UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 1
CALCULO (521287)
MATEMATICA III (521296)

Problema 1. *Considere el espacio vectorial* $M_{2\times 2}(I\!R)$

a) Verifique, utilizando la definición, que el conjunto

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(I\!R)$

b) Encuentre el subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}(I\!R)$ *generado por el conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \right\}$$

(25 puntos)

SOLUCION

a)

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A es una base de $\mathcal{M}_{2x2}(I\!R)$. En efecto:

i) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \, y \, \alpha_4$ escalares tales que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{array}{rrrrll} & & \alpha_3 & + \alpha_4 & = 0 & (1) \\ & \alpha_2 & + \alpha_3 & & = 0 & (2) \\ & \alpha_2 & & + \alpha_4 & = 0 & (3) \\ \alpha_1 & + \alpha_2 & & & = 0 & (4) \end{array}$$

De (1) $\qquad \alpha_3 = -\alpha_4$

Reemplazando en (2)

$$\alpha_2 - \alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = \alpha_2$$

De donde (3) queda como

$$\begin{aligned} 2\alpha_2 = 0 \quad &\Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_4 = 0 \end{aligned}$$

Entonces de (1) $\alpha_3 = 0$ y de (4) $\alpha_1 = 0$.
Luego $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, lo cual A es un conjunto linealmente independiente.

ii) Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un elemento cualquiera de $\mathcal{M}_{2x2}(I\!R)$. Supongamos que existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 escalares tales que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{ccccc} & & \alpha_3 & +\alpha_4 & = a \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & & = b \\ & \alpha_2 & & +\alpha_4 & = c \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & & = d \end{array}\right|$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales, se llega a:

$$\alpha_1 = \frac{a - b - c + 2d}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{-a + b + c}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{a + b - c}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{a - b + c}{2}$$

Con lo que A genera a $M_{2x2}(I\!R)$.

De i) y ii) es una base para $\mathcal{M}_{2x2}(I\!R)$

b) Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in gen \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \right\}$, cualquiera. Entonces existen α_1, y α_2 escalares tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}\alpha_1 & & = a \\ & \frac{3}{4}\alpha_2 & = d \end{array}\right| \qquad (*)\,; \qquad b = 0,\ c = 0$$

Para cualquier a y d; números reales, el sistema (*) tiene solución

$$\Longrightarrow gen\left\{\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \;:\; x,\, y;\ \text{números reales}\right\}$$

Con lo que, el conjunto generado, corresponde al conjunto de las matrices diagonales de dos por dos.

Problema 2. *Sea $T : \mathcal{P}_2 \to I\!R^2$, una transformación lineal definida por:*

$$T(at^2 + bt + c) = (a - c, a + c)$$

Utilizando una base del dominio de T encuentre su imagen. ¿La transformación lineal T será inyectiva?; averiguar a través del $Ker(T)$.

(20 puntos)

SOLUCION

$$T : \mathcal{P}_2 \to I\!R^2$$

$$T(at^2 + bt + c) = (a - c,\ a + c)$$

$$\{t^2, t, 1\} \ \text{base de} \ \mathcal{P}_2$$

$$T(t^2) = (1,1), \quad T(t) = (0,0), \quad T(1) = (-1,1)$$

Entonces el conjunto

$\{T(t^2), T(t), T(1)\} = \{(1,1), (0,0), (-1,1)\} = \{(1,1), (-1,1)\}$

genera $Im(T)$

Pero este conjunto es linealmente independiente. En efecto:
Sean α_1 y α_2 tales que:

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(-1,1) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (0,0)$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|} \alpha_1 & -\,\alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 & +\,\alpha_2 & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Sumando las dos ecuaciones de este sistema se llega a $2\alpha_1 = 0$; o sea, $\alpha_1 = 0$, con lo cual $\alpha_2 = 0$. De esta manera, el conjunto

$$\{(1,1),(-1,1)\}$$

es un conjunto linealmente independiente y por lo tanto una base e $I\!R^2$. Luego:

$$\Rightarrow\ Im(T) = gen\{(1,1),(-1,1)\} = I\!R^2$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} Ker(T) &= \{at^2+bt+c \in P_2 : T(at^2+bt+c) = (0,0)\} \\ &= \{at^2+bt+c \in \mathcal{P}_2 : (a-c, a+c) = (0,0)\} \end{aligned}$$

Entonces:

$$(a-c, a+c) = (0,0) \Longrightarrow a = c, a = -c$$

el cual se llega a que $a = c = 0$

$$\Rightarrow Ker(T) = \{bt : b \in I\!R\} \neq \{\theta_{\mathcal{P}_2}\}$$

Así T no es inyectiva.

Problema 3 *Sea la función f, de dos variables definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-2xy+y^2}{\sqrt{x-y}} & y \neq x \\ 0 & (x,y) = (1,1) \\ 2 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Analice la continuidad de f en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

(15 puntos)

SOLUCION

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-2xy+y^2}{\sqrt{x-y}} & x \neq y \\ 0 & (x,y)) = (1,1) \\ 2 & \text{en otro punto} \end{cases}$$

continuidad en $(0,0)$ y $(1,1)$

$\underline{(0,0)}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+y^2}{\sqrt{x-y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x-y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^{1/2}(x-y)^{3/2}}{(x-y)^{1/2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y)^{3/2} = 0$$

Luego:

$$\lim_{x,y)\to(0.0)} f(x,y) = 0 \neq f(0,0) = 2.$$

Por lo tanto f no es continua en $(0,0)$

$\underline{(1,1)}$:

De lo anterior se tiene que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x-y)^{3/2} = 0$$

Luego:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 0 = f(1,1)$$

Por lo tanto f es continua en $(1,1)$

ADP/
12 de Octubre de 2005.