1. Sea el sistema lineal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si se aplica el **método de máximo descenso** (o **método del gradiente**) con un vector inicial $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$, entonces, la dirección de descenso $\boldsymbol{p}^{(0)}$ a utilizar en la primera iteración es:

(a) $\boldsymbol{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$;

(b) $\boldsymbol{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$;

(c) $\boldsymbol{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$;

(d) ninguna de las anteriores.

2. Se aplica el método de Gauss con pivoteo parcial a una matriz $\boldsymbol{A}$ de $n \times n$. Si la matriz que se obtiene en la etapa k-ésima es

$$\boldsymbol{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(k)} & a_{1k}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \ddots & a_{k-1,k-1}^{(k)} & a_{k-1,k}^{(k)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k)} \\ \vdots & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

indique cuál es el pivote a utilizar en la siguiente etapa:

(a) $\max\left\{a_{ik}^{(k)} \,:\, 1 \leq i \leq n\right\}$;

(b) $\max\left\{a_{ik}^{(k)} \,:\, k \leq i \leq n\right\}$;

(c) $a_{kk}^{(k)}$;

(d) ninguno de las anteriores.

3. Considere el sistema lineal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A}$ una matriz no singular. Sean $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{P}$ las matrices que entrega el comando MATLAB

```
[L,U,P] = lu(A);
```

Indique cuál de las siguientes sentencias MATLAB devuelve la solución $\boldsymbol{x}$ del sistema:

(a) `x = U\(L\b);`

(b) `x = U\(L\(P*b));`

(c) `x = U\(P*(L\b));`

(d) `x = P*(U\(L\b));`

4. Sea $\epsilon > 0$. Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su inversa $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

(a) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = (1 - \epsilon^2)$;

(b) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = (1 + \epsilon)$;

(c) $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = (1 + \epsilon)^2$;

(d) ninguna de las anteriores.

5. Se aplica el método de Gauss con pivoteo parcial a la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a fin de obtener una factorización $\boldsymbol{LU}$. En la primera etapa se obtiene

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 6 \\ 0 & \frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

Los elementos en la diagonal de $\boldsymbol{U}$ al final del proceso son:

(a) $u_{11} = 7$, $u_{22} = 3/7$ y $u_{33} = -12$;

(b) $u_{11} = 7$, $u_{22} = 6/7$ y $u_{33} = 6$;

(c) $u_{11} = 7$, $u_{22} = 6/7$ y $u_{33} = 3$;

(d) ninguna de las anteriores.

6. Se quiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Considere la siguiente iteración:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Indique si se trata de un paso de iteración de alguno de los siguientes métodos:

(a) Jacobi;

(b) Gauss-Seidel;

(c) Gradiente Conjugado;

(d) ninguno de las anteriores.

7. Se resuelve un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ con una matriz tal que $\|A\|_2 = 10$ y $\|A^{-1}\|_2 = 10$. Si el segundo miembro $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ presenta un error relativo (calculado en norma 2) de 1% con respecto al vector $\boldsymbol{b}$, indique cuál de las siguientes afirmaciones es más precisa:

   El error relativo (calculado en norma 2) de la solución $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ con respecto a la solución $\boldsymbol{x}$ es:

   (a) menor o igual a un 1%;

   (b) menor o igual a un 10%;

   (c) menor o igual a un 100%;

   (d) ninguna de las anteriores.

8. Se desea resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1.75 \\ 0.50 \\ 1.50 \end{pmatrix}.$$

Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(a) el sistema puede resolverse por el método de Jacobi, pero no por el algoritmo de Thomas;

(b) el sistema no puede resolverse por el método de Jacobi, pero sí por el algoritmo de Thomas;

(c) el sistema no puede resolverse ni por el método de Jacobi ni por el algoritmo de Thomas;

(d) ninguna de las anteriores.

9. Considere el siguiente programa MATLAB:

```
A = [ 3 0 1 ; 0 0 0 ; 1 0 3];
b = [ 5 ; 2 ; -1];
x = A\b;
```

Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(a) el programa entrega $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$;

(b) el programa entrega $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2$ es muy pequeño;

(c) el programa no entrega una solución del sistema;

(d) ninguna de las anteriores.

10. Indique cuáles son los factores $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$ que se obtienen si se aplica el método de *Gauss* con pivoteo parcial a la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$:

(a) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(c) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) ninguno de los anteriores.

11. Se aplica el método de *Jacobi* al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 100 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{11} \end{pmatrix}.$$

Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa:**

(a) el método converge porque la matriz es de diagonal dominante;

(b) el método converge porque la norma infinito de la matriz de iteración es $\dfrac{1}{10}$;

(c) si $\boldsymbol{e}^{(k)}$ denota el error en el paso k-ésimo, entonces
$\|\boldsymbol{e}^{(k+1)}\|_\infty \leq \dfrac{1}{10}\|\boldsymbol{e}^{(k)}\|_\infty$;

(d) ninguna de las anteriores.