UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

MAT 411 123 **Complemento de Cálculo para Ingeniería**

FPV/fpv- 30.06.2001

Guía de Ejercicios $N^o 2$
Ejercicios de Cálculo Complejo.

I- Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$- Muestre que las ecuaciones de Cauchy Riemann son:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

II- Son las siguientes funciones analíticas?

$$\begin{array}{llllll}
(a) & f(z) = |z|^2 & (b) & f(z) = \Im(z) & (c) & f(z) = \arg z \\
(d) & f(z) = \ln r + i\theta & (e) & f(z) = 1/z^3 & (c) & f(z) = \sin x \cosh y + \\
 & & & & & + \quad i \cos x \sinh y
\end{array}$$

III- Suponga que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica- Pruebe que:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

IV- Pruebe que las siguientes funciones son armónicas y encontrar las correspondientes armónicas conjugadas-

V- Son las siguientes funciones analíticas?

$$\begin{array}{llllll}
(a) & u = x & (b) & v = xy & (c) & u = xy \\
(d) & u = e^x \cos y & (e) & u = \ln(x^2 + y^2) & (c) & v = \arg z \\
(d) & u = \sin x \cosh y & (e) & v = -\sin x \sinh y & (c) & u = x/(x^2 + y^2)
\end{array}$$

VI- Encontrar las soluciones de las ecuaciones:

$$(a) \quad z^3 = 27 \quad (b) \quad z^4 + 5z^2 = 36 \quad (c) \quad z^4 - (1+4i)z^2 + 4i = 0$$

VII- Encontrar todas soluciones de las ecuaciones:

$$(a) \quad e^z = 1 \quad (b) \quad e^z = 2 \quad (c) \quad e^z = -2 \quad (e) \quad e^{z^2} = 1$$

VIII- Demostrar que las siguientes funciones armónicas y encontrar las conjugadas respectivas:

$$(a) \quad u = 3e^{-x}\cos y \quad (b) \quad u = e^{xy}\cos(x^2/2 - y^2/2) \quad (c) \quad v = e^x \cos y$$

IX- Resolver las ecuaciones para z:

$$(a) \quad \ln z = \pi/2 \quad (b) \quad \ln z = i\pi/2 \quad (c) \quad \ln z = 1 + i\pi$$

X- Dibujar la imagen de las siguientes regiones por la aplicación $w = z^2$-

$$\begin{array}{llll} (a) & |z| > 2 & (b) & |z| \leq 4 \\ (c) & 2 < |z| < 3, |\arg z| < \pi/4 & (d) & 1/2 < |z| < 2, \quad \Re z \geq 0 \end{array}$$

XI- Determine los puntos en el plano z en el cual la aplicación $w = f(z)$ deja de ser *boneormd*:

$$\begin{array}{llll} (a) & w = z^4 & (b) & w = \sin z \\ (c) & w = z + z^{-1} (d) & w = z^4 - z^2 & \end{array}$$

XII- Represente las siguientes curvas en el plano complejo en forma paramétrica:

$$\begin{array}{llll} (a) & x^2 + y^2 = 4 & (b) & y = \ln z \\ (c) & y = 4x^2 (d) & y = 3x - 4 & \end{array}$$

XIII- Evalué las siguientes integrales:

$$(a)\quad \oint_C \frac{dz}{z} \qquad\qquad (b)\quad \oint_C \frac{z^2-z+1}{z^3-z^2}dz$$

$$(c)\quad \oint_C \frac{dz}{z^2-1} \qquad\qquad (b)\quad \oint_C \frac{z}{z^2+1}$$

cuando

$$(1)\quad C: |z-2|=1 \quad (2)\quad C: |z|=2 \qquad (3)\quad C: |z|=1/2$$

$$(4)\quad C: |z-1|=1 \quad (5)\quad C: |z+i|=1$$

XIV- Evalúense las siguientes integrales por el método de residuos:

$$(a)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^5} \qquad (b)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^4+1)^2}dx \quad (c)\quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^6}dx$$

$$(d)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin mx}{1+x^4}dx \quad (e)\quad \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^4}dx \qquad (f)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{(1+x^2)^2}dx$$

XV- Considere el *bamaio cd variaalds* :

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta \longrightarrow -i\oint_C \left(f(\frac{z-z^{-1}}{2i},\frac{z+z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{z},\quad C: |z|=1$$

y evalué las integrales siguientes:

$$(a)\quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} \qquad\qquad (b)\quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$$

$$(c)\quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{8+\sin\theta} \qquad\qquad (d)\quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{5+4\cos\theta}$$