Feuille d'exercices n^o 1

1. **Deuxième forme géométrique du théorème de Hahn-Banach**

   Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux convexes, non vides, disjoints (E est une espace vectoriel normé). On suppose que A est fermé et que B est compact.

   Montrer qu'il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement A et B.

2. Soit E un espace de Banach réel. On considère une famille finie de E' : $\{x_i^*\ , i = 1 \cdots n\}$ et une forme linéaire sur E : $x^* \in E'$ telles que

   $$N(x^*) \supset \bigcap_{i=1}^{n} N(x_i^*)\ .$$

   Montrer que x^* est combinaison linéaire des x_i^*.

3. Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $B_F(0, r) \subset \overline{T[B_E(0, 1)]}$. Montrer qu'alors

   $$\forall \varepsilon > 0 \qquad B_F(0, r) \subset T[B_E(0, 1 + \varepsilon)]\ .$$

4. On rappelle qu'un espace normé est séparable s'il contient une partie dénombrable dense.

   (a) Montrer qu'un espace normé séparable contient un sous-espace vectoriel dénombrable dense.

   (b) Montrer que les espaces c_o et l^p pour $1 \leq p < \infty$ sont séparables.

   (c) Montrer que l^∞ n'est pas séparable. Pour cela on peut considérer la famille des boules ouvertes :

   $$\{B(\chi_A, \frac{1}{2}), A \subset \mathbb{N}\},\ \text{où } \chi_A \text{ désigne la fonction caractéristique de } A.$$

   (d) Soit E un espace normé. On suppose que son dual E' est séparable. Montrer que E est séparable.

   (Soit f_n) une suite dense dans E', considérer une suite (x_n) de E telle que

   $$\|x_n\| = 1,\ f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$$

   et montrer que x_n est totale dans E.

   Que peut-on dire de la réciproque ?

5. Soit E un espace vectoriel réel, C une partie convexe de E et f une application de E dans $\mathbb{R}$.

   (a) Soit D l'épigraphe de f c'est à dire
   $$D = \{ \ (x,t) \in C \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t \ \} \ .$$
   Montrer que f est convexe si et seulement si D est convexe.

   (b) On suppose que E est normé. Montrer que si f est continue D est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.

   (c) Soit φ une forme linéaire continue sur $E \times \mathbb{R}$ (muni de la norme $\|(x,t)\| = \|x\| + |t|$). Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $u \in E'$ tels que
   $$\forall (x,t) \in E \times \mathbb{R} \qquad \varphi(x,t) = u(x) + at \ .$$

   (d) On suppose que f est convexe et continue. Soient $x \in C$ et $\varepsilon > 0$. En appliquant la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach à D et $(x, f(x) - \varepsilon)$, montrer que
   $$\exists v \in E',\ b \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) - \varepsilon \leq v(x) + b \quad \text{ et } \quad \forall y \in C \ \ v(y) + b \leq f(y) \ .$$
   En déduire que f est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines continues de C dans $\mathbb{R}$.

6. Soient E et F deux espaces de Banach, A et B deux opérateurs de domaines $D(A)$ et $D(B)$ tels que $D(A) \subset D(B) \subset E$, à valeurs dans F.

   (a) On suppose que A et B sont linéaires et fermés. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que
   $$\forall x \in D(A) \qquad \|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|) \ .$$

   (b) *Définition 1. On dit que B est A-compact si pour toute suite $\{x_k\} \subset D(A)$ telle que : $\exists c > 0$, $\|x_k\| + \|Ax_k\| \leq c$ implique que la suite $\{Bx_k\}$ admet une sous-suite convergente.*

   On suppose que A est linéaire, fermé, B linéaire A-compact; montrer que

   i. Il existe $C > 0$ telle que $\forall x \in D(A)$ $\|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|)$.

   ii. Il existe $C > 0$ telle que $\forall x \in D(A)$ $\|Ax\| \leq C(\|x\| + \|(A+B)x\|)$.

   iii. $A + B$ est un opérateur fermé.

   iv. B est $(A+B)$-compact.

(c) *Définition 2. On dit que B est fermable si $(0,y) \in \overline{G(B)} \Rightarrow y = 0$.*

On suppose que A est linéaire, fermé, B linéaire, fermable et A-compact; montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K_\varepsilon \text{ telle que } \forall x \in D(A) \quad \|Bx\| \leq \varepsilon \|Ax\| + K_\varepsilon \|x\| \;.$$

7. Soient X un espace de Banach réel, X' son dual, T un opérateur de domaine $D(T) \subset X$ à valeurs dans X' non nécessairement linéaire.

(a) *Définition 1. On dit que T est hémicontinu si*

$$\forall (u,v,w) \in X \quad t \mapsto T[u+tv](w) \textit{ de } [0,1] \textit{ dans } \mathbb{R} \textit{ est continue }.$$

On suppose que T est hémicontinu et qu'il existe $u_o \in D(T),\; z_o \in X'$ tels que :

$$\forall u \in D(T) \qquad (T[u] - z_o)(u - u_o) \geq 0 \;.$$

Montrer que $T[u_o] = z_o$.

(b) *Définition 2. On dit que T est monotone si :*

$$\forall (u,v) \in D(T) \qquad (T[u] - T[v])(u - v) \geq 0 \;.$$

On suppose que T est monotone, hémicontinu et X est de dimension finie; montrer que

i. T transforme les bornés de X en bornés de X'.

ii. T est continue.

8. Soient $E = L^1(0,1)$ l'espace des classes de fonctions mesurables sur (0,1) à valeurs réelles, intégrables pour la mesure de Lebesgue sur (0,1). On définit $A \;: E \to E$ par $Ax(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)\; ds$.

(a) Déterminer le noyau de A.

(b) Déterminer l'adjoint A^* de A. Que peut-on dire de $R(A^*)$?

Feuille d'exercices n^o 2

On se propose de montrer le résultat suivant :

Les deux assertions sont équivalentes :

i. x^* *in* $(\mathcal{C}([0,1]))'$

ii. On peut trouver une fonction g *à variation bornée définie du [0,1] telle que*

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1]) \qquad x^*(f) = \int_0^1 f(t)\ dg(t)\ .$$

De plus $\|x^*\| = V(g)$.

1. Montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i)

2. Soit x^* dans $(\mathcal{C}([0,1]))'$. Montrer qu'on peut trouver z^* forme linéaire sur $\mathcal{B}([0,1])$, l'ensemble des fonctions bornées sur [0,1], muni de la norme $\| \ \|_\infty$, telle que $\|x^*\| = \|z^*\|$ et
$$\forall f \in \mathcal{B}([0,1]) \qquad x^*(f) = z^*(f)\ .$$

3. Soit $s \in]0,1]$ et χ_s la fonction caractéristique de $[0,s]$, $(\chi_o = 0)$. On définit g par
$$\forall s \in [0,1] \quad g(s) = z^*(\chi_s)\ .$$
Montrer que g est à variation bornée.

4. Soit $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_n = 1$ une partition arbitraire de [0,1], et f dans $\mathcal{C}([0,1])$. On définit h par
$$h = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})[\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}}]\ .$$
Montrer que h est dans $\mathcal{B}([0,1])$ et calculer $z^*(h)$.

5. Montrer, en utilisant la définition de l'intégrale de Riemann-Stieljes que
$$z^*(f) = \int_0^1 f(t)\ dg(t)\ .$$
Conclure.

Feuille d'exercices n^o 3

1. Soit f la fonction définie de [0,1] dans $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \ , \\ 0 & \text{si } t = 0 \ . \end{cases}$$
Montrer que f est fermée mais pas continue.

2. **Supplémentaires topologiques**

   (a) Soit E un espace de Banach, G et L deux sous espaces vectoriels fermés de E tels que $E + G$ soit fermé. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, telle que tout élément z de $G + L$ admet une décomposition de la forme $z = x + y$ avec $x \in G,\ y \in L$ et $\|x\| \leq C\|z\|,\ \|y\| \leq C\|z\|$.

   (b) Sous les hypothèses de la question précédente, montrer qu'il existe une constante $C > 0$, telle que
$$\forall x \in E \qquad \text{dist } (x, G \cap L) \leq C[\text{dist } (x, G) + \text{dist } (x, L)] \ .$$

   Définition 1. *Soit $G \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé du Banach E. $L \subset E$ est un supplémentaire topologique de G si :*
   i. L est fermé.
   ii. $G \cap L = \{0\}$ et $G + L = E$.

   (c) Montrer que tout sous-espace G de E de dimension finie admet un supplémentaire topologique.

   (d) Soit N un sous-espace de E' de dimension finie. Soit G défini par :
$$G = \{\ x \in E \mid \forall f \in N \quad < f, x >= 0\ \} \ .$$

      i. Montrer que G est fermé et de codimension finie.

      ii. Soit $(f_1, \cdots, f_p)$ une base de N. On définit la fonction Φ de E dans $\mathbb{R}^p$ par :
$$\Phi(x) = (< f_1, x >, \cdots, < f_p, x >) \ .$$
Montrer que Φ est surjective. En déduire l'existence de $(e_1, \cdots, e_p)$ dans E tels que
$$\forall i, j \in \{1, \cdots, p\} \quad < f_i, e_j >= \delta_{ij} \ .$$

iii. Montrer que le sous-espace vectoriel L engendré par $(e_1, \cdots, e_p)$ est un supplémentaire topologique de G.

(e) Soit H un espace de Hilbert. Montrer que tout sous-espace vectoriel fermé de H admet un supplémentaire topologique.

(f) Soit T un opérateur linéaire, continu et surjectif de E sur F (deux espaces de Banach).

Définition 2. *On dit que T admet un inverse à droite s'il existe S linéaire et continu de F dans E tel que $T \circ S = Id_F$.*

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i. T admet un inverse à droite.

ii. $T^{-1}(0) = N(T)$ admet un supplémentaire topologique dans E.

3. **Fonctions convexes conjuguées**

Définition 3. *Une fonction φ de E dans $\bar{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement (sci) si*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \{ \ x \in E \mid \varphi(x) \leq \lambda \ \} \quad \textit{est fermé} \ .$$

(a) Montrer que : φ est sci $\Leftrightarrow$ epi (φ) est fermé.

(b) Montrer que :

$$\varphi \text{ sci } \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists V \text{ voisinage de } x \text{ tel que : } \forall y \in V \ \varphi(y) \geq \varphi(x) - \varepsilon \ .$$

En déduire que :

$$\varphi \text{ sci et } x_n \to x \Rightarrow \liminf_{n \to +\infty} \ \varphi(x_n) \geq \varphi(x) \ .$$

(c) Soit φ de E dans $]-\infty, +\infty]$ telle que $\varphi \neq +\infty$.

Définition 4. *La fonction φ^* définie de E' dans $]-\infty, +\infty]$ par*

$$\forall f \in E' \quad \varphi^*(f) = \sup_{x \in E} \ \{ \ < f, x > - \ \varphi(x) \ \} \ ,$$

est la fonction conjuguée de φ.

Montrer que φ^* est convexe (même si φ ne l'est pas) et sci.

On admettra que si $\varphi \neq +\infty$ alors $\varphi^* \neq +\infty$ et on définit de la même manière φ^{**} par

$$\forall x \in E \quad \varphi^{**}(x) = \sup_{f \in E'} \ \{ \ < f, x > - \varphi^*(f) \ \} \ .$$

i. Montrer que $\varphi^{**} \leq \varphi$.

ii. Supposons qu'il existe $x_o \in E$ tel que $\varphi^{**}(x_o) < \varphi(x_o)$. En séparant epi($\varphi$) et le point $(x_o, \varphi^{**}(x_o))$, montrer qu'on arrive à une contradiction. En déduire que $\varphi^{**} = \varphi$.

(d) **Théorème de Fenchel-Rockafellar** : Soient φ et ψ deux fonctions convexes. On suppose qu'il existe $x_o \in E$ tel que $\varphi(x_o) < +\infty$ et $\psi(x_o) < +\infty$ et que φ est continue en x_o. On va montrer qu'alors

$$\inf_{x \in E} \{ \varphi(x) + \psi(x) \} = \sup_{f \in E'} \{ -\varphi^*(-f) - \psi^*(f) \} = \max_{f \in E'} \{ -\varphi^*(-f) - \psi^*(f) \} .$$

Pour cela on admettra le résultat suivant : *si $C \subset E$ est convexe, alors l'intérieur de C : int(C) est convexe. Si int(C) $\neq \emptyset$ alors $\bar{C} = \overline{int(C)}$.*

Soient $a = \inf_{x \in E} \{ \varphi(x) + \psi(x) \}$ et $b = \sup_{f \in E'} \{ -\varphi^*(-f) - \psi^*(f) \}$.

i. Montrer que $b \leq a$.

ii. On suppose que $a \in \mathbb{R}$. En appliquant le théorème de Hahn-Banach géométrique aux convexes

$$A = \mathrm{int}(C) \text{ et } B = \{ (x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid \lambda \leq a - \psi(x) \} ,$$

montrer que $a = b$ et que le sup est atteint.

4. On se propose de montrer le résultat suivant :

   Les deux assertions sont équivalentes :

   i. x^* *in* $(\mathcal{C}([0,1]))'$

   ii. On peut trouver une fonction g à variation bornée définie du [0,1] à valeurs complexes telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1]) \qquad x^*(f) = \int_0^1 f(t)\ dg(t)\ .$$

   De plus $\|x^*\| = V(g)$.

   (a) Montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i)

   (b) Soit x^* dans $(\mathcal{C}([0,1]))'$. Montrer qu'on peut trouver z^* forme linéaire sur $\mathcal{B}([0,1])$, l'ensemble des fonctions bornées sur [0,1], muni de la norme $\| \ \|_\infty$, telle que $\|x^*\| = \|z^*\|$ et

$$\forall f \in \mathcal{B}([0,1]) \qquad x^*(f) = z^*(f)\ .$$

   (c) Soit $s \in]0,1]$ et χ_s la fonction caractéristique de $[0,s]$, $(\chi_o = 0)$. On définit g par

$$\forall s \in [0,1] \qquad g(s) = z^*(\chi_s)\ .$$

   Montrer que g est à variation bornée.

   (d) Soit $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_n = 1$ une partition arbitraire de [0,1], et f dans $\mathcal{C}([0,1])$. On définit h par

$$h = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})[\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}}]\ .$$

   Montrer que h est dans $\mathcal{B}([0,1])$ et calculer $z^*(h)$.

   (e) Montrer, en utilisant la définition de l'intégrale de Riemann-Stieljes que

$$z^*(f) = \int_0^1 f(t)\ dg(t)\ .$$

   Conclure.

Feuille d'exercices n° 4

1. **Théorème de Weierstrass** : il existe une fonction continue de [0,1] sur $\mathbb{R}$ qui n'est différentiable en aucun point de $[0, \frac{1}{2}]$.

   Soit n un entier; on définit l'ensemble M_n de la façon suivante :

   $$M_n = \{ \ x \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \exists t_o \in [0, \frac{1}{2}] \text{ tel que } \sup_{0<h<\frac{1}{2}} \frac{|x(t_o + h) - x(t_o)|}{h} \leq n \ \}.$$

   (a) Montrer que M_n est fermé (topologie de la norme uniforme).

   (b) Montrer qu'on a démontré le théorème de Weierstrass dès qu'on a montré que

   $$\mathcal{C}([0,1]) - \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n \ ,$$

   est non vide.

   (c) Pour cela on va montrer que pour tout n, M_n est un sous-ensemble *maigre* ou *non-dense*, c'est à dire tel que $\overline{M_n}$ ne contient aucun ouvert non vide de $\mathcal{C}([0,1])$: pourquoi ?

   (d) Montrer que pour tout polynôme z de $\mathcal{C}([0,1])$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction y de $\mathcal{C}([0,1]) - M_n$ telle que

   $$\sup_{0 \leq t \leq 1} |z(t) - y(t)| \leq \varepsilon \ .$$

   (Voir indication 1.)

   Conclure avec la densité de l'ensemble des polynômes dans $\mathcal{C}([0,1])$.

2. **Un exemple d'opérateur linéaire, discontinu et fermé.**

   Soient $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, munis de la norme infinie (convergence uniforme). Soit D le sous-espace vectoriel de X défini par :

   $$D = \{ \ x \in X \mid x' \in X \ \} \quad (\text{ fonctions } \mathcal{C}^1) \ .$$

   On définit T de la manière suivante : $T \ : D(T) \subset X \to Y$, et $T(x) = x'$.

   (a) Montrer que T est linéaire et non continu (Voir indication 2.)

   (b) Montrer que T est fermé.

   (c) Comment conciliez-vous ce résultat avec le théorème du graphe fermé?

3. **Exemple d'espace qui n'est pas un espace de Baire**

   Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme N (norme L^1) suivante :

   $$\forall f \in E \qquad N(f) = \int_0^1 |f(t)| \, dt \; .$$

   (a) Montrer que la boule unité B de E (pour la norme infinie notée ici $\| \; \|$) est fermée dans E (pour la norme N).

   (b) Montrer que les normes N et $\| \; \|$ ne sont pas équivalentes.

   (c) Montrer que B est d'intérieur vide pour N.(Voir indication 3.)

   (d) Montrer que E, muni de la norme N n'est pas un espace de Baire.

   (e) E muni de la norme $\| \; \|$ est-il un espace de Baire ?

Indications

1. Couper l'intervalle en sous-intervalles de longueur "petite" et sur chaque sous-intervalle approcher la fonction z par une fonction en "zig-zag", c'est à dite affine par morceaux telle que la pente de chaque segment soit supérieure à n. Voir dessin.

2. Considérer la suite de fonctions définie par $x_n(t) = t^n$.

3. Supposer que l'intérieur de B contient un point a. $-a$ est aussi dans B et utiliser la convexité pour montrer que 0 est dans l'intérieur de B. Montrer que cela implique que les normes N et $\| \; \|$ sont équivalentes, d'où une contradiction.

Feuille d'exercices n° 5

Convergence faible

1. Soit E un espace vectoriel normé. On va démontrer que $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ n'est jamais fermée pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Pour cela on montre que

$$\bar{S}^{\sigma(E,E')} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\} .$$

Soit x_o un élément de E vérifiant $\|x_o\| \leq 1$ et montrons que tout voisinage V (pour la topologie faible) de x_o rencontre S. Pour cela, montrer que si V est un voisinage de x_o (pour la topologie faible), V contient une droite passant par x_o.

De la même manière, montrer que

$$U = \{x \in E \mid \|x\| < 1\} ,$$

n'est jamais ouvert pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

2. Topologie faible et convexité.

   (a) Soit $C \subset E$ un convexe. Alors C est faiblement fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si il est fortement fermé.

   Indication : on montre que $E - C$ est ouvert, c'est-à-dire que chacun de ses points est contenu dans un ouvert faible. Pour cela on sépare strictement C d'un point quelconque x_o de $E - C$.

   (b) Soit $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe sci (pour la topologie forte).

   Montrer que φ est sci pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

   Montrer que si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ alors

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n) .$$

3. Soient E et F deux espaces de Banach. On note E_f et F_f ces espaces munis de la topologie faible. Montrer que si T est un opérateur linéaire de E dans F les propositions suivantes sont équivalentes.

   (a) T est continu de E dans F.

   (b) T est continu de E_f dans F_f.

   (c) T est continu de E dans F_f.

4. Montrer que les topologies forte et faible sur l^1 sont équivalentes.

5. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que

$$u_n \text{ converge fortement vers } u \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ converge faiblement vers } u, \text{ et} \\ \|u_n\| \text{ converge vers } \|u\| \end{array} \right. .$$

6. L'espace $L^1(\mathbb{R}, dx)$ n'est pas réflexif. Exhiber effectivement une suite de fonctions φ_n de $L^1(\mathbb{R}, dx)$ dont aucune sous-suite n'est faiblement convergente.

   (Indication: On pourra prendre φ_n égale à la fonction caractéristique de $[n, n+1]$).

Théorème d'Ascoli - Topologie

1. Soient α un réel de]0,1], C, M deux constantes positives et [a,b] un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit les sous-espaces suivants de $\mathcal{C}([a,b])$:

   $E^{\alpha}_{C,M}([a,b]) = \{ \ f \in \mathcal{C}([a,b]) \mid \|f\|_{\infty} \leq M \ , \ \forall x, y \in [a,b] \ |f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \ \}$,

   $Lip^{\alpha}([a,b]) = \{ \ f \in \mathcal{C}([a,b]) \mid \exists C_f \geq 0 \ , \ \forall x, y \in [a,b] \ |f(x)-f(y)| \leq C_f|x-y|^{\alpha} \ \}$.

   (a) Montrer que $E^{\alpha}_{C,M}([a,b])$ est un compact de $\mathcal{C}([a,b])$.

   (b) On munit $Lip^{\alpha}([a,b])$ de la norme suivante :

   $$\|f\|_{Lip^{\alpha}} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{\substack{x, y \in [a,b] \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} .$$

   Montrer que $Lip^{\alpha}([a,b])$ muni de cette norme est un Banach.

   (c) Montrer que la boule unité de $Lip^{\alpha}([a,b])$ est relativement compacte (et même compacte) dans $\mathcal{C}([a,b])$.

2. Soient X topologique, Y métrique et (f_n) une suite équicontinue d'applications de X dans Y. Montrer que l'ensemble des points x de X pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de Y, est fermé dans X.

3. Soient X et Y deux espaces topologiques, Y compact. Soit f une application de $X \times Y$ dans un espace métrique Z. Montrer que f est continue si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

   (a) pour $x \in X$, la fonction $f(x,.) : y \mapsto f(x,y)$ est continue de Y dans Z;

   (b) lorsque y parcourt le compact Y, l'ensemble des fonctions $f(.,y)$ de X dans Z est équicontinu.

Problème

Dans tout ce problème E désigne l'espace de Hilbert complexe l^2; le produit scalaire et la norme sont notés respectivement $(.|.)$ et $\|.\|$.

Soit $c = (c_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe, on note A_c l'application linéaire de E dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui, à tout élément $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de E, associe la suite dont le n-ième terme est $\sum_{m\geq 0} c_{m+n}x_m$. Cette application est appelée **opérateur de Hankel** associé à la suite c. Lorsque l'image $A_c(E)$ est contenue dans E, on dit que l'opérateur A_c est continu.

1. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que A_c soit bien défini.

2. Soit f une fonction mesurable et bornée sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π. On note

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\ int}\,dt \qquad (n \in Z)$$

le n-ième coeficient de Fourier de f, et $c(f) = (c_n(f))_{n\geq 0}$ la suite des coefficients de Fourier de f d'indice **positif**.

   (a) Etant donné un élément $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de E, on appelle X une fonction complexe mesurable et périodique sur $\mathbb{R}$, de période 2π, de carré intégrable sur tout intervalle borné, dont le n-ième coeficient de Fourier est x_n pour $n \geq 0$ et 0 pour $n < 0$.

   Montrer l'égalité, pour $n \geq 0$, du n-ième élément de la suite $A_{c(f)}$ et du n-ième coefficient de Fourier de la fonction $t \mapsto f(t)X(-t)$. A cet effet on étudiera d'abord le cas où il n'y a qu'un nombre fini de coordonnées x_n non nulles.

   (b) En déduire que l'opérateur de Hankel $A_{c(f)}$ est continu, et qu'on a

$$\|A_{c(f)}\| \leq \|f\|_\infty \ ,$$

   où $\|A_{c(f)}\|$ désigne la norme de $A_{c(f)}$ dans $\mathcal{L}(E,E)$.

   (c) On suppose que la fonction f est **continue**; montrer que l'opérateur de Hankel $A_{c(f)}$ est compact (considérer d'abord le cas d'un polynôme trigonométrique, puis utiliser le théorème de Stone-Weierstrass).

3. Si r est un réel de $]0{,}1[$, on note T_r l'opérateur continu de E dans E qui à l'élément $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de E, associe l'élément $(r^n x_n)_{n\geq 0}$.

   (a) Montrer que, pour tout x de E, $T_r x$ converge fortement vers x lorsque r tend vers 1.

(b) Soit $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ une suite bornée d'éléments de E convergeant **faiblement** vers un élément x, et soit $(r_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels de]0,1[, convergeant vers 1. Montrer que la suite de terme général $T_{r_k}x^{(k)}$ converge faiblement vers x.

(c) Soit u un opérateur compact de E dans E; les notations étant les mêmes que celles de la question précédente , montrer que la suite de terme général $u(x^{(k)} - u(T_{r_k}x^{(k)})$ converge fortement vers 0.

(d) En déduire que si u est un opérateur compact de E dans E, l'opérateur uT_r converge vers u dans $\mathcal{L}(E,E)$ lorsque r tend vers 1. (On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde).

(e) Montrer que, si u est un opérateur compact de E dans E, les opérateurs uT_r et $T_r u T_r$ convergent vers u dans $\mathcal{L}(E,E)$ lorsque r tend vers 1.

4. On se propose d'établir une réciproque du résultat de la question 1.c. On dira que l'opérateur de Hankel A_c est de rang fini si la suite c n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

(a) Montrer que tout opérateur de Hankel compact A_c est limite dans $\mathcal{L}(E,E)$ d'opérateurs de Hankel de rang fini. A cet effet on établira la formule

$$A_{T_r c} = T_r A_c T_r, \qquad 0 < r < 1 \ ,$$

et on montrera que $A_{T_r c}$ est limite dans $\mathcal{L}(E,F)$ d'opérateurs de Hankel de rang fini.

(b) On admettra que, quel que soit l'opérateur de Hankel de type fini A_c, il existe une fonction continue g de période 2π vérifiant $c(g) = c$ et $\|A_c\| = \|g\|_\infty$. En déduire que tout opérateur de Hankel compact est de la forme $A_{c(f)}$, où f est une fonction continue de période 2π.

Feuille d'exercices n^o 6

1. Soit $H = L^2(I)$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, muni de la mesure de Lebesgue; on peut définir formellement un opérateur A par $A = i\dfrac{d}{dx}$, mais A n'est pas défini sur tout H. On notera A_1 l'opérateur de domaine $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur I, et A_2 celui dont le domaine est $H^1(I)$.

   Trouver le spectre de chaque opérateur A_i et dire si les opérateurs A_i sont symétriques dans les cas suivants

   (a) $I =]0,1[$

   (b) $I =]-\infty,+\infty[$

   (c) $I =]0,+\infty[$

2. Soit l'opérateur $A = \dfrac{d}{dx}$ dans $L^2([0,1])$ de domaine

$$\mathcal{D} = \{ \ f \in H^1([0,1] \mid f(0) = 0\} \ ;$$

   Quel est son spectre ?

3. Soient V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{L}(V)$ un opérateur auto-adjoint, compact et défini positif. Le but de l'exercice étant de **démontrer** l'existence d'une base hilbertienne de vecteurs propres de T, on s'interdit ici d'utiliser les résulats du cours.

   (a) i. Pour tout nombre réel $\theta \neq 0$, vérifier l'identité

$$\|Tv\|^2 = \frac{1}{4}\left\langle T(\theta v + \frac{1}{\theta}Tv), \theta v + \frac{1}{\theta}Tv \right\rangle - \frac{1}{4}\left\langle T(\theta v - \frac{1}{\theta}Tv), \theta v - \frac{1}{\theta}Tv \right\rangle \ ,$$

   pour tout $v \in V$.

   ii. On pose

$$\tau = \sup_{\substack{u \in V \\ \|u\| = 1}} \langle Tu, u \rangle \ .$$

   Démontrer que

   iii. On pose

$$\tau = \sup_{\substack{u \in V \\ \|u\| = 1}} \|Tu\| \ .$$

iv. Etablir l'existence d'un élément $\bar{v} \in V$ tel que $\|\bar{v}\| = 1$ et $\tau = \langle T\bar{v}, \bar{v}\rangle$. En déduire qu'alors $T\bar{v} = \tau\bar{v}$.

(b) i. Soit $v_1 \in V$ un vecteur propre unitaire de T associé la valeur propre $\mu_1 = \tau$. Montrer que l'espace vectoriel

$$V_1^\perp = \{v \in V \mid \langle v, v_1\rangle = 0\}$$

est stable par T, c'est-à-dire $T(V_1^\perp) \subset V_1^\perp$.

ii. En déduire l'existence d'un vecteur propre v_2 de T tel que

$$v_2 \in V_1^\perp \ , \ Tv_2 = \mu_2 v_2 \ , \ \|v_2\| = 1 \ ,$$

où on a posé

$$\mu_2 = \sup_{\substack{u \in V_1^\perp \\ \|u\| = 1}} \langle Tu, u\rangle \ .$$

iii. Plus généralement, obtenir par ce procédé l'existence d'une suite (μ_m) de valeurs propres et d'une suite de vecteurs propres(v_m) telles que

$$\begin{cases} \mu_m \leq \mu_p & \text{pour tout } m \geq p \\ \langle v_m, v_p\rangle = \delta_{mp} & \text{(symbole de Kronecker) pour } m, p \geq 1 \ . \end{cases}$$

(c) Démontrer que : $\lim\limits_{m \to +\infty} \mu_m = 0$.

(d) i. Pour tout $v \in V$, on pose

$$r_m(v) = v - \sum_{p=1}^{m} \langle v, v_p\rangle \, v_p \ .$$

Démontrer que pour tout $v \in V$, $\lim\limits_{m \to +\infty} r_m(v) = 0$. (On pourra observer que $\|r_m\|^2 = \langle r_m(v), v\rangle$.

ii. Pour tout $v \in V$, établir les propriétés suivantes

$$\sum_{p=1}^{m} \langle v, v_p\rangle^2 \leq \|v\|^2 \ , \ \text{pour tout } m \geq 1 \ ,$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \langle v, v_p\rangle^2 = \|v\|^2 \ \ \text{et} \ \sum_{p=1}^{\infty} \langle v, v_p\rangle \, v_p = v \ .$$

(e) Montrer que par le procédé décrit en 2., on obtient en fait **toutes** les valeurs propres de T, c'est-à-dire que si μ est une valeur propre quelconque de T, il existe un entier $m \geq 1$ pour lequel on a $\mu = \mu_m$ et que de plus l'ensemble

$$\mathcal{R}_\mu = \{ \ m \in \mathbb{N} \mid \mu_m = \mu \ \}$$

est fini

4. (a) Déterminer explicitement les valeurs propres et les fonctions propres du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in V,\ \lambda \in \mathbb{R} \ , \\ \displaystyle\int_0^1 u'v' \ dx = \lambda \int_0^1 uv \ dx, \text{ pour tout } v \in V \end{array} \right.$$

lorsque $V = H_o^1(0,1)$ et lorsque $V = H^1(0,1)$. (Observer que les fonctions propres sont nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans [0,1] .)

(b) En déduire qu'une série de la forme $\sum_{n\geq 1} a_n \sin \ n\pi x$ converge dans $L^2(0,1)$(respectivement dans $H_o^1(0,1)$) si et seulement si $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < +\infty$ (resp. $\sum_{n\geq 1} n^2 a_n^2 < +\infty$).

(c) Soit $v \in H_o^1(0,1)$ défini par

$$v(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin \ n\pi x \ .$$

Justifier la dérivation terme à terme

$$v(x) = \pi \sum_{n\geq 1} n a_n \cos \ n\pi x \ .$$