UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACIÓN 3.
CÁLCULO III. 525211.

1. **(15 ptos.)** Usando el Teorema de Green, calcule en el sentido antihorario

$$\oint_C 2xydx + (x^2 + y^2 - 2x)dy$$

lo largo de una curva C cerrada cualquiera de $\mathbb{R}^2$, que encierre a una superficie de área igual a 1.

2. **(30 ptos.)** Sean 2 campos vectoriales de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidos por :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right), \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} G: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right) \end{array}$$

   a) Pruebe que ambos campos provienen de un potencial, y calcule dichos potenciales.
   b) Sea C una circunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio ε aribitrario. Pruebe que

$$\oint_C F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0, \qquad \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -2\pi \qquad \text{(sentido antihorario).}$$

   c) Deduzca que a pesar de que ambos campos provienen de un potencial, sólo uno es conservativo.
   d) Calcule $\displaystyle\int_C F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ para cualquier curva C que parta desde $(-1,0)$ y llegue a $(1,0)$.
   e) Pruebe que $\displaystyle\int_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ para cualquier curva C partiendo de $(-1,0)$ a $(1,0)$ sin rodear al punto $(0,0)$ es siempre igual a $-\pi$ si C *pasa por debajo del punto* $(0,0)$, y es igual a π si C *pasa por arriba del punto* $(0,0)$.

3. **(15 ptos.)** La siguiente ecuación conocida como ecuación de Stokes en regimen estacionario modela aproximadamente el movimiento de un fluido laminar viscoso :

$$-\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 \text{ en } \Omega \qquad \left(\text{aquí } \Delta\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}\right),$$

donde $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo de velocidades que suponemos de clase $\mathcal{C}^2$, $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la función presión que suponemos de clase $\mathcal{C}^1$, y Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$, encerrado por una superficie S, medible. Usando la primera identidad de Green, deducida del Teorema de la Divergencia, pruebe que

$$\iiint\limits_{\Omega} \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v}\ dx = -\oiint\limits_{S} (pI - \nabla\mathbf{u})\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\ ds$$

para todo $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ en Ω, y donde I es la matriz identidad de 3×3, y $\nabla\mathbf{u} = \left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{ij} = J(\mathbf{u})^t$ (traspuesta de la matriz jacobiana).

Duración : 120 minutos. (8-Julio-2004)
MSC/msc

Torpedo Oficial

1. Combinación de operadores y derivadas de productos

$$
\begin{aligned}
1)\nabla\cdot(\nabla f) &= \Delta f, & 2)\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f,\\
3)\nabla\times(\nabla f) &= 0, & 4)\nabla\cdot(f\mathbf{u}) &= \nabla f\cdot\mathbf{u} + f\nabla\cdot\mathbf{u},\\
5)\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{u}) &= 0, & 6)\nabla\times(f\mathbf{u}) &= \nabla f\times\mathbf{u} + f\nabla\times\mathbf{u},\\
7)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \Delta\mathbf{u}, & 8)\nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} - (\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u},\\
9)\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u}),\\
10)\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

2. Teorema de la Divergencia o Teorema de Gauss

$$\iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{u}\; dV = \oint\!\!\!\!\iint\limits_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\; dS$$

3. Primera identidad de Green

$$\iiint\limits_V \nabla f\cdot\nabla g + f\Delta g\; dV = \oint\!\!\!\!\iint\limits_S f\nabla g\cdot\mathbf{n}\; dS$$

4. Segunda identidad de Green

$$\iiint\limits_V f\Delta g - g\Delta f\; dV = \oint\!\!\!\!\iint\limits_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\; dS$$

5. Teorema de Stokes

$$\iint\limits_S \nabla\times\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\; dS = \oint_C \mathbf{u}\cdot\mathbf{dr}$$

6. Teorema de Green

$$\iint\limits_S \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} dxdy = \oint_C F dx + G dy$$