Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Complemento de Cálculo (521234)

Examen

1ero de Julio, 2002

1.- Una cuerda de largo $L = 1$, se encuentra fuera del reposo en un estado inicial $u(x,0) = \sin \pi x$, con velocidad nula, $u_t(x,0) = 0$. Suponga que su movimiento vibratorio está dado por la siguiente ecuación con condiciones de borde :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Calcule el estado $u(x,t)$ para cada instante de tiempo $t > 0$, y diga si tiene sentido en este caso, hablar de algún efecto de resonancia (¿ por qué si, por qué no ?). Justifique su respuesta.

30 puntos

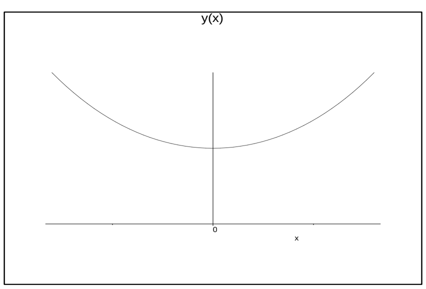
2.- Calcule las siguientes integrales ayudandose de argumentos del cálculo en variable compleja :

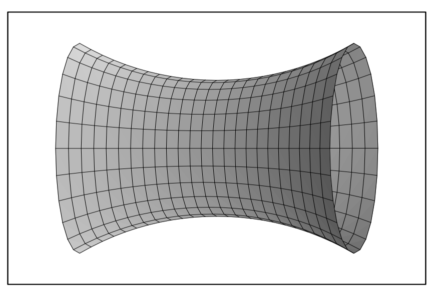
$$\text{(a)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx$$

Indicaciones : para la primera, use coordenadas polares $z = \cos\theta + i \sin\theta$ e integre en torno a la circunferencia $|z| = 1$, para la segunda, descubra que $e^{-x^2} \cos x = e^{-1/4} \mathrm{Re}\left(e^{-(x+\frac{1}{2}i)^2}\right)$, e integre sobre un rectángulo conveniente sabiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

35 puntos

3.- Los contornos de dos discos (o anillos) de radio R paralelos entre sí y separados por una distancia L, estan unidos por el manto que forma una película de jabón líquido y que se caracteriza por tener área mínima. La forma de este manto está representado por una función $y = y(x)$ que une a los puntos $(-L/2, R)$ y $(L/2, R)$ y que se hace rotar en torno al eje x generando un sólido de revolución de área mínima.





Calcule la función $y(x)$, sabiendo que el área de dicho manto esta dada por :

$$\text{Area } (y) = 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} y\sqrt{1 + y'^2} dx$$

Indicación : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C = \cosh^{-1}(x/a) + C.$

35 puntos

Duración del Certamen : 100 minutos

MGC/MBB/MSC/msc