UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 3

ECUACIONES NO LINEALES EN MATLAB

En la teoría hemos visto cuatro métodos para la resolución de ecuaciones no lineales, por un lado: de la bisección, Newton Raphson y de la secante, los cuales están orientados a resolver ecuaciones de una variable. Y finalmente el método de Newton, que consiste en una generalización del método de Newton Raphson, que permite resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

1. Método de la bisección.

Descargue el programa biseccion.m, este programa consuste en un rutero que implementa el método de la bisección para resolver una ecuación no lineal en particular.

Considerando este programa

1. Descargue el programa mencionado y ejecútelo. ¿Qué observa en la ejecución de este programa?.
2. Comente las líneas de código en los espacios disponibles. Usando una frase que describa brevemente el objetivo de cada línea del programa.
3. Cree una variable que almacene la cantidad de pasos realizados en el algoritmo implementado en el programa.
4. Modifique el criterio de detención para que sea mediante una tolerancia de 10^{-8} ó 350 iteraciones.
5. A partir del programa cree una función que tenga como entradas los extremos iniciales del método y que retorne la raíz calculada con el criterio de detención anterior.
6. Use esta función para calcular todas las raíces negativas que se observan en la gráfica del programa.

Use el programa estudiado en los pasos anteriores para encontrar al menos dos raíces de las ecuaciones no lineales, si existen.

1. $x^3 + 2x = -8$
2. $x^2/\cos(x) = x$,
3. $2x^2 + \cos(x) = x$,
4. $\frac{\mathrm{sen}(x)}{x^2+1} = 0$,
5. $\frac{e^{x^2+1}}{e^{-x}} = x$,
6. $\frac{\tan(x)}{1+x} = 2x + 1$,

2. Método de Newton-Raphson.

Descargue el programa newtonraphson.m, este programa consiste en un rutero que implementa el método de Newton-Raphson para resolver una ecuación no lineal en particular.

Considerando este programa

1. Descargue el programa mencionado y ejecútelo. ¿Qué observa en la ejecución de este programa?.
2. Comente las líneas de código en los espacios disponibles. Usando una frase que describa brevemente el objetivo de cada línea del programa.

3. Modifique el programa para que comienze con los siguientes puntos iniciales

$$1{,}5, \quad 3{,}0, \quad 2{,}35, \quad 1.$$

¿Qué observa en la ejecución del programa considerando estos puntos iniciales?.

4. Modifique el criterio de detención para que sea mediante una tolerancia de 10^{-4} programa.

Use el programa estudiado en los pasos anteriores para encontrar al menos dos ráices de las ecuaciones no lineales, si existen.

1. $\cos(x^2 + 1) = 1$,
2. $2x^3 - \operatorname{sen}(x^2 + 1) = x$,
3. $e^{\cos(x+1)} = 1$.

Observación: En este caso debe calcular analíticamente la derivada de cada función.

3. Método de la secante.

Usando lo desarrollado con los programas anteriores, construya un rutero de MATLAB que permita resolver la ecuación no lineal

$$\frac{\cos(x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 1} = x$$

considerando como puntos iniciales $x_0 = 2{,}5$ y $x_1 = 1{,}5$ mediante el método de la secante. Para esto se sugiere:

1. Crear una función tipo inline que represente a la función asociada a la ecuación no lineal.
2. Grafique esta función.
3. Definir los puntos iniciales del algoritmo.
4. Para poder observar el comportamiento del algoritmo, grafique los puntos iniciales en la gráfica de esta función.
5. Programe un ciclo iterativo que permita hacer los cálculos de cada paso. Recuerde que debe considerar algún criterio de detención.
6. Dentro de este ciclo iterativo, realice el cálculo del siguiente punto del método.
7. Dentro de este ciclo iterativo, grafique en la función el siguiente punto calculado.

Una vez que tenga implementado este programa, proponga puntos iniciales más adecuados para construir la aproximación a la solución buscada.

4. Ejercicios.

1. Mediante algún método numérico adecuado encuentre soluciones de los siguientes problemas.
   a) El ancho de un rectángulo es $2[cm]$ mas largo que tres veces su alto. Si el área del rectángulo es $56[cm^2]$, ¿Cuales son las dimensiones del rectángulo?.
   b) Use el método de Newton-Raphson para encontrar el menor valor de x que satisface

$$0{,}7 = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sen}(x) e^{-\frac{x}{2\pi}}\right)$$

c) En mecánica y física son de interés encontrar puntos fijos de funciones no lineales. Un punto fijo x_0 de una función f, es un punto en el dominio de la función donde se satisface

$$f(x_0) = x_0.$$

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 + 3x + 1$ tiene como punto fijo $x = -1$. Calcule puntos fjos de las funciones

1) $f(x) = 0{,}9x^2 - 1{,}7x - 2{,}5$, 2) $g(x) = \text{sen}(\sqrt{x}) - x$, 3) $h(x) = 2\,\text{sen}(x) - \frac{x^2}{8}$,

d) Con los programas analizados y construidos en las secciones anteriores, construya un programa que genera una celda que tenga los siguientes datos:

N. de iteración	Error Bisección	Error Newton-Raphson	Error Secante
1			
2			
$\vdots$			

considerando la búsqueda de soluciones de la ecuación

$$(x^3 + 2x + 1)\,\cos(x^3 + 1) = 2$$

con puntos iniciales $x_0 = 2{,}2$ para el método de Newton-Raphson y $x_a = 2$,$x_b = 2{,}2$ para el método de la bisección y la secante.

5. El método de Newton

Cuando nos enfrentamos a un sistema de ecuaciones lineales, ninguno de los métodos estudiados anteriomente es adecuado. Sin embargo, se puede considerar una generalización del método de Newton-Raphson. Similar a lo visto anteriormente, buscar una solución del sistema

$$\left.\begin{array}{c}\cos(x) - y = -2x \\ y - x^2 = 0\end{array}\right|$$

puede ser planteado como encontrar una preimágen del vector nulo para el campo vectorial

$$f(x, y) = (\cos(x) - y + 2x,\ y - x.^2).$$

Según lo visto en la teoría, usando una aplicación lineal afin, se construye una sucesión de aproximaciones a partir de una preimágen x_0 para f

$$x_{k+1} = x_k + Df(x_k)^{-1} f(x_k), \quad \forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}$$

que se espera convergan a la raíz buscada. Siguiendo el ejemplo anterior,

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_k - y_k\, sen(x_k y_k) & -x_k\ \text{sen}(x_k y_k) \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_k^2 + \cos(x_k y_k) - 1 \\ 2x_k + y_k \end{bmatrix}$$

En la ejecución de este algoritmo podemos considerar como criterio de detención las mismas ideas vistas anteriormente:

1. Cantidad de iteraciones.

   En este caso, se cuentan la cantidad de veces que se ha calcula una nueva aproximación de la raíz. Cuando se llegue a un valor máximo, se termina la ejecución del programa y se considera como solución numérica la última obtenida.

2. Distancia entre las raíces sucesivas.

   En este caso se debe proveer al método una tolerancia. Así, cada vez que se realize el cálculo de una nueva aproximación a la solución x_{k+1}, se debe chequear que la magnitud

   $$||x_{k+1} - x_k||$$

   siga siendo mayor que la tolerancia. Si el resultado es menor, entonces se termina el método y se considera la última calculada como solución.

3. Cercanía al cero a través de la función.

   Similarmente al caso anterior, se considera una tolerancia fija y se ejecuta el método mientras

   $$\|f(x_k)\|$$

   siga siendo menor que la tolerancia. Si en algún paso esta norma es menor que la tolerancia, se detiene la ejecución y se retorna como solución numérica la última raíz aproximada.

   Observación: Gracias a la equivalencia de normas, da lo mismo cual norma se considere en los criterios de detención b) y c).

5.1. Ejercicios

Descargue y ejecute el programa newton.m, este programa consiste en un rutero que implementa el método de Newton para resolver el sistema de ecuaciones no lineales anterior. Considerando este rutero:

1. Modifique el rutero descargado para considerar como criterio de detención un número máximo de 150 iteraciones ó una tolerancia de 10^{-8} en las formas de detención descritas anteriomente.

2. Modifique la raíz inicial del problema para calcular obtener soluciones numéricas de las restantes raíces de este problema.

3. Modifique el rutero descargado para resolver los problemas de ecuaciones no lineales

   $a)\ \left.\begin{array}{r} \cos(xy) * x = 1 \\ \operatorname{sen}(xy) * y = 0 \end{array}\right|$ $\quad b)\ \left.\begin{array}{r} 2 * x^2 + y^2 = 1 \\ 3 * x + y^2 = 2 \end{array}\right|$ $\quad c)\ \left.\begin{array}{r} x + yz = 0 \\ y - x^2 = 0 \\ \cos(z) = 0 \end{array}\right|$

4. Usando el método de Newton, encuentre un punto crítico de la función

   $$f(x, y) = 2x^2y^2 + x^2y - 2x - y^2.$$

5. Encuentre las intersecciones de las elipse y parábolas de ecuaciones

   $$2x^2 + y^2 = 1, \quad y = -2x^2.$$

6. Utilización de funciones propietarias de Matlab

Los métodos numéricos programados y estudiados anteriomente, están disponibles entre las funciones propias de Matlab `fzero()` y `fsolve()`. Los siguientes ejemplos muestran el uso de estas funciones y sus distintas variables.

6.1. Un problema de enfriamiento no lineal

El Sr. D fue encontrado muerto en su oficina a las 20:00 hrs del 22 de octubre de 2012, la temperatura de su cuerpo era de 32,2[$°C$]. Una hora después, ésta había descendido a 29,4[$°C$].

El Capitán F cree que M es el asesino. Sin embargo, M dice tener una coartada: fue entrevistado entre 18:40 y 19:15 por el periodista J. Efectivamente, en la recepción del edificio donde se realizó la entrevista se registró la llegada de M a las 18:35 y su salida a las 19:20. ¿Pudo M ser el asesino? Debemos determinar la hora de la muerte del Sr. D.

Supongamos que $T(t)$ denota la temperatura del cuerpo del Sr. D en el instante de tiempo t. Con los datos anteriores sabemos que $T(20) = 32{,}2$, $T(21) = 29{,}4$. Además, según la ley de Newton,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\kappa\left(T(t) - T_{\text{ambiente}}(t)\right),$$

donde κ es una constante y $T_{\text{ambiente}}(t)$ es la temperatura ambiente en el tiempo t. De la temperatura de la oficina del Sr. D (lugar dónde fue encontrado su cuerpo) sabemos que a las 16:00 hrs era de 20 grados, sin embargo a esa hora se reportó un daño en el aire acondicionado de la misma y la temperatura comenzó a ascender a partir de ese momento a razón de 0,5 grados por hora, es decir podemos tomar

$$T_{\text{ambiente}}(t) = \begin{cases} 20, & t \leq 16, \\ 20 + \frac{1}{2}(t-16), & t > 16 \end{cases}$$

Resolviendo el problema de valores iniciales (válido sólo para $t \geq 16$),

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\kappa\left(T(t) - 20 - \frac{1}{2}(t-16)\right), \quad T(20) = 32{,}2$$

se tiene

$$T(t) = \left(10{,}2 + \frac{1}{2\kappa}\right)e^{-\kappa(t-20)} + \frac{t+24}{2} - \frac{1}{2\kappa}, \quad t \geq 16.$$

Con esta expresión para T y sabiendo que $T(21) = 29{,}4$, determine la hora de la muerte del Sr. D, es decir, determine el momento de tiempo $16 < t_* < 20$ en que la temperatura del cuerpo del Sr. D era 36,5 grados.

Debemos resolver 2 problemas no lineales: el primero es determinar κ de modo que $T(21) = 29{,}4$ y el segundo es, una vez conocido κ, determinar t_*.

Sea

$$F(\kappa) = T(21) - 29{,}4,$$

1. Escriba una función Matlab que dado $\kappa \in \mathbb{R}$ (parámetro de entrada a la función), calcule $F(\kappa)$. Esta función debe estar escrita de modo que, en caso que el parámetro de entrada sea un vector, ella retorne un vector con los valores de F en cada uno de los puntos especificados en el vector de entrada.

2. Escriba un rutero Matlab que haga lo siguiente:

   a) evalúe F en 100 puntos distintos del intervalo [0,1, 0,5]. Haga un gráfico de la función y observe que ella tiene un cero en el intervalo considerado. Con la ayuda del comando `grid on` indique una aproximación inicial de la raíz de esta función.

b) Llame a la función Matlab `fzero` para obtener una aproximación al cero de F en [0,1, 0,5]. Ello lo logra escribiendo **una** de las siguientes líneas en su programa, tenga presente que debe sustituir `Fkappa` por el nombre de la función escrita por usted antes.

```
kappa = fzero('Fkappa',0.2,optimset('TolX',1e-10))

kappa = fzero('Fkappa',[0.1,0.5],optimset('TolX',1e-10))
```

Para entender los llamados anteriores a `fzero`, lea la siguiente explicación acerca de este comando: `fzero` es una función Matlab para la aproximación de raíces de funciones reales basada en una combinación del método de bisección con el método de la secante y otras técnicas. *El primer parámetro de entrada* a `fzero` es la función cuya raíz quiere aproximarse. *El segundo parámetro de entrada* puede ser un número real o un vector de 2 componentes. Si es un número real, es considerado como una aproximación inicial al cero de la función. Si es un vector de 2 componentes, representa el intervalo inicial donde buscar el cero de la función (debe cumplir con las exigencias del método de bisección). En ambos casos, estos parámetros pueden ser estimados mediante la gráfica de la función. *Los siguientes parámetros de entrada* son opcionales. En este caso, especificamos que la precisión con que quiere calcularse la aproximación al cero de F debe ser 10^{-10} (`'TolX',1e-10`). La forma en que procede `fzero` en cada caso puede leerla escribiendo `help fzero` en la ventana de comandos de Matlab .

Escriba el valor de κ obtenido.

κ	

Nota 1: Puede definir una función mediante un programa `funcion.m` o mediante el comando `inline`, por ejemplo, para $f(x) = x^2 - 1$.

```
f=inline('x.^2-1')          % Define una funcion en terminos de x
f(1)                        % Evalua la funcion anterior en x=1
feval(f,1)                  % Identico a lo anterior
```

Nota 2: Si tiene una función con muchas entradas pero solo una de ellas es una variable, puede utilizar `fzero` con el comando `@(x)`. Por ejemplo.

```
f=inline('x.^2-y.^2');

xo=fzero(@(x)f(x,4),1.5)
yo=fzero(@(y)f(4,y),1.5)
```

3. Escriba ahora una función que evalúe a $T(t) - 36{,}5$ tomando κ igual al valor obtenido antes.

4. Proceda de manera similar a como lo hizo en 1.2, pero ahora para determinar el valor de $t_* \in (16, 20)$ en el cual la temperatura del Sr. D era de 36.5. ¿A qué hora fue asesinado el Sr. D?

¿Pudo M asesinar a D?

6.2. Un problema de asignación

Juan y Beatriz trabajan en una empresa pesquera que procesa $200[Kg]$ diarios de salmón. Este Lunes Juan empezó a trabajar a las 8:00AM y alcanzó a hacer $100[Kg]$ justo cuando Beatriz llegó. Luego Beatriz siguió trabajando y terminó el trabajo a las 8:50AM. El martes ambos empezaron el trabajo a las 8:00AM y terminaron a las 8:24AM. El miércoles Beatriz estaba enferma. Si Juan es el trabajador más rápido, ¿Cuanto tiempo le tomará a Juan completar los $200[Kg]$ de salmón a el sólo?.

a) En este problema se identifica que las incógnitas:

1) J: rapidez de trabajo de Juan medida en $[kg/min]$.
2) B: rapidez de trabajo de Beatiz medida en $[kg/min]$.
3) t_0: tiempo del día Lunes en los que Juan trabajó solo medido en $[min]$.

b) Considerando estas variables, del enunciado sigue el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\left.\begin{array}{ll} J \cdot t_0 & = 100 \\ B \cdot (50 - t_0) & = 100 \\ J \cdot 24 + B \cdot 24 & = 200 \end{array}\right|$$

c) Siguiente este sistema de ecuaciones, estamos interesados en encontrar una raíz al campo vectorial

$$f_p(J, B, t_0) = (J \cdot t_0 - 100, B \cdot (50 - t_0) - 100, 24J + 24B - 200).$$

Para hacer esto, cree un fichero tipo `function` que permita evaluar, mediante vectores, este campo vectorial. Este archivo debe contener instrucciones similares a

```
function y=fp(x)
        y(1)=x(1)*x(3)-100;
        y(2)=x(2)*(50-x(3))-100;
        y(3)=24*x(1)+24*x(2)-200;
```

Para verificar que esta función está bien ingresada evalúela en $[0, 0, 0]$. ¿Cuanto debe retornar esta función?.

d) Las siguientes instrucciones permiten resolver usando la función `fsolve` de Matlab

```
x0 = [0,0];
x = fsolve(@fp,x0)
```

para verificar que la solución obtenida es correcta, observe la evaluación de la función f_p en la solución numérica calculada.

e) Cuanto tiempo le tomará a Juan completar los $200[Kg]$ sólo?.

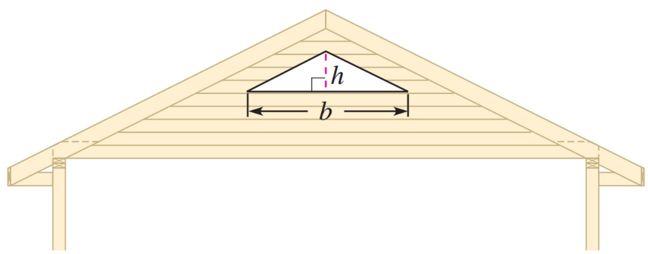
6.3. Ejercicios

Usando las funciones privativas de MATLAB `fzero()` o `fsolve()` según corresponda, resuelva los siguientes problemas de ecuaciones no lineales.

1. Encuentre el largo de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{15}[cm]$ y su área es $3[cm]^2$.

2. La etiqueta de una televisión pequea dice que tiene $5''$ de diagonal y una superficie de 12 pulgadas cuadradas. ¿Cual es el largo y ancho de la pantalla?.

3. Vicente tiene un plano para construir una casa con siete frontones. El plano pide que en cada frontón vaya una ventilación con forma de triángulo Isoceles. Debido a la inclinación del techo, la razón entre la altura y la base de cada triángulo debe ser 1 es a 4. Si las ventilaciones deben proveer un total de $3500[cm^2]$, ¿Cuanto debería medir la base y la altura de cada triángulo?.



4. Una bomba A puede llenar o vaciar un tanque en el mismo tiempo. Si las bombas A y B trabajan juntas, el tanque se puede llenar en 6 horas. Al equivocarse los operadores pusieron a la bomba A vaciando el tanque y a la bomba B llenándolo, tomó 12 horas llenar el tanque. ¿Cuanto tiempo le toma a cada una de estas bombas llenar el tanque solas?.

5. Daniela ordena o desordenada su casa la misma velocidad. Cuando Daniela está ordenando con su madre, logran ordenar una casa totalmente desordenada en 6 horas. Si Daniela no ayuda a su madre, a ella le toma 9 horas ordenar la casa mientras Daniela está continuamente desordenando. ¿Cuanto tiempo le toma a la madre de Daniela ordenar la casa, si Daniela es enviada a vivir con su abuelo?.

6. Encuentra dos números complejos cuya suma sea -6 y sus productos sean 10.

7. Ángela está diseando una caja de $650[cm]^3$ para contener un nuevo cereal. La caja debe tener un ancho de $5[cm]$, con el objetivo de que sea fácil de agarrar. Además debe tener $950[cm^2]$ de superficie para dar suficiente espacio para presentar ofertas y publicidad. ¿De que dimensiones deben ser las cajas?.

Revisado a Semestre 2018–1