

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I

- Problemas de valores iniciales (P.V.I.) Existencia y unicidad de solución.
- Solución numérica de un P.V.I. Método de Euler.
- Métodos Runge-Kutta.
- Control del error. Esquemas Runge-Kutta-Fehlberg.

Problemas de valores iniciales (P.V.I.)

Se considera el problema de valores iniciales (P.V.I.):

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0 \text{ dado,} \end{cases}$$

el que supondremos tiene solución única, $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual es acotada y depende continuamente de los datos f e y_0 .

Existencia y unicidad de solución de un P.V.I.

Teorema. Sean D un subconjunto convexo de \mathbb{R}^2 , f una función continua en el dominio D y (a, y_0) un punto interior de D .

Considere el P.V.I.

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (x, y) \in D, \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Si f satisface la **condición de Lipschitz**

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

con $k \geq 0$, entonces, para algún intervalo $I = [a - \alpha, a + \alpha]$, existe una única solución $y = y(x)$ del P.V.I. definida en ese intervalo I .

Observación. Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe y es acotada en D , entonces la condición de Lipschitz se satisface con

$$k = \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \infty.$$

Ejemplo. Considere la ecuación

$$y' = 1 + \operatorname{sen} xy \quad y \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}.$$

Se tiene que

$$f(x, y) = 1 + \operatorname{sen}(xy) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy) \Rightarrow k = 1.$$

Luego, dado cualquier (a, y_0) con $0 < a < 1$, por el teorema existe una única solución del P.V.I. en algún intervalo centrado en a . Más aún, puede demostrarse que el P.V.I. tiene solución única en todo el intervalo $[0, 1]$.

Solución Numérica de un P.V.I.

Los métodos numéricos para resolver el P.V.I.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0 \text{ dado}, \end{cases}$$

se basan en tomar una partición en N subintervalos del intervalo $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$

y obtener **sucesivamente** N números y_1, y_2, \dots, y_N que aproximan a los valores $y(x_1), \dots, y(x_N)$ de la solución exacta en los **nodos** x_1, \dots, x_N .

Típicamente los nodos se escogen equiespaciados; es decir, están definidos por

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{con } h = \frac{b - a}{N}.$$

Método de Euler (o de la Tangente)

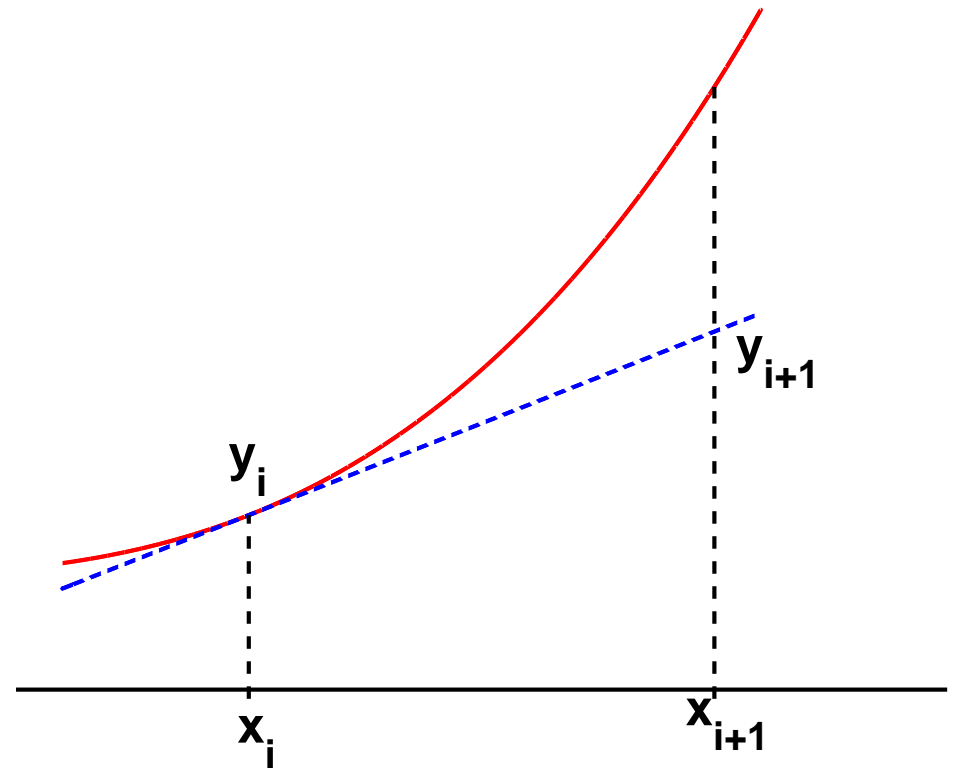
Considere el P.V.I.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Una manera geométrica de aproximar la solución de este problema consiste en reemplazar la derivada y' por la aproximación

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

válida para h pequeño.



Haciendo este reemplazo en la ecuación se encuentra

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x, y(x))$$

de donde,

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x)).$$

Partiendo de la condición inicial $y(a) = y_0$ y considerando h pequeño, el valor

$$y_1 := y(a) + hf(a, y(a))$$

define una aproximación para $y(a+h)$.

Una vez calculada esta aproximación, se puede utilizar para obtener la aproximación y_2 de $y(a+2h)$, a saber,

$$y_2 := y_1 + hf(a+h, y_1).$$

Repitiendo este proceso se pueden obtener aproximaciones para $y(a + 3h)$, $y(a + 4h), \dots, y(a + Nh)$.

Usando nodos x_i equiespaciados obtenemos el siguiente algoritmo:

Algoritmo (Euler)

Para $i = 0, \dots, N - 1$

$$x_i = a + ih$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

fin i .

Métodos Runge-Kutta

Los métodos **Runge-Kutta** consideran, en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, algunos **nodos auxiliares** de la forma:

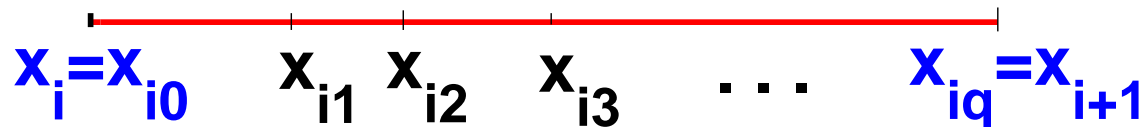
$$x_{ij} := x_i + \theta_j h, \quad j = 0, 1, \dots, q,$$

donde, $q \in \mathbb{N}$ recibe el nombre de **rango del algoritmo** y los parámetros θ_j verifican:

$$0 \leq \theta_j \leq 1, \quad \text{con } \theta_0 = 0 \text{ y } \theta_q = 1.$$

Así, en cada caso,

$$x_{i0} = x_i \quad \text{y} \quad x_{iq} = x_{i+1}.$$



En los nodos auxiliares se definen los valores:

$$\begin{aligned} y_{i0} &:= y_i, \\ y_{ij} &:= y_i + h \sum_{l=0}^{j-1} A_{jl} f(x_{il}, y_{il}), \quad j = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

siendo $y_{i+1} := y_{iq}$ el valor aproximado por el método para $y(x_{i+1})$.

Cuando los puntos x_{ij} y las constantes A_{jl} se determinan de manera que el desarrollo de y_{ij} coincida hasta el término en h^p con el desarrollo de Taylor de la solución exacta del **P.V.I. local**:

$$\begin{cases} \tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x)), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \tilde{y}(x_i) = y_i, & \underline{\text{con } y_i \text{ considerada exacta}}, \end{cases}$$

el correspondiente método se dice de **orden p** y **rango q** , y se abrevia por RK_{pq} .

Definición. Se define el **error local de truncamiento** en x_{i+1} por

$$\tau_{i+1} := \tilde{y}(x_{i+1}) - y_{i+1},$$

donde \tilde{y} es la solución del P.V.I. local anterior e y_{i+1} el valor obtenido por el método.

Definición. Se define el **error global** en x_{i+1} por

$$E_{i+1} := y(x_{i+1}) - y_{i+1},$$

donde $y(x_{i+1})$ es el valor de la solución exacta del P.V.I. en el nodo x_{i+1} e y_{i+1} es el valor obtenido por el método.

Para un método de Runge-Kutta de orden p , los errores locales de truncamiento son $\mathcal{O}(h^{p+1})$. Sin embargo, los errores globales son $\mathcal{O}(h^p)$:

$$|\tau_{i+1}| \leq Ch^{p+1}, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

pero

$$\max_{0 \leq i \leq N-1} |E_{i+1}| \leq Ch^p.$$

Otra vez: método de Euler o de la tangente (RK_{11})

Corresponde al caso en que $q = p = 1$; es decir, el método Runge-Kutta de orden 1 y rango 1: RK_{11} . Por lo tanto, $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 1$ y, en consecuencia,

$$x_{i0} = x_i \quad \text{y} \quad x_{i1} = x_i + h = x_{i+1}.$$

Los valores de y_{i0} e y_{i1} se obtienen mediante

$$\begin{aligned} y_{i0} &= y_i, \\ y_{i1} &= y_i + hA_{10}f(x_{i0}, y_{i0}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $y_{i+1} := y_{i1}$, se tiene que

$$y_{i+1} = y_i + hA_{10}f(x_i, y_i).$$

Como se trata de un método de orden 1, el coeficiente A_{10} debe determinarse de modo que el error local de truncamiento sea $\mathcal{O}(h^2)$.

Considere el P.V.I. local

$$\begin{cases} \tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x)), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \tilde{y}(x_i) = y_i, & \underline{\text{con } y_i \text{ considerada exacta.}} \end{cases}$$

El desarrollo de Taylor de la solución es

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x_{i+1}) &= \tilde{y}(x_i) + h\tilde{y}'(x_i) + \frac{h^2}{2}\tilde{y}''(\xi_i) \\ &= y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\tilde{y}''(\xi_i), \quad \text{con } x_i < \xi_i < x_{i+1}. \end{aligned}$$

Comparando este desarrollo con el anterior:

$$y_{i+1} = y_i + hA_{10}f(x_i, y_i),$$

se ve que debe escogerse $A_{10} = 1$ para que coincidan hasta los términos en h .

Esto conduce al **método de Euler (o de la tangente)**, ya deducido anteriormente:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Los errores locales de truncamiento de este método resultan $\mathcal{O}(h^2)$:

$$\tau_{i+1} = \frac{h^2}{2} \tilde{y}''(\xi_i), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Por lo tanto, los errores globales son $\mathcal{O}(h)$:

$$\max_{0 \leq i \leq N-1} |E_{i+1}| \leq Ch.$$

Ejemplo.

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solución:

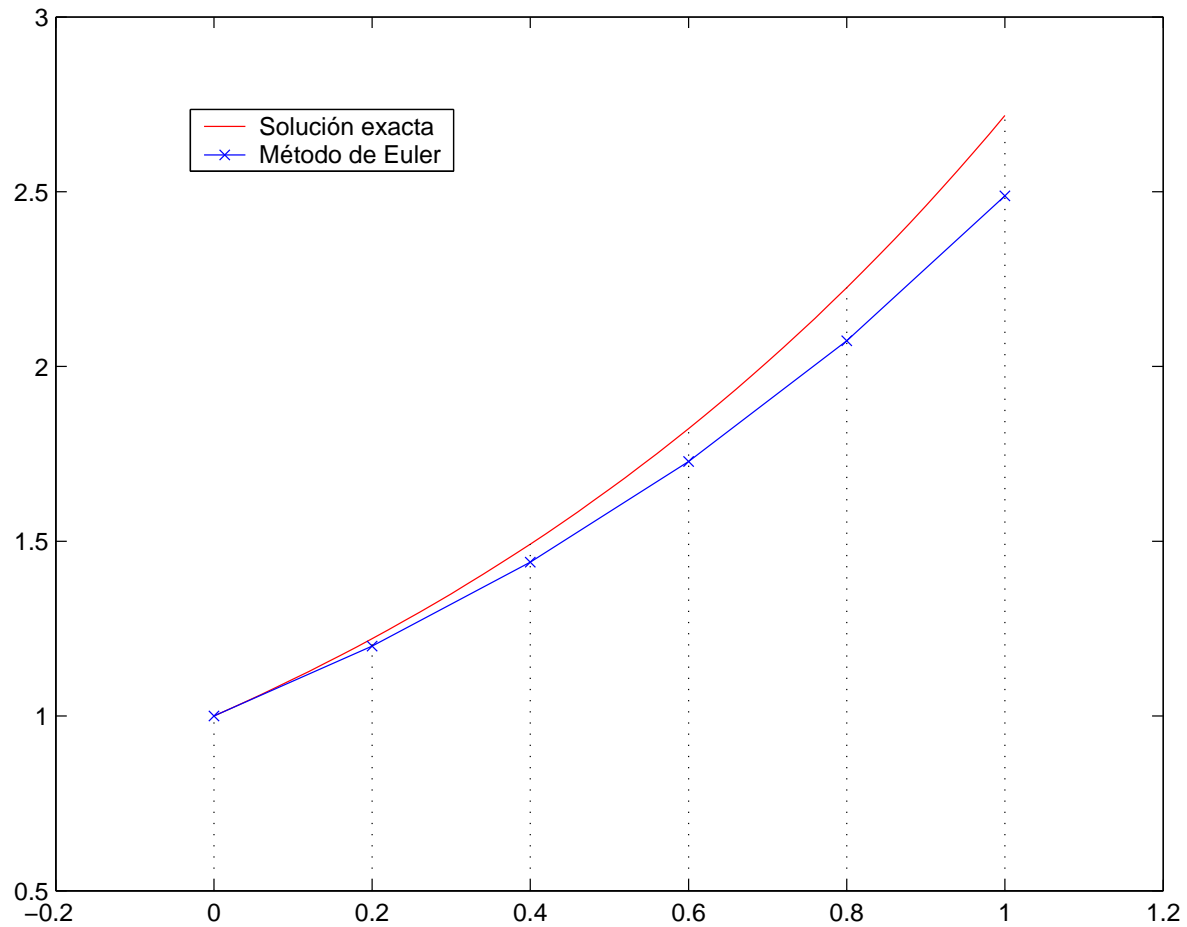
$$y(x) = e^x.$$

Método de Euler.

$$[a, b] = [0, 1]$$

$$N = 5$$

$$h = \frac{b - a}{N} = 0.2$$



Métodos RK_{22}

Estos métodos resultan ser de orden 2 ($p = 2$) y rango 2 ($q = 2$). Por lo tanto los errores locales de truncamiento son $\mathcal{O}(h^3)$ y el error global es $\mathcal{O}(h^2)$.

Los nodos se obtienen con $\theta_0 = 0$, θ_1 arbitrario y $\theta_2 = 1$. Por lo tanto,

$$x_{i0} = x_i, \quad x_{i1} = x_i + \theta_1 h \quad \text{y} \quad x_{i2} = x_i + h = x_{i+1}.$$

donde el parámetro θ_1 debe escogerse de manera tal que $0 < \theta_1 \leq 1$.

Los desarrollos en potencias de h para los correspondientes valores y_{i1} e y_{i2} se utilizan para obtener una expresión de y_{i+1} que se iguala al desarrollo de Taylor de la solución del P.V.I. local $\tilde{y}(x_{i+1})$ hasta los términos en h^2 . Así se obtiene la siguiente familia de algoritmos RK_{22} (dependiente del parámetro θ_1):

$$x_{i1} := x_i + \theta_1 h,$$

$$y_{i1} := y_i + h\theta_1 f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} := y_{i2} := y_i + h \left(1 - \frac{1}{2\theta_1} \right) f(x_i, y_i) + h \left(\frac{1}{2\theta_1} \right) f(x_{i1}, y_{i1}).$$

Casos particulares

1.- Método de Euler mejorado (tangente mejorada)

Corresponde a la elección de $\theta_1 = \frac{1}{2}$, con lo cual x_{i1} resulta ser el punto medio del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

De las ecuaciones anteriores se obtiene $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i1}, y_{i1})$ y el algoritmo queda así:

Algoritmo (Euler mejorado)

Para $i = 0, \dots, N - 1$

$$x_i = a + ih$$

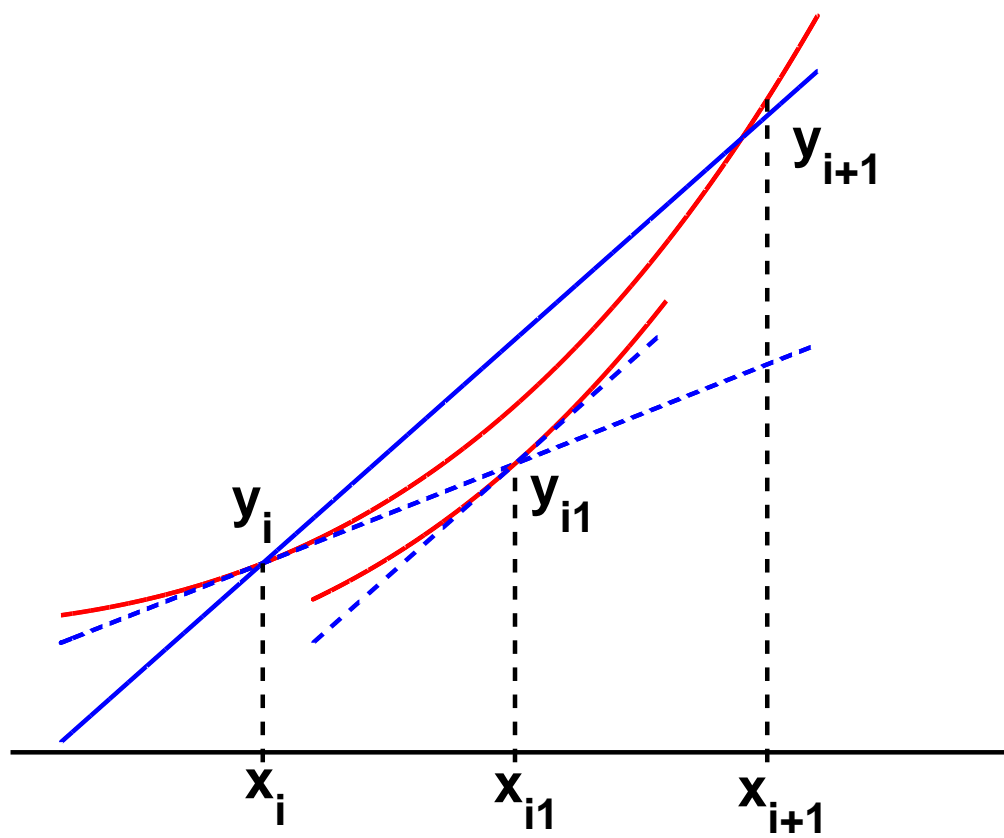
$$x_{i1} = x_i + \frac{h}{2}$$

$$y_{i1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i1}, y_{i1})$$

fin i .

Método de Euler Mejorado



2.- Método de Euler-Cauchy

Corresponde al caso en que $\theta_1 = 1$, con lo cual $x_{i1} = x_{i+1}$ y el algoritmo queda así:

Algoritmo (Euler-Cauchy)

Para $i = 0, \dots, N - 1$

$$x_i = a + ih$$

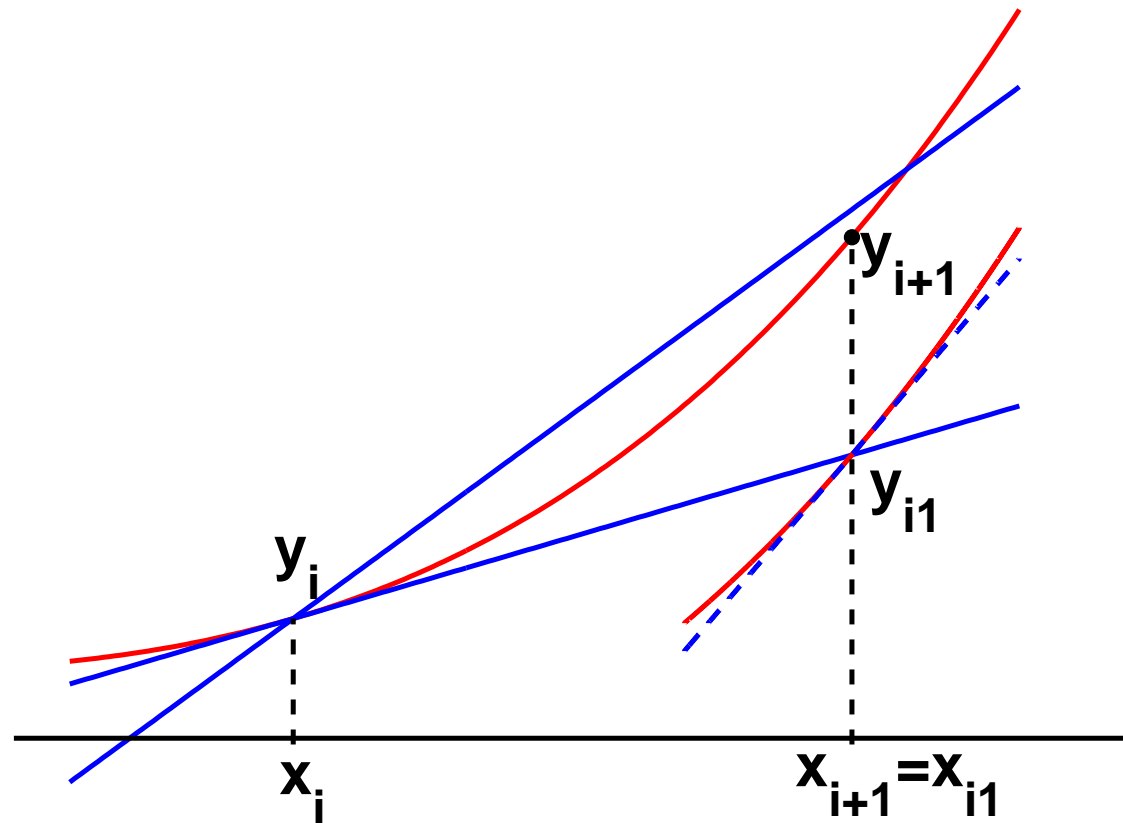
$$x_{i1} = x_i + h$$

$$y_{i1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i1}, y_{i1})]$$

fin i .

Método de Euler–Cauchy



Método RK_{44} clásico (o RK4)

Este método es de rango 4 y corresponde a la elección de parámetros

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}, \quad \theta_3 = \theta_4 = 1.$$

Por lo tanto,

$$x_{i0} = x_i, \quad x_{i1} = x_{i2} = x_i + \frac{h}{2}, \quad x_{i3} = x_{i4} = x_i + h = x_{i+1}.$$

Para deducirlo, se obtienen desarrollos en potencias de h para y_{i1} , y_{i2} , y_{i3} , e y_{i4} .

La expresión de y_{i+1} que se obtiene a partir de esos desarrollos se iguala al desarrollo de Taylor de la solución $\tilde{y}(x_{i+1})$ del P.V.I. local, hasta los términos en h^4 ($p = 4$).

Así se obtiene un algoritmo con error local de truncamiento $\mathcal{O}(h^5)$ y, por lo tanto, error global $\mathcal{O}(h^4)$.

Este método, también conocido como **RK4**, es sumamente utilizado debido a su alta precisión.

El algoritmo del método puede escribirse convenientemente del siguiente modo:

Algoritmo (RK4)

Para $i = 0, \dots, N - 1$

$$x_i = a + ih$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

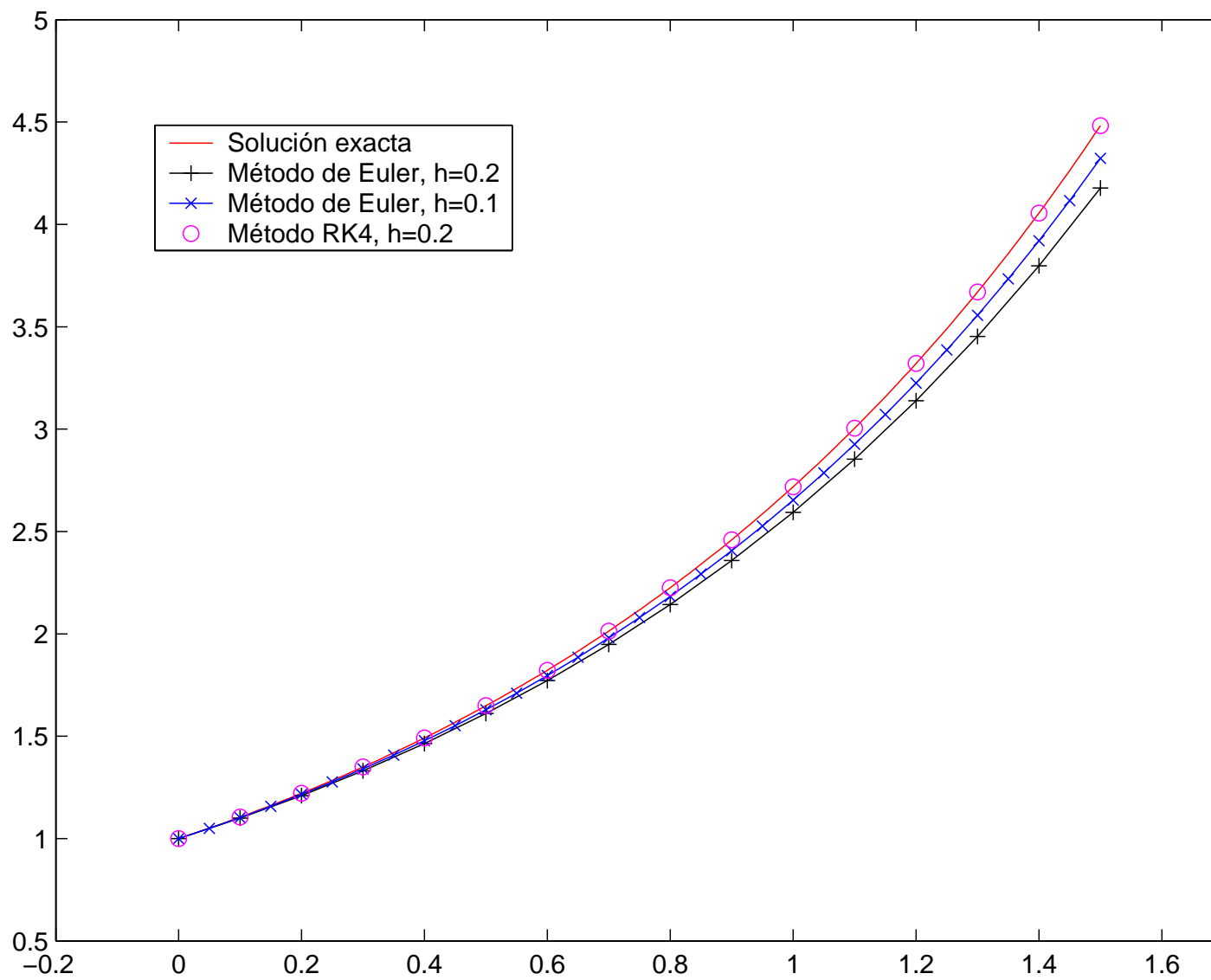
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]$$

fin i .

Ejemplo.
$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{Solución exacta: } y(x) = e^x.$$

x	Sol. Ex.	Euler: $h = 0.1$		Euler: $h = 0.025$		RK_{44} : $h = 0.1$	
		Sol. Cal.	Error	Sol. Cal.	Error	Sol. Cal.	Error
0.0	1.000000	1.000000	0.0	1.000000	0.0	1.000000	0.0
0.1	1.105170	1.100000	5.1×10^{-3}	1.103812	1.3×10^{-3}	1.105170	8.4×10^{-8}
0.2	1.221402	1.210000	1.1×10^{-2}	1.218402	2.9×10^{-3}	1.221402	1.8×10^{-7}
0.3	1.349858	1.331000	1.8×10^{-2}	1.344888	4.9×10^{-3}	1.349858	3.1×10^{-7}
0.4	1.491824	1.464100	2.7×10^{-2}	1.484505	7.3×10^{-3}	1.491824	4.5×10^{-7}
0.5	1.648721	1.610510	3.8×10^{-2}	1.638616	1.0×10^{-2}	1.648720	6.3×10^{-7}
0.6	1.822118	1.771561	5.0×10^{-2}	1.808725	1.3×10^{-2}	1.822117	8.3×10^{-7}
0.7	2.013752	1.948717	6.5×10^{-2}	1.996495	1.7×10^{-2}	2.013751	1.0×10^{-6}
0.8	2.225540	2.143588	8.1×10^{-2}	2.203756	2.1×10^{-2}	2.225539	1.3×10^{-6}
0.9	2.459603	2.357947	0.1	2.432535	2.7×10^{-2}	2.459601	1.6×10^{-6}
1.0	2.718281	2.593742	0.12	2.685063	3.3×10^{-2}	2.718279	2.0×10^{-6}
1.1	3.004166	2.853116	0.15	2.963808	4.0×10^{-2}	3.004163	2.5×10^{-6}
1.2	3.320116	3.138428	0.18	3.271489	4.8×10^{-2}	3.320113	3.0×10^{-6}
1.3	3.669296	3.452271	0.21	3.611112	5.8×10^{-2}	3.669293	3.6×10^{-6}
1.4	4.055199	3.797498	0.25	3.985992	6.9×10^{-2}	4.055195	4.3×10^{-6}
1.5	4.481689	4.177248	0.30	4.399789	8.1×10^{-2}	4.481683	5.1×10^{-6}



Control del Error Local de Truncamiento

Usualmente, el tamaño del paso h a utilizar no es contante, sino que se determina en cada paso a fin de que los errores se mantengan por debajo de una tolerancia prefijada.

En la práctica, no es posible **determinar a priori** cuál es el tamaño del paso h que debe utilizarse para calcular la solución de un P.V.I. con error global menor que una tolerancia.

Una alternativa consiste en, una vez calculada la solución numérica con un tamaño de paso h , **estimar a posteriori el error local** a fin de decidir si la solución calculada es aceptable o no y, en caso negativo, intentar recalcularla con otro tamaño de paso $h' < h$.

Esquemas Runge-Kutta-Fehlberg

Una estrategia para el control del error es la de los **esquemas Runge-Kutta-Fehlberg**. En particular, uno muy utilizado es el de cuarto orden, **RKF45**, el cual consiste en un RK_{45} acoplado con un RK_{56} .

Este esquema minimiza el número de evaluaciones de f , ya que el RK_{56} utiliza las mismas 5 evaluaciones del RK_{45} y una sola más.

En cada paso, el valor de la solución calculado por el método de mayor orden (RK_{56}) se utiliza para estimar a posteriori el error del calculado por el de menor orden (RK_{45}).

De ese modo, este método permite una selección automática del paso de integración h (**métodos adaptivos de paso variable**) como se puede apreciar en el algoritmo que sigue.

Este esquema se utiliza en MATLAB mediante el comando `ode45`.

A su vez el comando `ode23` implementa un esquema **RKF23** similar.

Algoritmo (RK45)

Dados $f(x, y)$, a , y_0 , b , ϵ y h (paso inicial tentativo)

Para $i = 0, 1, 2, \dots$

- (1) $x_{i+1} = x_i + h$
 $k_1 = hf(x_i, y_i)$
 $k_2 = hf(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1)$
 $k_3 = hf(x_i + \frac{3}{8}h, y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$
 $k_4 = hf(x_i + \frac{12}{13}h, y_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$
 $k_5 = hf(x_i + h, y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$
 $k_6 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$
 $y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$
 $\tau_{i+1} := \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$
 $s := 0.84 (\epsilon / |\tau_{i+1}|)^{1/4}$
Si $|\tau_{i+1}| < \epsilon$, OK: $h = 2sh \longrightarrow$ (2)
Si no, $h = sh \longrightarrow$ (1)
- (2) fin i , hasta que $x_{i+1} \geq b$.