

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 8

**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS  
 PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO**

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Considere el problema de valores de contorno

$$\begin{cases} -y'' + ry' + ky = f(x), & x \in (a, b), \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta, \end{cases} \quad (\text{PVC-1})$$

donde  $k$  y  $r$  son constantes positivas. Las derivadas de  $y$  pueden ser aproximadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ y''(x) &= \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned} \quad (\text{DC})$$

las cuales son llamadas diferencias centradas. Consideranmos una partición uniforme del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual tamaño:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Evaluando (DC) en  $x = x_i$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} y'(x_i) &= \frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ y''(x_i) &= \frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en (PVC-1) obtenemos:

$$\begin{cases} -\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + r \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + ky(x_i) = f(x_i) + \mathcal{O}(h^2), & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ y(x_0) = \alpha, & y(x_n) = \beta. \end{cases}$$

Si  $h$  es pequeño, es posible despreciar los errores  $\mathcal{O}(h^2)$  en la expresión anterior para obtener aproximaciones  $y_i \approx y(x_i)$  que satisfacen:

$$\begin{cases} -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + r \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + ky_i = f(x_i), & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ y_0 = \alpha, & y_n = \beta. \end{cases}$$

Reordenando obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \left(-1 - \frac{rh}{2}\right)y_{i-1} + (2 + kh^2)y_i + \left(-1 + \frac{rh}{2}\right)y_{i+1} = h^2 f(x_i) & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ y_0 = \alpha, & y_n = \beta, \end{cases}$$

el cual es tridiagonal y puede ser escrito en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} B & C & 0 & \cdots & 0 \\ A & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C \\ 0 & \cdots & 0 & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C\beta \end{pmatrix}$$

donde:

$$A := -1 - \frac{rh}{2}, \quad B := 2 + kh^2, \quad C = -1 + \frac{rh}{2} \quad \text{y} \quad f_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Así, las aproximaciones  $y_i$  pueden obtenerse resolviendo el sistema tridiagonal anterior.

**Ejercicio 1.** Escriba una función en MATLAB que resuelva (PVC-1) mediante el método de diferencias finitas. Las entradas de esta función deben ser los parámetros  $r$ ,  $k$ ,  $f(x)$  (definida como una función `inline` o a través de otra función MATLAB),  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$ , y la salida debe ser el vector  $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)^t$ . Su función además debe graficar la solución obtenida por este método.

**Ejercicio 2.** Escriba un rutero que ejecute las siguientes tareas:

2.1) Llame a la función anterior para resolver el siguiente P.V.C.

$$\begin{cases} -y'' + 3y' + 2y = 3(\sin(x) + \cos(x)), & x \in [-\pi, \pi], \\ y(-\pi) = 0, & y(\pi) = 0, \end{cases}$$

con  $n = 100$ .

2.2) Calcule el error cuadrático dado por

$$\text{error} = \sum_{i=0}^n |y(x_i) - y_i|^2,$$

donde la solución exacta del P.V.C. es  $y(x) = \sin(x)$ .

2.3) En una misma gráfica dibuje la solución calculada del P.V.C. mediante diferencias finitas (use círculos) y la solución exacta (use una línea continua).

## MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Considere el problema de valores de contorno

$$\begin{cases} -u'' + cu = f, & x \in (a, b), \\ u(a) = 0, & u(b) = 0, \end{cases} \quad (\text{PVC-2})$$

donde  $c$  es una constante positiva. Al multiplicar la E.D.O. por una función  $v \in V$ , donde  $V$  es el espacio de funciones definidas en  $(a, b)$  y que se anulan en los extremos de este intervalo, e integrar por partes obtenemos el problema:

Hallar  $u \in V$  tal que:

$$\int_a^b u'(x)v'(x) dx + c \int_a^b u(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \forall v \in V, \quad (\text{FD})$$

el cual es una fomulación débil del problema (PVC-2). Usando el subespacio de dimensión finita  $V_h$  de  $V$  obtenemos una formulación débil discreta del problema (FD):

Hallar  $u_h \in V_h$  tal que:

$$\int_a^b u'_h(x) v'_h(x) dx + c \int_a^b u_h(x) v_h(x) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h. \quad (\text{FD}_h)$$

El subespacio  $V_h$  más usado es el de las funciones continuas y lineales a trozos, en una partición arbitraria del intervalo  $[a, b]$ , pero que para efectos prácticos en este laboratorio la supondremos uniforme:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Una base del espacio  $V_h$  es el de las funciones techo, las cuales se definen, para  $i = 1, \dots, n-1$ , como:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \quad \text{y que satisfacen} \quad \phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Así, como la expresión integral en  $(\text{FD}_h)$  es válida para todo  $v_h \in V_h$ , en particular es válida para los elementos de la base. Además, escribiendo  $u_h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j(x)$ , donde los coeficientes  $\alpha_j = u_h(x_j)$  obtenemos el problema

Hallar  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\int_a^b \left( \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j(x) \right)' \phi'_i(x) dx + c \int_a^b \left( \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j(x) \right) \phi_i(x) dx = \int_a^b f(x) \phi_i(x) dx \quad \forall i = 1, \dots, n-1,$$

o bien, reordenando tenemos:

Hallar  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left( \int_a^b \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx + c \int_a^b \phi_j(x) \phi_i(x) dx \right) \alpha_j = \int_a^b f(x) \phi_i(x) dx \quad \forall i = 1, \dots, n-1. \quad (\text{FD}_i)$$

Esta última expresión es un sistema de ecuaciones de  $(n-1) \times (n-1)$ . Si  $j \notin \{i-1, i, i+1\}$ , entonces

$$\int_a^b \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b \phi_j(x) \phi_i(x) dx = 0.$$

Así, el sistema  $(\text{FD}_i)$  se reduce a un sistema tridiagonal

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a_i &= \int_a^b [\phi'_i(x)]^2 dx + c \int_a^b [\phi_i(x)]^2 dx, & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ b_i &= \int_a^b \phi'_{i-1}(x) \phi'_i(x) dx + c \int_a^b \phi_{i-1}(x) \phi_i(x) dx, & \forall i = 2, \dots, n-1, \\ f_i &= \int_a^b f(x) \phi_i(x) dx, & \forall i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Las integrales para  $a_i$  y  $b_i$  se pueden calcular de manera exacta usando la Regla elemental de Simpson sobre cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , ya que sobre estos subintervalos  $[\phi_i(x)]^2$  y  $\phi_{i-1}(x)\phi_i(x)$  son polinomios de grado 2, y usando integración directa en las integrales que contienen  $[\phi'_i(x)]^2$  y  $\phi'_{i-1}(x)\phi'_i(x)$ , pues son constantes en estos subintervalos. Así:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} + c \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3} = \frac{2}{h} + c \frac{2h}{3}, & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ b_i &= \frac{1}{x_{i-1} - x_i} + c \frac{x_i - x_{i-1}}{6} = -\frac{1}{h} + c \frac{h}{6}, & \forall i = 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que el error del método de elementos finitos es de orden  $\mathcal{O}(h^2)$ , podemos utilizar un método de integración del mismo orden para estimar la integral que define a la variable  $f_i$ . Dado que la partición es uniforme, podemos utilizar la regla del punto medio compuesta para aproximar  $f_i$ . Notando que:

$$\phi_i(\hat{x}_j) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } j = i \vee j = i+1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \text{con} \quad \hat{x}_j = \frac{x_{j-1} + x_j}{2},$$

tenemos:

$$f_i = \int_a^b f(x) \phi_i(x) dx \approx h \sum_{j=1}^n f(\hat{x}_j) \phi_i(\hat{x}_j) = \frac{h}{2} (f(\hat{x}_i) + f(\hat{x}_{i+1})).$$

**Ejercicio 3.** Escriba una función en MATLAB que resuelva (PVC-2) mediante el método de elementos finitos. Las entradas de esta función deben ser los parámetros  $c$ ,  $f(x)$  (definida como una función `inline` o a través de otra función MATLAB),  $a$ ,  $b$ , y  $n$ , y la salida debe ser el vector  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)^t = (u_h(x_0), \dots, u_h(x_n))^t$ . Su función además debe graficar la solución obtenida por este método.

**Ejercicio 4.** Escriba un rutero que ejecute las siguientes tareas:

4.1) Llame a la función anterior para resolver el siguiente P.V.C.

$$\begin{cases} -u'' + 4u = 4x^3 - 10x, & x \in [-1, 1], \\ u(-1) = 0, & u(1) = 0, \end{cases}$$

con  $n = 100$ .

4.2) Calcule el error cuadrático dado por

$$\text{error} = \sum_{i=0}^n |u(x_i) - u_h(x_i)|^2,$$

donde la solución exacta del P.V.C. es  $u(x) = x^3 - x$ .

4.3) En una misma gráfica dibuje la solución calculada del P.V.C. mediante elementos finitos (use círculos) y la solución exacta (use una línea continua).

**Ejercicio 5.** Modifique su programa hecho en el ejercicio 3 para que resuelva el problema con condiciones de contorno no homogéneas:

$$\begin{cases} -u'' + cu = f, & x \in (a, b), \\ u(a) = \alpha, & u(b) = \beta. \end{cases} \quad (\text{PVC-3})$$

Para ello, transforme (PVC-3) a un problema con condiciones de contorno homogéneas mediante el cambio de variable:

$$u(x) = v(x) + \alpha \left( \frac{x-b}{a-b} \right) + \beta \left( \frac{x-a}{b-a} \right)$$

Repita el ejercicio 4 con el P.V.C.

$$\begin{cases} -u'' + \ln(2)^2 u = 0, & x \in [0, 1], \\ u(0) = 1, & u(1) = 2, \end{cases}$$

cuya solución exacta es  $u(x) = 2^x$ .

**Ejercicio 6.** Se puede usar la consercación del calor para desarrollar un balance de calor para una barra larga y delgada de longitud  $L$ . Si la barra no está aislada en toda su longitud y el sistema se encuentra en estado estacionario, la ecuación resultante es:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + k(T_a - T) = 0, \quad x \in [0, L],$$

donde  $k$  es un coeficiente de transferencia de calor que parametriza la razón de disipación de calor con el aire circundante, y  $T_a$  es la temperatura del aire circundante. La temperatura de la barra en los extremos mantiene valores fijos:

$$T(0) = T_1 \quad \text{y} \quad T(L) = T_2.$$

Escriba un rutero en MATLAB que ejecute las siguientes tareas:

- 6.1) Encuentre la temperatura en una barra de largo  $L = 10m$ , con  $k = 0.01m^{-2}$  temperatura de aire circundante  $T_a = 20^\circ C$  y con temperatura en los extremos dadas por  $T_1 = 40^\circ C$  y  $T_2 = 200^\circ C$ . Para ello utilice el método de diferencias finitas y el método de elementos finitos, en ambos casos con una partición de  $n = 100$ .
- 6.2) En un mismo gráfico dibuje la temperatura obtenida con diferencias finitas y la temperatura obtenida con elementos finitos.
- 6.3) Calcule la siguiente norma:

$$\| \mathbf{y}_{mdf} - \mathbf{y}_{mef} \|_2$$

donde  $\mathbf{y}_{mdf}$  es el vector obtenido mediante diferencias finitas y  $\mathbf{y}_{mef}$  es el vector obtenido mediante elementos finitos.