UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142

Listado 3 (Inducción)

1. Pruebe por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$: **(En práctica d))**

   a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 \ = \ \dfrac{1}{3}n(4n^2 - 1)$.

   b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) \ = \ \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

   c) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \ = \ \dfrac{n}{2n+1}$.

   d) $2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \cdots + 2n \cdot (2n+2) = \dfrac{4n(n+1)(n+2)}{3}$.

2. Sea $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, una sucesión de números reales y d una constante real positiva, tales que:

$$\begin{aligned} a_0 &= \ 0, \\ a_n &= \ a_{n-1} + d \cdot n, \quad \text{cuando } n \geq 1. \end{aligned}$$

   Demuestre, usando inducción, que $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n \leq d \cdot n^2$.

3. Sea $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$, una sucesión de números reales, llamada sucesión de Fibonacci, tales que:

$$\begin{aligned} u_1 &= \ 1, \quad u_2 = 1, \\ u_n &= \ u_{n-1} + u_{n-2}, \quad \text{cuando } n \geq 3. \end{aligned}$$

   Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$: **(En práctica c))**

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = u_{n+2} - 1$

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_{2i} = u_{2n+1} - 1$

   c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_{2i-1} = u_{2n}$

   d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = u_n \cdot u_{n+1}$

4. Aplique la propiedad telescópica para probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$. **(En práctica b))**

5. Considere la identidad $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, y deduzca una fórmula para $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. **(En práctica)**

6. (**mire, vea, conjeture**). Considere las siguientes identidades:

$$\begin{array}{lrcl}
n=1\rightarrow & 1 & = & 1\\
n=2\rightarrow & 1-2^2 & = & -(1+2)\\
n=3\rightarrow & 1-2^2+3^2 & = & 1+2+3\\
n=4\rightarrow & 1-2^2+3^2-4^2 & = & -(1+2+3+4)\\
 & & \vdots &
\end{array}$$

En general, para $n \in \mathbb{N}$, ¿Qué identidad escribiría Ud.? Demuestre su conjetura utilizando el principio de inducción y las identidades vistas en clases.

7. Demuestre por inducción que

   a) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad n^5 - n$ es divisible por 5. **(En práctica a))**

   b) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 3^{2n} + 7$ es múltiplo de 8.

   c) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad n^3 + 2n$ es divisible por 3.

   d) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.

   e) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \forall x \geq -1,\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.

8. Pruebe por inducción que $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad n^2 + n$ es divisible por 2, y use este resultado para demostrar que $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad n^3 + 11n$ es divisible por 6. **(En práctica)**

9. Encuentre el mínimo valor de $m \in \mathbb{N}$ para el cual se verifica que $\forall\, n \geq m,\ 2^n > n^2$. Demuéstrelo por inducción. **(En práctica)**

10. Encuentre: **(En práctica d))**

    a) el cuarto término en el desarrollo de $(x+5)^{11}$.

    b) el término constante (si existe) en el desarrollo de $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

    c) los términos centrales del desarrollo de $\left(y + \dfrac{1}{y^{1/2}}\right)^{15}$.

    d) los términos que contienen $\dfrac{x^2}{y^3}$ y $\dfrac{x}{y}$ (si existen) en el desarrollo de $\left(x^2 y - \dfrac{x}{y}\right)^{16}$.

11. *a*) Pruebe que: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0,1,..,n\},\ \dbinom{n}{k} \leq \dfrac{n^k}{k!}$ **(En práctica a))**

    b) Use a) para probar que: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0,1,..,n\},\ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

12. Demuestre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: **(En práctica b))**

    a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, *b*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$, *c*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

RRS/RNG/JMS/AGS/LNB/JSA/BBM/LRS/ags
semestre otoño 2006.