

排序

快速排序：递归深度

14-A4

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

楊子拔一毛不爲，墨子又摩頂放踵爲之，此皆是不得中

今夫盲者行于道，人谓之左则左，谓之右则右。遇君子则得其平易，遇小人则蹈于沟壑

# 居中 + 偏侧：三者取中 (1/2)

❖ **好轴点**：落在宽度为  $\lambda \cdot n$  的居中区间（概率为  $\lambda$ ）

$(1-\lambda)/2$

width =  $\lambda$  = Pr.

$(1-\lambda)/2$

**坏轴点**：落在两侧（概率为  $1 - \lambda$ ）

❖ 若采用**三者取中**策略

以  $\lambda = 0.5$  为例，**好轴点**的概率为

$$\begin{aligned} & 1 \times 0.50 \cdot 0.50 \cdot 0.50 \\ + & 3 \times 0.50 \cdot 0.50 \cdot 0.25 \\ + & 3 \times 0.25 \cdot 0.50 \cdot 0.50 \\ + & 6 \times 0.25 \cdot 0.50 \cdot 0.25 \\ = & 68.75\% \end{aligned}$$

Pr.	0.25	0.50	0.25
$C(3,3) * 0.25 * 0.25 * 0.25 = 0.015625$	xOx		
$C(3,3) * 0.25 * 0.25 * 0.25 = 0.015625$			xOx
$C(3,2) * C(1,1) * 0.25 * 0.25 * 0.50 = 0.093750$	xO	x	
$C(3,1) * C(2,2) * 0.50 * 0.25 * 0.25 = 0.093750$		x	Ox
$C(3,2) * C(1,1) * 0.25 * 0.25 * 0.25 = 0.046875$	xO		x
$C(3,1) * C(2,2) * 0.25 * 0.25 * 0.25 = 0.046875$	x		Ox
$C(3,3) * 0.50 * 0.50 * 0.50 = 0.125000$		xOx	
$C(3,2) * C(1,1) * 0.50 * 0.50 * 0.25 = 0.187500$		xO	x
$C(3,1) * C(2,2) * 0.25 * 0.50 * 0.50 = 0.187500$	x	Ox	
$C(3,1) * C(2,1) * C(1,1) * 0.25 * 0.50 * 0.25 = 0.187500$	x	O	x

## 居中 + 偏侧：三者取中 (2/2)

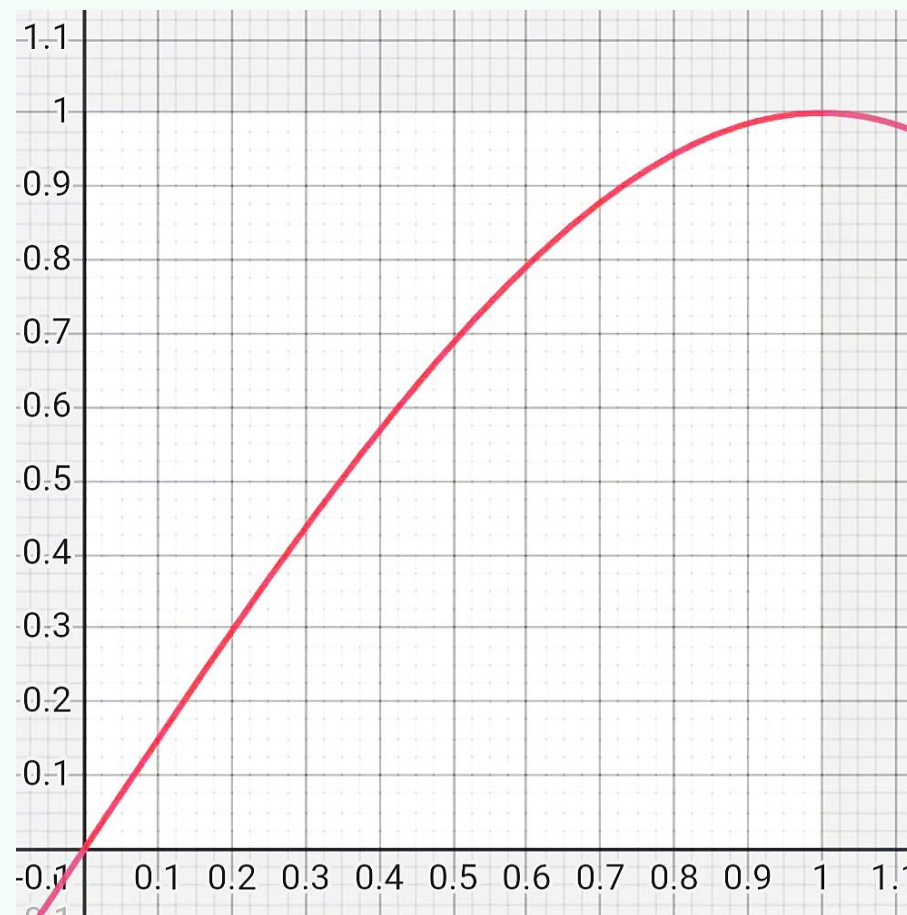
❖ **好轴点**：落在宽度为  $\lambda \cdot n$  的居中区间（概率为  $\lambda$ ）

**坏轴点**：落在两侧（概率为  $1 - \lambda$ ）

❖ 若采用**三者取中**策略

以  $\lambda = 0.8$  为例，**好轴点**的概率为

$$\begin{aligned} & 1 \times 0.80 \cdot 0.80 \cdot 0.80 \\ + & 3 \times 0.80 \cdot 0.80 \cdot 0.10 \\ + & 3 \times 0.10 \cdot 0.80 \cdot 0.80 \\ + & 6 \times 0.10 \cdot 0.80 \cdot 0.10 \\ = & 94.40\% \end{aligned}$$



# 递归深度：常规随机

❖ **最坏情况**递归  $\Omega(n)$  层，**概率极低**

**平均情况**递归  $\mathcal{O}(\log n)$  层，**概率极高**

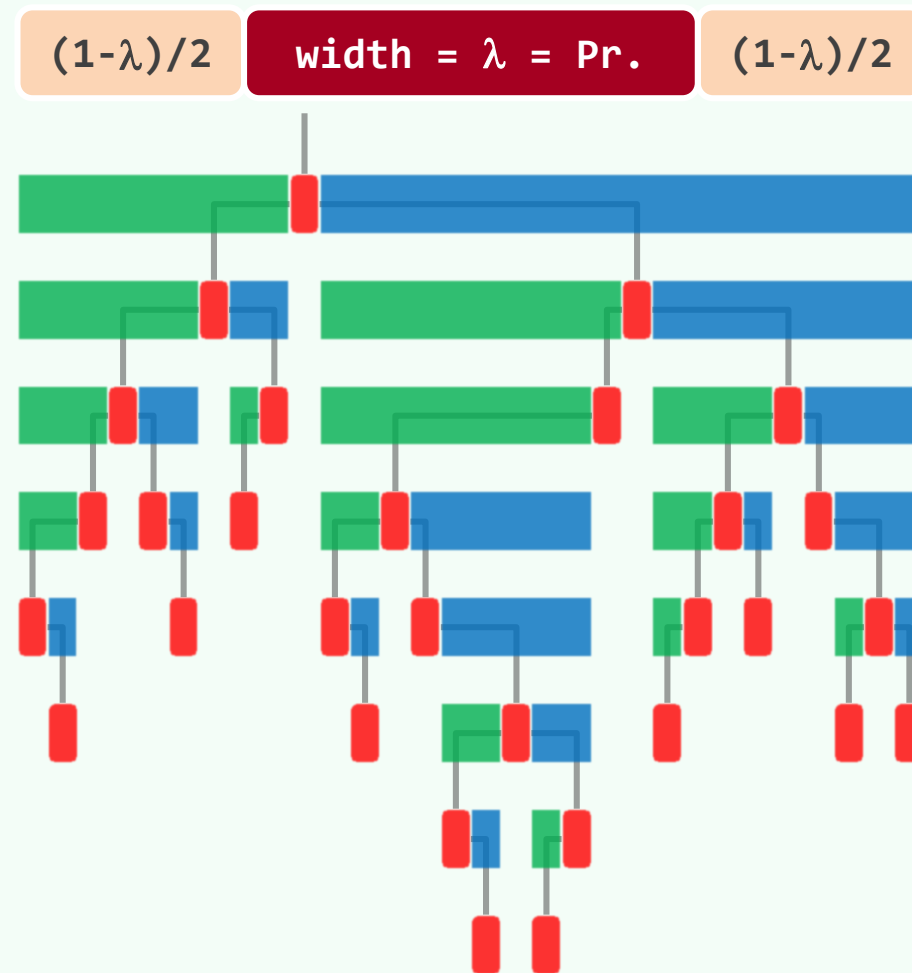
❖ **实际上**：除非**过于侧偏**的pivot，  
都会**有效地**缩短递归深度

❖ **断言**：在任何一条递归路径上，**好轴点**绝不会多于

$$d(n, \lambda) = \log_{2/(1+\lambda)} n$$

❖ **断言**：抵达  $1/\lambda \cdot d(n, \lambda)$  层时，即可

**期望地**出现  $d(n, \lambda)$  个**好轴点** —— 从而在此**之前**终止递归



## 递归深度：以 $\lambda=0.5$ 估计

❖  $d(n, 1/2) = \log_{2/(1+1/2)} n = \log_{4/3} n \approx 2.41 \cdot \log n$

❖ 断言：任何一条递归路径的**长度**，只有**极小**的概率超过

$$D(n, 1/2) = 2/\lambda \cdot d(n, 1/2) \approx 9.64 \cdot \log_2 n$$

❖ 事实上，此概率

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=0}^D \binom{D}{i} \cdot \lambda^i \cdot (1-\lambda)^{D-i} = 2^{-D} \cdot \sum_{i=0}^D \binom{D}{i} \\ &\leq 2^{-4d} \cdot (eD/d)^d \quad (\because \sum_{i=0}^k \binom{N}{i} \leq (eN/k)^k) \\ &= 16^{-d} \cdot (4e)^d = (e/4)^{\log_{4/3} n} = n^{\log_{4/3} e/4} \approx n^{-1.343} \end{aligned}$$

❖ 当  $n = 10^6$  时，递归深度**不超过** $D$ 的概率  $\geq 1 - n^{-0.343} > 99.1223\%$  //occurring w.h.p.

