Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Complemento de Cálculo
(521234)
Primer Certamen

16 – Mayo – 1997

Problema 1: Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, para $-\pi < x \leq \pi$.

1.- Construya su serie de Fourier y dibuje su gráfico.

2.- Evalue dicha serie en $x = 0$ y $x = \pi$, y luego calcule las sumas $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+4}$ y $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2+4}$.

30 puntos

Problema 2: Considere la siguiente una ecuación del calor :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{c^2}{x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

donde c y L son constantes, $u = u(x,t)$ es la solución buscada, y $f = f(x)$ es una función dada.

1.- Utilizando el método de separación de variables, escriba $u(x,t) = F(x)G(t)$ de modo que $F(x)$ sea solución de la ecuación $F''(x) + \lambda^2 x F(x) = 0$.

2.- Haciendo el cambio de variable $F(x) = \sqrt{x}U(x)$ y luego haciendo $z = \frac{2}{3}\lambda x^{3/2}$, determine F en términos de las funciones de Bessel de orden un tercio $J_{1/3}(z)$, y de orden menos un tercio $J_{-1/3}(z)$.

3.- Suponga que $J_{1/3}(0) = 0$, y que $\lim_{x\to 0^+} \lambda^{1/3}\sqrt{x}J_{-1/3}(\frac{2}{3}\lambda x^{3/2}) = 1.065084$, para todo $\lambda \neq 0$ (no lo demuestre). Luego deduzca que $F(x)$ se escribe sólo en términos de la función de Bessel de orden 1/3.

Suponga la siguiente relación de ortogonalidad (no la demuestre) :

$$\int_0^L x J_{1/3}(\frac{\beta_n x}{L}) J_{1/3}(\frac{\beta_m x}{L}) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{L^2}{2} J_{4/3}^2(\beta_n) & \text{si } m = n, \end{cases}$$

donde $J_{4/3}(z)$ es la función de Bessel de orden 4/3 y $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2.902586$, $\beta_3 = 6.03274, \ldots$, son las raíces de la función de Bessel de orden 1/3.

4.- Utilice esta relación de ortogonalidad para calcular los coeficientes de la serie, y determine $u(x,t)$.

40 puntos

Problema 3: Considere el siguiente problema de Laplace para el potencial $u = u(x,y)$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{para } (x,y) \in \Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x^2 - y^2 \leq 1 \ \& \ 0 \leq 2xy \leq 1\}, \\ u(x,0) = u(x, \frac{1}{2x}) = u(x, \pm\sqrt{x^2-1}) = 0, & \text{para } -1 \leq x \leq 1, \\ u(x,x) = 2x^2, & \text{para } -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

1.- Dibuje la región $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, y haciendo el cambio de variable $z = x^2 - y^2$, $w = 2xy$, deduzca $\Delta u(x,y) = 4(x^2+y^2)\Delta u(z,w)$.

2.- Utilizando este cambio $(x,y) \mapsto (z,w)$ y el método de separación de variables, calcule el potencial $u = u(x,y)$ en términos de una serie de funciones propias.

30 puntos

Duración del certamen : 2 horas
MSC