

Pauta Certamen 1

Semestre primavera 2002

Ramo: 525412, Introducción a la matemática discreta

Profesora: Anahí Gajardo

Problema 1

Sea $G(V, E)$ un grafo dirigido donde $V = \{0, 1\}^3$ y E está dado por:

$$(u, v) \in E \Leftrightarrow (\exists a, b, c, d \in \{0, 1\}) \ u = (a, b, c) \wedge v = (b, c, d)$$

a) Demuestre que para todo v en V , $d_-(v) = d_+(v)$.

b) ¿Es G euleriano?, si la respuesta es sí, muestre un ciclo euleriano en G .

c) En base a lo anterior, determine una secuencia $(a_0, a_1, \dots, a_{15}) \in \{0, 1\}^{16}$ tal que para cualquier secuencia $(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \{0, 1\}^4$ existe un índice $i \in \overline{0, 15}$ tal que $(a_i, a_{i \oplus 1}, a_{i \oplus 2}, a_{i \oplus 3}) = (b_0, b_1, b_2, b_3)$; donde la suma \oplus es la suma módulo 16, e.d.:

$$i \oplus j = \begin{cases} i + j & \text{si } i + j < 16 \\ i + j - 16 & \text{si } i + j \geq 16 \end{cases}$$

(Ejemplo: la secuencia 00011101 contiene todas las secuencias de largo 3)

Problema 2

Dado un grafo dirigido, simple y conexo, demuestre que existen al menos dos vértices con el mismo grado de salida o con el mismo grado de entrada.

Problema 3

El Método de Elementos Finitos (MEF) consiste en particionar el dominio (una superficie acotada) en trozos triangulares, generando así una malla triangular. Esta malla puede ser representada por un grafo no dirigido simple, donde cada nodo de la malla está representado por un vértice del grafo y cada línea está representada por un arco.

a) Suponiendo que la superficie no es simple (tiene huecos), demuestre que:

$$nv - nl + nt + nh = 1$$

donde:

nv = número de vértices

nl = número de arcos

nt = número de triángulos

nh = número de huecos

b) Suponiendo que la superficie sí es simple ($nh = 0$), demuestre que:

$$nl = 3nv - nf - 3$$

donde nf es el número de vértices en la frontera del dominio.

c) Acote¹ superior e inferiormente el grado promedio:

$$\frac{1}{nv} \sum_{v \in V} d(v)$$

¿Se alcanzan las cotas que usted da? justifique su respuesta. ¿Puede dar una cota para el grado máximo $\Delta(G)$?

¹De cotas constantes, independientes de los datos del problema