UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

# Cálculo Numérico (521230)

## Examen – Forma A

*Fecha: 11–Dic–02; 11:00.*

| | |
|---|---|
| **Nombre y apellidos** | |
| **Matrícula** | |
| **Profesor** | |

| Pregunta | Alternativas | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | c | d |
| 2 | a | b | c | d |
| 3 | a | b | c | d |
| 4 | a | b | c | d |
| 5 | a | b | c | d |
| 6 | a | b | c | d |
| 7 | a | b | c | d |
| 8 | a | b | c | d |
| 9 | a | b | c | d |
| 10 | a | b | c | d |
| 11 | a | b | c | d |
| 12 | a | b | c | d |
| 13 | a | b | c | d |
| 14 | a | b | c | d |
| 15 | a | b | c | d |

Reservado para la corrección

**No rellenar**

| | |
|---|---|
| B | |
| M | |
| NR | |
| Cal. | |

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:

$$\text{Calificación} = \frac{100}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right).$$

- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/MCP/RRS/MS

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

# EXAMEN

# DE

# CALCULO NUMERICO

521230

Miércoles 11 de Diciembre de 2002

**COMISION:** Dr. Rodolfo Araya
Dr. Manuel Campos
Dr. Roberto Riquelme
Dr. Mauricio Sepúlveda

1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 100 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} ; \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} & \frac{1}{100\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en la solución se comete un error en norma 1, $||\delta x||_1$ estrictamente mayor al 1 % con respecto de $||x||_1$, debido a un error $\delta b$ en el término del lado derecho. Suponga que no hay errores en los coeficientes de la matriz ni errores de redondeo. Entonces necesariamente,

*a*) $||\delta b||_1 > 4 \times 10^{-6}$
*b*) $0 < ||\delta b||_1 \leq 4 \times 10^{-6}$
*c*) $||\delta b||_1 \leq 0$
*d*) Ninguna de las anteriores.

2. De las afirmaciones que siguen, encuentre la que es **verdadera**

*a*) La factorización de Choleski de una matriz $A$ existe ssi $A$ es de diagonal dominante.
*b*) Un sistema $Ax = b$ se puede resolver por el método del gradiente conjugado ssi $|A| \neq 0$.
*c*) Un sistema $Ax = b$ se puede resolver por el método de Jacobi ssi $A$ es simétrica y definida positiva.
*d*) Ninguna de las anteriores.

3. Considere el problema de resolver un P.V.I. de primer orden asociado a una ecuación diferencial de tipo *stiff*. Para éstos problemas se puede afirmar que:

(i) no se pueden resolver usando los métodos de Runge-Kutta

(ii) exigen usar un paso $h$ muy pequeño en los métodos explícitos

(iii) es recomendable resolverlos con algún método implícito

Son verdaderas las afirmaciones dadas en:

*a*) (i) y (iii)
*b*) (ii) y (iii)
*c*) sólo (iii)
*d*) ninguna de las anteriores.

4. Por $S(x)$ se denota una *spline* cúbica de interpolación definida sobre tres subintervalos que particionan el dominio $[a, b]$. Para obtener el *valor exacto* de:

$$I = \int_a^b S(x)dx$$

se proponen las alternativas:

(i) integrar $S(x)$, sobre cada subintervalo, usando la fórmula de Simpson

(ii) integrar $S(x)$, sobre cada subintervalo, usando una fórmula Gaussiana del tipo $A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ (dos puntos de Gauss).

El valor exacto de $I$ se obtiene:

*a*) sólo con (i)

*b*) sólo con (ii)

*c*) con (i) y también con (ii)

*d*) ninguna de las anteriores.

5. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz $\alpha$ de multiplicidad $p$ con $p > 1$. Para calcular $\alpha$ por el método de Newton-Raphson se debe resolver la ecuación $h(x) = 0$ donde $h(x) = f(x)^{\frac{1}{p}}$.

Dado $x_0$ próximo de $\alpha$, el esquema que se obtiene es:

*a*)
$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

*b*)
$$x_{k+1} = x_k - p\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

*c*)
$$x_{k+1} = x_k + p\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

*d*) ninguno de los anteriores.

6. Los valores $T_h$ y $T_{\frac{h}{2}}$ son aproximaciones para $ln(2) := \int_1^2 \frac{dt}{t}$ obtenidos con la fómula de trapecios general usando pasos $h = 0.02$ y $h = 0.01$, respectivamente. Con éstos valores la aproximación de Romberg $T^1_{\frac{h}{2}}$ para $ln(2)$ es:

*a*) $T_{\frac{h}{2}} + (T_{\frac{h}{2}} - T_h)/3$

*b*) $T_h + (T_h + T_{\frac{h}{2}})/3$

*c*) $T_h - (T_h - T_{\frac{h}{2}})/3$

*d*) ninguna de las anteriores.

7. En un modelo de Diseño de Riego por Surcos, un índice de calidad de riego $X$ (medido en porcentaje) depende del caudal $Q$ (en $m^3/min$), del largo $L$ (en $m$) y del tiempo de corte $T_0$ (en $min.$) según la ecuación

$$X = C_1 Q^{-C_2} L^{C_3} T_0^{-C_4}$$

Suponiendo que para las siguientes mediciones experimentales se obtiene una calidad dada por la siguiente tabla :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| $L$ | 107 | 190 | 298 | 412 | 501 |
| $T_0$ | 250 | 100 | 300 | 70 | 400 |
| $X$ | 40 | 90 | 30 | 99 | 25 |

Entonces el sistema $A^t A x = A^t b$ que permite obtener los coeficientes $C_1$, $C_2$, $C_3$ y $C_4$. está dado por la matriz y el vector:

*a*) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 107 & 250 \\ 0{,}2 & 190 & 100 \\ 0{,}3 & 298 & 300 \\ 0{,}4 & 412 & 70 \\ 0{,}5 & 501 & 400 \end{pmatrix}$ ; $b = \begin{pmatrix} 40 \\ 90 \\ 30 \\ 99 \\ 25 \end{pmatrix}$

*b*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & 107 & 250 \\ 1 & 0{,}2 & 190 & 100 \\ 1 & 0{,}3 & 298 & 300 \\ 1 & 0{,}4 & 412 & 70 \\ 1 & 0{,}5 & 501 & 400 \end{pmatrix}$ ; $b = \begin{pmatrix} 40 \\ 90 \\ 30 \\ 99 \\ 25 \end{pmatrix}$

*c*) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\log 0{,}1 & \log 107 & -\log 250 \\ 1 & -\log 0{,}2 & \log 190 & -\log 100 \\ 1 & -\log 0{,}3 & \log 298 & -\log 300 \\ 1 & -\log 0{,}4 & \log 412 & -\log 70 \\ 1 & -\log 0{,}5 & \log 501 & -\log 400 \end{pmatrix}$ ; $b = \begin{pmatrix} \log 40 \\ \log 90 \\ \log 30 \\ \log 99 \\ \log 25 \end{pmatrix}$

*d*) Ninguna de las anteriores

8. Considere la tabla

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 1 | 0 | -5 | -2 | -3 |

El modelo que se ajustaría mejor mediante mínimos cuadrados a los datos experimentales es:

*a*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{ax^2+b}}$

*b*) $y = e^{ax^2+b}$

*c*) $y = ax + b$

*d*) ninguna de las anteriores.

9. Considere la tabla de datos

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |

El valor de

$$\frac{2l_0(x_1) + 4l_3(x_3) + 8l_5(x_5)}{2l_2(x_2)}$$

donde $l_i$ son los polinomios de lagrange asociados a la tabla, es:

*a*) 6

*b*) 7

*c*) 1

*d*) ninguna de las anteriores.

10. Se dispone de un conjunto de datos $\{(x_i, y_i)\}_{0=}^{n}$(ordenados como vectores columnas) los cuales se quieren ajustar por mínimos cuadrados a una función del tipo

$$y = \frac{5}{\sqrt{ax^2+b}}$$

Un programa en ambiente MATLAB que permite encontrar las constantes $a$ y $b$ es:

*a*)
```
function A=ajuste(x,y)
F=[x.^2 ones(length(x),1)];
A=F\(25./y.^2);
```

*b*)
```
function A=ajuste(x,y)
F=[x.^2 ones(length(x),1)];
A=F\(5./y.^2);
```

*c*)
```
function A=ajuste(x,y)
F=[sqrt(x) ones(length(x),1)];
A=F\y;
```

*d*) ninguna de las anteriores.

11. Considere el método de Euler explícito

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

y el de Euler implícito (retrogrado o regresivo)

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

El esquema predictor corrector formado por estos métodos es:

*a*)

$$\begin{cases} y^p_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y^c_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y^p_{i+1}) \end{cases}$$

*b*)

$$\begin{cases} y^p_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y^p_{i+1}) \\ y^c_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \end{cases}$$

*c*)

$$\begin{cases} y^p_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y^c_{i+1} = y_{i+1} + hf(x_{i+1}, y^p_{i+1}) \end{cases}$$

*d*) ninguno de los anteriores.

12. Se desea resolver el PVI

$$\begin{cases} \dddot{y} + \dot{y} + \operatorname{sen}(y) = \cos(y), \quad t \in [0, 5] \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 2 \\ \ddot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Para esto se usa el comando *ode45*, es decir,

```
>> [t,Y]=ode45('F',[0 5],[1 2 0]);
```

El programa en ambiente MATLAB *F.m* es:

*a*)
```
function Z=F(t,y)
Z=[y(2);y(3);-y(2)-sin(y(1))+cos(y(1))];
```

*b*)
```
function Z=F(t,y)
Z=[y(3);y(2);-y(2)-sin(y(1))+cos(y(1))];
```

*c*)
```
function Z=F(t,y)
Z=[y(2);y(3);-y(2)-sin(y(3))+cos(y(1))];
```

*d*) ninguna de las anteriores.

13. Se dispone de la siguiente tabla de puntos de Gauss

| $x_i$ | $A_i$ |
|---|---|
| $\pm$ 0.861136311594053 | 0.347854845137455 |
| $\pm$ 0.339981043584856 | 0.652145154862547 |

Un programa en ambiente MATLAB que permite encontrar

$$\int_a^b e^{-x^2+5}\,dx$$

usando la tabla de Gauss anterior es:

*a*)
```
function I=integral(a,b)
g=[0.861136311594053 0.339981043584856];
A=[0.347854845137455 0.652145154862547];
x1=(b-a)*(1-g)/2+a;
x2=(b-a)*(1+g)/2+a;
I=(b-a)*(sum(A.*exp(-x1.^2+5))+sum(A.*exp(-x2.^2+5)))/2;
```
*b*)
```
function I=integral(a,b)
g=[0.861136311594053 0.339981043584856];
A=[0.347854845137455 0.652145154862547];
x1=(b-a)*(1-g)/2+a;
x2=(b-a)*(1+g)/2+a;
I=sum(A.*exp(-x1.^2+5))+sum(A.*exp(-x2.^2+5));
```
*c*)
```
function I=integral(a,b)
g=[0.861136311594053 0.339981043584856];
A=[0.347854845137455 0.652145154862547];
I=(b-a)*(sum(A.*exp(-g.^2+5))+sum(A.*exp(-g.^2+5)))/2;
```
*d*) ninguno de los anteriores.

14. Considere la spline cubica $s$ definida por:

$$s(x) = \begin{cases} ax(x^2+b), & 0 \le x \le 1 \\ -ax^3+3x^2-\dfrac{5}{2}x+1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Para que valor de $a$, $s$ es una spline cúbica de interpolación para $f(x)=x^2$, $x \in [0,2]$, respecto de los nodos $x_0=0, x_1=1, x_2=2$

*a*) $a = 1$

*b*) $a = \frac{1}{2}$

*c*) $a = -\frac{1}{2}$

*d*) Ninguna de las anteriores.

15. Al aplicar diferencias finitas al P.V.C.:

$$\begin{cases} -y''(x) + cy(x) = sen(x), \quad x \in [0,2] \\ y(0) = \alpha, \qquad y(2) = \beta \end{cases}$$

donde $c > 0$, $h = 2/n$, $x_i = ih$ e $i = 0, \ldots n$, se debe resolver el sistema:

*a*)

$$\begin{bmatrix} 2+ch^2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2+ch^2 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & 1 & 2+ch^2 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 2+ch^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} sen(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ sen(x_{n-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

*b*)

$$\begin{bmatrix} 2+ch^2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2+ch^2 & -1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & -1 & 2+ch^2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2+ch^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} sen(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ sen(x_{n-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

*c*)

$$\begin{bmatrix} 2ch & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2ch & -1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & -1 & 2ch & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2ch \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = 2h \begin{bmatrix} sen(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ sen(x_{n-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

*d*) ninguno de los anteriores.