

PAUTA DE CORRECCIÓN EVALUACIÓN 3.
CÁLCULO III. 525211.

1. **(15 ptos.)** Usando el Teorema de Green, calcule en el sentido antihorario

$$\oint_C 2xydx + (x^2 + y^2 - 2x)dy$$

lo largo de una curva C cerrada cualquiera de \mathbb{R}^2 , que encierre a una superficie de área igual a 1.

Solución

Sea $F(x, y) = 2xy$ y $G(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, del Teorema de Green se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_C 2xydx + (x^2 + y^2 - 2x)dy &= \oint_C Fdx + Gdy = \iint_S \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} dxdy \\ &= \iint_S (2x - 2 + 2x) dxdy = -2 \iint_S dxdy = -2 \end{aligned}$$

2. **(30 ptos.)** Sean 2 campos vectoriales de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & G : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right), & (x, y) &\mapsto \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

- a) Pruebe que ambos campos provienen de un potencial, y calcule dichos potenciales.
 b) Sea C una circunferencia centrada en $(0, 0)$ y de radio ε arbitrario. Pruebe que

$$\oint_C F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -2\pi \quad (\text{sentido antihorario}).$$

- c) Deduzca que a pesar de que ambos campos provienen de un potencial, sólo uno es conservativo.
 d) Calcule $\int_C F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ para cualquier curva C que parta desde $(-1, 0)$ y llegue a $(1, 0)$.
 e) Pruebe que $\int_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ para cualquier curva C partiendo de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ sin rodear al punto $(0, 0)$ es siempre igual a $-\pi$ si C pasa por debajo del punto $(0, 0)$, y es igual a π si C pasa por arriba del punto $(0, 0)$.

Solución

- a) ¿ Existe $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = F$?

$$\varphi(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx + C(y) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + C(y) = \ln r + C(y)$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + C'(y) \\ &= \frac{y}{x^2 + y^2} + C'(y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \implies C'(y) = 0 \implies C(y) = 0.\end{aligned}$$

Luego el potencial de F está dado por $\varphi(x, y) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) = \ln r$ **(3 pts.)**

Existe $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\nabla\varphi = G$?

$$\psi(x, y) = \int \frac{y}{x^2 + y^2} dx + C(y) = \arctan(x/y) + C(y)$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \arctan(x/y) + C'(y) \\ &= \frac{-x}{x^2 + y^2} + C'(y) = \frac{-x}{x^2 + y^2} \implies C'(y) = 0 \implies C(y) = 0.\end{aligned}$$

Luego el potencial de G está dado por $\psi(x, y) = \arctan(x/y)$ **(3 pts.)**

b) En coordenadas polares $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Luego,

$$\begin{aligned}\oint_C F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \theta}{\varepsilon}, \frac{-\sin \theta}{\varepsilon} \right) \cdot (-\varepsilon \sin \theta, \varepsilon \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 0 d\theta = 0\end{aligned}$$

(3 pts.)

En coordenadas polares $G(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) = (\sin \theta, -\cos \theta)$. Luego,

$$\begin{aligned}\oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \theta}{\varepsilon}, \frac{-\cos \theta}{\varepsilon} \right) \cdot (-\varepsilon \sin \theta, \varepsilon \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -1 d\theta = -2\pi\end{aligned}$$

(3 pts.)

c) Ambas funciones son de clase C^1 salvo en $(0, 0)$, luego como ambas provienen de un potencial, la integral sobre cualquier curva cerrada que no contenga al $(0, 0)$ de F y de G es nula.

(2 pts.)

Por otro lado por (b), la integral sobre cualquier curva cerrada contenida entre dos vecindades de $(0, 0)$ es nula para F y es distinto de 0, para G . Luego la integral de F sobre cualquiera curva cerrada de \mathbf{R}^2 es cero, en cambio la integral para G , no necesariamente si esta curva rodea al $(0, 0)$.

(2 pts.)

Luego F es un campo conservativo y G no.

(2 pts.)

d)

$$\int_C F(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \varphi(1, 0) - \varphi(-1, 0) = \ln(\sqrt{1^2 + 0^2}) - \ln(\sqrt{(-1)^2 + 0^2}) = 0 - 0 = 0$$

(6 pts.)

e) De (c) sabemos que para cualquier curva cerrada D que no encierre al punto $(0, 0)$, se tiene

$$\oint_D G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

(2 pts.)

i. Si la curva C pasa por debajo del punto $(0, 0)$ la completamos con la semicircunferencia de radio 1 que está debajo del eje $y = 0$, en el sentido horario :

$$C_{\text{circ. inf.}} = \{(\cos \theta, -\sin \theta) \mid \theta \in [0, \pi]\}$$

De modo que $D = C + C_{\text{circ. inf.}}$.

(1 pt.)

Integrando G lo largo de esta curva cerrada que no contiene al $(0, 0)$ obtenemos :

$$\oint_D G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_{\text{circ. inf.}}} G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \pi = 0$$

$$\text{Luego } \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\pi.$$

(1 pt.)

ii. Si la curva C pasa por arriba del punto $(0, 0)$ la completamos con la semicircunferencia de radio 1 que está arriba del eje $y = 0$, en el sentido antihorario :

$$C_{\text{circ. sup.}} = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in [\pi, 2\pi]\}$$

De modo que $D = C + C_{\text{circ. sup.}}$.

(1 pt.)

Integrando G lo largo de esta curva cerrada que no contiene al $(0, 0)$ obtenemos :

$$\oint_D G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_{\text{circ. sup.}}} G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \pi = 0$$

$$\text{Luego } \oint_C G(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \pi.$$

(1 pt.)

3. (15 ptos.) La siguiente ecuación conocida como ecuación de Stokes en regimen estacionario modela aproximadamente el movimiento de un fluido laminar viscoso :

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 \text{ en } \Omega \quad \left(\text{aquí } \Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} \right),$$

donde $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de velocidades que suponemos de clase \mathcal{C}^2 , $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función presión que suponemos de clase \mathcal{C}^1 , y Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^3 , encerrado por una superficie S , medible. Usando la primera identidad de Green, deducida del Teorema de la Divergencia, pruebe que

$$\iiint_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = - \iint_S (pI - \nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

para todo $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase \mathcal{C}^2 tal que $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ en Ω , y donde I es la matriz identidad de 3×3 , y $\nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{ij} = J(\mathbf{u})^t$ (traspuesta de la matriz jacobiana).

Solución

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Entonces, aplicando la primera identidad de Green a cada componente de $\mathbf{v} \cdot (\Delta \mathbf{u})$ se tiene que

$$\iiint_{\Omega} v_i \Delta u_i + \nabla v_i \cdot \nabla u_i \, dx = \oint_S v_i \nabla u_i \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Es decir

$$\iiint_{\Omega} (-\Delta u_i) v_i \, dx = \iiint_{\Omega} \nabla v_i \cdot \nabla u_i \, dx - \oint_S v_i \nabla u_i \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Lo cual vectorialmente queda

$$\iiint_{\Omega} (-\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dx = \iiint_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \oint_S (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (1)$$

(5 pts.)

Por otro lado aplicando el teorema de la divergencia a $p\mathbf{v}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(p\mathbf{v}) \, dx &= \iiint_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx + \iiint_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \\ &= \iiint_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx \quad (\text{pues } \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0) \\ &= \oint_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{teorema de la divergencia}) \end{aligned}$$

Es decir

$$\iiint_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = \oint_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (2)$$

(5 pts.)

Haciendo producto punto entre la ecuación de Stokes y el campo vectorial \mathbf{v} e integrando en Ω se tiene que

$$\iiint_{\Omega} (-\Delta \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} \, dx = 0.$$

Usando las igualdades (1) y (2) se obtiene

$$\iiint_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = - \oint_S (pI - \nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

(5 pts.)

MSC/msc
(8-Julio-2004)