UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA 522115

Listado 5 (Números Complejos)

1. Pruebe que para todo $z \in \mathbb{C}$:

   a) $z \neq 0 \Longrightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$,
   b) $Re(z) \leq |z|, \quad Im(z) \leq |z|$,
   c) $z \neq 0 \Longrightarrow z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$,
   d) $Im(iz) = Re(z)$,
   e) $\overline{z^2} = (\overline{z})^2$,
   f) $(z - \overline{z})^2 \leq 0$.

2. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

   a) $i^{4n} = 1$, *b*) $i^{4n+1} = i$, *c*) $i^{4n+2} = -1$, *d*) $i^{4n+3} = -i$.

3. Calcule:

   a) $(1+i)^{40}$, *b*) $(1-i)^{21}$, *c*) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{16}$.

4. Evalúe los siguientes números complejos:

   a) $\dfrac{1}{2+3i}$,
   b) $-4(1+\dfrac{i}{12}) + 4(1-\dfrac{1}{12i})$,
   c) $i + \dfrac{1}{i^{11}}$,
   d) $\dfrac{1+2i}{(1-2i)(-1-i)}$.

5. Encuentre los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ que satisafacen las siguientes ecuaciones:

   a) $2(x+yi) = i(3-4i)$,
   b) $(2-5i)x + (1+3i)y = 8-9i$,
   c) $(1+i)(x-yi) = i(14+7i) - (2+13i)$,
   d) $i^2(1-i)(1+i) = 3x + yi + i(y+xi)$.

6. Encuentre los valores de $z = x + yi$ tal que:

   a) $z^2 = i$,
   b) $|z-4| = z$,
   c) $iz = x + 1 + 2yi$,
   d) $\left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = 0$,
   e) $|z| = 1 - 2x + yi$,
   f) $|z| - z = 1 + 2i$.

7. Describir el conjunto de puntos z que satisfacen la condición dada.

   a) $|z| \leq 2$
   b) $|z-5i| = 0$;
   c) $|z+1-2i| > 3$.
   d) $Im(z-4+2i) \leq 3$;
   e) $Re\left(\dfrac{1}{z}\right) \leq \dfrac{1}{2}$
   f) $Re((1+i)z) < 0$.

8. Escriba los siguientes números complejos en su forma polar.

a) $z = -7i$,

b) $z = 6\sqrt{3} - 6i$,

c) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i$,

d) $z = 5 + 5\sqrt{2}i$.

9. Escriba las siguiente expresiones en la forma $x + yi$ y en la forma polar.

a) $(-2 + 2i)^5$,

b) $\left[3cis\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)\right]^4$,

c) $(1 + i)^{\frac{-1}{4}}$,

d) $\dfrac{(1 - i)^{13}}{1 + i^{13}}$,

e) $\left[2cis\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)\right]^{-4}$,

f) $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$.

10. Utilice la fórmula de De Moivre para demostrar que:

a) $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$,

b) $\operatorname{sen}(3\alpha) = -4\operatorname{sen}^3(\alpha) + 3\operatorname{sen}(\alpha)$.

11. Para $a, b \in \mathbb{R}$, considere el producto $(1 + ai)(1 + bi)$ y el argumento de cada uno de los factores para:

a) Verificar que: $\operatorname{arc\,tg}(a) + \operatorname{arc\,tg}(b) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{a + b}{1 - ab}\right)$.

b) Demostrar que: $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

c) Encontrar una fórmula para: $\operatorname{arc\,tg}(a) + \operatorname{arc\,tg}(b) + \operatorname{arc\,tg}(c)$.

12. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 + i = \sqrt{3}$,

b) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$,

c) $z^4 - i = 1$,

d) $5z^2 + 2z + 10 = 0$,

e) $z^{\frac{2}{3}} - i = 0$,

f) $z^8 - \dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = 0$.

13. Determine todos los valores posibles de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[4]{1 + i}$,

b) $\sqrt{4\sqrt{3} - 4i}$,

c) $\sqrt[3]{8}$,

d) $\sqrt[5]{-i}$,

e) $\sqrt[3]{i}$,

f) $\sqrt[4]{16 + 16i}$,

g) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}$,

h) $\sqrt[3]{-125}$.

14. Pruebe que: $\forall n \in \mathbb{N}$: $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

15. Pruebe que: $\forall z \neq 0 \in \mathbb{C}, \forall p \in \mathbb{Q}$: $|z^p| = |z|^p$. Use este resultado para calcular:

a) $|(1 - i)^{10}|$,

b) $|\sqrt[10]{8i - 8}|$.

JAL
Primer Semestre de 2005.