向量

可扩充向量：分摊

02-B2

那时她的儿子还太年轻……一心以为自己是世上最不幸的一个，不知道儿子的不幸在母亲那儿总是要加倍的

……在他的心理上，他总以为北平是天底下最可靠的大城，不管有什么灾难，到三个月必定灾消难满，而后诸事大吉。北平的灾难恰似一个人免不了有些头疼脑热，过几天自然会好了的

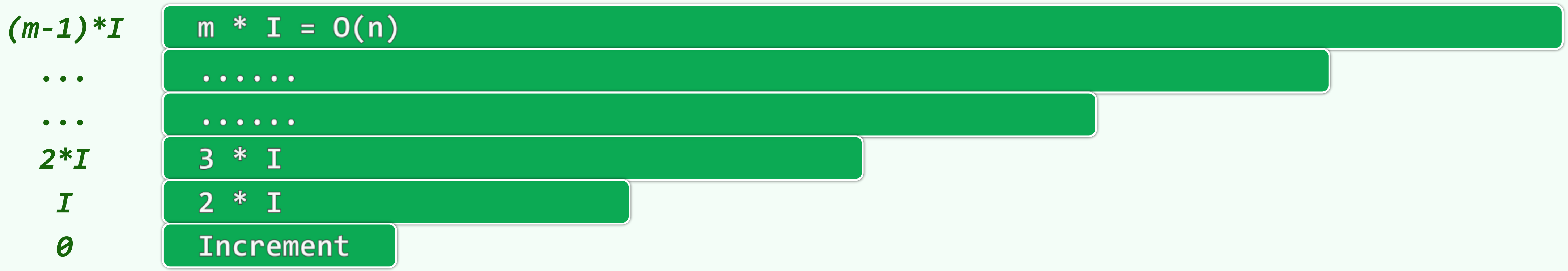
邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

容量递增策略

```
_elem = new T[ _capacity += INCREMENT ];
```

❖ 最坏情况：在初始容量0的空向量中，连续插入 $n = m \cdot I \gg 2$ 个元素，而无删除操作

❖ 于是，在第 $1,\ I+1,\ 2I+1,\ 3I+1,\ 4I+1,\ \ldots$ 次插入时，都需扩容



❖ 即便不计申请空间操作，各次扩容过程中复制原向量的时间成本依次为

$$0,\ I,\ 2I,\ 3I,\ 4I,\ \ldots\ (m-1)\cdot I$$ //算术级数

总体耗时 = $\mathcal{O}(n^2)$，每次 (insert/remove) 操作的分摊成本为 $\mathcal{O}(n)$

容量加倍策略

```
_elem = new T[ _capacity *= 2 ];
```

❖ 最坏情况：在初始容量1的满向量中，连续插入 $n = 2^m \gg 2$ 个元素，而无删除操作

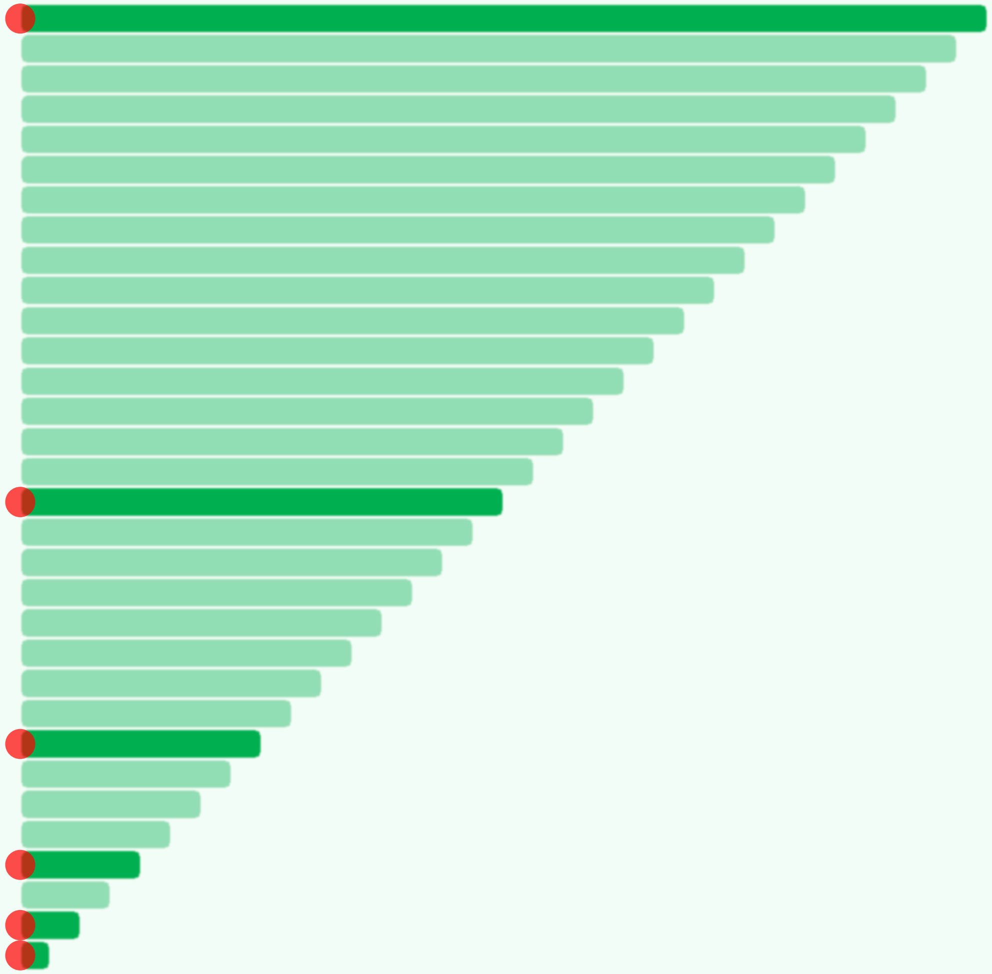
❖ 于是，在第 1、2、4、8、16、... 次插入时，都需扩容

❖ 各次扩容过程中复制原向量的时间成本依次为

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots\ 2^{m-1},\ 2^m = n$$ //几何级数

总体耗时 = $\mathcal{O}(n)$ ，每次 (insert/remove) 操作的分摊成本为$\mathcal{O}(1)$

对比



	递增策略	倍增策略
累计扩容时间	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n)$
分摊扩容时间	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)$
空间利用率(装填因子)	$\approx$ 100%	> 50%

平均分析 vs. 分摊分析

❖ **平均** (average complexity) ：根据各种操作出现概率的分布，将对应的成本加权平均

- 各种可能的操作，作为**独立**事件分别考查
- 割裂了操作之间的**相关**性和**连贯**性
- 往往**不能准确**地评判数据结构和算法的真实性能

❖ **分摊** (amortized complexity) ：**连续**实施的**足够多**次操作，所需**总体**成本摊还至**单次**操作

- 从实际可行的角度，对一系列操作做整体的考量
- 更加**忠实**地刻画了可能出现的操作序列
- 更为**精准**地评判数据结构和算法的真实性能

❖ 后面将看到更多、更复杂的例子