UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142)

P1. a) Demostrar la siguiente tautología:

$$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q) \iff q$$

(5 Ptos.)

b) Sean A y B dos conjuntos no vacíos, demuestre que

$$(A \triangle B)^c - (A \cup B)^c = A \cap B,$$

con $A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$, la diferencia simétrica entre A y B.

(10 Ptos.)

P2. a) Demuestre que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, n \geq 2\ : \qquad \sum_{k=2}^{n} k\,(k!) \;=\; (n+1)! \,-\, 2!$$ **(10 Ptos.)**

b) Un persona lee un libro de tal manera que cada día aumenta en 4 el número de páginas que leyó el día anterior, es decir, si el día k-ésimo leyó a_k páginas el día siguiente leerá $a_k + 4$ páginas. Si después de 18 días ha leído los 21/55 del libro, y 6 días más tarde le faltaban únicamente los 19/55 del libro, ¿cuántas páginas tiene el libro? **(8 Ptos.)**

P3. En el desarrollo de $(5 + 2x^3)^n$, $n \in \mathbb{N}$, el coeficiente del término que contiene a x^{33} es quince veces el coeficiente del término que contiene a x^{36}. Encuentre el valor de n. **(12 Ptos.)**

P4. Considere la función:

$$\begin{aligned} f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x-8}{x+2}. \end{aligned}$$

Encuentre $\mathrm{Dom}(f)$ y $\mathrm{Rec}(f)$. **(15 Ptos.)**

- **¡NO SE ACEPTAN CONSULTAS!**
- **¡NO SE ACEPTA EL USO DE CALCULADORAS!**
- **TIEMPO: 100 MINUTOS.**
- **LBH/RBP/RRS/FFB/AGS/RNG/LRS/BBM**
- **18–Abril–05.**

Solución

P1. a) **Primera manera**

p	q	p∨ q	p → q	(p ∨ q) ∧ (p → q)	[(p ∨ q) ∧ (p → q)]⟷q
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

De aquí es Tautología.

Segunda manera

$$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q) \quad \Longleftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \quad \text{(taut. para} \rightarrow)$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad [(p \vee q) \wedge \sim p] \vee [(p \vee q) \wedge q] \quad \text{(dist. } \wedge \text{ c/r } \vee) \\
&\Longleftrightarrow \quad [(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)] \vee [(p \wedge q) \vee (q \wedge q)] \quad \text{(dist. } \wedge \text{ c/r } \vee) \\
&\Longleftrightarrow \quad [F \vee (q \wedge \sim p)] \vee [(p \wedge q) \vee q] \quad (p \wedge \sim p \iff F, q \wedge q \iff q) \\
&\Longleftrightarrow \quad (q \wedge \sim p) \vee [(p \wedge q) \vee q] \quad (p \vee F \iff p) \\
&\Longleftrightarrow \quad [(q \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \vee q \quad \text{(asoc. de } \vee) \\
&\Longleftrightarrow \quad [q \wedge (p \vee \sim p)] \vee q \quad \text{(dist. } \wedge \text{ c/r } \vee) \\
&\Longleftrightarrow \quad [q \wedge V] \vee q \quad (p \vee \sim p \iff V) \\
&\Longleftrightarrow \quad q \vee q \quad (p \wedge V \iff p) \\
&\Longleftrightarrow \quad q \quad (q \wedge q \iff q)
\end{aligned}$$

Tercera manera

$$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q) \quad \Longleftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \quad \text{(taut. para} \rightarrow)$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad (p \wedge \sim p) \vee q \quad \text{(dist. } \vee \text{ c/r } \wedge) \\
&\Longleftrightarrow \quad F \vee q \quad \text{taut. } (p \wedge \sim p) \iff F \\
&\Longleftrightarrow \quad q \quad \text{taut. } (p \vee F) \iff p
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
(A\triangle B)^c - (A\cup B)^c &= (A\triangle B)^c \cap ((A\cup B)^c)^c \;\; \text{(prop. de } -\text{)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= ((A-B)\cup(B-A))^c \cap (A\cup B) \;\; \text{(def. de } \triangle \text{ y } (A^c)^c = A\text{)}\\
&= ((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c))^c \cap (A\cup B) \;\; \text{(prop. de } -\text{)}\\
&= ((A\cap B^c)^c \cap (B\cap A^c)^c) \cap (A\cup B) \;\; \text{(ley de Morgan)}\\
&= ((A^c\cup B)\cap(B^c\cup A)) \cap (A\cup B) \;\; \text{(ley de Morgan)}\\
&= (((A^c\cup B)\cap B^c)\cup((A^c\cup B)\cap A)) \cap (A\cup B) \;\; \text{(dist. } \cap \text{ c/r } \cup\text{)}\\
&= (((A^c\cap B^c)\cup(B\cap B^c))\cup((A^c\cap A)\cup(B\cap A))) \cap (A\cup B) \;\; \text{(dist. } \cap \text{ c/r } \cup\text{)}\\
&= (((A^c\cap B^c)\cup\emptyset)\cup(\emptyset\cup(B\cap A))) \cap (A\cup B)\\
&= ((A\cup B)^c\cup(B\cap A)) \cap (A\cup B) \;\; \text{(ley de Morgan)}\\
&= ((A\cup B)^c\cap(A\cup B))\cup((B\cap A)\cap(A\cup B)) \;\; \text{(dist. } \cap \text{ c/r } \cup\text{)}\\
&= (\emptyset)\cup(B\cap A)\\
&= A\cap B
\end{aligned}
$$

P2. a) Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$: $q(n) : \quad \sum_{k=2}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 2!$, siendo su conjunto de validez

$$S := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \wedge q(n) \texttt{ es verdadero}\}$$

Paso 1: ¿$2 \in S$?

En vista que $\sum_{k=2}^{2} k\,(k!) = 2(2!) = 4$ y $(2+1)! - 2! = 4$, se concluye que $2 \in S$.

Paso 2: **Hipótesis de Inducción**: supongamos que $r \in S$, es decir

$$\sum_{k=2}^{r} k\,(k!) = (r+1)! - 2!$$

Paso 3: **Tesis de Inducción**: probemos que $r+1 \in S$.

$$\begin{aligned} q(r+1) : \qquad \sum_{k=2}^{r+1} k\,(k!) &= \sum_{k=2}^{r} k\,(k!) + (r+1)\cdot(r+1)! \quad (\texttt{prop. de sumatorias}) \\ &= (r+1)! - 2! + (r+1)\cdot(r+1)! \quad (\texttt{hip. de ind.}) \\ &= (r+1)!\cdot(1+r+1) - 2! = (r+2)! - 2! \\ &\Rightarrow r+1 \in S\,, \end{aligned}$$

y así, por el principio de Inducción Matemática, concluye la demostración.

b) Sea P el número total de páginas que tiene el libro en cuestión. Denotando por a_k la cantidad de páginas que lee el alumno en el k-ésimo día, del enunciado se rescata que

$$a_{k+1} = a_k + 4\,, \qquad k = 1, 2, 3, \dots,$$

lo cual nos dice que $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ define una progresión aritmética de diferencia común $d = 4$ y primer elemento a_1.

Además, del enunciado se pueden extraer la siguiente información:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{18} a_k = \frac{21}{55}P \qquad \Rightarrow \qquad 2\,a_1 + (17)(4) = \frac{7}{165}P \quad (i)$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{24} a_k = \frac{36}{55}P \qquad \Rightarrow \qquad 2\,a_1 + (23)(4) = \frac{3}{55}P \quad (ii)$

De $(ii) - (i)$ se tiene

$$(4)(23-17) = \frac{1}{165}(9-7)P \quad \Rightarrow \quad P = 1980 \texttt{ páginas}.$$

$\square$

P3. El término de lugar $k+1$, con $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$, en el desarrollo de $(5+2x^3)^n$ está dado por

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} 5^{n-k} (2x^3)^k = \binom{n}{k} (5)^{n-k} (2)^k x^{3k}.$$

- El término t_{k+1} que contiene a x^{33} debe ser tal que $3k = 33$, es decir $k = 11$, con lo cual resulta

$$t_{12} = \binom{n}{11} (5)^{n-11} (2)^{11} x^{33}.$$

- Análogamente, el término t_{k+1} que contiene a x^{36} debe ser tal que $3k = 36$, de donde $k = 12$, obteniéndose

$$t_{13} = \binom{n}{12} (5)^{n-12} (2)^{12} x^{36}.$$

Además, del enunciado se desprende que $Coef(t_{12}) = 15\, Coef(t_{13})$.

De lo anterior

$$\begin{aligned}
\binom{n}{11} (5)^{n-11} (2)^{11} &= 15 \binom{n}{12} (5)^{n-12} (2)^{12} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \binom{n}{11} (5)^{n-11} (2)^{11} = 3 \binom{n}{12} (5)^{n-11} (2)^{12} \\
&\Rightarrow \binom{n}{11} = 6 \binom{n}{12} \\
&\Rightarrow \frac{n!}{11!\,(n-11)!} = \frac{6\,(n!)}{12!\,(n-12)!} \\
&\Rightarrow \frac{1}{n-11} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

de donde $n = 13$.

P4.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R}, f(x) = y\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R}, \frac{x-8}{x+2} = y\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} :\ x + 2 \neq 0\} \\
&=\ \mathbb{R} - \{-2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in\ \mathbb{R} - \{-2\}, f(x) = y\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in\ \mathbb{R} - \{-2\}, \frac{x-8}{x+2} = y\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in\ \mathbb{R} - \{-2\}, x = \frac{2y+8}{1-y}\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : 1 - y \neq 0\ \wedge\ \frac{2y+8}{1-y} \neq -2\right\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\ \wedge\ y \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathbb{R} - \{1\}
\end{aligned}
$$