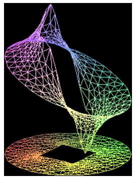
# MAT 520142:
# ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

Primer Semestre 2002, Universidad de Concepción



## CAPITULO 3

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

# Relaciones Binarias

## Definición: RELACION

Dados dos subconjuntos arbitrarios $A$ y $B$ no vacíos, una relación binaria $\mathcal{R}$ es una correspondencia entre los elementos de $A$ y $B$, la cual se representa por un subconjunto de *pares ordenados* $R \subseteq A \times B$.

Si $(a, b) \in R$ diremos que $a$ está relacionado con $b$ y escribiremos $a\mathcal{R}b$:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow (a, b) \in R$$

- Dominio de $\mathcal{R}$: $\quad Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A : \exists\, b \in B \wedge (a, b) \in R\}$
- Recorrido de $\mathcal{R}$: $\quad Rec(\mathcal{R}) = \{b \in B : \exists\, a \in A \wedge (a, b) \in R\}$

EJEMPLOS

- $\mathcal{R}$ representada por $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$:

$$Dom(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3\} \qquad Rec(\mathcal{R}) = \{1\}$$

# Relaciones Binarias

## Continuación EJEMPLOS

- $\mathcal{R}$ representada por $R = \{(2,1),(2,2),(2,3)\}$:

$$Dom(\mathcal{R}) = \{2\} \qquad Rec(\mathcal{R}) = \{1,2,3\}$$

- Sean $A = \{1,2,3\},\ B = \{1,4\}$ y $\mathcal{R}$ definida por

$$a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad a+b \leq 5, \quad a \in A, b \in B.$$

$$R = \{(1,1),(1,4),(2,1),(3,1)\}, \quad Dom(\mathcal{R}) = A, \quad Rec(\mathcal{R}) = B.$$

- $\mathcal{R}$ definida por:

$$a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad a+b \leq 1, \quad a,b > 0$$

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a+b \leq 1\}, \quad Dom(\mathcal{R}) = ]0,1[, \quad Rec(\mathcal{R}) = ]0,1[.$$

# Funciones

## Definición: FUNCION

Dada una relación $\mathcal{R}$ representada por $R \subseteq A \times B$, diremos que $\mathcal{R}$ es una *función* de $A$ en $B$, sí y sólo si:

$$\forall\, x \in A,\ \exists !\, y \in B : (x, y) \in R$$

Notación: $x\mathcal{R}y$ se escribirá $y = f(x)$

$$\begin{aligned} f \quad &: A \longrightarrow B \\ &x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

| | | |
|---|---|---|
| $y$ | (variable dependiente) | es la IMAGEN de $x$ a través de $f$ |
| $x$ | (variable independiente) | es la PRE-IMAGEN de $y$ por $f$ |
| $A$ | DOMINIO de $f$ | $A = Dom(f)$ |
| $B$ | CODOMINIO de $f$ | $B = Cod(f)$ |
| $R$ | GRAFICO de $f$ | $Gr(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$ |

# Funciones

## Conjunto Imagen

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y $X \subseteq A$.
La *imagen de* $X$ *por* $f$ se define por:

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in B : \exists\, x \in X,\ y = f(x)\} \\ &= \{y \in B : y = f(x),\ x \in X\} \\ &= \{f(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

<u>Notación:</u> $Rec(f) = f(A)$

## Imagen Recíproca o Pre-Imagen

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función e $Y \subseteq B$.
La *pre-imagen o imagen recíproca de* $Y$ *por* $f$ se define por:

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{x \in A : y = f(x),\ y \in Y\} \\ &= \{x \in A : f(x) \in Y\} \end{aligned}$$

## Algunas Propiedades de $f(X)$ y $f^{-1}(Y)$

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- $f^{-1}(B) = A$
- $X \subseteq \tilde{X} \subseteq A \Longrightarrow f(X) \subseteq f(\tilde{X})$
- $Y \subseteq \tilde{Y} \subseteq B \Longrightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\tilde{Y})$
- $f(X \bigcup \tilde{X}) = f(X) \bigcup f(\tilde{X})$
- $f^{-1}(Y \bigcup \tilde{Y}) = f^{-1}(Y) \bigcup f^{-1}(\tilde{Y})$
- $f(X \bigcap \tilde{X}) \subseteq f(X) \bigcap f(\tilde{X})$
- $f^{-1}(Y \bigcap \tilde{Y}) = f^{-1}(Y) \bigcap f^{-1}(\tilde{Y})$
- $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$

# Funciones

## Función Sobreyectiva

Una función $f : A \longrightarrow B$ es

**sobreyectiva** sí y sólo si $f(A) = B$ (ed. $Rec(f) = B$)

o bien:

$$f(A) = B \iff \forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A :\ f(x) = y$$

o bien, en términos de *resolver una ecuación*:

$f(A) = B \iff \forall\, y \in B :$ la ecuación $f(x) = y$ **admite** solución en A

# Funciones

## Función Inyectiva

Una función $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** sí y sólo si :

$$\boxed{\forall y \in f(A),\ \exists!\, x \in A :\ f(x) = y}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in A :\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in A :\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

$$\Updownarrow$$

$\forall\, y \in f(A) :$ la ecuación $f(x) = y$ tiene solución **única** en A

# Funciones

## Observación

$f : A \to B$ **no es inyectiva** $\Longleftrightarrow \exists\, x_1, x_2 \in A :\ f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$

## Función Biyectiva

Una función $f : A \longrightarrow B$ es **biyectiva** sí y sólo si es **inyectiva y sobreyectiva**, es decir:

$$\boxed{\forall y \in B,\ \exists!\, x \in A :\ f(x) = y}$$

$$\Updownarrow$$

$\boxed{\forall\, y \in B}$ : la ecuación $f(x) = y$ tiene solución **única** en A

# Funciones Reales

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- $Dom(f) = \Big\{ x \in \mathbb{R} : \exists !\, y \in \mathbb{R} \wedge y = f(x) \Big\}.$
- $Rec(f) = \Big\{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in Dom(f) \Big\}.$
- $Gr(f) = \Big\{ \big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in Dom(f) \Big\}.$

## Igualdad de Funciones

Sean $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ :

$$f = g \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} Dom(f) & = & Dom(g) \\ \big(\forall x \in Dom(f)\big) & : & f(x) = g(x) \end{array} \right.$$

# Funciones Reales

Sea $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $X = Dom(f)$

## Restricción de Funciones

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g : C \subseteq X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = f(x) \end{array}}$$

se denomina la **Restricción** de $f$ a $C$ y se escribe $g = f\big|_C$.

## Funciones Monótonas

La función $f$ se dice **estrictamente** :

- **Creciente**, sí y sólo si, $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **Decreciente**, sí y sólo si, $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

<u>Nota</u> Si $\boxed{x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$ se dice que $f$ es **monótona creciente**. Análogamente, si $\boxed{x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$ diremos que $f$ es **monótona decreciente**.

# Funciones Reales

## Proposición

*Toda función estrictamente creciente (decreciente ) es inyectiva*.

## Funciones Par e Impar

Una función $f : Dom(f) = X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice :

- **Par**, sí y sólo si, $\begin{cases} x \in X \implies -x \in X \\ f(x) = f(-x) \end{cases}$
- **Impar**, sí y sólo si, $\begin{cases} x \in X \implies -x \in X \\ f(x) = -f(-x) \end{cases}$

# Funciones Reales

## Operaciones con funciones

Sean $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$g : Dom(g) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$X = Dom(f) \cap Dom(g)$.

Se define la **Función**

- **Suma** $$f + g \quad : X \quad \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \in X \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- **Producto** $$fg \quad : X \quad \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \in X \longmapsto (fg)(x) = f(x)g(x).$$

- **Cuociente** $$f/g \quad : X \quad \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \in X \longmapsto (f/g)(x) = f(x)/g(x).$$
  Si $(\forall x \in X) : \ g(x) \neq 0$

- **Producto por Escalar** $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$\lambda f : Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \in Dom(f) \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

# Funciones Reales

## Función Compuesta

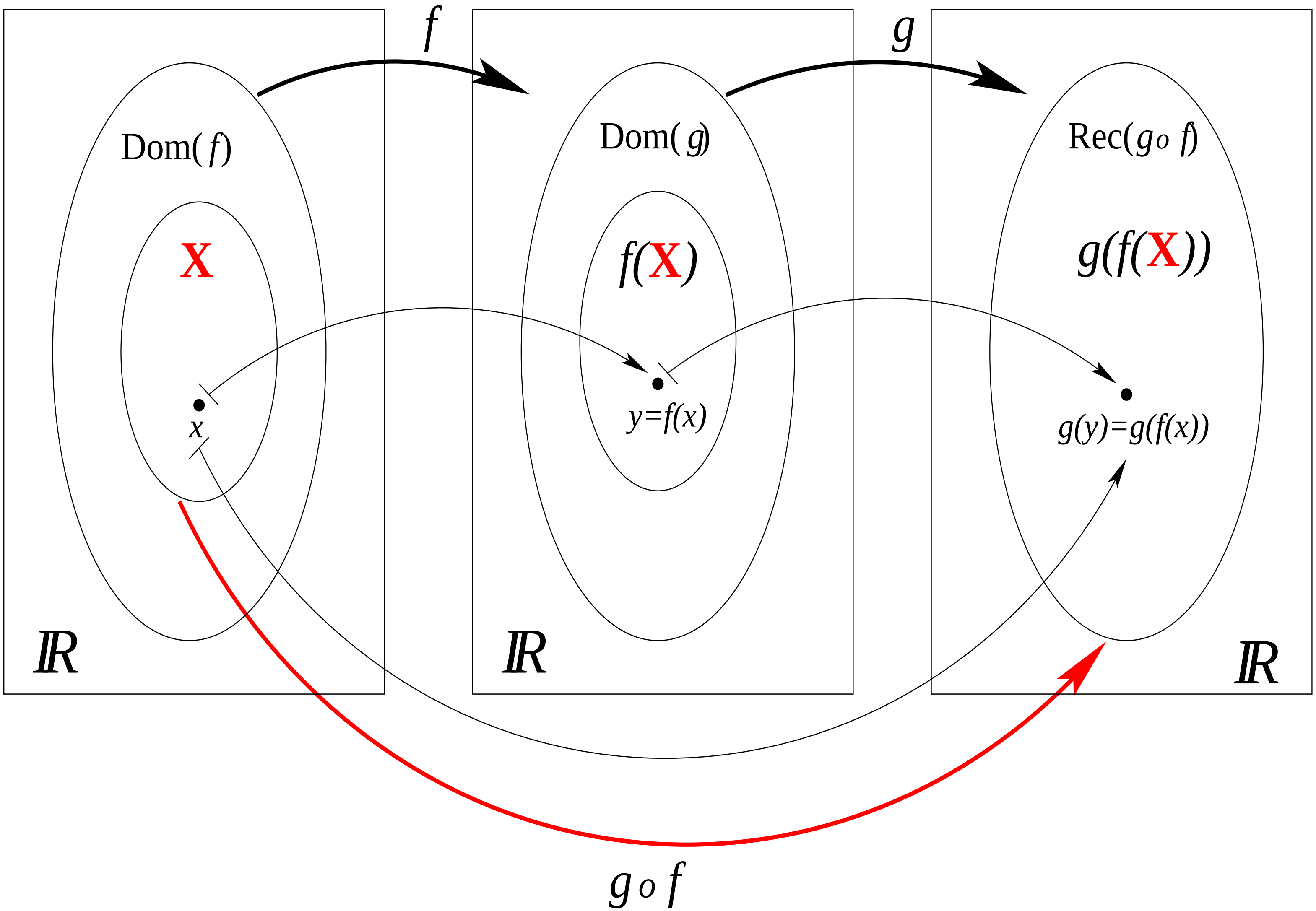
Sean $\quad f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : Dom(g) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$

$$X = \Big\{ x \in Dom(f) : \ f(x) \in Dom(g) \Big\}.$$

Cuando $X \neq \emptyset$, se define:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g \circ f \ : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \big(g \circ f\big)(x) = g(f(x)) \end{array}}$$

# Funciones Reales



## Función Inversa

Sea $f : Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función **Inyectiva**.

La función $g : Rec(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Dom(f)$, definida por:

$\forall y \in Rec(f): \ g(y) = x$ donde $x \in Dom(f)$ es tal que $f(x) = y$

se llama **función inversa de** $f$ y se escribe $g = f^{-1}$.

## Observación

$$\begin{aligned} \forall\, y \ \in Rec(f): & \qquad f(f^{-1}(y)) = y \\ \forall\, x \ \in Dom(f): & \qquad f^{-1}(f(x)) = x. \end{aligned}$$

## Algunas Propiedades de la Función Inversa

- Si una función $f$ admite inversa entonces, ésta es única.

- Sean $\boxed{g : A \to B}$ y $\boxed{f : B \to C}$ dos funciones inversibles entonces $\boxed{f \circ g : A \to C}$ es **inversible** y

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

- Los gráficos de $f$ y $f^{-1}$ son **simétricos** con respecto a la recta $y = x$.

## FUNCIÓN EXPONENCIAL

Sea $b \in \mathbb{R},\ b > 0,\ b \neq 1$. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = b^x$ se llama **Función Exponencial de Base b**. Se escribe $\boxed{\exp_b(x) = b^x}$.

Observaciones:

- $\boxed{(\forall\ b\ \in\ \mathbb{R}^+)(\forall\ x \in \mathbb{R}) :\ \ \exp_b(x)\ >\ 0\ \wedge\ \exp_b(-x) = \frac{1}{\exp_b(x)}}$
- $\boxed{(\forall\ b\ \in\ \mathbb{R}^+)(\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}) :\ \exp_b(x_1 + x_2) = \exp_b(x_1)\ \cdot\ \exp_b(x_2)}$
- $\boxed{(\forall\ b\ \in\ \mathbb{R}^+) : \exp_b(0) = 1}$
- Si $0 < b < 1$, (resp. b>1) entonces $\exp_b$ es una función estrictamente decreciente (resp. creciente) y por lo tanto es inyectiva.
- Si $b = e \approx 2,7182 \cdots$ la función se llama **La Función Exponencial Natural** y se escribe: $\boxed{\exp(x) = e^x}$.

# Funciones Reales

## FUNCIÓN LOGARITMICA

Sea $b \in \mathbb{R},\ b > 0,\ b \neq 1$. La función $\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\forall\, x \in\ \mathbb{R}^+ :\ \ \log_b(x) = y \Longleftrightarrow \exp_b(y) = x$$

Se llama **Función Logaritmo en base b**.

## Observación

- Para todo $b > 0$:

$$\begin{aligned} \forall\, x \in\ \mathbb{R}\ \ &:\ \ \log_b(b^x) &= x \\ \forall\, x \in\ \mathbb{R}^+ &:\ \ b^{\log_b(x)} &= x. \end{aligned}$$

- Si $b = 10 :\quad \log_{10} = \log.$
- Si $b = e :\quad \log_e = \ln.$

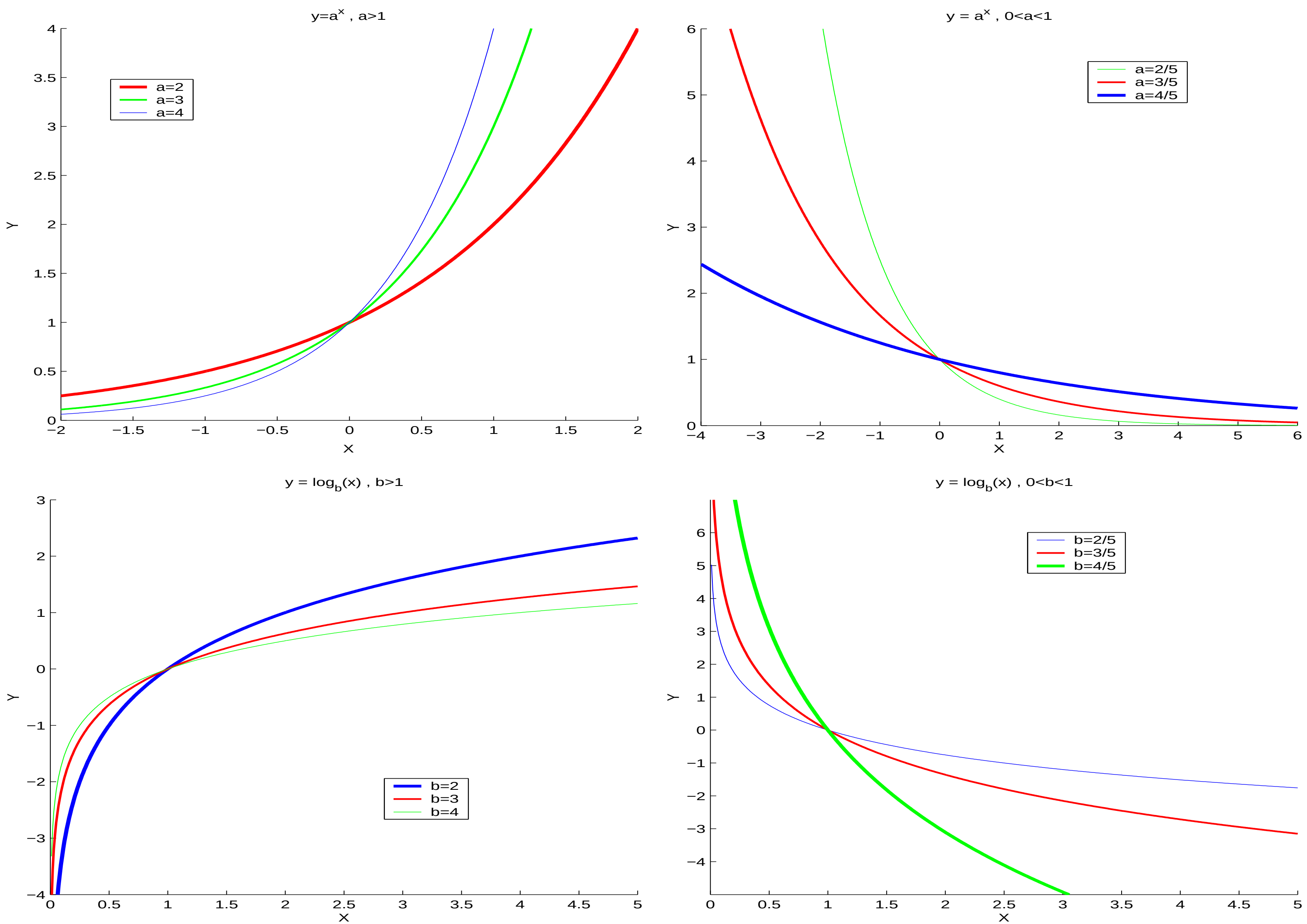
# Funciones Reales

## Propiedades de $\log_b$

- $\log_b(1) = 0$
- Si $b > 1$ y $0 < x < 1$, entonces $\log_b(x) < 0$.
- $\log_b(x_1) = \log_b(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- $\log_b(b) = 1$.
- $\log_b(x_1 \cdot x_2) = \log_b(x_1) + \log_b(x_2)$.
- $\log_b(\frac{x_1}{x_2}) = \log_b(x_1) - \log_b(x_2)$.
- $\log_b(\frac{1}{x}) = -\log_b(x)$.
- $\log_b(x^\alpha) = \alpha \log_b(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\log_a(N) = \frac{\log_b N}{\log_b(a)}$.
- Si $b > 1$, entonces $\log_b$ es función creciente.
- Si $b < 1$, entonces $\log_b$ es función decreciente.

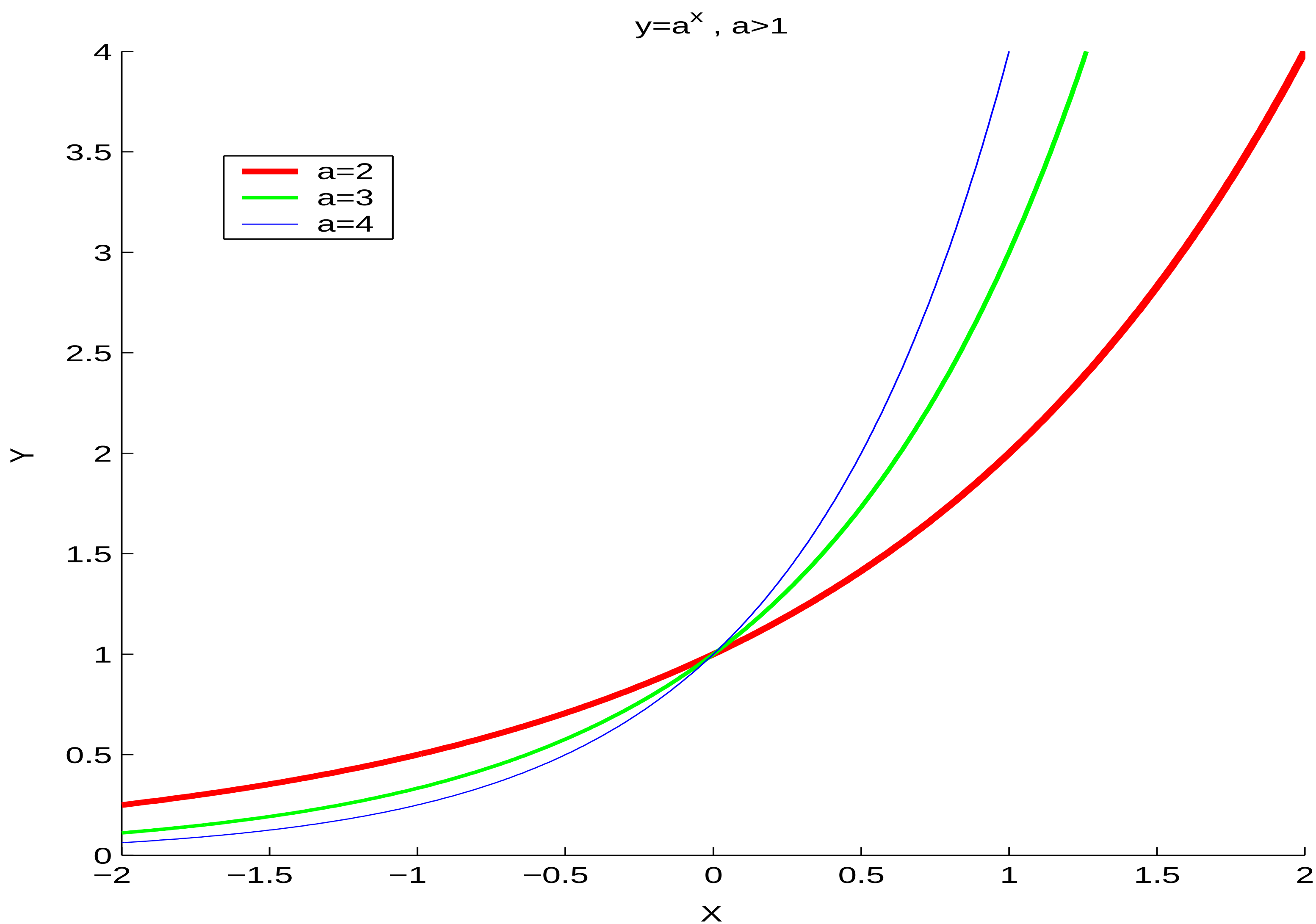
# Funciones Reales

## Funciones EXPONENCIALES y LOGARITMICAS



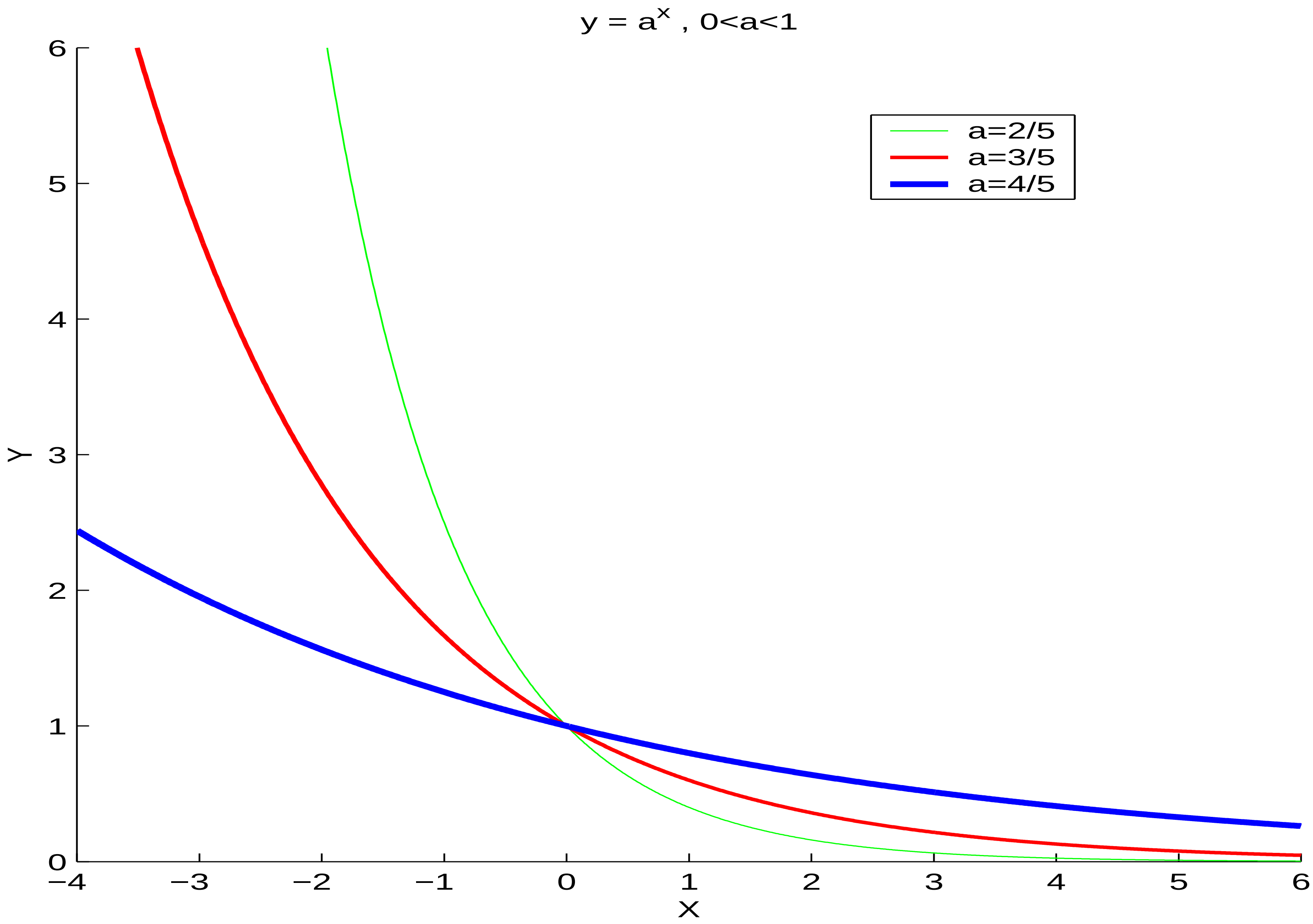
# Funciones Reales

## Funciones EXPONENCIALES



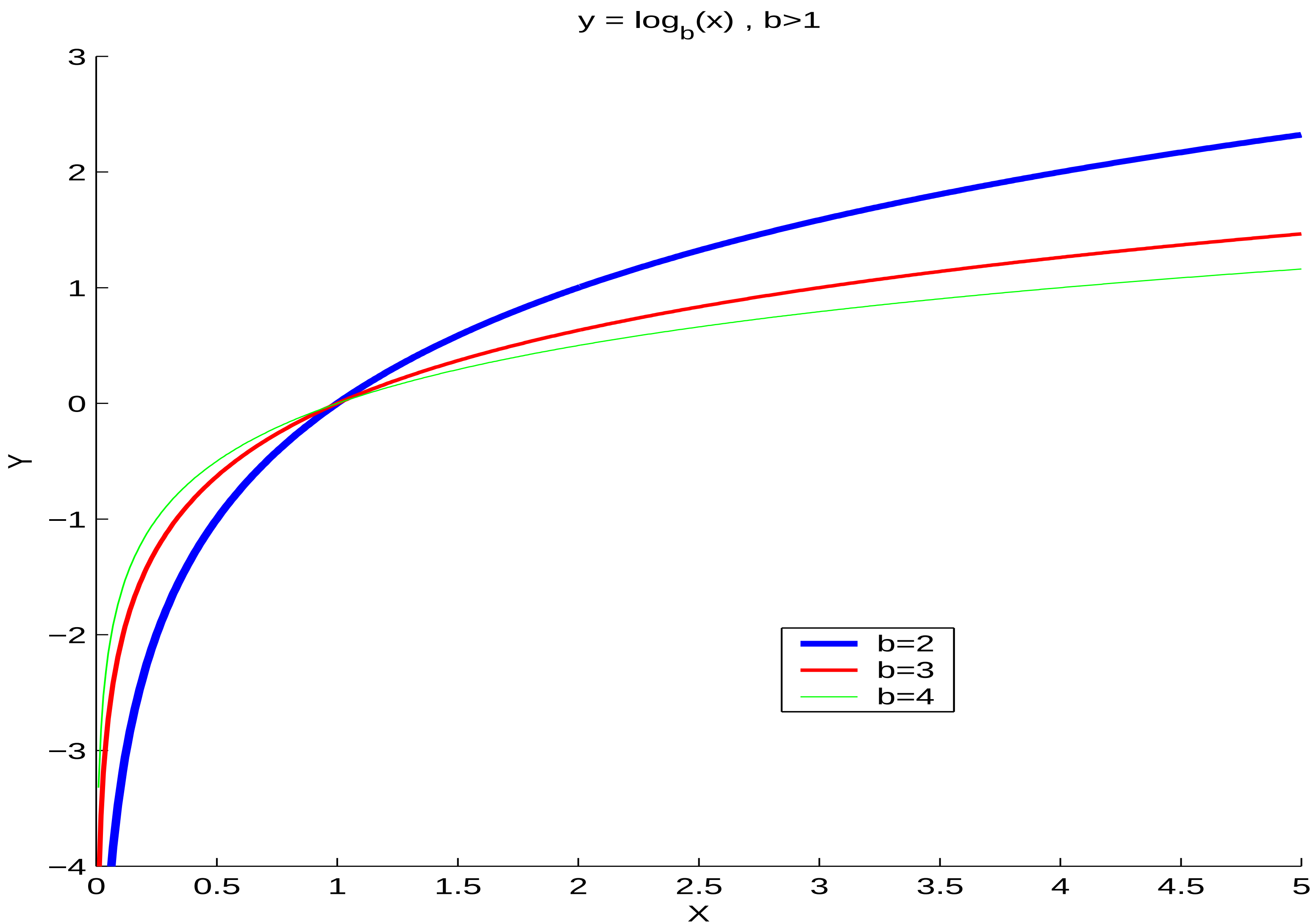
# Funciones Reales

## Funciones EXPONENCIALES



# Funciones Reales

## Funciones LOGARITMICAS



# Funciones Reales

## Funciones LOGARITMICAS