UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

**Complemento de Cálculos (MAT. 521234)**

*Guía de Ejercicios No 3.*

1. Resolver el problema de la cuerda vibrante de longitud $L = 6$ con bordes fijos, cuya posición y velocidad inicial son :

$$u(x,0) = \frac{1}{55}x(6-x), \quad u_t(x,0) = \frac{1}{99}\operatorname{sen}^2(\tfrac{7\pi}{6}x) \qquad (c = 13)$$

2. Resolver el problema de la cuerda vibrante de longitud $L$ fija en el borde $x = L$ y libre en extremo $x = 0$ (es decir, $u_x(0,t) = 0$) y con posición y velocidad iniciales:

$$u(x,0) = 7\cos(\tfrac{5\pi}{2L}x), \quad u_t(x,0) = 2\cos(\tfrac{7\pi}{2L}x)$$

3. Resolver el problema de valores de contorno e inicial:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}; \quad \begin{cases} u(x,0) = x\cos(\frac{\pi}{2}x), & u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

4. Una cuerda es estirada entre los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$. El desplazamiento a partir de $y = 0$ y del *reposo* comienza con una velocidad inicial:

$$y_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 0{,}05, & 0 \le x \le 1 \\ 0{,}05(2-x), & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Construya y resuelva el problema de valores de contorno e inicial que modela esta situación.

5. Determinar el desplazamiento en todo instante $t$ de una cuerda de longitud $L$ de extremos fijos, inicialmente en reposo y la cual es sometida a la fuerza externa

$$(a) \quad h(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x), \quad (L = 1) \quad (b) \quad h(x,t) = (4t-8)\operatorname{sen}(2x), \quad (L = \pi)$$

6. Determinar el desplazamiento en todo instante $t$ de la cuerda de logitud $\pi$, inicialmente en reposo, con extremo $x = 0$ fijo y extremo $x = \pi$ libre y la cual es sometida a la fuerza externa $h(x,t) = x\cos(wt)$ ¿Para qué valores de $w$ la cuerda entra en resonancia?

7. Resolver los siguiente problemas de Propagación de Ondas

   *a)* $u_{tt} - c^2 u_{xx} - e^{-t}\cos(x) = 0,\ x,t \in I\!R$, donde el desplazamiento y velocidad inicial son nulos.

   *b)* $u_{tt} - c^2 u_{xx} - e^{-t}\cos(x) = 0,\ x,t \in I\!R$, donde el desplazamiento y velocidad inicial son modelados por $f$ y $g$, respectivamente.

8. Determinar los valores de las constantes $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ tal que vía la transformación $u(x,t) = v(x,t)e^{\alpha t+\beta x}$:

$$
\begin{array}{lll}
a) \quad u_t = ku_{xx} - au_t - bu_x + cu + h(x,t) & \Longleftrightarrow & v_t = kv_{xx} + \gamma v + h(x,t)e^{-\alpha t-\beta x} \\
b) \quad u_{tt} = c^2u_{xx} - au_t - bu_x + cu + h(x,t) & \Longleftrightarrow & v_{tt} = c^2v_{xx} + \gamma v + h(x,t)e^{-\alpha t-\beta x}
\end{array}
$$

9. Resolver el siguiente problema de valores de contorno e inicial:

$$
\begin{array}{cc}
u_t = ku_{xx} + 2u_x + u & (x,t) \in ]0,1[\times]0,\infty[ \\
u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \geq 0 \\
u(x,0) = x(x-1) & 0 \leq x \leq 1
\end{array}
$$

10. Resolver los siguientes *Problemas de Valores de Frontera e Iniciales* y representar explícitamente los primeros 5 términos de la solución general.

$$
(a) \quad
\begin{array}{ll}
e^{-2x}u_t = (e^{-2x}u_x)_x, & (x,t) \in ]0,\pi[\times]0,\infty[ \\
u(0,t) - u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\
u(x,0) = \begin{cases} e^x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ e^{\pi/2} & x \in ]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} &
\end{array}
$$

$$
(b) \quad
\begin{array}{ll}
u_t = u_{xx} - 2u_x, & (x,t) \in ]0,\pi[\times]0,\infty[ \\
u(0,t) - u_x(0,t) = u(\pi,t) + u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\
u(x,0) = 1 + sen(x), & 0 \leq x \leq \pi
\end{array}
$$

Indicación: compararar con el ejercicio (a)

11. Resolver los siguiente problemas de difusión no-homogéneos.

   a) $u_t - u_{xx} - t\cos(x) = 0$, $0 < x < \pi$, $t > 0$ y donde las condiciones de contornos son homogéneas: $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ al igual que la condición inicial: $u(x,0) = 0$.

   b) $u_t - ku_{xx} - \cos(3t) = 0$, $0 < x < 1$, $t > 0$ y donde las condiciones de contornos son no homogéneas: $u_x(0,t) = -1$, $\quad u_x(1,t) = 0$, al igual que la condición inicial: $u(x,0) = \cos(\pi x) + x^2/2 - x$.

   c) $u_t - u_{xx} - xe^t/\pi - t(2 - 2x/\pi - sen(x)) = 0$, $0 < x < \pi$, $t > 0$ y donde las condiciones de contornos son no homogéneas: $u(0,t) = t^2$, $\quad u(\pi,t) = e^t$, al igual que la condición inicial: $u(x,0) = x/\pi + \sin(2x)$.

   d) $u_t - 4u_{xx} - e^t\sin(x/2) + \sin(t) = 0$, $0 < x < \pi$, $t > 0$ y donde las condiciones de contornos son no homogéneas: $u(0,t) = \cos(t)$, $\quad u_x(\pi,t) = 0$ al igual que la condición inicial: $u(x,0) = 1$.

HMM/FPV/fpv.
12 de Septiembre de 2007.