Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Complemento de Cálculo
(521234)
Examen

24 – Julio – 1997

Problema 1: El objetivo de este problema es calcular la transformada de fourier de $f(x) = e^{-|x|}$ utilisando técnicas de cálculo complejo.

1.- Haciendo el cambio de variable $z = (1+2\pi i\lambda)x$, pruebe que $\displaystyle\int_\epsilon^A e^{(-1-2\pi i\lambda)x}dx = \frac{1}{1+2\pi i\lambda}\int_C e^{-z}dz$, donde $C = \{z = (1+2\pi i\lambda)t \in \mathbf{C} \mid \epsilon \leq t \leq A\}$.

2.- Utilizando una propiedad fundamental de la siguiente función definida en $\mathbf{C}: z \to e^{-z}$ (cuál es esa propiedad ?), verifique que la integral anterior es independiente de la trayectoria C, y en particular se puede escribir :

$$\int_{(1+2\pi i\lambda)\epsilon}^{(1+2\pi i\lambda)A} e^{-z}dz = \int_{(1+2\pi i\lambda)\epsilon}^{\epsilon} e^{-z}dz + \int_\epsilon^A e^{-z}dz + \int_A^{(1+2\pi i\lambda)A} e^{-z}dz$$

(justifique haciendo un dibujo de las curvas correspondientes en el plano complejo).

3.- Haciendo ϵ tender a zero y A al infinto, pruebe que las tres integrales del miembro derecho de esta última igualdad convergen a 0, 1, y 0, respectivamente.

4.- Deduzca que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-1-2\pi i\lambda)x}dx = \frac{1}{1+2\pi i\lambda}$. Verificando por otro lado que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{(1-2\pi i\lambda)x}dx = \frac{1}{1-2\pi i\lambda}$, deduzca que la transformada de fourier de la función $f(x) = e^{-|x|}$, es igual a $\mathcal{F}(f) = \dfrac{2}{1+4\pi^2\lambda^2}$.

50 puntos

Problema 2: Sea $u = u(x,t)$ solución de la ecuación de ondas :

$$(\partial_{tt} - \partial_{xx})\, u = e^{-|x|}, \qquad |x| \leq 1, \quad t > 0,$$

con las condiciones iniciales $u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0$, y las condiciones de borde $u(-1,t) = u(1,t) = 0$.

1.- Haga el cambio de variable $u(x,t) = v(x,t) + \Phi(x)$, de modo que $(\partial_{tt} - \partial_{xx})\, v = 0$, y $\Phi(x)$ sea solución de la ecuación $\Phi'' = -e^{-|x|}$, con $\Phi(-1) = \Phi(1) = 0$.

2.- Tomando en cuenta la continuidad de Φ'' en todo $\mathbf{R}$, verifique que Φ' y Φ siguen siendo continuas en cero, para deducir que $\Phi(x) = e^{-1} - e^{-|x|} + 1 - |x|$.

3.- Calcule $u = u(x,t)$ en términos de una serie de fourier, y determine los coeficientes de la serie a partir de las condiciones iniciales. No es necesario que calcule las integrales correspondientes.

50 puntos

Duración del examen : 2 horas
MSC