06-D5

二叉搜索树

AVL树：(3+4)-重构

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

为学之道至简至易，但患不知其方

返璞归真

- 设g为**最低**的失衡节点，沿**最长**分支考察祖孙三代：

  $g \sim p \sim v$

  按**中序**遍历次序，**重命名**为：

  $a < b < c$

- 它们总共拥有四棵子树（或为空）

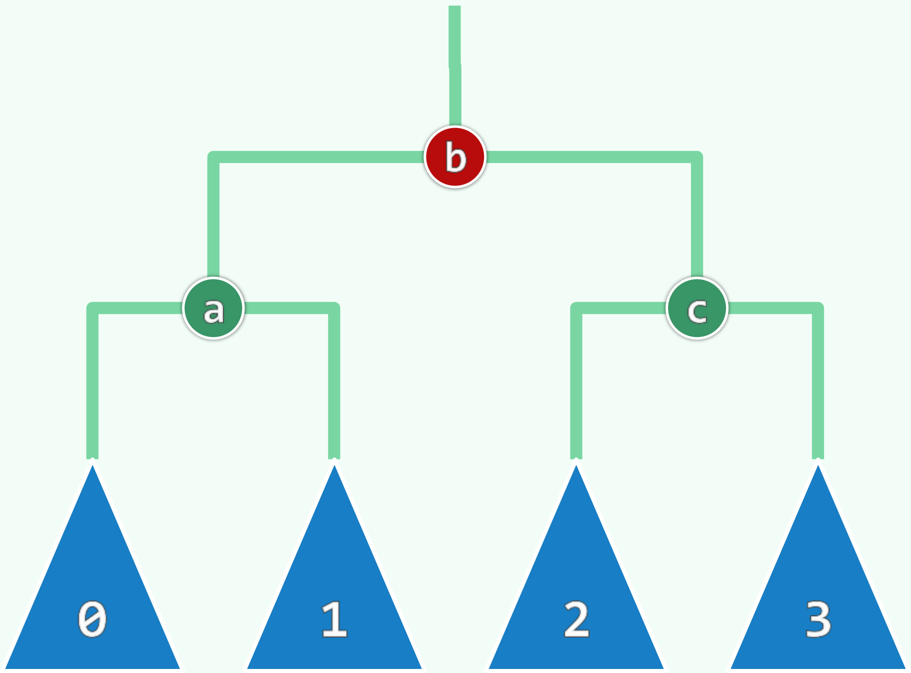
  按**中序**遍历次序，**重命名**为

  $T_0 < T_1 < T_2 < T_3$

- 将原先以**g**为根的子树，替换为以**b**为根的新子树

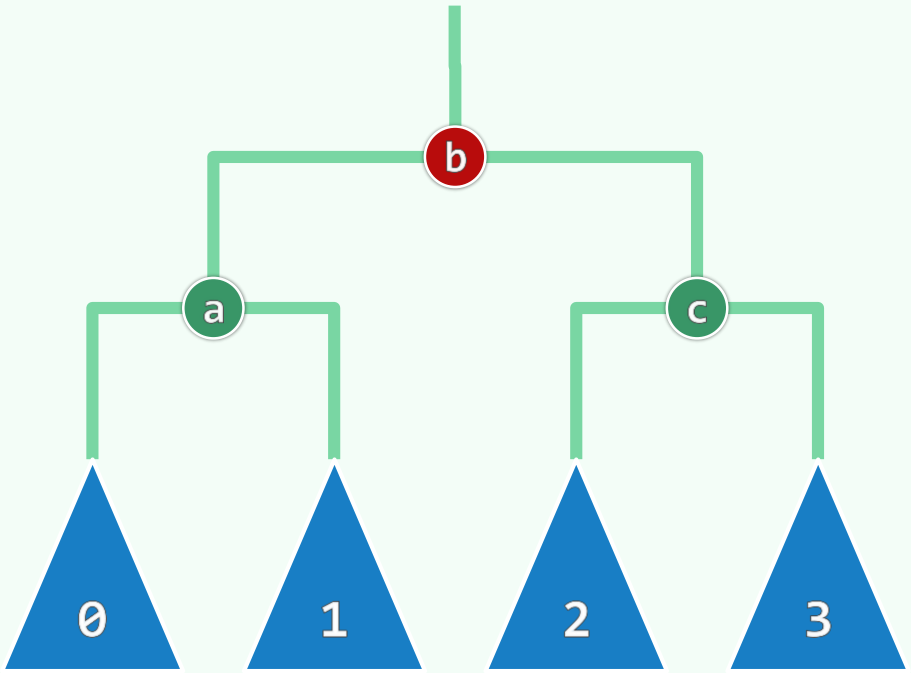
  等价变换，保持中序遍历次序：

  $T_0 < a < T_1 < b < T_2 < c < T_3$



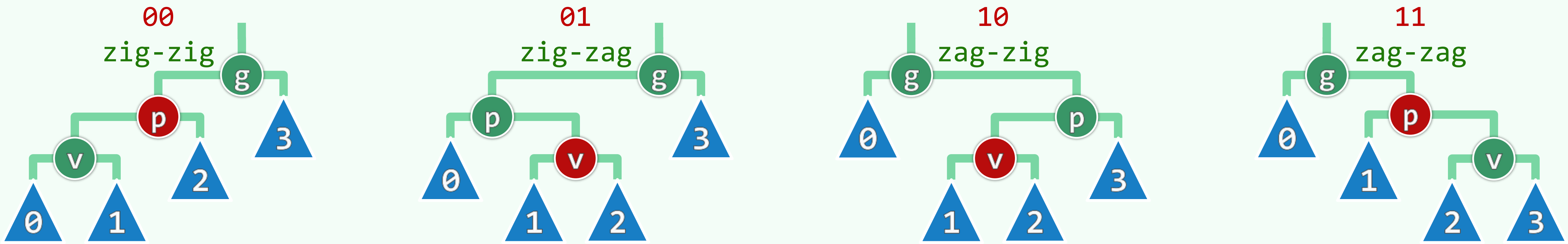
(3+4)-重构

```
template <typename T> BinNodePosi<T> BST<T>::connect34(
    BinNodePosi<T> a, BinNodePosi<T> b, BinNodePosi<T> c,
    BinNodePosi<T> T0, BinNodePosi<T> T1,
    BinNodePosi<T> T2, BinNodePosi<T> T3)
{
    a->lc = T0; if (T0) T0->parent = a;
    a->rc = T1; if (T1) T1->parent = a;
    c->lc = T2; if (T2) T2->parent = c;
    c->rc = T3; if (T3) T3->parent = c;
    b->lc = a; a->parent = b; b->rc = c; c->parent = b;
    a->updateHeight(); c->updateHeight(); b->updateHeight(); return b;
}
```



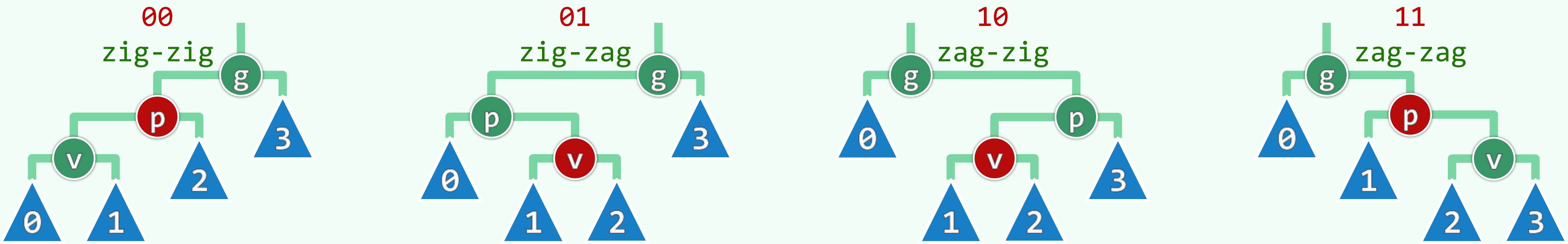
统一调整：总体

```
template<typename T> BinNodePosi<T> BST<T>::rotateAt( BinNodePosi<T> v ) {
   BinNodePosi<T> p = v->parent; int TurnV = IsRChild(v);
   BinNodePosi<T> g = p->parent; int TurnP = IsRChild(p);
   BinNodePosi<T> r = ( TurnP == TurnV ) ? p : v; //子树新的根节点
   ( FromParentTo(g) = r )->parent = g->parent;; //须保持与母树的联接
   switch ( ( TurnP << 1 ) | TurnV ) { /* 视p、v的拐向，无非四种情况 */ }
}
```



统一调整：四种情况

```
switch ( ( TurnP << 1 ) | TurnV ) {
     case 0b00  : return connect34( v, p, g,  v->lc, v->rc, p->rc, g->rc );
     case 0b01  : return connect34( p, v, g,  p->lc, v->lc, v->rc, g->rc );
     case 0b10  : return connect34( g, v, p,  g->lc, v->lc, v->rc, p->rc );
   default/*11*/: return connect34( g, p, v,  g->lc, p->lc, v->lc, v->rc );
}
```



AVL：综合评价

- 优点　无论查找、插入或删除，最坏情况下的复杂度均为$\mathcal{O}(\log n)$

　　$\mathcal{O}(n)$的存储空间

- 缺点　借助高度或平衡因子，为此需改造元素结构，或额外封装

　　实测复杂度与理论值尚有差距

　　- 插入/删除后的旋转，成本不菲
　　- 删除操作后，最多需旋转$\Omega(\log n)$次（Knuth：平均仅0.21次）
　　- 若需频繁进行插入/删除操作，未免得不偿失

　　单次动态调整后，全树拓扑结构的变化量可能高达$\Omega(\log n)$

- 有没有更好的结构呢？　//保持兴趣