UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Guía N°7: Sistemas de Ecuaciones Lineales
Métodos Iterativos
Cálculo Numérico 521230, 2017-2

1. Considere el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Notar que la solución exacta del sistema es $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   a) Verificar que $\mathbf{A}$ es diagonal dominante estricta.
   b) Realizar dos iteraciones del Método de Jacobi comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   c) Realizar dos iteraciones del Método de Gauss-Seidel comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Considere el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Notar que la solución exacta del sistema es $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   a) Verificar que $\mathbf{A}$ es diagonal dominante estricta.
   b) Realizar dos iteraciones del Método de Jacobi comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   c) Realizar dos iteraciones del Método de Gauss-Seidel comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Considere el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Notar que la solución exacta del sistema es $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a) ¿Es $\mathbf{A}$ es diagonal dominante estricta?. ¿Es $\mathbf{A}$ simétrica y definida positiva?
   b) ¿Cuál método iterativo recomendaría para resolver el sistema?.
   c) Realizar dos iteraciones del método recomendado en la pregunta anterior, comenzando con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. En la página web del curso se encuentran dos funciones MATLAB que resuelven $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ utilizando los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Ellas son `jacobisol.m` y `gaussseidelsol.m`.
   a) Utilícelos para comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores.
   b) Además, en cada ejercicio, considere `maxiter = 100`.
5. Se quiere resolver, mediante un esquema iterativo, el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Se descompone $\mathbf{A}$ como: $\mathbf{A} = \mathbf{N} - \mathbf{P}$ con $\mathbf{N}$ invertible y sabemos que el algoritmo del esquema general es:

Dado el vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$,
for $k = 1, 2, \ldots$
| $\quad \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{P}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$,
end

Además, recordemos que la matriz de iteración se define como $\mathbf{M} := \mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}$.

a) Considere $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 \\ 1 & -5/3 \end{pmatrix}$. Realizar cuatro iteraciones del esquema general partiendo con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿El algoritmo converge? ¿Por qué?.**Indicación:** Analizar la matriz de iteración y notar que la solución exacta del sistema es $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Considere $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Realizar cuatro iteraciones del esquema general con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿El algoritmo converge? ¿Por qué?.