UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

MAT 521 218 **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para Ingeniería**

FChH/EHH/LNB/FPV/fchh. 29.04.2002

CERTAMEN $N^o 1$

I. Resuelva el siguiente problema

(1.1) Estudiar la existencia y unicidad de la solución del PVI definido por la ecuación de Bernoulli $\boxed{x\frac{dy}{dx} - y^2 \ln x + y = 0}$, cuando las condiciones iniciales son

1.1.1. $y(0) = 1$;
1.1.2. $y(1) = 0$;
1.1.3. $y(1) = 1$, respectivamente. (17 puntos)

(1.2) En los caso en que exista solución, determínela **explícitamente.** (08 puntos)

II. Clasifique, justificando adecuadamente, las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden, ya sea como función $x = x(y)$ o bién $y = y(x)$. Resolver **sólo una** de ellas.

(2.1) $(2xy^3 + y\cos x)dx + (3x^2y^2 + sen\, x)dy = 0$.

(2.2) $(x + ye^{x/y})dx - ydy = 0$.

(2.3) $(x - y^2)dy + dx = 0$.

(2.4) $(3y^2 + 4x)dx + 2xydy = 0$.

(2.5) $xdy + ydx = xy^2dx$. (20 puntos)

Segunda Página Problemas: III, IV y V.

La ley de enfriamiento de Newton dice: la velocidad con que cambia la temperatura de un cuerpo inmerso en un medio que tiene temperatura constante es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre la del cuerpo y del medio que lo rodea.

III. Resuelva el siguiente problema. A las 16.00 horas fue descubierto un cadáver. El médico forense llegó media hora más tarde y le tomó la temperatura, siendo ésta de $\boldsymbol{28^oC}$. Dos horas después la temperatura registrada por el médico fué de $\boldsymbol{22^oC}$. La temperatura de la habitación donde se encontraba el cadáver era de $\boldsymbol{16^oC}$ constante. Se pide deducir la hora de fallecimiento del sujeto, considerando que la temperatura de un cuerpo en estado normal es de $\boldsymbol{36^oC}$. (20 puntos)

IV. Nuestro conocido personaje de historietas cómicas, **Superman**, se encontraba en la azotea de un edificio de 100 metros de altura leyendo **the clinic**, cuando de pronto observa a un chico malo asaltando a una tierna abuelita a la salida de dicho edificio. Nuestro héroe sale en persecución del sujeto de tal forma que, en un punto de su trayectoria, el radio vector del punto de tangencia forma un triángulo isósceles con el segmento rectilíneo determinado por el punto de tangencia y el edificio, siendo la base de este triángulo el segmento ubicado en el edificio (ver figura).

(4.1) Deduzca que la ecuación diferencial que modela la trayectoria seguida por nuestro famoso héroe es

$$\boldsymbol{y - y'x = \sqrt{x^2 + y^2}}.$$ (20 puntos)

(4.2) Resuelva la ecuación diferencial. (15 puntos)

V. Se deja caer un cuerpo desde un avión que vuela a una altitud de 50000 metros. Si la resistencia del aire es $\frac{1}{4}$ de la velocidad de caída y suponiendo que inicia su caída con velocidad nula, determine su velocidad límite. (20 puntos).

OBSERVACIÓN: Ud. debe escoger en resolver el problema (4.1) o el problema V.

Ver Pautas en las siguientes cinco páginas.

Pauta Problema (1.1)

$\boxed{\text{07 pts.}}$ Re-escribimos la ecuación :

$$y' = \frac{y^2 \ln x - y}{x} := f(x,y) \quad f_y(x,y) = \frac{2y \ln x - 1}{x}$$

observamos que f y f_y son continuas $\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

$\boxed{\text{07 pts.}}$ En consecuencia el **Teorema de Existencia y Unicidad** (visto en clase) garantiza que existe una única curva solución que pasa por los puntos $(1,0)$ y $(1,1)$.

$\boxed{\text{03 pts.}}$ No se puede garantizar existencia de solución en el punto $(0,1)$.

Pauta Problema (1.2)

$\boxed{\text{02 pts.}}$ Primero observamos que $y(x) = 0$ es la única solución que pasa por el punto $(1,0)$.

$\boxed{\text{02 pts.}}$ Para el otro caso resolvemos la ecuación de Bernoulli:

$$xy^{-2}y' + y^{-1} = \ln x,$$

realizamos el cambio de función incógnita $z(x) = y^{-1}(x)$ y obtenemos:

$$z' = -y^{-2}y', \qquad z(1) = 1, \qquad x > 0.$$

$\boxed{\text{04 pts.}}$ Así debemos resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \qquad \text{cuyo factor integrante es} \qquad \mu(x) = \frac{1}{x}.$$

Luego integramos entre 1 y x para $x > 0$:

$$\frac{d(\mu(x)z(x))}{dx} = \frac{\ln x}{x^2}$$

y obtenemos:

$$\left.\frac{z(s)}{s}\right|_1^x = \int_1^x \frac{\ln s}{s^2} \implies z(x) = \ln x + x$$

luego la solución del PVI es

$$y(x) = \frac{1}{\ln x + 1}, \ \forall\, x > \frac{1}{e}.$$

Pauta Problema (2.1)

$\boxed{\text{02 pts.}}$ $(\boldsymbol{2xy^3 + y\cos x)dx + (3x^2y^2 + \sin x)dy = 0}$. Es una EDO **Exacta**:

$$M_y = 6xy^2 + \cos x \qquad N_x = 6xy^2 + \cos x$$

$\boxed{\text{10 pts}}$ **Resolución:** $F(x,y) = \int (2xy^3 + y\cos x)dx + g(y)$

$$g'(y) + 3x^2y^2 + \sin x = 3x^2y^2 + \sin x \qquad \Longrightarrow \qquad x^2y^3 + y\sin x = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Pauta Problema (2.2)

$\boxed{\text{02 pts.}}$ $(x + ye^{x/y})dx - ydy = 0$. Es una EDO **Homogénea**:

$$M(tx, ty) = tM(x,y), \qquad N(tx,ty) = tN(x,y)$$

$\boxed{\text{10 pts.}}$ **Resolución:** Primero observamos: $dy = vdx + xdv$ luego:

$$(x + vxe^{1/v})dx - vx(vdx + xdv) = 0 \implies x \cdot (1 + ve^{1/v} - v^2)dx - vx^2dv = 0$$

$$\implies ln|x| = \int \frac{v}{1 + ve^{1/v} - v^2}dv + C$$

Pauta Problema (2.3)

$\boxed{\text{02 pts.}}$ $\mathbf{(x - y^2)dy + dx = 0}$ Es una EDO **Lineal**:

$$x' + x = y^2$$

$\boxed{\text{10 pts.}}$ **Resolución:** Observar que $\dfrac{d(e^y\, x(y))}{dy} = y^2e^y$ luego:

$$x(y) = e^{-y}\left\{\int y^2e^ydy + C\right\}$$

<u>Nota:</u> Observar que la EDO propuesta se puede re-escribir $dx + (x - y^2)dy = 0$ la cual no es exacta. Su factor integrante es $\mu(y) = e^y$ y recupera el análisis anterior.

Pauta Problema (2.4-A)

$\boxed{\text{02 pts.}}$ $(3y^2+4x)dx+2xydy=0$. Es una EDO que no es **Exacta** (y existe un factor integrante que depende sólo de x):

$\boxed{\text{10 pts.}}$ **Resolución:**

$$M_y=6y, N_x=2y, \qquad \frac{1}{N}(M_y-N_x)=\frac{2}{x} \quad \mu(x)=e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2$$

Integramos: $(3x^2y^2+4x^3)dx+2x^3ydy=0$

Esto es, la solución es **definida implicítamente** por $F(x,y(x))=C$ donde:

$$F(x,y)=\int(2x^3y)dy+f(x) \implies 3x^2y^2+f'(x)=-3x^2y^2+4x^3$$

$$\implies F(x,y)=y^2x^3+x^4=C$$

Pauta Problema (2.4-B)

$\boxed{\text{03 pts.}}$ $(3y^2+4x)dx+2xydy=0$. Es una EDO del tipo **Bernoulli**. Si $x\cdot y\neq 0$:

$$y'+\frac{3}{2x}y=-2y^{-1} \iff yy'+\frac{3}{2x}y^2=-2$$

$\boxed{\text{10 pts.}}$ **Resolución:** Definimos el cambio de función incógnita $z(x)=y^2(x)$ luego $z'=2yy'$ en consecuencia integramos:

$$\frac{1}{2}z'+\frac{3}{2x}z=-2 \iff \frac{d(x^3z(x))}{dx}=-4x^3$$

es decir, la solución es **definida implicítamente** por: $y^2x^3+x^4=C$.

Pauta Problema (2.5)

$\boxed{\text{03 pts.}}$ $xdy+ydx=xy^2dx$. Es una ecuación del tipo de **Bernoulli**. Si $x\cdot y\neq 0$:

$$y'+\left(\frac{1}{x}\right)y=y^2 \iff y^{-2}y'+\left(\frac{1}{x}\right)y^{-1}=1$$

$\boxed{\text{10 pts.}}$ **Resolución:** Definimos el cambio de función incógnita $z(x)=y^{-1}(x)$ luego $z'=-y^{-2}$ en consecuencia integramos:

$$-z'+\frac{1}{x}z=1 \iff \frac{d}{dx}\left(\frac{z(x)}{x}\right)=-\frac{1}{x}$$

es decir, la solución es **definida implicítamente** por: $1=y\cdot x\,(C-\ln|x|)$.

Pauta Problema (3)

10 pts. El PVI a resolver es

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= k(T - T_0) \\ T(0) &= 28, \end{aligned}$$

donde $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en el instante t y $T_0 = 16$ es la temperatura ambiente. La EDO es de variables separables o bién lineal de primer orden que tiene por solución

$$T(t) = 16 + Ce^{kt}.$$

Aplicando la condición inicial se tiene que $C = 12$ por lo que

$$T(t) = 16 + 12e^{kt}.$$

El dato adicional $T(2) = 22$ conduce a que $k = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

10 pts. Luego la solución esta dada por

$$T(t) = 16 + 12e^{\frac{1}{2}ln\left(\frac{1}{2}\right)t}.$$

El tiempo de fallecimiento se determina de $T(t =?) = 36$, lo que da

$$36 = 16 + 12e^{\frac{1}{2}ln\left(\frac{1}{2}\right)t} \implies t = \frac{2\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx -1.47$$

Por lo tanto la hora de fallecimiento es aproximadamente $16.5 - 1.47$. Aproximadamente el sujeto falleció a las 15.00 horas

Pauta Problema (4.2)

$\boxed{\text{15 pts.}}$ La EDO es homogénea y tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Con la sustitución $v = \frac{y}{x}$ se resuelve la EDO separable

$$\begin{aligned} v + x\tfrac{dv}{dx} = v - \sqrt{1+v^2} &\implies x\tfrac{dv}{dx} = -\sqrt{1+v^2} \\ &\implies \ln(v + \sqrt{1+v^2}) = \ln \tfrac{C}{x} \\ &\implies \sqrt{\tfrac{y^2}{x^2}+1} + \tfrac{y}{x} = \tfrac{C}{x}. \end{aligned}$$

Pauta Problema (5)

$\boxed{\text{10 pts.}}$ El PVI a resolver, considerando el sistema de referencia con el eje vertical positivo hacia abajo, es según la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= mg - \frac{1}{4}v \\ v(0) &= 0. \end{aligned}$$

La EDO es lineal de primer orden con factor integrante $\mu(t) = e^{\frac{1}{4m}t}$. Multiplicando la EDO por este factor integrante se resuelve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(v(t)e^{\frac{1}{4m}t}\right) &= ge^{\frac{1}{4m}t} \\ v(t)e^{\frac{1}{4m}t} &= g\int e^{\frac{1}{4m}t}dt \\ v(t) &= e^{-\frac{1}{4m}t}\left(4mge^{\frac{1}{4m}t} + C\right) \\ v(t) &= 4mg + Ce^{-\frac{1}{4m}t}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{10 pts.}}$ Aplicando la condición inicial se tiene que $C = -4mg$ y por lo tanto la solución es

$$v(t) = 4mg\left(1 - e^{-\frac{1}{4m}t}\right).$$

Finalmente, la velocidad límite es

$$v_\infty(t) = \lim_{t\to\infty} v(t) = 4mg.$$