

Leyes de conservación y métodos numéricos

High-Performance Computing para Modelamiento Matemático con (Py)CUDA 2025

Dr. Víctor Osores Escalona
Departamento de Matemática, Física y Estadística,
Facultad de Ciencias Básicas,
Universidad Católica del Maule

16 al 18 de Diciembre 2025, Chile



Facultad
de Ciencias
Básicas

dm₂a

Doctorado en Modelamiento
Matemático Aplicado



GEMA
Grupo de Investigación
Estudios en Matemáticas y
Aplicaciones



Contenido

1 Introducción

- Importancia
- Asentamiento y transporte en contextos geofísicos
- Minería de cobre en Chile

2 Leyes de conservación

3 Problema de Riemann

4 Método de volumenes finitos para problemas hiperbólicos

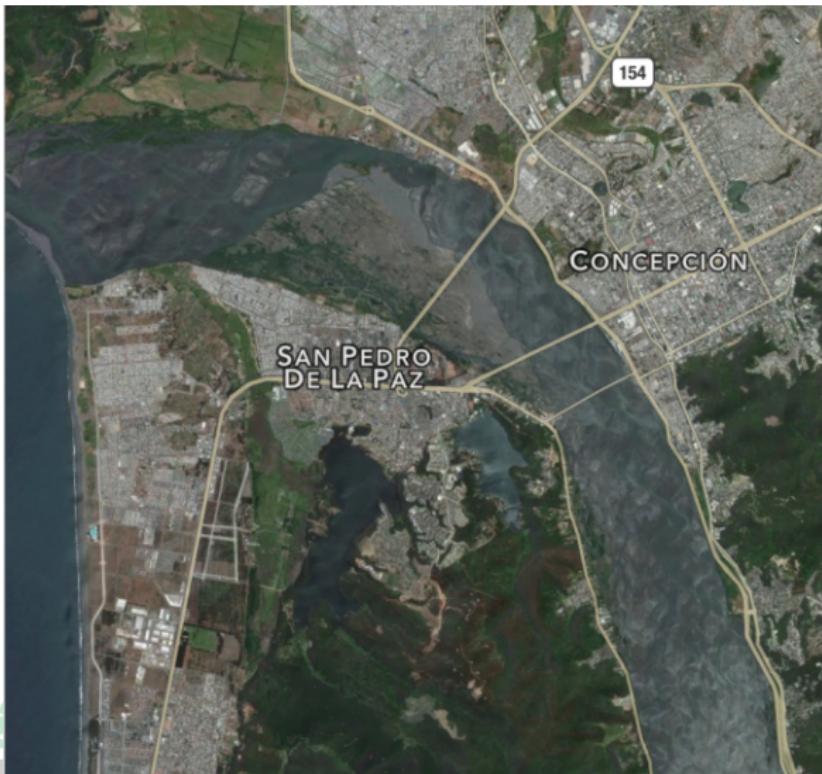
5 Métodos numéricos

6 Aplicación a un problema real



Asentamiento y transporte en contextos geofísicos.

Río Bio-Bio, Concepción:



Río Bio-Bio, Concepción.



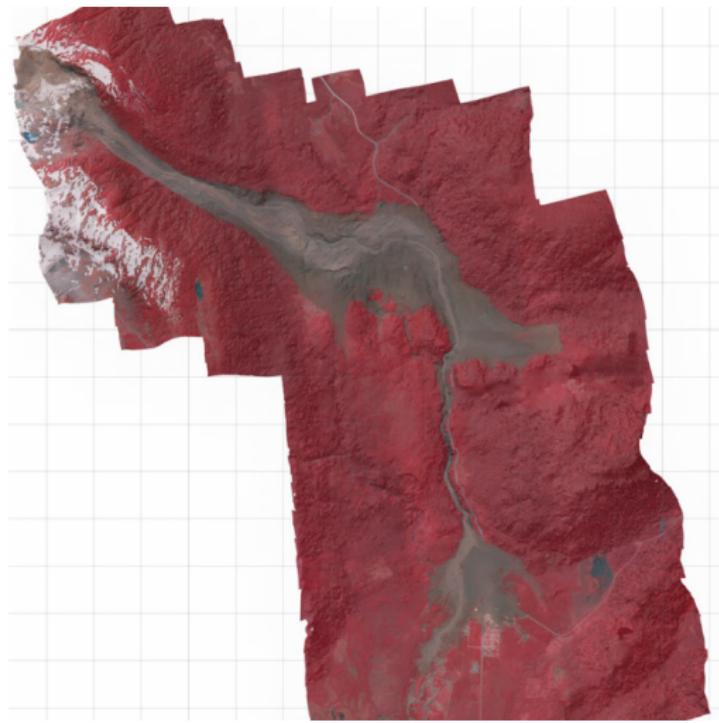
Aluvión de Villa Santa Lucía, Chaitén.



Datos:

- Volumen movilizado: $7.200.000 \text{ m}^3$
- Volumen depositado en VSL: $2.000.000 \text{ m}^3$
- Velocidad media: 72 km/hr.
- Área afectada total: Destrucción de 50% de Villa Santa Lucía.

Aluvión de Villa Santa Lucía, Chaitén.



Datos:

- Longitud: 10 kilómetros

Procesos de sedimentación

- Chile es el mayor exportador mundial de cobre, $\sim 40\%$ de los yacimientos mundiales, 5 de las 10 minas de cobre más grandes están en Chile.
 - El cobre representa $\sim 50\%$ de las exportaciones del país y $\sim 20\%$ de los ingresos del gobierno.
 - La minería requiere grandes cantidades de agua, que es un recurso escaso.
 - Enormes cantidades de relaves de partículas de ganga (sin valor) suspendidas en el agua se producen continuamente. El agua se recupera mediante espesadores o tanques de clarificación.



Fenómenos modelados por leyes de conservación

En geofísica y ciencias de la Tierra

- Propagación de ondas sísmicas y acústicas.
 - Dinámica de ríos, inundaciones y tsunamis (aguas someras).
 - Transporte de sedimentos y contaminantes.
 - Dinámica atmosférica y oceánica (masa, momento y energía).

En ingeniería e industria

- Flujo de gases y líquidos en tuberías y reactores.
 - Procesos de combustión y reacciones químicas.
 - Transporte de calor y masa en sistemas industriales.
 - Tráfico vehicular y flujos de producción.



Leyes de conservación: idea fundamental

Sea $q(x, t)$ la **densidad** de una cantidad física conservada (masa, momento, energía, concentración, etc.).

La cantidad total contenida en un intervalo espacial $[x_1, x_2]$ es

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx.$$



Leyes de conservación: idea fundamental

Sea $q(x, t)$ la **densidad** de una cantidad física conservada (masa, momento, energía, concentración, etc.).

La cantidad total contenida en un intervalo espacial $[x_1, x_2]$ es

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx.$$

El principio de conservación establece que dicha cantidad **solo puede cambiar debido al flujo a través de las fronteras** del intervalo.

Es decir, la variación temporal del contenido está dada por la diferencia entre el flujo que entra y el que sale:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t)),$$

donde $f(q)$ es el **flujo físico** asociado a la cantidad conservada.



Forma de una ley de conservación

La ecuación integral

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t))$$

es válida para **todo intervalo** $[x_1, x_2]$.



Forma de una ley de conservación

La ecuación integral

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t))$$

es válida para todo intervalo $[x_1, x_2]$.

Si la función $q(x, t)$ es suficientemente regular, esta relación implica la forma diferencial de la ley de conservación

$$q_t + f(q)_x = 0$$



Forma de una ley de conservación

La ecuación integral

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t))$$

es válida para todo intervalo $[x_1, x_2]$.

Si la función $q(x, t)$ es suficientemente regular, esta relación implica la forma diferencial de la ley de conservación

$$q_t + f(q)_x = 0$$

- $q(x, t)$: cantidad conservada (variable de estado),
- $f(q)$: flujo asociado,

Esta es la estructura matemática básica que estudiaremos mediante métodos de volúmenes finitos.



Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación

Un **sistema de m leyes de conservación** en d dimensiones espaciales tiene la forma

$$u_t + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f^j(u) = 0,$$

donde

$$u(x_1, \dots, x_d, t) = \begin{bmatrix} u_1(x_1, \dots, x_d, t) \\ \vdots \\ u_m(x_1, \dots, x_d, t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, f^j(u) \in \mathbb{R}^m, \quad j = 1, \dots, d.$$



¿Por qué las leyes de conservación son (numéricamente) difíciles?

| EDO / PDE suaves | Leyes de conservación hiperbólicas |
|---|--|
| EDO: $u'(t) = g(u)$ Evolución local en el tiempo. | PDE: $u_t + f(u)_x = 0$ Transporte no lineal en el espacio. |
| Soluciones típicamente suaves . Métodos clásicos funcionan bien. | Pueden surgir discontinuidades (choques). Las derivadas dejan de existir. |
| Errores se amortiguan (difusión). | Errores se propagan como ondas. Aparecen oscilaciones no físicas. |
| Solución bien definida. | Múltiples soluciones débiles. Se requiere condición de entropía . |



Ejemplos clásicos de leyes de conservación

Las leyes de conservación aparecen de forma natural en numerosos modelos físicos. Algunos ejemplos fundamentales son:

- **Ecuación de convección lineal**

$$u_t + a u_x = 0, \quad a = \text{constante}$$

Modelo básico de transporte a velocidad constante (contaminantes, trazadores, señales).

- **Ecuación de Burgers inviscida**

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \quad \iff \quad u_t + u u_x = 0$$

No lineal. Formación de choques incluso con datos iniciales suaves.



Ejemplos clásicos de leyes de conservación

Las leyes de conservación aparecen de forma natural en numerosos modelos físicos. Algunos ejemplos fundamentales son:

- **Ecuaciones de Euler unidimensionales (dinámica de gases)**

$$\left[\begin{array}{c} \rho \\ \rho u \\ \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) \end{array} \right]_t + \left[\begin{array}{c} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + e + \frac{p}{\rho} \right) u \end{array} \right]_x = 0$$



Ley de conservación escalar en una dimensión

Comenzamos con la ley de conservación unidimensional

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x_0 < x < x_1, \\ u(x, 0) = u_0(x),$$

+ condiciones de frontera en (x_0, t) y (x_1, t) .

- Cuando f es diferenciable, la ecuación admite la forma **cuasilineal**,

$$u_t + a(u) u_x = 0, \quad \quad a(u) = f'(u),$$

Este caso escalar ya contiene los principales fenómenos de las leyes de conservación: transporte no lineal, formación de choques y soluciones discontinuas.



Método de características: idea y cambio de variables

- Buscamos $(\xi, t) \mapsto (X(\xi, t), t)$ para simplificar la PDE. Luego

$$U(\xi, t) = u(X(\xi, t), t).$$

- Derivando respecto de t ,

$$\frac{dU(\xi, t)}{dt} = \frac{d}{dt}(u(X(\xi, t), t)) = u_x(X(\xi, t), t) \frac{dX(\xi, t)}{dt} + u_t(X(\xi, t), t).$$

- Si la ecuación está en forma quasi-lineal $u_t + a(u)u_x = 0$, elegimos

$$\frac{dX(\xi, t)}{dt} = a(U(\xi, t)) \implies \frac{dU(\xi, t)}{dt} = 0.$$

Sistema característico:

$$\begin{aligned} \frac{dX(\xi, t)}{dt} &= a(U(\xi, t)), & X(\xi, 0) &= \xi, \quad U(\xi, 0) = u_0(\xi). \\ \frac{dU(\xi, t)}{dt} &= 0, \end{aligned}$$



Método de características: solución implícita

- De $\frac{dU}{dt} = 0$ se obtiene directamente:

$$U(\xi, t) = u_0(\xi).$$

- Sustituyendo en $\frac{dX}{dt} = a(U)$:

$$\frac{dX(\xi, t)}{dt} = a(u_0(\xi)) \quad \Rightarrow \quad X(\xi, t) = \xi + a(u_0(\xi)) t.$$

- Por tanto, las características son rectas y u es constante sobre ellas.
- La solución queda dada **implícitamente** por,

$$u(x, t) = u_0(\xi), \quad x = \xi + a(u_0(\xi)) t.$$



Método de características: tiempo de validez

Condición de invertibilidad (antes de choques):

Definimos $\Phi(\xi, t) = (X(\xi, t), t) = (\xi + a(u_0(\xi))t, t)$. Entonces

$$\det(\nabla\Phi) = 1 + a'(u_0(\xi)) u'_0(\xi) t.$$

El razonamiento es válido mientras $\det(\nabla\Phi) \neq 0$, es decir:

- para todo $t > 0$ si $a'(u_0(\xi)) u'_0(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi$;
- o bien para $t < t_*$ si existe ξ con $a'(u_0(\xi)) u'_0(\xi) < 0$, donde

$$t_* = \inf \left\{ \frac{1}{|a'(u_0(\xi)) u'_0(\xi)|} : a'(u_0(\xi)) u'_0(\xi) < 0 \right\}.$$



¿Qué es una solución débil? (leyes de conservación)

Considera

$$q_t + f(q)_x = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad q(x, 0) = q_0(x).$$

Problema

Si q desarrolla discontinuidades, q_t y q_x dejan de existir en sentido clásico.

Definición (solución débil)

Decimos que $q \in L^\infty$ es **solución débil** si para toda función de prueba $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ se cumple

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (q \varphi_t + f(q) \varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} q_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0.$$



La condición de Rankine-Hugoniot (idea geométrica)

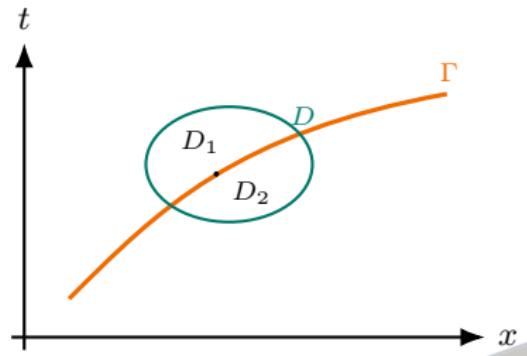
Sea una ley de conservación escalar

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

y supongamos una discontinuidad aislada que se desplaza por una curva suave

$$\Gamma : \quad x = x(t).$$

En una vecindad D del punto $(x(t), t)$, la solución es **clásica** salvo sobre Γ .

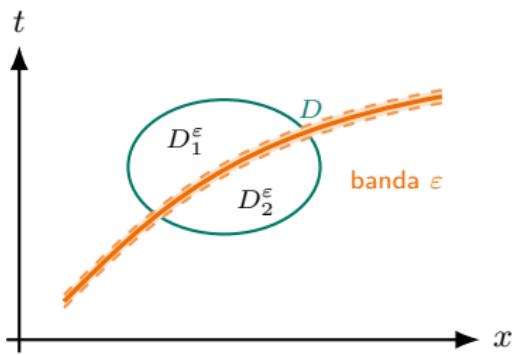


Cortar una banda ε alrededor de Γ

Para evitar la discontinuidad, removemos una banda delgada alrededor de Γ :

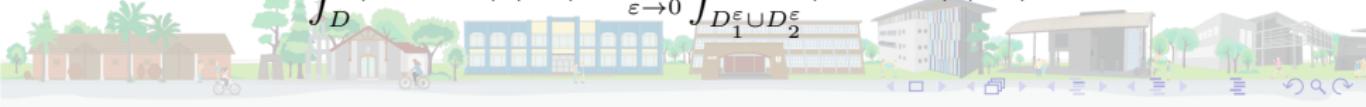
$$D_i^\varepsilon \subset D_i, \quad i = 1, 2,$$

donde $D = D_1 \cup D_2$ y u es C^1 en cada D_i^ε .



Como ϕ tiene soporte en D y u es acotada,

$$0 = \int_D (u\phi_t + f(u)\phi_x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_1^\varepsilon \cup D_2^\varepsilon} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt.$$



Green en (x, t) .

En cada región D_i^ε , u es clásica y satisface $u_t + f(u)_x = 0$.

Observa que

$$u\phi_t + f(u)\phi_x = \partial_t(u\phi) + \partial_x(f(u)\phi) - \phi(u_t + f(u)_x).$$

Como $u_t + f(u)_x = 0$ en D_i^ε ,

$$\int_{D_i^\varepsilon} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt = \int_{D_i^\varepsilon} [\partial_t(u\phi) + \partial_x(f(u)\phi)] dx dt.$$

T. de Green en el plano (x, t)

$$\int_{D_i^\varepsilon} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt = \int_{\partial D_i^\varepsilon} \phi (-u dx + f(u) dt).$$

Como $\phi = 0$ en el borde exterior de D , solo queda el borde cercano a Γ .



Límite $\varepsilon \rightarrow 0$

Sumamos los dos lados,

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_1^\varepsilon} \phi(-u dx + f(u) dt) + \int_{\Gamma_2^\varepsilon} \phi(-u dx + f(u) dt) \right].$$

En el límite, el borde interior colapsa a Γ .

$$u_L = \lim_{x \rightarrow x(t)^-} u(x, t), \quad u_R = \lim_{x \rightarrow x(t)^+} u(x, t), \quad f_L = f(u_L), \quad f_R = f(u_R).$$

Entonces sobre Γ

$$\int_{\Gamma} \phi \left(- (u_L - u_R) dx + (f_L - f_R) dt \right) = 0.$$

En Γ $x = x(t)$, luego $dx = x'(t) dt$. Sustituyendo,

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(x(t), t) \left(- (u_L - u_R)x'(t) + (f_L - f_R) \right) dt = 0.$$



Condición de Rankine-Hugoniot

Rankine-Hugoniot

$$x'(t)(u_L - u_R) = f(u_L) - f(u_R) \iff s[u] = [f], \quad s = x'(t).$$

Conservación “a través” de la discontinuidad.



Eq. Burgers: choque, Rankine-Hugoniot y entropía

Para Burgers inviscida

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad f(u) = \frac{1}{2}u^2,$$

si hay choque entre u_L y u_R en $x = s t$,

$$s = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{1}{2}u_R^2 - \frac{1}{2}u_L^2}{u_R - u_L} = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

¿Por qué falta algo más? (no unicidad)

Existen múltiples soluciones débiles. Se selecciona la física con una **condición de entropía**.

Condición de entropía de Lax (escalar)

Un choque es admisible si las características entran al choque:

$$f'(u_L) > s > f'(u_R).$$

En Burgers, $f'(u) = u$, así que

$$u_L > \frac{u_L + u_R}{2} > u_R \iff u_L > u_R.$$



Problema de Riemann

Para una ley de conservación escalar

$$q_t + f(q)_x = 0,$$

el **problema de Riemann** considera datos iniciales constantes a trozos,

$$q(x, 0) = \begin{cases} q_L, & x < 0, \\ q_R, & x > 0. \end{cases}$$

Por qué importa en volúmenes finitos

Al reconstruir por celdas (orden 1), en cada interfaz aparece exactamente este salto \Rightarrow **un p. de Riemann por interfaz.**



Auto-similitud: la variable $\xi = x/t$

Para datos tipo Riemann, la solución (débil) suele ser **auto-similar**,

$$q(x, t) = Q(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t}, \quad t > 0.$$

Sustituyendo en $q_t + f(q)_x = 0$,

$$-\xi Q'(\xi) + \frac{d}{d\xi} f(Q(\xi)) = 0 \quad \Rightarrow \quad (f'(Q(\xi)) - \xi) Q'(\xi) = 0.$$

Consecuencia

O bien $Q'(\xi) = 0$ (estados constantes), o bien

$$\xi = f'(Q(\xi)) \quad \Rightarrow \quad Q(\xi) = (f')^{-1}(\xi),$$

lo que genera una rarefacción.



Burgers: ley de conservación y características

Ecuación de Burgers (inviscida):

$$u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_x = 0 \quad (f(u) = \frac{1}{2} u^2).$$

Características (solución suave)

$$f'(u) = u \quad \Rightarrow \quad \text{velocidad característica } c(u) = u.$$

Si la solución es suave, sobre una característica $x'(t) = u$ se cumple $u = \text{cte.}$

En un p. de Riemann, u toma valores constantes o forma un abanico en función de $\xi = x/t$.



Caso 1: $u_L < u_R$ (rarefacción exacta)

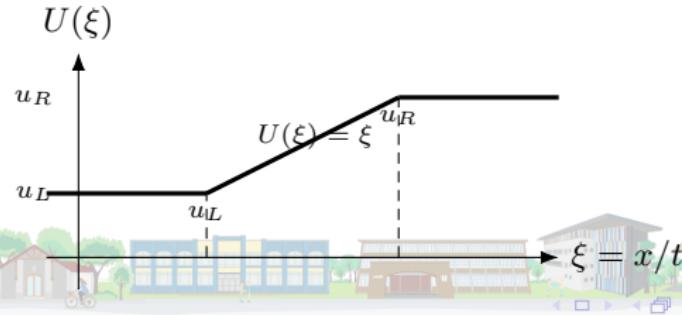
Si $u_L < u_R$, las características se **separan** y aparece una rarefacción

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t},$$

$$U(\xi) = \begin{cases} u_L, & \xi < u_L, \\ \xi, & u_L \leq \xi \leq u_R, \\ u_R, & \xi > u_R. \end{cases}$$

Idea del cálculo

Como $f'(u) = u$, en la zona no constante se cumple $\xi = f'(U) = U$, por eso $U(\xi) = \xi$.





Caso 2: $u_L > u_R$ (choque exacto)

Si $u_L > u_R$, las características colisionan y se forma un choque. El choque se mueve con velocidad s dada por Rankine-Hugoniot,

$$s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} = \frac{u_L + u_R}{2}. \quad (\text{para Burgers eq.})$$

Entonces la solución es

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < s t, \\ u_R, & x > s t. \end{cases}$$

Condición de entropía (Lax) para Burgers

El choque es físico si

$$u_L > s > u_R,$$

lo que se cumple automáticamente cuando $u_L > u_R$ porque $s = \frac{u_L + u_R}{2}$.



¿Por qué volúmenes finitos?

Recuerda que

En **leyes de conservación** lo importante no es el valor puntual, sino el **balance** de cantidad conservada en una región.

- Funcionan bien con **discontinuidades** (choques).
- Garantizan **conservación discreta** (masa, energía, etc.).
- Se basan en la **forma integral** de la EDP.

Comparación rápida

$$\text{FDM: } Q_i^n \approx q(x_i, t_n)$$

$$\text{FVM: } Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t_n) dx$$



Ley de conservación: forma integral

Consideremos la ley escalar en 1D

$$q_t + f(q)_x = 0.$$

Integramos en la celda $\mathcal{C}_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t) dx = f\left(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)\right) - f\left(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)\right).$$

Interpretación física

Cambio de masa en la celda = flujo que entra – flujo que sale.

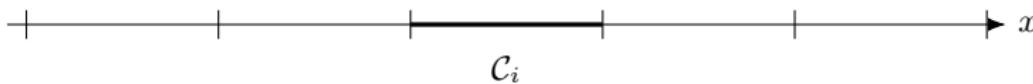


Promedios de celda (variable numérica)

Definimos el **promedio de celda**,

$$Q_i(t) := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t) dx, \quad Q_i^n \approx Q_i(t_n).$$

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t_n) dx$$



De la integral al esquema numéricico

Integramos en tiempo desde t_n a $t_{n+1} = t_n + \Delta t$,

$$\int_{\mathcal{C}_i} q(x, t_{n+1}) dx = \int_{\mathcal{C}_i} q(x, t_n) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) \right) dt.$$

Dividiendo por Δx ,

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right),$$

donde el **flujo numérico** aproxima el promedio temporal del flujo físico,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt.$$



Conservación discreta

El esquema

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$$

está en **forma conservativa**.

Sumando sobre todas las celdas i ,

$$\Delta x \sum_i Q_i^{n+1} = \Delta x \sum_i Q_i^n - \Delta t (F_{+\infty} - F_{-\infty}).$$

Note que:

Los flujos internos **se cancelan**. La masa total sólo cambia por flujos en frontera.



Ejemplo: advección lineal y el flujo upwind

Advección,

$$q_t + u q_x = 0, \quad f(q) = uq.$$

Si reconstruimos $q(\cdot, t_n)$ como **constante por celdas**, entonces

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} u Q_i^n, & u > 0, \\ u Q_{i+1}^n, & u < 0. \end{cases}$$

Para $u > 0$,

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} (Q_i^n - Q_{i-1}^n) \quad (\text{upwind}).$$

Lectura rápida

El flujo en la interfaz se toma del estado que **propaga** información hacia la interfaz.



Condiciones de borde en volúmenes finitos (ghost cells)

La forma más práctica es usar **celdas fantasma** fuera del dominio:

$$\dots, Q_0, Q_1, \dots, Q_N, Q_{N+1}, \dots$$

y calcular flujos en las interfaces de borde igual que en el interior.

Ejemplos (1D)

- **Dirichlet** $q = q_b$: fijar $Q_0 = q_b$.
- **Neumann** $q_x = 0$: reflejar $Q_0 = Q_1$.
- **Periódico**: $Q_0 = Q_N$ y $Q_{N+1} = Q_1$.



Algorithm 1 Upwind FV para $q_t + u q_x = 0$

Require: Velocidad $u \in \mathbb{R}$, celdas $i = 1, \dots, N$, Δx , Δt , estados iniciales

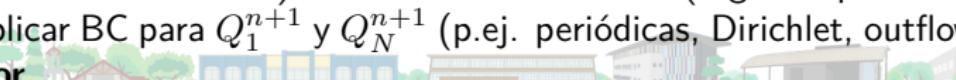
$$\{Q_i^0\}_{i=1}^N$$

Ensure: Estados $\{Q_i^n\}$ para $n = 1, \dots, N_t$

```

1:  $\lambda \leftarrow \frac{\Delta t}{\Delta x}$                                 ▷ número CFL:  $|u|\lambda \leq 1$ 
2: for  $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$  do      ▷ 1) Flujos numéricos en interfaces
3:   for  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  do
4:     if  $u > 0$  then
5:        $F_{i+\frac{1}{2}}^n \leftarrow u Q_i^n$ 
6:     else
7:        $F_{i+\frac{1}{2}}^n \leftarrow u Q_{i+1}^n$ 
8:     end if
9:   end for                                ▷ 2) Actualizar promedios de celda
10:  for  $i = 2, 3, \dots, N - 1$  do
11:     $Q_i^{n+1} \leftarrow Q_i^n - \lambda \left( F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$ 
12:  end for      ▷ 3) Condiciones de borde (según el problema)
13:  Aplicar BC para  $Q_1^{n+1}$  y  $Q_N^{n+1}$  (p.ej. periódicas, Dirichlet, outflow)
14: end for

```





Choques: por qué la forma conservativa importa

Ejemplo clásico: Burgers

$$u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_x = 0.$$

Para soluciones suaves, también se puede escribir como $u_t + u u_x = 0$, pero **no son equivalentes** cuando aparecen choques.

Idea

Las **soluciones débiles** y la **velocidad del choque** dependen de la **ley de conservación específica** (forma divergencia).

En presencia de discontinuidades, discretizar en forma conservativa no es un “detalle”: fija la física correcta (velocidad del choque).

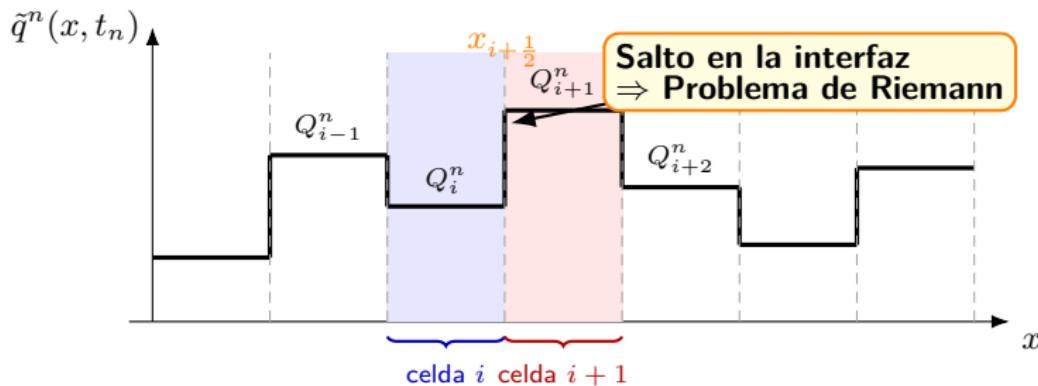


Godunov (visión conceptual)

En volúmenes finitos, el dato Q_i^n define una reconstrucción por celdas,

$$\tilde{q}^n(x, t_n) = Q_i^n \quad \text{si } x \in (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}).$$

En cada interfaz $x_{i+\frac{1}{2}}$ hay un salto \Rightarrow **problema de Riemann**.



Si el p. de Riemann se resuelve exacto, el flujo es el **flujo de Godunov**. Si se resuelve aproximado, obtienes un **Godunov aproximado** (Roe, HLL, etc.).

Flujo de Godunov (Riemann exacto)

En cada interfaz $x_{i+\frac{1}{2}}$ se plantea el problema de Riemann con

$$(q_L, q_R) = (Q_i^n, Q_{i+1}^n).$$

Si lo resolvemos **exactamente**, la solución local $q(x, t)$ determina el estado en la interfaz para $t \downarrow 0$:

$$q_{i+\frac{1}{2}}^* = q(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n^+).$$

Flujo de Godunov

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = f\left(q_{i+\frac{1}{2}}^*\right)$$

Es decir, el flujo numérico es el **flujo físico evaluado en el estado interface entregado por el Riemann exacto**.

Si f tiene puntos de inflexión, el Riemann exacto puede contener ondas compuestas (rarefacción + choque). El flujo de Godunov sigue siendo $F_G = f(q^*)$, pero q^* ya no se obtiene mediante un mínimo o máximo de f . En la práctica, se usan solvers aproximados (Roe, HLL, Rusanov).



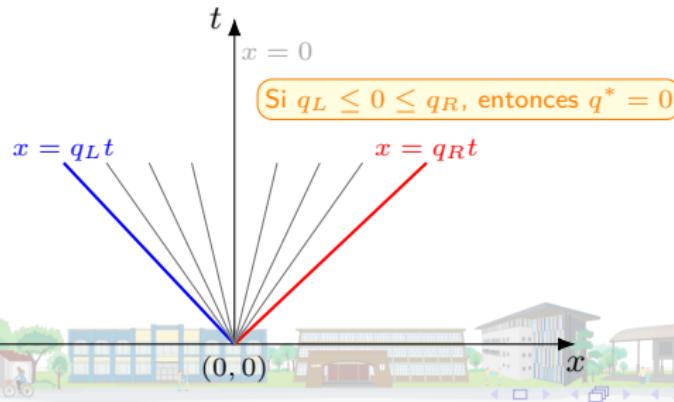
Caso rarefacción ($q_L < q_R$)

Si $q_L < q_R$, la solución exacta es una **rarefacción**,

$$q(x, t) = \begin{cases} q_L, & x/t \leq q_L, \\ x/t, & q_L < x/t < q_R, \\ q_R, & x/t \geq q_R. \end{cases}$$

En la interfaz $x = 0$ se tiene $\xi = x/t = 0$. Luego,

$$q^* = q(0, t) = \begin{cases} q_L, & q_L > 0, \\ 0, & q_L \leq 0 \leq q_R, \\ q_R, & q_R < 0. \end{cases}$$



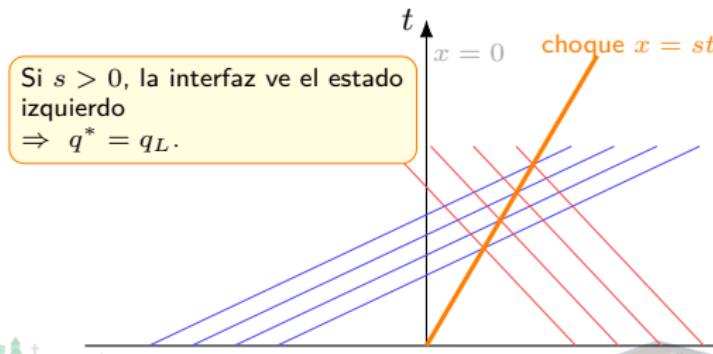
Caso choque ($q_L > q_R$)

Si $q_L > q_R$, se forma un choque con velocidad de Rankine-Hugoniot,

$$s = \frac{f(q_L) - f(q_R)}{q_L - q_R} = \frac{\frac{q_L^2}{2} - \frac{q_R^2}{2}}{q_L - q_R} = \frac{q_L + q_R}{2}.$$

La interfaz $x = 0$ ve

$$q^* = \begin{cases} q_L, & s > 0 \text{ (choque se mueve a la derecha),} \\ q_R, & s < 0 \text{ (choque se mueve a la izquierda).} \end{cases}$$



Selección del estado interface q^* (Burgers)

El estado q^* que alcanza la interfaz $x_{i+\frac{1}{2}}$ se determina a partir del problema de Riemann con estados (q_L, q_R) :

$$q^* = \begin{cases} 0, & q_L \leq q_R \text{ y } q_L \leq 0 \leq q_R, \\ q_L, & q_L \leq q_R \text{ y } q_L > 0, \\ q_R, & q_L \leq q_R \text{ y } q_R < 0, \\ q_L, & q_L > q_R \text{ y } \frac{q_L + q_R}{2} > 0, \\ q_R, & q_L > q_R \text{ y } \frac{q_L + q_R}{2} < 0. \end{cases}$$



Algorithm 2 Godunov FVM (1/2): flujo numérico

Require: Q_i^0 , $i = 1, \dots, N$, Δx , T , CFL

$$1: f(q) \leftarrow \frac{q^2}{2}, \quad t \leftarrow 0$$

2: **while** $t \leq T$ **do**

$$3: \quad \Delta t \leftarrow \text{CFL} \frac{\Delta x}{\max_i |Q_i|}, \quad \lambda \leftarrow \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

4: **for** $i = 1, \dots, N - 1$ **do**

$$5: \quad \quad \quad (q_L, q_R) \leftarrow (Q_i, Q_{i+1})$$

6: **if** $q_L \leq q_B$ **then**

$$q^* \leftarrow \begin{cases} 0, & q_L \leq 0 \leq q_R \\ q_L, & q_L > 0 \\ q_R, & q_R < 0 \end{cases}$$

8: else

$$q^* \leftarrow \begin{cases} q_L, & (q_L + q_R)/2 > 0 \\ q_R, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

10: **end if**

$$11: \quad \quad \quad F_{i+\frac{1}{2}} \leftarrow f(q^*)$$

12: end for

13: **end while**



Algorithm 3 Godunov FVM (2/2): actualización

Require: Flujos $F_{i+\frac{1}{2}}$, promedios Q_i , $\lambda = \Delta t / \Delta x$

- 1: **for** $i = 2, \dots, N - 1$ **do** ▷ Actualización FV
 - 2: $Q_i \leftarrow Q_i - \lambda(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}})$
 - 3: **end for**
 - 4: Aplicar BC, $t \leftarrow t + \Delta t$
-



Paso de tiempo: condición CFL

Para esquemas explícitos, Δt no puede ser arbitrariamente grande. La condición típica es de tipo **CFL**,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |\lambda(q)| \leq \nu_{\max},$$

donde $\lambda(q)$ son las **velocidades características** (autovalores de $f'(q)$) y ν_{\max} depende del esquema (p.ej. ≤ 1 en muchos esquemas de orden 1).

Interpretación

En un paso de tiempo, la información no debe cruzar más de **una celda**.

Elige Δt para que las ondas numéricas “no se salten celdas”.



Flujos numéricos: qué deben cumplir

En

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right),$$

todo está en **cómo escogemos** $F_{i+\frac{1}{2}}^n$.

Propiedades deseables

- **Consistencia:** $F(q, q) = f(q)$.
- **Conservación:** flujo único por interfaz (misma $F_{i+\frac{1}{2}}$ para ambas celdas).
- **Monotonía / estabilidad (TVD):** evita oscilaciones cerca de choques.
- **Captura de choques:** respeta velocidades físicas.



Flujos aproximados para Burgers: Roe y HLL

Considera la ecuación de Burgers

$$q_t + \left(\frac{q^2}{2} \right)_x = 0, \quad q \in \mathbb{R},$$

y el problema de Riemann en la interfaz con estados $(q_L, q_R) = (Q_i^n, Q_{i+1}^n)$.

Flujo de Roe (Burgers escalar)

El flujo de Roe se escribe como

$$F_{\text{Roe}}(q_L, q_R) = \frac{f(q_L) + f(q_R)}{2} - \frac{1}{2} |\tilde{a}| (q_R - q_L)$$

con $\tilde{a} = \frac{q_L + q_R}{2}$.



Flujos aproximados para Burgers: Roe y HLL

Flujo HLL (Burgers escalar)

Se eligen dos velocidades que acotan las ondas del Riemann,

$$S_L = \min(q_L, q_R), \quad S_R = \max(q_L, q_R).$$

El flujo HLL queda

$$F_{\text{HLL}}(q_L, q_R) = \begin{cases} f(q_L), & 0 \leq S_L, \\ \frac{S_R f(q_L) - S_L f(q_R) + S_L S_R (q_R - q_L)}{S_R - S_L}, & S_L < 0 < S_R, \\ f(q_R), & 0 \geq S_R. \end{cases}$$

Comentario

Para Burgers, Roe y HLL evitan resolver el Riemann exacto. Roe es menos difusivo pero puede violar entropía; HLL es más robusto pero más difusivo.



Flujo Lax-Friedrichs

Para ley escalar o sistemas (vectorial), un flujo robusto es:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(f(Q_L) + f(Q_R) \right) - \frac{1}{2} \alpha_{i+\frac{1}{2}} (Q_R - Q_L),$$

donde $Q_L = Q_i^n$, $Q_R = Q_{i+1}^n$, y

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} \geq \max |\lambda| \quad (\text{máxima velocidad de onda local}).$$

Lectura rápida

Promedio del flujo físico + difusión numérica proporcional al salto.

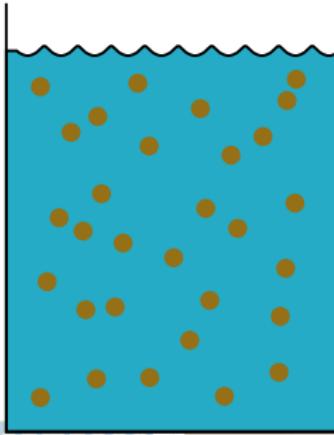
Pro: simple y estable. Contra: puede difuminar choques si α es grande.



Proceso de sedimentación monodispersa

Ec. sedimentación mono-dispersa :
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f(\phi)}{\partial z} = 0, \\ f(\phi) = v_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}}\right)^r \end{cases}$$

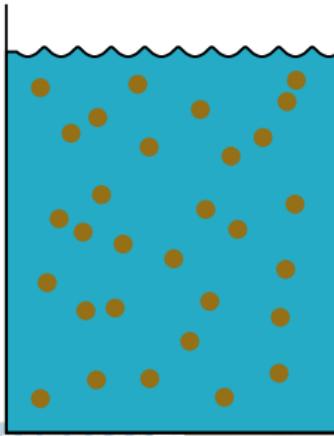
+ condición inicial y condición de frontera.



Proceso de sedimentación monodispersa

Ec. sedimentación mono-dispersa :
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f(\phi)}{\partial z} = 0, \\ f(\phi) = v_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}}\right)^r \end{cases}$$

+ condición inicial y condición de frontera.

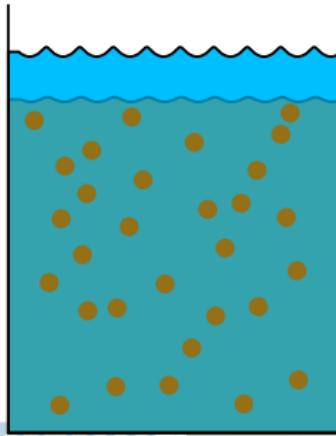


Proceso de sedimentación monodispersa

Ec. sedimentación mono-dispersa :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f(\phi)}{\partial z} = 0, \\ f(\phi) = v_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}}\right)^r \end{cases}$$

+ condición inicial y condición de frontera.

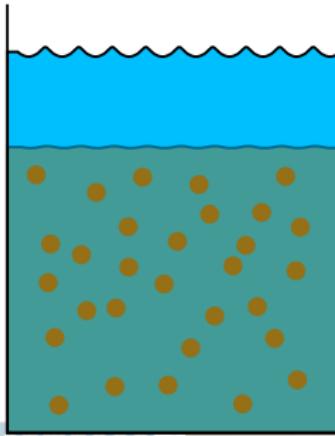


Proceso de sedimentación monodispersa

Ec. sedimentación mono-dispersa :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f(\phi)}{\partial z} = 0, \\ f(\phi) = v_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}}\right)^r \end{cases}$$

+ condición inicial y condición de frontera.

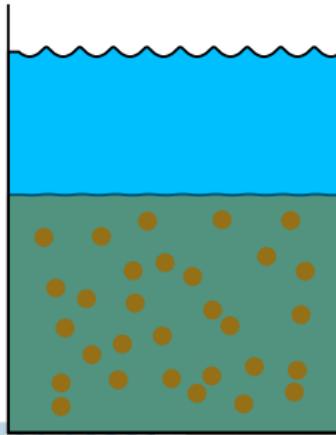


Proceso de sedimentación monodispersa

Ec. sedimentación mono-dispersa :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f(\phi)}{\partial z} = 0, \\ f(\phi) = v_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}}\right)^r \end{cases}$$

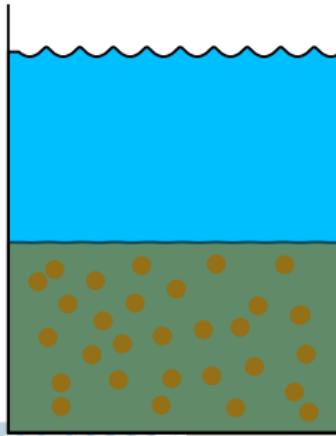
+ condición inicial y condición de frontera.



Proceso de sedimentación monodispersa

Ec. sedimentación mono-dispersa :
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f(\phi)}{\partial z} = 0, \\ f(\phi) = v_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}}\right)^r \end{cases}$$

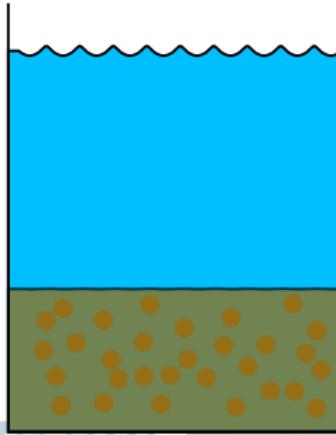
+ condición inicial y condición de frontera.



Proceso de sedimentación monodispersa

Ec. sedimentación mono-dispersa :
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f(\phi)}{\partial z} = 0, \\ f(\phi) = v_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}}\right)^r \end{cases}$$

+ condición inicial y condición de frontera.



Método numérico sedimentación monodispersa

Ecuación (forma conservativa con área),

$$\partial_t \phi + \frac{1}{A_b(z)} \partial_z \left(A_c(z) f(\phi) \right) = 0, \quad f(\phi) = \phi e^{-r_v \phi} - \phi e^{-r_v},$$

con A_b (en bordes de celda) y A_c (en centros/interfases) según opt.

Malla 1D: $z_j = j\Delta z$, celdas $j = 1, \dots, n_c$ (se usan ghost cells $j = 0$ y $j = n_c + 1$).

Flujo numérico (Godunov para flujo no lineal),

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F(\phi_j, \phi_{j+1}) = \begin{cases} \min\{f(\phi_j), f(\phi_{j+1})\}, & \phi_j < \phi_{j+1}, \\ f(\hat{\phi}), & (\hat{\phi} - \phi_j)(\hat{\phi} - \phi_{j+1}) < 0, \\ \max\{f(\phi_j), f(\phi_{j+1})\}, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\hat{\phi}$ es el punto crítico (máximo) del flujo.

Actualización explícita (Euler en tiempo):

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{1}{A_b(j)} \left(A_c(j) F_{j+\frac{1}{2}}^n - A_c(j-1) F_{j-\frac{1}{2}}^n \right), \quad j = 1, \dots, n_c.$$

Condiciones en bordes (como en el código):



$$\phi_0 = 0, \quad F_{1/2} = 0, \quad \phi_{n_c+1} = 1, \quad F_{n_c+1/2} = 0.$$

Modelo de sedimentación tipo Kynch y esquema numérico

Ley de conservación (1D).

$$\partial_t \phi + \frac{1}{A_b(z)} \partial_z \left(A_c(z) f(\phi) \right) = 0, \quad 0 < z < L, \quad 0 < t \leq T.$$

Flujo de Kynch.

$$f(\phi) = u_\infty \phi \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}}\right)^C, \quad f(\phi) = 0 \text{ si } \phi \notin (0, \phi_{\max}).$$

Parámetros usados: $u_\infty = 1.0$, $\phi_{\max} = 0.51985$, $C = 2$.

Discretización: celdas $j = 1, \dots, n_c$, $\Delta z = L/n_c$.

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{1}{A_b(j)} \left(A_c(j) F_{j+\frac{1}{2}}^n - A_c(j-1) F_{j-\frac{1}{2}}^n \right).$$

Mismo Flujo numérico + CF + CI.

Paso de tiempo (CFL): $\Delta t = 0.8 \Delta z / \max(\phi)$ (según implementación).



Modelo de sedimentación polidispersa

Consideramos N especies sólidas dispersas en un fluido viscoso en 1D (altura z).

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_i v_i^{\text{MLB}}(\Phi) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

con condición inicial y condiciones de borde apropiadas. Aquí $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ y el conjunto admisible es

$$\mathcal{D} = \left\{ \Phi \in \mathbb{R}^N : \phi_i \geq 0, i = 1, \dots, N; \phi_1 + \dots + \phi_N \leq \phi_{\max} \right\}.$$

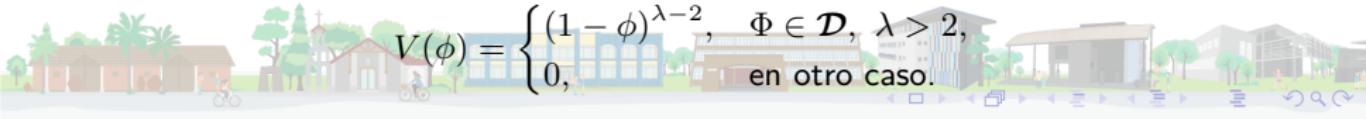
La velocidad de sedimentación obstaculizada (Masliyah-Lockett-Bassoon) es

$$v_i^{\text{MLB}}(\Phi) = \mu V(\phi) \left[\delta_i (\bar{\rho}_i - \bar{\rho}^T \Phi) - \sum_{l=1}^N \delta_l \phi_l (\bar{\rho}_l - \bar{\rho}^T \Phi) \right], \quad i = 1, \dots, N,$$

donde $\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i$, $\bar{\rho}_i := \rho_i - \rho_0$, $\bar{\rho} := (\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_N)^T$,

$$\mu := -\frac{g d_1^2}{18 \mu_f}, \quad \delta_i := \frac{d_i^2}{d_1^2},$$

y el factor de obstaculización es



$$V(\phi) = \begin{cases} (1 - \phi)^{\lambda - 2}, & \Phi \in \mathcal{D}, \lambda > 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Método numérico (FVM) para el modelo polidisperso

Actualización FVM .

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta z} \left(\hat{f}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \hat{f}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Flujo numérico,

$$\begin{aligned}\hat{f}_{i,j+\frac{1}{2}}^n = & \frac{1}{2} \left(\phi_{i,j+1}^n v_i(\Phi_{j+1}^n) + \phi_{i,j}^n v_i(\Phi_j^n) \right) - \frac{|v_i(\Phi_{j+1}^n)|}{2} \left(\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n \right) \\ & - \frac{\phi_{i,j}^n}{2} |v_i(\Phi_j^n) - v_i(\Phi_{j+1}^n)| \operatorname{sgn} \left(\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n \right).\end{aligned}$$

Paso de tiempo (CFL),

$$\Delta t_n = 0.5 \frac{\Delta z}{\max_{j=0,\dots,\mathcal{N}-1} \max_{i=1,\dots,N} |v_i(\Phi_j^n)|}.$$

$$+ C. \text{ I y } C. \text{ F en } z_{-\frac{1}{2}} = 0 \text{ y } z_{N-\frac{1}{2}} = L.$$

Nota: el flujo combina un término centrado con disipación tipo upwind y un corrector no lineal para estabilizar gradientes.

Agradecimientos

Gracias por su atención

Quedo atento a sus preguntas y comentarios.

