

## Clculo Numrico (521230)

**Examen – Forma B**  
*Fecha: 11-Dic-02; 11:00.*

<b>Nombre y apellidos</b>	
<b>Matrcula</b>	
<b>Profesor</b>	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la  
correccin  
**No rellenar**

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque slo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no ser evaluada**.
- **No intente adivinar**. Por cada respuesta equivocada se descontar un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:

$$\text{Calificacin} = \frac{100}{15} \left( \text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3} \right).$$

- Cualquier intento de copia ser **castigado**.
- Duracin de la prueba: **100 minutos**.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FISICAS Y MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

**EXAMEN**  
**DE**  
**CALCULO NUMERICO**  
**521230**

MIÉRCOLES 11 DE DICIEMBRE DE 2002

**COMISION:** DR. RODOLFO ARAYA  
DR. MANUEL CAMPOS  
DR. ROBERTO RIQUELME  
DR. MAURICIO SEPLVEDA

1. Por  $S(x)$  se denota una *spline* cbica de interpolacin definida sobre tres subintervalos que particionan el dominio  $[a, b]$ . Para obtener el *valor exacto* de:

$$I = \int_a^b S(x) dx$$

se proponen las alternativas:

- (i) integrar  $S(x)$ , sobre cada subintervalo, usando la frmula de Simpson
- (ii) integrar  $S(x)$ , sobre cada subintervalo, usando una frmula Gaussiana del tipo  $A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$  (dos puntos de Gauss).

El valor exacto de  $I$  se obtiene:

- a) con (i) y tambin con (ii)
- b) slo con (i)
- c) slo con (ii)
- d) ninguna de las anteriores.

2. La ecuacin  $f(x) = 0$  tiene una raz  $\alpha$  de multiplicidad  $p$  con  $p > 1$ . Para calcular  $\alpha$  por el mtodo de Newton-Raphson se debe resolver la ecuacin  $h(x) = 0$  donde  $h(x) = f(x)^{\frac{1}{p}}$ .

Dado  $x_0$  prximo de  $\alpha$ , el esquema que se obtiene es:

a)

$$x_{k+1} = x_k - p \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

b)

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

c)

$$x_{k+1} = x_k + p \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

d) ninguno de los anteriores.

3. Los valores  $T_h$  y  $T_{\frac{h}{2}}$  son aproximaciones para  $\ln(2) := \int_1^2 \frac{dt}{t}$  obtenidos con la frmula de trapecios

general usando pasos  $h = 0.02$  y  $h = 0.01$ , respectivamente. Con stos valores la aproximacin de Romberg  $T_{\frac{h}{2}}^1$  para  $\ln(2)$  es:

a)  $T_h + (T_h + T_{\frac{h}{2}})/3$

b)  $T_h - (T_h - T_{\frac{h}{2}})/3$

c)  $T_{\frac{h}{2}} + (T_{\frac{h}{2}} - T_h)/3$

d) ninguna de las anteriores.

4. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 100 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} & \frac{1}{100\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema  $Ax = b$  con  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , en la solucin se comete un error en norma 1,

$\|\delta x\|_1$  estrictamente mayor al 1% con respecto de  $\|x\|_1$ , debido a un error  $\delta b$  en el trmino del lado derecho. Suponga que no hay errores en los coeficientes de la matriz ni errores de redondeo. Entonces necesariamente,

- a)  $\|\delta b\|_1 > 410^{-6}$
- b)  $0 < \|\delta b\|_1 \leq 410^{-6}$
- c)  $\|\delta b\|_1 \leq 0$
- d) Ninguna de las anteriores.

5. De las afirmaciones que siguen, encuentre la que es **verdadera**

- a) Un sistema  $Ax = b$  se puede resolver por el mtodo de Jacobi ssi  $A$  es simtrica y definida positiva.
- b) La factorizacin de Choleski de una matriz  $A$  existe ssi  $A$  es de diagonal dominante.
- c) Un sistema  $Ax = b$  se puede resolver por el mtodo del gradiente conjugado ssi  $|A| \neq 0$ .
- d) Ninguna de las anteriores.

6. Considere el problema de resolver un P.V.I. de primer orden asociado a una ecuacin diferencial de tipo *stiff*. Para stos problemas se puede afirmar que:

- (i) no se pueden resolver usando los mtodos de Runge-Kutta
- (ii) exigen usar un paso  $h$  muy pequeno en los mtodos explcitos
- (iii) es recomendable resolverlos con algn mtodo implcito

Son verdaderas las afirmaciones dadas en:

- a) slo (iii)
- b) (i) y (iii)
- c) (ii) y (iii)
- d) ninguna de las anteriores.

7. En un modelo de Diseo de Riego por Surcos, un índice de calidad de riego  $X$  (medido en porcentaje) depende del caudal  $Q$  (en  $m^3/min$ ), del largo  $L$  (en  $m$ ) y del tiempo de corte  $T_0$  (en  $min.$ ) segn la ecuacin

$$X = C_1 Q^{-C_2} L^{C_3} T_0^{-C_4}$$

Suponiendo que para las siguientes mediciones experimentales se obtiene una calidad dada por la siguiente tabla :

$Q$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$L$	107	190	298	412	501
$T_0$	250	100	300	70	400
$X$	40	90	30	99	25

Entonces el sistema  $A^t A x = A^t b$  que permite obtener los coeficientes  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ . est dado por la matriz y el vector:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 0,1 & 107 & 250 \\ 0,2 & 190 & 100 \\ 0,3 & 298 & 300 \\ 0,4 & 412 & 70 \\ 0,5 & 501 & 400 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 40 \\ 90 \\ 30 \\ 99 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 & 107 & 250 \\ 1 & 0,2 & 190 & 100 \\ 1 & 0,3 & 298 & 300 \\ 1 & 0,4 & 412 & 70 \\ 1 & 0,5 & 501 & 400 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 40 \\ 90 \\ 30 \\ 99 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\log 0,1 & \log 107 & -\log 250 \\ 1 & -\log 0,2 & \log 190 & -\log 100 \\ 1 & -\log 0,3 & \log 298 & -\log 300 \\ 1 & -\log 0,4 & \log 412 & -\log 70 \\ 1 & -\log 0,5 & \log 501 & -\log 400 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} \log 40 \\ \log 90 \\ \log 30 \\ \log 99 \\ \log 25 \end{pmatrix}$$

- d) Ninguna de las anteriores

8. Considere el mtodo de Euler explcito

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

y el de Euler implcito (retrogrado o regresivo)

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

El esquema predictor corrector formado por estos mtodos es:

a)

$$\begin{cases} y_{i+1}^p = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^p) \\ y_{i+1}^c = y_i + hf(x_i, y_i) \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y_{i+1}^p = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1}^c = y_{i+1} + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^p) \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} y_{i+1}^p = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1}^c = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^p) \end{cases}$$

d) ninguno de los anteriores.

9. Se desea resolver el PVI

$$\begin{cases} \ddot{y} + \dot{y} + \sin(y) = \cos(y), & t \in [0, 5] \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 2 \\ \ddot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Para esto se usa el comando *ode45*, es decir,

```
>> [t,Y]=ode45('F',[0 5],[1 2 0]);
```

El programa en ambiente MATLAB *F.m* es:

a) `function Z=F(t,y)`

`Z=[y(3);y(2);-y(2)-sin(y(1))+cos(y(1))];`

b) `function Z=F(t,y)`

`Z=[y(2);y(3);-y(2)-sin(y(1))+cos(y(1))];`

c) `function Z=F(t,y)`

`Z=[y(2);y(3);-y(2)-sin(y(3))+cos(y(1))];`

d) ninguna de las anteriores.

10. Considere la tabla

x	-2	-1	0	1	2
y	1	0	-5	-2	-3

El modelo que se ajustara mejor mediante mnimos cuadrados a los datos experimentales es:

- a)  $y = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + b}}$
- b)  $y = e^{ax^2 + b}$
- c)  $y = ax + b$
- d) ninguna de las anteriores.

11. Considere la tabla de datos

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$

El valor de

$$\frac{2l_0(x_1) + 4l_3(x_3) + 8l_5(x_5)}{2l_2(x_2)}$$

donde  $l_i$  son los polinomios de lagrange asociados a la tabla, es:

- a) 1
- b) 6
- c) 7
- d) ninguna de las anteriores.

12. Se dispone de un conjunto de datos  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$  (ordenados como vectores columnas) los cuales se quieren ajustar por mnimos cuadrados a una funcin del tipo

$$y = \frac{5}{\sqrt{ax^2 + b}}$$

Un programa en ambiente MATLAB que permite encontrar las constantes  $a$  y  $b$  es:

- a) 

```
function A=ajuste(x,y)
F=[x.^2 ones(length(x),1)];
A=F\ (25./y.^2);
```
- b) 

```
function A=ajuste(x,y)
F=[x.^2 ones(length(x),1)];
A=F\ (5./y.^2);
```
- c) 

```
function A=ajuste(x,y)
F=[sqrt(x) ones(length(x),1)];
A=F\y;
```
- d) ninguna de las anteriores.

13. Se dispone de la siguiente tabla de puntos de Gauss

$x_i$	$A_i$
0.861136311594053	0.347854845137455
0.339981043584856	0.652145154862547

Un programa en ambiente MATLAB que permite encontrar

$$\int_a^b e^{-x^2+5} dx$$

usando la tabla de Gauss anterior es:

- a) `function I=integral(a,b)`  
`g=[0.861136311594053 0.339981043584856];`  
`A=[0.347854845137455 0.652145154862547];`  
`x1=(b-a)*(1-g)/2+a;`  
`x2=(b-a)*(1+g)/2+a;`  
`I=(b-a)*(sum(A.*exp(-x1.^2+5))+sum(A.*exp(-x2.^2+5)))/2;`
- b) `function I=integral(a,b)`  
`g=[0.861136311594053 0.339981043584856];`  
`A=[0.347854845137455 0.652145154862547];`  
`x1=(b-a)*(1-g)/2+a;`  
`x2=(b-a)*(1+g)/2+a;`  
`I=sum(A.*exp(-x1.^2+5))+sum(A.*exp(-x2.^2+5));`
- c) `function I=integral(a,b)`  
`g=[0.861136311594053 0.339981043584856];`  
`A=[0.347854845137455 0.652145154862547];`  
`I=(b-a)*(sum(A.*exp(-g.^2+5))+sum(A.*exp(-g.^2+5)))/2;`
- d) ninguno de los anteriores.

14. Considere la spline cubica  $s$  definida por:

$$s(x) = \begin{cases} ax(x^2 + b), & 0 \leq x \leq 1 \\ -ax^3 + 3x^2 - \frac{5}{2}x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Para que valor de  $a$ ,  $s$  es una spline cubica de interpolacin para  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 2]$ , respecto de los nodos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$

- a)  $a = 1$   
b)  $a = \frac{1}{2}$   
c)  $a = -\frac{1}{2}$   
d) Ninguna de las anteriores.



15. Al aplicar diferencias finitas al P.V.C.:

$$\begin{cases} -y''(x) + cy(x) = \text{sen}(x), & x \in [0, 2] \\ y(0) = \alpha, & y(2) = \beta \end{cases}$$

donde  $c > 0$ ,  $h = 2/n$ ,  $x_i = ih$  e  $i = 0, \dots, n$ , se debe resolver el sistema:

a)

$$\begin{bmatrix} 2 + ch^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + ch^2 & -1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & -1 & 2 + ch^2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + ch^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} \text{sen}(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{sen}(x_{n-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 + ch^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 + ch^2 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & 1 & 2 + ch^2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 + ch^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} \text{sen}(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{sen}(x_{n-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2ch & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2ch & -1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & -1 & 2ch & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2ch \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = 2h \begin{bmatrix} \text{sen}(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{sen}(x_{n-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

d) ninguno de los anteriores.