UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142

PRACTICA 17. Vectores y Planos

PROBLEMA 1. Determine el área del triángulo formado por la intersección del plano $3x - 2y - 11z = -7$, y las rectas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ para } t \in \mathbb{R}, \text{ y}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ para } t \in \mathbb{R},$$

[En práctica]

PROBLEMA 2. Calcule el volumen del paralelepípedo de base $[-1, \alpha, 3]$ y $[-1, -1, 2]$ y cuyo lado es $[2, -1, 4]$. ¿Qué valor debe tener α para que el volumen sea el triple del área de la base considerada?.

PROBLEMA 3 Muestre que todo vector $\boldsymbol{u}$ en el plano OXY se puede escribir:

$$\boldsymbol{u} = P_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{u} + P_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{u}$$

PROBLEMA 4. Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Muestre que:

(4.1) $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\,\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\,\cos(\theta)$, donde θ es el menor ángulo entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$. **[En práctica]**

(4.2) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 = 4\,\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$.

PROBLEMA 5. Pruebe que la distancia D entre el plano $ax + by + cz = d$ y el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ está dada por

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

[En práctica]

PROBLEMA 6. Encuentre la distancia del punto $(3, 2, -1)$ al plano $2x - 2y - z = 5$.

PROBLEMA 7. Decida si existe un valor de α de modo que la distancia del punto $(2, -3 - 4)$ al plano $x + 2y + 2\alpha z = 6$, sea igual a $\sqrt{37}$.

PROBLEMA 8. Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dos vectores no paralelos diferentes de cero en un plano $\mathcal{P}$ que pasa por el origen. Demuestre que si $\boldsymbol{w}$ es cualquier otro vector en $\mathcal{P}$, entonces existen escalares α y β tales que $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$. Esto se llama representación paramétrica del plano $\mathcal{P}$.

PROBLEMA 9. Tres vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ se llaman coplanares si están todos en el mismo plano $\mathcal{P}$. Demuestre que si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son vectores en el origen, entonces son coplanares si y sólo si $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 0$.

PROBLEMA 10. Encuentre la ecuación del plano:

(10.1) que pasa por el punto $(2, 3, 1)$ y está generado por los vectores $[3, 2, 1]$ y $[-1, -2, -3]$. Determine si los puntos $(-1, 2, -3)$ y $(2, 2, -4)$ pertenecen a dicho plano.

(10.2) que pasa por el punto $(2, 3, 1)$ y es paralelo al plano que pasa por el origen y es generado por los vectores $[2, 0, -2]$ y $[1, 1, 1]$.

[En práctica]

PROBLEMA 11. Dados los punto $P_1(2, 3, 2)$ y $P_2(-1, 1, 4)$, encuentre todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{P_1P}$. Describa tal conjunto.

PROBLEMA 12. Encuentre la ecuación del plano $\mathcal{P}_1$ que es perpendicular a $[1, -1, 3]$ y que pasa por el punto $(2, 1, 0)$; considere además el plano $\mathcal{P}_2$ de ecuación: $3x - y + 2z = -1$. Encuentre $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

PROBLEMA 13. Encuentre dos planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ cuya intersección sea la recta dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{para } t \in \mathbb{R},$$

PROBLEMA 14. Encuentre el valor de α de modo que los planos : $2x - \alpha y + z = 3$ y $3x + 2\alpha y - \alpha z = 5$, sean ortogonales.

PROBLEMA 15. Considere los planos $2x - y + z = 3$ y $3x + 2y - z = 5$. Encuentre, si es posible, un plano perpendicular a los dos planos dados.

PROBLEMA 16. Encuentre los valores de α, β y γ de modo que la intersección de los planos $3\beta x + 2\alpha y - \alpha z = 6$ y $2x - \alpha y + \gamma z = 3$, sea la recta que pasa por el punto $(0, 9/2, 6)$, y tenga por vector director a $[\alpha^2 - 2\gamma\alpha, 1, 4\alpha + 3\alpha\beta]$.

PROBLEMA 17. Encuentre condiciones sobre los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en $\mathbb{R}^3$, de modo que las diagonales del paralelogramo formado por $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, sean ortogonales.

PROBLEMA 18. Suponga que los planos $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ y $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ no son paralelos. Deduzca una fórmula para el ángulo formado por la intersección de los planos.

25/08/2003
RAD/JMS/rad