UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía N°7: Sistemas de Ecuaciones Lineales
Métodos Directos
Cálculo Numérico 521230, 2017-2

1. Sea $\mathbf{U}$ una matriz de $n \times n$ triangular superior invertible.
   a) Diseñar un algoritmo que resuelva el sistema $\mathbf{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
   b) Calcular el costo operacional medido en FLOP.
   c) Si un computador realiza 1 gigaFLOP por segundo, ¿cuánto tardará en resolver el sistema anterior si $n = 10^6$?
   Indicación: Ver ejercicio realizado en clases para una matriz triangular inferior.
2. Suponga que un computador tarda 20 segundos en realizar eliminación Gaussiana a una matriz de 300×300. Calcular el tiempo aproximado que tardará este mismo computador en resolver un sistema triangular del mismo tamaño.
3. Realizar la descomposición LU de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Verificar en cada caso que al multiplicar $\mathbf{LU}$ se obtiene la matriz $\mathbf{A}$.
4. Realizar la descomposición LU con pivoteo parcial de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Verificar en cada caso que al multiplicar $\mathbf{LU}$ se obtiene la matriz $\mathbf{PA}$.
5. Utilizar MATLAB para comprobar los resultados obtenidos en el Problema 4. **Indicación:** `[L,U,P] = lu(A);`
6. Determinar cuales de las siguientes matrices son definidas positivas:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

7. ¿A cuáles de las matrices del Problema 6 se le puede realizar la factorización de Cholesky?. Realice dicha factorización cuando corresponda. Verificar que al multiplicar $\mathbf{LL}^t$ se obtiene la matriz original.
8. Utilizar MATLAB para comprobar los resultados obtenidos en el Problema 7. **Indicación:** MATLAB entrega $\mathbf{R} = \mathbf{L}^t$ a través del siguiente comando: `R = chol(A);`.
9. Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.0001 & 1 \end{pmatrix}$. Se quiere resolver el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b}$ proviene de datos experimentales sujetos a un error relativo del 1 %. Determinar una cota superior del error relativo asociado a la solución $\mathbf{x}$.

Algoritmo de Thomas

El siguiente ejercicios tiene como objetivo deducir el Algoritmo de Thomas.

1. Considere la matriz tridiagonal

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{pmatrix},$$

tal que $|b_1| > |c_1|$, $|b_2| \geq |a_2| + |c_2|$, $|b_3| \geq |a_3| + |c_3|$ y $|b_4| > |c_4|$. Observemos que las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ de la factorización LU de la matriz $\mathbf{A}$, deben tener la siguiente forma:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestre que

$$\begin{aligned} \beta_1 &= b_1, \\ \gamma_1 &= c_1, \\ \alpha_2 &= a_2/\beta_1, \\ \beta_2 &= b_2 - \alpha_2\gamma_1, \\ \gamma_2 &= c_2, \\ \alpha_3 &= a_3/\beta_2, \\ \beta_3 &= b_3 - \alpha_3\gamma_2, \\ \gamma_3 &= c_3, \\ \alpha_4 &= a_4/\beta_3, \\ \beta_4 &= b_4 - \alpha_4\gamma_3. \end{aligned}$$

b) Utilizar lo obtenido en el problema anterior para encontrar la factorización LU de la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Considere ahora la matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

tal que

$$\begin{aligned} |b_1| &> |c_1|, \\ (\forall\, i \in \{2,\ldots,n-1\})\ |b_i| &\geq |a_i| + |c_i| \quad \text{y} \\ |b_n| &> |a_n|, \end{aligned}$$

Observemos que las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ de la factorización LU de la matriz $\mathbf{A}$, deben tener la siguiente forma:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta_n \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= b_1, \\
\gamma_1 &= c_1, \\
\alpha_2 &= a_2/\beta_1, \\
\beta_2 &= b_2 - \alpha_2\gamma_1, \\
\gamma_2 &= c_2, \\
\vdots &\quad \vdots \\
\alpha_n &= a_n/\beta_{n-1}, \\
\beta_n &= b_n - \alpha_n\gamma_{n-1},
\end{aligned}$$

y por tanto el Algoritmo de Thomas es:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\beta_1 = b_1 \\
\text{For } i = 2, \ldots, n \\
\quad \gamma_{i=1} = c_{i-1} \\
\quad \alpha_i = a_i/\beta_{i-1} \\
\quad \beta_i = b_i - \alpha_i\gamma_{i-1} \\
\text{end}
\end{array}}$$

b) Calcular el costo operacional.

c) Programar el Algoritmo de Thomas.

d) Use el algoritmo programado para encontrar las factorización LU de

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$