UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA 522115
Listado 4 (Funciones Circulares)

1. Encuentre el valor exacto de las coordenadas de $P(t)$ para $t = \frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 3\pi$. Además, indique el cuadrante en que se encuentra.

2. Encuentre el valor de las siguientes funciones trigonométricas dadas sin usar calculadora.

   a) $\operatorname{sen}(\frac{-13\pi}{3})$,
   b) $\tan(\frac{5\pi}{4})$,
   c) $\cos(\frac{-11\pi}{4})$,
   d) $\sec(7\pi)$,
   e) $\operatorname{cotan}(\frac{15\pi}{6})$,
   f) $\operatorname{cosec}(\frac{23\pi}{6})$.

3. Sea C la circunferencia unitaria. Dos puntos $P(t)$ y $P(t')$ se dicen antípodas, si $t' = t+(2k+1)\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, si ellos son diametralmente opuestos. Determine la relación existente entre las seis funciones trigonométricas, determinadas por dos puntos antípodas sobre C. Por ejemplo,
$$(\forall t \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z}) : \cos(t + (2k + 1)\pi) = -\cos(t), \quad \text{etc.}$$

4. Justifique las siguientes igualdades:

   a) $\cos(\pi) = \cos(3\pi)$,
   b) $\cos(1{,}9 + \pi) = -\cos(1{,}9)$,
   c) $\cos(13{,}8\pi) = \cos(15{,}8\pi)$,
   d) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3})$,
   e) $\operatorname{sen}(-4 + \pi) = -\operatorname{sen}(4 - \pi)$,
   f) $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})$.

5. Determine las siguientes identidades trigonométricas y su domino de validez:

   a) $\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$,
   b) $\dfrac{1 - \operatorname{sen}(\alpha)}{1 + \operatorname{sen}(\alpha)} = (\sec(\alpha) - \tan(\alpha))^2$,
   c) $\operatorname{cosec}^2(x) - \operatorname{cotan}^2(x) = 1$,
   d) $\dfrac{\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)} = \sec(2\alpha) + \tan(2\alpha)$,
   e) $\dfrac{\sec(\alpha) - 1}{\sec(\alpha)} = 2\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2})$,
   f) $(\cos(\frac{\alpha}{2}) - \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}))^2 = 1 - \operatorname{sen}(\alpha)$.

6. Calcule el valor exacto de $\tan(x_1+x_2)$, donde $\operatorname{sen}(x_1) = \frac{2}{3}$, $P(x_1) \notin 1^{er}$ cuadrante, $\sec(x_2) = -\frac{5}{4}$ y $P(x_2) \in 3^{er}$ cuadrante.

7. Si $\operatorname{sen}(\alpha) = -\dfrac{24}{25}$, $\operatorname{sen}(\beta) = \dfrac{3}{5}$, donde $\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{3\pi}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi$, calcular:

   a) $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)$, *b*) $\cos(\alpha \pm \beta)$, *c*) $\tan(\alpha \pm \beta)$.

8. Sabiendo que $\operatorname{cosec}(\alpha) = \operatorname{cotan}(\frac{\alpha}{2}) - \operatorname{cotan}(\alpha)$, calcule la sumatoria

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}(2^{k-1}\alpha).$$

9. Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\sec(\alpha) = \frac{m^2+1}{2m}$, determine $\tan(2\alpha)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

10. Encuentre todas las soluciones de cada ecuación trigonométrica dada donde $x \in \mathbb{R}$.

a) $2\cos(x) = -\frac{1}{2}$,	*d*) $\tan^2(x) + \tan(x) = 0$,
b) $\sqrt{3}\operatorname{cosec}(x) = 2$,	*e*) $\operatorname{sen}(4x) + \operatorname{sen}(2x) = 0$,
c) $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1$,	*f*) $\tan(x) + 1 = \sec(x)$.

11. Pruebe las siguientes identidades trigonométricas de suma donde $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}(\frac{x+y}{2}) \cdot \cos(\frac{x-y}{2})$,
b) $\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2}) \cdot \operatorname{sen}(\frac{x-y}{2})$,
c) $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2}) \cdot \cos(\frac{x-y}{2})$,
d) $\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}(\frac{x+y}{2}) \cdot \operatorname{sen}(\frac{x-y}{2})$.

12. Pruebe las siguientes identidades trigonométricas de producto donde $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y))$,
b) $\cos(x) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y))$,
c) $\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$,
d) $\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$.

13. Pruebe que:

$$\begin{array}{rcll}
a)\ \operatorname{sen}(\alpha) & = & \operatorname{sen}(\beta) & \iff (\alpha+\beta) = (2k+1)\pi \ \vee \ (\alpha-\beta) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
b)\ \cos(\alpha) & = & \cos(\beta) & \iff (\alpha-\beta) = 2k\pi \ \vee \ (\alpha+\beta) = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\
c)\ \tan(\alpha) & = & \tan(\beta) & \iff (\alpha-\beta) = k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{array}$$

¿Cuál es la solución de las siguientes ecuaciones: $\operatorname{cosec}(\alpha) = \operatorname{cosec}(\beta)$, $\sec(\alpha) = \sec(\beta)$ y $\operatorname{cotan}(\alpha) = \operatorname{cotan}(\beta)$, respectivamente?

14. Resuelva las siguientes ecuaciones, es decir, determine todos los $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(a)\ \operatorname{sen}(\pi/3) = \operatorname{sen}(\theta), \qquad (b)\ \tan(3\pi/4) = \tan(\theta).$$

15. Resolver

$$\begin{array}{llll}
(a) & \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(4x) \leq 2\operatorname{sen}(3x), & (b) & \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \\
(c) & 2\cos^2(x) - \operatorname{sen}(2x) \leq 0, & (d) & (\tan(x) - 1)(2\operatorname{sen}(x) + 1) = 0,
\end{array}$$

16. Sabiendo que $\tan(\dfrac{x}{2}) = \dfrac{1}{2}$, calcular $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$.

17. Demuestre que las siguientes expresiones no dependen de α y determine su valor.

a) $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\cos(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)$.

b) $\cos(\alpha)\cos(\frac{\pi}{6}+\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)$.

18. Resolver los sistemas de ecuaciones:

$$a)\ \begin{array}{rcl} \operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(y) &=& \frac{1}{2} \\ x-y &=& \frac{\pi}{3} \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rcl} \operatorname{sen}(x)+\cos(y) &=& \sqrt{2} \\ x+y &=& \frac{\pi}{2} \end{array}$$

19. Encuentre $Dom(f)$ si:

$$(a)\ f(x)=Arcsen(x-3) \qquad (b)\ f(x)=3Arccos\left(\tfrac{1}{3}(2x+1)\right)$$
$$(c)\ f(x)=Arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

20. Resolver

$$\begin{array}{llll} (a) & Arcsen(\frac{5}{x})+Arcsen(\frac{12}{x})=\frac{\pi}{2} & (b) & Arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=Arctan(x) \\ (c) & -\sqrt{3}<\tan(x)\leq 1 & (d) & Arccos(2x^2-1)=2Arccos(\frac{1}{2}) \end{array}$$

21. Graficar las siguientes funciones periódicas, indicando todos los puntos donde se anula o bien donde alcanza sus valores extremos.

$$a)\ y=3\operatorname{sen}(2x) \quad b)\ y=\tfrac{1}{2}\ \cos(2x+\pi/3) \quad c)\ y=-3(\operatorname{sen}x+\cos x)$$

22. Determine el periodo de las siguiente funciones

$$f_1(x)=\operatorname{sen}(2x), \qquad f_2(x)=\operatorname{sen}(\tfrac{x}{2}), \qquad f_3(x)=\cos(\sqrt{3}x),$$
$$f_4(x)=\cos(\tfrac{x}{\sqrt{3}}), \qquad f_5(x)=\tan(2x), \qquad f_6(x)=\tan(\tfrac{x}{2}).$$

23. Para cada una de las siguientes funciones determine: dominio, recorrido, período, amplitud, valores máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Grafique.

$$(a)\ y=\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}x+1) \quad (b)\ y=2+\operatorname{sen}(x-\tfrac{\pi}{4}) \quad (c)\ y=-3+2\operatorname{sen}(2x-\pi)$$
$$(d)\ y=2+3\cos(\tfrac{x-1}{2}) \quad (e)\ y=\left|2\operatorname{sen}(\pi x-\tfrac{\pi}{2})\right| \quad (f)\ y=5\operatorname{sen}(2\pi x)+12\cos(2\pi x)$$

24. Defina una restricción de la función f para que exista su función inversa:

$$(a)\ f(x)=4\operatorname{sen}(2x+\tfrac{\pi}{2}) \quad (b)\ f(x)=2\operatorname{sen}(x+\tfrac{\pi}{4}) \quad (c)\ f(x)=5\cos(4x-\tfrac{\pi}{2})$$

25. Dos generadores de corriente alterna producen corrientes que vienen dadas en función del tiempo, por las ecuaciones:

$$I_1(t)=\sqrt{3}\ \operatorname{sen}(120\pi t); \quad I_2(t)=-\cos(120\pi t).$$

Si se conectan en paralelo los dos generadores, entonces $I_{total}=I_1+I_2$, determine la corriente máxima suministrada, calcule los instante en que se produce, y la fase del proceso.

JAL
Primer Semestre de 2005.