UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

MAT 521 218 ***Ecuaciones Diferenciales Ordinarias***

FCHH/EHH/LNB/FPV/fpv **(03.06.2002)**

Certamen 2

I. Aplique el *Principio de Superposición* para construir la solución general de:

$$y'' + y = x \cdot e^{x} + 2e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

¿Es posible construir la solución general de la ecuación de Euler

$$x^2 y'' + xy' + y = x \ln(x), \quad x > 0$$

a partir de la solución de (1)? **Fundamente su respuesta**.

SOLUCIÓN

La ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$, con raices $r = \pm i$. Luego, la solución de la EDO homogénea es

$$y_h(x) = c_1 cos x + c_2 \sin x.$$

Para la solución particular usamos superposición:

(a) $y_1'' + y_1 = xe^x, \implies y_p(x) = (Ax + B)e^x$. Como

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^x + (Ax + B)e^x \\ y_p'' &= 2Ae^x + (Ax + B)e^x \\ y_p'' + y_p &= 2Ae^x + 2(Ax + B)e^x \\ &= 2(A + B)e^x + 2Axe^x = xe^x, \end{aligned}$$

se tiene que $A = \frac{1}{2}$ y $B = -\frac{1}{2}$. Luego, $y_{p1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)e^x$.

(b) $y_2'' + y_2 = 2e^{-x}, \implies y_{p2} = Ce^{-x}$. Como $y_{2p}' = -Ce^{-x}$, $y_{2p}'' = Ce^{-x}$ y $y_{2p}'' + y_{2p} = 2Ce^{-x} = 2e^{-x}$ se tiene que $C = 1$, y luego $y_{2p}(x) = e^{-x}$.

La solución particular de la EDO es

$$y_p(x) = \frac{1}{2}(x - 1)e^x + e^{-x}$$

y la solución general de la EDO es

$$y(x) = c_1 cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}(x - 1)e^x + e^{-x},$$

con c_1 y c_2 por determinar.

La EDO

$$x^2 y'' + xy' + y = x \ln(x), \quad x > 0$$

pues

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}).\end{aligned}$$

La solución de esta EDO es porta (a):

$$y(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{2}(t-1)e^t.$$

Como $x = e^t \iff \ln x = t$, la solución de la EDO de Euler es

$$y(x) = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) + \frac{1}{2}x(\ln x - 1),$$

con c_1, c_2 constantes reales por determinar.

II. Considere la *Ecuación Diferencial Lineal Normal de Coeficientes Constantes*:

$$Ly = h \tag{2}$$

Fundamente su respuesta a las siguientes preguntas. Construir **explícitamente** la solución **general** de la ecuación (2), sólo en una de las situaciones planteadas.

[**(30 Puntos.)**]

(2.1) Si $h(t) = 2\tan(2t)$ y L es un operador de segundo orden donde una de las raíces de la ecuación característica es $r = -2i$:

- Escribir explícitamente (2):

$y'' + 4y = 2\tan(2t)$ **(02 puntos)**

- ¿Cuál es la forma de la solución homogénea asociada a (2)?

$r = \pm 2i$ **Conjugadas complejas.**

$\Rightarrow y_h(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$ **(03 puntos)**

- ¿Qué método debe aplicar para construir la solución particular de (2)?

Var. par. $\Rightarrow$ $y_p(t) = c_1(t)\cos(2t) + c_2(t)\sin(2t)$ **(03 puntos)**

$W[\cos(2t), \sin(2t)] = 2$

$$c_1(t) = -\int_{t_0}^{t}\frac{2\tan(2x)\cos(2x)}{2}dx = \int_{t_0}^{t}\sin(2x)dx = \frac{1}{2}\cos(2t) + k$$

$$c_2(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{2\tan(2x)\sin(2x)}{2}dx = \int_{t_0}^{t}\frac{1-\cos^2(2x)}{\cos(2x)}dx = \frac{1}{2}\ln|\sec(2t)+\tan(2t)| - \frac{1}{2}\sin(2t) + k$$

- Escribir explícitamente (2):

$$\boldsymbol{y'' - 6y' + 9y = te^{3t}} \quad \textbf{(02 puntos)}$$

- ¿Cuál es la forma de la solución homogénea asociada a (2)?

$$\boldsymbol{r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r = 3} \quad \textbf{(doble).}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow y_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}} \quad \textbf{(03 puntos)}$$

- ¿Cuál es el método más apropiado para construir la solución particular de (2)?

Coef. Ind. $\Rightarrow \quad \boldsymbol{y_p(t) = At^2e^{3t} + Bt^3e^{3t}}$ **(03 puntos)**

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{y_p'(t) = A(2te^{3t} + 3t^2e^{3t}) + B(3t^2e^{3t} + 3t^3e^{3t})}\\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{y_p''(t) = A(2e^{3t} + 12te^{3t} + 9t^2e^{3t}) + B(6te^{3t} + 18t^2e^{3t} + 9t^3e^{3t})}\\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{2Ae^{3t} + 6Bte^{3t} = te^{3t}} \quad \textbf{(04 puntos)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{y_p(t) = \frac{1}{6}t^3e^{3t}} \quad \textbf{(02 puntos)}$$

(2.3) Si las raíces de la ecuación característica son $\boldsymbol{r = 0}$ con multiplicidad algebraica $\boldsymbol{2}$ y $\boldsymbol{r = \pm i}$, y el término forzante es $\boldsymbol{h(t) = 4\cos(t)}$:

- Escribir explícitamente (2):

$$\boldsymbol{y^{iv} + y'' = 4\cos(t)} \quad \textbf{(02 puntos)}$$

- ¿Cuál es la forma de la solución homogénea asociada a (2)?

$$\boldsymbol{y_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3\cos(t) + c_4\sin(t)} \quad \textbf{(03 puntos)}$$

- ¿Cuál es el método más apropiado para construir la solución particular ?

Coef. Ind. $\Rightarrow \quad \boldsymbol{y_p(t) = At\cos(t) + Bt\sin(t)}$ **(03 puntos)**

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{y_p'(t) = A(\cos(t) - t\sin(t)) + B(\sin(t) + t\cos(t))}\\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{y_p''(t) = A(-2\sin(t) - t\cos(t)) + B(\sin(t) + \cos(t) - t\sin(t))}\\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{y_p'''(t) = A(-3\cos(t) + t\sin(t)) + B(\cos(t) - 2\sin(t) - t\cos(t))}\\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{y_p^{iv}(t) = A(4\sin(t) + t\cos(t)) + B(-\sin(t) - 3\cos(t) + t\sin(t))}\\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{2A\sin(t) - 2B\cos(t) = 4\cos(t)} \quad \textbf{(05 puntos)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{y_p(t) = -2t\sin(t)} \quad \textbf{(02 puntos)}$$

III. Una masa que pesa $\mathbf{4}$ [Kg] se sujeta a un resorte suspendido del techo. Esto ocasiona a que el resorte se estire $\mathbf{196}$ [cm] y (al sistema o la masa ?) se le imparte una velocidad de $\mathbf{2}$ $[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ dirigida hacia abajo.

(3.1) ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela el movimiento de la masa?.

3.1.1. ¿Qué frecuencia de forzamiento debería evitarse para que el sistema no entre en resonancia?.

3.1.2. ¿Cuál debería ser la masa de un sistema masa-resorte, para que entre en resonancia si el término forzante oscila con una frecuencia de $\mathbf{30}$ [Hz]?.

(3.2) Si al sistema masa resorte suspendido del techo, se le incorpora un dispositivo amortiguador de constante de amortiguamiento $\boldsymbol{c} = \mathbf{8\sqrt{5}}$ $[\frac{\text{kg}}{\text{s}}]$:

3.2.1. ¿Cuál es la ecuación que modela la dinámica del sistema, en tal caso?.

3.2.2. Clasifique el movimiento y esboce su gráfica.

3.2.3. Determine el desplazamiento máximo de la masa, estudiando la velocidad del desplazamiento.

3.2.4. Si en el instante $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$, al sistema masa-resorte-amortiguador, se le aplica una fuerza externa $\boldsymbol{h(t)} = \mathbf{20\sin(3t)}$?.'Cuál es la *solución estacionaria* del sistema?.

$\boxed{\text{SOLUCIÓN}}$

3.2.1. Si $\boldsymbol{l_0} = \mathbf{1.96}\,[\boldsymbol{m}]$, entonces por la ley de Hooke, $\boldsymbol{kl_0} = \boldsymbol{mg}$, se encuentra que la rigidez del sistema es $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{l_0}} = \frac{\mathbf{(4)(9.8)}}{\mathbf{1.96}} = \mathbf{20}\,[\frac{\boldsymbol{kg}}{\boldsymbol{s^2}}]$.
La frecuencia natural del sistema es $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}} = \sqrt{\mathbf{5}} \approx \mathbf{2.236}\,[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}]$. Luego, para evitar resonancia las frecuencias de forzamiento deben ser diferentes de $\mathbf{2.236}\,[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}]$.

3.2.2. Como el período del movimiento del sistema es $\boldsymbol{P} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{w_0}}$ y luego la frecuencia en $[\boldsymbol{Hz}]$ es $\boldsymbol{f} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P}}$ y $\boldsymbol{w_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}$ se tiene que la masa que debería tener el sistema para entrar en resonancia es

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{k}}{[\mathbf{(30)(2\pi)}]^2} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3600\pi^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{180\pi^2}}\,[\boldsymbol{kg}].$$

3.2.3. La ecuación diferencial que entrega la dinámica del sistema es

$$\mathbf{4x'' + 8\sqrt{5}x' + 20x = 0,\ \ x(0) = 0.50,\ \ x'(0) = 2.}$$

La ecuación auxiliar es $\boldsymbol{r^2 + 2\sqrt{5}r + 5 = 0}$, la cual tiene una raíz doble $\boldsymbol{r = -\sqrt{5}}$. Luego, la solución es dada por

$$\boldsymbol{x(t) = c_1 e^{-\sqrt{5}t} + c_2 t e^{-\sqrt{5}t}},$$

donde las constantes $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$ de determinan resolviendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x(0)} &= \mathbf{0.50} = \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{x'(0)} &= \mathbf{2} = -\sqrt{\mathbf{5}}\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}. \end{aligned}$$

Así, $\boldsymbol{c_1} = \mathbf{0.50}$ y $\boldsymbol{c_2} = \mathbf{3.12}$ y la solución es

$$\boldsymbol{x(t) = 0.50e^{-\sqrt{5}t} + 3.12te^{-\sqrt{5}t}}.$$

3.2.4. La Solución estacionaria, vía coeficientes indeterminados, es dada por

$$\boldsymbol{x(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t).}$$

Derivando y sustituyendo en la EDO

$$\boldsymbol{4x'' + 8\sqrt{5}x' + 20x = 20\sin(3t)}$$

se llega al sistema

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{-16A + 24\sqrt{5}B} & = & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-24\sqrt{5}A - 16B} & = & \boldsymbol{20,} \end{array}$$

de donde resulta $\boldsymbol{A = -0.699}$ y $\boldsymbol{B = -0.426}$. Por lo tanto la solución estacionaria es

$$\boldsymbol{x(t) = -0.699\cos(3t) - 0.426\sin(3t).}$$

(55 pts.)