UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Práctica 25: *Aplicaciones lineales*

Problema 1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to V$ una aplicación lineal tal que $T(T(v)) = T(v)$, $\forall v \in V$. Demuestre que $V = Ker(T) \oplus Im(T)$.

Problema 2. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R}), f \mapsto T(f) = f'$, sean B_2 y B_1 las bases canónicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ respectivamente. Calcular

$$[T]_{B_2}^{B_1}.$$

Problema 3. Sea V el espacio generado por $u_1 = sen(x)$ y $u_2 = cos(x)$ y sea $h = 2u_1 - 5u_2$. **[En práctica]**

3.1) Demuestre $v_1 = 2u_1 + u_2$ y $v_2 = 3u_2$ forman una base para V.

3.2) Encuentre la matriz P de transición desde la base $B = \{u_1, u_2\}$ a la base $B' = \{v_1, v_2\}$.

3.3) Calcule el vector de coordenadas de h en la base B y calcule $[h]_{B'}$ como $P[h]_B$.

3.4) Compruebe su respuesta calculando directamente $[h]_{B'}$.

3.5) Encuentre la matriz Q de transición de B' a B

3.6) Evalúe la matriz PQ.

Problema 4. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es una aplicación lineal tal que la matriz asociada a las bases $B_1 = \{(-1, 0), (1, 2)\}$ y $B_2 = \{1, 2x, x^2 + x\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $[T]_{B_1'}^{B_2'}$, para $B_1' = \{(2, 1), (2, 0)\}$ y $B_2' = \{2, 1 - x, 1 + x^2 + x\}$.

Problema 5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases $B_1 = \{(2, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ y $B_2 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ es **[En práctica]**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5.1) Determine la ecuación de definición de T.

5.2) Caracterice el núcleo y la imagen de T e indique su nulidad y rango.

5.3) Analice si T es inyectiva.

Problema 6. Sean V y W espacios vectoriales de dimesión finita sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Demuestre que V es isomorfo a W si y sólo si $dim(V) = dim(W)$.

Problema 7. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, B_1 y B_2 bases de V y W respectivamente. Muestre que la función

$$\phi : L(V, W) \to M_{m\times n}(K), \quad T \mapsto \phi(T) = [T]_{B_1}^{B_2}.$$

es un isomorfismo. **[En práctica]**

Problema 8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Fundamente su respuesta.

8.1) Existe una aplicación no lineal $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que: **[En práctica]**

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall v \in \mathbb{R}^2) : \; L(\alpha v) = \alpha L(v).$$

8.2) Sea $T : V \longrightarrow \mathbb{K}$ una aplicación lineal, tal que $dim(Ker(T)) = dim(V) - 1$. Si $u \in V - Ker(T)$, entonces $V = Ker(T) \oplus < \{u\} >$.

8.3) Sea $S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal, tal que: **[En práctica]**

$$Ker(S) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 3x_2, x_3 = 6x_4\}$$

entonces S es sobreyectiva.

8.4) Sea $R : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, tal que: **[En práctica]**

$$Im(R) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 + x_3\}$$

entonces R es inyectiva;

8.5) Existe una aplicación lineal $T_5 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$Ker(T_5) = \{(x_1, ..., x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2, \; x_3 = x_4 = x_5\}.$$

8.6) Existe una aplicación lineal $T_6 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que: **[En práctica]**

$$Ker(T_6) = \{(x_1, ..., x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2, \; x_3 = x_4\}.$$

8.7) Existe una aplicación no lineal $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:
$T(u) + T(v) = T(u + v), \forall \, u, v \in \mathbb{C}$

03.11.2003
LNB/FPV/acq/aoa