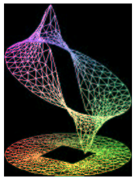
MAT 520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 1. LOGICA Y CONJUNTOS.

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Lógica

La lógica es la herramienta con que
se construye el edificio llamado Matemática

Conceptos primitivos

Los valores de verdad VERDADERO (V) y FALSO (F) son los conceptos primitivos de la lógica.

Proposición

Una proposición es una sentencia (expresión) sujeta a un valor de verdad. Usualmente se denotan por letras minúsculas p, q, r, s, etc.

Lógica

Conectivos lógicos

Un conectivo lógico es una operación que nos permite obtener nuevas proposiciones a partir de otras dadas. Los conectivos básicos son:

- negación $(\sim)$ ("no")
- conjunción $(\wedge)$ ("y")
- disyunción $(\vee)$ ("o")
- condicional $(\rightarrow)$ ("entonces")
- bicondicional $(\leftrightarrow)$ ("sí y sólo sí")

Lógica

Tipos de proposiciones

Las proposiciones se clasifican en simples y compuestas, vale decir, las que no incluyen conectivos lógicos, y las que sí los incluyen.

Valores posibles de dos proposiciones dadas

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Negación ($\sim$)

Dada una proposición p, se llama negación de p, y se escribe $\sim p$, a la proposición "no p". Esto significa que $\sim p$ es V si p es F, y $\sim p$ es F si p es V.

TABLA DE VERDAD

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunción ($\wedge$)

Dadas dos proposiciones p y q, la conjunción de ellas es la proposición "p y q", la cual se escribe $p \wedge q$. Así, $p \wedge q$ es V si ambas lo son, y $p \wedge q$ es F si al menos una de ellas lo es.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción ($\vee$)

Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción de ellas es la proposición "p o q", la cual se escribe $p \vee q$. Así, $p \vee q$ es V si al menos una de ellas lo es, y $p \vee q$ es F si ambas lo son.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional ($\rightarrow$)

Dadas dos proposiciones p y q, la condicional de ellas es la proposición "si p entonces q", la cual se escribe $p \rightarrow q$. Aquí, p se llama antecedente y q consecuente. También, $p \rightarrow q$ se lee "p es condición suficiente para q", o bien "q es condición necesaria para p". Así, $p \rightarrow q$ es F sólo si p es V y q es F.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Dadas dos proposiciones p y q, la bicondicional de ellas es la proposición "p sí y sólo sí q", la cual se escribe $p \leftrightarrow q$. También, $p \leftrightarrow q$ se lee "p es condición necesaria y suficiente para q". Así, $p \leftrightarrow q$ es V sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Definiciones varias

Una proposición compuesta se dice una:

- TAUTOLOGIA (o TEOREMA LOGICO), si ella es siempre V, cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- CONTRADICCION, si ella es siempre F.
- CONTINGENCIA, si no es tautología ni contradicción.

Implicación lógica

Dadas dos proposiciones p y q, se dice que p implica lógicamente q, si $p \rightarrow q$ es una tautología. En tal caso se escribe $p \Rightarrow q$ y se lee "p implica q".

Equivalencia lógica

Dadas dos proposiciones p y q, se dice que ellas son lógicamente equivalentes, si $p \leftrightarrow q$ es una tautología. En tal caso se escribe $p \Leftrightarrow q$ y se lee "p es equivalente a q".

Lógica

Algunas tautologías importantes

- $\sim (\sim p) \quad \Leftrightarrow \quad p$ (doble negación)
- $p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p$ (conmutatividad de $\wedge$)
- $p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad q \vee p$ (conmutatividad de $\vee$)
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad q \leftrightarrow p$ (conmutatividad de $\leftrightarrow$)
- $p \vee (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r$ (asociatividad de $\vee$)
- $p \wedge (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$ (asociatividad de $\wedge$)
- $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ (asociatividad de $\leftrightarrow$)

Algunas tautologías importantes (continuación)

- $p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  (distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$)
- $p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  (distributividad de $\vee$ con respecto a $\wedge$)
- $\sim (p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee \sim q$ (Ley de De Morgan para $\wedge$)
- $\sim (p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \wedge \sim q$ (Ley de De Morgan para $\vee$)
- $p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \sim q \rightarrow \sim p$ (contrarecíproca)
- $p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

Función proposicional

Se llama función proposicional (o enunciado abierto) a una expresión p que contiene una o más variables, y tal que ella se convierte en una proposición lógica cuando se le asignan valores expecíficos a dichas variables.

Conjunto de validez

Se llama Conjunto de validez de una función proposicional p, y se denota por V_p, al conjunto de valores (o n-uplas de valores) para los cuales dicha función es verdadera.

Cuantificadores lógicos

- Para indicar que una función proposicional es verdadera para cualquier elemento de un determinado conjunto A se usa el símbolo $\forall$, el cual se llama cuantificador universal.

  $\forall$ se lee: "para todo", "cualquiera sea", "para cada".

- Para indicar que una función proposicional es verdadera sólo para algunos elementos de un determinado conjunto A se usa el símbolo $\exists$, el cual se llama cuantificador existencial.

  $\exists$ se lee: "existe (un)", "existe al menos un", "existe algún".

- Para indicar que una función proposicional es verdadera para un único elemento de un determinado conjunto A se usa el símbolo $\exists!$.

  $\exists!$ se lee: "existe un único".

Más sobre cuantificadores lógicos

Sean A un conjunto y p una función proposicional que depende de una variable x (en tal caso se escribe $p(x)$).

- $\forall x \in A: \ p(x)$ se lee "para todo x en A, $p(x)$ es verdadera".
- $\exists x \in A: \ p(x)$ se lee "existe x en A tal que $p(x)$ es verdadera".

Negaciones importantes

- $\sim (\forall x \in A: \ p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in A: \sim p(x))$
- $\sim (\exists x \in A: \ p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in A: \sim p(x))$
- $\sim (\exists! x \in A: \ p(x)) \quad \Leftrightarrow$
  $(\forall x \in A: \sim p(x)) \quad \vee \quad (\exists x \in A, \exists y \in A, x \neq y: \ p(x) \wedge p(y))$

Conjuntos

Idea de Conjunto

Llamaremos conjunto a cualquier colección de objetos. Los objetos los llamaremos elementos del conjunto. Dos conjuntos importantes son el conjunto vacío, que no contiene elementos, y el conjunto universo, que contiene todos los elementos.

Notación

- Los conjuntos: $A, B, \cdots$
- Los elementos: $a, b, \cdots$
- a pertenece a A: $a \in A$
- a no pertenece a A: $a \notin A$
- Conjunto vacío: ϕ
- Conjunto universo: U

Conjuntos

Definición de un conjunto A

Dado $x \in U$ y un conjunto A: $\quad x \in A \vee x \notin A?$.
Si esta pregunta puede responderse siempre, entonces se dice que A está bien definido .

Maneras de definir un conjunto

- Por extensión, vale decir mostrando los elementos de A.

  Ejemplo : $\quad A = \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$ (Números naturales)

- Por comprensión, esto es dando una propiedad (o proposición) que caracterice a los elementos del conjunto.

  Ejemplo : $\quad \mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} : \quad a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$ (Números racionales)

Conjuntos

Inclusión de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es subconjunto de B, y se escribe $A \subseteq B$, si todos los elementos de A están también en B, esto es:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Propiedades de la inclusión

Dados A, B, C conjuntos, se tiene

- $\phi \subseteq A \subseteq U$
- $A \subseteq A$
- $(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C) \Rightarrow \ A \subseteq C$

Conjuntos

Igualdad de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se dice que A y B son iguales, y se escribe $A = B$, si los elementos de A y B coinciden, esto es:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \ \wedge \ (B \subseteq A)$$

Conjunto de las partes de un conjunto dado

Dado un conjunto A, se define el conjunto de las partes de A, y se denota $\mathcal{P}(A)$, como el conjunto de todos los subconjuntos de A, esto es:

$$\mathcal{P}(A) := \{ X : \quad X \subseteq A \}$$

Notar que $\mathcal{P}(A) \neq \phi$ ya que $\phi, \ A \in \mathcal{P}(A)$

Operaciones entre conjuntos

Sea U el conjunto universo, y sean A, B subconjuntos de U.

- La diferencia de A y B es el conjunto

$$A - B := \{\, x \in U : \quad x \in A \quad \wedge \quad x \notin B \,\}$$

- El Complemento de A con respecto a U, el cual se denota A^c (o bien A', $-A$), es el conjunto $U - A$, vale decir:

$$A^c := U - A = \{\, x \in U : \quad x \notin A \,\}$$

Algunas propiedades

- Para todo $x \in U$ se tiene: $\quad x \in A \quad \vee \quad x \in A^c$
- $\phi^c = U \quad \wedge \quad U^c = \phi$
- $(A^c)^c = A$

Otras operaciones entre conjuntos

Sea U el conjunto universo, y sean A, B subconjuntos de U.

- La intersección de A y B, la cual se denota $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos comunes a A y B, esto es

$$A \cap B := \{x \in U : \quad x \in A \quad \wedge \quad x \in B\}$$

- La unión de A y B, la cual se denota $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B, esto es

$$A \cup B := \{x \in U : \quad x \in A \quad \vee \quad x \in B\}$$

Conjuntos

Propiedades de $\cap$ y $\cup$

- $A \cup A = A \quad \wedge \quad A \cap A = A$ (idempotencia)
- $A \cup B = B \cup A \quad \wedge \quad A \cap B = B \cap A$ (conmutatividad de $\cup$ y $\cap$)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asociatividad de $\cup$)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociatividad de $\cap$)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  (distributividad de $\cup$ con respecto a $\cap$)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  (distributividad de $\cap$ con respecto a $\cup$)
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Ley de De Morgan)
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Ley de De Morgan)

Conjuntos

Más definiciones

- Dos conjuntos A y B se dicen disjuntos sí y sólo sí $A \cap B = \phi$.
- Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se define el Producto Cartesiano de ellos, el cual se denota por $A \times B$, como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que a pertenece a A y b pertenece a B, esto es

$$A \times B := \{\, (a, b) : \quad a \in A \quad \wedge \quad b \in B \,\}$$

- Dados n conjuntos no vacíos $A_1, A_2, ..., A_n$, se define el Producto Cartesiano de ellos, el cual se denota por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, como el conjunto de todas las n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n)$ tales que a_i pertenece a A_i para cada $i \in \{1, ..., n\}$, esto es

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \;:= \{\, (a_1, a_2, ..., a_n) : \quad a_i \in A_i \,, \; i \in \{1, ..., n\} \,\}$$

Partición de un conjunto

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos de un conjunto B. Se dice que $\{ A_1, A_2, ..., A_n \}$ es una PARTICION de B si estos conjuntos son no vacíos, disjuntos dos a dos y su unión es el conjunto B, vale decir sí y sólo sí:

- $A_i \neq \phi$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$.
- $A_i \cap A_j = \phi$ para cada $i \neq j$.
- $\cup_{i=1}^{n} A_i = B$.

Conjuntos

Cardinalidad

El número de elementos de un conjunto finito A se llama cardinalidad de A y se denota $|A|$.

Propiedades

- Si A y B son conjuntos disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- Si A y B son conjuntos arbitrarios, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Si A, B y C son conjuntos arbitrarios, entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| .$$