UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 2
ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA (522115) (14/06/2004).

P1. Sean $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales definidas por:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{1}{x}.$$

a) Pruebe que la función f es invertible y defina su inversa f^{-1}. **(10 Ptos.)**

b) Defina las funciones: $g \circ f$ y $f \circ g$. **(10 Ptos.)**

Solución

a) $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{-1\}$ **(2 puntos)**

Inyectividad: Sean $x_1, x_2 \in Dom(f)$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Luego,

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} \iff (1-x_1)(1+x_2) = (1-x_2)(1+x_1)$$

$$\iff 1 - x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1 + x_1 - x_2 - x_1x_2 \iff 2x_2 = 2x_1 \iff x_1 = x_2.$$

Por lo tanto, f es inyectiva. **(3 puntos)**
Como $Dom(f) \neq \emptyset$ y f es inyectiva, entonces existe la función inversa:
$f^{-1} : Rec(f) \to Dom(f)$.

$$y = f(x) \iff y = \frac{1-x}{1+x} \iff 1 - y = x(1+y) \iff x = \frac{1-y}{1+y}.$$

De aquí, $Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x),\ x \in \mathbb{R}, x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$. **(3 puntos)**
Así, $f^{-1} : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ con $f^{-1}(y) = \dfrac{1-y}{1+y}$. **(2 puntos)**

b) $Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{0\}$. **(2 puntos)**

$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\}$
$= \{x \in \mathbb{R} - \{-1\} : \dfrac{1-x}{1+x} \in \mathbb{R} - \{0\}\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. **(2 puntos)**

Así,

$$g \circ f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1+x}{1-x}.$$

(2 puntos)

$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) \,:\, g(x) \in Dom(f)\} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \,:\, \dfrac{1}{x}. \in \mathbb{R} - \{-1\}\} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$. **(2 puntos)**

Así,

$$f \circ g : \mathbb{R} - \{0, -1\} \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(\frac{1}{x}) = \frac{x-1}{x+1}.$$

(2 puntos)

P2. El precio de un determinado producto después de t años de uso está dado por la función real: $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 4\log_2(2t+4) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 6, \\ (\frac{1}{2})^{t-10} & \text{si} \quad t > 6. \end{cases}$$

a) Determine si la función $f(t)$ es creciente o decreciente o ninguna de las dos formas. **(5 Ptos.)**

b) Determine el recorrido de $f(t)$ y muestre que el precio máximo del producto es igual a 16. **(10 Ptos.)**

c) ¿Es posible que el producto tenga el mismo precio inicial después de $t > 0$ años de uso?. Justifique su respuesta. **(5 Ptos.)**

Solución

a) Como el logaritmo de la función $4\log_2(2t+4)$ es de base $2 > 1$ entonces, esta función es creciente. Por otro lado, la función exponencial $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t-10}$ tiene base < 1, luego es decreciente. Así, la función $f(t)$ no es creciente ni decreciente. **(5 Ptos.)**

b) $Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} : f(t) = y, \, t \in [0, +\infty[\} = \{y \in \mathbb{R} : 4\log_2(2t+4) = y, \, 0 \leq t \leq 6\} \cup \{y \in \mathbb{R} : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{t-10}, \, t > 6\}$. **(2 puntos)**

$$R_1 : \qquad 4\log_2(2t+4) = y \iff 2^{\frac{y}{4}} = (2t+4) \iff 2^{\frac{y}{4}} - 4 = 2t \iff 2^{\frac{y}{4}-1} - 2 = t.$$

Luego, $0 \leq t \leq 6 \iff 0 \leq 2^{\frac{y}{4}-1} - 2 \leq 6 \iff 4 \leq 2^{\frac{y}{4}} \leq 16 \iff \log_2(4) \leq \frac{y}{4} \leq \log_2(8) \iff 8 \leq y \leq 16$. **(2 puntos)**

$$R_2 : \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{t-10} = y \iff 2^{10-t} = y \iff 10 - t = \log_2(y) \iff t = 10 - \log_2(y).$$

Luego, $t > 6 \iff 10 - \log_2(y) > 6 \iff 4 > \log_2(y) \iff 0 < y < 16$. **(2 puntos)**

Por lo tanto, $Rec(f) = R_1 \cup R_2 = [8, 16] \cup]0, 16[=]0, 16]$ **(2 puntos)**

Así, el valor máximo de la función $f(t)$ es 16 y es alcanzado cuando $t = 6$. **(2 puntos)**

c) El precio inicial del producto es igual a $f(0) = 4\log_2(4) = 8$. Por otro lado, el precio del producto después de $t = 7$ años es $f(7) = \frac{1}{2}^{-3} = 8$. Por lo tanto, el precio del producto después de siete años es el mismo que el inicial. **(5 puntos)**

P3. Sea $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por:

$$f(x) = \text{sen}\Big(2x + \frac{\pi}{2}\Big).$$

a) Determine dominio y periodo de $f(x)$. **(4 Ptos.)**

b) Determine el valor de $f(x_1)$ si se sabe que $Arccos(x_1) = \dfrac{\pi}{2}$. **(4 Ptos.)**

c) Pruebe la identidad trigonométrica: $\text{sen}(2x + \frac{\pi}{2}) = 1 - 2\text{sen}^2(x)$. **(6 Ptos.)**

d) Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$.
(Ind: puede usar el resultado en c) sin haberlo probado) **(6 Ptos.)**

Solución

a) $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = \text{sen}\Big(2x + \frac{\pi}{2}\Big) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

Periodo: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$. **(2 puntos)**

b) $Arccos(x_1) = \frac{\pi}{2} \iff \cos(\frac{\pi}{2}) = x_1 \implies x_1 = 0$. Así, $f(x_1) = f(0) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$. **(4 puntos)**

c) $\text{sen}(2x + \frac{\pi}{2}) = sen(2x)\cos(\frac{\pi}{2}) + sen(\frac{\pi}{2})\cos(2x) = \cos(2x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x) - \text{sen}^2(x) = 1 - 2\text{sen}^2(x)$. **(6 puntos)**

d) $\text{sen}(2x + \frac{\pi}{2}) = 1 \iff 1 - 2\text{sen}^2(x) = 1 \implies \text{sen}^(x) = 0$. Luego el conjunto solución de la ecuación planteada es $S = \{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. **(6 puntos)**