UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

MAT 525 222 ***Ecuaciones Diferenciales II***
FPV/fpv **(09.09.2004)**

Listado 2

P1 Construir la **SF** de las siguientes funciones:

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \end{cases} \qquad (ii) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ 2 - x & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \end{cases}$$

$$(iii) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ 1 + 2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad (iv) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -2 \le x \le -1 \\ 1 + x & \text{si} \quad -1 < x \le 2. \end{cases}$$

En cada caso estudiar la convergencia de la **SF**, **SFC** y **SFS** asociadas a f. Esbozar la gráfica de la función a la cual convergen dichas series en el intervalo $[-3L, 3L]$.

P2 Si $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ y f es integrable. Probar la siguiente fórmula de L. Kronecker.

$$\int pf = pf_1 - p'f_2 + p''f_3 - \cdots + (-1)^m p^{(m)} f_{m+1} + c$$

donde c es una constante arbitraria y f_{k+1} es una antiderivada de f_k.
Ilustración: Construir la **SF** de $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ donde

$$(i) \;\; f(x) = x^2 \qquad (ii) \;\; f(x) = x^3 \qquad (iii) \;\; f(x) = x^4$$

$$(iv) \;\; f(x) = x^3 - \pi^2 x \quad (v) \;\; f(x) = x^4 - 2\pi^2 x^2$$

y probar las siguientes *sumas*:

$$(i) \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad (ii) \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$(iii) \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90} \quad (iv) \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

P3 Probar que

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \ : \quad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2n-1)x}{2n-1)^2}$$

P4 Sea $f \in SC([-\pi, \pi])$ tal que $f(-\pi^+) = f(\pi^-)$ y $f' \in SC(]-\pi, \pi[)$.
Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$, es decir, $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ y $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) ¿ Es cierto el resultado si $f(-\pi^+) \neq f(\pi^-)$? Construir contra-ejemplos.

b) Si $f \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi])$ tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ ¿Qué puede afirmar respecto al comportamiento asintótico de los coeficientes de Fourier de f ? Generalizar su afirmación, si $f \in \mathcal{C}^m([-\pi, \pi])$ tal que $f(-\pi) = f(\pi)$.

P5 (a) Supongamos que

$$f'(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{A_n cos(nt) + B_n sen(nt)\}$$

es la **SF** de la derivada de una función 2π-periódica f. Pruebe que:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}[f(\pi^-) - f(-\pi^+)], \quad A_n = (-1)^n A_0 + nb_n, \text{ y } B_n = -na_n.$$

donde $\{a_0, a_n, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los coeficientes de Fourier de f.

(b) Encontrar la **SF** de $f \in L^2([-\pi, \pi])$, $t \in [-\pi, \pi] \longmapsto f(t) = t^2 + t$, derive término a término esa serie y explique por qué no es la **SF** de f'. Obtener la **SF** de f'.