UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 2
CALCULO (521287)
MATEMATICA III (521296)

Problema 1. Mostrar que la superficie $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ es perpendicular a la superficie $x^2 + 2y^2 - z^2 = -1$ en el punto de intersección $(1, -1, 2)$. Escriba las ecuaciones de los planos tangentes a las respectivas superficies en dicho punto.

Nota: Dos vectores son perpendiculares sí la suma de los productos componente a componente es cero.

(20 puntos)

SOLUCION

Sean f y g definidas como:

$$f(x, y, z) = x^2 - 2yz + y^3$$

$$g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$$

Luego las funciones gradiente, en cualquier punto (x, y, z), estan dadas por:

$$\nabla f(x, y, z) = 2xi + (-2z + 3y^2)j - 2yk$$
$$\nabla g(x, y, z) = 2xi + 4zj - 2zk$$

Y en particular en el punto $(1, -1, 2)$:

$$\nabla f(1, -1, 2) = 2i - j + 2k$$
$$\nabla g(1, -1, 2) = 2i - 4j - 4k$$

Dos vectores son perpendiculares si la suma de los productos componente a componente es cero. Así, para los vectores $\nabla f(1, -1, 2)$ y $\nabla g(1, -1, 2)$ se tiene:

$$2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) = 4 + 4 - 8 = 0$$

con lo que sus gradientes son perpendiculares en el punto $(1, -1, 2)$ y entonces los planos tangentes de las superficies son pertpendiculares en dicho punto y por lo tanto las superficies son perpendiculares en el punto.

Las ecuaciones de los planos tangentes para las superficies de las funciones f y g en el punto $(1,-1,2)$ son:

Para $f(x,y,z)=4$

$$2(x-1)-(y+1)+2(z-2)=0$$

$$\implies \qquad 2x-y+2z=7$$

Para $g(x,y,z)=-1$

$$2(x-1)-4(y+1)-4(z-2)=2$$

$$\implies \qquad x-2y-2z=-1$$

Problema 2. Al determinar la densidad específica de un objeto, se encontró que su peso en el aire era $A=26$ libras y su peso en el agua de $w=20$ libras, con un posible error en cada medida de 0.02 libras. Encuentre el máximo error aproximado posible en el cálculo de su densidad específica S, siendo:

$$S=-\frac{A}{A-W}$$

(15 puntos)

SOLUCION

$$A=26,\ W=20$$

$$\triangle A=\triangle W=0.02$$

$$S=\frac{A}{A-W}$$

Entonces

$$S_A=-\frac{W}{(A-W)^2}$$

$$S_W=\frac{A}{(A-W)^2}$$

Luego la diferencial de S está dada por:

$$dS=S_A dA+S_W dW$$

O sea:

$$dS=-\frac{W}{(A-W)^2}dA+\frac{A}{(A-W)^2}dW$$

Ahora, el error máximo de la densidad, de acuerdo a los datos que se tienen, va a estar dado por $dS(26,20)$ $(dA = dW = 0.02)$; vale decir:

$$dS(26,20) = -\frac{20}{36}(0.02) + \frac{26}{36}(0.02) \approx 0.0033$$

Problema 3. Una empresa desea fabricar cajas cerradas con la forma de un paralelepípedo con un volumen de 8 pies cú bicos. El material de la tapa y del fondo cuesta $US\$10 el pies cuadrado, mientras que el material de los lados$ US$5 el pies cuadrado. Encontrar las mediciones de la caja que minimicen su costo.

(25 puntos)

SOLUCION

$V = x\,\mathrm{y}\,z = 8$; x : largo, y = ancho, z = alto

Costo del material:

xy : área del fondo y tapa de la caja
yz : área de dos de los lados de la caja
xz : área de los otros dos lados de la caja

Luego el costo C del material es:

$$C = 20xy + 10yz + 10xz$$

De $V = 8 \Rightarrow z = 8/xy$

Así el costo va a estar dado por

$$f(x,y) = 20xy + \frac{80}{x} + \frac{80}{y}$$

$$f_x = 20y - \frac{80}{x^2}, \qquad f_y = 20x - \frac{80}{y^2}$$

$$f_x = 0 \text{ y } f_y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left.\begin{array}{r} 20y - \frac{80}{x^2} = 0 \\ 20x - \frac{80}{y^2} = 0 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} y - \frac{4}{x^2} = 0 \\ x - \frac{4}{y^2} = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

De (1) $y = \frac{4}{x^2}$

Reemplazando y en (2):

$$x = \frac{4}{\left(\frac{4}{x^2}\right)^2} = \frac{x^4}{4}$$

$$\Rightarrow x^3 = 4 \qquad (x \neq 0)$$

$$\Longrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{4}$$

de donde:

$$y = \frac{4}{(4)^{2/3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$\Longrightarrow \qquad (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}) \text{ único punto crítico.}$$

Haciendo el test de las segundas derivadas se tiene:

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

$$f_{xx} = \frac{160}{x^3}, \qquad f_{yy} = \frac{160}{y^3}, \qquad f_{xy} = 20$$

$$\Longrightarrow \qquad D(x,y) = \frac{(160)^2}{x^3 y^3} - 400$$

$$\Longrightarrow \qquad D(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}) = \frac{(160)^2}{16} - 400 = 1200 > 0$$

$$f_{xx}(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}) = \frac{160}{4} = 40 > 0$$

$$\Longrightarrow \qquad (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}) \text{ es un punto de mínimo}$$

De lo anterior se tiene que:

$$z = \frac{8}{(4)^{1/3}(4)^{1/3}} = \frac{8}{(4)^{2/3}} = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$$

ADP/cln 18 de Noviembre de 2005.