UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 4

INTERPOLACIÓN EN MATLAB

Matlab incluye funciones para calcular y manipular funciones interpolantes; entre ellas:

`vander(x)`	Retorna la matriz de Vandermonde de una colección de abscisas en el vector `x`.
`interp1(x,y,xq)`	Retorna los valores interpolados de una función que pasa por los puntos de coordenadas `x,y` en ciertos puntos `xq`.
`polyfit(x,y,n)`	Retorna los coeficientes del polinomio de grado menor o igual a `n` que mejor se ajusta a los datos `x` e `y`. Para evaluar el polinomio se debe usar `polyval`.
`spline(x,y,xq)`	Retorna los valores interpolados de un spline cúbico que pasa por los puntos de coordenadas `x,y` en ciertos puntos `xq`.

1. Interpolación polinomial

De la teoría sabemos que dado un conjunto de $n+1$ puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ que no repitan abscisas (esto es, $i \neq j \implies x_i \neq x_j$), existe un único polinomio interpolante de grado menor o igual a n. Para el cálculo de este polinomio se debe resolver un sistema de ecuaciones el cual se puede estructurar dependiendo de la base del espacio de polinomios que se elija (base canónica de monomios o base de polinomios de Lagrange).

El rutero interpolacion1.m muestra la aproximación y gráfica de un polinomio interpolante para un conjunto de puntos muestreados de la función `sin`. Comente cada instrucción que se presenta en este programa.

2. Polinomios de Lagrange

Utilizar la matriz de Vandermonde para muchos puntos no es muy buena idea porque esta puede llevar a errores de representación en la memoria del computador (overflow, underflow o redondeo). Una alternativa, para evitar resolver un problema que involucre a una matriz de Vandermonde, es utilizar los polinomios de Lagrange. En general, un polinomio interpolante tiene la forma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} y_k,$$

tal interpolación se puede evaluar con la siguiente función

```
function v = polyinterp(x,y,u)
    n = length(x);
    v = zeros(size(u));
    for k = 1:n
```

```
    w = ones(size(u));
    for i = 1:n
      if i ~= k
        w = (u-x(i))./(x(k)-x(i)).*w;
      end
    end
    v = v + w*y(k);
  end
```

donde el conjunto de puntos de interpolación tienen coordenadas representadas en los vectores `x,y`, las abscisas de los puntos interpolados son los elementos de `u` y las ordenadas de los puntos interpolados son los elementos de la salida `v`. Las siguientes instrucciones nos permiten graficar el polinomio interpolante de una función.

```
x=-2:1:2;
y=sin(x.^3);
figure;
plot(x,y,'o'); hold on
t=-2:0.01:2;
plot(t,polyinterp(x,y,t),'r');
plot(t,sin(t.^3),'g');
legend('Puntos','Interpolacion','Curva original');
```

3. Ejemplos

Los siguientes ejemplos muestran ejecuciones de las funciones de interpolación

1. Cálculo y gráfica de un polinomio interpolante con `polyinterp`

```
x=0:1:10;
y=exp(x.^2);
t=-10:0.01:10;
v=polyinterp(x,y,t);
figure;
plot(x,y,'o',t,exp(t.^2),'-',t,v,'--');
```

2. Cálculo de los coeficientes de un polinomio con `vander`

```
x=1:10;
y=sin(x.^2);
coef=vander(x)\y
```

3. Gráfica de un spline con `spline`.

```
x = 0:10;
y = sin(x);
xx = 0:.25:10;
yy = spline(x,y,xx);
plot(x,y,'o',xx,yy,'--')
```

4. Ajuste de curvas por mínimos cuadrados

Un problema de ajuste lineal de datos es buscar una función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde

$$f(t, \mathbf{x}) = x_1\, \phi_1(t) + x_2\, \phi_2(t) + \cdots + x_n\, \phi_n(t).$$

Por ejemplo, un problema de ajuste polinomial consiste en buscar una función

$$f(t, \mathbf{x}) = x_1 + x_2\, t + \cdots + x_n\, t^{n-1}$$

que se ajuste a los datos $\{(t_i, y_i)\}_{i=1}^n$, esto induce el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = (\phi_j(t_i))_{i,j=1}^n$, y $\mathbf{b} = (y_i)_{i=1}^n$. Probamos que tal sistema de ecuaciones tiene como solución **en el sentido de los mínimos cuadrados** a

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}, .$$

Matlab posee las siguientes funciones para calcular y evaluar ajustes de polinomios

`p=polyfit(x,y,n)`	Encuentra los coeficientes de un polinomio `p` de grado menor o igual a `n` que se ajusta a los puntos de coordenadas `x, y` en el sentido de los mínimos cuadrados.
`y=polyval(p,x)`	Retorna los valores de un polinomio `p` evualuado en las componentes del vector `x`.

En este curso, de hallarnos con un modelo de ajuste no lineal, lo transformaremos en uno lineal usando funciones incluidas en Matlab. Por ejemplo, si nos interesa ajustar los puntos

```
t=[10 20 30 40 50 60 70 80];
y=[1.06 1.33 1.52 1.68 1.81 1.91 2.01 2.11];
```

a un modelo no lineal de la forma

$$f(t, x) = x_1\, e^{x_2\, t},$$

tomando logaritmo natural a ambos lados lo transformamos en

$$\ln(f(t, x)) = \ln(x_1) + x_2\, t,$$

de donde podemos hallar los parámetros de ajuste x_1 y x_2 mediante

```
p=polyfit(t,log(y),1); % En Matlab el logaritmo natural es log
fprintf('parametro x_2 = %2.3f\n',p(1));
fprintf('parametro x_1 = %3.3f\n',exp(p(2)));
hold on
plot(t,y,'ro')
x=linspace(min(t),max(t),50);
z=exp(p(2))*exp(p(1)*t);
plot(x,z,'b')
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Regresion exponencial')
hold off
```

Otros modelos que se pueden encontrar al ajustar los puntos `t` e `y`

Función	Llamada a `polyfit()`
$f(t, (x_1, x_2)) = x_1 \cdot t^{x_2}$	`p=polyfit(log(t), log(y),1)`
$f(t, (x_1, x_2)) = x_1 \cdot e^{x_2 t}$	`p=polyfit(t, log(y),1)`
$f(t, (x_1, x_2)) = x_1 \cdot ln(t) + x_2$	`p=polyfit(log(t),y,1)`
$f(t, (x_1, x_2)) = \dfrac{1}{x_1 t + x_2}$	`p=polyfit(t,1./y,1)`

4.1. Ejemplos

Los siguientes ejemplos muestran ejecuciones de las funciones de ajuste de curvas por mínimos cuadrados

1. El siguiente ejemplo muestra el uso de la función `polyfit`.

```
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 7.44];
y=[0 4.03 8.12 14.23 20.33 27.1 34.53 42.63 46.43];
p=polyfit(x,y,2)
hold on
plot(x,y,'ro','markersize',8,'markerfacecolor','r')
x=linspace(min(x),max(x),50);
y=polyval(p,x);
plot(x,y,'b')
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Polinomio aproximador')
hold off
```

2. La función `mldivide` (alias corto: \) utiliza por defecto aproximaciones en el sentido de mínimos cuadrados. Este ejemplo es el de un sistema sobredeterminado resuelto en el sentido de los mínimos cuadrados

```
A = [1 2 0; 0 4 3];
b = [8; 18];
x = A\b
```

5. Otros modelos de ajustes lineales no polinomiales

Similarmente a lo desarrollado en la sección anterior, diversos modelos de función pueden ajustarse a una serie de puntos.

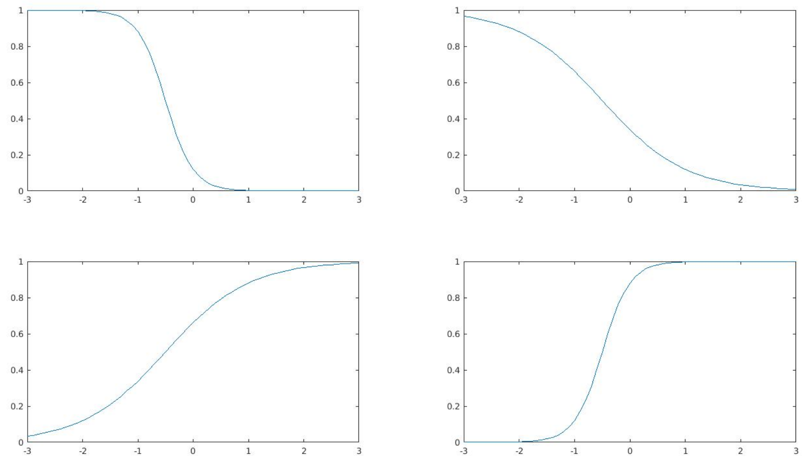
5.1. Regresión logit

Dados dos valores $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$, se define la función logística o logit

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1-e^{\beta_0+\beta_1 x}} \end{aligned}$$

mediante algunas operaciones algebraicas puede probarse que

$$\pi(x) = \frac{1}{e^{-\beta_0-\beta_1 x}+1}, \quad ln\left(\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right) = \beta_0 + \beta_1 x$$



Algunos ejemplos de funciones logit.

Se puede demostrar que el recorrido de cualquier función logit es siempre $]0,1[$. Esto permite utilizarla como función modelo de una probabilidad de un evento. Por ejemplo, considere que los datos

Edad	22	23	21	28	29	18	33	34	29	20	21	23
Hijos	0	1	1	2	2	0	1	1	1	2	0	0

representan la edad de 12 personas entre 20 y 35 años y la cantidad de hijos que cada uno tiene. Se puede pensar que la probabilidad de tener hijos es función de la edad, digamos $\pi(x)$. Para las personas de los datos enteriores, tendríamos que

$$\begin{gathered}\pi(22)=0, \quad \pi(23)=1, \quad \pi(21)=1, \quad \pi(28)=1, \quad \pi(29)=1, \quad \pi(18)=0,\\ \pi(33)=1, \quad \pi(34)=1, \quad \pi(29)=1, \quad \pi(20)=1, \quad \pi(21)=0, \quad \pi(23)=0,\end{gathered}$$

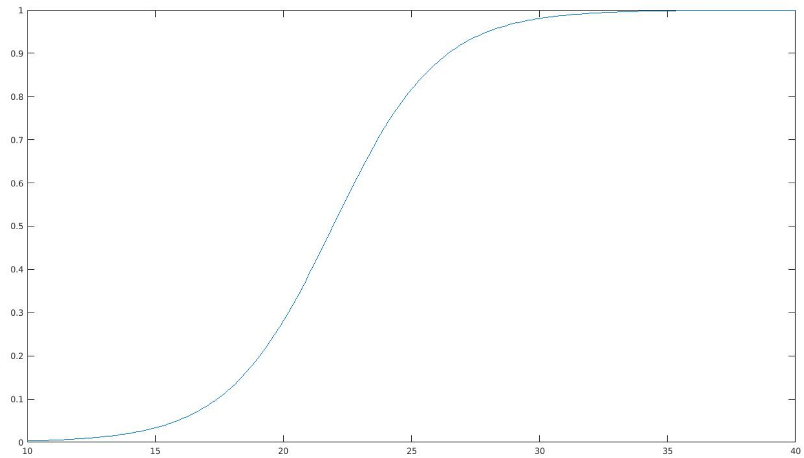
Así, si proponemos que esta función de probabilidad sea una función logit, tendríamos que para cada uno de estos datos

$$\left.\begin{array}{c}\beta_0+\beta_1 22 = ln\left(\dfrac{\pi(22)}{1-\pi(22)}\right)\\ \beta_0+\beta_1 23 = ln\left(\frac{\pi(23)}{1-\pi(23)}\right)\\ \vdots\\ \beta_0+\beta_1 23 = ln\left(\dfrac{\pi(23)}{1-\pi(23)}\right)\end{array}\right|$$

Debido al recorrido de la función logit y para que este sistema esté bien planteado, a los éxitos y fracasos en las probabilidades anteriores, debemos reasignarles valores dentro del intervalo $]0,1[$, propongamos que 0,01 y 0,09 sean estas asignaciones respectivamente. Con esta modificación el problema anterior nos lleva al sistema

$$\left.\begin{array}{c}\beta_0+22\beta_1 = ln\left(\dfrac{0{,}01}{1-0{,}01}\right)\\ \beta_0+23\beta_1 = ln\left(\frac{0{,}99}{1-0{,}99}\right)\\ \vdots\\ \beta_0+23\beta_1 = ln\left(\dfrac{0{,}01}{1-0{,}01}\right)\end{array}\right| \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 22\\ 1 & 23\\ \vdots & \vdots\\ 1 & 23\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4{,}5951\\ +4{,}5951\\ \vdots - 4{,}5951\end{bmatrix}$$

el cual tiene por solución en el sentido de mínimos cuadrados $\beta_0=-10{,}6567, \quad \beta_1=0{,}4859$. Así, con estos parámetros se determina la función de regresión logit



la cual nos permite concluir que a los 22 años, considerando este grupo de personas, existe una probabilidad

$$\pi(22) = \frac{e^{-10{,}6567_0+0{,}4859\cdot 22}}{1 - e^{-10{,}6567+0{,}4859\cdot 22}} = 0{,}5084$$

de tener hijos.

5.2. Funciones periódicas

Algunas veces los datos pueden tener un comportamiento periódico en el tiempo. En estos casos resulta empíricamente mas adecuado utilizar como modelo de ajuste funciones que sean periódicas.

Supongamos que $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ son los puntos a los que queremos ajustarle una función del tipo

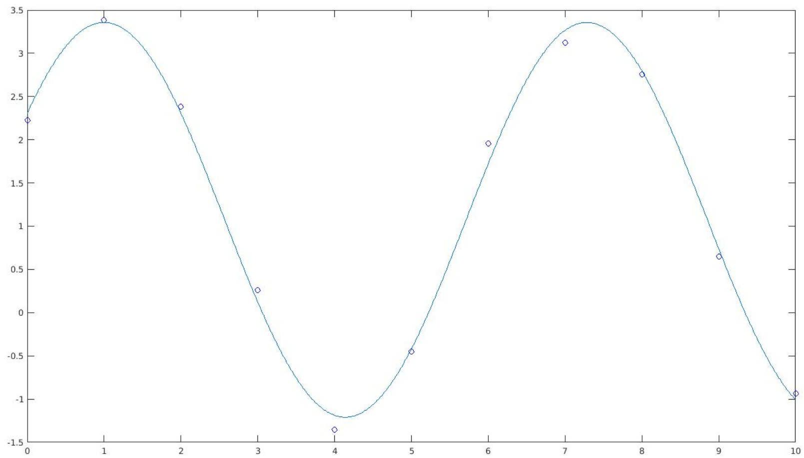
$$f(x) = a_0 + a_1 cos(x) + a_2 sen(x),$$

en este caso, y similarmente a todos los ejemplos anteriores, una vez mas se llega a un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} f(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = y_1 \\ \vdots f(x_n) = y_n \end{array}\right| \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & cos(x_0) & sen(x_0) \\ 1 & cos(x_1) & sen(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & cos(x_n) & sen(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

el cual, en general, podemos resolver mediante mínimos cuadrados. Creando así una forma particular de función f periódica que mas se aproxima a todos los puntos.

Por ejemplo, considere los datos disponibles en puntos.mat este contiene dos variables `x` e `y` que representan el muestreo de una función periódica como la del ejemplo. En un rutero de MATLAB ensamble las matrices del sistema de ecuaciones descrito anteriormente para estos puntos y resuélvalo. Luego, cuando tenga esta solución interprete el vector obtenido. Con esto usted podrá graficar



donde se observa que la función calculada se ajusta a los puntos.

6. Ejercicios

1. En un rutero llamado `interpolacion.m` cargue el archivo de Matlab data.mat usando la función `load`. Este archivo contiene tiempo y longitud de las mediciones del movimiento de un resorte en cierto experimento.

   En el rutero `interpolacion.m`

   a) grafique los datos cargados usando la función `plot` con asteriscos azules,

   b) grafique el polinomio interpolante de los datos cargados.

2. La siguiente tabla

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-25	-4	-1	8	47

   corresponde a los valores de una cierta función f en los puntos $-2, -1, 0, 1, 2$.

   a) Calcule, con ayuda del comando `polyfit` los polinomios $p_1 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $p_2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $p_3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $p_4 \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, $p_5 \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ que mejor ajustan por mínimos cuadrados los datos en la tabla y complete

$p_1(x) =$
$p_2(x) =$
$p_3(x) =$
$p_4(x) =$
$p_5(x) =$

   b) Por cada uno de los polinomios determinados antes, grafique, en una misma figura, al polinomio, evaluado en 100 puntos entre -2 y 2 y los puntos en la tabla. Para ello, averigüe con el comando `help` cómo usar el comando `polyval`.

   c) Haga un nuevo gráfico con los puntos en la tabla y el polinomio $q(x) = x^5 - x^3 + 3x^2 + 6x - 1$, evaluado en 100 puntos entre -2 y 2.

   d) ¿Cuáles de los polinomios $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, q$ interpolan los pares en la tabla?

e) Observe que p_3 y p_4 coinciden. ¿Contradice esto el teorema visto en clases sobre existencia y unicidad del polinomio de interpolación?

f) Observe que p_5 y q no coinciden. ¿Contradice esto el teorema visto en clases sobre existencia y unicidad del polinomio de interpolación?

3. Cargue usando la función de MATLAB `load` el archivo dolar.mat. Este archivo contiene los valores del dólar durante algunos días.

   a) Grafique usando círculos azules el valor del dólar por día.

   b) Calcule y grafique el polinomio interpolante de los datos.

   c) Identifique el fenómeno de Runge en este gráfico.

   d) Calcule y grafique el spline cúbico de los datos.

   e) Calcule y grafique la recta que mejor se ajusta a los datos.

   f) Cree un rutero que calcule la función de la forma

   $$f(x) = ax^3 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

   que mejor se ajuste a los datos. Grafique ésta junto con los datos.

   g) Compare los cuatro modelos de ajustes anterior en un mismo gráfico.

4. Considere $f(x) = \ln(x)$.

   a) Determine, mediante el comando `polyfit` de MATLAB un polinomio que interpole a f en los puntos $1, 2, 3$. Escoja el grado de este polinomio de forma que su existencia y unicidad estén aseguradas.

   b) Grafique, en un mismo gráfico, a la función f y al polinomio calculado, evaluados en 200 puntos entre 1 y 3. Recuerde que puede utilizar el comando `polyval` para evaluar al polinomio. ¿Cómo se reconoce en el gráfico que p interpola a f, así como los puntos de interpolación?

   c) Grafique, en un mismo gráfico, los valores $|f(x_i) - p(x_i)|$ y

   $$\frac{1}{3!} \max_{x\in[1,3]} \left|f'''(x)\right| |(x_i - 1)(x_i - 2)(x_i - 3)|$$

   con $x_i = 1 + ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, 100,\ h = \dfrac{1}{50}$. ¿Se cumple

   $$|f(x_i) - p(x_i)| \leq \frac{1}{3!} \max_{x\in[1,3]} \left|f'''(x)\right| |(x_i - 1)(x_i - 2)(x_i - 3)|\,,\ i = 0, 1, 2, \ldots, 100\,?$$

5. Construya un rutero que dibuje un polinomio interpolante de un conjunto de datos y sus primeras dos derivadas en distintos gráficos de una misma figura. Para esto ocupe la función `vander` y calcule explícitamente los coeficientes del polinomio, luego derive estos polinomios. Finalmente, para anexar varios gráficos dentro de una figura use la función `subplot`.

6. En el archivo pesoestatura.mat se encuentran los datos históricos de peso y estatura de dos hermanos gemelos nacidos el 24 de abril de 1987. Use la función `load` para leer el archivo, luego utilize la función `datenum`, para convertir las fechas de las primeras tres columnas en un número que representa el tiempo en días.

   Luego haga dos gráficos de sus pesos y estaturas versus el tiempo, dibuje en círculos rojos los datos descargados Además incluya a estos datos sus ajustes lineales, polinomio de interpolación y spline cúbica. Incluya título y leyenda de cada una de las funciones dibujadas.

7. En una hoja de papel delgada sobrepone una de tus manos, con un lápiz marca una cantidad de puntos finita, que te parezca adecuada, para representar el contorno de tu mano. En la ventana de comandos escribe las siguientes instrucciones

```
figure('position',get(0,'screensize'))
axes('position',[0 0 1 1])
[x,y] = ginput;
```

Posiciona la hoja de papel con los puntos sobre la pantalla de tu computador y usa el mouse para seleccionar alguno de estos puntos (deberas poder ver a través de la hoja de papel la posición del mouse), finalmente apreta la tecla enter. Luego graba estos datos usando el comando

```
save x,y;
```

Ahora imagina que estos vectores `x,y` son muestras de dos funciones $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ejecuta una interpolación polinomial y splines cúbicos de estas funciones. Finalmente grafica en el plano la función que obtienes al interpolar la función $(x(t), y(t))$ y los puntos de los vectores `x,y`.

8. La función Gamma está definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0/$$

Se sabe que cuando se evalúa en un natural $n \geq 1$, se tiene que

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

en consecuencia, un conjunto de puntos de esta función son

x	1	2	3	4	5
y	1	1	2	6	24

a) Calcule el polinomio de grado cuatro que interpola estos puntos. Dibuje este polinomio y también la función usando la función de Matlab `gamma`

b) Realize una interpolación por splines cúbicos de estos puntos, nuevamente dibújenla junto con la función `gamma`.

c) ¿Cual de los dos interpolantes es mejor?,

d) ¿Cual de los dos interpolantes es mejor en el intervalo [1,2]?,

9. La siguiente tabla relaciona el ordinal de un día del año 2014 (día 1 = 1 de enero, día 30 = 30 de enero, día 57 = 26 de febrero, etc.) con la hora (UTC-3, expresada en minutos; esto es, 398 = 6:38, 427 = 7:07, 456 = 7:36, etc.) en la que amaneció ese día en Concepción:

Día (ordinal)	1	30	57	88	117	135	169	197	227	255	286	311
Hora (minutos)	398	427	456	484	509	525	545	543	517	478	432	402

Sobre estos datos se desea ajustar por cuadrados mínimos una función $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$m(d) = c_0 + \sum_{k=1}^{3} c_k \cos\left(k\, d\, \frac{2\pi}{365}\right) + \sum_{k=1}^{3} s_k \operatorname{sen}\left(k\, d\, \frac{2\pi}{365}\right),$$

a) Escriba una función Matlab que reciba como entrada un vector columna d, una frecuencia angular $f \in \mathbb{R}$ y un número de onda máximo $K \in \mathbb{N}$ y devuelva la matriz de orden $n \times (2K+1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(d_1 f) & \cos(2d_1 f) & \cdots & \cos(Kd_1 f) & \operatorname{sen}(d_1 f) & \operatorname{sen}(2d_1 f) & \cdots & \operatorname{sen}(Kd_1 f) \\ 1 & \cos(d_2 f) & \cos(2d_2 f) & \cdots & \cos(Kd_2 f) & \operatorname{sen}(d_2 f) & \operatorname{sen}(2d_2 f) & \cdots & \operatorname{sen}(Kd_2 f) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(d_n f) & \cos(2d_n f) & \cdots & \cos(Kd_n f) & \operatorname{sen}(d_n f) & \operatorname{sen}(2d_n f) & \cdots & \operatorname{sen}(Kd_n f) \end{pmatrix},$$

donde n es la longitud de d. Recuerde que en MATLAB la función seno se llama `sin`.

b) Escriba un rutero Matlab que:

- Use la función construida en la parte anterior para ajustar los coeficientes c_i y s_i, $i \in \{1, 2, r\}$, a los datos de la tabla mediante cuadrados mínimos.
  Indicación: naturalmente $K = 3$ y $f = \frac{2\pi}{365}$
- Calcule a qué hora amaneció el 25 de diciembre de 2014 (día 359 del año) según la función m ajustada
  Indicación: una llamada a la función que usted escribió anteriormente con d igual a `[359]` le puede ser útil.