Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Complemento de Cálculo (521234)

Certamen 2
Pauta de Corrección

3 de Junio, 2002

1.- Diga en que dominio de $\mathbb{C}$ las siguientes funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son analíticas

(a) $f(z) = \tan z$ (b) $f(z) = \dfrac{1 - r^2 + 2ir\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}$, con $z = re^{i\theta}$

Respuesta :

a) $f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, es la división de dos funciones analíticas ($\sin z$, y $\cos z$) para todo $z \in \mathbb{C}$, luego f es analítica para todo z en $\mathbb{C}$ excepto en los puntos aislados en que $\cos z = \cosh y \cos x + i \sinh y \sin x$ se anula. Estos son $z = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Es decir f es analítica en $\boxed{\mathbb{C} \setminus \{\frac{(2n+1)\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}}$.

15 puntos

b) $f(z) = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} + i\dfrac{2r\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$

Condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{(1-r^2)(2r - 2\cos\theta)}{(1 + r^2 - 2r\cos\theta)^2} - 2\frac{r}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} = 2\frac{-2r + \cos\theta + r^2\cos\theta}{(1 + r^2 - 2r\cos\theta)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -4\frac{r^2\sin^2\theta}{(1 + r^2 - 2r\cos\theta)^2} + 2\frac{r\cos\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} = 2\frac{-2r^2 + r\cos\theta + r^3\cos\theta}{(1 + r^2 - 2r\cos\theta)^2} = r\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -2\frac{r\sin\theta(2r - 2\cos\theta)}{(1 + r^2 - 2r\cos\theta)^2} + 2\frac{\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} = 2\frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1 + r^2 - 2r\cos\theta)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} == -2\frac{(1-r^2)r\sin\theta}{(1 + r^2 - 2r\cos\theta)^2} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

Luego, f es analítica para todo z en $\mathbb{C}$ excepto en los puntos aislados en que $1 + r^2 - 2r\cos\theta$ se anula. Es decir, sólo para $z = 1$. Por lo tanto f es analítica para todo $\boxed{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}}$.

15 puntos

2.- Verificar si las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son armónicas y en caso afirmativo, encontrar la conjugada respectiva :

$$\text{(a) } u(x,y) = \sin x \cosh y \qquad\qquad \text{(b) } u(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2+2r\cos\theta}$$

Respuesta :

a) $\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,y) = -\sin x \cosh y + \sin x \cosh x = 0.$ Luego u es armónica. $\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \cos x \cosh y \Longrightarrow \boxed{v(x,y) = \int^y \cos x \cosh s ds = \cos x \sinh y}$.

15 puntos

b) $\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) u(x,y)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2} u &= -\frac{2}{D} + 4\frac{r(2r - r\cos\theta)}{D^2} + 2\frac{(1-r^2)(2r-2\cos\theta)^2}{D^3} - 2\frac{1-r^2}{D^2} \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u &= -\frac{2}{D} - \frac{(1-r^2)(2-2(\cos\theta)/r)}{D^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u &= \frac{8(1-r^2)\sin^2\theta}{D^3} - 2\frac{(1-r^2)(\cos\theta)/r}{D^2} \\
& \text{con } D = 1 + r^2 - 2r\cos\theta
\end{aligned}$$

Sumando las tres expresiones se tiene que $\Delta u = 0$. Es decir u es armónica y su armónica conjugada se calcula como :

$$v(r,\theta) = \int^r \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} dr = -2\int^r \frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2} dr = \boxed{\frac{2r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}}$$

15 puntos

0.5cm

Una segunda alternativa para responder a esta pregunta, evitando el engorroso cálculo del laplaciano en coordenadas polares y de la integral de más arriba, es darse cuenta que $u(x,y)$ corresponde exactamente a la parte real de la función f de la pregunta 1.b) que es analítica, y luego $v(x,y)$ corresponde exactamente a la parte imaginaria de f.

3.- Calcule las siguientes integrales de lineas :

(a) $\int_C (|z|^2 + e^z)dz$, con C la curva parametrizada por $x + \pi i\sqrt{x}$, con $x \in [0, 1]$

Indicación : descomponga en la suma de la integral de una función no analítica más la integral de una función analítica.

(b) $\oint \frac{\tan z}{(z^2+1)^2}dz$, alrededor de $x^2 + y^2/4 = 1$ en el sentido antihorario.

Respuesta :

a) e^z es analítica, luego no importa la forma de la curva lo largo de la cuál es integrada. Es decir $\int_C e^z dz = \int_0^{1+\pi i\sqrt{1}} e^z dz = \left[e^z\right]_0^{1+\pi i} = -e - 1.$

Por otro lado, $\int_C |z|^2 dz = \int_C (x^2 + y^2)dx + i\int_C (x^2+y^2)dy = \int_0^1 (x^2 + \pi^2 x)dx + i\int_0^\pi (y^4/\pi^4 + y^2)dy = \left(\frac{1}{3} + \frac{\pi^2}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi^3}{3}\right)$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_C (|z|^2 + e^z)dz = -e - \frac{2}{3} + \frac{\pi^2}{2} + i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi^3}{3}\right)}$$

15 puntos

b) la curva $x^2 + y^2/4 = 1$ descibe una elípse de centro 0 comprendida entre $z = -1$ y $z = 1$ y entre $z = -2i$ y $z = 2i$. Los puntos $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$ se encuentran al exterior de la elípse, lo mismo que todos los puntos de la forma $z = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Luego $f(z) = \tan z$ es analítica al interior de la elípse. Por otro lado los puntos $z = -i$ y $z = i$ están al interior de la elípse, y aplicando la Fórmula Integral de Cauchy, se tiene :

$$\oint \frac{\tan z}{(z^2+1)^2}dz = \oint \frac{\tan z}{(z-i)^2(z+i)^2}dz = 2\pi i\left(f_1'(i) + f_2'(-i)\right)$$

con $f_1(z) = \frac{\tan z}{(z+i)^2}$ y $f_2(z) = \frac{\tan z}{(z-i)^2}$.

$$f_{1,2}'(z) = \frac{\sec^2 z}{(z \pm i)^2} - 2\frac{\tan z}{(z \pm i)^3}$$

Luego

$$I = 2\pi i\left(\frac{\sec^2 i}{(2i)^2} - 2\frac{\tan i}{(2i)^3} + \frac{\sec^2(-i)}{(-2i)^2} - 2\frac{\tan(-i)}{(-2i)^3}\right)$$

$$\boxed{\oint \frac{\tan z}{(z^2+1)^2}dz = \pi i\left(-1 + \tanh^2 1 + \tanh 1\right)}$$

15 puntos

4.- Identifique y explique brevemente el error en el siguiente razonamiento :

$$e^{i\theta} = (e^{i\theta})^{(2\pi/2\pi)} = (e^{2\pi i\theta})^{(1/2\pi)} = (e^{2\pi i})^{(\theta/2\pi)} = (1)^{\theta/2\pi} = 1, \qquad \text{para todo } \theta > 0.$$

Respuesta :

El error está en la segunda igualdad : en $\mathbb{C}$, las raices de la unidad son múltiples, $z \mapsto z^{\theta/2\pi}$ es una función multievaluada, a menos que z sea un real positivo o θ sea un múltiple de 2π, luego aplicar la propiedad $z^{\alpha\beta} = (z^{\alpha})^{\beta}$ sólo tiene sentido cuando α y β son enteros, o bien z es un real positivo.

Por ejemplo, si $\theta = \pi$, entonces $e^{i\theta} = e^{i\pi} = -1$: el razonamiento erroneo quedaría muy similar a querer razonar como

$$-1 = (-1)^{2/2} = ((-1)^2)^{1/2} = (1)^{1/2} = 1$$

en el que se entiende mejor por qué hay un error en la segunda igualdad.

10 puntos

MGC/MBB/MSC/msc