UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA 6

Temas
– Funciones biyectivas.
– Restricción de funciones.
– Algebra de funciones.
– Composición de funciones.
– Función inversa.

Problema 1. Sea E un conjunto de cardinalidad 3. En las siguientes preguntas se asume que $Dom(f) \subseteq E$.

(a) ¿ Cuántas funciones sobreyectivas es posible definir de E en si mismo?.

(b) ¿Cuántas funciones inyectivas es posible definir de E en si mismo, cuando $Rec(f)$ tiene cardinalidad 2?

(c) ¿ Son todas las funciones encontradas en (a) y (b) biyectivas?.

Problema 2. Sea A un subconjunto cualquiera de un conjunto universo U. La función $\mathcal{X}_A : U \to \{0,1\}$ definida por:

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

recibe el nombre de **función característica** de A. Demostrar que para todo $A, B \subseteq U$:

$$(a)\ \mathcal{X}_{A\cap B} = \mathcal{X}_A \mathcal{X}_B \quad (b)\ \mathcal{X}_{A\cup B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B - \mathcal{X}_{A\cap B} \quad (c)\ \mathcal{X}_{A-B} = \mathcal{X}_A - \mathcal{X}_{A\cap B}$$

¡ Discuta el caso cuando $A = U$ y $A = \emptyset$!

(**En práctica**: (b))

Problema 3. Considere las funciones definidas en el Problema 11 del listado 5 y decida si existe la función inversa. En caso negativo, haga las restricciones que sean necesarias de modo de obtener una función invertible y definir su inversa.

Problema 4. Determinar el recorrido de la función real definida por

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ h(x) = (x-1)(x-2)$$

a) Probar que la función $h_1 = h\big|_{[3/2,\infty[}$ es estrictamente creciente y determinar su recorrido.

b) Mostrar que existe la inversa de la restricción de h definida en (a). Determine h_1^{-1}.

(**En práctica**)

Problema 5.

Las siguientes propiedades de la función compuesta nos permiten simplificar el estudio de una función dada, basta simplemente escribirla como una función compuesta y decidir que propiedades son heredadas de las funciones componentes. También podemos considerar el problema inverso, es decir, conocidas propiedades de la función compuesta que podemos inferir de al menos una de las funciones componentes.

Demostrar:

a) Si f y g son inyectivas (respectivamente, sobreyectivas o biyectivas) entonces $f \circ g$ es inyectiva (respectivamente, sobreyectiva o biyectiva).

b) Si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f **es sobreyectiva.**

c) Si $f \circ g$ es inyectiva entonces g **es inyectiva**.

d) Si f es sobreyectiva y estrictamente creciente (o decreciente) entonces f^{-1} existe y posee las mismas propiedades que f.

e) Si f es estrictamente creciente y g es estrictamente creciente entonces $f \circ g$ es estrictamente creciente.

f) Si f es estrictamente creciente y g es estrictamente decreciente entonces $f \circ g$ es estrictamente decreciente. ¿ Qué debe afirmar en (f) y (g) si f es estrictamente decreciente?

g) Los gráficos de f y f^{-1} son simétricos con respecto a la recta $y = x$.

(**En práctica**: (e))

Problema 6. Sea r la función raíz cuadrada y h_1 la función definida en el Problema 4.

a) Determinar el dominio de la compuesta $r \circ h_1$.

b) Establecer de la manera más simple y directa que $r \circ h_1$ es estrictamente creciente.

(**En práctica**).

Nota: *Problema 6-(a) es un buen ejemplo para ilustrar la afirmación dada en Problema 10.*

Problema 7. Considere la función real definida por:

$$\forall\, x \in Dom(g) : \; g(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)}$$

a) Encontrar el dominio de g y calcular $g(]1,2[)$, $g^{-1}(\{\sqrt{2}\})$ y $g^{-1}(\{1\})$.

b) Establecer que g es igual a la función $\sqrt{(1-x)}\sqrt{(2-x)}$ sobre el intervalo $]-\infty, 1]$.

c) Probar que la restricción de g definida por

$$\begin{array}{rcl} g_1 \; : [2, \infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x & \longmapsto & g_1(x) = g(x) \end{array}$$

es biyectiva y encontrar su función inversa.
(Indicación: Tomar ventaja del Problema 6-(b).)

d) Visualizar las gráficas de g, g_1 y g_1^{-1}.

(**En práctica**: (a), (b) y (c))

Problema 8. Sean f y g las funciones reales definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 2|x| & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \qquad g(x) = 3x + 1$$

a) Encontrar $f(-3)$, $(g \circ f)(1)$, $(f \circ g)(2)$ y $(f \circ f)(1)$.

b) Encontrar las fórmulas de $f \circ g$, $g \circ f$ y $f \circ f$.

c) ¿ Cuál es la definición de la restricción de f sobre $[1, 3]$, es decir, la caracterización de de $f([1, 3])$? Análogamente, determine $(f \circ g)([1, 3])$.

(**En práctica**: (a) y en (b) sólo la fórmula de $f \circ g$).

Problema 9. Considere las funciones polinomiales

$$N(x) = x^2 - 6x + 5 \qquad \text{y} \qquad D(x) = x^2 - 9x + 18$$

a) Determine el dominio de la función cuociente $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$.

b) Probar que si $b \neq 1$ entonces existen dos valores de x tal que $f(x) = b$.
¿$f^{-1}(\{1\}) = \{\cdots\}$? (Indicación: $\forall\, b \in \mathbb{R} : 9b^2 - 16b + 16 \geq 0$)

Problema 10. Sean $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Probar que:

$$Dom(g \circ f) = Dom(f) \cap f^{-1}(Dom(g))$$

a) ¿Cómo puede tomar ventaja de este resultado, al determinar el dominio de una función compuesta si las componentes f y g son *definida por tramos*?

Indicación. Recordar las propiedades de la imagen recíproca y la noción de partición de un conjunto.

b) Utilizar el problema resuelto en la página 79 del texto guía para ilustrar su método ideado en (a).

Problema 11. Sea $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una **función** y $A, B \subset \mathbb{R}$, dos subconjuntos disjuntos tal que $Dom(f) = A \cup B$ (e.d. una **partición** del dominio de f). Probar que

$$Rec(f) = Rec(f\big|_A) \cup Rec(f\big|_B)$$

a) ¿Cómo puede tomar ventaja de este resultado, al determinar el recorrido de una función *definida por tramos*?

b) El resultado no es válido si f es sólo una relación. Construir un contra-ejemplo.

Problema 12. Considere la función real, definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ \\ -(x-2)^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Determinar $Rec(f)$.

b) Demostrar que $f^{-1}(\{1\})$ tiene cardinalidad 1 y si $y \neq 1$ la cardinalidad $f^{-1}(\{y\})$ es dos. ¿ es f inyectiva?

c) Probar que las restricciones $f\big|_{]-\infty,2[}$ y $f\big|_{[2,\infty[}$ son estrictamente creciente y decreciente, respectivamente. Determinar la función inversa de cada una de estas restricciones.

(d) Sean h_1 y h_2 las funciones reales determinadas en (c). Definimos :

$$\forall\, y \in Rec(f) : \ h(y) = \begin{cases} h_1(y) & \text{si } y \in Rec(f\big|_{]-\infty,2[}) \\ \\ h_2(y) & \text{si } y \in Rec(f\big|_{[2,\infty[}) \end{cases}$$

¿ Es h una función o una relación? (Indicación : Calcular $h(0)$, ¡ f^{-1} no existe !)

19.04.2002
FPV/fpv.