UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES II 525222

Tarea 6-A

Considere una cilindro circular de radio R y altura H, con sus bordes aislados. Si el calor inicial es definido por f y la constante de difusión por k, el modelo matemático de este proceso de difusión es el siguiente:

$$\begin{aligned} u_t(r,\theta,z,t) = &\; k^2 \Delta u(r,\theta,z,t), & t>0, & \quad 0<r<R \\ u_r(R,\theta,z,t) = &\; 0 & t\geq 0 & \\ u_z(R,\theta,H,t) = &\; 0 & t\geq 0 & \\ u_z(R,\theta,0,t) = &\; 0 & t\geq 0 & \\ u(r,\theta,0) = &\; f(r), & & \quad 0\leq r\leq R \end{aligned}$$

1. Si se desprecia la influencia de la tapas del cilintro. Establezca que u es independiente de θ y z, es decir, $u = u(r,t)$. En tal caso el problema se reduce a determinar la temperatura de una placa circular de radio R.

2. Determinar la temperatura $u = u(r,t)$ para $t>0$ y $0<r<R$, si el calor inicial es $f(r) = 0{,}1(9-r^2)$ y se desprecian el efectos de las tapas del cilindro.

   Nota:

   - La afirmación que los bordes permanecen aislados involucran que las condiciones de contorno se impongan sobre las derivadas parciales respectivas.
   - La condición de contorno, $u_r(R,t) = 0$ implica que debemos considerar la derivada de la función de Bessel. La derivada l-ésima verifica que:

     $$J_0^{(l)} = -J_1^{(l-1)}$$

   - Como $\beta_1 = 0$ es el primer cero de J_1 y $J_0(0) = 1$ la solución general incluye un término constante. Para evaluarlo, considerar la derivada del dato inicial para evaluar los coeficientes de Fourier de la solución y utilizar la relación de ortogonalidad de las funciones de Bessel J_1. La primera constante se determina de la condición $u(0,0) = f(0)$.

   La afirmación que los bordes permanecen aislados involucran que las condiciones de contorno se impongan sobre las derivadas parciales respectivas.

Tarea 6-B

Escribir el operador Laplaciano

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

en coordenadas polares y esféricas, respectivamente.