FORMAS INDETERMINADAS Y REGLA DE L'HÔPITAL

La regla $$lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lim_{x\to a} f(x)}{lim_{x\to a} g(x)}$$

se aplica cuando los límites existen y

$$lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Si $lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $lim_{x\to a} g(x) = 0$

tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

Si $lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$,

tenemos una forma indeterminada del tipo $\pm\frac{\infty}{\infty}$.

$lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

$lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ que es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

La regla de L'Hôpital en sus diferentes formas es una herramienta que permite eliminar esos tipos de indeterminaciones y algunos otros, haciendo uso de la derivada.

Regla de L'Hôpital. Primera forma.

Sean f y g funciones diferenciables en un intervalo abierto que contiene a a, excepto eventualmente en a. Si $g'(x) \neq 0$ en ese intervalo y

$$lim_{x\to a} f(x) = lim_{x\to a} g(x) = 0$$

entonces

$$lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que $lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista.

La regla de L'Hopital nos sirve aún en el caso en que $x \to \infty$. En efecto,

si definimos t tal que $t = \frac{1}{x}$, entonces

$$x \to \infty \text{ si y solo si } t \to 0$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$= lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hôpital. Segunda forma.

Sean f y g funciones diferenciables en un intervalo abierto que contiene a a, excepto eventualmente en a.

Si $lim_{x\to a}f(x) = \pm\infty$ y $lim_{x\to a}g(x) = \pm\infty$

entonces

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El teorema también es válido si $x \to \pm\infty$

Al calcular límites pueden presentarse otros tipos de indeterminaciones que pueden ser eliminadas llevandolas a la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

1. Tipo $0 \cdot \infty$ o $0 \cdot (-\infty)$

a. $lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \sec x$ del tipo $0 \cdot \infty$

$$lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \sec x = lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$$

indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$

$$lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} = lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} \frac{1}{-\sin x} = -1$$

b. $lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$ de tipo $0(-\infty)$

$$lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$ de tipo $\frac{-\infty}{\infty}$

$$lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = lim_{x\to 0^+} - \frac{x^2}{2} = 0$$

2. Tipo $\infty - \infty$

$$lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$ de tipo $\frac{0}{0}$

$$lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$$

$$= lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

3. Tipo $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}, 0^{\infty}$.

En este caso se aplica logaritmo natural.

a. Para calcular $lim_{x\to 0^+} x^x$, sea $y = x^x$.

Entonces $\ln y = x \ln x$

$lim_{x\to 0^+} \ln y = lim_{x\to 0^+} x \ln x$ de tipo $0(-\infty)$

$$lim_{x\to 0^+} x \ln x = lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Así $lim_{x\to 0^+} \ln y = 0$

$lim_{x\to 0^+} y = lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{lim_{x\to 0^+} \ln y} = e^0 = 1$

$lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

b. $lim_{x\to 0^+}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ indeterminación del tipo 1^{∞}

Si $y=(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ entonces $\ln y=\frac{1}{x}\ln(e^x+x)$ y

$lim_{x\to 0^+}\ln y = lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+x)}{x}$ de tipo $\frac{0}{0}$

$$lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+x)}{x} = lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} = lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+1}{e^x+x} = 2$$

Como

$lim_{x\to 0^+}y = lim_{x\to 0^+}e^{\ln y} = e^{lim_{x\to 0^+}\ln y}$

entonces $lim_{x\to 0^+}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^2$