

## METODOS DE PASO MULTIPLE O LIGADO

Se considera el problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \text{ dado}, \end{cases} \quad (1)$$

el que supondremos tiene solución única,  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual es acotada y depende continuamente de los datos  $f$  e  $y_0$ .

Los métodos que hemos visto hasta aquí sólo usan la información en  $x_i$  para obtener  $y_{i+1}$ .

Parece razonable pensar que si utilizamos los valores obtenidos en los nodos  $x_{i-k}, \dots, x_i$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, m$  tendríamos mayor precisión en la solución.

Integrando  $y'(x) = f(x, y(x))$  en un intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \\ \implies y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \end{aligned} \quad (2)$$

Como  $y$  no es conocida, no podemos utilizarla en la integración, pero si podemos recurrir a un polinomio que interpole los valores de  $f$  para usarlo en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ .

## METODOS EXPLICITOS

Sea  $p$  el polinomio que interpola a  $f$  en los puntos  $(x_{i-k}, f_{i-k}), \dots, (x_i, f_i)$ , donde  $f_j := f(x_j, y_j)$ ,  $j = i - k, \dots, i$ .

Reemplazando  $f$  por  $p$  en (2) se obtiene:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx, \quad (3)$$

que genera los métodos conocidos como los métodos de [Adams–Bashforth](#).

$k = 0$  | Método de Adams–Bashforth primer orden (Euler).

En este caso  $p(x) = f_i$ , de donde

$$y_{i+1} = y_i + h f_i. \quad (4)$$

$k = 1$  | Método de Adams–Bashforth segundo orden.

En este caso  $p(x) = \frac{x_i - x}{h} f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h} f_i$ , de donde

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [3f_i - f_{i-1}]. \quad (5)$$

**$k = 2$**  | Método de Adams–Bashforth tercer orden.

En este caso

$$p(x) = \frac{(x_{i-1} - x)(x_i - x)}{2h^2} f_{i-2} + \frac{(x - x_{i-2})(x_i - x)}{h^2} f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-2})(x - x_{i-1})}{2h^2} f_i,$$

de donde

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]. \quad (6)$$

**$k = 3$**  | Método de Adams–Bashforth cuarto orden.

Análogamente

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]. \quad (7)$$

### Observación

1. A esta familia de métodos se le llama métodos de **Adams–Bashforth** de orden  $k + 1$ .
2. Para  $k > 0$  necesitaríamos conocer inicialmente los puntos  $(x_0, f_0), \dots, (x_k, f_k)$  para lo cual se puede utilizar por ejemplo los métodos de Runge–Kutta. Es por esta razón que a los métodos de Adams–Bashforth de orden dos en adelante, se dicen que **no son** de partida autónoma.
3. Para todos los métodos recién descritos existe una fórmula para el error por paso, por ejemplo para (7) se tiene

$$E = \frac{251}{720} y^{(5)}(\zeta) h^5, \quad \zeta \in [x_{i-3}, x_{i+1}] \quad (8)$$

## MÉTODOS IMPLICITOS

Por otra parte, si construimos un polinomio de interpolación  $p$  de grado  $k$  que utilice los puntos  $(x_{i-k+1}, f_{i-k+1}), \dots, (x_{i+1}, f_{i+1})$ , se generará una nueva clase de métodos conocidos como los métodos de **Adams–Moulton**.

Análogamente, a los métodos de Adams–Bashforth tenemos:

**$k = 0$**  | Método de Euler implícito o de Adams–Moulton de primer orden

$$y_{i+1} = y_i + h f_{i+1}. \quad (9)$$

**$k = 1$**  | Método de Adams–Moulton de segundo orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f_{i+1} + f_i]. \quad (10)$$

**$k = 2$**  | Método de Adams–Moulton de tercer orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]. \quad (11)$$

$k = 3$  | Método de Adams–Moulton de cuarto orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]. \quad (12)$$

### Observación

1. Los métodos recién descritos son llamados de implícitos, pues la incógnita aparece en el segundo miembro.
2. Para todos los métodos recién descritos existe una fórmula para el error por paso, por ejemplo para (12) se tiene:

$$E = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\zeta)h^5, \quad \zeta \in [x_{i-2}, x_{i+1}] \quad (13)$$

### Ejemplo

Considere el siguiente PVI

$$\begin{cases} y'(x) = -\alpha(y - \text{sen}(x)), & x \in [0, 0.9] \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{PVI})$$

**Solución exacta:**

$$y(x) = -\frac{e^{-\alpha x}(\alpha e^{\alpha x} \cos(x) - \alpha^2 e^{\alpha x} \text{sen}(x) - \alpha^2 - \alpha - 1)}{\alpha^2 + 1}$$

Para este problema se usó el método de **EULER** (explícito) y el de **EULER IMPLÍCITO**, es decir,

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad (\text{EXPLICITO})$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1}). \quad (\text{IMPLICITO})$$

A continuación daremos un esquema de como se emplea el método implícito.

Aplicando (IMPLICITO) en (PVI) se llega al siguiente esquema:

$$-y_i + (1 + h\alpha)y_{i+1} = h\alpha \text{sen}(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

lo que lleva al sistema de ecuaciones

$$AY = b$$

donde

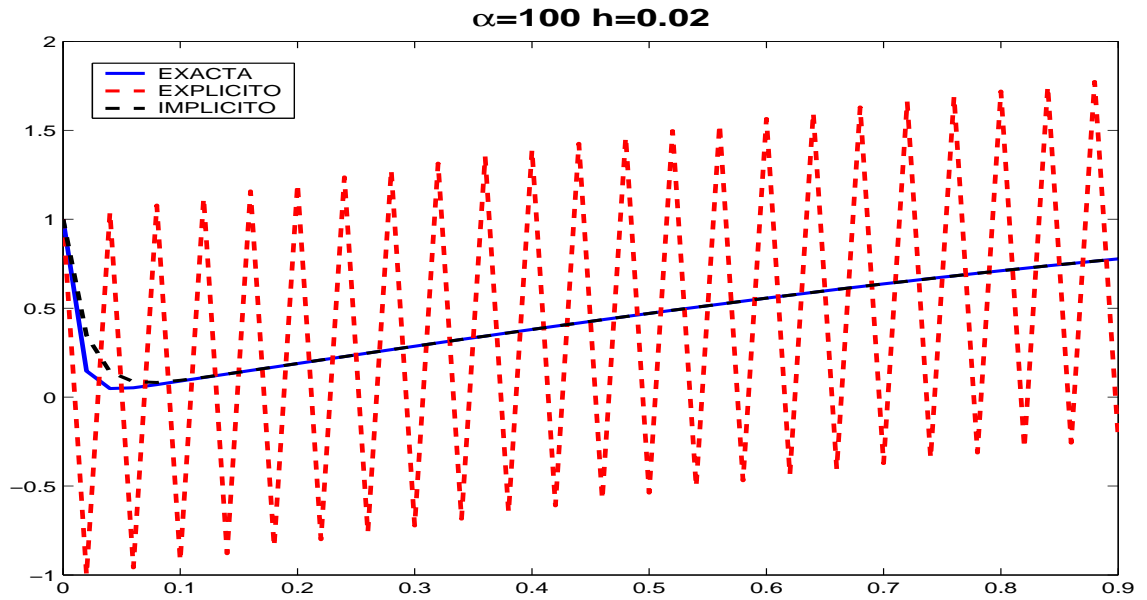
$$A = \begin{bmatrix} 1 + h\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 + h\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 + h\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 + h\alpha \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} h\alpha \text{sen}(x_1) + y_0 \\ h\alpha \text{sen}(x_2) \\ h\alpha \text{sen}(x_3) \\ \vdots \\ h\alpha \text{sen}(x_n) \end{bmatrix}.$$

Es bueno notar que la matriz  $A$  es esparcida.

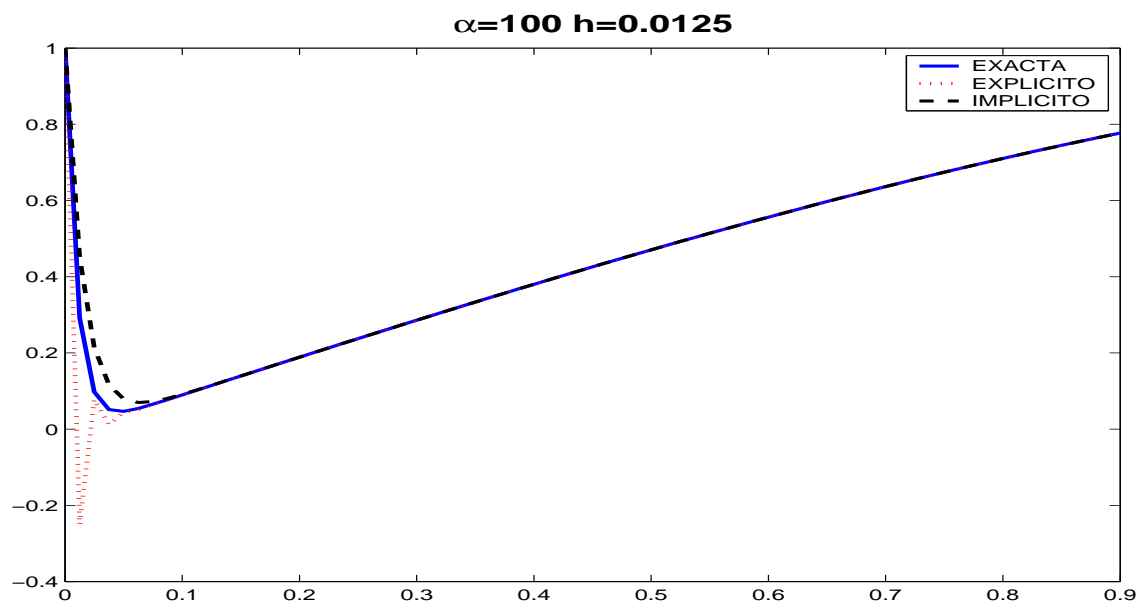
Además si  $h$  y  $\alpha$  son positivos la matriz  $A$  es de diagonal dominante.

La siguiente tabla muestra los errores al resolver el (PVI) para  $\alpha = 100$  y diferentes pasos  $h$ .

	h=0.050		h=0.025		h=0.020	
x	Error Exp.	Error Imp.	Error Exp.	Error Imp.	Error Exp.	Error Imp.
0.0	0.0000	0.000000	0.0000	0.000000	0.0000	0.0000
0.1	16.1500	0.030452	5.1031	0.028036	1.0100	0.0041
0.2	258.5500	0.058343	25.8750	0.034397	1.0100	0.0000
0.3	4136.9000	0.057859	131.0300	0.033654	1.0100	0.0000
0.4	66191.0000	0.056024	663.4000	0.032529	1.0100	0.0000
0.5	1.0591e+006	0.053607	3358.5000	0.031079	1.0100	0.0000
0.6	1.6945e+007	0.050655	17002.0000	0.029318	1.0101	0.0001
0.7	2.7112e+008	0.047196	86075.0000	0.027264	1.0099	0.0001
0.8	4.3379e+009	0.043265	4.3575e+005	0.024938	1.0101	0.0001
0.9	6.9407e+010	0.038902	2.2060e+006	0.022363	1.0099	0.0001



	h=0.0125	
x	Error Explícito	Error Implícito
0.0	0.0000	0.0000
0.1	0.2519e-04	0.0015
0.2	0.1144e-04	0.0000
0.3	0.1752e-04	0.0000
0.4	0.2342e-04	0.0000
0.5	0.2909e-04	0.0000
0.6	0.3447e-04	0.0000
0.7	0.3950e-04	0.0000
0.8	0.4414e-04	0.0000
0.9	0.4833e-04	0.0000



## METODOS PREDICTOR CORRECTOR

Estos métodos consisten en combinar un método explícito con uno implícito. Por ejemplo, consideremos el método de Adams–Bashforth de cuarto orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}],$$

y el método de Adams–Moulton de cuarto orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}].$$

Con el método explícito se predice el valor  $y(x_{i+1})$  que denotaremos por  $y_{i+1}^p$  y con el implícito se procede a corregir el valor encontrado, que denotaremos por

$y_{i+1}^c$ . El esquema es como sigue

$$\begin{aligned} y_{i+1}^p &= y_i + \frac{h}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}] \\ f_{i+1}^p &= f(x_{i+1}, y_{i+1}^p) \\ y_{i+1}^c &= y_i + \frac{h}{24}[9f_{i+1}^p + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]. \end{aligned}$$

A este método lo llamaremos predictor–corrector de Adams de cuarto orden.

Consideremos los errores dados en (8) y (13)

$$E_p = y(x_{i+1}) - y_{i+1}^p = \frac{251}{720}y^{(5)}(\zeta)h^5, \quad \zeta \in [x_{i-3}, x_{i+1}] \quad (14)$$

$$E_c = y(x_{i+1}) - y_{i+1}^c = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\zeta)h^5, \quad \zeta \in [x_{i-2}, x_{i+1}]. \quad (15)$$

Supongamos que  $h$  es suficientemente pequeño de modo que  $y^{(5)}$  es casi constante en  $[x_{i-3}, x_{i+1}]$ , entonces

$$\frac{720}{251}[y(x_{i+1}) - y_{i+1}^p] = -\frac{720}{19}[y(x_{i+1}) - y_{i+1}^c],$$

de donde

$$19[y(x_{i+1}) - y_{i+1}^p] + 251[y(x_{i+1}) - y_{i+1}^c] = 0.$$

Despejando  $y(x_{i+1})$  y agrupando adecuadamente los términos se tiene

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^c - \frac{19}{270}[y_{i+1}^c - y_{i+1}^p].$$

De aquí con (15) se tiene una estimación para  $E_c$

$$E_c \approx -\frac{19}{270}[y_{i+1}^c - y_{i+1}^p] = \delta_{i+1}. \quad (16)$$

Si  $\delta_{i+1}$  nos indica que  $y_{i+1}^c$  no está lo suficientemente aproximado a  $y(x_{i+1})$ , entonces se puede recalcular  $y_{i+1}^c$  usándolo en el cálculo de  $f_{i+1}^p$  en la ecuación

$$f_{i+1}^p = f(x_{i+1}, y_{i+1}^c).$$

## CONDICIONAMIENTO Y ESTABILIDAD PARA PVI

Se considera el problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \text{ dado.} \end{cases}$$

El PVI anterior se dirá **bien condicionado** cuando frente a pequeños cambios introducidos en la ecuación diferencial o en el dato inicial, la solución experimente sólo un pequeño cambio. En el caso que los cambios en la solución sean grandes se dirá que el PVI es **mal condicionado**.

**Ejemplo.**

Considere el PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = 100y(x) - 101e^{-x}, & x > 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

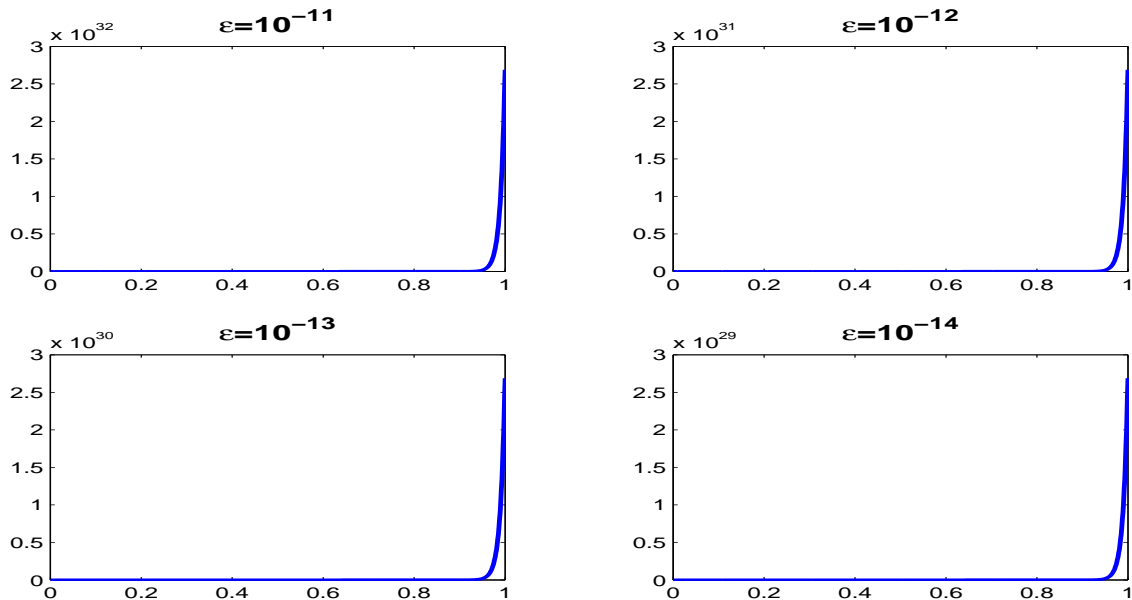
y el problema perturbado

$$\begin{cases} y'(x) = 100y(x) - 101e^{-x}, & x > 0, \\ y(0) = 1 + \epsilon. \end{cases}$$

Las soluciones de estos problemas son respectivamente:

$$y(x) = e^{-x} \quad \text{y} \quad y(x) = e^{-x} + \epsilon e^{100x}.$$

La perturbación  $\epsilon$  en el dato inicial provoca una diferencia de  $\epsilon e^{100x}$  en las soluciones. Como este término puede ser arbitrariamente grande cuando  $x$  crece, el problema es mal condicionado.

**Ejemplo.**

Considere el PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = -1000y(x), & x > 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

y el problema perturbado

$$\begin{cases} y'(x) = -1000y(x), & x > 0, \\ y(0) = 1 + \epsilon. \end{cases}$$

Las soluciones de estos problemas son respectivamente:

$$y(x) = e^{-100x} \quad \text{y} \quad y(x) = (1 + \epsilon)e^{-1000x}.$$

La perturbación  $\epsilon$  en el dato inicial provoca una diferencia de  $\epsilon e^{-1000x}$  entre las soluciones. Como este término está acotado por  $\epsilon$ , el problema es bien condicionado.

Note que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))$  es positiva en el primer ejemplo y negativa en el segundo. En general, cuando  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \leq 0$ , para  $x \in I$ , el PVI resulta bien condicionado; mientras que para  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) > 0$  mal condicionado.

Al resolver numéricamente un problema mal condicionado, los errores de redondeo producidos, tanto por el amacenamiento de datos, como por las operaciones del método, se propagarán a los resultados resultando éstos inútiles. Por otra parte, aunque el problema sea bien condicionado, cuando  $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))|$  sea grande se puede presentar la dificultad que muestra el siguiente ejemplo.

### Ejemplo.

Considere el PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = -\alpha y(x), & x > 0, \quad \alpha > 0 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

cuya solución es  $y(x) = e^{-\alpha x}$ . Usando el método de  $RK_{11}$  (Euler), con paso  $h$  y nodos  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , tenemos:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) \\ &= y_i + h(-\alpha y_i) \\ &= (1 - \alpha h)y_i \end{aligned}$$

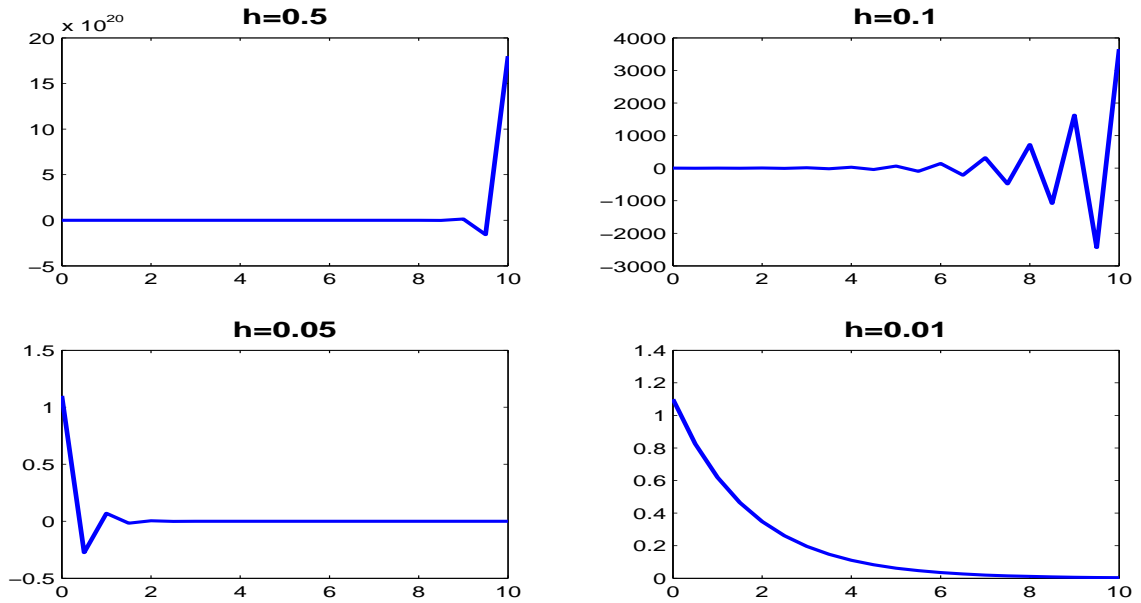
y luego, por inducción

$$y_{i+1} = (1 - \alpha h)^{i+1}.$$

Notamos que si  $|1 - \alpha h| > 1$ , entonces  $|y_{i+1}| \rightarrow \infty$  cuando  $i \rightarrow \infty$  y luego, los valores calculados no aproximan a los valores de  $y(x) = e^{-\alpha x}$  cuando  $x$  crece. Para tener reales aproximaciones es necesario que  $h < \frac{1}{\alpha}$ . Esta **condición de estabilidad** para el método puede obligar a usar un paso  $h$  muy pequeño para  $\alpha$  grande. Si  $\alpha = 1000$ ,  $h$  debe ser menor que  $\frac{1}{1000}$  para tener estabilidad.

Esta situación es característica de problemas con  $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))|$  grande. Este tipo de problemas reciben el nombre de **problemas rígidos (stiff problems)** y se enfrentan, en general, con métodos implícitos.





### Ejemplo.

Aplicar el método de Euler implícito:

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

al problema anterior. Como para el problema  $f(x_{i+1}, y_{i+1}) = -\alpha y_{i+1}$ , entonces,

$$y_{i+1} = y_i + h(-\alpha y_{i+1})$$

o bien,

$$(1 + \alpha h)y_{i+1} = y_i$$

de donde:

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{(1 + \alpha h)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

y por inducción se llega a:

$$y_{i+1} = \frac{y_0}{(1 + \alpha h)^{i+1}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Independiente del valor de  $h$ , esta sucesión no presenta la conducta inestable vista con el método de Euler.

Como el método de Euler implícito es sólo de orden uno, una elección mejor para resolver el problema stiff anterior es usar un método de orden superior, por ejemplo, el método de Adams-Moulton de segundo orden:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f_i + f_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

## Sistemas de EDO.

Considere el PVI definido por el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} y'_1(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), & x \in [a, b] \\ y'_2(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \\ \vdots = \vdots \\ y'_n(x) = f_n(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \\ y_1(a) = y_{10}, y_2(a) = y_{20}, \dots, y_n(a) = y_{n0} \text{ (conocidos)}. \end{cases}$$

Definiendo,

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad F(x, y(x)) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{bmatrix}$$

el sistema se escribe:

$$\begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \text{ dado.} \end{cases}$$

Los métodos numéricos vistos para una ecuación se generalizan directamente al caso de un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, para un sistema con dos ecuaciones ( $n = 2$ ):

$$\begin{cases} y'_1(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x)), & x \in [a, b] \\ y'_2(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x)), \\ y_1(a) = y_{10}, \quad y_2(a) = y_{20} \text{ (conocidos)}, \end{cases}$$

o en su forma vectorial

$$\begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \text{ (dado)}, \end{cases}$$

el método de Euler ( $RK_{11}$ ) se expresa como:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i), & i = 0, 1, 2, \dots \\ y(a) = y_0 \text{ (dado)}, \end{cases}$$

o bien, por componentes por:

$$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), & i = 0, 1, 2, \dots \\ y_1(a) = y_{10}, y_2(a) = y_{20} \text{ (dados)}. \end{cases}$$

Similarmente, los otros métodos numéricos se pueden formular en forma vectorial para sistemas; por ejemplo, el método de Adams-Moulton de segundo orden queda:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[F_i + F_{i+1}] \quad , i = 1, 2, \dots$$

### Ecuaciones de orden superior

Una ecuación diferencial de orden  $n$

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad x \in [a, b]$$

se puede expresar como un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden al definir:

$$Z(x) = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},$$

ya que,

$$Z'(x) = \begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ \vdots \\ f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{bmatrix} =: F(x, Z)$$

y luego,  $Z'(x) = F(x, Z)$  es un sistema de EDO de primer orden al que se pueden aplicar los métodos numéricos vistos.

Por el mismo procedimiento, un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior, también se expresa por un sistema de EDO de primer orden.

### Ejemplo

Resolver el PVI para la ecuación del péndulo

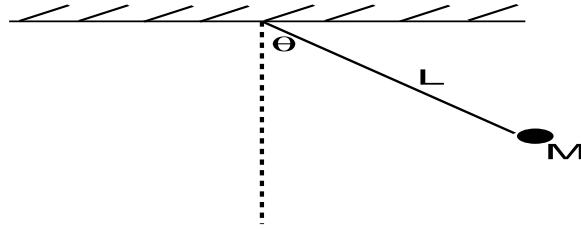
### Solución

Considere la dinámica del péndulo que muestra la figura

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ \theta(0) = \frac{\pi}{4} \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

Para resolver esta ecuación no lineal (que no tiene solución analítica) debemos hacer el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta \\ \theta_2 &= \dot{\theta}_1 \end{aligned}$$



de donde obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{g}{L}\sin(\theta_1) \\ \theta_1(0) = \frac{\pi}{4} \\ \theta_2(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando el método de RK<sub>44</sub> al sistema anterior se obtiene el algoritmo

#### Algoritmo

Para  $i = 0, \dots, N - 1$

$$x_i = a + ih$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]$$

*i continue* ◻

donde

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ -\frac{g}{L}\sin(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Notemos que  $\theta_1$  corresponde al ángulo  $\theta$  y la salida  $\theta_2$  a la velocidad  $\dot{\theta}$ .

Resolviendo para  $g = 9,8[m/s]$  y  $L = 0.5[m]$ , obtenemos

