UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO: 521234

Guía de Ejercicios No 2

1. Las funciones T-periódicas con simetría de cuarto onda tienen la propiedad de involucrar sólo armónicos impares: $a_{2n-1}\cos(\frac{(2n-1)\pi}{T}x)$ o bien $b_{2n-1}\,\text{sen}(\frac{(2n-1)\pi}{T}x)$, dependiendo si f es par o impar, respectivamente.

Definición 1 *Simetría Alternante y de Cuarto de Onda*

a) *Una función T-periódica se dice alternante si se verifica:*

$$\forall\, t\, \in\,]-T/2, 0[\, : \quad f(t) = -f(t + T/2)$$

b) *Una función T-periódica tiene simetría de 1/4 de onda si ella es alternante y tiene simetría par o impar.*

1.1 Pruebe que si f es una función T-periódica alternante su serie de Fourier sólo contiene armónicos impares, es decir, términos de la forma $a_n\cos(n\omega t) + b_n\,\text{sen}(n\omega t)$, $w = 2\pi/T$ con n impar donde

$$a_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos((2n-1)\omega t)dt \qquad b_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}((2n-1)\omega t)dt$$

¿Cuáles serán los armónicos si solamente se verifica

$$\forall\, t\, \in\,]-T/2, 0[\, : \quad f(t) = f(t + T/2) \quad (-T/2 < t < 0)?$$

1.2 Si f es una función T-periódica con simetría de cuarto de onda entonces si f es par:

$$a_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos((2n-1)\omega t)dt \quad \text{y} \quad b_{2n-1} = 0$$

o bien si f es impar.

$$a_{2n-1} = 0 \quad \text{y} \quad b_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\,\text{sen}(2n-1)\omega t)dt$$

1.3 Determinar la serie de Fourier de las siguientes funciones definidas en $[-\pi, \pi]$:

$$f(t) = \begin{cases} x(\pi + x), & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ x(\pi - x) & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases} \qquad f(x) = \tfrac{\pi}{8}(\pi - 2|x|)$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si} & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si} & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

1.4 Construir la serie de Fourier de senos de la función definida en el problema 3-c de la Guía de Ejercicios Nº 1.

2. Pruebe que la serie de Fourier sobre $]-\pi, \pi[$ de $f(t) = |\operatorname{sen}(t)|$ converge a f en cada punto de $[-\pi.\pi]$. Evaluando la serie en los puntos $x = 0$ y $x = \pi/2$ obtenga que:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$$

3. Pruebe que para todo $x \in [-\pi, \pi]$ se satisface la igualdad

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right]$$

4. Encuentre la serie de Fourier de la función $f(t)$ válida para $-1 < t < 1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 < t < 0 \\ \cos(\pi t) & \text{si} \quad 0 < t < 1 \end{cases}$$

¿ A qué valor converge esta serie cuando $t = 1$?

5. Determinar la serie de Fourier de Senos (SFS) asociada a la función $f(x) = x, \quad x \in [0, 1]$ y $f(x) = 0{,}5 - x, \quad x \in]1, 2]$. ¿ A qué valor converge la serie en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$, respectivamente? Ud. puede responder primero la última parte.

6. Mostrar que los coeficientes de Fourier c_n de la serie de Fourier Compleja de una función $f(t)$ son imaginarios puros si f es impar y reales si f es par.

7. Determinar la serie de Fourier compleja de las funciones:

   a) $f(t) = t^2 \quad (-\pi < t < \pi) \quad f(t+2\pi) = f(t)$. *Respuesta*: $f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2}{n^2}(-1)^n e^{int}$

   b) $f(t) = |\operatorname{sen}(t)|, \quad (-\pi < t < \pi) \quad f(t+2\pi) = f(t)$. *Respuesta*: $f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} e^{i2nt}$

   c) $f(t) = a\operatorname{sen}(\omega t) \quad (0 \le t \le \frac{T}{2}) \quad f(t) = 0 \quad (\frac{T}{2} \le t \le T) \quad f(t+T) = f(t), \ \omega = \frac{2\pi}{T}$
   Respuesta: $f(t) = \frac{a}{2}\operatorname{sen}(\omega t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{2\pi(n^2-1)}[(-1)^n + 1]e^{in\omega t}$

8. Determinar la serie de Fourier Compleja de $f(t) = \frac{2t}{T} \quad (0 < t < T) \quad f(t+2T) = f(t)$ y establecer (usando el teorema de Parseval) que:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Concepción, 24 de Agosto de 2005.
HMM/FPV/fpv.