UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EXAMEN
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (MAT 520142)

Problema 1. (25 puntos) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2-2x+1}}$.

1.1) Determine el dominio de f.

1.2) Determine el recorrido de f.

1.3) ¿ Es f biyectiva ?. En caso negativo haga las restricciones necesarias para que lo sea y defina f^{-1}.

SOLUCION:

1.1) Si $\mathrm{Dom}(f)$ es el dominio de f, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : e^{\frac{x-1}{x^2-2x+1}} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} \\ &= \mathbb{R} - \{1\}\end{aligned}$$

[7 Puntos]

1.2) Si $\mathrm{Rec}(f)$ es el recorrido de la función, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\ x \in \mathbb{R} - \{1\} : y = e^{\frac{1}{x-1}}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\ x \in \mathbb{R} - \{1\} : x = \frac{\ln y + 1}{\ln y} \text{ y } y > 0\} \\ &= \mathbb{R}^+ - \{1\}\end{aligned}$$

[8 Puntos]

1.3) Sean x , y en el $\mathrm{Dom}(f)$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{y-1}}$. Aplicando ln (que es una función inyectiva), sigue que $x = y$. Así, f es inyectiva.
[4 Puntos]

Como $\mathrm{Rec}(f) \neq \mathrm{Cod}(f)$, sigue que f no es sobreyectiva. **[2 Puntos]**

Para obtener una función biyectiva a partir de la función f, debemos redefinir el dominio y codominio de la f. Así, si ponemos $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}^{+} - \{1\}$, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$, resulta que f es una función biyectiva. Su inversa f^{-1}, queda definida por $f^{-1} : \mathbb{R}^{+} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln x} + 1$. **[4 Puntos]**

Problema 2. (25 puntos) Sea $V = C([0,1])$ con el producto interior

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad \forall f, g \in V$$

y sea S el subespacio generado por los vectores $p_0(x) = 1$ y $p_1(x) = 2x - 1$. Calcule la mejor aproximación de $p(x) = e^x$ por vectores de S.

Indicación: $\int e^x dx = e^x + C, \quad \int x e^x dx = e^x(x-1) + C$.

SOLUCION:

Primero observemos que p_0 y p_1 son l.i. , por lo tanto $\{p_0, p_1\}$ es una base para S. Pongamos $u = \alpha_1 p_0 + \alpha_2 p_1$ la m.a. de $p(x) = e^x$ por vectores de S. Entonces se debe satisfacer el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} < p_0, p_0 > & < p_1, p_0 > \\ < p_0, p_1 > & < p_1, p_1 > \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < p, p_0 > \\ < p, p_1 > \end{pmatrix}$$

Además, $< p_0, p_0 >= 1$, $< p_1, p_0 >= 0$, $< p_0, p_1 >= 0$, $< p_1, p_1 >= \frac{1}{3}$, $< p, p_0 >= e - 1$ ($e - 1$ es aproximadamente $1,7182$), $< p, p_1 >= 3 - e$ (aprx. 0,2817). **[15 Puntos]**

Así, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e - 1 \\ 3 - e \end{pmatrix}$$

de donde $\alpha_1 = e - 1 = 1,7182$ y $\alpha_2 = 3(3 - e)$ (aprox. 0,8451). Finalmente la m.a. de p por elementos de S es: $u = 1,6902 \cdot x + 0,8731$. **[10 Puntos]**

Problema 3. (25 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$Ker(T) =< \{(1,1,1)\} >, \quad T(1,1,0) = (0,2,1) \quad \text{y} \quad T(1,0,0) = (0,0,-1).$$

3.1) Diga si T es biyectiva. Justifique.
3.2) Demuestre que $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.
3.3) Determine la ecuación de definición de T.

SOLUCION:

3.1) Como el $Ker(T) \neq \{(0,0,0)\}$, T no es inyectiva. Así, T no puede ser biyectiva.
[**6 Puntos**]

3.2) Como el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es dintinto de cero, sigue que el conjunto $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ es l.i.. Como la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, sigue que B es l.i. maximal, y por lo tanto es base de $\mathbb{R}^3$. [**6 Puntos**]

3.3) Para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ arbitrario, sean α, β, γ las componentes de (x,y,z) respecto de la base B. Haciendo los calculos respectivos se obtiene que:

$$\alpha = z \ , \beta = y - z \text{ y } \gamma = x - y.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T(z(1,1,1) + (y-z)((1,1,0) + (x-y)(1,0,0)) \qquad [\textbf{6 Puntos}] \\ &= zT(1,1,1) + (y-z)T(1,1,0) + (x-y)T(1,0,0) \\ &= z \cdot (0,0,0) + (y-z) \cdot (0,2,1) + (x-y) \cdot (0,0,-1) \\ &= (0, 2y-2z, -x+2y-z). \end{aligned}$$

[**7 Puntos**]

Problema 4. (25 puntos) Considere la matriz real $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.1) Determine una base para $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A. Exhiba una matriz diagonal similar (semejante) con A indicando la matriz de similaridad P.

4.2) Sean $B = \{1, \ sen(x), \ cos(x)\} \subseteq C(\mathbb{R})$, $V = < B >$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ con $[T]_B = A$.

¿ Por qué $\lambda = 6$ es un valor propio de T ?. Encuentre una base para el espacio propio de T asociado a $\lambda = 6$.

Solución

4.1) Primero buscamos los valores propios asociados a A.
Si λ_1, λ_2 y λ_3 son los valores propios de A, éstos se obtienen de la ecuación $det(A-\lambda I) = 0$.

Se tiene:

$$\begin{aligned}
det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -6 \\ 2 & -1-\lambda & -3 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -6 \\ 2 & -1-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda+2)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 & -6 \\ 2 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda+2)\{(2-\lambda)^2-16\} \\
&= -(\lambda-6)(\lambda+2)^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, los valores propios de A son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = -2$ (doble). **[5 Puntos]**

Ahora buscamos los espacios propios asociados a los autovalores de A.
Espacio propio asociado a $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{aligned}
S_{\lambda_1} : &= \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & -7 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\} \\
&= \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\} \\
&= \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x+y+5z = 0 \wedge y+z = 0\} \\
&= <\{(-2,-1,1)\}>
\end{aligned}$$

[3 Puntos]

Espacio propio asociado a $\lambda_2 = -2$:

$$
\begin{aligned}
S_{\lambda_2} : \; &= \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \} \\
&= \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \} \\
&= \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 3z = 0 \} \\
&= < \{(1,-2,0),(0,3,1)\} >
\end{aligned}
$$

[3 Puntos]

Luego, una base para $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A es:

$$B := \{(-2,-1,1),(1,-2,0),(0,3,1)\},$$

y para

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ la matriz similar a } A \text{ es } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

[4 Puntos]

4.2) Como $A = [T]_B$ y $\lambda = 6$ es un valor propio de A, entonces $\lambda = 6$ es un valor propio de T puesto que $\sigma(T) = \sigma(A)$. Por otra parte, para $v \in V$ resulta

$$
\begin{aligned}
v \in S_\lambda(T) &\iff T(v) = \lambda v \\
&\iff [T]_B[v]_B = \lambda [v]_B \\
&\iff A[v]_B = 6[v]_B \\
&\iff [v]_B \in < \{(-2,-1,1)\} > \\
&\iff v \in \{w\}
\end{aligned}
$$

donde $w(x) = -2 - sen(x) + cos(x)$. Así, $\{w\}$ es una base para $S_\lambda(T)$ con $\lambda = 6$. **[10 Puntos]**

MCP/JMS/LNB/jms.
4/12/2002.