

## PRACTICO 1

*Matemática I (529.103)*

1. Indique si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. Justifique.

a) Si  $c \neq 0$ , entonces

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

b) Si  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  y  $a+b \neq 0$ , entonces

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}.$$

2. Demuestre mediante un ejemplo que:

a) En  $\mathbb{R}$  la sustracción no es una operación conmutativa.

b) En  $\mathbb{R}$  la división de números reales diferentes de cero no es asociativa ni conmutativa.

3. Escriba la expresión sin utilizar los símbolos del valor absoluto.

(a)  $|u|$ , si  $u$  es negativo

(b)  $|x-y| - |y-x|$

(c)  $|-t|$ , si  $t$  es negativo

(d)  $\left| \frac{m-p}{p-m} \right|$ ,  $m \neq p$

4. ¿Para que valores de  $x$  es verdad que  $x = |x|$ ?

5. ¿Para que valores de  $x$  es verdad que  $x \leq |x|$ ?

6. Indique si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. Justifique. Para todo número real  $a$ :

(a)  $-|a| \leq |a|$

(b)  $\frac{|a \cdot a|}{|a|} = |a|$ ,  $a \neq 0$

(c)  $-|a| \leq a$

(d)  $|a| \geq -1$

(e)  $-a \leq a$

(f)  $a \leq |a|$

7. Calcule:

(a)  $(-2/3)^5$

(b)  $(-4/3)^{-5}$

(c)  $-(-3/2)^5$

(d)  $\frac{2^{-2}}{3^{-3}}$

(e)  $\frac{3^{-1}-4^{-1}}{3^{-1}+4^{-1}}$

(f)  $\frac{(-2)^5-3^6}{(-2)^{-1}}$

8. Si  $y$  vale el 40 % de  $x$ , exprese

$$z = \frac{x(x^2 + 3y^2) - y(y^2 + 3x^2)}{2(x^2 - y^2)(x - y)},$$

sólo en función de  $x$ .

9. Simplifique

$$\left[ a + \{1 + (a + 1)(3 - a)^{-1}\}^{-1} \right]^{-1}.$$

10. Exprese las siguientes frases como una fórmula matemática.

- a) La suma de dos números es el doble de su diferencia.
- b) El 12 % de  $x$  es igual a 830.
- c) La atracción de gravedad es proporcional a la raíz cuadrada del producto de  $r$  por  $g$ .
- d) La suma de tres números consecutivos es igual a 180.

11. Demuestre que  $2^{-1}$  es el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{2}{(2^x)^{x-1}} : \frac{4^{x+1}}{(2^x)^{x+1}}.$$

12. Simplifique:

(a)  $\sqrt[3]{-64}$

(b)  $\sqrt[4]{1/9} \cdot \sqrt[4]{1/9}$

(c)  $\sqrt[5]{1024}$

(d)  $\sqrt[3]{-64/27}$

(e)  $\left( -\sqrt[3]{\frac{-27x}{xy^3}} \right)^3$

(f)  $\sqrt{\frac{6x}{5y}} \sqrt{\frac{9y^4}{10x^2}}$

(g)  $\sqrt{(-abc)^2}$

(h)  $\sqrt[3]{\frac{(-2t)^3}{-w^6}}$

(i)  $\frac{\sqrt[3]{8xy} \sqrt[3]{4xy^2}}{\sqrt[3]{x^2z^3}}$

(j)  $\sqrt[4]{x^4y^{16}/16z^8}$

(k)  $\frac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{4}} : 2\sqrt[4]{24}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{8}{27}}\right) : \frac{1}{3}\sqrt[4]{3}}$

(l)  $\left[ m^{\frac{a}{b}} n^{-1} \right]^b : \left[ \frac{m^{a^2-b^2}}{n^{ab+b^2}} \right]^{\frac{1}{a+b}}$

(m)  $\sqrt[n]{\frac{5^{n+2} - 5^n}{24}}$

(n)  $\frac{\sqrt[4]{16xy^{12}}}{\sqrt[7]{x^{14}z^{21}}}$

(ñ)  $\frac{2m}{a} \sqrt[2]{a^{m/\sqrt{8}} b^{m/\sqrt{50}} c^{r/\sqrt{2}}} : a^{m/5} b^{-2n} c^{r/2}$

13. Evalúe  $\sqrt{6x^2 + 11}$  para  $x = \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ .
14. ¿Que forma toma la expresión  $N = \frac{\frac{1}{x} - b}{\frac{1}{x} + b} \sqrt{\frac{1 + ax}{1 - ax}}$ , si  $x = \sqrt{\frac{2}{ab} - \frac{1}{b^2}}$ ?
15. Indique si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. Justifique.
- a) Si  $n$  es par,  $\sqrt[n]{x}$  es definida para cualquier número real.
- b)  $\sqrt{x^2} = x$ , para cualquier número real  $x$ .
16. Dada la igualdad

$$\frac{a^2 b \sqrt{ac}}{a^{1/2} b^{-2/3}} = \sqrt{\frac{ab^2}{c}},$$

expresar cada una de las cantidades  $a, b, c$  en función de las otras dos.

17. Compruebe que

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}} - \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}},$$

es menor que  $1/12$ .

18. Escriba los siguientes enunciados, en su forma logarítmica equivalente.

(a)  $9^{-1/2} = 1/3$       (b)  $(2^3)^{-2} = 1/64$       (c)  $(1/81)^{-1/2} = 9$

(d)  $3^x 3^y = 3^{x+y}$       (e)  $27^{2/3} = 9$       (f)  $b^{1/(n+m)} = \sqrt[n+m]{b}$

19. Escriba los siguientes enunciados, en su forma exponencial equivalente.

(a)  $\log_4 1/2 = -1/2$       (b)  $\log_{10} x = y$       (c)  $\log_8 4 = 2/3$

(d)  $\ln e = 1$       (e)  $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$       (f)  $\log_a a^3 = 3$

20. Sin utilizar calculadora, determine:

(a)  $\log_{10} 0,0001$       (b)  $\log_2 1/64$       (c)  $\log_{1/2} 4$

(d)  $\log_{\sqrt{5}} 25$       (e)  $\log_{3/5}(125/27)$       (f)  $\left[\log_{\sqrt{6}} 216\right]^3$

(g)  $\ln(e^2 e^3 e^4)^e$       (h)  $\ln(e^e e^{2e})$       (i)  $5^{\log_5 3^2}$

(j)  $100^{\log_{10} 4}$       (k)  $e^{-\ln 5}$       (l)  $(\sqrt[3]{e})^{\ln 27}$

21. Simplifique y reduzca a un sólo logaritmo.

(a)  $\log_6 3 + \log_6 2$       (b)  $(1/3) \log_3 64 - (1/2) \log_3 25 + 20 \log_3 1$

(c)  $\ln(x^4 - 1) - \ln(x^2 + 1)$       (d)  $\log_3 7 + \log_3 7^2 + \log_3 7^3 - \log_3 7^6$

(e)  $\ln(a/b) - 3 \ln a^2 + \ln b^{-2}$       (f)  $3 \log_{10} 5 + 2 \log_{10} 3 - 4 \log_{10} 2$

22. Utilice su calculadora y la fórmula de cambio de base cuando sea necesario, para calcular los siguientes logaritmos:

(a)  $\log_5 27$       (b)  $\log_{10} 285$       (c)  $3 \ln 5$       (d)  $\log_{2/5} 43$

23. Considere el logaritmo desarrollado por *John Napier*:

$$10^7 \log_{1/e} \left( \frac{x}{10^7} \right).$$

Utilice la fórmula de cambio de base para expresar este logaritmo:

- a) En términos del logaritmo natural.  
b) En términos del logaritmo en base 10.

24. Demuestre que:

- a) Si  $x^2 = y^2$ , entonces  $x = y$  o  $x = -y$ .  
b)  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$   
c)  $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$   
d)  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ , utilizando (b).

25. Realice las siguientes sumas de polinomios y simplifique.

- a)  $(3x^5 - 5x^2 + 4x - 7) + (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$   
b)  $(2xy^3 - 3y^2) - (x^3 + y^3 - 2xy^3 + 3y^2 - 5)$   
c)  $(8x^3y^3 - 12x^2y^5)/(x^2y^3)$   
d)  $(\sqrt{2}xy^3 - \sqrt{3}y^2) - (x^3 + y^3 - \sqrt{2}xy^3 + 6\sqrt{3}y^2 - \sqrt{5})$   
e)  $4x^2 - \left\{ \left[ 2x^2 - 2x(x - 3y + 1) - 3x^2 + 3y \right] - (2x - 2y + 1) \right\}$

26. Realice las siguientes multiplicaciones de polinomios y simplifique.

- (e)  $(t^2 - t + 3)(t^4 - t^2)$       (f)  $(3a - b)(2a^2 - ab + 3b^2)$   
(g)  $[x/(x + y)]^{-1} [x/(x + y)]^{1/2}$       (h)  $(\sqrt{x} - y + 1)(\sqrt{x} + y - 1)$   
(i)  $4(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^0$       (j)  $(z - x)(x^2 + xz + z^3)$   
(k)  $(x^2y^3 + 2)^3$       (l)  $(x + y + 1)^3$

27. Realice las siguientes sumas de fracciones.

- a)  $\frac{4x}{4x+5} + \frac{5}{4x+5}$   
b)  $\frac{3}{x} - \frac{2-3x}{3x-1} + \frac{1-2x}{x(3x-1)}$

28. Factorice:

a)  $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 2$

- b)  $(x+3)^2(x+2)^3 - 20(x+3)(x+2)^3$   
 c)  $(1-x^2)^3 - (1-y^2)^3$   
 d)  $x^6 + 7x^3 - 8$   
 e)  $(x^2-4)^3 + (4-y^2)^3$
29. Calcule sin utilizar calculadora, el valor de  $(547)^2 - (453)^2$
30. Considere la expresión:

$$\frac{1}{a(a-b)} + \frac{1}{b(b-a)} = -\frac{1}{ab}.$$

- a) Verifique que la igualdad se cumple para  $a = 5$ ,  $b = 2$ .  
 b) Establezca que se cumple en general e indique las excepciones.
31. Simplifique las siguientes expresiones algebraicas:

- (a)  $(-3xy^5)^2(x^3y)^{-1}$  (b)  $\frac{(7a^2b^3)^2}{a^3b^5}$   
 (c)  $\frac{z^2-9}{z^3+27}$  (d)  $\frac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}$   
 (e)  $\frac{x^4+4x^2+16}{x^3+8}$  (f)  $\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$   
 (g)  $\frac{3}{a-2} - \frac{6}{a^2+4}$  (h)  $\frac{y^2-1}{y^2+y} \cdot \frac{y^2}{y+1}$   
 (i)  $\frac{x}{3x+1} - \frac{3x}{x-3}$  (j)  $\frac{3}{x} - \frac{2-3x}{3x-1} + \frac{1-2x}{x(3x-1)}$   
 (k)  $\frac{q^2-1}{q^2+2q-3} : \frac{q-4}{q+3}$  (l)  $[1+1/(x+2)][4/(3x+9)]$   
 (m)  $\frac{1+1/\sqrt{x}}{1+1/\sqrt{y}}$  (n)  $\frac{\frac{5}{2x+h-1} - \frac{5}{2x-1}}{h}$   
 (ñ)  $(x^2-1)(1/3)(x+1)^{-2/3} + (x+1)^{1/3}(2x)$

32. Reducir en su forma más simple la expresión:

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2+\sqrt{5}}}.$$

33. Demuestre que

$$\frac{20-\sqrt{96}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{50} - \sqrt{12}.$$