UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

SOLUCION EVALUACION 1

Matemática I (529.103)

Primer semestre 2005 *Prof. Abner Poza Díaz.*

1. Para cada una de las siguientes expresiones, determine si son verdaderas o falsas. Justifique cada una de sus respuestas.

   (a) $\log a - \log b = \frac{\log a}{\log b}$ (2 pts)

   (b) $x^3 - y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (2 pts)

   (c) Si $a > 0$ entonces $|x| > a \Rightarrow -a < x < a$ (2 pts)

   Solución:

   (a) *Falsa. En efecto, si tomamos* $a = 10$ *y* $b = 100$, *se tiene*

   $$\log a - \log b = \log 10 - \log 100 = 1 - 2 = -1.$$

   Por otro lado,

   $$\frac{\log a}{\log b} = \frac{\log 10}{\log 100} = \frac{1}{2}.$$

   De aquí se concluye que $\log a - \log b \neq \dfrac{\log a}{\log b}$.

   (b) *Falsa, pues si tomamos* $x = y = 1$, *el lado izquierdo toma el valor 0. En cambio el lado derecho toma el valor 2.*

   (c) *Falsa, pues si* $x = -3$ *y* $a = 1$, *se cumple que* $|x| > a$, *pero* $-1 \not< -3$.

   Nota: Un punto por decidir correctamente la veracidad de la afirmación y un punto por la justificación.

---

2. Considere la ecuación de orden cuatro:

   $$(x^2 - 5)^2 - 13(x^2 - 5) + 36 = 0. \tag{1}$$

   Si se hace el cambio de variable $u = x^2 - 5$, la ecuación (1) se convierte en:

   $$u^2 - 13u + 36 = 0. \tag{2}$$

   (a) Obtenga las soluciones de la ecuación cuadrática (2). (2 pts)

   (b) Con las soluciones obtenidas anteriormente, obtenga las cuatro soluciones de la ecuación (1). (4 pts)

   Solución:

(a) *Claramente la ecuación (1) la podemos factorizar por* $(u-9)(u-4)=0$, *de donde se concluye que* $u_1 = 9$ *y* $u_2 = 4$ *son las soluciones de la ecuación cuadrática.*

(b) *Reemplazando cada valor de* u *en su definición se obtienen dos ecuaciones, cuyas soluciones conforman el conjunto solución de (1).*
Si $u_1 = 9$, *se obtiene la ecuación:* $9 = x^2 - 5$, *de donde* $x = \pm\sqrt{14}$.
Si $u_2 = 4$, *se obtiene la ecuación:* $4 = x^2 - 5$, *de donde* $x = \pm 3$.
Así el conjunto solución de (1) es: $\{-\sqrt{14}, -3, 3, \sqrt{14}\}$.

Nota: Un punto menos por olvidar las raíces negativas de ambas ecuaciones.

---

3. Simplifique las siguientes expresiones y luego determine su valor numérico cuando $x = 4$.

(a) $\dfrac{4+x}{x} + \dfrac{8-x^2}{x^2}$ (3 pts)

(b) $3\log_2(\sqrt{x}) - \log_8(x^3)$ (4 pts)

Indicación: Utilice en (b), la fórmula de cambio de base.

Solución:

(a) $\dfrac{4+x}{x} + \dfrac{8-x^2}{x^2} = \dfrac{(4+x)\,x + 8 - x^2}{x^2} = \dfrac{4x + x^2 + 8 - x^2}{x^2} = \dfrac{4x+8}{x^2}$.
Si $x = 4$, *entonces:* $\dfrac{4x+8}{x^2} = \dfrac{4\cdot 4 + 8}{4^2} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2}$.

(b) *Utilizando la fórmula de cambio de base, tenemos*

$$
\begin{aligned}
3\ \log_2 \sqrt{x} - \log_8 x^3 &= \frac{3}{2}\ \log_2 x - \frac{\log x^3}{\log 8} \\
&= \frac{3}{2}\ \log_2 x - \frac{\log x^3}{\log 2^3} \\
&= \frac{3}{2}\ \log_2 x - \frac{3\ \log x}{3\ \log 2} \\
&= \frac{3}{2}\ \log_2 x - \frac{\log x}{\log 2} \\
&= \frac{3}{2}\ \log_2 x - \log_2 x \\
&= \frac{1}{2}\ \log_2 x \\
&= \log_2 \sqrt{x}.
\end{aligned}
$$

Evaluando la expresión anterior, cuando $x = 4$, *se tiene*

$$\log_2 \sqrt{x} = \log_2 \sqrt{4} = \log_2 2 = 1.$$

---

4. Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación: (5 pts)

$$\frac{x^2+3}{(x+2)(x-1)} \leq 0.$$

Solución: Como $x^2+3>0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, se tiene el siguiente análisis:*

	-2	1	
x^2+3	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)(x+2)$	$+$	$-$	$+$
$\dfrac{x^2+3}{(x+2)(x-1)}$	$+$	$-$	$+$

Entonces el conjunto solución de la inecuación es: $]-2,1[$*, pues ni* -2 *ni* 1 *son soluciones, pues en estos puntos la fracción no esta definida.*

---

5. Indique si la siguiente proposición corresponden a una tautología, contingencia o contradicción. (4 pts)

$$(r \vee \sim q) \leftrightarrow \sim p.$$

Solución: Para esta proposición podemos construir la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$r \vee \sim q$	$(r \vee \sim q) \leftrightarrow \sim p$
V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V

De la última columna podemos concluir que la proposición es una contingencia, ya que esta no es ni tautología, ni contradicción.

---

6. En una encuesta a 200 estudiantes se encontró que

   (i) 68 prefieren matemáticas, 138 son deportistas y 160 son artistas,

   (ii) 120 son artistas y deportistas,

   (iii) 20 prefieren matemáticas pero no son deportistas,

   (iv) 13 prefieren matemáticas y son deportistas pero no artistas,

   (v) 15 prefieren matemáticas y son artistas pero no deportistas.

Defina por $\boldsymbol{M, D}$ y $\boldsymbol{A}$ el conjunto de alumnos encuestados que prefieren matemáticas, son deportistas y son artistas, respectivamente.

(a) Exprese el conjunto formado por los alumnos que son artistas y deportistas, pero que no prefieren matemáticas. (2 pts)

(b) Exprese por comprensión el conjunto: $\boldsymbol{(A \cup D \cup M)^c}$. (2 pts)

(c) Calcule el número de alumnos que prefieren matemáticas, son deportistas y son artistas. (6 pts)

Solución:

(a) El conjunto formado por los alumnos que son artistas y deportistas, pero que no prefieren matemáticas es $\boldsymbol{A \cap D \cap M^c}$*.*

(b) $\boldsymbol{(A \cup D \cup M)^c}$ *corresponde al conjunto formado por los alumnos que no son artistas ni deportistas y que no prefieren matemáticas.*

(c) El conjunto formado por los alumnos que prefieren matemáticas, son deportistas y son artistas queda expresado por: $\boldsymbol{A \cap D \cap M}$*. La cardinalidad de este conjunto se puede calcular de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A \cap D \cap M}| &= |\boldsymbol{M}| - |\boldsymbol{M \cap D^c}| - |\boldsymbol{M \cap D \cap A^c}| \\ &= \mathbf{68 - 20 - 13} \\ &= \mathbf{35.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de alumnos que prefieren matemáticas, son deportistas y son artistas es **35***.*

Calificación: La nota de calificación se determina de la siguiente forma:

$$\text{Nota} = \frac{\mathbf{6} \cdot \text{Ptos}}{\mathbf{38}} + \mathbf{1},$$

donde Ptos corresponde al puntaje obtenido en la evaluación.