UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra y Algebra Lineal (520142)
S.E.L. con dos parámetros: *Caso de estudio*

Estudiar la existencia de soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} \boldsymbol{x} & + & \mathbf{b}\boldsymbol{y} & + & \mathbf{a}\boldsymbol{z} & = & \mathbf{1} \\ \mathbf{a}\boldsymbol{x} & + & \mathbf{b}\boldsymbol{y} & + & \boldsymbol{z} & = & \mathbf{a} \\ \boldsymbol{x} & + & \mathbf{ab}\boldsymbol{y} & + & \boldsymbol{z} & = & \mathbf{b} \end{array}$$

los valores de a y b en $\mathbb{R}$.

Para resolver este problema seguiremos la siguiente estrategia:

1. Discutir la existencia de solución si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$;
2. Enseguida asumiendo $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ estudiamos:
   (a) la existencia de una única solución si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, es decir, determinar los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tal que $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3}$. Esto es, aquellos valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tal que $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}$.
   (b) si el sistema de ecuaciones propuesto es compatible indeterminado, para algunos valores $\boldsymbol{a}$ excluídos en el caso anterior.

Nuestro objetivo, también es utilizar este *caso de estudio* para repasar el máximo de conceptos aprendidos en el estudio de *Sistemas de Ecuaciones Lineales* (S.E.L.). Además, identificaremos cuando el sistema sea compatible indeterminado si las soluciones definen una recta o un plano.

Solución

1. Estudiaremos el caso $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, en tal caso tenemos un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{z}$, esto es:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Sabemos que para decidir la existencia de soluciones, debemos determinar $\boldsymbol{r = r(A)}$ y $\boldsymbol{r(A,B)}$. Como,

$$\boldsymbol{(A,B) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ a-1 & 0 & a \\ 0 & 1-a & -1 \end{array}\right)}$$

concluimos que:

$$\boldsymbol{r = r(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a = 1 \\ 2 & \text{si} \quad a \neq 1 \end{cases} \quad \wedge \quad r(A,B) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad |a| = 1 \\ 3 & \text{si} \quad |a| \neq 1 \end{cases}}$$

El único caso que no es evidente es $\boldsymbol{r(A,B) = 3}$ si $\boldsymbol{|a| \neq 1}$. Para ellos recordamos que el rango de una matriz es igual al orden del mayor subdeterminante no nulo. Luego calculamos el subdeterminante de orden $\boldsymbol{3}$, aplicando la regla de Sarrus:

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a-1 & 0 & a \\ 0 & 1-a & -1 \end{vmatrix} = (a^2 - 1) \neq 0 \iff |a| \neq 1.}$$

$\boldsymbol{1^a}$ <u>Conclusión:</u> El sistema (1) es: (a) *Compatible Determinado* si $\boldsymbol{a = -1}$. La única solución es $\boldsymbol{(x,z) = (1/2, -1/2)}$.

(b) Incompatible si $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}/\{-1\}}$.

2. Ahora suponemos que $\boldsymbol{b \neq 0}$, en tal caso tenemos un sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas, esto es

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 & b & a \\ a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}}$$

y nos preguntamos para que valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b \neq 0}$ existe una única solución, es decir, $\boldsymbol{\det(A) \neq 0}$, o equivalentemente $\boldsymbol{r(A) = 3}$.

Si bien, podemos aplicar nuevamente la regla de Sarrus, aplicaremos operaciones elementales por filas o columnas (pués $\boldsymbol{\det(A) = \det(A^t)}$) para realizar dicho cálculo y de paso repasamos las propiedades de determinantes.

$$\boldsymbol{\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & b & a \\ a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} 2+a & 1 & a \\ 2+a & 1 & 1 \\ 2+a & a & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{(sumando las } \boldsymbol{2^a} \text{ y } \boldsymbol{3^a} \text{ columnas a la } \boldsymbol{1^a}\text{)}$$

así tenemos

$$\det(A) = b(2+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = b(2+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix}$$

finalmente aplicando la Regla de Laplace, se obtiene:

$$\det(A) = b(2+a)(-1)^{(1+1)}\begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix} = b(2+a)(a-1)^2$$

Luego existe única solución si $\boxed{b \neq 0, \quad a \neq -2 \wedge a \neq 1}$

en tal caso, la única solución se escribe.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \tag{2}$$

tenemos tres alternativas para desarrollar dicho cálculo:

A1) Determinar la inversa de A, ya sea utilizando la adjunta de A o reducción por filas y después desarrollar la multiplicación, indicada en el lado derecho de (2).

A2) Aplicar regla de Cramer y calcular 4 determinantes de orden 3.

A3) Utilizar el esquema de reducción por filas (A, B), para determinar de una sola vez el producto del lado derecho de (2)

¿Cuál alternativa elegir?. Sin lugar a dudas la tercera.

Aplicamos reducción por filas, recordando que asumimos $b \neq 0$ $a \neq 1 \wedge a \neq -2$

$$(A, B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ a-1 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & b & a+1 & 0 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \end{array}\right)$$

es decir (A, B) es equivalente por filas a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & b & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & (a+2)(a-1) & 1-b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 + \frac{1-b}{(a-1)(a+2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(b-1)(a+1)}{b(a-1)(a+2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-b}{(a-1)(a+2)} \end{array}\right)$$

es decir la única solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1-b}{(a-1)(a+2)} \\ \frac{(b-1)(a+1)}{b(a-1)(a+2)} \\ \frac{1-b}{(a-1)(a+2)} \end{pmatrix} \qquad (a \neq 1, a \neq -2 \wedge b \neq 0)$$

3. Enseguida, debemos estudiar los casos excluidos en el análisis anterior.

   (a) $b \neq 0 \wedge a = 1$

   (b) $b \neq 0 \wedge a = -2$

(3a) En este caso asumimos $\boxed{b \neq 0 \wedge a = 1}$ y el sistema resultante es:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \quad (b \neq 0) \tag{3}$$

y procederemos a determinar $r = r(A)$ y $r(A, B)$.

Como $(A, B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$

deducimos $\quad r = r(A) = 1 \wedge r(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad b = 1 \\ 2 & \text{si} \quad b \neq 1 \end{cases}$

En consecuencia, sólo existe solución si $b = 1$ y en tal caso debemos fijar $3 - 1 = 2$ incógnitas. Observemos que si $b = 1$ el sistema equivalente a (3) es simplemente

$$x + y + z = 1.$$

fijamos $z = t \in \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$, luego las infinitas soluciones de (2) son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

es decir un plano que pasa por el punto $P_0(1, 0, 0)$ y con vectores directores

$$\vec{d_1} = [-1, 1, 0] \text{ y } \vec{d_2} = [-1, 0, 1].$$

(3b) En este caso asumimos $\boxed{b \neq 0 \wedge a = -2}$ y el sistema resultante es:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & -2 \\ -2 & b & 1 \\ 1 & -2b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ b \end{pmatrix} \tag{4}$$

y procederemos a determinar $\boldsymbol{r = r(A)}$ y $\boldsymbol{r(A,B)}$. Como

$$\boldsymbol{(A,B) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & b & -2 & 1 \\ 0 & 3b & 1 & 0 \\ 0 & -3b & 1 & b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & b & -2 & 1 \\ 0 & b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)}$$

luego la matriz escalonada equivalente por filas a $\boldsymbol{(A,B)}$ es:

$$\boldsymbol{(A,B) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)}$$

deducimos: $\boldsymbol{r = r(A) = 2 \wedge r(A,B) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad b \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad b = 1 \end{cases}}$

En consecuencia el S.E.L (4) es compatible indeterminado si $\boldsymbol{b = 1}$ y tal caso debemos fijar $\boldsymbol{n - r = 1}$ incógnita. El sistema equivalente a (4) es:

$$\boldsymbol{x - z = 1 \ \wedge \ y = z.}$$

Luego si fijamos $\boldsymbol{z = t} \in \mathbb{R}$, obtenemos que las infinitas soluciones de (4) son:

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

En otras palabras una recta que pasa por el punto $\boldsymbol{P_0(1,0,0)}$ y con vector director $\boldsymbol{\vec{d}} = [\boldsymbol{1,1,1}]$,