Ecuaciones exactas.

Son las de la forma

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

que cumplen $P_y = Q_x$.

(con la notación $P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$, $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$).

Se busca una función $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

y la solución de la E. D. es

$$F(x,y) = C \text{ (siendo } C \text{ constante).}$$

Ejemplo 1. Resolver

$$3y + e^x + (3x + \cos y)y' = 0.$$

Solución.

$P(x,y) = 3y + e^x$ $\quad Q(x,y) = 3x + \cos y$ $\quad P_y = Q_x = 3$

$$F_x = 3y + e^x \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = 3yx + e^x + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3x + \varphi'(y) \quad \Rightarrow \quad 3x + \varphi'(y) = 3x + \cos y$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = \cos y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \operatorname{sen} y$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = 3yx + e^x + \operatorname{sen} y.$$

Así, la solución implícita de la ecuación es: $\quad 3yx + e^x + \operatorname{sen} y = C.$

Reducibles a exactas: Factores integrantes.

Si $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; 0$ no es exacta,

podemos intentar encontrar $\mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

sea exacta.

$\mu(x,y)$ Es llamada un factor integrante

Algunos factores Integrantes

1. Existencia de factor integrante de la forma $\mu(x)$.

Ocurre cuando $\frac{P_y - Q_x}{Q} = h(x)$, tomándose

$$\mu(x) = \exp(\int h(x)\, dx).$$

2. Existencia de factor integrante de la forma $\mu(y)$.

Ocurre cuando $\frac{Q_x - P_y}{P} = h(y)$, tomándose

$$\mu(y) = \exp(\int h(y)\, dy).$$

Ejemplo 2. Resolver $(2x^2 + y)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0.$

Solución.

$$P(x,y) = 2x^2 + y \text{ y } Q(x,y) = x^2y - x.$$

$P_y = 1$ y $Q_x = 2xy - 1. \quad \Longrightarrow \quad$ no es exacta

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{1-(2xy-1)}{x^2y-x} = \frac{2(1-xy)}{-x(1-xy)} = \frac{-2}{x}.$$

obtiene una expresión que depende sólo de x

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{-2}{x}\,dx\right) = x^{-2}.$$

multiplicamos la E. D. por $\mu(x) = x^{-2}$ se obtiene la E. D. exacta

$$(2 + yx^{-2})\,dx + (y - x^{-1})\,dy = 0.$$

encontramos que la función F tal que

$$F_x = 2 + yx^{-2} \qquad F_y = y - x^{-1} \qquad \text{es}$$

$$F(x, y) = 2x - yx^{-1} + \tfrac{1}{2}y^2.$$

Por tanto, la solución de la E. D. es

$$2x - yx^{-1} + \tfrac{1}{2}y^2 = C.$$

Ejemplos de Aplicación

1 Problema del crecimiento de un cultivo bacteriano.

Un cultivo de bacterias sigue una ley de crecimiento, tal que en cada momento la velocidad relativa de crecimiento es constante.

Por lo general, se dice que la tasa de crecimiento de un cultivo es proporcional a la cantidad de bacterias que hay en cada instante.

Si llamamos $y(t)$ a la cantidad de bacterias existentes en el momento t, se tiene que:

$$\boxed{y'(t) = k \cdot y(t)}$$

Pb 1 - En un cierto cultivo de bacterias se sabe que la velocidad de crecimiento de la población es, en cada momento, directamente proporcional al número de bacterias existentes en dicho momento. Se sabe también que el tamaño de la población al cabo de 4 horas, es el triple del tamaño de la población inicial. Hallar el número de bacterias que habrá en el cultivo transcurridas 10 horas.

2 Problema de desintegración de un elemento radiactivo.

La velocidad con la que se desintegra la radiación de un elemento es proporcional a la cantidad que haya de dicho elemento.

llamando $y(t)$ a la cantidad del elemento radiactivo en un cierto momento t, tenemos que:

$$\begin{cases} y'(t) = -\alpha \cdot y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t}}$$

En los problemas de este tipo, suele aparecer un concepto químico que debemos conocer, se llama vida media o tiempo de semidesintegración o semivida que no es más que el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la cantidad inicial del elemento radiactivo. **OJO** con las unidades.

Pb 2 - Es sabido que una sustancia radiactiva presente en ciertos fósiles, tal como el C^{14}, se desintegra en cada momento, a una velocidad proporcional a la cantidad presente. La "vida media" del C^{14} (tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una cantidad inicial) es de 5750 años. Averiguar la edad del fósil sabiendo que contiene el 77'7% de su C^{14} inicial.