UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Evaluación 2 – Tema 1

Fecha: 18 – Junio – 2008; 19:10 horas.

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la corrección

No rellenar

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:
$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$
- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/RRA

1. Se desea resolver el sistema lineal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ una matriz simétrica y definida positiva tal que $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A}) = 10^8$, utilizando el método del Gradiente Conjugado. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

   (a) el método converge;

   (b) la velocidad de convergencia del método es muy baja debido al mal condicionamiento de la matriz $\boldsymbol{A}$;

   (c) se debe precondicionar el sistema lineal para disminuir el número de iteraciones del método;

   (d) ninguna (todas las afirmaciones anteriores son correctas).

2. Considere el sistema lineal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, el cual se resuelve utilizando el método de Jacobi. Indique cuáles de las siguientes sentencias Matlab calculan una iteración de dicho método:

   (a)
   ```
   N=diag(diag(A));
   P=N-A;
   y=N\(P*x+b);
   ```

   (b)
   ```
   N=diag(A);
   P=A;
   y=N\(P*x+b);
   ```

   (c)
   ```
   N=diag(A);
   P=N-A;
   y=P\(N*x+b);
   ```

   (d)
   ```
   N=diag(diag(A));
   P=A;
   y=P\(N*x+b);
   ```

3. Se desea resolver el sistema lineal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Se sabe que todos los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son positivos. Indique cuál de los siguientes métodos **no es seguro** que permita resolver este problema:

   (a) el método de Cholesky;

   (b) el método de Jacobi;

   (c) el método de Gauss-Seidel;

   (d) todos los métodos anteriores permiten resolver el sistema.

4. Indique cuál de las siguientes funciones es una spline cúbica en el intervalo $[-1, 1]$:

   (a) $s(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -1 \le x \le 0, \\ -x^2 + 1, & 0 < x \le 1; \end{cases}$

   (b) $s(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & -1 \le x \le 0, \\ x + 1, & 0 < x \le 1; \end{cases}$

   (c) $s(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x \le 0, \\ 2x - 1/2, & 0 < x \le 1; \end{cases}$

   (d) ninguna de las anteriores.

5. Un meteorito que cae sobre el mar es fotografiado justo antes de su caída a razón de una foto por segundo. En esas fotografías se mide la altura h sobre el nivel del mar del meteorito en cada instante y se obtiene la siguiente tabla:

t (s)	1	2	3	4	5
h (m)	345.0	280.5	206.0	121.0	27.5

Si la altura h se modela como la de un objeto en caída libre, se tiene que

$$h(t) \approx h_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

donde h_0 y v_0 son la altura y velocidad del objeto en el instante $t = 0$, y g es la aceleración media de la gravedad. Indique cuál de los siguientes programas MATLAB permite determinar en el vector $\boldsymbol{x}$, los valores de h_0, v_0 y g a partir de la tabla dada:

(a)
```
b=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
t=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
x=A\b
```

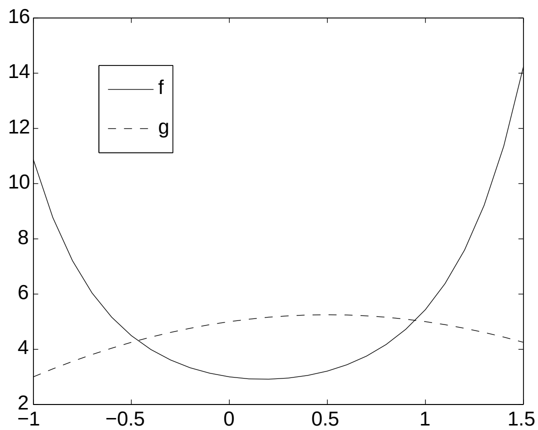
(b)
```
b=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
t=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
A*x=b
```

(c)
```
t=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
b=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
x=A'\b
```

(d) ninguno de las anteriores.

6. Considere la siguiente integral:
$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$
Indique cuál de los siguientes métodos de integración calcula el valor exacto de I:
   (a) el método de Gauss con 2 puntos;
   (b) el método de Simpson (compuesto) con un paso $h = 0.1$;
   (c) el método del Punto Medio (compuesto) con un paso $h = 0.01$;
   (d) ninguno de los anteriores.

7. Se desea calcular el área encerrada por los gráficos de la funciones $f(x) = (3-x)\,e^{x^2}$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$, para lo cual se dispone de la siguiente figura:



Un programa MATLAB que permite calcular dicha área está dado por:

(a)
```
h=inline('(-x.^2+x+5)-(3-x).*exp(x.^2)');
Area=quad(h,-0.5,1)
```
(b)
```
f=inline('(-x.^2+x+5)');
g=inline('(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(f,-0.5);
b=fzero(g,1);
Area=quad(f-g,a,b)
```
(c)
```
h=inline('(-x.^2+x+5)-(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(h,-0.5);
b=fzero(h,1);
Area=quad(h,a,b)
```
(d)
```
f=inline('(-x.^2+x+5)');
g=inline('(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(f,-0.5)-fzero(g,-0.5);
b=fzero(f,1)-fzero(g,1);
Area=quad(f,a,b)-quad(g,a,b)
```

8. Se quiere resolver una ecuación no lineal $f(x) = 0$ mediante el método de la Secante. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:
   (a) el orden de convergencia del método de la Secante es superior al del método de Newton–Raphson;
   (b) para aplicar el método de la Secante no es necesario evaluar derivadas de f;
   (c) para iniciar el método de la Secante es necesario partir de dos valores iniciales x_0 y x_1 tales que $f(x_0)$ y $f(x_1)$ tengan signos distintos.
   (d) ninguna de las anteriores.

9. Se quiere calcular una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Para ello se utiliza el método de Newton, cuyo paso de iteración es:

```
xk1=xk-feval('Df',xk)\feval('f',xk);
```

Indique cuáles de los siguientes programas MATLAB permiten evaluar las funciones `f` y `Df`:

(a)

```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2 ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2];
```

```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , 0 ; 1 , 1 , 1 ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(b)

```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2-x(3) ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-1];
```

```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , 1 ; x(1) , x(2) , x(3) ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

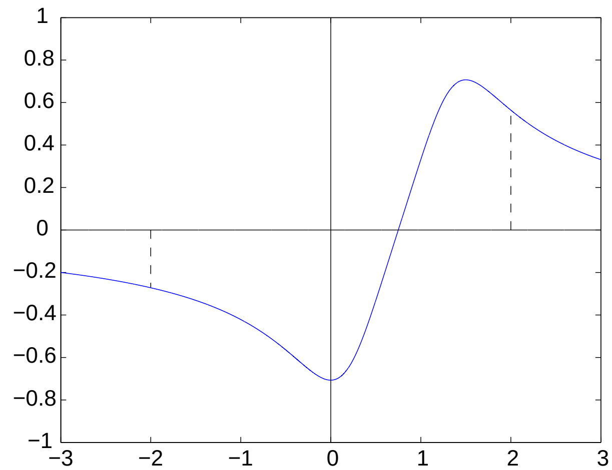
(c)

```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2-x(3) ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-1];
```

```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , -1 ; 1 , 1 , 1 ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(d) ninguno de los anteriores.

10. Se quiere calcular la raíz de la función cuya gráfica se muestra en la figura mediante el método de Newton–Raphson:



Indique cuál de las siguientes valores iniciales debe tomarse para garantizar la convergencia:

(a) $x_0 = -2$;

(b) $x_0 = 0$;

(c) $x_0 = 2$;

(d) ninguno de las anteriores.

11. Se quiere resolver el siguiente P.V.I. mediante el método de Euler (explícito) con paso h:

$$\begin{cases} y' = x^2 + z^2, & y(0) = 0, \\ z' = x^2 + y^2, & z(0) = 1. \end{cases}$$

Indique cuál de los siguientes corresponde a un paso del método:

(a) $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right), \\ z_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right); \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right), \\ z_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right); \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right), \\ z_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right); \end{cases}$

(d) ninguno de los anteriores.

12. Se quiere resolver el siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = -10^4\left(\left(1 + x^2\right)y - \cos x\right), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Indique cuál de los siguientes métodos es más eficiente:

(a) un método Runge–Kutta (de paso simple, explícito), porque es de partida automática;

(b) un método Adams–Bashforth (de paso múltiple, explícito), porque aprovecha los valores calculados de la solución en los pasos anteriores;

(c) un método implícito, porque el P.V.I. es stiff;

(d) ninguno de esos métodos sirve para resolver ese problema.

13. Al resolver mediante cualquier método de paso simple un P.V.I.

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

en el primer paso del método, el error global y el error local de truncamiento coinciden.

A partir de esta información, si y_1 denota el valor calculado de $y(x_1)$ en el primer paso del método de Euler, indique cuál de las siguientes acotaciones es al mismo tiempo correcta y más precisa:

(a) $|y(x_1) - y_1| \le Ch$;

(b) $|y(x_1) - y_1| \le Ch^2$;

(c) $|y(x_1) - y_1| \le Ch^3$;

(d) ninguna de esas acotaciones es correcta.

14. Considere una masa m sujeta al extremo de un resorte de constante k sumergida en un fuido viscoso de resistividad b. La E.D.O. que modela el desplazamiento u de la masa desde su posición de equilibrio como función del tiempo t es la del oscilador armónico amortiguado:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2u}{dt^2} + b\dfrac{du}{dt} + ku = 0, \\ u(0) = u_0, \qquad \dfrac{du}{dt}(0) = 0. \end{cases}$$

Las condiciones iniciales corresponden a haber soltado desde el reposo la masa desplazada una distancia u_0 desde su posición de equilibrio.

Para resolver este problema mediante un método numérico, debe en primer lugar transformarse en un sistema de E.D.O. equivalente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{du}{dt} \end{pmatrix}.$$

Indique cuál es la definición de la función $\boldsymbol{f}$:

(a) $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -(by_2 + ky_1)/m \end{pmatrix}$;

(b) $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(by_2 + ky_1)/m \end{pmatrix}$;

(c) $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(by_1 + ky_2)/m \end{pmatrix}$;

(d) ninguna de las anteriores.

15. Se quiere resolver el siguiente P.V.C. mediante el método de Diferencias Finitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' = f(x), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{array} \right.$$

Para ello se introduce una partición uniforme $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$, de paso $h = \dfrac{1}{n}$.

Indique qué sistema de ecuaciones satisfacen los valores de la solución calculada $y_i \approx y(x_i)$:

(a) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(b) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(c) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(d) ninguno de las anteriores.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Evaluación 2 – Tema 2

Fecha: 18 – Junio – 2008; 19:10 horas.

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la corrección

No rellenar

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:
$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$
- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/RRA

1. Considere el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, el cual se resuelve utilizando el método de Jacobi. Indique cuáles de las siguientes sentencias MATLAB calculan una iteración de dicho método:

   (a)
   ```
   N=diag(A);
   P=A;
   y=N\(P*x+b);
   ```
   (b)
   ```
   N=diag(A);
   P=N-A;
   y=P\(N*x+b);
   ```
   (c)
   ```
   N=diag(diag(A));
   P=A;
   y=P\(N*x+b);
   ```
   (d)
   ```
   N=diag(diag(A));
   P=N-A;
   y=N\(P*x+b);
   ```

2. Se desea resolver el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Se sabe que todos los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son positivos. Indique cuál de los siguientes métodos **no es seguro** que permita resolver este problema:

   (a) el método de Cholesky;

   (b) el método de Jacobi;

   (c) el método de Gauss-Seidel;

   (d) todos los métodos anteriores permiten resolver el sistema.

3. Se desea resolver el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ una matriz simétrica y definida positiva tal que $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A}) = 10^8$, utilizando el método del Gradiente Conjugado. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

   (a) el método converge;

   (b) la velocidad de convergencia del método es muy baja debido al mal condicionamiento de la matriz $\boldsymbol{A}$;

   (c) se debe precondicionar el sistema lineal para disminuir el número de iteraciones del método;

   (d) ninguna (todas las afirmaciones anteriores son correctas).

4. Un meteorito que cae sobre el mar es fotografiado justo antes de su caída a razón de una foto por segundo. En esas fotografías se mide la altura h sobre el nivel del mar del meteorito en cada instante y se obtiene la siguiente tabla:

t (s)	1	2	3	4	5
h (m)	345.0	280.5	206.0	121.0	27.5

Si la altura h se modela como la de un objeto en caída libre, se tiene que

$$h(t) \approx h_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

donde h_0 y v_0 son la altura y velocidad del objeto en el instante $t = 0$, y g es la aceleración media de la gravedad. Indique cuál de los siguientes programas MATLAB permite determinar en el vector $\boldsymbol{x}$, los valores de h_0, v_0 y g a partir de la tabla dada:

(a)
```
b=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
t=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
A*x=b
```

(b)
```
t=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
b=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
x=A'\b
```

(c)
```
b=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
t=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
x=A\b
```

(d) ninguno de las anteriores.

5. Indique cuál de las siguientes funciones es una spline cúbica en el intervalo $[-1, 1]$:

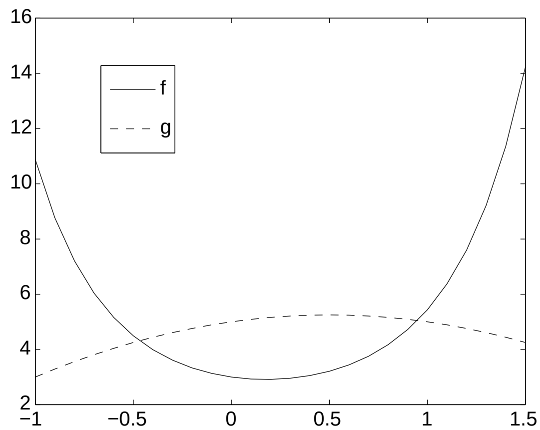
(a) $s(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -x^2 + 1, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$

(b) $s(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ x + 1, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$

(c) $s(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2x - 1/2, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$

(d) ninguna de las anteriores.

6. Se desea calcular el área encerrada por los gráficos de la funciones $f(x) = (3 - x)\, e^{x^2}$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$, para lo cual se dispone de la siguiente figura:



Un programa MATLAB que permite calcular dicha área está dado por:

(a)
```
h=inline('(-x.^2+x+5)-(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(h,-0.5);
b=fzero(h,1);
Area=quad(h,a,b)
```
(b)
```
h=inline('(-x.^2+x+5)-(3-x).*exp(x.^2)');
Area=quad(h,-0.5,1)
```
(c)
```
f=inline('(-x.^2+x+5)');
g=inline('(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(f,-0.5);
b=fzero(g,1);
Area=quad(f-g,a,b)
```
(d)
```
f=inline('(-x.^2+x+5)');
g=inline('(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(f,-0.5)-fzero(g,-0.5);
b=fzero(f,1)-fzero(g,1);
Area=quad(f,a,b)-quad(g,a,b)
```

7. Considere la siguiente integral:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Indique cuál de los siguientes métodos de integración calcula el valor exacto de I:

(a) el método de Gauss con 2 puntos;

(b) el método de Simpson (compuesto) con un paso $h = 0.1$;

(c) el método del Punto Medio (compuesto) con un paso $h = 0.01$;

(d) ninguno de los anteriores.

8. Se quiere calcular una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Para ello se utiliza el método de Newton, cuyo paso de iteración es:

```
xk1=xk-feval('Df',xk)\feval('f',xk);
```

Indique cuáles de los siguientes programas MATLAB permiten evaluar las funciones `f` y `Df`:

(a)
```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2-x(3) ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-1];
```
```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , 1 ; x(1) , x(2) , x(3) ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(b)
```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2-x(3) ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-1];
```
```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , -1 ; 1 , 1 , 1 ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(c)
```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2 ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2];
```
```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , 0 ; 1 , 1 , 1 ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(d) ninguno de los anteriores.

9. Se quiere resolver una ecuación no lineal $f(x) = 0$ mediante el método de la Secante. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(a) el orden de convergencia del método de la Secante es superior al del método de Newton–Raphson;

(b) para iniciar el método de la Secante es necesario partir de dos valores iniciales x_0 y x_1 tales que $f(x_0)$ y $f(x_1)$ tengan signos distintos.

(c) para aplicar el método de la Secante no es necesario evaluar derivadas de f;

(d) ninguna de las anteriores.

10. Se quiere resolver el siguiente P.V.I. mediante el método de Euler (explícito) con paso h:

$$\begin{cases} y' = x^2 + z^2, & y(0) = 0, \\ z' = x^2 + y^2, & z(0) = 1. \end{cases}$$

Indique cuál de los siguientes corresponde a un paso del método:

(a) $\begin{cases} y_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right), \\ z_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right); \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right), \\ z_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right); \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right), \\ z_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right); \end{cases}$

(d) ninguno de los anteriores.

11. Se quiere resolver el siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = -10^4\left(\left(1 + x^2\right) y - \cos x\right), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Indique cuál de los siguientes métodos es más eficiente:

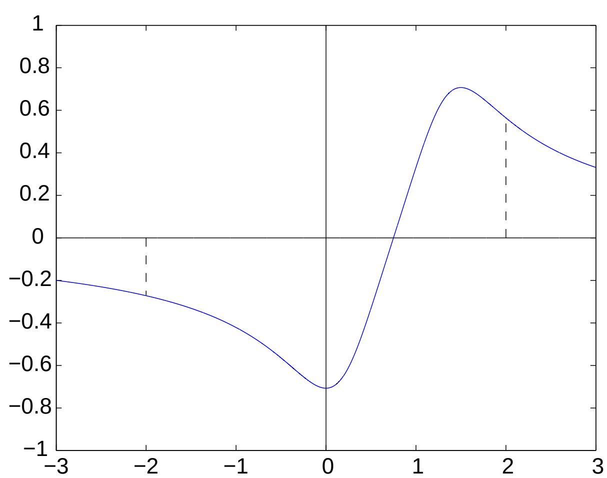
(a) un método Adams–Bashforth (de paso múltiple, explícito), porque aprovecha los valores calculados de la solución en los pasos anteriores;

(b) un método implícito, porque el P.V.I. es stiff;

(c) un método Runge–Kutta (de paso simple, explícito), porque es de partida automática;

(d) ninguno de esos métodos sirve para resolver ese problema.

12. Se quiere calcular la raíz de la función cuya gráfica se muestra en la figura mediante el método de Newton–Raphson:



Indique cuál de las siguientes valores iniciales debe tomarse para garantizar la convergencia:

(a) $x_0 = -2$;

(b) $x_0 = 2$;

(c) $x_0 = 0$;

(d) ninguno de las anteriores.

13. Considere una masa m sujeta al extremo de un resorte de constante k sumergida en un fuido viscoso de resistividad b. La E.D.O. que modela el desplazamiento u de la masa desde su posición de equilibrio como función del tiempo t es la del oscilador armónico amortiguado:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2u}{dt^2} + b\dfrac{du}{dt} + ku = 0, \\ u(0) = u_0, \qquad \dfrac{du}{dt}(0) = 0. \end{cases}$$

Las condiciones iniciales corresponden a haber soltado desde el reposo la masa desplazada una distancia u_0 desde su posición de equilibrio.

Para resolver este problema mediante un método numérico, debe en primer lugar transformarse en un sistema de E.D.O. equivalente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{du}{dt} \end{pmatrix}.$$

Indique cuál es la definición de la función $\boldsymbol{f}$:

(a) $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(by_2 + ky_1)/m \end{pmatrix}$;

(b) $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(by_1 + ky_2)/m \end{pmatrix}$;

(c) $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -(by_2 + ky_1)/m \end{pmatrix}$;

(d) ninguna de las anteriores.

14. Al resolver mediante cualquier método de paso simple un P.V.I.

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

en el primer paso del método, el error global y el error local de truncamiento coinciden.

A partir de esta información, si y_1 denota el valor calculado de $y(x_1)$ en el primer paso del método de Euler, indique cuál de las siguientes acotaciones es al mismo tiempo correcta y más precisa:

(a) $|y(x_1) - y_1| \leq Ch$;

(b) $|y(x_1) - y_1| \leq Ch^2$;

(c) $|y(x_1) - y_1| \leq Ch^3$;

(d) ninguna de esas acotaciones es correcta.

15. Se quiere resolver el siguiente P.V.C. mediante el método de Diferencias Finitas:

$$\begin{cases} y'' = f(x), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Para ello se introduce una partición uniforme $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$, de paso $h = \dfrac{1}{n}$.

Indique qué sistema de ecuaciones satisfacen los valores de la solución calculada $y_i \approx y(x_i)$:

(a) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(b) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(c) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(d) ninguno de las anteriores.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Evaluación 2 – Tema 3

Fecha: 18 – Junio – 2008; 19:10 horas.

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la corrección **No rellenar**	
B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:
$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$
- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/RRA

1. Considere el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, el cual se resuelve utilizando el método de Jacobi. Indique cuáles de las siguientes sentencias MATLAB calculan una iteración de dicho método:

   (a)
   ```
   N=diag(A);
   P=A;
   y=N\(P*x+b);
   ```
   (b)
   ```
   N=diag(A);
   P=N-A;
   y=P\(N*x+b);
   ```
   (c)
   ```
   N=diag(diag(A));
   P=A;
   y=P\(N*x+b);
   ```
   (d)
   ```
   N=diag(diag(A));
   P=N-A;
   y=N\(P*x+b);
   ```

2. Se desea resolver el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ una matriz simétrica y definida positiva tal que $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A}) = 10^8$, utilizando el método del Gradiente Conjugado. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

   (a) el método converge;

   (b) la velocidad de convergencia del método es muy baja debido al mal condicionamiento de la matriz $\boldsymbol{A}$;

   (c) se debe precondicionar el sistema lineal para disminuir el número de iteraciones del método;

   (d) ninguna (todas las afirmaciones anteriores son correctas).

3. Se desea resolver el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Se sabe que todos los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son positivos. Indique cuál de los siguientes métodos **no es seguro** que permita resolver este problema:

   (a) el método de Cholesky;

   (b) el método de Jacobi;

   (c) el método de Gauss-Seidel;

   (d) todos los métodos anteriores permiten resolver el sistema.

4. Indique cuál de las siguientes funciones es una spline cúbica en el intervalo $[-1, 1]$:

   (a) $s(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -1 \le x \le 0, \\ -x^2 + 1, & 0 < x \le 1; \end{cases}$

   (b) $s(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & -1 \le x \le 0, \\ x + 1, & 0 < x \le 1; \end{cases}$

   (c) $s(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x \le 0, \\ 2x - 1/2, & 0 < x \le 1; \end{cases}$

   (d) ninguna de las anteriores.

5. Un meteorito que cae sobre el mar es fotografiado justo antes de su caída a razón de una foto por segundo. En esas fotografías se mide la altura h sobre el nivel del mar del meteorito en cada instante y se obtiene la siguiente tabla:

t (s)	1	2	3	4	5
h (m)	345.0	280.5	206.0	121.0	27.5

Si la altura h se modela como la de un objeto en caída libre, se tiene que

$$h(t) \approx h_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

donde h_0 y v_0 son la altura y velocidad del objeto en el instante $t = 0$, y g es la aceleración media de la gravedad. Indique cuál de los siguientes programas Matlab permite determinar en el vector $\boldsymbol{x}$, los valores de h_0, v_0 y g a partir de la tabla dada:

(a)
```
b=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
t=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
A*x=b
```

(b)
```
b=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
t=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
x=A\b
```

(c)
```
t=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
b=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
x=A'\b
```

(d) ninguno de las anteriores.

6. Considere la siguiente integral:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Indique cuál de los siguientes métodos de integración calcula el valor exacto de I:

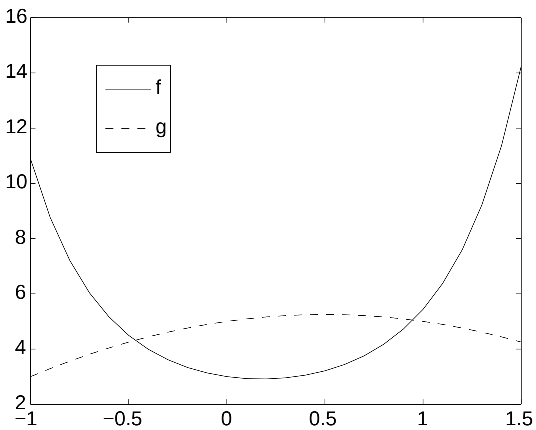
(a) el método de Gauss con 2 puntos;

(b) el método de Simpson (compuesto) con un paso $h = 0.1$;

(c) el método del Punto Medio (compuesto) con un paso $h = 0.01$;

(d) ninguno de los anteriores.

7. Se desea calcular el área encerrada por los gráficos de la funciones $f(x) = (3-x)\, e^{x^2}$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$, para lo cual se dispone de la siguiente figura:



Un programa Matlab que permite calcular dicha área está dado por:

(a)
```
h=inline('(-x.^2+x+5)-(3-x).*exp(x.^2)');
Area=quad(h,-0.5,1)
```

(b)
```
h=inline('(-x.^2+x+5)-(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(h,-0.5);
b=fzero(h,1);
Area=quad(h,a,b)
```

(c)
```
f=inline('(-x.^2+x+5)');
g=inline('(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(f,-0.5);
b=fzero(g,1);
Area=quad(f-g,a,b)
```

(d)
```
f=inline('(-x.^2+x+5)');
g=inline('(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(f,-0.5)-fzero(g,-0.5);
b=fzero(f,1)-fzero(g,1);
Area=quad(f,a,b)-quad(g,a,b)
```

8. Se quiere resolver una ecuación no lineal $f(x) = 0$ mediante el método de la Secante. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

   (a) el orden de convergencia del método de la Secante es superior al del método de Newton–Raphson;

   (b) para aplicar el método de la Secante no es necesario evaluar derivadas de f;

   (c) para iniciar el método de la Secante es necesario partir de dos valores iniciales x_0 y x_1 tales que $f(x_0)$ y $f(x_1)$ tengan signos distintos.

   (d) ninguna de las anteriores.

9. Se quiere calcular una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Para ello se utiliza el método de Newton, cuyo paso de iteración es:

```
xk1=xk-feval('Df',xk)\feval('f',xk);
```

Indique cuáles de los siguientes programas Matlab permiten evaluar las funciones `f` y `Df`:

(a)

```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2-x(3) ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-1];
```

```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , 1 ; x(1) , x(2) , x(3) ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(b)

```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2 ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2];
```

```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , 0 ; 1 , 1 , 1 ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(c)

```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2-x(3) ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-1];
```

```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , -1 ; 1 , 1 , 1 ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(d) ninguno de los anteriores.

10. Se quiere resolver el siguiente P.V.I. mediante el método de Euler (explícito) con paso h:

$$\begin{cases} y' = x^2 + z^2, & y(0) = 0, \\ z' = x^2 + y^2, & z(0) = 1. \end{cases}$$

Indique cuál de los siguientes corresponde a un paso del método:

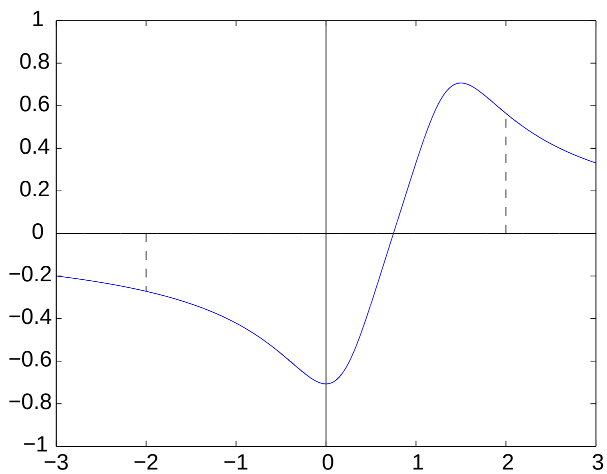
(a) $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right), \\ z_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right); \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right), \\ z_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right); \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right), \\ z_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right); \end{cases}$

(d) ninguno de los anteriores.

11. Se quiere calcular la raíz de la función cuya gráfica se muestra en la figura mediante el método de Newton–Raphson:



Indique cuál de las siguientes valores iniciales debe tomarse para garantizar la convergencia:

(a) $x_0 = -2$;

(b) $x_0 = 0$;

(c) $x_0 = 2$;

(d) ninguno de las anteriores.

12. Se quiere resolver el siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = -10^4\left(\left(1 + x^2\right) y - \cos x\right), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Indique cuál de los siguientes métodos es más eficiente:

(a) un método Runge–Kutta (de paso simple, explícito), porque es de partida automática;

(b) un método Adams–Bashforth (de paso múltiple, explícito), porque aprovecha los valores calculados de la solución en los pasos anteriores;

(c) un método implícito, porque el P.V.I. es stiff;

(d) ninguno de esos métodos sirve para resolver ese problema.

13. Al resolver mediante cualquier método de paso simple un P.V.I.

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

en el primer paso del método, el error global y el error local de truncamiento coinciden.

A partir de esta información, si y_1 denota el valor calculado de $y(x_1)$ en el primer paso del método de Euler, indique cuál de las siguientes acotaciones es al mismo tiempo correcta y más precisa:

(a) $|y(x_1) - y_1| \leq Ch^3$;
(b) $|y(x_1) - y_1| \leq Ch$;
(c) $|y(x_1) - y_1| \leq Ch^2$;
(d) ninguna de esas acotaciones es correcta.

14. Considere una masa m sujeta al extremo de un resorte de constante k sumergida en un fuido viscoso de resistividad b. La E.D.O. que modela el desplazamiento u de la masa desde su posición de equilibrio como función del tiempo t es la del oscilador armónico amortiguado:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2u}{dt^2} + b\dfrac{du}{dt} + ku = 0, \\ u(0) = u_0, \qquad \dfrac{du}{dt}(0) = 0. \end{cases}$$

Las condiciones iniciales corresponden a haber soltado desde el reposo la masa desplazada una distancia u_0 desde su posición de equilibrio.

Para resolver este problema mediante un método numérico, debe en primer lugar transformarse en un sistema de E.D.O. equivalente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{du}{dt} \end{pmatrix}.$$

Indique cuál es la definición de la función $\boldsymbol{f}$:

(a) $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(by_2 + ky_1)/m \end{pmatrix}$;
(b) $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(by_1 + ky_2)/m \end{pmatrix}$;
(c) $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -(by_2 + ky_1)/m \end{pmatrix}$;
(d) ninguna de las anteriores.

15. Se quiere resolver el siguiente P.V.C. mediante el método de Diferencias Finitas:

$$\begin{cases} y'' = f(x), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Para ello se introduce una partición uniforme $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$, de paso $h = \dfrac{1}{n}$.

Indique qué sistema de ecuaciones satisfacen los valores de la solución calculada $y_i \approx y(x_i)$:

(a) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(b) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(c) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(d) ninguno de las anteriores.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Evaluación 2 – Tema 4

Fecha: 18 – Junio – 2008; 19:10 horas.

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la corrección

No rellenar

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:

$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$

- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/RRA

1. Se desea resolver el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ una matriz simétrica y definida positiva tal que $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A}) = 10^8$, utilizando el método del Gradiente Conjugado. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:
   (a) el método converge;
   (b) la velocidad de convergencia del método es muy baja debido al mal condicionamiento de la matriz $\boldsymbol{A}$;
   (c) se debe precondicionar el sistema lineal para disminuir el número de iteraciones del método;
   (d) ninguna (todas las afirmaciones anteriores son correctas).

2. Se desea resolver el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Se sabe que todos los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son positivos. Indique cuál de los siguientes métodos **no es seguro** que permita resolver este problema:
   (a) el método de Cholesky;
   (b) el método de Jacobi;
   (c) el método de Gauss-Seidel;
   (d) todos los métodos anteriores permiten resolver el sistema.

3. Considere el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, el cual se resuelve utilizando el método de Jacobi. Indique cuáles de las siguientes sentencias MATLAB calculan una iteración de dicho método:
   (a)
   ```
   N=diag(A);
   P=A;
   y=N\(P*x+b);
   ```
   (b)
   ```
   N=diag(diag(A));
   P=N-A;
   y=N\(P*x+b);
   ```
   (c)
   ```
   N=diag(A);
   P=N-A;
   y=P\(N*x+b);
   ```
   (d)
   ```
   N=diag(diag(A));
   P=A;
   y=P\(N*x+b);
   ```

4. Un meteorito que cae sobre el mar es fotografiado justo antes de su caída a razón de una foto por segundo. En esas fotografías se mide la altura h sobre el nivel del mar del meteorito en cada instante y se obtiene la siguiente tabla:

t (s)	1	2	3	4	5
h (m)	345.0	280.5	206.0	121.0	27.5

Si la altura h se modela como la de un objeto en caída libre, se tiene que

$$h(t) \approx h_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

donde h_0 y v_0 son la altura y velocidad del objeto en el instante $t = 0$, y g es la aceleración media de la gravedad. Indique cuál de los siguientes programas MATLAB permite determinar en el vector $\boldsymbol{x}$, los valores de h_0, v_0 y g a partir de la tabla dada:

(a)
```
t=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
b=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
x=A'\b
```

(b)
```
b=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
t=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
x=A\b
```

(c)
```
b=[345.0 280.5 206.0 121.0 27.5]';
t=(1:5)';
A=[ones(5,1) -t -t.^2/2];
A*x=b
```

(d) ninguno de las anteriores.

5. Indique cuál de las siguientes funciones es una spline cúbica en el intervalo $[-1, 1]$:

(a) $s(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -1 \le x \le 0, \\ -x^2 + 1, & 0 < x \le 1; \end{cases}$

(b) $s(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & -1 \le x \le 0, \\ x + 1, & 0 < x \le 1; \end{cases}$

(c) $s(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x \le 0, \\ 2x - 1/2, & 0 < x \le 1; \end{cases}$

(d) ninguna de las anteriores.

6. Considere la siguiente integral:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Indique cuál de los siguientes métodos de integración calcula el valor exacto de I:

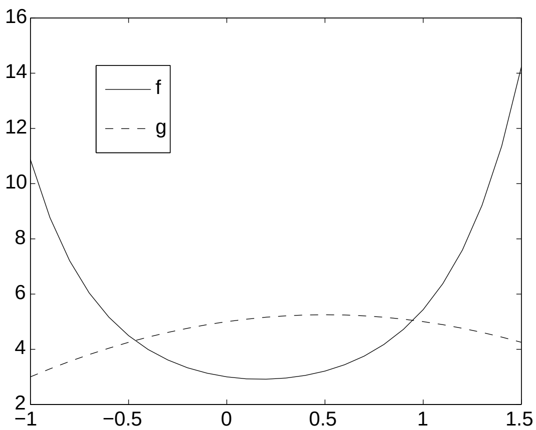
(a) el método de Gauss con 2 puntos;

(b) el método de Simpson (compuesto) con un paso $h = 0.1$;

(c) el método del Punto Medio (compuesto) con un paso $h = 0.01$;

(d) ninguno de los anteriores.

7. Se desea calcular el área encerrada por los gráficos de la funciones $f(x) = (3-x)\, e^{x^2}$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$, para lo cual se dispone de la siguiente figura:



Un programa MATLAB que permite calcular dicha área está dado por:

(a)
```
f=inline('(-x.^2+x+5)');
g=inline('(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(f,-0.5)-fzero(g,-0.5);
b=fzero(f,1)-fzero(g,1);
Area=quad(f,a,b)-quad(g,a,b)
```

(b)
```
h=inline('(-x.^2+x+5)-(3-x).*exp(x.^2)');
Area=quad(h,-0.5,1)
```

(c)
```
f=inline('(-x.^2+x+5)');
g=inline('(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(f,-0.5);
b=fzero(g,1);
Area=quad(f-g,a,b)
```

(d)
```
h=inline('(-x.^2+x+5)-(3-x).*exp(x.^2)');
a=fzero(h,-0.5);
b=fzero(h,1);
Area=quad(h,a,b)
```

8. Se quiere calcular una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Para ello se utiliza el método de Newton, cuyo paso de iteración es:

```
xk1=xk-feval('Df',xk)\feval('f',xk);
```

Indique cuáles de los siguientes programas MATLAB permiten evaluar las funciones `f` y `Df`:

(a)
```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2-x(3) ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-1];
```

```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , 1 ; x(1) , x(2) , x(3) ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(b)
```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2 ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2];
```

```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , 0 ; 1 , 1 , 1 ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(c)
```
function y=f(x)
y=[2*x(1)^2+x(2)^2-x(3) ; x(1)+x(2)+x(3) ; x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-1];
```

```
function z=Df(x)
z=[4*x(1) , 2*x(2) , -1 ; 1 , 1 , 1 ; 2*x(1) , 2*x(2) , 2*x(3)];
```

(d) ninguno de los anteriores.

9. Se quiere resolver una ecuación no lineal $f(x) = 0$ mediante el método de la Secante. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(a) para aplicar el método de la Secante no es necesario evaluar derivadas de f;

(b) el orden de convergencia del método de la Secante es superior al del método de Newton–Raphson;

(c) para iniciar el método de la Secante es necesario partir de dos valores iniciales x_0 y x_1 tales que $f(x_0)$ y $f(x_1)$ tengan signos distintos.

(d) ninguna de las anteriores.

10. Se quiere resolver el siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} y' = -10^4 \left(\left(1 + x^2\right) y - \cos x \right), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Indique cuál de los siguientes métodos es más eficiente:

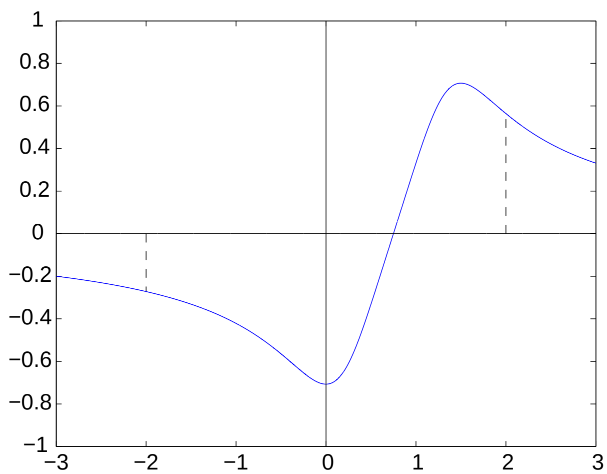
(a) un método Runge–Kutta (de paso simple, explícito), porque es de partida automática;

(b) un método Adams–Bashforth (de paso múltiple, explícito), porque aprovecha los valores calculados de la solución en los pasos anteriores;

(c) un método implícito, porque el P.V.I. es stiff;

(d) ninguno de esos métodos sirve para resolver ese problema.

11. Se quiere calcular la raíz de la función cuya gráfica se muestra en la figura mediante el método de Newton–Raphson:



Indique cuál de las siguientes valores iniciales debe tomarse para garantizar la convergencia:

(a) $x_0 = 0$;

(b) $x_0 = -2$;

(c) $x_0 = 2$;

(d) ninguno de las anteriores.

12. Se quiere resolver el siguiente P.V.I. mediante el método de Euler (explícito) con paso h:

$$\begin{cases} y' = x^2 + z^2, & y(0) = 0, \\ z' = x^2 + y^2, & z(0) = 1. \end{cases}$$

Indique cuál de los siguientes corresponde a un paso del método:

(a) $\begin{cases} y_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right), \\ z_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right); \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right), \\ z_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right); \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\left(x_n^2 + z_n^2\right), \\ z_{n+1} = z_n + h\left(x_n^2 + y_n^2\right); \end{cases}$

(d) ninguno de los anteriores.

13. Al resolver mediante cualquier método de paso simple un P.V.I.

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

en el primer paso del método, el error global y el error local de truncamiento coinciden.

A partir de esta información, si y_1 denota el valor calculado de $y(x_1)$ en el primer paso del método de Euler, indique cuál de las siguientes acotaciones es al mismo tiempo correcta y más precisa:

(a) $|y(x_1) - y_1| \le Ch^2$;

(b) $|y(x_1) - y_1| \le Ch^3$;

(c) $|y(x_1) - y_1| \le Ch$;

(d) ninguna de esas acotaciones es correcta.

14. Considere una masa m sujeta al extremo de un resorte de constante k sumergida en un fuido viscoso de resistividad b. La E.D.O. que modela el desplazamiento u de la masa desde su posición de equilibrio como función del tiempo t es la del oscilador armónico amortiguado:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2u}{dt^2} + b\dfrac{du}{dt} + ku = 0, \\ u(0) = u_0, \qquad \dfrac{du}{dt}(0) = 0. \end{cases}$$

Las condiciones iniciales corresponden a haber soltado desde el reposo la masa desplazada una distancia u_0 desde su posición de equilibrio.

Para resolver este problema mediante un método numérico, debe en primer lugar transformarse en un sistema de E.D.O. equivalente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{du}{dt} \end{pmatrix}.$$

Indique cuál es la definición de la función $\boldsymbol{f}$:

(a) $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(by_1 + ky_2)/m \end{pmatrix}$;

(b) $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -(by_2 + ky_1)/m \end{pmatrix}$;

(c) $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(by_2 + ky_1)/m \end{pmatrix}$;

(d) ninguna de las anteriores.

15. Se quiere resolver el siguiente P.V.C. mediante el método de Diferencias Finitas:

$$\begin{cases} y'' = f(x), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Para ello se introduce una partición uniforme $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$, de paso $h = \dfrac{1}{n}$.

Indique qué sistema de ecuaciones satisfacen los valores de la solución calculada $y_i \approx y(x_i)$:

(a) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(b) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(c) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix};$$

(d) ninguno de las anteriores.