



人工智能

# Artificial Intelligence

主讲：相明

西安交通大学电信学院计算机系

E\_mail: [mxiang@mail.xjtu.edu.cn](mailto:mxiang@mail.xjtu.edu.cn)



# 第四章 不确定性推理

- ◆ 概率方法
- ◆ 主观Bayes方法
- ◆ 可信度方法
- ◆ 模糊推理方法

# 4.1 概述

## 什么是不确定性推理？

- ◆ 不确定性推理是建立在非经典逻辑基础上的一种推理，它是对不确定性知识的运用与处理。
- ◆ 具体地说，所谓不确定性推理就是从不确定性的初始证据（即事实）出发，通过运用不确定性的知识（即规则），最终推出具有一定程度不确定性的结论。

# 不确定性推理中的基本问题

## 1. 不确定性的表示与度量

- 不确定性推理中的“不确定性”一般分为两类：一是知识的不确定性，一是证据的不确定性。
- 知识不确定性的表示：在专家系统中知识的不确定性一般是由领域专家给出的，通常用一个数值表示，它表示相应知识的不确定性程度，称为知识的静态强度。
- 证据不确定性的表示：证据不确定性的表示方法与知识不确定性的表示方法一致，通常也用一个数值表示，代表相应证据的不确定性程度，称之为动态强度。

## 2. 不确定性匹配算法

在推理过程中证据和知识的前提的相似程度称为匹配度。确定这个匹配度（相似程度）的算法称为不确定性匹配算法。

### 3. 组合证据不确定性的计算方法

- 最大最小法:

$$T(E_1 \text{ AND } E_2) = \min\{T(E_1), T(E_2)\}$$

$$T(E_1 \text{ OR } E_2) = \max\{T(E_1), T(E_2)\}$$

- 概率法:

$$T(E_1 \text{ AND } E_2) = T(E_1) \times T(E_2)$$

$$T(E_1 \text{ OR } E_2) = T(E_1) + T(E_2) - T(E_1) \times T(E_2)$$

- 有界法:

$$T(E_1 \text{ AND } E_2) = \max\{0, T(E_1) + T(E_2) - 1\}$$

$$T(E_1 \text{ OR } E_2) = \min\{1, T(E_1) + T(E_2)\}$$

其中,  $T(E)$ 表示证据 $E$ 为真的程度(动态强度), 如可信度、概率等, 通常取值在0, 1之间。

#### 4. 不确定性的传递算法

在每一步推理中，如何把证据及知识的不确定性传递给结论，即如何计算结论的不确定性。

#### 5. 结论不确定性的合成

用不同知识进行推理得到了相同结论，但所得结论的不确定性却不同。此时，需要用合适的算法对结论的不确定性进行合成。

# 不确定性推理方法的分类

- ◆ 不确定性推理方法主要可分为模型法与控制法。
- ◆ 模型法：在推理一级对确定性推理进行扩展，引入证据的不确定性及知识的不确定性。
- ◆ 模型方法又分为数值方法和非数值方法两类。数值方法对不确定性进行定量的描述，按其所依据的理论又可分为基于概率的方法和基于模糊理论的方法。



## 4.2 基本概率方法

### 经典概率方法

设有如下产生式规则：

IF     E     THEN     H

其中，**E**为前提条件，**H**为结论。如果我们在实践中经大量统计能得出在**E**发生条件下**H**的条件概率（后验概率） $P(H/E)$ ，那么就可把它作为在证据**E**出现时结论**H**的确定性程度（可信度）。

## 逆概率方法

假设观测到某事件E，且对应于E有多个可能的结论H1,H2,...,Hn；则可用每个结论的先验概率P(Hi)和条件概率P(E/Hi)来计算在观察到E时结论Hi的后验概率P(Hi/E)

$$P(H_i | E) = \frac{P(H_i) \times P(E | H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j) \times P(E | H_j)}, i = 1, 2, \dots, n$$

上面公式的背景是，存在n条规则 IF E THEN Hi, i=1,...,n。

## 4.3 主观Bayes方法

### 4.3.1 不确定性的表示

#### 1、知识不确定性的表示：

在主观Bayes方法中，知识是用产生式规则表示的，具体形式为：

IF E THEN (LS, LN) H (P(H))

其中，E是知识的前提条件，既可以是简单条件，也可以是复合条件。

◆ P(H)是结论H的先验概率，由专家根据经验给出。

◆ LS称为充分性度量，用于指出E对H的支持程度，取值范围为 $[0, \infty)$ ，其定义为：

$$LS = P(E|H) / P(E|\neg H)。$$

◆ LN称为必要性度量，用于指出 $\neg E$ 对H的支持程度，取值范围为 $[0, \infty)$ ，其定义为：

$$LN = P(\neg E|H) / P(\neg E|\neg H) = (1 - P(E|H)) / (1 - P(E|\neg H))。$$

◆ LS和LN的值由领域专家给出，代表知识的静态强度。

## 2、证据不确定性的表示:

- ◆ 在主观Bayes方法中，证据的不确定性用概率表示。对于证据E，由用户根据观察S给出 $P(E|S)$ ，即动态强度。用 $P(E|S)$ 描述证据的不确定性（证据E无法直接观测到）。
- ◆ 由于主观给定 $P(E|S)$ 有所困难，所以实际中可以用可信度 $C(E|S)$ 代替 $P(E|S)$ 。
- ◆ 在PROSPECTOR中 $C(E|S)$ 取整数： $\{-5, \dots, 5\}$   
 $C(E|S)=-5$ 表示在观测S下证据E肯定不存在 $P(E|S)=0$   
 $C(E|S)= 5$ 表示在观测S下证据E肯定存在 $P(E|S)=1$   
 $C(E|S)= 0$ 表示S与E无关,即 $P(E|S)= P(E)$

◆ 给定 $C(E|S)$ 后,  $P(E|S)$ 可近似计算如下:

$$P(E|S)=\begin{cases} \frac{C(E|S)+P(E)\times(5-C(E|S))}{5} & ,0\leq C(E|S)\leq 5 \\ \frac{P(E)\times(5+C(E|S))}{5} & , -5\leq C(E|S)<0 \end{cases}$$

### 3、组合证据的不确定性：

(1) 当组合证据是多个单一证据的合取时，即

$$E = E_1 \text{ AND } E_2 \text{ AND } \dots \text{ AND } E_n$$

则：  $P(E|S) = \min\{P(E_1|S), P(E_2|S), \dots, P(E_n|S)\}$

(2) 当组合证据是多个单一证据的析取时，即

$$E = E_1 \text{ OR } E_2 \text{ OR } \dots \text{ OR } E_n$$

则：  $P(E|S) = \max\{P(E_1|S), P(E_2|S), \dots, P(E_n|S)\}$

(3) 对于 “ $\neg$ ”运算则：  $P(\neg E|S) = 1 - P(E|S)$

## 4.3.2 不确定性的传递算法

- (1) 根据证据E的条件概率 $P(E|S)$  及LS、LN的值，把H的先验概率 $P(H)$ 更新为后验概率 $P(H|S)$ 。
- (2) 分以下3种情况讨论：

证据肯定存在：  $P(E|S)=1$

证据肯定不存在：  $P(E|S)=0$

证据不确定：  $0 < P(E|S) < 1$

- (3) 引入几率函数 $\Theta(x)$ ,它与概率的关系为：

$$\Theta(x) = P(x)/(1-P(x)), \quad P(x) = \Theta(x)/(1+\Theta(x))$$

# 证据肯定存在时

$$\Theta(x)=P(x)/(1-P(x)), \quad P(x)=\Theta(x)/(1+\Theta(x))$$

计算 $P(H|E)$ :

由Bayes公式得:

$$P(H|E)=P(E|H) \times P(H)/P(E) \quad (1)$$

$$P(\neg H|E)=P(E|\neg H) \times P(\neg H)/P(E) \quad (2)$$

(1)式除以(2)式得:

$$P(H|E)/P(\neg H|E)=P(E|H)/P(E|\neg H) \times P(H)/P(\neg H)$$

由充分性度量LS和几率函数的定义立即可得:

$$\Theta(H|E)=LS \times \Theta(H)$$

即

$$P(H|E)=LS \times P(H)/[(LS-1) \times P(H)+1]$$



# 证据肯定不存在时

计算 $P(H|\neg E)$ :

由Bayes公式得:

$$P(H|\neg E)=P(\neg E|H) \times P(H)/P(\neg E) \quad (1)$$

$$P(\neg H|\neg E)=P(\neg E|\neg H) \times P(\neg H)/P(\neg E) \quad (2)$$

(1)式除以(2)式得:

$$P(H|\neg E)/P(\neg H|\neg E)=P(\neg E|H)/P(\neg E|\neg H) \times P(H)/P(\neg H)$$

根据必要性度量LN和几率函数的定义, 可得:

$$\Theta(H|\neg E)=LN \times \Theta(H)$$

即

$$P(H|\neg E)=LN \times P(H)/[(LN-1) \times P(H)+1]$$

# 证据不确定时

- ◆ 当 $0 < P(E|S) < 1$ 时，可以证明：近似成立。  
$$P(H|S) = P(H|E) \times P(E|S) + P(H|\neg E) \times P(\neg E|S)$$
- ◆ 当 $P(E|S) = 1$ 时，证据肯定存在，此时 $P(H|S) = P(H|E)$ 。
- ◆ 当 $P(E|S) = 0$ 时，证据肯定不存在，此时 $P(H|S) = P(H|\neg E)$ 。
- ◆ 当 $P(E|S) = P(E)$ 时，证据 $E$ 与观察 $S$ 无关。由全概率公式得：  
$$P(H|S) = P(H|E) \times P(E) + P(H|\neg E) \times P(\neg E) = P(H)$$
- ◆ 当 $P(E|S)$ 为其它值时，通过分段线性插值计算 $P(H|S)$ ，即

$$P(H|S) = \begin{cases} P(H|\neg E) + \frac{P(H) - P(H|\neg E)}{P(E)} \times P(E|S) & , 0 \leq P(E|S) < P(E) \\ P(H) + \frac{P(H|E) - P(H)}{1 - P(E)} \times [P(E|S) - P(E)] & , P(E) \leq P(E|S) \leq 1 \end{cases}$$

◆ 对于知识:

IF E THEN (LS, LN) H (P(H))

给定证据E的不确定性度量 $P(E|S)$ ，则结论的可信度可以表示为:

$$P(H|S) = \begin{cases} P(H|\neg E) + \frac{P(H) - P(H|\neg E)}{P(E)} \times P(E|S) & , 0 \leq P(E|S) < P(E) \\ P(H) + \frac{P(H|E) - P(H)}{1 - P(E)} \times [P(E|S) - P(E)] & , P(E) \leq P(E|S) \leq 1 \end{cases}$$

该公式称为EH公式。用~~C(E/S)~~代替 $P(E/S)$ ，可得到等价的CP公式。

# LS和LN的性质

$$\Theta(H|E) = LS \times \Theta(H)$$

$$\Theta(H|\neg E) = LN \times \Theta(H)$$

**LS>1:** 表明证据 E是对H有利的证据。

**LN>1:** 表明证据¬E是对H有利的证据。

所以： 不能出现LS>1且LN>1的取值。

**LS<1:** 表明证据 E是对H不利的证据。

**LN<1:** 表明证据¬E是对H不利的证据。

所以： 不能出现LS<1且LN<1的取值。

一般情况下，取LS>1， LN<1。

## 4.4.3 结论不确定性的合成算法

◆ 若有  $n$  条规则支持相同的结论  $H$ ，即

IF  $E_i$  THEN  $(LS_i, LN_i) \ H \ (P(H)), i=1, \dots, n$

且每条知识的前提条件所对应的证据  $E_i (i=1, 2, \dots, n)$  都有相应的观察  $S_i$  与之对应，则该  $n$  条规则均可启用。此时只要先对每条知识分别求出几率函数  $\Theta(H|S_i)$ ，然后就可运用下述公式求出  $\Theta(H|S_1 S_2 \dots S_n)$ ：

$$\Theta(H|S_1 S_2 \dots S_n) = \frac{\Theta(H|S_1)}{\Theta(H)} \times \frac{\Theta(H|S_2)}{\Theta(H)} \times \dots \times \frac{\Theta(H|S_n)}{\Theta(H)} \times \Theta(H)$$

# 主观Bayes方法的特点

优点:

- ◆ 主观Bayes方法中的计算公式大多是在概率论的基础上推导出来的, 具有较坚实的理论基础。
- ◆ 知识的静态强度LS及LN是由领域专家给出, 避免了大量的数据统计工作。
- ◆ 主观Bayes方法不仅给出了证据肯定存在、肯定不存在时更新后验概率的方法, 还给出了证据不确定时的更新方法, 实现了不确定性的逐级传递。

缺点:

- ◆ 它要求领域专家在给出知识时, 同时给出H的先验概率 $P(H)$ , 这比较困难。

## 4.4 可信度方法

### 4.4.1 基本可信度模型

#### 1、可信度的概念

- ◆ 根据经验对一个事物和现象为真的相信程度称为可信度。
- ◆ 在可信度方法中，由专家给出规则或知识的可信度，从而可避免对先验概率、或条件概率的要求。

## 2、C-F模型中知识（规则）的不确定性

在C-F模型中，知识（规则）是用产生式规则表示的，其一般形式为：

IF E THEN H (CF(H,E))

其中， $CF(H,E)$ 是该知识的可信度，称为可信度因子或规则强度，即静态强度。此处 $CF(H,E) \in [-1,1]$ 。

$CF(H,E)=1$  对应于  $P(H|E)=1$  (证据绝对支持结论)

$CF(H,E)=-1$  对应于  $P(H|E)=0$  (证据绝对否定结论)

$CF(H,E)=0$  对应于  $P(H|E)=P(H)$  (证据与结论无关)

CF 为Certainty Factor 的首字母缩写。



### 3、证据不确定性的表示

证据的不确定性也用可信度因子表示。如：  $CF(E)=0.6$

$CF(E)$ 的取值范围：  $[-1, +1]$ 。

$CF(E)>0$ :表示证据以某种程度为真。

$CF(E)<0$ :表示证据以某种程度为假。

$CF(E)$ 表示证据的强度，即动态强度。

#### 4、组合证据不确定性的算法

规则： IF E THEN H (CF(H,E))

若  $E = E_1 \text{ AND } E_2 \text{ AND } \dots \text{ AND } E_n$ , 则

$$CF(E) = \min\{CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)\}$$

若  $E = E_1 \text{ OR } E_2 \text{ OR } \dots \text{ OR } E_n$ , 则

$$CF(E) = \max\{CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)\}$$

## 5、不确定性的传递算法

IF E THEN H (CF(H,E))

结论H的可信度由下式计算：

$$CF(H) = CF(H,E) \times \max\{0, CF(E)\}$$

CF(H)的取值范围：[-1, +1]。

CF(H)>0:表示结论以某种程度为真。

CF(H)<0:表示结论以某种程度为假。

## 6、结论不确定性的合成算法

◆ 若由多条不同知识推出了相同的结论，但可信度不同，则用合成算法求出综合可信度。

设有如下知识：

IF  $E_1$  THEN  $H$  ( $CF(H, E_1)$ )

IF  $E_2$  THEN  $H$  ( $CF(H, E_2)$ )

则结论 $H$ 的综合可信度分如下两步算出：

首先分别对每一条知识求出 $CF(H)$ ：计算 $CF_1(H)$ 、 $CF_2(H)$

然后用下述公式求出 $E_1$ 与 $E_2$ 对 $H$ 的综合可信度 $CF_{12}(H)$ ：

$$CF_{12}(H) = \begin{cases} CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H) \times CF_2(H) & , CF_1(H) \geq 0, CF_2(H) \geq 0 \\ CF_1(H) + CF_2(H) + CF_1(H) \times CF_2(H) & , CF_1(H) < 0, CF_2(H) < 0 \\ \frac{CF_1(H) + CF_2(H)}{1 - \min\{|CF_1(H)|, |CF_2(H)|\}} & , CF_1(H) \times CF_2(H) < 0 \end{cases}$$

IF	E	THEN	H	(CF(H,E))
----	---	------	---	-----------

C-F模型的核心问题是三个可信度：

(1) 知识的可信度 $CF(H,E)$ ：取值范围 $[-1, 1]$

$CF(H,E)=1$  对应于  $P(H|E)=1$  (证据绝对支持结论)

$CF(H,E)=-1$  对应于  $P(H|E)=0$  (证据绝对否定结论)

$CF(H,E)=0$  对应于  $P(H|E)=P(H)$  (证据与结论无关)

(2) 证据的可信度 $CF(E)$ ：取值范围 $[-1, 1]$

$CF(E)=1$  对应证据绝对存在；

$CF(E)=-1$  对应证据绝对不存在；

$CF(E)=0$  表示对证据一无所知。

(3) 结论的可信度 $CF(H)$ ：取值范围 $[-1, 1]$

$CF(H)=CF(H,E) \times \max\{0, CF(E)\}$

该公式隐含了一个知识运用的条件, 即 $CF(E)>0$ 。 (负负得正)

## 4.4.2 带阈值限度的可信度模型

### 1. 知识不确定性的表示

知识用下述形式表示：

IF E THEN H (CF(H,E), $\lambda$ )

其中：

◆ CF(H,E)为知识的可信度，取值范围为[0,1]。

CF(H,E)=0 对应于  $P(H|E)=0$  (证据绝对否定结论)

CF(H,E)=1 对应于  $P(H|E)=1$  (证据绝对支持结论)

◆  $\lambda$ 是阈值，明确规定了知识运用的条件：只有当 $CF(E) \geq \lambda$ 时，该知识才能够被应用。 $\lambda$ 的取值范围为[0,1]。

IF E THEN H (CF(H,E), $\lambda$ )

## 2. 证据不确定性的表示

证据E的可信度仍为CF(E)，但其取值范围为：[0, 1]

CF(E)=1 表示证据绝对存在；

CF(E)=0 表示证据绝对不存在。

## 3. 组合证据的不确定性

## 4. 不确定性的传递算法

当CF(E)≥ $\lambda$ 时，CF(H)=CF(H,E)×CF(E)

注意：CF(H,E)表示证据E为真的条件下结论H为真的可能性。

## 5. 结论不确定性的合成算法

设有多条规则有相同的结论，即

IF  $E_1$  THEN  $H$   $(CF(H, E_1), \lambda_1)$

IF  $E_2$  THEN  $H$   $(CF(H, E_2), \lambda_2)$

...

IF  $E_n$  THEN  $H$   $(CF(H, E_n), \lambda_n)$

如果这 $n$ 条规则都满足： $CF(E_i) \geq \lambda_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$

且都被启用，则首先分别对每条知识求出它对 $CF_i(H)$ ;

然后求结论 $H$ 的综合可信度 $CF(H)$ 。



# 求综合可信度的几种方法

极大值法:

$$CF(H)=\max\{CF_1(H),CF_2(H),\dots,CF_n(H)\}$$

加权求和法:

$$CF(H)=\frac{1}{\sum_{i=1}^n CF(H,E_i)}\sum_{i=1}^n CF(H,E_i)\times CF(E_i)$$

有限和法:

$$CF(H)=\min\{\sum_{i=1}^n CF_i(H),1\}$$

递推法:

$$C_1=CF(H,E_1)\times CF(E_1)$$

$$C_k=C_{k-1}+(1-C_{k-1})\times CF(H,E_k)\times CF(E_k)$$

## 4.4.3 加权的可信度模型

考虑复合前提条件：

$E = E1 \text{ AND } E2 \text{ AND } \dots \text{ AND } E_n$

前面所讨论的模型都认为各个子条件的重要性是完全相等的，各个子条件之间的地位是完全平等的。但是现实中并非都是如此。很可能有一些子条件对结论的影响相对其它更大一些；有些子条件更重要一些。

如果	学生善于思考
并且	动手能力强
并且	经常上自习
并且	坚持锻炼身体
并且	不抽烟
那么	该生成绩较好

## 1. 知识的不确定性

IF  $E_1(\omega_1)$  AND  $E_2(\omega_2)$  AND...AND  $E_n(\omega_n)$

THEN H (CF(H,E), $\lambda$ )

其中 $\omega_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 是加权因子,  $\lambda$  是阈值, 其值均由专家给出。

加权因子的取值范围一般为 $[0, 1]$ , 且应满足归一条件, 即

$$0 \leq \omega_i \leq 1, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

## 2. 组合证据的不确定性

若有 $CF(E_1)$ ,  $CF(E_2)$ , ...,  $CF(E_n)$ , 则组合证据的可信度为:

$$CF(E) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \sum_{i=1}^n (\omega_i \times CF(E_i))$$

### 3. 不确定性的传递算法

当一条知识的 $CF(E)$ 满足如下条件时，

$$CF(E) \geq \lambda$$

该知识就可被应用。结论H的可信度为：

$$CF(H) = CF(H, E) \times CF(E)$$

- ◆ 加权因子的引入不仅可以区分不同证据的重要性，同时还可以解决证据不全时的推理问题。

## 4.4.4 前件带不确定性的可信度模型

### 1. 知识不确定性的表示

IF  $E_1(cf_1)$  AND  $E_2(cf_2)$  AND...AND  $E_n(cf_n)$  THEN  $H$   
(CF(H,E), $\lambda$ )

其中， $cf_i$ 为子条件 $E_i(i=1,2,...,n)$ 的可信度。 $cf_i$ 在 $[0,1]$ 上取值，其值由专家给出，反映了专家对子证据可信度的一种要求。

IF  $E_1(cf_1, \omega_1)$  AND  $E_2(cf_2, \omega_2)$  AND...AND  $E_n(cf_n, \omega_n)$   
THEN  $H$  (CF(H,E), $\lambda$ )

证据不确定性的表示：子证据 $E_i$ 的可信度记为 $cf'_i$ ，其取值范围在 $[0,1]$ 上， $cf'_i$ 即前面的CF( $E_i$ )。

## 2. 不确定性匹配算法

### ◆ 不带加权因子的不确定性匹配算法:

知识: IF  $E_1(cf_1) \text{ AND } E_2(cf_2) \text{ AND } \dots \text{ AND } E_n(cf_n)$   
THEN H (CF(H,E), $\lambda$ )

证据:  $E_1(cf'_1), E_2(cf'_2), \dots, E_n(cf'_n)$

匹配算法:

$$\max\{0, cf_1 - cf'_1\} + \max\{0, cf_2 - cf'_2\} + \dots + \max\{0, cf_n - cf'_n\} \leq \lambda$$

### ◆ 带加权因子的不确定性匹配算法:

知识: IF  $E_1(cf_1, \omega_1) \text{ AND } E_2(cf_2, \omega_2) \text{ AND } \dots \text{ AND } E_n(cf_n, \omega_n)$   
THEN H (CF(H,E), $\lambda$ )

匹配算法:

$$(\omega_1 \times \max\{0, cf_1 - cf'_1\}) + (\omega_2 \times \max\{0, cf_2 - cf'_2\}) + \dots + (\omega_n \times \max\{0, cf_n - cf'_n\}) \leq \lambda$$

### 3. 不确定性的传递算法

- 不带加权因子时:

$$CF(H) = [(1 - \max\{0, cf_1 - cf'_1\}) \times (1 - \max\{0, cf_2 - cf'_2\}) \times \dots \times (1 - \max\{0, cf_n - cf'_n\})] \times CF(H, E)$$

- 带加权因子时:

$$CF(H) = [(\omega_1 \times (1 - \max\{0, cf_1 - cf'_1\})) \times (\omega_2 \times (1 - \max\{0, cf_2 - cf'_2\})) \times \dots \times (\omega_n \times (1 - \max\{0, cf_n - cf'_n\}))] \times CF(H, E)$$

$$CF(H) = [(1 - \omega_1 \max\{0, cf_1 - cf'_1\}) \times (1 - \omega_2 \max\{0, cf_2 - cf'_2\}) \times \dots \times (1 - \omega_n \max\{0, cf_n - cf'_n\})] \times CF(H, E)$$

# 基于可信度的不确定性推理方法的特点

优点：

◆ 简单、直观。

缺点：

- ◆ 可信度因子依赖于专家主观指定，没有统一、客观的尺度，容易产生片面性。
- ◆ 随着推理延伸，可信度越来越不可靠，误差越来越大。当推理深度达到一定深度时，有可能出现推出的结论不再可信的情况。





完

谢谢