UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

MAT 411 123 **Complemento de Cálculo para Ingeniería**
FPV/fpv **(08.05.2001(**

Resolución Certamen I

I. Escribir, la representación en Serie de Fourier de la extensión

(1.1) π-periódica `impar` de una forma de onda arbitraria $f(x)$, definida en el intervalo $[0, \pi/2]$;
`Definimos la extensión` π`,periódica`

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -f(x+\pi) & \text{si} \quad -\pi/2 \leq x \leq 0 \end{cases} \qquad \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x+\pi)$$

`y construimos la representación de Fourier:`

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx$$

donde

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin 2nx dx$$

(1.2) 4-periódica `par` c/r a x=5 de una forma de onda arbitraria $g(x)$, definida en el intervalo $[5, 7]$.
`Definimos la extensión par 4,periódica:`

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad 5 \leq x \leq 7 \\ g(10-x) & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 5 \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \tilde{g}(x+4)$$

`y construimos la representación de Fourier:`

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{2}(x-5)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_3^7 g(x) \cos \frac{n\pi}{2}(x-5) dx \\ &= \int_0^2 \tilde{g}(x+5) \cos \frac{n\pi}{2} x dx \end{aligned}$$

II. Construir la extensión 2-periódica `alternante` de la forma de onda

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1/2 & \text{si} \quad 1/2 < x < 1 \end{cases} \tag{1}$$

Además, estudiar la convergencia de las sumas parciales de dicha Serie de Fourier.

La extensión periódica requerida es:

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ -f(x+1) & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \qquad f_a(x) = f_a(x+2)$$

y construimos la representación de Fourier:

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_{2n+1} \cos(2n+1)\pi x + b_{2n+1} \sin(2n+1)\pi x] \\
\text{donde} & \\
a_{2n+1} &= \int_{-1}^{1} f(x) \cos(2n+1)\pi x dx \\
&= -\int_{-1}^{0} f(x+1) \cos(2n+1)\pi x dx + \int_{0}^{1} f(x) \cos(2n+1)\pi x dx \\
&= -\int_{0}^{1} f(x) \cos(2n+1)\pi(x-1) dx + \int_{0}^{1} f(x) \cos(2n+1)\pi x dx \\
&= 2\int_{0}^{1} f(x) \cos(2n+1)\pi x dx \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ¡ realizar los cálculos!} \\
\text{análogamente} & \\
b_{2n+1} &= 2\int_{0}^{1} f(x) \sin(2n+1)\pi x dx \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ¡ realizar los cálculos!}
\end{aligned}$$

Finalmente, definimos la suceción de sumas parciales:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \{a_{2n+1} \cos(2n+1)\pi x + b_{2n+1} \sin(2n+1)\pi x\}$$

entonces:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1/2 \\ 1/4 & \text{si} \quad x = 1/2 \\ -1/2 & \text{si} \quad 1/2 < x < 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad -1/2 < x < 0 \\ -1/4 & \text{si} \quad x = -1/2 \\ -2(x+1) & \text{si} \quad -1 < x < -1/2 \\ -1/4 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$$

y en las repeticiones 2-periódicas de los puntos del intervalo fundamental $[-1, 1]$.

III. Determine los valores propios y autofunciones del problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(10) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

La familia de valores propios y funciones características es:

$$\lambda_n = \left(\tfrac{(2n+1)\pi}{20}\right)^2 \qquad y_n(x) = \sin \tfrac{(2n+1)\pi x}{20}$$

IV. Considere el proceso de difusión del calor en un alambre de acero de $\mathbf{10}$ [cm] de longitud, con constante de difusión $\boldsymbol{k} = \mathbf{0.128}$ [$\mathrm{cm}^{\mathbf{2}}/\mathrm{seg}$] cuyos extremos $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{x} = \mathbf{10}$ son mantenidos a $\mathbf{0^o}$ y $\mathbf{10^o}$, respectivamente. Determinar la temperatura $\boldsymbol{u(x,t)}$ en cada punto $\boldsymbol{x}$ del alambre después de transcurrido $\boldsymbol{t}$ [seg], si la distribución inicial de temperatura es modelada por

(4.1) $\boldsymbol{f(x) = x}$. Además, interprete su solución.

`La temperatura estacionaria es` $U(x) = x$ `que coincide con la distribución inicial de temperatura, luego no existe cambio de temperatura cualesquiera sea el instante subsiguiente:` $u(x,t) = x, \quad 0 < x < 10, \quad t \geq 0$

(4.2) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{25}x(35 - x)}$. Escriba una aproximación para la temperatura $\boldsymbol{u(x,t)}$.

`Como la temperatura estacionaria es` $U(x) = x$ `debemos considerar la solución` $v(x,t)$ `del problema de difución del calor, donde los extremos del alambre son mantenidos a` 0^o `y la distribución inicial de temperatura es:`$\tilde{f}(x) = \frac{1}{25}(10 - x)x$`, es decir:`

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= v(x,t) + x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-t(\frac{kn\pi}{10})^2} \sin \tfrac{n\pi x}{10}
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{125}\int_0^{10} (10 - x)x \sin \tfrac{n\pi x}{10} dx \\
&= \frac{4}{25}(\frac{10}{n\pi})^3(-1)^{n+1} \text{ (¡confirmar!)}
\end{aligned}
$$

`Así, la solución es proporcional a la siguiente expresión :`

$$
u(x,t) \;\propto\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-t(\frac{kn\pi}{10})^2}}{n^3}(-1)^{n+1} \sin \tfrac{n\pi x}{10} dx
$$

denotando $\alpha = e^{-(\frac{kn\pi}{10})^2}$ y observando que $|c_n| \propto \dfrac{1}{n^3}$

$$
u(x,t) \;\sim\; \frac{4 \cdot 10^4}{\pi^3}\left(\alpha \sin \tfrac{\pi x}{10} - \frac{\alpha^{4t}}{8} \sin \tfrac{\pi x}{5} + \frac{\alpha^{9t}}{27} \sin \tfrac{3\pi x}{10} - \cdots\right)
$$