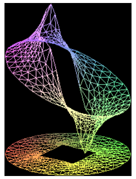
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

520142

Primer Semestre



CAPITULO I
LOGICA Y CONJUNTOS.

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Lógica

"La lógica es la herramienta con que
se construye el edificio llamado Matemática"

Conceptos primitivos

Los valores de verdad VERDADERO (V) y FALSO (F) son los conceptos primitivos de la lógica.

Proposición

Una proposición es una sentencia (expresión) sujeta a un valor de verdad.

Usualmente se denotan por letras minúsculas p, q, r, s, etc.

Lógica

Ejemplos

¿ Cuáles de las siguientes afirmaciones son proposiciones ?

- ¿ Es esto verdadero ?
- Hoy es martes
- 10 es un número primo
- El sol y el cielo
- Todos los alumnos de este curso son estudiosos
- La realidad de la vida

Conectivos lógicos

Un conectivo lógico es una operación que nos permite obtener nuevas proposiciones a partir de otras dadas. Los conectivos básicos son:

- negación ($\sim$) ("no")
- conjunción ($\wedge$) ("y")
- disyunción ($\vee$) ("o")
- condicional ($\rightarrow$) ("si. . . , entonces")
- bicondicional ($\leftrightarrow$) ("si y sólo si")

Lógica

Tipos de proposiciones

Las proposiciones se clasifican en simples y compuestas, vale decir, las que no incluyen conectivos lógicos, y las que sí los incluyen.

Valores posibles de dos proposiciones dadas

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Negación ($\sim$)

Dada una proposición p, se llama negación de p, y se escribe $\sim p$, a la proposición "no p". Esto significa que $\sim p$ es V si p es F, y $\sim p$ es F si p es V.

TABLA DE VERDAD

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunción ($\wedge$)

Dadas dos proposiciones p y q, la conjunción de ellas es la proposición "p y q", la cual se escribe $p \wedge q$. La proposición $p \wedge q$ es V si ambas lo son, y $p \wedge q$ es F si al menos una de ellas lo es.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción ($\vee$)

Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción de ellas es la proposición "p o q", la cual se escribe $p \vee q$. La proposición $p \vee q$ es V si al menos una de ellas lo es, y $p \vee q$ es F si ambas lo son.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional ($\rightarrow$)

Dadas dos proposiciones p y q, la condicional de ellas es la proposición "si p entonces q", la cual se escribe $p \longrightarrow q$. Aquí, p se llama antecedente y q consecuente. También, $p \longrightarrow q$ se lee "p es condición suficiente para q", o bien "q es condición necesaria para p". La proposición $p \longrightarrow q$ es F sólo si p es V y q es F.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Dadas dos proposiciones p y q, la bicondicional de ellas es la proposición "p si y sólo si q", la cual se escribe $p \leftrightarrow q$. También, $p \leftrightarrow q$ se lee "p es condición necesaria y suficiente para q". La proposición $p \leftrightarrow q$ es V sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Definiciones varias

Una proposición se dice una:

- TAUTOLOGIA (o TEOREMA LOGICO), si ella es siempre V, cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen, es decir, si su *tabla de verdad* sólo contiene valores V.
- CONTRADICCION, si ella es siempre F.
- CONTINGENCIA, si no es tautología ni contradicción.

Lógica

Implicación lógica

Dadas dos proposiciones p y q, se dice que p implica lógicamente q, si la proposición $p \rightarrow q$ es siempre *verdadera*. En tal caso se escribe $p \Rightarrow q$ y se lee "p implica q".

Equivalencia lógica

Dadas dos proposiciones p y q, se dice que ellas son lógicamente equivalentes, si la proposición $p \leftrightarrow q$ es siempre *verdadera*. En tal caso se escribe $p \Leftrightarrow q$ y se lee "p es equivalente a q".

Algunas tautologías importantes

- $\sim(\sim p) \quad \Leftrightarrow \quad p$ (doble negación)
- $p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p$ (conmutatividad de $\wedge$)
- $p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad q \vee p$ (conmutatividad de $\vee$)
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad q \leftrightarrow p$ (conmutatividad de $\leftrightarrow$)
- $p \vee (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r$ (asociatividad de $\vee$)
- $p \wedge (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$ (asociatividad de $\wedge$)
- $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ (asociatividad de $\leftrightarrow$)

Lógica

Algunas tautologías importantes (continuación)

- $p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  (distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$)
- $p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  (distributividad de $\vee$ con respecto a $\wedge$)
- $\sim (p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee \sim q$ (Ley de De Morgan para $\wedge$)
- $\sim (p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \wedge \sim q$ (Ley de De Morgan para $\vee$)
- $\sim (p \rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge \sim q$
- $p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \sim q \rightarrow \sim p$ (contrarecíproca)
- $p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

Función proposicional

Se llama función proposicional (o enunciado abierto) a una expresión p que contiene una o más variables, y tal que ella se convierte en una proposición lógica cuando se le asignan valores específicos a dichas variables.

Conjunto de validez

Se llama Conjunto de validez de una función proposicional p, y se denota por V_p, al conjunto de valores (o n-uplas de valores) para los cuales dicha función es verdadera.

Ejercicio Analice la siguiente proposición:

Si un número natural es divisible por dos y tres, entonces es divisible por seis.

Cuantificadores lógicos

- Para indicar que una función proposicional es verdadera para cualquier elemento de un determinado conjunto A se usa el símbolo $\forall$, el cual se llama cuantificador universal.

  $\forall$ se lee: "para todo", "cualquiera sea", "para cada".

- Para indicar que una función proposicional es verdadera para algunos elementos de un determinado conjunto A se usa el símbolo $\exists$, el cual se llama cuantificador existencial.

  $\exists$ se lee: "existe (un)", "existe al menos un", "existe algún".

- Para indicar que una función proposicional es verdadera para un único elemento de un determinado conjunto A se usa el símbolo $\exists!$.

  $\exists!$ se lee: "existe un único".

Lógica

Más sobre cuantificadores lógicos

Sean A un conjunto y p una función proposicional que depende de una variable x (en tal caso se escribe $p(x)$).

- $\forall\, x \in A : \; p(x)$ se lee "para todo x en A, $p(x)$ es verdadera".
- $\exists\, x \in A : \; p(x)$ se lee "existe x en A tal que $p(x)$ es verdadera".

Negaciones importantes

- $\sim (\,\forall\, x \in A : \; p(x)\,) \quad \Leftrightarrow \quad (\,\exists\, x \in A : \sim p(x)\,)$
- $\sim (\,\exists\, x \in A : \; p(x)\,) \quad \Leftrightarrow \quad (\,\forall\, x \in A : \sim p(x)\,)$
- $\sim (\,\exists!\, x \in A : \; p(x)\,) \quad \Leftrightarrow$
  $(\,\forall\, x \in A : \sim p(x)\,) \quad \vee \quad (\,\exists\, x \in A, \, \exists\, y \in A, \, x \neq y : \; p(x) \, \wedge \, p(y)\,)$

Teoremas y demostraciones

Un *teorema* es una proposición verdadera de cierta relevancia para una teoría y cuya verdad debe ser demostrada.

Algunas estructuras de teoremas

- Implicación: Si (hipótesis), entonces (tesis) $(H \rightarrow T)$
  Métodos de demostración:
  - Método directo.
  - Métodos indirectos:
    - contra-recíproca $(\sim T \rightarrow \sim H)$.
    - reducción al absurdo $(H \wedge \sim T) \rightarrow (p \wedge \sim p)$ (contradicción).

Lógica

- Equivalencia: (Hipótesis) si y sólo si (tesis) $(H \leftrightarrow T)$
  Método de demostración: $(H \rightarrow T) \quad \wedge \quad (T \rightarrow H)$
- Equivalencia de n proposiciones:
  $P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow P_n, \quad n > 2$
  Métodos de demostración
  - Directo: $P_1 \leftrightarrow P_2$ y $P_2 \leftrightarrow P_3$, etc.
  - Usando transitividad: $[(P_i \rightarrow P_j) \wedge (P_j \rightarrow P_k)] \rightarrow (P_i \rightarrow P_k)$. (e.g., mostrar que $P_i \rightarrow P_{i+1}$, $i = 1, ...n - 1$, y $P_n \rightarrow P_1$).
- Discreto: $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$
  Método de demostración: Inducción Matemática.

La falsedad de una proposición se puede demostrar usando un contra-ejemplo.

Ejemplos de demostración:

Proposición 1: Sea $a \in \mathbb{N}$. Si a es par entonces a^2 es par.

Dem. (directa) Hipótesis: a es par

entonces $a = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$,

entonces $a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$,

entonces a^2 es par (pues $2n^2 \in \mathbb{N}$), $\blacksquare$ (Q.E.D.)

Proposición 2: Sea $a \in \mathbb{N}$. Si a^2 es par entonces a es par.

Dem. (contradicción) se supone $H \wedge \sim T$: a^2 es par y a es impar.

entonces $a = 2n + 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$,

entonces $a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$,

entonces a^2 es impar (por Prop. 1 y “suma de nros. pares es par”),

entonces a^2 par y a^2 impar ($p \wedge \sim p$), CONTRADICCION ($\rightarrow\leftarrow$)

Conjuntos

Llamaremos conjunto a cualquier colección de objetos determinados y distintos. Los objetos los llamaremos elementos del conjunto. Dos conjuntos importantes son el conjunto vacío, que no contiene elementos, y el conjunto universo, que contiene todos los elementos.

Notación

- Los conjuntos: $A, B, \cdots$
- Los elementos: $a, b, \cdots$
- a pertenece a A: $a \in A$
- a no pertenece a A: $a \notin A$
- Conjunto vacío: ϕ
- Conjunto universo: U

Conjuntos

Observación

Dado $x \in U$ y un conjunto A: ¿ $x \in A \vee x \notin A$?
Si esta pregunta puede responderse siempre, entonces se dice que A está bien definido .

Maneras de definir un conjunto

- Por extensión, vale decir mostrando los elementos de A.

$$Ejemplo: \quad A = \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$$ (Números naturales)

- Por comprensión, esto es dando una propiedad (o proposición) que caracterice a los elementos del conjunto.

$$Ejemplo: \quad \mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} : \quad a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \right\}$$ (Números racionales)

Conjuntos

Inclusión de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es subconjunto de B, y se escribe $A \subseteq B$, si todos los elementos de A están también en B, esto es:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in U : \ x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Propiedades de la inclusión

Dados A, B, C conjuntos, se tiene

- $\phi \subseteq A \subseteq U$
- $A \subseteq A$
- $(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C) \Rightarrow \ A \subseteq C$

Conjuntos

Igualdad de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se dice que A y B son iguales, y se escribe $A = B$, si los elementos de A y B coinciden, esto es:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Conjunto de las partes de un conjunto dado

Dado un conjunto A, se define el conjunto de las partes de A, y se denota $\mathcal{P}(A)$, como el conjunto de todos los subconjuntos de A, esto es:

$$\mathcal{P}(A) := \{ X : \quad X \subseteq A \}$$

Notar que:

i) los *elementos* de $\mathcal{P}(A)$ son *conjuntos*;

ii) $\mathcal{P}(A) \neq \phi$ ya que $\phi, \ A \in \mathcal{P}(A)$.

Conjuntos

Operaciones entre conjuntos

Sea U el conjunto universo, y sean A, B subconjuntos de U.

- La diferencia de A y B es el conjunto

$$A - B := \{ x \in U : \quad x \in A \quad \wedge \quad x \notin B \}$$

(otra notación: $A \setminus B$).

- El Complemento de A con respecto a U, el cual se denota A^c (o bien A', $-A$), es el conjunto $U - A$, vale decir:

$$A^c := U - A = \{ x \in U : \quad x \notin A \}$$

Algunas propiedades

- Para todo $x \in U$ se tiene: $\quad x \in A \quad \vee \quad x \in A^c$
- $\phi^c = U \quad \wedge \quad U^c = \phi$
- $(A^c)^c = A$

Conjuntos

Otras operaciones entre conjuntos

Sea U el conjunto universo, y sean A, B subconjuntos de U.

- La intersección de A y B, la cual se denota $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos comunes a A y B, esto es

$$A \cap B := \{x \in U : \quad x \in A \quad \wedge \quad x \in B\}$$

- La unión de A y B, la cual se denota $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B, esto es

$$A \cup B := \{x \in U : \quad x \in A \quad \vee \quad x \in B\}$$

Conjuntos

Propiedades de $\cap$ y $\cup$

- $A \cup A = A\,, \quad A \cap A = A$ (idempotencia)
- $A \cup B = B \cup A\,, \quad A \cap B = B \cap A$ (conmutatividad de $\cup$ y $\cap$)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asociatividad de $\cup$)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociatividad de $\cap$)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  (distributividad de $\cup$ con respecto a $\cap$)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  (distributividad de $\cap$ con respecto a $\cup$)
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Ley de De Morgan)
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Ley de De Morgan)

Conjuntos

Más definiciones

- Dos conjuntos A y B se dicen disjuntos si y sólo si $A \cap B = \phi$.
- Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se define el Producto Cartesiano de ellos, el cual se denota por $A \times B$, como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que a pertenece a A y b pertenece a B, esto es

$$A \times B := \{ (a, b) : \quad a \in A \quad \wedge \quad b \in B \}$$

- Dados n conjuntos no vacíos $A_1, A_2, ..., A_n$, se define el Producto Cartesiano de ellos, el cual se denota por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, como el conjunto de todas las n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n)$ tales que a_i pertenece a A_i para cada $i \in \{1, ..., n\}$, esto es

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{ (a_1, a_2, ..., a_n) : \quad a_i \in A_i \, , \ i \in \{1, ..., n\} \}$$

Partición de un conjunto

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos de un conjunto B. Se dice que $\{ A_1, A_2, ..., A_n \}$ es una PARTICION de B si estos conjuntos son no vacíos, disjuntos dos a dos y su unión es el conjunto B, vale decir si y sólo si:

- $A_i \neq \phi$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$.
- $A_i \cap A_j = \phi$ para cada $i \neq j$.
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = B$.

Conjuntos

Cardinalidad

El número de elementos de un conjunto finito A se llama cardinalidad de A y se denota $|A|$.

Propiedades

- Si A y B son conjuntos disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- Si A y B son conjuntos arbitrarios, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Si A, B y C son conjuntos arbitrarios, entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| .$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Considere la siguiente proposición:

$$p: (\forall \epsilon > 0)(\exists\, m \in \mathbb{N}) \left(\frac{1}{m} \leq \epsilon \longrightarrow \frac{1}{m} + 1 < \epsilon \right).$$

a) Niegue la proposición p.

b) Determine si la proposición p es verdadera o falsa.

Solución

a) $\sim p: (\exists \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N}) \left(\frac{1}{N} \leq \epsilon \wedge \frac{1}{N} + 1 \geq \epsilon \right).$

b) La proposición es falsa, basta considerar $\epsilon = 1$, pues, para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{N} \leq 1 = \epsilon \wedge \frac{1}{N} + 1 \geq 1 = \epsilon.$$

Ejemplos

Ejemplo 2

Sean A y B subconjuntos del universo U.

a) Pruebe que $A^c \times B^c \subseteq (A \times B)^c$.

b) ¿Por qué no es verdadera la igualdad?.

Ejemplos

Solución

a) Probemos que $A^c \times B^c \subseteq (A \times B)^c$.
Sea $(x,y) \in A^c \times B^c$.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A^c \times B^c &\Longrightarrow \quad x \in A^c \wedge y \in B^c \text{ por def. de producto cartesiano} \\
&\Longrightarrow \quad x \notin A \wedge y \notin B \text{ por definición de complemento} \\
&\Longrightarrow \quad (x,y) \notin A \times B \text{ por def. de producto cartesiano} \\
&\Longrightarrow \quad (x,y) \in (A \times B)^c \text{ por definición de complemento}
\end{aligned}$$

$$\therefore A^c \times B^c \subseteq (A \times B)^c.$$

b) La igualdad no es válida, basta considerar por ejemplo

$$U = \{1,2,3\},\ A = \{1,2\} = B.$$