UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL 520142
PAUTA EVALUACIÓN ESPECIAL

I. 1.1) Sean p y q dos proposiciones. Pruebe la tautología

$$\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow (\sim p \ \wedge q) \ \vee \ (p \wedge \sim q) \ \vee \ (\sim p \wedge \ \sim q)$$

(1.0 Pto.)

1.2) Demuestre que

$$\forall n \ \in \mathbb{N} : \cos(n\pi) = (-1)^n$$

(1.0 Pto.)

SOLUCION

1.1) Definimos las fórmulas proposicionales :

$$P = P(p,q) :=\sim (p\wedge q) \qquad \wedge \qquad Q = Q(p,q) := (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \ \sim q)$$

y desarrollamos la siguiente tabla de verdad :

p	q	P	Q	P$\leftrightarrow Q$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

en consecuencia $P \Longleftrightarrow Q$.

1.2) Definimos el subconjuto de $\mathbb{N}$:

$$S = \{n \in \mathbb{N} : \ \cos(n\pi) = (-1)^n \ \}$$

y aplicamos el Principio de Inducción Matemática para demostrar que $S = \mathbb{N}$.

- Como $\cos(\pi) = -1$ se tiene que $1 \in S$ y en consecuencia $S \neq \emptyset$.
- Supongamos que $n \in S$, es decir
  (H.I.) $\cos(n\pi) = (-1)^n$
  por demostrar que $n + 1 \ \in S$, esto es
  (T.I.) $\cos(n\pi + \pi) = (-1)^{n+1}$
  Para demostrar que **(H.I.)** implica **(T.I.)** basta recordar la ley de coseno de la suma de ángulos $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - sen(x)sen(y)$ que $\cos(\pi) = -1$, y $sen(\pi) = 0$. En efecto

$$\begin{aligned} \cos(n\pi + \pi) &= \cos(n\pi)(-1) - 0 \cdot sen(n\pi) \\ &= (-1)^n(-1) \qquad \text{(por } \textbf{(H.I.)} \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

II. 2.1) Considere las funciones reales

$$\begin{array}{rcl} f: Dom(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\sqrt{e^x-2} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g: Dom(g) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x)=\ln(2x) \end{array}$$

Demuestre que $g \circ f$ existe, es invertible y defina su inversa.

(1.5 Ptos.)

2.2) Si una bacteria en un cierto cultivo se duplica cada 20 minutos, escribir una fórmula que nos dé el número N de bacterias que hay en el cultivo después de n horas, suponiendo que N_0 es el número de bacterias que hay al iniciar el experimento. **(0.5 Ptos.)**

SOLUCION

2.1) Primero determinamos los dominios y recorridos de las funciones involucradas.

- **Dominios**

$$\begin{array}{rcl} (i)\ Dom(f) & = & \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : e^x > 2\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : x > \ln(2)\} \\ & = & [\ln(2), \infty[\quad \text{(pues, } \ln \textit{ es estrictamente creciente y } \ln(e^x)=x) \\ (ii)\ Dom(g) & = & \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : \ln(2x) > 0\} \\ & = &]\,0, \infty[\qquad \text{(pues, } Dom(\ln) =]0,\infty[\,) \end{array}$$

- **Recorridos**. Es inmediato que $Rec(g)=\mathbb{R}$, por otra parte observamos que f es estrictamente creciente por ser la composición de funciones estrictamente creciente, en consecuencia $Rec(f) = [\,0,\infty\,[$.
- **Existencia de $g \circ f$.** Como $Rec(f) \cap Dom(g) =]\,0,\infty\,[$ concluimos que

$$X = f^{-1}\left(]\,0,\infty\,[\right) =]\,\ln(2),\infty\,[$$

en consecuencia $Dom(g\circ f) = X,\ Rec(g \circ f) = \mathbb{R}$ y

$$\forall x\ \in]\,\ln(2),\infty\,[: \qquad (g\circ f)(x) = \ln(2) + 1/2\ln(e^x-2)$$

- **Existencia de** $(g\circ f)^{-1}$. Como hemos indicado anteriormente f y g son son funciones estrictamente crecientes, sabemos que esto implica que su compuesta lo es. Como $Rec(g\circ f)=\mathbb{R}$ se tiene que $g\circ f :]\,\ln(2),\infty\,[\to \mathbb{R}$ es una función biyectiva y por tanto invertible, cuya inversa es definida por la composicón $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$, donde

$$\begin{array}{rcl} \forall\ x\ \in \mathbb{R} & : & g^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}e^x \\ \forall\ x\ \in]\,0,\infty\,[& : & f^{-1}(x) = \ln(x^2+2) \end{array}$$

Finalmente,

$$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}\ :\ (g\circ f)^{-1}(x) = \ln(\frac{1}{4}e^{2x}+2)$$

2.2) Respueta: $N(t) = N_0 e^{\frac{3\ln(2)}{2}t}$.

III. 3.1) Resolver la ecuación :

$$sen(x/2) - cos(x/2) = \sqrt{2}$$

(0.5 Ptos.)

3.2) Hallar todas las raíces del polinomio

$$p(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$$

sabiendo que -3 es una raíz doble y escribir su factorización en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(1.0 Pto.)

3.3) Demostrar que si en un triángulo se conocen un lado de longitud a y sus dos ángulos adyacentes β y γ, el área S de dicho triángulo está dada por la fórmula:

$$S = \frac{a^2 sen(\beta) sen(\gamma)}{2 sen(\beta + \gamma)}.$$

(0.5 Ptos.)

SOLUCION

3.1) Primero observamos que $sen(x/2) - cos(x/2) = \sqrt{2} sen(x/2 - \pi/4)$ luego el problema equivalente a resolver es $sen(x/2 - \pi/4) = 1$ y cuya solución es $x = 3\pi/2 + 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

3.2) Aplicamos la regla de Ruffini para determinar el cuociente $p(x)/(x+3)^2$.

	1	6	9	0	-1	-6	-9	(x+3)
-3		-3	-9	0	0	3	9	
	1	3	0	0	-1	-3	$\boxed{0}$	(x+3)
-3		-3	0	0	0	3		
	1	0	0	0	-1	$\boxed{0}$		

Así, la factorzación requerida es:

$$p(x) = (x+3)^2(x^4 - 1) = (x+3)^2(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

3.3) En la siguiente figura se indica la altura h y la longitud de la base considerada para determinar S. Dicha longitud es obtenida por una aplicación directa de la ley de senos. Por lo tanto

$$S = (h/2)\,(a sen(\beta)/sen(\gamma + \beta))$$