UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREA 5.
Análisis Funcional y Aplicaciones I.
525401.
Segundo Semestre 2006.

Demuestre las siguientes variantes del Lema de Lax-Milgram, y de un ejemplo de aplicación en cada caso.

1. **Lema de Tartar.** Sean H y V dos espacios de Hilbert en $\mathbb{R}$ tales que $V \hookrightarrow H$ con inyección continua. Sea $M \in \mathcal{L}(H; V)$ (función lineal continua definida en H a valores en V). Sea $a(u, v)$ una forma bilineal continua verificando la siguiente propiedad : existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, Mu) \geq \alpha \|u\|_H^2 \qquad \forall u \in H.$$

Sea $f \in V'$ (dual de V que no se identifica con V). Entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = < f, v > \qquad \forall v \in V$$

donde $< f, v >$ denota el producto de dualidad (V,V').
Indicación : Identifique H con el dual de H, pero no identifique V con el dual de V (ver comentario pág. 81 del libro de Brezis).

2. **Teorema de Babuska-Brezzi.** Sean V y H dos espacios de Hilbert en $\mathbb{R}$. Sea $a(u, v)$ una forma bilineal continua y coerciva en V, y $b(v, p)$ una forma bilineal continua $b : V \times H \to \mathbb{R}$, verificando la siguiente condición (llamada condición inf-sup) : existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{q \in H} \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_H} \geq \beta.$$

Entonces $\forall f \in V'$, $\forall g \in H'$, existe un único $(u, p) \in V \times H$ tal que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = < f, v > & \forall v \in V \\ b(u, q) = < g, q > & \forall q \in H \end{cases}$$

Indicación : Pruebe que la condición inf-sup es equivalente a la existencia de un isomorfismo entre $V^\perp$ y el dual de H.

3. **Argumento de la perturbación compacta.** Sean H y V dos espacios de Hilbert en $\mathbb{R}$ tales que $V \hookrightarrow H$ con inyección compacta. Sea $a(u, v)$ una forma bilineal continua y coerciva en V. Entonces para todo $f \in V^\perp \subset V'$ existen n soluciones linealmente independientes $u_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$ (para algún $n \in \mathbb{N}$) tal que

$$a(u_i, v) - w^2(u_i, v) = < f, v > \qquad \forall v \in V.$$

donde (u, v) denota el producto escalar en H, y $w = cste$ en $\mathbb{R}$.
Indicación : Utilice una combinación del Lema de Lax-Milgram con la Alternativa de Fredholm (ver Brezis).

Fecha de Entrega : 27 de Noviembre de 2006.
MSC/msc
(15-Noviembre-2006)