UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 3 (Inducción)

1. Pruebe por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$: **(En práctica c))**

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(2k+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

2. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales y d una constante real positiva, tales que:
$$a_1 = d\,, \quad a_n = a_{n-1} + d\cdot n, \quad \text{cuando } n \geq 2.$$
   Demuestre, usando inducción, que $\forall n \in \mathbb{N}\,, n > 2\,:\, a_n < d\cdot n^2$.

3. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ la sucesión de Fibonacci, definida por:
$$u_1 = 1\,, \quad u_2 = 1\,, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad \text{cuando } n \geq 3.$$
   Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$: **(En práctica b))**

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}u_i = u_{n+2}-1$ *c)* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}u_{2i-1} = u_{2n}$

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}u_{2i} = u_{2n+1}-1$ *d)* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}u_i^2 = u_n\cdot u_{n+1}$

4. Considere la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ definido por $b_1 = 1$, $b_n = \frac{1}{4}(2b_{n-1}+3)$, cuando $n \geq 2$. Demuestre que **(En práctica)**

   a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión **estrictamente creciente**, es decir $\forall\, n \in \mathbb{N}\,:\, b_n < b_{n+1}$
   b) $\forall\, n \in \mathbb{N}\,:\, 1 \leq b_n < 2$, es decir $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión **acotada**.

5. Considere la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ definido por $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, con $n \in \mathbb{N}$ y $a_1 = \alpha > 1$ dado. Demuestre que

   a) $\forall\, n \in \mathbb{N}\,, n \geq 2\,:\, 1 < a_n < 2$. Concluya que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.
   b) esta sucesión es **estrictamente decreciente**, es decir $\forall\, n \in \mathbb{N}\,:\, a_n > a_{n+1}$

6. Aplique la propiedad telescópica para probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: **(En práctica c))**

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)} = \frac{11}{18} - \frac{3n^2+12n+11}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$

7. Pruebe por inducción que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: n^2+n es divisible por 2, y use este resultado para demostrar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: n^3+11n es divisible por 6. **(En práctica)**

8. Considere la identidad $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, y deduzca una fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k^2$, con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. **(En práctica)**

9. (**mire, vea, conjeture**). Considere las siguientes identidades:

$$\begin{array}{lrcl} n=1 \rightarrow & 1 & = & 1 \\ n=2 \rightarrow & 1-2^2 & = & -(1+2) \\ n=3 \rightarrow & 1-2^2+3^2 & = & 1+2+3 \\ n=4 \rightarrow & 1-2^2+3^2-4^2 & = & -(1+2+3+4) \\ & & \vdots & \end{array}$$

En general, para $n \in \mathbb{N}$, ¿Qué identidad escribiría Ud.? Demuestre su conjetura utilizando el principio de inducción y las identidades vistas en clases.

10. Demuestre por inducción que **(En práctica d))**

    a) $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^5 - n$ es divisible por 5.
    b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $3^{2n} + 7$ es múltiplo de 8.
    c) $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^3 + 2n$ es divisible por 3.
    d) $\forall n \in \mathbb{N}$: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.
    e) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\forall x \geq -1,\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.

11. Encuentre el mínimo valor de $m \in \mathbb{N}$ para el cual se verifica que $\forall\, n \geq m,\ 2^n > n^2$. Demuéstrelo por inducción. **(En práctica)**

12. Encuentre: **(En práctica b))**

    a) el cuarto término en el desarrollo de $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^6$.
    b) el término constante (si existe) en el desarrollo de $\left(x^8 - x^{-4}\right)^{12}$.
    c) los términos centrales del desarrollo de $\left(y + y^{-1/2}\right)^{15}$.
    d) los términos que contienen $\frac{x^2}{y^3}$ y $\frac{x}{y}$ (si existen) en el desarrollo de $\left(x^2 y - \frac{x}{y}\right)^{16}$.

13. Determine el(los) valor(es) de r para que los términos de lugares (r^2+8) y $6r$ del desarrollo de $(x^2+y^3)^{193}$ equidisten de los extremos.

14. En el desarrollo de $(5+2x^3)^n$, el coeficiente del término que contiene a x^{33} es quince veces el coeficiente del término que contiene a x^{36}. Determine el valor de n.

15. *a*) Pruebe que: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0,1,..,n\},\ \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$ **(En práctica a))**

    b) Use a) para probar que: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0,1,..,n\},\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

16. Demuestre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: **(En práctica b))**

    a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, *b*) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$, *c*) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.