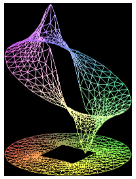
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

520142

Primer Semestre



FUNCIONES (2)

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

FUNCION EXPONENCIAL

Una **Función Exponencial de Base b** es la función real *positiva*:

$$\begin{array}{rccl} \exp_b : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & y = \exp_b(x) = b^x \end{array}$$

donde $b \in \mathbb{R},\ b > 0,\ b \neq 1$.

OBSERVACIONES

- La gráfica de $\exp_b$ es **asintótica** respecto al eje X.
- Todas las gráficas de $\exp_b$ pasan por el punto $(1, b)$:

$$\boxed{(\forall\, b > 0, b \neq 1) : \exp_b(1) = b}$$

- La única intersección de f con el eje Y, es el punto $(0,1)$:

$$\boxed{(\forall\, b>0, b\neq 1) : \exp_b(0) = 1}$$

- $\boxed{(\forall\, b>0, b\neq 1)(\forall\, x\in\mathbb{R}) : \ \exp_b(x) \ > \ 0 \ \wedge \ \exp_b(-x) = \frac{1}{\exp_b(x)}}$

- Producto de exponenciales $(\forall\, b>0, b\neq 1)(\forall\, x_1, x_2\in\mathbb{R}) :$

1. $\exp_b(x_1+x_2) = \exp_b(x_1)\cdot\exp_b(x_2)$
2. $\exp_b(x_1-x_2) = \exp_b(x_1) : \exp_b(x_2)$

$$= \exp_b(x_1)\cdot\exp_b(-x_2)$$

Funciones Reales

Propiedades de $\exp_b$, $b > 1$

- $\exp_b$ es una función estrictamente creciente:

$$(\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}) : \; x_1 < x_2 \implies b^{x_1} < b^{x_2}$$

- el valor de $\exp_b(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se aproxima a 0, cuando x es negativamente grande.

Observación

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \exp_b(x) = \exp_{\frac{1}{b}}(-x)}$$

Luego las gráficas de $\exp_b$ y $\exp_{\frac{1}{b}}$ son **simétricas** respecto al eje Y.

Por lo tanto, si $0 < b < 1$, entonces $\exp_b$ es una función **positiva**, estrictamente **decreciente** y asintótica al eje X, ella tiende a 0 cuando x es positivamente grande.

Biyectividad de $\exp_b$

Para todo $b > 0$ con $b \neq 1$

- La función exponencial es **inyectiva**:

$$\boxed{(\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}) : b^{x_1} = b^{x_2} \implies x_1 = x_2}$$

- La función exponencial es **sobreyectiva**:

$$\boxed{Rec(\exp_b) = \exp_b(\mathbb{R}) =]0, +\infty[}$$

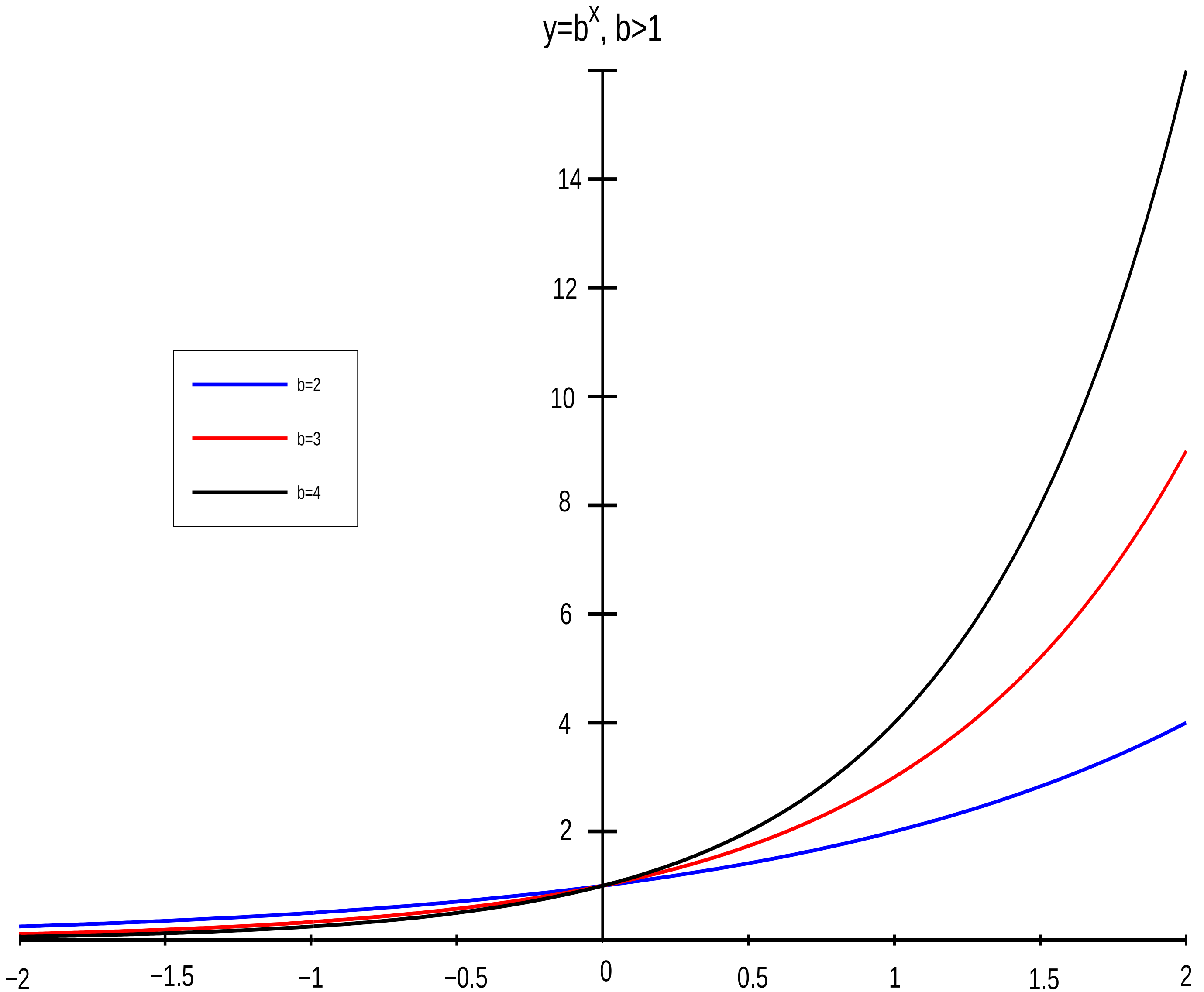
e^x

Si $b = \mathrm{e} \approx 2,7182\cdots$ la función se llama **La Función Exponencial Natural** y se escribe:

$$\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}$$

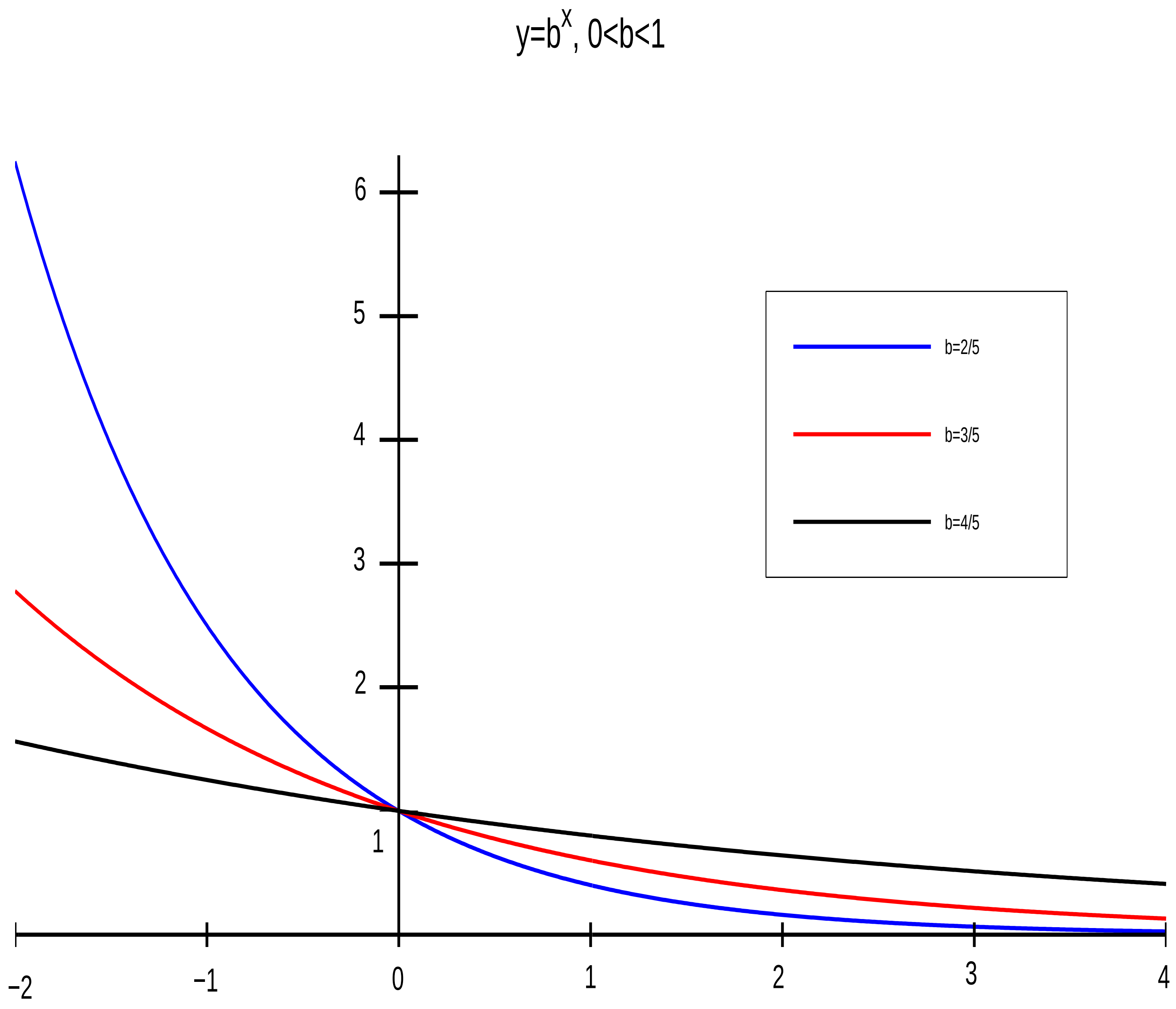
Funciones Reales

Funciones EXPONENCIALES



Funciones Reales

Funciones EXPONENCIALES



FUNCION LOGARITMICA

Una **Función Logarítmica de base b**, es la función real:

$$\begin{array}{rccclcr} \log_b : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} & & & \\ & x & \longmapsto & y = \log_b(x) & \Longleftrightarrow & & b^y = x \\ & & & & \Longleftrightarrow & & \exp_b(y) = x \end{array}$$

para cualquier $b > 0,\ b \neq 1$.

Observación

- $(\forall b > 0,\ b \neq 1) \left\{ \begin{array}{lcl} (\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}) : & \log_b(b^x) & = x \\ (\forall\ x > 0) : & b^{\log_b(x)} & = x \end{array} \right.$
- $(\forall x > 0) : y = \log(x) := \log_{10}(x) \Longleftrightarrow 10^y = x$
- $(\forall x > 0) : y = \ln(x) := \log_{\mathrm{e}}(x) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^y = x$

Propiedades de $\log_b$

Sean $b > 0, \;\; b \neq 1, \;\; x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $\log_b(x_1 \cdot x_2) = \log_b(x_1) + \log_b(x_2)$
2. $\log_b(\frac{x_1}{x_2}) = \log_b(x_1) - \log_b(x_2)$
3. $\log_b(\frac{1}{x}) = -\log_b(x)$
4. $\log_b(x^\alpha) = \alpha \log_b(x)$

Gráfica de $\log_b$

Sea $b > 0, b \neq 1$, entonces:

- La gráfica de $\log_b$ es **asintótica** respecto al eje Y
- La única intersección de $\log_b$ con el eje X es el punto $(1, 0)$, es decir:

$$\boxed{(\forall b > 0,\ b \neq 1) : \log_b(1) = 0}$$

- Todas las gráficas de $\log_b$ pasan por el punto $(b, 1)$, es decir:

$$\boxed{(\forall b > 0,\ b \neq 1) : \log_b(b) = 1}$$

Funciones Reales

Propiedades de $\log_b$ para $b > 1$

- $$\boxed{0 < x < 1 \iff \log_b(x) < 0}$$

- La función $\log_b$ es **estrictamente creciente**:

$$\boxed{(0 < x_1 < x_2 \implies \log_b(x_1) < \log_b(x_2))}$$

por lo tanto ella es **inyectiva**:

$$\boxed{(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+) : \quad \log_b(x_1) = \log_b(x_2) \implies x_1 = x_2}$$

Además, es **sobreyectiva**:

$$\boxed{Rec(\log_b) = \log_b(]0, +\infty[) = \mathbb{R}}$$

Fórmula de Cambio de base de $\log_b$

$$\boxed{(\forall a, b > 0,\ a, b \neq 1)(\forall x > 0) : \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}}$$

Observación

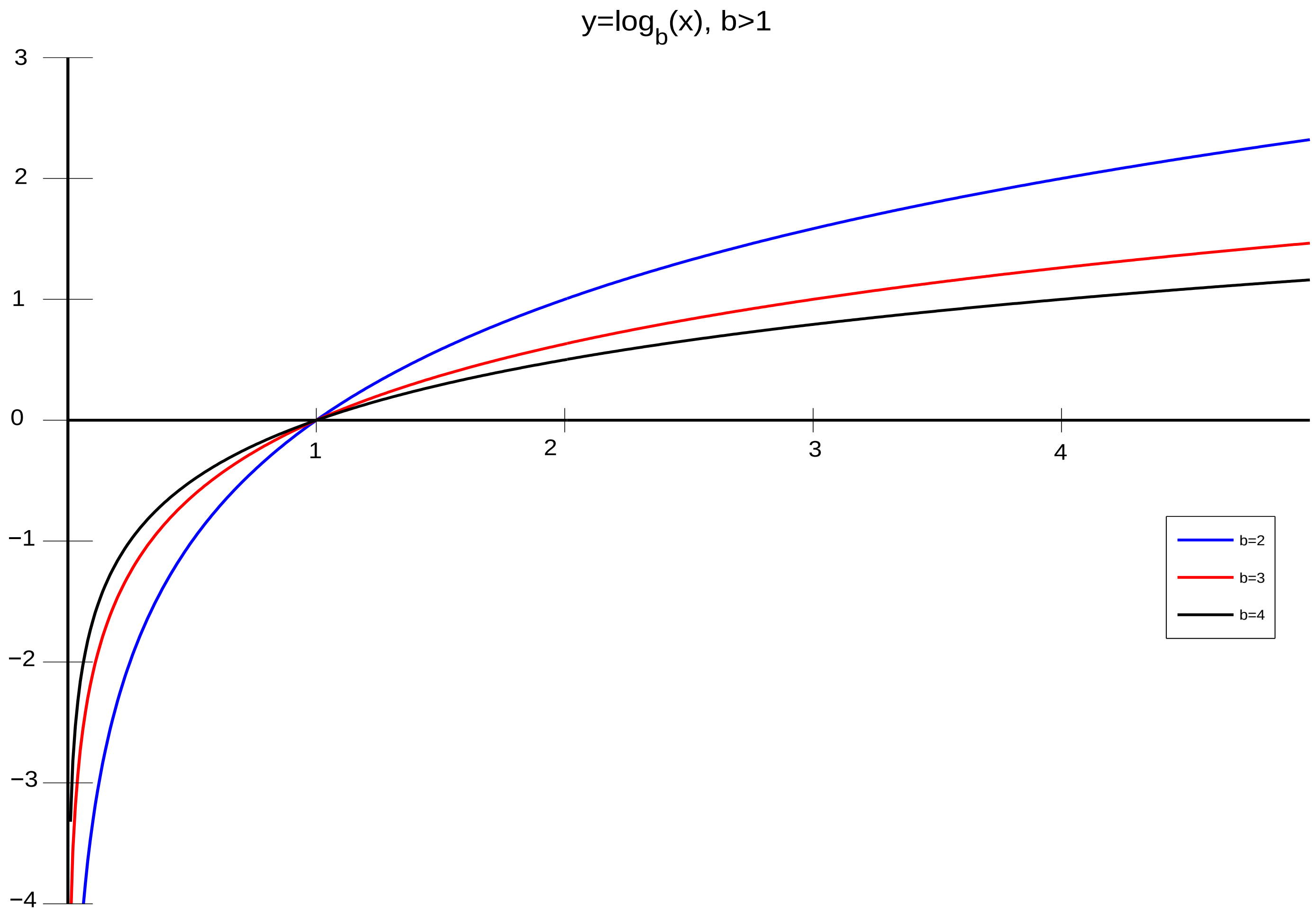
$$\boxed{\log_b(x) = -\log_{\frac{1}{b}}(x)}$$

Luego las gráficas de las funciones $\log_b$ y $\log_{\frac{1}{b}}$ son simétricas con respecto al eje X. Por lo tanto, si $0 < b < 1$, entonces $\log_b$ es una función **biyectiva**, **estrictamente decreciente**, que verifica la propiedad:

$$\boxed{x > 1 \iff \log_b(x) < 0 \text{ , si } 0 < b < 1}$$

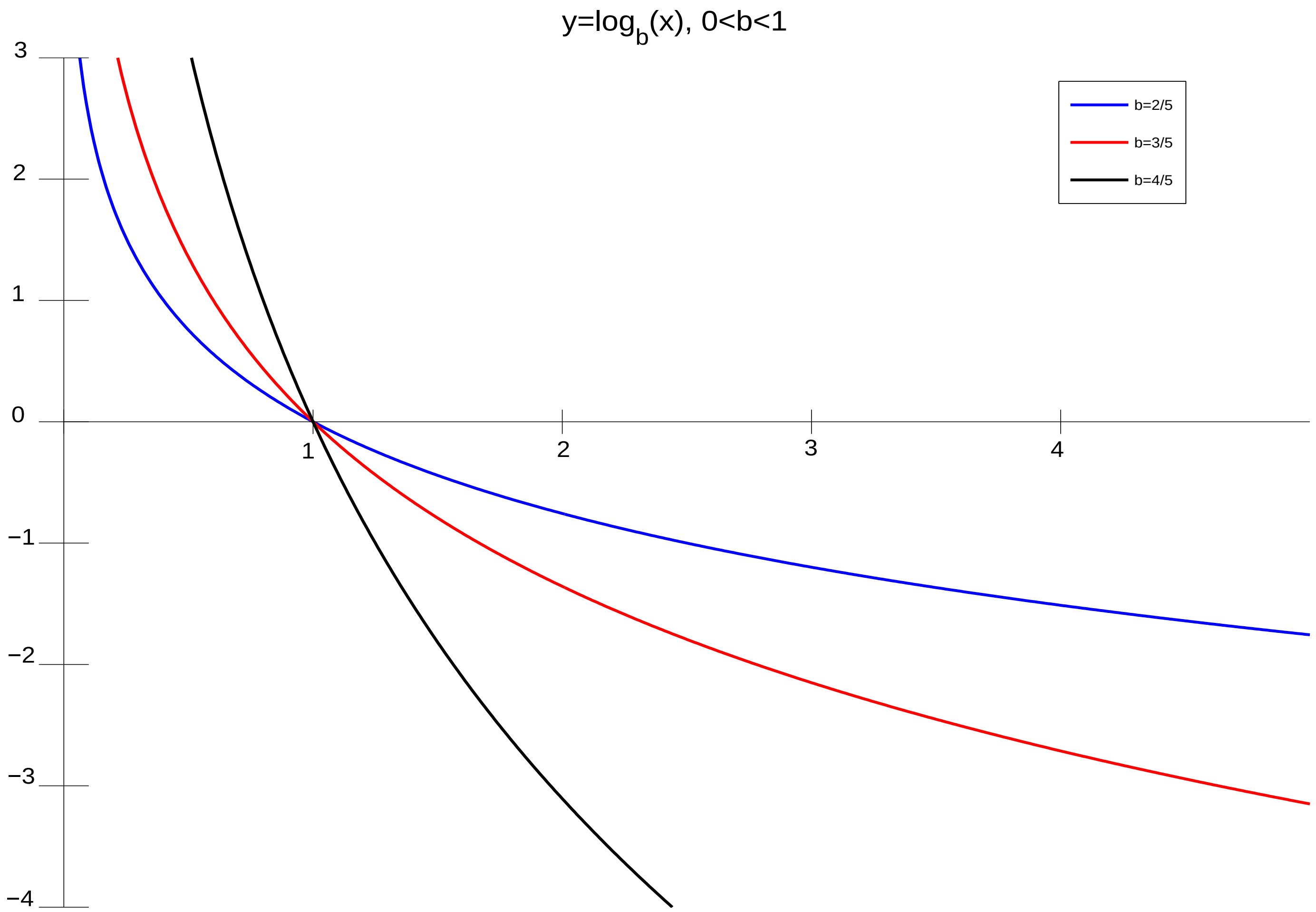
Funciones Reales

Funciones LOGARITMICAS



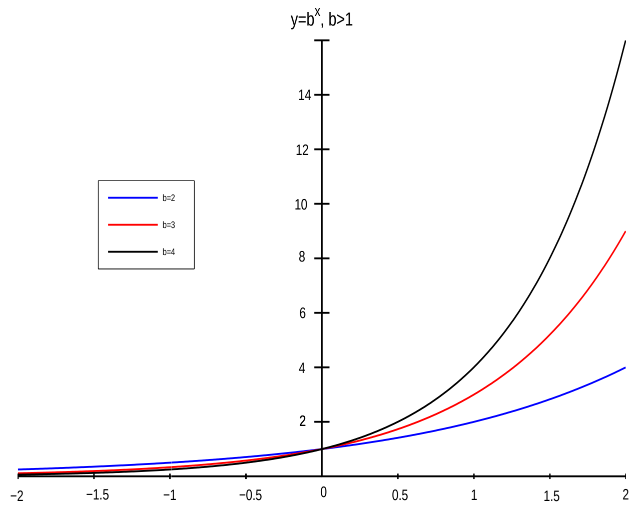
Funciones Reales

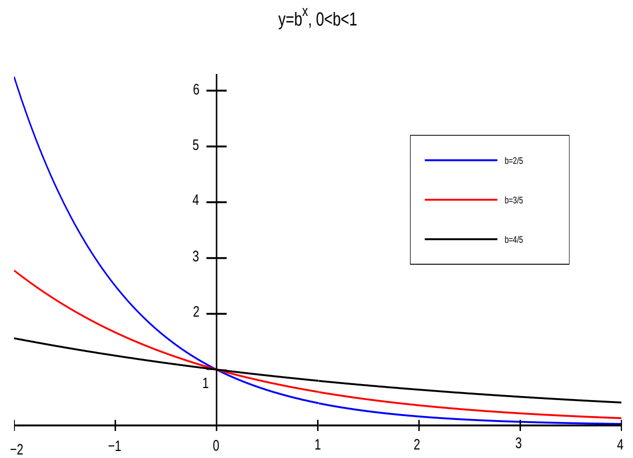
Funciones LOGARITMICAS

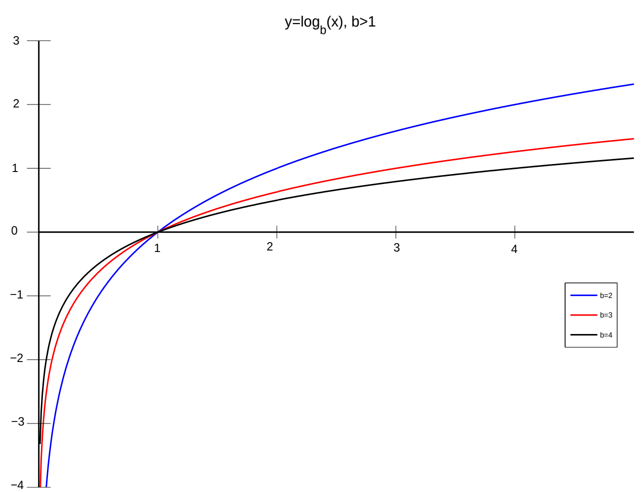


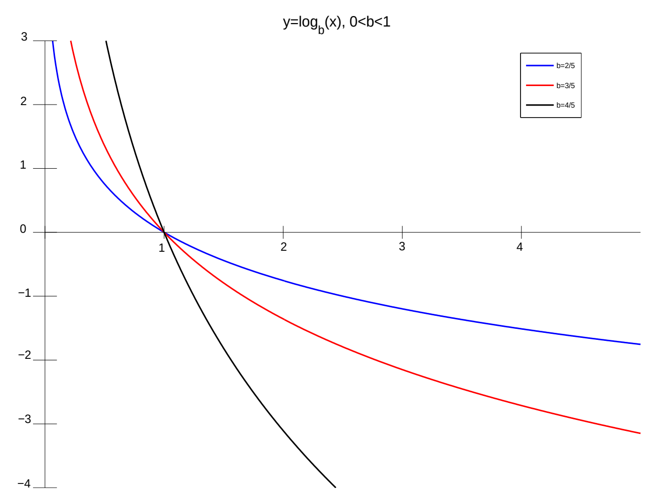
Funciones Reales

Funciones EXPONENCIALES y LOGARITMICAS









Funciones Reales

EJEMPLO

Considere la función $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in Dom(f)$, por: $f(x) = \ln(x-1)$.

Defina la función $g = f \circ f$.

SOLUCION

Primero es necesario calcular el dominio de f:

$$
\begin{aligned}
Dom(f) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \ln(x-1) \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 0\} \\
&=]1, +\infty[
\end{aligned}
$$

Funciones Reales

Ahora estamos en condiciones de calcular el dominio de $g = f \circ f$:

$$
\begin{aligned}
Dom(g) &= \{x \in]1,+\infty[: f(x) \in]1,+\infty[\} \\
&= \{x \in]1,+\infty[: \ln(x-1) \in]1,+\infty[\} \\
&= \{x \in]1,+\infty[: \ln(x-1) > 1\} \\
&= \{x \in]1,+\infty[: x-1 > \mathrm{e}\} \text{ pues } \ln \text{ es creciente} \\
&= \{x > 1 : x > \mathrm{e}+1\} =]\mathrm{e}+1,+\infty[\neq \emptyset
\end{aligned}
$$

Finalmente, la función g es definida por:

$$
\begin{aligned}
g &:]\mathrm{e}+1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\
g(x) &= \ln(\ln(x-1)-1) \quad \forall\, x \in]\mathrm{e}+1,+\infty[
\end{aligned}
$$