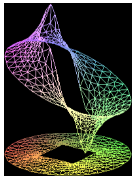
MAT 520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 4

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Funciones circulares

Definición: Círculo Trigonométrico

Sea $\mathcal{C}$ la **circunferencia unitaria** y sea $P(0) = (1,0)$. Dado $t > 0$ (resp. $t < 0$), se define $P(t) \in \mathcal{C}$ como el punto al que se llega luego de desplazarse en sentido antihorario (resp. horario) sobre $\mathcal{C}$, t unidades desde $P(0)$.

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ (\forall\, k \in \mathbb{Z}) : P(t+2k\pi) = P(t)$$

Observaciones

- Un función real, definida sobre todo $\mathbb{R}$, se dice periódica de periodo p si p es el menor número real que satisface la propiedad:

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = f(t+p)$$

- Sean A, B dos puntos de $\mathcal{C}$. La longitud del arco de circunferencia entre A y B se designa por $l_{A,B}$. Observar que $l_{B,A} = 2\pi - l_{A,B}$.

Funciones Circulares

Círculo Trigonométrico

IDENTIFICAMOS:

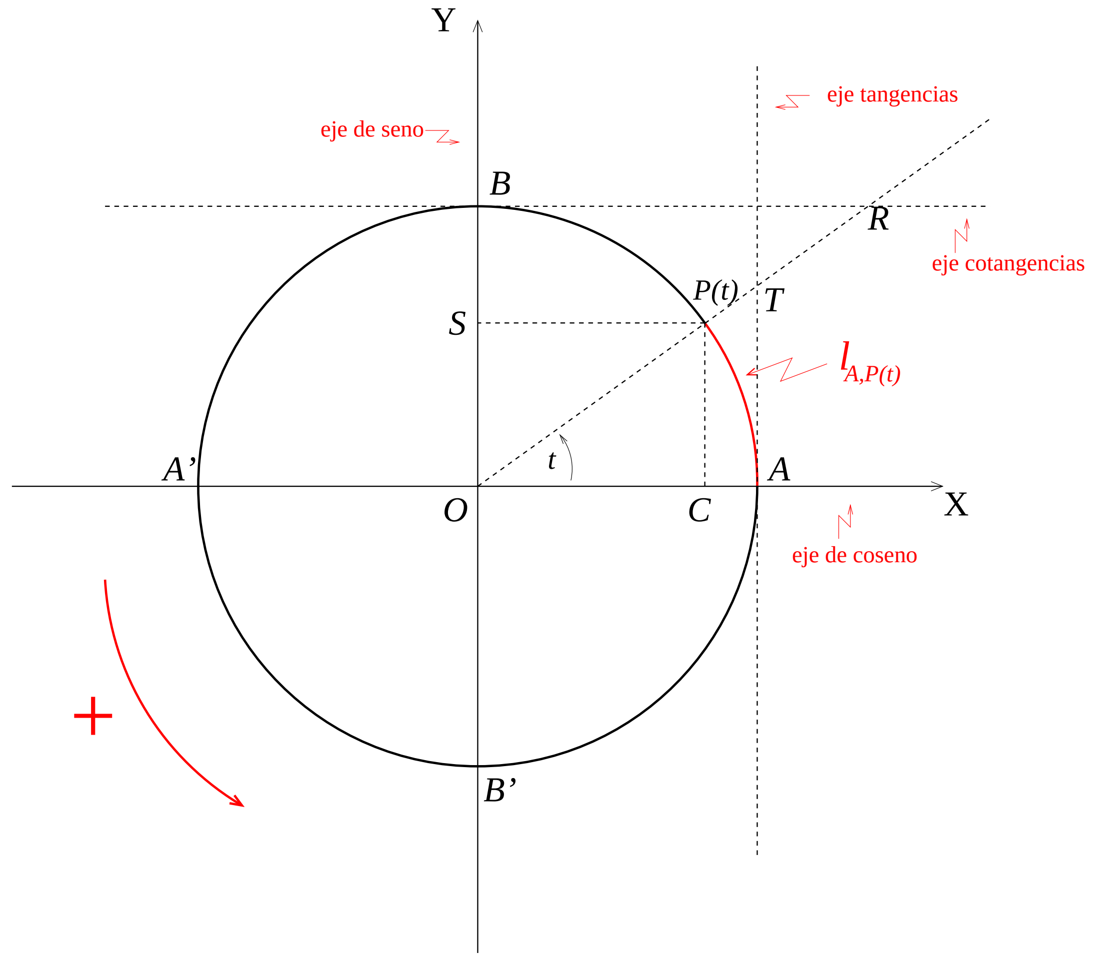
$$sen\,(t) = |\overline{OS}|$$

$$cos\,(t) = |\overline{OC}|$$

$$\tan(t) = |\overline{AT}|$$

$$cot\,(t) = |\overline{BR}|$$

$$P(t) = (cos\,(t), sen\,(t))$$



$$t = \measuredangle(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP}(t)) = l_{A,P(t)}$$

Funciones Circulares

Teorema de Pitágoras $|\overline{OS}|^2 + |\overline{OC}|^2 = 1$

Corolario $\boxed{sen^2(t) + cos^2(t) = 1}$

Teorema de Thales $\dfrac{|\overline{CP(t)}|}{|\overline{AT}|} = \dfrac{|\overline{OC}|}{|\overline{OA}|}$

Corolario $\boxed{\tan(t) = \dfrac{sen\,(t)}{cos\,(t)}}$

Teorema de Thales $\dfrac{|\overline{SP(t)}|}{|\overline{BR}|} = \dfrac{|\overline{OS}|}{|\overline{OB}|}$

Corolario $\boxed{cot\,(t) = \dfrac{cos\,(t)}{sen\,(t)}}$

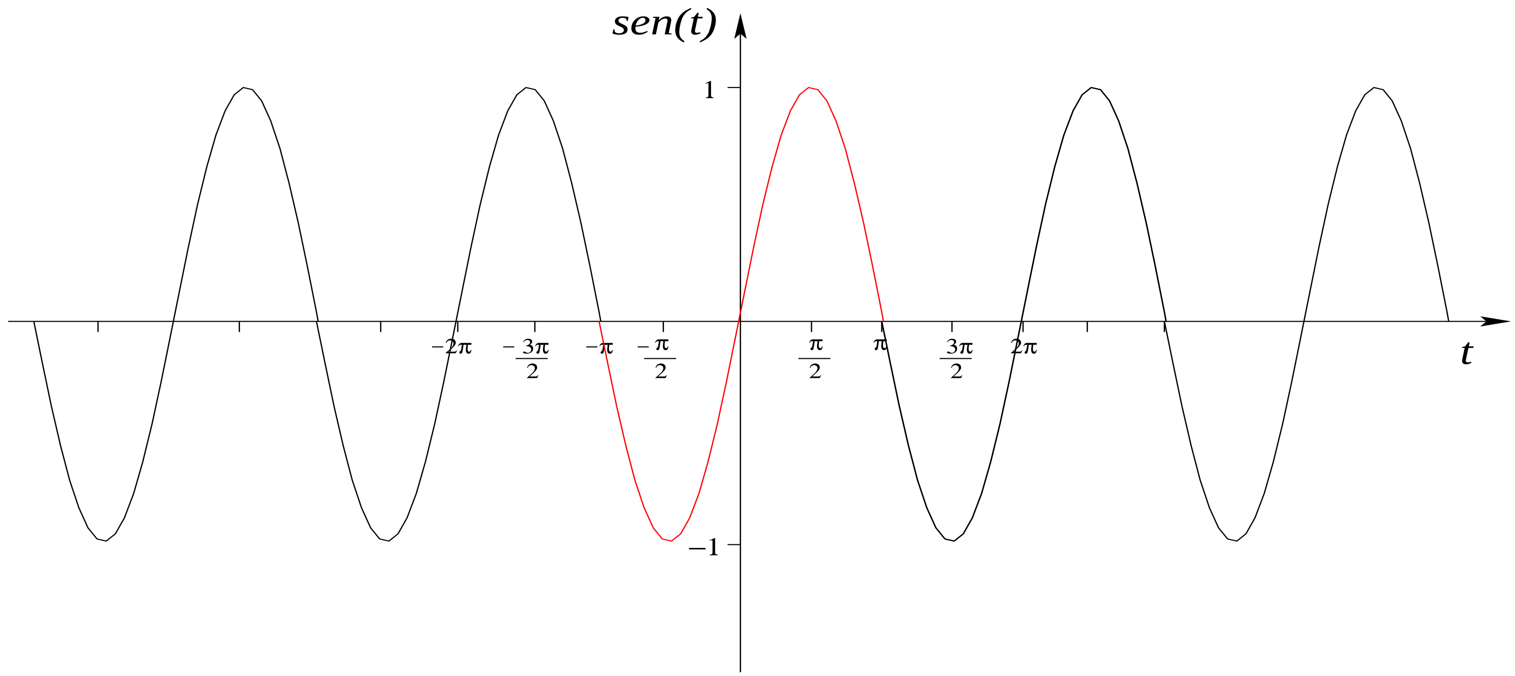
Funciones Circulares

Definición: Función Seno

$$sen : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}: \; sen\,(t+2k\pi) = sen\,(t)$$

$$t \longmapsto y = sen\,(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}: \; sen\,(-t) = -sen\,(t)$$

GRAFICO DE LA FUNCION SENO



Funciones Circulares

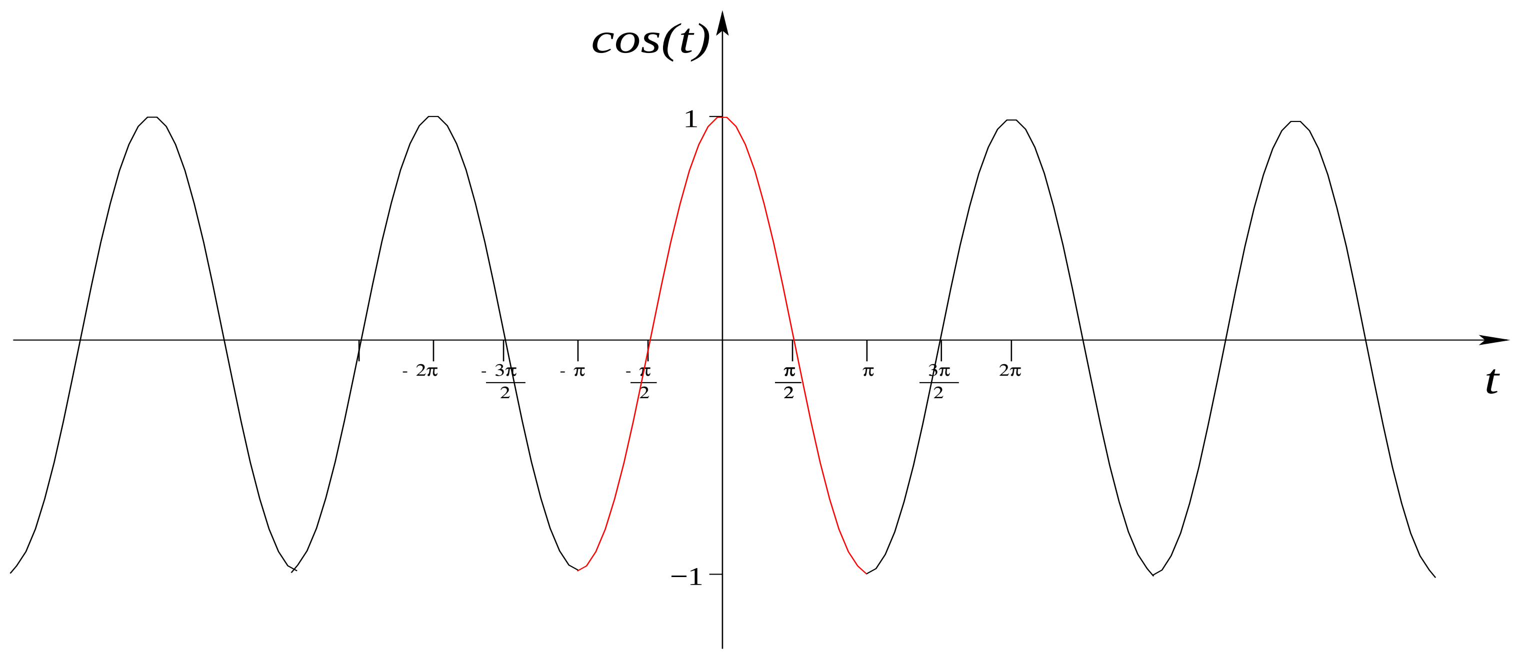
Definición: Función Coseno

$$\begin{aligned} cos \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ t &\longmapsto y = cos\,(t) \end{aligned}$$

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} : \ cos\,(t + 2k\pi) = cos\,(t)$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \ cos\,(-t) = cos\, t$$

GRAFICO DE LA FUNCION COSENO



Funciones Circulares

Definición: Función Tangente

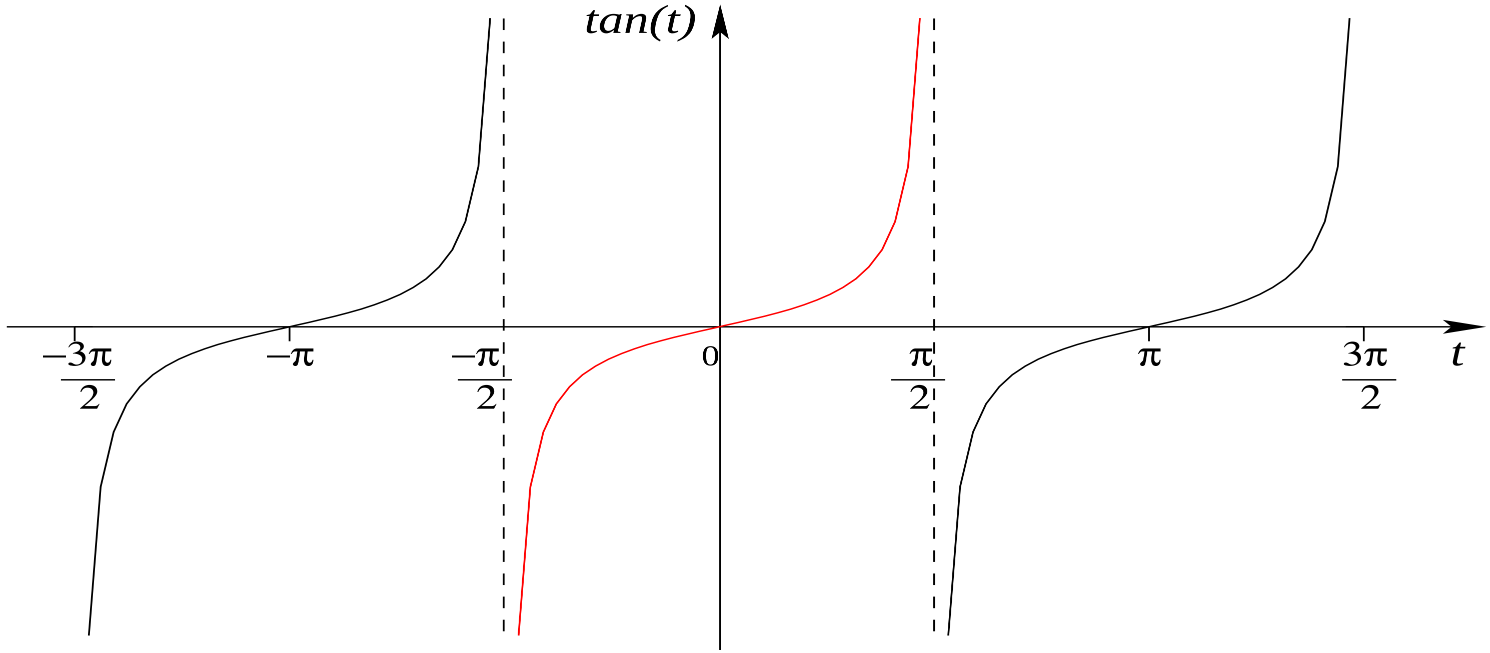
$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : \; k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

$$\begin{array}{rcl} \tan \; : \; \mathcal{D} \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y = \tan(t) \end{array}$$

$$\forall \, k \in \mathbb{Z} : \; \tan(t + k\pi) = tan(t)$$

$$\forall \, t \in \mathcal{D} : \; \tan(-t) = -\tan t$$

GRAFICO DE LA FUNCION TANGENTE



Funciones Circulares

Observación

- $\forall\, k \in \mathbb{Z} : cos\,(\frac{(2k+1)\pi}{2}) = 0 \ \wedge \ cos\,(k\pi) = (-1)^k$

Función Secante

La función real, 2π-periódica **par**:

$$\begin{array}{rcl} sec : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} -]-1, 1[\\ t & \longmapsto & sec(t) = \frac{1}{cos\,(t)} \end{array}$$

se denomina **Función Secante**

Funciones Circulares

Observación

- $\forall\, k \in \mathbb{Z} : sen\,(k\pi) = 0 \;\wedge\; sen\,(\frac{(2k+1)\pi}{2}) = (-1)^k.$

Función Cosecante

La función real, 2π-periódica **impar**:

$$\begin{array}{rcl} csc\; : \mathbb{R} - \left\{k\pi :\; k \in \mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} -]-1, 1[\\ t & \longmapsto & csc\,(t) = \frac{1}{sen\,(t)} \end{array}$$

se denomina **Función Cosecante**

Funciones Circulares

Identidades Fundamentales

A partir de la definición de las seis funciones circulares es fácil deducir las siguientes identidades:

- Como $P(t) = (cos\,(t), sen\,(t)) \in \mathcal{C}$, se tiene:

  $$\boxed{sen^2(t) + cos^2(t) = 1}$$

- De la definición de tg, sec y csc y para t en su dominio, se tiene:

  $$\boxed{tg\,(t) \cdot cot\,(t) = 1} \qquad \boxed{sen\,(t) \cdot csc\,(t) = 1} \qquad \boxed{cos\,(t) \cdot sec\,(t) = 1}$$

- Dividiendo la primera identidad por $cos^2(t)$, se tiene:

  $$\boxed{1 + tg^2(t) = sec^2(t)}$$

- Dividiendo la primera identidad por $sen^2(t)$, se tiene:

  $$\boxed{cot^2(t) + 1 = csc^2(t)}$$

Funciones Circulares

Identidades Fundamentales

Observación

Utilizando estas identidades trigonométricas, la definición de las funciones circulares y las propiedades algebraicas de los números reales se demuestran otras identidades.
Por ejemplo, se prueba que:

$$\frac{1 - tg^{2}(t)}{1 + tg^{2}(t)} = 1 - 2sen^{2}(t)$$

$$(cos\,(t) - sen\,(t))^2 + 2sen\,(t)cos\,(t) = 1.$$

También se puede escribir todas las funciones circulares en términos de una función particular.

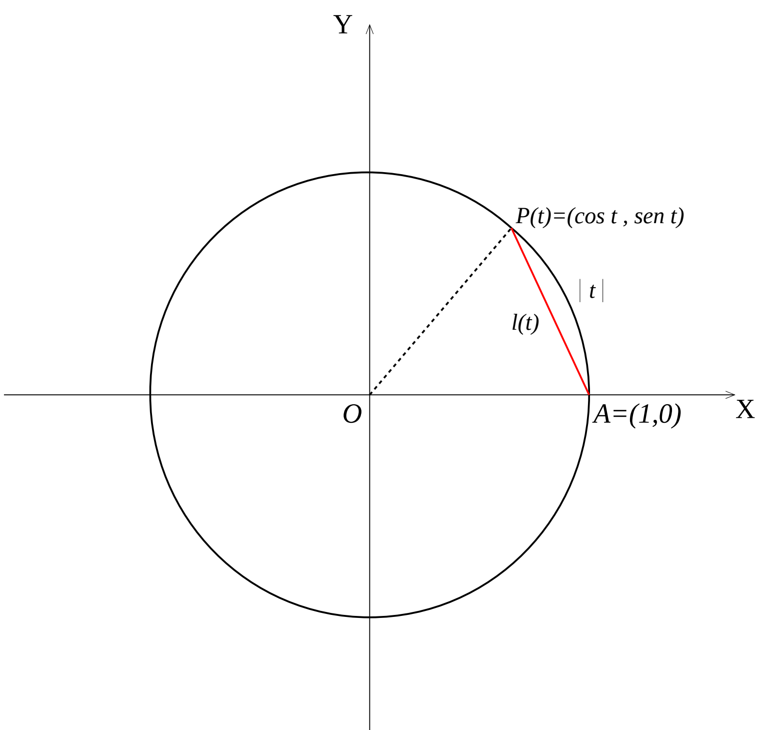
Identidades con sumas y diferencias

Para obtener este tipo de identidades utilizaremos el siguiente resultado.

Proposición

La longitud de una cuerda generada por una arco de circunferencia de longitud $|t|$ es:

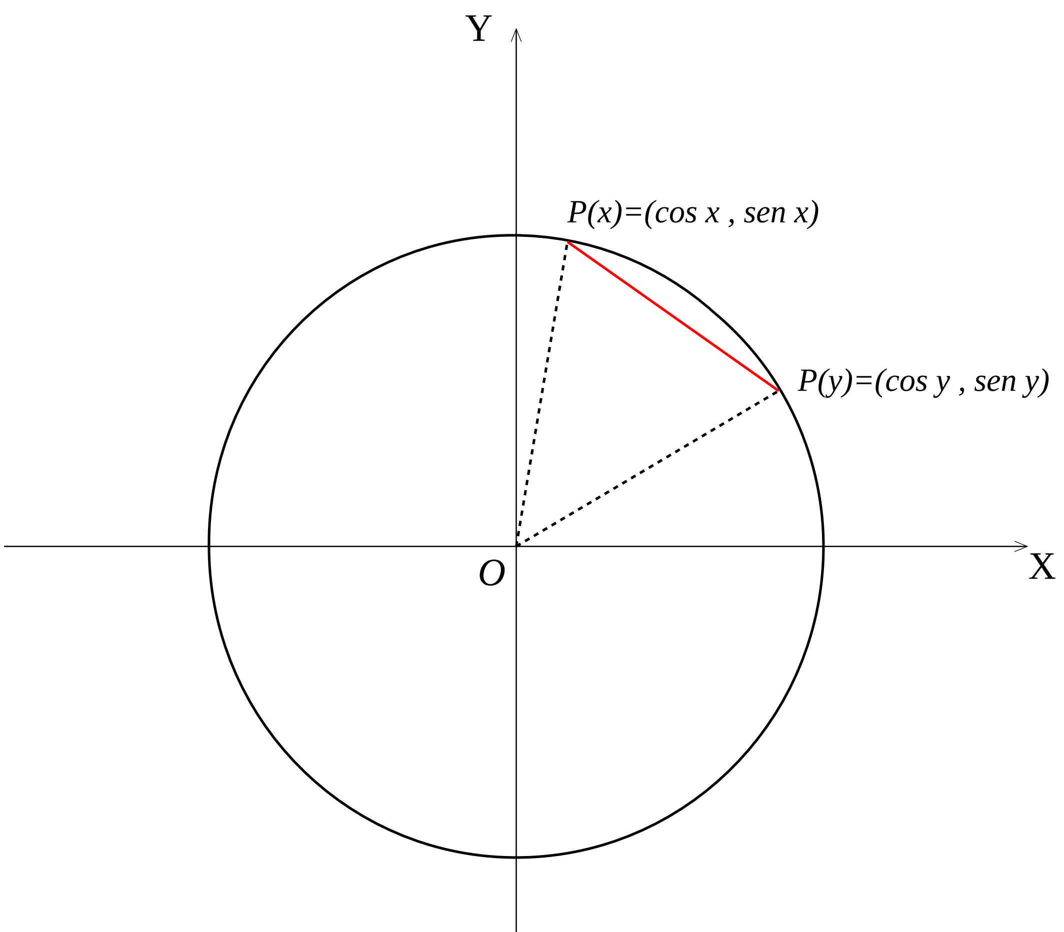
$$l(t) = \sqrt{2 - 2cos\,(t)}.$$



Identidades con sumas y diferencias

Proposición

Para $x, y \in \mathbb{R}$ $\boxed{cos\,(x-y) = cos\,(x)cos\,(y) + sen\,(x)sen\,(y)}$



Funciones Circulares

Identidades con sumas y diferencias

Desde la igualdad anterior se obtienen los siguientes resultados:

- Con $x = \frac{\pi}{2}$, $\boxed{cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = sen\left(y\right)}$
- Con $y = \frac{\pi}{2} - x$, en la anterior, $\boxed{sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\left(x\right)}$
- Además, obtenemos:

  $\boxed{tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cot\, x}$ $\boxed{cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tg\left(x\right)}$

Identidades con sumas y diferencias

- Con $x + y = x - (-y)$ y usando el hecho que cos es par y sen es impar, se tiene que para $x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{cos\,(x+y) = cos\,(x) cos\,(y) - sen\,(x) sen\,(y)}$$

- Además, obtenemos:

$$\boxed{sen\,(x+y) = sen\,(x) cos\,(y) + sen\,(y) cos\,(x)}$$

$$\boxed{sen\,(x-y) = sen\,(x) cos\,(y) - sen\,(y) cos\,(x)}$$

$$\boxed{tg\,(x+y) = \frac{tg\,(x) + tg\,(y)}{1 - tg\,(x) tg\,(y)}}$$

Identidades con sumas y diferencias

- Haciendo $y = x$ en los resultados anteriores se obtienen:

$$\boxed{cos\,(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)}$$

$$\boxed{sen\,(2x) = 2sen\,(x) cos\,(x)}$$

$$\boxed{tg\,(2x) = \frac{2tg\,(x)}{1 - tg^2(x)}}$$

Funciones Circulares

Identidades con sumas y diferencias

- Haciendo $y = 2x \Longleftrightarrow x = \frac{y}{2}$, en las identidades anteriores, se obtiene:

$$\boxed{sen\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - cos\,(y))}}$$

$$\boxed{cos\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + cos\,(y))}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{sen\,(y)}{(1 + cos\,(y))}}$$

Transformaciones de productos en sumas

- Sumando $sen\,(x+y)$ con $sen\,(x-y)$ se obtiene:
  $sen\,(x+y) + sen\,(x-y) = 2sen\,(x)cos\,(y)$, de donde:

  $$\boxed{sen\,(x)\cdot cos\,(y) = \frac{1}{2}(sen\,(x+y) + sen\,(x-y))}$$

- De manera análoga se prueba que:

  $$\boxed{cos\,(x)\cdot sen\,(y) = \frac{1}{2}(sen\,(x+y) - sen\,(x-y))}$$

  $$\boxed{cos\,(x)\cdot cos\,(y) = \frac{1}{2}(cos\,(x+y) + cos\,(x-y))}$$

  $$\boxed{sen\,(x)\cdot sen\,(y) = \frac{1}{2}(cos\,(x-y) - cos\,(x+y))}$$

Funciones Circulares

Transformaciones de sumas en productos

- Sustituyendo $u = x + y$ y $v = x - y$ en las identidades anteriores se obtiene:

$$\boxed{sen\left(u\right) + sen\left(v\right) = 2sen\left(\tfrac{u+v}{2}\right) \cdot cos\left(\tfrac{u-v}{2}\right)}$$

$$\boxed{sen\left(u\right) - sen\left(v\right) = 2cos\left(\tfrac{u+v}{2}\right) \cdot sen\left(\tfrac{u-v}{2}\right)}$$

$$\boxed{cos\left(u\right) + cos\left(v\right) = 2cos\left(\tfrac{u+v}{2}\right) \cdot cos\left(\tfrac{u-v}{2}\right)}$$

$$\boxed{cos\left(u\right) - cos\left(v\right) = -2sen\left(\tfrac{u+v}{2}\right) \cdot sen\left(\tfrac{u-v}{2}\right)}$$

Inversa de las funciones circulares

La función $sen\ : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, no es inyectiva. En consecuencia, su relación inversa, denotada por $arcsen$ y llamada **arcoseno**,

$$x \quad arcsen \quad y \Longleftrightarrow x = sen(y)$$

no es una función.

La restricción de seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es inyectiva. Luego, la función

$$Sen : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1], \quad x \mapsto y = sen\,(x)$$

tiene inversa. Su inversa es la función Arcoseno (parte principal) denotada por $Arcsen$.

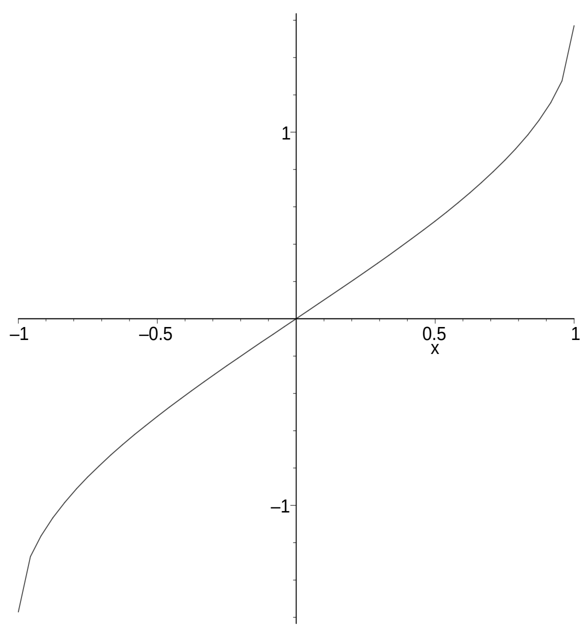
Funciones Circulares

Definición: Función Arcoseno

$$
\begin{aligned}
Arcsen \quad : \quad & [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\
& x \longmapsto y = Arcsen\,(x)
\end{aligned}
$$

con: $\quad y = Arcsen\,(x) \Longleftrightarrow x = sen\,(y), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOSENO

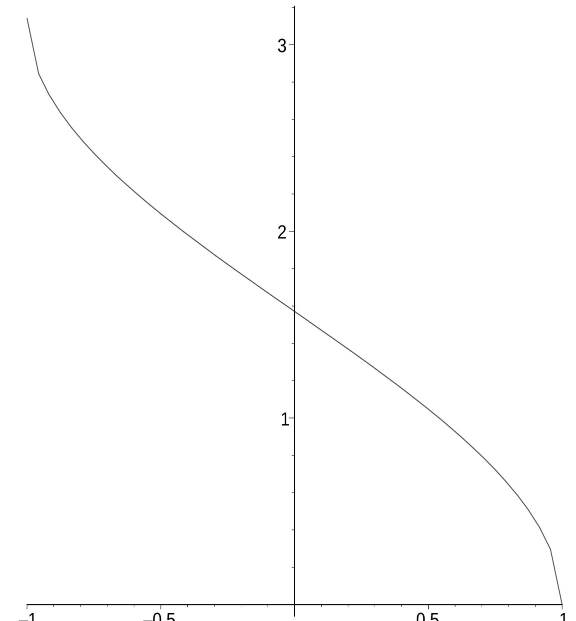


Definición: Función Arcocoseno

$$\begin{aligned} Arccos \quad &: \quad [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \\ & \quad x \longmapsto y = Arccos\,(x) \end{aligned}$$

con: $\quad y = Arccos\,(x) \Longleftrightarrow x = cos\,(y), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOCOSENO

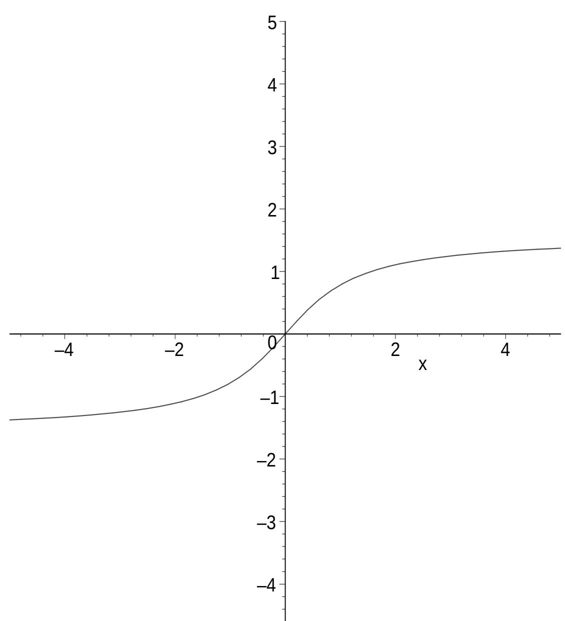


Definición: Función Arcotangente

$$\begin{aligned} Arctg \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x \longmapsto y = Arctg\,(x) \end{aligned}$$

con: $\quad y = Arctg\,(x) \Longleftrightarrow x = tg\,(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOTANGENTE

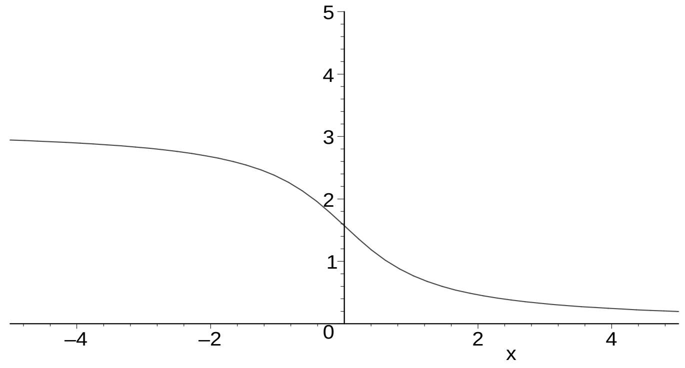


Definición: Función Arcocotangente

$$\begin{aligned} Arccot \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[\\ & x \longmapsto y = Arccot\,(x) \end{aligned}$$

con: $\quad y = Arccot\,(x) \Longleftrightarrow x = cot\,(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < \pi.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOCOTANGENTE

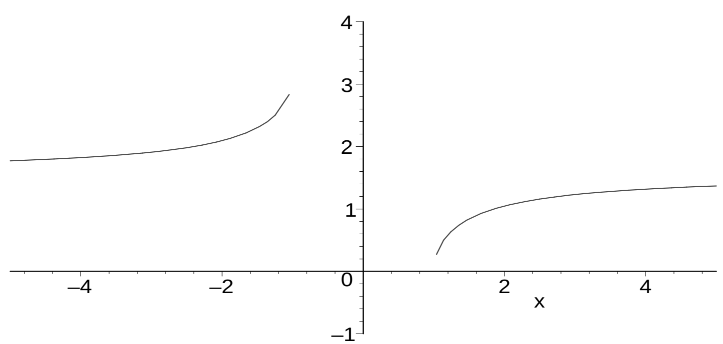


Definición: Función Arcosecante

$$\begin{aligned} Arcsec \quad : \quad & \mathbb{R} -]-1,1[\longrightarrow [0,\pi] - \{\frac{\pi}{2}\} \\ & x \longmapsto y = Arcsec\,(x) \end{aligned}$$

con: $\quad y = Arcsec\,(x) \Longleftrightarrow x = sec\,(y), \quad |x| \geq 1, \quad y \in [0,\pi] - \{\frac{\pi}{2}\}.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOSECANTE



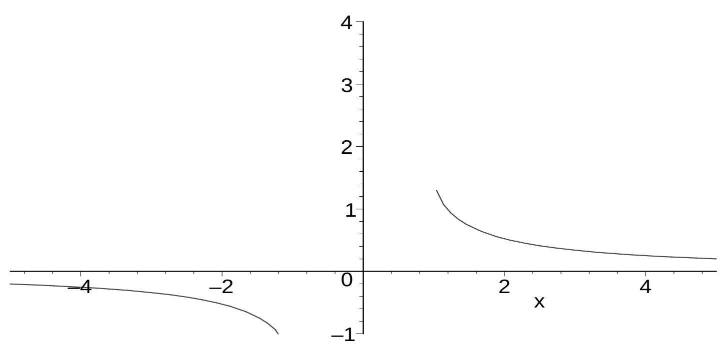
Funciones Circulares

Definición: Función Arcocosecante

$$\begin{aligned} Arccsc \quad : \quad & \mathbb{R} -]-1,1[\longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] - \{0\} \\ & x \longmapsto y = Arccsc\,(x) \end{aligned}$$

con: $y = Arccsc\,(x) \Longleftrightarrow x = csc\,(y), \quad |x| \geq 1, \quad y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] - 0.$

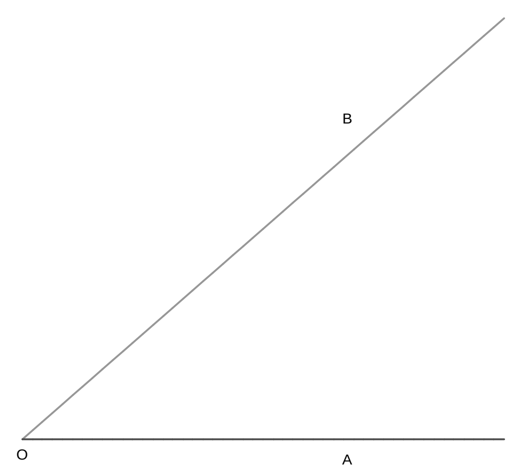
GRAFICO DE LA FUNCION ARCOCOSECANTE



Definición: Angulo Un ángulo $\angle AOB$ es el conjunto de puntos formado por la reunión de dos semirectas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ que parten desde un punto comun O.

El lado $\overline{OA}$ es el **lado inicial** del ángulo y el lado $\overline{OB}$ es el **lado terminal**.

Si $\overline{OA}$ está sobre el semieje $\overline{OX}$, entonces se dice que el ángulo está en **posición normal o standar**.



Funciones Circulares

Medida de ángulos

A cada ángulo $\angle AOB$ se asocia un número real $m(\angle AOB)$ llamado **medida del ángulo**, denotada por α, β, γ o θ.

Sistema Sexagesimal (en grados) y **Sistema Circular o Radial** (en radianes), para medir ángulos.

- **Un Grado** es la medida de un ángulo correspondiente a una arco de longitud igual a $\frac{1}{360}$ de la longitud de una circunferencia. Así, la circuferencia subtiende una ángulo de 360^o.

- **Un Radian** es la medida de un ángulo que subtiende una arco de longitud igual a la longitud del radio de la circunferencia.

Funciones Circulares

Medida de ángulos

- En una circunferencia de radio r la medida θ en radianes, de un ángulo central que subtiende un arco de longitud t es:

$$\theta = \frac{t}{r}.$$

  Así, para la circunferencia unitaria $\theta = t$.

- La relación entre ambos sistemas de medida es dada por:

$$360^o = 2\pi,$$

  de donde se obtine:

$$1^o = \frac{\pi}{180} \Longleftrightarrow 1 = (\frac{180}{\pi})^o.$$

  Para un ángulo α medido en grados y θ en radianes: $\frac{\alpha}{180} = \frac{\theta}{\pi}$

Funciones Circulares

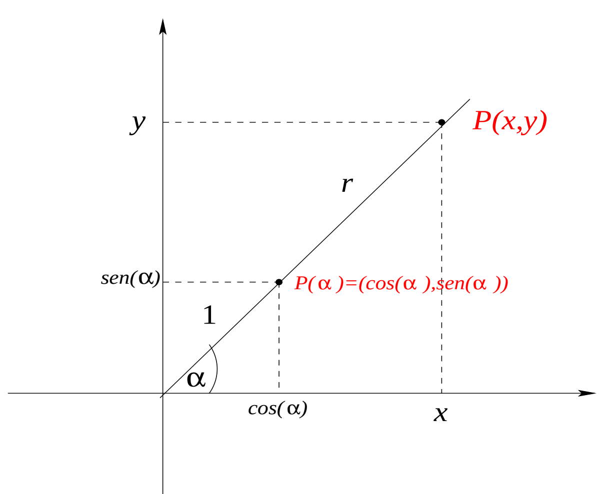
Funciones Circulares sobre un ángulo

Dado un ángulo α, en posición normal, $P(x,y)$ sobre su lado final, $P(\alpha) = (cos\,(\alpha), sen\,(\alpha))$ y $r = d(O, P(x,y))$, entonces por el teorema de Thales se obtiene:

$$\frac{y}{sen\,(\alpha)} = \frac{r}{1}, \qquad \frac{x}{cos\,(\alpha)} = \frac{r}{1}$$

de donde: $\boxed{sen\,(\alpha) = \frac{y}{r}}$ $\boxed{cos\,(\alpha) = \frac{x}{r}}$

$\boxed{tg\,(\alpha) = \frac{y}{x}}$ $\boxed{cot\,(\alpha) = \frac{x}{y}}$ $\boxed{sec\,(\alpha) = \frac{r}{x}}$ $\boxed{csc\,(\alpha) = \frac{r}{y}}$



Funciones Circulares

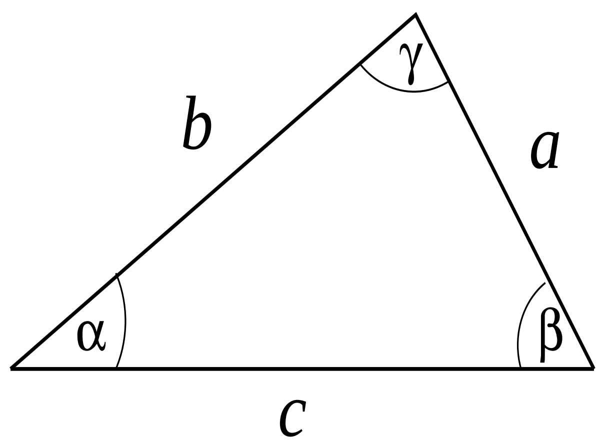
Resolución de triángulos

Resolver un triángulo es encontrar sus elementos principales. Esto es, la medida de sus lados y de sus ángulos. Para ello se utiliza el teorema de los senos y el teorema de los cosenos.

Teorema de los senos

Los lados a, b y c de un triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos α, β y γ. Es decir:

$$\boxed{\frac{a}{sen\,(\alpha)} = \frac{b}{sen\,(\beta)} = \frac{c}{sen\,(\gamma)}.}$$



Teorema de los cosenos

En un triángulo de lados a, b y c y ángulos opuestos α, β y γ, el cuadrado de una lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman. Esto es:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,(\alpha)}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,(\beta)}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,(\gamma)}$$

Función sinusoidal

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A la función defnida por

$$f(x) = a sen\,(bx + c) + d, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

se le llama **función Sinusoidal**, y su gráfica se llama **curva Sinusoidal o Sinusoide**.

Para $b > 0$ se tienen las siguientes definiciones:

- Se llama **Amplitud** de la función al valor $|a|$.
- Se llama **Periodo** de la función al valor $p = \frac{2\pi}{b}$ $[f(x+p) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}]$.

Funciones Circulares

- Se llama **Desplazamiento de Fase** de la función al valor $|\frac{-c}{b}|$ el cual representa las unidades que se debe trasladar el gráfico de la función $h(x) = asen\, bx$, hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo si $c < 0$ o $c > 0$ respectivamente, para obtener el gráfico de f

Teorema. Sean $p, q, b \in \mathbb{R}$. Entonces existen $A, \alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$psen\,(bx) + qcos\,(bx) = Asen\,(bx + \alpha)$$

Observación. La función $g(x) = acos\,(bx + c) + d$ también es una función sinusoidal.