UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 4

INTERPOLACIÓN EN OCTAVE

OCTAVE incluye funciones para calcular y manipular funciones interpolantes; entre ellas:

`vander(x)`	Retorna la matriz de Vandermonde de una colección de abscisas en el vector `x`.
`interp1(x,y,xq)`	Retorna los valores interpolados de una función lineal por trozos que pasa por los puntos de coordenadas `x,y` en ciertos puntos `xq`.
`polyfit(x,y,n)`	Retorna los coeficientes del polinomio de grado menor o igual a `n` que mejor se ajusta a los datos `x` e `y`. Para evaluar el polinomio se debe usar `polyval`.
`spline(x,y,xq)`	Retorna los valores interpolados de un spline cúbico que pasa por los puntos de coordenadas `x,y` en ciertos puntos `xq`.

1. Interpolación polinomial

De la teoría sabemos que dado un conjunto de $n+1$ puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ que no repitan abscisas (esto es, $i \neq j \implies x_i \neq x_j$), existe un único polinomio interpolante de grado menor o igual a n. Para el cálculo de este polinomio se debe resolver un sistema de ecuaciones que se puede estructurar dependiendo de la base del espacio de polinomios que se elija (base canónica usual o la base de polinomios de Lagrange).

El rutero interpolacion1.m muestra la aproximación y gráfica de un polinomio interpolante para un conjunto de puntos muestreados de la función `sin`. Comente cada instrucción que se presenta en este programa.

2. Polinomios de Lagrange

Utilizar la matriz de Vandermonde para muchos puntos no es muy buena idea porque ésta puede llevar a errores de representación en la memoria del computador (overflow, underflow o redondeo). Una alternativa, para evitar resolver un problema que involucre a una matriz de Vandermonde es utilizar los polinomios de Lagrange. En general, un polinomio interpolante tiene la forma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right).$$

Tal interpolación se puede evaluar con la siguiente función

```
function v = polyinterp(x,y,u)
    n = length(x);
    v = zeros(size(u));
    for k = 1:n
```

```
    w = ones(size(u));
    for i = 1:n
      if i ~= k
        w = (u-x(i))./(x(k)-x(i)).*w;
      end
    end
    v = v + w*y(k);
  end
```

donde el conjunto de puntos de interpolación tienen coordenadas representadas en los vectores `x,y`, las abscisas de los puntos interpolados son los elementos de `u` y las ordenadas de los puntos interpolados son los elementos de la salida `v`. Las siguientes instrucciones nos permiten graficar el polinomio interpolante de una función.

```
x=-2:1:2;
y=sin(x.^3);
figure;
plot(x,y,'o'); hold on
t=-2:0.01:2;
plot(t,polyinterp(x,y,t),'r');
plot(t,sin(t.^3),'g');
legend('Puntos','Interpolacion','Curva original');
```

3. Ejemplos

Los siguientes ejemplos muestran ejecuciones de las funciones de interpolación

1. Cálculo de los coeficientes de un polinomio con `vander`

```
x=1:10;
y=sin(x.^2);
coef=vander(x)\y
```

2. Cálculo y gráfica de un polinomio interpolante con `polyinterp`

```
x=0:1:10;
y=exp(x.^2);
t=-10:0.01:10;
v=polyinterp(x,y,t);
figure;
plot(x,y,'o',t,exp(t.^2),'-',t,v,'--');
```

3. Gráfica de un spline con `spline`.

```
x = 0:10;
y = sin(x);
xx = 0:.25:10;
yy = spline(x,y,xx);
plot(x,y,'o',xx,yy,'--')
```

4. Ejercicios

1. En un rutero llamado `interpolacion.m` cargue el archivo de OCTAVE data.mat usando la función `load`. Este archivo contiene tiempo y longitud de las mediciones del movimiento de un resorte en cierto experimento.

   En el rutero `interpolacion.m`

   a) grafique los datos cargados usando la función `plot` con asteriscos azules,

   b) grafique el polinomio interpolante de los datos cargados.

2. Considere $f(x) = \ln(x)$. El objetivo de este ejercicio es verificar experimentalente la estimación del error de interpolación.

   a) Determine, mediante el comando `polyfit` de OCTAVE un polinomio que interpole a f en los puntos $x_0 = 1, x_1 = 2$ y $x_2 = 3$. Escoja el grado de este polinomio de forma que su existencia y unicidad estén aseguradas.

   b) Grafique, en un mismo gráfico, a la función f y al polinomio calculado, evaluados en 200 puntos entre 1 y 3. Recuerde que puede utilizar el comando `polyval` para evaluar al polinomio. ¿Cómo se reconoce en el gráfico que p interpola a f, así como los puntos de interpolación?

   c) Grafique, en un mismo gráfico, los valores $|f(x_i) - p(x_i)|$ y

$$\frac{1}{3!}\max_{x\in[1,\,3]}\left|f'''(x)\right| |(x_i-1)(x_i-2)(x_i-3)|$$

   con $x_i = 1 + ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, 100,\ h = \dfrac{1}{50}$. ¿Se cumple

$$|f(x_i) - p(x_i)| \leq \frac{1}{3!}\max_{x\in[1,\,3]}\left|f'''(x)\right| |(x_i-1)(x_i-2)(x_i-3)|\,,\ i = 0, 1, 2, \ldots, 100\,?$$

3. Construya un rutero que dibuje un polinomio interpolante de un conjunto de datos y sus primeras dos derivadas en distintos gráficos de una misma figura. Para esto ocupe la función `vander` y calcule explícitamente los coeficientes del polinomio, luego derive estos polinomios. Finalmente, para anexar varios gráficos dentro de una figura use la función `subplot`.

4. En el archivo pesoestatura.mat se encuentran los datos históricos de peso y estatura de dos hermanos gemelos nacidos el 24 de abril de 1987. Use la función `load` para leer el archivo y luego utilice la función `datenum`, para convertir las fechas de las primeras tres columnas en un número que representa el tiempo en días.

   Luego haga dos gráficos de sus pesos y estaturas versus el tiempo, dibujando en círculos rojos los datos descargados. Además, incluya a estos datos su polinomio de interpolación e interpolante spline cúbica. Incluya título y leyenda de cada una de las funciones dibujadas.

5. En una hoja de papel delgada sobrepone una de tus manos, y con un lápiz marca una cantidad de puntos que te parezca adecuada para representar el contorno de tu mano. En la ventana de comandos escribe las siguientes instrucciones:

```
figure('position',get(0,'screensize'))
axes('position',[0 0 1 1])
[x,y] = ginput;
```

   Posiciona la hoja de papel con los puntos sobre la pantalla de tu computador y usa el mouse para seleccionar alguno de estos puntos (deberías poder ver a través de la hoja de papel la posición del mouse). Finalmente, apreta la tecla enter. Luego graba estos datos usando el comando

```
save x,y;
```

   Ahora imagina que estos vectores `x,y` son muestras de dos funciones $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ejecuta una interpolación polinomial y mediante splines cúbicos de estas funciones. Finalmente grafica en el plano la función que obtienes al interpolar la función $(x(t), y(t))$ y los puntos de los vectores `x,y`.

6. La función Gamma está definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0.$$

Se sabe que cuando se evalúa en un natural $n \geq 1$, se tiene que

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

En consecuencia, un conjunto de puntos de esta función son

x	1	2	3	4	5
y	1	1	2	6	24

a) Calcule el polinomio de grado cuatro que interpola estos puntos. Dibuje este polinomio y también la función usando la función de OCTAVE `gamma`

b) Realice una interpolación por splines cúbicos de estos puntos, y grafíquela junto con la función `gamma`.

c) ¿Cual de los dos interpolantes es mejor?,

d) ¿Cual de los dos interpolantes es mejor en el intervalo [1,2]?,

7. **(Este ejercicio fue preguntado en test el semestre anterior).** Se quiere interpolar la función $f(x) = 1/(x^2+1)$, $x \in [-5, 5]$. Para ello se consideran las dos siguientes alternativas.

a) Considere el conjunto de puntos $x_i = -5 + 0{,}5(i-1)$ con $i = 1, ..., 21$. Construya un programa de OCTAVE que calcule el prolinomio interpolante de la función f en estos puntos. Además, en un mismo gráfico, grafique la función f, los puntos de interpolación y el polinomio de interpolación obtenido.

b) Considere ahora el conjunto de puntos $z_i = 5\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{42}\right)$ con $i = 1, ..., 21$. Construya un programa de OCTAVE que interpole la función f en estos puntos. Además, en un mismo gráfico, grafique la función f, los puntos de interpolación y el polinomio de interpolación obtenido. Observación: los putnos z_i se conocen como nodos de Chebyshev.

c) ¿Qué fenómeno observa en las gráficas?. Justifique.