UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA DE CORRECCIÓN EXAMEN.
CÁLCULO III. 525211.

1. **(30 ptos.)** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto de x e y, y de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto de ρ y θ, con $x = \rho\cos\theta$, e $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ (coordenadas polares). Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\rho}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\theta}$ en coordenadas cartesianas ¿ qué podría pasar con el cálculo anterior si f es de dos veces diferenciable pero no es de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto de ρ y θ ?

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial \rho}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\operatorname{sen}\theta)}{\partial \rho}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\
\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\operatorname{sen}\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -\rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}
$$

(10 ptos.)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= -\rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \rho\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \rho\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&\quad +\rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + (y^2-x^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

(10 ptos.)

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\rho} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\theta}$ (por el Teorema de Schwarz, pues f es de clase $\mathcal{C}^2$).

(5 ptos.)

¿ qué podría pasar con el cálculo anterior si f es de dos veces diferenciable pero no es de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto de ρ y θ ?

Respuesta : no necesariamente $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\rho} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\theta}$, pues ser de clase $\mathcal{C}^2$ es una de las hipótesis del Teorema de Schwarz para que la igualdad se verifique (condición suficiente).

(5 ptos.)

2. **(40 ptos.)** Una compañía fabrica una serie de productos, tres de los cuales son deficitarios. Se ha estimado que la función que determina las pérdidas al fabricar esos productos es :

$$f(x, y, z) = x^3 + 2yz$$

Los compromisos que la compañía debe cumplir por contratos con otras firmas son :

$x + y = \alpha,$

$y + z = \beta,$ donde $\beta > 2\alpha > 0$ son dos parámetros reales positivos.

(a) Calcule las produciones óptimas x_0, y_0, z_0 que minimizan las pérdidas, y los Multiplicadores de Lagrange λ_1, λ_2 asociados al problema.

(b) Pruebe usando las condiciones suficientes de optimalidad que $f(x_0, y_0, z_0)$ es mínimo.

(c) Sea la función pérdidas mínimas en términos de α y β : $\varphi(\alpha, \beta) = f(x_0, y_0, z_0)$. Pruebe que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \lambda_1, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \lambda_2.$$

Solución

(a) Lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, y, x, \lambda_1, \lambda_2) = x^3 + 2yz + \lambda_1(\alpha - x - y) + \lambda_2(\beta - y - z)$$

(5 ptos.)

Luego los puntos críticos se obtienen de :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 3x^2 - \lambda_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 3x^2 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= 2y - \lambda_2 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 2y
\end{aligned}$$

(5 ptos.)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 2z = \lambda_1 + \lambda_2 = 3x^2 + 2y \\
&\Longrightarrow \quad 3x^2 + 2(y - z) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 2(2y - \beta) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad 3x^2 + 4(\alpha - x) - 2\beta = 0 \Longrightarrow 3x^2 4x + 4\alpha - 2\beta = 0 \\
&\Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{4 - 6(2\alpha - \beta)}}{3} \\
&\quad\quad\ \text{(2 raices reales, } x_1 < 0 \text{ y } x_2 > 0 \text{ pues } \beta > 2\alpha > 0)
\end{aligned}$$

(5 ptos.)

Escogemos $x_0 = x_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{4 - 6(2\alpha - \beta)}}{3} > 0$ pues es la única de las dos que tiene sentido práctico econmico (la cantidad de un producto debe ser positiva). Luego $y_0 = \alpha - x_0$, $z_0 = \beta - y_0$, $\lambda_1 = 3x_0^2$, y $\lambda_2 = 2y_0$. **(5 ptos.)**

(b.1) 1er Método : Condición suficiente de extremos condicionados. Necesitamos el cálculo de la segunda derivada del Lagrangiano ($Hess(\mathcal{L}) \equiv d^2\mathcal{L}$) y de la derivada de las restricciones ($dg \equiv Jacob(g)^t$).

$$Hess(\mathcal{L}) = \begin{bmatrix} 6x_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad Jacob(g)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

donde las restricciones están dadas por $g(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha - x - y \\ \beta - y - z \end{pmatrix}$. **(5 ptos.)**

Sea $\Delta X = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$ tal que $d\varphi \Delta X = 0$. Entonces $\Delta X = \Delta x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(\Delta X, \Delta X) &= \Delta X^t Hess(\mathcal{L})\Delta X = 6x_0 \Delta x^2 + 4\Delta y \Delta z \\ &= (6x_0 - 4)\Delta x^2 = (2\sqrt{4 - 6(2\alpha - \beta)} - 4)\Delta x^2 > 0 \\ &\quad \text{(pues } \beta > 2\alpha) \end{aligned}$$

Luego (x_0, y_0, z_0) es mínimo. **(5 ptos.)**

(b.2) 2do Método : Como $y = \alpha - x$ y $z = \beta - y$ se define

$$\tilde{f}(x) = f(x, y(x), z(x)) = x^3 + 2(\alpha - x)(\beta - \alpha + x)$$

Luego $\tilde{f}''(x_0) = 6x_0 - 4 = 2\sqrt{4 - 6(2\alpha - \beta)} - 4 > 0$, pues $\beta > 2\alpha$.
Luego (x_0, y_0, z_0) es mínimo.

(10 ptos.)

(c) Sean λ_1 y λ_2 cualquiera (no necesariamente los multiplicadores que resultan de la solución óptima), y sean $x_0 = x_0(\alpha, \beta)$, $y_0 = y_0(\alpha, \beta)$ solución del problema. Entonces,

$$\varphi(\alpha, \beta) = f(x_0, y_0, z_0) = \mathcal{L}(x_0(\alpha, \beta), y_0(\alpha, \beta), z_0(\alpha, \beta), \lambda_1, \lambda_2)$$

pues x_0 e y_0 verifican las restricciones (con lo cual los términos multiplicados por λ_1 λ_2 son cero). Entonces por regla de la cadena

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\frac{\partial y_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}\frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}$$

Luego escogiendo como λ_1 y λ_2, los Multiplicadores de Lagrange, es decir tales que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$ se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(\lambda_1(\alpha - x - y)) = \lambda_1$$

De igual modo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta}(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2.$$

Nota : La resolución de este problema también se puede hacer reemplazando las soluciones $x_0 = x_0(\alpha, \beta)$, $y_0 = y_0(\alpha, \beta)$, de manera explicita, pero sale más largo.

(10 ptos.)

3. **(30 ptos.)** Un satelite de masa m que gira en torno a la tierra, está sometido a la suma de dos fuerzas $F = F_G + F_E$ donde F_G es la fuerza de gravedad de la Tierra, y F_E una fuerza externa dada.

$$F_G(x,y,z) = -\frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z), \qquad \text{y} \qquad F_E(x,y,z) = (0,x,0),$$

(a) Calcule $\nabla \times F_E$, y deduzca que F_E define un campo vectorial no conservativo.

(b) Sabiendo que F_G es conservativo, calcule el trabajo realizado por el satelite al recorrer la elipse C ubicada en el plano XY, y con foco f en $(0,0,0)$ (es decir, en el centro de la Tierra) :

$$C = \{(c + a\cos\theta, b\operatorname{sen}\theta, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in [0,2\pi]\}$$

con $a > b > 0$ constantes positivas y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Solución

(a)

$$\nabla \times F_E = \begin{pmatrix} \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Luego F_E no es conservativo.

(10 ptos.)

(b) El trabajo W está dado por

$$W = \int_C F \cdot \mathbf{dr} = \oint_C (F_G + F_E) \cdot \mathbf{dr} = \oint_C F_E \cdot \mathbf{dr}$$

pues el campo F_G es conservativo y C es una curva cerrada.

(10 ptos.)

Luego

$$\begin{aligned} W &= \oint_C F_E \cdot \mathbf{dr} = \int_0^{2\pi} (0, c + a\cos\theta, 0) \cdot (-a\operatorname{sen}\theta, b\cos\theta, 0) d\theta \\ &= cb\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + ab\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

(10 ptos.)

(15-Julio-2004)

MSC/msc