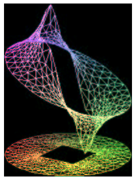
520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Segundo Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 8. SISTEMAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Sistemas

Definición: Sistema Lineal de Ecuaciones.

Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un **sistema lineal de** m **ecuaciones y** n **incógnitas** en $\mathbb{K}$ es un conjunto de m ecuaciones lineales en que cada una tiene a lo más n incógnitas, esto es,

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right\} \qquad \text{(S)}$$

donde, para $i \in \{1, \cdots, m\}$ y $j \in \{1, \cdots, n\}$ $a_{ij} \in \mathbb{K}$ son los **coeficientes del sistema**, $b_i \in \mathbb{K}$ son los **términos independientes del sistema** y $x_1, \cdots, x_n$ son las **incógnitas del sistema**.

Sistemas

Observación.

Usando el lenguaje de matrices, el sistema de ecuaciones (S) puede ser escrito como $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es la matriz de los coeficientes del sistema; $X = (x_1 x_2 \cdots x_n)^t$ es la matriz de las incógnitas del sistema y $B = (b_1 \cdots b_m)^t$ es la matriz de los términos independientes del sistema.

- Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, entonces el sistema se dice **homogéneo**, en caso contrario se dice **no homogéneo**.

Sistemas

Definición. Decimos que la n-upla $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ es una **solución del sistema** (S), si al reemplazar ordenadamente cada x_i por y_i con $i \in \{1, \cdots, n\}$, se satisfacen simultaneamente las m igualdades del sistema (S). Llamaremos **conjunto solución del sistema** (S), al conjunto formado por todas las soluciones del sistema.

Definición El sistema (S) se dice:

- **INCOMPATIBLE**, si no tiene solución.
- **COMPATIBLE DETERMINADO**, si tiene única solución.
- **COMPATIBLE INDETERMINADO**, si tiene más de una solución.

Sistemas

Definición. Dado el sistema (S), $AX = B$, llamaremos **matriz ampliada del sistema** a la matriz $(A|B)$ de orden $m \times (n+1)$

Teorema (de existencia de soluciones)

El sistema (S) es compatible si, y sólo si, $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|B)$.

Teorema (unicidad de soluciones)

Si el sistema (S) de m ecuaciones y n incógnitas es compatible, y si además $\mathrm{r}(A) = n$. Entonces la solución del sistema es única.

Teorema (multiplicidad de soluciones)

Si el sistema (S) es compatible y $r =: \mathrm{r}(A) < n$, entonces a lo más r incógnitas se expresan en términos de las $n - r$ restantes.

Sistemas

Observación.

- Consideremos el sistema (S), $AX = B$. Si F representa a cualquiera de las tres operaciones elementales por filas, entonces obviamente $F(A)X = F(B)$.

- Si (A, B) es equivalente por filas a la matriz (A_1, B_1), entonces el sistema

$$A_1X = B_1, \tag{H}$$

es compatible si, y sólo si, el sistema (S) es compatible. En este último caso, el conjunto solución de ambos sistemas es el mismo.

- Notar que el sistema homogéneo $AX = \Theta$ siempre tiene solución. Además el sistema homogéneo $AX = \Theta$ tiene solución no nula si, y sólo si, r$(A) < n$ (n es el número de incógnitas del sistema).

Sistemas

Sistemas de Cramer. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, con $|A| \neq 0$, entonces la matriz A es inversible y el sistema $A \cdot X = B$, de n ecuaciones y n incognitas, tiene solución única

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Recordando que $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$, obtenemos la:

Regla de Cramer.

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ con $|A| \neq 0$, entonces la única solución del sistema $AX = B, \quad B = (b_1 b_2 ... b_n)^t$ es

$$X = (x_1 \cdots x_n)^t, \text{ con } \quad x_i = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} b_k, \quad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Sistemas

Observación:

Notar que para $i \in \{1, \cdots, n\}$, se tiene que:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

donde A_i es la matriz de orden n, obtenida de la matriz A en que la columna i-ésima de A es reemplazada por los elementos de B.