UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142

PRACTICA 3. INDUCCION

Problema 1.-Demuestre mediante inducción matemática que: (**En práctica (b) o (e)**)

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \ \forall n \in I\!N.$

(b) $\sum_{k=1}^{n}[k \cdot k!] = (n+1)! - 1, \ \forall n \in I\!N.$

(c) $\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 3^n - 1, \ \forall n \in I\!N.$

(d) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}, \ \forall n \in I\!N.$

(e) Si $x \geq -1$, entonces $(1+x)^n \geq 1 + nx, \ \forall n \in I\!N$. (Desigualdad de Bernoulli)

Problema 2.- Demuestre por inducción que: (**En práctica (b) y (g)**)

(a) $7^n - 6^n - 1$ es divisible por 6, para todo $n \in I\!N$.

(b) $x^{2n} - 1$ es divisible por $x+1$, $x \neq -1$, para todo $n \in I\!N$.

(c) $x^{2n+1} - y^{2n+1}$ es divisible por $x - y$, $x \neq y$, para todo $n \in I\!N$.

(d) Si para cada $n \in I\!N$ $n^2 + n + 4$ es divisible por 2, entonces $n^3 + 11n$ es divisible por 6, para cada $n \in I\!N$.

(e) $\sum_{k=1}^{n} s_k = 2\sqrt{3}\left[(n-1) + \frac{1}{2^n}\right], \ \forall n \in I\!N$; donde $s_1 = \sqrt{3}$ y $s_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{1}{2}s_n, \forall n \geq 1$.

(f) Para $n \in I\!N$, con $n > 10$; $n - 2 < \frac{n^2 - n}{12}$.

(g) Para $n \in I\!N$, con $n > 3; 2^n < n!$.

(h) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}, \ \forall n \in I\!N.$

Problema 3.- Se definen los coeficientes binomiales por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ n \geq k, \ n, k \in I\!N.$$

Verifique que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1};$$

y demuestre que: (**En práctica (a)**)

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \ \forall n \in I\!N.$

(b) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}, \ \forall n \in I\!N.$

Problema 4.- Considere las siguientes igualdades (**En práctica**)

(a) $1^2 + 0^2 = 1^2$; $3^2 + 4^2 = 5^2$; $5^2 + 12^2 = 13^2$;
$7^2 + 24^2 = 25^2$; $9^2 + 40^2 = 41^2$; $11^2 + 60^2 = 61^2$.

(b)

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2+3+4 &= 1+8 \\ 5+6+7+8+9 &= 8+27 \\ 10+11+12+13+14+15+16 &= 27+64. \end{aligned}$$

Conjeture la fórmula general.

Problema 5.- Para la resolución aproximada de *ecuaciones diferenciales parciales* (tema que conocerá en segundo año en el curso *Complementos de Cálculo*), se utiliza habitualmente el siguiente procedimiento geométrico: *se divide inicialmente una región del plano en un número finito de triángulos disjuntos (formando así lo que se llama una* **triangulación***), y luego se generan sucesivamente nuevas triangulaciones uniendo los puntos medios de los triángulos que constituyen la triangulación anterior. De este modo, cada triángulo da origen a 4 nuevos triángulos.*

(a) Si una región consta inicialmente de 6 triángulos, ¿cuántas triangulaciones deben realizarse de modo que la última de ellas tenga al menos 2000 triángulos?

(b) ¿Cuántos triángulos (a lo más) debe tener la triangulación inicial para que, al cabo de N triangulaciones, la suma del número de triángulos de todas ellas sea inferior a 15.000?

FCHH/fchh.-