UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA DE EVALUACION 5. ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL. 520142.

1. Considere la aplicación lineal $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, definida por la ecuación

$$T(ax+b) = ax^2 + (a+b)x$$

a) (5 pts.) Caracterice $Ker(T)$ e $Im(T)$, y calcule el rango de T.

b) (10 pts.) Calcule $[T]_{B_1}^{B_2}$ (o $[T]_{B_1B_2}$), donde $B_1 = \{1, 1-x\}$ y $B_2 = \{1, x, (1-x)^2\}$.

Solución.-

a) Se tiene:

$$\begin{aligned}
Ker(T) &= \{p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \ : \ T(p(x)) = \Theta_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\}, \\
&= \{p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \ : \ T(a+bx) = \Theta_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\} \\
&= \{p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \ : \ ax^2 + (a+b)x = \Theta_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\} \\
&= \{p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \ : \ a+b = 0 \text{ y } b = 0\} \\
&= \{p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \ : \ a = 0 \wedge b = 0\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Ker(T) = \{\Theta_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}\}$. **2 puntos**

$$\begin{aligned}
Im(T) &= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ (\exists p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})) \ \ q(x) = T(p(x))\} \\
&= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ (\exists a+bx \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})) \ c + dx + ex^2 = T(a+bx)\} \\
&= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ (\exists a, b \in \mathbb{R}) \ c + dx + ex^2 = ax^2 + (a+b)x\} \\
&= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ (\exists a, b \in \mathbb{R}) \ \ c = 0, \ a+b = d \text{ y } a = e\} \\
&= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ q(x) = c + dx + ex^2, \ c = 0\} \\
&= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ q(x) = dx + ex^2, \ d, e \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Im(T) = \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ q(x) = dx + ex^2, \ d, e \in \mathbb{R}\} = < \{x, x^2\} > .$$

Luego el rango es igual a 2. **3 puntos**

b) Se tiene:

$$\begin{aligned}
T(1) &= 0 \cdot x^2 + (0+1) \cdot x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot (1-x)^2 \\
T(1-x) &= T(-x+1) = -x^2 + (1-1) \cdot x = -x^2 = 1 \cdot 1 - 2 \cdot x - 1 \cdot (1-x)^2.
\end{aligned}$$

5 puntos

Por lo tanto la matriz pedida es $[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **5 puntos**

2. Considere los siguientes sub-espacios vectoriales reales de $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ (matrices simétricas de 2×2) :

$$W_1 =<\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}>, \qquad W_2 =<\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}>$$

a) (5 pts.) Verifique que W_1 y W_2 son ortogonales entre ellos (con $< A, B >= tr(B^t A)$).

b) (10 pts.) Encuentre el complemento ortogonal de W_1 como sub-espacio de V.

c) (5 pts.) Calcule la proyección ortogonal (mejor aproximación) de $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sobre el espacio W_1.

Solución :

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$< A, B >= tr(B^t A) = tr(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = 0$$

$$\Longrightarrow A \text{ y } B \text{ son ortogonales} \Longrightarrow W_1 \text{ y } W_2 \text{ son ortogonales}$$

5 puntos

b) Toda matriz de 2×2 simétrica se escribe de forma genérica como :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir, como la combinación lineal de 3 matrices simétricas de 2×2 linealmente independientes. Luego la dimensión de V es 3. Por el teorema de la dimensión, se tiene que $dim(W_1^{\perp}) = dim(V) - dim(W_1) = 3 - 1 = 2$. Como B es ortogonal a toda matriz de W_1, entonces B es un elemento de $W_1^{\perp}$. Nos basta encontrar una tercera matriz ortogonal a A y *l.i.* de B.
Aplicando Gram-Schmidt, o bien escribiendo el producto interno como una ecuación se llega a : $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o a una matriz proporcional a ésta.

5 puntos

Luego, el complemento ortogonal de W_1 en V está dado por

$$W_1^{\perp} =<\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}> .$$

5 puntos

c) Sea $\alpha = \dfrac{tr(X^t A)}{tr(A^t A)} = -\dfrac{3}{2}$, entonces, la proyección de X sobre W_1 está dada por :

$$P_{W_1}(X) = \alpha A = -\frac{3}{2}A = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

5 puntos

3. Considere el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (5 pts.) Determine el Polinomio Característico de T y sus respectivos Valores Propios asociados.

b) (5 pts.) Deduzca que T es diagonalizable.

c) (15 pts.) Determine los Espacios Propios de A y la respectiva base ortonormal de vectores propios de $\mathbb{R}^3$, que diagonaliza a A.

Solución

a) Primero observamos que $p_T(\lambda) = p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3)$. Enseguida aplicando la regla de Sarrus o desarrollando el determinante por la segunda columna, obtenemos:

$$p_A(\lambda) \;=\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -(1+\lambda) & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1)] = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$$

Los valores propios de T y A son los mismos, por tanto:

$$p_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \{-1, 0, 2\}$$

5 puntos

b) La matriz asociada es simétrica, y los valores propios de T son reales y las multiplicidades geométricas y algebraicas coinciden (iguales a 1), luego por cualquiera de las dos razones, y por teorema visto en clase T es diagonalizable.

5 puntos

c) Sea $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 2$, determinamos el primero de los espacios propios asociados a A.

- Espacio Propio asociado a $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1} &= \{v \in \mathbb{R}^3 \ : (A + 1 \cdot I_3)v^T = \theta^T\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0,\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0,1,0) \ : \ y \in \mathbb{R}\} \\ &= <\{(0,1,0)\}> . \end{aligned}$$

4 puntos

– Espacio Propio asociado a $\lambda_2 = 0$

$$\begin{aligned}
S_{\lambda_2} &= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \ : (A + 0 \cdot I_3)v^T = \theta^T\right\} \\
&= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \ : Av = \theta^T\right\} \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z, \ y = 0\} \\
&= \{x(1, 0, 1) \ : x \in \mathbb{R}\} \\
&= < \{(1, 0, 1)\} > .
\end{aligned}$$

4 puntos

– Espacio Propio asociado a $\lambda_3 = 2$

$$\begin{aligned}
S_{\lambda_3} &= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \ : (A - 2 \cdot I_3)v^T = \theta^T\right\} \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z, \ y = 0\} \\
&= \{x(1, 0, -1) \ : x \in \mathbb{R}\} \\
&= < \{(1, 0, -1)\} > .
\end{aligned}$$

4 puntos

Ahora determinamos la base ortonormal de vectores propios de $\mathbb{R}^3$. Sabemos que vectores propios asociados a valores propios diferentes de una matriz simétrica son ortogonales. Luego solamente debemos normalizar las bases de los espacios propios obtenidas anteriormente:

$$\begin{aligned}
&S_{\lambda_1} =< \{v_1\} >, \quad v_1 = (0, 1, 0) \\
&S_{\lambda_2} =< \{v_2\} >, \quad v_2 = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) \\
&S_{\lambda_3} =< \{v_3\} >, \quad v_3 = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2
\end{aligned}$$

3 puntos

Duración : 100 minutos.
RAD/FCH/ACQ/AGS/LNB/FPV/JSA/MSC/
(21-Noviembre-03)