UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218
PRACTICA 1. Generalidades y EDO de 1er Orden (primera parte)

Problema 1. Verifique que la función $y = y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial.
a) $y = x^2,\ y' = 2y/x$; b) $y = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-2x},\ y' + 2y = 3\mathrm{e}^x$;
c) $y = \mathrm{e}^{-x^2},\ y' = -2xy$; d) $y = \mathrm{e}^{-5x}$, $y'' + 10y' + 25y = 0$; (*)
e) $y = \ln(x)$, $y' = \mathrm{e}^{-y}$; (*) f) $y = \cos(3x) + \mathrm{sen}(3x) - 5$, $y'' + 9y = -45$;
g) $y = \mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\ +\ \mathrm{e}^{x^2}, \qquad y' - 2xy = 1.$

Problema 2. Verifique que la función $y = y(x)$ definida por intervalos, es una solución de la ecuación diferencial.

a) $y(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ solución de

$$xy'(x) - 2y(x) = 0.$$

b) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ solución de

$$(y'(x))^2 - 9xy(x) = 0.$$

Problema 3. Encuentre los valores de α para que $y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$ sea solución de
a) $y'(x) + 5y(x) = 0$; (*) b) $y''(x) = y'(x) + y(x)$; c) $2y'''(x) = y'(x) + y(x)$

Problema 4. En cada una de las (EDO) siguientes, establezca la región (o regiones posibles) donde quede garantizada
a) la existencia de al menos una solución
b) la existencia y unicidad de la solución.
(i) $y' = 2x + y$; (ii) $y^2 + x^2y' = 0$; (*) (iii) $y' = x^2 - y^2$;
(iv) $y' = x^2 + y^2$; (v) $y' = \dfrac{2y - x}{x}$; (*) (vi) $y' = (y - 1)x$.
En todos los casos, considere conocida (y adecuada) la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Problema 5. Encuentre la solución general de la E.D.O.
a) $y' = 5\,\text{sen}(8x)$; b) $y'' = \mathrm{e}^{4x} + \cos(3x)$; (*) c) $y' = -2y$;
d) $x\,y' - y = y^3$; e) $y' = y^3\,\text{sen}(2x)$; (*) f) $y' = (y^2 + 2\,y)/x$

Problema 6. Encuentre la solución del problema de valor inicial indicando la región en que la solución es única
a) $y' = x^3$, con $y(2) = 5$; b) $y' = 8y$, con $y(1) = 3$;
c) $y' = \sqrt[4]{y}$, con $y(1) = 0$; (*) d) $xy' = 2y$, con $y(-1) = -1$; (*)
e) $y' = x^2y^2 + y^2 + x^2 + 1$, con $y(0) = 2$.

Problema 7. Considere el siguiente problema de valor inicial :

$$y'(x) = \sqrt{|y(x)|}, \text{ con } y(0) = 0$$

con $y = y(x)$, para todo $x \geq 0$.
a) Usando el método de separación de variables pruebe que $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ es solución del (PVI).
b) Compruebe que $y(x) \equiv 0$ también es solución del (PVI). Como es posible que haya dos soluciones distintas a pesar del teorema de existencia y unicidad ?
c) Compruebe que cualquiera sea $a > 0$,

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < a \\ \frac{1}{4}(x-a)^2 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

también es solución. Deduzca que hay una infinidad de soluciones.

(*) Problemas a resolver en clases de Práctica con el Prof. Ayudante.

06/08/07
JMS/CMG/jms