UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA DE CORRECCIÓN. EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN. ECUACIONES DIF. ORD. 521218.

Problema 1. Dada una familia de curvas que pasan por el punto $(0, 2)$ y cuyas pendientes en cada punto (x, y) son proporcionales a la abscisa del punto (siendo el factor de proporcionalidad un parámetro a), encuentre la familia de curvas ortogonales a la dada. En particular, grafique aproximadamente la curva de cada familia que pasa por el punto $(1, 3)$.

Solución.

$$y' = ax \Longrightarrow y = a\frac{x^2}{2} + C.$$

Curvas por $P(0, 2) \Longrightarrow y = a\frac{x^2}{2} + 2.$ (*)

$$\begin{aligned} \text{De } y' = ax,\ a = \frac{y'}{x} \quad &\Longrightarrow \quad y = \frac{y'}{x}\frac{x^2}{2} + 2, \quad x \neq 0 \\ &\Longrightarrow \quad 2y = xy' + 4 \qquad \text{EDO de la familia de curvas dadas} \end{aligned}$$

(5 ptos.)

Con $-\frac{1}{y'}$ en lugar de y' :

$$\begin{aligned} & 2y = -\frac{x}{y'} + 4 \\ \Longrightarrow \quad & 2yy' = -x + 4y' \qquad \text{EDO de la familia buscada} \\ \Longrightarrow \quad & \text{(integrando)} \qquad y^2 - 4y = -\frac{x^2}{2} + k \\ \Longrightarrow \quad & x^2 + 2y^2 - 8y = b \qquad (**) \text{ Ecuación de la familia buscada} \end{aligned}$$

(7 ptos.)

En particular, con $Q(1, 3)$
De (*) : $3 = \frac{a}{2} + 2 \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow y = x^2 + 2$ (parábola).
De (**) : $1 + 18 - 24 = b \Longrightarrow b = -5 \Longrightarrow x^2 + 2y^2 - 8y = -5$
$\Longrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{3/2} = 1$ (elipse).

(3 ptos.)

Problema 2. Resuelva el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = \delta(t+1) - \delta(t-3) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Solución.

Aplicando T.L. a ambos miembros, tenemos:

$$[s2 + 3s - 4]\mathcal{L}[y(t)](s) - s - 2 = e^{s} - e^{-3s}$$

de donde

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{e^{s} - e^{-3s} + s + 2}{(s+4)(s-1)}$$

(5 ptos.)

Aplicando transformada inversa, sigue

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{s} - e^{-3s} + s + 2}{(s+4)(s-1)}\}(t),$$

esto es:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{s}}{(s+4)(s-1)}\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)(s-1)}\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2}{(s+4)(s-1)}\}(t).$$

(3 ptos.)

De otra parte sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{s}}{(s+4)(s-1)}\}(t) = H(t+1)f(t+1)$$

donde $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{-1}{5(s+4)} + \frac{1}{5(s-1)}$. Así,

$$f(t) = -\frac{1}{5}e^{-4t} + \frac{1}{5}e^{t},$$

(3 ptos.)

por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{s}}{(s+4)(s-1)}\}(t) = H(t+1) - \frac{1}{5}\{e^{-4(t+1)} - e^{(t+1)}\}.$$

En forma analoga, obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)(s-1)}\}(t) = H(t-3)\frac{1}{5}\{-e^{-4(t-3)} + e^{(t-3)}\}.$$

(1 ptos.)

Además,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2}{(s+4)(s-1)}\}(t) = \frac{1}{5}\{2e^{-4t} + 3e^{t}\}.$$

(1 ptos.)

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{5}H(t+1)\{e^{(t+1)} - e^{-4(t+1)}\} - \frac{1}{5}H(t-3)\{-e^{e^{(}t-3)--4(t-3)}\} + \frac{1}{5}\{2e^{-4t} + 3e^{t}\}.$$

(2 ptos.)

Problema 3. Encuentre la solución general del siguiente sistema de EDO's

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) \\ y''(t) = -\dfrac{1}{2}x(t) + e^{-t} \end{cases}$$

Ind: Escriba el sistema como una EDO de orden superior para $x(t)$.

Solución.

El sistema de EDO's bajo estudio se reescribe como

$$\begin{aligned} Dx\,(t) - 2y\,(t) &= 0 \\ \frac{1}{2}x\,(t) + D^2 y\,(t) &= e^{-t}. \end{aligned}$$

De donde se tiene que

$$D^3 x\,(t) + x\,(t) = 2e^{-t}.$$

3 puntos

El polinomio característico asociado a la anterior EDO es

$$\begin{aligned} p\,(s) &= s^3 + 1 \\ &= (s+1)\left(s^2 - s + 1\right). \end{aligned}$$

Entonces p tiene tres raíces simples (de multiplicidad igual a 1) que son -1, $1/2 + i\sqrt{3}/2$ y $1/2 - i\sqrt{3}/2$. De donde se tiene que la solución general de

$$D^3 x_h\,(t) + x_h\,(t) = 0$$

es $x_h\,(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t/2} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, con c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$.

3 puntos

Como -1 es una raíz simple de p, podemos buscar una solución particular en la forma

$$x_p\,(t) = Ate^{-t}.$$

Luego

$$\frac{d^3}{dt^3}x_p\,(t) = 3Ae^{-t} - tAe^{-t}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2e^{-t} &= \frac{d^3}{dt^3}x_p(t) + x_p(t) \\ &= 3Ae^{-t}. \end{aligned}$$

Lo que implica que $A = 2/3$. Entonces

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t/2} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{2}{3}te^{-t}.$$

5 puntos
Como $y(t) = x'(t)/2$,

$$\begin{aligned} y(t) = &-\left(\frac{c_1}{2} + \frac{1}{3}\right)e^{-t} - \frac{1}{3}te^{-t} + \left(\frac{c_2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}c_3\right)e^{t/2} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ &+ \left(\frac{\sqrt{3}}{4}c_2 + \frac{c_3}{4}\right)e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \end{aligned}$$

4 puntos
Notemos que la solución obtenida depende de 3 constantes reales. Ya que

$$\begin{vmatrix} D & -2 \\ \frac{1}{2} & D^2 \end{vmatrix} = D^3 + 1$$

es un polinomio de grado 3 en D, la solución obtenida es la solución general del sistema de EDO's bajo estudio.

Problema 4. Resuelva el siguiente (PVI) usando el método de Frobenius.Especifique solo los 5 primeros términos.

$$\begin{cases} 2xy'' + y' - y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

Indicación : de las dos soluciones $l.i.$ considere solo aquellade la forma$y = |x|^r \sum a_n x^n$ con r entero, y determine los coeficientes $a_n$de modo que verifiquen las condiciones iniciales.

Solución.
La ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned} 2xy'' + y' - y = 0 &\iff x^2y'' + \frac{x}{2}y' + \frac{-x}{2}y = 0 \\ &\iff x^2y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0 \\ &\quad\;\; \text{con } P(x) = 1/2, \quad Q(x) = -x/2 \\ &\quad\;\; x = 0, \text{ punto singular} \end{aligned}$$

(2 ptos.)

Utilizando el Método de Frobenius se tiene que

$$\begin{aligned} r(r-1)+\frac{1}{2}r+0=0 &\implies r(r-1/2)=0 \\ &\implies r_1=0, \text{ y } r_2=1/2. \end{aligned}$$

(2 ptos.)

Estamos en el caso $r_1 - r_2 = -1/2 \neq$ entero. Luego la solución general es de la forma $y = y_1 + y_2$, con

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y_2 = \sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

(2 ptos.)

Tenemos $r_1 = 0 =$ entero, y $r_2 = 1/2 \neq$ entero. Según la indicación consideramos solo y_1. Reemplazando y_1 en la EDO, se tiene,

$$\begin{aligned} 2x\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \qquad \textbf{(3 ptos.)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{n+1}(n+1)n x^n + a_{n+1}(n+1)x^n - a_n x^n &= 0 \end{aligned}$$

Es decir

$$(n+1)(2n+1)a_{n+1} = a_n \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(2n+1)}.$$

(3 ptos.)

Como $y(0) = y'(0) = 1$, entonces $a_0 = a_1 = 1$. Luego, $a_2 = 1/6$, $a_3 = 1/90$, $a_4 = 1/2520$, ... Es decir

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{90} + \frac{x^4}{2520} + \cdots$$

(3 ptos.)

15.07.2004
HMM/JMS/CMG/MSC/msc