UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREA 2.
Análisis Funcional y Aplicaciones I.
525401.
Segundo Semestre 2006.

Caracterización del dual de ℓ^1 : $\left(\ell^1\right)' \equiv \ell^\infty$.

El objetivo de esta primera parte es probar que el dual de ℓ^1 es isomorfo a ℓ^∞. Para ello, considere la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} T: & \ell^\infty & \to & \left(\ell^1\right)' \\ & x & \mapsto & Tx = \varphi_x \end{array} \tag{1}$$

con φ_x definido por $< \varphi_x, y >= \varphi_x(y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k y_k$ para todo $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, y $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

1. Pruebe que T está bien definido, es lineal y continuo.
2. Pruebe que $\|Tx\| = \|x\|$ y que T es inyectivo.
3. Para demostrar que T es sobreyectivo considere $\varphi \in \left(\ell^1\right)'$ y prosiga de la siguiente manera:
   (a) Sea $w = (w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definido por $w_k = 1/k$, para todo $k \in \mathbb{N}$; pruebe que $w \in \ell^2$.
   (b) Pruebe que la aplicación $f \in \ell^2 \mapsto < \varphi, wf >$, con $wf = (f_k/k)_{k\in\mathbb{N}}$, es una aplicación lineal y continua en ℓ^2.
   (c) Usando el Teorema de representación de Riesz para la aplicación lineal continua en (b), pruebe que existe un $z \in \ell^2$ tal que
   $$< \varphi, wf >= (z, f) = \sum_{k\in\mathbb{N}} z_k f_k, \qquad \forall f \in \ell^2.$$
   (d) Defina $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_k = kz_k$; luego tomando
   $$f_k = \begin{cases} 1 & \text{si } z_k > 0 \text{ e } k \leqslant n \\ -1 & \text{si } z_k \leqslant 0 \text{ e } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \qquad \in \ell^2,$$
   pruebe usando la ecuación en (c) que $\sup_{k\leqslant n} |x_k| \leqslant \|\varphi\|_{(\ell^1)'}$.
   (e) Pasando al límite cuando $n \to \infty$ en (d) deduzca que existe $x \in \ell^\infty$ tal que $\|x\|_{\ell^\infty} \leqslant \|\varphi\|_{(\ell^1)'}$ y además $< \varphi, wf >= \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k w_k f_k$, para todo $f \in \ell^2$.
   (f) Sea finalmente $y \in \ell^1$; escogiendo $f_k = y_k/w_k$ si $k \leqslant n$, y $f_k = 0$ si $k > n$, y luego pasando al límite cuando $n \to \infty$, deduzca que $\varphi = \varphi_x = Tx$.

El dual de ℓ^∞ no se identifica con ℓ^1 : $\left(\ell^1\right)' \not\equiv \ell^\infty$.

Haciendo el razonamiento equivalente al de la primera parte de esta tarea, considere:

$$\begin{array}{rccc} S: & \ell^1 & \to & (\ell^\infty)' \\ & y & \mapsto & Sy = \psi_y \end{array}$$

con ψ_y definido por $< \psi_y, x >= \psi_x(y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k y_k$ con $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, y $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

4. Verifique que S está bien definida, es lineal, continua, e inyectiva con $\|Sy\| = \|y\|$ para todo $y \in \ell^1$, y luego concluya que que ℓ^1 es isomorfo a un subconjunto cerrado del dual de ℓ^∞ (pero no necesariamente a ℓ^∞ entero).

5. Para comprobar que hay elementos del dual de ℓ^∞ que no tienen representante en ℓ^1, considere el funcional lineal continuo de ℓ^∞ en $\mathbb{R}$ definido como el límite gereneralizado de Banach (analizado en la Tarea 1). Pruebe que si este funcional tuviera un representante $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, entonces (mediante la aplicación a suceciones de ℓ^∞ adecuadas) $y_k = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ lo que es un absurdo.

Otras particularidades de los espacios de dimensión infinita ℓ^1, ℓ^2 y ℓ^∞.

6. Pruebe que $c_0 = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \mid \lim_n x_n = 0\right\}$ no tiene suplementario topológico en ℓ^∞. Para ello siga los siguientes pasos:

   (a) Suponga que c_0 admite un suplementario topológico, y deduzca que c_0 es entonces imagen de una proyección continua $P : \ell^\infty \to \ell^\infty$, y también el nucleo de $T = Id - P$; designando $\pi_n : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ la proyección de la n-ésima coordenada (*i.e.* $\pi_n(x) = x_n$), deduzca que c_0 es la intersección numerable de hiperplanos cerrados: $c_0 = N(T) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(\pi_n \circ T)$.

   (b) Pruebe que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe un conjunto infinito $N_\lambda \subset \mathbb{N}$ de modo que si $\lambda \neq \mu$ se tiene que $N_\lambda \cap N_\mu$ es un conjunto vacío, o a lo más finito: para ello considere una ordenación $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de los racionales y para cada λ elija una sucesión de racionales S_λ distintos que converja a λ; tome $N_\lambda = \{n \in \mathbb{N} \mid q_n \in S_\lambda\}$.

   (c) Sea x_λ la función característica de N_λ, pruebe que $x_\lambda \in \ell^\infty \setminus c_0$.

   (d) Sea $T_n = \pi_n \circ T \in (\ell^\infty)'$ definido en (a). Sea $A_k = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid |T_n(x_\lambda)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}$. Pruebe que A_k es un conjunto finito.

   (e) Deduzca de (d) que $A = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid |T_n(x_\lambda)| \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ es numerable, y por lo tanto $\complement(N(T))$ en ℓ^∞ también lo es.

   (f) Deduzca que existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus A$ para el cual $x_\lambda \in N(T) \setminus c_0$ lo que contradice (a).

7. Sea $N = T(c_0) \subset (\ell^1)'$ con T definido en (1) y c_0 definido en "6.". Pruebe que $N^{\perp\perp} = (\ell^1)' \equiv \ell^\infty$, es decir $N^{\perp\perp} \neq \overline{N}$.

8. Sea $A : \ell^2 \to \ell^2$ definido por $Ax = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Pruebe que $A = A^*$.; pruebe que A^* (resp. A) es inyectivo pero A (resp. A^*) no es sobreyectivo; pruebe que A y A^* son de imagenes densas no cerradas.

9. Diga en qué los resultados en 6., 7., 8., no se asemejan a lo que conoce en dimensión finita.

Fecha de Entrega : 27 de Septiembre de 2006.
MSC/msc
(13-Septiembre-2006)