UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142

PRACTICA 19: *Subespacios Intersección y Suma.*

I. **Problema 1.**
Considere los siguientes subconjuntos del espacio vectorial real

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{\ p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}):\ p(x)) = a_0 + a_1\,x + \cdots a_n\,x^n,\ x \in \mathbb{R}\ \}$$

a) $U = \{\ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}):\quad p(5) = 0\ \}$
b) $V = \{\ p \in U:\quad p'(5) = 0\ \}$
c) $W = \{\ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}): p(x) = a_3x^3 + a_1x\ \}$

(1.1) Demuestre que son subespacios vectoriales. Además, en cada caso escriba al menos un vector no nulo y represéntelo gráficamente. Describa por comprensión cada subespacio.

(1.2) Decida si $U \cup V$ es subespacio vectorial.

(1.3) Determine $V \cap W$ y $V + W$ ¿$U \oplus W$?, o bien ¿ $V \oplus W$?

[En Práctica (1.1) (parcialmente), (1.2) y (1.3)]

II. **Problema 2.**
Sea $\vec{r} \in \mathbb{R}^3, \vec{r} \neq \theta$, y sea L la recta que pasa por θ en la dirección $\vec{r}$. Demuestre que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ existe un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$, no trivial, que contiene a $\vec{x}$ y al subespacio L. Definir $\mathcal{S}$ y representar gráficamente la situación. Si $\vec{n}$ es un vector normal al plano $\mathcal{S}$ y $U = \{\ t \cdot \vec{n} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\ \}$, entonces ¿ $\mathcal{S} \oplus U$?.

III. **Problema 3.**
Considere el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $M_{n\ \ n}(\mathbb{K})$. Probar que el subconjunto

$$U = \{\ A \in M_{n\ \ n}(\mathbb{K}) : A = \theta \vee A \ \ \textit{es inversible}\ \}$$

no es subespacio vectorial. (Indicación: U no es cerrado para la suma, construir contraejemplo).

IV. **Problema 4.**
Identificar, en el lenguaje de *espacios vectoriales*, la representación gráfica de la figura **1**.

(4.1) En particular ¿Cuál es la representación gráfica del subespacio de $\mathbb{R}^3$.

$$F = \{\ (x, x + 2z, z) \in \mathbb{R}^3 :\quad x, z \in \mathbb{R}\ \}$$

(4.2) ¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta que pasa por el origen y el punto $\boldsymbol{P_o(1,3,1)}$?. Representar este subespacio en la figura **1** e indique que ella es a su vez subespacio de un plano, indicado en la figura **1**. Determinar la distancia del punto $\boldsymbol{A(0,2,3)}$ al subespacio $\boldsymbol{F}$.

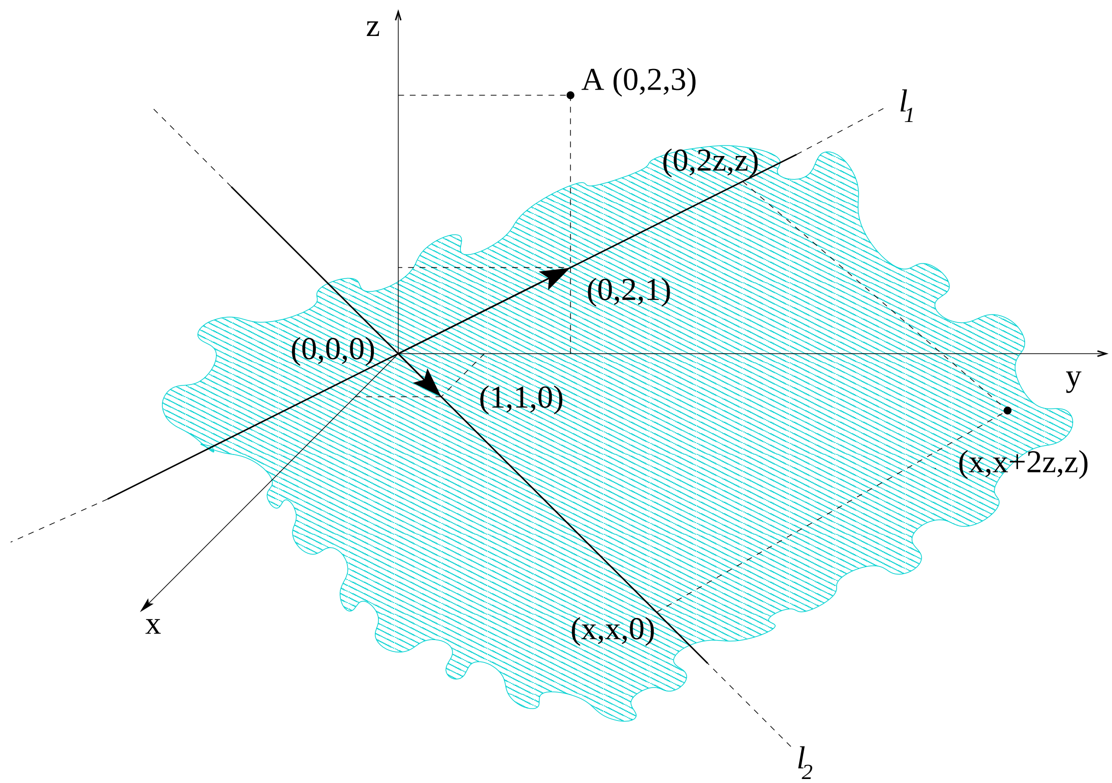


Figura **1**

(4.3) Si $\boldsymbol{XY := \mathbb{R}^2 \times \{0\}},$ e $\boldsymbol{YZ := \{0\} \times \mathbb{R}^2}$ determine:

$$\boldsymbol{(a)}\ \boldsymbol{F \cap XY} \ \text{ y } \ \boldsymbol{(b)}\ \boldsymbol{F \cap YZ.}$$

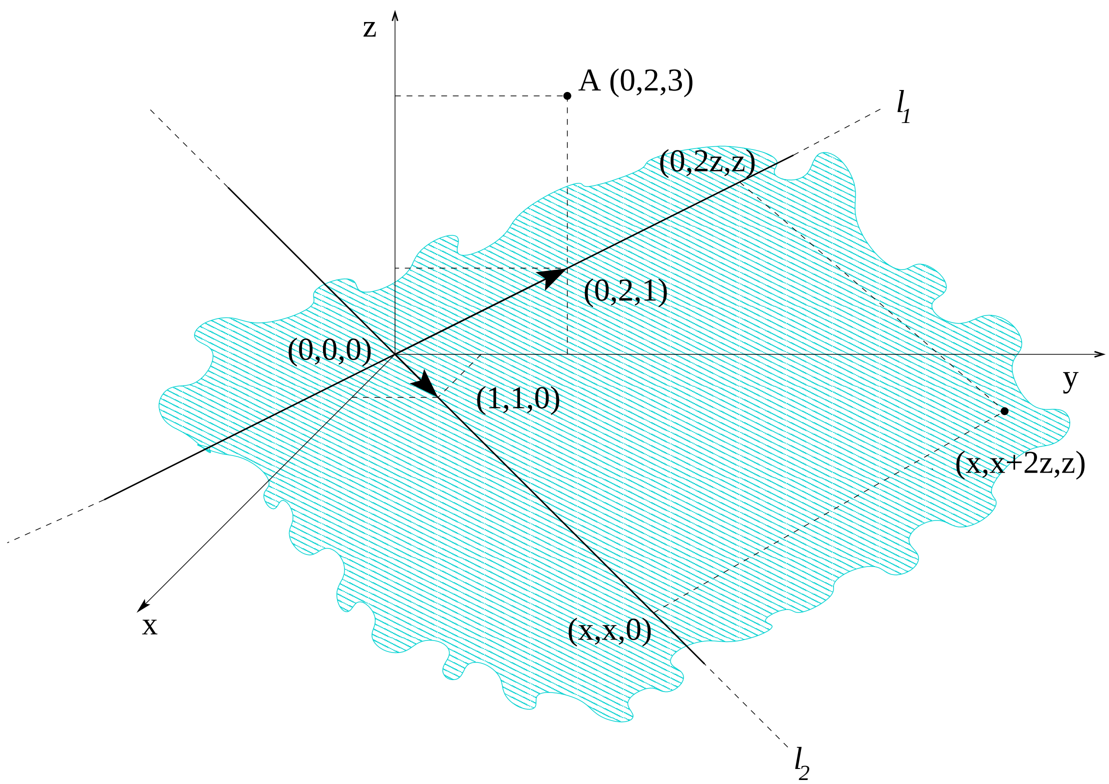
(4.4) Finalmente, determine una vector normal $\vec{\boldsymbol{n}}$ al plano $\boldsymbol{F}$ y defina la recta

$$\boldsymbol{U = \{\ t \cdot \vec{n} \in \mathbb{R}^3 :\ t \in \mathbb{R}\ \}}$$

decida si ¿ $\boldsymbol{F \oplus U = \mathbb{R}^3}$?

[En Práctica, (4.1)→ (4.4)]

.


z
A (0,2,3)
l_1
(0,2z,z)
(0,2,1)
(0,0,0)
y
(1,1,0)
(x,x+2z,z)
x
(x,x,0)
l_2