UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO: 521234

Guía de Ejercicios No 4 (versión corregida)

1. Encuentre la transformada de Fourier del pulso rectangular definido por $P_L(t) = 1$ sobre $[-L/2, L/2]$ y por cero fuera de este intervalo.

2. Determinar la transformada seno y coseno de la función $e(t) = e^{-\alpha t}$ para $t > 0$ y $\alpha > 0$.

3. Establecer los siguientes resultados

Problema	Valores Propios	Funciones Propias
$y'' + \lambda y = 0$ $y(0) = y(L) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\{\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{L})\}_{n=1}^{\infty}$
$y'' + \lambda y = 0$ $y'(0) = y'(L)$	$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$	$\left\{1, \cos(\frac{n\pi x}{L})\right\}_{n=1}^{\infty}$
$y'' + \lambda y = 0$ $y(0) = y'(L) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$	$\left\{\mathrm{sen}((n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{L})\right\}_{n=0}^{\infty}$
$y'' + \lambda y = 0$ $y'(0) = y(L) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$	$\left\{\cos((n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{L})\right\}_{n=0}^{\infty}$
$y'' + \lambda y = 0$ $y(0) = y(L)$ $y'(0) = y'(L)$	$\lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$	$\left\{1, \cos(\frac{2n\pi x}{L}), \mathrm{sen}(\frac{2n\pi x}{L})\right\}_{n=1}^{\infty}$
$y'' + \lambda y = 0$ $hy(0) - y'(0) = 0 \quad (h > 0)$ $y'(L) = 0$	$\tan(L\sqrt{\lambda_n}) = \dfrac{h}{\sqrt{\lambda_n}}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$	$y_n(x) = \frac{\cos(\sqrt{\lambda_n}(L-x))}{\mathrm{sen}(L\sqrt{\lambda_n})}$

4. Resolver el problema de Sturm-Liouville:

$$x^2X'' + xX' + \lambda X = 0 \qquad X'(1) = 0, \qquad X(b) = 0 \qquad (b > 1)$$

para ello observe que si $y(t) = X(e^t)$, es decir, $X(x) = y(\ln(x))$, entonces el problema propuesto es equivalente a:

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y(L) = 0 \qquad L = \ln(b)$$

5. Indique la relación de ortogonalidad de la familia de funciones propias del ejercicio anterior. Para ello observe que: $x^2X + xX' + \lambda X = (xX)' + \frac{\lambda}{x}X = 0$. Considere esta familia para construir la serie de Fourier Generalizada de $f(x) = \operatorname{sen}(2\ln(x))$ sobre $[1, e^2]$.

6. Determinar las valores propios y las funciones propias asociadas al problema de Sturm-Liouville:

$$X'' + 2X' + (\lambda + 1)X = 0, \qquad X(0), \quad X(\pi) = 0$$

Además, usando la familia de funciones característica determine la serie de Fourier Generalizada de $f(x) = [e^{-x}\operatorname{sen}(2x)]_+$ sobre $[0, \pi]$.

Para reducir la ecuación a $y'' + \lambda y = 0$ considere la sustitución $X(x) = e^{-x}y(x)$ y observe que:

(a) $(D + 1)X = (D + 1)e^{-x}y = e^{-x}y' \Rightarrow (D + 1)^2X = e^{-x}y''$.

(b) $X'' + 2X' + (\lambda + 1)X = (D + 1)^2X + \lambda X = e^{-x}(y'' + \lambda y)$.

¿Cuál es la sustitución que reduce la ecuación $X'' + 2aX + (\lambda + a^2)X = 0$ a $y'' + \lambda y = 0$?

7. Escribir como un problema de Sturm-Liouville singular las siguientes ecuaciones diferenciales de:

a) Laguerre: $xX'' + (1 - x)X' + nX = 0, \qquad x > 0$

b) Hermite: $X'' - 2xX' + 2nX = 0, \qquad -\infty < x < \infty$

c) Tchevyshev: $(1 - x^2)X'' - xX' + n^2X = 0, \qquad -1 \leq x \leq 1$

d) Legendre: $(1 - x^2)X'' - 2xX' + n(n + 1)X = 0, \qquad -1 \leq x \leq 1$

En cada caso indique la relación de ortogonalidad que verifican sus funciones propias asociadas.

8. Encontrar el desarrollo formal en serie de la solución del siguiente Problema de Valores Contorno en términos de las autofunciones del sistema de Sturm-Liouville asociado.

$$y''(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \qquad y(0) = y(\pi) = 0$$

Concepción, 09 de Septiembre de 2005.
HMM/FPV/fpv.