UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

MAT 511 118 **COMPLEMENTO DE CALCULO**
FPV/fpv. **Resolución del Certamen II** **(12.06.2001(**

Nota: El certamen se realizó con cuaderno abierto. La nota máxima fué 95 puntos. En la evaluación se ha seguido el método utilizado por el alumno.

1. La función $u(x,t)$ describe las vibraciones de una cuerda de longitud $L = 1$, fija en sus extremos y en posición horizontal, cuyo desplazamiento y velocidad iniciales son nulos, y está sometida a una fuerza externa proporcional a la distancia a uno de sus extremos.

   (a) ¿Cuál es el modelo matemático que satisface $u(x,t)$?
   `La fuerza externa es modelado por` $q(x,t) = k \cdot x$ `donde` k `es la cte- de proporcio, nalidad:`

   $$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} && (x,t) \in \;]0,1[\times]0,\infty[\\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 && t \geq 0 \\ u(x,o) &= u_t(x,0) = 0 && x \in [0,1] \end{aligned}$$

   (b) Encuentre dicha función $u(x,t)$.
   `Aplicamos el Método de Variación de Parámetros de Lagrange`

   i. `El problema de Sturm,Liouville asociado es:`

   $$\begin{aligned} X''(x) + (\lambda/c^2)X(x) &= 0 \quad 0 < x < 1 \\ X(0) = X(1) &= 0 \end{aligned}$$

   Luego el conjunto de autovalores es $\{\lambda_n = (cn\pi)^2\}_{n=1}^{\infty}$ y la familia de autofunciones $\{X_n(x) = \sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$.

   ii. `La serie de Fourier Generalizada de` $q(x,t)$ `para` $t > 0$ `es:`

   $$\begin{aligned} q(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin n\pi x \\ q_n(t) &= \frac{\langle kx, \sin n\pi x\rangle}{\|\sin n\pi x\|^2} \\ &= 2k \int_0^1 x \sin n\pi x dx \end{aligned}$$

y cuya única solución es:

$$C_n(t) = \frac{4k}{c^2(n\pi)^3}(-1)^{n+1}\left(1 - \cos n\pi ct\right)$$

iv. La única solución del PVC propuesto es:

$$u(x,t) = \frac{8k}{\pi^3 c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin^2\frac{n\pi ct}{2}\sin n\pi x$$

Observar que: $|u(x,t)| \leq \frac{8k}{\pi^3 c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

2. Un tubo abierto por un extremo se desplaza en la dirección de su eje con velocidad constante v, y en el momento $t = 0$ se detiene instantáneamente. Determine el desplazamiento $u(x,t)$ del aire dentro del tubo a una distancia x del extremo cerrado.

(a) ¿Cuál es el modelo matemático que satisface $u(x,t)$?

Si el extremo $x = 0$ del tubo es abierto y la longitud de dicho tubo es L:

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 u_{xx} \qquad (x,t) \in \;]0,1[\times]0,\infty[\\
\mathbf{u_x(0,t)} &= u(1,t) = 0 \qquad\qquad t \geq 0 \\
u(x,o) &= 0 \qquad\quad x \in [0,1] \\
u_t(x,0) &= \mathbf{v} \qquad\quad x \in [0,1]
\end{aligned}$$

(b) Encuentre dicha función $u(x,t)$.

Aplicamos el Método de Separación de Variables de Bernoulli:

i. El problema de Sturm,Liouville asociado es:

$$\begin{aligned}
X''(x) + (\lambda/c^2)X(x) &= 0 \quad 0 < x < L \\
\mathbf{X'(0)} = X(L) &= 0
\end{aligned}$$

Luego el conjunto de autovalores es $\{\lambda_n = (c(2n+1)\frac{\pi}{2L})^2\}_{n=0}^{\infty}$ y la familia de autofunciones $\{X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\}_{n=0}^{\infty}$.

ii. Como no existe desplazamiento inicial:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\tfrac{(2n+1)\pi ct}{2L}\cos\tfrac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

$(2n+1)\pi c \qquad \langle v, \cos\frac{(2n+1)\pi x}{\ldots}\rangle$

iii. **La única solución del PVC propuesto es:**

$$u(x,t)=\frac{4Lv}{c\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\left[\sin\tfrac{(2n+1)\pi}{2L}(x+ct)+\sin\tfrac{(2n+1)\pi}{2L}(x-ct)\right]$$

3. La función $u(x,t)$ describe las vibraciones longitudinales de un gas perfecto en un tubo, podemos suponer que la presión se asume constante en la entrada y en la salida del tubo, es decir, $u_x(0,t)=0$ y $u_x(L,t)=0$. Si el desplazamiento y velocidad iniciales son modelados por $u_0(x)$ y $u_1(x)$ respectivamente:

(a) ¿Cuál es el modelo matemático que satisface $u(x,t)$?

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & c^2u_{xx} & (x,t)\in\ ]0,L[\times]0,\infty[\\ \mathbf{u_x(0,t)} & = & \mathbf{u_x(L,t)=0} & t\geq 0 \\ u(x,o) & = & u_0(x) & x\in[0,L] \\ u_t(x,0) & = & u_1(x) & x\in[0,L] \end{array}$$

(b) Encuentre dicha función $u(x,t)$.

Aplicamos el Método de Variación de Parámetros de Lagrange:

i. **El problema de Sturm,Liouville asociado es:**

$$\begin{array}{rcll} X''(x)+(\lambda/c^2)X(x) & = & 0 & 0<x<L \\ \mathbf{X'(0)=X'(L)} & = & 0 & \end{array}$$

Luego el conjunto de autovalores es $\{\lambda_n=(c\frac{n\pi}{L})^2\}_{n=0}^{\infty}$ y la familia de autofunciones $\{X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{L}x\}_{n=0}^{\infty}$.

ii. **Construimos la solución:** $u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t)\cos\frac{n\pi}{L}x$

donde la familia de coeficientes $\{C_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfacen los siguientes PVI:

A. **Para** $\lambda_0=\mathbf{0}$:

$$C_0''(t)+\mathbf{0}\cdot C_0(t) = 0$$

$$C_0(0)=\frac{\langle u_0(x),1\rangle}{\|1\|^2} \qquad C_0'(0)=\frac{\langle u_1(x),1\rangle}{\|1\|^2}$$

por unicidad de la solución:

$$C_0(t)=\frac{1}{L}\int_0^L u_1(x)dx\cdot t+\frac{1}{L}\int_0^L u_0(x)dx$$

B. **Para** $\lambda_n=\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2,\quad (n\in\mathbb{N})$:

iii. La única solución del PVC propuesto es:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= C_0(t)\cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\cos\tfrac{n\pi}{L}x \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L u_1(x)dx\cdot t + \frac{1}{L}\int_0^L u_0(x)dx + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(0)\cos\tfrac{cn\pi}{L}t + \tfrac{C_n'(0)L}{cn\pi}\sin\tfrac{cn\pi}{L}t\right]\cdot\cos\tfrac{n\pi}{L}x \end{aligned}$$

(c) El auto-valor $\lambda = 0$ contribuye a la solución con un *término no oscilatorio*, el cual corresponde a la translación de una masa gaseosa que va de una extremidad a la otra. Este término incluye, entre otros, la velocidad media de circulación del gas a través del tubo: $V_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L u_1(s)ds$. Identifique éste *término no oscilatorio* en su solución.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \underbrace{C_0(t)\cdot 1}_{\text{Término no oscilatorio}} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\cos\tfrac{n\pi}{L}x \\ &= \overbrace{V_0\cdot t + \frac{1}{L}\int_0^L u_0(x)dx}^{\text{(una recta)}} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\cos\tfrac{n\pi}{L}x \end{aligned}$$

4. Una membrana cuadrada de borde fijo, y en reposo recibe en su centro un golpe de intensidad constante, dado por un martillete cuadrado de área igual a 1/6 del área de la membrana, y cuyos lados son paralelos a los de ésta:

(a) ¿Cuál es el modelo matemático que satisface el desplazamiento subsiguiente $u(x,y,t)$ de la membrana?

Primero modelamos la velocidad inicial $g(x,y)$ impartida a la membrana cuadrada de lado a.

$$g(x,y) = \begin{cases} cte. & \text{si } |2x-a| < \frac{a}{\sqrt{6}} \quad |2y-a| < \frac{a}{\sqrt{6}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así el modelo matemático es:

(b) Encuentre dicha función $u(x,y,t)$ en forma de Serie de Fourier doble.

`Sea` $\lambda_{nm} = \pi c\sqrt{n^2+m^2}$ `la frecuencia de oscilación de la membrana. Como su desplazamiento inicial es nulo,` $u(x,t)$ `construida por el método de Bernoulli es:`

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}\sin\lambda_{nm}t\sin\tfrac{n\pi x}{a}\sin\tfrac{m\pi y}{a} \\
\lambda_{nm}\cdot B_{nm} &= \frac{\langle g(x,y),\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}\rangle}{\|\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}\|^2} \\
&= \frac{4\cdot cte.}{a^2}\int_{\frac{a}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{6}})}^{\frac{a}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{6}})}\sin\tfrac{n\pi x}{a}dx\int_{\frac{a}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{6}})}^{\frac{a}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{6}})}\sin\tfrac{m\pi y}{a}dy \\
&= \frac{4\cdot cte.}{nm\pi^2}\left(\sin\tfrac{n\pi}{2}\sin\tfrac{n\pi}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sin\tfrac{m\pi}{2}\sin\tfrac{m\pi}{\sqrt{6}}\right)
\end{aligned}
$$

`y observamos que` B_{nm} `es cero si` n `o` m `es un entero par.`
`Luego el desplazamiento de la membrana es modelado por:`

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} B_{2n+1,2m+1}\sin(\lambda_{2n+1,2m+1})t\sin\tfrac{(2n+1)\pi x}{a}\sin\tfrac{(2m+1)\pi y}{a}
\end{aligned}
$$

donde

$$
B_{2n+1,2m+1} = \frac{4\cdot cte.\cdot(-1)^{(n+m)}}{\pi^2\cdot\lambda_{2n+1,2m+1}\cdot(2n+1)(2m+1)}\sin\tfrac{(2n+1)\pi}{\sqrt{6}}\cdot\sin\tfrac{(2n+1)\pi}{\sqrt{6}}
$$

Nota: Una alumna *cambió* el último problema pensando que el martillete descansaba sobre la membrana y después se retiraba: ¿ En tal caso, cuál sería una expresión aceptable para modelar el desplazamiento inicial? Indicación: Piense, en una pirámide truncada e invertida.