

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142

Listado 4 (Progresiones y Funciones I)

1. Si en una P.G. de 3 términos positivos se suma 2 al segundo término, resulta una P.A., y si en esta P.A. se suma 9 al tercer término, resulta nuevamente una P.G. Determine la P.G. original.
2. Si los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  son distintos,  $b \neq 0$  y están en P.G, demostrar que los números  $\frac{1}{b-a}$ ,  $\frac{1}{2b}$ ,  $\frac{1}{b-c}$  están en P.A.
3. Un trabajador debe llevar una carretilla de arena al pie de cada uno de los 21 árboles que están alineados al lado de una calzada. Se sabe que cada árbol dista 4 metros del siguiente y el montón de arena está a 10 metros antes del primer árbol. ¿Cuántos metros habrá recorrido el trabajador después de haber terminado su trabajo y dejado la carretilla en el montón de arena? **(En práctica)**
4. Un muchacho deja caer una pelota de goma desde lo alto de un monumento, cuya altura es de 50 metros. En cada rebote la pelota sube hasta un décimo de la altura anterior. ¿Cuánto rebotará la sexta vez? ¿Cuál será la distancia total recorrida al tocar el suelo por octava vez? ¿Qué recorrido habrá hecho cuando se detenga? **(En práctica)**
5. Tres números enteros están en progresión geométrica. Si al último término se le resta 32 se forma una progresión aritmética, pero si al segundo término se le resta 4, se forma de nuevo una progresión geométrica. Determine la suma de los tres números enteros.
6. En una progresión geométrica de términos positivos se observa que cada término es igual a la suma de los dos términos siguientes. ¿Cuál es la razón de dicha progresión? **(En práctica)**
7. El cociente entre el cuarto término y el primero de una progresión geométrica es igual a 8, y su suma es 45. Determine los términos entre ellos.
8. En el mismo número de días se extraen de dos toneles  $A$  y  $B$  ciertas cantidades de vino. De  $A$  se extraen 5 litros el primer día; 10 litros el segundo día; 20 litros el tercer día; etc. De  $B$  se extrajeron 2 litros el primer día; 4 litros el segundo día; 8 litros el tercer día; etc. En el último día se extrajo del tonel  $A$  192 litros más que del tonel  $B$ . Determine el total de litros de vino extraídos de cada tonel.
9. Hallar la diferencia de una P.A. creciente cuyo primer término sea la unidad y tal que los términos de lugares 2, 10 y 34 forman (en ese orden) una P.G. Además, indique la P.G.
10. Estudie cada una de las siguientes relaciones y determine si son o no funciones.
  - a)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x = y^2\}$ .
  - b)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists n \in \mathbb{Z}, x = ny\}$ .
  - c)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 3\}$ .
  - d)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : x = |y| \wedge x \leq 2y\}$ . **(En práctica (d))**

11. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  (En práctica)

- a) ¿Qué desigualdad se debe resolver para determinar la imagen recíproca  $f^{-1}([0, +\infty[)$ ?
- b) Determinar  $f^{-1}(\{0\})$  y  $f^{-1}([1, 2])$ .
- c) Determine  $f(\{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\})$ .

12. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - 1$ . Dar un ejemplo de un conjunto no vacío  $B \subseteq \mathbb{R}$  tal que:

- a)  $f^{-1}(B) = \emptyset$ ,                      b)  $f^{-1}(B)$  tiene cardinalidad 1.

13. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x - 3$ . Dar un ejemplo de un conjunto no vacío  $B \subseteq \mathbb{R}$  tal que:

- a)  $f^{-1}(B) = [1, 2]$ ,                      b)  $f^{-1}(B) = \mathbb{R} - [1, 2]$ .

14. Sea  $f : A \rightarrow B$  una función y  $M, N$  dos subconjuntos no vacíos del dominio. Probar que:  
(En práctica)

$$f(M) - f(N) \subseteq f(M - N) \quad (*)$$

Luego muestre que considerando la función  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $f(n) = n^2, \forall n \in \mathbb{Z}$ ;  $M = \{-2, 0, 1, 3\}$ ,  $N = \{0, 1, 2\}$  sólo se verifica la inclusión propia  $\subsetneq$  en  $(*)$

15. Sea  $f : A \rightarrow B$  una función y  $M, N$  dos subconjuntos no vacíos del codominio. Probar que:

$$f^{-1}(M - N) = f^{-1}(M) - f^{-1}(N)$$

16. Considere las siguientes funciones y analice su inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. En caso de ser biyectiva, defina su inversa. Suponga que  $U$  es un conjunto cualquiera y  $A \subseteq U$ .  
(En práctica d))

- a)  $f : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(A), \quad X \longmapsto f(X) = X \cap A$ .
- b) La **función característica** de  $A$ :

$$\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

- c)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; \quad n \longmapsto f(n) = 2n$ .

$$d) \quad h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad n \longmapsto h(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -2n & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

17. Sea  $U$  un conjunto y  $A, B \subseteq U$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Sea  $f : U \longrightarrow U$  una función cualquiera. Probar que:

- a)  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ .
- b) Si  $f$  es inyectiva, entonces  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ .
- c) Si  $f$  es sobreyectiva, entonces  $f(A) \cup f(A^c) = U$ .