UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 522115
Listado 2 (Funciones)

1. Determinar el dominio y recorrido de la relación $\mathcal{R}$ representada por:

   a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : \ x + y \leq 10\}$,
   b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : \ x - y = 1\}$,
   c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x-y} = -1\}$,
   d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : \ x^2 + 2y^2 = 12\}$,
   e) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4x^2 - y^2 = 16\}$,
   f) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - y^2 = 15\}$.

2. Considere la relación binaria $\mathcal{R}$ en : (i) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, (ii) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, (iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, definida por:
$$x \,\mathcal{R}\, y \iff y = 8 - 2x.$$
   Determinar $Dom(\mathcal{R})$ y $Rec(\mathcal{R})$ en cada caso.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Dé un ejemplo de conjunto no vacío $B \subseteq \mathbb{R}$, en cada caso, tal que

   a) $f(B) =]1, +\infty[$,   b) $f^{-1}(B) = \emptyset$,   c) $|f^{-1}(B)| = 1$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 3$. Dé un ejemplo de conjunto no vacío $B \subseteq \mathbb{R}$, en cada caso, tal que

   a) $f(B) =]-\infty, -1]$,   b) $f^{-1}(B) = [1, 2]$,   c) $f^{-1}(B) = \mathbb{R} - [1, 2]$.

5. Sea la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x - 3$, y sean los conjuntos $A = \mathbb{N}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} : \ x = 3k, \ k \in \mathbb{Z}\}$. Determine

   a) $f(A \cup B)$,   b) $f(A \cap B)$,   c) $f^{-1}(A \cup B)$,   d) $f^{-1}(A \cap B)$.

6. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si} \quad \text{n es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si} \quad \text{n es impar} \end{cases}$$
   y los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} \text{A} &= \{n \in \mathbb{N} : \quad n \leq 10 \quad \text{y } n \text{ es divisible por } 3\}, \\ \text{B} &= \{n \in \mathbb{N} : \quad n \leq 13 \quad \text{y } n \text{ es divisible por } 6\}, \\ \text{C} &= \{n \in \mathbb{N} : \quad n \leq 20 \quad \text{y } n \text{ es número primo } \}. \end{aligned}$$

a) Determine si la función f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

b) Encuentre: $f(A)$, $f^{-1}(B)$ y $\{x \in C,\ f(x) = 5\}$.

7. Considere las funciones

i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \longmapsto f(n) = 2n,$

ii) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{P}; \quad n \longmapsto g(n) = 2n$, donde $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ es par}\}$,

iii) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad n \longmapsto h(n) = \begin{cases} 2n - 2 & \text{si} \quad n > 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ -2n & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$

Decidir si ellas son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas, respectivamente.

8. En los siguientes problemas determine Dominio y Recorrido de las funciones reales, definidas por:

a) $$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x+3} \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3} \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = |x-2| \end{array}$$

e) $$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x-1}} \end{array}$$

9. Sea la función $f : \mathbb{R} \to]-2, +\infty[$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 7$. Determine si f es o no sobreyectiva.

10. Determine para qué valores de $k \in \mathbb{N}$, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^k + k$ es biyectiva.

11. Para la función f definida por:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 4.$$

i) Muestre que f no es sobreyectiva ni inyectiva.

ii) Redefina el dominio y recorrido de f de manera que la nueva función sea biyectiva.

12. Considere la función $g : \mathrm{Dom}(g) \subseteq R \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x > 3, \\ \\ x - 4 & \text{si} \quad x \leq 3. \end{cases}$$

i) Encuentre $\text{Dom}(g)$ (dominio de g).

ii) Pruebe que g es inyectiva; determine el recorrido de g, y concluya si g es o no sobreyectiva.

iii) Determine el conjunto $g^{-1}(\,]-1,0[\,)$.

13. En cada caso dé un ejemplo de una función $f Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

a) f es creciente e impar.

b) f no es creciente ni decreciente.

c) f no es par ni impar.

d) f es impar y no inyectiva.

e) f es par y no sobreyectiva.

f) f es biyectiva y decreciente.

14. Sean $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales. Analice la existencia de la suma, el producto, el cuociente y las compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$. En los casos donde exista la función, defínala.

a) $f(x) = 1 + x^2; \quad g(x) = \sqrt{x-1}.$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}.$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1; & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}; & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x - 2; & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1}; & x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x + 2; & x < 2 \\ x^2; & x \geq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}; & x < -1 \\ 2x; & x \geq -1 \end{cases}$

15. Sean las funciones $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{x+2}, \qquad g(x) = (x-1)^3.$$

Defina en cada caso (si es posible) las siguientes funciones:

a) $(f \circ g)^{-1}$, b) $g \circ g^{-1}$, c) $f^{-1} \circ g^{-1}$, d) $f^{-1} \circ g$.

16. En los siguientes casos determine si la función es invertible, y si lo es defina su inversa.

a) $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x+3}{2x-4}.$

b) $f : [2,10] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}.$

17. Sea h la función real definida por: $\forall x \in \mathbb{R} : \quad h(x) = (x-1)(x-2)$.

a) Determinar el recorrido de h.

b) Probar que la función $h_1 = h|_{[\frac{3}{2},+\infty[}$ es estrictamente creciente y determinar su recorrido.

c) Mostrar que existe la inversa h_1^{-1} y defínala.

JAL
Primer Semestre de 2005.