UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 3
ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA (522115) (11/07/2005).

P1. a) Escriba en la forma $a + bi$ y en la forma polar el número complejo:

$$\left(\frac{2-2i}{1+i}\right)^4.$$

(10 Ptos.)

b) Determine todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación: $z^3 - 3i = 3$.

(10 Ptos.)

Solución

a)

$$\left(\frac{2-2i}{1+i}\right) = \left(\frac{2-2i}{1+i}\right) \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{2-2i-2i-2}{1+1} = -2i.$$

(4 puntos)

Luego,

$$\left(\frac{2-2i}{1+i}\right)^4 = (-2i)^4 = 16i^4 = 16 = 16 + 0i.$$

(4 puntos)

Forma polar: $z = |z|cis(Arg(z)) = 16\,cis(0)$. **(2 puntos)**

b) $z^3 = 3 + 3i = w = |w|\,cis(\alpha)$. De aquí, $|w| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$ y $\alpha = Arctan\left(\frac{3}{3}\right) = Arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. **(4 puntos)**

Luego, $z^3 = \sqrt{18}\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow z = (\sqrt{18})^{\frac{1}{3}}\,cis\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$

(3 puntos)

Por lo tanto, las soluciones a la ecuación planteada son: $z_1 = \sqrt[6]{18}\,cis\left(\frac{\pi/4}{3}\right) = \sqrt[6]{18}\,cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2 = \sqrt[6]{18}\,cis\left(\frac{\pi/4+2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{18}\,cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ y $z_3 = \sqrt[6]{18}\,cis\left(\frac{\pi/4+4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{18}\,cis\left(\frac{17\pi}{12}\right)$. **(3 puntos)**

P2. a) Para el polinomio $p(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 16$ encuentre las raíces y sus multiplicidades, si se sabe que $x = i$ es una raíz de $p(x)$. **(10 Ptos.)**

b) Encuentre un polinomio $p(x) \in P(\mathbb{R})$ de grado tres y que tenga raíces -1 y $2i$. **(5 Ptos.)**

c) Explique por qué el polinomio $p(x) = x^{20} - 1$ es divisible por $q(x) = x - 1$. **(5 Ptos.)**

<u>Solución</u>

a) Como los coeficientes de p son todos reales, entonces $x = -i$ es también una raíz de p. Luego, p es divisible por $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$. **(4 puntos)**

Al dividir $p(x)$ por $x^2 + 1$ nos da como resultado $x^2 - 8x + 16$. Es decir,

$$p(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 8x + 16) = (x - i)(x + i)(x - 4)^2.$$

(4 puntos)

Por lo tanto, las raíces de p son: i, $-i$ y 4 con multiplicidades uno, uno y dos respectivamente. **(2 puntos)**

b) Como $p(x)$ debe tener coeficientes reales y $x = 2i$ es una raíz de $p(x)$, entonces $x = -2i$ debe ser también raíz de $p(x)$. **(2 puntos)**

Luego, una posibilidad es $p(x) = (x - 2i)(x + 2i)(x + 1) = (x^2 + 4)(x + 1) = x^3 + x^2 + 4x + 4$. **(3 puntos)**

c) $x^{20} - 1 = q(x)(x - 1) + r$, $r \in \mathbb{R}$. Pero evaluando en $x = 1$ se tiene que: $1^{20} - 1 = 0 = q(1)0 + r$. De aquí, $r = 0$ y por lo tanto, $x^{20} - 1 = q(x)(x - 1)$, es decir $x^{20} - 1$ es divisible por $x - 1$. **(5 puntos)**

P3. a) Sea $\triangle ABC$ el trángulo formado por las distancias entre las ciudades A, B y C de tres países diferentes. Se sabe que la distancia entre A y B es 12000 Kms. y los ángulos que forma el lado $\overline{AB}$ con los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{\pi}{6}$ respectivamente.

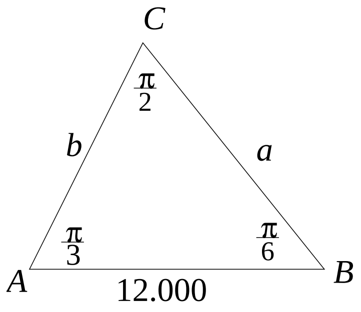
i) Encuentre la distancia entre las ciudades A y C y la distancia entre B y C si el triángulo $\triangle ABC$ es plano. **(6 Ptos.)**

ii) Explique si las distancias entre las ciudades A y C y la distancia entre B y C pueden variar en el caso de considerar el $\triangle ABC$ como un triángulo esférico en lugar de un triángulo plano. **(4 Ptos.)**

b) Sean $I \in M_2(\mathbb{R})$ matriz identidad, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Encuentre $X \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $AA^t + BX = 2I$. **(10 Ptos.)**

Solución

a) i) Aplicando el teorema del seno al $\triangle ABC$ se tiene que:



$$\frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/6)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{12.000}.$$ **(2 puntos)**

Por lo tanto, $a = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi/3)12.000}{\operatorname{sen}(\pi/2)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}12.000 = 6.000\sqrt{3}$ y **(2 puntos)**

$b = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi/6)12.000}{\operatorname{sen}(\pi/2)} = \dfrac{1}{2} \cdot 12.000 = 6.000.$

a) ii) Las distancias sí pueden variar pues el teorema del seno en un triángulo plano no es igual que para el triángulo esférico. En este último caso se tiene que:

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{\operatorname{sen}(a)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/6)}{\operatorname{sen}(b)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{\operatorname{sen}(12.000)}.$$

(4 puntos)

b) $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, **(1 punto)**

$AA^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, **(2 puntos)**

$BX = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & -3b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$, **(2 puntos)**

$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

Así, $AA^t + BX = 2I$ implica que:

$$\begin{pmatrix} -3a+1 & -3b-2 \\ -2+4c & 8+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ **(2 puntos)**

Por lo tanto, $X = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$. **(2 puntos)**