

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA 522115  
Listado 6 (Polinomios)

1. Sean  $p, q$  polinomios a coeficientes reales tales que  $\text{gr}(p) = n$  y  $\text{gr}(q) = m$ . Analice la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando adecuadamente.
  - i) El recorrido de  $p(x)$  es  $\mathbb{R}$ .
  - ii) Si  $\text{gr}(p)=2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $p(x)$  es una función par.
  - iii) Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\text{gr}(\alpha p)=\text{gr}(p)$ .
  - iv) Para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $p(x) \geq 0$ .
  - v) La compuesta  $p \circ q$  es una función polinomial de grado  $nm$ .
2. Determine el grado del polinomio  $p(x) = 6x^5 + (3x^2 - 2)^4(2x - 1)^3$ .
3. Determine un polinomio  $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  de grado menor o igual a 3, tal que:
  - i)  $p(0) = 0$ ,  $p(1) = 1$ ,  $p(2) = 4$ ,  $p(3) = 10$ ,
  - ii)  $p(-1) = 7$ ,  $p(0) = 3$ ,  $p(1) = 1$ ,  $p(2) = 1$ .
4. Descomponer  $x^6 + 1$  en polinomios irreducibles: i) En  $\mathbb{R}$ .    ii) En  $\mathbb{C}$ .
5. Efectúe las divisiones  $p(x) : q(x)$  en cada caso, identificando el cociente y el resto de la división.
  - a)  $p(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + 22x$ ,  $q(x) = x^2 - 4x + 1$ .
  - b)  $p(x) = 2x^4 - 15x^2 + 8x - 3$ ,  $q(x) = x + 3$ .
  - c)  $p(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 7x - 6$ ,  $q(x) = x^2 + 3x + 2$ .
  - d)  $p(x) = 4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ ,  $q(x) = 4x^3 - 3x - 1$ .
6. Sin efectuar la división, demuestre que  $2x^4 - 7x^3 - 2x + 13x + 6$  es divisible por  $x^2 - 5x + 6$ .
7. Dividir los siguientes polinomios por el monomio  $(x - c)$ , donde el valor  $c$  se indica en cada caso. De acuerdo al valor del residuo, decidir si el valor de  $c$  corresponde o no a una raíz del polinomio.
  - a)  $6x^3 + 17x^2 - 5x - 6$ ,  $c = -1/2$ ,    d)  $x^4 - 20x^2 - 10x - 50$ ,  $c = 5$ ,
  - b)  $6x^3 + 17x^2 - 5x - 6$ ,  $c = 2/3$ ,    e)  $x^3 - 8x^2 + x + 42$ ,  $c = 5$ .
  - c)  $6x^3 + 17x^2 - 5x - 6$ ,  $c = -3$ ,    f)  $x^3 - 2x^2 + x + 2$ ,  $c = 2$ .

8. Determinar el valor de la constante  $k$  para que los siguientes polinomios tengan como raíz el valor  $c$  indicado.
- a)  $4x^3 - 4x^2 + kx + 4, \quad c = -1,$       c)  $3x^3 + kx^2 - 7x + 6, \quad c = -3,$   
b)  $6x^3 + 13x^2 + 2k - 40, \quad c = 4,$       d)  $5x^3 + k^2x^2 + 2kx - 3, \quad c = -1.$
9. Para cada uno de los polinomios siguientes encuentre todas sus raíces y multiplicidades si  $x_0$  es una raíz dada.
- a)  $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2, \quad x_0 = -1,$   
b)  $p(x) = x^3 - 13x + 12, \quad x_0 = 3,$   
c)  $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12, \quad x_0 = -2,$   
d)  $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2, \quad x_0 = 1$  con multiplicidad 2,  
e)  $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad x_0 = i,$   
f)  $p(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 6, \quad x_0 = 1 + i,$   
g)  $p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1, \quad x_0 = -1$  con multiplicidad 2,
10. Probar que si un polinomio es divisible por  $(ax - b)$ , entonces también resulta divisible por  $(x - \frac{b}{a})$ .
11. Para los siguientes polinomios diga cuál es su grado y determine sus raíces con sus multiplicidades.
- a)  $p(x) = (x + 4)^5(x + 2)^2(x - 3)^3,$       d)  $p(x) = 5(x + 1)^2(x - 1)^3,$   
b)  $p(x) = (x + 1)^5(x + 2)^4(x + 3)^2,$       e)  $p(x) = 2(x^2 - 1)^3(x^2 - 4)^4,$   
c)  $p(x) = (3x + 6)^3(2x + 4)^6,$       f)  $p(x) = 3(x^2 + 1)^2(x^2 - 3x + 2)^4.$
12. Sea  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  un polinomio a coeficientes reales, de grado  $n$ , y sean  $x_1, \dots, x_n$  las raíces de  $p$ . Determine las raíces del polinomio  $q(x) = \sum_{i=0}^n a_i (\lambda x)^i$ , con  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ .
13. Se sabe que  $1 + i$  es una raíz de  $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$ . Determine las otras raíces de  $p(x)$ .
14. La posición de una partícula al cabo de  $t$  segundos es  $P(t) = 2t^3 - 11t^2 + 13t - 1$  y su posición al cabo de 1 segundo es igual a 3. ¿En qué otros instantes la posición vuelve a tener el valor 3?

---

JAL

Primer Semestre de 2005.