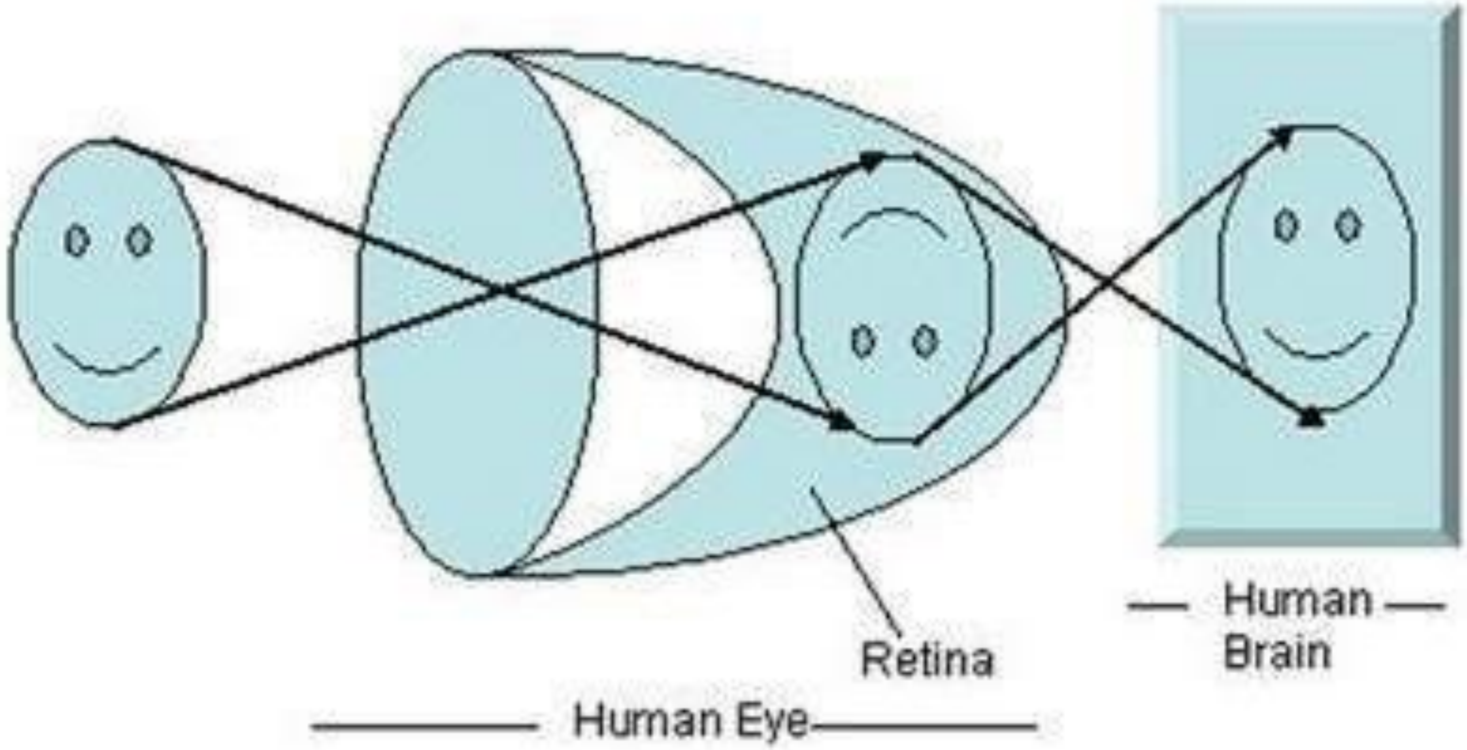
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

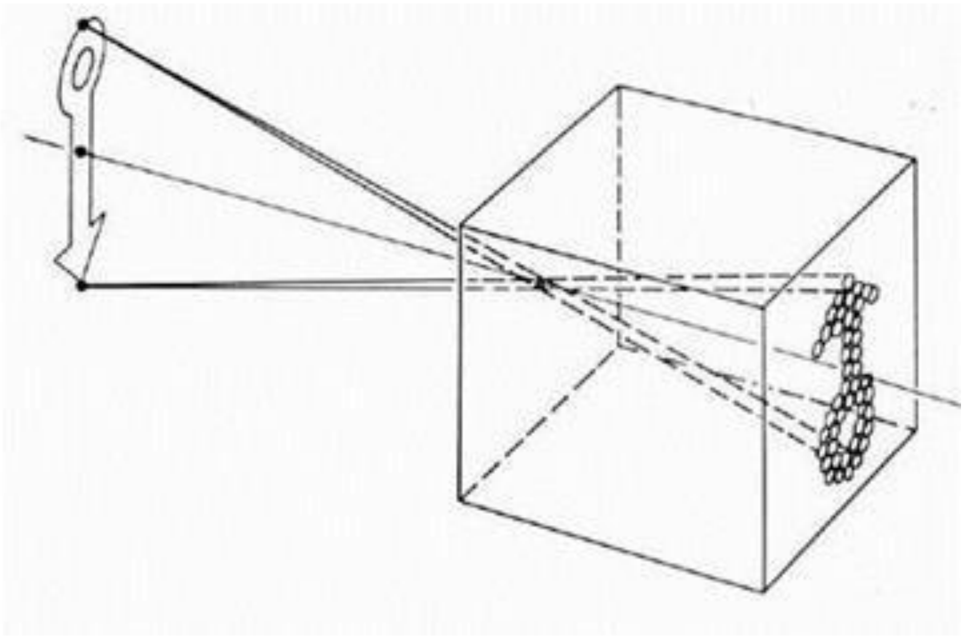
Лекция 2

Формирование изображений человеком



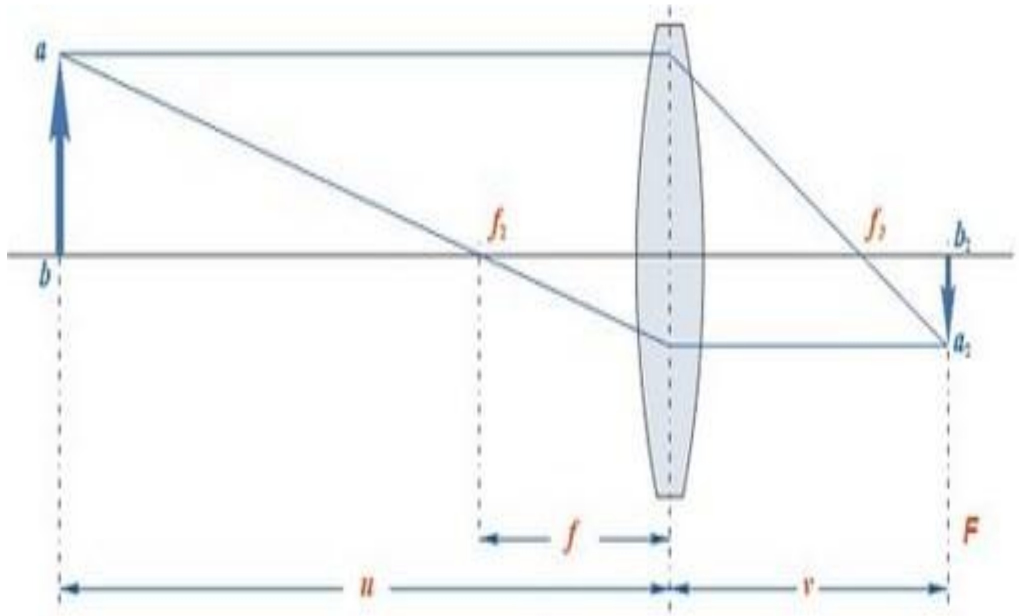
Формирование изображений

Модель камеры-обскуры (pinhole)



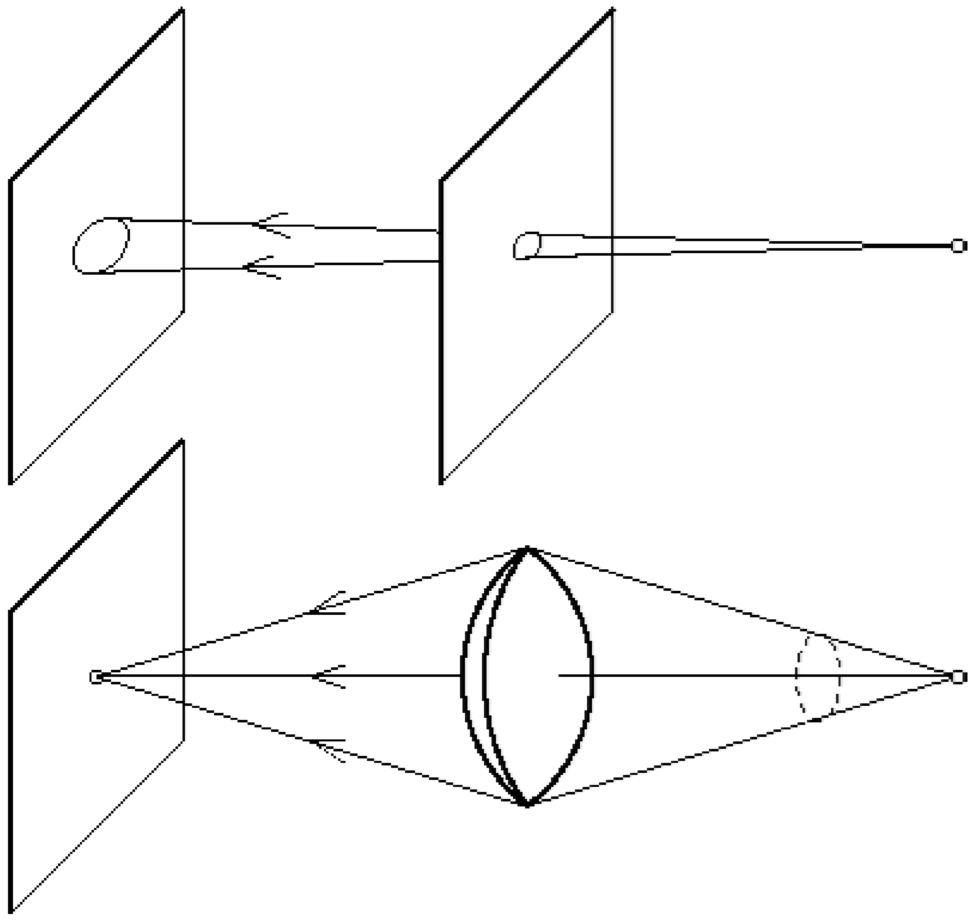
Модель:
- В преграде отверстие размеров в одну точку
- Все лучи проходят через одну точку
- Эта точка называется **Центром Проекции** (ЦП)
- Реальный размер отверстия – **Апертура**
- Изображение формируется на **Картинной плоскости**
- **Фокусным расстоянием *f*** называется расстояние от ЦП до Картинной плоскости

Формирование изображений



- **Линза –** прозрачное тело, ограниченное криволинейными поверхностями.
- **Оптический центр линзы –** это точка, проходя через которую лучи не меняют своего направления.
- **Главная оптическая ось** – прямая, проходящая через центры сферических поверхностей линзы.
- **Побочная оптическая ось** – любая прямая, кроме главной оптической оси, проходящая через оптический центр.
- **Главный оптический фокус** – точка, в которой после преломления пересекаются все лучи, падающие на линзу, параллельно главной оптической оси.
- **Фокусное расстояние** – расстояние от линзы до ее фокуса.
- **Фокальная плоскость** – плоскость, проведенная через главный фокус перпендикулярно главной оптической оси.
- **Оптическая сила линзы** – величина, обратная фокусному расстоянию.
- **Линейное увеличение** – отношение линейного размера изображения к линейному размеру предмета.

Формирование изображений



• Линза:

диск из прозрачного однородного материала, ограниченный двумя полированными сферическими, или плоской и сферической, поверхностями

Линза позволяет увеличить поток света от каждой точки

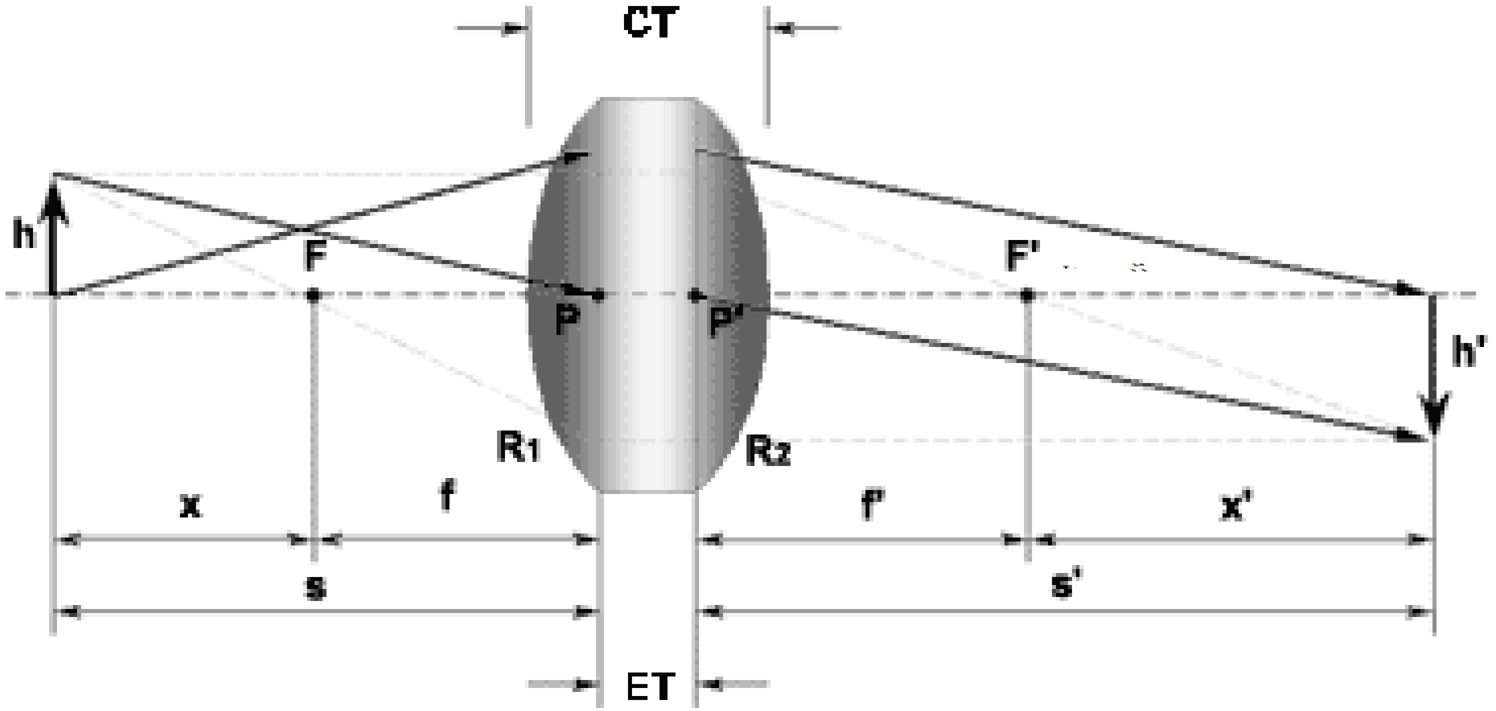
Виды линз

Выпуклые линзы

Вогнутые линзы

Формирование изображений

Толстая линза $$\frac{1}{f} = (n-1) \bullet \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1) \bullet CT}{n \bullet R_1 \bullet R_2} \right)$$

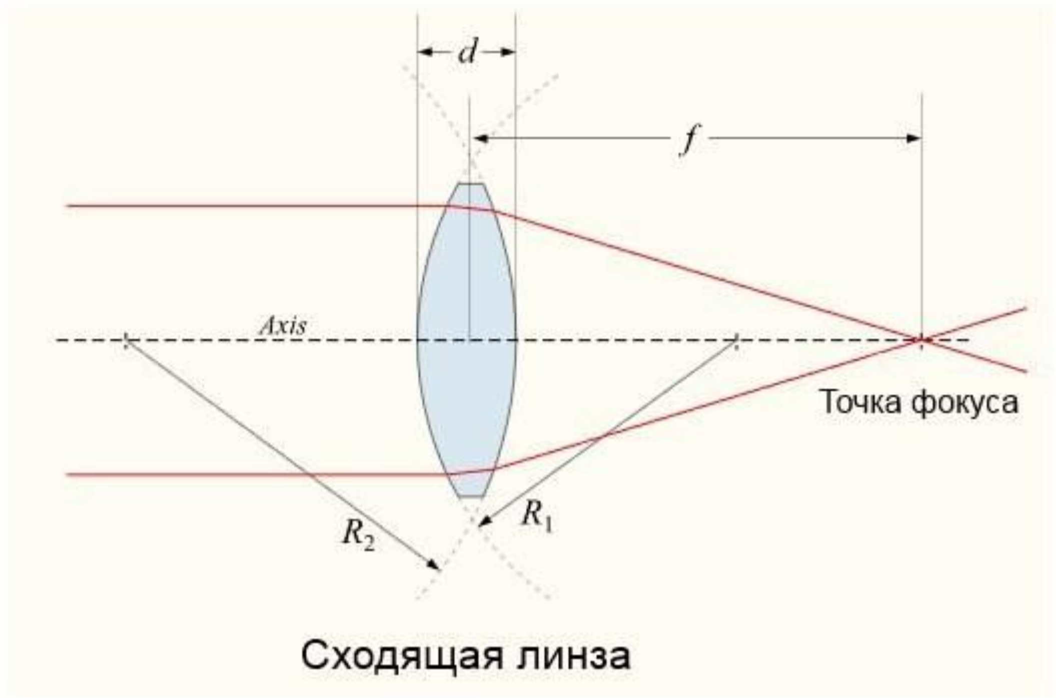


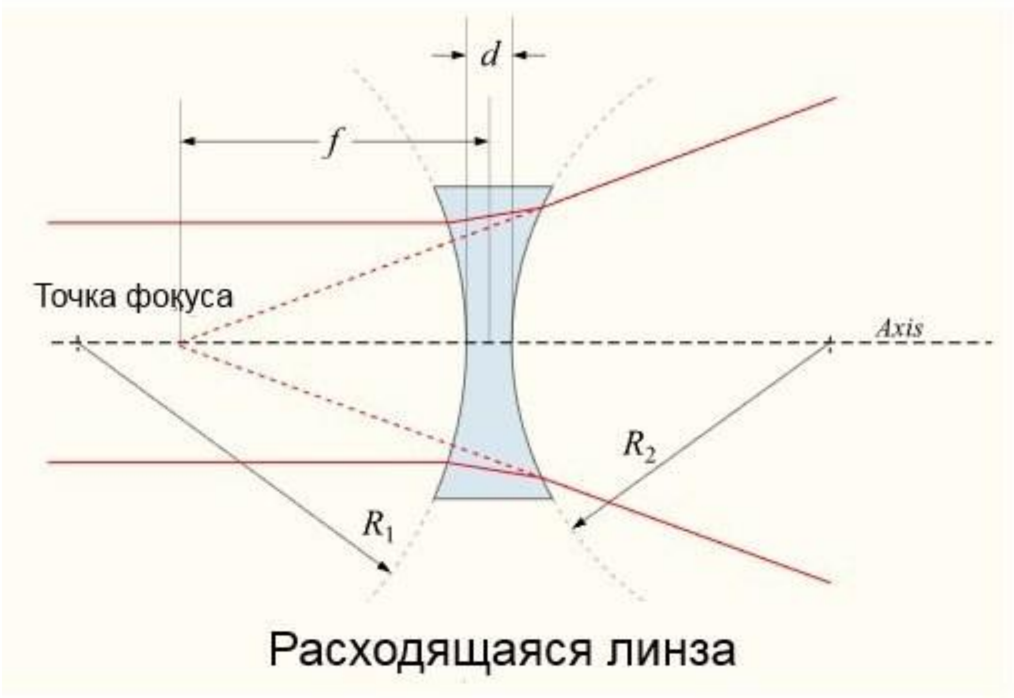
Линейное увеличение

$$\Gamma = \frac{h'}{h}$$

Тонкая линза $$\frac{1}{f} = (n-1) \bullet \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

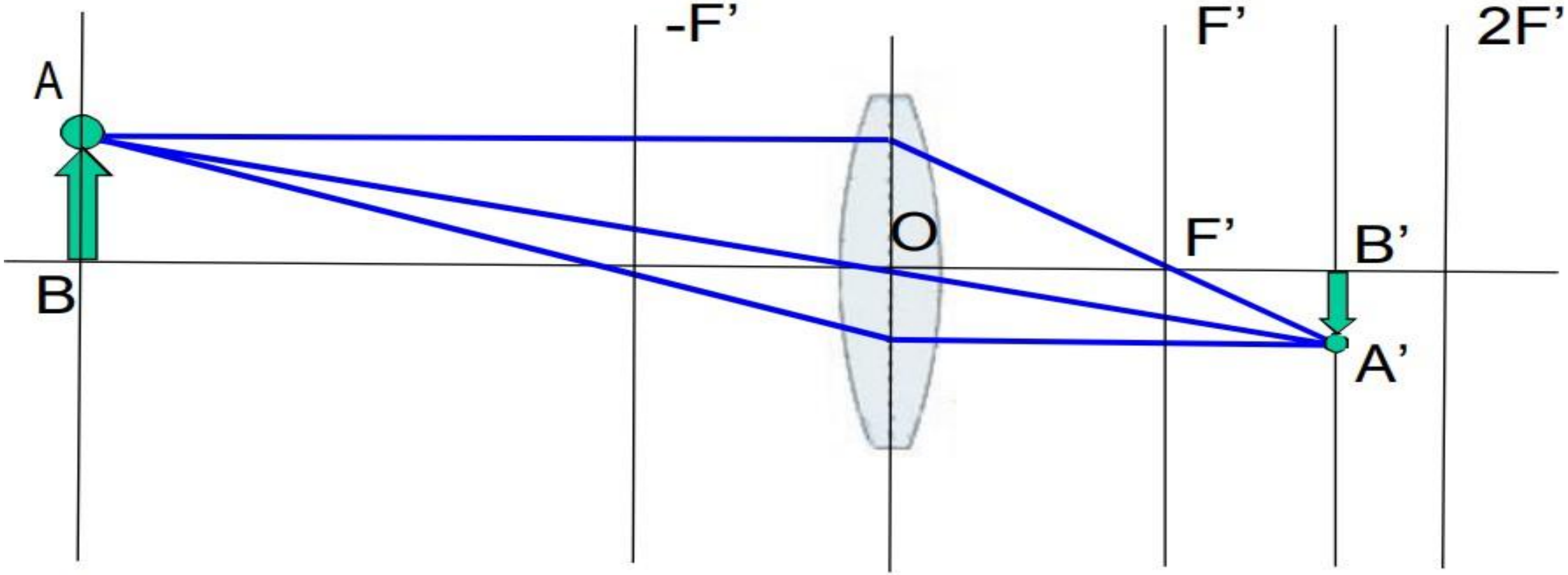
Формирование изображений





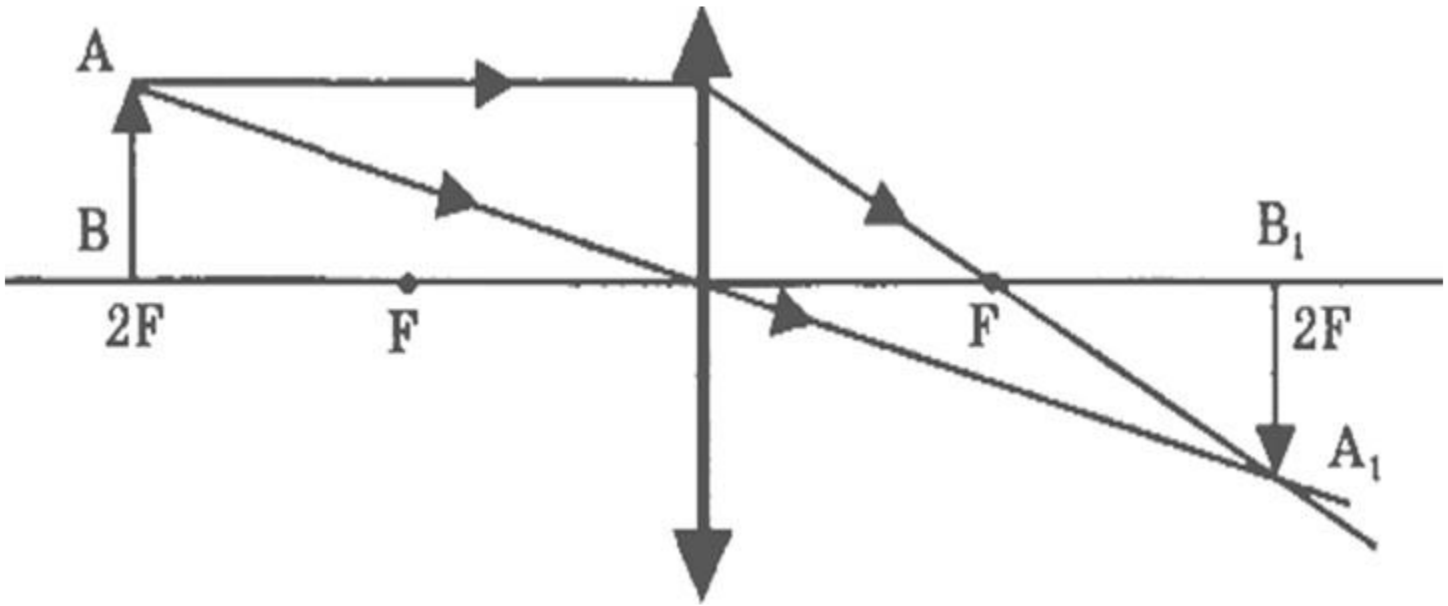
Формирование изображений

Линза

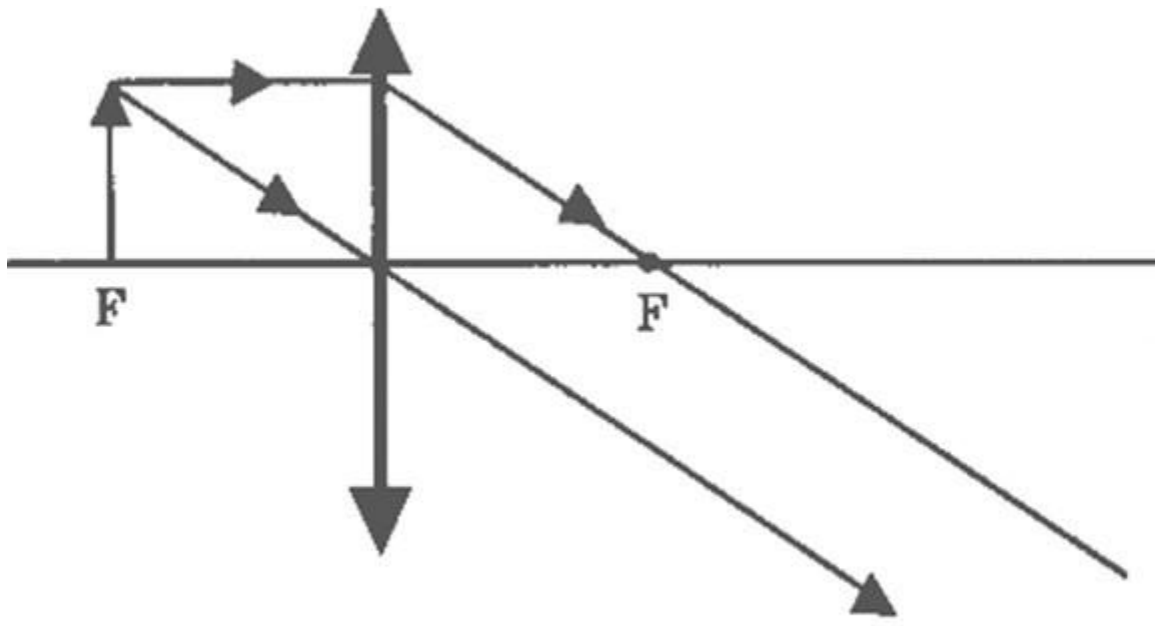


- Лучи от одной точки объекта, преломляясь линзой, фокусируются в одной точке позади линзы
- Луч, проходящий через центр линзы не преломляется
- Система точно как камера-обскура, но собирает больше света
    - O – центр проекции (центр линзы)

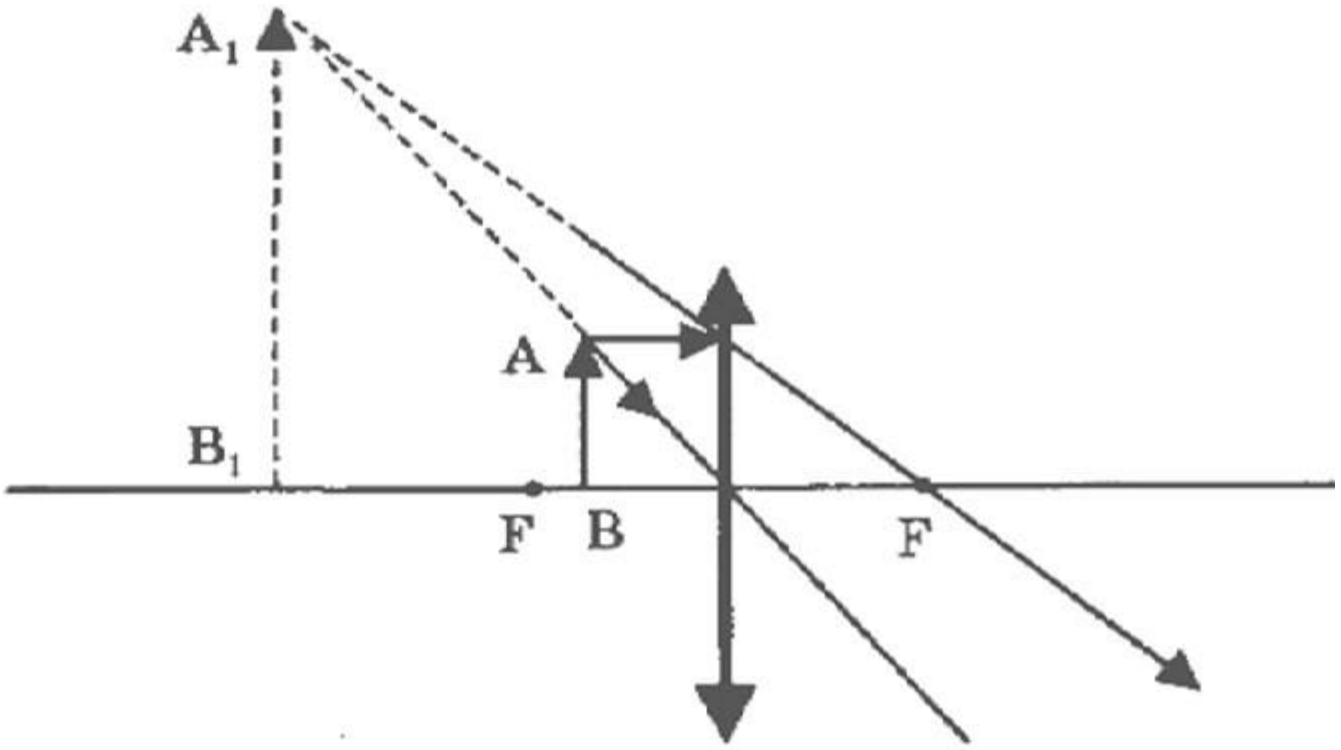
Если предмет находится в двойном фокусе, то изображение получится действительное, равное, обратное.



Если предмет находится в фокусе, то изображения нет.



Если предмет находится между фокусом и оптическим центром, то изображение мнимое, прямое, увеличенное.



Формирование изображений

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

d – расстояние от светящейся точки до оптического центра линзы

f – расстояние от оптического центра линзы до изображения точки

F – фокусное расстояние линзы

При расчетах числовые значения действительных величин всегда подставляются со знаком «+», а мнимых со знаком «-».

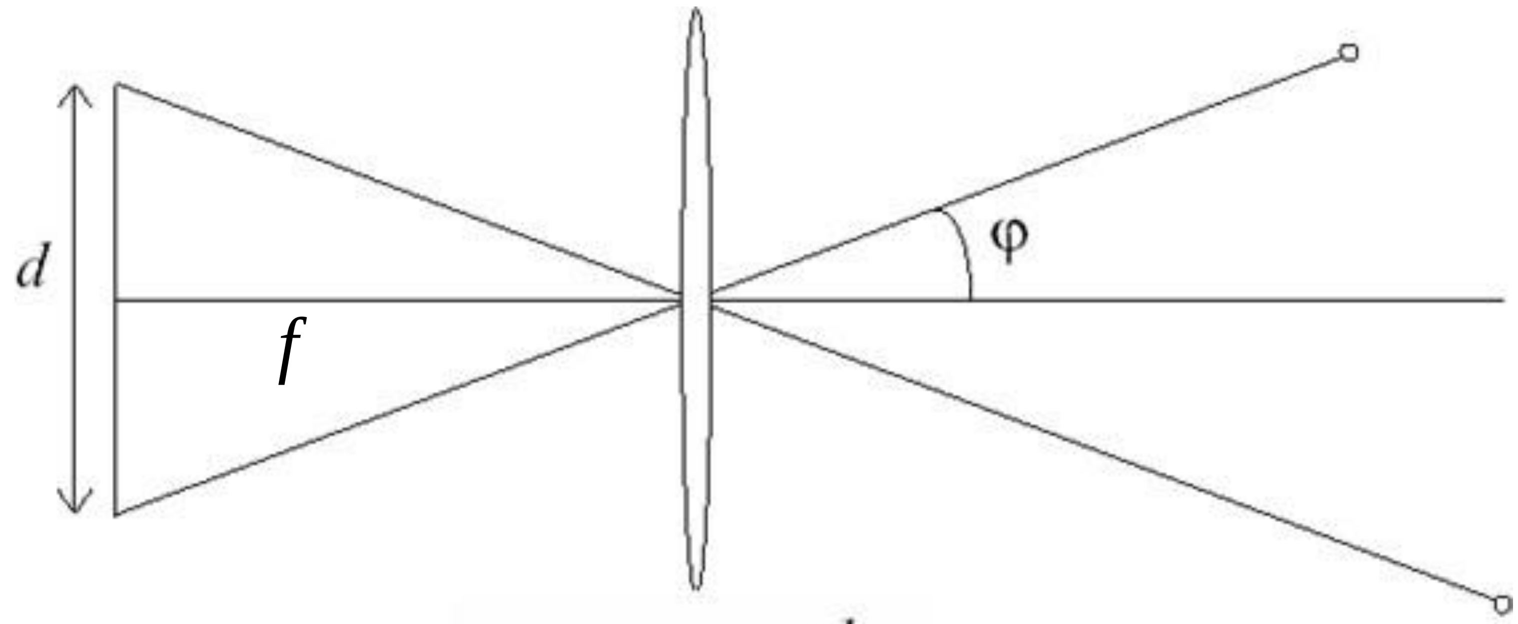
Формирование оптических изображений

$$D = \frac{1}{F}$$

D – оптическая сила линзы (или системы линз)
F – фокусное расстояние линзы (или системы линз)
Единицей оптической силы линзы является диоптрия ($м^{-1}$)

Отрицательная для рассеивающих линз!

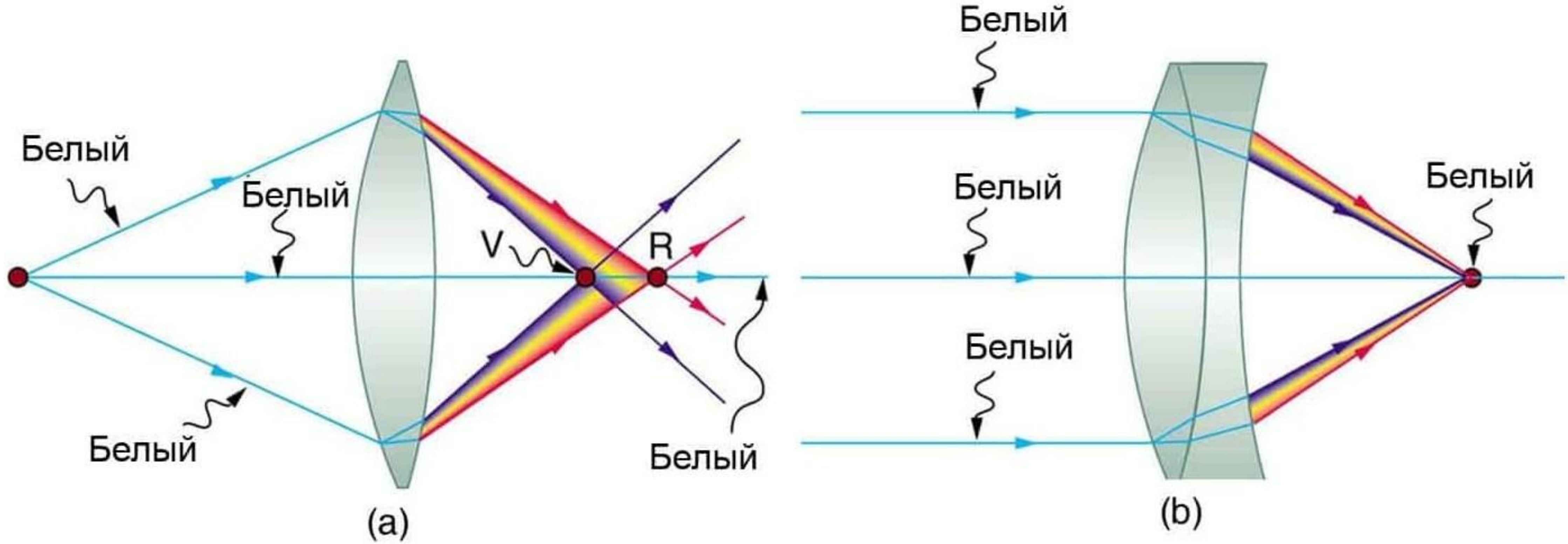
Формирование оптических изображений



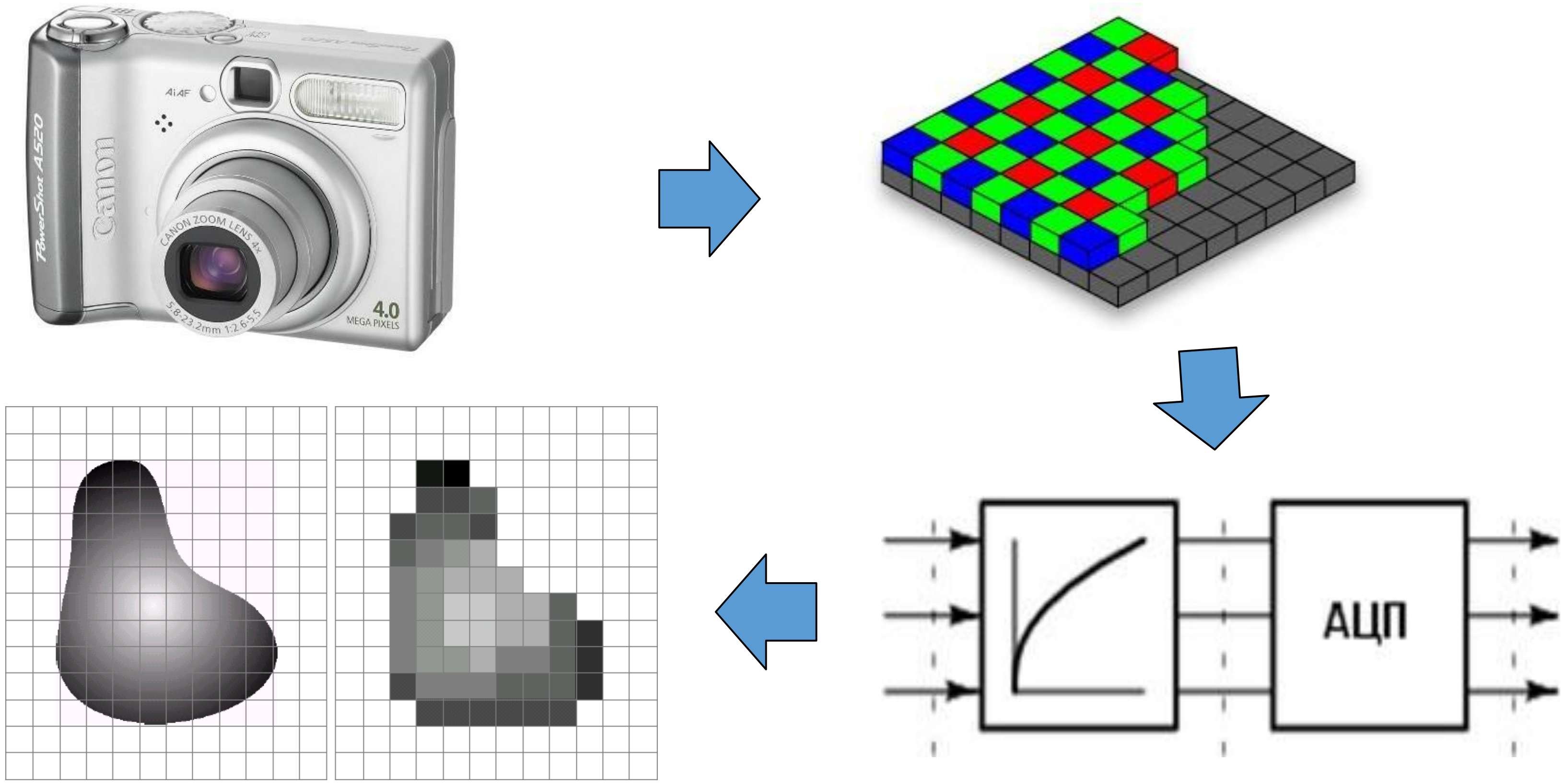
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{d}{2f}\right)$$

- Размер матрицы ограничен – ограничен угол обзора
- Больше фокусное расстояние – меньше угол обзора
- Меньше фокусное расстояние – больше угол обзора

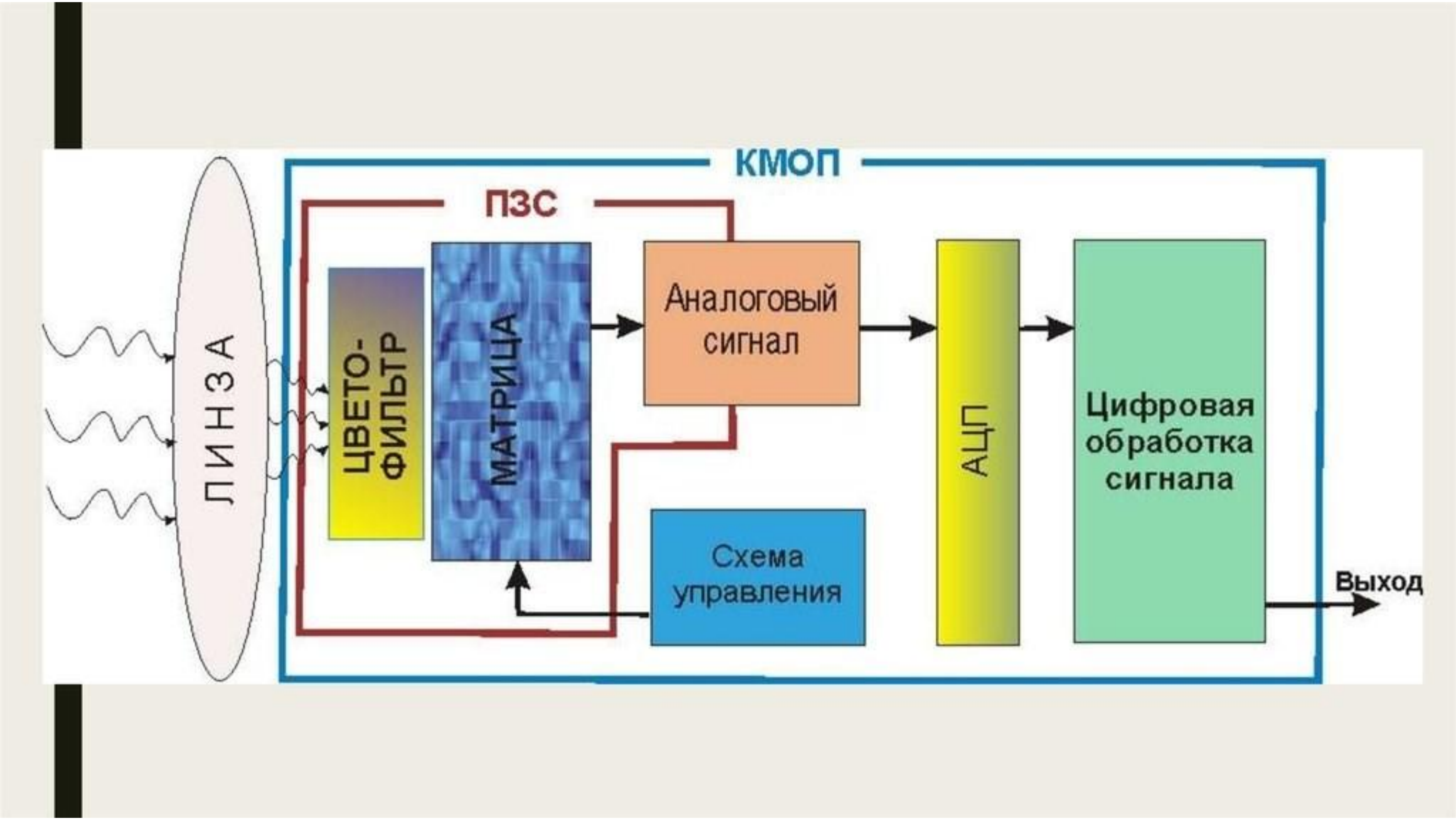
Формирование оптических изображений



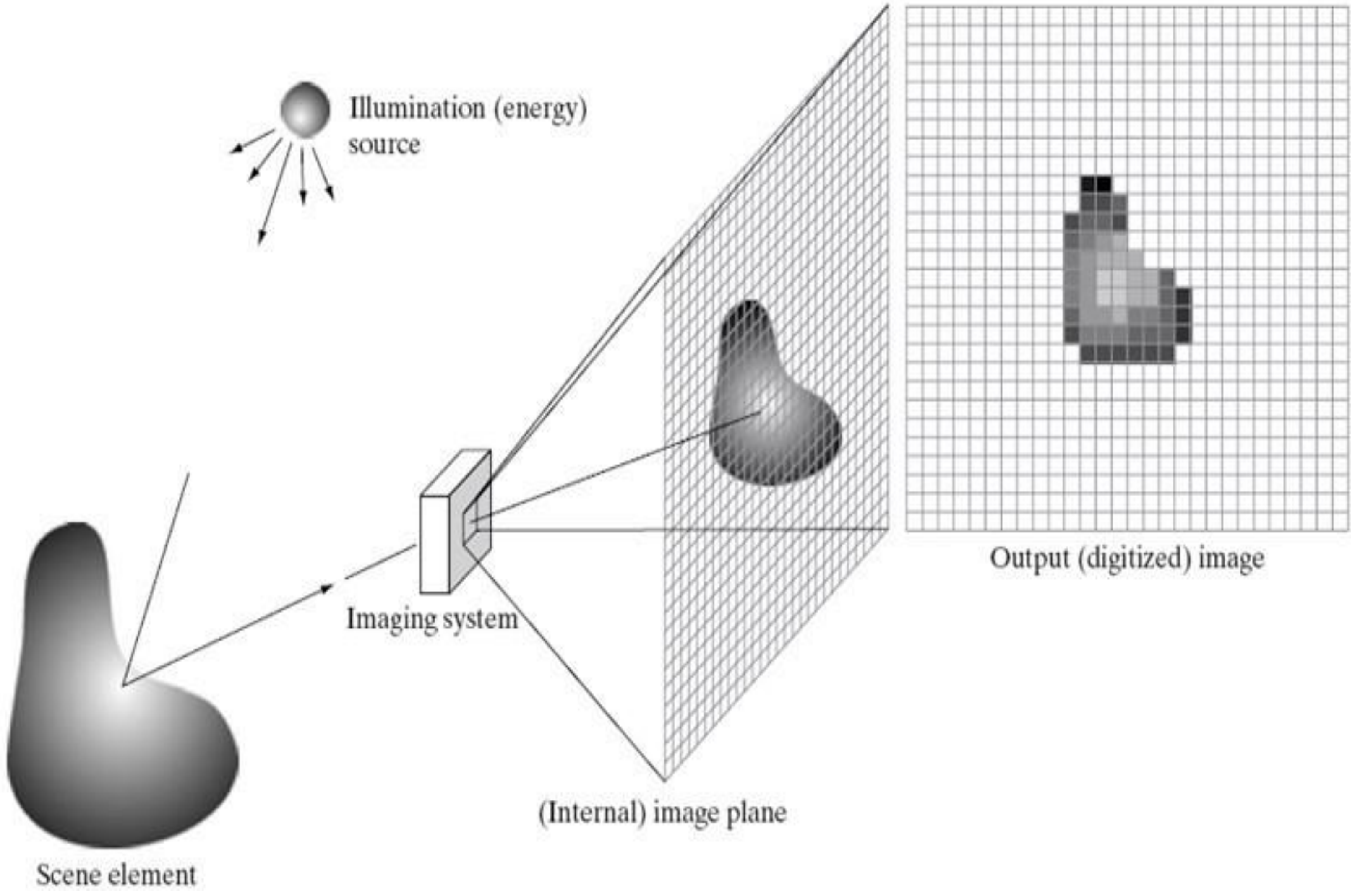
Дискретизация и квантование изображений



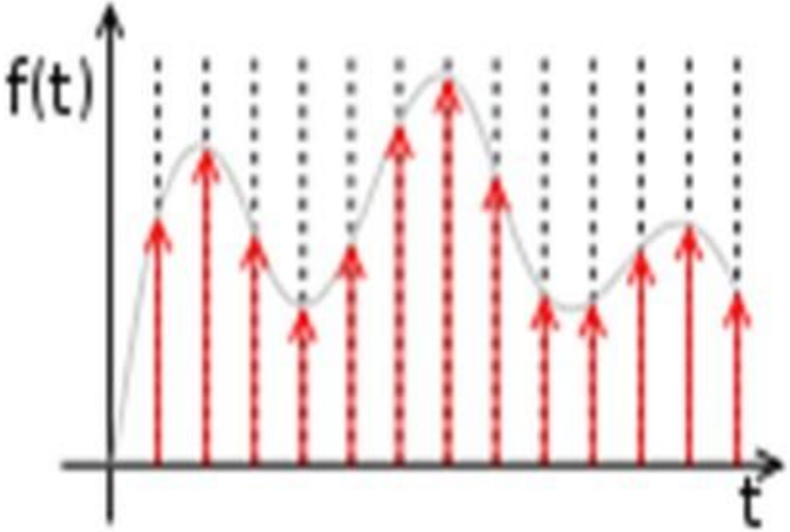
Дискретизация и квантование изображений

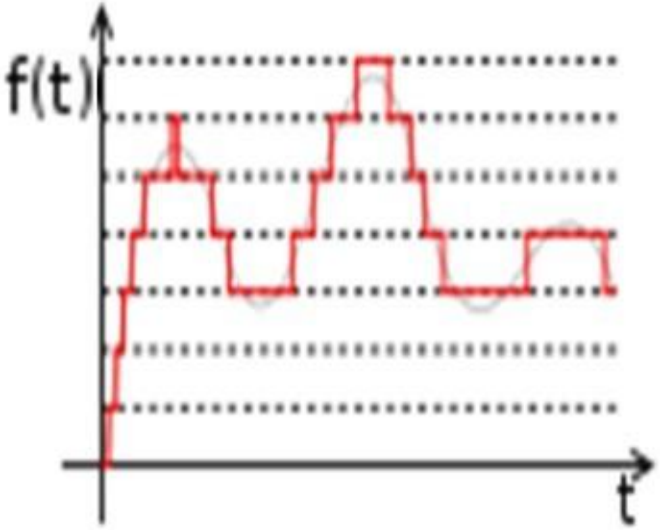


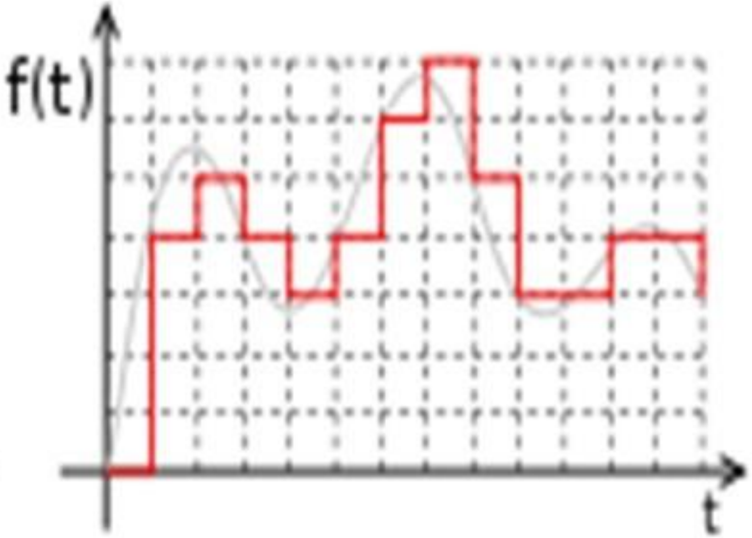
Дискретизация и квантование изображений



Дискретизация и квантование изображений







Дискретизованный + Квантованный = Цифровой

Под квантованием сигнала s по уровню подразумевается процесс измерения сигнала в точке дискретизации и выражение результата измерения некоторым числом m из множества m $\{m_0, ..., m_k, ..., m_K\}$, где K - число уровней квантования.

Каждому определенному интервалу входного сигнала (k … K+1) соответствует фиксированное значение выходного $S_{ВЫХnk}$

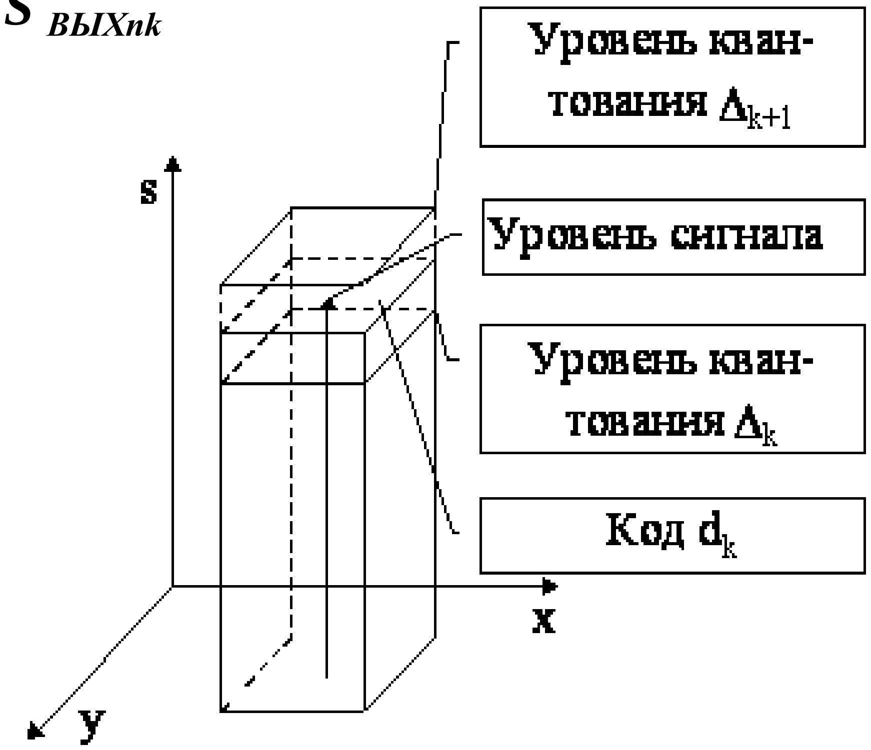
Квантование - преобразование непрерывной шкалы

уровней каждого отсчета в дискретную шкалу

Квантование сигнала **по уровню это дискретизация сигнала по амплитуде**

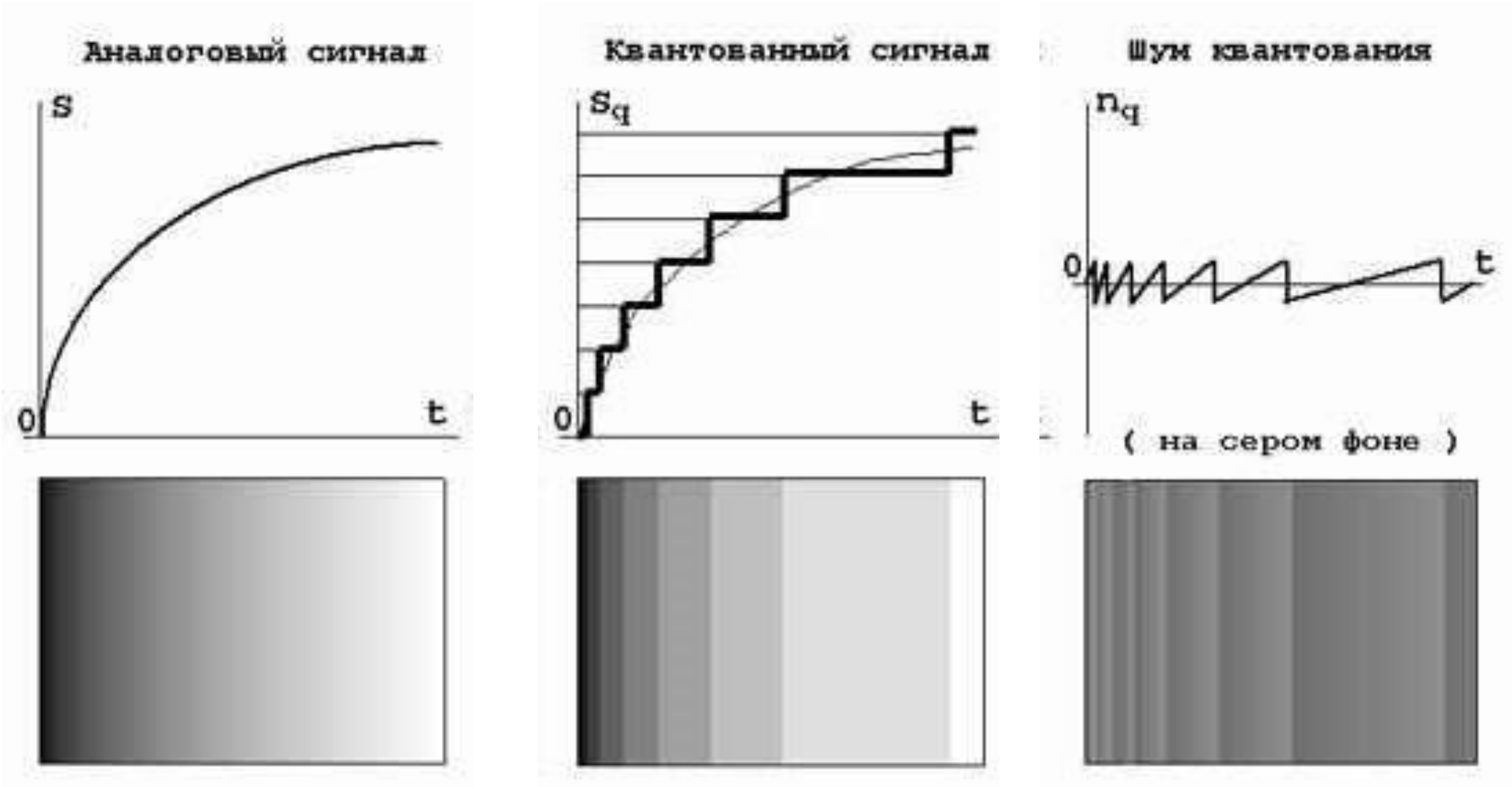
- **Уровень квантования**
- **Шаг квантования**
- **Пороги квантования**

$$N = 2^K - 1$$



Связь пространственной дискретизации и квантования по уровню

Аналого-цифровое преобразование. Квантование



Корреляция шумов квантования с сигналом

В отличие от флуктуационных шумов шум квантования коррелирован с сигналом, поэтому шум квантования не может быть устранен последующей фильтрацией. Шум квантования убывает с увеличением числа уровней квантования.

Чем больше уровней квантования, тем меньше ошибка.

изображение,
квантованное на 32 уровня

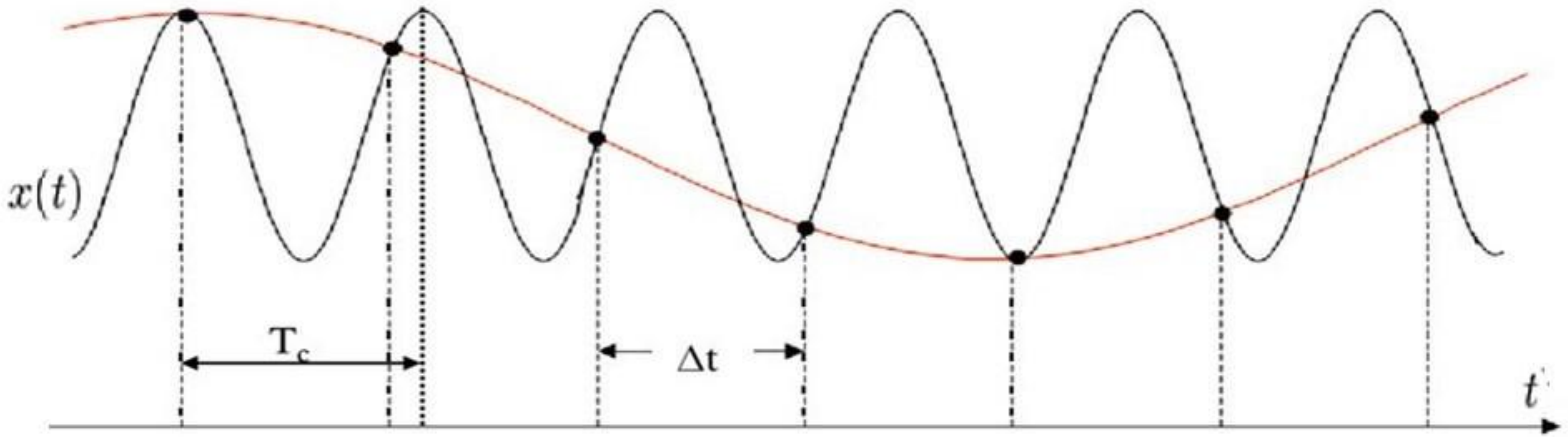
изображение,
квантованное на 128 уровней

Ошибка квантования случайного сигнала носит шумовой характер, и может моделироваться путем добавления аддитивного шума к сигналу.

Дискретизация и квантование изображений

Теорема Котельникова

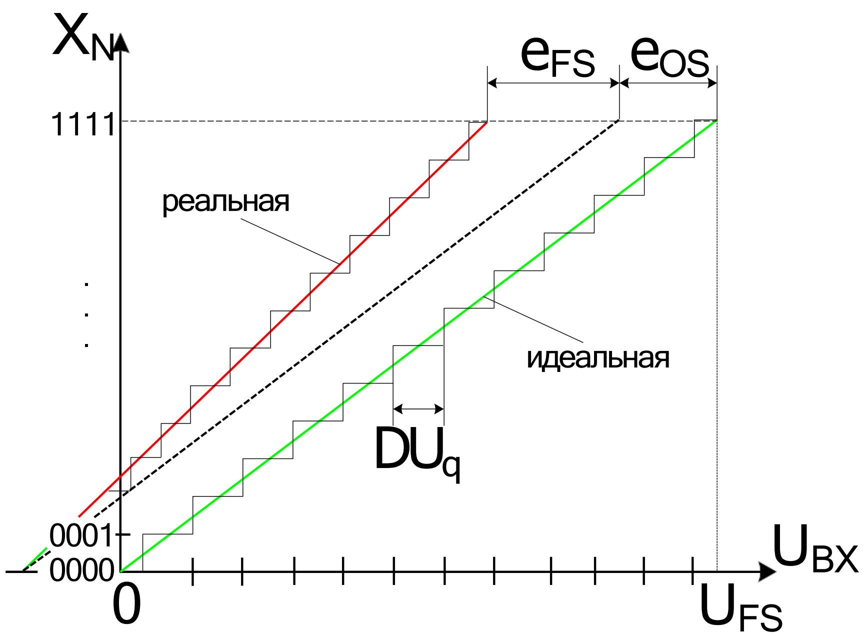
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)\right], \qquad 0 < \Delta \le \frac{1}{2f_c}.$$



Искажение изображения из-за низкой частоты дискретизации (элайзинг)!

Ложные контуры на реальном изображении

Статические параметры АЦП



Максимальное напряжение преобразования - $(U_{вх})_{max}=U_{FS}$

Разрядность АЦП - n

Разрешающая способность -

$$DU_q = \frac{(U_{вх})_{max}}{2^n-1} = \frac{U_{FS}}{2^n-1}$$

Погрешность полной шкалы – относительная разность между реальным и идеальным значениями предела шкалы преобразования при отсутствии смещения нуля. Является мультипликативной погрешностью.

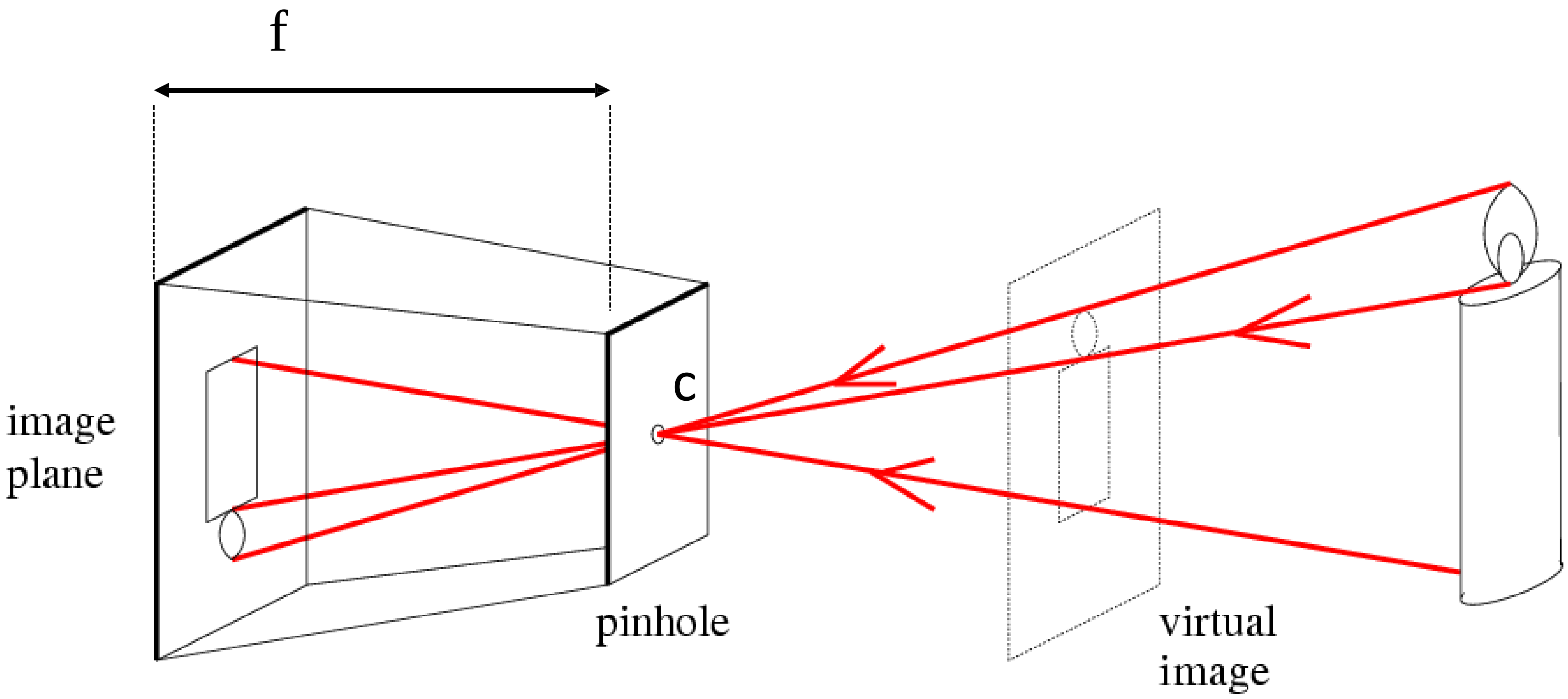
$$d_{FS} = \frac{e_{FS}}{U_{FS}} \bullet 100\%$$

Погрешность смещения нуля – значение U_{BX}, когда выходной код АЦП равен нулю. Является аддитивной составляющей полной погрешности. Часто указывается в милливольтах или в процентах от полной шкалы:

$$d_{OS} = \frac{e_{OS}}{U_{FS}} \bullet 100\%$$

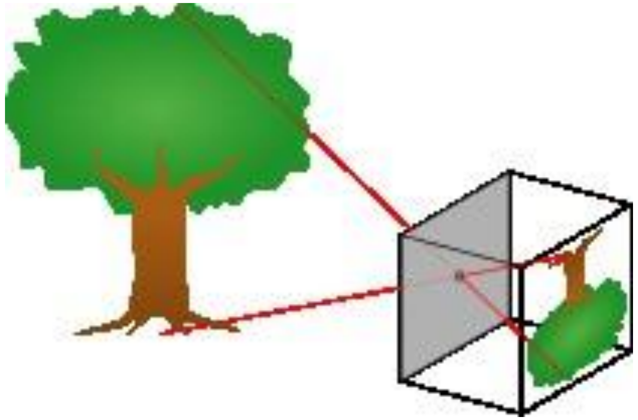
Формирование изображений

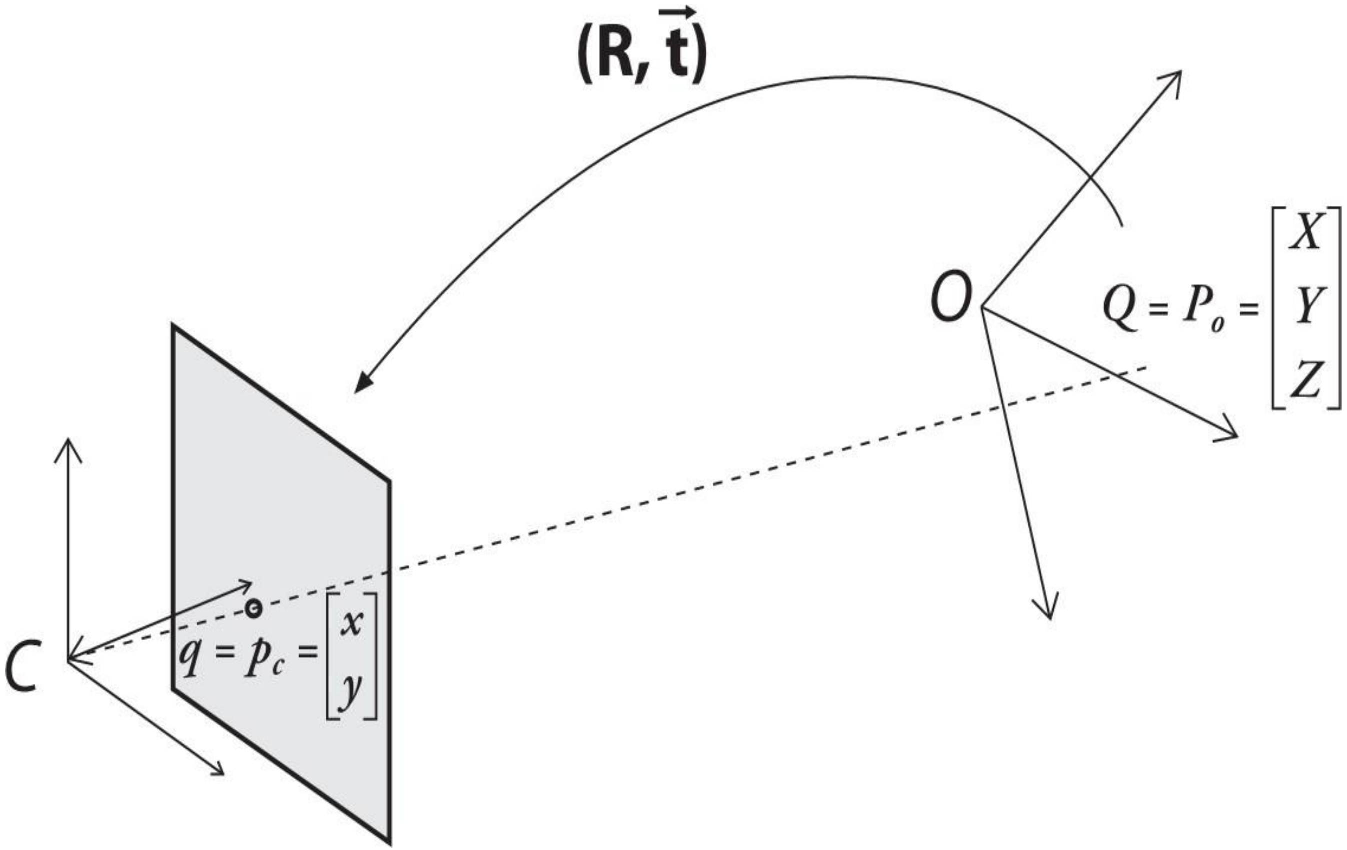
Модель камеры-обскура



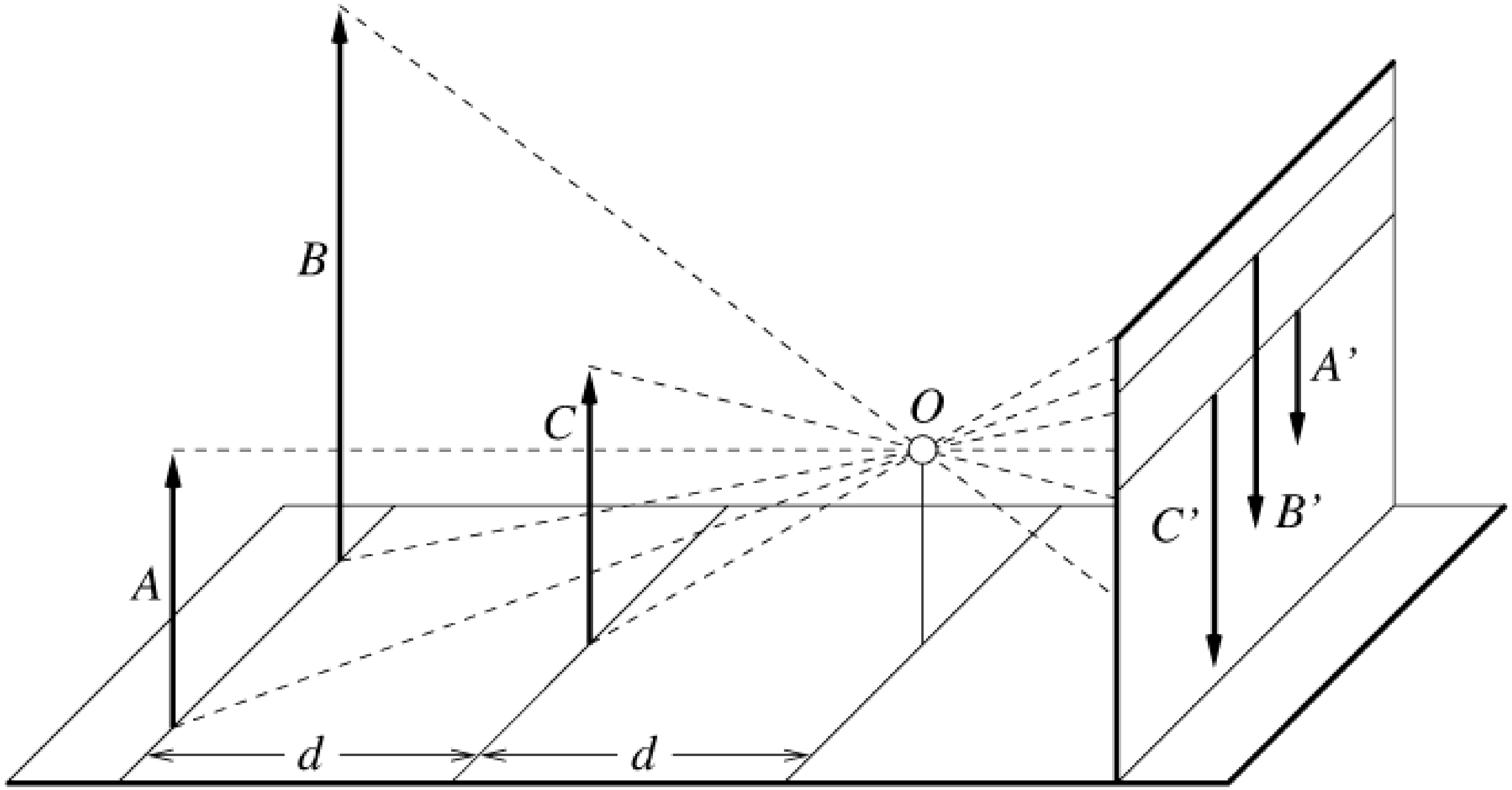
f = фокусное расстояние
c = центр камеры (центр проекции)
Image plane = картинная (экранная) плоскость

Математическая модель камеры-обскура





Модель камеры-обскура



Расстояние не сохраняется

Преобразование координат

Пусть задана ***n***-мерная система координат в базисе ($\boldsymbol{k_1, k_2, \ldots, k_n}$), которая описывает положение точки в пространстве с помощью числовых значений $\boldsymbol{k_i}$

Если задать другую, ***N***-мерную, систему координат в базисе ($\boldsymbol{m_1, m_2, \ldots, m_N}$) и поставить задачу определения координат в новой системе, зная координаты в старой, то решение можно записать в таком виде (1)

$$\begin{cases} m_1 = f_1(k_1, k_2, ..., k_n) \\ m_2 = f_2(k_1, k_2, ..., k_n) \\ \ldots \\ m_N = f_N(k_1, k_2, ..., k_n) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m_1 = f_1(k_1, k_2, ..., k_n) \\ m_2 = f_2(k_1, k_2, ..., k_n) \\ \ldots \\ m_N = f_N(k_1, k_2, ..., k_n) \end{cases} \quad (2)$$

где $\boldsymbol{f_i}$ – функция пересчета ***i***-ой координаты

Обратная задача: по известным координатам ($\boldsymbol{m_1, m_2, \ldots, m_N}$) определить координаты ($\boldsymbol{k_1, k_2, \ldots, k_n}$), записывается в виде (2)

где $\boldsymbol{F_i}$ – функция обратного преобразования

Преобразование координат

По виду функции преобразования различают линейные и нелинейные преобразования

Если при всех $j=1, 2, \ldots, N$ функции f_j – линейные относительно ($k_1, k_2, \ldots, k_n$),

то есть

$$f_j = a_{j1}k_1 + a_{j2}k_2 + \ldots + a_{jn}k_n + a_{jn+1},$$

где a_{ji} – константы, то такие преобразования называются

линейными, а при $n=N$ – **аффинными**

Если хотя бы при одном j функция f_j – нелинейная относительно ($k_1, k_2, \ldots, k_n$), тогда преобразование координат в целом является **нелинейным**

Преобразование координат

Линейные преобразования наглядно записываются в матричной форме

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ & \dots & & \\ a_{N1} & \dots & a_{Nn} & a_{Nn+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \\ k_N \end{bmatrix}$$

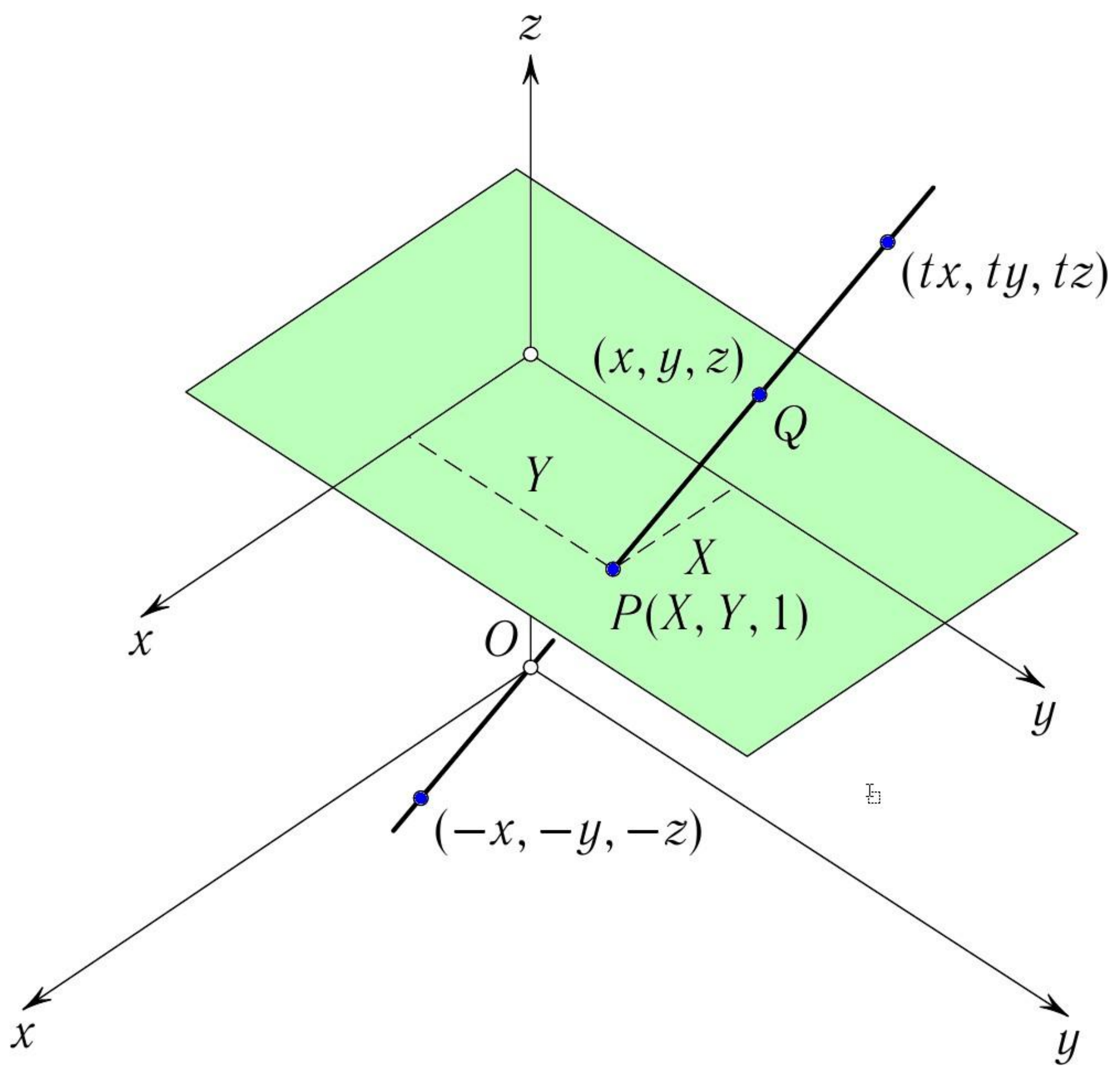
т.е. матрица коэффициентов $\boldsymbol{a_{ij}}$ умножается на матрицу-столбец $\boldsymbol{k_i}$, и в результате будем иметь матрицу-столбец $\boldsymbol{m_i}$

Однородные координаты

Пусть плоскость p *<u>параллельна</u>* координатной плоскости x, y и находится на расстоянии 1 от неё.
Тогда трёхмерные координаты точки P в плоскости p будут (X, Y , 1).

Начало O координатной системы есть центр проектирования.

Тогда всякой точке P взаимно однозначно соответствует прямая OP, проходящая через начало координат.



Однородные координаты

Представим координаты на плоскости (2D) трехкомпонентной вектор - строкой:

$$(x, y) = \begin{pmatrix} X/w & Y/w & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & w \end{pmatrix}$$

Будем полагать $w = 1$ $\quad (x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}$

перепишем преобразование в общем виде:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразование К однородным координатам

$$(x, y) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Однородные
экранные координаты

$$(x, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Однородные
мировые координаты

Преобразование ИЗ однородных координат

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

Преобразования в однородных координатах

- подвергнем точку последовательным преобразованиям системы координат:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_1 \\
\begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \cdot M_2 \\
\begin{pmatrix} x''' & y''' & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} \cdot M_3
\end{aligned}
$$

- перепишем:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \left(\left(\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_1 \right) \cdot M_2 \right) \cdot M_3$$

- в силу ассоциативности:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \right) \\
\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}
\end{aligned}
$$

Преобразования в однородных координатах

- общая формула:

$$\begin{pmatrix} x & y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & w' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- прямое отображение:

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}w'$$
$$y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}w'$$
$$w = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}w'$$

- полагаем w=1, итоговая формула для координат:

$$\frac{x}{w} = \frac{a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}}{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}$$
$$\frac{y}{w} = \frac{a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}}{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}$$

Преобразование нелинейно!

Однородные координаты

Рассмотрим прямые на плоскости:

$$ax + by + c = 0 \qquad (ka)x + (kb)y + (kc) = 0$$

Вектор $(a, b, c)^T$ Вектор $(ka, kb, kc)^T$

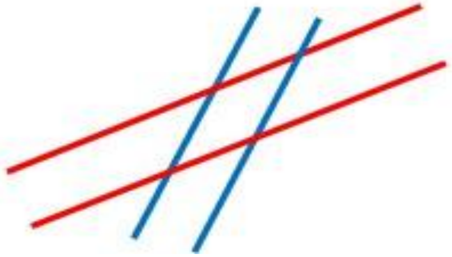
- Два вектора, отличающихся масштабом, можно считать эквивалентными
- *Однородным* (homogenous) вектором назовём класс эквивалентности, по указанному отношению эквивалентности

Идеальные точки

- Рассмотрим параллельные линии:

$$ax + by + c = 0 \qquad\qquad ax + by + c' = 0$$

- Точка пересечения будет: $(b, -a, 0)^T$
- Точки вида $(x, y, 0)^T$ - идеальные точки в «бесконечности»)



- Пример: x=1, x=2

Аффинные преобразования на плоскости

Зададим некоторую двумерную систему координат (***x,y***). Аффинное преобразование на плоскости описывается формулами

$$\begin{cases} \boldsymbol{X = Ax + By + C}, \\ \boldsymbol{Y = Dx + Ey + F}, \end{cases}$$

где ***A, B, …, F*** – константы. Значение (***X,Y***) можно рассматривать как координаты в новой системе координат

Обратное преобразование (***X,Y***) в (***x,y***) также является аффинным:

$$\begin{cases} X = Ax + By + C, \\ Y = Dx + Ey + F, \end{cases}$$

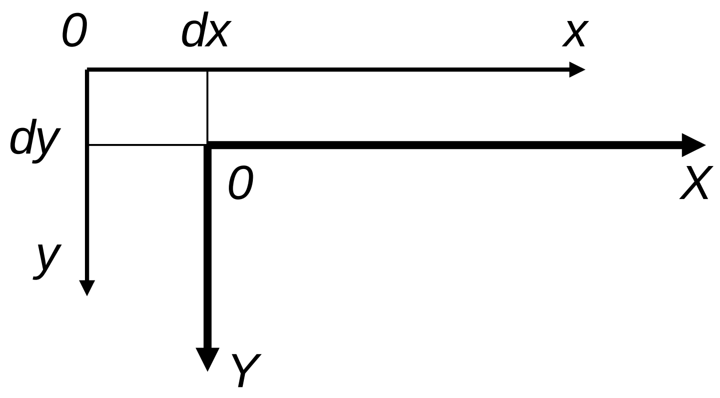
В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования на плоскости

1. Параллельный сдвиг координат

$$\begin{cases} X = x - dx, \\ Y = y - dy. \end{cases}$$



В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

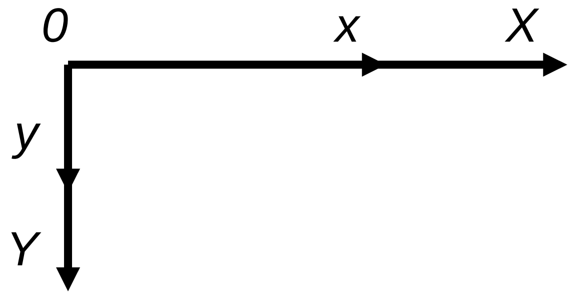
Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X + dx, \\ y = Y + dy, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования на плоскости

2. Растяжение-сжатие осей координат



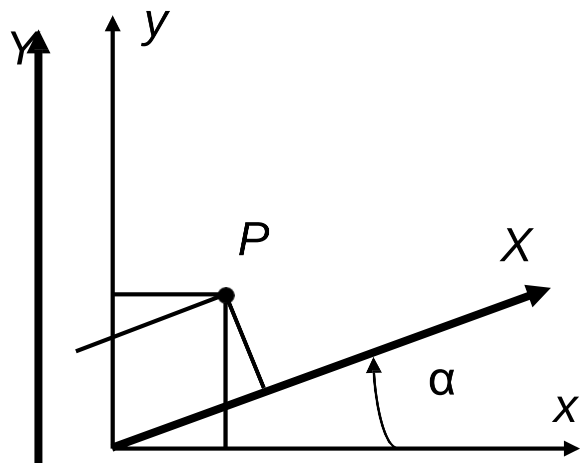
$$\begin{cases} X = x / k_x, \\ Y = y / k_y. \end{cases}$$

В матричной форме: $\begin{bmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Обратное преобразование: $\begin{cases} x = Xk_x, \\ y = Yk_y, \end{cases}$ $\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Аффинные преобразования на плоскости

3. Поворот



$$\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Трехмерные аффинные преобразования

В общем виде записываются

$$\begin{cases} X = Ax + By + Cz + D, \\ Y = Ex + Fy + Gz + H, \\ Z = Kx + Ly + Mz + N, \end{cases}$$

где ***A, B, …, N*** - константы

В матричном виде

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ K & L & M & N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Трехмерные аффинные преобразования

1. Сдвиг осей координат соответственно на *dx*, *dy*, *dz*:

$$\begin{cases} X = x - dx, \\ Y = y - dy, \\ Z = z - dz, \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

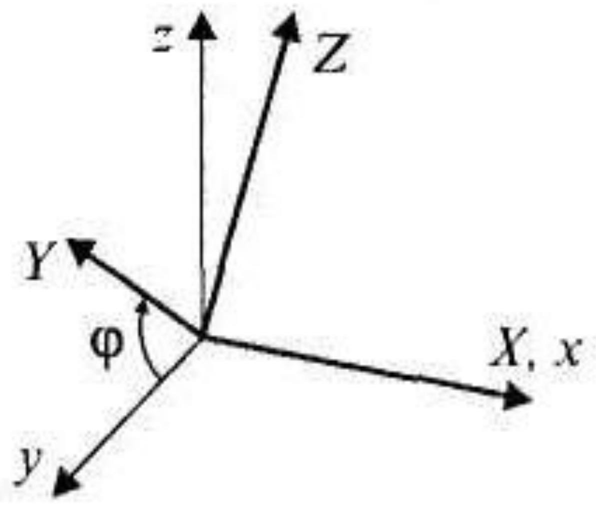
2. Растяжение/сжатие на k_x, k_y, k_z:

$$\begin{cases} X = x / k_x, \\ Y = y / k_y, \\ Z = z / k_z, \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1/k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Трехмерные аффинные преобразования

3. Повороты – в трехмерном пространстве существует больше разновидностей поворота, сравнительно с двумерным пространством

Поворот вокруг оси *x* на угол ϕ

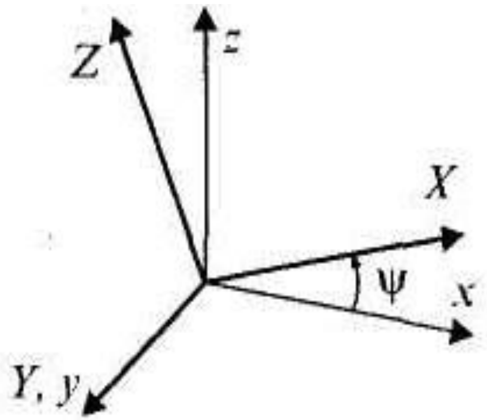


Поворот вокруг оси *x*

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y\cos\varphi + z\sin\varphi, \\ Z = -y\sin\varphi + z\cos\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

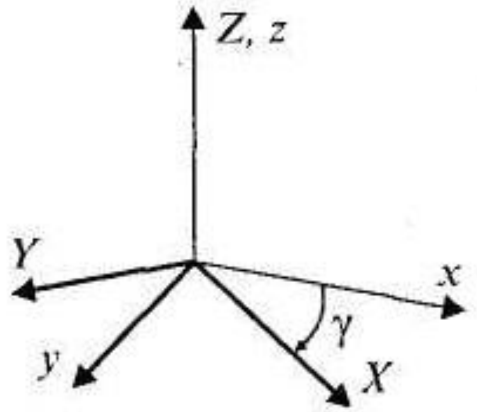
Трехмерные аффинные преобразования



Поворот вокруг оси y

$$\begin{cases} X = x\cos\psi + z\sin\psi, \\ Y = y, \\ Z = -x\sin\psi + z\cos\psi, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Поворот вокруг оси z

$$\begin{cases} X = x\cos\gamma + y\sin\gamma, \\ Y = -x\sin\gamma + y\cos\gamma, \\ Z = z, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обратные аффинные преобразования

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{transform}^{-1}$$

$$M_{transform} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{transform}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -c & 0 \\ -b & a & 0 \\ bm-ld & lc-am & ad-bc \end{pmatrix}$$

Общий вид матрицы 3D преобразований

Матрица преобразования для трёхмерных однородных координат в общем случае имеет вид:

$$2D - \begin{bmatrix} A & B & P \\ D & E & Q \\ L & M & S \end{bmatrix} \qquad 3D - \left[\begin{array}{ccc|c} A & B & C & P \\ D & E & F & Q \\ G & H & I & R \\ \hline L & M & N & S \end{array}\right]$$

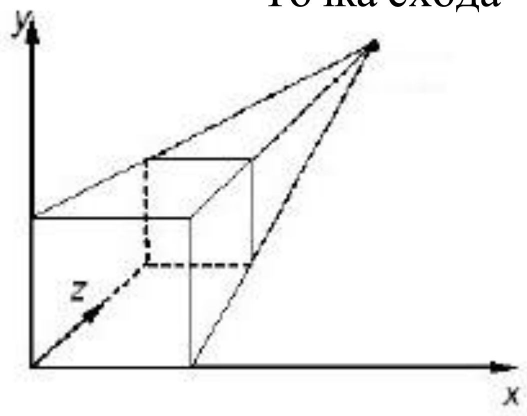
где подматрица [**A – I**] отвечает за поворот в 3D пространстве, а так же определяет изменения масштаба и сдвиг,

L - N определяют перенос. Элемент **S** определяет общее изменение масштаба, а элементы **P, Q, R** определяют перспективные искажения.

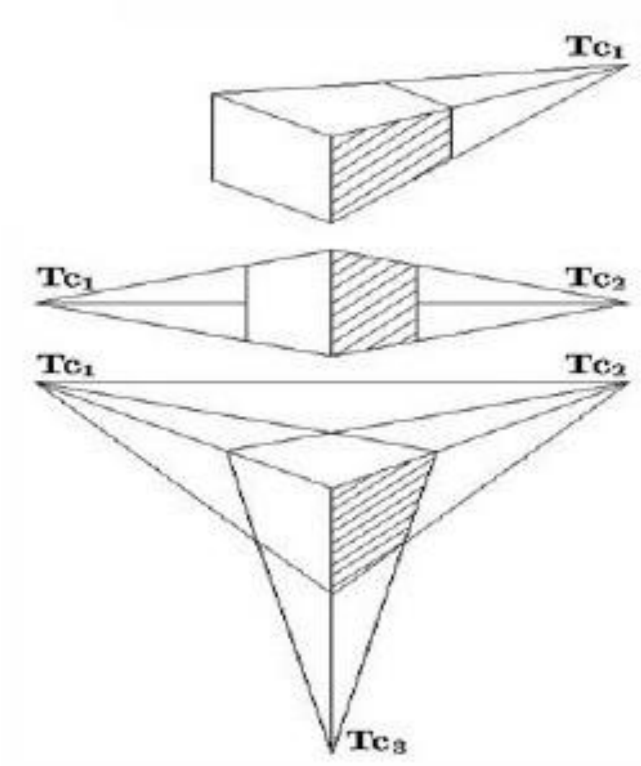
(матрица приведена в формате для вектора строки!!!)

Центральные проекции:
одноточечная, двухточечная и трехточечная

Точка схода



Точка схода расположена на оси z



Центральные проекции

Одноточечное перспективное преобразование задается равенством

$$[x \quad y \quad z \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z \quad rz+1]$$

Обычные координаты получаются делением на $rz+1$

$$[x^* \; y^* \quad z^* \quad 1] = \left[\frac{x}{rz+1} \quad \frac{y}{rz+1} \quad \frac{z}{rz+1} \quad 1\right]$$

Центральные проекции

Перспективное проецирование на некоторую двумерную видовую плоскость можно получить, объединив ортографическую проекцию с перспективным преобразованием.

Например, перспективное проецирование на плоскость ***z=0*** выполняется с помощью преобразований

$$[T]=[P_r][P_z]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&r\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&r\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Центральные проекции

Одноточечная перспектива
$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 0 & rz+1 \end{bmatrix}$$

Обычные координаты равны:

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{rz+1} & \dfrac{y}{rz+1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Центральные проекции

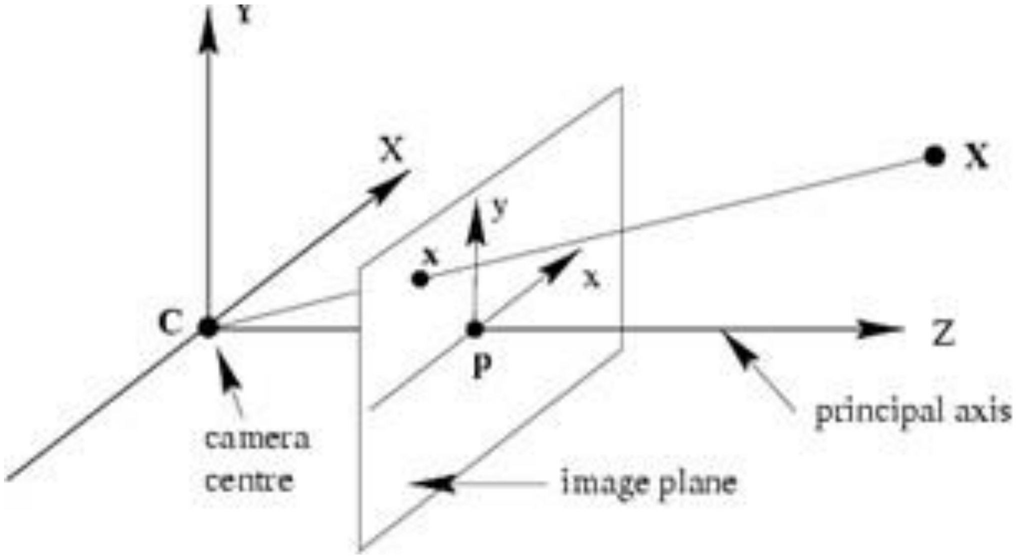
Трехточечная перспектива получается, если не равны нулю три первых элемента четвертого столбца (4x4)-матрицы преобразования. Трехточечное перспективное преобразование задается равенством

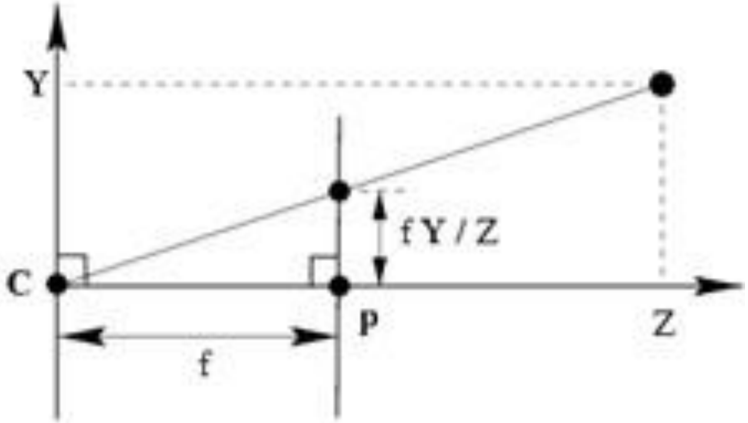
$$[x \quad y \quad z \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & p\\ 0 & 1 & 0 & q\\ 0 & 0 & 1 & r\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[x \quad y \quad z \quad (px+qy+rz+1)]$$

Обычные координаты: $[x^* \quad y^* \quad z^* \quad 1]=\left[\dfrac{x}{px+qy+rz+1} \quad \dfrac{y}{px+qy+rz+1} \quad \dfrac{z}{px+qy+rz+1} \quad 1\right]$

Трехточечное перспективное преобразование может быть получено конкатенацией трех одноточечных перспективных преобразований, по одному на каждую координатную ось.

Модель камеры обскуры





$$x = f\,\frac{X}{Z} \qquad y = f\,\frac{Y}{Z}$$

Модель камеры обскуры

$$u = m_u\left(\frac{fX}{Z} + t_x\right) = \frac{f_x X}{Z} + c_x$$

$$v = m_v\left(\frac{fY}{Z} + t_y\right) = \frac{f_y Y}{Z} + c_y$$

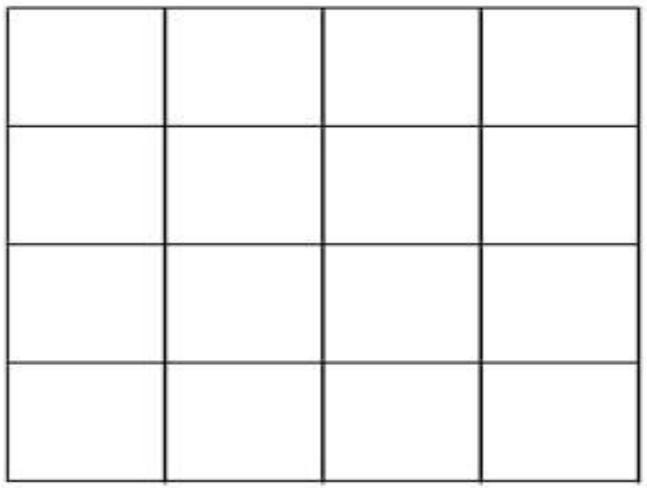
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = KP$$

$$\mathrm{K}=\begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

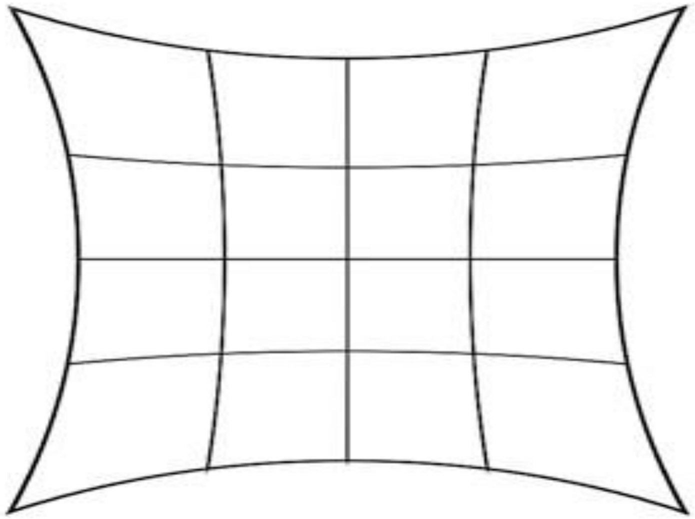
Дисторсии

distortio — искривление, коэффициент линейного увеличения изменяется по полю зрения объектива. При этом нарушается геометрическое подобие между объектом и его изображением

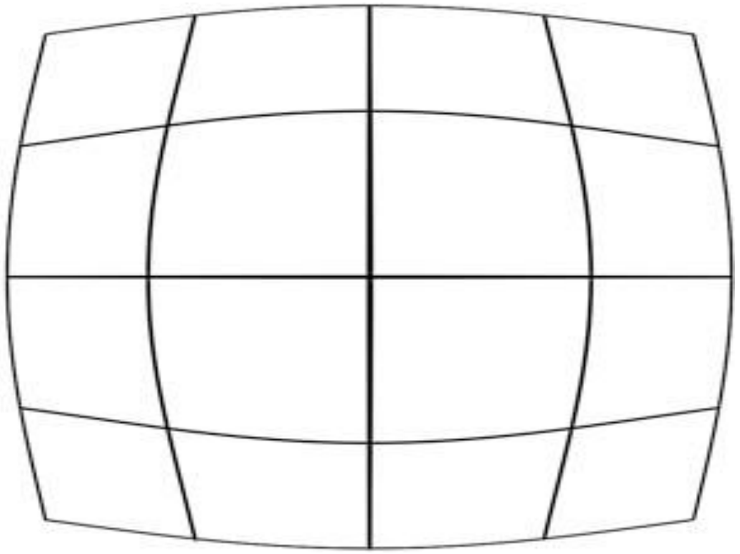
Нулевая дисторсия



Положительная дисторсия "подушка"



Отрицательная дисторсия "бочка"

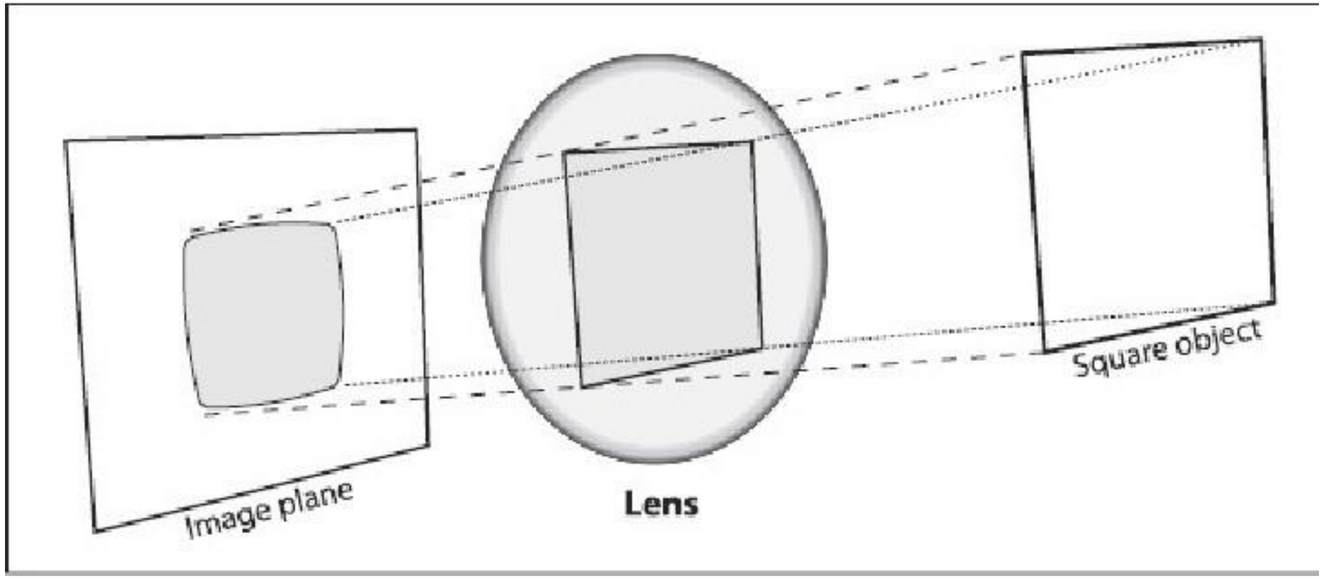


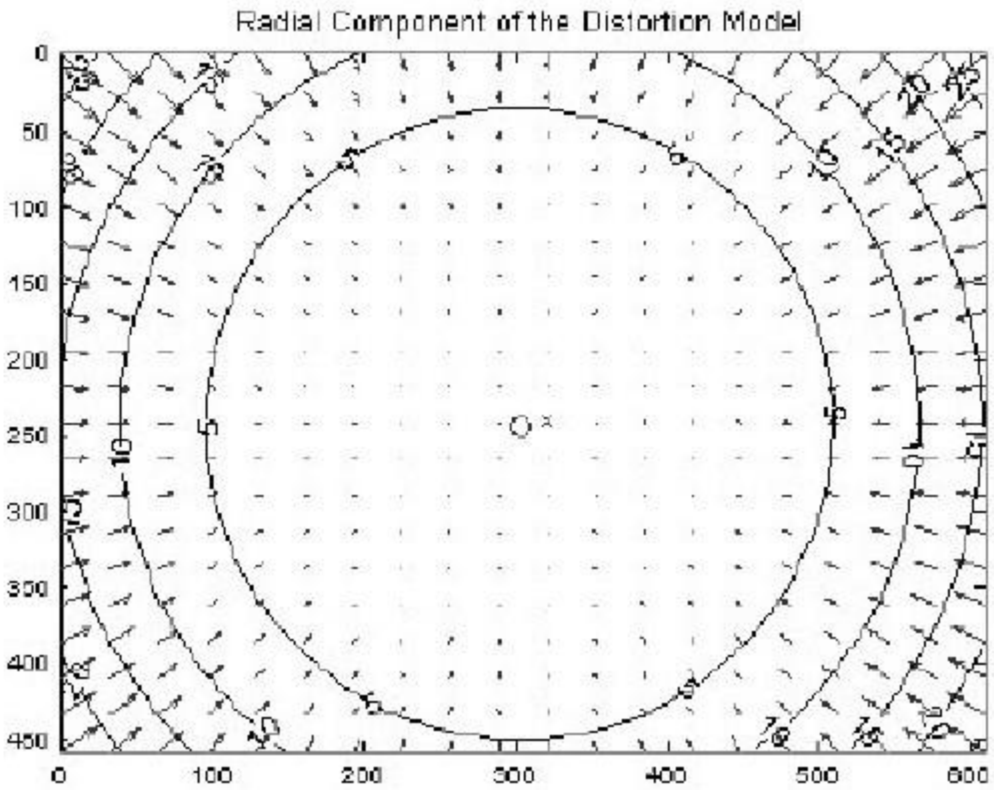
Дисторсии

- Радиальные искажения возникают в результате формы объектива
- Тангенциальные искажения возникают как результат сборки камеры в целом.

Радиальные искажения

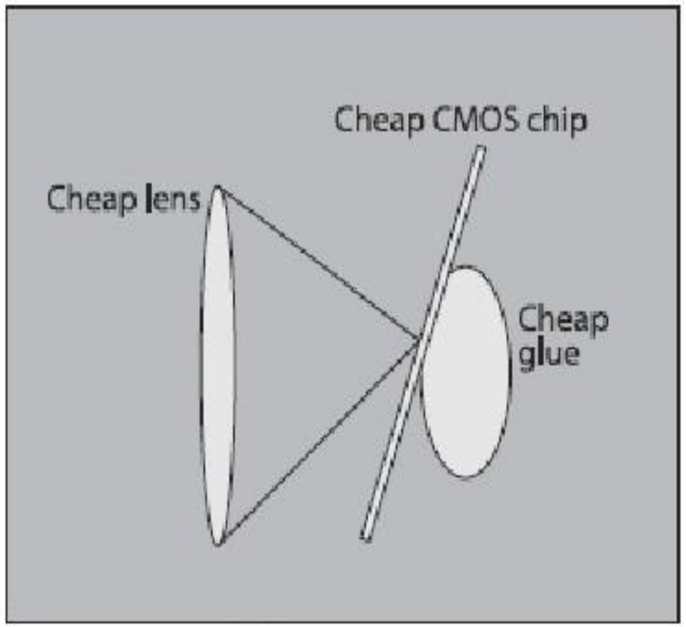
- Линзы реальных камер часто искажают расположении пикселей вблизи краев фотоприёмника. Это выпуклое явление появляется в результате эффекта «бочка» или «рыбий глаз»



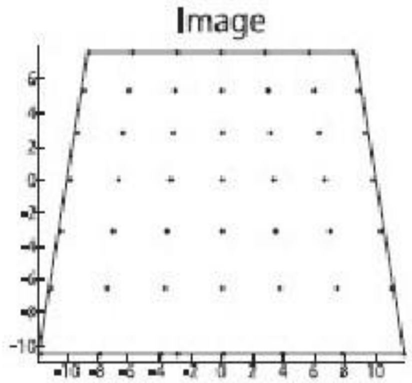


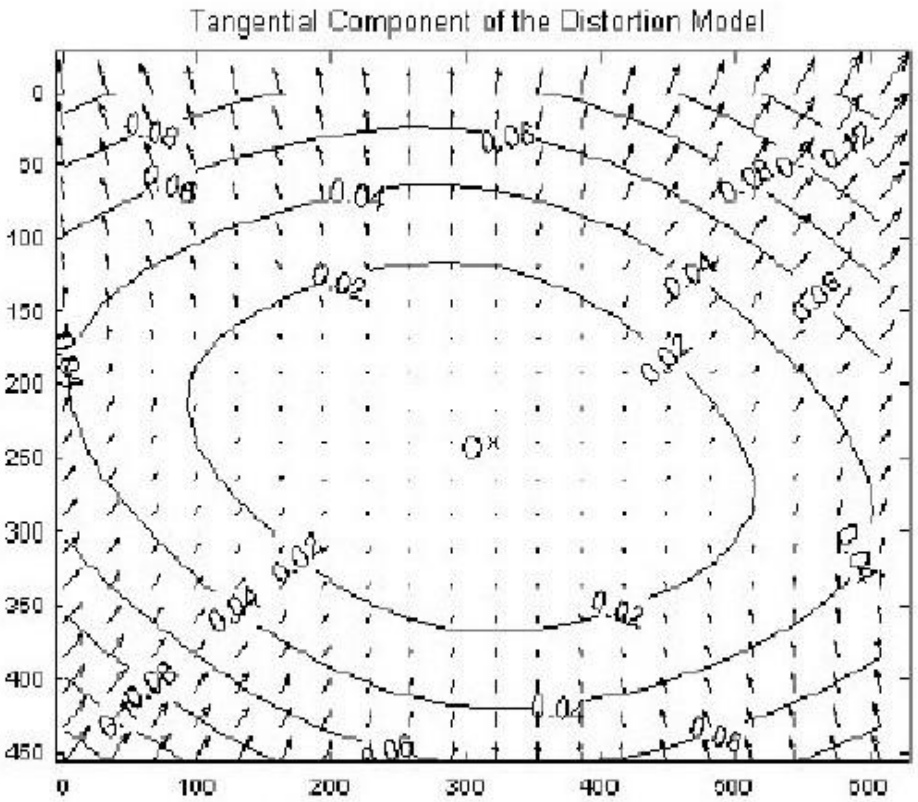
Тангенциальные искажения

- возникают в результате производственных дефектов, возникающих от не точно параллельно установленных линз к плоскости изображения



Cheap camera





- Существует ещё множество других видов искажений, которые возникают в системах визуализации, но они, как правило, имеют малый эффект по сравнению с радиальным и тангенциальным искажениями. В связи с этим данные (другие) искажения рассматриваться не будут.

Модель Дисторсии OpenCV

$$x' = \frac{X}{Z}, y' = \frac{Y}{Z}$$

$$x'' = x' \frac{1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6}{1 + k_4 r^2 + k_5 r^4 + k_6 r^6} + 2 p_1 x' y' + p_2 (r^2 + 2 x'^2)$$

$$y'' = y' \frac{1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6}{1 + k_4 r^2 + k_5 r^4 + k_6 r^6} + p_{1 (r^2 + 2 y^{F2})} + 2 p_2 x' y'$$

$$r^2 = x'^2 + y'^2$$

$$u = f_x * x'' + c_x$$

$$v = f_y * y'' + c_y$$

$$D = (k_1, k_2, p_1, p_2 [, k_3 [, k_4, k_5, k_6]])$$

Параметры камеры

- Внутренние

$$K=\begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = (k_1, k_2, p_1, p_2[, k_3[, k_4, k_5, k_6]])$$

- Внешние

Матрица поворота - R

Вектор переноса системы координат - T