UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 1
ALGEBRA LINEAL (520131)

Problema 1. Si a una matriz A cuadrada de $4{\times}4$ se le realizan, sucesivamente, las operaciones elementales de filas: $2R_3{+}R_1 \to R_1, 1/2R_3 \to R_3, -3R_1{+}R_4 \to R_4$, se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1 \\ -6 & -9 & -23 & -10 \end{pmatrix}$$

Utilizando matrices elementales, obtenga la matriz A.

(20 puntos)

Solución

$A : 2R_3 + R_1 \to R_1, 1/2R_3 \to R_3, -3R_1 + R_4 \to R_4 : B$; donde,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1 \\ -6 & -9 & -23 & -10 \end{pmatrix}$$

Las matrices elementales asociadas a las operaciones elementales filas mencionadas; respectivamente, y sus correspondientes matrices inversas son:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricialmente, el traspaso de la matriz A a la matriz B, está dado por:

$$B = E_3E_2E_1A;$$

de donde,

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}B$$

Ahora, realizando las operaciones correspondientes se tiene:

$$E_3^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_2^{-1}(E_3^{-1}B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{E}_1^{-1}(E_2^{-2}E_3^{-1}B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y así

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A través de la Eliminación Gaussiana, obtenga A^{-1}. De acuerdo al procedimiento usado en la obtención de A^{-1}, calcule el determinante de A.

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se define la matriz M como:

$$M = (A\ I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando Eliminación Gaussiana se tiene:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-R_1 \to R_1 \left(\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & -3/2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} -2R_1 + R_2 \to R_2 \\ -2R_1 + R_4 \to R_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & -3/2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$1/4R_2 \to R_2 \left(\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & -3/2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}R_1 + R_1 \to R_1 \\ -4R_2 + R_4 \to R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1/4 & 0 & 3/8 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$1/2R_3 \to R_3 \left(\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 0 & -1/4 & 0 & 3/8 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4}R_3 + R_1 \to R_1 \\ -\frac{1}{2}R_3 + R_2 \to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1/8 & 3/8 & -1/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2}R_4 \to R_4 \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1/8 & 3/8 & -1/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4}R_4 + R_1 \to R_1 \\ -\frac{1}{2}R_4 + R_2 \to R_2 \\ -\frac{1}{2}R_4 + R_3 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7/16 & -1/4 & -1/8 & -1/16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/8 & 1/2 & -1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

Así

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 7/16 & -1/4 & -1/8 & -1/16 \\ 1/8 & 1/2 & -1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

De acuerdo a las operaciones de filas realizadas, se tiene que:

$$|I| = -(-1)\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}|A| = 1$$

$$\Longrightarrow |A| = 4\cdot 2\cdot 2 = 16$$

Problema 3. Sean los sistemas de ecuaciones lineales

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & x_2 & - & x_3 & + & & + & 2x_5 & = & 1\\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & - & 2x_5 & = & -1\\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & 3x_5 & = & 0\\ x_1 & & & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 2\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 4\\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & - & 2x_5 & = & -3\\ 3x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & 4\end{array}$$

i) A través del concepto de rango, verifique que el sistema a) no tiene solución.

ii) Verifique, usando el concepto de rango, que el sistema b) es compatible indeterminado. Encuentre su conjunto solución.

(20 puntos)

Solución

i)

$$\begin{array}{rrrrrl} & x_2 & -x_3 & & +2x_5 & = 1\\ 2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +6x_4 & -2x_5 & = -1\\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -3x_5 & = 0\\ x_1 & & +x_3 & +3x_4 & +x_5 & = 2\end{array}$$

Escalonando la matriz ampliada del sistema se tiene:

$$(Ab) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 4 & 6 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 3 & 3 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \quad R \leftrightarrow R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -3 & 0\\ 2 & -2 & 4 & 6 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -2R_1 + R_2 \to R_2\\ -R_1 + R_4 \to R_4\end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -\frac{1}{2}R_2 + R_3 \to R_3 \\ -R_2 + R_4 \to R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}R_3 + R_4 \to R_4 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la matriz resultante se ve que $ran(A) = 2$ y $ran(Ab) = 3$; es decir, $ran(A) \neq ran(Ab)$, con lo cual el sistema no tiene solución.

ii)

$$\begin{matrix} x_1 & +x_2 & +x_3 & -3x_4 & +2x_5 & = 4 \\ x_1 & +2x_2 & -2x_3 & -5x_4 & -2x_5 & = -3 \\ 3x_1 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & +4x_5 & = 4 \end{matrix}$$

Matriz ampliada de sistema, $Ax = b : (Ab)$

$$(Ab) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -5 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Escalonando esta matriz se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -5 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -R_1 + R_2 \to R_2 \\ -3R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & -4 & -6 & 8 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$4R_2 + R_3 \to R_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -18 & 0 & -18 & -36 \end{pmatrix}$$

Luego, de esta última matriz se tiene que: $ran(A) = ran(Ab) = 3$ y el sistema tiene solución y dado que el número de incógnitas no es igual al rango de la matriz A, entonces el sistema tiene más de una solución; es decir, se trata de un sistema compatible indeterminado.

De la última matriz se tiene el siguiente sistema equivalente al anterior

$$\begin{matrix} x_1 & +x_2 & +x_3 & -3x_4 & +2x_5 & = 4 \\ & x_2 & -3x_3 & -2x_4 & -4x_5 & = -7 \\ & & -18x_3 & & -18x_5 & = -36 \end{matrix}$$

Resolviendo este sistema se llega a la siguiente solución:

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 - x_5 \\ x_2 &= -1 + 2x_4 + x_5 \\ x_1 &= 3 + x_4 - 2x_5 \end{aligned}$$

De esta manera el cojunto solción está dado por

$$\{(3 + x_4 - 2x_5, -1 + 2x_4 + x_5, 2 - x_5)\}$$

ADP/cln.