UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Pauta Evaluación 2.
ALGEBRA I (520135)
ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA (522115) .

Problema 1 (20 ptos.) Las distancias desde el centro C de la Tierra a dos meteoritos A y B se estiman en 16 millones de kilómetros y 12 millones de kilómetros, respectivamente. Si la medida del ángulo CAB es de 45^o, determinar la distancia entre los meteoritos.

Solución Problema 1: Consideremos en el triángulo CAB, los ángulos $CBA = \alpha$, $BCA = \beta$ y la distancia entre los meteoritos igual a d. Aplicando el Teorema del Seno:

$$\begin{aligned}
\frac{sen\ (45^o)}{12} = \frac{sen\ (\alpha)}{16} \quad &\Longrightarrow \quad sen\ (\alpha) = \frac{16}{12}\, sen\ (45^o) \\
&\Longrightarrow \quad sen\ (\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ pues } sen\ (45^o) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad \alpha = Arcsen\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = Arcsen\ (0.9143) = 66.11^o (= 1.23\, rad) \\
&\Longrightarrow \quad \beta = 180^o - 45^o - \alpha = 180^o - 45^o - 66.11^o \\
&\Longrightarrow \quad \beta = 68.89^o.
\end{aligned}$$

(11 puntos)

Luego aplicando el Teorema del Coseno:

$$\begin{aligned}
d^2 &= 16^2 + 12^2 - 2 \cdot 16 \cdot 12\, cos\ (\beta) \\
d^2 &= 256 + 144 - 384 cos\ (68.89^o).
\end{aligned}$$

Así extrayendo raíz cuadrada en esta última expresión y considerando que d es una distancia, por tanto $d > 0$, resulta:

$$d = 16.18.$$

Respuesta: La distancia entre los meteoritos es de 16.18 millones de kilómetros.

(9 puntos)

Problema 2 (20 ptos.)

2.1) Encontrar, sin uso de calculadora, el valor exacto de:

$$sen\left(Arccos\left(-\frac{2}{3}\right) - Arcsen\left(\frac{3}{5}\right)\right).$$

2.2) Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

$$sen^{\,2}(\theta)\tan^2(\theta) + sen^{\,2}(\theta) = \tan^2(\theta).$$

Solución Problema 2:

2.1) Sean $\alpha = Arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, $\beta = Arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$. Por propiedad de la funciones inversas trigonométricas:

$$\begin{aligned}
cos\ (\alpha) &= -\frac{2}{3},\ \alpha \in]0,\pi[\\
&\Longrightarrow sen\ (\alpha) = \sqrt{1 - cos^{\,2}(\alpha)} \\
&\Longrightarrow sen\ (\alpha) = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \\
sen\ (\beta) &= \frac{3}{5},\ \beta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\
&\Longrightarrow cos\ (\beta) = \sqrt{1 - sen^{\,2}(\beta)} \\
&\Longrightarrow cos\ (\beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Así lo que nos piden calcular es:

$$\begin{aligned}
sen\ (\alpha - \beta) &= sen\ (\alpha) cos\ (\beta) + sen\ (\beta) cos\ (\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3} \\
&= \frac{4\sqrt{5}}{15} + \frac{2}{5} = \frac{4\sqrt{5}+6}{15}.
\end{aligned}$$

(15 puntos)

2.2) Tomando el lado izquierdo de la igualdad que se quiere probar tenemos:

$$\begin{aligned}
sen^{\,2}(\theta)\tan^2(\theta) + sen^{\,2}(\theta) &= sen^{\,2}(\theta)\,\frac{sen^{\,2}(\theta)}{cos^{\,2}(\theta)} + sen^{\,2}(\theta) \\
&= sen^{\,2}(\theta)\left[\frac{sen^{\,2}(\theta)}{cos^{\,2}(\theta)} + 1\right] \\
&= sen^{\,2}(\theta)\left[\frac{sen^{\,2}(\theta) + cos^{\,2}(\theta)}{cos^{\,2}(\theta)}\right] \\
&= \frac{sen^{\,2}(\theta)\cdot 1}{cos^{\,2}(\theta)},\ \text{por la Identidad Fundamental} \\
&= \tan^2(\theta).
\end{aligned}$$

(5 puntos)

Problema 3 (20 ptos.)

3.1) Describir el conjunto de puntos z, en el plano complejo, que satisfaga la condición:

$$Re(z-4+2i) \leq 3.$$

3.2) Resolver, en $\mathbb{C}$, la siguiente ecuación :

$$z^4 = -4.$$

Solución Problema 3:

3.1) Sea $z = x + yi$. Entonces:

$$\begin{aligned} Re(z-4+2i) \leq 3 &\implies Re(x+yi-4+2i) \leq 3 \\ &\implies Re(x-4+(2+y)i) \leq 3 \\ &\implies x-4 \leq 3 \\ &\implies x \leq 7. \end{aligned}$$

Respuesta: $S = \{x + yi \in \mathbb{C} : \ x \leq 7, \, y \in \mathbb{R}\}$.**(5 puntos)**

3.2) Se quiere encontrar todas las raíces cuartas, en $\mathbb{C}$, de $w = -4 = -4 + 0i$.

$$w = -4 \quad \rightarrow \quad |w| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{4^2} = 4 \qquad (\textbf{1puntos})$$

$$\tan\theta = \frac{0}{-4} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \pi \ \ (\ \text{o} \ \ -\pi) \qquad (\textbf{1puntos})$$

$$\begin{aligned} z = \sqrt[4]{(-4)} &= w_k = \sqrt[n]{|z|}\, cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,...,n-1 \\ &= \sqrt[4]{4}\, cis\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3. \\ &= \sqrt[4]{4}\, cis\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3. \qquad (\textbf{5puntos}) \end{aligned}$$

Luego las soluciones de la ecuación son:

–

$$\begin{aligned} k = 0: \quad w_0 &= \sqrt[4]{4}\, cis\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{4}\Big(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\Big) \\ &= \sqrt[4]{4}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\Big) \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} k = 1: \quad w_1 &= \sqrt[4]{4}\, cis\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{4}\Big(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Big) \\ &= \sqrt[4]{4}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\Big) \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} k=2: \quad w_2 &= \sqrt[4]{4}\,cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{4}\left(cos\,\left(\frac{5\pi}{4}\right)+isen\,\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt[4]{4}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\Big) \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} k=3: \quad w_3 &= \sqrt[4]{4}\,cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{4}\Big(cos\,\left(\frac{7\pi}{4}\right)+isen\,\left(\frac{7\pi}{4}\right)\Big)\\ &= \sqrt[4]{4}\,\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\Big). \qquad (\textbf{8puntos}) \end{aligned}$$