UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 1 (Lógica)

1. Dentro de las siguientes proposiciones, identifique y asigne una letra a las proposiciones simples que contienen, y luego reescriba cada proposición en forma algebraica, usando los conectivos lógicos.

   a) Si n es múltiplo de 2, y m es múltiplo de 10, entonces su diferencia no puede ser impar.
   b) Para que Rayén y Millaray sean consideradas hermanas es necesario que sean hijas del mismo padre o de la misma madre.
   c) Una función no puede ser inyectiva si hay dos puntos distintos que tienen la misma imagen.
   d) Si no es el caso que Aldo sea un cantante y un buen estudiante, entonces es médico o no es cantante. **(En práctica)**

2. Escriba la negación de las siguientes proposiciones.

   a) Estoy en práctica de álgebra si y sólo si hoy es viernes. **(En práctica)**
   b) Una condición necesaria para que esté en práctica de álgebra es que hoy sea día martes.
   c) Una condición suficiente para que un número entero sea divisible por seis es que sea divisible por dos y tres.
   d) Ni Juan ni su papá viajarán a La Serena a fin de mes. **(En práctica)**
   e) Si Luis llega a tiempo con los documentos, entonces ambos, Carlos y Jorge, podrán inscribirse en el ciclo de conferencias.
   f) Todos los estudiantes de Álgebra estudian clase a clase. **(En práctica)**
   g) En nuestra galaxia existe un único sol.

3. Considere las siguientes proposiciones:

   - p: Juan va al cine todos los días.
   - q: A Juan le gusta el cine.
   - r: Juan tiene televisor en su casa.

   Escriba en castellano las siguientes expresiones:

   a) $\sim r \rightarrow (p \wedge q)$. **(En práctica)**
   b) $\sim (q \rightarrow \sim r)$.
   c) $p \vee \sim q \vee \sim r$.

4. Sabiendo que la proposición $(p \to \sim q) \vee (\sim r \to s)$ es falsa, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim r$
   b) $(\sim r \vee q) \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
   c) $(p \to q) \to [(p \wedge s) \wedge \sim r]$

5. Use una tabla de verdad para determinar si las siguientes proposiciones corresponden a una tautología, contradicción o contingencia.

   a) $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow [\ (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)\ ]$
   b) $(p \to q) \longleftrightarrow (q \to p)$ **(En práctica)**
   c) $(p \to q) \longleftrightarrow (\sim p \vee q)$
   d) $[(\ p \to \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \to \sim p$ **(En práctica)**
   e) $(p \to \mathrm{F}) \leftrightarrow p$

6. Usando equivalencias conocidas, reduzca al máximo las siguientes expresiones.

   a) $(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (r \wedge p \wedge \sim q)$.
   b) $[(\sim p \vee \mathbf{V}) \vee (q \wedge \sim p)] \to [q \wedge (r \vee \sim r)]$
   c) $\sim [\sim (p \wedge q) \vee p]$
   d) $[(\sim q \to \sim p) \to (\sim p \to \sim q)] \wedge \sim (p \wedge q)$

7. De las siguientes proposiciones, ¿cuáles son equivalentes entre sí?: **(En práctica)**

   a) Es necesario que Javiera no vaya al cine para que termine su tarea.
   b) No es cierto que Javiera termine su tarea y vaya al cine.
   c) Javiera no terminará su tarea y no irá al cine.

8. Si p, q, r, s, t, w son proposiciones tales que $(p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \to w)$ es verdadera y $(\sim w \to \sim s)$ es falsa, determine, si es posible, el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

   a) $(p \wedge q) \vee r \vee s$
   b) $(s \leftrightarrow \sim w) \to (r \vee \sim p)$
   c) $[t \to (w \vee \sim p)] \wedge \sim (p \to r)$
   d) $(s \wedge \sim p) \to (t \vee w)$

9. Probar las siguientes implicaciones lógicas, que son algunas de las llamadas *reglas de inferencia*.

   a) $p \Longrightarrow (p \vee q)$ (Adición) **(En práctica)**
   b) $(p \wedge q) \Longrightarrow p$ (Simplificación)
   c) $[\ p \wedge (p \to q)\ ] \Longrightarrow q$ (Modus ponens)
   d) $[\ (p \to q) \wedge \sim q\ ] \Longrightarrow \sim p$ (Modus tollens) **(En práctica)**
   e) $[\ (p \vee q) \wedge \sim p\ ] \Longrightarrow q$ (Silogismo disyuntivo)

f) $[\,(p \to q) \wedge (q \to r)\,] \Longrightarrow (p \to r)$ (Transitividad)

10. a) Se define el conectivo $\veebar$ (disyunción excluyente) por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Pruebe que $p \veebar q \Longleftrightarrow \sim (p \longleftrightarrow q)$. Luego exprese $p \veebar q$ usando sólo $\sim$, $\wedge$ ó $\vee$.
(En práctica)

b) Sea $*$ el conectivo definido por la siguiente equivalencia lógica

$$p * q \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q).$$

Demuestre la tautología $p * (p * q) \Longleftrightarrow q$.

11. Defina las variables y funciones proposicionales necesarias para transcribir las siguientes afirmaciones al lenguaje matemático:

a) Todos los chilenos saben leer, pero no todos entienden lo que leen. **(En práctica)**

b) Todo número entero tiene un múltiplo que es también múltiplo de 3.

c) Hay un único número natural que divide a todos los demás.

d) Un número natural es primo si y sólo si no existe ningún número distinto de él y de la unidad, que lo divida.

12. Niegue cada una de las proposiciones que siguen y luego transcríbalas al castellano.

a) $(\exists x \in \mathbb{N} \,/\, x + 2 = 5) \wedge (\forall x \in \mathbb{N} \,:\, x^2 > x)$ **(En práctica)**

b) $\forall x \in \mathbb{R} \,:\, \exists n \in \mathbb{N} \,/\, n \leq x < n + 1$

c) $\exists! n \in \mathbb{N} \,/\, \forall x \in \mathbb{R} \,:\; x \leq n$

d) $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, \exists y \in \mathbb{R} \,/\quad x^2 + y^2 < 0$

e) $\forall\, \epsilon > 0 \,:\, \forall\, y \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, |x - y| \leq \epsilon$

f) $\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, \exists!\, y \in \mathbb{N} \,/\, xy \leq 0 \;\wedge\; |x - y| = 2x$ **(En práctica)**

13. Para cada una de las afirmaciones de los problemas 11 y 12, decida su valor de verdad. Justifique su respuesta. **(En práctica)**

14. Considere los teoremas:

a) Una condición suficiente para que un triángulo sea equilátero es que tenga dos ángulos iguales y un ángulo de 60 grados sexagesimales.

b) Una condición necesaria para que un número x sea real es que $x^2 \neq -1$.
(En práctica)

Escriba los teoremas en la forma $H \to T$ y enuncie la contrarecíproca de cada uno de ellos.