UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 16 (Espacios Vectoriales)

1. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones usuales de adición y producto por escalar. **(En práctica b), c) y f))**

   a) $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ es diagonal}\}$,
   b) $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A + A^t = 0\}$,
   c) $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \exists a, b \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}\}$,
   d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$,
   e) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists t \in \mathbb{R}, x = t + 1,\ y = 2t,\ z = t - 1\}$,
   f) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

2. Sea $\mathbb{R}^+$ con las operaciones de suma y producto por escalar definidas por:
   $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $x \triangle y = xy$; $\alpha * x = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Es $(\mathbb{R}^+, \triangle, *)$ espacio vectorial real?.

3. Sea $V := \{f \in C^2(0, 1) : \forall x \in (0, 1), 3f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0\}$. Demuestre que V, provisto de la suma de funciones y multiplicación por escalar usual, es un espacio vectorial real. **(EP)**

4. Determine si el subconjunto W es o no subespacio vectorial del conjunto V. **(En práctica e) y h))**

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) : z = 0\}$.
   b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
   c) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) : y = \frac{1}{2}x\}$.
   d) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \{A : \exists a, b, c \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}\}$.
   e) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \{A : A - A^t = I\}$.
   f) $V = M_n(\mathbb{R})$, $W = \{A : A \text{ es triangular superior}\}$.
   g) $V = M_n(\mathbb{R})$, $W = \{A : A \text{ es simétrica}\}$.
   h) $V = P_3(\mathbb{R})$, $W = \{p : p(0) = 0\}$.
   i) $V = P_n(\mathbb{R})$, $W = \{p : p(0) = 1\}$.

5. Sea $W := \{A \in M_n(\mathbb{R}) :\ tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\}$. Demuestre que W es un subespacio vectorial de $V = M_n(\mathbb{R})$. **(En práctica)**

6. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ y sea el conjunto $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{x} \cdot \vec{a} = \vec{x} \cdot \vec{b} = 0\}$. **(En práctica)**

   a) Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
   b) Pruebe que $S = \{\vec{x} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) : \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$.

7. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ y considere el conjunto $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{x} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0\}$.

   a) Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
   b) Pruebe que $S = \{\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} : \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

8. Considere el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $M_n(\mathbb{K})$. Probar que el subconjunto

$$U = \{ \ A \in M_n(\mathbb{K}) : A = \theta \ \vee \ A \ \text{ es invertible } \}$$

no es subespacio vectorial (Indicación: U no es cerrado para la suma, construir contraejemplo).

9. Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ y considere **(En práctica)**

$$W_1 = \{A : \exists a, b, c, \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}\}, \quad W_2 = \{A : \exists a, b \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\}.$$

   a) Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V.

   b) Describa el conjunto $W = W_1 \bigcap W_2$ y demuestre que es un subespacio.

10. Sea $\vec{r} \in \mathbb{R}^3, \vec{r} \neq \theta$, y sea L la recta que pasa por θ en la dirección $\vec{r}$. Demuestre que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ existe un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$, no trivial, que contiene a $\vec{x}$ y al subespacio L. Definir $\mathcal{S}$ y representar gráficamente la situación, vea que $\mathcal{S}$ es un plano. Si $\vec{n}$ es un vector normal a $\mathcal{S}$ y $U = \{ \ t\vec{n} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \ \}$, entonces ¿ $\mathcal{S} + U = \mathcal{S} \oplus U$?.

11. Considere los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual que 3. **(En práctica)**

$U = \{ \ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \quad p(5) = 0 \ \}, \qquad W = \{ \ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ p(x) = ax^3 + bx\},$

$V = \{ \ p \in U : \quad p'(5) = 0 \ \}, \qquad Z = \{ \ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}, p(x) = p(-x)\}.$

   a) Demuestre que son subespacios vectoriales. Además, en cada caso escriba al menos un vector no nulo y represéntelo gráficamente.

   b) Decida si $U \cup V$ es subespacio vectorial.

   c) Determine $V \cap W$ y $V + W$. ¿$U + W = U \oplus W$? ó ¿$V + W = V \oplus W$?

12. Expresar, si es posible, el elemento indicado como combinación lineal de la familia dada en el espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$:

   a) $(1, -1, 2)$; $\{(0, -1, 1), (2, 1, -2), (0, 2, 0)\}$; $V = \mathbb{R}^3$.

   b) $x^2 + x - 1$; $\{1, x - 1, (x - 1)^2\}$; $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

   c) 1; $\{1, x^2 - 1, x^3 + 1\}$; $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

   d) $i - 1$; $\{2 - 2i, 1 + i, -1\}$; $V = \mathbb{C}$.

13. Considere el espacio vectorial real V de polinomios de grado ≤ 5 definidos sobre $[-1, 1]$.

   a) Encuentre un sistema de generadores para

$$S = \{p \in V : \quad (\forall x \in [-1, 1]) \quad p(x) = p(-x)\}.$$

   b) Encuentre un sistema de generadores para **(En práctica b))**

$$W := \left\{ p \in V : \quad \int_{-1}^{1} xp(x) \ dx = 0 \right\}.$$

   c) Demuestre que $V = U \oplus W$, donde $U := \{p \in V : \ (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \ (\forall x \in [-1, 1]) \ \ p(x) = \alpha x\}$.

d) Encuentre un sistema de generadores para $S+U$ y $S+W$.

14. Demostrar que el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$, es un espacio vectorial real con las operaciones usuales de suma y producto por escalar de funciones de $\mathcal{F}$.

    a) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}$?.

    1) $W = \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$.
    2) $W = \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$.
    3) $W = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es una función continua}\}$.
    4) $W = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es una función inyectiva}\}$.
    5) $W = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es una función derivable}\}$.

    b) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de funciones de $\mathcal{F}$ son linealmente independientes?.
    a) $\{2, x+2, x^2\}$; b) $\{1, x+1\}$; c) $\{\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x), \cos(2x)\}$.

15. Decidir la independencia lineal del subconjunto A del espacio vectorial V, si: **(En práctica)**

V	A
$\mathbb{R}^3$	$\{\ (3,\ 6,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1),\ (-1,\ 0,\ -1)\ \}$
$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$	$\{\ x^2+x+1,\ x-1,\ (x-1)^2\ \}$
$M_2(\mathbb{R})$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

16. Encontrar un conjunto l.d. de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ tal que cualquier subconjunto de dos vectores sea l.i.. **(En práctica)**

17. Demostrar que si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.i. en un $\mathbb{K}$ espacio vectorial V, entonces también lo será:

$$\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n\}$$

18. Sea $A = \{\ p_0, p_1, \ldots, p_m\ \} \subseteq \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ tal que cada vector de A se anula en $x = 1$, es decir: $p_j(1) = 0$ para todo $j = 0, 1, \ldots, m$. Demuestre que entonces A es l.d. en $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$. **(EP)**

19. Un subconjunto $A \subseteq B$ de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V se dice **l.i. maximal en** B, si:

    (i) A es l.i., (ii) $\forall\ v \in B - A:\ A \cup \{v\}$ es l.d..

    a) Sea $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Inspírese en el *Lema de Dependencia Lineal* para determinar un subconjunto l.i. maximal en:

$$B = \{\, x^2+2x+3,\ -3x^2-x-3,\ -2x^2+x,\ 6x^2+3x+10\, \}$$

    b) Idem al problema anterior, con $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y **(En práctica))**

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

    c) Análogamente, si $V = \mathbb{R}^4$, determinar un subconjunto l.i. Maximal en:

$$B = \{\ (1,0,2,1),\ (2,1,3,4),\ (1,1,1,3),\ (0,1,-1,0)\ \}$$

20. Sean $S_1 = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ y $S_2 = \{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}$ con **(En práctica)**

$p_1(x) = 1 + 2x + 5x^2 + 3x^3 + 2x^4$, $q_1(x) = 2 + x + 4x^2 - 3x^3 + 4x^4$,
$p_2(x) = 3 + x + 5x^2 - 6x^3 + 6x^4$, $q_2(x) = 3 + x + 3x^2 - 2x^3 + 2x^4$,
$p_3(x) = 1 + x + 3x^2 + 2x^4$, $q_3(x) = 9 + 2x + 3x^2 - 3x^3 - 2x^4$.

a) Defina los subespacios W_1 y W_2 generados por S_1 y S_2 respectivamente.

b) Encuentre una base de los subespacios $W_1 + W_2$ y $W_1 \bigcap W_2$.

21. Dados los conjuntos:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Muestre que los espacios $< S_1 >$, $< S_2 >$, generados por S_1 y S_2 son iguales.

b) Encuentre una base para $S =< S_1 >=< S_2 >$.

22. Encuentre una base de los siguientes subespacios: (a, b y c son Ctes. en $\mathbb{R}$) **(En práctica 22*c*))**

a) $\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) |\ p$ es par$\}$,

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ ax = by = cz\}$,

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ ax + by + cz = 0\}$,

d) $\{A \in M_3(\mathbb{R}) |\ A$ es simétrica$\}$,

e) $\{A \in M_3(\mathbb{R}) |\ A$ es antisimétrica$\}$.

23. Encuentre una base y determine la dimensión de los siguientes subespacios:
(En práctica c) y f))

a) $W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x_1 = 3x_2 \ \wedge \ x_3 = 7x_4 \}$,

b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $W = \left\{ p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ : \ \int_{-1}^{1} tp'(t)dt = 0 \right\}$,

d) $W = \{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ : \ A = A^t \}$,

e) $W = \{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ : \ A = \bar{A}^t \}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$,

f) $W = \{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ : \ A = \bar{A}^t \}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$.

24. Sea $V = \mathbb{R}^4$ y sus subespacios $F = \langle \{ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \} \rangle$ y $G = \langle \{ \vec{d}, \vec{e} \} \rangle$, donde $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $\vec{b} = (2,\ 2,\ 2,\ 6)$, $\vec{c} = (0,\ 2,\ 4,\ 4)$, $\vec{d} = (1,\ 0,\ -1,\ 2)$ y $\vec{e} = (2,\ 3,\ 0,\ 1)$. Determinar las dimensiones de F, G, $F \cap G$ y $F + G$ y dar una base para cada uno de estos subespacios.

25. Muestre que el conjunto β es base del espacio vectorial V y encontrar el vector coordenada $[w]_\beta$, si: **(En práctica)**

V	β	w
$\mathbb{R}^3$	$\{ (1,\ 1,\ 0),\ (2,\ 0,\ 3),\ (-1,\ 1,\ 0) \}$	$(2,\ 2,\ 3)$
$\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$	$\{ (t-1)^3,\ (t-1)^2,\ (t-1),\ 1 \}$	$t^2 + t + 1$
$M_2(\mathbb{R})$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

RRS/RNG/JMS/AGS/LNB/JSA/BBM/LRS/ags
semestre primavera 2006.