UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 4 (Progresiones y Funciones I)

1. Si en una P.G. de 3 términos positivos se suma 2 al segundo término, resulta una P.A., y si en esta P.A. se suma 9 al tercer término, resulta nuevamente una P.G. Determine la P.G. original.

2. Si los números a, b y c son distintos y están en P.G. Demostrar que los números $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c}$ están en P.A..

3. Una pelota se deja caer desde una altura de 9 m. Si cada vez rebota un tercio de la altura desde la cual ha caído esa vez. ¿Cuánto rebotará la sexta vez?. ¿Cuál será la distancia total recorrida al tocar el suelo por octava vez?. **(En práctica)**

4. Considere la sucesión $s_1, s_2, ...$ definida recursivamente por:

$$s_1 = \sqrt{3}, \quad s_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{1}{2}s_n, \quad \text{cuando } n \geq 1.$$

Observe que

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{3} \\ s_2 &= \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ s_3 &= \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{3} \\ &\vdots \\ s_k &= \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{3} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \sqrt{3}, \end{aligned}$$

es decir s_k es la suma de los k primeros términos de una progresión geométrica con primer término a y razón r. **(En práctica)**

a) Indique los valores de a y r, y determine una fórmula para s_k.

b) Pruebe que

$$\sum_{k=1}^{n} s_k = 2\sqrt{3}\left[n - 1 + \frac{1}{2^n}\right].$$

5. Estudie cada una de las siguientes relaciones y determine si son o no funciones.

   a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : \quad x = y^2\}$.
   b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (\exists n \in \mathbb{Z}) \;\; x = ny\}$.
   c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad xy = 3\}$.
   d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : \quad x = |y| \wedge x \leq 2y\}$. **(En práctica (d))**

6. **(En práctica)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$

   a) ¿Qué desigualdad se debe resolver para determinar la imagen recíproca $f^{-1}([0, +\infty[)$?
   b) Determinar $f^{-1}(\{0\})$ y $f^{-1}([1,2])$.
   c) Determine $f(\{x \in \mathbb{R} \quad : |x| > 2\})$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Dar un ejemplo de un conjunto no vacío $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que:

   a) $f^{-1}(B) = \emptyset$, b) $f^{-1}(B)$ tiene cardinalidad 1.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 3$. Dar un ejemplo de un conjunto no vacío $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que:

   a) $f^{-1}(B) = [1,2]$, b) $f^{-1}(B) = \mathbb{R} - [1,2]$.

9. **(En práctica)** Sea $f : A \to B$ una función y M, N dos subconjuntos no vacíos del codominio. Probar que:

$$f^{-1}(M - N) = f^{-1}(M) - f^{-1}(N).$$

10. Considere las siguientes funciones y analice su inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. En caso de ser inyectiva, defina su inversa. Suponga que U es un conjunto cualquiera y $A \subseteq U$.

    a) $f : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(A), \quad X \longmapsto f(X) = X \cap A$.
    b) La **función característica** de A:

$$\chi_A : U \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

    c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \longmapsto f(n) = 2n$.
    d) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad n \longmapsto h(n) = \begin{cases} 2n-1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -2n & \text{si } n < 0 \end{cases}$

    (En práctica d))

RRS/RNG/JMS/AGS/LNB/JSA/BBM/LRS/ags
semestre otoño 2006.