UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía N°7: Sistemas de Ecuaciones Lineales Métodos Iterativos

Cálculo Numérico 521230, 2017-2

- 1. Considere el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Notar que la solución exacta del sistema es $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - a) Verificar que A es diagonal dominante estricta.
 - b) Realizar dos iteraciones del Método de Jacobi comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - c) Realizar dos iteraciones del Método de Gauss-Seidel comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 2. Considere el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Notar que la solución exacta del sistema es $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - a) Verificar que A es diagonal dominante estricta.
 - b) Realizar dos iteraciones del Método de Jacobi comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - c) Realizar dos iteraciones del Método de Gauss-Seidel comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 3. Considere el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Notar que la solución exacta del sistema es $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a) ¿Ès $\acute{\bf A}$ es diagonal dominante estricta?. ¿Es ${\bf A}$ simétrica y definida positiva?
 - b) ¿Cuál método iterativo recomendaría para resolver el sistema?.
 - c) Realizar dos iteraciones del método recomendado en la pregunta anterior, comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 4. En la página web del curso se encuentran dos funciones MATLAB que resuelven $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilizando los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Ellas son jacobisol.m y gaussseidelsol.m.
 - a) Utilícelos para comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores.
 - b) Además, en cada ejercicio, considere maxiter = 100.
- 5. Se quiere resolver, mediante un esquema iterativo, el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Se descompone \mathbf{A} como: $\mathbf{A} = \mathbf{N} \mathbf{P}$ con \mathbf{N} invertible y sabemos que el algoritmo del esquema general es:

Dado el vector inicial
$$\mathbf{x}^{(0)}$$
, for $k = 1, 2, ...$

$$\mid \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{P}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b},$$
 end

- Además, recordemos que la matriz de iteración se define como $\mathbf{M} := \mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}$.

 a) Considere $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 \\ 1 & -5/3 \end{pmatrix}$. Realizar cuatro iteraciones del esquema general partiendo con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿El algoritmo converge? ¿Por qué?.**Indicación:** Analizar la matriz de iteración y notar que la solución exacta del sistema es $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- b) Considere $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Realizar cuatro iteraciones del esquema general con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿El algoritmo converge? ¿Por qué?.