UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 5

INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN MATLAB

1. Reglas de Newton–Cotes

Descargue la función de MATLAB trap.m esta función consiste en una implementación del método del trapecio. Utilice la función `help` para aprender a usar la función `trap`.

Mediante la función `trap` estime las integrales definidas

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x+1)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-4}^{7} (2x^2 - x + 1)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^{1} e^{2x+1}\,\mathrm{sen}(2x+1)\,\mathrm{d}x.$$

El código disponible en cuadratura1.m genera una animación que muestra la construcción de una regla de cuadratura compuesta para una función dada. Descargue este programa y comente qué hace cada línea del código.

Ejercicio

Cree un rutero de MATLAB que permita aproximar, usando las reglas del punto medio y trapecio, la integral definida

$$\int_{-2}^{2} \left| \cos(3x) + \frac{\mathrm{sen}(x^2)}{10} \right| \mathrm{d}x$$

y que le permita completar la siguiente tabla

Cant. nodos	Punto medio	Trapecio
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

de los valores aproximados para esta integral usando estos métodos para reglas compuestas con distintas cantidades de nodos.

¿Qué observa en los digitos obtenidos?, ¿Cúal de los dos métodos funciona mejor en este caso?.

1.1. Generalización

Estas reglas provienen de la aproximación de una función por su interpolante en los puntos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

de donde surge la idea de aproximar la integral definida mediante la integral de la interpolante, a la que llamamos *cuadratura*:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_n} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_{x_0}^{x_n} \ell_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

Así, los *pesos* de estas reglas son

$$(\forall\, i \in \{0,\ldots,n\}) \quad w_i = \int_{x_0}^{x_n} \ell_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

En el caso **muy particular** en el que los nodos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ son equiespaciados con tamaño de paso h, entonces mediante el cambio de variable $x = x_0 + h\,t$, se tiene que

$$w_i = \int_{x_0}^{x_n} \ell_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{n} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k}\,h\,\mathrm{d}t = h\int_{0}^{n} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k}\,\mathrm{d}t.$$

Observe estas últimas integrales, a saber,

$$\alpha_i = \int_{0}^{n} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k}\,\mathrm{d}t,$$

son independientes del intervalo de integración. Para el caso de $n = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \int_0^2 \frac{t-1}{0-1}\,\frac{t-2}{0-2}\,\mathrm{d}t &&= \frac{1}{2}\int_0^2 (t^2-3t+2)\,\mathrm{d}t &&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{8}{3}-\tfrac{12}{2}+4\right) = \tfrac{1}{3}\\
\alpha_1 &= \int_0^2 \frac{t-0}{1-0}\,\frac{t-2}{1-2}\,\mathrm{d}t &&= -\int_0^2 (t^2-2t)\,\mathrm{d}t &&= -\left(\tfrac{8}{3}-4\right) = \tfrac{4}{3}\\
\alpha_2 &= \int_0^2 \frac{t-0}{2-0}\,\frac{t-1}{2-1}\,\mathrm{d}t &&= \frac{1}{2}\int_0^2 (t^2-t)\,\mathrm{d}t &&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{8}{3}-\tfrac{4}{2}\right) = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

con la cual se genera la *regla de Simpson*:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}f(x_0) + \frac{4h}{3}f(x_1) + \frac{h}{3}f(x_2).$$

Aquí, $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$. Los valores exactos de estas los pesos de estas reglas de cuadratura, para distintas cantidades de nodos, están disponibles en el archivo pesosnc.mat

1.2. Ejercicios.

1. Calcule analíticamente los coeficientes α_0, α_1 de una regla de Newton–Cotes con dos nodos. ¿Reconoce esta regla?.

2. Las reglas de Newton–Cotes de 4 y 5 nodos son conocidas como de Simpson-3/8 y de Milne, respectivamente. Calcule analíticamente los coeficientes asociados a estas reglas.

3. Aproxime usando la regla de Simpson las siguientes integrales

a) $\int_0^{\pi} \cos(2\pi x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{-1}^{1} e^{x+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2\pi x)\,\mathrm{d}x$

d) $\int_{-10}^{10} (3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x$

A continuación calcule analíticamente el valor de cada una de estas integrales y calcule el error cometido en cada caso.

4. Aproxime el valor de la integral
$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos(30\pi x)}{2x^2+1}\,dx$$
usando una sucesión de reglas compuestas de Simpson. Considere nodos equiespaciados con
$$h=0.5, \quad h=0.25, \quad h=0.1 \quad \text{y} \quad h=0.05$$

5. Escriba un rutero de MATLAB que grafique a la función f definida por
$$f(x)=\frac{\cos(x)}{x^4+1}$$
en el intervalo $[-5,5]$. Agregue al gráfico los 5 puntos que subyacen a la regla de cuadratura de Newton–Cotes de 5 puntos[1].

   Luego grafique el polinomio interpolante en cuestión y calcule usando la regla mencionada la aproximación de esta integral.

6. Modifique el programa anterior para que se calculen las integrales aproximadas usando las reglas disponibles en pesosnc.mat . ¿Qué observa con las convergencias de estas aproximaciones?.

2. Cuadraturas de Gauss

Si bien las reglas de Newton–Cotes se pueden definir para una cantidad arbitraria de puntos, en la práctica se observan errores significativos a medida que se aumenta la cantidad de puntos, los que pueden atribuirse al fenómeno de Runge. Por esto, no suelen usarse reglas de Newton–Cotes compuestas cuya contraparte básica (en un solo intervalo) involucre más de 7 nodos.

Las reglas de cuadratura Gaussiana, permiten aumentar arbitrariamente la cantidad de nodos manteniendo la convergencia de la cuadratura y en general suelen tener una mejor aproximación que las reglas de Newton–Cotes con el mismo costo computacional.

La idea de estas cuadraturas es elegir los mejores nodos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ de modo que la regla de cuadratura resultante
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_1 f(x_1)+\cdots+w_n f(x_n)$$
sea exacta para polinomios del mayor grado posible.

En el archivo gauss25.mat se encuentran los pesos w_i y nodos x_i de las primeras 25 reglas de cuadratura Gaussiana.

[1]Recuerde que el interpolante de estos cinco puntos es un polinomio de grado 4 y que los cinco puntos deben ser equiespaciados en el eje de las abcisas.

2.1. Ejercicios

1. Calcule analíticamente la integral
$$\int_{-1}^{1} (x^7 + 2x - 1)\,\mathrm{d}x$$
y luego en un programa de MATLAB hágalo usando las primeras 10 reglas de cuadratura de Gauss Calcule además el error de integración en cada una de estas reglas.

2. En un rutero de MATLAB cree una matriz que contenga los valores aproximados al estimar las integrales
$$\int_{-1}^{1} x(x-1)(x+1)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(10x)}{|x|+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{2x+1}\,\mathrm{d}x.$$
con las reglas de Gauss. ¿Qué observa?.

   Recuerde que debe hacer un cambio de variable si el intervalo no de integración no es $[-1, 1]$.

3. Funciones propias de MATLAB

MATLAB tiene dos funciones `quad` y `quadl` que permiten calcular de manera automática integrales de funciones suaves con error menor que una tolerancia dada.

La función `quad` es un método de bajo orden basado en la regla de Simpson, mientras que `quadl` es un método de alto orden.

1. Utilice el comando `help` de MATLAB para conocer la sintaxis de estos comandos.

2. Aproxime mediante `quad` y `quadl` las integrales
$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \int_{0}^{1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$
con la tolerancia por defecto que asumen los comandos y después especificando que el error sea menor que 10^{-6}.

4. Ejercicios

1. *a*) Escriba en un archivo `trap.m` un programa tipo `function` que clacule la aproximación de la integral de una función dada en un intervalo genérico $[a, b]$ por la regla de los trapecios con N subintervalos.

   b) Testee su programa con las siguientes integrales y $N = 10, 20, 40, 80$:
$$\int_{0}^{3} x^2\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{1}^{2} \log(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

   c) Haga un programa semejante para la regla de Simpson. Guárdelo en un archivo `simpson.m` y pruébelo con las mismas funciones.

2. Escriba un programa tipo `function` en MATLAB que reciba como entrada una función de 2 variables $f(x, y)$, los valores a, b, c, d y N y cuya salida sea el valor de la integral:
$$\int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
donde la integral con respecto a y sea resuelta mediante la regla de los trapecios y la integral con respecto a x sea resuelta con la regla de Simpson.

3. El fin de este ejercicio es verificar experimentalmente que el error del método de los trapecios aplicado a un integrando con derivadas acotadas en el intervalo de integración es de orden $\mathcal{O}(h^2)$.

   a) Haga un programa que calcule la integral $\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x$ por la regla de los trapecios con $N = 10, 20, 30, \ldots, 100$ subintervalos y almacene los errores respectivos. En este caso para calcular el error utilice el valor verdadero de la integral, el cual puede calcularse exactamente.

   b) Grafique en escala logarítmica estos errores versus N y la función $f(N) = (1/N)^2$.
   Sugerencia: para graficar en escala logarítmica utilice el comando `loglog` en lugar de `plot`; la sintaxis de ambos comandos es la misma.

   c) Explique por qué el gráfico anterior muestra que el error de la regla de los trapecios es en este caso $\mathcal{O}(h^2)$.

4. El fin de este ejercicio es verificar experimentalmente que el error del método de los trapecios aplicado a un integrando con derivadas no acotadas en el intervalo de integración no es de orden $\mathcal{O}(h^2)$.

   a) Repita el ejercicio anterior con la integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

   b) Para estimar el orden de convergencia del método en este caso, determine por cuadrados mínimos las constantes C y α que mejor ajustan los errores mediante el modelo

   $$\text{error}(h) \approx C h^{\alpha}.$$

   5.3 Grafique en escala logarítmica los errores versus N y la función $f(N) = (1/N)^{\alpha}$.

5. *a*) Encuentre el área entre las curvas $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ con

   $$f(x) = e^{x-x^2}, \quad g(x) = \arctan x^2, \quad x \in [-3,\, 3].$$

   Indicación: Grafique las funciones en $[-3,\, 3]$ y calcule el área entre las curvas utilizando `quad` y `fzero` de manera adecuada.

   b) Encuentre todos los valores de $x \in [-3,\, 3]$ tales que

   $$\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

   Utilice para ello `fzero` y `quad` de manera adecuada.

6. Una **Serie de Fourier** para f una función definida en el intervalo $[a, b]$ es una serie de la forma

   $$SF\{f(x)\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) \right),$$

   con

   $$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right)\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right)\mathrm{d}x,$$

   la cual converge puntualmente a f, cuando f es continua por pedazos en $[a, b]$, es decir $SF\{f(x)\} = f(x)$.

   Para $N \in \mathbb{N}$, se define la **Suma Parcial de Fourier** como

   $$SF_N\{f(x)\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right) \right).$$

   a) Escriba una funcion en MATLAB cuyas entradas sean f, el intervalo $[a, b]$ y N. Esta función debe dibujar en un mismo gráfico f y la N-ésima Suma Parcial de Fourier en el intervalo $[a, b]$.

   b) Pruebe su función para distintos valores $N = 1, 2, 5, 10$ y las siguientes funciones:

1) $f(x) = 1$, $x \in [0, 1]$.

2) $g(x) = x$, $x \in [-1, 2]$.

3) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-2, 0[\\ \\ x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$

Observe que ocurre a medida que crecen los valores de N.

c) Modifique la función anterior para que calcule la Suma Parcial de Fourier en el intervalo $[a, b]$, pero que grafique dicha suma en el intervalo $[a - L, b + L]$, con $L = b - a$. ¿Qué se puede observar?

Sugerencia: Es muy útil el uso de `@(x)` en el cálculo de las integrales, considando que se integra una función que depende de a, b, n y la variable x.

7. Los pares (x, y) que satisfacen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pertenecen a la elipse con centro en el origen de coordenas, semieje mayor de longitud a y semieje menor de longitud b. La ecuación paramétrica de esta elipse es:

$$(x(t), y(t)) = (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t)), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

Escriba un rutero Matlab en el que:

a) Grafique 200 puntos sobre la elipse de ecuación paramétrica $(3\cos(t), 5\,\mathrm{sen}(t))$, $t \in [-\pi, \pi]$.

b) Encuentre, con ayuda del comando `quad` o del comando `quadl` una aproximación al perímetro de la elipse antes graficada. Tenga en cuenta que éste es igual a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$