UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA 3 (Inducción)

Problema 1.

a) Encuentre al menos dos proposiciones compuestas que sean **lógicamente equivalentes** a $p \veebar q$ (ver Problema 4 del Listado No 1).

b) Utilice a) para demostrar que $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ (ver Problema 1 del Listado No 2).

Problema 2. Sean $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$ y $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n \cdots,$ sucesiones de números reales. Use inducción para demostrar que

i) $\forall n \in I\!N: \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ (propiedad telescópica) (**en práctica**).

ii) $\forall n \in I\!N, \quad \forall k \in I\!N: \quad \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k}$

iii) $\forall n \in I\!N, \quad \forall k \in I\!N, \quad k \geq n: \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{k-i} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{k+1-i}$

Problema 3. Para la resolución aproximada de *ecuaciones diferenciales parciales* (tema que conocerá en segundo año en el curso *Complementos de Cálculo*), se utiliza habitualmente el siguiente procedimiento geométrico: *se divide inicialmente una región del plano en un número finito de triángulos disjuntos (formando así lo que se llama una* ***triangulación****), y luego se generan sucesivamente nuevas triangulaciones uniendo los puntos medios de los triángulos que constituyen la triangulación anterior. De este modo, cada triángulo da origen a 4 nuevos triángulos.*

i) Si una región consta inicialmente de 6 triángulos, ¿cuántas triangulaciones deben realizarse de modo que la última de ellas tenga al menos 2000 triángulos?

ii) ¿Cuántos triángulos (a lo más) debe tener la triangulación inicial para que, al cabo de N triangulaciones, la suma del número de triángulos de todas ellas sea inferior a 15.000?

Problema 4. Observe que al evaluar la identidad $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ para $k = 1, 2, 3, \cdots, n$, donde n es un número natural fijo, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{rcll} 2^2 - 1^2 & = & 2(1)+1 & = 3 \\ 3^2 - 2^2 & = & 2(2)+1 & = 5 \\ 4^2 - 3^2 & = & 2(3)+1 & = 7 \\ & \vdots & & \vdots \\ n^2 - (n-1)^2 & = & 2(n-1)+1 & = 2n-1 \\ (n+1)^2 - n^2 & = & 2(n)+1 & = 2n+1 \end{array}\right\} \tag{1}$$

i) (**En práctica**). Considere las primeras dos columnas de (1) y utilice las propiedades de la sumatoria (ver **Problema 2**) para demostrar que

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k \quad + \quad n.$$

Concluya que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$

ii) (**En práctica**). Considere ahora la primera y tercera columna de (1) para probar que

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) := 1+3+5+7+\cdots+2n-1 = n^2.$$

Observación. Una misma identidad ha permitido establecer dos fórmulas distintas.

iii) Utilice ahora el principio de inducción para probar las fórmulas de i) y ii) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 5. Evalúe la identidad $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ para $k = 1, 2, 3, \cdots, n$, donde n es un número natural fijo, y deduzca una fórmula para

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad := \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Compruebe lo obtenido aplicando el principio de inducción.

Problema 6. (**mire, vea, conjeture**). Considere las siguientes identidades:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 1-4 & = & -(1+2) \\ 1-4+9 & = & 1+2+3 \\ 1-4+9-16 & = & -(1+2+3+4) \\ & \vdots & \end{array}$$

es decir:

$$\begin{array}{lrcl}
n=1 \rightarrow & 1 & = & 1 \\
n=2 \rightarrow & 1-2^2 & = & -(1+2) \\
n=3 \rightarrow & 1-2^2+3^2 & = & 1+2+3 \\
n=4 \rightarrow & 1-2^2+3^2-4^2 & = & -(1+2+3+4) \\
 & & \vdots &
\end{array}$$

En general, para $n \in I\!N$, **qué identidad escribiría Ud.**? Demuestre su **conjetura** utilizando el principio de inducción.

Problema 7. (**En práctica**). Demuestre que

i) $\forall n \in I\!N$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} = \binom{2n+1}{n}$.

ii) $\forall n \in N$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.

Problema 8. Demuestre por inducción que

i) $\forall n \in I\!N$: $n^5 - n$ es divisible por 5.

ii) $\forall n \in I\!N$: $3^{2n} + 7$ es múltiplo de 8.

Problema 9. Encuentre:

i) el cuarto término en el desarrollo de $(x+8)^{15}$.

ii) el término constante en el desarrollo de $(x^2 - \frac{1}{x^2})^8$ (**en práctica**).

iii) los términos centrales del desarrollo de $(y + \frac{1}{y^{1/3}})^{12}$.

iv) los términos que contienen $\frac{x^2}{y^3}$ y $\frac{x}{y}$ (si existen) en el desarrollo de $(x^2y - \frac{x}{y})^{16}$ (**en práctica**).

Problema 10. Una familia de conjuntos es una colección indexada de conjuntos. En particular, una familia $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ se denotará por $\{A_i\}_{i \in I}$ y diremos que $I = \{1, \ldots, n\}$ es el *conjunto de índices* de la familia. La **unión** y la **intersección de una familia** $\{A_i\}_{i \in I}$ se definen por:

$$\cup_{i\in I} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

$$x \in \cup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I: \quad x \in A_i$$

$$\cap_{i\in I} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

$$x \in \cap_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \forall\, i \in I: \ x \in A_i$$

(a) (**En práctica**). Considere una familia $\{A_n\}_{n\in I\!N}$ y defina la nueva familia $\{B_n\}_{n\in I\!N}$ por:

$$B_1 := A_1 \quad \text{y} \quad \forall n \geq 2: \qquad B_n := A_n - \cup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Demuestre que:

(i) $\forall i, j \in I\!N, \quad i \neq j: \ B_i \cap B_j = \phi$

(ii) $\cup_{n\in I\!N} B_n = \cup_{n\in I\!N}\ A_n$

¿ Es $\{B_n\}_{n\in I\!N}$ una partición para $\cup_{n\in I\!N} A_n$? Justifique su respuesta.
(b) Considere la familia $\{A_n\}_{n\in I\!N}$ con $A_n = [-2n, 3n]$.

(i) Encuentre $\cup_{n\in I\!N} A_n$ y $\cap_{n\in I\!N} A_n$.

(ii) Defina la familia $\{B_n\}_{n\in I\!N}$ como en la parte (a). ¿ Es $\{B_n\}_{n\in I\!N}$ una partición para $\cup_{n\in I\!N} A_n$?. ¿Es $\{B_n\}_{n\in I\!N}$ una partición para $I\!R$?.

(c) Repita parte (b) anterior con $A_n = [0, \frac{1}{2n}]$.

Problema 11. (**En práctica**). Dado $n \in I\!N$, considere la partición $\left[0, \dfrac{1}{n}\right)$, $\left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right)$, $\cdots$, $\left[\dfrac{n-2}{n}, \dfrac{n-1}{n}\right)$, $\left[\dfrac{n-1}{n}, 1\right]$ del intervalo $[0,1]$, y para cada $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ construya un rectángulo sobre el sub-intervalo $\left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$ de altura $\dfrac{(k+n)^2}{n^2}$. Defina $S(n)$ como la suma de las áreas de los n rectángulos, y encuentre una fórmula para $S(n)$. ¿Qué puede decir sobre el $\lim\limits_{n\to\infty} S(n)$?

01.04.2002 GGP/cln