UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

MAT 521 218 ***Ecuaciones Diferenciales Ordinarias***

FCHH/HHM/LNB/FPV/fchh **(02.07.2002)**

PAUTA EXAMEN

I. Considere la EDO: $(x^2y - x)dy + ydx = 0.$

1.1) Determine las regiones de $\mathbb{R}^2$ donde se puede asegurar existencia única para PVI asociados con esta EDO.

1.2) Encuentre la solucón general de la EDO.

1.3) Determine **explícitamente** la curva solución que pasa por el punto (1,0) e indique el intervalo de definición de dicha curva.

[**(30 Puntos.)**]

SOLUCIÓN

1.1) Re-escribimos la EDO como

$$y' = \frac{y}{x(1-xy)},\ \ x \neq 0,\ \ xy \neq 1.$$

Observemos que la función

$$f:\ \mathcal{D}om(f) \subset \mathbb{R}^2 \ \longrightarrow\ \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{y}{x(1-xy)}$$

es indefinidamente diferenciable en el dominio de f:

$$\mathcal{D}om(f) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0,\ xy \neq 1\Big\}.$$

Luego el Teorema de existencia y unicidad se satisface en todo rectángulo contenido en $\mathcal{D}om(f)$.

[**(07 Puntos.)**]

1.2) Observamos que:

- La ecuación no es exacta.
- Un factor integrante es $\mu(x) = \frac{1}{x^2},\ x \neq 0.$

[**(05 Puntos.)**]

- La solución de la EDO es equivalente a la solución de

$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dy + \frac{y}{x^2}dx = 0,$$

esto es

$$\boldsymbol{ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2} = 0,}$$

es decir $\boldsymbol{d\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x}\right) = 0.}$ Luego, la solución general es

$$\boldsymbol{y^2 - \frac{2y}{x} = c,\ \ c} \text{ constante arbitraria}\boldsymbol{.}$$

[**(10 Puntos.)**]

1.3) Primera alternativa de solución. Observemos que $\boldsymbol{(1,0) \in \mathcal{D}om(f)}$, luego podemos garantizar una única curva solución que pasa por (1,0). Esta es $\boldsymbol{y(x) = 0,\ x > 0}$, pues es inmediato que satisface la EDO y la condición inicial $\boldsymbol{y(1) = 0.}$ Por otra parte $\boldsymbol{(0,0)}$ no pertenece al dominio de $\boldsymbol{f}$, luego el intervalo de definición es el indicado.

[**(08 Puntos.)**]

Segunda alternativa de solución. Determinamos la constante $\boldsymbol{c}$ de la solución general con la condición inicial $\boldsymbol{y(1) = 0}$. Por consiguiente $\boldsymbol{c = 0}$ y la solución es definida implícitamente por

$$\boldsymbol{y^2 - 2\frac{y}{x} = 0,}$$

esto es,

$$\boldsymbol{y\left(y - \frac{2}{x}\right) = 0.}$$

Luego la solución expícita es $\boldsymbol{y(x) = 0}$ definida para todo $\boldsymbol{x > 0}$.

[**(08 Puntos.)**]

II. Un objeto que pesa $\boldsymbol{0{,}60\,[N]}$ estira un resorte, que cuelga del techo, en $\boldsymbol{10\,[cm]}$. Después se reemplaza el objeto por otro que pesa $\boldsymbol{10\,[N]}$ y, una vez en equilibrio, se tira el objeto hacia abajo en $\boldsymbol{1\,[m]}$ y se suelta.

2.1) Determine la constante del resorte.

2.2) Determine para qué frecuencia $\boldsymbol{\omega}$ de una fuerza de excitación $\boldsymbol{F_0\cos(\omega t)}$, el sistema entraría en resonancia.

2.3) Establezca el PVI que modela el movimiento del sistema si se sumerge el objeto en un medio amortiguador de constante $\boldsymbol{c = 2\,[\frac{kg}{seg}]}$, y sometido a la fuerza $\boldsymbol{F(t) = \sin(2t) + 2\cos(2t)}$.

2.4) Determine la solución de este PVI, e indique cuál es la solución de estado estacionario. (Suponga $\boldsymbol{g = 10\,[\frac{m}{seg^2}]}$ para facilitar cálculos.)

[**(25 Puntos.)**]

SOLUCIÓN

2.1) La rigidez del resorte se calcula de la siguiente manera: $\boldsymbol{k = \frac{m_0 g}{l_0} = \frac{0{,}6}{0{,}1} = 6\,[\frac{N}{m}] = 6\,[\frac{kg}{seg^2}]}$.

[**(05 Puntos.)**]

2.2) La masa del objeto es $\boldsymbol{m = \frac{mg}{g} = \frac{10\,[N]}{10\,[\frac{m}{seg^2}]} = 1\,[kg]}$, luego $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6}{1}} = \sqrt{6}\,[\frac{1}{seg}]}$. Por lo tanto, con $\boldsymbol{\omega = \sqrt{6}\,[\frac{1}{seg}]}$ hay resonancia.

[**(05 Puntos.)**]

2.3) La EDO a resolver es $\boldsymbol{my''+cy'+ky = F(t),\ y = y(t).}$ Con las condiciones dadas se debe resolver

$$\boldsymbol{PVI}\begin{cases} \boldsymbol{y'' + 2y' + 6y = \sin(2t) + 2\cos(2t)} \\ \boldsymbol{y(0) = 1\,[m]} \\ \boldsymbol{y'(0) = 0\,[\frac{m}{seg}].} \end{cases} \tag{1}$$

[**(05 Puntos.)**]

2.4) La ecuación característica es $\boldsymbol{r^2 + 2r + 6 = 0}$ con raices $\boldsymbol{r = -1 \pm i\sqrt{5}}$. Por lo tanto, la solución homogénea es

$$\boldsymbol{y_h(t) = c_1 e^{-t}\sin(\sqrt{5}t) + c_2\cos(\sqrt{5}t).}$$

El aniquilador para la función $\boldsymbol{\sin(2t) + 2\cos(2t)}$ es $\boldsymbol{D^2 + 4}$, luego la solución particular de 1 es

$$\boldsymbol{y_p(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t).}$$

Sustituyendo $\boldsymbol{y_p}$, $\boldsymbol{y_p'}$ y $\boldsymbol{y_p''}$ en 1 se tiene:

$$\boldsymbol{(2A - 4B)\sin(2t) + (4A + 2B)\cos(2t) = \sin(2t) + 2\cos(2t)}$$

lo que conduce al sistema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{2A - 4B} &\boldsymbol{= 1} \\ \boldsymbol{4A + 2B} &\boldsymbol{= 2.} \end{aligned}$$

De aquí, resulta $\boldsymbol{A = \frac{1}{2}}$ y $\boldsymbol{B = 0}$, con lo que $\boldsymbol{y_p(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)}$.

Por lo tanto, la solución general del PVI es

$$\boldsymbol{y(t) = c_1 e^{-t} \sin(\sqrt{5}t) + c_2 e^{-t} \cos(\sqrt{5}t) + \frac{1}{2}\sin(2t).}$$

Por las condiciones iniciales $\boldsymbol{y(0) = 1}$ e $\boldsymbol{y'(0) = 0}$ se obtiene que $\boldsymbol{c_1 = 0}$ y $\boldsymbol{c_2 = 1}$. Así,

$$\boldsymbol{y(t) = e^{-t} \cos(\sqrt{5}t) + \frac{1}{2}\sin(2t).}$$

La solución estacionaria es $\boldsymbol{y_\infty(t) = \frac{1}{2}\sin(2t).}$

[(**10 Puntos.**)]

III. Recuerde que cualesquiera sea $a \in \mathbb{R}$

$$\sin(t-a-\pi) = -\sin(t-a).$$

Enseguida, resuelva el PVI

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \begin{cases} \sin(t-a), & \text{si } a \le t \le a+\pi \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{SOLUCIÓN}}$

Primero re-escribimos la función fuente

$$f(t) = f_1(t)u_a(t) + f_2(t)u_{a+\pi}(t).$$

Como $f(t) = \sin(t-a)$, si $a \le t \le a+\pi$ deducimos que $f_1(t) = \sin(t-a)$. Finalmente, como $f(t) = 0$ si $t \ge a+\pi$, deducimos que $f_2(t) = -\sin(t-a) = \sin(t-a-\pi)$. Por lo tanto:

$$f(t) = \sin(t-a)u_a(t) + \sin(t-a-\pi)u_{a+\pi}(t).$$

[(**06 Puntos.**)]

Si $F(s) = Ł[f(t)](s)$, entonces

$$F(s) = \frac{e^{-as} + e^{-(a+\pi)s}}{s^2+1}.$$

[(**06 Puntos.**)]

Definimos $Y(s) = Ł[y(t)](s)$, por consiguiente el PVI, es transformado en

$$(s+1)^2 Y(s) = 1 + F(s).$$

Es decir

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{e^{-as} + e^{-(a+\pi)s}}{(s^2+1)(s+1)^2}.$$

[(**06 Puntos.**)]

Enseguida realizamos la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{1}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1},$$

es decir

$$1 = [A(s+1)+B](s^2+1) + (Cs+D)(s+1)^2.$$

Si $s=-1$ se encuentra que $B = \frac{1}{2}$.
Si $s=0$ resulta $1 = A+B+D$ de donde $\frac{1}{2} = A+D$.
Si $s=i$ resulta $1 = (Ci+D)(i+1)^2 = (Ci+D)(2i)$. De aquí, $-\frac{i}{2} = Ci+D$ implica que $D=0$ y $C = -\frac{1}{2}$.

Luego, $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{C}=-\frac{1}{2}$ y $\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$. Así,

$$\frac{1}{(s+1)^2(s^2+1)}=\frac{1}{2(s+1)}+\frac{1}{2(s+1)^2}-\frac{s}{2(s^2+1)}.$$

Finalmente encontramos, vía Transformada de Laplace inversa, que

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{2}e^{-as}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{s}{s^2+1}\right\} \\ &+ \frac{1}{2}e^{-(a+\pi)s}\left\{\frac{1}{s+1}++\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{s}{s^2+1}\right\} \end{aligned}$$

[(06 Puntos.)]

implica

$$\begin{aligned} y(t) &= te^{-t}+\frac{1}{2}u_a(t)\left\{(t-a)e^{-(t-a)}+e^{-(t-a)}-\cos(t-a)\right\} \\ &+ \frac{1}{2}u_{a+\pi}(t)\left\{(t-a-\pi)e^{-(t-a-\pi)}+e^{-(t-a-\pi)}-\cos(t-a-\pi)\right\} \\ &= te^{-t}+\frac{1}{2}u_a(t)\left\{e^{-(t-a)}(t-a+1)-\cos(t-a)\right\} \\ &+ \frac{1}{2}u_{a+\pi}(t)\left\{e^{-(t-a-\pi)}(t-a-\pi+1)+\cos(t-a)\right\}. \end{aligned}$$

[(06 Puntos.)]

IV. Resuelva, por el método de los autovalores y autovectores, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{B}(t),$$

donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1, \end{pmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{X}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Los autovalores de la matriz $\boldsymbol{A}$ se dterminan resolviendo la ecuación

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-1 & \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

lo cual entrega $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$ y $\lambda_3 = 1 - i$.

[**(05 Puntos.)**]

El autovector asociado a λ_1 se determina resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual entrega $\boldsymbol{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Para λ_2 resolvemos el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} -i & 2 & -1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente, vía operaciones elementales por filas, al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2+i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual entrega $\boldsymbol{V_2} = \begin{pmatrix} 2-i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

[**(05 Puntos.)**]

Las funciones bases son

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= e^{\lambda_1 t} V_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
X_2(t) &= Re\{e^{\lambda_2 t} V_2\} = \begin{pmatrix} e^t(-2\cos t - \sin t) \\ e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix}, \\
X_3(t) &= Im\{e^{\lambda_2} V_2\} = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - 2\sin t) \\ -e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Luego, la solución del sistema homogéneo es la función

$$X_h(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + c_3 X_3(t),$$

con c_1, c_2 y c_3 constantes por determinar previa condición inicial dada.

[(**05 Puntos.**)]