UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA DE CORRECCIÓN. EVALUACIÓN 1.
ECUACIONES DIF. ORD. 521218.

PROBLEMA 1. (15 puntos) Resuelva la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$xy''(x) + y'(x) = [y'(x)]^2$$

utilizando la sustitución $u(x) = y'(x)$.

Solución

La ecuación es equivalente a

$$xu' + u = u^2$$

<u>1er Método</u> : La ecuación es equivalente a

$$u' + \frac{1}{x}u = \frac{1}{x}u^2,$$

es decir una Bernouilli de orden 2 en u c/r a x. **5 puntos**

Haciendo el cambio de variable $u^{-1} = z$, $-u^{-2}u' = z'$, la ecuación queda

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x},$$

es decir lineal en z c/r a x. **5 puntos**

El factor integrante está dado por $\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$. Elegimos $\mu(x) = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} z &= x\left(\int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx + C\right) = 1 + Cx \\ \Longrightarrow u &= \frac{1}{z} = \frac{1}{1+Cx} \\ \Longrightarrow y &= \int \frac{1}{1+Cx}dx = \frac{1}{C}\ln|1+Cx| + C_2, \end{aligned}$$

con $C \neq 0$. Pero por otro lado, $y = K = constante$ es otra solución que se obvio al hacer los cambios de variables. Luego la solución general se escribe de la forma :

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{1}{C_1}\ln|1 + C_1 x| + C_2, \quad C_1 \neq 0, & \text{o bien,} \\ y(x) = K \ (constante) \end{cases}$$

5 puntos

2do Método : Separación de variables.

$$
\begin{aligned}
& x\frac{du}{dx} = u^2 - u \Longrightarrow \frac{du}{u^2-u} = \frac{dx}{x} \\
& \Longrightarrow \int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{dx}{x} \\
& \Longrightarrow \ln|u-1| - \ln|u| = \ln|x| + C \Longrightarrow \ln\frac{u-1}{u} = \ln C_1 x
\end{aligned}
$$

5 puntos

$$
\begin{aligned}
& \Longrightarrow \frac{u-1}{u} = C_1 x \Longrightarrow u = \frac{1}{1+C_1x} \\
& \Longrightarrow y = \int \frac{1}{1+C_1x} dx = \frac{1}{C_1}\ln|1+C_1x| + C_2,
\end{aligned}
$$

5 puntos

con $C_1 \neq 0$. Pero por otro lado, $y = K = \textit{constante}$ es otra solución que se obvio al hacer los cambios de variables. Luego la solución general se escribe de la forma :

$$
\begin{cases}
y(x) = \dfrac{1}{C_1}\ln|1+C_1x| + C_2, \quad C_1 \neq 0, \qquad \text{o bien,} \\
y(x) = K\ (\textit{constante})
\end{cases}
$$

5 puntos

PROBLEMA 2. (10 puntos) Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria (llamada ecuación de Bessel de orden 1/2)

$$
x^2y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y(x) = 0, \qquad x > 0.
$$

(i) Sabiendo que la función $y_1(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ es una solución de esta ecuación de Bessel, encuentre otra solución que sea independiente de y_1.

(ii) ¿ Cuál es la solución general de la ecuación de Bessel de orden 1/2 ?

Solución

(i) Por Abel

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{x}{x^2}dx}}{y_1^2} dx \qquad \textbf{3 puntos} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{(\operatorname{sen}^2 x)/x} dx \overset{x \geq 0}{=} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \int \frac{x e^{-\ln x}}{sen^2 x} dx \\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \int \operatorname{cosec}^2 x dx \\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} (-\cot x + C) = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

o bien simplemente $y_2 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ **5 puntos**

(ii) $y = C_1 \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} + C_2 \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ **2 puntos**

PROBLEMA 3. Considere el siguiente problema de valores iniciales (PVI)

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2+y^2-4} \\ y(a) = b \end{cases}$$

(i) **(5 puntos)** Describa detalladamente todas las regiones donde usted pueda asegurar la existencia y unicidad del (PVI).

(ii) **(15 puntos)** Encuentre una solución del (PVI) cuando $a = 1$ y $b = 1$.

Solución

(i) Sea

$$f(x,y) \;=\; \frac{2xy}{x^2+y^2-4}.$$

Luego f es continua para todo par x,y tal que $x^2+y^2 \neq 4$. Además, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{2x\left[(x^2+y^2-4) - y(2y)\right]}{\left(x^2+y^2-4\right)^2} = \frac{2x(x^2-y^2-4)}{\left(x^2+y^2-4\right)^2}, \qquad x^2+y^2 \neq 4.$$

Por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua para todo par x,y tal que $x^2+y^2 \neq 4$. Entonces, en las regiones

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 < 4\} \\ R_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 > 4\}, \end{aligned}$$

las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas. Luego, del teorema de existencia y unicidad tenemos que el PVI dado tiene una única solución en las regiones R_1 y R_2. **5 puntos**

(ii) Con $y(1) = 1$.

$$2xydx - (x^2+y^2-4)dy = 0$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \;;\; \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \Longrightarrow \text{(EDO) no exacta}$$

Calculamos entonces el factor integrante :

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{4x}{2xy} = \frac{2}{y}$$
$$\Longrightarrow \mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}$$

Multiplicando la (EDO) por $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$ obtenemos la ecuación diferencial exacta :

$$2\frac{x}{y}dx - \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 - \frac{4}{y^2}\right)dy = 0$$

6 puntos

Luego,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M' = \frac{2x}{y} \Longrightarrow F(x,y) = \frac{x^2}{y} + C(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + C'(y) = N' = -\frac{x^2}{y^2} - 1 + \frac{4}{y^2}$$
$$\Longrightarrow C'(y) = \frac{4}{y^2} - 1 \Longrightarrow C(y) = -4y^{-1} - y + Cte.$$

Es decir,

$$F(x,y) = \frac{x^2}{y} - \frac{4}{y} - y = \frac{x^2-4}{y} - y.$$

La solución general es de la forma

$$\frac{x^2-4}{y} - y = C \Longrightarrow x^2 - y^2 - Cy = 4.$$

7 puntos

La solución del (PVI) $y(1) = 1 \Longrightarrow C = \frac{1-4}{1} - 1 = -4$,

$$\Longrightarrow x^2 - y^2 + 4y = 4 \Longrightarrow x^2 - (y-2)^2 = 0 \Longrightarrow y - 2 = \pm x.$$

1 punto

Es decir, que o bien $y = x + 2$ es solución, o bien $y = -x + 2$ es solución. De estas dos rectas, solo la segunda verifica $y(1) = 1$. Luego la solución del (PVI) es : $y = -x + 2$ **1 punto**

PROBLEMA 4. (15 puntos) En un tanque sin tapa hay 384 lt de agua con 15 kg de sal bien mezclados. Al mismo se le agrega una disolución de agua y sal con una concentración de 2 kg/lt a una tasa (o velocidad) de 17 lt/min. A su vez, una válvula permite que salga la mezcla a un flujo (o velocidad) de $5lt/min$.

(i) Determine el volumen del tanque si el mismo comienza a derramarse a los 15 minutos.

(ii) Determine la cantidad de sal y de concetración de la sal antes que se derrame la mezcla.

(iii) Determine la cantidad de sal y de concetración de la sal después de los primeros 15 minutos.

Solución

(i) $V'(t) = 15 - 5 = 12 \Longrightarrow V(t) = 12t + V(0) = 12t + 384 \Longrightarrow V(15) = 384 + 12 \times 15 = 564\ lts$.
Luego el volumen del tanque es de 564 lts. **1 puntos**

(ii) Para $t \leq 15$

$$Q'(t) = 17 \times 2 - 5\frac{Q(t)}{V(t)} = 34 - \frac{5Q(t)}{12t + 384}$$
$$\Longrightarrow Q'(t) + \left(\frac{5}{12t+384}\right) Q(t) = 34$$

2 puntos

que es una (EDO) lineal, cuya solución está dada por $Q(t) = \frac{C}{(12t+384)^{5/12}} + 2(12t+384)$, si $t \leq$ 15 minutos. **2 puntos**

Además, la concentración está dada por

$$c(t)=\frac{C}{(12t+384)^{17/12}}+2, \qquad \text{si } t\leq 15.$$

1 puntos

Como $Q(0)=15$, resulta que $C=(384)^{5/12}\times(-753)$. **2 puntos**

(iii) Para $t>15$

$$\begin{aligned} Q'(t) &= 17\times 2-17\frac{Q(t)}{V(t)}=34-\frac{17Q(t)}{564} \\ \Longrightarrow Q'(t)&+\left(\frac{17}{564}\right)Q(t)=34 \end{aligned}$$

2 puntos

que es una (EDO) lineal, cuya solución está dada por

$$\begin{aligned} Q(t) &= e^{\frac{-17}{564}t}\left(C_2+\int 34e^{\frac{17}{564}t}dt\right) \\ &= C_2e^{-\frac{17}{564}t}+1128 \end{aligned}$$

2 puntos

Como la cantidad de sal es continua en el tiempo, tenemos que

$$\begin{aligned} &Q(15)=\lim t\to 15^-Q(t)=\lim t\to 15^+Q(t) \\ &\Longrightarrow \frac{(384)^{5/12}\times(-753)}{(12\times 15+384)^{5/12}}+1128=1128+C_2e^{255/564} \end{aligned}$$

Con lo cual, la constante C_2 es igual a $C_2=\left(\frac{(384)^{5/12}\times(-753)}{(564)^{5/12}}\right)e^{-\frac{255}{564}}$ **2 puntos**

Lo cuál determina $Q(t)$ para $t>15$. Finalmente, tenemos

$$c(t)=\frac{C_2e^{\frac{-17}{564}t}+1128}{564} \qquad \text{si } t>15.$$

1 puntos

HMH/JMS/CMG/MSC/msc
(03-Mayo-2004)