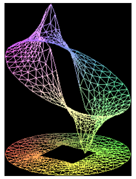
520142
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre, Universidad de Concepción



CAPITULO 8.
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Sistemas

Definición: Sistema Lineal de Ecuaciones.

Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un **sistema lineal de** m **ecuaciones y** n **incógnitas** en $\mathbb{K}$ es un conjunto de m ecuaciones lineales en que cada una tiene a lo más n incógnitas, esto es,

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n = \quad b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n = \quad b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots & +a_{mn}x_n = \quad b_m \end{array}\right\} \qquad \text{(S)}$$

donde, para $i \in \{1, \cdots, m\}$ y $j \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ son los **coeficientes del sistema**, $b_i \in \mathbb{K}$ son los **términos independientes del sistema** y $x_1, \cdots, x_n$ son las **incógnitas del sistema**.

Observación.

El sistema (S) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A=\text{matriz de coeficientes}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X=\text{incógnitas}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B=\text{términos independientes}} ,$$

lo que nos da la forma matricial:

$$AX = B\,.$$

- Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, entonces el sistema se dice **homogéneo**, en caso contrario se dice **no homogéneo**.

Sistemas

Definición.

Decimos que la n-upla $(y_1, \cdots, y_n)^t \in \mathbb{K}^n (= \mathbb{K}^{n\times 1})$ es una **solución del sistema** (S), si al reemplazar ordenadamente cada x_i por y_i con $i \in \{1, \cdots, n\}$, se satisfacen simultáneamente las m igualdades del sistema (S). Llamaremos **conjunto solución del sistema** (S), al conjunto formado por todas las soluciones del sistema.

Definición.

El sistema (S) se dice:

- **INCOMPATIBLE**, si no tiene solución.
- **COMPATIBLE DETERMINADO**, si tiene única solución.
- **COMPATIBLE INDETERMINADO**, si tiene más de una solución.

Sistemas

Definición.

Dado el sistema (S), $AX = B$, llamaremos **matriz ampliada del sistema** a la matriz $(A|B)$ de orden $m \times (n+1)$

Teorema (existencia de soluciones)

El sistema (S) es compatible si y sólo si $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|B)$.

Teorema (unicidad de soluciones)

Supongamos que el sistema (S) de m ecuaciones y n incógnitas es compatible y que $\mathrm{r}(A) = n$. Entonces la solución del sistema es única.

Teorema (multiplicidad de soluciones)

Si el sistema (S) es compatible y $r =: \mathrm{r}(A) < n$, entonces a lo más r incógnitas se expresan en términos de las $n - r$ restantes.

Sistemas

Observación.

- Consideremos el sistema (S), $AX = B$. Si F representa a cualquiera de las tres operaciones elementales por filas, entonces $F(A)X = F(B)$.

- Si $(A|B)$ es equivalente por filas a la matriz $(A_1|B_1)$, entonces el sistema
$$A_1 X = B_1,$$
es compatible si y sólo si el sistema (S) es compatible. En este caso, el conjunto solución de ambos sistemas es el mismo.

Sistemas

- Un caso particular de lo anterior es la sucesión de operaciones elementales que transforman la matriz A en la matriz identidad. Aplicando las mismas operaciones a la matriz ampliada se obtiene el **Método de eliminación de Gauss-Jordan**.

- Notar que el sistema homogéneo $AX = \Theta$ siempre tiene solución. Además el sistema homogéneo $AX = \Theta$ tiene solución no nula si y sólo si r$(A) < n$ (n es el número de incógnitas del sistema).

Ejemplo.

Para el sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_1 & -\,2x_2 + & 4x_3 = & 3 \\ -x_1 & +\,3x_2 + & 2x_3 = & 4 \\ 5x_1 & - & 6x_3 = & -1 \end{array}\right| ,$$

la matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

de donde la solución del sistema original es $X = (1\,,1\,,1)^t$.

Sistemas

Sistemas de Cramer. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, con $|A| \neq 0$, entonces la matriz A es inversible y el sistema $A \cdot X = B$, de n ecuaciones y n incógnitas, tiene solución única

$$X = A^{-1} \cdot B\,.$$

Recordando que $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{|A|}\,(c_{ij})^T_{1\leq i,j\leq n}$, obtenemos la:

Regla de Cramer.

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ con $|A| \neq 0$, entonces la única solución del sistema $AX = B, \quad B = (b_1, b_2, ..., b_n)^t$ es

$$X = (x_1, ..., x_n)^t, \text{ con } \quad x_i = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} c_{ki} b_k, \quad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Sistemas

Observación:

Notar que para $i \in \{1, \cdots, n\}$, se tiene que:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

donde A_i es la matriz de orden n, obtenida de la matriz A en que la columna i-ésima de A es reemplazada por los elementos de B.

Sistemas

Ejemplo.

Encuentre el conjunto solución de:

$$\begin{array}{rcrcrcr|} 2x & + & y & - & 4z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & - & 7z & = & 0 \\ 4x & - & 5y & - & 6z & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemas

De donde se obtiene el sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 4z & = & 0 \\ & & 7y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right|$$

que es un sistema de dos ecuaciones y tres incognitas, por lo tanto, el sistema inicial es compatible indeterminado y podemos despejar dos incognitas en función de otra, en este caso dejaremos todo en función de z. De la segunda ecuación se tiene $y = \frac{2}{7}z$ y reemplazando en la primera ecuación $x = \frac{13}{7}z$.

Así, el conjunto solución es:

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x = \tfrac{13}{7}z \wedge y = \tfrac{2}{7}z\} \\ &= \{(\tfrac{13}{7}z, \tfrac{2}{7}z, z) : \, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ejemplo.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ -x & + & y & + & az & = & 1 \\ 2x & + & ay & + & 4z & = & -2 \end{array}\right|, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Encuentre los valor de a en cada uno de lo casos siguientes:

a) El sistema no tiene solución.

b) El sistema tiene infinitas soluciones.

c) El sistema tiene una única solución.

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ -1 & 1 & a & | & 1 \\ 2 & a & 4 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ 0 & -1 & a+1 & | & -1 \\ 0 & a+4 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ 0 & -1 & a+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & a^2+5a+6 & | & -a-2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo $a^2 + 5a + 6 = 0$, se tiene: $a = -3$ o $a = -2$.

a) El sistema no tiene solución cuando $a = -3$.

b) El sistema es compatible indeterminado cuando $a = -2$.

c) El sistema es compatible determinado cuando $a \in \mathbb{R} - \{-3, -2\}$.

Sistemas

Ejemplo.

Resuelva usando la Regla de Cramer

$$\begin{array}{rcrcrcr|} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 10 \\ 3x & + & 7y & + & 4z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

Solución. Calculando el determinante de la matriz de los coeficientes, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

de donde, el sistema es compatible determinado (se puede utilizar cramer).

Sistemas

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 3, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = -2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 2.$$

El conjunto solución es:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3, \quad y = -2 \quad \wedge \quad z = 2\}$$