UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Complemento de Cálculo

(521234)

GUIA DE EJERCICIOS N^o 3

Preparación para el Examen

1er semestre 2002

Complemento de Cálculo

1er semestre 2002

Índice General

1 Problemas de EDP y resonancia

Ej. 1: Encontrar la solución de la ecuación del calor en una barra de largo L :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < L, \end{cases}$$

para las siguientes condiciones iniciales y de borde

a) $u(x,0) = 1$, $u(0,t) = 0$, y $u_x(L,t) = 0$,

b) $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, y $u_x(L,t) = 1$,

c) $u(x,0) = 1$, $u(0,t) = 0$, y $u_x(L,t) = 1$,

d) $u(x,0) = 1$, $u_x(0,t) = 1$, y $u(L,t) + u_x(L,t) = 1$,

e) $u(x,0) = x$, $u(0,t) + u_x(0,t) = 0$, y $u(L,t) = 0$,

Ej. 2: Resolver el problema de la cuerda vibrante con un término fuente

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin t, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 & 0 < x < L, \end{cases}$$

para las siguientes condiciones de borde

a) $u(0,t) = 0$, y $u(L,t) = 0$, b) $u_x(0,t) = 0$, y $u_x(L,t) = 0$,

c) $u(0,t) = 0$, y $u_x(L,t) = 0$, d) $u(0,t) = 0$, y $u(L,t) + u_x(L,t) = 0$,

¿para que valores de L hay resonancia en cada uno los 4 casos ?

Ej. 3: Resolver la ecuación del calor definida en el círculo de radio 1 :

$$\begin{cases} \partial_t u - \left(\partial_{rr} u + \frac{1}{r}\partial_r u\right) = f(r), & 0 < r < 1, \quad t > 0 \\ u(1,t) = 0, & \qquad\qquad\quad t > 0 \\ u(r,0) = 0, & 0 < r < 1, \end{cases}$$

con f una función dada que puede expresarse en términos de una serie de funciones de Bessel.

2 Cálculo de Integrales y Residuos en variable compleja

Ej 4.: Evalue las siguientes integrales

(a) $\displaystyle \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z(z^2-1)}$ (b) $\displaystyle \oint_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)}$

(c) $\displaystyle \oint_{|z|=6} \frac{dz}{1-\cos z}$ (d) $\displaystyle \oint_{|z-2|=1} \frac{\ln z}{(z-2)^2} dz$

(e) $\displaystyle \oint_{\substack{\text{en el cuadrado} \\ |x|\le 2,\ |y|\le 2}} \frac{dz}{z(z-1)(z-3)^2}$ (f) $\displaystyle \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^2}$

(g) $\displaystyle \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+4\cos\theta} d\theta$ (h) $\displaystyle \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{3+\cos\theta} d\theta$

Ej 5.: Evalue las siguientes integrales con limites infinitos :

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+2x^2)}$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{1+x^4} dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1} dx$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)\cos 2x}{x^2+x+1} dx$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^4)} dx$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2}{4\pi^2-x^2} dx$ (j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{(4\pi^2-x^2)^2} dx$

(k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 4x dx$

Ej 6.: Se define la Transformada de Fourier como, $\hat{f}(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función a variable real cualquiera. Calcule las series de Fourier de :

(a) $f(x) = e^{-|x|}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ (c) $f(x) = e^{-ax^2}$

(d) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \geq A \\ 0 & \text{si } |x| > A \end{cases}$

3 Cálculo de Variaciones

Ej 7.: Encuentre los extremales (minimos o máximos locales) de los siguientes funcionales

(a) $J(y) = \int_a^b (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx$ (b) $J(y) = \int_a^b (y'^2/x^3) dx$

(c) $J(y) = \int_a^b (y^2 - y'^2 - 2y \cosh x) dx$ (d) $J(y) = \int_a^b (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx$

(e) $J(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x} dx$ (f) $J(y) = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx$

(g) $J(y) = \int_a^b (x - y)^2 dx$ (h) $J(y) = \int_0^1 (\frac{1}{2}y'2 + yy' + y' + y) dx$

Ej 8.: En un día caluroso, la velocidad de la luz a una distancia y por encima de la superficie plana de una capa de aire está dada (aproximadamente) por $V = V_0(1 - \alpha y)$, donde V_0, α son constantes ($\alpha << 1$). El principio de Fermat afirma que la trayectoria de luz minimiza el tiempo de recorrido. Encontrar la forma del rayo de luz $y(x)$, desde $(x, y) = (0, 0)$ hasta $(x, y) = (b, 0)$.

4 Soluciones

Ej 1.:

(a) $$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} e^{-((2n+1)\pi/2L)^2 t} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

(b) $u(x,t) = x$

(c) $u(x,t)$ es la suma de las soluciones en (a) y (b)

(d) $u(x,t) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2L\cos\alpha_n}{L\cos^2\alpha_n + \alpha_n^2} e^{-(\alpha_n/L)^2 t} \cos \frac{\alpha_n x}{L}$, con α_n la sucesión de reales positivos tendiendo a infinito, y siendo solución de $\tan\alpha = L/\alpha$.

(e) $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\alpha_n^2 t/L^2} \left(\sin \frac{\alpha_n x}{L} - \frac{\alpha_n}{L} \cos \frac{\alpha_n x}{L} \right)$ con α_n la sucesión de reales positivos tendiendo a infinito, y siendo solución de $\tan\alpha = \alpha/L$, y

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\displaystyle\int_0^L x \left(\sin \frac{\alpha_n x}{L} - \frac{\alpha_n}{L} \cos \frac{\alpha_n x}{L} \right) dx}{\displaystyle\int_0^L \left(\sin \frac{\alpha_n x}{L} - \frac{\alpha_n}{L} \cos \frac{\alpha_n x}{L} \right)^2 dx} \\ &= \frac{-2(\cos\alpha_n L^2 + {\alpha_n}^2 \cos\alpha_n - L)}{\alpha_n \left(\cos^2\alpha_n + L + {\alpha_n}^2 \cos^2\alpha_n / L^2 + {\alpha_n}^2/L - 2 \right)} \end{aligned}$$

Ej 2.:

(a) La solución se busca de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Con lo cual, el problema de Sturm-Liouville está dado por :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & \forall x \in (0,L) \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0 \end{cases}$$

cuya solución son los valores propios $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, y $X_n = \sin \frac{n\pi x}{L}$. Entonces :

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Para determinar $T_n(t)$ se debe reemplazar en la ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} = \sum_{n\geq 1} \left(T_n''(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} T_n(t) \right) \sin \frac{n\pi x}{L} = \sin t = 1 \cdot \sin t$$

Pero para igualar términos, y deducir las funciones $T_n = T_n(t)$, es necesario escribir 1 en términos de su serie $1 = \sum_{n\geq 1} b_n \sin n\pi x/L$. Así, prolongando 1 al intervalo $(-L, 0)$ como una función impar, y luego periódica, se tiene que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 2\frac{1-\cos n\pi}{n\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L}$$

Es decir

$$\begin{cases} T_n'' + \frac{n^2\pi^2}{L^2} T_n = \frac{4}{n\pi} \sin t, & \forall t > 0 \\ T_n(0) = 0, \quad T_n'(t) = 0 \end{cases}$$

para n impar ($T_n(t) = 0$ si n es par). Si $L \neq n\pi$, una solución particular de esta ecuación (por variación de parametros), es $T_{n,p}(t) = \dfrac{4/n\pi}{n^2\pi^2/L^2 - 1} \sin t$. La solución general es $T_{n,h} = a \cos \frac{n\pi t}{L} + b \sin \frac{n\pi t}{L}$, y reemplazando $T_n = T_{n,p} + T_{n,h}$ en las condiciones iniciales se deducen los coeficientes a y b. La solución es

$$T_n(t) = \frac{4/n\pi}{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - 1} \left(\sin t - \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \qquad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Luego, la solución es en este caso es

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi L^2}{(2n+1)((2n+1)^2\pi^2 - L^2)} \left(\sin t - \sin \frac{(2n+1)\pi t}{L} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L}$$

y hay resonancia para $L = n\pi$, para todo n entero positivo impar.

(b) $\quad u(x,t) = t - \sin t$.

Entra en resonancia para el valor propio $\lambda = 0$ y para todo L, pues la solución crece infinitamente independientemente del valor L.

(c) $$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16\pi L^2}{(2n+1)((2n+1)^2\pi^2 - 4L^2)} \left(\sin t - \sin \frac{(2n+1)\pi t}{2L} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

y hay resonancia para $L = n\pi/2$, para todo n entero positivo impar.

(d) $\quad u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\alpha_n^2/L^2 - 1} \left(\sin t - \sin \frac{\alpha_n t}{L} \right) \sin \frac{\alpha_n x}{L}$ con α_n la sucesión de reales positivos tendiendo a infinito, y siendo solución de $\tan \alpha = \alpha/L$, y

$$C_n = \frac{\displaystyle\int_0^L 1 \sin \alpha_n x dx}{\displaystyle\int_0^L \sin^2 \alpha_n x dx} = 2\,\frac{L\,(\cos \alpha_n - 1)}{\alpha_n\,(\cos^2 \alpha_n - L)}$$

Hay resonancia para $L = \alpha_n$, para todo n.

Ej 3.:

(a) $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\alpha_n^2}\left(1 - e^{-\alpha_n^2 t}\right) J_0(\alpha_n r)$ donde J_0 es la función de Bessel de primera especie y orden 0, α_n la n-ésima raiz, con $n = 1, 2, \ldots$, y $C_n = \frac{2}{J_1(\alpha_n)^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\alpha_n r)$

Ej 4.:

(a) 0. (b) $2\pi i(e-2)$. (c) 0. (d) πi (considerando solo cuando $-\pi < \Im(\ln z) < \pi$). (e) $5\pi i/18$. (f) $\pi(a^2+b^2)/a^3b^3$. (g) $\pi/6$. (h) $-(3\sqrt{2}-4)\pi/4$.

Ej 5.:

(a) $\pi/\sqrt{2}$. (b) $2^{-3/2}\pi$. (c) $(\sqrt{2}-1)\pi/2$. (d) $2\pi/\sqrt{3}$. (e) $\frac{1}{2}\pi e^{-1/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{4}\pi + 2^{-1/2}\right) = \pi 2^{-3/2} e^{-1/\sqrt{2}}(\cos 2^{-1/2} - \sin 2^{-1/2})$. (f) $2\pi 3^{-1/2} e^{-\sqrt{3}/2} \cos\frac{1}{2}$. (g) $\pi 3^{-1/2} e^{-\sqrt{3}/2}\left(\cos\frac{1}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{1}{2}\right)$. (h) $\pi(1 - e^{-1/sqrt2}\cos(1/\sqrt{2}))$. (i) 0. (j) $1/(8\pi)$ (k) $\pi^{1/2}e^{-4}$.

Ej 6.:

(a) $2/(1+\lambda^2)$ (b) $\pi e^{|\lambda|}$ (c) $(\pi/a)^{1/2} e^{-\lambda^2/4a}$ (d) $1/(a - i\lambda)$ (e) $(2/\lambda)\sin A\lambda$

Ej 7.:

(b) $y = C_1 x^4 + C_2$ (d) $y = \frac{1}{2}xe^x + C_1 e^x + Ce^{-x}$ (e) $(y - C_1)^2 + x^2 = C_2$ (f) $y = C_1 \cosh\frac{x + C_2}{C_1}$ (g) $y = x$ (h) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 1)$ (sin necesidad en este caso de especificar $y(0)$ e $y(1)$).

Ej 8.:

El tiempo recorrido esta dado por $T = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{V_0(1-\alpha y)}$. La ecuación de Euler implica $y' = \frac{1-\alpha y}{\sqrt{C^2 - (1-\alpha y)^2}} \Rightarrow (\alpha x - k)^2 + (\alpha y - 1)^2 = C^2$, un círculo.