Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Complemento de Cálculo
(521234)
Segundo Certamen

25 – Noviembre – 1996

Problema 1: Escriba la serie de Laurent de la función $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ en torno a $z = -1$ en la región $0 < |z+1| < 2$.

25 puntos

Problema 2: Considere la función $g(z) = \dfrac{1}{(1+z^n)^2}$, con $n \in \mathbf{N}$, y denote w_k $(k = 0, \ldots, n-1)$, las n raices $n-$ésimas de -1.

1.- Pruebe que los residuos de los puntos singulares de $g(z)$ estan dados por $\mathrm{Res}(w_k) = -(\frac{n-1}{n^2})w_k$.

2.- Deduzca del cálculo anterior que $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(1+z^n)^2} = 0$, para cada $n \in \mathbf{N}$.

35 puntos

Problema 3: Sea $U = U(x,t)$ la solución armónica de la ecuación del potencial definida en el primer cuadrante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{para } x > 0, y > 0,$$

$$U(x,0) = \frac{-x^2}{x^4+1}, \quad U(0,y) = \frac{y^2}{y^4+1}$$

Calcule $U = U(x,t)$, transformando este problema en otro más simple : utilice la representación conforme $\zeta = z^2$, seguida de la transformación bilineal que lleva el semi-plano $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$ al círculo unitario $|w| < 1$, y tal que $-1 \mapsto i$, $0 \mapsto -1$, y $1 \mapsto -i$.

Indicación : la transformación bilineal que lleva los puntos $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \mapsto (w_1, w_2, w_3)$ está dada implícitamente por la ecuación :

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\zeta_3} \cdot \frac{\zeta_2-\zeta_3}{\zeta_2-\zeta_1}$$

40 puntos

Duración del certamen : 2 horas
HAW/GBG/MC/CR/MSC