 0$, para $n = 1, 2, 3 \ldots$. Haciendo el cambio de variable $\cos(w) = x$, pruebe que $T_n(x) = \sin(nw) = \sin(n \arccos x)$, y deduzca la relación de ortogonalidad :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x)T_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n. \end{cases}$$

**Ej. 15:** Sabiendo que $y''+y = 0$ admite 2 soluciones linealmente indenpendientes $y_1(x) = \sin(x)$ e $y_2(x) = \cos(x)$, haga el cambio de variable $y(x) = \sqrt{\pi x/2}u(x)$ para deducir que las soluciones de la ecuación de Bessel de orden 1/2 son $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)$ y $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)$. Utilice esta información para calcular los valores propios y funciones propias del siguiente problema de Sturm-Liouville :

$$\begin{aligned} &x^2y'' + xy' + \lambda(x^2 - 1/4)y = 0 \\ &y \text{ está acotada en } (0, R) \\ &y(R) = 0 \end{aligned}$$

Deduzca la relación de ortogonalidad de las funciones propias.

## 4 Resolución de EDP mediante separación de variables

**Ej. 16:** Para $u = u(x, y)$ y $u = u(x, y, z)$ (cuando corresponda), y para $x, y, z \in (0, 1)$, cuáles de las ecuaciones siguientes se pueden resolver por el método de separación de variables ?

(a) $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + bu = 0$

(b) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(c) $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

(d) $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

(e) $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(f) $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} + d\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

**Ej. 17:** Utilizando el método de separación de variables, resuelva el problema del potencial $\Delta\phi = 0$ en el cilindro : $\{(r, \theta, z) \mid r \leq 1 \text{ y } 0 \leq z \leq 1\}$, con $\phi = 1$ sobre las 2 bases del cilindro y $\phi = 0$ sobre el manto.

**Ej. 18:** La ecuación que rige el movimiento de una cuerda vibratoria de longitud $\ell$ está dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

en que $u = u(x, t)$ indica el desplazamiento de un punto de la cuerda que se encuentra en la posición $x$ y el instante $t$ ; $a^2$ es una constante que depende de la naturaleza de la cuerda. Resolver esta ecuación suponiendo que los extremos de la cuerda se mantienen fijos, es decir que $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$, y bajo las condiciones iniciales :

$$u(x, 0) = x(\ell - x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

**Ej. 19:** Encontrar la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 \cos t - 2 \sin t, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0$$

que satisfaga las condiciones de frontera: $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = \pi^2 \sin t$ y las condiciones iniciales : $u(x, 0) = \pi x - x^2$. `Indicación :` calcule $(\partial_t - \partial_{xx})\, x^2 \sin t$.

**Ej. 20:** Resolver el problema de valores de contorno

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin(x), & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 1, & \qquad\qquad\quad\;\; t > 0 \\ u_x(\pi, t) = 2, & \qquad\qquad\quad\;\; t > 0 \\ u(x, 0) = 1 + \sin(2x), & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

`Indicación` : primero encontrar la solución estacionaria $U(x)$.

**Ej. 21:** Resolver el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

A partir de la familia de soluciones de este problema, escribir la solución general de los siguientes problemas de valores de contorno :

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & u_{tt} = u_{xx} - 2\cos(2x) \\ u_x(0,t) = 0 & u_x(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 10 & u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = x(x-L) & u(x,0) = x(x-L) \\ & u_t(x,0) = 0 \end{array}$$

**Ej. 22:** Sea $u = u(x,t)$ solución de la ecuación de ondas :

$$(\partial_{tt} - \partial_{xx})\, u = e^{-|x|}, \qquad |x| \leq 1, \quad t > 0,$$

con las condiciones iniciales $u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0$, y las condiciones de borde $u(-1,t) = u(1,t) = 0$.

1.- Haga el cambio de variable $u(x,t) = v(x,t) + \Phi(x)$, de modo que $(\partial_{tt} - \partial_{xx})\, v = 0$, y $\Phi(x)$ sea solución de la ecuación $\Phi'' = -e^{-|x|}$, con $\Phi(-1) = \Phi(1) = 0$.

2.- Tomando en cuenta la continuidad de $\Phi''$ en todo $\mathbf{R}$, verifique que $\Phi'$ y $\Phi$ siguen siendo continuas en cero, para deducir que $\Phi(x) = e^{-1} - e^{-|x|} + 1 - |x|$.

3.- Calcule $u = u(x,t)$ en términos de una serie de fourier, y determine los coeficientes de la serie a partir de las condiciones iniciales. No es necesario que calcule las integrales correspondientes.

**Ej. 23:** Considere las esferas concéntricas $S_1$ y $S_2$ de radio respectivamente $R_1$ y $R_2$ respectivamente $(0 < R_1 < R_2)$. Sea $u$ el potencial en $S_1$, $v$ el potencial entre $S_1$ y $S_2$, y $u^*$ el potencial fuera de $S_2$ con valores de contorno sobre cada una de las esferas :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < R_1 \\ \Delta v = 0, \quad R_1 < r < R_2 \\ \Delta u^* = 0, \quad R_2 < r \\ u(R_1,\varphi) = v(R_1,\varphi) = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ v(R_2,\varphi) = u^*(R_2,\varphi) = g(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Determine el valor de los potenciales $u$, $v$, y $u^*$, en términos de $f$ y $g$ usando el método de separación de variables y los polinomios de Legendre.

**Ej. 24: El problema de la cadena vibrante**. Una cadena de largo $L$ y de masa $m = \rho L$ (donde $\rho$ es la densidad de masa / unidad de longitud), cuelga verticalmente fija de uno de sus extremos. Al vibrar libremente, la posición horizontal $u(x,t)$, satisface la ecuación con derivadas parciales :

$$\frac{\partial}{x}\left(\rho g(L-x)\frac{\partial u}{x}\right)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Calcule $u(x,t)$ en términos de la función de Bessel primera especie y de orden 0, si la velocidad inicial es nula y la posición inicial está dada $u(x,0)=f(x)$. `Indicación` : Pruebe que la ecuación $(L-x)X''(x)-X'(x)+\lambda X(x)=0$ es equivalente a la ecuación de Bessel de orden 0 al hacer el cambio de variable $X=X(x)$ por $X=X(w)$, con $L-x=\frac{w^2}{4\lambda}$.

**Ej. 25:** Considere la siguiente ecuación de ondas con condiciones de borde y condiciones iniciales :

$$\begin{cases} t^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x(1-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0, \qquad 0\le x\le 1, \quad t>1, \\ u(x,t) \text{ acotada para todo } (x,t)\in[0,1]\times[1,t_0], t_0>1 \text{ fijo} \\ u(x,1)=0, \qquad \partial_t u(x,1)=x^2, \qquad 0\le x\le 1. \end{cases}$$

1.- Utilizando el método de separación de variables, escriba $u(x,t)=F(x)G(t)$ e identifique una E.D.O para $F=F(x)$ y otra para $G=G(t)$.

2.- Haciendo el cambio de variable $e^w=t$, verifique que la ecuación en $t$ se reduce a la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes $G''(w)-G'(w)+\lambda G(w)=0$ y $G(0)=0$. Resuelva esta ecuación, para todos los posibles valores reales de $\lambda$.

3.- Identifique la ecuación de Sturm-Liouville en $x$, y haciendo el cambio de variable $z=2x-1$, determine $F(x)$ en términos de los polinomios de Legendre $P_n(z)$. Deduza una expresión de $u(x,t)$ en términos de una serie ortogonal.

4.- Utilice las condiciones iniciales para calcular todos los coeficientes de la serie, y determine $u(x,t)$.

**Ej. 26:** Utilizando el método de separación de variables, resuelva la siguiente ecuación del movimiento de una cuerda cuya densidad lineal es proporcional a $(1+x)^{-2}$ :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad 0\le x\le 1, \quad t>0, \\ u(x,0)=f(x), \qquad \partial_t u(x,0)=0, \qquad 0\le x\le 1, \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \quad t>0. \end{cases}$$

**Ej. 27:** Considere el problema de la densidad de neutrones $N(r,t)$ en un reactor esférico de radio R, dado por la ecuación del calor con una fuente interna :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t^2}=D\left(\dfrac{\partial^2 N}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial N}{\partial r}\right)+\gamma N, \qquad 0\le r\le R, \quad t>0, \\ N(r,t) \text{ acotada}, \\ N(R,t)=0, \qquad t>0, \\ N(r,0)=f(r), \forall r \text{ e independiente de los angulos } \theta \text{ y } \phi. \end{cases}$$

1.- Utilizando el método de separación de variables, escriba $N(r,t) = F(r)G(t)$ e identifique una E.D.O para $F = F(r)$ y otra para $G = G(t)$.

2.- Haciendo los cambios de variable $s = r\sqrt{\lambda}$ y $F = s^{-1/2}U$, verifique que la ecuación en $r$ se reduce a una ecuación de Bessel de orden $1/2$. Escriba la solución $N(r,t)$ como una serie en términos de las funciones ortogonales de Bessel de orden $1/2$ y de primera especie : $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)$.

**Ej. 28:** Considere la siguiente una ecuación del calor :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{c^2}{x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \\ \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad \text{para } t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

donde $c$ y $L$ son constantes, $u = u(x,t)$ es la solución buscada, y $f = f(x)$ es una función dada.

1.- Utilizando el método de separación de variables, escriba $u(x,t) = F(x)G(t)$ de modo que $F(x)$ sea solución de la ecuación $F''(x) + \lambda^2 x F(x) = 0$ .

2.- Haciendo el cambio de variable $F(x) = \sqrt{x}U(x)$ y luego haciendo $z = \frac{2}{3}\lambda x^{3/2}$, determine $F$ en términos de las funciones de Bessel de orden un tercio $J_{1/3}(z)$, y de orden menos un tercio $J_{-1/3}(z)$.

3.- Suponga que $J_{1/3}(0) = 0$, y que $\lim_{x\to 0^+} \lambda^{1/3}\sqrt{x}J_{-1/3}(\frac{2}{3}\lambda x^{3/2}) = 1.065084$, para todo $\lambda \neq 0$ (no lo demuestre). Luego deduzca que $F(x)$ se escribe sólo en términos de la función de Bessel de orden $1/3$.

Suponga la siguiente relación de ortogonalidad (no la demuestre) :

$$\int_0^L xJ_{1/3}(\frac{\beta_n x}{L})J_{1/3}(\frac{\beta_m x}{L})dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{L^2}{2}J_{4/3}^2(\beta_n) & \text{si } m = n, \end{cases}$$

donde $J_{4/3}(z)$ es la función de Bessel de orden $4/3$ y $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2.902586$, $\beta_3 = 6.03274$, $\ldots$, son las raíces de la función de Bessel de orden $1/3$.

4.- Utilice esta relación de ortogonalidad para calcular los coeficientes de la serie, y determine $u(x,t)$.