TEORÍA DE INTERPOLACIÓN

El concepto de interpolación es seleccionar una función p de una clase de funciones en las que la gráfica de $y = p(x)$ pasa por un conjunto de datos (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ (por ejemplo, medidos experimentalmente). Nos interesaremos aquí en las funciones p de tipo polinomial.

POLINOMIOS DE INTERPOLACIÓN

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reales o complejos distintos y $y_0, y_1, \ldots, y_n$ valores asociados. La idea es encontrar un polinomio, en general de grado m $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, que interpola al conjunto de datos

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Dado que se tienen $m + 1$ parámetros independientes $a_0, \ldots, a_m$ y $n + 1$ condiciones sobre p, es razonable considerar $m = n$. El sistema de ecuaciones que resuelve este problema de interpolación está dado por

$$\left.\begin{array}{c} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{array}\right|$$

Teorema.
Dados $n + 1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, entonces existe un **único** *polinomio p, de grado menor o igual a n, tal que*

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Demostración.
El determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones que resuelve el problema de interpolación está dado por

$$\prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

que es evidentemente distinto de cero.

POLINOMIOS DE LAGRANGE

Otra manera equivalente de demostrar el mismo Teorema, y que permite calcular directamente el polinomio de interpolación, sin tener que resolver el sistema de ecuaciones anterior, es a través de los polinomios de Lagrange ℓ_i, con $i = 0, \ldots, n$ asociados a los puntos $x_0, \ldots, x_n$. Estos polinomios de grado n están definidos por la siguiente relación :

$$\ell_i(x_j) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 0, \ldots, n.$$

Es decir, se trata de polinomios ℓ_i de grado n que tienen exactamente n raíces reales distintas $x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, y que se escriben de manera explícita como :

$$\ell_i(x) \;=\; \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Entonces, el polinomio de interpolación que pasa por los puntos (x_i, y_i), con $i = 0, \ldots, n$, está dado por :

$$p(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x)$$

Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Una manera de aproximar la función f es a través de polinomios de interpolación, respecto a $x_0, \ldots, x_n$:

$$p_n(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

El siguiente resultado, permite describir los errores locales de interpolación.

Teorema.

Sean $x_0, \ldots, x_n$ números reales distintos y f una función real $n+1$ veces continuamente diferenciable en el intervalo $I = (a, b)$, donde $a = \min\{x_0, \ldots, x_n\}$ y $b = \max\{x_0, \ldots, x_n\}$. Entonces existe $\xi \in I$ tal que:

$$E(t) := f(t) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(t) \;=\; \frac{(t-x_0)\cdots(t-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

para todo $t \in [a, b]$.

Aplicación.

Para $n = 1$, el polinomio de grado 1, que interpola a $f(x) = \log_{10}(x)$ en $[x_0, x_1]$, está dado por

$$p_1(x) = \frac{(x_1 - x)f(x_0) + (x - x_0)f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Según el teorema anterior, el error $E(x) = f(x) - p_1(x)$ está dado por

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2}\frac{\log_{10} e}{\xi^2}, \qquad x_0 < \xi < x_1.$$

Suponiendo que $h = x_1 - x_0$, es fácil verificar que

$$\max_{x_0 \le x \le x_1} (x_1 - x)(x - x_0) = \frac{h^2}{4}.$$

Acotando $\dfrac{1}{\xi^2} \le \dfrac{1}{x_0^2}$, se tiene la siguiente estimación del error:

$$|\log_{10} x - p_1(x)| \le \frac{0{,}0542h^2}{x_0^2}$$

Al realizar una interpolación polinomial para un valor de n grande, se puede comprobar que se producen grandes oscilaciones del polinomio de interpolación p_n entre dos puntos consecutivos, especialmente cerca de los extremos del intervalo de interpolación $[a, b]$.

Una estrategia efectiva que evita esta situación consiste en construir funciones de interpolación polinomial por tramos (pedazos), en particular las **funciones splines**.

FUNCIONES SPLINE CÚBICAS

Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Una función s es una **interpolante cúbica por tramos** en $[x_0, x_n]$, si existen polinomios cúbicos $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ tales que

$$s(x) = q_k(x), \quad \text{en } [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

y

$$q_k(x_k) = y_k, \qquad q_k(x_{k+1}) = y_{k+1}.$$

La función s es una spline cúbica, si además de ser una interpolante cúbica por tramos, los q_k tienen la misma pendiente y concavidad en los nodos de acoplamiento, es decir,

$$\begin{aligned} q'_{k-1}(x_k) &= q'_k(x_k) \\ &= s'(x_k), \quad k = 1, \cdots, n-1 \\ q''_{k-1}(x_k) &= q''_k(x_k) \\ &= s''(x_k), \quad k = 1, \cdots, n-1. \end{aligned}$$

Esta última condición garantiza la suavidad de s en $[x_0, x_n]$. En particular, cada q''_k es lineal e interpola a (x_k, σ_k) y (x_{k+1}, σ_{k+1}) en $[x_k, x_{k+1}]$, donde $\sigma_k := s''(x_k)$. En consecuencia:

$$q''_k(x) = \sigma_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + \sigma_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k},$$

con $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Sea $h_k = x_{k+1} - x_k$, con $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Entonces integrando dos veces la función anterior, tenemos

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k (x_{k+1} - x)^3 + \sigma_{k+1} (x - x_k)^3}{6 h_k} + \lambda_k(x)$$

donde $\lambda_k(x) = c_k + d_k x$, con $k = 0, 1, \cdots, n-1$, son polinomios de grado 1 que se escriben en la forma

$$\lambda_k(x) = A_k (x - x_k) + B_k (x_{k+1} - x)$$

donde A_k y B_k son constantes determinadas por

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{\sigma_k}{6} h_k^2 + B_k h_k \\ y_{k+1} &= \frac{\sigma_{k+1}}{6} h_k^2 + A_k h_k. \end{aligned}$$

Despejando A_k y B_k en esta relación y reemplazándola en el polinomio de grado 3, tenemos

$$\begin{aligned} q_k(x) &= \frac{\sigma_k}{6} \left[\frac{(x_{k+1} - x)^3}{h_k} - h_k (x_{k+1} - x) \right] \\ &\quad + \frac{\sigma_{k+1}}{6} \left[\frac{(x - x_k)^3}{h_k} - h_k (x - x_k) \right] \\ &\quad + y_k \left[\frac{x_{k+1} - x}{h_k} \right] + y_{k+1} \left[\frac{x - x_k}{h_k} \right], \\ &\quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \end{aligned}$$

Los valores σ_k están determinados por el último conjunto de condiciones que falta por verificar y que caracterizan a la spline cúbica, a saber que la derivada es continua. Es decir, se debe verificar que s' resulte continua en cada x_k. Para ello derivamos el polinomio de tercer grado q_k obteniendo

$$\begin{aligned} q_k'(x) &= \frac{\sigma_k}{6}\left[-\frac{3(x_{k+1}-x)^2}{h_k}+h_k\right]+\frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{3(x-x_k)^2}{h_k}-h_k\right] \\ &\quad +\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}, \qquad k=0,1,\cdots,n-1 \end{aligned}$$

Luego, imponiendo $q_{k-1}'(x_k)=q_k'(x_k),\ k=1,\cdots,n-1$ para la continuidad de s', se deducen las siguientes relaciones

$$\frac{\sigma_{k-1}}{6}h_{k-1}+\frac{2\sigma_k}{6}h_{k-1}+\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}=-\frac{2\sigma_k}{6}h_k-\frac{\sigma_{k+1}}{6}h_k+\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k},$$

para $\quad k=1,\ldots,n-1.$

Es decir, tenemos un sistema de ecuaciones lineales:

$$h_{k-1}\sigma_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)\sigma_k+h_k\sigma_{k+1}=6\left\{\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\right\}$$

con $\quad k=1,\ldots,n-1$, constituído por $n-1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas : $\sigma_0,\ldots,\sigma_n$.

Para resolver el sistema, las dos incognitas que se deben asignar arbitrariamente, se pueden elegir de varias maneras. Lo usual es imponer condiciones sobre σ_0 y σ_n. Cuando se toman

$$\sigma_0 = \sigma_n = 0,$$

a la interpolante se le llama Spline Cúbica Natural. Escribiendo las ecuaciones de manera matricial para la spline cúbica natural, se obtiene el siguiente sistema tridiagonal, con matriz simétrica y definida positiva.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} &a_k = 2(h_{k-1}+h_k), \\ &d_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}, \qquad k=1,\ldots,n-1, \\ &b_k = h_k, \qquad k=1,\ldots,n-2, \end{aligned}$$

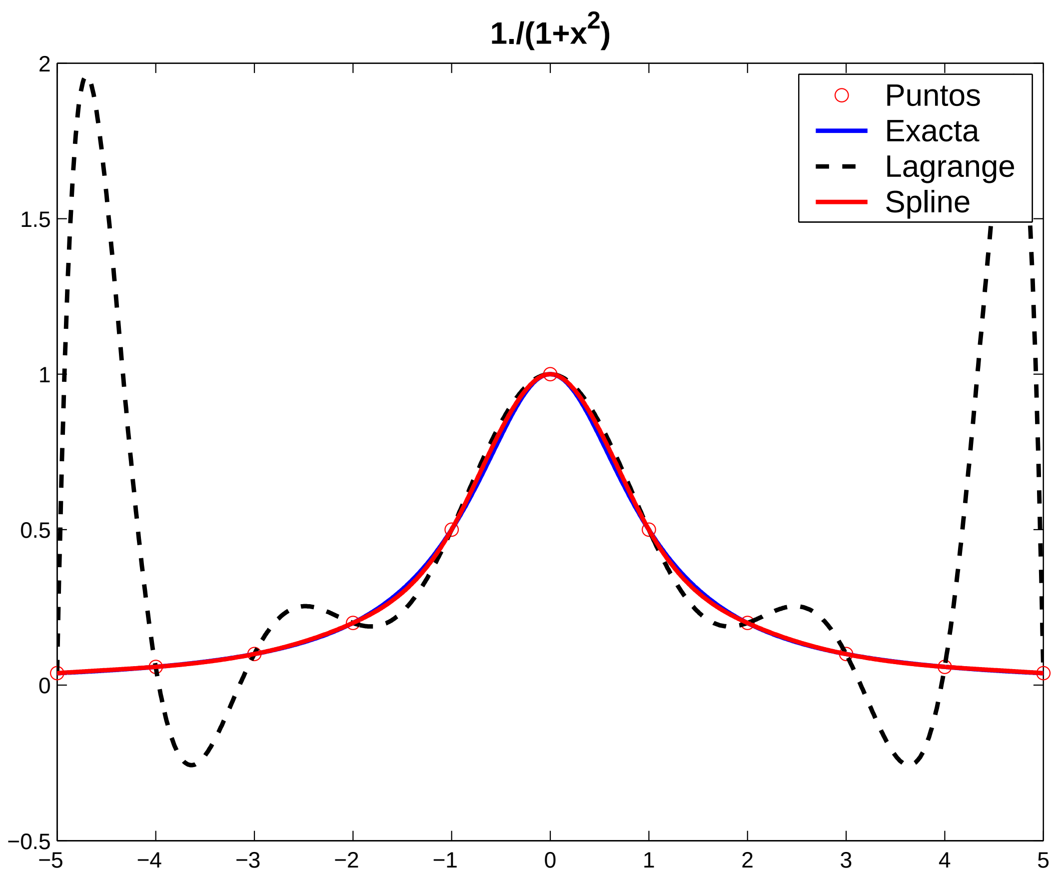
FENÓMENO DE RUNGE

Ejemplo 1.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad -5 \leq x \leq 5\,;$

2. p polinomio de grado 10 que interpola a f en los puntos $x_i = -5, -4, -3, \ldots, 5\,;$

3. s spline cúbico natural que interpola a f en los puntos $x_i = -5, -4, -3, \ldots, 5\,.$



Ejemplo 2.

1. $f(x) = \text{sen}(3x) \qquad 0 \leq x \leq 10\,;$
2. p polinomio de grado 10 que interpola a f en los puntos $x_i = 0, 1, 2, \ldots, 10\,;$
3. s spline cúbico natural que interpola a f en los puntos $x_i = 0, 1, 2, \ldots, 10$