UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 1
ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA (522115) (29/04/2004).

P1. a) Pruebe por inducción que $\forall\ n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$$ **(10 Ptos.)**

b) La suma de cinco números en progresión aritmética es igual a 90. Se sabe que el último número es cinco veces el primero. Determine los cinco números de la progresión.

(10 Ptos.)

Solución

a) Definición de $p(n)$:

$$p(n)\ :\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}\qquad \forall n\ \in\ \mathbb{N}.$$

(2 puntos)

Verifiquemos si $p(1)$ es cierta.

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2},\quad \text{y}\quad \frac{2^{1+1}-1-2}{2^1}=\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $p(1)$ es verdadero. **(3 puntos)**
Supongamos $p(n)$ verdadero (H.I.) y demostremos que $p(n+1)$ es también verdadero.
$p(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\ (\text{por H.I.})=$$

$$\frac{2(2^{n+1}-n-2)+n+1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+2}-2n-4+n+1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+2}-n-3}{2^{n+1}}.$$

Esto último es igual a la expresión $\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$ evaluado en $n+1$. Así $p(n+1)$ es verdadero y por el PIM, $p(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$. **(5 puntos)**

b) Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los números buscados en progresión aritmética. Luego, se tiene que:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = 90$ **(2 puntos)**

2) $a_5 = 5a_1$ **(1 punto)**

Por lo tanto, de ecuaciones 1) y 2) se tiene que: $6a_1 = 36 \Longrightarrow a_1 = 6.$ **(2 puntos)**
Luego, reeplazando el valor de a_1 en ecuación 2) se tiene que: $a_5 = 30$ **(2 puntos)**
Además, $a_5 = a_1 + 4d \Longrightarrow 30 = 6 + 4d \Longrightarrow d = 6.$ **(2 puntos)**
Por lo tanto, la progresión es: $6, 12, 18, 24, 30.$ **(1 punto)**

P2. a) Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función definida por:

$$f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si} \quad n \geq 3, \\ \\ n + 1 & \text{si} \quad n < 3. \end{cases}$$

i) Determine si f es o no una función biyectiva. **(5 Ptos.)**

ii) Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \ n \leq 9 \quad \text{y } n \text{ es par}\}$. Calcule $f(A)$. **(5 Ptos.)**

b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por: $f(x) = x^2 - 4x$

i) Encuentre el recorrido de f. **(5 Ptos.)**

ii) Determine si f es una función par, impar o ninguna de las dos. **(5 Ptos.)**

Solución

a) i) $f(2) = 3$ y $f(4) = 3$, es decir, $f(x)$ no es inyectiva y por lo tanto $f(x)$ no es biyectiva. **(5 Ptos.)**

a) ii) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ **(1 Pto.)**, así $f(A) = \{f(2), f(4), f(6), f(8)\}$ **(2 Ptos.)** $=\{3, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 7\}.$ **(2 Ptos.)**

b) i) $Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} : \ y = x^2 - 4x, \ x \in \mathbb{R}\}.$ **(1 Pto.)**
Pero,

$$y = x^2 - 4x \Longleftrightarrow x^2 - 4x - y = 0 \Longrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4y}}{2}.$$

Luego, $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow 16 + 4y \geq 0 \Longrightarrow y \geq -4.$ **(3 Ptos.)**
Por lo tanto, $Rec(f) = [-4, +\infty[.$ **(1 Pto.)**

b) ii) $Dom(f) = \mathbb{R}$, es decir, $Dom(f)$ es simétrico con respecto al origen. Pero, $f(1) = -3$ y $f(-1) = 5$, luego $f(x)$ no es una función par. Por otro lado, $f(1) \neq -f(-1)$, así $f(x)$ tampoco es una función impar. Por lo tanto, $f(x)$ no es una función par ni impar. **(5 Ptos.)**

P3. Sea $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 2, \\ \\ \frac{1}{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

a) Encuentre $Dom(f)$. **(5 Ptos.)**

b) Pruebe que f no es inyectiva. **(5 Ptos.)**

c) Sea $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} :\longrightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por $g(x) = x - 2$.
Defina la función suma $f + g$. **(10 Ptos.)**

Solución

a)

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}, x < 2, \ x^2 \in \mathbb{R}\} \cup \{x \in \mathbb{R}, x \geq 2, \ \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}\} =$

$\{x \in \mathbb{R} : \ x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}, \ x \geq 2, \ x \neq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \ x > 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$.

(5 Ptos.)

b) $f(-1) = 1^2 = 1 = (-1)^2 = f(1)$ donde -1 y 1 pertenecen al $Dom(f)$. Por lo tanto, $f(x)$ no es inyectiva. **(5 Ptos.)**

c) $Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} : \ x - 2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ **(1 Pto.)**

Así, $Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g) = \mathbb{R} - \{2\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{2\}$. **(3 Ptos.)**

Por lo tanto, $f + g : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si} \quad x < 2, \\ \\ \frac{1}{x-2} + x - 2 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

(6 Ptos.)