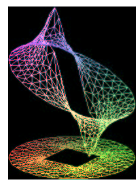
520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Segundo Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 12. APLICACIONES LINEALES

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Aplicaciones Lineales

Definición : Aplicación Lineal.

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. $T : V \longrightarrow W$ es una Aplicación Lineal si satisface las condiciones:

- $T(u+v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in V$.
- $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in V$.

Observaciones:

- Las aplicaciones (o transformaciones) lineales se denotan por letras mayúsculas T, L, A, etc. Si $V = W$, entonces la aplicación se llama Operador Lineal.
- Las condiciones de la definición son equivalentes con:

$$T(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot T(u) + \beta \cdot T(v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V.$$

Aplicaciones Lineales

Propiedades.

Si T y L son aplicaciones lineales de V en W entonces se tiene que:

- $T(\theta_V) = \theta_W$.
- $T(-u) = -T(u), \quad \forall u \in V$.
- $\lambda T + L$ es una aplicación lineal $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Si denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de aplicaciones lineales entre los espacios vectoriales de dimensión finita V y W, entonces las propiedades anteriores aseguran que $\mathcal{L}(V, W)$ es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de V en W.

Aplicaciones Lineales

Definición : Núcleo e Imagen de una aplicación lineal.

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, $T : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Se definen el Núcleo y la imagen de T como los conjuntos:

- $Ker(T) := \{u \in V : T(u) = \theta\}$.
- $Im(T) := \{w \in W : T(u) = w, u \in V\}$.

Observación

Naturalmente el núcleo (o kernel) de T es el subconjunto de V de los vectores cuya imagen es el vector nulo. En cambio la Imagen de T es el subconjunto de W correspondiente al recorrido de la aplicación lineal, también se escribe

$$Im(T) = \{T(u) : u \in V\}.$$

Aplicaciones Lineales

Teorema.

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, $T : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Se tiene:

- El Núcleo $Ker(T)$ es un subespacio de V.
- La imagen $Im(T)$ es un subespacio de W.

Definición. Nulidad y Rango.

Dada una aplicación lineal $T : V \longrightarrow W$ se llama nulidad de T a la dimensión del $Ker(T)$ y se llama rango de T a la dimensión de $Im(T)$. Se denotan por:

$$N(T) = dim(Ker(T)), \qquad R(T) = dim(Im(T))$$

respectivamente.

Teorema.

Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base del espacio vectorial V, entonces la aplicación lineal $T : V \longrightarrow W$ está definida por el valor de T en los vectores de la base. Es decir, por $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$.

Teorema.

Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base del espacio vectorial V y $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ son vectores del espacio vectorial W, entonces existe una única aplicación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i, \quad i = 1, 2, ..., n$.

Corolario.

Si T y L son aplicaciones lineales de V en W que coinciden en una base de V, entonces $T = L$.

Teorema.

Si $T : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces T es inyectiva si y sólo si $Ker(T) = \{\theta\}$.

Observación.

Si $T : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal inyectiva y $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ es linealmente independiente, entonces $\{T(u_1), T(u_2), ..., T(u_m)\}$ es linealmente independiente.

Teorema de las dimensiones.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Si $T : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces $N(T) + R(T) = dim(V)$.

Aplicaciones Lineales

Transformaciones matriciales.

Una relación importante es la que se tiene entre las matrices y las aplicaciones lineales.

En primer lugar, dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se define una aplicación lineal T mediante la multiplicación por la matriz A. Esto es

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto T(x) = A \cdot x.$$

Definición. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ llamaremos espacio de filas de A al subespacio generado por los vectores filas de A. Es decir, por los vectores:

$$(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), ..., (a_{m1}, a_{m2}, ...a_{mn}).$$

Aplicaciones Lineales

Llamaremos espacio de columnas de A al subespacio generado por los vectores columnas de A. Es decir por

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Lema. Los vectores no nulos, en la forma escalonada de A, constituyen una base para el espacio filas de A.

El espacio de las columnas de A es el mismo que el espacio filas de A^t, que, de acuerdo con el lema anterior, es generado por los vectores no nulos de la matriz escalonada de A^t.

Teorema.

Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es la aplicación lineal obtenida de la multiplicación por una matriz A, entonces $Im(T) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ es el espacio de columnas de A.

Teorema.

El espacio de filas y el espacio de columnas de una matriz A tienen la misma dimensión.

Observación. Del teorema anterior se tiene que si T es la multiplicación por una matriz A, entonces $dim(Im(T))$ es el números de filas no nulas de una forma escalonada de A.

Definición: matriz asociada a una aplicación lineal.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, $B_V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $B_W = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ bases de V y W respectivamente y $T : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal, entonces

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\
T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\
\vdots &= \vdots \\
T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m
\end{aligned}$$

LLamaremos matriz asociada a T con respecto a las bases B_V y B_W a la matriz cuyas columnas son las coordenadas de $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)$ en la base B_W.

Aplicaciones Lineales

Notación: La matriz asociada a T se denota por:

$$[T]_{B_V}^{B_W} \quad \text{o por} \quad [T]_{B_V B_W},$$

es decir,

$$[T]_{B_V}^{B_W} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para la aplicación lineal identica $I : V \longrightarrow V$ y B la base canónica del espacio V de dimensión n la matriz asociada es

$$[I]_{BB} = I_n.$$

Observaciones.

Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Se tiene:

- Si B_V, B_W son las bases canónicas de $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$, entonces T es la multiplicación por $A = [T]_{B_V}^{B_W}$. Es decir,

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad Tu = A \cdot u.$$

- Si B_V, B_W son bases de V y W respectivamente, entonces T se puede definir a partir de $[T]_{B_V}^{B_W}$ como sigue

$$[T]_{B_V}^{B_W} \cdot [u]_{B_V} = [T(u)]_{B_W}.$$

Teorema.

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, B_V y B_W bases de V y W respectivamente. Si $T, L : V \longrightarrow W$ son aplicaciones lineales, entonces

- $[T + L]_{B_V B_W} = [T]_{B_V B_W} + [L]_{B_V B_W}$.
- $[\lambda T]_{B_V B_W} = \lambda [T]_{B_V B_W}$.

Teorema.

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, B_V base de V y $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal. Si T es biyectiva, entonces $[T]_{B_V}^{B_V} = [T]_{B_V}$ es una matriz inversible y

$$[T]_{B_V}^{-1} = [T^{-1}]_{B_V}.$$

Definición: Isomorfismo.

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, una aplicación lineal $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo de V en W si T es biyectiva. Se dice que V y W son isomorfos.

Teorema.

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Si $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, entonces $\mathcal{L}(V, W)$ es isomorfo con $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Definición: Matriz de transición.

Sean $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $B' = \{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ dos bases del espacio vectorial V, se llama matriz de transición o de paso de B a B' a la matriz P, tal que la j-ésima columna de P es el vector de coordenadas de v_j en la base B'. Es decir,

$$P := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = [v_j]_{B'}, \; j = 1, 2, ..., n.$$

También se dice que P es la matriz de paso de la base antigua B a la base nueva B'.

Observación. Es fácil ver que $P = [I]_B^{B'}$.

Teorema. Si P es la matriz de transición de una base B a una base B' del espacio vectorial de dimensión finita V, entonces para $x \in V$ las coordenadas de x en ambas bases se relacionan por:

$$[x]_{B'} = P \cdot [x]_B.$$

Teorema. Si P es la matriz de transición de una base B a una base B' del espacio vectorial de dimensión finita V, entonces P es inversible y su inversa P^{-1} es la matriz de transición de B' a B.

Teorema. Si P es la matriz de transición de una base ortonormal B a una base ortonormal B' en un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces

$$P^{-1} = P^t.$$

La matriz asociada a una aplicación lineal depende de las bases consideradas para los espacios vectoriales, la matriz cambia cuando se cambian las bases. La relación es dada en el siguiente teorema.

Teorema. Si $T : V \longrightarrow V$ es una operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita y P es la matriz de transición de la base B' a la base B, entonces

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P.$$

Definición. Si A y B son dos matrices cuadradas, entonces se dice que B es semejante a A si existe una matriz inversible P tal que $B = P^{-1}AP$. Naturalmente, en este caso A es semejante con B; por lo que, se dice que A y B son semejantes.

De acuerdo a esta definición, el teorema anterior afirma que si dos matrices representan al operador lineal $T : V \longrightarrow V$, con respecto a bases diferentes, entonces las matrices son semejantes.