

EVALUACIÓN 1.
CÁLCULO III. 525211.

1. Sea C el conjunto definido por

$$C = \{(x, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, n], n \in \mathbb{N}\}.$$

- (0.5 pt.) Haga un bosquejo del conjunto C en \mathbb{R}^2 .
- (1 pt.) Determine el interior, la frontera, y la cerradura de C en \mathbb{R}^2 .
- (0.5 pt.) ¿ La cerradura de C es compacta ? Justifique su respuesta.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

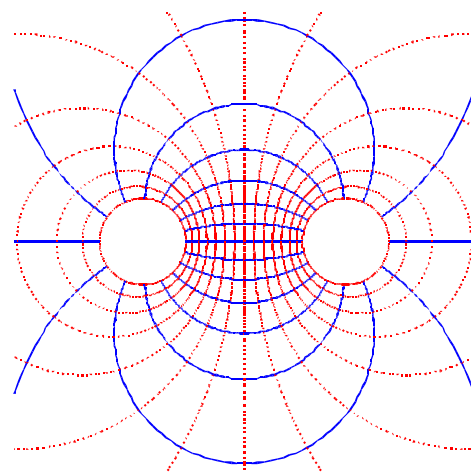
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (0.8 pts.) Asuma que f es continua en $(0, 0)$; estudie la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.
- (0.8 pts.) Pruebe que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$, y que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$.
- (0.4 pts.) ¿ f es de clase \mathcal{C}^2 en $(0, 0)$? Justifique su respuesta.

3. Considere la siguiente función biyectiva llamada “cambio de variables en coordenadas bipolares” :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) &\mapsto (x, y) = \left(\frac{\sinh \rho}{\cosh \rho - \cos \theta}, \frac{\sin \theta}{\cosh \rho - \cos \theta} \right). \end{aligned}$$

- (1 pt.) Calcule la matriz jacobiana de φ , y de φ^{-1} .
- (1 pt.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^2 . A partir de la matriz jacobiana de φ^{-1} , calcule el gradiente de $f = f(x, y)$ en coordenadas bipolares, es decir calcule $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^t$, en términos de $\rho, \theta, \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$.



Duración : 120 minutos.

MSC/msc

(23-Abril-2004)