UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 17 (Espacios Vectoriales con Producto Interior)

1. Determine si el producto definido es o no un producto interior, y demuéstrelo.

   a) En el **e.v. complejo** $\mathbb{C}^n$ se define $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ por

   $$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j \qquad \text{donde } x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n)$$

   b) Dados $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\} \subseteq \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$, se define en el **e.v. real** $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por: **(En Práctica b))**

   $$\langle p, q\rangle := \sum_{j=1}^{n+1} p(x_j)\, q(x_j), \quad \forall\, p,\ q \in V.$$

   c) Sea V un e.v. real de dimensión n y sea B una base de V. Denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$ el **p.i.** usual de $\mathbb{R}^n$, y considere la aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle_B : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por:

   $$\langle\, u, v\,\rangle_B = \langle\, [u]_B, [v]_B\,\rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall\, u, v \in V\,,$$

   d) En el **e.v. real** $\mathbb{R}^2$ se define $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por **(En Práctica d))**

   $$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

2. En los siguientes problemas calcule el **p.i.** indicado para los vectores que se indican.

   a) En el **e.v. real** $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ con el **p.i.** usual de funciones:

   $$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

   para $f(x) = a_1 + a_2 x$ y $g(x) = b_1 + b_2 x$.

   b) En el **e.v. complejo** $\mathbb{C}^3$ con el producto usual, calcule **(En Práctica b))**

   $$\langle (i, 1-i, 3), (2i-2, 4, 2-3i)\rangle.$$

   c) En el **e.v. real** $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, con el producto usual: $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$, calcúlelo para:

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

3. Pruebe que para todo $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ se tiene que **(En Práctica)**

   $$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big)^2 \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} j a_j^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^2}{j}\Big)$$

4. Para los que hayan resultado ser producto interior en la Pregunta 1 defina la norma que ellos inducen y verifique que satisface las propiedades de norma. **(En Práctica un caso)**

5. Sea V un **e.v. real** con producto interior, y sean $u, v \in V$.

   a) Pruebe que $\langle u, v\rangle = 0 \iff \|u\| \leq \|u + \lambda v\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. **(En Práctica a))**

   b) Determine el valor de $\|v\|$ si se sabe que $\|u\| = 3, \ \|u + v\| = 4, \ \|u - v\| = 6$.

   c) Pruebe que $\langle u, v\rangle = \dfrac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4}$.

6. Considere el **e.v. real** $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ provisto de la aplicación definida por: **(En Práctica)**

$$\langle p, q\rangle \ := \ p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1); \qquad \forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

   a) Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interior sobre V.

   b) Pruebe que los vectores $p(x) = 1$ y $q(x) = x$ son ortogonales con este **p.i.**.

   c) Encuentre un tercer polinomio r tal que $\{p, q, r\}$ sea una base ortogonal de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y luego calcule las coordenadas de $s(x) = 2x^2 + 3x - 1$ con respecto a esta base.

7. Pruebe que el conjunto

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}\}$$

   es ortonormal en $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$, el espacio vectorial de las funciones contínuas sobre $[-\pi, \pi]$, con producto interior:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

8. Se dice que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es **ortogonal** si $A^t A = I$. Sean $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ los n vectores columnas de una matriz ortogonal $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, y considere el sistema lineal de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$.

   a) Pruebe que este sistema es **compatible determinado** y que puede escribirse, equivalentemente, como la ecuación vectorial:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \ + \ \cdots \ + \ x_n\vec{a}_n \ = \ \vec{b}\,.$$

   b) Determine A^{-1}.

   c) Demuestre que las componentes del vector solución $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ están dadas por

$$x_k = \langle \vec{b}, \vec{a}_k\rangle_{\mathbb{R}^n}, \ \ \forall\, k \in \{1, 2 \ldots, n\}.$$

   d) Aplique el procedimiento anterior para resolver el sistema. Indicación: multiplique la ecuación por un escalar para que la matriz sea ortogonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   e) Calcule las coordenadas de $(1, 2, 2)$ con respecto a la base: $\{(2, 2, 1), (1, -2, 2), (-2, 1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

9. Suponga que $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es un conjunto de vectores ortonormales de un e.v.c.p.i. V. Sea $v \in V$. Pruebe que:

   a) $\|v\|^2 \geq |\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_m\rangle|^2$.

   b) $\|v\|^2 = |\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_m\rangle|^2 \iff v \in \langle \{e_1, \ldots, e_m\}\rangle$.

c) Compruebe a) para la base del ejercicio 7 y la función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x$.

Considere sobre el intervalo $[-1, 1]$ el espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con el producto interior usual de funciones:

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal de este espacio partiendo del conjunto $\{1, x, x^2\}$. **(En Práctica)**

10. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere el **e.v. real** $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ y considere el **p.i.** definido por:

$$\langle p, q\rangle := \sum_{j=1}^{n+1} p(j)\, q(j) \quad \forall\, p, q \in V\,.$$

   a) Encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x + k$ y $q(x) = x - k$ sean ortogonales. Recuerde que $\forall\, m \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

   b) Para $n = 3$ considere los siguientes subespacios $S = \{p \in V : p(2) + p(3) = 0\}$ y $W = \{p \in V : (\forall x \in \mathbb{R})\ p(-x) = -p(x)\}$. Encuentre $S^\perp$ y $W^\perp$.

   c) Encuentre una base ortonormal para S, W, $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

11. Sea $V = \mathbb{R}^3$ provisto del producto interior usual $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

   a) Considere un plano U que pasa por el origen de V y describa un método para construir una base del subespacio $U^\perp$. Interprete geométricamente $U^\perp$. ¿Puede afirmarse que $V = U \oplus U^\perp$?

   b) Considere $\vec{u} = (-1,\, 2,\, 3)$ y encuentre dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{r}$ tales que $\{\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{r}\}$ sea una base ortogonal de V. Además, determine la base ortonormal asociada y calcule las coordenadas del vector $\vec{s} = 3\,\vec{u} + 2\,\vec{v} - \sqrt{2}\,\vec{r}$ con respecto a esta base.

   c) Considere el plano $U = \{\, (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3\ : x = y\}$, determine una base ortonormal $\beta = \{\, \vec{u},\, \vec{v}\,\}$ de U, y obtenga un subespacio complementario W tal que $V = U \oplus W$. Luego encuentre las coordenadas de $\vec{s} = (3,\, -3,\, 0)$ con respecto a la base de $U \oplus W$.

12. En el **e.v. real** $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con el **p.i.** usual: $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(B^t A)$. Considere los siguientes subespacios vectoriales: **(En Práctica T)**

   - $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.
   - $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $W = \left\{ A \in V :\ A = A^t \right\}$.
   - $V = \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$; $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in V :\ a - b + 3c = 0 \wedge b - 2d = f \right\}$.

   a) Determine $S^\perp$, $W^\perp$ y $T^\perp$.

   b) Encuentre una base ortonormal para S, W y T.

13. Sean F, G dos subespacios de un e.v.c.p.i. V, de dimensión finita. Pruebe que: **(En Práctica a))**

   a) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,

   b) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

14. Sea $V = \mathbb{R}^4$ e.v. sobre $\mathbb{R}$, y sea $U = \langle\{(1, 1, 0, 0,), (1, 1, 1, 2)\}\rangle$ s.e.v. de V. Encuentre $u \in U$ tal que $\|u - (1, 2, 3, 4)\|$ sea lo más pequeña posible. **(En Práctica)**