UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA – EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN 5.
ÁLGEBRA Y ÁLGEBRA LINEAL. 520142.

---

1. Sea V el espacio vectorial en $\mathbb{R}$, de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ generado por $V =< B >$, con $B = \{ \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$. Considere la aplicación $T\ : V \longrightarrow V$ definida por $(T(f))(x) = f(x-2)$. Recordando que para todo $x, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x-\alpha) &= \cos(\alpha)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(\alpha)\cos(x) \\ \cos(x-\alpha) &= \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(x) + \cos(\alpha)\cos(x) \end{aligned}$$

a) (10 pts.) Calcule la matriz asociada $[T]_B$ y deduzca que T es invertible.

b) (10 pts.) Sea $f \in V$, de coordenadas en la base B : $[f]_B = (\cos(1), \operatorname{sen}(1)) \in \mathbb{R}^2$.
¿ Cuáles son las coordenadas de T(f) en la base B ?
¿ A que función de V, corresponde T(f) ?

Solución :

a) Sean las funciones u, v, u_2, v_2 definidas por $u(x) = \operatorname{sen}(x)$, $v(x) = \cos(x)$, $u_2(x) = \operatorname{sen}(x-2)$, y $v_2(x) = \cos(x-2)$. De la indicación se ve facilmente que :

$$\begin{aligned} [T]_B &= \left[[T(u)]_B \,\middle|\, [T(v)]_B \right] = \left[[u_2]_B \,\middle|\, [v_2]_B \right] \\ &= \left[\begin{bmatrix} \cos(2) \\ -\operatorname{sen}(2) \end{bmatrix} \; \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2) \\ \cos(2) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \cos(2) & \operatorname{sen}(2) \\ -\operatorname{sen}(2) & \cos(2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5 puntos

Se tiene que $\det([T]_B) = \cos^2(2) + \operatorname{sen}^2(2) = 1$, con lo cuál la matriz es invertible.

5 puntos

b) $[T(f)]_B = [T]_B[f]_B = \begin{bmatrix} \cos(2) & \operatorname{sen}(2) \\ -\operatorname{sen}(2) & \cos(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(1) \\ \operatorname{sen}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2)\cos(1) + \operatorname{sen}(2)\operatorname{sen}(1) \\ -\operatorname{sen}(2)\cos(1) + \cos(2)\operatorname{sen}(1) \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} \cos(-1) \\ \operatorname{sen}(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(1) \\ -\operatorname{sen}(1) \end{bmatrix}$, **8 puntos**

y esto corresponde a la función $f(x) = \cos(1)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(1)\cos(x) = \operatorname{sen}(x+1)$.

2 puntos

2. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interior habitual, y sea el subespacio

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - kz = 0\}$$

con $k \in \mathbb{R}$ una constante dada.

a) (15 pts.) Calcule la mejor aproximación de $v = (0, 2, -k) \in \mathbb{R}^3$ por elementos de S (proyección ortogonal).

b) (5 pts.) Calcule una base de $S^\perp$.

Solución :

a) $S = \{(-y + kz, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-y, y, 0) + (kz, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y, z \in \mathbb{R}\}$
$S =< \{(-1, 1, 0), (k, 0, 1)\} > \Longrightarrow B = \{v_1, v_2\}$, base de S, con $v_1 = (-1, 1, 0)$, y $v_2 = (k, 0, 1)$.

5 puntos

(por encontrar correctamente una base)

Es decir, la mejor aproximación de $v = (0, 2, -k)$ está dada por $v_S = \alpha v_1 + \beta v_2$, donde α y β son solución del sistema :

$$\begin{bmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < v, v_1 > \\ < v, v_2 > \end{bmatrix}$$

5 puntos

(por plantear correctamente el problema de la proyección ortogonal)

O sea

$$\begin{bmatrix} 2 & -k \\ -k & k^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -k \end{bmatrix}$$

Cuya solución es $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Es decir, la mejor aproximación de $v = (0, 2, -k)$ es $v_S = (-1, 1, 0)$.

5 puntos

(por calcular la mejor aproximación correctamente)

Observación : Existen al menos 2 maneras alternativas de resolver el mismo problema :

i) Considerando una base ortogonal de S, y aplicando la formula de los coeficientes de una base ortogonal. En este caso la distribución de puntos es la misma, salvo que los calculos intermediarios son distintos.

ii)
- Considerando el vector normal a S, que se calcula de manera natural de la ecuación de definición del plano $S : n = (1, 1, -k)$; (**5 puntos**)
- proyectando sobre ese vector normal, es decir $v_{S^\perp} = \frac{<(0,2,-k),(1,1,-k)>}{\|(1,1,-k)\|^2}(1, 1, -k) = (1, 1, -k)$; (**5 puntos**)
- y luego restando v a esa proyección y deduciendo que el resultado obtenido es la proyección buscada $v_S = v - v_{S^\perp} = (-1, 1, 0)$ (**5 puntos**)

b) Un vector normal a S está dado por $n = (1, 1, -k)$, con lo cuál

$$S^\perp =< \{(1, 1, -k\} >$$

5 puntos

3. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) (10 pts.) Verifique que $\lambda = 2$ es un valor propio de multiplicidad algebraica igual a 3, y calcule su multiplicidad geométrica. Concluya que esta matriz no es diagonalizable, y diga por qué es inversible.

(b) (10 pts.) Sea $B = (A - 2I_3)$. Calcule $\mathrm{Ker}(B^2)$ y verifique que existe un vector v no nulo de $\mathbb{R}^3$ tal que :
$$\mathrm{Ker}(B^2) = \mathrm{Ker}(B) \oplus \ <\{v\}> .$$

Solución :

(a) (1°) Cálculo del polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)2\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 \end{aligned}$$

4 puntos

(2°) Deteminación de la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda = 2$, es decir, la dimensión del espacio propio $S_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$:

$$\begin{aligned} S_2 &= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \quad a = -b, \ c = 0 \right\} =< \{(1,-1,0)\} > \end{aligned}$$

4 puntos

luego $dim(S_2) = 1 \neq 3$, en consecuencia A no es diagonalizable, pero si es inversible pues $\lambda = 0$, no es valor propio. **2 puntos**

(b) Como $B^2 = (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(B^2) &= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \quad a = -b \right\} \\
&= < \{(1,-1,0),(0,0,1)\} >
\end{aligned}$$

6 puntos

$$\begin{aligned}
< \{(1,-1,0),(0,0,1)\} > \quad &= \quad < \{(1,-1,0)\} > \; \oplus \; < \{(0,0,1)\} > \\
\Longrightarrow \quad \mathrm{Ker}(B^2) \quad &= \quad \mathrm{Ker}(B) \oplus \; < \{v\} >
\end{aligned}$$

con $v = (0,0,1)$.

4 puntos

Duración : 100 minutos.
RAD/FCH/ACQ/AGS/LNB/FPV/JSA/MSC/
(05-Diciembre-03)