UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 10 (Polinomios)

1. Sean p, q polinomios a coeficientes reales tales que $\mathrm{gr}(p) = n$ y $\mathrm{gr}(q) = m$. Analice la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando adecuadamente.

   i) El recorrido de p es $\mathbb{R}$. **(En práctica vii) y viii))**

   ii) gr(pq)= n+m.

   iii) gr($p + q$)= $\max\{n, m\}$.

   iv) Si gr(p)=$2k$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces p es una función par.

   v) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, gr(αp)=gr(p).

   vi) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $p(x) \geq 0$.

   vii) Existe un polinomio s a coeficientes reales tal que $p(x)s(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   viii) Existe un polinomio s a coeficientes reales tal que para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, $p(x_0)s(x_0) = 1$.

   ix) La compuesta $p \circ q$ es una función polinomial de grado nm.

2. Determine el grado del polinomio $p(x) = 6x^5 + (3x^2 - 2)^4(2x - 1)^3$.

3. Determine un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de grado menor o igual a 3, tal que: **(En práctica)**

$$p(0) = 0,\ p(1) = 1,\ p(2) = 4,\ p(3) = 10.$$

4. Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, pruebe que los dos enunciados siguientes son equivalentes:

   i) $p(x)$ es divisible por $(x - c)^k$ pero no por $(x - c)^{k+1}$.

   ii) $p(x)$ es de la forma $(x - c)^k Q$, donde Q es un polinomio que no admite como raíz al valor c.

5. Descomponer $x^6 + 1$ en polinomios irreducibles: *i)* En $\mathbb{R}$. *ii)* En $\mathbb{C}$. **(En práctica)**

6. Efectúe las divisiones $p(x) : q(x)$ en cada caso, identificando el cuociente y el resto de la división.

   a) $p(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + 22x$, $q(x) = x^2 - 4x + 1$.

   b) $p(x) = 2x^4 - 15x^2 + 8x - 3$, $q(x) = x + 3$.

7. Dividir los siguientes polinomios por el binomio $(x - c)$, donde el valor c se indica en cada caso. De acuerdo al valor del resto, decidir si el valor de c corresponde o no a una raíz del polinomio.

   a) $6x^3 + 17x^2 - 5x - 6$, $c = -1/2$,

   b) $x^4 - 20x^2 - 10x - 50$, $c = 5$,

   c) $x^3 - 8x^2 + x + 42$, $c = 5$.

   d) $x^3 - 2x^2 + x + 2$, $c = 2$.

8. Determinar el valor de la constante k para que los siguientes polinomios tengan como raíz el valor c indicado. **(En práctica d))**

   a) $4x^3 - 4x^2 + kx + 4, \quad c = -1,$

   b) $6x^3 + 13x^2 + 2k - 40, \quad c = 4,$

   c) $3x^3 + kx^2 - 7x + 6, \quad c = -3,$

   d) $5x^3 + k^2x^2 + 2kx - 3, \quad c = -1.$

9. Probar que si un polinomio es divisible por $(ax - b)$, entonces también resulta divisible por $(x - \frac{b}{a})$.

10. Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polinomio a coeficientes reales, de grado n, y sean $x_1, \ldots, x_n$ las raíces de p. Determine las raíces del polinomio $q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\lambda x)^i$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. **(En práctica)**

11. Se sabe que $1 + i$ es una raíz de $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$. Determine las otras raíces de $p(x)$. . **(En práctica)**

12. Si $p(x) = x^4 + Ax^2 - Ax - 5$ es tal que $p(3) = 88$, ¿Cuál es el valor de $p(-2)$?

13. Si $p(x) = 3x^3 - Ax^2 - 4x - B$ es tal que $p(2) = -10$ y $p(0) = -10$, ¿Cuál es el valor de $p(4)$?

14. Sea $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio mónico a coeficientes reales. Sean α_1, α_2 y α_3 sus raíces. Pruebe que los coeficientes a_0, a_1 y a_3 pueden expresarse en términos de las raíces a través de las relaciones: **(En práctica)**

$$a_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad a_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \quad a_0 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

15. Estime el número de raíces positivas y negativas para cada uno de los polinomios:

   a) $5x^3 + 3x^2 + 6x + 1,$ **(En práctica a))**

   b) $4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 4.$

16. Usando el teorema de las raíces racionales, probar que $x^3 + x + 2$ no tiene raíces racionales.

17. Encontrar las raíces racionales, en el caso de existir, de los siguientes polinomios.

   a) $x^4 + 2x^3 - x - 2,$

   b) $x^3 + 2x^2 + x + 5,$

   c) $12x^3 + 7x^2 - 5x + 15,$

18. Muestre que el polinomio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ tiene todas sus raíces reales y que pertenecen al intervalo $[-3, 4]$. **(En práctica)**

19. Descomponer en suma de fracciones parciales: **(En práctica b) y c))**

   a) $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)},$

   b) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)^3},$

   c) $\dfrac{x^5 + 3x}{x^4 - 5x^2 + 4},$

   d) $\dfrac{x^6}{(x^2-1)^3},$

   e) $\dfrac{x^2 + x + 5}{(x-4)(x+1)}.$

RRS/RNG/JMS/AGS/LNB/JSA/BBM/LRS/ags
semestre otoño 2006.