UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

SOLUCION EXAMEN DE REPETICION. ALG. y ALG. LINEAL 520142.

Problema 1. (25 puntos) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) = -5cos\ (4x + 8\pi)$. Determine, justificando matemáticamente:
1.1) el dominio de f: $A = Dom(f)$.
Solución. Por definición **(5 puntos)**

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : -5cos\ (4x + 8\pi) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

1.2) un intervalo I, que contenga a -2π, donde exista la inversa f^{-1} de f.

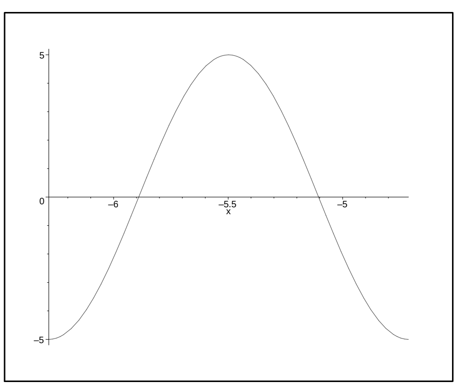
Solución. La función $cos\ (x)$ tiene inversa si $x \in [0, \pi]$. Luego, f tiene inversa si

$$4x + 8\pi \in [0, \pi] \Longleftrightarrow -2\pi \leq x \leq -\frac{7\pi}{4}.$$

En consecuencia, la función f tiene inversa en $I = [-2\pi, -\frac{7\pi}{4}]$. Además, $-2\pi \in I$ por lo tanto el intervalo pedido es I. **(10 puntos)**

1.3) amplitud, periodo y fase para graficar un ciclo de f.
Solución. En la forma general $y = acos\ (bx + c)$ la amplitud de la función es $|a| = |-5| = 5$, el periodo de la función es $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ y el desplazamiento de fase es $|\frac{-c}{b}| = |\frac{-8\pi}{4}| = 2\pi$ hacia la izquierda, pues $c = 8\pi > 0$. **(5 puntos)**

Por hacer la gráfica del primer ciclo. **(5 puntos)**



Problema 2. (25 puntos)

2.1) En caso de ser posible defina una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $T(1,0) = (4,0,0,1), \quad T(0,1) = (-1,1,0,3)$ y $T(2,5) = (3,5,1,17)$.

Solución. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tomando los vectores $(1,0),(0,1)$ como base de $\mathbb{R}^2$, se tiene $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ y se puede definir una aplicación lineal tomando sus valores dados en los elementos de la base. Se tiene

$$\begin{aligned} T(x,y) &= xT(1,0) + yT(0,1) \\ &= x(4,0,0,1) + y(-1,1,0,3) \\ &= (4x-y, y, 0, x+3y). \end{aligned}$$

(5 puntos)

Ahora, para esta aplicación $T(2,5) = (3,5,1,17) \neq (3,5,0,17)$. En consecuencia, no es posible definir una aplicación lineal T en las condiciones dadas. **(5 puntos)**

2.2) Considerando que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2 + n + 4$ es divisible por 2, demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 + 11n$ es divisible por 6.

Solución. Sea $n^2 + n + 4 = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$. Aplicaremos inducción para probar que $n^3 + 11n$ es divisible por 6.

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : n^3 + 11n = 6p, p \in \mathbb{N}\}$.

1. $1^3 + 11 \cdot 1 = 12 = 6p$, con $p = 2$. Luego, $1 \in S$.

2. Sea $n \in S$; es decir $n^3 + 11n = 6p$, para algún $p \in \mathbb{N}$. Ahora

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 11(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 \\ &= (n^3 + 11n) + 3(n^2 + n + 4) \\ &= 6p + 3 \cdot 2k, \quad \text{por hipótesis} \\ &= 6(p+k). \end{aligned}$$

Así, $n + 1 \in S$

De 1) y 2) se tiene que $S = \mathbb{N}$ y $n^3 + 11n$ es divisible por 6. **(15 puntos)**

Problema 3. (25 puntos) Considere el espacio vectorial real $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de matrices cuadradas.

3.1. Diga si los siguientes conjuntos son subespacios de V con las operaciones usuales.

$$U = \{A \in V : A \quad \text{tiene la primera fila nula}\}, \quad W = \{A \in V : |A| = 1\}.$$

Solución. U es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En efecto:

- La matriz nula está en U, pues tiene la primera fila nula. Así $U \neq \phi$.
- Si $A, B \in U$, entonces ambas tienen la primera fila nula y $A + B$ también tiene la primera fila nula. En consecuencia $A + B \in W$.
- Si $A \in U, k \in \mathbb{R}$, entonces A tiene la primera fila nula y kA también tiene la primera fila nula. En consecuencia $kA \in U$.

(10 puntos)

W no es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En efecto, la matriz nula, θ, tiene determinante nulo, $|\theta| = 0 \neq 1$. Luego, no está en W. **(5 puntos)**

3.2. En V se define la suma $A \boxplus B = B - A$. Diga si V con esta suma y el producto por escalar usual, es un espacio vectorial real.

Solución. La suma así definida no es conmutativa, pues para A, B no nulas $A \boxplus B = B - A \neq B \boxplus A = A - B$. Luego, $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \boxplus, \cdot)$ no es una espacio vectorial real. **(10 puntos)**

Problema 4. (25 puntos) Sea $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ el operador lineal definido para cada $p \in V$, con $p(x) = ax^2 + bx + c$, por

$$(Tp)(x) = (b + c)x^2 + (a + c)x + (a + b).$$

4.1. Encuentre la matriz asociada al operador T, $A = [T]_B$, donde $B = \{1, x, x^2\}$ es la base canónica de V.

Solución.Observamos que $[T(1)]_B = (0, 1, 1), \quad [T(x)]_B = (1, 0, 1), \quad [T(x^2)]_B = (0, 1, 1).$

Luego la matriz pedida es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(7 puntos)**

4.2. Determine los valores y vectores propios de A.

Solución. Determinamos $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, es decir:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda + 1 + 1 & 1 & 1 \\ 1 - \lambda + 1 & -\lambda & 1 \\ 1 + 1 - \lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

luego $\boxed{\sigma(A) = \{-1, -1, 2\}}$. **(5 puntos)**

- Espacio propio asociado a $\lambda = -1$: $\boxed{S_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 : \; Av = -v\}}$.

$$\begin{aligned} S_{-1} &= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \big\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b+c = 0 \big\} = \langle \{(1,0,-1),(0,1,-1)\} \rangle. \end{aligned}$$

- Espacio propio asociado a $\lambda = 2$: $\boxed{S_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \; Av = 2v\}}$.

$$\begin{aligned} S_2 &= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \big\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = b = c \big\} = \langle \{(1,1,1)\} \rangle. \end{aligned}$$

(8 puntos)

4.3. Determine los valores y vectores propios de T.

Solución. Recordamos que

$$\forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \; Tp = q \iff A[p]_B = [q]_B$$

luego

- $\sigma(A) = \sigma(T) = \{-1, -1, 2\}$
- los espacios propios asociados a T son:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{-1} &= \{ \, ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \; a+b+c = 0\} \\ &= \langle \{ \, 1 - x^2, x - x^2 \, \} \rangle. \\ \mathcal{S}_2 &= \{ \, ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \; a = b = c\} \\ &= \langle \{ \, 1 + x + x^2 \, \} \rangle. \end{aligned}$$

(5 puntos)

---

08. 01. 2003.

ACQ/LNB/acq.