UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 2 (Conjuntos)

1. Dados los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 2\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\}$. Determine : **(En práctica)**

   a) $A \cap \mathbb{N}$, y $A^c \cap B$ b) $|A|$ y $|A \cap C|$ c) $\mathcal{P}(A)$ d) $A \cap B$ y $B \cap C$ e) $A \times B$

2. Sea $A = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1\}, \{\emptyset\}, 1, \{2\}\}$, determine si son válidas las siguientes afirmaciones. Justifique, en cada caso, su respuesta. **(En práctica)**

   a) $1 \in A$ b) $2 \in A$ c) $\{2\} \in A$ d) $\{2\} \subseteq A$ e) $\emptyset \subseteq A \wedge \{\emptyset\} \in A$
   f) $\{1, \{1\}\} \in \mathcal{P}(A) \wedge \{1, 2, \{1,2\}\} \in \mathcal{P}(A)$ g) $|A| = 7$

3. Demuestre que: **(En práctica: g), i), j), k), y n))**

   a) $A \cap B \subseteq A$
   b) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$
   c) $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$
   d) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
   e) $A - B = A \cap B^c$
   f) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$
   g) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$
   h) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   i) $A \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$
   j) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
   k) $A \subseteq B \Rightarrow \forall M \subseteq U : M \cap A \subseteq M \cap B$
   l) $A \subseteq B \Rightarrow \forall M \subseteq U : M \cup A \subseteq M \cup B$
   m) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
   n) $(M \subseteq A \wedge M \subseteq B) \Leftrightarrow M \subseteq A \cap B$
   o) $A \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = A$
   p) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c$

4. La diferencia simétrica entre dos conjuntos $A$ y $B$ está definida por:

$$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$$

   El objetivo de este problema es demostrar que la diferencia simétrica es asociativa. Para ello:

   *a*) Demuestre que: $\forall x \in U : x \in (A \triangle B) \Longleftrightarrow (x \in A) \veebar (x \in B)$, donde $\veebar$ es el conectivo "disyunción excluyente" definido en el Listado 1.

   *b*) Pruebe que el conectivo $\veebar$ es asociativo.

   *c*) Concluya que la diferencia simétrica entre conjuntos es asociativa.

   *d*) Para el caso particular de $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 15 \wedge x \text{ es par}\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x^2 \leq 20\}$, verifique que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

5. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de $\mathbb{N}$ definidos por $A_k = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k + 10\}$.

   *a*) Pruebe que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$ y $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1$.

   *b*) Determine $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c$ y $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c$.

   *c*) Sean $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1$ y $B_3 = A_3 - (A_2 \cup A_1)$. Verifique que $\{B_1, B_2, B_3\}$ es una partición de $A_3$. **(En práctica: b) y c))**

6. Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos del conjunto universo $U$. Demuestre que:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ | c) | $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ |
| b) | $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \Longrightarrow A = B$ | d) | $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ (¿por qué no =?) |

**(En práctica: a) y c))**

7. Un investigador ha estudiado la dieta normal de 1000 personas e informa lo siguiente: 630 consumen carne diariamente, 723 consumen verduras, 816 consumen productos lácteos, 470 consumen carne y verduras, 463 consumen carne y lácteos, 562 consumen verduras y lácteos, y 310 consumen carne, verduras y lácteos. ¿Puede confiarse en la veracidad de estos datos? **(En práctica)**

8. De entre los pacientes de un hospital con enfermedades respiratorias se encontró que 8 individuos padecían enfisema pulmonar, 15 bronquitis crónica y 13 asma; 6 tenían sólo asma y bronquitis; 4 sólo asma; 3 tenían las tres enfermedades y ninguno sólo enfisema y bronquitis.

   *a*) ¿Cuántos pacientes del hospital padecían enfermedades respiratorias?

   *b*) ¿Cuántos padecían de enfisema solamente?

   *c*) ¿Cuántos padecían de bronquitis crónica solamente?

9. De un total de 1186 alumnos del liceo "Andalién," 879 están tomando un curso intensivo de inglés, 378 uno de alemán y 690 uno de francés. Se sabe que 506 alumnos están en cursos de inglés y francés, que 77 están en alemán y francés, que los que están en alemán pero no en inglés son 159 y que hay 13 en los tres cursos de idiomas. **(En práctica)**

   *a*) ¿Cuántos alumnos no estudian ninguno de los idiomas?

   *b*) ¿Cuántos estudian sólo el inglés y el francés?

10. En una encuesta a 200 estudiantes se encontró que 68 prefieren matemáticas, 138 son deportistas y 160 son artistas; 120 son artistas y deportistas; 20 prefieren matemáticas pero no son deportistas; 13 prefieren matemáticas y son deportistas pero no artistas; y 15 prefieren matemáticas, son artistas pero no deportistas. Determine

    *a*) ¿cuántos prefieren matemáticas, son artistas y son deportistas?

    *b*) ¿cuántos son artistas y deportistas pero no prefieren matemáticas?

    *c*) ¿cuántos no prefieren matemáticas, no son deportistas ni artistas?

11. Un conjunto $M \subseteq \mathcal{P}(E)$ se denomina un *álgebra* de las partes de $E$ si verifica las siguientes propiedades:

    (i) $E \in M$,

    (ii) $\forall A, B \in M : A \cup B \in M$,

    (iii) $\forall A \in M : (E - A) \in M$.

    Se pide:

    *a*) Demostrar que $\emptyset \in M$.

    *b*) Demostrar que si $A,\ B \in M$, entonces $A \cap B \in M$.

    *c*) Sea $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $M = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. ¿Es $M$ un álgebra? Si no lo es, agregue el menor número de conjuntos para que lo sea.