UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ÁLGEBRA Y ÁLGEBRA LINEAL 520142

Práctica 18. Espacios Vectoriales

Problema 1.- Determine cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones usuales de adición y producto por escalar.

1.1) $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A \text{ es diagonal}\}$

1.2) $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\}$

1.3) $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\}$

1.4) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$

1.5) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = t + 1,\ y = 2t,\ \ z = t - 1,\ \ t \in \mathbb{R}\}$

1.6) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0\}$ **[En práctica 1.3 y 1.4]**

Problema 2.- Sea $\mathbb{R}^+$ con las operaciones de suma y producto por escalar definidas por; $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $x \oplus y = xy$; $\alpha * x = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R}^+, \oplus, *)$ espacio vectorial real?.

Problema 3.- Determine si el subconjunto W del conjunto V es subespacio vectorial.

3.1) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(x, y, z) : z \geq 0\}$.

3.2) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(x, y, z) : z = 0\}$.

3.3) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

3.4) $V = \mathbb{R}^2, \quad W = \{(x, y) : y = \frac{1}{2}x\}$.

3.5) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad W = \{A : A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$

3.6) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad W = \{A : A = \begin{pmatrix} a & 1 + a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}\}$

3.7) $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad W = \{A : A \text{ es triangular superior}\}$

3.8) $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad W = \{A : A \text{ es simétrica}\}$

3.9) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \quad W = \{p : p(0) = 0\}$

3.10) $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \quad W = \{p : p(0) = 1\}$ **[En práctica 3.9 y 3.10]**

Problema 4. Demostrar que el conjunto

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | \ f \text{ es función}\},$$

es un espacio vectorial real con las operaciones usuales de suma y producto por escalar de funcionesde $\mathcal{F}$. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de F?.

4.1) $W_1 = \{f \in \mathcal{F} : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

4.2) $W_2 = \{f \in \mathcal{F} : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

4.3) $W_3 = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es una función continua}\}$.

4.4) $W_4 = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es una función inyectiva}\}$. [**En práctica 4.3 y 4.4**]

Problema 5.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de funciones de $\mathcal{F}$ son linealmente independientes?.
5.1) $\{2, x+2, x^2\}$; 5.2) $\{1, x+1\}$; 5.3) $\{e^x, e^{-x}, cosh(x)\}$.

Problema 6.- Expresar, si es posible, el elemento indicado como combinación lineal de la familia dada:

6.1) $senx; \quad \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

6.2) $x^2 + x - 1; \quad \{1, x-1, (x-1)^2\}$.

6.3) $1; \quad \{1, x^2 - 1, x^3 + 1\}$

6.4) $0; \quad \{(x-1)^2, x, x^2+2, \sqrt{3}\}$. [**En práctica el 6.1 y 6.3**]

Problema 7.- Sean $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real y sean

$$W_1 = \{A : A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c, \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{A : A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

7.1) Demuestre que W_1y W_2 son subespacios vectoriales de V.

7.2) Describa el conjunto $W = W_1 \bigcap W_2$ y demuestre que es un subespacio.

[**En práctica 7.2**]