Problema 1

La siguiente tabla muestra los resultados de cierto experimento:

t_i	0	1	2	3
y_i	$2/3$	$1/2$	$1/3$	$1/9$

donde la cantidad y depende del tiempo t, medido en horas. En dicho experimento, el modelo que relaciona las variables t e y viene dado por:

$$y = \frac{b}{b + 2^{at}}.$$

1.1) **[05 pts.]** Reduzca el modelo anterior a un modelo lineal.

1.2) **[07 pts.]** Encuentre los parámetros reales a y b que mejor ajustan el modelo a los datos de la tabla, en el sentido de los mínimos cuadrados.

1.3) **[03 pts.]** Usando el modelo, estime la cantidad y cuando han transcurrido 4 horas.

Solución

1.1) Linealizando el modelo tenemos:

$$y = \frac{b}{b + 2^{at}}. \quad \Longrightarrow \quad \frac{b + 2^{at}}{b} = \frac{1}{y} \Longrightarrow \quad 1 + \frac{1}{b} 2^{at} = \frac{1}{y} \Longrightarrow \quad b^{-1} 2^{at} = \frac{1}{y} - 1 \qquad (\log_2(\bullet))$$

$$\Longrightarrow \quad at - \log_2(b) = \log_2 \left(\frac{1}{y} - 1 \right). \qquad \textbf{(5 pts.)}$$

1.2) Ingresando los datos de la tabla al modelo linealizado obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log_2 \left(\frac{1}{2/3} - 1 \right) \\ \log_2 \left(\frac{1}{1/2} - 1 \right) \\ \log_2 \left(\frac{1}{1/3} - 1 \right) \\ \log_2 \left(\frac{1}{1/9} - 1 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log_2(1/2) \\ \log_2(1) \\ \log_2(2) \\ \log_2(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

donde $\alpha = a$ y $\beta = \log_2(b)$. Las ecuaciones normales asociadas a este sistema están dadas por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(2 pts.)}$$

La solución de este sistema de ecuaciones normales está dada por $\alpha = 13/10$ y $\beta = 6/5$, de donde:

$$a = \alpha = \frac{13}{10} \qquad \text{y} \qquad b = 2^{\beta} = 2^{6/5}, \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

por lo cual, el modelo que mejor se ajusta a los datos de la tabla es:

$$y = \frac{2^{6/5}}{2^{6/5} + 2^{(13/10)t}}.$$

1.3) En este caso, $t = 4$. Reemplazando en el modelo obtenido, tenemos:

$$y = \frac{2^{6/5}}{2^{6/5} + 2^{(13/10)4}} = \frac{2^{6/5}}{2^{6/5} + 2^{26/5}} = \frac{2^{6/5}}{2^{6/5} + 2^{(4+6/5)}} = \frac{2^{6/5}}{2^{6/5} + 16 \cdot 2^{6/5}} = \frac{2^{6/5}}{17 \cdot 2^{6/5}} = \frac{1}{17}. \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

Problema 2 Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= x \qquad x \in [0,1] \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

2.1) **[05 pts.]** Reduzca este problema en un problema de primer orden.

2.2) **[08 pts.]** Usando $h = \frac{1}{2}$, realice dos iteraciones del método de Euler implícito.

2.3) **[02 pts.]** En base a lo anterior, determine una estimación de $y(1)$ y de $y'(1)$.

Solución

2.1) Tomando la variable auxiliar $\boldsymbol{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$ se tiene que $\boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dado que

$$y'' = x^2 - 2(y + 2y') = x^2 - 2(u_1 + u_2),$$

este problema puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}'(x) &= \begin{pmatrix} u_2 \\ x - 2(u_1 + u_2) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{u}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2) Considerando la partición dada por $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$, el esquema del método de Euler implícito está dado por

$$\boldsymbol{u}^{(n+1)} = \boldsymbol{u}^{(n)} + h\boldsymbol{f}\left(x_{n+1}, \boldsymbol{u}^{(n+1)}\right)$$

donde $\boldsymbol{u}^{(n)}$ es una estimación de $\boldsymbol{u}(x_n)$ y $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ x - 2(u_1 + u_2) \end{pmatrix}$. El esquema de Euler implícito puede reescribirse como sigue

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{pmatrix} + h\left[\begin{pmatrix} 0 \\ x_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \end{pmatrix}\right] \\ \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 2h & 1+2h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Para calcular $\boldsymbol{u}^{(1)}$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= 17/20 \\ u_2^{(1)} &= -3/10 \end{aligned}$$

Análogamente, para calcular $\boldsymbol{u}^{(2)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/20 \\ -3/10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/20 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$u_1^{(2)} = 18/25$$
$$u_2^{(2)} = -13/50$$

2.3) En este caso, las estimaciones de $y(1)$ y de $y'(1)$ están dadas por $\boldsymbol{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 18/25 \\ -13/50 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}$

Problema 3

3.1) **[09 pts.]** Considere las siguientes funciones techo provenientes del Método de Elementos Finitos:

$$\phi_1(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{h} & \text{si } x \in [0,h], \\ \dfrac{1}{h}(2h-x) & \text{si } x \in]h,2h], \\ 0 & \text{si } x \in]2h,3h] \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi_2(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,h] \\ (x-h)\dfrac{1}{h} & \text{si } x \in]h,2h], \\ (3h-x)\dfrac{1}{h} & \text{si } x \in]2h,3h], \end{cases},$$

donde $h > 0$ es dado. Se definen los siguientes coeficientes:

$$a := \int_0^{3h} x\left(\phi_1'(x)\right)^2 dx, \quad b := \int_0^{3h} x\,\phi_1'(x)\phi_2'(x)\,dx \quad \text{y} \quad f := \int_0^{3h} x\,\phi_2(x)\,dx$$

a) Calcule a y b utilizando la Regla del Punto Medio Elemental en cada tramo.

b) Calcule f utilizando la Regla de Simpson Elemental en cada tramo.

3.2) **[06 pts.])** Considere el siguiente sistema proveniente de una aproximación por Elementos Finitos:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix},$$

donde $a = \dfrac{2}{h} + \dfrac{2h}{3}$, $b = -\dfrac{1}{h} + \dfrac{h}{6}$ y $n = 10^6$.

a) ¿Se puede aproximar la solución de este sistema utilizando el método de Jacobi?. Justifique.

b) Entre método de Jacobi y el Algoritmo de Thomas, ¿cuál método es esl más apropiado para resolver este sistema?. Justifique.

Solución

3.1) *a*)

$$\begin{aligned} a &= \int_0^h x\left(\phi_1'(x)\right)^2 dx + \int_h^{2h} x\left(\phi_1'(x)\right)^2 dx + \int_{2h}^{3h} x\left(\phi_1'(x)\right)^2 dx = \frac{1}{h^2}\int_0^h x\,dx + \frac{1}{h^2}\int_h^{2h} x\,dx \\ &= \frac{1}{h^2}\left(h\frac{0+h}{2}\right) + \frac{1}{h^2}\left(h\frac{h+2h}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2. \end{aligned}$$

(3 pts.)

$$\begin{aligned} b &= \int_0^h x\,\phi_1'(x)\phi_2'(x)\,dx + \int_h^{2h} x\,\phi_1'(x)\phi_2'(x)\,dx + \int_{2h}^{3h} x\,\phi_1'(x)\phi_2'(x)\,dx = -\frac{1}{h^2}\int_h^{2h} x\,dx \\ &= -\frac{1}{h^2}\left(h\frac{h+2h}{2}\right) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(3 pts.)

b)

$$\begin{aligned}
f &= \int_h^{2h} x\,\phi_2(x)\,dx + \int_{2h}^{3h} x\,\phi_2(x)\,dx \\
&= \frac{h}{6}\left(h\,\phi_2(h) + 4\frac{h+2h}{2}\,\phi_2((h+2h)/2) + 2h\,\phi_2(2h)\right) \\
&\quad + \frac{h}{6}\left(2h\,\phi_2(2h) + 4\frac{2h+3h}{2}\,\phi_2((2h+3h)/2) + 3h\,\phi_2(3h)\right) \\
&= \frac{h}{6}\left(4\frac{3h}{2}\frac{1}{2} + 2h\right) + \frac{h}{6}\left(2h + 4\frac{5h}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}h^2 + \frac{7}{6}h^2 = 2h^2.
\end{aligned}$$

(3 pts.)

3.2) **(3 pts.)**

a) Notemos que la matriz es diagonal dominante estricta. En efecto, para la primera y última fila se tiene que

$$|b| = \left|-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right| < \left|\frac{2}{h} + \frac{h}{6}\right| < \left|\frac{2}{h} + 4\frac{h}{6}\right| = \left|\frac{2}{h} + 2\frac{h}{3}\right| = |a|.$$

Para las filas restantes se tiene que

$$2|b| \leq 2\left|-\frac{1}{h}\right| + 2\left|\frac{h}{6}\right| = \frac{2}{h} + \frac{h}{3} < |a|.$$

De este modo, se puede utilizar método de Jacobi ya que es convergente en este caso.

b) **(3 pts.)** Como la matriz es tridiagonal y diagonal dominante estricta, podemos utilizar el Algoritmo de Thomas sin necesidad de pivoteo para realizar la descomposición LU de la matriz. Además notemos que obtendremos la solución exacta del sistema (salvo errores de redondeo). El costo operacional de esto es de $3(n-1)$ flops.

Por otro lado, el costo operacional del método de Jacobi dependerá de la cantidad de iteraciones realizadas para una tolerancia dada y del valor del vector inicial. Además, este método nos entregará una aproximación de la solución. De este modo, es más convieniente utilizar el Algoritmo de Thomas.

Problema 4
Se desea calcular una estimación de $\alpha = \sqrt[3]{10}$ mediante el método de Newton-Raphson.

4.1) **[03 pts.]** Determine una ecuación polinómica de una variable tal que su única solución sea $\sqrt[3]{10}$.

4.2) **[06 pts.]** Deduzca un esquema obtenido del método de Newton-Raphson para dicha ecuación.

4.3) **[06 pts.]**Tomando $x_0 = 1$, estima el valor de α empleando dos iteraciones del esquema.

Solución

4.1) Claramente, $\alpha^3 = 10$. Así, la ecuación a considerar es $f(x) = 0$ donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada por $f(x) = x^3 - 10$.

4.2) El esquema del método de Newton-Raphson está dado por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Dado que $f'(x) = 3x^2$, el esquema queda reducido a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 10}{3x_n^2} = \frac{3x_n^3 - \left(x_n^3 - 10\right)}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 10}{3x_n^2}$$

4.3) Tomando $x_0 = 1$, se tiene que

$$x_1 = \frac{2x_0^3 + 10}{3x_0^2} = \frac{2+10}{3} = 4 \qquad\qquad x_2 = \frac{2x_1^3 + 10}{3x_1^2} = \frac{2\,(4)^3 + 10}{3\,(4)^2} = \frac{138}{48} = \frac{23}{8}$$