UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA COMPLEMENTOS DE CALCULO (521234)

Evaluación II

1. Considere $u(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y)$

   a) Demuestre que u es armónica.

   b) Encuentre una conjugada armónica v de u.

   c) Forme la función analítica $f(z) = u + iv$ correspondiente.

   d) Demuestre que $f''(z) = -f(z)$.

(3 pts.)

Pauta Problema 1

a)

$$\begin{array}{llll} u_x = & \cos(x)\cosh(y) & u_y = & \operatorname{sen}(x)\sinh(y) \\ u_{xx} = & -\operatorname{sen}(x)\cosh(y) & u_{yy} = & \operatorname{sen}(x)\cosh(y) \end{array}$$

$$\therefore u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(3 puntos)

b)

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x)\cosh(y) & \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{sen}(x)\sinh(y) \\ v(x,y) = \cos(x)\sinh(y) + k(x) & \frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x)\sinh(y) + k'(x) = -\operatorname{sen}(x)\sinh(y) \\ k'(x) = 0 & k(x) = \text{ cte. arbitraría, elegimos: } \quad k(x) = 0. \end{array}$$

$$\therefore \qquad v(x,y) = \cos(x)\sinh(y)$$

(3 puntos)

c) $f(z) = u + iv = \operatorname{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\operatorname{senh}(y) = \operatorname{sen}(z)$

(1 puntos)

d)

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + iv_x = \\ &= \cos(x)\cosh(y) + i(-\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)) \\ &= \cos(x)\cosh(y) - i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y) = \cos(z) \\ f''(z) &= -\operatorname{sen}(x)\cosh(y) - i\cos(x)\operatorname{senh}(y) \quad (= u_{xx} + iv_{xx}) \\ &= -(\operatorname{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\operatorname{senh}(y)) = -\operatorname{sen}(z) \\ f''(z) &= -f(z) \end{aligned}$$

(3 puntos)

2. Desarrolle $f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)}$ en serie de potencias de $(z-1)$ en cada una de las regiones determinadas por los puntos singulares. Deduzca el orden del polo $z = 1$, y el valor del residuo de $f(z)$ en este polo, tanto a partir de este desarrollo como de las fórmulas correspondientes.

(3 pts.)

Pauta Problema 2

a)

$$\begin{aligned} R_1 &: \quad 0 < |z-1| < 3 \\ R_2 &: \quad 3 < |z-1| < +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{1}{z-1}\tfrac{z}{z+2} = \tfrac{1}{z-1}\tfrac{(z-1)+1}{(z-1)+3} \\ &= \tfrac{1}{z-1}\left\{\tfrac{z-1}{(z-1)+3} + \tfrac{1}{(z-1)+3}\right\} \end{aligned}$$

Para R1 $\quad |z-1| < 3 \Rightarrow \frac{z-1}{3} < 1$

$$\begin{aligned} \therefore \quad f(z) &= \tfrac{1}{z-1} \quad (z-1)\tfrac{1}{3\left[1+\frac{z-1}{3}\right]} + \tfrac{1}{3\left[1+\frac{z-1}{3}\right]} \\ &= \tfrac{1}{z-1}\left\{(z-1)\tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \quad \frac{z-1}{3}{}^{n} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \quad \frac{z-1}{3}{}^{n}\right\} \\ (*) \quad f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^{n-1}; \qquad |z-1| < 3 \end{aligned}$$

(4 puntos)

Para R2 $\quad 3 < |z-1| \Rightarrow \frac{3}{z-1} < 1$

$$\begin{aligned} \therefore \quad f(z) &= \tfrac{1}{z-1}(z-1)\tfrac{1}{(z-1)\left[1+\frac{3}{z-1}\right]} + \tfrac{1}{(z-1)\left[1+\frac{3}{z-1}\right]} \\ &= \tfrac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \quad \frac{3}{z-1}{}^{n} + \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \quad \frac{3}{z-1}{}^{n} \\ f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(z-1)^{n+2}}; \quad 3 < |z-1| > +\infty \end{aligned}$$

(3 puntos)

b) **De (*)**:

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{z-1} - \tfrac{1}{3^2}(z-1) - \tfrac{1}{3^3}(z-1)^2 + \tfrac{1}{3^3}(z-1) + \cdots \\ &= \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{z-1} + \tfrac{2}{9} - \tfrac{2}{27}(z-1) + \cdots \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ polo $\quad z = 1$ es de orden 1 $\quad Res_{z=1}f(z) = a_{-1} = \frac{1}{3}$

Por fórmulas:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3} \neq 0 \qquad \text{Res}[f(z), z=1] = \lim(z-1)\frac{z}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}$$

(3 puntos)

3. Evalúe las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\oint_C \frac{z(z-1)}{(z^2-1)(z+2i)}dz$, donde C es la curva $|z-1+i|=2$ (sentido horario).

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

c) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{1+2\cos(t)}$.

(15 pts.)

Pauta Problema 3

a) $I = \oint_C \frac{z}{(z+1)(z+2i)}$

Por fórmula integral de Cauchy

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left.\frac{z}{z+1}\right|_{z=-2i} = 2\pi i \frac{-2i}{1-2i} \\ &= \frac{4\pi}{1-2i} = \frac{4\pi}{5}(1+2i) \text{ para sentido anti horario} \\ \therefore &\quad \oint_C \frac{z(z-1)}{(z^2-1)(z+2i)}dz = -\frac{4\pi}{5}(1+2i) \end{aligned}$$

(5 puntos)

b)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \\ Res[f(z), z=i] &= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \quad (z-i)^2 \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \\ &= \lim_{z\to i} \frac{2(z+i)}{(z+i+i)^4} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{8i^3} \\ &= \frac{-1}{4(-i)} = \frac{1}{4i} \\ \therefore &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(5 puntos)

c) Considerar la sustitución: $z = e^{it}$, $dr = ie^{it}dt = izdt$; $\cos(t) = \frac{z+z^{-1}}{2}$

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{iz(1+z+z^{-1})} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z+z^2+1}$$

$$z^2+z+1=0 \Rightarrow \quad \begin{aligned} z_1 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\sqrt{3} \\ z_2 &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$Res[f(z), z=z_1] = \lim_{z\to z_1} \quad (z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} \quad = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

$$Res[f(z), z=z_2] = \lim_{z\to z_2} \quad (z-z_1)\frac{1}{z-z_1)(z-z_2)} \quad = \frac{1}{z_2-z_1} = -\frac{1}{i\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+2cost} = 2\pi i \quad \frac{1}{1\sqrt{3}} - \frac{1}{i\sqrt{2}} \quad = 0$$

(5 puntos)

4. Analizar los extremos de la funcional: $\qquad J[y] = \displaystyle\int_0^{x_0} \left(y^2 - y'^2 - 2y\,\mathrm{sen}(x)\right) dx$
donde $y \in \mathbb{C}2([0, x_0])$, $y(0) = 0$, $y'(x_0) = \frac{\pi}{4}$, si: (a) $x_0 = \frac{\pi}{2}$ y (b) $x_0 = \pi$:

(10 pts.)

Pauta Problema 4

1°) Los extremales verifican la Ecuación de Euler.

$$2y - 2sen(x) + y'' = 0 \qquad (1)$$

y las condiciones de contorno

$$y(0) = 0 \quad \wedge \quad y'(x_0) = \frac{\pi}{4}$$

(2 puntos)

2o La solución general de (1) es

$$y(x) = -\frac{x\cos(x)}{2} + c_1\cos(x) + c_2\,\mathrm{sen}(x)$$

4 puntos)

3° Evaluación de las constantes

$y(0) = 0 \Longleftrightarrow c_1 = 0$
Como $y'(x) = -\frac{\cos(x)}{2} + \frac{x}{2}\,\mathrm{sen}(x) + c_2\cos(x)$

se tiene

a) La condición $y'\ \frac{\pi}{2} \ = \frac{\pi}{4}$ se verifica independientemente del valor de c_2. Por tanto las curvas extremales forma la familia uniparamétrica

$$y(x) = -\frac{x\cos(x)}{2} + c_2 sen(x), \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

(2 puntos)

b) $y'(\pi) = \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow c_2 = \frac{2-\pi}{4}$ y por tanto en tal caso hay una sola curva extremal

$$y(x) = -\frac{x\cos(x)}{2} + \frac{(2-\pi)}{4}\,\mathrm{sen}(x)$$

(2 puntos)

5. Hallar los extremales, $y \in C^2([0,1])$, del problema isoperimétrico:

$$J[y] = \int_0 1 \left(y'^{\,2} + x2\right) dx \quad s/a \quad \int_0^1 y^{\,2} dx = 8; \quad y(0) = 0 \;\wedge\; y'(1) = 0.$$

(15 pts.)

Pauta Problema 5

1º Las curvas extremales del problema variacional isoperimétrico, son también curvas extremales de los funcionales:

$$F_\lambda[y] = \int_0^1 (y'^2 + x^2 - \lambda y^2) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(2 puntos)

2º Las curvas extremales asociadas a $F_\lambda[y]$ verifican el problema de valores de contorno:

$$\left.\begin{aligned} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \quad \wedge \quad y'(1) = 0 \end{aligned}\right| \quad (1)$$

(3 puntos)

3º Las curvas extremales asociadas al problema propuesto, deben verificar (1) y la condición

$$\int_0^2 y^2 dx = 8 \qquad (2)$$

(2 puntos)

4º Las soluciones de (1) son:

$$y_n(x) = C_n \operatorname{sen}(n + 1/2)x, \; n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

(3 puntos)

5º Las soluciones de (1) y (2) son:

$$y_n(x) = \pm 4 \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})x, \; n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

(2 puntos)

6º Las curvas extremales del problema propuesto son:

$$y_n(x) = \pm 4 \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})x, \; n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

(3 puntos)

Concepción, 30 de Noviembre de 2005.
HMM/FPV/cln.