

ALGEBRA IV: INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS DISCRETAS (525412)

Evaluación 1

Tiempo: 3 Hrs.

1. Sea $F = \{f : A \longrightarrow B : f \text{ es función}\}$ y sea R una relación de orden en F . Se define en F la relación R^* por:

$$f R^* g \iff \forall a \in A, f(a) R g(a).$$

- a) Pruebe que R^* es relación de orden en F .
b) Muestre que si $|A| = |B| = 2$, entonces R^* es relación de orden parcial.
2. Sea $(A, +, *)$ un anillo conmutativo. Se dice que $I \subseteq A$ es un ideal si $(I, +)$ es un subgrupo de $(A, +)$ y $\forall b \in I, \forall a \in A, a * b \in I$.

- a) Pruebe que si b es cualquier elemento de A , entonces $\{b * a : a \in A\}$ es un ideal.
b) Pruebe que si $f : A \longrightarrow A$ es un homeomorfismo, entonces el conjunto $\{a \in A : f(a) = 0\}$ es un ideal.
c) Dado un ideal I de A . Pruebe que la relación R_I en A definida por:

$$a R_I b \iff a + (-b) \in I$$

es relación de equivalencia.

- d) Demuestre que para $n \in \mathbb{N}$ dado, el conjunto $I = \{kn : k \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y determine \mathbb{Z}/R_I .
3. Sea G un grafo tal que $|V(G)| \geq 2$. Considere el siguiente juego entre dos personas A y B quienes juegan en forma alternada.
Juego:

- Paso 1: El jugador A elige un nodo cualquiera del grafo G y lo marca.
- Paso n ($n \geq 2$): Si es el turno del jugador B , entonces B marca un nodo NO marcado adyacente al nodo elegido por A en el paso $n - 1$. De manera similar, si es el turno de A , este elige un nodo no marcado adyacente al nodo elegido por B en el paso $n - 1$ y lo marca.

El juego termina cuando no haya nodo posible de marcar. El ganador del juego es aquel que marca el último nodo.

- a) Determine el máximo número de pasos que podría durar el juego.
b) Pruebe que el último nodo marcado en el juego no es un vértice de corte.
c) Sea $n \geq 2$ un entero par dado. Encuentre un grafo G con n nodos tal que no importa el nodo elegido por A en el paso 1, B siempre gana el juego.
d) Pruebe que si el juego termina con todos los nodos marcados, entonces G es conexo.