Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Complemento de Cálculo
(521234)
Primer Certamen

17 – Octubre – 1997

Problema 1: Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{cuando } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{cuando } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1.- Construir una serie $C(x)$ en términos de cosenos $2\pi-$periódicos que aproxime $f(x)$. Converge $C(x)$ en media cuadrática ? puntualmente ? uniformemente ?

2.- Construir una serie $S(x)$ pero ahora en términos de senos $2\pi-$periódicos, y responder las preguntas de convergencia del problema anterior.

3.- Calcular $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ y $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{16n^4 - 8n^2 + 1}$.

40 puntos

Problema 2: El objetivo es utilizar los polinomios de Legendre, para construir otra familia de funciones ortogonales. Definimos entonces $\{Q_n(x)\}_{n\geq 1}$, como $Q_n(x) = \sqrt{1-x^2}P_n'(x)$, para $x \in [-1,1]$, $n = 1, 2, \ldots$ y donde

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0, \qquad \text{para } -1 \leq x \leq 1.$$

Utilizando esta última ecuación,

1.- verifique que :

$$(1-x^2)Q_n''(x) - 2xQ_n'(x) + (\lambda_n - \frac{1}{1-x^2})Q_n(x) = 0, \qquad \text{para } -1 \leq x \leq 1,$$

con $\lambda_n = n(n+1)$;

2.- deduzca que :

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \dfrac{2n(n+1)}{2n+1}, & \text{si } n = m \end{cases}$$

(<u>Indicación</u> : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$).

30 puntos

Problema 3: Escriba en la forma divergencia (auto-adjunta) el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' + y = \lambda y, & \text{para } 1 \leq x \leq e^2, \\ y(1) = y(e^2) = 0. \end{cases}$$

Determine los valores propios y la familia ortonormal respectiva asociada a este problema.

30 puntos

Duración del certamen : 2 horas
HAW/MB/MSC/MC