Preg. 1	Preg. 2	Preg. 3	Preg. 4	Nota

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Certamen 1: Cálculo Numérico

Miércoles 24 de Octubre de 2018

1. Considere la ecuación

$$\sin(\sqrt{x}) = 0$$

y una de sus soluciones dada por $x = \pi^2$.

   a) **[0.4 pts.]** Verifique que el intervalo $[6, 12]$ es un intervalo adecuado para aplicar el Método de la Bisección. Luego realice 3 iteraciones del Método de la Bisección para hallar una aproximación x_B de x.

   b) **[0.4 pts.]** Considerando $x_0 = 8$, realice dos iteraciones del Método de Newton–Raphson para hallar una aproximación x_{NR} de x.

   c) **[0.2 pts.]** Calcule el error de las aproximaciones obtenidas en los dos ítem anteriores, esto es, $|x - x_B|$ y $|x - x_{NR}|$. Calcule además $|x_B - x_{NR}|$.

Solución: Definimos la función $f(x) = \sin(\sqrt{x})$.

   a) Evaluamos $f(6) = \sin(\sqrt{6}) \approx 0{,}638 > 0$ y $f(12) = \sin(\sqrt{12}) \approx -0{,}317 < 0$. Por lo tanto, el intervalo $[6, 12]$ es un intervalo adecuado para aplicar el Método de la Bisección (**0.1 pto**).
   Definimos $x_0 = \dfrac{6+12}{2} = 9$, y calculamos $f(x_0) = \sin(\sqrt{x_0}) \approx 0{,}141 > 0$.
   Actualizamos el intervalo a $I_1 = [9, 12]$, y definimos la primera aproximación $x_1 = \dfrac{9+12}{2} = 10{,}5$ (**0.1 pto**). Calculamos $f(x_1) = \sin(\sqrt{x_1}) \approx -0{,}098 < 0$.
   Actualizamos el intervalo $I_2 = [9, 10{,}5]$ y definimos la segunda aproximación $x_2 = \dfrac{9+10{,}5}{2} = 9{,}75$ (**0.1 pto**). Calculamos $f(x_1) = \sin(\sqrt{x_2}) \approx 0{,}019 > 0$.
   Actualizamos el intervalo $I_3 = [9{,}75, 10{,}5]$ y definimos la tercera (y última) aproximación $x_3 = x_B = \dfrac{9{,}75+10{,}5}{2} = 10{,}125$ (**0.1 pto**).

   b) Para ejecutar el Método de Newton–Raphson, debemos evaluar la derivada de f, que está dada por $f'(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$. Partiendo con $x_0 = 8$, calculamos:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - 2\sqrt{x_0}\frac{\sin(\sqrt{x_0})}{\cos(\sqrt{x_0})} = 9{,}8313 \qquad (\mathbf{0{,}2pts})$$

$$x_{NR} = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - 2\sqrt{x_1}\frac{\sin(\sqrt{x_1})}{\cos(\sqrt{x_1})} = 9{,}8696 \qquad (\mathbf{0{,}2pts}).$$

   c) Considerando $\pi = 3{,}1415$, se tiene que $x = 9{,}869$. Entonces

$$\begin{aligned}
|x - x_B| &= |9{,}869 - 10{,}10125| = 0{,}2560,\\
|x - x_{NR}| &= |9{,}869 - 9{,}8696| = 0{,}004, \qquad (\mathbf{0{,}2pts})\\
|x_B - x_{NR}| &= |10{,}10125 - 9{,}8696| = 0{,}2554.
\end{aligned}$$

2. **[1 pt.]** Realice dos iteraciones del Método de Newton para aproximar la solución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x &= \sqrt{2}y^2 \\ x^2+5y^2 &= 3 \end{cases}$$

Utilice como vector inicial $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Comenzamos definiendo $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\boldsymbol{F}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-\sqrt{2}y^2 \\ x^2+5y^2-3 \end{bmatrix}$ (**0.2 ptos**), y luego, la matriz de primeras derivadas está dada por $\boldsymbol{DF}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2}y \\ 2x & 10y \end{bmatrix}$ (**0.2 ptos**). Usando $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, calculamos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(1)} &= \boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x}^{(0)})^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/5 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(3\sqrt{2})/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3\sqrt{2})/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8485 \\ 0{,}8000 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(0.3 ptos)} \\ \boldsymbol{x}^{(2)} &= \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x}^{(1)})^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} (3\sqrt{2})/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -8\sqrt{2}/5 \\ 6\sqrt{2}/5 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/25 \\ 23/25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (3\sqrt{2})/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} - \frac{1}{8+96/25}\begin{bmatrix} 8 & 8\sqrt{2}/5 \\ -6\sqrt{2}/5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/25 \\ 23/25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}8485 \\ 0{,}8000 \end{bmatrix} - 0{,}0845\begin{bmatrix} 8 & 2{,}2627 \\ -1{,}6971 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}0566 \\ 0{,}9200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8485 \\ 0{,}8000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}1376 \\ 0{,}0859 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7109 \\ 0{,}7142 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. La siguiente tabla muestra datos obtenidos de cierto experimento:

x_i	-1	0	1
y_i	$1/4$	$1/2$	$3/4$

Se sabe que el modelo que relaciona las variables x e y viene dado por:

$$y = \frac{1}{1+\alpha e^{-\beta x}}.$$

a) **[0.2 pts.]** Transforme el modelo anterior en un modelo lineal.

b) **[0.6 pts.]** Encuentre los parámetros reales α y β que mejor ajustan el modelo lineal obtenido en *a*) a los datos de la tabla, en el sentido de los mínimos cuadrados.

c) **[0.2 pts.]** Usando el modelo obtenido, estime la cantidad y cuando $x = 2$.

Solución:

a) Considerando el recíproco y restando 1 a ambos lados obtenemos que $\frac{1}{y} - 1 = \alpha e^{-\beta x}$. Utilizando la función logaritmo natural obtenemos el modelo linearizado

$$\ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \ln(\alpha) - \beta x.$$

b) Sean $z = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right)$, $a_0 = \ln(\alpha)$ y $a_1 = -\beta$. Entonces el modelo a ajustar es $z = a_0 + a_1 x$.

Notemos que en este caso $z_i = \ln\left(\frac{1}{y_i} - 1\right)$, para $i = 1,\ 2,$ y 3. Es decir, $z_1 = \ln(3)$, $z_2 = 0$ y $z_3 = -\ln(3)$. Así, el sistema de ecuaciones a resolver en el sentido de mínimos cuadrados es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(3) \\ 0 \\ -\ln(3) \end{pmatrix}.$$

Si la matriz asociada es $\mathbf{A}$, el vector columna es $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{x}$ es el vector de incógnitas, el problema de mínimos cuadrados se reduce a resolver $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^T\boldsymbol{b}$ dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(3) \\ 0 \\ -\ln(3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\ln(3) \end{pmatrix}.$$

De donde $a_0 = 0$ y $a_1 = -\ln(3)$. Volviendo a las variables originales, $\alpha = e^{a_0} = 1$ y $\beta = -a_1 = \ln(3)$. Por tanto, el modelo resultante es

$$y = \frac{1}{1 + e^{-\ln(3)x}} = \frac{1}{1 + 3^{-x}}.$$

c) Si $x = 2$ entonces $y = \frac{1}{1 + 3^{-2}} = \frac{3}{5}$.

4. **[1 pt.]** Considere la siguiente función:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{a}{4}x + b & , \quad x \in [0,3] \\ \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{c}{4}x - \frac{3}{2} & , \quad x \in [3,6] \\ -\frac{1}{18}x^3 + \frac{d}{2}x^2 - \frac{43}{4}x + \frac{45}{2} & , \quad x \in [6,9] \\ ex^3 + \frac{11}{4}x - 18 & , \quad x \in [9,12] \end{cases}.$$

Determine el valor de las constantes a, b, c, d y e de manera que s sea un spline cúbico natural.
Solución: Notar que

$$s''(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0,3] \\ \frac{1}{3}x - 1 & , \quad x \in [3,6] \\ -\frac{1}{3}x + d & , \quad x \in [6,9] \\ 6ex & , \quad x \in [9,12] \end{cases}.$$

El spline cúbico natural satisface, en particular, que $s''(12) = 0$, por tanto $e = 0$. Además, $s''(9^-) = s''(9^+)$, es decir $-\frac{9}{3} + d = 0$, de donde $d = 3$.

Ahora, como $s'(6^-) = s'(6^+)$, tenemos que $\frac{1}{6}6^2 - 6 + \frac{c}{4} = -\frac{1}{6}6^2 + 6d - \frac{43}{4}$. Como $d = 3$ obtenemos que $c = 5$.

Además, como $s'(3^-) = s'(3^+)$, tenemos que $\frac{a}{4} = \frac{9}{6} - 3 + \frac{c}{4}$. Como $c = 5$, obtenemos que $a = -1$.

Finalmente, como $s(3^-) = s(3^+)$, concluimos que $-\frac{1}{4}3 + b = \frac{1}{18}3^3 - \frac{1}{2}3^2 + \frac{5}{4}3 - \frac{3}{2}$, de donde $b = 0$.

5. Considere la integral

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

   a) **[0.5 pts.]** Aproxime el valor de I usando la Regla Compuesta de los Trapecios con $h = 1/4$.

   b) **[0.3 pts.]** Aproxime el valor de I usando la Regla de Simpson Elemental.

   c) **[0.2 pts.]** Utilizando el valor exacto de la integral, calcule los errores de las aproximaciones anteriores.

Solución: Sea $f(x) = 1/x$.

   a) En este caso los nodos son $\{1, 1{,}25, 1{,}5, 1{,}75, 2\}$ donde la regla compuesta es

$$\begin{aligned} I &\approx 0{,}25\left\{\tfrac{1}{2}f(1) + f(1{,}25) + f(1{,}5) + f(1{,}75) + \tfrac{1}{2}f(2)\right\} = 0{,}25\,(1/2 + 4/5 + 2/3 + 4/7 + 1/4) \\ &= 0{,}25 \cdot 2{,}788 = 0{,}697. \end{aligned}$$

   b) En este caso los nodos son $\{1, 1{,}5, 2\}$ de donde

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{2-1}{6}\left\{f(1) + 4f(1{,}5) + f(2)\right\} \\ &\approx \tfrac{1}{6}(1 + 4\cdot 2/3 + 1/2) \\ &\approx 0{,}694 \end{aligned}$$

   c) La integral exacta es $I = \ln(2)$. Entonces el error en *a*) es $|\ln(2) - 0{,}697| = 0{,}004$ y el error en *b*) es $|\ln(2) - 0{,}694| = 0{,}001$.

6. Considere la integral

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{2}^{3} \sin(\pi x)e^y\, dx\, dy.$$

Aproxime su valor utilizando:

   a) **[0.5 pts.]** Regla del Punto Medio en la variable x y la Regla de los Trapecios en la variable y.

   b) **[0.5 pts.]** Regla de Gauss-Legendre en ambas variables. En este caso, los nodos de cuadratura son $-\sqrt{\frac{3}{5}}$, 0 y $\sqrt{\frac{3}{5}}$; y los pesos respectivos son $w_1 = 5/9$, $w_2 = 8/9$ y $w_3 = 5/9$.

Solución:

   a) Utilizamos primero Regla del Punto Medio en la variable x:

$$\int_2^3 \sin(\pi x)e^y\, dx \approx \sin\left(\pi\frac{5}{2}\right)e^y = e^y.$$

Entonces $I \approx -\int_{-1}^{1} e^y\, dy$. Así, utilizando Regla de los Trapecios en la variable y, obtenemos

$$I \approx \int_{-1}^{1} e^y\, dy \approx -\frac{2}{2}\left(e^1 + e^{-1}\right) \approx 3{,}086.$$

b) Utilizamos primero Regla Gauss-Legendre en la variable x. Para ello debemos realizar un cambio de intervalo. Sea $t = 2x - 5$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \sin(\pi x) e^y \, dx &= \frac{e^y}{2} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{t+5}{2}\pi\right) dt \\
&\approx \frac{e^y}{2} \left(\frac{5}{9} \sin\left(\frac{\left(-\sqrt{3/5}\right)+5}{2}\pi \right) + \frac{8}{9} \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \frac{5}{9} \sin\left(\frac{\left(\sqrt{3/5}\right)+5}{2}\pi \right) \right) \\
&\approx \frac{e^y}{2} \left(\frac{5}{9} \times 0{,}3467 + \frac{8}{9} + \frac{5}{9} \times 0{,}3467 \right) \approx 0{,}6371 \; e^y
\end{aligned}$$

Utilizamos ahora Regla Gauss-Legendre en la variable y

$$\int_{-1}^1 \int_2^3 \sin(\pi x) e^y \, dx \, dy \approx \int_{-1}^1 0{,}6371 \; e^y \, dy \approx 0{,}6371 \left(\frac{5}{9} e^{-\sqrt{3/5}} + \frac{8}{9} e^0 + \frac{5}{9} e^{\sqrt{3/5}} \right) \approx 1{,}4974$$