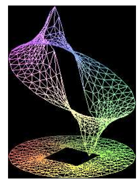
MAT 520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Segundo Semestre 2003, Universidad de Concepción



CAPITULO 10: Espacios Vectoriales

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Definición de Cuerpo

Sea $\mathbb{K}$ un conjunto y sean $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ **operaciones binarias internas**. Se dice que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un **cuerpo** si:

a) $+$ es **asociativa**: $\quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{K}$.

b) $+$ es **conmutativa**: $\quad x + y = y + x \quad \forall\, x,\, y \in \mathbb{K}$.

c) Existe un **elemento neutro** $0 \in \mathbb{K}$ para $+$: $\quad x + 0 = x \quad \forall\, x \in \mathbb{K}$.

d) $\forall\, x \in \mathbb{K}$ existe un **simétrico** $-x \in \mathbb{K}$ tal que: $\quad x + (-x) = 0$.

Definición de Cuerpo (...cont)

e) $\cdot$ es **asociativa**: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{K}$.

f) Existe un **elemento neutro** $1 \in \mathbb{K}$ para $\cdot$: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{K}$.

g) $\forall\, x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$ existe un **inverso** $x^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que:
$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

h) $\cdot$ es **distributiva** con respecto a $+$:
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ y $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{K}$.

Observación

Se dice que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un **cuerpo conmutativo**, si además se satisface:
$x \cdot y = y \cdot x \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{K}$.

Espacios Vectoriales

Ejemplos

Los números **racionales** ($\mathbb{Q}$), **reales ($\mathbb{R}$)** y **complejos** ($\mathbb{C}$) son **cuerpos conmutativos** con la suma y producto que se indican:

$\mathbb{K}$	x	y	$x+y$	$x \cdot y$
$\mathbb{Q}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{ac}{bd}$
$\mathbb{R}$	x	y	$x+y$	$x\,y$
$\mathbb{C}$	$a+b\,i$	$c+d\,i$	$(a+c)+(b+d)\,i$	$(ac-bd)+(ad+bc)\,i$

Elementos NEUTRO, SIMETRICO E INVERSO para el cuerpo dado

$\mathbb{K}$	0	1	x	$-x$	$x^{-1} \quad (x \neq 0)$
$\mathbb{Q}$	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{a}{b}$	$\frac{(-a)}{b}$	$\frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$
$\mathbb{R}$	0	1	x	$-x$	$\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$
$\mathbb{C}$	$0+0\,i$	$1+0\,i$	$a+b\,i$	$(-a)+(-b)\,i$	$\frac{a}{a^2+b^2}+\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\,i$
					$a^2+b^2 \neq 0$

Espacios Vectoriales

Definición de Espacio Vectorial

Sean V un conjunto, $\mathbb{K}$ un cuerpo, y consideremos dos operaciones binarias:

- **Suma** (interna) $\quad + : V \times V \to V\,, \quad (x, y) \to x + y$
- **Producto por escalar** (externa) $\quad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V\,, \quad (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$

Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{K}$, o bién un $\mathbb{K}$**-espacio vectorial**, si:

1) $+$ es **asociativa** y **conmutativa**.

2) Existe un **elemento neutro** $\theta \in V$ (vector nulo) para $+$:

$$x + \theta = x, \quad \forall x \in V.$$

3) $\forall x \in V$ existe un **simétrico** $-x \in V$ tal que: $\quad x + (-x) = \theta$.

4) Para todo α, $\beta \in \mathbb{K}$ y para todo $x \in V$: $\quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$.

Definición de Espacio Vectorial (... cont)

5) Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todo x, $y \in V$: $\quad \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

6) Para todo α, $\beta \in \mathbb{K}$ y para todo $x \in V$: $\quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

7) Para todo $x \in V$: $\quad 1 \cdot x = x \quad$ (1 es la unidad de $\mathbb{K}$).

Observaciones

- Los elementos de V se llaman **vectores**.
- Todo espacio vectorial V es **no vacío** $\quad (\theta \in V)$.
- $V := \{\theta\}$ es el **espacio vectorial trivial**.
- V se dice un espacio vectorial

  real si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

  complejo si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Espacios Vectoriales

Notación. Dados $x,\ y \in V$, se define **la diferencia**: $x - y := x + (-y)$.

LEMA (Ley de Cancelación).

Sean $x,\ y,\ z \in V$ tales que $x + y = x + z$. Entonces $y = z$.

TEOREMA.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces:

$\mathbf{P}_1$) el elemento neutro θ para la suma es **único**.

$\mathbf{P}'_1$) para cada $x \in V$ existe un **único** simétrico (inverso aditivo) $-x \in V$.

$\mathbf{P}_2$) para todo $\alpha \in \mathbb{K}$: $\alpha \cdot \theta = \theta$.

$\mathbf{P}_3$) para todo $x \in V$: $0 \cdot x = \theta$.

$\mathbf{P}_4$) para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todo $x \in V$: $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$.

$\mathbf{P}_5$) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in V:\quad (\alpha \cdot x = \theta) \iff (\alpha = 0 \ \vee\ x = \theta)$.

EJEMPLO 1 (Soluciones de un Sistema Homogéneo).
Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo, m, $n \in \mathbb{N}$, $A := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y definamos

$$V := \{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \text{tal que} \quad (x_1, ..., x_n) \quad \text{es solución de} \quad (1) \}$$

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = 0 \\ & \cdots & & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

$\boxed{+ \; : \; V \times V \to V}$

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) \; := \; (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$\boxed{\cdot \; : \; \mathbb{K} \times V \to V}$

$$\alpha \cdot (x_1, ..., x_n) \; := \; (\alpha \cdot x_1, ..., \alpha \cdot x_n)$$

Entonces $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

EJEMPLO 2 (ejemplos simples).

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Entonces

- $\mathbb{K}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Casos particulares:

  $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$;

  $\mathbb{C}^2$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$;

  $\mathbb{Q}^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

- $\mathbb{K}$ es espacio vectorial sobre sí mismo. Casos particulares:

  $\mathbb{R}$ es espacio vectorial real;

  $\mathbb{C}$ es espacio vectorial complejo.

- $\mathbb{C}$ también es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Notar las diferencias en las definiciones de $+$ y $\cdot$.

EJEMPLO 3 (Espacios de Polinomios).
Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y definamos

$$V := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : \quad p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \forall x \in \mathbb{K}\}$$

$$\boxed{+ : V \times V \to V}$$

$$p,\, q \in V\,, \quad p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\,, \quad q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

$$(p+q)(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \cdots + (a_n + b_n) x^n \quad \forall x \in \mathbb{K}$$

$$\boxed{\cdot : \mathbb{K} \times V \to V}$$

$$\alpha \in \mathbb{K}, \quad p \in V, \qquad (\alpha \cdot p)(x) := (\alpha \cdot a_0) + (\alpha \cdot a_1) x + \cdots + (\alpha \cdot a_n) x^n \quad \forall x \in \mathbb{K}$$

Entonces $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

EJEMPLO 4 (Espacios de Matrices).

Sean m, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ un cuerpo, y definamos

$$V := \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

$$\boxed{+ : V \times V \to V}$$

$$A := (a_{ij}),\; B := (b_{ij}) \in V\,, \qquad (A + B) := (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\boxed{\cdot : \mathbb{K} \times V \to V}$$

$$\alpha \in \mathbb{K}\,, \quad A := (a_{ij}) \in V\,, \qquad (\alpha \cdot A) := (\alpha \cdot a_{ij})$$

Entonces $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Espacios Vectoriales

Subespacios Vectoriales

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$. Diremos que S es un **Subespacio vectorial** de V, si S es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las mismas operaciones binarias definidas en V.

Observación

- V y $\{\theta\}$ se dicen subespacios triviales de V.

Caracterización de Subespacios

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$. Entonces S es un subespacio de V sí y sólo sí:

(i) $S \neq \emptyset$

(ii) $(\forall\, x, y \in S): \quad x + y \in S$
(*S* es cerrado c/r a la suma)

(iii) $(\forall\, \lambda \in \mathbb{K})\ (\forall\, x \in S): \quad \lambda \cdot x \in S$
(S es cerrado c/r a la multiplicación por escalar)

Ejemplos de Subespacios Vectoriales

1. El conjunto de *soluciones de un sistema homogéneo* (de n incógnitas con *coeficientes en* $\mathbb{K}$) es un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.
2. Sean a, b y c tres números reales. Entonces
   - $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$
   - $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = az, y = bz\}$

   son subespacios de $\mathbb{R}^3$.
3. $\{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \quad A = A^t\}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
4. $\{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \quad A = -A^{\,t}\}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
5. $\{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \quad A = -\bar{A}^{\,t}\}$ es un subespacio de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.
6. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Entonces, $\mathbb{K}^{n-1} \times \{0\}$ es un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.

Espacios Vectoriales

Subespacios Vectoriales Notables

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U, W \subseteq V$ dos subespacios de V. Entonces los siguientes subconjuntos

(S1) $U \bigcap W = \{ v \in V : v \in U \wedge v \in W \}$

(S2) $U + W = \{ v \in V : v = u + w,\ u \in U \wedge w \in W \}$

son subespacios vectoriales de V, con las mismas operaciones binarias.

Suma directa (interna)

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U, W \subseteq V$ dos subespacios de V.
Se dice que $U + W$ es suma directa si $U \cap W = \{\theta\}$, y se escribe $U \oplus W$.

Observación

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U, W dos subespacios de V. Entonces, en general:

- $U \cup W$ no es subespacio vectorial de V.

  Contra ejemplo

  Considerar las rectas que pasan por el origen:

  $$U = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 2x \ \}$$

  $$W = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 2y \ \}$$

  y sean $u = (1, 2)$ y $v = (2, 1) \in U \cup W$. Entonces $u + v \notin U \cup W$.

Proposición

$U \cup W$ subespacio vectorial de $V \iff U \subseteq W \vee W \subseteq U$

Ejemplos

- Si U y W son como en el contra ejemplo, entonces

$$U+W=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2:\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\quad s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

Notar que $U+W=\mathbb{R}^2$.

- Sean

$$U = \{\, p\in\mathcal{P}_3(\mathbb{R}):\quad p(0)=0,\quad p'(0)=0\,\}$$

$$W = \{\, p\in\mathcal{P}_3(\mathbb{R}):\quad p(x)=p(-x),\quad \forall x\in\mathbb{R}\,\}.$$

Entonces

$$U\cap W=\{bx^2:b\in\mathbb{R}\}$$

Espacios Vectoriales

Ejemplos ... (cont)

- **Descomposición de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.** Sean

$$U = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \; A = A^t \} \text{ y } W = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \; A = -A^t \} \, .$$

Entonces:

$U \cap W = \{\theta\}$ y $U + W = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, e. d. $U \oplus W = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- **Descomposición de U.** Sean

$$\begin{aligned} D &= \{ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \quad a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \} \\ \tilde{U} &= \{ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \quad a_{ii} = 0 \wedge a_{ij} = a_{ji} \quad i \neq j\} \, . \end{aligned}$$

Entonces:

$$U = D + \tilde{U} \, .$$

- Si $A \in W$: ¿ diag(**A**)= ?

Sistema de generadores

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq V$. El vector $X \in V$ es *combinación lineal* (c.l.) de los vectores de A si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Observación

El vector nulo es *combinación lineal* (c.l.) de cualquier conjunto de vectores de V.

Ejemplos

(a) Sea $V = \mathbb{R}^2$ y sean $\vec{v},\, \vec{d} \in V$. Entonces $\vec{v}$ es c.l de $\vec{d}$ sí y sólo si $\vec{v}$ pertenece a la recta:

$$L := \{\, \vec{x} \in V : \quad \vec{x} = t \cdot \vec{d}, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

(b) Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sean $\vec{v},\, \vec{v}_1,\, \vec{v}_2 \in V$. Entonces $\vec{v}$ es c.l. de los vectores $\vec{v}_1,\, \vec{v}_2$ sí y sólo si $\vec{v}$ pertenece al plano:

$$\Pi := \{\, \vec{x} \in V : \quad \vec{x} = t \cdot \vec{v}_1 \, + \, s \cdot \vec{v}_2, \quad t, s \in \mathbb{R}\}$$

NOTA:

Si $\vec{v}_1 \,||\, \vec{v}_2$, entonces se reduce a la situacion del caso (a).

Ejemplos ... (cont)

(c) Sean $V = \mathbb{R}^3$ y
$x_1 = (1,0,1),\ x_2 = (-1,1,0),\ x_3 = (0,0,1),\ x_4 = (1,2,3)$.
Entonces:

$$\begin{aligned}(\tfrac{5}{2}, -2, \tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2}\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \\ &= 0\cdot x_1 + \tfrac{-7}{3}\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \tfrac{1}{6}\cdot x_4\end{aligned}$$

(d) Sean $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $p_1(x) = (x-1)^2,\ p_2(x) = \frac{1}{2}x + 1,\ p_3(x) = 5$.
Entonces:

$$x^2 - 2x + 3 = 1\cdot p_1(x) + 0\cdot p_2(x) + \frac{2}{5}\cdot p_3(x)$$

Observar que esta c.l es **única**.

Ejemplos ... (cont)

(e) Sean $V = \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y los vectores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

se puede expresar como c.l. de A_1, A_2 y A_3 de ***infinitas maneras***.

Subespacio generado

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subseteq V$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de estos r vectores de A:

$$S = \left\{ v \in V : \; v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot v_i, \; \alpha_i \in \mathbb{K}, \; i = 1, \ldots, r \right\}$$

es un **subespacio vectorial** de V.

Observaciones

- A es un sistema de generadores de S
- S es el subespacio generado por A
- $S = \langle A \rangle = \langle \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \rangle$
- Otras notaciones: $S = lin\{A\}$, $S = span\{A\}$

Ejemplos

1. Sean $V = \mathbb{R}^3$ y los vectores $v_1 = (0,1,2)$, $v_2 = (-1,3,-1)$ y $v_3 = (2,-\frac{11}{2},3)$. Entonces, $S = \langle \{v_1, v_2, v_3\} \rangle$ es un **plano que pasa por el origen**.

2. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y los vectores (matrices)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $\quad S = \langle\{E_1, E_2, E_3\}\rangle = \{A \in V : \; A = A^t\}$

3. Sea $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y los vectores (monomios) $p_1(x) = x$ y $p_2(x) = x^3$. Entonces:

$$S = \langle\{p_1, p_2\}\rangle = \{p \in V : \; p(-x) = -p(x)\}$$

Dependencia e independencia lineal de vectores

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subseteq V$. Se dice que A es un conjunto **linealmente dependiente** (l.d.) si existen escalares no todos nulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\alpha_1 \cdot v_1 \ + \ \cdots \ + \ \alpha_r \cdot v_r = \theta$$

Si A no es l.d., se dice que es **linealmente independiente** (l.i).

Observación

- La dependencia lineal de A no implica que cada v_i sea c.l. de los demás. **Contraejemplo:**
  Consideremos $V = \mathbb{R}^3$ y $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ y $v_3 = (0,2,0)$.
  Es inmediato que $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ es l.d., y sin embargo $v_1 \notin \langle\{v_2, v_3\}\rangle$. Observar que **sí** existe al menos un vector de A que es c.l. de los otros.

Observación ...(cont)

- Si A es un conjunto l.i. en V, entonces todo subconjunto finito es l.i.
- Si $\theta \in A$ entonces A es l.d. en V.
- Si $A = \{ x \}$ con $x \neq \theta$ entonces A es l.i.
- El conjunto vacío $\emptyset$ es l.i. en V.

Ejemplos

- Sean $V = \mathbb{R}^3$ y los siguiente subconjuntos de V:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1) \} \\
A_2 &= \{ (0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1) \} \\
A_3 &= \{ (1,-1,0),\ (0,-1,1),\ (-1,0,1) \}
\end{aligned}
$$

A_1 y A_2 son l.i. $\quad A_3$ es l.d en V.

Ejemplos ...(cont)

- Sean $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y los siguientes conjuntos de V:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\, 3x^2 - 2x,\ x^2 + 1,\ -3x + 2,\ x^2 - 1 \,\} \\ A_2 &= \{\, 3x^2 - 2x,\ x^2 + 1,\ -3x + 2 \,\} \\ A_3 &= \{\, 1,\ x,\ x^2 \,\} \end{aligned}$$

A_1 es l.d. A_2 y A_3 son l.i. en V.

- El conjunto

$$A = \left\{ \, |x|,\ \max_{x\in\mathbb{R}}\{0, x\},\ \max_{x\in\mathbb{R}}\{0, -x\} \, \right\}$$

es l.d. en $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Bases Vectoriales

Lema de Dependencia Lineal

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Si $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ es linealmente dependiente en V y $v_1 \neq \theta$, entonces existe $j \in \{2, 3, ..., m\}$ tal que

- (a) $v_j \in \langle\{v_1, v_2, ..., v_{j-2}, v_{j-1}, ..., v_m\}\rangle$
- (b) $\langle\{v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ...v_m\}\rangle = \langle\{v_1, v_2, ..., v_m\}\rangle$

Espacios Vectoriales

Teorema

Sea V un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y $A \subset V$, $card(A)$ finita. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) A es l.i.

(b) Toda c.l. de los vectores de A, cuyo resultado sea el vector nulo, es la trivial.

(c) Ningún vector de A es c.l. de los demás.

Análogamente, son equivalentes:

(ã) A es l.d.

(b̃) Existe una c.l. de los vectores de A con escalares no todos nulos, cuyo resultado es el vector nulo.

(c̃) Algún vector de A es c.l. de los restantes.

Espacios Vectoriales

Definición

Se dice que un $\mathbb{K}$- espacio vectorial es **finito dimensional** si posee un *sistema de generadores* de cardinalidad finita.

Teorema

En un espacio finito dimensional, la cardinalidad de todo conjunto linealmente independiente (l.i.) es menor o igual a la cardinalidad de cualquier sistema de generadores.

Proposición

Todo subespacio de un espacio finito dimensional es finito dimensional.

Definición

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El subconjunto *ordenado* de V dado por $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una **Base** de V si:

(i) B es **l.i.** (ii) $V = \langle B \rangle$

Proposición

Una familia $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vectores de V es una base de este $\mathbb{K}$-espacio vectorial sí y sólo sí cada vector $v \in V$ puede ser ***escrito de manera única*** como la c.l.: $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots \alpha_n \cdot v_n,$ donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Proposición

Dos bases cualesquiera de un mismo espacio vectorial tienen la misma cardinalidad.

Teorema

Todo sistema de generadores de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial puede **reducirse** a una base de dicho espacio.

Corolario

Todo espacio finito dimensional posee una base.

Teorema de Steinitz

Todo conjunto l.i. en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, finito dimensional, puede **extenderse** a una base de V.

Espacios Vectoriales

Dimensión de un espacio vectorial

Se llama dimensión de un $\mathbb{K}$- espacio vectorial V a la **cardinalidad** de una base de V

Proposición

En un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión n, **todo subconjunto l.i. de cardinalidad n es una base de V**.

Observación

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n:

1. Todo subconjunto de cardinalidad mayor que n es l.d.
2. Si W es subespacio de V, entonces $dim\ W \leq n.$
3. Si W es subespacio de V y $dim\ W = n$, entonces $V = W$.

Espacios Vectoriales

Teorema de Grassmann

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sean U, W subespacios de V. Entonces:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Proposición (Suma directa de varios Subespacios)

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y sean $U_1, U_2, \ldots U_n$ subespacios de V. Entonces $V = U_1 \bigoplus U_2 \bigoplus \cdots \bigoplus U_n \quad \Leftrightarrow$

$(1) \qquad V = U_1 + \cdots + U_n$

(2) La escritura de θ es única en la suma $U_1 + \cdots + U_n$.

$$(\theta = \underbrace{\theta + \cdots + \theta}_{n})$$

Proposición

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sean $U_1, U_2, \ldots U_n$ subespacios de V, tal que:

- $V = U_1 + \cdots + U_n$
- $\dim(V) = \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_n)$

Entonces $\boxed{V = U_1 \bigoplus U_2 \bigoplus \cdots \bigoplus U_n}$

Proposición

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sea U un subespacio de V. Entonces existe un subespacio W de V tal que

$$\boxed{V = U \bigoplus W}$$

Coordenadas

Dada una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, la escritura única de cada $v \in V$ como **c.l.** de los vectores de B, esto es

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n, \quad \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$$

establece la identificación, vía la base B:

$$\boxed{v \in V \quad \longleftrightarrow \quad [v]_B = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in \mathbb{K}^n}$$

En tal caso, se dice que $[v]_B$ es el **vector coordenada** de v en la **base** B.