UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

TAREA 3.
Análisis Funcional y Aplicaciones I.
525401.
Segundo Semestre 2006.

Operadores adjuntos en espacios de Hilbert.

Sean E y F dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Usando los visto en clases (Capítulo II, Brezis) y el teorema de Representación de Riesz, pruebe que T^* (adjunto de T) se identifica a un operador de $\mathcal{L}(F, E)$ mediante los productos internos de E y F, y además
   (a) $\|T\| = \|T^*\|$,
   (b) la aplicación $T \mapsto T^*$ es antilineal e isométrica de $\mathcal{L}(E, F)$ en $\mathcal{L}(F, E)$,
   (c) $(T^*)^* = T$,
   (d) $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$.

Un elemento $U \in \mathcal{L}(E, F)$ se dice unitario ssi $U^* \circ U = Id_E$ y $U \circ U^* = Id_F$. Un elemento $T \in \mathcal{L}(E)$ se dice normal si $T^* \circ T = T \circ T^*$.

2. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes
   (a) el operador T es unitario
   (b) el operador T es sobreyectivo y $T^* \circ T = Id_E$
   (c) el operador T es una isometría en F.
3. Pruebe que si $T \in \mathcal{L}(E)$ es normal, entonces $ker(T) = ker(T^*)$, y luego $E = kerT \oplus \overline{ImT}$ con suma ortogonal.

Convergencia Débil.

4. Pruebe que en ℓ^1 la convergencia débil es equivalente a la convergencia fuerte sin embargo las topologias fuerte y débil no coinciden.
5. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Hilbert H. Pruebe que $u_n \to u$ en $H-$fuerte ssi $\Big\{u_n \rightharpoonup u$ en $H-$débil y $\|u_n\| \to \|u\|$ en $\mathbb{R}\Big\}$.
6. Construya una sucesión acotada de $L^1(\mathbb{R})$ que no posea ninguna subsucesión convergente débil. Deduzca que $L^1(\mathbb{R})$ no es reflexivo.

   Indicación: Considere φ_n de $L^1(\mathbb{R})$ definida como la función característica de $[n, n+1]$.

Fecha de Entrega : 11 de Octubre de 2006.
MSC/msc
(27-Septiembre-2006)