UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA 12: *Factorización y Fracciones Parciales.*

Problema 1.

a.- Utilizar el siguiente resultado: $\boldsymbol{x_0}$ *es al menos una raíz doble de* $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$, *si y solamente si,* $\boldsymbol{p(x_0) = p'(x_0) = 0}$,
para determinar el valor de las constantes $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de $\boldsymbol{p(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b}$, si $\boldsymbol{x_0 = 1}$ es una raíz doble. Además, encuentre los factores irreducibles de $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{C})$, respectivamente.

b.- ¿Cuál es el valor de la constante $\boldsymbol{k}$, si $\boldsymbol{x_0 = 2}$ es una raíz de:

$$\boldsymbol{p(x) = x^5 - 2x^4 + kx^3 + 4x^2 + kx + 4?}$$

Encuentre la factorización en irreducibles de $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{C})$, respectivamente.

Problema 2.

a.- Recordar que $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ es una *función polinomial par*, si para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{p(-x) = p(x)}$. Demuestres que $\boldsymbol{p}$ es una función polinomial par, si y solamente si, se satisface la propiedad:

$$\boldsymbol{p(x_0) = 0,\ x_0 \in \mathbb{C} \implies p(-x_0) = p(\overline{x_0}) = 0}$$

Representar, en el plano de Argand, las raíces de los polinomios $\boldsymbol{p_1(x) = x^4 + 16}$, $\boldsymbol{p_2(x) = x^4 - 16}$ y $\boldsymbol{p_3(x) = x^4 - 2x^2 + 2}$. Construya una función polinomial *par* $\boldsymbol{p_4} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ con $\boldsymbol{gr(p_4) = 6}$ que tenga cuatro raíces complejas y dos reales ¿es posible que $\boldsymbol{p_4(x)}$ tenga seis raíces complejas, siendo una función par?

Problema 3. Construya polinomios mónicos $\boldsymbol{p_i} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{i = 1, 2, 3}$ de *grado mínimo*, si se sabe que:

(i) $\boldsymbol{p_1(1) = p_1(1 + 3i) = p_1(1 - 3i) = 0}$ y $\boldsymbol{z_0 = 3 - 4i}$ y su conjugado $\boldsymbol{\bar{z_0}}$ son raíces de multiplicidad $\boldsymbol{3}$ de $\boldsymbol{p_1(x)}$

(ii) $\boldsymbol{p_2(2 + \sqrt{3}) = p_2(-2) = p_2(2 - i) = 0}$

(iii) $\boldsymbol{p(2) = p(-2) = p(-1 + i) = p(1 - i) = p(-1 - i) = p(1 + i) = 0}$

En los casos que (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y (c) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. **[En Práctica (ii) y (iii)]**

Problema 4. Utilizar el Teorema del valor intermedio para construir un algoritmo que nos permita determinar las raíces del polinomio $\boldsymbol{p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2}$ en el intervalo $\boldsymbol{[0, 3]}$.

Problema 5. ¿Cuál es el valor de las constantes a y b en la definición de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ si $p(x) = x^3 + ax^2 + \frac{3}{2}x + b$ y $p(1+\sqrt{2}) = 0$? **[En Práctica]**

Problema 6. Utilizar la división sintética para encontrar la multiplicidad de la raíz $x_0 = -3$ de $p(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$. Encontrar la factorización de $p(x)$ en irreducibles en (a) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (b) $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ y (c) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. **[En Práctica]**

Problema 7. Hallar las *posibles* raíces racionales de los siguientes polinomios de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$p_1(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$	$p_2(x) = x^3 - x - 6$	$p_3(x) = x^5 - x^3 + 2$
$p_4(x) = x^5 - 10$	$p_5(x) = 2x^3 - x^2 + 1$	$p_6(x) = 3x^4 + 7x^2 + 6$
$p_7(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 - 7x + 3$	$p_8(x) = x^6 + 2x^4 + x^2 - 3$	$p_9(x) = x^3 + 10x + 1$

[En Práctica P_3, P_6 y P_7.]

Problema 8. Sean $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $gr(p) < gr(q)$ los cuales no tienen ceros comunes. Si la factorización en irreducibles de q en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es

$$q(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)\cdots(x - a_m)$$

demuestre que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\frac{p(a_1)}{q'(a_1)}}{x - a_1} + \frac{\frac{p(a_2)}{q'(a_2)}}{x - a_2} + \cdots + \frac{\frac{p(a_m)}{q'(a_m)}}{x - a_m}$$

donde $q'(a_1) = (x - a_2)\cdots(x - a_m)$, etc. Encontrar, de dos maneras distintas, la descomposición en fracciones parciales de: $\dfrac{10x^2 + 9x - 7}{(x+2)(x^2-1)}$.

Problema 9. Observar que la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{1}{x^2(x^2 - 2x + 4)}$ la podemos escribir como:

$$\frac{1}{x^2(x^2 - 2x + 4)} = \frac{Ax + B}{x^2} + \frac{-Ax + C}{x^2 - 2x + 4}.$$

Determinar los valores de las constantes A, B y C.

Problema 10. Descomponer en suma de fracciones parciales:

$$R_1(x) = \frac{x+2}{x^2 - 7x + 12} \qquad R_2(x) = \frac{10x^2 + 9x - 7}{(x+2)(x^2-1)}$$

$$R_3(x) = \frac{x^3 + 4x - 3}{x^2 - x} \qquad R_4(x) = \frac{9x^2 - x - 4}{x(2x^2 + 3x - 2)}$$

$$R_5(x) = \frac{3x + 2}{x^3 + 5x^2 - 6} \qquad R_6(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 4x + 18}{x^2 - 3x - 18}$$

[En Práctica R_6.]

18.06.2003
FPV/fpv.