

Guía N°5: Problemas de Valores Iniciales (P.V.I.)
 Cálculo Numérico 521230, 2018-2

Nota: Esta guía complementa la Guía de Laboratorio sobre Problema de Valores Iniciales.

1. Considere las ecuaciones

a)

$$\begin{cases} y'(x) = 2x, & x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad \text{cuya solución exacta es } y(x) = x^2.$$

b)

$$\begin{cases} y'(x) = -\sin(x), & x \in [0, \pi] \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{cuya solución exacta es } y(x) = \cos(x).$$

c)

$$\begin{cases} y'(t) = (t+1)y(t) - te^t, & t \in [0, 2] \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{cuya solución exacta es } y(t) = e^t.$$

Para cada una de ellas realizar lo siguiente:

- Aproximar la solución utilizando el método de **Euler Explícito** con $n = 4$ sub-intervalos. Dibujar, en un mismo gráfico, la solución exacta y la aproximación obtenida.
- Hacer lo mismo que en el punto anterior, pero con $n = 8$ sub-intervalos.
- Programar el método de **Euler Explícito** y comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores. Utilizar este programa para obtener una aproximación considerando $n = 100$ sub-intervalos.

2. Aproxime los P.V.I. del Problema 1 utilizando el método de **Euler Implícito** con $n = 4$ sub-intervalos. Dibujar, en un mismo gráfico, la solución exacta y la aproximación obtenida.

3. Considere el P.V.I

$$\begin{cases} y'(x) = 100(1 - y(x)), & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{cuya solución exacta es } y(x) = 1 - e^{-100x}.$$

- Aproximar la solución utilizando el método de **Euler Explícito** con tamaño de paso $h = 1/4$. Dibujar, en un mismo gráfico, la solución exacta y la aproximación obtenida.
- Aproximar la solución utilizando el método de **Euler Implícito** con tamaño de paso $h = 1/4$. Dibujar, en un mismo gráfico, la solución exacta y la aproximación obtenida.
- ¿Qué fenómeno observa?. ¿Cuál es la explicación?.

4. Considere los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

a)

$$\begin{cases} y'(x) = -z(x) + 2x + e^x, & x \in [0, 1] \\ z'(x) = y(x) - x^2 + z(x), & x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 1, \end{cases} \quad \text{cuya solución exacta es } y(x) = x^2 \text{ y } z(x) = e^x.$$

b)

$$\begin{cases} y'(t) = (t+1)y(t) - w(t)e^t, & x \in [0, 2] \\ w'(x) = 1, & x \in [0, 2] \\ y(0) = 1, \\ w(0) = 0, \end{cases} \quad \text{cuya solución exacta es } y(t) = e^t \text{ y } w(t) = t.$$

- Aproximar la solución del sistema utilizando el método de **Euler Explícito** con tamaño de paso $h = 1/4$. Dibujar, en un mismo gráfico, la solución exacta y la aproximación obtenida.
 - Aproximar la solución del sistema utilizando el método de **Euler Implícito** con tamaño de paso $h = 1/4$. Dibujar, en un mismo gráfico, la solución exacta y la aproximación obtenida.
5. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior.

a)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y''(x) + 2y'(x) - y(x) & = & 2 + 4x - x^2, \quad x \in [0, 1] \\ y(0) & = & 0, \\ y'(0) & = & 0, \end{array} \right. \quad \text{cuya solución exacta es } y(x) = x^2.$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'''(t) - 2y''(t) + ty(t) & = & te^{2t}, \quad t \in [0, 1] \\ y(0) & = & 1, \\ y'(0) & = & 2, \\ y''(0) & = & 4, \end{array} \right. \quad \text{cuya solución exacta es } y(t) = e^{2t}.$$

Para cada ecuación realizar lo siguiente

- Reducirla a un sistema de ecuaciones de primer orden.
- Aproximar la solución del sistema obtenido utilizando el método de **Euler Explícito** con tamaño de paso $h = 1/4$. Dibujar, en un mismo gráfico, la solución exacta y la aproximación obtenida.
- Aproximar la solución del sistema obtenido utilizando el método de **Euler Implícito** con tamaño de paso $h = 1/4$. Dibujar, en un mismo gráfico, la solución exacta y la aproximación obtenida.