

Cálculo Numérico (521230)

Laboratorio 3

Sistemas de ecuaciones lineales – I

El objetivo de este laboratorio es aprender a utilizar eficientemente métodos directos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

1. (a) Haga un programa *function* que genere una matriz tridiagonal de orden n de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ & c & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & & c & a \end{pmatrix}.$$

Los datos de entrada deben ser los valores de n , a , b y c , y la salida la matriz \mathbf{A} .

- (b) Mediante el comando MATLAB **rank**, determine si la matriz tridiagonal y simétrica \mathbf{A} correspondiente a $n = 10$, $a = 4$ y $b = c = 1$ es no singular.
- (c) Resuelva el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con la matriz tridiagonal anterior y un segundo miembro \mathbf{b} cualquiera, de los siguientes dos modos:

i. `>> x=A\b`

ii. `>> [L,U]=lu(A);`
`>> x=U\ (L\b)`

Compare las soluciones obtenidas y calcule los residuos $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ respectivos.

2. El *método de las potencias inversas* permite calcular el valor propio menor en valor absoluto de una matriz. Un algoritmo de este método es el siguiente:

\mathbf{y}_0 : dato inicial normalizado de manera que $\|\mathbf{y}_0\|_2 = 1$;
 \mathbf{x}_0 : solución de $\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{y}_0$;
 $\lambda_0 = 1/(\mathbf{y}_0^t \mathbf{x}_0)$;
 $k = 1, 2, 3, \dots$
 $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{k-1} / \|\mathbf{x}_{k-1}\|_2$;
 \mathbf{x}_k : solución de $\mathbf{Ax}_k = \mathbf{y}_k$;
 $\lambda_k = 1/(\mathbf{y}_k^t \mathbf{x}_k)$;
 hasta que $\lambda_k = \lambda_{k-1}$.

El λ_k con el que finaliza este algoritmo es el valor calculado del autovalor de menor valor absoluto de la matriz \mathbf{A} .

- (a) Escriba un programa MATLAB que implemente adecuadamente este algoritmo. Para ello tenga en cuenta lo siguiente:
- Aproveche el comando `lu` para reducir significativamente el costo computacional del método.
 - No almacene todos los \mathbf{x}_k , \mathbf{y}_k y λ_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, sino sólo los necesarios.
- (b) Testee el programa con la matriz tridiagonal del ejercicio anterior correspondiente a $n = 10$, $a = 2$ y $b = c = -1$, cuyos valores propios se conocen exactamente:

$$\lambda_j = 2 \left[1 - \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) \right], \quad j = 1, \dots, n.$$

Calcule también estos valores propios con el comando MATLAB `eig` y compare los valores obtenidos.

3. En muchas aplicaciones es necesario resolver varios sistemas de ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$, con la misma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y distintos segundos miembros \mathbf{b}_i , $i = 1, \dots, m$. Para hacer esto en MATLAB resulta conveniente generar la matriz de segundos miembros

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_m \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

y resolver el sistema matricial $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, cuya solución

$$\mathbf{X} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_m \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

es la matriz de vectores solución \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, m$, de los sistemas anteriores.

El siguiente programa MATLAB tiene por objeto verificar esto experimentalmente:

```
A=rand(100);
B=rand(100,1000);

t0=cputime;
X=A\B;
t1=cputime-t0

t0=cputime;
for i=1:1000
    Y(:,i)=A\B(:,i);
end
t2=cputime-t0

dif=norm(X-Y,inf)
```

- Escriba y ejecute el programa anterior.
- Analice lo que hace este programa. (Note que el comando `cputime` entrega el tiempo de CPU utilizado desde que se inició MATLAB.)
- Justifique la diferencia de tiempos de ejecución que se observa.

(d) Utilice la sentencia MATLAB

```
>> X=A\B;
```

con una matriz \mathbf{B} adecuada para calcular \mathbf{A}^{-1} . Compare el resultado obtenido con el del comando MATLAB `inv`.

4. El objeto de este ejercicio es demostrar que **no es conveniente** resolver un sistema de ecuaciones mediante la inversa de la matriz del mismo.

Considere el siguiente programa MATLAB:

```
nn=[100:100:1000];
t1=[];
t2=[];
for n=nn
    A=rand(n);
    y=ones(n,1);

    t0=cputime;
    x=inv(A)*y;
    t1=[t1 cputime-t0];

    t0=cputime;
    x=A\y;
    t2=[t2 cputime-t0];
end
plot(nn,t1,'*-','nn,t2,'o-')
```

(a) Analice lo que hace este programa, ejecútelo e indique qué alternativa es la más conveniente.

5. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Hacer un programa MATLAB que:

- genere la matriz anterior para $n = 10$;
- calcule una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{R}^t \mathbf{R}$;
- resuelva mediante el método de Cholesky el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

(b) ¿Es la matriz \mathbf{A} definida positiva? Justifique su respuesta.

6. Las matrices de *Hilbert*

$$\mathbf{H}_n = (h_{ij}^n) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{con } h_{ij}^n = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

son matrices muy mal condicionadas. Estas matrices se generan en MATLAB con el comando `hilb`.

- (a) Tabule los números de condición en norma euclídeana (comando `cond`) y las estimaciones de los números de condición en norma 1 (comando `condest`) de estas matrices, para $n = 2, \dots, 10$.

- (b) Sean

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0.7487192 \\ 0.4407175 \\ 0.3206968 \\ 0.2543113 \\ 0.2115308 \\ 0.1814429 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + \delta \mathbf{b},$$

con $\delta \mathbf{b}$ un vector de perturbaciones aleatorias de valor absoluto menor o igual a 10^{-6} (Note que la sentencia MATLAB `(2*rand(n,1)-1)*a` genera un vector columna aleatorio de dimensión n , uniformemente distribuido en el intervalo $[-a, a]$).

Resuelva los sistemas $\mathbf{H}_6 \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0$ y $\mathbf{H}_6 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$. Compare la diferencia de las soluciones $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ con la de los segundos miembros $\delta \mathbf{b}$. Describa lo que se observa.

- (c) Verifique que se satisface la relación

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{H}_6) \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

RAD/GBG/RBP/MCP/RRS/RRR/MS

<http://www.ing-mat.udec.cl/pregrado/asignaturas/521230/>