UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA 18: *Espacios y Subespacios Vectoriales*

Problema 1.

a) Sea $\boldsymbol{V} = \mathbb{C}$, espacio vectorial complejo. Demostrar que $\boldsymbol{V}$ también es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, y en este caso interprete gráficamente la operación de multiplicación por escalar.

b) Sea $\boldsymbol{V} = \mathbb{Q}$, espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Mostrar que $\boldsymbol{V}$ no es un espacio vectorial real. (Indicación: construir un contra-ejemplo).

c) Mostrar que $\boldsymbol{V} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ no es *espacio vectorial real*, con respecto a las operaciones binarias usuales. (Indicación: construir un contra-ejemplo).

d) Mostrar que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ no es cuerpo.(Indicación: construir un contra-ejemplo).

[**En Práctica a) y c).**]

Problema 2.

a) Demostrar que el conjunto $\boldsymbol{E}$ de las aplicaciones $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ puede dotarse de manera natural de la estructura de espacio vectorial real.

b) ¿ Cuál de los siguientes subconjuntos de $\boldsymbol{E}$ son subespacios vectoriales?

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E_1} &= \{\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E} :\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \,\} \\
\boldsymbol{E_2} &= \{\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E} :\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \,\} \\
\boldsymbol{E_3} &= \{\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E} :\ \boldsymbol{f} \textit{ es continua} \,\} \\
\boldsymbol{E_4} &= \{\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E} :\ \boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{1}) \,\} \\
\boldsymbol{E_5} &= \{\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E} :\ \boldsymbol{f} \ \textit{ es dos veces derivable y } \ \boldsymbol{f}'' - \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \,\} \\
\boldsymbol{E_6} &= \{\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E} : \boldsymbol{f}(\mathbf{7}) = \mathbf{2} + \boldsymbol{f}(\mathbf{1}) \,\} \\
\boldsymbol{E_7} &= \{\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E} : \boldsymbol{f} \textit{ es integrable Riemann} \,\}
\end{aligned}$$

c) En los casos que sean subespacios vectoriales, ¿ cuál es el vector nulo ? ¿ cuál es el simétrico de un elemento ? ¿ cómo se expresa la *ley de cancelación* ? Exhibir al menos un vector no nulo (salvo para $\boldsymbol{E_5}$, que es contenido del curso de EDO.)

[**En Práctica a), b) ($\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_4}$ y $\boldsymbol{E_5}$) y c).**]

Problema 3.

a) Demostrar que el conjunto $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\mathcal{M}_{3x3}}(\mathbb{Q})$ puede dotarse de manera natural de la estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Recordar que dos matrices $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ y $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})$ del mismo orden $\boldsymbol{n}$ son iguales sí y sólo sí, $\boldsymbol{a_{ij} = b_{ij}} \quad \boldsymbol{i, j = 1, \ldots, n}$.

b) Muestre que $\quad \boldsymbol{E_1} = \{\ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{3x3}}(\mathbb{Q}) : \text{traza}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\theta} := \frac{0}{1}\ \}$ es un $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial de $\boldsymbol{E}$.

[En Práctica b).]

Problema 4.

Determine si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$:

a) $\boldsymbol{W_1} = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^3 : \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}^2\ \}$

b) $\boldsymbol{W_2} = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^3 : \quad \boldsymbol{ab} = \boldsymbol{0}\ \}$

c) $\boldsymbol{W_3} = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^3 : \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{3b} = \boldsymbol{2c}\ \}$

d) $\boldsymbol{W_4} = \{\ \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^3 : \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}\ \}$

e) $\boldsymbol{W_5} = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^3 : \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}\ \}$

f) $\boldsymbol{W_6} = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^3 : \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{1}\ \}$

g) $\boldsymbol{W_7} = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^3 : \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\ \}$

h) $\boldsymbol{W_8} = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^3 : \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\ \}$

i) $\boldsymbol{W_9} = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^3 : \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{1}\ \}$

Además, interprete gráficamente $\boldsymbol{W_3}, \boldsymbol{W_4}, \boldsymbol{W_5}, \boldsymbol{W_6}$ y $\boldsymbol{W_9}$.
[En Práctica a) y c).]

Problema 5.

Sea $\boldsymbol{V} = \mathbb{C}$, espacio vectorial complejo, con las operaciones de suma y multiplicación por escalar usuales.

a) Si $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{2cis(\pi/4)}$ y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{2} + \boldsymbol{3i}$, represente gráficamente $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{v}$.

b) Demostrar que $\boldsymbol{V} = \{\ \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{2} + \boldsymbol{3i}) \in \mathbb{C} : \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{C}\ \}$.

c) Dado $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}) \in \mathbb{C}$ arbitrario, ¿Qué puede decir del conjunto

$$\{\ \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}) \in \mathbb{C} : \boldsymbol{t} \in \mathbb{C}\ \}?$$

d) Si $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{v}$ son como en a) y $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{3cis(\pi/3)}$, represente gráficamente $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{v})$ y $(\boldsymbol{\alpha\beta}) \cdot \boldsymbol{v}$.

[En Práctica a) y b).]