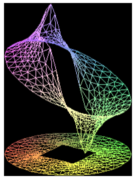
ALGEBRA I, ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

520135, 522115

Segundo Semestre



CAPITULO 6: POLINOMIOS.

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Polinomios

Definición: Polinomio

Sea $\mathbb{K}$ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y sean $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Se llama **función polinomial** o **polinomio** con coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ a la función $p : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ que a cada $x \in \mathbb{K}$ le asigna el valor:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

- El grado de un polinomio es el mayor valor n tal que $a_n \neq 0$. Se escribe $gr(p) = n$.
- Se denota por $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$. Por ejemplo, $\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Polinomios

Observaciones y notaciones:

- a_n se llama coeficiente principal y a_0 se llama término libre o independiente.
- Si $a_n = 1$, el polinomio p se llama polinomio mónico.
- Si $n = 0$ y $a_0 \neq 0$, entonces $p(x) = a_0$ se llama polinomio constante y tiene grado cero.
- Se define el polinomio constante nulo, θ, por: $\theta(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{K}$. Se conviene que el polinomio nulo no tiene grado.
- Se define el polinomio constante unidad, 1, por: $1(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{K}$.

Polinomios

Igualdad de Polinomios:

$$\text{Si} \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{y} \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i,$$

entonces

$$p = q \Longleftrightarrow [gr(p) = gr(q) \ \ \wedge \ \forall i = 0, ..., n, \quad a_i = b_i].$$

Polinomios

Definición : suma y multiplicación de polinomios.

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ dos polinomios cualesquiera en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Se definen las siguientes operaciones:

- **Suma**

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{r} (a_i + b_i) x^i,$$

donde $r =$max$\{m, n\}$.

- **Multiplicación**

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{m+n} d_i x^i,$$

con $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{(i-k)}, i = 0, 1, ..., m+n; \;\; gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$.

Polinomios

Propiedades de la suma y el producto en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

$\forall p, q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ se tiene:

S1).	$(p+q)+r = p+(q+r)$.	S2).	$p+q = q+p$.
S3).	$\exists\, \theta \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p+\theta = p$	S4).	$\exists -p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p+(-p) = \theta$
M1).	$(p\cdot q)\cdot r = p\cdot(q\cdot r)$	M2).	$p\cdot q = q\cdot p$
M3).	$\exists\, 1 \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p\cdot 1 = p$		
N).	$p\cdot q = \theta \Longrightarrow p = \theta \vee q = \theta$	D).	$p\cdot(q+r) = p\cdot q + p\cdot r$

Estas propiedades corresponden a una estructura de Anillo conmutativo con unidad y sin divisores de cero.

Polinomios

Observación:

Como vemos, el conjunto de los polinomios tiene algunas propiedades en común con el conjunto de los números enteros. Además de las anteriores, veremos que:

- Si $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, entonces $\dfrac{p}{q}$ se llama **función racional** y en general NO es un polinomio.
- La división de polinomios es similar a la división de números enteros.
- También existe la noción de divisibilidad .
- Es posible extraer Mínimo Común Múltiplo y las funciones racionales se suman de manera similar a las fracciones.

Polinomios

Teorema.

Si $p, d \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, $gr(p) \geq gr(d)$ y $d \neq \theta$, entonces existen únicos polinomios $q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ llamados respectivamente **cuociente y resto**, tales que:

$$p = qd + r, \quad \text{y} \quad (r = \theta \quad \text{o} \quad gr(r) < gr(d)).$$

Observaciones:

- Del teorema se tiene que

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}.$$

- Si $r = \theta$, entonces decimos que q **divide a** p y que p **es divisible por** d.

Ejemplo

Si $p(x) = 6x + 4x^3 + 5x^4 - x^2$ y $d(x) = x^2 + 1$,
se obtiene: $q(x) = 5x^2 + 4x - 6$ y $r(x) = 2x + 6$.

Regla de Ruffini.

Si dividimos el polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ por $(x - c)$, obtenemos un cuociente

$$q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \cdots + q_1 x + q_0$$

de grado igual a $n-1$ y cuyo coeficiente principal es igual al coeficiente principal de p: $q_{n-1} = a_n$. Además, el resto que se obtiene es un polinomio de grado 0 (e.d., constante).

Polinomios

Definición. Sean $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ y $c \in \mathbb{K}$, se dice que c es una **raíz o cero** de p si $p(c) = 0$. Es decir, si:

$$p(c) = \sum_{i=0}^{n} a_i c^i = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n = 0.$$

Polinomios

Teorema del resto.

El resto de dividir $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ por $(x - c)$ es $p(c)$.

Teorema del factor.

c es raíz de $p \Longleftrightarrow p$ es divisible por $(x - c)$,

es decir,

$$p(c) = 0 \Longleftrightarrow \exists\, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}),\ \forall x \in \mathbb{K},\ p(x) = q(x)(x - c).$$

Definición.

Sea $k \in \mathbb{N}$ el mayor natural tal que $(x-c)^k$ divide a p. Es decir existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ no divisible por $(x-c)$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad p(x) = q(x)(x-c)^k.$$

En tal caso decimos que c es una raíz de multiplicidad k. Si $k=1$ se dice que c es una **raíz** simple.

- La suma de las multiplicidades de todas las raíces de p es menor o igual que $gr(p)$.
- Un polinomio p tiene a lo más $gr(p)$ raíces distintas.
- Si un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes complejos es igual a cero para más de n valores de x distintos, entonces el polinomio es idénticamente nulo.
- Si dos polinomios p y q de grado n coinciden en $n+1$ puntos distintos, entonces $p=q$.

Definición. Polinomios reducibles e irreducibles.

Un polinomio p se dice **reducible** en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ si existen dos polinomios $q, s \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, con $gr(q) \geq 1, gr(s) \geq 1$, tales que $p = qs$. En caso contrario se dice que p es **irreducible o primo** en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

- Por ejemplo, $p(x) = x^2 + 1$ es reducible en $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ y es irreducible en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y en $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
- Los polinomios de grado 1, $p(x) = a_0 + a_1 x$, son todos irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

Teorema.

Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ con coeficientes complejos reales, y $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$). Si $p(z) = 0$, entonces $p(\overline{z}) = 0$ y existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que

$$p(x) = [(x-a)^2 + b^2]q(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Polinomios

Localización de raíces.

- Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene grado impar, entonces p tiene al menos una raíz.
- Si $a + \sqrt{b}$ es raíz de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, con coeficientes racionales, $a, b \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b}$ es irracional, entonces $a - \sqrt{b}$ también es raíz de p.

Regla de Descartes.

El número de raíces reales positivas (negativas) de un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, con coeficientes complejos reales es menor o igual que el número de cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$ (de $p(-x)$) y difiere de él en un número par.

Ejemplo. $p(x) = x^4 - x^3 - 2x - 1$ tiene una raíz real positiva, una negativa y dos complejas conjugadas.

Polinomios

Observaciones.

- Dado $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, y $a \in \mathbb{K}$, los polinomios p y ap tienen las mismas raíces.
- Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ y a es múltiplo común de los denominadores de los coeficientes de p, entonces ap tiene coeficientes enteros.

Teorema. Raíces racionales.

Sea $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y sea $\dfrac{a}{b}$ una raíz de p con a, $b \in \mathbb{Z}$ primos relativos, entonces a divide a a_0 y b divide a a_n.

Corolario. Si p es mónico, entonces sus raíces racionales son enteros divisores de a_0.

Ejemplo

Descomponer en factores irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y en $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, $p(x) = x^6 - 1$.

Solución

$$\begin{aligned} p(x) &= x^6 - 1 \\ &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Como $x^2 + x + 1$ y $x^2 - x + 1$ tienen raíces complejas. Así

$$p(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

está descompuesto en factores irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y

$$p(x) = (x-1)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)(x+1)\left(x - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)$$

está descompuesto en factores irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Ejemplo

Encuentre todas las raíces de

$$p(x) = x^6 - \frac{3}{2}\,x^5 - \frac{45}{4}\,x^4 + \frac{271}{8}\,x^3 - 33\,x^2 + \frac{27}{2}\,x - 2$$

Solución

Para poder encontrar las raíces racionales es necesario que el polinomio sea a coeficientes enteros, entonces multiplicamos por 8 y buscamos las raíces de

$$q(x) = 8\,x^6 - 12\,x^5 - 90\,x^4 + 271\,x^3 - 264\,x^2 + 108\,x - 16.$$

q tiene 5 cambios de signo, luego tiene una, tres o 5 raíces positivas y tiene exactamente una raíz negativa.

Las posibles raíces racionales son $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\right\}$.

Hacemos la división sintética de q por $(x+4)$:

8	-12	-90	271	-264	108	-16	-4
	-32	176	-344	292	-112	+16	
8	-44	86	-73	28	-4	0	

De aquí $x=-4$ es la raíz negativa y como

$$q(x) = (x+4)(8\,x^5 - 44\,x^4 + 86\,x^3 - 73\,x^2 + 28\,x - 4)$$

las posibles raíces racionales restantes son: $\left\{1, 2, 4, 8, 16, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$.

Repitiendo el proceso se obtiene que las raíces positivas son: $x=2$ con multiplicidad 2 y $x=\frac{1}{2}$ con multiplicidad 3.

Descomposición en Suma de Fracciones Parciales.

Si $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, con $gr(p) < gr(q)$ y $q \neq \theta$. Entonces la función racional $\dfrac{p}{q}$ puede descomponerse en sumas de fracciones cuyos denominadores son polinomios obtenidos de la factorización de q en polinomios irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, de la siguiente forma:

- I) por cada factor lineal con potencia n, $(ax+b)^n$, se obtienen los sumandos:

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

Polinomios

- II) por cada factor cuadrático irreducible en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, con potencia m, $(ax^2+bx+c)^m$, se obtienen los sumandos:

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}.$$

Si $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, con $gr(p) \geq gr(q)$ y $q \neq \theta$. Entonces podemos calcular el cuociente Q y el resto R de la división $\dfrac{p}{q}$, tales que:

$$\frac{p}{q} = Q + \frac{R}{q}, \quad gr(R) < gr(q),$$

y aplicar el procedimiento anterior a $\dfrac{R}{q}$.

Ejemplo 1. Descomponga la fracción en suma de fracciones parciales

$$\frac{3x+6}{(x-2)(x+4)}$$

Solución

Los factores del denominador son lineales diferentes

$$\frac{3x+6}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$

De aquí $A = 2$ y $B = 1$, es decir,

$$\frac{3x+6}{(x-2)(x+4)} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+4}$$

Ejemplo 2. Descomponga la fracción en suma de fracciones parciales

$$\frac{6x^2 - 14x - 27}{(x+2)(x-3)^2}$$

Solución

El denominador tiene el primer factor lineal no repetido y el segundo lineal repetido

$$\frac{6x^2 - 14x - 27}{(x+2)(x-3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}.$$

De aquí $A = 1$, $B = 5$ y $C = -3$, es decir,

$$\frac{6x^2 - 14x - 27}{(x+2)(x-3)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{5}{x-3} - \frac{3}{(x-3)^2}$$

Ejemplo 3. Descomponga la fracción en suma de fracciones parciales

$$\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}$$

Solución

El denominador tiene el primer factor del denominador lineal y el segundo, es irreducible en los números reales

$$\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

De aquí $A=3$, $B=2$ y $C=-1$, es decir,

$$\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}=\frac{3}{x-2}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

Ejemplo 4. Descomponga la fracción en suma de fracciones parciales

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

Solución

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 3} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

De aquí $A = 1$, $B = -2$, $C = 2$ y $D = 1$, es decir,

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 3} + \frac{2x + 1}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

Ejemplo 5. Descomponga la fracción en suma de fracciones parciales

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 17x - 17}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 17x - 17}{x^2 - 5x + 6} = x - 2 + \frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6}$$

y

$$\frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x - 5}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 3}.$$

Luego

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 17x - 17}{x^2 - 5x + 6} = (x - 2) \ + \ \frac{3}{x - 2} \ - \ \frac{2}{x - 3}.$$