UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Fecha: 30-05-2005
Duración: 100 minutos

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
EVALUACIÓN 2

1. [**20 puntos**] Considere la función $f : [-5, -2[\to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x-6 & \text{si } -5 \leq x < -3 \\ \dfrac{-x}{x+2} & \text{si } -3 \leq x < -2 \end{cases}$$

   (a) Demuestre que f es inyectiva.
   (b) Defina la inversa de f.

2. [**20 puntos**] Defina $f \circ g$ para $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \ln(9 - x^2) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{2}{x-1}$$

3. [**10 puntos**] La productividad de un trabajador (en unidades de producto) que tiene t semanas de experiencia está dada por la función $Q : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, definida por:

$$Q(t) = 240 - Ae^{-kt},$$

   donde A y k son constantes a determinar.

   Se observa que inicialmente un determinado trabajador (sin experiencia) tiene una productividad de 60 unidades, y de 160 unidades después de ocho semanas de experiencia, determine cuál fue su productividad despues de cuatro semanas de experiencia.

4. [**10 puntos**] Resuelva la siguiente inecuación:

$$[\log_{0.2}(x)]^2 \leq \log_{0.2}(x^2)$$

Apague su teléfono. No se puede usar calculadora. No se admiten consultas.

LBH/RBP/RRS/FFB/AGS/RNG/LRS/BBM/ags

SOLUCIÓN

1. **[20 puntos]** Considere la función $f : [-5, -2[\to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 6 & \text{si } -5 \leq x < -3 \\ \dfrac{-x}{x+2} & \text{si } -3 \leq x < -2 \end{cases}$$

   (a) Demuestre que f es inyectiva.

   Sol.: Sean x, y en $[-5, -2[$.

   Caso 1. $x, y \in [-5, -3[$ tal que $f(x) = f(y)$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow -x - 6 = -y - 6 \\ &\Longrightarrow -x = -y \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

   Caso 2. $x, y \in [-3, -2[$ tal que $f(x) = f(y)$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow \frac{-x}{x+2} = \frac{-y}{y+2} \\ &\Longrightarrow -xy - 2x = -yx - 2y \\ &\Longrightarrow -2x = -2y \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

   Caso 3. Veamos que si $x \in [-5, -3[$ e $y \in [-3, -2[$ no se puede tener que $f(x) = f(y)$. Para esto veamos que $f([-5, -3[) \cap f([-3, -2[) = \phi$.

$$\begin{aligned} f([-5, -3[) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [-5, -3[\wedge f(x) = y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [-5, -3[\wedge -x - 6 = y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [-5, -3[\wedge x = -y - 6\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : -5 \leq -y - 6 < -3\} \\ &=]-3, -1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f([-3, -2[) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in [-3, -2[\wedge f(x) = y\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in [-3, -2[\wedge \frac{-x}{x+2} = y\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in [-3, -2[\wedge x = \frac{-2y}{y+1}\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : -3 \leq \frac{-2y}{y+1} \wedge \frac{-2y}{y+1} < -2\right\} \\ &=]-\infty, -3] \end{aligned}$$

   De aqui se ve que $f([-5, -3[) \cap f([-3, -2[) = \phi$.

   De todo lo anterior f es inyectiva.

(b) Defina la inversa de f.

Sol.: Notemos que

$$\begin{aligned} Rec(f) &= f\left([-5,-3[\right) \cup f\left([-3,-2[\right) \\ &=]-\infty,-1] \end{aligned}$$

Así, la inversa de f es $f^{-1} :]-\infty,-1] \rightarrow [-5,-2[$, y está definida por:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x-6 & \text{si } -3 < x \leq -1 \\ -\dfrac{2x}{1+x} & \text{si } x \leq -3 \end{cases}$$

2. **[20 puntos]** Defina $f \circ g$ para $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \ln(9 - x^2) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{2}{x-1}$$

Sol.:

$$\begin{aligned} Dom(g) = &\quad \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R}\} \\ = &\quad \{x \in \mathbb{R} : g(x) = \frac{2}{x-1} \in \mathbb{R}\} \\ = &\quad \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} \\ = &\quad \mathbb{R} - \{1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dom(f) = &\quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ = &\quad \{x \in \mathbb{R} : \ln(9 - x^2) \in \mathbb{R}\} \\ = &\quad \{x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 > 0\} \\ = &\quad \{x \in \mathbb{R} : (3 - x)(3 + x) > 0\} \\ = &\quad]-3, 3[. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dom(f \circ g) = &\quad \{x \in Dom(g) : g(x) \in Dom(f)\} \\ = &\quad \left\{x \in \mathbb{R} - \{1\} : \frac{2}{x-1} \in]-3, 3[\right\} \\ = &\quad \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge -3 < \frac{2}{x-1} < 3\right\} \\ = &\quad]-\infty, 1/3[\cup]5/3, +\infty[\end{aligned}$$

De donde $f \circ g$ queda definida por:

$$\begin{aligned} f \circ g :]-\infty, 1/3[\cup]5/3, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(g(x)) = \ln\left(9 - \frac{4}{(x-1)^2}\right) \end{aligned}$$

3. **[10 puntos]** La productividad de un trabajador (en unidades de producto) que tiene t semanas de experiencia está dada por la función $Q : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, definida por:

$$Q(t) = 240 - Ae^{-kt},$$

donde A y k son constantes a determinar.

Se observa que inicialmente un determinado trabajador (sin experiencia) tiene una productividad de 60 unidades, y de 160 unidades después de ocho semanas de experiencia, determine cuál fue su productividad despues de cuatro semanas de experiencia.

Sol.: De la producción del trabajador inicialmente se desprende que: $Q(0) = 60$.

$$\begin{aligned} Q(0) = 60 \Longrightarrow &\quad 240 - A = 60 \\ \Longrightarrow &\quad A = 180. \end{aligned}$$

De la producción después de ocho semanas de experiencia se desprende que: $Q(8) = 160$.

$$\begin{aligned} Q(8) = 160 \Longrightarrow &\quad 240 - 180e^{-k8} = 160 \\ \Longrightarrow &\quad e^{-8k} = 80/180 = 4/9. \end{aligned}$$

La producción del trabajador despues de cuatro semanas de experiencia es:

$$\begin{aligned} Q(4) = &\quad 240 - 180e^{-4k} \\ = &\quad 240 - 180\sqrt{e^{-8k}} \\ = &\quad 240 - 180(2/3) \\ = &\quad 240 - 120 \\ = &\quad 120 \end{aligned}$$

4. **[10 puntos]** Resuelva la siguiente inecuación:

$$[\log_{0.2}(x)]^2 \leq \log_{0.2}(x^2)$$

Sol.:

Notemos que x tiene que ser tal que $\log_{0.2}(x)$ y $\log_{0.2}(x^2)$ tienen que estar bien definidos, de aqui $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
[\log_{0.2}(x)]^2 \leq \log_{0.2}(x^2) &\implies [\log_{0.2}(x)]^2 - 2\log_{0.2}(x) \leq 0 \\
&\implies \log_{0.2}(x)\,[\log_{0.2}(x) - 2] \leq 0 \\
&\implies \begin{cases} [\log_{0.2}(x) \leq 0 \wedge \log_{0.2}(x) - 2 \geq 0] \\ \vee \\ [\log_{0.2}(x) \geq 0 \wedge \log_{0.2}(x) - 2 \leq 0] \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \begin{cases} [x \geq 1 \wedge \log_{0.2}(x) \geq 2] \\ \vee \\ [0 < x \leq 1 \wedge \log_{0.2}(x) \leq 2] \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} \left[x \geq 1 \wedge x \leq (0.2)^2 = 0.04\right] \\ \vee \\ \left[0 < x \leq 1 \wedge x \geq (0.2)^2 = 0.04\right] \end{cases} \\
&\implies x \in [0.04, 1]
\end{aligned}$$

La solución de la inecuación es:

$$[0.04, 1]$$