UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

CALCULO COMPLEJO
Listado N° 1
MAT. 525212 - 521250

PROBLEMA 1. Determinar y trazar las gráficas de los lugares geométricos representados por los $z \in \mathbb{C}$ tales que:
(i) $|z| < 1$; (ii) $\mathrm{Re}(z) \geq -3$; (iii) $\mathrm{Re}(z^2) \leq 1$; (iv) $-\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi$;
(v) $\frac{|z+i|}{|z-i|} = 4$; (vi) $0 < \frac{1}{z} < 1$.

PROBLEMA 2. Hallar las partes real e imaginaria de: e^{-3x} ; e^{z^3}; i^3.

PROBLEMA 3. **(Definición de Potencias Complejas)** Para $z \in \mathbb{C}$ y $d \in \mathbb{C}$ arbitrarios (note que d es un número complejo), se define:

$$z^d = exp\{d \ \ln\ (z)\}$$

Notar que z^d tiene infinitos valores. El valor particular $z^d = exp\{d \ \mathrm{Ln}(z)\}$ se llama **valor principal** de z^d. Observe que para $d = \frac{1}{n}$ con $n \in I\!N$, se recuperan las n raíces complejas de z visto en clases. Encuentre los valores principales de:

(i) 2^{3+2i};

(ii) $(1+i)^{2-i}$.

PROBLEMA 4 . En el plano complejo considere la recta L que pasa por z_0 y tiene por vector director al vector $v \in \mathbb{C}$, es decir,

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + tv, \ \text{para t } \in \mathbb{R}\}.$$

Muestre que $L = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(\frac{z-z_0}{v}) = 0\}$.
¿ Qué representa el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(\frac{z-z_0}{v}) > 0\}$?

PROBLEMA 5 . Pruebeque la recta tangente al circulo es perpendicular a la recta que contiene el radio en el punto de contacto.

PROBLEMA 6.

(i) Hallar la forma polar de las siguientes expresiones: $(\frac{3+4i}{2-5i})^{-3}$; $\sqrt{i}$ y $\sqrt{-i}$; $\sqrt{z}$ y $\sqrt[n]{z}$.

(*ii*) Hallar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones y situar algunas de ellas en el plano complejo: $e^z = 3$; $\quad e^{z^2} = 1$.

(*iii*) Hallar todos los valores de z tales que: $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$; $\quad e^{i\bar{z}} = \overline{e^{iz}}$.

PROBLEMA 7. Calcular el valor principal $\mathrm{Ln}(z)$ cuando z es igual a: i) $1+i$ iii) $2-2i$ iii) $(1+i)^i$ iv) $(1-i)^{1+i}$.

PROBLEMA 8. Demuestre que la función $f(z) = z^3$ es uniformemente continua.

PROBLEMA 9.

(*i*) Hallar la derivada de las siguientes funciones:

i) $f(z) = asen^2(z) + tan(z)$ ii) $f(z) = \frac{1}{1-z}$ iii) $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

(*ii*) Cuál de las siguientes funciones es analítica? ¿Por qué? ¿Dónde?

i) $f(z) = Im(z)$ ii) $f(z) = \frac{1}{1+z}$
iii) $f(z) = Re(z^2)$ iv) $f(z) = z + \bar{z}$

PROBLEMA 10.

(*i*) Aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, hallar la función analítica más general $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ para la que

i) $u = xy$; ii) $v = xy$; iii) $u = e^x cosy$.

(*ii*) ¿Bajo qué condición $e^{2x} cos\beta y$ es armónica?

PROBLEMA 11. Calcule los siguientes límites.

i) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1-cosz}{z^2}$; ii) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{sen^2 z}{z^2}$; iii) $\displaystyle\lim_{z\to \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - z)^2$.

PROBLEMA 12. Pruebe que:

(*i*) $\cosh z = \cosh(x)\ \cos y + i \operatorname{senh}(x)\ \operatorname{sen} y$.

(*ii*) $(\cosh)'(z) = \operatorname{senh}(z)$.

(*iii*) $\tanh z$ es periódica, de período imaginario $2\pi i$.

JMS/RRR/cl/jms.
12/09/2002.