UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA 20: *Sistemas de Generadores*

I. **Problema.** Considere la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

el subespacio de $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{N(A)} = \{\ \vec{x} \in \boldsymbol{V} :\ \boldsymbol{A}\vec{x} = \boldsymbol{\theta}\ \}$$

y el subconjunto:

$$\boldsymbol{R(A)} = \{\ \vec{b} \in \boldsymbol{V} :\ \boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}\ \text{ es compatible } \}$$

(a) Encuentre un sistema de generadores para $\boldsymbol{N(A)}$.

(b) Demuestre de dos maneras que $\boldsymbol{R(A)}$ es subespacio de $\boldsymbol{V}$.

(c) Encuentre un sistema de generadores para $\boldsymbol{R(A)}$.

(d) Determine $\boldsymbol{R(A^t)} \cap \boldsymbol{N(A)}$ y encuentre un sistema de generadores para este subespacio.

(e) Muestre que $\mathbb{R}^3 - \boldsymbol{R(A)} = \boldsymbol{R(A)^c}$ no es subespacio de $\boldsymbol{V}$.

[En Práctica]

II. **Problema**. Considere el espacio vectorial real $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\mathcal{P}_3}(\mathbb{R})$ y sus subespacios:

- $\boldsymbol{W_1} = \{\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{V}\ :\ \boldsymbol{p(-x) = p(x)},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ \}$;
- $\boldsymbol{W_2} = \{\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{V}\ :\ \boldsymbol{p(-x) = -p(x)},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ \}$;
- $\boldsymbol{W_3} = \{\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{V}\ :\ \boldsymbol{p'(0) = 0},\ \}$;
- $\boldsymbol{W_4} = \{\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{V}\ :\ \int_{1}^{1} \boldsymbol{tp''(t)dt = 0}\ \}$;

(a) Encontrar para c/u de ellos un sistema de generadores.

(b) Demostrar que $\boldsymbol{V = W_1 \bigoplus W_2}$.

(c) Determinar $\boldsymbol{W_3 \cap W_4}$ y un sistema de generadores para este subespacio de $\boldsymbol{V}$.

(d) Repetir la pregunta anterior, si $\boldsymbol{W_3}$ se cambia por $\boldsymbol{W_1}$

(e) ¿Es $\boldsymbol{S = \{\ p \in V\ :\ \int_1^x tp'(t)dt = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\ \}}$ subespacio de $\boldsymbol{V}$?
¿Es $\boldsymbol{S = \{\theta\}}$?

[En Práctica]$\boldsymbol{(W_4.)}$

III. **Problema.** Caracterizar los siguiente subespacios de $\boldsymbol{V}$:

- $\boldsymbol{S_1 = \langle\{[1,2,3],[0,0,1]\}\rangle}$ en $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$;
- $\boldsymbol{S_2 = \langle\{x^2+1, x+2\}\rangle}$ en $\boldsymbol{V = \mathcal{P}_2}(\mathbb{R})$;
- $\boldsymbol{S_3} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ en $\boldsymbol{V = \mathcal{M}_2}(\mathbb{R})$.

[En Práctica]$\boldsymbol{(S_2.)}$

IV. **Problema.** Considere los subconjuntos de $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$:

- $\boldsymbol{S_1} = \left\{\ [x,y,z] \in \boldsymbol{V}\ :\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ \right\}$
- $\boldsymbol{S_2} = \left\{\ [x,y,z] \in \boldsymbol{V}\ :\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ \right\}$

(a) Encuentre un sistema de generadores para cada uno de ellos.
¿Son subespacios de $\boldsymbol{V}$?

(b) Pruebe que $\boldsymbol{S_1 \cap S_2 = \{\theta\}}$.

(c) Encuentre un sistema de generadores para $\boldsymbol{S_1 + S_2}$ y obtenga de dicho sistema un conjunto linealmente independiente en $\boldsymbol{V}$.

(d) ¿Es $\boldsymbol{V = S_1 \bigoplus S_2}$? **[En Práctica]((a) y (c).)**

04.10.2002
FPV/fpv