9

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]x - f[x_0, x_1]x_0 + f[x_0, x_1, x_2]\left(x^2 - x(x_1 + x_0) + (x_1)(x_0)\right)$$

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]x - f[x_0, x_1]x_0 + f[x_0, x_1, x_2]x^2 - f[x_0, x_1, x_2](x_1 + x_0)x + x_0 x_1 f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\boxed{f(x) = f[x_0, x_1, x_2]x^2 + \left(f[x_0, x_1] - (x_0 + x_1)f[x_0, x_1, x_2]\right)x + f(x_0) - f[x_0, x_1]x_0 + x_0 x_1 f[x_0, x_1, x_2]}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = f[x_0, x_1, x_2] \\ b = f[x_0, x_1] - (x_0 + x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ c = f(x_0) - f[x_0, x_1]x_0 + x_0 x_1 f[x_0, x_1, x_2] \end{array}\right\}$$

b) $f(x) = a(x-x_2)^2 + b(x-x_2) + c$

Demostración de c: $f(x_2) = a(x_2-x_2)^2 + b(x_2-x_2) + c$

$f(x_2) = c$

Demostración a:

Dado que la formula de los polinomios debe ser igual entonces:

$$a'(x-x_2)^2 + b'(x-x_2) + c' = ax^2 + bx + c$$

$$a'(x^2-2xx_2+x_2^2) + b'x - b'x_2 + c' = ax^2 + bx + c$$

$$a'x^2 - a'2xx_2 + a'x_2^2 + b'x - b'x_2 + c' = ax^2 + bx + c$$

Dado que el único coeficiente que acompaña a el valor al cuadrado se concluye que

$$a' = a$$

Por lo que:

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{h_2 - h_1} \quad (h_2 = x_2 - x_1 \ , \ h_1 = x_1 - x_0)$$

$$= \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_1 - x_1 + x_0}$$

$$\neq \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - 2x_1 + x_0}$$

Dado que se llego a una contradicción, se demuestra que a' y b' no son coeficientes válidos.

(11)

$$f(x) = a(x-x_2)^2 + b(x-x_2) + c$$

$$f(x_0) = a(x_0-x_2)^2 + b(x_0-x_2) + c$$

$$f(x_1) = a(x_1-x_2)^2 + b(x_1-x_2) + c$$

$$f(x_2) = a(\underbrace{\cancel{x_2}-x_2}_{0})^2 + b(\underbrace{\cancel{x_2}-x_2}_{0}) + c$$

$$\boxed{f(x_2) = c}$$

(1) $f(x_0) - f(x_2) = a(x_0-x_2)^2 + b(x_0-x_2)$

(2) $f(x_1) - f(x_2) = a(x_1-x_2)^2 + b(x_1-x_2)$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_1}$$

$h_1 = x_1 - x_0$

$h_2 = x_2 - x_1$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_2}$$

$f(x_1) = f[x_0,x_1]h_1 + f(x_0)$

$f(x_2) = f[x_1,x_2]h_2 + f(x_1)$

$x_1 = h_1 + x_0$

$x_2 = h_2 + x_1$

$f(x_1) - f(x_2) = -f[x_1,x_2]h_2$

$x_1 - x_2 = -h_2$

$$① \quad f(x_0) - F[x_1,x_2]h_2 - F[x_0,x_1]h_1 - \cancel{f(x_0)} = a(x_0 - h_2 - h_1 - x_0)^2 + b(x_0 - h_2 - h_1 - x_0)$$

$$h_2 F[x_1,x_2] + F[x_0,x_1]h_1 = b(h_1+h_2) - a(h_1+h_2)^2$$

$$② \quad -F[x_1,x_2]h_2 = a(-h_2)^2 + b(-h_2)$$

$$F[x_1,x_2]h_2 = bh_2 - ah_2^2$$

$$② \quad h_2\left(F[x_1,x_2] + ah_2\right) = bh_2$$

$$\frac{\cancel{h_2}\left(F[x_1,x_2] + ah_2\right)}{\cancel{h_2}} = b \rightarrow \boxed{b = F[x_1,x_2] + ah_2}$$

$$① \quad h_2F[x_1,x_2] + F[x_0,x_1]h_1 = \left(F[x_1,x_2] + ah_2\right)(h_1+h_2) - a(h_1+h_2)^2$$

$$h_2F[x_1,x_2] + F[x_0,x_1]h_1 = (h_1+h_2)\left(F[x_1,x_2] + ah_2 - a(h_1+h_2)\right)$$

$$\frac{h_2F[x_1,x_2] + F[x_0,x_1]h_1}{h_1+h_2} = F[x_1,x_2] \cancel{+ah_2} - ah_1 \cancel{-ah_2}$$

$$\frac{h_2F[x_1,x_2] + F[x_0,x_1]h_1}{h_1+h_2} - F[x_1,x_2] = -ah_1$$

$$-\frac{\cancel{h_2F[x_1,x_2]} + F[x_0,x_1]h_1 - h_1F[x_1,x_2] \cancel{- h_2F[x_1,x_2]}}{h_1(h_1+h_2)} = a$$

$$\frac{\cancel{h_1}\left(-F[x_0,x_1] + F[x_1,x_2]\right)}{\cancel{h_1}(h_1+h_2)} = a$$

$$\boxed{\frac{F[x_1,x_2] - F[x_0,x_1]}{h_1+h_2} = a}$$

i) Suponiendo que los coeficientes a, b y c si fueron correctamente elegidos

$a = f[x_0, x_1, x_2]$, $b = a h_2 + f[x_1, x_2]$, $c = f[x_2]$

Si $x_0 = x_2 + \dfrac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ entonces si el signo se elige de acuerdo con el signo de b, entonces el denominador únicamente crece lo que hace que

$\dfrac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ sea cada vez más pequeño. Lo que implica que x_0 sea más cercano a x_2 y por tanto la raíz más cercana a x_2

Powered by CamScanner