Métodos Iterativos

Considere el sistema de ecuaciones

$$Ax = b \tag{1}$$

con A no singular.

Un *método iterativo* para resolver (1) construye, a partir de un vector inicial $x^{(0)}$, una sucesión de vectores $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ la que, bajo apropiadas condiciones resultará convergente a x

Este tipo de métodos es muy usado en la solución numérica de E.D. También cuando A es rala (dispersa).

Si suponemos $A = N - P$, donde N debe ser invertible, entonces

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff (N-P)x = b \\ &\iff Nx = Px + b \\ &\iff x = N^{-1}Px + N^{-1}b \end{aligned} \tag{2}$$

Se usa (2) para definir la sucesión $\{x^{(k)}\}$ como sigue. Dado $x^{(0)}$ y para $k = 1, 2, \ldots$ resolver

$$Nx^{(k)} = Px^{(k-1)} + b. \tag{3}$$

Se definen:

$$\begin{aligned} M &:= N^{-1}P && (\text{ matriz iterativa }) \\ e^{(k)} &:= x - x^{(k)} && (\text{ error de } x^{(k)}). \end{aligned}$$

Con estas definiciones, para cada $k = 1, 2 \ldots$ tenemos:

$$\begin{aligned} e^{(k)} &= x - x^{(k)} \\ &= (\, N^{-1}Px + N^{-1}b \,) - (\, N^{-1}Px^{(k-1)} + N^{-1}b \,) \\ &= N^{-1}P(\, x - x^{k-1} \,) \\ &= Me^{(k-1)} \end{aligned} \tag{4}$$

y en general,

$$e^{(k)} = M^k e^{(0)}, \qquad k = 1, 2 \ldots. \tag{5}$$

Teorema. *(De Convergencia)*
La sucesión $\{x^{(k)}\}$ de (3) converge a la solución x de (1), si y sólo si, $\rho(M) < 1$.

Lema. *(Cota para el radio espectral)*
Sea A una matriz cuadrada. Para cualquier norma matricial se tiene que:

$$\rho(A) \leq ||A||.$$

Corolario. *(Condición suficiente)*
Una condición suficiente para que la sucesión (3) sea convergente a la solución x de (1) es que:

$$||M|| < 1, \tag{6}$$

donde M es la matriz iterativa de (3).

Observación.

Al definir

$$F(M) := \frac{||M||}{1 - ||M||},$$

se puede ver que para $||M|| \leq \frac{1}{2}$ se tiene $F(M) \leq 1$, pero para $||M|| > \frac{1}{2}$ se tiene que $F(M) > 1$. Luego, detener el proceso cuando

$$||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \leq tol, \tag{8}$$

puede ser incorrecto.

Métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel

Se considera el sistema $Ax = b$ con $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$; $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^t$ arbitrario y la matriz A escrita en la forma

$$A = D - E - F,$$

donde $D = diag(A)$, $-E$ es la matriz triangular inferior de A y $-F$ es la matriz triangular superior de A.

Detención del proceso

Cuando el proceso iterativo (3) es convergente, éste se debe detener para un $x^{(k+1)}$ tal que $||e^{(k+1)}|| = ||x - x^{(k+1)}|| \leq tol$, donde tol indica un nivel de tolerancia indicado para el error.

Lema *Para* $||M|| < 1$ *se tiene que:*

$$||x - x^{(k+1)}|| \leq \frac{||M||}{1 - ||M||} ||x^{(k+1)} - x^{(k)}||.$$

Criterio de detención.

$$\frac{||M||}{1 - ||M||} ||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \leq tol. \tag{7}$$

Cálculo de $||M||$

El criterio (7) implica calcular $||M||$, lo que en general es difícil.

Lema

Para $k = 1, 2 \ldots$ *se tiene*:

$$m_k := \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{||x^{(j+1)} - x^{(j)}||}{||\, x^{(j)} - x^{(j-1)}||} \right\} \leq ||M||.$$

Usando este valor m_k en (7) el proceso iterativo se detiene cuando

$$\frac{m_k}{1 - m_k} ||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| < tol.$$

Note que:

$$
\begin{aligned}
M = \;& D^{-1}(E+F) \\
= \;& I - D^{-1}A \\
= \;& \begin{bmatrix}
0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\
-\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\
\vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
-\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Método de Gauss-Seidel

Corresponde al método iterativo (3) con $N = D - E$, $P = F$ y matriz iterativa $M = (D-E)^{-1}F$. Es decir, dado $x^{(0)}$ y para $k = 1, 2, \ldots$ resolver:

$$(D-E)x^{(k)} = Fx^{(k-1)} + b \tag{12}$$

En la iteración k, el vector $x^{(k)}$ se obtiene *por componentes* como:

$$x_i^{(k)} = \Big(\, b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} \,\Big)/a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Método de Jacobi

Corresponde al método iterativo (3) con $N = D$ y $P = E + F$. Es decir, dado $x^{(0)}$ y para $k = 1, 2, \ldots$ resolver:

$$Dx^{(k)} = (E+F)x^{(k-1)} + b \tag{9}$$

y que:

$$||M||_\infty = \max_{1\le i\le n} \left\{ \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}. \tag{10}$$

En la iteración k, el vector $x^{(k)}$ se obtiene *por componentes* como:

$$x_i^{(k)} = \Big(\, b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} \,\Big)/a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Ejercicio. Considere un sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolver el sistema por los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel.

Teoremas de Convergencia

Teorema. *Si A es de diagonal dominante estricta, entonces los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel convergen a la solución de $Ax = b$.*

Observación. Para una matriz arbitraria A, la convergencia de uno no implica la convergencia del otro.

Teorema. *Si A es simétrica y definida positiva, el método Gauss-Seidel es convergente.*

Observación. Aunque A sea simétrica y definida positiva, el método de Jacobi puede ser divergente.

Ejemplo. Considere un sistema $Ax = b$ con matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad a = \frac{3}{4}.$$

(a) Verifique que $\sigma(A) = \{\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\}$ para concluir que el método de Gauss-Seidel es convergente.

(b) Para el método de Jacobi la matriz iterativa es M= $\begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}$ y $\sigma(M) = \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\}$. Concluya que aunque A es simétrica y definida positiva, el método de Jacobi es divergente.

Observación.

Si A es no singular, entonces $A^t A$ es simétrica y definida positiva. Un sistema $Ax = b$ es equivalente a $A^t A x = A^t b$, pero este último puede ser muy mal condicionado.