Problema 1

1.1) **[6 pts.]** Reducir la siguiente ecuación a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{cases} y'''(x) + xy''(x) - 2y(x) &= -x-2, \quad x \in [0,1] \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 1, \\ y''(0) &= 2. \end{cases}$$

1.2) **[10 pts.]** Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} w'(x) &= z(x) - x - 1, \quad x \in [0,1] \\ z'(x) &= w(x) + x + 1/2, \quad x \in [0,1] \\ w(0) &= 1/2 \\ z(0) &= 0. \end{cases}$$

Aproximar su solución utilizando el método de Euler Explícito con $h = 1/2$. ¿Cuál es el valor de la aproximación de $z(1)$?.

1.3) **[4 pts.]** ¿Qué método utilizaría para aproximar la solución de la siguiente ecuación?. Justifique.

$$\begin{cases} y'(x) &= -1000\,x\,y(x) \quad x \in [0,1] \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Solución

1.1) Consideramos las variables auxiliares $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y'(x)$ y $z_3(x) = y''(x)$. **(2 pts.)**

Entonces,

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y'(x) &&= z_2(x) \\ z_2'(x) &= y''(x) &&= z_3(x) \\ z_3'(x) &= y'''(x) &&= -xy''(x) + 2y(x) - x - 2 = -xz_3(x) + 2z_1(x) - x - 2. \end{aligned}$$

(2 pts.)

Las condiciones iniciales son: $z_1(0) = y(0) = 1$, $z_2(0) = y'(0) = 1$ y $z_3(0) = y''(0) = 2$. **(1 pts.)**

Así, el sistema queda

$$\begin{cases} z_1'(x) &= z_2(x) \\ z_2'(x) &= z_3(x) \qquad\qquad , \quad x \in [0,1], \\ z_3'(x) &= -xz_3(x) + 2z_1(x) - x - 2 \\ z_1(0) &= 1, \\ z_2(0) &= 1, \\ z_3(0) &= 2. \end{cases}$$

(1 pt.)

1.2) Sean $\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ z(x) \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}(\mathbf{Y}(x), x) = \begin{bmatrix} z(x) - x - 1 \\ w(x) + x + 1/2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{Y}^{(0)}(x) = \begin{bmatrix} w(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. **(2 pts.)**

Para $h = 1/2$, consideramos la partición dada por $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ y $x_2 = 1$. **(1 pt.)**

Sean $w^{(i)}$ y $z^{(i)}$ las aproximaciones de $w(x_i)$ y $z(x_i)$, respectivamente.

Entonces, el método de Euler Explícito asociado al sistema es

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{Y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \text{for } i = 0, 1 \\ \quad \mathbf{Y}^{(i+1)} = \mathbf{Y}^{(i)} + \frac{1}{2}\mathbf{F}\left(\mathbf{Y}^{(i)}, x_i\right) \\ \text{end} \end{array}}$$

donde $\mathbf{Y}^{(i)} = \begin{bmatrix} w^{(i)} \\ z^{(i)} \end{bmatrix}$.

Para $i = 0$ se tiene que

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(0)} + \frac{1}{2}\mathbf{F}\left(\mathbf{Y}^{(0)}, x_0\right) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} z^{(0)} - x_0 - 1 \\ w^{(0)} + x_0 + 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

(3 pts.)

Para $i = 1$ se tiene que

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{Y}^{(1)} + \frac{1}{2}\mathbf{F}\left(\mathbf{Y}^{(1)}, x_1\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} z^{(1)} - x_1 - 1 \\ w^{(1)} + x_1 + 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3 pts.)

Vemos que la aproximación de $z(1)$ es $z^{(2)} = 1$. **(1 pt.)**

1.3) Observemos que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| = 1000x$, es decir, la ecuación es *stiff* para $x \neq 0$. **(2 pts.)**

De este modo, los métodos más apropiados para resolver numéricamente la ecuación son los Implícitos. En particular se puede utilizar Euler Implícito. A su vez, también se puede utilizar un método explícito pero considerando un tamaño de paso h suficientemente pequeño. **(2 pts.)**

Problema 2 Considere el problema de valores de frontera dado por

$$\begin{aligned} -y''(x) + 2y(x) &= x \quad x \in [0, 3], \\ y(0) &= 1, \\ y(3) &= 5, \end{aligned}$$

el cual será resuelto numéricamente mediante el método de Diferencias Finitas en una partición uniforme del intervalo $[0, 3]$ en n subintervalos de longitud $h = \dfrac{3}{n}$.

2.1) **[5 pts.]** Escriba el esquema de diferencias finitas asociado a esta ecuación.

2.2) **[10 pts.]** Para $n = 3$, calcule la solución numérica.

2.3) **[5 pts.]** Considere que, para $h = \frac{3}{1000}$, la malla tendrá 1001 nodos. Entre los métodos de Jacobi, Gauss- Seidel y el Algoritmo de Thomas, ¿cuál método es más eficiente en resolver el sistema de ecuaciones lineal asociado al esquema de diferencias finitas? Justifique.

Solución

2.1) En este caso, la malla de nodos está dada por

$$(\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}) \qquad x_k = hk = \frac{3k}{n}$$

Denotando y_k a la solución numérica de diferencias finitas en el nodo x_k (donde y_k aproxima a $y(x_k)$), el método establece que

$$y''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + \mathcal{O}\left(h^2\right)$$

Entonces, el esquema está dado por

$$\begin{aligned} (\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}) \qquad & -\left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}\right) + 2y_k = x_k \\ & -\frac{1}{h^2}y_{k-1} + \left(2 + \frac{2}{h^2}\right)y_k - \frac{1}{h^2}y_{k+1} = x_k \end{aligned}$$

donde $y_0 = 1$ y $y_n = 5$. **(5 pts.)**

2.2) En este caso, sólo se consideran los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$. Entonces, el sistema a resolver está dado por

$$\begin{aligned} -y_0 + 4y_1 - y_2 &= 1 \\ -y_1 + 4y_2 - y_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

donde $y_0 = 1$ y $y_3 = 5$. Entonces, imponiendo las condiciones de frontera en las primeras dos ecuaciones, se tiene que

$$\begin{aligned} 4y_1 - y_2 &= 1 + y_0 = 2 \\ -y_1 + 4y_2 &= 2 + y_3 = 7 \end{aligned} \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Aplicando eliminación gaussiana, se tiene que

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 2 \\ 0 & \dfrac{15}{4} & \dfrac{15}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

de donde se deduce que $y_1 = 1$ y $y_2 = 2$. **(4 pts.)**

2.3) En este caso, se forma un sistema de ecuaciones lineal con la siguiente estructura

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & 2 + \frac{2}{h^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & 2 + \frac{2}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{998} \\ y_{999} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \dfrac{y_0}{h^2} \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{998} \\ x_{999} + \dfrac{y_{1000}}{h^2} \end{pmatrix}$$

donde la matriz asociada es claramente diagonal dominante estricta. En efecto,

$$2 + \frac{2}{h^2} > \left|-\frac{1}{h^2}\right| + \left|-\frac{1}{h^2}\right| = \frac{2}{h^2}$$

Luego, es posible aplicar el algoritmo de Thomas. Además, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes, por lo que también se pueden utilizar. **(3 pts.)**

Si bien el sistema de ecuaciones a resolver en el método de Jacobi requiere menos operaciones elementales que en el método de Gauss-Seidel por cada iteración, no es posible determinar cuántas iteraciones son necesarias para alcanzar una tolerancia dada.

Por otra parte, el algoritmo de Thomas es una versión simplicada de la descomposición LU que requiere $\mathcal{O}(n)$ operaciones elementales. Por lo tanto, es el método más eficiente al garantizar una solución en el menor tiempo posible. Además en este caso no hay necesidad de realizar pivoteo. **(2 pts.)**

Problema 3

3.1) **[12 pts.]** Considere el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Realice la factorización LU con estrategia de pivoteo parcial sobre la matriz $\boldsymbol{A}$. Indique las matrices triangular inferior $\boldsymbol{L}$, triangular superior $\boldsymbol{U}$ y la matriz de permutación $\boldsymbol{P}$.

b) Utilice la factorización obtenida en el item anterior para resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

3.2) **[8 pts.]** Considere el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Realice una iteración del método de Gauss–Seidel, con $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$. ¿Qué puede concluir en relación a la convergencia de este método?

Solución

3.1) *a*) Aplicamos el método de Eliminación Gaussiana sobre la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} f_1 \leftrightarrow f_2 \\ \sim \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f_2 \leftarrow f_2 - \frac{1}{2} f_1 \\ \sim \\ f_3 \leftarrow f_3 - \left(-\frac{1}{2}\right) f_1 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & \mathbf{1/2} & -1 & 1 \\ 3 & \mathbf{-1/2} & 5 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f_2 \leftrightarrow f_3 \\ \sim \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & \mathbf{-1/2} & 5 & 2 \\ 1 & \mathbf{1/2} & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f_3 \leftarrow f_3 - \left(-\frac{1}{5}\right) f_2 \\ \sim \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & \mathbf{-1/2} & 5 & 2 \\ 1 & \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/5} & 7/5 \end{array}$$

(4 pts.)

Así:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7/5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3 pts.)

b) Las matrices obtenidas anteriormente son tales que $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$. Luego, multiplicando el sistema por $\boldsymbol{P}$ tenemos $\boldsymbol{PAx} = \boldsymbol{Pb}$. Reemplazando tenemos $\boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{Pb}$. Así, debemos resolver primero el sistema $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{Pb}$ y luego el sistema $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$.

- $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{Pb}$: En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, término a término:

$$\begin{aligned} y_1 &= 6 & & \\ -\frac{1}{2} y_1 + y_2 &= 0 & \implies \quad & y_2 = \frac{1}{2} y_1 = 3 \\ \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{5} y_2 + y_3 &= 1 & \implies \quad & y_3 = 1 - \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{5} y_2 = -\frac{7}{5}. \end{aligned}$$

(2 pts.)

- $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$: En forma matricial

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -7/5 \end{pmatrix}$$

Luego, término a término:

$$\begin{aligned} \frac{7}{5} x_3 &= -\frac{7}{5} & \implies \quad & x_3 = \frac{-7/5}{7/5} = -1 \\ 5x_2 + 2x_3 &= 3 & \implies \quad & x_2 = \frac{(3 - 2x_3)}{5} = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 6 & \implies \quad & x_1 = \frac{(6 - 4x_2 - 2x_3)}{-2} = -2. \end{aligned}$$

(3 pts.)

Así, la solución del sistema es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t$.

3.2) La k–ésima iteración del método de Gauss–Seidel para este sistema está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Para $k=1$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{aligned}
1\,x_1^{(1)} = 1 \qquad &\Longrightarrow \qquad x_1^{(1)} = 1 \\
-x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} = -3 \qquad &\Longrightarrow \qquad x_2^{(1)} = \frac{(-3 + x_1^{(1)})}{2} = -1 \\
-x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)} = 3 \qquad &\Longrightarrow \qquad x_3^{(1)} = \frac{(3 + x_2^{(1)})}{2} = 1.
\end{aligned}$$

(5 pts.)

Así, $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$.

De aquí, notamos que $\boldsymbol{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$, $\forall\, k = 0, 1, \ldots$. Así, notamos que el método de Gauss–Seidel es convergente a la solución exacta del sistema, la cual es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Por otr lado, notemos que la matriz es simétrica y definida positiva, por lo que podemos asegurar que Gauss–Seidel converge en este caso. **(3 pts.)**