

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 7  
**ECUACIONES DIFERENCIALES EN OCTAVE**

## 1. EDO y PVI

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden junto a la exigencia de que la función solución pase por un punto en particular se denomina *Problema de Valores Iniciales* (PVI). Un PVI genérico tiene la forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Los ejemplos

$$\begin{cases} y'(x) = y(x), & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) = \sin(x), & x \in [1, 2] \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) = \cos(x) + y(x), & x \in [-1, 0] \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

son PVI de primer orden. Estos problemas tienen por solución funciones  $y$  de una variable que deben satisfacer simultáneamente la ecuación diferencial y la condición inicial.

Una EDO se dice *de orden superior* si ella involucra derivadas de orden mayor o igual que dos en su expresión. Por ejemplo, la ecuación

$$y''(x) + P(x)y(x) = F(x)$$

es una EDO de orden dos. Toda EDO de orden superior puede ser reducida a un sistema de EDO de primer orden a través de un cambio de variable. Por ejemplo, consideremos la EDO

$$2x''(t) - x'(t) - 3x(t) = \cos(t).$$

Introduciendo la variable vectorial

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix},$$

usando la expresión de la segunda derivada de la EDO se tiene que

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ \frac{\cos(t) + 3x(t) + x'(t)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ \frac{\cos(t) + 3u_1(t) + u_2(t)}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(x)).$$

### 1.1. Solución Numérica de un PVI

Entendemos por solución numérica de un PVI como una colección de puntos  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ , donde  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$  y los valores  $y_i$  son tales que  $y_i \approx y(x_i)$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ . Para obtener aproximaciones de la solución exacta en otros puntos que no sean nodos es necesario realizar algún tipo de interpolación. Para construir la gráfica de la solución a partir de los puntos  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ , lo más común es utilizar la interpolación por funciones lineales a trozos (que es lo que el comando `plot` de OCTAVE hace por defecto).

### 1.1.1. Método de Euler o RK11

Los siguientes códigos muestran la implementación de los métodos numéricos de más bajo orden vistos en las clases teóricas del curso. El primero es el Método de Euler explícito y el segundo el de Euler implícito. En particular, para aproximar la solución del PVI

$$\begin{aligned} y'(x) &= 10(\sin(x) - y(x)), \quad x \in [0, 10], \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

implementamos los métodos antes mencionados con los siguientes códigos:

```
1 % Euler Explícito
2 h = 0.1; % Tamano del paso
3 x = 0:h:10; % Vector de nodos
4 y(1) = 1; % Condicion inicial
5 for i = 2:length(x)
6     y(i) = y(i-1) + h*10*sin(x(i-1)-y(i-1));
7 endfor
8 plot(x,y) % Grafica de la solucion numerica
```

```
1 % Euler Implicito
2 h = 0.1; % Tamano del paso
3 x = 0:h:10; % Vector de nodos
4 y(1) = 1; % Condicion inicial
5 for i = 2:length(x)
6     y(i) = (y(i-1) + h*10*sin(x(i)))/(1+10*h);
7 endfor
8 plot(x,y) % Grafica de la solucion numerica
```

En el gráfico de la siguiente página se muestran la solución exacta del PVI y la aproximación producida por ambos métodos.

## 2. Métodos numéricos para PVI con funciones propias de OCTAVE

OCTAVE tiene dos funciones base para el cálculo de soluciones numéricas de un PVI. Éstas son `ode23` y `ode45`. La función `ode45` opera bien con la mayoría de los problemas de EDO y en general debe ser la primera elección de función para resolver una EDO. Esta función es una implementación de una variación de los métodos de Runge Kutta.

Las EDO del tipo *stiff* resultan difíciles de resolver numéricamente mediante métodos explícitos (o bien, podemos decir que resolverlas con métodos explícitos es inadecuado). En la práctica, se puede identificar si un problema es *stiff* o no *stiff* utilizando una función para problemas no *stiff*, como `ode45`, y viendo si ésta es incapaz de converger a una solución, o si los cálculos toman demasiado tiempo.

A la hora de usar las funciones `ode23` u `ode45`, ciertos parámetros pueden ser controlados mediante la función `odeset`. Algunos de ellos son:

InitialStep	Primer paso de la partición	Obligar a que el primer paso de la partición construida sea un valor fijo.
MaxStep	Tamaño de paso máximo	Obligar a que las distancias entre nodos consecutivos de una partición sea menor que cierto valor.
RelTol	Tolerancia del error relativo	Obligar a que el error de cada problema local sea menor que cierto valor.
AbsTol	Tolerancia del error absoluto	Obligar a que el mayor error local sea menor que cierto valor.

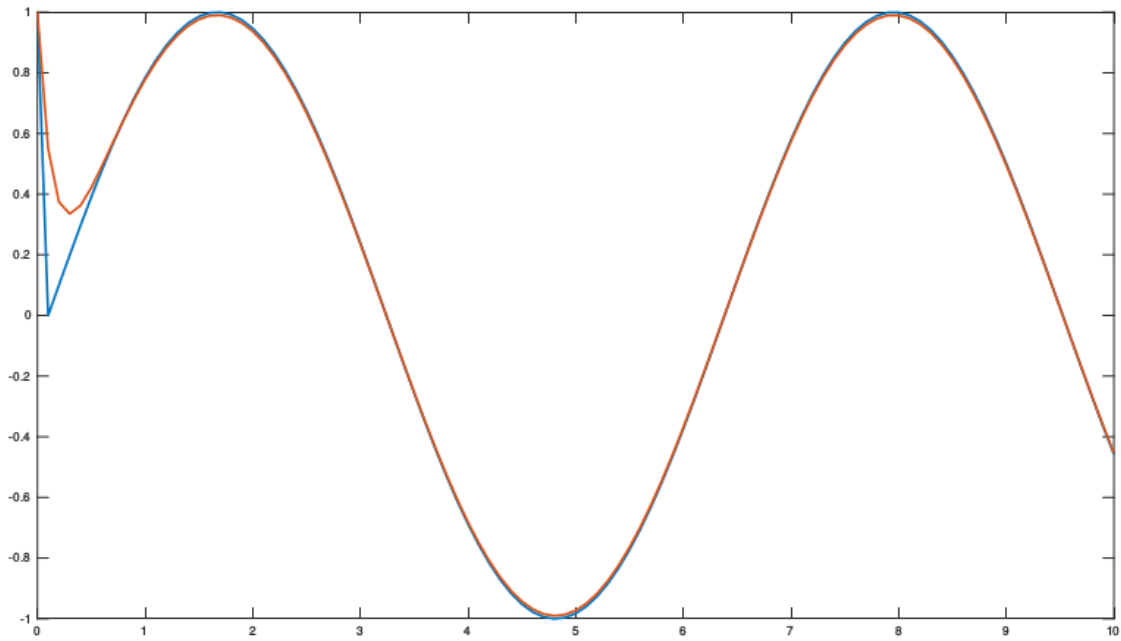


Figura 1: Soluciones obtenidas por ambos métodos.

Por ejemplo, el [programa](#)

```
1 fvdP = @(t,y) [exp(-0.005*t)*cos(t)];
2 opt = odeset (OutputFcn, @odeplot, RelTol, 1e-10);
3 sol = ode45(fvdP, [0 50*pi], [2], opt);
```

resuelve, usando la función `ode45`, el PVI

$$\left. \begin{aligned} y'(t) &= e^{-0,05t} \cos(t), \quad t \in [0, 50\pi], \\ y(0) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

con un error relativo menor a  $10^{-10}$ , muestra el resultado mediante una animación de los cálculos de cada nodo de la solución numérica, y graba la solución en la variable `sol`.

### 3. Ejemplos de uso de los *solver* numéricos de OCTAVE

A continuación expondremos diversos fenómenos que se pueden modelar mediante un PVI y ejemplificaremos el uso de las funciones que OCTAVE posee para aproximar su solución.

#### 3.1. Carga de un circuito RC

Un circuito RC es diagramado de acuerdo a la Figura mostrada más abajo. La carga del capacitor de este circuito depende de la diferencia de potencial eléctrico  $V_e$  entregada por la fuente, la resistencia medida en Ohms  $[\Omega]$  y la capacidad eléctrica del capacitor, medida en Faradios  $[\mu F]$ . Este fenómeno es modelado por la Ley de Kirchoff en el PVI

$$\left. \begin{aligned} C \frac{d}{dt} q(t) + \frac{q(t)}{R} &= V_e(t) \\ q(0) &= q_0. \end{aligned} \right\}$$

Las siguientes instrucciones de OCTAVE aproximan la solución de este problema:

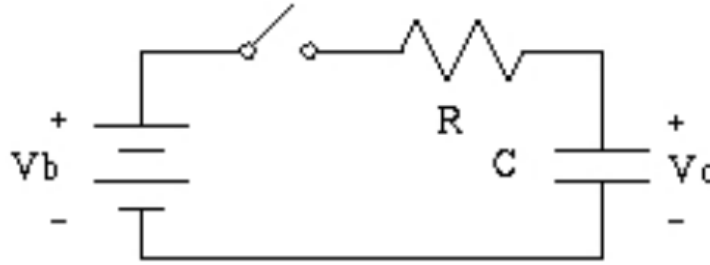


Figura 2: Circuito RC.

```

1  % Datos
2  V0 = 12;                      % Voltaje de la fuente
3  R = 1.5*10^3;                 % Resistencia electrica
4  C = 4*10^(-3);               % Capacidad del capacitor
5  tf = 120;                    % Tiempo final
6  f = @(t,x) V0/C - x/(R*C);   % Funcion del modelo
7
8  tiempo = [0 tf];             % Intervalo de tiempo
9  q0 = 0;                      % Carga inicial
10 [t,q] = ode45(f,tiempo,q0);  % Solucion Numerica
11 plot(t,q,'r')
12 xlabel('t')
13 ylabel('q');
14 title('Carga del condensador')

```

El gráfico generado por este programa es

### 3.2. Ecuación de conservación

Del balance de masa en un sistema cerrado se deriva la relación

$$\left( \begin{array}{c} \text{La razón de} \\ \text{cambio de } Q(t) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{La razón a la} \\ \text{que entra } Q(t) \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{La razón a la} \\ \text{que sale } Q(t) \end{array} \right).$$

Este principio tiene varias aplicaciones en química, física e ingeniería.

#### 3.2.1. Disolución química

En química, una cantidad se suele medir en unidades de masa (como gramos o kilogramos), o en cantidades como los moles. El volumen se puede medir en litros, metros cúbicos u otras unidades derivadas. La concentración de un soluto en un solvente se suele medir en unidades derivadas de éstas, como  $[gr/L]$ . El flujo de un solvente se puede medir en unidades de caudal, como  $[L/s]$  o  $[L/h]$ .

Un tanque de  $1500[L]$  contiene inicialmente  $600[L]$  de agua con  $1[kg]$  de sal disuelta en ella. En un momento se le comienza a agregar agua a una razón de  $9[L/h]$  con una concentración de sal de  $0,5[g/L]$ . Si esta solución bien mezclada sale del tanque a  $6[L/h]$ , ¿cuánta sal hay en el estanque cuando éste se llena?

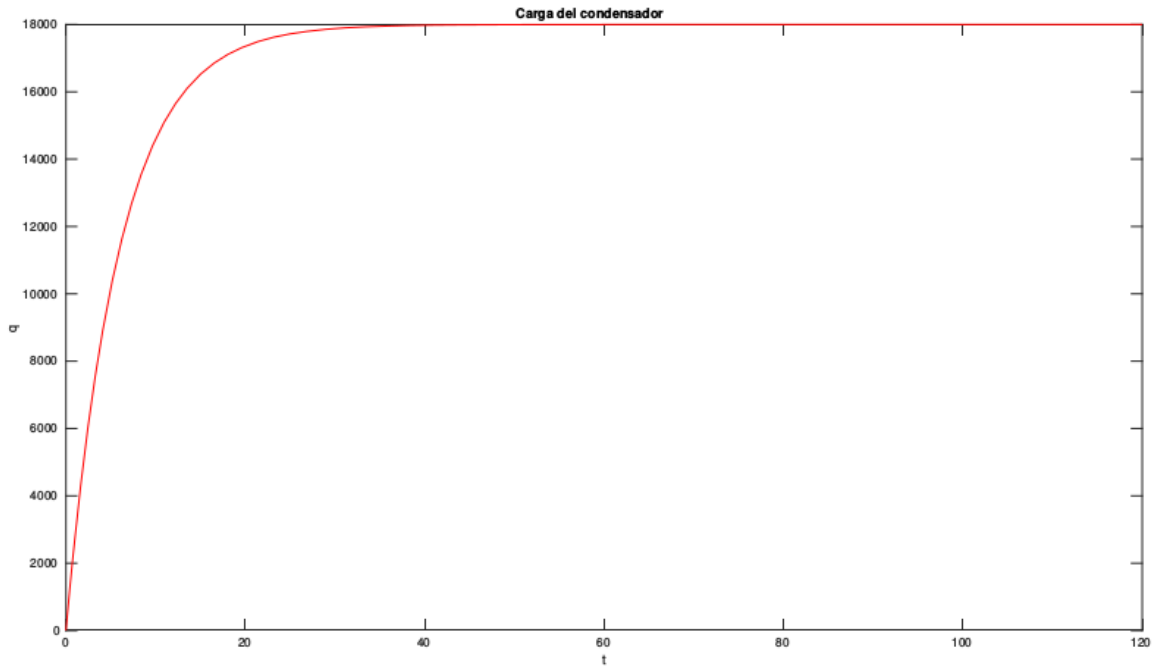


Figura 3: Gráfica de la carga del condensador del circuito RC.

Este problema se modela mediante el PVI

$$\left. \begin{aligned} q'(t) &= 0,5 \cdot 9 - \frac{q(t)}{600 + 3t} \\ q(0) &= 1000, \end{aligned} \right\}$$

donde  $q(t)$  es la cantidad de sale en el estanque, medida en gramos, y  $t$  es la cantidad de horas transcurridas desde el inicio de la disolución.

El siguiente código ejemplifica el uso de `ode45` para la solución de este problema:

```

1 V0 = 600; % Volumen inicial
2 q0 = 1000; % Sal inicial
3 Qin = 9; % Caudal de entrada
4 Qout = 6; % Caudal de salida
5 Cin = 0.5; % Concentracion de entrada
6 f = @(t,q) Qin*Cin-q/(V0+(Qin-Qout)*t)*Qout;
7 [t,q] = ode45(f,[0,120],q0);
8 plot(t,q,'-')
9 xlabel('tiempo medido en horas');
10 ylabel('Cantidad de sal en el estanque');
11 title('Cantidad de sal en el estanque');
```

El gráfico generado por este programa se muestra en la Figura de la próxima página.

### 3.3. Vaciado de estanques

El vaciado de un estanque es un proceso en régimen no estacionario debido a que tenemos un salida de masa de un sistema a una velocidad variable que dependerá de la altura del fluido en el estanque. Sin

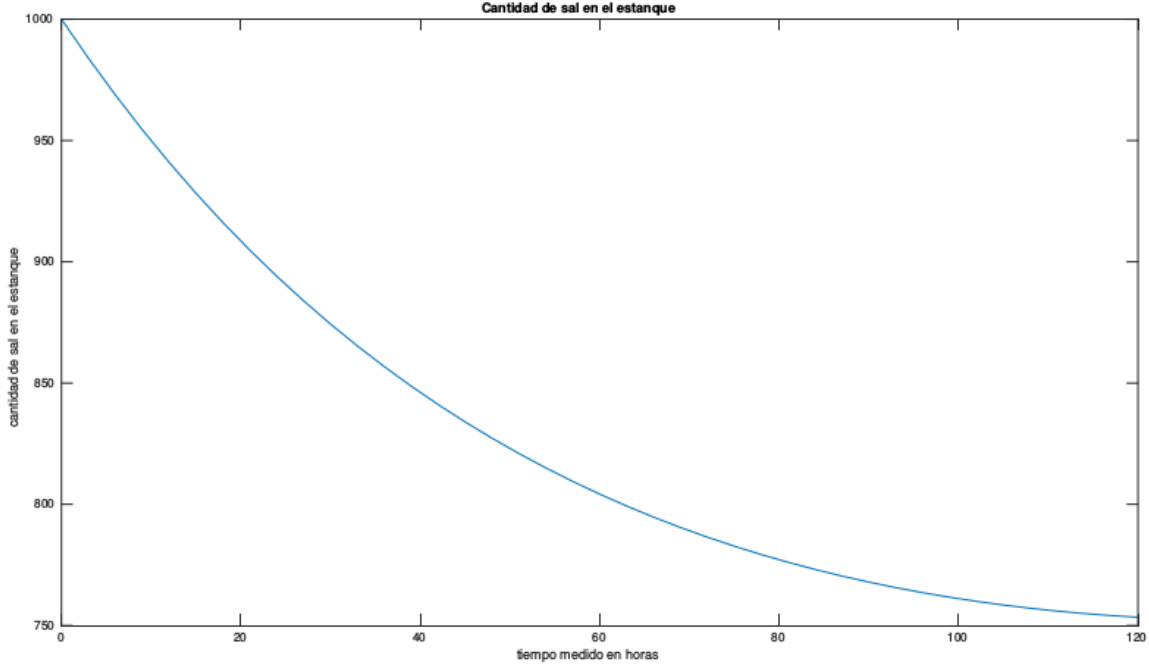


Figura 4: Gráfica de la cantidad de sal en el estanque.

embargo, mediante el balance de energía para una partícula de masa  $m$  en el fluido,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \implies v = \sqrt{2gh}.$$

La última ecuación es conocida en hidrodinámica como la *Ley de Torricelli* y determina la velocidad o flujo de salida  $v$  de un estanque a través de un agujero que está a una profundidad  $h$ . En la práctica, esta ley no considera la presencia de fuerzas disipativas, lo que motiva a corregir esta relación en la forma

$$v = c\sqrt{2gh},$$

donde  $c \in [0, 1]$  se llama *coeficiente de descarga*.

Supongamos que un estanque cilíndrico para combustible de  $5[m]$  de altura y  $1000[L]$  de capacidad se encuentra lleno. Desde un momento se le hace una perforación circular de diámetro  $2[mm]$  en una cara inferior, por donde empieza a escurrir petróleo.

Este problema se modela mediante el PVI

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5}h'(t) = -\pi r^2 \sqrt{2gh(t)} \\ h(0) = 5, \end{array} \right.$$

donde  $h(t)$  es la altura de la columna de petróleo en el estanque en función del tiempo  $t$  (medido en segundos),  $r$  es el radio de la perforación y  $g$  es la aceleración de gravedad.

El siguiente código ejemplificará el uso de `ode45` para la solución de este problema:

```

1 Ab = 1/5; % Superficie de la base del estanque
2 Vtot = 1; % Volumen total del estanque
3 r = 0.002; % Radio de la perforacion

```

```

4 g = 9.81; % Aceleracion de gravedad
5 Cin = 0.5; % Concentracion de entrada
6 dh = @(t,q) -Ab/Vtot*pi*r^2*sqrt(2*g*h);
7 [t,h] = ode45(dh,[0,60*60*24*3],5);
8 plot(t,h)
9 xlabel('tiempo medido en s');
10 ylabel('Altura en el estanque');
11 title('Vaciado de un estanque');

```

El gráfico generado se muestra a continuación.

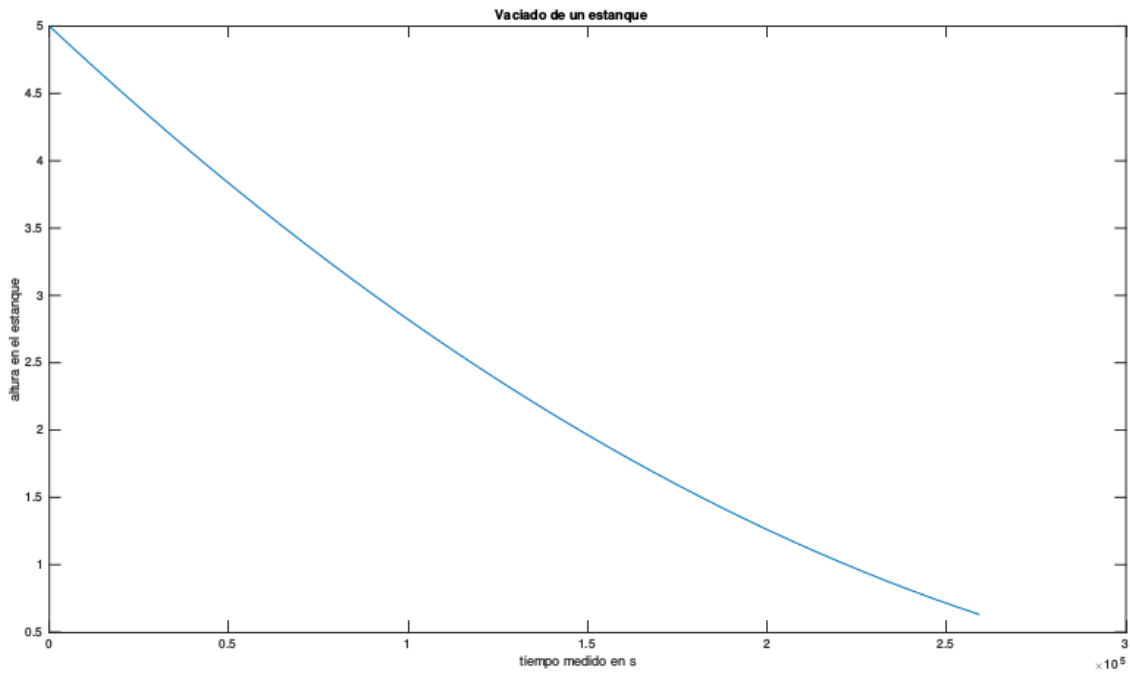


Figura 5: Gráfica del vaciado del estanque.

### 3.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Un PVI de orden  $n$

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_{01}, & y'(a) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_{0n}, \end{cases}$$

se puede expresar como un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden al introducir la variable vectorial

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

En efecto, derivando y utilizando la ecuación diferencial, se tiene que

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}).$$

Además, las condiciones iniciales quedan

$$\mathbf{z}(a) = \begin{pmatrix} z_1(a) \\ z_2(a) \\ \vdots \\ z_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix} = \mathbf{z}_0.$$

Obtenemos así el PVI

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{z}), \quad x \in [a, b] \\ \mathbf{z}(a) &= \mathbf{z}_0, \end{aligned} \right|$$

que es un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, al que podemos aplicar los métodos y comandos antes vistos.

De igual manera, un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior también puede ser expresado mediante un sistema de EDO de primer orden.

### 3.4.1. Modelo de presa–depredador

Suponga que  $R(t)$  modela la cantidad de conejos y  $F(t)$  modela la cantidad de zorros en una isla. Se puede suponer que existen ciertas relaciones entre los cambios en las poblaciones de conejos y zorros que podemos resumir en el sistema

$$\begin{aligned} R'(t) &= a_1 R(t) - a_2 F(t) R(t), \\ F'(t) &= -a_3 F(t) + a_4 F(t) R(t), \end{aligned}$$

donde las constantes  $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$  son fijas y están relacionadas con la reproducción de zorros y conejos, y cómo unos alimentan a los otros.

En este contexto, las condiciones iniciales  $R(0)$  y  $F(0)$  representan las cantidades iniciales de conejos y zorros en la isla.

El siguiente ejemplo muestra una modelación para ciertos parámetros y condiciones iniciales.

```

1 a1 = 0.4;
2 a2 = 0.37;
3 a3 = 0.3;
4 a4 = 0.05;
5 f = @(t,x) [a1*x(1)-a2*x(1)*x(2); -a3*x(2)+a4*x(1)*x(2)];
6 [t,f] = ode15s(f,[0,100],[3,1]);
7 plot(t,f(:,1),t,f(:,2));
8 legend('Pob. conejos','Pob. zorros')
```

### 3.4.2. Sistemas masa–resorte

El PVI

$$\left. \begin{aligned} mx''(t) + kx'(t) + Rx(t) &= f(t), \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) &= x_1 \end{aligned} \right|$$



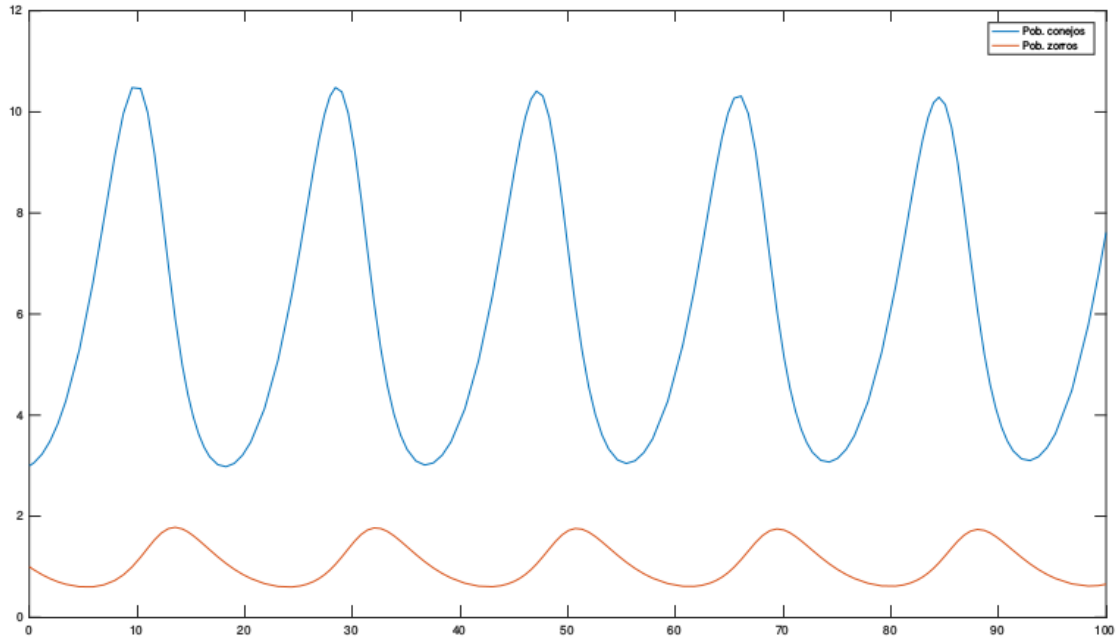


Figura 6: Gráfica de la evolución de las poblaciones de conejos y zorros.

modela el movimiento de un sistema masa–resorte–amortiguador ideal, cuya masa es  $m[kg]$ , su resorte es de constante  $R[N/m]$  y el amortiguador es de coeficiente de difusión  $k[N/(m/s)]$ . Este PVI puede ser planteado como el siguiente sistema de EDO de primer orden:

$$\left. \begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t) \\ u_2'(t) &= \frac{1}{m}(f(t) - ku_2(t) - Ru_1(t)), \\ u_1(0) &= x_0, \\ u_2(0) &= x_1, \end{aligned} \right\}$$

mediante la sustitución  $u_1(t) = x(t)$ ,  $u_2(t) = x'(t)$ . Vectorialmente, podemos escribir este sistema como

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ \frac{1}{m}(f(t) - ku_2(t) - Ru_1(t)) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)).$$

Ésta es la forma en que la función debe ser ingresada a OCTAVE para resolver el sistema.

El siguiente código ejemplifica la modelación del movimiento de un resorte usando funciones de OCTAVE

```

1 k = 1;
2 r = 1;
3 m = 1;
4 f = @(t,x) [x(2); (-k*x(2)-r*x(1))/m];
5 [t,f] = ode45(f,[0,20],[1,0]);
6 plot(t,f(:,1),'-k');
7 xlabel('tiempo');
8 ylabel('oscilacion');
9 legend('Resorte amortiguado');
```

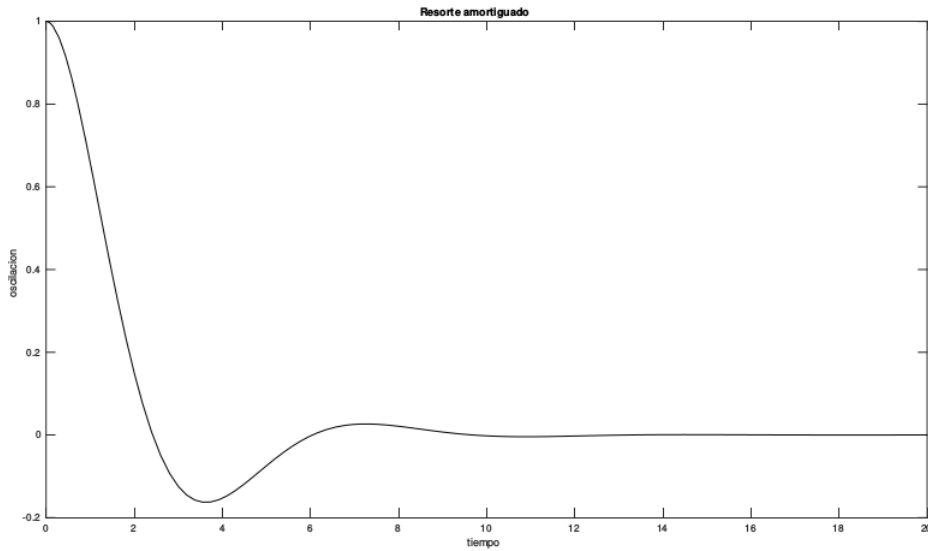


Figura 7: Gráfica del movimiento del sistema masa-resorte.

### 3.4.3. Circuitos RLC

Una fuerza electromotriz (por ejemplo, una batería o un alternador) produce un flujo de corriente en un circuito cerrado. Esta corriente provoca una caída de tensión o voltaje en los elementos por inducción, capacidad y resistencia al circular a través de ellos.

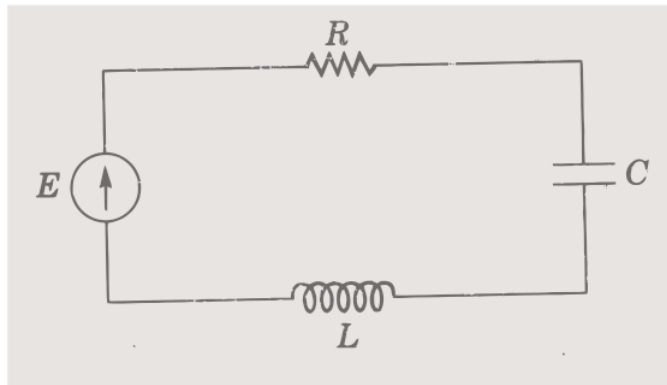


Figura 8: Circuito RLC.

Las leyes básicas, válidas para estos casos y para dicha caída de tensión son:

1. En el elemento de resistencia, la Ley de Ohm establece que la resistencia se opone al paso de corriente, produciendo una caída en la fuerza electromotriz proporcional a la intensidad de corriente, según:

$$E_R = Ri,$$

donde  $R$  es una constante propia de la resistencia e  $i$  es la intensidad de corriente.

2. En la bobina o inductancia, ésta se opone a cualquier cambio en la corriente, produciendo una caída en la fuerza electromotriz, de magnitud

$$E_L = L \frac{di}{dt},$$

donde  $L$  es una constante llamada *inductancia* de la bobina y  $t$  es el tiempo.

3. En la capacitancia, capacitor o condensador del circuito, se almacena una carga  $q$ . La carga acumulada se resiste a la entrada de nueva carga, lo que conlleva una caída de la fuerza electromotriz que viene dada por

$$E_C = \frac{q}{C},$$

donde  $C$  es una constante propia del capacitor y  $q$  es la carga acumulada en el capacitor. Como la corriente es el ritmo de flujo de carga, y por ello también es el ritmo al que la carga se acumula en el capacitor, se tiene que

$$i = \frac{dq}{dt},$$

y se puede escribir

$$E_C = \frac{1}{C} \int i \, dt.$$

Para obtener las EDO que modelan este tipo de circuitos eléctricos, se usa la Ley de Kirchoff, la cual establece que

*La suma de las caídas de tensión a lo largo de un circuito cerrado en un sentido fijo es cero.*

Así, para el circuito de la figura anterior, se tiene que

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E,$$

y como  $i = \frac{dq}{dt}$ , se obtiene finalmente que

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E,$$

la cual es una ecuación diferencial de segundo orden que modela la carga  $q$  en el circuito o capacitor en función del tiempo transcurrido.

Por ejemplo, el PVI

$$\begin{cases} 0,1q''(t) + 2q'(t) + 260q(t) = 100 \sin(60t) \\ q(0) = 0, \quad q'(0) = 0, \end{cases}$$

modela la carga acumulada en el capacitor del circuito

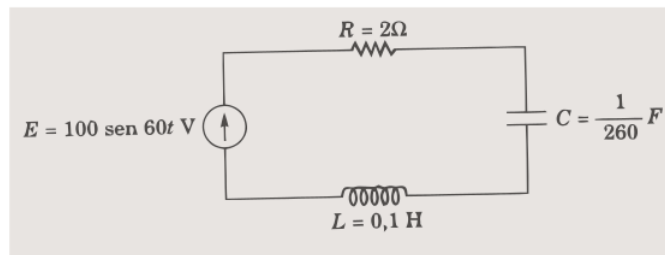


Figura 9: Circuito RLC del ejemplo.

y la solución de este PVI se calcula siguiendo las instrucciones del siguiente rutero de OCTAVE :

```

1 c = 1/260;
2 R = 2;
3 L = 0.1;
4 f = @(t,q) [q(2);(100*sin(60*t)-q(1)/c-R*q(2))/L];
5 [t,q] = ode45(f,[0,20],[0,0]);
6 plot(t,q(:,1),'-k');
7 xlabel('tiempo');
8 ylabel('carga');
9 legend('Circuito RLC');

```

con lo cual se determina la solución numérica

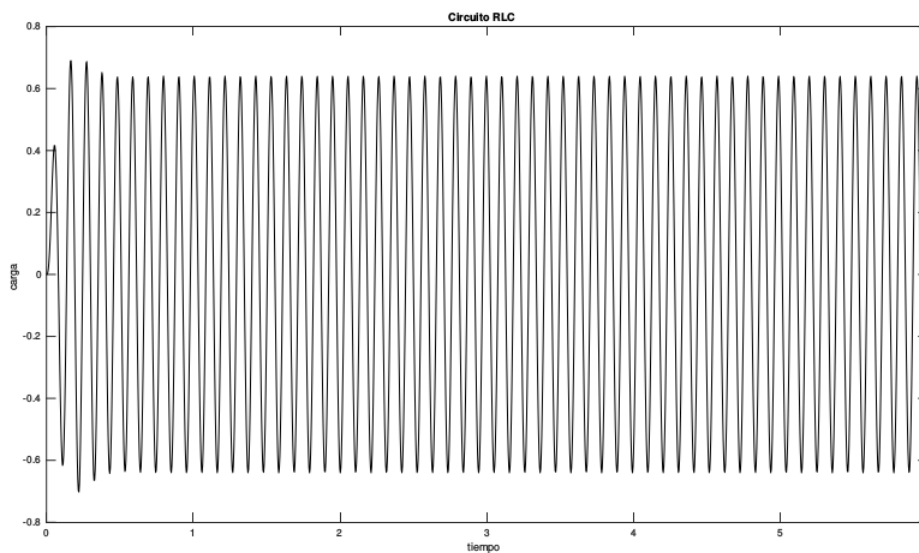


Figura 10: Gráfica de la carga acumulada en el capacitor del circuito RLC.

## 4. Ejercicios

1. Resuelva los siguiente problemas, usando los Métodos de Euler explícito e implícito:

a) 
$$\begin{cases} y'(x) = \sin(2x) + y, & x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} y'(x) = \cos(3x), & x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = \sin(2x) + y'(x), & x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, & y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. La EDO

$$y' = y^2 - y^3$$

modela el radio de una bola de fuego  $y(t)$  en función del tiempo de combustión. La idea es que este radio es proporcional a la superficie de la bola de fuego, e inversamente proporcional a su volumen. Las llamas crecen rápidamente y, a medida que alcanzan su volumen final, dejan de crecer. Resuelva

numéricamente el PVI

$$\left. \begin{array}{l} y' = y^2 - y^3, \\ y(0) = \delta \end{array} \right\}$$

considerando  $\delta = 0,1$ ,  $\delta = 0,05$ ,  $\delta = 0,001$  y  $\delta = 10^{-8}$ .

3. Un circuito consta de una fuerza electromotriz alterna dada por

$$E(t) = 100 \sin(200t)[V],$$

una resistencia de  $40[\Omega]$ , una bobina de  $0,25[H]$  y un condensador de  $4 \times 10^{-4}[F]$  conectados en serie. Si la corriente inicial es cero y la carga inicial del capacitor es  $0,01[C]$ , hallar la expresión de la corriente para  $t > 0$ .

4. Un paracaidista de  $80[kg]$  se suelta desde un avión a una altura de  $600[m]$ . Después de  $5[s]$  el paracaídas se abre. La altura  $y(t)[m]$  del paracaidista, en función del tiempo, se modela por el PVI

$$\left. \begin{array}{l} y'' = -g + \frac{1}{m}\alpha(t) \\ y(0) = 600, \quad y'(0) = 0, \end{array} \right\}$$

donde  $g = 9,81[m/s^2]$  es la aceleración de gravedad,  $m = 80[kg]$  es la masa del paracaidista y  $\alpha(t)$  es la resistencia del aire, la cual es proporcional al cuadrado de la velocidad del paracaidista, pero cambia cuando el paracaídas se abre, según

$$\alpha(t) = \begin{cases} K_1 y'(t)^2, & \text{si } t < 5[s] \\ K_2 y'(t)^2, & \text{si } t \geq 5[s]. \end{cases}$$

- a) Calcule la solución analítica en caída libre del paracaidista (esto es, cuando  $K_1 = K_2 = 0$ ). ¿Cuánto tiempo se demora el paracaidista en llegar a la tierra? ¿Cuál es la velocidad del impacto? Grafique la altura versus el tiempo.
- b) Resuelva numéricamente, considerando

$$K_1 = 1/15, \quad K_2 = 4/15.$$

¿A qué altura se abre el paracaídas? ¿Cuánto tiempo se demora en llegar al suelo? ¿Cuál es la velocidad del impacto? Grafique la altura versus el tiempo.

5. Consideremos un modelo, propuesto por Kermack y McKendrick en 1927 para describir la propagación de una epidemia en un grupo de  $N$  en un periodo de  $T$  semanas. Si  $S(t)$  es el número de personas sanas al cabo de  $t$  semanas,  $E(t)$  el número de personas enfermas y  $M(t)$  el número de personas muertas, las ecuaciones que describen la evolución en el tiempo de  $S(t)$ ,  $E(t)$  y  $M(t)$  son

$$S' = -cSE, \tag{1}$$

$$E' = cSE - mE \tag{2}$$

$$M' = mE, \tag{3}$$

donde  $c$  y  $m$  son las constantes que describen la rapidez con que la enfermedad se transmite y la rapidez con que las personas enfermas mueren, respectivamente. Suponiendo que el número inicial de personas muertas a causa de la enfermedad es cero, y denotando por  $S_0$  al número inicial de personas sanas, tenemos que

$$\frac{dS}{dM} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{dM} = -\frac{c}{m} S \Rightarrow S = S_0 e^{-\frac{c}{m} M}$$

Además, de las ecuaciones (1)–(3) tenemos que

$$S' + E' + M' = 0 \iff S + E + M = \text{constante}$$

e igual al número de personas  $N$  en el grupo considerado. Con esto se tiene que

$$E = N - S - M = N - S_0 e^{-\frac{c}{m}M} - M$$

y reemplazando en (3) obtenemos

$$M' = m \left( N - S_0 e^{-\frac{c}{m}M} - M \right), \quad M(0) = 0, \quad t \in [0, 10]. \quad (4)$$

- Resuelva el problema de valores iniciales (4) con `ode45`, suponiendo  $N = 3000$ ,  $E(0) = 150$ ,  $m = 1,8$  y  $c = 0,001$ . Llame antes a `odeset` para hacer `AbsTol` igual a  $10^{-8}$  y `RelTol` igual a  $10^{-4}$ .
- Dibuje, en un mismo gráfico, el número de personas sanas, muertas y enfermas en el período considerado (10 semanas).
- ¿Al cabo de cuántas semanas aproximadamente se mantiene casi constante el número de personas sanas, enfermas y muertas en el grupo considerado?
- ¿Cuál es el número de personas que ha muerto a causa de la enfermedad, 8 semanas después de comenzada la epidemia?

La resolución de PVI para sistemas de EDO se realiza mediante los mismos comandos. En tal caso,  $\mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y})$  debe ser una función a valores vectoriales (es decir, un **vector columna** de funciones) e  $\mathbf{y}$  un **vector columna** de variables de la misma dimensión. Además, la condición inicial  $\mathbf{y}_0$  también debe ser un **vector columna** de la misma dimensión.

- Considere un ecosistema simple consistente de conejos con una cantidad más que suficiente de alimento, y zorros que depredan los conejos para su alimentación. Un modelo clásico desarrollado por Volterra describe este ecosistema mediante el siguiente par de ecuaciones no lineales de primer orden:

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} = 2c - \alpha cz, & c(0) = c_0, \\ \frac{dz}{dt} = -z + \alpha cza, & z(0) = z_0, \end{cases}$$

donde  $t$  es el tiempo (medido en años),  $c = c(t)$  es el número de conejos y  $z = z(t)$  es el número de zorros, ambos en el instante  $t$ , y  $\alpha$  es una constante positiva que mide la probabilidad de interacción entre miembros de las dos especies.

- Cuando  $\alpha = 0$ , conejos y zorros no interactúan. Resuelva la ecuación diferencial a lo largo de un año en el caso en que inicialmente hay 100 animales de cada especie. Compruebe que en tal caso, los conejos hacen lo que mejor saben hacer, mientras que los zorros se van muriendo de hambre.
  - Calcule la evolución de ambas poblaciones a lo largo de 12 años en el caso en que la constante de interacción es  $\alpha = 0,01$  y que la población inicial es de 300 conejos y 150 zorros. ¿Qué conclusión puede extraer en este caso?
  - Repita la simulación anterior, pero con poblaciones iniciales de 15 conejos y 22 zorros. ¿Cuál es ahora la conclusión?
- La litricia extracorpórea por ondas de choque (LEC) es un tratamiento no invasivo que utiliza un pulso acústico para romper los cálculos renales (litiasis renal) y los cálculos biliares (piedras en la vejiga o en el hígado). El LEC puede generar cierto daño colateral. Las ondas de choque, así como

las burbujas (de aire) de cavitación formadas por la agitación de la orina pueden ocasionar daño a capilares, hemorragia del parenquima renal o subcapsular. Esto puede generar consecuencias a largo plazo, tales como insuficiencia renal e hipertensión.

El radio  $R$  de las burbujas formadas después de  $t$  microsegundos de comenzado el tratamiento es  $R(t) = 3 \times 10^{-6} r(t)$  metros, donde  $r$  es la solución a la siguiente ecuación diferencial, propuesta en 1998 por Howle, Shearer y Zhong:

$$rr'' + \frac{3}{2}(r')^2 = r^{-3\gamma} - 1, \quad r(0) = A, \quad r'(0) = 0, \quad (5)$$

donde  $\gamma = 1,4$  es el *exponente adiabático*.

- Convierta la ecuación (5) en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Resuelva el problema de valores iniciales resultante con  $t \in [0, 20]$  y suponiendo  $A = 2,5$ .
- Grafique la aproximación resultante y observe que es una función periódica. ¿Cuál es el período aproximado de la misma? ¿Entre qué valores oscila el radio  $R$  de la burbuja?

8. Considere el problema de valores iniciales

$$\left. \begin{array}{l} y'(x) = 100(1 - y(x)), \quad x \in [0, 5] \\ y(0) = 2. \end{array} \right\}$$

- Resuelva este problema con `ode45` y `ode15s`, tomando `AbsTol` =  $10^{-6}$  y `RelTol` =  $10^{-4}$ . ¿En cuántos subintervalos divide `ode45` el intervalo  $[0, 5]$  para poder resolver este problema? ¿En cuántos lo divide `ode15s`? Observe que `ode45` divide el intervalo  $[0, 5]$  en muchos más subintervalos que `ode15s`, a pesar de que las tolerancias con que ambos métodos son ejecutados son las mismas. Este comportamiento es típico de los problemas *stiff*.
- Grafique los tamaños de paso generados por ambos métodos y la solución exacta a este problema, que es  $y(t) = e^{-100t} + 1$ . Observe que la solución exacta para este problema varía rápidamente desde el valor inicial hasta un valor cercano a 1, pero para  $t \geq 0,1$  se mantiene casi constante. Es de esperarse que a partir de 0,1, un método numérico para resolver este problema tome en  $[0, 0,1]$  tamaños de paso pequeños, para poder reproducir la variación de la solución exacta, pero a partir de 0,1 use tamaños de paso mucho mayores. Sin embargo, en los gráficos de los tamaños de paso usados por `ode45` y `ode15s`, sólo `ode15s` exhibe el comportamiento esperado. El comportamiento de `ode45` es el típico de métodos no adecuados para resolver problemas *stiff* cuando son usados para resolver problemas *stiff*.

9. Consideremos el Problema de Valores Iniciales

$$x'(t) = -3tx(t)^2 + \frac{1}{1+t^3}, \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 5],$$

cuya solución exacta es

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3}.$$

- Resuelva el problema con `ode45` y los pares de `AbsTol` y `RelTol` en la Tabla siguiente y complétela. Observe que no siempre se cumple que  $\max_i |x_i - x(t_i)| \leq \text{AbsTol}$ . Sin embargo, a medida que disminuyen los valores de `AbsTol` y `RelTol`, la solución calculada por `ode45` se acerca a la solución exacta del problema.
- Con los valores devueltos en el último llamado a `ode45`, grafique la solución exacta y los tamaños de paso con los que `ode45` hizo los cálculos, es decir, si usted llamó a `ode45` mediante

RelTol	AbsTol	máx <sub>i</sub>  x <sub>i</sub> - x(t <sub>i</sub> )
1e-2	1e-4	
1e-3	1e-5	
1e-4	1e-6	
1e-5	1e-7	

Cuadro 1: Comportamiento de ode45

```
1 [t,x] = ode45(...)
```

entonces escriba

```
1 figure(1)
2 plot(t,t./(1+t.^3))
3 figure(2)
4 plot(t(1:end-1),t(2:end)-t(1:end-1))
```

Observe que en el tramo en que la solución exacta del problema varía más rápidamente, los tamaños de paso con los que `ode45` realiza los cálculos son más pequeños.

10. Considere el siguiente Problema de Valores Iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 3 \sin(t)x(t) + 2ty(t) + 1, \quad t \in [0, 1,5] \\ y''(t) = 2x(t) + t^2y'(t) - 5y(t) + e^t, \quad t \in [0, 1,5] \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{array} \right.$$

Para resolver este problema, utilizaremos el Método de Euler Implícito, en el cual se considera una partición del intervalo  $[0, 1,5]$  en  $N$  subintervalos de tamaño  $h$ , donde:

$$t_i = ih, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{con} \quad h = \frac{1,5}{N}.$$

El algoritmo del método de Euler implícito queda:

<p>Dado <math>\mathbf{y}_0</math>          Para <math>i = 1, \dots, N</math>              <math>\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1})</math></p>
--

- Utilizando un cambio de variables apropiado, escriba el PVI anterior como un sistema de EDO de primer orden, con sus respectivas condiciones iniciales.
- Escriba el sistema de ecuaciones lineales que define el esquema de Euler implícito para las EDO del ítem anterior.
- Escriba un programa tipo rutero en ambiente OCTAVE que realice las siguientes tareas:
  - Resuelva el problema utilizando el esquema de Euler implícito, considerando  $N = 100$ .
  - Resuelva el problema utilizando el comando `ode45`, utilizando la misma partición definida en el ítem anterior.
  - En una misma figura, grafique la función  $x(t)$  obtenida por el método de Euler implícito y por `ode45`.
  - En otra figura, grafique la función  $y(t)$  obtenida por el método de Euler implícito y por `ode45`.



- d) Un proyectil de masa  $m$  se arroja desde un punto del plano  $(x_0, y_0)$ , con una velocidad inicial dada por el vector  $(v_0^x, v_0^y)$ . La trayectoria del proyectil se rige por las ecuaciones dadas por la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} mx'' &= \gamma v^x, \\ my'' &= mg + \gamma v^y, \end{aligned}$$

donde  $g = 9,81[m/s^2]$  es la aceleración de gravedad y  $\gamma$  es una constante de roce con el medio en que se realiza el lanzamiento. Formule este problema en forma de un sistema de primer orden.

Considerando  $m = 10[kg]$  y  $\gamma = 0,2[kg/s]$ , y suponiendo que el proyectil se lanza desde  $30[m]$  de altura con una velocidad inicial horizontal de  $40[m/s]$ , ¿qué distancia recorre el proyectil antes de tocar el suelo?

Haga un programa que permita responder a esta pregunta, utilizando el método de Euler implícito para resolver el problema.