Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Cálculo Numérico (521230)
Laboratorio 8: Integración.

Ejercicio 1: Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Las funciones Matlab que vamos a utilizar durante este laboratorio para obtener una aproximación a

$$I(f, a, b) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

reciben como parámetro la función f a integrar. Existen diversas formas en Matlab para que una función sea parámetro de entrada a otra, veremos una de ellas.

1.1 Baje de la página de documentación del curso las funciones `f1_lab8.m` y `f2_lab8.m`. Escriba la expresión de la función que se evalúa en cada uno de estos archivos.

`f1_lab8`	
`f2_lab8`	

Observe que estas funciones fueron escritas de forma que, si el parámetro de entrada `x` es un vector, el valor retornado por la función también lo es.

1.2 Baje las funciones `sumtrapecios.m` y `sumsimpson.m` de la página de documentación del curso. Ellas contienen la implementación de las reglas compuestas del trapecio y Simpson respectivamente. Ábralas con el editor de Matlab y observe que el primer parámetro de entrada de cada una de ellas es la función que se desea integrar, los valores de `a` y `b` indican los extremos izquierdo y derecho del intervalo de integración y `h` es el tamaño de los subintervalos en que se divide (a, b) para calcular una aproximación a $I(f, a, b)$ con ayuda de estas reglas. Tanto en `sumtrapecios` como en `sumsimpson` se usa el comando `feval` de Matlab para evaluar la función especificada como primer parámetro de entrada en puntos pertenecientes al intervalo de integración.
Para calcular una aproximación a la integral de la función en `f2_lab8.m` entre 0 y 1 con tamaño de paso $h = 0{,}01$ con la regla compuesta del trapecio, escriba en la ventana de comandos de Matlab

```
>> valortr = sumtrapecios('f2_lab8',0,1,0.01)
```

Observe la forma en que dimos a `sumtrapecios` la función cuya integral se desea aproximar.
El valor exacto de esta integral es $\dfrac{\pi}{\pi^2+1}(1+e)$. Para calcular el error de la aproximación calculada antes, escribamos

```
>> abs(valortr - pi/(1+pi^2)*(exp(1)+1))
```

1.3 Teniendo en cuenta que, si f_2 representa a la función implementada en `f2_lab8.m`,

$$\max_{x\in[0,\,1]} |f_2''(x)| \leq 25, \qquad \max_{x\in[0,\,1]} |f_2^{(iv)}(x)| \leq 350,$$

encuentre valores para h de modo que el error de la aproximación calculada con la regla compuesta de los trapecios y Simpson sea menor o igual que 10^{-4}. Llame a las funciones `sumtrapecios` y `sumsimpson` para calcular una aproximación a $I(f_2, 0, 1)$ con las reglas compuestas del trapecio y Simpson respectivamente. Use en cada caso un valor adecuado para h si se quiere que el error en la aproximación que se obtenga con cada una de ellas sea menor o igual que 10^{-4}. Compruebe que los errores en las aproximaciones obtenidas son efectivamente menores o iguales que 10^{-4}.

Ejercicio 2: Usando `sumsimpson.m` como guía, escriba una función en Matlab que, dados una función f y valores reales a, b, h, calcule una aproximación a $I(f, a, b)$ con tamaño de paso h y la regla compuesta del punto medio.

2.1 Llame a su función para calcular una aproximación a la integral de la función en `f1_lab8.m` entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ con tamaño de paso $h = \frac{\pi}{4}$. Teniendo en cuenta que el valor exacto de esta integral es $2\sqrt{2} - 2$, ¿cuál es el error de la aproximación obtenida?

2.2 Escriba un rutero en MATLAB que calcule aproximaciones a $I(f_1, 0, \frac{\pi}{2})$ con tamaños de paso $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32}, \ldots, \frac{pi}{2^{10}}$ y la regla compuesta del punto medio. Para cada h, calcule el error en la aproximación obtenida. Almacene todos los errores en un vector de tamaño 9.
En clases se vió que esta regla es $\mathcal{O}(h^2)$, es decir, si $Q(f, a, b, h)$ representa la aproximación a $I(f, a, b)$ obtenida con la regla compuesta del punto medio y tamaño de paso h, entonces existe $C \in \mathbb{R},\ C > 0$ tal que

$$|I(f, a, b) - Q(f, a, b, h)| \leq Ch^2.$$

Dado que $\log(Ch^2) = \log C + 2 \log h$, los puntos

$$(\log(h_i), \log(|I(f, a, b) - Q(f, a, b, h_i)|)),\ i = 1, 2, \ldots, 9$$

deberían estar ubicados sobre una recta (en escala logarítmica) con pendiente 2.
Para comprobar esto experimentalmente, grafiquemos

$$(\log(h_i), \log(|I(f, a, b) - Q(f, a, b, h_i)|)),\ i = 1, 2, \ldots, 9 \tag{1}$$

con los valores de h_i especificados antes. Compruebe que la recta resultante tiene pendiente 2 graficando, junto con ella, la recta

$$(\log(h_i), \log(h_i^2)),\ i = 1, 2, \ldots, 9. \tag{2}$$

Observación: Si `h` representa el vector con los distintos tamaños de paso utilizados y `errorres`, el vector con los valores $|I(f, a, b) - Q(f, a, b, h)|$ que se obtienen para cada h, el gráfico con los puntos en (1) se obtiene escribiendo `loglog(h,errores)`, mientras que el gráfico de los puntos en (2) se obtiene con `loglog(h,h.^2)`.

Ejercicio 3: MATLAB tiene dos comandos, `quad` y `quadl`, que permiten calcular aproximaciones a integrales de funciones suaves de forma que el error en la aproximación obtenida sea menor o igual que una tolerancia dada. El primero es un método de bajo orden basado en la regla compuesta de Simpson. El segundo es un método de orden mayor. Recuerde que mientras mayor es el orden del método, más suave debe ser la función a integrar si se quiere que la aproximación calculada sea tan exacta como se espera según el método.

3.1 Utilice el `help` de MATLAB para conocer la sintaxis de estos comandos. Observe que los extremos del intervalo de integración deben ser finitos, es decir, estos comandos no nos permiten aproximar integrales impropias.

3.2 Calcule, con ayuda de `quad` y `quadl`, aproximaciones a las integrales consideradas en los ejercicios anteriores. ¿Son los resultados obtenidos en cada caso tan precisos como usted esperaba?

3.3 Escriba una función en MATLAB , de estructura similar a `f2_lab8.m` y que permita evaluar la función $f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Observe que, dado que el área de la circunferencia unitaria es π y ella está formada por los puntos $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = 1$, los puntos (x, y) que pertenecen a la circunferencia unitaria en el primer cuadrante del plano cartesiano satisfacen $y = \sqrt{1 - x^2}$ y calculando aproximaciones a $4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x$ estamos calculando aproximaciones a π.

3.4 Aproximemos π mediante $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x$. Llame a `quad` o `quadl` con distintos valores de tolerancia $(10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10})$. ¿Obtiene cada vez un número más cercano al valor de π con el que trabaja MATLAB ? ¿Esperaba usted que ocurriera esto? ¿Por qué?

Observación: MATLAB también incluye funciones para el cálculo de integrales dobles (`dblquad`) o para la aproximación de integrales usando cuadratura de Gauss (`quadgk`). Esta última función permite incluso que los extremos del intervalo de integración sean iguales a ∞ (`Inf`) o $-\infty$ (`-Inf`).