UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA 522115
Listado 7 (Matrices)

1. Pruebe las siguientes proposiciones:

   a) Si A es una matriz cuadrada, entonces $A+A^t$ es una matriz simétrica y $A-A^t$ es una matriz antisimétrica (M es antisimétrica si $M^t = -M$).

   b) Toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

   c) Las matrices AA^t y A^tA son simétricas.

   d) Si A y B son matrices simétricas, entonces no necesariamente AB es una matriz simétrica.

2. Considere las matrices:
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

   a) Calcule $AB, BA,\ (BD-C)$ y $(AC^2 - I)$.

   b) Resuelva las ecuaciones matriciales:

   i) $-2X + C = D$, ii) $(A - \frac{2}{3}X)^t = 2D$, iii) $2C + XA = B^2$.

3. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, sea $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Pruebe que

   a) $A^tA = AA^t = I$.

   b) $A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\operatorname{sen}(n\theta) \\ \operatorname{sen}(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que A^tA es invertible, y sea $B = I - A(A^tA)^{-1}A^t$.

   a) Pruebe que $B^2 = B$.

   b) Muestre que $BA = \theta$.

   c) Pruebe que B es una matriz simétrica.

5. En cada caso calcule $det(A)$ y $det(A^{-1})$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Para las siguientes matrices A y B, pruebe que $det(A) = det(B)$.

a) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -a & -g & -d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b-7a \\ c & d-7c \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 20 \\ 1 & 1 & 8 \\ 4 & 3 & 17 \end{pmatrix}$

7. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $det(A) = 2$. Calcule:

a) $det(A^5)$, b) $det(-A)$, c) $det(2A^{-1})$, d) $det(AA^t)$.

8. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Si $A^{-1} = \frac{1}{25}A^t$, calcule $det(A)$.

b) Si $det(A) = 2$ y $det(B) = \sqrt{2}$, calcule $det(2A \cdot 3B)$.

c) Si $A^{-1} = 2A^t$, calcule $det(A)$.

9. Calcule, si es que existen, valores de $k \in \mathbb{R}$ para que las matrices tengan determinante distinto de cero.

a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -k \\ 2 & 6 & -2k \\ 1 & 3 & 1+k \end{pmatrix}$.

JAL
Primer Semestre de 2005.