二叉树

Huffman编码树：正确性

05-J2

我生来就不像我所见过的任何一个人；我敢断言我与世上的任何一个人都迥然不同；虽说我不比别人好，但至少我与他们完全不同。

邓俊辉

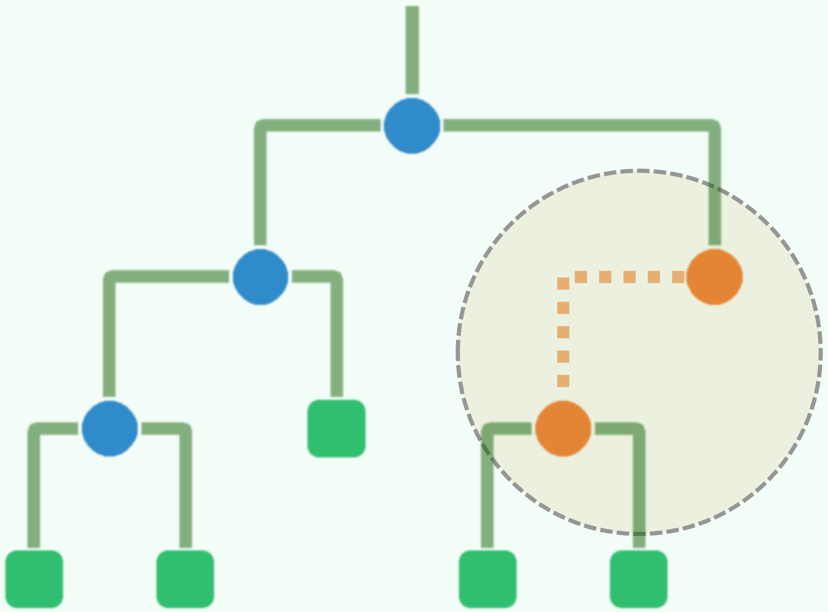
deng@tsinghua.edu.cn

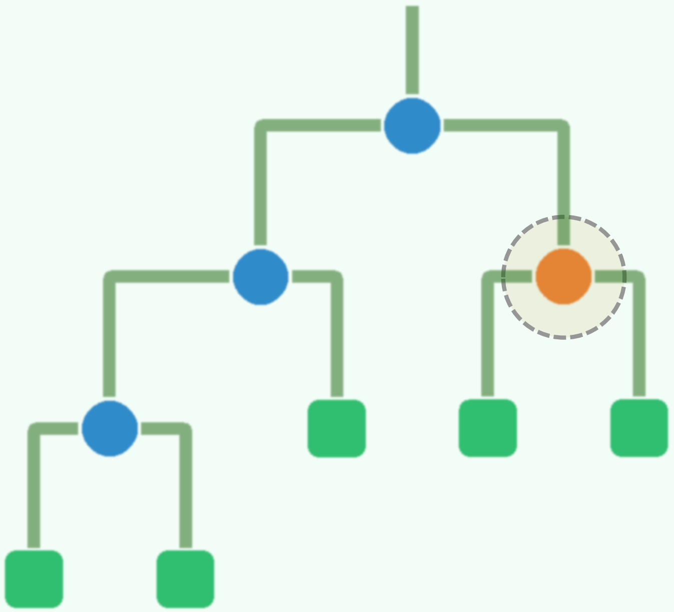
双子性

❖ 最优编码树有何特征?

❖ 首先，每一内部节点都有**两个**孩子——节点度数均为偶数（0或2），即**真**二叉树

❖ 否则，将1度节点**替换**为其唯一的孩子，则新树的wald将**更小**





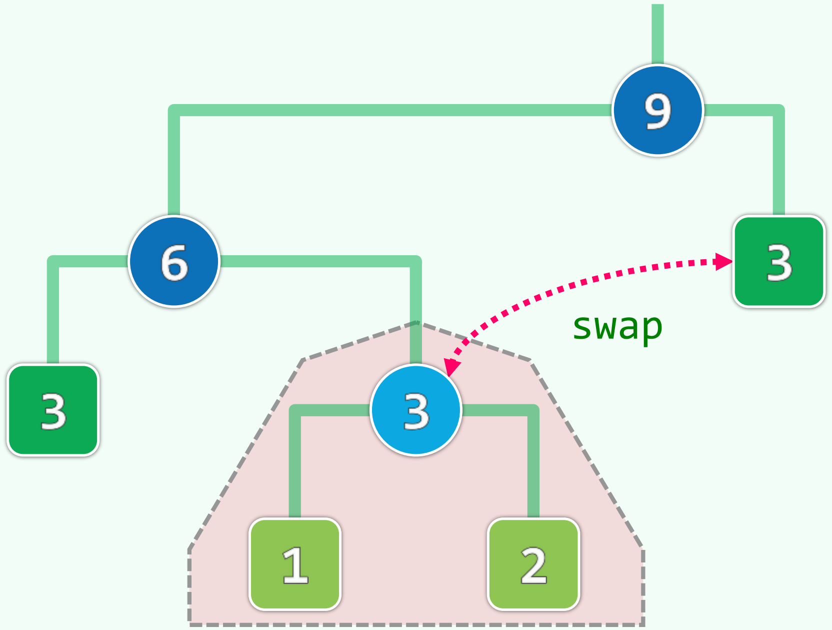
不唯一性

- 对任一内部节点而言

  左、右子树互换之后wald不变

- 上述算法中，兄弟子树的次序系随机选取

  故有可能...

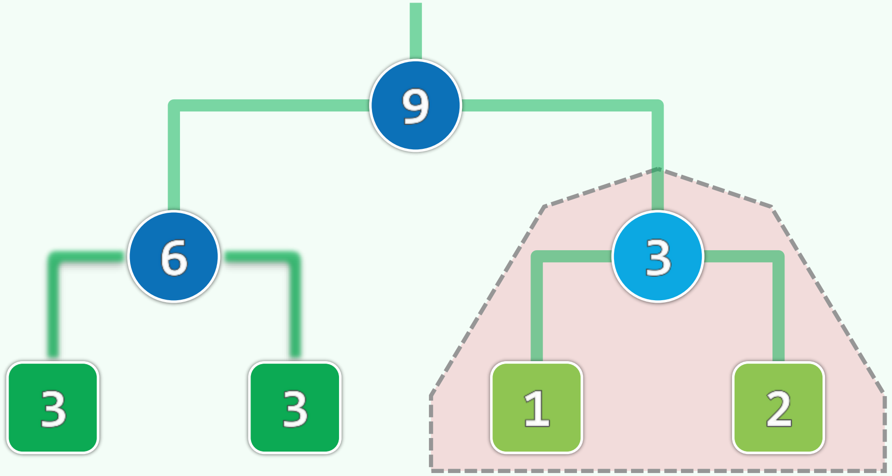


- 为消除这种歧义，可以（比如）

  明确要求左子树的频率更低

- 不过，倘若

  它们（甚至更多节点）的频率恰好相等...

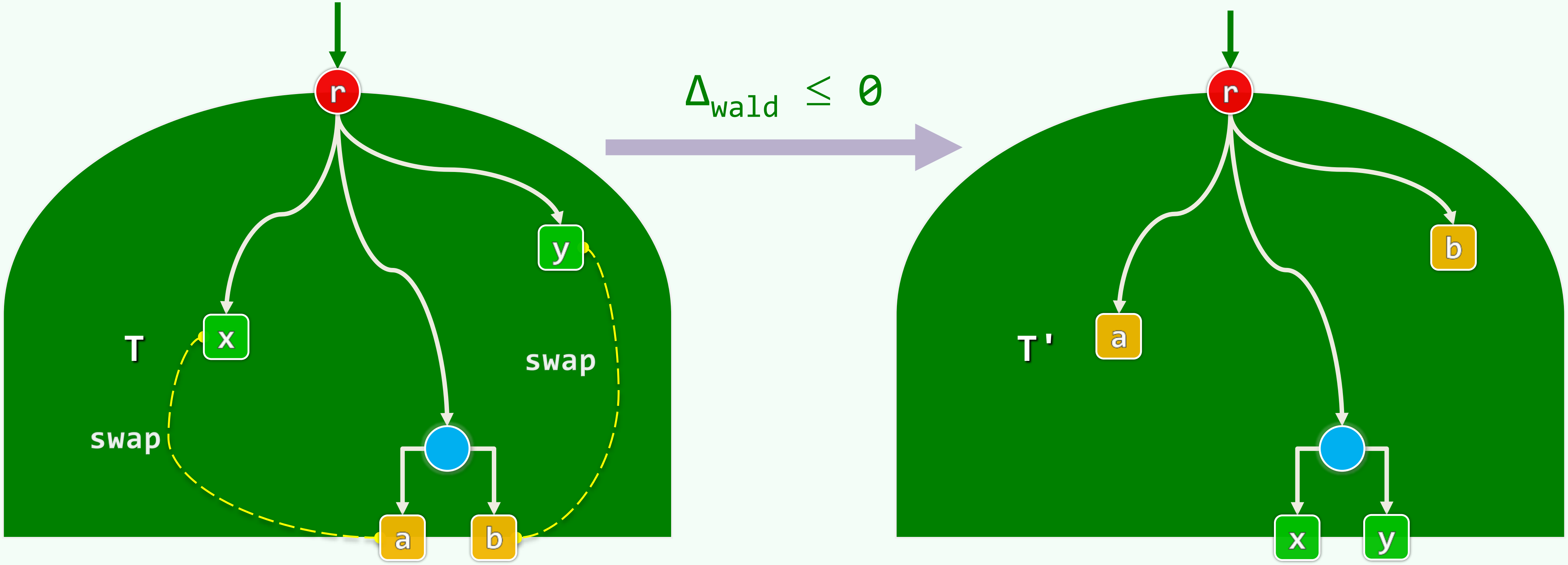


层次性

❖ 出现**频率最低**的字符$\boxed{x}$和$\boxed{y}$，必在**某棵**最优编码树中处于**最底层**，且互为**兄弟**

❖ 否则，**任取**一棵最优编码树，并在其最底层**任取**一对兄弟$\boxed{a}$和$\boxed{b}$

于是，$\boxed{a}$和$\boxed{x}$、$\boxed{b}$和$\boxed{y}$交换之后，wald绝不会增加

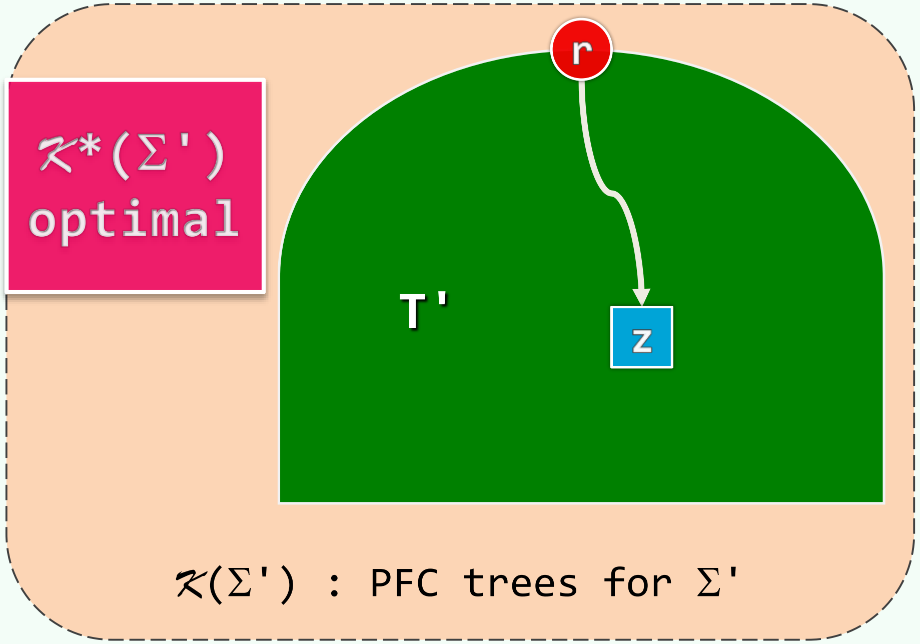


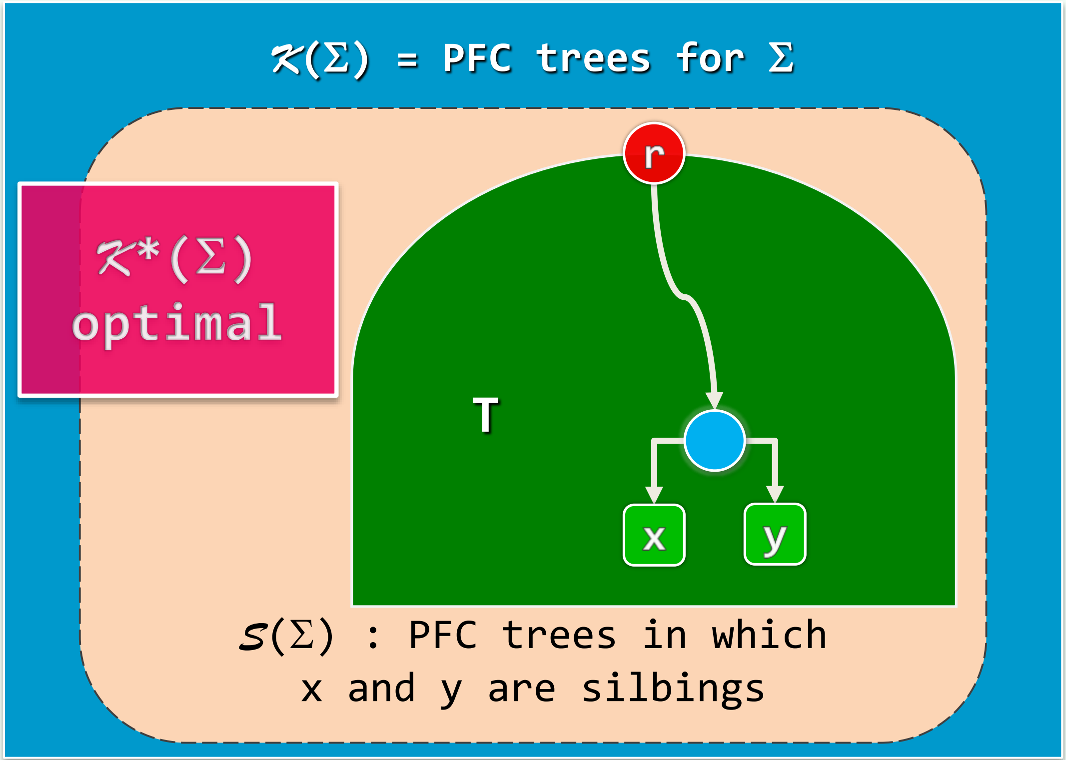
数学归纳

❖ 对|Σ|做归纳可证：Huffman算法所生成的，必是**一棵**最优编码树！|Σ| = 2时显然

❖ 设算法在|Σ|<n时均正确。现设|Σ|=n，取Σ中频率最低的$\boxed{x}$、$\boxed{y}$（**不妨**就设二者互为兄弟）

❖ 令：$\Sigma' = (\Sigma \backslash \{x, y\}) \cup \{z\}$，$w(z) = w(x) + w(y)$



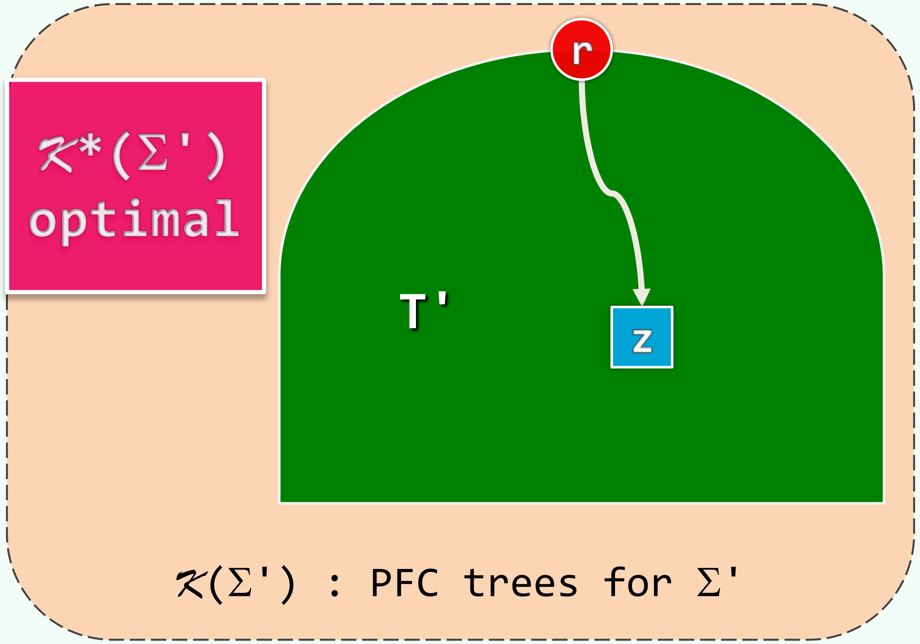


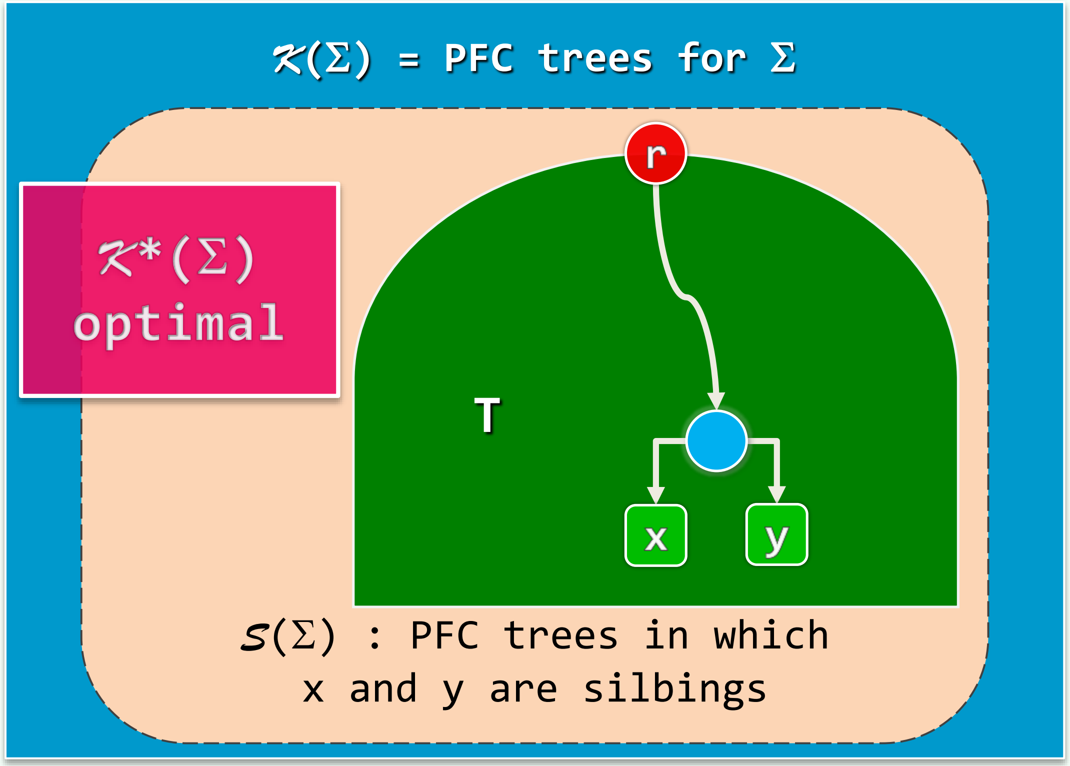
定差

❖ 对于Σ'的**任一**编码树T'，只要为z添加孩子x和y，即可得到Σ的一棵编码树T，且

$$wd(T) - wd(T') \;=\; w(x) + w(y) \;=\; w(z)$$

❖ 可见，如此对应的T和T'，wd之差与T的**具体形态**无关





从最优，到最优

❖ 因此，只要T'是Σ'的最优编码树，则T也必是Σ的最优编码树（之一）

❖ 实际上，Huffman算法的过程，与上述归纳过程完全一致

——每一步迭代都可视作，从某棵T转入对应的T'