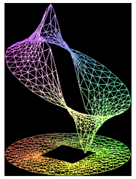
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

520142

Primer Semestre



INDUCCION MATEMATICA

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Inducción Matemática

Principio de la buena ordenación

Todo subconjunto no vacío de $I\!N$ tiene un elemento menor que los restantes. Es decir, si $S \subseteq I\!N$, $S \neq \phi$, entonces existe $p \in S$ tal que

$$\forall\, r \in S : \quad p \leq r\,.$$

TEOREMA: Principio de inducción matemática

Sean $S \subseteq I\!N$ y $p \in I\!N$ tales que

- $p \in S$
- $k \in S \quad \Rightarrow \quad (k+1) \in S$

Entonces S contiene a todos los naturales mayores o iguales que p, es decir: $\forall\, k \in I\!N,\ k \geq p : \quad k \in S$

Inducción Matemática

DEMOSTRACION

Por el método de contradicción: $(H \wedge \sim T) \quad \Rightarrow \quad P \wedge \sim P$

Supongamos que existe $k \in I\!N$, $k > p$, tal que $k \notin S$, y definamos:

$$G := \{m \in I\!N : \quad m > p \wedge m \notin S\}$$

Es claro que $G \neq \phi$ ya que $k \in G$. Luego, por el principio de la buena ordenación, existe $r \in G$ tal que $r \leq m \quad \forall m \in G$. Notar que $r > p$ y $r \notin S$. Así, como r es el menor elemento de G, se deduce que $r - 1 \notin G$, lo cual implica dos posibilidades: $(r - 1 \leq p) \ \vee \ (r - 1 \in S)$.

- Si $r - 1 \leq p$, entonces $r \leq p + 1$, y puesto que $r > p$, se deduce que $r = p + 1$. Así, como $p \in S$, se concluye por hipótesis que $r = p + 1 \in S$, lo cual contradice el hecho que $r \notin S$.
- Si $r - 1 \in S$, entonces por hipótesis nuevamente se deduce que $r = (r - 1) + 1 \in S$, lo cual contradice el hecho que $r \notin S$.

Inducción Matemática

EJEMPLO Pruebe que:

$$\forall\, n \in I\!N,\; 8^{n-1} + 6 \qquad \text{es divisible por 7.}$$

Solución

Sea $S = \{n \in I\!N \,:\, 8^{n-1} + 6 \text{ es divisible por } 7\}$

- Si $n = 1$

$$8^{n-1} + 6 = 1 + 6 = 7 = 7 \cdot 1$$

$$\therefore\; 1 \in S$$

- **Hipótesis de Inducción:** Supongamos que $k \in S$, es decir, $8^{k-1} + 6$ es divisible por 7.

Inducción Matemática

- **Tesis de Inducción:** Probemos que $k+1 \in S$, es decir, $\underbrace{8^{k+1-1}+6}_{8^k+6}$ es divisible por 7.

$$\begin{aligned} 8^k+6 &= 8^{k-1}\cdot 8+6 \\ &= 8^{k-1}\cdot 8+6\cdot 8-6\cdot 8+6 \\ &= 8\ \underbrace{(8^{k-1}+6)}_{\substack{\text{es divisible por 7,}\\ \text{por Hip. de Inducción}}}\ +6\underbrace{(-8+1)}_{\substack{-7\\ \text{es divisible por 7}}} \end{aligned}$$

$$\therefore k+1 \in S.$$

Luego $S = I\!N$

Inducción Matemática

Factorial y Coeficiente Binomial

- Dado $k \in I\!N$, se define el factorial de k, denotado por $k!$, como sigue

$$\boxed{1! = 1 \quad \text{y} \quad \forall\, k \geq 2: \quad k! = k \cdot (k-1)!}$$

Además, se define $0! = 1$.

- Sean $k, n \in I\!N \cup \{0\}$ tales que $k \leq n$. Se define el coeficiente binomial de n y k, y se denota $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, al número:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Propiedades de los Coeficientes Binomiales

Sean $k, n \in I\!N \cup \{0\}$ tales que $k < n$. Entonces, se tiene:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

El Operador Sumatoria

Dados n números reales indexados como $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se define la sumatoria de ellos, y se denota $\sum_{k=1}^{n} a_k$, a:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

EJEMPLOS

- $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$
- $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$$
- $$\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} + 3^n$$

Inducción Matemática

Propiedades del Operador Sumatoria

- $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} = \sum_{i=2}^{n+2} a_{i-2} = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} a = a + a + \cdots + a + a = na$$
- $$\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (c \quad \text{constante})$$
- $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$
- $$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \right) a_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) b_j$$
- $$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1 \qquad \text{(propiedad telescópica)}$$

Inducción Matemática

EJEMPLO

Demuestre que

$$\forall\, n \in I\!N\,,\; n \geq 2\;: \qquad \sum_{k=2}^{n} k\,(k!) \;=\; (n+1)!\;-\;2!$$

SOLUCION

Sea $S := \left\{ n \in I\!N \;: n \geq 2 \wedge \sum_{k=2}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 2! \right\}$

- ¿$2 \in S$?

  En vista que $\sum_{k=2}^{2} k\,(k!) = 2(2!) = 4$ y $(2+1)! - 2! = 4$, se concluye que $2 \in S$.

- **Hipótesis de Inducción**: supongamos que $r \in S$, es decir,

$$\sum_{k=2}^{r} k\,(k!) = (r+1)! - 2!$$

- **Tesis de Inducción**: probemos que $r+1 \in S$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{r+1} k\,(k!) &= \sum_{k=2}^{r} k\,(k!) + (r+1)\cdot(r+1)! \quad \text{(prop. de sumatorias)} \\
&= (r+1)! - 2! + (r+1)\cdot(r+1)! \quad \text{(hip. de inducción)} \\
&= (r+1)!\cdot(1+r+1) - 2! = (r+2)! - 2! \\
&\Rightarrow r+1 \in S\,,
\end{aligned}$$

y así, por el principio de Inducción Matemática, concluye la demostración.

TEOREMA DEL BINOMIO

Sean $a,\, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, y sea $n \in I\!N$. Entonces:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k}\, b^k}$$

Algunas observaciones

- El desarrollo de $(a+b)^n$ consta de $n+1$ términos.
- La suma de los exponentes de a y b en cada término es n.
- Los coeficientes de los términos equidistantes del centro son iguales.
- El término que ocupa el lugar $k+1$ está dado por

$$t_{k+1} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k}\, b^k$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DEL BINOMIO

Dado $n \in I\!N$ consideremos la proposición:

$$p(n): \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\,.$$

Entonces, se define el subconjunto de $I\!N$ dado por:

$$S := \{ n \in I\!N : \quad p(n) \text{ es verdadera} \}\,.$$

- $1 \in S$. En efecto, $p(1)$ es claramente verdadera.
- HIPOTESIS DE INDUCCION

  Sea $m \in I\!N$ tal que $m \in S$, es decir, $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k}\, b^k$.
- TESIS DE INDUCCION

  $m+1 \in S$, es decir, $(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k}\, b^k$.

DEMOSTRACION DE LA TESIS DE INDUCCION

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1} &= (a+b)\,(a+b)^m \\ &= a\,(a+b)^m + b\,(a+b)^m\end{aligned}$$

Luego, de acuerdo a la Hipótesis de Inducción y a propiedades del operador sumatoria y de los coeficientes binomiales, se sigue que

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k}\, b^{k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k}\, b^{k+1}$$

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k}\, b^{k} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^{m+1-k}\, b^{k} + b^{m+1}$$

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k}\, b^{k} + b^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k}\, b^{k},$$

lo cual prueba que $(m+1) \in S$.

EJEMPLO

Considere el desarrollo de:

$$\left(\frac{2x^3}{y} - \frac{y^2}{x}\right)^{45}$$

a) Encuentrre las potencias de y en los términos centrales.

b) Encuentre, si existe, el término independiente de x.

Inducción Matemática

SOLUCION a) $T_{k+1} = \begin{pmatrix} 45 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{2x^3}{y}\right)^{45-k} \left(\frac{-y^2}{x}\right)^{k}$

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 45 \\ 22 \end{pmatrix} \left(\frac{2x^3}{y}\right)^{45-22} \left(\frac{-y^2}{x}\right)^{22}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(y^{-1}\right)^{23} \left(y^{2}\right)^{22} = y^{-23+44} = y^{21}$$

$$T_{24} = \begin{pmatrix} 45 \\ 23 \end{pmatrix} \left(\frac{2x^3}{y}\right)^{45-23} \left(\frac{-y^2}{x}\right)^{23}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(y^{-1}\right)^{22} \left(y^{2}\right)^{23} = y^{-22+46} = y^{24}$$

Las potencias de y en los términos centrales son 21 y 24.

SOLUCION b)

$$T_{k+1} = \begin{pmatrix} 45 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{2x^3}{y}\right)^{45-k} \left(\frac{-y^2}{x}\right)^k$$

$$\Longrightarrow \left(x^3\right)^{45-k} \left(x^{-1}\right)^k = x^0$$

$$\Longrightarrow 135 - 3k - k = 0$$

$$\Longrightarrow 4k = 135$$

$$\Longrightarrow k = \frac{135}{4} \notin I\!N \cup \{0\}$$

$\therefore$ No existe el término independiente de x.

PROGRESION ARITMETICA

- Sean $a_1, d \in \mathbb{R}$ números dados. Se llama PROGRESION ARITMETICA (PA) con término inicial (primer término) a_1 y diferencia común d a la sucesión de números $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, donde

$$\boxed{\forall\, n \geq 2: \quad a_n = a_{n-1} + d}$$

- Notar que $\forall\, n \in I\!N: \quad a_n = a_1 + (n-1)\,d$ (demostración por inducción).

- La suma de los n primeros términos de una Progresión Aritmética con primer término a_1 y diferencia común d, está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}\,(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n) \quad \forall\, n \in I\!N$$

(demostración por inducción).

Inducción Matemática

PROGRESION GEOMETRICA

- Sean $a_1,\, r \in \mathbb{R}$ números dados. Se llama PROGRESION GEOMETRICA (PG) con término inicial a_1 y razón (cuociente) común r a la sucesión de números $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, donde

$$\boxed{\forall\, n \geq 2 : \quad a_n = r\, a_{n-1}}$$

- Notar que $\forall\, n \in I\!\!N : \quad a_n = r^{n-1}\, a_1$ (demostración por inducción).

- La suma de los n primeros términos de una Progresión Geométrica con primer término a_1 y razón común r, está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right) \qquad \forall\, n \in I\!\!N \quad \forall\, r \neq 1$$

(demostración por inducción).

EJEMPLO

Una persona lee un libro de tal manera que cada día aumenta en 4 el número de páginas que leyó el día anterior, es decir, si el día k-ésimo leyó a_k páginas el día siguiente leerá $a_k + 4$ páginas. Si después de 18 días ha leído los 21/55 del libro, y 6 días más tarde le faltaban únicamente los 19/55 del libro, ¿cuántas páginas tiene el libro?

Inducción Matemática

SOLUCION Sea P el número total de páginas que tiene el libro en cuestión. Denotando por a_k la cantidad de páginas que lee el alumno en el k-ésimo día, del enunciado se rescata que

$$a_{k+1} = a_k + 4\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

lo cual nos dice que $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ define una progresión aritmética de diferencia común $d = 4$ y primer elemento a_1.
Además, del enunciado se pueden extraer la siguiente información:

- $$\sum_{k=1}^{18} a_k = \frac{21}{55}P \qquad \Rightarrow \qquad 2\,a_1 + (17)(4) = \frac{7}{165}P \quad (i)$$
- $$\sum_{k=1}^{24} a_k = \frac{36}{55}P \qquad \Rightarrow \qquad 2\,a_1 + (23)(4) = \frac{3}{55}P \quad (ii)$$

De $(ii) - (i)$ se tiene

$$(4)(23-17) = \frac{1}{165}(9-7)P \quad \Rightarrow \quad P = 1980 \text{ páginas.}$$