UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Complemento de Cálculo

CERTAMEN I

1. Encuentre los valores y las funciones propias del siguiente problema:

$$\begin{aligned} &y'' - 3y' + 3(1+\lambda)y = 0 \\ &y(0) = y(1) = 0 \end{aligned}$$

(25 puntos)

2. Considere la función períodica, con período 2π definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Determine:

(a) La serie de Fourier de la función.

(b) A partir de la serie de Fourier, deducir que:

$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(25 puntos)

3. Considere la siguiente EDP

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, && 0 < x < 5, \quad t > 0 \\ &u(0,t) = 2 && t \geq 0 \\ &u_x(5,t) = 3t^2, && t \geq 0 \\ &u(x,0) = x^3, && 0 \leq x \leq 5 \\ &u_t(x,0) = e^x, && 0 \leq x \leq 5 \end{aligned}$$

Escriba la ecuación equivalente con condiciones de frontera homogénea (no resuelva).
(0 o 10 puntos)

4. Resuelva

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} - 2u_t, && 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ &u_x(0,t) = 0, && t > 0 \\ &u_x(2,t) = 0, && t > 0 \\ &u(x,0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1, && 0 < x < 2 \\ &u_t(x,0) = 0, && 0 < x < 2 \end{aligned}$$

(40 puntos)

1. Las raices de la ecuación característica son

$$r = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-3(1+4\lambda)}}{2}.$$

(a) Si $\lambda = -\dfrac{1}{4}$ entonces se tiene la solución trivial.

(b) Si $\lambda < -\dfrac{1}{4}$ también se tiene la solución trivial.

(c) Si $\lambda > -\dfrac{1}{4}$, entonces la solución se escribe en la forma

$$y(x) = e^{\frac{3}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3(1+4\lambda)}}{2}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3(1+4\lambda)}}{2}x\right)\right].$$

Aplicando las condiciones de frontera se tiene:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Longrightarrow A = 0 \\ y(1) &= 0 \Longrightarrow e^{\frac{3}{2}} B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3(1+4\lambda)}}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Como queremos soluciones no triviales se tiene para cuando $B \neq 0$ que los autovalores con sus correspondientes autofunciones estan dados por

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{3} - \frac{1}{4}, \\ \phi_n &= e^{\frac{3}{2}x}\,\mathrm{sen}(n\pi x),\ n = 1, 2, \ldots, . \end{aligned}$$

25 puntos

2. Los coeficientes de Fourier son $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2x\cos(nx)}{n^2} + \frac{n^2x^2-2}{n^3}\operatorname{sen}(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= 2\frac{(-1)^n}{n^2},\ n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\operatorname{sen}(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2x\operatorname{sen}(nx)}{n^2} - \frac{n^2x^2-2}{n^3}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= \pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} + (-1)^n\frac{2}{\pi n^3} - \frac{2}{\pi n^3},\ n = 1, 2, \ldots \\
&= \pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{4}{\pi(2n-1)^3},\ n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

Luego, la serie de Fourier es

$$\frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

15 puntos

(a) Como $x = 0$ es un punto de continuidad, la serie de Fourier converge a 0, esto es

$$0 = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$$

y se obtiene la serie pedida.

5 puntos

(b) En el punto $x = \pi$ se tiene un punto de discontinuidad, por lo que la serie converge a la mitad del salto, esto es

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-1)^n\frac{1}{n^2}$$

de donde se obtiene la segunda serie numérica.

5 puntos

3. Deseamos encontrar una función tal que:

$$f(x,t) = 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 3t^2$$

Integrando con respecto a x tenemos que

$$f(x,t) = a(t) + 3t^2 x$$

Como $f(0,t) = 2$ se tiene que $a(t) = 2$. Asi

$$f(x,t) = 2 + 3t^2 x$$

Consideremos el cambio de variable

$$u(x,t) = w(x,t) + 2 + 3t^2 x$$

De aquí obtenemos

$$\begin{array}{ll} w_{tt} = w_{xx} - 6x, & 0 < x < 5, \quad t > 0 \\ w(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ w_x(5,t) = 0, & t \geq 0 \\ w(x,0) = x^3 - 2, & 0 \leq x \leq 5 \\ w_t(x,0) = e^x, & 0 \leq x \leq 5 \end{array}$$

obs.: El alumno puede encontrar otra función.

0 ó 10 puntos

4. Para resolver el problema aplicaremos variación de parámetros.

   - Inicialmente resolvamos por separación de variables la ecuación homogénea:

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0 \\ u_x(2,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1, & 0 < x < 2 \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 2 \end{array}$$

   es decir, $u(x,t) = F(x)G(t)$. Reemplazando en la ecuación llegamos a:

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{G} = \sigma$$

   de donde, usando las condiciones de contorno debemos resolver inicialmente:

$$\begin{aligned} F'' - \sigma F &= 0 \qquad (1) \\ F'(0) &= 0 \\ F'(2) &= 0 \end{aligned}$$

   La ecuación característica asociada a (1) es

$$m^2 - \sigma = 0$$

   de donde $m = \pm\sqrt{\sigma}$.

$\sigma > 0$

$$\begin{aligned}
F(x) &= ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}\\
F'(x) &= a\sqrt{\sigma}e^{\sqrt{\sigma}x} - b\sqrt{\sigma}e^{-\sqrt{\sigma}x}\\
F'(0) &= a\sqrt{\sigma} - b\sqrt{\sigma} = 0 \Rightarrow a = b \qquad (2)\\
F'(2) &= a\sqrt{\sigma}e^{2\sqrt{\sigma}} - b\sqrt{\sigma}e^{-2\sqrt{\sigma}} = 0 \Rightarrow ae^{2\sqrt{\sigma}} - be^{-2\sqrt{\sigma}} = 0 \qquad (3)\\
&\overset{(2)\text{ y }(3)}{\Longrightarrow} a\left[e^{2\sqrt{\sigma}} - e^{-2\sqrt{\sigma}}\right] = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 0
\end{aligned}$$

$\sigma = 0$

$$\begin{aligned}
F(x) &= a + bx\\
F'(x) &= b\\
F'(0) &= b = 0 \Rightarrow b = 0
\end{aligned}$$

De aquí

$$\sigma_0 = 1, \qquad F_0(x) = 1 \qquad (4)$$

$\sigma < 0$

$$\begin{aligned}
F(x) &= a\cos(\sqrt{-\sigma}x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\sigma}x)\\
F'(x) &= -a\sqrt{-\sigma}\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\sigma}x) + b\sqrt{-\sigma}\cos(\sqrt{-\sigma}x)\\
F'(0) &= b\sqrt{-\sigma} \Rightarrow b = 0\\
F'(2) &= -a\sqrt{-\sigma}\,\mathrm{sen}(2\sqrt{-\sigma})\\
&\Rightarrow 2\sqrt{-\sigma} = n\pi,\ n = 1, 2, \ldots\\
&\Rightarrow \sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4},\ n = 1, 2, \ldots \qquad (5)\\
&\Rightarrow F_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),\ n = 1, 2, \ldots \qquad (6)
\end{aligned}$$

Resumiendo, de (4), (5) y (6) se tiene:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= -\frac{n^2\pi^2}{4},\ n = 0, 1, 2, \ldots\\
F_n(x) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),\ n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

De aquí

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \qquad (7)$$

Hasta aqui bueno 20 puntos

- Apliquemos variación de parámetros a la ecuación original.
  Derivando

$$u_x(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2} c_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$
$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{4} c_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$
$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n'(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$
$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n''(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

y reemplazando en la ecuación original

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n''(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{4} c_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n'(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} c_0'' + 2c_0' = 0 \\ c_n'' + 2c_n' + \dfrac{n^2\pi^2}{4} c_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Reemplazando (7) el las condiciones iniciales, se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1 \Longrightarrow \begin{cases} c_0(0) = -1 \\ c_1(0) = 1 \\ c_n(0) = 0,\ n = 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{9}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n'(0) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 0 \Longrightarrow c_n(0) = 0,\ n = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

De (8),(9) y (10) obtenemos los siguentes PVI:

$$\left.\begin{array}{l} c_0'' + 2c_0' = 0 \\ c_0(0) = -1 \\ c_0'(0) = 0 \end{array}\right| \tag{11}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1'' + 2c_1' + \dfrac{\pi^2}{4} c_1 = 0 \\ c_1(0) = 1 \\ c_1'(0) = 0 \end{array}\right| \tag{12}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_n'' + 2c_n' + \dfrac{n^2\pi^2}{4} c_n = 0,\ n = 2, 3, \ldots \\ c_n(0) = 0 \\ c_n'(0) = 0 \end{array}\right| \tag{13}$$

De (11) es evidente que $c_0(t) = -1$.
De (13) es evidente que $c_n(t) = 0$, $n = 2, 3, \ldots$.
Resolviendo (12) por aniquiladores:

$$m^2 + 2m + \frac{\pi^2}{4} = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\frac{\pi^2}{4}}}{2}$$
$$\Rightarrow m = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{4}}$$
$$\Rightarrow m = -1 \pm i\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}$$

De aquí

$$\begin{aligned}
c_1(t) =& e^{-t}\left[a\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right) + b\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right)\right] \\
c_1(0) =& a = 1 \\
c_1(t) =& e^{-t}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right) + b\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right)\right] \\
c_1'(t) =& -e^{-t}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right) + b\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right)\right] \\
& + e^{-t}\left[-\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right) + b\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right)\right] \\
c_1'(0) =& -1 + b\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}}
\end{aligned}$$

De donde

$$c_1(t) = e^{-t}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right)\right]$$

Finalmente

$$u(x,t) = -1 + e^{-t}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1t}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

20 puntos

FCHH/RRS
02/10/01