Integral Indefinida

Si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, escribimos

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde C representa una cosntante cualquiera.

Es decir, el simbolo $\int f(x)dx$ es usado para representar a una antiderivada de f generica.

$\int f(x)dx$ es llamada integral indefinida de f.

Tabla de integrales Indefinidas

1.	$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
2.	$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3.	$\int dx = x + c$
4.	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$
5.	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$

Tabla de integrales Indefinidas

6.	$\int e^x dx = e^x + c$
7.	$\int sen(x) dx = -\cos x + c$
8.	$\int \cos x dx = sen(x) + c$
10.	$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

Tabla de integrales Indefinidas

12.	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$
13.	$\int \csc^2(x) dx = -ctg(x) + c$
14.	$\int \csc(x) ctg(x) dx = -\csc(x) + c$
15.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsen(\frac{u}{a}) + c$
16.	$\int u(x)^n du = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$

Tabla de integrales Indefinidas

17.	$\int f(x)f'(x)dx = \frac{f(x)^2}{2} + c; \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\| + c$
18.	$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctan}(\frac{u}{a}) + c$
19.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen(x) + c$
19.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
20	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left\|\frac{u}{a}\right\| + c$

Integrales por sustitución

$$\frac{d}{dx}(F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

si F es una antiderivada de f $(F' = f)$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

En forma práctica si sustituimos $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

donde la nueva integral se espera sea más fácil de integrar que la original.

Ejemplos

1. $Determine \int \sqrt[3]{x^2+2}\,x\,dx.$
2. $Calcular \int \frac{x-1}{x^2+4x+8}dx.$
3. $Calcular \int sen^2 x \cos x dx.$ Sugerencia: $u = sen(x)$

- $Calcular \int \frac{x+1}{x^2+2x}dx.$ Sugerencia: $u = x^2+2x$

5. $Determinar \int \frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}dx.$

Sugerencia

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1} = x^2+1+\frac{1}{x+1}$$

Mas Ejemplos

Determine las integrales dadas

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[7]{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{e^{-3x}-4e^{3x}+6e^{5x}}{3e^{3x}}dx$ 3. $\displaystyle\int \frac{3^{2x}}{5^{2x}}dx$

4. $\displaystyle\int e^{2x} sen(e^{2x})dx$ 5. $\displaystyle\int 3xe^{-5x^2}dx$ 6. $\displaystyle\int \frac{\ln(4x)}{5x}dx$

7. $\displaystyle\int \frac{2e^x}{e^{2x}-2e^x+1}dx$ 8. $\displaystyle\int e^{3x}\cdot e^{-2x}dx$ 9. $\displaystyle\int \frac{3xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

10. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}dx$ 11. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}dx$ 12. $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\ln x}dx$

Integración por partes.

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

En notación de diferenciales sería: $d(uv) = udv + vdu$

despejando $udv = d(uv) - vdu.$

Integrando obtenemos

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

finalmente

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Ejemplos

Ejemplo 1 $\int \ln x dx.$ $u = \ln x,\ dv = dx$

Ejemplo 2 $\int x \cos x dx.$ $u = x\ ,\ dv = \cos x dx$

Ejemplo 3 $\int x^2 sen(x) dx.$ $u = x^2\ ,\ dv = sen(x) dx$

Ejemplo 4 $\int \sec^3 x dx = I.$ $u = \sec x$

$$dv = \sec^2 x dx$$

Mas Ejemplos

Determine la integral dada usando integración por partes

1. $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\,dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x-5}}\,dx$ 3. $\displaystyle\int \ln(4x)\,dx$

4. $\displaystyle\int x\ln(2x)\,dx$ 5. $\displaystyle\int x^{1/2}\ln x\,dx$ 6. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}\,dx$

7. $\displaystyle\int (x\ln x)^2\,dx$ 8. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+5}\,dx$ 9. $\displaystyle\int \csc^3 x\,dx$

Integración por Fracciones parciales

Ejemplo *Calcular* $\displaystyle\int \frac{-4x-32}{(x+3)(x-1)}dx.$

Solución.

$$\frac{-4x-32}{(x+3)(x-1)} = \frac{5}{x+3} - \frac{9}{x-1}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{-4x-32}{(x+3)(x-1)}dx &= \int \frac{5}{x+3}dx - \int \frac{9}{x-1}dx \\ &= 5\ln|x+3| - 9\ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

¿es posible siempre expresar una función racional en fracciones simples?

1. Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, donde los $a_i, (i = 0, .., n)$ son números reales. El grado de este polinomio es n (mayor exponente) siempre que $a_0 \neq 0$.
2. Todo polinomio puede factorizarse en producto de polinomios cuadráticos o lineales. Esto equivale a decir que las raíces de cualquier polinomio son reales o complejas.
3. El cuociente de dos funciones polinomiales se llama función racional.

   Si f es una función racional , entonces

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Esta fracción se llama propia si el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. En otro caso se llama impropia.

4. Toda fracción impropia (función racional) puede expresarse como la suma de un polinomio y una fracción propia (función racional).

Ejemplo

Determine que clase de fracción es $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$.

$$dividendo/divisor = cuociente + \frac{residuo}{divisor}$$

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 + \frac{-1}{x+1}$$

fracción propia = polinomio + fracción propia.

Caso 1. El denominador es un producto de *factores lineales distintos*

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$; $\quad q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

Ejemplo 1 *Determine* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + x^2 - 2x}$.

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$$

$$\frac{1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Caso 2. El denominador de una fracción propia contiene , *factores lineales repetidos* $ax + b$, n veces.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad Q(x) = d(x-a)^n(x-b)^m.....(x-k)^c$$

La descomposición en fracciones parciales contiene términos de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Ejemplo *Determinar* $\int \frac{x+3}{(x^2-2x+1)(x^2+4x+4)}dx$

$$(x^2-2x+1)(x^2+4x+4) = (x-1)^2(x+2)^2.$$

$$\frac{x+3}{(x^2-2x+1)(x^2+4x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

$$x+3 = A(x-1)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x+2)(x-1)^2 + D(x-1)^2.$$

$$\int \frac{x+3}{(x^2-2x+1)(x^2+4x+4)}dx = \int \frac{-5/27}{x-1}dx + \int \frac{4/9}{(x-1)^2}dx +$$

$$\int \frac{5/27}{x+2}dx + \int \frac{1/9}{(x+2)^2}dx \quad = \frac{5}{27}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| - \frac{4}{9(x-1)} - \frac{1}{9(x+2)} + c.$$

Caso 3. En este caso trabajaremos con factores cuadráticos diferentes, entonces a cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c que aparezca una vez en el denominador de una fracción propia le corresponde una fracción propia de la forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

donde A y B son constantes por determinar. Recuerda que factor irreducible ax^2+bx+c significa que no se puede factorizar en los reales, o que sus raices son complejas.

Ejemplo *Evaluar* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2},$$

$$1 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1).$$

$$1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + 2B + D.$$

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ B+D &= 0 \\ 2A+C &= 0 \\ 2B+D &= 1. \end{aligned}$$

$C = 0, D = -1, B = 1, A = 0.$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+2}$$

$$= \arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

Caso 4. Este caso es similar al anterior excepto que los factores cuadráticos irreducibles se repiten. A cada factor cuadrático irreducible $(ax^2+bx+c)^m$, con m entero mayor que 1 le corresponde una suma de fracciones de la forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

donde los A_i y B_i , $(i=1,2...,n)$ son constantes que debemos determinar.

Ejemplo

$$Calcular\ la\ integral\ \int\frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+5)^2}.$$

Ejercicios

Determine las integrales usando fracciones parciales

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+3)}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-4)(x+3)}$
3. $\displaystyle\int \frac{x+5}{3x^2-5x}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+4x-7}$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+3x^2-5x}$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+5)(x-4)}$