

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: METODOS DIRECTOS

Ejercicio 1. Escriba la función `create_trid` en MATLAB que, dados valores n , a , b y c , devuelva la matriz tridiagonal de orden n de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{pmatrix}.$$

- 1.1 Llame a esta función con $n = 10, a = 4, b = c = 1$ y guarde el resultado en **A**. Determine si esta matriz es invertible. Para ello puede usar, por ejemplo, el comando `det` (devuelve el determinante de la matriz que recibe como entrada) o el comando `rank` (calcula el rango de la matriz que recibe como entrada).
- 1.2 Con el comando `rand` genere un vector $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{10}$. Resuelva el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ de los modos siguientes: mediante `\` y usando las matrices **P**, **L**, **U** que retorna la función `lu` de MATLAB, cuya sintaxis fue vista en clases. ¿Obtiene la misma solución? ¿Cuál es la norma de la diferencia entre ellas?

Observación: Para resolver un sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en MATLAB utilice la instrucción:

```
>> x=A\b
```

Ejercicio 2. En muchas aplicaciones es necesario resolver varios sistemas de ecuaciones $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{b}_i$, con la misma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y distintas partes derechas $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$. Para hacer esto en MATLAB resulta conveniente generar la matriz de partes derechas

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_m \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

y resolver el sistema matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, cuya solución

$$X = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_m \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

es la matriz de vectores solución \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, m$, de los sistemas anteriores.

- 2.1** Escriba una función MATLAB con los comandos que aparecen en el siguiente cuadro. Guárdela en `variosistemas.m`.

```
function[t1,t2,normadiferencia] = variosistemas
% funcion para observar importancia de re-uso de descomposición LU

A=create_trid(50,.5,1,1);
B=rand(50,100);

tic
X=A\B;
t1=toc;

Y = zeros(50,100);
tic
for i=1:100
Y(:,i)=A\B(:,i);
end
t2=toc;

normadiferencia=norm(X-Y,inf);
```

- 2.2** Describa qué se hace en la función anterior.
- 2.3** Escriba un rutero que llame a `variosistemas` 20 veces y determine el tiempo promedio que demora resolver los sistemas $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ mediante $\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}$ y el tiempo promedio que demora resolverlos uno a uno. ¿Qué valores obtiene? ¿Cuál es la forma más eficiente de resolver los 20 sistemas de ecuaciones? ¿Por qué ocurre esto?

Ejercicio 3. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Haga un programa MATLAB que genere la matriz anterior para $n = 10$.

- 3.1** Compruebe que \mathbf{A} es simétrica y definida positiva (puede calcular los valores propios de \mathbf{A} con el comando `eig` de MATLAB y comprobar que ellos son mayores que cero o puede demostrar que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{10}$ se cumple $\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$).
- 3.2** Encuentre mediante el comando `chol` la descomposición de Cholesky de \mathbf{A} .
- 3.3** Resuelva, con ayuda de esta descomposición, el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Ejercicio 4. Las matrices de Hilbert:

$$\mathbf{H}_n = (h_{ij}^{(n)}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{con } h_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

son matrices muy mal condicionadas. Estas se generan en MATLAB con el comando `hilb`.

- 4.1** Tabule los números de condición en norma euclidea (comando `cond`) y las estimaciones de los números de condición en norma 1 (comando `condest`) de estas matrices, para $n = 2, \dots, 10$.

4.2 Sean

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0.7487192 \\ 0.4407175 \\ 0.3206968 \\ 0.2543113 \\ 0.2115308 \\ 0.1814429 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + \delta \mathbf{b},$$

con $\delta \mathbf{b}$ un vector de perturbaciones aleatorias de valor absoluto menor o igual a 10^{-6} (Note que la sentencia MATLAB `(2*rand(n,1)-1)*a` genera un vector columna aleatorio de dimensión n , uniformemente distribuido en el intervalo $[-a, a]$). Resuelva los sistemas $\mathbf{H}_6 \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0$ y $\mathbf{H}_6 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$. Compare la diferencia de las soluciones $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ con la de los segundos miembros $\delta \mathbf{b}$. Describa lo que se observa.

4.3 Verifique que se satisface la relación

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_0\|} \leq \text{cond}(\mathbf{H}_6) \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}_0\|}.$$

Ejercicio 5. Sean

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ \vdots \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

donde h y n son tales que $n = \frac{1}{h} - 1$. Este tipo de sistemas de ecuaciones lineales surge al discretizar la ecuación

$$-u''(x) = -4, \quad u(0) = u(1) = 1, \quad x \in [0, 1]. \quad (1)$$

- 5.1 Escriba una función MATLAB que reciba como entrada un valor para h y retorne la matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{b} correspondientes.
- 5.2 Llame a la función escrita en 4.1 con $h = 0.1$. Encuentre mediante el comando `chol` la descomposición de Cholesky de \mathbf{A} (recuerde que si \mathbf{A} no es simétrica y definida positiva el comando `chol` retorna un mensaje de error).
- 5.3 Resuelva, con ayuda de la descomposición de Cholesky de \mathbf{A} , el sistema $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{b}$. El vector solución a este sistema de ecuaciones representa aproximaciones a los valores de la solución de (??) en los puntos $h, 2h, \dots, nh$. Grafique, en un mismo gráfico, la aproximación obtenida (agregando al vector $\tilde{\mathbf{u}}$ los valores en 0 y en 1) y los valores de $u(x) = 2x^2 - 2x + 1$ evaluada en 100 puntos igualmente espaciados del intervalo $[0, 1]$. ¿Es \tilde{u}_i una buena aproximación a $u(ih)$?

Ejercicio 6. La figura ?? muestra los n estadios de un reactor de extracción química. Agua, conteniendo una fracción de masa x_{in} de un cierto químico entra por la parte superior del reactor mientras que un solvente, conteniendo una fracción de masa y_{in} del mismo componente químico entra por la parte inferior del mismo. A medida que las corrientes de agua y solvente se mueven dentro del reactor, el químico es extraído del agua y transferido al solvente.

La ecuación de balance del material químico en cada estadio del reactor establece que, si x_i e y_i representan las fracciones de masa del componente químico en agua y solvente respectivamente y

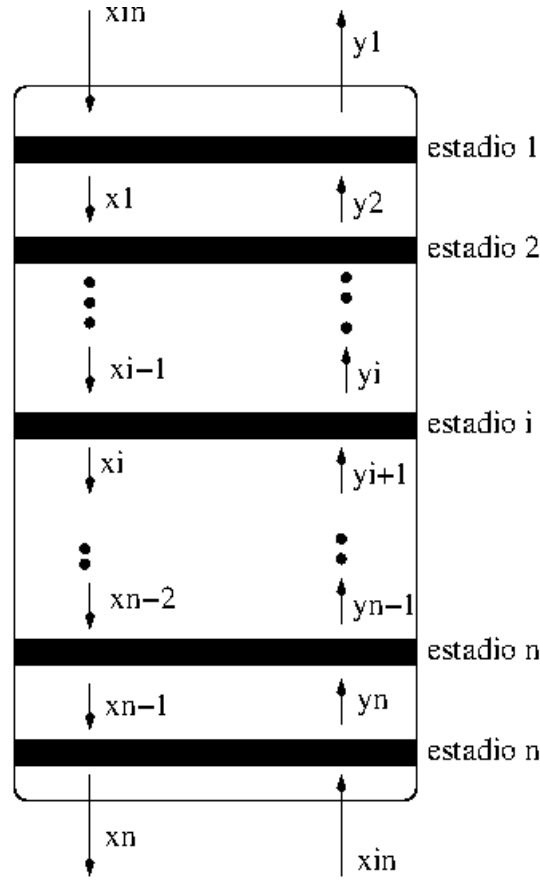


Figura 1: Reactor de extracción química con n estadios

se supone que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cumple que $y_i = mx_i$, entonces en el primer y último estadios se tiene

$$-(W + Sm)x_1 + Smx_2 = -Wx_{in}, \quad (2a)$$

$$Wx_{n-1} - (W + Sm)x_n = -Sy_{in}, \quad (2b)$$

mientras que para los estadios intermedios se cumple

$$Wx_{i-1} - (W + Sm)x_i + Smx_{i+1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (3)$$

donde W, S, m son constantes.

Ecuaciones (??)-(??) forman un sistema de ecuaciones lineales para las fracciones de masa del compuesto químico en el agua en cada uno de los estadios del reactor. Nuestro interés es, dados valores para W, S, n, m, x_{in} e y_{in} , determinar las fracciones finales de químico en agua y solvente.

- 6.1** Escriba una función MATLAB que, dados valores $W, S, n, m, x_{in}, y_{in}$, retorne la matriz y la parte derecha del sistema de ecuaciones en (??)-(??). Note que la matriz del sistema es tridiagonal y puede crearse con ayuda de la función `create_trid` escrita antes.
- 6.2** Calcule, para $W = 200Kg/hr$, $S = 50Kg/hr$, $x_{in} = 0,075$, $y_{in} = 0$, $n = 6$ y $m = 7$, las fracciones finales de masa del químico en agua y solvente.