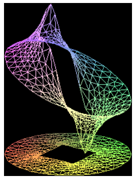
MAT 520142:
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 6

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Polinomios

Definición: Polinomio

Un polinomio en x sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es una expresión

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

con $a_i \in \mathbb{K}, i = 0, 1, ..., n$, llamados coeficientes del polinomio.

- Si n es el mayor valor tal que $a_n \neq 0$, entonces se dice que el polinomio $p(x)$ tiene grado n y se escribe $gr(p(x)) = n$.
- Si $n = 0$, entonces $p(x) = a_0,\ a_0 \neq 0$ es un polinomio constante. $p(x) = 0$ se llama polinomio nulo, se denota $\theta(x)$ y se conviene que no tiene grado.
- a_n se llama el coeficiente principal de $p(x)$ y a_0 el término libre o independiente de x. Si $a_n = 1$, entonces el polinomio se dice mónico.

Polinomios

- Se denota por $\mathbb{K}[x]$ al conjunto de todos los polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{K}$. Por ejemplo, $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ o $\mathbb{C}[x]$.

- Si

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i,$$

entonces

$$p(x) = q(x) \Longleftrightarrow m = n \wedge a_i = b_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Polinomios

Operaciones con polinomios.

Definición : suma y multiplicación de polinomios.

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ dos polinomios cualquiera en $\mathbb{K}[x]$.

- **Suma**

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{r} c_i x^i,$$

donde $c_i = a_i + b_i, \quad i = 0, 1, ..., r$ y $r \leq$máx$\{m, n\}$.

- **Multiplicación**

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{s} d_i x^i,$$

donde $d_i = \sum_{i=k+j} a_k b_j, \quad i = 0, 1, ..., s, \quad 0 \leq s \leq m + n.$

Polinomios

Propiedades de la suma y el producto en $\mathbb{K}[x]$.

$\forall p, q, r \in \mathbb{K}[x]$ se tiene:

S1).	$(p+q)+r = p+(q+r)$.	S2).	$p+q = q+p$.
S3).	$\exists\, \theta \in \mathbb{K}[x] : p+\theta = p$	S4).	$\exists -p \in \mathbb{K}[x] : p+(-p) = \theta$
M1).	$(p \cdot q)\cdot r = p \cdot (q \cdot r)$	M2).	$p \cdot q = q \cdot p$
M3).	El polinomio 1 es tal que $p \cdot 1 = p$	D).	$p \cdot (q+r) = p \cdot q + p \cdot r$
N).	$p \cdot q = \theta \Longrightarrow p = \theta$ o $q = \theta$		

Polinomios

Observaciones:

- Las operaciones de suma y multiplicación pueden ejecutarse también término a término.

- El **cuociente de polinomios** tiene mucha semejanza con el de los números enteros.
  Si $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$, entonces $\frac{p(x)}{q(x)}$ se llama **función racional** de x y en general no es un polinomio.

Polinomios

Teorema.

Si $p(x), d(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $d(x) \neq 0$, entonces existen dos únicos polinomios $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ llamados **cuociente y resto** de dividir $p(x)$ por $d(x)$, tales que:

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x), \qquad r(x) = 0 \quad o \quad gr(r(x)) < gr(d(x)).$$

Por ejemplo, el cuociente y resto de dividir $p(x) = 6x + 4x^3 + 5x^4 - x^2$ por $d(x) = x^2 + 1$ son $q(x) = 5x^2 + 4x - 6$ y $r(x) = 2x + 6$, respectivamente.

Observación. En el teorema se tiene que $p(x)$ es el dividendo, $d(x)$ es el diviror y

$$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}.$$