UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142)

1. *a*) Considere la función $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = ln(x-1)$.
Defina la función $g = f \circ f$.
Sol.:
Primero es necesario calcular el dominio de f:

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : ln(x-1) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x-1 > 0\} \\ &=]1, \infty[. \end{aligned}$$

Luego estamos en condiciones de calcular el de g:

$$\begin{aligned} Dom(g) &= \{x \in]1,\infty[: f(x) \in]1,\infty[\} \\ &= \{x \in]1,\infty[: ln(x-1) \in]1,\infty[\} \\ &= \{x \in]1,\infty[: ln(x-1) > 1\} \\ &= \{x \in]1,\infty[: x-1 > e\} \text{ pues ln es creciente} \\ &= \{x > 1 : x > e+1\} =]e+1, \infty[. \end{aligned}$$

La definición de la función es:

$$\begin{aligned} g &:]e+1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ g(x) &= ln(ln(x-1)-1). \end{aligned}$$

,

b) El índice de penetración de un producto en el mercado evoluciona en el tiempo según la función $F : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$F(t) = \frac{1 - e^{-tp}}{1 + e^{-tp}},$$

donde p es una constante positiva.

Determine el tiempo t necesario para que el índice alcance el valor 0.9, en función de p.

Sol.:

Como la función es creciente y parte en 0, si alcanza el valor 0,9 lo har en un instante posterior, y una sola vez. Por lo tanto, debemos encontrar ese instante. Para ello planteamos la ecuación:

$F(t) = 0,9$

y despejamos t:

$$\frac{1 - e^{-tp}}{1 + e^{-tp}} = 0,9$$

Se trabaja y se llega a:

$$t = -\frac{ln(\frac{1}{19})}{p}$$

o más simplemente:

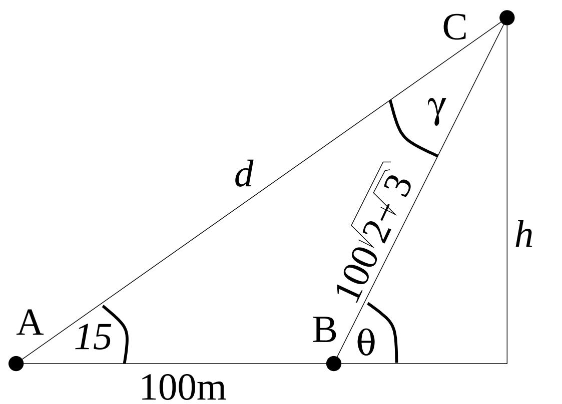
$$t = \frac{ln(19)}{p}.$$

2. *a*) Un joven observa, desde un punto A, la cúspide de un poste con un ángulo de elevación de 15 grados. Luego camina 100 metros hacia el poste hasta un punto B (sin llegar al poste), desde allí mide la distancia a la cúspide C del poste, obteniendo $100\sqrt{2-\sqrt{3}}$ metros. ¿Cuál es la altura del poste?

Indicación: Use que $\operatorname{sen}(15^\circ) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ y el Teorema del Seno.

Sol.:

Del enunciado se deduce el siguiente dibujo:



Usando el Teorema del Seno en el triángulo ABC, se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}(15^\circ)}{100\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{100},$$

De aquí $\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{1}{2}$, *por lo tanto* $\gamma = 30^\circ$.

Además, $\theta = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$ *y* $h = 100\sqrt{2-\sqrt{3}}\operatorname{sen}(\theta)$.

De donde finalmente: $h = 100\sqrt{2-\sqrt{3}}\operatorname{sen}(45^\circ) = 50\sqrt{2(2-\sqrt{3})}$.

b) Encuentre el conjunto solución de:

$$\operatorname{sen}(x) > \sqrt{3}\cos(x)$$

con x en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Sol.:

En el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ *se cumple que* $\cos(x) \leq 0$*, luego hay dos casos:*

a) Si cos$(x) = 0$*, la inecuación queda:*

sen$(x) > 0$*, luego* $x = \pi/2$.

b) Si cos$(x) < 0$*, en tal caso:*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}(x) & > & \sqrt{3}\cos(x) \\ \tan(x) & < & \sqrt{3} \ \textit{como}\ \text{Arctan}\ \textit{es creciente} \\ \text{Arctan}(\tan(x)) & < & \text{Arctan}(\sqrt{3})\ \textit{como}\ x\ \textit{está en el}\ II\ \textit{o}\ III\ \textit{cuadrante} \\ x - \pi & < & \dfrac{\pi}{3} \\ x & < & \dfrac{4\pi}{3}, \end{array}$$

luego, $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}[$.

3. *a*) Dado $w = r\text{cis}(\theta)$, calcule $\left|\dfrac{r}{w} - \overline{w}\right|$.

Sol.:

$\frac{1}{w} = \frac{1}{r}\text{cis}(-\theta)$
$\overline{w} = r\ \text{cis}(-\theta)$

$|\frac{r}{w} - \overline{w}| =$
$|\text{cis}(-\theta) - r\ \text{cis}(-\theta)| =$
$|1 - r|$.

b) El número complejo $1 + 3i$ es una raíz cúbica de z. A partir de esto y usando las raíces cúbicas de la unidad, obtenga las otras 2 raíces de z y expréselas en forma binomial.

Sol.:

Se sabe que las raíces de un número complejo se pueden escribir como:

$w_k = w_0 u_k,$

donde u_k *es una raíz de la unidad. Por lo tanto, si tomamos* w_0 *como* $1 + 3i$ *podemos obtener las otras raíces multiplicando por las raíces de la unidad.*

En éste caso éstas son:

$u_0 = \text{cis}(0),$
$u_1 = \text{cis}(\frac{2\pi}{3}),$
$u_2 = \text{cis}(\frac{4\pi}{3}).$
Calculando:

$u_0 = 1,$
$u_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$
$u_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$
Luego las dos raíces restantes de z *son:*

$(1 + 3i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2})i$
y
$(1 + 3i)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2})i$