UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 5
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142) (22/04/2004).

P1. Sean w_1, w_2, w_3 reales positivos. Se define la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle := \sum_{i=1}^{3} w_i x_i y_i.$$

a) Pruebe que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es producto interior sobre $\mathbb{R}^3$. **(4 Ptos.)**

b) Suponga que $(w_1, w_2, w_3) = (2, 6, 4)$. Encuentre los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que $\{(-1, a, 1), (1, 1, -1), (b, 0, a)\}$ sea una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ con el producto interior definido. **(8 Ptos.)**

c) Suponga que $(w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 2)$ y sea $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x = y = -z\}$. Encuentre una base de $F^\perp$ para el producto interior definido, y muestre que la proyección ortogonal de $(1, 1, -1)$ sobre $F^\perp$ es $(0, 0, 0)$. **(8 Ptos.)**

<u>Solución</u>

a) Sean $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \langle (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3), (z_1, z_2, z_3) \rangle$
$= \sum_{i=1}^{3} w_i\, (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \sum_{i=1}^{3} w_i\, \alpha x_i z_i + \sum_{i=1}^{3} w_i\, \beta y_i z_i = \alpha \sum_{i=1}^{3} w_i x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^{3} w_i y_i z_i =$
$\alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$. **(1 punto)**

ii) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} w_i x_i y_i = \sum_{i=1}^{3} w_i y_i x_i = \langle y, x \rangle$. **(1 punto)**

iii) $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{3} w_i x_i^2 \geq 0$, pues $\forall i = 1, 2, 3,\ w_i > 0,\ x_i^2 \geq 0$. **(1 punto)**

iv) $\langle x, x \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{3} w_i x_i^2 = 0 \iff \forall i = 1, 2, 3,\ w_i x_i^2 = 0 \iff (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. **(1 punto)**

b) $\{(-1, a, 1), (1, 1, -1), (b, 0, a)\}$ es ortogonal si se satisfacen:

$i)$ $\langle (-1, a, 1), (1, 1, -1) \rangle = -2 + 6a - 4 = 0,$ **(1 punto)**
$ii)$ $\langle (-1, a, 1), (b, 0, a) \rangle = -2b + 0 + 4a = 0,$ **(1 punto)**
$ii)$ $\langle (1, 1, -1), (b, 0, a) \rangle = 2b + 0 - 4a = 0.$ **(1 punto)**

Luego, de la ecuación $i)$ se tiene que $a = 1$ y de $ii)$ se tiene que $b = 2$. Por lo tanto, $B = \{(-1, 1, 1), (1, 1, -1), (2, 0, 1)\}$ es un conjunto ortogonal. **(2 puntos)**

Por teorema visto en clases, como B es ortogonal, entonces es l.i. **(2 puntos)** y por ser de cardinalidad igual a la dimensión de $\mathbb{R}^3$, entonces es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. **(1 punto)**

c) $(x, y, z) \in F \iff (x, y, z) = t(1, 1, -1),\ t \in \mathbb{R}$. Luego, $F = \langle \{(1, 1, -1)\} \rangle$ **(1 punto)**.

Así $F^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ \langle (x, y, z), (1, 1, -1) \rangle = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x + y - 2z = 0\}$.
De aquí, $F^\perp = \langle \{(2, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \rangle$ **(3 puntos)**.

Probemos ahora que $\{(2, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$ es un conjunto l.i. Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha(1, 0, 2) + \beta(-1, 1, 0) = (0, 0, 0) \iff (2\alpha - \beta, \beta, \alpha) = (0, 0, 0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Por lo tanto, $\{(2, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$ es l.i y por consiguiente una base de $F^\perp$. **(2 puntos)**

Por teorema visto en clases, $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$, asi $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ \exists!\ v_F, v_{F^\perp} \in \mathbb{R}^3$, $v = v_F + v_{F^\perp}$ donde $v_{F^\perp}$ es la proyección ortogonal de v sobre $F^\perp$. En este caso el vector $(1, 1, -1) \in F$, luego $(1, 1, -1) = (1, 1, -1) + (0, 0, 0)$, y por consiguiente $(0, 0, 0)$ es la proyección ortogonal de $(1, 1, -1)$ sobre $F^\perp$. **(2 puntos)**
(Observación: los vectores $(2, 0, 1)$ y $(-1, 1, 0)$ no son ortogonales, asi que la fórmula de la proyección no es aplicable en este caso.)

P2.1- Sea $T : \mathbb{R}^4 \to P_3(\mathbb{R})$ una aplicación lineal definida por:

$$T(a, b, c, d) = ax^3 + bx + c.$$

a) Encuentre la matriz asociada con respecto a las bases canónicas. **(4 Ptos.)**

b) Determine $Ker(T)$. ¿Es T una aplicación inyectiva?. Justifique. **(6 Ptos.)**

P2.2.- Sea $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal, cuya matriz asociada con respecto a las bases canónicas está dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Defina T. **(4 Ptos.)**

b) Determine $Im(T)$ y $r(T)$ (rango de T). **(6 Ptos.)**

Solución

P2.1.-

a)

$$\begin{array}{rclcccccccc} T(1,0,0,0) & = & x^3 & = & 1 \cdot x^3 & + & 0 \cdot x^2 & + & 0 \cdot x & + & 0 \cdot 1 \\ T(0,1,0,0) & = & x & = & 0 \cdot x^3 & + & 0 \cdot x^2 & + & 1 \cdot x & + & 0 \cdot 1 \\ T(0,0,1,0) & = & 1 & = & 0 \cdot x^3 & + & 0 \cdot x^2 & + & 0 \cdot x & + & 1 \cdot 1 \\ T(0,0,0,1) & = & 0 & = & 0 \cdot x^3 & + & 0 \cdot x^2 & + & 0 \cdot x & + & 0 \cdot 1 \end{array}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4 puntos)

b)

$$\begin{array}{rcl} Ker(T) & = & \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 / T(a,b,c,d) = \theta_{P_3(\mathbb{R})} = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0\} \\ & = & \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 / ax^3 + bx + c = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0\} \\ & = & \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 / a = 0 = b = c\} \\ & = & \{(0,0,0,d) \in \mathbb{R}^4 / d \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

(4 puntos)

T no es aplicación lineal inyectiva puesto que

$$Ker(T) \neq \{\theta_{\mathbb{R}^4}\}$$

(2 puntos)

P2.2.-

a) $ax + b = a \cdot x + b \cdot 1$

$$[T][x] = [T(x)]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & + & b/2 \\ -4a & + & 2b \end{bmatrix}$$

$$T(ax+b) = (-a + b/2)(1,0) + (-4a + 2b)(0,1)$$
$$T(ax+b) = (-a + \frac{b}{2}, -4a + 2b)$$

(4 puntos)

b)

$$\begin{array}{rcl} Im(T) & = & \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 /\, \exists ax+b \in P_1(\mathbb{R}), T(ax+b) = (u,v)\} \\ & = & \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 /\, \exists ax+b \in P_1(\mathbb{R}), (-a + \frac{b}{2}, -4a+2b) = (u,v)\} \end{array}$$

Así,

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -a & + & \frac{b}{2} & = & u \\ -4a & + & 2b & = & v \end{array}\right|$$

Luego,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1/2 & u \\ -4 & 2 & v \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1/2 & u \\ 0 & 0 & v - 4u \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcl} Im(T) & = & \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / v = 4u\} \\ & = & \{(u,4u) \in \mathbb{R}^2 / u \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

(4 puntos)

$$Im(T) =< \{(1,4)\} >$$

$\{(1,4)\}$ es vector único distinto del nulo, por lo tanto $\{(1,4)\}$ es L.I.

Luego $\{(1,4)\}$ es base de $Im(T)$ y $r(T) = 1 = dim(Im(T))$

(2 puntos)

P3.1.- Considere la matriz real de orden 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores propios reales y complejos asociados a la matriz A.
(5 Ptos.)

b) Se sabe que $\lambda = 0$ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica dos ¿Es A una matriz diagonalizable?. Justifique. **(5 Ptos.)**

P3.2.- Considere el operador $L \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ definido por

$$(\forall p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))\ (\forall x \in \mathbb{R}) : L(p)(x) = x^2 p''(x) - xp'(x) + p(x).$$

Determine el espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ de L.

Solución

a) **Polinomio característico,** $p(\lambda) = |A - \lambda I_4|$.

i) Derterminación de $p(\lambda)$, vía el desarrollo del determinante por cofactores de la primera fila.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda^2+1)(\lambda^2-1) + (\lambda^2+1) = \lambda^2(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

(3 puntos)

ii) Determinación de $p(\lambda)$, Desarrollo de operaciones elementales sobre el determinante.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} && \text{(sumando la columna 3 a la 1)} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} && \text{(restando la fila 1 a la 3)} \\ &= \lambda^2(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

(3 puntos)

Enseguida resolvemos el problema de valores propios:

$$\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad (\text{multiplicidad } 2) \quad \vee \quad \lambda = i \quad \vee \quad \lambda = -i$$

(2 puntos)

b) Para responder la pregunta simplemente debemos determina la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda = 0$.

- $\mathbb{C}$-espacio Asociado a $\lambda = 0$.

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 : a = d \right\} = \langle \{(1,0,0,1)\} \rangle \end{aligned}$$

(3 puntos)

Conclusión. La matriz no es diagonalizable, pues $dim(S_0) = 1 < 2$.

(2 puntos)

P3.2.-

(Primera forma) Por definición de valor propio debemos determinar $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ no nulo tal que $L(p) = 1 \cdot p$. es decir:

$$x^2(2a_2) - x(2a_2x + a_1) + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = 0$$

(6 puntos)

Así, definimos el espacio propio por:

$$S_1 = \left\{ a_2x^2 + a_1x + a_0 \ : \quad a_1 = 0 \ \right\} = \left\langle \left\{ 1, x^2 \right\} \right\rangle$$

(4 puntos)

(Segunda forma) La matriz asociada con respecto a la base canónica de $P_2(\mathbb{R})$ es

$$A := [L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4 puntos)

Luego, $\lambda = 1$ es valor propio de multiplicidad algebraica 2, y el espacio propio es definido por:

$$S_1 = \left\{ a_2x^2 + a_1x + a_0 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \textbf{(3 puntos)}$$

$$= \left\{ a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_1 = 0 \right\} = \left\langle \left\{ 1, x^2 \right\} \right\rangle. \qquad \textbf{(3 puntos)}$$