UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía N°6: Problemas de Valores de Contorno (P.V.C.)

Cálculo Numérico 521230, 2017-2

Nota: Esta guía complementa la Guía de Laboratorio sobre Problema de Valores de Contorno.

Diferencias Finitas

1. Considere los P.V.C. siguientes

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y''(x) & = & -2, \quad x \in [0,1] \\ y(0) & = & 0, \\ y(1) & = & 1, \end{array}\right. \qquad \text{cuya solución exacta es } y(x) = x^2.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y''(x) + 2y'(x) - y(x) & = & -2\,\mathrm{sen}(x), \quad x \in [0,\pi] \\ y(0) & = & 1, \\ y(\pi) & = & -1, \end{array}\right. \qquad \text{cuya solución exacta es } y(x) = \cos(x).$$

   a) Para cada uno de ellos, considerando un tamaño de paso $h = 1/4$, realizar lo siguiente:
      - Escribir el sistema de ecuaciones $A\vec{y} = \vec{b}$ asociado al esquema de Diferencias Finitas. **Indicación:** Ver Guía de Laboratorio N°8.
      - Resolver el sistema $A\vec{y} = \vec{b}$ y obtener la aproximación del la solución del P.V.C.. **Indicación:** El sistema lo puede resolver con el computador.
      - Dibujar, en un mismo gráfico, la solución exacta y la aproximación obtenida.

   b) En el Laboratorio N°8 se creó una función en MATLAB que aproxima la solución de este tipo de P.V.C. por Diferencias Finitas. Utilice esta función para comprobar los resultados obtenidos en el ejercicio anterior. Además, resuelva con $h = 1/100$.

Elementos Finitos Finitos

1. Considere los P.V.C. siguientes

$$\left\{\begin{array}{rcl} -u''(x) & = & -2, \quad x \in [0,1] \\ u(0) & = & 0, \\ u(1) & = & 1, \end{array}\right. \qquad \text{cuya solución exacta es } u(x) = x^2.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -u''(x) + 2u(x) & = & 3\cos(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) & = & 1, \\ u(\pi) & = & -1, \end{array}\right. \qquad \text{cuya solución exacta es } u(x) = \cos(x).$$

   a) Realizar un cambio de variable apropiado para trasformar cada ecuación en un P.V.C. con condiciones de contorno homogéneas. **Indicación:** Ver Ejercicio 5 de la Guía de Laboratorio N°8.

   b) Para cada una de los P.V.C. obtenidos, realizar lo siguiente considerando un tamaño de paso $h = 1/4$:
      - Escribir el sistema de ecuaciones $A\vec{y} = \vec{b}$ asociado al esquema de Elementos Finitos. **Indicación:** Ver Guía de Laboratorio N°8.
      - Resolver el sistema $A\vec{y} = \vec{b}$ y obtener la aproximación del la solución del P.V.C.. **Indicación:** El sistema lo puede resolver con el computador.
      - Dibujar, en un mismo gráfico, la solución exacta y la aproximación obtenida.

   c) En el Laboratorio N°8 se creó una función en MATLAB que aproxima la solución de este tipo de P.V.C. por Elementos Finitos. Utilice esta función para comprobar los resultados obtenidos en el ejercicio anterior. Además, resuelva con $h = 1/100$.

2. Considere la ecuación con condiciones de contorno mixtas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -u''(x)+cu(x) & = & f(x) \quad a<x<b \\ u(a) & = & 0 \\ u'(b) & = & \beta \end{array}\right.$$

donde las constantes c y β y el término fuente f son dados.

Para aproximar u, utilizaremos el Método de Elementos Finitos y procedemos de la siguiente manera. Primero multiplicamos la ecuación por una función $v(x)$ tal que $v(a)=0$, e integramos sobre el intervalo (a,b) con respecto a la variable x:

$$-\int_a^b u''(x)v(x)\,dx + c\int_a^b u(x)v(x)\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx.$$

Integrando por partes el primer término vemos que

$$\begin{aligned} -\int_a^b u''(x)v(x)\,dx &= \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx \ - u'(x)v(x)\Big|_a^b \\ &= \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx \ - u'(b)v(b)+u'(a)v(a) = \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx \ - \beta v(b), \end{aligned}$$

ya que $v(a)$ y $u'(b)=0$. Entonces, sustituyendo esto en la expresión anterior se tiene que la solución u satisface

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,dx \ - \beta v(b) + c\int_a^b u(x)v(x)\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx.$$

Como β es conocidos, movemos el término $\beta v(b)$ a la derecha, lo que conduce a la **formulación débil**:

Hallar $u:(a,b)\to\mathbb{R}$ *tal que* $u(a)=0$ *y que satisfaga*

(1)
$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,dx \ + c\int_a^b u(x)v(x)\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx + \beta v(b).$$

para toda $v:(a,b)\to\mathbb{R}$ *tal que* $v(a)=0$.

Para $h=(b-a)/n$ considere la partición del intervalo $[a,b]$: $x_i=a+ih$, $i=0,1,\ldots,n$. Sea V_h el espacio generado por la funciones techo ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_{n-1} y ϕ_n que satisfacen

$$\phi_i(x_j)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{si } i=j, \\ 0, & \text{si } i\neq j. \end{array}\right.$$

Estas funciones están definidas por

$$\phi_i(x):=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x\in[x_{i-1},x_i], \\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{si } x\in[x_i,x_{i+1}], \\ 0 & \text{si } x\notin[x_{i-1},x_{i+1}], \end{array}\right.$$

para $i=1,2,\ldots n-1$, y

$$\phi_n(x):=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & \text{si } x\in[x_{n-1},x_n], \\ 0 & \text{si } x\notin[x_{n-1},x_n], \end{array}\right.$$

Entonces **formulación débil discreta** asociada a (1) es:

Hallar $u_h\in V_h$ *tal que*

(2)
$$\int_a^b u_h'(x)v_h'(x)\,dx \ + c\int_a^b u_h(x)v_h(x)\,dx = \int_a^b f(x)v_h(x)\,dx + \beta v_h(b).$$

donde $u_h(x)$ es una aproximación de $u(x)$. Como $u_h\in V_h$, entonces ésta puede representarse como

$$u_h(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\phi_j(x), \quad \text{con } \alpha_j=u_h(x_j).$$

Usando esta expresión de u_h en la formulación débil discreta y tomando $v_h=\phi_i$, $i=1,\ldots,n$, por la linealidad del problema se llega a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b \phi_j'(x)\phi_i'(x)\,dx + c\int_a^b \phi_j(x)\phi_i(x)\,dx\right)\alpha_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x)\,dx, +\beta\phi_i(b) \quad i=1,\ldots,n.$$

Éste es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $\alpha_i = u_h(x_i)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n + \beta \end{pmatrix}, \tag{3}$$

donde

$$a_i = \int_a^b \left[\phi_i'(x)\right]^2 \, dx + c \int_a^b \left[\phi_i(x)\right]^2 \, dx, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$b_i = \int_a^b \phi_{i-1}'(x)\phi_i'(x) \, dx + c \int_a^b \phi_{i-1}(x)\phi_i(x) \, dx, \quad i = 2, \ldots, n,$$

$$f_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x) \, dx, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Como se vio en el Laboratorio N° 8,

$$a_i = \frac{2}{h} + c\frac{2h}{3}, \quad b_i = -\frac{1}{h} + c\frac{h}{6} \quad \text{y} \quad f_i \approx \frac{h}{2}(f(\hat{x}_i) + f(\hat{x}_{i+1})) \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

donde $\hat{x}_j := \dfrac{x_{j-1} + x_j}{2}$. Notemos que falta calcular los valores asociados a $i = n$. Entonces,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_a^b \left[\phi_n'(x)\right]^2 \, dx + c \int_a^b \left[\phi_n(x)\right]^2 \, dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[\phi_n'(x)\right]^2 \, dx + c \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[\phi_n(x)\right]^2 \, dx = \frac{1}{h} + c\frac{h}{3}, \\ b_n &= \int_a^b \phi_{n-1}'(x)\phi_n'(x) \, dx + c \int_a^b \phi_{n-1}(x)\phi_n(x) \, dx \\ &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi_{n-1}'(x)\phi_n'(x) \, dx + c \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi_{n-1}(x)\phi_n(x) \, dx = -\frac{1}{h} + c\frac{h}{6}, \\ f_n &= \int_a^b f(x)\phi_n(x) \, dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\phi_n(x) \, dx \approx \frac{h}{2} f(\hat{x}_n). \end{aligned}$$

Considere la siguiente ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -u''(x) + 2u(x) & = & 3\,\mathrm{sen}(x), & x \in [0, \pi] \\ u(0) & = & 0 & , \\ u'(\pi) & = & -1 & , \end{array} \right. \qquad \text{cuya solución exacta es } u(x) = \mathrm{sen}(x). \tag{4}$$

a) Considere $h = 1/4$. Escriba el sistema (3) para este caso y obetenga los valores de α_0, α_1, α_2, α_3 y α_4. Además, grafique la solución obtenida y la solución exacta.

b) Escriba una función en MATLAB que resuelva (3). Las entradas de esta función deben ser los parámetros c, β, f (definida como una función inline o a través de otra función MATLAB), a, b, y h; y la salida debe ser el vector $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n)$. Su función además debe graficar la solución obtenida.

c) Escriba un rutero que realice lo siguiente:
- Llame a la función anterior para resolver la ecuación (4) considerando $h = 1/4$ y compare con lo obtenido en el ejercicio *a*).
- Llame a la función anterior para resolver la ecuación (4) considerando $h = 1/100$.