UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

ALGO DE LU Y MATRICES TRIDIAGONALES

Si $A = LU$, entonces resolver $Ax = b$ es equivalente a:

1. Resolver $Ly = b$, y luego

2. Resolver $Ux = y$.

Como estos sistemas son triangulares (superior o inferior) ellos son fácilmente resueltos.

El teorema (visto) nos dice que, salvo un cambio de filas (ecuaciones), todo sistema lineal del tipo $Ax = b$ (con A no singular) puede ser resuelto aplicando la descomposición LU.

ALGORITMO DE DESCOMPOSICION LU

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\text{Para} & k = 1, 2, \ldots, n \\
 & L_{kk} = 1 \\
 & \left|
 \begin{array}{ll}
 \text{Para} & j = k, k+1, \ldots, n \\
  & U_{kj} = A_{kj} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} L_{kp} U_{pj} \\
 \text{Fin } j &
 \end{array}
 \right. \\
 & \\
 & \left|
 \begin{array}{ll}
 \text{Para} & i = k+1, k+2, \ldots, n \ (k \neq n) \\
  & L_{ik} = \dfrac{1}{U_{kk}} \left(A_{ik} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} L_{ip} U_{pk} \right) \\
 \text{Fin } i &
 \end{array}
 \right. \\
\text{Fin } k &
\end{array}
\right.
$$

Las sumas no se aplican si el índice superior es menor al inferior.

ALGORITMO PARA RESOLVER $Ax = b$ USANDO LA DESCOMPOSICION LU

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{Para} & i = 1, 2, \ldots, n \\
 & y_i = b_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} y_k \\
\text{Fin } i &
\end{array}\right.
$$

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{Para} & i = n, n-1, \ldots, 1 \\
 & x_i = \dfrac{1}{U_{ii}} \left(y_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} U_{ij} x_j \right) \\
\text{Fin } i &
\end{array}\right.
$$

Las sumas no se aplican si el índice superior es menor al inferior.

MATRICES TRIDIAGONALES

En muchas aplicaciones nos encontraremos con matrices tridiagonales invertibles, del tipo:

$$
A = \begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n & b_n
\end{pmatrix}
$$

En este caso los algoritmos anteriores quedan:

$$
\left|\begin{array}{ll}
U_{11} = b_1 & \\
L_{11} = 1 & \\
\text{Para} & i = 2, 3, \ldots, n \\
 & \left|\begin{array}{l}
U_{i-1\,i} = c_{i-1} \\
L_{i\,i-1} = \dfrac{a_i}{U_{i-1\,i-1}} \\
U_{ii} = b_i - L_{i\,i-1} c_{i-1}
\end{array}\right. \\
\text{Fin } i &
\end{array}\right.
$$

Los valores que no aparecen en la descomposición valen cero, comparando los algoritmos nos damos cuenta que el numero de operaciones es bastante menor, otra gran ventaja es que las matrices L y U son ralas, con lo que con un buen almacenamiento se logra un buen ahorro de memoria.

Usando LU podemos llegar a un algoritmo *barato* para resolver $Ax = d$.

$$
\left|
\begin{array}{l}
w_1 = d_1 \\
\text{Para} \quad i = 2, 3, \ldots, n \\
\qquad \quad w_i = d_i - L_{i\,i-1} w_{i-1} \\
\text{Fin } i \\
x_n = \dfrac{w_n}{U_{nn}} \\
\text{Para} \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1 \\
\qquad \quad x_i = \dfrac{w_i - U_{i\,i+1} x_{i+1}}{U_{ii}} \\
\text{Fin } i
\end{array}
\right.
$$

Lo interesante de este método es que $O(8n)$. Lo que es un avance con respecto al $O\left(\frac{2n^3}{3}\right)$ de Gauss o LU

$$
\text{Si } n = 100 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2n^3}{3}\right) \sim 666.666 \\ 8n \sim 800 \end{cases}
$$

Uso del comando LU.

El comando LU es usado para encontrar la descomposición LU de una matriz no singular A.

Este comando acepta dos sintaxis básicamente, la primera es:

```
>> [L,U]=lu(A);
```

La salida es una matriz triangular superior U y una matriz "psicológicamente triangular inferior" (es decir, un producto de una triangular inferior por una matriz de permutación) L, tal que A=$L*U$.

La otra forma de usar este comando es:

```
>> [L,U,P]=lu(A);
```

La salida es una matriz triangular superior U y una matriz triangular inferior L y una matrizd e permutación tal que, $P*A$=$L*U$.

Ejemplo

Consideremos la matriz

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}
$$

```
>> A=[0 1 3;4 2 5;7 2 8];

>> [L,U]=lu(A)

L =
         0    1.0000         0
    0.5714    0.8571    1.0000
    1.0000         0         0

U =
    7.0000    2.0000    8.0000
         0    1.0000    3.0000
         0         0   -2.1429

>> [L,U,P]=lu(A)

L =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
    0.5714    0.8571    1.0000

U =
    7.0000    2.0000    8.0000
         0    1.0000    3.0000
         0         0   -2.1429

P =
     0     0     1
     1     0     0
     0     1     0
```

MCP/RRA/RRS
http://www.ing-mat.udec.cl/pregrado/asignaturas/521230/
20/03/03