UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

MAT 525 222 — ***Ecuaciones Diferenciales II***
FPV/fpv — **(23.08.2004)**

Listado 1

I. Resolver los siguientes problemas diferenciales: definidos sobre el dominio $\mathcal{D} := \mathbb{R}\times]0,\infty[$.

1.1) $$\begin{array}{ll} u_t(x,t) + 2u_x(x,t) = t & (x,t)\in\mathcal{D} \\ u(x,0) = 1 - x, & x\in\mathbb{R} \end{array}$$

R: $u(x,t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 1 - x$

1.2) $$\begin{array}{ll} u_t(x,t) - 3t^2u_x(x,t) = 2 & (x,t)\in\mathcal{D} \\ u(x,0) = x^2, & x\in\mathbb{R} \end{array}$$

R: $u(x,t) = 2t + (x+t^3)^3$

1.3) $$\begin{array}{l} u_t(x,t) + (2t+1)u_x(x,t) = 2u(x,t) \quad (x,t)\in\mathcal{D} \\ u(x,0) = sen(x), \quad x\in\mathbb{R} \end{array}$$

R: $u(x,t) = e^{2t}sen(x - t^2 - t)$

1.4) $$\begin{array}{l} u_t(x,t) - 3u_x(x,t) = 1 - x, \quad (x,t)\in\mathcal{D} \\ u(x,0) = x^2 + 1, \quad x\in\mathbb{R} \end{array}$$

R: $u(x,t) = \frac{15}{2}t^2 + t + 1 + 5xt + x^2$

II. Resolver los siguientes problemas de contorno e iniciales:

2.1) $$\begin{array}{l} 2u_t(x,t) + u_x(x,t) = 2u(x,t), \quad (x,t)\in\mathcal{D} \\ u(0,t) = 1, t > 0 \\ u(x,0) = e^x, \quad x\in\mathbb{R} \end{array}$$

R: $u(x,t) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si} \quad 2x \le t \\ e^{x+t/2} & \text{si} \quad 2x > t \end{cases}$

2.2) $$\begin{array}{l} u_t(x,t) + 2u_x(x,t) = x^2, \quad (x,t)\in\mathcal{D} \\ u(0,t) = t^2, t > 0 \\ u(x,0) = x, \quad x\in\mathbb{R} \end{array}$$

R: $u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2t-x)^2 + \frac{1}{6}x^3 & \text{si} \quad x \le 2t \\ x - 2t - \frac{1}{6}(x-2t)^3 + \frac{1}{6}x^3 & \text{si} \quad x > 2t \end{cases}$

III. Resolver los siguiente PVI. Represente en el plano $\boldsymbol{XT}$ la curva inicial y las curvas características.

3.1) $$\begin{aligned} &\boldsymbol{2u_x(x,y) + u_y(x,y) = u(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2} \\ &\boldsymbol{u(x,y) = 2x - y, \quad \text{sobre} \quad x - y = 1;} \end{aligned}$$ R: $\boldsymbol{u(x,t) = (3 - x + 2y)e^{x-y-1}}$

3.2) $$\begin{aligned} &\boldsymbol{u_x(x,y) - u_y(x,y) = -2y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2} \\ &\boldsymbol{u(x,y) = xy, \quad \text{sobre} \quad x + 2y = 1;} \end{aligned}$$

R: $\boldsymbol{u(x,t) = (1 - x - y)(3x + 3y - 2) + y^2}$

3.3) $$\begin{aligned} &\boldsymbol{u_x(x,y) - u_y(x,y) + x + 2y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2} \\ &\boldsymbol{u(x,y) = xy, \quad \text{sobre} \quad x + 2y = 1;} \end{aligned}$$

IV. Resolver los siguientes problemas cuasi-lineales en $\boldsymbol{\mathcal{D} :=] - \infty, \infty[\times]0.\infty[}$.

4.1) $$\begin{aligned} &\boldsymbol{u_t + (u + t)u_x = 1, \quad \text{sobre } \mathcal{D}} \\ &\boldsymbol{u(x,0) = x, \quad x \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$ R: $\boldsymbol{u(x,t) = t + \frac{x - t^2}{t+1}}$

4.2) $$\begin{aligned} &\boldsymbol{u_t + u_x + 2tu^2 = 1, \quad \text{sobre } \mathcal{D}} \\ &\boldsymbol{u(x,0) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$ R: $\boldsymbol{u(x,t) = \frac{1}{t^2 + e^{x-t}}}$

4.3) $$\begin{aligned} &\boldsymbol{u_t + u^2 u_x = 0, \quad \text{sobre } \mathcal{D}} \\ &\boldsymbol{u(x,0) = x, \quad x \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

4.4) $$\begin{aligned} &\boldsymbol{u_x + u_y + u_z = u^2, \ \text{sobre } \mathbb{R}^3} \\ &\boldsymbol{u(x,y,0) = x + y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2} \end{aligned}$$