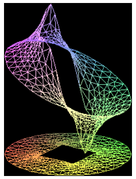
MAT 520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 2

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Inducción Matemática

AXIOMA: Principio de la buena ordenación

Todo subconjunto no vacío de $\mathbf{N}$ tiene un elemento menor que los restantes. Es decir, si $S \subseteq \mathbf{N}$, $S \neq \phi$, entonces existe $p \in S$ tal que

$$\forall\, r \in S : \quad p \leq r\,.$$

TEOREMA: Principio de inducción matemática

Sean $S \subseteq \mathbf{N}$ y $p \in \mathbf{N}$ tales que

- $p \in S$
- $k \in S \quad \Rightarrow \quad (k+1) \in S$

Entonces S contiene a todos los enteros mayores o iguales a p

Factorial y Coeficiente Binomial

- Dado $k \in \mathbf{N}$, se define el factorial de k, y se denota $k!$, al producto de los k primeros números naturales, esto es:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$$

  Para $k = 0$, se define $0! = 1$.

- Sean $k, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ tales que $k \leq n$. Se define el coeficiente binomial de n y k, y se denota $\binom{n}{k}$, al número:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Inducción Matemática

Propiedades de los Coeficientes Binomiales

Sean $k, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ tales que $k < n$. Entonces, se tiene:

- $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
- $$\binom{n}{1} = n$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Inducción Matemática

El Operador Sumatoria

Dados n números reales indexados como $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se define la sumatoria de ellos, y se denota $\sum_{k=1}^{n} a_k$, a:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

EJEMPLOS

- $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$
- $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$$
- $$\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} + 3^n$$

Inducción Matemática

Propiedades del Operador Sumatoria

- $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} a = a + a + \cdots + a + a = na$$
- $$\sum_{i=1}^{n} k\, a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$$
- $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$
- $$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \right) a_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) b_j$$

TEOREMA DEL BINOMIO

Sean $a, b \in \mathbf{R}$, y sea $n \in \mathbf{N}$. Entonces:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Algunas Observaciones.

- El desarrollo de $(a+b)^n$ consta de $n+1$ términos.
- La suma de los exponentes de a y b en cada término es n.
- Los coeficientes de los términos equidistantes del centro son iguales.
- El término que ocupa el lugar $k+1$ está dado por

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

PROGRESION ARITMETICA

- Sean $a,\ d \in \mathbf{R}$ números dados. Se llama PROGRESION ARITMETICA con término inicial (primer término) a y diferencia común d a la sucesión de números $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots,$ donde

$$\boxed{a_1 = a \quad \text{y} \quad \forall\, n \geq 2: \quad a_n = a_{n-1} + d}$$

- Notar que $\forall\, n \in \mathbf{N}: \quad a_n \;=\; a + (n-1)\, d$ (demostración por inducción).

- La suma de los n primeros términos de una Progresión Aritmética con primer término a y diferencia común d, está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; \frac{n}{2}\,(2a_1 + (n-1)d) \;=\; \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n) \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

(demostración por inducción).

Inducción Matemática

PROGRESION GEOMETRICA

- Sean $a,\ r \in \mathbf{R}$ números dados. Se llama PROGRESION GEOMETRICA con término inicial a y razón (cuociente) común r a la sucesión de números $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots,$ donde

$$\boxed{a_1 = a \quad \text{y} \quad \forall\, n \geq 2: \quad a_n = r\, a_{n-1}}$$

- Notar que $\forall\, n \in \mathbf{N}: \quad a_n = r^{n-1} a_1 = r^{n-1} a$ (demostración por inducción).

- La suma de los n primeros términos de una Progresión Geométrica con primer término a y razón común r, está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right) \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad \forall\, r \neq 1$$

(demostración por inducción).