UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 7 (Funciones Circulares I)

1. Encuentre el valor exacto de las coordenadas de $P(t)$ para $t = \frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 3\pi$. Además, indique el cuadrante en que se encuentra.

2. Determine a qué cuadrantes puede pertenecer el punto (x, y) si sabe que:
. **(En práctica d))**

$$a)\ x = \operatorname{sen}(\tfrac{13\pi}{6}), \quad b)\ y = \operatorname{sen}(\tfrac{62\pi}{3}), \quad c)\ y = \cos(\tfrac{5\pi}{3}), \quad \mathbf{d)}\ x = \operatorname{sen}(\tfrac{-21\pi}{2}).$$

3. Utilice el Principio de Inducción Matemática, para establecer que si $\alpha \in [0, \pi/2]$ y $k \in \mathbb{Z}$, se verifica: **(En práctica)**

$$\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{(k-1)/2}\cos(\alpha), & \text{si } k \text{ es impar,} \\ (-1)^{k/2}\operatorname{sen}(\alpha), & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

4. Demuestre las siguientes igualdades:

   a) $\cos(\pi) = \cos(3\pi)$,
   b) $\cos(1{,}9 + \pi) = -\cos(1{,}9)$,
   c) $\cos(13{,}8\pi) = \cos(15{,}8\pi)$,
   d) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3})$,
   e) $\operatorname{sen}(-4 + \pi) = -\operatorname{sen}(4 - \pi)$,
   f) $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})$.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones, es decir, determine todos los $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$a)\ \operatorname{sen}(\pi/3) = \operatorname{sen}(\theta) \qquad b)\ \tan(3\pi/4) = \tan(\theta)$$

(En práctica a))

6. Calcule el valor exacto de $\tan(x_1 + x_2)$, donde $\operatorname{sen}(x_1) = \frac{2}{3}$, $P(x_1) \notin 1^{er}$ cuadrante, $\sec(x_2) = -\frac{5}{4}$ y $P(x_2) \in 3^{er}$ cuadrante.

7. Determine el período de las siguiente funciones **(En práctica f_2)**

$$f_1(x) = \operatorname{sen}(2x), \qquad f_2(x) = \cos(\tfrac{x}{\sqrt{3}}), \qquad f_3(x) = \tan(\tfrac{x}{2}).$$

8. Sabiendo que $\tan(\dfrac{x}{2}) = \dfrac{1}{2}$, calcular $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. **(En práctica)**

9. Pruebe que: **(En práctica b))**

$$\begin{array}{lcl} a)\ \operatorname{sen}(\alpha) & = & \operatorname{sen}(\beta) \iff (\alpha+\beta)=(2k+1)\pi \ \vee \ (\alpha-\beta)=2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \\ b)\ \cos(\alpha) & = & \cos(\beta) \iff (\alpha-\beta)=2k\pi \ \vee \ (\alpha+\beta)=2k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \\ c)\ \tan(\alpha) & = & \tan(\beta) \iff (\alpha-\beta)=k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{array}$$

¿Qué puede decir si $\csc(\alpha)=\csc(\beta) o$ $\sec(\alpha)=\sec(\beta)$ o $\cot(\alpha)=\cot(\beta)$, respectivamente?

10. Si $\operatorname{sen}(\alpha)=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{sen}(\beta)=\frac{3}{5}$, donde $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}\le\beta\le\pi$, calcular:

    a) $\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)$, *b)* $\cos(\alpha\pm\beta)$, *c)* $\tan(\alpha\pm\beta)$.

11. Demuestre las siguientes identidades trigonométricas y su domino de validez:

    a) $\dfrac{1-\operatorname{sen}(\alpha)}{1+\operatorname{sen}(\alpha)}=(\sec(\alpha)-\tan(\alpha))^2$,

    b) $\sec^2(x)-\tan^2(x)=1$,

    c) $\dfrac{\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)}=\sec(2\alpha)+\tan(2\alpha)$,

    d) $\operatorname{cosec}^2(x)-\cot^2(x)=1$,

    e) $(\cos(\frac{\alpha}{2})-\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}))^2=1-\operatorname{sen}(\alpha)$,

    f) $\dfrac{\sec(\alpha)-1}{\sec(\alpha)}=2\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2})$,

    g) $a\cos(2x)+b\operatorname{sen}(2x)=a,$ si $\tan(x)=\dfrac{b}{a}$

    h) $\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(y)=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y))$,

    i) $\operatorname{sen}(u)-\operatorname{sen}(v)=2\cos(\dfrac{u+v}{2})\cdot\operatorname{sen}(\dfrac{u-v}{2})$. **(En Práctica i))**

12. Calcule la sumatoria. Indicación: Demuestre primero la siguiente identidad trigonométrica: $\csc(\alpha)=\cot(\frac{\alpha}{2})-\cot(\alpha)$ y luego use la propiedad telescópica de sumatorias.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\csc(2^{k-1}\alpha).$$

13. Demuestre que las siguientes expresiones no dependen de α y determine su valor.

    a) $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)+\cos(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)$.

    b) $\cos(\alpha)\cos(\frac{\pi}{6}+\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)$.