08-C4

高级搜索树

红黑树：删除

他仿佛这一刻才第一次看见这些颜色，并为它们取下崭新又美妙的名字。在这里，没有人会在冬天时哀悼已逝去的夏天或春天

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

等效删除

❖ 首先按照BST常规算法，执行

```
r = removeAt( x, _hot )
```

//实际被摘除的可能是x的前驱或后继w

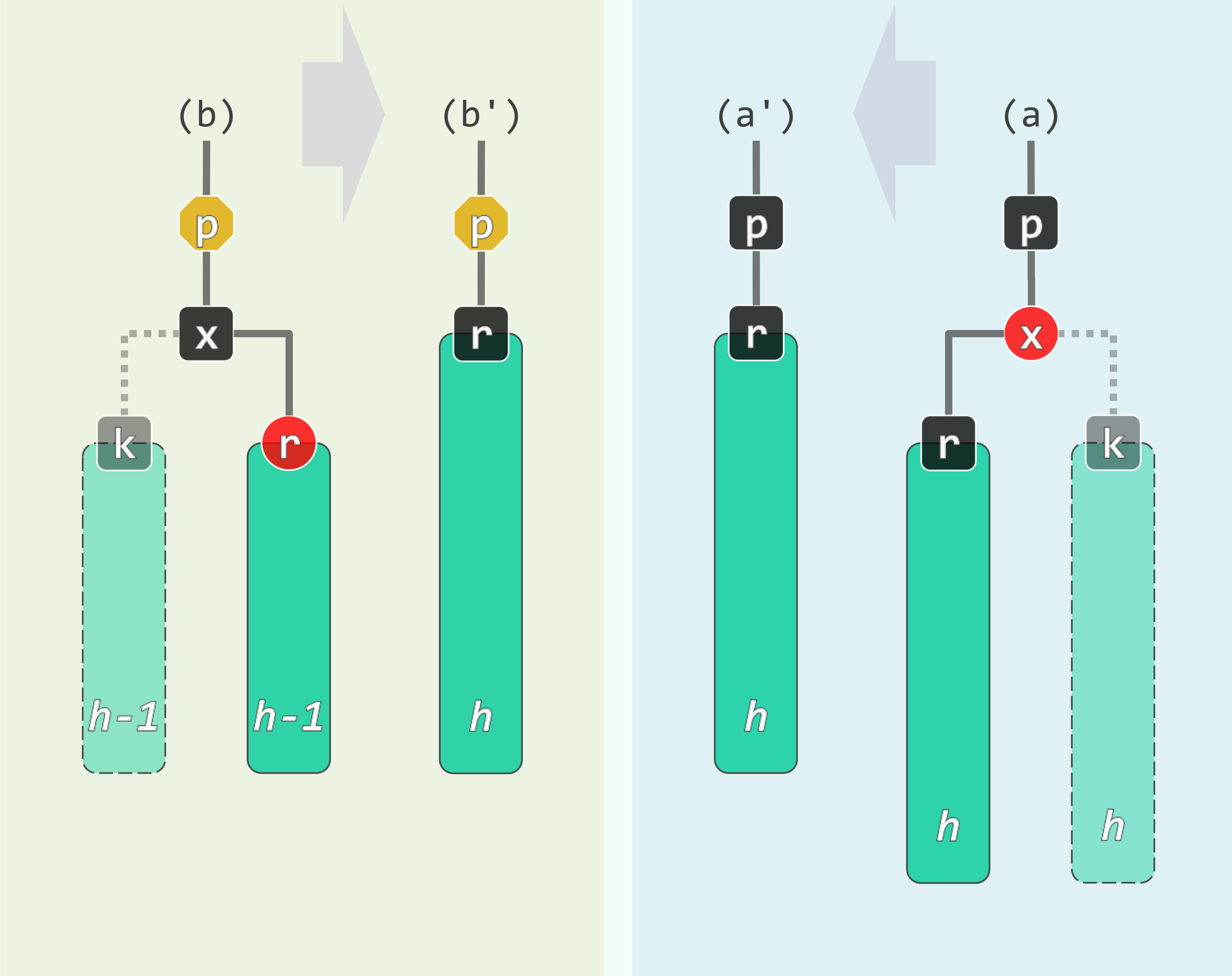
//简捷起见，以下不妨统称作x

❖ x由孩子r接替，此时另一孩子k必为NULL

❖ 但在随后的调整过程中，x可能逐层上升

❖ 故需假想地、统一地、等效地理解为：

- k为一棵黑高度与r相等的子树，且
- 随x一并摘除（尽管实际上从未存在过）



其一为红

❖ 完成removeAt()之后

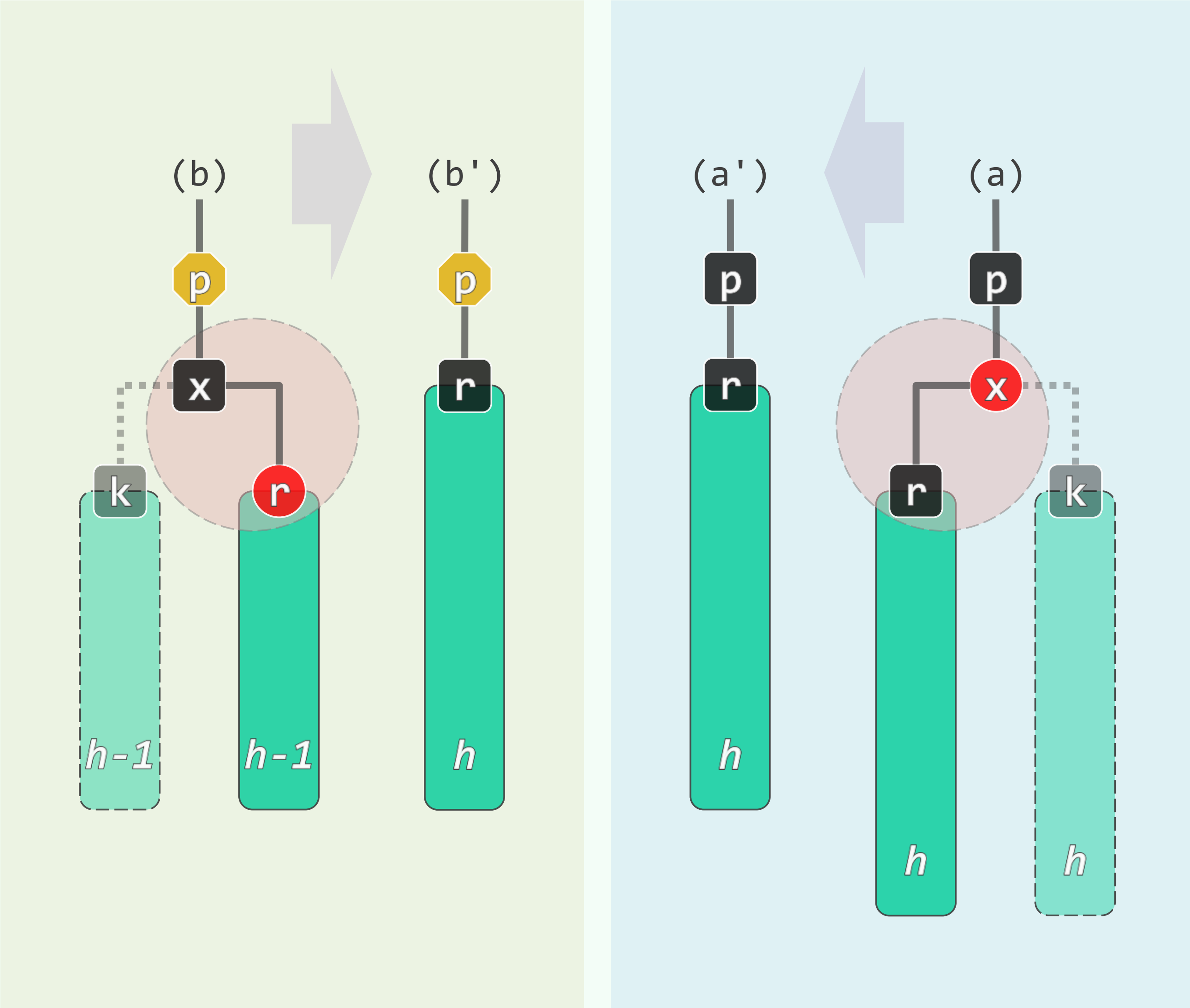
- 条件1、2依然满足
- 但条件3、4却不见得

❖ 在原树中，考查x与r

- 若x为红，则条件3、4自然满足
- 若r为红，则令其与x交换颜色

❖ 总之，无论x或r为红，则3、4均不难满足

——删除遂告完成！



双黑

❖ 若x与r均黑（double black），则不然...

❖ 摘除x并代之以r后，全树黑深度不再统一

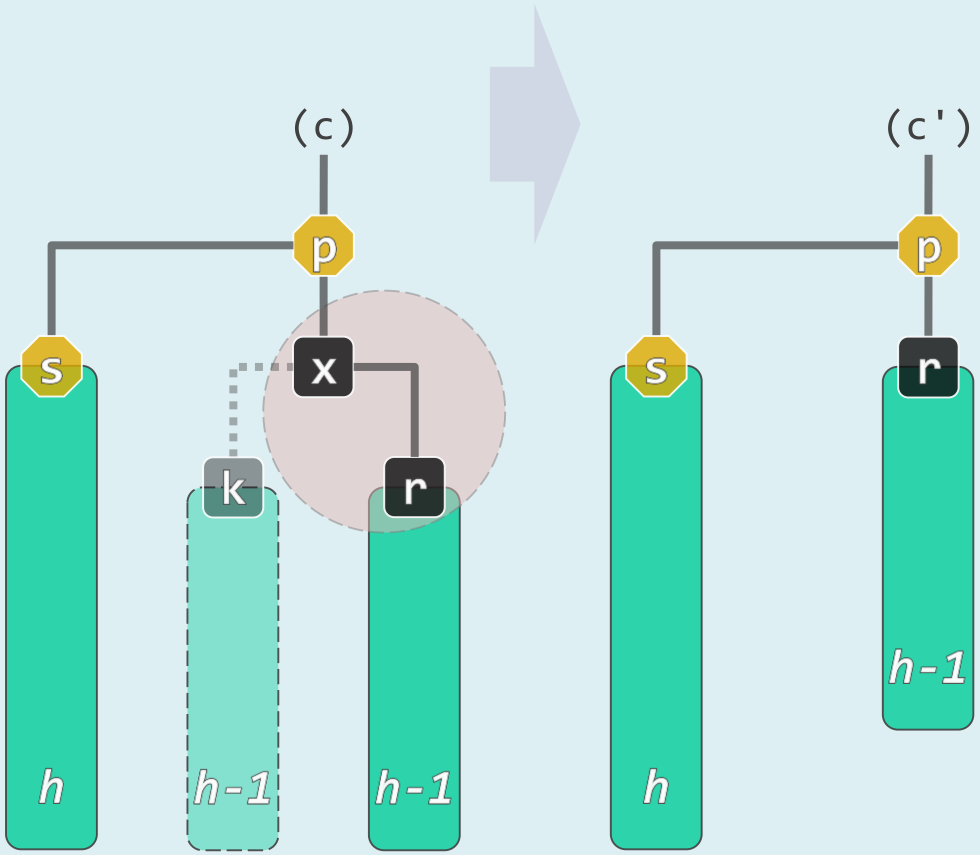
（稍后可见，等效于B-树中x所属节点下溢）

❖ 在新树中，考查r的父亲、兄弟

- p = r->parent //亦是原x的父亲

- s = sibling(r)

❖ 无非四种情况，分别加以处理...



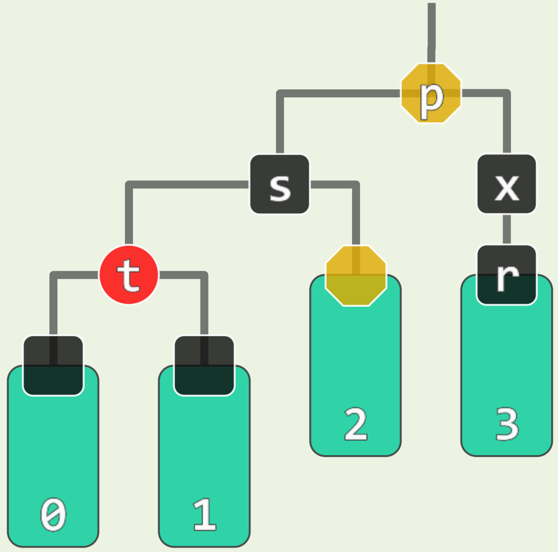
删除算法

```
template <typename T> bool RedBlack<T>::remove( const T & e ) {
   BinNodePosi<T> & x = search( e ); if ( !x ) return false; //查找定位
   BinNodePosi<T> r = removeAt( x, _hot ); //删除_hot的某孩子，r指向其接替者
   if ( !( --_size ) ) return true; //若删除后为空树，可直接返回
   if ( !_hot ) //若被删除的是根，则将其置黑，并更新（全树）黑高度
      { _root->color = RB_BLACK; _root->updateHeight(); return true; }
   if ( BlackHeightUpdated( _hot ) ) return true; //若祖先依然平衡，则无需调整
   //至此，必失衡：若替代节点r为红，则只需简单地翻转其颜色
   if ( IsRed( r ) ) { r->color = RB_BLACK; r->height++; return true; }
   //至此，r以及被其替代的x均为黑色
   solveDoubleBlack( r ); return true; //双黑调整（入口处必有 r == NULL)
}
```

双黑修正

```
template <typename T> void RedBlack<T>::solveDoubleBlack( BinNodePosi<T> r ) {
   while ( 1 ) {
      BinNodePosi<T> p = r ? r->parent : _hot; if ( !p ) return; //r的父亲
      BinNodePosi<T> s = (r == p->lc) ? p->rc : p->lc; //r的兄弟
      if ( IsBlack( s ) ) { //兄弟s为黑
         //s的红孩子t：若左、右孩子皆红，左者优先；皆黑时为NULL
         BinNodePosi<T> t = IsRed(s->lc) ? s->lc : IsRed(s->rc) ? s->rc : NULL;
         if ( t ) { /* ... 黑s有红孩子：BB-1 ... */ }
         else { /* ... 黑s无红孩子：BB-2R或BB-2B ... */ }
      } else { /* ... 兄弟s为红：BB-3 ... */ }
   } //while
}
```

BB-1：s为黑，且至少有一个红孩子t　　（1/2）



❖ “3+4”重构：

t ～ a

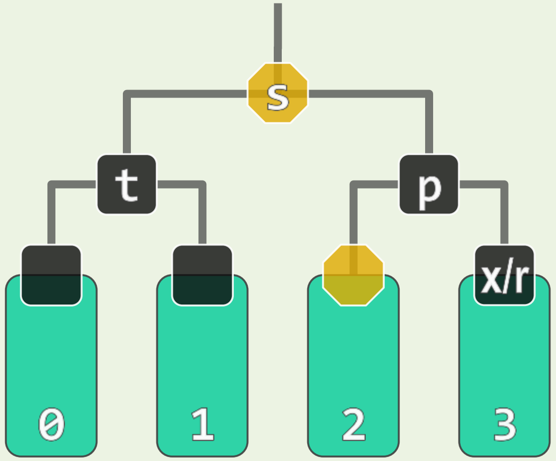
s ～ b

p ～ c

❖ r保持黑

a、c染黑

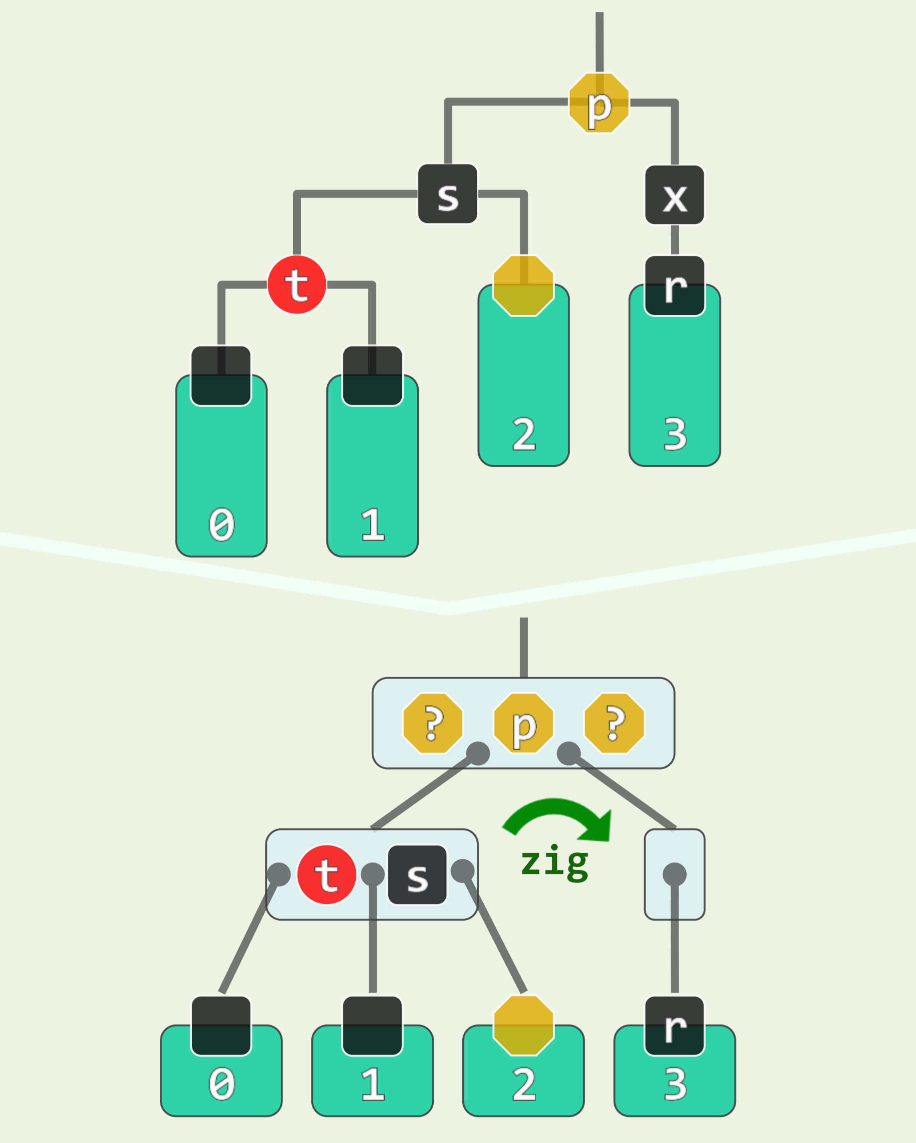
b继承p的原色



❖ 如此，红黑树性质在全局得以恢复——删除完成！　//zig-zag等类似

❖ 在对应的B-树中，以上操作等效于...

BB-1：s为黑，且至少有一个红孩子t (2/2)



❖ 通过关键码的**旋转**

消除超级节点的**下溢**

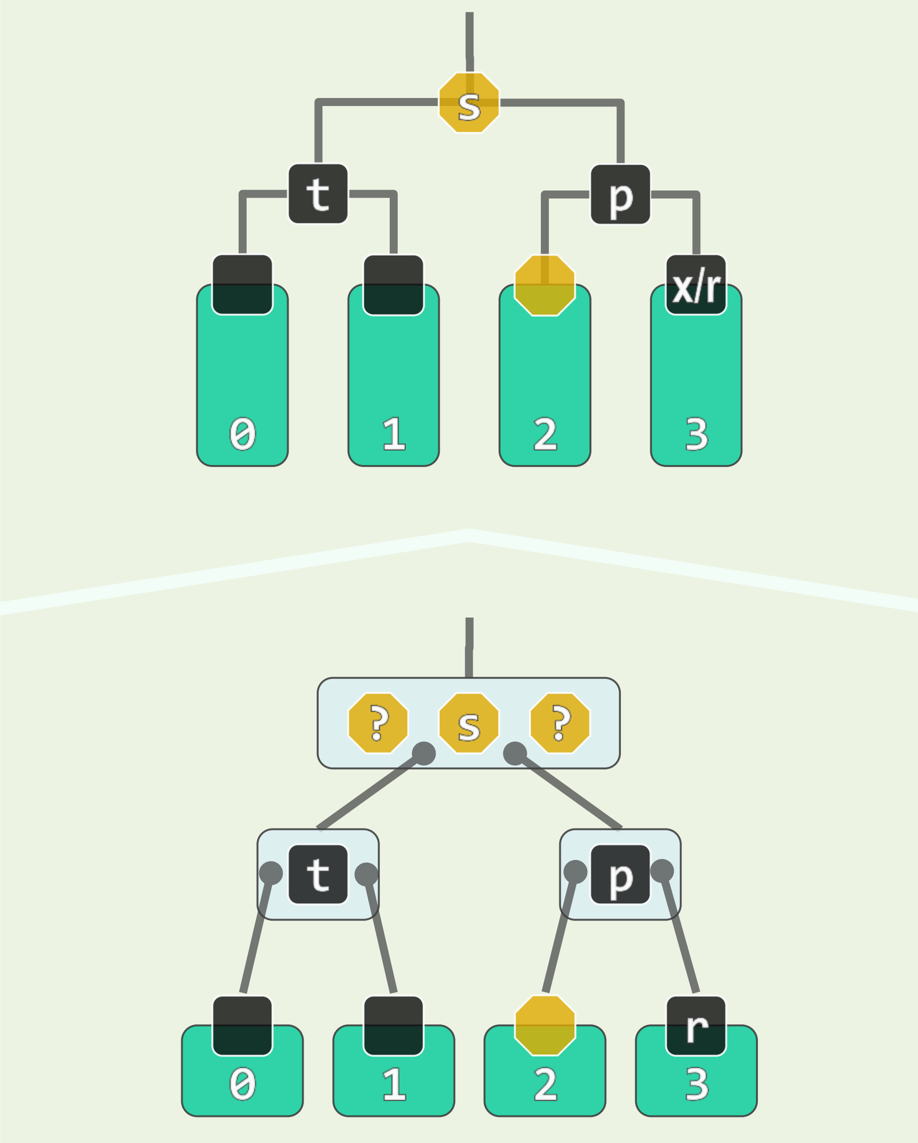
❖ 在对应的B-树中

- p若为红

  问号之一为黑关键码

- p若为黑

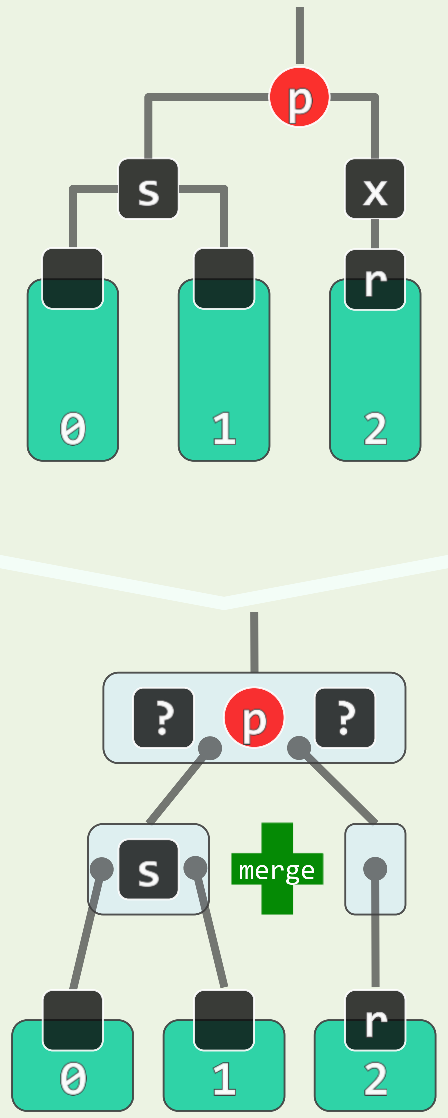
  必自成一个超级节点



BB-1：实现

```
if ( IsBlack( s ) ) { //兄弟s为黑
   /* ...... */
   if ( t ) { //黑s有红孩子：BB-1
      RBColor oldColor = p->color; //备份p颜色，并对t、父亲、祖父
      BinNodePosi<T> b = rotateAt( t ); //旋转
      if (HasLChild(b)) { b->lc->color = RB_BLACK; b->lc->updateHeight(); }
      if (HasRChild(b)) { b->rc->color = RB_BLACK; b->rc->updateHeight(); }
      b->color = oldColor; b->updateHeight(); return; //新根继承原根的颜色
   } else { /* ... 黑s无红孩子：BB-2R或BB-2B ... */ }
} else { /* ... 兄弟s为红：BB-3 ... */ }
```

BB-2R：s为黑，且两个孩子均为黑；p为红



❖ r保持黑；s转红；p转黑

❖ 在对应的B-树中，等效于

下溢节点与兄弟合并

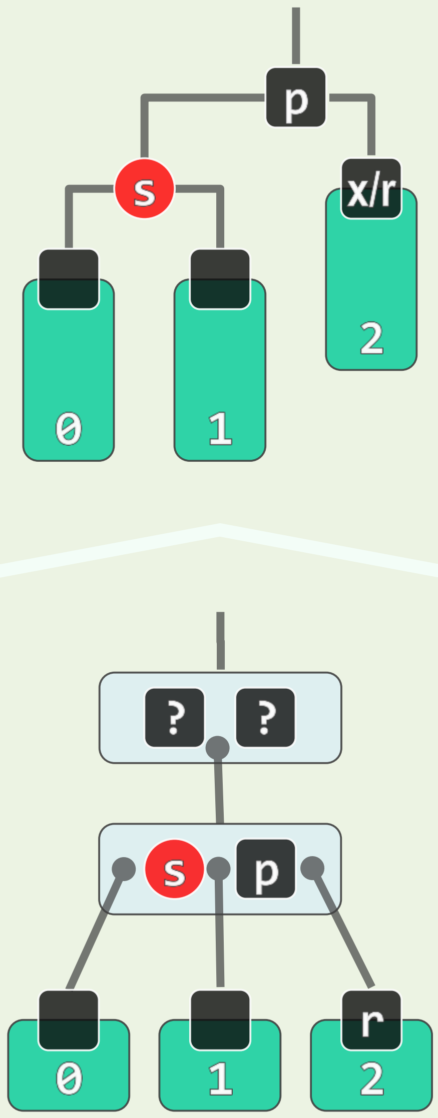
❖ 红黑树性质在**全局**得以恢复

❖ 失去关键码p后，上层节点

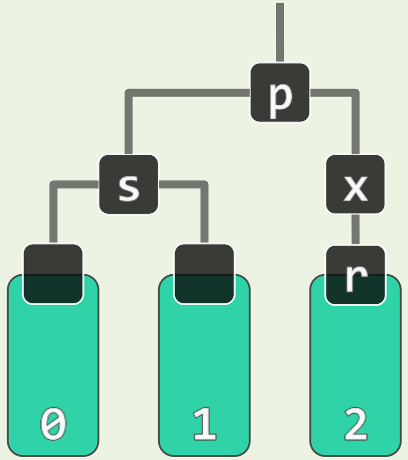
会否**继而**下溢？不会！

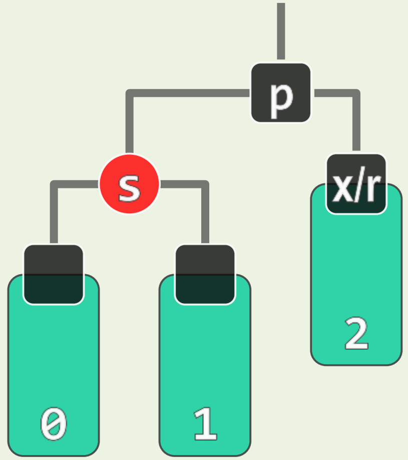
❖ 合并之前，在p之左或右侧

还应有一个黑关键码



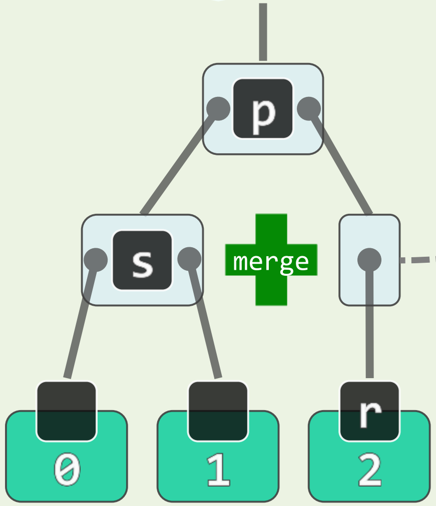
BB-2B：s为黑，且两个孩子均为黑；p为黑



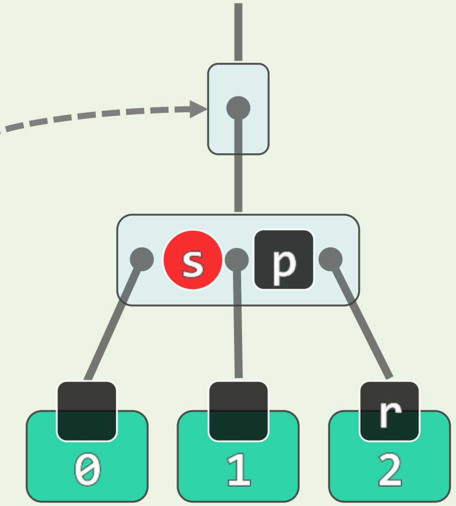


- s转红；r与p保持黑
- 红黑树性质在**局部**得以恢复
- 在对应的B-树中，等效于

  下溢节点与兄弟合并
- 合并前，p和s均属于**单关键码节点**



孩子的下溢修复后，父节点必然继而下溢



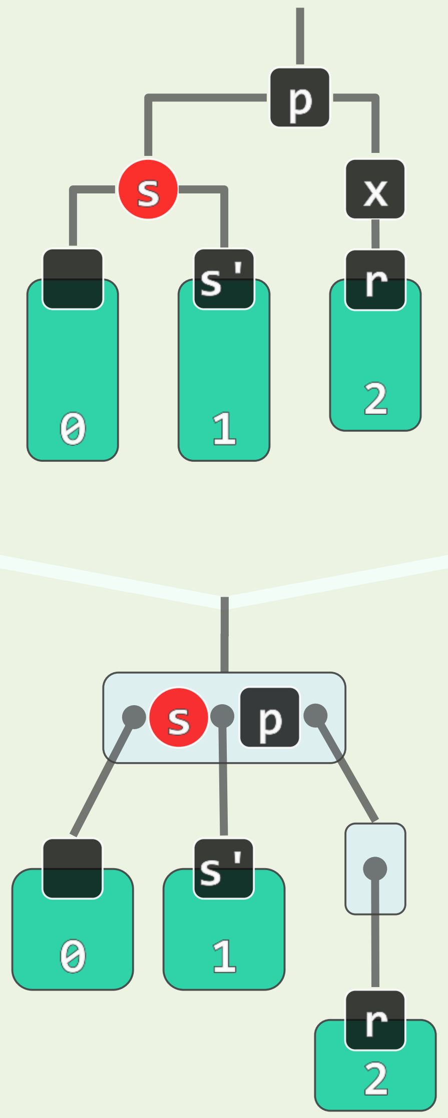
- 好在可继续分情况处理

  高度递增，至多 $\mathcal{O}(\log n)$ 层（步）

BB-(2R+2B)：实现

```
if ( IsBlack( s ) ) { //兄弟s为黑
   /* ...... */
   if ( t ) { /* ... 黑s有红孩子：BB-1 ... */ }
   else { /* 黑s无红孩子 */
      s->color = RB_RED; s->height--; //s转红
      if ( IsRed( p ) ) { p->color = RB_BLACK; return; } //BB-2R：p转黑
      else { p->height--; r = p ); } //BB-2B：p黑高度下降；继续上溯
   }
} else { /* ... 兄弟s为红：BB-3 ... */ }
```

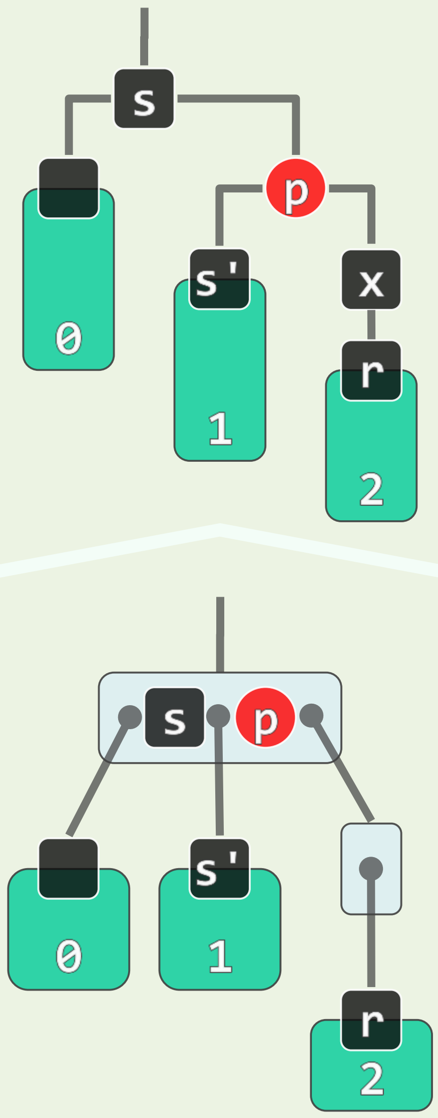
BB-3：s为红（其孩子均为黑）



- 绕p单旋；s红转黑，p黑转红
- 黑高度依然异常，但...
- r有了一个新的黑兄弟s'

  故转化为前述情况，而且...
- 既然p已转红，接下来
  - 绝不会是BB-2B
  - 而只能是BB-2R或BB-1
- 于是，再经一轮调整

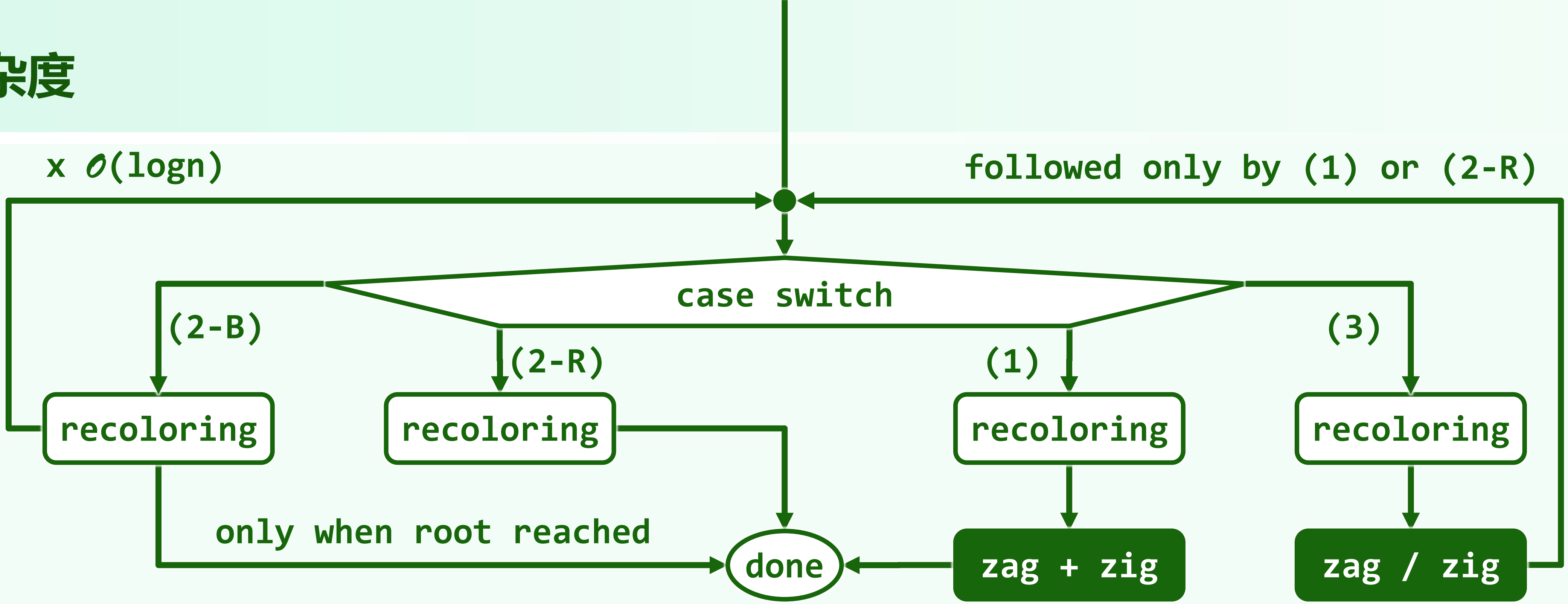
  红黑树性质必然全局恢复



BB-3：实现

```
if ( IsBlack( s ) ) { //兄弟s为黑
   /* ...... */
   if ( t ) { /* ... 黑s有红孩子：BB-1 ... */ }
   else { /* ... 黑s无红孩子：BB-2R或BB-2B ... */ }
} else { //兄弟s为红：BB-3
   s->color = RB_BLACK; p->color = RB_RED; //s转黑，p转红
   BinNodePosi<T> t = IsLChild( s ) ? s->lc : s->rc; //取t与其父s同侧
   _hot = p; rotateAt( t ); //对t及其父亲、祖父做平衡调整
   //继续迭代，修正r处的双黑——此时p已转红，故接下来只能是BB-1或BB-2R
}
```

复杂度



❖ RedBlack<T>::remove()

仅需 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间

- $\mathcal{O}(\log n)$ 次重染色
- $\mathcal{O}(1)$ 次旋转

	旋转	染色	此后
(1) 黑s有红子t	1~2	3	调整随即完成
(2R) 黑s无红子，p红	0	2	调整随即完成
(2B) 黑s无红子，p黑	0	1	必再次双黑，但将上升一层
(3) 红s	1	2	转为(1)或(2R)