

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142

PRACTICA 11: *Funciones Polinomiales y Factorización.*

Problema 1. Sean $p_1(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$, $p_2(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$. Calcule:

- a) $(3x^3 - \sqrt{3})p_1(x) + \sqrt{3}p_2(x)$
- b) $p_1(x) \cdot p_2(x)$, $(p_1 \circ p_2)(x)$
- c) La *descomposición par-impar* de ambos polinomios. ¿Qué puede concluir para un polinomio arbitrario de grado n ?
- d) $(p_1 - p_2)(x - 1)$.

Problema 2. Demuestre que si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios tales que $p(x)$ divide a $q(x)$ y $q(x)$ divide a $p(x)$, entonces existe una constante c tal que $p(x) = cq(x)$.

[En Práctica]

Problema 3. Sean $p(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$, $q(x) = ax^2 + 2bx + e$, ($a > 0$) dos polinomios, tales que $p(x)$ es divisible por $q(x)$. Demuestre que $p(x)$ es el cubo de un binomio y $q(x)$ el cuadrado de un binomio.

Problema 4. Para los siguientes polinomios $p(x)$ y $d(x)$ verifique que $d(x)$ es un factor de $p(x)$ y determinar $q(x)$ tal que $p(x) = d(x)q(x)$. Emplee la división sintética cuando se requiera.

$p(x)$	$d(x)$	$q(x)$
$x^6 - x^5 - 7x^4 + x^3 + 8x^2 + 5x + 2$	$x + 2$	
$3x^3 - 9x^2 - 4x + 12$	$x - 3$	
$x^3 - 4ax^2 + 2a^2x + a^3$	$x - a$	
$x^3 - (2a + b)x^2 + (3a + 2ab)x - 3ab$	$x - b$	
$x^4 + 12x^2 + 27$	$x + 3i$	
$x^3 + x - 10$	$x + 1 - 2i$	
$3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4$	$x + 2/3$	
$x^{2n} - a^{2n}$, ($n \in \mathbb{N}$)	$x + a$	
$x^{2n+1} + a^{2n+1}$, ($n \in \mathbb{N}$)	$x + a$	

[En Práctica 3^{er} y 5^{to} caso.]

Problema 5. En los siguientes ejercicios emplee división sintética, para hallar el cociente $q(x)$ y el resto $r(x)$ de la división de $p(x)$ por $d(x)$:

$p(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$r(x)$
$x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 22x - 10$	$x^2 + x - 2$		
$12x^4 - 13x^3 - 57x^2 + 32x + 8$	$4x^2 + 5x - 6$		
$x^3 + 5x^2 - 2x - 3$	$x - 1$		
$x^6 - 8x^4 - 10x^2 + 9$	$x - 3$		

[En Práctica 1^{er} y 4^{to} caso.]

Problema 6. Determine el valor de k para el cual $d(x)$ sea un factor de $p(x)$ si:

$p(x)$	$d(x)$
$-x^3 + 3x^2 + kx - 4$	$x - 1$
$-3x^4 + kx^3 + 6x^2 - 9x + 3$	$x - 1$
$2x^4 - 5x^3 + kx^2 - 6x + 8$	$x - 2$

Problema 7. Dados dos polinomios $p(x) = x^4 + ax^2 + b$ y $q(x) = x^2 + 2x + 5$, ¿Cuáles son los valores de a y b para que $q(x)$ sea un divisor de $p(x)$?

[En Práctica]

Problema 8. Considere la descomposición: $p(x) = q(x)(x - 1)(x - 2) + r(x)$. Si $q(0) = 2$, $p(0) = 11$ y $p(1) = 20$ determine, si es posible, el resto $r(x)$.

Problema 9. Muestre que los siguientes polinomios no tienen un factores de la forma $x - c$, si c es real:

$$(a) p(x) = x^2 + 1 \quad (b) q(x) = x^4 + 3x^2 + 2 \quad (c) s(x) = x^4 + 5x^2 + 3$$

[En Práctica (b)]

Problema 10.

Si $p(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + ax + b$ es divisible por $q(x) = x^2 + x - 20$. Determine el resto de dividir $s(x) = ax^3 - 2x^2 + b$ por $q(x)$.

Problema 11. Muestre que $x - c$ es un factor de $x^n - c^n$, cualesquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y escriba la factorización respectiva.

(Indicación: Sume los primeros n términos de una progresión geométrica de razón (x/c) y primer término 1.)