UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142.

PRACTICA 10. NUMEROS COMPLEJOS

Problema 1. Para $z \in \mathbb{C}$ pruebe que: [**Práctica: 1.3**]

1.1. $z \neq 0 \Longrightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$ 1.2. $Re(z) \leq |z|, \quad Im(z) \leq |z|$

1.3. $z \neq 0 \Longrightarrow z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ 1.4. $Im(iz) = Re(z)$

Problema 2. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$: [**Práctica 2.2**]

2.1). $i^{4n} = 1$, 2.2). $i^{4n+1} = i$, 2.3). $i^{4n+2} = -1$, 2.4). $i^{4n+3} = -i$.

Problema 3. Sabiendo que $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}, w \neq 0$. Evalúe los siguientes números complejos:

3.1. $\dfrac{1}{z}$; 3.2. $\dfrac{1}{2+3i}$; 3.3. $-4(1+\dfrac{i}{12}) + 4(1-\dfrac{1}{12i})$.

3.4. $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{1+\frac{z-2}{2}}\Big)$; 3.5. $|(2+3i)(3+4i)i|$; 3.6. $i + \dfrac{1+3i}{(2+3i)(1-3i)}$.

Problema 4. Demuestre la generalización de la desigualdad triangular para un número finito de términos. Esto es: [**Práctica.**]

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problema 5. Pruebe que $|z_1 + z_2| \geq \big|\, |z_1| - |z_2| \,\big|$ y deduzca que [**Práctica.**]

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \geq \big|\, |z_1| - |z_2| \,\big|$$

Indicación: Use $|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$.

Problema 6. Pruebe que $|Im(1 - \overline{z} + z^2)| < 3$, para $|z| < 1$.

Problema 7. Encuentre el valor de $z = x + yi$ tal que: [**Práctica: 7.2 y 7.4.**]

7.1. $(x+yi)^2 = i$; 7.2. $\sqrt{x^2+y^2} = 1 - 2x + yi$.

7.3. $iz = x + 1 + 2yi$; 7.4. $\operatorname{sen}(e^x) + i\cos\,(x) = 1 + i\operatorname{sen}(y)$.

Problema 8. Describir el conjunto de puntos z que satisfacen la condición dada.

8.1.	$\lvert z\rvert \le 2$;	8.2.	$\lvert z-5i\rvert = 0$;	8.3.	$\lvert z+1-2i\rvert > 3$.
8.4.	$Im(z-4+2i) \le 3$;	8.5.	$Re(\frac{1}{z}) \le \frac{1}{2}$;	8.6.	$Re((1+i)z) < 0$.

Problema 9. Escriba las siguiente expresiones en la forma $x+yi$ y en la forma polar.

9.1.	$(-2+2i)^5$;	9.2.	$[3cis(\frac{-\pi}{4})]^4$;	9.3.	$(1+i)^{\frac{-1}{4}}$
9.4.	$(27)^{\frac{1}{4}}1^{\frac{1}{4}}$;	9.5.	$[2cis(\frac{-\pi}{3})]^{-4}$;	9.6.	$(1+i)^{20}$.

Problema 10. Utilice la fórmula de De Moivre para escribir $cos\ (3\alpha)$ y $\operatorname{sen}(3\alpha)$ en términos de $cos\ (\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)$. [**Práctica.**]

Problema 11. Para $a, b \in \mathbb{R}$, considere el producto $(1+ai)(1+bi)$ y el argumento de cada uno de los factores para: [**Práctica: 11.1 y 11.2.**]

11.1.- Verificar que

$$\operatorname{arc\,tg}(a) + \operatorname{arc\,tg}(b) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

11.2.- Demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\right).$$

11.3.- Encontrar una fórmula para

$$\operatorname{arc\,tg}(a) + \operatorname{arc\,tg}(b) + \operatorname{arc\,tg}(c).$$

Problema 12. Resuelva las siguientes ecuaciones: [**Práctica: 12.2 y 12.6.**]

12.1.	$z^2 + 3i = 6$;	12.2.	$z^6 - 2z^3 + 2 = 0$;	12.3.	$z^4 - i = 1$.
12.4.	$\lvert 2e^{it}\rvert = 2,\ 0 \le t \le 2\pi$;	12.5.	$z^8 - \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = 0$;	12.6.	$z^{\frac{2}{3}} - i = 0$.

Problema 13. Pruebe que: [**Práctica: 13.2 y 13.6.**]

13.1.	$\lvert e^{it}\rvert = 1$;	13.2.	$\operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$;	13.3.	$(e^{it})^n = e^{nti}$.
13.4.	$\overline{e^{it}} = e^{-it}$;	13.5.	$cos\ (t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$;	13.6.	$\frac{1}{cos\ (t) + i\operatorname{sen}(t)} = cos\ (t) - i\operatorname{sen}(t)$.

28.05.2002.
ACQ/acq.