UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
PRACTICA 5

Tema
$-Relaciones\ y\ Funciones.$
$-Imagen\ y\ Pre-imagen\ de\ conjuntos.$
$-Funciones\ Sobreyectivas\ y/o\ Inyectivas.$
$-Dominio\ y\ Recorrido\ de\ funciones.$

Problema 1. Determinar el dominio y recorrido de la relación $\mathcal{R}$ representada por

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + 2y^2 = 8\}$

(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 4x^2 - y^2 = 16\}$ (**En práctica**)

(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x - y^2 = 15\}$

¿Indique algunos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, sobre los cuales $\mathcal{R}$ es una función? Defina dicha función.

Problema 2. Considere la relación binaria $\mathcal{R}$ definida por

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff y = 8 - 2x$$

en (i) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (ii) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

a) Determinar $Dom(\mathcal{R})$, $Rec(\mathcal{R})$ y $R = Gr(\mathcal{R})$ en cada caso. Representar gráficamente R.

b) Encontrar un subconjunto $M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $M \cap R = \phi$

c) Sea $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$ ¿Es posible encontrar $M \subseteq \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \mathbb{P})$ tal que $M \subseteq R$?

(**En práctica**)

Problema 3. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si} \quad \text{n es par} \\ \\ \frac{n+1}{2} & \text{si} \quad \text{n es impar} \end{cases}$$

y los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$.

$$\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} : \quad n \leq 10 \quad \text{y } n \ \text{ es divisible por 3}\}$$

$$\mathrm{B} = \{n \in \mathbb{N} : \quad n \leq 13 \quad \text{y } n \ \text{ es divisible por 6}\}$$

$$\mathrm{C} = \{n \in \mathbb{N} : \quad n \leq 20 \quad \text{y } n \ \text{ es número primo }\}$$

Encontrar:

a) la imagen $f(A)$;

b) la pre-imagen $f^{-1}(B)$;

c) ¿$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A)$? o ¿$f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$? o bien ¿$f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$?

d) todos los $x \in C$ tal que $f(x) = 5$;

e) Encontrar $f^{-1}(\{1\})$ y $f^{-1}(\{4\})$.

(**En práctica**)

Problema 4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$

a) ¿Qué desigualdad se debe resolver para determinar la imagen recíproca $f^{-1}([0, +\infty[)$?

b) Determinar $f^{-1}(\{0\})$ y $f^{-1}([1, 2])$.

Problema 5. Formular los siguientes problemas como imagen recíproca de un subconjunto $Y \subseteq \mathbb{R}$ por una función f adecuada. En cada caso determinar $f^{-1}(Y)$.

a) Encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 1 \geq 2$

b) Encontrar $x \in \mathbb{R}^+$, $x \neq 1$ tal que

$$1 \leq \frac{x(x-1)}{x+1} \leq 2.$$

c) Encontrar $x \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq x^2 \leq \sqrt{3}$.

Problema 6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Dar ejemplos de conjuntos no vacíos $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que

a) $f^{-1}(B) = \phi$

b) $f^{-1}(B)$ tiene cardinalidad 1.

Problema 7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 3$. Dar ejemplos de conjuntos no vacíos $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que

a) $f^{-1}(B) = [1, 2]$

b) $f^{-1}(B) = \mathbb{R} - [1, 2]$.

Problema 8. Sea $f : A \to B$ una función y M, N dos subconjuntos no vacíos del codominio.

a) Probar que $f^{-1}(M - N) = f^{-1}(M) - f^{-1}(N)$.

b) Considere la función definida en el Problema anterior para determinar la imagen recíproca $f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \quad : |x| > 1\})$

c) Considere la función f y los conjuntos A y B definidos en el Problema 3. Calcule e interprete (i) $A - B$ y (ii) $f^{-1}(A - B)$.

(**En práctica**)

Problema 9. Considere una función $f : A \longrightarrow B$. Probar las siguientes propiedades de la imagen e imagen recíproca de conjuntos por f.

a) Para todo $X, \tilde{X} \subseteq A$: $\quad f(X \cap \tilde{X}) \quad \subseteq \quad f(X) \cap f(\tilde{X})$.

La igualdad se obtiene si f es sobreyectiva.

b) Para todo $Y, \tilde{Y} \subseteq B$: $\quad f^{-1}(Y \cap \tilde{Y}) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(\tilde{Y})$.

Problema 10. Considere las funciones

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad n \longmapsto f(n) = 2n, \qquad g : \mathbb{N} \to \mathbb{P}; \quad n \longmapsto g(n) = 2n \qquad \text{y}$$

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad n \longmapsto h(n) = \begin{cases} 2n - 2 & \text{si} \quad n > 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ -2n & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Decidir si ellas son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas, respectivamente. (**En práctica**)

Problema 11. En los siguientes problemas determine Dominio y Recorrido de las funciones reales, definidas por:

$$(a) \qquad \begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

$$(b) \qquad \begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 2x^2 - 2x - 4 \end{array}$$

$$(c) \qquad \begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

$$(d) \qquad \begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} \end{array}$$

$$(e) \qquad \begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \ln(x^2 - 9) \end{array}$$

$$(f) \qquad \begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \log_2(5 - x^2) \end{array}$$

$$(g) \qquad \begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{\log(2x + 3)} \end{array}$$

(**En práctica (a) y (d)**)

12.04.2002
FPV/cln