UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Fecha: 14-07-2005
Duración: 100 minutos

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
EVALUACIÓN 3

1. (a) [**8 puntos**] Resuelva la siguiente ecuación en $\mathbb{R}$:

$$\text{Arcsen}(x) + \text{Arccos}(2x) = \frac{\pi}{2}.$$

   (b) [**8 puntos**] A las 12:00 horas, parten del aeropuerto de Concepción dos aviones, A y B, para rastrear un avión que se precipitó al mar. El Avión A viaja directamente al Oeste a 400 millas por hora, y el avión B hacia el $N30°O$ a 500 millas por hora. A las 14:00 horas el avión A encuentra a los sobrevivientes del avión caído y llama por radio al avión B para que acuda y ayude en el rescate. ¿A qué distancia está el avión B del avión A en ese momento? ¿Cuánto tiempo demorará el avión B en llegar al rescate?.

2. (a) [**10 puntos**] Encuentre todas las raíces del polinomio

$$p(x) = kx^3 + 16x^2 - 9x - 36,$$

   sabiendo que la suma de dos de las raíces es cero y k es una constante real.

   (b) [**10 puntos**] Descomponga la fracción en suma de fracciones parciales

$$\frac{2x^2 + 5x + 1}{(x+1)^2}$$

3. [**10 puntos**] Encuentre todas las raíces en $\mathbb{C}$ del siguiente polinomio

$$p(z) = z^4 + 16.$$

   Exprese las raíces complejas en forma binomial.

4. [**14 puntos**] Determine el valor de a en $\mathbb{R}$ para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & a \end{pmatrix}$$

   sea invertible.

Apague su teléfono. No se puede usar calculadora. No se admiten consultas.

LBH/RBP/RRS/FFB/AGS/RNG/LRS/BBM/rrs

SOLUCIÓN

1. (a) Sea

$$\begin{array}{ll} \alpha = \text{Arcsen}(x) & \Longleftrightarrow \text{sen}(\alpha) = x,\ \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \beta = \text{Arccos}(2x) & \Longleftrightarrow \cos(\beta) = 2x,\ \beta \in [0, \pi] \end{array} \quad (1)$$

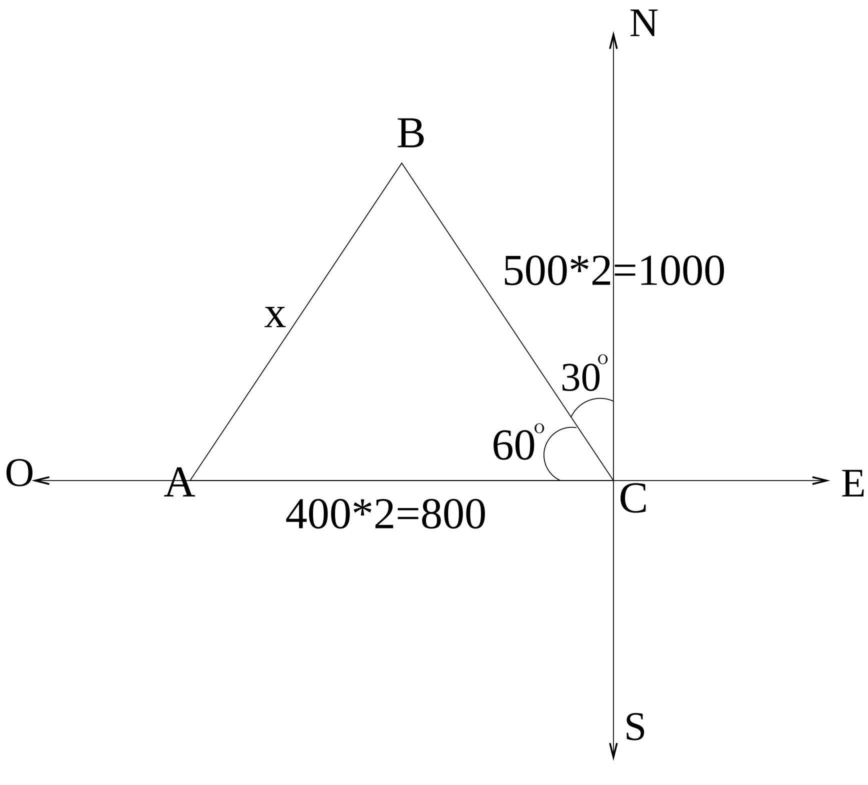
De (1) se tiene que $\cos(\alpha) \geq 0$ y $\text{sen}(\beta) \geq 0$.

De lo anterior $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$. Aplicando sen, se tiene

$$\begin{array}{rl} \text{sen}(\alpha+\beta) & = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(\alpha) & = 1 \\ x2x + \sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} & = 1 \\ \sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} & = 1 - 2x^2 \quad |(\ \ )^2 \\ (1-4x^2)(1-x^2) & = (1-2x^2)^2. \end{array}$$

Desarrollando y simplificando, se tiene: $x^2 = 0$, de aquí $x = 0$, el conjunto solución $S = \{0\}$.

(b) Consideremos el triángulo ABC con C en el origen, A en el eje X y B en el segundo cuadrante (ver figura).



Como $v = \frac{d}{t}$, se tiene $|AC| = 400 \cdot 2 = 800$ y
$|BC| = 500 \cdot 2 = 1000$.

Por el teorema del coseno

$$x^2 = 800^2 + 1000^2 - 2 \cdot 800 \cdot 1000 \cdot \cos 60$$

$x = \sqrt{840000}$ millas.

Entonces

$$t = \frac{x}{v} = \frac{\sqrt{840000}}{500} \text{ horas.}$$

2. (a) Supongamos que a y $-a$ son raíces

$$\begin{array}{ccccc|c} k & 16 & -9 & -36 & & a \\ \hline & ka & 16a+ka^2 & -9a+16a^2+ka^3 & & \\ \hline k & 16+ka & -9+16a+ka^2 & -36-9a+16a^2+ka^3 & & \end{array}$$

Como a es una raíz, se tiene que

$$-36-9a+16a^2+ka^3=0 \tag{2}$$

Además,

$$\begin{array}{ccccc|c} k & 16 & -9 & -36 & & -a \\ \hline & -ka & -16a+ka^2 & 9a+16a^2-ka^3 & & \\ \hline k & 16-ka & -9-16a+ka^2 & -36+9a+16a^2-ka^3 & & \end{array}$$

Como $-a$ es una raíz, se tiene que

$$-36+9a+16a^2-ka^3=0 \tag{3}$$

Tomando (2) y (3) tenemos:

$$\begin{array}{rr|} -36-9a+16a^2+ka^3 & =0 \\ -36+9a+16a^2-ka^3 & =0 \\ \hline \end{array}$$

De aquí $-72+32a^2=0$

$$a=\pm\frac{3}{2}$$

$$k=4$$

Tenemos que $\left(x+\frac{3}{2}\right)$ y $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ son factores de p.
Es decir,

$$4\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(4x^2-9)$$

Como $k=4$. El polinomio original es

$$p(x)=4x^3+16x^2-9x-36$$

Para encontrar el otro cero, se divide p por el factor $(4x^2-9)$. Es decir:

$$\begin{array}{l} 4x^3+16x^2-9x-36 : 4x^2-9 = x+4 \\ \underline{(-)\ 4x^3 \qquad \overset{(+)}{-}\ 9x} \\ \qquad 16x^2 \qquad -36 \\ \underline{(-)\ 16x^2 \qquad \overset{(+)}{-}\ 36} \end{array}$$

Los ceros son:

$$-\frac{3}{2},\quad \frac{3}{2} \quad \text{y} \ -4$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+5x+1}{(x+1)^2} &= 2+\frac{x-1}{(x+1)^2}\\
&= 2+\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}\\
&= 2+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

3. $p(z)=0$ es equivalente a encontrar las raíces cuartas de -16.

   Escribiendo

$$-16 = 16\left(\cos(\pi)+i\mathrm{sen}(\pi)\right)$$

   Las raíces cuartas son:

$$\begin{aligned}
z_{k+1} &= \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right), \quad k=0,1,2,3\\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right), \quad k=0,1,2,3\\
z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}+\sqrt{2}i\\
z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\\
&= -\sqrt{2}+\sqrt{2}i\\
z_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\\
&= -\sqrt{2}-\sqrt{2}i\\
z_4 &= 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}-\sqrt{2}i
\end{aligned}$$

4.

$$A \text{ invertible } \iff |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & a \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ a & 3 & a \end{vmatrix} + (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ a & 3 & a \end{vmatrix} + (-1)^5\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ a & 3 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ a & 3 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a\{(4a-18)-(4a)\} - \{9-\{-2a-3a\}\} - \{\{-6-4\}-\{0\}\}$$

$$= -18a - \{9+5a\} + \{10\}$$

$$|A| \neq 0 \iff a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{23}\right\}$$

Observación: Tambiés es posible resolver esta pregunta, aplicando el métodod de Gauss-Jordan para intentar invertir la matriz y así imponer las restricciones necesarias sobre a:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 3 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_{12} \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 3 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_4 - 1f_1 \\ f_2 - af_1 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 1 & -1-2a & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & a-2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_{32} \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2a & 1 & -1-2a & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & a-2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_3 - \frac{2a}{3}f_2 \\ f_4 + \frac{a-2}{3}f_2 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-4a}{3} & -1-2a & 1 & -a & -\frac{2a}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5+2a}{3} & a-2 & 0 & -1 & \frac{a-2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 3f_3 \\ 3f_4 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-4a & -3-6a & 3 & -3a & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 5+2a & 3a-6 & 0 & -3 & a-2 & 3 \end{array}\right)$$

Si $3-4a \neq 0$, puedo continuar:

$$\underset{\rightsquigarrow}{f_4 - \frac{5+2a}{3-4a} f_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-4a & -3-6a & 3 & -3a & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 69a-3 & -3\frac{5+2a}{3-4a} & \frac{5a+27a-9}{3-4a} & \frac{21a-6}{3-4a} & 3 \end{array}\right)$$

De donde se concluye que es necesario que $69a-3 \neq 3$, es decir, $a \neq \frac{1}{23}$.
Ahora bien, si $a = \frac{3}{4}$, volvemos al paso anterior:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15/2 & 3 & -9/4 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 13/2 & -5/4 & 0 & -3 & -5/4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{f_{34}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13/2 & -5/4 & 0 & -3 & -5/4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -15/2 & 3 & -9/4 & -3/2 & 0 \end{array}\right)$$

De donde se obtiene que si $a = \frac{3}{4}$ la matriz es invertible, quedando como única condición el que $a \neq \frac{1}{23}$.