UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA DE CORRECCION
EVALUACION 2. ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL. 520142.

1.- Considere las funciones f y g definidas por :

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \ln(x-1) \end{array}$$

1.1.- *Defina la función compuesta $f \circ g$, calculando su dominio y recorrido.*

Solución: Para determinar $Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) \mid g(x) \in Dom(f)\}$, es necesario determinar previamente $Dom(f)$ y $Dom(g)$:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{e^x + 1} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

pues $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y por lo tanto, $\frac{1}{e^x + 1}$ está bien definido para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid \ln(x-1) \in \mathbb{R}\} = (1, +\infty)$$

pues $\ln(x-1)$ está bien definido *ssi* $x > 1$. Luego,

$$Dom(f \circ g) = \{x \in (1, +\infty) \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = (1, +\infty).$$

4 puntos

Por otro lado, para todo $x \in Dom(f \circ g) = (1, +\infty)$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{e^{g(x)} + 1} = \frac{1}{e^{\ln(x-1)} + 1} = \frac{1}{x}.$$

Es decir,

$$\begin{array}{rcl} f \circ g : (1, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

3 puntos

Finalmente,

$$Rec(f \circ g) = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in (1, +\infty),\ y = \frac{1}{x}\}$$

Pero $1 < x < +\infty \iff 0 < \frac{1}{x} < 1 \iff y \in (0,1)$. Con lo cuál,

$$Rec(f \circ g) = (0,1)$$

3 puntos

1.2.- *Demuestre que $f \circ g : Dom(f \circ g) \to \mathbb{R}$ es inyectiva ; restrinja su codominio para que sea biyectiva, y determine su inversa $(f \circ g)^{-1}$.*

Solución:

Inyectividad : sean $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ tal que $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_1)$. Entonces,

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Es decir, $f \circ g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ es inyectiva. **3 puntos**

Para que sea biyectiva, es necesario restringir su codominio a su recorrido, es decir

$$\begin{array}{rcl} f \circ g : (1, +\infty) & \longrightarrow & (0,1) \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

es biyectiva, y **3 puntos**

$$\begin{array}{rcl} (f \circ g)^{-1} : (0,1) & \longrightarrow & (1, +\infty) \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

es su inversa. **4 puntos**

2.- Problemas con funciones trigonométricas

2.1.- *Encuentre el conjunto solución de la ecuación*

$$\cos(2x) - \operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(5x) + \cos(6x)$$

Solución: Re-escribimos la expresión de la manera siguiente:

$$\cos(2x) - \cos(6x) = \operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(3x)$$

y aplicamos la formulas de descomposición en productos:

$$-2 \operatorname{sen}\left(\frac{2x + 6x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2x - 6x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{5x + 3x}{2}\right) \cos\left(\frac{5x - 3x}{2}\right)$$ **3puntos**

esto es:

$$\operatorname{sen}(4x)\{\operatorname{sen}(2x) - \cos(x)\} = \operatorname{sen}(4x)\cos(x)(2\operatorname{sen}(x) - 1) = 0$$

luego

$$\operatorname{sen}(4x) = 0 \ \vee \ \cos(x) = 0 \ \vee \ \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$$

3 puntos

El conjnto solución de la ecuación propuesta es determinado por:

$$\left(\begin{array}{c} 4x = k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right) \vee \left(\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right) \vee \left(\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee x = \frac{5\pi}{6} \ + \ 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right).$$

3 puntos

Es decir:

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} : \cos(2x) - \operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(5x) + \cos(6x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{k\pi}{4} \ \vee \ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee x = \frac{5\pi}{6} \ + \ 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})\} \end{aligned}$$

1 punto

2.2.- *Dada la función $f : \mathbb{R} \to [-5, 5]$ definida por $f(x) = -5\operatorname{sen}(4x + \frac{\pi}{3})$, calcule la amplitud, el período, y la fase. Restrinja el dominio de f, de manera que sea invertible, y defina f^{-1} considerando la parte principal, es decir, en términos de* Arcsen.

Solución: Amplitud= 5. Como la función seno es 2π periodica, se tiene que

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = -5\operatorname{sen}(4x \ + \ \frac{\pi}{3}) = f(x)$$

luego el período es $\frac{\pi}{2}$ y la fase es de $\frac{\pi}{12}$ hacia la izquierda **3 puntos**.

El dominio restringido es determinado por la condición que $(4x \ + \ \frac{\pi}{3}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ luego este dominio es $[-\frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{24}]$ **3 puntos**, y su inversa está dada por

$$\begin{aligned} (f)^{-1} : [-5, 5] \ &\longrightarrow \ [-\frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{24}] \\ x \ &\longmapsto \ \frac{-\operatorname{Arcsen}(\frac{x}{5}) - \frac{\pi}{3}}{4} \end{aligned}$$

4 puntos

3.- 3.- Encuentre

3.1.- *el conjunto solución de la inecuación en* $\mathbb{R}^+$

$$\log\left(x^{(1+\log(x))}\right) \leq 6$$

Solución:

$$\log\left(x^{(1+\log(x))}\right) = (1+\log(x))\log(x) = (\log(x))^2 + \log(x) \leq 6.$$

3 puntos,

Escribiendo $Y = \log(x)$, la inecuación queda :

$$Y^2 + Y - 6 \leq 0$$

que es equivalente a $(Y-2)(Y+3) \leq 0$. Esto ocurre si, y solo si, $-3 \leq Y \leq 2$.

3 puntos,

Como $x \to 10^x$ es una función creciente, se tiene que :

$$-3 \leq Y \leq 2 \Longrightarrow -3 \leq \log(x) \leq 2 \Longrightarrow 10^{-3} \leq 10^{\log(x)} \leq 10^2 \Longrightarrow 0.001 \leq x \leq 100,$$

3 puntos,

con lo cuál el conjunto solución está dado por :

$$S = [0.001\ ;\ 100]$$

1 punto,

3.2.- *el conjunto de todos los puntos* $z = x + iy$ *en* $\mathbb{C}$ *que satisfacen la relación*

$$\mathrm{Re}(z^2 + 2iz) + |z|^2 = 0$$

Solución:

$$z^2 + 2iz = x^2 - y^2 + 2ixy + 2i(x+iy) = (x^2 - y^2 - 2y) + 2i(xy + x)$$

4 puntos,

Luego

$$\mathrm{Re}(z^2 + 2iz) + |z|^2 = (x^2 - y^2 - 2y) + (x^2 + y^2) = 2x^2 - 2y = 0$$

3 puntos,

es decir $y = x^2$, con lo cuál el conjunto de puntos que satisfacen la relación está dado por

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} \quad \text{(una parábola).}$$

3 puntos,

Tiempo: **100 minutos.**
09. 06. 2003.
RAD/FCHH/ACQ/AGS/LNB/FPV/JSA/MSC/msc.