03-I

列表

逆序对

有象斯有對，對必反其為
有反斯有讎，讎必和而解

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

Inversion

❖ 考查序列A[0, n)，设元素之间可比较大小

$$\langle i, j \rangle \text{ is called an inversion} \quad \text{if} \quad 0 \leq i < j < n \text{ and } A[i] > A[j]$$

❖ 为便于统计，可将逆序对统一记到**后者**的账上

$$\mathcal{I}(j) = \left\| \{\ 0 \leq i < j \mid A[i] > A[j] \text{ and hence } \langle i, j \rangle \text{ is an inversion } \} \right\|$$

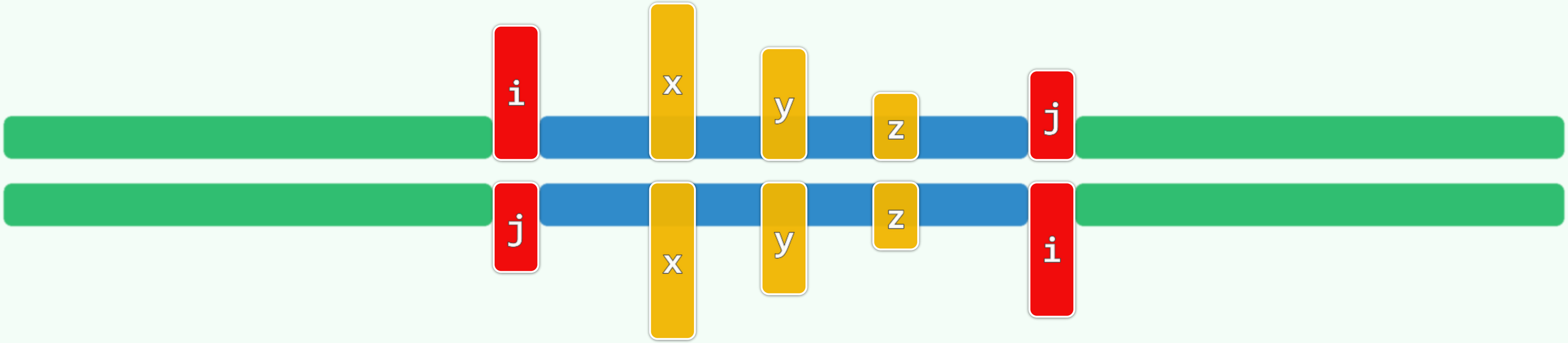
❖ 例： A[] = { 5, 3, 1, 4, 2 } 中，共有 0 + 1 + 2 + 1 + 3 = 7 个逆序对

A[] = { 1, 2, 3, 4, 5 } 中，共有 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 个逆序对

A[] = { 5, 4, 3, 2, 1 } 中，共有 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 个逆序对

❖ 显然，逆序对总数 $\mathcal{I} = \sum_{j} \mathcal{I}(j) \leq \binom{n}{2} = \mathcal{O}(n^2)$

Bubblesort

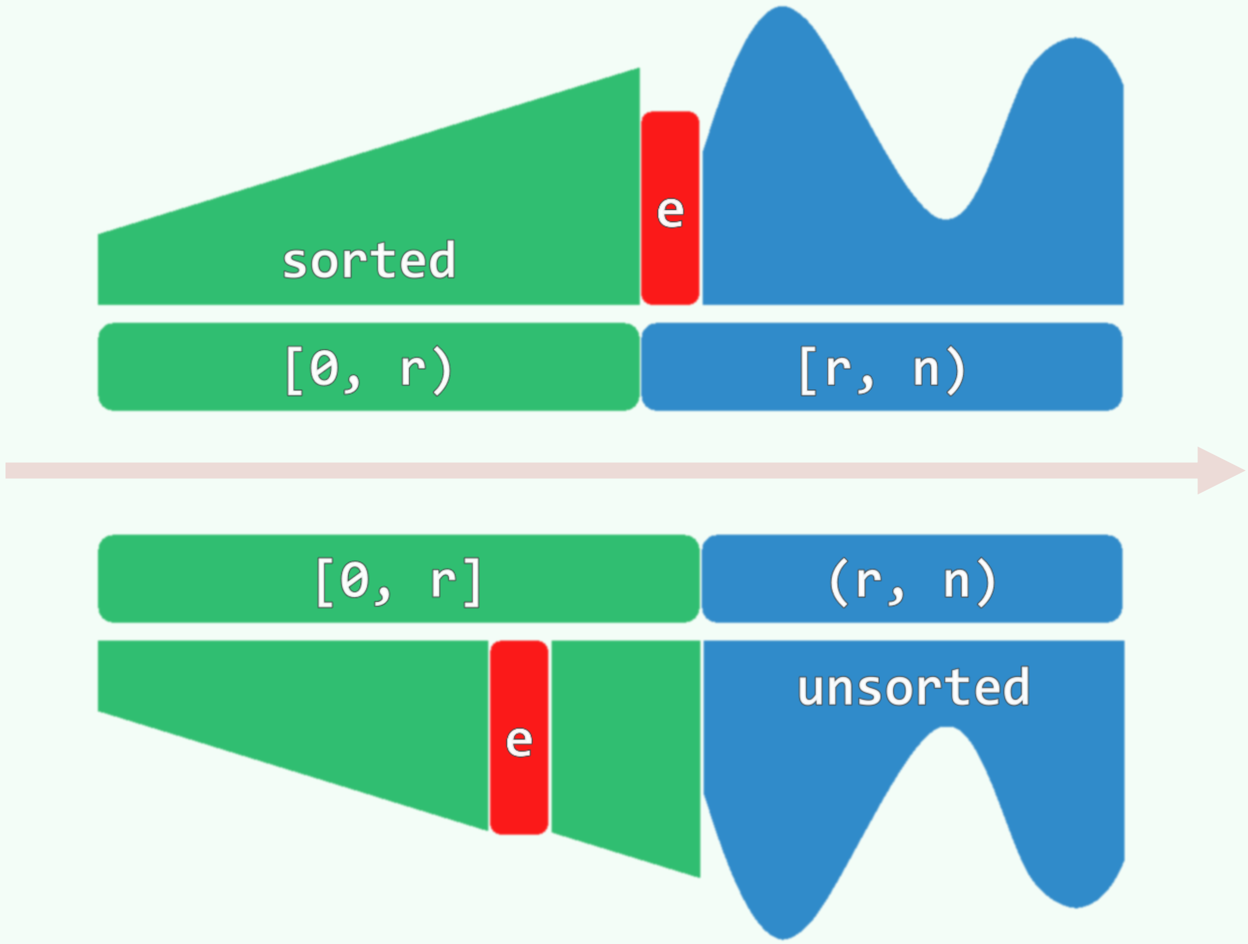


❖ 在序列中交换一对逆序元素，逆序对总数**必然**减少

❖ 在序列中交换一对**紧邻的**逆序元素，逆序对总数恰好**减一**

❖ 因此对于Bubblesort算法而言，**交换**操作的次数恰等于输入序列所含**逆序对**的总数

Insertionsort



❖ 针对 $e = A[r]$ 的那一步迭代

恰好需要做 $\mathcal{I}(r)$ 次比较

❖ 若共含 $\mathcal{I}$ 个逆序对，则

- 关键码比较次数为 $\mathcal{O}(\mathcal{I})$
- 运行时间为 $\mathcal{O}(n + \mathcal{I})$

//习题[3-11]

//输入敏感性

计数：任意给定一个序列，如何统计其中逆序对的总数？

❖ 蛮力算法需要 $\Omega(n^2)$ 时间；而借助归并排序，仅需 $\mathcal{O}(n \log n)$ 时间...