

ECUACIONES DIFERENCIALES II 525222

Listado de Ejercicios N 4

1. Definir los siguientes problemas de Sturm-Liouville en la forma normal o estándar. Identifique la función ponderadora asociada en cada caso.

1.1 *EDO de Laguerre:*

$$xX'' + (1-x)X' + \lambda X = 0; \quad x > 0$$

1.2 *EDO de Hermite:*

$$X'' - 2xX' + 2\lambda X = 0; \quad x \in \mathbb{R}$$

1.3 *EDO de Chebyshev:*

$$(1-x^2)X'' - xX' + \lambda X = 0; \quad |x| \leq 1$$

1.4 *EDO de Legendre:*

$$(1-x^2)X'' - 2xX' + \lambda X = 0, \quad |x| \leq 1$$

2. Resolver el Problema de Sturm-Liouville:

$$x^2Y'' + xY' + \lambda Y = 0, \quad Y(1) = 0, \quad Y(e) = 0.$$

3. Demostrar que π^2 es un valor propio del Problema de Sturm-Liouville:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X'(0), \quad \pi^2 X(1/2) + X'(1/2) = 0.$$

4. Resolver

$$(e^{2x} X')' + e^{2x}(\lambda + 1)X = 0, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

5. Resolver los siguientes *Problemas de Valores de Frontera e Iniciales*, algunos de ellos involucran un problema de valores propios no lineales, en tales casos representar explícitamente los primeros 5 términos de la solución general.

5.1

$$\begin{aligned} e^{-2x}u_t &= (e^{-2x}u_x)_x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) - u_x(0, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u_x(\pi, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} e^x & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ e^{\pi/2} & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

5.2

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 2u_x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) - u_x(0, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(\pi, t) + u_x(\pi, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 1 + \operatorname{sen}(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

5.3

$$\begin{aligned} u_t &= [(x+1)^2 u_x]_x + \frac{e^{-t}}{\sqrt{x+1}}, & 0 < x < 9, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(9, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq 9 \end{aligned}$$

(Indicación: Realizar el cambio de $s = x + 1$).