UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Laboratorio 4
Cuadrados mínimos

El objetivo de este laboratorio es aprender técnicas de cuadrados mínimos para la determinación de parámetros en modelos.

1. Considere el problema de ajustar por cuadrados mínimos un polinomio de grado n a un conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_m, y_m)$

   (a) Haga un programa *function* que construya la matriz rectangular del problema para valores cualesquiera de m y n.
   Sugerencia: A fin de poder evaluar más fácilmente el polinomio obtenido con el comando MATLAB *polyval* (vea como se utiliza este comando con el *help* de MATLAB), resulta conveniente acomodar los coeficientes del polinomio en un vector c de longitud $n+1$ tal que

   $$p(x) = c_1 x^n + \cdots c_n x + c_{n+1},$$

   Las entradas del programa deberán ser el conjunto de puntos (x_i, y_i), $i = 0, \cdots, m$ y n.

   (b) Para $t_i = ih$, $i = 0, \cdots, m$, donde $h = \frac{1}{m}$ verifique que el número de condición de la matriz $\mathbf{B}$ del sistema de ecuaciones normales correspondiente crece significativamente con n.

   (c) Fije los valores $m = 10$ y $n = 5$ y haga un programa que realice lo siguiente:

      i. Calcule la factorización $\mathbf{QR}$ de la matriz $\mathbf{A}$ mediante el comando *qr*.
      ii. Verifique que las columnas de $\mathbf{Q}$ son vectores ortonormales.
      iii. Determine el rango de $\mathbf{R}$ y observe que la matriz es rectangular y triangular superior.
      iv. Construya a partir de $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ las matrices $\mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de la factorización reducida $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$. Verifique que se cumple esta relación.
      v. Verifique que $\mathrm{cond}_2(\mathbf{R}) = \sqrt{\mathrm{cond}_2(\mathbf{B})}$, donde $\mathbf{B}$ es la matriz del sistema de ecuaciones normales calculada en (b).
      vi. Compare la matriz $\mathbf{R}$ de la factorización de Cholesky de $\mathbf{B}$ con la matriz $\mathbf{R}_1$. Indique y justifique lo que observe.

   (d) Para cada una de las siguientes funciones, determine el polinomio de grado 5 que mejor ajusta sus valores en los puntos t_i anteriores, para $m = 10$:

      i. $f(t) = \mathrm{e}^t$;
      ii. $g(t) = \operatorname{sen} \pi t$, con errores aleatorios de tamaño máximo 0.05.

   Dibuje en cada caso en un mismo grafico, los valores ajustados, el polinomio obtenido y la función dada (en el caso de $g(t)$, sin incluir los errores aleatorios).

   (e) Suponga que para algún $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ el polinomio de grado n que se desea ajustar carece de esta potencia, es decir,

   $$p(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \cdots + c_{n-i} x^{i+1} + c_{n-i+2} x^{i-1} + c_{n+1}$$

   Para este polinomio repita (1a) y (1d).

2. El archivo `CO2.mat` (bájelo de la página web del curso o solicitelo al ayudante) contiene valores promedios mensuales de la concentración de dióxido de carbono en el aire (en partes por millón), obtenidos a partir de mediciones realizadas en una estación atmósferica entre enero de 1998 y diciembre de 2001.

   Esta concentración puede modelarse mediante la expresión

   $$c(t) = A + Be^{\alpha t} + C\cos\frac{2\pi t}{12} + D\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi t}{12},$$

   donde t es el tiempo medido en meses ($t = 1$ para enero del 93, $t = 2$ para febrero, etc.).

   El término $Be^{\alpha t}$ indica una tendencia creciente de esta concentración (proveniente del consumo creciente de hidrocarburos), con una constante $\alpha = 0.0037$ que se ha determinado por otros medios. Por su parte, los términos $C\cos\frac{2\pi t}{12} + D\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi t}{12}$ describen el comportamiento cíclico (estacional) de esa concentración.

   (a) Determine los valores de las constantes A, B, C y D que mejor ajustan el modelo anterior a la tabla dada.
   (b) Dibuje en un mismo grafico los valores medidos y el modelo ajustado.
   (c) Utilice el modelo para estimar la concentración de CO_2 del mes actual.

3. El archivo `circulo.mat` (bájelo de la página web del curso o solicitelo al ayudante) contiene valores medidos x_i e y_i (en un sistema de coordenadas rectangulares) del plano de una pieza mecánica circular.

   (a) Determine el radio de la pieza a partir de esas mediciones.
   (b) Dibuje en un mismo grafico los valores medidos y la circunferencia obtenida.

   Sugerencia: Sean r el radio de la circunferencia y (a, b) las coordenadas de su centro, ambos a determinar. Para cada punto (x_i, y_i) de la circunferencia se tiene que

   $$(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = r^2$$

   y, por lo tanto,

   $$2x_i a + 2y_i b + (r^2 - a^2 - b^2) = x_i^2 + y_i^2.$$

   Sea $c = (r^2 - a^2 - b^2)$. Se trata de determinar los valores de a, b y c que resuelven el problema en el sentido de los cuadrados mínimos.

4. El archivo `rango.mat` (bájelo de la página web del curso o solicitelo al ayudante) contiene valores medidos de dos magnitudes t e y. Se quiere modelar la dependencia de y respecto de t del siguiente modo:

   $$y(t) = A + B\,\mathrm{sen}^2\,\pi t + C\cos^2\pi t.$$

   (a) Determine valores de los parámetros A, B y C para que la curva ajuste las mediciones.
   (b) Busque una explicación a la advertencia que da MATLAB y modifique el modelo para evitar eso.
   (c) Dibuje en un mismo grafico los valores medidos y el modelo ajustado.

GBG/MCP/RRS/MSC
http://www.ing-mat.udec.cl/pregrado/asignaturas/521230/
10/09/03