UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION DE RECUPERACION
Complemento de Cálculo (521234)

1. *a*) Defina (*no calcule*) la serie de Fourier asociada a la extensión 3π periódica impar de la función $f(x) = \pi - x$ definida sobre $[0, \frac{3}{2}\pi]$. Estudiar la convergencia de dicha serie en el intervalo de definición de f.

(05 ptos.)

b) Estudie la analiticidad de la función de variable compleja $f(z) = Re\{z\}$ y de $g(z) = z + |z|$ en $\mathbb{C}$

(05 ptos.)

Pauta Problema 1

a) 1º La extensión 3π- periódica impar de f, que designamos por $\tilde{f}$ es:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nwx), \quad w = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

donde $b_n = \frac{4}{3\pi}\int_0^{3\pi/2} (\pi - x) \operatorname{sen} \frac{2nx}{3} \, dx.$

2º
- $\tilde{f}$ es continua por tramos en $-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, sólo es discontinua en los extremos y en el centro de este intervalo.
- $\tilde{f}'$ es continua por tramos en $-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$: $\tilde{f}'(x) = -1$ sobre $0 < |x| < \frac{3\pi}{2}$ y $\tilde{f}'(0^+) = \tilde{f}'(0^-) = -1$ al igual que en los extremos del intervalo.
- Como $\tilde{f}$ y $\tilde{f}'$ son continuas por tramos las sumas parciales $\sum_{n=0}^{N} b_n \operatorname{sen}(n\omega x)$ convergen puntualmente a $\tilde{f}$ en $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[/\{0\}$ y a cero en $x = 0$ y en los extremos del intervalo.

b) 1º Para todo $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$:

$$f(z) = x = u(x, y) + i0.$$

Por tanto no se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann ($U_x = 1$ y $v_y = 0$). Así f no es una función analítica.

2º Para todo $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} g(z) &= x + \sqrt{x^2 + y^2} + iy \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

Así $v_y = 1$ mientras que $u_x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Luego en este caso tampoco se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann y en consecuencia g no es una función analítica.

2. Desarrolle $f(z) = \frac{z}{z^2+4}$ en serie de potencias de z, en las regiones delimitadas por los puntos singulares de $f(z)$.

(10 ptos.)

Pauta Problema 2

1^{o} Los puntos singulares de f son $z = \pm 2i$

2^{o} Si $|z| < 2$: $\quad f(z) = \frac{z}{2^2} \frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2^{2n+2}}$

3^{o} Si $|z| > 2$: $\quad f(x) = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{z}\right)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{z^{2n+1}}.$

3. Calcule las integrales

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z^2-1)dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

(08 ptos.)

b) $$\oint_C \frac{4e^{\pi z}}{z^4(z^4-1)}dz, \quad \text{donde } C \text{ es la curva dada por } C : |z+\tfrac{i}{2}| = 1.$$

(07 ptos.)

Pauta Problema 3

a) 1º Observemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \in \mathbb{R}$, donde

$$f(z) = \frac{(z^2-1)}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = \frac{z^2-1}{(z+i)^2(z-i)^2(z+1+i)(z+1-i)}$$

2º $$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i(Res(f;i) + Res(f;-1+i)$$

3º Cálculo de los residuos (Nota: otras notaciones consideran el factor $2\pi i$ en la definición del residuo).

- $Res(f;i) = \frac{d}{dz}[(z-i)^2 f(z)]_{\ z=i}$, luego:

$$Res\ (f;i) \quad = \left.\frac{2z(z+i)(z^2+2z+2) - (z^2-1)\{2(z^2+2z+2) + 2(z+i)(z+1)\}}{(z+i)^3(z^2+2z+2)^2}\right|_{z=i}$$

$$= \frac{(2i)^3(1+2i) + 2^2\{(1+2i) + 2i(i+1)\}}{(2i)^3(1+2i)^2} = \frac{(1+i)(3+4i)}{25} = -\frac{1+7i}{25}$$

- $$Res(f;-1+i) = \lim_{z\to -1+i}(z+1-i)f(z) = -\frac{(1+2i)^3}{25(2i)} = \frac{2+11i}{50}$$

4º El valor de la integral es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dx = 2\pi i \quad \frac{2+11i}{50} + \frac{-1+7i}{25} \quad = \frac{2\pi i(25i)}{50} = -\pi$$

b) 1º Como $z^4-1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z-i)$ la curva C sólo encierra a $z=-i$. En efecto

$$i + \frac{i}{2} \ = \frac{3}{2} > 1, \qquad -i + \frac{i}{z} \ = \frac{1}{2} < 1, \qquad \pm 1 + \frac{i}{2} \ = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$$

2º Las únicas singularidades de f encerrados por la curva C son $z=0$ y $z=-i$

3º Observando que $\frac{1}{z^4(z^4-1)} = \frac{1}{z^4-1} - \frac{1}{z^4}$ se tiene:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{4e^{\pi 2}}{z^4-1}dz - \oint \frac{4e^{\pi z}}{z^4}dz$$

4º Aplicando el Teorema de la Fórmula Integral de Cauchy:

$$\oint_C f(z)dz \quad = 2\pi Res \quad \tfrac{4e^{\pi z}}{z^4-1}, -i \quad - 2\pi i Res \quad \tfrac{4e^{\pi z}}{z^4}, 0$$

$$= \frac{2\pi i 4e^{-\pi i}}{(-2)(-2i)} + \frac{2\pi i}{3!}4\pi^3 = 2\pi \quad -1 + \frac{4\pi^3 i}{3}$$

4. Resuelva el problema de Dirichlet $\quad -\Delta u(x,y) = 2\pi \operatorname{sen}(\pi x)$ en el dominio rectangular $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 2\}$ con $u = 0$ sobre el borde (frontera) de R, mediante el método de autofunciones.

(15ptos.)

Pauta Problema 4

1° Construimos la solución en el Sistema ortogonal de autofunciones $\{\operatorname{sen}(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \operatorname{sen}(n\pi x) \qquad (1)$$

2° Reemplazando la expresión anterior en la ecuación de Poisson:

$$-\triangle u = 2\pi sen(\pi x) \qquad (-\triangle = \nabla^2)$$

se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ Y_n''(y) - (n\pi)^2 Y_n(y) Y_n(y) \quad sen(n\pi x) = -2\pi sen(\pi x)$$

esto implica que:

$$Y_n'' - (n\pi)^2 Y_n = \begin{array}{cc} 0 & \text{si} \quad n \neq 1 \\ -2\pi & \text{si} \quad n = 1 \end{array}$$

3° Como u debe satisfacer las condiciones de contorno, en consecuencia:

$$u(x,0) = 0 \Longleftrightarrow Y_n(0) = 0 \quad \wedge \quad u(x,2) = 0 \Longleftrightarrow Y_n(2) = 0 \quad (2)$$

- Por tanto las funciones $\{Y_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ satisfacen el problema de valores de contorno:

$$Y_n''(y) - (n\pi)^2 Y_n(y) = \begin{array}{cc} 0 & \text{si} \quad n \neq 1 \\ -2\pi & \text{si} \quad n = 1 \end{array}$$

$$Y_n(0) = Y_n(2) = 0$$

cuya solución es:

- Si $n \neq 1$: $\quad Y_n(y) = 0$
- Si $n = 1$: $\quad Y_1(y) = \dfrac{2(senh(\pi y - 2\pi) - senh(\pi y))}{\pi senh(2\pi)} + \dfrac{2}{\pi} \qquad (*)$

5° La solución del problema propuesto es

$$u(x,y) = Y_1(y) sen(\pi x)$$

con $Y_1(y)$ definido en (*).

5. Determinar las curvas extremales del funcional:

$$J[y] = \int_1 2y'(1 + x^2 y')dx, \quad y \in C^2([1,2]),\ y(1) = 1,\ y(2) = 4.$$

(10ptos.)

Pauta Problema 4

1º $J[y] = \int_1^2 y1(1 + x^2 y')dx = \int_1^2 F(x, y, y')dx$
donde $F(x, y, y') = y0(1 + x^2 y') = y' + x^2 y^{12}$

2º La ecuación de Euler-Lagrange que deben satisfacer las curvas extremales es:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{-d}{dx}[2x^2 y'] = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 y' = cte$$
$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{a}{x} + b,\ a, b\,\text{constantes}$$

3º Exite una única curva extremal que satisface las condiciones de contorno: $y(1) = 1$ y $y(2) = 4$:

$$y(x) = \frac{-6}{x} + 7$$

Concepción, 7 de Diciembre de 2005.
HMM/FPV/cln.