UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ÁLGEBRA Y ÁLGEBRA LINEAL 520142

Listado 23. Complemento ortogonal. Proyección.

Problema 1. Determine el complemento ortogonal de los siguientes subespacios:

1.1. $W_1 = \langle\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}\rangle$ con el producto usual de las matrices.

1.2. $W_2 = \langle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}\rangle$ con el producto usual de $\mathbb{R}^3$.

1.3. $W_3 = \langle\{(2, 1, -1)\}\rangle$ con el producto usual de $\mathbb{R}^3$.

1.4. $W_4 = \langle\{(1, 0, -1, 6), (2, 4, -1, 1)\}\rangle$ con el producto usual de $\mathbb{R}^4$.

1.5. $W_5 = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ como subespacio de $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$, con el producto definido en el Problema 5 del Listado 22.

1.6. $W_6 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$ con el producto usual de las matrices.

1.7. $W_7 = \{x \in \mathbb{C}^4 : \langle x; v\rangle = 0\}$ con el producto usual de $\mathbb{C}^4$. **En práctica 1.3 y 1.5.**

Problema 2. Para los subespacios anteriores encuentre la proyección ortogonal (o mejor aproximación) de los siguientes vectores:

2.1. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2. $\mathbf{w}$, donde $\mathbf{w}$ es un vector dado cualquiera.

2.3. $(1, 1, 1)$.

2.4. $(1, 1, 1, 1)$.

2.5. $3x^5 - 5x^4 - 3$.

2.6. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.7. $(i, 1, -i, -1)$, para el caso en que $v = (i, i, i, i)$. **En práctica 2.3 y 2.5.**

Problema 3. Sea S un subespacio vectorial de dimensión r de un espacio vectorial V de dimensión n. Demuestre que la dimensión de su complemento ortogonal $S^\perp$ es $n - r$.

Problema 4. Aplique el método de Gram-Schmidt para encontrar una base ortogonal de los siguientes espacios:

4.1. $\langle\{(2,0,1),(3,-1,5),(0,4,2)\}\rangle$ con el producto usual de $\mathbb{R}^3$.

4.2. $\langle\{(1,2,3),(3,1,3),(1,-3,-3)\}\rangle$ con el producto usual de $\mathbb{R}^3$. ¿Por qué el tercer vector resulta igual a 0? ¿puede usar este método para identificar vectores l.d.?

4.3. $\langle\{1,x,x^2\}\rangle$ con el producto de funciones: $\langle p;q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

4.4. $\langle\{1,x,x^2,x^3\}\rangle$ con el producto definido en el Problema 4 del Listado 22, para los puntos dados en la parte 4.2.1 del mismo listado.

4.5. $\langle\{3x+1, x^3-1, x^2+x-2, 4x\}\rangle$ con el producto definido en el Problema 5 del Listado 22.

4.6. $\langle\{(1,0,i),(i+1,2,0),(1-i,-i,3)\}\rangle$ con el producto usual en $\mathbb{C}^3$.

4.7. $\langle\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\}\rangle$ con el producto usual de las matrices. **En práctica 4.1, 4.4 y 4.7.**

Problema 5. Sea $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ un conjunto de vectores cuaquiera. Demuestre que si $(\forall i \in \{1,..,n\}) u \perp x_i$ entonces $u \perp \langle\{x_1, x_2, .., x_n\}\rangle$.

Problema 6. Muestre que si U y W son subespacios de V y $U \perp W$ entonces $U \cap V = \{0\}$ **(En práctica)**.

Problema 7. Sea $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial con producto interior. Considere los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$x_1 = (\langle u_1;u_1\rangle, \langle u_1;u_2\rangle, \langle u_1;u_3\rangle, \langle u_1;u_4\rangle)$$
$$x_2 = (\langle u_2;u_1\rangle, \langle u_2;u_2\rangle, \langle u_2;u_3\rangle, \langle u_2;u_4\rangle)$$
$$x_3 = (\langle u_3;u_1\rangle, \langle u_3;u_2\rangle, \langle u_3;u_3\rangle, \langle u_3;u_4\rangle)$$
$$x_4 = (\langle u_4;u_1\rangle, \langle u_4;u_2\rangle, \langle u_4;u_3\rangle, \langle u_4;u_4\rangle)$$

Suponga que u_1 es combinación lineal de u_2, u_3 y u_4 y demuestre que entonces x_1 es combinación lineal de x_2, x_3 y x_4. **En práctica**.