UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA 522115

Listado 1 (Inducción)

1. Pruebe por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$:

   i) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 \;=\; \frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

   ii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) \;=\; \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. **(En práctica)**.

   iii) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \;=\; \frac{n}{2n+1}$.

   iv) $2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \cdots + 2n \cdot (2n+2) = \frac{4n(n+1)(n+2)}{3}$.

   v) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

2. Sea $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, una sucesión de números reales y d una constante real positiva, tales que:

$$\begin{aligned} a_0 &= \; 0, \\ a_n &= \; a_{n-1} + d \cdot n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   Demuestre, usando inducción, que $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n \leq d \cdot n^2$.

3. Sea $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$, una sucesión de números reales, llamada sucesión de Fibonacci, tales que:

$$\begin{aligned} u_1 &= \; 1, \quad u_2 = 1, \\ u_n &= \; u_{n-1} + u_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 3. \end{aligned}$$

   Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$:

   i) $\sum_{i=1}^{n} u_i = u_{n+2} - 1$ iii) $\sum_{i=1}^{n} u_{2i-1} = u_{2n}$

   ii) $\sum_{i=1}^{n} u_{2i} = u_{2n+1} - 1$ iv) $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = u_n \cdot u_{n+1}$ **(En práctica i) y ii))**.

4. Aplique la propiedad telescópica para probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

   i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ **(En práctica)**.

5. Demuestre por inducción que

   i) $\forall n \in \mathbb{N}:$ $n^5 - n$ es divisible por 5.

   ii) $\forall n \in \mathbb{N}:$ $3^{2n} + 7$ es múltiplo de 8.

   iii) $\forall n \in \mathbb{N}:$ $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

   iv) $\forall n \in \mathbb{N}:$ $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.

   v) $\forall n \in \mathbb{N}:$ $(1+x)^n \geq 1 + nx\,,\ \forall\, x \geq -1$ **(En práctica)**.

vi) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x - y$.

vii) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 2^{n-1} \leq n!$

6. Pruebe por inducción que $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad n^2 + n$ es divisible por 2, y use este resultado para demostrar que $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad n^3 + 11n$ es divisible por 6. **(En práctica)**.

7. Conjeture el valor de $m \in \mathbb{N}$ para el cual se verifica que $2^n > n^2$, $\forall\, n \geq m$, y demuéstrelo por inducción. **(En práctica)**.

8. Encuentre

   i) el cuarto término en el desarrollo de $(x+5)^{11}$.

   ii) el término constante (si existe) en el desarrollo de $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

   iii) los términos centrales del desarrollo de $\left(y + \dfrac{1}{y^{1/2}}\right)^{15}$.

   iv) los términos que contienen $\dfrac{x^2}{y^3}$ y $\dfrac{x}{y}$ (si existen) en el desarrollo de $\left(x^2 y - \dfrac{x}{y}\right)^{16}$.

   v) El coeficiente del término que contiene a x^{46} en el desarrollo de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^7}\right)^{32}$

   vi) El valor de $(\sqrt{2}+1)^6 - (\sqrt{2}-1)^6$.

9. Demuestre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\text{i) } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad \text{ii) } \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}, \quad \text{iii) } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

10. La suma de cuatro números en P.A. es 24 y la suma de sus cuadros es 164. Hallar los números.

11. Si en una P.G. de 3 términos positivos se suma 2 al segundo término, resulta una P.A., y si en esta P.A. se suma 9 al tercer término, resulta nuevamente una P.G. Determine la P.G. original.

12. Determine el valor de k de modo que $2k+2$, $5k-11$ y $7k-13$ forme una progresión geométrica.

13. Si los números a, b y c son distintos y están en P.G. Demostrar que los números $\dfrac{1}{b-a}, \dfrac{1}{2b}, \dfrac{1}{b-c}$ están en P.A. **(En práctica)**.

14. Una pelota se deja caer desde una altura de 9 mts. Si cada vez rebota un tercio de la altura desde la cual ha caído esa vez. ¿Cuánto rebotará la sexta vez?. ¿Cuál será la distancia total recorrida al tocar el suelo por octava vez?.

JAL
Primer Semestre de 2005.