UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 2
(520131)

Problema 1.

$$V = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(I\!R) : A \,\text{es triangular}\, superior\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Sean α_1, α_2 y α_3 escalares tales que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = 0 \\ & & \alpha_2 & & & = 0 \end{array} \right| \quad \alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{cc} \alpha_1 - \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & = 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$\text{de (1)} \qquad \alpha_3 = \alpha_1$$

Reemplazando α_3 en (2)

$$2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \text{ y por lo tanto } \alpha_3 = 0$$

Luego, A es un conjunto linealmente independiente.

b) Sean

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea el producto interior

$$< A, B >= tr(B^t A)$$

Entonces con este producto anterior se desea construir un conjunto ortogonal

$$\{B_1, B_2, B_3\}$$

Así, por Gram-Smith, se tiene:

$$B_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = A_2 - \frac{< A_2, B_1 >}{||B_1||^2} B_1$$

$$< A_2, B_1 >= tr(B_1^t A_2) :$$

$$B_1^t A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow tr(B_1^t A) = 2$$

$$||B_1||^2 =< B_1, B_1 >= tr(B_1^t B_1).$$

$$B_1^t B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ||B_1||^2 = tr(B_1^t, B_1) = 2$$

$$\Rightarrow B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = A_3 - \frac{< A_3, B_1 >}{||B_1||^2} B_1 - \frac{< A_3, B_2 >}{||B_2||^2} B_2$$

$$B_1^t A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$< A_3, B_1 >= tr(B_1^t A_3) = 0$$

$$B_1^t A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$< A_3, B_2 >= tr(B_2^t A_3) = -2$$

$$B_2^t B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$||B_2||^2 = tr(B_2^t B_2) = 3$$

$$\begin{aligned} B_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \tfrac{(-2)}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces $\{B_1, B_2, B_3\}$ es un conjunto ortogonal y constituye una base de V, porque por ser un conjunto ortogonal es linealmente independiente y además $dim(V) == 3$.

Problema 2.

$$T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$$

$$\{t^2, t, 1\} \text{ base de } \ \mathcal{P}_2$$

$$T(t^2) = 4 - 2t - 3t^2$$

$$T(t) = 3 - t^2$$

$$T(1) = 1 + t$$

Para cualquier polinomio de grado menor o igual que 2: $at^2 + bt + c$, se tiene que:

$$\begin{aligned} T(at^2 + bt + c) &= aT(t^2) + bT(t) + cT(1) \\ &= a(4 - 2t - 3t^2) + +b(3 - t^2) + c(1 + t) \\ &= (-3a - b)t^2 + (-2a + c)t + 4a + 3b + c \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} Kert(T) &= \{at^2+bt+c \ \in \ P_2 : T(at^2+bt+c) = at^2+0t+0\} \\ &= \{at^2+bt+c : (-3a-b)t^2+(-2a+c)t+4a+3b+c = ot^2+0t+0\} \end{aligned}$$

Ahora, $(-3a-b)t^2+(-2a+c)t+4a+3b+c = 0t^2+0t+0$ implica que:

$$\begin{array}{rcrcrl|l} -3a & - & b & & & =0 & (1) \\ -2a & & & + & c & =0 & (2) \\ 4a & + & 3b & + & c & =0 & (3) \end{array}$$

De (1) $\quad b = -3a$ (*) y de (2) $c = 2a$(**)
Reemplazando en (3)

$$\begin{array}{rcrcrl} 4a & - & 9a & + & 2a & =0 \\ & - & 3a & & & =0 \ \Rightarrow a = 0 \end{array}$$

Con lo que de (*) se tiene que $b = 0$ y de (**) $c = 0$

Por lo tanto:

$$Ker(T) = \{\theta_{P_2}\} \Rightarrow T \text{ es inyectiva.}$$

De lo anterior se tiene que $dim(Ker(T)) = 0$. Entonces del Teorema de las dimeniones se tiene que $dim(Im(T)) = 3$, con lo cual

$$Im(T) = \mathcal{P}_2$$

Problema 3. $T : I\!R^3 \to \mathcal{P}_1$

$$[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$B_1 = \{(1,1,0),(2,0,3),(-1,1,0)\}$base de $I\!R^3$

$B_2 = \{t, 1\}$ base de P_1

$T(1,1,0) = -1\cdot t + 2\cdot 1 = -t+2$

$T(2,0,3) = 1\cdot t - 2\cdot 1 = t-2$

$T(-1,1,0) = 0\cdot t + 1\cdot 1 = 1$

$(x,y,z) \in I\!R^3$ cualquiera, entonces existen escolares α_1, α_2 y α_3 tales que

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(2,0,3) + \alpha_3(-1,1,0)$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrl|l} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & =x & (1) \\ \alpha_1 & & & & \alpha_3 & =y & (2) \\ & & 3\alpha_2 & & & =z & (3) \end{array}$$

De(3) $\alpha_2 = \frac{z}{3}$

Luego, reemplazando α_2 en (1) y (2) tenemos que

$$\begin{array}{ccccc|c} \alpha_1 & - & \alpha_3 & = & \frac{3x-2z}{3} & (4) \\ \alpha_1 & + & \alpha_3 & = & y & (5) \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow 2\alpha_1 = \frac{3x-2z+3y}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{3x-2z+3y}{6}$$

Reemplazando α_1 en (5), se tiene

$$\alpha_3 = y - \frac{3x-2z+3y}{6} = \frac{-3x+3y+2z}{6}$$

Luego:

$$(x,y,z) = \frac{3x-2z+3y}{6}(1,1,0) + \frac{z}{3}(2,0,3)$$

$$+\frac{-3x+3y+2z}{6}(-1,1,0)$$

$$\Longrightarrow T(x,y,z) = \frac{3x-2z+3y}{6}T(1,1,0) + \frac{z}{3}T(2,0,3)$$

$$+\frac{-3x+3y+2z}{6}T(-1,1,0)$$

$$= \frac{3x-2z+3y}{6}(-t+2) + \frac{z}{3}(t-2) + \frac{-3x+3y+2z}{6}$$

$$= \frac{-3x-3y+4z}{6}t + \frac{x+3y-2z}{2}$$

ADP/cln
1 de Diciembre de 2005.