Cuadratura Gaussiana

Borrador

Primer semestre 2018

En $C[-1,1]$

Recordamos que la aplicación lineal

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

es un producto interior sobre el espacio vectorial $C[-1,1]$.

Ejemplo

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\, dx = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle x^2, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\, dx = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0$$

Definición (Ortogonalidad)

$p \perp q \leftrightarrow \langle p, q \rangle = 0$

así, podemos decir que $x^2 \perp x$.

Definición (Base canónica de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$)

$B_C = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$

Esta base no es ortogonal considerando este producto interior.

Ortogonalización de la base canónica

Proceso de Gramm-Schmidt en B_C

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= 1 \\
p_1(x) &= x - \frac{\langle x,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 = x \\
p_2(x) &= x^2 - \frac{\langle x^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 - \frac{\langle x^2,x\rangle}{\langle x,x\rangle} x = x^2 - \frac{1}{3} \\
p_3(x) &= x^3 - \frac{\langle x^3,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 - \frac{\langle x^3,x\rangle}{\langle x,x\rangle} - \frac{\langle x^3, x^2-\frac{1}{3}\rangle}{\langle x^2-\frac{1}{3}, x^2-\frac{1}{3}\rangle} = x^3 - \frac{3}{5}x \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Se puede demostrar por inducción

$$p_{i+1}(x) = \left(x - \frac{\langle xp_i, p_i\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle}\right) p_i(x) - \frac{\langle p_i, p_i\rangle}{\langle p_{i-1}, p_{i-1}\rangle} p_{i-1}(x)$$

Recursivamente

$$\begin{aligned} p_4(x) &= \left(x - \tfrac{\langle xp_3, p_3\rangle}{\langle p_3, p_3\rangle}\right) p_3(x) - \tfrac{\langle p_3, p_3\rangle}{\langle p_2, p_2\rangle} p_2(x) \\ &= x\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) - \frac{\langle x^3 - \frac{3}{5}x, x^3 - \frac{3}{5}x\rangle}{\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\rangle}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= x\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) - \frac{\left.\frac{x^7}{7} - 6x^5 + \frac{3}{5^2}x^3\right|_{-1}^{1}}{\left.\frac{x^5}{5} - 2x^3 + \frac{1}{9^2}x\right|_{-1}^{1}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Tabla: Polinomios ortogonales

n	$p_n(x)$
0	1
1	x
2	$x^2 - 1/3$
3	$x^3 - (3\,x)/5$
4	$x^4 - (6\,x^2)/7 + 3/35$
5	$(5\,x)/21 - (10\,x^3)/9 + x^5$
6	$(5\,x^2)/11 - (15\,x^4)/11 + x^6 - 5/231$
7	$(105\,x^3)/143 - (35\,x)/429 - (21\,x^5)/13 + x^7$
8	$(14\,x^4)/13 - (28\,x^2)/143 - (28\,x^6)/15 + x^8 + 7/1287$

Base ortogonal

$$\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$$

es una base ortogonal de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ con las siguientes

Propiedades

1. $p_i \in \mathbb{P}_i(\mathbb{R})$
2. $\forall p \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) : \quad \langle p, p_n \rangle = 0 \qquad [p_n \perp \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})]$
3. p_n tiene n raíces reales de multiplicidad 1 y están en el intervalo $]-1, 1[$

Gráfica de la base ortogonal

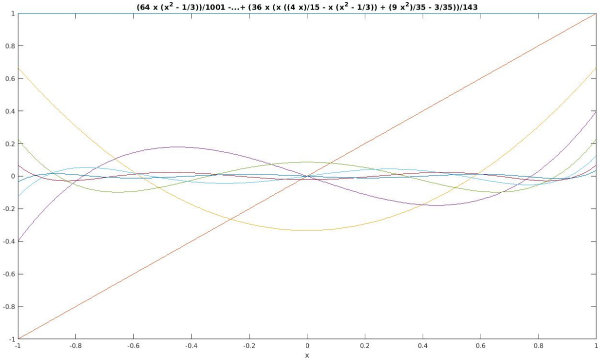

Figure: Algunos polinomios de la base ortogonal

Un sistema de ecuaciones

Siendo $x_1, x_2, \cdots x_n$ las n raíces distintas de $p_n(x)$, el problema: Hallar $w_1, w_2, \cdots, w_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl}
w_1 p_0(x_1) + w_2 p_0(x_2) + \cdots + w_n p_0(x_n) & = & \langle p_0, p_0 \rangle \\
w_1 p_1(x_1) + w_2 p_1(x_2) + \cdots + w_n p_1(x_n) & = & 0 \\
\vdots & & \vdots \\
w_1 p_{n-1}(x_1) + w_2 p_{n-1}(x_2) + \cdots + w_n p_{n-1}(x_n) & = & 0
\end{array}$$

Un sistema de ecuaciones

Representación matricial

$$\begin{bmatrix} p_0(x_1) & \cdots & p_0(x_n) \\ p_1(x_1) & \cdots & p_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(x_1) & \cdots & p_{n-1}(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle p_0, p_0 \rangle \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar que siempre tiene única solución.

Cuadratura

Con todas estas observaciones y propiedades, se tiene que para cualquier polinomio $p \in \mathbb{P}_{2n-1}(\mathbb{R})$,

$$\frac{p(x)}{p_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{p_n(x)}$$

donde $q, r \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ son el cociente y resto de la división polinomial. Así

$$\begin{aligned} q(x) &= \alpha_0 p_0(x) + \cdots + \alpha_{n-1} p_{n-1}(x) \\ r(x) &= \beta_0 p_0(x) + \cdots + \beta_{n-1} p_{n-1}(x) \end{aligned}$$

puesto $\{p_0, \cdots, p_{n-1}\}$ es base de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Cuadratura

De esta forma

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} p(x)dx &= \int_{-1}^{1} (p_n(x)q(x) + r(x))\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} p_n(x)q(x)\, dx + \int_{-1}^{1} r(x)\, dx \\ &= \langle p_n, q\rangle + \langle r, p_0\rangle,\end{aligned}$$

puesto $p_0(x) = 1$ y como $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ y $p_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} p(x)dx &= \langle r, p_0\rangle \\ &= \langle \beta_0 p_0 + \cdots \beta_{n-1} p_{n-1}, p_0\rangle \\ &= \beta_0 \langle p_0, p_0\rangle + \cdots \beta_{n-1}\langle p_{n-1}, p_0\rangle \\ &= \beta_0 \langle p_0, p_0\rangle,\end{aligned}$$

puesto la base $\{p_0, \cdots p_{n-1}\}$ es ortogonal.

Cuadratura

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} w_i\, p(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} w_i\, (p_n(x_i) q(x_i) + r(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i\, r(x_i),\end{aligned}$$

puesto x_i son las ráices de p_n. Así

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} w_i\, p(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j\, p_j(x_i) \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \sum_{i=1}^{n} w_i\, p_j(x_i) \\ &= \beta_0 \langle p_0, p_0 \rangle,\end{aligned}$$

debido a que $\{w_i\}_{i=1}^{n}$ son las soluciones del problema anterior.

Cuadratura

Así se construye

Definición (Cuadratura de Gauss de n nodos)

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = w_1 p(x_1) + w_2 p(x_2) + \cdots + w_n p_n(x_n)$$

donde $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ son las n raíces del polinomio de la base ortogonal p_n y $\{w_i\}_{i=1}^{n}$ es la única solución del sistema de ecuaciones descrito.

Cuadraturas Gaussianas

n	Pesos	Nodos
1	$w_1 = 2$	$x_1 = 0$
2	$w_1 = 1$ $w_2 = 1$	$x_1 = -0.57735$ $x_2 = 0.57735$
3	$w_1 = 0.55556$ $w_2 = 0.88889$ $w_3 = 0.55556$	$x_1 = -0.7746$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0.7746$
4	$w_1 = 0.34785$ $w_2 = 0.65215$ $w_3 = 0.65215$ $w_4 = 0.34785$	$x_1 = -0.86114$ $x_2 = -0.33998$ $x_3 = 0.33998$ $x_4 = 0.86114$
5	$w_1 = 0.23693$ $w_2 = 0.47863$ $w_3 = 0.56889$ $w_4 = 0.47863$ $w_5 = 0.23693$	$x_1 = -0.90618$ $x_2 = -0.53847$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0.53847$ $x_5 = 0.90618$

Estimación del error

Teorema

Si $f \in C^{2n}[-1,1]$, entonces

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\langle p_n, p_n\rangle$$

para algún valor $\xi \in]-1,1[$.

1. Error inversamente proporcional a $(2n)!$.
2. El máximo de $f^{(2n)}$ puede ser difícil de estimar.
3. $\langle p_n, p_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Propiedades de las cuadraturas Gaussianas

1. Una cuadratura de n nodos es exacta para polinomios de grado $2n-1$.
2. En la práctica, en comparación con otras reglas, las cuadraturas Gaussianas logran resultados mas precisos con el mismo costo computacional.
3. Los polinomios ortogonales se pueden construir derivando

$$p_k(x) = \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k, \quad k = 0, 1, \cdots$$

4. Los nodos y pesos de estas reglas de cuadratura se encuentran tabulados[1] e implementadas en funciones de Matlab.

[1] *Handbook of mathematical functions.* Abramowitz and Stegun (1964)

Tabla: Convergencias

$n \diagdown f(x)$	$\cos(x)$	$\frac{\cos(10x)x}{e^x}$	$\frac{\cos(x^2)x}{e^x}$	$\cos(\cos(x))e^{\cos(x)}$
1	2	0	0	2.9374
2	1.6758	−0.61481	0.62997	3.0929
3	1.683	−0.079276	0.55022	3.0205
4	1.6829	0.54848	0.53019	3.0286
5	1.6829	0.23429	0.5311	3.028
6	1.6829	0.059696	0.53121	3.0281
7	1.6829	0.205	0.5312	3.0281
8	1.6829	0.16121	0.5312	3.0281
9	1.6829	0.16893	0.5312	3.0281
10	1.6829	0.16801	0.5312	3.0281
11	1.6829	0.16809	0.5312	3.0281
12	1.6829	0.16809	0.5312	3.0281

Las aplicaciones

1. $$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-1/2} f(x)g(x)\,dx,$$
2. $$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{+\infty} e^{-x} f(x)g(x)\,dx,$$
3. $$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)\,dx,$$

son productos interiores en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, estas dan origenes a otros polinomios ortogonales [2], creando así otras reglas de cuadratura.

[2] Llamados de Chebyshev, Laguerre y Hermite respectivamente