11-G

图应用

Floyd-Warshall算法

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

让我们测量一下自己的活动半径，并待在那个中心吧，就像蜘蛛待在网的中心一样

从Dijkstra到Floyd-Warshall

❖ 给定带权网络G，计算其中**所有点对**之间的最短距离

❖ 应用： 确定G的中心点（center） = 半径最小的顶点

s的半径 = radius(G,s) = 所有顶点到s的最大距离

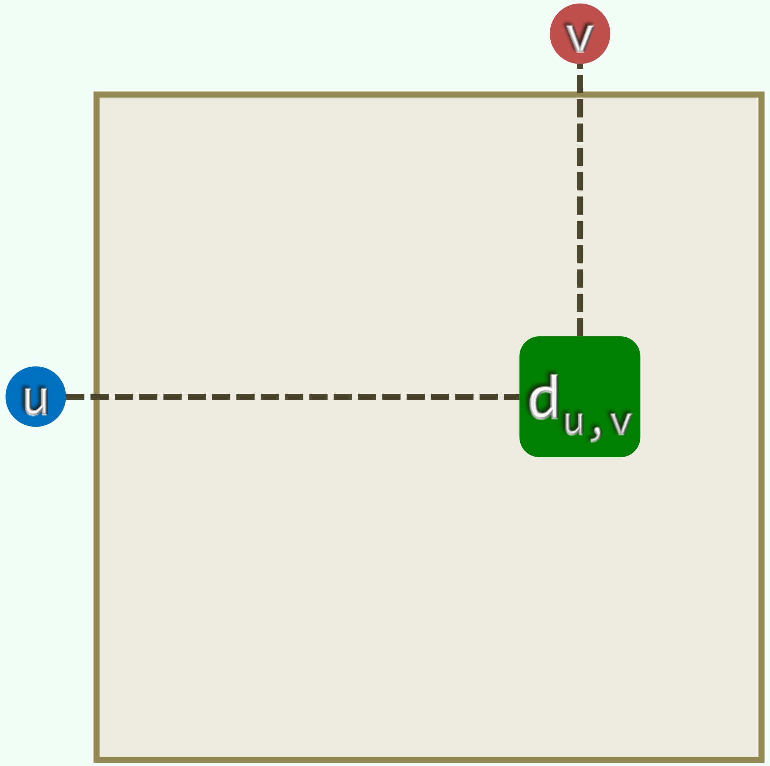
❖ 直觉： 依次将各顶点作为源点，调用Dijkstra算法

时间 $= n \times \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3)$ —— 可否更快？

❖ 思路： 图矩阵 --> 最短路径矩阵

❖ 效率： $\mathcal{O}(n^3)$，与执行n次Dijkstra相同 —— 既如此，F.W.之价值何在？

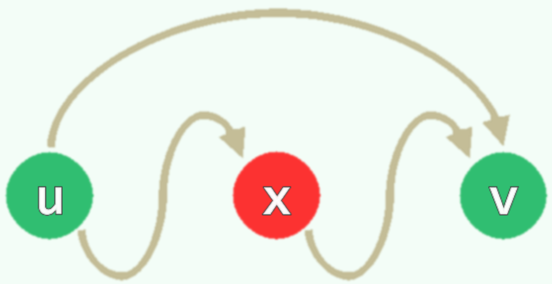
❖ 优点： 形式简单、算法紧凑、便于实现；允许**负权边**（尽管仍不能有**负权环路**）

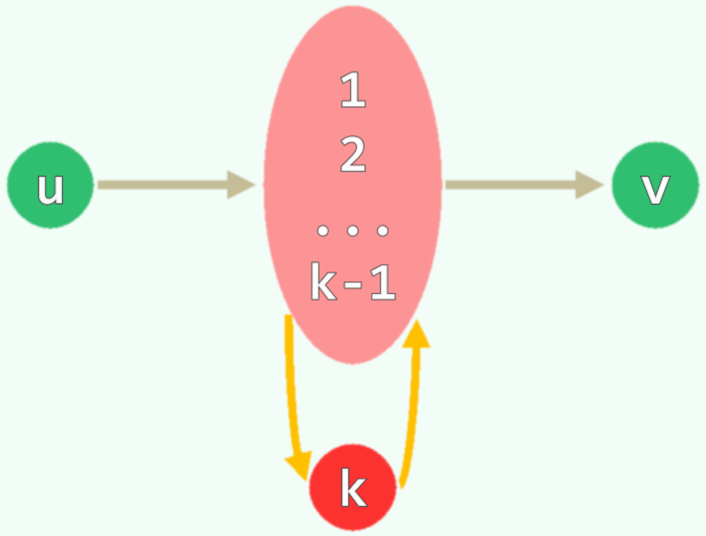


问题 + 特点

❖ u和v之间的最短路径可能是

- 不存在通路，或者
- 直接连接，或者
- 最短路径(u, x) + 最短路径(x, v)





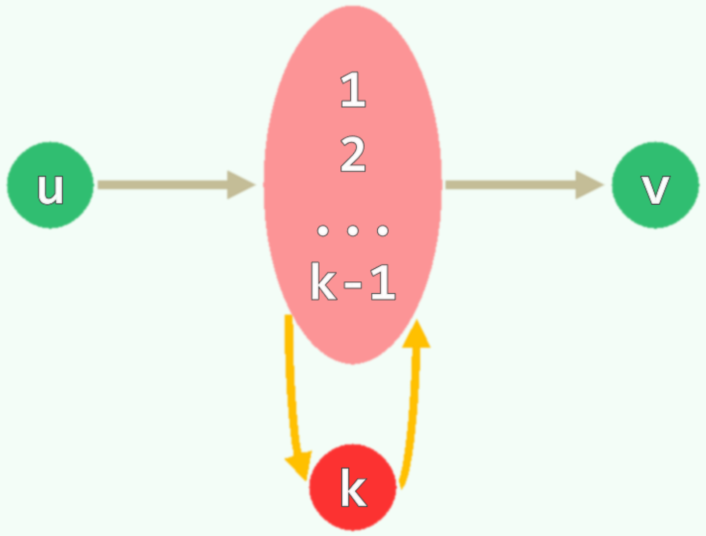
❖ 将所有顶点随意编号：1, 2, ..., n

定义：$d^k(u,v)$ = 中途只经过前k个顶点中转，从u通往v的最短路径长度

- $d^k(u,v) = w(u,v) \qquad (\text{if k} = 0)$
- $d^k(u,v) = \min\{\ d^{k-1}(u,v),\ d^{k-1}(u,k) + d^{k-1}(k,v)\ \} \qquad (\text{if k} \geq 1)$

蛮力递归

```
weight dist( node * u, node * v, int k )
   if ( k < 1 ) return w( u, v );
   u2v  =  dist( u, v, k-1 ); //经前k-1个点中转
   for each node x ∉ { u, v } //x作为第k个可中转点
      u2x2v = dist( u, x, k-1 )
            + dist( x, v, k-1 ); //递归
      u2v   = min( u2v, u2x2v ); //择优
   return u2v;
```



❖ 存在大量**重复**的递归调用，如何**避免**?

❖ 动态规划之**记忆化**:

维护一张表，记录需要**反复计算**的数值

动态规划

```
for k in range(0, n)
  for u in range(0, n)
    for v in range(0, n)
      A[u][v] =
        min( A[u][v], A[u][k] + A[k][v] )
```