UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ÁLGEBRA Y ÁLGEBRA LINEAL 520142

Práctica 21. Espacios Vectoriales.

Problema 1. Explique, sin usar la definición, por qué los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes, en el espacio indicado:

1.1) $\{(0,1),(2,3),(2,4)\}$ en $\mathbb{R}^2$

1.2) $\{1+2x+5x^2, 2+x+3x^2, 2x, 2+x, -3+4x^2\}$, en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

1.3) $\{(0,1,3),(0,0,0),(2,4,-2)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

1.4) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **[En práctica]**

Problema 2. Analice la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores, en el espacio indicado:

2.1) $\{(0,1),(2,3)\}$ y $\{(0,1)\}$ en $\mathbb{R}^2$

2.2) $\{2+x+3x^2, 2x, 2+x, -3+4x^2\}$ en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

2.3) $\{(0,1,3),(1,2,3),(2,4,-2)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

2.4) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.5) $\{(1,2,k),(0,1,k-1),(3,4,3)\}$ en $\mathbb{R}^3$, para $k \in \mathbb{R}$. **[En práctica]**

Problema 3. Espacio de la filas de una matriz. Dada una matriz $A = (a_{ij})$ en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se llama espacio de las filas de A al subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores filas de A. **[En práctica]**

Para las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

3.1) Encuentre vectores que generan el espacio fila de la matriz dada. En el caso de la matriz A muestre que es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ y que tiene dimensión 2.

3.2) **Las operaciones elementales en la matriz no alteran el espacio fila de la matriz**, lo que permite encontrar bases para un espacio generado por un conjunto de vectores.

Utilice este resultado para encontrar una base del espacio fila de B y demuestre que es un subespacio de $\mathbb{R}^5$ que tiene dimensión 3.

3.3) **Los vectores filas diferentes de cero, en la forma escalonada de una matriz, forman una base para el espacio fila de la matriz**.

Utilice este resultado para encontrar una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(-2,0,2,2),(0,-3,0,3)\}.$$

3.4) Encuentre una base de $U+W$ y $dim(U\cap W)$ para $U=<\{(1,2,0,0),(0,1,2,0)\}>$ y $W=<\{(1,3,2,0),(0,0,1,4)\}>$.

Problema 4. Sea V un espacio vectorial. Utilizando los vectores coordenada de $v(v\in V)$ en una base B, $(v)_B=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, se puede generar una matriz A a la cual le buscamos una base de su espacio fila. Por ejemplo, para el conjunto $P=\{2+x-3x^2-x^4,-3+4x^2+3x^4,1+2x-2x^2+x^4\}$ si consideramos la base canónica de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ se tiene que: $(2+x-3x^2-x^4)_B=(2,1,-3,0,-1),(-3+4x^2+3x^4)_B=(-3,0,4,0,3),(1+2x-2x^2+x^4)_B=(1,2,-2,0,1)$ y la matriz correspondientes es A

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & -1\\ -3 & 0 & 4 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Muestre que $A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ es una matriz equivalente con A, determine una base para el subespacio fila de A y con ello una base para el subespacio de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, generado por P. Es decir, para $<P>$.

Problema 5. Utilice el problema 4) para encontrar la dimensión del subespacio generado por los vectores dados en el espacio indicado

5.1) $\left\{\begin{pmatrix} -1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\right\}$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **[En práctica]**

5.2) $\{1+x,x^2,-2+2x^2,-3x\}$ en $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

29/09/2003.

ACQ/acq.