UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO: 521234

Guía de Ejercicios No 11

1. Demuestre que la primera variación $\partial J(y_0, h)$ satisface la condición de homogeneidad

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \,:\, \partial J(y_0, \alpha h) = \alpha \partial J(y_0, h).$$

2. Considere el funcional $J[y] = \int_0^1 (1+x)(y'(x))^2 dx$; $y \in C^2[0,1]$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Demuestre que si $y_0(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(2)}$, entonces:

$$\forall h \in C_0^2([0,1] \,:\quad \partial J(y_0, h) = 0$$

donde $C_0^2([0,1] = \{y \in C^2([0,1]) \,:\, h(0) = h(1) = 0\}$.

3. Encuentre las ecuaciones de Euler correspondientes a los siguientes funcionales:

   a) $J[u] = \int_R \int (x^2 u_x^2 + y^2 u_y^2) dx\, dy,\ u = u(x,y).$

   b) $J[u] = \int_R \int (u_t^2 - c^2 u_x^2) dt\, dx,\ u = u(x,t),\quad c$, una constante fija.

4. Encuentre extremales para el problema isoperimétrico

$$\min_{y \in C_0^2[0,1])} J[y] = \int_0^1 (y'^{\,2} + x^2) dx, \qquad s/a \qquad \int_0^1 y^2 dx = 2.$$

donde $C_0^2([0,1] = \{y \in C^2([0,1]) \,:\, h(0) = h(1) = 0\}$.

5. Deduzca una condición necesaria para un extremo del problema isoperimétrico minimizar:

$$
\begin{aligned}
&J[y_1, y_2] = \int_a^b L(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx \qquad s/a \quad \textstyle\int_a^b G(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx = C \\
&y_1(a) = A_1, \quad y_2(a) = A_2, \\
&y_1(b) = B_1, \quad y_2(b) = B_2,
\end{aligned}
$$

donde C, A_1, A_2, B_1, B_2 son constantes.

6. Use el resultado del ejercicio anterior para determinar $x^* = x^*(t)$ e $y^* = y^*(t)$ tal que

$$
J[x^*, y^*] = \max_{x,y \in C^2([0,1])} J(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} (xy' - yx')dt \qquad s/a \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = L
$$

donde L es una constante positiva.

7. Sean p, q, r funciones de clase $C^1([a, b])$. Encuentre el problema de valores de contorno que verifican las curvas extremales del problema isoperimétrico:

$$
\min_{y \in C_0^2([a,b])} \int_a^b (p(x)y'^2 + q(x)y^2)dx \qquad s/a \qquad \int_a^b r(x)y^2 dx = 1
$$

donde $C_0^2([a, b]) = \{y \in C^2([a, b]) \ : \ y(a) = y(b) = 0\}$.

Indicación: Las curvas extremales son soluciones de un problema de Sturm-Liouville.

Concepción, 11 de Noviembre de 2005.
HMM/FPV/fpv/cln.