UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA N 26. VALORES PROPIOS

Problema 1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(1.1) Encuentre $\sigma(A)$, $\sigma(A^t)$ y los espacios propios de A y de A^t.

(1.2) Tienen A y A^t los mismos vectores propios ?.

Problema 2. Sea A una matriz cuadrada de orden n con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Se demuestra que " *si m es un número natural, entonces $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$ son los valores propios de A^m. Más aún, dado un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, la matriz definida por*

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

tiene valores propios $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)$ y cada vector propio de A es vector propio de $p(A)$".

Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. **(En práctica)**

(2.1) Use el resultado anterior para calcular los valores y los vectores propios de A, $A+5I$, $(A+5I)^{-1}$, A^m para $m = 2, 3, 4$ y de la matriz $I + 2A + 4A^2$.

(2.2) Verifique que para $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, polinomio característico de A, se tiene que $p(A) = \Theta$. Cómo puede usar este hecho para expresar A^{-1}?.

Problema 3. Sea V un espacio vectorial sobre $I\!K$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V, $\lambda_1, \lambda_2 \in I\!K$ diferentes y $T : V \to V$ el operador lineal tal que:

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1, \quad T(v_2) = \lambda_1 v_2 \ \text{ y } \ T(v_3) = \lambda_2 v_3.$$

(3.1) Encuentre $dim(S_{\lambda_1})$ y $T(u)$ para $u = 3v_1 + 5v_3$.
(3.2) Es T diagonalizable ?.
(3.3) Resuelva las ecuaciones: $T(v) = \theta$, $T(v) = 2\lambda_1 v$, $T(v) = \lambda_2 v$.

Problema 4. Sea T el operador lineal definido sobre $I\!R^3$ con matriz asociada A, respecto a la base canónica, dada por:

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{(iii)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(iv)} \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

(En práctica caso (i))

(4.1) Determine cuales de las matrices A anteriores conduce a T diagonalizable. En los casos afirmativos, encuentre una base B de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A. Es B ortogonal ?.

(4.2) Para cada A anterior encuentre $det(A)$ y diga si T es inversible (justifique).

Problema 5. La transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \to T(x, y) = (2x + y,\ 2y)$$

no es diagonalizable. Usando resultados de clases justifique, de al menos dos formas, esta afirmación. En caso de que exista, defina T^{-1}.

Problema 6. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ el operador definido por $p \to T(p)$ donde

$$T(p)(x) := (a - b + 4c) + (3a + 2b - c)x + (2a + b - c)x^2$$

cuando $p(x) = a + bx + cx^2$. **(En práctica)**

(6.1) Usando la base canónica de $P_2(\mathbb{R})$, encuentre la matriz A asociada a T.

(6.2) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de la matriz A.

(6.3) Encuentre una base para $P_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de T.

Problema 7. Sea a un número real y $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$.
Muestre que los valores propios de A son positivos cuando $-1 < 2a < 2$.

Problema 8. Sea A una matriz de orden m diagonalizable. Para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ se puede proceder de la siguiente manera: **(En práctica ... ?)**

1. Encontrar matrices P y D que diagonalicen a A: $D = P^{-1}AP$
2. Escribir $A^n = PD^nP^{-1}$
3. Calcular $T := \lim\limits_{n\to\infty} D^n$ y cuando T exista obtener $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = PTP^{-1}$.

(8.1) Aplique el procedimiento anterior a la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(8.2) Qué condiciones deberían tener los valores propios de A para que el límite de A^n sea igual a Θ. Dé un ejemplo de una matriz A de orden dos que cumpla sus condiciones.

22.11.2002
MCP/cln