UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA 7

Temas
– Funciones definidas por tramos.
– Composición de funciones.
– Función Exponencial y Logarítmica.
– Problemas de Aplicación.

Problema 1.

El objetivo es abordar en forma general el problema de determinar la inyectividad de funciones definidas por tramos. El punto clave es recordar que una función f es inyectiva, sí y sólo si, para todo punto $y \in Rec(f)$ la imagen recíproca $f^{-1}(\{y\})$ tiene cardinalidad uno.

Demostrar:

(a) Sean $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y A, B dos subconjuntos no vacios de $Dom(f)$ tales que

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & A \cap B = \emptyset \ \wedge \ A \cup B = Dom(f) \\ \text{(ii)} & f\big|_A \text{ y } f\big|_B \text{ son inyectivas.} \\ \text{(iii)} & Rec(f|_A) \cap Rec(f|_B) = \emptyset \end{array}$$

Entonces f es inyectiva. Recíprocamente, si f es inyectiva y A, B es una partición del $Dom(f)$ entonces se satisfacen las condiciones (ii) y (iii).

(b) Ilustrar el resultado con la función f definida en el Problema 12 del Listado $N^o 6$ y la función g definida por:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \ g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } \ x < 1 \\ x+1 & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}$$

Además, determinar $Rec(g)$ y $g^{-1} : Rec(g) \to Dom(g)$. Visualizar las gráficas de g y g^{-1}, sobre un mismo sistema coordenado rectangular.

(c) *Generalización a una Partición del Dominio:*

Sea $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ y sea $\{A_1, A_2, ..., A_N\}$ una partición del $Dom(f)$.
Entonces f es **inyectiva**, $\boxed{\textbf{sí y sólo si:}}$

$$\text{(i)} \quad f\Big|_{A_i} \text{ es inyectiva } \forall\, i \in \{1, 2, ..., N\}$$

$$\boxed{\textbf{y}}$$

$$\text{(ii)} \quad \forall\, i \neq j : \; Rec(f|_{A_i}) \cap Rec(f|_{A_j}) = \emptyset$$

(d) En base al resultado anterior, determinar cuando *una función definida por tramos* **no es inyectiva**.

[**En Práctica (a) e ilustrar con la función f indicada en (b)**]

Problema 2. Sea f una función real definida por

$$\forall\, x \in Dom(f) : \; f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$$

1. Deducir que $Dom(f) = [-2, 0[\cup]0, 2]$, $f^{-1}(\{1\}) = \{\sqrt{2}\}$, $f^{-1}(\{-1\}) = \{-\sqrt{2}\}$. ¿$f^{-1}(\{0\})$?

2. Probar que f es una función impar y su restricción a $\mathcal{D} = Dom(f) - \{-2, 2\}$ es inyectiva. Determinar la inversa de $f\Big|_{\mathcal{D}}$. Observar que las restricciones de f a $\mathcal{D}_1 = Dom(f) - \{-2\}$ o bien a $\mathcal{D}_2 = Dom(f) - \{2\}$, son inyectivas.

3. Probar que $f\Big|_{]0,2[}$ es estrictamente decreciente, deducir a partir que f es impar que $f\Big|_{\mathcal{D}}$ es estrictamente decreciente. *(El producto de dos funciones positivas y decrecientes (crecientes) es decreciente (creciente). Pruebe esta afirmación y úsela en este problema.)*

[**En Práctica (1) y (2)**]

Problema 3. Dadas las funciones f y g:

- defina $f \circ g$ y $g \circ f$.
- decidir si ellas son inyectivas o no y determinar su recorrido.
- En los casos que exista la inversa de la función compuesta, determínela.

$$(a)\quad \begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x^2-5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:[-8,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x)=\sqrt{x+8} \end{array}$$

$$(b)\quad \begin{array}{rcl} f:[-3,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x^2-6x+9 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}-\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}$$

$$(c)\quad \begin{array}{rcl} f:[0,4] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=\sqrt{x+1} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:[\sqrt{3},15] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x)=x^2-3 \end{array}$$

$$(d)\quad \begin{array}{rcl} f:[0,6] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x^2-4x+3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x)=\sqrt{x} \end{array}$$

$$(e)\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1; & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}; & x>0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x-2; & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-1}; & x>1 \end{cases}$$

$$(f)\quad \forall\, x\in Dom(f):\ f(x)=\log(x-1) \qquad g(x)=\begin{cases} 2x+1; & x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-1}; & x>2 \end{cases}$$

Problema 4.: Resolver

(a) $\frac{\log_5(35-x^3)}{\log_5(5-x)}=3$ (b) $3^{2x}\cdot 5^{6x-7}=9^{x-2}\cdot 7^{1-x}$

(c) $\frac{\log_4\sqrt{4}}{\log_x 2}+\log_{2x}2\cdot\log_{1/2}2x=0$ (d) $(0.4)^{\log x^2+1}=(6.25)^{2-\log x^3}$

(e) $4^x-3^{x-1/2}=3^{x+1/2}-2^{2x-1}$ (f) $e^{x^2+4x-2}\le 1$

(g) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$ (h) $e^x-e^{-x}=2$

(i) $\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$ (j) $3^{5-x}\cdot 5^{2x-4}=15^{11-3x}$

[**En práctica (a) o (j)**.]

Problema: 5. Determinar los valores de x e y tal que:

$$\begin{aligned} a^x \cdot b^y &= a \cdot b \\ 2\log_a x &= \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b \end{aligned}$$

Problema: 6. Considere las funciones reales definidas por:

$$\forall\, x \in Dom(f):\ f(x) = \sqrt{e^x - 1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} : g(x) = \begin{cases} 2 + \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

1. Probar que f y g son inyectivas.
2. Definir $f \circ g$.
3. Probar que existe $(f \circ g)^{-1}$ y defínala.
4. Si cambiamos la definición de g sobre el intervalo $[1, \infty[$ por $\ln x$ entonces g deja de ser inyectiva ¿Por qué?

[**En Práctica.**]

Problema: 7. El estroncio 90 tiene una vida media de 28 años, es decir, en 28 años la mitad de cualquier cantidad de estroncio 90 cambiará a otra sustancia por desintegración radiactiva. Se coloca una base que contiene 100 grs. de estroncio 90 en un reactor nuclear. Escriba la ecuación que da la cantidad de estroncio 90 presente después de t años.

Problema: 8. Si una bacteria en un cierto cultivo se duplica cada 20 minutos, escribir una fórmula que nos dé el número N de bacterias que hay en el cultivo después de n horas, suponiendo que N_0 es el número de bacterias que hay al iniciar el experimento.

Problema: 9. Cierta clase de algas, puede duplicar su población cada dos dí as. Suponiendo que la población de algas crece exponencialmente, comenzando ahora con una población de 10^6, determinar la población que habrí a después de 1 semana.

Problema: 10. Sea $f(x)$ la cantidad de C^{14} presente en un organismo x años después de muerto. Determine la constante K en la ecuación $f(x) = f(0)e^{Kx}$ y el porcentaje de C^{14} que deberí a quedar 1000 años después del deceso del organismo.

Nota: *La vida media del carbono 14 es 5730 años*

Problema: 11. Suponga que sólo $\frac{1}{10}$ de la cantidad original de C^{14} queda hoy en un hueso humano descubierto en Kenya. ¿Cuántos años hace que ocurrió la muerte?

[**En Práctica sólo un Problema de Aplicación.**]

26.04.2002
FPV/fpv.