UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 2

Problema 1.

a) $v_1 = -i + 2j - k$
$v_2 = -i - j + k$

Un vetor paralelo a la recta, cuya ecuación se quiere obtener, es:

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j + 3k$$

Entonces, la recta perpendicular a v_1 y v_2 que pasa por el punto $(2, -1, 3)$, tiene como ecuaciones simétricas.

$$L : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$$

b) $Q = (0, 2, -1)$

Ecuaciones paramétricas de L:
$x = 2 + t$
$y = -1 + 2t$
$z = 3 + 3t$

Entonces, se busca un punto P de L tal que $\vec{PQ}$ sea perpendicular a L y así el punto P será punto de interseccióin de las dos rectas.

$v = i + 2j + 3k$ vector director de L. Luego $\vec{PQ}$ perpendicular a L implica que $\vec{PQ} \cdot v = 0$.

Ahora si P está en L, entonces

$$P = (2 + t,\ -1 + 2t,\ 3 + 3t) \ \text{ para algún } t \in I\!R;$$

con lo cual: $\vec{PQ} = (-2 - t)i + (3 - 2t)j + (4 - 3t)$,

y por lo tanto

$\vec{PC} \cdot v = (-2 - t) + 2(3 - 2t) + 3(-4 - 3t)$

Ahora $\vec{PC} \cdot v = 0 \Rightarrow -8 - 14t = 0$, obteniéndose que $t = -4/7$.

Así $P = \left(\frac{10}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{9}{7}\right)$.

Los tres vectores tienen como punto inicial el origen, luego es un punto del plano que los contiene. Un vector normal a este plano sería

$$n = v \times \omega = i - 22j - 17k$$

Así la ecuación del plano queda como:

$$x - 22j - 17 = 0$$

Ya se ha dicho que el punto $(0,0,0)$ es un punto del plano.

Si P es un punto del plano, entonces la distancia desde un punto P_0 al plano es:

$$d = \frac{|n \cdot P\vec{P}_0|}{||n||}$$

Para este caso se tiene:

$$n = i - 22j - 17l, \; P\vec{P}_0 = -i + j$$

De donde;

$$||n|| = 3\sqrt{86}, \quad n \cdot P\vec{P} = 1 - 22 = -21$$

$$\Rightarrow d = \frac{21}{3\sqrt{86}} = \frac{21\sqrt{86}}{258}$$

Problema 3. $v = \mathcal{M}_{3\times 2}(I\!R)$, espacio vectorial

a) i) A y $B \in M_{3\times 2}(I\!R)$, matrices cualquiera, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \\ r_1 & s_1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \\ r_1 + r_2 & s_1 + s_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \\ c_2 + c_1 & d_2 + d_1 \\ r_2 + r_1 & s_2 + s_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \\ r_1 & s_1 \end{pmatrix} \\ &= B + A \end{aligned}$$

Y por lo tanto se cumple la propiedad conmutativa

ii) α, β números reales y

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ 2a & 3b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ 2r & 3s \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ 2a & 3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ 2r & 3s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+r & 0 \\ 0 & b+s \\ 2a+2r & 3b+3s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+r & 0 \\ 0 & b+s \\ 2(a+r) & 3(b+s) \end{pmatrix}$$

Si $a' = a + r, , b' = b + s,$ entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \\ 2a' & 3b' \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $A + B \ \in \ H$

iii) $\alpha \in I\!R$, $A \in H$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ 0 & \alpha b \\ \alpha(2a) & \alpha(3b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ 0 & \alpha b \\ 2(\alpha a) & 3(\alpha b) \end{pmatrix}$$

Si $a' = \alpha a$, $b' = \alpha b$

$$\Rightarrow \alpha A = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \\ 2a' & 3b' \end{pmatrix}$$

Con lo que $\alpha A \in H$.

De i) ii) e iii) H es subespacio de $\mathcal{M}_3 \times 2(I\!R)$.

08 de Noviembre de 2005
ADP/cln.