

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142  
Listado 6 (Exponencial y Logaritmo)

1. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones: **(En práctica d) y e))**

a)  $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) = 2$

d)  $e^{x^2+4x-2} \leq 1$

b)  $2\log_2 x + 6\log_4 2 = 3\log_2 x - \log_2 \frac{1}{32}$

e)  $e^x - e^{-x} = -2$

c)  $3^x = 4^{2x-1}$

f)  $(\frac{1}{2})^{x^2+x-2} \leq 1$

2. Sea  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ , considere la función **(En práctica)**

$$f_b : \text{Dom}(f_b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_b(x) = \sqrt{\log_b(x^2 - 4)}.$$

- a) Encuentre el dominio de la función  $f_b$  para  $b > 1$  y  $b < 1$ .
- b) Encuentre el recorrido de la función  $f_b$  para  $b > 1$  y  $b < 1$ .
- c) Determine para qué valores de  $b$ ,  $f_b$  es una función inyectiva, y si no lo es, restrinja su dominio para que lo sea.

3. Para la función real definida por

$$f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{(\ln(x))^2 - 1}.$$

- a) Encontrar el dominio de  $f$ .
- b) Sea  $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto g(x) = e^x$ , la función exponencial. Determine el dominio y defina la función compuesta  $f \circ g$ .
- c) Sea  $h$  la restricción de  $f \circ g$  al intervalo  $[1, +\infty[$ , es decir,  $h = (f \circ g)|_{[1, +\infty[}$ . Pruebe que  $h$  es inyectiva y defina su inversa  $h^{-1}$ .

4. Considere las funciones reales definidas por:

$$\forall x \in \text{Dom}(f) : f(x) = \sqrt{e^x - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} : g(x) = \begin{cases} 2 + \ln x & \text{si } x \geq 1, \\ x & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

- a) Probar que  $f$  y  $g$  son inyectivas.
- b) Definir  $f \circ g$  y determinar el recorrido de  $f \circ g$ .
- c) Probar que existe  $(f \circ g)^{-1}$  y defínala.
- d) Si se cambia la definición de  $g$  sobre el intervalo  $[1, \infty[$  por  $k + \ln x$ , determine los valores de  $k$  para que  $g$  sea inyectiva.

5. El sismólogo F. Richter (1900-1985) ideó en 1935 la **Escala de Richter** que compara la fuerza de los diferentes terremotos. En ella la magnitud  $R$  de un terremoto se define por

$$R = \log \left( \frac{A}{A_0} \right),$$

donde  $A$  es la amplitud de la onda sísmica mayor y  $A_0$  es una amplitud de referencia que corresponde a una magnitud  $R = 0$ .

La magnitud del terremoto de Chillán del año 1939 fué de 7,8 en la escala de Richter. El terremoto de San Francisco de 1979 fue de 5,95 y el terremoto de Turquía de 2003 fué de 6,4. ¿Cuántas veces mayor fue la amplitud de la onda en el terremoto de Chillán comparado con los terremotos de San Francisco y de Turquía?. **(En práctica)**

6. La **vida media** de un elemento radiactivo es el tiempo que tarda una cierta cantidad del elemento en reducirse a la mitad al transformarse en un nuevo elemento. Por ejemplo, la vida media del carbono 14 (C-14) es 5730 años y la del Polonio (Po-213) es  $10^{-6}$  segundos. Si hay  $A_0$  gramos de radio inicialmente, entonces la cantidad de gramos que quedan  $t$  años después es

$$A(t) = A_0 e^{-0,000418t}.$$

Determine la vida media del radio.

7. El valor de reventa de una maquinaria industrial de  $t$  años de antigüedad está dado por  $V(t) = 4800e^{-\frac{t}{5}} + 400$  dólares.
- a) ¿Cuál es el valor de la maquinaria cuando está nueva?.
  - b) ¿Cuál es el valor de una maquinaria de 10 años de antigüedad?.
  - c) ¿Cuál es el valor asintótico de la maquinaria cuanto  $t$  crece?. Haga un gráfico de  $V$ .
8. Un maestro de cocina saca un pastel de un horno que está a  $200^\circ\text{C}$  y lo deja enfriar en un ambiente que está a una temperatura constante de  $20^\circ\text{C}$ . Luego de  $r$  minutos encuentra que la temperatura del pastel bajó a  $100^\circ\text{C}$  y 10 minutos más tarde, es decir, cuando han transcurrido  $(r + 10)$  minutos desde que se sacó el pastel, la temperatura ha descendido a  $75^\circ\text{C}$ . De acuerdo a lo anterior, encuentre la fórmula que da la temperatura  $T(t)$  del pastel en cualquier instante  $t$ .

**Indicación:** La fórmula pedida es:

$$T(t) = (T_0 - T_a) e^{-kt} + T_a \quad \forall t \geq 0,$$

donde  $t$  se mide en minutos,  $T_0$  es la temperatura inicial,  $T_a$  es la temperatura del ambiente, y  $k$  es una constante (por determinar). **(En Práctica)**