UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142)

Pauta Evaluación 2

P1. Considere las funciones

$$\begin{array}{rcl} f \,:\, Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \quad \text{y} \quad & g \,:\, Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,, \\ x \mapsto f(x) \,=\, \ln(x)\,, & & x \mapsto g(x) \,=\, Arcsen(x)\,. \end{array}$$

a) Indique $Dom(f)$ y $Dom(g)$. **(2 Ptos.)**

b) Defina completamente la función compuesta $g \circ f$. **(8 Ptos.)**

c) ¿ Es $g \circ f$ biyectiva? Justifique su respuesta. **(6 Ptos.)**

d) Defina, restringiendo si es necesario, la función $(g \circ f)^{-1}$. **(4 Ptos.)**

Solución

a) Vemos que:

$$Dom(f) \,=\, Rec(exp_e) \,=\, (0, +\infty)\,, \textbf{(1 Pto.)}$$

y

$$Dom(g) \,=\, Rec(sen) \,=\, [-1, 1]\,.\textbf{(1 Pto.)}$$

b) Se tiene

$$\begin{aligned} Dom(g \circ f) &= \{x \in Dom(f) \,:\, f(x) \in Dom(g)\} \quad \textbf{(1 Pto.)} \\ &= \{x \in (0, +\infty) \,:\, ln(x) \in [-1, 1]\} \\ &= \{x > 0 \,:\, -1 \le ln(x) \le 1\} \quad \textbf{(1 Pto.)} \\ &= \{x > 0 \,:\, ln(\frac{1}{e}) \le ln(x) \le ln(e)\} \quad \textbf{(1 Pto.)} \\ &= \{x > 0 \,:\, \frac{1}{e} \le x \le e\} \text{ (ln es creciente)} \quad \textbf{(1 Pto.)} \\ &= [\frac{1}{e}, e]\,. \quad \textbf{(1 Pto.)} \end{aligned}$$

Así, la compuesta está dada por

$$\begin{aligned} g \circ f \,:\, [\frac{1}{e}, e] &\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x &\to (g \circ f)(x) \,=\, g(f(x)) \,=\, Arcsen(ln(x))\,. \quad \textbf{(3 Ptos.)} \end{aligned}$$

c) Sabemos (cf. Listado 5) que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son dos funciones se tiene que:

- f y g inyectivas $\Rightarrow g \circ f : A \to C$ inyectiva
- f y g sobreyectivas $\Rightarrow g \circ f : A \to C$ sobreyectiva.

En nuestro caso, se tiene:

- $f : [\frac{1}{e}, e] \to [-1, 1]$ es biyectiva (ln es estrictamente creciente) **(2 Ptos.)**
- $g : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es biyectiva ($Arcsen$ es la función inversa de la rama principal del seno) **(2 Ptos.)**

Así, aplicando el resultado con $A = [\frac{1}{e}, e]$, $B = [-1, 1]$ y $C = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se concluye que $g \circ f$ es biyectiva. **(2 Ptos.)**

d) Como de c) se ve que $g \circ f$ es biyectiva, entonces no es necesario restringir para definir su inversa.**(1 Pto.)** Así, vemos que

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)^{-1} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [\frac{1}{e}, e] \\ x \to (g \circ f)^{-1}(x) = y & \iff & x = (g \circ f)(y) = Arcsen(ln(y)), \quad \textbf{(1 Pto.)} \end{array}$$

de donde

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)^{-1} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [\frac{1}{e}, e] \\ x & \to & (g \circ f)^{-1}(x) = e^{sen(x)}. \quad \textbf{(2 Ptos.)} \end{array}$$

P2.a) Demuestre la fórmula de prostaféresis:

$$\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha+\beta) \;-\; \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha-\beta)\,.$$

(6 Ptos.) <u>**Solución**</u>

a) Se tienen la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos:

$$\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) \;=\; \mathrm{sen}\,(\alpha)\cos(\beta) \;+\; \cos(\alpha)\,\mathrm{sen}\,(\beta)\,, \qquad \textbf{(2 Pto.)}$$

de donde, reemplazando β por $-\beta$ obtenemos la fórmula para la resta:

$$\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) \;=\; \mathrm{sen}\,(\alpha)\cos(\beta) \;-\; \cos(\alpha)\,\mathrm{sen}\,(\beta)\,. \qquad \textbf{(2 Ptos.)}$$

Restando ambas, se tiene

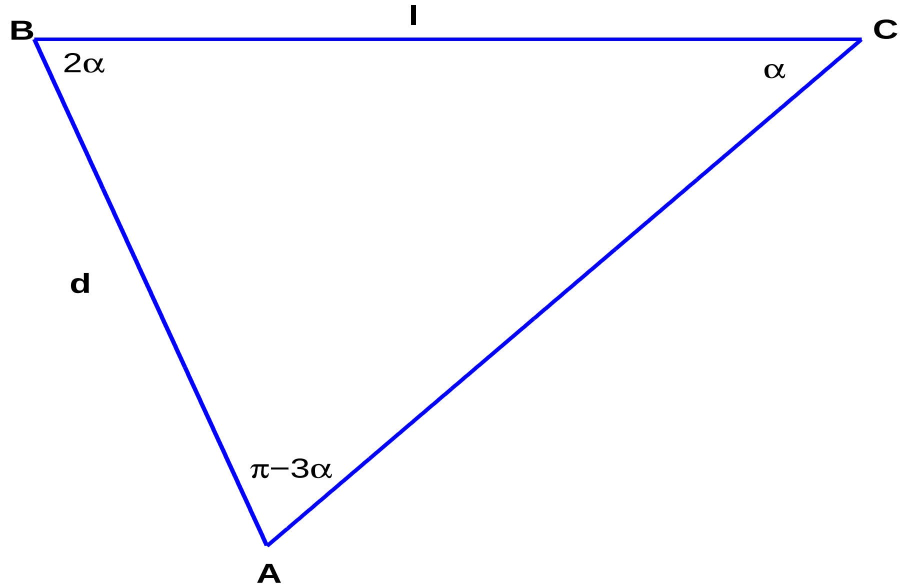
$$\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) \;-\; \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) \;=\; 2\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}\,(\beta)\,, \qquad \textbf{(1 Ptos.)}$$

de donde despejando se tiene la fórmula pedida. **(1 Pto.)**

P2.b) Desde dos puntos B y C de una carretera, situados a una distancia de l metros, se observa un árbol en un punto A. Suponga que el ángulo BCA es α y el ángulo CBA es 2α, y demuestre que la distancia d del árbol al punto B está dada por

$$d = \frac{l\,\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(3\alpha)}. \qquad \textbf{(6 Ptos.)}$$

Solución



(2 Ptos.)

Por teorema de los senos

$$\frac{l}{\text{sen}(\pi - 3\alpha)} = \frac{d}{\text{sen}(\alpha)}$$

de donde

$$d = \frac{l\,\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\pi - 3\alpha)}. \qquad \textbf{(2Ptos.)}$$

Como $\text{sen}(\pi - 3\alpha) = \text{sen}(3\alpha)$ se tiene lo pedido, es decir,

$$d = \frac{l\,\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(3\alpha)}. \qquad \textbf{(2Ptos.)}$$

P2.c) Resuelva la ecuación:

$$Arccos(x) \; - \; Arcsen(x) \; = \; Arcsen(11 - 12x)\,. \qquad \textbf{(8 Ptos.)}$$

Solución

c) Primero, para que x sea solución de la ecuación original, x debe satisfacer $|x| \leq 1$ (para que $Arcsen(x)$ esté definido) y $|11 - 12x| \leq 1$ (para que $Arcsen(11 - 12x)$ esté definido). Así, x debe satisfacer $\frac{5}{6} \leq x \leq 1$**(1 Pto.)**

Tomando sen a ambos lados de la ecuación se llega a:

$$\text{sen}\,(Arccos(x) \; - \; Arcsen(x)) \; = \; \text{sen}\,(Arcsen(11 - 12x))\,. \quad \textbf{(1 Pto.)}$$

Aplicando la fórmula de la resta de dos ángulos se tiene

$$\text{sen}\,(Arccos(x))\cos\,(Arcsen(x)) - \cos\,(Arccos(x))\,\text{sen}\,(Arcsen(x)) \; = \; 11 - 12\,x\,. \quad \textbf{(1 Pto.)}$$

Ahora, como$|x| \leq 1$ se tiene

$$\text{sen}\,(Arccos(x)) \; = \; \sqrt{1 - x^2} \quad \text{y} \quad \cos\,(Arcsen(x)) \; = \; \sqrt{1 - x^2}\,, \quad \textbf{(1 Pto.)}$$

de donde

$$\text{sen}\,(Arccos(x))\cos\,(Arcsen(x)) \; = \; |1 - x^2| \; = 1 - x^2\,, \quad \textbf{(1 Pto.)}$$

si $|x| \leq 1$. De esta forma, la ecuación se tranforma en

$$1 - x^2 \; - \; x^2 \; = \; 11 \; - \; 12x\,, \quad \textbf{(1 Pto.)}$$

(ya que $\cos\,(Arccos(x)) = x$ y $\text{sen}\,(Arcsen(x)) = x$), la cual tiene por soluciones

$$x_1 \; = \; 5 \quad , \quad x_2 \; = \; 1\,. \quad \textbf{(1 Pto.)}$$

Finalmente, como x debe satisfacer $\frac{5}{6} \leq x \leq 1$, la única solución posible es $x = 1$. **(1 Pto.)**

P3.a) Sea $z = 3\,\mathrm{cis}\left(-\dfrac{4\pi}{147}\right)$. Exprese en la forma polar $-z$, $|z\bar{z}|$ y $-Re(z)+Im(z)i$.

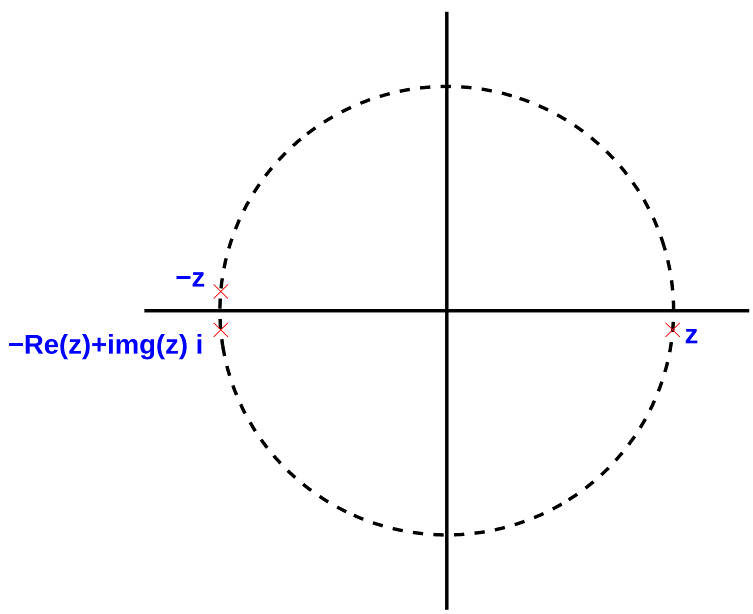
(6 Ptos.)

<u>**Solución**</u>

$$\begin{aligned} -z &= 3\mathrm{cis}\left(\pi - \frac{4\pi}{147}\right) \\ &= 3\mathrm{cis}\left(\frac{143\pi}{147}\right) \end{aligned} \qquad (\mathbf{2Ptos.})$$

$$|z\bar{z}| = 9\,\mathrm{cis}(0) \qquad (\mathbf{2Ptos.})$$

$$\begin{aligned} -Re(z)+Im(z)i &= 3\left[-\cos\left(-\frac{4\pi}{147}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{4\pi}{147}\right)\right] \\ &= 3\left[-\cos\left(\frac{4\pi}{147}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{147}\right)\right] \\ &= 3\left[-\cos\left(\frac{4\pi}{147} - \pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{147} - \pi\right)\right] \qquad (\mathbf{2Ptos.}) \\ &= 3\mathrm{cis}\left(\frac{4\pi}{147} - \pi\right) \\ &= 3\mathrm{cis}\left(-\frac{143\pi}{147}\right) \end{aligned}$$



P3.b) Encuentre $z \in \mathbb{C}$, en forma algebraica o polar, tal que

$$|z-2| = \sqrt{11} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{4}$$ **(6 Ptos.)**

<u>**Solución**</u>

Sea $z = r \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ con $r > 0$.

$$\begin{aligned} z = & \; r \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ = & \; r\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ = & \; r\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]. \end{aligned}$$

(2 Ptos.)

$$\begin{aligned} |z-2| = \sqrt{11} \Longrightarrow & \; |z-2|^2 = 11 \\ \Longrightarrow & \; \left(\frac{\sqrt{2}r}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)^2 = 11 \\ \Longrightarrow & \; r^2 - 2\sqrt{2}r - 7 = 0 \\ \Longrightarrow & \; r = \sqrt{2} \pm 3. \end{aligned}$$ (**2Ptos**.)

El valor $r = \sqrt{2} - 3$ no sirve, pues $r > 0$.

Así

$$\begin{aligned} z = & \; (\sqrt{2}+3) \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ = & \; \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) i \end{aligned}$$ (**2Ptos**.)

P3.c) Considere la función sinusoidal $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(2x) - 4\sqrt{3}\cos(2x)$. Encuentre su amplitud, periodo, y los valores de x donde su gráfica corta el eje X. **(8 Ptos.)**

<u>**Solución**</u>

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\ \mathrm{sen}(2x) - 4\sqrt{3}\ \cos(2x) \\ &= \frac{\sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}}{\sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}}\Big(4\ \mathrm{sen}(2x) - 4\sqrt{3}\ \cos(2x)\Big) \\ &= 8\left(\frac{1}{2}\ \mathrm{sen}(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \cos(2x)\right). \end{aligned}$$

(2 Ptos.)

Necesitamos un valor ϕ tal que

$$\cos(\phi) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}(\phi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo anterior

$$\phi = -\frac{\pi}{3}.$$

Luego

$$f(x) = 8\,\mathrm{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

(3 Ptos.)

Así
amplitud=8,
periodo=π,
$x_n = (3n+1)\frac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{C}$. **(3 Ptos.)**