UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO: 521234

Guía de Ejercicios No 5-I

1. ¿Cuál es su interpretación del problema:

$$\begin{array}{lcll} u_t & = & k^2 u_{xx} & (x,t) \in]0,1[\times]0,\infty[\\ u(0,t) & = & 0 & t>0 \\ u_x(1,t) & = & 1 & t>0 \\ u(x,0) & = & \mathrm{sen}(\pi x) & 0 \le x \le 1? \end{array}$$

   ¿Puede llegar la solución a un estado estacionario?. Construya la solución.

2. Suponga que una barra metálica aislada lateralmente tiene temperatura inicial de $25^o C$, pero con un extremo mantenido a una temperatura fija de $50^o C$. El resto de la barra se sumerge en un líquido con temperatura de $30^o C$. ¿ Cuál es la descripción formal de problema?.

3. Determine la solución del estado estacionario y la forma de la solución transiente del problema de difusión:

$$\begin{array}{lcll} u_t & = & u_{xx} & (x,t) \in]0,1[\times]0,\infty[\\ u(0,t) & = & 0 & t>0 \\ u(1,t) & = & 1 & t>0 \\ u(x,0) & = & x^2 & 0 \le x \le 1 \end{array}$$

4. Resuelva el problema de difusión:

$$\begin{array}{lcll} u_t & = & k^2 u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(0,t) & = & 0 & t>0 \\ u(1,t) & = & 0 & t>0 \\ u(x,0) & = & f(x) & 0 \le x \le L \end{array}$$

   si (a) $f(x) = \mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{2L}x)$ (b) $f(x) = \frac{x}{L} - \frac{1}{2\pi}\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{2L}x)$

5. Si a es una constante real, resuelva el problema de difusión:

$$\begin{array}{lcll} u_t & = & k^2 u_{xx} - au & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(0,t) & = & 0 & t>0 \\ u(1,t) & = & 1 & t>0 \\ u(x,0) & = & \mathrm{sen}(\pi x) & 0 \le x \le 1 \end{array}$$

6. Asuma que una barra no es aislada a largo de su superficie lateral y que la pérdida de calor a través de ella en una razón por unidad de longitud proporcional a la diferencia $u(x,t) - T$, donde T es la temperatura del medio ambiente. La ecuación del calor en tal caso es:
$$u_t = k^2 u_{xx} - h(u - T)$$
donde h es una constante de proporcionalidad positiva. Si los bordes de la barra son mantenidos a $T^o C$ para $t \geq 0$ y la distribución inicial de temperatura es $u(x,0) = f(x)$, use la sustitución $v(x,t) = e^{ht}(u(x,t) - T)$ para reducir a un problema de valores de contorno e inicial conocido.

7. Si $h > 0$ y T son constantes resolver el problema de diferencial:
$$\begin{array}{lcll} u_t & = & k^2 u_{xx} - h(u - T) & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) & = & T & t > 0 \\ u_x(1,t) & = & 0 & t > 0 \\ u(x,0) & = & \operatorname{sen}(\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

8. Una barra de longitud L, inicialmente a una temperatura $T_0 > 0$, es sumergida en un medio líquido cuya temperatura es $T < T_0$: Mientras que los bordes de la barra son mantenidos a la temperatura T_0 para $t \geq 0$, existe una pérdida de calor por convección a lo largo de la superficie lateral, tal que la ecuación del calor es:
$$u_t = k^2 u_{xx} - h(u - T)$$
donde h es una constante positiva. Establecer y resolver el problema de difusión que modela la situación descrita.

9. Resolver el problema de valores de contorno e inicial anterior si $L = 10$, $h = k = 1$, $T = 300$ y las condiciones de bordes e inicial son modificadas como sigue:
$$\begin{array}{lcll} u(0,t) & = & 310 & t \geq 0 \\ u(10,t) & = & 320 & t \geq 0 \\ u(x,0) & = & x + 310 & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

10. Resolver el problema de valores de contorno e inicial:
$$\begin{array}{lcll} u_t & = & u_{xx} + e^{-t}\left(x - 1 + \operatorname{sen}(\pi x)\right) & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) & = & e^{-t} & t \geq 0 \\ u(1,t) & = & 3 & t \geq 0 \\ u(x,0) & = & x + 2 & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

Concepción, 13 de Septiembre de 2005.
HMM/FPV/fpv.