SENSIBILIDAD DE LA SOLUCION

Sea el sistema $Ax = b$ y δb una pequeña perturbación de b y sea $x + \delta x$ la solución de $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Entonces,

$$\delta x = A^{-1}\delta b.$$

Por otra parte, por la propiedad de compatibilidad de normas:

$$||\delta x|| \leq ||A^{-1}||||\delta b|| \qquad (1)$$

y

$$||A||\ ||x|| \geq ||b|| \Longrightarrow \frac{||A||}{||b||} \geq \frac{1}{||x||}. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene:

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq ||A||\ ||A^{-1}|| \frac{||\delta b||}{||b||}.$$

El número $K(A) = \mu := ||A||\ ||A^{-1}||$ se llama **número de condición de A** y se tiene

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \mu \frac{||\delta b||}{||b||}.$$

Esta ecuación nos entrega un límite superior del error relativo en la solución x debido a la perturbación δb en el vector de términos independientes.

Observación

- A mayor μ mayor error relativo.
- Cuando μ es ***grande*** el sistema se dice **mal condicionado**.
- Cuando μ es ***pequeño*** el sistema se dice **bien condicionado**.

Ejemplo: Para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{99}{100} \\ \frac{99}{100} & \frac{99}{100} \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} \frac{199}{100} \\ \frac{197}{100} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{100} \end{bmatrix}$$

se encuentra

$$\frac{||\delta x||_2}{||x||_2} \leq \mu \frac{||\delta b||_2}{||b||_2} \leq 1{,}4001 \times 10^2, \quad \frac{||\delta x||_2}{||x||_2} = 9{,}9505.$$

Análogamente para una perturbación en A, se puede probar que

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b$$

con

$$\frac{||\delta x||}{||x + \delta x||} \leq \mu \frac{||\delta A||}{||A||}$$

Ejemplo: Para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{99}{100} \\ \frac{99}{100} & \frac{49}{50} \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} \frac{199}{100} \\ \frac{197}{100} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} \end{bmatrix}$$

se tiene que $\mu(A) = 3{,}9206 \times 10^4,\ ||\delta A||_2 = 10^{-2},\ ||A||_2 = 1{,}9801$ de donde

$$\frac{||\delta x||_2}{||x + \delta x||_2} \leq 1{,}9800 \times 10^2.$$

TEOREMA

Sea A no singular y una perturbación δA tal que

$$||\delta A|| < \frac{1}{||A^{-1}||}.$$

Entonces, si x es la solución de $Ax = b$, se tiene

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \frac{\mu}{1 - \mu \frac{||\delta A||}{||A||}} \left(\frac{||\delta b||}{||b||} + \frac{||\delta A||}{||A||} \right)$$

donde μ es el número de condición de A

Observación

Note que:

$$1 = ||I|| = ||AA^{-1}|| \leq ||A^{-1}|| \; ||A|| = \mu \Longrightarrow \mu \geq 1.$$