UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Algebra III. 525201

Prof.: Anahí Gajardo

# Listado 1

1. Exprese las siguientes afirmaciones en lenguaje matemático y determine su valor de verdad.

   a) *Todo conjunto que se puede escribir como unión de otros dos conjuntos no vacíos es no vacío.*

   b) *Existen números naturales que se pueden expresar como multiplicación de otros tres.*

   c) *Si multiplico un número natural por otro, no nulo, obtengo un número mayor o a lo más igual.*

   d) *A es el conjunto de todos los números que son múltiplos de 3 y divisores de 84.*

   e) *A es el conjunto de todos los números naturales que dividen a todos los números enteros.*

   f) *A es el conjunto de todos los conjuntos cuyos elementos son números naturales.*

   g) *A es el conjunto de todos los números que se pueden escribir como resta de dos números naturales.*

   h) *Existe un único conjunto cuyos elementos no están en él.*

2. Determine cual(es) de las siguientes expresiones tiene errores sintácticos, justifique.

   a) $(\forall x \in A)(\exists b \in A) \wedge (\exists n \in \mathbb{N})\ b^n = x$.
   b) $(\exists a \in A)(\exists b \in A)\ a + b \in A$.
   c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \wedge y \in \mathbb{N}$.
   d) $(\forall x > n)(\exists n \in \mathbb{Z})\ x + n < 0$.
   e) $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall x > n)\ x + n < 0$.
   f) $(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall n < x)\ x + n < 0$.

3. Demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderas.

   a) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(\forall z \in \mathbb{N})\ yz > x$.
   b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ [x > 1 \rightarrow x^2 > x]$.
   c) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x < y \rightarrow x^2 < y^2]$.

4. Demuestre que las siguientes proposiciones son falsas.

   *a*) $(\forall y \in \mathbb{N})(\forall z \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})\ |z - y| > x$.
   *b*) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 > x$.
   *c*) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x^2 < y + 1$.

5. Para cada una de las siquientes expresiones: escriba en castellano, niegue, determine sus variables libres y si no las tiene, determine su valor de verdad (justifique).

   *a*) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n^2 + 2n$ es par .
   *b*) $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - x - 6 = 0$.
   *c*) $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$.
   *d*) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall \epsilon > 1)\ (n \leq \epsilon \rightarrow \frac{1}{n} + 1 < \epsilon)$.
   *e*) $(\forall \epsilon > 1)(\exists n \in \mathbb{N})(n \leq \epsilon \rightarrow \frac{1}{n} + 1 < \epsilon)$.
   *f*) $(\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, m \in \mathbb{N})\left(\frac{1}{m} \leq \epsilon \longrightarrow \frac{1}{m} + 1 < \epsilon\right)$.
   *g*) $(\forall n \in \mathbb{N})$ ($n$ es par $\rightarrow n^2 + n + 19$ es primo ).
   *h*) $(\exists x \in \mathbb{R})\ \frac{1}{x^2+1} > 1$.
   *i*) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (x^2 < y^2 \rightarrow x < y)$.
   *j*) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ [x + y \geq 2 \rightarrow (x \geq 1 \vee y \geq 1)]$.

6. A continuación damos diversas definiciones, el objetivo es que usted aprenda a interpretarlas. Para ello le pediremos una serie de ejercicios simples.

**Definición 1.** *Dados dos conjuntos* $A,B \subseteq U$ *se define:*

$$A \boxplus B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$$

**Definición 2.** *Dados dos conjuntos* $A,B \subseteq U$ *y dados* $\bot, \top \notin U$ *se define:*

$$A \sqcup B = (\{\bot\} \times A) \cup (\{\top\} \times B)$$

**Definición 3.** *Dada una familia de conjuntos* $\mathcal{F} = \{B_i\}_{i=1}^{n}$ *de* $U$*, se define:*

$$\nu(\mathcal{F}) = \{A \in \mathcal{P}(U) : \exists i \in \{1, .., n\}\ B_i \subseteq A\}$$

**Definición 4.** *Dada una familia de conjuntos* $\mathcal{F} = \{B_i\}_{i=1}^{n}$ *de* $U$*, se define:*

$$\mu(\mathcal{F}) = \{A \in \mathcal{P}(U) : \forall i \in \{1, .., n\}\ B_i \subseteq A\}$$

**Parte 0. Sintaxis**. Complete la siguiente tabla:

| Definición Nro | objeto | tipo de objeto (número, conjunto, familia de Conj. o función) |
|---|---|---|
| 1 | $A \boxplus B$ | |
| 2 | $A \sqcup B$ | |
| 3 | $\nu(\mathcal{F})$ | |
| 4 | $\tau(\mathcal{F})$ | |

**Parte I. Interpretación de conjuntos, ejemplos individuales**. En los siguientes ejercicios considere $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{3, 7, 8, 9\}$ y $B = \{6, 7\}$ y $\mathcal{F} = \{B_i\}_{i=1}^{3}$, con $B_1 = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $B_2 = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ y $B_3 = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Calcule:

*a*) $A \boxplus B$.

*b*) $B \boxplus B$.

*c*) $A \boxplus \phi$.

*d*) $A \sqcup B$.

*e*) $B \sqcup B$.

*f*) $A \sqcup \phi$.

*g*) $\nu(\mathcal{F})$.

*h*) $\mu(\mathcal{F})$.

*i*) $\nu(\{\phi\})$.

*j*) $\mu(\{U\})$.

*k*) $\nu(\nu(\mathcal{F}))$.

*l*) $\mu(\nu(\mathcal{F}))$.

**Ejemplo.** $\{1, 2\} \sqcup \{1, 2, 4\} = \{(\bot, 1), (\bot, 2), (\top, 1), (\top, 2), (\top, 4)\}$.