UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

CALCULO COMPLEJO

MAT. 525212 - 521250

Continuidad Uniforme. Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, decimos que f es **uniformemente continua**, si: $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, de modo que $d(f(z), f(z')) < \epsilon$ toda vez que $z \in B(z_0, \delta)$.

Observación: Lo importante en la definición anterior es que dado z y $\epsilon > 0$, el δ que se encuentra depende solamente de ϵ.

Ejemplo: La función $f(z) = z^2$ es uniformemente continua en $B(0, r)$, $r > 0$.

Proposición. Sean K un cerrado y acotado en $\mathbb{C}$, $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Entonces, f es uniformemente continua.

DEFINICION (Convergencia Uniforme):

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{C}}$ una sucesión de funciones complejas definidas sobre un abierto D de $\mathbb{C}$. Decimos que la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{C}}$ **CONVERGE UNIFORMEMENTE** a f, denotado $f = u \lim f_n$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in I\!N$ tal que $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y cuando $n \geq N$.

Observación: Notar que en el caso de la definición anterior, tendremos que

$$\sup_n \{|f(z) - f_n(z)| : z \in D\} \leq \epsilon$$

TEOREMA. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{C}}$ una sucesión de funciones complejas definidas sobre un abierto D de $\mathbb{C}$, de modo que f_n es continua para todo n, y además f_n converge uniformemennte a f. Entonces f es continua.

TEOREMA (el M-test de Wierstrass).

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{C}}$ una sucesión de funciones complejas definidas sobre un abierto D de $\mathbb{C}$, tal que $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo z y para todo n. Suponga además que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es uniformemente convergente.

TEOREMA (Criterio de Cauchy).

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente para todo $z \in D$ si, y sólo si vale el criterio de Cauchy. Esto es, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in I\!N$ (que depende sólo de z) tal que para todo $n > N$, todo $p > 0$ y para todo $z \in D$ resulta

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \epsilon.$$

DEFINICION (Series de Potencia).

Una **serie de potencia alrededor del punto complejo** a, es una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$.

Ejercicio. Pruebe que si $|z| < 1$, entonces

(i) $\lim_n z^n = 0$; (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

DEFINICION. Dada la serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$, defina R por

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

donde para una sucesión (b_n), $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}[\sup\{b_n, b_{n+1}, \cdots\}]$. Entonces se tiene el:

TEOREMA A. En la definición anterior se tiene que:

(i) Si $|z-a| < R$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ converge absolutamente.

(ii) Si $|z-a| > R$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ diverge.

(iii) si $0 < r < R$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ converge uniformemente sobre los z tales que $|z| \leq r$.

(iv) R es el único complejo con las propiedades (i) y (ii) (R se llama **radio de convergencia de la serie de potencia**).

Proposición. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ es una serie de potencia con radio de convergencia R, entonces

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

si el límite anterior existe.

TEOREMA B. Suponga que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$. Entonces:

(i) Para cada entero $k \geq 1$ las series

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}$$

tiene radio de convergencia R;

(ii) La función f es infinitamente diferenciable sobre $B(a, R)$ y, además $f^{(k)}(z)$ es dado por la serie de la parte (i) para todo $k \geq 1$ y $|z-a| < R$.

(iii) Para $n \geq 0$, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$.

JMS/jms.
15/10/2002.