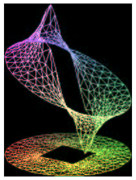
520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 7. MATRICES

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Matrices

Definición: Matriz

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K}$ un cuerpo ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$). Se llama **función Matricial** sobre $\mathbb{K}$ a una función

$$A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (i, j) \longmapsto A(i, j)$$

Se designa por a_{ij} al valor de A en el par (i, j), se escribe:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o bien $A = (a_{ij}), i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n$ y se dice que A es una matriz de orden $m \times n$. También se escribe $A = (a_{ij})$, cuando está claro el número de filas y columnas de A.

Matrices

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}(\mathbb{C})$, entonces la matriz se dice real (compleja) o a valores reales (complejos).
- El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$, con elementos en $\mathbb{K}$, se denota por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- Se llama **Matriz nula** a la matriz (a_{ij}), con $a_{ij} = 0, \forall i \in \{1, 2, ..., m\}, \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ y se denota por θ.
- Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ dos matrices, entonces

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, ..., m\}, \forall j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Matrices

Operaciones con matrices.

Definición : suma y multiplicación de matrices.

- **Suma**.

  Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces la matriz suma $A + B$ es

$$A + B = (c_{ij}) \quad \text{con} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.$$

- **Multiplicación**

  Sean $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. La matriz producto $C = A \cdot B$ es una matriz de $M_{m\times p}(\mathbb{K})$, con

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Matrices

Propiedades de la suma y del producto de matrices.

$\forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ se tiene:

S1). $(A+B)+C = A+(B+C)$.	S2). $A+B = B+A$.
S3). $\exists\, \theta \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) : A+\theta = A$	S4). $\exists -A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A+(-A) = \theta$

Para A, B, C matrices tal que los productos esten definidos, se tiene:

M1). $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$	M2). $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$
M3). $\exists A \neq \theta, B \neq \theta \wedge A\cdot B = \theta$.	

Matrices

Definición : Producto de un escalar por una matriz.

Para $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad \lambda \in \mathbb{K}$, se define el producto $\lambda A = B$, por

$$kA = (b_{ij}) \quad \text{con} \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Propiedades

$$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A).$
- $\alpha(A \cdot C) = (\alpha A) \cdot C = A \cdot (\alpha C), \quad \forall C \in M_{n\times p}(\mathbb{K}).$

Definición : Transpuesta de una matriz.

Para $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define la **transpuesta de A** como la matriz $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, donde

$$A^t = (b_{ij}) \quad \text{con} \quad b_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Propiedades $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}$

- $(A^t)^t = A.$
- $(A+B)^t = A^t + B^t.$
- $(\alpha A)^t = \alpha(A^t).$
- $(C \cdot D)^t = D^t \cdot C^t, \quad \forall C \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), D \in M_{n\times p}(\mathbb{K}).$

Matrices

Definición : Una **matriz cuadrada** de n filas y n columnas es una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$.
Se dice que una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es:

- **Triangular superior** si $a_{ij} = 0$, para $i > j$.
- **Triangular inferior** si $a_{ij} = 0$, para $i < j$.
- **Diagonal** si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.
- **Escalar** si es diagonal y $a_{ii} = \lambda$, para $1 \leq i \leq n, \lambda \in \mathbb{K}$.
- **Identidad** si es escalar y $a_{ii} = 1$, para $1 \leq i \leq n$.
- **Simétrica** si $A^t = A$.

Definición: Matrices Inversibles.

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ se dice **inversible (o no singular)** si existe una matriz $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $A \cdot B = I \quad \wedge \quad B \cdot A = I$.

- La matriz B se llama **inversa de A** y se denota por A^{-1}.
- Si A es inversible, entonces su inversa A^{-1} es única.
- Si A y B son inversibles, entonces AB también lo es y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Matrices

Definición: Operaciones Elementales de filas

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llaman **operaciones elementales de filas** sobre A a las siguiente operaciones.

- F_1) Intercambio de dos filas de A, la fila i con la fila j. Se escribe $f_i \longleftrightarrow f_j, \quad i, j \in \{1, 2, ..., m\}$.
- F_2) Multiplicar una fila de A por un escalar α no nulo. Para la fila i se escribe $f_i \longleftarrow \alpha f_i, \quad \alpha \in \mathbb{K}$.
- F_3) Sumar un múltiplo escalar de una fila a otra. Si a la fila j se suma α veces la fila i, entonces se escribe $f_j \longleftarrow f_j + \alpha f_i, \quad \alpha \in \mathbb{K}$.

Matrices

Teorema.

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y F una operación elemental de filas, entonces

$$F(A) = F(I)\cdot A.$$

Corolarios.

- Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ y F es una operación elemental de filas, entonces

$$F(AB) = F(A)\cdot B.$$

- Si $F_1, F_2, ..., F_n$ son operaciones elementales de filas, entonces

$$(F_n \cdots F_2 F_1)(A\cdot B) = (F_n \cdots F_2 \cdot F_1(A))\cdot B.$$

Teorema.

Toda operación elemental de filas es inversible y su inversa es una operación elemental de filas del mismo tipo.

Definición. Matrices equivalentes por filas.

Dos matrices $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ se dicen **equivalentes por filas** si una se obtiene de la otra por aplicación de una o varias operaciones elementales de filas.

Teorema.

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es equivalente por filas con I, entonces A es inversible.

Observaciones.

- Si A es inversible y $F_1, ..., F_n$ son operaciones elementales de filas que permiten pasar de A a la matriz identidad I, entonces la matriz inversa A^{-1} se obtiene aplicando, en el mismo orden, las operaciones elementales $F_1, ..., F_n$ a la matriz I.

- Para calcular A^{-1} se efectuan las operaciones elementales de filas en la matriz ampliada $(A|I)$ hasta obtener la matriz $(I|B)$. En tal caso $B = A^{-1}$.

Notación.

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces designamos por $A_{ij} \in M_{m-1\times n-1}(\mathbb{K})$ a la matriz obtenida de A eliminando la fila i y la columna j.

Definición. Determinante.

Se llama **Función determinante** sobre $\mathbb{K}$ a la función

$$det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad A \longmapsto det(A),$$

tal que:

- Si $n = 1$ y $A = (a)$, entonces $det(A) = a$.
- Si $n \in \mathbb{N}, n > 1$, entonces $det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij})$, para algún $i = 1, 2, ..., n$.

Matrices

Notación. También se escribe $det(A) = |A|$.

Propiedades. Para $A \in M_n(\mathbb{K})$ se tiene.

- Si A tiene una fila nula, entonces $det(A) = 0$.
- Si A es una matriz triangular, entonces $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- $det(A^t) = det(A)$.
- Si F es una operación elemental de filas que intercambia dos filas de A, es decir $B = F(A)$, entonces $det(B) = -det(A)$.
- Si F es una operación elemental de filas que multiplica una fila de A por un escalar α, es decir $B = F(A)$, entonces $det(B) = \alpha det(A)$.

Matrices

- Si F es una operación elemental de filas que suma un múltiplo escalar α de la fila i a la fila j, es decir $B = F(A)$, entonces $det(B) = det(A)$.
- Si A tiene dos filas iguales, entonces $det(A) = 0$.
- Si una fila de A es combinación lineal de otras filas de A, entonces $det(A) = 0$.
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.
- Dado que $det(A^t) = det(A)$, se tiene que todas las propiedades indicadas también valen para las columnas.

Definiciones. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- Se llama **Menor** de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz A_{ij}, es decir es el escalar $det(A_{ij})$.
- Se llama **Cofactor** de un elemento a_{ij} al escalar $c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$.
- Si c_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij}, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{ij} = det(A), \quad \text{para algún} \quad i = 1, ..., n.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{kj} = 0, \quad k \neq i, \quad \text{para algún} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

- Se llama **Matriz de cofactores** de la matriz A a la matriz que contiene los cofactores de cada elemento a_{ij}. Se escribe $cof(A) = A^c$.

- Se llama **Matriz Adjunta** de la matriz A a la matriz transpuesta de la matriz de cofactores. Se escribe $adj(A) = (A^c)^t$.

Teoremas.

- A es inversible sí y sólo sí $det(A) \neq 0$.

- Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $det(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A).$$

Definición. Rango de una matriz.

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llama rango de A al orden de la mayor submatriz cuadrada de A con determinante no nulo. Se escribe $r(A)$.

Observaciones.

- Si A y B son equivalentes por filas, entonces $r(A) = r(B)$.

- Una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ se dice escalonada por filas si el primer elemento no nulo de cada fila de A está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior.

  El número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente por filas con A es igual a $r(A)$.