UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1	Pregunta 2

TEST 2 VERSIÓN 1 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. Considere las matrices

$$M(n) = \begin{bmatrix} 2/n+2 & 0 & cos(\pi n)/n \\ 1 & 1 & 1/n \\ 1+1/n & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) **(10 puntos)** Cree una función de Octave que reciba como entrada el número n y retorne la $n-$ésima matriz $M(n)$.

   b) **(20 puntos)** En un rutero de Octave llamado `matrices.m` y luego grafique en un mismo gráfico las soluciones de los sistemas

$$M(n) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   considerando $n \in \{1, 2, \cdots, 100\}$.

Desarrollo:

a) La función debe ser similar a

```
function r=M(n)
r=[2/n,0,cos(pi*n)/n;1,1,1/n;1+1/n,0,1];
```

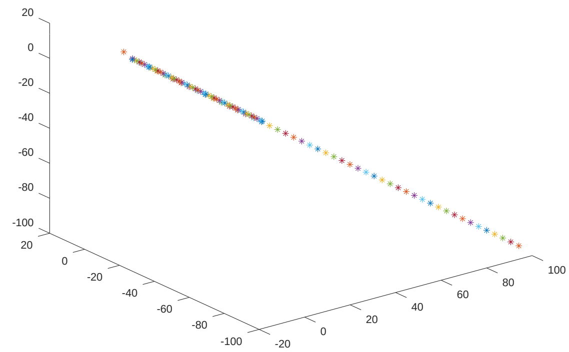
$\boxed{\text{10 puntos}}$

b) y con esta función un rutero como

```
close all;
for i=1:100
  sol=M(i)\[1;2;3];
  plot3(sol(1),sol(2),sol(3),'*');
  hold all;
 end
```

$\boxed{\text{20 puntos}}$

genera una gráfica similar a

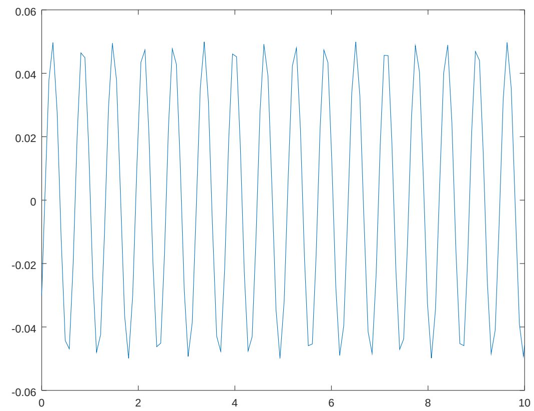


2. El movimiento de un sistema masa–resorte–amortiguador ideal, donde la masa es m kg, la constante del resorte es R N/m y el amortiguador es de coeficiente de difusión k N/(m/s) es modealado por la ecuación diferencial
$$mx''(t) + kx'(t) + Rx(t) = f(t),$$
donde $x(t)$ es la posición de la masa y $f(t)$ una fuerza externa.
Considere una masa de 2 kg que está unida a una pared por medio de un resorte sin amortiguación, de constante $R = 200$ N/m. El resorte se comprime inicialmente una distancia de 0.03 m y se le suelta con una velocidad de 0.4 m/s hacia la posición de equilibrio. Escriba un programa OCTAVE que permita conocer la posición y velocidad de la masa transcurridos 10 segundos desde que fue soltada, sabiendo que sobre ella no actua ninguna fuerza externa. Grafique igualmente la posición y la velocidad de la masa como función del tiempo en los primeros 10 segundos.
Indicación: La posición de equilibrio ($x = 0$) es aquella en que el resorte no está comprimido ni estirado. Cuando el resorte está estirado, entonces la posición se considera positiva ($x > 0$) y cuando el resorte está comprimido, la posición se considera negativa ($x < 0$).

Desarrollo: El programa debe ser similar a

```
x0=[-0.03,0.4]
df=@(t,x) [x(2),-200/2*x(1)];
[t,x]=ode45(df,[0,10],x0);
plot(t,x(:,1))
```

$\boxed{\text{20 puntos}}$ y el gráfico generado es similar a



10 puntos

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1	Pregunta 2

TEST 2 VERSIÓN 2 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. En un programa de OCTAVE resuelva el siguiente problema.

   Una piedra cae desde al cima de un acantilado. En el aire la velocidad promedio es de $16[m/s]$. En el agua la velocidad promedio es de $3[m/s]$ antes de golpear con el fondo marino. La distancia total desde la cima del acantilado al fondo marino es de $127[m]$ y el trayecto completo de la piedra tomó $12[s]$. ¿Cuánto tiempo estuvo cayendo la piedra en el aire y en el agua?.

   Desarrollo: Considerando las variables t_a y t_m como el tiempo de vuelvo en el aire y en el mar respectivamente, y usando la información dada en el enunciado se construye el sistema

$$\begin{aligned} 16t_a + 3t_m &= 127 \\ t_a + t_m &= 12 \end{aligned}$$

   y este se puede resolver según el rutero

```
A=[16,3;1,1];
b=[127;12];
x=A\b
```

20 puntos

   obteniendo como respuesta

```
>> P1
x =

   7
   5
```

10 puntos

2. Considere la ecuación diferencial de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) = -\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x), & x \in]0,1[\\ y(0) = 0, & \\ y'(1) = \pi, & \end{cases} \qquad \text{cuya solución exacta es } y(x) = \operatorname{sen}(\pi x).$$

   a) Transforme esta ecuación a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

   b) Cree una función de OCTAVE , llamada `myeuler.m`, que aproxime la solución del sistema obtenido en *a*), utilizando el método de **Euler Explícito** con una partición uniforme de n subintervalos. La función debe:

   - Recibir: el parámetro n.

- Entregar: Un vector que contenga los nodos de la partición $x_0, x_1, ..., x_n$ y la aproximación de $y(x)$ en cada nodo de la partición.

c) En un rutero de OCTAVE llamado `grafico.m`, grafique la solución exacta y la aproximación obtenida en b) considerando $N = 128$.

Desarrollo:

a) Las sustituciones necesarias nos llevan al sistema

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= u_2(x) \\
u_2'(x) &= -\pi^2 sin(\pi x) \\
u_1(0) &= 0 \\
u_2(0) &= \pi
\end{aligned}$$

5 puntos

b) La función solicitada deber ser similar a

```
function [x,y]=myeuler(n)
x=linspace(0,1,n);
u=[0;pi];
for i=1:length(x)-1
  u(:,i+1)=[u(2,i);-pi^2*sin(pi*x(i))]*1/n+u(:,i);
  endfor
y=u(1,:);
```

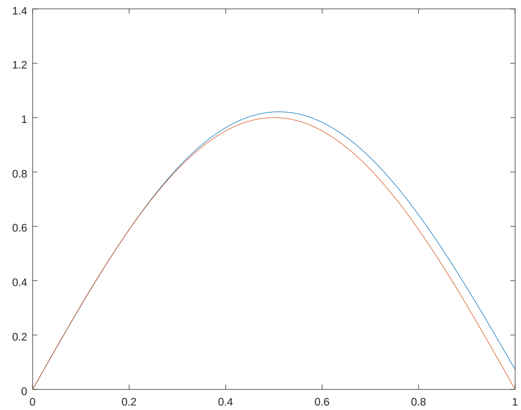
15 puntos

c) El rutero debe tener instrucciones similares a

```
N=128;
[x,y]=myeuler(N);
plot(x,y); hold all;
sol=@(x) sin(pi*x);
xplot=0:0.01:1;
plot(xplot,sol(xplot));
```

10 puntos

con el que se genera el gráfico



1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1	Pregunta 2

TEST 2 VERSIÓN 3 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. En un programa de OCTAVE resuelva el siguiente problema.

   Un total de 78 entradas a un concierto fueron vendidas, produciendo un ingreso total de \$483000. Si las entradas costaban \$2500 y \$10500, ¿Cuántas asientos de cada precio fueron vendidas?.

   Desarrollo: Siendo v_1 y v_2 variables que representan el total de entradas vendidas a \$2500 y \$10500 respectivamente, entonces del enunciado se deduce que

   $$\begin{array}{l} 2500v_1 + 10500v_2 = 483000 \\ v_1 + v_2 = 78 \end{array}$$

   lo cual se puede resolver con un rutero como

   teniendo por respuesta

2. Considere la ecuación diferencial

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & -100y(x) + 101e^{-x}, \quad x \in]0,1[\\ y(0) & = & 0, \end{array} \right. \qquad \text{cuya solución exacta es } y(x) = e^{-x} - e^{-100x}.$$

   a) Cree una función de OCTAVE , llamada `explicito.m`, que aproxime la solución de la ecuación, utilizando el método de **Euler Explícito** con una partición uniforme de subintervalos de longitud h. La función debe graficar tanto la solución exacta como su aproximación. La función debe:
   - Recibir: el parámetro h.
   - Entregar: Un vector que contenga los nodos de la partición $x_0, x_1, ..., x_n$ y la aproximación de $y(x)$ en cada nodo de la partición.

   b) Cree una función de OCTAVE , llamada `implicito.m`, que aproxime la solución de la ecuación, utilizando el método de **Euler Implícito** con una partición uniforme de subintervalos de longitud h. La función debe:
   - Recibir: el parámetro h.
   - Entregar: Un vector que contenga los nodos de la partición $x_0, x_1, ..., x_n$ y la aproximación de $y(x)$ en cada nodo de la partición.

   c) Cree un rutero de OCTAVE llamado `graficos_euler.m`, que grafique la solución exacta y la aproximación obtenida:
   - en a) considerando $h = 1/32$.
   - en a) considerando $h = 1/100$.
   - en b) considerando $h = 1/32$.

Desarrollo:

a) Directamente del enunciado se puede crear una función como:

```
function [x,y]=explicito(h)
x=0:h:1;
y(1)=0;
for i=1:length(x)-1
  y(i+1)=(-100*y(i)+101*exp(-x(i)))*h+y(i);
endfor
```

10 puntos

b) Despejando y_{i+1} en la siguiente ecuación

$$y_{i+1} = (-100y_{i+1} + 101e^{-x_{i+1}})h + y_i$$

se puede crear la función

```
function [x,y]=implicito(h)
x=0:h:1;
y(1)=0;
for i=1:length(x)-1
  y(i+1)=(101*h*exp(-x(i+1))+y(i))/(1+100*h);
endfor
plot(x,y)
```

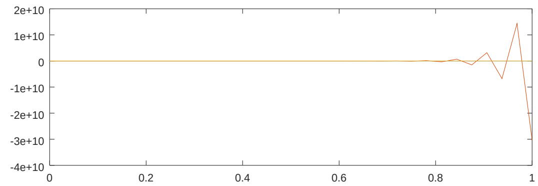
10 puntos

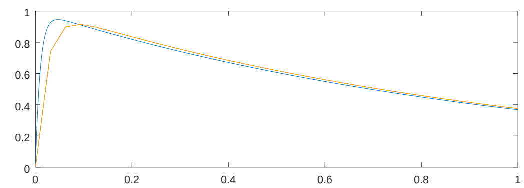
c) Finalmente, usando estas funciones un rutero como

```
clear all; close all; clc;
sol=@(x) exp(-x)-exp(-100*x);
subplot(2,1,1)
xplot=0:0.001:1;
plot(xplot,sol(xplot)); hold all;
[x,y]=explicito(1/32);
plot(x,y);
[x,y]=explicito(1/100);
plot(x,y);

subplot(2,1,2);
xplot=0:0.001:1;
plot(xplot,sol(xplot)); hold all;
[x,y]=implicito(1/32);
plot(x,y);
```

10 puntos logra generar los gráficos


2e+10
1e+10
0
-1e+10
-2e+10
-3e+10
-4e+10
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1	Pregunta 2

TEST 2 VERSIÓN 4 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \quad x \in [a, b] \\ y(a) &= y_0. \end{cases}$$

Para aproximar su solución, se realiza una partición uniforme del intervalo $[a, b]$, formada por n subintervalos de longitud h, tal que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Además, dado un parámetro $\theta \in]0, 1]$ se utiliza el siguiente algoritmo asociado a la familia de métodos RK_{22}:

$$\begin{aligned}
&\text{for} \quad i = 0, 1, ..., n-1 \\
&\qquad r = x_i + h\theta \\
&\qquad z = y_i + h\theta f(x_i, y_i) \\
&\qquad y_{i+1} = y_i + h\left(1 - \frac{1}{2\theta}\right) f(x_i, y_i) + h\left(\frac{1}{2\theta}\right) f(r, z) \\
&\text{end}
\end{aligned}$$

Considere la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x) + \pi e^x \cos(\pi x), \quad x \in]0, 1[\\ y(0) &= 0, \end{cases} \qquad \text{cuya solución exacta es } y(x) = e^x \operatorname{sen}(\pi x).$$

a) Cree una función de OCTAVE , llamada `rk22.m`, que aproxime la solución de la ecuación, utilizando este algoritmo RK_{22}. La función debe:
- Recibir: el parámetros h y θ.
- Entregar: Un vector que contenga los nodos de la partición $x_0, x_1, ..., x_n$ y la aproximación de $y(x)$ en cada nodo de la partición.

b) Cree un rutero de OCTAVE llamado `ejemplo_rk22.m`, que grafique la solución exacta y la aproximación obtenida:
- considerando $h = 1/32$ y $\theta = 1$.
- considerando $h = 1/32$ y $\theta = 1/2$.

Desarrollo:

a) La función solicitada debe tener una estructura similar a

```
function [x,y]=rk22(h,theta);
  x=0:h:1;
  f=@(x,y) y+pi*exp(x)*cos(pi*x);
```

```
  y(1)=0;
  for i=1:length(x)-1
    r=x(i)+h*theta;
    z=y(i)+h*theta*f(x(i),y(i));
    y(i+1)=y(i)+h*(1-1/2/theta)*f(x(i),y(i))+h/2/theta*f(r,z);
    endfor
```

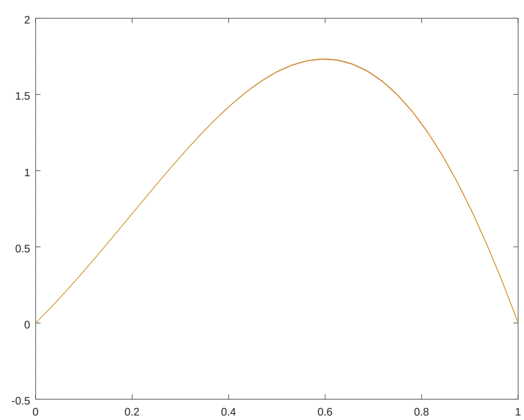
20 puntos

b) El rutero solicitado debe ser similar a

```
close all;
sol=@(x)  exp(x).*sin(pi*x);
vec=0:0.001:1;
plot(vec,sol(vec));hold all;
[x,y]=rk22(1/32,1);
plot(x,y);
[x,y]=rk22(1/32,0.5);
plot(x,y);
```

10 puntos

y con el cual se genera un gráfico como



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Pregunta 1	Pregunta 2

TEST 2 VERSIÓN 5 CÁLCULO NUMÉRICO 521230

Nombre: **Carrera:**

Ayudante: **Matrícula:**

Enviar los programas solicitados en el formato solicitado al correo informado por el ayudante de su sección y con copia a **numerico@ing-mat.udec.cl**.

1. La ecuación

$$\frac{dp}{dt} = ap(t) - bp(t)^2$$

se conoce como **ecuación logística**, y una de sus aplicaciones es el modelamiento de crecimiento de poblaciones. La función $p(t)$ representa la cantidad de individuos de una población (medida en millones) y t el tiempo (medido en años). Escriba un programa Octave que:

(a) Para $a = b = 1$, calcule la cantidad de individuos de la población, transcurridos dos y cuatro años, suponiendo que inicialmente había 2 millones de individuos.

(b) Grafique la solución exacta del PVI formulado en (a), que está dada por $p(t) = -\dfrac{2e^t}{1-2e^t}$, y la solución aproximada, para $t \in [0, 4]$.

Desarrollo:

a) Un rutero como

```
p0=2;
dp=@(t,p)   p-p.^2;
[t,p]=ode45(dp,[0,2],p0);
p(end)
[t,p]=ode45(dp,[0,4],p0);
p(end)
```

15 puntos

retorna

```
    >> p1a
ans =  1.0726
ans =  1.0092
```

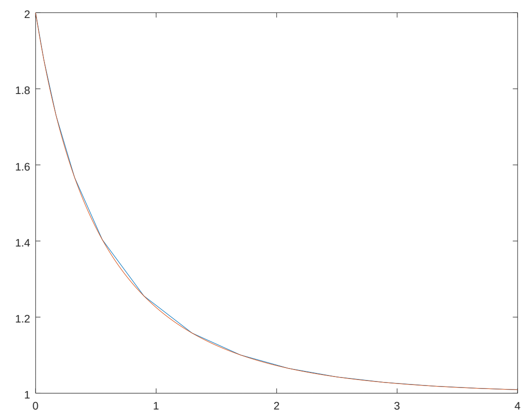
que son las cantidades aproximadas a los 2 y 4 años.

b) Un rutero como

```
p0=2;
dp=@(t,p)   p-p.^2;
[t,p]=ode45(dp,[0,4],p0);
plot(t,p); hold all
sol=@(t) -2*exp(t)./(1-2*exp(t));
xplot=0:0.001:4;
plot(xplot,sol(xplot));
```

15 puntos

genera la gráfica



2. Un cohete con masa inicial de m_0 kg se lanza verticalmente desde la superficie de la Tierra. El cohete expele gas a razón de α kg/s y a una velocidad constante de β m/seg relativa al cohete. Suponiendo que el campo gravitacional es constante de g kg/s^2, la segunda ley de Newton da lugar a la ecuación
$$(m_0 - \alpha t)\frac{dv}{dt} - \alpha\beta = -g(m_0 - \alpha t),$$
donde $v = dx/dt$ es la velocidad del cohete, x es su altura respecto de la superficie de la Tierra y $m_0 - \alpha t$ es la masa del cohete a los t segundos del lanzamiento. Sabiendo que la velocidad inicial es cero, y considerando $g = 9,81$, escriba un programa Octave que resuelva el PVI asociado para los primeros 30 segundos, cuando $m_0 = 1000$, $\alpha = 20$ y $\beta = 1$, y que grafique la velocidad calculada y la velocidad exacta, dada por
$$v(t) = -20\ln(1000 - 20t) - 9.81t + 20\ln(1000).$$
¿Cuál es la altura del cohete cuando ya han transcurrido 30 segundos desde que despegó?

Desarrollo: Despejando la derivada de la E.D.O. del modelo y remplazando los valores del enunciado se llega al P.V.I.

$$\left.\begin{array}{ll} x''(t) & = \frac{-9.81(1000-20t)+20}{1000-20t} \\ x(0) & = 0 \\ x'(0) & = 0 \end{array}\right|$$

el cual se reduce de orden al sistema

$$\left.\begin{array}{ll} u_1' & = u_2 \\ u_2' & = \frac{-9.81(1000-20t)+20}{1000-20t} \\ u_1(0) & = 0 \\ u_2(0) & = 0 \end{array}\right|$$

el cual se puede resolver numéricamente con un rutero como

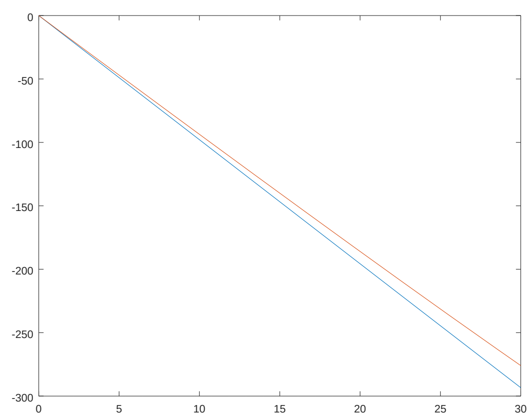
```
clear all; close all;
v0=[0,0];
dv=@(t,v) [v(2),(-9.81*(1000-20*t)+20)/(1000-20*t)];
[t,v]=ode45(dv,[0,30],v0);
plot(t,v(:,2))

sol=@(t) -20*log(1000-20*t)-9.81*t+20*log(1000);
tplot=0:0.001:30;
hold all;
plot(t,sol(t));

v(end,1)
```

25 puntos

donde se genera la gráfica



y se obtiene la respuesta de la altura final del cohete

```
>> p2
ans = -4402.8
```

5 puntos