UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 2 (2a parte)
Cálculo (521287)
Matemática III (521296)

Problema 1. Usando integral doble, calcule el área encerrada por las curvas:
$y^2 = x,\ x + y = 2$

(20 puntos)

SOLUCION

$$y^2 = x,\, x + y = 2$$

Puntos de intersección entre las dos curvas:

$$y^2 = 2 - y$$
$$\Longrightarrow \quad y^2 + y - 2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad (y+2)(y-1) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad y = -2,\, y = 1$$

Así el área queda dada por:

$$A = \int_{-2}^{1}\int_{y^2}^{2-y} dxdy = \int_{-2}^{1} x\Big|_{y^2}^{2-y} dy$$
$$= \int_{-2}^{1}(2 - y - y^2)dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}$$
$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right)$$
$$= 8 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{9}{2}$$

Problema 2. Exprese el volumen del sólido acotado por las superficies:
$y - x^2 = 1,\, y + 3z = 5,\ z = 0,$ a través de una integral triple y obtenga su valor.

(25 puntos)

SOLUCION

$$y - x^2 = 1, \; y + 3z = 5, \; z = 0$$

Representación del volumen a través de una integral triple.

Para establecer la región en el plano xy, intersectamos $y = x^2 + 1$ con $y = 5$

$$\Longrightarrow x^2 + 1 = 5 \;\Rightarrow x = \pm 2$$

Así el volumen queda dado por:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2}\int_{x^2+1}^{5}\int_{0}^{5/3-y/3} dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{x^2+1}^{5} z\Big|_{0}^{5/3-y/3} dydx = \int_{2}^{-2}\int_{x^2+1}^{5}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}y\right) dydx \\
&= \int_{-2}^{2}\left(\frac{5}{3}y - \frac{1}{6}y^2\right)\Big|_{x^2+1}^{5} dx \\
&= \int_{2}^{-2}\left[\left(\frac{25}{3} - \frac{25}{6}\right) - \left(\frac{5}{3}(x^2+1) - \frac{(x^2+1)^2}{6}\right)\right] dx \\
&= \int_{2}^{-2}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^4\right) dx = \\
&= \left(\frac{8}{3}x - \frac{4}{9}x^3 + \frac{1}{30}x^5\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{256}{45}
\end{aligned}$$

Problema 3. Analice la convergencia de las sucesiones:

$$\left\{\frac{ne^n}{n^2+2}\right\}, \; \left\{\frac{(-\pi)^n}{4^n}\right\}$$

(15 puntos)

SOLUCION

- $\left\{\frac{ne^n}{n^2+1}\right\}$

  Haciendo $f(x) = \frac{xe^x}{x^2+1}$, $x \geq 1$

Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x}{x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Aplicando L'Hopital se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + xe^x}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Nuevamente L'Hopital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) = & \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^x + xe^x}{2} \\ = & \lim_{x\to\infty} \frac{2e^x + xe^x}{2} = \infty \end{aligned}$$

Luego

$$\left\{\frac{ne^n}{n^2+1}\right\} \text{ diverge}$$

- $\left\{\frac{(-\pi)^n}{4^n}\right\} = \left\{\left(-\frac{\pi}{4}\right)^n\right\} = \{r^n\}$

  Así $r = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow |r| = \frac{\pi}{4} < 1$

  Entonces

  $$\left\{\frac{-\pi)^n}{4^n}\right\} \text{ converge a cero}$$

  .

28 de Noviembre de 2005

ADP/cln.