UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 8

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: METODOS DIRECTOS

En este laboratorio consideraremos sistemas de ecuaciones lineales de la forma $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. La forma usual de resolver estos sistemas de ecuaciones en MATLAB es mediante la instrucción

```
>> x=A\b
```

También se puede utilizar la factorización LU obtenida mediante el método de eliminación Gaussiana con estrategia de pivoteo parcial. En MATLAB el comando `lu` realiza esta factorización. Este comando puede ser utilizado de dos formas:

- Mediante la instrucción:

  ```
  >> [L,U,P]=lu(A)
  ```

  se realiza la descomposición $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$, donde $\boldsymbol{P}$ es una matriz de permutación proveniente de la estrategia de pivoteo parcial, $\boldsymbol{L}$ es una matriz triangular inferior y $\boldsymbol{U}$ es una matriz triangular superior.

- Mediante la instrucción:

  ```
  >> [L_p,U]=lu(A)
  ```

  se realiza la descomposición $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_p\boldsymbol{U}$, donde $\boldsymbol{U}$ es la matriz triangular superior indicada anteriormente, y $\boldsymbol{L}_p = \boldsymbol{P}^t\boldsymbol{L}$ es una matriz "psicológicamente" triangular inferior, donde $\boldsymbol{P}$ es la matriz de permutación y $\boldsymbol{L}$ es la matriz triangular inferior indicadas anteriormente.

Ejercicio 1. Escriba la función `create_trid` en MATLAB que, dados valores n, a, b y c, devuelva la matriz tridiagonal de orden n de la forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & & \Large 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ \Large 0 & & c & a \end{pmatrix}.$$

1.1 Llame a esta función con $n = 10, a = 4, b = c = 1$ y guarde el resultado en `A`. Determine si esta matriz es invertible. Para ello puede usar, por ejemplo, el comando `det` (devuelve el determinante de la matriz que recibe como entrada) o el comando `rank` (calcula el rango de la matriz que recibe como entrada).

1.2 Con el comando `rand` genere un vector $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{10}$. Resuelva el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{d}$ de los modos siguientes: mediante \ y usando las matrices $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$ que retorna la función `lu` de MATLAB. ¿Obtiene la misma solución? ¿Cuál es la norma de la diferencia entre ellas?

Ejercicio 2. En muchas aplicaciones es necesario resolver varios sistemas de ecuaciones $\boldsymbol{Ax}_i = \boldsymbol{b}_i$, con la misma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y distintas partes derechas $\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$. Para hacer esto en MATLAB resulta conveniente generar la matriz de partes derechas

$$\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

y resolver el sistema matricial $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, cuya solución

$$\boldsymbol{X} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_m \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

es la matriz de vectores solución $\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \ldots, m$, de los sistemas anteriores.

2.1 Escriba una función MATLAB con los comandos que aparecen en el siguiente cuadro. Guárdela en `variossistemas.m`.

```
function[t1,t2,normadiferencia] = variossistemas
A=create_trid(50,.5,1,1);
B=rand(50,100);

tic
X=A\B;
t1=toc;

Y = zeros(50,100);
tic
for i=1:100
        Y(:,i)=A\B(:,i);
end
t2=toc;

normadiferencia=norm(X-Y,inf);
```

2.2 Describa qué se hace en la función anterior.

2.3 Escriba un rutero que llame a `variossistemas` 20 veces y determine el tiempo promedio que demora resolver los sistemas $\boldsymbol{Ax}_i = \boldsymbol{b}_i$ mediante `A\B` y el tiempo promedio que demora resolverlos uno a uno. ¿Qué valores obtiene? ¿Cuál es la forma más eficiente de resolver los 20 sistemas de ecuaciones? ¿Por qué ocurre esto?

Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz simétrica y definida positiva, mediante el comando de MATLAB `chol` se puede descomponer esta matriz como $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^t\boldsymbol{R}$, donde $\boldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior obtenida mediante la factorización de Cholesky. Este comando se usa de la siguiente forma:

```
>> R=chol(A) % A debe ser simetrica y definida positva, si no el comando
             % devuelve un error
```

Ejercicio 3. Sean

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Haga un programa MATLAB que genere la matriz anterior para $n = 10$.

3.1 Compruebe que $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva (puede calcular los valores propios de $\boldsymbol{A}$ con el comando `eig` de MATLAB y comprobar que ellos son mayores que cero o puede demostrar que para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{10}$ se cumple $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$).

3.2 Encuentre mediante el comando `chol` la descomposición de Cholesky de $\boldsymbol{A}$.

3.3 Resuelva, con ayuda de esta descomposición, el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Ejercicio 4. Las matrices de Hilbert:

$$\boldsymbol{H}_n = (h_{ij}^{(n)}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \text{con } h_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

son matrices muy mal condicionadas. Estas se generan en MATLAB con el comando `hilb`.

4.1 Tabule los números de condición en norma euclideana (comando `cond`) y las estimaciones de los números de condición en norma 1 (comando `condest`) de estas matrices, para $n = 2,\ldots,10$.

4.2 Sean

$$\boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 0.7487192 \\ 0.4407175 \\ 0.3206968 \\ 0.2543113 \\ 0.2115308 \\ 0.1814429 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_0 + \delta\boldsymbol{b},$$

con $\delta\boldsymbol{b}$ un vector de perturbaciones aleatorias de valor absoluto menor o igual a 10^{-6} (Note que la sentencia MATLAB `(2*rand(n,1)-1)*a` genera un vector columna aleatorio de dimensión n, uniformemente distribuido en el intervalo $[-a,a]$). Resuelva los sistemas $\boldsymbol{H}_6\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_0$ y $\boldsymbol{H}_6\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1$. Compare la diferencia de las soluciones $\delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ con la de los segundos miembros $\delta\boldsymbol{b}$. Describa lo que se observa.

4.3 Verifique que se satisface la relación

$$\frac{||\delta\boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{x}_0||} \leq \mathrm{cond}(\boldsymbol{H}_6)\frac{||\delta\boldsymbol{b}||}{||\boldsymbol{b}_0||}.$$

Ejercicio 5. Sean

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ \vdots \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

donde h y n son tales que $n = \frac{1}{h} - 1$. Este tipo de sistemas de ecuaciones lineales surge al discretizar la ecuación

$$-u''(x) = -4, \qquad u(0) = u(1) = 1, \qquad x \in [0,\,1]. \tag{1}$$

5.1 Escriba una función MATLAB que reciba como entrada un valor para h y retorne la matriz $\boldsymbol{A}$ y el vector $\boldsymbol{b}$ correspondientes.

5.2 Llame a la función escrita en 4.1 con $h = 0{,}1$. Encuentre mediante el comando `chol` la descomposición de Cholesky de $\boldsymbol{A}$ (recuerde que si $\boldsymbol{A}$ no es simétrica y definida positiva el comando `chol` retorna un mensaje de error).

5.3 Resuelva, con ayuda de la descomposición de Cholesky de $\boldsymbol{A}$, el sistema $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{b}$. El vector solución a este sistema de ecuaciones representa aproximaciones a los valores de la solución de (1) en los puntos $h, 2h, \cdots, nh$. Grafique, en un mismo gráfico, la aproximación obtenida (agregando al vector $\tilde{u}$ los valores en 0 y en 1) y los valores de $u(x) = 2x^2 - 2x + 1$ evaluada en 100 puntos igualmente espaciados del intervalo [0, 1]. ¿Es $\tilde{u}_i$ una buena aproximación a $u(ih)$?

Ejercicio 6. La figura 1 muestra los n estadíos de un reactor de extracción química. Agua, conteniendo una fracción de masa x_{in} de un cierto químico entra por la parte superior del reactor mientras que un solvente, conteniendo una fracción de masa y_{in} del mismo componente químico entra por la parte inferior del mismo. A medida que las corrientes de agua y solvente se mueven dentro del reactor, el químico es extraído del agua y transferido al solvente.

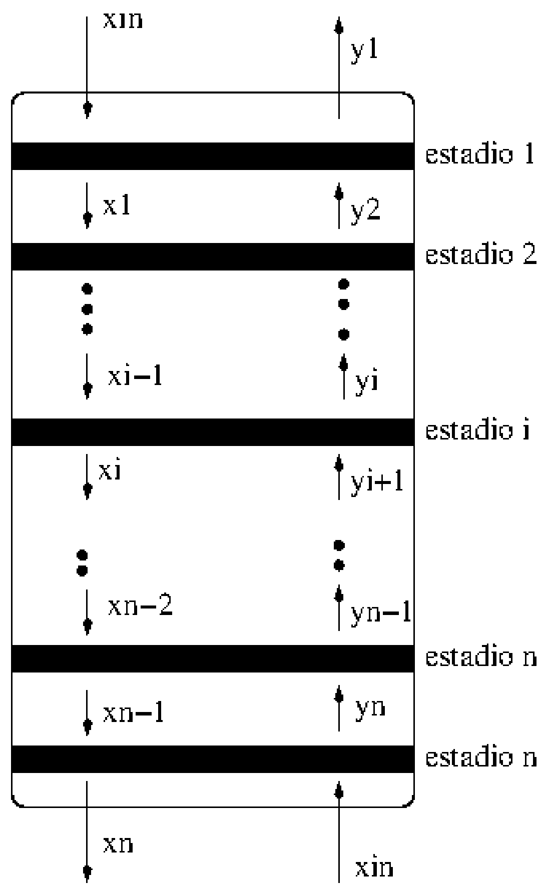

Figura 1: Reactor de extracción química con n estadíos

La ecuación de balance del material químico en cada estadío del reactor establece que, si x_i e y_i representan las fracciones de masa del componente químico en agua y solvente respectivamente y se supone que $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que $y_i = mx_i$, entonces en el primer y último estadíos se tiene

$$-(W + Sm)x_1 + Smx_2 = -Wx_{in}, \tag{2a}$$
$$Wx_{n-1} - (W + Sm)x_n = -Sy_{in}, \tag{2b}$$

mientras que para los estadíos intermedios se cumple

$$Wx_{i-1} - (W + Sm)x_i + Smx_{i+1} = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \tag{3}$$

donde W, S, m son constantes.

Ecuaciones (2)-(3) forman un sistema de ecuaciones lineales para las fracciones de masa del compuesto químico en el agua en cada uno de los estadíos del reactor. Nuestro interés es, dados valores para W, S, n, m, x_{in} e y_{in}, determinar las fracciones finales de químico en agua y solvente.

6.1 Escriba una función Matlab que, dados valores $W, S, n, m, x_{in}, y_{in}$, retorne la matriz y la parte derecha del sistema de ecuaciones en (2)-(3). Note que la matriz del sistema es tridiagonal y puede crearse con ayuda de la función `create_trid` escrita antes.

6.2 Calcule, para $W = 200Kg/hr$, $S = 50Kg/hr$, $x_{in} = 0{,}075$, $y_{in} = 0$, $n = 6$ y $m = 7$, las fracciones finales de masa del químico en agua y solvente.