UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 3
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142) (26/04/2004).

P1. a) Sea $a = cis((\frac{\pi}{6})$.

i) Calcule el número complejo : $z = (1 + \sqrt{3i})^5 a^{17}$. **(8 Ptos.)**

ii) Pruebe que $Re(z) = 0$. **(4 Ptos.)**

b) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $w^5 = 32$. **(8 Ptos.)**

<u>Solución</u>

ai) Observar que :

- $(1 + \sqrt{3}i)^5 = 2^5 cis^5(\frac{\pi}{3}) = 32cis(\frac{5\pi}{3})$. **(2 Ptos.)**
- $z = 32cis(\frac{5\pi}{3})cis(\frac{17\pi}{6}) = 32cis(\frac{27\pi}{6})$ **(2 Ptos.)**

aii) $z = 32cis(4\pi + \frac{\pi}{2}) = 32cis(\frac{\pi}{2}) = 32i + 0$ **(4 Ptos.)**

b) Observar que :

- $w^5 = 2^5 cis(0)$ **(1 Ptos.)**
- $w^5 = 2^5 cis(0) \Leftrightarrow w \in \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\},\ w_k = 2cis(\frac{2k\pi}{5}),\quad k = 0, 1, 2, 3, 4$ **(2 Ptos.)**
- $w_0 = 2,\ w_1 = cis(\frac{2\pi}{5}),\ w_2 = 2cis(\frac{4\pi}{5})$ **(3 Ptos.)**
- $w_3 = 2cis(\frac{6\pi}{5}) = 2cis(2\pi - \frac{4\pi}{5}) = \overline{w_2}$ **(1 Pto.)**
- $w_4 = 2cis(\frac{8\pi}{5}) = 2cis(2\pi - \frac{2\pi}{5}) = \overline{w_1}$ **(1 Pto.)**

P2. a) Encuentre las raíces y multiplicidad del polinomio:

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4,$$

si se sabe que $p(x)$ es divisible por $x - 1$. **(10 Ptos.)**

b) Sea $q(x) = a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que a_5, a_3, a_1 y a_0 son reales positivos.

i) Pruebe que $q(x)$ tiene sólo una raíz real x_0. **(5 Ptos.)**

ii) Muestre que si $a_0 < (a_1 + a_3 + a_5)$, entonces $x_0 \in [-1, 0]$. **(5 Ptos.)**

Solución

a) $p(x)$ es divisible por $x - 1 \iff x = 1$ es raíz de $p(x)$. **(1 Pto.)**

Luego al dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1] & 1 & -2 & 5 & -8 & 4 \\ & & 1 & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & -4 & [0] \end{array}$$

Así, $p(x) = (x - 1)(x^3 - x^2 + 4x - 4)$. **(2 Ptos.)**

Ahora se debe encontrar una raíz del polinomio $q(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$, por ejemplo, evaluando las posibles raíces racionales de $q(x)$ que son: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Así, se tiene que $q(1) = 0$. Luego, 1 es raíz de $q(x)$. **(2 Ptos.)**

Al dividir $q(x)$ por $x - 1$ se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1] & 1 & -1 & 4 & -4 \\ & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & [0] \end{array}$$

Por lo tanto, $q(x) = (x - 1)(x^2 + 4)$. **(2 Ptos.)**

Pero, $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$, en consecuencia las raíces de $x^2 + 4$ son $2i$ y $-2i$. **(2 Ptos.)**

En resumen, $p(x) = (x - 1)^2(x^2 + 4)$, y por lo tanto, sus raíces son: 1 con multiplicidad 2, $2i$ con multiplicidad 1 y $-2i$ también con multiplicidad 1. **(1 Pto.)**

b)

i) Usando el teorema de Descartes tenemos que:
$q(x)$ no tiene cambio de signos en los coeficientes, luego no tiene raíces reales positivas. **(2 Ptos.)**

Por otro lado, $q(-x) = -a_5x^5 - a_3x^3 - a_1x + a_0$ tiene sólo un cambio de signo al pasar del valor negativo $-a_1$ al valor positivo a_0, luego $q(x)$ tiene una raíz real negativa. **(2 Ptos.)**

Por lo tanto, $q(x)$ tiene sólo una raíz real que es negativa, y las cuatro otras raíces son complejas (dos complejas y sus respectivas conjugadas). **(1 Pto.)**

ii) $q(0) = a_0$, el cual por hipótesis es positivo. **(2 Ptos.)**

$q(-1) = -a_5 - a_3 - a_1 + a_0$ y por hipótesis $a_0 < (a_1 + a_3 + a_5)$, y como
$a_0 < (a_1 + a_3 + a_5) \iff -a_5 - a_3 - a_1 + a_0 < 0$. Luego, $q(-1)$ es negativo.

(2 Ptos.)

Por lo tanto, por el teorema del valor intermedio o el método de la bisección, se tiene que existe $x_0 \in]0, 1[$, y por lo tanto $x_0 \in [0, 1]$, tal que $q(x_0) = 0$.

(1 Pto.)

P3.

a) Descomponga en suma de fracciones parciales la siguiente función racional :

$$\frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 6}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1)}$$

(10 Ptos.)

b) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = (b_{ij}) \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ donde los coeficientes de B están definidos por :

$$b_{ij} = i + j, \qquad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Determine la matriz $X \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ tal que $B - \frac{1}{3}X = A^t A$ **(10 Ptos.)**

Solución

a) $$\frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 6}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 6}{(x-1)^2(x^2+1)}$$ **(1,0 Pto.)**

$$\frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 6}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3 x + A_4}{x^2+1}$$ **(3,0 Ptos.)**

$$3x^3 - 10x^2 + 9x - 6 = A_1(x-1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (A_3 x + A_4)(x-1)^2$$

(1,0 Pto.)

Reordenando términos :

$$\begin{aligned} 3x^3 - 10x^2 + 9x - 6 &= (A_1 + A_3)x^3 + (-A_1 + A_2 - 2A_3 + A_4)x^2 + \\ &\quad (A_1 + A_3 - 2A_4)x + (-A_1 + A_2 + A_4) \end{aligned}$$

Por igualdad de Polinomios se tiene:

$$\begin{array}{rrrrcr} A_1 & & +A_3 & & = & 3 \\ -A_1 & +A_2 & -2A_3 & +A_4 & = & -10 \\ A_1 & & +A_3 & -2A_4 & = & 9 \\ -A_1 & +A_2 & & +A_4 & = & -6 \end{array}$$

Resolviendo el sistema, se tiene

$A_4 = -3, \quad A_2 = -2, \quad A_1 = 1 \;\; y \;\; A_3 = 2$ **(4,0 Ptos.)**

Luego la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 6}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2x-3}{x^2+1}$$ $(\mathbf{1,0Pto}.)$

b) La matriz B definida por $b_{ij} = i + j, \ \ \forall i, j \in \{1, 2, 3, \}$ es

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(2,0 Ptos.)

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(\mathbf{1,0\ Pto}.)$

y $A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $(\mathbf{2,0\ Ptos}.)$

Luego : $B - \frac{1}{3}X = A^tA$ es :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}X &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
-\frac{1}{3}X &= \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -3 & -3 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\
X &= (-3)\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -3 & -3 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{4,0\ Ptos}.) \\
X &= \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 9 & 9 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{1,0\ Ptos}.)
\end{aligned}$$