UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EXAMEN

CALCULO NUMERICO I (521230)

Alumno:..
Número de Matricula:..
Profesor:..
Forma:...

P U N T A J E

PREGUNTA	RESPUESTAS			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no** será corregida.
- La forma de su prueba está escrita en las hojas de preguntas.
- No intente **adivinar**, por cada tres respuestas erradas se descontará una respuesta correcta.
- Cualquier intento de copiar será **severamente** castigado.
- Tiene 100 minutos para responder la prueba.

1. Indicar cuál de las siguientes funciones **no** es un *spline* cúbico:

   (a) $s(x) = \begin{cases} x^3 & -1 \leq x \leq 0, \\ -x^3 & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

   (b) $s(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & -1 \leq x \leq 0, \\ x^3 + 1 & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

   (c) $s(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 0, \\ x^2 + x^3 & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

   (d) todas las anteriores son *splines* cúbicos.

2. Sea $s(x)$ el *spline* cúbico que interpola la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	0.7	1.0	0.5	0.8	0.9	1.3	1.7

   Indicar cuál de las siguientes propiedades satisface $s(x)$:

   (a) $\sum_{i=0}^{6} |s(x_i) - f(x_i)|^2 > 0$;

   (b) $s'(x_i) = f'(x_i)$;

   (c) $s''(x_i) = f''(x_i)$;

   (d) ninguna de las anteriores.

3. Indicar cuál es el número mínimo de puntos de Gauss necesario para integrar en forma exacta el polinomio de interpolación que se obtiene de la siguiente tabla:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	0.0	0.3	0.5	0.8	0.9	1.1

   (a) 2;

   (b) 3;

   (c) 4;

   (d) ninguna de las anteriores.

4. Indicar cuál de los siguientes métodos **no** da el valor exacto de cualquier integral de la forma:

$$\int_{-1}^{1} \left(a + bx + cx^2 + x^3\right)\, dx \qquad a, b, c \in I\!R$$

(a) Gauss con dos puntos;

(b) Simpson con paso $h = 1.0$;

(c) Trapecios con paso $h = 0.1$;

(d) los tres métodos anteriores dan el valor exacto.

5. Se desea calcular una integral de la forma

$$\int_{-2}^{4} f(x)\, dx$$

por un método de Gauss. Para ello se hace un cambio de variable que lleva la integral al intervalo $[-1, 1]$. Indicar que integral se obtiene:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, dt$;

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(3t+1)\, dt$;

(c) $\displaystyle 3\int_{-1}^{1} f(3t+1)\, dt$;

(d) ninguna de las anteriores.

6. Se calcula

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

mediante el método de Simpson con pasos $h = 0.2$ y $h' = 0.1$. Indicar cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:

(a) el error con paso $h' = 0.1$ es aproximadamente igual al error con paso $h = 0.2$;

(b) el error con paso $h' = 0.1$ es aproximadamente $\frac{1}{4}$ del error con paso $h = 0.2$;

(c) el error con paso $h' = 0.1$ es aproximadamente $\frac{1}{16}$ del error con paso $h = 0.2$;

(d) ninguna de las anteriores.

7. Una barra cilíndrica metálica de gran longitud, diámetro $D = 0.1\,\mathrm{m}$ y resistencia eléctrica $R = 0.01\,\Omega$, se calienta haciendo pasar por ella una corriente eléctrica de intensidad $I = 100\,\mathrm{A}$. Al cabo de un tiempo, cuando la temperatura T (en grados Kelvin) de la barra se estabiliza, se verifica que

$$\pi D h \left(T - T_\infty\right) + \pi D \epsilon \sigma \left(T^4 - T_\infty^4\right) - I^2 R = 0,$$

donde

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W}/^\circ\mathrm{K}^4\,\mathrm{m}^2$ es la constante de Stefan-Boltzman,

$\epsilon = 0.8$ es la emisividad de la superficie del conductor,

$h = 20\ \mathrm{W}/^\circ\mathrm{K}\,\mathrm{m}^2$ es el coeficiente de transferencia de calor con el medio y

$T_\infty = 298^\circ\mathrm{K}$ es la temperatura ambiente (es decir 25°C).

Para conocer la temperatura T de equilibrio, que método puede utilizarse:

(a) Runge-Kutta de orden 4 (RK_{44});
(b) Newton-Raphson;
(c) *splines* cúbicos;
(d) ninguno de los anteriores.

8. Se sabe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una sola raíz en el intervalo $[0, 1]$. Indicar en cuál de los siguientes casos **no** puede utilizarse el método de bisección para calcularla:

(a) si $f(0) = 5$ y $f(1) = -3$;
(b) si $f(0) = 5$ y $f(1) = 3$;
(c) si $f(0) = -5$ y $f(1) = 3$;
(d) en los tres casos anteriores puede utilizarse el método.

9. Sea x^* la solución de una ecuación $f(x) = 0$. Para resolverla se aplican cuatro pasos del método de Newton-Raphson a partir de una aproximación inicial x_0 y se obtienen las aproximaciones de la raíz x_1, x_2, x_3 y x_4. Si se sabe que $|f''(x)| < 2$ y que $f'(x) > 1$, indicar cuál de las siguientes proposiciones es necesariamente verdadera:

(a) $|x_4 - x^*| > |x_3 - x^*|$;
(b) $|x_4 - x^*| \approx \frac{1}{2}\,|x_3 - x^*|$;
(c) $|x_4 - x^*| \leq |x_3 - x^*|^2$;
(d) ninguna de las anteriores.

10. Se desea encontrar un punto de intersección de las curvas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ y^3 + y - x^2 - x = 0. \end{cases}$$

Indicar cuál de los siguiente algoritmos se obtiene si se aplica el método de Newton-Raphson a partir de un dato inicial (x_0, y_0):

(a) Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, hasta que se cumpla algún criterio de convergencia:

$$\text{Resolver :} \quad \begin{bmatrix} 2x_k & 0 \\ 0 & 3y_k^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_k^2 + y_k^2 - 1 \\ y_k^3 + y_k - x_k^2 - x_k \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + \Delta x_k \\ y_k + \Delta y_k \end{bmatrix}.$$

(b) Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, hasta que se cumpla algún criterio de convergencia:

$$\text{Resolver :} \quad \begin{bmatrix} 2x_k & 2y_k \\ -2x_k - 1 & 3y_k^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_k^2 + y_k^2 - 1 \\ y_k^3 + y_k - x_k^2 - x_k \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + \Delta x_k \\ y_k + \Delta y_k \end{bmatrix}.$$

(c) Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, hasta que se cumpla algún criterio de convergencia:

$$\text{Resolver :} \quad \begin{bmatrix} 2x_k & 2y_k \\ 3y_k^2 + 1 & -2x_k - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + \Delta x_k \\ y_k + \Delta y_k \end{bmatrix}.$$

(d) Ninguno de los anteriores.

11. Considere el P.V.I.

$$\begin{cases} y'(x) = 4xy, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Considere el método predictor-corrector basado en los métodos de Euler explícito e implícito:

$$\begin{cases} \hat{y}_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}). \end{cases}$$

Al utilizar este esquema con paso $h = 0.5$, el valor que falta en la siguiente tabla es:

x_i	0.0	0.5	1.0
y_i	1.0	2.0	

(a) 1.0;

(b) 5.0;

(c) 10.0;

(d) ninguno de los anteriores.

12. Para resolver un P.V.I. donde la ecuación diferencial tiene grado mayor que uno es necesario transformarlo en un sistema de ecuaciones diferenciales. Indicar cuál de los siguientes sistemas es equivalente al P.V.I.

$$\begin{cases} y'' + y' - y = \mathrm{e}^x, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

(a) $\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 1, \\ y_2' = \mathrm{e}^x + y_1 - y_2, & y_2(0) = 0; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 0, \\ y_2' = \mathrm{e}^x - y_1 + y_2, & y_2(0) = 1; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_1' = y_1, & y_1(0) = 1, \\ y_2' = \mathrm{e}^x + y_2, & y_2(0) = 0; \end{cases}$

(d) ninguno de los anteriores.

13. Se desea resolver el siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} u' = v, & u(0) = 0, \\ v' = -u, & v(0) = 1. \end{cases}$$

Las ecuaciones para un paso del método de Euler aplicado a este problema son:

(a) $\begin{cases} u_{k+1} = u_k + hu_k, \\ v_{k+1} = v_k + hv_k; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_{k+1} = u_k + hv_k, \\ v_{k+1} = v_k - hu_k; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_{k+1} = v_k + hv_k, \\ v_{k+1} = u_k - hu_k; \end{cases}$

(d) ninguna de las anteriores.

14. Para resolver el siguiente P.V.C.:

$$\begin{cases} y'' = x + \mathrm{e}^y, \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \end{cases}$$

puede aplicarse:

(a) Runge-Kutta de orden 4 (RK_{44});

(b) el método de *shooting*;

(c) el método de Euler implícito;

(d) ninguno de los anteriores.

15. Al aplicar el método de diferencias finitas para resolver un P.V.C. de la forma

$$\begin{cases} -y'' + y' + y = f(x), \quad a < x < b, \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \end{cases}$$

debemos aproximar las derivada de la solución $y(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Para este propósito se particiona el intervalo en n subintervalos iguales de longitud $h = \frac{b-a}{n}$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Indicar cuál de las siguientes aproximaciones es correcta:

(a) $y'(x_i) \approx \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$;

(b) $y'(x_i) \approx \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h}$;

(c) $y'(x_i) \approx \dfrac{y_{i+1} + y_{i-1}}{h^2}$;

(d) ninguna de las anteriores.