

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA 522115
Listado 3 (Función exponencial y logarítmica)

1. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

- | | |
|--|--|
| (a) $\log_3(7-x) - \log_3(1-x) = 1$, | (f) $e^x - e^{-x} = -2$, |
| (b) $(\frac{1}{2})^{x^2} = 8^{3-2x}$, | (g) $\log(\sqrt{x}) = \log(x-1)$, |
| (c) $2\log_2 x + 6\log_4 2 = -\log_2 \frac{1}{32}$, | (h) $(\frac{1}{2})^{x-2} \leq 1$, |
| (d) $4^x - 4^{-x} = 2$, | (i) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1) \geq 0$, |
| (e) $e^{4x-4} \leq 1$, | (j) $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) = 2$. |

2. Estudie el dominio, recorrido y biyectividad de la función $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x)$ está definida en cada caso. Además, defina la función inversa cuando ésta exista.

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $f(x) = \exp(\sqrt{x+1})$, | e) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$, |
| b) $f(x) = \exp_2(x^2 - 4)$, | f) $f(x) = \ln(\ln(x))$, |
| c) $f(x) = \ln(\exp(x) + 1)$, | g) $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0, \\ \exp(x) - 1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$ |
| d) $f(x) = 1 + \log(x+1)$, | |

3. Sea $b > 0$, $b \neq 1$, considere la función

$$f_b : Dom(f_b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_b(x) = \sqrt{\log_b(x-4)}.$$

- Encuentre el dominio de la función f_b para $b = 3$ y $b = \frac{1}{3}$.
- Encuentre el recorrido de la función f_b para $b = 3$ y $b = \frac{1}{3}$.
- Determine para qué valores de b , f_b es una función inyectiva.

4. Para la función real definida por

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{(\ln(x))^2 - 1}.$$

- Utilice la equivalencia $\ln(x) \leq -1 \longrightarrow x \in]0, \frac{1}{e}]$ para encontrar el dominio de f .
- Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto g(x) = e^x$, la función exponencial. Determine el dominio y defina la función compuesta $f \circ g$.
- Sea h la restricción de $f \circ g$ al intervalo $[1, +\infty[$, es decir, $h = (f \circ g)|_{[1, +\infty[}$. Pruebe que h es inyectiva y defina su inversa h^{-1} .

5. Considere las funciones reales definidas por:

$$\forall x \in \text{Dom}(f) : f(x) = \sqrt{e^x - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} : g(x) = \begin{cases} 2 + \ln x & \text{si } x \geq 1, \\ x & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

- (a) Probar que f y g son inyectivas.
 - (b) Definir $f \circ g$ y determinar el recorrido de $f \circ g$.
 - (c) Probar que existe $(f \circ g)^{-1}$ y defínala.
6. La población de una colonia de bacterias se incrementa con el modelo matemático $P(t) = N_0 3^{\frac{t}{20}}$, t en minutos. ¿Cuánto tiempo tarda en crecer de 100 a 200 bacterias?, ¿de 100 a 300 bacterias?.
7. Si una bacteria en un cierto cultivo se duplica cada 20 minutos, escribir una fórmula que nos dé el número N de bacterias que hay en el cultivo después de n horas, suponiendo que N_0 es el número de bacterias que hay al iniciar el experimento.
8. El sismólogo F. Richter (1900-1985) ideó en 1935 la **Escala de Richter** que compara la fuerza de los diferentes terremotos. En ella la magnitud R de un terremoto se define por

$$R = \log \left(\frac{A}{A_0} \right),$$

donde A es la amplitud de la onda sísmica mayor y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a una magnitud $R = 0$.

La intensidad del terremoto de Chillán del año 1939 fue de 7,8 en la escala de Richter. El terremoto de San Francisco de 1979 fue de 5,95 y el terremoto de Turquía del 2 de mayo último fue de 6,4. ¿Cuántas veces más intenso (mayor amplitud) fue el terremoto de Chillán comparado con los terremotos de San Francisco y de Turquía?.

9. La **vida media** de un elemento radiactivo es el tiempo que se tarda una cierta cantidad del elemento en reducirse a la mitad al transformarse en un nuevo elemento. Por ejemplo, la vida media del carbono 14 (C-14) es 5730 años y la del Polonio (Po-213) es de 0.000001 de segundo. Si hay A_0 gramos de radio inicialmente, entonces el número de gramos que quedan t años después es de

$$A(t) = A_0 e^{-0.000418t}.$$

Determine la vida media del radio.

10. El valor de reventa de una maquinaria industrial cuando tenga t años será dada por $V(t) = 4800e^{-\frac{t}{5}} + 400$ dólares.
- a) ¿Cuál es el valor de la maquinaria cuando era nueva?.
 - b) ¿Cuál será el valor de la maquinaria dentro de 10 años?.
 - c) ¿Cuál será el valor de la maquinaria si t crece sin límite?. Esboce la gráfica de V .