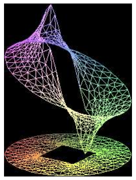
MAT 520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Segundo Semestre 2003, Universidad de Concepción



CAPITULO 11: Espacios Vectoriales con Producto Interior

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Espacios Vectoriales con Producto Interior

Definición de Producto Interior

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dado por $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Se dice que una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ es un **producto interior (producto escalar)** sobre V si satisface las siguientes propiedades:

- $\langle \alpha\, u + \beta\, v, w\rangle = \alpha \langle u, w\rangle + \beta \langle v, w\rangle$
  $\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall\, u,\, v,\, w \in V$
- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \qquad \forall\, u,\, v \in V$
- $\langle v, v\rangle \geq 0 \qquad \forall\, v \in V$
- $\langle v, v\rangle = 0$ sí y sólo sí $v = \theta$

Observación

Notar que la segunda propiedad implica que $\forall\, v \in V : \ \langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$,
y por lo tanto tiene sentido requerir la tercera propiedad.

Espacios Vectoriales con Producto Interior

Ejemplos

- En el **e.v. real** $V := \mathbb{R}^n$ se define $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j \, y_j \qquad \forall\, \vec{x} := [x_1, ..., x_n],\ \vec{y} := [y_1, ..., y_n] \in V$$

- En el **e.v. complejo** $V := \mathbb{C}^n$ se define $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ por

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j \, \bar{y}_j \qquad \forall\, \vec{x} := [x_1, ..., x_n],\ \vec{y} := [y_1, ..., y_n] \in V$$

- En el **e.v. real** $V := \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se define $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(B^t\, A) \qquad \forall\, A,\ B \in V\,,$$

donde $\quad \operatorname{tr}(C) := \sum_{j=1}^{n} c_{jj} \quad \forall\, C := (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Espacios Vectoriales con Producto Interior

Ejemplos ... (cont)

- En el **e.v. real** $V := \mathcal{C}[a,b] := \{\, f : [a,b] \to \mathbb{R} | \quad f$ es continua $\}$ se define $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \qquad \forall\, f,\ g \in V$$

- Dado $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$, en el **e.v. real** $V := \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ se define $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$\langle p, q \rangle := \sum_{j=1}^{n+1} p(x_j)\, q(x_j), \quad \forall\, p,\ q \in V$$

Otro Ejemplo

- Sea $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ una partición de $[a,b]$, y considere un conjunto $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subseteq \mathcal{C}[a,b]$. Defina los vectores $\vec{\varphi}_j \in \mathbb{R}^N$, donde

$$\vec{\varphi}_j := \begin{bmatrix} \varphi_j(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_j(x_N) \end{bmatrix} \qquad \forall\, j \in \{1, ..., n\},$$

y suponga que $\{\vec{\varphi}_1, ..., \vec{\varphi}_n\}$ es **l.i.** en $\mathbb{R}^N$ $(\Rightarrow n \leq N)$. Entonces, en el **e.v. real** $V := \langle\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}\rangle$ se define $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$\langle\varphi, \psi\rangle := \sum_{j=1}^{N} \varphi(x_j)\, \psi(x_j) \qquad \forall\, \varphi,\, \psi \in V$$

Espacios Vectoriales con Producto Interior

Ultimo Ejemplo

- Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ una **base** de $\mathbb{R}^n$. Entonces, en el **e.v. real** $V := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se define $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$\langle A, B \rangle := \sum_{j=1}^{n} \langle A\,\vec{x}_j, B\,\vec{x}_j \rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall\, A,\ B \in V\,,$$

  donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ es el **producto interior usual** de $\mathbb{R}^n$.

- **Caso particular.**
  Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ es la **base canónica** de $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij} \qquad \forall\, A := (a_{ij}),\ B := (b_{ij}) \in V$$

Observación

Un **e.v.** V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), provisto de un **producto interior** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama un **espacio vectorial con producto interior (e.v.c.p.i.)**

Espacios Vectoriales con Producto Interior

TEOREMA (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dado por $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Entonces se satisface

$$|\langle v, w\rangle| \leq \langle v, v\rangle^{1/2} \langle w, w\rangle^{1/2} \qquad \forall\, v,\, w \in V$$

Definición de Norma

Sea V un **e.v.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dado por $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una **norma** sobre V es una aplicación $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

- $\|v\| \geq 0 \qquad \forall\, v \in V$
- $\|v\| = 0$ sí y sólo sí $v = \theta$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \forall\, v,\, w \in V$
- $\|\alpha\, v\| = |\alpha|\, \|v\| \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, v \in V$

TEOREMA (Norma Inducida)

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dado por $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Entonces, la aplicación $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|v\| := \langle v, v\rangle^{1/2} \qquad \forall\, v \in V$$

es una **norma** sobre V, la cual se llama **norma inducida** por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

TEOREMA de PITAGORAS y LEY del PARALELOGRAMO

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dado por $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y sea $\|\cdot\|$ su norma inducida. Entonces se satisface

- $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ sí y sólo sí $\operatorname{Re}\langle v, w\rangle = 0$
- $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\,\{\|v\|^2 + \|w\|^2\} \qquad \forall\, v,\ w \in V$

ORTOGONALIDAD

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dado por $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Entonces:

- $v,\ w \in V$ se dicen **ortogonales** si

$$\langle v, w\rangle = 0$$

- $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ se dice un **conjunto ortogonal** si

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j \quad \text{y} \quad \|v_i\| \neq 0 \quad \forall i$$

- $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ se dice un **conjunto ortonormal** si es **ortogonal** y todos sus vectores tienen norma inducida igual a 1, es decir

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j \quad \text{y} \quad \|v_i\| = 1 \quad \forall i$$

Lema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dado por $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ es un **conjunto ortogonal** entonces $\{v_1, ..., v_n\}$ es **l.i.**

Lema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dado por $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y sea S el subespacio generado por un **conjunto ortogonal** $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$. Entonces, para todo $v \in S$ se tiene

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad , \quad \text{con} \quad \alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\| v_j \|^2}$$ **(únicamente determinado)**

Equivalentemente, se tiene la siguiente descomposición

$$S = \langle\{v_1\}\rangle \oplus \langle\{v_2\}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\{v_n\}\rangle$$

TEOREMA (Identidades de Parseval)

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dado por $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y sea S el subespacio generado por un **conjunto ortogonal** $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$. Entonces, para todo $v \in S$ se tiene

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{|\langle v, v_j \rangle|^2}{\|v_j\|^2}$$

En particular, si $\{v_1, ..., v_n\}$ es **ortonormal** se obtiene

$$\boxed{\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle v, v_j \rangle|^2 \qquad \forall v \in S}$$

Espacios Vectoriales con Producto Interior

TEOREMA (Ortogonalización de Gram-Schmidt)

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ dado por $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y sea $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq V$ un conjunto **l.i.**. Defina, recursivamente, los siguientes vectores

- $$v_1 := x_1$$
- $$v_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, v_j\rangle}{\|v_j\|^2} v_j \qquad \forall\, k \in \{2, ..., n\}$$

Entonces $\{v_1, ..., v_n\}$ es **ortogonal** en V, y

$$\langle \{x_1, ..., x_n\} \rangle = \langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle$$

Corolario

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), y suponga que V es de **dimensión finita**. Entonces existe una **base ortonormal** de V.

Espacios Vectoriales con Producto Interior

Complemento Ortogonal

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ $(\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$, y sea $W \subseteq V$. Se define el **complemento ortogonal** (o simplemente **ortogonal**) de W, y se denota $W^{\perp}$, como el conjunto

$$W^{\perp} := \{ v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \quad \forall w \in W \}$$

TEOREMA

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ $(\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$, y suponga que V es de **dimensión finita**. Entonces

- $\{\theta\}^{\perp} = V$ y $V^{\perp} = \{\theta\}$
- $\forall\, W \subseteq V$: $W^{\perp}$ es un **subespacio** de V
- $\forall\, W \subseteq V$: $W^{\perp} = S^{\perp}$, donde $S := \langle W \rangle$ es el **subespacio generado** por W (**c.l. finitas de elementos de** W)
- $\forall$ **subespacio** S de V: $(S^{\perp})^{\perp} = S$ y $S \cap S^{\perp} = \{\theta\}$

TEOREMA (Descomposición Ortogonal)

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), y suponga que V es de **dimensión finita**. Entonces

- $\forall$ **subespacio** S de V:

$$\boxed{V = S \oplus S^{\perp}}$$

- $\forall\, W \subseteq V$:

$$\boxed{V = \langle W \rangle \oplus W^{\perp}}$$

Espacios Vectoriales con Producto Interior

Ejemplos

- En el **e.v. real** $V := \mathbb{R}^3$ con el **p.i.** usual, considere el plano

$$W := \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \quad ax + by + cz = d \}$$

Entonces $\quad \langle W \rangle = \begin{cases} W & \text{si} \quad d = 0 \\ \mathbb{R}^3 & \text{si} \quad d \neq 0 \end{cases}$

y luego $\quad W^\perp = \begin{cases} \{ t\,[a, b, c] : \quad t \in \mathbb{R} \} & \text{si} \quad d = 0 \\ \{ \theta \} & \text{si} \quad d \neq 0 \end{cases}$

Así, para $d = 0$ se obtiene

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp}$$

donde $W^\perp$ es la **recta** que pasa por el origen en la dirección $[a, b, c]$

Espacios Vectoriales con Producto Interior

Ejemplos ... (cont)

- En el **e.v. real** $V := \mathbb{R}^n$ con el **p.i.** usual, considere

$$S := \left\{ \vec{x} := [x_1, ..., x_n] \in V : \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$

Entonces, se obtiene

$$S^{\perp} = \{ \vec{x} \in V : \quad \vec{x} = k\,[1, ..., 1]\,,\ k \in \mathbb{R} \}$$

- En el **e.v. real** $V := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con el **p.i.** $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ dado por $\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}\,(B^t\, A) \quad \forall\, A,\ B \in V$, considere

$$S := \{ A \in V : \quad A = k\,\mathbf{I},\ k \in \mathbb{R} \}\,, \quad U := \{ A \in V \ :\ A = A^t \}$$

Entonces, se obtiene

$$S^{\perp} = \{ A \in V : \quad \mathrm{tr}\,(A) = 0 \}\,, \quad U^{\perp} := \{ A \in V \ :\ A = -\,A^t \}$$

Otro Ejemplo

- En el **e.v. real** $V := \mathcal{C}[-\pi,\pi]$ con el **p.i.** $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx \qquad \forall\, f,\ g \in V\,,$$

considere $W := \{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\} \cup \{\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n\} \subseteq V$, donde $\varphi_j(x) = \cos(j\,x)$ y $\psi_j(x) = \mathrm{sen}(j\,x)$ $\forall\, x\in[-\pi,\pi]$. Entonces

W es **ortogonal** en V

$$\langle\{\varphi_0\}\rangle^{\perp} = \left\{ f\in V : \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0\right\}$$

$V = \langle\{\varphi_0\}\rangle \oplus \langle\{\varphi_0\}\rangle^{\perp}$?

$V = \langle W\rangle \oplus W^{\perp}$?

Ultimo Ejemplo

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, y sean $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^m}$, los **productos interiores** usuales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Notar que

$$\langle\vec{y}, A\,\vec{x}\rangle_{\mathbb{R}^m} \;=\; \langle A^t\,\vec{y}, \vec{x}\rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall\,\vec{x}\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,\vec{y}\in\mathbb{R}^m$$

En $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, considere, respectivamente, los conjuntos

$$\mathcal{R}(A) \;:=\; \{\,A\vec{x}\in\mathbb{R}^m \;:\; \vec{x}\in\mathbb{R}^n\,\} \qquad \textbf{(Imagen de } A\textbf{)}$$

y

$$\mathcal{N}(A) \;:=\; \{\,\vec{x}\in\mathbb{R}^n \;:\; A\vec{x} = \theta\in\mathbb{R}^m\,\} \qquad \textbf{(Espacio Nulo de } A\textbf{)}$$

Entonces

$$\mathcal{R}(A)^{\perp} \;=\; \mathcal{N}(A^t) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{N}(A)^{\perp} \;=\; \mathcal{R}(A^t)$$

TEOREMA (Fundamental del Algebra Lineal)

Con las mismas notaciones del ejemplo anterior, se tiene

- $$\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^t)$$
- $$\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^t)$$

COROLARIO (Alternativa de Fredholm)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces el **sistema lineal** $A\vec{x} = \vec{y}$ tiene solución para todo $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ **o bien** $A^t\,\vec{z} = \theta$ tiene soluciones **no triviales**.

En el segundo caso

$$A\vec{x} = \vec{y} \quad \text{tiene soluciones} \quad \text{sí y sólo sí} \quad \vec{y} \in \mathcal{N}(A^t)^{\perp}$$

Espacios Vectoriales con Producto Interior

MEJOR APROXIMACION

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** de **dimensión finita** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), S un subespacio de V, y $v \in V$. Por el **Teorema de Descomposición Ortogonal** se sabe que existen **únicos** $v_S \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que

$$\boxed{v = v_S + w}$$

Notar que $\|v\|^2 = \|v_S\|^2 + \|w\|^2$.

En tal caso, v_S se llama la **mejor aproximación** de v por vectores de S. También se dice que v_S es la **proyección ortogonal** de v sobre S.

Explícitamente, si $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es una **base ortogonal** de S, entonces

$$\boxed{v_S = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, x_j\rangle}{\|x_j\|^2}\, x_j}$$

TEOREMA (Caracterización de la Mejor Aproximación)

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un **e.v.c.p.i.** de **dimensión finita** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), S un subespacio de V, y $v \in V$. Entonces:

$\boxed{v_S \in S \quad \textbf{es la m.a. de } v}$ **sí y sólo sí** $\boxed{(v - v_S) \in S^{\perp}}$

COROLARIO

Sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ **cualquier base** de S, y sea $v \in V$. Entonces, la **m.a.** de v por vectores de S está dada por $v_S := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, donde

$$\begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_1, x_n\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, x_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, x_n\rangle \end{bmatrix}$$