UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 11 (Matrices)

1. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcule $AB, BA,\ (DD^t - C)$ y $(AC^2 - I)$.

   b) Resuelva las ecuaciones matriciales: **(En práctica b) iii))**

   i) $-2X + C = B$, ii) $(A - \frac{2}{3}X)^t = 2C$, iii) $2C + XA = B^2$.

2. Considere las siguientes definiciones:

   - M se dice *antisimétrica* si $M^t = -M$.
   - M se dice *ortogonal* si $M^{-1} = M^t$.

   Demuestre las siguientes proposiciones: **(En práctica g))**

   a) Si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^t$ es una matriz simétrica y $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

   b) Toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

   c) Las matrices AA^t y A^tA son simétricas.

   d) Si A y B son matrices ortogonales, entonces AB es una matriz ortogonal.

   e) Si A es una matriz simétrica y H es una matriz ortogonal, entonces $H^{-1}AH$ s una matriz simétrica.

   f) Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es simétrica y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$, entonces B^tAB es una matriz simétrica.

   g) Si A y B son matrices simétricas, puede que AB no sea simétrica.

3. Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz cuadrada compleja, se define la matriz transpuesta conjugada de P como $P^* = (\bar{P})^t$, donde $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$. Demuestre que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces:

   a) $(A^*)^* = A$,

   b) $(A + B)^* = A^* + B^*$,

   c) $(AB)^* = B^*A^*$, **(En Práctica c))**

   d) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

4. Una matriz A se dice *hermitiana* si $A^* = A$.

   a) Muestre que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3-2i \\ 2-i & 2 & -1+3i \\ 3+2i & -1-3i & -4 \end{pmatrix}$ es hermitiana.

   b) Calcule la forma de las matrices hermitianas de 2×2 y de 3×3.

5. Una matriz A se dice *unitaria* si $A^*A = AA^* = I$. **(En práctica)**

   a) Muestre que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$ es una matriz unitaria,

   b) Calcule la forma de las matrices unitarias de 2×2.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} A^{2p} &= pA^2 - (p-1)I. \\ A^{2p+1} &= pA^2 + A - pI. \end{aligned}$$

7. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Pruebe que:

   a) $A(\theta)$ es ortogonal.

   b) $(A(\theta))^n = A(n\theta)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

8. Calcule la inversa de las siguientes matrices, donde $a \in \mathbb{R}$. **(En práctica f))**

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

   d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Muestre que $A^{-1} = -\frac{1}{3}(A^2 - 2A - 4I)$.

10. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que A^tA es invertible, y sea $B = I - A(A^tA)^{-1}A^t$.

    a) Pruebe que $B^2 = B$.

    b) Muestre que $BA = \theta$.

    c) Pruebe que B es una matriz simétrica. **(En práctica c))**

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

    a) Calcule los números reales a y b, tales que: $A^2 + aA + bI = \theta$.

    b) De la ecuación anterior calcule una expresión para la inversa de A.

    c) Usando la expresión obtenida en (b) calcule la inversa de A.

    d) Compruebe el resultado obtenido.

RRS/RNG/JMS/AGS/LNB/JSA/BBM/LRS/ags
semestre otoño 2006.