UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA EVALUACION 2
ALGEBRA LINEAL (520131)
ALGEBRA II (520136)

1.-

$u = i - j + 3k, \ v = 2i - 4j - 2k, \ w = 14i + 8j - 2k, \ s = i - 2j - k.$

a) $u \cdot v = 1(2) - 1(-4) + 3(-2) = 0$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 14i + 8j - 2k$$

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -2 \\ 14 & -8 & -2 \end{vmatrix} \quad 24i - 24j + 72k$$

$$s \cdot (v \times w) = (1)24 - 2(-24) - 72 = 0$$

b) Las operaciones entre vectores anteriores arrojan las siguientes consecuencias

i) u y v son perpendiculares.

ii) w es perpendicular a u y a v.

iii) s, v y w son coplanares.

2.-

$L_1 : x = 1, \ y = 7t - 3, \ z = t$
$L_2 : x = 5t - 2, \ z = 3t, \ z = -4t + 4$

a) El ángulo φ entre L_1 y L_2 va a estar dado por el ángulo entre un vector paralelo a L_1 y un vector paralelo a L_2. De acuerdo a las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2, un vector paralelo a L_1 es $v_1 = 7j - k$ y un vector paralelo a L_2 es $v_2 = 5i + 3j - 4k$. Así:

$$cos\varphi = \frac{v_1 \cdot v_2}{||v_1||||v_2||}$$

Ahora:

$$v_1 \cdot v_2 = 0(5) + 7(3) - 1(-4) = 25$$
$$||v_1|| = \sqrt{0 + 49 + 1} = \sqrt{50}$$
$$||v_2|| = \sqrt{25 + 9 + 6} = \sqrt{50}$$

con lo cual:

$$cos\varphi = \frac{1}{2}$$

b) $v_1 = 7k - k$ vector paralelo a L_1

$v_2 = 5i + 3j - 4k$ vector paralelo a L_2

Entonces, el vector resultante del producto cruz entre estos dos vectores, w, será un vector perpendicular a las rectas L_1 y L_2 y por lo tanto este vector va a ser un vector paralelo a la recta cuya ecuación deseamos obtener. Luego:

$$w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 7 & -1 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -25i - 5j - 35k$$

De aquí, un vector con la misma dirección del vector w y por ende paralelo a la recta buscada va a ser:

$$v = \frac{1}{5}\, w = -5i - j - 7k$$

con lo que la ecuación de la recta perpendicular a las rectas L_1 y L_2 y que pasa por el punto $(5, 6, 7)$ queda dada por:

$$\frac{x-5}{5} = \frac{z-6}{-1} = \frac{z-7}{-7}$$

3.-

$L_1 : x = t + 1,\ y = -t - 2,\ z = 2t + 2$
$L_2 : x = \frac{1}{2}t + 4,\ y = \frac{1}{2}t - 2,\ z = 4$

De las ecuaciones para las rectas L_1 y L_2 se tiene que:

$v_1 = i - j + 2k$, vector paralelo a la recta L_1
$v_2 = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j$, vector paralelo a la recta L_2

Entonces, haciendo $n = v_1 \times v_2$, el vector n pasa a ser perpendicular a las rectas L_1 y L_2, con lo cual se puede tomar como vector normal al plano cuya ecuación deseamos obtener:

$$n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -i + j + k$$

Así, $n = -i + j + k$ es el vector normal al plano buscado. Luego la ecuación del plano con vector normal pependicular a las rectas L_1 y L_2 y que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ está dada por:

$$-(x-2) + (y+1) + `(z-3) = 0$$

ó

$$\pi : -x + y + z = 0$$

Dado que el vector n es $\perp$ a L_1 y L_2 y también $\perp$ a π, entonces se pueden calcular las distancias de L_1 y L_2 al plano, usando la fórmula de la distancia entre un punto y el plano. De lo anterior, la recta L_1, es paralela a un vector del plano, entonces basta elegir un punto de L_1.

Sea $Q = (1, -2, 2) \in L_1$ y $P = (2, -1, 3) \in \pi$, entoces la distancia d_1 de Q al plano es

$$d_1 = \frac{|n \cdot \vec{PQ}|}{||n||}$$

donde, $\vec{PQ} = -i - j - k$ y $n = -i + j + k$
Ahora, $n \cdot \vec{PQ} = 1 - 1 - 1 = -1$ y $||n|| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, con lo cual:

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Análogamente, para L_2. Sea $Q = (4 - 2 - 4) \in L_2$ y $P = (2, -1, 3) \in \pi$, entonces $\vec{PQ} = 2i - j + k$

$$d_2 = \frac{|(-i+j+k) \cdot (2i - j + k)|}{||-i+j+k||}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

4.- H_1 subconjunto de $\mathbb{R}^3$, H_2 y H_3 subespacios de $\mathbb{R}^3$, tales que:

$$\begin{aligned} H_1 = & \quad \{(x,y,z)/y+z=0\} \\ H_2 = & \quad \{(x,y,z)/x=z\} \\ H_3 = & \quad \{(x,y,z)/x=y=0\} \end{aligned}$$

a) H_1 es subespacio

i) $(0,0,0) \in H_1, \quad 0+0+0=0$
luego $H_1 \neq \phi$

ii) (a,b,c) y $(x,y,z) \in H_1$ cualquiera

$$\Rightarrow (*) \quad \begin{array}{l} a+b+c=0 \\ x+y+z=0 \end{array}$$

Ahora

$(a,b,c)+(c,y,z) = (a+x, \ b+y, c+z)$

De $(*)$ se tiene $(a+b+c)+(x+y+z)=0$
$\Rightarrow (a+b)+(b+y)+(c+z)=0$
Así $\quad (a,b,c)+(x,y,z) \in H_1$

iii) $\lambda \in I\!R$ y $(a,b,c) \in H_1$ cualquiera
$\Rightarrow \quad a+b+c=o \quad /\lambda$
$\Rightarrow \quad \lambda(a+b+c)=0$
$\Rightarrow \quad \lambda a+\lambda b+\lambda c=0 \quad (*)$
Ahora $\lambda(a,b,c)=(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

De (*) $\lambda(a,b,c) \ \in \ H_1$

i), ii) e iii) $\Rightarrow H_1$ es subespacio.

b) $H_1+H_3 = \{w=u+v/u \in H_1, \quad v \in H_2\}$
$u \in H_1 \Rightarrow u=(a,b,c)$ con $a+b+c=0$
$v \in H_3 \Rightarrow v=(x,y,z)$ con $x=y=0$
$\Longrightarrow w=u+v=(a,b,c+z)$ con $c=-b-c$
$\Longrightarrow w=(a+b,-a-b+z)$
Como z es cualquier real $\Rightarrow w$ puede ser cualquier elemento $\in I\!R^3$ y así

$$H_1+H_3 = I\!R^3$$

$H_2+H_3 = \{w=u+v/u \in H_2, \ v \in H_3\}$
$u \in H_2 \Rightarrow u=(a,b,c)$ con $a=c$
$v \in H_2 \Rightarrow v=(x,y,z)$ con $x=y=0$
$\Rightarrow w=u+v=(a,b,a+z)$
como $z \in I\!R$ cualquiera
$\Rightarrow w \in I\!R^3,$ cualquiera y así

$$H_2+H_3 = I\!R^3$$

c) $H_1 \cap H_2 = \{w/w \in H_1$ y $w \in H_2\}$
$w \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow w=(x,y,x)$ con $x+y+x=0 \Rightarrow y=x-2x$

$H_1 \cap H_2 = \{(x, -2x, x)/x \in \mathbb{R}\}$
$\Longrightarrow H_1 + H_2$ no es suma directa

$H_1 \cap H_3 = \{w/w \in H_1 \text{ y } w \in H_3\}$
$w \in H_1 \cap H_3 \Rightarrow w = (0,0,0) \Rightarrow H_1 \cap H_3 = \{(0,0,0)\}$
$\Longrightarrow H_1 \oplus H_3 = \mathbb{R}^3$

$H_2 \cap H_3 = \{w|w \in H_2 \text{ y } w \in H_3\}$
$w \in H_2 \cap H_3 \Rightarrow w = (0,0,0)$
$\Longrightarrow H_2 \oplus H_3 = \mathbb{R}^3$