UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Evaluación 1 Sección 2
Complemento de Cálculo (521234)

1. Para $f(t) = sen(t), \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$.

   a) Obtenga la serie de Fourier de senos (SFS) y la de cosenos (SFC), analizando la convergencia en cada caso.

   b) De la SFC pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$$

(20 pts.)

Pauta Problema 1

1º Realizamos el estudio de convergencia:

a) **SFS**: Sea $f_1(t)$ la extensión impar, π-periódica de f, esto es

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad 0 \le t \le \pi/2 \\ -f(-t) & \text{si} \quad -\pi/2 < t < 0 \end{cases} \qquad f_1(t+m\pi) = f_1(t), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Luego la sucesión de sumas parciales $S_N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(2nt)$ converge uniformemente a f en el intervalo abierto $]0, \pi/2[$ y a la media aritmética $\frac{f(\pi/2)+f(-\pi/2)}{2} = 0$ en $t = 0$ y $t = \pi/2$. Pues f es continua por tramos sobre $[0, \pi/2]$ al igual que su derivada, siendo ambas continuas en el intervalo abierto $]0, \pi/2[$. Además, $|b_n| = O(1/n)$.

b) **SFC**: Sea f_2 la extensión par, π-periódica de f, esto es

$$f_2(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad 0 \le t \le \pi/2 \\ f(-t) & \text{si} \quad -\pi/2 < t < 0 \end{cases} \qquad f_2(t+m\pi) = f_2(t), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Luego la sucesión de sumas parciales $S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nt)$ converge uniformemente a f en el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$. Pues f es continua $[0, \pi/2]$ al igual que su derivada y $f(0) = f(\pi/2)$. Además, $|a_n| = O(1/n^2)$.

2º Procedemos al cálculo de coeficientes:

a) **SFS**: Los coeficientes b_n son definidos por: $b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \operatorname{sen}(2nx) dx$, luego

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen}(1-2n)t}{1-2n} - \frac{\operatorname{sen}(1+2n)t}{1+2n} \right]_0^{\pi/2} = \frac{4(-1)^n n}{\pi(1-4n^2)} = O(1/n)$$

y por tanto

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1-4n^2} \operatorname{sen}(2nt), \qquad 0 < t < \pi/2$$

(la convergencia es uniforme en el intervalo abierto $]0, \pi/2[$)

b) **SFC**: Los coeficientes a_n son definidos por: $a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(2nx)dx$, luego

$$a_n = \frac{-2}{\pi}\left[\frac{\cos(1-2n)t}{1+2n} + \frac{\cos(1-2n)t}{1+2n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)} = O(1/n^2)$$

y por tanto

$$\text{sen}(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{1-4n^2}, \qquad 0 \le t \le \pi/2$$

(la convergencia es uniforme en el cerrado $[0, \pi/2]$.)

2º Evaluando la última identidad en $t = 0$ y en $t = \pi/2$ se obtienen las identidades requeridas.

2. *a*) Verifique que $\lambda = -1$ es valor propio, con función propia asociada $y(x) = e^x$ del problema de Sturm-Liouville.

$$y" + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(0), \quad y(\pi) = y'(\pi) \tag{1}$$

(4 pts.)

b) Demuestre que $\lambda = 0$ no es valor propio del problema de Sturm-Liouville (1).

(6 pts.)

c) Determine los valores propios positivos y las auto-funciones asociadas al problema de Sturm-Liouville (1).

(20 pts.)

Pauta Problema 2

2.a) Si $y(u) = e^x$ y $\lambda = -1$ entonces $y''(x) = e^x = y(x)$, es decir, $y'' - y = y" + \lambda y = 0$. Por otra parte, $y(0) = 1 = y'(0)$, $y(\pi) = e^\pi = y'(\pi)$.

2.b) Si $\lambda = 0$, entonces $y'' = 0$ si y solamente si $y(x) = Ax + B$. Aplicando las condiciones de contorno, se tiene que $B = A$ pues $y(0) = y'(0)$, mientras que $y(\pi) = y'(\pi)$ equivalentemente $A\pi + B = A$, por tanto $A = B = 0$ y en consecuencia $\lambda = 0$ no es valor propio.

2.c) Sea $\lambda = \omega^2$, $\omega > 0$. Luego la solución general de $y" + \omega^2 y = 0$ es:

$$y(x) = Acos(\omega x) + Bsen(\omega x).$$

Aplicando las condiciones de contorno, se tiene

$$\begin{aligned} y(0) &= y'(0) \Longleftrightarrow A = \omega B \\ y(\pi) &= y'(\pi) \Longleftrightarrow Acos(\omega\pi) + Bsen(\omega\pi) = \omega[-Asen(\omega\pi) + Bcos(\omega\pi)] \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} 1 & -\omega \\ cos(\omega\pi) + \omega sen(\omega\pi) & sen(\omega\pi) - \omega cos(\omega\pi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $(A, B) \neq (0, 0)$, si y solamente si, el determinante de la matriz de coeficientes del sistema anterior es nulo, esto es, si:

$$(1-\omega^2)sen(\omega\pi) = 0 \Longleftrightarrow \omega\pi = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \cdot$$

por tanto los valores propios son $\lambda_n = (n)^2$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Como $A = \omega B \neq 0$, las funciones propias asociadas son

$$y_n(x) = ncos(nx) + sen(nx), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

3. Resolver el problema de difusión no homogéneo ($k > 0$):

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= t(\text{sen}(2\pi x) + 2x), \quad 0 < x < 1,\, t < 0 \\ u(0,t) &= 1 \\ u(1,t) &= t^2 \\ u(x,0) &= 1 - x \end{aligned}$$

(20 pts.)

Pauta Problema 3

1º Una función auxiliar simple que satisface las condiciones de contorno es:

$$\omega(x,t) = (t^2 - 1)x + 1$$

2º Construimos la descomposición de u como: $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ donde

$$\begin{aligned} v_t - kv_{xx} &= tsen(2\pi x) \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ v(0,t) &= v(1,t) = 0 \\ v(x,0) &= 0 \quad 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$

3º Aplicamos el método de variación de parámetros para resolver el último problema

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) sen(n\pi x)$$

Reemplazando en la ecuación y reordenando, se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n'(t) - k(n\pi)^2 C_n(t) \right\} sen(n\pi x) = tsen(2\pi x),$$

es decir:

$$C_n'(t) - k(n\pi)^2 C_n(t) \quad = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 2 \\ t & \text{si} \quad n = 2 \end{cases}$$

y como v debe verificar la condición inicial nula se tiene $C_n(0) = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por tanto debemos resolver los Problemas de Valores Iniciales ordinarios:

$$\begin{array}{c|} C_2'(t) - k(2\pi)^2 C_2(t) = t \\ C_2(0) = 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|} C_n'(t) - k(n\pi)^2 C_n(t) = 0 \\ C_n(0) = 0 \quad , n \neq 2 \\ \hline \end{array}$$

es decir

$$C_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi^2 h)^2} \left[4\pi^2 kt + e^{-4k\pi^2 t} - 1 \right] & \text{si} \quad n = 2 \\ \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 2 \end{cases}$$

4º La solución del problema es:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \omega(x,t) + v(x,t) \\ &= (t^2 - 1)x + 1 + \tfrac{1}{(4\pi^2 k)^2} \left[4\pi^2 kt + e^{-4\pi^2 kt} - 1 \right] sen(2\pi x) \end{aligned}$$

Concepción, 26 de Septiembre de 2005.
HMM/FPV/cln.