UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Certamen – Tema 1

Fecha: 5–Jun–02; 19:00.

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la corrección

No rellenar

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:
$$\text{Calificación} = \frac{100}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right).$$
- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/RRA/MSC

1. Considere un sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ cuya matriz satisface todas las siguientes propiedades:

   - $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{10^4 \times 10^4}$,
   - $\mathbf{A}$ es simétrica,
   - cada fila de $\mathbf{A}$ tiene a lo sumo 10 entradas no nulas,
   - la suma de las entradas de cada una de las filas de $\mathbf{A}$ es 0 (es decir que si $\mathbf{x} = (1 \cdots 1)^{\mathrm{t}}$, entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$).

   Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

   (a) para resolver el sistema conviene utilizar un método iterativo, para aprovechar que la matriz es dispersa;

   (b) para resolver el sistema conviene utilizar el método de *Cholesky*, para aprovechar que la matriz es simétrica;

   (c) el sistema no tiene solución única pues la matriz es singular;

   (d) ninguna de las anteriores.

2. La inversa de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{pmatrix}$. Indique cuál es el número de condición de $\mathbf{A}$:

   (a) $\mathrm{cond}_\infty(\mathbf{A}) = 199 \times 1 = 199$;

   (b) $\mathrm{cond}_\infty(\mathbf{A}) = 199 \times 199 = 39601$;

   (c) $\mathrm{cond}_\infty(\mathbf{A}) = 396 \times 396 = 156816$;

   (d) ninguno de los anteriores.

3. Se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz es la siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

   Indique qué métodos pueden utilizarse:

   (a) *Cholesky*, pero no *Jacobi*;

   (b) *Jacobi*, pero no *Cholesky*;

   (c) *Cholesky* y *Jacobi*;

   (d) ni *Cholesky* ni *Jacobi*.

4. Sea $\mathbf{A}$ una matriz con $\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}) = 50$. Se resuelve un sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, en el que el segundo miembro $\mathbf{b}$ se obtiene mediante mediciones y está sujeto a errores inferiores al 0.1%. Si los restantes errores son despreciables, indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

   (a) la solución calculada tendrá errores de menos del 0.1%;

   (b) la solución calculada tendrá errores de menos del 5%;

   (c) la solución calculada tendrá errores de más del 10%;

   (d) ninguna de las anteriores.

5. Se desea resolver por el método de *Gauss–Seidel* un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz es la siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Indique cuál de las siguientes es la matriz de iteración del método:

   (a) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   (d) ninguna de las anteriores.

6. El método del gradiente conjugado para resolver el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se basa en minimizar cierta función. Indique cuál de las siguientes es esa función:

   (a) $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$;

   (b) $\|\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\mathbf{Ax} - \mathbf{A}^{\mathrm{t}}\mathbf{b}\|_2$;

   (c) $\dfrac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{t}}\mathbf{Ax} - \mathbf{b}^{\mathrm{t}}\mathbf{x}$;

   (d) ninguna de las anteriores.

7. Para ajustar los parámetros A y α del modelo

$$y = A \operatorname{sen}^{\alpha} x$$

a los valores de una tabla, conviene realizar una transformación $z = f(y)$ de los datos, a fin de obtener un problema lineal de cuadrados mínimos. Indique cuál de las siguientes transformaciones cumple este fin:

(a) $z = \ln y$;
(b) $z = \operatorname{arcsen} y$;
(c) $z = \ln(\operatorname{arcsen} y)$;
(d) ninguna de las anteriores.

8. La siguiente tabla contiene los datos de la población de una ciudad de acuerdo a los censos realizados cada 10 años, desde 1950 hasta 2000:

t (año)	1950	1960	1970	1980	1990	2000
P (población)	123457	132875	145763	160123	170933	179345

Indique cuál es la matriz rectangular que se obtiene al ajustar a esta tabla el modelo

$$P(t) = a + b(t - 1900) + \frac{c}{t - 1900}.$$

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1950 & \frac{1}{1950} \\ 1 & 1960 & \frac{1}{1960} \\ 1 & 1970 & \frac{1}{1970} \\ 1 & 1980 & \frac{1}{1980} \\ 1 & 1990 & \frac{1}{1990} \\ 1 & 2000 & \frac{1}{2000} \end{pmatrix}$; (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 50 & 50^2 \\ 1 & 60 & 60^2 \\ 1 & 70 & 70^2 \\ 1 & 80 & 80^2 \\ 1 & 90 & 90^2 \\ 1 & 100 & 100^2 \end{pmatrix}$; (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 50 & \frac{1}{50} \\ 1 & 60 & \frac{1}{60} \\ 1 & 70 & \frac{1}{70} \\ 1 & 80 & \frac{1}{80} \\ 1 & 90 & \frac{1}{90} \\ 1 & 100 & \frac{1}{100} \end{pmatrix}$;

(d) ninguna de las anteriores.

9. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango $n < m$. Sean $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ las matrices de la factorización $\mathbf{QR}$ de $\mathbf{A}$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(a) $\mathbf{R}$ es singular;
(b) las filas de $\mathbf{Q}$ son ortogonales;
(c) las columnas de $\mathbf{Q}$ son ortogonales;
(d) ninguna de las anteriores.

10. Se ajusta por cuadrados mínimos un modelo polinomial

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

a la siguiente tabla:

x	0.25	0.50	0.75	1.00
y	0.523	0.376	0.837	0.476

.

Indique cuál de las siguientes tablas de $p(x)$ es correcta:

(a)

x	0.25	0.50	0.75	1.00
p(x)	0.501	0.376	0.875	0.505

;

(b)

x	0.25	0.50	0.75	1.00
p(x)	0.523	0.370	0.805	0.476

;

(c)

x	0.25	0.50	0.75	1.00
p(x)	0.524	0.364	0.840	0.470

;

(d) ninguna de las anteriores.

11. Indique cuál es el polinomio de interpolación de la siguiente tabla:

x	0	1	2	3
y	1	0	0	0

:

(a) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}$;

(b) $\dfrac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$;

(c) $\dfrac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$;

(d) $\dfrac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$.

12. Indique cuál es el *spline* cúbico natural que interpola la siguiente tabla:

x	-1	0	1
y	-1	0	1

:

(a) $s(x) = x$;

(b) $s(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 \le x \le 0, \\ x^2, & 0 \le x \le 1; \end{cases}$

(c) $s(x) = x^3$;

(d) ninguno de los anteriores.

13. Se dispone de una tabla de valores de la función $f(x)$ en puntos **no equiespaciados**,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

y se desea calcular la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Para ello se utiliza la regla de los trapecios en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Indique cuál es el valor calculado de la integral que se obtiene:

(a) $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$;

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,(x_i - x_{i-1})$;

(c) $\displaystyle\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$;

(d) ninguno de los anteriores.

14. Dada una función $f(x)$ con derivadas cuartas continuas en el intervalo $[0, 1]$, se calcula la integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ mediante la regla de los trapecios con pasos $h = \frac{1}{10}$ y $\frac{h}{2} = \frac{1}{20}$. Así se obtienen dos aproximaciones de la integral T_h y $T_{h/2}$, respectivamente. Indique cuál de las siguientes expresiones da una estimación del error de la aproximación de la integral $T_{h/2}$:

(a) $\left|T_h - T_{h/2}\right|$;

(b) $\displaystyle\frac{\left|T_h - T_{h/2}\right|}{3}$;

(c) $\displaystyle\frac{\left|T_h - T_{h/2}\right|}{15}$;

(d) ninguna de las anteriores.

15. Sean $x_1 = -0.774596669241483$, $x_2 = 0.0$ y $x_3 = 0.774596669241483$ los puntos de la regla de *Gauss* de tres puntos, y $w_1 = \frac{5}{9}$, $w_2 = \frac{8}{9}$ y $w_3 = \frac{5}{9}$ los pesos respectivos. Se utiliza esta regla para calcular la integral

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \cos t^2\,dt\,.$$

Indique cuál de las siguientes expresiones es la del valor calculado de la integral que se obtiene:

(a) $w_1 \cos x_1^2 + w_2 \cos x_2^2 + w_3 \cos x_3^2$;

(b) $\sqrt{\pi}\left(w_1 \cos x_1^2 + w_2 \cos x_2^2 + w_3 \cos x_3^2\right)$;

(c) $\sqrt{\pi}\left[w_1 \cos\left(\pi x_1^2\right) + w_2 \cos\left(\pi x_2^2\right) + w_3 \cos\left(\pi x_3^2\right)\right]$;

(d) ninguna de las anteriores.