UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION RECUPERATIVA
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142)

P1. a) Niegue la siguiente proposición

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \left[(x+y>0) \longrightarrow (x+y>0 \wedge x-y=0)\right].$$

(8 Ptos.)

Solución

Recordando que $p \longrightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, con lo cual se tiene que $\sim (p \longrightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$, resulta que la negación de la proposición enunciada es

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \Big[(x+y>0) \wedge \sim (x+y>0 \wedge x-y=0)\Big]$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \Big[(x+y>0) \wedge (x+y \leq 0 \vee x-y \neq 0)\Big],$$

después de ocupar la equivalencia $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

b) La suma de tres números en progresión geométrica es 70. Si se multiplican sus extremos por 4 y el del medio por 5, los valores resultantes están en progresión aritmética. Determine los números. **(7 Ptos.)**

Solución

$$t_1 + t_1 r + t_1 r^2 = 70 \Longrightarrow t_1(1+r+r^2) = 70 \tag{1}$$

$$4t_1,\ 5t_1 r,\ 4t_1 r^2 \quad \text{P.A.}$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & 4t_1r^2 & - & 5t_1r & = & 5t_1r & - & 4t_1 \\
\Longrightarrow & 4t_1r^2 & - & 10t_1r & + & 4t_1 & = & 0 \\
\Longrightarrow & t_1(4r^2 & - & 10r & + & 4) & = & 0 \\
\Longrightarrow & t_1 & = & 0 & \vee & 4r^2 & - & 10r+4=0 \\
\Longrightarrow & t_1 & = & 0 & \vee & (r_1 & = & 2 \vee r_2 = 1/2)
\end{array}$$

Notemos que $t_1 = 0$ no es solución de (1).

$r = 2$ en (1)

$$t_1 \cdot 7 = 70 \Longrightarrow t_1 = 10$$

Los números son : $10, 20, 40$

$r = 1/2$ en (1)

$$t_1 \frac{7}{4} = 70 \Longrightarrow t_1 = 40$$

Los números son : $40, 20, 10$.

P2. a) Sea $f(x) = \begin{cases} 3x+5, & -3 \leq x < 0 \\ 2-x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Determine Rec(f) y decida si f es inyectiva. Justifique.

(10 Ptos.)

Solución

$Rec(f) = f([-3,0[) \cup f([0,1])$.

$$\begin{aligned} f([-3,0[) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [-3,0[\text{ y } y = f(x) = 3x+5\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : -3 \leq x < 0 \text{ y } x = \frac{y-5}{3}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : -3 \leq \frac{y-5}{3} < 0\} \\ &= [-4,5[\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f([0,1]) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [0,1] \text{ y } y = f(x) = 2-x^2\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 \text{ y } |x| = \sqrt{2-y} \text{ y } 2-y \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq \sqrt{2-y} \leq 1 \text{ y } y \leq 2\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq 2-y \leq 1 \text{ y } y \leq 2\} \\ &= [1,2]\,. \end{aligned}$$

Así $Rec(f) = f([-3,0[) \cup f([0,1]) = [-4,5[\cup [1,2] = [-4,5[$.

Inyectividad: f no es inyectiva ya que $f(-1) = f(0) = 2$.

b) Calcule $\log_x(b)$ si $\log_a\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 5$ y $\log_b\left(\sqrt[3]{a}\right) = \dfrac{1}{9}$.

(10 Ptos.)

Solución

$$\begin{aligned} \log_a\left(\frac{1}{x^2}\right) = 5 &\iff a^5 = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \\ &\iff a = x^{-2/5} \\ \log_b\left(\sqrt[3]{a}\right) = \frac{1}{9} &\iff b^{1/9} = \sqrt[3]{a} \\ &\iff b = \left(a^{1/3}\right)^9 = a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_x(b) &= \log_x(a^3) \\ &= \log_x\left(x^{-2/5}\right)^3 \\ &= \log_x\left(x^{-6/5}\right) \\ &= \left(-\frac{6}{5}\right)\log_x(x) \\ &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

P3. Descomponga la fracción en suma de fracciones parciales

$$\frac{5x^2 - 8x + 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}.$$

(10 Ptos.)

Solución

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{5x^2 - 8x + 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$$

$D(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

divisores de $-2 : \pm 1, \pm 2$
divisores de $1 : \pm 1$
Posibles raíces racionales $\pm 1, \pm 2$
$D(1) \neq 0, \therefore$ 1 no es raíz
$D(-1) \neq 0, \therefore$ 1 no es raíz
$D(2) = 0, \therefore$ 2 es cero y $(x-2)$ es factor

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 - 8x + 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} &= \frac{5x^2 - 8x + 5}{(x-2)(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

$$5x^2 - 8x + 5 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x - 2)$$

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & x = 2 & 9 = 3A & \Longrightarrow \quad A = 3 \\ & x = 0 & 5 = A - 2C & \Longrightarrow \quad C = -1 \\ & x = 1 & 2 = A - B - C & \Longrightarrow \quad B = 2 \end{array}$$

$$\therefore \frac{5x^2 - 8x + 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} = \frac{3}{x-2} + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$$

P4. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre las raíces del polinomio $p(x) = |A - xI|$, donde I es la matriz identidad de orden 4.

(15 Ptos.)

$$\begin{aligned} p(x) &= |A - xI| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -x & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1-x & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 4 \end{aligned}$$

Notemos que $p(x) = (x-1)^2\left(x^2 - x - 4\right)$.

De aquí las raíces son: 1 con multiplicidad 2, $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ y $\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$.