UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 7

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PROBLEMAS DE VALORES INICIALES

En Matlab los siguientes comandos pueden usarse para la solución de Problemas de Valores Iniciales

```
Ordinary differential equation solvers.
(If unsure about stiffness, try ODE45 first, then ODE15S.)
ode45    - Solve non-stiff differential equations, medium order method.
ode23    - Solve non-stiff differential equations, low order method.
ode113   - Solve non-stiff differential equations, variable order method.
ode23t   - Solve moderately stiff differential equations, trapezoidal rule.
ode15s   - Solve stiff differential equations, variable order method.
ode23s   - Solve stiff differential equations, low order method.
ode23tb  - Solve stiff differential equations, low order method.
```

Como se ve en esta lista, hay métodos para resolver E.D.O. *stiff* y *no stiff*. Además hay métodos de orden bajo, medio, alto y variable.
Todos ellos tienen una sintaxis semejante. Por ejemplo, para resolver el P.V.I.

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

en el intervalo $[t_0,\, t_f]$ mediante el comando `ode45` en su opción más sencilla, debe ejecutarse

```
>> [t,y]=ode45('f',[to tf],yo);
```

donde

- `f` es el nombre de la función $f(t, y(t))$ (típicamente definida mediante un programa `function` en un archivo `f.m`);
- `to` y `tf` son los extremos del intervalo donde se desea conocer la solución;
- `yo` es el valor de la solución en `to` (es decir el valor de la condición inicial $y(t_0) = y_o$);
- `t` devuelve los valores de la variable independiente t donde el método calcula el valor de la solución;
- `y` devuelve los valores de la solución en cada uno de los puntos t

Estos comandos no requieren como dato un paso de integración h pues todos ellos determinan de manera automática en cada paso k, el tamaño del paso de integración h_k necesario para mantener los errores por debajo de una tolerancia determinada. Los valores de t que entrega corresponden a los puntos $t_k = t_{k-1} + h_k$, $k = 1, 2, \ldots$, en los que el comando necesitó calcular el valor de $y(t_k)$.
Si se desea conocer la solución para ciertos valores de `t`, puede alternativamente ejecutarse:

```
>> [t,y]=ode45('f',tspan,yo);
```

donde `tspan` es el vector de valores donde se desea conocer la solución. Por ejemplo, `tspan=to:0.1:tf`. En ese caso, la salida `t` coincide con `tspan` e `y` contiene los valores de la solución en esos puntos.
La tolerancia predeterminada de estos métodos es 10^{-3}, para el error relativo, y 10^{-6}, para el error absoluto. Si se desea calcular la solución con otras tolerancias, deben prefijarse las opciones elegidas mediante el comando `odeset`. Además, en la ejecución del comando para resolver la E.D.O., debe agregarse el parámetro adicional de opciones. La sintaxis para realizar esto es, por ejemplo

```
>> options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1.e-8);
>> [t,y]=ode45('f',[to tf],yo,options);
```

Si se ejecuta `options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1.e-8)` sin el "`;`" puede verse que hay otras opciones que pueden prefijarse, además de las tolerancias de los errores.

Ejercicio 1. Consideremos un modelo, propuesto por Kermack y McKendrick en 1927 para describir la propagación de una epidemia en un grupo de N personas en un período de T semanas. Si $S(t)$ es el número de personas sanas al cabo de t semanas, $E(t)$, el número de personas enfermas y $M(t)$, el de personas muertas, las ecuaciones que describen la evolución en el tiempo de $S(t)$, $E(t)$ $M(t)$ son

$$\begin{aligned} S' &= -c\,S\,E, \\ E' &= c\,S\,E - m\,E, \\ M' &= mE \end{aligned}$$

donde c y m son las constantes que describen la rapidez con que la enfermedad se transmite y la rapidez con que las personas enfermas mueren respectivamente.

Observe que

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}M} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}M} = -\frac{c}{m}S \Rightarrow S = S_0 e^{-\frac{c}{m}M}$$

si suponemos que el número inicial de personas muertas a causa de la enfermedad es cero y S_0 denota el número inicial de personas sanas.

Además

$$S' + E' + M' = 0 \Rightarrow S + E + M = \text{ constante },$$

e igual al número de personas N en el grupo considerado.

Con esto se tiene que

$$E = N - S - M = N - S_0 e^{-\frac{c}{m}M} - M$$

y

$$M' = m\left(N - S_0 e^{-\frac{c}{m}M} - M\right), \quad M(0) = 0, \quad t \in [0,\, 10]. \qquad \text{(P.V.I.)}$$

1.1 Resuelva el problema de valores iniciales (P.V.I.) con `ode45` suponiendo $N = 3000$, $E(0) = 150$, $m = 1.8$ y $c = 0.001$. Llame antes a `odeset` para hacer `AbsTol` igual a 10^{-8} y `RelTol` igual a 10^{-4}.

1.2 Dibuje, en un mismo gráfico, el número de personas sanas, muertas y enfermas en el período considerado (de 10 semanas).

1.3 ¿Al cabo de cuántas semanas aproximadamente se mantiene casi constante el número de personas sanas, enfermas y muertas en el grupo considerado?

1.4 ¿Cuál es el número de personas que ha muerto a causa de la enfermedad 8 semanas después de comenzada la epidemia?

La resolución de P.V.I. para sistemas de E.D.O. se realiza mediante los mismos comandos. En tal caso, `f(t,y)` debe ser una función a valores vectoriales (es decir un **vector columna** de funciones) e `y` un **vector columna** de variables de la misma dimensión. Además, la condición inicial `yo` también debe ser un **vector columna** de la misma dimensión

Ejercicio 2. Considere un ecosistema simple consistente de conejos con una cantidad más que suficiente de alimento y zorros que depredan los conejos para su alimentación. Un modelo clásico debido a Volterra describe este ecosistema mediante el siguiente par de ecuaciones no lineales de primer orden:

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = 2c - \alpha cz \qquad c(0) = c_0, \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = -z + \alpha cz \qquad z(0) = z_0, \end{cases}$$

donde t es el tiempo medido en años, $c = c(t)$ es el número de conejos y $z = z(t)$ el número de zorros, ambos en el instante t, y α es una constante positiva que mide la probabilidad de interacción entre miembros de las dos especies.

2.1 Cuando $\alpha = 0$, conejos y zorros no interactúan. Resuelva la ecuación diferencial a lo largo de un año en el caso en que inicialmente hay 100 animales de cada especie. Compruebe que en tal caso los conejos hacen lo que mejor saben hacer, mientras los zorros se van muriendo de hambre.

2.2 Calcule la evolución de ambas poblaciones a lo largo de 12 años en el caso en que la constante de interacción es $\alpha = 0.01$ y que la población inicial es de 300 conejos y 150 zorros. ¿Qué conclusión puede extraer en este caso?

2.3 Repita la simulación anterior pero con poblaciones iniciales de 15 conejos y 22 zorros. ¿Cuál es ahora la conclusión?

Un P.V.I. de orden n

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad x \in [a, b] \\ y(a) = z_{01},\ y'(a) = z_{02}, \ldots,\ y^{n-1}(a) = z_{0n} \end{cases}$$

se puede expresar como un sistema de n ecuaciones de primer orden al definir:

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

En efecto,

$$\boldsymbol{z}' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix} =: \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z}).$$

Además, las condiciones iniciales quedan:

$$\boldsymbol{z}(a) = \begin{pmatrix} z_1(a) \\ z_2(a) \\ \vdots \\ z_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{01} \\ z_{02} \\ \vdots \\ z_{0n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{z}_0$$

Luego, el P.V.I.

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z}), & x \in [a, b] \\ \boldsymbol{z}(a) = \boldsymbol{z}_0 \end{cases}$$

es un sistema de E.D.O. de primer orden, al que se pueden aplicar los comandos antes vistos.
Por el mismo procedimiento, un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior, también puede expresarse mediante un sistema de E.D.O. de primer orden.

Ejercicio 3. La litotricia extracorpórea por ondas de choque (LEC) es un tratamiento no invasivo que utiliza un pulso acústico para romper los cálculos renales (litiasis renal) y los cálculos biliares (piedras en la vejiga o en el hígado).

El LEC puede generar cierto daño colateral. Las ondas de choque así como las burbujas (de aire) de cavitación formadas por la agitación de la orina, pueden ocasionar daño a capilares, hemorragia del parenquima renal o subcapsular. Esto puede generar consecuencias a largo plazo tales como insuficiencia renal e hipertensión.

El radio R de las burbujas formadas después de t microsegundos de comenzado el tratamiento es $R(t) = 3 \times 10^{-6} r(t)$ metros, donde r es la solución a la siguiente ecuación diferencial, propuesta en 1998 por Howle, Shearer y Zhong,

$$rr'' + \frac{3}{2}\left(r'\right)^2 = r^{-3\gamma} - 1, \quad r(0) = A,\ r'(0) = 0 \qquad \text{(L.E.C.)}$$

en la que $\gamma = 1.4$ es el exponente adiabático.

3.1 Convierta (L.E.C.) a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

3.2 Resuelva el problema de valores iniciales resultante con $t \in [0, 20]$ y suponiendo $A = 2.5$.

3.3 Grafique la aproximación resultante y observe que es una función periódica, ¿cuál es el período aproximado de la misma? ¿Entre qué valores oscila el radio R de la burbuja?

Ejercicio 4. Considere el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y'(x) &= 100(1 - y(x)),\ x \in [0, 5], \\ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

4.1 Resuelva este problema con `ode45` y `ode15s` tomando `AbsTol = 1e-6` y `RelTol = 1e-4`. ¿En cuántos subintervalos divide `ode45` el intervalo de integración $[0, 5]$ para resolver este problema? ¿En cuántos lo divide `ode15s`? Observe que `ode15s` necesita dividir $[0, 5]$ en muchos menos subintervalos que `ode45`, a pesar de que las tolerancias con que ambos métodos calculan son las mismas. Este comportamiento es típico de problemas stiff.

4.2 Grafique los tamaños de paso generados por ambos métodos y la solución exacta a este problema $y(t) = e^{-100\,t} + 1$.

Observe que la solución exacta de este problema varía rapidamente desde el valor inicial hasta un valor cercano a 1, pero para $t \geq 0.1$ se mantiene casi constante. Es de esperarse que a partir de 0.1 un método numérico para resolver este problema tome en $[0,\, 0.1]$ tamaños de paso pequeños, para poder reproducir la variación de la solución exacta, pero a partir de 0.1 use tamaños de paso mucho mayores.

Sin embargo, en los gráficos de los tamaños de paso usados por `ode45` y `ode15s`, sólo `ode15s` exhibe el comportamiento esperado. El comportamiento de `ode45` es el típico de métodos no adecuados para resolver problemas stiff al usarse para resolver problemas stiff.

Ejercicio 5. Consideremos el Problema de Valores Iniciales

$$x' = -3t\,x^2 + \frac{1}{1+t^3}, \quad x(0) = 0, \quad t \in [0,\, 5]$$

cuya solución exacta es

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3}.$$

5.1 Resuelva el problema con `ode45` y los pares de valores de `AbsTol` y `RelTol` en la tabla 1 y complétela.

`RelTol`	`AbsTol`	$\text{máx}_i\, \lvert x_i - x(t_i)\rvert$
1e-2	1e-4	
1e-3	1e-5	
1e-4	1e-6	
1e-5	1e-7	

Tabla 1: Comportamiento de ode45

Observe que no siempre se cumple que $\text{máx}_i\, \lvert x_i - x(t_i)\rvert \leq$ `AbsTol`, sin embargo, disminuyendo los valores de `AbsTol` y `RelTol` la solución calculada por `ode45` se acerca a la solución exacta del problema.

5.2 Con los valores devueltos en último llamado a `ode45` grafique la solución exacta y los tamaños de paso con los que ha calculado `ode45`, es decir, si usted llamó a `ode45` de este modo

```
[t,x] = ode45(...)
```

escriba

```
figure(1)
plot(t,t./(1+t.^3))
figure(2)
plot(t(1:end-1),t(2:end)-t(1:end-1))
```

Observe que en el tramo en el que la solución exacta del problema varía más rápidamente los tamaños de paso con los que calcula `ode45` son más pequeños.

Ejercicio 6. Considere el siguiente Problema de Valores Iniciales:

$$\begin{cases} x' = 3\,\mathrm{sen}(t)x + 2ty + 1 & t \in [0, 1.5] \\ y'' = 2x + t^2 y' - 5y + e^t & t \in [0, 1.5] \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Para resolver este problema, utilizaremos el Método de Euler Implícito, en cual considera una partición del intervalo $[0, 1.5]$ en N subintervalos de tamaño h, donde:

$$t_i = (i-1)h, \;\; i = 1, \ldots, N+1 \qquad \text{con} \qquad h = \frac{1.5}{N}.$$

El algoritmo del Método de Euler Implícito queda:

Dado $\boldsymbol{y}_1$
Para $i = 1, \ldots, N$
$\quad \boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + h\boldsymbol{F}(t_{i+1}, \boldsymbol{y}_{i+1})$

6.1 Utilizando un cambio de variables apropiado, escriba el P.V.I. asociado como un sistema de E.D.O. de primer orden, con sus respectivas condiciones iniciales.

6.2 Escriba el sistema de ecuaciones lineales que define el Esquema de Euler Implícito para las E.D.O. del item anterior:

6.3 Escriba un programa tipo rutero en ambiente MATLAB que realice las siguientes tareas:

a) Resuelva el problema utilizando el Esquema de Euler Implícito, considerando $N = 100$.

b) Resuelva el problema utilizando el comando `ode45`, utilizando la misma partición definida en el item anterior.

c) En una misma figura grafique $x(t)$ obtenidos por el Método de Euler implícito y el comando `ode45`.

d) En otra figura grafique $y(t)$ obtenidos por el Método de Euler implícito y el comando `ode45`.