UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA DE CORRECCION

EVALUACION 3. ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL. 520142

Problema 1: Considere el número complejo $w = 1 + i\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(1.1) Calcule la forma polar de w y de $\overline{w}$.

(1.2) Demuestre, sin usar inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(w)^n + (\overline{w})^n = 2\left(\sec\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) .$$

15 PUNTOS

Solución

Para (1.1)

De la definición de w es claro que

$$|w| = \sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{\sec^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = |\sec\left(\frac{\pi}{12}\right)|$$

pero $\frac{\pi}{12}$ está en el primer cuadrante, luego $\sec\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, así $|w| = \sec\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3 puntos

La forma polar de w está dada por $\sec\left(\frac{\pi}{12}\right)\text{cis}(\theta)$ donde

$$\theta = \text{Arctan}(\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)) = \frac{\pi}{12} .$$

Así,

$$w = \sec\left(\frac{\pi}{12}\right)\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

3 puntos

Como $|w| = |\overline{w}|$ y $arg(\overline{w}) = -arg(w)$, entonces se tiene que la forma polar de $\overline{w}$ está dada por

$$\overline{w} = \sec\left(\frac{\pi}{12}\right)\text{cis}\left(\frac{-\pi}{12}\right)$$

4 puntos

Para (1.2)

Por el Teorema de De Moivre se tiene que

$$\begin{aligned} w^n + \overline{w}^n &= \sec\left(\frac{\pi}{12}\right)^n \text{cis}\left(\frac{n\pi}{12}\right) + \sec\left(\frac{\pi}{12}\right)^n \text{cis}\left(-\frac{n\pi}{12}\right) \\ &= \sec\left(\frac{\pi}{12}\right)^n \left\{\cos(\frac{n\pi}{12}) + i\,\text{sen}(\frac{n\pi}{12}) + \cos(-\frac{n\pi}{12}) + i\,\text{sen}(-\frac{n\pi}{12})\right\} \\ &= 2\sec\left(\frac{\pi}{12}\right)^n \cos(\frac{n\pi}{12}) . \end{aligned}$$

5 puntos

Problema 2: Considere el polinomio $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definido por

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4\,.$$

Se sabe que q tiene una raíz de la forma ki con $k \in \mathbb{R}^+$.

(2.1) Determine el valor de k.

(2.2) Calcule $q(x)/(x^2 + k^2)$ usando el valor de k calculado en (2.1).

(2.3) Determine todas las raíces del polinomio q.

(2.4) Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{1}{q(x)}$.

25 PUNTOS

Solución

Para (2.1)

Existen varias maneras de resolver esta parte. La más simple es la siguiente.
Si ki es raíz del polinomio, también lo es $-ki$. Podemos evaluar el polinomio en ambos valores, obteniendo así dos ecuaciones que al restarlas nos permiten despejar k^2.

$$\begin{aligned} q(ki) &= k^4 + 4ik^3 - 5k^2 - 4ki + 4 = 0 \\ q(-ki) &= k^4 - 4ik^3 - 5k^2 + 4ki + 4 = 0 \\ q(ki) - q(-ki) &= 8ik^3 - 8ik = 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Dado que k debe ser distinto de 0, podemos dividir la ecuación (1) por $8ik$, obteniendo:

$$k^2 - 1 = 0$$

Lo que implica que $|k| = 1$, y que por lo tanto i y $-i$ son raíces de $q(x)$.

5 puntos

Para (2.2)

De la parte anterior $k^2 = 1$, entonces tenemos que calcular $q(x)/(x^2+1)$.La división se desarrolla como sigue:

$$\begin{array}{cccccl} x^4 & -4x^3 & +5x^2 & -4x & +4 & : (x^2+1) = \quad x^2 \quad -4x \quad +4 \\ x^4 & & x^2 & & & \\ & -4x^3 & & -4x & & \\ & & +4x^2 & & +4 & \end{array}$$

De donde $\frac{q(x)}{(x^2+1)} = x^2 - 4x + 4$.

5 puntos

Para (2.3)

De la parte (2.2) se tiene que $q(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4x + 4)$, por lo tanto el conjunto de raíces de $q(x)$ está conformado por las raíces de $(x^2 + 1)$ y las raíces de $(x^2 - 4x + 4)$.
Las raíces de $(x^2 + 1)$ son i y $-i$. Para calcular las raíces de $(x^2 - 4x + 4)$ podemos descomponer como sigue:

$$(x^2 - 4x + 4) = (x - 2)^2$$

de donde se deduce que $x = 2$ es una raíz de $(x^2 - 4x + 4)$ de multiplicidad algebraica igual a 2. Conclusión: las raíces de $q(x)$ son: i, $-i$ y 2.

5 puntos

Para (2.4)

De la parte (2.3) deducimos que la descomposición de $q(x)$ en polinomios irreductibles es: $q(x) = (x^2+1)(x-2)^2$; entonces, la descomposición de $\frac{1}{q(x)}$ en fracciones parciales consiste en encontrar los reales A, B, C y D tales que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{q(x)} &= \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(Ax+B)(x-2)^2 + C(x^2+1)(x-2) + D(x^2+1)}{q(x)}\end{aligned}$$

Lo que implica la siguiente igualdad de polinomios:

$$1 = (A+C)x^3 + (-4A+B-2C+D)x^2 + (4A-4B+C)x + (4B-2C+D)$$

Igualando los coeficientes que acompañan a las distintas potencias de cada lado, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} A & & +C & & = & 0 \\ -4A & +B & -2C & +D & = & 0 \\ 4A & -4B & +C & & = & 0 \\ & 4B & -2C & +D & = & 1 \end{array}$$

De donde, $A = -C$ y reemplazando esto en las tres últimas ecuaciones:

$$\begin{array}{cccccc} 2C & +B & +D & = & 0 \\ -3C & -4B & & = & 0 \\ -2C & +4B & +D & = & 1 \end{array}$$

De donde $B = -3C/4$, y reemplazando esto en las dos ecuaciones restantes:

$$\begin{array}{cccc} 5C/4 & +D & = & 0 \\ -5C & +D & = & 1 \end{array}$$

De donde: $A = \frac{4}{25}$, $B = \frac{3}{25}$, $C = -\frac{4}{25}$ y $D = \frac{1}{5}$.
Así

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{4x+3}{25(x^2+1)} - \frac{4}{25(x-2)} + \frac{1}{5(x-2)^2}$$

10 puntos

Problema 3:

(3.1) Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}. \end{pmatrix}$$

Demuestre que A es invertible y calcule A^{-1}.

(3.2) Sean $A,\, B \in M_n(\mathbb{R})$

(3.2.1) Si A es ortogonal, es decir $A\,A^t = A^t\,A = I$, pruebe que $\det(A) = \pm 1$.

(3.2.2) Si existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ invertible, tal que $B = P^{-1} A\, P$, demuestre que $\det(A) = \det(B)$.

20 PUNTOS

Solución

Para (3.1)

Sabemos que A es invertible sí y sólo sí $\det(A) \neq 0$. En nuestro caso, como A es triangular superior, se tiene que

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \neq 0\,,$$

por lo tanto A es invertible.

2 puntos

<u>Por operaciones elementales</u>

$$
\begin{aligned}
(A|I) \;&=\; \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 6 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 \longleftarrow \frac{1}{2} f_1 \\ f_2 \leftarrow 2 f_2 \\ f_3 \leftarrow \frac{1}{2} f_3 \\ f_4 \leftarrow 2 f_2 \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 \longleftarrow f_1 - 3 f_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccr|crcc} 1 & 0 & -11 & -15 & \frac{1}{2} & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 \longleftarrow f_1 + 11 f_3 \\ f_2 \longleftarrow f_2 - 4 f_3 \\ \\ \\ \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccr|crrc} 1 & 0 & 0 & -4 & \frac{1}{2} & -6 & \frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 \longleftarrow f_1 + 4 f_4 \\ f_2 \longleftarrow f_2 - 2 f_4 \\ f_3 \longleftarrow f_3 - f_4 \\ \\ \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|crrr} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -6 & \frac{11}{2} & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -6 & \frac{11}{2} & 8 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10 puntos

<u>Por matriz adjunta</u>

$$
\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 8 & -4 & 0-2 & 2 \end{pmatrix},
$$

luego

$$
\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -6 & \frac{11}{2} & 8 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Así

$$
A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -6 & \frac{11}{2} & 8 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

10 puntos

Para (3.2.1)

$$
\begin{aligned}
A\,A^t = I \quad &\Longrightarrow \quad \det(A\,A^t) = \det(I) \\
&\Longrightarrow \quad \det(A)\det(A^t) = 1 \\
&\Longrightarrow \quad \det(A)\det(A) = 1 \\
&\Longrightarrow \quad [\det(A)]^2 = 1 \\
&\Longrightarrow \quad \det(A) = \pm 1\,.
\end{aligned}
$$

4 puntos

Para (3.2.1)

$$
\begin{aligned}
B = P^{-1}AP \quad &\Longrightarrow \quad \det(B) = \det(P^{-1}AP) \\
&\Longrightarrow \quad \det(B) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) \\
&\Longrightarrow \quad \det(B) = \det(P^{-1})\det(P)\det(A) \\
&\Longrightarrow \quad \det(B) = \det(P^{-1}P)\det(A) \\
&\Longrightarrow \quad \det(B) = \det(I)\det(A) \\
&\Longrightarrow \quad \det(B) = \det(A)
\end{aligned}
$$

4 puntos