UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142

PRACTICA 15. Sistemas de Ecuaciones

Problema 1. Decida si los sitemas que siguen son incompetibles o compatibles. En el último caso, decida si son determinados o indeterminados; encuentre la solución

a) $\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ x & - & 2y & = & 8 \\ 2x & - & y & = & 4 \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ x & + & 2y & = & 8 \\ 2x & + & y & = & 10 \end{array}\right|$ c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \end{array}\right|$ d)

$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & - & z & = & 1 \end{array}\right|$ e) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 2z & + & 2t & = & 2 \\ 3x & & & + & 2z & - & 2t & = & -2 \end{array}\right|$

[En práctica (d) y (e)]

Problema 2. Para qué valores de α y β, el sistema que sigue es compatible. Encuentre la solución.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 2z & + & 2t & = & 2\alpha \\ 3x & & & + & 2z & - & 2t & = & -2\beta \end{array}\right|$$

Solución: El sistema es compatible independientemente de α y β.

Problema 3. Resuelva para x e y (en función de α y β)

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha x + \beta y & = & \frac{1}{\alpha} \\ \beta^2 x + \alpha^2 y & = & 1 \end{array}\right|$$

Problema 4. Encuentre condiciones sobre el dato $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ y también sobre el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que el sistema que sigue sea compatible determinado e indeterminado.

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z & = & a \\ x + \lambda y + z & = & b \\ x + y + \lambda z & = & c \end{array}\right|$$

[En práctica]

Problema 5. Si (x_0, y_0, z_0) es una solución del sistema $\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x2 + a_{33}x_3 & = & b_3, \end{array}\right|$

decida si para $\alpha, \beta, \gamma \ \in \mathbb{R}$ no nulos, el sistema que sigue es compatible. En caso afirmativo, exhiba una solución.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ \gamma(a_{21} - \alpha a_{11})x_1 & + & \gamma(a_{22} - \alpha a_{12})x_2 & + & \gamma(a_{23} - \alpha a_{13})x_3 & = & \gamma(b_2 - \alpha b_1) \\ \beta a_{31}x_1 & + & \beta a_{32}x_2 & + & \beta a_{33}x_3 & = & \beta b_3 \end{array}\right|$$

Solución: El sistema es compatible; (x_0, y_0, z_0) es también solución del nuevo sistema. No podemos determinar si la solución es única.

Problema 6. ¿ Qué condiciones debe imponer sobre $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} \alpha x & & & - & z & - & 4t & = & \alpha \\ 2x & + & y & - & z & + & 4t & = & \alpha \\ & & y & + & \alpha z & & & = & \alpha \end{array}\right|$$

(i) sea compatible,
(ii) sea incompatible ? Encuentre la solución cuando corresponda.

Solución:
(i) Sistema compatible para $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2\}$.
(ii) Sistema incompatible para $\alpha = -2$.

Problema 7. Demuestre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x - y,\ x + 3y)$ es biyectiva. **[En práctica]**

Problema 8. Encuentre condiciones sobre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, de modo que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ sea biyectiva.

Solución: $ad - bc \neq 0$.

Problema 9. Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ el sistema posee solución no trivial.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} \alpha x & & & - & z & - & 4t & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & + & 4t & = & 0 \\ & & y & + & \alpha z & & & = & 0 \end{array}\right|$$

[En práctica]

Solución: Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

14.08.2002
JMS/cln