UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA 19: *Subespacios, generadores.*

Problema 1. Considere los siguientes subconjuntos del espacio vectorial real de polinomios de grado a los más 3.

[En Práctica 1.1, 1.3 y 1.5]

$$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{\ p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}, p(x) = a_0 + a_1\ x + a_2x^2 + a_3\ x^3, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

$U = \{\ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad p(5) = 0\ \}, \qquad V = \{\ p \in U : \quad p'(5) = 0\ \},$
$W = \{\ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}, p(x) = a_3x^3 + a_1x\ \}$ y
$Z = \{\ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p$ define una función par $\}$.

1.1) Demuestre que son subespacios vectoriales. Además, en cada caso escriba al menos un vector no nulo y represéntelo gráficamente.

1.2) Decida si $U \cup V$ y $W \cup Z$ son subespacio vectoriales de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

1.3) Calcule $U \cap V$ y $W \cap Z$ y muestre que son subespacios de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

1.4) Calcule $U + V$ y $W + Z$ como subespacios de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

1.5) Decida si $U + V$ y $W + Z$ son sumas directas. En cada caso escriba un vector v en $U + V$ $(W + Z)$ arbitrario como suma de elementos de U y V (o de W y Z).

Problema 2. **[En Práctica 2.1 y 2.3]**

2.1) Para un vector $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ muestre que v se puede escribir como combinación lineal de los vectores de $A = \{(1, 3), (0, 4), (2, 5)\}$ y de los vectores de $B = \{(1, -3), (0, -4)\}$. Es decir, A y B son conjuntos de generadores de $\mathbb{R}^2$.

2.2) Diga si los conjuntos A y B son linealmente independientes. Diga si son una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

2.3) Diga si es posible escribir el vector $v = (1, 0, 1, 0)$ como combinación lineal de los vectores de $A = \{(1, 0, -2, 1), (2, 0, 1, 2), (1, -2, 2, 3)\}$.

Problema 3. Determine: **[En Práctica 3.1, 3.3 y 3.6 (parcial)]**

3.1) si los vectores $u = (1, 1, 1), v = (2, 2, 0)$ y $w = (4, 0, 0)$ generan al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

3.2) si los vectores $p(x) = 1 + 2x - x^2, q(x) = 3 + x^2, r(x) = 5 + 4x - x^2$ y $s(x) = -2 + 2x - 2x^2$ generan al espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

3.3) si el conjunto de vectores B generan el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

3.4) si los conjuntos de vectores definidos en 3.1, 3.2 y 3.3 son linealmente independientes o linealmente dependientes.

3.5) si el conjunto $\{(1-x)^3, 1-x, 1\}$ de vectores de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ es linealmente independiente. Además, analice si constituye un conjunto generador del espacio vectorial.

3.6) si los conjuntos indicados en los puntos anteriores pueden ser una base del respectivo espacio.

Problema 4. Identificar, en el lenguaje de espacios vectoriales, la representación gráfica de la figura. **[En Práctica]**

4.1) En particular ¿Cuál es la representación gráfica del subespacio de $\mathbb{R}^3$.

$$F = \{ \ (x, x + 2z, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x, z \in \mathbb{R} \ \}$$

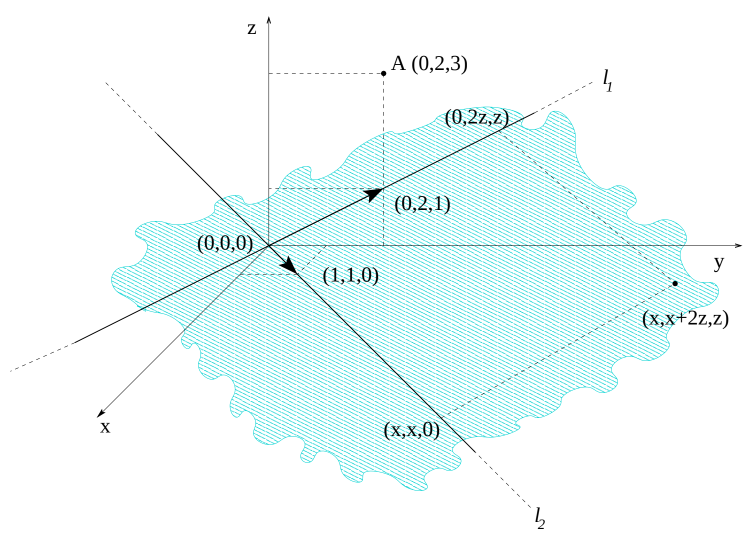
4.2) ¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta que pasa por el origen y el punto $P = (1, 3, 1)$?. Representar este subespacio en la figura e indique que ella es a su vez subespacio de un plano, indicado en la figura 1. Determinar la distancia del punto $A(0, 2, 3)$ al subespacio F.

4.3) Si $XY := \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, e $YZ := \{0\} \times \mathbb{R}^2$ determine: $F \cap XY$ y $F \cap YZ$.

4.4) Finalmente, determine un vector $\vec{n}$, normal al plano F, y defina la recta

$$U = \{ \ t \cdot \vec{n} \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R} \ \}$$

decida si $F \oplus U = \mathbb{R}^3$.



16.09.2003
ACQ/FPV/acq