1. Sean $f(x) = x + \dfrac{1}{2}$ y $n \in \mathbb{N}$. Considere la integral $I = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$.

   a) Calcular I utilizando la regla del punto medio compuesta, dividiendo el intervalo $[0,n]$ en n subintervalos del mismo tamaño.

   b) Calcular el valor exacto de I.

   c) Utilizar *a*) y *b*) para concluir que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Desarrollo:

a) **[0.6 pts.]** Como el intervalo $[0,n]$ en n subintervalos del mismo tamaño, se tiene que $h = 1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, ..., $x_n = n$, es decir, $x_i = i$ para $i = 0, 1, ..., n$. Además, como f es un polinomio de grado uno, la regla del punto medio es exacta. As;

$$\begin{aligned}
\int_0^n f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{(i-1)+i}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} i.
\end{aligned}$$

b) **[0.2 pts.]** $I = \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2}\right)\Bigg|_0^n = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} == \frac{n(n+1)}{2}..$

c) **[0.4 pts.]** Como la regla del punto medio es exacta en este caso, tenemos que $\dfrac{n(n+1)}{2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i.$

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
xy + e^x &= 1, \\
\cos(x) + y^2 &= 2.
\end{aligned}$$

   a) Aproximar la solución realizando una iteración del Método de Newton y partiendo con los valores iniciales $x_0 = 0$ e $y_0 = -1/2$.

   b) Si se sabe que los valores exactos son $x = 0$ y $y = -1$, calcule el error de la aproximación obtenida en *a*).

Desarrollo:

a) **[0.8 pts.]** Comenzamos definiendo $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{bmatrix} xy + e^x - 1 \\ \cos(x) + y^2 - 2 \end{bmatrix}$, y luego, la matriz de primeras derivadas está dada por $\boldsymbol{DF}(x,y) = \begin{bmatrix} y + e^x & x \\ -\operatorname{sen}(x) & 2y \end{bmatrix}$. Partiendo de $x_0 = 0$ e $y_0 = -1/2$, calculamos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \boldsymbol{DF}(x_0,y_0)^{-1}\boldsymbol{F}(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} - \boldsymbol{DF}(0,-1/2)^{-1}\boldsymbol{F}(0,-1/2) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ -3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5/4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

b) **[0.4 pts.]** El error es $\|(0,-1) - (0,-5/4)\|_2 = \|(0,1/4)\|_2 = 1/4.$

3. Considere la ecuación de segundo orden

$$\begin{cases} y''(x) &= y(x) + x, \quad x \in (0,1), \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 1. \end{cases}$$

   a) Reducir esta ecuación a un sistema de ecuaciones de primer orden.

   b) Aproxime la solución del sistema obtenido en *a*) mediante método de Euler Explícito con $h = 1/3$.

Desarrollo:

   a) Mediante la sustitución

$$u_1(x) = y(x), \quad u_2(x) = y'(x)$$

   se llega al sistema de orden 1

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 + x \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{0.6\text{pt}}$

   b) Así, en la malla de nodos $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1+0 \end{bmatrix} \tfrac{1}{3} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}333 \\ 1{,}333 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 + 1/3 \end{bmatrix} \tfrac{1}{3} + \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/9 \\ 17/9 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}777 \\ 1{,}888 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 17/9 \\ 16/9 + 2/3 \end{bmatrix} \tfrac{1}{3} + \begin{bmatrix} 16/9 \\ 17/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65/27 \\ 73/27 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2{,}407 \\ 2{,}704 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\boxed{0.6\text{pt}}$

4. La siguiente tabla muestra mediciones obtenidas para un determinado experimento:

x	0	1	2
y	1	4/5	1/2

El modelo matemático que relaciona las variables x e y está dado por:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + 1}}.$$

   a) Transforme el modelo anterior en un modelo cuadrático en x.

   b) Encuentre los valores de los parámetros reales α y β que ajustan de mejor manera el modelo lineal obtenido en (*a*) a los datos de la tabla, en el sentido de los mínimos cuadrados.

   c) Usando el modelo obtenido, estime el valor de y cuando $x = 1/2$.

Desarrollo:

   (*a*) Aplicando recíproco, obtenemos

$$\frac{1}{y} = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + 1}.$$

   Luego, elevando al cuadrado y restando 1, nos queda

$$\frac{1}{y^2} - 1 = \alpha x^2 + \beta x,$$

   que es un modelo lineal para los parámetros α y β.

(b) Escribiendo las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 &= \frac{1}{1^2} - 1 \\
\alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 &= \frac{1}{(4/5)^2} - 1 \\
\alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 &= \frac{1}{(1/2)^2} - 1,
\end{aligned}$$

obtenemos el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0^2 & 0 \\ 1^2 & 1 \\ 2^2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/1^1 - 1 \\ 1/(4/5)^2 - 1 \\ 1/(1/2)^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9/16 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Como la primera ecuación es $0 = 0$ para cualquier par de números reales α y β, podemos hallar los valores de α y β a partir de las otras dos ecuaciones, esto es, resolviendo el sistema de 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/16 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

De aquí se obtiene que $\alpha = 15/16$ y $\beta = -3/8$.

También podía hacerse usando las ecuaciones normales $\mathbf{A^T A x} = \mathbf{A^T b}$, donde

$$\mathbf{A^T A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{A^T b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9/16 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 201/16 \\ 105/16 \end{bmatrix}.$$

(c) Cuando $x = 1/2$, se tiene que

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{67}{64}}} = \frac{8}{\sqrt{67}}.$$

5. Considere la siguiente tabla de datos:

x	1	2	3
y	$3/2$	-3	$-15/2$

Determine los valores de las constantes $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ de modo tal que la función

$$s(x) := \begin{cases} 2x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + 6, & x \in [1, 2] \\ c_3 x^3 - 18x^2 + \dfrac{95}{2} x + c_4, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

sea la spline cúbica natural que interpola los datos dados.

Desarrollo:

Sean $q_1(x) = 2x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + 6$ y $q_2(x) = c_3 x^3 - 18x^2 + \frac{95}{2} x + c_4$. Se sigue que

$$q_1'(x) = 6x^2 + 2c_1 x + c_2, \qquad q_2'(x) = 3c_3 x^2 - 36x + \frac{95}{2},$$

y

$$q_1''(x) = 12x + 2c_1, \qquad q_2''(x) = 6c_3x - 36.$$

Para que s sea spline cúbica natural, debe cumplirse que s'' se anule en los extremos, esto es, debe tenerse que

$$q_1''(1) = q_2''(3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 12 + 2c_1 = 0 \ \wedge \ 18c_3 - 36 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = -6 \ \wedge \ c_3 = 2.$$

Luego, como sabemos que la spline cúbica es una interpolante, debe tenerse que $\lim\limits_{x \to 2^+} s(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} s(x) = -3$. Así,

$$q_1(2) = -3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 2c_2 + 6 = -3 \quad \Longleftrightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{2},$$

y

$$q_2(2) = -3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \cdot 8 - 18 \cdot 4 + \frac{95}{2} \cdot 2 + c_4 = -3 \quad \Longleftrightarrow \quad c_4 = -42.$$

Por lo tanto, los valores de las constantes deben ser

$$c_1 = -6, \qquad c_2 = -\frac{1}{2}, \qquad c_3 = 2 \qquad \text{y} \qquad c_4 = -42.$$