UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 7

PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN MATLAB

1. Método de Diferencias Finitas

Considere el problema de valores de contorno

$$\begin{cases} -y'' + ry' + ky = f(x), \qquad x \in (a,b), \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \end{cases} \tag{PVC–1}$$

donde k y r son constantes positivas. Las derivadas de y pueden ser aproximadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ y''(x) &= \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned} \tag{DC}$$

las cuales son llamadas diferencias centradas. Consideramos una partición uniforme del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual tamaño:

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \dots n.$$

Evaluando (DC) en $x = x_i$, para $i = 1, \dots, n-1$, obtenemos:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

Reemplazando estas expresiones en (PVC–1) obtenemos:

$$\begin{cases} -\dfrac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + r\,\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + ky(x_i) = f(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \qquad \forall\, i = 1, \dots, n-1, \\ y(x_0) = \alpha, \quad y(x_n) = \beta. \end{cases}$$

Si h es pequeño, es posible despreciar los errores $\mathcal{O}(h^2)$ en la expresión anterior para obtener aproximaciones $y_i \approx y(x_i)$ que satisfacen:

$$\begin{cases} -\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + r\,\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + ky_i = f(x_i), \qquad \forall\, i = 1, \dots, n-1, \\ y_0 = \alpha, \quad y_n = \beta. \end{cases}$$

Reordenando obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \left(-1 - \dfrac{rh}{2}\right) y_{i-1} + (2 + kh^2) y_i + \left(-1 + \dfrac{rh}{2}\right) y_{i+1} = h^2 f(x_i) \qquad \forall\, i = 1, \dots, n-1, \\ y_0 = \alpha, \quad y_n = \beta. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones es tridiagonal y puede ser escrito en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} B & C & 0 & \cdots & 0 \\ A & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C \\ 0 & \cdots & 0 & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C\beta \end{pmatrix}$$

donde:

$$A := -1 - \frac{rh}{2}, \qquad B := 2 + kh^2, \qquad C = -1 + \frac{rh}{2} \quad \text{y} \quad f_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Así, las aproximaciones y_i pueden obtenerse resolviendo el sistema tridiagonal anterior.

Ejercicio 1. Escriba una función en MATLAB que resuelva (PVC–1) mediante el método de diferencias finitas. Las entradas de esta función deben ser los parámetros r, k, $f(x)$ (definida como una función `inline` o a través de otra función MATLAB), a, b, α, β y n, y la salida debe ser el vector $\boldsymbol{y} = (y_0, \dots, y_n)^t$. Su función además debe graficar la solución obtenida por este método.

Ejercicio 2. Escriba un rutero que ejecute las siguientes tareas:

2.1) Llame a la función anterior para resolver el siguiente PVC

$$\begin{cases} -y'' + 3y' + 2y = 3(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)), & x \in [-\pi, \pi], \\ y(-\pi) = 0, \quad y(\pi) = 0, \end{cases}$$

con $n = 100$.

2.2) Calcule el error cuadrático dado por

$$\text{error} = \sum_{i=0}^{n} |y(x_i) - y_i|^2,$$

donde la solución exacta del PVC es $y(x) = \operatorname{sen}(x)$.

2.3) En una misma gráfica dibuje la solución calculada del PVC mediante diferencias finitas (use círculos) y la solución exacta (use una linea continua).

2. Método de Elementos Finitos

Considere el problema de valores de contorno

$$\begin{cases} -u'' + cu = f, & x \in (a, b), \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \end{cases} \tag{PVC–2}$$

donde c es una constante positiva. Al multiplicar la EDO por una función $v \in V$, donde V es el espacio de funciones definidas en (a, b) y que se anulan en los extremos de este intervalo, e integrar por partes obtenemos el problema:

Hallar $u \in V$ tal que:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + c\int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, v \in V, \tag{FD}$$

el cual es una fomulación débil del problema (PVC–2). Usando un subespacio de dimensión finita V_h de V obtenemos una formulación débil discreta del problema (FD):

Hallar $u_h \in V_h$ *tal que:*

$$\int_a^b u_h'(x)v_h'(x)\,\mathrm{d}x + c\int_a^b u_h(x)v_h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v_h(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, v_h \in V_h. \tag{FD$_h$}$$

El subespacio V_h más usado es el de las funciones continuas y lineales a trozos respecto auna partición arbitraria del intervalo $[a,b]$. Sin embargo, en este laboratorio solamente consideraremos una partición uniforme:

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + ih,\ i = 0,1,\dots n.$$

Una base del espacio V_h es el de las funciones techo, las cuales se definen, para $i = 1,\dots,n-1$, como:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \qquad \text{y que satisfacen} \qquad \phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Así, como la expresión integral en (FD$_h$) es válida para todo $v_h \in V_h$, en particular es válida para los elementos de la base. Además, escribiendo $u_h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\phi_j(x)$, donde los coeficientes $\alpha_j = u_h(x_j)$ obtenemos el problema

Hallar $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\phi_j(x)\right)' \phi_i'(x)\,\mathrm{d}x + c\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\phi_j(x)\right)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, i = 1,\dots,n-1,$$

o bien, reordenando, tenemos:

Hallar $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\int_a^b \phi_j'(x)\phi_i'(x)\,\mathrm{d}x + c\int_a^b \phi_j(x)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x\right)\alpha_j = \int_a^b f(x)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, i = 1,\dots,n-1. \tag{FD$_i$}$$

Esta última expresión es un sistema de ecuaciones de $(n-1)\times(n-1)$. Si $j \notin \{i-1, i, i+1\}$, entonces

$$\int_a^b \phi_j'(x)\phi_i'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_a^b \phi_j(x)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Así, el sistema (FD$_i$) se reduce a un sistema tridiagonal

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix},$$

donde

$$
\begin{aligned}
a_i &= \int_a^b [\phi_i'(x)]^2\,\mathrm{d}x + c\int_a^b [\phi_i(x)]^2\,\mathrm{d}x, && \forall\, i = 1,\dots,n-1,\\
b_i &= \int_a^b \phi_{i-1}'(x)\phi_i'(x)\,\mathrm{d}x + c\int_a^b \phi_{i-1}(x)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x, && \forall\, i = 2,\dots,n-1,\\
f_i &= \int_a^b f(x)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x, && \forall i = 1,\dots,n-1.
\end{aligned}
$$

Las integrales para a_i y b_i se pueden calcular de manera exacta usando la Regla elemental de Simpson sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, ya que sobre estos subintervalos $[\phi_i(x)]^2$ y $\phi_{i-1}(x)\phi_i(x)$ son polinomios de grado 2, y usando integración directa en las integrales que contienen $[\phi_i'(x)]^2$ y $\phi_{i-1}'(x)\phi_i'(x)$, pues son constantes en estos subintervalos. Así:

$$
\begin{aligned}
a_i &= \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} + c\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{3} = \frac{2}{h} + c\frac{2h}{3}, && \forall\, i = 1,\dots,n-1,\\
b_i &= \frac{1}{x_{i-1}-x_i} + c\frac{x_i - x_{i-1}}{6} = -\frac{1}{h} + c\frac{h}{6}, && \forall\, i = 2,\dots,n-1.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, dado que el error del método de elementos finitos es de orden $\mathcal{O}(h^2)$, podemos utilizar un método de integración del mismo orden para estimar la integral que define a la variable f_i. Dado que la partición es uniforme, podemos utilizar la regla del punto medio compuesta para aproximar f_i. Notando que:

$$
\phi_i(\hat{x}_j) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } j = i \vee j = i+1,\\ 0 & \text{en otro caso,}\end{cases} \qquad \text{con} \qquad \hat{x}_j = \frac{x_{j-1}+x_j}{2},
$$

tenemos:

$$
f_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x)\,\mathrm{d}x \approx h\sum_{j=1}^{n} f(\hat{x}_j)\phi_i(\hat{x}_j) = \frac{h}{2}\left(f(\hat{x}_i) + f(\hat{x}_{i+1})\right).
$$

Ejercicio 3. Escriba una función en MATLAB que resuelva (PVC–2) mediante el método de elementos finitos. Las entradas de esta función deben ser los parámetros c, $f(x)$ (definida como una función `inline` o a través de otra función MATLAB), a, b, y n, y la salida debe ser el vector $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0,\dots,\alpha_n)^t = (u_h(x_0),\dots,u_h(x_n))^t$. Su función además debe graficar la solución obtenida por este método.

Ejercicio 4. Escriba un rutero que ejecute las siguientes tareas:

4.1) Llame a la función anterior para resolver el siguiente PVC

$$
\begin{cases} -u'' + 4u = 4x^3 - 10x, & x \in [-1,1],\\ u(-1) = 0, \quad u(1) = 0, \end{cases}
$$

con $n = 100$.

4.2) Calcule el error cuadrático dado por

$$
\text{error} = \sum_{i=0}^{n} |u(x_i) - u_h(x_i)|^2,
$$

donde la solución exacta del PVC es $u(x) = x^3 - x$.

4.3) En una misma gráfica dibuje la solución calculada del PVC mediante elementos finitos (use círculos) y la solución exacta (use una linea continua).

Ejercicio 5. Modifique su programa hecho en el ejercicio 3 para que resuelva el problema con condiciones de contorno no homogéneas:

$$\begin{cases} -u'' + cu = f, & x \in (a, b), \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases} \tag{PVC–3}$$

Para ello, transforme (PVC–3) a un problema con condiciones de contorno homogéneas mediante el cambio de variable:

$$u(x) = v(x) + \alpha \left(\frac{x-b}{a-b} \right) + \beta \left(\frac{x-a}{b-a} \right)$$

Repita el ejercicio 4 con el PVC

$$\begin{cases} -u'' + \ln(2)^2 u = 0, & x \in [0, 1], \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 2, \end{cases}$$

cuya solución exacta es $u(x) = 2^x$.

Ejercicio 6. Se puede usar la conservación del calor para desarrollar un balance de calor para una barra larga y delgada de longutud L. Si la barra no está aislada en toda su longitud y el sistema se encuentra en estado estacionario, la ecuación resultante es:

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} + k(T_a - T) = 0, \qquad x \in [0, L],$$

donde k es un coeficiente de transferencia de calor que parametriza la razón de disipación de calor con el aire circundante, y T_a es la temperatura del aire circundante. La temperatura de la barra en los extemos mantiene valores fijos:

$$T(0) = T_1 \qquad \text{y} \qquad T(L) = T_2.$$

Escriba un rutero en MATLAB que ejecute las siguientes tareas:

6.1) Encuentre la temperatura en una barra de largo $L = 10m$, con $k = 0.01m^{-2}$ temperatura de aire circundante $T_a = 20°C$ y con temperatura en los extremos dadas por $T_1 = 40°C$ y $T_2 = 200°C$. Para ello utilice el método de diferencias finitas y el método de elementos finitos, en ambos casos con una partición de $n = 100$.

6.2) En un mismo gráfico dibuje la temperatura obtenida con diferencias finitas y la temperatura obtenida con elementos finitos.

6.3) Calcule la siguiente norma:

$$||\boldsymbol{y}_{mdf} - \boldsymbol{y}_{mef}||_2$$

donde $\boldsymbol{y}_{mdf}$ es el vector obtenido mediante diferencias finitas y $\boldsymbol{y}_{mef}$ es el vector obtenido mediante elementos finitos.