UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

SOLUCION EVALUACION DE RECUPERACION 1.
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL. 520142.

Problema 1. Demuestre que:
1.1) Para $A \neq \phi$ y $B \neq \phi$, $\quad A \times B = B \times A \Longleftrightarrow A = B$. (20 ptos.)

Solución. $\Longrightarrow$) Primero supongamos que $A \times B = B \times A$ y probemos que $A = B$.

Si $a \in A$, entonces existe $b \in B, (a,b) \in A \times B$, pues $B \neq \phi$ y por definición de producto cartesiano. Luego $(a,b) \in B \times A = A \times B$, por hipótesis, y así $a \in B$. En consecuencia, $A \subseteq B$. **(7 ptos.)**

Por otro lado, si $b \in B$, entonces existe $a \in A, (a,b) \in A \times B$, pues $A \neq \phi$ y por definición de producto cartesiano. Luego $(b,a) \in A \times B = B \times A$, por hipótesis, y así $b \in A$. En consecuencia, $B \subseteq A$ y $A = B$.
(7 ptos.)

$\Longleftarrow$) Ahora, supongamos que $A = B$ y probemos que $A \times B = B \times A$.

$(a,b) \in A \times B$ es equivalente con $a \in A \wedge b \in B$, por definición de producto cartesiano. Luego, $a \in B$ y $b \in A$, pues $A = B$ por hipótesis. Así, euivalentemente $(a,b) \in B \times A$, por definición de producto cartesiano. En consecuencia, $A \times B = B \times A$.

De otra forma, como $A = B$ se tiene que $A \times B = A \times A = A \times B$.
(6 ptos.)

1.2) $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9. (20 ptos.)

Solución. Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 \text{ es divisible por } 9\}$.
i) Si $n = 1$, se tiene: $10 + \cdot 64 + 5 = 207 = 9 \cdot 23$. Luego, $1 \in S$. **(5 ptos.)**

ii) Supongamos que $k \in S$. Esto es $10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 = 9q, q \in \mathbb{Z}$. Entonces.

$$\begin{aligned}
10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 &= 10(10^k) + 4 \cdot 3 \cdot 4^{k+2} + 5 \\
&= 10(10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5) - 10 \cdot 3 \cdot 4^{k+2} - 50 + 4 \cdot 3 \cdot 4^{k+2} + 5 \\
&= 10 \cdot 9 \cdot q + 3 \cdot 4^{k+2}(4 - 10) - 45 \\
&= 10 \cdot 9 \cdot q - 18 \cdot 4^{k+2} - 45 \\
&= 10 \cdot 9 \cdot q - 9(2 \cdot 4^{k+2} - 5)
\end{aligned}$$

(10 ptos.)

Así, $k + 1 \in S$, De i) y ii), $S = \mathbb{N}$, lo que prueba que la propiedad es válida para todo número natural N. **(5 ptos.)**

Problema 2. Si la suma de tres números en progresión geométrica es 70 y al multiplicar los extremos por 4 y el intermedio por 5 se obtiene una progresión aritmética, entonces encuentre los tres números de la progresión geométrica.

(20 ptos.)

Solución. Sean a, ar y ar^2 los tres números en progresión geométrica. Luego, $a + ar + ar^2 = 70$. **(4 ptos.)**

Ahora, sean $4a, 5ar$ y $4ar^2$ los tres términos de la progresión aritmética. Luego, $5ar - 4a = 4ar^2 - 5ar$ de donde se tiene:

$$4ar^2 - 10ar + 4a = 0 \Longleftrightarrow r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0$$

ecuación cuya solución es $r = 2$ o $r = 1/2$. **(8 ptos.)**

Si $r = 2$, entonces $a + 2a + 4a = 70$, de donde $a = 10$ y los números buscados son 10, 20 y 40. **(4 ptos.)**

Si $r = 1/2$, entonces $a + a/2 + a/4 = 70$, de donde $a = 40$ y los números buscados son 40, 20 y 10. **(4 ptos.)**

Tiempo: **50 minutos.**

11. 08. 2003.

RAD/FCHH/ACQ/acq.