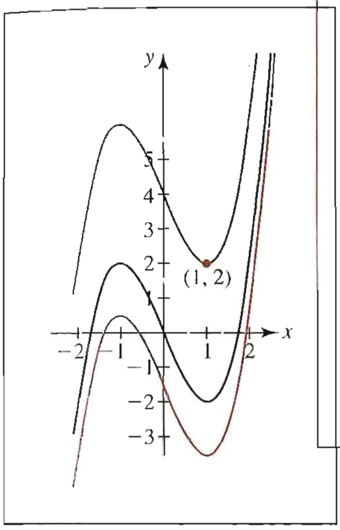
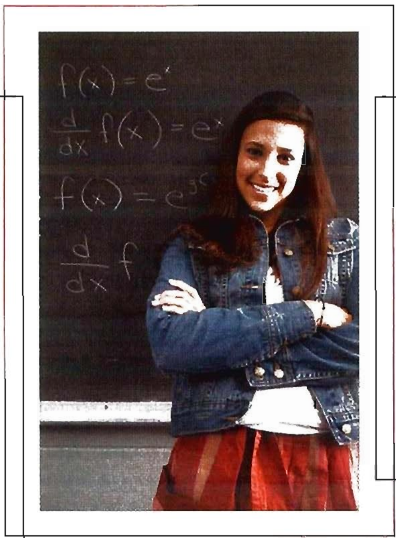
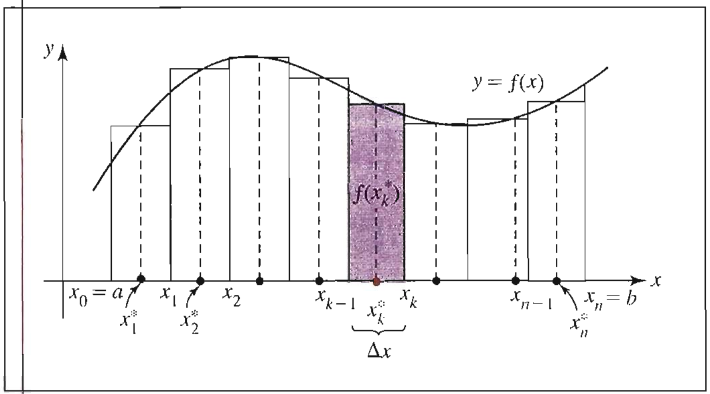
Capítulo 5

Integrales







En este capítulo En los dos últimos capítulos analizamos las definiciones, propiedades y aplicaciones de la derivada. Ahora pasaremos del cálculo diferencial al cálculo integral. Leibniz denominó *calculus summatorius* a esta segunda de las dos divisiones más importantes del cálculo. En 1696, persuadido por el matemático suizo Johann Bernoulli, Leibniz cambió el nombre a *calculus integralis*. Como sugieren las palabras latinas originales, el concepto de *suma* desempeña un papel importante en el desarrollo completo de la integral.

En el capítulo 2 vimos que el problema de la tangente conduce de manera natural a la derivada de una función. En el problema de área, el problema motivacional del cálculo integral, deseamos encontrar el área acotada por la gráfica de una función y el eje x. Este problema lleva al concepto de *integral definida*.

5.1 La integral indefinida

Introducción En los capítulos 3 y 4 sólo abordamos el problema básico:

- Dada una función f, encontrar su derivada f'.

En este capítulo y en los subsecuentes veremos cuán importante es el problema de:

- Dada una función f, encontrar una función F cuya derivada sea f.

En otras palabras, para una función dada f, ahora pensamos en f como una derivada. Deseamos encontrar una función F cuya derivada sea f; es decir, $F'(x) = f(x)$ para toda x en algún intervalo. Planteado en términos generales, es necesario diferenciar en reversa.

Empezamos con una definición.

Definición 5.1.1 Antiderivada

Se dice que un función F es una **antiderivada** de una función f sobre algún intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

EJEMPLO 1 Una antiderivada

Una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$, puesto que $F'(x) = 2x$. ■

Una función siempre tiene más de una antiderivada. Así, en el ejemplo anterior, $F_1(x) = x^2 - 1$ y $F_2(x) = x^2 + 10$ también son antiderivadas de $f(x) = 2x$, puesto que $F_1'(x) = F_2'(x) = 2x$.

A continuación demostraremos que cualquier antiderivada de f debe ser de la forma $G(x) = F(x) + C$; es decir, *dos antiderivadas de la misma función pueden diferir a lo más en una constante*. Por tanto, $F(x) + C$ es *la antiderivada más general* de $f(x)$.

Teorema 5.1.1 Las antiderivadas difieren por una constante

Si $G'(x) = F'(x)$ para toda x en algún intervalo $[a, b]$, entonces

$$G(x) = F(x) + C$$

para toda x en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Suponga que se define $g(x) = G(x) - F(x)$. Entonces, puesto que $G'(x) = F'(x)$, se concluye que $g'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$. Si x_1 y x_2 son dos números cualesquiera que satisfacen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, por el teorema del valor medio (teorema 4.4.2) se concluye que en el intervalo abierto (x_1, x_2) existe un número k para el cual

$$g'(k) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{o} \quad g(x_2) - g(x_1) = g'(k)(x_2 - x_1).$$

Pero $g'(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$; en particular, $g'(k) = 0$. Por tanto, $g(x_2) - g(x_1) = 0$ o $g(x_2) = g(x_1)$. Luego, por hipótesis, x_1 y x_2 son dos números arbitrarios, pero diferentes, en el intervalo. Puesto que los valores funcionales $g(x_1)$ y $g(x_2)$ son iguales, debe concluirse que la función $g(x)$ es una constante C. Por tanto, $g(x) = C$ implica $G(x) - F(x) = C$ o $G(x) = F(x) + C$. ■

La notación $F(x) + C$ representa una *familia de funciones*; cada miembro tiene una derivada igual a $f(x)$. Volviendo al ejemplo 1, la antiderivada más general de $f(x) = 2x$ es la familia $F(x) = x^2 + C$. Como se ve en la FIGURA 5.1.1, la gráfica de la antiderivada de $f(x) = 2x$ es una traslación vertical de la gráfica de x^2.

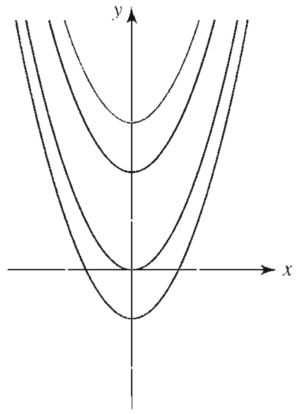


FIGURA 5.1.1 Algunos miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = 2x$

EJEMPLO 2 Antiderivadas más generales

a) Una antiderivada de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x$ puesto que $F'(x) = 2x + 5$. La antiderivada más general de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x + C$.

b) Una antiderivada de $f(x) = \sec^2 x$ es $F(x) = \tan x$ puesto que $F'(x) = \sec^2 x$. La antiderivada más general de $f(x) = \sec^2 x$ es $F(x) = \tan x + C$. ■

Notación de la integral indefinida Por conveniencia, se introducirá la notación para una antiderivada de una función. Si $F'(x) = f(x)$, la antiderivada más general de f se representa por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz y se denomina **signo integral**. La notación $\int f(x)\,dx$ se denomina **integral indefinida** de $f(x)$ respecto a x. La función $f(x)$ se denomina **integrando**. El proceso de encontrar una antiderivada se denomina **antidiferenciación** o **integración**. El número C se denomina **constante de integración**. Justo como $\frac{d}{dx}(\ )$ denota la operación de diferenciación de $(\ )$ *con respecto a* x, el simbolismo $\int(\ )\,dx$ denota la operación de integración de $(\ )$ *con respecto a* x.

La diferenciación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas. Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces F es la antiderivada de f; es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Además,
$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) = f(x) \tag{2}$$

En palabras, (1) y (2) son, respectivamente:

- Una antiderivada de la derivada de una función es esa función más una constante.
- La derivada de una antiderivada de una función es esa función.

A partir de lo anterior se concluye que siempre que se obtiene la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una fórmula de integración. Por ejemplo, debido a (1), si

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,dx = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

◀ Este primer resultado sólo es válido si $n \neq -1$.

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\ln|x|\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\,dx = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C,$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\tan^{-1} x\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C.$$

De esta manera es posible construir una fórmula de integración a partir de cada fórmula de derivada. En la TABLA 5.1.1 se resumen *algunas* fórmulas de derivadas importantes para las funciones que se han estudiado hasta el momento, así como sus fórmulas de integración análogas.

TABLA 5.1.1

Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración	Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración
1. $\frac{d}{dx}x = 1$	$\int dx = x + C$	**10.** $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$
2. $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	**11.** $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + C$
3. $\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$	**12.** $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}\|x\| + C$
4. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	**13.** $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$, $(b > 0, b \neq 1)$	$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$
5. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	**14.** $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
6. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	**15.** $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$	$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
7. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	**16.** $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$	$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
8. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$		
9. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$		

Con respecto a la entrada 3 de la tabla 5.1.1, es cierto que las fórmulas de derivadas

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\frac{\log_b x}{\ln b} = \frac{1}{x}$$

significan que *una* antiderivada de $1/x = x^{-1}$ puede tomarse como $\ln x$, $x > 0$, $\ln|x|$, $x \neq 0$, o $\log_b x/\ln b$, $x > 0$. Pero como resultado más general y útil escribimos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$$

Observe también que en la tabla 5.1.1 sólo se proporcionan tres fórmulas que implican funciones trigonométricas inversas. Esto se debe a que, en forma de integral indefinida, las tres fórmulas restantes son redundantes. Por ejemplo, de las derivadas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

observamos que es posible tomar

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C \quad \text{o} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\cos^{-1} x + C.$$

Observaciones semejantes se cumplen para la cotangente inversa y la cosecante inversa.

EJEMPLO 3 Una antiderivada simple pero importante

La fórmula de integración en la entrada 1 en la tabla 5.1.1 se incluye para recalcar:

$$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C \quad \text{ya que} \quad \frac{d}{dx}(x + C) = 1 + 0 = 1.$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 con $n = 0$. ■

A menudo es necesario volver a escribir el integrando $f(x)$ antes de realizar la integración.

EJEMPLO 4 Cómo volver a escribir un integrando

Evalúe

a) $\int \frac{1}{x^5}\,dx$ y *b)* $\int \sqrt{x}\,dx$.

Solución

a) Al volver a escribir $1/x^5$ como x^{-5} e identificar $n = -5$, por la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 tenemos:

$$\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{x^{-4}}{4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C.$$

b) Primero volvemos a escribir el radical $\sqrt{x}$ como $x^{1/2}$ y luego se usa la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 con $n = \frac{1}{2}$:

$$\int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C. \qquad \blacksquare$$

Debe tomarse en cuenta que los *resultados de la integración siempre pueden comprobarse por diferenciación*; por ejemplo, en el inciso *b*) del ejemplo 4:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{3/2-1} = x^{1/2} = \sqrt{x}.$$

En el siguiente teorema se proporcionan algunas propiedades de la integral indefinida.

Teorema 5.1.2 Propiedades de la integral indefinida

Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Entonces

i) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx = kF(x) + C$, donde k es cualquier constante,

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = F(x) \pm G(x) + C.$

Estas propiedades se concluyen de inmediato a partir de las propiedades de la derivada. Por ejemplo, *ii*) es una consecuencia del hecho de que la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Observe en el teorema 5.1.2*ii*) que no hay razón para usar dos constantes de integración, puesto que

$$\begin{aligned}\int [f(x) \pm g(x)]\,dx &= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2)\\ &= F(x) \pm G(x) + (C_1 \pm C_2) = F(x) \pm G(x) + C,\end{aligned}$$

donde $C_1 \pm C_2$ se ha sustituido por la simple constante C.

Una integral indefinida de cualquier suma infinita de funciones la podemos obtener al integrar cada término.

EJEMPLO 5 Uso del teorema 5.1.2

Evalúe $\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5\,\text{sen}\,x\right) dx$.

Solución Por los incisos *i*) y *ii*) del teorema 5.1.2, esta integral indefinida puede escribirse como tres integrales:

$$\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5\,\text{sen}\,x\right) dx = 4\int x\,dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx + 5\int \text{sen}\,x\,dx.$$

Debido a las fórmulas de integración 2, 3 y 5 en la tabla 5.1.1, entonces tenemos

$$\int\left(4x - \frac{2}{x} + 5\,\text{sen}\,x\right)dx = 4\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\ln|x| + 5\cdot(-\cos x) + C$$
$$= 2x^2 - 2\ln|x| - 5\cos x + C.$$

Uso de la división Escribir un integrando en forma más manejable algunas veces conlleva a una división. La idea se ilustra con los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 6 División término por término

Evalúe $\int \frac{6x^3 - 5}{x}\,dx.$

Si el concepto de común denominador

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

se lee de derecha a izquierda, se está realizando "división término por término".

Solución Por la división término por término, el teorema 5.1.2 y las fórmulas de integración 2 y 3 de la tabla 5.1.1 tenemos:

$$\int \frac{6x^3 - 5}{x}\,dx = \int\left(\frac{6x^3}{x} - \frac{5}{x}\right)dx$$
$$= \int\left(6x^2 - \frac{5}{x}\right)dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} - 5\cdot\ln|x| + C = 2x^3 - 5\ln|x| + C.$$

Para resolver el problema de evaluar $\int f(x)\,dx$, donde $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional, a continuación se resume una regla práctica que debe tomarse en cuenta en esta subsección y en la subsección subsecuente.

Integración de una función racional

Suponga que $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional. Si el grado de la función polinomial $p(x)$ es mayor que o igual al grado de la función polinomial $q(x)$, use división larga antes de integrar; es decir, escriba

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \text{un polinomio} + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde el grado del polinomio $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.

EJEMPLO 7 División larga

Evalúe $\int \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx.$

Solución Puesto que el grado del numerador del integrando es igual al grado del denominador, se efectúa la división larga:

$$\frac{x^2}{1 + x^2} = 1 - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Por *ii*) del teorema 5.1.2 y las fórmulas de integración 1 y 11 en la tabla 5.1.1 obtenemos

$$\int \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)dx = x - \tan^{-1} x + C.$$

Ecuaciones diferenciales En varios conjuntos de ejercicios en el capítulo 3 se pide comprobar que una función dada satisface una **ecuación diferencial**. En términos generales, una ecuación diferencial es una ecuación que implica las derivadas o el diferencial de una función desconocida. Las ecuaciones diferenciales se clasifican según el **orden** de la derivada más alta que aparece en la ecuación. El objetivo consiste en *resolver* ecuaciones diferenciales. Una **ecuación diferencial de primer orden** de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{3}$$

puede resolverse usando integración indefinida. Por (1) se ve que

$$\int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = y.$$

Así, la solución de (3) es la antiderivada más general de g; es decir,

$$y = \int g(x)\, dx. \tag{4}$$

EJEMPLO 8 Resolución de una ecuación diferencial

Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(1, 2)$ y también satisfaga la ecuación diferencial $dy/dx = 3x^2 - 3$.

Solución Por (3) y (4) se concluye que si

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 \qquad \text{entonces} \qquad y = \int (3x^2 - 3)dx.$$

Es decir,

$$y = \int (3x^2 - 3)dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot x + C$$

o bien, $y = x^3 - 3x + C$. Así, cuando $x = 1$, $y = 2$, de modo que $2 = 1 - 3 + C$ o $C = 4$. Por tanto, $y = x^3 - 3x + 4$. Entonces, de la familia de antiderivadas de $3x^2 - 3$ que se muestra en la FIGURA 5.1.2, se ve que sólo hay una cuya gráfica (mostrada en rojo) que pasa por $(1, 2)$. ■

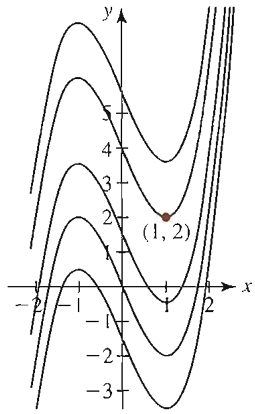


FIGURA 5.1.2 La curva roja es la gráfica de la solución del problema en el ejemplo 8

Al resolver una ecuación diferencial como $dy/dx = 3x^2 - 3$ en el ejemplo 8, la condición lateral especificada de que la gráfica pase por $(1, 2)$, es decir, $f(1) = 2$, se denomina **condición inicial**. Una condición inicial como ésta suele escribirse como $y(1) = 2$. La solución $y = x^3 - 3x + 4$ que fue determinada por la familia de soluciones $y = x^3 - 3x + C$ por la condición inicial se denomina **solución particular**. El problema de resolver (3) sujeto a una condición inicial,

$$\frac{dy}{dx} = g(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

se denomina **problema con valor inicial**.

Observamos que una ecuación diferencial de orden n-ésimo de la forma $d^n y/dx^n = g(x)$ puede resolverse al integrar n veces consecutivas la función $g(x)$. En este caso, la familia de soluciones contiene n constantes de integración.

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación diferencial

Encuentre una función $y = f(x)$ tal que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1$.

Solución La ecuación diferencial dada se integra dos veces consecutivas. Con la primera integración se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2}\, dx = \int 1 \cdot dx = x + C_1.$$

Con la segunda integración se obtiene $y = f(x)$:

$$y = \int \frac{dy}{dx}\, dx = \int (x + C_1)\, dx = \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$ ■

∫ NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, a los estudiantes se les dificulta más calcular antiderivadas que derivadas. Dos palabras de advertencia. Primero, debe tenerse mucho cuidado con el procedimiento algebraico, especialmente con las leyes de los exponentes. La segunda advertencia ya se ha planteado, aunque vale la pena repetirla: tenga en cuenta que *los resultados de la integración indefinida siempre pueden comprobarse*. En un cuestionario o en un examen vale la pena que dedique unos minutos de su valioso tiempo para comprobar su respuesta al tomar la derivada. A veces esto puede hacerse mentalmente. Por ejemplo,

integración

$$\int \boxed{x^2}\, dx = \boxed{\frac{x^3}{3} + C}$$

compruebe por diferenciación

Ejercicios 5.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-18.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe la integral indefinida dada.

1. $\int 3\, dx$

2. $\int (\pi^2 - 1)\, dx$

3. $\int x^5\, dx$

4. $\int 5x^{1/4}\, dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

6. $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

7. $\int (1 - t^{-0.52})\, dt$

8. $\int 10w\sqrt{w}\, dw$

9. $\int (3x^2 + 2x - 1)\, dx$

10. $\int \left(2\sqrt{t} - t - \frac{9}{t^2}\right) dt$

11. $\int \sqrt{x}(x^2 - 2)\, dx$

12. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{s^2}} + \frac{2}{\sqrt{s^3}}\right) ds$

13. $\int (4x + 1)^2\, dx$

14. $\int (\sqrt{x} - 1)^2\, dx$

15. $\int (4w - 1)^3\, dw$

16. $\int (5u - 1)(3u^3 + 2)\, du$

17. $\int \frac{r^2 - 10r + 4}{r^3}\, dr$

18. $\int \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

19. $\int \frac{x^{-1} - x^{-2} + x^{-3}}{x^2}\, dx$

20. $\int \frac{t^3 - 8t + 1}{(2t)^4}\, dt$

21. $\int (4 \operatorname{sen} x - 1 + 8x^{-5})\, dx$

22. $\int (-3 \cos x + 4 \sec^2 x)\, dx$

23. $\int \csc x(\csc x - \cot x)\, dx$

24. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt$

25. $\int \frac{2 + 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

26. $\int \left(40 - \frac{2}{\sec \theta}\right) d\theta$

27. $\int (8x + 1 - 9e^x)\, dx$

28. $\int (15x^{-1} - 4 \operatorname{senh} x)\, dx$

29. $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 4}{1 + x^2}\, dx$

30. $\int \frac{x^6}{1 + x^2}\, dx$

En los problemas 31 y 32, use una identidad trigonométrica para evaluar la integral indefinida dada.

31. $\int \tan^2 x\, dx$

32. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$

En los problemas 33-40, use diferenciación y la regla de la cadena para comprobar el resultado de integración dado.

33. $\int \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}\, dx = \sqrt{2x + 1} + C$

34. $\int (2x^2 - 4x)^9(x - 1)\, dx = \frac{1}{40}(2x^2 - 4x)^{10} + C$

35. $\int \cos 4x\, dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + C$

36. $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C$

37. $\int x \operatorname{sen} x^2\, dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$

38. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = -\frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x} + C$

39. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$

40. $\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C$

En los problemas 41 y 42, efectúe las operaciones indicadas.

41. $\frac{d}{dx} \int (x^2 - 4x + 5)\, dx$

42. $\int \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 5)\, dx$

En los problemas 43-48, resuelva la ecuación diferencial dada.

43. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 9$

44. $\frac{dy}{dx} = 10x + 3\sqrt{x}$

45. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$

46. $\frac{dy}{dx} = \frac{(2 + x)^2}{x^5}$

47. $\frac{dy}{dx} = 1 - 2x + \operatorname{sen} x$

48. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

49. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(2, 3)$ y que también satisfaga la ecuación diferencial $dy/dx = 2x - 1$.

50. Encuentre una función $y = f(x)$ de modo quel $dy/dx = 1/\sqrt{x}$ y $f(9) = 1$.

51. Si $f''(x) = 2x$, encuentre $f'(x)$ y $f(x)$.

52. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 6$, $f'(-1) = 2$ y $f(-1) = 0$.

53. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 12x^2 + 2$ para la cual la pendiente de la recta tangente a su gráfica en $(1, 1)$ es 3.

54. Si $f^{(n)}(x) = 0$, ¿cuál es f?

En los problemas 55 y 56, la gráfica de la función f se muestra en azul. De las gráficas de las funciones F, G y H cuyas gráficas se muestran en negro, verde y rojo, respectivamente, ¿cuál función es la gráfica de una antiderivada de f? Justifique su razonamiento.

55.

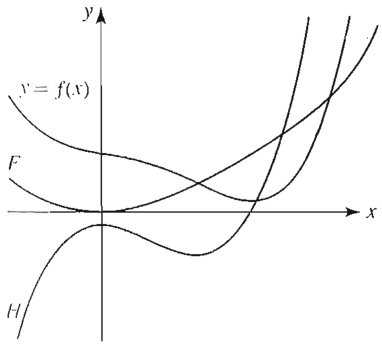


FIGURA 5.1.3 Gráficas para el problema 55

56.

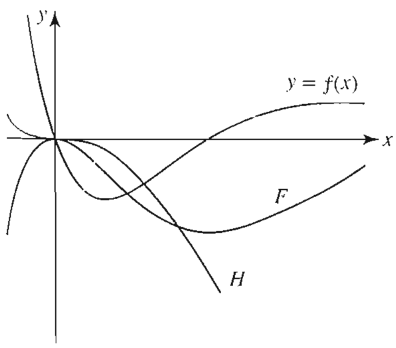


FIGURA 5.1.4 Gráficas para el problema 56

Aplicaciones

57. Un cubo que contiene un líquido gira alrededor de un eje vertical a velocidad angular constante ω. La forma de la sección transversal del líquido giratorio en el plano xy está determinada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x.$$

Con ejes de coordenadas como se muestra en la FIGURA 5.1.5, encuentre $y = f(x)$.

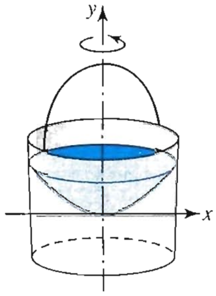


FIGURA 5.1.5 Cubo en el problema 57

58. Los extremos de una viga de longitud L están sobre dos soportes como se muestra en la FIGURA 5.1.6. Con una carga uniforme sobre la viga, su forma (o curva elástica) está determinada a partir de

$$EIy'' = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2,$$

donde E, I y q son constantes. Encuentre $y = f(x)$ si $f(0) = 0$ y $f'(L/2) = 0$.

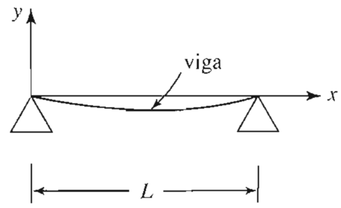


FIGURA 5.1.6 Viga en el problema 58

Piense en ello

En los problemas 59 y 60, determine f.

59. $\int f(x)\,dx = \ln|\ln x| + C$

60. $\int f(x)\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

61. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^2$ y $y = 4x + 7$ sea una recta tangente a la gráfica de f.

62. Simplifique la expresión $e^{4\int dx/x}$ tanto como sea posible.

63. Determine cuál de los dos resultados siguientes es correcto:

$$\int (x + 1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x + 1)^4 + C$$

o

$$\int (x + 1)^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C.$$

64. Dado que $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\pi x = \pi\cos\pi x$, encuentre una antiderivada F de $\cos\pi x$ que tenga la propiedad de que $F(\frac{3}{2}) = 0$.

5.2 Integración por sustitución *u*

Introducción En la última sección se analizó el hecho de que para cada fórmula para la derivada de una función hay una fórmula de antiderivada o integral indefinida correspondiente. Por ejemplo, al interpretar cada una de las funciones

$$x^n \quad (n \neq -1), \qquad x^{-1} \qquad \text{y} \qquad \cos x$$

como una antiderivada, se encuentra que la "reversa de la derivada" correspondiente es una familia de antiderivadas:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C. \tag{1}$$

Revise la sección 4.9

En la siguiente exposición se analiza la "reversa de la regla de la cadena". En este análisis, el concepto de **diferencial** de una función desempeña un papel importante. Recuerde que si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces su diferencial es $du = g'(x)\,dx$.

Se empieza con un ejemplo.

Potencia de una función Si deseamos encontrar una función F tal que

$$\int (5x+1)^{1/2}\,dx = F(x) + C,$$

debemos tener

$$F'(x) = (5x+1)^{1/2}.$$

Al razonar "hacia atrás", podemos argumentar que para obtener $(5x+1)^{1/2}$ necesitamos haber diferenciado $(5x+1)^{3/2}$. Entonces, parecería que es posible proceder como en la primera fórmula en (1); a saber: incrementar la potencia por 1 y dividir entre la nueva potencia:

$$\int (5x+1)^{1/2}\,dx = \frac{(5x+1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C. \tag{2}$$

Lamentablemente, la "respuesta" en (2) no concuerda, puesto que con la regla de la cadena, en la forma de la regla de potencias para funciones, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(5x+1)^{1/2}\cdot 5 = 5(5x+1)^{1/2} \neq (5x+1)^{1/2}. \tag{3}$$

Para tomar en cuenta el factor 5 faltante en (2) usamos el teorema 5.1.2*i*) y un poco de perspicacia:

$$\begin{aligned}
\int (5x+1)^{1/2}\,dx &= \int (5x+1)^{1/2}\boxed{\frac{1}{5}\cdot 5}\,dx \quad \leftarrow \frac{5}{5} = 1\\
&= \frac{1}{5}\int \boxed{(5x+1)^{1/2}5}\,dx \quad \leftarrow \text{derivada de } \frac{2}{3}(5x+1)^{3/2}\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C \quad \leftarrow \text{por (3)}\\
&= \frac{2}{15}(5x+1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Ahora, usted debe comprobar por diferenciación que la última función es, en efecto, una antiderivada de $(5x+1)^{1/2}$.

La clave para evaluar integrales indefinidas como

$$\int (5x+1)^{1/2}\,dx, \qquad \int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int \operatorname{sen} 10x\,dx \tag{4}$$

reside en el *reconocimiento* de que los integrandos en (4),

$$(5x+1)^{1/2}, \qquad \frac{x}{(4x^2+3)^6} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} 10x$$

son resultado de diferenciar una función compuesta por medio de la regla de la cadena. Para hacer este reconocimiento es útil realizar una sustitución en una integral indefinida.

Teorema 5.2.1 Regla de la sustitución u

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, f es una función continua sobre I y F es una antiderivada de f sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

y entonces por la definición de antiderivada tenemos

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Puesto que F es un antiderivada de f, es decir, si $F' = f$, entonces la línea precedente se vuelve

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du = \int f(u)\,du. \tag{6}$$ ■

La interpretación del resultado en (6) y su resumen en (5) es sutil. En la sección 5.1, el símbolo dx se usó simplemente como un indicador de que la integración es con respecto a la variable x. En (6) observamos que es permisible interpretar dx y du como *diferenciales*.

Uso de la sustitución u La idea básica consiste en poder reconocer una integral indefinida en una variable x (como la proporcionada en (4)) que sea la reversa de la regla de la cadena al convertirla en una integral indefinida diferente en la variable u por medio de la sustitución $u = g(x)$. Por conveniencia, a continuación se enumeran algunas directrices para evaluar $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ al efectuar una sustitución u.

Directrices para efectuar una sustitución u

i) En la integral $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ identifique las funciones $g(x)$ y $g'(x)\,dx$.
ii) Exprese la integral *totalmente* en términos del símbolo u al sustituir u y du por $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ respectivamente. En su sustitución no debe haber variables x; déjelas en la integral.
iii) Efectúe la integración con respecto a la variable u.
iv) Finalmente, vuelva a sustituir $g(x)$ por el símbolo u.

Integral indefinida de la potencia de una función La derivada de la potencia de una función era un caso especial de la regla de la cadena. Recuerde que si $F(x) = x^{n+1}/(n+1)$, donde n es un número real, $n \neq -1$ y si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$F(g(x)) = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}F(g(x)) = [g(x)]^n g'(x).$$

Entonces, por el teorema 5.2.1 de inmediato se deduce que

$$\int [g(x)]^n g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C. \tag{7}$$

En términos de sustituciones

$$u = g(x) \qquad \text{y} \qquad du = g'(x)\,dx,$$

(7) puede resumirse como sigue:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1. \tag{8}$$

En el siguiente ejemplo se evalúa la segunda de las tres integrales indefinidas en (4).

EJEMPLO 1 Uso de (8)

Evalúe $\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx$.

Solución La integral vuelve a escribirse como

$$\int (4x^2+3)^{-6}x\,dx$$

y se hace la identificación

$$u = 4x^2 + 3 \qquad \text{y} \qquad du = 8x\,dx.$$

Luego, para obtener la forma precisa $\int u^{-6}\,du$ es necesario ajustar el integrando al multiplicar y dividir entre 8:

$$\begin{aligned}
\int (4x^2+3)^{-6}x\,dx &= \frac{1}{8}\int \overbrace{(4x^2+3)^{-6}}^{u^{-6}}\overbrace{(8x\,dx)}^{du} && \leftarrow \text{sustitución}\\
&= \frac{1}{8}\int u^{-6}\,du && \leftarrow \text{ahora use (8)}\\
&= \frac{1}{8}\cdot\frac{u^{-5}}{-5} + C\\
&= -\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5} + C. && \leftarrow \text{otra sustitución}
\end{aligned}$$

Comprobación por diferenciación: Por la regla de potencias para funciones,

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5}+C\right] = \left(-\frac{1}{40}\right)(-5)(4x^2+3)^{-6}(8x) = \frac{x}{(4x^2+3)^6}. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Uso de (8)

Evalúe $\int (2x-5)^{11}\,dx$.

Solución Si $u = 2x - 5$, entonces $du = 2\,dx$. La integral se ajusta al multiplicar y dividir entre 2 para obtener la forma correcta de la diferencial du:

$$\begin{aligned}
\int (2x-5)^{11}\,dx &= \frac{1}{2}\int \overbrace{(2x-5)^{11}}^{u^{11}}\overbrace{(2\,dx)}^{du} && \leftarrow \text{sustitución}\\
&= \frac{1}{2}\int u^{11}du && \leftarrow \text{ahora use (8)}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{12}}{12} + C\\
&= \frac{1}{24}(2x-5)^{12} + C. && \leftarrow \text{otra sustitución}
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

En los ejemplos 1 y 2, el integrando se "arregló" o ajustó al multiplicar y dividir por una constante a fin de obtener la du idónea. Este procedimiento funciona bien si de inmediato se reconoce $g(x)$ en $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ y que a $g'(x)\,dx$ simplemente le falta un múltiplo constante idóneo. El siguiente ejemplo ilustra una técnica algo diferente.

EJEMPLO 3 Uso de (8)

Evalúe $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución Para recalcar, volvemos a escribir el integrando como $\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x\,dx$. Una vez que se hace la identificación $u = \cos x$, se obtiene $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Al despejar el producto $\operatorname{sen} x\,dx$ de la última diferencial obtenemos $\operatorname{sen} x\,dx = -du$. Luego,

$$\begin{aligned}\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x\, dx &= \int \overbrace{(\cos x)^4}^{u^4}\, \overbrace{(\operatorname{sen} x\, dx)}^{-du} \quad \leftarrow \text{sustitución}\\ &= -\int u^4\, du \qquad \leftarrow \text{ahora use (8)}\\ &= -\frac{u^5}{5} + C\\ &= -\frac{1}{5}\cos^5 x + C. \qquad \leftarrow \text{otra sustitución}\end{aligned}$$

De nuevo, se solicita que el lector diferencie el último resultado. ■

En los ejemplos que restan en esta sección se alternará entre los métodos empleados en los ejemplos 1 y 3.

En un nivel práctico no siempre es evidente que se está tratando con una integral de la forma $\int [g(x)]^n g'(x)\, dx$. Cuando trabaje cada vez más problemas, observará que las integrales no siempre son lo que parecen a primera vista. Por ejemplo, usted debe convencerse de que al usar sustituciones en u la integral $\int \cos^2 x\, dx$ *no* es de la forma $\int [g(x)]^n g'(x)\, dx$. En un sentido más general, en $\int f(g(x))g'(x)\, dx$ no siempre es evidente qué funciones deben escogerse como u y du.

Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces las fórmulas de diferenciación

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(-\cos u) = \operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$$

conducen, a su vez, a las fórmulas de integración

$$\int \cos u \frac{du}{dx}\, dx = \operatorname{sen} u + C \tag{9}$$

y

$$\int \operatorname{sen} u \frac{du}{dx}\, dx = -\cos u + C. \tag{10}$$

Puesto que $du = g'(x)\, dx = \dfrac{du}{dx}\, dx$, (9) y (10) son, respectivamente, equivalentes a

$$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C, \tag{11}$$

$$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C. \tag{12}$$

EJEMPLO 4 Uso de (11)

Evalúe $\displaystyle\int \cos 2x\, dx$.

Solución Si $u = 2x$, entonces $du = 2\, dx$ y $dx = \frac{1}{2}\, du$. En consecuencia, escribimos

$$\begin{aligned}\int \cos 2x\, dx &= \int \cos \overbrace{2x}^{u}\, \overbrace{(dx)}^{\frac{1}{2}du} \quad \leftarrow \text{sustitución}\\ &= \frac{1}{2}\int \cos u\, du \qquad \leftarrow \text{ahora use (11)}\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C. \qquad \leftarrow \text{otra sustitución}\end{aligned}$$

■

Las fórmulas de integración (8), (11) y (12) son los análogos de la regla de la cadena de las fórmulas de integración 2, 4 y 5 en la tabla 5.1.1. En la tabla 5.2.1 que se muestra a continuación se resumen los análogos de la regla de la cadena de las 16 fórmulas de integración de la tabla 5.1.1.

TABLA 5.2.1

Fórmulas de integración

1. $\int du = u + C$	**2.** $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{1}{u}\, du = \ln\lvert u\rvert + C$	**4.** $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$
5. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$	**6.** $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$
7. $\int \csc^2 du = -\cot u + C$	**8.** $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$
9. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$	**10.** $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \operatorname{sen}^{-1} u + C$
11. $\int \frac{1}{1+u^2}\, du = \tan^{-1} u + C$	**12.** $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\, du = \sec^{-1}\lvert u\rvert + C$
13. $\int b^u\, du = \frac{b^u}{\ln b} + C$	**14.** $\int e^u\, du = e^u + C$
15. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$	**16.** $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

En otros libros de texto, fórmulas como 3, 10, 11 y 12 en la tabla 5.2.1 suelen escribirse con el diferencial du como numerador:

$$\int \frac{du}{u}, \qquad \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad \int \frac{du}{1+u^2}, \qquad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}.$$

Pero como a lo largo del tiempo hemos encontrado que estas últimas fórmulas a menudo se malinterpretan en un entorno de aula, aquí se prefieren las formas proporcionadas en la tabla.

EJEMPLO 5 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \sec^2(1-4x)\, dx$.

Solución Reconocemos que la integral indefinida tiene la forma de la fórmula de integración 6 en la tabla 5.2.1. Si $u = 1 - 4x$, entonces $du = -4\, dx$. Ajustar el integrando para obtener la forma correcta de la diferencial requiere multiplicar y dividir entre -4:

$$\begin{aligned}\int \sec^2(1-4x)\, dx &= -\frac{1}{4}\int \sec^2(\overbrace{1-4x}^{u})(\overbrace{-4\, dx}^{du})\\ &= -\frac{1}{4}\int \sec^2 u\, du \quad \leftarrow \text{fórmula 6 en la tabla 5.2.1}\\ &= -\frac{1}{4}\tan u + C\\ &= -\frac{1}{4}\tan(1-4x) + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx$.

Solución Si $u = x^3 + 5$, entonces $du = 3x^2\,dx$ y $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx &= \int \frac{1}{x^3+5}(x^2\,dx)\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{1}{3}\ln|u| + C \quad \leftarrow \text{fórmula 3 en la tabla 5.2.1}\\ &= \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 Vuelta a escribir y uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx$.

Solución La integral dada no se ve como ninguna de las fórmulas de integración en la tabla 5.2.1. No obstante, si el numerador y el denominador se multiplican por e^{2x}, obtenemos

$$\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Si $u = e^{2x} + 1$, entonces $du = 2e^{2x}\,dx$, de modo que por la fórmula 3 de la tabla 5.2.1,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{2x}+1}(2e^{2x}\,dx)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C.\end{aligned}$$

Observe que el símbolo de valor absoluto puede eliminarse porque $e^{2x} + 1 > 0$ para todos los valores de x. ■

EJEMPLO 8 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int e^{5x}\,dx$.

Solución Sea $u = 5x$ de modo que $du = 5\,dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int e^{5x}\,dx &= \frac{1}{5}\int e^{5x}(5\,dx)\\ &= \frac{1}{5}\int e^{u}\,du \quad \leftarrow \text{fórmula 14 en la tabla 5.2.1}\\ &= \frac{1}{5}e^{u} + C\\ &= \frac{1}{5}e^{5x} + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 9 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\,dx$.

Solución Si hacemos $u = 4/x$, entonces $du = (-4/x^2)\,dx$ y $(1/x^2)\,dx = -\frac{1}{4}\,du$.

De nuevo a partir de la fórmula 14 de la tabla 5.2.1 observamos que

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\,dx &= \int e^{4/x}\left(\frac{1}{x^2}\,dx\right)\\ &= \int e^u\left(-\frac{1}{4}\,du\right)\\ &= -\frac{1}{4}\int e^u\,du\\ &= -\frac{1}{4}e^u + C\\ &= -\frac{1}{4}e^{4/x} + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 10 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\displaystyle\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx.$

Solución Como en el ejemplo 7, a primera vista la integral dada no se ve como ninguna de las fórmulas en la tabla 5.2.1. Pero si la sustitución u se intenta con $u = \tan^{-1} x$ y $du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$, entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx &= \int \overbrace{(\tan^{-1}x)}^{u}{}^2\, \overbrace{\frac{1}{1+x^2}\,dx}^{du}\\ &= \int u^2\,du \quad \leftarrow \text{fórmula 2 en la tabla 5.2.1}\\ &= \frac{u^3}{3} + C\\ &= \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3 + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 11 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx.$

Solución Al factorizar 100 del radical e identificar $u = \dfrac{1}{10}x$ y $du = \dfrac{1}{10}\,dx$, el resultado se obtiene a partir de la fórmula 10 de la tabla 5.2.1:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{100-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{10}\right)^2}}\left(\frac{1}{10}\,dx\right)\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du\\ &= \operatorname{sen}^{-1}u + C\\ &= \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{10} + C.\end{aligned}$$

■

Tres fórmulas alternas Por razones de conveniencia, las fórmulas de integración 10, 11 y 12 en la tabla 5.2.1 se extienden como sigue. Para $a > 0$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C. \tag{15}$$

Para adquirir práctica, compruebe estos resultados por diferenciación. Observe que la integral indefinida en el ejemplo 11 puede evaluarse rápidamente al identificar $u = x$ y $a = 10$ en (13).

Integrales trigonométricas especiales Las fórmulas de integración que se proporcionan en seguida, que relacionan algunas funciones trigonométricas con el logaritmo natural, a menudo ocurren en la práctica, por lo que merecen atención especial:

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C \tag{16}$$

$$\int \cot x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C \tag{17}$$

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{18}$$

$$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C. \tag{19}$$

En tablas de fórmulas de integrales a menudo observamos (16) escrita como $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$. Por las propiedades de los logaritmos $-\ln|\cos x| = \ln|\cos x|^{-1} = \ln|\sec x|$.

Para encontrar (16) escribimos

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx \tag{20}$$

y se identifica $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, de modo que

$$\begin{aligned}
\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx &= -\int \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= -\int \frac{1}{u}\, du \\
&= -\ln|u| + C \\
&= -\ln|\cos x| + C.
\end{aligned}$$

Para obtener (18) escribimos

$$\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \sec x\, \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx \\
&= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx.
\end{aligned}$$

Si hacemos $u = \sec x + \tan x$, entonces $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx$ y así,

$$\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \frac{1}{\sec x + \tan x}(\sec^2 x + \sec x \tan x)\, dx \\
&= \int \frac{1}{u}\, du \\
&= \ln|u| + C \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C.
\end{aligned}$$

También, cada una de las fórmulas (16)-(19) podemos escribirlas en una forma general:

$$\int \tan u\, dx = -\ln|\cos u| + C \tag{21}$$

$$\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C \tag{22}$$

$$\int \sec u\, dx = \ln|\sec u + \tan u| + C \tag{23}$$

$$\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C. \tag{24}$$

Identidades útiles Cuando se trabaja con funciones trigonométricas, a menudo es necesario usar una identidad trigonométrica para resolver un problema. Las fórmulas de la mitad de un ángulo para el coseno y el seno en la forma

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{25}$$

son particularmente útiles en problemas que requieren antiderivadas de $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$.

EJEMPLO 12 Uso de la fórmula de la mitad de un ángulo

Evalúe $\int \cos^2 x\, dx$.

Solución Es necesario comprobar que la integral *no* es de la forma $\int u^2\, du$. Luego, al usar la fórmula de la mitad de un ángulo $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x(2\, dx)\right] \leftarrow \text{vea el ejemplo 4} \\ &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.\end{aligned}$$

Por supuesto, el método ilustrado en el ejemplo 12 funciona igualmente bien para encontrar antiderivadas como $\int \cos^2 5x\, dx$ y $\int \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x\, dx$. Con x sustituida por $5x$ y luego con x sustituida por $\frac{1}{2}x$, las fórmulas en (25) permiten escribir, respectivamente,

$$\int \cos^2 5x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 10x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 10x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C.$$

En la sección 7.4 abordaremos antiderivadas de potencias más complicadas de funciones trigonométricas.

$\int$ NOTAS DESDE EL AULA

El siguiente ejemplo ilustra un procedimiento común, pero *totalmente incorrecto*, para evaluar una integral indefinida. Ya que $2x/2x = 1$,

$$\begin{aligned}\int (4 + x^2)^{1/2}\, dx &= \int (4 + x^2)^{1/2}\frac{2x}{2x}\, dx \\ &= \frac{1}{2x}\int (4 + x^2)^{1/2} 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2x}\int u^{1/2}\, du \\ &= \frac{1}{2x}\cdot\frac{2}{3}(4 + x^2)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Usted debe comprobar que la diferenciación de la última función *no* produce $(4 + x^2)^{1/2}$. El error está en la primera línea de la "solución". Las variables, en este caso $2x$, no pueden sacarse del símbolo de la integral. Si $u = x^2 + 4$, entonces al integrando le falta la función $du = 2x\, dx$; de hecho, no hay ninguna forma de arreglar el problema para adecuarse a la forma dada en (8). Con las "herramientas" con que contamos en este momento, simplemente no es posible evaluar la integral $\int (4 + x^2)^{1/2}\, dx$.

Ejercicios 5.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-18.

Fundamentos

En los problemas 1-50, evalúe la integral indefinida dada usando una sustitución u idónea.

1. $\int \sqrt{1-4x}\,dx$
2. $\int (8x+2)^{1/3}\,dx$
3. $\int \frac{1}{(5x+1)^3}\,dx$
4. $\int (7-x)^{49}\,dx$
5. $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$
6. $\int \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+9}}\,dt$
7. $\int \operatorname{sen}^5 3x \cos 3x\,dx$
8. $\int \operatorname{sen} 2\theta \cos^4 2\theta\,d\theta$
9. $\int \tan^2 2x \sec^2 2x\,dx$
10. $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$
11. $\int \operatorname{sen} 4x\,dx$
12. $\int 5\cos\frac{x}{2}\,dx$
13. $\int \left(\sqrt{2t}-\cos 6t\right)dt$
14. $\int \operatorname{sen}(2-3x)\,dx$
15. $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx$
16. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$
17. $\int x^2\sec^2 x^3\,dx$
18. $\int \csc^2(0.1x)\,dx$
19. $\int \frac{\csc\sqrt{x}\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
20. $\int \tan 5v \sec 5v\,dv$
21. $\int \frac{1}{7x+3}\,dx$
22. $\int (5x+6)^{-1}\,dx$
23. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
24. $\int \frac{x^2}{5x^3+8}\,dx$
25. $\int \frac{x}{x+1}\,dx$
26. $\int \frac{(x+3)^2}{x+2}\,dx$
27. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$
28. $\int \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\theta+\cos\theta}\,d\theta$
29. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$
30. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$
31. $\int e^{10x}\,dx$
32. $\int \frac{1}{e^{4x}}\,dx$
33. $\int x^2 e^{-2x^3}\,dx$
34. $\int \frac{e^{1/x^3}}{x^4}\,dx$
35. $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
36. $\int \sqrt{e^x}\,dx$
37. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$
38. $\int e^{3x}\sqrt{1+2e^{3x}}\,dx$
39. $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$
40. $\int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}\,dx$
41. $\int \frac{1}{1+25x^2}\,dx$
42. $\int \frac{1}{2+9x^2}\,dx$
43. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$
44. $\int \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^4}}\,d\theta$
45. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
46. $\int \frac{x-8}{x^2+2}\,dx$
47. $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$
48. $\int \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{1-x^2}}\,dx$
49. $\int \tan 5x\,dx$
50. $\int e^x \cot e^x\,dx$

En los problemas 51-56, use las identidades en (25) para evaluar la integral indefinida dada.

51. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$
52. $\int \cos^2 \pi x\,dx$
53. $\int \cos^2 4x\,dx$
54. $\int \operatorname{sen}^2\frac{3}{2}x\,dx$
55. $\int (3-2\operatorname{sen} x)^2\,dx$
56. $\int (1+\cos 2x)^2\,dx$

En los problemas 57 y 58, resuelva la ecuación diferencial dada.

57. $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{1-x}$
58. $\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\tan x)^5}{\cos^2 x}$
59. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(\pi, -1)$ y también satisfaga $dy/dx = 1 - 6\operatorname{sen} 3x$.
60. Encuentre una función f tal que $f''(x) = (1+2x)^5$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$.
61. Demuestre que:
    a) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C_1$
    b) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2$
    c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_3$.
62. En el problema 61:
    a) Compruebe que la derivada de cada respuesta en los incisos *a*), *b*) y *c*) es sen x cos x.
    b) Use una identidad trigonométrica para demostrar que el resultado en el inciso *b*) puede obtenerse a partir de la respuesta en el inciso *a*).
    c) Sume los resultados de los incisos *a*) y *b*) para obtener el resultado en el inciso *c*).

Aplicaciones

63. Considere el péndulo plano mostrado en la FIGURA 5.2.1, que oscila entre los puntos A y C. Si B es el punto medio entre A y C, es posible demostrar que

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{L}{g\left(s_C^2 - s^2\right)}},$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad.

a) Si $t(0) = 0$, demuestre que el tiempo necesario para que el péndulo vaya de B a P es

$$t(s) = \sqrt{\frac{L}{g}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{s}{s_C}\right).$$

b) Use el resultado del inciso *a*) para determinar el tiempo de recorrido de B a C.

c) Use *b*) para determinar el periodo T del péndulo; es decir, el tiempo para hacer una oscilación de A a C y de regreso a A.

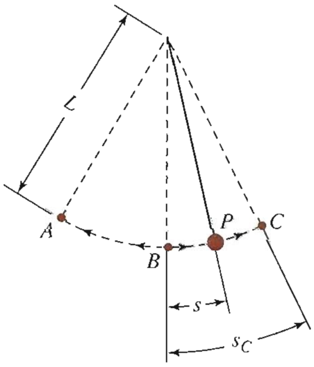


FIGURA 5.2.1 Péndulo en el problema 63

Piense en ello

64. Encuentre una función $y = f(x)$ para la cual $f(\pi/2) = 0$ y $\dfrac{dy}{dx} = \cos^3 x$. [*Sugerencia*: $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x$.]

En los problemas 65 y 66, use las identidades en (25) para evaluar la integral indefinida dada.

65. $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$ **66.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

En los problemas 67 y 68, evalúe la integral indefinida dada.

67. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 - 16}}\,dx$ **68.** $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\,dx$

En los problemas 69 y 70, evalúe la integral indefinida dada.

69. $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \cos x}\,dx$ **70.** $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} 2x}\,dx$

En los problemas 71-74, evalúe la integral indefinida dada. Suponga que f es una función diferenciable.

71. $\displaystyle\int f'(8x)\,dx$ **72.** $\displaystyle\int xf'(5x^2)\,dx$

73. $\displaystyle\int \sqrt{f(2x)}f'(2x)\,dx$ **74.** $\displaystyle\int \frac{f'(3x + 1)}{f(3x + 1)}\,dx$

75. Evalúe $\displaystyle\int f''(4x)\,dx$ si $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$.

76. Evalúe $\displaystyle\int \left\{\int \sec^2 3x\,dx\right\} dx$.

5.3 El problema de área

Introducción Así como la derivada es motivada por el problema geométrico de construir una tangente a una curva, el problema histórico que conduce a la definición de integral definida es el problema de encontrar un área. En específico, tenemos interés en la siguiente versión de este problema:

- Encontrar el área A de una región acotada por el eje x y la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$.

El área de esta región se denomina **área bajo la gráfica** de f sobre el intervalo $[a, b]$. El requerimiento de que f sea no negativa sobre $[a, b]$ significa que ninguna parte de esta gráfica sobre el intervalo está por abajo del eje x. Vea la FIGURA 5.3.1.

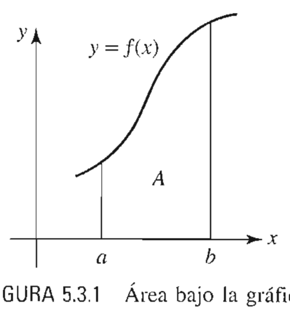


FIGURA 5.3.1 Área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$

Antes de continuar con la solución del problema de área es necesario hacer una breve digresión para analizar una notación útil para una suma de números como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \qquad \text{y} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Notación sigma Sea a_k un número real que depende de un entero k. La suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ se denota por el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$; esto es,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \tag{1}$$

Puesto que Σ es la letra griega mayúscula *sigma*, (1) se denomina **notación sigma** o **notación de suma**. La variable k se denomina **índice de la suma**. Así,

termina con este valor de k

$\downarrow$

el símbolo Σ indica la suma de a_k $\longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$

$\uparrow$

empieza con el valor indicado de k

es la suma de todos los números de la forma a_k cuando k asume los valores sucesivos $k = 1$, $k = 2, \ldots,$ y termina con $k = n$.

EJEMPLO 1 Uso de la notación sigma

La suma de los diez primeros enteros pares

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 18 + 20$$

puede escribirse de manera abreviada como $\sum_{k=1}^{10} 2k$. La suma de los diez enteros positivos impares

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 17 + 19$$

puede escribirse como $\sum_{k=1}^{10}(2k - 1)$. ■

El índice de la suma no necesita empezar en el valor $k = 1$; por ejemplo,

$$\sum_{k=3}^{5} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

Observe que la suma de los diez enteros positivos impares en el ejemplo 1 también puede escribirse como $\sum_{k=0}^{9}(2k + 1)$. Sin embargo, en un análisis general siempre se supone que el índice de la suma empieza en $k = 1$. Esta suposición responde más a razones de conveniencia que de necesidad. El índice de la suma a menudo se denomina **variable ficticia**, puesto que el símbolo en sí carece de importancia; lo que importa son los valores enteros sucesivos del índice y la suma correspondiente. En general,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m.$$

Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{10} 4^k = \sum_{i=1}^{10} 4^i = \sum_{j=1}^{10} 4^j = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{10}.$$

Propiedades A continuación se presenta una lista de algunas propiedades importantes de la notación sigma.

Teorema 5.3.1 Propiedades de la notación sigma

Para enteros positivos m y n,

i) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$, donde c es cualquier constante

ii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

iii) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$, $m < n$.

La demostración de la fórmula *i)* es una consecuencia inmediata de la ley distributiva. Por supuesto, *ii)* del teorema 5.3.1 se cumple para la suma de más de tres términos; por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Fórmulas de sumas especiales Para tipos especiales de sumas indicadas, particularmente sumas que implican potencias de enteros positivos del índice de la suma (como sumas de enteros positivos consecutivos, cuadrados sucesivos, cubos sucesivos, etc.) es posible encontrar una fórmula que proporcione el valor numérico verdadero de la suma. Para efectos de esta sección, centraremos la atención en las cuatro fórmulas siguientes.

Teorema 5.3.2 Fórmulas de sumas

Para n un entero positivo y c cualquier constante,

i) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ *ii)* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

iii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *iv)* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Las fórmulas *i)* y *ii)* pueden justificarse fácilmente. Si c es una constante, es decir, independiente del índice de la suma, entonces $\sum_{k=1}^{n} c$ significa $c + c + c + \cdots + c$. Puesto que hay n c, tenemos $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$, que es *i)* del teorema 5.3.2. Luego, la suma de los n primeros enteros positivos puede escribirse como $\sum_{k=1}^{n} k$. Si esta suma se denota por la letra S, entonces

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n. \tag{2}$$

En forma equivalente, $S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1.$ (3)

Si sumamos (2) y (3) con los primeros términos correspondientes, luego los segundos términos, y así sucesivamente, entonces

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ términos de } n+1} = n(n+1).$$

Al despejar S obtenemos $S = n(n+1)/2$, que es *ii)*. Usted debe poder obtener las fórmulas *iii)* y *iv)* con las sugerencias que se proporcionan en los problemas 55 y 56 en los ejercicios 5.3.

EJEMPLO 2 Uso de fórmulas de suma

Encuentre el valor numérico de $\sum_{k=1}^{20} (k+5)^2$.

Solución Al desarrollar $(k+5)^2$ y usar *i*) y *ii*) del teorema 5.3.1, podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{20}(k+5)^2 = \sum_{k=1}^{20}(k^2+10k+25) \quad \leftarrow \text{se eleva al cuadrado el binomio}$$
$$= \sum_{k=1}^{20}k^2 + 10\sum_{k=1}^{20}k + \sum_{k=1}^{20}25. \quad \leftarrow i) \text{ y } ii) \text{ del teorema 5.3.1}$$

Con la identificación $n = 20$, por las fórmulas de sumas *iii*), *ii*) y *i*) del teorema 5.3.2, respectivamente, se concluye

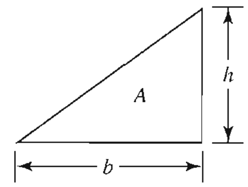
$$\sum_{k=1}^{20}(k+5)^2 = \frac{20(21)(41)}{6} + 10\frac{20(21)}{2} + 20\cdot 25 = 5\,470.$$ ■

La notación sigma y las fórmulas de sumas anteriores se usarán de inmediato en el siguiente análisis.

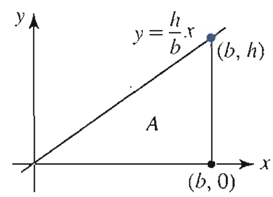
Área de un triángulo Suponga por el momento que no se conoce ninguna fórmula para calcular el área A del triángulo rectángulo proporcionado en la FIGURA 5.3.2*a*). Al superponer un sistema rectangular de coordenadas sobre el triángulo, como se muestra en la figura 5.3.2*b*), se ve que el problema es el mismo que encontrar el área en el primer cuadrante acotada por las líneas rectas $y = (h/b)x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = b$. En otras palabras, deseamos encontrar el área bajo la gráfica de $y = (h/b)x$ sobre el intervalo $[0, b]$.

Al usar rectángulos, la FIGURA 5.3.3 indica tres formas diferentes de *aproximar* el área A. Por conveniencia, seguiremos con mayor detalle el procedimiento sugerido en la figura 5.3.3*b*). Empezamos al dividir el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = b/n$. Si el punto fronterizo derecho de estos intervalos se denota por x_k^*, entonces

$$x_1^* = \Delta x = \frac{b}{n}$$
$$x_2^* = 2\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right)$$
$$x_3^* = 3\Delta x = 3\left(\frac{b}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n^* = n\Delta x = n\left(\frac{b}{n}\right) = b.$$



a) Triángulo rectángulo



b) Triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas

FIGURA 5.3.2 Encuentre el área A del triángulo rectángulo

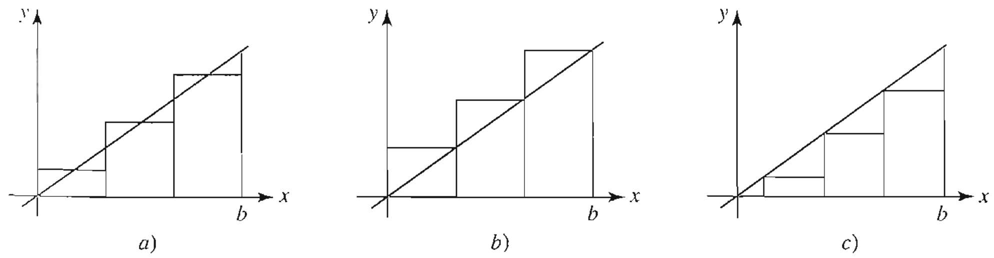
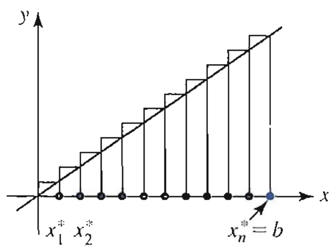


FIGURA 5.3.3 Aproximación del área A usando tres rectángulos



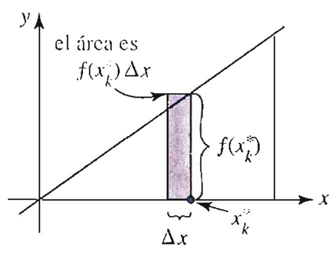
a) n rectángulos

Como se muestra en la FIGURA 5.3.4*a*), ahora construimos un rectángulo de longitud $f(x_k^*)$ y ancho Δx sobre cada uno de estos n subintervalos. Puesto que el área de un rectángulo es *largo* × *ancho*, el área de cada rectángulo es $f(x_k^*)\Delta x$. Vea la figura 5.3.4*b*). La suma de las áreas de los n rectángulos es una aproximación al número A. Escribimos

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

o en notación sigma,

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \tag{4}$$



b) Área de un rectángulo general

FIGURA 5.3.4 El área A del triángulo es aproximada por la suma de las áreas de n rectángulos

Parece válido que reduzcamos el error introducido por este método de aproximación (el área de cada rectángulo es mayor que el área bajo la gráfica sobre un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$) al dividir el intervalo $[0, b]$ en subdivisiones más finas. En otras palabras, esperamos que una mejor aproximación a A pueda obtenerse usando más y más rectángulos ($n \to \infty$) de anchos decrecientes ($\Delta x \to 0$). Luego,

$$f(x) = \frac{h}{b}x, \quad x_k^* = k\left(\frac{b}{n}\right), \quad f(x_k^*) = \frac{h}{n}\cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b}{n},$$

de modo que con ayuda de la fórmula de suma *ii*) del teorema 5.3.2, (4) se vuelve

$$A \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{n}\cdot k\right)\frac{b}{n} = \frac{bh}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{bh}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Finalmente, al hacer $n \to \infty$ en el miembro derecho de (5), obtenemos la fórmula conocida para el área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2}bh \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}bh.$$

El problema general Ahora pasaremos del ejemplo precedente específico al problema general de encontrar el área A bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ que es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Como se muestra en la FIGURA 5.3.5*a*), también suponemos que $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$. Como sugiere la figura 5.3.5*b*), el área A puede aproximarse al sumar las áreas de n rectángulos que se construyen sobre el intervalo. A continuación se resume un procedimiento posible para determinar A:

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervaloss $[x_{k-1}, x_k]$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

  de modo que cada subintervalo tiene el mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Esta colección de números se denomina **partición regular** del intervalo $[a, b]$.

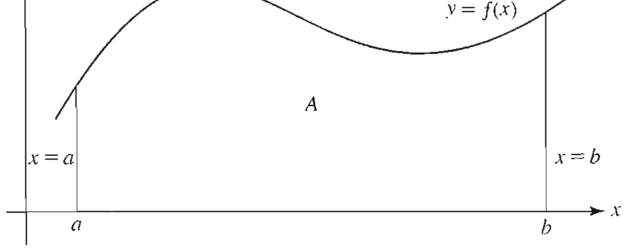
- Escoja un número x_k^* en cada uno de los n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ y forme los n productos $f(x_k^*)\Delta x$. Puesto que el área de un rectángulo es largo × ancho, $f(x_k^*)\Delta x$ es el área del rectángulo de largo $f(x_k^*)$ y ancho Δx construido sobre el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra**.

- La suma de las áreas de los n rectángulos

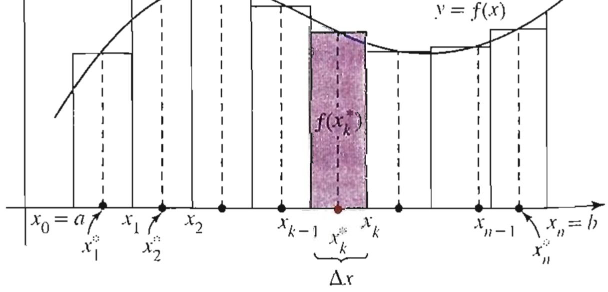
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

  representa una aproximación al valor del área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$.

Con estas notas preliminares, ahora ya es posible definir el concepto de área bajo una gráfica.



a) Área A bajo la gráfica



b) n rectángulos

FIGURA 5.3.5 Encuentre el área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$

Definición 5.3.1 Área bajo una gráfica

Sea f continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. El **área A bajo la gráfica** de f sobre el intervalo se define como

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \qquad (6)$$

Es posible demostrar que cuando f es *continua*, el límite en (6) siempre existe sin importar el método usado para dividir $[a, b]$ en subintervalos; es decir, los subintervalos pueden tomarse o no de modo que su ancho sea el mismo, y los puntos x_k^* pueden escogerse en forma arbitraria en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. No obstante, si los subintervalos no tienen el mismo ancho, entonces en (6) es necesario un tipo diferente de límite. Necesitamos sustituir $n \to \infty$ por el requerimiento de que la longitud del subintervalo más ancho tienda a cero.

Una forma práctica de (6) Para usar (6), suponga que escogemos x_k^* como se hizo en el análisis de la figura 5.3.4; a saber: sea x_k^* el **punto fronterizo derecho** de cada subintervalo. Puesto que el ancho de cada uno de los n subintervalos de igual ancho es $\Delta x = (b - a)/n$, tenemos

$$x_k^* = a + k\Delta x = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Luego, para $k = 1, 2, \ldots, n$ tenemos

$$\begin{aligned} x_1^* &= a + \Delta x = a + \frac{b-a}{n} \\ x_2^* &= a + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ x_3^* &= a + 3\Delta x = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &\vdots \\ x_n^* &= a + n\Delta x = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b. \end{aligned}$$

Al sustituir $a + k(b - a)/n$ por x_k^* y $(b - a)/n$ por Δx en (6), se concluye que el área A también está dada por

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}. \qquad (7)$$

Observamos que puesto que $\Delta x = (b - a)/n$, $n \to \infty$ implica $\Delta x \to 0$.

EJEMPLO 3 Área usando (7)

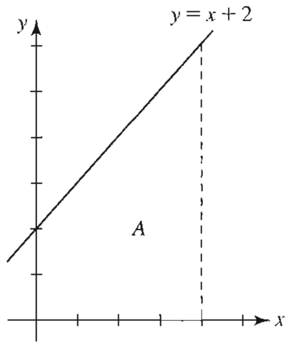
Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = x + 2$ sobre el intervalo $[0, 4]$.

Solución El área está acotada por el trapezoide indicado en la FIGURA 5.3.6*a*). Al identificar $a = 0$ y $b = 4$, encontramos

$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}.$$

Así, (7) se vuelve

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k}{n} + 2\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1\right]. \quad \leftarrow \text{por las propiedades } i) \text{ y } ii) \text{ del teorema 5.3.1} \end{aligned}$$



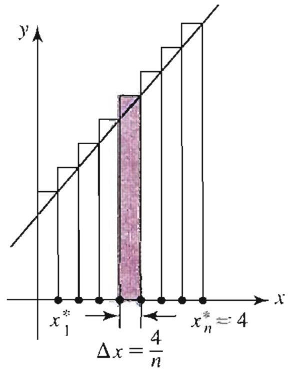


FIGURA 5.3.6 Área bajo la gráfica en el ejemplo 3

Luego, por las fórmulas de suma *i*) y *ii*) del teorema 5.3.2, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 2n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{16}{2}\frac{n(n+1)}{n^2} + 8\right] \qquad \leftarrow \text{se divide entre } n^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[8\left(1+\frac{1}{n}\right)+8\right] \\ &= 8\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) + 8\lim_{n\to\infty} 1 \\ &= 8 + 8 = 16 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

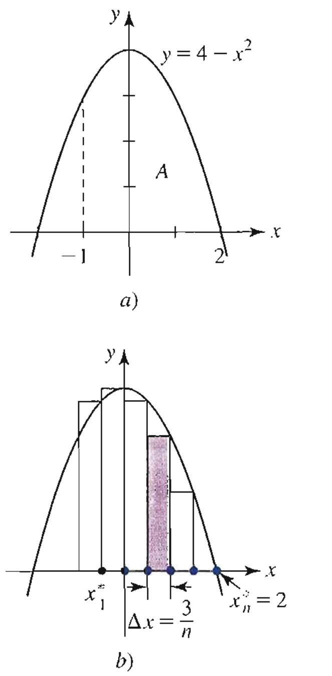


FIGURA 5.3.7 Área bajo la gráfica en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Área usando (7)

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

Solución El área se indica en la FIGURA 5.3.7*a*). Puesto que $a = -1$ y $b = 2$, se concluye que

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}.$$

A continuación se revisarán los pasos que llevan a (7). El ancho de cada rectángulo está dado por $\Delta x = (2 - (-1))/n = 3/n$. Luego, empezando en $x = -1$, el punto fronterizo derecho de los n subintervalos es

$$\begin{aligned} x_1^* &= -1 + \frac{3}{n} \\ x_2^* &= -1 + 2\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{6}{n} \\ x_3^* &= -1 + 3\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{9}{n} \\ &\vdots \\ x_n^* &= -1 + n\left(\frac{3}{n}\right) = 2. \end{aligned}$$

Entonces, la longitud de cada rectángulo es

$$\begin{aligned} f(x_1^*) &= f\left(-1+\frac{3}{n}\right) = 4 - \left[-1+\frac{3}{n}\right]^2 \\ f(x_2^*) &= f\left(-1+\frac{6}{n}\right) = 4 - \left[-1+\frac{6}{n}\right]^2 \\ f(x_3^*) &= f\left(-1+\frac{9}{n}\right) = 4 - \left[-1+\frac{9}{n}\right]^2 \\ &\vdots \\ f(x_n^*) &= f\left(-1+\frac{3n}{n}\right) = f(2) = 4 - (2)^2 = 0. \end{aligned}$$

El área del k-ésimo rectángulo es *largo* × *ancho*:

$$f(x_k^*)\frac{3}{n} = \left(4 - \left[-1 + k\frac{3}{n}\right]^2\right)\frac{3}{n} = \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{3}{n}.$$

Al sumar las áreas de los n rectángulos obtenemos una aproximación al área bajo la gráfica sobre el intervalo: $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(3/n)$. A medida que el número n de rectángulos crece sin límite, obtenemos

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{3}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} 3 + \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right].$$

Al usar las fórmulas de sumas *i*), *ii*) y *iii*) del teorema 5.3.2 obtenemos

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[3n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= 9 + 9 - 9 = 9 \text{ unidades cuadradas.}$$ ■

Otras elecciones para x_k^* No hay nada en especial si x_k^* se escoge como el punto fronterizo derecho de cada subintervalo. Volvemos a recalcar que x_k^* puede tomarse como cualquier número conveniente en $[x_{k-1}, x_k]$. En caso de que se elija x_k^* como el **punto fronterizo izquierdo** de cada subintervalo, entonces

$$x_k^* = a + (k-1)\Delta x = a + (k-1)\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

y (7) se volvería

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}. \tag{8}$$

En el ejemplo 4, los rectángulos correspondientes serían como se observa en la FIGURA 5.3.8. En este caso se hubiera tenido $x_k^* = -1 + (k-1)(3/n)$. En los problemas 45 y 46 de los ejercicios 5.3 se le pide resolver el problema de área en el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como primer punto fronterizo izquierdo y punto medio de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Al elegir x_k^* como el punto medio de cada $[x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$x_k^* = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{9}$$

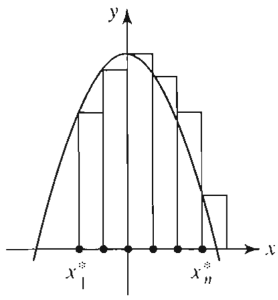


FIGURA 5.3.8 Rectángulos usando los puntos fronterizos izquierdos de los intervalos

Ejercicios 5.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-18.

Fundamentos

En los problemas 1-10, desarrolle la suma indicada.

1. $\sum_{k=1}^{5} 3k$
2. $\sum_{k=1}^{5} (2k-3)$
3. $\sum_{k=1}^{4} \frac{2^k}{k}$
4. $\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{3}{10}\right)^k$
5. $\sum_{k=1}^{10}\frac{(-1)^k}{2k+5}$
6. $\sum_{k=1}^{10}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$
7. $\sum_{j=2}^{5}(j^2 - 2j)$
8. $\sum_{m=0}^{4}(m+1)^2$
9. $\sum_{k=1}^{5}\cos k\pi$
10. $\sum_{k=1}^{5}\frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k}$

En los problemas 11-20, use notación sigma para escribir la suma dada.

11. $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$
12. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$
13. $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 37$
14. $2 + 6 + 10 + 14 + \cdots + 38$
15. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
16. $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6}$
17. $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$
18. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \cdots + 3$
19. $\cos\frac{\pi}{p}x - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{p}x + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi}{p}x - \frac{1}{16}\cos\frac{4\pi}{p}x$
20. $f'(1)(x-1) - \frac{f''(1)}{3}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{5}(x-1)^3 - \frac{f^{(4)}(1)}{7}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{9}(x-1)^5$

En los problemas 21-28, encuentre el valor numérico de la suma dada.

21. $\sum_{k=1}^{20} 2k$
22. $\sum_{k=0}^{50}(-3k)$

23. $\sum_{k=1}^{10}(k+1)$

24. $\sum_{k=1}^{1\,000}(2k-1)$

25. $\sum_{k=1}^{6}(k^2+3)$

26. $\sum_{k=1}^{5}(6k^2-k)$

27. $\sum_{p=0}^{10}(p^3+4)$

28. $\sum_{i=1}^{10}(2i^3-5i+3)$

En los problemas 29-42, use (7) y el teorema 5.3.2 para encontrar el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado.

29. $f(x)=x,\quad [0,6]$

30. $f(x)=2x,\quad [1,3]$

31. $f(x)=2x+1,\quad [1,5]$

32. $f(x)=3x-6,\quad [2,4]$

33. $f(x)=x^2,\quad [0,2]$

34. $f(x)=x^2,\quad [-2,1]$

35. $f(x)=1-x^2,\quad [-1,1]$

36. $f(x)=2x^2+3,\quad [-3,-1]$

37. $f(x)=x^2+2x,\quad [1,2]$

38. $f(x)=(x-1)^2,\quad [0,2]$

39. $f(x)=x^3,\quad [0,1]$

40. $f(x)=x^3-3x^2+4,\quad [0,2]$

41. $f(x)=\begin{cases}2, & 0\le x<1\\ x+1, & 1\le x\le 4\end{cases}$

42. $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\le x<1\\ x+2, & 1\le x\le 3\end{cases}$

43. Trace la gráfica de $y=1/x$ sobre el intervalo $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$. Al dividir el intervalo en cuatro subintervalos del mismo ancho, construya rectángulos que aproximen el área A bajo la gráfica sobre el intervalo. Primero use el punto fronterizo derecho de cada subintervalo, y luego use el punto fronterizo izquierdo.

44. Repita el problema 43 para $y=\cos x$ sobre el intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$.

45. Vuelva a trabajar el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como el punto fronterizo izquierdo de cada subintervalo. Vea (8).

46. Vuelva a trabajar el ejemplo 4 escogiendo x_k^* como el punto medio de cada subintervalo. Vea (9).

En los problemas 47 y 48, dibuje la región cuya área A está dada por la fórmula. No intente evaluar.

47. $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4-\frac{4k^2}{n^2}}\,\frac{2}{n}$

48. $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$

≡ Piense en ello

En los problemas 49 y 50, escriba el número decimal dado usando notación sigma.

49. 0.11111111

50. 0.3737373737

51. Use la fórmula de suma *iii*) del teorema 5.3.2 para encontrar el valor numérico de $\sum_{k=21}^{60}k^2$.

52. Escriba la suma $8+7+8+9+10+11+12$ usando notación sigma de modo que el índice de la suma empiece con $k=0$. Con $k=1$. Con $k=2$.

53. Despeje $\bar{x}$: $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2=0$.

54. *a*) Encuentre el valor de $\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]$. Se dice que una suma de esta forma es **telescópica**.

b) Use el inciso *a*) para encontrar el valor numérico de

$$\sum_{k=1}^{400}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right).$$

55. *a*) Use el inciso *a*) del problema 54 para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-k^2]=-1+(n+1)^2=n^2+2n.$$

b) Use el hecho de que $(k+1)^2-k^2=2k+1$ para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-k^2]=n+2\sum_{k=1}^{n}k.$$

c) Compare los resultados de los incisos *a*) y *b*) para obtener la fórmula de suma *iii*) del teorema 5.3.2.

56. Muestre cómo el patrón ilustrado en la FIGURA 5.3.9 puede usarse para inferir la fórmula de suma *iv*) del teorema 5.3.2.

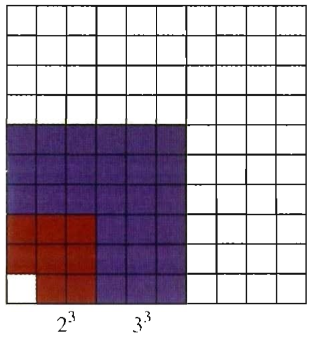


FIGURA 5.3.9 Arreglo para el problema 56

57. Obtenga la fórmula para el área del trapezoide proporcionado en la FIGURA 5.3.10.

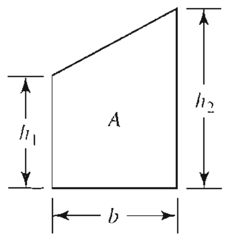


FIGURA 5.3.10 Trapezoide en el problema 57

58. En un supermercado, 136 latas se acomodan en forma triangular como se muestra en la FIGURA 5.3.11. ¿Cuántas latas puede haber en la parte inferior de la pila?

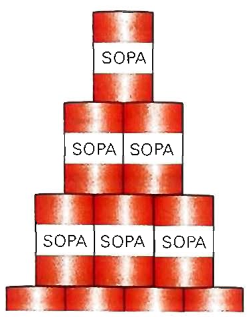


FIGURA 5.3.11 Pila de latas en el problema 58

59. Use (7) y la fórmula de suma

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

para encontrar el área bajo la gráfica de $f(x) = 16 - x^4$ sobre $[-2, 2]$.

60. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre $[0, 1]$ al considerar el área bajo la gráfica de $y = x^2$ sobre $[0, 1]$. Lleve a cabo sus ideas.

61. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ sobre $[0, 8]$ al considerar el área bajo la gráfica de $y = x^3$ sobre $0 \leq x \leq 2$.

62. *a)* Suponga que $y = ax^2 + bx + c \geq 0$ sobre el intervalo $[0, x_0]$. Demuestre que el área bajo la gráfica sobre $[0, x_0]$ está dada por

$$A = a\frac{x_0^3}{3} + b\frac{x_0^2}{2} + cx_0.$$

b) Use el resultado en el inciso *a)* para encontrar el área bajo la gráfica de $y = 6x^2 + 2x + 1$ sobre el intervalo $[2, 5]$.

63. Una fórmula de suma para la suma de los n términos de una sucesión geométrica finita $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right).$$

Use esta fórmula de suma, (8) de esta sección, y la regla de L'Hôpital para encontrar el área bajo la gráfica de $y = e^x$ sobre $[0, 1]$.

64. Un poco de historia En un curso de física para principiantes todo mundo sabe que la distancia de un cuerpo que cae es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido. **Galileo Galilei** (1564-1642) fue el primero en descubrir este hecho. Galileo encontró que la distancia que se mueve una masa hacia abajo en un plano inclinado es proporcional a un entero positivo impar. Por tanto, la distancia total s que una masa se mueve en n segundos, con n un entero positivo, es proporcional a $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$. Demuestre que esto es lo mismo que afirmar que la distancia total que se mueve una masa hacia abajo en un plano inclinado es proporcional al tiempo transcurrido n.

5.4 La integral definida

Introducción En la sección previa vimos que el área bajo la gráfica de una función continua no negativa f sobre un intervalo $[a, b]$ se definía como el límite de una suma. En esta sección verá que el mismo tipo de proceso límite conduce al concepto de **integral definida**.

Sea $y = f(x)$ una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

Considere los siguientes cuatro pasos:

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de anchos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{1}$$

La colección de números (1) se denomina **partición** del intervalo y se denota por P.

- Sea $\|P\|$ el mayor número de los n anchos de los subintervalos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. El número $\|P\|$ se denomina **norma** de la partición P.
- Escoja un número x_k^* en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como se muestra en la FIGURA 5.4.1. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra** en estos subintervalos.
- Forme la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{2}$$

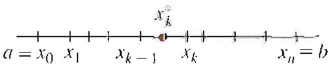


FIGURA 5.4.1 Punto muestra x_k^* en $[x_{k-1}, x_k]$

Sumas del tipo proporcionado en (2) que corresponden a varias particiones de $[a, b]$ se denominan **sumas de Riemann** en honor del famoso matemático alemán **Georg Friedrich Bernhard Riemann**.

Aunque el procedimiento anterior parece muy semejante a los pasos que llevan a la definición de área bajo una gráfica dada en la sección 5.3, hay algunas diferencias importantes. Observe que una suma de Riemann (2) no requiere que f sea continua o no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Así, (2) no necesariamente representa una aproximación al área bajo una gráfica. Tenga en cuenta que "área bajo una gráfica" se refiere *al área acotada entre la gráfica de una función continua no negativa y el eje x*. Como se muestra en la FIGURA 5.4.2, si $f(x) < 0$ para alguna x en $[a, b]$, una suma de Riemann puede contener términos $f(x_k^*)\Delta x_k$, donde $f(x_{k1}^*) < 0$. En este caso, los productos $f(x_k^*)\Delta x_k$ son números que son los negativos de las áreas de rectángulos trazados abajo del eje x.

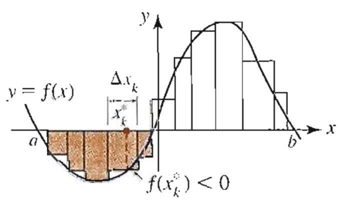


FIGURA 5.4.2 La función f es positiva y negativa sobre el intervalo $[a, b]$

EJEMPLO 1 Una suma de Riemann

Calcule la suma de Riemann para $f(x) = x^2 - 4$ sobre $[-2, 3]$ con cinco subintervalos determinados por $x_0 = -2$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{7}{4}$, $x_5 = 3$ y $x_1^* = -1$, $x_2^* = -\frac{1}{4}$, $x_3^* = \frac{1}{2}$, $x_4^* = \frac{3}{2}$, $x_5^* = \frac{5}{2}$. Encuentre la norma de la partición.

Solución En la FIGURA 5.4.3 se muestra que los números x_k, $k = 0, 1, \ldots, 5$ determinan cinco subintervalos $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$, $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $[0, 1]$, $\left[1, \frac{7}{4}\right]$ y $\left[\frac{7}{4}, 3\right]$ del intervalo $[-2, 3]$ y un punto muestra x_k^* (en rojo) dentro de cada subintervalo.

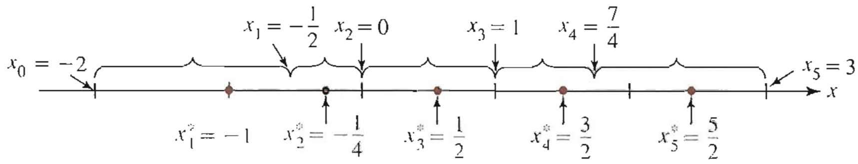


FIGURA 5.4.3 Cinco subintervalos y puntos muestra en el ejemplo 1

Luego, evalúe la función f de cada punto muestra y determine el ancho de cada subintervalo:

$$\begin{aligned}
f(x_1^*) &= f(-1) = -3, & \Delta x_1 &= x_1 - x_0 = - = \frac{1}{2} - (-2) = \frac{3}{2}\\
f(x_2^*) &= f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{63}{16}, & \Delta x_2 &= x_2 - x_1 = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\\
f(x_3^*) &= f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}, & \Delta x_3 &= x_3 - x_2 = 1 - 0 = 1\\
f(x_4^*) &= f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}, & \Delta x_4 &= x_4 - x_3 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}\\
f(x_5^*) &= f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}, & \Delta x_5 &= x_5 - x_4 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces, la **suma de Riemann** para esta partición y esa elección del punto muestra es

$$\begin{aligned}
&f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + f(x_3^*)\Delta x_3 + f(x_4^*)\Delta x_4 + f(x_5^*)\Delta x_5\\
&\quad = (-3)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{63}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{15}{4}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{279}{32} \approx -8.72.
\end{aligned}$$

Al analizar los valores de los cinco Δx_k observamos que la norma de la partición es $\|P\| = \frac{3}{2}$. ■

Para una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$, hay un número finito de posibles sumas de Riemann para una partición dada P del intervalo, puesto que los números x_k^* pueden escogerse arbitrariamente en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

EJEMPLO 2 Otra suma de Riemann

Calcule la suma de Riemann para la función del ejemplo 1 si la partición de $[-2, 3]$ es la misma pero los puntos muestra son $x_1^* = -\frac{3}{2}$, $x_2^* = -\frac{1}{8}$, $x_3^* = \frac{3}{4}$, $x_4^* = \frac{3}{2}$ y $x_5^* = 2.1$.

Solución Sólo es necesario calcular f en los nuevos puntos muestra, puesto que los números Δx_k son los mismos que antes:

$$\begin{aligned}
f(x_1^*) &= f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}\\
f(x_2^*) &= f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{255}{64}\\
f(x_3^*) &= f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{55}{16}\\
f(x_4^*) &= f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}\\
f(x_5^*) &= f(2.1) = 0.41.
\end{aligned}$$

Ahora la suma de Riemann es

$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + f(x_3^*)\Delta x_3 + f(x_4^*)\Delta x_4 + f(x_5^*)\Delta x_5$$
$$= \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{255}{64}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{55}{16}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + (0.41)\left(\frac{5}{4}\right) \approx -8.85. \blacksquare$$

Tenemos interés en un tipo especial de límite de (2). Si las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ están próximas a un número L para *toda* partición P de $[a, b]$ para la cual la norma $\|P\|$ esté cerca de cero, entonces escribimos

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = L \tag{3}$$

y se dice que L es la **integral definida** de f sobre el intervalo $[a, b]$. En la siguiente definición se introduce un nuevo símbolo para el número L.

Definición 5.4.1 La integral definida

Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la **integral definida de f de a a b**, que se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$, se define como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{4}$$

Si el límite en (4) existe, se dice que la función f es **integrable** sobre el intervalo. Los números a y b en la definición precedente se denominan **límite inferior** y **límite superior de integración**, respectivamente. La función f se denomina **integrando**. El símbolo integral $\int$, según lo usaba Leibniz, es una S alargada que representa la palabra *suma*. También observe que $\|P\| \to 0$ siempre implica que el número de subintervalos n se vuelve infinito ($n \to \infty$). No obstante, como se muestra en la FIGURA 5.4.4, el hecho de que $n \to \infty$ no necesariamente implica $\|P\| \to 0$.

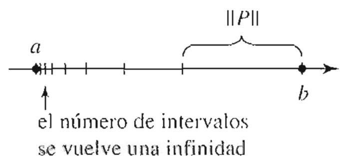


FIGURA 5.4.4 Una infinidad de subintervalos no implica $\|P\| \to 0$.

Integrabilidad En los dos teoremas siguientes se plantean condiciones que son suficientes para que una función f sea integrable sobre un intervalo $[a, b]$. No se proporcionan las demostraciones de estos teoremas.

Teorema 5.4.1 Continuidad implica integrabilidad

Si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ existe; es decir, f es integrable sobre el intervalo.

Hay funciones definidas para cada valor de x en $[a, b]$ para las cuales el límite en (4) no existe. También, si la función f no está definida para todos los valores de x en el intervalo, la integral definida *puede* no existir; por ejemplo, después se verá por qué una integral como $\int_{-3}^{2}(1/x)dx$ no existe. Observe que $y = 1/x$ es discontinua en $x = 0$ y no está acotada sobre el intervalo. Sin embargo, a partir de este ejemplo no debe concluirse que cuando una función f tiene una discontinuidad en $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ necesariamente no existe. La continuidad de una función sobre $[a, b]$ es condición *suficiente* pero *no necesaria* para garantizar la existencia de $\int_a^b f(x)\,dx$. El conjunto de funciones continuas sobre $[a, b]$ es un subconjunto del conjunto de funciones que son integrables sobre el intervalo.

El siguiente teorema proporciona otra condición suficiente para integrabilidad sobre $[a, b]$.

Teorema 5.4.2 Condiciones suficientes para integrabilidad

Si una función f está acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, es decir, si existe una constante positiva B tal que $-B \le f(x) \le B$ para toda x en el intervalo y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, entonces f es integrable sobre el intervalo.

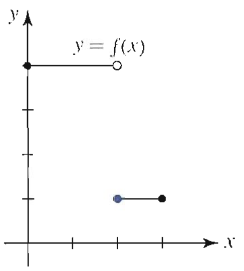


FIGURA 5.4.5 La integral definida de f sobre $[0, 3]$ existe

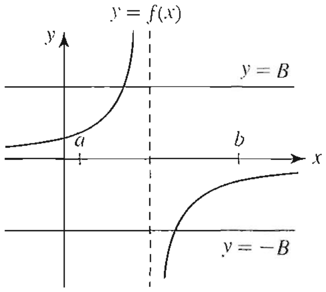


FIGURA 5.4.6 La función f no está acotada sobre $[a, b]$

Cuando una función f está acotada, su gráfica completa debe estar entre dos rectas horizontales, $y = B$ y $y = -B$. En otras palabras, $|f(x)| \leq B$ para toda x en $[a, b]$. La función

$$f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

mostrada en la FIGURA 5.4.5 es discontinua en $x = 2$ pero está acotada sobre $[0, 3]$, puesto que $|f(x)| \leq 4$ para toda x en $[0, 3]$. (Para el caso, $1 \leq f(x) \leq 4$ para toda x en $[0, 3]$ muestra que f está acotada sobre el intervalo.) Por el teorema 5.4.2 se concluye que $\int_0^3 f(x)\,dx$ existe. La FIGURA 5.4.6 muestra la gráfica de una función f que no está acotada sobre un intervalo $[a, b]$. Sin importar cuán grande sea el número B escogido, la gráfica de f no puede estar confinada a la región entre las rectas horizontales $y = B$ y $y = -B$.

Partición regular Si se sabe que una integral definida existe (por ejemplo, el integrando f es continuo sobre $[a, b]$), entonces:

- El límite en (4) existe para cualquier forma posible de partición $[a, b]$ y para toda forma posible de escoger x_k^* en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

En particular, al escoger los subintervalos del mismo ancho y los puntos muestra como los puntos fronterizos derechos de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, es decir,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

la expresión (4) puede escribirse en forma alterna como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}. \tag{5}$$

Recuerde por la sección 5.3 que una partición P de $[a, b]$ donde los subintervalos tienen el mismo ancho se denomina **partición regular**.

Área Tal vez usted concluya que los planteamientos de $\int_a^b f(x)\,dx$ dados en (4) y (5) son exactamente los mismos que (6) y (7) de la sección 5.3 para el caso general de encontrar el área bajo la curva $y = f(x)$ sobre $[a, b]$. En cierta forma esto es correcto; no obstante, la definición 5.4.1 es un concepto más general puesto que, como ya se observó, no estamos requiriendo que f sea continua sobre $[a, b]$ o que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo. Por tanto, una *integral definida no necesita ser un área*. Entonces, ¿qué es una integral definida? Por ahora, acepte el hecho de que una integral definida es simplemente un número real. Compare esto con la integral indefinida, que es una función (o una familia de funciones). El área bajo la gráfica de una función continua no negativa, ¿es una integral definida? La respuesta es *sí*.

Teorema 5.4.3 El área como integral definida

Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo, entonces el **área A bajo la gráfica** sobre $[a, b]$ es

$$A = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

EJEMPLO 3 El área como integral definida

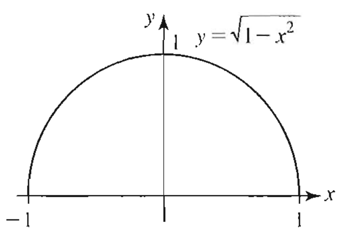


FIGURA 5.4.7 Área en el ejemplo 3

Considere la integral definida $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$. El integrando es continuo y no negativo, de modo que la integral definida representa el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$. Debido a que la gráfica de la función f es el semicírculo superior de $x^2 + y^2 = 1$, el área bajo la gráfica es la región sombreada en la FIGURA 5.4.7. Por geometría sabemos que el área de un círculo de radio r es πr^2, y así con $r = 1$ el área del semicírculo y, por tanto, el valor de la integral definida, es

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{1}{2}\pi.$$ ■

En la sección 6.2 volveremos a la cuestión de encontrar áreas por medio de la integral definida.

EJEMPLO 4 Integral definida usando (5)

Evalúe $\int_{-2}^{1} x^3\, dx$.

Solución Puesto que $f(x) = x^3$ es continua sobre $[-2, 1]$, por el teorema 5.4.1 sabemos que la integral definida existe. Usamos una partición regular y el resultado dado en (5). Al escoger

$$\Delta x = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = -2 + k \cdot \frac{3}{n}$$

tenemos

$$f\left(-2 + \frac{3k}{n}\right) = \left(-2 + \frac{3k}{n}\right)^3 = -8 + 36\left(\frac{k}{n}\right) - 54\left(\frac{k^2}{n^2}\right) + 27\left(\frac{k^3}{n^3}\right).$$

Luego, por (5) y las fórmulas de suma *i*), *ii*), *iii*) y *iv*) del teorema 5.3.2 se concluye que

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} x^3\, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(-2 + \frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[-8 + 36\left(\frac{k}{n}\right) - 54\left(\frac{k^2}{n^2}\right) + 27\left(\frac{k^3}{n^3}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[-8n + \frac{36}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{54}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{27}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-24 + 54\left(1+\frac{1}{n}\right) - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= -24 + 54 - 27(2) + \frac{81}{4} = -\frac{15}{4}.
\end{aligned}$$

En la FIGURA 5.4.8 se muestra que no se está considerando el área bajo la gráfica sobre $[-2, 1]$. ■

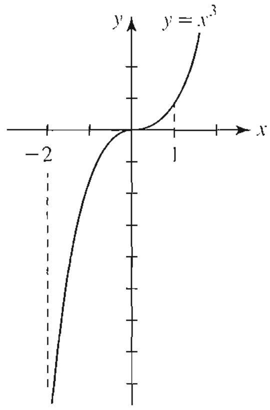


FIGURA 5.4.8 Gráfica de la función en el ejemplo 4

EJEMPLO 5 Integral definida usando (5)

Los valores de las sumas de Riemann en los ejemplos 1 y 2 son aproximaciones al valor de la integral definida $\int_{-2}^{3}(x^2-4)\,dx$. Se deja como ejercicio demostrar que (5) da

$$\int_{-2}^{3}(x^2-4)\,dx = -\frac{25}{3} \approx -8.33.$$

Vea el problema 16 en los ejercicios 5.4. ■

Propiedades de la integral definida A continuación se analizarán algunas propiedades importantes de la integral definida que se definió en (4).

Las dos siguientes definiciones son útiles cuando se trabaja con integrales definidas.

Definición 5.4.2 Límites de integración

i) **Igualdad de límites** Si a está en el dominio de f, entonces

$$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{7}$$

ii) **Inversión de límites** Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_{b}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{8}$$

La definición 5.4.2*i*) puede motivarse por el hecho de que el área bajo la gráfica de f y por arriba de un solo punto a sobre el eje x es cero.

En la definición de $\int_a^b f(x)\,dx$ se supuso que $a < b$, de modo que la dirección de "costumbre" de la integración definida es de izquierda a derecha. El inciso *ii*) de la definición 5.4.2 establece que invertir esta dirección, es decir, intercambiar los límites de integración, resulta en la negativa de la integral.

EJEMPLO 6 Definición 5.4.2

Por el inciso *i*) de la definición 5.4.2,

$$\begin{array}{r} \text{los límites de integración} \rightarrow \\ \text{son los mismos} \rightarrow \end{array} \int_1^1 (x^3 + 3x)\, dx = 0.$$

■

EJEMPLO 7 Otro repaso al ejemplo 4

En el ejemplo 4 vimos que $\int_{-2}^{1} x^3\, dx = -\frac{15}{4}$. Por el inciso *ii*) de la definición 5.4.2 se concluye que

$$\int_1^{-2} x^3\, dx = -\int_{-2}^{1} x^3\, dx = -\left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$

■

En el siguiente teorema se enumeran algunas de las propiedades básicas de la integral definida. Estas propiedades son análogas a las propiedades de la notación sigma proporcionadas en el teorema 5.3.1, así como a las propiedades de la integral indefinida que se analizaron en la sección 5.1.

Teorema 5.4.4 Propiedades de la integral definida

Si f y g son funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

i) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$, donde k es cualquier constante

ii) $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$

El teorema 5.4.4*ii*) se extiende a cualquier suma finita de funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

La variable independiente x en una integral definida se denomina **variable ficticia** de integración. El valor de la integral no depende del símbolo usado. En otras palabras,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(r)\, dr = \int_a^b f(s)\, ds = \int_a^b f(t)\, dt \tag{9}$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 8 Otro repaso al ejemplo 4

Por (9), no importa qué símbolo se use como la variable de integración:

$$\int_{-2}^{1} x^3\, dx = \int_{-2}^{1} r^3\, dr = \int_{-2}^{1} s^3\, ds = \int_{-2}^{1} t^3\, dt = -\frac{15}{4}.$$

■

Teorema 5.4.5 Propiedad aditiva del intervalo

Si f es una función integrable sobre un intervalo cerrado que contiene a los números a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{10}$$

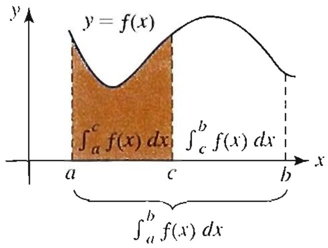


FIGURA 5.4.9 Las áreas son aditivas

Resulta fácil interpretar la propiedad aditiva del intervalo dada en el teorema 5.4.5 en el caso especial en que f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. Como se ve en la FIGURA 5.4.9, el área bajo la gráfica de f sobre $[a, c]$ más el área bajo la gráfica del intervalo adyacente $[c, b]$ es la misma que el área bajo la gráfica de f sobre todo el intervalo $[a, b]$.

Nota: La conclusión del teorema 5.4.5 se cumple cuando a, b y c son tres números *cualesquiera* en un intervalo cerrado. En otras palabras, no es necesario tener el orden $a < c < b$ como se muestra en la figura 5.4.9. Además, el resultado en (10) se extiende a cualquier número finito de números $a, b, c_1, c_2, \ldots, c_n$ en el intervalo. Por ejemplo, para un intervalo cerrado que contiene a los números a, b, c_1 y c_2,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{c_1} f(x)\, dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\, dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\, dx.$$

Para una partición P dada de un intervalo $[a, b]$, tiene sentido afirmar que

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a, \tag{11}$$

en otras palabras, el límite $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$ es simplemente el ancho del intervalo. Como una consecuencia de (11), tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.4.6 Integral definida de una constante

Para cualquier constante k,

$$\int_a^b k\,dx = k\int_a^b dx = k(b-a).$$

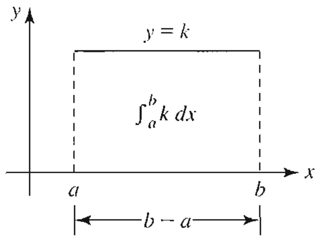


FIGURA 5.4.10 Si $k > 0$, el área bajo la gráfica es $k(b-a)$

Si $k > 0$, entonces el teorema 5.4.6 implica que $\int_a^b k\,dx$ es simplemente el área de un rectángulo de ancho $b - a$ y altura k. Vea la FIGURA 5.4.10.

EJEMPLO 9 Integral definida de una constante

Por el teorema 5.4.6,

$$\int_2^8 5\,dx = 5\int_2^8 dx = 5(8-2) = 30.$$ ■

EJEMPLO 10 Uso de los ejemplos 4 y 9

Evalúe $\int_{-2}^{1} (x^3 + 5)\,dx$.

Solución Por el teorema 5.4.4*ii*) podemos escribir la integral dada como dos integrales:

$$\int_{-2}^{1} (x^3+5)\,dx = \int_{-2}^{1} x^3\,dx + \int_{-2}^{1} 5\,dx.$$

Luego, por el ejemplo 4 sabemos que $\int_{-2}^{1} x^3 dx = -\frac{15}{4}$, y con ayuda del teorema 5.4.6 vemos que $\int_{-2}^{1} 5\,dx = 5[1-(-2)] = 15$. En consecuencia,

$$\int_{-2}^{1} (x^3+5)\,dx = \left(-\frac{15}{4}\right) + 15 = \frac{45}{4}.$$ ■

Por último, los siguientes resultados no son sorprendentes si la integral se interpreta como un área.

Teorema 5.4.7 Propiedades de comparación

Sean f y g funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.

i) Si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

ii) Si $m \leq f(x) \leq M$ para toda x en el intervalo, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Las propiedades *i*) y *ii*) del teorema 5.4.7 se entienden fácilmente en términos de área. Para *i*), si se supone $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces sobre el intervalo el área A_1 bajo la gráfica de f es mayor que o igual al área A_2 bajo la gráfica de g. En forma semejante, para *ii*) si se supone que f es continua y positiva sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces por el teorema

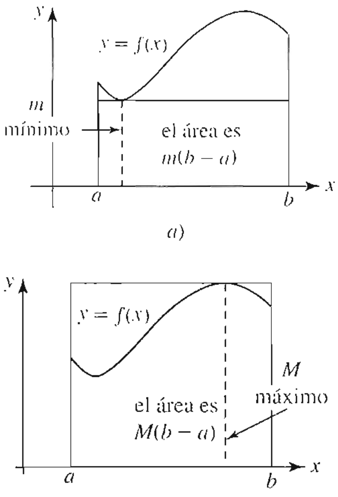


FIGURA 5.4.11 Motivación para el inciso *ii*) del teorema 5.4.7

del valor extremo, f tiene un mínimo absoluto $m > 0$ y un máximo absoluto $M > 0$ en el intervalo. Entonces, el área bajo la gráfica $\int_a^b f(x)\,dx$ sobre el intervalo es mayor que o igual al área $m(b-a)$ del rectángulo más pequeño mostrado en la FIGURA 5.4.11*a*) y menor que o igual al área $M(b-a)$ del rectángulo más grande mostrado en la figura 5.4.11*b*).

Si en *i*) del teorema 5.4.7 se hace $g(x) = 0$ y se usa el hecho de que $\int_a^b 0\,dx = 0$, se concluye lo siguiente:

- Si $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. (12)

En forma semejante, al escoger $f(x) = 0$ en *i*), se concluye que:

- Si $g(x) \leq 0$ sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b g(x)\,dx \leq 0$. (13)

Área neta con signo Debido a que la función f en la FIGURA 5.4.12 asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no representa área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Por el teorema 5.4.5, la propiedad aditiva del intervalo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx. \tag{14}$$

Debido a que $f(x) \geq 0$ sobre $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$ tenemos

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx = A_1 \quad \text{y} \quad \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx = A_3,$$

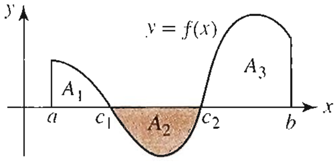


FIGURA 5.4.12 La integral definida de f sobre $[a, b]$ proporciona el área neta con signo

donde A_1 y A_3 denotan las áreas bajo la gráfica de f sobre los intervalos $[a, c_1]$ y $[c_2, b]$, respectivamente. Pero puesto que $f(x) \leq 0$ sobre $[c_1, c_2]$ en virtud de (13), tenemos $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \leq 0$ y así $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$ no representa área. No obstante, el valor de $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$ es el negativo del área verdadera A_2 acotada entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[c_1, c_2]$. Es decir, $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = -A_2$. Por tanto, (14) es

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + (-A_2) + A_3 = A_1 - A_2 + A_3.$$

Vemos que la integral definida proporciona el **área neta con signo** entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$.

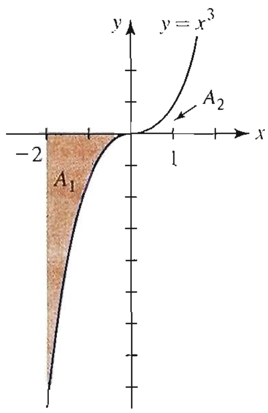


FIGURA 5.4.13 Área neta con signo en el ejemplo 11

EJEMPLO 11 Área neta con signo

El resultado $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\frac{15}{4}$ obtenido en el ejemplo 4 puede interpretarse como el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = x^3$ y el eje x sobre $[-2, 1]$. Aunque la observación de que

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx = -A_1 + A_2 = -\frac{15}{4}$$

no proporciona los valores de A_1 y A_2, el valor negativo es consistente con la FIGURA 5.4.13 donde resulta evidente que el área A_1 es mayor que A_2. ■

La teoría Sea f una función definida sobre $[a, b]$ y sea L un número real. El concepto intuitivo de que las sumas de Riemann están próximas a L siempre que la norma $\|P\|$ de una partición P esté cerca de cero puede expresarse en forma precisa usando los símbolos ε-δ introducidos en la sección 2.6. Al afirmar que f es integrable sobre $[a, b]$, se está diciendo que para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k - L \right| < \varepsilon, \tag{15}$$

siempre que P sea una partición de $[a, b]$ para la cual $\|P\| < \delta$ y el x_k^* son los números en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. En otras palabras,

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

existe y es igual al número L.

Posdata: Un poco de historia **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866) nació en Hanover, Alemania, en 1826. Fue hijo de un ministro luterano. Aunque era cristiano devoto, Riemann no se inclinó por seguir la vocación de su padre y abandonó el estudio de teología en la Universidad de Gotinga para seguir una carrera de estudios en los que su genio era evidente: matemáticas. Es probable que el concepto de sumas de Riemann haya sido resultado de un curso sobre integral definida que tomó en la universidad; este concepto refleja su intento por asignar un significado matemático preciso a la integral definida de Newton y Leibniz. Después de presentar su examen doctoral sobre los fundamentos de las funciones de una variable compleja al comité examinador en la Universidad de Gotinga, Karl Friedrich Gauss, el "príncipe de las matemáticas", dedicó a Riemann un elogio bastante singular: "La disertación ofrece pruebas concluyentes. . . de una mente creativa, activa, verdaderamente matemática. . . de fértil originalidad". Riemann, como muchos otros estudiantes promisorios de la época, era de constitución frágil. Falleció a los 39 años de edad, de pleuresía. Sus originales contribuciones a la geometría diferencial, topología, geometría no euclidiana y sus intrépidas investigaciones concernientes a la naturaleza del espacio, la electricidad y el magnetismo anunciaron el trabajo de Einstein en el siglo siguiente.

Riemann

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

El procedimiento bosquejado en (5) tenía una utilidad limitada como medio práctico para calcular una integral definida. En la siguiente sección se introducirá un teorema que permite encontrar el número $\int_a^b f(x)\,dx$ de manera mucho más fácil. Este importante teorema constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Ejercicios 5.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, calcule la suma de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ para la partición dada. Especifique $\|P\|$.

1. $f(x) = 3x + 1$, $[0, 3]$, cuatro subintervalos; $x_0 = 0, x_0 = 1, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{7}{3}, x_4 = 3$; $x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = \frac{4}{3}, x_3^* = 2, x_4^* = \frac{8}{3}$

2. $f(x) = x - 4$, $[-2, 5]$, cinco subintervalos; $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$; $x_1^* = -\frac{3}{2}$, $x_2^* = -\frac{1}{2}$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 2$, $x_5^* = 4$

3. $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$ cuatro subintervalos: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$; $x_1^* = -\frac{3}{4}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \frac{1}{2}$, $x_4^* = \frac{7}{8}$

4. $f(x) = x^2 + 1$, $[1, 3]$, tres subintervalos; $x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{5}{2}, x_3 = 3$; $x_1^* = \frac{5}{4}, x_2^* = \frac{7}{4}, x_3^* = 3$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$, tres subintervalos; $x_0 = 0, x_1 = \pi, x_2 = 3\pi/2, x_3 = 2\pi$; $x_1^* = \pi/2, x_2^* = 7\pi/6, x_3^* = 7\pi/4$

6. $f(x) = \cos x$, $[-\pi/2, \pi/2]$, cuatro subintervalos; $x_0 = -\pi/2$, $x_1 = -\pi/4$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi/3$, $x_4 = \pi/2$; $x_1^* = -\pi/3, x_2^* = -\pi/6, x_3^* = \pi/4, x_4^* = \pi/3$

7. Dada $f(x) = x - 2$ sobre $[0, 5]$, calcule la suma de Riemann usando una partición con cinco subintervalos de la misma longitud. Sea x_k^*, $k = 1, 2, \ldots, 5$, el punto fronterizo derecho de cada subintervalo.

8. Dada $f(x) = x^2 - x + 1$ sobre $[0, 1]$, calcule la suma de Riemann usando una partición con tres subintervalos de la misma longitud. Sea x_k^*, $k = 1, 2, 3$, el punto fronterizo izquierdo de cada subintervalo.

En los problemas 9 y 10, sea P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Escriba las sumas dadas como una integral definida sobre el intervalo indicado.

9. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{9 + (x_k^*)^2}\Delta x_k$; $[-2, 4]$

10. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\tan x_k^*)\Delta x_k$; $[0, \pi/4]$

En los problemas 11 y 12, sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* el punto fronterizo de cada subintervalo. Escriba la suma dada como una integral definida.

11. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$; $[0, 2]$

12. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{3k}{n}\right)^3 \frac{3}{n}$; $[1, 4]$

En los problemas 13-18, use (5) y las fórmulas de suma en el teorema 5.3.2 para evaluar la integral definida dada.

13. $\int_{-3}^{1} x\,dx$

14. $\int_{0}^{3} x\,dx$

15. $\int_{1}^{2} (x^2 - x)\,dx$

16. $\int_{-2}^{3} (x^2 - 4)\,dx$

17. $\int_0^1 (x^3 - 1)\,dx$ **18.** $\int_0^2 (3 - x^3)\,dx$

En los problemas 19 y 20, proceda como en los problemas 13-18 para obtener el resultado dado.

19. $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ **20.** $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

21. Use el problema 19 para evaluar $\int_{-1}^3 x\,dx$.

22. Use el problema 20 para evaluar $\int_{-1}^3 x^2\,dx$.

En los problemas 23 y 24, use el teorema 5.4.6 para evaluar la integral definida dada.

23. $\int_3^6 4\,dx$ **24.** $\int_{-2}^5 (-2)\,dx$

En los problemas 25-38, use la definición del teorema 5.4.2 y los teoremas 5.4.4, 5.4.5 y 5.4.6 para evaluar la integral definida dada. Donde sea idóneo, use los resultados obtenidos en los problemas 21 y 22.

25. $\int_4^{-2} \frac{1}{2}\,dx$ **26.** $\int_5^5 10x^4\,dx$

27. $-\int_3^{-1} 10x\,dx$ **28.** $\int_{-1}^3 (3x + 1)\,dx$

29. $\int_3^{-1} t^2\,dt$ **30.** $\int_{-1}^3 (3x^2 - 5)\,dx$

31. $\int_{-1}^3 (-3x^2 + 4x - 5)\,dx$ **32.** $\int_{-1}^3 6x(x - 1)\,dx$

33. $\int_{-1}^0 x^2\,dx + \int_0^3 x^2\,dx$ **34.** $\int_{-1}^{1.2} 2t\,dt - \int_3^{1.2} 2t\,dt$

35. $\int_0^4 x\,dx + \int_0^4 (9 - x)\,dx$

36. $\int_{-1}^0 t^2\,dt + \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 u^2\,du$

37. $\int_0^3 x^3\,dx + \int_3^0 t^3\,dt$

38. $\int_{-1}^{-1} 5x\,dx - \int_3^{-1} (x - 4)\,dx$

En los problemas 39-42, evalúe la integral definida usando la información dada.

39. $\int_2^5 f(x)\,dx$ si $\int_0^2 f(x)\,dx = 6$ y $\int_0^5 f(x)\,dx = 8.5$

40. $\int_1^3 f(x)\,dx$ si $\int_1^4 f(x)\,dx = 2.4$ y $\int_3^4 f(x)\,dx = -1.7$

41. $\int_{-1}^2 [2f(x) + g(x)]\,dx$ si

$\int_{-1}^2 f(x)\,dx = 3.4$ y $\int_{-1}^2 3g(x)\,dx = 12.6$

42. $\int_{-2}^2 g(x)\,dx$ si

$\int_2^{-2} f(x)\,dx = 14$ y $\int_{-2}^2 [f(x) - 5g(x)]\,dx = 24$

En los problemas 43 y 44, evalúe las integrales definidas

a) $\int_a^b f(x)\,dx$ *b)* $\int_b^c f(x)\,dx$ *c)* $\int_c^d f(x)\,dx$

d) $\int_a^c f(x)\,dx$ *e)* $\int_b^d f(x)\,dx$ *f)* $\int_a^d f(x)\,dx$

usando la información en la figura dada.

43.

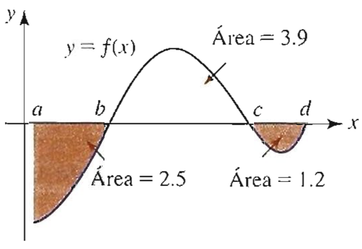


FIGURA 5.4.14 Gráfica para el problema 43

44.

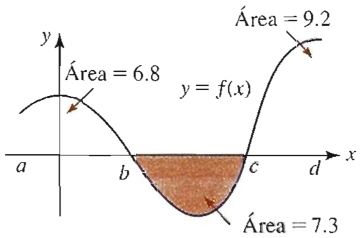


FIGURA 5.4.15 Gráfica para el problema 44

En los problemas 45-48, la integral dada representa el área bajo una gráfica sobre un intervalo dado. Trace esta región.

45. $\int_{-1}^1 (2x + 3)\,dx$ **46.** $\int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx$

47. $\int_{2\pi}^{3\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ **48.** $\int_{-2}^0 \sqrt{x + 2}\,dx$

En los problemas 49-52, la integral dada representa el área bajo una gráfica sobre un intervalo dado. Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar el área.

49. $\int_{-2}^4 (x + 2)\,dx$ **50.** $\int_0^3 |x - 1|\,dx$

51. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ **52.** $\int_{-3}^3 \left(2 + \sqrt{9 - x^2}\right)dx$

En los problemas 53-56, la integral dada representa la siguiente área con signo entre una gráfica y el eje x sobre un intervalo. Trace esta región.

53. $\int_0^5 (-2x + 6)\,dx$ **54.** $\int_{-1}^2 (1 - x^2)\,dx$

55. $\int_{-1/2}^3 \frac{4x}{x + 1}\,dx$ **56.** $\int_0^{5\pi/2} \cos x\,dx$

En los problemas 57-60, la integral dada representa el área con signo entre una gráfica y el eje x sobre un intervalo. Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar el área neta con signo.

57. $\int_1^4 2x\,dx$

58. $\int_0^8 \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx$

59. $\int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

60. $\int_{-1}^{2} (1 - |x|)\,dx$

En los problemas 61-64, la función f se define como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 3 \\ 3, & x > 3. \end{cases}$$

Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar la integral definida dada.

61. $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$

62. $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

63. $\int_{-4}^{5} f(x)\,dx$

64. $\int_0^{10} f(x)\,dx$

En los problemas 65-68, use el teorema 5.4.7 para establecer la desigualdad dada.

65. $\int_{-1}^{0} e^x\,dx \leq \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$

66. $\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx \geq 0$

67. $1 \leq \int_0^1 (x^3 + 1)^{1/2}\,dx \leq 1.42$

68. $-2 \leq \int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx \leq 0$

En los problemas 69 y 70, compare las dos integrales dadas por medio de un símbolo de desigualdad $\leq$ o $\geq$.

69. $\int_0^1 x^2\,dx, \quad \int_0^1 x^3\,dx$

70. $\int_0^1 \sqrt{4 + x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \sqrt{4 + x}\,dx$

≡ Piense en ello

71. Si f es integrable sobre el intervalo $[a, b]$, entonces también lo es f^2. Explique por qué $\int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$.

72. Considere la función definida para toda x en el intervalo $[-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

Demuestre que f no es integrable sobre $[-1, 1]$, es decir, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ no existe. [*Sugerencia*: El resultado en (11) puede ser útil.]

73. Evalúe la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ usando una partición de $[0, 1]$ donde los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ están definidos por $[(k-1)^2/n^2, k^2/n^2]$ y escogiendo x_k^* como el punto fronterizo derecho de cada subintervalo.

74. Evalúe la integral definida $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ usando una partición regular de $[0, \pi/2]$ y escogiendo x_k^* como el punto medio de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Use los resultados conocidos

i) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\operatorname{sen} 2n\theta}{2\operatorname{sen}\theta}$

ii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n \operatorname{sen}(\pi/4n)} = \dfrac{4}{\pi}$.

5.5 Teorema fundamental del cálculo

Introducción Al final de la sección 5.4 se indicó que hay una forma más sencilla para evaluar una integral definida que calculando el límite dé una suma. Esta "manera más sencilla" se logra por medio del **teorema fundamental del cálculo**. En esta sección verá que hay dos formas de este importante teorema: la primera forma, que se presenta a continuación, permite evaluar muchas integrales definidas.

Teorema fundamental del cálculo: primera forma En el siguiente teorema se ve que el concepto de antiderivada de una función continua constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Teorema 5.5.1 Teorema fundamental del cálculo: forma de antiderivada

Si f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f sobre el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Se presentarán dos demostraciones del teorema 5.5.1. En la demostración que se proporciona se usa la premisa básica de que una integral definida es un límite de una suma. Después que se demuestre la segunda forma del teorema fundamental del cálculo, se volverá al teorema 5.5.1 y se presentará una demostración alterna.

DEMOSTRACIÓN Si F es una antiderivada de f, entonces por definición $F'(x) = f(x)$. Puesto que F es diferenciable sobre (a, b), el teorema del valor medio (teorema 4.4.2) garantiza que existe un x_k^* en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k) de la partición P:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{o} \quad F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Luego, para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ con el último resultado obtenemos

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= f(x_1^*)\,\Delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(x_2^*)\,\Delta x_2 \\ F(x_3) - F(x_2) &= f(x_3^*)\,\Delta x_3 \\ &\vdots \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= f(x_n^*)\,\Delta x_n. \end{aligned}$$

Si sumamos las columnas precedentes,

$$[F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(b) - F(x_{n-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

vemos que la suma de todos los términos, menos los dos sin color en el miembro izquierdo de la igualdad, es igual a 0, con lo cual tenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Pero $\lim_{\|P\| \to 0} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a)$, de modo que el límite de (2) cuando $\|P\| \to 0$ es

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{3}$$

Por la definición 5.4.1, el miembro derecho de (3) es $\int_a^b f(x)\,dx$. ■

La diferencia $F(b) - F(a)$ en (1) suele representarse por el símbolo $F(x)\Big]_a^b$, es decir,

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{integral definida}} = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{integral indefinida}}\Bigg]_a^b = F(x)\Bigg]_a^b.$$

Puesto que el teorema 5.5.1 indica que F es *cualquier* antiderivada de f, siempre es posible escoger la constante de integración C como igual a cero. Observe que si $C \neq 0$, entonces

$$(F(x) + C)\Bigg]_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x)\Bigg]_a^b.$$

EJEMPLO 1 Uso de (1)

En el ejemplo 4 de la sección 5.4 se apeló a la definición más bien larga de integral definida para demostrar que $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\frac{15}{4}$. Puesto que $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ es una antiderivada de $f(x) = x^3$, a partir de (1) obtenemos inmediatamente

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Bigg]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-2)^4 = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$ ■

EJEMPLO 2 Uso de (1)

Evalúe $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. En consecuencia, (1) del teorema 5.5.1 proporciona

$$\int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$ ■

EJEMPLO 3 Uso de (1)

Evalúe $\int_{-2}^{2} (3x^2 - x + 1)\, dx$.

Solución Aplicamos *ii*) del teorema 5.1.2 y la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 a cada término del integrando, y luego usamos el teorema fundamental:

$$\int_{-2}^{2} (3x^2 - x + 1)\, dx = \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big]_{-2}^{2}$$
$$= (8 - 2 + 2) - (-8 - 2 - 2) = 20. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Uso de (1)

Evalúe $\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x\, dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$. En consecuencia,

$$\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/6}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

Teorema fundamental del cálculo: segunda forma Suponga que f es continua sobre un intervalo $[a, b]$, por lo que se sabe que la integral $\int_a^b f(t)\, dt$ existe. Para toda x en el intervalo $[a, b]$, la integral definida

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{4}$$

representa un solo número. De esta forma, se ve que (4) es una función con dominio $[a, b]$. En la FIGURA 5.5.1 se muestra que f es una función positiva sobre $[a, b]$, y así cuando x varía a través del intervalo es posible interpretar $g(x)$ como un área bajo la gráfica sobre el intervalo $[a, x]$. En la segunda forma del teorema fundamental del cálculo se demostrará que $g(x)$ definida en (4) es una función diferenciable.

Tenga en cuenta que una integral definida no depende de la variable de integración t.

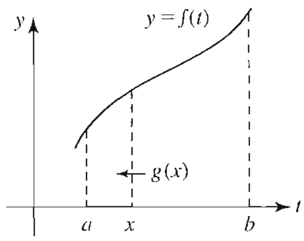


FIGURA 5.5.1 $g(x)$ como área

Teorema 5.5.2 Teorema fundamental del cálculo: forma de derivada

Sea f continua sobre $[a, b]$ y sea x cualquier número en el intervalo. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) y

$$g'(x) = f(x). \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN PARA $h > 0$ Sean x y $x + h$ en (a, b), donde $h > 0$. Por la definición de derivada,

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}. \tag{6}$$

Al usar las propiedades de la integral definida, la diferencia $g(x + h) - g(x)$ puede escribirse como

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt$$
$$= \int_a^{x+h} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)\, dt \qquad \leftarrow \text{por (8) de la sección 5.4}$$
$$= \int_x^{x+h} f(t)\, dt. \qquad \leftarrow \text{por (10) de la sección 5.4}$$

Por tanto, (6) se vuelve

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt. \tag{7}$$

Puesto que f es continua sobre el intervalo cerrado $[x, x + h]$, por el teorema del valor extremo (teorema 4.3.1) se sabe que f alcanza un valor mínimo m y un valor máximo M sobre el intervalo. Puesto que m y M son constantes con respecto a la integración sobre la variable t, por el teorema 5.4.7*ii*) se concluye que

$$\int_x^{x+h} m\,dt \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq \int_x^{x+h} M\,dt. \tag{8}$$

Con ayuda del teorema 5.5.1,

$$\int_x^{x+h} m\,dt = mt\Big]_x^{x+h} = m(x + h - x) = mh$$

y

$$\int_x^{x+h} M\,dt = Mt\Big]_x^{x+h} = M(x + h - x) = Mh.$$

Por tanto, la desigualdad en (8) se vuelve

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq Mh \qquad \text{o} \qquad m \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq M. \tag{9}$$

Puesto que f es continua sobre $[x, x + h]$ tiene sentido afirmar que $\lim\limits_{h\to 0^+} m = \lim\limits_{h\to 0^+} M = f(x)$. Al tomar el límite de la segunda expresión en (9) cuando $h \to 0^+$ obtenemos

$$f(x) \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(x).$$

Esto demuestra que $g'(x)$ existe y por $f(x) \leq g'(x) \leq f(x)$ concluimos que $g'(x) = f(x)$. Puesto que g es diferenciable, necesariamente es continua. Un razonamiento semejante se cumple para $h < 0$. ∎

Otra forma más tradicional de expresar el resultado en (5) es

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{10}$$

EJEMPLO 5 Uso de (10)

Por (10),

a) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{-2}^{x} t^3\,dt = x^3$ *b*) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{1}^{x} \sqrt{t^2 + 1}\,dt = \sqrt{x^2 + 1}.$ ∎

EJEMPLO 6 Regla de la cadena

Encuentre $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{\pi}^{x^3} \cos t\,dt.$

Solución Si identificamos $g(x) = \int_\pi^x \cos t\,dt$, entonces la integral dada es la composición $g(x^3)$. Realizamos la diferenciación al aplicar la regla de la cadena con $u = x^3$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_\pi^{x^3} \cos t\,dt &= \frac{d}{du}\left(\int_\pi^{u} \cos t\,dt\right)\frac{du}{dx}\\ &= \cos u \cdot \frac{du}{dx} = \cos x^3 \cdot 3x^2\\ &= 3x^2 \cos x^3.\end{aligned}$$ ∎

Demostración alterna del teorema 5.5.1 Vale la pena examinar otra demostración del teorema 5.5.1 usando el teorema 5.5.2. Para una función f continua sobre $[a, b]$, la declaración $g'(x) = f(x)$ para $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ significa que $g(x)$ es una antiderivada del integrando f. Si F es cualquier antiderivada de f, por el teorema 5.1.1 sabemos que $g(x) - F(x) = C$ o $g(x) = F(x) + C$.

donde C es una constante arbitraria. Puesto que $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, para cualquier x en $[a, b]$ se concluye que

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C. \tag{11}$$

Si en (11) sustituimos $x = a$, entonces

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$

implica $C = -F(a)$, puesto que $\int_a^a f(t)\,dt = 0$. Así, (11) se vuelve

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Puesto que la última ecuación es válida en $x = b$, encontramos

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

∎

Funciones continuas por partes Se dice que una función f es **continua por partes** sobre un intervalo $[a, b]$ si existe a lo más un número finito de puntos c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $(c_{k-1} < c_k)$ en los que f tiene una discontinuidad finita, o salto, sobre cada subintervalo abierto (c_{k-1}, c_k). Vea la FIGURA 5.5.2. Si una función f es continua por partes sobre $[a, b]$, está acotada sobre el intervalo, y entonces por el teorema 5.4.2, f es integrable sobre $[a, b]$. Una integral definida de una función continua por partes sobre $[a, b]$ puede evaluarse con ayuda del teorema 5.4.5:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

y al tratar a los integrandos de las integrales definidas en el miembro derecho de la ecuación anterior simplemente como si fuesen continuos sobre los intervalos cerrados $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_n, b]$.

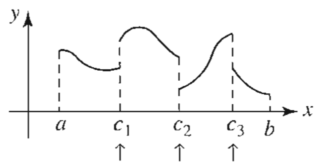


FIGURA 5.5.2 Función continua por partes

EJEMPLO 7 Integración de una función continua por partes

Evalúe $\int_{-1}^4 f(x)\,dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

Solución La gráfica de una función f continua por partes se muestra en la FIGURA 5.5.3. Luego, por el análisis precedente y la definición de f:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 f(x)\,dx &= \int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^0 (x+1)\,dx + \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 3\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big]_{-1}^0 + \frac{1}{2}x^2\Big]_0^2 + 3x\Big]_2^4 = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

∎

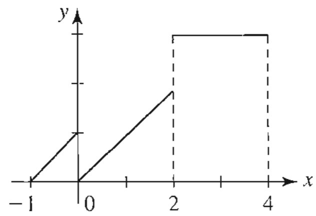


FIGURA 5.5.3 Gráfica de la función en el ejemplo 7

EJEMPLO 8 Integración de una función continua por partes

Evalúe $\int_0^3 |x - 2|\,dx$.

Solución Por la definición de valor absoluto,

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x - 2 \ge 0 \\ -(x - 2) & \text{si } x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \ge 2 \\ -x + 2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

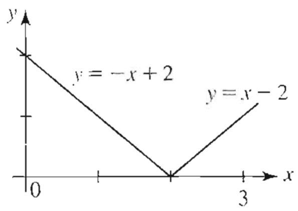


FIGURA 5.5.4 Gráfica de la función en el ejemplo 8

En la FIGURA 5.5.4 se muestra la gráfica de $f(x) = |x-2|$. Luego, debido a (10) del teorema 5.4.5, podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-2|\,dx &= \int_0^2 |x-2|\,dx + \int_2^3 |x-2|\,dx\\ &= \int_0^2 (-x+2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx\\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big]_0^2 + \left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big]_2^3\\ &= (-2+4) + \left(\frac{9}{2}-6\right) - (2-4) = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Sustitución en una integral definida Recuerde por la sección 5.2 que algunas veces usamos una sustitución como ayuda para evaluar una integral indefinida de la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Es necesario tener cuidado al usar una sustitución en una integral definida $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$, puesto que es posible proceder *de dos formas*.

Directrices para sustituir una integral definida

- Evalúe la integral indefinida $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ por medio de la sustitución $u = g(x)$. Vuelva a sustituir $u = g(x)$ en la antiderivada y luego aplique el teorema fundamental del cálculo usando los límites de integración originales $x = a$ y $x = b$.
- En forma alterna, la segunda sustitución puede evitarse al cambiar los límites de integración de modo que correspondan al valor de u en $x = a$ y u en $x = b$. El último método, que suele ser más rápido, se resume en el siguiente teorema.

Teorema 5.5.3 Sustitución en una integral definida

Sea $u = g(x)$ una función cuya derivada es continua sobre el intervalo $[a, b]$, y sea f una función continua sobre el rango de g. Si $F'(u) = f(u)$ y $c = g(a)$, $d = g(b)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(d) - F(c). \qquad (12)$$

DEMOSTRACIÓN Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$. En consecuencia,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int_c^d f(u)\,du = F(u)\Big]_c^d = F(d) - F(c).$$

EJEMPLO 9 Sustitución en una integral definida

Evalúe $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx$.

Solución Primero se ilustrarán los dos procedimientos presentados en las directrices que preceden al teorema 5.5.3.

a) Para evaluar la integral indefinida $\int \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx$ usamos $u = 2x^2+1$ y $du = 4x\,dx$. Así,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx &= \frac{1}{4}\int \sqrt{2x^2+1}\,(4x\,dx) &&\leftarrow \text{sustitución}\\ &= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{4}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C\\ &= \frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2} + C. &&\leftarrow \text{otra sustitución}\end{aligned}$$

En consecuencia, por el teorema 5.5.1,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx &= \frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2}\Big]_0^2\\ &= \frac{1}{6}\left[9^{3/2} - 1^{3/2}\right]\\ &= \frac{1}{6}[27-1] = \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

b) Si $u = 2x^2 + 1$, entonces $x = 0$ implica $u = 1$, mientras que con $x = 2$ obtenemos $u = 9$. Así, por el teorema 5.5.3,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\,x\,dx &= \frac{1}{4}\overset{u \text{ límites}}{\underset{\downarrow}{}}\int_1^9 u^{1/2}\,du \leftarrow \text{integración con respecto a } u\\ &= \frac{1}{4}\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big]_1^9\\ &= \frac{1}{6}\left[9^{3/2} - 1^{3/2}\right] = \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

■

Cuando la gráfica de una función $y = f(x)$ es simétrica con respecto al eje y (función par) o al origen (función impar), entonces la integral definida de f sobre un intervalo simétrico $[-a, a]$, es decir, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, puede evaluarse por medio de un "atajo".

Teorema 5.5.4 Regla de la función par

Si f es una función par integrable sobre $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx. \tag{13}$$

Se demostrará el siguiente teorema, pero la demostración del teorema 5.5.4 se deja como ejercicio.

Teorema 5.5.5 Regla de la función impar

Si f es una función impar integrable sobre $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{14}$$

DEMOSTRACIÓN Suponga que f es una función impar. Por la propiedad aditiva del intervalo, teorema 5.4.5, tenemos

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

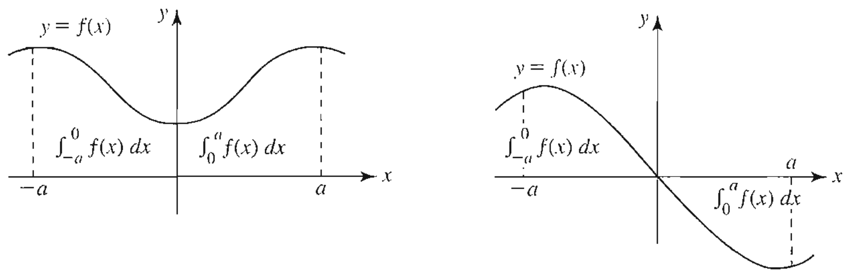
En la primera integral en el miembro izquierdo, sea $x = -t$, de modo que $dx = -dt$, y cuando $x = -a$ y $x = 0$, entonces $t = a$ y $t = 0$:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)\,dx \leftarrow f(-t) = -f(t),\ f \text{ una función impar}\\ &= \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx\\ &= -\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx \qquad \leftarrow \text{por (8) de la sección 5.4}\end{aligned}$$

$$= -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad \leftarrow t \text{ era una variable de integración “ficticia”}$$
$$= 0.$$ ■

La cuestión importante en el teorema 5.5.5 es ésta: cuando una función integrable impar f se integra sobre un intervalo simétrico $[-a, a]$, no es necesario encontrar una antiderivada de f: el valor de la integral siempre es cero.

En la FIGURA 5.5.5 se muestran motivaciones geométricas para los resultados en los teoremas 5.5.4 y 5.5.5.



a) Función par: el valor de la integral definida sobre $[-a, 0]$ es el mismo que el valor sobre $[0, a]$

b) Función impar: el valor de la integral definida sobre $[-a, 0]$ es el opuesto que el valor sobre $[0, a]$

FIGURA 5.5.5 Regla de la función par en *a*); regla de la función impar en *b*)

EJEMPLO 10 Uso de la regla de la función par

Evalúe $\int_{-1}^{1} (x^4 + x^2)\,dx$.

Solución El integrando $f(x) = x^4 + x^2$ es una función polinomial cuyas potencias son todas pares, de modo que f necesariamente es una función par. Puesto que el intervalo de integración es el intervalo simétrico $[-1, 1]$, por el teorema 5.5.4 se concluye que es posible integrar sobre $[0, 1]$ y multiplicar el resultado por 2:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x^4 + x^2)\,dx$$
$$= 2\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{15}.$$ ■

EJEMPLO 11 Uso de la regla de la función impar

Evalúe $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución En este caso $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función impar sobre el intervalo simétrico $[-\pi/2, \pi/2]$. Así, por el teorema 5.5.5 de inmediato tenemos

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = 0.$$ ■

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

La forma de antiderivada del teorema fundamental del cálculo constituye una herramienta extremadamente importante y poderosa para evaluar integrales definidas. ¿Por qué molestarse con un burdo límite de una suma cuando el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ puede encontrarse al calcular $\int f(x)\,dx$ en los dos números a y b? Esto es cierto hasta cierto punto; no obstante, ya es hora de aprender otro hecho de las matemáticas. Hay funciones continuas para las cuales la antiderivada $\int f(x)\,dx$ *no* puede expresarse en términos de *funciones elementales*: sumas, productos, cocientes y potencias de funciones polinomiales, trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales. La simple función continua $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ no tiene antiderivada que sea una función elemental. Sin embargo, aunque por el teorema 5.4.1 es posible afirmar que la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1}\,dx$ existe, el teorema 5.5.1 no es de ninguna ayuda para encontrar su valor. La integral $\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1}\,dx$ se denomina **no elemental**. Las integrales no elementales son importantes y aparecen en muchas aplicaciones como teoría de probabilidad y óptica. A continuación se presentan algunas integrales no elementales:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx, \quad \int \operatorname{sen} x^2\,dx, \quad \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{y} \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Vea los problemas 71 y 72 en los ejercicios 5.5.

Ejercicios 5.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-42, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.1 para evaluar la integral definida dada.

1. $\int_3^7 dx$
2. $\int_2^{10} (-4)\,dx$
3. $\int_{-1}^2 (2x + 3)\,dx$
4. $\int_{-5}^4 t^2\,dt$
5. $\int_1^3 (6x^2 - 4x + 5)\,dx$
6. $\int_{-2}^1 (12x^5 - 36)\,dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$
8. $\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta$
9. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 3t\,dt$
10. $\int_{1/2}^1 \operatorname{sen} 2\pi x\,dx$
11. $\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{u^2}\,du$
12. $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x}\,dx$
13. $\int_{-1}^1 e^x\,dx$
14. $\int_0^2 (2x - 3e^x)\,dx$
15. $\int_0^2 x(1 - x)\,dx$
16. $\int_3^2 x(x - 2)(x + 2)\,dx$
17. $\int_{-1}^1 (7x^3 - 2x^2 + 5x - 4)\,dx$
18. $\int_{-3}^{-1} (x^2 - 4x + 8)\,dx$
19. $\int_1^4 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$
20. $\int_2^4 \frac{x^2 + 8}{x^2}\,dx$
21. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + x^2}\,dx$
22. $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$
23. $\int_{-4}^{12} \sqrt{z + 4}\,dz$
24. $\int_0^{7/2} (2x + 1)^{-1/3}\,dx$
25. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}\,dx$
26. $\int_{-2}^1 \frac{t}{(t^2 + 1)^2}\,dt$
27. $\int_{1/2}^1 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2}\,dx$
28. $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{1 + 4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
29. $\int_0^1 \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\,dx$
30. $\int_{-1}^1 \frac{u^3 + u}{(u^4 + 2u^2 + 1)^5}\,du$
31. $\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x\,dx$
32. $\int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} x \csc x^2 \cot x^2\,dx$
33. $\int_{-1/2}^{3/2} (x - \cos\pi x)\,dx$
34. $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$
35. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} x \cos x\,dx$
37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \cos\theta}{(\theta + \operatorname{sen}\theta)^2}\,d\theta$
38. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec x + \tan x)^2\,dx$
39. $\int_0^{3/4} \operatorname{sen}^2 \pi x\,dx$
40. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$
41. $\int_1^5 \frac{1}{1 + 2x}\,dx$
42. $\int_{-1}^1 \tan x\,dx$

En los problemas 43-48, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.2 para encontrar la derivada indicada.

43. $\frac{d}{dx}\int_0^x te^t\,dt$
44. $\frac{d}{dx}\int_1^x \ln t\,dt$
45. $\frac{d}{dt}\int_2^t (3x^2 - 2x)^6\,dx$
46. $\frac{d}{dx}\int_x^9 \sqrt[3]{u^2 + 2}\,du$
47. $\frac{d}{dx}\int_3^{6x-1} \sqrt{4t + 9}\,dt$
48. $\frac{d}{dx}\int_\pi^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t^2\,dt$

En los problemas 49 y 50, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.2 para encontrar $F'(x)$. [*Sugerencia*: Use dos integrales.]

49. $F(x) = \int_{3x}^{x^2} \frac{1}{t^3 + 1}\,dt$
50. $F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{5x} \sqrt{t^2 + 1}\,dt$

En los problemas 51 y 52, compruebe el resultado dado al evaluar primero la integral definida y luego diferenciando.

51. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x (6t^2 - 8t + 5)\,dt = 6x^2 - 8x + 5$

52. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\pi^t \operatorname{sen}\frac{x}{3}\,dx = \operatorname{sen}\frac{t}{3}$

53. Considere la función $f(x) = \int_1^x \ln(2t + 1)\,dt$. Encuentre el valor funcional indicado.

a) $f(1)$ *b*) $f'(1)$
c) $f''(1)$ *d*) $f'''(1)$

54. Suponga que $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ y $G'(x) = f(x)$. Encuentre la expresión dada.

a) $G(x^2)$ *b*) $\dfrac{d}{dx}G(x^2)$

c) $G(x^3 + 2x)$ *d*) $\dfrac{d}{dx}G(x^3 + 2x)$

En los problemas 55 y 56, evalúe $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$ para la función f dada.

55. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

56. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases}$

En los problemas 57-60, evalúe la integral definida de la función f continua por partes.

57. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

58. $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ \cos x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

59. $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < -1 \\ 4, & -1 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

60. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es la función entero mayor

En los problemas 61-66, proceda como en el ejemplo 8 para evaluar la integral definida dada.

61. $\displaystyle\int_{-3}^1 |x|\,dx$

62. $\displaystyle\int_0^4 |2x - 6|\,dx$

63. $\displaystyle\int_{-8}^3 \sqrt{|x| + 1}\,dx$

64. $\displaystyle\int_0^2 |x^2 - 1|\,dx$

65. $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi |\operatorname{sen} x|\,dx$

66. $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\,dx$

En los problemas 67-70, proceda como en el inciso *b*) del ejemplo 9 y evalúe la integral definida dada usando la sustitución u indicada.

67. $\displaystyle\int_{1/2}^e \frac{(\ln 2t)^5}{t}\,dt;\quad u = \ln 2t$

68. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{(\tan^{-1} x)(1 + x^2)}\,dx;\quad u = \tan^{-1} x$

69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{e^{-2x} + 1}\,dx;\quad u = e^{-2x} + 1$

70. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx;\quad u = x^2$

≡ Aplicaciones

71. En matemáticas aplicadas, algunas funciones importantes se definen en términos de integrales no elementales. Una de estas funciones especiales se denomina **función error**, que se define como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

a) Demuestre que $\operatorname{erf}(x)$ es una función creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}[1 + \sqrt{\pi}\operatorname{erf}(x)]$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2,$$

y que $y(0) = 1$.

72. Otra función especial definida por una integral no elemental es la **función integral seno**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

La función $\operatorname{Si}(x)$ tiene una infinidad de puntos fronterizos relativos.

a) Encuentre los cuatro primeros números críticos para $x > 0$. Use la prueba de la segunda derivada para determinar si estos números críticos corresponden a un máximo o a un mínimo relativo.

b) Use un SAC para obtener la gráfica de $\operatorname{Si}(x)$. [*Sugerencia*: En *Mathematica*, la función integral seno se denota por SinIntegral[x].]

≡ Piense en ello

En los problemas 73 y 74, sean P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Determine el valor del límite dado.

73. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n (2x_k^* + 5)\,\Delta x_k;\quad [-1, 3]$

74. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n \cos\frac{x_k^*}{4}\,\Delta x_k;\quad [0, 2\pi]$

En los problemas 75 y 76, sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Establezca el resultado dado.

75. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \operatorname{sen} x_k^* = 2;\quad [0, \pi]$

76. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n x_k^* = 0;\quad [-1, 1]$

En los problemas 77 y 78, evalúe la integral definida dada.

77. $\displaystyle\int_1^2 \left\{\int_1^x 12t^2\, dt\right\} dx$ **78.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left\{\int_0^t \operatorname{sen} x\, dx\right\} dt$

79. Demuestre la prueba de la función par, teorema 5.5.4.

80. Suponga que f es una función impar definida sobre un intervalo $[-4, 4]$. Además, suponga que f es diferenciable sobre el intervalo, $f(-2) = 3.5$, que f tiene ceros en -3 y 3 y números críticos -2 y 2.

a) ¿Cuál es $f(0)$?

b) Trace la gráfica aproximada de f.

c) Suponga que F es una función definida sobre $[-4, 4]$ por $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\, dt$. Encuentre $F(-3)$ y $F(3)$.

d) Trace una gráfica aproximada de F.

e) Encuentre los números críticos y los puntos de inflexión de F.

81. Determine si el siguiente razonamiento es correcto:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\, dt &= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t\, dt)\\ &= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\operatorname{sen} t\, dt) \leftarrow \begin{cases} u = \cos t\\ du = -\operatorname{sen} t\, dt\end{cases}\\ &= -\int_0^0 \sqrt{1-u^2}\, du = 0. \leftarrow \begin{cases}\text{Teorema 5.5.3}\\ \text{Definición 5.4.2}i)\end{cases}\end{aligned}$$

82. Calcule las derivadas.

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\, x\int_1^{2x} \sqrt{t^3+7}\, dt$ *b*) $\displaystyle\frac{d}{dx}\, x\int_1^{4} \sqrt{t^3+7}\, dt$

☰ Problemas con calculadora/SAC

83. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $f(x) = \cos^3 x$ y $g(x) = \operatorname{sen}^3 x$.

b) Con base en su interpretación de área neta con signo, use las gráficas del inciso *a*) para conjeturar los valores de $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx$ y $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 x\, dx$.

☰ Proyectos

84. Integración por dardos En este problema se ilustra un método para aproximar el área bajo una gráfica al "lanzar dardos". Suponga que deseamos encontrar el área A bajo la gráfica de $f(x) = \cos^3(\pi x/2)$ sobre el intervalo $[0, 1]$; es decir, se quiere aproximar $A = \int_0^1 \cos^3(\pi x/2)\, dx$.

Si se lanza, sin ningún intento particular de ser experto, un gran número de dardos, por ejemplo N, hacia el blanco cuadrado de 1×1 mostrado en la FIGURA 5.5.6 y n dardos se insertan en la región roja bajo la gráfica de $f(x) = \cos^3(\pi x/2)$, entonces es posible demostrar que la probabilidad de que un dardo se inserte en la región está dada por la relación de dos áreas:

$$\frac{\text{área de la región}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{A}{1}.$$

Además, esta probabilidad teórica es aproximadamente la misma que la probabilidad empírica n/N:

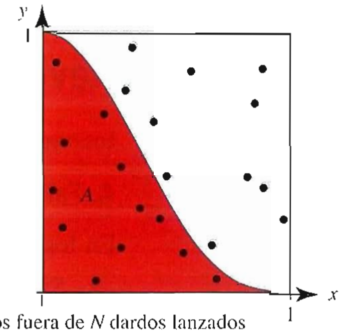
$$\frac{A}{1} \approx \frac{n}{N} \quad \text{o} \quad A \approx \frac{n}{N}.$$

Para simular el lanzamiento de dardos hacia el blanco, use un SAC como *Mathematica* y su función de números aleatorios para generar una tabla de N pares ordenados (x, y), $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

a) Sea $N = 50$. Trace los puntos y la gráfica de f sobre el mismo conjunto de ejes coordenados. Use la figura para contar el número de éxitos n. Construya por lo menos 10 tablas diferentes de puntos aleatorios y gráficas. Para cada gráfica calcule la razón n/N.

b) Repita el inciso *a*) para $N = 100$.

c) Use el SAC para encontrar el valor exacto del área A y compare este valor con las aproximaciones obtenidas en los incisos *a*) y *b*).



n tiros fuera de N dardos lanzados

FIGURA 5.5.6 Blanco en el problema 84

85. Derrame de petróleo en expansión Un modelo matemático que puede usarse para determinar el tiempo t necesario para que un derrame de petróleo se evapore está dado por la fórmula

$$\frac{RT}{Pv} = \int_0^t \frac{KA(u)}{V_0}\, du,$$

donde $A(u)$ es el área del derrame en el instante u, RT/Pv es un término termodinámico adimensional, K es un coeficiente de transferencia de masa y V_0 es el volumen inicial del derrame.

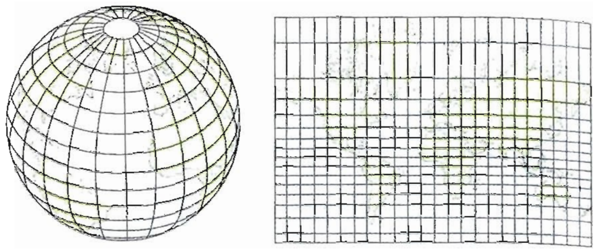
a) Suponga que el derrame de petróleo se expande en forma circular cuyo radio inicial es r_0. Vea la FIGURA 5.5.7. Si el radio r del derrame crece a razón $dr/dt = C$ (en metros por segundo), resuelva para t en términos de los otros símbolos.

b) Valores típicos para RT/Pv y K son 1.9×10^6 (para el tridecano) y 0.01 mm/s, respectivamente. Si $C = 0.01$ m/s^2, $r_0 = 100$ m y $V_0 = 10\,000$ m^3, determine en cuánto tiempo se evapora el petróleo.

c) Use el resultado en el inciso *b*) para determinar al área final del derrame de petróleo.

FIGURA 5.5.7 Derrame circular del petróleo en el problema 85

86. Proyección de Mercator y la integral de sec x En términos generales, una mapa de Mercator es una representación de un mapa global tridimensional sobre una superficie tridimensional. Vea la FIGURA 5.5.8. Encuentre y estudie el artículo "Mercator's World Map and the Calculus", Phillip M. Tuchinsky, UMAP, Unit 206, Newton, MA, 1978. Escriba un informe breve que resuma el artículo y por qué **Gerhardus Mercator** (c. 1569) necesitaba el valor de la integral definida $\int_0^{\theta_0} \sec x\, dx$ para llevar a cabo sus construcciones.



a) Globo *b*) Mapa de Mercator

FIGURA 5.5.8 Globo y proyección de Mercator en el problema 86

Revisión del capítulo 5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-16, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Si $f'(x) = 3x^2 + 2x$, entonces $f(x) = x^3 + x^2$. _____

2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{6}(2k - 3) = \sum_{j=0}^{4}(2j + 1)$ _____

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} 5 = \sum_{k=1}^{20} 10$ _____

4. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{t^2 + 7}\, dt = -\int_3^1 \sqrt{t^2 + 7}\, dt$ _____

5. Si f es continua, entonces $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^0 f(x) dx = 0$. _____

6. Si f es integrable, entonces f es continua. _____

7. $\displaystyle\int_0^1 (x - x^3)\, dx$ es el área bajo la gráfica de $y = x - x^3$ sobre el intervalo $[0, 1]$. _____

8. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx > 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ es el área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$. _____

9. Si P es una partición de $[a, b]$ en n subintervalos, entonces $n \to \infty$ implica $\|P\| \to 0$. _____

10. Si $F'(x) = 0$ para toda x, entonces $F(x) = C$ para toda x. _____

11. Si f es una función impar integrable sobre $[-\pi, \pi]$, entonces $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$. _____

12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2\int_0^1 x\, dx$ _____

13. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = \cos x + C$ _____

14. $\displaystyle\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$ _____

15. $\displaystyle\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$ _____

16. La función $F(x) = \displaystyle\int_{-5}^{2x} (t + 4)e^{-t}\, dt$ es creciente sobre el intervalo $[-2, \infty)$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-16, llene los espacios en blanco.

1. Si G es una antiderivada de una función f, entonces $G'(x) =$ ________.
2. $\displaystyle\int \frac{d}{dx}x^2\,dx =$ ________.
3. Si $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$, entonces $f(x) =$ ________.
4. El valor de $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_3^x \sqrt{t^2+5}\,dt$ en $x = 1$ es ________.
5. Si g es diferenciable, entonces $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{b} f(t)\,dt =$ ________.
6. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{5x}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt =$ ________.
7. Al usar notación sigma, la suma $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11}$ puede expresarse como ________.
8. El valor numérico de $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(3k^2 - 2k)$ es ________.
9. Si $u = t^2 + 1$, entonces la integral definida $\displaystyle\int_2^4 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$ se vuelve $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\_}^{\_} u^{1/3}\,du$.
10. El área bajo la gráfica de $f(x) = 2x$ sobre el intervalo $[0, 2]$ es ________, y el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = 2x$ y el eje x sobre $[-1, 2]$ es ________.
11. Si el intervalo $[1, 6]$ se parte en cuatro subintervalos determinados por $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 5$ y $x_4 = 6$, la norma de la partición es ________.
12. Una partición de un intervalo $[a, b]$ donde todos los subintervalos tienen el mismo ancho se denomina partición ________ .
13. Si P es una partición de $[0, 4]$ y x_k^* es un número en el k-ésimo subintervalo, entonces $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k^*}\,\Delta x_k$ es la definición de la integral definida ________. Por el teorema fundamental del cálculo, el valor de esta integral definida es ________.
14. Si $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx = 11$ y $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 15$, entonces $\displaystyle\int_4^6 f(x)\,dx =$ ________.
15. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left\{\int_0^x e^{-t}\,dt\right\}dx =$ ________ y $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left\{\int_0^x e^{-t}\,dt\right\}dx =$ ________.
16. Para $t > 0$, el área neta con signo $\displaystyle\int_0^t (x^3 - x^2)\,dx = 0$ cuando $t =$ ________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-20, evalúe la integral dada.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^9 \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int (5t+1)^{100}\,dt$
4. $\displaystyle\int w^2\sqrt{3w^3+1}\,dw$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}(\operatorname{sen} 2x - 5\cos 4x)\,dx$
6. $\displaystyle\int_{\pi^2/9}^{\pi^2}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\,dz$
7. $\displaystyle\int_4^4(-2x^2 + x^{1/2})\,dx$
8. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan^2 x\,dx$

9. $\displaystyle\int \cot^6 8x \csc^2 8x\, dx$

10. $\displaystyle\int \csc 3x \cot 3x\, dx$

11. $\displaystyle\int (4x^2 - 16x + 7)^4(x - 2)\, dx$

12. $\displaystyle\int (x^2 + 2x - 10)^{2/3}(5x + 5)\, dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x - 16}}\, dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 16}\, dx$

15. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{16 + x^2}\, dx$

16. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{16 + x^2}\, dx$

17. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$

18. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$

19. $\displaystyle\int \tan 10x\, dx$

20. $\displaystyle\int \cot 10x\, dx$

21. Suponga que $\displaystyle\int_0^5 f(x)\, dx = -3$ y $\displaystyle\int_0^7 f(x)\, dx = 2$. Evalúe $\displaystyle\int_5^7 f(x)\, dx$.

22. Suponga que $\displaystyle\int_1^4 f(x)\, dx = 2$ y $\displaystyle\int_4^9 f(x)\, dx = -8$. Evalúe $\displaystyle\int_1^9 f(x)\, dx$.

En los problemas 23-28, evalúe la integral dada.

23. $\displaystyle\int_0^3 (1 + |x - 1|)\, dx$

24. $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[\frac{10t^4}{(2t^3 + 6t + 1)^2}\right] dt$

25. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^{10} t}{16t^7 + 1}\, dt$

26. $\displaystyle\int_{-1}^1 t^5 \operatorname{sen} t^2\, dt$

27. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + 3x^2}\, dx$

28. $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\, dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

En los problemas 29 y 30, encuentre el límite dado.

29. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$

30. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

31. En la FIGURA 5.R.1 se muestra un cubo con las dimensiones dadas (en pies) que se llena a razón constante de $dV/dt = \frac{1}{4}$ pies^3/min. Cuando $t = 0$, en la balanza se lee 31.2 lb. Si el agua pesa 62.4 lb/pie^3, ¿cuál es la lectura de la balanza luego de 8 minutos? ¿Y cuando el cubo está lleno? [*Sugerencia*: Vea la página FM-2 para la fórmula para el volumen del tronco de un cono. También ignore el peso del cubo.]

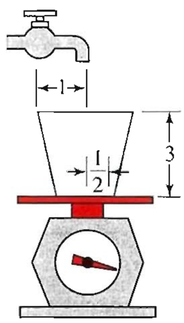


FIGURA 5.R.1 Cubo y balanza en el problema 31

32. La **torre de Hanoi** es una pila de discos circulares, cada uno de los cuales es más grande que el de arriba, colocados en un mástil. Vea la FIGURA 5.R.2. Una vez, un antiguo rey ordenó que esta torre debía construirse con discos de oro con las siguientes especificaciones: el ancho de cada disco debía ser un dedo más grande que el del disco de arriba. El hueco por los centros de los discos debía medir un dedo de ancho de diámetro, y el disco superior debía medir dos dedos de diámetro. Suponga que el ancho de un dedo es 1.5 cm, que el oro pesa 19.3 g/cm^3 y que su valor es \$14 por gramo.

a) Encuentre una fórmula para el valor del oro en la torre de Hanoi del rey si la torre tiene *n* discos.

b) El número normal de discos de oro en la torre de Hanoi es 64. ¿Cuál es el valor del oro en la torre?

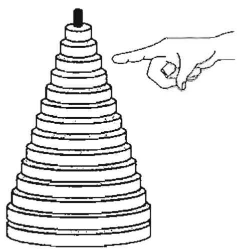


FIGURA 5.R.2 Torre de Hanoi en el problema 32

33. Considere la función uno a uno $f(x) = x^3 + x$ sobre el intervalo $[1, 2]$. Vea la FIGURA 5.R.3. Sin encontrar f^{-1}, determine el valor de

$$\int_{f(1)}^{f(2)} f^{-1}(x)\,dx.$$

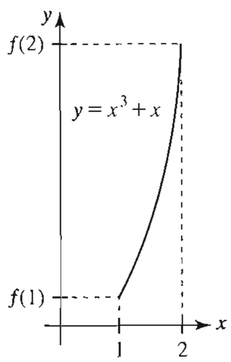


FIGURA 5.R.3 Gráfica para el problema 33