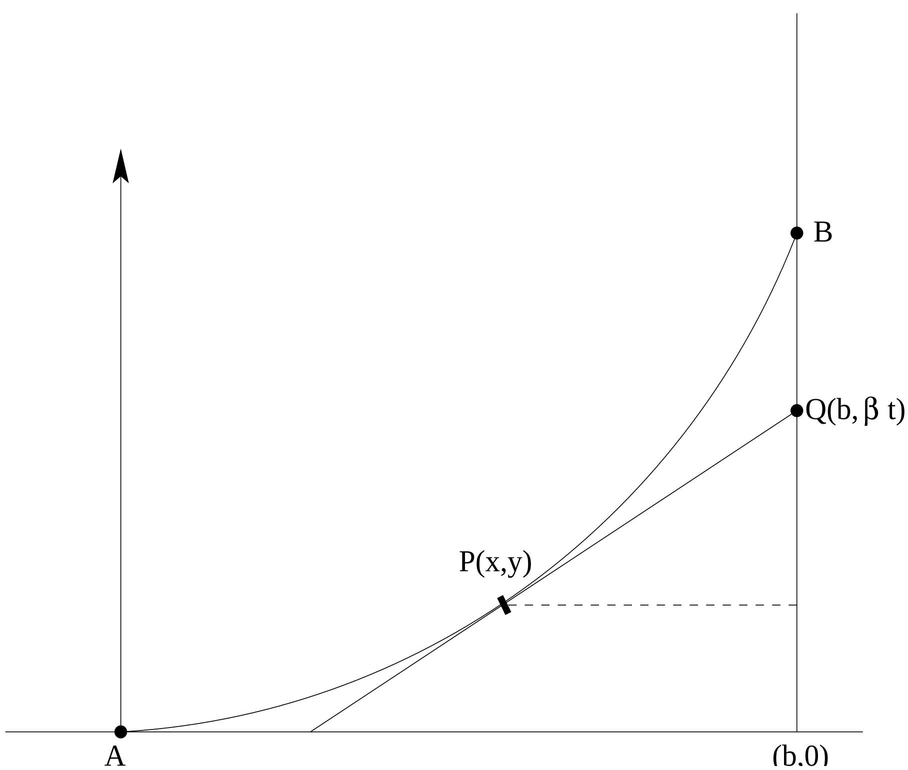
UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 521218
Problema de Aplicación: Curva de persecución

Problema Se trata de determinar la trayectoria de un cazador que persigue a su presa. El modelo corresponde a una expresión geométrica que determina una trayectoria $y = y(x)$ denominada curva de persecución. Sin pérdida de generalidad y con el fin de simplificar el problema, consideramos como ejemplo la persecución de un barco, de tal forma que el barco B que huye lo hace en línea recta, y el barco que persigue A inicia su movimiento perpendicular a la trayectoria del barco B, como se muestra en la figura. Además consideramos como sistema de referencia al que se obtiene cuando se inicia la persecución y cuyo origen es A en el instante inicial.



Como datos se consideran conocidos la distancia b que separa a ambos barcos al comienzo de la persecución y las velocidades iniciales de ambos barcos, digamos $\alpha := V_A$ y $\beta := V_B$, respectivamente. Al cabo de t horas las posición de A será $P(x, y)$. Suponiendo que el movimiento de ambos barcos es descrito por un movimiento rectilíneo uniforme, se deduce que la posición para el barco B al cabo de t horas será $Q(b, \beta t)$.
Como una primera observación notamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta t - y}{b - x} \tag{1}$$

de donde se deduce que

$$t = \frac{y - y'(x - b)}{\beta} \tag{2}$$

donde, como es usual, $y' = \frac{dy}{dx}$. Además la distancia d_A recorrida por A desde $(0, 0)$ a $P(x, y)$ viene dada tanto como por

$$d_A = \int_0^x \sqrt{1 + [y'(u)]^2}\, du$$

como por $d_A = \alpha t$. Así, al igualar estas expresiones, se sigue de (2) que

$$\frac{y - y'(x - b)}{\beta} = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \sqrt{1 + [y'(u)]^2}\, du\,. \tag{3}$$

Derivando (3) y haciendo el cambio de variable $w = y'(x)$, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$-(x - b)\frac{dw}{dx} = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{1 + w^2}\,,$$

la cual, al resolverla utilizando separación de variables se llega a

$$\ln|\sqrt{1 + w^2} + w| = \ln\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-\beta/\alpha} + C\,,$$

donde C es una constante a determinar. En vista que en el instante inicial $x = 0$ e $y = 0$ se sigue de (1) que $w = 0$ y así $C = 0$. Enseguida, usamos el hecho que la función ln es inyectiva para obtener

$$\sqrt{1 + w^2} + w = \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-\beta/\alpha}\,,$$

y depejando la incógnita w se obtiene la siguiente EDO de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = w = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-\beta/\alpha} - \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{\beta/\alpha}\right]$$

la cual estudiamos en dos casos. Primero, si las velocidades son iguales, esto es $\alpha = \beta$, se concluye que

$$y = \frac{b}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 - \ln\left|1 - \frac{x}{b}\right|\right]$$

Para que A alcance a B, necesitamos hallar Y cuando $x = b$, pero en este caso pasando al límite se observa que $y \to -\infty$, lo cual interpretamos como que A nunca logra alcanzar a B. En cambio, cuando las velocidades son distintas se obtiene la solución

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{-b\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-\beta/\alpha+1}}{1 - \beta/\alpha} + \frac{b\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{\beta/\alpha+1}}{1 + \beta/\alpha}\right] + C$$

para determinar la constante C, utilizamos nuevamente el hecho que en el instante inicial se tiene $x = y = 0$, lo cual implica que

$$C = \frac{\alpha b \beta}{\alpha^2 - \beta^2}\,.$$

De esta manera tenemos que la curva de persecución está descrita por

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{-b\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-\beta/\alpha+1}}{1 - \beta/\alpha} + \frac{b\left(1 - \frac{x}{b}\right)^{\beta/\alpha+1}}{1 + \beta/\alpha}\right] + \frac{\alpha b \beta}{\alpha^2 - \beta^2} \tag{4}$$

Ahora, si deseáramos hallar el punto y^* en el cual el barco A alcanza a B, sólo debemos evaluar (4) en $x = b$, esto es $y^* = \dfrac{\alpha b \beta}{\alpha^2 - \beta^2}$. Además notamos que este valor sólo tiene sentido si $\alpha > \beta$.

24.09.2003
LNB/TBF