

Guía N°3: Interpolación y Mínimos Cuadrados
Cálculo Numérico 521230, 2018-2

Nota: Esta guía complementa la Guía de Laboratorio sobre Interpolación y Mínimos Cuadrados.

Interpolación

- Recordemos que podemos interpolar los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ por un polinomio de grado menor o igual a n de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Sabemos que (ver diapositivas de Polinomios de Interpolación) los coeficientes de dicho polinomio son la solución del sistema:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Calcular, si es posible, el polinomio que interpola a los siguientes puntos. En cada caso, graficar los puntos y el polinomio obtenido.

- $(0, 1), (2, 3), (3, 0)$.
 - $(-1, 1), (0, 0), (1, 1)$.
 - $(-1, 0), (2, 1), (3, 1), (5, 2)$.
 - $(1, 1)$.
 - $(0, 1), (1, 2), (1, -1)$.
- Considere los mismos puntos del ejercicio anterior. Utilizando polinomios de Lagrange, encuentre el polinomio que los interpola.
 - Compruebe los resultados obtenidos utilizando el comando `polyfit` de OCTAVE. Para mayor información sobre este comando, escribir en el terminal de OCTAVE: `help polyfit`.
 - La siguiente tabla muestra datos de temperatura de una sala que fueron tomados cada 20 minutos:

Tiempo (min)	temperatura ($^{\circ}\text{C}$).
0	10
20	20
40	30

- Encontrar el polinomio que interpola a los datos de la tabla.
 - Deduzca la temperatura de la sala a los 5 y 35 minutos.
- Interpolar la función $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$, en los siguientes puntos. En cada caso graficar la función, el polinomio obtenido y los puntos.
 - $x_0 = 0, x_1 = \pi/2$ y $x_2 = \pi$.
 - $x_0 = 0, x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/2$ y $x_3 = \pi$.
 - $x_0 = 0, x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/2, x_3 = 3\pi/4$ y $x_4 = \pi$.
 - Para cada caso del ejemplo anterior, obtener una cota del error de interpolación.
 - Para cada caso del Ejercicio 5, encontrar los coeficientes del polinomio de interpolación utilizando el comando `polyfit` de OCTAVE y así comprobar los resultados obtenidos. Además, grafique (en OCTAVE) la función y el polinomio de interpolación. Indicación: Utilizar el comando `polyval` para evaluar el polinomio.

Mínimos cuadrados

1. Sean $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(3, 0)$. Ajustar estos puntos por:

- Un polinomio de grado 0.
- Un polinomio de grado 1.
- Un polinomio de grado 2.
- Un polinomio de grado 3. ¿Qué pasa en este caso?

En cada caso graficar el polinomio y los puntos.

2. Se miden las temperaturas de Concepción cada 6 horas durante 2 días, como indica la siguiente tabla. La hora 0 corresponde a las 0:00hrs.

Hora	0	6	12	18	24	30	36	42	48
temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	2	5	13	10	3	6	14	9	3

Ajustar las siguientes curvas a estos datos. En cada caso graficar los puntos y la curva obtenida.

- $f(x) = a_0 + a_1x$.
- $f(x) = \alpha e^{\beta x + \gamma x^2}$.
- $f(x) = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{2\pi}{24}x\right) + c_3 \sin\left(\frac{2\pi}{24}x\right)$.

¿Qué función ajusta mejor a los datos?. ¿Por qué?. Utilizar esta función para predecir los valores de temperatura a las 6am del tercer día.

3. Considere la siguiente matriz y vector provenientes de un ajuste por mínimos cuadrados:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sin resolver el sistema de ecuaciones normales, determinar justificadamente cuál de las siguientes soluciones corresponde a la de mínimos cuadrados. Indicación: Calcular $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$.

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$