UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
MGC/FPV

12.05.2001

MAT **521 234 :** Complemento de Cálculo

Respuestas Forzadas del Oscilador Lineal

Considere la función contínua $2L$-periódica:

$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{L}{2} & \text{si} \quad -L \leq t < 0 \\ \frac{L}{2} - t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq L \end{cases}$$

y para el valor elegido de L sus coeficientes de Fourier $\{a_0, a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

I. Primero observamos que el **Oscilador no Amortiguado**

$$(D^2 + 16)y_f(t) = f(t)$$

exhibirá resonancia si $L \in \{\frac{n\pi}{4} : n = 1, 2, 3, ...\}$. El objetivo, es estudiar la respuesta forzada $y_f(t)$ para $L \approx \pi^{\pm}$, en tal caso por principio de superposición:

$$y_f(t) = \frac{a_0}{32} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \tag{1}$$

donde $y_n(t)$ es la *solución particular* o respuesta forzada a las oscilaciones de frecuencia $\frac{n}{2L}$:

$$(D^2 + 16)y_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t$$

es decir:

$$y_n(t) = \frac{1}{16 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right) \tag{2}$$

II. Oscilador Amortiguado: Sea $L = \pi$ y $\{a_0, a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ los coeficientes de Fourier de f en tal caso. Estudiar las oscilaciones forzadas de :

$$\left[(D^2 + \alpha)^2 + 16\right] y_f(t) = f(t)$$

nuevamente por principio de superposición;

$$y_f(t) = \frac{a_o}{2(\alpha^2 + 16)} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \tag{3}$$

donde $y_n(t)$ es la *solución particular* o respuesta forzada a las oscilaciones de frecuencia $\frac{n}{2\pi}$:

$$\left[(D^2 + \alpha)^2 + 16\right] y_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt \tag{4}$$

es decir:

$$y_n(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt \tag{5}$$

donde

$$A_n = \frac{\alpha^2 + 16 - n^2}{D} a_n - \frac{2n\alpha}{D} b_n \quad D = \left(\alpha^2 + 16 - n^2\right)^2 + (2n\alpha)^2 \tag{6}$$

$$B_n = \frac{\alpha^2 + 16 - n^2}{D} b_n + \frac{2n\alpha}{D} a_n$$

Estudiar el comportamiento de $y_f(t)$ si el *coeficiente de amortiguamiento* es elegido tal que $\alpha \approx 0^{\pm}$.