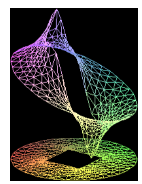
MAT 520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 5

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Números Complejos

Definición: Números Complejos

Se define el conjunto de los números complejos, el cual se denota por $\mathbb{C}$, como el conjunto de pares ordenados $z = (x, y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Se provee a $\mathbb{C}$ de las siguientes operaciones binarias internas.

- **Adición ($+$):** $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$
- **Multiplicación ($\cdot$):** $(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya)$

Estas operaciones tienen las siguientes propiedades:

Números Complejos

Propiedades de la adición:

$\forall z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, se tiene:

C1	Conmutatividad de la adición	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
C2	Asociatividad de la adición	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
C3	Existencia del neutro aditivo $0 = (0,0)$	$z + 0 = 0 + z = z$
C4	Existencia del inverso aditivo Para cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ existe $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ tal que	$z + (-z) = -z + z = 0$

Números Complejos

Propiedades de la multiplicación:

$\forall z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, se tiene:

C5	Conmutatividad de la multiplicación	$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
C6	Asociatividad de la multiplicación	$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
C7	Existencia del neutro multiplicativo $1 = (1, 0)$	$1 \cdot z = (1, 0) \cdot (x, y) = z$
C8	Existencia del inverso multiplicativo z^{-1} para todo $z \neq 0$	$z \cdot z^{-1} = 1$

Además, se tiene:

C9	Distributividad de la multiplicación con respecto a la adición	$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Números Complejos

Observaciones

- El inverso multiplicativo de $z = (x, y) \neq (0, 0)$ es

$$z^{-1} = (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2})$$

- El neutro aditivo y el neutro multiplicativo son únicos.
- El inverso aditivo es único y el inverso multiplicatico, para $z \neq 0$, también.
- El conjunto $\mathbb{C}$ con sus operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ se denota $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, y constituye un cuerpo conmutativo que se llama **Sistema de los números complejos**.

Números Complejos

Teorema. El conjunto $S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es isomorfo con $\mathbb{R}$. Es decir, cada número real x se identifica con el número complejo $(x, 0)$.

$$x = (x, 0), \qquad 1 = (1, 0), \qquad 0 = (0, 0).$$

Definiciones: Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

- Los números reales x e y se llaman **Parte Real y Parte Imaginaria de** z, respectivamente. En este caso se escribe

$$Re(z) = x, \qquad Im(z) = y.$$

- Los números complejos $z = (x, 0)$ se llaman **complejos reales** y los números complejos $z = (0, y)$ se llaman **imaginarios puros**. En particular, $i = (0, 1)$ es la **unidad imaginaria**.

Números Complejos

Observaciones:

- Utilizando la unidad imaginaria i el número complejo $z = (x, y)$ se puede escribir como

$$z = x + yi\,,$$

la cual se llama **forma binómica o algebraica** de z.

- Con esta notación las operaciones de adición y multiplicación de números complejos se reducen a:

$(+)$: $\quad (x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (y + b)i$.

$(\cdot)$: $\quad (x + yi) \cdot (a + bi) = (xa - yb) + (xb + ya)i$.

- Además, para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $z = x + yi \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\lambda \cdot z = \lambda x + (\lambda y)i.$$

Definición. Se llama **conjugado** de un número complejo $z = x + yi$ al número complejo

$$\overline{z} = x - yi$$

Propiedades. Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:

- $Re(z) = Re(\overline{z})$.
- $z + \overline{z} = 2Re(z), \quad z - \overline{z} = 2iIm(z)$.
- $z \cdot \overline{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
- $\overline{z} = z \Longleftrightarrow z = x$ es un complejo real.
- $\overline{z} = -z \Longleftrightarrow z = iy$ es un imaginario puro.

Números Complejos

Definición. Se llama **módulo** de un número complejo $z = x + yi$ al número real no negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

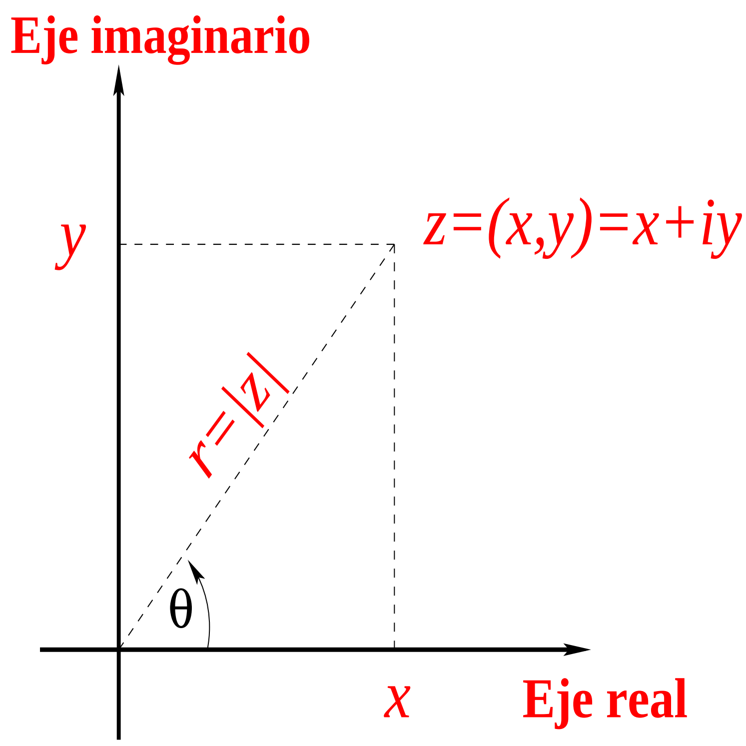
Propiedades. Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:

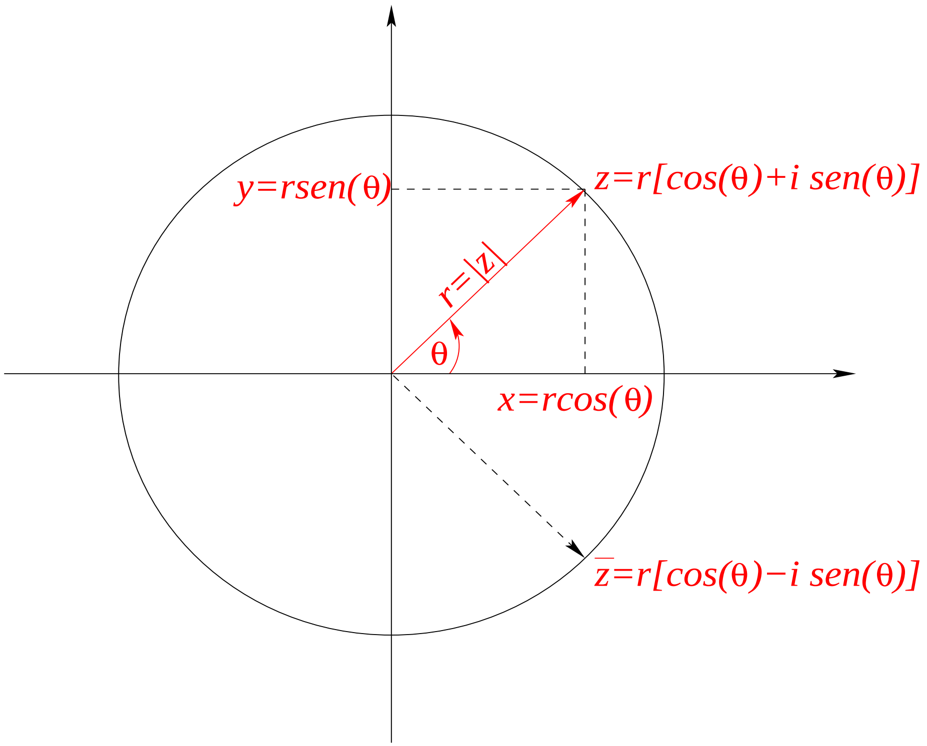
- $|z| \geq 0$.
- $|z| = 0$ sí y sólo sí $z = 0$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$.
- $|zw| = |z||w|, \qquad |\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}, \quad w \neq 0$.
- $Re(z) \leq |z|, \qquad Im(z) \leq |z|$.
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Números Complejos

Plano Complejo.

Todo número complejo $z = x + iy$ se puede representar en el plano XY por el punto (x, y). El plano se llama **Plano complejo o Plano de Argand o Plano** z.





Definición. Forma Polar de un número complejo.

Todo número complejo $z = x + iy$, cuyas coordenadas cartesianas son x e y, puede representarse también en términos de sus coordenadas polares r y θ, donde $r = |z|$ y θ es el ángulo que forma el vector z con el eje x. En este caso se dice que θ es el argumento de z y lo denotamos por

$$\theta = arg(z).$$

De la figura se tiene que $sen\,(\theta) = \frac{y}{r}$, $\quad cos\,(\theta) = \frac{x}{r}$, y en consecuencia

$$\boxed{z = r(cos\,(\theta) + isen\,(\theta))}$$

la cual se llama **forma polar o forma trigonométrica** de z.

Números Complejos

Forma Polar de un número complejo.

Notar que

$$arg(z) = \begin{cases} Arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si} \quad z \in \text{I cuadrante} \\ Arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si} \quad z \in \text{II, III cuadrante} \\ Arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si} \quad z \in \text{IV cuadrante} \end{cases}$$

Además, por la periodicidad de las funciones seno y coseno se tiene que $arg(z)$ puede tener infinitos valores, los cuales están dados por:

$$\boxed{arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

donde θ es uno de estos valores.

Se llama **Valor Principal del Argumento** del número complejo z, y se denota $Arg(z)$, al valor del argumento que se encuentra en $[-\pi, \pi]$.

Números Complejos

Observaciones:

- Por **ejemplo**, para el número complejo $z = -1 - i$, se tiene:

$$arg(-1-i) = Arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + \pi = Arctan(1) + \pi = \frac{5\pi}{4}\,.$$

De esta forma:

$$arg(-1-i) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

y su valor principal es $Arg(-1-i) = \frac{-3\pi}{4}$, pues $-\pi < \frac{-3\pi}{4} \leq \pi$.

- La forma polar o trigonométrica de un número complejo $z = x + yi$, esto es $z = r[cos\,(\theta) + i sen\,(\theta)]$, con $|z| = r$ y $arg(z) = \theta$, también se escribe $z = r\,cis(\theta)$.

Ejemplo: $\quad -1 - i = \sqrt{2}\,cis(-\frac{3\pi}{4})$.

Números Complejos

- Dados dos números complejos $z_1 = r_1[cos\,(\theta_1) + isen\,(\theta_1)]$, $z_2 = r[cos\,(\theta_2) + isen\,(\theta_2)]$, se tiene:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[cos\,(\theta_1 + \theta_2) + isen\,(\theta_1 + \theta_2)]}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{r_1}{r_2}[cos\,(\theta_1 - \theta_2) + isen\,(\theta_1 - \theta_2)]}$$

- Utilizando la **Fórmula de Euler:**

$$\boxed{e^{i\theta} = cos\,(\theta) + isen\,(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}\,,}$$

la forma polar $z = r[cos\,(\theta) + isen\,(\theta)]$ permite expresar z como:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

la cual se llama **forma exponencial** de z.

Números Complejos

Definición. Potencias de números complejos.

Dado un número complejo z y un número natural n se define:

$$z^1 = z, \qquad z^{n+1} = z^n \cdot z.$$

Además, se tiene que: $z^0 = 1, \qquad z^{-n} = (z^{-1})^n.$

Teorema.

Para todo $z = |z|[cos\,(\theta) + isen\,(\theta)] \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$z^n = |z|^n [cos\,(n\theta) + isen\,(n\theta)]$$

Números Complejos

Observaciones:

- El teorema anterior proporciona una fórmula simple para encontrar potencias enteras de un número complejo.

- Del teorema se sigue que

$$[r(cos\,(\theta) + i sen\,(\theta))]^n = r^n[cos\,(n\theta) + i sen\,(n\theta)], \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

En particular, si $r = 1$ entonces

$$\boxed{[cos\,(\theta) + i sen\,(\theta)]^n = cos\,(n\theta) + i sen\,(n\theta), \quad n \in \mathbb{N}}$$

la cual se conoce como Teorema o **Fórmula de De Moivre**

- Usando la notación exponencial la Fórmula de De Moivre se escribe

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Números Complejos

Definición. Raíces de números complejos.

Dado un número complejo $z = |z|[cos\,(\theta) + isen\,(\theta)]$ y un número natural n, se llama **raíz n-ésima de z** a todo número complejo w tal que $w^n = z$.

Si $w = |w|\,cis(\alpha)$, entonces

$$w^n = z \Longleftrightarrow |w|^n\,cis(n\alpha) = |z|\,cis(\theta).$$

De donde:

$$|w| = |z|^{\frac{1}{n}}, \qquad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema. Todo número complejo z, $z \neq 0$, tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas, con módulos $|z|^{\frac{1}{n}}$ y argumentos dados por:

$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Números Complejos

Observaciones:

- Son particularmente importantes las raíces n-ésimas de la unidad, esto es, las raíces de $z = 1$. De acuerdo al teorema, con $|z| = 1$ y $\theta = 0$, las n **raíces de la unidad** son:

$$w_k = cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

  Notar que una de estas raíces es 1 y que todas ellas se ubican sobre la circunferencia unitaria.

- Sean $u_1, u_2, ..., u_n$ las n raíces de la unidad, y sea w una raíz n-ésima cualquiera de un número complejo z. Entonces, las raíces de z están dadas por

$$wu_1, wu_2, ..., wu_n$$

Números Complejos

- Utilizando la definición de potencia entera m y la definición de raíz n-ésima de z, se define la potencia racional $\frac{m}{n}$ como sigue:

$$z^{\frac{m}{n}} = |z|^{\frac{m}{n}} [cos\left(\frac{m\theta + 2km\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{m\theta + 2km\pi}{n}\right)],$$

o bien

$$w_k = |z|^{\frac{m}{n}}\, cis\left(\frac{m\theta}{n} + \frac{2km\pi}{n}\right),$$

para todo $k \in \{0, 1, ...n-1\}$.