UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Pauta–Certamen 1–Tema 1

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la corrección

No rellenar

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:

$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$

- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RRS/CV.
09–Junio–10.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

CERTAMEN
DE
CALCULO NUMERICO

521230

Miercoles 09 de Junio de 2010

COMISION: Carolina Vidal L.
Roberto Riquelme S.

1. El comando Matlab

```
>> [eye(2) 2*ones(2,4);tril(-ones(4,4)) [zeros(2,2);diag([1 2])]]
```

genera la matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; d) ninguna de las anteriores.

2. Indique cuáles son los factores $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$ que se obtienen si se aplica el método de *Gauss* con pivoteo parcial a la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$:

   (a) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

   (b) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

   (c) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

   (d) ninguna de las anteriores.

3. Se desean aproximar los valores dados en la tabla:

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	0	2	10

a una función en el sentido de los mínimos cuadrados. Según su criterio cúal sería la función más aconsejable dentro de las que siguen:

   (a) $f(x) = ae^{bx}$;

   (b) $f(x) = ax^2 + b$;

   (c) $f(x) = ax^3 + bx$;

   (d) $f(x) = ax^5 + bx$.

4. Consideremos la matriz A de orden 4 definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces $\|A\|_\infty$ está dada por:

(a) 2;
(b) 4;
(c) 6;
(d) ninguna de las anteriores.

5. Se aplica el método de eliminación de Gauss, con estrategia de pivoteo parcial, a una matriz $\boldsymbol{A}$ de la forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -5 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Indique cuál de los siguientes es el elemento u_{11} de la matriz triangular superior $\boldsymbol{U}$ que se obtiene:

(a) $u_{11} = -5$;
(b) $u_{11} = 1$;
(c) $u_{11} = 1/5$;
(d) ninguno de los anteriores.

6. El criterio

$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \leq \texttt{TOL}$$

con `TOL` un nivel de tolerancia prefijado del error y $\|\boldsymbol{M}\|$ una norma de la matriz de iteración $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{P}$, es un buen criterio de detención para:

(i) el método de Jacobi;
(ii) el método de Gauss-Seidel;

La respuesta correcta es:

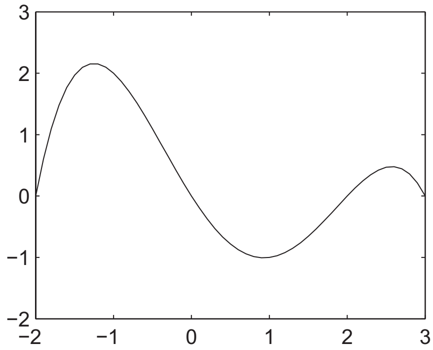
(a) sólo (i);
(b) (i) y (ii);
(c) sólo (ii);
(d) ninguna de las anteriores.

7. Considere la tabla

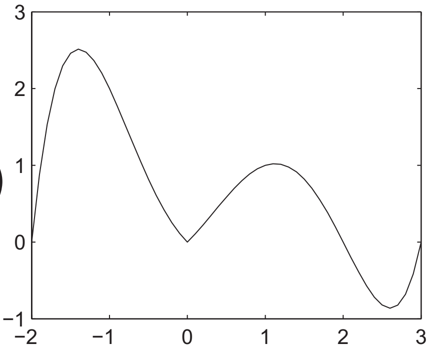
x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1	-1	-1	3	1	1

Llamemos por ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 y ℓ_5 a sus correspondientes polinomios de Lagrange. El gráfico de $2\ell_1 - \ell_3$ es:

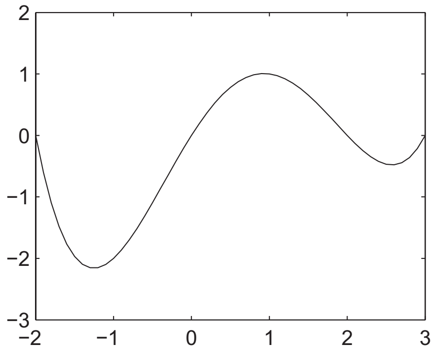
a)



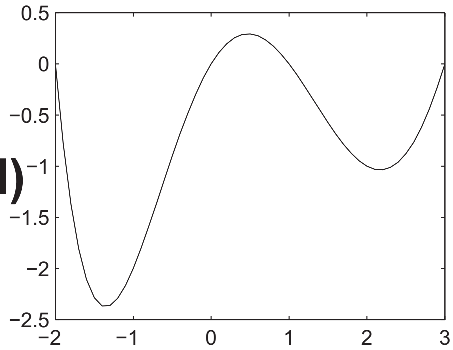
b)



c)



d)



8. La mejor aproximación, en el sentido de los mínimos cuadrados, por polinomios de la forma $a + bx^2$ del conjunto de puntos

x_i	-1.0	0.0	1.0
y_i	2.0	-1.0	3.0

está dada por:

(a) $-1 - \dfrac{7}{2}x^2$;

(b) $\dfrac{7}{2} - x^2$;

(c) $-1 + \dfrac{7}{2}x^2$;

(d) ninguna de las anteriores.

9. ¿Cuál de los siguientes polinomios corresponde al polinomio de interpolación de spline de los siguientes puntos: $(-1,1)$, $(0,2)$ y $(1,0)$ (se consideró que la segunda derivada en los extremos es nula)?

   (a) $q(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$;

   (b) $q(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$;

   (c) $q(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$;

   (d) ninguna de las anteriores.

10. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 100 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \quad ; \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} & \frac{1}{100\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$$

   Al resolver el sistema $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en la solución se comete un error en norma 1, $\|\delta x\|_1$ estrictamente mayor al 1% con respecto de $\|x\|_1$, debido a un error δb en el término del lado derecho. Suponga que no hay errores en los coeficientes de la matriz ni errores de redondeo. Entonces necesariamente,

   (a) $\|\delta b\|_1 > 4 \times 10^{-6}$;

   (b) $0 < \|\delta b\|_1 \leq 4 \times 10^{-6}$;

   (c) $\|\delta b\|_1 = 0$;

   (d) ninguna de las anteriores.

11. Considere la tabla

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1	-1	-1	a	1	1	1

   ¿ Para qué valores del parámetro a **no** existe el polinomio de interpolación de Lagrange asociado a dicha tabla ?.

   (a) $a = 0$;

   (b) $a = -1$;

   (c) $a = 1$;

   (d) ninguna de las anteriores.

12. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Considere las siguientes iteraciones:

(i) resolver $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \\ x_4^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix};$

(ii) resolver $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \\ x_4^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix};$

(iii) resolver $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \\ x_4^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$

Son convergentes:

(a) Sólo (i) y (ii);

(b) Sólo (ii) y (iii);

(c) Sólo (i) y (iii);

(d) ninguna de las anteriores.

13. Dados dos vectores x e y de la misma longitud m, el comando *Matlab* polyfit determina los coeficientes c_i del polinomio de grado n

$$p(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-2} + \cdot + c_n x + c_{n+1},$$

cuya gráfica ajusta los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$, por:

(a) cuadrados mínimos cuando $m = n + 1$;

(b) interpolación cuando $m = n + 1$;

(c) interpolación cuando $n - m = 1$;

(d) ninguna de las anteriores.

14. Considere los siguientes datos:

x	1	2	3
$f(x)$	2	-4	6

y la función definida por tramos:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1, \\ -x^3 + x + 2 & , \quad 1 < x \leq 2, \\ 2x^2 - 12 & , \quad 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Entonces, se tiene:

(a) la función $s(x)$ es una spline cúbica debido a que en cada tramo la función es un polinomio de grado a lo mas tres y además interpola a la función f;

(b) la función $s(x)$ es una interpolada de f, pero no es una spline cúbica debido a que en el intervalo $(2, 3]$, $s(x)$ es un polinomio de grado 2;

(c) la función $s(x)$ es una spline cúbica natural;

(d) ninguna de las anteriores.

15. Es sabido que las potencias de la razón áurea $r^n = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$ verifican la relación de recurrencia: $r^{n+1} = r^{n-1} - r^n$. Esto nos permite generar dichas potencias mediante el algoritmo implementado en Matlab

```
r=zeros(1,100);
r(1)=1;
r(2)=(sqrt(5)-1)/2;
for n=2:100
   r(n+1)=r(n-1)-r(n);
end
```

que nos entrega como resultado r(84)=-8.718579874757182. A partir del programa Matlab y este resultado podemos afirmar que:

(a) el algoritmo esta mal programado;

(b) el algoritmo es inestable;

(c) no se puede opinar, pues se desconoce el error;

(d) ninguna de las anteriores.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Pauta–Certamen 1–Tema 2

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	**d**
2	**a**	b	c	d
3	a	b	c	**d**
4	a	b	**c**	d
5	a	**b**	c	d
6	a	**b**	c	d
7	a	b	**c**	d
8	**a**	b	c	d
9	a	b	c	**d**
10	a	b	**c**	d
11	a	**b**	c	d
12	a	b	c	**d**
13	a	**b**	c	d
14	**a**	b	c	d
15	a	b	**c**	d

Reservado para la corrección

No rellenar

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:
$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$
- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RRS/CV.
09–Junio–10.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

CERTAMEN

DE

CALCULO NUMERICO

521230

Miercoles 09 de Junio de 2010

COMISION: Carolina Vidal L.
Roberto Riquelme S.

1. Consideremos la matriz A de orden 4 definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces $\|A\|_\infty$ está dada por:

(a) 2;
(b) 4;
(c) 6;
(d) ninguna de las anteriores.

2. Se aplica el método de eliminación de Gauss, con estrategia de pivoteo parcial, a una matriz $\boldsymbol{A}$ de la forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -5 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Indique cuál de los siguientes es el elemento u_{11} de la matriz triangular superior $\boldsymbol{U}$ que se obtiene:

(a) $u_{11} = -5$;
(b) $u_{11} = 1$;
(c) $u_{11} = 1/5$;
(d) ninguno de los anteriores.

3. El criterio

$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \leq \mathtt{TOL}$$

con `TOL` un nivel de tolerancia prefijado del error y $\|\boldsymbol{M}\|$ una norma de la matriz de iteración $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{P}$, es un buen criterio de detención para:

(i) el método de Jacobi;
(ii) el método de Gauss-Seidel;

La respuesta correcta es:

(a) sólo (i);
(b) (i) y (ii);
(c) sólo (ii);
(d) ninguna de las anteriores.

4. El comando Matlab

```
>> [eye(2) 2*ones(2,4);tril(-ones(4,4)) [zeros(2,2);diag([1 2])]]
```

genera la matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; d) ninguna de las anteriores.

5. Se desean aproximar los valores dados en la tabla:

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	0	2	10

a una función en el sentido de los mínimos cuadrados. Según su criterio cúal sería la función más aconsejable dentro de las que siguen:

(a) $f(x) = ae^{bx}$;
(b) $f(x) = ax^2 + b$;
(c) $f(x) = ax^3 + bx$;
(d) $f(x) = ax^5 + bx$.

6. Indique cuáles son los factores $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$ que se obtienen si se aplica el método de *Gauss* con pivoteo parcial a la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$:

(a) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;
(b) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
(c) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;
(d) ninguna de las anteriores.

7. ¿Cuál de los siguientes polinomios corresponde al polinomio de interpolación de spline de los siguientes puntos: $(-1,1)$, $(0,2)$ y $(1,0)$ (se consideró que la segunda derivada en los extremos es nula)?

   (a) $q(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2, & -1\le x\le 0 \\ \frac{3}{2}x^3-3x^2-\frac{1}{2}x+2, & 0\le x\le 1 \end{cases};$

   (b) $q(x)=\begin{cases} -\frac{3}{2}x^3-3x^2-\frac{1}{2}x+2, & -1\le x\le 0 \\ \frac{3}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2, & 0\le x\le 1 \end{cases};$

   (c) $q(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2, & -1\le x\le 0 \\ \frac{3}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2, & 0\le x\le 1 \end{cases};$

   (d) ninguna de las anteriores.

8. Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 100 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}; \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} & \frac{1}{100\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$$

   Al resolver el sistema $Ax=b$ con $b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, en la solución se comete un error en norma 1, $\|\delta x\|_1$ estrictamente mayor al 1% con respecto de $\|x\|_1$, debido a un error δb en el término del lado derecho. Suponga que no hay errores en los coeficientes de la matriz ni errores de redondeo. Entonces necesariamente,

   (a) $\|\delta b\|_1 > 4\times 10^{-6}$;

   (b) $0<\|\delta b\|_1\le 4\times 10^{-6}$;

   (c) $\|\delta b\|_1 = 0$;

   (d) ninguna de las anteriores.

9. Considere la tabla

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1	-1	-1	a	1	1	1

   ¿ Para qué valores del parámetro a **no** existe el polinomio de interpolación de Lagrange asociado a dicha tabla ?.

   (a) $a=0$;

   (b) $a=-1$;

   (c) $a=1$;

   (d) ninguna de las anteriores.

10. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Considere las siguientes iteraciones:

(i) resolver $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix};$

(ii) resolver $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix};$

(iii) resolver $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$

Son convergentes:

(a) Sólo (i) y (ii);

(b) Sólo (ii) y (iii);

(c) Sólo (i) y (iii);

(d) ninguna de las anteriores.

11. Dados dos vectores x e y de la misma longitud m, el comando *Matlab* polyfit determina los coeficientes c_i del polinomio de grado n

$$p(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-2} + \cdot + c_n x + c_{n+1},$$

cuya gráfica ajusta los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$, por:

(a) cuadrados mínimos cuando $m = n + 1$;

(b) interpolación cuando $m = n + 1$;

(c) interpolación cuando $n - m = 1$;

(d) ninguna de las anteriores.

12. Considere los siguientes datos:

x	1	2	3
$f(x)$	2	-4	6

y la función definida por tramos:

$$s(x) = \begin{cases} x^3+1 & , \quad 0 \leq x \leq 1, \\ -x^3+x+2 & , \quad 1 < x \leq 2, \\ 2x^2-12 & , \quad 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Entonces, se tiene:

(a) la función $s(x)$ es una spline cúbica debido a que en cada tramo la función es un polinomio de grado a lo mas tres y además interpola a la función f;

(b) la función $s(x)$ es una interpolada de f, pero no es una spline cúbica debido a que en el intervalo $(2,3]$, $s(x)$ es un polinomio de grado 2;

(c) la función $s(x)$ es una spline cúbica natural;

(d) ninguna de las anteriores.

13. Es sabido que las potencias de la razón áurea $r^n = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$ verifican la relación de recurrencia: $r^{n+1} = r^{n-1} - r^n$. Esto nos permite generar dichas potencias mediante el algoritmo implementado en Matlab

```
r=zeros(1,100);
r(1)=1;
r(2)=(sqrt(5)-1)/2;
for n=2:100
   r(n+1)=r(n-1)-r(n);
end
```

que nos entrega como resultado r(84)=-8.718579874757182. A partir del programa Matlab y este resultado podemos afirmar que:

(a) el algoritmo esta mal programado;

(b) el algoritmo es inestable;

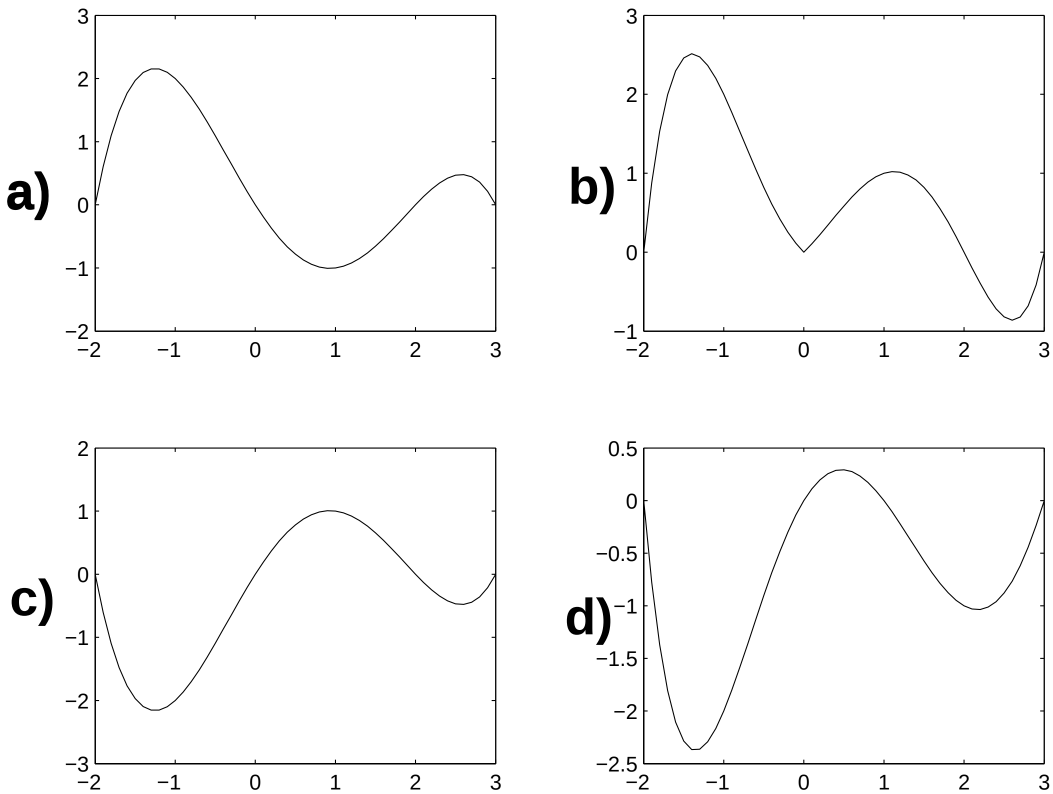
(c) no se puede opinar, pues se desconoce el error;

(d) ninguna de las anteriores.

14. Considere la tabla

$\boldsymbol{x}_i$	-2	-1	0	1	2	3
$\boldsymbol{y}_i$	-1	-1	-1	3	1	1

Llamemos por ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 y ℓ_5 a sus correspondientes polinomios de Lagrange. El gráfico de $2\ell_1 - \ell_3$ es:



15. La mejor aproximación, en el sentido de los mínimos cuadrados, por polinomios de la forma $a + bx^2$ del conjunto de puntos

x_i	-1.0	0.0	1.0
y_i	2.0	-1.0	3.0

está dada por:

(a) $-1 - \dfrac{7}{2}x^2$;

(b) $\dfrac{7}{2} - x^2$;

(c) $-1 + \dfrac{7}{2}x^2$;

(d) ninguna de las anteriores.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Pauta–Certamen 1–Tema 3

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la corrección

No rellenar

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:

$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$

- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RRS/CV.
09–Junio–10.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

CERTAMEN

DE

CALCULO NUMERICO

521230

Miercoles 09 de Junio de 2010

COMISION: Carolina Vidal L.

Roberto Riquelme S.

1. Considere los siguientes datos:

x	1	2	3
$f(x)$	2	-4	6

y la función definida por tramos:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1, \\ -x^3 + x + 2 & , \quad 1 < x \leq 2, \\ 2x^2 - 12 & , \quad 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Entonces, se tiene:

(a) la función $s(x)$ es una spline cúbica natural;

(b) la función $s(x)$ es una spline cúbica debido a que en cada tramo la función es un polinomio de grado a lo mas tres y además interpola a la función f;

(c) la función $s(x)$ es una interpolada de f, pero no es una spline cúbica debido a que en el intervalo $(2, 3]$, $s(x)$ es un polinomio de grado 2;

(d) ninguna de las anteriores.

2. Es sabido que las potencias de la razón áurea $r^n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$ verifican la relación de recurrencia: $r^{n+1} = r^{n-1} - r^n$. Esto nos permite generar dichas potencias mediante el algoritmo implementado en Matlab

```
r=zeros(1,100);
r(1)=1;
r(2)=(sqrt(5)-1)/2;
for n=2:100
   r(n+1)=r(n-1)-r(n);
end
```

que nos entrega como resultado r(84)=-8.718579874757182. A partir del programa Matlab y este resultado podemos afirmar que:

(a) no se puede opinar, pues se desconoce el error;

(b) el algoritmo esta mal programado;

(c) el algoritmo es inestable;

(d) ninguna de las anteriores.

3. Se desean aproximar los valores dados en la tabla:

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	0	2	10

a una función en el sentido de los mínimos cuadrados. Según su criterio cúal sería la función más aconsejable dentro de las que siguen:

(a) $f(x) = ae^{bx}$;

(b) $f(x) = ax^2 + b$;

(c) $f(x) = ax^3 + bx$;

(d) $f(x) = ax^5 + bx$.

4. El comando Matlab

```
>> [eye(2) 2*ones(2,4);tril(-ones(4,4)) [zeros(2,2);diag([1 2])]]
```

genera la matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; d) ninguna de las anteriores.

5. Indique cuáles son los factores $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$ que se obtienen si se aplica el método de *Gauss* con pivoteo parcial a la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$:

(a) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(c) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(d) ninguna de las anteriores.

6. El criterio
$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \leq \texttt{TOL}$$
con TOL un nivel de tolerancia prefijado del error y $\|\boldsymbol{M}\|$ una norma de la matriz de iteración $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{P}$, es un buen criterio de detención para:

   (i) el método de Jacobi;

   (ii) el método de Gauss-Seidel;

   La respuesta correcta es:

   (a) sólo (i);

   (b) (i) y (ii);

   (c) sólo (ii);

   (d) ninguna de las anteriores.

7. Consideremos la matriz A de orden 4 definida por
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$
Entonces $\|A\|_\infty$ está dada por:

   (a) 2;

   (b) 4;

   (c) 6;

   (d) ninguna de las anteriores.

8. Se aplica el método de eliminación de Gauss, con estrategia de pivoteo parcial, a una matriz $\boldsymbol{A}$ de la forma
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -5 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$
Indique cuál de los siguientes es el elemento u_{11} de la matriz triangular superior $\boldsymbol{U}$ que se obtiene:

   (a) $u_{11} = -5$;

   (b) $u_{11} = 1$;

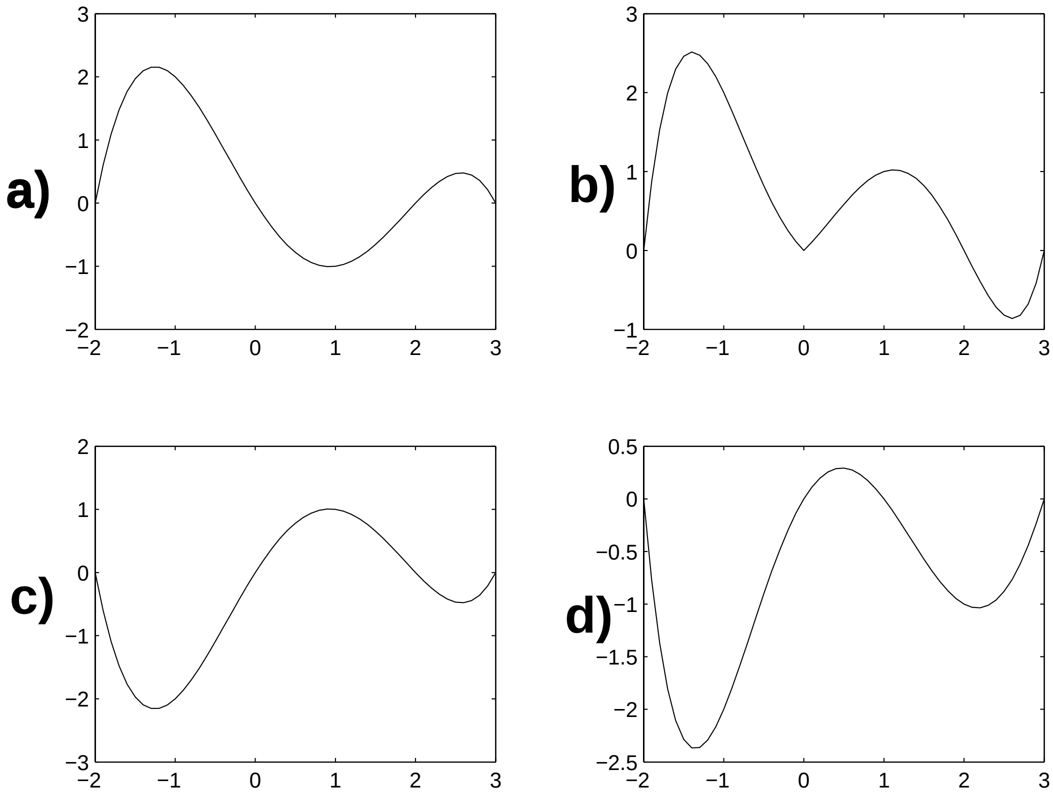
   (c) $u_{11} = 1/5$;

   (d) ninguno de los anteriores.

9. Considere la tabla

$\boldsymbol{x}_i$	-2	-1	0	1	2	3
$\boldsymbol{y}_i$	-1	-1	-1	3	1	1

Llamemos por ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 y ℓ_5 a sus correspondientes polinomios de Lagrange. El gráfico de $2\ell_1 - \ell_3$ es:



10. La mejor aproximación, en el sentido de los mínimos cuadrados, por polinomios de la forma $a + bx^2$ del conjunto de puntos

x_i	-1.0	0.0	1.0
y_i	2.0	-1.0	3.0

está dada por:

(a) $-1 + \frac{7}{2}x^2$;

(b) $-1 - \frac{7}{2}x^2$;

(c) $\frac{7}{2} - x^2$;

(d) ninguna de las anteriores.

11. ¿Cuál de los siguientes polinomios corresponde al polinomio de interpolación de spline de los siguientes puntos: $(-1,1)$, $(0,2)$ y $(1,0)$ (se consideró que la segunda derivada en los extremos es nula)?

    (a) $q(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}\,x^3 - \frac{9}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + 2, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{3}{2}\,x^3 - 3\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + 2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$;

    (b) $q(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}\,x^3 - 3\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + 2, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{3}{4}\,x^3 - \frac{9}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + 2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$;

    (c) $q(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}\,x^3 - \frac{9}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + 2, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{3}{4}\,x^3 - \frac{9}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + 2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$;

    (d) ninguna de las anteriores.

12. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 100 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \quad ; \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} & \frac{1}{100\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en la solución se comete un error en norma 1, $\|\delta x\|_1$ estrictamente mayor al 1% con respecto de $\|x\|_1$, debido a un error δb en el término del lado derecho. Suponga que no hay errores en los coeficientes de la matriz ni errores de redondeo. Entonces necesariamente,

   (a) $\|\delta b\|_1 > 4 \times 10^{-6}$;

   (b) $0 < \|\delta b\|_1 \le 4 \times 10^{-6}$;

   (c) $\|\delta b\|_1 = 0$;

   (d) ninguna de las anteriores.

13. Considere la tabla

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1	-1	-1	a	1	1	1

¿ Para qué valores del parámetro a **no** existe el polinomio de interpolación de Lagrange asociado a dicha tabla ?.

   (a) $a = 0$;

   (b) $a = -1$;

   (c) $a = 1$;

   (d) ninguna de las anteriores.

14. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Considere las siguientes iteraciones:

(i) resolver $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \\ x_4^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix};$

(ii) resolver $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \\ x_4^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix};$

(iii) resolver $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \\ x_4^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$

Son convergentes:

(a) Sólo (i) y (ii);

(b) Sólo (ii) y (iii);

(c) Sólo (i) y (iii);

(d) ninguna de las anteriores.

15. Dados dos vectores x e y de la misma longitud m, el comando *Matlab* polyfit determina los coeficientes c_i del polinomio de grado n

$$p(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-2} + \cdot + c_n x + c_{n+1},$$

cuya gráfica ajusta los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$, por:

(a) cuadrados mínimos cuando $m = n + 1$;

(b) interpolación cuando $m = n + 1$;

(c) interpolación cuando $n - m = 1$;

(d) ninguna de las anteriores.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Pauta–Certamen 1–Tema 4

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la corrección

No rellenar

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:
$$\text{Calificación} = 1 + \max\left\{0, \frac{6}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right)\right\}.$$
- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RRS/CV.
09–Junio–10.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

CERTAMEN

DE

CALCULO NUMERICO

521230

Miercoles 09 de Junio de 2010

COMISION: Carolina Vidal L.
Roberto Riquelme S.

1. El comando Matlab

```
>> [eye(2) 2*ones(2,4);tril(-ones(4,4)) [zeros(2,2);diag([1 2])]]
```

genera la matriz:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; d) ninguna de las anteriores.

2. Se desean aproximar los valores dados en la tabla:

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	0	2	10

a una función en el sentido de los mínimos cuadrados. Según su criterio cúal sería la función más aconsejable dentro de las que siguen:

(a) $f(x) = ax^2 + b$;

(b) $f(x) = ax^3 + bx$;

(c) $f(x) = ax^5 + bx$.

(d) $f(x) = ae^{bx}$;

3. Indique cuáles son los factores $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$ que se obtienen si se aplica el método de *Gauss* con pivoteo parcial a la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$:

(a) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(c) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) ninguna de las anteriores.

4. Se aplica el método de eliminación de Gauss, con estrategia de pivoteo parcial, a una matriz $\boldsymbol{A}$ de la forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -5 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

   Indique cuál de los siguientes es el elemento u_{11} de la matriz triangular superior $\boldsymbol{U}$ que se obtiene:

   (a) $u_{11} = 1/5$;
   (b) $u_{11} = -5$;
   (c) $u_{11} = 1$;
   (d) ninguno de los anteriores.

5. Consideremos la matriz A de orden 4 definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

   Entonces $\|A\|_\infty$ está dada por:

   (a) 2;
   (b) 4;
   (c) 6;
   (d) ninguna de las anteriores.

6. El criterio

$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \leq \texttt{TOL}$$

   con `TOL` un nivel de tolerancia prefijado del error y $\|\boldsymbol{M}\|$ una norma de la matriz de iteración $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{P}$, es un buen criterio de detención para:

   (i) el método de Jacobi;
   (ii) el método de Gauss-Seidel;

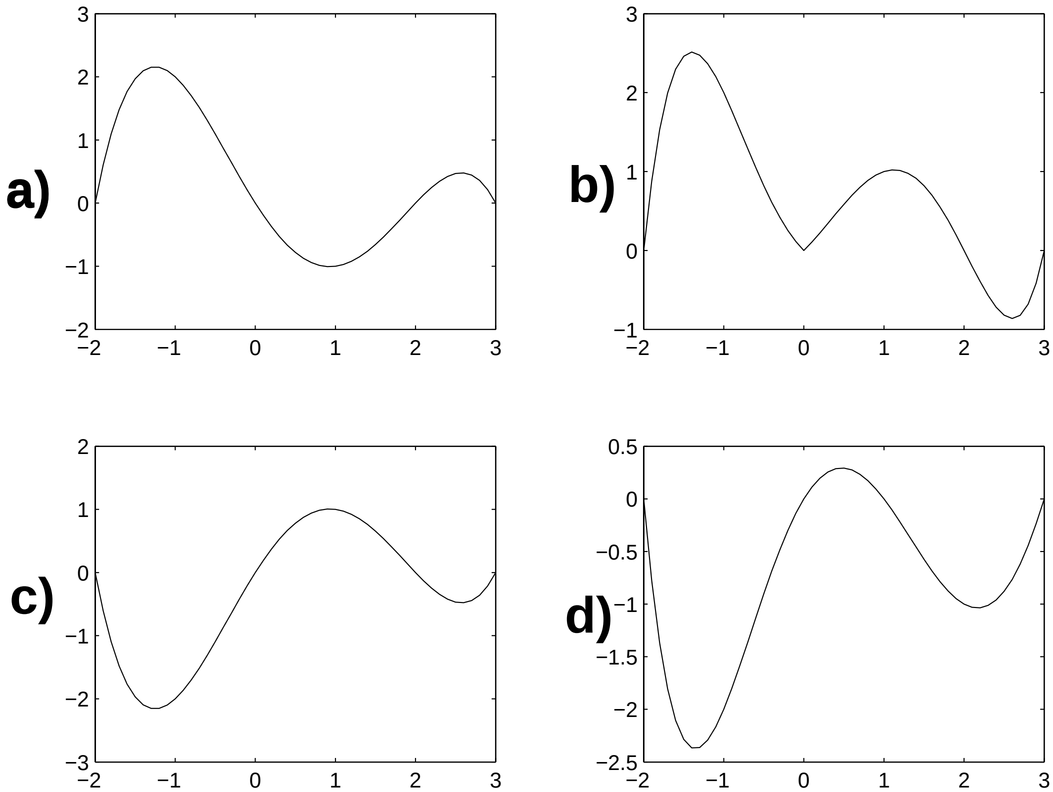
   La respuesta correcta es:

   (a) sólo (i);
   (b) (i) y (ii);
   (c) sólo (ii);
   (d) ninguna de las anteriores.

7. Considere la tabla

$\boldsymbol{x}_i$	-2	-1	0	1	2	3
$\boldsymbol{y}_i$	-1	-1	-1	3	1	1

Llamemos por ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 y ℓ_5 a sus correspondientes polinomios de Lagrange. El gráfico de $2\ell_1 - \ell_3$ es:



8. La mejor aproximación, en el sentido de los mínimos cuadrados, por polinomios de la forma $a + bx^2$ del conjunto de puntos

x_i	-1.0	0.0	1.0
y_i	2.0	-1.0	3.0

está dada por:

(a) $-1 - \frac{7}{2}x^2$;

(b) $\frac{7}{2} - x^2$;

(c) $-1 + \frac{7}{2}x^2$;

(d) ninguna de las anteriores.

9. ¿Cuál de los siguientes polinomios corresponde al polinomio de interpolación de spline de los siguientes puntos: $(-1,1)$, $(0,2)$ y $(1,0)$ (se consideró que la segunda derivada en los extremos es nula)?

   (a) $q(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$;

   (b) $q(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$;

   (c) $q(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$;

   (d) ninguna de las anteriores.

10. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 100 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \quad ; \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} & \frac{1}{100\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en la solución se comete un error en norma 1, $\|\delta x\|_1$ estrictamente mayor al 1% con respecto de $\|x\|_1$, debido a un error δb en el término del lado derecho. Suponga que no hay errores en los coeficientes de la matriz ni errores de redondeo. Entonces necesariamente,

   (a) $0 < \|\delta b\|_1 \le 4 \times 10^{-6}$;

   (b) $\|\delta b\|_1 > 4 \times 10^{-6}$;

   (c) $\|\delta b\|_1 = 0$;

   (d) ninguna de las anteriores.

11. Considere la tabla

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1	-1	-1	a	1	1	1

¿ Para qué valores del parámetro a **no** existe el polinomio de interpolación de Lagrange asociado a dicha tabla ?.

   (a) $a = 0$;

   (b) $a = -1$;

   (c) $a = 1$;

   (d) ninguna de las anteriores.

12. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Considere las siguientes iteraciones:

(i) resolver $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \\ x_4^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix};$

(ii) resolver $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \\ x_4^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix};$

(iii) resolver $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \\ x_4^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$

Son convergentes:

(a) Sólo (i) y (ii);

(b) Sólo (ii) y (iii);

(c) Sólo (i) y (iii);

(d) ninguna de las anteriores.

13. Dados dos vectores x e y de la misma longitud m, el comando *Matlab* polyfit determina los coeficientes c_i del polinomio de grado n

$$p(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n-2} + \cdot + c_n x + c_{n+1},$$

cuya gráfica ajusta los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$, por:

(a) interpolación cuando $m = n + 1$;

(b) cuadrados mínimos cuando $m = n + 1$;

(c) interpolación cuando $n - m = 1$;

(d) ninguna de las anteriores.

14. Considere los siguientes datos:

x	1	2	3
$f(x)$	2	-4	6

y la función definida por tramos:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1, \\ -x^3 + x + 2 & , \quad 1 < x \leq 2, \\ 2x^2 - 12 & , \quad 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Entonces, se tiene:

(a) la función $s(x)$ es una spline cúbica debido a que en cada tramo la función es un polinomio de grado a lo mas tres y además interpola a la función f;

(b) la función $s(x)$ es una interpolada de f, pero no es una spline cúbica debido a que en el intervalo $(2, 3]$, $s(x)$ es un polinomio de grado 2;

(c) la función $s(x)$ es una spline cúbica natural;

(d) ninguna de las anteriores.

15. Es sabido que las potencias de la razón áurea $r^n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$ verifican la relación de recurrencia: $r^{n+1} = r^{n-1} - r^n$. Esto nos permite generar dichas potencias mediante el algoritmo implementado en Matlab

```
r=zeros(1,100);
r(1)=1;
r(2)=(sqrt(5)-1)/2;
for n=2:100
   r(n+1)=r(n-1)-r(n);
end
```

que nos entrega como resultado r(84)=-8.718579874757182. A partir del programa Matlab y este resultado podemos afirmar que:

(a) no se puede opinar, pues se desconoce el error;

(b) el algoritmo esta mal programado;

(c) el algoritmo es inestable;

(d) ninguna de las anteriores.