08-B6

高级搜索树

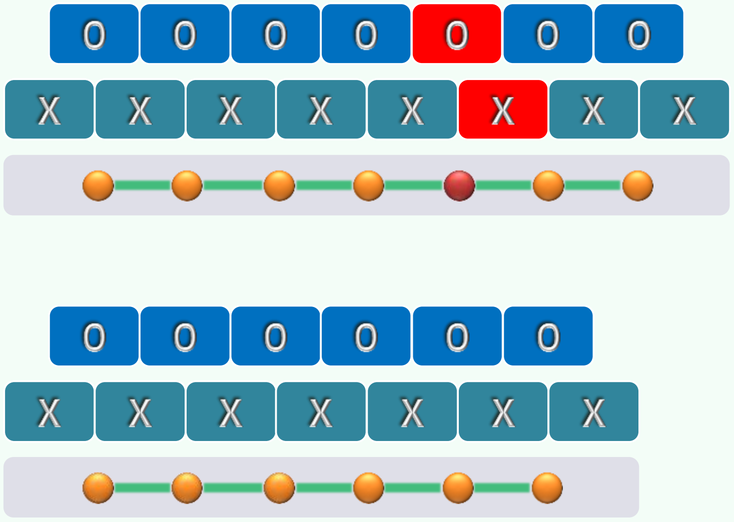
B-树：删除

射影，变了形，反而结晶
或动了情，也要合并，或归了零
也不愿不生不死不悔的倒影

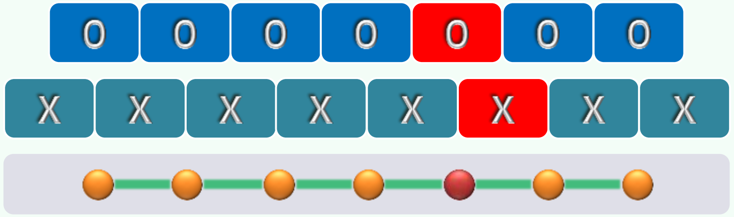
邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

算法：确保目标在叶子中

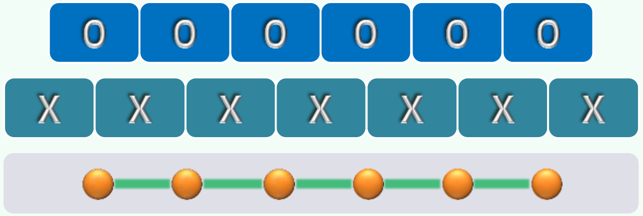
```
template <typename T>
bool BTree<T>::remove( const T & e ) {
   BTNodePosi<T> v = search( e );
   if ( ! v ) return false; //确认e存在
   Rank r = v->key.search(e); //e在v中的秩
   if ( v->child[0] ) { /* 若v非叶子，则可经过腾挪，确保... */ }
   //assert：至此，v必位于最底层，且其中第r个关键码就是待删除者
   v->key.remove( r ); v->child.remove( r + 1 ); _size--;
   solveUnderflow( v ); return true; //如有必要，需做旋转或合并
}
```



算法：腾挪 = 与后继交换




```
template <typename T>
bool BTree<T>::remove( const T & e ) {
   /* ...... */
```




```
   if ( v->child[0] ) { //若v非叶子，则
      BTNodePosi<T> u = v->child[r + 1]; //在右子树中
      while ( u->child[0] ) u = u->child[0]; //一直向左，即可找到e的后继（必在底层）
      v->key[r] = u->key[0]; v = u; r = 0; //交换
   } //assert：至此，v必位于最底层，且其中第r个关键码就是待删除者
```

```
   /* ...... */
}
```

旋转

- ❖ 非根节点$\boxed{V}$下溢时，必恰有$\lceil m/2 \rceil - 2$个关键码和$\lceil m/2 \rceil - 1$个分支
- ❖ 视其左、右兄弟$\boxed{L}$、$\boxed{R}$的规模，可分三种情况加以处理

1)若$\boxed{L}$存在，且至少包含$\lceil m/2 \rceil$个关键码

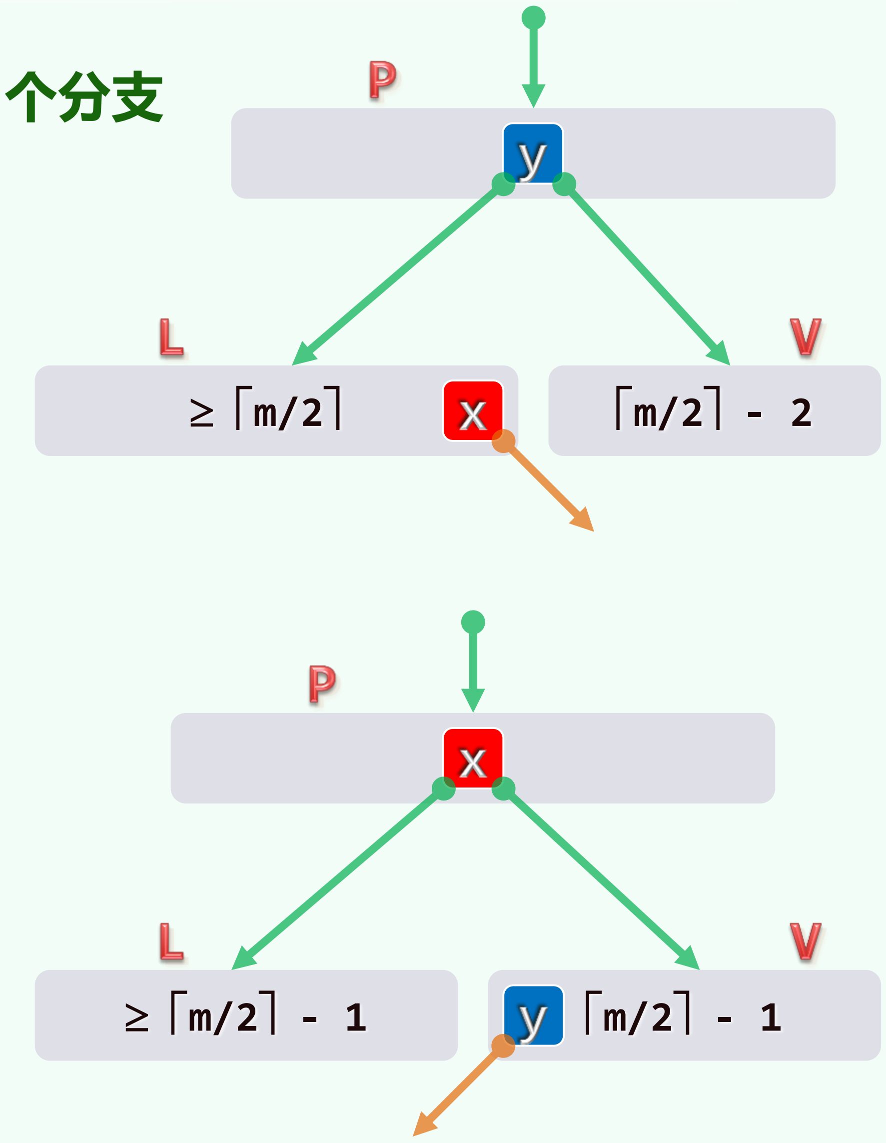
- 将$\boxed{P}$中的分界关键码$\boxed{y}$移至$\boxed{V}$中（作为最小关键码）
- 将$\boxed{L}$中的最大关键码$\boxed{x}$移至$\boxed{P}$中（取代原关键码$\boxed{y}$）

- ❖ 如此旋转之后，局部乃至全树都重新满足B-树条件

  下溢修复完毕

2)若$\boxed{R}$存在，且至少包含$\lceil m/2 \rceil$个关键码

- 也可旋转，完全对称



合并

3) L和R或不存在，或均不足 $\lceil m/2 \rceil$ 个关键码——即便如此

- L和R仍必有其一（不妨以L为例），且
- 恰含 $\lceil m/2 \rceil - 1$ 个关键码

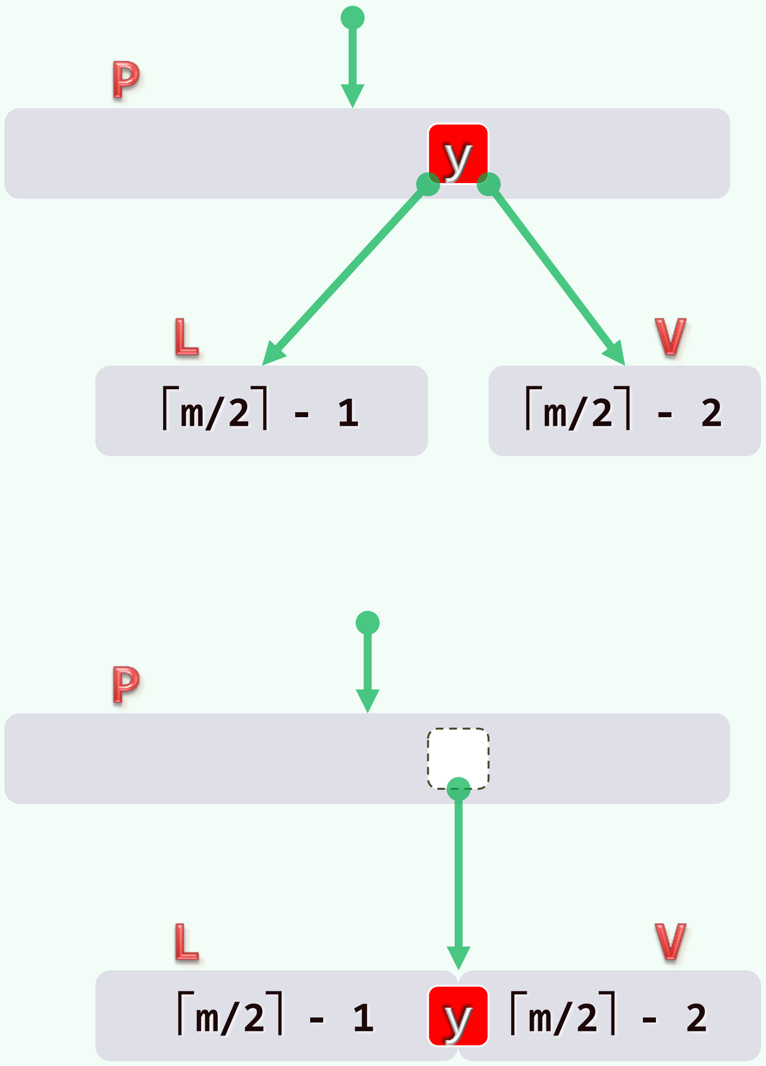
❖ 从P中抽出介于L和V之间的分界关键码y

- 通过y做粘接，将L和V合成一个节点
- 同时合并此前y的孩子引用

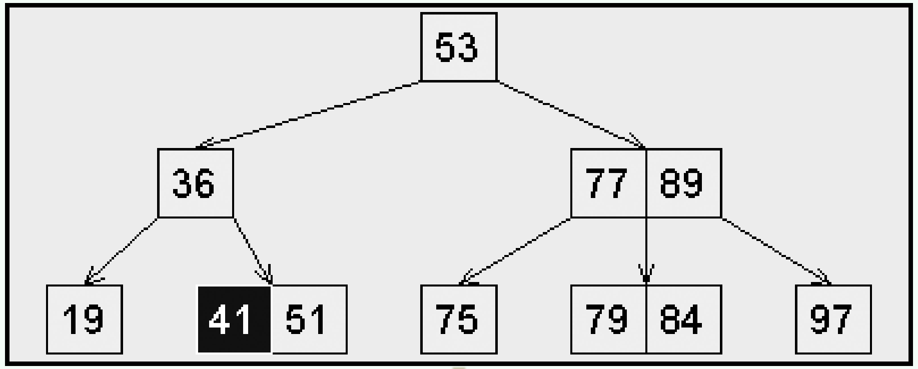
❖ 此处下溢得以修复，但可能继而导致P下溢

若果真如此，大可套用前法，继续旋转或合并

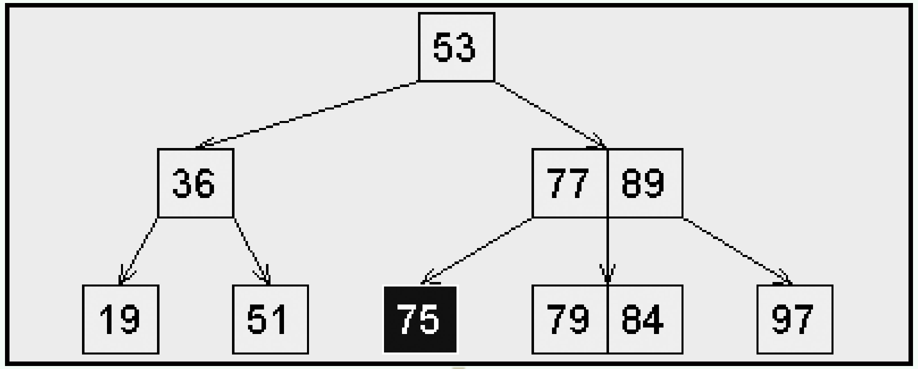
❖ 下溢可能持续发生并向上**传播**；但至多不过 $O(h)$ 层



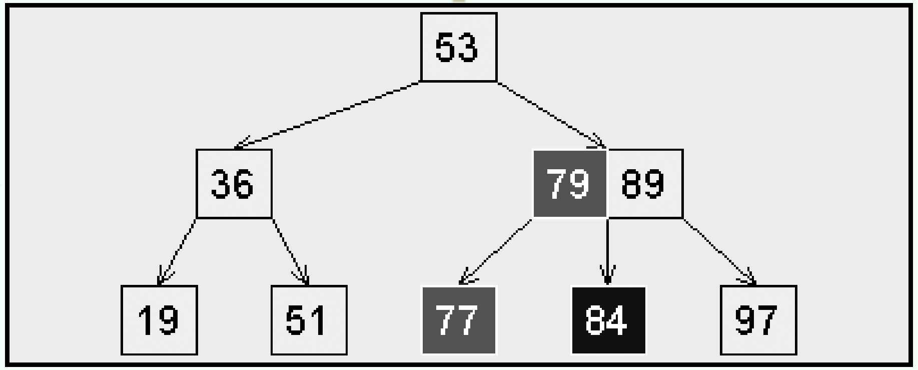
实例：(2,3)-树：底层节点



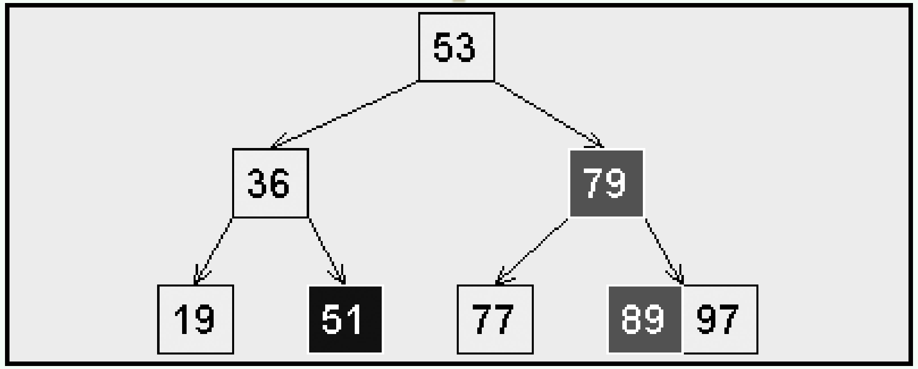
remove(41) //直接删除



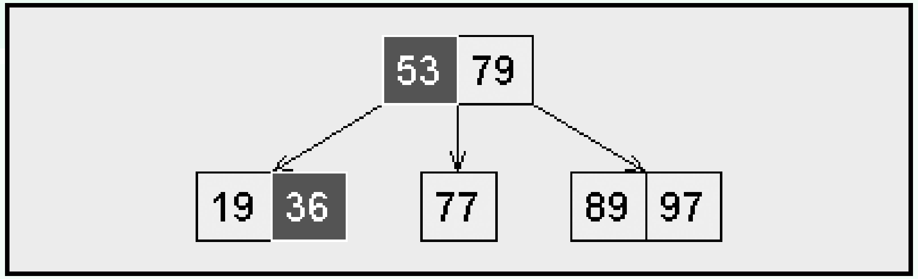
remove(75) //旋转



remove(84) //单次合并



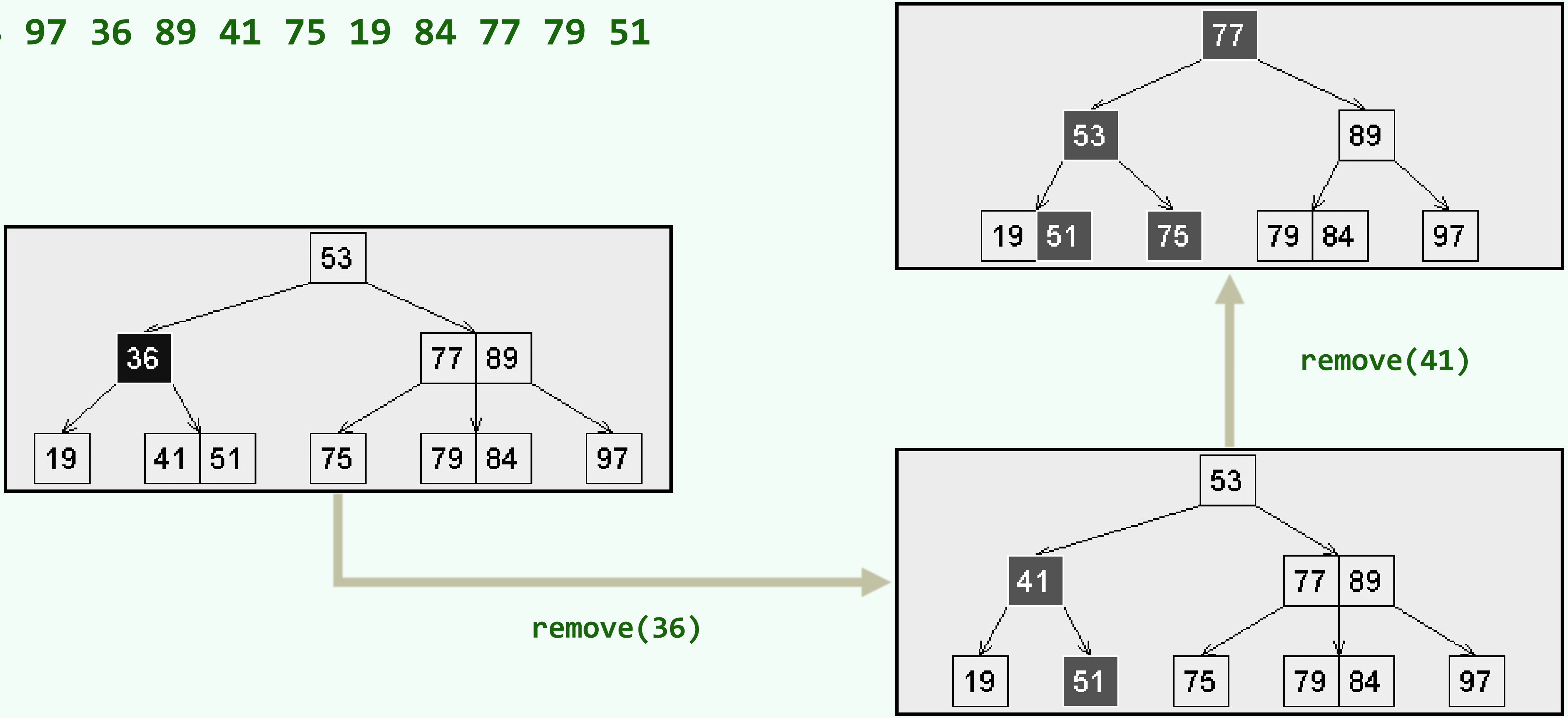
remove(51) //多次合并



❖ 53 97 36 89 41 75 19 84 77 79 51

实例：(2,3)-树：非底层节点

❖ 53 97 36 89 41 75 19 84 77 79 51



下溢修复

```
template <typename T> void BTree<T>::solveUnderflow( BTNodePosi<T> v ) {
   while ( (_m + 1) / 2 > v->child.size() ) {//除非当前节点没有下溢
      BTNodePosi<T> p = v->parent; if ( !p ) { /* 已到根节点 */ }
      Rank r = 0; while ( p->child[r] != v ) r++; //确定v是p的第r个孩子
      ----------------------------------------------------------------
      if ( 0 < r ) { /* 情况 #1: 若v的左兄弟存在，且... */ }
      if ( p->child.size() - 1 > r ) { /* 情况 #2: 若v的右兄弟存在，且... */ }
      if ( 0 < r ) { /* 与左兄弟合并 */ } else { /* 与右兄弟合并 */ } //情况 #3
      ----------------------------------------------------------------
      v = p; //上升一层，如有必要则继续旋转或合并——至多O(logn)层
   } //while
} //solveUnderflow
```

下溢修复：情况#1：旋转（向左兄弟借关键码）

```
if (0 < r) { //若v不是p的第一个孩子，则
   BTNodePosi<T> ls = p->child[r - 1]; //左兄弟必存在
   if ( (_m + 1) / 2 < ls->child.size() ) { //若该兄弟足够“胖”，则
      v->key.insert( 0, p->key[r-1] ); //p借出一个关键码给v（作为最小关键码）
      p->key[r - 1] = ls->key.remove( ls->key.size() - 1 ); //ls的最大key转入p
      v->child.insert( 0, ls->child.remove( ls->child.size() - 1 ) );
         //同时ls的最右侧孩子过继给v（作为v的最左侧孩子）
      if ( v->child[0] ) v->child[0]->parent = v;
      return; //至此，通过右旋已完成当前层（以及所有层）的下溢处理
   }
} //情况#2完全对称
```

下溢修复：情况#3：合并（1/2）

```
if (0 < r) { //与左兄弟合并
   BTNodePosi<T> ls = p->child[r-1]; //左兄弟必存在
   ls->key.insert( ls->key.size(), p->key.remove(r - 1) );
   p->child.remove( r ); //p的第r - 1个关键码转入ls，v不再是p的第r个孩子
   ls->child.insert( ls->child.size(), v->child.remove( 0 ) );
   if ( ls->child[ ls->child.size() - 1 ] ) //v的最左侧孩子过继给ls做最右侧孩子
      ls->child[ ls->child.size() - 1 ]->parent = ls;
   /* ... TBC ... */
```

下溢修复：情况#3：合并（2/2）

```
    while ( !v->key.empty() ) { //v剩余的关键码和孩子，依次转入ls
       ls->key.insert( ls->key.size(), v->key.remove(0) );
       ls->child.insert( ls->child.size(), v->child.remove(0) );
       if ( ls->child[ ls->child.size() - 1 ] )
          ls->child[ ls->child.size() - 1 ]->parent = ls;
    } //while
    delete v; //释放v
 } else
    { /* 与右兄弟合并，完全对称 */ }
```