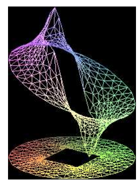
MAT 520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 6. POLINOMIOS.

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Polinomios

Definición: Polinomio

Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$, y sean $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Se llama **función polinomial** con coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ a la función $p : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ que a cada $x \in \mathbb{K}$ le asigna el valor

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad x \neq 0$$

y $p(0) = a_0$.

- Si n es el mayor valor tal que $a_n \neq 0$, entonces se dice que el polinomio p tiene grado n y se escribe $gr(p) = n$.
- Si $n = 0$, entonces $p(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$ es un polinomio constante, $p(x) = 0 \in \mathbb{K}$, se llama polinomio nulo, se denota por θ y se conviene que no tiene grado.

Polinomios

- a_n se llama coeficiente principal de p y a_0 el término libre o independiente de x. Si $a_n = 1$, entonces el polinomio se dice mónico.

- Se denota por $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$. Por ejemplo, $\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \mathcal{P}(\mathbb{R})$ o $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

- Si

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i,$$

entonces

$$p = q \iff \text{igual grado} : m = n \wedge a_i = b_i, \quad i = 0, ..., n.$$

Operaciones con polinomios.

Definición : suma y multiplicación de polinomios.

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ dos polinomios cualesquiera en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

- **Suma**

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{r} c_i x^i,$$

donde $c_i = a_i + b_i$, $i = 0, 1, ..., r$ y $r \leq$máx$\{m, n\}$.

- **Multiplicación**

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{m+n} d_i x^i,$$

donde $d_i = \sum_{k+j=i} a_k b_j$, $i = 0, 1, ..., m+n$.

Propiedades de la suma y el producto en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

$\forall p, q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ se tiene:

S1).	$(p+q)+r = p+(q+r)$.	S2).	$p+q = q+p$.
S3).	$\exists\, \theta \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p+\theta = p$	S4).	$\exists -p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p+(-p) = \theta$
M1).	$(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$	M2).	$p \cdot q = q \cdot p$
M3).	Existe $1 \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p \cdot 1 = p$	D).	$p \cdot (q+r) = p \cdot q + p \cdot r$
N).	$p \cdot q = \theta \Longrightarrow p = \theta$ o $q = \theta$		

Polinomios

Observaciones:

- $\forall x \in \mathbb{K}: \quad \theta(x) = 0 \in \mathbb{K} \wedge 1(x) = 1 \in \mathbb{K}.$

- El **cuociente de polinomios** tiene mucha semejanza con el de los números enteros.
  Si $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, entonces $\frac{p}{q}$ se llama **función racional** de x y en general no es un polinomio.

Polinomios

Teorema.

Si $p, d \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, $gr(p) \geq gr(d)$ y $d \neq \theta$, entonces existen únicos polinomios $q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ llamados respectivamente **cuociente y resto**, tales que:

$$p = qd + r, \quad \text{donde} \quad r = \theta \quad \underline{\vee} \quad gr(r) < gr(d).$$

- **Nota.** Si $r = \theta$, entonces decimos que q **divide a** p.

- Por ejemplo, si $p(x) = 6x + 4x^3 + 5x^4 - x^2$ y $d(x) = x^2 + 1$, entonces $q(x) = 5x^2 + 4x - 6$ y $r(x) = 2x + 6$.

Polinomios

Observaciones:

- En el teorema se tiene que si p es el dividendo y d es el divisor, entonces
$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}.$$
- **Regla de Ruffini.** Si dividimos el polinomio $p(x)$ por $(x-c)$, obtenemos un cuociente
$$q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \cdots + q_1 x + q_0$$
y un resto constante $r(x) = r_0$, con $r_0 = p(c)$.
$p(x)$ es divisible por $(x-c)$, sí y sólo sí $r_0 = 0$, en tal caso
$$p(x) = (x-c)q(x).$$

Polinomios

Definición. Polinomios reducibles e irreducibles.

Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ y $gr(p) \geq 2$ se dice que p es **reducible** en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ si es divisible en $P(\mathbb{K})$, es decir, cuando existen dos polinomios $q, s \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, con $gr(q) \geq 1, gr(s) \geq 1$, tales que $p = qs$. En caso contrario se dice que p es **irreducible o primo** en $\mathcal{P}(K)$.

- Por ejemplo, $p(x) = x^2 + 1$ es reducible en $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ y es irreducible en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y en $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

- Los polinomios de grado 1, $p(x) = a_0 + a_1 x$, son irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

Definición. Sean $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ y $c \in \mathbb{K}$, se dice que c es una **raíz o cero** de p si $p(c) = 0$. Es decir:

$$p(c) = \sum_{i=0}^{n} a_i c^i = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n = 0.$$

Observación. Para calcular $p(c)$ resulta eficaz el algoritmo de Horner:

$$p(c) = a_o + c(a_1 + c(a_2 + \cdots + c(a_{n-1} + ca_n) \cdots))$$

que exige sólo $2n$ operaciones elementales frente a las $\frac{n(n+3)}{2}$ operaciones efectuadas con la sustitución directa.

Polinomios

Teorema del resto.

El resto de dividir $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ por $x - c$ es $p(c)$.

Demostración. Si $p(x) = q(x)(x - c) + r_0$, entonces $p(c) = r_0$.

Observaciones.

- **Teorema del factor.**

$$p(c) = 0 \iff \exists q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p(x) = q(x)(x - c).$$

- Sea $k \in \mathbb{N}$ el mayor entero tal que $(x - c)^k$ divide a $p(x)$. Es decir existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tal que

$$p(x) = q(x)(x - c)^k, \quad x \in \mathbb{K}.$$

Decimos que c es una raíz: **simple**, si $k = 1$ y **de multiplicidad** k, si $k > 1$.

Polinomios

- Si $gr(p) = n$, entonces la suma de la multiplicidad de los ceros de $p(x)$ es menor o igual que n.

Teorema Fundamental del Algebra.

Todo polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ admite una descomposición en factores primos $p(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$, con $c_1, c_2, ..., c_n$ raíces de $p(x)$.

Observaciones.

- Si un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes complejos es igual a cero para más de n valores de x distintos, entonces el polinomio es identicamente nulo.

Polinomios

- Equivalentemente decimos que $p(x)$ tiene a lo más n raíces distintas.
- O bien, decimos que los únicos factores irreducibles de p son polinomios de grado 1.

Teorema. Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\quad gr(p) \geq 2$ y $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Si $p(z) = 0$, entonces $p(\overline{z}) = 0$ y existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que

$$p(x) = [(x-a)^2 + b^2]q(x).$$

Observaciones.

- $$(x-z)(x-\overline{z}) = (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Polinomios

- $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C})$, luego del teorema concluimos:

  a) $(x-z)(x-\overline{z})$ son factores irreducibles de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$.

  b) $(x-a)^2+b^2$ es un factor irreducible, de segundo grado, de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

- **Corolario**. Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), gra(p) > 2$. Si $z = a+bi$ es una raíz de multiplicidad $k, \quad 1 < k \leq gr(p)$, de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, entonces $[(x-a)^2+b^2]^k$ es un factor irreducible de grado $2k$ de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Polinomios

Teorema. Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $gr(p) = n$, entonces

$$p(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r} [(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{n_1} \cdots [(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2]^{n_s},$$

donde:

- $p(a_i) = 0$, $x = a_i$ cero de multiplicidad $m_i, i = 1, ..., r$.
- $p(\alpha_k + i\beta_k) = 0$, $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ cero de multiplicidad $n_k, k = 1, ..., s$.
- $m_1 + m_2 + \cdots + m_r + 2n_1 + 2n_2 + \cdots 2n_s = n$.

Polinomios

Criterios de localización de raíces.

- Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene grado impar, entonces p tiene al menos una raíz.
- Si $a + \sqrt{b}$ es raíz de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, con $a, b \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b}$ es irracional, entonces $a - \sqrt{b}$ tambien es raíz de p.
- **Regla de Descartes.** El número de raíces reales positivas (negativas) de un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es menor o igual que el número de cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$ (de $p(-x)$) o difiere de él en un número par.

  Por ejemplo, $p(x) = x^4 - x^3 - 2x - 1$ tiene una raíz real positiva, una negativa y dos complejas conjugadas.

Polinomios

- Las raíces racionales de un polinomio p con coeficientes racionales son las mismas que las raíces del polinomio $q = M \cdot p$, con M el mínimo común multiplo de los denominadores de los coeficientes de p.

- Por ejemplo, las raíces de $p(x) = 3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + 1$ y de $q(x) = 30p(x) = 90x^4 - 15x^3 + 20x^2 - 18x + 30$ son las mismas.

Teorema. Raíces racionales .

Si $\frac{p}{q}$ es una raíz de $z(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y con $p, q \in \mathbb{Z}$, primos relativos, $q \neq 0$, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

Polinomios

Corolario .

Si p es un polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$, entonces sus posibles raíces racionales son los enteros divisores de su término libre.

Localización de raíces de un polinomio con coeficientes reales .

Si $c \in \mathbb{C}$ es raíz de $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, entonces:

$$\frac{|a_0|}{\alpha + |a_0|} \leq |c| \leq \frac{\beta + |a_n|}{|a_n|},$$

donde:

$\alpha =$máx$\{|a_n|, ..., |a_1|\}$, $\quad \beta =$máx$\{|a_{n-1}|, ..., |a_0|\}$.

Ejemplo, si $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, entonces $\frac{1}{2} \leq |c| \leq 4$.

Descomposición en suma de Fracciones Parciales.

Si $p,q\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, con $gr(p)<gr(q), q\neq\theta$, entonces la función racional $\frac{p}{q}$ puede descomponerse en sumas de fracciones cuyos denominadores son polinomios obtenidos de la factorización de q en polinomios irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, de la siguiente forma:

- I) por cada factor lineal repetido n veces, $(ax+b)^n, \quad n\in\mathbb{N}$, se obtienen los sumandos:

$$\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

- II) por cada factor cuadrático irreducible en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, repetido m veces $(ax^2+bx+c)^m$, se obtienen los sumandos:

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}.$$

Observación.

Si $gr(p)\geq gr(q)$, entonces podemos calcular el cuociente Q y el resto R de la división $\frac{p}{q}$, tales que:

$$\frac{p}{q}=Q+\frac{R}{q},\quad gr(R)<gr(q),$$

y aplicar el procedimiento anterior a $\frac{R}{q}$.