Interpolación

- Interpolación de Lagrange.
- Estimación del error.
- Splines cúbicas.

Idea: El concepto de interpolación está basado en la idea de obtener una función p, que aproxime una función desconocida f de la cual conocemos su valor sólo en un número finito de puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Intuitivamente para que p esté *cerca* de f, es natural pedirle que coincida con f en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Interpolación Polinomial

Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, $n+1$ puntos en el plano, tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Diremos que el polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, **interpola** al conjunto de datos, si

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Dado que se tienen $m+1$ parámetros independientes $a_0, \ldots, a_m$ y $n+1$ condiciones sobre p, es razonable considerar $m = n$. El sistema de ecuaciones que resuelve este problema de interpolación está dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ \qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{array} \right.$$

Teorema.

Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, entonces existe un ***único*** *polinomio p, de grado menor o igual a n, tal que*

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Demostración.

El determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones que resuelve el problema de interpolación está dado por

$$\prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j),$$

que es evidentemente distinto de cero.

Polinomios de Lagrange

Una manera de calcular **el** polinomio de interpolación p, sin tener que resolver un sistema de ecuaciones, es a través de los polinomios de Lagrange ℓ_i, con $i = 0, \ldots, n$ asociados a los puntos $x_0, \ldots, x_n$. Estos polinomios de grado n están definidos por

$$\ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Notar que ellos satisfacen la relación :

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 0, \ldots, n.$$

El conjunto $\{\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n\}$ es una base del espacio de polinomios de grado menor o igual a n. Gracias a esto existen escalares $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que el polinomio de interpolación p se puede escribir de la siguiente manera:

$$p(x) = \alpha_0 \ell_0(x) + \alpha_1 \ell_1(x) + \cdots + \alpha_n \ell_n(x)\,.$$

Debido a las propiedades de los polinomios de Lagrange es inmediato ver que $\alpha_o = y_0$, $\alpha_1 = y_1, \ldots, \alpha_n = y_n$, es decir

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \cdots + y_n \ell_n(x)\,.$$

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función tal que $y_i = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n$. Una manera de aproximar la función f es a través del polinomio de interpolación, respecto a $x_0,\ldots,\ x_n$, el que en este caso está dado por

$$p_n(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x), \quad n = 0,1,\ldots$$

Teorema.

Sean $x_0,\ldots,x_n$ números reales distintos y f una función real $n+1$ veces continuamente diferenciable en el intervalo $I=(a,b)$, donde $a=\min\{x_0,\ldots,x_n\}$ y $b=\max\{x_0,\ldots,x_n\}$. Entonces, para cada $x\in[a,b]$, existe $\xi_x\in I$ tal que

$$E(x) := f(x) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x) \;=\; \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Aplicación: Interpolación lineal.

Para $n = 1$. Supongamos que $x_0 \leq x \leq x_1$, es decir $[a, b] = [x_0, x_1]$. Sea $h := x_1 - x_0$, entonces

$$p(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}.$$

Luego

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\,\frac{f''(\xi_x)}{2} \qquad x_0 < \xi_x < x_1\ ,$$

así, como $(x - x_0)(x - x_1) \leq \dfrac{h^2}{4}\ \forall x \in [x_0, x_1]$ **(ejercicio)**, entonces

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{8}h^2, \qquad M := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|\,.$$

Fenómeno de Runge

Al realizar una interpolación polinomial para un valor de n grande con puntos x_i equiespaciados, se puede comprobar que se producen grandes oscilaciones del polinomio de interpolación p entre dos puntos consecutivos, especialmente cerca de los extremos del intervalo de interpolación $[a, b]$.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5$, consideremos el polinomio de grado 10 que interpola f en los puntos $x_i = -5, -4, -3, \ldots, 5$.

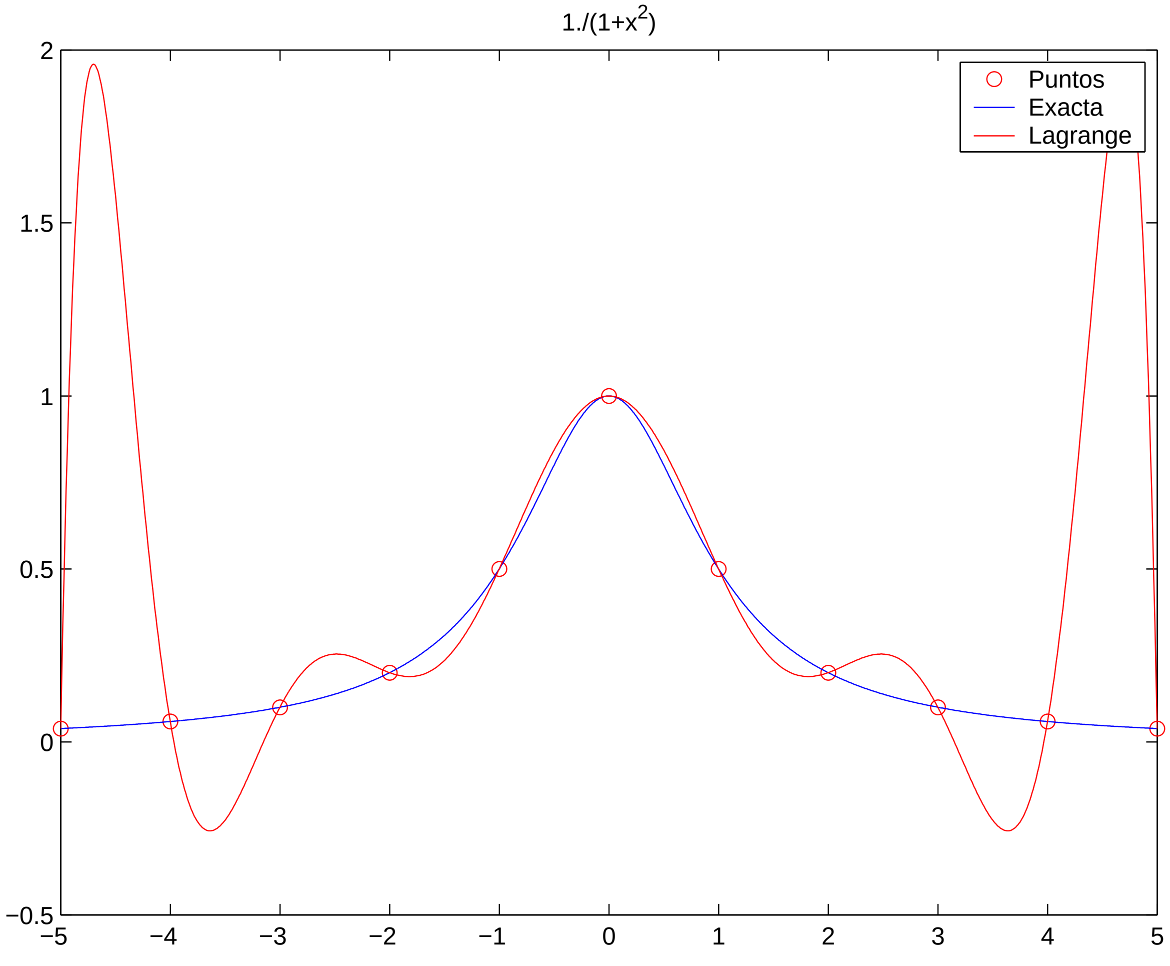


Figure 1: Fenómeno de Runge

Una estrategia efectiva que evita esta situación consiste en construir funciones de interpolación polinomial por tramos (pedazos), en particular las **interpolantes spline cúbicas**.

Interpolación por funciones spline cúbicas

Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Una función s es una **interpolante spline cúbica** en $[x_0, x_n]$, si existen polinomios $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$, de grado a lo más 3, tales que:

- $s(x) = q_k(x)$, en $[x_k, x_{k+1}]$, $\quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$
- $q_k(x_k) = y_k, \qquad q_k(x_{k+1}) = y_{k+1},$
- $q'_{k-1}(x_k) = q'_k(x_k) = s'(x_k), \quad k = 1, \cdots, n-1,$
- $q''_{k-1}(x_k) = q''_k(x_k) = s''(x_k), \quad k = 1, \cdots, n-1.$

Las dos últimas propiedades quieren decir que los polinomios q_k tienen la misma pendiente y concavidad en los nodos de acoplamiento. Esto garantiza la suavidad de s en $[x_0, x_n]$.

En particular, cada q_k'' es lineal e interpola a (x_k, σ_k) y (x_{k+1}, σ_{k+1}) en $[x_k, x_{k+1}]$, donde $\sigma_k := s''(x_k)$. En consecuencia:

$$q_k''(x) = \sigma_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + \sigma_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k},$$

con $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Si $h_k := x_{k+1} - x_k$, con $k = 0, 1, \cdots, n-1$, entonces integrando dos veces q_k'', tenemos

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k (x_{k+1} - x)^3 + \sigma_{k+1} (x - x_k)^3}{6 h_k} + \lambda_k(x),$$

donde λ_k, con $k = 0, 1, \cdots, n-1$, son polinomios de grado 1, que se pueden escribir de la forma

$$\lambda_k(x) := A_k (x - x_k) + B_k (x_{k+1} - x),$$

donde A_k y B_k son constantes determinadas por las relaciones $q_k(x_k) = y_k$ y $q_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$, es decir ellas se determinan despejando su valor de las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{\sigma_k}{6} h_k^2 + B_k h_k, \\ y_{k+1} &= \frac{\sigma_{k+1}}{6} h_k^2 + A_k h_k. \end{aligned}$$

Despejando A_k y B_k, y reemplazando dichos valores en el polinomio de q_k, obtenemos

$$
\begin{aligned}
q_k(x) \quad = \quad & \frac{\sigma_k}{6}\left[\frac{(x_{k+1}-x)^3}{h_k} - h_k(x_{k+1}-x)\right] \\
& + \frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{(x-x_k)^3}{h_k} - h_k(x-x_k)\right] \\
& + y_k\left[\frac{x_{k+1}-x}{h_k}\right] + y_{k+1}\left[\frac{x-x_k}{h_k}\right], \\
& \qquad\qquad\qquad k = 0, 1, \cdots, n-1.
\end{aligned}
$$

Los valores σ_k están determinados por el último conjunto de condiciones que falta por verificar y que caracterizan a la spline cúbica, a saber que la derivada es continua. Es decir, se debe verificar que s' resulte continua en cada x_k. Para ello derivamos el polinomio q_k obteniendo

$$\begin{aligned} q_k'(x) \quad &= \quad \frac{\sigma_k}{6}\left[-\frac{3(x_{k+1}-x)^2}{h_k}+h_k\right]+\frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{3(x-x_k)^2}{h_k}-h_k\right] \\ &\quad +\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}, \qquad k=0,1,\cdots,n-1. \end{aligned}$$

Luego, como $q'_{k-1}(x_k) = q'_k(x_k),\ k = 1, \cdots, n-1$ (continuidad de s'), se tiene que

$$\frac{\sigma_{k-1}}{6} h_{k-1} + \frac{2\sigma_k}{6} h_{k-1} + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} = -\frac{2\sigma_k}{6} h_k - \frac{\sigma_{k+1}}{6} h_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k},$$

para $\quad k = 1, \ldots, n-1.$

Es decir, tenemos un sistema de ecuaciones lineales:

$$h_{k-1}\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\sigma_k + h_k\sigma_{k+1} = 6\left\{\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}\right\}$$

con $k = 1, \ldots, n-1$, constituido por $n-1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas : $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$.

Para resolver este sistema, por ejemplo podemos asignar valores arbitrarios a las incógnitas σ_0 y σ_n, reduciendo así el número de incógnitas a $n-1$. Cuando se toma $\sigma_0 = \sigma_n = 0$, la interpolante que se obtiene se denomina **spline cúbica natural**. Escribiendo las ecuaciones de manera matricial para la spline cúbica natural, se obtiene el siguiente sistema tridiagonal, con matriz simétrica y definida positiva.

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & & & \\
b_1 & a_2 & b_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\
 & & & b_{n-2} & a_{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-2} \\ \sigma_{n-1}
\end{bmatrix}
= 6
\begin{bmatrix}
d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1}
\end{bmatrix}
$$

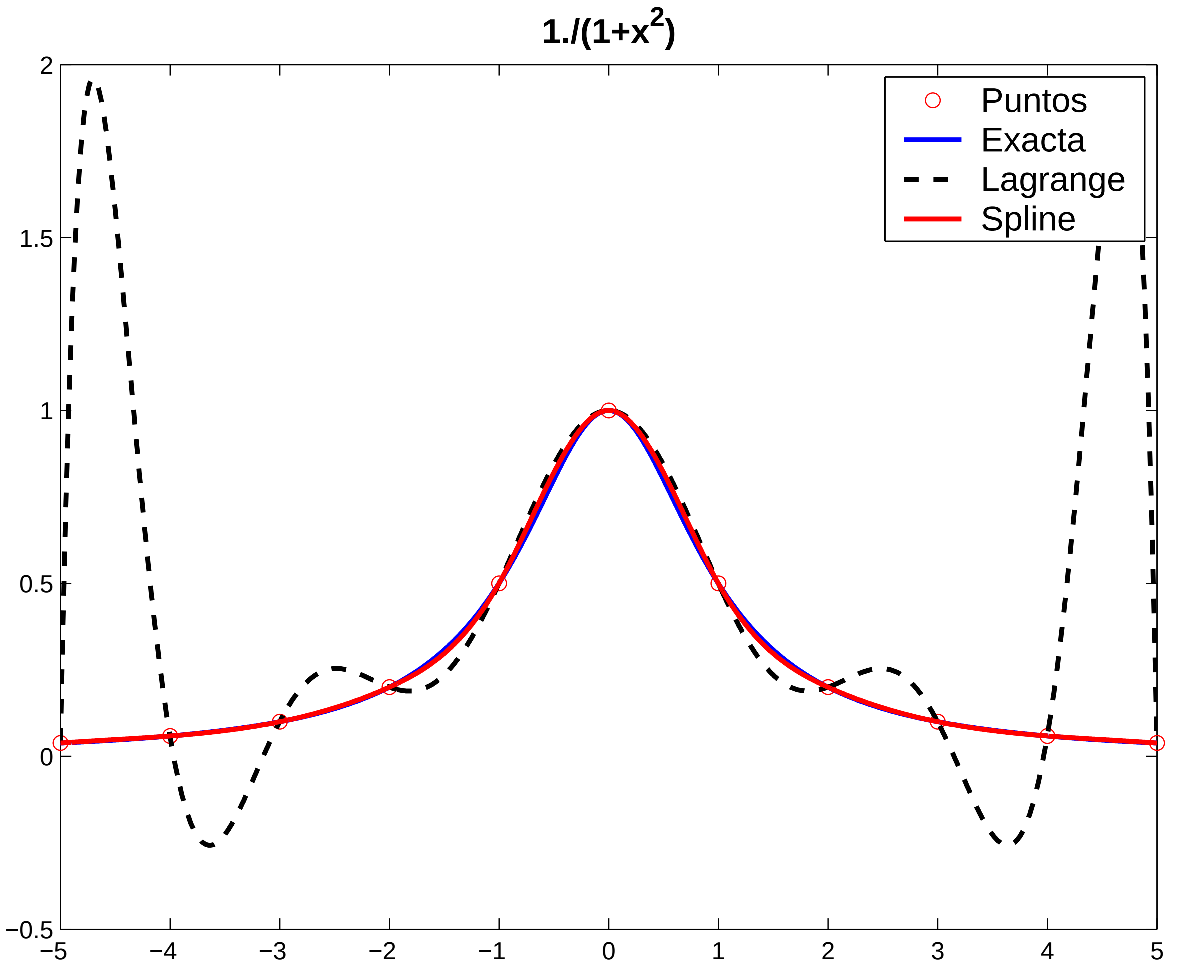
donde

$$
a_k = 2(h_{k-1} + h_k),
$$

$$
d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}, \qquad k = 1, \ldots, n-1,
$$

$$
b_k = h_k, \qquad k = 1, \ldots, n-2,
$$

Ejemplo: Consideremos nuevamente la función f del fenómeno de Runge. Si calculamos la spline cúbica natural s que interpola a f en los puntos $x_i = -5, -4, -3, \ldots, 5$, obtenemos


1./(1+x^2)
Puntos
Exacta
Lagrange
Spline
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5