UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA CERTAMEN 2 (18/11/2004)

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)

RBP/LNB/rbp

Problema 1. Encuentre la solución general de

$$x^3\, y''' + 3\, x^2\, y'' - 6\, x\, y' - 6\, y = 0\,, \qquad x > 0\,.$$

15 puntos

Pauta
Notamos que estamos frente a una ecuación de Euler, por lo cual, efectuando el cambio $\boxed{x = \mathrm{e}^z}$, ésta se convierte en una EDO de coeficientes constantes del tipo $\tilde{L}y(z) = 0$, siendo

$$\tilde{L} := \mathcal{D}\,(\mathcal{D}-1)\,(\mathcal{D}-2) + 3\mathcal{D}\,(\mathcal{D}-1) - 6\mathcal{D} - 6 = \mathcal{D}^3 - 7\mathcal{D} - 6\,,$$

donde $\mathcal{D} := \frac{d}{dz}$. **5 puntos**

Resolviendo la ecuación característica asociada

$$\lambda^3 - 7\lambda - 6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-3) = 0\,,$$

se obtiene sus raíces: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 3$. **5 puntos**

Finalmente la solución general de la ecuación de Euler dada es:

$$y(x) = C_1\, x^{-1} + C_2\, x^{-2} + C_3\, x^3\,,$$

siendo C_1, C_2, C_3 constantes reales arbitrarias. **5 puntos**

Problema 2. Resolver usando Transformada de Laplace **15 puntos**

$$y' + y - \int_0^t \mathrm{sen}(t-u)\, y(u)\, du = -\cos(t)\,, \quad y(0) = 1\,.$$

Pauta
Teniendo presente que

$$\int_0^t \mathrm{sen}(t-u)\, y(u)\, du = (\mathrm{sen} * y)(t)$$

se tiene, una vez que se aplica la Transformada de Laplace a la ecuación propuesta

$$\mathcal{L}[y'(t)] + \mathcal{L}[y(t)] - \mathcal{L}[(\text{sen} * y)(t)] = -\mathcal{L}[\cos(t)]$$

$$\Rightarrow s\mathcal{L}[y(t)] - y(0) + \mathcal{L}[y(t)] - \mathcal{L}[\text{sen}(t)]\,\mathcal{L}[y(t)] = -\frac{s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \left(s + 1 - \frac{1}{s^2+1}\right)\mathcal{L}[y(t)] = \frac{s^2-s+1}{s^2+1}$$

$\boxed{\textbf{4 puntos}}$

de donde resulta (aplicando la técnica de las fracciones parciales)

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{s^2-s+1}{s\,(s^2+s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2+s+1}\,,$$

$\boxed{\textbf{3 puntos}}$

con lo cual se tiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]$$

$\boxed{\textbf{4 puntos}}$

usando la primera propiedad de traslación

$$y(t) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-t/2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)$$

$\boxed{\textbf{4 puntos}}$

Problema 3. $\boxed{\textbf{15 puntos}}$ Una masa sujeta a un resorte se suelta del reposo 1 m por debajo de la posición de equilibrio del sistema resorte-masa, y empieza a vibrar. Después de $\pi/2$ segundos, la masa es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre ésta, de tal manera que la ecuación del sistema es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9\,x = -3\,\text{sen}(3t)\,\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\,,$$

donde $x(t)$ denota el desplazamiento con respecto al equilibrio en el instante t. ¿Qué le ocurre a la masa después de ser golpeada?

Pauta

Del enunciado se tiene las condiciones iniciales del modelo: $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

Luego, aplicando la transformada de Laplace, y usando propiedades adecuadas de ésta, resulta

$$s^2\,\mathcal{L}[x(t)] - s + 9\,\mathcal{L}[x(t)] = -3\,\mathcal{L}[\operatorname{sen}(3t)\,\delta(t-\pi/2)] = -3\,\mathrm{e}^{-\pi\,s/2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = 3\,\mathrm{e}^{-\pi\,s/2}$$

$$\Rightarrow (s^2+9)\,\mathcal{L}[x(t)] = s + 3\,\mathrm{e}^{-\pi\,s/2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[x(t)] = \frac{s}{s^2+3^2} + \frac{3\,\mathrm{e}^{-\pi\,s/2}}{s^2+3^2}$$

$\boxed{\textbf{5 puntos}}$

Tomando la transformada inversa de Laplace, y ocupando la segunda propiedad de traslación, se tiene

$$x(t) = \cos(3t) + H_{\pi/2}(t)\,g(t-\pi/2)\,,$$

siendo $g(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{s^2+3^2}\right] = \operatorname{sen}(3t)$. $\boxed{\textbf{5 puntos}}$

De esta manera, el desplazamiento viene dado por

$$x(t) = \cos(3t) + H_{\pi/2}(t)\,\cos(3t) = \begin{cases} \cos(3t) & 0 \le t < \pi/2\,, \\ 2\,\cos(3t) & \pi/2 \le t\,, \end{cases}$$

lo cual nos dice que después del impulso, la masa oscila más rápidamente. $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Problema 4. $\boxed{\textbf{15 puntos}}$ Resuelva el siguiente sistema usando el método de valores propios.

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z + 1 \\ y' = -x - y + z \\ z' = 2x - z + 2 \end{cases}$$

Pauta

La forma matricial del sistema de EDO puede escribirse como $X' = A\,X + B(t)$, siendo $X := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, y $B(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Recordando el principio de superposición, la solución general de este sistema puede escribirse como $\boxed{X(t) = X_H(t) + X_P(t)}$, donde $X_H(t)$ denota la solución general de la ecuación homogénea asociada, y $X_P(t)$ es una solución particular del sistema original.

a) **Cálculo de** $X_H(t)$: calculando los valores propios de A, éstos son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) := |A - \lambda I| = -(\lambda-1)(\lambda^2+1)$, es decir, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ y $\lambda_3 = -i$. Los respectivos espacios propios asociados son:

$$S_{\lambda_1} = \langle\{(1,0,1)^T\}\rangle\,, \quad S_{\lambda_2} = \langle\{(1+i,-i,2)^T\}\rangle\,, \quad S_{\lambda_3} = \langle\{(1-i,i,2)^T\}\rangle\,.$$

$\boxed{\textbf{4 puntos}}$

Por lo tanto la base del espacio solución está conformado por

$$X_1(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}\,,\quad X_2(t)=\begin{pmatrix} \cos(t)-\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) \\ 2\,\cos(t) \end{pmatrix}\,,\quad X_3(t)=\begin{pmatrix} \cos(t)+\operatorname{sen}(t) \\ -\cos(t) \\ 2\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

De esta forma, la solución del sistema homogéneo está dado por

$$X_H(t)=C_1\,X_1(t)+C_2\,X_2(t)+C_3\,X_3(t)\,,$$

con C_1, C_2 y C_3 constante reales arbitrarias. $\boxed{\textbf{4 puntos}}$

b) **Cálculo de** $X_P(t)$: usaremos el método de variación de parámetros. Por esto, consideramos que $\boxed{X_P(t)=C_1(t)\,X_1(t)+C_2(t)\,X_2(t)+C_3\,X_3(t)}$, donde $C_1(t)$, $C_2(t)$ y $C_3(t)$ se encuentran a partir de la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \cos(t)-\operatorname{sen}(t) & \cos(t)+\operatorname{sen}(t) \\ 0 & \operatorname{sen}(t) & -\cos(t) \\ \mathrm{e}^t & 2\,\cos(t) & 2\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Realizando adecuadas operaciones elementales por filas, resolver el sistema anterior es equivalente a resolver

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(t) & -\cos(t) \\ 0 & \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

el cual, aplicando la regla de Cramer, se tiene

$$\begin{aligned} C_1'(t)&=0 &&\Rightarrow\quad C_1(t)=0\,,\\ C_2'(t)&=\cos(t) &&\Rightarrow\quad C_2(t)=\operatorname{sen}(t)\,,\\ C_3'(t)&=\operatorname{sen}(t) &&\Rightarrow\quad C_3(t)=-\cos(t)\,,\end{aligned}$$

con lo cual se obtiene la solución particular

$$X_P(t)=C_1(t)\,X_1(t)+C_2(t)\,X_2(t)+C_3\,X_3(t)=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{4 puntos}}$

Finalmente, la solución general del sistema es

$$X(t)=C_1\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} \cos(t)-\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) \\ 2\,\cos(t) \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} \cos(t)+\operatorname{sen}(t) \\ -\cos(t) \\ 2\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

siendo C_1, C_2 y C_3 constante reales arbitrarias. $\boxed{\textbf{3 puntos}}$