

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias II

- Métodos de paso múltiple.
- Estabilidad y E.D.O. stiff.
- Sistemas de E.D.O. y E.D.O. de orden superior.

Métodos de paso múltiple

Se considera el problema de valores iniciales (P.V.I.)

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0 \text{ dado,} \end{cases}$$

el que supondremos tiene solución única, $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual es acotada y depende continuamente de los datos f e y_0 .

Dada una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$

los métodos que hemos visto hasta aquí sólo usan la información del valor y_i de la solución calculada en x_i para obtener y_{i+1} . Por eso se denominan **métodos de paso simple**.

Parece razonable pensar que también podrían utilizarse los valores y_{i-k}, \dots, y_i obtenidos en los nodos x_{i-k}, \dots, x_i , para $k > 0$.

Para ello, si integramos $y'(x) = f(x, y(x))$ en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, se tiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

y, por lo tanto,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx.$$

La integral puede calcularse aproximando el integrando mediante el polinomio de interpolación de $f(x, y(x))$ en los puntos x_{i-k}, \dots, x_i . Sin embargo, como los valores exactos de $y(x_{i-k}), \dots, y(x_i)$ no se conocen, no podemos utilizarlos en la evaluación de $f(x, y(x))$. En su lugar podemos utilizar los valores de la solución calculada y_{i-k}, \dots, y_i .

Los métodos que así se obtienen se denominan **métodos de paso múltiple**.

Métodos explícitos de paso múltiple

Sea p el polinomio que interpola los puntos $(x_{i-k}, f_{i-k}), \dots, (x_i, f_i)$, donde

$$f_j := f(x_j, y_j), \quad j = i - k, \dots, i.$$

Reemplazando $f(x, y(x))$ por $p(x)$ en

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

se obtiene

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx,$$

que, al calcular la integral, genera los métodos conocidos como de **Adams–Bashforth**.

$k = 0$

Método de Adams–Bashforth de primer orden (Euler).

En este caso $p(x) = f_i$, de donde

$$y_{i+1} = y_i + hf_i.$$

$k = 1$

Método de Adams–Bashforth de segundo orden.

En este caso

$$p(x) = \frac{x_i - x}{h} f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h} f_i,$$

de donde

$$y_{i+1} = y_i + \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_i - x}{h} dx \right) f_{i-1} + \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_{i-1}}{h} dx \right) f_i$$

y al calcular las integrales se obtiene

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (3f_i - f_{i-1}).$$

$k = 2$

Método de Adams–Bashforth de tercer orden.

En este caso

$$p(x) = \frac{(x_{i-1} - x)(x_i - x)}{2h^2} f_{i-2} + \frac{(x - x_{i-2})(x_i - x)}{h^2} f_{i-1} \\ + \frac{(x - x_{i-2})(x - x_{i-1})}{2h^2} f_i,$$

de donde

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}).$$

$k = 3$

Método de Adams–Bashforth de cuarto orden.

Análogamente,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}).$$

Observaciones

1. El error global del método de **Adams–Bashforth de orden $k + 1$** es $\mathcal{O}(h^{k+1})$.
2. El error local de truncamiento es $\mathcal{O}(h^{k+2})$. Así, por ejemplo, para el método de Adams–Bashforth de cuarto orden se tiene:

$$\tau_{i+1} = \frac{251}{720} y^{(5)}(\zeta) h^5, \quad \zeta \in [x_{i-3}, x_{i+1}].$$

3. El costo de los métodos de paso múltiple es de sólo **una evaluación de f por paso**, independientemente del orden del método (a diferencia de los Runge-Kutta).
4. Para iniciar el método de Adams–Bashforth de orden $k + 1$, necesitamos conocer los valores de la solución numérica en $k + 1$ puntos anteriores.

Por ello estos métodos sólo pueden usarse a partir de $x_i = x_{k+1}$.

Si $k > 0$, para calcular los valores iniciales y_1, \dots, y_k puede utilizarse, por ejemplo, métodos Runge–Kutta de igual orden.

Es por esta razón que se dice que los métodos de Adams–Bashforth de orden dos en adelante **no son de partida autónoma**.

Métodos implícitos de paso múltiple

Por otra parte, si construimos un polinomio de interpolación p de grado k que utilice los puntos $(x_{i-k+1}, f_{i-k+1}), \dots, (x_{i+1}, f_{i+1})$, se generará una nueva clase de métodos conocidos como de **Adams–Moulton**.

Análogamente, a los métodos de Adams–Bashforth tenemos:

$$k = 0$$

Método de Adams–Moulton de primer orden (Euler implícito).

En este caso $p(x) = f_{i+1}$, de donde

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1}.$$

$k = 1$

Método de Adams–Moulton de segundo orden.

En este caso $p(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h} f_i + \frac{x - x_i}{h} f_{i+1}$, de donde

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i).$$

$k = 2$

Método de Adams–Moulton de tercer orden:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}).$$

$k = 3$

Método de Adams–Moulton de cuarto orden:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}).$$

Observaciones

1. Los métodos recién descritos se dicen **implícitos**, pues la incógnita y_{i+1} también aparece en el segundo miembro. Por ejemplo, para el método de Adams–Moulton de primer orden (Euler implícito),

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}).$$

En consecuencia, para hallar el valor de y_{i+1} debe resolverse la ecuación anterior que, si f no es lineal en y , resulta no lineal.

2. El error global del método de **Adams–Moulton de orden $k + 1$** es $\mathcal{O}(h^{k+1})$.
3. El error local de truncamiento es $\mathcal{O}(h^{k+2})$. Así, por ejemplo, para el método de Adams–Moulton de cuarto orden se tiene

$$\tau_{i+1} = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\zeta)h^5, \quad \zeta \in [x_{i-2}, x_{i+1}].$$

4. Para $k > 0$, los métodos de Adams–Moulton tampoco son de partida autónoma.

Métodos predictor–corrector

Estos métodos consisten en combinar un método explícito con otro implícito.

Por ejemplo, consideremos el método de Adams–Bashforth de cuarto orden:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}),$$

y el método de Adams–Moulton de cuarto orden:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}).$$

Con el método explícito se predice el valor de $y(x_{i+1})$ que denotaremos por y_{i+1}^p y con el implícito se corrige el valor encontrado obteniendo otro valor calculado de $y(x_{i+1})$ que denotaremos por y_{i+1}^c :

$$y_{i+1}^p = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}),$$

$$f_{i+1}^p = f(x_{i+1}, y_{i+1}^p),$$

$$y_{i+1}^c = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1}^p + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}).$$

A este método lo llamaremos **predictor–corrector de Adams de cuarto orden**.

Despreciando los errores de los valores y_{i-3}, \dots, y_i utilizados para calcular y_{i+1}^p e y_{i+1}^c , los errores locales de truncamiento de estos métodos satisfacen

$$\tau_{i+1}^p = y(x_{i+1}) - y_{i+1}^p = \frac{251}{720} y^{(5)}(\zeta) h^5, \quad \zeta \in [x_{i-3}, x_{i+1}]$$

$$\tau_{i+1}^c = y(x_{i+1}) - y_{i+1}^c = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\zeta) h^5, \quad \zeta \in [x_{i-2}, x_{i+1}].$$

Supongamos que h es suficientemente pequeño de modo que $y^{(5)}$ es casi constante en $[x_{i-3}, x_{i+1}]$. Entonces, restando ambas expresiones se tiene

$$y_{i+1}^c - y_{i+1}^p \approx \frac{251}{720} y^{(5)}(\zeta) h^5 + \frac{19}{720} y^{(5)}(\zeta) h^5 = \frac{270}{720} y^{(5)}(\zeta) h^5.$$

De aquí se obtiene una estimación para τ_{i+1}^c :

$$\tau_{i+1}^c = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\zeta) h^5 \approx -\frac{19}{270} (y_{i+1}^c - y_{i+1}^p) =: \delta_{i+1}.$$

Si el error local de truncamiento estimado δ_{i+1} no es suficientemente pequeño, entonces se repite el proceso de corrección usando y_{i+1}^c en el nuevo cálculo de f_{i+1}^p :

$$f_{i+1}^p = f(x_{i+1}, y_{i+1}^c).$$

Estabilidad y E.D.O. STIFF

Una E.D.O. $y' = f(x, y)$ se dice **estable** si $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ pues, dadas dos soluciones de la E.D.O. con distintas condiciones iniciales,

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = f(x, y), \\ y(a) = y_0, \end{array} \right. \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{y}'(x) = f(x, \hat{y}), \\ \hat{y}(a) = \hat{y}_0, \end{array} \right.$$

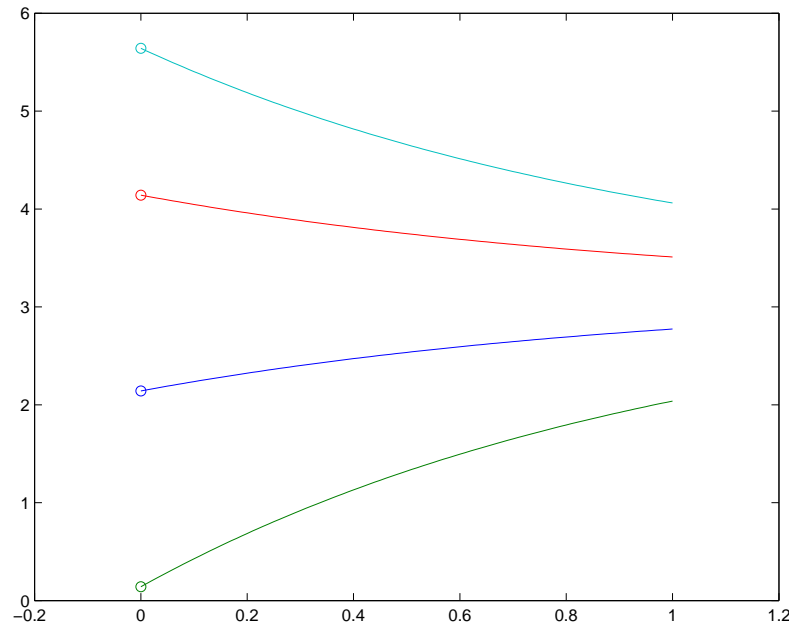
se demuestra que

$$|y(x) - \hat{y}(x)| < |y_0 - \hat{y}_0| \quad \forall x > a.$$

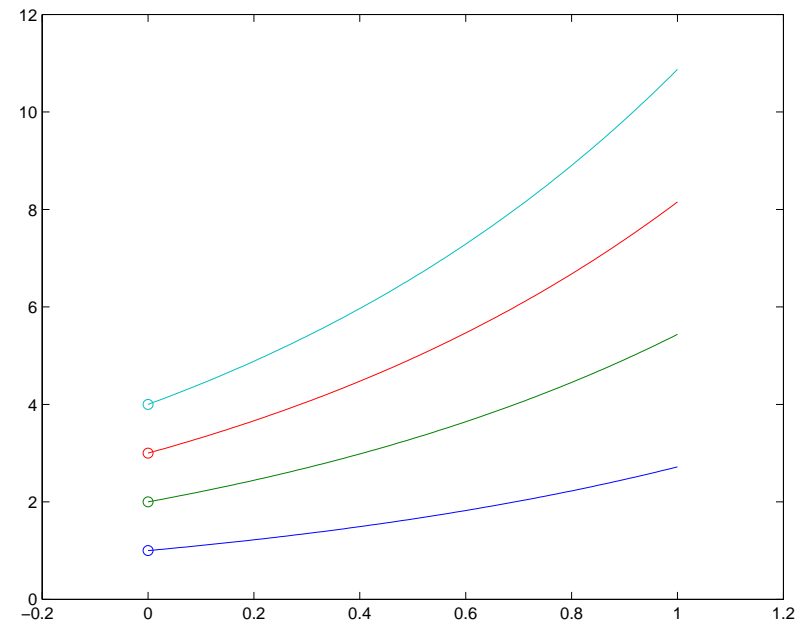
Recíprocamente, una E.D.O. $y' = f(x, y)$ se dice **inestable** si $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ pues, en tal caso, se demuestra que dos soluciones de la E.D.O. con distintas condiciones iniciales satisfacen

$$|y(x) - \hat{y}(x)| > |y_0 - \hat{y}_0| \quad \forall x > a.$$

E.D.O. estable



E.D.O. inestable



Al aplicar un método numérico a una E.D.O. inestable es natural que los errores crezcan con x_i .

En cambio, para una E.D.O. estable sería deseable que los errores no crecieran significativamente con x_i .

Los métodos numéricos que satisfacen esto último, se denominan **estables**. Los que no, **inestables**.

Ejemplo. Considere el siguiente P.V.I.
$$\begin{cases} y'(x) = -\alpha(y - \text{sen } x), & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solución exacta:

$$y(x) = -\frac{e^{-\alpha x} (\alpha e^{\alpha x} \cos x - \alpha^2 e^{\alpha x} \text{sen } x - \alpha^2 - \alpha - 1)}{\alpha^2 + 1}.$$

$$f(x, y) = -\alpha(y - \text{sen } x) \implies \frac{\partial f}{\partial y} = -\alpha \implies \text{E.D.O. estable para } \alpha > 0.$$

Para este problema se usaron los métodos

- **EULER (explícito):** $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i - h\alpha(y_i - \text{sen } x_i),$
- **EULER IMPLÍCITO:** $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i - h\alpha(y_{i+1} - \text{sen } x_{i+1}).$

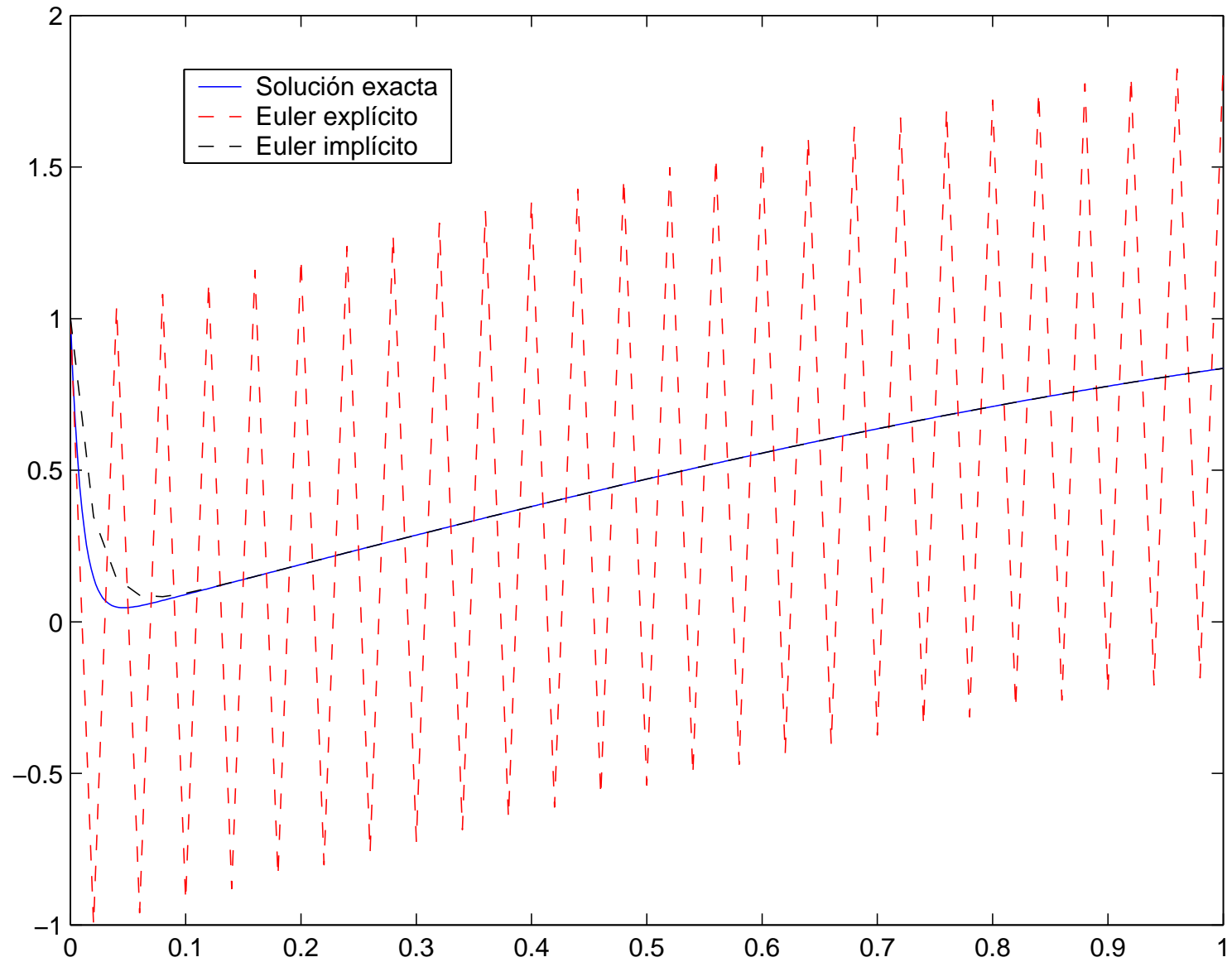
Como en este caso la E.D.O. es lineal, en el método implícito puede despejarse y_{i+1} :

$$y_{i+1} = \frac{y_i + h\alpha \text{sen}(x_{i+1})}{(1 + h\alpha)}.$$

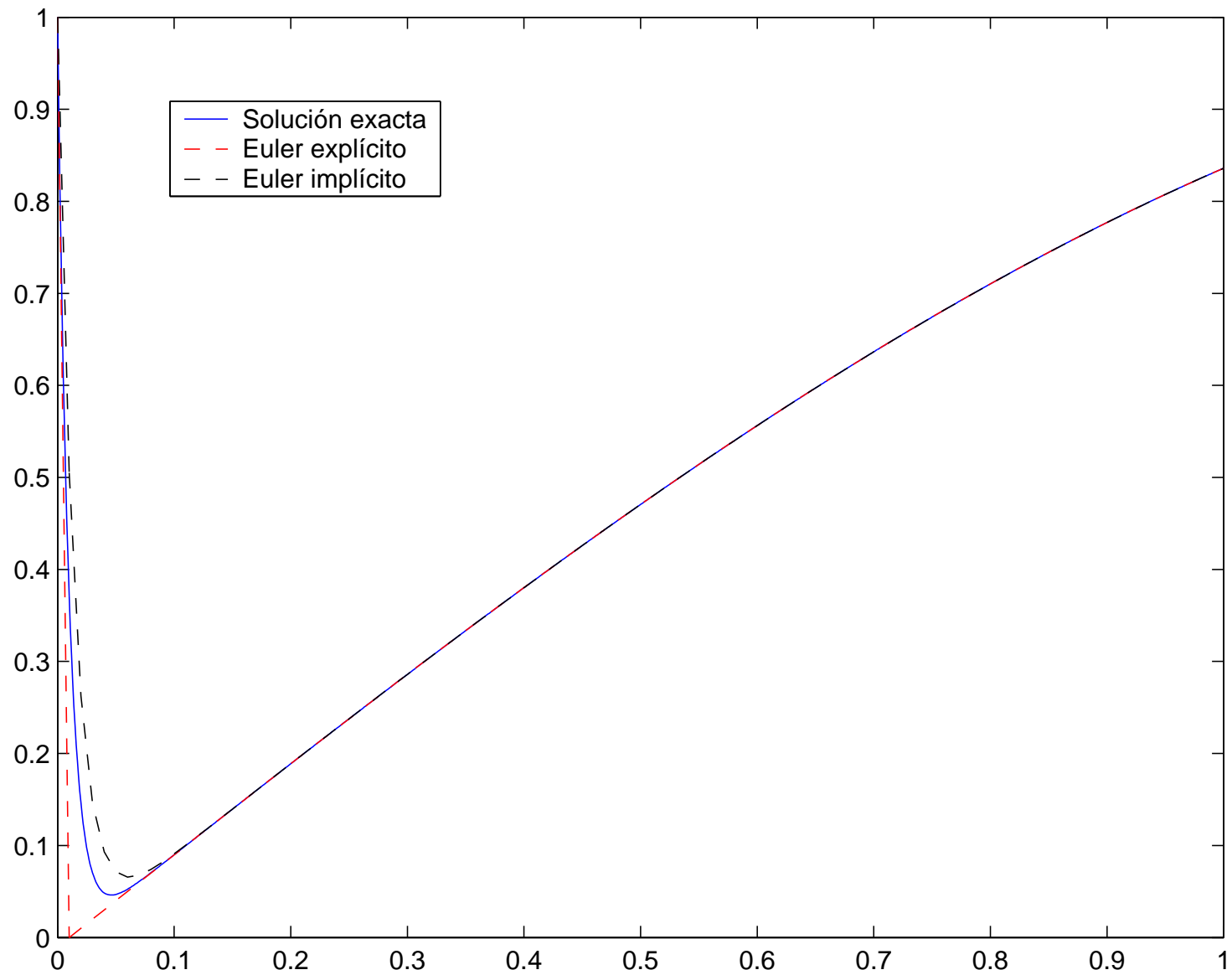
La siguiente tabla muestra los errores al resolver el P.V.I. anterior para $\alpha = 100$ y diferentes pasos h .

	$h = 0.05$		$h = 0.02$		$h = 0.01$	
x	Error Exp.	Error Imp.	Error Exp.	Error Imp.	Error Exp.	Error Imp.
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	16.1500	0.0280	-1.0100	0.0041	-0.4169e-04	9.3664e-04
0.2	258.5500	7.3867e-04	1.0100	-0.0014e-04	0.0911e-04	-0.0783e-04
0.3	4136.9000	-0.4340e-04	-1.0100	-0.2692e-04	0.1398e-04	-0.1365e-04
0.4	66191.0000	-0.8821e-04	1.0100	-0.3646e-04	0.1870e-04	-0.1839e-04
0.5	1.0591e+06	-1.1167e-04	-1.0100	-0.4558e-04	0.2324e-04	-0.2294e-04
0.6	1.6945e+07	-1.3345e-04	1.0101	-0.5423e-04	0.2754e-04	-0.2726e-04
0.7	2.7112e+08	-1.5387e-04	-1.0099	-0.6235e-04	0.3157e-04	-0.3131e-04
0.8	4.3379e+09	-1.7276e-04	1.0101	-0.6984e-04	0.3528e-04	-0.3504e-04
0.9	6.9407e+10	-1.8992e-04	-1.0099	-0.7663e-04	0.3864e-04	-0.3842e-04
1.0	1.1105e+12	-2.0519e-04	1.0101	-0.8266e-04	0.4162e-04	-0.4143e-04

$$\alpha = 100 \quad h = 0.02$$



$$\alpha = 100 \quad h = 0.01$$



La tabla y los gráficos anteriores muestran que, en este ejemplo, el método de Euler explícito sólo es estable si el paso h es suficientemente chico.

En cambio, el método de Euler implícito es estable cualquiera sea el paso h .

Este es un ejemplo de una **E.D.O. “stiff”**. Estas E.D.O. se caracterizan por

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \text{ muy grande.}$$

En este ejemplo, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\alpha = -100$.

Lo que observamos en este ejemplo vale en general:

- Para las E.D.O. stiff, los métodos explícitos sólo dan resultados aceptables con pasos h excesivamente pequeños. Cuando el paso h no es suficientemente chico, los métodos explícitos aplicados a una E.D.O. stiff dan soluciones numéricas que oscilan alrededor de la solución exacta con amplitud creciente.
- Para las E.D.O. stiff, deben utilizarse métodos implícitos. Estos métodos son estables cualquiera sea el paso que se utilice.

Sistemas de E.D.O.

Considere el P.V.I. definido por el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), & x \in [a, b], \\ y_1(a) = y_{10}, \dots, y_n(a) = y_{n0} \text{ (dados)}. \end{cases}$$

el sistema se escribe:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), & x \in [a, b], \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0 \text{ (dado)}, \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

Los métodos numéricos vistos para una ecuación se generalizan directamente al caso de un sistema de n ecuaciones de primer orden.

Por ejemplo, considere un sistema con dos ecuaciones ($n = 2$):

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x)), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x)), & x \in [a, b], \\ y_1(a) = y_{10}, \quad y_2(a) = y_{20} \quad (\text{dados}), \end{cases}$$

o, en su forma vectorial,

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), & x \in [a, b], \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0 \quad (\text{dado}). \end{cases}$$

El método de Euler (RK_{11}) se expresa como sigue:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_0 : \text{dato}, \\ \mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

o bien por componentes:

$$\begin{cases} y_{10}, y_{20} : \text{datos}, \\ y_{1,i+1} = y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Todos los otros métodos numéricos estudiados se pueden formular similarmente en forma vectorial para sistemas.

E.D.O. de orden superior

Una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

se puede expresar como un sistema de n ecuaciones de primer orden al definir

$$\mathbf{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\mathbf{z}'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ \vdots \\ f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix} =: \mathbf{f}(x, \mathbf{z})$$

y luego, $\mathbf{z}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z})$ es un sistema de E.D.O. de primer orden al que se pueden aplicar los métodos numéricos vistos.

Por el mismo procedimiento, un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior, también puede expresarse mediante un sistema de E.D.O. de primer orden.

Ejemplo.

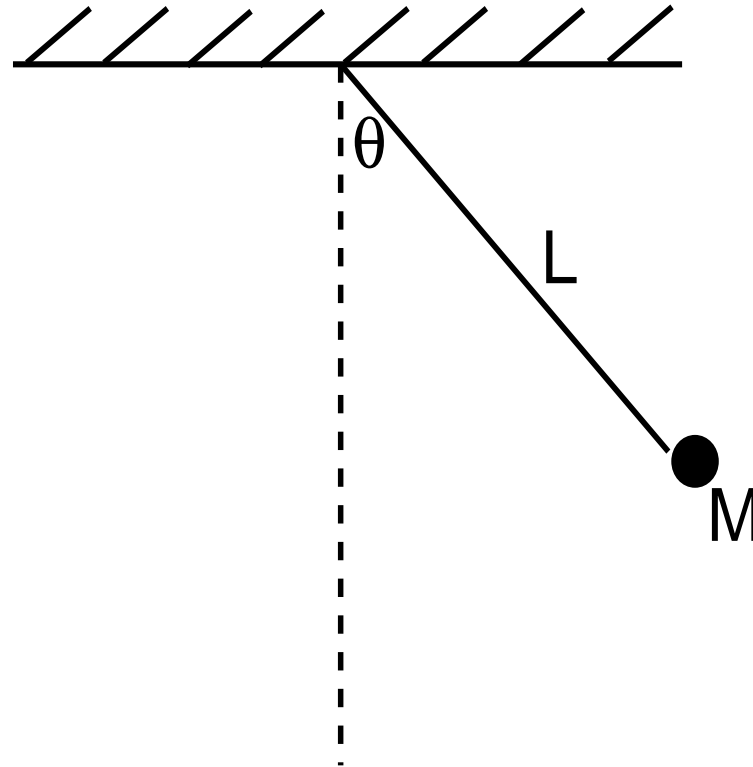
Resolver el P.V.I. para la ecuación del péndulo.

Solución

Considere la dinámica del péndulo que muestra la figura:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, & t \in [0, 2\pi], \\ \theta(0) = \frac{\pi}{4}, & \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

donde $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ denotan derivadas respecto del tiempo.



Para resolver esta ecuación no lineal (que no tiene solución analítica) debemos hacer el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta, \\ \theta_2 &= \dot{\theta}_1,\end{aligned}$$

de donde obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{g}{L} \operatorname{sen}(\theta_1), \\ \theta_1(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_2(0) = 0. \end{array} \right.$$

Notemos que θ_1 corresponde al ángulo θ y θ_2 a la velocidad angular $\dot{\theta}$.

Aplicamos el método de RK_{44} al sistema anterior:

Algoritmo (RK4)

Para $i = 0, \dots, N - 1$

$$x_i = a + ih$$

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_i, y_i)$$

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right)$$

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right)$$

$$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_i + h, y_i + \mathbf{k}_3)$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{1}{6}[\mathbf{k}_1 + 2(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \mathbf{k}_4]$$

fin i .

donde

$$x = t, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(\theta_1) \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4$ también son vectores de dimensión 2.

Resolviendo para $g = 9.8 \text{ m/s}$ y $L = 0.5 \text{ m}$, obtenemos

