UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 4. ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL. 520142

Problema 1: *Considere los subespacios vectoriales de* $V = \mathbb{R}^4$ *dados por*

$$\begin{aligned} N_1 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; x+y+z+t=0\} \\ N_2 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; 2x+3y-z+4t=0\} \\ N_3 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; 3x+4y+5t=0\}. \end{aligned}$$

Encuentre una base y la dimensión del subespacio $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ *de* $\mathbb{R}^4$.

10 puntos

Solución.- Se tiene:

$$\begin{aligned} N_1 \cap N_2 \cap N_3 &= \left\{ \overrightarrow{X} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; \overrightarrow{X} \in N_1 \wedge \overrightarrow{X} \in N_2 \wedge \overrightarrow{X} \in N_3 \right\} \\ &= \left\{ \overrightarrow{X} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; \begin{array}{c} x+y+z+t=0 \\ 2x+3y-z+4t=0 \\ 3x+4y+5t=0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Por operaciones elementales de filas aplicadas a la matriz de coeficientes obtenemos un sistema equivalente al dado. En efecto;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

05 puntos

luego el rango de la matriz de coefcientes es 2 y por tanto 2 incógnitas se pueden expresar en términos de las dos restantes. Así,

$$\begin{aligned} N_1 \cap N_2 \cap N_3 &= \left\{ \overrightarrow{X} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; : \; y = 3z-2t, \; x = -4z+t \right\} \\ &= \{(-4z+t, 3z-2t, z, t) \; : \; z,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-4,3,1,0) + t(1,-2,0,) \; : \; z,t \in \mathbb{R}\} \\ &= < \{(-4,3,1,0),(1,-2,0,1)\} >. \end{aligned}$$

Por lo tanto, una base de $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ es $B = \{(-4,3,1,0),(1,-2,0,1)\}$ y $dim\,(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = 2$.

05 puntos

Problema 2: *Dados*

$$\begin{aligned} U &= \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \; : \; p(-1) = p(5) = 0\} \\ W &= \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \; : \; p'(5) = 0\}, \end{aligned}$$

subespacios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(2.1) Determine una base e indique la dimensión de U y W.

(2.2) Demuestre que $U + W = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y diga si es suma directa o no.

25 puntos

Solución.- Para $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se tiene $p(x) = ax^2 + bx + c$.

(2.1) Para U;

$$\begin{aligned} p(-1) &= a - b + c = 0 \\ p(5) &= 25a + 5b + c = 0, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} -24a - 6b &= 0 \\ b &= -4a \\ c &= b - a = -4a - a = -5a. \end{aligned}$$

05 puntos

Por lo tanto,

$$p(x) = ax - 4ax - 5a = a(x^2 - 4x - 5)$$

y

$$U =< \{x^2 - 4x - 5\} > .$$

Luego, $dim\ U = 1$ y base su base es $B = \{x^2 - 4x - 5\}$.

05 puntos

Para W;

$$\begin{aligned} p'(x) &= 2ax + b \\ p'(5) &= 10a + b \implies b = -10a \end{aligned}$$

05 puntos

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 - 10ax + c = a(x^2 - 10x) + c \cdot 1 \\ W &= < \{x^2 - 10x, 1\} > . \end{aligned}$$

Luego, $dim\ W = 2$ y su base es $C = \{x^2 - 10x, 1\}$.

05 puntos

(2.2) Se tiene;

$$U + W =< \{x^2 - 4x - 5, x^2 - 10x, 1\} >$$

y

$$\alpha(x^2 - 4x - 5) + \beta(x^2 - 10x) + \gamma = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ -4\alpha - 10\beta &= 0 \\ -5\alpha + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -10 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

se tiene que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y los vectores $x^2 - 4x - 5, x^2 - 10x, 1$ son linealmente independientes.

Luego, $dim(U + W) = 3$ y por Teorema de la dimensión $dim\ (U \cap W) = 0$ y la suma es directa $U \bigoplus W = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

05 puntos

Problema 3:

(3.1) Determine la ecuación del plano Π *que pasa por los puntos* $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ *y* $(0, 0, c)$, *donde* a, b *y* c *son números reales positivos.* **5 puntos)**

(3.2) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y que es perpendicular al plano Π. **5 puntos**

(3.3) Calcule la superficie de la pirámide definida por los planos XY, YZ, ZX *y* Π. **8 puntos**

(3.4) Demuestre que si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *es un conjunto ortogonal en* $\mathbb{R}^3$, *entonces se cumple que* $|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{w}||$. *Indicación: Use que* u *y* $v \times w$ *son paralelos.* **7 puntos**

Solución:

(3.1) La ecuacion de un plano que pasa por tres puntos A, B y C esta dada por:

$$\Pi : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = A \cdot \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n} = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$. En este problema se tiene: $\overrightarrow{AB} = (a, -b, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (a, 0, -c)$ y $\mathbf{n} = (bc, ac, ab)$ **3 puntos**. Además $A \cdot \mathbf{n} = abc$, entonces:

$$\Pi : bcx + acy + abz = abc$$

2 puntos

(3.2) Una recta perpendicular a un plano es paralela al vector normal del plano. Así la ecuacion de la recta pedida es:

$$L : \frac{x - x_0}{cb} = \frac{y - y_0}{ac} = \frac{z - z_0}{ab}$$

Como además nos dicen que la recta pasa por el origen, esto es el punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, así:

$$L : \frac{x}{cb} = \frac{y}{ac} = \frac{z}{ab}$$

Tambien era posible entregar solo la forma paramétrica de L, la cual es:

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

(3.3) La piramide pedida es la piramide cuyos vértices son los puntos: $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$. Su área está dada por la suma de las áreas de los 4 triángulos que son sus caras.

Como sabemos, el área de un triágulo cuyos vértices son los puntos P_1, P_2 y P_3 es: $\frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}||}{2}$. Luego:

$A_1 = \frac{||(a,0,0)\times(0,b,0)||}{2} = \frac{ab}{2}$

$A_2 = \frac{||(a,0,0)\times(0,0,c)||}{2} = \frac{ac}{2}$

$A_3 = \frac{||(b,0,0)\times(0,0,c)||}{2} = \frac{bc}{2}$ **3 puntos**

$A_4 = \frac{||(a,-b,0)\times(a,0,-c)||}{2} = \frac{\sqrt{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}}{2}$ **3 puntos**

Luego la superficie de la pirámide es:

$$\frac{ab + ac + bc + \sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}}{2}$$

2 puntos

Los triángulos contenidos en los planos cartesianos eran triángulos rectángulos, por lo que sus áreas podían ser calculadas también usando la fórmula *Área*$=\frac{1}{2}$ *Base* $\times$ *Altura*, lo que conducía al mismo resultado.

(3.4) La manera más corta de demostrar esto es usando las fórmulas vistas en clases que relacionan las normas de los productos con las normas de los vectores involucrados y los ángulos que forman, así:

$||\mathbf{v} \times \mathbf{w}|| = ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{w}|| \operatorname{sen}(\alpha)$

donde α es el ángulo más pequeño entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Pero como $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ se tiene que $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Como $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$, se tiene:

a) $||\mathbf{v} \times \mathbf{w}|| = ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{w}||$ **2 puntos**

Por otra parte:

$||\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|| = |\ ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v} \times \mathbf{w}|| \cos(\beta)|$

donde β es es el ángulo más pequeño entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Pero, por la indicación, estos vectores son paralelos, entonces $\beta = 0$ o $\beta = \pi$. Así $\cos(\beta) = \pm 1$ y

b) $||\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|| = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v} \times \mathbf{w}||$ **2 puntos**

Reemplazando a) en b) se concluye:

$||\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|| = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{w}||$ **3 puntos**

Tambien era posible argumentar que dado que $\mathbf{u}$ es parallelo a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, entonces existe un real γ tal que $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \gamma \mathbf{u}$, Así se tiene:

$||\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|| = |\gamma| ||\mathbf{u}||^2$

y como γ debe valer necesariamente $\frac{||\mathbf{v}\times\mathbf{w}||}{||\mathbf{u}||}$, se obtiene la ecuación b).

NOTA: Justifique adecuadamente sus respuestas.
Tiempo: **100 minutos.**
20/Octubre/2003.
RAD/FCHH/ACQ/AGS/LNB/FPV/JSA/MSC/fchh/ags.