UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA CERTAMEN 1 (27/09/2004)

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)

RBP/LNB/rbp

Problema 1. Estudie la existencia y unicidad de la solución del PVI definido por la ecuación

$$y' = \left(\frac{\sqrt{1+xy}-1}{x} \right)^2 ,$$

cuando las condiciones iniciales son
a) $y(2) = 10$;
b) $y(-1) = 1$;
respectivamente. **12 puntos**

Pauta

La ecuación es de la forma $y' = f(x,y)$, siendo $f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{1+xy}-1}{x} \right)^2$.

i) f es continua en $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\quad xy \geq -1 \,, x \neq 0\}$
ii) Derivando f respecto a y, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sqrt{1+xy}-1}{x\sqrt{1+xy}} ,$$

la cual es continua en $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\quad xy > -1 \,, x \neq 0\}$.
De esta manera, el teorema de existencia y unicidad (visto en clase), garantiza la solubilidad única de la ecuación sobre la región (conexa) $\Omega_1 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\quad xy > -1 \,, x > 0\}$ o $\Omega_2 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\quad xy > -1 \,, x < 0\}$. **6 puntos**

a) Como $(2,10) \in \Omega_1$, entonces el Teorema citado antes nos dice que el PVI $y' = f(x,y)$, $y(2) = 10$ admite solución única definida sobre un intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$ que contiene a $x_0 = 2$. **3 puntos**

b) En este caso, dado que $(-1,1) \notin \Omega_1$ y $(-1,1) \notin \Omega_2$, no podemos asegurar que el PVI $y' = f(x,y)$, $y(-1) = 1$ tenga solución única. **3 puntos**

Problema 2. Resolver **12 puntos**

$$(-x\,y\,\mathrm{sen}(x) + 2\,y\,\cos(x))\,dx + 2\,x\,\cos(x)\,dy = 0 .$$

Pauta

Notamos que la ecuación se puede escribir como

$$y\,(-x\,\mathrm{sen}(x) + 2\,\cos(x))\,dx + 2\,x\,\cos(x)\,dy = 0 ,$$

la cual corresponde a una de variables separables. Luego, multiplicando ésta por $\dfrac{1}{2\,y\,x\,\cos(x)}$, resulta

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}+\frac{2}{x}\right)dx+\frac{1}{y}\,dy=0 \qquad \boxed{\textbf{6 puntos}}$$

donde hemos de considerar que $\boxed{y\,x\,\cos(x)\neq 0}$. Finalmente, la solución general correspondiente a esta ecuación es

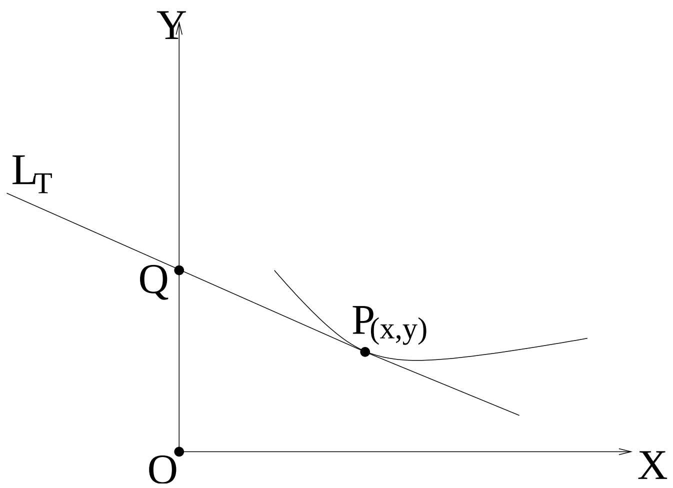
$$y(x)=\frac{C}{|x|\,|\cos(x)|^{1/2}}\,,\qquad C\in\mathbf{R}\,.$$

Por otro lado, de la restricción indicada previamente, se desprende que una posible solución singular sería $y\equiv 0$, pero ésta ya forma parte de la solución general encontrada (para $C=0$), por lo cual sólo la solución general hallada resuelve la ecuación diferencial. $\boxed{\textbf{6 puntos}}$

Problema 3. Determine la familia de curvas para las cuales la longitud del segmento situado sobre cualquier recta tangente a la curva, comprendida entre el punto de tangencia y el eje Y, es igual a la longitud del segmento comprendido entre el origen de coordenadas y el punto de intersección de dicha recta tangente con el eje Y. $\boxed{\textbf{18 puntos}}$

Pauta

La figura adjunta modela una de las curvas que andamos buscando.



Este tipo de curvas son tales que $\boxed{PQ=OQ}$, por ello sólo nos basta con calcular las coordenadas del punto $Q(0,b)$. Como Q pertenece a la recta tangente a la curva que pasa por $P(x,y)$ (punto de tangencia), resulta

$$b-y=y'\,(0-x)\;\Rightarrow\;b=y-x\,y'\,,$$

con lo cual se tiene $PQ=\sqrt{x^2+(b-y)^2}$ y $OQ=|b|$, y de esta manera la condición que caracteriza a esta curva se expresa como

$$\sqrt{x^2+x^2\,(y')^2}=|y-x\,y'|\,,$$

la cual, una vez que elevamos al cuadrado y simplificamos, produce la ecuación diferencial de primer orden $\boxed{2\,x\,y\,y' = y^2 - x^2}$. **9 puntos**

La siguiente etapa es encontrar la solución de esta ecuación diferencial, con lo cual concluye el problema. Notamos que dicha ecuación es del tipo Bernoulli, por lo cual, haciendo la sustitución $\boxed{z = y^2}$, la ecuación se transforma en $z' - \frac{1}{x} z = -x$, cuya solución general es $z(x) = C\,x - x^2$, donde C es una constante real arbitraria. Finalmente, la familia de curvas solicitada está dada por $y^2 = C\,x - x^2$. **9 puntos**

Observación: Nótese que la ecuación $2\,x\,y\,y' = y^2 - x^2$ es de coeficientes homogéneos, por tanto, escribiendo la ecuación en la forma diferencial correspondiente: $\boxed{2\,x\,y\,dy = (y^2 - x^2)\,dx}$, y haciendo el cambio $\boxed{y = v\,x}$, la ecuación se transforma en $\boxed{2\,x\,v\,dv = -(v^2 + 1)\,dx}$, la cual es de variables separables, y tiene por solución general: $v^2 = \dfrac{C - x}{x}$, de donde resulta $y^2 = v^2\,x^2 = C\,x - x^2$.

Problema 4. Encuentre la solución general de la ecuación de orden superior **18 puntos**

$$y'' + 2\,y' + y = \mathrm{e}^{-x}\,\ln(x)\,, \qquad x > 0\,.$$

Pauta

Teniendo presente el principio de superposición, la solución general de esta ecuación puede escribirse como $\boxed{y(x) = y_H(x) + y_P(x)}$, donde $y_H(x)$ denota la solución general de la ecuación homogénea asociada, e $y_P(x)$ es una solución particular de la ecuación original.

a) **Cálculo de** $y_H(x)$: consideramos la ecuación $y'' + 2\,y' + y = 0$, la cual es equivalente a la ecuación de operadores $(D^2 + 2\,D + 1)y = 0$, cuya solución general es $\boxed{y_H(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{-x}}$, con C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. **7 puntos**

b) **Cálculo de** $y_P(x)$: usaremos el método de variación de parámetros. Por esto, consideramos que $\boxed{y_P(x) = C_1(x)\,\mathrm{e}^{-x} + C_2(x)\,x\,\mathrm{e}^{-x}}$, donde $C_1(x)$ y $C_2(x)$ se encuentran a partir de la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-x}\,\ln(x) \end{pmatrix},$$

siendo $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ y $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$. Resolviendo este sistema usando la regla de Cramer, se encuentra que

$$C_1'(x) = -x\,\ln(x) \;\Rightarrow\; C_1(x) = -\frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{4}\,,$$

$$C_2'(x) = \ln(x) \;\Rightarrow\; C_2(x) = x\,\ln(x) - x\,.$$

De esta manera, se tiene que $y_P(x) = \left(\dfrac{x^2}{2}\ln(x) - \dfrac{3\,x^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}$. **9 puntos**

Finalmente, la solución general de la ecuación es $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{-x} + \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{3\,x^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}$, donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. **2 puntos**