UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142.

SOLUCION CERTAMEN 5.

Problema 1. Encuentre la descomposición de la función f en suma de fracciones parciales.

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x}. \qquad (20 \quad puntos)$$

Solución. Dividiendo se encuentra:

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x} = 1 + \frac{2x^3 + 3x - 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x}$$

Como $x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x^3 - x^2 + x - 1) = x(x-1)(x^2+1)$, entonces (10 puntos)

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 + 3x - 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ &= \frac{A(x-1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-x)}{x(x-1)(x^2+1)}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} A & + & B & + & C & = & 2 \\ -A & - & C & + & D & = & 0 \\ A & + & B & - & D & = & 3 \\ -A & & & & & = & -1 \end{array}\right|$$

cuya solución es : $A = 1, B = 2, C = -1$ y $D = 0$. Luego,

$$f(x) = 1 + \frac{2x^3 + 3x - 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{x}{x^2+1}$$

(10 puntos)

Problema 2. Las distancias desde el centro C de la tierra a dos meteoritos M_1 y M_2 se estiman en 15 millones de Kms y 11 millones de Kms, respectivamente. Si la medida del ángulo $\angle(CM_1M_2)$ es $\frac{\pi}{6}$, determine la distancia entre los meteoritos. (25 puntos)

Solución. Consideremos el triángulo CM_1M_2 con un ángulo de 30 grados en M_1, un ángulo α en C y un ángulo β en M_2. Aplicamos el teorema de los senos, sabiendo que los lados tienen medidas, en millones de kilometros: $m(\overline{CM_1}) = 15, m(\overline{CM_2}) = 11$ y $m(\overline{M_1M_2}) = x$. Se tiene

$$\frac{11}{sen\ (30)} = \frac{15}{sen\ (\beta)} \Longleftrightarrow sen\ (\beta) = 0.6818$$

Luego, $\beta = 42,9844 grados$. De donde el tercer ángulo es $\alpha = 107.0156 grados$
10 puntos)

Finalmente, aplicando el teorema del coseno se obtiene:

$$x^2 = (15)^2 + (11)^2 - 2 \cdot 15 \cdot 11 cos\ (107.0156) = 442.5685 \Longrightarrow x = 21.037$$

Es decir, la distancia entre los meteoritos es de 21,037 millones de kilometros.

Un segundo valor se obtiene con $\beta = 137.0156$ para el cual $\alpha = 12.9844$ y la distancia es de 4.94 millones de kilometros.

(15 puntos)

Problema 3. Considere los planos

$$\begin{aligned} \pi_1 : &\quad 2x - 2y + 2z = -2 \\ \pi_2 : &\quad x + 2y + 4z = 5. \end{aligned}$$

3.1) Encuentre la recta $L_1 = \pi_1 \cap \pi_2$. (10 puntos)

3.2) Encuentre la recta L_2 que pasa por el punto $H(1, 0, 4)$ y que intersecta perpendicularmente a L_1.

(15 puntos)

Solución.

3.1) Un punto $(x, y, z) \in L_1$ si satisface las ecuaciones de ambos planos. Así tenemos el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr|} 2x & - & 2y & + & 2z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 5 \\ \hline \end{array}$$

que es equivalente con
$$\begin{array}{rcrcr} y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2z & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

de donde $z = 2 - y = \frac{1-x}{2}$. En consecuencia, la ecuación de la recta es:

$$L_1 : \quad z = \frac{y-2}{-1} = \frac{x-1}{-2}.$$

En forma paramétrica

$$L_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(10 puntos)

3.2) Si A es el punto de intersección de L_2 con L_1, entonces $A(1-2t_0, 2-t_0, t_0)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Así el vector entre A y H es $\overrightarrow{AH} = [2t_0, -2+t_0, 4-t_0]$. El vector director de L, $n = [-2, -1, 1]$, debe ser ortogonal con L_2 luego

$$< \overrightarrow{AH}, n >= 0 \Longleftrightarrow [2t_0, -2+t_0, 4-t_0] \cdot [-2, -1, 1] = 0$$

de donde se obtiene $t_0 = 1$. Así, $\overrightarrow{AH} = [2, -1, 3]$ y la recta pedida es:

$$L_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(15 puntos)

Problema 4. Considere la función f definida por

$$f(x) = ln(x^2 - 4), \quad x \in Dom(f).$$

4.1) Determine el dominio y el recorrido de f. (10 puntos)

4.2) Demuestre que la restricción h de f definida por (10 puntos)

$$h(x) = ln(x^2 - 4), \quad x \in]-\infty, -2[.$$

es invertible y encuentre su inversa h^{-1}.

4.3) Considere la función g definida por (10 puntos)

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2}, & |\, x \,| < 3 \\ \\ 1, & |\, x \,| \geq 3 \end{cases}$$

y defina la función compuesta $f \circ g$.

Solución.

4.1)

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\} \end{aligned}$$

$$Rec(f) = \{f(x) : x \in Dom(f)\} = \mathbb{R},$$

pues , $f = ln \circ h$, donde el polinomio $h(x) = x^2 - 4$ es sobreyectiva al igual que ln.

4.2) La función h es biyectiva. En efecto, es sobreyectiva por ser la compuesta de funciones cobreyectivas. Para probar que es inyectiva consideramos que ln es inyectiva. Luego,

$$\begin{aligned} h(x) = h(a) &\Longrightarrow ln(x^2 - 4) = ln(a^2 - 4) \\ &\Longrightarrow x^2 - 4 = a^2 - 4 \\ &\Longrightarrow x^2 = a^2 \\ &\Longrightarrow |x| = |a| \end{aligned}$$

como $x, a \in]-\infty, -2[$, se tiene que $x = a$. Así, $h(x) = h(a) \Longrightarrow x = a$.

Finalmente, como h es biyectiva se tiene que es invertible. Además,

$$h^{-1}(x) = -\sqrt{e^x + 4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.3) Primero caracterizamos el conjunto

$$\begin{aligned} X &= \{x \in Dom(g) : g(x) \in Dom(f)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\} \\ &= \{x \in]-3, 3[: \sqrt{9 - x^2} \in]2, +\infty[\} \\ &= \{x \in]-3, 3[: 2 < \sqrt{9 - x^2}\} \\ &= \{x \in]-3, 3[: 4 < 9 - x^2\} \\ &= \{x \in]-3, 3[: x^2 < 5\} \\ &=]-\sqrt{5}, +\sqrt{5}[\neq \phi. \end{aligned}$$

Luego, $X = dom(f \circ g)$ y para cada $x \in X$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = ln(5 - x^2).$$

Noviembre de 2002.
ACQ/FPV/GGP/JMS/LNB/MCP/CST/JSA/acq.