# 二叉树

## 树

05-A

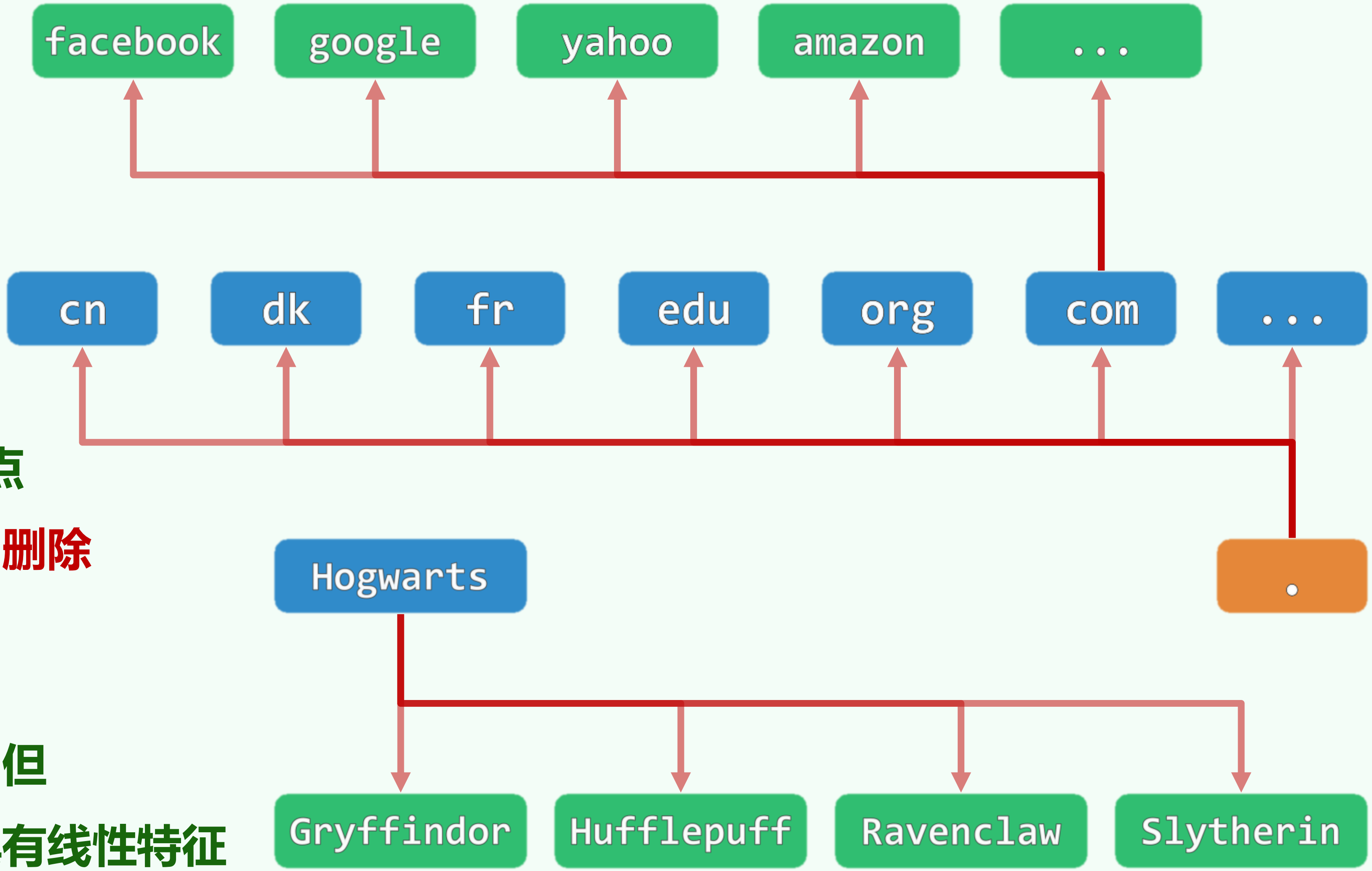
他是一位最古老的神，古老就是一种荣誉。
他的古老有一个凭证，就是他没有父母

越到你的高度上——那是我的深度！
藏在你的纯洁里——那是我的天真！

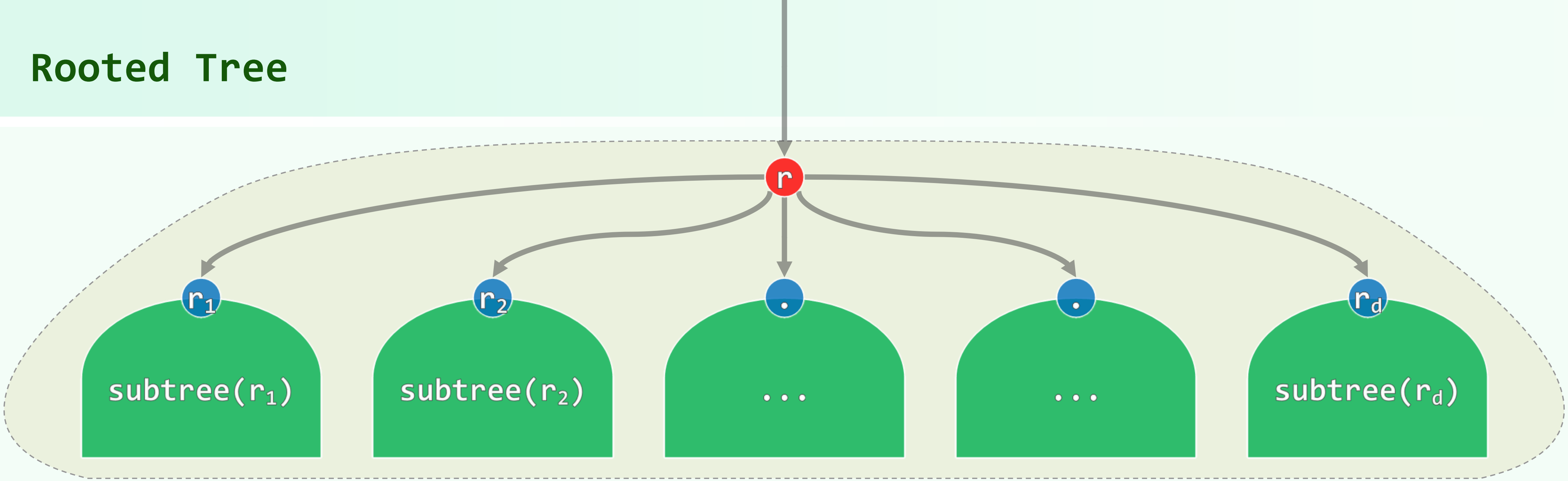
邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

# 动机

- ❖ 【应用】层次结构的表示
  - 表达式
  - 文件系统
  - URL ...
- ❖ 【数据结构】综合性
  - 兼具Vector和List的优点
  - 兼顾高效的**查找**、**插入**、**删除**
- ❖ 【半线性】
  - 不再是简单的线性结构，但
  - 在确定某种**次序**之后，具有线性特征



# Rooted Tree



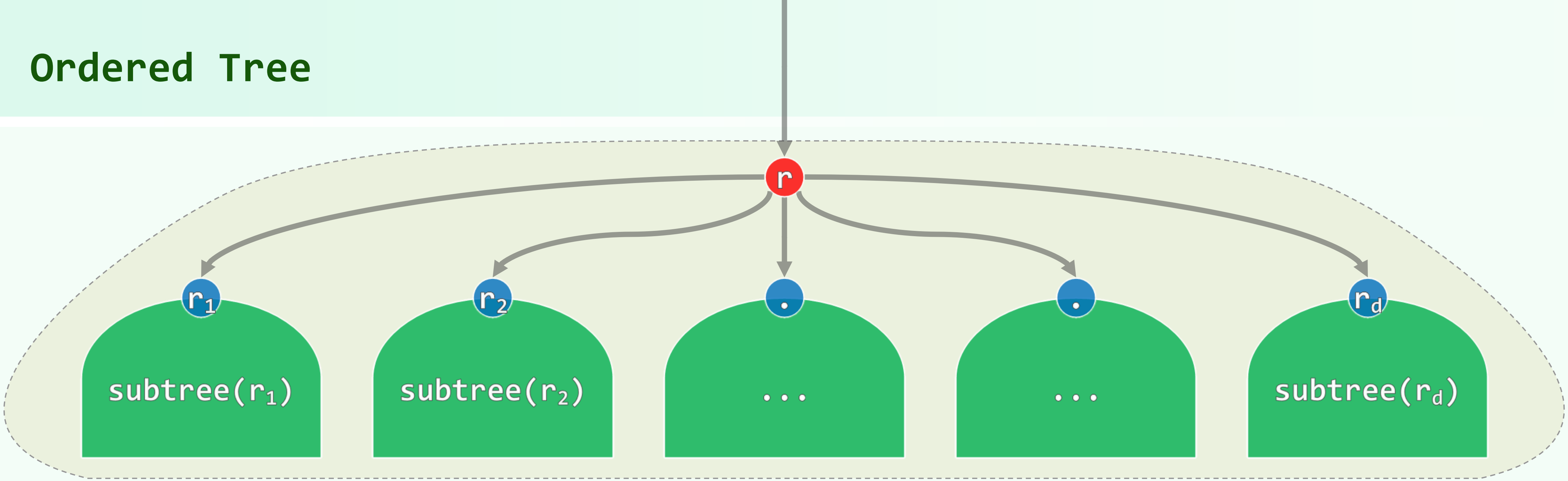

❖ 树是极小连通图、极大无环图 $\mathcal{T} = (V;\ E)$：节点数 $n = |V|$，边数 $e = |E|$

❖ 指定任一节点 $r \in V$ 作为**根**后，$\mathcal{T}$ 即称作**有根树**

❖ 若 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \ldots, \mathcal{T}_d$ 为有根树，则 $\mathcal{T} = \left( (\bigcup_i V_i) \cup \{r\},\ (\bigcup_i E_i) \cup \{ \langle r, r_i \rangle \mid 1 \le i \le d \} \right)$ 也是

❖ 相对于 $\mathcal{T}$，$\mathcal{T}_i$ 称作以 $r_i$ 为根的**子树** (subtree rooted at $r_i$)，记作 $\mathcal{T}_i = subtree(r_i)$

# Ordered Tree




- $r_i$ 称作 $r$ 的**孩子**（child），$r_i$ 之间互称**兄弟**（sibling）

  $r$ 为其**父亲**（parent），$d = degree(r)$ 为 $r$ 的（出）**度**（degree）

- 可归纳证明：$e = \sum_{v \in V} degree(v) = n - 1 = \Theta(n)$

  故在衡量相关复杂度时，可以 $n$ 作为参照

- 若指定 $T_i$ 作为 $T$ 的第 $i$ 棵子树，$r_i$ 作为 $r$ 的第 $i$ 个孩子，则 $T$ 称作**有序树**

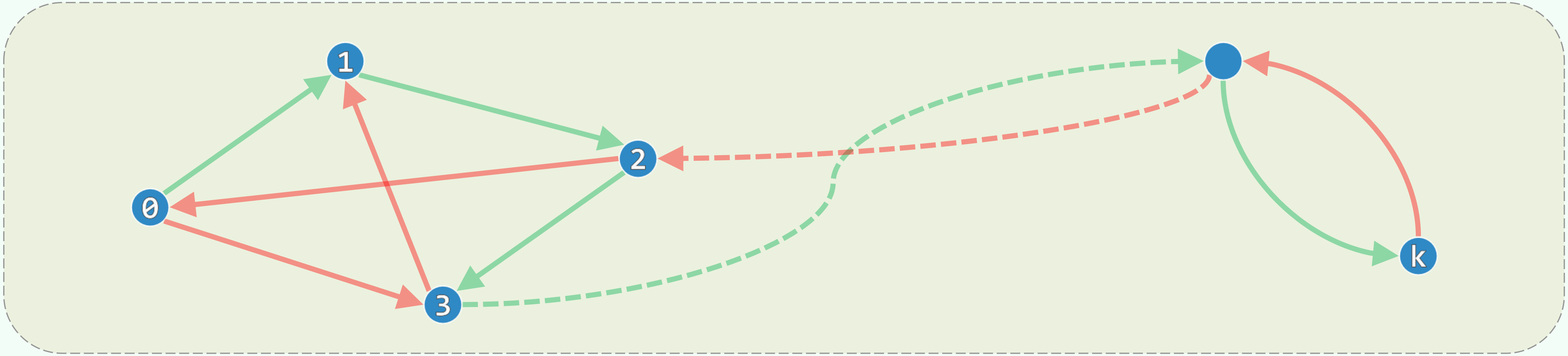
# 路径 + 环路

❖ $V$ 中的 $k+1$ 个节点，通过 $V$ 中的 $k$ 条边依次相联，构成一条**路径/通路**（path）

$$\pi = \{ (v_0, v_1),\ (v_1, v_2),\ (v_2, v_3),\ \ldots,\ (v_{k-1}, v_k) \}$$

❖ **路径长度**即所含**边**数：$|\pi| = k$ //注意：早期文献，多以节点数为长度

❖ **环路**（cycle/loop）：$v_k = v_0$ //如果覆盖所有节点各一次，则称作周游（tour）



# 连通 + 无环

❖ 连通图：节点之间均有路径 (connected)

不含环路，称作无环图 (acyclic)

❖ 树 = 无环连通图

= 极小连通图

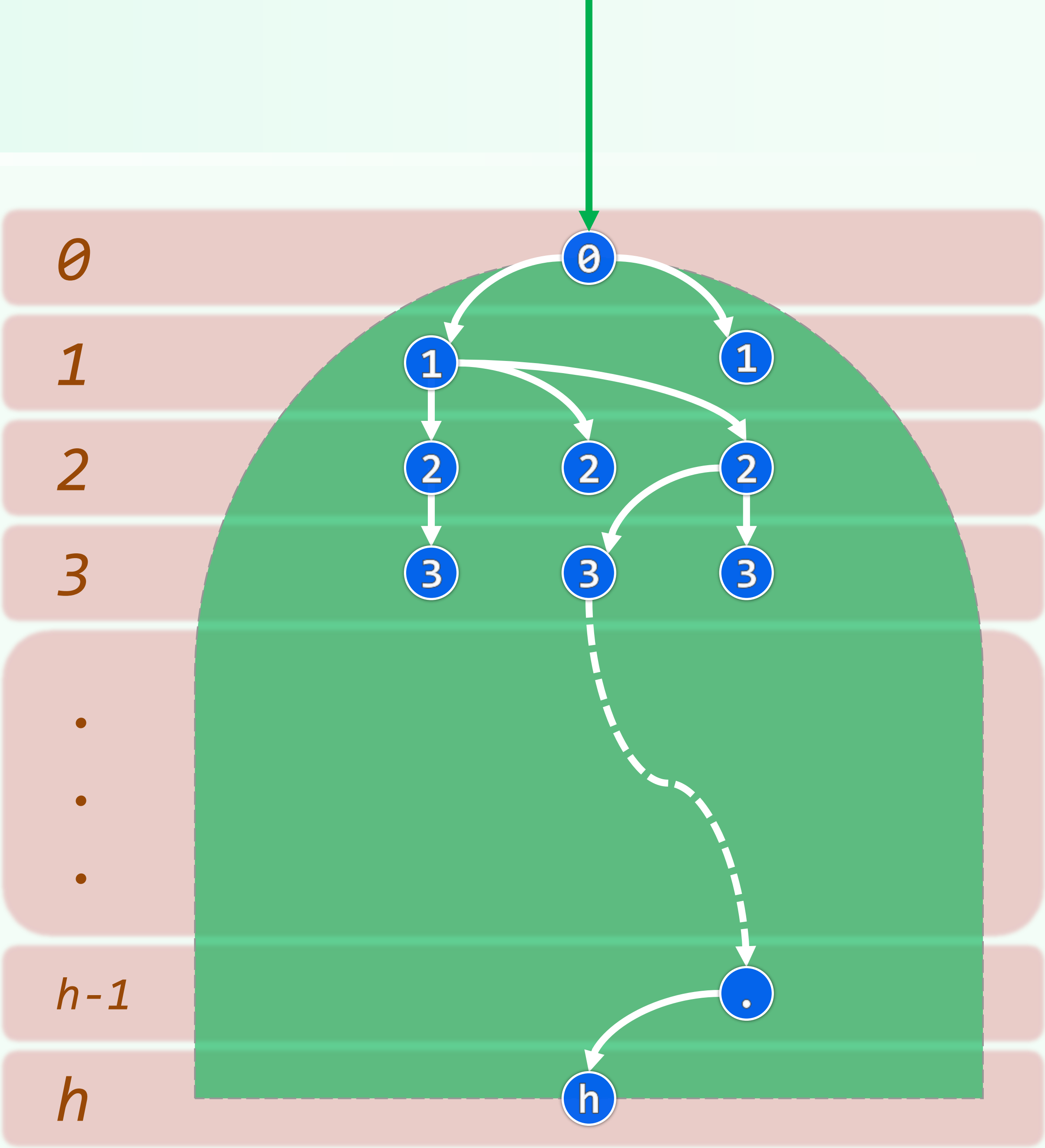
= 极大无环图

❖ 故任一节点v与根之间存在唯一路径

path(v, r) = path(v)

❖ 于是以|path(v)|为指标

可对所有节点做等价类划分...



# 深度 + 层次

- ❖ 不致歧义时，路径、节点和子树可**相互指代**

  \- path(v) ~ v ~ subtree(v)

- ❖ v的**深度**：depth(v) = |path(v)|

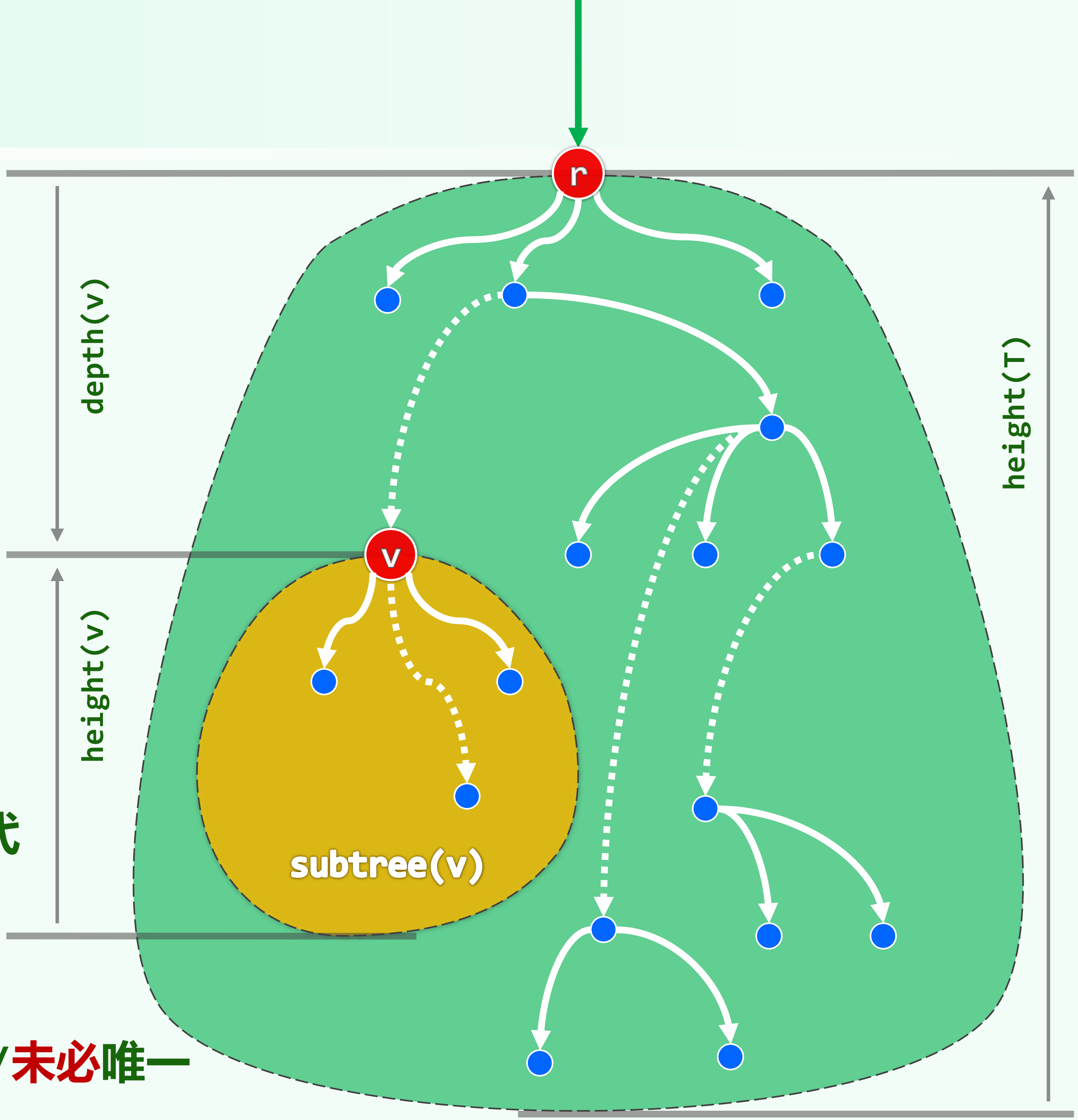
- ❖ path(v)上节点，均为v的**祖先**（ancestor）

  v是它们的**后代**（descendent）

- ❖ 其中除自身以外，是**真**（proper）祖先/后代

- ❖ **半线性**：

  在任一深度，v的祖先/后代若存在，则**必然**/**未必**唯一



# 深度 + 层次

❖ 根节点是所有节点的公共祖先，深度为0

❖ 没有后代的节点称作叶子 (leaf)

❖ 所有叶子深度中的最大者

称作（子）树（根）的高度

- height(v) = height( subtree(v) )

❖ 特别地，空树的高度取作-1

❖ depth(v) + height(v) ≤ height(T)

何时取等号？