线性规划与网络流

笔记源文件：[Markdown]，[长图]，[PDF]，[HTML]

1. 线性规划

> - 线性规划问题及其表示
> - 线性规划问题可表示为如下形式：
>
> 目标函数
>
> 约束条件
>
> $$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.1}$$
>
> s.t.
>
> $$\sum_{t=1}^{n} a_{it} x_t \le b_i \quad i = 1,2,\cdots,m_1 \tag{8.2}$$
>
> $$\sum_{t=1}^{n} a_{jt} x_t = b_j \quad j = m_1+1,\cdots,m_1+m_2 \tag{8.3}$$
>
> $$\sum_{t=1}^{n} a_{kt} x_t \ge b_k \quad k = m_1+m_2+1,\cdots,m_1+m_2+m_3 \tag{8.4}$$
>
> $$x_t \ge 0 \quad t = 1,2,\cdots,n \tag{8.5}$$
>
> 1️⃣有关概念：可行解/可行区域/最优解/最优值
>
> 2️⃣最优解不存在的情况：可行域为空，目标函数无极值
>
> 3️⃣线性规划基本定理：线性规划如果存在最优解，则必有一个基本可行最优解
>
> 4️⃣单纯形算法：先求出一个可行解→如果可行解不是最优的就转到相邻的可行解→循环往复直到找到最优

2. 网络流

> ## 2.1. 基本概念
>
> > 1️⃣网络：简单有向图中，选取源s+汇t，每边赋一个值$cap(v,w) \geq 0$(即容量)
> >
> > 2️⃣网络流：定义在网络边集合上的非负函数，例如$flow(v,w)$为边(v,w)的流量
>
> ## 2.2. 可行流
>
> > 1️⃣要满足以下条件
> >
> > 1. 对每条边都有$0 \leq flow(v,w) \leq cap(v,w)$
> > 2. 平衡约束：源s净流入可行流量f，中间结点 出入相等，汇t净流出可行流量f
> >
> > 2️⃣边流
> >
> > 1. 饱和边：$flow(v,w) = cap(v,w)$
> > 2. 非饱和边：$flow(v,w) < cap(v,w)$
> > 3. 零流边：$flow(v,w) = 0$
> > 4. 非零流边：$flow(v,w) > 0$

> > 5. 弱流边：介于0和饱和之间
>
> 3 最大流：求一个$flow$使得流量f最大
>
> 4 流的费用：给每边一个流量费用$cost(v,w)$，费用为
> $$\operatorname{cost}(\text{flow})=\sum_{(v,w)\in E}\operatorname{cost}(v,w)\times\operatorname{flow}(v,w)$$