UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Examen 1 – Tema 1

Fecha: 26–Jun–02; 13:00.

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la corrección

No rellenar

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:
$$\text{Calificación} = \frac{100}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right).$$
- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/RRA/MSC

1. Indique cuáles son los factores $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ que se obtienen si se aplica el método de *Gauss* con pivoteo parcial a la matriz $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$:

   (a) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

   (b) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

   (c) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

   (d) ninguno de los anteriores.

2. Se aplica el método de *Jacobi* el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 100 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{11} \end{pmatrix}.$$

   Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa:**

   (a) el método converge porque la matriz es de diagonal dominante;

   (b) el método converge porque la norma infinito de la matriz de iteración es $\frac{1}{10}$;

   (c) si $\mathbf{e}^{(k)}$ denota el error en el paso k-ésimo, entonces $\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_\infty \leq \frac{1}{10}\|\mathbf{e}^{(k)}\|_\infty$;

   (d) ninguna de las anteriores.

3. Se ajusta por cuadrados mínimos un modelo lineal $\quad y = ax + b \quad$ a la siguiente tabla de valores medidos de $y(x_i)$, $i = 1, \ldots, 5$:

x_i	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	0.026	0.523	1.076	1.637	1.976

   Indique qué expresión minimizan los parámetros a y b:

   (a) $\left[\sum_{i=1}^{5} (ax_i + b - y_i)\right]^2$;

   (b) $\sum_{i=1}^{5} (ax_i + b - y_i)^2$;

   (c) $\sum_{i=1}^{5} \left[(ax_i + b)^2 - y_i^2\right]$;

   (d) ninguna de las anteriores.

4. Se leen los datos de una tabla en dos vectores columna **x** e **y** de la misma longitud y se quiere determinar los parámetros del modelo $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$ que mejor ajustan esos valores en el sentido de cuadrados mínimos. Indique cuál de los siguientes programas MATLAB sirve para este fin:

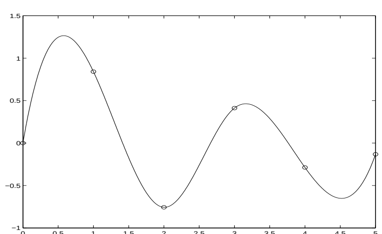
(a)
```
function c=ajuste(x,y)
n=length(x);
A=[zeros(n,1) x -x];
c=A\y;
```

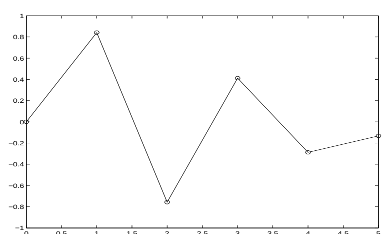
(b)
```
function c=ajuste(x,y)
n=length(x);
A=[ones(n,1) exp(x) exp(-x)];
c=A\y;
```

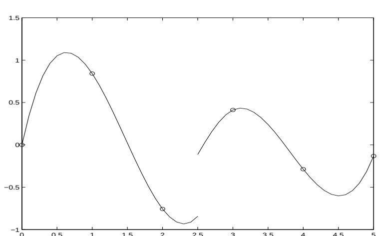
(c)
```
function c=ajuste(x,y)
n=length(x);
A=[ones(n,1) x x.^2];
c=A\y;
```

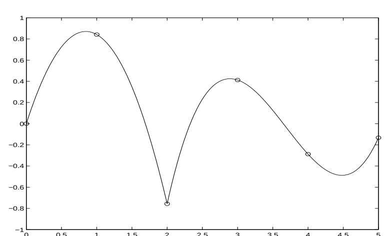
(d) ninguno de los anteriores.

5. Se sabe que una de las siguientes gráficas es la de un *spline* cúbico. Indique de cuál se trata:

(a)


(b)


(c)


(d)


6. Se calcula la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2+1\right)^4 \, dx$ mediante la regla de *Gauss* con 5 puntos. Sea R el error del valor calculado de la integral, $h = 2/5$ y C una constante estrictamente positiva. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(a) $R \approx Ch^2$;
(b) $R \approx Ch^5$;
(c) $R \approx Ch^9$;
(d) ninguna de las anteriores.

7. Indique cuál de los siguientes programas MATLAB calcula la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la regla del punto medio:

(a)
```
function int=PtoMed(f,a,b,N)
h=(b-a)/N;
x=a+h*(0:N);
int=h*(sum(feval(f,x)));
```

(b)
```
function int=PtoMed(f,a,b,N)
h=(b-a)/N;
x=a+h*(1:N-1);
int=h*(sum(feval(f,x)));
```

(c)
```
function int=PtoMed(f,a,b,N)
h=(b-a)/N;
x=a+h*((1:N)-1/2);
int=h*(sum(feval(f,x)));
```

(d) ninguno de los anteriores.

8. Para hallar un punto de intersección de las curvas

$$\begin{cases} y + xy = 1, \\ x^2 - xy = 1, \end{cases}$$

se utiliza el método de *Newton*, cuyo paso de iteración es:

```
xk1=xk-feval('Df',xk)\feval('f',xk);
```

Indique cuáles de los siguientes programas MATLAB permiten evaluar las funciones `f` y `Df`:

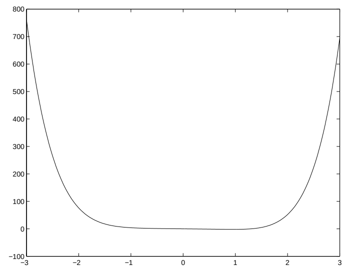
(a)
```
function y=f(x)
y=[x(2)+x(1)*x(2); x(1)^2-x(1)*x(2)];
```
```
function z=Df(x)
z=[x(2) 1; 1 -x(1)];
```

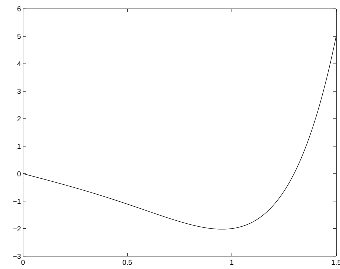
(b)
```
function y=f(x)
y=[x(2)+x(1)*x(2); x(1)^2-x(1)*x(2)];
```
```
function z=Df(x)
z=[x(2) 1+x(1); 2*x(1)-x(2) -x(1)];
```

(c)
```
function y=f(x)
y=[x(2)+x(1)*x(2)-1; x(1)^2-x(1)*x(2)-1];
```
```
function z=Df(x)
z=[x(2) 1+x(1); 2*x(1)-x(2) -x(1)];
```

(d) ninguno de los anteriores.

9. Las siguientes gráficas de la función $f(x) = x^6 - x^3 - 2x$ muestran que ésta alcanza su mínimo cerca del punto $x = 1.0$:





Indique cuál de los siguientes algoritmos permite determinar ese mínimo:

(a) $x_0 = 1.0; \qquad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^6 - x_n^3 - 2x_n}{6x_n^5 - 3x_n^2 - 2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$

(b) $x_0 = 1.0; \qquad x_{n+1} = x_n - \dfrac{6x_n^5 - 3x_n^2 - 2}{30x_n^4 - 6x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$

(c) $x_0 = 1.0; \qquad x_{n+1} = 1.0 - \dfrac{6x_n^5 - 3x_n^2 - 2}{30x_n^4 - 6x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$

(d) ninguno de los anteriores.

10. Considere el problema de determinar una raíz α de una ecuación no lineal $f(x) = 0$. Un método numérico para resolver este problema se dice de orden p ($p > 1$) si la aproximación x_n de la raíz satisface

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C < \infty,$$

o, equivalentemente, si $|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^p$, cuando $x_n \to \alpha$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(a) el método de *Newton-Raphson* y el de la secante son ambos de orden $p = 2$;

(b) el método de *Newton-Raphson* es de orden $1 < p < 2$ y el de la secante de orden $p = 2$;

(c) el método de *Newton-Raphson* es de orden $p = 2$ y el de la secante de orden $1 < p < 2$;

(d) ninguna de las anteriores.

11. Indique cuáles de las siguientes fórmulas corresponden a un método predictor-corrector:

(a) $\begin{cases} \hat{y}_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}); \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \hat{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}); \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \hat{y}_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}), \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}); \end{cases}$

(d) ninguna de las anteriores.

12. Dado el P.V.I.

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

y un valor de N, considere el siguiente método numérico:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

donde $h = \dfrac{1}{N}$ y $x_n = nh$, $n = 0, \ldots, N$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(a) cada paso de este método es más costoso que un paso del método de *Euler* (explícito), pero su orden de convergencia es superior;

(b) cada paso de este método es más costoso que un paso del método de *Euler* (explícito), pero para problemas *stiff* permite utilizar h más grande;

(c) cada paso de este método sería más económico que un paso del método de *Euler* (explícito), pero no hay forma de determinar y_{n+1};

(d) ninguna de las anteriores.

13. La fórmula del método de *Adams-Bashforth* de orden 4 es la siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f_i - 59f_{i-1} + 16f_{i-2} - 9f_{i-3}\right),$$

donde $f_k = f(x_k, y_k)$. Indique de cuál de las siguientes formas pueden calcularse los valores de y_1, y_2 e y_3, a fin de que el error global del método sea $\mathcal{O}(h^4)$:

(a) por el método de *Runge-Kutta* de orden 4;

(b) por el método de *Adams-Moulton* de orden 4: $y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{24}\left(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right);$

(c) por el mismo método de *Adams-Bashforth* de orden 4;

(d) ninguna de las anteriores.

14. Considere el siguiente problema de valores de contorno, donde a y b son constantes ($b \ge 0$):

$$\begin{cases} -y'' + ay' + by = f(x), & 0 < x < 1, \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta. \end{cases}$$

Dado un valor de N, sea $h = \dfrac{1}{N+1}$ y sean $x_i = ih$, $f_i = f(x_i)$, para $i = 0, \ldots, N+1$. Indique cuál de los siguientes es un esquema válido para obtener una aproximación de la solución de este problema, $y_i \approx y(x_i)$:

(a) $-\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + a\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + by_i = f_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \qquad y_0 = \alpha, \quad y_{N+1} = \beta;$

(b) $\begin{cases} y_0^{(1)} = \alpha, \\ y_0^{(2)} = \beta, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{i+1}^{(1)} = y_i^{(1)} + hy_i^{(2)}, \\ y_{i+1}^{(2)} = y_i^{(2)} + h\left(ay_i^{(2)} + by_i^{(1)} - f_i\right), \end{cases} \qquad i = 0, \ldots, N;$

(c) $y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{a}\left(f_i - by_i + y_i''\right), \qquad i = 1, \ldots, N, \qquad y_0 = \alpha, \quad y_0'' = \alpha'';$

(d) ninguno de los anteriores.

15. Un meteorito de masa $m = 1.345 \times 10^9$ kg que cae verticalmente sobre la tierra, ingresa a la atmósfera terrestre a 5.43×10^4 m de altura sobre su superficie y a una velocidad de descenso de 0.57×10^3 m/s. La ecuación que rige su caída es la siguiente:

$$\begin{cases} my'' + (b - cy)y' + \dfrac{mK}{(y+R)^2} = 0, \\ y(0) = 5.43 \times 10^4, \quad y'(0) = 0.57 \times 10^3, \end{cases}$$

donde y es la altura del meteorito sobre la superficie de la tierra, $K = 3.98 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3kg/s^2}$ es la constante de gravitación terrestre, $R = 6.371 \times 10^6$ m es el radio de la tierra y $(b - cy)$ es la resistencia del aire, con $b = 1.230 \times 10^7/\mathrm{s}$ y $c = 2.265 \times 10^2/\mathrm{m}$.

Al cabo de 12.37 s el meteorito se desintegra. Se quiere determinar la altura y la velocidad en ese instante, para lo cual se utiliza el siguiente comando MATLAB:

```
[t,y]=ode45('F',[0 12.37],[5.43e4; -0.57e3]);
```

Indique cuál de las siguientes funciones `F` debe utilizarse:

(a)
```
function Z=F(Y)
m=1.345e9;
K=3.98e14;
R=6.371e6;
b=1.230e7;
c=2.265e2;
Z=[-K/(Y+R)^2-(b-c*Y)*Y'/m];
```

(b)
```
function Z=F(t,Y)
m=1.345e9;
K=3.98e14;
R=6.371e6;
b=1.230e7;
c=2.265e2;
Z=[-K/(Y(1)+R)^2-(b-c*Y(1))*Y(2)/m];
```

(c)
```
function Z=F(t,Y)
m=1.345e9;
K=3.98e14;
R=6.371e6;
b=1.230e7;
c=2.265e2;
Z=[Y(2); -K/(Y(1)+R)^2-(b-c*Y(1))*Y(2)/m];
```

(d) ninguna de las anteriores.