Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Complemento de Cálculo
(521234)
Primer Certamen

21 – Octubre – 1996

Problema 1: Dada la función $f(x) = x$, $\forall x \in]-\pi, \pi[$ con $f(-\pi) = f(\pi) = 0$.

1.- Construir la serie de Fourier de dicha función.

2.- A partir de la serie de Fourier obtenida, probar que $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (tener presente la igualdad de Parseval).

3.- Construir a partir de la serie obtenida en 1.-, la serie de Fourier de la función $g(x) = \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in]-\pi, \pi[$. Señale los fundamentos de la convergencia de la nueva serie obtenida y grafique la función hacia la cual converge la serie en el intervalo $]-2\pi, 2\pi[$.

30 puntos

Problema 2: Considere la siguiente ecuación de ondas con condiciones de borde y condiciones iniciales :

$$\begin{cases} t^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x(1-x)\dfrac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 1, \\ u(x,t) \text{ acotada para todo } (x,t) \in [0,1] \times [1, t_0], t_0 > 1 \text{ fijo} \\ u(x,1) = 0, \qquad \partial_t u(x,1) = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1.- Utilizando el método de separación de variables, escriba $u(x,t) = F(x)G(t)$ e identifique una E.D.O para $F = F(x)$ y otra para $G = G(t)$.

2.- Haciendo el cambio de variable $e^w = t$, verifique que la ecuación en t se reduce a la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes $G''(w) - G'(w) + \lambda G(w) = 0$ y $G(0) = 0$. Resuelva esta ecuación, para todos los posibles valores reales de λ.

3.- Identifique la ecuación de Sturm-Liouville en x, y haciendo el cambio de variable $z = 2x - 1$, determine $F(x)$ en términos de los polinomios de Legendre $P_n(z)$. Deduza una expresión de $u(x,t)$ en términos de una serie ortogonal.

4.- Utilice las condiciones iniciales para calcular todos los coeficientes de la serie, y determine $u(x,t)$.

Indicación : Los polinomios de Legendre $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, …, son las soluciones del problema de Sturm-Liouville $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1) = 0$, $|y(x)|$ acotado en $[-1,1]$, para $n = 0, 1, 2 \ldots$.

50 puntos

Problema 3: Los polinomios de Tchebyshev $T_n(x)$ de segunda especie son las soluciones del problema de Sturm-Liouville $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 = 0$, $y(-1) = y(1) = 0$, para $n = 1, 2, 3 \ldots$. Haciendo el cambio de variable $\cos(w) = x$, pruebe que $T_n(x) = \sin(nw) = \sin(n \arccos x)$, y deduzca la relación de ortogonalidad :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n. \end{cases}$$

20 puntos

Duración del certamen : 2 horas
HAW/GBG/CR/MSC