UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (MAT. 521218)
PRACTICA $N°3$ (Ecuaciones de Primer Orden: Aplicaciones)

Problema 1.

(i) Para cada constante k considere la curva definida por $x^2 - y^2 = k$. Encuentre la familia de curvas ortogonales a la familia anterior. Bosqueje la situación.

(ii) Haga lo mismo que en [(i)] para la familia definida por $xy = k$; y por $y = e^{kx}$.

(iii) Encuentre la familia de curvas ortogonales a la familia de elipses $x^2 + 2\,y^2 = y + b$ donde b es constante.

(iv) Determine la constante k de modo que las parábolas $y = ax^2 + k$ sean las trayectorias ortogonales de la familia de elipses $x^2 + 2\,y^2 = y + b$; a y b son parámetros. (*)

(v) Dada una familia de curvas que pasan por el punto $(1, 2)$ y cuyas pendientes son inversamente proporcionales a la abscisa del punto (κ factor de proporcionalidad), encuentre la familia de curvas ortogonales a la dada. En particular calcule y determine la curva que pasa por el punto $(1, 2)$.

Problema 2. Suponga que la tasa de crecimiento de una especie de bacteria es constante. Si en un inicio se estima que hay 1500 bacterias, y luego en una hora existen 2000. ¿Cúantas habrá luego de seis horas ? ¿En cúantas horas la población se triplicará ? (*)

Problema 3. Una población inicial de bacterias tiene tasa de crecimiento igual a una constante k_1.Luego de T horas las bacterias se colocan en un cultivo diferente de modo que la población crece ahora a una tasa constante k_2. Determine la población para cualquier tiempo t.

Problema 4. (**Curva de persecución**). Determinar la curva de persecución de un barco A que persigue a un barco B. Suponga que este útimo lo hace en línea recta. Suponga, además conocidas la distancia inicial entre los barcos A y B y sus respectivas velocidades iniciales.

Problema 5. La **ley de enfriamiento de Newton** establece que en un cuerpo que se está enfriando, la rapidez con que cambia la temperatura $T(t)$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio que lo rodea (que asumiremos constante, aunque no necesariamente).

La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de $200°C$. Después de 10 minutos, la temperatura de la superficie del motor es de $180°C$. Suponga que la la temperatura ambiente es de $30°C$ y que la temperatura del motor viene dada por la de su superficie.

(i) ¿Cúanto tiempo tomará que la temperatura de la superficie del motor baje a $40°C$? (*)
Respuesta: $\dfrac{10\ln(17)}{\ln(17)-\ln(15)}\,min.$

(ii) Para una temperatura dada T entre $200°C$ y $30°C$, sea $t(T)$ el tiempo necesario para que el motor se enfríe de $200°C$ a T. Encuentre una fórmula para $t(T)$ en términos de T y gráfique la función.

(iii) ¿En cúanto tiempo la temperatura del motor se iguala a la temperatura ambiente ?

Problema 6. La sala de un restaurant tiene un volumen de $800ft^3$. El aire de la sala contiene cloro a una concentración de $0.1g/ft^3$. Por un toma aire adecuado está entrando a la sala aire fresco a una tasa de $8ft^3/min$. Con ventiladores apropiados, el aire de la sala está bien mezclado (no hay espacios para no fumadores) y fluye hacia afuera por un conducto a la misma tasa con que entra el aire fresco.

(i) Determine la concentración de cloro en la sala como función del tiempo.

(ii) Suponga que la tasa de flujo de aire fresco se puede ajustar. Determine la tasa de entrada requerida para reducir la concentración de cloro a $10^{-3}g/ft^3$ en 20 minutos.

Problema 7. Un recipiente contiene 10 [$ltrs.$] de agua pura. Salmuera (agua con sal) que contiene 10 [$grs.$] de sal por litro entra a una tasa de 2 [$ltr./hora$]. El agua bien mezclada se saca a una tasa de 1 [$ltr./hora$], y adicionalmente se evapora 1 [$ltr./hora$] (vapor de agua sin sal). Determine la cantidad de sal en el recipiente en función del tiempo.

Repita todo el problema suponiendo que no hay evaporación y sabiendo que el recipiente se llena a las 10 horas (encuentre la cantidad de sal para antes y después de los 10 primeros minutos). (*)

Problema 8. Un laguna con buena circulación contiene $1000KL$ de agua contaminada a una concentración de $2KG/KL$. Residuos de una fabrica entran al lago a una tasa de $5KL/h$ con una concentración de $7KG/KL$ de contaminante, el agua fluye por una tuberia de salida (al mar !) a una tasa de $2KL/h$. Determine la cantidad y la concentración de contaminante como una función del tiempo. Además, si el ecosistema se satura (casi irreversiblemente) cuando la concentración llega a $1000KG/KL$, indique el momento en que eso sucede. ¿Cuál es la variación de volumen en el proceso hasta ese instante? ¿ Cómo son las ecuaciones si al problema agregamos una evaporación (sólo agua) de $0.5KL/h$?

Problema 9. En un tanque hay 384 lt de agua con 15 kg de sal bien mezclados. Al mismo se le agrega una disolución de agua y sal con una concentración de 2 $\frac{kg}{lt}$ a una tasa (o velocidad) de 17 $\frac{lt}{\text{min}}$. A su vez, una válvula permite que salga la mezcla a un flujo (o velocidad) de 5 $\frac{lt}{\text{min}}$.

(i) Determine el volumen del tanque si el mismo comienza a derramarse a los 15 minutos.

(ii) Determine la cantidad de sal y de la concentración de la sal antes que se derrame la mezcla.

(iii) Determine la cantidad de sal y de la concentración de la sal después de los primeros 15 minutos.

(*) Problemas a resolver en clases de Práctica con el Prof. Ayudante.

JMS/CMG/jms.
29/08/2007.