PAUTA CERTAMEN Nº 2

I.-a) Determine los valores de las constantes reales a y b para que F(x) sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - b & si \quad x < -1 \\ ax + b & si \quad -1 \le x \le 10 \\ x - 15 & si \quad x > 10 \end{cases}$$

b) Compruebe los resultados obtenidos 20 PUNTOS

1) Punto Critico $x = -1$; f(-1) = $-a + b$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -a + b$; $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1 - b$

f(x) continua en $x = -1$ si : $-a + 2b = 1$ * 5 puntos

2) Punto Critico $x = 10$; f(10) = $10a + b$; $\lim_{x \to 10^+} f(x) = -5$; $\lim_{x \to 10^-} f(x) = 10a + b$

f(x) es continua en $x = 10$ si : $10a + b = -5$ ** 5 puntos

3) Para que F(x) sea continua en $\mathbb{R}$ debe cumplirse simultáneamente * y **

Luego $\left.\begin{array}{r} -a + 2b = 1 \\ 10a + b = -5 \end{array}\right|$ $\Rightarrow$ $a = -\dfrac{11}{21}$ y $b = \dfrac{5}{21}$ 5puntos

4) comprobación : $-a + b = \dfrac{16}{21} = 1 - b$ $\quad 10a + b = -\dfrac{110}{21} + \dfrac{5}{21} = -5$ 5puntos

II.- Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-1)^2 + 1} - 1}{(x-1)} & si \quad x \ne 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

JUSTIFICANDO SUS RESPUESTAS Resuelva

a).- ¿ Es g(x) derivable en x = 1 ? ; calcule g`(1) 5 puntos
b).- ¿ Es g(x) continua en x = 1 ? 5 puntos
c).- ¿ Existen asíntotas ? si su respuesta es afirmativa determine sus ecuaciones 5 puntos
d).- Calcule la derivada de g(x) 5 puntos

a).- es g(x) derivable en x = 1

$$g(x) \text{ derivable} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{(x-1)} \, existe \; ; \; \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+1} - 1}{(x-1)}}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 + 1 - 1}{(x-1)^2(\sqrt{(x-1)^2 + 1} + 1)} = \frac{1}{2}$$

Luego g(x) es derivable en x = 1 y $\left.\dfrac{dg(x)}{dx}\right|_{x=1} = \dfrac{1}{2} =$ g'(1) b).- Continuidad en x = 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(x-1)^2+1}-1}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2+1-1}{(x-1)(\sqrt{(x-1)^2+1}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+1}+1}=\frac{0}{\sqrt{1}+1}=0=g(1)$$

Luego $\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)=0=g(1)\Rightarrow g(x)$ es continua en x = 1

c).- asíntotas 1) $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}}+\frac{1}{(x-1)}}=1$ $Y_1 = 1$ ecuación asintota

2) $\lim_{x\to -\infty} g(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}}+\frac{1}{(x-1)}}=-1$ $Y_2 = -1$ ecuación asintota

d).- derivada $\rightarrow$ $$\frac{d(g(x))}{dx}=\frac{\frac{2(x-1)(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2+1}}-\sqrt{(x-1)^2+1}-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}-\frac{\sqrt{(x-1)^2+1}-1}{(x-1)^2}$$

3.- La forma paramétrica de cierta curva está dada por $x = 3\,t^2$

$y = 3t - t^3$

a).- Encontrar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal para t = 1 10 puntos

b).- Encontrar la forma cartesiana de la curva dada 10 puntos

a).- $\frac{dx}{dt}=6t$; $\frac{dy}{dt}=3-3t^2$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=\frac{3-3t^2}{6t}$ $\rightarrow$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=0$ además x = 3 y = 2

ecuación recta tangente para t = 1 (Y-2) = 0 $\Rightarrow$ Y = 2

ecuación recta normal para t = 1 0 = (X-3) $\Rightarrow$ X = 3

b).- de $x = 3t^2$ $\rightarrow$ $t=\pm\sqrt{\frac{x}{3}}$ en $y = 3t-t^3=3t-tt^2=3(\pm\sqrt{\frac{x}{3}})-(\pm\sqrt{\frac{x}{3}})\frac{x}{3}$ se tiene

$$3y=(\pm\sqrt{\frac{x}{3}})(9-x)\rightarrow 27y^2=x(9-x)^2\rightarrow 27y^2=x^3-18x^2+81x$$

$27y^2=x(9-x)^2$; $27y^2=x^3-18x^2+18x$ son formas cartesianas