UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142

Práctica 26: *Valores y vectores propios de operadores lineales y matrices. Aplicaciones*

Problema 1. Determine el polinomio característico asociado a las siguientes matrices. Construya una base para el espacio propio asociado al valor propio más grande y decida si las matrices son o no digonalizables **[En práctica]**

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Considere el operador lineal $D : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R}),\ f \longmapsto Df = f'$.
Determine los valores propios y las bases para los espacios propios asociados.

Problema 3. Encontrar los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ tal que, la matriz sea diagonalizable. Encuentre en tales casos la dimensión de los espacios propios asociados: **[En práctica]**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 4. Considere el operador lineal $L : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R}),\ A \longmapsto L(A) = A + A^t$. Determine los valores propios y los espacios propios asociados a L.

Problema 5. Considere el operador lineal T de $\mathbb{R}^3$ en si mismo, cuya matriz asociada es

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c/r a la base canónica de } \mathbb{R}^3\text{)}$$

Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que $\lambda = 0$ sea un valor propio de T. Utilizar esta información para determinar, según sean los valores del parámetro k, el rango de T. **[En práctica]**

Problema 6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un operador lineal cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(c/r a la base canónica de } \mathbb{R}^3\text{)}$$

(6.1) Determinar los valores y vectores propios asociados a T:

- ¿ Es T inversible ?
- Deducir la nulidad y el rango de T.

(6.2) Determinar una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice a T.

(6.3) Calcular la n-ésima potencia de A.

Problema 7. Sea A_1 la matriz del problema 1. **[En práctica]**

(7.1) Determine una matriz $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}A_1P = diag(1, -1, 2)$. Además calcular la n-ésima potencia de A.

(7.2) Utilizando la información de los valores propios de A_1 decida que A_1^{-1} existe y usando el teorema de Cayley-Hamilton determine una expresión para ella en términos de las potencia de A_1.

Problema 8. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(8.1) Determine el polinomio característico de A. Aplique los teoremas de Cayley-Hamilton y del Binomio para determinar la n-ésima potencia de $(A + 2I)$.

(8.2) Considere las sucesiones de números reales $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por:

$$u_n = 2u_{n-1} \quad v_n = 2u_{n-1} + 2v_{n-1} \quad w_n = v_{n-1} + 2w_{n-1},$$

es decir, $(u_n, v_n, w_n)^T = (A + 2I)(u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1})^T$.
Escribir u_n, v_n y w_n, en función de los valores iniciales $u_0,\ v_0,\ w_0$ y del entero positivo n.

Problema 9. Demuestre que para toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A).$$

Indicaciones:
1) Teorema de Cayley-Hamilton. Sea T es un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Si p es el polinomio característico de T, entonces $p(T) = 0$.

2) Teorema del binomio. Si A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $AB = BA$, entonces para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k.$$

06.11.2003
FPV/fpv