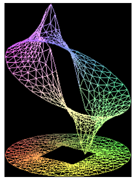
520142
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre, Universidad de Concepción



CAPITULO 7. MATRICES

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Matrices

Definición: Matriz

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K}$ un cuerpo ($\mathbb{R}$, ó $\mathbb{C}$). Se llama **función Matricial** sobre $\mathbb{K}$ a una función

$$A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (i, j) \longmapsto A(i, j).$$

Se designa por a_{ij} al valor de A en el par (i, j). Se escribe:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

o bien $A = (a_{ij}), i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n$, y se dice que A es una matriz de orden $m \times n$. También se escribe $A = (a_{ij})$, cuando está claro el número de filas y columnas de A.

Matrices

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), entonces la matriz se dice real (compleja) o a valores reales (complejos).
- El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$, con elementos en $\mathbb{K}$, se denota por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- Se llama **Matriz nula** a la matriz (a_{ij}), con $a_{ij} = 0, \forall i \in \{1, 2, ..., m\}, \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ y se denota por θ.
- **Igualdad de Matrices**. Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ dos matrices, entonces

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, ..., m\}, \forall j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Matrices

Operaciones con matrices.

Definición : suma y multiplicación de matrices.

- **Suma**.
  Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces la matriz suma $A + B$ es

$$A + B = (c_{ij}) \quad \text{con} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = 1, ..., m, \forall j = 1, ..., n.$$

- **Multiplicación**
  Sean $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), B = (b_{ij}) \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$. La matriz producto $C = A \cdot B$ es una matriz de $M_{m \times p}(\mathbb{K})$, con

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Matrices

Propiedades de la suma y del producto de matrices.

$\forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ se tiene:

S1).	$(A+B)+C = A+(B+C)$.	S2).	$A+B = B+A$.
S3).	$\exists\, \theta \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) : A+\theta = A$	S4).	$\exists(-A) \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) : A+(-A) = \theta$

Para A, B, C matrices de modo que los productos estén definidos, se tiene:

M1).	$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$	M2).	$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$
M3).	$\exists A \neq \theta, B \neq \theta : A\cdot B = \theta$.		

Ejemplos

- Producto de Matrices

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Entonces, solo el producto AB es posible y en tal caso:

$$AB = \begin{pmatrix} 27 & 55 & 31 \\ 17 & 49 & 36 \end{pmatrix}$$

Definición : Producto de un escalar por una matriz.

Para $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\quad \lambda \in \mathbb{K}$, se define el producto $\lambda A = B$, por

$$\lambda A = (b_{ij}) \quad \text{con} \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Propiedades

$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A).$
- $\alpha(A \cdot C) = (\alpha A) \cdot C = A \cdot (\alpha C), \quad \forall C \in M_{n\times p}(\mathbb{K}).$

Matrices

Definición : Transpuesta de una matriz.

Para $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define la **transpuesta de A** como la matriz $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, donde

$$A^t = (b_{ij}) \quad \text{con} \quad b_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Propiedades

$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}$

- $(A^t)^t = A$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$.
- $(C \cdot D)^t = D^t \cdot C^t, \quad \forall C \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), D \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$.

Matrices

Definición :

Una **matriz cuadrada** de n filas y n columnas es una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$.

Se dice que una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es:

- **Triangular superior** si $a_{ij} = 0$, para $i > j$.
- **Triangular inferior** si $a_{ij} = 0$, para $i < j$.
- **Diagonal** si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.
- **Escalar** si es diagonal y $a_{ii} = \lambda$, para $1 \leq i \leq n, \lambda \in \mathbb{K}$.
- **Identidad** si es escalar y $a_{ii} = 1$, para $1 \leq i \leq n$.
- **Simétrica** si $A^t = A$.
- **Antisimétrica** si $A^t = -A$.

Matrices

Observaciones.

- Denotaremos la matriz Identidad de orden n como I_n y cuando no exista confusión la denotaremos por I, además

$$A \cdot I = I \cdot A = A, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K}).$$

- Toda Matriz cuadrada se puede descomponer como suma de una matriz simétrica con una antisimétrica.

Definición: Matrices Invertibles.

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ se dice **invertible (o no singular)** si existe una matriz $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $A \cdot B = I \quad \wedge \quad B \cdot A = I$, donde I denota la matriz identidad.

- La matriz B se llama **inversa de A** y se denota por A^{-1}.
- Si A es invertible, entonces su inversa A^{-1} es única.
- Si A y B son invertibles, entonces AB también lo es y

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Definición: Operaciones Elementales sobre filas

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llaman **operaciones elementales sobre filas** sobre A a las siguientes operaciones.

- Intercambio de dos filas de A, la fila i con la fila j. Se escribe $f_{ij}, \quad i,j \in \{1,2,...,m\}$.
- Multiplicar una fila de A por un escalar α no nulo. Para la fila i se escribe $\alpha f_i, \quad \alpha \in \mathbb{K}$.
- Sumar un múltiplo escalar de una fila a otra. Si a la fila j se suma α veces la fila i, entonces se escribe $f_j + \alpha f_i, \quad \alpha \in \mathbb{K}$.

Matrices

Teorema.

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y F una operación elemental sobre filas cualquiera, entonces

$$F(A) = F(I)\cdot A.$$

Corolarios.

- Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ y F es una operación elemental sobre filas, entonces

$$F(AB) = F(A)\cdot B.$$

- Si $F_1, F_2, ..., F_n$ son operaciones elementales de filas, entonces

$$(F_n \circ \cdots \circ F_2 \circ F_1)(A\cdot B) = (F_n \circ \cdots \circ F_2 \cdot F_1(A))\cdot B.$$

Matrices

Teorema.

Toda operación elemental sobre filas es invertible y su inversa es una operación elemental sobre filas del mismo tipo.

Definición. Matrices equivalentes por filas.

Dos matrices $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ se dicen **equivalentes por filas** si una se obtiene de la otra por aplicación de una o varias operaciones elementales sobre filas.

Teorema.

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es equivalente por filas con I, entonces A es invertible.

Observaciones.

- Si A es invertible y $F_1, ..., F_n$ son operaciones elementales sobre filas que permiten pasar de A a la matriz identidad I, entonces la matriz inversa A^{-1} se obtiene aplicando, en el mismo orden, las operaciones elementales $F_1, ..., F_n$ a la matriz I.

- Para calcular A^{-1} se efectúan las operaciones elementales sobre filas en la matriz ampliada $(A|I)$ hasta obtener la matriz $(I|B)$. En tal caso $B = A^{-1}$.

Matrices

Ejemplo.

Encuentre la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{f_{12}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\begin{array}{c} f_2 - 3f_1 \\ f_3 - 4f_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \overset{f_3 - 4f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right)$$

Matrices

$$\begin{array}{c} f_1+f_2 \\ \frac{1}{13}f_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right) \begin{array}{c} f_1+2f_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_2+3f_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{-15}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right)$$

Así

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -10 & 2 \\ 1 & -15 & 3 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Ejemplo.

Encuentre valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$ sea invertible.

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \overset{\substack{f_2 - 2f_1 \\ f_3 - f_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -2\alpha - 1 & \alpha + 2 \\ 0 & 10 - \alpha & -5 \end{pmatrix} \overset{2f_3 - f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -2\alpha - 1 & \alpha + 2 \\ 0 & 21 & -\alpha - 12 \end{pmatrix}$$

$$\overset{f_{23}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 21 & -\alpha - 12 \\ 0 & -2\alpha - 1 & \alpha + 2 \end{pmatrix} \overset{21f_3 + (2\alpha + 1)f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 21 & -\alpha - 12 \\ 0 & 0 & -2\alpha^2 - 4\alpha + 30 \end{pmatrix}$$

Resolviendo $-2\alpha^2 - 4\alpha + 30 = 0$.

Tenemos que A es invertible si y sólo si, $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq -5$.

Matrices

Notación.

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces designamos por $A_{ij} \in M_{m-1\times n-1}(\mathbb{K})$ a la matriz obtenida de A eliminando la fila i y la columna j.

Definición. Determinante.

Se llama **Función determinante** sobre $\mathbb{K}$ a la función

$$det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad A \longmapsto det(A),$$

tal que:

- Si $n = 1$ y $A = (a)$, entonces $det(A) = a$.
- Si $n \in \mathbb{N}, n > 1$, entonces $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$, para cualquier $i = 1, 2, ..., n$.

Matrices

Notación. También se escribe $det(A) = |A|$.

Propiedades. Para $A \in M_n(\mathbb{K})$ se tiene.

- Si A tiene una fila nula, entonces $det(A) = 0$.
- Si A es una matriz triangular, entonces $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- $det(A^t) = det(A)$.
- Si F es una operación elemental sobre filas que intercambia dos filas de A, es decir, $B = F(A)$, entonces $det(B) = -det(A)$.
- Si F es una operación elemental sobre filas que multiplica una fila de A por un escalar α, es decir, $B = F(A)$, entonces $det(B) = \alpha det(A)$.

Matrices

- Si F es una operación elemental sobre filas que suma un múltiplo escalar α de la fila i a la fila j, es decir, $B = F(A)$, entonces $det(B) = det(A)$.

- Si A tiene dos filas iguales, entonces $det(A) = 0$.

- Si una fila de A es combinación lineal de otras filas de A, entonces $det(A) = 0$.

- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

Observación.

Dado que $det(A^t) = det(A)$, se tiene que todas las propiedades indicadas también valen para las columnas.

Matrices

Definiciones. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- Se llama **Menor** de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz A_{ij}, es decir es el escalar $det(A_{ij})$.
- Se llama **Cofactor** de un elemento a_{ij} al escalar $c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$.
- Si c_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij}, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{ij} = det(A), \quad \text{para cualquier} \quad i = 1, ..., n.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{kj} = 0, \quad k \neq i, \quad \text{para cualquier} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Ejemplo. Calcular

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución. Se procedera por la tercera fila

$$|A| = (+1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2$$

Matrices

- Se llama **Matriz de cofactores** de la matriz A a la matriz que contiene los cofactores de cada elemento a_{ij}. Se escribe $cof(A) = A^c$.

- Se llama **Matriz Adjunta** de la matriz A a la matriz transpuesta de la matriz de cofactores. Se escribe $adj(A) = (A^c)^t$.

Teoremas.

- A es inversible sí y sólo sí $det(A) \neq 0$.

- Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $det(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A).$$

Matrices

Definición. Rango de una matriz.

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llama rango de A al orden de la mayor submatriz cuadrada de A con determinante no nulo. Se escribe $r(A)$.

Observaciones.

- Si A y B son equivalentes por filas, entonces $r(A) = r(B)$.

- Una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ se dice escalonada por filas si el primer elemento no nulo de cada fila de A está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior.

  El número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente por filas con A es igual a $r(A)$.

Ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Notemos que:

$$[A|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{43} & \frac{6}{43} & \frac{8}{43} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{43} & \frac{13}{43} & \frac{3}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{86} & \frac{5}{43} & -\frac{1}{86} \end{array}\right]$$

Matrices

En Consecuencia, A^{-1} existe y es definida por:

$$A^{-1} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 \\ -2 & 13 & 3 \\ 15/2 & 5 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{86}\begin{pmatrix} 18 & 12 & 16 \\ -4 & 26 & 6 \\ 15 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

Alternativamente, como $\det(A) = -86 \neq 0$, la inversa de A existe y $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A)$, es decir:

$$A^{-1} = \frac{1}{-86}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Matrices

Ejemplo.

Sea $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ entonces:

$$r(A) \leq \min\{\text{N}^0 \text{ de filas de } A, \text{N}^0 \text{ de columnas de } A\} = 4.$$

Como $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ se tiene que $3 \leq r(A) \leq 4$.

Matrices

Aplicando, operaciones elementales a A, se tiene:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego no existe ningún subdeterminante de A de orden 4 distinto de cero, en consecuencia $r(A) = 3$.