UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142.

PRACTICA 10. NUMEROS COMPLEJOS

Problema 1. Para $z \in \mathbb{C}$ pruebe que: [**Práctica: 1.3**]

1.1. $z \neq 0 \Longrightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$ 1.2. $Re(z) \leq |z|, \quad Im(z) \leq |z|$
1.3. $z \neq 0 \Longrightarrow z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ 1.4. $Im(iz) = Re(z)$

Problema 2. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$:
2.1). $i^{4n} = 1$, 2.2). $i^{4n+1} = i$, 2.3). $i^{4n+2} = -1$, 2.4). $i^{4n+3} = -i$.

Problema 3. Sabiendo que $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}, w \neq 0$. Evalúe los siguientes números complejos:

3.1. $\dfrac{1}{z}$; 3.2. $\sqrt{2+3i}$; 3.3. $-4(1+\dfrac{i}{12}) + 4(1-\dfrac{1}{12i})$.
3.4. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+\frac{z-2}{2}}\right)$; 3.5. $|(2+3i)(3+4i)i|$; 3.6. $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i} + \dfrac{2}{5}$.

Problema 4. Considere $z_1, z_2, ...z_n \in \mathbb{C}$.
4.1) Pruebe que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ y $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.
4.2) Demuestre la generalización de la desigualdad triangular para un número finito de términos. Esto es: [**Práctica.**]

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problema 5. Pruebe que $|z_1 + z_2| \geq |\,|z_1| - |z_2|\,|$ y deduzca que [**Práctica.**]

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \geq |\,|z_1| - |z_2|\,|$$

Indicación: Use $|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$.

Problema 6. Pruebe que $|Im(1 - \overline{z} + z^2)| < 3$, para $|z| < 1$.

Problema 7. Encuentre el valor de $z = x + yi$ tal que: [**Práctica: 7.2 y 7.4.**]

7.1. $(x + yi)^2 = i$; 7.2. $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - 2x + yi$.
7.3. $iz = x + 1 + 2yi$; 7.4. $\text{sen}(e^x) + i cos\ (x) = 1 + i\,\text{sen}(y)$.

Problema 8. Describir el conjunto de puntos z que satisfacen la condición dada.

8.1. $|z| \leq 2$; 8.2. $|z - 5i| = 0$; 8.3. $|z + 1 - 2i| > 3$.
8.4. $Im(z - 4 + 2i) \leq 3$; 8.5. $Re(\frac{1}{z}) \leq \frac{1}{2}$; 8.6. $Re((1+i)z) < 0$.

Problema 9. Escriba las siguiente expresiones en la forma $x + yi$ y en la forma polar.

9.1. $(-2+2i)^5$; 9.2. $[3cis(\frac{-\pi}{4})]^4$; 9.3. $(1+i)^{\frac{-1}{4}}$
9.4. $(27)^{\frac{1}{4}}1^{\frac{1}{4}}$; 9.5. $[2cis(\frac{-\pi}{3})]^{-4}$; 9.6. $(1+i)^{20}$.

Problema 10. Utilice la fórmula de De Moivre para escribir $cos\ (3\alpha)$ y $\operatorname{sen}(3\alpha)$ en términos de $cos\ (\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)$. [**Práctica.**]

Problema 11. Para $a, b \in \mathbb{R}$, considere el producto $(1+ai)(1+bi)$ y el argumento de cada uno de los factores para: [**Práctica: 11.1 y 11.2.**]

11.1.- Verificar que

$$\operatorname{arc\,tg}(a) + \operatorname{arc\,tg}(b) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

11.2.- Demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\right).$$

11.3.- Encontrar una fórmula para

$$\operatorname{arc\,tg}(a) + \operatorname{arc\,tg}(b) + \operatorname{arc\,tg}(c).$$

Problema 12. Resuelva las siguientes ecuaciones: [**Práctica: 12.2 y 12.6.**]

12.1. $z^2 + 3i = 6$; 12.2. $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$; 12.3. $z^4 - i = 1$.
12.4. $|2e^{it}| = 2,\ 0 \leq t \leq 2\pi$; 12.5. $z^8 - \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = 0$; 12.6. $z^{\frac{2}{3}} - i = 0$.

Problema 13. Pruebe que: [**Práctica: 13.2 y 13.6.**]

13.1. $|e^{it}| = 1$; 13.2. $\operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$; 13.3. $(e^{it})^n = e^{nti}$.
13.4. $\overline{e^{it}} = e^{-it}$; 13.5. $cos\ (t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$; 13.6. $\frac{1}{cos\ (t) + i\operatorname{sen}(t)} = cos\ (t) - i\operatorname{sen}(t)$.

23.05.2003.
ACQ/LNB/acq.