UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA 17. Vectores y Planos

PROBLEMA 1. Determine el área del triángulo formado por la intersección del plano $3x-2y-11z=-7$, y las rectas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ para } t \in \mathbb{R}, \text{ y}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ para } t \in \mathbb{R},$$

[**En práctica**]

PROBLEMA 2. Calcule el volumen del paralelepípedo de base $[-1, \alpha, 3]$ y $[-1, -1, 2]$ y cuyo lado es $[2, -1, 4]$. Qué valor debe tener α para que el volumen sea el triple del área de la base considerada.

PROBLEMA 3 Muestre que todo vector $\overrightarrow{u}$ en el plano OXY se puede escribir:

$$\overrightarrow{u} = P_{\overrightarrow{i}}\overrightarrow{u} + P_{\overrightarrow{j}}\overrightarrow{u}.$$

PROBLEMA 4. Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Muestre que:

(i) $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2 \quad cos(\theta) \quad \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$, donde θ es el menor ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

(ii) $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 4(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

PROBLEMA 5. Encuentre la ecuación del plano:

(i) que pasa por el punto $(2, 3, 1)$ y está generado por los vectores $[3, 2, 1]$ y $[-1, -2, -3]$. Determine si los puntos $(-1, 2, -3)$ y $(2, 2, -4)$ pertenecen a tal plano.

(ii) que pasa por el punto $(2, 3, 1)$ y es paralelo al plano que pasa por el origen y es generado por los vectores $[2, 0, -2]$ y $[1, 1, 1]$. [**En práctica**] **(ii)**

PROBLEMA 6. Encuentre la distancia del punto $(3, 2, -1)$ al plano $2x - 2y - z = 5$.

PROBLEMA 7. Encuentre el valor de α de modo que la distancia del punto $(2, -3-4)$ al plano $x + 2y + 2\alpha z = 6$, sea igual a $(37)^{\frac{1}{2}}$.

PROBLEMA 8. Dados los punto $P_1(2, 3, 2)$ y $P_2(-1, 1, 4)$, encuentre todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{P_1P}$. Describa tal conjunto. **[En práctica]**

PROBLEMA 9. Encuentre la ecuación del plano A_1 que es perpendicular a $[1, -1, 3]$ y que pasa por el punto $(2, 1, 0)$; además, considere el plano A_2 de ecuación: $3x - y + 2z = -1$. Encuentre $A_1 \cap A_2$.
Solución: $A_1 \cap A_2$ es la recta de ecuaciones paramétricas $x = -1 + \frac{1}{2}t$, $y = -2 + \frac{7}{2}t$, $z = t$, para $t \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 10. Encuentre dos planos A_1 y A_2 cuya intersección sea la recta dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ para } t \in \mathbb{R},$$

Solución: $A_1 : x + y = -1$;
$A_2 : 3y + z = -4$. Notar que la solución no es única. **[En práctica]**

PROBLEMA 11. Encuentre el valor de α de modo que los planos : $2x - \alpha y + z = 3$ y $3x + 2\alpha y - \alpha z = 5$, sean ortogonales. Para un valor de α encontrado, encuentre la distancia entre los planos.
Solución: $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}$. **[En práctica]**

PROBLEMA 12. Considere los planos $2x - y + z = 3$ y $3x + 2y - z = 5$. Si es posible, encuentre un plano perpendicular a los dos planos dados.

PROBLEMA 13. Encuentre los valores de α, β y γ de modo que la intersección de los planos $3\beta x + 2\alpha y - \alpha z = 6$ y $2x - \alpha y + \gamma z = 3$,
sea la recta que pasa por el punto $(0, \frac{9}{2}, 6)$, y tenga por vector director a
$[\alpha^2 - 2\gamma\alpha, 1, 4\alpha + 3\alpha\beta]$.
Solución: $\alpha = 2$, $\beta = \frac{-1}{2}$, $\gamma = 2$.

PROBLEMA 14. Encuentre condiciones sobre los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ en $\mathbb{R}^3$, de modo que las diagonales del paralelogramo formado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, sean ortogonales.
Solución: $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$. **[En práctica]**

PROBLEMA 15. Suponga que los planos $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ y $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ no son paralelos. Deduzca una fórmula para el ángulo pormado por la intersección de los planos.

30/08/2002
JMS/jms