UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION ESPECIAL II 520142

P.1.1.

a) Determine el rango de valores de los números reales a y α tal que el siguiente sistema tenga solución no necesariamente única.

$$y + z = 2, \quad 2x + y - z = 4, \quad \alpha x + z = a$$

(12 puntos)

Solución. Escribimos el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$$

y estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y ampliada en términos de a y α.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ \alpha & 0 & 1 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ \alpha & 0 & 1 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ \alpha+1 & 0 & 0 & a+1 \end{array}\right).$$

Luego

$$r(A) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad \alpha = -1 \\ 3 & \text{si} \quad \alpha \neq -1 \end{cases} \quad \wedge \quad r(A \vdots B) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad \alpha = -1 \wedge a = -1 \\ 3 & \text{si} \quad \alpha \neq -1 \vee a \neq -1 \end{cases}$$

Luego el sistema es compatible determinado si $\alpha \neq -1$ independiente del valor de a. Es compatible indeterminado si $\alpha = -1 \wedge a = -1$.

b) Encuentre el punto de intersección del plano

$$P_1 : 3x - 4y + z = 2$$

con la recta que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$ y es perpendicular a P_1.

(8 puntos)

P.2. Sea $V = P_2(\mathbb{R})$

a) Pruebe que $U = \{p \in V : \quad p(x) = -p(-x)\}$ es sub-espacio vectorial de V.

(8 puntos)

Solución. Aplicamos el criterio de sub-espacio:

i) $U \neq \phi$, pues si $p(x) = x$, entonces $p \in U$.

ii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $p, q \in U$, por demostrar que $\alpha p + q \in U$.

Para ello, recordamos la definición de U, luego

$$p, q \in U \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = -p(-x) \ \wedge \ q(x) = -q(-x)$$

luego multiplicando la primera ecuación del lado derecho por α, sumando la segunda y recordando la definición de suma de funciones, obtenemos

$$(\alpha p + q)(x) = -(\alpha p + q)(-x)$$

es decir $\alpha p + q \in U$.-

b) Determine una base y la dimensión de $U \cap W$ donde

$$W = \{p \in V : \int_{-1}^{1} x p(x) dx = 0\}$$

(12 puntos)

Solución. Primero observamos que $U =< \{x\} >$. Luego

$$\begin{array}{rcl} U \cap W & = & \{p \in V : p \in U \ \wedge \ p \in W\} \\ & = & \{p \in V : \exists\, a \in \mathbb{R},\ p(x) = ax \ \wedge \ \int_{-1}^{1} x p(x) dx = 0\} \\ & = & \{p \in V : p(x) = ax \ \wedge \ 2a \int_{0}^{1} x^2 dx = 0\} \\ & = & \{p \in V : p(x) = ax \ \wedge \ a = 0\} \\ & = & \{\theta \in P_2(\mathbb{R})\} \end{array}$$

luego $dim(U \cap W) = 0$.

Segunda Forma: Notar que, de la definición se ve claramente que $W = U^{\perp}$ con $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx$.

P.3. Considere el operador $L \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$ definido por:

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}) : L(A) = \frac{A - A^t}{2}$$

Determine:

a) La matriz asociada $M = [L]_B$, donde B es la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$. **(6 puntos)**

La base canónica de $V = M_2(\mathbb{R})$ es

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Luego

$$L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

y por tanto sus vectores coordenados en la base B es el vector nulo de $\mathbb{R}^4$. Enseguida observamos que

$$L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde, como

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (\frac{1}{2}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vemos que la matriz pedida está dada por:

$$M = [L] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Una base ortonormal que diagonalice a M. **(7 puntos)**

Solución. Observemos que M es una matriz simétrica en consecuencia ella es diagonalizable. Además los vectores propios asociados a valores propios diferentes son ortogonales.

- Polinomio característico $p(\lambda) = det(M - \lambda I)$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2-\lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda-1)$$

luego los valores propios son: $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad 3, $\lambda_2 = 1$(simple)-

- Espacios propios Como $dim(S_{\lambda_1}) = 3$ debemos determinar tres vectores linealmente independientes que generan S_{λ_1}. Para ello, observamos que:

$$M \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así $S_0 =< \{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\} >$ es evidente que este sistema de generadores de S_0 es ortogonal, en consecuencia linealmente independiente y luego una base para S_0. La base ortonormal de S_0 asociada es:

$$B_0 = \{(1,0,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$$

Análogamente sabemos que $dim(S_{\lambda_2}) = 1$, observando que

$$M - I \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = d = 0,\ b = -c\} \\ &= < \{(0,1,-1,0)\} > \end{aligned}$$

y luego una base ortonormal para S_1 es

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)$$

Conclusión la base ortonormal que diagonaliza a M es:

$$B = B_0 \cup B_1$$

c) $Ker(L)$ y $Im(L)$, desarollando el mínimo número de cálculos. **(7 puntos)**

Solución. Observemos

$$\begin{aligned} A \in Ker(L) &\Leftrightarrow L(A) = \theta \in M_2(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow A = A^t \end{aligned}$$

Así

$$Ker(L) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$$

Para determinar $Im(L)$ observamos que

$$\forall A \in M_2(R) : \quad (L(A))^t \quad = -L(A)$$

Así

$$Im(L) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$$