UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

# ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142)

## Solución Evaluación de Recuperación
## Lunes 16 de agosto de 2004

**Problema 1.**

a) Dos aviones de búsqueda despegan de Concepción para encontrar un pesquero perdido en el Océano. El avión A viaja hacia el Oeste a $400\sqrt{2}\ km/h$ y el avión B vuela a $45^o$ en dirección Noroeste a $500\ km/h$. Al cabo de 2 horas el avión A divisa a los pescadores y envía un mensaje por radio al avión B para que acuda y participe en el rescate. ¿ A qué distancia del avión A está el avión B cuando es enviado el mensaje?. **(10 Ptos.)**

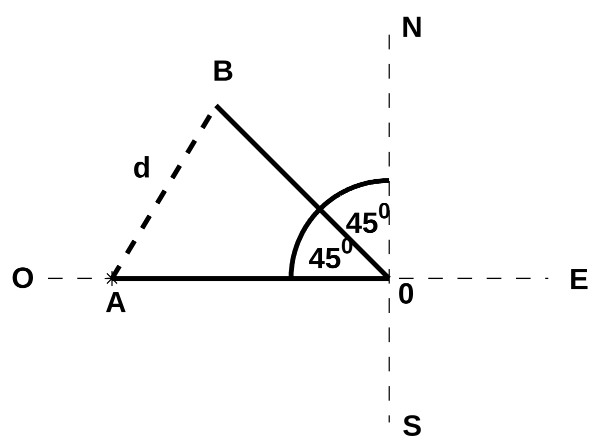
b) Encuentre la forma polar del complejo

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}\ i}{1-i}\right)^{40}$$

**(10 Ptos.)**

**Sol.**

a)




**(3 Ptos.)**

Aplicando Teorema del coseno se tiene:

$$\begin{aligned} d^2 =&\ (1000)^2 + (800\sqrt{2})^2 - 2(1000)(800\sqrt{2})\cos(45^0) \\ d =&\ 824.6211 \\ d \approx&\ 825 \end{aligned}$$

**(7 Ptos.)**

b)

$$\left(\frac{\sqrt{2}\ i}{1-i}\right)\ \left(\frac{1+i}{1+i}\right) = \frac{\sqrt{2}(i-1)}{2}$$

$$-1+i = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} z = & \quad \left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{2}\right]^{40} \\ = & \quad \left[\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{40} \\ = & \quad \mathrm{cis}(30\pi) \\ = & \quad \mathrm{cis}(0) \\ = & \quad \mathrm{cis}(30\pi + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

**(10 Ptos.)**

**Problema 2.** Considere la función

$$\begin{aligned} f\,:\,Dom(f)\subseteq\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto f(x)\;=\;-\ln(16-x^2)\end{aligned}$$

a) Encuentre $\mathrm{Dom}(f)$ y $\mathrm{Rec}(f)$. **(10 Ptos.)**

b) ¿Es $f$ inyectiva?. **(3 Ptos.)**

c) Encuentre, si es posible, $f^{-1}$. En caso contrario, encuentre el mayor subconjunto del dominio de $f$ de modo que $f^{-1}$ exista y defínala. **(7 Ptos.)**

**Sol.**

a)

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f) &= \{x\in\mathbb{R}\,:\,\exists\, y\in\mathbb{R} \sqcap\!\sqcap\; f(x)=y\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,:\,\exists\, y\in\mathbb{R} \sqcap\!\sqcap\; -\ln(16-x^2)=y\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,:\; 16-x^2>0\}\\ &= ]-4,4[\end{aligned}$$

**(3 Ptos.)**

$$\begin{aligned}\mathrm{Rec}(f) &= \{y\in\mathbb{R}\,:\,\exists\, x\in\,]-4,4[\sqcap\!\sqcap\; f(x)=y\}\\ &= \{y\in\mathbb{R}\,:\,\exists\, x\in\,]-4,4[\sqcap\!\sqcap\; -\ln(16-x^2)=y\}\\ &= \{y\in\mathbb{R}\,:\,\exists\, x\in\,]-4,4[\sqcap\!\sqcap\; 16-x^2=e^{-y}\}\\ &= \{y\in\mathbb{R}\,:\,\exists\, x\in\,]-4,4[\sqcap\!\sqcap\; x^2=16-e^{-y}\}\\ &= \{y\in\mathbb{R}\,:\,\exists\, x\in\,]-4,4[\sqcap\!\sqcap\; |x|=\sqrt{16-e^{-y}}\}\\ &= \{y\in\mathbb{R}\,:\,0\le 16-e^{-y}\le 16\}\\ &= \{y\in\mathbb{R}\,:\,-16\le -e^{-y}\le 0\}\\ &= \{y\in\mathbb{R}\,:\,0\le e^{-y}\le 16\}\\ &= \{y\in\mathbb{R}\,:\,-y\le \ln(16)\}\\ &= ]-\ln(16),+\infty[\end{aligned}$$

**(7 Ptos.)**

b) $f$ no es inyectiva pues existe 2 y -2 en $]-4,4[$ tal que

$$f(2)=f(-2)=-\ln(12).$$

**(2 Ptos.)**

Por lo anterior $f$ no es inyectiva, luego $f^{-1}$ no existe. **(1 Pto.)**

c) Redifinamos la función de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f\,:\,[0,4[ &\longrightarrow\, ]-\ln(16),+\infty[\\ x &\longmapsto f(x)\;=\;-\ln(16-x^2)\end{aligned}$$

que es biyectiva, por lo tanto admite inversa. **(3 Ptos.)**

A saber

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} \ : ]-\ln(16), +\infty[ & \longrightarrow & [0,4[ \\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) \ = \ y \end{array}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) \ = \ y \quad & \Longleftrightarrow f(y) = x \\ & \Longleftrightarrow -\ln(16 - y^2) = x \\ & \Longleftrightarrow 16 - y^2 = e^{-x} \\ & \Longleftrightarrow y^2 = 16 - e^{-x} \\ & \Longleftrightarrow y = \sqrt{16 - e^{-x}} \end{aligned}$$

En resumen:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} \ : ]-\ln(16), +\infty[ & \longrightarrow & [0,4[ \\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) \ = \ \sqrt{16 - e^{-x}} \end{array}$$

**(4 Ptos.)**

**Problema 3.**

a) Usando la fórmula de prostaféresis:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta),$$

pruebe que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(nx) - \cos((n-1)x)\right)$$

**(5 Ptos.)**

b) Aplicando a) y la propiedad telescópica encuentre una expresión general para

$$S_N(x) \ = \sum_{n=1}^{N} \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ ,\ N \in \mathbb{N} \text{ fijo.}$$

**(5 Ptos.)**

**Sol.**
**Parte a)**
Sea $n \in \mathbf{N}$. Al considerar para la fórmula dada los valores

$$\alpha = \left(\frac{(2n-1)x}{2}\right), \quad \beta = \frac{x}{2} \qquad (\mathbf{2pts})$$

en el lado izquierdo de la identidad, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{(2n-1)x}{2} + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{(2n-1)x}{2} - \frac{x}{2}\right) \quad \text{(por fórmula prostaféresis)} \quad (\mathbf{1pt}) \\
&= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2nx}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2nx}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cos(nx) - \frac{1}{2}\cos\left(nx - x\right) \qquad (\mathbf{1pt}) \\
&= \frac{1}{2}\cos(nx) - \frac{1}{2}\cos\left((n-1)x\right)
\end{aligned}$$

que corresponde al lado derecho de la identidad por demostrar **(1pt)**.

**Parte b)**
De acuerdo a la parte **a)**, para $N \in \mathbf{N}$ fijo,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\Big(\cos(nx) - \cos\left((n-1)x\right)\Big) \qquad (\mathbf{1pt})$$

El lado derecho corresponde a una suma telescópica, pues:

$$\text{definiendo } a_n = \frac{1}{2}\cos(nx), \quad \text{se tiene que} \quad S_N = \sum_{n=1}^{N} \big(a_n - a_{n-1}\big) \qquad (\textbf{2pts})$$

por lo tanto, por propiedad de suma telescópica vista en clases, se concluye que:

$$\begin{aligned} S_N = a_N - a_0 &= \frac{1}{2}\cos(Nx) - \frac{1}{2}\cos(0x) && (\textbf{1pt}) \\ &= \frac{1}{2}\cos(Nx) && (\textbf{1pt}) \end{aligned}$$

**Problema 4.** Sean $B, A_1, A_2, A_3 \cdots$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Demuestre por inducción que **para todo** $n \geq 2$:

$$B \cup \left( \bigcap_{j=1}^{n} A_j \right) = \bigcap_{j=1}^{n} (B \cup A_j)$$

**(10 Ptos.)**

**Sol.**

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definamos la proposición

$$p(n): \; B \cup \left( \bigcap_{j=1}^{n} A_j \right) = \bigcap_{j=1}^{n} (B \cup A_j).$$

También, sea $S$ el subconjunto de $\mathbb{N}$ dado por

$$S := \{n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : p(n)\}$$

**(1 Pto.)**

**Primer paso** $2 \in S$.

En efecto, por propiedad distributiva dada en clases, se tiene que

$$\begin{aligned} B \cup (A_1 \cap A_2) = & \; (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \\ = & \; \bigcap_{j=1}^{2} (B \cup A_j) \end{aligned}$$

**(2 Pto.)**

**Segundo paso** (Hipótesis de inducción).

Supongamos que $n \in S$, es decir, $n \geq 2$ y

$$B \cup \left( \bigcap_{j=1}^{n} A_j \right) = \bigcap_{j=1}^{n} (B \cup A_j).$$

**(1 Pto.)**

**Tercer paso** (Tesis de inducción).

Queremos probar que $n + 1 \in S$, es decir,

$$B \cup \left( \bigcap_{j=1}^{n+1} A_j \right) = \bigcap_{j=1}^{n+1} (B \cup A_j).$$

**(1 Pto.)**

<u>**Cuarto paso**</u> (Demostración de la tesis).
Se tiene

$$\begin{aligned}
B \cup \left( \bigcap_{j=1}^{n+1} A_j \right) &= B \cup \left( \bigcap_{j=1}^{n} A_j \cap A_{n+1} \right) \text{(por asociatividad de } \cap\text{)} \\
&= \left( B \cup \left( \bigcap_{j=1}^{n} A_j \right) \right) \cap (B \cup A_{n+1}) \quad \begin{array}{l}\text{(por propiedad distributiva} \\ \text{dada en clases)}\end{array} \\
&= \left( \bigcap_{j=1}^{n} (B \cup A_j) \right) \cap (B \cup A_{n+1}) \quad \begin{array}{l}\text{(por Hipótesis} \\ \text{de inducción)}\end{array} \\
&= \bigcap_{j=1}^{n+1} (B \cup A_j) \text{ (por asociatividad de } \cap\text{)},
\end{aligned}$$

lo cual completa la inducción. **(5 Ptos.)**