

## Cálculo Numérico (521230)

### Certamen – Forma D

*Fecha: 15–Nov–02; 13:00.*

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la  
corrección

**No rellenar**

B

M

NR

Cal.

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:

$$\text{Calificación} = \frac{100}{15} \left( \text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3} \right).$$

- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FISICAS Y MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

**CERTAMEN**  
**DE**  
**CALCULO NUMERICO**  
**521230**

VIERNES 15 DE NOVIEMBRE DE 2002

**COMISION:** DR. RODOLFO ARAYA  
DR. MANUEL CAMPOS  
DR. ROBERTO RIQUELME  
DR. MAURICIO SEPÚLVEDA

1. Considere la integral  $I = \int_0^5 (x^3 + x^2 + x + 1) dx$ . Para calcular el valor de  $I$  con un error menor o igual a  $10^{-8}$ , se debe utilizar

- (i) el método de los trapecios con paso  $h = 10^{-2}$ .
- (ii) el método de Simpson con paso  $h = 10^{-1}$ .
- (iii) un método de Gauss con 2 puntos.

- a) Sólo (i) y (iii).
- b) Sólo (ii) y (iii)
- c) Sólo (i) y (ii).
- d) ninguna de las anteriores.

2. Una condición suficiente para que un sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  pueda ser resuelto por los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel es que:

- (i)  $\mathbf{A}$  sea de diagonal dominante estricta
- (ii)  $\mathbf{A}$  sea simétrica y definida positiva
- (iii) los valores propios de  $\mathbf{A}$  sean reales y positivos

Son verdaderas:

- a) (i) y (ii)
- b) (i), (ii) y (iii)
- c) sólo (i)
- d) ninguna de las anteriores.

3. Sea  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  un sistema con  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  y  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ . Que un método iterativo genere una sucesión  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$  convergente a la solución  $\mathbf{x}$  del sistema permite afirmar que:

- (i) partiendo de cualquier vector inicial la sucesión converge a  $\mathbf{x}$
- (ii) el radio espectral de la matriz iterativa del método es menor que uno
- (iii)  $\|\mathbf{x}^{(k)}\| \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$
- (iv)  $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$

Son verdaderas:

- a) (ii), (iii) y (iv)
- b) (i), (ii) y (iii)
- c) (i), (ii) y (iv)
- d) ninguna de las anteriores.

4. Para resolver varios sistemas  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  con igual matriz  $\mathbf{A}$  se determinó la factorización  $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ , donde  $\mathbf{P}$  es la matriz de permutaciones. Entonces  $\mathbf{x}$  se obtiene resolviendo:

- a)  $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$  y luego  $\mathbf{Ux} = \mathbf{Py}$
- b)  $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$  y luego  $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$
- c)  $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$  y luego  $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$
- d) ninguna de las anteriores.

5. Considere la tabla

$x_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_i$	-1	-1	-1	$a$	1	1	1

¿ Para qué valores del parámetro  $a$  **no** existe el polinomio de interpolación de Lagrange asociado a dicha tabla ?.

- a)  $a = 0$ .
- b)  $a = -1$ .
- c)  $a = 1$ .
- d) ninguna de las anteriores.

6. Sea  $s$  la spline cúbica natural que interpola los valores de la siguiente tabla

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$y_i$	-1	4	11	42	0.7

entonces

- a)  $s$  es una función cúbica a trozos, no necesariamente continua, tal que  $s(x_i) = y_i$ .
- b)  $s$  es un polinomio cúbico tal que  $s(x_i) = y_i$ .
- c)  $s$  es una función cúbica a trozos y continua tal que  $s(x_i) = y_i$ .
- d) Ninguna de las anteriores.

7. Se desea calcular el valor de la integral

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^6} dx .$$

¿Cuál es el número mínimo de puntos a usar en una fórmula de Gauss para calcular **exactamente** el valor de  $I$  ?

- a) 2.
- b) 3.
- c) 4.
- d) ninguno de los anteriores.

8. Dada una sucesión de números  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , indique cual de los siguientes programas en ambiente MATLAB sirve para calcular el  $i$ -ésimo polinomio de Lagrange evaluado en  $t$

- a) `function l=lagrange(x,i,t)`  
`n=length(x);`  
`m=[1:i i+2:n];`  
`l=prod(t-x(m)./(x(i+1)-x(m)));`
- b) `function l=lagrange(x,i,t)`  
`n=length(x);`  
`m=[1:i-1 i+1:n];`  
`l=prod((t-x(m))./(x(i)-x(m)));`
- c) `function l=lagrange(x,i,t)`  
`n=length(x);`  
`m=[0:i-1 i+1:n-1];`  
`l=prod((t-x(m))./(x(i)-x(m)));`
- d) ninguna de las anteriores.

9. Se desea aproximar el valor de  $\sqrt[3]{10}$  y se dispone de un punto  $x_0$  que está bastante cerca del valor buscado. ¿Cuál de los siguientes algoritmos permite aproximar dicho valor ?

- a)  $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 10}{2x_n} \quad n = 0, 1, \dots$
- b)  $x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt[3]{x_n}}{3\sqrt[3]{x_n^2}} \quad n = 0, 1, \dots$
- c)  $x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 10}{3x_n^2} \quad n = 0, 1, \dots$
- d) ninguno de los anteriores.

10. Indique cual de los siguientes programas en ambiente MATLAB sirve para calcular la integral  $\int_a^b f(x) dx$  mediante la regla del trapecio

- a) `function I=trapecio(f,a,b,N)`  
`h=(b-a)/N;`  
`x=a+h*[0:N];`  
`I=h/2*(feval(f,x(1))+2*sum(feval(f,x([2:N-1]))) + feval(f,x(N)));`
- b) `function I=trapecio(f,a,b,N)`  
`h=(b-a)/N;`  
`x=a+h*[0:N];`  
`I=h/2*(feval(f,x(1))+2*sum(feval(f,x([2:N]))) + feval(f,x(N+1)));`
- c) `function I=trapecio(f,a,b,N)`  
`h=(b-a)/N;`  
`x=a+h*[0:N];`  
`I=h/2*sum(feval(f,x([0:N])));`
- d) ninguna de las anteriores.

11. Sea  $\mathbf{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  tal que  $\text{rango}(\mathbf{A}) = n$  y  $m > n$ . Sea  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  un vector dado de modo que  $\mathbf{b}$  no es combinación lineal de las columnas de  $\mathbf{A}$ . Entonces el vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es solución del sistema lineal  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  en el sentido de los mínimos cuadrados, si

- a)  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 = 0$ .
- b)  $\mathbf{AA}^T \mathbf{x} = \mathbf{Ab}$ .
- c)  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 = \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{Az} - \mathbf{b}\|_2$ .
- d) ninguna de las anteriores.

12. Se ajusta por mínimos cuadrados un modelo del tipo  $y = a + bx + cx^2 + dx^3$  a la tabla

$x_i$	0	1	2	3
$y_i$	1	3	19	67

Entonces podemos afirmar que:

- a)  $y(x_i) = y_i \quad \forall i$ .
- b)  $y(x_i) > y_i \quad \forall i$ .
- c)  $y(x_i) < y_i \quad \forall i$ .
- d) ninguna de las anteriores.

13. A la tabla

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$y_i$	3	4	1	-2	7

se le ajusta un modelo de la forma  $\psi(x)$ , en el sentido de los mínimos cuadrados. Sabiendo que una de las siguientes tablas es correcta, ¿cuál de ellas representa el valor de  $\psi$  en los puntos  $x_i$  ?

- a) 

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$\psi(x_i)$	-3	-4	0	5	0
- b) 

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$\psi(x_i)$	2	4	0	-1	7
- c) 

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$\psi(x_i)$	10	-4	-1	2	-7
- d) 

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$\psi(x_i)$	1	0	11	2	-1

14. Se desea encontrar el punto de intersección de las curvas

$$\begin{cases} -y + x^2 - 2x + 2 = 0 \\ -y + x^3 = 0 \end{cases}$$

Indique cuál de los siguiente algoritmos permite calcular la solución del sistema dado a partir del dato inicial  $(x_0, y_0)^T = (2, 1)^T$ :

- a) Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , hasta que se cumpla algún criterio de convergencia:

$$\begin{aligned} \text{Resolver : } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3x_k^2 & 2x_k - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -y_k + x_k^2 - 2x_k + 2 \\ -y_k + x_k^3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_k + \Delta x_k \\ y_k + \Delta y_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- b) Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , hasta que se cumpla algún criterio de convergencia:

$$\begin{aligned} \text{Resolver : } \begin{bmatrix} 2x_k - 2 & -1 \\ 3x_k^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -y_k + x_k^2 - 2x_k + 2 \\ -y_k + x_k^3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_k + \Delta x_k \\ y_k + \Delta y_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- c) Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , hasta que se cumpla algún criterio de convergencia:

$$\begin{aligned} \text{Resolver : } \begin{bmatrix} 2x_k - 2 & -1 \\ 3x_k^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -y_k + x_k^2 - 2x_k + 2 \\ -y_k + x_k^3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_k + \Delta x_k \\ y_k + \Delta y_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- d) Ninguno de los anteriores.

15. Considere el PVI

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{1+x^2}, & x \in [x_0, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

El programa en ambiente MATLAB que resuelve el PVI por el método de Euler es:

- a) `function [x,y]=euler(x0,y0,b,h)`  
`N=(b-x0)/h;`  
`x(1)=x0;`  
`y(1)=y0;`  
`for n=1:N-1`  
`x(n+1)=x(n)+h;`  
`y(n+1)=y(n)+h*y(n)/(1+x(n)^2);`  
`end`
- b) `function [x,y]=euler(x0,y0,b,h)`  
`N=(b-x0)/h;`  
`x(1)=x0;`  
`y(1)=y0;`  
`for n=1:N-1`  
`x(n+1)=x(n);`  
`y(n+1)=y(n)+h*y(n)/(1+x(n)^2);`  
`end`
- c) `function [x,y]=euler(x0,y0,b,h)`  
`N=(b-x0)/h;`  
`x(1)=x0;`  
`y(1)=y0;`  
`for n=1:N-1`  
`x(n+1)=x(n)+h;`  
`y(n+1)=y(n)+y(n)/(1+x(n)^2);`  
`end`
- d) ninguna de las anteriores.