UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO: 521234

Guía de Ejercicios No 8

1. Si $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ es analítica entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann son
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$
y en tal caso $f'(z) = \frac{\bar{z}}{r}(u_r + iv_r)$. ¿Cuál es la expresión para $f''(z)$?

2. Determine las constantes a y b para que $w = x^2 + ay^2 - 2xy + i(bx^2 - y^2 + 2xy)$ sea analítica y para esos valores de a y b determine $\frac{dw}{dz}$.

3. Demuestre que $u(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y)$ es armónica. Encuentre una armónica conjugada v. Determine la segunda derivada de $w = u + iv$.

4. Pruebe que para todo $z \in \mathbb{C}$: $\quad \operatorname{sen}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)} \quad \wedge \quad \cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$.

5. Evalúe la integral $\int_C f(z)dz$ en los siguientes casos:

   a) $f(z) = \bar{z}, \quad C = \overline{(0,1)(2,1)} \bigcup \overline{(2,1)(3,2)} \bigcup \overline{(3,2)(3,1)}$
   Notación: $\overline{AB}$ el segmento de recta orientado desde A a B.

   b) $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$; $\quad C : |z-\pi| = 1 \Leftrightarrow z = \pi + e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

   c) $f(z) = e^z - \frac{1}{z^2}$; $\quad C : z = e^{-i\theta}\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

   d) $f(z) = e^z$, $\quad C : y = 2x$, desde $(-1,-2)$ a $(1,2)$.

   e) $f(z) = i\operatorname{sen}(z)$; $\quad C : \overline{(0,-1)(0,1)}$.

   f) $f(z) = |z|$; $\quad C : z = e^{i\theta}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

   g) $f(z) = \frac{1}{z}$; $\quad C : |z| = 4$.

   h) $f(z) = z^3 - iz + 3i$; $\quad C : |z+i| = 2$.

6. Escribir la integral definida:

$$(a)\int_0^{\pi}(e^z-\operatorname{sen}(z))dz \qquad (b)\int_0^{i} ze^z dz \qquad (c)\int_0^{i\pi} z\cos(z^2)dz \qquad (d)\int_{i\pi}^{i2\pi}\cosh(z)dz$$

7. Evalúe la integral de contorno: $\oint_C \frac{zdz}{(z-1)(z+2i)}$, donde C es cualquier contorno que contenga a:

   a) $z_1=1$ y $z_2=-2i$;

   b) z_2 pero no a z_1.

8. Utilizando el teorema de Cauchy para integrales, evalúe la integral de contorno:

$$\oint_C \frac{5zdz}{(z+1)(z-2)(z+4i)},$$

   donde C es el círculo: (a) $|z|=1$, (b) $|z|=3$.

9. Evalúe las integrales:

$$(a) \quad \oint_C \frac{z^3+z}{(2z+1)^3}dz \qquad C:|z|=1.$$

$$(b) \quad \oint_C \frac{4z}{(z-1)(z+2)^2}dz \qquad C:|z|=3.$$

$$(c) \quad \oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z-1)}dz \qquad C:|z+i|=1$$

$$(d) \quad \oint_C \frac{3}{z^2(z+i)^2}dz \qquad C:|z|=5$$

$$(e) \quad \oint_C \frac{e^{2z}-z^2}{(z-2)^3}dz \qquad C:|z|=3$$

$$(f) \quad \oint_C \frac{z}{z^4-1}dz \qquad C:|z-1-i|=2$$

$$(g) \quad \oint_C \frac{Ln(z-i)}{z+i}dz \qquad C:|z+2i|=2$$

10. Resolver el problema de Dirichlet:

$$\nabla^2 u=0,\ (r,\theta)\in]0,1[\times]0,2\pi[\quad \wedge \quad u(1,\theta)=\operatorname{sen}(\theta),\ 0\le\theta\le 2\pi.$$

Concepción, 19 de Octubre de 2005.
HMM/FPV/fpv.