Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Complemento de Cálculo
(521234)
Segundo Certamen

21 – Noviembre – 1997

Problema 1: Considere la ecuación del calor en un dominio definido entre dos esferas concentricas de radio $R_1 = 1$ y $R_2 = 2$:

1.- Deduzca a partir de las condiciones de simetría del problema que el operador laplaciano aplicado a u en coordenadas esféricas es igual a $\Delta u = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} \right) u$.

2.- Utilizando el método de separación de variables, descomponga $u(r,t) = G(t)W(r)$. Luego, haciendo los cambios de variable $s = \lambda r$ y $W = s^{-1/2}U$ deduzca que $W(r)$ se puede escribir en términos de las soluciones de la ecuación de Bessel de orden $1/2$.

3.- Admitiendo que las soluciones de la ecuación de Bessel de orden $1/2$ son $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x)$, y $J_{\frac{-1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x)$ (no lo demuestre!), pruebe a partir de las condiciones de borde que $W(r)$ se escribe solo en términos de $J_{\frac{1}{2}}$, y que los valores propios de la ecuación son $_n = n\pi$, con $n = 1, 2 \ldots$.

4.- Calcule $u(x,t)$ en término de una serie de funciones propias y detemine los coeficientes de la serie utilizando un desarrollo en series de Fourier de $u_0(r)$.

50 puntos

Problema 2: Una membrana circular de radio unitario descansa sobre el plano XY con su centro en el origen y su borde se encuentra fijo en el plano. La membrana comienza a vibrar con una elongación $f(r)$ y después se queda vibrando libremente. Se pide :

1.- Demostrar que su elongación está dada por

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\lambda_n r) cos(\lambda ct)}{J_1 62(\lambda_n) \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr}$$

2.- Si $f(r) = 1$ y $c = 1$, determinar (aproximadamente) la magnitud del desplazamiento de la membrana en el punto de coordenadas $x = y = \frac{1}{2}$, en el instante $t = 2$ minutos.

Indicación : ver tabla de valores al dorso.

50 puntos

Duración del certamen : 2 horas

HAW/MB/MSC/MC

!

Raices de J_0 n	Valor de α_n	Valor de $J_0(\alpha_n/\sqrt{2})$	Valor de $J_1(\alpha_n)$	$\cos(2\alpha_n)$
1	2.404825558	0.3977141938	0.5191474972	0.09710885941
2	5.520078110	-0.4017343982	-0.3402648066	0.04456716578
3	8.653727913	0.1821406416	0.2714522999	0.02869229698
4	11.79153444	0.08589805012	-0.2324598313	0.02112240711
5	14.93091771	-0.2317155277	0.2065464331	0.01670443394
6	18.07106397	0.1862221504	-0.1877288030	0.01381198453
7	21.21163663	-0.01399722099	0.1732658942	0.01177216462
8	24.35247153	-0.1446268604	-0.1617015507	0.01025674951