UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230)

Certamen – Forma B

Fecha: 15–Nov–02; 13:00.

Nombre y apellidos	
Matrícula	
Profesor	

Pregunta	Alternativas			
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d

Reservado para la corrección

No rellenar

B	
M	
NR	
Cal.	

- Marque sólo una alternativa, en caso contrario la pregunta **no será evaluada**.
- **No intente adivinar.** Por cada respuesta equivocada se descontará un tercio del valor de una respuesta correcta; es decir:

$$\text{Calificación} = \frac{100}{15}\left(\text{Buenas} - \frac{\text{Malas}}{3}\right).$$

- Cualquier intento de copia será **castigado**.
- Duración de la prueba: **100 minutos**.

RAD/MCP/RRS/MS

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

CERTAMEN
DE
CALCULO NUMERICO

521230

Viernes 15 de Noviembre de 2002

COMISION: Dr. Rodolfo Araya
Dr. Manuel Campos
Dr. Roberto Riquelme
Dr. Mauricio Sepúlveda

1. Para resolver varios sistemas $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ con igual matriz $\boldsymbol{A}$ se determinó la factorización $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$, donde $\boldsymbol{P}$ es la matriz de permutaciones. Entonces $\boldsymbol{x}$ se obtiene resolviendo:

   a) $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{Pb}$ y luego $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$
   b) $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ y luego $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$
   c) $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{Pb}$ y luego $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{Py}$
   d) ninguna de las anteriores.

2. Sea $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ un sistema con $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Que un método iterativo genere una sucesión $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ convergente a la solución $\boldsymbol{x}$ del sistema permite afirmar que:

   (i) partiendo de cualquier vector inicial la sucesión converge a $\boldsymbol{x}$
   (ii) el radio espectral de la matriz iterativa del método es menor que uno
   (iii) $||\boldsymbol{x}^{(k)}|| \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$
   (iv) $||\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}|| \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$

   Son verdaderas:

   a) (i), (ii) y (iii)
   b) (i), (ii) y (iv)
   c) (ii), (iii) y (iv)
   d) ninguna de las anteriores.

3. Una condición suficiente para que un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ pueda ser resuelto por los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel es que:

   (i) $\boldsymbol{A}$ sea simétrica y definida positiva
   (ii) $\boldsymbol{A}$ sea de diagonal dominante estricta
   (iii) los valores propios de $\boldsymbol{A}$ sean reales y positivos

   Son verdaderas:

   a) sólo (ii)
   b) (i) y (ii)
   c) (i), (ii) y (iii)
   d) ninguna de las anteriores.

4. Considere la tabla

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1	-1	-1	a	1	1	1

   ¿ Para qué valores del parámetro a **no** existe el polinomio de interpolación de Lagrange asociado a dicha tabla ?.

   a) $a = 0$.
   b) $a = -1$.
   c) $a = 1$.
   d) ninguna de las anteriores.

5. Dada una sucesión de números $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, indique cual de los siguientes programas en ambiente MATLAB sirve para calcular el i-ésimo polinomio de Lagrange evaluado en t

   a)
   ```
   function l=lagrange(x,i,t)
   n=length(x);
   m=[[1:i] [i+2:n]];
   l=prod(t-x(m)./(x(i+1)-x(m)));
   ```
   b)
   ```
   function l=lagrange(x,i,t)
   n=length(x);
   m=[[1:i-1] [i+1:n]];
   l=prod((t-x(m))./(x(i)-x(m)));
   ```
   c)
   ```
   function l=lagrange(x,i,t)
   n=length(x);
   m=[[0:i-1] [i+1:n-1]];
   l=prod((t-x(m))./(x(i)-x(m)));
   ```
   d) ninguna de las anteriores.

6. Sea s la spline cúbica natural que interpola los valores de la siguiente tabla

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	4	11	42	0.7

   entonces

   a) s es una función cúbica a trozos, no necesariamente continua, tal que $s(x_i) = y_i$.
   b) s es un polinomio cúbico tal que $s(x_i) = y_i$.
   c) s es una función cúbica a trozos y continua tal que $s(x_i) = y_i$.
   d) Ninguna de las anteriores.

7. Se desea calcular el valor de la integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^6}\, dx\, .$$

   ¿ Cuál es el número mínimo de puntos a usar en una fórmula de Gauss para calcular **exactamente** el valor de I ?

   a) 2.
   b) 3.
   c) 4.
   d) ninguno de los anteriores.

8. Considere la integral $I = \int_0^5 (x^3 + x^2 + x + 1)\,dx$. Para calcular el valor de I con un error menor o igual a 10^{-8}, se debe utilizar

(i) el método de los trapecios con paso $h = 10^{-2}$.

(ii) el método de Simpson con paso $h = 10^{-1}$.

(iii) un método de Gauss con 2 puntos.

a) Sólo (i) y (iii).

b) Sólo (ii) y (iii)

c) Sólo (i) y (ii).

d) ninguna de las anteriores.

9. Indique cual de los siguientes programas en ambiente MATLAB sirve para calcular la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la regla del trapecio

a)
```
function I=trapecio(f,a,b,N)
h=(b-a)/N;
x=a+h*[0:N];
I=h/2*sum(feval(f,x([0:N])));
```

b)
```
function I=trapecio(f,a,b,N)
h=(b-a)/N;
x=a+h*[0:N];
I=h/2*(feval(f,x(1))+2*sum(feval(f,x([2:N-1])))+feval(f,x(N)));
```

c)
```
function I=trapecio(f,a,b,N)
h=(b-a)/N;
x=a+h*[0:N];
I=h/2*(feval(f,x(1))+2*sum(feval(f,x([2:N])))+feval(f,x(N+1)));
```

d) ninguna de las anteriores.

10. Se ajusta por mínimos cuadrados un modelo del tipo $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ a la tabla

x_i	0	1	2	3
y_i	1	3	19	67

Entonces podemos afirmar que:

a) $y(x_i) = y_i \quad \forall i$.

b) $y(x_i) > y_i \quad \forall i$.

c) $y(x_i) < y_i \quad \forall i$.

d) ninguna de las anteriores.

11. Sea $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $rango(\boldsymbol{A}) = n$ y $m > n$. Sea $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ un vector dado de modo que $\boldsymbol{b}$ no es combinación lineal de las columnas de $\boldsymbol{A}$. Entonces el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ en el sentido de los mínimos cuadrados, si

   a) $||\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}||_2 = 0.$
   b) $\boldsymbol{AA}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ab}.$
   c) $||\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}||_2 = \min\limits_{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n} ||\boldsymbol{Az} - \boldsymbol{b}||_2.$
   d) ninguna de las anteriores.

12. A la tabla

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3	4	1	-2	7

se le ajusta un modelo de la forma $\psi(x)$, en el sentido de los mínimos cuadrados. Sabiendo que una de las siguientes tablas es correcta, ¿ cuál de ellas representa el valor de ψ en los puntos x_i ?

a)

x_i	-2	-1	0	1	2
$\psi(x_i)$	-3	-4	0	5	0

b)

x_i	-2	-1	0	1	2
$\psi(x_i)$	2	4	0	-1	7

c)

x_i	-2	-1	0	1	2
$\psi(x_i)$	10	-4	-1	2	-7

d)

x_i	-2	-1	0	1	2
$\psi(x_i)$	1	0	11	2	-1

13. Se desea aproximar el valor de $\sqrt[3]{10}$ y se dispone de un punto x_0 que está bastante cerca del valor buscado. ¿ Cuál de los siguientes algoritmos permite aproximar dicho valor ?

   a) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 10}{2x_n} \qquad n = 0, 1, \ldots$
   b) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\sqrt[3]{x_n}}{3\sqrt[3]{x_n^2}} \qquad n = 0, 1, \ldots$
   c) $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 10}{3x_n^2} \qquad n = 0, 1, \ldots$
   d) ninguno de los anteriores.

14. Se desea encontrar el punto de intersección de las curvas

$$\begin{cases} -y + x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ -y + x^3 &= 0 \end{cases}$$

Indique cuál de los siguiente algoritmos permite calcular la solución del sistema dado a partir del dato inicial $(x_0, y_0)^T = (2, 1)^T$:

a) Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, hasta que se cumpla algún criterio de convergencia:

$$\text{Resolver}: \begin{bmatrix} 2x_k - 2 & -1 \\ 3x_k^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_k + x_k^2 - 2x_k + 2 \\ -y_k + x_k^3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + \Delta x_k \\ y_k + \Delta y_k \end{bmatrix}.$$

b) Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, hasta que se cumpla algún criterio de convergencia:

$$\text{Resolver}: \begin{bmatrix} 2x_k - 2 & -1 \\ 3x_k^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -y_k + x_k^2 - 2x_k + 2 \\ -y_k + x_k^3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + \Delta x_k \\ y_k + \Delta y_k \end{bmatrix}.$$

c) Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, hasta que se cumpla algún criterio de convergencia:

$$\text{Resolver}: \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3x_k^2 & 2x_k - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_k + x_k^2 - 2x_k + 2 \\ -y_k + x_k^3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + \Delta x_k \\ y_k + \Delta y_k \end{bmatrix}.$$

d) Ninguno de los anteriores.

15. Considere el PVI

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+x^2}, & x \in [x_0, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

El programa en ambiente MATLAB que resuelve el PVI por el método de Euler es:

a)
```
function [x,y]=euler(x0,y0,b,h)
N=(b-x0)/h;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for n=1:N-1
   x(n+1)=x(n)+h;
   y(n+1)=y(n)+h*y(n)/(1+x(n)^2);
end
```

b)
```
function [x,y]=euler(x0,y0,b,h)
N=(b-x0)/h;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for n=1:N-1
   x(n+1)=x(n)+h;
   y(n+1)=y(n)+y(n)/(1+x(n)^2);
end
```

c)
```
function [x,y]=euler(x0,y0,b,h)
N=(b-x0)/h;
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for n=1:N-1
   x(n+1)=x(n);
   y(n+1)=y(n)+h*y(n)/(1+x(n)^2);
end
```

d) ninguna de las anteriores.