Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 1

INTRODUCCIÓN A OCTAVE I

GNU OCTAVE es un programa y lenguaje de programación para realizar cálculos numéricos. Como su nombre indica, Octave es parte del proyecto GNU. Es considerado el equivalente libre de MATLAB. Entre varias características que comparten, se puede destacar que ambos ofrecen un intérprete, permitiendo ejecutar órdenes en modo interactivo y están especialmente diseñados para la solución numérica de problemas matemáticos como, por ejemplo, sistemas de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones no lineales, problemas de valores iniciales, etc.

La página web del programa es https://www.gnu.org/software/octave/. En ella se encuentra disponible para su descarga y diversos ejemplos de aplicación del programa para la solución de distintos tipos de problemas reales, videos y documentación.

1. Generalidades

Observación: Si bien las guías de estos laboratorios hacen referencia a la versión de OCTAVE 4.2.2, para el sistema operativo *Linux* instalado en los laboratorios LC 301 y LC 304 de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, lo que se verá aquí puede ser aplicable a otras versiones de OCTAVE y MATLAB o inclusive en otras plataformas como *Windows* o *Mac*.

Para comenzar Octave , en la esquina superior izquierda: Inicio > Educacion > GNU Octave, como lo muestra la Figura 1.

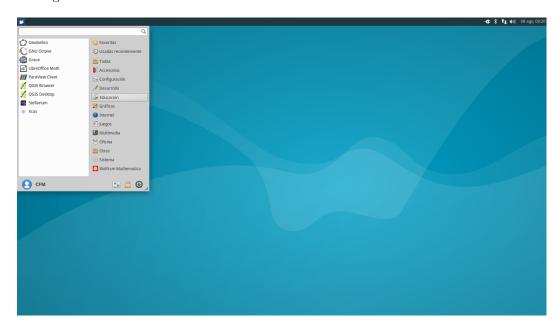


Figura 1: Menú para iniciar Octave .

Una vez iniciado OCTAVE lo que verá será la interfaz gráfica (layout) por defecto mostrada en la Figura 2. En caso de que no aparezca una interfaz como la de la Figura 2, haga click en el botón *Layout* (aparece en el menú de la barra superior, aproximadamente en la mitad) y posteriormente en la opción *Default*.

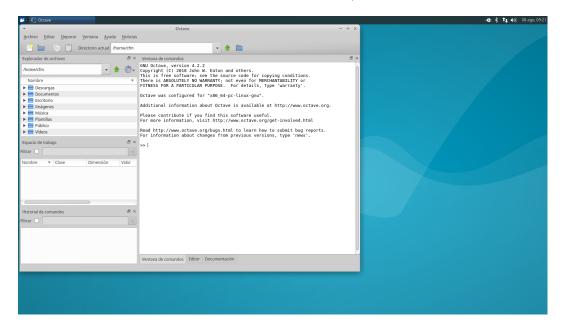


Figura 2: Interfaz gráfica de OCTAVE .

Puede notar que aparecen 4 ventanas en esta interfaz:

y crear o eliminar carpetas.

1. File Browser (Explorador de archivos): Esta ventana muestra el contenido de una carpeta en memoria. La dirección de esta carpeta se puede apreciar inmediatamente arriba, en la barra de navegación. La carpeta por defecto en la cual inicia Octave es /home/cfm, aunque esta puede ser cambiada en la misma barra de navegación o haciendo click en alguna de las carpetas que muestra esta ventana. Esta ventana es similar a un explorador de archivos, en ella puede cambiar nombres, borrar, copiar

Para seleccionar esta ventana puede usar el atajo de teclado Cntrl+2

2. Workspace (Espacio de trabajo): Esta ventana muesta las variables que actualmente estan guardadas en la memoria temporal de Octave . En cualquier momento del trabajo con Octave , escribiendo el comando whos en la ventana de comandos podremos ver las variables en memoria y con el comando clear all o clear <nombre_variable> podremos eliminarlas de memoria.

Para seleccionar esta ventana puede usar el atajo de teclado Cntrl+3

3. Command History (Historial de comandos): Muestra el historial de los últimos comandos ejecutados (correcta o incorrectamente) en la ventana de comandos. Se puede volver a ingresar un comando haciendo doble click sobre este, o bien en la ventana de comandos apretando reiteradas veces la flecha hacia arriba del teclado hasta encontrar el comando, y luego presionar la tecla Enter.

Para seleccionar esta ventana puede usar el atajo de teclado Cntrl+1

4. Command Window (Ventana de Comandos): Es la ventana principal de Octave . En esta ventana se ejecutan todos los comandos, operaciones, asignaciones y programas de Octave . Para ejecutar una instrucción, se escribe esta instrucción y se presiona la tecla Enter. Si en la ventana de comandos de Octave escribimos una instrucción seguido por ;, Octave no mostrará el resultado de la operación realizada.

Para seleccionar esta ventana puede usar el atajo de teclado Cntrl+0

Todas las ventanas de OCTAVE se pueden separar de la ventana principal, haciendo click en el botón de maximizar ubicado en la esquina superior derecha de cada ventana.

Para salir de OCTAVE se puede ingresar exit o quit en la ventana de comandos, o bien haciendo click en la \times que aparece en la esquina superior derecha.

Se puede acceder a la ayuda en OCTAVE ingresando help <nombre_comando> en la ventana de comandos. Por ejemplo, ejecute la instrucción help help en la ventana de comandos.

En las secciones que continúan se verán los comandos necesarios para comenzar a utilizar OCTAVE para la solución de los problemas matemáticos que veremos durante el semestre. Los comandos encerrados en recuadros deben ser escritos en la ventana de comandos. Las palabras que siguen a un signo % son sólo comentarios para explicar un comando particular y no tienen que ser escritas en la ventana de comandos de OCTAVE .

Trabajo con números reales

En Octave es posible realizar todas las operaciones aritméticas entre números reales. En la Tabla 1 se muestran los comandos para realizarlas.

+	adición
_	sustracción
*	producto
/	división
^	potencia

Tabla 1: Comandos para operaciones aritméticas

Cuando realizamos una operación en OCTAVE y no asignamos el resultado a ninguna variable (como en el recuadro que sigue), la respuesta se asigna a una variable especial llamada ans.

```
>> 10.5 + 3.1 % suma de dos numeros reales, el resultado se asigna a ans
```

También podemos asignar números reales a variables con el comando = . El comando whos muestra las variables almacenadas en memoria.

```
>> a = 10.5+3.1:
                     % no se muestra resultado de asignacion
2
                     % se muestra resultado de asignacion
  >> b = 1/5
3
4
  >> a + b
                     % Primero se calcula potencia cubica de b
5
  >> a*b^3
6
  >> (a*b)^3
                     % Primero se multiplican a y b
7
                     % solo a, b y ans deberian estar en memoria
  >> whos
```

El comando format permite cambiar la forma en que el valor de una variable se muestra en pantalla. Tenga siempre presente que con este comando sólo se cambia la forma en que se muestra el valor de la variable, no se cambia el valor de la variable. En OCTAVE los números reales se muestran por defecto en formato short.

En la Tabla 2 se encuentran los comandos que se utilizan en OCTAVE para comparar dos números reales. El resultado de la comparación será 1 (si la proposición es verdadera) o 0 (si la proposición es falsa).

==	igual a	
>	mayor que	
<	menor que	
>=	mayor o igual que	
<=	menor o igual que	
~=	distinto de	

Tabla 2: Comparaciones entre números reales en Octave

Los comandos &&, | | y ~ representan los operadores lógicos conjunción (\wedge), disyunción (\vee) y negación (\sim) respectivamente.

&&	\wedge
П	V
~	~

Tabla 3: Conectivos lógicos en Octave

Muchas de las funciones conocidas ya están incorporadas en OCTAVE . Observe que la constante pi contiene un valor aproximado de π .

```
1
   >> abs(-3/5)
                      % valor absoluto de un numero real
                      % raiz cuadrada de un numero real positivo
2
   >> sqrt(9)
   >> format long
3
4
   >> pi
5
   >> format rat
6
   >> pi
                      % pi se trabaja con una aproximacion racional
7
   >> format short
8
9
   >> cos(pi/2)
                      % es cero el resultado?
   >> sin(pi/4)
10
   >> d = sqrt(2)
11
                      % raiz cuadrada de un numero real
12
13
   >> log2(d)
                      % logaritmo base 2 de un numero real
14
   >> x = 1/6
15
   >> y = exp(x)
16
                      % funcion exponencial
17
   >> format rat
   >> log(y)
18
                      % logaritmo natural de un numero real
   >> format short
19
```

En los computadores personales se utiliza la aritmética de punto flotante para almacenar los números reales. En Octave cada número real se almacena en formato *double*, es decir, usando 64 bits consecutivos de memoria.

Las constantes realmax y realmin contienen el mayor número real positivo y el menor número real positivo normalizado que pueden almacenarse de esta forma. Note que realmax es aproximadamente 1.7977e+308 y realmin es aproximadamente 2.2251e-308.

```
1 >> realmax
2 >> 2^1023
3 >> realmin
4 >> 2^(-1023)
```

Si el valor absoluto del resultado de una operación aritmética es mayor que realmax, ocurrirá overflow. Nos daremos cuenta de que esto ha ocurrido porque OCTAVE dará Inf o -Inf como resultados de la operación, en lugar de un número real. El resultado en OCTAVE será Inf si el resultado real de la operación aritmética es un número positivo mayor que realmax, se obtendrá un -Inf cuando el resultado real de la operación aritmética sea un número negativo menor que -realmax.

Si el valor absoluto del resultado de una operación aritmética es menor que realmin, ocurre underflow. Pero en Octave se resuelve este problema de manera desapercibida para el usuario. Note que, por ejemplo, a pesar de que el resultado de la siguiente operación es menor que realmin, Octave muestra un número real como resultado y no un valor especial como en el caso anterior.

Si realizamos alguna operación aritmética cuyo resultado no pueda ser determinado, el resultado será NaN (not a number).

En OCTAVE la precisión del computador (menor número real positivo x que satisface que el resultado de la operación 1 + x es distinto de 1) se almacena en la constante eps.

2. Trabajo con vectores en Octave

OCTAVE está especialmente diseñado para el trabajo con matrices. Un vector fila \boldsymbol{x} ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$) en OCTAVE se crea escribiendo cada una de sus componentes, separadas por comas o espacios, entre []. Un vector columna \boldsymbol{x} ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$) en OCTAVE se crea escribiendo sus componentes, separadas por punto y coma, entre [].

Con los comandos length y size podemos preguntar la dimensión de un vector. El resultado de length(x), siendo x un vector, es el número de componentes de x. Con size(x) preguntamos el número de filas (primer valor de salida) y de columnas de x (segundo valor de salida).

Con los mismos comandos que se usan para comparar números reales (ver cuadro 2) podemos comparar dos vectores de igual dimensión, esta comparación se hace componente a componente. El resultado será un vector con la misma dimensión que los vectores que se comparan, sus componentes tomarán los valores 0 o 1.

Al igual que con los números reales, también podemos formar proposiciones lógicas compuestas con ayuda de conectivos lógicos. Éstos pueden ser &, | y ~, que no son exactamente iguales a los listados en el cuadro 3, y realizan las operaciones de conjunción, disyunción y negación de proposiciones lógicas con vectores componente a componente. Si, por ejemplo, a y b son vectores de la misma longitud, a & b es un vector cuya componente i-ésima será 1 si las componentes i-ésimas de a y b también lo son. De lo contrario, su componente i-ésima será 0.

Con all(x) podremos saber si todas las componentes de un vector son distintas de cero. Con any(x) es posible averiguar si al menos una de las componentes de un vector es distinta de cero.

Una vez que hemos creado un vector podemos ver y/o modificar sus componentes con ().

Los comandos linspace(p,u,N) y p:incr:u nos permiten crear vectores cuyas componentes son equidistantes entre sí. Con el primero de ellos se genera un vector fila de N componentes equidistantes entre sí, siendo p la primera de ellas y u, la última. Con el segundo se genera un vector fila cuyo primer elemento es p, el último es u y la diferencia entre dos elementos consecutivos es incr.

Se pueden realizar operaciones aritméticas entre vectores (las dimensiones deben ser las correctas para cada operación).

Las operaciones aritméticas también pueden realizarse componente a componente.

Con la función norm podemos calcular normas de vectores.

A pesar de que para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{x}}$, debemos siempre calcular la norma 2 de un vector usando la función norm de OCTAVE y no mediante $\operatorname{sqrt}(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Si, por ejemplo, $\boldsymbol{x} = 2^{512} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, su norma 2 es $5 \cdot 2^{512}$ que es menor que realmax. Sin embargo, $\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{x} = 9 \cdot 2^{1024} + 16 \cdot 2^{1024}$. Dado que los términos en esta suma son mayores que realmax, al calcular $\operatorname{sqrt}(\mathbf{x},\mathbf{x})$ ocurrirá overflow. En general, en el trabajo con OCTAVE, siempre es mejor usar las funciones provistas por el programa que usar expresiones que sean matemáticamente equivalentes.

```
1 >> x = 2^(512)*[3;4]
2 >> norm(x)
3 >> sqrt(x'*x)
```

Las funciones sobre números reales disponibles en OCTAVE también pueden aplicarse a vectores. Con el comando plot podemos graficar estas funciones.

Por ejemplo, para graficar $\sin(x)$ con x entre 0 y 2π ,

```
>> x = linspace(0,2*pi,100) % 100 valores entre 0 y 2*pi
>> y = sin(x) % evaluar la funci n en x
>> plot(x,y) % graficar
```

Trabajo con matrices y vectores en Octave

Para crear una matriz o un vector desde sus componentes escribimos cada una de sus filas separadas por ;. Los elementos dentro de cada fila se separan por comas o espacios y todo se encierra entre [].

```
1 >> A = [1 -1;4 0;1 -1]
2 >> x = [1 -1];
3 >> B = [x;4 0;x] % es igual a A
```

También podemos comparar matrices de igual dimensión

```
1 >> A == B
```

Junto con esto, para crear vectores existen las siguientes opciones

```
a=1:10 %Crea un vector de espaciado 1
b=1:0.1:2 %Crea un vector de espaciado 0.1
c=10:-1:1 %Crea un vector decreciente
d=linspace(1,10,10) %Crea un vector con 10 elementos equiespaciados
```

Para ver y/o modificar las entradas de una matriz usamos (). Con el comando size podemos averiguar el número de filas y columnas de una matriz.

```
>> [m,n] = size(A)
                            % averiguar dimensi n de A
2
  >> A(1,2)
                            % elemento en posici n (1,2) de A
  >> A(:,2)
                            % 2da columna de A
3
  >> A(3,:) = [1 0]
4
                            % modifica 3ra fila de A
  >> A(end,end)
                                     % averiguar el elemento en la ultima
5
     fila y columna
6
  >> A(1:2:end)
                                     % Averiguar los elementos en las
     posiciones impares
7
                            % filas 1 y 3, columna 2 de A
  >> A([1 3],2)
  >> A = [A [1;1;1]]
                            % a adiendo columna a A
8
  >> At = A'
                            % transpuesta de A
```

También pueden realizarse operaciones aritméticas entre matrices, incluyendo operaciones aritméticas componente a componente.

```
>> A + At/2 % primero se multiplica At por 1/2
>> (A+At)/2 % primero se suman las matrices
>> A*At % producto de matrices
>> A.*At % producto componente a componente
>> A.*At % divisi n componente a componente observe la fila
2 de la matriz resultante.
```

Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz invertible (su determinante es distinto de cero). Dada una matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, la matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que AX = B es $X = A^{-1}B$. Si m = 1, AX = B es un sistema de ecuaciones lineales. La matriz X se encuentra en Octave escribiendo $X = A \setminus B$.

```
\Rightarrow A = [1 -1 1;2 1 2;3 1 1]
                                   % la matriz A es invertible
2
  >> det(A)
                                   % su determinante no es cero
  >> b = [1;1;1]
  >> x = A \setminus b
4
                                   % es la soluci n de Ax = b
5
  >> norm(A*x-b)
                                   % comprobando que Ax = b
  >> B = [2 1;1 2;1 1]
6
7
  >> X = A \setminus B
                                   % es tal que AX = B
  >> norm(A*X-B)
8
                                   % con este comando se puede calcular la
      norma 2 de una matriz
9
  >> norm(A*X-B,1)
                                   % y la norma 1
  >> norm(A*X-B,inf)
                                   % y la norma infinito
```

Si, en lugar de $A\B$, escribimos B/A OCTAVE devuelve un mensaje de error pues las matrices A y B de este ejemplo no permiten realizar esta operación. Al escribir B/A en OCTAVE se pretende calcular BA^{-1} .

OCTAVE tiene comandos para el trabajo y la construcción de matrices especiales.

```
>> m=3; n=2;
                                 % notar que se pueden asignar 2 variables
      en una misma linea
2
   >> A = zeros(m,n)
                                 % matriz nula de m por n
3
   >> B = zeros(n)
                                 % matriz nula de n por n
   >> C = ones(m,n)
                                 % matriz con todas sus componentes
                                                                      iguales
4
       a 1, de m por n
   >> I = eye(n)
                                 % matriz identidad de n por n
5
                                 \% matriz aleatoria de n por m cuyas
   >> R = rand(m,n)
6
      componentes contienen valores entre 0 y 1
7
   >> Ri = randi([-10 10], m, n)
                                 % matriz aleatoria de n por m cuyas
      componentes contienen valores enteros entre -10 y 10
   >> x = diag(I)
                                 % vector que contiene la diagonal principal
8
       de I
9
   >> D = diag(x)
                                 % matriz diagonal de tama o length(x) cuya
       diagonal principal contiene a los elementos del vector x
   >> D1 = diag(x,1)
                                 % matriz de tama o length(x)+1 cuyos
      elementos sobre la diagonal principal son los de x y el resto son
      nulos
11
   \Rightarrow D2 = diag(x,-1)
                                 % matriz de tama o length(x)+1 cuyos
      elementos bajo la diagonal principal son los de x y el resto son
      nulos
   >> M = [A'I; BC']
                                 % matriz formada por bloques note que los
12
      bloques de cada 'fila' tienen la misma cantidad de filas
```

Queda como ejercicio la experimentación de estos comandos con distintas variables o combinando comandos (por ejemplo, ver qué ocurre si ingresa ones(m) o N=randi([0 100],10) y luego diag(diag(N))). También queda como ejercicio ver que ocurre al hacer doble click en una matriz enlistada en el Workspace.

3. Cadenas y celdas

Si bien OCTAVE está diseñado desde sus comienzos para trabajar con matrices, con el tiempo se ha extendido a otro tipo de variables. En particular serán utilizadas las cadenas (del inglés "string"). Las cadenas son sucesiones de caracteres, tal cual como los que esta leyendo ahora. Para ingresar cadenas a OCTAVE se utilizan los operadores de comillas simples '. Por ejemplo la sentencia

```
1 string='Hola mundo';
```

grabará en la memoria local una variable llamada string cuyo valor es la cadena Hola mundo. Un trabajo común con las cadenas es la concadenación de ellas. En este caso, podemos concadenarlas usando fácilmente usando el mismo operador que concadena matrices, por ejemplo la sentencia

```
cadena1='Me llamo';
cadena2='Octave';
quiensoy=[cadena1, cadena2];
```

creará una cadena que es la concadenación de dos.

Las celdas o variables tipo cell son arreglos indexados, como las matrices, pero que permiten contener más cosas que números, en efecto pueden contener cualquier tipo de variable de Octave . Para declarar celdas, se ocupa el operador {, por ejemplo

```
P='Esto es una cadena';
A=ones(1,20);
C={P,A};
```

crea una celda C donde la primera entrada es la cadena P y la segunda entrada es la matriz A. Para recuperar una entrada de una celda, se debe recorrer su índice con el operador {.

4. Ejercicios

1. Escriba help length en la ventana de comandos y escriba en el recuadro siguiente qué devuelve OCTAVE al llamar length(M), siendo M una matriz cualquiera.

2. Ingrese a Octave los siguientes vectores y matrices

3. Para este ejercicio considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -7 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

- a) Ingrese a Octave las matrices A y B.
- b) Calcule en Octave los productos matriciales AB y BA.
- c) ¿Qué observa de los resultados anteriores?
- d) Calcule las normas 1, 2 e infinito de A Y B.

4. Usando las funciones de Octave para crear matrices, ingrese la matriz de orden 92×108 de la forma

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

5. Cree una celda que contenga como elementos a las matrices identidad de órdenes 2,3,4,y 5.

6. Considere las siguientes instrucciones en lenguaje de Octave :

```
1 s='Esto es una cadena';
2 n=1*s
c=char(b)
```

- a) ¿Qué tipo de variable son s, n y c?.
- b) ¿Que retorna s(end:-1:1)?
- 7. Dada una matriz a = [1, 2; 3, 4] exprese con palabras que significan las siguientes instrucciones

```
a(1, [1, 2]) a(1, 1:2) a(1, :)
```

8. Dada una matriz a = [1, 2, 3, 4]; exprese con palabras que significan las siguientes instrucciones

```
a(1:end/2)  a(end + 1) = 5;  a(end) = [];  a(1:2:end)  a(2:2:end)  a(end:-1:1)
```

9. Un uso avanzado de la indexación de vectores es crear matrices o celdas que contengan un único valor. Esto se puede hacer usando índices de puros 1 en un valor escalar. El resultado es una matriz con la dimensión de los índices usados y con cada elemento igual al valor escalar. Por ejemplo

```
1 a = 13;
2 a(ones (1, 4))
```

produce un vector cuyos cuatro elementos son iguales a 13.

Usando lo anterior explique el funcionamiento de las siguientes instrucciones

```
13(ones (2, 3)) -1([1,1,1],[1,1,1]) {'Hello'}(ones (2, 3));
```