UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Complemento de Cálculos (MAT. 521234)

Guía de Ejercicios No 2.

1. Construir la SF 2π-periódica asociada a $f(x) = x$ sobre $-\pi < x < \pi$. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$. Análogamente, usar la SF asociada a una función conveniente $g(x)$, tal que el Teorema de Parseval le permita establecer el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

2. Determine la convergencia de la Serie de Fourier en los puntos de discontinuidad de la extensión 2π periódica de $f(x) = x$ sobre $-\pi < x < \pi$ y $g(x) = x + |x|$. Para cada una de esas funciones indique a que función convergen las Series de Fourier de Cosenos y Senos, respectivamente.

3. Encontrar los valores propios reales y sus funciones propias asociadas a cada uno de los siguientes problemas de Sturm-Liouville.

   a) $\begin{array}{l} y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0 \\ y(0) = 0 \qquad y(1) = 0 \end{array}$

   b) $\begin{array}{l} y'' + 4y' + (4+9\lambda)y = 0 \\ y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0 \end{array}$

4. *a)* Verifique que $\lambda = -1$ es valor propio, con función propia asociada $y(x) = e^x$ del problema de Sturm-Liouville.

   $$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(0), \quad y(\pi) = y'(\pi) \tag{1}$$

   b) Demuestre que $\lambda = 0$ no es valor propio del problema de Sturm-Liouville (1).

   c) Determine los valores propios positivos y las auto-funciones asociadas al problema de Sturm-Liouville (1).

5. Considere el problema de valores de contorno:

   $$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y(1) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0.$$

   Determinar los valores propios reales no negativos y las correspondientes funciones propias. Observe que hay dos funciones propias linealmente independientes para cada uno de los valores propios positivos y las condiciones de contorno no son separadas.

6. Determinar los valores propios y funciones propias asociadas al Problema de Valores de Contorno:

   $$y'' + \frac{\lambda y}{(x+1)^2} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

   Observar que la ecuación diferencial es del tipo de Euler. Definir $x + 1 = e^t, \quad z(t) = y(x)$

7. Considere el Problema de Sturm-Liouville Singular:

$$\frac{d}{dx}[r(x)y'] + (\lambda p(x) - q(x))y(x) = 0, \quad r(0) = r(L) = 0$$

donde p, q, r son funciones continuas no negativas sobre $[0, L]$ con r derivable y p positiva sobre $(0, L)$.

a) Demuestre que si u y v son dos funciones propias asociadas a los valores propios α y β, respectivamente, entonces $\int_0^L p(x)u(x)v(x)dx = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

b) Escribir como un problema de Sturm-Liouville singular las siguientes ecuaciones diferenciales de:

1) Laguerre: $xX'' + (1-x)X' + nX = 0, \qquad x > 0$
2) Hermite: $X'' - 2xX' + 2nX = 0, \qquad -\infty < x < \infty$
3) Tchevyshev: $(1-x^2)X'' - xX' + n^2X = 0, \qquad -1 \leq x \leq 1$
4) Legendre: $(1-x^2)X'' - 2xX' + n(n+1)X = 0, \qquad -1 \leq x \leq 1$

En cada caso indique la relación de ortogonalidad que verifican sus funciones propias asociadas.

8. En el estudio de vibraciones transversales de una barra uniforme elástica de longitud L, se deduce la ecuación diferencial.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \lambda^4 y = 0,$$

donde $y(x)$ es el desplazamiento transversal y $\lambda^4 = m\omega^2/EI$; m es la masa por la unidad de longitud de la varilla, E es el Módulo de Young (1773-1829) (una constante característica del material), I es el momento de inercia de la sección transversal respecto a un eje que pasa por el centroide, perpendicular al plano de vibración y ω es la frecuencia de vibración. Las condiciones en la frontera en cada uno de los extremos, son generalmente uno de los siguientes tipos:

$$\begin{array}{ll} y = y' = 0 & \text{(extremo empotrado)} \\ y = y'' = 0 & \text{(extremo simplemente apoyado o articulado)} \\ y'' = y''' = 0 & \text{(extremo libre)} \end{array}$$

Para los siguientes tres casos, determinar las funciones propias y la ecuación satisfecha por los valores propios de este problema con valores en la frontera, de cuarto orden. Suponga que los valores propios son reales y positivos.

a) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(L) = y''(L) = 0$
b) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(L) = y''(L) = 0$
c) $y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(L) = y'''(L) = 0$

HMM/FPV/fpv.
06 de Septiembre de 2007.