

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142  
Listado 5 (Funciones II)

1. Para cada una de las siguientes funciones, determine  $Dom(f)$  de manera que la función resulte bien definida. En cada caso, determine además su recorrido:  $Rec(f)$ .

a)  $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2+x}$  (En práctica)

b)  $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

c)  $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

d)  $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto f(x) = |x - 8|$

e)  $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto f(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$  (En práctica)

2. En los siguientes casos determine si la función es invertible, o si es posible restringir su dominio y/o codominio para hacerla invertible. Si es así, defina su inversa.

a)  $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x+3}{2x-4}.$

b)  $f : [2, 10] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}.$  (En práctica)

c)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = (x-1)(x-2).$

3. Considere las siguientes funciones a variable real. Analice inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, paridad y monotonía. Defina además, cuando sea posible, su función inversa.

- a) Dadas las constantes reales  $a$  y  $b$ , la **función lineal afín**:

$$l_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto l_{a,b}(x) = ax + b.$$

b) La función **raíz cuadrada**:  $r : [0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto r(x) = \sqrt{x}.$

c) La función **valor absoluto**:  $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto v(x) = |x|.$

d)  $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 3, \\ x-4 & \text{si } x \leq 3. \end{cases}$$

4. Sean  $f : A \longrightarrow B$  y  $g : B \longrightarrow C$  dos funciones reales cualesquiera. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
- a)  $f$  biyectiva implica que  $f$  no es par.
  - b)  $g$  impar implica  $g$  inyectiva.
  - c) Si  $g \circ f$  es impar, entonces  $g$  es impar.
  - d)  $f$  par y monótona, implica que  $f = cte.$
  - e) Si  $g$  y  $f$  son inyectivas, entonces  $g \circ f$  es inyectiva. **(En práctica)**
  - f) La inyectividad de  $g \circ f$  implica que  $f$  es inyectiva.
  - g) Si  $g$  es sobreyectiva entonces  $g \circ f$  es sobreyectiva.
  - h) El hecho que  $f$  sea estrictamente creciente y  $g$  estrictamente decreciente, implica que  $g \circ f$  es estrictamente creciente. **(En práctica)**
5. Sean  $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  y  $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  dos funciones reales. Analice la existencia de la suma, el producto, el cociente y las compuestas  $g \circ f$  y  $f \circ g$ . En los casos donde exista la función, defínala. **(En práctica a))**
- a)  $f(x) = 1 + x^2$ ;  $g(x) = \sqrt{x-1}$ .
  - b)  $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ;  $g(x) = \frac{1}{x}$ .
  - c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1; & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}; & x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 2; & x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1}; & x > 1 \end{cases}$
  - d)  $f(x) = ax + b$ ;  $g(x) = cx + d$ .
6. Escriba las siguientes funciones como composición de las funciones  $l_{a,b}$ ,  $r$ , y  $v$  definidas en el problema anterior, según convenga.
- a)  $f(x) = ||x| + 1|$    b)  $f(x) = \sqrt{3x+1}$    c)  $f(x) = \sqrt[4]{x}$