UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía N°3: Interpolación y Mínimos Cuadrados
Cálculo Numérico 521230, 2017-2

Nota: Esta guía complementa la Guía de Laboratorio sobre Interpolación y Mínimos Cuadrados.

Interpolación

1. Recordemos que podemos interpolar lo puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ... , (x_n, y_n) por un polinomio de grado menor o igual a n de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Sabemos que (ver diapositivas de Polinomios de Interpolación) los coeficientes de dicho polinomio son la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Calcular, si es posible, el polinomio que interpola a los siguientes puntos. En cada caso, graficar los puntos y el polinomio obtenido.

   a) $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 0)$.
   b) $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.
   c) $(-1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(5, 2)$.
   d) $(1, 1)$.
   e) $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(1, -1)$.

2. Considere los mismos puntos del ejercicio anterior. Utilizando polinomios de Lagrange, encuentre el polinomio que los interpola.
3. Compruebe los resultados obtenidos utilizando el comando `polyfit` de MATLAB. Para mayor información sobre este comando, escribir en el terminal de MATLAB: `help polyfit`.
4. La siguiente tabla muestra datos de temperatura de una sala que fueron tomados cada 20 minutos:

Tiempo (m)	temperatura (^{0}C).
0	10
20	20
40	30

   a) Encontrar el polinomio que interpola a los datos de la tabla.
   b) Deduzca la temperatura de la sala a los 5 y 35 minutos.

5. Interpolar la función $f(x) = \text{sen}(x)$, $x \in [0, \pi]$, en los siguientes puntos. En cada caso graficar la función, el polinomio obtenido y los puntos.
   a) $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ y $x_2 = \pi$.
   b) $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$ y $x_3 = \pi$.
   c) $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = 3\pi/4$ y $x_4 = \pi$.
6. Para cada caso del ejemplo anterior, obtener una cota del error de interpolación.
7. Para cada caso del Ejercicio 5, encontrar los coeficientes del polinomio de interpolación utilizando el comando `polyfit` de MATLAB y así comprobar los resultados obtenidos. Además, grafique (en MATLAB) la función y el polinomio de interpolación. Indicación: Utilizar el comando `polyval` para evaluar el polinomio.

Mínimos cuadrados

1. Sean $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,2)$ y $(3,0)$. Ajustar estos puntos por:
   a) Un polinomio de grado 0.
   b) Un polinomio de grado 1.
   c) Un polinomio de grado 2.
   d) Un polinomio de grado 3. ¿Qué pasa en este caso?
   En cada caso graficar el polinomio y los puntos.
2. Se miden las temperaturas de Concepción cada 6 horas durante 2 días, como indica la siguiente tabla. La hora 0 correspnde a las 0:00hrs.

Hora	0	6	12	18	24	30	36	42	48
temperatura (^{0}C)	2	5	13	10	3	6	14	9	3

   Ajustar las siguientes curvas a estos datos. En cada caso graficar los puntos y la curva obtenida.
   a) $f(x) = a_0 + a_1 x$.
   b) $f(x) = \alpha e^{\beta x + \gamma x^2}$.
   c) $f(x) = c_1 + c_2 \cos\left(\dfrac{2\pi}{24}x\right) + c_3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{24}x\right)$.
   ¿Qué función ajusta mejor a los datos?. ¿Por qué?. Utilizar esta función para predecir los valores de temperatura a las 6am del tercer día.
3. Considere la siguiente matriz y vector provenientes de un ajuste por mínimos cuadrados:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Sin resolver el sistema de ecuaciones normales, determinar justificadamente cuál de las siguientes soluciones corresponde a la de mínimos cuadrados. Indicación: Calcular $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$.
   a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
   b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$
   c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$