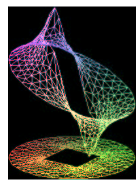
520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Segundo Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 13.

VALORES Y VECTORES PROPIOS

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Valores y vectores propios

Notación: Por V se denota un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y por $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal.

Definición: Valor propio. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *valor propio de T* si existe $v \in V$, $v \neq \theta$, tal que:

$$Tv = \lambda v.$$

Si λ es un valor propio de T, a cada $v \in V$, $v \neq \theta$, que satisface la igualdad anterior se llama un *vector propio de T asociado a λ.*

Observaciones:

- Los valores propios también se llaman *valores característicos o valores espectrales de T.*

Valores y vectores propios

Observaciones:

- El conjunto $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda$ es valor propio de $T\}$ se llama el *espectro de T*.
- Para λ valor propio de T se define $S_\lambda := \{v \in V : \; Tv = \lambda v\}$.

Teorema Si $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de T, entonces

$$S_\lambda = Ker(T - \lambda I).$$

Observaciones:

- $\theta \in S_\lambda$, pero θ *no es* un vector propio de T.
- S_λ se llama *espacio propio asociado a λ*.

Valores y vectores propios

Teorema Si V tiene dimensión finita y B es una base para V, entonces

$$\lambda \in \sigma(T) \iff Det([T - \lambda I]_B) = 0.$$

Definición: Valor propio de matriz. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *valor propio de A* si existe $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq \theta$, tal que:

$$Ax = \lambda x.$$

Cada $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq \theta$, que satisface la igualdad anterior se llama un *vector propio de A asociado a λ.*

Valores y vectores propios

Notaciones:

- $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda$ es valor propio de A$\}$ (espectro de A)
- $S_\lambda := \{x \in \mathbb{C}^n : \; Ax = \lambda x\}$.

Teorema Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

- $$\lambda \in \sigma(A) \iff Det(A - \lambda I) = 0$$
- $$S_\lambda = Ker(A - \lambda I).$$

Observaciones:

- La expresión $Det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n en la variable λ, se llama *polinomio característico de A* y $Det(A - \lambda I) = 0$ es la *ecuación característica de A*.
- Cada matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tiene n valores propios en $\mathbb{C}$ (contando su multiplicidad).

Valores y vectores propios

Teorema Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ son similares, entonces $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Teorema Si V tiene dimensión finita y B es cualquier base de V, entonces

- $\lambda \in \sigma(T) \iff \lambda \in \sigma(\ [T]_B\ ).$
- $\forall v \in S_\lambda(T):\ Tv = \lambda v \iff [T]_B[v]_B = \lambda[v]_B.$

Valores y vectores propios

Ejemplo El operador $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$ definido por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$$

tiene como matriz asociada (respecto a la base canónica de $\mathbb{K}^2$) a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica de A es $p(\lambda) := Det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0$ y tiene raices $\lambda_1 = -i$ y $\lambda_2 = i$, luego $\sigma(A) = \{-i, i\}$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces λ_1 y λ_2 son también los valores propios T.
Sin embargo, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces, T no tiene valores propios.

Valores y vectores propios

Definición Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sus valores propios diferentes tales que

$$Det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$$

donde $r_1 + \cdots + r_k = n$. Para cada $i = 1, \ldots, k$ se definen la *multiplicidad algebraica* de λ_i por r_i y la *multiplicidad geométrica* de λ_i por $g_i := dim(S_{\lambda_i})$.

Observaciones Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

- Para cada $\lambda_i \in \sigma(A)$, $g_i \leq r_i$
- $Det(A) = \lambda_1^{r_1} \cdots \lambda_k^{r_k}$
- $\sigma(A^t) = \sigma(A)$
- A es inversible $\iff 0 \notin \sigma(A)$
- Si A es inversible, entonces $\lambda \in \sigma(A) \iff \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1})$

Valores y vectores propios

Teorema Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios de A diferentes. Si $x_1, \ldots, x_k$ son vectores propios correspondientes, entonces $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es linealmente independiente.

Teorema Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica. Entonces:

- los valores propios de A son reales
- vectores propios asociados a valores propios diferentes son ortogonales
- existe una base para $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A

Observación

El teorema anterior vale también para matrices complejas hermitianas, es decir, que verifican $A = \bar{A}^t$.

Valores y vectores propios

Definición Sea V un espacio de dimensión finita. Un operador lineal $T : V \longrightarrow V$ se dice *diagonalizable* si existe una base B para V tal que $[T]_B$ sea diagonal.

Teorema Sean V un espacio de dimensión finita n. Si $T : V \longrightarrow V$ es un operador lineal entonces,

- los vectores propios de T asociados a valores propios diferentes son linealmente independientes.
- Si T tiene n valores propios diferentes, T es diagonalizable.

Valores y vectores propios

Teorema Sea V un espacio de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los valores propios de T diferentes, B_i una base para el espacio propio S_{λ_i} asociado a λ_i. Entonces $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ es una base para $W := S_{\lambda_1} + \cdots + S_{\lambda_k}$.

Teorema Sea V un espacio de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los valores propios de T diferentes y S_{λ_i} el espacio propio asociado a λ_i. Son equivalentes:

- T es diagonalizable
- Para cada valor propio, las multiplicidades algebraica y geométrica son iguales
- $dim(V) = dim(S_{\lambda_1}) + \cdots + dim(S_{\lambda_k})$
- V tiene una base formada por vectores propios de T

Valores y vectores propios

Observación Sea V un espacio de dimensión finita.

Si B es una base de V formada por vectores propios de T, entonces $[T]_B = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ para $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de T.

Definición Una matriz A de orden n se dice *diagonalizable* si es similar a una matriz diagonal.

Observación Resultados análogos a los vistos para un operador diagonalizable valen para matrices diagonalizables. A modo de ejemplo considere los dos teoremas que siguen.

Valores y vectores propios

Teorema Una matriz A de orden n es diagonalizable si, y sólo si, tiene n vectores propios linealmente independientes. En tal caso, la forma diagonal de A es $D := diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

Teorema Si una matriz A de orden n tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.