UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA DE CORRECCIÓN. EVALUACIÓN 1.
CÁLCULO III. 525211.

1. Sea C el conjunto definido por

$$C = \{(x, 1/n) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, n],\ n \in \mathbb{N}\}$$

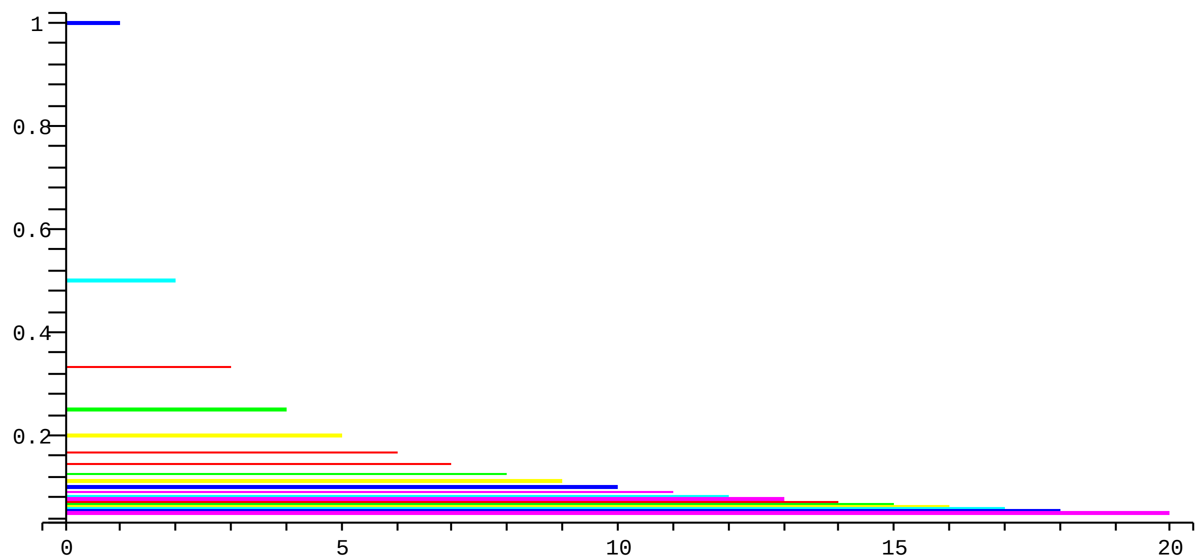
a) (0.5 pts.) Haga un bosquejo del conjunto C en $\mathbb{R}^2$.

b) (1 pt.) Determine el interior, la frontera, y la cerradura de C en $\mathbb{R}^2$.

c) (0.5 pts.) ¿ La cerradura de C es compacta ? Justifique su respuesta.

Solución

a)



b) i) **El interior de C es vacío**

$$\mathrm{Int}(C) = \emptyset.$$

En efecto, sea $(x_0, \frac{1}{n})$ un elemento de C, para algún $n \in \mathbb{N}$, y $0 < x_0 < n$. Para todo $\varepsilon > 0$, la bola $B((x_0, \frac{1}{n}), \varepsilon)$ no está nunca contenida en C : efectivamente, si $\delta = \frac{1}{2}\min(\varepsilon, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$, entonces $(x_0, \frac{1}{n} - \delta) \in B((x_0, \frac{1}{n}), \varepsilon) \setminus C$. Luego ningún elemento de C es interior.

ii) **La frontera de C, está dada por**

$$\mathrm{Fr}(C) = C \cup [0, +\infty) \times \{0\} = C \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x < +\infty\}.$$

En efecto, sea $(x_0, \frac{1}{n})$ un elemento de C, para algún $n \in \mathbb{N}$, y $0 < x_0 < n$. Para todo $\varepsilon > 0$, la bola perforada $B^*((x_0, \frac{1}{n}), \varepsilon) = B((x_0, \frac{1}{n}), \varepsilon) \setminus \{(x_0, \frac{1}{n})\}$ contiene siempre un elemento de C :

$$(x_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}) \in C \cap B^*((x_0, \frac{1}{n}), \varepsilon),$$

(donde $\pm\varepsilon$ es igual a $+\varepsilon$, o $-\varepsilon$, según convenga), y otro que no está en C :

$$(x_0, \frac{1}{n} - \delta) \in B^*((x_0, \frac{1}{n}), \varepsilon) \setminus C.$$

Luego todo punto de C es punto frontera.
Por otro lado, sea $(x_0, 0)$, un elemento de $[0, +\infty) \times \{0\}$. Para todo $\varepsilon > 0$, la bola perforada $B^*((x_0, 0), \varepsilon) = B((x_0, 0), \varepsilon) \setminus \{(x_0, 0)\}$ contiene siempre un elemento de C :

$$(x_0, \frac{1}{n}) \in C \cap B^*((x_0, 0), \varepsilon), \text{ donde } n = \max\left(x_0, \frac{1}{\varepsilon}\right) + 1,$$

y otro que no está en C :

$$(x_0, -\frac{\varepsilon}{2}) \in B^*((x_0, 0), \varepsilon) \setminus C.$$

Luego $(x_0, 0)$ también es punto frontera para todo $x_o \geq 0$.
Ningún otro punto es punto frontera, ya que fuera de este conjunto siempre se puede construir una bola de centro dicho punto y radio suficiente mente pequeño de modo que no contenga ningún punto de C.

iii) Como el interior de C es vacío entonces **la cerradura de C es necesariamente igual a la frontera de C**, es decir :

$$\overline{C} = C \cup [0, +\infty) \times \{0\}.$$

c) **La cerradura de C no es compacta**, ya que $\overline{C}$ no es acotado (pues $[0, +\infty) \times \{0\}$ no lo es).

---

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) (0.8 pts.) Asuma que f es continua en $(0, 0)$; estudie la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

b) (0.8 pts.) Pruebe que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$, y que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$.

c) (0.4 pts.) ¿ f es de clase $\mathcal{C}^2$ en $(0, 0)$? Justifique su respuesta.

Solución

a) Diferenciabilidad de C. Calculemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Luego, de ser f diferenciable, necesariamente $df(0, 0) \equiv 0$. Sea $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - df(0, 0)h}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h_1 h_2(h_1^2 - h_2^2)}{h_1^2 + h_2^2} - 0 - 0}{\|h\|} = \lim_{h_1, h_2 \to 0} \frac{h_1 h_2(h_1^2 - h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

en efecto :

$$\left| \frac{h_1 h_2(h_1^2 - h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \left| \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right| + \left| \frac{h_1 h_2^3}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq |h_1| + |h_2| \to 0,$$

cuando $h_1, h_2 \to 0$. **Luego f es diferenciable en (0,0) y $df(0, 0) \equiv 0$.**

b) Si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Luego, por definición,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = -1.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2) - 2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Luego,

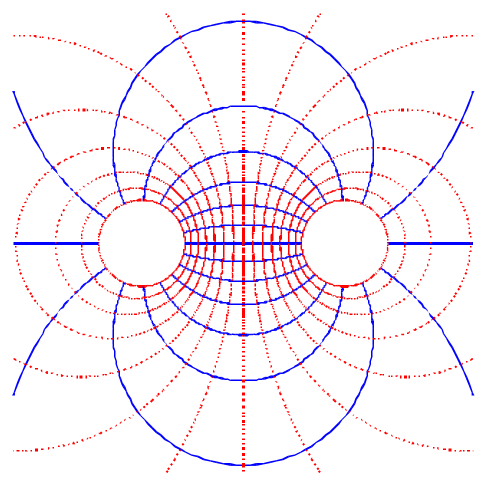
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1.$$

c) Un corolario del Teorema de Schwarz, dice que si f es de clase $\mathcal{C}^2$, entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Pero como no se verifica esa igualdad en $(0,0)$, entonces f **<u>no</u> es de clase $\mathcal{C}^2$ en** $(0,0)$.

---

3. Considere la siguiente función biyectiva llamada *"cambio de variables en coordenadas bipolares"* :

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}\times[0,2\pi) & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho,\theta) & \mapsto & (x,y) = \left(\frac{\sinh\rho}{\cosh\rho - \cos\theta}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cosh\rho - \cos\theta}\right). \end{array}$$



a) (1 pt.) Calcule la matriz jacobiana de φ, y de φ^{-1}.

b) (1 pt.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. A partir de la matriz jacobiana de φ^{-1}, calcule el gradiente de $f = f(x,y)$ en coordenadas bipolares, es decir calcule $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})^t$, en términos de ρ, θ, $\frac{\partial f}{\partial \rho}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Solución

a)

$$J\varphi(\rho,\theta) = \frac{1}{(\cosh\rho - \cos\theta)^2}\begin{bmatrix} -\cosh\rho\cos\theta + 1 & -\sinh\rho\sin\theta \\ -\sinh\rho\sin\theta & \cosh\rho\cos\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$\operatorname{Det}(J\varphi(\rho,\theta)) = -\frac{1}{(\cosh\rho - \cos\theta)^2}$$

Con lo cuál

$$J\varphi^{-1}(\rho,\theta) = \left([J\varphi(\rho,\theta)]^{-1}\right)^t = \begin{bmatrix} -\cosh\rho\cos\theta + 1 & -\sinh\rho\sin\theta \\ -\sinh\rho\sin\theta & \cosh\rho\cos\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

b) Por el teorema de la regla de la cadena, se tiene que

$$\nabla_{x,y} f = \left([J\varphi(\rho,\theta)]^{-1} \right)^t \nabla_{\rho,\theta} f$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cosh\rho\cos\theta + 1 & -\sinh\rho\sin\theta \\ -\sinh\rho\sin\theta & \cosh\rho\cos\theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

es decir,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = (-\cosh\rho\cos\theta + 1)\dfrac{\partial f}{\partial \rho} + (-\sinh\rho\sin\theta)\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = (-\sinh\rho\sin\theta)\dfrac{\partial f}{\partial \rho} + (\cosh\rho\cos\theta - 1)\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \end{cases}$$

MSC/msc

(23-Abril-2004)