UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Espacios Vectoriales con Producto Interior

Consideraremos, en este capítulo, espacios vectoriales sobre el cuerpo K de los números reales ($K = I\!R$)

DEFINICION.

Sea V un espacio vectorial sobre K. Una aplicación $<,>: V \times V \to K$ se dice un producto interior sobre V si verifica:

a) $< v, v > \geq 0 \quad \forall v \in V, \quad < v, v >= 0 \Longleftrightarrow v = \theta$

b) $\forall v_1, v_2, \quad w \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in K$
$< \alpha v_1 + \beta v_2, w >= \alpha < v_1, w > + \beta < v_2, w >$

c) $< v, w >=< w, v > \quad \forall v, \ w \in V$

observación en el caso en que el cuerpo K sea el conjunto de los números complejos, entonces la condición c) anterior se transforma en:

c) $< v, w >= \overline{< w, v >} \quad \forall v, \ w \in V$;

donde $\overline{\alpha}$ indica el complejo conjugado del número complejo α

Ejemplos
1.- Sea $\mathcal{M}_{m\times n}(I\!R)$ el espacio vectorial de las matrices de orden $m \times n$ sobre $I\!R$. La aplicación.

$$<,>: \mathcal{M}_{m\times n} \to I\!R$$

definida por

$$< A, B >= tr(B^t A)$$

es un producto interior.

En efecto:

a) $< A, A >= tr(A^t A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} < A, A >= 0 \quad &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 = 0 \Longleftrightarrow a_{ij}^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow a_{ij} = 0, \quad i = 1, \cdots, m \quad j = 1, \cdots, n \\ &\Longleftrightarrow A = \theta \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} <\alpha A+\beta B, C> &= tr(C^t(\alpha A+\beta B)) \\ &= tr(\alpha C^t A+\beta C^t B) \\ &= tr(\alpha C^t A)+tr(\beta C^t B) \\ &= \alpha tr(C^t A)+\beta tr(C^t B) \\ &= \alpha <A, C> +\beta <B, C> \end{aligned}$$

c) $<A, B>= tr(B^t A) = tr[(B^t A)^t] = tr(A^t B) =<B, A>$

2.- Sea $C[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a, b]$ en $I\!R$; es decir,

$$C[a, b] = \{f \ / \ f : [a, b] \longrightarrow I\!R, \quad f \text{ es continua}\}$$

La aplicación

$$<,>: C[a, b] \times C[a, b] \to I\!R$$
$$<f, g>= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

es un producto interior. En efecto: usando las propiedades de integral definida se tiene:

a) $<f, f>= \int_a^b f(x)f(x)dx = \int_a^b (f(x))^2 dx \geq 0$

$$\begin{aligned} <f, f>= 0 &\iff \textstyle\int_a^b (f(x))^2)dx = 0 \\ &\iff (f(x))^2 = 0 \qquad \forall x \in [a, b] \\ &\iff f(x) = 0 \qquad \forall x \in [a, b] \\ &\iff f = 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} <\alpha f+\beta g, h> &= \textstyle\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)h(x)dx \\ &= \textstyle\int_a^b (\alpha f(x)h(x)+\beta g(x)h(x))dx \\ &= \textstyle\int_a^b \alpha f(x)h(x)dx + \int_a^b \beta g(x)h(x))dx \\ &= \alpha \textstyle\int_a^b f(x)h(x)dx + \beta \int_a^b g(x)h(x)dx \\ &= \alpha <f, h> +\beta <g, h> \end{aligned}$$

c) $<f, g>= \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx =<g, f>$

DEFINICION. Si V es un espacio vectorial con producto interior sobre $I\!R$, se dice que V es **euclidiano**.

DEFINICION. Sea V un espacio vectorial con producto interior, y sea $v \in V$, se llama **norma** (o longitud) del vector v al número $||v|| = \sqrt{< v, v >}$

PROPIEDADES.

1) $||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = \theta$

$$\sqrt{< v, v >} = 0 \Longleftrightarrow < v, v >= 0 \Longleftrightarrow v = \theta$$

2) $||\alpha v|| = |\alpha| ||v||$

$||\alpha v|| = \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} < v, v >} = \sqrt{|\alpha|^2 < v, v >} = |\alpha| \sqrt{< v, v >} =$

$|\alpha| ||v||$

3) $\forall v, w \in V, \quad | < v, w > | \leq ||v|| ||w||$ desigualdad de Cauchy-Schwartz.

4) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ desigualdad triangular

DEFINICION. Sea V un $I\!K$-espacio vectorial con producto interior

a) $v, w \in V$, **v es ortogonal a w** si $< v, w >= 0$

b) un subconjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V es un conjunto ortogonal si $< v_i, v_j >= 0 \quad \forall i \neq j$.

c) un subconjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V es un conjunto ortonormal si es un conjunto ortogonal y $||v_i|| = 1 \qquad \forall i = 1 \cdots, n$.

LEMA. Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Demostración.

Sea $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \theta$, entonces para cada $j = 1....n$, se tiene que:

$$< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \quad v_j >= 0$$

Luego $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < v_i, v_j >= 0$, y como los v_j son ortogonales se tiene $\alpha_j ||v_j||^2 = 0$. Como $v_j \neq \theta$, se tiene que $\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \cdots, n$. Luego $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un conjunto linealmente indepediente.

COROLARIO.

Si un vector w es combinación lineal de un conjunto ortogonal de vectores no nulos $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ entonces w es igual a la combinación lineal particular

$$w = \sum_{k=1}^{n} \frac{< w, x_k >}{||x_k||^2} x_k$$

Demostración. Supongamos $w = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n$

Para cada $k = 1, \cdots, n$, se tiene
$< w, x_k >= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j < x_j, x_k >$
por ortogonalidad se tiene que:

$$< w, x_k >= \alpha_k < x_k, x_k >= \alpha_k ||x_k||^2$$

Luego

$$\alpha_k = \frac{< w, x_k >}{||x_k||^2}, \quad k = 1, \cdots, n$$

Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea v un espacio vectorial con producto interior y sean $x_1, x_2, \cdots, x_m$ vectores linealmente independiente cualquiera de V.

Entonces se prueba que se pueden construir vectores ortogonales $y_1, y_2, \cdots, y_m$ en V tales que para cada $k = 1, \cdots, m$

$$gen\{y_1, y_2, \cdots, y_k\} = gen\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$$

donde los vectores $y_1, y_2, \cdots, y_k$ se construyen a partir de los vectores $x_1, x_2, \cdots, x_k$ de la siguiente manera:

$$y_1 = x_1$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{< x_{k+1}, y_j >}{||y_j||^2} y_j$$

Ejemplo 1 (para $n = 4$)

Si V es un espacio vectorial con producto interior y x_1, x_2, x_3, x_4 son vectores linealmente independiente de V, entonces los vectores ortogonales construidos con el proceso anterior son:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= x_2 - \tfrac{<x_2, y_1>}{||y_1||^2} y_1 \\
y_3 &= x_3 - \tfrac{<x_3, y_1>}{||y_1||^2} y_1 - \tfrac{<x_3, y_2>}{||y_2||^2} y_2 \\
y_4 &= x_4 - \tfrac{<x_4, y_1>}{||y_1||^2} y_1 - \tfrac{<x_4, y_2<}{||y_2||^2} y_2 - \tfrac{<x_4, y_3>}{||y_3||^2} y_3
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Sean $x_1 = (3,0,4)$, $x_2 = (-1,0,7)$, $x_3 = (2,9,11)$ en $I\!R^3$ con el producto interno canónico ($<(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)>= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$, equvalente al producto punto para vectores en $I\!R^3$ visto en clases). Aplicando proceso de Gram Schmidt se obtienen los vectores:

$$\begin{aligned}
y_1 &= (3,0,4) \\
y_2 &= (-1,0,7) - \tfrac{<(-1,0,7),(3,0,4)>}{25}(3,0,4) \\
&= (-1,0,7) - \tfrac{25}{25}(3,0,4) \\
y_2 &= (-1,0,7) - (3,0,4) = (-4,0,3) \\
y_3 &= (2,9,11) - \tfrac{<(2,9,11),(3,0,4)>}{25}(3,0,4) - \tfrac{<(2,9,11),(-4,0,3)}{25}(-4,0,3) \\
&= (2,9,11) - 2(3,0,4) - (-4,0,3) = (0,9,0)
\end{aligned}$$

y_1, y_2, y_3 son no nulos ortogonales 2 a 2 y por lo tanto $\{y_1.y_2, y_3\}$ es una base ortogonal para $I\!R^3$

Para expresar un vector como combinación lineal de los vectores de esta base basta usar el corolario último:

$$\begin{aligned}
v = (v_1, v_2, v_3) &= \textstyle\sum_{k=1}^{3} \tfrac{<v,y_k>}{||y_k||^2} y_k = \\
&= \tfrac{<v,y_1>}{||y_1||^2} y_1 + \tfrac{<v,y_2>}{||y_2||^2} y_2 + \tfrac{<v,y_3>}{||y_3||^2} y_3 \\
&= \tfrac{3v_1+4v_3}{25} y_1 + \tfrac{-4v_1+3v_3}{25} y_2 + \tfrac{9v_2}{81} y_3
\end{aligned}$$

En particular

$$v = (1,2,3) = \frac{3}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 + \frac{2}{9}y_3$$

Ejemplo 3

Sea V el espacio de las funciones polinomiales reales de grado menor o igual que 3 con el producto interior $<,>: V \times V \to I\!R$ definido por

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)\ g(x)\ dx$$

Sabemos que $B = \{x, x, x^2, x^3\}$ es una base de V. Aplicamos a B el proceso de Gram Schmidt.

Sean $x_1 = 1, x_2 = x,\ x_3 = x^2,\ x_4 = x^3$.

Hacemos $y_1 = x_1 = 1$ y

$y_2 = x_2 - \frac{<x_2,y_1>}{||y_1||^2} y_1$

$= x - (\int_0^1 x(1)dx)1 = x - \frac{1}{2}$

$||y_2||^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})dx = \frac{1}{12}$

De esta manera,

$y_3 = x_3 - \frac{<x_3, y_2>}{||y_2||^2} y_2 - \frac{<x_3, y_1}{||y_1||^2} y_1$

$= x^2 - 12 \int_0^1 x^2(x - \frac{1}{2})dx \ (y_2) - \int_0^1 x^2 1dx \ (y_1)$

$= x^2 - 12(\frac{1}{4} - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{3}$

$= x^2 - (x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}$

Luego,

$$||y_3||^2 = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 dx = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^2(x - \frac{1}{6}) + (x - \frac{1}{6})^2\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{36}\right) dx = \frac{1}{180}$$

Y así,

$y_4 = x_4 - \frac{<x_4, y_3>}{||y_3||^2} y_3 - \frac{<x_4, y_2>}{||y_2||^2} y_2 - \frac{<x_4, y_1<}{||y_1||^2} y_1$

$$y_4 = x^3 - 180 \int_0^1 x^3(x^2 - x + \frac{1}{6})dx \ (y_3) - 12 \int_0^1 x^3(x - \frac{1}{2})dx \ (y_2)$$

$$- \int_0^1 (x^3 1))dx \ (y_1)$$

$= x^3 - 180(\frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{24})(x^2 - x + \frac{1}{6}) - 12(\frac{1}{5} - \frac{1}{8})(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}1$

$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}$

Con lo que,

$$||y_4||^2 = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^1 \left[(x^3 - \frac{3}{2}x^2)^2 + 2(x^3 - \frac{3}{2}x^2)(\frac{3}{5}x - \frac{1}{20}) + (\frac{3}{5}x - \frac{1}{20})^2\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^6 - 3x^5 + \frac{9}{4}x^4 + \frac{6}{5}x^4 - \frac{1}{10}x^3 - \frac{9}{5}x^3 + \frac{3}{20}x^2 + \frac{9}{25}x^2 - \frac{3}{50}x + \frac{1}{400}\right] dx$$

$= \frac{1}{2800}$

Luego $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ es una base ortogonal de V.

observación Se sabe que al dividir un vector por su norma se puede obtener un vector de norma 1. Esto lleva al siguiente resultado:

COROLARIO Todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base ortonormal.

08.11.2004
ADP/cln