UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Práctica 24: *Aplicaciones lineales*

Problema 1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Demuestre que: **En práctica**

(1.1) $T(\theta_V) = \theta_W$. (1.2) $T(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, T(x_j)$.

Problema 2. Demuestre que las siguientes aplicaciones son lineales:

(2.1) La proyección ortogonal P definida entre un espacio vectorial V, con producto interior, y un subespacio S.

$$P : V \to S \qquad P(v) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\langle v, x_j \rangle}{\|x_j\|^2} \, x_j \, ,$$

donde $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ es una base ortogonal de S. Como aplicación: defina la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano XY y encuentre $P(1, 2, 3)$.

(2.2) $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad T(A) = tr(A)\,.$

(2.3) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(x, y) = (x + y, x - y, 0)\,.$

(2.4) La multiplicación por la matriz R_α donde $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ determina la rotación en un ángulo α. Es decir, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \longmapsto T(v) = R_\alpha \, v$.

En práctica: (2.1) y (2.2)

Problema 3. En el Problema 8 de la Práctica $N^o 8$ hemos definido la transformación lineal del Problema (2.4), luego recordando algunas identidades trigonométricas podemos establecer las afirmaciones siguientes:

(3.1) Considere $T^n = T \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n} T$. Pruebe que para todo $v \in \mathbb{R}^2$: $T^n v = R_{n\alpha} v$.
(**Indicación:** Primero pruebe que $R_{\alpha+\beta} = R_\alpha R_\beta$).

(3.2) Considere la transformación lineal definida para todo $v \in \mathbb{R}^2$ por $Lv = R_{-\alpha} v$. Verifique que $TL = LT = I$, el operador identidad sobre $\mathbb{R}^2$. Concluya que T es inversible.

(3.3) Si $\alpha = 2\pi/3$ pruebe que $T^3 = I$ y $L = T^2$.
(**Indicación:** La transformación inversa, si existe, es única (en el caso de las rotaciones se entiende módulo 2π)).

Problema 4. En cada caso determine si la aplicación es lineal:

(4.1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(u_1, u_2) = (u_1, -u_2)$ (reflexión sobre el eje X).

(4.2) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(u_1, u_2) = (u_1, 0)$ (proyección ortogonal sobre el eje OX).

(4.3) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2) = x_1\, x_2$.

(4.4) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 2)$.

(4.5) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)$.

Problema 5. Sea $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, b+c, d)$. Determine la nulidad y el rango de T. **En práctica**

Problema 6. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que $\mathrm{Ker}(T)$ es un subespacio de V y que $\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio de W.

Problema 7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, y + z, x + y - z).$$

Usando el teorema de la dimensión demuestre que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$. **En práctica**

Problema 8. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - y, y + z).$$

Determine:

(8.1) La nulidad de T.

(8.2) El rango de T.

(8.3) Encuentre la imagen por T de los subespacios $S_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$, $S_2 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ y $S_3 = \{(x, y, z) : x = y = z\}$.

(8.4) Considere el subespacio $S_4 = \{(x, y, 0) : x = -y\}$. Note que S_4 es subespacio de S_1. ¿ Se cumple que $T(S_4)$ es un subespacio de $T(S_1)$?.

(8.5) Considere la pirámide de vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y $D(1, 1, 1)$. Calcule la imagen de dicha figura por la transformación T. Dibuje su resultado.

Problema 9. Considere $T : E \to V$ y $L : W \to E$ dos aplicaciones lineales. Demuestre que $T \circ L : W \to V$ es también lineal.

21.10.2003
LNB/FPV/rad/fpv