

Complemento de Cálculo (521234)

Certamen 2

6 de Junio, 2002

1.- Diga en que dominio de \mathbb{C} las siguientes funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ son analíticas

$$(a) f(z) = \tan z \quad (b) f(z) = \frac{1 - r^2 + 2ir \sin \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}, \quad \text{con } z = re^{i\theta}$$

30 puntos

2.- Verificar si las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son armónicas y en caso afirmativo, encontrar la conjugada respectiva :

$$(a) u(x, y) = \sin x \cosh y \quad (b) u(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}$$

30 puntos

3.- Calcule las siguientes integrales de líneas :

$$(a) \int_C (|z|^2 + e^z) dz, \quad \text{con } C \text{ la curva parametrizada por } x + \pi i \sqrt{x}, \text{ con } x \in [0, 1]$$

Indicación : descomponga en la suma de la integral de una función no analítica más la integral de una función analítica.

$$(b) \oint \frac{\tan z}{(z^2 + 1)^2} dz, \quad \text{alrededor de } x^2 + y^2/4 = 1 \text{ en el sentido antihorario.}$$

30 puntos

4.- Identifique y explique brevemente el error en el siguiente razonamiento :

$$e^{i\theta} = (e^{i\theta})^{(2\pi/2\pi)} = (e^{2\pi i \theta})^{(1/2\pi)} = (e^{2\pi i})^{(\theta/2\pi)} = (1)^{\theta/2\pi} = 1, \quad \text{para todo } \theta > 0.$$

10 puntos

Duración del Certamen : 100 minutos

MGC/MBB/MSD/msc