UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1.
Análisis Funcional y Aplicaciones I.
525401.
Segundo Semestre 2006.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ dotado de la medida de Lebesgue dx. Sea $p, q \in \mathbb{R}$ con $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Recordemos las definiciones de los espacios de funciones medibles

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ es medible, y } \int_\Omega |f|^p dx < \infty\}, \qquad 1 \leqslant p < \infty, \\ L^\infty(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ es medible, y } \exists C > 0 |f(x)| \leq C, \ c.t.p. \text{ en } \Omega\} \end{aligned}$$

y denotemos $\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ y $\|f\|_{l^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} \, |f(x)|$.

1. Pruebe la **desigualdad de Hölder**: para todo $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega |fg| dx \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

   Para ello siga los siguientes pasos

   (a) **(0.5 pts)** Verifique que para $p = 1$ y $q = \infty$ la desigualdad es evidente, y suponga en lo que sigue (de 1.(b) a 1.(e)) que $1 < p, q < \infty$.

   (b) **(0.5 pts)** Pruebe la desigualdad de Young:

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \qquad \text{para todo } a, b \geqslant 0$$

   Indicación: aplique log, y utilice el hecho que $\log :]0, \infty] \to \mathbb{R}$ es una función cóncava.

   (c) **(0.5 pts)** Utilice la desigualdad de Young para probar que

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \frac{1}{p} \|f\|^p_{L^p} + \frac{1}{q} \|g\|^q_{L^q}$$

   (d) **(0.5 pts)** Pruebe la desigualdad de Holder para $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$

   (e) **(0.5 pts)** Haciendo $\hat{f} = f / \|f\|_{L^p}$ y $\hat{g} = g / \|g\|_{L^q}$, pruebe la desigualdad de Holder para todo $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$.

Asumiremos de ahora en adelante que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \|_{L^p}$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, y además asumiremos (sin demostrar) que $L^p(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$.

2. Pruebe el **Teorema de Representación de Riesz en** L^p: Sea $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, con $1 < p < \infty$, entonces existe un único $u \in L^q$ tal que

$$< \varphi, f >= \int_\Omega uf, \qquad \forall f \in L^p(\Omega)$$

   y además $\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$. Para ello siga los siguientes pasos

(a) **(0.7 pts)** Considere el operador $T : L^q \to (L^p(\Omega))'$ tal que por

$$< Tu, f >= \int_\Omega u f dx, \qquad \forall f \in\in L^p(\Omega),$$

y pruebe que este operador está bien definido.

(b) **(0.7 pts)** Pruebe usando la desigualdad de Holder que T es lineal, continuo y que $\|Tu\|_{(L^p(\Omega))'} \leqslant \|u\|_{L^q(\Omega)}$.

(c) **(0.7 pts)** Tomando $f_0 = |u(x)|^{q-2}u(x)$ ($f_0(x) = 0$ si $u(x) = 0$), pruebe que $f_0 \in L^p(\Omega)$, $\|f_0\|_{L^p} = \|u\|_{L^q}^{q-1}$ y que $< Tu, f_0 >= \|u\|_{L^q}^q$.

(d) **(0.7 pts)** Deduzca que $\|Tu\|_{(L^p(\Omega))'} = \|u\|_{L^q(\Omega)}$, y por lo tanto T es una isometría de $L^q(\Omega)$ en un sub-espacio cerrrado de $(L^p(\Omega))'$.

(e) **(0.7 pts)** Demuestre que T es sobreyectivo. Para ello pruebe separadamente que $T(L^q(\Omega))$ es cerrado y denso en $(L^p(\Omega))'$. Para demostrar que $T(L^q(\Omega))$ denso en $(L^p(\Omega))'$, considere h en $(L^p(\Omega))''$ ($= L^p(\Omega)$ puesto que $L^p(\Omega)$ es reflexivo) tal que $< Tu, h >= 0$ para todo $u \in L^q$ y pruebe que $h = 0$ tomando $u = |h|^{p-2}h$.

Duración : 2 horas.
MSC/msc
(10-Octubre-2006)