UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

521230 Cálculo Numérico (2018-I)
Evaluación 1

16 de mayo de 2018

Nombre: ____

Número de matrícula: ____

Sección: ☐ 1 (Prof. Leonardo Figueroa C.) ☐ 2 (Prof. Franco Milanese P.) ☐ 3 (Prof. Mauricio Vega H.)

Esta evaluación consta de **cuatro** preguntas con la misma ponderación. No se permite el uso de calculadoras u otros dispositivos electrónicos. Duración: 100 minutos.

Pregunta A ($\boxed{\text{15 puntos}}$)**.** Se desea aproximar una solución de la ecuación

$$x \exp(x) = 2.$$

I. (50 %) Efectúe una iteración del método de la bisección aplicado a este problema inicializando con $a = -1$ y $b = 1$.

II. (50 %) Efectúe una iteración del método de Newton aplicado a este problema inicializando con $x_0 = 0$.

Solución. **Parte I.**

$\boxed{\text{1.5 puntos}}$ Definiendo la función f por $f(x) = x \exp(x) - 2$, el problema se reduce a buscar una raíz de f.

$\boxed{\text{5 puntos}}$ Como f es continua en $[a, b]$ y $f(a) = -\exp(-1) - 2 < 0$ y $f(b) = \exp(1) - 2 > 0$, podemos aplicar el método de la bisección. El primer punto medio es $\hat{x} = 0$. Como $f(0) = -2 < 0$, redefinimos $a = 0$. Nuestro nuevo intervalo de trabajo es $[a, b] = [0, 1]$.

$\boxed{\text{1 punto}}$ La respuesta de la primera iteración es el punto medio del nuevo intervalo; esto es, $\hat{x} = \frac{1}{2}$.

Parte II.

$\boxed{\text{1.5 puntos — Si se identificó una función apropiada como } f \text{ en la parte anterior, también se asigna el puntaje.}}$

Definiendo la función f por $f(x) = x \exp(x) - 2$, el problema se reduce a buscar una raíz de f.

$\boxed{\text{2 puntos}}$ Calculamos $f'(x) = x \exp(x) + \exp(x) = (x + 1) \exp(x)$. Entonces, el resultado de aplicar una iteración del método de Newton a este problema es

$$\boxed{\text{4 puntos}} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{(-2)}{1} = 2.$$

□

Pregunta B ($\boxed{\text{15 puntos}}$). Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$(\forall\, x \in [0,2]) \quad f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ -2x+1 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

I. (50 %) Calcule la aproximación de la integral $I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ producida por el método del trapecio compuesto con tamaño de paso $h = 2/3$.

II. (50 %) Calcule la aproximación de la misma integral I producida por el método del trapecio compuesto con tamaño de paso $h = 1/32$.

Solución. **Parte I.**

Recordar fórmula o definición del método del trapecio compuesto: 2 puntos; usar el h indicado y no otro: 3 puntos; realizar bien las operaciones aritméticas: 2.5 puntos

Con tamaño de paso $h = 2/3$ la aproximación es

$$\begin{aligned} \frac{2/3}{2}\,[f(0) + 2f(2/3) + 2f(4/3) + f(2)] &= \frac{1}{3}\,[(0-2) + 2(2/3-2) + 2(-2\times 4/3+1) + (-2\times 2+1)] \\ &= \frac{1}{3}\,[-2 + -8/3 - 10/3 - 3] = \frac{1}{3}\frac{(-33)}{3} = -\frac{11}{3}. \end{aligned}$$

Parte II.

Recordar fórmula o definición del método del trapecio compuesto: 2 puntos; usar el h indicado y no otro: 3 puntos; realizar bien las operaciones aritméticas incluyendo, de ser necesario, evaluación de sumas: 2.5 puntos

Al aplicar el método del trapecio compuesto con paso $h = 1/32$, lo que estamos haciendo, por definición, es descomponer

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{B.1}$$

y aplicar el método del trapecio elemental a cada integral dentro de la suma en (B.1). En (B.1) n está relacionado con h a través de $h = (2-0)/n$ (esto es, $n = 2/h = 64$) y, para todo $i \in \{0,\ldots,n\}$, $x_i = 0 + i\,h = i/32$. Ahora, si $i \leq 32$, $x_i \leq 1$. Por otro lado, si $i \geq 33$, $x_{i-1} = (i-1)/32 \geq (33-1)/32 = 1$. Entonces, por la definición de f,

$$(\forall\, i \in \{1,\ldots,32\}) \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-2)\,\mathrm{d}x, \tag{B.2a}$$

$$(\forall\, i \in \{33,\ldots,64\}) \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-2x+1)\,\mathrm{d}x. \tag{B.2b}$$

Como tanto $x \mapsto x-2$ y $x \mapsto -2x+1$ son polinomios de grado menor o igual a 1, la regla del trapecio elemental aproxima a estas integrales en (B.2) en forma exacta. Por lo tanto, la aproximación de I es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{32} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-2)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=33}^{64} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-2x+1)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x-2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (-2x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \left(-x^2+x\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2} - 2 - 4 + 2 - (-1) - 1 = -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Alternativamente, la aproximación de I que hace el método del trapecio compuesto con paso $h = 1/32$ se puede calcular utilizando la fórmula derivada en clase:

$$\begin{aligned}
\frac{1/32}{2}\left(f(0)+2\sum_{i=1}^{63} f(x_i)+f(2)\right) = \frac{1}{64}\left(f(0)+2\sum_{i=1}^{32} f(i/32)+2\sum_{i=33}^{63} f(i/32)+f(2)\right) \\
= \frac{1}{64}\left(-2+2\sum_{i=1}^{32}(i/32-2)+2\sum_{i=33}^{63}(-2\,i/32+1)-3\right) \\
= \frac{1}{64}\left(-2+\sum_{i=1}^{32}(i/16-4)+\sum_{i=33}^{63}(-i/8+2)-3\right) \\
= \frac{1}{64}\left(-2-4\times 32+2\times(63-33+1)-3+\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{32} i-\frac{1}{8}\left[\sum_{i=1}^{63} i-\sum_{i=1}^{32} i\right]\right) \\
= \frac{1}{64}\left(-71+\frac{32(32+1)}{16\times 2}-\frac{63(63+1)}{8\times 2}+\frac{32(32+1)}{8\times 2}\right) = \frac{1}{64}\left(-71+33-63\times 4+2\times 33\right) = -\frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

□

Pregunta C ($\boxed{\text{15 puntos}}$).

I. (80 %) Ajuste por mínimos cuadrados los coeficientes α_1, α_2 y α_3 del modelo

$$f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right)$$

a los datos de la tabla

x_i	$-\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$
$f(x_i)$	-4	0	0	4

II. (20 %) ¿El modelo ajustado interpola los datos?

Solución. **Parte I.**

$\boxed{\text{Planteo del sistema rectangular: 4 puntos}}$ Las ecuaciones que deseamos ajustar son

$$\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{2+\sqrt{2}} + \alpha_3 \left(\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^2 /2 - 1 \right) = -4,$$
$$\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{2-\sqrt{2}} + \alpha_3 \left(\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 /2 - 1 \right) = 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2-\sqrt{2}} + \alpha_3 \left(\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 /2 - 1 \right) = 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2+\sqrt{2}} + \alpha_3 \left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^2 /2 - 1 \right) = 4.$$

En términos de matrices y vectores, podemos escribir esto como que deseamos ajustar el sistema no-rectangular de ecuaciones $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ y, usando que

$$\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^2 /2 - 1 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^2 /2 - 1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y

$$\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 /2 - 1 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 /2 - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

la matriz $\boldsymbol{A}$ está dada por

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -\sqrt{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Planteo del sistema normal: 4 puntos}}$ La solución al sistema normal de ecuaciones $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ es la solución en el sentido de mínimos cuadrados del sistema no-rectangular $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{b}$. Calculamos

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -\sqrt{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \sqrt{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Obtención y uso de parámetros de ajuste: 4 puntos}}$ Resolviendo, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2+\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. El modelo ajustado es entonces $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,x$.

Parte II.

$\boxed{\text{3 puntos}}$ El modelo ajustado no interpola los datos, porque, por ejemplo,

$$f\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} \neq 0.$$

$\square$

Pregunta D ($\boxed{\text{15 puntos}}$)**.** El polinomio de Legendre de grado 3 es $p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$. Calcule los nodos y los pesos de la regla de cuadratura de Gauss–Legendre de 3 puntos.

Solución. $\boxed{\text{6 puntos}}$ Los nodos de la cuadratura de Gauss–Legendre de 3 puntos son las raíces de p_3. Claramente 0 es una raíz de p_3. Factorizando el monomio asociado a esa raíz, hallamos que $p_3(x) = \frac{5}{2}x\left(x^2 - \frac{3}{5}\right)$. Desde esta última expresión obtenemos que las otras dos raíces son $-\sqrt{\frac{3}{5}}$ y $\sqrt{\frac{3}{5}}$. En resumen, lo nodos son

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = 0 \quad \text{y} \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Planteo de una estrategia apropiada para obtener pesos: 5 puntos; realizar bien las operaciones aritméticas: 4 puntos

Sabemos que la cuadratura de Gauss–Legendre de 3 puntos es exacta para polinomios de grado menor o igual a $2\times 3-1 = 5$. En particular, es exacta para los polinomios $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ y $x \mapsto x^2$ (cualquier otra base del espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 también sirve). Por lo tanto, denotando por w_1, w_2 y w_3 a los pesos asociados a los nodos x_1, x_2 y x_3, respectivamente,

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2, \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}\,w_1 + 0\,w_2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\,w_3 &= \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0, \\ \frac{3}{5}\,w_1 + 0\,w_2 + \frac{3}{5}\,w_3 &= \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene que $w_1 = w_3$ y de la tercera que $2 \times \frac{3}{5}w_1 = \frac{3}{5}w_1 + \frac{3}{5}w_3 = \frac{2}{3}$, de donde $w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$. De la primera ecuación, $\frac{5}{9} + w_2 + \frac{5}{9} = 2$, de donde $w_2 = \frac{8}{9}$. En resumen, los pesos son

$$w_1 = \frac{5}{9}, \quad w_2 = \frac{8}{9} \quad \text{y} \quad w_3 = \frac{5}{9}.$$

Alternativamente, los pesos se pueden calcular como las integrales de los polinomios de Lagrange asociados a los nodos:

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_{-1}^{1} \frac{x-0}{-\sqrt{3/5}-0}\,\frac{x-\sqrt{3/5}}{-\sqrt{3/5}-\sqrt{3/5}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\times 3/5}\int_{-1}^{1} x\left(x-\sqrt{3/5}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{6}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x - \frac{5}{6}\sqrt{3/5}\underbrace{\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x}_{=0} = \frac{5}{6}\,\frac{2}{3} = \frac{5}{9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \int_{-1}^{1} \frac{x+\sqrt{3/5}}{0+\sqrt{3/5}}\,\frac{x-\sqrt{3/5}}{0-\sqrt{3/5}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3/5}\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{3/5}\right)\left(x-\sqrt{3/5}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{3}\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{3}{5}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\times 2\right) = -\frac{5}{3}\left(-\frac{8}{15}\right) = \frac{8}{9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_3 &= \int_{-1}^{1} \frac{x+\sqrt{3/5}}{\sqrt{3/5}+\sqrt{3/5}}\,\frac{x-0}{\sqrt{3/5}-0}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\times 3/5}\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{3/5}\right)x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{6}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x + \frac{5}{6}\sqrt{3/5}\underbrace{\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x}_{=0} = \frac{5}{6}\,\frac{2}{3} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$