1. Dados $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango n y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, indique cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente cierta:

   (a) hay un único $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}$;

   (b) hay un único $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$;

   (c) hay un único $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$;

   (d) ninguna de las anteriores.

2. El punto del plano generado por los vectores $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ más cercano al punto $P = (1, 1, 1)$ es $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}$, con (α, β) solución en el sentido de mínimos cuadrados de:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(d) ninguno de las anteriores.

3. Para ajustar los parámetros a, b y c del modelo $y = ae^{(bx+c/x)}$ se dispone de dos vectores (columna) de datos, `x` e `y`, ambos de tamaño m.

Los comandos MATLAB necesarios para calcular los valores de los parámetros son:

(a)

```
A = [x exp(x) exp(1./x)];
d = A\y;
a = d(1)
b = d(2)
c = d(3)
```

(b)

```
A = [ones(m,1) exp(x) exp(1./x)];
d = A\y;
a = log(d(1))
b = d(2)
c = d(3)
```

(c)

```
A = [ones(m,1) x 1./x];
d = log(A\y);
a = d(1)
b = d(2)
c = d(3)
```

(d)

```
A=[ones(m,1) x 1./x];
d=A\log(y);
a = exp(d(1))
b = d(2)
c = d(3)
```

4. Sean $x_0, \ldots, x_n$ ($n > 1$) números distintos y sean $\ell_0, \ldots, \ell_n$ los polinomios de Lagrange asociados:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Entonces, el polinomio que interpola la función $f(x) = x$ en esos puntos es

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i \ell_i(x).$$

Indique cuál es exactamente el grado del polinomio p:

(a) n;

(b) 1;

(c) 0;

(d) ninguno de las anteriores.

5. Sea p el polinomio que interpola la siguiente tabla de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Indique cuál de las siguientes acotaciones es más precisa para $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

(a) $|\operatorname{sen} x - p(x)| \leq 1$;

(b) $|\operatorname{sen} x - p(x)| \leq \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$;

(c) $|\operatorname{sen} x - p(x)| \leq \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5$;

(d) ninguna de las anteriores.

Sugerencia: recuerde que el error de interpolación satisface

$$E(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

6. Indique cuál de los siguientes polinomios interpola la función $f(x) = x^3$ en $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$:

   (a) $p(x) = \frac{1}{6}x(x^2 - 1)$;

   (b) $p(x) = x^2$;

   (c) $p(x) = x$;

   (d) ninguno de las anteriores.

7. Indique cuál de las siguientes funciones es un *spline cúbico* que interpola la siguiente tabla:

x	-1	0	1
y	0	0	1

(a) $s(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

(b) $s(x) = \begin{cases} -x^3, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

(c) $s(x) = \begin{cases} x^2 + x, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

(d) ninguna de las anteriores.

8. Se quiere calcular la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ mediante el método de *trapecios* (elemental).

   Sea $E(x) = f(x) - p(x)$, donde p es el polinomio de grado 1 que interpola a f en $x = a$ y $x = b$.

   El error R del método es:

   (a) $R = E(\theta), \qquad \theta \in [a, b]$;

   (b) $R = \displaystyle\int_a^b E(x)\,dx$;

   (c) $R = E'(\theta), \qquad \theta \in [a, b]$;

   (d) ninguna de las anteriores.

9. Se quiere calcular el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$ para una función de la cual sólo se conocen sus valores en algunos puntos **no equiespaciados** x_i, $i = 1, \ldots, n$.

Se dispone de dos vectores `x` y `f` de longitud `n` con los puntos x_i y los valores de la función $f_i = f(x_i)$, respectivamente.

Indique cuál de los siguientes programas MATLAB permite calcular la integral mediante el método de los *trapecios* (**para puntos no equiespaciados**):

(a)
```
I=0.0;
for i=2:n-1
    I=I+(f(i+1)+f(i-1))*(x(i+1)-x(i-1));
end
```

(b)
```
I=0.0;
for i=1:n-1
    I=I+0.5*(f(i+1)+f(i))*(x(i+1)-x(i));
end
```

(c)
```
I=0.0;
h=(x(n)-x(1))/n;
for i=2:n
   I=I+h*(f(i)+f(i-1));
end
```

(d)
```
I=0.0;
for i=1:n
   I=I+(1/n)*f(i);
end
```