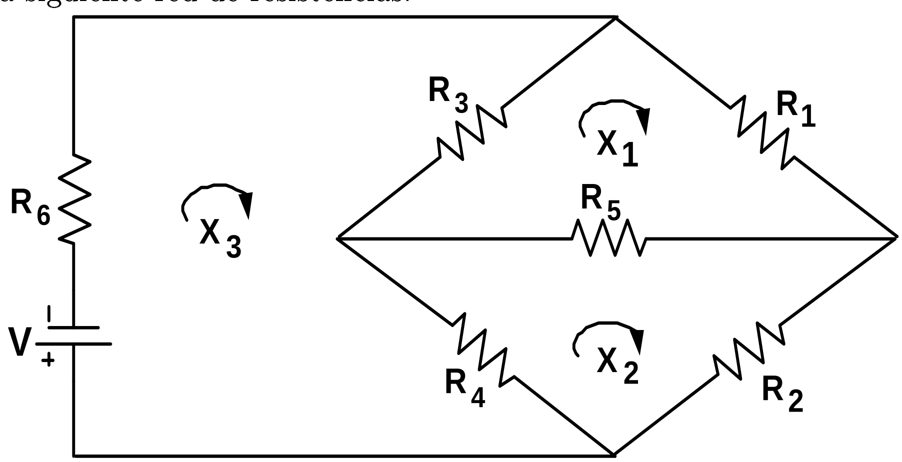
UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra y Algebra Lineal (520142)
Sistemas Lineales (Ejemplos de Aplicación)

1) Aplicación a circuitos eléctricos.

Considere la siguiente red de resistencias:



donde x_i es la corriente que circula en la red a través del circuito i, $\forall i \in \{1,2,3\}$, y $R_1, R_2, \cdots, R_6, V$ son las resistencias (en ohms) y el voltaje (en volts), respectivamente.

Aplicando la ley de OHM y la ley del voltaje de KIRCHHOFF, se obtiene el siguiente sistema lineal de 3 ecuaciones con incógnitas x_1, x_2 y x_3:

$$\begin{array}{rcl} (R_1 + R_3 + R_5)\ x_1 - R_5\ x_2 - R_3\ x_3 & = & 0, \\ -R_5\ x_1 + (R_2 + R_4 + R_5)\ x_2 - R_4\ x_3 & = & 0, \\ -R_3\ x_1 - R_4\ x_2 + (R_3 + R_4 + R_6)\ x_3 & = & V. \end{array} \tag{1}$$

En particular, si $R_1 = R_4 = 2$, $R_2 = 4$, $R_3 = 1$, $R_5 = R_6 = 10$, y $V = 15$, (1) se reduce a $Ax = b$, donde

$$A := \begin{bmatrix} 13 & -10 & -1 \\ -10 & 16 & -2 \\ -1 & -2 & 13 \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{y } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Así, aplicando operaciones elementales de filas sobre la matriz ampliada, de modo que A se transforme en una matriz triangular superior, se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 13 & -10 & -1 & 0 \\ -10 & 16 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 13 & 15 \end{array}\right] \underset{\substack{e_{21}(\frac{10}{13}) \\ e_{31}(\frac{1}{13})}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & -10 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{108}{13} & -\frac{36}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{36}{13} & \frac{168}{13} & 15 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{e_{21}(13) \\ e_{31}(13)}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & -10 & -1 & -1 \\ 0 & 108 & -36 & 0 \\ 0 & 36 & 168 & 195 \end{array}\right] \underset{e_{32}(\frac{1}{3})}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & -10 & -1 & 0 \\ 0 & 108 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 156 & 195 \end{array}\right],$$

de donde el sistema equivalente a $Ax = b$ queda dado por:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 13\,x_1 & - & 10\,x_2 & - & x_3 & = & 0, \\ & & 108\,x_2 & - & 36\,x_3 & = & 0, \\ & & & & 156\,x_3 & = & 195. \end{array}$$

Por último, despejando x_3 de la 3^atercera ecuación, x_2 de la 2^a y x_1 de la 1^a, resulta:

$$x_3 = \frac{5}{4}, \quad x_2 = \frac{5}{12} \quad \text{y} \quad x_1 = \frac{5}{12}.$$

2) Aplicación a reacciones químicas.

Considere la reacción química:

$$x_1\ Cu_2S + x_2\ H^+ + x_3\ NO_3^- \rightarrow x_4\ C_u^{2+} + x_5\ NO + x_6\ S_8 + x_7\ H_2O,$$

donde $x_1, x_2, \cdots, x_7$ son enteros positivos (incógnitas) que denotan el número de moléculas de cada compuesto. El problema es determinar estos valores de modo que la reacción esté balanceada, lo cual significa que el **número de átomos** de cada elemento y la **carga**

eléctrica total Q se mantienen. Así, estableciendo este principio de equilibrio se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{balance para}\,Cu: & 2x_1 & = & x_4, \\
\text{balance para}\,S: & x_1 & = & 8x_6, \\
\text{balance para}\,H: & x_2 & = & 2x_7, \\
\text{balance para}\,N: & x_3 & = & x_5, \\
\text{balance para}\,O: & 3x_3 & = & x_5 + x_7, \\
\text{balance para}\,Q: & x_2 - x_3 & = & 2x_4,
\end{array}$$

las cuales dan origen al sistema homogéneo $Ax = 0$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Puesto que $A \in M_{6x7}(\mathbb{R})$, sabemos de antemano que $r(A) \leq min\{6,7\} = 6 < n = 7 =$ número de incógnitas, y por lo tanto (2) es **compatible indeterminado**. En efecto, realizando la siguiente secuencia de operaciones elementales de filas sobre A:

$$\left| \begin{array}{c|c|c|c|c} e_{21}(-\frac{1}{2}) & \begin{array}{c} e_{23} \\ e_{34} \\ e_{62}(-1) \end{array} & \begin{array}{c} e_{53}(-3) \\ e_{63}(1) \end{array} & e_{64}(4) & e_{65}(\frac{1}{2}) \end{array} \right|,$$

se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Se sigue que $r := r(A) = 6$ y por lo tanto $n - r = 7 - 6 = 1$ incógnita se elige libremente en $\mathbb{R}$ y las restantes 6 incógnitas (a lo más) se expresan en función de esa incógnita libre. Por ejemplo, eligiendo $x_7 \in \mathbb{R}$, se despejan las otras incógnitas de (3) y se obtiene:

$$x_6 = \frac{3}{64}x_7,\ x_5 = \frac{1}{2}x_7,\ x_4 = \frac{3}{4}x_7,\ x_3 = \frac{1}{2}x_7,\ x_2 = 2x_7,\ x_1 = \frac{3}{8}x_7.$$

Ahora, puesto que las soluciones de interés son **enteros positivos**, debemos tomar $x_7 = 64p$, con $p \in I\!N$, de donde las soluciones de (3) quedan dadas por: $x_7 = 64p$, $x_6 = 3p$, $x_5 = 32p$, $x_4 = 48p$, $x_3 = 32p$, $x_2 = 128p$, y $x_1 = 24p$, o bien:

$$x := p \begin{bmatrix} 24 \\ 128 \\ 32 \\ 48 \\ 32 \\ 3 \\ 64 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \quad p \in I\!N.$$

En particular, la solución más pequeña se obtiene con $p = 1$.

Bibliografía

1. G.B. Gustafson and C.H. Wilcox, *Analytical and Computational Methods of Advanced Engineering Mathematics.* Springer Verlag, 1998.

GGP/cln