UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREA 1.
Análisis Funcional y Aplicaciones I.
525401.
Segundo Semestre 2006.

Caracterización de Espacios de Hilbert (Teorema de Fréchet-Von Neumann-Jordan).

Sea un espacio de Banach real H cuya norma verifica la identidad del Paralelógramo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

1. Dé una interpretación gráfica de esta identidad.
2. Pruebe que H es un Espacio de Hilbert con el producto interno

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Aplicación del Teorema de Hahn-Banach: Existencia de medias invariantes.

Sea ℓ^∞ el espacio de Banach real de las sucesiones acotadas $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con norma $\|a\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Se define adicionalmente el operador translación $\tau : \ell^\infty \to \ell^\infty$ como $\tau(a) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. El siguiente teorema permite definir el operador M denomidado *límite generalizado de Banach* o *media invariante* en ℓ^∞ :

Teorema (Banach). *Existe una aplicación lineal $M : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ tal que*

(i) $M(a) \geqslant 0$ para todo $a \in \ell^\infty$ con $a \geqslant 0$ (esto es $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$);

(ii) $M(\mathbf{1}) = 1$;

(iii) $M(\tau(a)) = M(a)$ para todo $a \in \ell^\infty$.

Adicionalmente, M es continua en ℓ^∞, y para toda sucesión convergente se tiene que $M(a) = \lim\limits_n a_n$.

Para demostrar este teorema, considere la forma lineal en ℓ^∞ definida por los promedios parciales

$$f_N(a) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n$$

y luego considere la función $p : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definida como $p(a) = \limsup\limits_N f_N(a)$.

3. Pruebe que $p(\cdot)$ es de homotecia positiva, es decir $p(\lambda a) = \lambda p(a)$ para todo $a \in \ell^\infty$ y $\lambda > 0$, y que $p(\cdot)$ es subaditiva, es decir $p(a+b) \leqslant p(a) + p(b)$ para todo $a, b \in \ell^\infty$.
4. Verifique que $G = \{a \in \ell^\infty \mid a \text{ es convergente}\}$ es un subespacio vectorial de ℓ^∞ en el que la forma lineal $g : a \mapsto \lim\limits_n a_n$ coincide con $p(a)$ en G.

5. Aplique el teorema de Hahn-Banach para asegurar la existencia de $M : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ lineal que prolonga a g y tal que $M(a) \leqslant p(a)$.

6. Usando la propiedad de subaditividad y de homotecia positiva de $p(\cdot)$ pruebe que $-p(-a) \leqslant p(a)$.

7. Sea $b = \tau(a) - a$; pruebe que $p(b) = \limsup_N f_N(a) \leqslant 0$; luego usando la desigualdad en "6." concluya que $p(b) = p(-b) = 0$.

8. Usando "5." pruebe que si $a \geqslant 0$, entonces $M(a) \geqslant -p(-a) = \liminf_N f_N(a) \geqslant 0$, es decir la parte (i) del Teorema.

9. Usando la desigualdad en "6." y la igualdad en "7." pruebe que $M(b) \leqslant p(b) = 0$ con $b = \tau(a) - a$ y pruebe que $M(b) = -M(-b) \geqslant -p(-b) = 0$, es decir la parte (iii) del Teorema.

10. Pruebe que M es continua y termine la demostración del Teorema.

11. Sea $q : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definido por $q(a) = \limsup_n a_n$. Verificar que $q(\lambda a) = \lambda q(a)$ y $q(a+b) \leqslant q(a) + q(b)$ para todo $a, b \in \ell^\infty$ y $\lambda > 0$, y además $q(\tau(a)) = q(a)$. Por que entonces no se elige de manera más simple q en lugar de p (es decir sin hacer uso de los promedios parciales) para demostrar el teorema anterior ?

Semi-espacios.

Un subconjunto A de un espacio de Banach real E se llama semi-espacio (cerrado), si existe un real α y una forma $f : E \to \mathbb{R}$ lineal (continua) tal que $A = \{x \in E \mid f(x) \leqslant \alpha\}$.

12. Sea C un convexo cerrado de E tal que $C \neq E$. Pruebe que C es una intersección de semi-espacios cerrados (utilice una de las 2 formas geométricas de Hahn-Banach separando C de todo $x \notin C$).

Fecha de Entrega : 13 de Septiembre de 2006.
MSC/msc
(30-Agosto-2006)