12-E

优先级队列

多叉堆

他说到一件事，时常萦绕我的心头，就是每个人若能窥清其他人的心意，那么愿意下来的人会多于愿意高升的人

匏有苦葉，濟有深涉
深則厲，淺則揭

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

优先级搜索

❖ 回顾图的PFS以及统一框架：`g->pfs()...`

❖ 无论何种算法，差异仅在于所采用的优先级更新器`prioUpdater()`

- Prim算法： `g->pfs( 0, PrimPU() );`
- Dijkstra算法： `g->pfs( 0, DijkPU() );`

❖ 每一节点引入遍历树后，都需要

- **更新**树外顶点的优先级（数），并
- **选出**新的优先级最高者

❖ 若采用邻接表，两类操作的累计时间，分别为 $\mathcal{O}(n+e)$ 和 $\mathcal{O}(n^2)$ ...能否更快呢?

优先级队列

❖ 自然地，PFS中的各顶点可组织为**优先级队列**

❖ 为此需要使用PQ接口

heapify() ~ percolateDown() : 由n个顶点创建初始PQ，$\mathcal{O}(n)$

delMax() ~ percolateDown() : 取优先级最高（极短）跨边(u, w)，$\mathcal{O}(n \cdot \log n)$

increase() ~ percolateUp() : 更新（缩短）所有关联顶点到u的距离，$\mathcal{O}(e \cdot \log n)$

❖ 总体运行时间 = $\mathcal{O}(n + e \cdot \log n)$

- 对于**稀疏图**，处理效率很高
- 对于**稠密图**，反而不如常规实现的版本

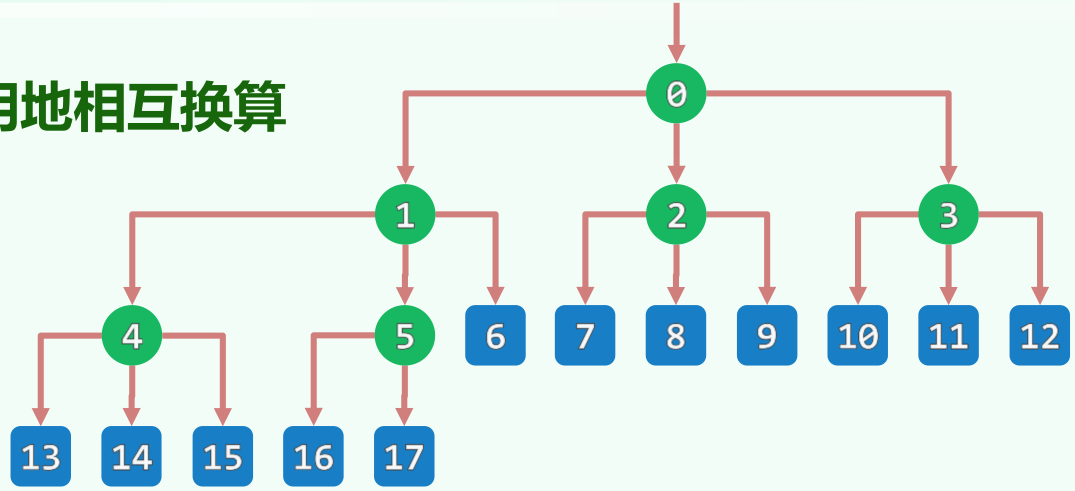
❖ 有无更好的办法?

多叉堆

❖ **仍可基于向量实现，且父、子节点的秩可简明地相互换算**

- $parent(k) = \lfloor (k-1)/d \rfloor$
- $child(k,i) = k \cdot d + i, \ 0 < i \leq d$

//d不是2的幂时，不能借助移位运算加速



❖ heapify(): $\mathcal{O}(n)$

//不可能再快了

❖ delMax(): $\mathcal{O}(\log n)$

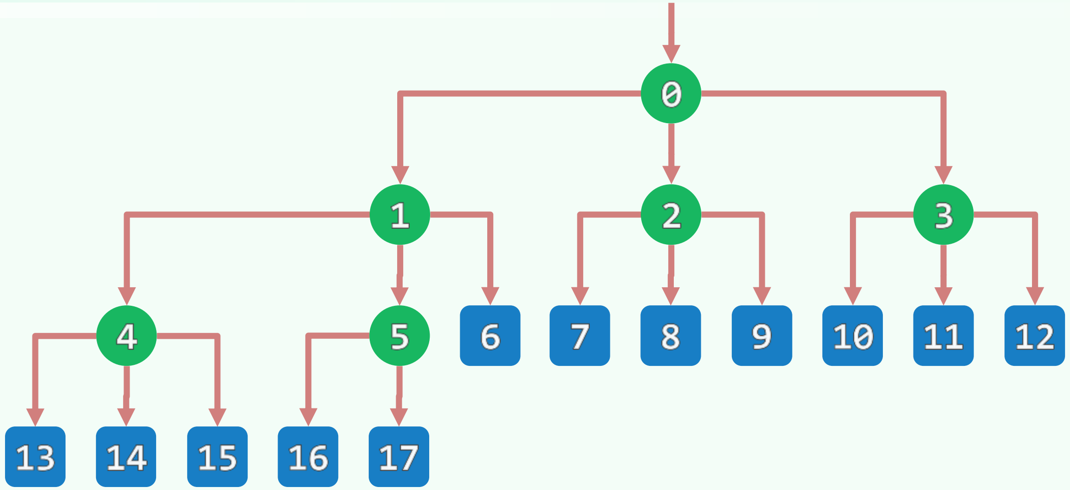
//实质就是percolateDown()，已是极限了——为什么？

❖ increase(): $\mathcal{O}(\log n)$

//实质就是percolateUp() —— 似乎仍有改进空间...

上山容易下山难

❖ 若将二叉堆改成多叉堆（d-heap）



则堆高降至

$$\log_d n$$

❖ 相应地，上滤成本降至

$$\log_d n$$

❖ 但（只要d>4）下滤成本却增至

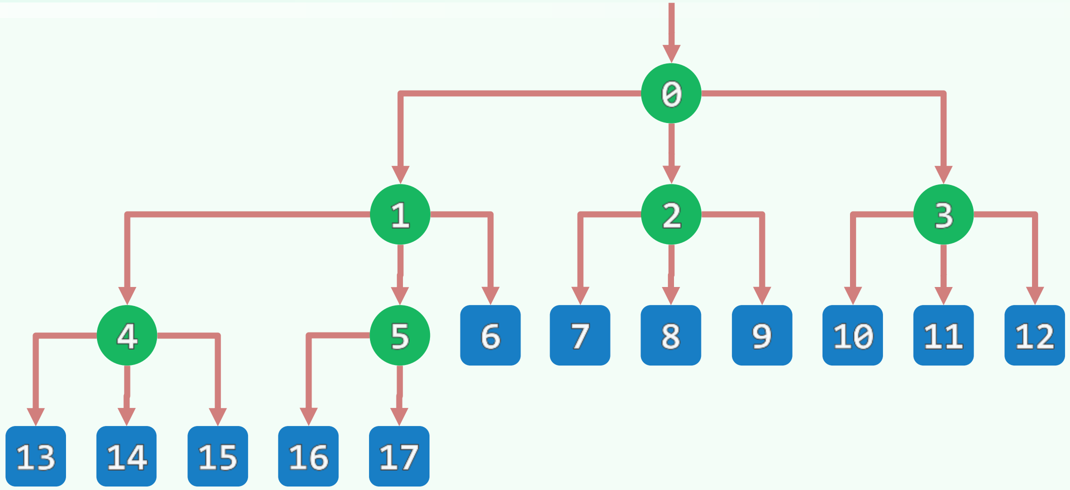
$$d \cdot \log_d n \;=\; \frac{d}{\ln d} \cdot \ln n$$

PFS

❖ 如此，PFS的运行时间将是：

$$n \cdot d \cdot \log_d n \ + \ e \cdot \log_d n$$

$$= \ (n \cdot d \ + \ e) \cdot \log_d n$$



❖ 取 $d \ \approx \ e/n + 2$ 时

总体性能达到最优：$\mathcal{O}(e \cdot \log_{(e/n+2)} n)$

❖ 对于稀疏图保持高效：$e \cdot \log_{(e/n+2)} n \ \approx \ n \cdot \log_{(n/n+2)} n \ = \ \mathcal{O}(n \log n)$

对于稠密图改进极大：$e \cdot \log_{(e/n+2)} n \ \approx \ n^2 \cdot \log_{(n^2/n+2)} n \ \approx \ n^2 \ = \ \mathcal{O}(e)$

对于一般的图，会自适应地实现最优