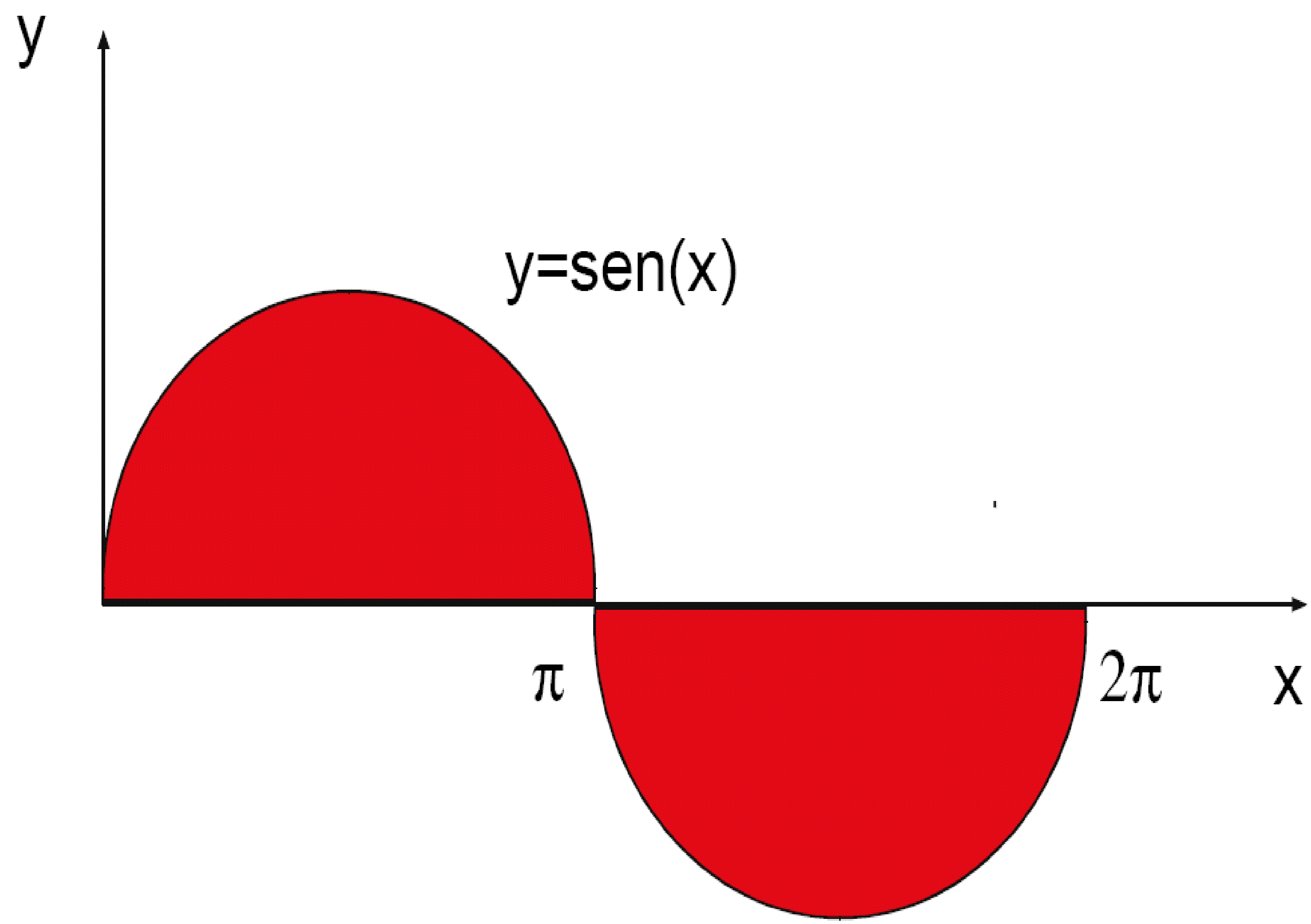
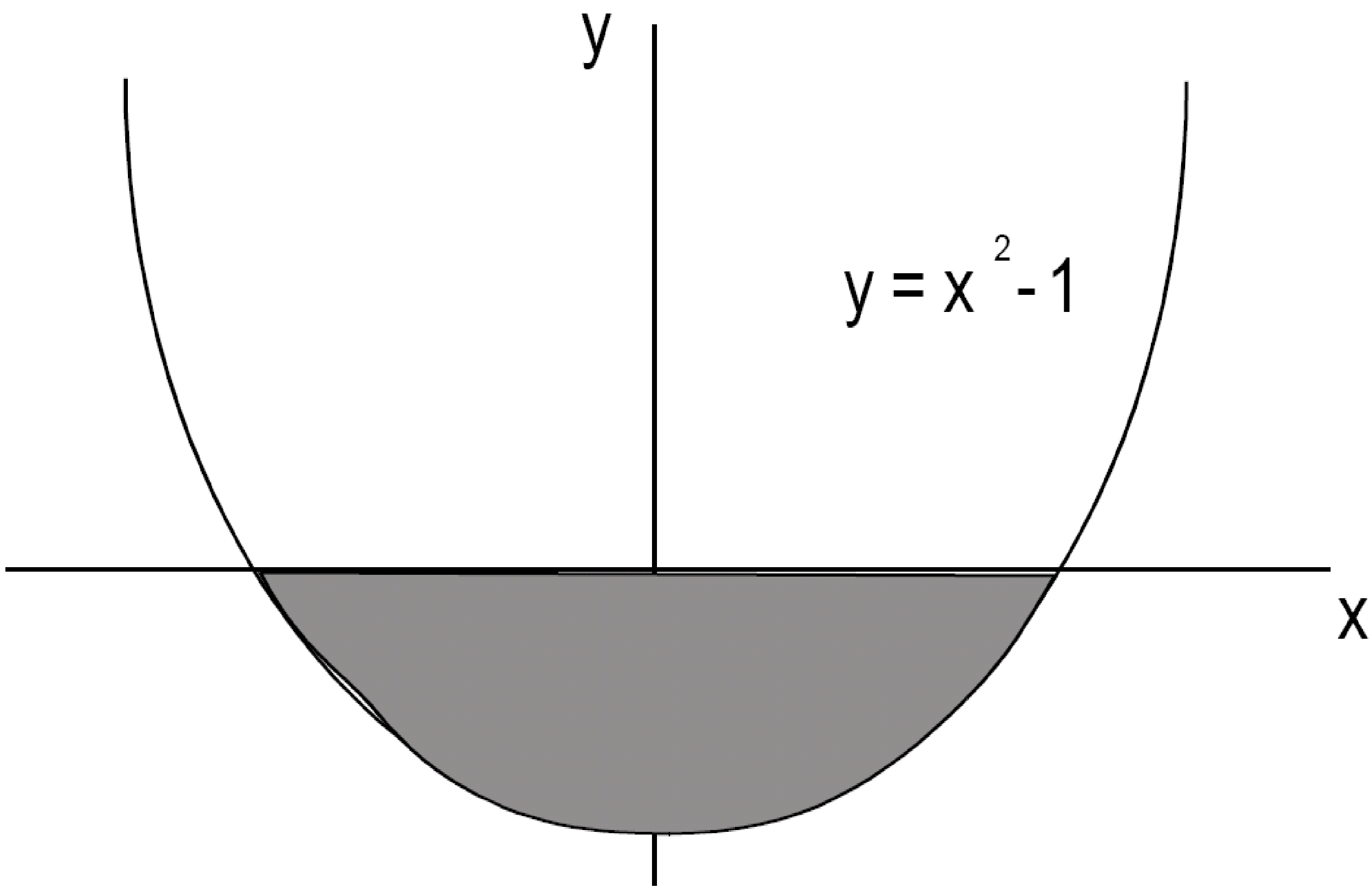
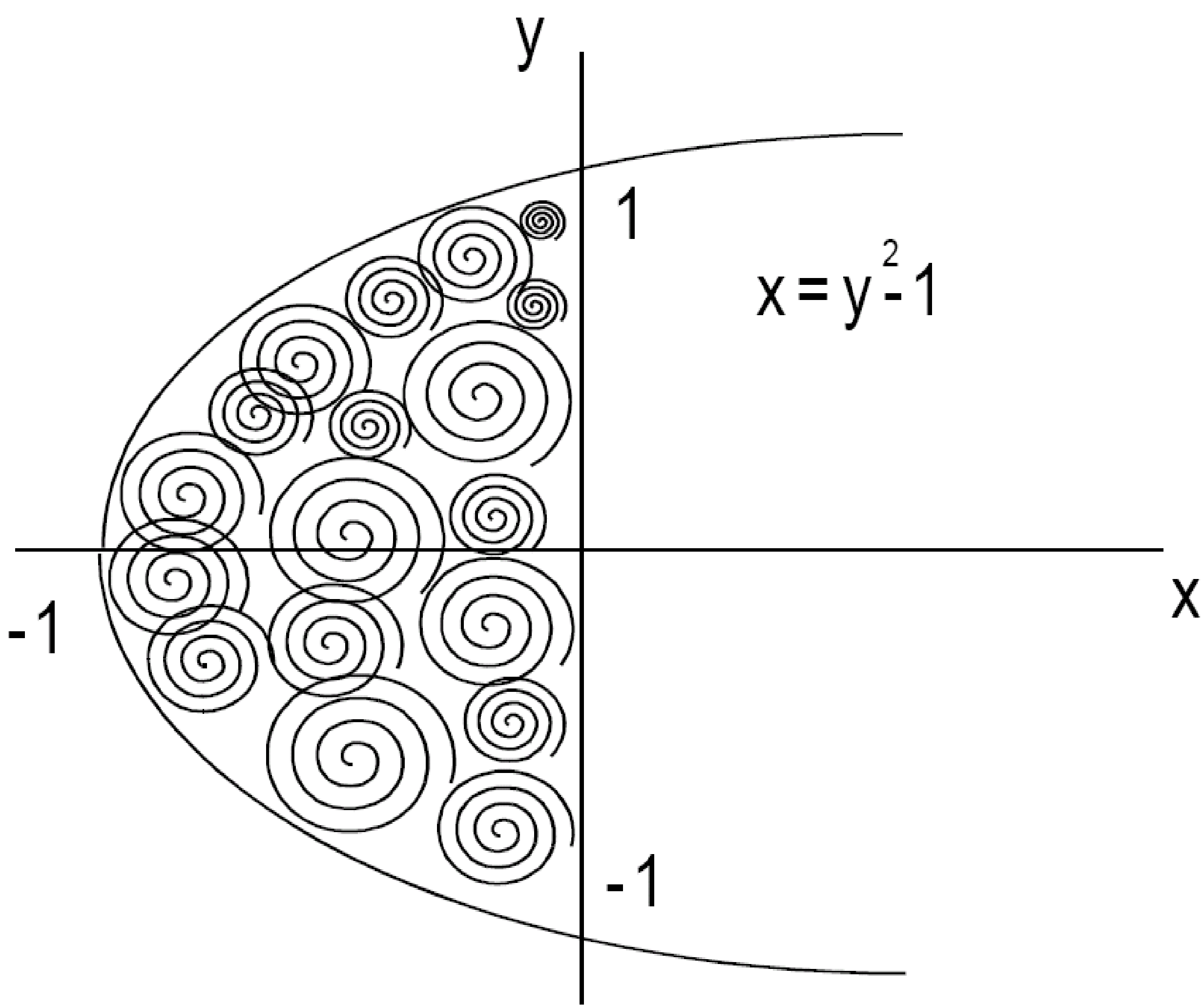

y
y=sen(x)
π
2π
x


y
y = x 2 - 1
x

Ejemplo

Hallar el área encerrada por la curva $y = x^2 - 1$ *y el eje* y



Áreas entre curvas

Consideremos la región S limitada por las curvas

$$y = f(x) \ , y = g(x) \ , x = a, x = b$$

donde f y g son funciones continuas y

$$f(x) \geq g(x) \text{ para todo } x \in [a, b]$$

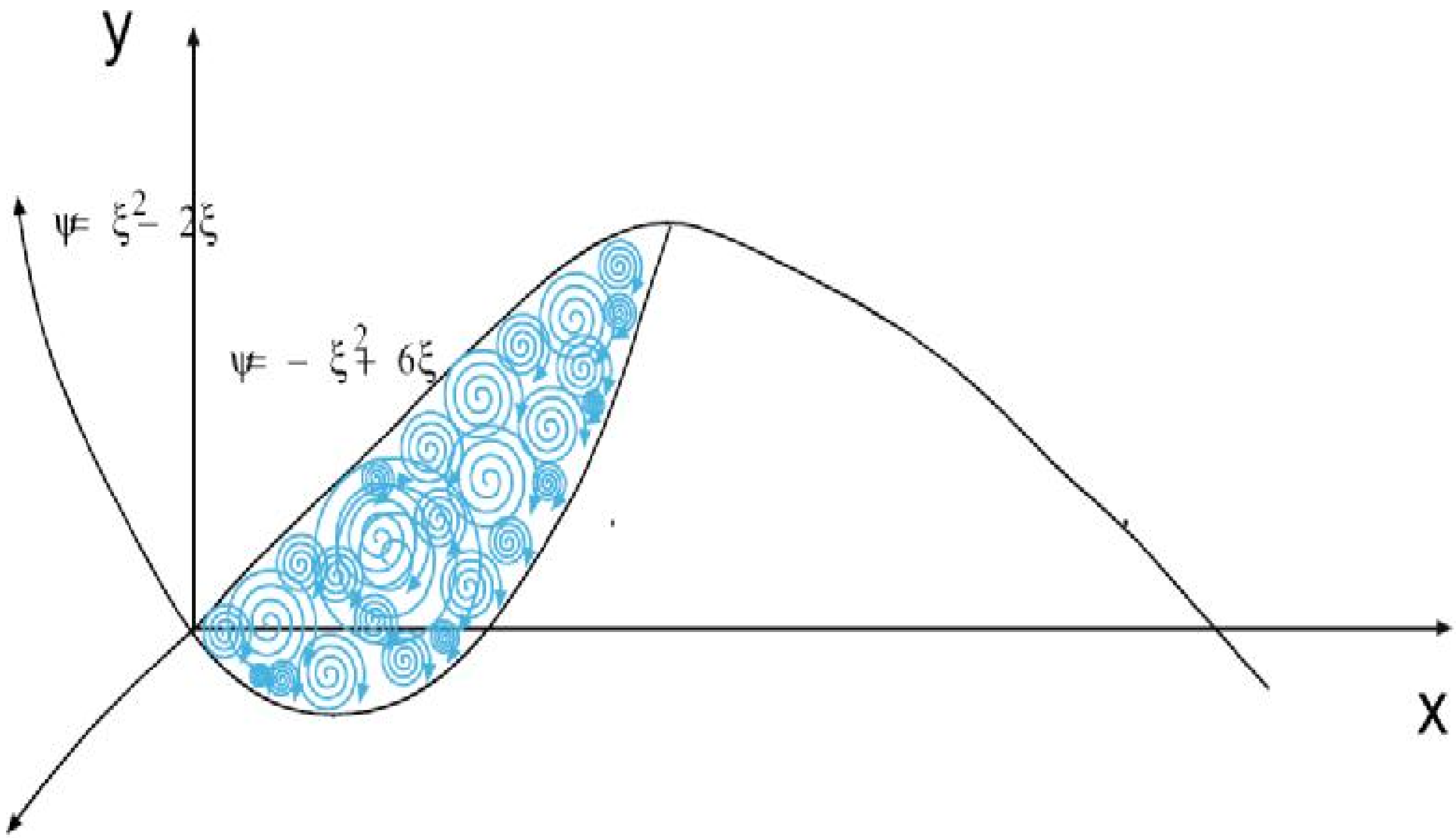
Es posible verificar que si el área de S es A, entonces

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Ejemplo

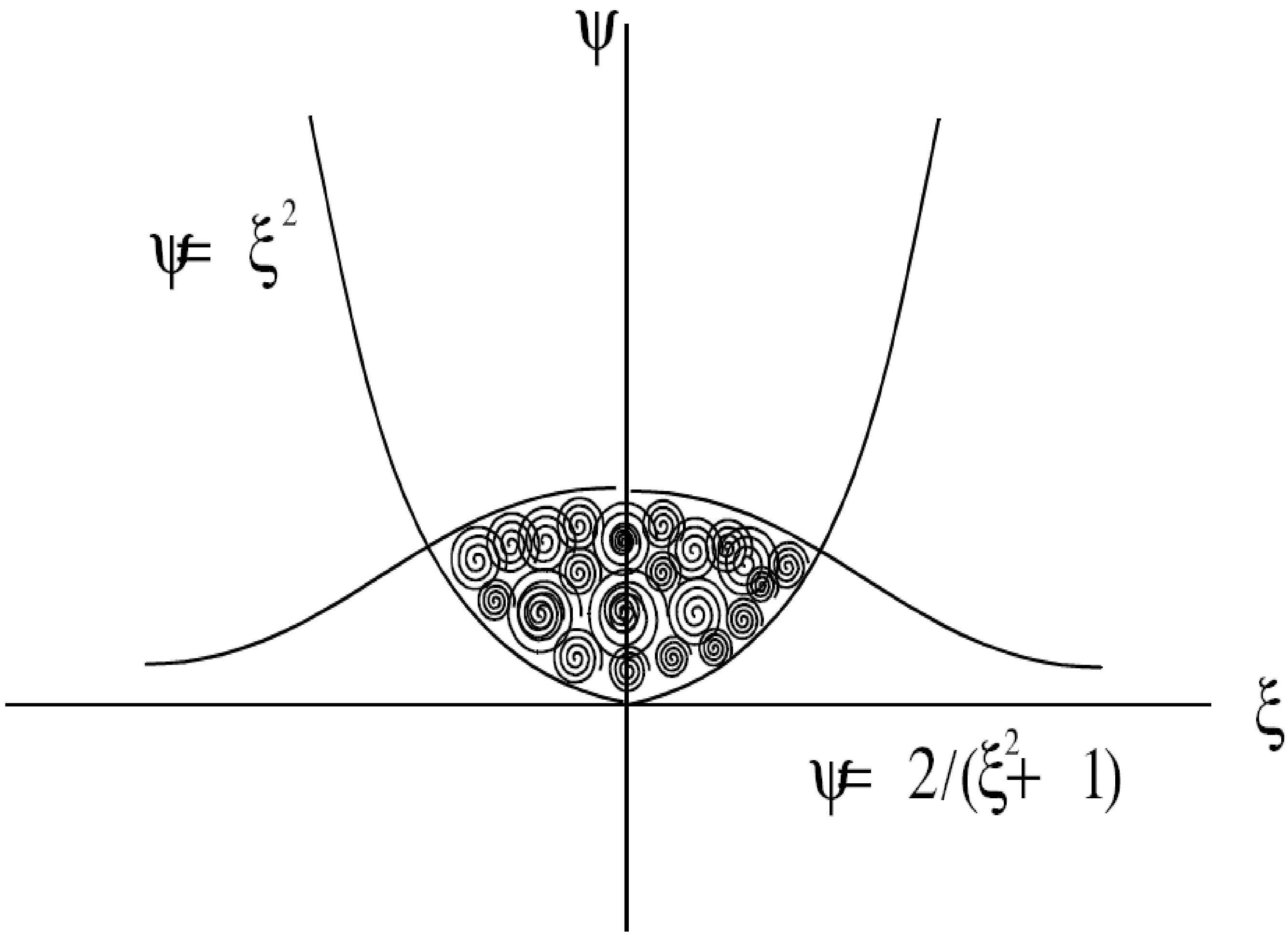
Calcular el área limitada por las parábolas

$$y = x^2 - 2x \ \text{y} \ y = -x^2 + 6x.$$



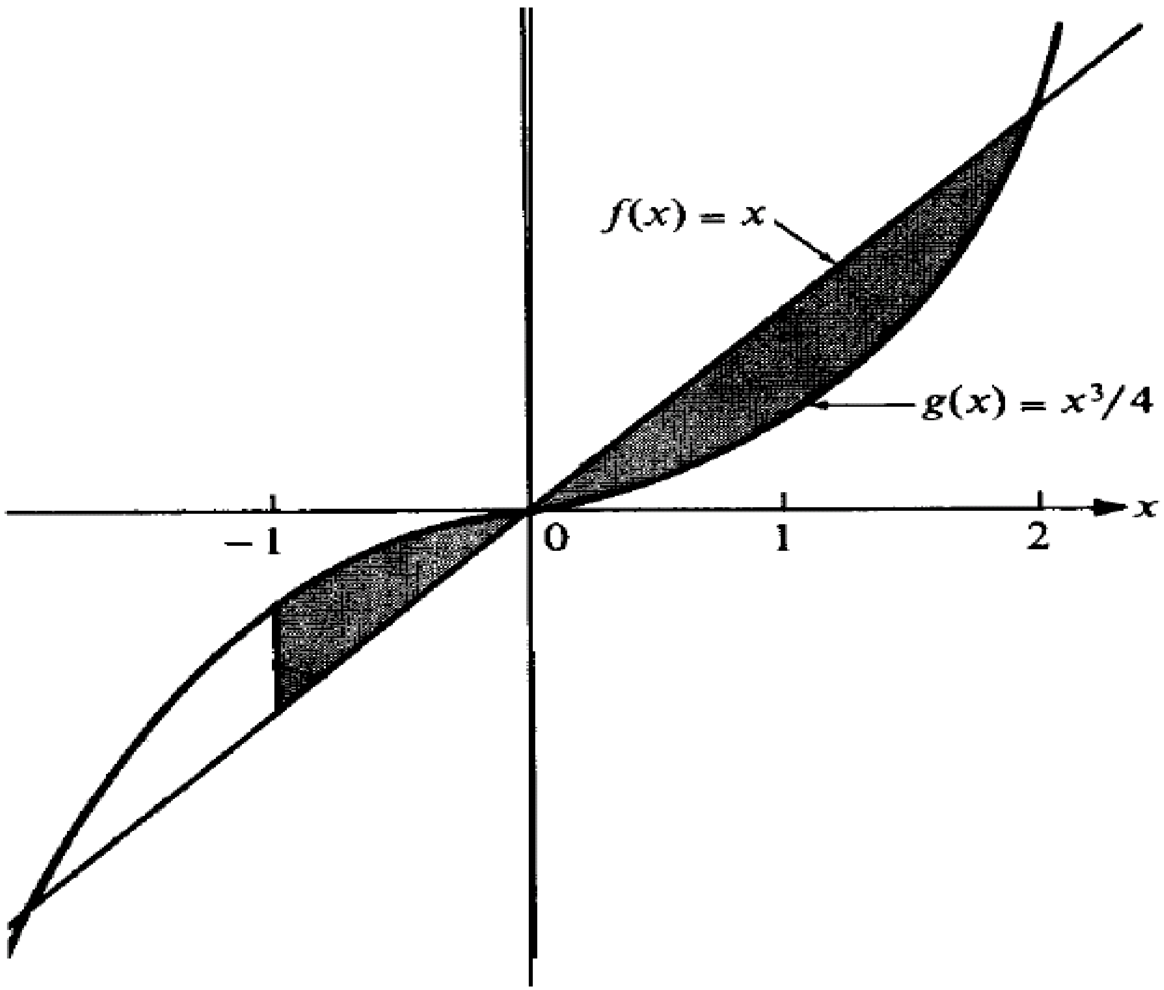
Ejemplo *Hallar el área encerrada por las gráficas de*

$$y = x^2,\ y = \frac{2}{x^2+1}.$$



Ejemplo.

Hallar el area entre las graficas de $f(x) = x$ y $g(x) = x^3/4$ sobre el intervalo $[-1, 2]$



Ejercicios.
En cada caso, calcular el area entre las graficas de f y g, sobre el intervalo $[a, b]$, si:

1. $f(x) = x^{1/3}$, $g(x) = x^{1/2}$, $a = 0$, $b = 1$
2. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{1/2}$, $a = 0$, $b = 2$
3. $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x$, $a = -1$, $b = \sqrt{2}$
4. $f(x) = |x - 1|$, $g(x) = x^2 - 2x$, $a = 0$, $b = 2$

Integrales impropias

Las denominadas *integrales impropias* son una clase especial de *integrales definidas* (integrales de Riemann) en las que el intervalo de integración o la función en el integrando o ambos presentan ciertas particularidades.

$\int_a^b f(x)dx$ es impropia si se presenta uno de los siguientes casos:

- $a = -\infty$ o $b = \infty$, o, $a = -\infty$ y $b = \infty$
- $f(x)$ no es acotada en alguno de los puntos de $[a, b]$, dichos puntos se llaman *singularidades* de $f(x)$.

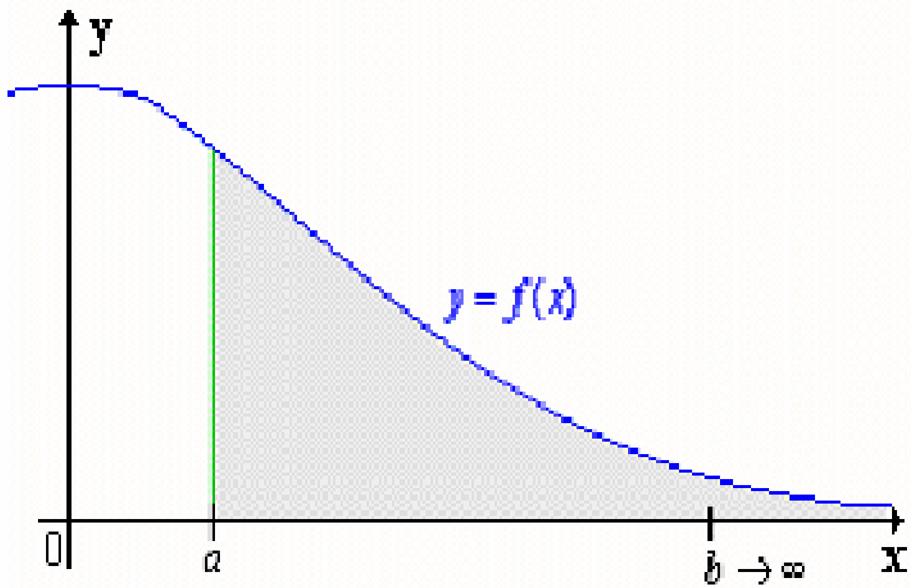
Definición 1:

(i) Si f es continua $\forall x \geq a$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

si el límite existe.

Observe la fig.1.



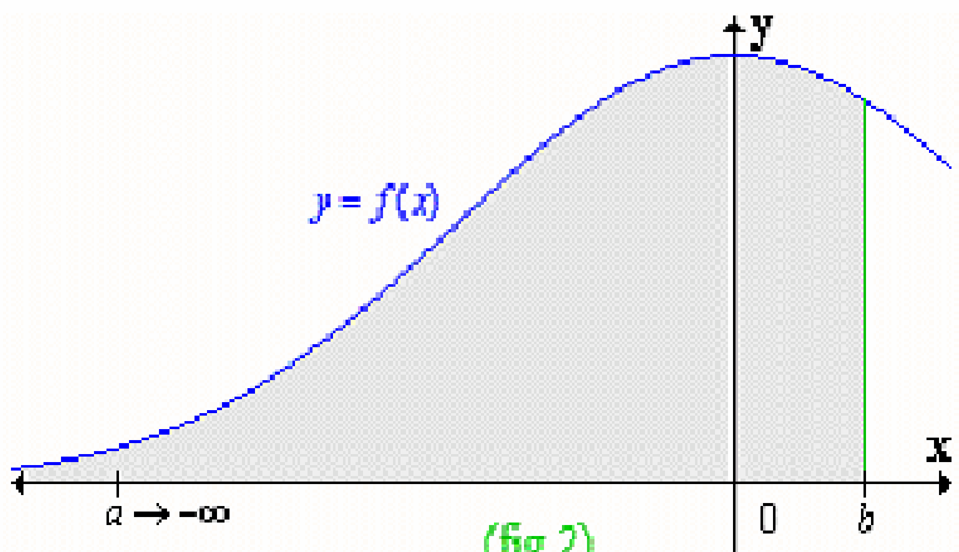
(fig.1)

(ii) Si f es continua $\forall x \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

si el límite existe.

Observe la fig.2.



(fig.2)

Definición2:

Si f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, y $c \in \mathbb{R}$; entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx.$$

si los límites existen.

Definición3:

(i) Si f es continua $\forall x \in (a, b]$, y $\lim_{x \to a^{+}} f(x) = \infty$, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to a^{+}} \int_{t}^{b} f(x)dx$$

si el límite existe.

(ii) Si f es continua $\forall x \in [a, b)$, y $\lim_{x \to b^{-}} f(x) = \infty$, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to b^{-}} \int_{a}^{t} f(x)dx$$

si el límite existe.

Definición4:

Si f es continua en todo número de $[a, b]$, excepto en c y $a < c < b$, y si además $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$,

entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

si los límites del miembro derecho existen.

Cuando los límites, en las definiciones anteriores, existen, se dice que la integral es *convergente*, en caso contrario, se dice que la integral es *divergente*.

1. $\int_0^\infty e^{-x} dx$

2. $\int_{-\infty}^0 x5^{-x^2} dx$