Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Complemento de Cálculo (521234)

Certamen 1
Pauta de Corrección

7 de Mayo, 2002

1.- Sea la función $f(x) = \sin x$, para $0 \le x \le \pi/2$. Exprese el desarrollo en series de Fourier (sin necesariamente calcular las integrales asociadas a cada coeficiente) de :

a) la función $\frac{\pi}{2}$-periódica que coincide con f en $[0, \pi/2]$;

b) la función π-periódica impar que coincide con f en $[0, \pi/2]$;

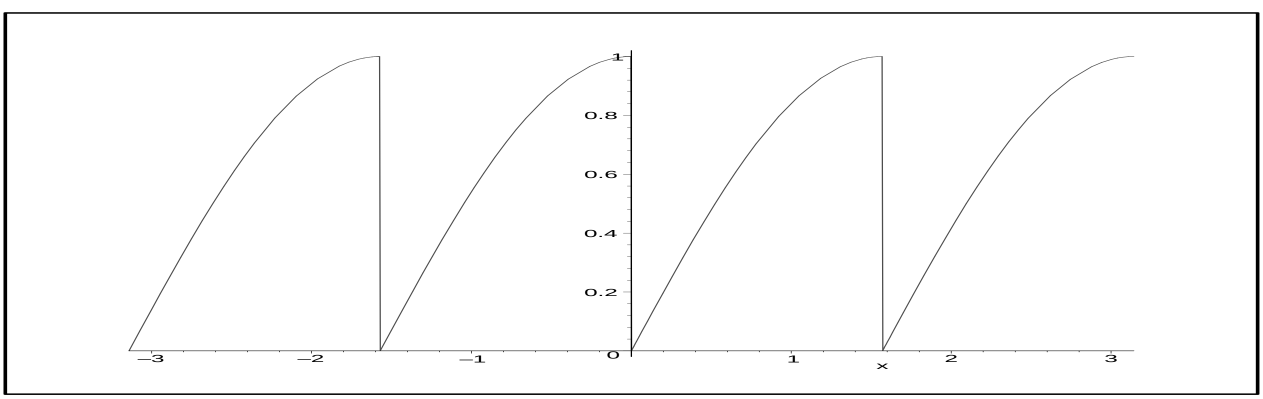
Haga un gráfico para cada caso, diga a que lugar converge cada una de estas series en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, y comente el tipo de convergencia que se tiene para (a) y (b). Justifique su respuesta.

Respuesta :

a) Período $= \pi/2 \Longrightarrow L = \pi/4$.

$$\begin{aligned}
f_{(a)}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 4nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 4nx \\
a_0 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{4}{\pi} \\
a_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 4nx dx = \frac{4}{\pi(1+4n)(1-4n)} \\
b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \sin 4nx dx = \frac{16n}{\pi(1+4n)(1-4n)}, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

5 pts (no es necesario calcular las integrales)



5 pts

La función $f_{(a)}$ es discontinua en los puntos $\frac{n\pi}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$, con lo cuál (por el Teorema de convergencia puntual al promedio de los límites por la derecha y por la izquierda), en $[-\pi/2, \pi/2]$ hay convergencia hacia :

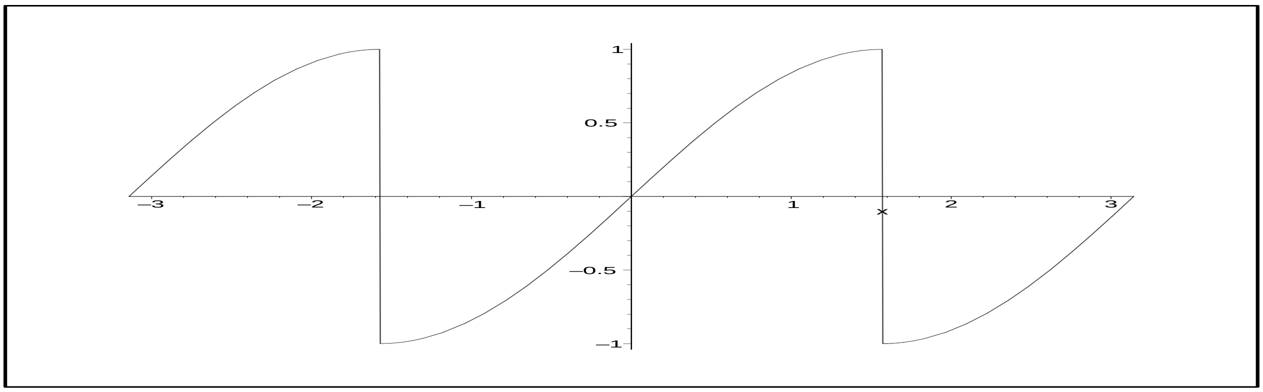
$$\boxed{S_{(a)}(x) = \begin{cases} \sin(x+\pi/2) = \cos(x) & \text{si } x \in (-\pi/2, 0) \\ \sin(x) & \text{si } x \in (0, \pi/2) \\ 1/2 & \text{si } x = -\pi/2,\ x = 0,\ \text{o bien } \ x = \pi/2 \end{cases}}$$

5pts

b) Período $= \pi \Longrightarrow L = \pi/2$.

$$\begin{aligned} f_{(b)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \qquad \text{(los coeficientes } a_n \text{ son todos nulos ya que } f_{(b)} \text{ es impar)} \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)\sin(2nx)dx \ = \ \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin(2nx)dx \\ &= \frac{8n(-1)^n}{\pi(1+2n)(1-2n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

5 pts (no es necesario calcular la integral)



5pts

La función $f_{(b)}$ es discontinua en los puntos $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$, con lo cuál (por el Teorema de convergencia puntual al promedio de los límites por la derecha y por la izquierda), en $[-\pi/2, \pi/2]$ hay convergencia hacia :

$$\boxed{S_{(b)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & \text{si } x = -\pi/2,\ \text{o bien } x = \pi/2 \end{cases}}$$

5pts

2.- Sea el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} x^2y'' + \lambda y = 0, & \text{para } 1 \leq x \leq e, \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

a) Determine los valores propios λ_n y las funciones propias $y_n(x)$.
b) Determine la relación de ortogonalidad que verifican los y_n.
c) Sea $f(x) \equiv 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n$, con $1 < x < e$. Exprese cada coeficiente A_n en términos de una integral. Sin necesidad de calcular la integral, diga en que sentido converge la serie, y donde converge cuando $1 \leq x \leq e$.

Respuesta :
a) Corresponde a una ecuación de Euler, y buscaremos soluciones de la forma $y(x) = x^\alpha$. Reemplazando en la ecuación de S-L se tiene

$$\alpha(\alpha - 1) + \lambda = 0$$

Es decir,

$$\begin{array}{lll} \text{Si } \lambda < 1/4 & \Rightarrow & \alpha_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}, \qquad \alpha_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2} \\ & \Rightarrow & y(x) = Ax^{\alpha_1} + Bx^{\alpha_2} = 0 \quad (\text{pues } y(1) = y(e) = 0 \Rightarrow A = B = 0) \\ \text{Si } \lambda = 1/4 & \Rightarrow & \alpha_1 = \alpha_2 = 1/2 \\ & \Rightarrow & y(x) = (A\ln(x) + B)\sqrt{x} = 0 \quad (\text{pues } y(1) = y(e) = 0 \Rightarrow A = B = 0) \end{array}$$

En cambio

$$\begin{array}{lll} \text{Si } \lambda > 1/4 & \Rightarrow & \alpha_1 = \dfrac{1-i\sqrt{4\lambda-1}}{2}, \qquad \alpha_2 = \dfrac{1+i\sqrt{4\lambda-1}}{2} \\ & \Rightarrow & y(x) = \sqrt{x}(A\cos(\sqrt{4\lambda-1}\ln x) + B\sin(\sqrt{4\lambda-1}\ln x)) \\ & \Rightarrow & y(x) = B\sqrt{x}\sin(\sqrt{4\lambda-1}\ln x) \quad (y(1) = 0 \Rightarrow A = 0) \end{array}$$

Por lo tanto usando $y(e) = 0$, se tiene que

$$\sqrt{4\lambda_n - 1} = n\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2 + 1}{4}}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{y_n(x) = \sqrt{x}\sin(n\pi\ln x)}$$

15 pts

b) $x^2y'' + \lambda y = 0 \Longleftrightarrow (y')' + \lambda\frac{1}{x^2}y = 0$, con lo cuál el peso es $p(x) = 1/x^2$, es decir

$$\boxed{(y_n, y_m) = \int_1^e \tfrac{1}{x^2} y_n(x) y_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1/2 & \text{si } n = m \end{cases}}$$

pues $\int_1^e \frac{1}{x^2}(y_n(x))^2 dx = \int_1^e \frac{1}{x}\sin^2(n\pi\ln x)dx = \int_0^1 \sin^2 n\pi s ds = 1/2$, con $s = \ln x$ y $ds = dx/x$.

10 pts

c) $A_n = 2\int_1^e \frac{1}{x^2}\sqrt{x}\sin(n\pi\ln x)dx = 2\int_0^1 e^{-s/2}\sin n\pi s ds = 8n\pi\frac{1-e^{-1/2}(-1)^n}{1+4n^2\pi^2}$ (no es necesario calcular esta integral).

Por otro lado, $1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sqrt{x}\sin(n\pi\ln x) \implies e^{-s/2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi s$, con $s = \ln x$. Como las funciones senoidales son impares, entonces la extensión de $g(s) = e^{-s/2}$ del intervalo $(0,1)$ a

$(-1,0]$ es impar. Por el teorema de convergencia puntual (y por la continuidad de $\ln x$), esta serie converge a 1, para $0 < s < 1$ (es decir para $1 < x < e$), y al promedio $\frac{1-1}{2} = 0$ para $s = 0$ y $\frac{e^{-1/2} - e^{-1/2}}{2} = 0$ para $s = 1$ (o sea $x = 1$ y $x = e$), es decir a :

$$\boxed{S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < x < e \\ 0 & \text{si } x = 1, \text{ o } x = e. \end{cases}}$$

5 pts

3.- Utilizando el método de separación de variables, resuelva el problema del potencial ($\Delta u = f$) en el disco de radio 1 y centro 0 :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) u(r,\theta) = J_0(\alpha_1 r), & 0 < r < 1, \quad 0 \le \theta < 2\pi \\ u(1,\theta) = \sin 3\theta, & 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Donde J_0 es la función de Bessel de primera especie de orden 0 y α_1 su primera raiz. `Indicación` : escribir la solución como $u(r,\theta) = v(r,\theta) + w(r,\theta)$, donde $v(r,\theta)$ es solución del problema con término fuente nulo, y $w(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)$ es solución del problema con C.B. nula.

Respuesta :

a) $v(r,\theta)$ es solución de

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) v(r,\theta) = 0, & 0 < r < 1, \quad 0 \le \theta < 2\pi \\ v(1,\theta) = \sin 3\theta, & 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

2 pts

Escribiendo $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, y reemplazando en la ecuación se obtiene :

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda$$

3 pts

Luego el problema de Sturm-Liouville asociado a esta ecuación es sobre Θ :

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta) \text{ es } 2\pi\text{-periódica} \end{cases}$$

3 pts

cuyos valores propios y funciones propias son de la forma

$$\begin{cases} \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \Theta_0(\theta) = a_0/2 \\ \Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \end{cases}$$

3 pts

Reemplazando λ_n por su valor podemos deducir que

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r)$$

3 pts

que es una ecuación de Euler, cuya solución es de la forma $R(r) = r^\alpha$, con α solución de

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0$$

3 pts

Es decir $\alpha_1 = -n$, y $\alpha_2 = n$. Como buscamos soluciones acotadas al interior del círculo $0 < r < 1$, entonces $R(r) = r^{\alpha_1} = r^{-n}$ se descarta, y nos quedamos únicamente con $R(r) = r^{\alpha_2} = r^n$. Luego la solución general es de la forma

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \sin n\theta$$

3 pts

Pero reemplazando esta solución en $v(1, \theta) = \sin 3\theta$ observamos que el único término que sobrevive es :

$$v(r, \theta) = r^3 \sin 3\theta$$

b) Por otro lado $w(r, \theta)$ es solución de

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w(r, \theta) = J_0(\alpha_1 r), & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ w(1, \theta) = 0, & 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

2 pts

por simetría, la solución de este problema no depende de θ, y buscamos soluciones de la forma $w(r, \theta) = w(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)$, es decir, soluciones del problema de Sturm-Liouville

$$r^2 w''(r) + r w'(r) + \lambda r^2 w(r) = 0$$

3 pts

con $\lambda_n = \alpha_n^2$. Por otro lado w es solución de la ecuación que nos interesa, es decir

$$r^2 w''(r) + r w'(r) - r^2 J_0(\alpha_1 r) = 0$$

3 pts

Luego por ortogonalidad de las funciones propias $J_0(\alpha_n r)$, se tiene que necesariamente

$$\begin{cases} A_n = 0, \quad n = 2, 3, 4, 5, \dots \\ A_1 = -1/\lambda_1 = -1/\alpha_1^2 \end{cases}$$

3 pts

Es decir

$$w(r, \theta) = -\frac{1}{\alpha_1^2} J_0(\alpha_1 r)$$

3 pts

y por lo tanto, por linealidad (o sobreposición de las soluciones), se tiene finalemente que

$$\boxed{u(r, \theta) = v(r, \theta) + w(r, \theta) = r^3 \sin 3\theta - \tfrac{1}{\alpha_1^2} J_0(\alpha_1 r)}$$

3 pts

MGC/MBB/MSC/msc