UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142.

PRACTICA 7. FUNCIONES.

Problema 1. Analice la existencia de la suma, el producto, el cuociente y las compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$, entre las funciones f y g, si existe defínala. En cada caso, considere como dominio el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ para el cual f y g son funciones. [**Práctica 1.5).**]

1.1) $f(x) = 1 + x^2, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

1.2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}.$

1.3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}; \quad g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}.$

1.4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x; \quad g(x) = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^2-1}.$

1.5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1; & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}; & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x - 2; & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1}; & x > 1 \end{cases}$

Problema 2. Sean $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y A, B dos subconjuntos no vacíos de $Dom(f)$. [**Práctica**]

2.1) Demuestre que si A y B son disjuntos y $A \cup B = Dom(f)$ (A, B partición de $Dom(f)$), entonces $Rec(f) = Rec(f|_A) \cup Rec(f|_B)$.

2.2) Observe la situación planteada en 2.1) para el caso de los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ y las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 5 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

2.3) Demuestre que si

i) $\quad A \cap B = \emptyset \ \wedge \ A \cup B = Dom(f),$

ii) $f|_A$ y $f|_B$ son inyectivas,

iii) $Rec(f|_A) \cap Rec(f|_B) = \emptyset$.

Entonces f es inyectiva.

Recíprocamente, si f es inyectiva y $\{A, B\}$ es una partición del $Dom(f)$ entonces se satisfacen las condiciones ii) y iii).

2.4) Observe la situación planteada en 2.3) para las funciones f y g definidas en 2.2).

Problema 3. Generalización a una partición.

3.1) En general se tiene: Si $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ es una función y $\{A_1, A_2, ..., A_N\}$ es una partición del $Dom(f)$. Entonces f es **inyectiva sí y sólo si:**

i) $f|_{A_i}$ es inyectiva $\forall\, i \in \{1, 2, ..., N\}$ y

ii) $\forall\, i \neq j :\ Rec(f|_{A_i}) \cap Rec(f|_{A_j}) = \emptyset$

Muestre que g dada en 2.2) es inyectiva. Además, determine $Rec(g)$ y defina $g^{-1} : Rec(g) \to Dom(g)$. Visualice las gráficas de g y g^{-1}, sobre un mismo sistema de ejes coordenados.

3.2) Use el resultado anterior para determinar cuando una función definida por tramos **no es inyectiva**.

Aplíquelo en el caso de la función f definida en 2.2). **[Práctica]**

Problema 4. Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 3 \\ x - 4 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

4.1) Encuentre dominio A y recorrido de f.

4.2) Pruebe que f es inyectiva y analice si es o no sobreyectiva.

4.3) Determine $f([0, 5]), f^{-1}(]-1, 0[)$ y $f([-1, 3])$.

4.4) Defina la rectricción g, de f a $[4, +\infty[$, muestre que es inyectiva y encuentre la inversa de $g : [4, +\infty[\longrightarrow g([4, +\infty[)$.

Problema 5. Para la función definida de A en $\mathbb{R}$ por **[Práctica.]**

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{(ln(x))^2 - 1}.$$

5.1) Utilice la equivalencia $ln(x) \leq -1 \iff x \in]0, \frac{1}{e}]$ para encontrar el dominio de f.

5.2) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = e^x$, la función exponencial. Determine el dominio y defina la función compuesta $f \circ g$.

5.3) Sea h la restricción de $f \circ g$ al intervalo $[1, +\infty[$, es decir, $h = (f \circ g)|_{[1,+\infty[}$. Pruebe que h es inyectiva y defina su inversa h^{-1}..

Problema 6. Considere la función

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = log(x^2 - 4).$$

6.1) Encuentre el dominio de la función f.

6.2) Encuentre el recorrido de la función f.

6.3) Diga si f es una función biyectiva y si no lo es restrinja su dominio de tal manera que la nueva función g lo sea.

6.4) Defina la inversa de la función g definida en 6.3.

Problema 7. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones: **[Práctica 2, 6 y 7]**

7.1)	$\log_3(7 - x) - \log_3(1 - x) = 1,$	7.2)	$3^x = 4^{2x-1}.$
7.3)	$(\frac{1}{2})^{x^2} = 8^{3-2x},$	7.4)	$(ln(x))^2 - 3ln(x) = 2.$
7.5)	$4^x - 4^{-x} = 2,$	7.6)	$e^{x^2+4x-2} \leq 1.$
7.7)	$2\log_2 x + 3\log_2 2 = 3\log_2 x - \log_2 \frac{1}{32},$	7.8)	$e^x - e^{-x} = -2.$
7.9)	$\log(\sqrt{x}) = \log_{10}(x - 1),$	7.10)	$(\frac{1}{2})^{x^2+x-2} \leq 1.$

Problema 8. La población de una colonia de bacterias se incrementa con el modelo matemático $P(t) = N_0 3^{\frac{t}{20}}, \quad t$ en minutos. ¿Cuánto tiempo tarda en crecer de 100 a 200 bacterias?, ¿ de 100 a 300 bacterias?. **[Práctica]**

Problema 9. El número de bacterias presentes en un cultivo después de t horas es dado por $P(t) = N_0 e^{kt}$.

9.1) Encuentre k si después de dos horas la colonia ha aumentado 1,5 veces su población inicial.

9.2) Encuentre el tiempo que tarda en cuadruplicar su población.

Problema 10. El valor de reventa de una maquinaria industrial cuando tenga t años será dada por $V(t) = 4800e^{-\frac{t}{5}} + 400$ dólares.

10.1) ¿Cuál es el valor de la maquinaria cuando era nueva?.

10.2) ¿Cuál será el valor de la maquinaria dentro de 10 años?.

10.3) ¿Cuál será el valor de la maquinaria si t crece sin límite?. Esboce un gráfico de V.

Problema: 11. El sismólogo F. Richter (1900-1985) ideó en 1935 la **Escala de Richter** que compara la fuerza de los diferentes terremotos. En ella la magnitud R de un terremoto se define por

$$R = log\Big(\frac{A}{A_0}\Big),$$

donde A es la amplitud de la onda sísmica mayor y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a una magnitud $R = 0$.

La intensidad del terremoto de Chillán del año 1939 fué de 7,8 en la escala de Richter. El terremoto de San Francisco de 1979 fué de 5,95 y el terremoto de Turquía del 2 de mayo último fué de 6,4. ¿Cuántas veces más intenso (mayor amplitud) fue el terremoto de Chillán comparado con los terremotos de San Francisco y de Turquía?. [**Práctica**]

Problema: 12. La **vida media** de un elemento radiactivo es el tiempo que se tarda una cierta cantidad del elemento en reducirse a la mitad al transformarse en un nuevo elemento. Por ejemplo, la vida media del carbono 14, C-14, es 5730 años y la del Polonio, Po-213, es de 0.000001 de segundo.

Si hay A_0 gramos de radio inicialmente, entonces el número de gramos que quedan t años después es de

$$A(t) = A_0 e^{-0{,}000418t}.$$

Determine la vida media del radio. [**Práctica**]

Problema: 13. Sea $f(t)$ la cantidad de carbono 14, C-14 [1], presente en un organismo t años después de muerto. Determine la constante K en la ecuación $f(t) = f(0)e^{Kt}$ y el porcentaje de C-14 que debería quedar 1000 años después del deceso del organismo.

Problema: 14. Suponga que sólo $\frac{1}{10}$ de la cantidad original de C-14 queda hoy en un hueso humano descubierto en Kenya. ¿Cuántos años hace que ocurrió la muerte?

05.05.2003.
ACQ/acq.

[1] Método ideado por W. Libby en 1950, basado en la absorción por los organismos vivos de C-14