

图应用

Prim算法：最小支撑树

11-E1

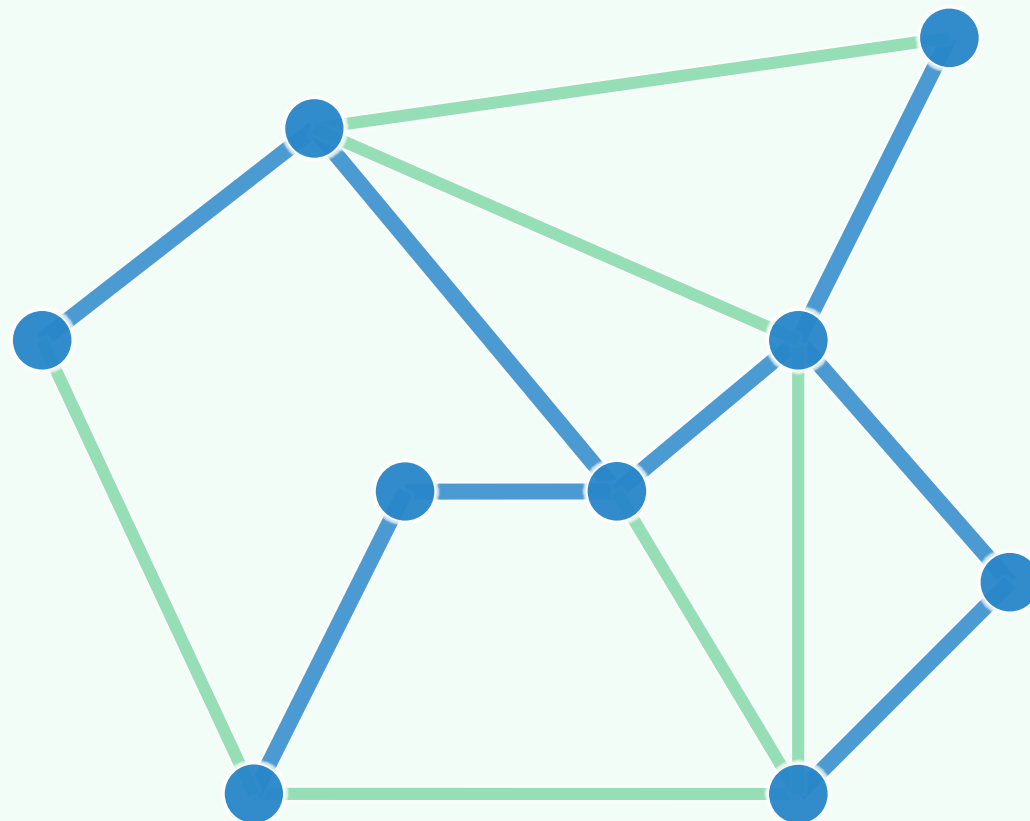
还有更荒唐的事呢，他要在普济造一条风雨长廊，把村里的每一户人家都连接起来，哈哈，他以为，这样一来，普济人就可免除日晒雨淋之苦了

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

最小 + 支撑 + 树

- ❖ 连通网络 $N = (V; E)$ 的子图 $T = (V; F)$
- ❖ 支撑/spanning = 覆盖N中所有顶点
- ❖ 树/tree = 连通且无环, $|F| = |V| - 1$
- ❖ 同一网络的支撑树, 未必唯一
- ❖ minimum = optimal:
总权重 $w(T) = \sum_{e \in F} w(e)$ 达到最小
- ❖ 谁感兴趣?
电信公司、网络设计师、VLSI布线算法设计师、...



❖ 为何重要?

- 自身可**有效计算**
- 众多优化问题的**基本模型**
- 为许多NP问题提供足够好的**近似解**

比如, Euclidean TSP

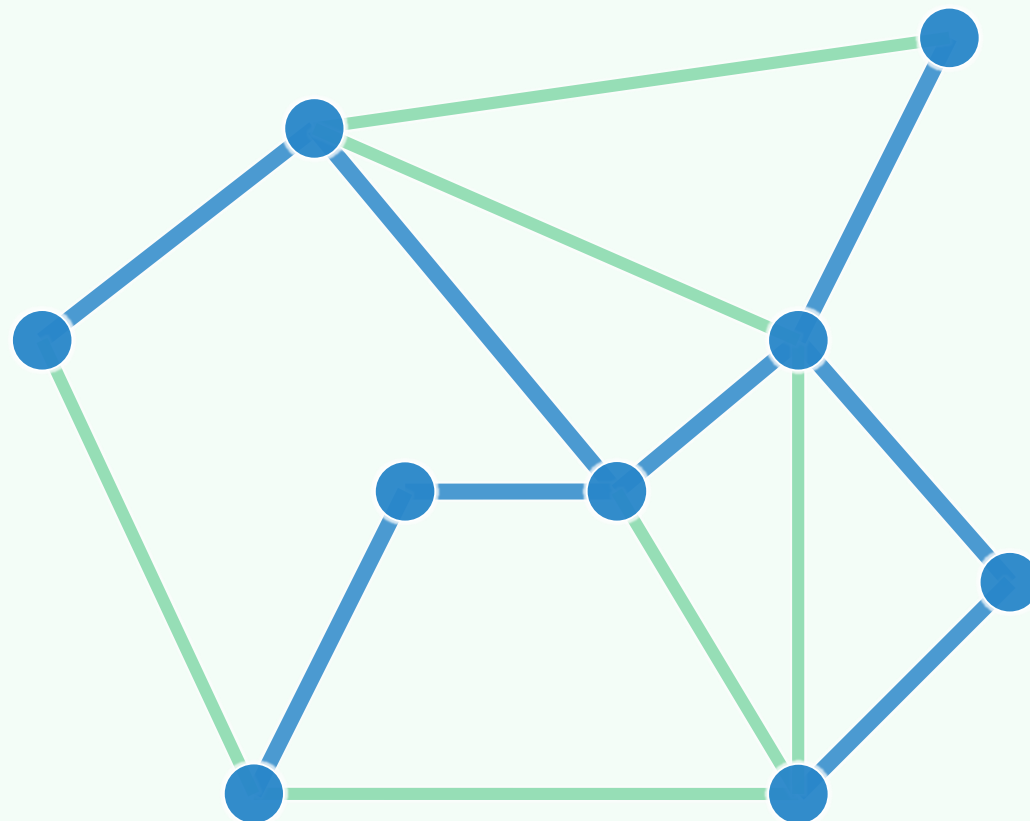
❖ 延伸问题: Proximity Graphs $\Omega(n \log n)$

Steiner MST //NP-hard

❖ 众多算法: Boruvka-1926、Jarnik-1930、

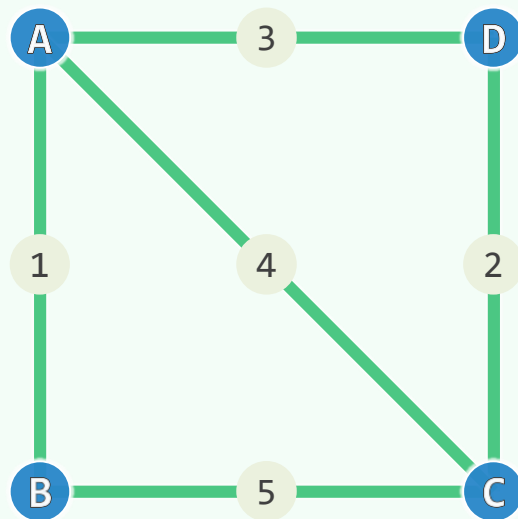
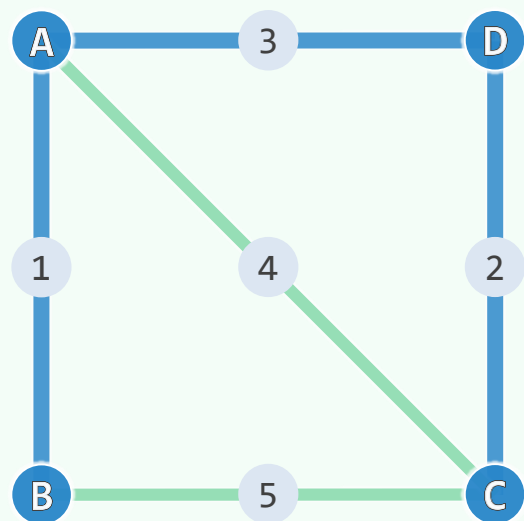
Prim-1956、Kruskal-1956

Karger-Klein-Tarjan-1995、Chazelle-2000、...



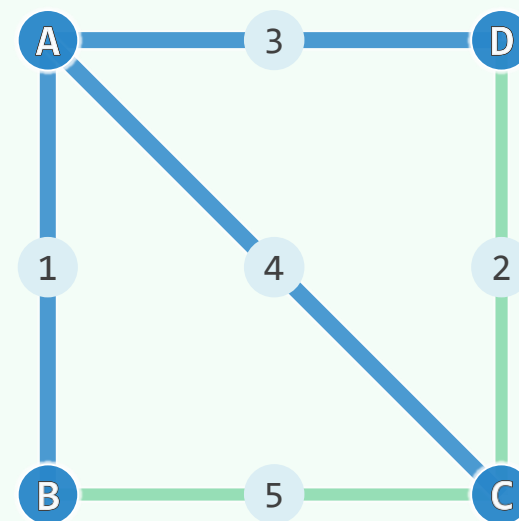
MST \neq SPT

MST



G

SPT



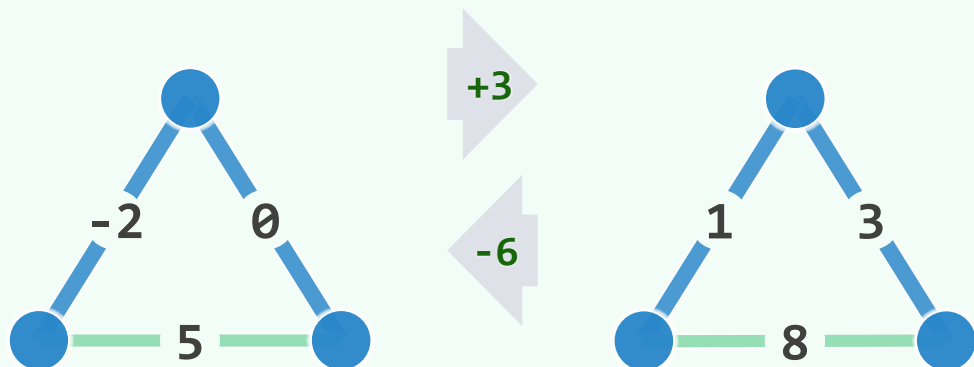
负权 & 退化

❖ 权值必须是**正数**?

- 允许为**零**，有何影响?
- 允许为**负数**呢?

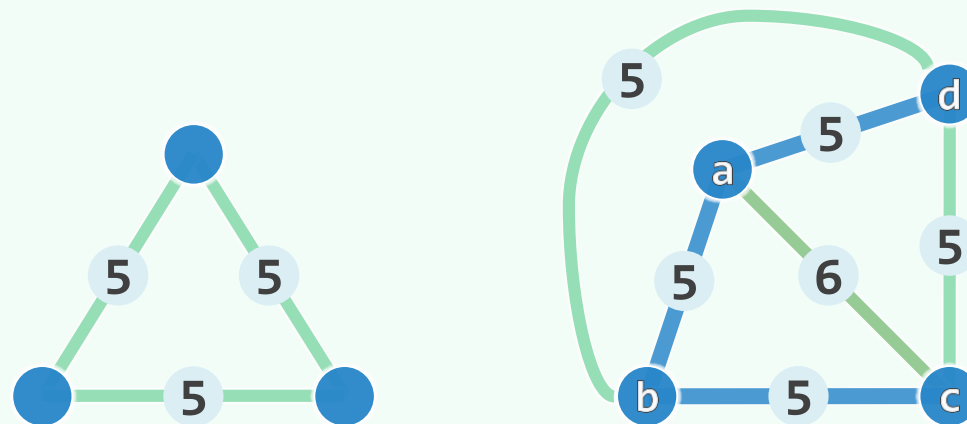
❖ 支撑树所含边数必相等，故可统一调整：

$\text{increase}(1 - \text{findMin}())$



❖ The minimum? A minimal!

同一网络，或有多棵MST：可强制消除歧义...



❖ 合成数 (composite number) :

$(w(u, v), \min(u, v), \max(u, v))$

$5ab < 5ad < 5bc < 5bd < 5cd < 6ac$

蛮力算法

❖ **枚举**出N的所有支撑树，从中找出代价最小者

❖ Cayley公式: 完全图 \mathcal{K}_n 有 n^{n-2} 棵支撑树

n = 1 1

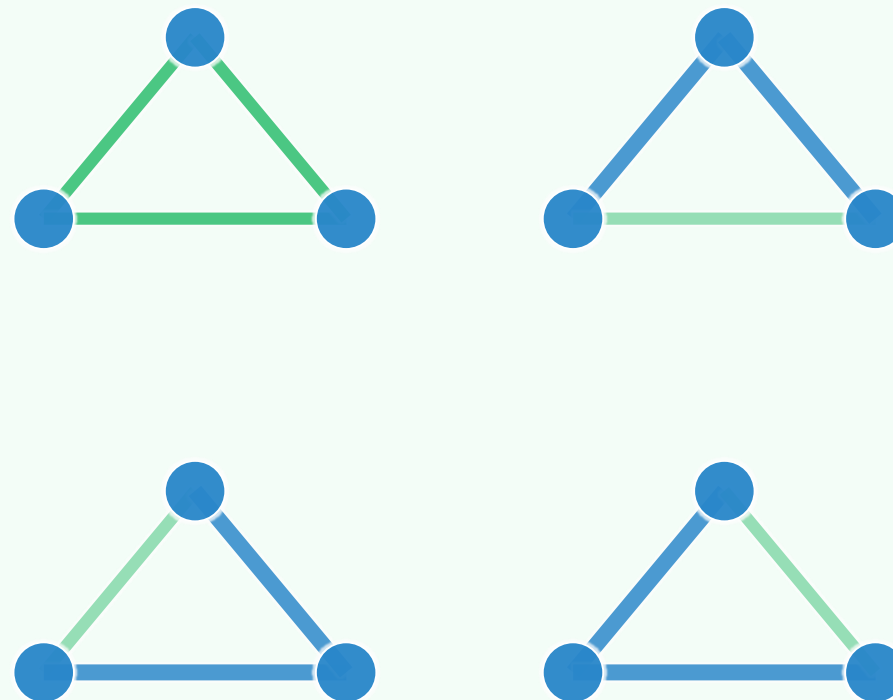
n = 2 1

n = 3 3

n = 4 16

n = 5 125

... ...



❖ 如何**高效**地构造MST呢?