UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Cálculo Numérico (521230), 2017-2

Pauta Evaluación 1

Problema 1

1.1) **[10 pts.]** Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 4, \\ x^2 + (y-2)^2 &= 4. \end{cases}$$

Realice dos iteraciones del Método de Newton para calcular una aproximación de x e y. Utilice $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$ como valores iniciales.

Solución:

Sea $F(x,y) := \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ x^2 + (y-2)^2 - 4 \end{bmatrix}$. Su matriz Jacobiana es $J(x,y) := \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 2(y-2) \end{bmatrix}$. **[2 puntos]**

- Primera iteración:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 2x_0 & 2(y_0-2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_0^2 + y_0^2 - 4 \\ x_0^2 + (y_0-2)^2 - 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[4 puntos]

- Segunda iteración:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 \\ 2x_1 & 2(y_1-2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 - 4 \\ x_1^2 + (y_1-2)^2 - 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[4 puntos]

1.2) **[10 pts.]** Sea x la solución de la ecuación $f(x) = 0$. Se utiliza el siguiente algoritmo para encontrar una aproximación del valor de x:

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0, 1, ...,$$

donde x_0 es tal que $f'(x_0) \neq 0$ y m es un número dado. Considere $f(x) = (x-1)^4$.

a) Para $m = 2$ y $x_0 = 5/9$, realice dos iteraciones del algoritmo. Además, para $i = 0, 1, 2$, calcule el error $|x - x_i|$.

b) Si $x_0 = 1$, ¿qué pasa con el algoritmo?.

c) ¿Qué puede decir de la convergencia del algoritmo si $m = 4$?.

Solución:

En este caso $f(x) = (x-1)^4$, $f'(x) = 4(x-1)^3$ y $x = 1$ (de multiplicidad cuatro). El algoritmo queda de la siguiente forma:

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{(x_i-1)^4}{4(x_i-1)^3} = x_i - m\frac{(x_i-1)}{4}, \quad i = 0, 1, ...$$

a) Para $m = 2$ y $x_0 = 5/9$ se tiene que:

- $x_1 = x_0 - 2\dfrac{(x_0-1)}{4} = \dfrac{5}{9} - 2\dfrac{(5/9-1)}{4} = \dfrac{5}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}.$
- $x_2 = x_1 - 2\dfrac{(x_1-1)}{4} = \dfrac{7}{9} - 2\dfrac{(7/9-1)}{4} = \dfrac{7}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}.$ **[3 puntos]**

Además, $|x - x_0| = 4/9$, $|x - x_1| = 2/9$ y $|x - x_2| = 1/9$. **[2 puntos]**

b) Si $x_0 = 1$, entonces $f'(x_0) = 0$, por lo que no se puede utilizar el algoritmo. Sin embargo, en este caso $f(x_0) = f(1) = 0$, es decir, $x_0 = 1$ es la solución buscada. **[2 puntos]**

c) Si $m = 4$ obtenemos que $x_{i+1} = x_i - 4\dfrac{(x_i-1)}{4} = 1$. Es decir, el algoritmo entrega la solución exacta en la primera iteración para cualquier $x_0 \neq 1$. Si $x_0 = 1$, vimos en la pregunta anterior que x_0 es la solución buscada. **[3 puntos]**

Problema 2

Considere los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ y la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 + cx^3 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 + x + x^3 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

2.1) **[10 puntos]** Determine el valor de los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de tal forma que f sea una spline cúbica. ¿Es una spline cúbica natural?.

Solución: Para que f sea una spline cúbica, f debe ser de clase $\mathcal{C}^2([0,2])$ y un polinomio de grado a lo más tres en cada tramo. **[1 punto]**

En consecuencia, basta que f, f' y f'' sean continuas en $x = 1$. Definiendo

$$\begin{array}{ll} (\forall x \in [0,1]) & f_1(x) = ax + bx^2 + cx^3 \\ (\forall x \in [1,2]) & f_2(x) = 1 + x + x^3 \end{array}$$

se tiene que

$$\begin{array}{lll} (\forall x \in (0,1)) & f_1'(x) = a + 2bx + 3cx^2 & f_1''(x) = 2b + 6cx \\ (\forall x \in (0,2)) & f_2'(x) = 1 + 3x^2 & f_2''(x) = 6x \end{array}$$

Luego,

$$\lim_{x\to 1^-} f_1(x) = \lim_{x\to 1^+} f_2(x) \Leftrightarrow a + b + c = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f_1'(x) = \lim_{x\to 1^+} f_2'(x) \Leftrightarrow a + 2b + 3c = 4$$

$$\lim_{x\to 1^-} f_1''(x) = \lim_{x\to 1^+} f_2''(x) \Leftrightarrow 2b + 6c = 6$$

resultando el siguiente sistema de ecuaciones **[4 puntos]**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

cuya solución es $a = 4$, $b = -3$ y $c = 2$. **[3 puntos]**

Dado que $\lim_{x\to 2} f_2''(x) = 12 \neq 0$, entonces f no es una spline cúbica natural. **[2 puntos]**

2.2) **[10 puntos]** Ajuste por mínimos cuadrados los puntos $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ y $(2, f(2))$ por un polinomio de grado 1. Determine la norma 2 del residuo resultante.

Solución:

Los puntos a ajustar son $(0,0)$, $(1,3)$ y $(2,11)$. **[2 puntos]**

Si el modelo a ajustar tiene la forma $y = mx + n$, el sistema de ecuaciones resultante es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix},$$

el cual se debe resolver en el sentido de mínimos cuadrados. **[3 puntos]**

Si la matriz asociada es $\boldsymbol{A}$, el vector columna es $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{x}$ es el vector de incógnitas, el problema de mínimos cuadrados se reduce a resolver $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 14 \end{pmatrix}$$

y su solución es $\boldsymbol{x} = \left(\frac{11}{2}, -\frac{5}{6}\right)^T$. Así, la curva que ajusta los puntos es $y = \frac{11}{2}x - \frac{5}{6}$. **[3 puntos]**

La norma del residuo es

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11/2 \\ -5/6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -5/6 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

[2 puntos]

Problema 3

3.1) **[12 puntos]** Aproxime el valor de las siguientes integrales con los métodos numéricos indicados:

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(5\pi x)\,dx$ usando la regla del punto medio compuesta con tamaño de paso $h = 1/10$.

b) $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(xy)\,dy\,dx$ usando la regla del trapecio elemental en la variable x y la regla de Simpson elemental en la variable y.

Solución: Para el tamaño de paso $h = 1/10$ el intervalo $[0, 1]$ se divide en 10 subintervalos, cada uno de estos limitados por los nodos:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/10, \quad \ldots, \quad x_9 = 9/10, \quad x_{10} = 1.$$

Los puntos medios de cada subintervalo están dados por:

$$\hat{x}_i = \frac{2i-1}{20}, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, 10.$$

Luego, mediante la regla del punto medio compuesta tenemos:

$$\begin{aligned}
I_1 &\approx h\sum_{i=1}^{10} \operatorname{sen}(5\pi\hat{x}_i) = h\sum_{i=1}^{10} \operatorname{sen}\left(5\pi\frac{2i-1}{20}\right) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} \operatorname{sen}\left(\frac{(2i-1)\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{10}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{10}
\end{aligned}$$

[6 puntos]

Haciendo $F(x) = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(xy)\,dy$ podemos aplicar la regla del trapecio a la integral:

$$I_2 = \int_1^2 F(x)\,dx \approx \frac{2-1}{2}[F(1) + F(2)].$$

[1 punto]

Luego, mediante la regla de Simpson tenemos

$$F(1) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(y)\, dy \approx \frac{\pi/2 - (-\pi/2)}{6} \left[\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + 4\cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2\pi}{3}. \qquad \textbf{[2 puntos]}$$

$$F(2) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2y)\, dy \approx \frac{\pi/2 - (-\pi/2)}{6} \left[\cos\left(2\frac{-\pi}{2}\right) + 4\cos(0) + \cos\left(2\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{3}. \qquad \textbf{[2 puntos]}$$

Finalmente:

$$I_2 \approx \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right] = \frac{\pi}{2}. \qquad \textbf{[1 punto]}$$

3.2) **[8 puntos]** Encuentre los parámetros w_1, w_2 y w_3 de modo que la regla de integración

$$\int_0^2 f(x)\, dx \approx w_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + w_2 f(1) + w_3 f\left(\frac{3}{2}\right) \qquad (\bigstar)$$

sea exacta por lo menos para polinomios de grado menor o igual a dos. ¿Hasta qué grado la regla ($\bigstar$) integra de manera exacta un polinomio?.

Como ($\bigstar$) es exacta para polinomios de grado menor o igual a 2, se debe cumplir la igualdad para los elementos de la base canónica de este espacio.

- Para $f(x) = 1$

$$w_1 + w_2 + w_3 = \int_0^2 1\, dx = 2.$$

- Para $f(x) = x$

$$\frac{1}{2}w_1 + w_2 + \frac{3}{2}w_3 = \int_0^2 x\, dx = 2.$$

- Para $f(x) = x^2$

$$\frac{1}{4}w_1 + w_2 + \frac{9}{4}w_3 = \int_0^2 x\, dx = \frac{8}{3}.$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema de ecuaciones cuya solución es:

$$w_1 = \frac{4}{3}, \qquad w_2 = -\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad w_3 = \frac{4}{3}.$$

Así,

$$\int_0^2 f(x)\, dx \approx \frac{4}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} f(1) + \frac{4}{3} f\left(\frac{3}{2}\right). \qquad \textbf{[6 puntos]}$$

Ahora, note que:

$$\int_0^2 x^3\, dx = 4 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{2}{3}(1)^3 + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3,$$

pero

$$\int_0^2 x^4\, dx = \frac{32}{5} \neq \frac{37}{6} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{2}{3}(1)^4 + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4.$$

Así, de lo anterior y debido a la linealidad de la integral, se concluye que la regla obtenida integra de forma exacta polinomios $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ de grado menor o igual a tres. **[2 puntos]**