Ejemplos de Aplicación

1 Problema del crecimiento de un cultivo bacteriano.

Un cultivo de bacterias sigue una ley de crecimiento, tal que en cada momento la velocidad relativa de crecimiento es constante.

Por lo general, se dice que la tasa de crecimiento de un cultivo es proporcional a la cantidad de bacterias que hay en cada instante.

Si llamamos $y(t)$ a la cantidad de bacterias existentes en el momento t, se tiene que:

$$\boxed{y'(t) = k \cdot y(t)}$$

Pb 1 - En un cierto cultivo de bacterias se sabe que la velocidad de crecimiento de la población es, en cada momento, directamente proporcional al número de bacterias existentes en dicho momento. Se sabe también que el tamaño de la población al cabo de 4 horas, es el triple del tamaño de la población inicial. Hallar el número de bacterias que habrá en el cultivo transcurridas 10 horas.

2 Problema de desintegración de un elemento radiactivo.

La velocidad con la que se desintegra la radiación de un elemento es proporcional a la cantidad que haya de dicho elemento.

llamando $y(t)$ a la cantidad del elemento radiactivo en un cierto momento t, tenemos que:

$$\begin{cases} y'(t) = -\alpha \cdot y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t}}$$

En los problemas de este tipo, suele aparecer un concepto químico que debemos conocer, se llama vida media o tiempo de semidesintegración o semivida que no es más que el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la cantidad inicial del elemento radiactivo. **OJO** con las unidades.

Pb 2 - Es sabido que una sustancia radiactiva presente en ciertos fósiles, tal como el C^{14}, se desintegra en cada momento, a una velocidad proporcional a la cantidad presente. La "vida media" del C^{14} (tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una cantidad inicial) es de 5750 años. Averiguar la edad del fósil sabiendo que contiene el 77'7% de su C^{14} inicial.

- Problema del enfriamiento ambiental de una sustancia.

La variación de la temperatura de un cuerpo en contacto con el ambiente es, en cada instante, proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el ambiente.

Si llamamos $T(t)$ a la temperatura del cuerpo en el instante t,

$$T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_{amb})$$ (Ec. de variables separables)

con T_{amb} representando la temperatura del ambiente.

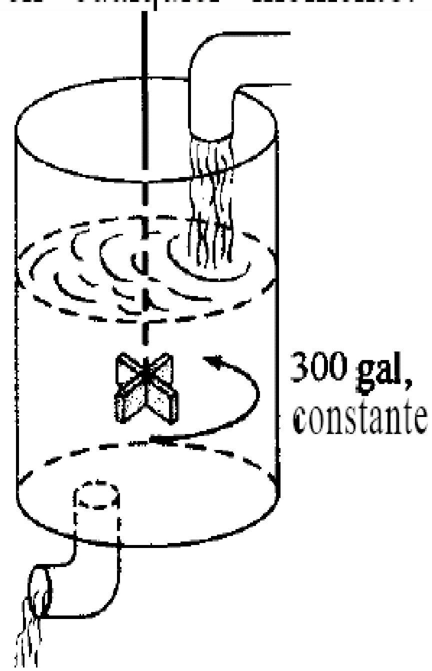
$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot (T(t) - T_{amb}) \Rightarrow \frac{dT(t)}{(T(t) - T_{amb})} = -k \cdot dt$$

$$\Rightarrow \ln(T(t) - T_{amb}) = -k \cdot t + c \Rightarrow T(t) - T_{amb} = C \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$\boxed{T(t) = T_{amb} + C \cdot e^{-k \cdot t}}$$

Pb 3 - Supongamos que encontramos el cadáver de un felino. En dicho momento, se toma la temperatura del mismo y resulta ser de 35ºC. Una hora después, se vuelve a tomar la temperatura y ésta es de 34'5ºC. Suponiendo constante la temperatura ambiental e igual a 27ºC se pide calcular a qué hora se produjo la muerte del animal. (Suponemos que la temperatura del animal en vida es de 36'5ºC).

4 Mezclado Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones se da pie a una ecuación diferencial de primer orden, que **define** la cantidad de sal que contiene la mezcla. Supongamos que un tanque mezclador grande contiene 300 galones de agua, en donde se ha disuelto sal. Otra solución de **salmuera** se bombea al tanque a una tasa de 3 galones por minuto. El contenido se agita perfectamente, y es desalojado a la misma tasa (**Fig.** 1.10). Si la concentración de la solución que entra es 2 libras/galón, hay que formar un modelo de la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento.



Sea A(t) la cantidad de sal (en libras) en el tanque en cualquier momento t. la rapidez con que cambia A(r) es la tasa neta:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \text{tasa de entrada} \\ \text{de la sustancia} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{tasa de salida} \\ \text{de la sustancia} \end{pmatrix} = R_1 - R_2 \qquad (1)$$

la razón, R_1, con que entra la sal al tanque, en **lb/min,** es

$$R_1 = (3 \text{ gal/min}) \,.\, (2 \text{ lb/gal}) = 6 \text{ lb/min},$$

mientras que la razón, R_2, con que sale la sal es

$$R_2 = (3 \text{ gal/min}) \,.\, \left(\frac{A}{300} \text{ lb/gal}\right) = \frac{A}{100} \text{ lb/min}.$$

Entonces, la ecuación (1) se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}.$$

Problemas Complementarios

(1). Si un cultivo de bacterias crece con un coeficiente de variación proporcional a la cantidad existente y se sabe además que la población se duplica en 1 hora ¿Cuánto habrá aumentado en 2 horas?.

(2). Suponga que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura entre él y el ambiente que lo rodea (ley de enfriamiento de Newton). Un cuerpo se calienta 110 °C y se expone al aire libre a una temperatura de 10 °C. Al cabo de una hora su temperatura es de 60 °C. ¿Cuánto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfríe a 30 °C?

(3). Suponga que un tanque grande de mezclado contiene 300 galones de agua en un inicio, en los que se disolvieron 50 libras de sal. Al tanque entra agua pura con un flujo de 3 **gal/min** y, con el tanque bien agitado, sale el mismo flujo. Deduzca una ecuación diferencial que exprese la cantidad $A(t)$ de sal que hay en el tanque cuando el tiempo es t.

(4). Una medicina se inyecta en el torrente sanguíneo de un paciente a un flujo constante de r **g/s.** Al mismo tiempo, esa medicina desaparece con una razón proporcional a la cantidad $x(t)$ presente en cualquier momento t. Formule una ecuación diferencial que describa la cantidad $x(t)$.

Pb 5 - En un túnel subterráneo de dimensiones $20x5x4\ m^3$, existe una concentración de gas carbónico (CO_2) del 0'16%, mientras que en el aire exterior la concentración de gas es del 0'04%. Se insufla aire del exterior en el túnel con unos ventiladores a razón de $50\frac{m^3}{min}$. Hallar la concentración de gas carbónico en el túnel media hora después de iniciado el proceso de renovación de aire.

Pb 6 - Una epidemia se desarrolla en una población de una forma tal que, en cada momento del tiempo, la velocidad de desarrollo de la infección es directamente proporcional al número de personas enfermas por el número de personas sanas. Si la población tiene 10000 habitantes, y se sabe que el número de personas infectadas inicialmente era de 50 junto con que al cabo de 3 días había 250 enfermos. Averiguar el número de enfermos que habrá al cabo de doce días.

7. La ley de enfriamiento de Newton señala que la tasa a la cual se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea. Se coloca un objeto con una temperatura de 90 grados Fahrenheit en un medio con una temperatura de 60 grados. Diez minutos después, el objeto se ha enfriado a 80 grados Fahrenheit. ¿ Cuál será la temperatura del cuerpo después de estar en este ambiente durante 20 minutos? ¿ En cuánto tiempo llegará a 65 grados Fahrenheit la temperatura del cuerpo?
8. Un termómetro se lleva al exterior de una casa donde la temperatura ambiente es de 70 grados Fahrenheit. Al cabo de 5 minutos, el termómetro registra 60 grados Fahrenheit y, 5 minutos después, registra 54 grados Fahrenheit. ¿ Cuál es la temperatura del exterior?

9. La vida media de uranio 238 es aproximadamente de 4.5×10^9 años. ¿ Qué cantidad de un bloque de 10 kilogramos de U-238 estará presente dentro de 1000 millones de años?

10. Dado que 12 gramos de U-238 se desintegran a 9.1 gramos en sólo 4 minutos, calcule su vida media.

11. Un tanque de 500 galones contiene inicialmente 100 galones de solución salina en la que se ha disuelto 5 libras de sal. Se agrega solución salina que contiene 2 libras/galón a razón de 5 galones/minuto, y la mezcla sale del tanque a razón de 3 galones/minuto. Determine cuánta sal hay en el tanque al momento que se desborda.