11-E2

图应用

Prim算法：极短跨边

从邻枝上切下的一根枝条，必定也是从整个树上切下的。所以，
一个人若同另一个人分离，他也是同整个社会分离

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

Excluding The Longest Edge Along A Cycle

❖ 任何环路C上的**最长**边f，都**不会**被MST采用

否则...

❖ 在移除f之后，MST将**分裂**为两棵树

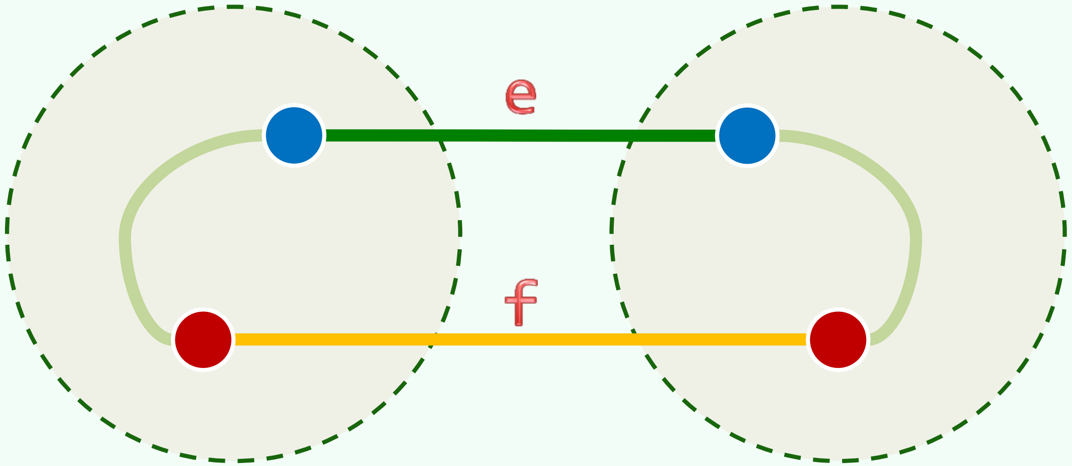
将其视作一个**割**，则C上必有该割的另一**跨边**e

既然|e|<|f|，那么只要用e**替换**f，就会...

...得到一棵总权重**更小**的支撑树

❖ 这也是Kruskal算法的依据（稍后细解）

❖ 下面这个准则，才是Prim算法的依据...



Including The Shortest Edge Crossing A Cut

❖ 设 $(U : V\backslash U)$ 是N的一个割

❖ 若uv是该割的一条极短跨边

则必存在一棵包含uv的MST

❖ 反证：假设uv未被任何MST采用...

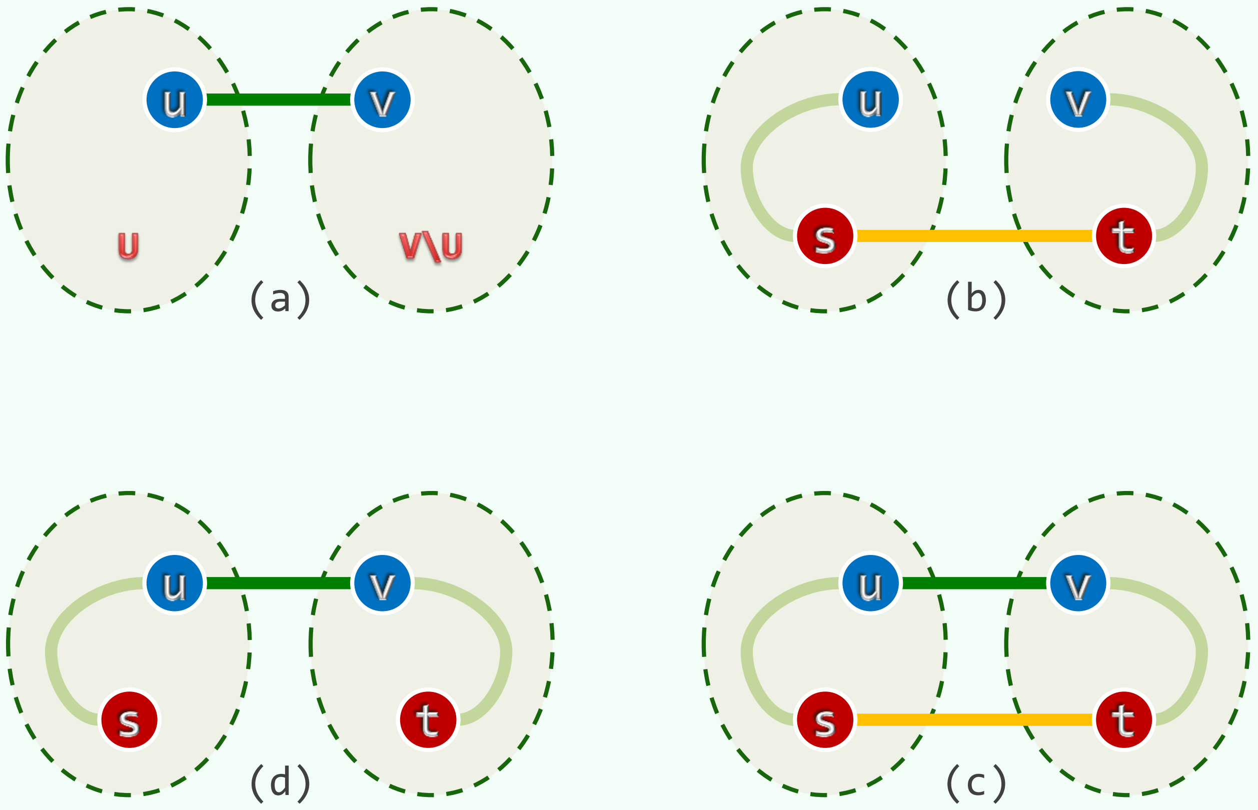
任取一棵MST，将uv加入其中，于是

- 将出现唯一的回路，且该回路
- 必经过uv以及至少另一跨边st

接下来，摘除st后...

恢复为一棵支撑树，且总权重不致增加

❖ 反之，任一MST都必经由极短跨边联接每一割



递增式构造

❖ **首先，任选：** $T_1 = (\{v_1\}; \varnothing)$

❖ **以下，不断地将** T_k **拓展为树** T_{k+1}

$$T_{k+1} = (V_{k+1}; E_{k+1})$$

$$= (V_k \cup \{\underline{v_{k+1}}\}; E_k \cup \{\underline{v_{k+1}u}\})$$

其中， $u \in V_k$

❖ **由此前的分析**

- **只需将** $(V_k;\ V \backslash V_k)$ **视作原图的一个割**

- **该割所有跨边中的极短者即是** $\underline{v_{k+1}u}$