UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ANALISIS NUMERICO III 525442
TAREA 1.

Problema 1. El siguiente algoritmo mejora el método de Euler por extrapolación: Primero se calcula, conociendo y_j $(j = 0, ..., N-1)$, el valor $y_{j+1}^{(1)}$ por el método de Euler respecto al tamaño de paso h. Por otro lado, se calcula el valor $y_{j+1}^{(2)}$ aplicando dos veces el método de Euler respecto al tamaño de paso $h/2$. Finalmente, se obtiene el valor y_{j+1} por extrapolación de $(h, y_{j+1}^{(1)})$ y $(h/2, y_{j+1}^{(2)})$ en $h = 0$. ¿Qué método conocido resulta?

Problema 2. Determine el orden de consistencia del método de Runge-Kutta simple definido por la función $\phi(x, y; h) := \frac{1}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3]$, siendo

$$k_1 := f(x, y)\,, \qquad k_2 := f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right)\,, \qquad k_3 := f(x + h, y + h(-k_1 + 2k_2))\,,$$

considerando la función f suficientemente suave.

Problema 3. Asumiendo que la función f es suficientemente diferenciable, determine los coeficientes del siguiente método implícito de Runge-Kutta, de manera que tenga el orden de consistencia maximal. Indique cuál es dicho orden.

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h\,c_1\,k_1(x_j, y_j) \\ k_1(x_j, y_j) := f(x_j + a_1 h, y_j + h b_{11} k_1(x_j, y_j)) \\ x_{j+1} := x_j + h \end{cases}$$

Problema 4. Considere el PVI $y' = x - x^3$, $y(0) = 0$, $x \in [0, b]$, $b > 0$. Suponga que se aplica el método de Euler con paso constante h para calcular el valor de la aproximación y_j de $y(x_j)$, $x_j = jh$. Encuentre fórmulas explícitas para y_j y $e(x_j; h) := y_j - y(x_j)$, y muestre que $e(x; h)$, considerando x fijo, tiende a cero cuando $h = \frac{x}{n} \to 0$.

Fecha de entrega (con exposición): Viernes 03.09.2004.

Problema 5. (Trabajo computacional)(*) Sea el PVI $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$, $x \in [0,2]$, el cual tiene la solución no trivial $y(x) = x^2/4$. Verificar que el método de Euler produce la solución discreta nula. ¿Será posible encontrar aproximaciones para la solución no trivial del PVI aplicando el método de Euler implícito? Implemente dicho método, y grafique las soluciones obtenidas considerando tamaños de pasos $h = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$. Concluya.

Problema 6. (Trabajo computacional)(*) Considere el PVI

$$y' = 10\left(y - \frac{x^2}{1+x^2}\right) + \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad x \in [0,5].$$

Encuentre soluciones aproximadas aplicando:
a) método de Euler,
b) método de Euler-Cauchy,
c) método de Runge-Kutta clásico,
d) método Predictor-Corrector ABM presentado en clase,
teniendo en cuenta las longitudes de paso $h = 0,1$ y $h = 0,01$.

Fecha de entrega de los Trabajos Computacionales: Miércoles 08.09.2004.
(*) Los resultados serán presentados en un informe, el cual debe contener una descripción del problema, su solución exacta, así como la presentación de los métodos a ocupar. Para cada uno de ellos se debe anexar una tabla de tamaños de paso (h) y errores. Asimismo, establezca el orden de convergencia de los métodos. Para ello, resuelva para las longitudes de paso h, $h/2$, $h/4$, $h/8$. Manifieste sus observaciones y conclusiones en cada caso. No olvide anexar impresiones de sus programas fuentes y comparar gráficamente lo bien o lo mal que pueda resultar la solución aproximada encontrada por cada esquema numérico respecto a la solución exacta. Respecto al lenguaje de progamación a ocupar, se recomienda usar el **Matlab**, básicamente por tener predefinidos el álgebra de matrices, lo cual simplifica bastante a la hora de implementar las rutinas (en el entendido que se debería aprovechar en la medida de lo posible la estructura matricial para evitar ciclos **for** innecesarios, por ejemplo). Respecto a la redacción del informe, se recomienda hacerlo utilizando LaTeX.

25.08.2004
LBH/RBP/rbp