Velocidad Instantánea

Consideramos un cuerpo en caída libre partiendo del reposo. Entonces su movimiento esta regido por la ecuación:

$$s = \frac{1}{2} g\ t^2$$

Donde *s* es el camino recorrido y *t* es el tiempo empleado para recorrerlo.

$$g \approx 10 m/seg^2 \implies s = 5t^2\ m$$

Velocidad Instantánea

La velocidad media del cuerpo en el intervalo [4,6] es

$$v[4,6] = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{s(6) - s(4)}{6 - 4} = \frac{5 \cdot 6^2 - 5 \cdot 4^2}{2} = 50\ m/seg$$

Encontremos la velocidad media para varios intervalos manteniendo el punto inicial y disminuyendo el punto final hasta que sea un numero muy cercano a 4.

Punto final	6	5	4.2	4.05	4.01	4.001	4.0001
Velocidad media	50	45	41	40.25	40.05	40.005	40.0005

Velocidad Instantánea

Definición.

Si *f(t)* denota la coordenada en el tiempo *t* de un objeto que se mueve a lo largo de una Línea, entonces la *velocidad (instantánea)* $v(t_0)$ del objeto en el tiempo t_0 se define por:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Cuando este limite existe.

Ejemplo 1. Si una partícula se mueve a lo largo del eje coordenado de modo que su distancia dirigida desde el origen, después de *t* seg. Es t^3 pies. Cual es su velocidad en *t=2 seg ?*

Ejemplo 2. Cierto cultivo de bacterias crece de modo que tiene una masa de $\frac{1}{2}t^2 + 1$ gramos después de *t* horas.

Cuánto creció durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.1$?

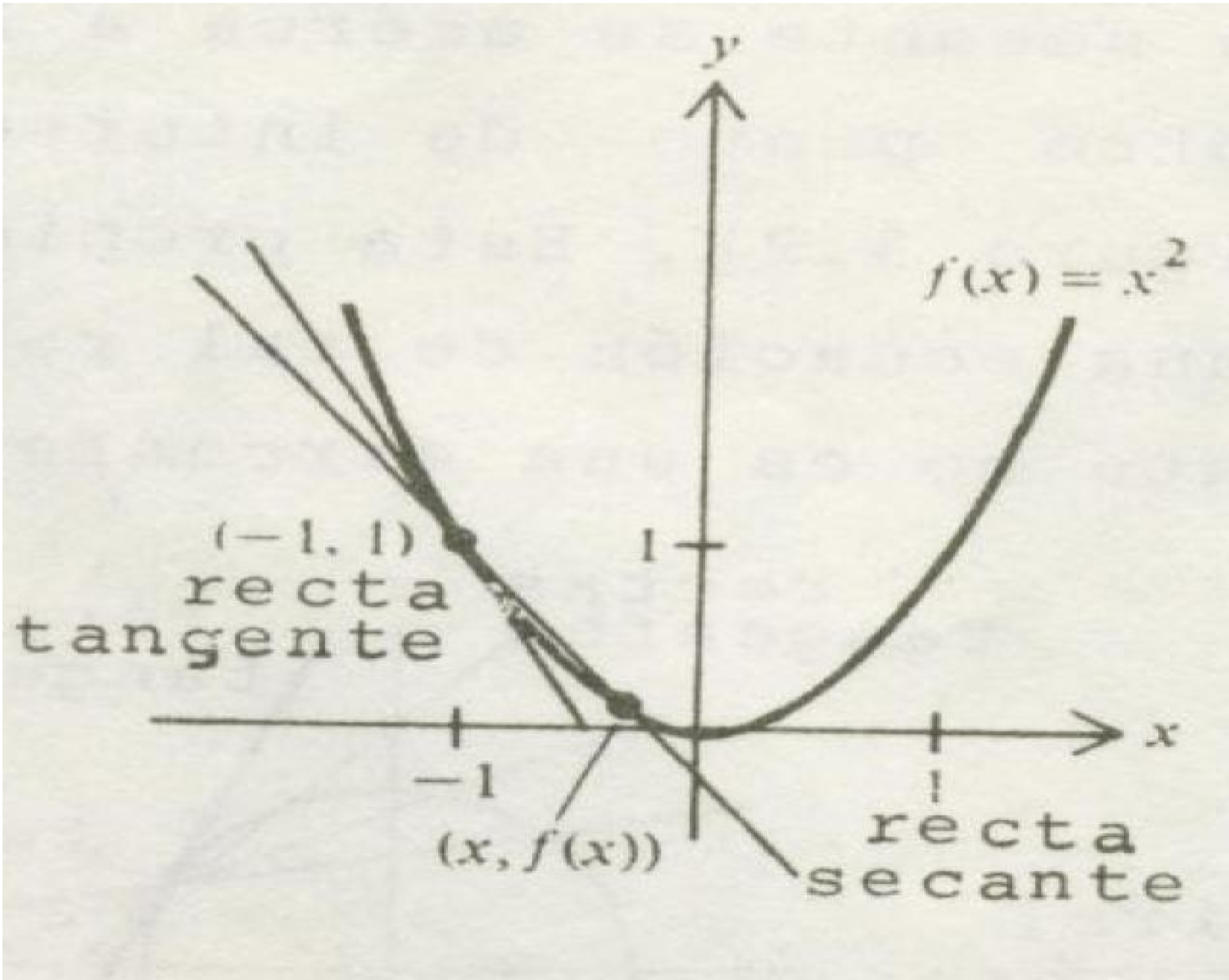
Cuál fue su crecimiento medio durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.01$?

Cuál fue su razón de crecimiento instantáneo cuando *t=2?*

Recta Tangente

- Consideremos la función $f(x) = x^2$ y *(-1,f(-1))=(-1,1)* el punto en el cual deseamos Definir la **Recta tangente**.
- Si *(x,f(x))* es cualquier otro punto sobre el gráfico de *f*, consideramos la recta secante determinada por los puntos (1, -1) y *(x,f(x)).*

Recta tangente



Recta tangente

La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (1, -1) y *(x,f(x))* esta dada por:

$$M_x = \frac{f(x)-1}{x-(-1)} = \frac{x^2-1}{x+1}$$
$$= \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$$

Recta tangente

Cuando *x* se acerca a *-1*, la pendiente se acerca a *-2*

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - 1}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2$$

Recta tangente

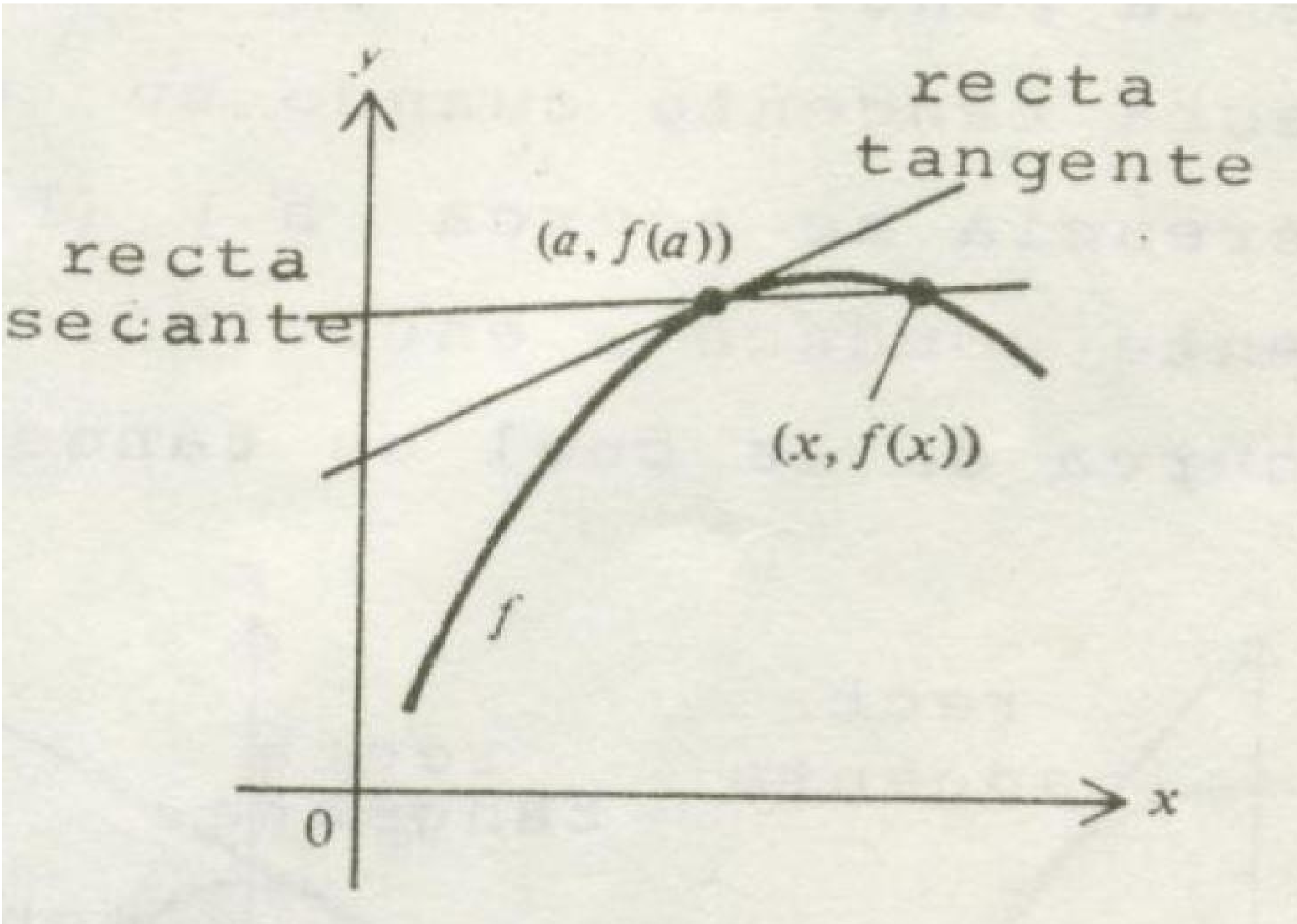
Definición. Sea *f* una función y sea *a* en el dominio de *f.* Si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe, decimos que el grafico de *f* tiene una recta tangente en (a,f(a)). En este caso la

Recta tangente al grafico en (a,f(a)) se define como la recta que pasa por (a,f(a)) con este limite como pendiente.

Recta tangente



Recta tangente

Si el limite de la definición de recta tangente existe lo denotamos por

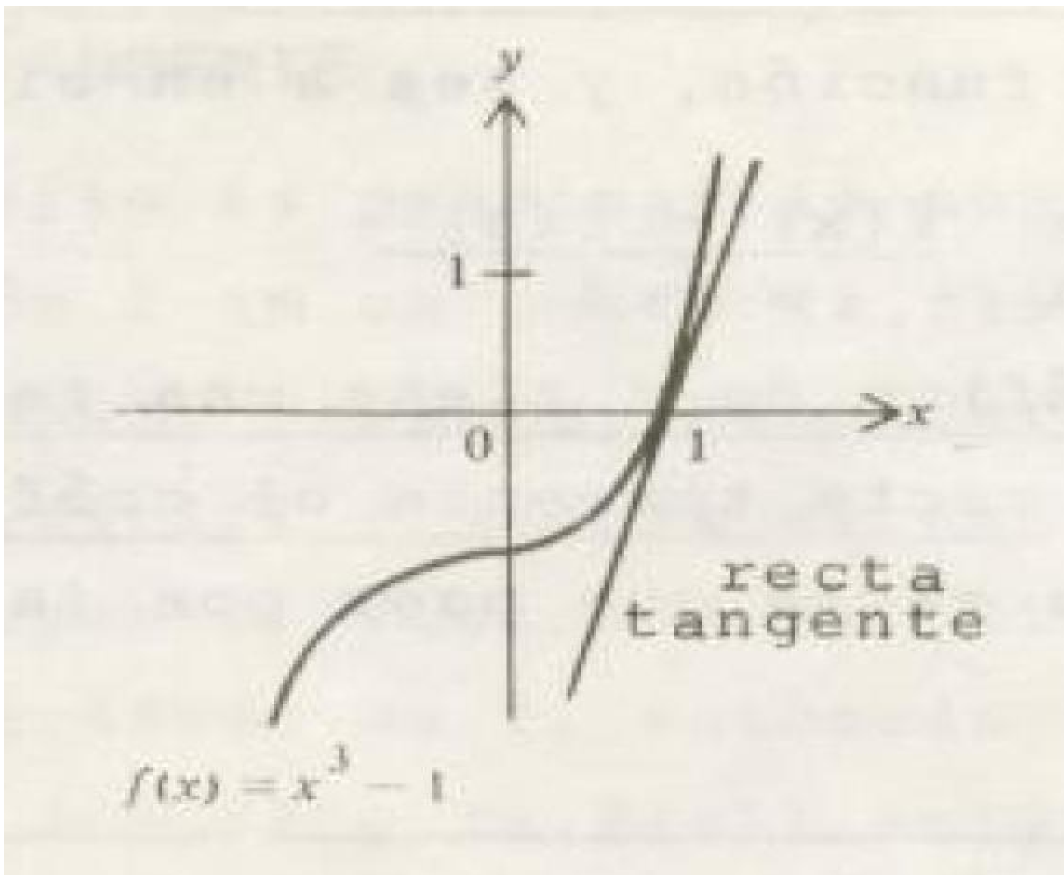
$$m_a = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La ecuación punto pendiente de la recta tangente al grafico de *f* en (a,f(a)) es

$$y - f(a) = m_a \cdot (x - a)$$

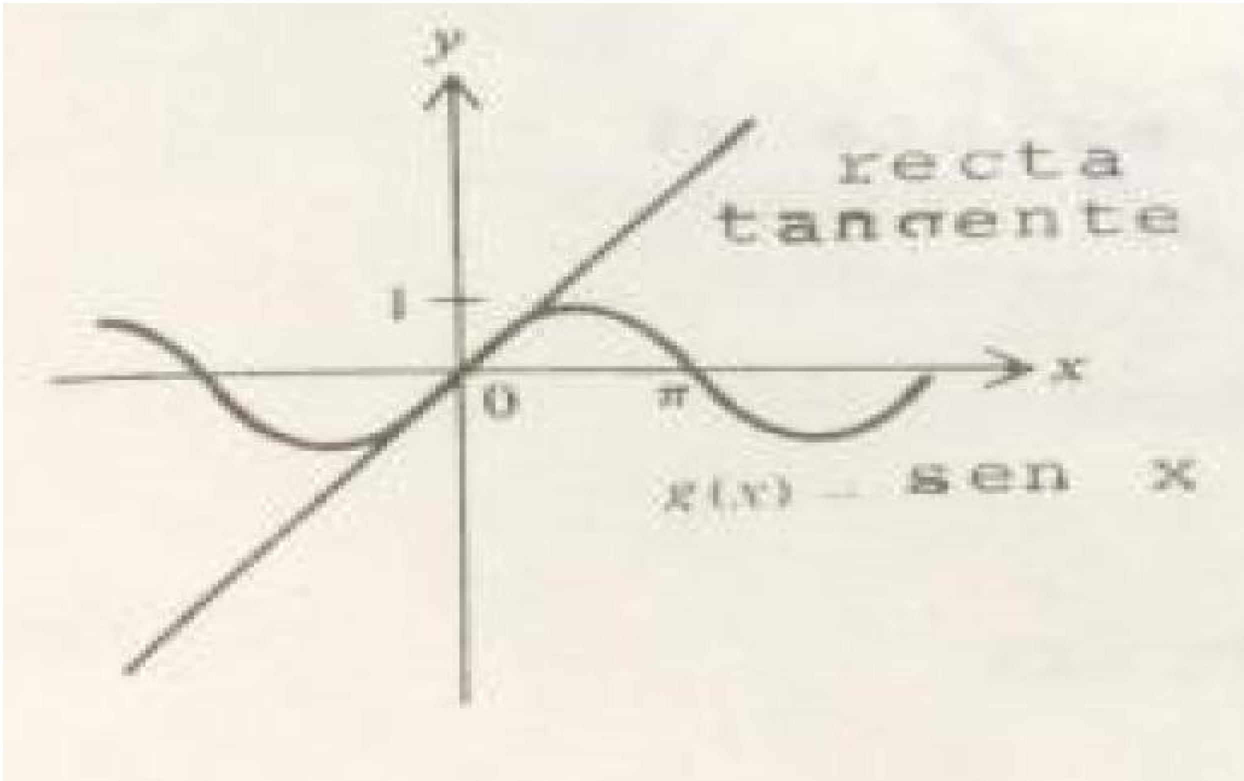
Recta tangente

Ejemplo 3. Sea $f(x) = x^3 - 1$ Muestre que existe una recta tangente al grafico de *f* en (1,0) y encuentre una ecuación para tal recta.



Recta tangente

Ejemplo 4. Encuentre una ecuación para la recta tangente al grafico de la función seno en (0,0)



Recta tangente

Definición. Sea *f* continua en a. Si

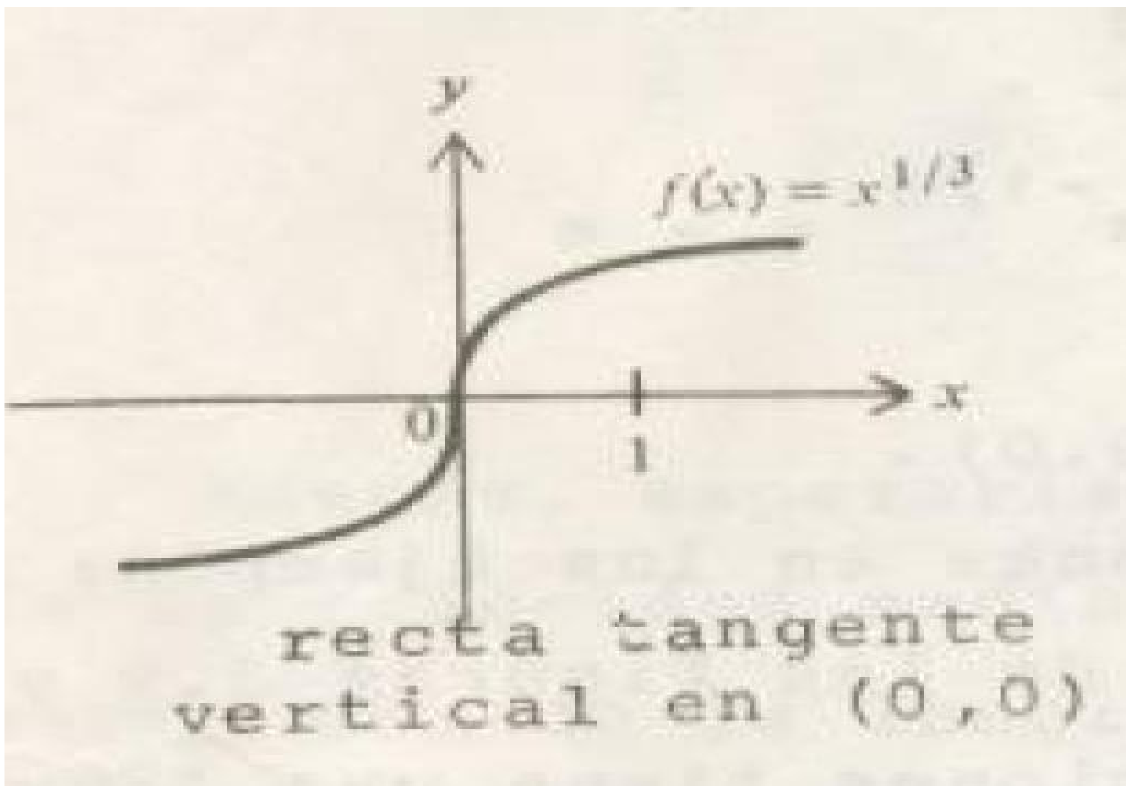
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$$

Entonces decimos que el grafico de *f* tiene una recta tangente vertical en (a,*f(a)).* En Este caso la recta vertical en *x*=a se llama La RECTA TANGENTE al grafico de *f* en a.

Recta tangente

Ejemplo 5. Sea $f(x) = x^{1/3}$

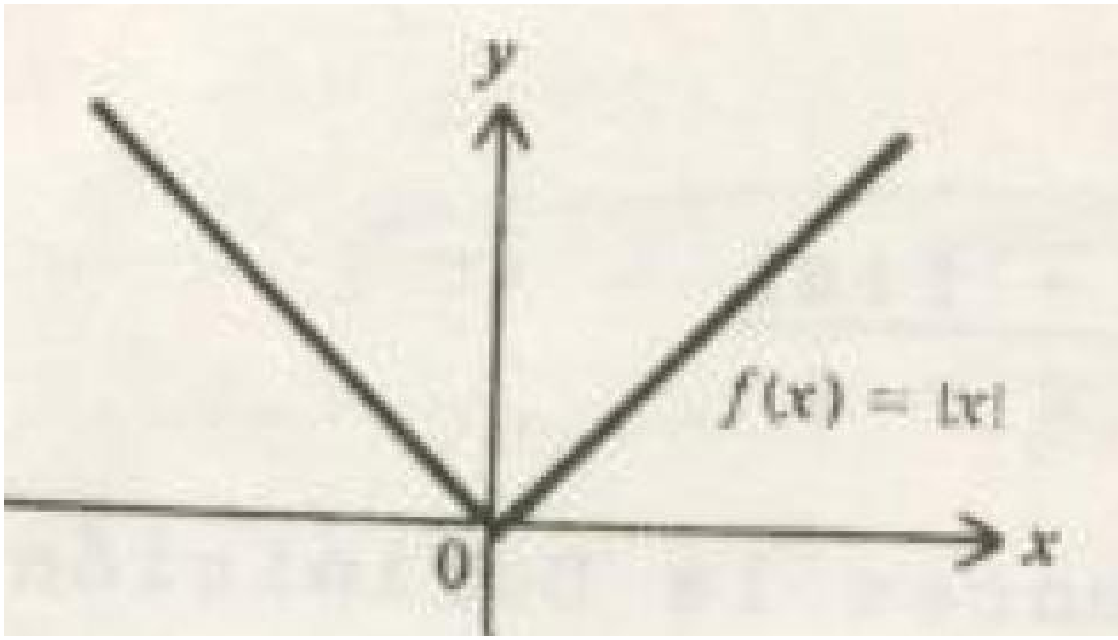
Muestre que el grafico de *f* tiene una recta vertical en (0,0) y encuentre una ecuación para ella.



Recta tangente

Ejemplo 6. Sea $f(x) = |x|$

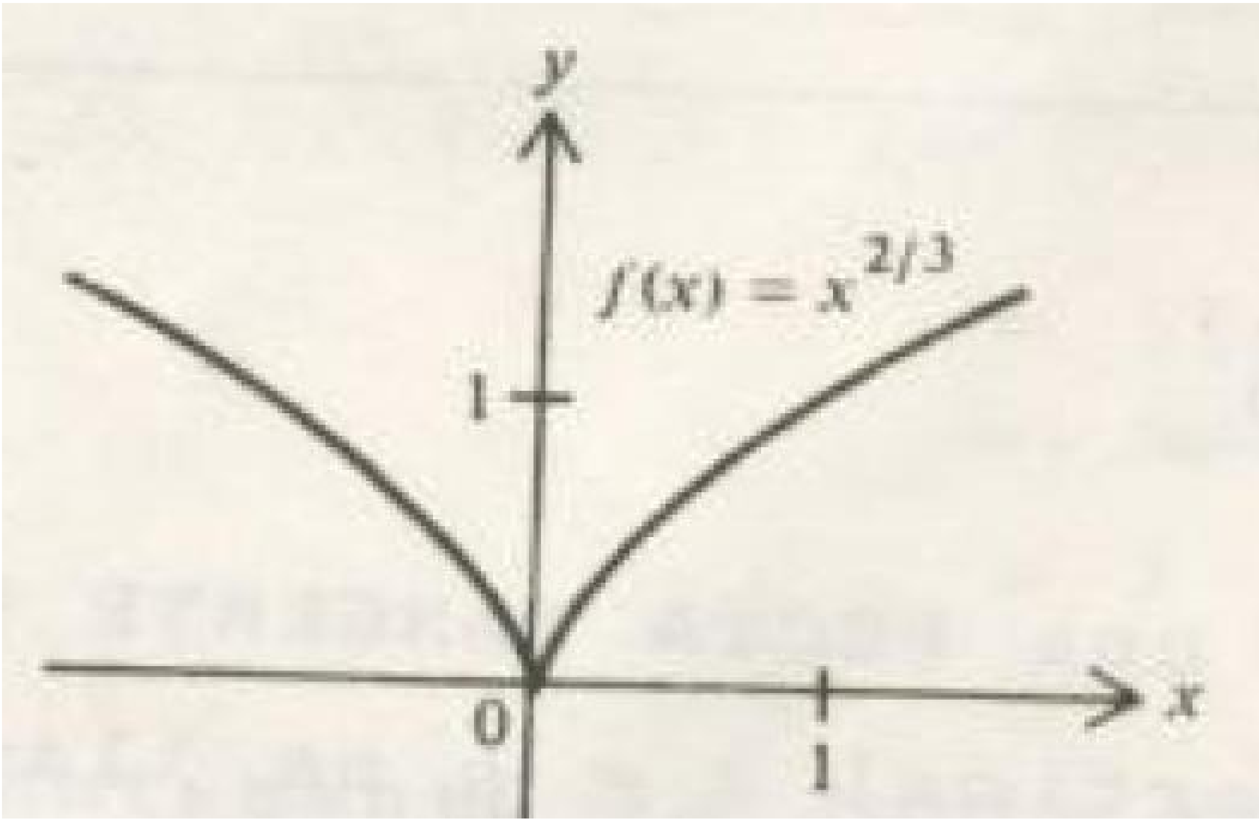
Muestre que no hay recta tangente al grafico de *f* en *(0,0).*



Recta tangente

Ejemplo 7. Sea $f(x) = x^{2/3}$

Muestre que no hay recta tangente al grafico de *f* en *(0,0).*



Derivada

Definición. Sea *f* una función y sea *a* en el dominio de *f.* Si

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe, llamaremos a este limite la DERIVA-DA de *f* en a y lo escribimos $f'(a)$
Decimos que *f* tiene una derivada en a, o que *f es* derivable en *a*

Derivada

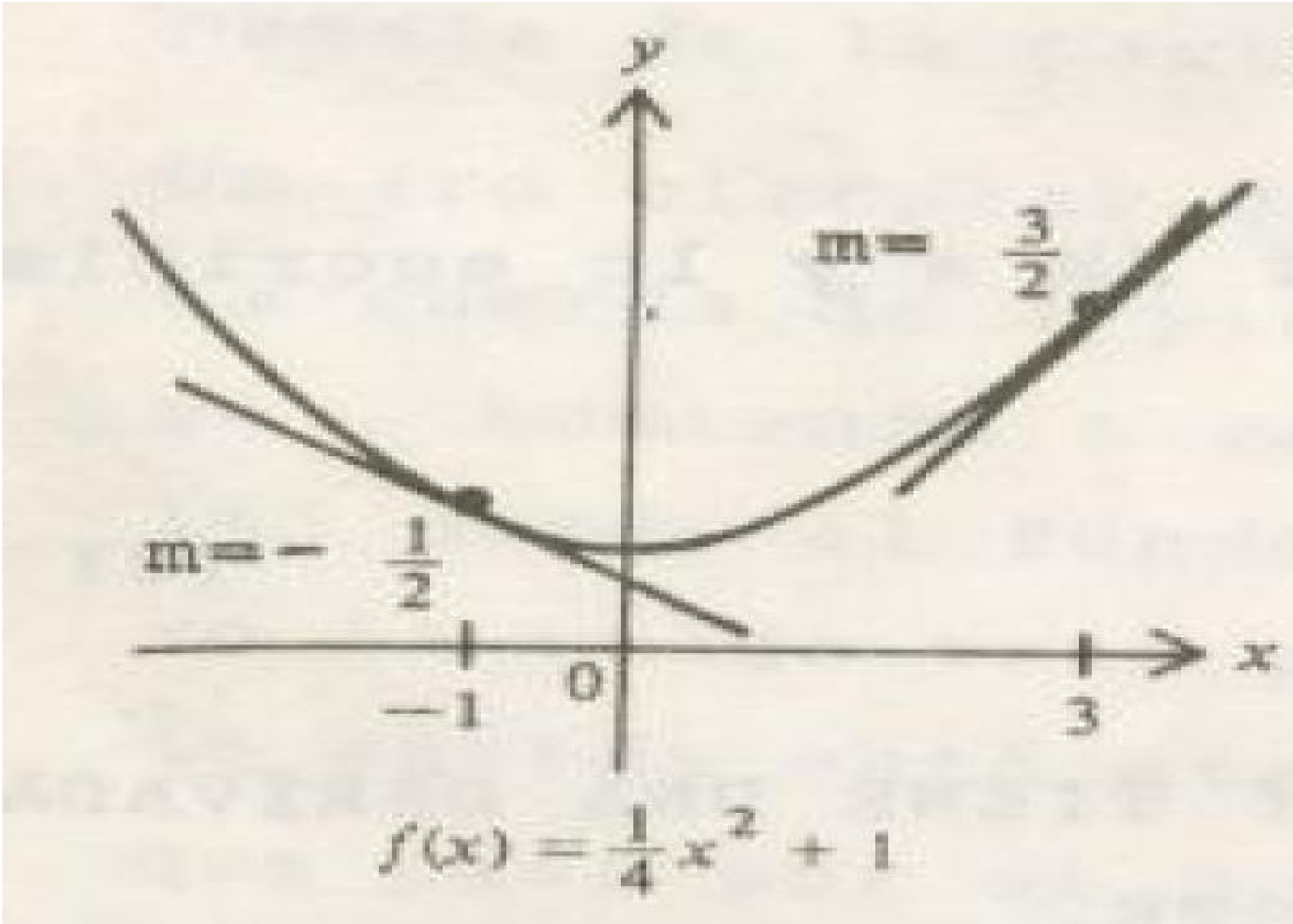
Ejemplo 1.

Sea

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Encuentre $f'(-1)$ y $f'(3)$ y dibuje las rectas tangentes al grafico de *f* en los puntos correspondientes.

Grafica Ejemplo 1.



Derivada

- Sea $f(x) = x^2$ Muestre que

$$f'(x) = 2x \quad \text{para todo } x$$

- Sea $g(x) = x^{1/2}$ Muestre que

$$g'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \text{ para todo } x > 0$$

Derivada

Otras notaciones para la derivada.

La expresión $f'(x)$ no es la única notación para la derivada ni la mas antigua. Algunas otras notaciones para la derivada de *y=f(x)* son

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad Df(x)$$

Derivada

Definición. Si *f* es derivable en cada punto de su dominio, se dice que *f* es DERIVABLE.

Ejemplo 3.

- Sea $f(x) = C$, donde C es una constante. Muestre que $f'(x) = 0 \text{ para todo } x$

- Sea $f(x) = x$. Muestre que

$$f'(x) = 1 \text{ para todo } x$$

Derivada

Tenemos

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Si $h = t - x$, entonces $t = x + h$ y asi:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivada

Ejemplo 4. Encontrar las derivadas de las funciones seno y coseno.

Derivada

Las siguientes funciones son derivables

$$f(x) = C \qquad f'(x) = 0$$

$$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$$

$$k(x) = x^n \qquad k'(x) = nx^{n-1}$$

$$h(x) = \sin x \qquad h'(x) = \cos x$$

$$j(x) = \cos x \qquad j'(x) = -\sin x$$

Derivada

- **Ejemplo 5.** Sea $f(x) = |x|$. Mostrar que *f* no es derivable, mostrando que *f* tiene una derivada en *x* si y solo si $x \neq 0$

Definición. Una función *f* es derivable en un intervalo I, si es derivable en cada punto de I.

- **Ejemplo 6.** $f(x) = |x|$ es derivable en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$

Derivada

Definición. Decimos que *f* es derivable en un intervalo cerrado I=[a,b] con a<b, si *f* es derivable en (a,b) y los limites laterales siguientes existen

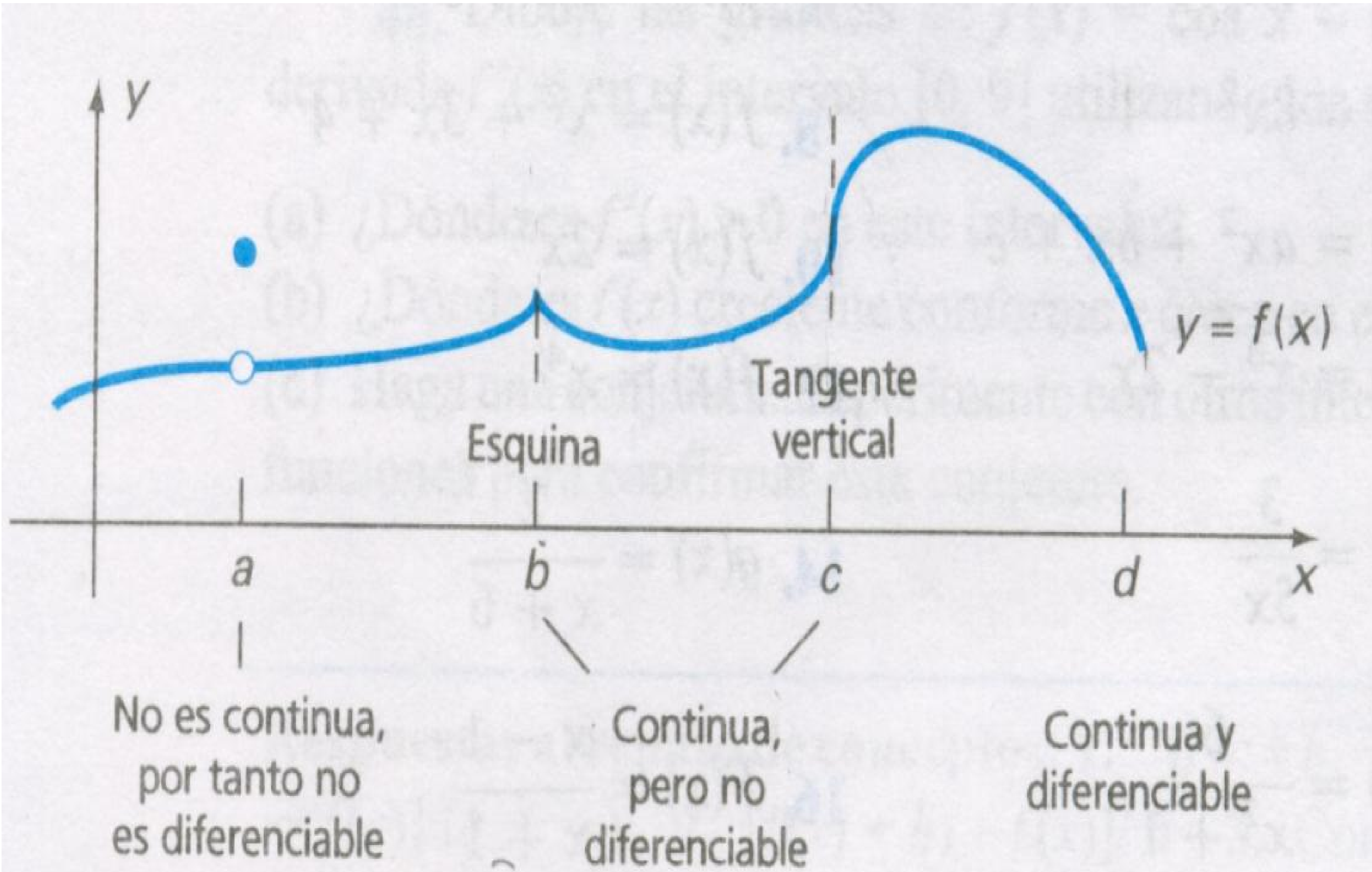
$$\lim_{t\to a^+}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to b^-}\frac{f(t)-f(b)}{t-b}$$

Derivada

- **Ejemplo No 7.** La función $f(x) = |x|$ es derivable en cualquier intervalo de la forma [0,d], donde d>0 y en cualquier intervalo de la forma [c,0], con c<0.
- **Teorema.** Si f es derivable en a, entonces *f* es continua en a, es decir

$$\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$$

Derivada


y
y = f(x)
Esquina
Tangente
vertical
a
b
c
d
x
No es continua,
por tanto no
es diferenciable
Continua,
pero no
diferenciable
Continua y
diferenciable

TEOREMA

Sea *c* una constante, *f y g* funciones derivables en *a, entonces:*

1. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

2. $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$

3. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

4. $(f/g)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$

Derivadas

1. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
2. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
4. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
5. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \; \tan x$
6. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \; \cot x$
7. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
8. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$