UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA 21: *Independencia Lineal, Bases y Dimensión*

I. **Problema.** Decidir la independencia lineal del subconjunto $\boldsymbol{A}$ del espacio vectorial $\boldsymbol{V}$, si:

$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{A}$
$\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$	$\{\ [\mathbf{3},\ \mathbf{6},\ \mathbf{1}],\ [\mathbf{2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1}],\ [-\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ -\mathbf{1}]\ \}$
$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathbf{2}}(\mathbb{R})$	$\{\ \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\ \boldsymbol{x}-\mathbf{1},\ (\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}\ \}$
$\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{2}}(\mathbb{R})$	$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\}$

[En Práctica](3er caso)

II. **Problema**. Sea $\boldsymbol{A}$ subconjunto de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\boldsymbol{V}$**.** Se dice que $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ es subconjunto **L.I. Maximal de** $\boldsymbol{A}$, si:

$$(\boldsymbol{i})\quad \boldsymbol{B} \text{ es } \mathbf{l.i} \qquad\qquad (\boldsymbol{ii})\quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}:\ \boldsymbol{B} \cup \{\boldsymbol{v}\} \text{ es } \mathbf{l.d.}$$

En tal caso $\boldsymbol{B}$ *es una base de* $\langle\, \boldsymbol{A}\, \rangle$.

(2.1) Sea $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathbf{2}}(\mathbb{R})$. Utilice el *Lema de Dependencia Lineal* para determinar el subconjunto L.I. Maximal de

$$\boldsymbol{A} = \{\, \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{3},\ -\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x} - \mathbf{3},\ -\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x},\ \mathbf{6}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{10}\,\}$$

(2.2) Repetir el problema anterior si $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{2}}(\mathbb{R})$ y

$$\boldsymbol{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}$$

(2.3) Análogamente, si $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$, determinar el conjunto L.I. Maximal de

$$\boldsymbol{A} = \{\ [\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{1}],\ [\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{4}],\ [\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{3}],\ [\mathbf{0},\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}]\ \}$$

[En Práctica](2.2)

III. **Problema.** Demostrar que si $\{\boldsymbol{v}_{\mathbf{1}}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}\}$ es **l.i.** en un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\boldsymbol{V}$, entonces también lo será:

$$\{\boldsymbol{v}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{v}_{\mathbf{2}}, \boldsymbol{v}_{\mathbf{2}} - \boldsymbol{v}_{\mathbf{3}}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}\ \mathbf{1}} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}\}$$

IV. **Problema.** Sea $\boldsymbol{A} = \{\ \boldsymbol{p_0},\ \boldsymbol{p_1},\ \ldots,\ \boldsymbol{p_m}\ \} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ tal que cada vector de $\boldsymbol{A}$ se anula en $\boldsymbol{x = 1}$, es decir: $\boldsymbol{p_j(1) = 0, j = 0, 1, \ldots, m}$. Entonces $\boldsymbol{A}$ es **l.d.** en $\boldsymbol{\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$.

[En Práctica]

V. **Problema.** Encuentre una base y determine la dimensión de los siguientes subespacios:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{W_1} &= \{\ [\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2},\ \boldsymbol{x_3},\ \boldsymbol{x_4},\ \boldsymbol{x_5}] \in \mathbb{R}^5\ :\ \boldsymbol{x_1 = 3x_2}\ \wedge\ \boldsymbol{x_3 = 7x_4}\ \} \\
\boldsymbol{W_2} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_3}(\mathbb{R}) \right\} \\
\boldsymbol{W_3} &= \left\{ \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\mathcal{P}_3}(\mathbb{R})\ :\ \int_1^1 \boldsymbol{t \cdot p'(t) dt = 0} \right\} \\
\boldsymbol{W_4} &= \{\ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_2}(\mathbb{R})\ :\ \boldsymbol{A = A^t}\ \} \\
\boldsymbol{W_5} &= \{\ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_2}(\mathbb{C})\ :\ \boldsymbol{A = A^t}\ \}\ (\mathbb{K} = \mathbb{R}) \\
\boldsymbol{W_6} &= \{\ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_2}(\mathbb{C})\ :\ \boldsymbol{A = A^t}\ \}\ (\mathbb{K} = \mathbb{C})
\end{aligned}$$

[En Práctica]($\boldsymbol{W_5},\ \boldsymbol{W_6}$)

VI. **Problema.** Sea $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^4$ y sus subespacios $\boldsymbol{F} = \langle \{\ \vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}} \}\ \rangle$ y $\boldsymbol{G} = \langle \{\ \vec{\boldsymbol{d}}, \vec{\boldsymbol{e}}\ \} \rangle$ donde $\vec{\boldsymbol{a}} = [\boldsymbol{1,\ 2,\ 3,\ 4}]$, $\vec{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{2,\ 2,\ 2,\ 6}]$, $\vec{\boldsymbol{c}} = [\boldsymbol{0,\ 2,\ 4,\ 4}]$, $\vec{\boldsymbol{d}} = [\boldsymbol{1,\ 0,\ -1,\ 2}]$ y $\vec{\boldsymbol{e}} = [\boldsymbol{2,\ 3,\ 0,\ 1}]$.

(6.1) Determinar las dimensiones de $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$ y dar una base para cada uno de estos subespacios.

VII. **Problema.** Muestre que el conjunto $\boldsymbol{\beta}$ es base del espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ y encontrar el vector coordenada $[\boldsymbol{w}]$, si:

$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{w}$
$\mathbb{R}^3$	$\{\ [\boldsymbol{1,\ 1,\ 0}],\ [\boldsymbol{2,\ 0,\ 3}],\ [\boldsymbol{-1,\ 1,\ 0}]\ \}$	$[\boldsymbol{2,\ 2,\ 3}]$
$\boldsymbol{\mathcal{P}_3}(\mathbb{R})$	$\{\ (\boldsymbol{t-1})^3,\ (\boldsymbol{t-1})^2,\ (\boldsymbol{t-1}),\ \boldsymbol{1}\ \}$	$\boldsymbol{t^2 + t + 1}$
$\boldsymbol{\mathcal{M}_2}(\mathbb{R})$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[En Práctica](2^o caso)

15.10.2002
FPV/fpv