UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 1
ALGEBRA II (520236)
ALGEBRA LINEAL (520131)

1.- Considere una matriz de 4x3

a) Obtenga las matrices elementales de las operaciones elementales de filas: $i) -2R_2 \longrightarrow R_2$, $ii) \, 3R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$, $iii) \, R_2 \longleftrightarrow R_3$ (0.5 puntos).

b) Si a la matriz A se le realizan consecutivamente las operaciones $i)$, $ii)$ y $iii)$ se obtiene la matriz (1.0 puntos)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 11 & -6 \\ -2 & 0 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

usando las matrices elementales inversas, obtenga la matriz A (1.0 puntos).

Solución

a) Las matrices elemetales de las tres operaciones elementales de filas son:

i) Sea la operación $e_1 : -2R_2 \longrightarrow R_2$, entonces la matriz elemental correspondiente es:

$$E_1 = e_1(I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Sea la operación $e_2 : 3R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$, entonces la matriz elemental correspondiente es:

$$E_2 = e_2(I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Sea la operación $e_3 : R_2 \longleftrightarrow R_3$, entonces la matriz elemental correspondiente es:

$$E_3 = e_3(I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si se realizan a la matriz A, consecutivamente las tres operaciones elementales de filas anteriores, entonces se obtiene la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 11 & -6 \\ -2 & 0 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

lo que matricialmente corresponde a:

$$E_3 E_2 E_1 A = B$$

donde las matrices E_1, E_2 y E_3 son las matrices elementales obtenidas en a). Ahora despejando A, se tiene:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} B.$$

Si $e_1^{'}$ es la operación elemental inversa de e_1, entonces $e_1^{'} : -\frac{1}{2} R_2 \to R_2$, de donde la matriz elemental correspondiente es

$$E_1^{-1} = e_1^{'}(I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $e_2^{'}$ es la operación elemental inversa de e_2, entonces $e_2^{'}$: $-R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$, de donde la matriz elemental correspondiente es

$$E_2^{-1} = e_2^{'}(I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $e_3^{'}$ es la operación elemental inversa de e_3, entonces $e_3^{'}$: $R_3 \longleftrightarrow R_2$, de donde la matriz elemental correspondiente es

$$E_3^{-1} = e_3^{'}(I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo los productos correspondientes para la obtención de la matriz A se tiene:

$$E_3^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -6 \\ 6 & 11 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_2^{-1}E_3^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = E_1^{1}E_2^{-1}E_3^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

****

2.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Verificar que A tiene inversa (0.3 puntos).

b) A través de la eliminación gaussiana, obtenga A^{-1} (0.6 puntos).

c) Escriba el producto de matrices elementales que determina la matriz A (0.6 puntos).

<u>Solución</u>

a) Se sabe que A tiene inversa sí y sólo sí $det(A) \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 3 = 2$$

Con lo cual $det(A) \neq 0$ y por lo tanto A tiene inversa.

b) Aplicando eliminación gaussiana para obtener la matriz inversa se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_1 + R_2 \longrightarrow R_2 \\ -R_1 + R_3 \longrightarrow R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} -2R_2+R_1 \longrightarrow R_1 \\ 2R_2+R_3 \longrightarrow R_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}R_3 \longrightarrow R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} R_3+R_1 \longrightarrow R_1 \\ -R_3+R_2 \longrightarrow R_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De donde:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Se realiza el proceso anterior con la idea de, mediante operaciones elementales de filas, pasar de la matriz A a la matriz identidad I; lo que matricialmente se escribe como:

$$I = E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A$$

de donde:

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}E_7^{-1}$$

Ahora las operaciones realizadas fueron:

$e_1 : -R_1+R_2 \longrightarrow R_2$, $e_2 : -R_1+R_3 \longrightarrow R_3$, $e_3 : -2R_2+R_1 \longrightarrow R_1$,

$e_4 : 2R_2+R_3 \longrightarrow R_3$, $e_5 : \frac{1}{2}R_3 \longrightarrow R_3$, $e_6 : R_3+R_1 \longrightarrow R_1$,

$e_7 : -R_3+R_2 \longrightarrow R_2$

y sus correspondientes operaciones elementales inversas son :

$e_1^{'} : R_1+R_2 \longrightarrow R_2$, $e_2^{'} : R_1+R_3 \longrightarrow R_3$, $e_3^{'} : 2R_2+R_1 \longrightarrow R_1$,

$e_4^{'} : -2R_2+R_3 \longrightarrow R_3$, $e_5^{'} : 2R_3 \longrightarrow R_3$, $e_6^{'} : -R_3+R_1 \longrightarrow R_1$,

$e_7^{'} : R_3+R_2 \longrightarrow R_2$

Luego, las matrices elemetales inversas asociadas son:

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

****

3.- Sea El sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rrrrrcr} & x_2 & -x_3 & & -2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +6x_4 & -2x_5 & = & -1 \\ x_1 & -2x_2 & 3x_3 & +3x_4 & -3x_5 & = & 0 \\ x_1 & & +x_3 & 3x_4 & +x_5 & = & 2 \end{array}$$

Usando el concepto de rango, verifique que el sistema no tiene solución.

Solución: Considerando el sistema en su forma matricial, se tiene que la matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & : & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 & -2 & : & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 & -3 & : & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & : & 2 \end{pmatrix}$$

Usando operaciones elementales de filas para transformar esta matriz en una matriz escalonada se tiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & : & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 & -2 & : & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 & -3 & : & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & : & 2 \end{pmatrix} R_1 \longleftrightarrow R_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -3 & : & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 6 & -2 & : & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & : & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & : & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \longrightarrow R_2 \\ -R_1 + R_4 \longrightarrow R_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -3 & : & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 & : & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & : & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 & : & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}R_2 \longrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -3 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & : & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & : & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 & : & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -R_2+R_3 \longrightarrow R_3 \\ -2R_2+R_4 \longrightarrow R_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & -2 & 3 & 3 & -3 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & : & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 3 \end{array}\right)$$

De acuerdo a la matriz escalonada resultante se ve que $ran(A) = 2$ (no considerando la última columna). Ahora si consideramos la última columna podemos tener la submatriz:

$$\left(\begin{array}{rrr} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

con lo cual claramente tiene determinante igual a 9, de donde $ran(A:b) = 3$. Así $ran(A) \neq ran(A:b)$, con lo cual el sistema no puede tener solución.

****

4.- Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & -4x_2 & -2x_3 & = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & \alpha \end{array}$$

¿Para qué valores de α el sistema tiene solución?. Obtenga el conjunto solución del sistema para dichos valores.

<u>Solución</u> La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{rrrcr} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 2 & -1 & 3 & : & 5 \\ 3 & -4 & -2 & : & 2 \\ 1 & 3 & -2 & : & \alpha \end{array}\right)$$

Llevando esta matriz a una matriz escalonada se tiene:

$$\left(\begin{array}{rrrcr} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 2 & -1 & 3 & : & 5 \\ 3 & -4 & -2 & : & 2 \\ 1 & 3 & -2 & : & \alpha \end{array}\right) \begin{array}{l} -2R_1+R_2 \longrightarrow R_2 \\ -3R_1+R_3 \longrightarrow R_3 \\ -R_1+R_4 \longrightarrow R_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrcr} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -3 & 1 & : & 3 \\ 0 & -7 & -5 & : & -1 \\ 0 & 2 & -3 & : & -1+\alpha \end{array}\right)$$

$$-\tfrac{1}{3}R_2 \longrightarrow R_2 \left(\begin{array}{rrrcr} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & : & -1 \\ 0 & -7 & -5 & : & -1 \\ 0 & 2 & -3 & : & -1+\alpha \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} 7R_2+R_3 \to R_3 \\ -2R_2+R_4 \to R_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrcr} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & : & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{22}{3} & : & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & : & 1+\alpha \end{array}\right)$$

$$-\frac{3}{22}R_3 \longrightarrow R_3 \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{12}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & : & 1+\alpha \end{array}\right)$$

$$\frac{7}{3}R_3 + R_4 \rightarrow R_4 \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{12}{11} \\ 0 & 0 & 0 & : & \frac{39}{11}+\alpha \end{array}\right)$$

Con lo cual, de acuerdo a la matriz escalonadan resultante, se concluye que $ran(A) = 3$. Ahora, para que $ran(A : b)$ sea también igual a 3 y por lo tanto el sistema tenga solución, entonces se debe tener que:

$$\frac{39}{11} + \alpha = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha = -\frac{39}{11}$$

Así, el sistema se reduce finalmente a las tres siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & = & -1 \\ & & x_3 & = & \frac{12}{11} \end{array}$$

De este último sistema, se tiene la solución

$$x_3 = \frac{12}{11}, \quad x_2 = -\frac{7}{11}, \quad x_1 = \frac{6}{11}$$