UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
MAT 520 142
FPV/fpv (17.06.2003)

Problema (4-2) Certamen N^{o}2 (año **2002**)

La pauta de este problema, tiene que ser corregida en su factorización en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, pues los *factores irreducibles* en este caso son factores lineales y cuadráticos tomando en cuenta las multiplicidades de las raíces que los definen.

Problema 4.2 Determine la factorización de $p(x) = x^7 - 2x^5 + x^5 + 2x^2 - 4x + 2$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y en $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, respectivamente.

Solución: Ensayando las posibles raíces racionales se concluye que $p(x) = (x-1)^2(x^5+2)$. El paso siguiente es resolver la ecuación $w^5 = 2cis(\pi)$ esto es

$$w_k = 2^{1/5} cis\left(\frac{(2k+1)\pi}{5}\right),\ k = 0,1,2,3,4$$

explícitamente:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2^{1/5}cis(\pi/5)\\
w_1 &= 2^{1/5}cis(3\pi/5)\\
w_2 &= 2^{1/5}cis(5\pi/5) = -2^{1/5}\\
w_3 &= 2^{1/5}cis(7\pi/5) = 2^{1/5}cis(2\pi - 3\pi/5) = 2^{1/5}cis(-3\pi/5) = \overline{w_1}.\\
w_4 &= 2^{1/5}cis(9\pi/5) = 2^{1/5}cis(2\pi - \pi/5) = 2^{1/5}cis(-\pi/5) = \overline{w_0}
\end{aligned}$$

por lo tanto, concluimos las siguientes factorizaciones de $p(x)$ en:

- $\mathcal{P}(\mathbb{C})$: $\quad p(x) = (x-1)^2 \cdot (x-w_2) \cdot [(x-w_0)(x-\overline{w_0})] \cdot [(x-w_1)(x-\overline{w_1})]$
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$: $\quad p(x) = (x-1)^2 \cdot (x-w_2) \cdot [(x-a_0)^2 \ + \ b_0^2] \cdot [(x-a_1)^2 \ + \ b_1^2]$
  donde $a_1 = Re(w_i),\ b_i = Im(w_i),\ i = 0,1.$

Nota. Es necesario insistir con los alumnos como encontrar la raíz compleja conjugada, pues es requerida para construir el factor cuadrático asociado. El punto fundamental es:

$$z = rcis(\theta) \Longleftrightarrow \overline{z} = rcis(-\theta) = rcis(2\pi - \theta).$$