UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO: 521234

Guía de Ejercicios No 5-II

1. Construir la solución del siguiente problema de valores de frontera e iniciales:

$$\begin{array}{lcll} u_{tt} & = & 25u_{xx} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) & = & 0 & \qquad t > 0 \\ u_x(\pi,t) & = & 0 & \qquad t > 0 \\ u(x,0) & = & 6 + 3\cos(4t) & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x,0) & = & \operatorname{sen}(\pi x) & 0 \leq x \leq \pi \end{array}$$

2. Una cuerda de longitud $L = 1$ se estira en su punto medio hasta una altura h y luego se suelta repentinamente. ¿Cuál es el movimiento de la cuerda?.

3. Se tiene una cuerda de piano de largo L, homogénea. Se golpea dicha cuerda con el martillo correspondiente, en el punto $x = \xi$, impartiendo una velocidad inicial:

$$v_0(x) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{\pi(x-\xi)}{d} & \text{si} \quad |x - \xi| < \frac{d}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x - \xi| > \frac{d}{2} \end{cases}$$

donde d es un número positivo, mucho menor que L y v_0 es una constante positiva pequeña. Determinar el desplazamiento de la cuerda de piano para $t \geq 0$.

4. Encontrar los desplazamientos $y(x,t)$, de una cuerda vibrante de longitud π; donde un extremo *es fijo* ($x = \pi$) y el otro *es móvil* ($x = 0$):

$$\begin{array}{rcl} y_{tt} & = & c^2 y_{xx}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ y_x(0,t) & = & y(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0 \\ y(x,0) & = & 2\sin x + 3\cos 5x, \qquad 0 < x < \pi \\ y_t(x,0) & = & \sqrt{0{,}123}x \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{array}$$

5. Una cuerda es estirada entre los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$. El desplazamiento a partir de $y = 0$ y del *reposo* comienza con una velocidad inicial:

$$y_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 0{,}05, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0{,}05(2-x), & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Construya y resuelva el problema de valores de contorno e inicial que modela esta situación.

6. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales:

$$(a)\ \begin{array}{rcll} u_{tt} & = & u_{xx} & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) & = & e^{-x^2} & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) & = & 0 & x \in \mathbb{R} \end{array} \qquad (b)\ \begin{array}{rcll} u_{tt} & = & u_{xx} & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) & = & 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) & = & xe^{-x^2} & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

7. Resuelva los siguientes problemas de valores de contorno e iniciales nulos, es decir,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0,$$

y gobernados por la siguiente ecuación de ondas no-homogéneas:

   a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen}(\pi x), \quad 0 < x < L = 1,\ t > 0.$

   b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (4t - 8)\operatorname{sen}(2x), \quad 0 < x < L = \pi,\ t > 0.$

8. *a*) Un violín está colocado horizontalmente sobre una mesa, y sus cuerdas comienzan a vibrar por el sonido emitido por un radio-receptor. Las vibraciones producidas por el radio-receptor producen presión de aire que alcanza cada cuerda del violín y produce su desplazamiento. Asuma que dicha presión varía sinusoidalmente con el tiempo, según el modelo $Asen\ wt$. Escribir y resolver el problema de valores de contorno que modela esta situación.

   b) Determinar el desplazamiento de la cuerda del violín (de longitud L) si ella es afectada por una fuerza de roce, que es proporcional a su velocidad, es decir, la ecuación del movimiento es reemplazada por: $u_{tt} = c^2 u_{xx} - 2ku_t + A\sin wt$ donde k es una constante positiva, tal que $k < \frac{\pi c}{L}$.

   c) Determinar el desplazamiento de la cuerda si la constante k satisface que $k = \frac{\pi c}{L}$ o bien $k > \frac{\pi c}{L}$.

9. La función $u(x,t)$ describe las vibraciones longitudinales de un gas perfecto en un tubo, podemos suponer que la presión se asume constante en la entrada, es decir, $u_x(0,t) = 0$ y en la salida del tubo, $u_x(L,t) = 0$. Si el desplazamiento y velocidad iniciales son modelados por $u_0(x)$ y $u_1(x)$ respectivamente:

   a) ¿Cuál es el modelo matemático que satisface $u(x,t)$?

   b) Encuentre dicha función $u(x,t)$.

   c) El auto-valor $\lambda = 0$ contribuye a la solución con un *término no oscilatorio,* el cual corresponde a la translación de una masa gaseosa que va de una extremidad a la otra. Este término incluye, entre otros, la velocidad media de circulación del gas a través del tubo: $V_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L u_1(s)ds$. Identifique éste *término no oscilatorio* en su solución.

Concepción, 14 de Septiembre de 2005.
HMH/FPV/fpv.