UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 1
ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL (520142) (26/04/2004).

P1. Sea $\rhd$ el conectivo lógico definido por la siguiente equivalencia lógica:

$$p \rhd q \Longleftrightarrow \sim (p \longrightarrow q)$$

a) Demuestre la tautología: $p \rhd (p \rhd q) \Longleftrightarrow p \wedge q$. **(8 Ptos.)**

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos del conjunto universo U.

b) Demuestre que: $\forall x \in U, \quad x \in (A - B) \Longleftrightarrow (x \in A) \rhd (x \in B)$. **(6 Ptos.)**

c) Pruebe que: $A - (A - B) = A \cap B$. **(6 Ptos.)**

Solución

a) i) Usando tablas de verdad:

p	q	p $\longrightarrow$ q	$\sim$ (p $\longrightarrow$ q)	p $\rhd$ q	p $\rhd$ (p $\rhd$ q)	p $\wedge$ q
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
		2 Ptos.	**1 Pto.**	**1 Pto.**	**2 Ptos.**	**1 Pto.**

Luego, como la última y penúltima columnas de la tabla son iguales, queda demostrada la equivalencia. **(1 Pto.)**

ii) Ahora usando equivalencias lógicas:

$$\begin{array}{rcll} \sim (p \longrightarrow q) & \Longleftrightarrow & \sim (\sim p \vee q) & (p \longrightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q) \quad \textbf{(1 Pto.)} \\ & \Longleftrightarrow & p \wedge \sim q & (\text{Ley de Morgan}) \quad \textbf{(1 Pto.)} \end{array}$$

Así, $A - (A - B) = A \cap B$.

$$\begin{array}{rcll} p \rhd (p \rhd q) & \Longleftrightarrow & p \rhd (p \wedge \sim q) & (\text{Definición}) \quad \textbf{(1 Pto.)} \\ & \Longleftrightarrow & p \wedge \sim (p \wedge \sim q) & (\text{Definición}) \quad \textbf{(1 Pto.)} \\ & \Longleftrightarrow & p \wedge (\sim p \vee q) & (\text{Ley de Morgan}) \quad \textbf{(1 Pto.)} \\ & \Longleftrightarrow & (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) & (\text{Distributividad}) \quad \textbf{(1 Pto.)} \\ & \Longleftrightarrow & F \vee (p \wedge q) & (p \wedge \sim p \text{ es F}) \quad \textbf{(1 Pto.)} \\ & \Longleftrightarrow & p \wedge q & (F \vee p \Longleftrightarrow p) \quad \textbf{(1 Pto.)} \end{array}$$

b)

$$
\begin{array}{rcll}
x \in (A - B) & \Longleftrightarrow & x \in A \,\wedge\, x \notin B & (\text{Definición de } A - B) \quad \textbf{(1 Pto.)}\\
& \Longleftrightarrow & x \in A \wedge \sim (x \in B) & (\text{Definición de } \notin) \quad \textbf{(1 Pto.)}\\
& \Longleftrightarrow & \sim [(x \in A) \longrightarrow (x \in B)] & (\sim (p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)) \quad \textbf{(2 Pto.)}\\
& \Longleftrightarrow & (x \in A) \rhd (x \in B) & (\text{Definición de } \rhd) \quad \textbf{(2 Pto.)}
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{rcll}
A - (A - B) & = & A - (A \cap B^c) & (\text{Equivalencia de } A - B) \quad \textbf{(1 Pto.)}\\
& = & A \cap (A \cap B^c)^c & (\text{Equivalencia de } A - B) \quad \textbf{(1 Pto.)}\\
& = & A \cap (A^c \cup B) & (\text{Ley de Morgan}) \quad \textbf{(1 Pto.)}\\
& = & (A \cap A^c) \cup (A \cap B) & (\text{Distributividad}) \quad \textbf{(1 Pto.)}\\
& = & \emptyset \cup (A \cap B) & (A \cap A^c = \emptyset) \quad \textbf{(1 Pto.)}\\
& = & A \cap B & \quad \textbf{(1 Pto.)}
\end{array}
$$

usando a) y b)

$\forall\, x \in U :$

$$
\begin{array}{rcll}
x \in A - (A - B) & \Longleftrightarrow & x \in A \,\rhd\, x \in (A - B) & (\text{por b})) \quad \textbf{(1 Pto.)}\\
& \Longleftrightarrow & x \in A \,\rhd\, (x \in A \,\rhd\, x \in B) & (\text{por b})) \quad \textbf{(1 Pto.)}\\
& \Longleftrightarrow & (x \in A) \,\wedge\, (x \in B) & (\text{por a})) \quad \textbf{(2 Pto.)}\\
& \Longleftrightarrow & x \in A \cap B & (\text{Definición de } \cap) \quad \textbf{(1 Pto.)}
\end{array}
$$

Por lo tanto, $A - (A - B) = A \cap B$. **(1 Pto.)**

P2. a) Demuestre por inducción que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad \sum_{k=0}^{n} k\, 2^k \;=\; (n-1)\, 2^{n+1} \;+\; 2\,. \qquad \textbf{(10 Ptos.)}$$

b) Observe que $\quad (k+1)^2\, 2^{k+1} \;-\; k^2\, 2^k \;=\; k^2\, 2^k \;+\; 4\, k\, 2^k \;+\; 2 \cdot 2^k \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

Dado $n \in \mathbb{N}$, aplique la identidad anterior, la propiedad telescópica y la suma de una progresión geométrica para deducir una fórmula para $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\, 2^k$.

(10 Ptos.)

Solución

a) Dado $n \in \mathbb{N}$, considere la proposición $\quad p(n): \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, 2^k \;=\; (n-1)\, 2^{n+1} \;+\; 2$

y defina el conjunto:

$$S \;:=\; \{\, n \in \mathbb{N}: \quad p(n)\,\}\,.$$

(1 Pto.)

i) $1 \in S$. En efecto:

$$\sum_{k=0}^{1} k\, 2^k \;=\; 0\; 2^0 \;+\; 1\; 2^1 \;=\; 2 \qquad \text{y} \qquad (1-1)\, 2^{1+1} \;+\; 2 \;=\; 2\,.$$

(2 Ptos.)

ii) Hipotesis de inducción. $m \in S$, es decir:

$$\sum_{k=0}^{m} k\, 2^k \;=\; (m-1)\, 2^{m+1} \;+\; 2\,.$$

(1 Pto.)

iii) Tesis de inducción. $m+1 \in S$, es decir:

$$\sum_{k=0}^{m+1} k\, 2^k \;=\; m\, 2^{m+2} \;+\; 2\,.$$

(1 Pto.)

iv) Demostración de la tesis de inducción. Se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} k\, 2^k \;&=\; \sum_{k=0}^{m} k\, 2^k \;+\; (m+1)\, 2^{m+1} && \text{(por propiedad de } \textstyle\sum\text{)}\\
&=\; (m-1)\, 2^{m+1} \;+\; 2 \;+\; (m+1)\, 2^{m+1} && \text{(por hipótesis de inducción)}\\
&=\; 2\, m\, 2^{m+1} \;+\; 2 \;=\; m\, 2^{m+2} \;+\; 2\,,
\end{aligned}$$

lo cual completa la inducción.

(5 Ptos.)

b) Aplicando el operador sumatoria a la identidad dada se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^2\, 2^{k+1} \;-\; k^2\, 2^k \right) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \left(k^2\, 2^k \;+\; 4\, k\, 2^k \;+\; 2 \cdot 2^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2\, 2^k \;+\; 4 \sum_{k=0}^{n} k\, 2^k \;+\; 2 \sum_{k=0}^{n} 2^k \,.$$

(2 Ptos.)

De acuerdo a la propiedad telescópica se obtiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^2\, 2^{k+1} \;-\; k^2\, 2^k \right) \;=\; (n+1)^2\, 2^{n+1} \,,$$

(2 Ptos.)

y usando la suma de una progresión geométrica se deduce que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \;=\; \frac{(1 - 2^{n+1})}{1 - 2} \;=\; 2^{n+1} \;-\; 1 \,.$$

(2 Ptos.)

Así, reemplazando estas dos expresiones en la primera ecuación y utilizando la fórmula dada en a), se sigue que

$$(n+1)^2\, 2^{n+1} \;=\; \sum_{k=0}^{n} k^2\, 2^k \;+\; 4\, \left((n-1)\, 2^{n+1} \;+\; 2 \right) \;+\; 2\, \left(2^{n+1} \;-\; 1 \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2\, 2^k \;+\; (4\, n \;-\; 2)\, 2^{n+1} \;+\; 6 \,,$$

(2 Ptos.)

de donde, al despejar $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\, 2^k$, resulta

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\, 2^k \;=\; \left(n^2 \;-\; 2\, n \;+\; 3 \right)\, 2^{n+1} \;-\; 6 \,.$$

(2 Ptos.)

P3. Considere la función $f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1, \\ \\ 2-x & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

a) Encuentre $\mathrm{Dom}(f)$ (dominio de f). **(2 Ptos.)**

b) Determine si f es o no inyectiva. **(5 Ptos.)**

c) Encuentre $\mathrm{Rec}(f)$ y deduzca si f es o no sobreyectiva. **(8 Ptos.)**

d) Encuentre $f^{-1}(\,]-\infty,-1]\,)$. **(5 Ptos.)**

Solución

a) Dominio de f:

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in\,]-\infty,1] : x^2 \in \mathbb{R}\} \cup \{x \in\,]1,\infty[\, : 2-x \in \mathbb{R}\} \\ &= \,]-\infty,1] \cup\,]1,\infty[= \mathbb{R} \quad \textbf{(2 Ptos.)} \end{aligned}$$

b) La función f no es inyectiva. **Contra-ejemplos** :

(cardinalidad 2) $\quad f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$ o bien $f^{-1}(\{0\}) = \{0,2\}$
(cardinalidad 3) $\quad$ si $0 < a < 1 \; : \; f^{-1}(\{a\}) = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}, 2-a\}$ **(5 Ptos.)**

c) Primero, observamos que $\mathrm{Dom}(f) =]-\infty,1] \cup]1,\infty[$, en consecuencia:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} \; : \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \; : \exists x \in]-\infty,1],\, y = x^2\} \cup \{y \in \mathbb{R} \; : \exists x \in]1,\infty[,\, y = 2-x\} \\ &= Y_1 \cup Y_2 \quad \textbf{(1 Pto.)} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Y_2 &= \{y \in \mathbb{R} \; : \exists x \in]1,\infty[,\, y = 2-x\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \; : x = 2-y,\, x > 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \; : \; 2-y > 1\} =]-\infty,1[\quad \textbf{(2 Ptos.)} \end{aligned}$$

y para determinar Y_1, observamos que $]-\infty,1] =]-\infty,0] \cup]0,1]$, luego podemos considerar que $Y_1 = Y_a \cup Y_b$, donde:

$$\begin{aligned} Y_a &= \{y \in \mathbb{R} \; : \exists x \in]-\infty,0], y = x^2,\; y \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \; : x = -\sqrt{y},\, x \leq 0\} \\ &= [0,\infty[\quad \textbf{(2 Ptos.)} \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} Y_b &= \{y \in \mathbb{R} \ : \exists x \in]0,1], y = x^2, \ y \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ : x = \sqrt{y}, \ 0 < x \leq 1\} \\ &= \ ]0,1] \quad \textbf{(1 Pto.)} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{Rec}(f) = Y_1 \cup Y_2 = [0,\infty[\cup]-\infty, 1[= \mathbb{R}$. **(1 Pto.)**. Luego, como $\text{Rec}(f) = \text{Codom}(f) = \mathbb{R}$, la función f es sobreyectiva **(1 Pto.)**

d) Por definición $f^{-1}(\,]-\infty,-1]\,) = \{x \in \mathbb{R} \ : f(x) \in]-\infty,-1]\}$ luego

$$f^{-1}(\,]-\infty,-1]\,) = \{x \in \mathbb{R} \ : 2 - x \leq -1\} \quad \textbf{(2 Ptos.)} = [3,\infty[\quad \textbf{(3 Ptos.)}$$
