UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía N°4: Integración Numérica

Cálculo Numérico 521230, 2017-2

Nota: Esta guía complementa el Laboratorio sobre Integración Numérica.

1. Aproximar el valor de las siguientes integrales utilizando las reglas elementales del punto medio, de los trapecios y Simpson. Compare con el valor exacto de la integral.

   a) $\displaystyle\int_1^3 x\,dx,$ *c)* $\displaystyle\int_{-4}^{-1} (x^3+2x^2+1)\,dx,$ *e)* $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{x^2},dx,$

   b) $\displaystyle\int_1^3 (x^2+1)\,dx,$ *d)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4\,dx,$ *f)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx.$

2. El intervalo de integración $[a,b]$ se divide en n subintervalos del mismo tamaño: $x_i := a+ih$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ y $h=(b-a)/n$ es la longitud de cada subintervalo. Para diferentes valores de n, se aproxima el valor de la integral $I := \displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x)\,dx$ utilizando las reglas del punto medio y de los trapecios compuestas. Sean R_M y R_T los errores de integración de las reglas del punto medio y de los trapecios, respectivamente. Complete la siguiente tabla,

n	h	R_M	R_T
2			
4			
8			

   ¿Qué puede concluir del comportamiento del error?. ¿Concuerda con lo que predice la teoría?.

3. El intervalo de integración $[a,b]$ se divide en $2n$ subintervalos del mismo tamaño: $x_i := a+ih$, $i = 0, 1, 2, ..., 2n$ y $h=(b-a)/(2n)$ es la longitud de cada subintervalo. Para diferentes valores de n, se aproxima el valor de la integral $I := \displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x)\,dx$ utilizando la regla de Simpson compuesta. Sea R_S el error de integración de la regla de Simpson. Complete la siguiente tabla

n	h	R_S
2		
4		
8		

   ¿Qué puede concluir del comportamiento del error?. ¿Concuerda con lo que predice la teoría?.

4. Repita el Ejercicio 3, pero considerando $I := \displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(|x-1/5|)\,dx.$
5. Repita el Ejercicio 3, pero considerando $I := \displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(|x-1/5|)\,dx$ y una partición que incluya el $1/5$. Por ejemplo, puede considerar $n\in\{5,10,15\}$.
6. Considere la siguiente regla de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1/2) + \omega_3 f(1).$$

   Determinar los pesos ω_1, ω_2 y ω_3 de modo que la regla sea exacta para polinomios del mayor grado posible.

7. Considere el siguiente problema de valores iniciales (P.V.I):

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x), \quad x \in [a,b] \\ y(a) &= y_0, \end{cases}$$

donde el intervalo $[a,b]$, el término fuente f y la condición incial y_0 son dados. Integrando la ecuación entre a y x obtenemos que la solución del P.V.I es

$$y(x) = y(a) + \int_a^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

   a) Utilizar la regla del punto medio elemental para aproximar la integral de (1) y así obtener una aproximación de la solución $y(x)$ del P.V.I.
   b) Para $f(x) = \cos(x)$, $a = 0$, $b = \pi$ e $y_0 = 0$, escribir la aproximación obtenida en *b*). Graficar esta aproximación y la solución exacta del problema (1). **Indicación:** Notar que la solución exacta es $y(x) = \operatorname{sen}(x)$.
8. Repita el ejercicio anterior, pero considerando la regla de Simpson elemental.
9. Utilizar la regla de Gauss-Legendre con $n = 2$ para aproximar el valor de cada una de las integrales del Ejercicio 1. **Indicación:** Recordar realizar un cambio de variable cuando sea necesario, ya que la regla de Gauss-Legendre se define sobre el intervalo $[-1,1]$.
10. Considere las siguientes integrales dobles

a) $\displaystyle\int_0^\pi \int_1^3 x\operatorname{sen}(y)\,dx\,dy,$ *b*) $\displaystyle\int_0^\pi \int_1^3 \operatorname{sen}(xy)\,dx\,dy,$ *c*) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-4}^{-1} (yx^3 + 2x^2 + y)\,dx\,dy.$

Aproximar su valor utilizando las siguientes combinaciones de reglas de cuadratura:
   - Regla del punto medio en la variables x y regla de los trapecios en la variable y.
   - Regla del punto medio en la variables x y regla Simpson en la variable y.
   - Regla de Gauss-Legendre con $n = 1$ en la variables x y regla de los trapecios en la variable y.
11. Considere las siguientes integrales triples,

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^3 \operatorname{sen}(xyz)\,dx\,dy\,dz,$ *b*) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (yx^3 + z)dx\,dy\,dz.$

Aproximar su valor utilizando las siguientes combinaciones de reglas de cuadratura:
   - Regla del punto medio en las variables x e y, y regla de los trapecios en la variable z
   - Regla de Gauss-Legendre con $n = 2$ en las tres variables.
12. Sabemos que el volumen V de un objeto S está dado por $V = \iiint_S d(x,y,z)$. Calcular una aproximación del volumen de una esfera de radio 2, utilizando reglas de cuadratura. **Indicación:** Utilizar coordenadas esféricas.