UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Laboratorio 10
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. La ecuación (no linealizada) que describe las oscilaciones libres de un péndulo simple es

$$\begin{cases} L\theta'' + g \operatorname{sen}\theta = 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta_0', \end{cases}$$

donde, para cada instante de tiempo t, $\theta(t)$ es el desplazamiento angular del péndulo de su posición de equilibrio, $L = 0.5\,\mathrm{m}$ es la longitud del péndulo, $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ es la aceleración de la gravedad, θ_0 es el desplazamiento angular inicial y θ_0' la velocidad angular inicial.

Se desplaza el péndulo un ángulo $\theta_0 = \pi/4$ de su posición de equilibrio y se lo suelta desde el reposo (es decir, $\theta_0' = 0$).

Calcule la velocidad angular θ' del péndulo a los $5\,\mathrm{s}$ de oscilación.

2. Considere un ecosistema simple consistente de conejos con una cantidad más que suficiente de alimento y zorros que depredan los conejos para su alimentación. Un modelo clásico debido a Volterra describe este ecosistema mediante el siguiente par de ecuaciones no lineales de primer orden:

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = 2c - \alpha cz, \qquad c(0) = c_0, \\ \\ \dfrac{dz}{dt} = -z + \alpha cz, \qquad z(0) = z_0, \end{cases}$$

donde t es el tiempo medido en años, $c = c(t)$ es el número de conejos y $z = z(t)$ el número de zorros, ambos en el instante t, y α es una constante positiva que mide la probabilidad de interacción entre miembros de las dos especies.

   (a) Cuando $\alpha = 0$, conejos y zorros no interactúan. Resuelva la ecuación diferencial a lo largo de un año en el caso en que inicialmente hay 100 animales de cada especie. Compruebe que en tal caso los conejos hacen lo que mejor saben hacer, mientras los zorros se van muriendo de hambre.

   (b) Calcule la evolución de ambas poblaciones a lo largo de 12 años en el caso en que la constante de interacción es $\alpha = 0.01$ y que la población inicial es de 300 conejos y 150 zorros. ¿Qué conclusión puede extraer en este caso?

   (c) Repita la simulación anterior pero con poblaciones iniciales de 15 conejos y 22 zorros. ¿Cuál es ahora la conclusión?

3. El P.V.I. siguiente,

$$\begin{cases} y' = -\alpha(y - \operatorname{sen} t) + \cos t, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

con α un número positivo grande, es un ejemplo de problema *stiff*.

La solución de este P.V.I. puede calcularse analíticamente: $y(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} + \sin t$,

(a) Resuelva este problema para $\alpha = 1000$ en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ mediante los comandos `ode45` y `ode15s`, en ambos casos con tolerancia del error absoluto de 10^{-3}, y grafique la solución obtenida en cada caso, mostrando los puntos donde el método calculó la solución.

(b) El comando `ode45` se basa en un método *Runge-Kutta-Fehlberg* de orden 4 y es la opción aconsejada por MATLAB para problemas no *stiff*,. En cambio, `ode15s` se basa en un método implícito de orden variable y es la opción recomendada por MATLAB para problemas *stiff*.

Verificar que ambos métodos calculan la solución del P.V.I. con error cercano a la tolerancia prefijada, pero que el primero requiere muchísimas más iteraciones que el segundo.

4. En aplicaciones de la aerodinámica aparece la ecuación de *Blasius*,

$$2f''' + ff'' = 0,$$

que da el perfil de velocidad de un fluido incompresible que se desliza sobre sobre una placa delgada (la variable independiente se suele denotar por η).

Dos condiciones iniciales naturales para este problema son $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$. Además se sabe que $f'(\eta) \to 1$ cuando $\eta \to \infty$.

(a) Experimente con distintos valores de $f''(0)$ entre 0.1 y 0.5 para ver que valor de η puede tomarse como "∞".

(b) Determine el valor correcto de $f''(0)$ para que $f'(\eta) \to 1$ cuando $\eta \to \infty$.

(c) Se sabe que el momento del fluido es proporcional a

$$\vartheta(u) = \int_0^u f'(\eta)[1 - f'(\eta)]\, d\eta.$$

Calcule $\vartheta(5.0)$.

5. Problema irresoluble numéricamente.

(a) Verifique que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' = |y'|^{2/3} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

tiene una infinidad de soluciones.

(b) Trate de resolverlo con algún método cualquiera, y diga porque el resultado numérico que usted obtiene, no tiene ningún sentido.

MCP/RRS/GBG/MSC
http://www.ing-mat.udec.cl/pregrado/asignaturas/521230/
5/11/03

Soluciones propuestas

1. Ej. 2(a).

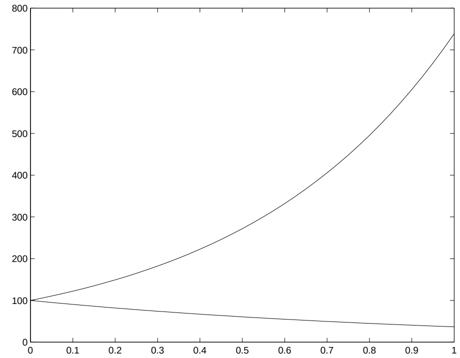
File F2a.m :

```
function Z=F2a(t,Y)
alfa=0;
Z=[2*Y(1)-alfa*Y(1)*Y(2);-Y(2)+alfa*Y(1)*Y(2)];
```

Ejecución:

```
>> [t,Y]=ode45('F2a',[0 1],[100;100]);
>> plot(t,Y)
```

Salida:



2. Ej. 2(b).

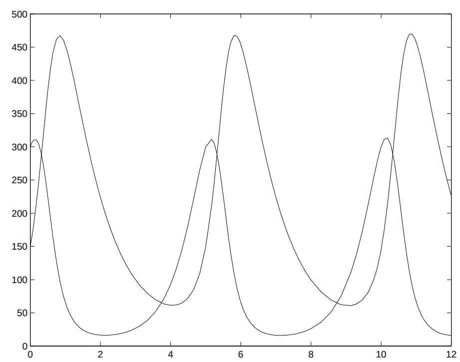
File F2b.m :

```
function Z=F2b(t,Y)
alfa=0.01;
Z=[2*Y(1)-alfa*Y(1)*Y(2);-Y(2)+alfa*Y(1)*Y(2)];
```

Ejecución:

```
>> [t,Y]=ode45('F2b',[0 12],[300;150]);
>> plot(t,Y)
```

Salida:



Conclusión: el crecimiento y decrecimiento de ambas poblaciones es periódico con un período de aproximadamente 5 años.

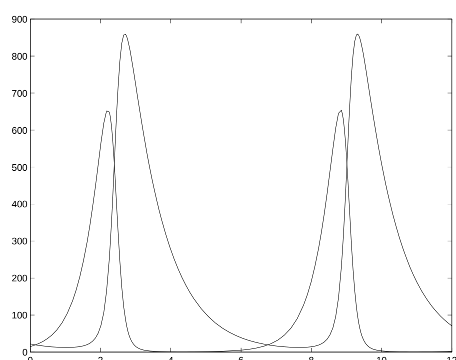
3. Ej. 2(c).

Ejecución:

```
>> [t,Y]=ode45('F2b',[0 12],[15;22]);
>> plot(t,Y)
>> I=find (Y(:,1)<1);
>> J=min(I)
J =
    64

>> [t(J),Y(J,1)]
ans =
    4.0887    0.9930
```

Salida:



Conclusión: al cabo de 4 años la población de conejos se hace inferior a 1, lo que indica que estos se extinguieron y que, por lo tanto el modelo deja de ser válido.

4. Ej. 3.

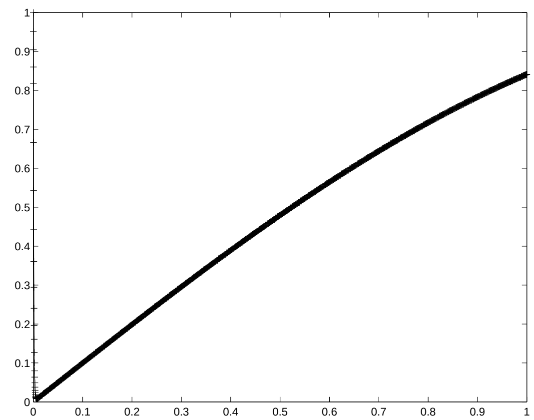
   File $\boxed{\text{f3.m}}$:

```
function z=f3(t,Y)
alfa=1000;
z=-alfa*(y-sin(t))+cos(t);
```

Ejecución (`ode45`):

```
>> exac=inline('exp(-1000*t)+sin(t)');
>> options=odeset('AbsTol',1.e-3);
>> [t,y]=ode45('f',[0 1],1,options);
>> plot(t,y,'+-')
>> error=norm(exac(t)-y,inf)
error =
    0.0012
>> length(t)
ans =
        1229
```

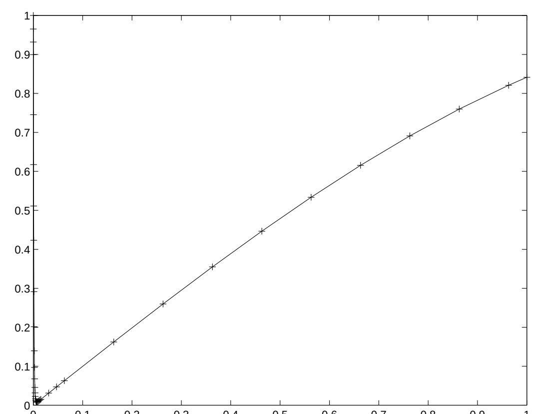
Salida (`ode45`):



Ejecución (`ode15s`):

```
>> [t,y]=ode15s('f',[0 1],1,options);
>> plot(t,y,'+-')
>> error=norm(exac(t)-y,inf)
error =
    0.0011
>> length(t)
ans =
        40
```

Salida (`ode15s`):



5. Ej. 4(a).

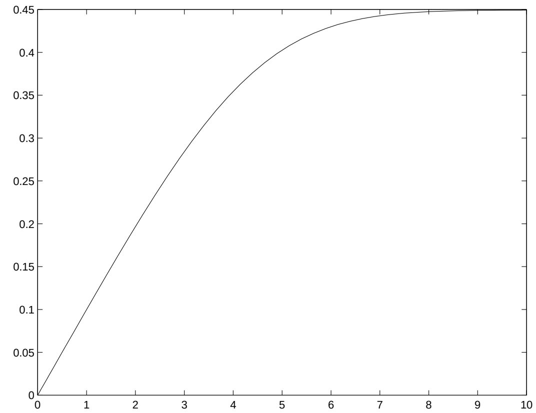
   File $\boxed{\text{F4.m}}$:

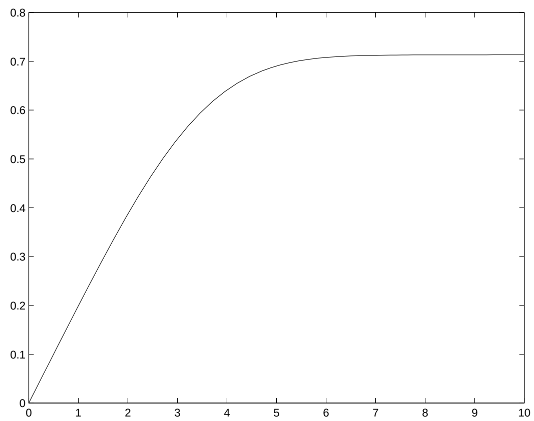
```
function Z=F4(t,Y)
Z=[Y(2);Y(3);-Y(1)*Y(3)/2];
```

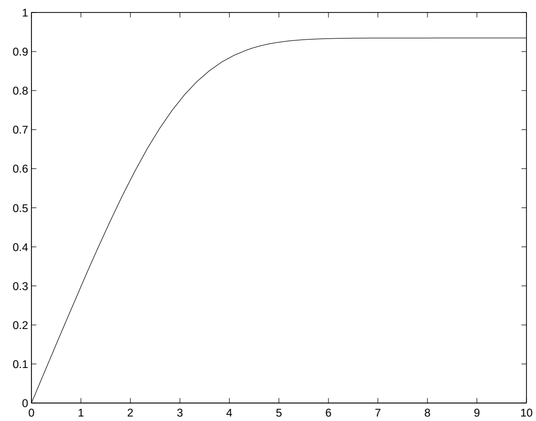
Ejecución:

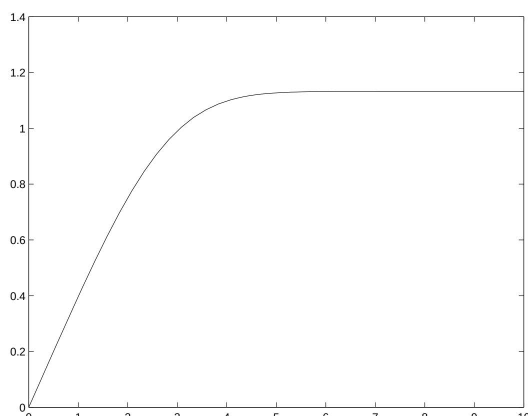
```
>>[t,Y]=ode45('F4',[0 10],[0;0;0.1]);
>>plot(t,Y(:,2))
>>[t,Y]=ode45('F4',[0 10],[0;0;0.2]);
>>plot(t,Y(:,2))
>>[t,Y]=ode45('F4',[0 10],[0;0;0.3]);
>>plot(t,Y(:,2))
>>[t,Y]=ode45('F4',[0 10],[0;0;0.4]);
>>plot(t,Y(:,2))
>>[t,Y]=ode45('F4',[0 10],[0;0;0.5]);
>>plot(t,Y(:,2))
```

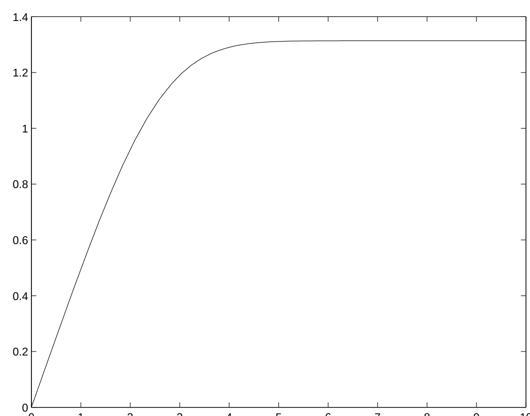
Salidas:











En los gráficos se ve que puede tomarse $\eta = 10$ como "∞".

6. Ej. 4(b).

File Blasius.m:

```
function z=Blasius(x)
[t,Y]=ode45('F',[0 10],[0;0;x]);
z=Y(length(t),2)-1;
```

Ejecución:

```
>> raiz=fzero('Blasius',0.3)
Zero found in the interval: [0.26606, 0.33394].
raiz =
    0.3320
```

7. Ej. 4(c). Si se deriva la expresión del momento se obtiene:

$$\vartheta'(\eta) = f'(\eta)[1 - f'(\eta)].$$

Además $\vartheta(0) = 0$. Por lo tanto ϑ es solución del P.V.I.

$$\begin{cases} \vartheta' = f'(1 - f'), \\ \vartheta(0) = 0. \end{cases}$$

Se añade esta ecuación a la de Blasius (escrita ya como sistema de E.D.O.) y se resuelve el P.V.I. para el nuevo sistema de 4 E.D.O.

File $\boxed{\text{F4c.m}}$:

```
function Z=F4c(t,Y)
Z=[Y(2);Y(3);-Y(1)*Y(3)/2;Y(2)*(1-Y(2))];
```

Ejecución:

```
>> [t,Y]=ode45('F4c',[0 0.5],[0;0;raiz;0]);
>> mom=Y(length(t),4)
mom =
    0.0369
```

8. Ej. 5(a). Por el método de separación de variables, se puede calcular que una solución esta dada por $y(x) = \frac{27}{4}x^4$. Por otro lado, $y(x) = 0$ también es una solución trivial. Se deduce que cualquier función de la forma

$$y(x) = \begin{cases} \frac{27}{4}(x - x_0)^4, & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

con $x_0 > 0$ un valor cualquiera dado, es una solución del problema. Hay por lo tanto una infinidad de soluciones.

9. Ej. 5(b). Al hacer el cambio de variables $z = y'$, se tiene que $f(x,z) = |z|^{2/3}$ de donde $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2}{3}|z|^{-1/3}$ que no está acotada en $z = 0$, con lo cual el teorema de existencia y unicidad no se puede aplicar, y menos sentido tiene hablar de estabilidad numérica.