UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142)

Solución Evaluación n^{o} 4
Lunes 04 de Octubre de 2004

P1.1 **(10 Ptos.)** Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ -x & + & y & + & \mathbf{a}z & = & 1 \\ 2x & + & \mathbf{a}y & + & 4z & = & -2\,. \end{array}$$

Encuentre el o los valores de **a** para que el sistema:

- Sea incompatible.
- Sea compatible indeterminado.
- Sea compatible determinado.

SOLUCIÓN:

Analizamos la matriz ampliada asociada al sistema:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 4 & -2 \end{array}\right) \underset{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1}{\overset{F_2 \leftarrow F_2 + F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & a+1 & -1 \\ 0 & a+4 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{F_3 \leftarrow F_3 + (a+4)F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & a+1 & -1 \\ 0 & 0 & a^2+5a+6 & -a-2 \end{array}\right). \quad \textbf{(5 Ptos.)}$$

Observación: Si $a = -4$, entonces la última operación elemental por filas anterior no tiene sentido y en ese caso se tiene que la matriz ampliada es equivalente por filas a:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right),$$

y el sistema es compatible determinado.

Analizamos los elementos (3,3) y (3,4) de la matriz ampliada, y vemos que:

$$a^2 + 5a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = -2 \text{ ó } -3$$
$$-a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \quad \textbf{(2 Ptos.)}$$

De donde al comparar los valores, concluimos que:

–
$$a = -3 \Rightarrow a^2 + 5a + 6 = 0 \ \wedge \ -a - 2 \neq 0$$
Se tiene en este caso que $r(A) \neq r(A|b)$ y el sistema **es incompatible. (1 Pto.)**

–
$$a = -2 \Rightarrow a^2 + 5a + 6 = 0 \ \wedge \ -a - 2 = 0$$
Se tiene $r(A) = r(A|b) = 2 < 3$ y el sistema **es compatible indeterminado. (1 Pto.)**

–
$$a \notin \{-3, -2\} \Rightarrow a^2 + 5a + 6 \neq 0 \ \wedge \ -a - 2 \neq 0$$
Se tiene $r(A) = r(A|b) = 3$ y el sistema **es compatible determinado. (1 Pto.)**

P1.2 Encuentre un polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ tal que:

$$p(-1) = -3, \qquad p'(-1) = 4,$$
$$p(1) = 5, \qquad p'(1) = 12.$$

SOLUCIÓN: Vemos que $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Así, reemplazando se tiene

$$\begin{aligned} p(-1) &= a - b + c - d = -3\,, \\ p'(-1) &= b - 2c + 3d = 4\,, \\ p(1) &= a + b + c + d = 5\,, \\ p'(1) &= b + 2c + 3d = 12\,. \ \textbf{(2 Ptos.)} \end{aligned}$$

Este sistema tiene por matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right) \underset{F_3 \leftarrow F_3 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2 \\ F_4 \leftarrow F_4 - F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \end{array}\right) \underset{F_4 \leftarrow F_4 - F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right). \ \textbf{(4 Ptos.)}$$

Este sistema tiene por soluciones:

$$d = 2\ ,\ c = d = 2\ ,\ b = 2c - 3d + 4 = 2\ ,\ a = b - c + d - 3 = -1\,. \ \textbf{(3 Ptos.)}$$

Así el polinomio buscado es:

$$p(x) = -1 + 2x + 2x^2 + 2x^3\,. \ \textbf{(1 Pto.)}$$

P2 Dadas las rectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ y el plano Π_1 definidos por:

$$\Pi_1 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 8x - 4y + 7z = 0\},$$

$$\mathcal{L}_1 : \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{L}_2 : \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x-1}{-5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{8} \right\},$$

$$\mathcal{L}_3 : \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

i) Determine la intersección $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. **(5 Ptos.)**

ii) Establezca la ecuación del plano Π que contiene a las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. **(5 Ptos.)**

iii) Pruebe que $\mathcal{L}_3$ es paralela a Π_1. **(5 Ptos.)**

iv) Calcule la distancia del plano Π_1 a la recta $\mathcal{L}_3$. **(5 Ptos.)**

SOLUCION:

Parte i)

Para determinar la intersección entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, resolvemos el sistema de ecuaciones asociado. Primero, pasamos la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}_2$ a su forma paramétrica:

$$\mathcal{L}_2 : \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

(1 Pto.)

Luego, la intersección de las rectas corresponde al conjunto solución del sistema:

$$\begin{aligned} 1 + t &= 1 - 5r \\ -1 + 2t &= -1 + 4r \\ 4 + 0t &= 4 + 8r \qquad \textbf{(1 Pto.)} \end{aligned}$$

Esto es, el sistema:

$$\begin{aligned} t + 5r &= 0 \\ 2t - 4r &= 0 \\ 8r &= 0 \qquad \textbf{(1 Pto.)} \end{aligned}$$

Este sistema homogéneo tiene por solución única $t = r = 0$ **(1 Pto.)**

El punto de intersección queda entonces determinado indistintamente al reemplazar el valor de t ó de r en una de las dos rectas, obteniendo:

$$(x, y, z) = (1, -1, 4)$$

(1 Pto.)

Opción 2 de desarrollo de **Parte i)**

De acuerdo a la escritura vectorial de la recta $\mathcal{L}_2$, identificamos inmediatamente a su vector director $\vec{r}_2$ y su punto libre P_2:

$$\vec{r}_2 = (-5, 4, 8), \quad P_2(1, -1, 4)$$

(2 Ptos.)

Por otro lado, de la ecuación paramétrica de la recta $\mathcal{L}_1$ vemos que ella también pasa por el punto $(1, -1, 4)$

$$t = 0 \Rightarrow (1, -1, 4) \in \mathcal{L}_1$$

(1 Pto.)

Por último, ambas rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son paralelas, pues sus vectores directores no son múltiplos uno del otro:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \text{ no es paralela a } \mathcal{L}_2$$

(1 Pto.)

Así, las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tienen necesariamente un solo punto de intersección, dado por $(1, -1, 4)$ **(1 Pto.)**

Parte ii)

De la parte i) se conocen los vectores directores de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ y su punto de intersección:

$$P(1, -1, 4), \ \vec{r}_1 = (1, 2, 0), \ \vec{r}_2 = (-5, 4, 8)$$

(1 Pto.)

Podemos definir entonces en forma paramétrica la ecuación del plano Π, que queda definido por:

$$\Pi : \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \ s,t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \textbf{(4 Ptos.)}$$

Opción 2 de desarrollo de **parte ii)**:

Con los vectores directores de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, se puede determinar la normal al plano Π, bastando para ello con hacer el producto cruz:

$$\begin{aligned} \vec{n} \ = \ \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= 16\hat{i} - 8\hat{j} + 14\hat{k}\,. \end{aligned}$$

(2 Ptos.)

Junto con el punto de intersección de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dado por:

$$P_0 = (1, -1, 4)$$

(1 Pto.)

Podemos definir la ecuación vectorial del plano, que queda dada por:

$$\begin{aligned} &16(x-1) - 8(y+1) + 14(z-4) = 0 \\ &\big(\text{o bien, } \ 16x - 8y + 14z = 80\big) \end{aligned}$$

(2 Ptos.)

Parte iii)

La recta $\mathcal{L}_3$ tiene por vector director al vector $\vec{r}_3 = (-3, 1, 4)$, que resulta ser una combinación lineal de los vectores directores del plano Π_1:

$$(-3, 1, 4) = -\frac{1}{2}\vec{r}_1 + \frac{1}{2}\vec{r}_2 = -\frac{1}{2}(1, 2, 0) + \frac{1}{2}(-5, 4, 8)$$

(3 Ptos.)

Al ser este vector $\vec{r}_3$ combinación lineal de los otros, dicho vector necesariamente es paralelo al plano definido por $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ **(2 Ptos.)**

Opción 2 de desarrollo de **parte iii)**

La recta $\mathcal{L}_3$ tiene por vector director al vector $\vec{r}_3 = (-3, 1, 4)$. **(1 Pto.)**

El plano Π_1 tiene por vector normal al vector $\vec{n} = (8, -4, 7)$ **(1 Pto.)**

Ahora bien, el vector director $\vec{r}_3$ es perpendicular a la normal $\vec{n}$, pues:

$$\vec{r}_3 \cdot \vec{n} = (-3, 1, 4) \cdot (8, -4, 7) = -24 - 4 + 28 = 0$$

(1 Pto.)

Al ser $\vec{r}_3$ perpendicular a la normal, la recta $\mathcal{L}_3$ es paralela al plano Π

(2 Ptos.)

Parte iv)

Como $\mathcal{L}_3$ es paralela al plano Π_1, la distancia de la recta al plano puede calcularse en base a cualquier punto de la recta (fórmula distancia punto al plano) .

Así por ejemplo:

$$\begin{aligned} P_0 &= (-2, 2-6) \in \mathcal{L}_3 \;\; (s = 0 \;\text{ en definición de } \mathcal{L}_3) \\ P_1 &= (0, 0, 0) \in \Pi_1 \; (x = y = z = 0 \;\text{ en definición de } \Pi_1) \end{aligned}$$

(1 Pto.)

De allí, obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{P_0P_1} &= (-2, 2, 6) \\ \vec{n} &= (8, -4, 7) \end{aligned}$$

(1 Pto.)

De acuerdo a la fórmula de distancia del punto al plano:

$$d(P_0, \Pi_1) \; = \; \frac{|\vec{n} \cdot \overline{P_0P1}|}{\|\vec{n}\|}.$$

(1 Pto.)

Se tiene que el plano Π_1 pasa por el origen, de donde podemos elegir $P_1 = \theta = (0,0,0)$, y obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot \overline{P_0P1} \; &= (8,-4,7)\cdot(-2,2,6) \;=\; -16-8+42 \;=\; 18\,, \\ \|\vec{n}\| &= \sqrt{8^2+4^2+7^2} \;=\; \sqrt{129}\,. \end{aligned}$$

(1 Pto.)

De esta forma

$$d(P_0,\Pi) \;=\; \frac{18}{\sqrt{129}}\,.$$

(1 Pto.)

P3.1 Considere el espacio vectorial $H = C[0,1]$. Se define:

$$M = \{f \in H : \int_0^1 f(x)dx = 0\}.$$

Pruebe que M es un subespacio vectorial de $C[0,1]$. **(5 Ptos.)**

<u>SOLUCIÓN:</u> El conjunto M satisface:

- La función $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \theta(x) = 0$, que es el vector nulo del espacio H, satisface

$$\int_0^1 \theta(x)dx = \int_0^1 0dx = 0\,.$$

  Así $\theta \in M$. **(1 Pto.)**

- Sean $f, g \in M$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f+g)(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx \quad \text{(por propiedades de la integral)}\\ &= 0\,,\end{aligned}$$

  de donde $f + g \in M$. **(2 Ptos.)**

- Sea $f \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_0^1 \alpha f(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)dx = \alpha \cdot 0 = 0 \quad \text{(por propiedades de la integral)}\,,$$

  de donde $\alpha f \in M$. **(2 Ptos.)**

Así M es no vavío, cerrado para la suma y la multiplicación por escalar, de donde es un subespacio vectorial de V. **(1 Pto.)**

P3.2 Considere el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) ¿ Es L.I. el conjunto $\{A, B, C\}$? Justifique. **(6 Ptos.)**

ii) Sea W el subespacio de V definido por

$$W = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : AX = BX \right\}.$$

Encuentre un conjunto de generadores para W. **(8 Ptos.)**

SOLUCIÓN:

i). Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha A + \beta B + \gamma C = \theta$. Entonces

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \gamma & \alpha \\ 2\beta & \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \textbf{(2 Ptos.)}$$

Por igualdad de matrices se tiene

$$\begin{aligned} 2\alpha + \gamma &= 0\,, \\ \alpha &= 0\,, \\ 2\beta &= 0\,, \\ \beta + \gamma &= 0\,. \quad \textbf{(1 Pto.)} \end{aligned}$$

- De la segunda ecuación se tiene $\alpha = 0$, y por lo tanto de la primera se obtiene que $\gamma = 0$.
- De la tercera ecuación se tiene $\beta = 0$. **(1 Pto.)**

De esta forma la única combinación lineal nula de A, B y C es la trivial, y por lo tanto $\{A, B, C\}$ es un conjunto L.I. **(2 Ptos.)**

ii). Se tiene

$$\begin{aligned}
W &= \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : 2a+c=0 \text{ y } 2b+d=0 \right\} \\
&= \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : c=-2a \text{ y } d=-2b \right\} \\
&= \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix} \in V : a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad \textbf{(4 Ptos.)} \\
&= \left\{ X = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in V : a, b \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .
\end{aligned}$$

De esta forma un sistema de generadores para W es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$. **(4 Ptos.)**