Integración Numérica I

- **Reglas elementales de integración numérica.**
- **Regla del Punto Medio.**
- **Regla de los Trapecios.**
- **Regla de Simpson.**

Para aproximar una integral de la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

puede aproximarse el integrando f por el polinomio $p \in \mathcal{P}_n$ que interpola a f en $(n+1)$ puntos $x_0, \ldots, x_n$ e integrar el polinomio de interpolación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx =: I_n(f).$$

Luego, el valor aproximado de la integral, $I_n(f)$, se calcula explícitamente.

El error que se comete al aproximar la integral por $I_n(f)$ es

$$R_n(f) := \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b E(x)\,dx,$$

donde $E(x) := f(x) - p(x)$ es el error de interpolación.

Si se usa la fórmula de Lagrange:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x),$$

para calcular explícitamente $I_n(f)$, se tiene

$$I_n(f) = \int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b \ell_i(x)\,dx \right) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i),$$

con

$$A_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx, \qquad i = 0, \dots, n.$$

Llamaremos:

- $\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$: **regla de integración numérica** o **regla de cuadratura**.
- x_i: **nodos** de la regla de integración,
- A_i: **coeficientes** o **pesos** de la regla de integración.

El error de la integración numérica,

$$R_n(f) := \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx,$$

puede estimarse a partir de la expresión del error de interpolación:

$$E(x) := f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x),$$

para algún $\xi_x \in (a,b)$.

Así:

$$R_n(f) = \int_a^b E(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)\,dx.$$

Regla del punto medio (elemental): $n = 0$, con $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

En este caso, $A_0 = b - a$ y se obtiene:

$$I_0(f) = (b-a)\, f(\widehat{x}), \qquad \text{con} \quad \widehat{x} := \frac{a+b}{2}.$$

Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, el error de integración está dado por:

$$R_0(f) := \int_a^b f(x)\, dx - I_0(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x - \widehat{x})^2\, dx.$$

Llamando $M_2 := \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ y evaluando la integral restante, se obtiene:

$$|R_0(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)^3.$$

Regla del punto medio (compuesta). El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos iguales:

$$x_i := a + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad \text{con} \quad h := \frac{b-a}{n}.$$

La regla del punto medio compuesta se obtiene aplicando la regla del punto medio elemental en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx h \sum_{i=1}^{n} f(\widehat{x}_i), \qquad \text{con} \quad \widehat{x}_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}. \end{aligned}$$

La **regla del punto medio (compuesta)** consiste en aproximar la integral por:

$$I_M(f) := h \sum_{i=1}^{n} f(\widehat{x}_i), \qquad \text{con} \quad \widehat{x}_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Cuando $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, para el error

$$R_M(f) := \int_a^b f(x)\, dx - I_M(f)$$

se tiene:

$$|R_M(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)h^2, \qquad \text{con} \quad M_2 := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

En consecuencia, esta regla es **exacta** para integrar polinomios de grado menor o igual que uno ($\mathcal{P}_1$).

Regla del trapecio (elemental): $n = 1$, con $x_0 = a$ y $x_1 = b$.

En este caso, $A_0 = A_1 = \dfrac{b-a}{2}$ y se obtiene:

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right].$$

Si $f \in C^2([a,b])$, para el error de integración se tiene:

$$\begin{aligned}
R_1(f) &:= \int_a^b f(x)\,dx - I_1(f) \\
&= \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}\,dx \\
&= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi),
\end{aligned}$$

para algún $\xi \in (a,b)$.

Regla de los trapecios (compuesta).

El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos iguales:

$$x_i := a + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad \text{con} \quad h := \frac{b-a}{n}.$$

La regla de los trapecios compuesta se obtiene aplicando la regla del trapecio elemental en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx, \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] \\
&= h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].
\end{aligned}$$

La **regla de los trapecios (compuesta)** consiste en aproximar la integral por:

$$I_T(f) := h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right].$$

Cuando $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, el error de esta regla satisface:

$$R_T(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi),$$

para algún $\xi \in (a,b)$ y, por lo tanto,

$$|R_T(f)| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)h^2, \qquad \text{con} \quad M_2 := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Esta regla es **exacta** para integrar polinomios de grado menor o igual que uno ($\mathcal{P}_1$).

Regla de Simpson (elemental): $n = 2$, con $x_0 = a$, $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$.

En este caso, $A_0 = A_2 = \dfrac{b-a}{6}$ y $A_1 = 4\dfrac{b-a}{6}$, y se obtiene:

$$I_2(f) := \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\widehat{x}) + f(b)\right], \qquad \text{con} \quad \widehat{x} := \frac{a+b}{2}.$$

Si $f \in C^4([a,b])$, para el error de integración se tiene:

$$R_2(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_2(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi),$$

para algún $\xi \in (a,b)$.

Regla de Simpson (compuesta)

El intervalo $[a,b]$ se divide en $2n$ subintervalos iguales:

$$x_i := a + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2n, \qquad \text{con} \quad h := \frac{b-a}{2n}.$$

La **regla de de Simpson compuesta** se obtiene aplicando la regla de Simpson elemental en cada subintervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx, \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{2h}{6}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right] \\
&= \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})\right].
\end{aligned}$$

La **regla de Simpson (compuesta)** consiste en aproximar la integral por:

$$I_S(f) := \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})\right].$$

Cuando $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, el error de esta regla satisface:

$$R_S(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_S(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi),$$

para algún $\xi \in (a,b)$.

Esta regla es **exacta** para integrar polinomios de grado menor o igual que tres ($\mathcal{P}_3$).

Observaciones.

1. Es costumbre referirse a las reglas compuestas $I_M(f)$, $I_T(f)$ e $I_S(f)$ simplemente como **regla del punto medio**, **regla de los trapecios** y **regla de Simpson**.

2. Existen versiones de las reglas para **nodos no equiespaciados**.

3. Se dice que una regla es de **orden** h^p, y se escribe $\mathcal{O}(h^p)$, cuando el error satisface $|R| \leq C h^p$, para alguna constante $C > 0$ independiente de h.

   Así, las reglas del punto medio y de los trapecios son $\mathcal{O}(h^2)$, mientras que la regla de Simpson es $\mathcal{O}(h^4)$.