UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía N°1: Conceptos Básicos
Cálculo Numérico 521230, 2018-2

Nota: Esta guía complementa la Guía de Laboratorio N°1.

1. *a*) Calcular las normas $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ de cada uno de los siguientes vectores.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

   b) Comprobar los resultados obtenidos del ejercicio anterior utilizando OCTAVE. Para $\mathbf{w}$, considere distintos valores de n.
   Indicación: En OCTAVE, si `x` es un vector, entonces las normas $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ se calculan con los comandos `norm(x,'inf')`, `norm(x,1)` y `norm(x)` , respectivamente.

2. Considere la sucesión de vectores $\{\mathbf{v}^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{v}^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/k \\ (2k+1)/(5k+4) \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $\{\mathbf{v}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/5 \end{pmatrix}$.

3. *a*) Calcular las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_F$ de cada una de los siguientes matrices. La norma $\|\cdot\|_F$ corresponde a la norma de Frobenius y se define por $\|\mathbf{A}\|_F := \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) Comprobar los resultados del ejercicio anterior utilizando OCTAVE.
   Indicación: En OCTAVE, si `A` es una matriz, entonces las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_F$ se calculan con los comandos `norm(x,1)`, `norm(x,'inf')`, `norm(x)` y `norm(x,'fro')`, respectivamente.

4. *a*) Se define el número de condición de una matriz $\mathbf{A}$ (invertible) como $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$, donde $\|\cdot\|$ es una norma matricial. Calcular $\kappa_1(\mathbf{B})$ y $\kappa_\infty(\mathbf{D})$, donde $\mathbf{B}$ y $\mathbf{D}$ son las matrices del problema anterior.
   b) Comprobar los resultados del ejercicio anterior utilizando OCTAVE.
5. Sean $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|\mathbf{A}\| < 1$. Considere un vector $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ cualquiera y la sucesión de vectores $\{\mathbf{v}^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ definida por $\mathbf{v}^k = \mathbf{A}\mathbf{v}^{k-1}$ para $k = 1, 2, ...$ Mostrar que $\{\mathbf{v}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge al vector nulo.
6. Sea $\mathbf{I}$ la matriz identidad de $n \times n$. Mostrar que $\|\mathbf{I}\| = 1$, donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma matricial inducida.
7. Sea $\mathbf{I}$ la matriz identidad de $n \times n$. Calcular $\|\mathbf{I}\|_F$. ¿Esto contradice el ejercicio anterior?.
8. Sea $\mathbf{A}$ una matriz invertible y $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$, donde $\|\cdot\|$ es una norma matricial inducida. Mostrar que $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$.