UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN 2

ÁLGEBRA Y ÁLGEBRA LINEAL 520142

Problema 1. Sea $f :]-a, a] \to I\!R,\ a > 0$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x+5} & \text{si} \quad x \in (-a, 0] \\ \\ x - 4 & \text{si} \quad x \in (0, a] \end{cases}$$

(1.1) Escriba las condiciones para que la función f sea inyectiva.

[**(10 puntos.)**]

(1.2) Calcule el mayor valor posible de a, de modo que f sea inyectiva.

[**(20 puntos.)**]

Solución.-

(1.1) La función f debe ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente en su dominio y la intersección de sus recorridos por tramos debe ser el conjunto vacío.

[**(10 puntos.)**]

(1.2) Si escribimos

$$f(x) = \begin{cases} h(x) = 1 - \frac{1}{x+5} & \text{si} \quad x \in (-a, 0] \\ \\ g(x) = x - 4 & \text{si} \quad x \in (0, a] \end{cases}$$

se tiene que cumplir $Rec(h) \bigcap Rec(g) = \phi$.

Se ve que h es una fucnción creciente, pues

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Longrightarrow \quad x_1 + 5 < x_2 + 5 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{x_1+5} > \frac{1}{x_2+5} \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{x_1+5} < -\frac{1}{x_2+5} \\ &\Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{x_1+5} < 1 - \frac{1}{x_2+5} \\ &\Longrightarrow \quad h(x_1) < h(x_2),\ \forall\ x_1,\, x_2 \in]-a, 0]. \end{aligned}$$

[**(05 puntos.)**]

Análogamente, g es creciente evidentemente. Ahora;

$$\begin{aligned}
Rec(h) &= \{y \in I\!R | x \in]-a, 0]\} \\
&= \{y \in I\!R | -a < x \leq 0\} \\
&= \{y \in I\!R | -a + 5 < x + 5 \leq 5\} \\
&= \{y \in I\!R | \frac{1}{-a+5} > \frac{1}{x+5} \geq \frac{1}{5}\} \\
&= \{y \in I\!R | \frac{1}{a-5} < -\frac{1}{x+5} \leq -\frac{1}{5}\} \\
&= \{y \in I\!R | \frac{a-4}{a-5} < 1 - \frac{1}{x+5} \leq \frac{4}{5}\} \\
&= \left] \frac{a-4}{a-5}, \frac{4}{5} \right].
\end{aligned}$$

[**(05 puntos.)**]

$$\begin{aligned}
Rec(g) &= \{y \in I\!R | x \in]0, a]\} \\
&= \{y \in I\!R | 0 < x \leq a\} \\
&= \{y \in I\!R | -4 < x - 4 \leq a - 4\} \\
&=]-4, a-4].
\end{aligned}$$

[**(05 puntos.)**]

$$\begin{aligned}
Rec(h) \bigcap Rec(g) \quad &= \quad]-4, a-4] \bigcap \left] \frac{a-4}{a-5}, \frac{4}{5} \right] = \phi \\
&\iff \quad a - 4 = \frac{a-4}{a-5} \\
&\implies \quad (a-4)[(a-5)-1] = 0 \\
&\implies \quad a = 4 \ \vee \ a = 6 \\
a = 4 \ &\implies]-4, 0] \bigcap \left] 0, \frac{4}{5} \right] \\
a = 6 \ &\implies]-4, 2] \bigcap \left] 2, \frac{4}{5} \right].
\end{aligned}$$

Sólo sirve como solución $a = 4$.

[**(05 puntos.)**]

Problema 2.

(2.1) Desde un tren que viaja hacia el norte por una vía recta, el maquinista observa una casa en dirección $N\,20^o 20'\,E$. Después de recorrer $500\,m$ observa la misma casa en dirección $S\,71^o 40'\,E$. ¿A qué distancia está la casa:

(a) Del primer punto de observación?.

(b) Del segundo punto de observación?.

(c) De la vía férrea?.

[**(15 puntos.)**]

(2.2) La caída libre de un objeto en el aire considerando el roce, desde una altura H, está descrita por una velocidad y una altura en función del tiempo, por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} v(t) &= -V_0(1-10^{-\alpha t}) \\ h(t) &= H - V_0\left(t + \frac{1}{\alpha}(10^{-\alpha t}-1)\right) \end{aligned}$$

donde V_0 es la velocidad máxima que alcanza el objeto, y α el coeficiente de roce del objeto con el aire. Determine, en términos de H, V_0 y α, a qué altura está el objeto del suelo cuando lleva $99\,\%$ de su velocidad máxima.

[**(15 puntos.)**]

Solución.-

(2.1) Se tiene:

$\alpha = 20^o 20' = 20,33^o$; $\beta = 71^o 40' = 71,66^o$; $\gamma = (180^o - \alpha - \beta) = 88^o$.

[**(02 puntos.)**]

Aplicando Teorema de senos:

(a) $\frac{sen(88)}{500} = \frac{sen(20,33)}{d_2} \Longrightarrow d_2 = 173,85.$

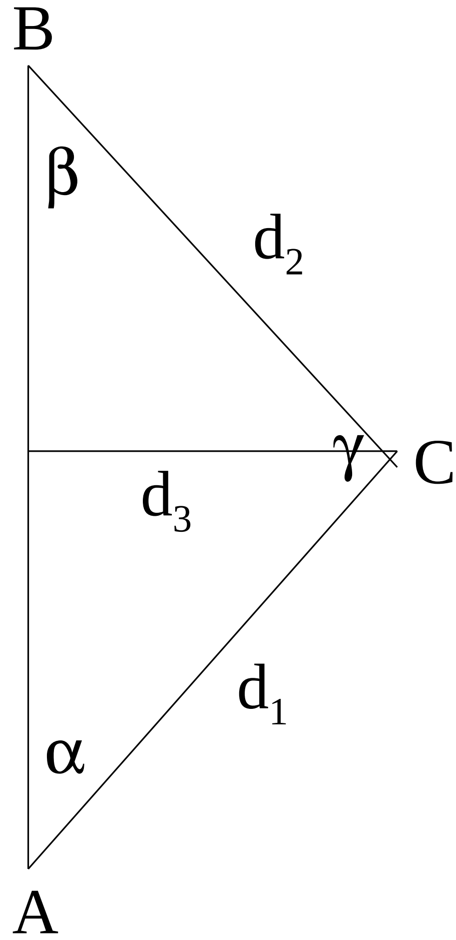
[**(03 puntos.)**]

(b) $\frac{sen(88)}{500} = \frac{sen(71,66)}{d_2} \Longrightarrow d_1 = 474,91.$

[**(03 puntos.)**]

(c) $sen(20,33 = \frac{d_3}{d_1} \Longrightarrow d_3 = 165,022.$

[**(03 puntos.)**]



[(04 puntos.)]

(2.2) Primero se calcula el tiempo de caída, digamos t_0, usando el dato de la velocidad, esto es

$$\% \, v(t_0) = \% \, V_0 \implies v(t_0) = -0.99V_0.$$

[(05 puntos.)]

Así,

$$
\begin{aligned}
-0.99V_0 &= -V_0(1-10^{-\alpha t_0})\\
0.99 &= 1-10^{-\alpha t_0}\\
-0.01 &= -10^{-\alpha t_0}\\
10^{-2} &= 10^{-\alpha t_0}\\
-2 &= -\alpha t_0\\
t_0 &= \frac{2}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

$\left[\textbf{(05 puntos.)}\right]$

Con este tiempo se calcula la altura

$$
\begin{aligned}
h(t_0) &= H - V_0\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}(10^{-2}-1)\right)\\
&= H - V_0\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{0.99}{\alpha}\right)\\
h\left(\frac{2}{\alpha}\right) &= H - \frac{1.01}{\alpha}V_0.
\end{aligned}
$$

$\left[\textbf{(05 puntos.)}\right]$

RAD/FChH/ACQ/AGS/LNB/FPV/JSA/MSC/fchh.-(11-08-2003)