UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA IV: Introducción a las Matemáticas Discretas (525412)

Tarea 1

(Fecha de entrega: 31 de agosto de 2004.)

1. Estudie las propiedades de las siguientes relaciones. En caso de ser relación de orden, determine si es relación de orden total o parcial.

   i) En $\mathbb{N}$: $\quad x\,R\,y \Longleftrightarrow \text{máx}\{x^2, y\} \leq n$, para $n \in \mathbb{N}$ dado.

   ii) En $M_n(\mathbb{R})$: $A\,R\,B \Longleftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij},\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, donde $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ y $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.

   iii) En $\mathbb{N}^2$: $(a, b)\,R\,(a', b') \Longleftrightarrow a + b = a' + b'$.

2. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las particiones finitas de X. Es decir, los elementos de $\mathcal{P}$ son las particiones $\{A_i\}_{i=1}^n$ donde $n \in \mathbb{N}$. Se define la relación $\leq$ en $\mathcal{P}$ como sigue:

$$\{A_i\}_{i=1}^n \leq \{B_j\}_{j=1}^m \Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, m\},\ \exists i \in \{1, \ldots, n\},\ B_j \subseteq A_i.$$

   i) Pruebe que $\leq$ es relación de orden.

   ii) Muestre que si $|X| > 3$, entonces $\leq$ es relación de orden parcial.

3. Sean E y F dos conjuntos finitos no vacíos. Sea $\leq$ la relación de orden en $P(E) \times P(F)$, definida por:

$$(A, B) \leq (A', B') \Longleftrightarrow A \subseteq A' \ \wedge\ B' \subseteq B.$$

   i) Verifique que $\leq$ es relación de orden.

   ii) Pruebe que $(P(E) \times P(F), \leq)$ es un latis.

   iii) Calcule el elemento máximo y el elemento mínimo de $P(E) \times P(F)$.

4. Sean R y S dos relaciones en E conjunto no vacío. Se definen las relaciones: R^{-1}, $R \cup S$, $R \cap S$ y $R \circ S$ como: $\forall a, b \in E$:

$$\begin{array}{lcl} a\,R^{-1}\,b & \Longleftrightarrow & b\,R\,a, \\ a\,(R \cup S)\,b & \Longleftrightarrow & a\,R\,b\ \vee\ a\,S\,b, \\ a\,(R \cap S)\,b & \Longleftrightarrow & a\,R\,b\ \wedge\ a\,S\,b, \\ a\,(R \circ S)\,b & \Longleftrightarrow & \exists c \in E,\ a\,R\,c\ \wedge\ c\,S\,b. \end{array}$$

   Pruebe que:

   i) Si R y S son relaciones de equivalencia, entonces $R \circ S$ es relación de equivalencia $\Longleftrightarrow$ $R \circ S = S \circ R$.

   ii) Si R y S son relaciones de equivalencia, entonces $R \cap S$ y $R \cup S$ son también relaciones de equivalencia.

   iii) Si R es relación de orden total, entonces R^{-1} es también relación de orden total.
