线性规划与网络流

1. 线性规划

> - **线性规划问题及其表示**
> - 线性规划问题可表示为如下形式：
>
> 目标函数
>
> 约束条件
>
> $$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (8.1)$$
>
> s.t.
>
> $$\sum_{t=1}^{n} a_{it} x_t \le b_i \qquad i = 1,2,\cdots,m_1 \qquad (8.2)$$
> $$\sum_{t=1}^{n} a_{jt} x_t = b_j \qquad j = m_1+1,\cdots,m_1+m_2 \qquad (8.3)$$
> $$\sum_{t=1}^{n} a_{kt} x_t \ge b_k \qquad k = m_1+m_2+1,\cdots,m_1+m_2+m_3 \qquad (8.4)$$
> $$x_t \ge 0 \qquad t = 1,2,\cdots,n \qquad (8.5)$$
>
> 1️⃣ 有关概念：可行解/可行区域/最优解/最优值
>
> 2️⃣ 最优解不存在的情况：可行域为空，目标函数无极值
>
> 3️⃣ 线性规划基本定理：线性规划如果存在最优解，则必有一个基本可行最优解
>
> 4️⃣ 单纯形算法：先求出一个可行解→如果可行解不是最优的就转到相邻的可行解→循环往复直到找到最优

2. 网络流

2.1. 基本概念

> 1️⃣ 网络：简单有向图中，选取源s+汇t，每边赋一个值$cap(v,w) \geq 0$(即容量)
>
> 2️⃣ 网络流：定义在网络边集合上的非负函数，例如$flow(v,w)$为边(v,w)的流量

2.2. 可行流

> 1️⃣ 要满足以下条件
>
> 1. 对每条边都有$0 \leq flow(v,w) \leq cap(v,w)$
> 2. 平衡约束：源s净流入可行流量f，中间结点 出入相等，汇t净流出可行流量f
>
> 2️⃣ 边流
>
> 1. 饱和边：$flow(v,w) = cap(v,w)$
> 2. 非饱和边：$flow(v,w) < cap(v,w)$
> 3. 零流边：$flow(v,w) = 0$
> 4. 非零流边：$flow(v,w) > 0$
> 5. 弱流边：介于0和饱和之间
>
> 3️⃣ 最大流：求一个$flow$使得流量f最大
>
> 4️⃣ 流的费用：给每边一个流量费用$cost(v,w)$，费用为$\operatorname{cost}(\text{flow}) = \sum_{(v,w)\in E} \operatorname{cost}(v,w) \times \operatorname{flow}(v,w)$