PAUTA 520136 ING-COMERCIAL

1. Usando transformaciones elementales, verifique sin calcular el determinante que:

$$\begin{vmatrix} b & b & b \\ a & a & b \\ b & a & a \end{vmatrix} = b(b-a)^2$$

10 puntos

a) $\begin{vmatrix} b & b & b \\ a & a & b \\ b & a & a \end{vmatrix} -> \begin{vmatrix} b & b & b \\ a-b & a-b & 0 \\ 0 & a-b & a-b \end{vmatrix} -> b(a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$F_2 \rightarrow F_2 - F_1$ y $F_3 \rightarrow F_3 - F_1$ Propiedad de determinante 5 puntos

b) considerando $(a-b)^2 = (b-a)^2$ y $b(b-a)^2 = k$

$$k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = k*1 = k = b(b-a)^2$$

5 puntos

$F_1 \rightarrow F_1 - F_3$ $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$ $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$

2. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

a) Determine si la matriz A, es o no es, singular. 5 puntos

b) Si existe, calcule A^{-1}. 10 puntos

c) Obtenga una descomposición A=LU, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior. 15 puntos

a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1*-1)\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$F_3 \rightarrow F_3 - F_2$ y $F_4 \rightarrow F_4 + 2F_1$ 3 puntos

$|A| = 1 \Rightarrow$ A no singular 2 puntos

b) A No singular $\Rightarrow$ A^{-1} existe 3 puntos

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle -> \left\langle\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right\rangle \quad \text{--->}$$

$F_1 \rightarrow -F_1$ $\qquad$ $F_2 \rightarrow -F_2$

$F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \rightarrow -\frac{F_3}{3} \rightarrow F_3 - 5F_4$; $F_4 \rightarrow F_4 + 2F_1 \rightarrow F_4 - F_3 \rightarrow -F_4$

$$\rightarrow \left\langle\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -9 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right\rangle --> \left\langle\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right\rangle$$

$F_1 \rightarrow F_1 + 2F_3 - 2F_4 \rightarrow F_1 + F_2$; $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_4$

$$A^{-1} = \left\langle\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 12 & -3 & 2 & 6 \\ -10 & 2 & -2 & -5 \\ -6 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right\rangle$$

7 puntos

c) $$U = \left\langle\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right\rangle -> \left\langle\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right\rangle -> \left\langle\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right\rangle$$

$F_3 \rightarrow F_3 - F_2$; $F_4 \rightarrow F_4 + 2F_1 \rightarrow F_4 + \frac{F_3}{3}$ 8 puntos

$$L = \left\langle\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle -> \left\langle\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right\rangle -> \left\langle\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right\rangle$$

$F_4 \rightarrow F_4 - \frac{F_3}{3} \rightarrow F_4 - 2F_1$; $F_3 \rightarrow F_3 + F_2$ 7 puntos

3. En una ciudad al sur de Escocia, tres compañías A, B y C producen whisky de diferentes marcas pero usan los mismos tres componentes para su elaboración; a la compañía A los tres componentes le cuestan \$ 1dólar por litro cada uno, a la compañía B le cuestan \$ 2, \$ 1 y \$ 3 dólares por litro y a la compañía C le cuestan \$ 1, \$2 y \$3 dólares por litro. La gran diferencia aparte de las marcas de los whisky son sus costos de producción y que ascienden a \$ 150 , \$320 y \$ 350 por cada compañía A, B y C respectivamente, estos costos están en miles de dólares. Determine que cantidad de cada componente debe usarse para que las compañías tengan los costos de producción deseados y justifique por que el problema tiene solución única.

20 puntos

a)
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=150 \\ 2x+y+3z=320 \\ x+2y+3z=350 \end{array}\right|$$

5 puntos

b)
$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 2 & 1 & 3 & 320 \\ 1 & 2 & 3 & 350 \end{array}\right\rangle -> \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 200 \end{array}\right\rangle -> \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 3 & 220 \end{array}\right\rangle$$

$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$; $F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \rightarrow F_3 + F_2$ 5 puntos

c) $Z = \frac{220}{3}$; $Y = \frac{220}{3} - 20 = \frac{160}{3}$; $X = 150 - \frac{160}{3} - \frac{220}{3} = \frac{70}{3}$ 5 puntos

d) 1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ rango(A) = 3 ; 2) n = 3

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 150 \\ 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 220 \end{vmatrix} = -220 \neq 0 \Rightarrow$ rango (A/B) =3

de 1), 2), 3) la solucion es única 5 puntos