UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA Y ALGEBRA LINEAL 520142
Listado 13 (Sistemas de Ecuaciones Lineales)

1. Decida si los sistemas que siguen son incompatibles o compatibles. En el último caso, decida si son determinados o indeterminados y encuentre la solución.

a) $\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 8 \\ 3x & - & y & = & 4 \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ x & + & 3y & = & 8 \\ 2x & + & 2y & = & 10 \end{array}\right|$ c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} ix & - & 2y & - & z & = & 1+i \\ x & - & 2iy & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right|$

**(En práctica c))**.

2. Muestre que el siguiente sistema es compatible determinado y encuentre su solución por los métodos de Gauss-Jordan y de Cramer:

$$\left.\begin{array}{rrcrcrcr} 2x_1 & -4x_2 & & & & & = & -10 \\ x_1 & -3x_2 & & & + & x_4 & = & -4 \\ x_1 & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 9 \\ 3x_1 & -4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -15 \end{array}\right|$$

¿Qué método le tomó más tiempo?
3. Determine el o los valores de $p$ y $q$ tales que el sistema:

i. No tenga solución.

ii. Tenga una única solución.

iii. Tenga infinitas soluciones.

a) $\left.\begin{array}{rcrlcr} x & - & y & +2z & = & 2 \\ 3x & + & y & +z & = & 1 \\ & & 2x & +pz & = & q \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{rcrlcr} x & + & 2y & +z & = & q \\ 2x & - & y & +z & = & p \\ 3x & + & y & +2z & = & 1 \end{array}\right|$

**(En práctica b))**.

4. Determine los valores que debe tomar el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{rcl} (1-\lambda)x+y+z & = & a \\ x+(1-\lambda)y+z & = & b \\ x+y+(1-\lambda)z & = & c \end{array}\right|$$

En el caso en que el sistema no sea determinado, determine las condiciones que debe satisfacer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para que el sistema sea compatible indeterminado.

5.
i). Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la función definida por $F(X) = A\cdot X$. Encuentre condiciones sobre la matriz $A$ para que la función $F$ sea biyectiva. **(En práctica).**
ii). Utilizando la parte i), encuentre condiciones sobre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, de modo que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, sea biyectiva.

6. Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente posea solución no trivial:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & \alpha x & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right|$$

7. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$. Sean $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{K}^n$ soluciones del sistema homogéneo $Ax = \mathbf{0}$ ($x \in \mathbb{K}^n$) y $\mathbf{p} \in \mathbb{K}^n$ una solución (cualquiera) del sistema $Ax = b$. Demuestre que:

i. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$ es solución del sistema homogéneo $Ax = \mathbf{0}$.

ii. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbf{h}_1 + \mathbf{p}$ es solución del sistema $Ax = b$.

iii. Si $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ son soluciones del sistema $Ax = b$, entonces $A(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) = 0$.

8. Sea el siguiente sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}\right|$$

Suponga que este sistema es compatible determinado y denote por $A$ a la matriz de coeficientes. Aplicando el método de Gauss-Jordan a este sistema deduzca la regla de Cramer.

9. Considere la ecuación diferencial ordinaria, donde la incógnita es la función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$-p'''(x) + 3p''(x) - p'(x) + p(x) = x - x^2 + x^3 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

a) Suponga que $p$ es un polinomio de grado 3, $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, y encuentre los valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $p$ sea solución de la ecauación (1).

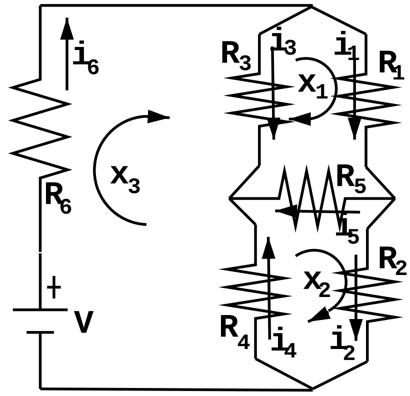
b) Encuentre los valores de $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tales que $q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ sea solución de la ecuación (1). **(En práctica a) y b)).**

10. Considere la reacción química:

$$x_1\ Cu_2S + x_2H^+ + x_3NO_3^- \to x_4Cu^{2+} + x_5NO + x_6S_8 + x_7H_2O,$$

donde $x_1, x_2, \cdots, x_7$ son enteros positivos (incógnitas) que denotan el número de moléculas de cada compuesto. Determine estos valores de modo que la reacción esté balanceada, es decir, el **número de átomos** de cada elemento y la **carga eléctrica total** Q se mantienen.

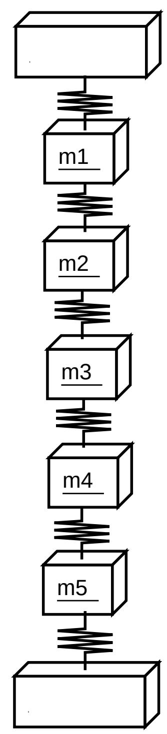
10. **Aplicación a un problema de circuito eléctrico.** Considere la siguiente red de resistencias (llamada puente de Weathstone, ver Figura 1), donde $x_i$ es la corriente que circula en la red a través del circuito $i$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, y $R_1, R_2, \cdots, R_6, V$ son las resistencias (en ohms) y el voltaje (en volts), respectivamente. Aplicando la ley de OHM y la ley del voltaje de KIRCHHOFF, se obtiene el siguiente sistema lineal de 3 ecuaciones con incógnitas $x_1, x_2$ y $x_3$:




$$\begin{aligned}
(R_1 + R_3 + R_5)\ x_1 - R_5\ x_2 - R_3\ x_3 &= 0,\\
-R_5\ x_1 + (R_2 + R_4 + R_5)\ x_2 - R_4\ x_3 &= 0,\\
-R_3\ x_1 - R_4\ x_2 + (R_3 + R_4 + R_6)\ x_3 &= V.
\end{aligned}$$

Suponiendo que $R_1 = R_4 = 2$, $R_2 = 4$, $R_3 = 1$, $R_5 = R_6 = 10$, y $V = 15$, encuentre la corriente que circula a través de los circuitos de la red.

11. Aplicación a un problema de mecánica de equilibrio. Considere el sistema de masa-resorte de 5 masas $m_1, \ldots, m_5$ suspendidas entre resortes como muestra la figura. Suponiendo que los resortes verifican la llamada ley de Hooke, con una misma constante $k$, los desplazamientos $x_1, \ldots, x_5$ están dados por una condición de equilibrio que involucra la gravedad. Más precisamente, para cada masa la condición de equilibrio es




- para $m_1$: $-kx_1 + k(x_2 - x_1) + m_1 g = 0$,
- para $m_2$: $-k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) + m_2 g = 0$,
- para $m_3$: $-k(x_3 - x_2) + k(x_4 - x_3) + m_3 g = 0$,
- para $m_4$: $-k(x_4 - x_3) + k(x_5 - x_4) + m_4 g = 0$,
- para $m_5$: $-k(x_5 - x_4) + k(0 - x_5) + m_5 g = 0$.

Suponiendo que $g/k = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$ y $m_5 = 5$, encuentre los desplazamientos de las 5 masas.

---

JSA/RBP/RRS/GBG/AGS/RNG/LRS/BBM/ags
Segundo Semestre de 2005