UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 5 (Funciones II)

1. Sea U un conjunto y $A, B \subseteq U$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Sea $f : U \longrightarrow U$ una función cualquiera. Probar que:

   a) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.

   b) Si f es inyectiva, entonces $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

   c) Si f es sobreyectiva, $f(A) \cup f(A^c) = U$.

2. Para cada una de las siguientes funciones, determine $Dom(f)$ de manera que la función resulte bien definida. En cada caso, determine además su recorrido: $Rec(f)$.

   a) $$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

   b) $$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x+3} \end{array}$$

   c) $$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3} \end{array}$$ **(En práctica c))**

   d) $$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = |x-2| \end{array}$$

   e) $$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x-1}} \end{array}$$ **(En práctica e))**

3. En los siguientes casos determine si la función es invertible, o si es posible restringir su codominio para hacerla invertible. Si es así, defina su inversa.

   a) $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \dfrac{x+3}{2x-4}$.

   b) $f : [2, 10] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$. **(En práctica b))**

   c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = (x-1)(x-2)$.

4. Considere las siguientes funciones a variable real. Analice inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, paridad y monotonía. Defina además, cuando sea posible, su función inversa.

   a) Dadas las constantes reales a y b, la **función lineal afín**:

   $$l_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto l_{a,b}(x) = ax + b.$$

   b) La función **raíz cuadrada**: $r : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto r(x) = \sqrt{x}$.

c) La función **valor absoluto**: $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto v(x) = |x|$.

d) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x > 3, \\ \\ x - 4 & \text{si} \quad x \leq 3. \end{cases}$$

(En práctica d))

5. Sean $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales. Analice la existencia de la suma, el producto, el cuociente y las compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$. En los casos donde exista la función, defínala. **(En práctica c) y d))**

   a) $f(x) = 1 + x^2; \quad g(x) = \sqrt{x-1}$.

   b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$.

   c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1; & x \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{x}; & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x - 2; & x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{x-1}; & x > 1 \end{cases}$

   d) $f(x) = ax + b; \quad g(x) = cx + d$.

6. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones reales cualesquiera. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   a) f biyectiva implica que f no es par.

   b) g impar implica g inyectiva.

   c) $g \circ f$ impar implica que g es impar.

   d) f par y monótona, implica que $f = cte.$. **(En práctica d))**

   e) Si g y f son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

   f) $g \circ f$ inyectiva implica que f es inyectiva.

   g) g sobreyectiva implica que $g \circ f$ es sobreyectiva. **(En práctica g))**

   h) f estrictamente creciente y g estrictamente decreciente implica que $g \circ f$ es estrictamente creciente.

7. Escriba las siguientes funciones como composición de las funciones $l_{a,b}$, r, y v definidas en el problema anterior, según convenga.

   a) $f(x) = ||x| + 1|$ *b)* $f(x) = \sqrt{3x} + 1$ *c)* $f(x) = \sqrt[4]{x}$

RRS/RNG/JMS/AGS/LNB/JSA/BBM/LRS/ags
semestre otoño 2006.