UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

CERTAMEN N^0 5
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142)

P1. (15 Ptos.) Considere sobre el intervalo $[-1,1]$ el espacio $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con el producto interior usual de funciones:

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx\,.$$

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal de este espacio partiendo del conjunto $\{1,x,x^2,x^3\}$.

Solución:

Definamos $u_1(x)=1$, $u_2(x)=x$; $u_3(x)=x^2$ *y* $u_4(x)=x^3$.

El primer vector de la base ortogonal, según el proceso de Gram-Schmidt es:

$v_1(x)=u_1(x)=1.$

El segundo es:

$v_2(x)=u_2(x)-\frac{<u_2(x),v_1(x)>}{||v_1(x)||^2}v_1(x)$

entonces calculamos:

$<u_2(x),v_1(x)>=\int_{-1}^{1}u_2(x)v_1(x)dx=\int_{-1}^{1}xdx=0$

de donde:

$v_2(x)=u_2(x)=x.$

El tercero es:

$v_3(x)=u_3(x)-\frac{<u_3(x),v_1(x)>}{||v_1(x)||^2}v_1(x)-\frac{<u_3(x),v_2(x)>}{||v_2(x)||^2}v_2(x)$

entonces calculamos:

$<u_3(x),v_1(x)>=\int_{-1}^{1}u_3(x)v_1(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{-1}{3}=\frac{2}{3}$

$||v_1(x)||^2=<v_1(x);v_1(x)>=\int_{-1}^{1}v_1(x)v_1(x)dx=\int_{-1}^{1}1dx=2$

$<u_3(x),v_2(x)>=\int_{-1}^{1}u_3(x)v_2(x)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=0$

de donde:

$v_3(x)=u_3(x)-\frac{1}{3}v_1(x)=x^2-\frac{1}{3}.$

El cuarto es:

$v_4(x)=u_4(x)-\frac{<u_4(x),v_1(x)>}{||v_1(x)||^2}v_1(x)-\frac{<u_4(x),v_2(x)>}{||v_2(x)||^2}v_2(x)-\frac{<u_4(x),v_3(x)>}{||v_3(x)||^2}v_3(x)$

entonces calculamos:

$<u_4(x),v_1(x)>=\int_{-1}^{1}u_4(x)v_1(x)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=0$

$<u_4(x),v_2(x)>=\int_{-1}^{1}u_4(x)v_2(x)dx=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}$

$||v_2(x)||^2 = \int_{-1}^{1} v_2(x)v_2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$

$< u_4(x), v_3(x) >= \int_{-1}^{1} u_4(x)v_3(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3(x^2 - \frac{1}{3})dx = \int_{-1}^{1}(x^5 - \frac{1}{3}x^3)dx = 0$

de donde:

$v_4(x) = x^3 - \frac{3}{5}x.$

La base ortogonal es: $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x\}$*. Ahora podemos ortonormalizarla; para ello calculamos las normas de cada vector:*

$||v_1||^2 = 2$

$||v_2(x)||^2 = \frac{2}{3}$

$||v_3(x)||^2 = \int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{18-10}{45} = \frac{8}{45}$

$||v_4(x)||^2 = \int_{-1}^{1}(x^3 - \frac{3}{5}x)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2 dx = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{18}{75} = \frac{50-42}{175} = \frac{8}{175}$

De donde finalmente la base ortonormal es:

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3}), \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(x^3 - \frac{3}{5}x)\right\}.$

P2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$(a,b,c) \longmapsto T(a,b,c) \;=\; (a+b) + cx\,.$$

a) **(6 ptos)** Caracterice $Ker(T)$ y dé una base para él.

Solución:

$Ker(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : T(a,b,c) = 0\}$
$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (\forall x \in \mathbb{R})\ (a+b) + cx = 0\}$
$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b = 0 \wedge c = 0\}$

La que es una caracterización de $Ker(T)$.

Para obtener una base, continuamos:

$Ker(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = -b \wedge c = 0\}$
$= \{(-b,b,0) : b \in \mathbb{R}\}$
$= \{b(-1,1,0) : b \in \mathbb{R}\}$
$=< \{(-1,1,0)\} >$.

$\{(-1,1,0)\}$ *es una base de* $Ker(T)$.

b) **(4 ptos)** Calcule $r(T)$.

Solución:

Por el teorema de la dimensión se tiene: $dim(\mathbb{R}^3) = n(T) + r(T)$

En este caso $n(T) = dim(Ker(T)) = 1$, *y* $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ *así podemos despejar:*

$r(T) = 3 - 1 = 2$.

P3. Sea $B = \left\{ \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el operador lineal tal que

$$T\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = (1,0)\ ,\ T\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = (0,1)\,.$$

a) Caracterice el operador T.

Solución:

Para ello necesito expresar un vector arbitrario (x,y) en función de la base B, esto es encontrar las coordenadas de (x,y) en la base B, o dicho de otra manera, encontrar α y β tales que:

$(x,y) = \alpha(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) + \beta(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

Esta ecuación da lugar al sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta & = & x \\ -\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta & = & y \end{array}\right|$$

Cuya solución es: $\alpha = 2x + y$ y $\beta = 2y + x$. Luego:

$T(x,y) = T(\alpha(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) + \beta(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) = \alpha T(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) + \beta T(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) =$
$(2x+y)(1,0) + (2y+x)(0,1) = (2x+y, 2y+x)$ **(6 ptos.)**

b) Calcule la matriz de paso de la base canónica $B_c = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ a la base B.

Solución:

Para esto tengo que calcular las coordenadas de los vectores de la base canónica en la base B. Tal cálculo ya lo hice en la pregunta anterior para un vector arbitrario (x,y), obteniendo:

$[(x,y)]_B = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{pmatrix}.$

Entonces: $[(1,0)]_B = \binom{2}{1}$ y $[(0,1)]_B = \binom{1}{2}$ y éstas son las columnas de la matriz que se pide:

$$[Id]_{B_c}^{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4 ptos.)

c) Calcule $[T]_B^B$.

Solución:

Las columnas de $[T]_B^B$ son las coordenadas de $T(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ y $T(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ con respecto a la base B, en este caso son las coordenadas de $(1,0)$ y $(0,1)$, que ya calculamos en la parte anterior, por lo tanto:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4 ptos.)

d) Diagonalice la matriz $[T]_B^B$.

Solución:

Calculemos primero el polinomio característico de $[T]_B^B$*:*

$det([T]_B^B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 3 - 4\lambda + \lambda^2.$

Cuyas raíces son: 3 y 1. Calculemos los espacios propios:

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ \binom{x}{y} : 2x + y = 3x \wedge x + 2y = 3y \right\}$

$= \left\{ \binom{x}{y} : x = y \right\}$

$= \left\{ \binom{x}{x} : x \in \mathbb{K} \right\}$

$=< \left\{ \binom{1}{1} \right\} >.$

$S_1 = \left\{ \binom{x}{y} : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \binom{x}{y} = 1 \binom{x}{y} \right\}$

$= \left\{ \binom{x}{y} : 2x + y = x \wedge x + 2y = y \right\}$

$= \left\{ \binom{x}{y} : -x = y \right\}$

$= \left\{ \binom{x}{-x} : x \in \mathbb{K} \right\}$

$=< \left\{ \binom{1}{-1} \right\} >.$

(Acá admitimos, para efectos de la evaluación, que $\mathbb{K}$ *pueda ser* $\mathbb{C}$ *o* $\mathbb{R}$*.)*

Así las matrices que diagonalizan a $[T]_B^B$ *son:* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* P^{-1}.

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(6 ptos.)

P4. Sea $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial real con producto interior de dimensión finita, sea $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto interior, y sea $v \in V, v \neq \theta$ fijo. Considere el operador lineal $T : V \to V$ definido por

$$u \longmapsto T(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\, v\,.$$

a) **(5 ptos.)** Demuestre que $\sigma(T) = \{0, 1\}$.
Solución:
Si λ es un valor propio, entonces satisface:

$$\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\, v = \lambda u \tag{1}$$

Lo cual indica que: $u||v$ o bien $0 = \lambda = \langle u, v\rangle$.
Si $u||v$ se tiene que $u = \beta v$, para algún $\beta \in \mathbb{K}$, entonces, reemplazando en la ecuación (1) se obtiene:

$$\frac{\langle \beta v, v\rangle}{\|v\|^2}\, v = \beta\frac{\langle v, v\rangle}{\|v\|^2}\, v = \beta v = u = \lambda u$$

De donde $\lambda = 1$ y $\sigma(T) = \{0, 1\}$.

b) **(5 ptos.)** Muestre que $S_0 = \langle\{v\}\rangle^{\perp}$ y $S_1 = \langle\{v\}\rangle$.
Solución:
$S_0 = \{u \in V : T(u) = 0u\} = \{u \in V : \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\, v\ = \theta\}$
Como $v \neq \theta$, $\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\, v\ = \theta$ implica que $\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} = 0$, lo cual equivale a $\langle u, v\rangle = 0$, es decir $u \perp v$. Es decir:
$S_0 = \{u \in V : u \perp v\} = \{v\}^{\perp}$.
Y por propiedad del ortogonal: $\{v\}^{\perp} = \langle\{v\}\rangle^{\perp}$. Q.E.D.
$S_1 = \{u \in V : T(u) = u\} = \{u \in V : \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\, v\ = u\}$
De donde observamos que si $u \in S_1$ entonces $u \in \langle\{v\}\rangle$, e.d., $S_1 \subseteq \langle\{v\}\rangle$.
Por otra parte, $T(v) = \frac{\langle v,v\rangle}{\|v\|^2}\, v\ = v$, entonces $v \in S_1$, y como S_1 es un subespacio vectorial necesariamente $\langle\{v\}\rangle \subseteq S_1$, de donde se concluye la igualdad.Q.E.D.
Aquí también puede argumentarse que si $S_1 \subseteq \langle\{v\}\rangle$, entonces $1 \leq dim(S_1) \leq 1$, y por lo tanto $S_1 = \langle\{v\}\rangle$.

c) **(5 ptos.)** Utilizando la parte b), demuestre que T es un operador diagonalizable.
Solución:
Se sabe que $\langle\{v\}\rangle^{\perp} \oplus \langle\{v\}\rangle = V$, entonces por la parte b) vemos que $S_0 \oplus S_1 = V$. Lo que por teorema implica que T es diagonalizable.