UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Optimización III, Flujo en Redes (525551, 523534)
Tarea 2
(Fecha de entrega: 10 de mayo de 2005.)

1. **(Problema del Flujo Máximo con capacidades superiores e inferiores en los arcos)**. Sea $G = (V, E)$ una red con nodo fuente $s \in V$ y nodo sumidero $t \in V$. Sean $c, l : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dos funciones de capacidad superior e inferior, respectivamente. Se desea encontrar un flujo f factible en G, es decir, un flujo tal que $l(i,j) \leq f(i,j) \leq c(i,j)$, $\forall (i,j) \in E$ y además cuyo valor sea máximo.

   a) Pruebe que si f es un flujo factible en G, entonces $Val(f) \leq c(S,T) - l(T,S)$ para todo corte (S,T) de G.

   b) Considere ahora red $G' = (V', E')$ con nodo fuente $s' \in V'$ y nodo sumidero $t' \in V$ construída a partir de G como sigue:

   $$\begin{array}{rcl} V' & = & V \cup \{s', t'\}, \\ E' & = & E \cup \{(s',v) : \ v \in V\} \cup \{(u,t') : \ u \in V\} \cup \ \{(s,t),(t,s)\}. \end{array}$$

   Además se define la función capacidad c' en G' como: $\forall (u,v) \in E$, $c'(u,v) = c(u,v) - l(u,v)$; $\forall u \in V$, $c'(s',u) = l(V, \{u\})$ y $c'(u,t') = l(\{u\}, V)$, donde $\forall A, B \subseteq V$, $l(A,B) = \displaystyle\sum_{u \in A, v \in B} l(u,v)$. Además, $c'(s,t) = c'(t,s) = \infty$.

   Pruebe que existe un flujo factible en G si y sólo si existe un flujo máximo en G' tal que todos los arcos incidentes en t' son saturados. (Ind: considere el flujo factible f en G y el flujo máximo $f' = f - l$ en G').

   c) De un algoritmo que encuentre un flujo máximo en una red con capacidades superiores e inferiores en los arcos o determine que tal flujo no existe.

2. En la Universidad de Concepción, donde existen k diferentes departamentos académicos, se desea formar un importante comité para tratar las últimas movilizaciones estudiantiles. De cada departamento se elegirá un académico. Algunos académicos están asociados a más de un departamento. Por otro lado, se quiere que este comité esté integrado por igual cantidad de profesores asistentes, asociados y titulares (suponga que k es divisible por 3). Modele matemáticamente este problema como un problema de flujo máximo en una red y determine cuándo es posible formar dicho comité según la solución al problema de flujo máximo planteado.

3. Se sabe que una carga radiactiva proveniente de un cierto país viene a Chile por vía terrestre. Greenspeace está decidida a impedir que esta carga llegue. Para ello ha diseñado una red con todas las posibles vias alternativas de transporte pasando por las diferentes ciudades posibles. Además, ha determinado el costo de bloquear un trayecto entre dos ciudades para evitar el paso por ella.

   a) Determine cómo este problema puede ser modelado matemáticamente como un problema de flujo máximo para determinar el conjunto de caminos a bloquear, con el menor costo total posible, que impida la llegada de la carga a Chile.

b) Aplique el algoritmo Edmonds-Karp para resolver el problema planteado en *a*) donde la red de transporte con los costos asociados a los caminos está dado por la figura 1.

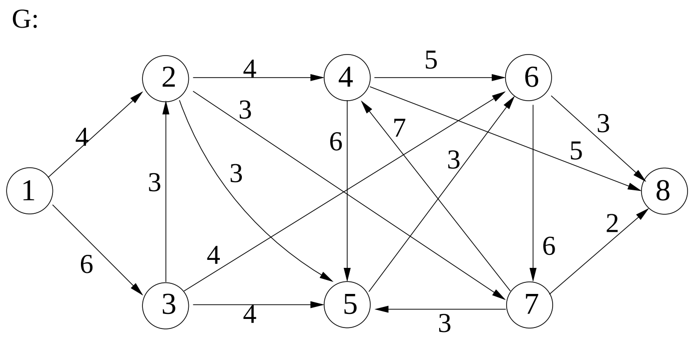

Figura 1: