



Tecnológico de Monterrey

Análisis de Ecuaciones Diferenciales

Profesora:

Marisol Rodríguez Arcos

Borrador de la Situación problema

Grupo 139

Autores:

Noemí Abigail Curiel López

Amy Vanesa Díaz García

Daniel Nava Mondragón

Diego Esteban Zepeda Ceballos

Juan Francisco Sánchez Sánchez

Matrículas:

A01655892

A01656419

A01661649

A01026512

A01656793

septiembre 2022

Índice

1. Resumen	3
2. Introducción	3
2.1. Marco Teórico	4
3. Método	5
3.1. Fase 1	6
3.2. Fase 2	7
4. Resultados	9
4.1. Solución de la ED de la Fase 1	9
4.2. Solución de la ED de la Fase 2	11
4.3. Solución de la Fase 1 con Método Numérico	14
4.4. Solución de la Fase 2 con Método Numérico	16
5. Análisis y Discusión de Resultados	20
6. Conclusiones	22

1. Resumen

Este reporte habla acerca de las matemáticas y los cálculos necesarios que se llevan a cabo para la elaboración de un salto en Bungee. Este tipo de saltos son considerados deportes extremos, por lo cual requieren garantizar altas medidas de seguridad antes de ser realizados.

Para asegurar la seguridad de las personas saltando, se necesitan obtener datos importantes para después obtener ecuaciones diferenciales que se puedan resolver y modelar en una gráfica. En particular, son 2 ecuaciones diferenciales las que se necesitan para predecir la posición de la persona saltando, por lo tanto se divide en dos fases el método. En los resultados presentamos las 2 ecuaciones diferenciales resueltas junto con las gráficas de su comportamiento, al igual que una gráfica final en donde se pueden observar ambas ecuaciones diferenciales al mismo tiempo, incluyendo su resolución numérica. De este modo, se propone un modelo descriptivo óptimo de un salto en Bungee a través del análisis matemático.

2. Introducción

En este documento se analizarán los factores y métodos matemáticos que involucra el “Bungee jumping”, el cual es un deporte extremo en el que una persona se avienta desde grandes alturas con su tobillo o cintura amarrada a la estructura de salto. Como contextualización, el primer salto en Bungee se realizó el 1 de abril de 1979 desde el puente colgante de Clifton en Bristol, y fue realizado por cuatro miembros de un club de deportes extremos. A pesar del peligro que este representa, se han realizado con éxito millones de saltos desde 1980, principalmente debido al control estricto de los operadores y a los cálculos matemáticos realizados en cada salto. En México, el salto en Bungee más alto se encuentra en el Pueblo Mágico de Santiago, situado en Nuevo León y ubicado en la Sierra Madre Oriental.

Es importante recalcar que este deporte extremo requiere de diversos cálculos matemáticos para asegurar la seguridad de la persona que esté realizando esta actividad desde su lanzamiento hasta su posición final. De hecho, existen algunas restricciones para los saltadores. Por ejemplo, tener una masa de entre los 40 y 113 kilos y no poseer condiciones médicas restrictivas (Info7, 2015). Así, algunas de las variables a considerar son la masa y la posición en la que la persona quiera saltar, así como es importante tomar en cuenta el efecto que cada fuerza aplica en el cuerpo del saltador. A continuación, se realizará un análisis profundo sobre el comportamiento de un salto en Bungee para su correcta y segura aplicación mediante Ecuaciones Diferenciales, pero primero, es necesario clarificar algunos conceptos para el correcto entendimiento del proyecto.

2.1. Marco Teórico

Para poder darle una solución a la problemática planteada anteriormente se usarán diversos conceptos teóricos, tales como:

Resistencia del aire

Este es un fenómeno que ocurre cuando un cuerpo se mueve a través del aire, ya que este ejerce una fricción sobre el objeto que actúa en dirección contraria a la que se mueve (Khan Academy, 2019). Dicha resistencia se puede calcular usando la fórmula de la fuerza de rozamiento:

$$F_r = \beta v \quad (1)$$

Ley de Hooke

La Ley de Hooke involucra la elasticidad y los resortes. Hooke percibió que las variables de curva de esfuerzo y deformación comprenden una región lineal para diversos materiales. Él se percató de que la fuerza que se necesita para tensar un resorte es directamente proporcional al alargamiento que tenga dicho objeto dentro de ciertos límites y lo expresó con la siguiente fórmula:

$$F = -kv \quad (2)$$

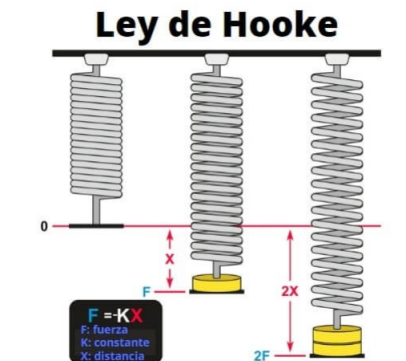


Figura 1: Ley de Hooke

Ecuaciones diferenciales

Las relaciones entre funciones y sus derivadas son conocidas como ecuaciones diferenciales (García, s.f.). Para la realización de esta situación problema, principalmente se utilizarán las ED de segundo grado, para las cuales es necesario tomar en cuenta dos métodos de resolución relevantes. En primer lugar, está el Método de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, donde:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3)$$

y el Método de coeficientes indeterminados, donde:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (4)$$

pues para obtener la solución de estas ecuaciones se tiene que hacer un cambio para transformarla en una ecuación homogénea mediante la anulación del componente derecho de la ecuación (de la Llave, 2022).

Segunda Ley de Newton

La Segunda Ley de Newton establece la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él e inversamente proporcional a la masa del objeto, expresándose de la siguiente manera:

$$F = ma \quad (5)$$



Figura 2: Segunda Ley de Newton

Métodos numéricos

Se trata de métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias que son muy complejas para resolver de manera analítica. En estos casos, se recurre a los métodos numéricos para obtener la solución aproximada exacta (ck-12, 2015). Particularmente, en este proyecto se utilizará el Método de Euler para encontrar la solución a las ecuaciones diferenciales de manera iterativa. Esto se hace partiendo desde un valor inicial x_0 y avanzando con un paso h como se muestra a continuación:

$$Y_{k+1} = Y_k + h * f(x_k, Y_k) \quad (6)$$

De este modo, el contenido teórico y la contextualización anterior nos permitirán entender de una mejor manera el comportamiento físico y matemático de un salto en Bungee de una manera óptima.

3. Método

El salto en Bungee es una actividad que engloba un comportamiento físico y matemático muy interesante. Debido a la naturaleza de su movimiento, se pueden establecer dos etapas diferentes en las que se puede modelar analíticamente este fenómeno. Por un lado, la Fase 1 se compone del momento en el que comienza el lanzamiento y hasta que la cuerda llega a su longitud natural. Es decir, justo antes de que comience el alargamiento de la cuerda por efecto del peso de la persona. Por otro lado, la Fase 2 se compone desde que la cuerda llega a su longitud natural e inicia su alargamiento hasta que la persona llega al punto más bajo.

3.1. Fase 1

Primeramente, se analizará la fase inicial del Bungee Jumping. Con el fin de establecer un planteamiento matemático congruente, se consideran las siguientes condiciones iniciales:

- Altura desde la que la persona salta: 70 m
- Longitud de la cuerda: 30 m
- Masa de la persona (m): 75 kg
- Tiempo inicial (t_0) = 0 s
- Velocidad inicial (v_0) = 0 $\frac{m}{s}$
- Aceleración inicial (a_0) = 0 $\frac{m}{s^2}$
- Gravedad (g): -9.81 $\frac{m}{s^2}$
- El Coeficiente de arrastre de una persona en caída vertical (β) es: 0.70

En esta sección, las fuerzas que actúan sobre la persona en caída son la fuerza de su peso y la resistencia del aire. Usualmente, para este tipo de situaciones la resistencia del aire suele ser no significativa; sin embargo, esta fuerza se incluirá en nuestro análisis para obtener resultados más precisos, exactos y confiables. De este modo, el Diagrama de Cuerpo Libre es el siguiente:

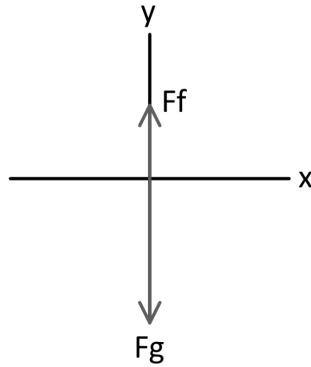


Figura 3: Diagrama de Cuerpo Libre de la Fase 1.

donde F_g es la fuerza debido al peso de la persona y F_f es la fuerza debida a la fricción del aire. De tal modo y considerando la Segunda Ley de Newton, la sumatoria de fuerzas es la siguiente:

$$\sum F = ma \quad (7)$$

$$F_g - F_f = ma \quad (8)$$

Sustituyendo las definiciones de las fuerzas, obtenemos que:

$$mg - \beta v = ma \quad (9)$$

$$mg - \beta y' = my'' \quad (10)$$

Dividimos entre la masa y obtenemos:

$$g - \frac{\beta}{m}y' = y'' \quad (11)$$

Reacomodando se obtiene la Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Segundo Grado que modela la primera fase del salto en Bungee:

$$y'' + \frac{\beta}{m}y' = g \quad (12)$$

Esta ecuación se puede resolver utilizando el Método de Coeficientes Indeterminados.

3.2. Fase 2

En cuanto al análisis de lo que sucede desde que la cuerda llega a su longitud natural e inicia su alargamiento hasta que la persona llega al punto más bajo, es necesario retomar los resultados de la primera fase para obtener las condiciones iniciales de la segunda fase.

Así, para obtener el tiempo en el que la cuerda llega a su longitud natural, despejamos t de la solución de la primera fase y evaluamos en $y=40$. Similarmente, para obtener la velocidad, se deriva la solución de la primera fase y se evalúa t en el tiempo en el que la persona tarda en llegar a los 40 m. Para obtener la aceleración se vuelve a derivar y se evalúa en el mismo tiempo. Es importante destacar que estos resultados pueden ser igualmente corroborados mediante la aplicación de métodos numéricos. Puesto que en esta fase se considera la fuerza elástica de la cuerda, para obtener la constante elástica k se utiliza el Teorema de Conservación de la Energía Mecánica. De este modo, las condiciones iniciales para la segunda fase son las siguientes:

- Posición de la persona (y): 40 m
- Longitud de la cuerda: 30 m
- Masa de la persona (m): 75 kg
- Tiempo inicial (t_0) = 2.4826 s
- Velocidad inicial (v_0) = $-24.0747 \frac{m}{s}$
- Aceleración inicial (a_0) = $-9.5853 \frac{m}{s^2}$

- Gravedad (g): $-9.81 \frac{m}{s^2}$
- El Coeficiente de arrastre de una persona en caída vertical (β) es: 0.70
- Constante de elasticidad de la cuerda (k) = $64.4 \frac{N}{m}$

Asimismo, considerando que una vez que la cuerda llega a su longitud original empieza un proceso de estiramiento de la cuerda que genera una fuerza de elasticidad aunada a las otras fuerzas previamente mencionadas en la fase 1, entonces el Diagrama de Cuerpo Libre de las fuerzas que actúan sobre el saltador es el siguiente:

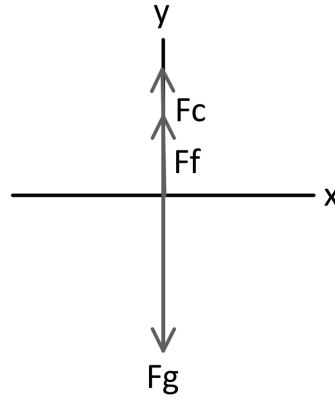


Figura 4: Diagrama de Cuerpo Libre de la Fase 2.

donde F_g es la fuerza debido al peso de la persona, F_f es la fuerza debida a la fricción del aire y F_c es la fuerza de elasticidad generada por la cuerda. De tal modo y considerando la Segunda Ley de Newton, la sumatoria de fuerzas es la siguiente:

$$\sum F = ma \quad (13)$$

$$F_g - F_f - F_c = ma \quad (14)$$

Sustituyendo las definiciones de las fuerzas, obtenemos que:

$$mg - \beta v - ky = ma \quad (15)$$

$$mg - \beta y' - ky = my'' \quad (16)$$

Dividimos entre la masa y obtenemos:

$$g - \frac{\beta}{m}y' - \frac{k}{m}y = y'' \quad (17)$$

Reacomodando se obtiene la Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Segundo Grado que modela la segunda fase del salto en Bungee:

$$y'' + \frac{\beta}{m}y' + \frac{k}{m}y = g \quad (18)$$

Esta ecuación también se puede resolver mediante el Método de Coeficientes Indeterminados.

4. Resultados

4.1. Solución de la ED de la Fase 1

Para resolver la ecuación diferencial planteada utilizamos el Método de Coeficientes Indeterminados debido a que tiene la siguiente forma:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (19)$$

La solución de esta ecuación diferencial tiene la siguiente forma:

$$y = y_c + y_p \quad (20)$$

Siendo y_c la solución homogénea de dicha ecuación y siendo y_p la solución particular propuesta. Así, la solución homogénea y_c es:

$$y'' + \frac{\beta}{m}y' = 0 \quad (21)$$

$$r^2 + \frac{\beta}{m}r = 0 \quad (22)$$

factorizando r:

$$r(r + \frac{\beta}{m}) = 0 \quad (23)$$

por lo tanto:

$$r_1 = 0 \quad (24)$$

$$r_2 = -\frac{\beta}{m} \quad (25)$$

al ser ambas raíces reales diferentes, la solución es la siguiente:

$$y_c = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (26)$$

por lo que sustituyendo:

$$y_c = C_1 + C_2 e^{(-\frac{\beta}{m})t} \quad (27)$$

Ahora bien, al ser $g(t)$ una constante, entonces la solución particular tiene la siguiente forma:

$$y_p = A \quad (28)$$

Sin embargo, como esta solución particular también es solución de la ecuación diferencial homogénea y se crea una contradicción, se utiliza el procedimiento para el segundo caso de ecuaciones diferenciales con coeficientes indeterminados. Por lo tanto, se multiplica por t la solución propuesta:

$$y_p = At \quad (29)$$

después, se obtiene su primera y segunda derivada:

$$y_p' = A \quad (30)$$

$$y_p'' = 0 \quad (31)$$

sustituyendo, queda de la siguiente manera:

$$0 + A\left(\frac{\beta}{m}\right) = g \quad (32)$$

despejando A:

$$A = \frac{gm}{\beta} \quad (33)$$

Sustituyendo A en y_p :

$$y_p = At \quad (34)$$

$$y_p = \frac{gm}{\beta}t \quad (35)$$

por lo tanto, la solución general a la ecuación diferencial es:

$$y = y_c + y_p \quad (36)$$

$$y = C_1 + C_2e^{(-\frac{\beta}{m})t} + \frac{gm}{\beta}t \quad (37)$$

Ahora bien, ocupando las condiciones iniciales:

$$y(0) = 70 \quad (38)$$

$$y'(0) = 0 \quad (39)$$

aplicando la primera condición inicial y sustituyendo los valores de las constantes nos queda:

$$70 = C_1 + C_2e^{(-\frac{0.7}{75})(0)} + \frac{(-9.81)(75)}{0.7}(0) \quad (40)$$

$$70 = C_1 + C_2 \quad (41)$$

$$C_1 + C_2 = 70 \quad (42)$$

ahora, derivando la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{-\beta}{m}C_2e^{(-\frac{\beta}{m})t} + \frac{gm}{\beta} \quad (43)$$

y aplicando la segunda condición inicial y sustituyendo los valores de las constantes nos queda:

$$0 = \frac{-0.7}{75}C_2e^{(-\frac{0.7}{75})(0)} + \frac{(-9.81)(75)}{0.7} \quad (44)$$

$$0 = \frac{-7}{750}C_2 + \frac{-14715}{14} \quad (45)$$

$$\frac{7}{750}C_2 = \frac{-14715}{14} \quad (46)$$

$$C_2 = \frac{-11036250}{98} \quad (47)$$

por lo tanto, se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 70 \\ C_2 = \frac{-11036250}{98} \end{cases} \quad (48)$$

de donde se pueden obtener los valores de las constantes:

$$C_1 = \frac{11043110}{98} \quad (49)$$

$$C_2 = \frac{-11036250}{98} \quad (50)$$

Sustituyendo las constantes en la solución de la Ecuación Diferencial:

$$y = \frac{11043110}{98} + \frac{-11036250}{98}e^{(-\frac{\beta}{m})t} + \frac{gm}{\beta}t \quad (51)$$

$$y = 112684.7959 - 112614.7959e^{-0.0093t} - 1051.071429t \quad (52)$$

4.2. Solución de la ED de la Fase 2

Para resolver la ecuación diferencial planteada utilizamos el Método de Coeficientes Indeterminados, al igual que en la Fase 1, esto se debe a que cuenta con la siguiente forma:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (53)$$

Por lo tanto, la solución de esta ecuación diferencial tiene la siguiente forma:

$$y = y_c + y_p \quad (54)$$

siendo y_c la solución homogénea de dicha ecuación y siendo y_p la solución particular propuesta. Así, la solución homogénea y_c es:

$$y'' + \frac{\beta}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0 \quad (55)$$

$$r^2 + \frac{\beta}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \quad (56)$$

Obtenemos el discriminante para asignar el caso con el que se está trabajando:

$$b^2 - 4ac \quad (57)$$

donde:

$$a = 1 \quad (58)$$

$$b = \frac{\beta}{m} \quad (59)$$

$$c = \frac{k}{m} \quad (60)$$

entonces, el discriminante se evalúa con los valores mencionados:

$$b^2 - 4ac = \frac{\beta^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} \quad (61)$$

$$b^2 - 4ac = \frac{0.7^2}{75^2} - 4\frac{64.4}{75} \quad (62)$$

$$b^2 - 4ac = -3.4345 \quad (63)$$

Al ser el discriminante menor a 0, obtenemos el caso 3: raíces complejas conjugadas, para el cual la solución es la siguiente:

$$y_c = C_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + C_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t) \quad (64)$$

Ahora bien, resolviendo la Fórmula General obtenemos que para r_1 :

$$r_1 = -\frac{7}{1500} + i0.9266 \quad (65)$$

$$\lambda = -\frac{7}{1500} \quad (66)$$

$$\mu = 0.9266 \quad (67)$$

mientras que para r_2 :

$$r_2 = -\frac{7}{1500} - i0.9266 \quad (68)$$

$$\lambda = -\frac{7}{1500} \quad (69)$$

$$\mu = 0.9266 \quad (70)$$

Sustituyendo obtenemos que el resultado de y_c es:

$$y_c = C_1 e^{-\frac{7}{1500}t} \cos(0.9266t) + C_2 e^{-\frac{7}{1500}t} \sin(0.9266t) \quad (71)$$

Ahora, continuando con y_p , puesto que $g(t)$ es una constante:

$$y_p = A \quad (72)$$

$$y_p' = 0 \quad (73)$$

$$y_p'' = 0 \quad (74)$$

Tomando en cuenta el caso 1 de las ED con coeficientes indeterminados y sustituyendo en la ecuación original tenemos que:

$$0 + \frac{\beta}{m}(0) + \frac{k}{m}(A) = g \quad (75)$$

Despejando:

$$A = \frac{gm}{k} \quad (76)$$

Por lo que la solución con la en forma

$$y = y_c + y_p \quad (77)$$

es la siguiente:

$$y = C_1 e^{-\frac{7}{1500}t} \cos(0.9266t) + C_2 e^{-\frac{7}{1500}t} \sen(0.9266t) + \frac{gm}{k} \quad (78)$$

Aplicando la condición inicial $y(2.4826) = 40$ y sustituyendo:

$$40 = C_1 e^{-0.0116} \cos(2.3003) + C_2 e^{-0.0116} \sen(2.3003) - 11.4247 \quad (79)$$

Desarrollando:

$$C_1(0.9877) + C_2(0.0397) = 51.4247 \quad (80)$$

Derivando y desarrollando la ecuación diferencial tenemos que:

$$y' = C_1 \left(-\frac{7}{1500} e^{-\frac{7}{1500}t} \cos(0.9266t) - (0.9266) e^{-\frac{7}{1500}t} \sen(0.9266t) \right) + \quad (81)$$

$$C_2 \left(-\frac{7}{1500} e^{-\frac{7}{1500}t} \sen(-0.9266t) + (0.9266) e^{-\frac{7}{1500}t} \cos(-0.9266t) \right) \quad (82)$$

Aplicando la segunda condición:

$$y'(2.4826) = -24.0747 \quad (83)$$

Sustituyendo y desarrollando:

$$-24.0747 = C_1(0.9617) + C_2(0.915) \quad (84)$$

Por lo tanto, se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1(0.9877) + C_2(0.0397) = 51.4247 \\ C_1(0.9617) + C_2(0.915) = -24.0747 \end{cases} \quad (85)$$

Obteniendo los siguientes resultados para las constantes:

$$C_1 = 55.4657, C_2 = -84.6078 \quad (86)$$

Por lo tanto, el resultado queda de la siguiente manera:

$$y = 55.4657 e^{-\frac{7}{1500}t} \cos(0.9266t) + (-84.6078) e^{-\frac{7}{1500}t} \sen(0.9266t) + \frac{gm}{k} \quad (87)$$

$$y = 55.4657 e^{-\frac{7}{1500}t} \cos(0.9266t) + (-84.6078) e^{-\frac{7}{1500}t} \sen(0.9266t) - 11.42468 \quad (88)$$

4.3. Solución de la Fase 1 con Método Numérico

Para resolver estas Ecuaciones Diferenciales se programó el Método de Euler en MATLAB, el cual es una herramienta numérica para aproximar los valores para las soluciones de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, también se utilizó la función ode45 de MATLAB para obtener resultados más exactos y hacer una comparación de ellos

Definición de Ecuación Diferencial de la Fase 1

```
1 function [an] = bungeeDiff(tn,yn,vn)
2 %bungeeDiff es la Ecuación Diferencial que modela la Fase 1 de salto en
   Bungee
3 an = -9.81-(0.7/75)*vn;
4 end
```

Solución

```
1 % Borrar variables
2 clearvars
3
4 % Solución exacta utilizando ode45
5 f = @(t,p) [p(2); -9.81-(0.70/75)*p(1)];
6 t0=0;
7 p0=[70;0];
8 [tex1,pex1] = ode45(f,[t0 2.4826],p0);
9
10 output=table([tex1 pex1(:,1)])
11
12 % Datos iniciales
13 t0=0; % Condición inicial tiempo
14 y0=70; % Condición inicial posición
15 v0=0; % Condición inicial velocidad
16
17 h=0.00001; % Definimos paso de tiempo
18 tf=2.4826; % Hasta que punto queremos evaluar tfinal
19
20 A0=bungeeDiff(t0,y0,v0); % Dinámica del problema dada por la ecuación
   diferencial
21
22 % Definamos un vector de tiempo
23 t1=t0:h:tf;
24 % Condiciones iniciales
25 y1(1)=y0;
26 v1(1)=v0;
27 A1(1)=A0;
28
29 % Evaluamos recursivamente
30 for c=1:numel(t1)-1
31     v1(c+1)=v1(c)+A1(c)*h; % Aquí es donde se implementa Euler
32     y1(c+1)=y1(c)+v1(c)*h; % Interpolando usando la condición inicial -
   salida de Euler
33     A1(c+1)=bungeeDiff(t1(c+1),y1(c+1),v1(c+1));
34 end
35
36 % Guardamos la salida en una tabla
37 Salida=table([t1' y1' v1' A1' v1'*h A1'*h])
38
39 figure, clf
40 plot(t1,y1,"r")
41 title("Posición vs Tiempo")
42 hold on
```

```

43 plot(tex1,pex1(:,1),"m")
44 hold off
45 xlabel("Tiempo (s)")
46 ylabel("Posici n (m)")
47 lgd = legend('Fase 1 con Euler', 'Fase 1 Exacta');
48 lgd.FontSize=10;

```

Así, los resultados exactos de la posición arrojados por el programa para la Fase 1 fueron los siguientes:

	Var1	
1	0	70
2	0	70
3	0	70
4	0	70
5	0	70
6	0	70
7	0.0001	70
8	0.0001	70
9	0.0001	70
10	0.0002	70
11	0.0004	70
12	0.0005	70
13	0.0006	70
14	0.0012	70
15	0.0018	70
16	0.0024	70
17	0.0030	70
18	0.0060	69.9998
19	0.0090	69.9996
20	0.0120	69.9992
21	0.0150	69.9988
22	0.0300	69.9953
23	0.0450	69.9894
24	0.0600	69.9812
25	0.0750	69.9706

Figura 5: Resultados exactos de la posición en la Fase 1.

Similarmente, los resultados numéricos para la Fase 1 fueron los siguientes:

	Var1					
1	0	70	0	-9.8100	0	-9.8100e-05
2	1.0000e-05	70	-0.0001	-9.8100	-9.8100e-10	-9.8100e-05
3	2.0000e-05	70	-0.0002	-9.8100	-1.9620e-09	-9.8100e-05
4	3.0000e-05	70	-0.0003	-9.8100	-2.9430e-09	-9.8100e-05
5	4.0000e-05	70	-0.0004	-9.8100	-3.9240e-09	-9.8100e-05
6	5.0000e-05	70	-0.0005	-9.8100	-4.9050e-09	-9.8100e-05
7	6.0000e-05	70	-0.0006	-9.8100	-5.8860e-09	-9.8100e-05
8	7.0000e-05	70	-0.0007	-9.8100	-6.8670e-09	-9.8100e-05
9	8.0000e-05	70	-0.0008	-9.8100	-7.8480e-09	-9.8100e-05
10	9.0000e-05	70	-0.0009	-9.8100	-8.8290e-09	-9.8100e-05
11	1.0000e-04	70	-0.0010	-9.8100	-9.8100e-09	-9.8100e-05
12	1.1000e-04	70	-0.0011	-9.8100	-1.0791e-08	-9.8100e-05
13	1.2000e-04	70	-0.0012	-9.8100	-1.1772e-08	-9.8100e-05
14	1.3000e-04	70	-0.0013	-9.8100	-1.2753e-08	-9.8100e-05
15	1.4000e-04	70	-0.0014	-9.8100	-1.3734e-08	-9.8100e-05
16	1.5000e-04	70	-0.0015	-9.8100	-1.4715e-08	-9.8100e-05
17	1.6000e-04	70	-0.0016	-9.8100	-1.5696e-08	-9.8100e-05
18	1.7000e-04	70	-0.0017	-9.8100	-1.6677e-08	-9.8100e-05
19	1.8000e-04	70	-0.0018	-9.8100	-1.7658e-08	-9.8100e-05
20	1.9000e-04	70	-0.0019	-9.8100	-1.8639e-08	-9.8100e-05
21	2.0000e-04	70	-0.0020	-9.8100	-1.9620e-08	-9.8100e-05
22	2.1000e-04	70	-0.0021	-9.8100	-2.0601e-08	-9.8100e-05
23	2.2000e-04	70	-0.0022	-9.8100	-2.1582e-08	-9.8100e-05
24	2.3000e-04	70	-0.0023	-9.8100	-2.2563e-08	-9.8100e-05
25	2.4000e-04	70	-0.0024	-9.8100	-2.3544e-08	-9.8100e-05

Figura 6: Resultados de la Fase 1 obtenidos con el Método de Euler.

De manera gráfica, se puede obtener la comparación entre las gráficas de acele-

ración, velocidad y posición de la Fase 1.

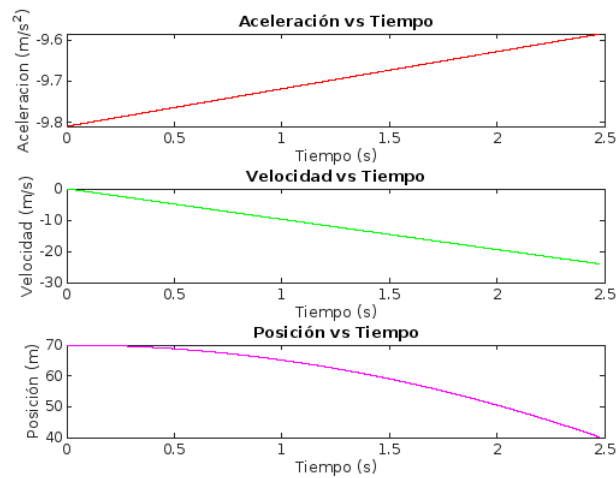


Figura 7: Gráficas del comportamiento de la Fase 1.

Específicamente hablando sobre la posición, se graficó también la comparación entre su solución exacta y numérica.

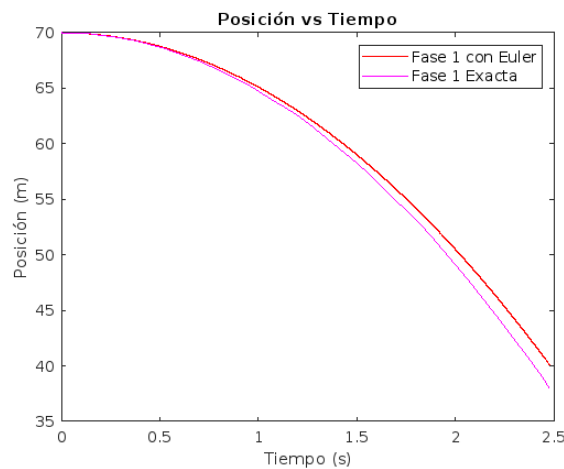


Figura 8: Gráfica de Posición vs. Tiempo en la Fase 1.

4.4. Solución de la Fase 2 con Método Numérico

Para la Fase 2, se repitió el mismo procedimiento con su respectiva Ecuación Diferencial.

Definición de Ecuación Diferencial de la Fase 2

```

1 function [an] = bungeeDiff2(tn,yn,vn)
2 %bungeeDiff2 es la Ecuación Diferencial que modela la Fase 2 de salto en
   Bungee.
3 an = -9.81 - (0.7/75)*vn - (64.4/75)*yn;
4 end

```


Solución

```

1  % Soluci n exacta utilizando ode45
2  f = @(t,p) [p(2); -9.81-(0.70/75)*p(2) -(64.4/75)*p(1)];
3  t0=2.4816;
4  p0=[40;-24.0747];
5  [tex2,pex2] = ode45(f,[t0 250],p0);
6
7  output=table([tex2 pex2(:,1)])
8
9  % Datos iniciales
10 t0=2.4826;    % Condici n inicial tiempo
11 y0=40;    % Condici n inicial posici n
12 v0=-24.0747;    % Condici n inicial velocidad
13
14 h=0.0001;    % Definimos paso de tiempo
15 tf=250;    % Hasta que punto queremos evaluar tfinal
16
17 A0=-9.5853;    % Din mica del problema dada por la ecuaci n diferencial
18
19 % Definamos un vector de tiempo
20 t=t0:h:tf;
21 % Condiciones iniciales
22 y(1)=y0;
23 v(1)=v0;
24 A(1)=A0;
25
26 % Evaluamos recursivamente
27 for c=1:numel(t)-1
28     v(c+1)=v(c)+A(c)*h;    % Aqu es d nde se implementa Euler
29     y(c+1)=y(c)+v(c)*h;    % Interpolando usando la condici n inicial -
        salida de Euler
30     A(c+1)=bungeeDiff2(t(c+1),y(c+1),v(c+1));
31 end
32
33 % Guardamos la salida en una tabla
34 Salida=table([t' y' v' A' v'*h A'*h])
35
36 figure, clf
37 plot(t,y,"b")
38 hold on
39 plot(tex2,pex2(:,1),"c")
40 hold off
41 title("Posici n vs Tiempo")
42 xlabel("Tiempo (s)")
43 ylabel("Posici n (m)")
44 lgd = legend('Fase 1 con Euler', 'Fase 1 Exacta');
45 lgd.FontSize=10;

```

Así, los resultados exactos de la posición arrojados por el programa para la Fase 2 fueron los siguientes:

	Var1	
1	2.4816	40
2	2.5091	39.3206
3	2.5367	38.6084
4	2.5642	37.8639
5	2.5917	37.0874
6	2.7294	32.7455
7	2.8670	27.6920
8	3.0047	22.0100
9	3.1423	15.7921
10	3.3650	4.8605
11	3.5876	-6.7359
12	3.8102	-18.5047
13	4.0328	-29.9508
14	4.2446	-40.0982
15	4.4563	-49.1241
16	4.6680	-56.6792
17	4.8797	-62.4849
18	5.1082	-66.5495
19	5.3366	-68.1445
20	5.5651	-67.1928
21	5.7936	-63.7539
22	5.9962	-58.7580
23	6.1988	-52.1093
24	6.4015	-44.0413
25	6.6041	-34.8417

Figura 9: Resultados exactos de la posición en la Fase 2.

Similarmente, los resultados numéricos para la Fase 2 fueron los siguientes:

	Var1					
1	2.4826	40	-24.0747	-9.5853	-0.0024	-0.0010
2	2.4827	39.9976	-24.0757	-43.9299	-0.0024	-0.0044
3	2.4828	39.9952	-24.0801	-43.9278	-0.0024	-0.0044
4	2.4829	39.9928	-24.0844	-43.9257	-0.0024	-0.0044
5	2.4830	39.9904	-24.0888	-43.9236	-0.0024	-0.0044
6	2.4831	39.9880	-24.0932	-43.9215	-0.0024	-0.0044
7	2.4832	39.9856	-24.0976	-43.9193	-0.0024	-0.0044
8	2.4833	39.9831	-24.1020	-43.9172	-0.0024	-0.0044
9	2.4834	39.9807	-24.1064	-43.9151	-0.0024	-0.0044
10	2.4835	39.9783	-24.1108	-43.9130	-0.0024	-0.0044
11	2.4836	39.9759	-24.1152	-43.9109	-0.0024	-0.0044
12	2.4837	39.9735	-24.1196	-43.9088	-0.0024	-0.0044
13	2.4838	39.9711	-24.1240	-43.9067	-0.0024	-0.0044
14	2.4839	39.9687	-24.1284	-43.9046	-0.0024	-0.0044
15	2.4840	39.9663	-24.1328	-43.9025	-0.0024	-0.0044
16	2.4841	39.9638	-24.1371	-43.9003	-0.0024	-0.0044
17	2.4842	39.9614	-24.1415	-43.8982	-0.0024	-0.0044
18	2.4843	39.9590	-24.1459	-43.8961	-0.0024	-0.0044
19	2.4844	39.9566	-24.1503	-43.8940	-0.0024	-0.0044
20	2.4845	39.9542	-24.1547	-43.8919	-0.0024	-0.0044
21	2.4846	39.9518	-24.1591	-43.8898	-0.0024	-0.0044
22	2.4847	39.9494	-24.1635	-43.8877	-0.0024	-0.0044
23	2.4848	39.9469	-24.1679	-43.8855	-0.0024	-0.0044
24	2.4849	39.9445	-24.1723	-43.8834	-0.0024	-0.0044
25	2.4850	39.9421	-24.1766	-43.8813	-0.0024	-0.0044

Figura 10: Resultados del comportamiento de la Fase 2 obtenidos con el Método de Euler.

De manera gráfica, se obtiene la comparación entre la aceleración, la velocidad y la posición de la Fase 2:

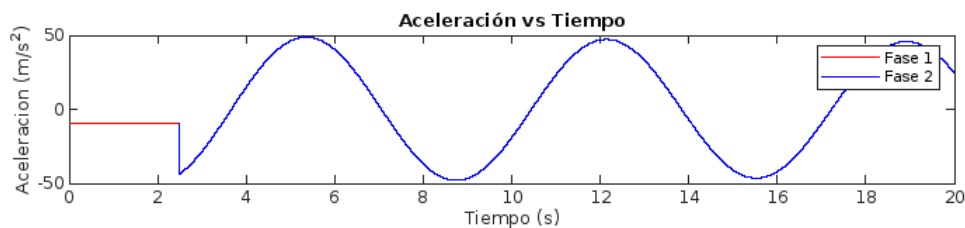


Figura 11: Gráfica de la aceleración en ambas fases.

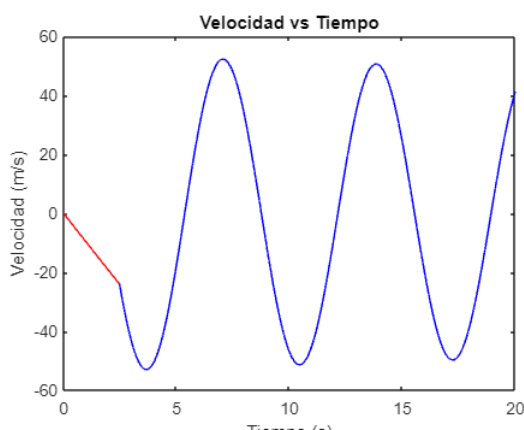


Figura 12: Gráfica de la velocidad en ambas fases.

Ahora bien, el comportamiento de la posición del saltador en la Fase 2 tanto con la solución exacta como con el método de Euler se visualiza a continuación:

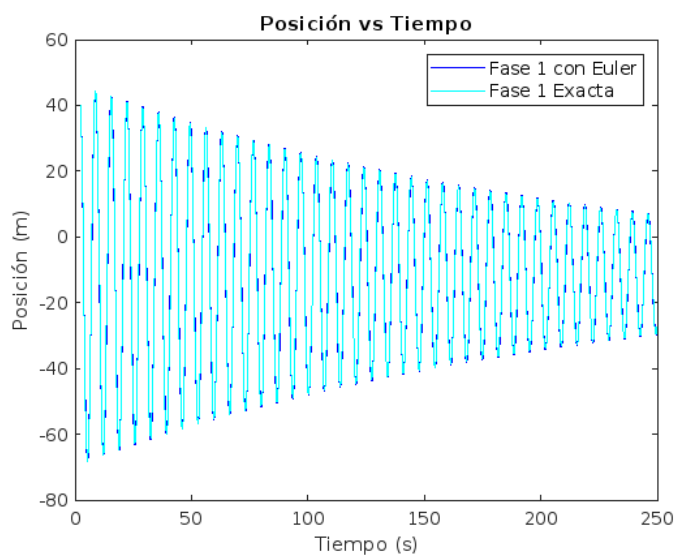


Figura 13: Gráfica de Posición vs. Tiempo en la Fase 2.

Finalmente, uniendo ambas fases en una sola gráfica de Posición vs. Tiempo se puede visualizar de manera óptima el comportamiento de un salto en Bungee en

ambas de sus fases tanto con su solución numérica como utilizando la función ode45:

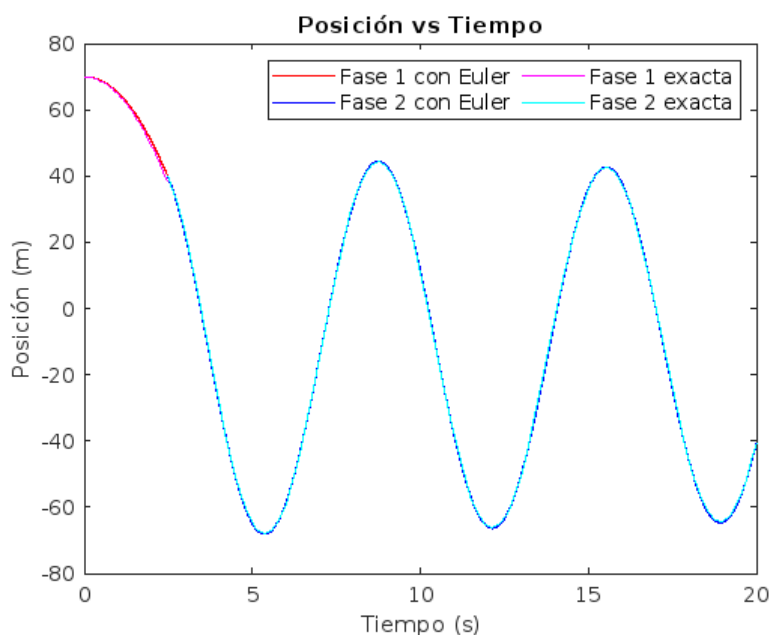


Figura 14: Gráfica de Posición vs. Tiempo en ambas fases utilizando la solución con el Método de Euler y la función ode45

5. Análisis y Discusión de Resultados

Durante la modelación de este fenómeno nos pudimos percatar de que hay diversos factores que podrían afectar el resultado o el comportamiento de este salto. Ahora bien, una vez resueltas las Ecuaciones Diferenciales, podemos observar que las fuerzas involucradas tienen un papel definitivo en el comportamiento del salto; sin embargo, tal como es demostrado por las evaluaciones con respecto al tiempo en la ecuación diferencial de la Fase 1, el frenado debido a la fuerza de resistencia del aire es muy débil, tal como se planteó al principio. Sin embargo, el incluir esta fuerza nos permite entender de una manera más acertada la manera en la que el salto se lleva a cabo. Específicamente, ella nos permite ver que la primera fase del salto no es completamente caída "libre" debido al frenado que el aire tiene sobre la caída de la persona, por más mínimo que este sea. De hecho, en esta sección la aceleración disminuye muy lentamente y en poca (de manera que su aceleración mayor es la inicial, $-9.81 \frac{m}{s^2}$, la velocidad aumenta en dirección negativa (partiendo del reposo y alcanzando la mayor velocidad de $-24.0747 \frac{m}{s^2}$) y la posición también disminuye de su posición máxima (70m) hasta que la cuerda ha alcanzado su longitud original (30 m), lo cual indica que la persona va cayendo acercándose al suelo a una distancia de 40 m del suelo. De este modo y gracias al análisis de la ED de la Fase 1, se puede decir que se tiene un decaimiento exponencial.

La fuerza de elasticidad, por otra parte, tiene un impacto significativo en el cambio de comportamiento inicial y el inicio de la Fase 2, pues debido a ella es que la cuerda se estira e impulsa al saltador hacia arriba. Explícitamente y en cuanto a la seguridad de este Bungee, sobretodo durante el inicio de la segunda fase, la aceleración de la que se somete la persona en cuestión cambia rápidamente a valores muy grandes (aproximadamente 4 Gs o $-43 \frac{m}{s^2}$ como valor mayor) en repetidas ocasiones del salto. Tomando en cuenta que el ser humano puede soportar de 5 a 6 Gs por pocos segundos antes de sufrir consecuencias en su salud (aunque algunos pilotos lleguen a experimentar hasta 10 Gs) y considerando que los valores de aceleración altos del salto en Bungee solo suceden en intervalos pequeños de tiempo, entonces esta aceleración no afecta negativamente al usuario y es seguro brincar. En cuanto a la velocidad, esta decae y aumenta a medida que lo hace la aceleración, alcanzando un valor máximo aproximado de $-52 \frac{m}{s}$ y disminuyendo con el tiempo. Con respecto a la posición, esta tiene una transición más suave entre ambas fases, pues debido a que la persona está en caída, disminuye su altura. Sin embargo, debido a la fuerza elástica con dirección opuesta a la caída, poco a poco experimenta un frenado que impulsa a la persona hacia arriba y por lo tanto vuelve a adquirir altura máxima de 44 m, rebasando así la altura del inicio de la fase, aunque eventualmente la altura vaya teniendo valores más pequeños. De hecho, tanto la aceleración como la velocidad y la posición pasan en repetidas ocasiones por el 0 y tienden a este valor cuando el tiempo tiende a infinito. En específico, debido a la fuerza de elasticidad y a los valores utilizados, la solución de la Ecuación Diferencial de la Fase 2 tanto para la aceleración como la velocidad y la posición es trigonométrica con términos senoidales y cosenoidales, de manera que el frenado tendrá un comportamiento de decaimiento oscilatorio. Es importante mencionar que para que esto suceda, se debe cumplir la condición de que el determinante de la ecuación diferencial sea menor a 0, de modo que:

$$b^2 - 4ac < 0 \quad (89)$$

$$\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 - (4)(1)\left(\frac{k}{m}\right) < 0 \quad (90)$$

$$\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 < \frac{4k}{m} \quad (91)$$

$$\frac{\beta^2}{m^2} < \frac{4k}{m} \quad (92)$$

$$\beta^2 < \frac{4k}{m} m^2 \quad (93)$$

$$\beta^2 < 4km \quad (94)$$

$$\beta < \pm\sqrt{4km} \quad (95)$$

$$\beta < \pm 2\sqrt{km} \quad (96)$$

$$-2\sqrt{km} < \beta < 2\sqrt{km} \quad (97)$$

Así, se puede observar una clara relación entre el coeficiente de arrastre, la constante de elasticidad y la masa para obtener un resultado oscilatorio. Cualquier trío

de números que cumpla con estas condiciones será apropiado para modelar el comportamiento físico de un Bungee matemáticamente hablando. A modo de ejemplo, el coeficiente de arrastre que utilizamos fue $0.7 \frac{Ns}{m}$, la constante de elasticidad $64.4 \frac{N}{m}$ y la masa 75 kg. Si sustituimos estos valores en la desigualdad previa obtenemos que:

$$-2\sqrt{(64.4)(75)} < 0.7 < 2\sqrt{(64.4)(75)} \quad (98)$$

$$-138.9964 < 0.7 < 138.9964 \quad (99)$$

El resultado es verdadero, por lo que 0.7, 64.4 y 75 forman parte del conjunto de posibles soluciones. De hecho, aunque se haya trabajado bajo las unidades del Sistema Internacional, esta condición debería de cumplirse en todos los casos y sistemas para modelar un salto en Bungee. De estos valores particulares se obtiene que el tiempo de decaimiento oscilatorio es extenso (es por esto que en la realidad se sube a los saltadores a través de poleas o de boyas colgantes a las que se deben de sujetar antes de que su velocidad sea 0) y la posición puede variar en valores tanto positivos como negativos considerando que el 0 en nuestro marco de referencia podría estar ubicado en el nivel del mar o al pie de un abismo. Sin embargo, puede que al introducir diferentes pares se obtengan resultados distintos dentro del rango de variación establecido para obtener un aún mejor modelo de la situación.

Con todo y eso, el resolver las ecuaciones a partir del Método de Euler y métodos exactos con Matlab, nos permite corroborar que en efecto se hayan realizado los cálculos de una manera certera y óptima, lo cual sí sucedió debido a que la graficación de la solución numérica de las dos ecuaciones diferenciales de las dos fases terminaron sobreponiéndose de manera precisa sobre las soluciones exactas, además de que los resultados entre ambas soluciones son idénticas o en el peor de los casos, varían solamente por milésimas. De este modo, nos aseguramos de que el análisis de la aceleración, velocidad y posición sea coherente con nuestra situación particular, además de que garantizamos un correcto entendimiento de la aplicación de las Ecuaciones Diferenciales, el Cálculo y las Leyes de la Física para la resolución de problemas ingenieriles.

6. Conclusiones

A partir del análisis del problema, sabemos que los saltos en Bungee no son peligrosos si se componen de la manera correcta. Es importante y necesario tener altas medidas de seguridad y llevar a cabo cálculos matemáticos para la elaboración de estos saltos. Durante este reporte se llevó a cabo un análisis profundo acerca del comportamiento de los saltos en Bungee en ambas de las fases que componen la situación. De hecho, a partir de este proyecto es que podemos afirmar que el pensamiento crítico para la abstracción y modelación de un modelo físico mediante las matemáticas es esencial para su eficaz, eficiente y óptimo análisis. Basándonos en esto, pudimos notar que las fuerzas involucradas en el salto definen el comportamiento de tal. Además, la fuerza elástica es de las más importantes ya que cambia

el comportamiento inicial y el inicio de la Fase 2, de esta manera impulsado al saltador hacia arriba con una aceleración alta sin afectar al usuario y garantizar tanto su seguridad como su salud. Asimismo, gracias a los valores utilizados y la solución de la Ecuación Diferencial, pudimos declarar que el frenado en este tipo de saltos tiene un comportamiento de decaimiento exponencial en la Fase 1 y de decaimiento oscilatorio.

Finalmente, gracias a que usamos el Método de Euler y métodos exactos con Matlab, podemos decir que nuestros cálculos son correctos y precisos. Sin embargo, siempre hay oportunidad de mejora en la que se podría probar con distintas variaciones de masa, coeficiente de arrastre y constante de elasticidad para obtener una combinación que sea más fácilmente aplicable al mundo real. Aún así, podemos afirmar que después de la realización de este reporte ahora es más fácil entender y efectuar los saltos en Bungee, así como la relevancia y el rango de posibles aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales.

Referencias

- [Academy, 2019] Academy, K. (2019). Resistencia del aire y de fluidos. url <https://es.khanacademy.org/computing/computer-programming/programming-natural-simulations/programming-forces/a/air-and-fluid-resistance>.
- [Academy, sf] Academy, K. (s.f.). ¿qué es la ley de hooke? url <https://es.khanacademy.org/science/physics/work-and-energy/hookes-law/a/what-is-hookes-law>.
- [Arango,] Arango, I. D. Modelo matemático del juego bungee. *Revista Universidad Eafit*, (102).
- [Bolaños López, 2004] Bolaños López, D. (2004). Técnicas de atención y guiado para actividades de bungee jumping. url https://www.oitcinterfor.org/sites/default/files/Bungee_jumpings.pdf.
- [ck 12, 2015] ck 12 (2015). Métodos numéricos para resolver edo. url <https://www.ck12.org/book/ck-12-conceptos-de-c>
- [Darío, sf] Darío, A. I. (s.f.). Modelo matemático del juego "bungee". url <https://publicaciones.eafit.edu.co/index.php/revista-universidad-eafit/article/download/1208/1095/:text=La>
- [de la Llave, 2022] de la Llave, R. (2022). Differential equations. url <https://0-eds-p-ebsohost-com.biblioteca-ils.tec.mx/eds/detail/detail?vid=3sid=9e8a975f-5b2e-44b1-925a-ec952c20dbb7>
- [de Sevilla, sf] de Sevilla, U. (s.f.). Energía en el salto desde un puente. url <http://laplace.us.es/wiki/index.php/Energ>

- [Info7, 2015] Info7 (2015). Bungee más alto en México, atractivo del pueblo mágico de Santiago, NL. url <https://www.info7.mx/locales/bungee-mas-alto-mexico-atractivo-del-pueblo-magico-santiago-nl/1547043>.
- [Kagan and Kott, sf] Kagan, D. and Kott, A. (s.f.). The greater-than-g acceleration of a bungee jumper. url <https://courses.lumenlearning.com/suny-physics/chapter/5-2-drag-forces/>.
- [Prospero García M., sf] Prospero García M., C. d. l. L. E. (s.f.). Apuntes de ecuaciones diferenciales y en diferencias. url <https://dcb.ingenieria.unam.mx/wp-content/themes/temperachild/CoordinacionesAcademicas/CA/ED/MaterialDigital/Apuntes.pdf>.
- [Services, sf] Services, E. (s.f.). Drag forces. url <https://courses.lumenlearning.com/suny-physics/chapter/5-2-drag-forces/>.
- [Toolbox, sf] Toolbox, T. E. (s.f.). Drag coefficient. url https://www.engineeringtoolbox.com/amp/drag-coefficient-d_627.html.