UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142)
LISTADO 22: *Espacios Vectoriales con Producto Interior I*

Problema 1. Calcule las coordenadas de los siguientes vectores con respecto a las bases que se indican:

1.1. $(1,0)$ y $(0,1)$ en función de la base $\{(2,1),(3,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
1.2. $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,1)$ en función de la base $\{(2,-1,0),(1,1,1),(-3,0,4)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
1.3. $\operatorname{sen}^2(x/2)$, $\operatorname{sen}(x+\pi/3)$ y $\cos(x-\pi/4)$ en función de la base $\{\operatorname{sen}(x),\cos(x),1\}$ de su espacio generado. **[En práctica 1.3]**
1.4. $2+x+3x^2$ en función de la base $\{2x, x^2/2, -5\}$.
1.5. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con respecto a la base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Problema 2. En el listado 20 mostramos que la siguiente es una base del espacio de las matrices mágicas de 3x3: **[En práctica 2.2 y 2.3]**

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1. Muestre que el espacio $V = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \text{ es antisimétrica}\}$ es ortogonal al espacio $U = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \text{ es simétrica}\}$ con respecto al p.i. usual de matrices.
2.2. Muestre que los vectores C, S y A son ortogonales entre si.
2.3. Escriba las coordenadas de la siguiente matriz, con respecto a la base dada:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Determine una base ortogonal del plano $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x = 4y\}$.

Problema 4. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ puntos distintos de $\mathbb{R}$ y el e.v. real $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ provisto de la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle p, q \rangle := \sum_{j=1}^{n+1} p(x_j)\, q(x_j) \quad \forall\, p, q \in V\,.$$

4.1. Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interior sobre V.
4.2.1. Si $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$, muestre que los siguientes vectores son ortogonales: $p(x) = 1$ y $q(x) = x$.
4.2.2. Encuentre un tercer polinomio r tal que $\{p, q, r\}$ sea una base ortogonal de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
4.2.3. Calcule las coordenadas de $s(x) = 2x^2 + 3x - 1$ con respecto a esta base.

Problema 5. Sea V un e.v. real de dimensión n y sea B una base de V. Denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ el **p.i.** usual de $\mathbb{R}^n$, y considere la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_B : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por: **[En práctica]**

$$\langle\, u, v \,\rangle_B \;=\; \langle\, [u]_B, [v]_B \,\rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall\, u, v \in V\,,$$

5.1. Demuestre que $\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle_B$ es un producto interior en V.
5.2. Demuestre que B es ortogonal con respecto al p.i. $\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle_B$.
5.3. Considere la base canónica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $C = \{x^3, x^2, x, 1\}$ y calcule $\langle\, 3x - 2 + x^2, x^3 + 5x + 3/2 \,\rangle_C$.
5.4. Encuentre tres vectores ortogonales a $3x + 1$ con respecto al p.i. $\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle_C$.

Problema 6. Se dice que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es **ortogonal** si $A^t A$ es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son todos no nulos. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los n vectores columnas de una matriz ortogonal $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6.1. Pruebe que $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$.
6.2. Considere el sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$ y diga por qué es compatible determinado. Use la fórmula de Cramer para mostrar que el vector solución $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ está dado por

$$x_k = \frac{\langle\, b, a_k \rangle_{\mathbb{R}^n}}{\langle\, a_k, a_k \rangle_{\mathbb{R}^n}}, \quad \forall\, k \in \{1, 2 \ldots, n\}$$

Indicación: calcule el determinante de $A^t A$ y de $A^t A_k$, y use que $\det(A^t B) = \det(A)\det(B)$.
6.3. Aplique el procedimiento anterior para resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$