UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO: 521234

Guía de Ejercicios No 6

1. Resolver el problema de Dirichlet:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < L \qquad 0 < y < M$$

$$u(x,0) = f(x) \quad u(x,M) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u(0,y) = h(y) \quad u(L,y) = k(y) \quad 0 \leq y \leq M$$

donde:

a) $f(x) = 9\,\mathrm{sen}(\frac{8\pi x}{L}), \quad g(x) = 0, \quad h(y) = k(y) = 0$
b) $f(x) = 0, \quad g(x) = \mathrm{sen}(\frac{\pi x}{L}), \quad h(y) = k(y) = 0$
c) $f(x) = 9\,\mathrm{sen}(\frac{8\pi x}{L}), \quad g(x) = \mathrm{sen}(\frac{\pi x}{L}), \quad h(y) = k(y) = 0$
d) $f(x) = g(x) = 0, \quad h(y) = 9\,\mathrm{sen}(\frac{8\pi y}{M}), \quad k(y) = \mathrm{sen}(\frac{\pi y}{M})$

2. Demostrar, vía el Método de Separación de Variables, que la solución de

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi$$

$$u(x,0) = \mathrm{sen}(x) \quad u(x,\pi) = \mathrm{sen}(x) \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0,y) = \mathrm{sen}(y) \quad u(\pi,y) = \mathrm{sen}(y)) \quad 0 \leq y \leq \pi$$

es

$$u(x;y) = \frac{1}{\sinh(\pi)}\left(\sinh(\pi - y)\,\mathrm{sen}(x) + \sinh(y)\,\mathrm{sen}(x) + \sinh(\pi - x)\,\mathrm{sen}(y) + \sinh(x)\,\mathrm{sen}(y)\right)$$

3. *a*) Encontrar una función de la forma $U(x,y) = a + bx + cy + dxy$, tal que

$$U(0,0) = 0, \quad U(1,0) = 1, \quad U(0,1) = -1, \quad U(1,1) = 2.$$

b) Resolver el problema de Dirichlet que satisface $v(x,y) = u(x,y) + U(x,y)$ si

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < y < 1$$

$$u(x,0) = 3\,\mathrm{sen}(\pi x) + x \quad u(x,1) = 3x - 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,y) = \mathrm{sen}(2\pi y) - y \quad u(1,y) = y + 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

Respuesta:

a) $U(x,y) = x - y + 2xy$

b) $u(x,y) = \frac{3\,\mathrm{sen}(\pi x)\sinh(\pi - \pi y)}{\sinh(\pi)} + \frac{\mathrm{sen}(2\pi y)\cosh(2\pi - 2\pi x)}{\sinh(2\pi)} + U(x,y)$

4. Encontrar una solución del problema de Neumann:

$$
\begin{array}{lll}
u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi & 0 < y < \pi \\
u_y(x,0) = \cos(x) - 2\cos^2(x) + 1 & u_y(x,\pi) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\
u_x(0,y) = 0 & u_x(\pi,y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi
\end{array}
$$

Además sumar una constante tal que $u(0,0) = 0$.

Respuesta: $u(x,y) = \frac{-\cos(x)\cosh(\pi - y)}{\sinh(\pi))} + \frac{\cos(2x)\cosh(2\pi x - 2\pi y)}{2\sinh(2\pi)} + \coth(\pi) - \frac{\coth(2\pi)}{2}$.

5. **Problema del Potencial para una esfera:** Sea $u(R,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi)$ la distribución del potencial sobre una esfera S de radio R. Se desea determinar el potencial u al interior de S y el potencial u^* al exterior de la esfera S, bajo la hipótisis qu el potencial es acotado al interior de S y nulo al infinito.

   a) Formular el modelo matemático asociado, sabiendo que el potencial u satisface la ecuación de Laplace el interior y al exterior de la esfera S.

   b) Si la función f sólo depende de φ, establezca vía el método de separación de variables, que

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos(\varphi)) \qquad u^*(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos(\varphi))$$

   c) Determinar las constantes A_n y B_n.

6. Considere dos esferas concentricas S_1 y S_2 de radio $R_1 = 2$ y $R_2 = 5$, y de temperatura (o potencial): $u(2,\varphi) = 1 + \cos(\varphi)$ y $u^*(5,\varphi) = \cos^2(\varphi)$. Encontrar la temperatura:

   a) $u(r,\varphi)$ en S_1.

   b) $u^*(r,\varphi)$ al exterior de S_2 y

   c) $u(r,\varphi)$ entre S_1 y S_2.

7. Resolver el problema de la membrana circular vibrante de bordes fijos:

$$
\begin{array}{rcll}
u_{tt} & = & \Delta u & 0 \leq r \leq 3 \quad t > 0 \\
u(3,t) & = & 0 & \\
u(r,0) & = & 0{,}1(9 - r^2) & \\
u_t(r,0) & = & 0{,}2 J_0(\frac{\alpha_2}{3}) &
\end{array}
$$

donde α_2 es el segundo cero positivo de $J_0(x)$.

(Indicación: Usar la identidades: $x^\nu J_{\nu-1} = [x^\nu J_\nu(x)]' \quad \wedge \quad J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} J_\nu$ para $\nu = 1$).

Concepción, 04 de Octubre de 2005.
FPV/fpv.

ANEXO

1. Los polinomios de Legendre $P_n(x)$ sobre $[-1,1]$.

   a) La ecuación diferencial de Legendre:

   $$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \text{ sobre } [-1,1] \tag{1}$$

   b) La solución $y(x) = P_n(x)$ explicita:

   $$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m \binom{n}{m}\binom{2n-2m}{n}x^{n-2m}, \tag{2}$$

   donde $[n/2] \in \mathbb{N}, [n/2] \leq n/2$.

   c) Relación de recurrencia:

   $$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

   d) Estanderización:

   $$P_n(1) = 1$$

   e) La norma de $P_n(x)$:

   $$\int_{-} 1^1[P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

   f) La fórmula de Rodrígue:

   $$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right]$$

   g) La función generatriz:

   $$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad -1 < x < 1, |t| < 1$$

   h) Rango:

   $$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

   i) Los primeros 6 polinomios de Legendre:

   $$\begin{array}{ll} P_0(x) = 1 & P_1(x) = x, \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{array}$$

   j) Ejemplo: La ecuación diferencial:

   $$\frac{|}{sen(\varphi)}\frac{d}{d\varphi}\left(sen(\varphi)\frac{dH}{d\varphi} + n(n+1)H = 0\right)$$

   se reduce a una ecuación de Legendre vía el cambio de variable $os(\varphi) = w$, en tal caso, $H_n(w) = P_n(\cos(\varphi))$ y por teorema de Sturm-Liouville, la familia $\{P_n(\cos(\varphi))\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortogonal de $L^{2‘}[0,\pi]$ con función ponderadora $sen(\varphi)$.

2. Funciones de Bessel:

   a) La ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2Y'' + xY' + (x^2 - n^2)Y = 0$$

   Si $x = \sqrt{\lambda}z$ y $X(z) = Y(x)$ entonces se tiene el problema de Sturm-Liouville singular:

$$\frac{d}{dz}(zX') + (\lambda z - \frac{n^2}{x})X = 0$$

   con $X(0)$ y $X'(0)$ acotadas y $X(R) = 0$.

   b) Si n no es entero, $J_n(x)$ y J_{-n} son dos soluciones linealmente independientes, definidas por:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

   llamada función de Bessel de primera especie de orden n.

   c) Si n es un entero, $J_n(x) = (-1)^n J_n(x)$ es una solución definida por

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2^2 1!(n+1)} + \frac{x^4}{2^2 2!(n+1)(n+2)} + \frac{x^6}{2^6 3!(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right]$$

   una solución linealmente independiente a la anterior es definida por

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos(\nu x) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu x)}, \qquad \lim_{x \to 0} |Y_n(x)| = \infty$$

   y es llamada función de Bessel de segunda especie de orden n.

   d) Relaciones de Recurrencia:

$$\begin{array}{ll}
J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) & nJ_n(x) + xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) \\
J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x) & nJ_n(x) - xJ_n'(x) = xJ_{n+1}(x) \\
[x^n J_n(x)]' = x^n J_{n-1}(x) & [x^{-n} J_n(x)]' = -x^n J_{n+1}(x)
\end{array}$$

   e) Las funciones de Bessel de orden $\pm\frac{1}{2}$ son definidas por:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}(x), \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)$$

   f) La norma de $J_n(\alpha_{mn}x)$:

$$\left\| J_n\left(\alpha_{mn}\frac{x}{R}\right)\right\|^2 = \int_0^R xJ_n^2\left(\alpha_{mn}\frac{x}{R}\right)dx = \frac{R^2}{2}J_{n+1}^2(\alpha_{mn})$$

   donde

$$\alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \alpha_{3n} < \cdots$$

   son los ceros estrictamente positivos de $J_n(x)$ (usualmente tabulados)

$g)$ Raíces de $J_0(x)$ y $J_1(x)$: $\boxed{J_0(\alpha_n) = 0, \quad J_1(\beta_n) = 0}$.

n	α_n	$J_1(\alpha_n)$	β_n	$J_0(\beta_n)$
1	2.4048	0.5191	0.0000	1.0000
2	5.5201	-0.3403	3.8317	-0.4028
3	8.6537	0.2715	7.0156	0.3001
4	11.7915	-0.2325	10.1735	-0.2497
5	14.9309	0.2065	13.3237	0.2184
6	18.0711	-0.1877	16.4706	-0.1965
7	21.2116	0.1733	19.6159	0.1801

$h)$ Gráficas:

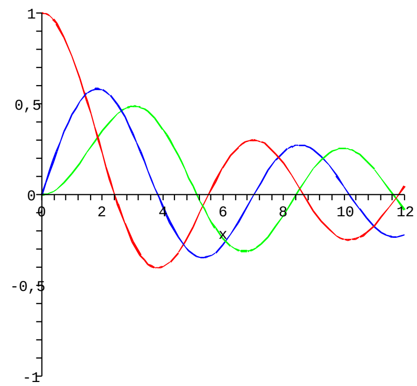

Figura 1: $J_0(x)$, $\quad J_1(x)$ $\quad$ y $\quad J_2(x)$

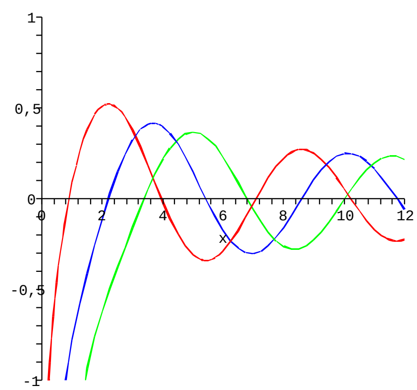

Figura 2: $Y_0(x)$, $\quad Y_1(x)$ $\quad$ y $\quad Y_2(x)$

$i)$ Aproximación:

- Si $0 < x << 1$: $\quad J_n(x) \sim \frac{1}{2^n n!} x^n, \quad Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln(x), \quad Y_n(x) \sim -\frac{2^n (n-1)!}{\pi} x^{-n}.$
- Si $x >> 1$: $\quad J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - (2n+1)\frac{\pi}{4}), \quad Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}(x - (2n+1)\frac{\pi}{4})$