UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EXAMEN.
CÁLCULO III. 525211.

1. **(30 ptos.)** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto de x e y, y de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto de ρ y θ, con $x = \rho\cos\theta$, e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ (coordenadas polares). Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\rho}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\theta}$ en coordenadas cartesianas ¿ qué podría pasar con el cálculo anterior si f es de dos veces diferenciable pero no es de clase $\mathcal{C}^2$ con respecto de ρ y θ ?

2. **(40 ptos.)** Una compañía fabrica una serie de productos, tres de los cuales son deficitarios. Se ha estimado que la función que determina las pérdidas al fabricar esos productos es :

   $$f(x, y, z) = x^3 + 2yz$$

   Los compromisos que la compañía debe cumplir por contratos con otras firmas son :

   $x + y = \alpha,$

   $y + z = \beta,$ donde $\beta > 2\alpha > 0$ son dos parámetros reales positivos.

   (a) Calcule las produciones óptimas x_0, y_0, z_0 que minimizan las pérdidas, y los Multiplicadores de Lagrange λ_1, λ_2 asociados al problema.

   (b) Pruebe usando las condiciones suficientes de optimalidad que $f(x_0, y_0, z_0)$ es mínimo.

   (c) Sea la función pérdidas mínimas en términos de α y β : $\varphi(\alpha, \beta) = f(x_0, y_0, z_0)$. Pruebe que[1]

   $$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \lambda_1, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \lambda_2.$$

3. **(30 ptos.)** Un satelite de masa m que gira en torno a la tierra, está sometido a la suma de dos fuerzas $F = F_G + F_E$ donde F_G es la fuerza de gravedad de la Tierra, y F_E una fuerza externa dada.

   $$F_G(x, y, z) = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z), \qquad \text{y} \qquad F_E(x, y, z) = (0, x, 0),$$

   (a) Calcule $\nabla \times F_E$, y deduzca que F_E define un campo vectorial no conservativo.

   (b) Sabiendo que F_G es conservativo, calcule el trabajo realizado por el satelite al recorrer la elipse C ubicada en el plano XY, y con foco f en $(0, 0, 0)$ (es decir, en el centro de la Tierra) :

   $$C = \{(c + a\cos\theta, b \operatorname{sen}\theta, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$$

   con $a > b > 0$ constantes positivas y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Duración : 120 minutos. (15-Julio-2004)
MSC/msc

[1]**Nota :** *Desde un punto de vista económico, si cada restricción se interpreta como la disponibilidad de cierto recurso, se puede ver a los multiplicadores como un sistema de precios, en el sentido de indicar el valor o rendimiento que se podra obtener al aumentar la disponibilidad del correspondiente recurso. Comparando estos precios con los precios reales de mercado, puede decidirse si resulta efectivo o no el aumento de la cantidad disponible.*