UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 18 (Aplicaciones Lineales.)

1. En cada caso determine si la aplicación es lineal y demuestre su afirmación.

   *a)* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (xy, x - y, 0)$.

   *b)* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(u_1, u_2) = (u_1, -u_2)$ (reflexión sobre el eje $X$).

   *c)* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(u_1, u_2) = (u_1, 0)$ (proyección ortogonal sobre el eje $X$).

   *d)* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$.

   *e)* $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2,\ T(z) = (Re(z), Im(z))$, considerando $\mathbb{C}$ como e.v. sobre $\mathbb{C}$.

   *f)* $T : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),\ T(A) = p$, con $p(x) = a_{11}x^2 + tr(A), \forall x \in \mathbb{R}$.

   *g)* $T : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ T(A) = |A|$.

   *h)* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x, y) = \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$ y $T(x, 0) = 0$. **(En práctica e) y f))**

2. Demuestre que las siguientes aplicaciones son lineales:

   *a)* La proyección ortogonal $P : V \to S$ definida por:

   $$P(v) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\langle v, x_j \rangle}{\|x_j\|^2}\, x_j\,,$$

   donde $V$ es un e.v. con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $S$ un s.e.v. de $V$ y $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ es una base ortogonal de $S$.
   Como aplicación: defina la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $XY$ y encuentre $P(1, 2, 3)$.

   *b)* $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad T(A) = tr(A)$.

   *c)* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(v) = R_\alpha\, v$, donde $\alpha$ es un número real fijo y $R_\alpha$ es la matriz:

   $$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

   es decir, $T(v)$ es la rotación de $v$ en el ángulo $\alpha$.

   *d)* $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, **(En práctica c) y d))**

   $$T(p) = \begin{bmatrix} p'(0) & p'(1) \\ p(0) & p(1) \end{bmatrix}$$

3. Encuentre un ejemplo de función NO lineal $f : V \to W$ tal que $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in V$, en los siguientes casos:

   $$a)\, V = W = \mathbb{R}^2, \qquad b)\, V = \mathbb{R}^2,\ W = \mathbb{R}, \qquad c)\, V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ W = \mathbb{R}.$$

4. Sea $V$ un e.v. complejo con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sea $w \in V$ fijo. Considere las funciones $T_1, T_2 : V \to V$definidas por:

$$T_1(v) = \langle v, w \rangle w \quad \wedge \quad T_2(v) = \langle w, v \rangle w$$

   *a*) Muestre que $T_1(\theta) = T_2(\theta) = \theta$. Justifique su respuesta usando para ello las propiedades de espacios vectoriales. **(En práctica a))**

   *b*) Muestre que $\forall\, u, v \in V,\ T_i(u + v) = T_i(u) + T_i(v) \quad i = 1, 2$ y que, sin embargo, sólo una de ellas es lineal. ¿Qué sucede en el caso de $V$ un e.v. real?.

5. Encuentre una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, tal que: **(En práctica)**
$T(1, 3) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $T(0, 1) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Calcule el kernel, imagen, rango y nulidad de las siguientes aplicaciones lineales:

   *a*) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ , $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, b + c, d)\,.$

   *b*) $T : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $T(A) = \frac{1}{2}\,(A - A^t)\,.$

   *c*) $T : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $T(A) = \frac{1}{2}\,(A + A^t)\,.$

   *d*) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $T(p) = q$, con $q(x) = p(x + 1) + p(x - 1) - 2p(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

   *e*) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(p) = \displaystyle\int_0^1 p(x)dx$. **(En práctica c) y d))**

7. Para este problema suponga que $V$ y $W$ son espacios vectoriales de dimensión finita y que $T : V \to W$ es una aplicación lineal. **(En práctica ($b_1$) y c))**

   *a*) Suponga que los espacios $V$ y $W$ son tales que $dim(V) > dim(W)$. Demuestre que $T$ no puede ser inyectiva.

   *b*) Suponga que $dim(V) = dim(W)$. Demuestre que si $T$ es:

      ($b_1$) *sobreyectiva*, entonces $T$ es también inyectiva.

      ($b_2$) *inyectiva*, entonces $T$ es también sobreyectiva.

   *c*) Suponga que $V = W$ y que $T^2 = T \circ T = \theta$ (la aplicación lineal que a todo vector lo envía al vector nulo). Demuestre que la aplicación $I - T : V \to V$ es invertible.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, y + z, x + y - z)\,.$$

   Usando el teorema de la dimensión demuestre que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

9. Pruebe que no existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ tal que **(En práctica)**

$$Ker(T) = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 :\ a = 3b \text{ y } c = d = e\}.$$

10. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x - y, y + z)\,.$
Determine: **(En práctica c) y d))**

   *a*) La nulidad de $T$.

   *b*) El rango de $T$.

*c*) Encuentre la imagen por $T$ de los subespacios $S_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$, $S_2 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ y $S_3 = \{(x, y, z) : x = y = z\}$.

*d*) Considere el subespacio $S_4 = \{(x, y, 0) : x = -y\}$. Note que $S_4$ es subespacio de $S_1$. ¿Se cumple que $T(S_4)$ es un subespacio de $T(S_1)$?.

11. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$. Calcule la matriz asociada a esta aplicación con respecto a las bases $B_{\mathbb{R}^3}$ y $B_{\mathbb{R}^2}$, donde

    *a*) $B_{\mathbb{R}^3}$ y $B_{\mathbb{R}^2}$ son las bases canónicas.

    *b*) $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (1, 3, 0)\}$ y $B_{\mathbb{R}^2} = \{(0, 1), (-1, 2)\}$.

    Además, encuentre las matrices de paso entre las bases respectivas definidas en a) y b).

12. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por $T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x + a_1$. Calcule la matriz asociada a esta aplicación con respecto a las bases $B_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$ y $B_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}$, donde

    *a*) $B_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$ y $B_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}$ son las bases canónicas.

    *b*) $B_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \{1 - x, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ y $B_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})} = \{1 + x, 1 - x\}$.

    Además, encuentre las matrices de paso entre las bases respectivas definidas en a) y b).

13. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ el operador lineal definido por $T(z_1, z_2) = (z_1 + z_2, z_2)$.

    *a*) Considere $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial complejo. Calcule la matriz asociada a $T$ con respecto a la base $B_1 = \{(1 + i, 1 + i), (1 - i, 1 + i)\}$.

    *b*) Considere ahora $\mathbb{C}^2$ como espacio vectorial real. Calcule la matriz asociada a $T$ con respecto a la base $B_1 = \{(1, 1), (1, -1), (i, 0), (0, i)\}$. **(En Práctica b))**

14. Calcule la matriz asociada a la aplicación $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = tr(A)$, con respecto a las bases canónicas. **(En Práctica)**

15. Sea $T$ un operador lineal en $V$, e.v. de dimensión 3, cuya matriz con respecto a la base canónica de $V$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

    Encuentre una base de $Ker(T)$ e $Im(T)$ y la definición de $T$ si: **(En Práctica b))**

    *a*) $V = \mathbb{R}^3$ *b*) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *c*) $V = \mathbb{C}^3$

JSA/RBP/RRS/GBG/AGS/RNG/LRS/BBM/ags
Segundo Semestre de 2005.