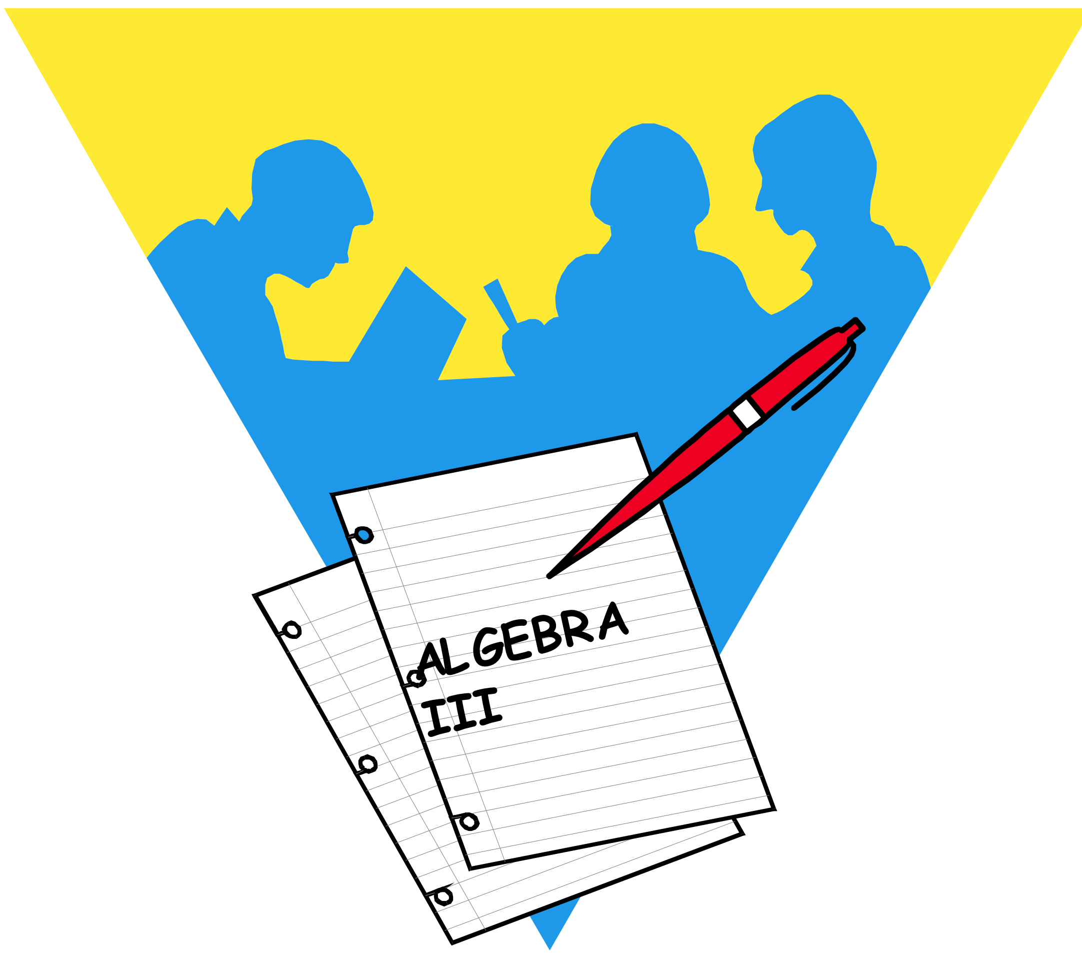
ALGEBRA
III

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA III

DEFINICION : Sea L : $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un operador lineal sobre el espacio vectorial $\mathbf{V}$. Un escalar α se dice un valor propio de L si existe un vector $\vec{v}$ **no nulo**, tal que

$$L(\vec{v}) = \alpha \vec{v} \text{ ....}(1)$$

OBSERVACION : La relación (1) puede reescribirse de la manera siguiente:

$L(\vec{v}) - \alpha \vec{v} = \vec{0}$, o, equivalentemente,

$(L - \alpha\, id_{\mathbf{V}})(\vec{v}) = \vec{0}$, con $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Vemos así, que α es un valor propio de L, si y sólo si , el operador $L - \alpha\, id_{\mathbf{V}}$ no es inyectivo. Si fijamos una base en el espacio vectorial $\mathbf{V}$ y si denotamos por $[L - \alpha\, id_{\mathbf{V}}]$ a la matriz asociada al operador $L - \alpha\, id_{\mathbf{V}}$, entonces α es un valor propio de L, si y sólo si ,

$$\det([L - \alpha\, id_{\mathbf{V}}]) = 0. \text{ ....}(2)$$

DEFINICION : Un vector, no nulo, que satisface la relación (1), se dice un **vector propio asociado al valor propio α** y al subespacio Ker $(L - \alpha\, id_{\mathbf{V}})$ se le llama el **Subespacio propio** asociado al valor propio α.

OBSERVACION : La relación (2) es equivalente a $\det([\alpha\, id_{\mathbf{V}} - L]) = 0$ y, si reemplazamos aquí α por x, obtenemos un polinomio en x, a saber:

$$c(x) = \det([x id_{\mathbf{V}} - L]) \text{ .... }(3)$$

El polinomio definido en (3) se llama el **polinomio característico de L** y observamos que los valores propios de L no son más que las raíces que el polinomio característico, c(x), **tenga en el cuerpo de escalares** del espacio vectorial $\mathbf{V}$.

EJERCICIOS :

1.- Encuentre todos los valores propios del operador lineal L : $IR^3 \to IR^3$ definido por:

L (x, y, z) = (2x +3y, 5y, 2z)

2.- Encuentre una base de IR^3 formada por vectores propios del operador lineal L dado en el ejercicio 1.

3.- Encuentre la matriz asociada al operador lineal L según la base determinada en el ejercicio 2.

4.- Pruebe que si α y β , con $\alpha \neq \beta$, son valores propios de un operador lineal T : $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores propios asociados a α y β , respectivamente, entonces $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

5.- Sea L : $IR^3 \to IR^3$ un operador lineal tal que

Ker (L - I) = < { (1, -1, 0), (1, 1, 0) } >

Ker (L - 2I) = < { (0, 0, 1) } >

i) Encuentre los valores propios de L.

ii) Para cada valor propio de L, caracterice sus vectores propios asociados.

iii) Encuentre L ($\vec{x}$) , $\forall\ \vec{x} \in IR^3$.

1.- Sea T : $IR^3 \to IR^3$ el operador lineal cuya matriz asociada, respecto de la base canónica,

es la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

6.1.- ¿Cuál es el polinomio característico de T?

6.2.- Encuentre todos los valores propios del operador T.

6.3.- Encuentre una base para cada uno de los subespacios propios de T.

6.4.- Dado el polinomio $p (x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 7$, encuentre una fórmula de definición para el operador p (T).

7.- Sea A una matriz simétrica, 2 x 2, de números reales, tal que 2 y 3 son valores propios de A y el vector (1, 2) es un vector propio asociado a 2.

a) Encuentre un vector propio de A asociado a 3 .

b) Encuentre la matriz A.

8.- Sean : $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ un operador lineal sobre el espacio vectorial $\mathbf{V}$, α un valor propio de L y p (x) un polinomio a coeficientes en el cuerpo de escalares del espacio vectorial $\mathbf{V}$. Bajo estas estas condiciones, pruebe que p (α) es un valor propio del operador lineal p (L).

♣♦♥♠

OBSERVACION : Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita, n, sobre un cuerpo IK. Si consideramos el espacio vectorial de todos los operadores lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}$, $\mathbf{L}_{IK}$ ($\mathbf{V}$, $\mathbf{V}$), entonces, como sabemos que este espacio tiene dimensión finita n^2 , podemos afirmar que si $L:\mathbf{V}\rightarrow \mathbf{V}$ es un operador lineal cualquiera en $\mathbf{L}_{IK}$ ($\mathbf{V}$, $\mathbf{V}$), existe un número natural r tal que los operadores lineales I, L, L^2, L^3, ... L^{r-1}, son l.i. y L^r es combinación lineal de I, L, L^2, L^3, ... L^{r-1} **.**

Así, existen escalares a_0, a_1, a_2,....... a_{r-1}, tales que

$L^r = a_{r-1} L^{r-1} + a_{r-2} L^{r-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1 L + a_0 I$.

Esta última relación podemos interpretarla diciendo que el polinomio

$p (x) = x^r + (-a_{r-1} x^{r-1}) + (-a_{r-2} x^{r-2}) + \ldots\ldots\ldots + (- a_1 x) + (-a_0)$ se anula en L.

Resumiendo: Nos hemos convencido que, si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces, para cada operador lineal L en $\mathbf{V}$, **existe un polinomio no nulo que se anula en L.**

DEFINICION : Dado un operador lineal L, llamamos **polinomio minimal de L** al polinomio **mónico de menor grado** entre los polinomios que se anulan en L.

OBSERVACION : Si denotamos por m (x) al polinomio minimal de un operador L , haciendo uso del algoritmo de división, podemos probar que si p (x) es un polinomio que se anula en L, entonces **m (x) divide a p (x).**

TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON : Si L es un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión finita sobre un cuerpo IK, entonces su polinomio característico se anula en L.

COROLARIO: El polinomio minimal de un operador lineal divide a su polinomio característico. **Aún más:** El polinomio minimal y el polinomio característico de un operador lineal **tienen las mismas raíces** (aúnque no, necesariamente, con las mismas multiplicidades).

EJERCICIOS:

1.- Encuentre el polinomio minimal del operador lineal L : $IR^4 \to IR^4$, cuya matriz asociada, según la base canónica de IR^4, es la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.- Encuentre el polinomio minimal del operador de derivación definido por:

$$D : IR_4[x] \to IR_4[x]$$

$$D(p(x)) = p'(x).$$

3.- Muestre que la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ tienen el mismo polinomio minimal.

4.- Sea $\mathbf{V} = \mathbf{M}_{2 \times 2}(IR)$ y $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Pruebe que el operador lineal $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definido por $T(B) = AB$ tiene el mismo polinomio minimal que la matriz A.

5.- Pruebe que si $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es un operador lineal, dim ($\mathbf{V}$) = n, entonces T es invertible si y sólo si el término libre del polinomio minimal de T es distinto de cero. Describa como computar T^{-1} usando el polinomio minimal. En particular muestre que T^{-1} puede siempre expresarse como un polinomio en T.

6.- Pruebe que matrices semejantes tienen el mismo determinante, la misma traza, el mismo polinomio característico y el mismo polinomio minimal .

7.- a) ¿Qué forma tiene el polinomio característico de una matriz nilpotente?

b) ¿Qué forma tiene el polinomio minimal de una matriz idempotente?

♣♦♥♠

DEFINICION : Sean: $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo IK, $\mathbf{W}$ un subespacio de $\mathbf{V}$ y $L:\mathbf{V}\to \mathbf{V}$ un operador lineal . Decimos que $\mathbf{W}$ es **L-invariante o invariante por L** si $L(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{W}$.

Observamos que si $\mathbf{W}$ es L-invariante entonces la aplicación lineal restrcción de L a $\mathbf{W}$, Res_{W} L, es un operador lineal sobre $\mathbf{W}$.

EJERCICIOS:

1. Si L: $IR^2\to IR^2$ es el operador lineal representado, según la base canónica, por la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, entonces encuentre todos los subespacios de IR^2 que son invariantes por L.

2. Sea T el operador lineal sobre IR^2 cuya matriz, respecto de la base canónica, es $\left[T\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   Si W_1 es el subespacio de IR^2 generado por $\overset{\omega}{e}_1 = (1, 0)$, pruebe que

   a) W_1 es invariante por T.

   b) No existe subespacio W_2 de IR^2, invariante por T y tal que $IR^2 = W_1 \oplus W_2$.

3. Sea T: $\mathbf{V}\to \mathbf{V}$ un operador lineal. Si $U = Ker(T^i)$ y $W = Ker(T^{i+1})$, entonces pruebe que

a) $U \subseteq W$ y

b) $T(W) \subseteq U$.

4. Sea L: $IR^3\to IR^3$ el operador lineal cuya matriz asociada, según la base canónica, es la matriz $B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ y considere los polinomios $p(x) = x - 2$, $q(x) = x^2 +1$, que son los factores irreducibles del polinomio minimal de L.

   a) Caracterice los elementos del subespacio Ker(p(L)).

   b) Caracterice los elementos del subespacio Ker(q(L)).

   c) Muestre que Ker(p(L)) y Ker(q(L)) son L - invariantes.

   d) Muestre que IR^3 = Ker(p(L)) $\oplus$ Ker(q(L)).

5. Sea T: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un operador lineal. Suponga que $\vec{v} \in \mathbf{V}$ es tal que $T^k(\vec{v}) = \vec{0}$ pero $T^{k-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$.

   Pruebe que:

   a) El conjunto $B = \{\vec{v}, T(\vec{v}), \ldots, T^{k-1}(\vec{v})\}$ es l. i.

   b) Si $W = \langle B \rangle$, entonces W es T - invariante.

   c) $T_0 = Res_W\, T$ es nilpotente.

♣♦♥♠

DEFINICION: Sean $W_1, W_2, W_3, \ldots W_k$ subespacios de un espacio vectorial $\mathbf{V}$. Se dice que $\mathbf{V}$ suma directa de los subespacios $W_1, W_2, W_3, \ldots W_k$, si cada vector $\vec{v} \in \mathbf{V}$ puede expresarse de una sola forma como resultado de vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots \vec{w}_k$, tales que $\vec{w}_i \in W_i$, para cada $i \in \{1,2,\ldots k\}$.

NOTACION: $\mathbf{V} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus \ldots \oplus W_k$.

LEMA: Sean $W_1, W_2, W_3, \ldots W_k$ subespacios de un espacio vectorial $\mathbf{V}$. Entonces $\mathbf{V} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus \ldots \oplus W_k$, si y sólo si,

a) $\mathbf{V} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_k$ y

b) si $\vec{w}_i \in W_i$, $i \in \{1,2,\ldots k\}$, son vectores tales que $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \ldots + \vec{w}_k = \vec{0}$, entonces $\vec{w}_1 = \vec{w}_2 = \ldots = \vec{w}_k = \vec{0}$.

LEMA: Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo IK, y suponga que existen operadores lineales, no nulos, $E_1, E_2, E_3, \ldots E_k$ sobre $\mathbf{V}$, tales que :

a) $I = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_k$,

b) $E_i \circ E_j = E_j \circ E_i = \theta$, si $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,\ldots k\}$.

Entonces tendremos que $E_i^2 = E_i$, para cada $i \in \{1,2,\ldots k\}$. Además,

$\mathbf{V} = Im(E_1) \oplus Im(E_2) \oplus Im(E_3) \oplus \ldots \oplus Im(E_k)$, y cada subespacio $Im(E_i)$ es no nulo.

DEFINICION: Un operador E_i, tal que $E_i^2 = E_i$, se dice un operador **idempotente.**

Teorema de Descomposición Prima: Sea L un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathbf{V}$ y sea $m(x) = p_1(x)^{r_1} \ldots\ldots p_s(x)^{r_s}$ su polinomio minimal expresado como producto de potencias de factores irreducibles. Entonces existen polinomios $q_1(x)$, ..., $q_s(x)$, en IK[x], tales que los operadores lineales $E_i = q_i(L)$, $i \in \{1,2,... s\}$, satisfacen las siguientes relaciones:

$E_i \neq \theta$, $i \in \{1,2,... s\}$,

$I = E_1 + E_2 + E_3 + ... + E_s$,

$E_i \circ E_j = E_j \circ E_i = \theta$, si $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,... s\}$ y

$Im(E_i) = Ker(p_i(L)^{r_i})$, $i \in \{1,2,... s\}$.

Los subespacios $Ker(p_i(L)^{r_i})$, $i \in \{1,2,... s\}$, son L - invariantes y se tiene que

$$\mathbf{V} = Ker(p_1(L)^{r_1}) \oplus Ker(p_2(L)^{r_2}) \oplus Ker(p_3(L)^{r_3}) \oplus ..... \oplus Ker(p_s(L)^{r_s}).$$

COROLARIO: Un operador lineal L un operador lineal sobre un espacio vectorial **V,** es diagonalizable si y sólo si su polinomio minimal es un producto de factores lineales distintos.

EJERCICIOS:

1. Sea T: $IR^3 \rightarrow IR^3$ el operador lineal cuya matriz asociada, respecto de la base canónica, es la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$.
   a) ¿Bajo qué condiciones de a y de b es diagonalizable el operador T ?
   b) ¿Bajo qué condiciones de a y de b es el subespacio $W = \{(x, y, z) \in IR^3 / x + z = 0 \}$ invariante por T?.
2. Sea L : $\mathbf{M}_{2x2}(IR) \rightarrow \mathbf{M}_{2x2}(IR)$ el operador lineal definido por L(M) = M + Tr(M)I. Entonces:
   a) Encuentre los valores propios y el polinomio minimal de L.
   b) ¿Es el operador L diagonalizable?. Justifique su respuesta.
3. Pruebe que si a,b,c y d son números reales tales que bc>0, entonces la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

4. Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ un vector unitario en IR^n y denotemos por X a la matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$.

   Definimos la matriz A como $A = I_n - 2xx^t$. Pruebe que :

   a) $A^t = A$.

   b) $A^{-1} = A^t$.

   c) $x^2 - 1$ es el polinomio minimal de A.

   d) A es diagonalizable.

   e) $tr(A) = n - 2$.

   f) $\det(A) = -1$.

5. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in IR^n - \{ \vec{0} \}$ y considere la matriz $A = XY^t \in \mathbf{M}_{n \times n}(IR)$.

   a) Demuestre que $\vec{x}$ es un vector propio de A. Pruebe, además, que todo vector no nulo de IR^n ortogonal a $\vec{y}$, es también vector propio de A.

   b) Demuestre que $\vec{x}$ es un vector propio de A. Pruebe, además, que todo vector no nulo de IR^n ortogonal a $\vec{y}$, es también vector propio de A.

   c) Suponga que $XY^t \neq 0$. Calcule, en este caso, todos los valores propios de A.

   d) Demuestre que A es diagonalizable.

   e) Suponga ahora que $X^t Y = 0$. Considere una base del subespacio vectorial $< \{ \vec{y} \} >^{\perp}$ de la siguiente forma: $\{ \vec{x}, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \}$ y sea $\mathcal{B}$ la base de IR^n dada por $\mathcal{B} = \{ \vec{x}, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{y} \}$. Calcule la matriz representante de A con respecto a la base $\mathcal{B}$.

♣♦♥♠

TEOREMA DE DESCOMPOSICION DE JORDAN. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión finita sobre un cuerpo IK. Si **T es tal que todos sus valores propios son elementos de IK**, entonces existen operadores D y N tales que:

1.- T = D + N,

2.- D es diagonalizable y N es nilpotente.

3.- D y N conmutan (DN = ND),

4.- D y N están unívocamente determinados; es decir, si existen operadores D' y N' sobre $\mathbf{V}$ tales que D' es diagonalizable y N' es nilpotente, T = D' + N' y D'N' = N'D', entonces D' = D y N' = N.

OBSERVACION 1: La descomposición de Jordan de un operador lineal T es útil para computar potencias de T: las potencias de T pueden computarse en términos de D y N, usando el Teorema de Binomio (**puede usarse este Teorema porque D y N conmutan**).

Así:

$$T^k = D^k + \binom{k}{1} D^{k-1} N + \ldots\ldots\ldots\ldots \binom{k}{k-1} D N^{k-1} + N^k$$

Observamos que las potencias de D son fácilmente calculables (basta tomar las potencias correspondientes de los elementos de la diagonal) y, a partir de un cierto valor t, las potencias de N se anulan.

OBSERVACION 2: Observe que la condición que T tenga todos sus valores propios en el cuerpo IK implica que el polinomio minimal de T sea un producto de potencias de polinomios mónicos de primer grado.

EJERCICIOS:

1.- Sea $T : IR^3 \to IR^3$ el operador lineal cuya matriz, según la base canónica, es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Encuentre la descomposición de Jordan de T.

b) Usando la descomposición de Jordan de T, encuentre una matriz que represente a T^{10}.

2.- Sea $T = D + N$ la descomposición de Jordan de un operador lineal $T \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$. Pruebe que $S \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$ conmuta con T si y sólo si S conmuta con D y con N.

3.-**DEFINICION:** Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado IK. Un operador $T \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$ se dice **unipotente** si T - I es nilpotente.

a) Dé un ejemplo de un operador unipotente.

Pruebe que:

b) T es unipotente si y sólo si su único valor propio es 1.

c) Si T es invertible, entonces existen D, U $\in \mathbf{L}(\mathbf{V})$ tales que T = DU, D es diagonalizable y U es unipotente.

d) Los operadores D y U de la parte b) están unívocamente determinados.

e) Para el operador que $T : C^3 \to C^3$ cuya matriz, según la base canónica, es la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, encuentre su factorizacíon como producto de un operador diagonalizable y un operador unipotente.

♣♦♥♠

Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo IK y sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un operador lineal sobre $\mathbf{V} \neq \{\vec{0}\}$.

DEFINICION: Un subespacio **W** de **V** , T - invariante, se dice **T - cíclico** si existe un vector $\vec{w} \in \mathbf{W}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$, tal que **W** es generado por $\{\vec{w}, T(\vec{w}), T^2(\vec{w}), \ldots\ldots., T^k(\vec{w})\}$, para algún $k \in$ IN.

OBSERVACION: Es posible probar que un subespacio **W** de **V** es T - cíclico si para algún vector $\vec{w} \in \mathbf{W}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$, se tiene que cada vector de **W** puede escribirse en la forma $p(T)(\vec{w})$, para algún polinomio $p(x) \in$ IK[x].

DEFINICION: Sea $\vec{w} \in \mathbf{V}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$, y sea **W** el subespacio de **V** que consiste de todos los vectores de la forma $p(T)(\vec{w})$, para algún polinomio $p(x) \in$ IK[x]. Entonces **W** se dice **el subespacio T - cíclico generado por $\vec{w}$** y se denotará por $Z(\vec{w}, T)$.

DEFINICION: Como el espacio vectorial $\mathbf{V}$ es de dimensión finita, es posible probar que si $\vec{w} \in \mathbf{V}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$, entonces existe un polinomio mónico $m_{\vec{w}}(x)$, único tal que

i) $m_{\vec{w}}(T)(\vec{w}) = \vec{0}$, y

ii) si $p(x) \in$ IK[x] es tal que $p(T)(\vec{w}) = \vec{0}$, entonces $m_{\vec{w}}(x)/p(x)$.

Este polinomio $m_{\vec{w}}(x)$ se llama el orden del vector $\vec{w}$, y está unívocamente determinado como el polinomio mónico $q(x)$ de menor grado tal que $q(T)(\vec{w}) = \vec{0}$.

OBSERVACION: Es posible probar que $m_{\vec{w}}(x)$ divide al polinomio minimal de T.

EJERCICIOS:

1.- Pruebe que $Z(\vec{w}, T)$ es T - invariante.

2.- Pruebe que $Z(\vec{w}, T) = \cap \{S / S$ es subespacio T - invariante de $\mathbf{V}$ y $\vec{w} \in S\}$.

Observe que con esta igualdad está probando que $Z(\vec{w}, T)$ es el menor de los subespacios de $\mathbf{V}$, T - invariantes, que contienen a $\vec{w}$.

3.- Sea $T : IR^3 \rightarrow IR^3$ el operador lineal cuya matriz, según la base canónica, es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{c} = (-1, 0, 1)$, caracterice los elementos de $Z(\vec{a}, T)$, de $Z(\vec{b}, T)$, de $Z(\vec{c}, T)$, y encuentre los órdenes de $\vec{a}$, de $\vec{b}$ y de $\vec{c}$.

♣♦♥♠

Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo IK y sea $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ un operador lineal sobre $\mathbf{V} \neq \{\vec{0}\}$.

DEFINICION: Sea $p(x) = x^d - a_{d-1} x^{d-1} - a_{d-2} x^{d-2} - \ldots\ldots\ a_1 x - a_0 \in IK[x]$ un polinomio irreducible y suponga que $Z(\vec{w}, T)$ es un subespacio cíclico de **V** y que $p(x)$ es el orden de $\vec{w}$. Entonces la matriz de $Res_{Z(\vec{w}, T)}(T)$, respecto de la base

$\{\vec{w}, T(\vec{w}), T^2(\vec{w}), \ldots\ldots, T^{d-1}(\vec{w})\}$ de $Z(\vec{w}, T)$, es la matriz $A_{p(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & a_0 \\ 1 & 0 & . & . & a_1 \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & . & 1 & a_{d-1} \end{bmatrix}$.

La matriz $A_{p(x)}$ se llama **la matriz compañera del polinomio p(x).**

DEFINICION: Sea $p(x) = x^d - a_{d-1} x^{d-1} - a_{d-2} x^{d-2} - \ldots\ldots\ a_1 x - a_0 \in IK[x]$ un polinomio irreducible y suponga que $Z(\vec{w}, T)$ es un subespacio cíclico de **V** y que $[p(x)]^r$ es el orden de $\vec{w}$. Entonces la matriz de $Res_{Z(\vec{w}, T)}(T)$, respecto de la base $\{[p(T)]^{r-1}(\vec{w}), (T \circ [p(T)]^{r-1})(\vec{w}), (T^2 \circ [p(T)]^{r-1}(\vec{w}), \ldots\ldots, (T^{d-1} \circ [p(T)]^{r-1}(\vec{w}), [p(T)]^{r-2}(\vec{w}), (T \circ [p(T)]^{r-2})(\vec{w}), (T^2 \circ [p(T)]^{r-2}(\vec{w}), \ldots\ldots, (T^{d-1} \circ [p(T)]^{r-2}(\vec{w}), \ldots\ldots\ldots\ldots\ \vec{w}, T(\vec{w}), T^2(\vec{w}), \ldots\ldots, T^{d-1}(\vec{w})\}$ de $Z(\vec{w}, T)$, es la matriz

$A_{[p(x)]^r} = \begin{bmatrix} A_{p(x)} & B & 0 & . & . & 0 \\ 0 & A_{p(x)} & B & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & A_{p(x)} & B \\ 0 & . & . & . & . & A_{p(x)} \end{bmatrix}$, donde $A_{p(x)}$ es la matriz compañera del polinomio $p(x)$ y B es la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La matriz $A_{[p(x)]^r}$ se llama **la matriz compañera del polinomio $[p(x)]^r$.**

EJERCICIOS:

1.- Encuentre la matriz compañera de cada uno de los siguientes polinomios:

$p_1(x) = x^2 + x + 1$,

$p_2(x) = x - 2$,

$p_3(x) = (x - 1)^3$,

$p_4(x) = (x^2 + x + 1)^5$.

♣ ♦ ♥ ♠

LEMA: Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo IK y sea $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ un operador lineal sobre $\mathbf{V} \neq \{\vec{0}\}$. Si $m(x) = [p(x)]^r$, con $p(x)$ irreducible, es el polinomio minimal de T, entonces existen vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots\ldots, \vec{w}_m$, con órdenes $[p(x)]^{r_1}$, $[p(x)]^{r_2}$, ... $[p(x)]^{r_m}$, respectivamente, y tales que $r = r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \ldots\ldots \geq r_m$ y $\mathbf{V} = Z(\vec{w}_1, T) \oplus Z(\vec{w}_2, T) \oplus \ldots\ldots\ldots \oplus Z(\vec{w}_m, T)$.

OBSERVACION: Los órdenes $[p(x)]^{r_1}$, $[p(x)]^{r_2}$, ... $[p(x)]^{r_m}$ están unívocamente determinados y el operador T tiene una única representación matricial de la forma $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & A_m \end{bmatrix}$ en la que las matrices $A_1, A_2, \ldots\ldots A_m$, son las matrices compañeras de los polinomios $[p(x)]^{r_1}$, $[p(x)]^{r_2}$, ... $[p(x)]^{r_m}$.

TEOREMA: Sea $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ un operador lineal sobre $\mathbf{V}$. Si $m(x) = [p_1(x)]^{r_1}[p_2(x)]^{r_2}\ldots\ldots [p_k(x)]^{r_k}$

con $[p_1(x)]^{r_1}$, $[p_2(x)]^{r_2}$,....., $[p_k(x)]^{r_k}$ irreducibles, es el polinomio minimal de T, entonces T tiene una única representación matricial diagonal por bloques : $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & A_{mk} \end{bmatrix}$.

Esta representación matricial se llama la **forma canónica racional del operador T.**

OBSERVACION: Si todos los polinomios irreducibles que participan en la factorización del polinomio minimal de T son de primer grado, entonces la forma canónica racional de T recibe el nombre de **forma de Jordan.**

EJERCICIOS:

1.- Encuentre la forma canónica racional de la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.- Encuentre la forma canónica racional de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3.- Determine todas las posibles formas de Jordan para una matriz A cuyo polinomio característico es $c(x) = (x - 3)^3 (x - 2)^3$.

4.- Encuentre todas las formas canónicas racionales posibles para una matriz cuadrada, de números reales y de orden 2.

5.- Encuentre todas las formas canónicas racionales posibles para una matriz cuadrada, de números complejos y de orden 2.

6.- Encuentre todas las formas canónicas racionales posibles para una matriz cuadrada, de números reales y de orden 3.

7.- Encuentre todas las formas canónicas racionales posibles para una matriz cuadrada, de números reales, de orden 6 y cuyo polinomio minimal es:

a) $(x^2 + 3)(x + 1)^2$,

b) $(x^2 + 2)^2(x + 3)^2$.

8.- Encuentre todas las formas canónicas racionales posibles para una matriz cuadrada, de números complejos, de orden 6 y cuyo polinomio minimal es:

a) $(x^2 + 3)(x + 1)^2$,

b) $(x^2 + 2)^2(x + 3)^2$.

♣ ♦ ♥ ♠

DEFINICION: Si $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo IK, entonces una función $B : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \to$ IK se dice **una forma bilineal** si:

$$\left.\begin{array}{r} B(\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{w}) = B(\vec{v}_1,\vec{w})+B(\vec{v}_2,\vec{w}) \\ B(\vec{v},\vec{w}_1+\vec{w}_2) = B(\vec{v},\vec{w}_1)+B(\vec{v},\vec{w}_2) \\ B(\alpha\vec{v},\vec{w}) = B(\vec{v},\alpha\vec{w}) = \alpha B(\vec{v},\vec{w}) \end{array}\right\} \quad ,\forall\ \vec{v},\ \vec{v}_1,\vec{v}_2 \in \mathbf{V},\ \forall\ \vec{w},\vec{w}_1,\vec{w}_2 \in \mathbf{W},\ \forall\ \alpha \in \text{IK}.$$

DEFINICION: Una forma bilineal B se dice **no degenerada** si:

$(\ B(\vec{v},\vec{w}) = 0,\ \forall\ \vec{v} \in \mathbf{V}\ ) \Rightarrow \vec{w} = \vec{0}$ y $(\ B(\vec{v},\vec{w}) = 0,\ \forall\ \vec{w} \in \mathbf{W}\ ) \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

TEOREMA: Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo IK y sea $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \to$ IK una forma bilineal no degenerada. Para cada $\vec{w} \in \mathbf{W}$ se define $\varphi_{\vec{w}} : \mathbf{V} \to$ IK por $\varphi_{\vec{w}}(\vec{v}) = \varphi(\vec{v},\vec{w})$, entonces $\varphi_{\vec{w}} \in \mathbf{V}^*$, $\forall\ \vec{w} \in \mathbf{W}$ y la aplicación $\Phi : \mathbf{W} \to \mathbf{V}^*$, definida por $\Phi(\vec{w}) = \varphi_{\vec{w}}$ es un isomorfismo.

OBSERVACION: De manera análoga se prueba que $\mathbf{V}$ es isomorfo a $\mathbf{W}^*$.

DEFINICION: Dos espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, de dimensión finita sobre un cuerpo IK, se dicen **duales respecto de una forma bilineal $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \to$ IK** si φ es no degenerada.

EJERCICIOS:

1. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo IK . Pruebe que la función $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* \to$ IK definida por $\varphi(\vec{v},f) = f(\vec{v})$ es una forma bilineal.
2. Pruebe que $\varphi : \text{IR}^2 \times \text{IR}^3 \to \text{IR}$ definida por $\varphi((x,y),(a,b,c)) = ax - ay + 3yb + 2xc$ es una forma bilineal. ¿Es no degenerada esta forma bilineal?.
3. $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \to$ IK es una forma bilineal, si $\mathbf{B_1} = \{\ \vec{e}_1,\ldots.\vec{e}_m\ \}$ y $\mathbf{B_2} = \{\ \vec{f}_1,\ldots\ldots.. \vec{f}_n\ \}$ son bases de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, respectivamente, y si ponemos :

$$a_{ij} = \varphi(\ \vec{e}_i\ ,\ \vec{f}_j\ ),\ i = 1,2,\ldots..m$$
$$j = 1,2,\ldots..n.$$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \, \vec{e}_i$$

$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \, \vec{f}_j \, ,$$

entonces:

a) verifique que $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$. La matriz $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots m \\ j=1,2,\ldots n}}$ se dice **la matriz asociada a la forma bilineal** φ.

b) Encuentre la matriz asociada a la forma bilineal del ejercicio 2 cuando en IR^2 y IR^3 se consideran las bases canónicas respectivas.

♣♦♥♠

DEFINICION: Sea **V** un espacio vectorial real de dimensión finita. Una **forma cuadrática en V** es una función Q: **V** $\rightarrow$ IR tal que $Q(\vec{v}) = B(\vec{v}, \vec{v})$, para alguna forma bilineal simétrica en **V** .

OBSERVACION: Es fácil verificar que si Q es una forma cuadrática en **V** , entonces:

(1) $Q(\alpha \vec{v}) = \alpha^2 Q(\vec{v})$, $\forall \in IR, \forall \vec{v} \in$ **V** ,

(2) $B(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2} [\, Q(\vec{v} + \vec{w}) - Q(\vec{v}) - Q(\vec{w})]$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in$ **V** ,

(3) Si $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base de **V** y si ponemos

$$a_{ij} = B(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \frac{1}{2} [\, Q(\vec{e}_i + \vec{e}_j) - Q(\vec{e}_i) - Q(\vec{e}_j)\,], \; i,j = 1,2,\ldots,n,$$

entonces la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ es una matriz simétrica que se dice la matriz de la forma cuadrática Q, respecto de la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Si se tiene que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \vec{e}_i$, entonces

$$Q(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i v_j a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 a_{ii} + 2 \sum_{i<j}^{n} v_i v_j a_{ij} \, .$$

TEOREMA: Sea Q una forma cuadrática en **V** cuya matriz respecto de la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$. Si $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ es otra base de **V** y si $B = (b_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ es la matriz de Q respecto de la base $\{\vec{f}_1,........,\vec{f}_n\}$, entonces $B = P^t A P$, donde P es la matriz de cambio de base de $\{\vec{e}_1,....,\vec{e}_n\}$ a $\{\vec{f}_1,........,\vec{f}_n\}$.

DEFINICION: Un operador lineal T sobre un espacio vectorial real con producto interior < , > se dice un **operador simétrico** si $< T(\vec{v}), \vec{w} > = < \vec{v}, T(\vec{w}) >$, $\forall\ \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}$.

TEOREMA: Si T es un operador simétrico sobre un espacio vectorial real con un producto interior <, >, entonces T es diagonalizable. Aún más: existe una base ortonormal de **V** constituída por vectores propios de **V** .

EJERCICIOS:

1.- Identifique y grafique las siguientes cónicas:

$7x^2 + 9y^2 + 2\sqrt{8}xy + 5x = 10,$

$3x^2 + 3y^2 + 2xy + 6x + 10y - 3 = 0,$

$2x^2 + 4y^2 - 2xy + 7y = 8.$

2.- Identifique y grafique las siguientes superficies:

$xy - yz = 1,$

$x^2 - 2xy + z = 2.$

♣♦♥♠

DEFINICION: Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial complejo. Un **producto escalar hermitiano** es una función $<,>: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$ que satisface:

i) $<\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{w}> = <\vec{v}_1,\vec{w}> + <\vec{v}_2,\vec{w}>$, $<\vec{v},\vec{w}_1+\vec{w}_2> = <\vec{v},\vec{w}_1> + <\vec{v},\vec{w}_2>$

$<\alpha\vec{v},\vec{w}> = \alpha<\vec{v},\vec{w}>$, $\qquad <\vec{v},\alpha\vec{w}> = \overline{\alpha}<\vec{v},\vec{w}>$,

$<\vec{v},\vec{w}> = \overline{<\vec{w},\vec{v}>}$, $\forall\ \vec{v},\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{w},\vec{w}_1,\vec{w}_2 \in \mathbf{V}$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$.

ii) $<\vec{v},\vec{v}> \in \mathrm{IR}_0^+$, $\forall\ \vec{v} \in \mathbf{V}$, $\quad <\vec{v},\vec{v}> = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

Si $<,>: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$ es un producto escalar hermitiano, entonces para cada $\vec{v} \in \mathbf{V}$ definimos su **norma o longitud** como $\|\vec{v}\| = \sqrt{<\vec{v},\vec{v}>}$.

Dos vectores $\vec{v},\vec{w} \in \mathbf{V}$, se dicen **ortogonales** si $<\vec{v},\vec{w}> = 0$.

Un conjunto $\{\vec{e}_1,....\vec{e}_m\}$ de vectores de $\mathbf{V}$ se dice un conjunto ortonormal si

$\|\vec{e}_i\| = 1$, i = 1,2,.....n, y $<\vec{e}_i,\vec{e}_j> = 0$, si $i \neq j$.

TEOREMA: Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial complejo con un producto escalar hermitiano $<,>$. Entonces cada subespacio $W \neq \{\vec{0}\}$ de $\mathbf{V}$ posee una base ortonormal. Si $\{\vec{e}_1,....\vec{e}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbf{V}$, y si $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i$, entonces $<\vec{x},\vec{y}> = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$.

DEFINICION: Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial complejo con un producto escalar hermitiano $<,>$. Un operador lineal U en $\mathbf{V}$ se dice **unitario** si $\|U(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$, $\forall\ \vec{v} \in \mathbf{V}$.

TEOREMA: Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial complejo con un producto escalar hermitiano $<,>$ y sea U un operador lineal en $\mathbf{V}$. Son equivalentes:

1.- U es unitario.

2.- $<U(\vec{v}),U(\vec{w})> = <\vec{v},\vec{w}>$, $\forall\ \vec{v},\vec{w} \in \mathbf{V}$,

3.- Si $\{\vec{e}_1,....\vec{e}_m\}$ es una base ortonormal de $\mathbf{V}$, entonces $\{U(\vec{e}_1),....U(\vec{e}_m)\}$ es una base ortonormal de $\mathbf{V}$.

4.- Si $A = (a_{ij})$ es la matriz asociada a U, respecto de una base ortonormal de $\mathbf{V}$, entonces A es tal que $A\overline{A}^t = I$ ....(*)

OBSERVACION: Una matriz A que satisface la condición (*) se dice una **matriz unitaria.**

♣♦♥♠

DEFINICION: Sea **V** un espacio vectorial complejo con un producto escalar hermitiano < , > y T un operador lineal en **V**. Un operador lineal T^* se dice un **adjunto de T** si

$< T(\vec{u}), \vec{v} > = < \vec{u}, T^*(\vec{v}) >, \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in$ **V**.

TEOREMA: Cada operador lineal T en **V** tiene un único operador adjunto T^*. Si la matriz de T, respecto de una base ortonormal de **V** es la matriz A, entonces la matriz de T^*, respecto de esa misma base ortonormal, es la matriz A^*.

T se dice **autoadjunto o hermitiano** si $T = T^*$.

T se dice **normal** si $T\,T^* = T^*\,T$.

OBSERVACIONES: Cada operador autoadjunto es normal.

Cada operador unitario es normal pero no, necesariamente, autoadjunto.

PROPOSICION: Si T es un operador normal entonces existen vectores en **V** que son vectores propios, simultáneamente, para T y para T^*. Aún más: si $\vec{v}$ es un vector propio de T y de T^*, entonces $T(\vec{v}) = \alpha\,\vec{v}$ y $T^*(\vec{v}) = \overline{\alpha}\,\vec{v}$.

PROPOSICION: Si T es un operador normal y si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores propios simultáneos de T y de T^*, correspondientes a valores propios distintos, entonces $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales.

TEOREMA: Cada operador normal es diagonalizable.

EJERCICIOS

1. a) Averigüe si la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$ es normal.

   b) Encuentre una matriz unitaria P tal que P^*AP sea diagonal y encuentre P^*AP.

   c) Si T es un operador normal y si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores propios simultáneos de T y de T^*, correspondientes a valores propios distintos, entonces pruebe que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son ortogonales.

2. Pruebe que los valores propios de un operador autoadjunto son números reales.
3. Sean **V** un espacio vectorial complejo con un producto escalar hermitiano $< \, , \, >$ y T un operador lineal en **V** . Pruebe que:

   a) Si T es unitario y W es un subespacio de **V** T-invariante, entonces $W^{\perp}$ es también T-invariante.

   b) Si T es normal y λ es un número complejo cualquiera, entonces $T - \lambda I$ también es un operador normal.

♣♦♥♠

.