UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 14 (Vectores, Rectas y Planos en $\mathbb{R}^3$)

1. Sabiendo que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 1$ determine:
   a) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$.
   b) $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$.

2. Encuentre un vector que tenga norma 3 y que sea perpendicular a $(1, -4, 0)$ y $(2, 0, -7)$.

3. Sean $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$ y $\vec{w} = (-2, 1, 1)$. **(En Práctica)**
   a) Calcule $2\vec{u} \cdot \vec{v}$, $-\vec{v} \times \vec{u}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.
   b) Encuentre un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ (si existe) tal que,
      i) sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$,
      ii) $\|\vec{x} - \vec{u}\| = \|\vec{x} - \vec{v}\|$ y $\|\vec{x}\| = 1$,
      iii) sea paralelo al vector $\vec{u} - \vec{v}$ y perpendicular a $-\vec{w}$.

4. Sean $\vec{a} = (1, -1, \alpha)$ y $\vec{b} = (-2, -\alpha, 4)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine un valor de α (si existe) tal que:
   (En Práctica)
   i) $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{b}$,
   ii) $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$,
   iii) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ sea $(-6, -12, 12,)$.

5. Sean $\vec{u} = (-2, 1, -2)$ y $\vec{v} = (1, -2, 1)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Encuentre un vector $\vec{w} = \vec{u} + \lambda\vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\|\vec{w}\|$ tenga el menor valor posible.
   (En Práctica)

6. Determine el lugar geométrico de los vectores que forman un ángulo de 30 grados con el vector $(1, 0, \sqrt{3})$. ¿Existe alguno de la forma $(\alpha, 8, \sqrt{3}\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$? Determínelo(s).

7. Determine un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tal que $||\vec{x}|| = 4$ y los ángulos directores con respecto a los ejes X y Z sean 30 y 45 grados respectivamente.

8. Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ tres vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^3$. Pruebe que:
(En Práctica i), ii) y iii))

   i) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$,

   ii) $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}-\vec{y}\| \Longleftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = 0$,

   iii) $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \Longleftrightarrow \vec{x} = \lambda\vec{y},\ \lambda > 0$,

   iv) $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z} = \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{w})$,

   v) $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z} + (\vec{y}\times\vec{z})\times\vec{x} + (\vec{z}\times\vec{x})\times\vec{y} = 0$.

9. Pruebe que si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son perpendiculares y $\alpha \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $\vec{a}\cdot\vec{b} \neq 0$, entonces $\vec{x} = \dfrac{\vec{a}\times\vec{c} + \alpha\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ satisface las ecuaciones: $\vec{x}\cdot\vec{a} = \alpha$ y $\vec{x}\times\vec{b} = \vec{c}$. **(En Práctica)**

10. Determine el área del triángulo cuyo vértices son los puntos $(1,0,-1)$, $(2,-2,3)$ y $(7,-2,4)$.

11. Sean $\vec{a} = (0,-1,2)$, $\vec{b} = (2,0,3)$ y $\vec{c} = (-1,0,-2)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Pruebe que:
$$(\vec{x}\cdot\vec{a} = 0)\ \wedge\ (\vec{x}\cdot\vec{b} = 0)\ \wedge\ (\vec{x}\cdot\vec{c} = 0) \Longrightarrow\ \vec{x} = (0,0,0).$$
(En Práctica)

12. Calcule el área del cuadrilatero cuyos vértices son los vectores: $(9,10,1)$, $(1,3,2)$, $(2,8,6)$ y $(31,21,-10)$. Encuentre también su centro de masa.

13. Sean $\vec{a} = (0,-1,2)$, $\vec{b} = (2,0,3)$ y $\vec{c} = (-1,0,-2)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Pruebe que:
$$(\vec{x}\cdot\vec{a} = 0)\ \wedge\ (\vec{x}\cdot\vec{b} = 0)\ \wedge\ (\vec{x}\cdot\vec{c} = 0) \Longrightarrow\ \vec{x} = (0,0,0).$$
(En Práctica)

14. Demuestre que el volumen de la pirámide cuyos vértices son los vectores $(0,0,0)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es: $\frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$. Indicación, use que el volumen de cualquier pirámide es igual a un tercio de su base por su altura.

JSA/RBP/RRS/GBG/AGS/RNG/LRS/BBM/ags
Primer Semestre de 2005