01-E3

绪论

迭代与递归：总和最大区段

这时，公共智慧的结果便产生理智与意志
在社会体中的结合，也才有了各个部分的
密切配合，以及最后全体的最大力量。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

问题 + 蛮力算法

❖ 从整数序列中，找出总和最大的区段（有多个时，**短**者、靠**后**者优先）

$$\mathcal{A}[0,19) = \{\,1,\ -2,\ \underline{7,\ 2,\ 6,\ -9,\ 5,\ 6,}\ -12,\ -8,\ \underline{13,\ 0,\ -3,\ 1,\ -2,\ 8,}\ 0,\ -5,\ 3\,\}$$

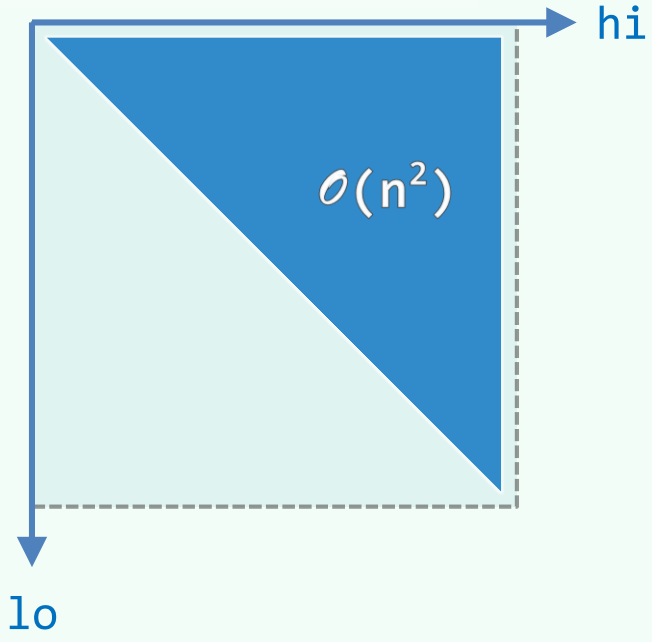
```
int gs_BF( int A[], int n ) //蛮力策略：O(n^3)
   int gs = A[0]; //当前已知的最大和
   for ( int lo = 0; lo < n; lo++ ) //枚举所有的
      for ( int hi = lo; hi < n; ) //O(n^2)个区段！
         int s = sum( A, lo, ++hi ); //用O(n)时间求和 (sum(A+lo,++hi-lo)空间更优)
         if ( gs < s ) gs = s; //择优、更新
   return gs;
```

递增策略

❖ 考查所有起点**相同**的区间...

它们的总和之间具有**相关性**...

```
int gs_IC( int A[], int n ) //递增策略：𝒪(n^2)
   int gs = A[0]; //当前已知的最大和
   for ( int lo = 0; lo < n; lo++ ) //枚举所有起始于lo
      for ( int s = 0, hi = lo; hi < n; ) //终止于hi的区间
         s += A[ hi++ ]; //递增地得到其总和：𝒪(1)
         if ( gs < s ) gs = s; //择优、更新
   return gs;
```



分而治之：前缀 + 后缀：$\mathcal{A}[lo,hi) \;=\; \mathcal{A}[lo,mi) \cup \mathcal{A}[mi,hi) \;=\; \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$

❖ 借助递归，便可求得$\mathcal{P}$、$\mathcal{S}$内部的GS；而剩余的**实质**任务无非是...

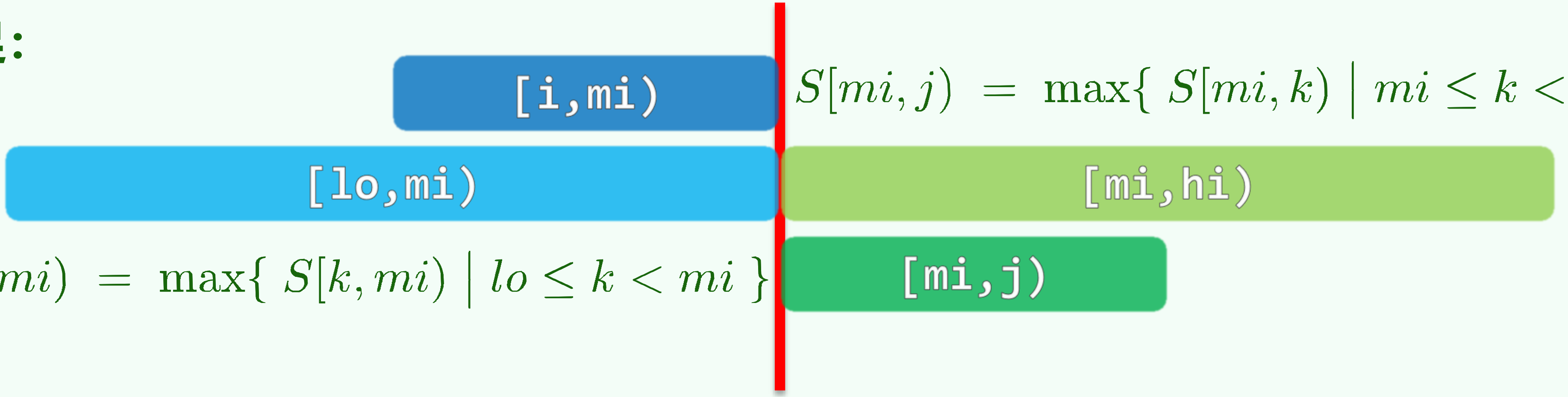
考察那些**跨越**切分线的区段...

❖ 沿着切分线，这类区段必被分割为**非空**的前缀、后缀：

$$\mathcal{A}[i,j) \;=\; \mathcal{A}[i,mi) + \mathcal{A}[mi,j),\; i < mi < j$$

而且满足：

$$S[mi,j) \;=\; \max\{\, S[mi,k) \mid mi \le k < hi \,\}$$



$$S[i,mi) \;=\; \max\{\, S[k,mi) \mid lo \le k < mi \,\}$$

❖ 可见，二者均可独立计算，且累计耗时不过 $\mathcal{O}(n)$；于是总体复杂度也优化为 $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$

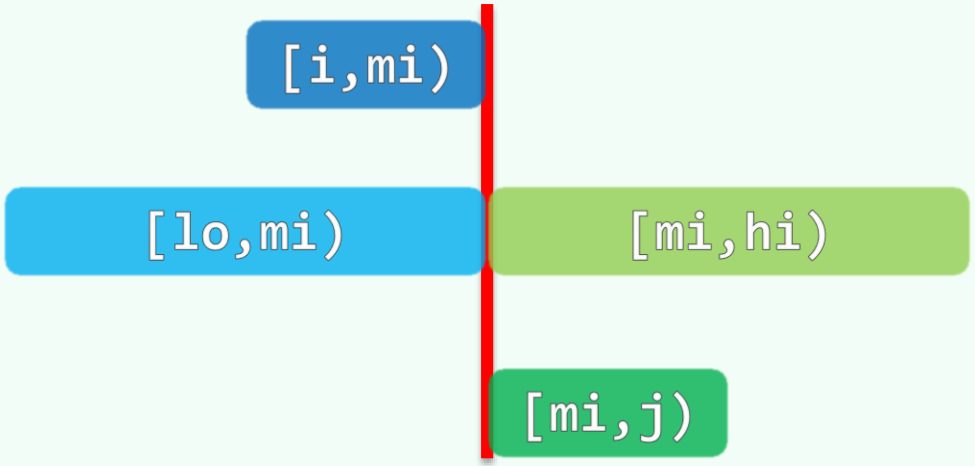
分治策略：实现

```
int gs_DC( int A[], int lo, int hi ) { //Divide-And-Conquer: O(n*logn)
   if ( hi - lo < 2 ) return A[lo]; //递归基
   int mi = (lo + hi) / 2; //在中点切分

   int gsL = A[mi-1], sL = 0, i = mi; //枚举
   while ( lo < i-- ) //所有[i, mi)类区段
      if ( gsL < (sL += A[i]) ) gsL = sL; //更新

   int gsR = A[mi], sR = 0, j = mi-1; //枚举
   while ( ++j < hi ) //所有[mi, j)类区段
      if ( gsR < (sR += A[j]) ) gsR = sR; //更新

   return max( gsL + gsR, max( gs_DC(A, lo, mi), gs_DC(A, mi, hi) ) ); //递归
}
```

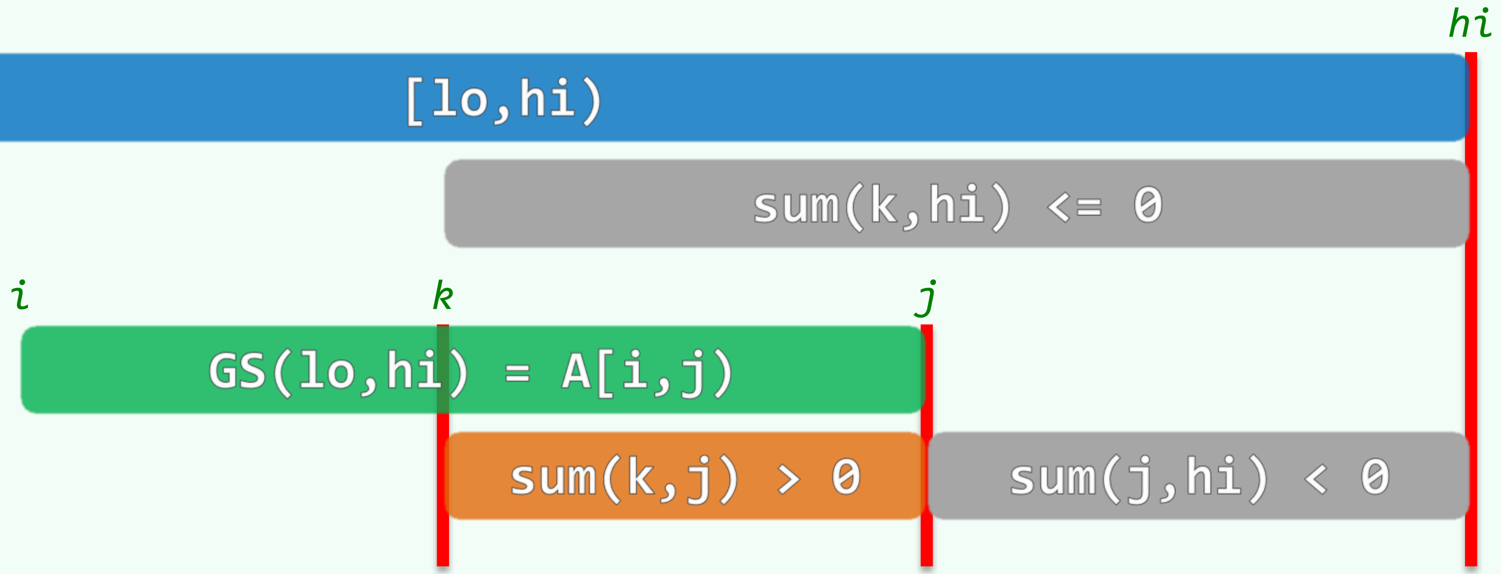


减治策略：最短的总和非正的后缀 ~ 总和最大区段

❖ 若 $suffix(k) = \mathcal{A}[k, hi),\ k = \max\{\ lo \le i < hi \mid sum[i, hi) \le 0\ \}$

❖ 则 $GS(lo, hi) = \mathcal{A}[i, j)$ 要么是其真后缀（ $k \le i < j = hi$ ），要么与之无交（ $j \le k$ ）

❖ [反证]



假若二者确有非空的公共部分：

$\mathcal{A}[k, j),\ i \le k < j < hi$

❖ 由 $GS[lo, hi)$ 的最大、最短性，必有

$sum[k, j) > 0$ ，即 $sum[j, hi) < 0$ ——这与 $\mathcal{A}[k, hi)$ 的最短性矛盾

❖ 基于以上事实，完全可以采用“减而治之”的策略，通过一趟线性扫描在线性时间内找出GS...

减治策略：实现

```
int gs_LS( int A[], int n ) { //Linear Scan: O(n)
   int gs = A[0], s = 0, i = n;
   while ( 0 < i-- ) { //在当前区间内
      s += A[i]; //递增地累计总和
      if ( gs < s ) gs = s; //并择优、更新
      if ( s <= 0 ) s = 0; //剪除非正和后缀
   }
   return gs;
}
```