UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 19 (Valores y Vectores Propios.)

1. Considere los operadores lineales $D, L : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ definidos por:
$$\forall\, p \in P_2(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}, \quad D(p)(x) = xp'(x) \text{ y } L(p)(x) = p(2x).$$
Determine los valores propios y las bases para los espacios propios asociados a $D,\ L,$ $L \circ D$ y $D \circ L$ respectivamente. **(En Práctica $L \circ D$)**

2. Considere el operador lineal $L : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R}),\ A \longmapsto L(A) = A + A^t$. Determine los valores propios y los espacios propios asociados a L. **(En Práctica)**

3. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con $dim(V) = 3$. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V tal que:
$$T(v_1) = v_1 + v_3, \quad T(v_2) = v_2 + v_3, \quad T(v_3) = 3v_3$$
Determine los espacios propios de T y su ecuación de definición. ¿Es T un operador diagonalizable y biyectivo? **(En Práctica)**
Nota: *Observe que Ud. no necesita determinar ni la nulidad ni el rango de T para responder si T es o no un operador biyectivo, basta saber que $\lambda = 0$ no es valor propio de T.*

4. Determine el polinomio característico asociado a las siguientes matrices. Construya una base para el espacio propio asociado al valor propio de mayor módulo y decida si las matrices son o no diagonalizables.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2i+1 & i & 1 \end{pmatrix}.$$
(En Práctica A_1)

5. Encontrar, si existen, los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la matriz A sea diagonalizable. Encuentre en tales casos la dimensión de los espacios propios asociados.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$
(En Práctica)

6. Demuestre que para toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A).$$

7. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ cuya matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es **(En Práctica)**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) Determinar los valores y vectores propios asociados a T. ¿Es T invertible?. Deducir la nulidad y el rango de T.

   b) Determinar una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice a T.

   c) Calcular la n-ésima potencia de A.

8. La matriz asociada al endomorfismo $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & c & d \\ e & f & 3 \end{pmatrix}.$$

   Use que la matriz representante de f con respecto a la base $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ es diagonal para calcular los coeficientes a, b, c, d, e, f y los valores propios de f.

   (En Práctica)

9. La matriz asociada a un endomorfismo $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Encuentre una base ortonormal tal que la matriz representante de f resulte diagonal.

10. *a*) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pruebe que si A es simétrica, entonces $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

   b) Encuentre, los valores propios, λ_1, λ_2 y λ_3 de la matriz A y construya una matriz $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $A = P^t D P$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

11. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **(En práctica)**

a) Determine el polinomio característico de A. Aplique los teoremas de Cayley-Hamilton y del Binomio para determinar la n-ésima potencia de $(A + 2I)$.

b) Considere las sucesiones de números reales $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por:

$$u_n = 2u_{n-1} \quad v_n = 2u_{n-1} + 2v_{n-1} \quad w_n = v_{n-1} + 2w_{n-1},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = (A + 2I) \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = (A + 2I)^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \\ w_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots$$

Escribir u_n, v_n y w_n, en función de los valores iniciales u_0, v_0, w_0 y del entero positivo n

12. Sea A_1 la matriz del problema 4.

a) Determine una matriz $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}A_1P = diag(1, -1, 2)$. Además calcular la n-ésima potencia de A.

b) Utilizando la información de los valores propios de A_1 justifique que A_1^{-1} existe y usando el teorema de Cayley-Hamilton determine una expresión para ella en términos de las potencia de A_1.

Apéndice:

1) Teorema de Cayley-Hamilton. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ donde V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Si p es el polinomio característico de T, entonces $p(T) = \theta \in \mathcal{L}(V)$ y $P([T]_B) = \theta \in M_n(\mathbb{K})$, cualquiera sea la matriz asociada $[T]_B$.*

2) Teorema del binomio. *Si A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $AB = BA$, entonces para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que: $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.*

JSA/RBP/RRS/GBG/AGS/RNG/LRS/BBM/ags
Segundo Semestre de 2005.