UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Complemento de Cálculos (MAT. 521234)

Guía de Ejercicios No 1.

1. Construir la serie de Fourier asociadas a las siguientes funciones, las cuales son extendidas periódicamente de la manera usual. Esboce la función a la cual la función converge, represente dos periodos. Fundamente su respuesta:

   a) $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

   b) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } a < x < 2-a \\ 1 & \text{si } 2-a < x < 2 \end{cases}$

   c) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < t < -\pi/2 \\ 1 & \text{si } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < t < \pi \end{cases}$

   d) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < t < 0 \\ t^2 & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$

   e) $f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si } 0 < t < 1 \\ -1+t & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$

   f) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x), -\pi \le x \le \pi$

2. Construir las Series de Fourier asociadas a las siguientes funciones:

   a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$
   SFC 4-periódica.

   b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$
   SFS 4-periódica.

   c) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$
   SFC, 8-periódica c/s $\frac{1}{4}$ onda.

   d) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$
   SFS, 8-periódica c/s $\frac{1}{4}$ onda.

3. La serie de Fourier Compleja corresponde a la serie de Fourier generalizada asociada al sistema ortonormal completo $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[0,2\pi]$ (o $L^2[-\pi,\pi]$). Encontrar la serie de Fourier Compleja de las funciones 2π-periódicas:

   a) $f(t) = \operatorname{sen}(\frac{t}{2})$

   b) $g(t) = t$

4. Una función 2π periódica está definida por $f(x) = e^x,\ -\pi < x < \pi$. Dibuje dos ciclos de la gráfica de f, y demuestre que:

$$f(x) = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx) - n\operatorname{sen}(nx)}{1+n^2}\right].$$

   Establecer la identidad de Parseval asociada.

5. Resolver el Problema de Valores de contorno

$$y'' + 7y = \begin{cases} \frac{t}{\pi} & \text{si} \quad 0 \le t \le \pi \\ \\ \frac{2\pi - t}{\pi} & \text{si} \quad \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

donde $y'(0) = y'(2\pi) = 0$.

6. Determinar la parte par e impar de la función:

$$f(t + 2\pi) = f(t), \quad f(t) = (t^2 + t),\ -\pi < t < \pi$$

y el comportamiento asintótico de los coeficientes de Fourier asociados a dichas funciones. Demostrar que la serie de Fourier asociada a la parte par converge uniformemente y establecer la función límite de la serie de Fourier asociada a la parte impar. En cada caso establecer la respectiva identidad de Parseval.

7. Verifique que la serie de Fourier de $f(t) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{si} \quad \pi < x \le 2\pi \end{cases}$ es

$$\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\sin(x)}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \cdots \right) - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \frac{\cos(7x)}{7^2} + \cdots \right)$$

8. Verifique que la serie de Fourier de $f(t) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{si} \quad \pi < x \le 2\pi \end{cases}$ es

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$$

9. Utilice los dos ejercicios anteriores y los teoremas de Convergencia de Series de Fourier para establecer las siguientes identidades numéricas:

   a) $\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

   b) $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

   c) $\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

   d) $\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} - \frac{2}{7 \cdot 9} + \cdots$

10. Una función 2π-periódica f se dice *alternante*, si y solamente si, $f(x + \pi) = -f(x)$ para $-\pi < x < 0$. Demuestre que si f es *alternante*, entonces su serie de Fourier sobre $]-\pi, \pi[$ contiene solamente términos de la forma $a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$, donde n es impar. Definir a_{2n+1} y b_{2n+1}.

11. ¿Existe una función integrable Riemann cuya serie de Fourier sobre $]-\pi, \pi[$ sea $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) + \operatorname{sen}(nx)$?

12. Establecer, como consecuencia de la Identidad de Parseval que ninguna función de cuadrado integrable 2π periódica puede tener por serie de Fourier:

$$\cos(x) + \frac{\cos(2x)}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}} + \cdots$$

HMM/FPV/fpv.
14 de Agosto de 2007.