Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Cálculo Numérico (521230)
Laboratorio 10: Ecuaciones diferenciales ordinarias

Ejercicio 1: Los métodos más sencillos vistos en clase para la solución de problemas de valores iniciales son los métodos de Euler (explícito e implícito). Ambos son métodos de orden 1, el método explícito es más sencillo de utilizar, pero no es adecuado para la solución de ecuaciones diferenciales rígidas (objetivo del próximo laboratorio).
Suponga que queremos resolver un problema de valores iniciales del tipo

$$y' = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_F], \quad y(t_0) = y0$$

con $f : [t_0, t_F] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1.1 Baje de la página del curso la función `eulerexpl1d.m`. Ella permite resolver problemas como el anterior con el método explícito de Euler. Lea cómo deben ser los parámetros de entrada a la función y cuáles son los parámetros de salida.

1.2 Escriba una función que, con los mismos parámetros de entrada que `eulerexpl1d.m`, permita encontrar una aproximación a la solución exacta de un problema de valores iniciales como el anterior mediante el método implícito de Euler con tamaño de paso constante h. En cada paso del método deberá encontrar un cero de una función no lineal, hágalo mediante 3 iteraciones del método de Newton.

1.3 Baje de la página del curso los archivos `func1_lab10.m` y `dfunc1_lab10.m`. Ellos son los archivos necesarios para la solución del problema

$$y'(t) = -y(t), \quad t \in [0, 1], \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

con los métodos de Euler implementados. Por ejemplo, para resolver este problema con el método explícito de Euler y tamaño de paso $h = 0{,}1$, usted deberá escribir el comando

```
[t,y] = eulerexpl('func1_lab10','dfunc1_lab10',0,1,1,0.1);
```

1.4 Resuelva el problema (1) con ambos métodos y tamaños de paso $h = 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.002, 0.001$. Para cada valor de h calcule

$$exple_h := \max_{ih} |y_i - y(ih)|, \quad imple_h := \max_{ih} |\tilde{y}_i - y(ih)|, \quad i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{h},$$

donde y_i representa la aproximación a $y(ih)$ obtenida con el método explícito de Euler y $\tilde{y}_i$ la obtenida con el método implícito. Para comprobar experimentalmente que ambos métodos poseen orden de convergencia igual a 1, grafique los puntos $(log(h), log(exple_h))$, $(log(h), log(imple_h))$ y observe que las rectas resultantes tienen pendiente igual a 1 (compárelas con $(log(h), log(h))$).

1.5 Comente qué cambios deberían realizarse a `eulerexpl1d` y `eulerimpl1d` para resolver problemas de la forma

$$y' = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_F], \quad y(t_0) = y_0$$

con $f : [t_0, t_F] \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ m \geq 1$.

Matlab tiene varios comandos para la resolución numérica de problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.)

```
Ordinary differential equation solvers.
(If unsure about stiffness, try ODE45 first, then ODE15S.)
ode45    - Solve non-stiff differential equations, medium order method.
ode23    - Solve non-stiff differential equations, low order method.
ode113   - Solve non-stiff differential equations, variable order method.
ode23t   - Solve moderately stiff differential equations, trapezoidal rule.
ode15s   - Solve stiff differential equations, variable order method.
ode23s   - Solve stiff differential equations, low order method.
ode23tb  - Solve stiff differential equations, low order method.
```

Como se ve en esta lista, MATLAB posee métodos de distinto tipo para la solución de ecuaciones diferenciales, el método que escojamos para resolver un problema particular depende de las características del problema. Si queremos, por ejemplo, resolver un problema de valores iniciales con ecuación diferencial ordinaria no rígida (stiff en inglés) del cual sabemos que su solución exacta es una función muy suave, podemos escoger alguno de los métodos de orden medio o de orden variable adecuados para problemas no rígidos (`ode45`, `ode113`). Si el problema a resolver no es rígido, pero no estamos seguros acerca de la suavidad de la solución exacta al problema o sabemos que no es una función muy suave, deberíamos entonces escoger alguno de los métodos de orden bajo, apropiados para ecuaciones no rígidas (`ode23`). Un método adecuado para ecuaciones diferenciales rígidas también podrá resolver un problema con ecuación diferencial no rígida, pero es probable que lo haga de forma menos eficiente.
Los métodos en los que se basan `ode45`, `ode23` y `ode23s` son métodos de un paso. Las funciones restantes se basan en métodos de paso múltiple.
Los llamados a todos ellos tienen una sintaxis semejante. Por ejemplo, para resolver el problema

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_F], \quad y(t_0) = y_0$$

mediante el comando `ode45` en su opción más sencilla, debe ejecutarse:

```
[t,y] = ode45('f',[t0 tF],y0);
```

donde:

- `f` es el nombre de un archivo MATLAB que permite evaluar la función $f(t, y)$,
- `t0`, `tF` son los extremos del intervalo donde se desea conocer la solución al problema de valores iniciales,
- `y0` es el valor inicial de la solución,
- en `t` MATLAB devuelve los valores de la variable independiente t donde el método calcula una aproximación al valor de la solución,
- en `y` MATLAB devuelve las aproximaciones a los valores de la solución en cada uno de los puntos en `t`.

Estos comandos no requieren como dato un paso de integración h pues todos ellos determinan de manera automática en cada paso k el tamaño del paso de integración h_k necesario para mantener los errores por debajo de una tolerancia determinada.
Si se desean conocer aproximaciones a los valores de la solución en ciertos valores de $t \in [t_0, t_F]$, puede alternativamente ejecutarse:

```
[t,y]=ode45('f',tspan,y0);
```

donde `tspan` es el vector que contiene a los valores de t donde se desea conocer una aproximación al valor de la solución al problema de valores iniciales. En ese caso, la salida `t` coincide con `tspan` e `y` contiene las aproximaciones a los valores de la solución en esos puntos.
La tolerancia predeterminada de estos métodos es 10^{-3}, para el error relativo, y 10^{-6}, para el error absoluto. Si se desea calcular una aproximación a la solución del problema con otras tolerancias, deben prefijarse las opciones elegidas mediante el comando `odeset`. En el llamado a la función para la solución de la E.D.O. debe entonces agregarse el parámetro adicional de opciones. La sintaxis para realizar esto es, por ejemplo:

```
options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-8);
[t,y] = ode45('f',[t0 tF],y0,options);
```

Si se ejecuta `options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-8)}` sin el "`;`" al final puede verse que otras opciones pueden prefijarse con `odeset`. Observe que en el caso de llamar a una función basada en un método implícito para la solución de un problema de valores iniciales (por ejemplo `ode15s`) puede ser conveniente dar también una función que permita evaluar $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$. Esto se logra a través de la opción `Jacobian` de `odeset`.
Ejercicio 2: Resuelva (1) con `ode45`, grafique la aproximación obtenida y la solución exacta al problema.

Las funciones para la solución de problemas de valores iniciales en MATLAB también pueden llamarse mediante

```
sol = ode45(@f,[t0 tF],y0);
```

Observe las diferencias entre este llamado y el anterior a `ode45`, en éste:

1. el parámetro de salida es uno solo,
2. el primer parámetro de entrada es de la forma `@ funcion`.

En este caso, MATLAB entrega en `sol` una estructura que puede servirnos luego para, por ejemplo, evaluar la aproximación obtenida mediante el llamado anterior en puntos distintos a los que entregaría MATLAB en `t` (si usamos la forma de llamado vista anteriormente). Ello puede hacerse con el comando `deval`. Al hacer

```
stint=deval(sol,tint);
```

MATLAB entrega en `sxint` los valores de la aproximación a la solución de la E.D.O. en los puntos especificados en `tint`.

2.1 Llame de nuevo a `ode45` para buscar una aproximación a la solución de (1). Hágalo esta vez especificando un solo parámetro de salida. Grafique la aproximación obtenida y la solución exacta al problema usando los valores de ambas en 100 puntos igualmente espaciados de $[0, 1]$.

¿ Que beneficios cree usted que se obtienen al contar con una función que permite evaluar la aproximación a la solución de una E.D.O. en lugar de evaluarla directamente con uno de los comandos explicados al principio?

Ejercicio 3: El desplazamiento u de la posición de equilibrio de una masa m, sujeta a un resorte de constante k, inmersa en un medio viscoso que ejerce una resistencia al movimiento bu' (es decir, proporcional a la velocidad de la masa $u' = du/dt$) y sobre la que se ejerce una fuerza f, se modela mediante la E.D.O.

$$mu''(t) + bu'(t) + ku(t) = f(t),\ u(0) = u_0,\ u'(0) = v_0,\ t \in [0,\, 60]$$

donde u_0 y v_0 son el desplazamiento y la velocidad de la masa en el instante inicial $t = 0$. Calcule y grafique el desplazamiento y velocidad de la masa a lo largo de 1 minuto (60 segundos) para los siguientes datos:

$$m = 1{,}2\,\mathrm{kg}, \quad k = 15\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}, \quad b = 0{,}3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}},$$

en los siguientes casos:

1. cuando la masa se desplaza 1 m desde su posición de equilibrio y desde el reposo ($u_0 = 1, v_0 = 0$), se la deja oscilar libremente, es decir, sin aplicar una fuerza externa ($f(t) \equiv 0$),
2. cuando desde la posición de equilibrio de la masa y en reposo, se le aplica una fuerza externa periódica $f(t) = \cos t$ (con el tiempo t medido en segundos y la fuerza f en $\mathrm{kg\,m/s^2}$);
3. cuando, al igual que en el caso anterior, desde la posición de equilibrio de la masa y en reposo, se le aplica una fuerza externa periódica, pero ahora $f(t) = \cos \omega t$, donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia de oscilación libre del sistema sin amortiguamiento.

Explique sus resultados con ayuda de los gráficos generados.¿ Qué ocurre con la masa en cada uno de los casos?

Observación: Ésta es una EDO de 2do orden, antes de resolverla usted deberá escribirla como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Ello se logra con el cambio de variables $v = u'$. Note que entonces el problema a resolver es equivalente a

$$u'(t) = v(t),\ v'(t) = \frac{f(t) - bv(t) - ku(t)}{m},$$
$$u(0) = u_0,\ v(0) = v_0,\ t \in [0,\, 60]$$