UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

FORMAS CUADRATICAS. [1]

Definición. Se llama forma cuadrática a toda función

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2, ..., n; \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, ..., n.$

Observaciones:

1. Nótese que cada término tiene grado dos.
2. Si la forma cuadrática tiene la forma

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2; \quad y \in \mathbb{R}^n \ , \quad d_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

   entonces, se dice que está en forma **Canónica**.
3. Posteriormente se verá que toda forma cuadrática puede escribirse en forma canónica.

Ejemplo. Sean las funciones $p_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ definidas por :

$$p_1(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$
$$p_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3$$
$$p_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$$

De acuerdo con la definición sólo p_3 es una forma cuadrática.

Matriz asociada a una forma cuadrática.

Dada una forma cuadrática

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

[1]Prof. José Sánchez A.

entonces ella se escribe en forma matricial como:

$$f(x) = x^t A x$$

donde,

$$x^t = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Ejemplo. Sea $p_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$, entonces la expresión matricial para p_3 es:

$$p_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$p_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$p_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nótese que de las tres expresiones matriciales sólo en la tercera forma, la matriz es **simétrica**. Este resultado es válido en general.

Proposición. Dada una forma cuadrática $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces existe una única matriz simétrica $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$f(x) = x^t S x.$$

Observación.

Los elementos s_{ij} de la matriz simétrica S, asociada a una forma cuadrática

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

son $s_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$ $\; i, j = 1, 2, ..., n.$

Ejemplo. Sea $p(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_3^2$, escribirla en forma matricial con matriz asociada simétrica.

Solución. Se tiene que:

$$s_{12} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2} = 1, \quad s_{11} = \frac{a_{11} + a_{11}}{2} = a_{11}, \quad s_{13} = \frac{a_{13} + a_{31}}{2} = 2,$$

$$s_{22} = \frac{a_{22} + a_{22}}{2} = a_{22}, \quad s_{23} = \frac{a_{23} + a_{32}}{2} = 0, \quad s_{33} = \frac{a_{33} + a_{33}}{2} = a_{33}.$$

Luego,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^t S x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nótese que los coeficientes de los términos al cuadrado aparecen sobre la diagonal principal y que los coeficientes de los términos de producto cruzado se dividen por 2 y se colocan en las posiciones extradiagonales de la matriz, como se indican:

Coeficiente de	Posición en la matriz S
x_1x_2	12 y 21
x_1x_3	13 y 31
x_2x_3	23 y 32

La forma cuadrática:

$$f(x) = x^t A x, \qquad \text{con} \quad A = A^t$$

puede ser expresada en función del producto interior de $\mathbb{R}^n$ como sigue:

$$f(x) = x^t A x = x^t A^t x = (Ax)^t x =< x, Ax >$$

Cambio de variable en $\mathbb{R}^n$.

Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces un **cambio de variable** es una ecuación de la forma

$$x = Py \ \text{ o } \ y = P^{-1}x,$$

donde $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz inversible, que corresponde a la matriz de paso de una base de $\mathbb{R}^n$ a otra.

Observación.- Si $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ donde p_j es la columna j de la matriz P, entonces

$$x = Py = y_1p_1 + y_2p_2 \cdot \cdot + y_np_n.$$

Luego, el vector "y"es el vector de coordenadas del vector "x" relativo a la base de $\mathbb{R}^n$ determinada por los vectores columnas de P.

Si se aplica el cambio de variable $x = Py$ a una forma cuadrática $f(x) = x^t A x$ entonces

$$f(x) = x^t A x = (Py)^t A(Py) = y^t(P^t AP)y = y^t Q y = f(y).$$

Nótese que la nueva matriz de la forma cuadrática es $Q = P^t AP$.

Si P diagonaliza ortogonalmente a la matriz A, entonces $P^t = P^{-1}$ y en tal caso $P^tAP = P^{-1}AP = D$, donde D es matriz diagonal.

En resumen. Si se elige la matriz P del cambio de variable $x = Py$ como una matriz que diagonaliza ortogonalmente la matriz A de la forma cuadrática $f(x) = x^tAx$, entonces se obtiene una forma cuadrática $f(y) = y^tDy$ donde D es una matriz diagonal, por lo cual

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}y_i^2 = d_{11}y_1^2 + \cdots + d_{nn}y_n^2.$$

Es decir, se obtiene una forma cuadrática canónica (que no contiene términos de producto cruzado).

Teorema de los ejes principales.-

Sea $f(x) = x^tAx$ una forma cuadrática con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, entonces existe un cambio ortogonal de variable, $x = Py$ que transforma la forma cuadrática $f(x)$ en una forma cuadrática $f(y) = y^tDy$ donde D es una matriz diagonal.

Observación.- Las columnas de la matriz P se llamam ejes principales de la forma cuadrática $f(x) = x^tAx$. El vector y es el vector de coordenadas del vector x con respecto a la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ dada por estos ejes principales.

Recordemos el método para diagonalizar ortogonalmente una matriz A.

a) Calcular los valores propios de A.

b) Determinar una base para cada espacio propio de A.

c) Aplicar Gramm -Schmidt para obtener bases ortogonales en cada espacio propio. Normalice.

d) Construir la matriz P usando como columnas los vectores propios ortonormales del paso (c).

e) Finalmente, construir la matriz D con los valores propios correspondientes colocados sobre la diagonal principal.

CONICAS O SECCIONES CONICAS.

Consideremos la ecuación cuadrática general en $\mathbb{R}^2$:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ o $b \neq 0$ o $c \neq 0$.

Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas en x e y se llamán **cónicas o secciones cónicas**. Las cónicas (no degeneradas) más importantes son: elipses, hipérbolas, parábolas y círculos.

Puede observarse que la ecuación (1) contiene la forma cuadrática asociada:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy \tag{2}$$

La forma matricial de la ecuación (1) es :

$$x^t Ax + Kx + f = 0 \qquad (3),$$

donde $x^t = (x \quad y)$, A=$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ y K = (d e).

Observaciones:

a) La presencia de un término en xy en la ecuación de una cónica indica que la cónica está rotada de su posición estandar. En este caso se debe efectuar una transformación de coordenadas ortogonal $x = Py$.

b) La presencia de cualquiera de los pares de términos x^2, x o y^2, y indica que la cónica está trasladada. En este caso se debe efectuar una traslación de ejes completando cuadrados de binomio.

Identificación de Cónicas.

Dada una ecuación general de la forma (1).

a). Si la ecuación tiene término de producto cruzado x_1x_2, entonces calcule la matriz P que diagonaliza ortogonalmente la matriz A de la forma (2). Si es necesario intercambie dos columnas de P de modo que $det(P) = 1$. Esto asegura que la transformación de coordenadas ortogonal $x = Py$ sea una **rotación.**

b). Sustituya $x = Py$ en (1) o en (3), obteniendo:

$$y^t(P^t AP)y + (KP)y + f = 0 \tag{4}$$

Puesto que P diagonaliza ortogonalmente a A, se tiene

$$P^t AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

con λ_1, λ_2 valores propios de A.

Luego (4) puede ser escrita como :

$$(y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (d \quad e)P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + f = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2\ y_2^2 + d' y_1\ + e' y_2 + f = 0 \tag{5}$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad d' = dp_{11} + ep_{21}, \quad e' = dp_{12} + ep_{22}.$$

La ecuación (5) de la cónica en el nuevo sistema de coordenadas $y_1 y_2$ no tiene término de producto cruzado.
c). Complete cuadrado de binomio. Use ecuaciones de traslación e identifique la cónica.

Ejemplo. Dada la ecuación $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 48$ escriba las ecuaciones de cambio de variable que permitan identificar la cónica.

Solución. La forma matricial de la ecuación es $x^t A x = 48$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Los valores propios de A son las soluciones de la ecuación

$$det(A - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 7.$$

b) Vectores propios: Si $\lambda = 3$, entonces $(A - \lambda I)x = (A - 3I)x = 0$, con

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

y $(A - 3I)x = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$. Luego, $x = (x_1, x_2)^t = x_1(1,1)^t$. Normalizando se tiene: $p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$.

Si $\lambda = 7$, entonces $(A - \lambda I)x = (A - 7I)x = 0$, con

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

y $(A - 7I)x = 0 \Longleftrightarrow x_1 = -x_2$. Luego, $x = (x_1, x_2)^t = x_2(-1,1)^t$. Normalizando se tiene: $p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^t$. Nótese que p_1 y p_2 son ortogonales.

c) La matriz

$$P = (p_1 \quad p_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad det(P) = 1$$

diagonaliza ortogonalmente la matriz A y la transformación de coordenadas ortogonal

$$x = Py \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

es una rotación

Ahora, reemplazando $x = Py$ en $x^tAx = 48$ se tiene $y^t(P^tAP)y = 48$, como P diagonaliza ortogonalmente a A, $y^tDy = 48$, con

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

se tiene que la ecuación original se transforma en

$$3y_1^2 + 7y_2^2 = 48 \Longleftrightarrow \frac{y_1^2}{4^2} + \frac{y_2^2}{(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}})^2} = 1$$

Observe que la ecuación dada representa una elipse de ecuación $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$.

CUADRICAS O SUPERFICIES CUADRICAS

Consideremos ahora la ecuación cuadrática general en $\mathbb{R}^3$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \qquad (6)$$

donde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$,con a, b, c, d, e y f no todos nulos.

Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas en x, y, z se llaman **cuádricas o superficies cuádricas**. Las cuádricas no degeneradas más importantes se adjuntan en hoja aparte.

Puede observarse que la ecuación (6) contiene la forma cuadrática asociada

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz. \qquad (7)$$

Su forma matricial asociada es

$$x^tAx + Kx + j = 0 \qquad (8),$$

donde $x^t = (x \quad y \quad z)$, $\quad$ A$=\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ y $\quad$ K = (g $\quad$ h $\quad$ i).

Observaciones:

1. La presencia de un término en xy, xz o en yz en la ecuación (6), indica que la cuádrica está rotada de su posición estandar. En este caso se debe efectuar una transformación de coordenadas ortogonal $x = Py$.

2. La presencia de cualquiera de los pares de términos $x^2, x; y^2, y$ o en z^2, z indica que la cuádrica está trasladada. En este caso se debe efectuar una traslación de ejes completando cuadrado de binonio.

Reconocimiento de Cuádricas.

Para el reconocimiento de una cuádrica se efectúan los mismos pasos indicados para el caso de las cónicas.

Ejemplo. Dada la ecuación

$$7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 12x_1 + 12x_2 + 60x_3 = 24.$$

Escriba las ecuaciones de cambio de variables que permitan identificarla.

Solución. La forma matricial de esta ecuación es

$$x^tAx + Kx + j = 24,$$

donde $x^t = (x \quad y \quad z)$, A$=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ y K = (-12 12 60).

a) Los valores propios de A son las soluciones de la ecuación

$$det(A - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 7-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 6 \quad \text{y} \quad \lambda = 12$$

b) Vectores propios: Si $\lambda = 6$, entonces $(A - \lambda I)x = (A - 6I)x = 0$, con

$$A - 6I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

y $(A-6I)x = 0 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$. Luego, $x = (x_1, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(2,0,1)$. Los vectores $v_1 = (1,1,0), v_2 = (2,0,1)$ son linealmente independientes pero no son ortogonales. Para ortonormalizar utilizamos el proceso de Gramm-Schmidt, obtenemos:

$$v_1' = (1,1,0), \quad v_2' = v_2 - \frac{< v_2, v_1' >}{||v_1'||^2} v_1' = (1,-1,1)$$

Normalizando, se tiene:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^t, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^t.$$

Nótese que p_1 y p_2 son ortogonales.

Si $\lambda = 12$, entonces $(A - \lambda I)x = (A - 12I)x = 0$, con

$$A - 12I = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

y $(A - 12I)x = 0 \Longleftrightarrow x_3 = 2x_2, x_1 = -x_2$. Luego, $x = (x_1, x_2, x_3)^t = x_2(-1, 1, 2)^t$. Normalizando, se tiene: $p_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)^t$. Nótese que p_3 es ortogonal con p_1 y con p_2.

c) La matriz

$$P = (p_1 \quad p_2 \quad p_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

tiene $det(P) = -1$, luego intercambiamos las dos primeras columnas para obtener:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad det(P) = 1$$

La matriz P diagonaliza ortogonalmente la matriz A y la transformación de coordenadas ortogonal

$$x = Py \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

es una rotación.

Ahora, reemplazando $x = Py$ en la forma matricial de la ecuación, con $P^tAP = D$, se tiene $y^tDy + KPy = 24$ y como

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad KP = (-12 \quad 12 \quad 60)P = (12\sqrt{3}, 0, 34\sqrt{6}),$$

se tiene que la ecuación original se transforma en

$$6y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_3^2 + 12\sqrt{3}y_1 + 34\sqrt{6}y_3 = 24 \Longleftrightarrow 6(y_1 + \sqrt{3})^2 + 6y_2^2 + 12(y_3 + \frac{17}{12}\sqrt{6})^2 = \frac{373}{2}.$$

Observe que la ecuación dada representa un elipsoide de ecuación $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1$, con $z_1 = y_1 + \sqrt{3}, z_2 = y_2, z_3 = y_3 + \frac{17\sqrt{6}}{12}$ como ecuaciones de traslación y con $c = \sqrt{\frac{373}{24}}$ y $a = \sqrt{\frac{373}{12}} = b$.

---

25. 11. 2002
JSA/ACQ/ acq.