UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (MAT. 521.218)

PRACTICA $N°4$ (EDO de Orden Superior: Primera Parte)

**Problema 1.** En los siguientes ejercicios , encuentre todas las soluciones de la ecuación diferencial y bosqueje varias de ellas.
a) $y'' = 2, \quad y(0) = 0$
b) $y'' = x/6, \quad y'(0) = 0$ (*)
c) $y'' = x/6, \quad y(0) = 0$

**Problema 2.** En los ejercicios que siguen, utilice la linealidad del operador $L$, esto es, $L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2)$.
i) Encuentre una solución particular para $L(y) = cosx$ si se sabe que $L(e^x) = 4cosx$.
ii) Encuentre una solución particular para $L(y) = 5e^x$ si se sabe que $L(senx) = e^x$.
iii) Encuentre una solución particular para $L(y) = x^3+senx$ si se sabe que $L(e^x) = 5senx$ y $L(cosx) = \frac{1}{4}x^3$. (*)
iv) Encuentre algunas soluciones de $L(y) = 0$ si se sabe que $L(x + e^x) = senx$ y $L(e^{-x}) = 4senx$. (*)
v) Para $Ly = y'' - x\,y - y^2 = 0$. Muestre que el operador $L$ es no lineal hago lo mismo para $Ly = y'' - x\,y^2 - y = 0$. (*)

**Problema 3.** En los ejerciones que siguen utilice que $W \neq 0$ (Wronskiano no nulo) es equivalente a que las soluciones de una ecuación homogénea formen un conjunto fundamental (esto es, una base para el espacio vectorial solución).
a) Verifique que $senx, cosx$ son soluciones de $y'' + y = 0$. Determine si existe un conjunto fundamental de soluciones.
b) Encuentre todas las soluciones de la forma $x^r$ para $x^2y''-6y = 0$ en $(0,\infty)$ y determine si forman un conjunto fundamental de soluciones.
c) Encuentre todas las soluciones de la forma $x^r$ para $x^2y'' - xy' + y = 0$ en $(0,\infty)$ y determine si forman un conjunto fundamental de soluciones. (*)

**Problema 4.** (*)

Sea $y_1$ la solución sobre $(0,\infty)$ de:

$$x^2y'' + y' + xy = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

y sea $y_2$ la solución sobre $(0,\infty)$ de $x^2y'' + y' + xy = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = -1,$
a) Verifique que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $x^2y'' + y' + xy = 0$
b) Sea $y_3$ la solución de

$$x^2y'' + y' + xy = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$$

Determine las constantes $c_1$ y $c_2$ de modo que $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$.

**Problema 5.** Si $y_1$ e $y_2$ son funciones derivables con $y_1(x) \cdot y_2(x) \neq 0$. Demuestre que si $y_1' y_2 - y_1 y_2' = 0$ para toda $x$ entonces $y_1 = c y_2$ para alguna constante $c$.

**Problema 6.** Para buscar una segunda solución $y_2$ de la EDO a coeficientes variables dada, haga $y_2(x) = y_1(x) \cdot z(x)$ donde $z'(x) = u(x)$.

($i$) Para $x \in (0, \infty)$, verifique que $y_1(x) = x^2$ es solución de la EDO lineal a coeficientes variables $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$. Encuentre otra solución linealmente independiente con $y_1$. (*)

($ii$) Lo mismo anterior para $x^2 y'' - x\, y' + (x^2 - 2)y = 0$. y la función $y_1(x) = x\, e^x$.

**Problema 7.** En los siguientes ejercicios, verifique que el conjunto dado es un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea asociada y que $y_p$ es una solución particular. Después encuentre la solución general de la ecuación diferencial y resuelva el problema de valor inicial.

a) $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \{senx, cosx\}, \quad y_p = 1$

b) $y'' - y = e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad \{e^x, e^{-x}\}, \quad y_p = \frac{1}{8} e^{3x}\ 1$

c) $y'' - 2y' + y = 4e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \{e^x, xe^x\}, \quad y_p = 4e^{2x}$ (*)

d) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2lnx + 3,$
$y(1) = 0, \quad y'(1) = 2, \quad \{x^{-1}, x^{-2}\}, \quad y_p = lnx, \quad x > 0$

**Problema 8.** Verifique que $-\frac{1}{3}\ sen2x$ es una solución de $y'' + y = sen2x, -\frac{1}{3}\ cos2x$ es una solución de $y'' + y = (cos2x)\ y\ \{senx,\ cosx\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para $y'' + y = 0$. Encuentre la solución general de $y'' + y = sen2x + cos2x$.

**Problema 9.**(*)
Verifique que $e^{2x}$ es una solución de $y'' - 2y' + y = e^{2x}$, 1 es una solución de $y'' - 2y' + y = 1$, y $\{e^x, xe^x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para $y'' - 2y' + y = 0$. Encuentre la solución general de $y'' - 2y' + y = 1 + e^{2x}$.

**Problema 10.** Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de funciones es linealmente independiente en $C(I)$, para el intervalo $I$ dado.
a) $\{1, \mathrm{e}^{-x}, 2\,\mathrm{e}^{2x}\}$; $I = R$, b) $\{\ln(x), x\ln(x)\}$; $I = (0, +\infty)$
c) $\{\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(b\,x), \mathrm{e}^{ax}\cos(b\,x)\}$; $I = R$, d) $\{\tan(x), |\tan(x)|\}$; $I = (-\pi/2, \pi/2)$ (*)
e) $\{1, \operatorname{sen}^2(x), 1 - \cos(x)\}$; $I = R$ (*) f) $\{\sqrt{1 - x^2}, x\}$, $I = (-1, 1)$

**Problema 11.** Encuentre operadores diferenciales lineales que aniquilen a las funciones:
a) $\cos^2(x)$; b) $x^3 \operatorname{sen}(4x)$ (*); c) $x\,(8x - 3)\cos(5x)$ ; d) $x\, sen(x - 1)\,\mathrm{e}^{-3x}$ (*)

JMS/CMG/jms.
10/09/2007.