Regla de la Cadena

Teorema

Si $f(u)$ es diferenciable en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es diferenciable en x, entonces la composición

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

es diferenciable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Con la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

donde $\frac{dy}{du}$ se evalua en $u = g(x)$.

Regla de la Cadena

Ejemplo 1. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

2. $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$

Diferenciación Implícita

Ejemplo 2. Hallar $\frac{dy}{dx}$ si:

$$2y = x^2 + \sin y$$

Ejemplo 3 (uso de la diferenciación implícita Para hallar derivadas de orden superior)

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ si

$$2x^3 - 3y^2 = 7$$

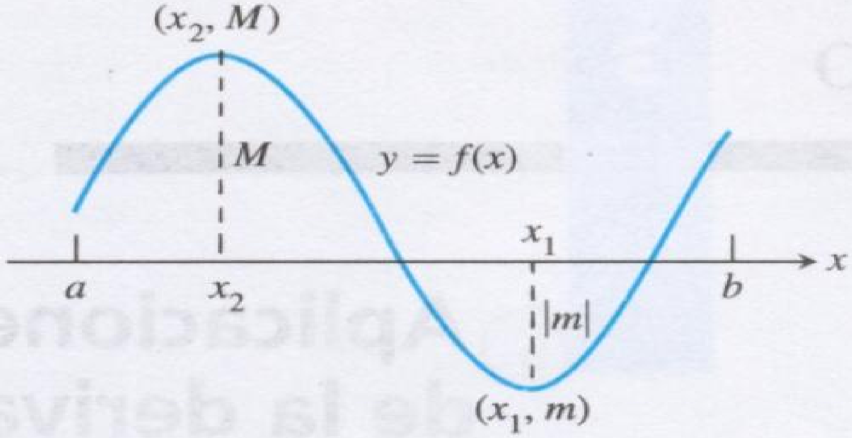
Aplicaciones de la Derivada

Teorema.

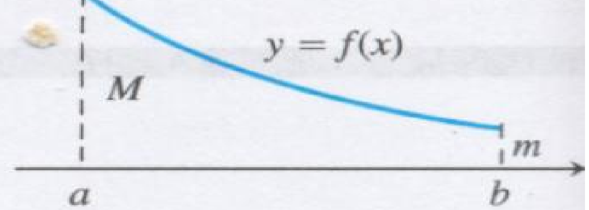
Si f es continua en todo punto de un intervalo cerrado I, entonces f alcanza un valor máximo absoluto M y un valor mínimo m en puntos de I. Es decir, existen números x_1 y x_2 en I con

$$f(x_1) = m,\ f(x_2) = M \text{ y } m \leq f(x) \leq M$$

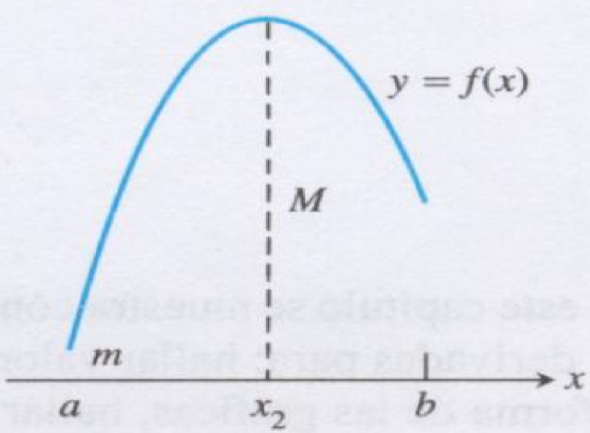
para cualquier x en I.



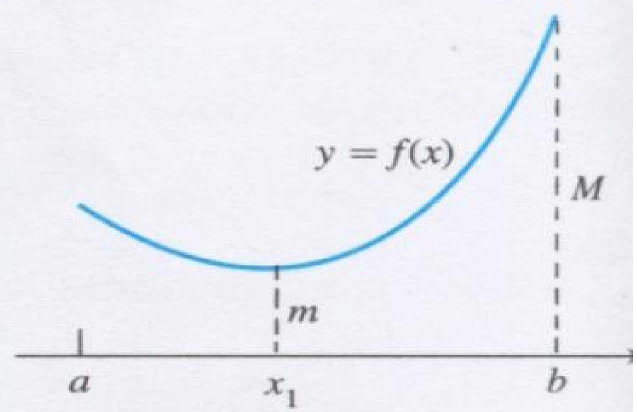
Máximo y mínimo
en puntos interiores



Máximo y mínimo
en los extremos



Máximo en un punto interior,
mínimo en un extremo

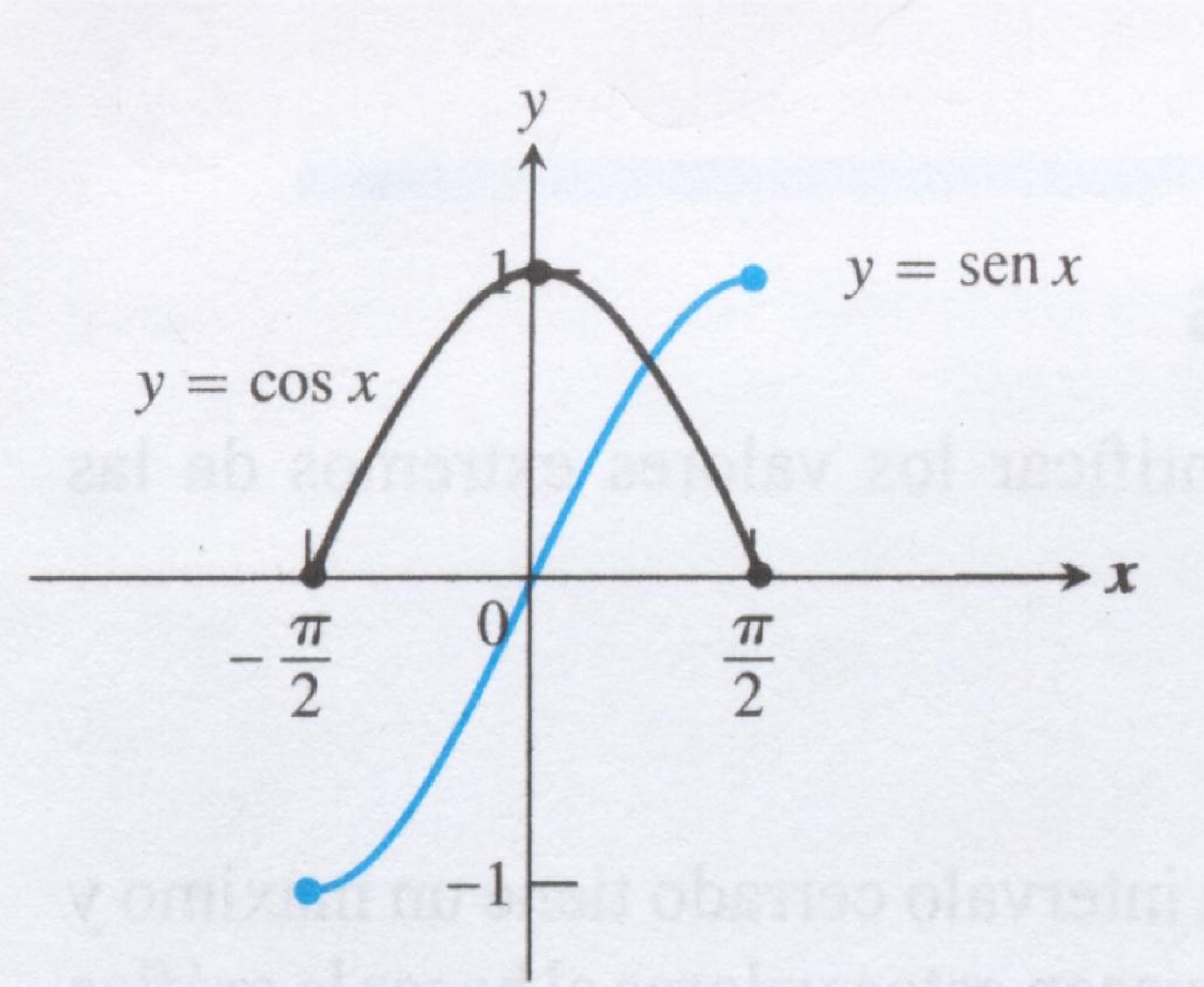


Mínimo en un punto interior,
máximo en un extremo

Aplicaciones de la derivada

Ejemplo 4.

En $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \cos x$ alcanza un valor máximo de 1 (una vez) y un valor mínimo de 0 (dos veces). En ese mismo intervalo la función $g(x) = \sin x$ alcanza un valor máximo de 1 (una vez) y un valor mínimo de -1(una vez).

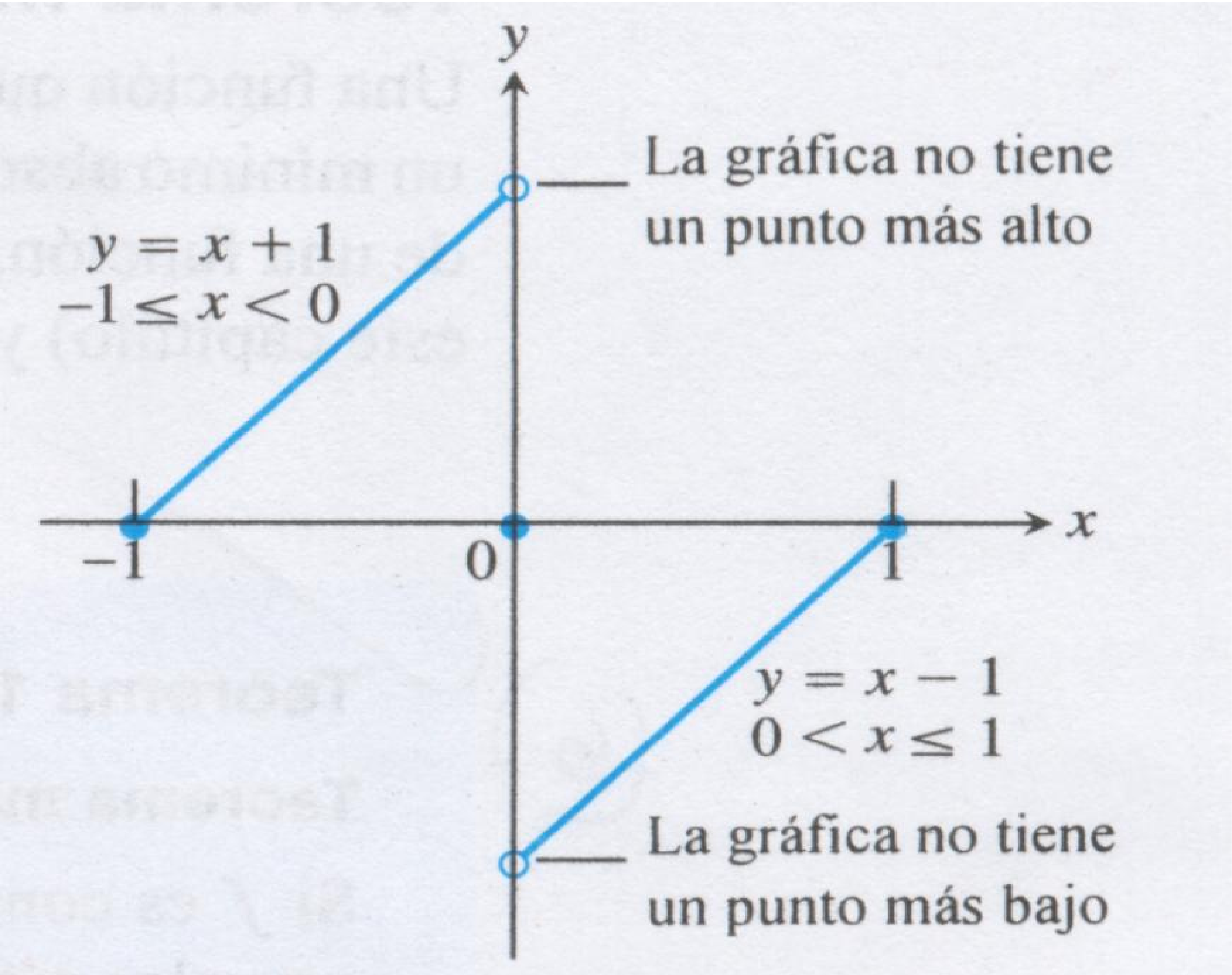


y
x
1
0
−1
$y = \cos x$
$y = \operatorname{sen} x$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$

Ejemplo 5. La función

$$y = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

es continua en todo punto de [-1,1], excepto en *x*=*0*, y su grafica sobre [-1,1] no tiene un Punto mas alto ni un punto mas bajo



y
La gráfica no tiene
un punto más alto
$y = x + 1$
$-1 \leq x < 0$
x
-1
0
1
$y = x - 1$
$0 < x \leq 1$
La gráfica no tiene
un punto más bajo

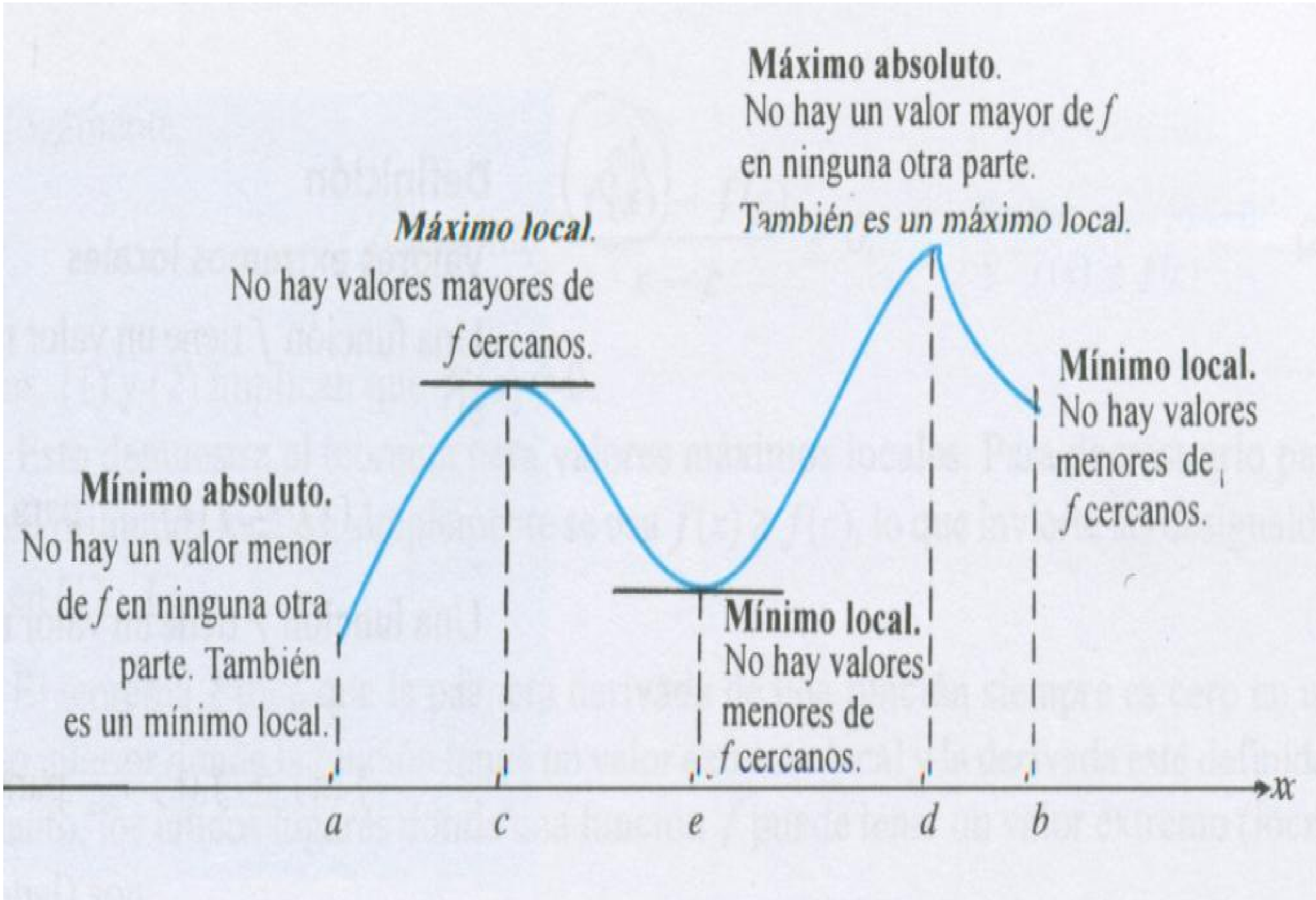
Valores Extremos

Definición. (Valores extremos absolutos) Sea *f* una función con dominio D. Se dice que *f* tiene un valor maximo absoluto en D, en el punto c, si:

$$f(x) \leq f(c) \text{ para todo } x \text{ en D}$$

y un mínimo absoluto en D en el punto c, si:

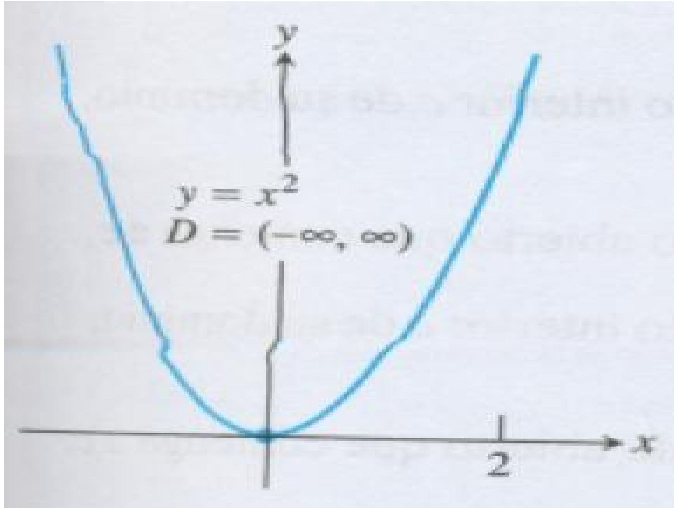
$$f(x) \geq f(c) \text{ para todo } x \text{ en D}$$



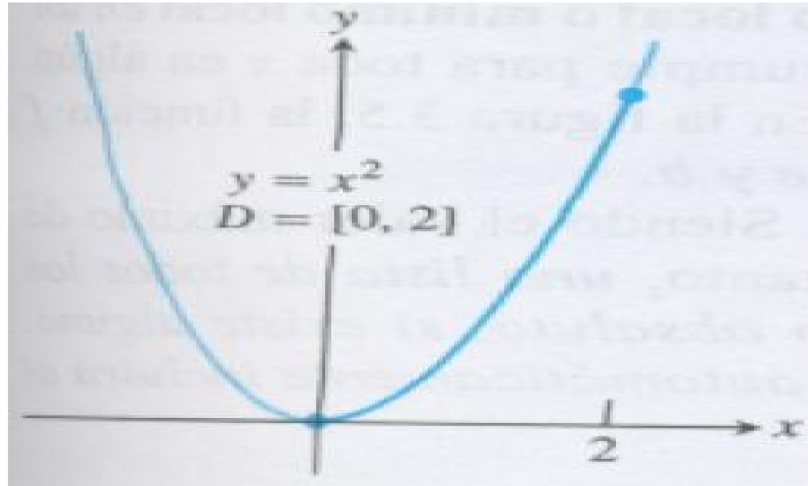
Máximo absoluto.
No hay un valor mayor de *f* en ninguna otra parte.
También es un máximo local.
Máximo local.
No hay valores mayores de *f* cercanos.
Mínimo local.
No hay valores menores de *f* cercanos.
Mínimo absoluto.
No hay un valor menor de *f* en ninguna otra parte. También es un mínimo local.
Mínimo local.
No hay valores menores de *f* cercanos.
x
a
c
e
d
b

Ejemplo 6.

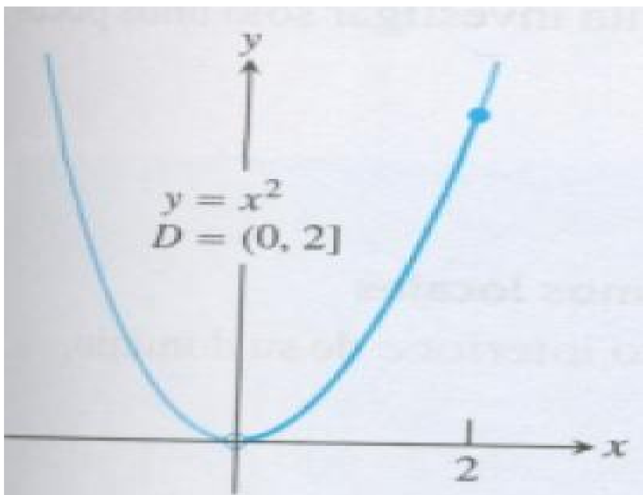
Función	Dominio (D)	Valores extremos abs.
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	No hay max. abs. Min. Abs. 0 en *x=0*
$y = x^2$	$[0, 2]$	Max. Abs. 4 en x=*2* Min. Abs. 0 en *x=0*
$y = x^2$	$(0, 2]$	Max. Abs. 4 en *x=2* Sin min. Abs.
$y = x^2$	$(0, 2)$	Sin valores extremos abs.



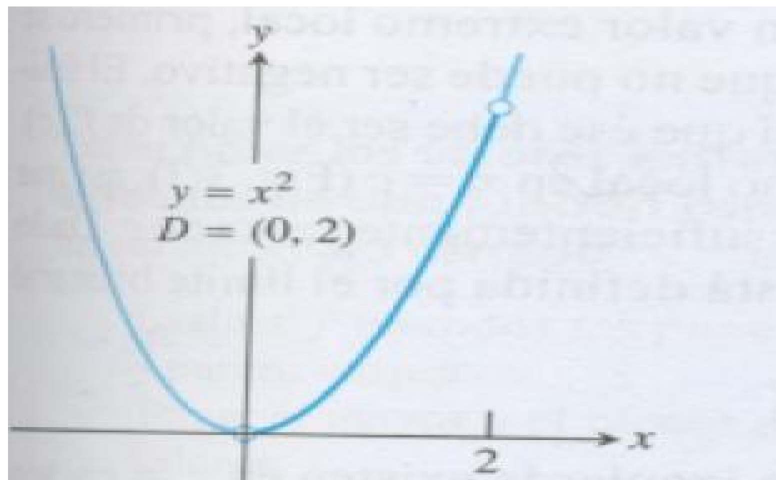
(a) sólo mínimo absoluto



(b) máximo y mínimo absolutos



(c) sólo máximo absoluto



(d) sin máximo ni mínimo absolutos

Valores Extremos

Definición. (Valores extremos locales)

Una función *f* tiene un valor máximo local en Un punto interior de su dominio, si $f(x) \leq f(c)$ Para todo *x* en algún intervalo abierto que contenga a c.

y un valor mínimo local en el punto c, si:

$f(x) \geq f(c)$ Para todo *x* en algún intervalo abierto que contenga a c.

Valores Extremos

Teorema. (Criterio de la primera derivada)

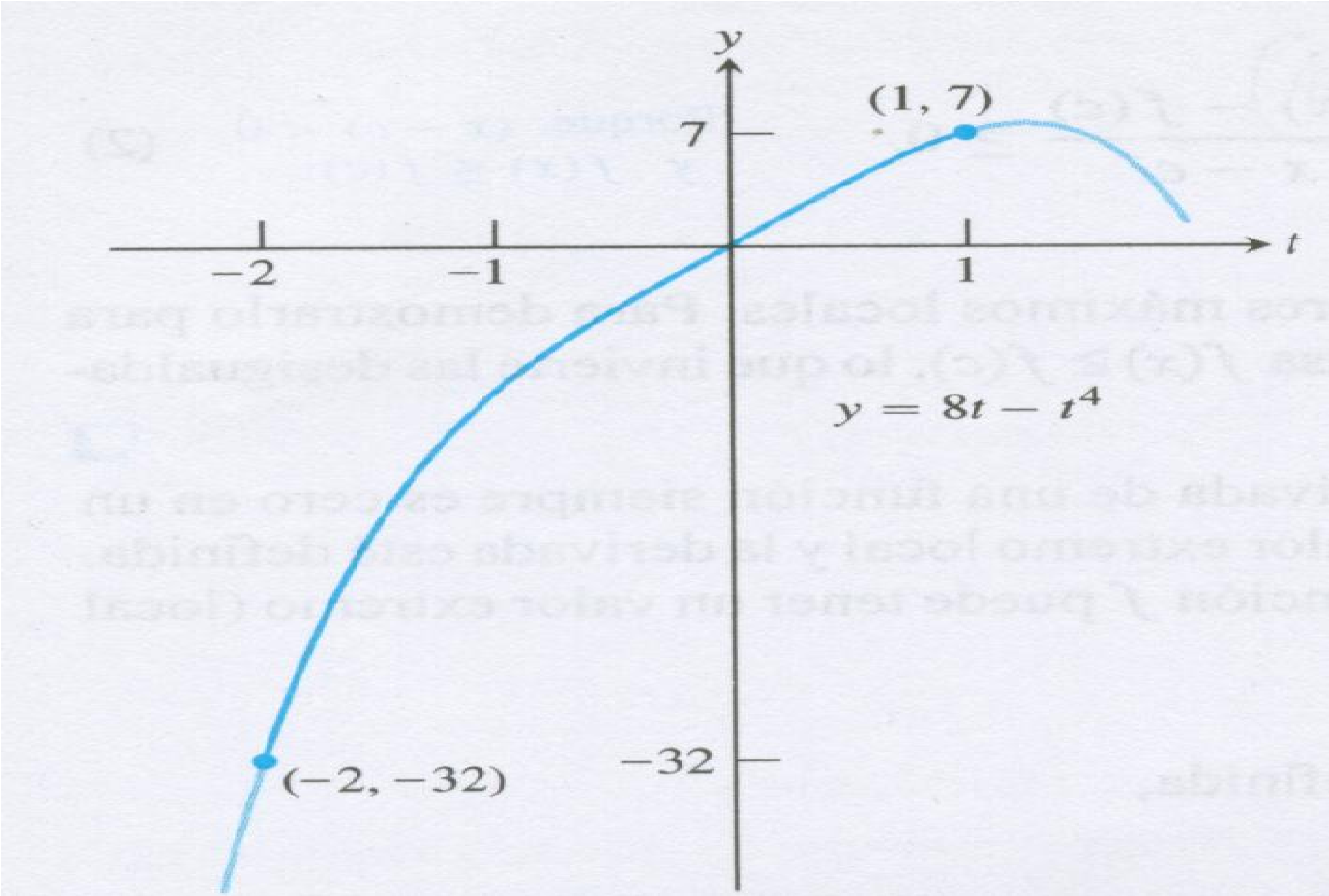
Si *f* tiene un máximo o un mínimo local en un punto interior de c de su dominio y si *f’ esta* bien definida en c, entonces *f’(c)=0*

Definición. Un punto interior de una función *f* donde *f’* sea cero o no este definida es llamado **punto critico** de *f.*

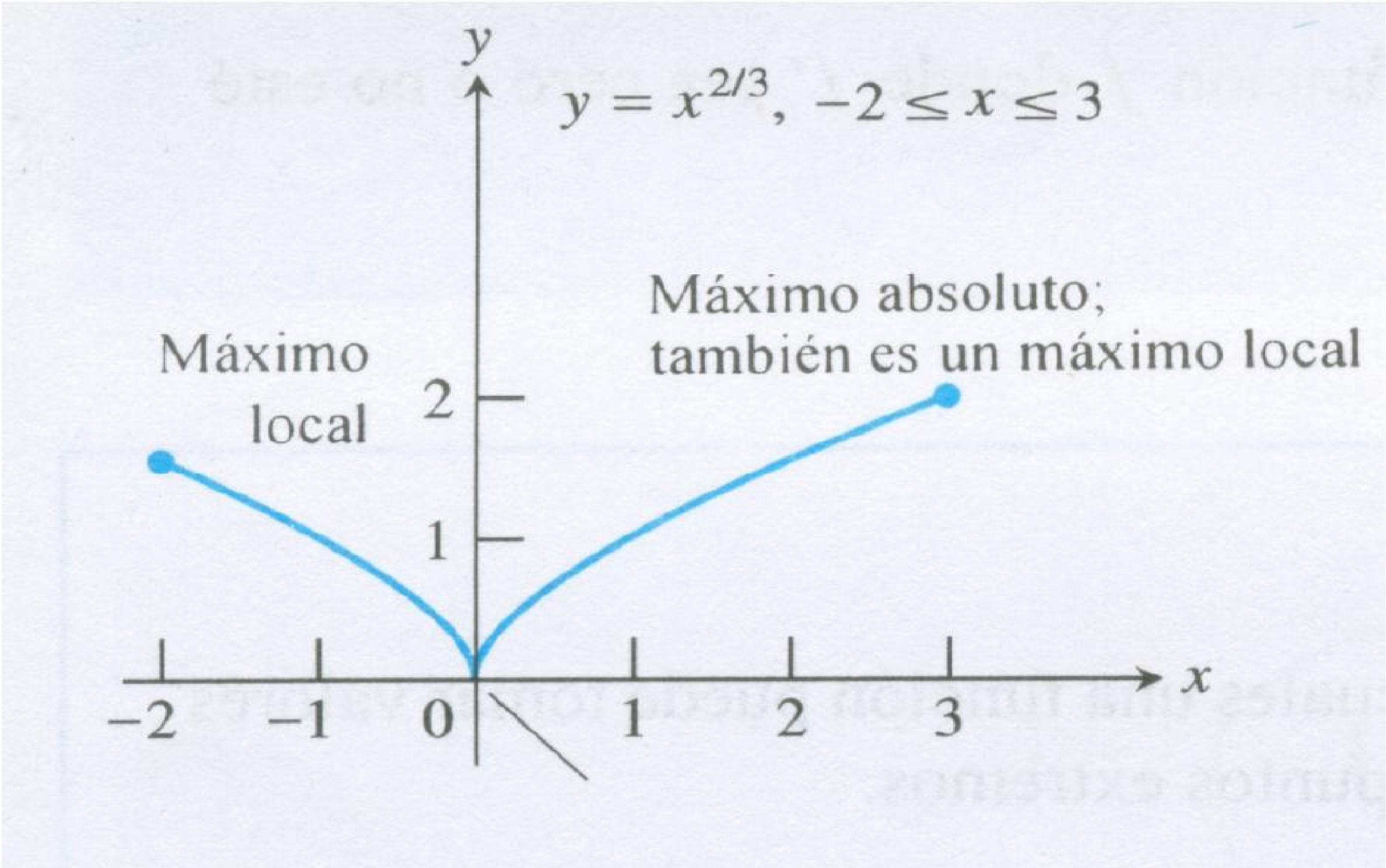
Resumen. Los únicos puntos del dominio en los cuales una función f puede tomar valores extremos son los Puntos críticos y los puntos extremos.

Ejemplo 7. Hallar los valores extremos absolutos de: $f(x) = x^2$ en $[-2, 1]$

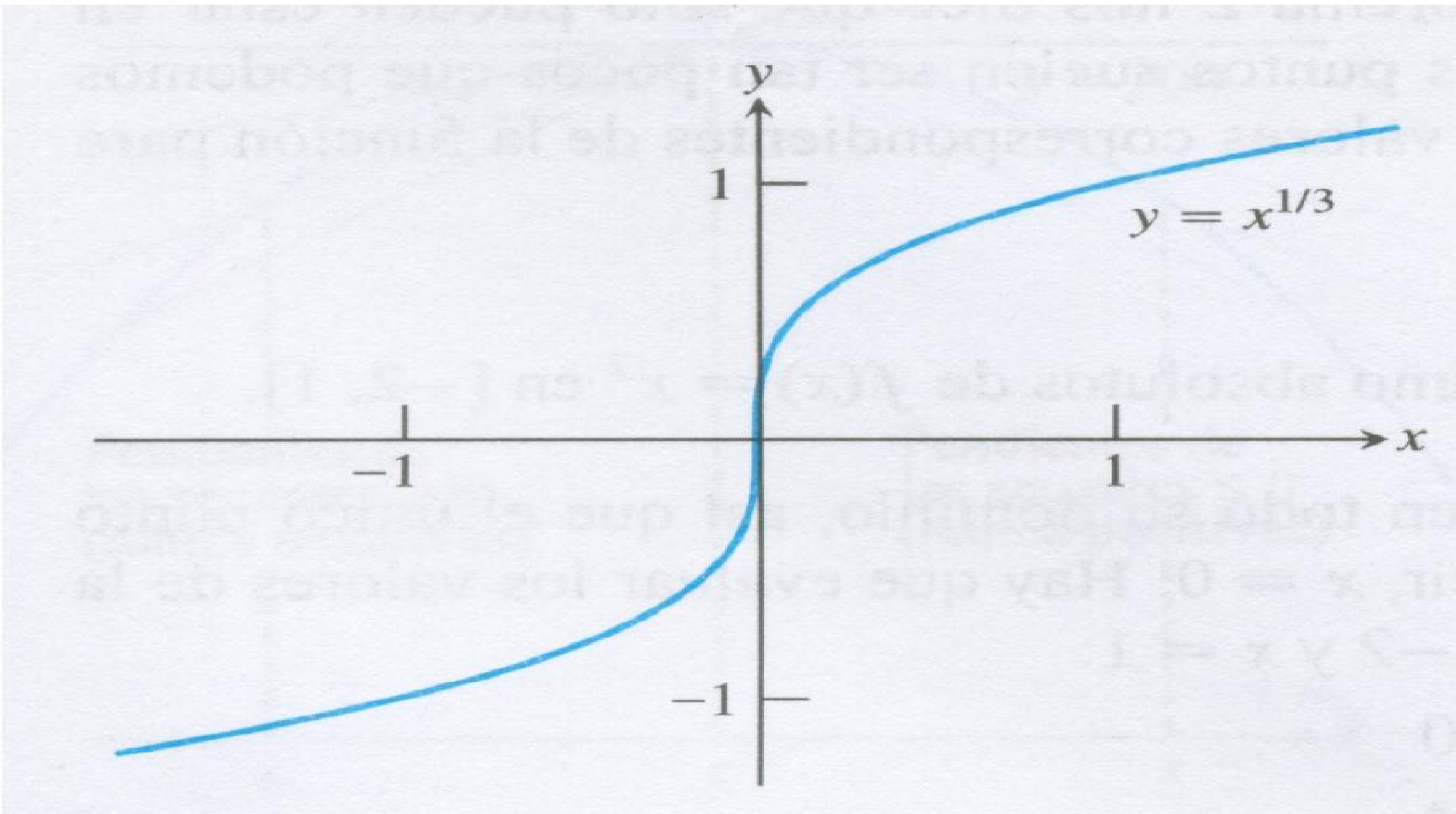
Ejemplo 8. Hallar los valores extremos absolutos de: $g(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$



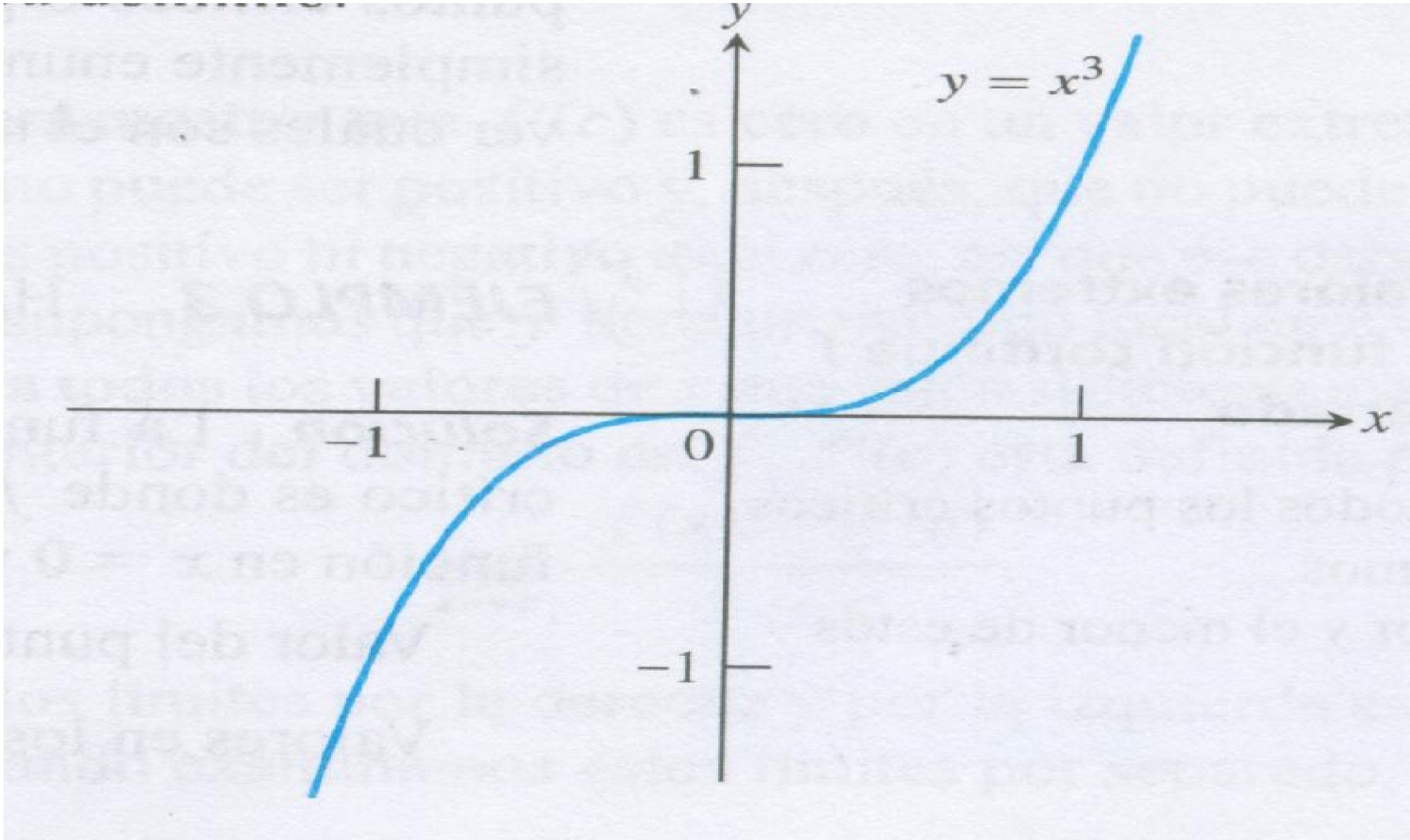
Ejemplo 9. Hallar los valores extremos absolutos de: $h(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$



Ejemplo 10. $f(x) = x^{1/3}$ no tiene un valor
Extremo en $x = 0$, a pesar de que $f\prime(x) = (1/3)x^{-2/3}$
No esta definida en $x = 0$



Ejemplo 11. $g(x) = x^3$ no tiene valores extremos en $x = 0$ aunque $g\prime(x) = 3x^2$ es cero en $x = 0$



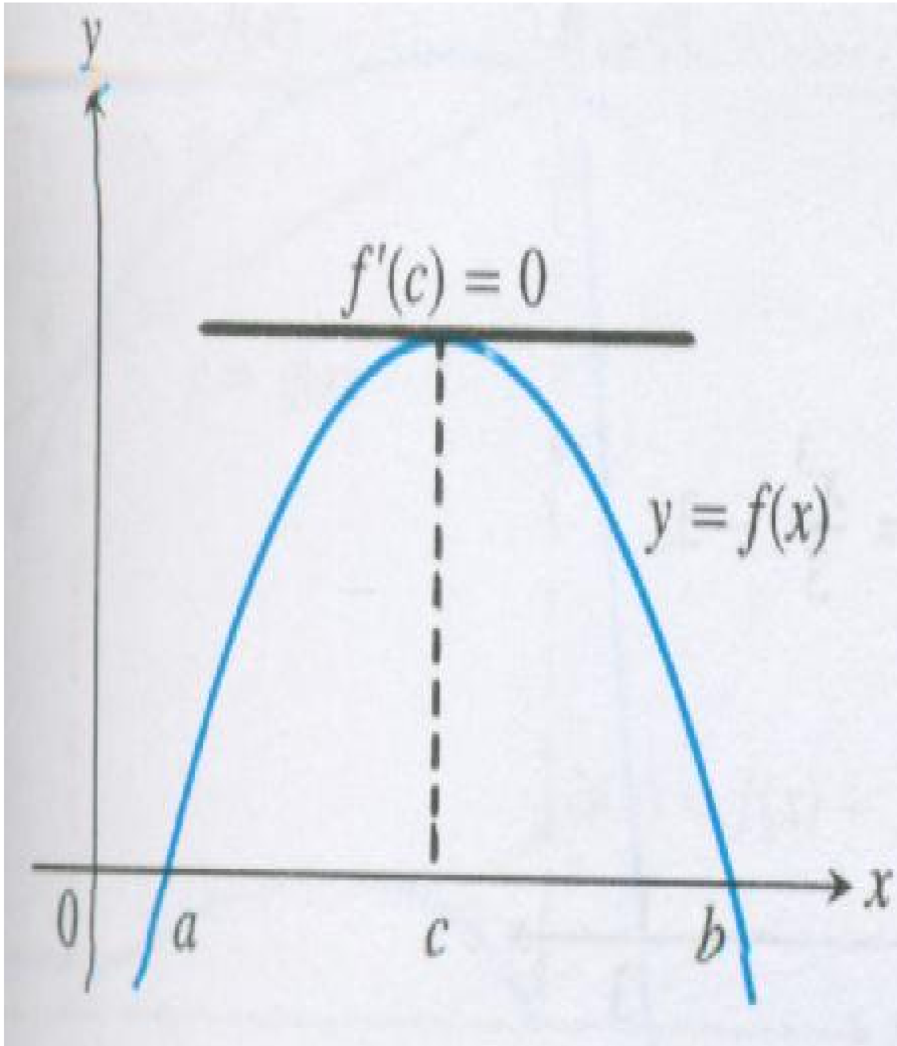
Teorema de Rolle

Teorema. Supongamos que la funcion $y=f(x)$ Es continua en todo punto del intervalo cerra-do [a,b] y diferenciable en todo punto de su Interior (a,b). Si

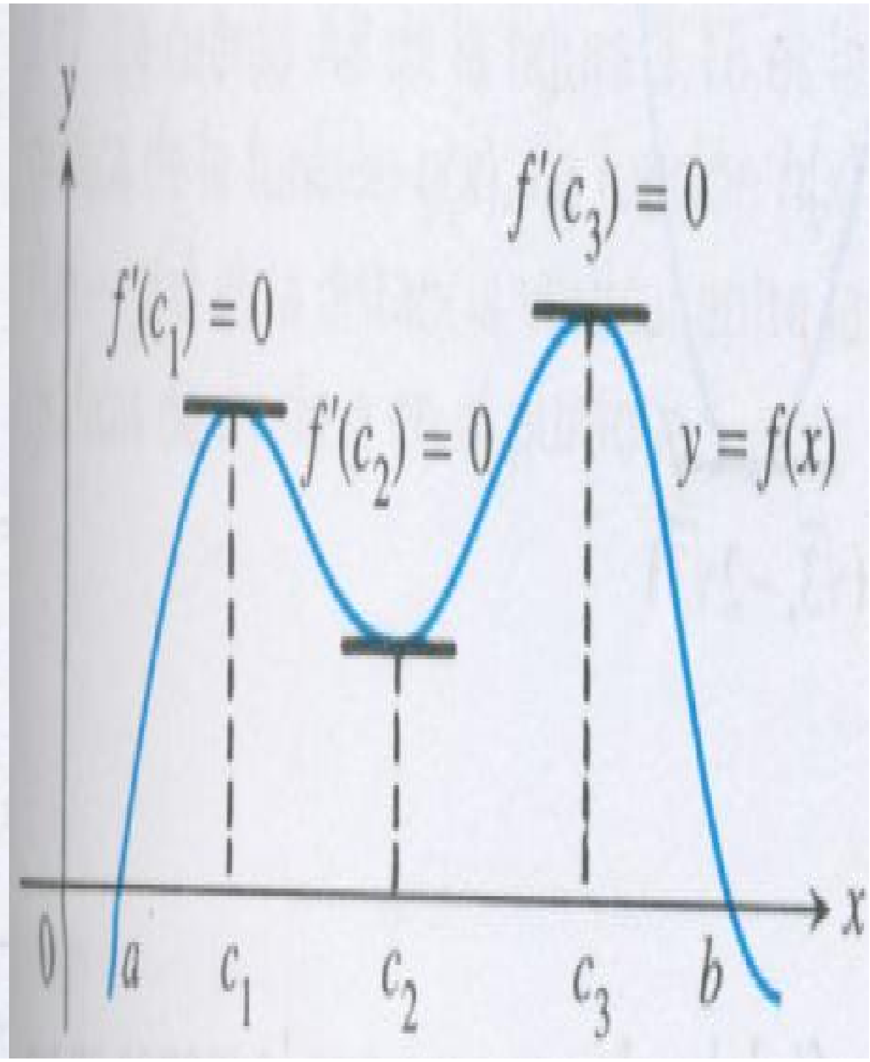
$$f(a)=f(b)=0$$

entonces existe al menos un numero c en (a,b) en el cual

$$f'(c)=0$$

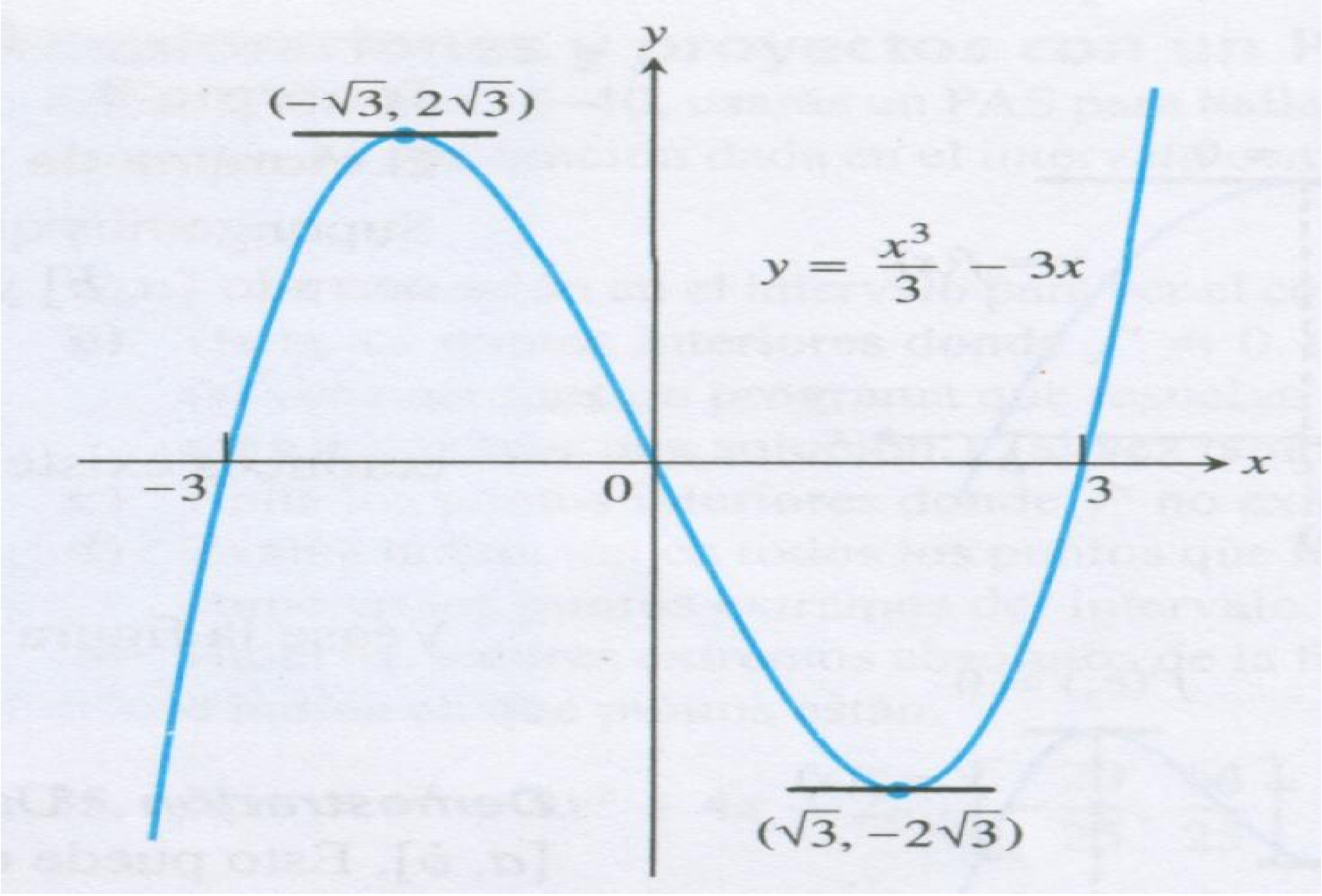


y
f'(c) = 0
y = f(x)
0
a
c
b
x



y
f'(c_3) = 0
f'(c_1) = 0
f'(c_2) = 0
y = f(x)
0
a
c_1
c_2
c_3
b
x

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$$



Funciones Crecientes y Decrecientes

Definición. Sea *f* una función definida en un intervalo I. Se dice que

- *f* crece en *I* si

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ para todo } x_1, x_2 \text{ en } I$$

- *f decrece en I si*

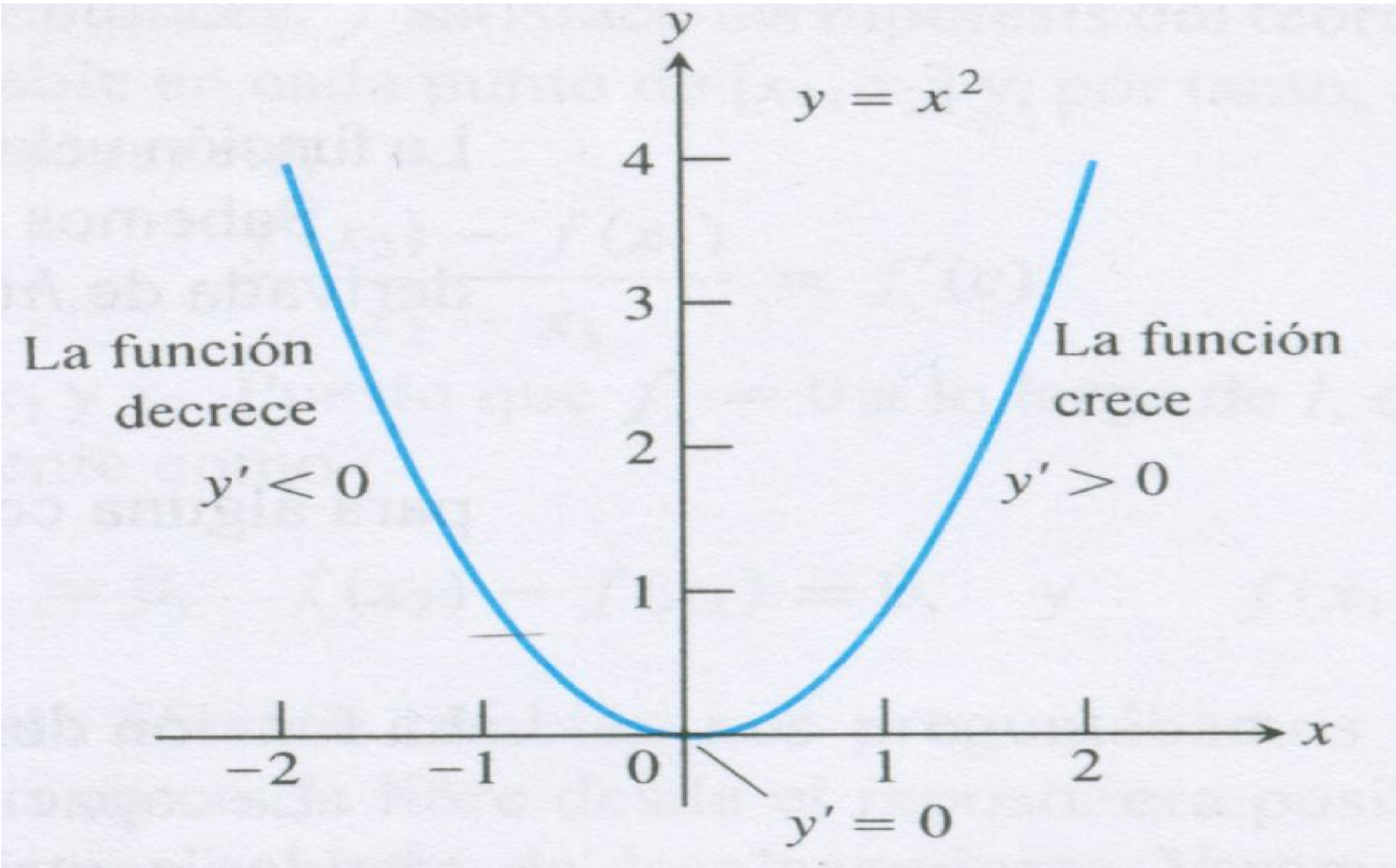
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \text{ para todo } x_1, x_2 \text{ en } I$$

Corolario. (Criterio de la primera derivada Para el crecimiento de funciones)

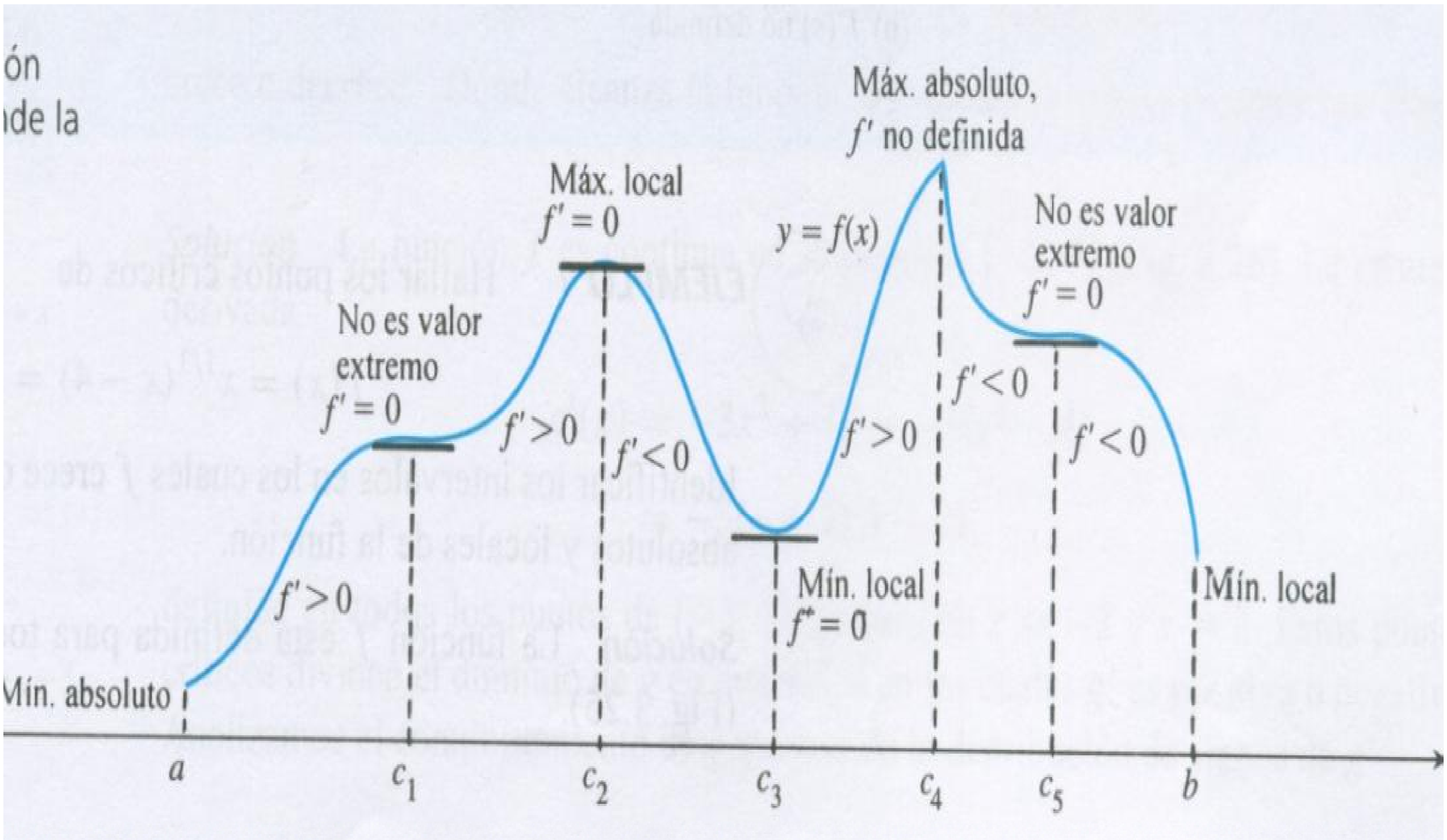
Supongamos que *f* continua en [a,b] y diferenciable en (a,b).

- Si $f'>0$ en cada punto de (a,b) entonces *f* es creciente en [a,b]
- Si $f'<0$ en cada punto de (a,b) entonces *f* es decreciente en [a,b]

Ejemplo 12. Determinar los intervalos de Crecimiento y de decrecimiento de la función $y = x^2$



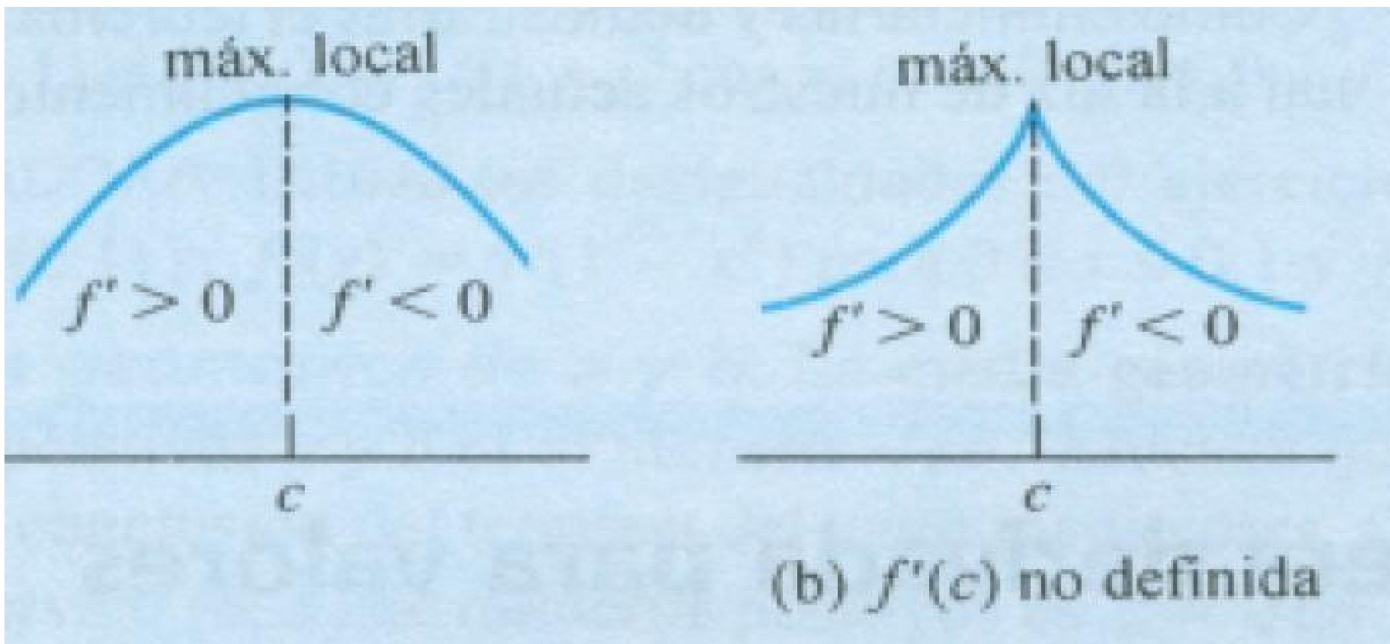
La primera derivada de una función indica donde asciende y donde desciende la grafica de la función.



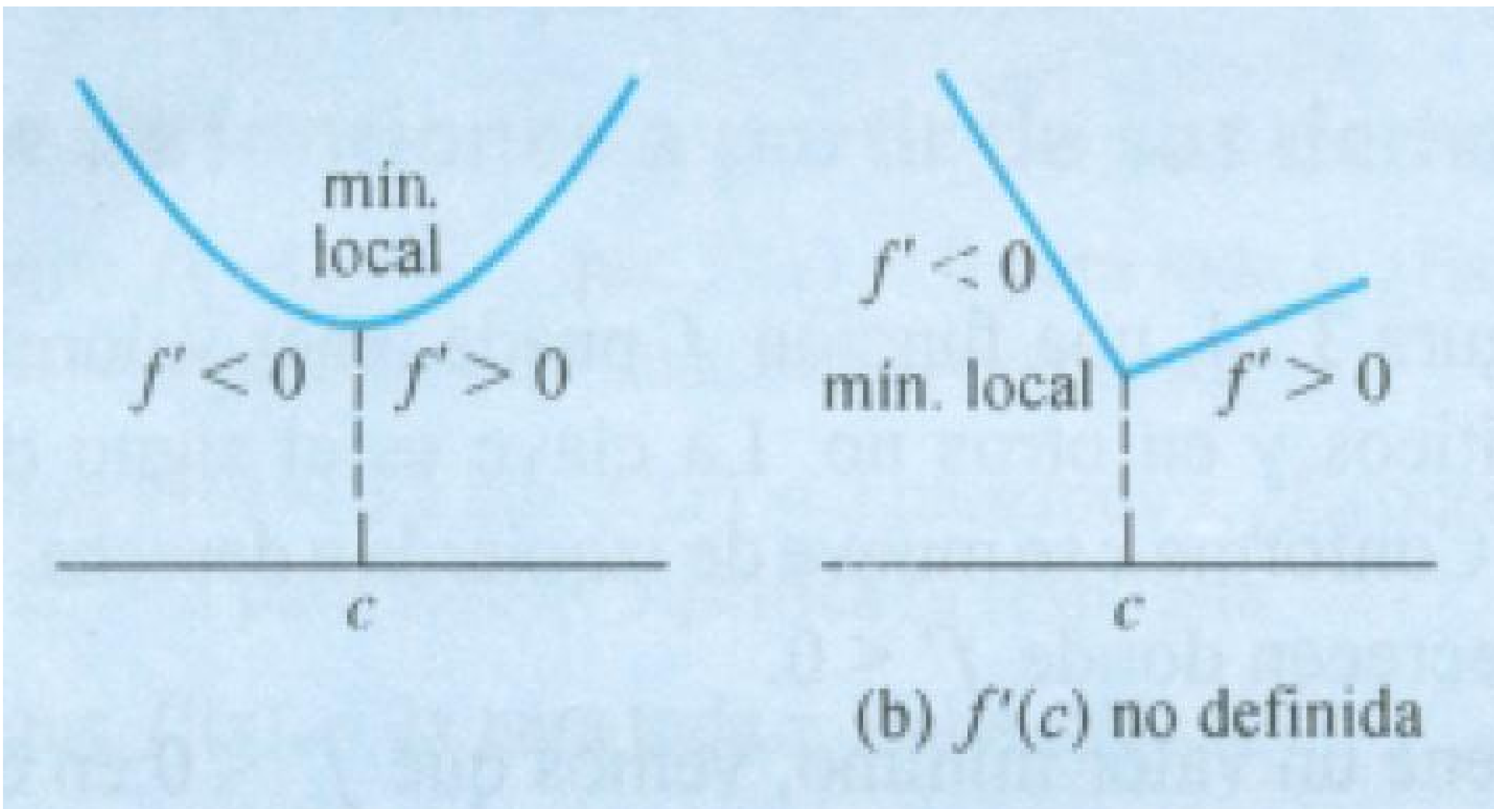
Criterio de la primera derivada para valores extremos locales

En un punto critico c,

1. Si *f’* cambia de positiva a negativa en c (*f’*>0 para x<c y *f’*<*0* para *x*>*c*), entonces *f* tiene un valor máximo local en c.

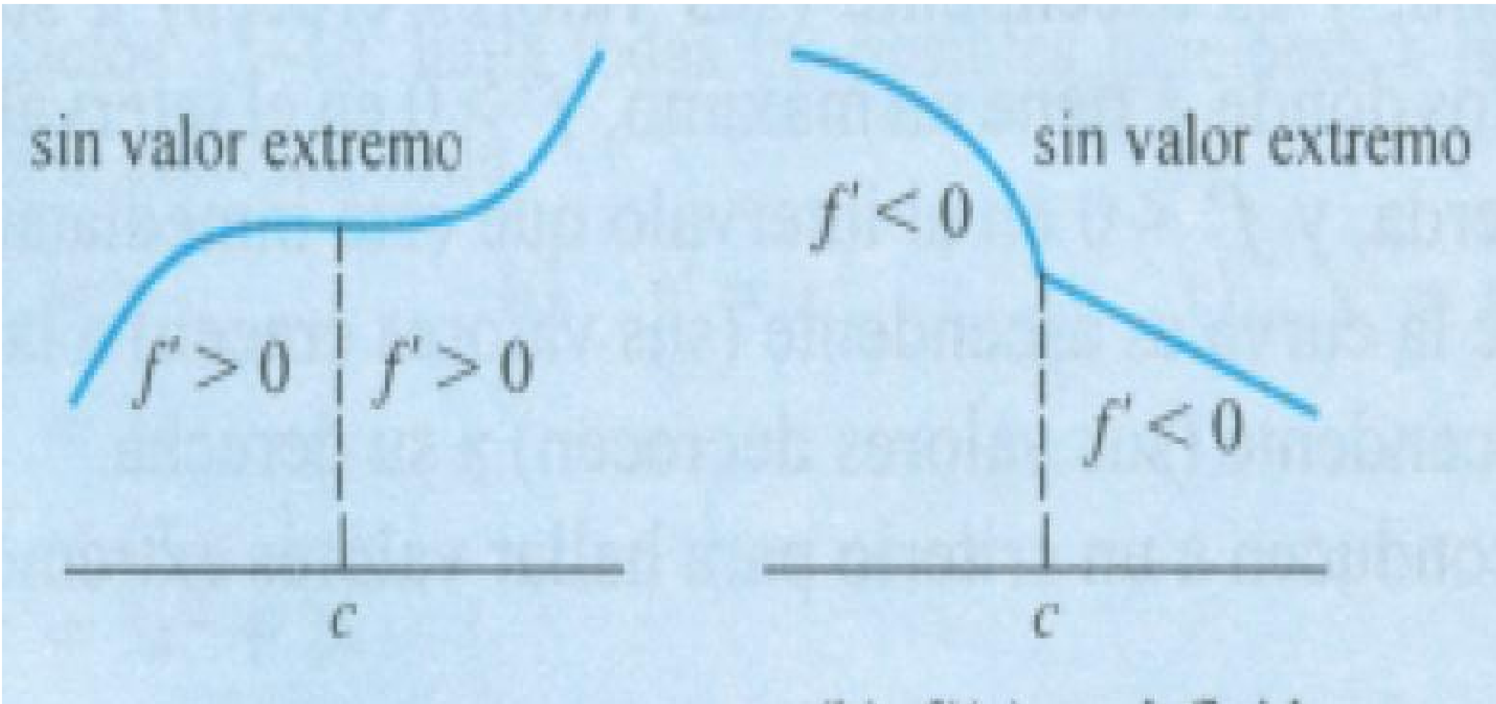


2. Si f' cambia de negativa a positiva en c ($f'<0$ para $x<c$ y $f'>0$ para x>c), entonces f tiene un mínimo local en c



(b) $f'(c)$ no definida

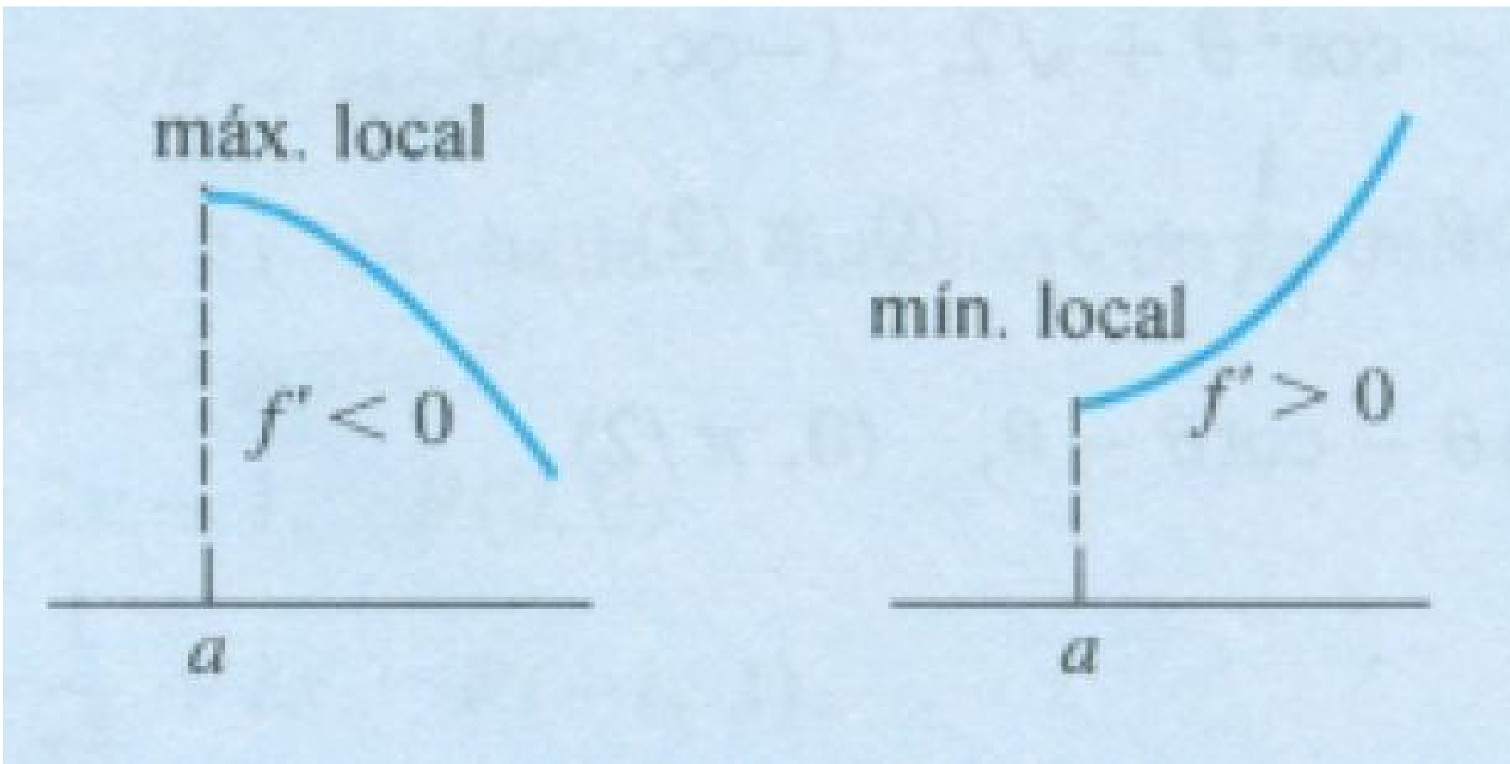
3. Si f' no cambia de signo en c (f tiene el mismo signo a ambos lados de c), entonces f no tiene un valor extremo local en c



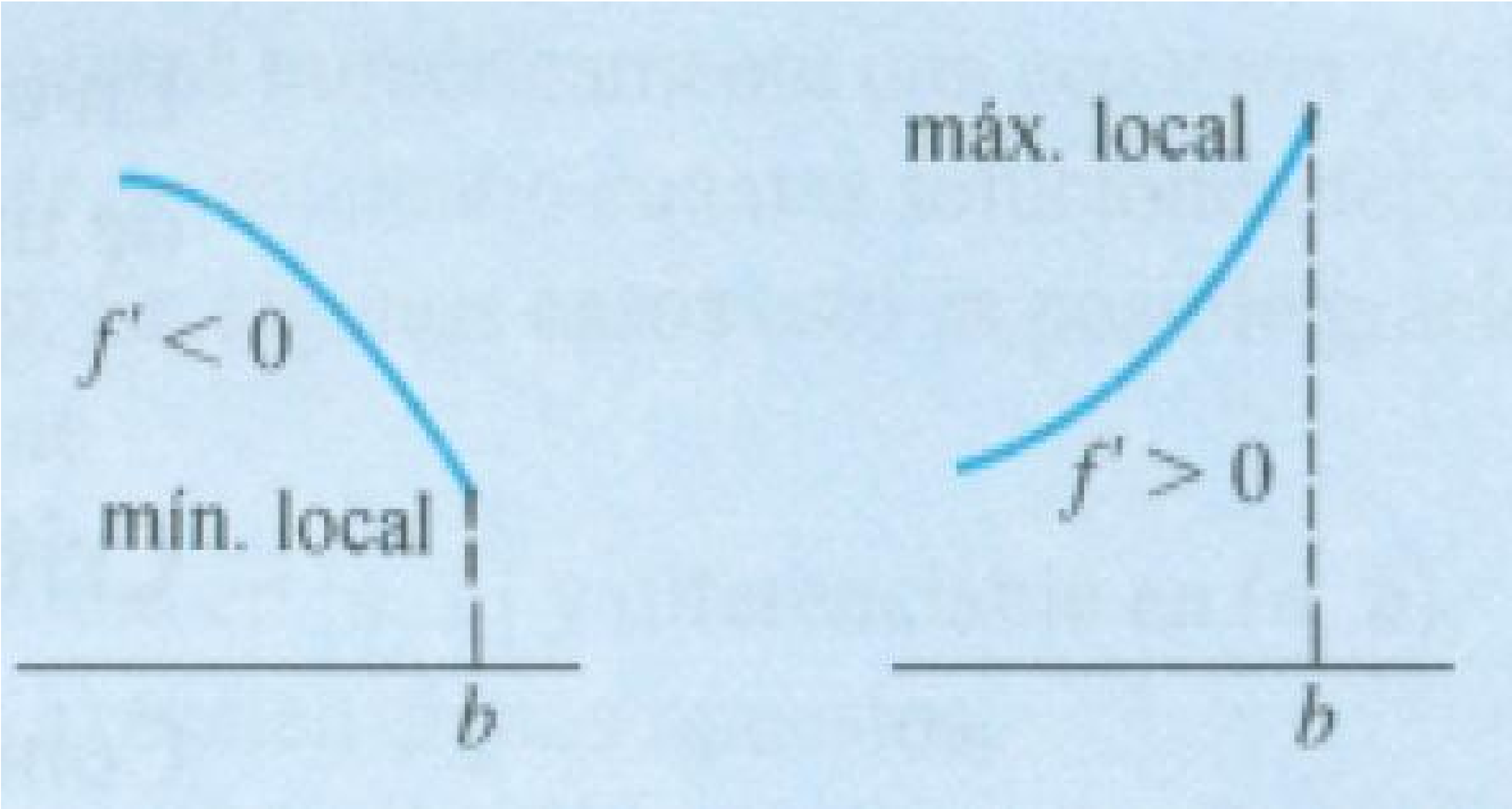
(b) $f'(c)$ no definida

En un extremo izquierdo a,

Si *f'<0 (f'>0) para* x>a, entonces f tiene un valor máximo (mínimo) local en a



En un extremo derecho b,
Si *f'<0 (f'>0)* para *x<b,* entonces *f* tiene un Valor mínimo (máximo) local en b.

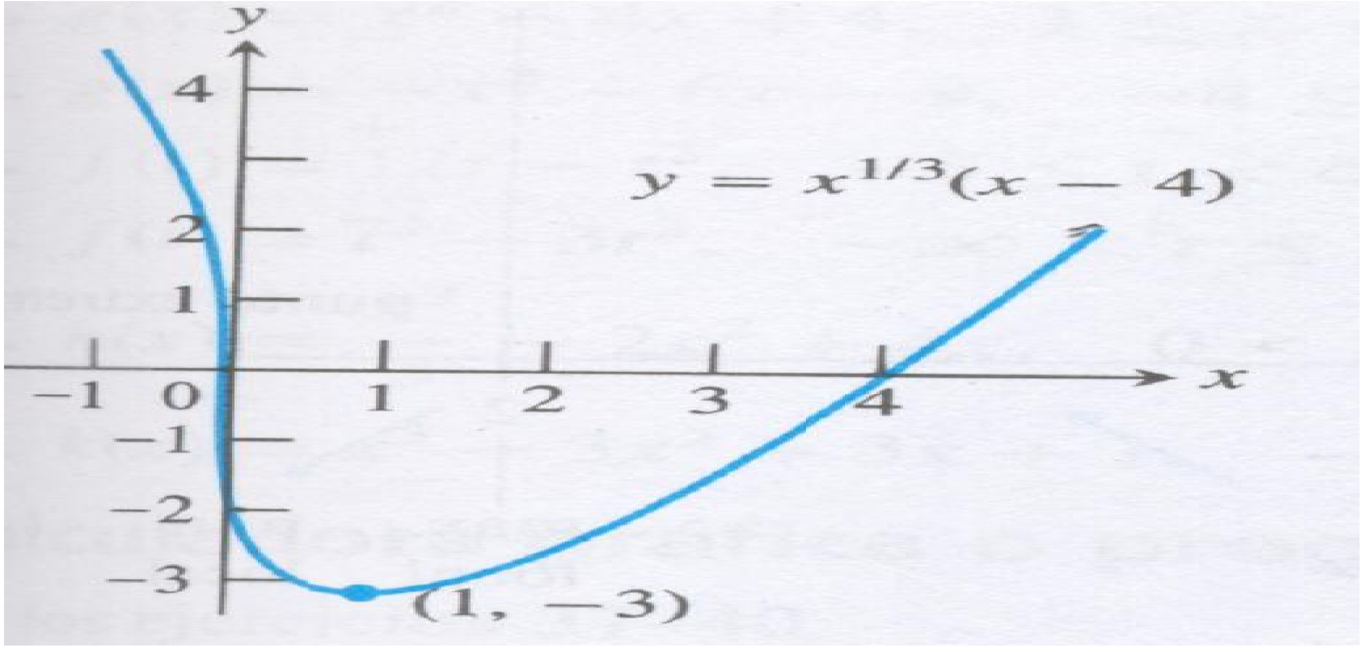


Ejemplo 13. Hallar los puntos críticos de

$$f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

Identificar los intervalos en los cuales *f* crece o decrece

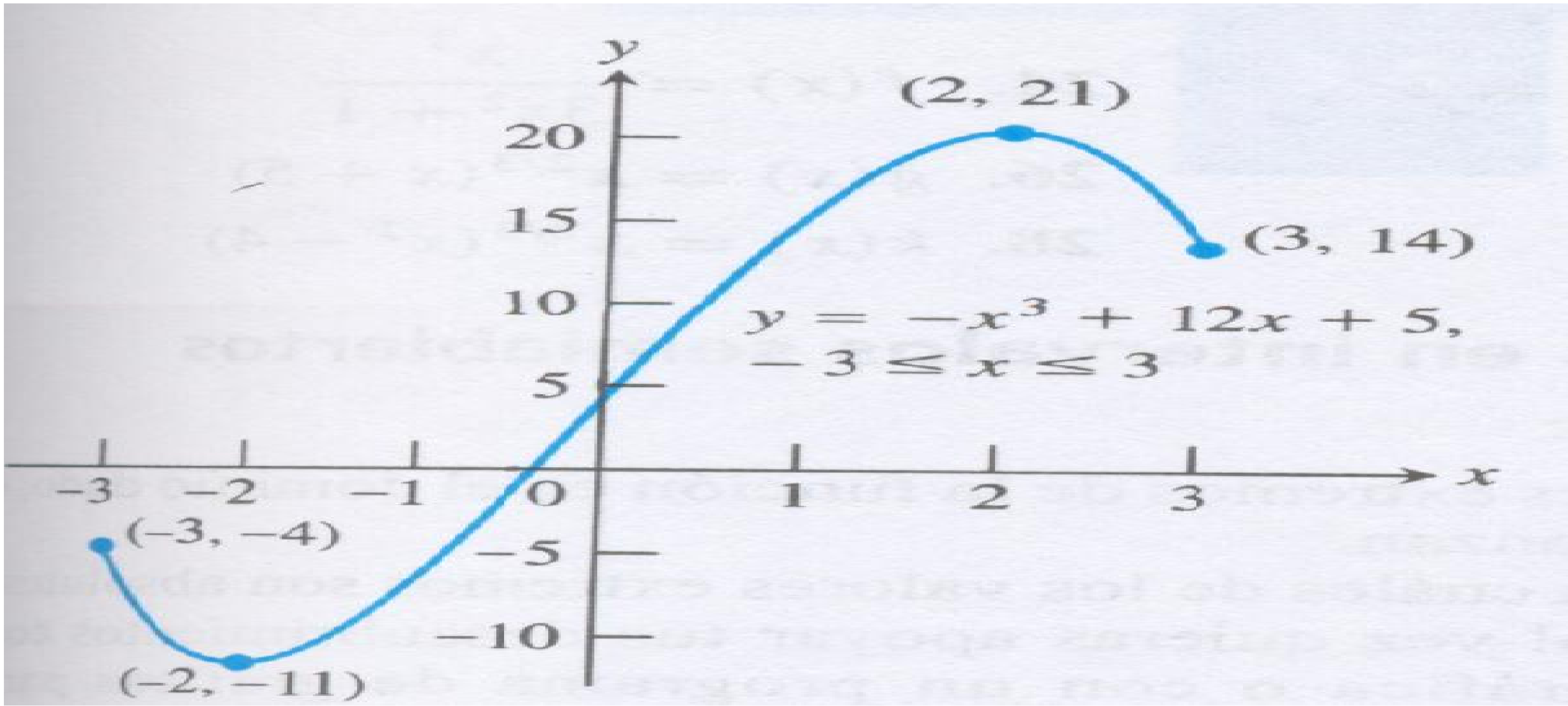
Hallar los valores extremos absolutos y locales.



Ejemplo 14. Hallar el intervalo en el que

$$g(x) = -x^3 + 12x + 5, \qquad -3 \leq x \leq 3$$

Crece o decrece. Donde alcanza la función sus valores extremos y cuales son estos?

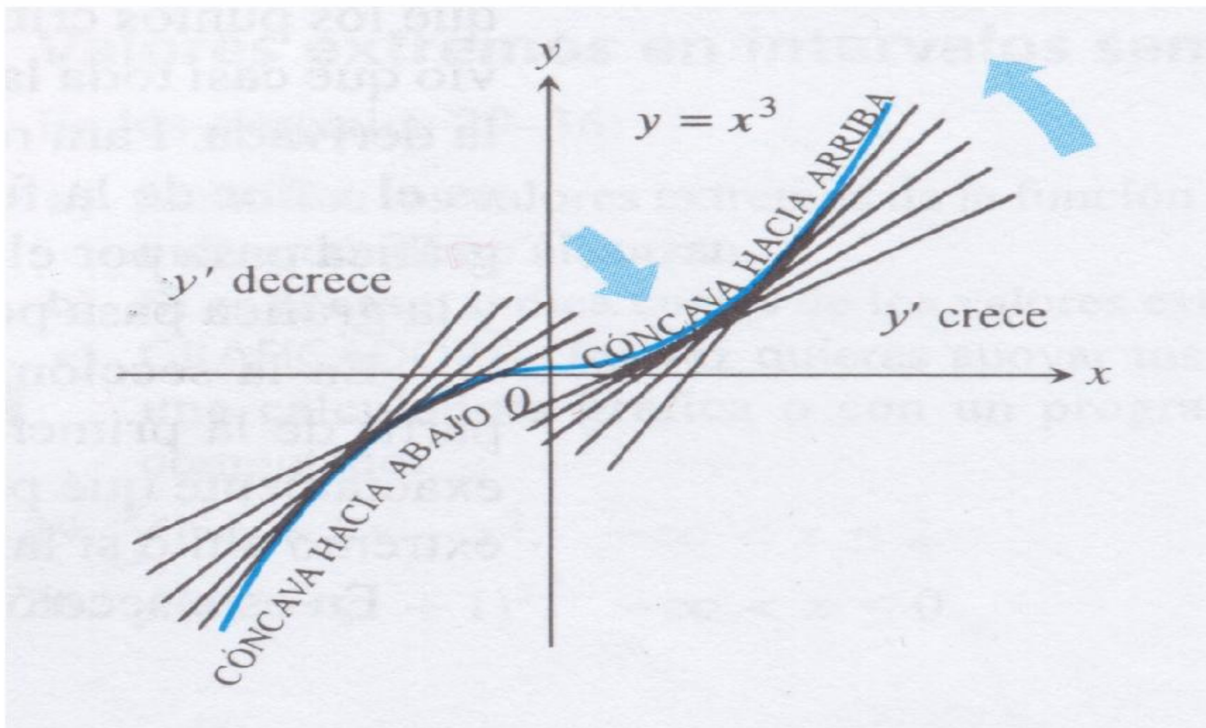


Concavidad

Definición. La grafica de una función diferenciable $y=f(x)$ es **cóncava hacia arriba** en el intervalo donde y' es creciente, y **cóncava hacia abajo**, donde y' es decreciente.

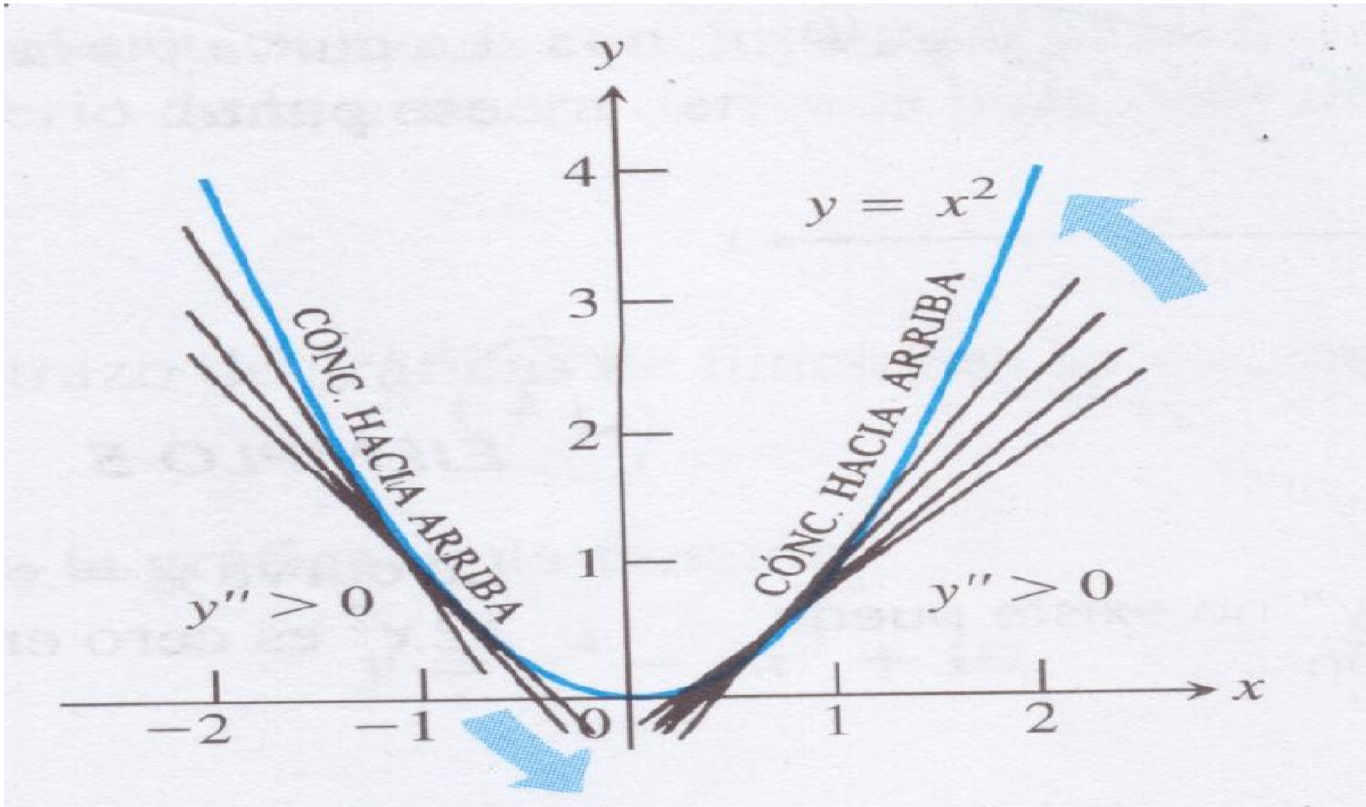
Ejemplo 15.

La gráfica de la función $y = x^3$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$, donde $y'' = 6x < 0$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ donde $y'' = 6x > 0$



Ejemplo 17.

La gráfica de la función $y = x^2$ (parábola) es cóncava hacia arriba en todos los intervalos de la recta real, puesto que $y'' = 2 > 0$



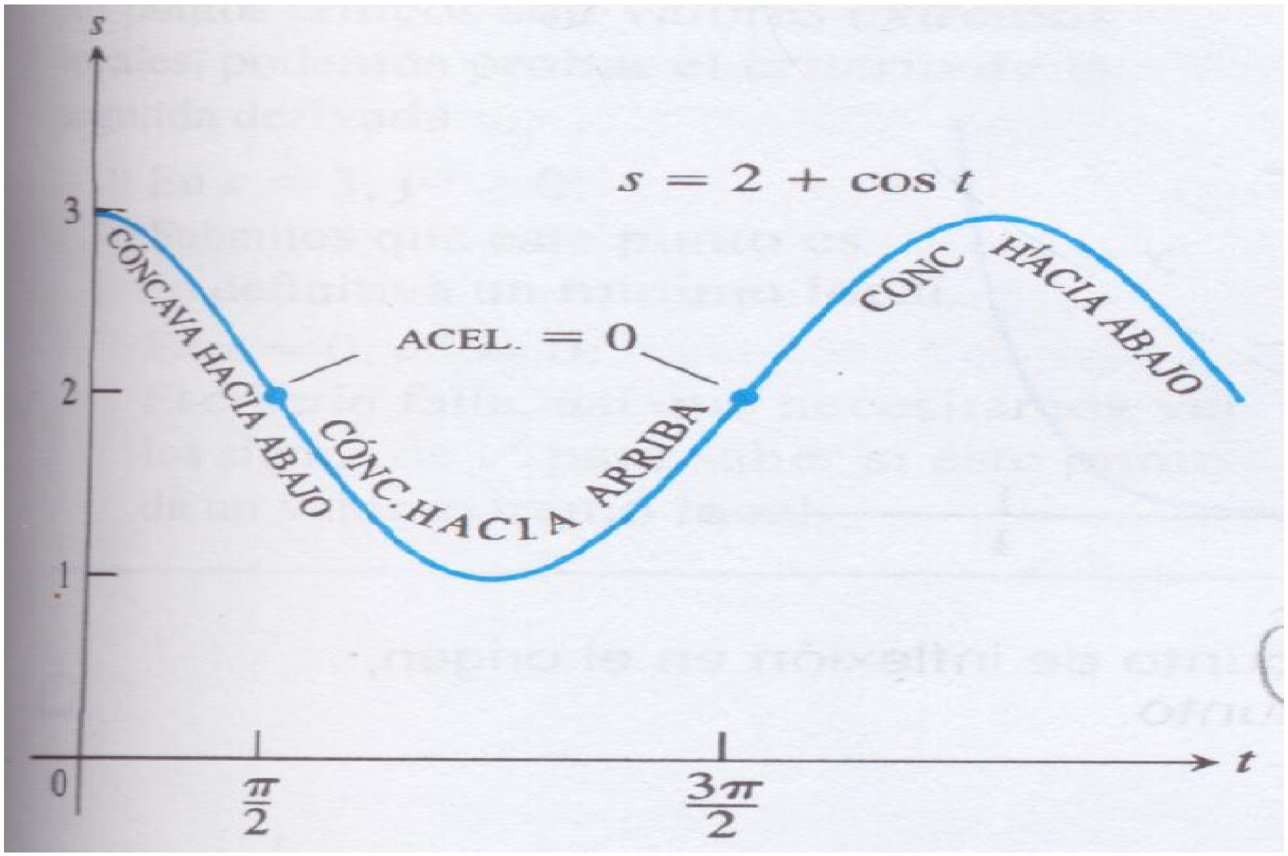
Puntos de Inflexión

Definición. Un punto donde la grafica de una Función tiene una recta tangente y donde la Concavidad cambia, se llama punto de inflexión.

Observación. En la grafica de una función dos veces diferenciable, $y'' = 0$ en todo punto de inflexión.

Ejemplo 18.

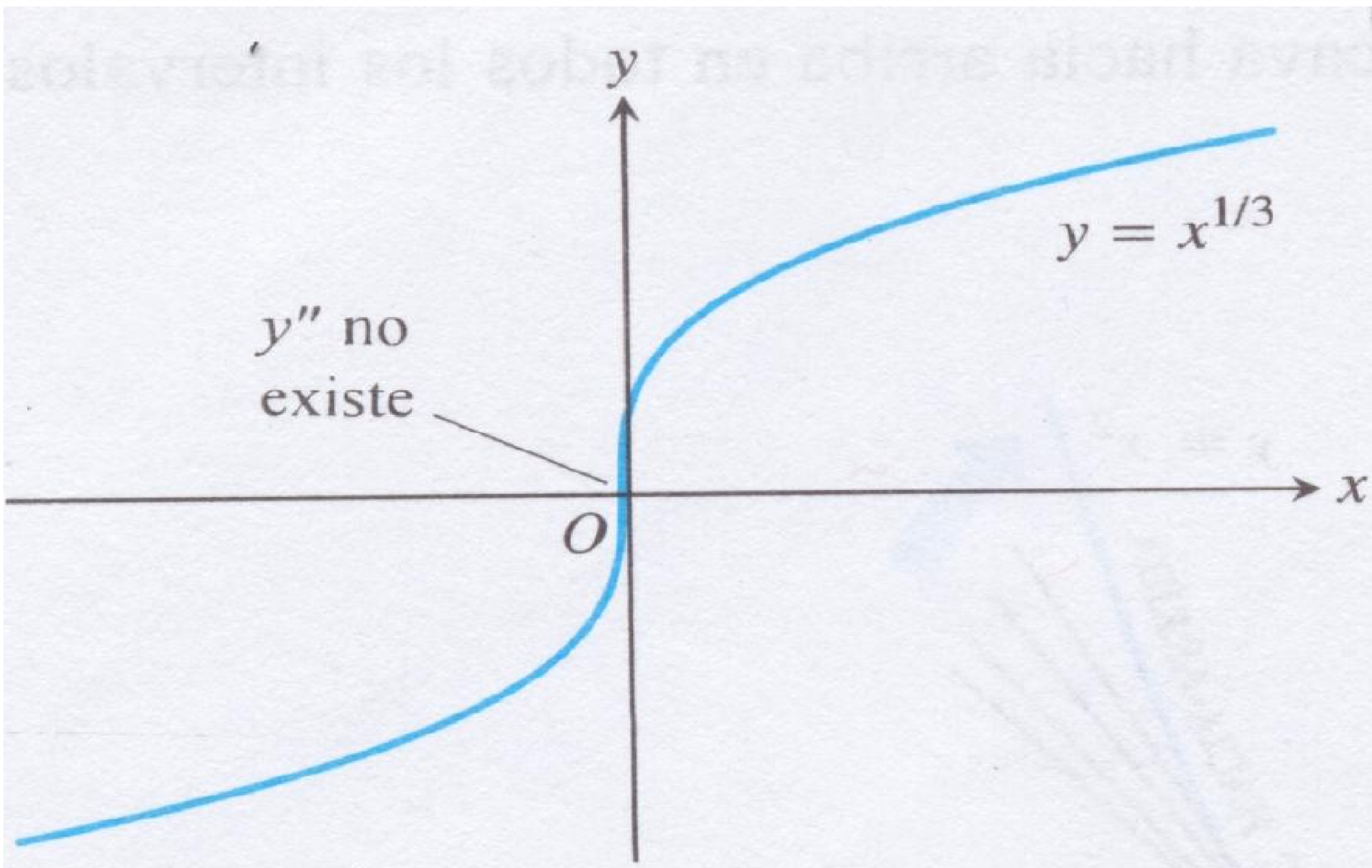
La gráfica de la función $s(t) = 2 + \cos t$, $t \geq 0$ cambia de concavidad en $t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, ...,$ donde la aceleración $s''(t) = -\cos t$ es cero.



Ejemplo 19. Un punto de inflexión donde *y''* no existe.

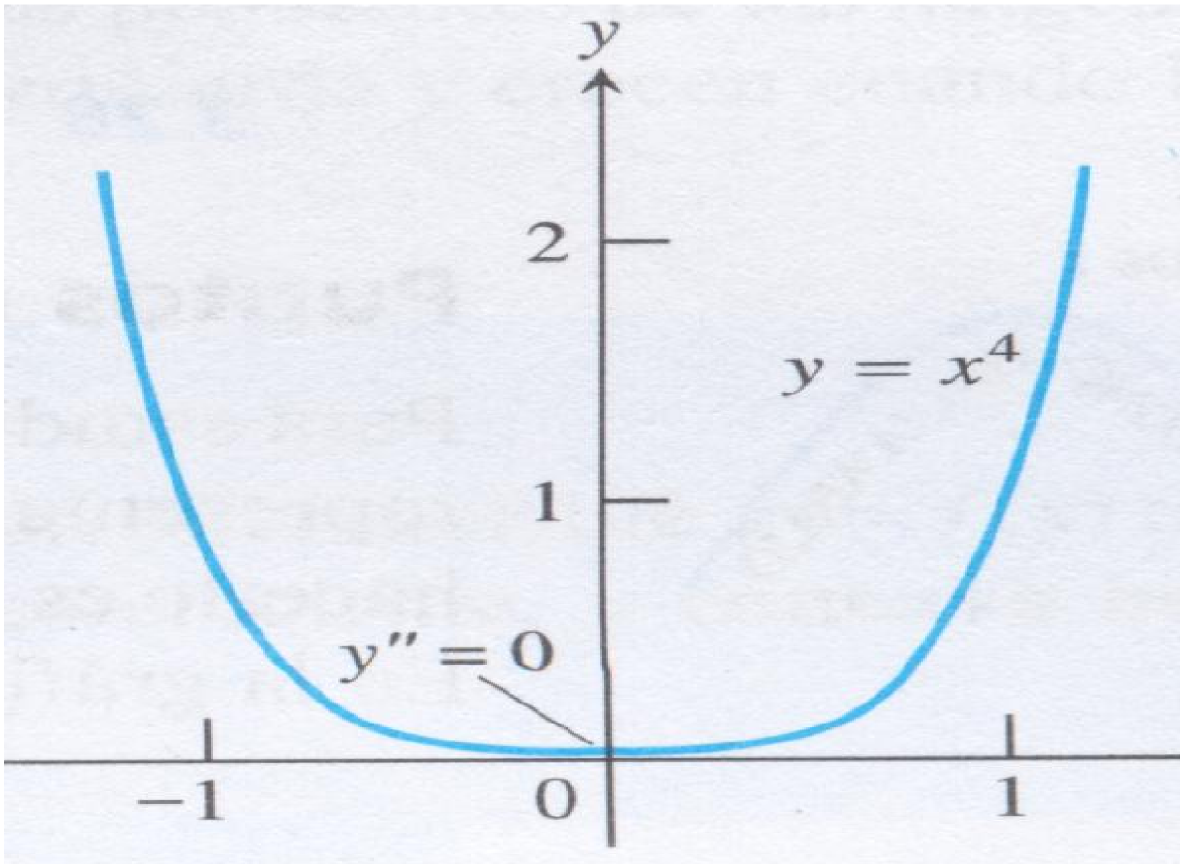
La curva $y = x^{1/3}$, tiene un punto de inflexión en $x = 0$, pero $y''(0)$ no existe:

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}(x^{1/3}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$



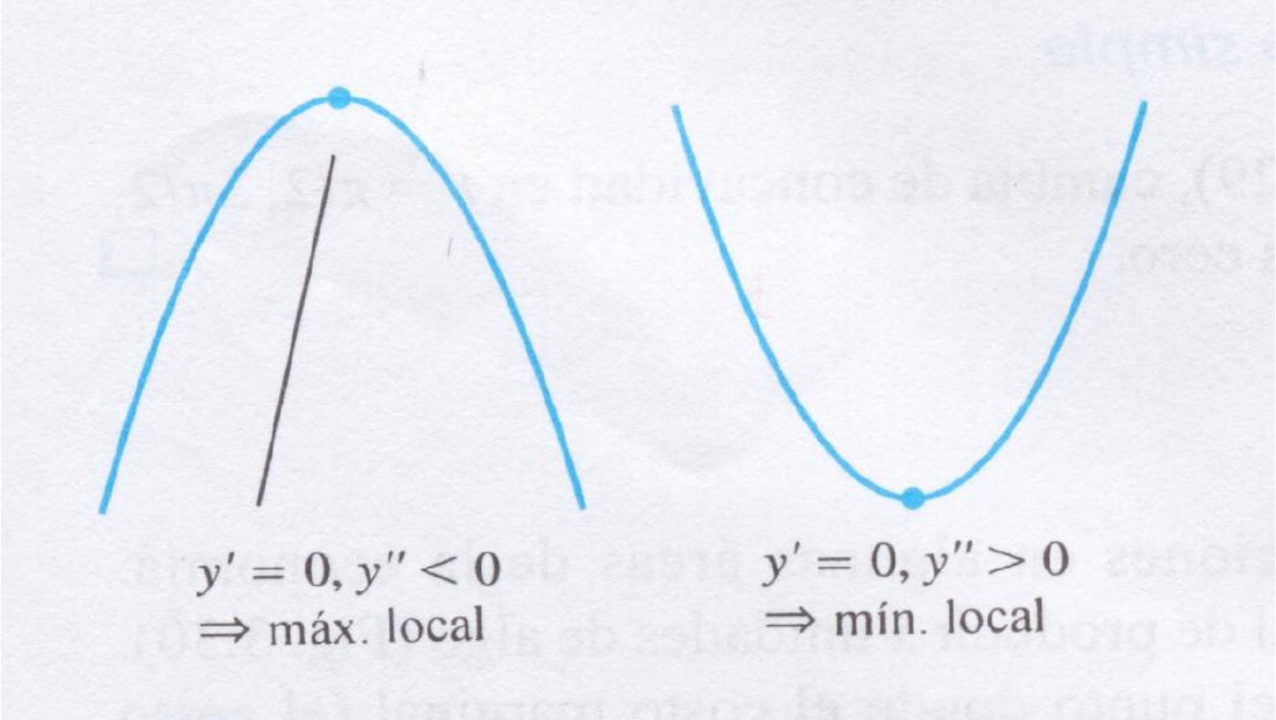
Ejemplo 20. *y''=0,* sin punto de inflexión.

$y = x^4$ no tiene punto inflexión en $x = 0$, aún cuando $y'' = 12x^2$ no cambia de signo en ese punto, con $y''(0) - 0$



Criterio de la segunda derivada para extremos locales

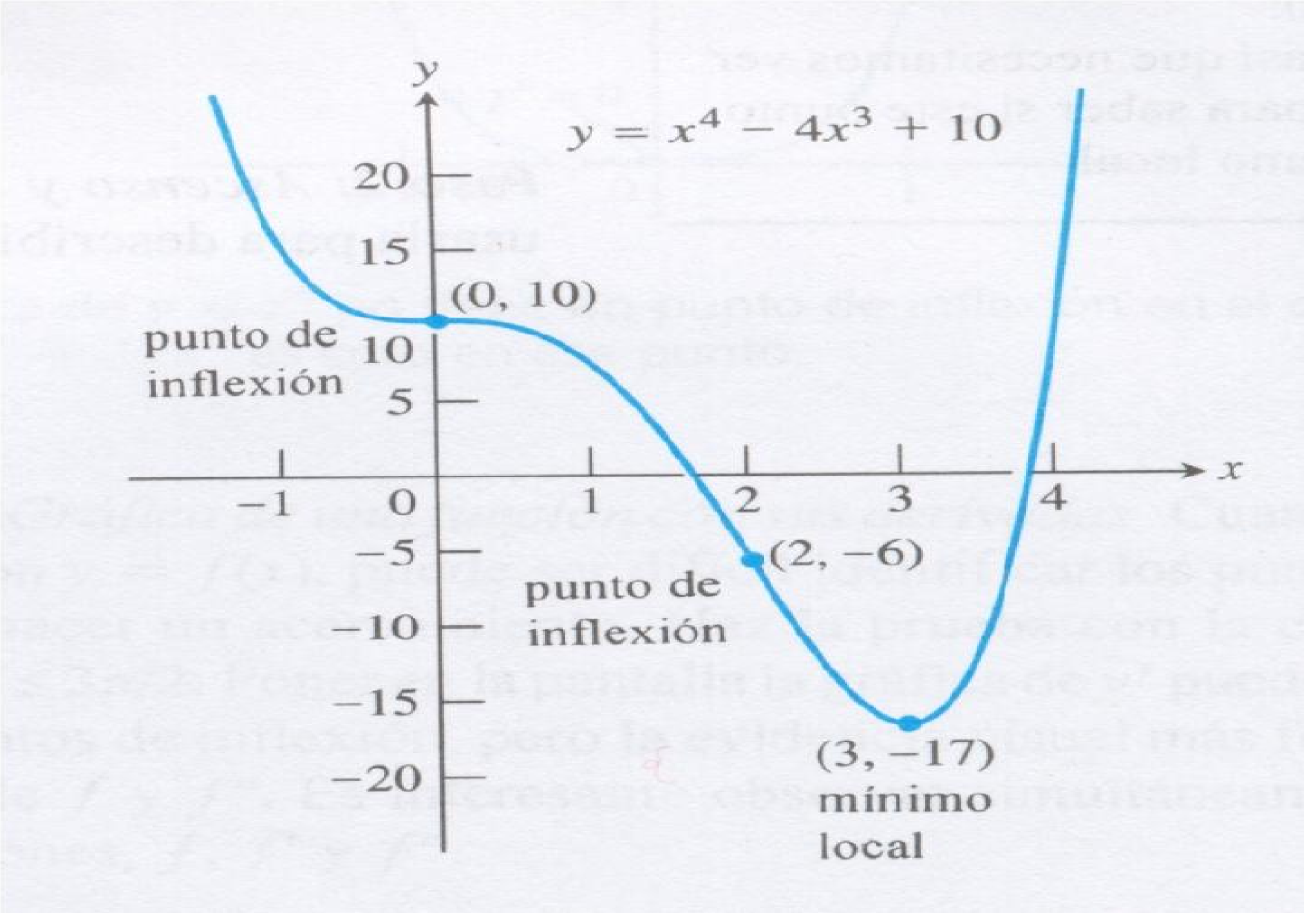
- Si $f'(c)=0$, y $f''(c)<0$, entonces f tiene un máximo local en $x=c$
- Si $f'(c)=0$, y $f''(c)>0$, entonces f tiene un mínimo local en $x=c$



Graficas de Funciones

Ejemplo 21. Dibujar la grafica de:

$$y = x^4 - 4x^3 + 10$$



Estrategia

1. Hallar *y'*, *y''*
2. Determinar el ascenso y descenso de la curva.
3. Determinar la concavidad de la curva.
4. Resume la información y muestra la forma de la curva.
5. Marca puntos específicos y traza la curva.

Ejemplo 22. Dibuja la grafica de:

$$y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$$