UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142.

SOLUCION EVALUACION 1.

Problema 1.

1.1) Sea $*$ el conectivo definido por la siguiente equivalencia lógica

$$p \quad * \quad q \Longleftrightarrow (p \quad \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q).$$

Demuestre la tautología $p * (p * q) \Longleftrightarrow q.$ (6 ptos.)

Solución.

p	q	$p\wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$p * q$	$p * (p * q)$	$p * (p * q) \leftrightarrow q$
V	V	F	F	F	V	**V**
V	F	V	F	V	F	**V**
F	V	F	V	V	V	**V**
F	F	F	F	F	F	**V**

De la tabla se deduce que: $p * (p * q) \Longleftrightarrow q$ es una tautología. **[6 ptos.]**

1.2) Sean A y B dos conjuntos arbitrarios. Recuerde que la diferencia simétrica entre el conjunto A y el conjunto B está definida por:

$$A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Demuestre que: $A \vartriangle (A \vartriangle B) = B.$ (6 ptos.)

Solución. Sean $p(x)$ y $q(x)$ las funciones proposicionales definidas por:

$$p(x) : x \in A \qquad q(x) : x \in B,$$

entonces

$$x \in (A \bigtriangleup B) \Leftrightarrow p(x) * q(x) \text{ es verdadera}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} x \in A \bigtriangleup (A \bigtriangleup B) \quad &\Leftrightarrow \quad [\,(x \in A) \wedge (x \notin (A \bigtriangleup B))\,] \vee [\,(x \notin A) \wedge (x \in (A \bigtriangleup B))\,] \\ &\Leftrightarrow \quad [\,p(x) \wedge \sim (p(x) * q(x))\,] \vee [\,\sim p(x) \wedge (p(x) * q(x))\,] \\ &\Leftrightarrow \quad p(x) * (p(x) * q(x)) \\ &\Leftrightarrow \quad q(x) \qquad\qquad \text{(por el problema 1.1)} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in B\,. \end{aligned}$$

[6 ptos.]

Alternativa de demostración:

$$
\begin{aligned}
A \triangle (A \triangle B) &= A \triangle [\, (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\,] \\
&= (A \cap [\, (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\,]^c) \cup (A^c \cap [\, (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\,]) \\
&= (A \cap [\, (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)\,]) \cup (A^c \cap B) \\
&= [\, (A \cap B) \cap (A \cup B^c)\,] \cup (A^c \cap B) \\
&= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B = B
\end{aligned}
$$

[6 ptos.]

1.3) Del total de 1186 alumnos del liceo “Andalien” 879 están tomando un curso intensivo de inglés , 378 uno de alemán y 690 uno de francés. Se sabe que al menos 506 alumnos están en cursos de inglés y francés, que al menos 77 están en alemán y francés, que los que están en alemán pero no en inglés son 159 y que hay 13 en los tres cursos de idiomas. (8 ptos.)

a) ¿ Cuántos alumnos no estudian ninguno de los idiomas?.
b) ¿ Cuántos estudian solamente el inglés y el francés.?

Solución. Definamos los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{los alumnos del liceo que estudian inglés}\} \\
B &= \{\text{los alumnos del liceo que estudian alemán}\} \\
C &= \{\text{los alumnos del liceo que estudian francés}\} \\
U &= \{\text{todos los alumnos del liceo}\}\,.
\end{aligned}
$$

Con estas definiciones los datos del problemas son:

$$
\begin{aligned}
|U| &= 1186 \\
|A| &= 879 \\
|B| &= 378 \\
|C| &= 690 \\
|A \cap C| &= 506 \\
|B \cap C| &= 77 \\
|B - A| &= 159 \\
|A \cap B \cap C| &= 13\,.
\end{aligned}
$$

Es claro que el conjunto B se puede escribir de la siguiente manera

$$B = (A \cap B) \cup (B - A)\,,$$

donde $A \cap B$ y $B - A$ son disjuntos. Así,

$$|B| = |A \cap B| + |B - A|$$

de donde $|A \cap B| = |B| - |B - A| = 378 - 159 = 219$. Por otro lado, de la materia vista en clases se sabe que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \,,$$

así **[4 ptos.]**

$$|A \cup B \cup C| = 879 + 378 + 690 - 219 - 506 - 77 + 13 = 1158 \,.$$

Pero el número de alumnos que no están en ninguno de los tres cursos de idiomas está dado por $|(A \cup B \cup C)^c|$, luego

$$|(A \cup B \cup C)^c| = |U| - |A \cup B \cup C| = 1186 - 1158 = 28 \,.$$

[2 ptos.]

El número de alumnos que toman solo francés e ingles está dado por $|A \cap C - B|$. Pero

$$A \cap C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap C - B) \,,$$

donde la unión es disjunta, así

$$|A \cap C - B| = |A \cap C| - |A \cap B \cap C| = 506 - 13 = 493 \,.$$

[2 ptos.]

Problema 2.

2.1) Demuestre que (10 ptos.)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + \cdots + (2n) \cdot (2n+2) = \frac{4n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Solución. Usaremos el Principio de Inducción Matemática (PIM). Sea la proposición

$$P(n): \; 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \cdots + 2n \cdot (2n+2) = \frac{4n(n+1)(n+2)}{3}$$

y definamos el conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$. Se debe demostrar que $S = \mathbb{N}$.
i). La proposición $P(n)$ es evidentemente verdadera si $n = 1$, por lo que $1 \in S$.
[3 ptos.]

ii). Supongamos ahora que $k \in S$, la proposición $P(n)$ es verdadera para $n = k$. Debemos probar que $k + 1 \in S$. Es decir, que la proposición $P(n)$ es verdadera para $n = k + 1$.

Usando la hipótesis de inducción y la operatoria algebraica se tiene:

$$\begin{aligned}
2\cdot 4+\cdots+2k\cdot(2k+2)+(2k+2)\cdot(2k+4) &= \frac{4k(k+1)(k+2)}{3}+(2k+2)\cdot(2k+4)\\
&= \frac{4k(k+1)(k+2)}{3}+4(k+1)\cdot(k+2)\\
&= \frac{4k(k+1)(k+2)+12(k+1)(k+2)}{3}\\
&= \frac{4(k+1)(k+2)[k+3]}{3},
\end{aligned}$$

[5 ptos.]

Así la proposición $P(n)$ es verdadera para $n=k+1$, $k+1\in S$ y por lo tanto el PIM. asegura que $S=\mathbb{N}$. En consecuencia, $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)$. **[2 ptos.]**

2.2) Sea $a\neq\frac{5}{2}$. Para la sucesión (10 ptos.)

$$\frac{3}{2a-5},\quad \frac{9}{(2a-5)^2},\quad \frac{27}{(2a-5)^3}\quad \ldots$$

Diga que tipo de progresión es, indique la razón común o la diferencia común, según corresponda, y encuentre la suma de los primeros 20 términos.

Solución.- El k-ésimo término es $a_k=\frac{3^k}{(2a-5)^k}$, por lo que , $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{3}{2a-5}$. De aquí se deduce que la progresión es geométrica, con razón $r=\frac{3}{2a-5}$, $a\neq\frac{5}{2}$. **[5 ptos.]**

La suma de los 20 primeros términos es

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2a-5}+\frac{3^2}{(2a-5)^2}+\cdots+\frac{3^{20}}{(2a-5)^{20}} &= \frac{3}{2a-5}\left(\frac{1-\frac{3^{20}}{(2a-5)^{20}}}{1-\frac{3}{2a-5}}\right)\\
&= \frac{3\left(1-\frac{3^{20}}{(2a-5)^{20}}\right)}{2a-8}\\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{(2a-5)^{20}-3^{20}}{(a-4)(2a-5)^{20}}\right).
\end{aligned}$$

[5 ptos.]

Problema 3. Considere la función f definida por

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

3.1) Determine el dominio y el recorrido de f. (6 ptos.)

Solución. Para la función dada se tiene:

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

[2 ptos.]

$$\begin{aligned} Rec(f) &= \{y \in \mathbb{R} : y = (x-1)^2, x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} : \sqrt{y} = |x-1|, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \pm\sqrt{y} = x - 1, x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} : 1 \pm \sqrt{y} = x, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : 1 \pm \sqrt{y} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty[. \end{aligned}$$

[4 ptos.]

3.2) Encuentre $g([0,3])$ para la función (7 ptos.)

$$g : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad X \mapsto g(X) = f(X).$$

Solución.

$$\begin{aligned} g([0,3]) &= f([0,3]) \\ &= \{y \in [0,+\infty[: y = (x-1)^2, x \in [0,3]\} = \{y \in \mathbb{R} : \sqrt{y} = |x-1|, x \in [0,3]\} \\ &= \{y \in [0,+\infty[: -\sqrt{y} = x - 1, 0 \leq x < 1\} \cup \{y \in \mathbb{R} : \sqrt{y} = x - 1, 1 \leq x \leq 3\} \\ &= \{y \in [0,+\infty[: -1 \leq -\sqrt{y} < 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq \sqrt{y} \leq 2\} \\ &= \{y \in [0,+\infty[: y \leq 1\} \cup \{y \in \mathbb{R} : y \leq 4\} \\ &=]0,1] \cup [0,4] = [0,4]. \end{aligned}$$

3 ptos. por la definición de $g([0,3]) = f([0,3]) =$..., y 4 ptos. por el resto.

3.3) Para la función h, $\quad h : A \longrightarrow B$, con A y B conjuntos no vacíos. Demuestre que $h(h^{-1}(Y)) \subseteq Y$. (7 ptos.)

Solución. Consideremos un $y \in h(h^{-1}(Y))$ se tiene:

$$\begin{aligned} y \in h(h^{-1}(Y)) &\implies y = h(x), x \in h^{-1}(Y) \\ &\implies y = h(x), \exists a \in Y, a = h(x), x \in A \\ &\implies y = a \in Y \quad \text{pues} \quad h \quad \text{es función} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h(h^{-1}(Y)) \subseteq Y$. **[7 ptos]**

Tiempo: **100 minutos.**
28. 04. 2003.
RAD/FCHH/ACQ/acq.