UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO: 521234

Guía de Ejercicios No 7

1. Determine las partes real e imaginaria de las siguientes expresiones:

$$\text{i)}\ \frac{z+2}{z-1} \qquad \text{ii)}\ \frac{1}{i}+\frac{3}{1+i} \qquad \text{iii)}\ \frac{1}{3z+2} \qquad \text{iv)}\ z^3 \qquad \text{v)}\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$$

2. Encuentre los $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

$$i)\ \ z^8 = 1 \qquad ii)\ \ \bar{z} = z^2 \qquad iii)\ \ \cos z = 1/2 \qquad iv)\ \ \operatorname{sen} z = \frac{3}{4} + \frac{i}{4}$$

3. Pruebe la identidad: $\overline{z}^2 = \overline{z^2}$ y calcule $\overline{\left(\frac{(3+7i)^2}{8+6i}\right)}$.

4. Pruebe que para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $\quad |1 \pm z_1\bar{z}_2|^2 \pm |z_1 - z_2|^2 = (1 \pm |z_1|^2)(1 \pm |z_2|)^2$.
Además, establezca la desigualdad: $\quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

5. Encuentre todos los posibles valores de:

$$i)\ \ log(1) \qquad ii)\ \ log(i) \qquad iii)\ \ log(-i) \qquad iv)\ \ log(1+i)$$

6. Calcule las siguientes potencias:

$$i)\ \ (-i)^i \qquad\qquad ii)\ \ (1+i)^{1+i}$$

7. Pruebe que, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$i)$ $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$ $\qquad ii)$ $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z)$ $\qquad iii)$ $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen}(z)$

8. Use la fórmula de De Moivre para encontrar la suma $S_n(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx$.
Alternativamente puede utilizar: $2\operatorname{sen}(kt)\cos(t/2) = \operatorname{sen}(k+1/2)t - \operatorname{sen}(k-1/2)t$ y sumar telescópicamente.

9. Analice si son conexos y/o convexos los siguientes conjuntos:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ 1 \leq |z| \leq 2\} \qquad D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 1 \ \wedge |Re(z)| \geq 1\}$$

$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 5 \ \wedge \ |Im(z)| \geq 1\}.$$

Represente gráficamente estos conjuntos.

10. Determine el sector geométrico del plano complejo que determinan las siguientes relaciones $(a, b \in \mathbb{C},\ a \neq b)$.

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C}, \ \ |z-a| = |z-b|\} \quad D_2 = \{z \in \mathbb{C}, \ \ 0 < arg\left(\tfrac{z+i}{z-i}\right) < \tfrac{\pi}{4}\}$$
$$D_3 = \{z \in \mathbb{C}, \ \ 0 \leq Re(iz) < 1\} \quad D_4 = \{z \in \mathbb{C}, \ \ \left|\tfrac{z+1}{z-1}\right| < 1\}$$

11. Analice la continuidad en $z = 0$ de las funciones:

$$i) \qquad f(z) = \frac{Re(z)}{1+|z|} \qquad\qquad ii) \qquad g(z) = \frac{Re(z)}{z}$$

12. Analice si las siguentes funciones son analíticas. En caso afirmativo, calcule sus derivadas:

$i)\ \ f(z) = z^3 + i \qquad ii)\ \ f(z) = (z+i)^3 \qquad iii)\ \ f(z) = \left(\dfrac{1}{z-1}\right)^{10}$

$iv)\ \ f(z) = 3z^2 + 7z + 4 \qquad v)\ \ f(z) = (3z^2 + 10iz)^4 \qquad vi)\ \ f(z) = \dfrac{2z-4}{z-i}$

13. Encuentre la mayor región posible en donde las siguientes funciones verifican las condiciones de Cauchy-Riemann:

$i)\ \ f(z) = e^z \qquad ii)\ \ f(z) = z^3 \qquad iii)\ \ f(z) = |z|^{-2}(1+i)Im(z)^2$

14. Analice en qué conjuntos son armónicas las siguentes funciones:

$$i)\ u(x,y) = \frac{x-1}{x^2+y^2-2x+1} \quad ii)\ \ u(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2} \quad iii)\ \ u(x,y) = Im(z + \frac{1}{z})$$

15. Verifique que cualesquiera sean $z, w \in \mathbb{C}$:

$i)\ \ \cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \qquad ii)\ \ \operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$

Concepción, 11 de Octubre de 2005.
HMM/CPW/FPV/fpv.