UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

OPTIMIZACIÓN III, FLUJO EN REDES (525551, 523534)

Tarea 1

(Fecha de entrega: 21 de abril de 2005.)

1. i) Una manera alternativa para determinar los grafos predecesores de los caminos más cortos en el algoritmo de Floyd -Warshall es usar los valores ϕ_{ij}^k en vez de los valores π_{ij}^k, donde ϕ_{ij}^k es definido como el nodo intermedio más grande perteneciente al camino p_{ij}^k definido en clase.

   a) Defina de manera recursiva los valores de $\phi_{ij}^k, \forall i, j, k = 1, \ldots, n$.

   b) Modifique el algoritmo de Floyd-Warshall para calcular los valores de ϕ_{ij}^k.

   c) Explique cómo determinar un camino más corto del nodo i al nodo j usando los valores ϕ_{ij}^k.

   ii) Determine cuáles de los algoritmos vistos en clases, que resuelven el problema del camino más corto, permiten determinar si un grafo dirigido sin pesos en los arcos es un grafo fuertemente conexo.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido con $V = \{1, \ldots, n\}$ y $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de peso en los arcos de G tal que G no tiene ciclos de peso negativo. Sea $\tilde{w} = \text{PesoPositivo}(G, w)$ una nueva función de peso construída a partir de G y w según el siguiente algoritmo

```
PesoPositivo (G,w)
n ← número de nodos de G
t ← 1,
While t ≤ n
   i ← 1
   While i < n
   do w̄_i = mín_j w(i, j)
      If w̄_i < 0
         do for all j = 1, ..., n
            w(i, j) ← w(i, j) − w̄_i
            w(j, i) ← w(j, i) + w̄_i
            i ← i + 1
   end While
   If w(i, j) ≥ 0, ∀(i, j) ∈ E
   return w
t ← t + 1
end While
return w.
```

   i) Pruebe que $\tilde{w}(i, j) \geq 0, \ \forall (i, j) \in E$.

ii) Pruebe que Dijkstra($G, \tilde{w}, s$) encuentra caminos más cortos como solución al problema PCC con instancia (G, w, s). ¿Qué pasa con los pesos de los caminos más cortos?.

iii) Aplique Dijkstra($G, \tilde{w}, 2$) al grafo G y función de peso w mostrados en la figura 1 para encontrar una solución al PCC con instancia $(G, w, 2)$.

iv) ¿Cuál es la complejidad del procedimiento?.

3. i) Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido con $V = \{1, \ldots, n\}$ y $w : E \to \mathbb{R}$ una función de peso sobre los arcos de G. Suponga que G no tiene ciclo de peso negativo ni cero. Sea $\forall i, j \in V$, p_{ij} un camino de i a j de peso mínimo igual a $\delta(i, j)$. Y denotemos por $\delta^*(i, j)$ el peso de un ciclo más corto C_{ij} conteniendo los vértices i y j. Entonces explique bajo qué condiciones se tiene que:

$$\delta^*(i, j) = \delta(i, j) + \delta(j, i).$$

ii) Para el grafo y función de peso de la figura 1, encuentre un ejemplo de p_{17} y de p_{71}, usando alguno de los algoritmos vistos en clases. Explique si a partir de su solución se tiene que: $\delta^*(1, 7) = \delta(1, 7) + \delta(7, 1)$.

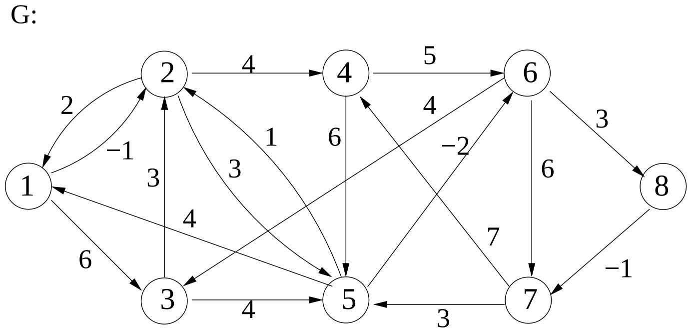

Figura 1:

Importante: La aplicación de alguno de los algoritmos vistos en clases para resolver el problema PCC puede ser a través de un pequeño programa o bien el desarrollo a mano. En el primer caso deben entregar el código fuente y la manera de compilarlo. En el segundo caso, se debe entregar el detalle paso a paso de la ejecución del algoritmo usado.