PAUTA CERTAMEN ALGEBRA Nº 2

I.- Dada la recta $L_1 : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$ y el plano : $\pi_1 : 2x - 3y + z + 1 = 0$ determine

a).- $\{Q_0\} = L_1 \cap \pi_1$

b).- La ecuación del plano π_2 que contiene a P_0 (2,1,1) y es paralelo al plano π_1

c).- Justificando su respuesta, calcule la distancia de Q_0 a π_2

d).- Justificando su respuesta, calcule la distancia de π_1 a π_2

a) $2(2) - 3t + (-3 + 4t) + 1 = 0 \Rightarrow 4 - 3t - 3 + 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = -2$

luego : x = 2 ; y = -2 ; z = -11 $\rightarrow$ (x,y,z) = Q_0 = (2,-2,-11) 5 puntos

b).- $\pi_1 // \pi_2 \Rightarrow n_1 = n_2 =$ (2 ,-3 , 1) ; (P_0 - $\overrightarrow{X}$) = (2 – x , 1 – y , 1 – z) $\in \pi_2$

luego : 2(x - 2) -3 (y – 1) + (z - 1) = 0 $\longrightarrow$ 2x - 3y +z - 2 = 0 5 puntos

c).- $L_2 \perp \pi_1$ y $Q_0 \in L_2$ permiten $L_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -11 + t \end{cases}$

$R_0 = L_2 \cap \pi_2 \longrightarrow 2(2+2t) - 3(-2-3t) + (-11+t) - 2 = 0 \rightarrow t = \frac{3}{14}$

$$R_0 = \begin{cases} x = 2 + \frac{6}{14} \\ y = -2 - \frac{9}{14} \\ z = -11 + \frac{3}{14} \end{cases} \qquad d_{Q_0R_0} = \sqrt{(2 + \frac{6}{14} - 2)^2 + (-2 - \frac{9}{14} + 2)^2 + (-11 + \frac{3}{14} + 11)^2} = \frac{\sqrt{126}}{14}$$

5 puntos

d).- $\pi_1 \perp \overline{Q_0R_0} \perp \pi_2 \Rightarrow d_{\pi_1\pi_2} = \frac{\sqrt{126}}{14}$ 5 puntos

II.- Dados los puntos A (2,-1,4) ; B (1,2,3) ; C (-2,-2,1) ; D (3,1,2)

a).- Encuentre la ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C

b).- Verifique que D $\notin \pi$

c).- Calcule el área del triángulo generado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

c).- Calcule el volumen del tetraedro generado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$

a).- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son vectores L.I.

$\overrightarrow{AB} = (-1,3,-1)$ $\overrightarrow{AC} = (-4,-1,-3)$ $\vec{n} = (-10,1,13)$ $\overrightarrow{AX} = (x-2, y+1, z-4)$

luego $\pi: \ -10(x-2)+(y+1)+13(z-4)=0 \quad \rightarrow \quad -10x+y+13z-31=0$ 5 puntos

b).- D= (3,1,2) ; D $\in \pi \Rightarrow \ -10*3+1+13*2=31 \ \rightarrow$ -3=31 $\rightarrow\leftarrow$ D $\notin \pi$ 5 puntos

c).- $\text{área } \triangle ABC = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{270} = \frac{3}{2}\sqrt{30}$ 5 puntos

d).- vol. tetraedro = $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}*\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|(1,2,-2)*(-10,1,13)\right| = \frac{34}{6} = \frac{17}{6}$ 5 puntos

III.- Dados S = {(x,y,z) / 2x – y + z = 0} y el sub-espacio T = <{ (2,-1,0),(1,0,1)}>

a).- Pruebe que S es un sub-espacio

b).- Caracterice el sub-espacio T

c). Encuentre una base para S + T

d).- ¿es S + T ? una suma directa fundamente su respuesta

a).- $x=y=z=0 \rightarrow (0,0,0)\in S \Rightarrow S \neq \varnothing \quad \vec{a} y \lambda\vec{b} \in S \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ 2\lambda b_1 - \lambda b_2 + \lambda b_3 = 0 \end{pmatrix}$ luego

$(2(a_1+\lambda b_1)-(a_2+\lambda b_2)+(a_3+\lambda b_3))=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}+\lambda\vec{b}\in S$ 5 puntos

b).- $(x,y,z)\in T \Rightarrow (x,y,z)=\alpha(2,-1,0)+\beta(1,0,1)$ por lo tanto se tiene :

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{array} \right\rangle \approx \left\langle \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2y+x \\ 0 & 0 & z-2y-x \end{array} \right\rangle \text{ hay solución si : } z-2y-x=0 \ \rightarrow T=\left\{(x,y,z)/z-2y-x=0\right\}$$

5 puntos

c).- $\left\{S+T\right\}=\left\{(2,-1,0),(1,0,1),(1,2,0),(0,1,1)\right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ permite deducir que:

$\left\{S+T\right\} =< \left\{(2.-1,0),(1,0,1),(1,2,0)\right\}>$ es una base de {S+ T} 5 puntos

d).- Dim { S + T } = 3 ; Dim S + Dim T = 2 +2 =4

Dim { S + T } $\neq$ Dim S + Dim T la suma no es directa 5 puntos