MODELACIÓN MATEMÁTICA INTERMEDIA

Reto: "Apoyando a las PyMEs de la industria galletera"

Profesor: Marlene Aguilar Abalo

Grupo 427

Equipo:

Daniel Nava Mondragón - A01661649

Martha Ximena González Gutiérrez - A01662729

Gustavo Pichardo Morales -A01656320

Aarón Uriel Lopez Reséndiz - A01651403

Fecha de entrega: 4 de abril del 2022

INTRODUCCIÓN

En México, las grandes industrias galleteras no suelen utilizar envases especiales para la promoción y venta de sus galletas. Por lo que algunas Pequeñas y Medianas empresas (PyMEs) han optado por vender estos tipos de envases para intentar sobresalir, pero al vender estos envases pueden encontrarse con problemas tales como los costos de elaboración, ya que si no se invierte lo suficiente en estos el diseño llegaría ser muy simple y no atraería el interés de los consumidores o en caso contrario si se busca un diseño llamativo es posible que los costos de producción sean muy altos.

Es por eso que en este reporte tiene como objetivos exponer el diseño innovador y de bajo costo de un galletero y su caja, realizar la descripción de la superficie de estos últimos utilizando ecuaciones de superficies en el espacio tridimensional, mostrando un modelo físico del galletero en un archivo .stl en 3D totalmente acorde al modelo matemático y demostrar la capacidad del galletero (volumen) mediante el uso de integrales múltiples.

DESARROLLO

Para comenzar con la graficación de nuestro galletero se seleccionó la opción más óptima y práctica para el desarrollo de nuestro reto, buscando que cumpliera con la aplicación de funciones vistas en clase y que fueran relativamente sencillo el cálculo del volumen y área en las etapas posteriores.

El boceto seleccionado, mostrado en la Figura 1, fue un gato de cabeza a cuerpo. Para las orejas consideramos una forma cónica elíptica con ecuación general de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

teniendo en cuenta que se deberá buscar las desigualdades adecuadas para que encajen con la forma de la cabeza, es decir que en cierto intervalo se corten en y se sobrepongan en la cabeza.

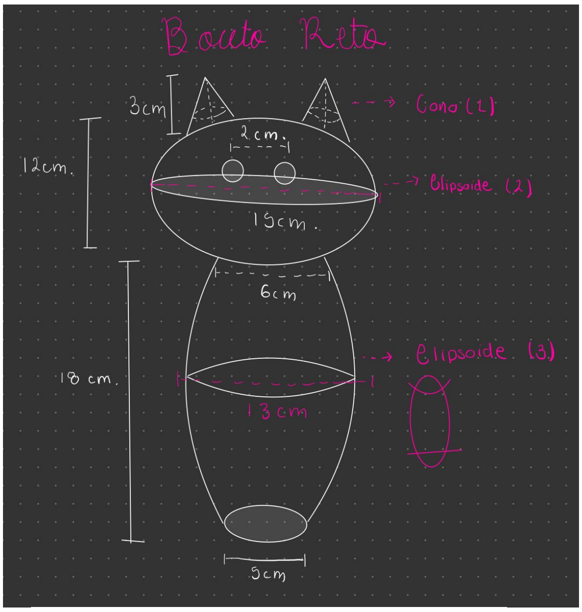


Figura 1. Boceto del galletero seleccionado para el reto.

La cabeza y el cuerpo fueron pensados como elipsoides, con ecuación general de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$ En el caso específico de la cabeza no aplicamos desigualdades, pero para el cuerpo es evidente que deberemos aplicarlas para realizar cortes en los extremos.

Por último se pensó en los ojos, con una ecuación de circunferencia $\frac{(x-h)2}{a^2} + \frac{(y-k)2}{a^2} + \frac{(z-l)2}{a^2} = r^2$, se tuvo en mente que el centro de la cabeza se encontraba a una altura de z=23 y de ahí se fue ubicando la posición de x y y, jugando un poco con calc plot, hasta obtener la posición y aspecto deseado.

Con las funciones a aplicar ya en mente, se generaron las ecuaciones con sus desigualdades, apoyándonos en la altura (32cm. aprox.) que queríamos obtener para nuestro galletero y con un graficador (Calc plot3D).

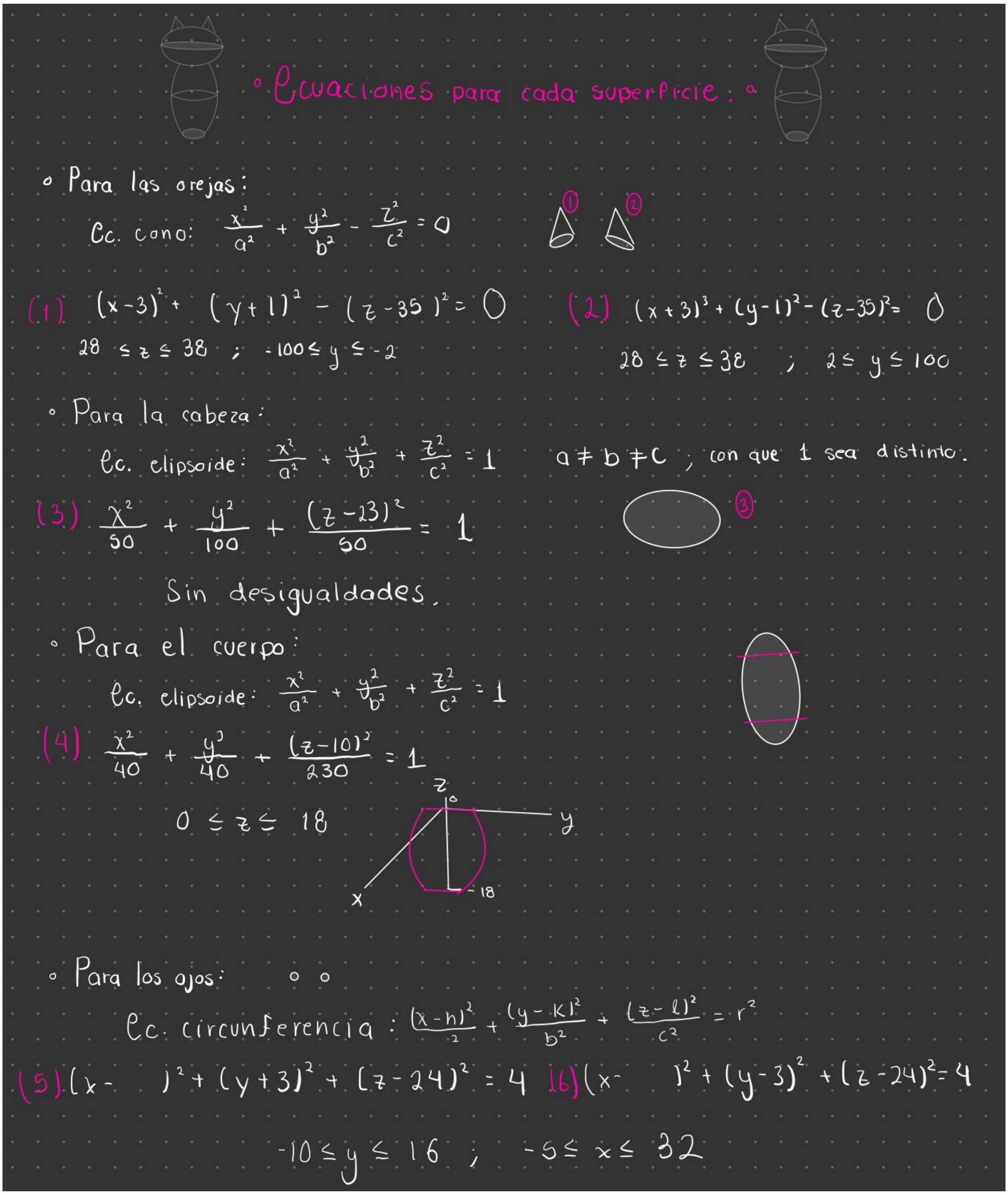


Figura 2. Hoja de ecuaciones para el galletero, analizando cada superficie.

Utilizamos como base la función (6), el cuerpo, con su base en el origen y ubicando su eje mayor sobre z. Los parámetros a, b y c, nos permitieron modificar el tamaño del elipsoide, identificando los cortes que se querían realizar en ambos extremos, generando una desigualdad de $0 \leq z \leq 18$. Posteriormente, se jugó con el centro de la cabeza y sus

desigualdades para que encajaran con el cuerpo adecuadamente, estableciendo su centro en (0,0,23).
De ahí partimos con las orejas, nos enfocamos en un punto de la cabeza donde queríamos que estuvieran y con la ayuda del graficador obtuvimos las coordenadas, se le sumó la altura deseada de estas a z y obtuvimos el origen de una de ellas, (3, 1,17), y por simetría pasamos el valor de y a negativo (debido a que se recorre únicamente en el eje de y). Y se determinó el origen de la otra oreja en (3,-1,17). Y luego se jugó con las desigualdades en el graficador para lograr obtener el corte requerido para encajar con la cabeza. Siendo para la oreja 1: $28 \leq z \leq 28$ y $-100 \leq y \leq -2$, oreja 2: $28 \leq z \leq 38$ y $2 \leq y \leq 100$

RESULTADOS DE NUESTRO MODELO 3D

- Aquí se presenta nuestro modelo del galletero, graficado en Calc Plot3D.

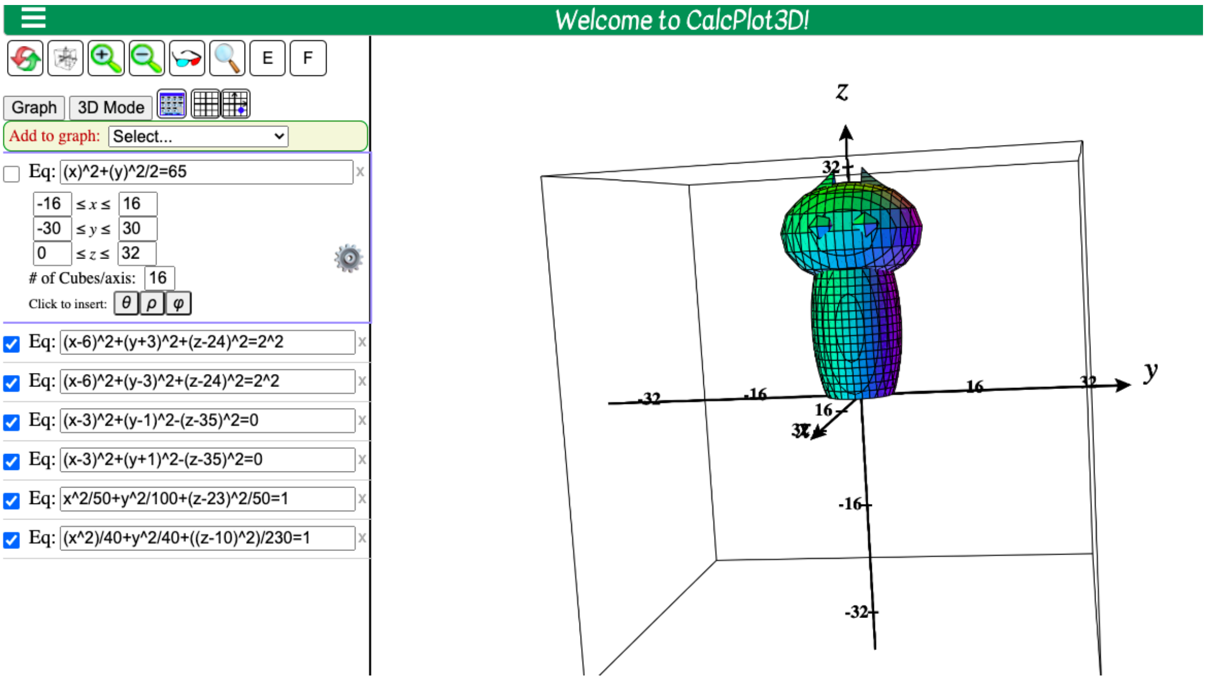


Figura 3. Resultados del modelo 3D en Calc Plot3D

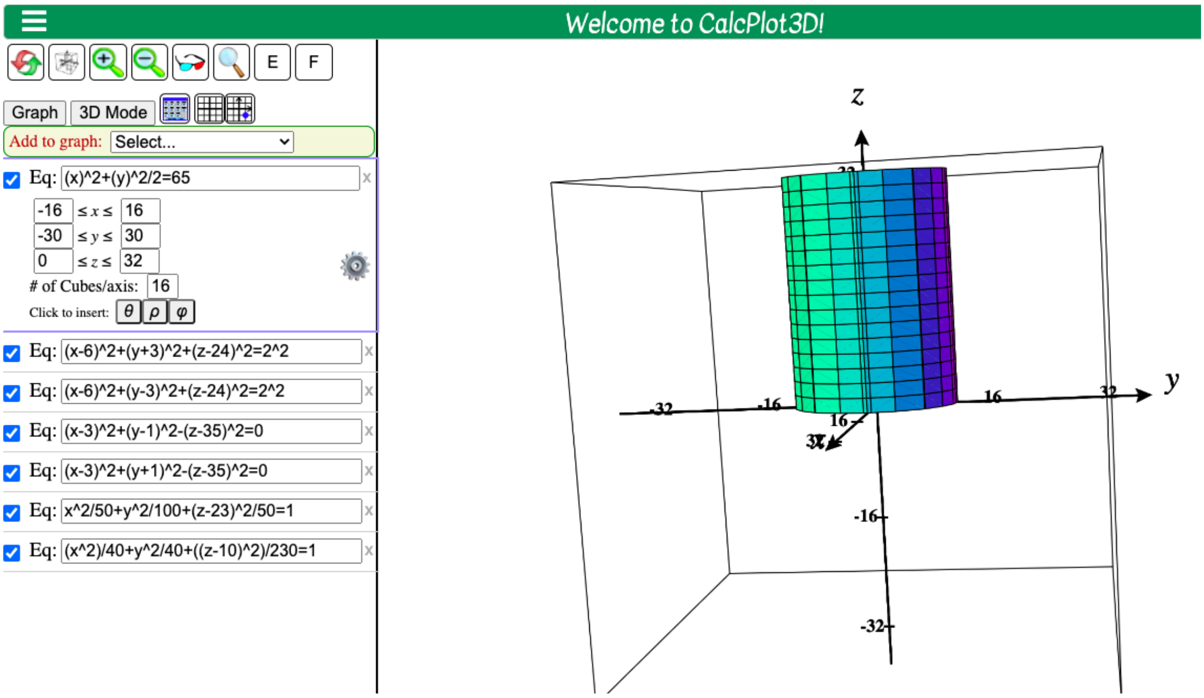


Figura 4. Modelo de la caja del galletero

Su caja fue construida a partir de la ecuación de la cabeza, siendo la parte del gato que abarca mayor espacio en los ejes x y y. Se construyó un cilindro elíptico con el fin de crear un contenedor con área mínima, su ecuación se obtuvo con la ayuda de calc plot3D modificando su diámetro con el fin de que sus ojos quedarán dentro del contenedor. Obteniendo como resultado $x^2 + \frac{y^2}{2} = 65$

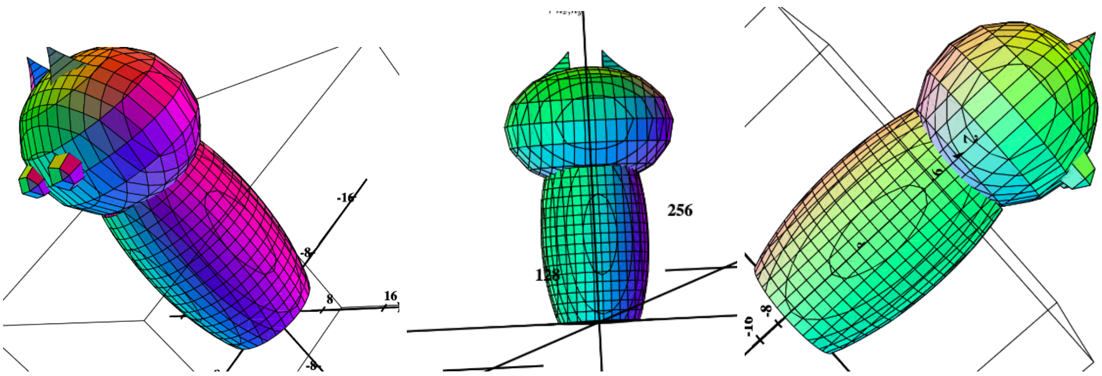


Figura 5. Aspecto de nuestro modelo en diferentes ángulos.

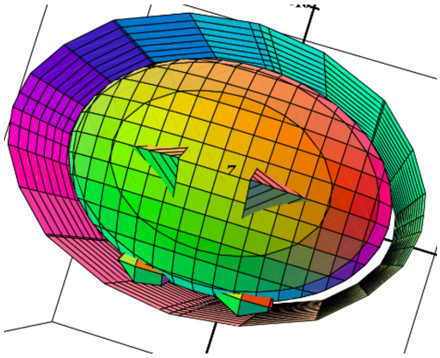


Figura 6. Asècto de nuestro galletero dentro de su caja

Por último, presentaremos las funciones registradas en el graficador con sus desigualdades, para obtener la forma y con sus cortes deseados.

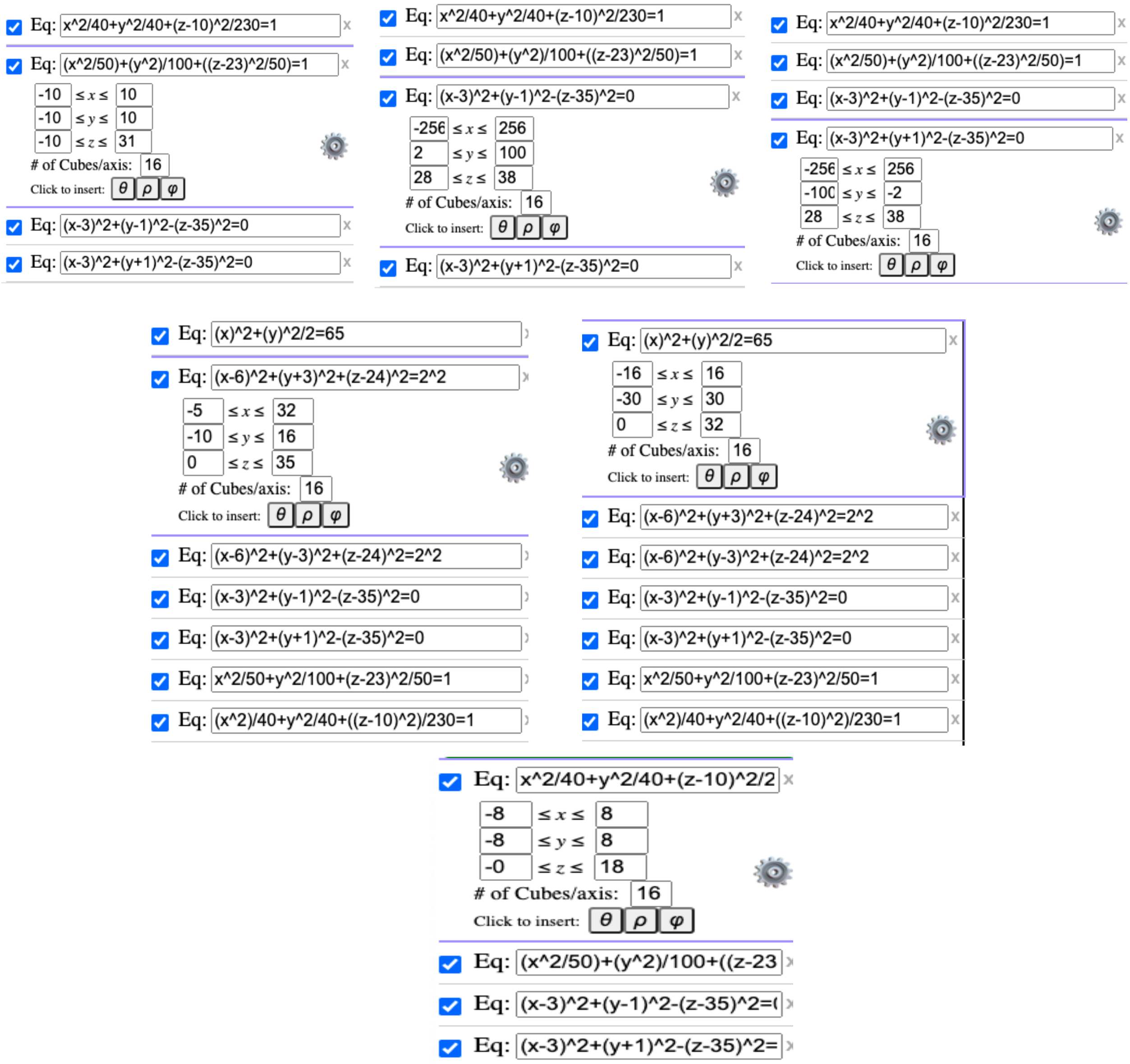


Figura 7. Funciones y desigualdades registradas en Calc plot3D

CÁLCULO DEL VOLUMEN DEL GALLETERO Y ÁREA DE LA SUPERFICIE DE LA CAJA.

- **Volúmen del galletero.**

Para los siguientes cálculos solo se tomó en cuenta el contenedor de galletas, por lo tanto el cuerpo de nuestro gato, ecuación= $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{40}+\frac{(z-10)^2}{230}=1$. Si tomamos a consideración que el centro se encuentra (0,0,10) y consideramos que ahí se ubica la circunferencia con mayor radio, podremos obtener a partir de dicho análisis el intervalo del radio para establecer los límites de integración por coordenadas polares.

• Cálculo del volúmen del galletero •

$$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{40}+\frac{(z-10)^2}{230}=1$$

• Sí el centro se encuentra en (0,0,10), aquí es donde se encuentra la circunferencia máxima.

$x=0 \quad z=10 \quad y=?$

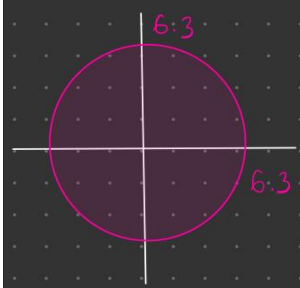
$y=\sqrt{1(40)}$

$y\approx 6.3$

$y=0 \quad z=10 \quad x=?$

$x=\sqrt{1(40)}$

$x\approx 6.3$



$$0\le r\le 6.3 \quad ; \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad ; \quad 0\le z\le 18$$

$$R=\{(x,y): 0\le r\le 6.3,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 18\}$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{6.3}\int_0^{18} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{6.3}[zr]_0^{18}dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{6.3}18r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}[9r^2]_0^{6.3}d\theta=[360\theta]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{V\approx 720\pi}$$

Figura 8. Cálculo de volumen de nuestro galletero a partir de integrales triples.

Una vez obtenido el radio de la circunferencia, verificamos con Calc Plot3D:

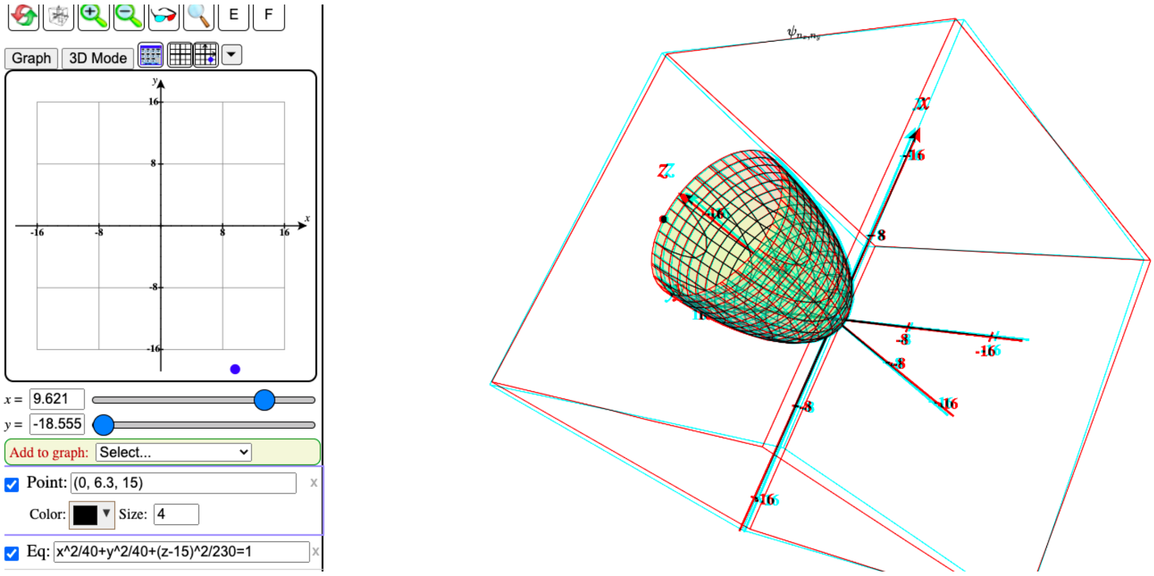


Figura 9. Representación del punto con las coordenadas obtenidas en el cálculo

Finalmente con los límites establecidos:

$R = \{(r, \Theta, z): 0 \leq r \leq 6.3,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 18\}$, podemos aplicar nuestra integral triple:

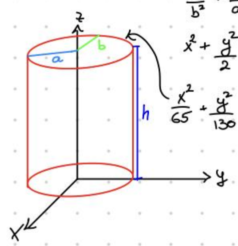
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{6.3}\int_0^{18} r\,dz\,dr\,d\theta$$

Y resolvemos, obteniendo un aproximado en el volumen de $720\pi\ [u^3]$.

- Área de la superficie del contenedor del galletero.

Calculo de la superficie de la caja

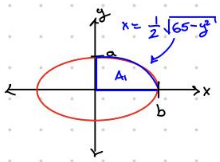
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



$$x^2+\frac{y^2}{2}=65$$

$$\frac{x^2}{65}+\frac{y^2}{130}=1$$

Área de la base



$$A_1=\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-y^2}}dx\,dy$$

$$=\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$$=\frac{b}{a}\left[\frac{a^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)+y\sqrt{a^2-y^2}}{2}\right]_0^a$$

$$=\frac{a^2b}{a}\pi$$

$$=ab\pi$$

$y=a\,sen\theta$

$dy=a\cos\theta\,d\theta$

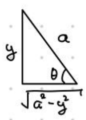
$$\int\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$$=\int\sqrt{a^2-a^2sen^2\theta}\;a\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int\sqrt{a^2(1-sen^2\theta)}\;a\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int a\cos\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$=a^2\int\cos^2\theta\,d\theta$$



$$=\frac{a^2}{2}\int1+\cos(2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)$$

$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)+\frac{\sin\left(2\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)\right)}{2}\right]$$

$$=\frac{a^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)+y\sqrt{a^2-y^2}}{2}+C$$

$$A_b=(2)(4)(\sqrt{65})(\sqrt{130})\pi$$

$$=520\sqrt{2}\,\pi$$

$$\approx735.39105\pi$$

Área Lateral

$$A_L=\int_D\sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

$x=ab\cos\theta$

$y=ab\sin\theta$

$$=\int_0^{2\pi}h\sqrt{(ab\cos\theta)^2+(ab\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=h\int_0^{2\pi}ab\,d\theta$$

$$=2hab\pi$$

$$=2(18)(\sqrt{65})(\sqrt{130})\pi$$

$$=2340\sqrt{2}\,\pi$$

$$\approx3309.25974\pi$$

Area Total

$$A_b+A_L$$

$$=(735.39105\pi)+(3309.25974\pi)$$

$$=4044.65079\pi\ [u^2]$$

CONCLUSIONES

Se logró realizar un modelo de galletero graficado tridimensionalmente pensado en tamaño real, a partir de las funciones vistas previamente en clase. También, se construyó un contenedor con área mínima para guardar el galletero.

Todo fue fundamentado con los conocimientos adquiridos durante en el curso y su aplicación fue esencial para los cálculos de volumen y área. Siendo capaces de aplicar el cálculo integral en un problema más real y abstracto.

Consideramos que este proyecto nos permitió practicar y mejorar las habilidades matemáticas y manejar el pensamiento matemático para la resolución de problemas.

LINK DE LOS MODELOS GRÁFICOS EN CALC PLOT3D

- **Viene incluida la ecuación de la caja.**

https://n9.cl/5bqkfd