Números Reales

Propiedades

1. Propiedades de la suma

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x + y \in \mathbb{R}$; clausura

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x + y = y + x$; conmutatividad

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x + (y + z) = (x + y) + z$; asociatividad

(d) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + 0 = x$; neutro aditivo

(e) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + (-x) = 0$. inverso aditivo

2. Propiedades del producto

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad xy \in \mathbb{R}$; clausura

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad xy = yx$; conmutatividad

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x(yz) = (xy)z$; asociatividad

(d) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \cdot 1 = x$; neutro multiplicativo

(e) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \cdot 0 = 0$; 0 es absorvente

(f) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0: \quad x \cdot x^{-1} = 1$; inverso multiplicativo

(g) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x(y + z) = xy + xz$. distributividad

3. Propiedades de la igualdad: $(\forall x, y, u, v \in \quad)$

(a) $x = y \;\wedge\; u = v \implies x + u = y + v$;

(b) $x = y \;\wedge\; u = v \implies xu = yv$;

(c) $xy = 0 \iff x = 0 \;\vee\; y = 0$;

(d) $y + u = x + u \iff y = x$;

(e) $yu = xu \;\wedge\; u \neq 0 \implies y = x$.

4. Leyes de los signos: $(\forall x, y, u, v \in \quad)$

(a) $-(-x) = x$;

(b) $(-x)y = -xy$;

(c) $(-x)(-y) = xy$;

(d) $x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0 \implies (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$;

(e) $-(x+y) = (-x) + (-y) = -x - y$;

(f) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$;

(g) $\dfrac{x}{y}\dfrac{u}{v} = \dfrac{xu}{yv}$;

(h) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{u}{v} = \dfrac{vx+yu}{yv}$.

5. Potencias. $\forall a \in$, $\forall\, n, m \in$:

(a) $a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a$ (n factores)

(b) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

(c) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

(d) $(a^n)^m = a^{n\times m}$

(e) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ $\quad (para \;\; a > 0)$ $\qquad \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

(f) $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ $\qquad \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a$

(g) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(h) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

(i) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}.$

6. Logaritmos. $\forall\, b > 0,\ x > 0,\ y > 0,\ r \in$:

(a) $z = \log_b(x) \iff b^z = x, \quad z \in \mathbb{R}$;

(b) $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$;

(c) $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$;

(d) $\log_b(x^r) = r \log_b(x)$;

(e) $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}, \qquad a > 0.$

7. Relación de Orden $(\forall x, y, u, v \in \quad)$

(a) $x < y \;\vee\; x > y \;\vee\; x = y$ (sólo una vale); — tricotomía

(b) $x < y \wedge y < z \implies x < z$; — transitividad

(c) $x \leq y \iff x < y \vee x = y$; — def. $\leq$

(d) $x \geq y \iff x > y \vee x = y$; — def. $\geq$

(e) $x > 0 \wedge y > 0 \implies xy > 0$;

(f) $x < y \implies x + u < y + u$ (para cada u); — monotonía de +

(g) $x < y \wedge u < v \implies x + u < y + v$;

(h) $x < y \iff y - x > 0$;

(i) $x < y \wedge u > 0 \implies xu < yu$; — monotonía con

(j) $x < y \wedge u < 0 \implies xu > yu$. — restricci'ones de $\times$

8. Valor absoluto $(\forall x, y, z \in \quad)$

(a) $x \geq 0 \implies |x| = x$; definición para Nos. positivos

(b) $x < 0 \implies |x| = -x$; definición para Nos. negativos

(c) $|x| \geq 0$;

(d) $|-x| = |x|$;

(e) $|x| \geq x$;

(f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (para $y \neq 0$);

6. Valor absoluto: Continuación. $(\forall x, y, z \in \quad)$

(g) $x < y < z \iff x < y \;\wedge\; y < z$; notación

(h) $a > 0 \;\wedge\; |x| < a \iff -a < x < a$; inecuaciones

(i) $a > 0 \;\wedge\; |x| = a \iff x = -a \;\vee\; x = a$;

(j) $a > 0 \;\wedge\; |x| > a \iff x < -a \;\vee\; x > a$;

(k) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(l) $|x - y| \leq |x| + |y|$;

(m) $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$.

Profs. Anahí Gajardo y Abner Poza.