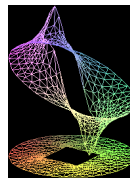




MAT 520142: ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre 2002, Universidad de Concepción



CAPITULO 1

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Lógica

La **lógica** es la herramienta con que se construye el edificio llamado **Matemática**

Conceptos primitivos

Los valores de verdad **VERDADERO** (V) y **FALSO** (F) son los conceptos primitivos de la lógica.

Proposición

Una proposición es una sentencia (expresión) sujeta a un valor de verdad. Usualmente se denotan por letras minúsculas p , q , r , s , etc.



Conectivos lógicos

Un conectivo lógico es una **operación** que nos permite obtener nuevas proposiciones a partir de otras dadas. Los conectivos **básicos** son:

- negación (\sim) (“no”)
- conjunción (\wedge) (“y”)
- disyunción (\vee) (“o”)
- condicional (\rightarrow) (“entonces”)
- bicondicional (\leftrightarrow) (“sí y sólo sí”)

Lógica

Tipos de proposiciones

Las proposiciones se clasifican en **simples** y **compuestas**, vale decir, las que no incluyen conectivos lógicos, y las que sí los incluyen.

Valores posibles de dos proposiciones dadas

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Negación (\sim)

Dada una proposición p , se llama negación de p , y se escribe $\sim p$, a la proposición “no p ”. Esto significa que $\sim p$ es V si p es F , y $\sim p$ es F si p es V .

TABLA DE VERDAD

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunción (\wedge)

Dadas dos proposiciones p y q , la conjunción de ellas es la proposición “ p y q ”, la cual se escribe $p \wedge q$. Así, $p \wedge q$ es V si ambas lo son, y $p \wedge q$ es F si al menos una de ellas lo es.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción (\vee)

Dadas dos proposiciones p y q , la disyunción de ellas es la proposición “ p o q ”, la cual se escribe $p \vee q$. Así, $p \vee q$ es V si al menos una de ellas lo es, y $p \vee q$ es F si ambas lo son.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional (\rightarrow)

Dadas dos proposiciones p y q , la condicional de ellas es la proposición “si p entonces q ”, la cual se escribe $p \rightarrow q$. Aquí, p se llama **antecedente** y q **consecuente**. También, $p \rightarrow q$ se lee “ p es condición suficiente para q ”, o bien “ q es condición necesaria para p ”. Así, $p \rightarrow q$ es F sólo si p es V y q es F .

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional (\leftrightarrow)

Dadas dos proposiciones p y q , la bicondicional de ellas es la proposición “ p sí y sólo sí q ”, la cual se escribe $p \leftrightarrow q$. También, $p \leftrightarrow q$ se lee “ p es condición necesaria y suficiente para q ”. Así, $p \leftrightarrow q$ es V sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Definiciones varias

Una proposición compuesta se dice una:

- **TAUTOLOGIA** (o **TEOREMA LOGICO**), si ella es siempre **V**, cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
- **CONTRADICCION**, si ella es siempre **F**.
- **CONTINGENCIA**, si no es tautología ni contradicción.

Lógica


Implicación lógica

Dadas dos proposiciones p y q , se dice que p implica lógicamente q , si $p \rightarrow q$ es una tautología. En tal caso se escribe $p \Rightarrow q$ y se lee “ p implica q ”.

Equivalencia lógica


Dadas dos proposiciones p y q , se dice que ellas son lógicamente equivalentes, si $p \leftrightarrow q$ es una tautología. En tal caso se escribe $p \Leftrightarrow q$ y se lee “ p es equivalente a q ”.


Algunas tautologías importantes


 $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ (doble negación)


 $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (conmutatividad de \wedge)

 $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (conmutatividad de \vee)


 $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$ (conmutatividad de \leftrightarrow)


 $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (asociatividad de \vee)


 $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ (asociatividad de \wedge)


 $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ (asociatividad de \leftrightarrow)


Algunas tautologías importantes (continuación)


 $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(distributividad de \wedge con respecto a \vee)


 $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(distributividad de \vee con respecto a \wedge)

 $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (Ley de De Morgan para \wedge)

 $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ (Ley de De Morgan para \vee)

 $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ (contrarecíproca)

 $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

 $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

 $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

Lógica

Función proposicional

Se llama **función proposicional** (o **enunciado abierto**) a una **expresión** p que contiene una o más variables, y tal que **ella** se convierte en una **proposición lógica** cuando se le asignan valores específicos a dichas variables.

Conjunto de validez

Se llama **Conjunto de validez** de una función proposicional p , y se denota por V_p , al conjunto de valores (o n -uplas de valores) para los cuales dicha función es **verdadera**.

Cuantificadores lógicos

- Para indicar que una función proposicional es verdadera para cualquier elemento de un determinado conjunto A se usa el símbolo \forall , el cual se llama **cuantificador universal**.
 \forall se lee: “para todo”, “cualquiera sea”, “para cada”.
- Para indicar que una función proposicional es verdadera sólo para algunos elementos de un determinado conjunto A se usa el símbolo \exists , el cual se llama **cuantificador existencial**.
 \exists se lee: “existe (un)”, “existe al menos un”, “existe algún”.
- Para indicar que una función proposicional es verdadera para un único elemento de un determinado conjunto A se usa el símbolo $\exists!$.
 $\exists!$ se lee: “existe un único”.

Lógica

Más sobre cuantificadores lógicos

Sean A un conjunto y p una función proposicional que depende de una variable x (en tal caso se escribe $p(x)$).

● $\forall x \in A : p(x)$ se lee “para todo x en A , $p(x)$ es verdadera”.

● $\exists x \in A : p(x)$ se lee “existe x en A tal que $p(x)$ es verdadera”.

Negaciones importantes

● $\sim (\forall x \in A : p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in A : \sim p(x))$

● $\sim (\exists x \in A : p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in A : \sim p(x))$

● $\sim (\exists! x \in A : p(x)) \Leftrightarrow$
 $(\forall x \in A : \sim p(x)) \vee (\exists x \in A, \exists y \in A, x \neq y : p(x) \wedge p(y))$

Conjuntos

Idea de Conjunto

Llamaremos **conjunto** a cualquier colección de objetos. Los objetos los llamaremos **elementos** del conjunto. Dos conjuntos importantes son el **conjunto vacío**, que no contiene elementos, y el **conjunto universo**, que contiene todos los elementos.

Notación

- Los conjuntos: A, B, \dots
- Los elementos: a, b, \dots
- a pertenece a A : $a \in A$
- a no pertenece a A : $a \notin A$
- Conjunto vacío: ϕ
- Conjunto universo: U

Conjuntos

Definición de un conjunto A

Dado $x \in U$ y un conjunto A : $x \in A \vee x \notin A$?

Si esta pregunta puede responderse siempre, entonces se dice que A está **bien definido**.

Maneras de definir un conjunto

● Por **extensión**, vale decir mostrando los elementos de A .

Ejemplo: $A = \mathbf{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ (Números naturales)

● Por **comprensión**, esto es dando una propiedad (o proposición) que caracterice a los elementos del conjunto.

Ejemplo: $\mathbf{Q} := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\}$ (Números racionales)

Conjuntos

Inclusión de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B , se dice que A es **subconjunto** de B , y se escribe $A \subseteq B$, si todos los elementos de A están también en B , esto es:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Propiedades de la inclusión

Dados A, B, C conjuntos, se tiene

● $\phi \subseteq A \subseteq U$

● $A \subseteq A$

● $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

Conjuntos

Igualdad de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B , se dice que A y B son **iguales**, y se escribe $A = B$, si los elementos de A y B coinciden, esto es:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Conjunto de las partes de un conjunto dado

Dado un conjunto A , se define el conjunto de las partes de A , y se denota $\mathcal{P}(A)$, como el conjunto de todos los subconjuntos de A , esto es:

$$\mathcal{P}(A) := \{ X : X \subseteq A \}$$

Notar que $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$ ya que $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$

Conjuntos

Operaciones entre conjuntos

Sea U el conjunto universo, y sean A, B subconjuntos de U .

● La **diferencia** de A y B es el conjunto

$$A - B := \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$$

● El **Complemento** de A con respecto a U , el cual se denota A^c (o bien A' , $-A$), es el conjunto $U - A$, vale decir:

$$A^c := U - A = \{x \in U : x \notin A\}$$

Algunas propiedades

● Para todo $x \in U$ se tiene: $x \in A \vee x \in A^c$

● $\phi^c = U \wedge U^c = \phi$

● $(A^c)^c = A$

Conjuntos

Otras operaciones entre conjuntos

Sea U el conjunto universo, y sean A , B subconjuntos de U .

- La **intersección** de A y B , la cual se denota $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos comunes a A y B , esto es

$$A \cap B := \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$

- La **unión** de A y B , la cual se denota $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B , esto es

$$A \cup B := \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$

Conjuntos

Propiedades de \cap y \cup

- $A \cup A = A \quad \wedge \quad A \cap A = A$ (idempotencia)
- $A \cup B = B \cup A \quad \wedge \quad A \cap B = B \cap A$ (conmutatividad de \cup y \cap)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asociatividad de \cup)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociatividad de \cap)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(distributividad de \cup con respecto a \cap)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(distributividad de \cap con respecto a \cup)
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Ley de De Morgan)
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Ley de De Morgan)

Conjuntos

Más definiciones

- Dos conjuntos A y B se dicen **disjuntos** sí y sólo sí $A \cap B = \phi$.
- Dados dos conjuntos no vacíos A y B , se define el **Producto Cartesiano** de ellos, el cual se denota por $A \times B$, como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que a pertenece a A y b pertenece a B , esto es

$$A \times B := \{ (a, b) : a \in A \wedge b \in B \}$$

- Dados n conjuntos no vacíos A_1, A_2, \dots, A_n , se define el **Producto Cartesiano** de ellos, el cual se denota por $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, como el conjunto de todas las n -uplas ordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) tales que a_i pertenece a A_i para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, esto es

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i, i \in \{1, \dots, n\} \}$$

Conjuntos

Partición de un conjunto

Sean A_1, A_2, \dots, A_n subconjuntos de un conjunto B . Se dice que $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es una **PARTICION** de B si estos conjuntos son **no vacíos**, **disjuntos dos a dos** y su **unión** es el conjunto B , vale decir sí y sólo sí:

● $A_i \neq \phi$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

● $A_i \cap A_j = \phi$ para cada $i \neq j$.

● $\bigcup_{i=1}^n A_i = B$.

Conjuntos

Cardinalidad

El número de elementos de un conjunto **finito** A se llama **cardinalidad** de A y se denota $|A|$.

Propiedades

● Si A y B son conjuntos **disjuntos**, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.

● Si A y B son conjuntos arbitrarios, entonces
 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

● Si A , B y C son conjuntos arbitrarios, entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$