UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

# Cálculo Numérico (521230)

## Evaluación de Recuperación – Tema 1

*Fecha: 02 – Julio – 2008; 15:10 horas.*

| | |
|---|---|
| **Nombre y apellidos** | |
| **Matrícula** | |
| **Profesor** | |

| Pregunta | Alternativas | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | c | d |
| 2 | a | b | c | d |
| 3 | a | b | c | d |
| 4 | a | b | c | d |
| 5 | a | b | c | d |
| 6 | a | b | c | d |
| 7 | a | b | c | d |
| 8 | a | b | c | d |
| 9 | a | b | c | d |
| 10 | a | b | c | d |
| 11 | a | b | c | d |
| 12 | a | b | c | d |
| 13 | a | b | c | d |
| 14 | a | b | c | d |
| 15 | a | b | c | d |

Reservado para la corrección

**No rellenar**

| | |
|---|---|
| B | |
| M | |
| NR | |
| Cal. | |

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:
$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$
- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/RRA

1. Sea $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad $n \times n$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

   (a) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = 0$;

   (b) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = 1$;

   (c) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = n$;

   (d) ninguna de las opciones anteriores.

2. Indique cuál de los siguentes métodos es el más adecuado para resolver un sistema lineal con matriz tridiagonal no simétrica de diagonal dominante:

   (a) el método del *gradiente conjugado*;

   (b) el método de *Cholesky*;

   (c) el algoritmo de *Thomas*;

   (d) ninguno de los anteriores.

3. Se quiere determinar los coeficientes $a$, $b$ y $c$ de la función $y = a + be^x + ce^{-x}$ de manera que su gráfica ajuste en el sentido de mínimos cuadrados los puntos $(x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, m$.

   Indique cuáles son la matriz y el vector del sistema rectangular resultante:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & y_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e^{x_0} \\ \vdots \\ e^{x_m} \end{pmatrix};$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & e^{x_0} & e^{-x_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{x_m} & e^{-x_m} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix};$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & -x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & -x_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \ln(y_0) \\ \vdots \\ \ln(y_m) \end{pmatrix};$

   (d) ninguna de las combinaciones anteriores.

4. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica y definida positiva. El comando MATLAB

```
R = chol(A);
```

   entrega una matriz triangular superior $\boldsymbol{R}$ que satisface:

   (a) $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}$;

   (b) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^t$;

   (c) $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$;

   (d) ninguna de las opciones anteriores.

5. Considere las siguientes afirmaciones respecto al método del *gradiente conjugado* (GC) aplicado a un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$:

   (i) si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva, entonces GC converge a la solución del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$;

   (ii) en general, en una iteración de GC, la operación más costosa (en número de *flop*) corresponde a la evaluación de producto matriz-vector.

   Entonces:

   (a) (i) es verdadera y (ii) es falsa;
   (b) (i) es falsa y (ii) es verdadera;
   (c) (i) es verdadera y (ii) es verdadera;
   (d) ninguna de las anteriores.

6. Indique cuántos polinomios de grado 4 interpolan la siguiente tabla:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 2 | 0 | 3 | 0 |

   (a) ninguno;
   (b) uno y sólo uno;
   (c) infinitos;
   (d) ninguna de las respuestas anteriores.

7. Se quiere graficar una función $f$ de la que se conocen sus valores $y = f(x)$ para $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Para ello se almacenan las abscisas en un vector (fila) `x=0:10` y los valores correspondientes de la función en otro vector (fila) `y`.

   Indique cuál de los siguientes programas MATLAB permite graficar un *spline* cúbico que interpola la función en esos puntos:

(a)
```
t=0:.01:10;
plot(t,spline(x,y));
```

(b)
```
t=0:.01:10;
plot(t,spline(x,y,t));
```

(c)
```
t=0:.01:10;
plot(t,spline(t,y));
```

(d)
```
t=0:.01:10;
plot(x,spline(x,y,t));
```

8. El método de *Simpson* (elemental), para calcular un valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$, se obtiene interpolando la función $f$ en:

   (a) un punto en $[a, b]$;
   (b) dos puntos en $[a, b]$;
   (c) tres puntos en $[a, b]$;
   (d) ninguna de las anteriores.

9. Se dispone de una función MATLAB `trap` tal que el comando

```
Int=trap(f,a,b,N);
```

calcula $\int_a^b f(x)\,dx$ por la regla de los trapecios (compuesta) con $N$ subintervalos.

Indique cuál de los siguientes procedimientos devuelve en `Int` el valor calculado con $N = 10$ y en `Err_Est` la estimación del error de `Int` que se obtiene mediante un paso del método de Romberg:

(a)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=Int-Int_Aux;
```

(b)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(Int-Int_Aux)/3;
```

(c)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(Int-Int_Aux)/15;
```

(d)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(4*Int-Int_Aux)/3;
```

10. Si se calcula $\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx$ usando la *regla de los trapecios* (compuesta) con 11 puntos (es decir, 10 subintervalos), entonces el error cometido, en módulo, es igual a:

(a) $\pi^4 \operatorname{sen}\theta/12000$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;
(b) $\pi^3 \operatorname{sen}\theta/1200$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;
(c) $\pi^2 \cos\theta/120$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;
(d) ninguna de las anteriores.

*Sugerencia:* recuerde que el error de la regla de los trapecios (compuesta) satisface:

$$R = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \qquad \xi \in (a, b).$$

11. El siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = y + \cos(2\pi x), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

se resuelve por el método de *Euler explícito* con un paso $h = 0.5$.

Indique cuál es el valor $y_1 \approx y(x_1)$ que entrega el método:

(a) $y_1 = 0.5$;
(b) $y_1 = 0.25$;
(c) $y_1 = 0$;
(d) ninguno de los anteriores.

12. Como muestra la siguiente gráfica, la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x - \ln x$$

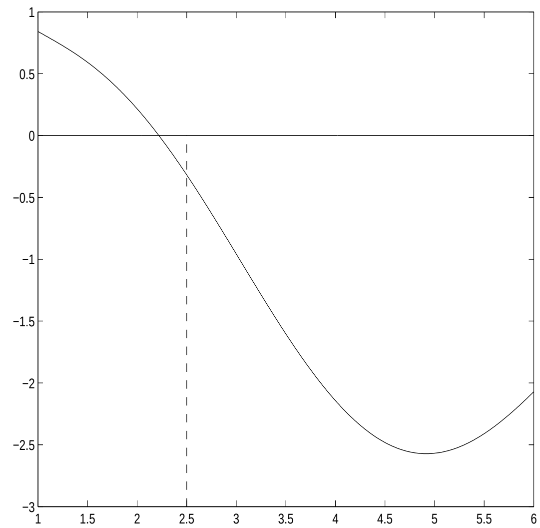
tiene una raíz cerca del punto $x = 2.5$.
Indique cuál de los siguientes algoritmos permite determinar esa raíz mediante el método de *Newton-Raphson*, partiendo de $x_0 = 2.5$:

(a) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\operatorname{sen} x_n - \ln x_n}{\cos x_n - (1/x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

(b) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos x_n - (1/x_n)}{(1/x_n^2) - \operatorname{sen} x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

(c) $x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n - \ln x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

(d) ninguno de los anteriores.




13. Considere el siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

y el siguiente método numérico para aproximarlo:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f_i - 59f_{i-1} + 16f_{i-2} - 9f_{i-3}\right),$$

donde $f_k = f(x_k, y_k)$. Para implementar este método se debe:

(a) calcular directamente $y_1$ suponiendo $y_{-3} = y_{-2} = y_{-1} = 0$;

(b) calcular primero $y_1$, $y_2$ e $y_3$ por un método de Runge-Kutta y después aplicar el método propuesto;

(c) implementar el método en su forma propuesta, pero sólo se obtendrán valores para $y_4$, $y_8$, $y_{12}, \ldots$;

(d) ninguna de las opciones anteriores.

14. El iterado $y_{i+1}$ obtenido por el método (explícito) de Adams-Bashforth de segundo orden está dado por:

(a) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} f_i\right] dx;$

(b) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} f_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1}\right] dx;$

(c) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i-1} - x_{i+1})} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})} f_{i+1}\right] dx;$

(d) ninguna alternativa anterior.

15. Considere el siguiente P.V.C.:

$$\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases}$$

El método de *shooting* aplicado a este P.V.C. consiste en resolver la ecuación $y_z(1) = 1$, donde $y_z$ es la solución del P.V.I.:

(a) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = z; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = z; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = z, \quad y'(0) = 1; \end{cases}$

(d) ninguna alternativa anterior.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

# Cálculo Numérico (521230)

## Evaluación de Recuperación – Tema 2

*Fecha: 02 – Julio – 2008; 15:10 horas.*

| | |
|---|---|
| **Nombre y apellidos** | |
| **Matrícula** | |
| **Profesor** | |

| Pregunta | Alternativas | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | c | d |
| 2 | a | b | c | d |
| 3 | a | b | c | d |
| 4 | a | b | c | d |
| 5 | a | b | c | d |
| 6 | a | b | c | d |
| 7 | a | b | c | d |
| 8 | a | b | c | d |
| 9 | a | b | c | d |
| 10 | a | b | c | d |
| 11 | a | b | c | d |
| 12 | a | b | c | d |
| 13 | a | b | c | d |
| 14 | a | b | c | d |
| 15 | a | b | c | d |

Reservado para la corrección

**No rellenar**

| | |
|---|---|
| B | |
| M | |
| NR | |
| Cal. | |

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:
$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$
- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/RRA

1. Indique cuál de los siguentes métodos es el más adecuado para resolver un sistema lineal con matriz tridiagonal no simétrica de diagonal dominante:

   (a) el método de *Cholesky*;

   (b) el algoritmo de *Thomas*;

   (c) el método del *gradiente conjugado*;

   (d) ninguno de los anteriores.

2. Se quiere determinar los coeficientes $a$, $b$ y $c$ de la función $y = a + be^x + ce^{-x}$ de manera que su gráfica ajuste en el sentido de mínimos cuadrados los puntos $(x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, m$.

   Indique cuáles son la matriz y el vector del sistema rectangular resultante:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & e^{x_0} & e^{-x_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{x_m} & e^{-x_m} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix};$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & -x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & -x_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \ln(y_0) \\ \vdots \\ \ln(y_m) \end{pmatrix};$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & y_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e^{x_0} \\ \vdots \\ e^{x_m} \end{pmatrix};$

   (d) ninguna de las combinaciones anteriores.

3. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica y definida positiva. El comando MATLAB

```
R = chol(A);
```

   entrega una matriz triangular superior $\boldsymbol{R}$ que satisface:

   (a) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^t$;

   (b) $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$;

   (c) $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}$;

   (d) ninguna de las opciones anteriores.

4. Sea $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad $n \times n$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

   (a) $\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = 1$;

   (b) $\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = n$;

   (c) $\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = 0$;

   (d) ninguna de las opciones anteriores.

5. Indique cuántos polinomios de grado 4 interpolan la siguiente tabla:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 2 | 0 | 3 | 0 |

   (a) uno y sólo uno;
   (b) infinitos;
   (c) ninguno;
   (d) ninguna de las respuestas anteriores.

6. Se quiere graficar una función $f$ de la que se conocen sus valores $y = f(x)$ para $x = 0, 1, 2, \dots, 10$. Para ello se almacenan las abscisas en un vector (fila) `x=0:10` y los valores correspondientes de la función en otro vector (fila) `y`.

   Indique cuál de los siguientes programas MATLAB permite graficar un *spline* cúbico que interpola la función en esos puntos:

   (a)
```
t=0:.01:10;
plot(t,spline(x,y,t));
```
   (b)
```
t=0:.01:10;
plot(t,spline(t,y));
```
   (c)
```
t=0:.01:10;
plot(x,spline(x,y,t));
```
   (d)
```
t=0:.01:10;
plot(t,spline(x,y));
```

7. El método de *Simpson* (elemental), para calcular un valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$, se obtiene interpolando la función $f$ en:

   (a) dos puntos en $[a, b]$;
   (b) tres puntos en $[a, b]$;
   (c) un punto en $[a, b]$;
   (d) ninguna de las anteriores.

8. Considere las siguientes afirmaciones respecto al método del *gradiente conjugado* (GC) aplicado a un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$:

   (i) si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva, entonces GC converge a la solución del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$;
   (ii) en general, en una iteración de GC, la operación más costosa (en número de *flop*) corresponde a la evaluación de producto matriz-vector.

   Entonces:

   (a) (i) es falsa y (ii) es verdadera;
   (b) (i) es verdadera y (ii) es verdadera;
   (c) (i) es verdadera y (ii) es falsa;
   (d) ninguna de las anteriores.

9. Si se calcula $\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx$ usando la *regla de los trapecios* (compuesta) con 11 puntos (es decir, 10 subintervalos), entonces el error cometido, en módulo, es igual a:

   (a) $\pi^3 \operatorname{sen}\theta/1200$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;

   (b) $\pi^2 \cos\theta/120$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;

   (c) $\pi^4 \operatorname{sen}\theta/12000$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;

   (d) ninguna de las anteriores.

   *Sugerencia:* recuerde que el error de la regla de los trapecios (compuesta) satisface:

$$R = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \qquad \xi \in (a, b).$$

10. Como muestra la siguiente gráfica, la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x - \ln x$$

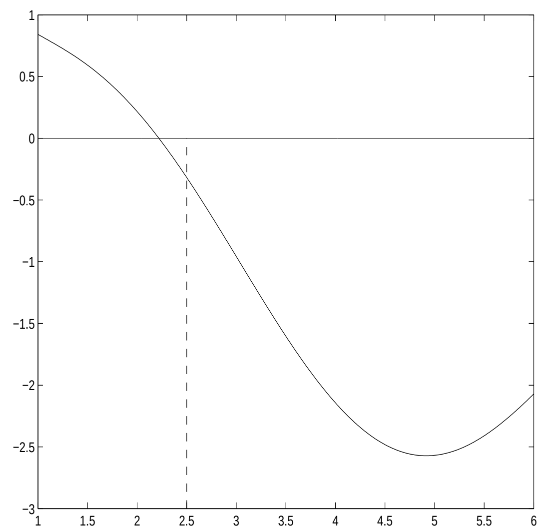
   tiene una raíz cerca del punto $x = 2.5$.
   Indique cuál de los siguientes algoritmos permite determinar esa raíz mediante el método de *Newton-Raphson*, partiendo de $x_0 = 2.5$:

   (a) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos x_n - (1/x_n)}{(1/x_n^2) - \operatorname{sen} x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

   (b) $x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n - \ln x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

   (c) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\operatorname{sen} x_n - \ln x_n}{\cos x_n - (1/x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

   (d) ninguno de los anteriores.




11. El siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = y + \cos(2\pi x), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

   se resuelve por el método de *Euler explícito* con un paso $h = 0.5$.

   Indique cuál es el valor $y_1 \approx y(x_1)$ que entrega el método:

   (a) $y_1 = 0.25$;

   (b) $y_1 = 0$;

   (c) $y_1 = 0.5$;

   (d) ninguno de los anteriores.

12. Se dispone de una función MATLAB `trap` tal que el comando

```
Int=trap(f,a,b,N);
```

calcula $\int_a^b f(x)\,dx$ por la regla de los trapecios (compuesta) con $N$ subintervalos.
Indique cuál de los siguientes procedimientos devuelve en `Int` el valor calculado con $N = 10$ y en `Err_Est` la estimación del error de `Int` que se obtiene mediante un paso del método de Romberg:

(a)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=Int-Int_Aux;
```

(b)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(Int-Int_Aux)/3;
```

(c)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(Int-Int_Aux)/15;
```

(d)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(4*Int-Int_Aux)/3;
```

13. El iterado $y_{i+1}$ obtenido por el método (explícito) de Adams-Bashforth de segundo orden está dado por:

(a) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} f_i \right] dx;$

(b) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} f_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1} \right] dx;$

(c) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i-1} - x_{i+1})} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})} f_{i+1} \right] dx;$

(d) ninguna alternativa anterior.

14. Considere el siguiente P.V.C.:

$$\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases}$$

El método de *shooting* aplicado a este P.V.C. consiste en resolver la ecuación $y_z(1) = 1$, donde $y_z$ es la solución del P.V.I.:

(a) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = z; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = z; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = z, \quad y'(0) = 1; \end{cases}$

(d) ninguna alternativa anterior.

15. Considere el siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

y el siguiente método numérico para aproximarlo:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f_i - 59f_{i-1} + 16f_{i-2} - 9f_{i-3}\right),$$

donde $f_k = f(x_k, y_k)$. Para implementar este método se debe:

(a) calcular primero $y_1$, $y_2$ e $y_3$ por un método de Runge-Kutta y después aplicar el método propuesto;

(b) implementar el método en su forma propuesta, pero sólo se obtendrán valores para $y_4$, $y_8$, $y_{12}, \ldots$;

(c) calcular directamente $y_1$ suponiendo $y_{-3} = y_{-2} = y_{-1} = 0$;

(d) ninguna de las opciones anteriores.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

# Cálculo Numérico (521230)

## Evaluación de Recuperación – Tema 3

*Fecha: 02 – Julio – 2008; 15:10 horas.*

| | |
|---|---|
| **Nombre y apellidos** | |
| **Matrícula** | |
| **Profesor** | |

| Pregunta | Alternativas | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | c | d |
| 2 | a | b | c | d |
| 3 | a | b | c | d |
| 4 | a | b | c | d |
| 5 | a | b | c | d |
| 6 | a | b | c | d |
| 7 | a | b | c | d |
| 8 | a | b | c | d |
| 9 | a | b | c | d |
| 10 | a | b | c | d |
| 11 | a | b | c | d |
| 12 | a | b | c | d |
| 13 | a | b | c | d |
| 14 | a | b | c | d |
| 15 | a | b | c | d |

Reservado para la corrección
**No rellenar**

| | |
|---|---|
| B | |
| M | |
| NR | |
| Cal. | |

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:

$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$

- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/RRA

1. Se quiere determinar los coeficientes $a$, $b$ y $c$ de la función $y = a + be^x + ce^{-x}$ de manera que su gráfica ajuste en el sentido de mínimos cuadrados los puntos $(x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, m$.

   Indique cuáles son la matriz y el vector del sistema rectangular resultante:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & -x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & -x_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \ln(y_0) \\ \vdots \\ \ln(y_m) \end{pmatrix};$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & y_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e^{x_0} \\ \vdots \\ e^{x_m} \end{pmatrix};$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & e^{x_0} & e^{-x_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{x_m} & e^{-x_m} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix};$

   (d) ninguna de las combinaciones anteriores.

2. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica y definida positiva. El comando MATLAB

```
R = chol(A);
```

   entrega una matriz triangular superior $\boldsymbol{R}$ que satisface:

   (a) $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$;
   (b) $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}$;
   (c) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^t$;
   (d) ninguna de las opciones anteriores.

3. Sea $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad $n \times n$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

   (a) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = n$;
   (b) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = 0$;
   (c) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = 1$;
   (d) ninguna de las opciones anteriores.

4. Indique cuál de los siguentes métodos es el más adecuado para resolver un sistema lineal con matriz tridiagonal no simétrica de diagonal dominante:

   (a) el algoritmo de *Thomas*;
   (b) el método del *gradiente conjugado*;
   (c) el método de *Cholesky*;
   (d) ninguno de los anteriores.

5. Se quiere graficar una función $f$ de la que se conocen sus valores $y = f(x)$ para $x = 0, 1, 2, \dots, 10$. Para ello se almacenan las abscisas en un vector (fila) `x=0:10` y los valores correspondientes de la función en otro vector (fila) `y`.

   Indique cuál de los siguientes programas MATLAB permite graficar un *spline* cúbico que interpola la función en esos puntos:

   (a)
   ```
   t=0:.01:10;
   plot(t,spline(t,y));
   ```
   (b)
   ```
   t=0:.01:10;
   plot(x,spline(x,y,t));
   ```
   (c)
   ```
   t=0:.01:10;
   plot(t,spline(x,y));
   ```
   (d)
   ```
   t=0:.01:10;
   plot(t,spline(x,y,t));
   ```

6. El método de *Simpson* (elemental), para calcular un valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$, se obtiene interpolando la función $f$ en:

   (a) tres puntos en $[a, b]$;
   (b) un punto en $[a, b]$;
   (c) dos puntos en $[a, b]$;
   (d) ninguna de las anteriores.

7. Considere las siguientes afirmaciones respecto al método del *gradiente conjugado* (GC) aplicado a un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$:

   (i) si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva, entonces GC converge a la solución del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$;
   (ii) en general, en una iteración de GC, la operación más costosa (en número de *flop*) corresponde a la evaluación de producto matriz-vector.

   Entonces:

   (a) (i) es verdadera y (ii) es falsa;
   (b) (i) es falsa y (ii) es verdadera;
   (c) (i) es verdadera y (ii) es verdadera;
   (d) ninguna de las anteriores.

8. Indique cuántos polinomios de grado 4 interpolan la siguiente tabla:

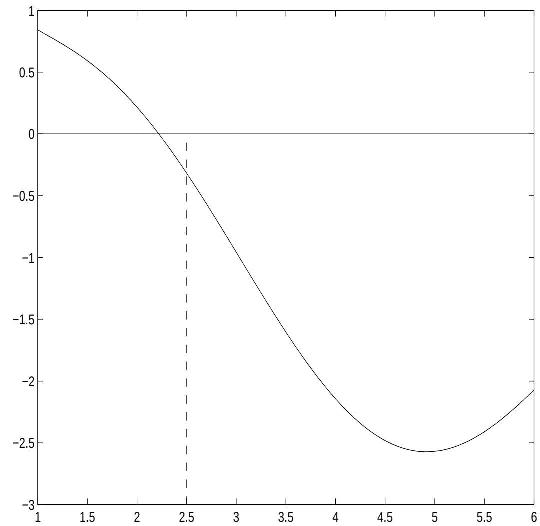
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 2 | 0 | 3 | 0 |

   (a) infinitos;
   (b) ninguno;
   (c) uno y sólo uno;
   (d) ninguna de las respuestas anteriores.

9. Como muestra la siguiente gráfica, la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x - \ln x$$

tiene una raíz cerca del punto $x = 2.5$.
Indique cuál de los siguientes algoritmos permite determinar esa raíz mediante el método de *Newton-Raphson*, partiendo de $x_0 = 2.5$:




(a) $x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n - \ln x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

(b) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\operatorname{sen} x_n - \ln x_n}{\cos x_n - (1/x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

(c) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos x_n - (1/x_n)}{(1/x_n^2) - \operatorname{sen} x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

(d) ninguno de los anteriores.

10. El siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = y + \cos(2\pi x), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

se resuelve por el método de *Euler explícito* con un paso $h = 0.5$.
Indique cuál es el valor $y_1 \approx y(x_1)$ que entrega el método:

(a) $y_1 = 0$;
(b) $y_1 = 0.5$;
(c) $y_1 = 0.25$;
(d) ninguno de los anteriores.

11. Se dispone de una función MATLAB `trap` tal que el comando

```
Int=trap(f,a,b,N);
```

calcula $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ por la regla de los trapecios (compuesta) con $N$ subintervalos.
Indique cuál de los siguientes procedimientos devuelve en `Int` el valor calculado con $N = 10$ y en `Err_Est` la estimación del error de `Int` que se obtiene mediante un paso del método de Romberg:

(a)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=Int-Int_Aux;
```

(b)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(Int-Int_Aux)/3;
```

(c)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(Int-Int_Aux)/15;
```

(d)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(4*Int-Int_Aux)/3;
```

12. Si se calcula $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx$ usando la *regla de los trapecios* (compuesta) con 11 puntos (es decir, 10 subintervalos), entonces el error cometido, en módulo, es igual a:

   (a) $\pi^2 \cos\theta/120$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;

   (b) $\pi^4 \operatorname{sen}\theta/12000$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;

   (c) $\pi^3 \operatorname{sen}\theta/1200$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;

   (d) ninguna de las anteriores.

   *Sugerencia:* recuerde que el error de la regla de los trapecios (compuesta) satisface:

$$R = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \qquad \xi \in (a, b).$$

13. Considere el siguiente P.V.C.:

$$\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases}$$

   El método de *shooting* aplicado a este P.V.C. consiste en resolver la ecuación $y_z(1) = 1$, donde $y_z$ es la solución del P.V.I.:

   (a) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = z; \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = z; \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = z, \quad y'(0) = 1; \end{cases}$

   (d) ninguna alternativa anterior.

14. Considere el siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

   y el siguiente método numérico para aproximarlo:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \left(55 f_i - 59 f_{i-1} + 16 f_{i-2} - 9 f_{i-3}\right),$$

   donde $f_k = f(x_k, y_k)$. Para implementar este método se debe:

   (a) implementar el método en su forma propuesta, pero sólo se obtendrán valores para $y_4$, $y_8$, $y_{12}, \ldots$;

   (b) calcular directamente $y_1$ suponiendo $y_{-3} = y_{-2} = y_{-1} = 0$;

   (c) calcular primero $y_1$, $y_2$ e $y_3$ por un método de Runge-Kutta y después aplicar el método propuesto;

   (d) ninguna de las opciones anteriores.

15. El iterado $y_{i+1}$ obtenido por el método (explícito) de Adams-Bashforth de segundo orden está dado por:

    (a) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} f_i \right] dx;$

    (b) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} f_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1} \right] dx;$

    (c) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i-1} - x_{i+1})} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})} f_{i+1} \right] dx;$

    (d) ninguna alternativa anterior.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

# Cálculo Numérico (521230)

## Evaluación de Recuperación – Tema 4

*Fecha: 02 – Julio – 2008; 15:10 horas.*

| **Nombre y apellidos** | |
|---|---|
| **Matrícula** | |
| **Profesor** | |

| Pregunta | Alternativas | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | c | d |
| 2 | a | b | c | d |
| 3 | a | b | c | d |
| 4 | a | b | c | d |
| 5 | a | b | c | d |
| 6 | a | b | c | d |
| 7 | a | b | c | d |
| 8 | a | b | c | d |
| 9 | a | b | c | d |
| 10 | a | b | c | d |
| 11 | a | b | c | d |
| 12 | a | b | c | d |
| 13 | a | b | c | d |
| 14 | a | b | c | d |
| 15 | a | b | c | d |

Reservado para la corrección
**No rellenar**

| | |
|---|---|
| B | |
| M | |
| NR | |
| Cal. | |

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:
$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$
- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/RRA

1. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica y definida positiva. El comando MATLAB

```
R = chol(A);
```

entrega una matriz triangular superior $\boldsymbol{R}$ que satisface:

(a) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^t$;
(b) $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}$;
(c) $\boldsymbol{R}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$;
(d) ninguna de las opciones anteriores.

2. Sea $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad $n \times n$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(a) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = 0$;
(b) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = n$;
(c) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{I}) = 1$;
(d) ninguna de las opciones anteriores.

3. Indique cuál de los siguentes métodos es el más adecuado para resolver un sistema lineal con matriz tridiagonal no simétrica de diagonal dominante:

(a) el algoritmo de *Thomas*;
(b) el método de *Cholesky*;
(c) el método del *gradiente conjugado*;
(d) ninguno de los anteriores.

4. Se quiere determinar los coeficientes $a$, $b$ y $c$ de la función $y = a + be^x + ce^{-x}$ de manera que su gráfica ajuste en el sentido de mínimos cuadrados los puntos $(x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, m$.

Indique cuáles son la matriz y el vector del sistema rectangular resultante:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & y_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e^{x_0} \\ \vdots \\ e^{x_m} \end{pmatrix};$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & -x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & -x_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \ln(y_0) \\ \vdots \\ \ln(y_m) \end{pmatrix};$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & e^{x_0} & e^{-x_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{x_m} & e^{-x_m} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix};$

(d) ninguna de las combinaciones anteriores.

5. El método de *Simpson* (elemental), para calcular un valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$, se obtiene interpolando la función $f$ en:
   (a) un punto en $[a, b]$;
   (b) tres puntos en $[a, b]$;
   (c) dos puntos en $[a, b]$;
   (d) ninguna de las anteriores.

6. Considere las siguientes afirmaciones respecto al método del *gradiente conjugado* (GC) aplicado a un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$:
   (i) si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva, entonces GC converge a la solución del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$;
   (ii) en general, en una iteración de GC, la operación más costosa (en número de *flop*) corresponde a la evaluación de producto matriz-vector.

   Entonces:
   (a) (i) es verdadera y (ii) es verdadera;
   (b) (i) es falsa y (ii) es verdadera;
   (c) (i) es verdadera y (ii) es falsa;
   (d) ninguna de las anteriores.

7. Indique cuántos polinomios de grado 4 interpolan la siguiente tabla:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 2 | 0 | 3 | 0 |

   (a) uno y sólo uno;
   (b) ninguno;
   (c) infinitos;
   (d) ninguna de las respuestas anteriores.

8. Se quiere graficar una función $f$ de la que se conocen sus valores $y = f(x)$ para $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Para ello se almacenan las abscisas en un vector (fila) `x=0:10` y los valores correspondientes de la función en otro vector (fila) `y`.

   Indique cuál de los siguientes programas Matlab permite graficar un *spline* cúbico que interpola la función en esos puntos:

(a)
```
t=0:.01:10;
plot(x,spline(x,y,t));
```

(b)
```
t=0:.01:10;
plot(t,spline(x,y));
```

(c)
```
t=0:.01:10;
plot(t,spline(x,y,t));
```

(d)
```
t=0:.01:10;
plot(t,spline(t,y));
```

9. El siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = y + \cos(2\pi x), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

se resuelve por el método de *Euler explícito* con un paso $h = 0.5$.

Indique cuál es el valor $y_1 \approx y(x_1)$ que entrega el método:

(a) $y_1 = 0.25$;
(b) $y_1 = 0.5$;
(c) $y_1 = 0$;
(d) ninguno de los anteriores.

10. Se dispone de una función MATLAB `trap` tal que el comando

```
Int=trap(f,a,b,N);
```

calcula $\int_a^b f(x)\,dx$ por la regla de los trapecios (compuesta) con $N$ subintervalos.

Indique cuál de los siguientes procedimientos devuelve en `Int` el valor calculado con $N = 10$ y en `Err_Est` la estimación del error de `Int` que se obtiene mediante un paso del método de Romberg:

(a)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=Int-Int_Aux;
```

(b)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(Int-Int_Aux)/3;
```

(c)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(Int-Int_Aux)/15;
```

(d)
```
Int_Aux=trap(f,a,b,5);
Int=trap(f,a,b,10);
Err_Est=(4*Int-Int_Aux)/3;
```

11. Si se calcula $\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx$ usando la *regla de los trapecios* (compuesta) con 11 puntos (es decir, 10 subintervalos), entonces el error cometido, en módulo, es igual a:

(a) $\pi^3 \operatorname{sen}\theta/1200$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;
(b) $\pi^4 \operatorname{sen}\theta/12000$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;
(c) $\pi^2 \cos\theta/120$, para algún $\theta \in (0, \pi)$;
(d) ninguna de las anteriores.

*Sugerencia:* recuerde que el error de la regla de los trapecios (compuesta) satisface:

$$R = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \qquad \xi \in (a, b).$$

12. Como muestra la siguiente gráfica, la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x - \ln x$$

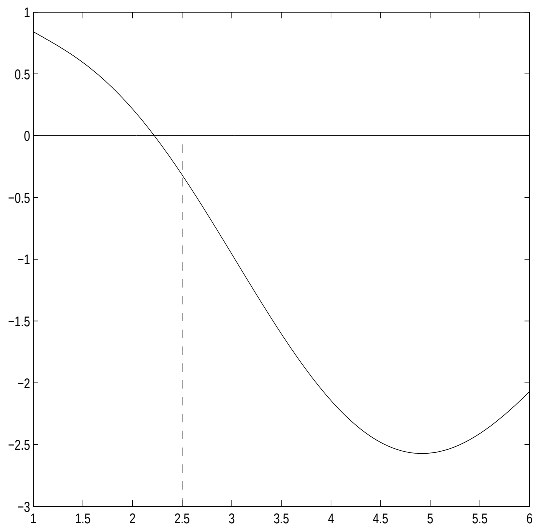
tiene una raíz cerca del punto $x = 2.5$.
Indique cuál de los siguientes algoritmos permite determinar esa raíz mediante el método de *Newton-Raphson*, partiendo de $x_0 = 2.5$:

(a) $x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n - \ln x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

(b) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos x_n - (1/x_n)}{(1/x_n^2) - \operatorname{sen} x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

(c) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\operatorname{sen} x_n - \ln x_n}{\cos x_n - (1/x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

(d) ninguno de los anteriores.




13. Considere el siguiente P.V.C.:

$$\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases}$$

El método de *shooting* aplicado a este P.V.C. consiste en resolver la ecuación $y_z(1) = 1$, donde $y_z$ es la solución del P.V.I.:

(a) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = z; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = z; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -y'' + y' + y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = z, \quad y'(0) = 1; \end{cases}$

(d) ninguna alternativa anterior.

14. El iterado $y_{i+1}$ obtenido por el método (explícito) de Adams-Bashforth de segundo orden está dado por:

(a) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} f_i \right] dx;$

(b) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} f_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1} \right] dx;$

(c) $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i-1} - x_{i+1})} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})} f_{i+1} \right] dx;$

(d) ninguna alternativa anterior.

15. Considere el siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

y el siguiente método numérico para aproximarlo:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55 f_i - 59 f_{i-1} + 16 f_{i-2} - 9 f_{i-3}\right),$$

donde $f_k = f(x_k, y_k)$. Para implementar este método se debe:

(a) calcular directamente $y_1$ suponiendo $y_{-3} = y_{-2} = y_{-1} = 0$;

(b) implementar el método en su forma propuesta, pero sólo se obtendrán valores para $y_4$, $y_8$, $y_{12}, \ldots$;

(c) calcular primero $y_1$, $y_2$ e $y_3$ por un método de Runge-Kutta y después aplicar el método propuesto;

(d) ninguna de las opciones anteriores.