Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Cálculo Numérico (521230)
Laboratorio 11: Ecuaciones diferenciales ordinarias

**Ejercicio 1:** Los métodos más sencillos vistos en clase para la solución de problemas de valores iniciales son los métodos de Euler (explícito e implícito). Ambos son métodos de orden 1, el método explícito es más sencillo de utilizar, pero no es adecuado para la solución de ecuaciones diferenciales rígidas.

1.1 Baje de la página del curso las funciones `eulerexpl1d.m` y `eulerimpl1d.m`. Ellas permiten resolver problemas problemas de valores iniciales con los métodos de Euler vistos en clase.

1.2 Escriba funciones para evaluar la parte derecha $f(t, y) = -25y$ del problema de valores iniciales

$$y'(t) = -25y(t), \quad t \in [0, 5], \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

y su derivada $\frac{\partial f}{\partial y} = -25$.

1.3 Resuelva este problema con los métodos de Euler y tamaño de paso $h$ =0.1. Grafique las aproximaciones obtenidas con ambos métodos, así como la solución exacta al problema. ¿Cuál de los dos métodos da una mejor aproximación a la solución exacta del problema? Éste es un ejemplo de una E.D.O. stiff. Cuando se aplica un método explícito a la solución de este tipo de problemas, el método dará una buena aproximación a la solución exacta del problema sólo para valores muy pequeños del tamaño de paso, es por ello que los métodos explícitos no deben aplicarse a la solución de problemas rígidos.

1.4 Resuelva nuevamente (1) con el método de Euler explícito y tamaño de paso $h$ =0.01. Observe que esta vez el método permite obtener una buena aproximación a la solución exacta del problema.

**Ejercicio 2:** Comparemos el comportamiento de los métodos `ode45` y `ode15s` aplicados a la solución de (1). Recuerde que MATLAB recomienda usar el segundo si se tiene la sospecha de que el problema a resolver es stiff.

2.1 Resuelva (1) con `ode45` y `ode15s` y los siguientes valores de tolerancia absoluta (`AbsTol`) y relativa (`RelTol`):
- `AbsTol = 1e-6, RelTol = 1e-3`,
- `AbsTol = 1e-4, RelTol = 1e-2`,
- `AbsTol = 1e-2, RelTol = 1e-1`.

En el primer caso deberá escribir los comandos

```
options = odeset('AbsTol',1e-6,'RelTol',1e-3);
[t,y] = ode45('func1_lab11',[0,5],1,options);
```

si `func1_lab11` es el nombre del archivo MATLAB para la evaluación de la parte derecha del problema (1).
Una vez obtenida una aproximación a la solución exacta de (1), mediante `length(t)` podrá saber cuántos pasos realizó el método para obtener la aproximación con la exactitud deseada, mediante

```
plot(t(2:end)-t(1:end-1),'o')
```

podrá ver los tamaños de paso utilizados por el método y con

```
max(t(2:end)-t(1:end-1))
```

podrá calcular el máximo de ellos. Con estos datos complete las tablas 1 y 2 y observe que en todos los casos `ode15s` calcula una aproximación a la solución exacta de (1) con la exactitud requerida en mucho menos pasos que `ode45`.

**Ejercicio 3:** Considere un ecosistema simple consistente de conejos con una cantidad más que suficiente de alimento y zorros que depredan los conejos para su alimentación. Un modelo

| **ode45** | número de pasos | $h_{max}$ |
|---|---|---|
| `AbsTol = 1e-6` | | |
| `AbsTol = 1e-4` | | |
| `AbsTol = 1e-2` | | |

Cuadro 1. Comportamiento de ode45

| **ode15s** | número de pasos | $h_{max}$ |
|---|---|---|
| `AbsTol = 1e-6` | | |
| `AbsTol = 1e-4` | | |
| `AbsTol = 1e-2` | | |

Cuadro 2. Comportamiento de ode15s

clásico debido a Volterra describe este ecosistema mediante el siguiente par de ecuaciones no lineales de primer orden:

$$\frac{dc}{dt} = 2c - \alpha cz,$$
$$\frac{dz}{dt} = -z + \alpha cz, \quad t \in [p, t_F],\ c(0) = c_0,\ z(0) = z_0$$

donde $t$ es el tiempo medido en años, $c = c(t)$ es el número de conejos, $z = z(t)$ el número de zorros (ambos en el instante $t$) y $\alpha$ es una constante positiva que mide la probabilidad de interacción entre miembros de las dos especies.

3.1 Cuando $\alpha = 0$ conejos y zorros no interactúan. Resuelva la ecuación diferencial a lo largo de un año considerando que inicialmente hay 100 animales de cada especie. Observe las aproximaciones obtenidas, ¿Ocurre lo que usted espera que ocurra con ambas poblaciones si no interactuaran entre sí?

3.2 Calcule la evolución de ambas poblaciones a lo largo de 12 años en el caso en que la constante de interacción es $\alpha = 0{,}01$. Considere poblaciones iniciales de 300 conejos y 150 zorros. ¿Qué conclusión puede extraer en este caso?

3.3 Repita la simulación anterior pero con poblaciones iniciales de 15 conejos y 22 zorros. ¿Cuál es ahora la conclusión?