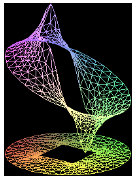
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

520142

Primer Semestre



FUNCIONES (1)

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Relaciones Binarias

RELACION

> Dados dos subconjuntos arbitrarios A y B no vacíos, una relación binaria $\mathcal{R}$ es una correspondencia entre los elementos de A y B, la cual se representa por un subconjunto de *pares ordenados* $R \subseteq A \times B$.

Si $(a, b) \in R$ diremos que a está relacionado con b y escribiremos $a\mathcal{R}b$:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow (a, b) \in R$$

El conjunto $\{(a, b) : (a, b) \in R\}$ forma la representación gráfica de $\mathcal{R}$.

- Dominio de $\mathcal{R}$: $Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A : \exists\, b \in B \wedge (a, b) \in R\}$
- Recorrido de $\mathcal{R}$: $Rec(\mathcal{R}) = \{b \in B : \exists\, a \in A \wedge (a, b) \in R\}$

La representación $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$ define la relación inversa de $\mathcal{R}$, y se denota $\mathcal{R}^{-1}$.

EJEMPLOS

- Sea $\mathcal{R}$ la relación cuya representación está dada por:

$$R = \{(2,1),(2,2),(2,3)\}.$$

Se tiene que $\quad Dom(\mathcal{R}) = \{2\}, \qquad Rec(\mathcal{R}) = \{1,2,3\}.$

- Para $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,4\}$, sea $\mathcal{R}$ la relación definida por

$$a\mathcal{R}b \iff a+b \leq 5, \quad a \in A, b \in B.$$

Así $R = \{(1,1),(1,4),(2,1),(3,1)\}, \quad Dom(\mathcal{R}) = A, \quad Rec(\mathcal{R}) = B.$

$\mathcal{R}$ definida por:

$$a\mathcal{R}b \iff a^2 + b^2 \leq 1$$

$R = \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : a^2+b^2 \leq 1\}, \; Dom(\mathcal{R}) = [-1,1], \; Rec(\mathcal{R}) = [-1,1].$

Funciones

FUNCION

Diremos que la relación $\mathcal{R}$ representada por $R \subseteq A \times B$, es una *función* f de A en B, si y sólo si:

$$\forall\, x \in A,\ \exists!\, y \in B:\ (x, y) \in R$$

Notación: $x\mathcal{R}y$ se escribirá $y = f(x)$.

La relación f se describe por $\left\{ \begin{array}{rrcc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \right.$

y	(variable dependiente)	es la IMAGEN de x a través de f
x	(variable independiente)	es una PRE-IMAGEN de y por f
A	DOMINIO de f	$A = Dom(f)$
B	CODOMINIO de f	$B = Cod(f)$
R	GRAFICO de f	$Gr(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$.

Funciones

Igualdad de Funciones

Decimos que las funciones

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g : C &\longrightarrow D \\ x &\longmapsto g(x) = y \end{aligned}$$

son iguales, si tienen igual dominio, igual codominio y son iguales punto a punto en la imagen. Esto es:

$$\boxed{f = g \iff [(A = C) \;\wedge\; (B = D)] \;\wedge\; (\forall x \in A : \;\; f(x) \;=\; g(x))}$$

Funciones

Conjunto Imagen

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y $X \subseteq A$.

La *imagen de* X *por* f se define por:

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in B : \exists x \in X,\ y = f(x)\} \\ &= \{f(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

Notación: $Rec(f) = f(A)$

Imagen Recíproca o Pre-Imagen

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y $Y \subseteq B$.

La *pre-imagen o imagen recíproca de* Y *por* f se define por:

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{x \in A : \exists\, y \in Y,\ y = f(x)\} \\ &= \{x \in A : f(x) \in Y\} \end{aligned}$$

Funciones

Algunas Propiedades de $f(X)$ y $f^{-1}(Y)$

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, $X \subseteq A$ y $Y \subseteq B$.

- $X \subseteq \tilde{X} \subseteq A \Longrightarrow f(X) \subseteq f(\tilde{X})$
- $f(X \bigcap \tilde{X}) \subseteq f(X) \bigcap f(\tilde{X})$
- $f(X \bigcup \tilde{X}) = f(X) \bigcup f(\tilde{X})$
- $f^{-1}(B) = A$
- $Y \subseteq \tilde{Y} \subseteq B \Longrightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\tilde{Y})$
- $f^{-1}(Y \bigcup \tilde{Y}) = f^{-1}(Y) \bigcup f^{-1}(\tilde{Y})$
- $f^{-1}(Y \bigcap \tilde{Y}) = f^{-1}(Y) \bigcap f^{-1}(\tilde{Y})$
- $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$
- $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Funciones

Función Sobreyectiva

Una función $f : A \longrightarrow B$ es **sobreyectiva** si y sólo si :

$$\boxed{f(A) = B\,, \quad (\text{es decir, } Rec(f) = B)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A :\ f(x) = y}$$

$$\Updownarrow$$

En términos de *resolver una ecuación* :

$$\forall\, y \in B : \left\{ \begin{array}{l} \text{la ecuación } f(x) = y \\ \textbf{admite} \text{ solución en } A \end{array} \right.$$

Función Inyectiva

Una función $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** si y sólo si :

$$\boxed{\forall y \in f(A),\ \exists !\, x \in A :\ f(x) = y}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in A :\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in A :\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, y \in f(A) : \begin{cases} \text{la ecuación} \quad f(x) = y \\ \text{tiene solución } \textbf{única} \text{ en } A \end{cases}$$

Funciones

Observación

$f : A \to B$ **no es inyectiva** $\Longleftrightarrow \exists\, x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

Función Biyectiva

Una función $f : A \longrightarrow B$ es **biyectiva** si y sólo si es **inyectiva y sobreyectiva**, es decir:

$$\boxed{\forall y \in B,\ \exists!\, x \in A :\ f(x) = y}$$

$$\Updownarrow$$

$\forall\, y \in B :$ $\begin{cases} \text{la ecuación} \quad f(x) = y \\ \text{tiene solución } \textbf{única} \text{ en } A \end{cases}$

Funciones

Función Inversa

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función **biyectiva**.

La función
$$\begin{aligned} g : B &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto g(y) = x, \end{aligned}$$
donde

$$g(y) = x \text{ si y sólo si } f(x) = y$$

se llama **función inversa de** f y se escribe $g = f^{-1}$.

Funciones Reales

Observación

A funciones $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ les llamaremos **Funciones Reales**.

Observación Dada una relación $\mathcal{R}$, nos interesa encontrar el mayor subconjunto A de $\mathbb{R}$ de modo que $\mathcal{R}$ sea una función f con $Dom(f) = A$, es decir,

$$\boxed{f : Dom(f) = A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$$

En este caso:

- $Dom(f) = \Big\{x \in \mathbb{R} : \exists!\, y \in \mathbb{R} \;\wedge\; f(x) = y\Big\}.$
- $Rec(f) = \Big\{f(x) \in \mathbb{R} : \; x \in Dom(f)\Big\}.$
- $Gr(f) = \Big\{\big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \; x \in Dom(f)\Big\}.$

Funciones Reales

Sea $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $X = Dom(f)$

Restricción de Funciones

A la función:

$$\begin{array}{rcl} g : C \subseteq X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = f(x) \end{array}$$

se le denomina la **Restricción** de f a C y se escribe $g = f\big|_C$.
Observar que $Rec(f\big|_C) = f(C)$.

Ejemplo

Las funciones

$$\begin{array}{rcl} g : [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x^2 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} h :]-\infty, 0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = x^2 \end{array}$$

son restricciones de la función $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

Funciones Monótonas

La función $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **estrictamente** :

- **creciente**, si y sólo si, $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- **decreciente**, si y sólo si, $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

<u>Nota</u>

- Si $\boxed{\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$ se dice que f es **monótona creciente**.
- Análogamente, si $\boxed{\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$ diremos que f es **monótona decreciente**.

Funciones Reales

Proposición

Toda función estrictamente creciente (decreciente) es inyectiva.

Funciones Par e Impar

Una función $f : Dom(f) = X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice :

- **Par**, si y sólo si, $x \in X \implies [(-x \in X) \quad \wedge \quad (f(x) = f(-x))]$
- **Impar**, si y sólo si, $x \in X \implies [(-x \in X) \quad \wedge \quad (f(x) = -f(-x))]$

Funciones Reales

Operaciones con funciones

Sean $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$X = Dom(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$.

Se define la **Función**

- **Suma**

$$\boxed{f+g \ : X \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \in X \longmapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x).}$$

- **Producto**

$$\boxed{fg \ : X \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \in X \longmapsto (fg)(x) = f(x)g(x).}$$

- **Cuociente**

$$\boxed{\begin{array}{rl} f/g : \{x \in X : g(x) \neq 0\} & \longrightarrow \mathbb{R}; \\ x \in X & \longmapsto (f/g)(x) = f(x)/g(x). \end{array}}$$

- **Producto por Escalar** $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$\boxed{\lambda f : Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \in Dom(f) \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x).}$$

Función Compuesta

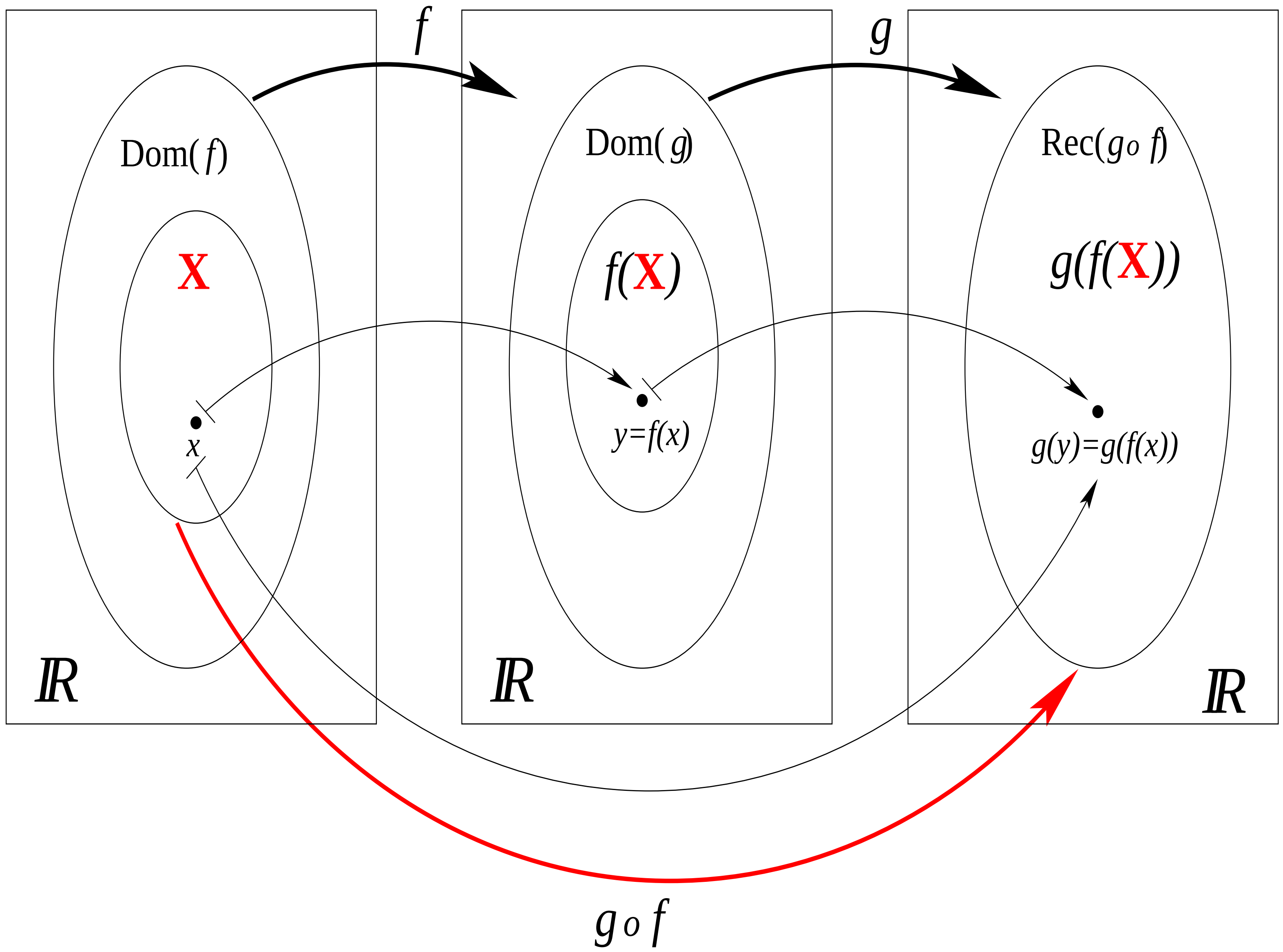
Sean $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$X = \Big\{ x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g) \Big\}.$$

Cuando $X \neq$ ø, se define la función g compuesta con f como:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g \circ f : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \big(g \circ f\big)(x) = g(f(x)) \end{array}}$$

Funciones Reales



Algunas Propiedades de la Función Inversa

- Si una función f admite inversa entonces, ésta es única.

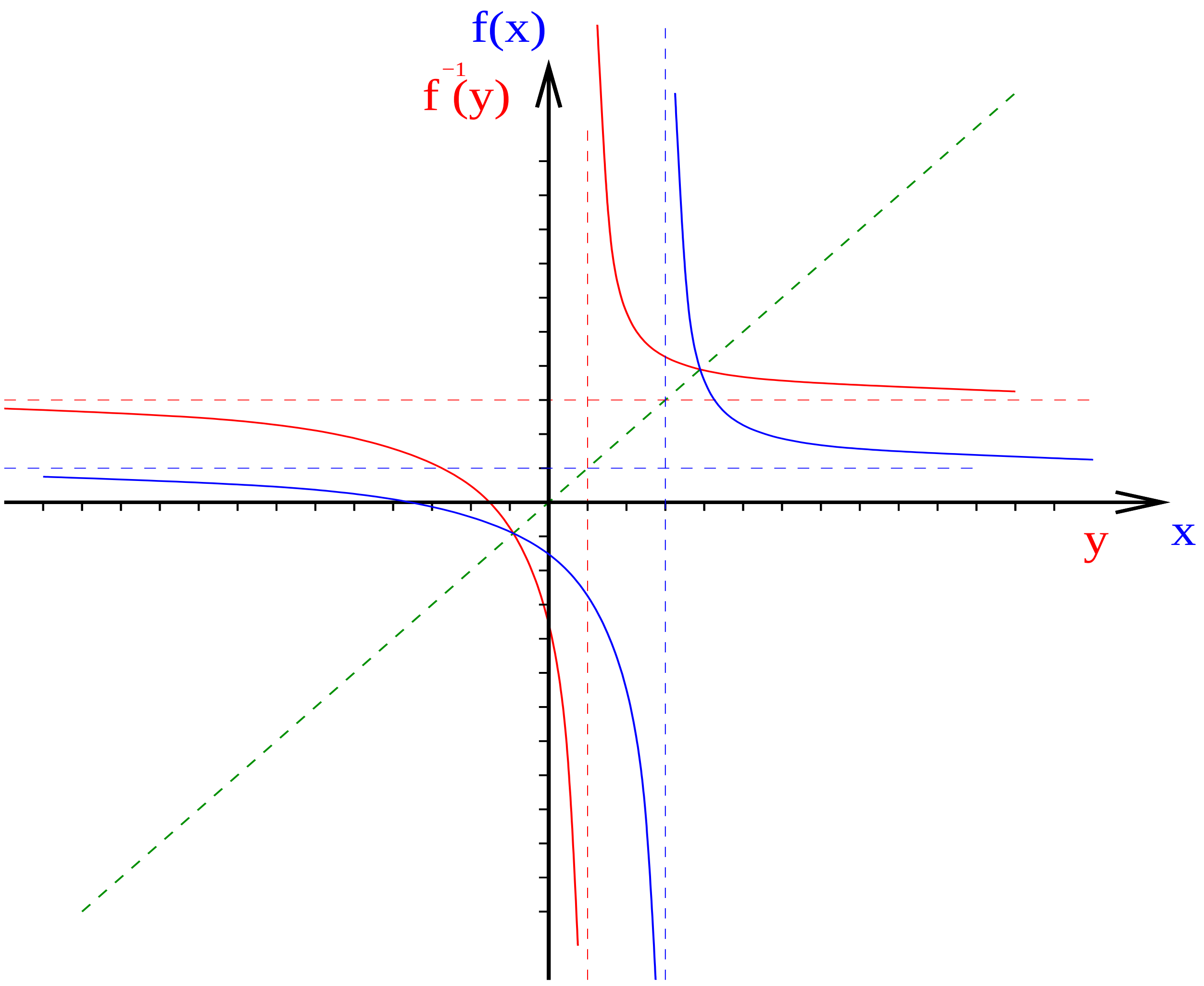
- Sean $\boxed{g : A \rightarrow B}$ y $\boxed{f : B \rightarrow C}$ dos funciones invertibles entonces $\boxed{f \circ g : A \rightarrow C}$ es **invertible** y

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

- Los gráficos de f y f^{-1} son **simétricos** con respecto a la recta $y = x$.

Funciones Reales

Funciones INVERSAS



EJEMPLO

Considere la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : A &\subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

i) Encuentre $Dom(f)$.

ii) Encuentre $Rec(f)$.

iii) ¿Es f inyectiva?. Justifique.

iv) Restrinja el $Dom(f)$ a un conjunto B de modo que la función

$$\begin{aligned} g : \quad & B \longrightarrow Rec(f) \\ & x \mapsto g(x) = f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

sea invertible. Defina la función inversa.

SOLUCION

i)

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2-1} = y\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \quad |x| \geq 1\} \\ &=]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} Rec(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \quad y = \sqrt{x^2-1}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \quad y^2 = x^2 - 1, \quad y \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad x^2 = y^2 + 1 \geq 1, \quad y \geq 0\} \\ &= [0, +\infty[\end{aligned}$$

iii) Contraejemplo: Se observa que $\{2, -2\} \subseteq Dom(f)$ son tales que $2 \neq -2$ y sin embargo $f(-2) = f(2) \therefore f$ no es inyectiva

Funciones Reales

iv) Así, (por ejemplo), la función

$$\begin{aligned} g: \quad & [1,+\infty[\to [0,+\infty[\\ & x \mapsto y = g(x) = \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

es invertible y su inversa es la función

$$\begin{aligned} g^{-1}: \quad & [0,+\infty[\to [1,+\infty[\\ & y \mapsto x = g^{-1}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(y) = x \quad & \Longrightarrow g(x) = y \\ & \Longrightarrow \sqrt{x^2-1} = y \\ & \Longrightarrow x^2 - 1 = y^2 \\ & \Longrightarrow x = \sqrt{y^2+1} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} g^{-1}: \quad & [0,+\infty[\to [1,+\infty[\\ & y \mapsto g^{-1}(y) = \sqrt{y^2+1} \end{aligned}$$