VALORES Y VECTORES PROPIOS

Definición 1 *Sea A una matriz cuadrada de orden n con elementos en un cuerpo K ($I\!R$ ó $\mathbf{C}$). Un escalar λ se denomina un valor propio de A si existe un vector no nulo $\mathbf{x} \in K^n$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, y en tal caso $\mathbf{x}$ se llama vector propio de A asociado a λ.*

Ejemplo. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces $\lambda = -1$ es un valor propio de A y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ su vector propio asociado. En efecto:

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y

$$\lambda\mathbf{x} = (-1) \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

de donde $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

observación Al operar con elementos de $I\!R^n$ (ó $\mathbf{C}^n$), estos deben ser puestos como una matriz columna.

Definición 2 *Sea λ un valor propio de una matriz A. Se llama espacio propio asociado a λ al conjunto de todos los vectores propios asociados a dicho valor propio más el vector nulo de K^n, Es decir, si el espacio propio lo denotamos por E_λ, entonces*

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in K^n \ : \ A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

Si λ es un valor propio entonces existe un vector $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ o equivalentemente $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \theta$, donde I es la matriz identidad de orden n. Como $\mathbf{x}$ debe ser distinto del vector nulo, entonces $det(A - \lambda I)$ no podría ser distinto de cero; ya que de lo contrario, tendríamos sólo la solución trivial. También si dicho determinante no es cero, la solución no es única; lo cual, aparte de la solución trivial habrían otras soluciones. De lo anterior, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1 *Sea A una matriz cuadradada de orde n. Un escalar λ es valor propio de A sí y sólo sí*

$$det(A - \lambda I) = 0,$$

donde I es la matriz identidad de orden n.

La expresión:

$$f_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

es un polinomio de orden n en λ y recibe el nombre de *polinomio carasterístico*. Dicho polinomio se puede escribir entonces como:

$$f_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots\ldots a_0)$$

Si $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_k$ son los ceros del polinomio carasterístico, entonces $f_A(\lambda)$ puede ser factorizado de la siguiente manera:

$$f_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\beta_1}(\lambda - \lambda_2)^{\beta_2} \cdot\cdots\cdot (\lambda - \lambda_k)^{\beta_k}$$

donde $\beta_1,\ \beta_2, \ldots\ldots, \beta_k$ son números naturales tales que:

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots + \beta_k = n$$

El número β_i, $i = 1, 2 \ldots, k$, de veces que se repite el factor $(\lambda - \lambda_i)$ se llama *multiplicidad algebraica* de λ_i. Por otra parte la dimensión del espacio propio asociado a un valor propio λ recibe el nombre de *multiplicidad geométrica* y se denota por $\rho(\lambda)$.

Existe un resultado del algebra lineal que dice que al valor propio λ_i le pueden corresponder a lo más β_i vectores propios linealmente independiente. Ahora, el número máximo de vectores propios de una matriz A asociado a un valor propio λ_i y que son linealmente idependiente es igual a $\rho(\lambda_i)$; dado que dicho valor es la dimensión del espacio propio asociado a ese valor propio. En otras palabras, se tiene que

$$\rho(\lambda_i) \leq \beta_i, \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots\ldots, k;$$

lo que quiere decir que la multiplicida geométrica de λ_i no excede a su multiplicidad algebraica.

Ejemplo. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces los valores propios de la matriz A, por Proposición 1, son obtenidos de $det(A - \lambda I) = 0$. Así

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo cual $det(A - \lambda I) = 0$ implica que:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo que:

$$(2-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda)-2]=0$$

y haciendo el desarrollo en el primer miembro se llega a que:

$$(2-\lambda)[\lambda^2-5\lambda+4]=0$$

o también

$$(2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1)=0$$

con lo que las raíces son $\lambda=2$, $\lambda=4$ y $\lambda=1$ y por lo tanto los valores propios de la matriz A son 2, 4 y 1 con multiplicidad algebraica 1 cada uno de ellos. Obtengamos ahora los vectores propios, y por ende los espacios propios, asociados a los valores propios. Para ellos reemplazamos los valores correspondientes de λ en $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\theta$

- Para $\lambda=2$, el sistema $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\theta$ queda como:

  $$\begin{array}{rrr} -\ 2x_2 & +\ 3x_3 & =0 \\ +\ x_2 & +\ 2x_3 & =0 \\ -\ x_2 & & =0 \end{array}$$

  con lo cual, de la tercera ecuación se tiene que $x_2=0$ y por lo tanto de la primera y segunda ecuación se tiene que $x_3=0$. De lo anterior se tiene que los vectores propios para $\lambda=2$ son de la forma $(x_1,0,0)$ y así:

  $$E_{\lambda=2}=\{(x,0,0)/x\ \in\ I\!R\}$$

- Para $\lambda=4$, el sistema $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\theta$ queda como:

  $$\begin{array}{rrrr} -2x_1 & -\ 2x_2 & +\ 3x_3 & =0 \\ & -\ x_2 & -\ 2x_3 & =0 \\ & -\ x_2 & -\ 2x_3 & =0 \end{array}$$

  De la segunda y tercera ecuación se tiene que $x_2=-2x_3$ y reemplazando x_2 en la primera ecuación se tiene que $x_1=\frac{7}{2}x_3$. Entonces, los vectores propios para $\lambda=4$ tienen la forma $(\frac{7}{2}x_3,-2x_3,x_3)$ y así:

  $$E_{\lambda=4}=\{(\frac{7}{2}x,-2x,x)/x\ \in\ I\!R\}$$

En forma análoga se obtiene el espacio propio para $\lambda=1$