

Matemáticas VI
Guía 2
Prof. Manuel Mijaíl Martínez Ramos

Preámbulos Esta guía sirve para preparar el segundo examen del curso, a aplicarse el martes 5 de noviembre en el horario de clase. Además, es un requisito para presentarlo; **se entrega en parejas o ternas**. Pueden consultar los siguientes libros (disponibles en *Classroom*):

- F. H. C. Marriott. *Basic Mathematics for the Biological and Social Sciences*. (Capítulos I y IV).
- R. A. Kalnin. *Álgebra y funciones elementales*. (Capítulo XVI).

También pueden preguntarme.

1. Escribe la siguiente expresión de forma expandida:

$$\sum_{r=0}^5 \frac{x^r}{r!}$$

¿Qué número resulta al hacer la sustitución $x = 1$?

2. Esboza la gráfica de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = C$, donde $C \in \mathbb{R}$ es un número fijo (*función constante*).
- b) $f(x) = x^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un número fijo (*función potencial*).
- c) $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ pero $a \neq 1$ (*función exponencial*).
- d) $f(x) = \log_a(x)$, donde $a > 0$ pero $a \neq 1$ (*función logarítmica*).
- e) $f(x) \in \{\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x), \sec(x), \csc(x)\}$ (*funciones trigonométricas*).
- f) $f(x) \in \{\arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x), \operatorname{arccot}(x), \operatorname{arcsec}(x), \operatorname{arccsc}(x)\}$ (*funciones trigonométricas inversas*).

Puedes usar *Geogebra*, pero haz los dibujos a mano.

3. ¿De qué manera se traslada horizontalmente la gráfica de una función? ¿Y de qué manera se traslada verticalmente?
4. Expande $(2x + 3)^3$ con el teorema del binomio y verifica tu resultado mediante multiplicación directa (es decir, $(2x + 3) \times (2x + 3) \times (2x + 3)$).
5. Una cierta cantidad de dinero se invierte con una tasa anual de interés compuesto del 2%, por un lapso de 10 años. Muestra, a partir del teorema del binomio, que la inversión se incrementa en un factor de 1,2190, y verifica este resultado mediante logaritmos. (*Hint: Cuando x es un número pequeño (positivo pero mucho menor que 1), entonces $x \gg x^2 \gg x^3 \gg \dots \gg x^n \approx 0$ cuando n es suficientemente grande*).
6. Expresa el área de un triángulo rectángulo de hipotenusa constante, igual a $c > 0$, como función de uno de los ángulos agudos internos α . ¿Cuál es el ángulo que produce el triángulo con la máxima área posible?
7. Si $n \geq 1$ es un número natural, ¿cuánto vale la siguiente suma?

$$1 + \frac{n}{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$$

(*Hint: Recuerda cuál es la serie geométrica.*). ¿Qué pasa con este resultado a medida que $n \rightarrow \infty$?

8. Considera la progresión aritmética:

$$a_n = 5n - 2$$

¿Cuánto vale $a_{50} + \dots + a_{100}$?

9. ¿Cuál es la diferencia entre sucesión, progresión y serie?
10. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, calcula:

▪ $f(0)$	▪ $\frac{1}{f(1)}$	▪ $(1 + f(1))^2$
▪ $f(-2)$	▪ $f^2(1)$	▪ $\log_{5/4} f\left(\frac{1}{2}\right)$

11. Halla los límites de las siguientes sucesiones:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{n + 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{n^3 + 1}$$

Para cada sucesión $f(n)$ en los límites anteriores, ¿cuál es la mínima $N \in \mathbb{N}$ a partir de la cual la distancia de $f(N + 1), f(N + 2), f(N + 3), \dots$ a su límite es menor a $\varepsilon = 10^{-6}$?

12. En la sección 4.5 del libro *Basic Mathematics for the Biological and Social Sciences* de F. H. C. Marriott, se discute la importancia de los límites en las ciencias biológicas y sociales. Describe en un párrafo dicha importancia y discute su aplicación a la *función de crecimiento logístico*.
13. La explosión en 1986 de la planta de energía nuclear Chernóbil (antigua URSS) liberó alrededor de 1000 kg de cesio-137 a la atmósfera. La fórmula:

$$f(x) = 1000 \cdot (0,5)^{\frac{x}{30}}$$

describe la cantidad $f(x)$ (en kilogramos) de material radiactivo restante en la atmósfera de la ciudad tras x años a partir de 1986. Incluso si quedaran 100 kg, Chernóbil seguiría siendo considerada inhabitable. ¿Sería seguro vivir en Chernóbil en el 2066? ¿En qué año restarían sólo 20 kg de cesio-137 en su atmósfera? ¿Qué tiempo debe pasar para que sólo quede 1 kg?

14. Cuando el interés compuesto es pagado $n \in \mathbb{N}$ veces al año (llamados los n *períodos de capitalización*), con tasa de interés anual $r \in [0, 1]$, el balance P tras t años está dado por la fórmula:

$$P(t) = P_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde P_0 es el capital inicial o *principal*. Si quieres invertir \$MXN 150,000 en 6 años, ¿qué cuenta de inversión te conviene más?

- a) Una que paga 7 % anual, con composición mensual.
- b) Una que paga 6,85 % anual, con composición semanal.

Demuestra tu resultado de forma cuantitativa.

15. Explica cuál es la relación entre el interés compuesto, el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

y la fórmula de interés compuesto continuo:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

16. Demuestra la siguiente fórmula:

$$\forall a, b \in (0, 1) \cup (1, \infty), \forall x \in \mathbb{R} : a^x = b^{x \cdot \log_b(a)}$$

Usa esta fórmula para estimar cuántos ceros a la izquierda tiene el número 3^{-12} . ¿Por qué se excluyen los casos $a, b = 1$?