Ejemplo Inicial

Mínimos Cuadrados

Problema. (Modelo lineal)

En las aguas de un lago hay tres clases de micro-organismos provocadores de enfermedades. Se sabe que, en respuesta a un tratamiento aplicado a las aguas, los micro-organismos están disminuyendo en forma exponencial de acuerdo al modelo:

$$p(t) = c_1 e^{-1.5t} + c_2 e^{-0.3t} + c_3 e^{-0.05t}, \quad t \geq 0,$$

donde $p(t)$ da el número (en miles) de micro-organismos. De una muestra de las aguas, en un laboratorio se obtuvieron los siguientes datos:

t (horas)	0.5	1	2	3	4
$p(t)$ (miles)	7	5.2	3.8	3.2	2.5

Ajustar, por mínimos cuadrados, los parámetros c_1, c_2 y c_3 del modelo a los datos de la tabla anterior.

Modelo lineal: continuación

Solución. Los datos tabulados llevan a que c_1, c_2 y c_3 verifiquen las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
p(0.5) = c_1 e^{-1.5(0.5)} + c_2 e^{-0.3(0.5)} + c_3 e^{-0.05(0.5)} &= 7.0 \\
p(1.0) = c_1 e^{-1.5(1.0)} + c_2 e^{-0.3(1.0)} + c_3 e^{-0.05(1.0)} &= 5.2 \\
p(2.0) = c_1 e^{-1.5(2.0)} + c_2 e^{-0.3(2.0)} + c_3 e^{-0.05(2.0)} &= 3.8 \\
p(3.0) = c_1 e^{-1.5(3.0)} + c_2 e^{-0.3(3.0)} + c_3 e^{-0.05(3.0)} &= 3.2 \\
p(4.0) = c_1 e^{-1.5(4.0)} + c_2 e^{-0.3(4.0)} + c_3 e^{-0.05(4.0)} &= 2.5
\end{aligned} \tag{1}
$$

Modelo lineal: continuación

que matricialmente representamos por $AX = Y$ con:

$$A = \begin{bmatrix} e^{-1.5(0.5)} & e^{-0.3(0.5)} & e^{-0.05(0.5)} \\ e^{-1.5(1.0)} & e^{-0.3(1.0)} & e^{-0.05(1.0)} \\ e^{-1.5(2.0)} & e^{-0.3(2.0)} & e^{-0.05(2.0)} \\ e^{-1.5(3.0)} & e^{-0.3(3.0)} & e^{-0.05(3.0)} \\ e^{-1.5(4.0)} & e^{-0.3(4.0)} & e^{-0.05(4.0)} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} 7.0 \\ 5.2 \\ 3.8 \\ 3.2 \\ 2.5 \end{bmatrix}.$$

Modelo lineal: continuación

El sistema (1) tiene más ecuaciones que incognitas (sobredeterminado). Este tipo de sistemas, generalmente no tiene solución. Note que si se resuelven sólo las tres primeras ecuaciones de (1) se obtienen:

$$\hat{c}_1 = 6.6910, \quad \hat{c}_2 = 0.3809 \text{ y } \hat{c}_3 = 3.6005,$$

pero con estos valores no se satisfacen las otras dos ecuaciones del sistema; a saber, se obtienen $p(3) = 3.3281 \neq 3.2$ y $p(4) = 3.0791 \neq 2.5$.

Modelo lineal: continuación

Para buscar la llamada solución de mínimos cuadrados de $AX = Y$, se resuelve el sistema de ecuaciones normales $A^t AX = A^t Y$, encontrándose:

$$c_1 = 4.9745, \quad c_2 = 3.0079 \text{ y } c_3 = 2.0683$$

Con estos valores, el modelo ajustado a la tabla es:

$$p(t) = 4.9745e^{-1.5t} + 3.0079e^{-0.3t} + 2.0683e^{-0.05t}, \quad t \geq 0.$$

Modelo lineal: continuación

Usando el modelo ajustado se puede predecir, por ejemplo, el número de micro-organismos para $t = 1.5$ y $t = 3.5$ que se muestran en seguida:

$$p(1.5) = 4.3611 \approx 4.4, \quad \text{y} \quad p(3.5) = 2.8150 \approx 2.8,$$

además, el número inicial de micro-organismos existentes en la muestra debiera ser de $p(0) = c_1 + c_2 + c_3 \approx 10.1.$

Modelo lineal: continuación

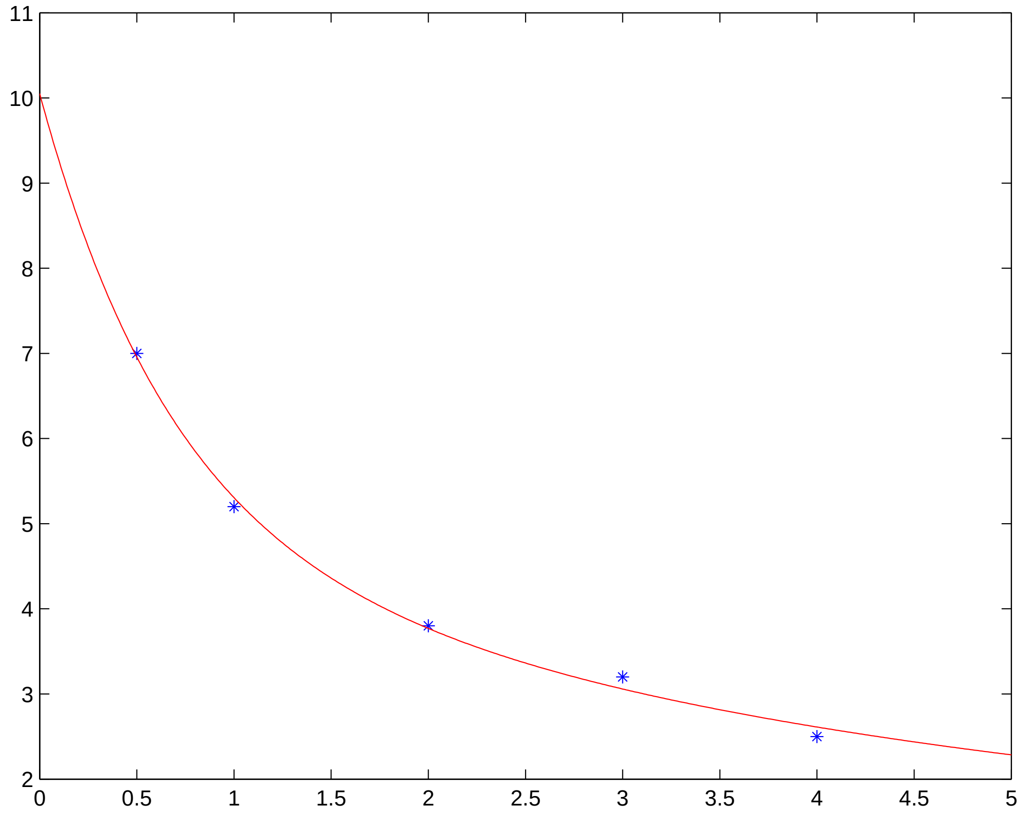

Figure 1: Puntos y curva de ajuste