UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 3

ECUACIONES NO LINEALES EN OCTAVE

En la teoría hemos visto los métodos de la Bisección, Newton–Raphson y de la Secante, que están diseñados para la resolución de Ecuaciones no Lineales, y vimos también el Método de Newton, que sirve para resolver Sistemas de Ecuaciones no Lineales, y es una generalización del Método de Newton–Raphson.

1. Método de la Bisección

Descargue el archivo biseccion.m. Este programa es un rutero que implementa el Método de la Bisección para resolver una ecuación no lineal en particular. Considerando este programa,

1. Ejecute el programa. ¿Qué observa al ejecutarlo?
2. Comente las líneas del código en los espacios disponibles, utilizando una frase que describa lo que cada línea de código hace.
3. Cree una variable que almacene la cantidad de pasos realizados en el algoritmo implementado en el programa.
4. Modifique el criterio de detención para que sea mediante una tolerancia de 10^{-8} o 350 iteraciones.
5. Partiendo de este programa, cree una función que reciba como entrada los extremos iniciales del intervalo y que retorne la raíz calculada con el criterio de detención implementado en el ítem anterior.
6. Use esta función para calcular las raíces negativas que se observan en la gráfica del programa.

Utilice el programa estudiado en los pasos anteriores para encontrar al menos dos raíces de las siguientes ecuaciones no lineales, si es que existen:

1. $x^3 + 2x = -8$,
2. $\frac{x^2}{\cos(x)} = x$,
3. $2x^2 + \cos(x) = x$,
4. $\frac{\sin(x)}{x^2+1} = 0$,
5. $\frac{e^{x^2+1}}{e^{-x}} = x$,
6. $\frac{\tan(x)}{1+x} = 2x + 1$.

2. Método de Newton–Raphson

Descargue el programa newtonraphson.m. Este programa consiste en un rutero que implementa el Método de Newton–Raphson para resolver una ecuación no lineal en particular. Considerando este programa,

1. Ejecute el programa. ¿Qué observa al ejecutarlo?

2. Comente las líneas del código en los espacios disponibles, utilizando una frase que describa lo que cada línea de código hace.

3. Modifique el programa para que comience con los siguientes puntos iniciales:

$$1{,}5, \qquad 3{,}0, \qquad 2{,}35, \qquad 1.$$

   ¿Qué observa en la ejecución del programa al comenzar con estos valores?

4. Modifique el criterio de detención para que sea mediante una tolerancia de 10^{-4}.

Utilice el programa estudiado en los pasos anteriores para encontrar al menos dos raíces de las siguientes ecuaciones no lineales, si es que existen:

1. $\cos(x^2+1) = 1$,
2. $2x^3 - \sin(x^2+1) = x$,
3. $e^{\cos(x+1)} = 1$.

Observación: En este caso se debe calcular analíticamente la derivada de cada función.

3. Método de la Secante

Utilizando lo desarrollado en las dos secciones anteriores, construya un rutero OCTAVE que permita resolver la ecuación no lineal

$$\frac{\cos(x^2+2x+1)}{x^2+1} = x$$

mediante el Método de la Secante, usando como partida los puntos $x_0 = 2{,}5$ y $x_1 = 1{,}5$. Para ello, se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. Crear una función tipo inline que represente a la función asociada a la ecuación no lineal.
2. Graficar la función del paso anterior.
3. Definir los puntos iniciales del algoritmo.
4. Para poder visualizar el comportamiento del algoritmo, graficar los puntos iniciales en la gráfica del paso 1.
5. Programar un ciclo iterativo que permita hacer los cálculos de cada paso. Recuerde que hay que considerar un criterio de detención.
6. Dentro del ciclo iterativo, realizar el cálculo del siguiente punto del método.
7. Dentro del ciclo iterativo, graficar en la función el siguiente punto calculado.

Una vez que este programa esté implementado, proponga puntos iniciales adecuados para construir la aproximación de la solución buscada.

4. Ejercicios

Mediante algún método numérico adecuado, encuentre soluciones de los siguientes problemas.

1. El ancho de un rectángulo es $2[cm]$ más largo que tres veces su alto. Si el área del rectángulo es $56[cm^2]$, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

2. Utilice el Método de Newton–Raphson para encontrar el menor valor de x que satisface

$$0{,}7 = \frac{1}{2}\left(1 + \sin(x)e^{-x/2\pi}\right).$$

3. En mecánica y física, es de interés encontrar puntos fijos de funciones no lineales. Un punto fijo x_0 de una función f es un punto del dominio de la función en que se satisface

$$f(x_0) = x_0.$$

Por ejemplo, un punto fijo de la función $f(x) = x^2 + 3x + 1$ es $x = -1$. Calcule puntos fijos de las funciones

a) $f(x) = 0{,}9x^2 - 1{,}7x - 2{,}5$, *b)* $g(x) = \sin(\sqrt{x}) - x$, *c)* $h(x) = 2\sin(x) - \frac{x^2}{8}$.

4.1. Ejercicios de test del semestre anterior

1. En dos ruteros de Octave resuelva los siguientes problemas.

   a) Determine el valor de $x > 0$ tal que

   $$\int_0^x te^{t^2}\mathrm{d}t = x.$$

   Indicación: Notar que la integral se puede calcular manualmente mediante integración por partes.

   b) Considere la función $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{5x} + \sin(3x) + 1$, $x \in [1, 4]$. Hallar los puntos en que el gráfico de f tiene máximos y mínimos locales.

2. Considere la función definida por $f(x) = \sin(3x) + x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, y la recta L de ecuación $2x - y + 1 = 0$. Construya un programa de Octave que:

   a) Grafique, en un mismo gráfico (con distinto color), la función f y la recta L.

   b) Encuentre los puntos del intervalo $[-\pi, \pi]$ en que la recta tangente al gráfico de f es paralela a la recta L.

3. Considere la función definida por $f(x) = \sin(x^2) - e^{3x+1}$, $x \in [-\pi, 0]$, y la recta L de ecuación $2x + y + 4 = 0$. Construya un programa de Octave que:

   a) Grafique, en un mismo gráfico (con distinto color), la función f y la recta L.

   b) Encuentre los puntos del intervalo $[-\pi, 0]$ en que la recta L intersecta el gráfico de f.

5. El Método de Newton

Cuando nos enfrentamos a un sistema de ecuaciones no lineales, ninguno de los métodos estudiados anteriormente es adecuado. Sin embargo, se puede considerar una generalización del Método de Newton–Raphson. Así, el problema de buscar una solución del sistema de ecuaciones no lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos(x) - y &=& -2x \\ y - x^2 &=& 0 \end{array}\right|$$

puede ser planteado equivalentemente como buscar un par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que anule a la función vectorial

$$\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x) - y + 2x, y - x^2).$$

De acuerdo a lo visto en las clases teóricas, usando una aproximación afín se puede construir una sucesión de aproximaciones a partir de un vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, definida por

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{Df}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k}), \qquad \text{para } k = 0, 1, \dots,$$

hasta satisfacer un criterio de detención, esperando que dicha sucesión sea convergente a la raíz buscada, donde la matriz $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^{(k)})$ es la matriz Jacobiana de la función $\mathbf{f}$ evaluada en $\mathbf{x}^{(k)}$. Siguiendo el ejemplo anterior, el par (x_{k+1}, y_{k+1}) quedaría dado por

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sin(x_k) + 2 & -1 \\ -2x_k & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos(x_k) - y_k + 2x_k \\ y_k - x_k^2 \end{bmatrix}.$$

En la ejecución de este algoritmo podemos considerar como criterio de detención las mismas ideas vistas antes:

1. Cantidad de iteraciones: en este caso se cuenta la cantidad de veces que se ha calculado una nueva aproximación de la raíz. Cuando se llega al valor máximo, se termina la ejecución del programa y se considera como solución numérica la última obtenida.

2. Distancia entre raíces sucesivas: en este caso se debe proveer al método una tolerancia. Así, cada vez que se calcule una nueva aproximación $\mathbf{x}^{(k+1)}$ debe chequearse si la norma

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|$$

   sigue siendo mayor que la tolerancia. Cuando es menor, entonces se detiene el proceso y se considera como solución numérica la última obtenida.

3. Cercanía del cero a través de la función: similarmente al caso anterior, se considera una tolerancia fija y el método se ejecuta hasta que la norma

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\|$$

   sea menor que la tolerancia. En tal caso, se considera como solución numérica la última raíz aproximada.

Observación: gracias a la propiedad de equivalencia de normas, no importa cual norma se use en los criterios de detención 2 y 3.

5.1. Ejercicios

Descargue y ejecute el programa newton.m, el cual consiste en un rutero que implementa el Método de Newton para resolver el sistema de ecuaciones no lineales anterior. Considerando este rutero:

1. Modifique el rutero descargado para considerar como criterio de detención un número máximo de 150 iteraciones o una tolerancia de 10^{-8}, de acuerdo a lo descrito anteriormente.

2. Modifique la aproximación inicial del problema para obtener soluciones numéricas de las restantes raíces de este problema.

3. Modifique el rutero descargado para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

$$a)\ \left.\begin{array}{rcl} x\cos(xy) &=& 1 \\ y\sin(xy) &=& 0 \end{array}\right| \qquad b)\ \left.\begin{array}{rcl} 2x^2+y^2 &=& 1 \\ 3x+y^2 &=& 2 \end{array}\right| \qquad c)\ \left.\begin{array}{rcl} x+yz &=& 0 \\ y-x^2 &=& 0 \\ \cos(z) &=& 0 \end{array}\right|$$

4. Usando el Método de Newton, encuentre un punto crítico de la función

$$f(x,y) = 2x^2y^2 + x^2y - 2x - y^2.$$

5. Encuentre las intersecciones entre las curvas (elipse y parábola)

$$2x^2 + y^2 = 1, \qquad y = -2x^2.$$

6. Utilización de funciones de Octave

Métodos numéricos similares a los estudiados anteriormente están disponibles en las funciones `fzero` y `fsolve` de Octave . Los siguientes ejemplos muestran el uso de estas funciones y sus distintas variables.

6.1. Un problema de enfríamiento no lineal

El Sr. D fue encontrado muerto en su oficina a las 20:00 hrs. del 22 de octubre de 2012. La temperatura de su cuerpo en ese momento era de 32,2[^oC]. Una hora después, ésta había descendido a 29,4[^oC].
El capitán F cree que M es el asesino. Sin embargo, M dice tener una coartada: fue entrevistado entre las 18:40 y las 19:15 por el periodista J. Efectivamente, en la recepción del edificio donde se realizó la entrevista se registró la llegada del Sr. M a las 19:35 y su salida a las 19:20. ¿Pudo M asesinar al Sr. D?
Debemos determinar la hora de la muerte del Sr. D. Para ello, supongamos que $T(t)$ denota la temperatura del cuerpo del Sr. D en el instante de tiempo t. Con los datos anteriores sabemos que $T(20) = 32{,}2$ y $T(21) = 29{,}4$. Además, según la Ley de Newton (de la Transferencia de Calor), T satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\kappa\left(T(t) - T_{\text{ambiente}}(t)\right),$$

donde κ es una constante y $T_{\text{ambiente}}(t)$ es la temperatura ambiente en el tiempo t. De la temperatura de la oficina del Sr. D (lugar donde fue encontrado el cuerpo), sabemos que a las 16:00 hrs. era de 20 grados. Sin embargo, se informó que debido a una falla en el sistema de aire acondicionado, a esa hora la temperatura comenzó a ascender a razón de 0,5 grados por hora, es decir, podemos considerar

$$T_{\text{ambiente}}(t) = \begin{cases} 20, & t \le 16 \\ 20 + \frac{1}{2}(t-16), & t > 16. \end{cases}$$

Resolviendo el problema de valores iniciales (válido para $t \ge 16$),

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\kappa\left(T(t) - 20 - \frac{1}{2}(t-16)\right), \qquad T(20) = 32{,}2,$$

se tiene que

$$T(t) = \left(10{,}2 + \frac{1}{2\kappa}\right)e^{-\kappa(t-20)} + \frac{t+24}{2} - \frac{1}{2\kappa}, \qquad t \ge 16.$$

Con esta expresión, y sabiendo que $T(21) = 29{,}4$, podemos determinar la hora de la muerte del Sr. D. Para ello, debemos hallar el tiempo $16 < t_* < 20$ en que la temperatura del cuerpo del Sr. D era de 36,5 grados.
Debemos, por lo tanto, resolver 2 problemas no lineales: primero, determinar κ de modo tal que $T(21) = 29{,}4$, y luego, conocido el valor de κ, debemos determinar t_*.
Sea

$$F(\kappa) = T(21) - 29{,}4.$$

1. Escriba una función OCTAVE que dado $\kappa \in \mathbb{R}$ (parámetro de entrada de la función), calcule $F(\kappa)$. Esta función debe estar escrita de modo tal que si el parámetro de entrada es un vector, ella retorne un vector con las evaluaciones de F en las componentes del vector de entrada.

2. Escriba un rutero OCTAVE que haga lo siguiente:

   - evalúe F en 100 puntos del intervalo $[0{,}1, 0{,}5]$. Haga un gráfico de la función y observe que ella tiene un cero en el intervalo considerado. Con la ayuda del comando `grid on` indique una aproximación inicial de la raíz de esta función.
   - Llame a la función OCTAVE `fzero` para obtener una aproximación al cero de F en el intervalo $[0{,}1, 0{,}5]$. Ello lo logra escribiendo **una** de las siguientes líneas en su programa. Tenga presente que debe sustituir `Fkappa` por el nombre que usted ponga a su función.

   ```
   kappa = fzero(F,0.2,optimset('TolX',1e-10))

   kappa = fzero(F,[0.1,0.5],optimset('TolX',1e-10))
   ```

   Para entender los llamados anteriores a `fzero`, lea la siguiente explicación a este comando: `fzero` es una función de OCTAVE para la aproximación de raíces de funciones reales basada en una combinación del método de bisección con el método de la secante y otras técnicas. El primer parámetro de entrada a `fzero` es la función de la cual se quiere aproximar la raíz. El segundo parámetro de entrada puede ser un número real o un vector de dos componentes. Si es un número real, entonces él será considerado como una aproximación inicial a la raíz. Si es un vector, entonces representa el intervalo inicial en donde buscar la aproximación (debe cumplir con las exigencias del método de la bisección). En ambos casos, estos parámetros pueden ser estimados mediante la gráfica de la función. Los siguientes parámetros de entrada son opcionales. En este caso, se está especificando que la precisión con la cual quiere aproximarse el cero de la función F debe ser 10^{-10} (`'TolX',1e-10`). La forma en que procede `fzero` en cada caso puede leerla escribiendo `help fzero` en la ventana de comandos de OCTAVE .
   Escriba el valor de κ obtenido.

κ	

   Nota 1: Puede definir una función mediante un programa `funcion.m` o mediante el comando `inline`. Por ejemplo, para la función $f(x) = x^2 - 1$,

   ```
   f = inline('x.^2-1')     % Define una funcion en terminos de x
   f(1)                     % Evalua la funcion anterior en x=1
   feval(f,1)               % Identico a lo anterior
   ```

   Nota 2: Si tiene una función con muchas entradas pero sólo una de ellas es una variable, puede utilizar `fzero` con el comando `@(x)`. Por ejemplo,

   ```
   f = inline('x.^2-y.^2');

   x0 = fzero(@(x)f(x,4),1.5)
   y0 = fzero(@(y)f(4,y),1.5)
   ```

3. Escriba ahora una función que evalúe $T(t) - 36{,}5$ tomando κ igual al valor obtenido antes.

4. Proceda de manera similar a lo hecho anteriormente, pero ahora para determinar el valor de $t_* \in]16, 20[$ en el cual la temperatura del Sr. D era de 36.5. ¿A qué hora fue asesinado el Sr. D? ¿Pudo M asesinar a D?

6.2. Un problema de asignación

Juan y Beatriz trabajan en una empresa pesquera que procesa $200[kg]$ diarios de salmón. El lunes recién pasado, Juan comenzó a trabajar a las 8:00 am y alcanzó a hacer $100[kg]$ justo hasta que Beatriz llegó. Luego, Beatriz siguió trabajando y terminó el trabajo a las 8:50 am. El martes ambos comenzaron juntos el trabajo a las 8:00 am y terminaron a las 8:24 am. El miércoles, Beatriz estaba enferma. Si Juan es el trabajador más rápido, ¿cuánto tiempo le tomará a Juan completar los $200[kg]$ de salmón a él solo?

- En este problema se identifican las siguientes incógnitas:
  1. J: rapidez con que Juan trabaja, medida en $[kg/min]$.
  2. B: rapidez con que Beatriz trabaja, medida en $[kg/min]$.
  3. t_0: tiempo del da lunes durante el cual Juan trabajó solo, medido en $[min]$.
- Considerando estas variables, del enunciado se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\left.\begin{array}{lcl} J \cdot t_0 & = & 100 \\ B \cdot (50 - t_0) & = & 100 \\ J \cdot 24 + B \cdot 24 & = & 200 \end{array}\right|$$

- Siguiendo este sistema de ecuaciones, estamos interesados en encontrar una raíz de la siguiente función:

$$\mathbf{f}_p(J, B, t_0) = (J \cdot t_0 - 100, B \cdot (50 - t_0) - 100, 24J + 24B - 200).$$

  Para hacer esto, cree un fichero tipo `function` que permita evaluar, mediante vectores, este campo vectorial. Su archivo debe contener instrucciones similares a

```
function y = fp(x)
        y(1) = x(1)*x(3)-100;
        y(2) = x(2)*(50-x(3))-100;
        y(3) = 24*x(1)+24*x(2)-200;
```

  Para verificar que esta función está bien ingresada, evalúela en $[0, 0, 0]$. ¿Cuánto debe retornar en este caso?

- Las siguientes instrucciones permiten resolver el problema usando la función `fsolve` de Octave .

```
x0 = [0,0,0];
x = fsolve(@fp,x0)
```

  Para verificar que la solución obtenida es la correcta, observe la evaluación de la función $\mathbf{f}_p$ en la solución numérica calculada.

- ¿Cuánto tiempo le tomará a Juan completar los $200[kg]$ solo?

6.3. Ejercicios

Usando las funciones `fzero` y `fsolve` de Octave , resuelva los siguientes problemas.

1. Encuentre el largo de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{15}[cm]$ y su área es de $3[cm^2]$.

2. La etiqueta de un televisor pequeño dice que tiene $5''$ de diagonal y una superficie de 12 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son el largo y ancho de la pantalla?

3. Una bomba A puede vaciar o llenar un estanque en el mismo tiempo. Si las bombas A y B trabajan juntas, el tanque se puede llenar en 6 horas. Al activarlas, los operadores se equivocaron y pusieron a la bomba A a vaciar el tanque y a la bomba B a llenarlo, y el tanque se llenó en 12 horas. ¿Cuánto tiempo le toma a cada una de estas bombas llenar el tanque si trabajan solas?

4. Daniela ordena o desordena su casa a la misma velocidad. Cuando Daniela está ordenando junto con su madre, logran ordenar su casa completamente desordenada en 6 horas. Si Daniela no ayuda a su madre, ella demora 9 horas en ordenar la casa mientras Daniela está continuamente desordenando. ¿Cuánto tiempo le toma a la madre de Daniela ordenar la casa si Daniela es enviada a vivir con su abuelo?

5. Encuentre dos números complejos cuya suma sea -6 y su producto sea 10.

6. Ángela está diseñando una caja de $650[cm^3]$ para almacenar un nuevo cereal. La caja debe tener un ancho de $5[cm]$, a fin de que ésta sea fácil de agarrar. Además, debe tener $950[cm^2]$ de superficie para que tenga suficiente espacio para presentar ofertas y publicidad. ¿Qué dimensiones debe tener la caja?