UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

CALCULO NUMERICO (521230)
CERTAMEN I

Alumno: ... ...

Número de matrícula: ... ...

Profesor: ... ...

Forma: ... ...

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no** será corregida.
- La forma de su prueba está escrita en las hojas de preguntas.
- No intente **adivinar**, por cada tres respuestas erradas se descontará una respuesta correcta.
- Cualquier intento de copiar será **severamente** castigado.
- Tiene 100 minutos para responder la prueba.

12 de Octubre de 2001.
RAD/RRS/RRA

1. Consideremos la matriz A de orden 4 definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces $\|A\|_\infty$ está dada por:

(a) 7
(b) 8
(c) 9
(d) Ninguna de las anteriores.

2. Se sabe que la solución del sistema lineal, de orden 3, $Ax = b$, está dada por

$$x = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

donde

$$b = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}.$$

De igual modo se sabe que la solución del sistema lineal perturbado $A(x + \delta x) = b + \delta b$, está dada por

$$x + \delta x = \begin{pmatrix} 101.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

donde

$$b + \delta b = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}.$$

Entonces es cierto que:

(a) $Cond_\infty(A) \leq 10$.
(b) $10 < Cond_\infty(A) < 10^4$.
(c) $Cond_\infty(A) \geq 10^4$.
(d) Ninguna de las anteriores.

3. Sea A una matriz no singular de orden n. Entonces podemos afirmar que

(a) $Cond(A) < 1$.
(b) $Cond(A) < 1/n$
(c) $Cond(A) \geq 1$
(d) Ninguna de las anteriores.

4. Sea A la matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0.0 & 2.0 & 1.0 \\ 2.0 & 4.0 & 2.0 \\ 1.0 & 2.0 & 8.0 \end{pmatrix}.$$

El sistema lineal $Ax = b$ puede ser resuelto aplicando:

(a) El método de Gauss sin pivoteo.
(b) El método de Gauss con pivoteo.
(c) El método de Cholesky.
(d) Ninguna de las anteriores.

5. Si queremos resolver el sistema lineal $Ax = b$ conociendo la descomposición LU de la matriz A, debemos

(a) Resolver primero el sistema $Lz = b$ y luego $Ux = z$.
(b) Resolver primero el sistema $Uz = b$ y luego $Lx = z$.
(c) Resolver primero el sistema $Lx = z$ y luego $Ux = b$.
(d) Ninguna de las anteriores.

6. Considere el sistema lineal $Ax = b$, donde la matriz A es simétrica, definida positiva y de orden n. Los siguientes métodos son aplicables para encontrar la solución de dicho sistema lineal

(a) Gauss, Cholesky, Jacobi, Gauss–Seidel y Gradiente Conjugado.
(b) Cholesky pero no Gradiente Conjugado ni Gauss.
(c) Gauss, Cholesky, Jacobi, Gauss–Seidel pero no Gradiente Conjugado.
(d) Ninguna de las anteriores.

7. Sea A una matriz de $10^4 \times 10^4$, simétrica y definida positiva con $Cond\,(A) = 2$, sin estructura banda y tal que en cada fila de la matriz hay a lo sumo 5 elementos no nulos. Entonces para resolver el sistema lineal $Ax = b$

(a) Conviene usar Cholesky antes que Gradiente Conjugado para aprovechar la gran cantidad de elementos nulos de la matriz.
(b) No se puede usar ni Cholesky ni Gradiente Conjugado debido al gran tamaño de la matriz.
(c) Conviene usar Gradiente Conjugado antes que Cholesky, pues requiere menos operaciones elementales y usa menos memoria.
(d) Ninguna de las anteriores.

8. Si aplicamos el método de Jacobi al sistema tridiagonal dado por

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 8 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 8 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con un vector inicial $x^0 = (0, 0, \dots, 0)^T$, obtenemos el siguiente vector x^1

(a) $(1/8, 1/8, \dots, 1/8)^T$.
(b) $(1/4, 1/4, \dots, 1/4)^T$.
(c) $(1/2, 1/2, \dots, 1/2)^T$.
(d) Ninguna de las anteriores.

9. Para ajustar los parámetros a y b del modelo

$$y = \frac{1}{\sqrt{a + bx^2}}$$

a los valores dados en una tabla, conviene realizar una transformación de los datos del tipo $z = f(y)$ a fin de obtener un problema de mínimos cuadrados lineal. La transformación que cumple este fin está dada por

(a) $z = y^2$.
(b) $z = 1/y^2$.
(c) $z = y$.
(d) Ninguna de las anteriores.

10. La siguiente tabla contiene los valores de la concentración de dióxido de carbono en el aire (en partes por millón), medidos cada dos meses entre Enero y Noviembre de 2000.

CO_2 (ppm)	mes
314.88	1
315.62	3
316.33	5
316.14	7
317.13	9

Esta concentración puede modelarse mediante la expresión

$$C(t) = a + be^{\alpha t} + c\cos\frac{2\pi t}{12} + d\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi t}{12},$$

donde t es el tiempo medido en meses ($t = 1$ para Enero, $t = 3$ para Marzo, etc.).

El término $be^{\alpha t}$ indica una tendencia creciente de esta concentración (proveniente del consumo creciente de hidrocarburos), con una constante $\alpha = 0.0037$ que se ha determinado por otros medios. Por su parte, los términos $c\cos\frac{2\pi t}{12} + d\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi t}{12}$ describen el comportamiento cíclico (estacional) de esa concentración.

La matriz rectangular A obtenida para calcular los valores de las constantes a, b, c y d que mejor ajustan el modelo anterior a la tabla dada, en el sentido de los mínimos cuadrados, está dada por

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{\alpha} & \cos(2\pi/12) & \mathrm{sen}\,(2\pi/12) \\ 1 & e^{3\alpha} & \cos(6\pi/12) & \mathrm{sen}\,(6\pi/12) \\ 1 & e^{5\alpha} & \cos(10\pi/12) & \mathrm{sen}\,(10\pi/12) \\ 1 & e^{7\alpha} & \cos(14\pi/12) & \mathrm{sen}\,(14\pi/12) \\ 1 & e^{9\alpha} & \cos(18\pi/12) & \mathrm{sen}\,(18\pi/12) \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{\alpha} & \cos(2\pi/12) & \operatorname{sen}(2\pi/12) \\ 1 & e^{2\alpha} & \cos(4\pi/12) & \operatorname{sen}(4\pi/12) \\ 1 & e^{3\alpha} & \cos(6\pi/12) & \operatorname{sen}(6\pi/12) \\ 1 & e^{4\alpha} & \cos(8\pi/12) & \operatorname{sen}(8\pi/12) \\ 1 & e^{5\alpha} & \cos(10\pi/12) & \operatorname{sen}(10\pi/12) \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{314.88\alpha} & \cos(629.76\pi/12) & \operatorname{sen}(629.76\pi/12) \\ 1 & e^{315.62\alpha} & \cos(631.24\pi/12) & \operatorname{sen}(631.24\pi/12) \\ 1 & e^{316.33\alpha} & \cos(632.66\pi/12) & \operatorname{sen}(632.66\pi/12) \\ 1 & e^{316.14\alpha} & \cos(632.28\pi/12) & \operatorname{sen}(632.28\pi/12) \\ 1 & e^{317.13\alpha} & \cos(634.26\pi/12) & \operatorname{sen}(634.26\pi/12) \end{pmatrix}.$$

(d) Ninguna de las anteriores.

11. Se ajusta un modelo $y = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i \varphi_i(x)$ a la tabla

x_i	0	1	3
y_i	3	-3	4

Indique cual de las siguientes tablas corresponde a lo que ajustó en el sentido de los mínimos cuadrados, sabiendo que una de ellas es correcta

(a)

x_i	0	1	3
$\varphi(x_i)$	1	-3	5

(b)

x_i	0	1	3
$\varphi(x_i)$	3	-2	5

(c)

x_i	0	1	3
$\varphi(x_i)$	2	-4	7

(d)

x_i	0	1	3
$\varphi(x_i)$	2	3	4

12. Considere el siguiente sistema rectangular $Ax = b$. Indique cual de las siguientes alternativas **no** es equivalente al hecho que x es la solución, en el sentido de los mínimos cuadrados, de dicho sistema

(a) $A^T Ax = A^T b$.

(b) x minimiza a $\|r\|_2 = \|b - Ax\|_2$.

(c) $b - Ax$ es ortogonal a $Im(A)$.

(d) Ninguna de las anteriores.

13. Dada la siguiente tabla de datos:

x	-2	-1	1	4
y	-0.5000	-1.0000	1.0000	0.2500

el polinomio de interpolación de Lagrange esta dado por

(a) $p(x) = \dfrac{1}{x}$.

(b) $p(x) = -\dfrac{1}{8}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{9}{8}x - \dfrac{1}{4}$.

(c) $p(x) = -\dfrac{1}{10}x^3 + \dfrac{3}{10}x^2 + \dfrac{11}{10}x - \dfrac{3}{10}$.

(d) Ninguna de las anteriores.

14. El polinomio de interpolación de Lagrange de la tabla

x	1	2	3
y	3	7	9

está dado por:

(a) $3\dfrac{(x+2)(x+3)}{(1-2)(1-3)} + 7\dfrac{(x+1)(x+3)}{(2-1)(2-3)} + 9\dfrac{(x+1)(x+2)}{(3-1)(3-2)}$.

(b) $3\dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 7\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 9\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$.

(c) $3\dfrac{(x-2)(x-3)}{(3-7)(3-9)} + 7\dfrac{(x-1)(x-3)}{(7-3)(7-9)} + 9\dfrac{(x-1)(x-2)}{(9-3)(9-7)}$.

(d) Ninguna de las anteriores.

15. Sean $l_i(x),\ i = 0, 1, \ldots, n$, los polinomios de Lagrange asociados a la tabla

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Indique cual de las siguientes alternativas es **falsa**

(a) $l_3(x_3) = 1$.

(b) $l_3(x_6) = 0$.

(c) $l_6(x_3) = 0$.

(d) $l_6(x_6) = 0$.