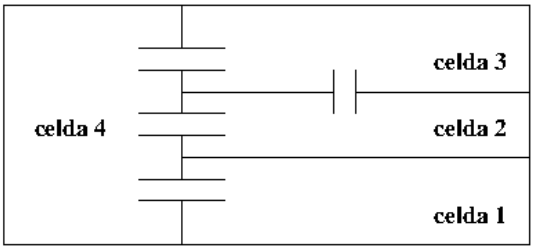
Cálculo Numérico (521230)

Laboratorio 6: Métodos numéricos para solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicio 1: Una caja se divide en 4 celdas como se muestra en la figura.



En cada celda se coloca un cierto número de salmones. Por la forma en que se interconectan las celdas se sabe que en una hora los salmones se mueven entre ellas de la siguiente forma:

1. 40 % de los salmones en la celda 1 permanece en ella, 60 % de ellos se va a la celda a la celda 4,
2. 40 % de los salmones en la celda 2 se queda en ella, 30 % de ellos se mueve a la celda 3, 30 % lo hace a la celda 4,
3. 40 % de los salmones en la celda 3 permanece en ella, 30 % va a la celda 4 y 30 % lo hace a la celda 2,
4. 40 % de los salmones en la celda 4 se queda en ella, 20 % se mueve a las celdas 1, 2 y 3.

Si x_1, x_2, x_3, x_4 representa el número de salmones en las celdas al colocarlos en la caja y b_1, b_2, b_3, b_4 es el número de salmones pasada una hora, ¿qué relaciones se cumplen entre ellos?

1. Escriba la matriz del sistema en Matlab y determine si ella es invertible. ¿Qué comandos le sirven para ello?
2. Si el número de salmones (en miles) en las celdas $1, 2, 3, 4$ pasada una hora de haber colocado los salmones en la caja es $12, 25, 26$ y 37 (mil) respectivamente, determine con ayuda de Matlab cuántos salmones había en cada una de las celdas originalmente. ¿Cómo lo hizo?
3. Si originalmente se colocan 25 (mil) salmones en cada celda, determine, también con ayuda de Matlab , cuántos habrá en cada una de ellas pasada una hora, ¿cuántos habrá pasadas 3 horas?
4. Escriba una función en Matlab que, dado un vector con la cantidad inicial de salmones en cada celda, genere 4 gráficos que representen el número de salmones en cada una de las celdas pasadas desde 1 hasta 12 horas. Llámela suponiendo que en cada celda hay inicialmente 25 (mil) salmones y observe cómo cambia la cantidad de salmones en las celdas. ¿En qué celdas aumenta la cantidad de salmones y en qué celdas disminuye? ¿Supera la cantidad de salmones las 35 mil unidades en algún momento en alguna de las celdas?
5. ¿Cuántos salmones deben introducirse en la caja si se quiere que la cantidad inicial de salmones en cada una de las celdas sea la misma y que en un período de 12 horas, ésta no supere en ninguna celda las 35 mil unidades ni esté por debajo de 10 mil?

Ejercicio 2: Un telescopio puesto en órbita por la NASA ha detectado un cuerpo extraño en nuestro sistema solar y ha tomado mediciones de la velocidad del mismo en distintos puntos de nuestro sistema. Dichos puntos son representados en coordenadas cartesianas (x, y, z). La tabla 1 corresponde a dichas mediciones (la velocidad fue tomada en Km/seg):
Un grupo de investigadores de la NASA ha determinado que este cuerpo hará colisión con un satélite de televisión, en el punto (0.56, 1.23, 1.53). Dicho satélite sólo soportaría un impacto con un objeto a no más de 70 Km/seg.
Suponga que la velocidad del cuerpo extraño detectado es lineal en las tres dimensiones, es decir, $v(x, y, z) = ax + by + cz + d$ y con ayuda de los datos dados determine si el satélite será destruido.

x	2.5	1.5	8.9	5.77	8.73	3.14	0.77
y	2.3	12.3	-1.88	2.2	4.51	6.28	1.45
z	5.6	0.33	9.99	5.66	1.19	8.87	11.1
$v(x, y, z)$	54.6	69.98	79.24	64.27	57.88	96.04	78.16

CUADRO 1. Velocidades del cuerpo extraño

Ejercicio 3: Actualmente google se ha establecido como la página de búsqueda en internet más utlizada. Esto ha sido en gran parte gracias al novedoso algoritmo que esta compañía utiliza para, una vez encontradas las páginas que cumplen con el criterio de búsqueda de un usuario, escoger el orden en que éstas serán presentadas. Para escoger este orden google asocia a cada página un número, llamado `pagerank`, que calcula teniendo en cuenta el número de enlaces desde y hacia cada una de las páginas web en el mundo. El orden en que se presentan las páginas depende de su `pagerank` (las de mayor `pagerank` se presentan primero). Para calcular el `pagerank` de cada página web, google crea una matriz G que tiene una fila y una columna por cada página web, las entradas de esta matriz son

$$G(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si hay un enlace de página } j \text{ a página } i, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}.$$

El `pagerank` de una página depende no sólo del número de páginas que contengan enlaces a ella, sino también del `pagerank` de esas páginas. Así una página que sea referenciada en muchas páginas de poca importancia podrá tener menos importancia que una que sea referenciada en pocas páginas de mucha importancia. Si x es un vector con el `pagerank` de cada una de las páginas web del mundo, google lo encuentra resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = e, \quad A = I - pGD \tag{1}$$

dónde I es la matriz de identidad, p es la probabilidad de que una persona, en su búsqueda de alguna información en internet, siga uno de los enlaces en la página donde se encuentra, p se toma igual a 0,85, G es la matriz mencionada antes, D es una matriz diagonal tal que $D(i,i)$ es el número de enlaces en la página i y e es el vector que contiene todas sus entradas iguales a 1. ¿Cree que sea de gran importancia para google encontrar algoritmos eficientes para la solución de este inmenso sistema de ecuaciones? Encontremos experimentalmente, de entre todos los algoritmos que hemos estudiado para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, cuál es el más conveniente.

3.1 Baje de la página de documentación del curso los archivos `elsurdata.mat`, `jacobisol.m`, `gaussseidelsol.m`, `mostrarrangos.m` y `creatematrix_pagerank.m`.

3.2 Cargue las variables almacenadas en `elsurdata.mat` en MATLAB . Para ello usted debe escribir en la ventana de comandos de MATLAB

```
>> load elsurdata
```

Escriba

```
>> whos
```

y observe que la matriz `Gelsur` y el arreglo `Uelsur` se han cargado en memoria (éstas eran las variables guardadas en `elsurdata.mat`). La matriz `Gelsur` es como la matriz G mencionada antes, pero se creó suponiendo que la web está formada sólo por 500 páginas (`www.elsur.cl`, los enlaces contenidos en ella , los enlaces en esos enlaces y así sucesivamente, 3 direcciones fueron borradas de la lista por ser no válidas). La variable `Uelsur` contiene los nombres de estas páginas. Llame ahora `A = creatematrix_pagerank(Gelsur)` para construir la matriz A en (1).

3.3 Con `spy(A)` observe la estructura de A. ¿Es una matriz rala? ¿Es simétrica? ¿Cuántas de sus entradas son distintas de cero? ¿Será conveniente para google usar un método directo para encontrar el `pagerank` de cada página en internet? ¿Por qué?

3.4 Busque una solución aproximada a la solución exacta a este sistema de ecuaciones con los métodos iterativos que usted conoce. ¿Cuáles métodos iterativos le permitieron obtener una aproximación a la solución exacta de (1)? ¿Cuál tolerancia usó? ¿En cuántas iteraciones alcanzó cada uno de ellos la precisión requerida? ¿Cuál es la diferencia entre las soluciones obtenidas? Si alguno de los métodos no le permite obtener una aproximación con la precisión requerida, ¿a qué se debe esto?

3.5 Una vez encontrada una aproximación a la solución exacta de (1) usted podrá, llamando a la función `mostrarrangos` ver un código de barras con los rangos de las 10 páginas que tienen mayor rango, así como una lista con sus nombres, número de enlaces en y hacia ellas y el rango de cada una.