Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Cálculo Numérico (521230)
Laboratorio 6: Interpolación.

Ejercicio 1: La siguiente tabla

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-25	-4	-1	8	47

corresponde a los valores de una cierta función f en los puntos $-2, -1, 0, 1, 2$.

1.1 Calcule, con ayuda del comando `polyfit` los polinomios $p_1 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $p_2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $p_3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $p_4 \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, $p_5 \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ que mejor ajustan por mínimos cuadrados los datos en la tabla y complete

$p_1(x) =$
$p_2(x) =$
$p_3(x) =$
$p_4(x) =$
$p_5(x) =$

1.2 Por cada uno de los polinomios determinados antes, grafique, en una misma figura, al polinomio, evaluado en 100 puntos entre -2 y 2 y los puntos en la tabla.

1.3 Haga un nuevo grafico con los puntos en la tabla y el polinomio $q(x) = x^5 - x^3 + 3x^2 + 6x - 1$, evaluado en 100 puntos entre -2 y 2.

1.4 ¿Cuáles de los polinomios $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, q$ interpolan los pares en la tabla?

1.5 Observe que p_3 y p_4 coinciden. ¿Contradice esto el teorema visto en clases sobre existencia y unicidad del polinomio de interpolación?

1.6 Observe que p_5 y q no coinciden. ¿Contradice esto el teorema visto en clases sobre existencia y unicidad del polinomio de interpolación?

Ejercicio 2: Considere $f(x) = \ln(x)$.

2.1 Determine, mediante el comando `polyfit` de MATLAB un polinomio que interpole a f en los puntos $1, 2, 3$. Escoja el grado de este polinomio de forma que su existencia y unicidad estén aseguradas.

2.2 Grafique, en un mismo gráfico, a la función f y al polinomio calculado, evaluados en 200 puntos entre 1 y 3. Recuerde que puede utilizar el comando `polyval` para evaluar al polinomio. ¿Cómo se reconoce en el gráfico que p interpola a f, así como los puntos de interpolación?

2.3 Grafique, en un mismo gráfico, los valores $|f(x_i) - p(x_i)|$ y

$$\frac{1}{3!} \max_{x \in [1,\,3]} |f'''(x)|\, |(x_i - 1)(x_i - 2)(x_i - 3)|$$

con $x_i = 1 + ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, 100,\ h = \dfrac{1}{50}$. ¿Se cumple

$$|f(x_i) - p(x_i)| \leq \frac{1}{3!} \max_{x \in [1,\,3]} |f'''(x)|\, |(x_i - 1)(x_i - 2)(x_i - 3)|\,,\ i = 0, 1, 2, \ldots, 100\,?$$

Ejercicio 3: Con el objetivo de aproximar el contorno superior del pato que se muestra en la figura 1 se midieron las coordenadas de 21 puntos $(x_i,\, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, 21$ sobre él, los cuales se muestran en la tabla 1

x	0.9	1.3	1.9	2.1	2.6	3	3.9	4.4	4.7	5	6	7	8	9.2	10.5	11.3	11.6	12	12.6	13	13.3
y	1.3	1.5	1.85	2.1	2.6	2.7	2.4	2.15	2.05	2.1	2.25	2.3	2.25	1.95	1.4	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.25

CUADRO 1. Pares en contorno superior del pato

3.1 Encuentre el polinomio que interpola a los datos en la tabla anterior, escoja el grado del mismo de forma que su existencia y unicidad estén garantizadas.

3.2 Grafique, en un mismo gráfico, los puntos de interpolación y el polinomio antes determinado, evaluado en 100 puntos entre 0.9 y 13.3. ¿Cree usted que este polinomio proporcione una buena aproximación a la curva que se quiere aproximar? Justifique.

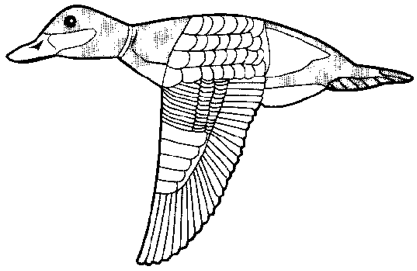

Figura 1. Se quiere interpolar borde superior de figura mostrada

3.3 Determine, con ayuda del comando `spline` o del comando `csape`, un spline cúbico que interpole los pares de valores dados. Grafique nuevamente los valores en la tabla y el spline cúbico obtenido, evaluado en 100 puntos entre 0.9 y 13.3. ¿Se obtiene con éste una mejor aproximación al contorno superior del pato en la figura 1?

Observación: *Dados vectores $x = (x_i)_{i=0}^n$, $y = (y_i)_{i=0}^n$ de la misma longitud y tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, existen diversas alternativas en* Matlab *para encontrar un spline cúbico que los interpole:*

a) `s = spline(x,y)`*: En este caso,* `s` *es un spline cúbico que satisface*

$$s(x_i) = y_i \;\forall\, i \qquad s''' \text{ es continua en } x_1 \text{ y } x_{n-1}$$

b) `s = spline(x,[a y b])` *con* `a` *y* `b` *números reales: En este caso,* `s` *es un spline cúbico que satisface*

$$s(x_i) = y_i \;\forall\, i, \qquad s'(x_0) = a,\; s'(x_n) = b.$$

c) `s = csape(x,[a y b],[2 2])` *con* `a` *y* `b` *números reales:* `s` *es el spline cúbico que satisface*

$$s(x_i) = y_i \;\forall\, i, \qquad s''(x_0) = a,\; s''(x_n) = b.$$

Si $a = b = 0$, entonces s es el spline cúbico natural que interpola los pares ordenados (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$.

Una vez encontrado `s` *con el comando* `spline`*, puede evaluarlo en los puntos* `xx` *con* `ppval(s,xx)`*.*
Si calcula a `s` *con el comando* `csape`*, puede evaluarlo con* `fnval(s,xx)`*.*

Ejercicio 4: El jardín del Doctor B tiene una forma irregular (se muestra en la primera de las figuras en 2). Él ha plantado todo tipo de flores y árboles decorativos en su jardín, pero todo se ha secado, lo único que crece sin problemas es la hierba mala. El Dr. B ha tomado entonces una drástica decisión: cubrir todo su jardín con una capa de corteza de pino de 0.025 metros de altura, la cual se vende en sacos de 10 litros (0.01 metros cúbicos). El Dr. B debe, por tanto, comprar

$$\left\lceil \frac{\text{volumen a cubrir}}{0.01} \right\rceil$$

sacos de corteza de pino, donde $\left\lceil \frac{\text{volumen a cubrir}}{0.01} \right\rceil$ representa la parte entera de $\frac{\text{volumen a cubrir}}{0.01}$, por ejemplo $\lceil 2.5 \rceil = 3$. Si suponemos que el jardín del Dr. B tiene un área de Am^2, el volumen que él quiere cubrir con la corteza de pino es

$$A \cdot 0.025m^3.$$

Necesitamos entonces calcular el área que ocupa el jardín del Dr. B. Lamentablemente no disponemos de una función para describir el contorno del mismo. Encontrar una aproximación al área del jardín del Dr. B es el objetivo de esta pregunta.

El ancho del jardín es, como se observa en la figura 2, de 10 metros. En puntos situados en la parte inferior del jardín y a x_i $(i = 1 : 21)$ metros de la esquina izquierda el Dr. B ha medido el largo y_i del mismo. Los valores obtenidos se muestran en la tabla 2 y en la segunda de las figuras en 2. Con ayuda de estos valores podemos encontrar una función que describa de manera aproximada la frontera superior del jardín del Dr. B.

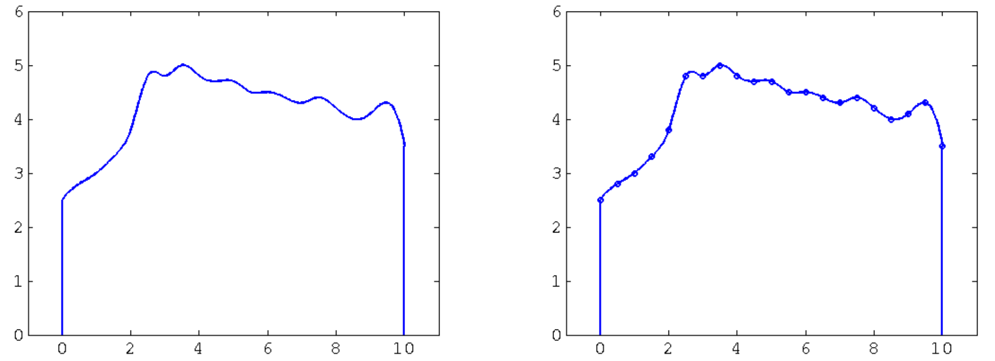

Figura 2. Forma del jardín del Dr. B

x_i	y_i
0	2.5
0.5	2.8
1	3
1.5	3.3
2	3.8
2.5	4.8
3	4.8
3.5	5
4	4.8
4.5	4.7
5	4.7
5.5	4.5
6	4.5
6.5	4.4
7	4.3
7.5	4.4
8	4.2
8.5	4
9	4.1
9.5	4.3
10	3.5

Cuadro 2. Largo del jardín a distintas distancias del punto en esquina inferior izquierda

4.1 Encuentre el polinomio de grado menor o igual que 20 que interpola los pares ordenados en la tabla 2. Grafique los puntos en la tabla y el polinomio obtenido, evaluado en 200 puntos entre 0 y 10. ¿Es este polinomio una buena aproximación a la frontera superior del jardín?

4.2 Escriba una función en Matlab que dado un vector `v` de entrada, determine un spline cúbico s que interpole los pares en la tabla y devuelva $s(\mathtt{v})$.

4.3 Llame a la función escrita antes para evaluar a a un spline cúbico que interpole a la función en la tabla en 200 puntos entre 0 y 10. Añada al gráfico en **4.1** el del spline calculado. ¿Describe esta función la frontera superior del jardín de mejor manera que el polinomio de interpolación?