UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142)

P1. 1.1) Niegue las siguientes proposiciones:

a) $(q \longrightarrow \sim p) \longrightarrow (\sim p \wedge q)$ **(5 puntos)**

b) $\exists!\, x \in \mathbb{R} \,:\, (x+5=0 \;\vee\; x<0)$ **(5 puntos)**

1.2) Sean A, B y C subconjuntos del universo U. Demuestre que

$$A \times (B-C) = (A \times B) - (A \times C).$$

(10 puntos)

Solución 1.1)

a)

$$\begin{aligned}
(q \longrightarrow \sim p) \wedge \sim(\sim p \wedge q) &\iff (q \longrightarrow \sim p) \;\wedge\; (p \vee \sim q) \\
&\iff (\sim q \vee \sim p) \;\wedge\; (\sim q \vee p) \\
&\iff \sim q \vee (\sim p \wedge p) \iff \sim q \vee F \iff \sim q
\end{aligned}$$

b)

$$\Big[\forall x \in \mathbb{R} :\; x+5 \neq 0 \;\wedge\; x \geq 0\Big] \;\vee\; \Big[\exists x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 :$$
$$\big(x_1+5=0 \;\vee\; x_1<0\big) \wedge \big(x_2+5=0 \;\vee\; x_2<0\big)\Big]$$

1.2) Probemos que $A \times (B-C) \subseteq (A \times B) - (A \times C)$
Sea $(x,y) \in A \times (B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in A\times(B-C) &\implies x\in A \wedge y\in(B-C) \text{ por definición de producto cartesiano}\\
&\implies x\in A \wedge (y\in B \wedge y\notin C) \text{ por definición de diferencia}\\
&\implies (x\in A \wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\notin C) \text{ por asociatividad de } \wedge\\
&\implies (x,y)\in(A\times B) \wedge (x,y)\notin(A\times C) \text{ por definición de producto cartesiano}\\
&\implies (x,y)\in(A\times B)-(A\times C) \text{ por definición de diferencia}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad A\times(B-C)\subseteq(A\times B)-(A\times C)$$

Probemos que $(A\times B)-(A\times C)\subseteq A\times(B-C)$
Sea $(x,y)\in(A\times B)-(A\times C)$.

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in(A\times B)-(A\times C) &\implies (x,y)\in(A\times B) \wedge (x,y)\notin(A\times C) \text{ por definición de diferencia}\\
&\implies (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\notin A\vee y\notin C) \text{ por definición de producto cartesiano}\\
&\implies [x\in A \wedge y\in B\wedge x\notin A]\vee[x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C] \text{ por distributividad de } \wedge\\
&\implies [F\wedge(y\in B)]\vee[x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C]\\
&\implies F\vee[x\in A\wedge y\in(B-C)]\\
&\implies (x,y)\in A\times(B-C) \text{ por definición de producto cartesiano}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad (A\times B)-(A\times C)\subseteq A\times(B-C)$$

De las dos inclusiones anteriores $\quad A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$.

P2. 2.1) El noveno término de una Progresión Geométrica es 486 y el sexto es 18. ¿Cuáles son los tres primeros términos de la Progresión Geométrica? **(8 puntos)**

2.2) Demuestre la siguiente afirmación:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (2n)! < 2^{2n}\,(n!)^2$$

(12 puntos)

Solución.

2.1) Como $a_9 = 486 = a_1 \cdot r^8$ y $a_6 = 18 = a_1 \cdot r^5$,

$$r^3 = \frac{486}{18} = 27 \Longrightarrow r = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Luego los tres primeros términos son:

$$a_1 = \frac{18}{3^5} = \frac{2}{27}, \quad a_2 = a_1 \cdot r = \frac{2}{27} \cdot 3 = \frac{2}{9} \quad \text{y} \quad a_3 = a_2 \cdot r = \frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{2}{3}.$$

2.2) Por inducción.

Sea $S = \left\{ n \in \mathbb{N} \,:\, (2n)! < 2^{2n}\,(n!)^2 \right\}$

- ¿ $n = 1 \in S$?

$$(2 \cdot 1)! = 2 < 2^{2\cdot 1}\,(1!)^2 = 4,$$
$$\therefore\ 1 \in S.$$

- Hipótesis de Inducción. Supongamos que $m \in S$, es decir,

$$(2m)! < 2^{2m}\,(m!)^2.$$

- Tesis de Inducción. Probemos que $m+1 \in S$, es decir,

$$\big(2(m+1)\big)! < 2^{2(m+1)}\,\big((m+1)!\big)^2.$$

- Demostración de la Tesis de Inducción:

$$\begin{aligned}
\big(2(m+1)\big)! = \big(2m+2\big)! \; &= (2m)!(2m+1)(2m+2) \\
&< 2^{2m}\,(m!)^2(2m+1)(2m+2), \text{ por Hip. de Inducción} \\
&< 2^{2m}\,(m!)^2(2m+2)(2m+2), \text{ pues } (2m+1) < (2m+2) \\
&= 2^{2m}\,(m!)^2 2^2(m+1)^2 = 2^{2m}\,2^2\big[(m+1)m!\big]^2 \\
&= 2^{2m+2}\,\big[(m+1)!\big]^2
\end{aligned}$$

$$\therefore m+1 \in S.$$

Luego $S = \mathbb{N}$.

P3. Considere las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f : Dom(f) &\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{x^2 - 2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : Dom(g) &\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } x < 0 \\ x + 3, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3.1) Encuentre $Dom(f)$. **(7 puntos)**

3.2) ¿Es g inyectiva?, ¿Es g sobreyectiva? justifique analíticamente. Si g no es inyectiva restrinja adecuadamente, sin modificar su recorrido, para que lo sea. **(13 puntos)**

Solución

3.1)

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{x^2 - 2}} = y\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \quad \sqrt{7} - \sqrt{x^2 - 2} \geq 0, \quad x^2 - 2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \quad 9 \geq x^2, \quad x^2 \geq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \quad |x| \leq 3, \quad |x| \geq \sqrt{2}\} \\ &= \ \big[-3, -\sqrt{2}\,\big] \cup \big[\,\sqrt{2}, 3\,\big] \end{aligned}$$

3.2) Claramente $Dom(g) = \mathbb{R}$. Además g no es inyectiva, ya que por contraejemplo:

$$\{-1, 0\} \subseteq Dom(g) = \mathbb{R}$$

$$-1 \neq 0 \quad \text{y sin embargo} \quad g(-1) = g(0) = 3.$$

$$\begin{aligned} Rec(g) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x < 0, \quad 4 - x^2 = y\} \cup \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \geq 0, \quad x + 3 = y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \ x = -\sqrt{4 - y}, \quad x < 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} : \ x = y - 3, \quad x \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \ \sqrt{4 - y} > 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} : \ y \geq 3\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \ y < 4\} \cup \{y \in \mathbb{R} : \ y \geq 3\} \\ &= \ ]-\infty, 4[\cup [3, +\infty[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como $Rec(g) = \mathbb{R} = Cod(g)$, g es sobreyectiva.

Cualquiera de las dos funciones siguientes pueden ser una restricción de g inyectiva, con la condición pedida:

$$\begin{aligned} g_1 : \quad &]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ & x \mapsto g_1(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } x < 0 \\ x + 3, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2 : \quad &]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ & x \mapsto g_2(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } x < -1 \\ x + 3, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$