UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN. ÁLGEBRA Y ÁLGEBRA LINEAL. 520142.

(1) *Dado el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& k_1 \\ 2x-y-3z &=& k_2 \\ x-3y-2z &=& k_3 \end{array}\right|$$

*Determine una relación entre los parámetros $k_1$, $k_2$ y $k_3$ de modo que el sistema sea compatible.*

**Solución**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & k_1 \\ 2 & -1 & -3 & k_2 \\ 1 & -3 & -2 & k_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & k_1 \\ 0 & -5 & -1 & k_2-2k_1 \\ 0 & -5 & -1 & k_3-k_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & k_1 \\ 0 & -5 & -1 & k_2-2k_1 \\ 0 & 0 & 0 & k_1-k_2+k_3 \end{array}\right)$$

**10 puntos**

Luego el sistema es compatible si

$$k_1+k_3-k_2=0 \qquad \text{o bien} \qquad k_2=k_1+k_3\,.$$

**5 puntos**

(2) *Dadas las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{L}_1=\{(x,y,z): x=0 \wedge z=2\} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2=\{(x,y,z): 1-x=y \wedge z=0\}$$

(2.1) *Determine la forma paramétrica de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.*

(2.2) *Determine un vector $\boldsymbol{v}$ perpendicular a ambas rectas.*

(2.3) *Sea $A_1=(0,1,2)\in\mathcal{L}_1$ y $A_2=(0,1,0)\in\mathcal{L}_2$. Sabiendo que la norma de la proyección de $\overrightarrow{A_2A_1}$ sobre $\boldsymbol{v}$ es igual a la distancia entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, calcule dicha distancia.*

**Solución**

(2.1) El único valor libre de $\mathcal{L}_1$ es $y$ entonces lo tomamos como parámetro. Así, las ecuaciones paramétricas son: $x=0$, $y=t$, $z=2$, de donde:

$$\mathcal{L}_1=\{(0,0,2)+y(0,1,0): t\in\mathbb{R}\}$$

**3 puntos**

Tomando $y$ como parámetro en $\mathcal{L}_2$, tenemos que las ecuaciones paramétricas son $y=t$, $x=1-y=1-t$, $z=0$, de donde:

$$\mathcal{L}_2=\{(1,0,0)+t(-1,1,0): t\in\mathbb{R}\}$$

**4 puntos**

2.2 Un vector perpendicular a ambas rectas se obtiene haciendo el producto cruz entre sus vectores directores, así $v = (0, 0, 1)$ es perpendicular a $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. También podemos obtener $v$ simplemente observando que los vectores directores de ambas rectas tienen la tercera coordenada nula, lo que significa que son perpendiculares al eje Z.

**6 puntos**

2.3 $\overrightarrow{A_2A_1} = A_1 - A_2 = (0, 0, 2)$ es paralelo a $v$ entonces su proyección sobre $v$ es el mismo: $\overrightarrow{A_2A_1} = (0, 0, 2)$. Su norma es 2, luego la distancia entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es 2.

**7 puntos**

(3) *En este problema usted debe determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cada caso usted debe justificar su respuesta.*

(3.1) *Existen $V_1$ y $V_2$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$ que verifican*

$$\dim(V_1) = 2\,, \dim(V_2) = 3 \text{ y } \dim(V_1 \cap V_2) = 0\,.$$

**Solución** FALSO. Pues por teorema de clases se tiene que

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

de donde $V_1 + V_2$ sería un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión igual a 5.

**3 puntos**

(3.2) *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^6$ que contiene siete vectores distintos es linealmente dependiente.*

**Solución** VERDADERO. Por teorema, la cardinalidad de todo conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^6$ es menor o igual a la cardinalidad de una base de $\mathbb{R}^6$ (que es igual a 6).

**3 puntos**

(3.3) *Las coordenadas del polinomio $p(x) = 1 + x$ con respecto a la base $B = \{1, 2x + x^2, x^2 + 1\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ están dadas por el vector $(1, 1, 0)$.*

**Solución** FALSO De ser cierto se tendría que:

$$1 + x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (2x + x^2) + 0 \cdot (x^2 + 1) = 1 + 2x + x^2\,.$$

lo que es falso.

**4 puntos**

(3.4) *Sea $V$ un espacio vectorial real y sean $U_1$ y $U_2$ dos subespacios de $V$ tales que $V = U_1 \oplus U_2$. No existen vectores $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$, no nulos, tales que $u_1 + u_2 = \theta_V$.*

**Solución** VERDADERO Se sabe que $\theta_V = \theta_V + \theta_V$ con $\theta_V \in U_1$ y $\theta_V \in U_2$. Como $V = U_1 \oplus U_2$ se sabe que esta descomposición es única.

**4 puntos**

(3.5) *Se tiene que* $\{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : xp'(x) = p(x)\} = \langle\{x\}\rangle$.

**Solución** VERDADERO Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ entonces $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$. Así se tiene que si $p(x) = xp'(x)$ entonces $a_0 = 0$, $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 = 0$ y $a_3 = 0$. Luego

$$\{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : xp'(x) = p(x)\} = \langle\{x\}\rangle .$$

**4 puntos**

(3.6) *Sea* $S = \langle\{(1,0,1),(1,1,-1),(2,1,0)\}\rangle$ *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$. *Se tiene que* $S^\perp = \{\theta_{\mathbb{R}^3}\}$.

**Solución** FALSO Se tiene que $S = \langle\{(1,0,1),(1,1,-1)\}\rangle$ puesto que

$$(2,1,0) = (1,0,1) + (1,1,-1)\,,$$

luego $\dim(S) = 2$ de donde $\dim(S^\perp) = 1$.

**4 puntos**

(3.7) *El conjunto* $W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ : *A es invertible*$\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$. **Solución** FALSO $W$ no es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ puesto que la matriz nula, el elemento nulo de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, no pertenece a $W$ pues ella no es invertible.

**3 puntos**

---

3/diciembre/2003.
RAD/FCHH/AGS/LNB/ags.