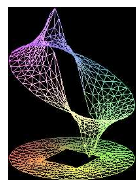
520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Segundo Semestre 2003, Universidad de Concepción



CAPITULO 9. VECTORES

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

El Espacio $\mathbb{R}^3$.

- Al igual que la representación cartesiana $0XY$ del plano $\mathbb{R}^2$, representamos el espacio $\mathbb{R}^3$ a través de tres rectas reales mutuamente ortogonales, que se intersectan en un punto llamado origen. Al origen se le asigna el valor $(0, 0, 0)$, y usualmente se denota por $\mathbf{0}$ o por $\boldsymbol{\theta}$.
- Identificamos con $\mathbb{R}$ a cada una de las rectas reales indicada anteriormente.
- Usualmente, estas rectas se identifican como sigue: si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, decimos que, x pertenece al eje o recta real X, y pertenece al eje o recta real Y, y que z pertenece al eje o recta real Z.

Vectores

- Si (x, y, z) es un punto de $\mathbb{R}^3$, se dice que x, y, z, son las coordenadas del punto (x, y, z).

En el espacio $\mathbb{R}^3$, el conjunto

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ se identifica con el plano XY.
- $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ se identifica con el plano XZ.
- $\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se identifica con el plano YZ.

Observación.

- Cada plano coordenado XY, XZ o YZ, divide el espacio $\mathbb{R}^3$ en dos semiespacios.
- Los planos coordenados XY, XZ y YZ, dividen el espacio en 8 regiones, cada una de las cuales se llama octante.

Vectores

- El primer octante es el octante que contiene a todos los puntos que tienen sus tres coordenadas positivas.

Definición: Suma y producto por escalar en $\mathbb{R}^3$.

- Para $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$ arbitrarios, definimos

$$A + B := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

- Para $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $\alpha A := (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$

Definición: Distancia en $\mathbb{R}^3$.

Sean $A = (x_1, y_1, z_1)$ y $B = (x_2, y_2, z_2)$ son puntos arbitrarios en $\mathbb{R}^3$, definimos la distancia entre A y B como el número real $d(A, B)$ definido por

$$d(A, B) := \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\}^{1/2}$$

Vectores

Propiedades. Dados los puntos A y B en $\mathbb{R}^3$, se tiene que

(i) $d(A,B)=0$, sí y sólo sí $A=B$,

(ii) $d(A,B)=d(B,A)$,

(iii) $d(A,C)\leq d(A,B)+d(B,C)$, donde C es cualquier punto de $\mathbb{R}^3$.

Definición: Vector en $\mathbb{R}^3$.

Dados los puntos $A=(x_1,y_1,z_1)$ y $B=(x_2,y_2,z_2)$ en $\mathbb{R}^3$, definimos el vector AB (en ese orden) al segmento de recta que se inicia en el punto A y termina en el punto B. Diremos que el sentido del vector AB es de A a B, que su dirección es la del segmento de extremos A y B, y que su magnitud es igual a $d(A,B)$. Denotamos el vector AB por $AB=[x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1]$.

- Dado el vector $[x,y,z]$. Se dice que x , y y z son las componentes del vector $[x,y,z]$.

Vectores

- Todo punto $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ da origen a un vector $[x,y,z]$. A saber, el vector que va desde el origen $(0,0,0)$ al punto (x,y,z). Estos vectores $[x,y,z]$, se llamaran vectores en el origen. Denotaremos por $\mathbb{R}^3_\theta$ al conjunto de todos los vectores en el origen, esto es, $\mathbb{R}^3_\theta := \{[x,y,z] \ : \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$.
- los vectores que tienen su punto inicial fuera del origen, se llaman vectores libres
- Notar que existe una biyección natural entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3_\theta$.

Definición: Igualdad de vectores

Dos vectores $[x,y,z]$ y $[a,b,c]$ son iguales, si $x=a$, $y=b$, $z=c$.

- Dados los puntos $A_1=(1,1,1)$, $B_1=(2,-1,3)$; y $A_2=(3,4,-2)$ y $B_2=(4,2,0)$, los vectores A_1B_1 y A_2B_2 , son iguales.

Vectores

- Todo vector libre es igual a un vector en el origen.

Definición: Suma y Producto por Escalar de Vectores.

Dados los vectores en el origen $[x_1, y_1, z_1]$, $[x_2, y_2, z_2]$, y el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos:

$$\alpha[x_1, y_1, z_1] := [\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1]$$

$$[x_1, y_1, z_1] + [x_2, y_2, z_2] := [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2].$$

Observación Dado el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y el vector $[x, y, z]$, el vector $\alpha[x, y, z]$ tiene magnitud igual a $|\alpha|$ por la magnitud del vector $[x, y, z]$, y su dirección es:

- la misma del vector $[x, y, z]$, cuando $\alpha > 0$.
- opuesta al vector $[x, y, z]$, cuando $\alpha < 0$.

Definición: Norma de un Vector.

La norma del vector $[x, y, z]$, denotada por $\|[x, y, z]\|$, se define como

$$\|[x, y, z]\| := \{x^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}$$

Propiedades. Para vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$, y escalares $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene:

- $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ sí y sólo sí, $\boldsymbol{v} = [0, 0, 0]$,
- $\|\alpha \boldsymbol{v}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{v}\|$,
- $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$,

Definición. Decimos que el vector $\boldsymbol{u}$ es unitario, si $\|\boldsymbol{u}\| = 1$.

Vectores

- Llamamos vectores canónicos, denotados por $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, a los tres vectores unitarios que van del origen a los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, y $(0,0,1)$, respectivamente. Esto es:

$$\boldsymbol{i} = [1,0,0], \boldsymbol{j} = [0,1,0] \text{ y } \boldsymbol{k} = [0,0,1]$$

- Notar que todo vector $[x,y,z]$, puede ser escrito como $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

Definición: Producto Interior.

Dados los vectores $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, u_3]$ y $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3]$, se llama producto interior, producto punto o producto escalar de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ al número real , $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, definido por

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \, .$$

Vectores

Proposición.

Dados los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, se tiene que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|^2$, además

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \begin{cases} \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos(\theta) & \text{si } \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

donde θ es el menor ángulo entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

Definición.

- Diremos que los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, son ortogonales o perpendiculares, lo que denotaremos por $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$, si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$.
- Diremos que dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son paralelos, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{v}$.

Observación.

- Los vectores canónicos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, son ortogonales dos a dos.
- Dado un vector $\boldsymbol{r} = [x_1, x_2, x_3]$. Los ángulos α, β, γ, entre $[0, \pi]$, formados por el vector $\boldsymbol{r}$ y los vectores canónicos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, respectivamente, se denominan ángulos directores de $\boldsymbol{r}$. Los cosenos de dichos ángulos, que están dados por

$$\cos(\alpha) = \frac{x_1}{\|\boldsymbol{r}\|}, \quad \cos(\beta) = \frac{x_2}{\|\boldsymbol{r}\|}, \quad \cos(\gamma) = \frac{x_3}{\|\boldsymbol{r}\|}\,.$$

  son llamados los cosenos directores de $\boldsymbol{r}$.
- Dados dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, la proyección del vector $\boldsymbol{b}$ sobre el vector $\boldsymbol{a}$, denotada por $P_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, es igual a

$$P_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\,\boldsymbol{a}\,.$$

Vectores

Definición: Recta en $\mathbb{R}^3$.

Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$, definimos la recta L que pasa por P_1 y P_2, como el conjunto de todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tales que

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es arbitrario.

- La recta L es la única recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

Definición. Decimos que la recta L es paralela al vector $\boldsymbol{r}$, si $\boldsymbol{r}$ es paralelo a cualquier vector contenido en la recta.

Vectores

Recordando la identificación del vector $[x, y, z]$ con el punto (x, y, z), obtenemos:

Proposición.

Un punto $P = (x, y, z)$ pertenece a la recta L que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\boldsymbol{r} = [a, b, c]$, sí y sólo sí existe $t \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ satisface $\overrightarrow{PP_0} = t\,\boldsymbol{r}$.

Observaciones.

- Notar que $P = (x, y, z)$ pertenece a la recta L que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\boldsymbol{r} = [a, b, c]$ sí y sólo sí

$$\text{(ecuaciones paramétricas)} \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & x_0 & + & ta \\ y & = & y_0 & + & tb \\ z & = & z_0 & + & tc \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

- Lo que es equivalente con

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

siempre que $abc \neq 0$.

- La recta L que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\boldsymbol{r}$ también se denomina como la recta L que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del vector $\boldsymbol{r}$. Es claro que L está también definida como el conjunto de puntos $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ que son de la forma $P_0 + t\boldsymbol{r}$ para algún t en $\mathbb{R}$.

Vectores

Definiciones.

- Decimos que dos rectas L_1 y L_2, son paralelas, si L_1 y L_2 son paralelas a un vector $\boldsymbol{r}$.
- Decimos que dos rectas L_1 y L_2, son perpendiculares, denotado por $L_1 \perp L_2$, si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ y $\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{r}_2 = 0$.

Observación. A diferencia de lo que ocurre en el plano, dadas dos rectas L_1 y L_2 en el espacio $\mathbb{R}^3$ puede ser que ellas no sean paralelas y que tampoco se intersecten.

Definición: Producto vectorial.

Dados dos vectores $\boldsymbol{r}_1 = a_1\boldsymbol{i} + b_1\boldsymbol{j} + c_1\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{r}_2 = a_2\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + c_2\boldsymbol{k}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$, se define el producto vectorial (o producto cruz) de $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ (en ese orden), denotado por $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$, al vector

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 := (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{i} - (a_1c_2 - a_2c_1)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}$$

Propiedades.

Para vectores $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ en el espacio $\mathbb{R}^3$, y para escalares reales α, β, resulta:

- $$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{cases} \boldsymbol{n}\,\|\boldsymbol{r}_1\|\|\boldsymbol{r}_2\|\,\text{sen}(\theta) & \text{si } \boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{0} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{r}_2 \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \text{si } \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{0} \quad \text{y, o} \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

  donde $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario perpendicular a $\boldsymbol{r}_1$ y a $\boldsymbol{r}_2$, y θ es el menor ángulo entre $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$.

- $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = -\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_1$. (antisimetría)
- $(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3 = \alpha(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3) + \beta(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3)$.
- $\boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}_2 \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) = 0$. Es decir $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ es ortogonal a $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$.
- $|\boldsymbol{r}_3 \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)|$ es el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ y $\boldsymbol{r}_3$.

Definición: El Plano.

Sean $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tres puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ tales que los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ no sean paralelos. El plano que pasa por P_0, P_1 y P_2, es el conjunto de todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tales que

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{1}$$

donde

$$\left\{\begin{array}{lcc} a & = & (y_1 - y_0)(z_2 - z_0) - (y_2 - y_0)(z_1 - z_0) \\ b & = & (-1)\{(x_1 - x_0)(z_2 - z_0) - (x_2 - x_0)(z_1 - z_0)\} \\ c & = & (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) \end{array}\right.$$

Observación.

- Se puede probar que el plano que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, con $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ vectores no paralelos, es único.
- Notar que a, b y c en la ecuación (1) son las componentes de un vector $\boldsymbol{n} = [a, b, c]$ que es perpendicular al plano generado por los vectores no paralelos $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$, y que además pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

- Es claro que $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$. Luego $P(x, y, z)$ pertenece al plano de ecuación (1) sí y sólo sí

$$(\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n}) = 0.$$

Proposición.

Dados un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}$, existe un único plano de ecuación $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, que es es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$ y que contiene al punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.