UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA DE CORRECCIÓN. EVALUACIÓN 2.
ECUACIONES DIF. ORD. 521218.

Problema 1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

(a) $y'' + 2y' + y = 1.$

(b) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x+1}.$

(c) $y'' + 2y' + y = 1 - \dfrac{e^{-x}}{x+1}.$

Solución.

(a) i) Det. de y_h : $(D+1)^2 y = 0$; $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

ii) Sol. particular : (Aniquilador de 1 : D) $D(D+1)^2 y = 0$; $y_p(a) = C = Cte \Rightarrow y_p = 1$.

iii) Sol. general : $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 1$

(5 pts.)

(b) i) $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$.

ii) Sol. particular : Por variación de parámetros (segundo miembro no aniquilable).

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x},$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \frac{e^{-x}}{x+1} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-2x}}{x+1}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} xe^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{e^{-x}}{x+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{-2x}}{x+1},$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow C_1(x) &= \int \frac{W_1}{W} dx = -\int \frac{x}{x+1} dx = -x + \ln|x+1| \\ C_2(x) &= \int \frac{W_2}{W} dx = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| \\ \Longrightarrow y_p(b) &= (-x + \ln|x+1|)\, e^{-x} + (\ln|x+1|)\, xe^{-x} \\ &= e^{-x}(-x + (x+1)\ln|x+1|) \end{aligned}$$

iii) Sol. general :

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}\left(C_1 + C_2 x - x + (x+1)\ln|x+1|\right) \\ &= e^{-x}\left[A + Bx + (x+1)\ln|x+1|\right] \end{aligned}$$

(7 pts.)

(c) Sol. General (Por superposición) : $y = y_h + y_{p(a)} - y_{p(b)}$.

$$y = e^{-x}\left[A + Bx - (x+1)\ln|x+1|\right] + 1$$

(3 pts.)

Problema 2. Un cuerpo de masa 1 kg se sujeta al extremo de un resorte suspendido de un techo. Esto ocasiona que el resorte se estire 2.45 m para llegar a la posición de equilibrio. A partir del momento en que el cuerpo está en reposo, se aplica sobre el mismo una fuerza igual a 4 $sen\,(2t)$ N, donde el tiempo t está dado en segundos. Adicionalmente, a los cuatro segundos (medidos a partir de la posición de equilibrio) sobre el cuerpo se ejerce una fuerza instántanea igual a 2 $\delta_4\,(t)$ N. Considerando que la aceleración de la gravedad es 9.8 m/s^2, determine la posición del cuerpo a partir del momento en que el sistema estuvo en equilibrio. ¿Está presente el fenómeno de resonancia en este sistema?

Solución. Debido a que el resorte se estira 2.45 m para llegar a la posición de equilibrio, de la ley de Hooke se tiene que

$$1 \cdot 9.8 = k \cdot 2.45,$$

donde k es la constante de rigidez del resorte. Por lo tanto $k = 4$.

Sea $X\,(t)$ la posición del centro de gravedad del cuerpo estando el sistema en equilibrio. Entonces, la segunda ley de Newton nos conduce a que

$$X''\,(t) + kX(t) = 2\delta_4\,(t) + 4\sin(2t).$$

Por lo tanto

$$X''\,(t) + 4X(t) = 2\delta_4\,(t) + 4\sin(2t). \tag{1}$$

Como el cuerpo parte de un estado de reposo se tiene que

$$X(0) = X'(0) = 0.$$

La aplicación de la transformada de Laplace a (1) nos conduce a

$$\mathfrak{L}\,(X'')\,(s) + 4\mathfrak{L}\,(X)\,(s) = 2\mathfrak{L}\,(\delta_4)\,(s) + 4\mathfrak{L}\,(\sin(2t))\,(s)\,.$$

Luego

$$\left(s^2+4\right)\mathfrak{L}\,(X)\,(s) = 2e^{-4s} + 8/\left(s^2+4\right).$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} X\left(t\right) &= \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{2e^{-4s}}{s^2+4}\right)(t) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{8}{\left(s^2+4\right)^2}\right) \\ &= U_4\left(t\right)\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)(t-4) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{8}{\left(s^2+4\right)^2}\right) \\ &= U_4\left(t\right) sen\left(2\left(t-4\right)\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{8}{\left(s^2+4\right)^2}\right), \end{aligned}$$

donde U_4 es la función de Heaviside centrada en 4. Como

$$\frac{2a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2} = \mathfrak{L}\left(\frac{1}{a} sen\left(at\right) - t\cos\left(at\right)\right),$$

tenemos que

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{8}{\left(s^2+4\right)^2}\right)(t) = \frac{1}{2} sen\left(2t\right) - t\cos\left(2t\right).$$

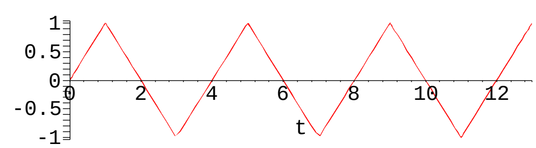
Lo que implica que

$$X\left(t\right) = U_4\left(t\right) sen\left(2t-8\right) + \frac{1}{2} sen\left(2t\right) - t\cos\left(2t\right).$$

Lo que nos lleva a concluir que en el sistema está presente el fenómeno de resonancia.

Problema 3. Sea $y(t)$ la solución del (PVI)

$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = g(t) \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$



donde $g(t)$ es periódica y está dada por :

a) Usando la transformada de Laplace, encuentre $y(t)$ en los intervalos

(i) $I_1 = [0,1]$ **(5 pts.)**, (ii) $I_2 = [1,3]$ **(4 pts.)**, (iii) $I_3 = [3,5]$ **(4 pts.)**

b) Explique por qué la solución $y(t)$ es periódica en $[0,+\infty)$, y encuentre su período. **(2 pts.)**

Solución.

a) (i) Para todo $t \in [0,1]$, $g(t) = t$ **(1 pt.)**. Luego

$$\begin{aligned} y'' + \pi^2 y = t &\implies \mathcal{L}\left[y'' + \pi^2 y\right] = \mathcal{L}\left[t\right] \ \textbf{(1 pt.)} \\ &\implies s^2 Y(s) + \pi^2 Y(s) = \frac{1}{s^2} \ \textbf{(1 pt.)} \\ &\implies Y(s) = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+\pi^2} = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\pi^2}\right) \ \textbf{(1 pt.)} \\ &\implies y(t) = \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right), \text{ para todo } t \in [0,1] \ \textbf{(1 pt.)}. \end{aligned}$$

(ii) Para todo $t \in [0,3]$,

$$g(t) = t\,(H(t) - H_1(t)) + (2-t)\,(H_1(t) - H_3(t))) \;= tH(t) - 2(t-1)H_1(t)$$

(1 pt.)

pues $H_3(t) = 0$ cuando $t \in [0,3]$. Luego

$$\mathcal{L}\left[y'' + \pi^2 y\right] = \mathcal{L}\left[g(t)\right] \implies s^2 Y(s) + \pi^2 Y(s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

(1 pt.)

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow Y(s) &= \frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+\pi^2}\left(1-2e^{-s}\right) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\pi^2}\right)\left(1-2e^{-s}\right) \\
&= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\pi^2}\right) - \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\pi^2}\right)e^{-s}
\end{aligned}$$

(1 pt.)

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right)H(t) - \frac{2}{\pi^2}\left((t-1) - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t - \pi)\right)H_1(t),$$

para todo $t \in [0,3]$. Por otro lado, si $t \in [1,3]$, se tiene que $H(t) = H_1(t) = 1$, con lo cual,

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow y(t) &= \frac{1}{\pi^2}\left(t - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right) - \frac{2}{\pi^2}\left((t-1) - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t - \pi)\right) \\
&= \frac{1}{\pi^2}\left((2-t) - \frac{3}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right), \text{ para todo } t \in [1,3].
\end{aligned}$$

(1 pt.)

(iii) Para todo $t \in [0,5]$,

$$\begin{aligned}
g(t) &= t\,(H(t) - H_1(t)) + (2-t)\,(H_1(t) - H_3(t))) + (t-4)\,(H_3(t) - H_5(t))) \\
&= tH(t) - 2(t-1)H_1(t) + 2(t-3)H_3(t)
\end{aligned}$$

(1 pt.)

pues $H_5(t) = 0$ cuando $t \in [0,5]$. Luego

$$\mathcal{L}\left[y'' + \pi^2 y\right] = \mathcal{L}\left[g(t)\right] \implies s^2 Y(s) + \pi^2 Y(s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{1}{s^2}e^{-s} + 2\frac{1}{s^2}e^{-3s}$$

(1 pt.)

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow Y(s) &= \frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+\pi^2}\left(1-2e^{-s}+2e^{-3s}\right) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\pi^2}\right)\left(1-2e^{-s}+2e^{-3s}\right) \\
&= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\pi^2}\right) - \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\pi^2}\right)e^{-s} + \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\pi^2}\right)e^{-3s}
\end{aligned}$$

(1 pt.)

$$\begin{aligned}\Longrightarrow y(t) &= \frac{1}{\pi^2}\left(t-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right)H(t)-\frac{2}{\pi^2}\left((t-1)-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t-\pi)\right)H_1(t)\\ &+\frac{2}{\pi^2}\left((t-3)-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t-3\pi)\right)H_3(t)\end{aligned}$$

para todo $t\in[0,5]$. Por otro lado, si $t\in[3,5]$, se tiene que $H(t)=H_1(t)=H_3(t)=1$, con lo cual,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\pi^2}\left(t-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right)-\frac{2}{\pi^2}\left((t-1)-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t-\pi)\right)+\frac{2}{\pi^2}\left((t-3)-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t-3\pi)\right)\\ &= \frac{1}{\pi^2}\left((t-4)-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right),\ \text{para todo } t\in[3,5].\end{aligned}$$

(1 pt.)

b) Para todo $t\in[3,5]$, se tiene que

$$y(t)=\frac{1}{\pi^2}\left((t-4)-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi t\right)=\frac{1}{\pi^2}\left((t-4)-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi(t-4)\right)=y(t-4).$$

(1 pt.)

Luego $y(t)$ es periódica de período $T=4$. En efecto, del gráfico se tiene que $g(t)=g(t-4)$, con lo cuál haciendo el cambio de variable $t\mapsto t-4$, se tiene que $y(t-4)$ también es solución del (PVI), con lo cuál $y(t)=y(t-4)$ para todo t. **(1 pt.)**

Problema 4. Resuelva el siguiente sistema usando valores propios:

$$\begin{cases} x'(t)=0\\ y'(t)=x(t)-2z(t)\\ z'(t)=2y(t)+e^t\end{cases}$$

Solución. Resolver

$$(*)\quad \mathbf{X}'=A\mathbf{X}+B$$

donde

$$X=\begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&-2\\0&2&0\end{bmatrix}\text{ y } B=\begin{bmatrix}0\\0\\e^t\end{bmatrix}.$$

Se tiene que matriz $A-\lambda I=\begin{bmatrix}-\lambda&0&0\\1&-\lambda&-2\\0&2&-\lambda\end{bmatrix}$ y el polinomio característico es $p(\lambda)=-\lambda 3-4\lambda$.

Los autovalores resultan ser $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2i$, $\lambda_3=-2i$. Los correspondientes autoespacios propios asociados son:

$$S_{\lambda_1}=<\{(2,0,1)\}>,\qquad S_{\lambda_2}=<\{(0,1,-i)\}>,\qquad S_{\lambda_3}=<\{(0,1,i)\}>$$

Por la tanto la matriz fundamental es:

$$X_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ 1 & \operatorname{sen} 2t & -\cos 2t \end{bmatrix}.$$

(5) Puntos

Así, si $Z(t)$ es solución del sistema no homegéneo dado, entonces

$$Z(t) = X_f \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + Y_p(t)$$

donde a_1, a_2, a_3 son constantes arbitararias, e $Y_p(t)$ es una solución particular del sistema $(*)$ dado, con

(2) Puntos

$$Y_p(t) = X_f \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{bmatrix}$$

(2) Puntos

donde las funciones $c_1(t), c_2(t)$ y $c_3(t)$ deben satisfacer el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ 1 & \operatorname{sen} 2t & -\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

(2) Puntos

De lo anterior resulta que $c_1(t) = b_1 =$ constante,

$$c_2(t) = \int e^t \operatorname{sen} 2t dt \qquad \text{y} \qquad c_3(t) = -\int e^t \cos 2t dt.$$

(2) Puntos

De donde:

$$c_2(t) = \frac{1}{5} e^t (\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t), \qquad c_3(t) = \frac{-1}{5} e^t (\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t)$$

(2) Puntos

Finalmente, toda solución $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ del sistema $(*)$ es de la forma:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ 1 & \operatorname{sen} 2t & -\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ 1 & \operatorname{sen} 2t & -\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \frac{1}{5} e^t (\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t) \\ \frac{-1}{5} e^t (\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t) \end{bmatrix}$$

donde a_1, a_2 y a_3 son constantes arbitrarias.

29.06.2004
HMM/JMS/CMG/MSC/jms