Problemas de Valores de Contorno

I. El método del shooting

Consideremos el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x,y,y') \qquad x \in (a,b)\,, \\ y(a) &= \alpha \qquad y(b) = \beta\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Para resolver este problema, el primer método que damos es el método del Shooting. Para esto, consideremos $z \in \mathbb{R}$ y el PVI asociado

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x,y,y') \qquad x \in (a,b)\,, \\ y(a) &= \alpha \qquad y'(a) = z\,. \end{aligned} \tag{2}$$

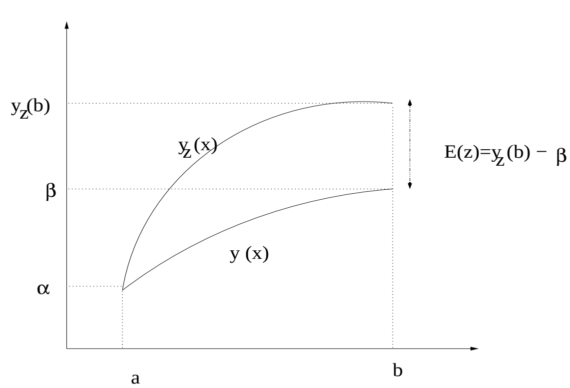
Denotemos por y_z la solución del PVI (2).

La idea del método numérico que presentaremos es encontrar $\overline{z}$ tal que $y_{\overline{z}}(b) = \beta$.

Para esto, definamos la función del error

$$E(z) := y_z(b) - \beta \quad \text{apra } z \in \mathbb{R}\,.$$

Vemos que si $E(z) = 0$, entonces $y_z(b) = \beta$, y por lo tanto y_z sería la solución buscada.



Lo que queremos es encontrar $\overline{z}$ tal que $E(\overline{z}) = 0$, es decir, encontrar una raíz para la ecuación (no lineal) $E(z) = 0$. Para resolver esta ecuación, podemos aplicar el método de Newton-Raphson

$$z_{k+1} = z_k - \frac{E(z_k)}{E'(z_k)} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots . \tag{3}$$

Como calcular la derivada de la función E puede ser complicado, en general utilizamos el método de la secante, es decir, aproximamos la derivada de la siguiente manera

$$E'(z_k) \approx \frac{E(z_k) - E(z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}},$$

llegando al método

$$z_{k+1} = z_k - \frac{E(z_k)(z_k - z_{k-1})}{E(z_k) - E(z_{k-1})} \qquad k = 1, 2 \ldots . \tag{4}$$

Resumiendo: el método Shooting se puede dar como el siguiente algoritmo:

i. Dar un par de estimaciones iniciales para $\overline{z}$: z_0 y z_1.

ii. Para $k = 2, 3, \ldots$, Resolver el PVI (2), y calcular el error $E(z_K)$.

iii. Si el error es suficientemente pequeño, entonces termine, la solución y_{z_K} es la correcta, si no, calcule z_{k+1} utilizando el método (4), y vuelva a ii.

Ejemplo

Se lanza una piedra de masa 1[kg] verticalmente hacia arriba, sobre la piedra actuan la fuerza de gravedad y una fuerza de roce igual a 0.1 la velocidad de la piedra. ¿ Cuál debe ser la velocidad inicial para que al cabo de 3[s] la altura de la piedra sea exactamente de 50[m]?.

Solución

Sea h la altura de la piedra con respecto al tiempo. El P.V.C. a resolver es:

$$\begin{array}{l} \ddot{h} = -g - 0{,}1\dot{h}, \quad t \in [0, 3] \\ h(0) = 0, \quad h(3) = 50 \end{array},$$

donde $g = 9{,}8[\mathrm{m/s^2}]$.
El P.V.I. asociado es:

$$\begin{array}{l} \ddot{h} = -g - 0{,}1\dot{h}, \quad t \in [0,3] \\ h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = z \end{array} \tag{5}$$

cuya solución analítica en función de z puede calcularse, a saber:

$$h_z(t) = -(10z + 100g)e^{-0{,}1t} + 10z + 100g - 10gt.$$

Para tener $h_z(3) = 50$ se tiene que $z = 34{,}7254$.
Cuando la solución analítica de (5) no es conocida debemos emplear un método numérico.

Supongamos que la fuerza de roce es no lineal, por ejemplo:

$$\begin{array}{l} \ddot{h} = -g - 0{,}01\dot{h}^2, \quad t \in [0,3] \\ h(0) = 0, \quad h(3) = 50 \end{array},$$

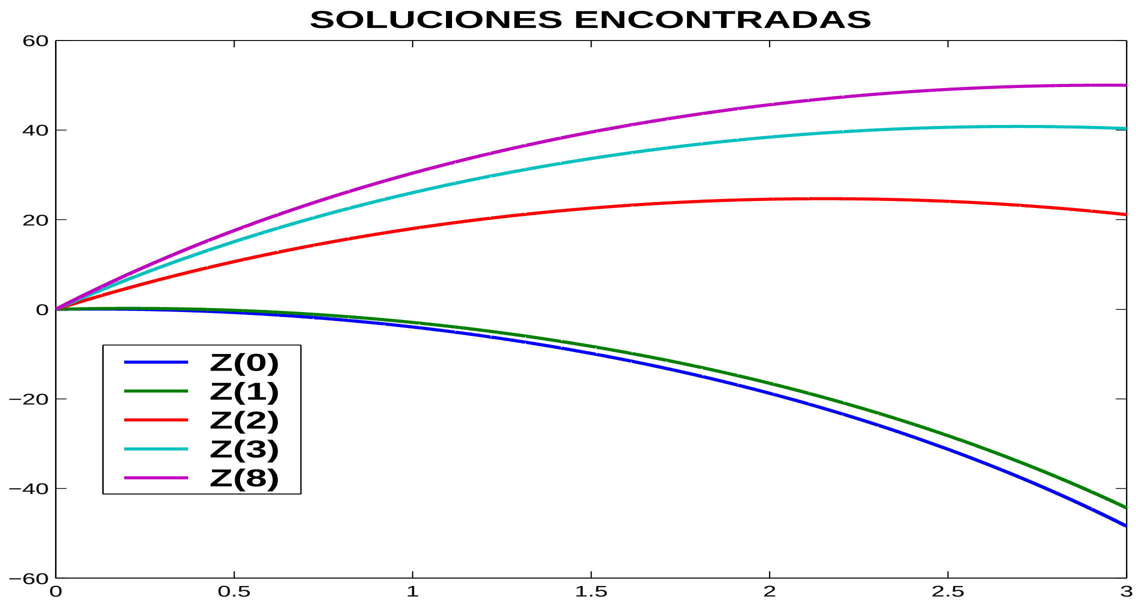
y apliquemos el algoritmo (4) a

$$\begin{array}{l} \ddot{h} = -g - 0{,}01\dot{h}^2, \quad t \in [0,3] \\ h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = z_0 \end{array}, \tag{6}$$

con $z_0 = 1$ y $z_1 = 2$. Usando para resolver el P.V.I. el comando **ode45** se obtiene $\dot{h}(0) = 41{,}04838695387610$.

La siguiente tabla muestra la sucesión de valores encontrados

z_0	1.00000000000000
z_1	2.00000000000000
z_2	25.01244663117843
z_3	35.16361984016986
z_4	40.26329681274265
z_5	41.01161056535348
z_6	41.04816073259043
z_7	41.04838688882515
z_8	41.04838695387610



II. Métodos de diferencias Finitas

Supongamos que queremos resolver el problema

$$\begin{aligned} -y'' + y' + y &= f(x) \qquad \text{en } (0,1)\,, \\ y(0) &= \alpha\,, \\ y(1) &= \beta\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Supondremos que el problema tiene una única solución, la cual es al menos cuatro veces diferenciable.

El método de diferencias finitas se basa en las siguientes aproximaciones para las derivadas de y:

$$\begin{aligned} y'(x) &\approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}\,, \\ y''(x) &\approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}\,, \end{aligned}$$

las cuales son válidas si h es suficientemente pequeño.

En efecto, desarrollando en serie de Taylor se tiene que

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + y'(x)h + \frac{h^2}{2}y''(x) + \dots \\ y(x-h) &= y(x) - y'(x)h + \frac{h^2}{2}y''(x) + \dots \end{aligned}$$

y sumando se tiene

$$y(x+h)+y(x-h) \;=\; 2y(x) \;+\; h^2y''(x) \;+\; O(h^4)\,,$$

de donde

$$y''(x) \;=\; \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2} \;+\; O(h^2)\,.$$

Por otro lado, restando se tiene

$$y(x+h)-y(x-h) \;=\; 2hy'(x) \;+\; O(h^3)\,,$$

y de aquí

$$y''(x) \;=\; \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h} \;+\; O(h^2)\,.$$

Observación: Las aproximaciones de las derivadas que se presentaron reciben el nombre de diferencias centradas.

Consideremos una división del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud h, y sea $x_0=a$, $x_i=x_0+ih$ y $x_n=b$. Vemos entonces que las aproximaciones de y' y y'' en los nodos x_i pueden escribirse

$$\begin{aligned} y'(x_i) &\approx \frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}\,, \\ y''(x_i) &\approx \frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}\,, \end{aligned}$$

para $i=1,\ldots,n-1$.

Denotando $y_i\approx y(x_i)$, el problema diferencial se transforma en

$$-\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} \;+\; \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} \;+\; y_i \;=\; f(x_i) \quad i=1,\ldots,n-1\,. \tag{8}$$

Vemos así que redujimos la resolución del problema a un sistema de ecuaciones. En efecto, multiplicando por h^2 las ecuaciones (8) pueden ser reescritas como

$$(-1-\frac{h}{2})y_{i-1} \;+\; (2+h^2)\,y_i \;+\; (-1+\frac{h}{2})y_{i+1} \;=\; h^2 f_i\,, \quad i=1,\ldots,n-1\,,$$

o, definiendo

$$a_i \;:=\; -1-\frac{h}{2}\;,\; b_i \;:=\; 2+h^2\;,\; c_i \;:=\; -1+\frac{h}{2} \quad i=1,\ldots,n-1\,,$$

llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1 - a_1\alpha \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-2} \\ f_{n-1} - c_{n-1}\beta \end{bmatrix}.$$

Teorema: *La matriz del sistema lineal obtenido al aplicar el método de diferencias finitas es diagonal dominante.*

III. Métodos de Elementos Finitos

Supongamos que queremos resolver el PVC siguiente:

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \qquad \text{en } I := (0,1)\,, \\ u(0) &= u(1) = 0\,. \end{aligned} \tag{9}$$

La idea del método de elementos finitos (MEF) es de multiplicar (9) por una función v tal que $v(0) = v(1) = 0$, e integrar sobre I, de donde se llega a

$$-\int_0^1 u'' v dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 fv dx\,. \tag{10}$$

Integrando por partes el primer término vemos que

$$-\int_0^1 u'' v dx = \int_0^1 u'v' dx - u'v\Big|_0^1 = \int_0^1 u'v' dx\,,$$

de donde (10) se transforma en

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 fv dx \qquad \forall\, v \text{ tal que } v(0) = v(1) = 0\,. \tag{11}$$

Observación: El problema (11) se conoce como formulación débil del problema (9).

Ahora, para dar un método numérico, las funciones u y v se aproximan por funciones que pertenecen a un espacio de dimensión finita (llamado espacio discreto), el cual se construye de la siguiente forma: sea $x_0, x_1, \dots, x_n$ una partición regular de $(0,1)$, sea $h = 1/n$, de donde $x_0 = 0$, $x_i = x_0 + i*h = i*h$ y $x_n = 1$. El espacio discreto que utilizaremos está dado por

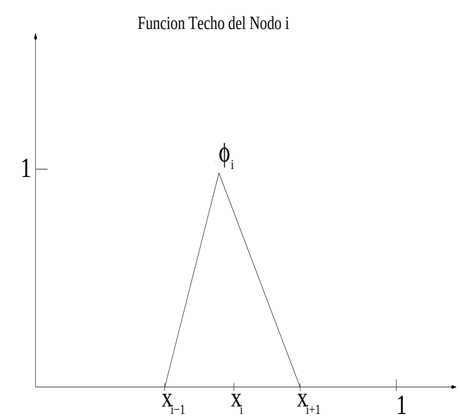
$$V_h := \{v \in C(I) : v\Big|_{[x_i,x_{i+1}]} \in P_1 \, \forall i, \; v(0) = v(1) = 0\}. \tag{12}$$

Con este espacio, damos la formulación débil discreta (el Método de Elementos Finitos) de nuestro problema que es: Hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$\int_0^1 u_h' v_h' dx + \int_0^1 u_h v_h dx = \int_0^1 f v_h dx \qquad \forall \, v_h \in V_h \, . \tag{13}$$

Ahora, las funciones de base naturales para el espacio V_h son las llamadas funciones techo, $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$, dadas por

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{i-1}) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{1}{h}(x_{i+1} - x) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \, . \end{cases} \tag{14}$$



Con respecto a esta base, la solución discreta $u_h \in V_h$ puede representarse como

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \phi_i(x) \, . \tag{15}$$

De la misma forma, por la linealidad del problema, (13) es equivalente a

$$\int_0^1 u_h' \phi_i' dx + \int_0^1 u_h \phi_i dx = \int_0^1 f \phi_i dx \qquad \forall \, i \in \{1, \ldots, n-1\} \, . \tag{16}$$

Así, vemos que de (15) y (16), la formulación débil discreta se reduce a resolver el sistema de ecuaciones (con matriz simétrica)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

donde

$$\begin{aligned} a_i &= \int_0^1 (\phi_i')^2 + (\phi_i)^2 \, dx \qquad i = 1, \dots, n-1\,, \\ b_i &= \int_0^1 \phi_i' \cdot \phi_{i+1}' + \phi_i \cdot \phi_{i+1} \, dx \qquad i = 1, \dots, n-2\,, \\ f_i &= \int_0^1 f \phi_i dx \qquad i = 1, \dots, n-1\,. \end{aligned}$$

Teorema: *La matriz asociada al problema discreto es simétrica y definida positiva.*

Para medir el error, damos la siguiente norma para una función:

$$\|v\| := \left\{ \int_0^1 v^2 dx + \int_0^1 (v')^2 dx \right\}^{1/2} . \tag{18}$$

Teorema: *Sea $e := u - u_h$ el error, y supongamos que la solución u del problema (9) es dos veces derivable en I. Se tiene entonces la siguiente estimación del error*

$$\|e\| \le C\, h \max_{0 \le y \le 1} |u''(y)|\,,$$

donde C es una constante positiva independiente de h.

Observación: Si le aplicamos el método de diferencias finitas al problema que acabamos de tratar, llegaremos al mismo sistema de ecuaciones. Las diferencias entre los dos métodos se dan en problemas en dimensión 2, y a nivel teórico.