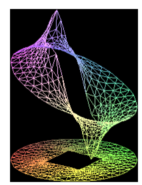
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

520142

Primer Semestre



FUNCIONES CIRCULARES

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Funciones circulares

Definición: Círculo Trigonométrico

Sea $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la **circunferencia unitaria**, se define $P : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ por $P(0) = (1, 0)$ y para $t > 0$ (resp. $t < 0$) $P(t)$ es el punto al que se llega luego de desplazarse en sentido antihorario (resp. horario) sobre $\mathcal{C}$, en t unidades desde $P(0)$.

Definición: sen y cos

Se definen las funciones $sen : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ y $cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ a través de la ecuación:

$$P(t) = (\,cos\,(t),\ sen\,(t)\,)$$

Funciones Circulares

Círculo Trigonométrico

$$|sen\,(t)| = |\overline{OS}|$$

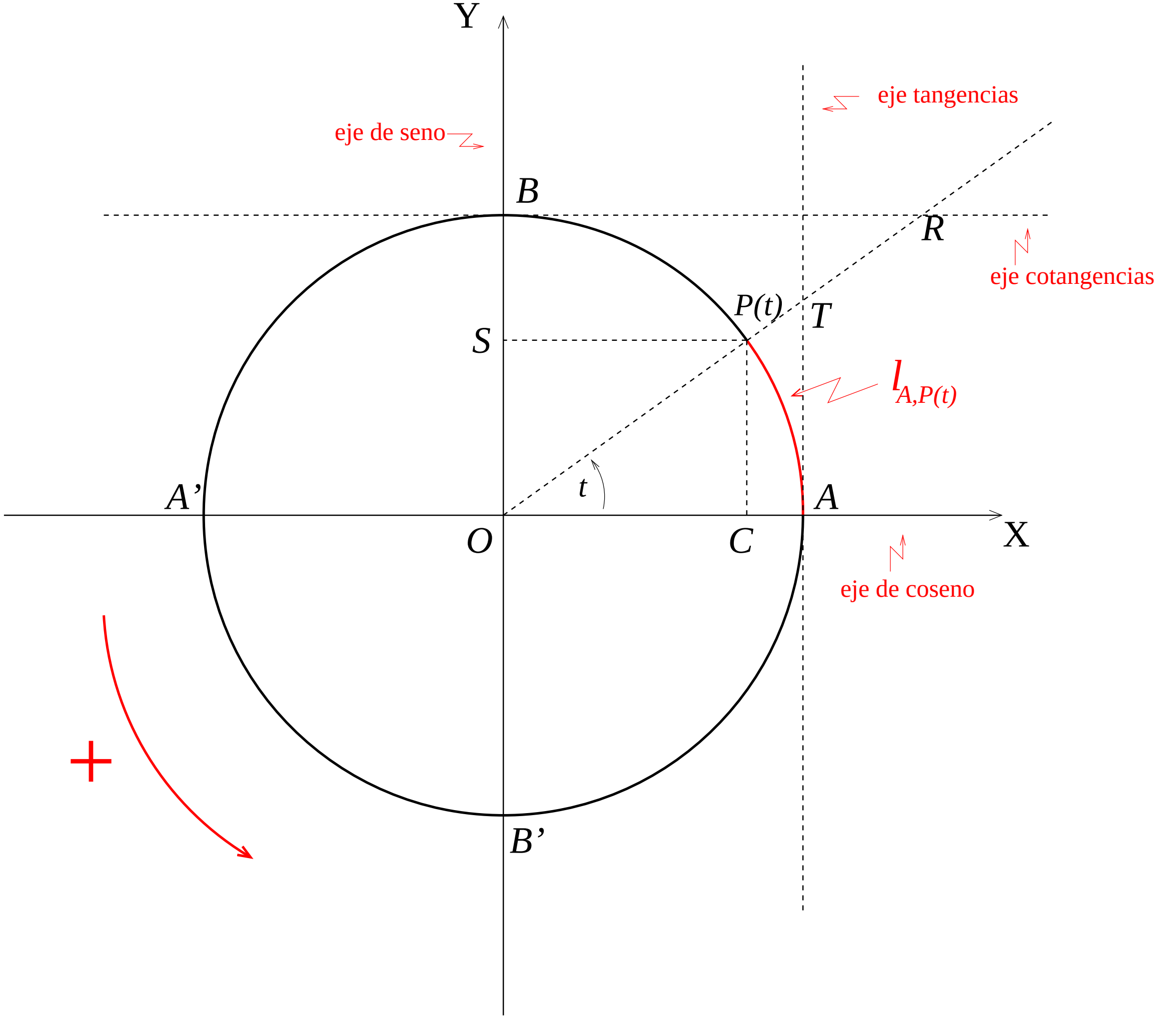
$$|cos\,(t)| = |\overline{OC}|$$

$$|\tan(t)| = |\overline{AT}|$$

$$|cot\,(t)| = |\overline{BR}|$$

$$|sec\,(t)| = |\overline{OT}|$$

$$|csc\,(t)| = |\overline{OR}|$$

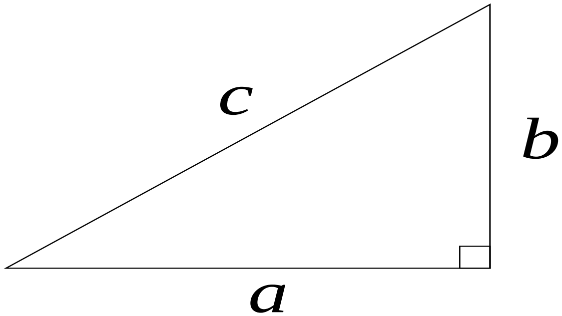


$$t = \measuredangle(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP}(t)) = l_{A,P(t)}$$

Funciones Circulares

Teorema de Pitágoras

$a^2 + b^2 = c^2$



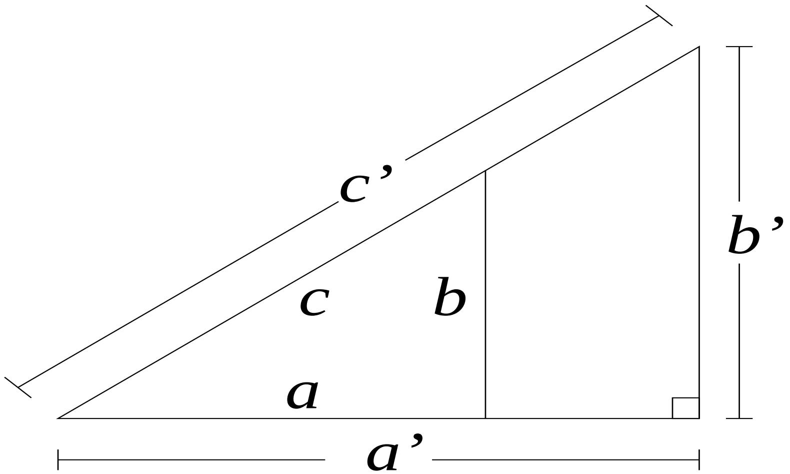
$$sen^{\,2}(t) + cos^{\,2}(t) = 1$$

$$\tan^2(t) + 1 = sec^2(t)$$

$$cot^{\,2}(t) + 1 = csc^2(t)$$

Teorema de Thales

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$



$$\tan(t) = \frac{sen\,(t)}{cos\,(t)}$$

$$cot\,(t) = \frac{cos\,(t)}{sen\,(t)}$$

$$sec\,(t) = \frac{1}{cos\,(t)}$$

$$csc\,(t) = \frac{1}{sen\,(t)}$$

Funciones Circulares

Definición: Función Periódica

Una función $f : \mathbb{R} \to B$ se dice periódica de periodo p, si p es el menor número positivo que satisface la propiedad:

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = f(t+p).$$

Propiedad

Si $f : \mathbb{R} \to B$ es periódica de periodo p, se cumple que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} : f(t) = f(t+kp).$$

Observación

$P : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ es periódica de periodo 2π:

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ (\forall\ k \in\ \mathbb{Z})\ P(t+2k\pi) = P(t)$$

Funciones Circulares

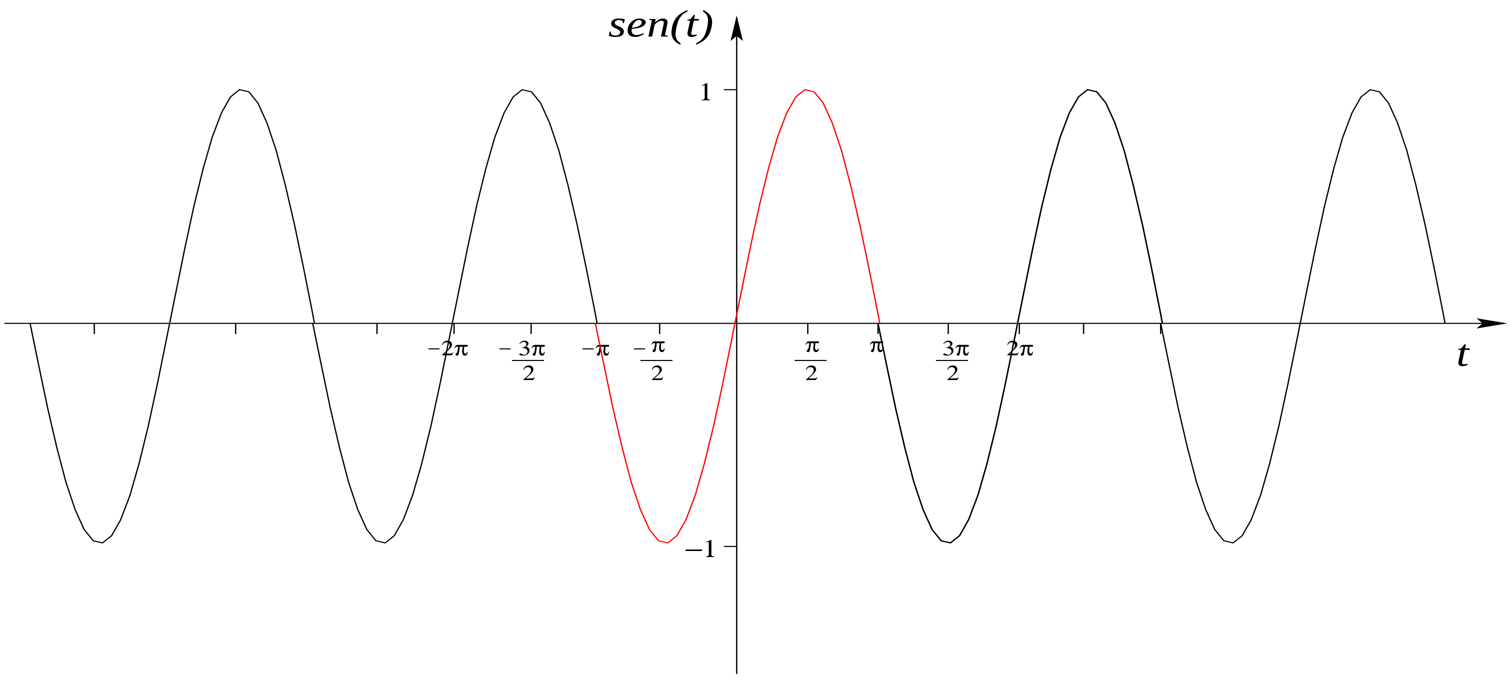
Definición: Función Seno

$$\begin{aligned} sen \; : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \quad [-1,1] \\ t &\longmapsto \quad y = sen\,(t) \end{aligned}$$

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} : \; sen\,(t + 2k\pi) = sen\,(t)$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \; sen\,(-t) = -sen\,(t)$$

GRAFICO DE LA FUNCION SENO



$$\forall\, k \in \mathbb{Z} : sen\,(k\pi) = 0 \;\wedge\; sen\,\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k$$

Funciones Circulares

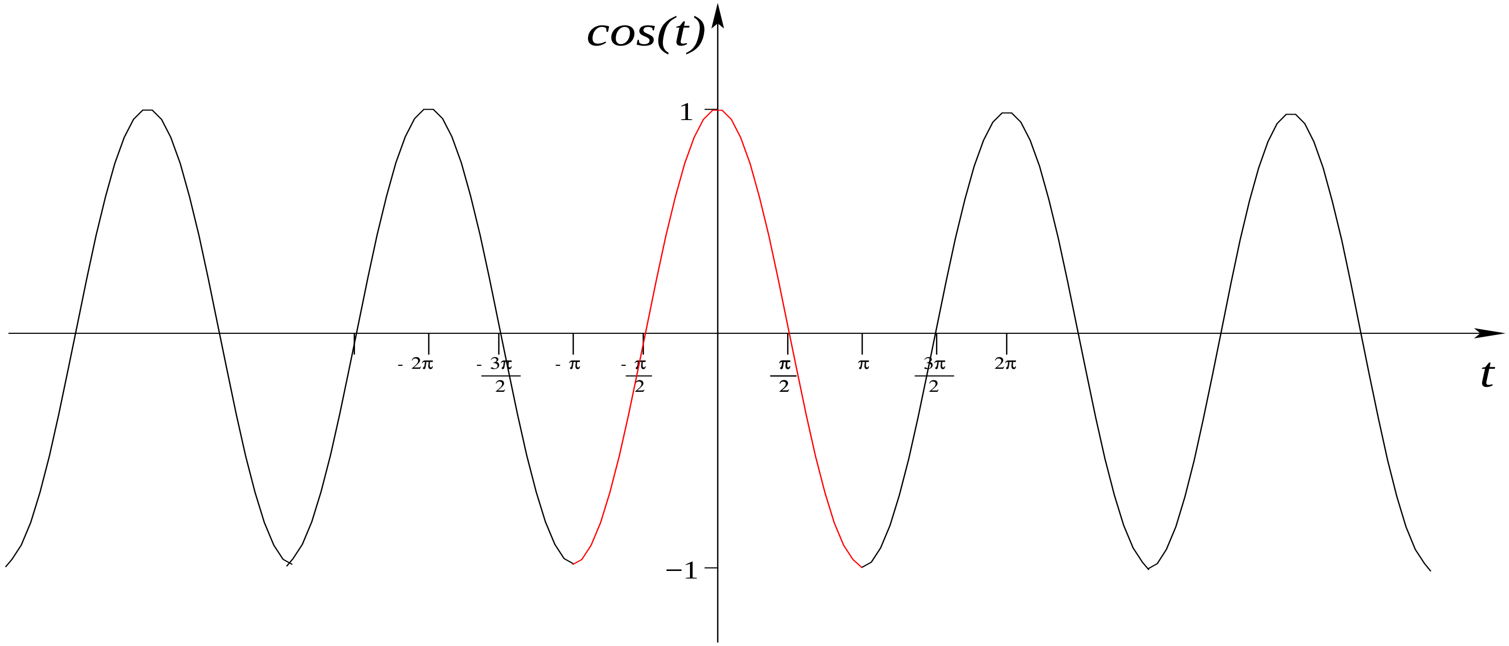
Definición: Función Coseno

$$\begin{array}{rccl} cos & : & \mathbb{R} \longrightarrow & [-1,1] \\ & & t \longmapsto & y = cos\,(t) \end{array}$$

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} :\; cos\,(t + 2k\pi) = cos\,(t)$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\; cos\,(-t) = cos\,(t)$$

GRAFICO DE LA FUNCION COSENO



$$\forall\, k \in \mathbb{Z} : cos\,(\tfrac{(2k+1)\pi}{2}) = 0 \;\wedge\; cos\,(k\pi) = (-1)^k$$

Funciones Circulares

Definición: Función Tangente

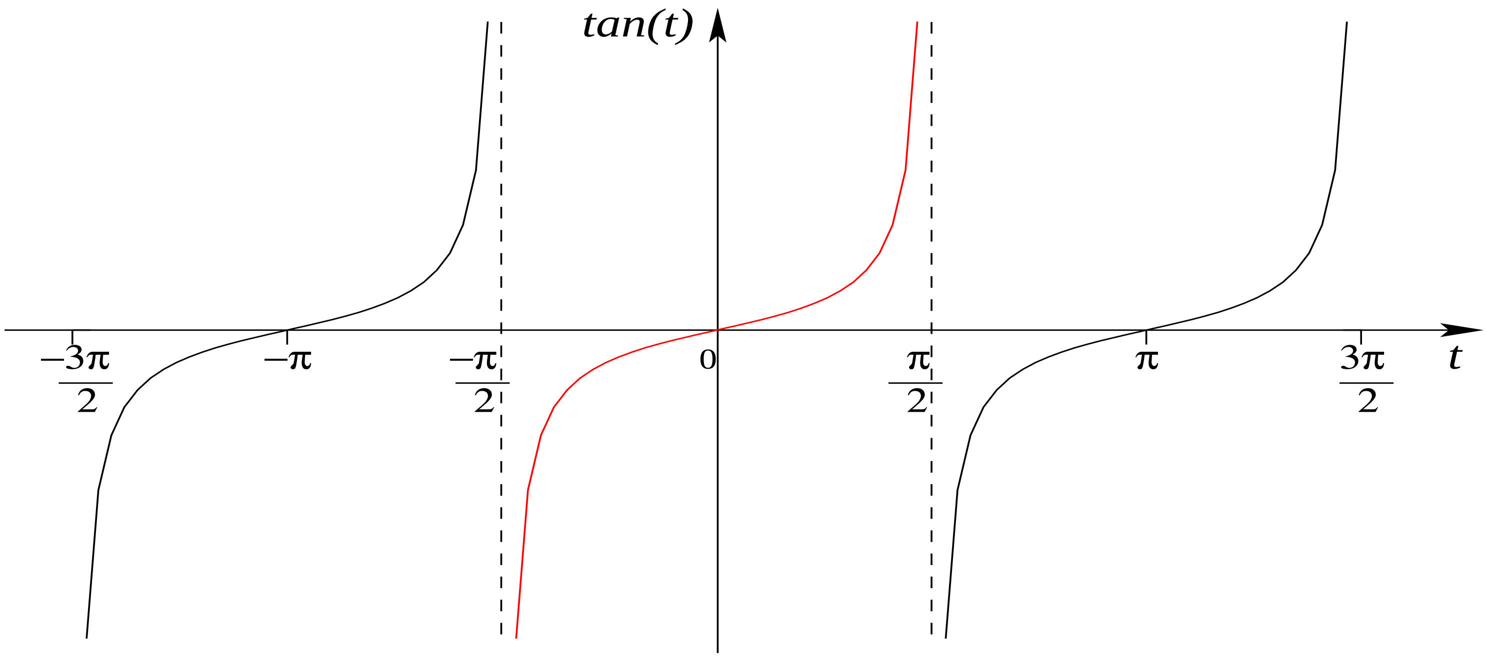
$$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \; : \; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{array}{rcl} \tan \; : \; \mathcal{D} \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y = \tan(t) = \dfrac{sen\,(t)}{cos\,(t)} \end{array}$$

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} : \; \tan(t + k\pi) = tan(t)$$

$$\forall\, t \in \mathcal{D} : \; \tan(-t) = -\tan(t)$$

GRAFICO DE LA FUNCION TANGENTE



Funciones Circulares

Definición: Función Secante

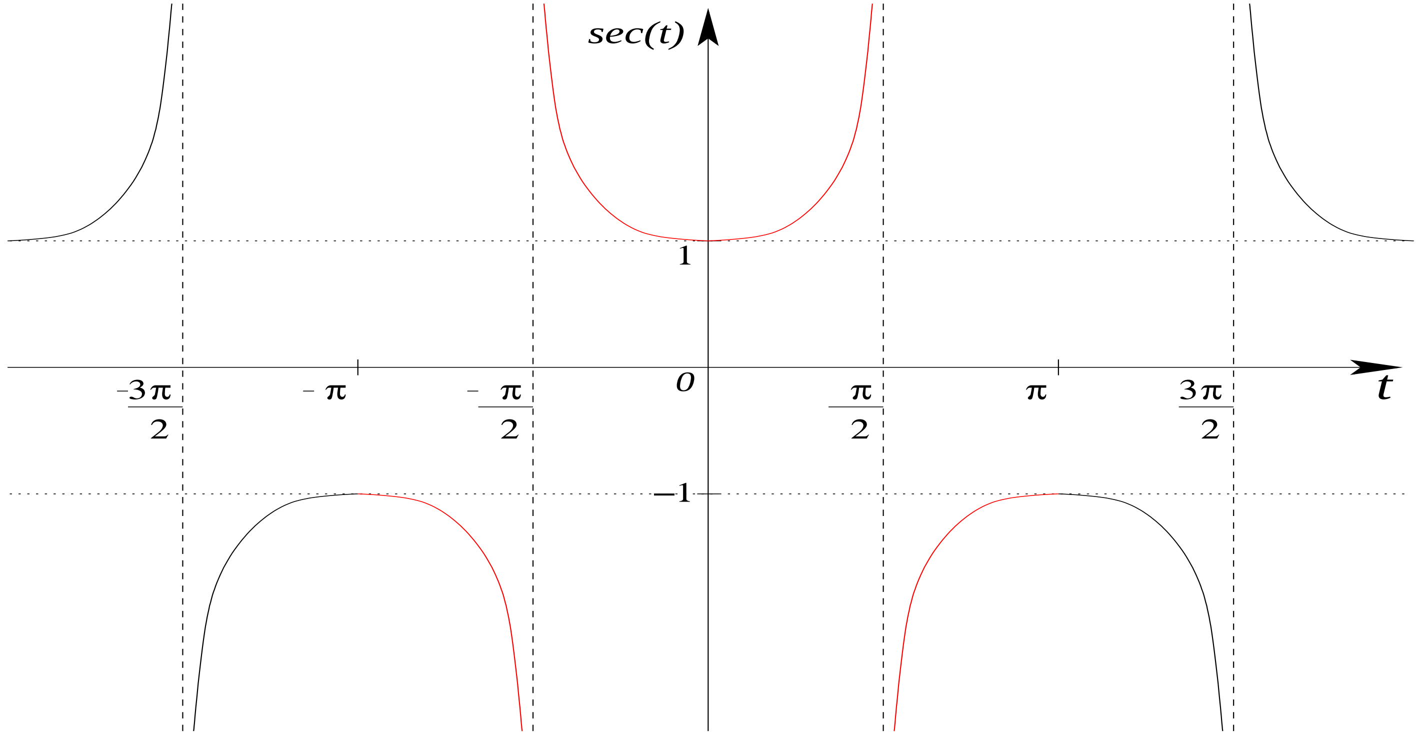
$$sec\ : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left]-1, 1\right[$$

$$t \longmapsto sec\,(t) = \frac{1}{cos\,(t)}$$

- Es 2π-periódica

- Es par

GRAFICO DE LA FUNCION SECANTE



Definición: Función Cosecante

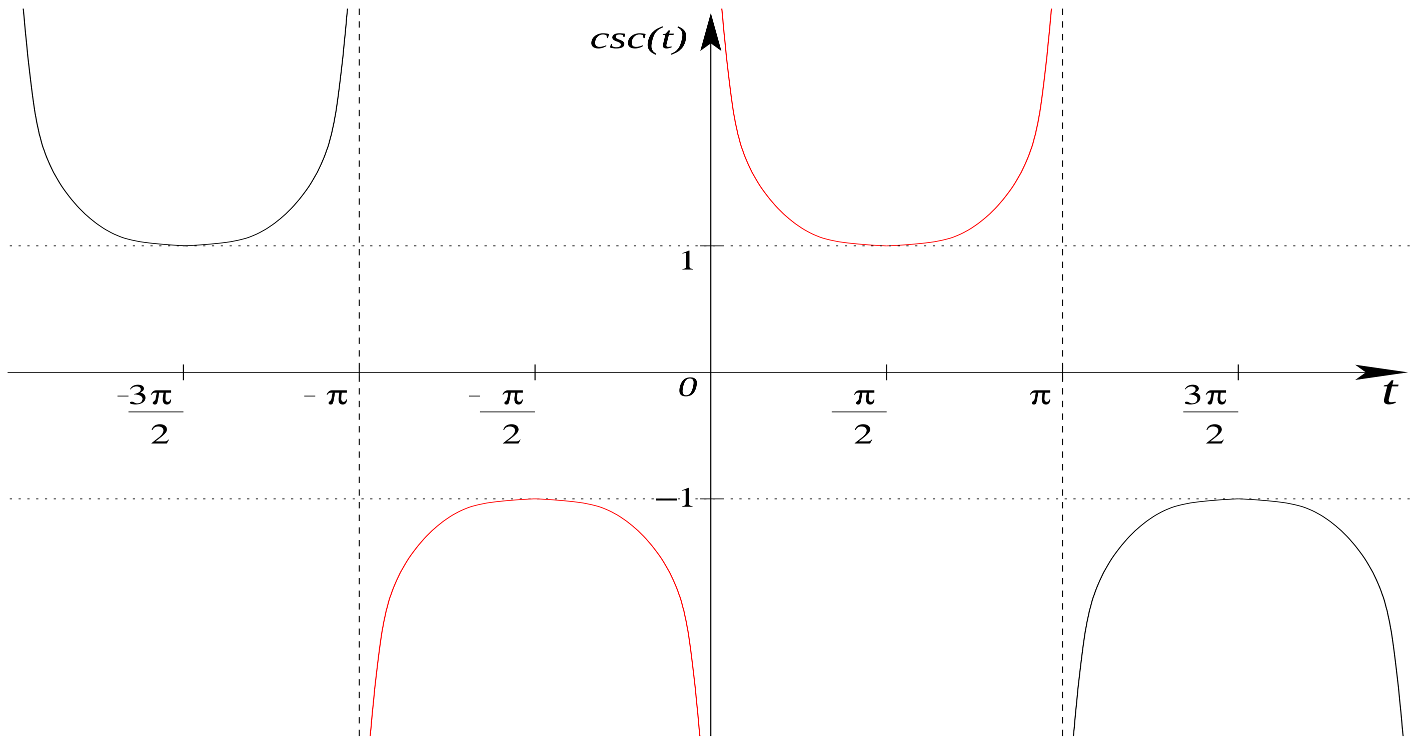
$$csc : \mathbb{R} - \left\{ k\pi : \ k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left] -1, 1 \right[$$

$$t \longmapsto csc\,(t) = \frac{1}{sen\,(t)}$$

- Es 2π-periódica

- Es impar

GRAFICO DE LA FUNCION COSECANTE



Funciones Circulares

Identidades Trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una expresión matemática (una igualdad), cuya característica es la de ser verdadera para todo número real para el cual cada una de las funciones circulares que intervienen en la expresión estén definidas.
Por ejemplo, la identidad fundamental $sen^2(t) + cos^2(t) = 1$ es válida para todo número real t.

Observación

Utilizando las identidades anteriores, la definición de las funciones circulares y las propiedades algebraicas de los números reales se pueden demostrar muchas otras identidades.

Funciones Circulares

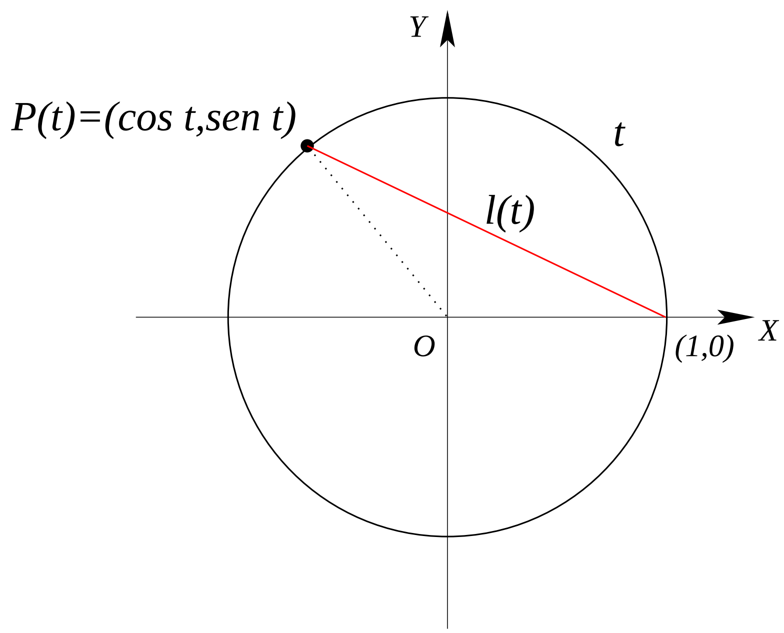
Identidades con sumas y diferencias

Para obtener este tipo de identidades utilizaremos el siguiente resultado.

Proposición

La longitud de una cuerda generada por un arco de circunferencia de longitud t es:

$$l(t) = \sqrt{2 - 2cos\,(t)}.$$

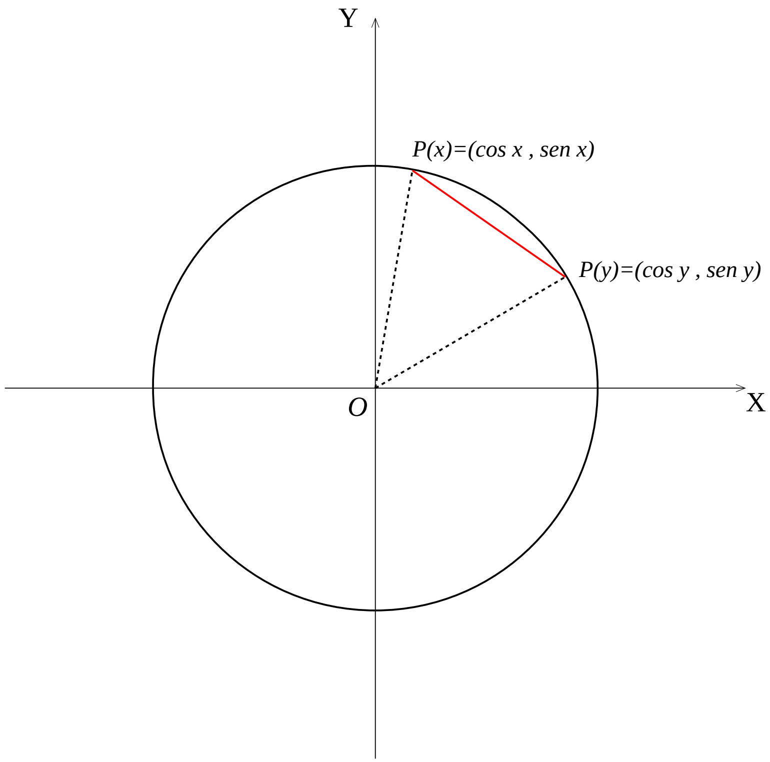


Funciones Circulares

Identidades con sumas y diferencias

Proposición

Para $x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{cos\,(x-y) = cos\,(x) cos\,(y) + sen\,(x) sen\,(y)}$



Funciones Circulares

Identidades con sumas y diferencias

Dados x, $y \in \mathbb{R}$, se cumple que:

- $cos\,(\frac{\pi}{2} - y) = sen\,(y); \quad sen\,(\frac{\pi}{2} - x) = cos\,(x)$
- $cos\,(x + y) = cos\,(x)cos\,(y) - sen\,(x)sen\,(y)$
- $sen\,(x + y) = sen\,(x)cos\,(y) + sen\,(y)cos\,(x)$
- $sen\,(x - y) = sen\,(x)cos\,(y) - sen\,(y)cos\,(x)$
- $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$
- $cos\,(2x) = cos^2(x) - sen\,^2(x)$
- $sen\,(2x) = 2sen\,(x)cos\,(x)$
- $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{sen\,(x)}{(1 + cos\,(x))}$
- $sen\,(x) \cdot cos\,(y) = \frac{1}{2}(sen\,(x + y) + sen\,(x - y))$

Funciones Circulares

Ejemplo Demuestre que

$$\frac{sen\,(x+y)}{sen(x-y)} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{\tan(x)-\tan(y)}$$

Demostración

$$\frac{sen\,(x+y)}{sen(x-y)} = \frac{sen\,(x) cos\,(y) + sen\,(y) cos\,(x)}{sen\,(x) cos\,(y) - sen\,(y) cos\,(x)}$$

$$= \frac{\dfrac{sen\,(x)}{cos\,(x)} + \dfrac{sen\,(y)}{cos\,(y)}}{\dfrac{sen\,(x)}{cos\,(x)} - \dfrac{sen\,(y)}{cos\,(y)}}$$

$$= \frac{\tan(x)+\tan(y)}{\tan(x)-\tan(y)}$$

Inversa de las funciones circulares

La función $sen\ : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$, no es inyectiva. En consecuencia, su relación inversa, denotada por $arcsen$ y llamada **arcoseno**,

$$x \quad arcsen \quad y \Longleftrightarrow x = sen(y)$$

no es una función.
La restricción de seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es inyectiva:

$$Sen : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1], \quad x \mapsto y = sen\,(x).$$

Luego tiene inversa. Su inversa es la función Arcoseno (parte principal) denotada por $Arcsen$.

$$Arcsen\ : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad y \mapsto x = Arcsen\,(y)$$

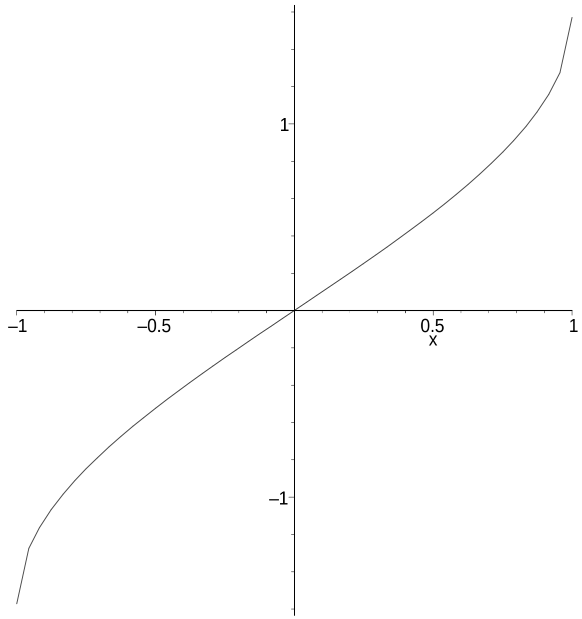
Funciones Circulares

Definición: Función Arcoseno

$$\begin{aligned} Arcsen \quad : \quad & [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x \longmapsto y = Arcsen\,(x) \end{aligned}$$

con: $y = Arcsen\,(x) \iff x = sen\,(y), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOSENO



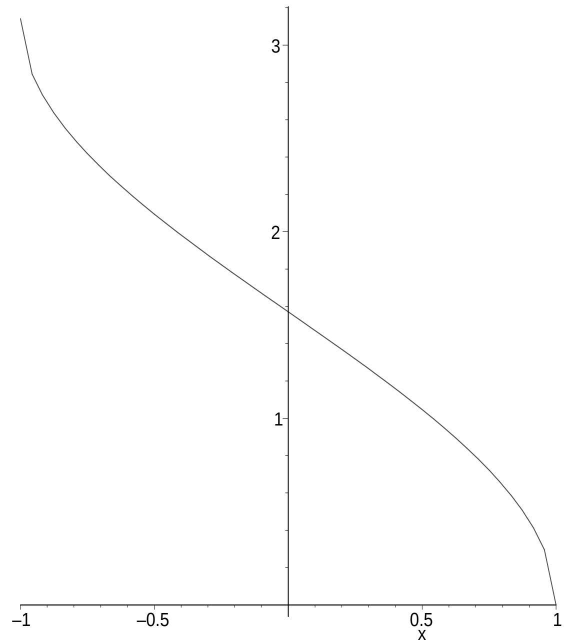
Funciones Circulares

Definición: Función Arcocoseno

$$\begin{aligned} Arccos \quad &: \quad [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \\ & \quad x \longmapsto y = Arccos\,(x) \end{aligned}$$

con: $\quad y = Arccos\,(x) \Longleftrightarrow x = cos\,(y), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOCOSENO



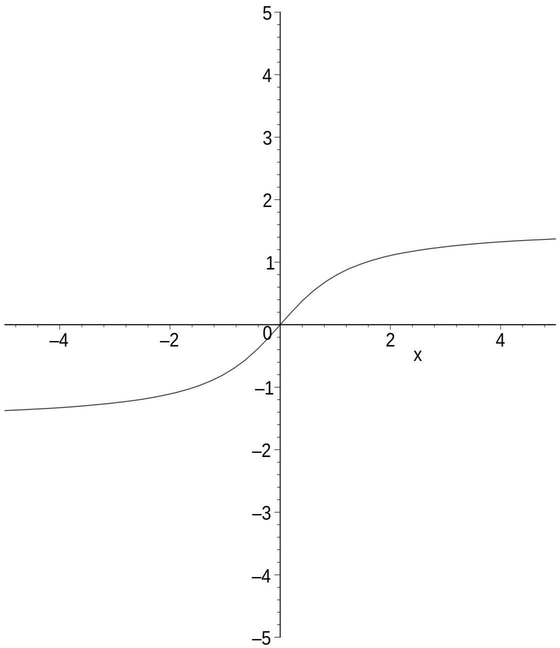
Funciones Circulares

Definición: Función Arcotangente

$$\begin{aligned} Arctg \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ & x \longmapsto y = Arctg\,(x) \end{aligned}$$

con: $\quad y = Arctg\,(x) \Longleftrightarrow x = tg\,(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOTANGENTE

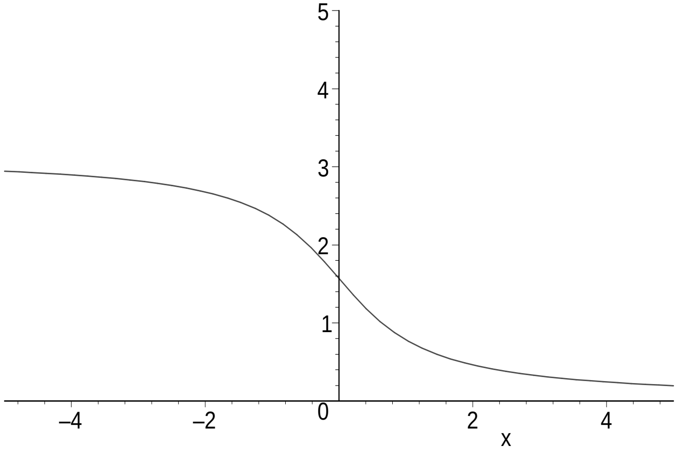


Definición: Función Arcocotangente

$$\begin{aligned} Arccot \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow]0,\pi[\\ & x \longmapsto y = Arccot\,(x) \end{aligned}$$

con: $y = Arccot\,(x) \Longleftrightarrow x = cot\,(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < \pi.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOCOTANGENTE



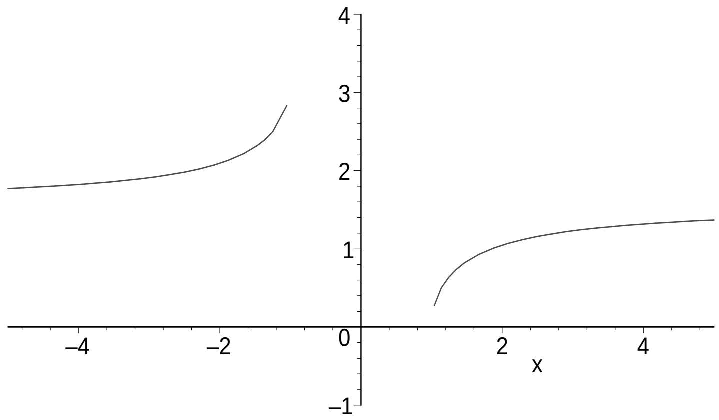
Funciones Circulares

Definición: Función Arcosecante

$$\begin{aligned} Arcsec \quad : \quad & \mathbb{R}-]-1,1[\longrightarrow [0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ & x \longmapsto y = Arcsec\,(x) \end{aligned}$$

con: $\quad y = Arcsec\,(x) \Longleftrightarrow x = sec\,(y), \quad |x| \geq 1, \quad y \in [0,\pi]-\{\frac{\pi}{2}\}.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOSECANTE

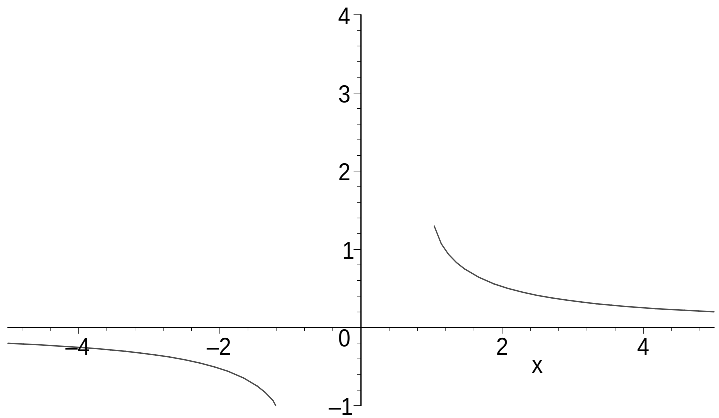


Definición: Función Arcocosecante

$$Arccsc \quad : \quad \mathbb{R}-]-1,1[\longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]-\{0\}$$
$$x \longmapsto y = Arccsc\,(x)$$

con: $\quad y = Arccsc\,(x) \Longleftrightarrow x = csc\,(y), \quad |x| \geq 1, \quad y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]-\{0\}.$

GRAFICO DE LA FUNCION ARCOCOSECANTE



Funciones Circulares

Uso de las funciones inversas

Si $cos\,(x) = a$, con $|a| \leq 1$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

- Si x está en `I` o `II`, $x = Arccos\,(a) + 2k\pi$.
- Si x está en `III` o `IV`, $x = -Arccos\,(a) + 2k\pi$.

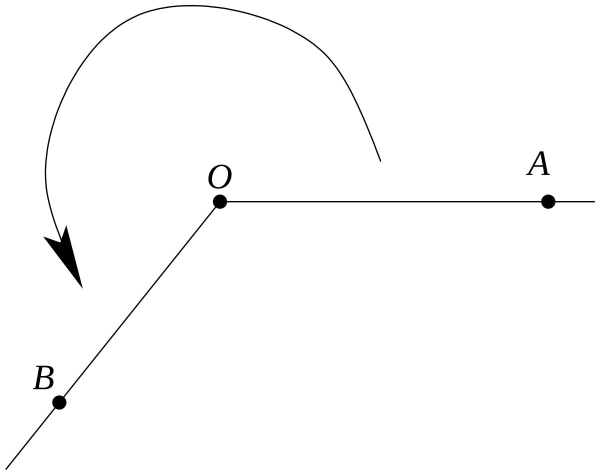
Si $sen\,(x) = b$, con $|b| \leq 1$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

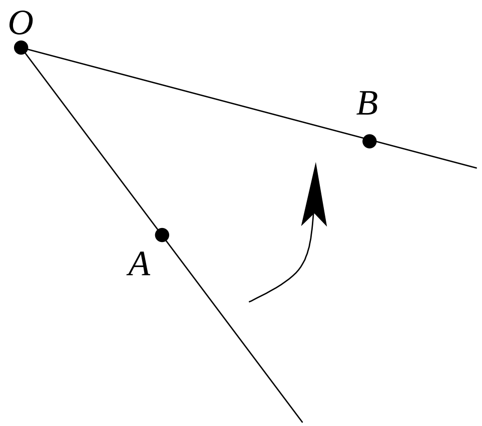
- Si x está en `I` o `IV`, $x = Arcsen\,(b) + 2k\pi$.
- Si x está en `II` o `III`, $x = \pi - Arcsen\,(b) + 2k\pi$.

Funciones Circulares

Definición: Angulo Un ángulo $\angle AOB$ consiste en la semirecta que parte en O y pasa por A, llamada **lado inicial** y la semirecta que parte en O y pasa por B, llamada **lado terminal**.

Si $\overline{OA}$ está sobre el semieje $\overline{OX}$, entonces se dice que el ángulo está en **posición normal o standar**.





Funciones Circulares

Medida de ángulos

A cada ángulo $\angle AOB$ se asocia un número real $m(\angle AOB)$ llamado **medida del ángulo**, denotada por α, β, γ o θ.

Sistema Sexagesimal (en grados) y **Sistema Circular o Radial** (en radianes), para medir ángulos.

- **Un Grado** es la medida de un ángulo que subtiende a un arco de longitud igual a $\frac{1}{360}$ del perímetro de una circunferencia. Así, la circuferencia corresponde a un ángulo de 360^o.

- **Un Radian** es la medida de un ángulo que subtiende a un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Así, la circunferencia corresponde a un ángulo de 2π radianes.

Funciones Circulares

Sistema Radial

La medida de un ángulo $R(\angle AOB)$ en Radianes es igual a la longitud del arco de circunferencia subtendido por el ángulo en la circunferencia de radio 1 y centro O, recorriéndolo en sentido antihorario y partiendo del lado inicial.

Sistema Sexagesimal

De la relación:

$$360 \text{ Grados Sexagesimales } = 2\pi \text{ Radianes}$$

se deduce que la medida de un ángulo $S(\angle AOB)$ en Grados Sexagesimales está dada por:

$$S(\angle AOB) = \frac{180}{\pi} R(\angle AOB).$$

Funciones Circulares

Funciones Circulares sobre un ángulo

Dado un ángulo en posición normal de medida α en radianes, y un punto (x, y) sobre su lado final, se cumple que el punto $P(\alpha) = (cos\,(\alpha), sen\,(\alpha))$ está también sobre su lado final y si $r = d((0,0),(x,y))$, por el teorema de Thales se obtiene:

$$\frac{y}{sen\,(\alpha)} = \frac{r}{1}, \qquad \frac{x}{cos\,(\alpha)} = \frac{r}{1},$$

de donde:

$\boxed{sen\,(\alpha) = \frac{y}{r}}$

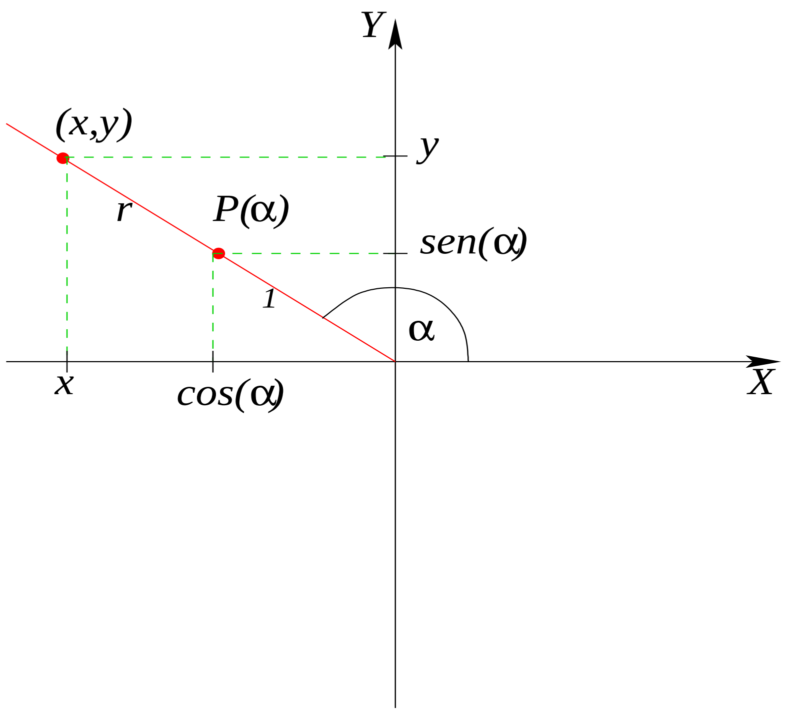
$\boxed{cos\,(\alpha) = \frac{x}{r}}$

$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{y}{x}}$

$\boxed{cot\,(\alpha) = \frac{x}{y}}$

$\boxed{sec\,(\alpha) = \frac{r}{x}}$

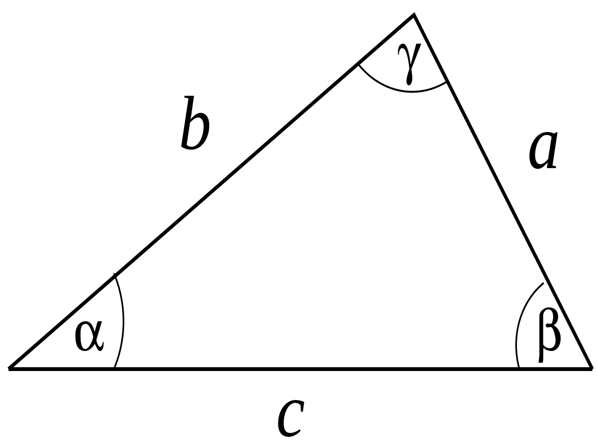
$\boxed{csc\,(\alpha) = \frac{r}{y}.}$



Teorema de los senos

Los lados a, b y c de un triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos α, β y γ. Es decir:

$$\boxed{\frac{a}{sen\,(\alpha)} = \frac{b}{sen\,(\beta)} = \frac{c}{sen\,(\gamma)}.}$$



Funciones Circulares

Teorema de los cosenos

En un triángulo de lados a, b y c y ángulos opuestos α, β y γ, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman. Esto es:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\left(\alpha\right)}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\left(\beta\right)}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\left(\gamma\right)}$$

Función Sinusoidal

Sean $A, w > 0$ y $\phi \in \mathbb{R}$. A la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = A\, sen\,(wx + \phi), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

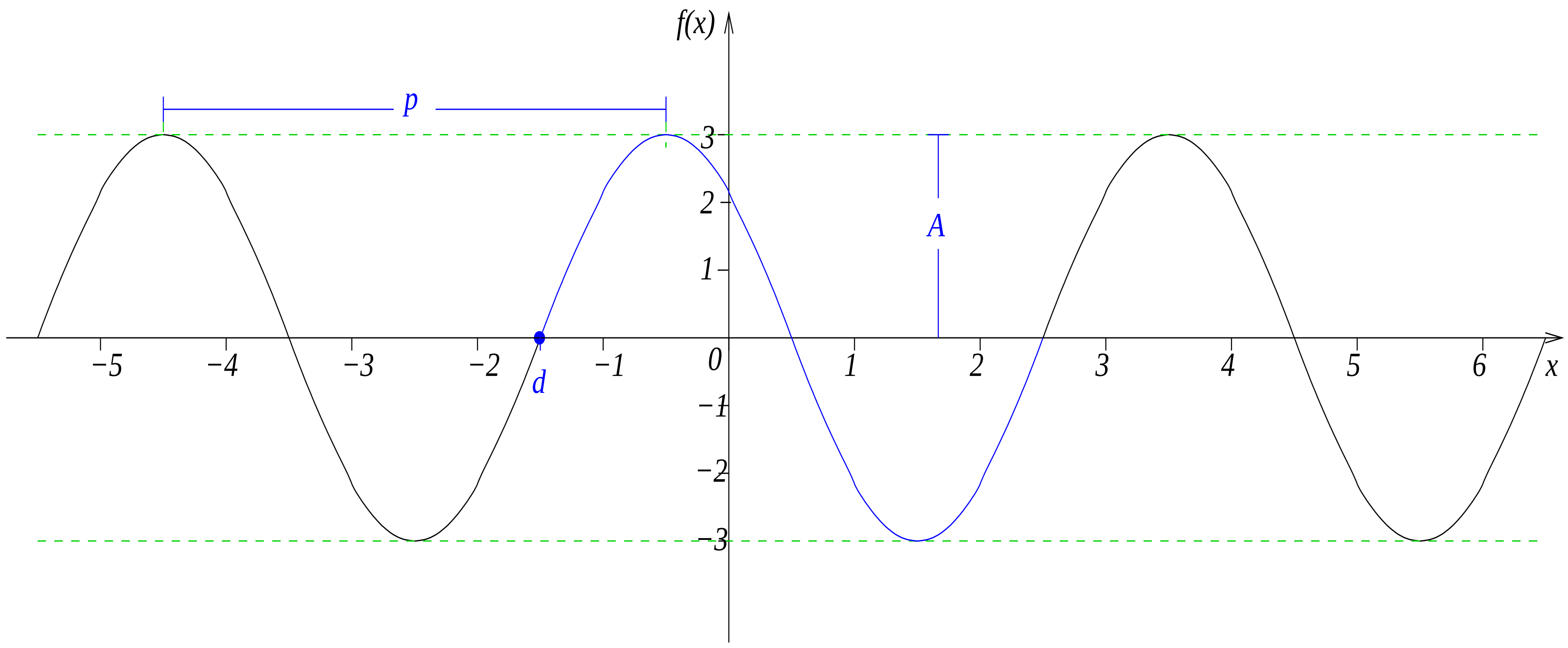
se le llama **Función Sinusoidal**, y su gráfica se llama **Curva Sinusoidal o Sinusoide**.

- Es periódica y su **Periodo** es $p = \dfrac{2\pi}{w}$.
- Se llama **Amplitud** de la función al valor A.
- Se llama **Desplazamiento de Fase** de la función al valor $d = \dfrac{-\phi}{w}$
- Se llama **Frecuencia Angular** de la función al valor w.
- Se llama **Fase** de la función al valor $-\phi$.

Funciones Circulares

La siguiente figura muestra la gráfica de la función definida por:

$$f(x) = 3sen\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{4}\right).$$



Funciones Circulares

Teorema. Sean $p, q, b \in \mathbb{R}$. Entonces existen $A, \phi \in \mathbb{R}$ tales que:

$$p\ sen\,(bx) + q\ cos\,(bx) = A\ sen\,(bx + \phi)$$

Observaciónes.

- La función $g(x) = Acos\,(wx + \phi)$ también es una función sinusoidal.
- Si $b < 0$ o $C < 0$, la función $h(x) = Csen\,(bx + \phi)$ también es una función sinusoidal.

Ejemplo 1 Encuentre el conjunto solución de:

$$sen\,(x) > \sqrt{3}\,cos\,(x), \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Solución La inecuación es equivalente a

$$\frac{1}{2}sen\,(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}cos\,(x) > 0$$

Como

$$sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = sen\,(x) cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - sen\left(\frac{\pi}{3}\right) cos\,(x) = \frac{1}{2}sen\,(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}cos\,(x)$$

la inecuación queda:

$$sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

Funciones Circulares

Además,

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \iff \frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}.$$

Luego, $sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0 \iff \frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{3} < \pi \iff \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{4\pi}{3}.$

Ejemplo 2 Determine la o las soluciones de la siguiente ecuación

$$Arcsen(x+1) + Arcsen(x) = \frac{\pi}{2}$$

Solución Sean $\alpha = Arcsen(x+1)$; $\beta = Arcsen(x)$ entonces $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Además

$$\begin{array}{l} sen(\alpha) = x+1 \\ sen(\beta) = x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} cos(\alpha) = \sqrt{1-(x+1)^2} \\ cos(\beta) = \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

Funciones Circulares

Como $\alpha + \beta \in [-\pi, \pi]$; de $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ podemos obtener

$$cos(\alpha + \beta) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$$

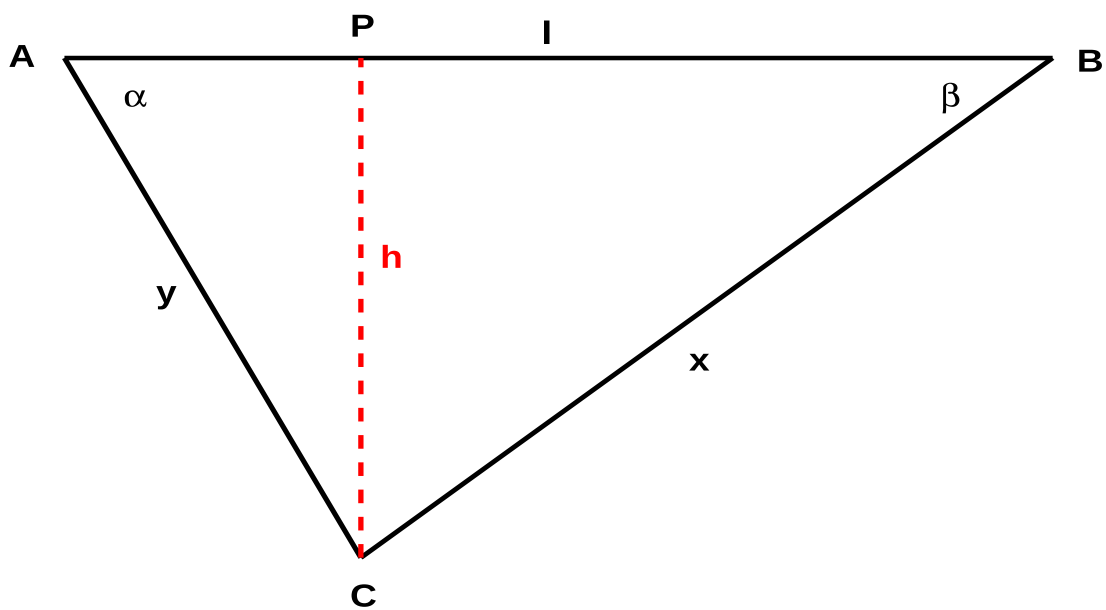
$$\begin{aligned}
\sqrt{1-(x+1)^2}\,\sqrt{1-x^2} - (x+1)x &= 0 \\
\Rightarrow \sqrt{1-(x+1)^2}\,\sqrt{1-x^2} - (x+1)x &= 0 \\
\Rightarrow \sqrt{[1-(x+1)^2](1-x^2)} &= x(x+1) \\
\Rightarrow [1-(x+1)^2][1-x^2] &= [x(x+1)]^2 \\
\Rightarrow -2x(x+1) &= 0 \\
\Rightarrow x = 0;\ \ x &= -1
\end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación original vemos que la única solución es $x = 0$.

Ejemplo 3 Un puente de ferrocarril mide l metros de largo. Desde uno de sus extremos el ángulo de depresión de una roca situada directamente abajo del puente es α y desde el otro extremo el ángulo de depresión de la roca es β. Muestre que la altura del puente sobre la roca es:

$$h = \frac{l sen\,(\alpha) sen\,(\beta)}{sen\,(\alpha + \beta)}$$

Solución



Funciones Circulares

Aplicando teorema de los senos al triángulo ACB tenemos:

$$\frac{l}{sen\,(\pi-\alpha-\beta)}=\frac{x}{sen\,(\alpha)}\Longrightarrow x=\frac{l\,sen\,(\alpha)}{sen\,(\pi-\alpha-\beta)}$$

Por definición de seno en el triángulo CBP y reemplazando obtenemos:

$$h=\frac{lsen\,(\alpha)sen\,(\beta)}{sen\,(\pi-\alpha-\beta)}.$$

Como $sen\,(\pi-\alpha-\beta)=sen\,(\alpha+\beta)$ tenemos lo pedido.