UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142.

PRACTICA 24. Aplicaciones Lineales.

Problema 1. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $T : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Demuestre que
1.1) $T(\theta_V) = \theta_W$, 1.2) $T(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(v_j)$, $\alpha_j \in \mathbb{K}, v_j \in V, j = 1, ..., n$.

Problema 2. Demuestre que las siguientes aplicaciones son lineales:
2.1) La proyección ortogonal P definida entre un espacio vectorial V con producto interior y un subespacio S, **[En práctica 2.1, 2.5]**

$$P : V \longrightarrow S, \quad v \mapsto P(v) = proy_S v = \sum_{j=1}^{p} \frac{< v, x_j >}{||x_j||} x_j,$$

donde $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ es una base ortogonal del subespacio S.

En particular defina la aplicación lineal proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano XY y encuentre $P(1, 2, 3)$.
2.2) El operador de transposición definida por:

$$T : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), \quad A \mapsto T(A) = A^t.$$

2.3) El operador integral definido por:

$$T : \mathcal{C}[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto T(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

2.4) El operador diferencial definido por:

$$D : \mathcal{C}^1[a, b] \longrightarrow \mathcal{C}[a, b], \quad f \mapsto D(f) = f'.$$

2.5) La multiplicación por la matriz R_α, donde $\mathrm{R}_\alpha = \begin{pmatrix} cos\ (\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & cos\ (\alpha) \end{pmatrix}$, llamada rotación en un ángulo α en el plano. Es decir:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto T(v) = R_\alpha \cdot v.$$

Problema 3. Sea T la multiplicación por la matriz A, con **[En práctica]**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1) Demuestre que la imagen de T, $Im(T)$, es un plano que pasa por el origen. Encuentre su vector normal.

3.2) Demuestre que su núcleo, $Ker(T)$, es una recta que pasa por el origen. Encuentre sus ecuaciones paramétricas.

Problema 4. En cada caso determine si la aplicación es lineal:**[En práctica 4.1, 4.4]**
4.1) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y) = (3x + 2y, x - y, 4x + 5)$.
4.2) $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(a + bx + cx^2) = (a, b, c)$.
4.3) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto T(A) = a_{11}^2 + a_{12}^2$, con $A = (a_{ij}), i = 1, 2, j = 1, 2$.
4.4) $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R}), \quad T(1) = 1 + x, T(x) = 3 - x^2, T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$.

Problema 5. Sea T_i la multiplicación por la matriz A_i, $i = 1, 2, 3$, con

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encuentre una base para los subespacios $Im(T_i)$ y $Ker(T_i)$. Además, el rango y la nulidad de $T_i, \quad i = 1, 2, 3$.

Problema 6. Encuentre la matriz asociada a las aplicaciones lineales del problema 4, en las bases canónicas correspondientes.

Problema 7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases $B_1 = \{(2, 0, 0); (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$y $B_2 = \{(1, 1, 0); (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ es:

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.1) Determine la ecuación de definición de T.

7.2) Caracterice el núcleo y la imagen de T e indique la nulidad y el rango de T.

7.3) Diga si T es inyectiva. **[En práctica]**

Problema 8. Para la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x + y, z, x + z).$$

Encuentre la imagen mediante T de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$
8.1) $S_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$. 8.2) $S_2 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
En cada caso indique la dimensión de su imagen por T.

08.11.2002.
ACQ/LNB/acq.