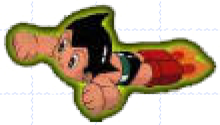

人工智能
Artificial Intelligence

主讲: 相明

googlemail.com

西安交通大学电信学院计算机系

E_mail：mxiang@mail.xjtu.edu.cn

4.5 模糊推理

4.5.1：模糊理论

1. 模糊集

定义4.4 设U是论域，μ_A是把任意u∈U映射为[0, 1]上某个值的函数，即

$$\mu_A : U \to [0,1]$$

则：

μ_A是定义在U上的一个隶属函数。

A ={$\mu_A(u)$, u∈U}称为U上的一个模糊集。

$\mu_A(u)$称为u对模糊集A的隶属度。

μ_A称为模糊集A的隶属函数。

若论域离散且有限，则模糊集A可表示为：

$$A=\{\mu_A(u_1),\mu_A(u_2),\ldots,\mu_A(u_n)\}$$

也可写为：

$$A=\mu_A(u_1)/u_1+\mu_A(u_2)/u_2+\ldots+\mu_A(u_n)/u_n$$

$$A=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)/u_i\text{，或者}A=\bigcup_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)/u_i$$

或者：

$$A=\{\mu_A(u_1)/u_1,\mu_A(u_2)/u_2,\ldots,\mu_A(u_n)/u_n\}$$

$$A=\{(\mu_A(u_1),u_1),(\mu_A(u_2),u_2),\ldots,(\mu_A(u_n),u_n)\}$$

隶属度为0的元素可以不写。

例如，在论域U={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}上，以下形式都可以用来表示模糊集“大”：

大={0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1}

大=0/0+0.2/1+0.3/2+0.4/3+0.5/4+0.6/5
+0.7/6+0.8/7+0.9/8+1/9

大={0/0, 0.2/1, 0.3/2, 0.4/3, 0.5/4, 0.6/5,
0.7/6, 0.8/7, 0.9/8, 1/9}

大={0.2/1, 0.3/2, 0.4/3, 0.5/4, 0.6/5,
0.7/6, 0.8/7, 0.9/8, 1/9}

- 无论论域U有限还是无限，离散还是连续，扎德用如下记号作为模糊集A的一般表示形式:

$$A = \int_{u \in U} \mu_A(u)/u$$

- U上的全体模糊集记为:

$$\mathscr{F}(U)=\{A|\mu_A:U\rightarrow[0,1]\}$$

或

$$\mathcal{F}(U)=\{\mu_A|\mu_A:U\rightarrow[0,1]\}$$

2. 模糊集的运算：主要有包含、交、并、补等等。

定义4.5 设A，B∈$\mathcal{F}$(U)，若对任意u∈U，都有

$$\mu_B(u) \le \mu_A(u)$$

成立，则称A包含B，记为$B \subseteq A$。

定义4.6 设A，B∈$\mathcal{F}$(U)，分别称A∪B和A∩B为A与B的并集和交集，称¬A为A的补集或者余集。它们的隶属函数分别为：

$$A \cup B : \mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} = \mu_A(u) \vee \mu_B(u)$$

$$A \cap B : \mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} = \mu_A(u) \wedge \mu_B(u)$$

$$\neg A : \mu_{\neg A}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

3.模糊关系

- 定义4.7 设A_i是$U_i(i=1,2,\ldots,n)$上的模糊集，则称

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \int_{U_1 \times U_2 \times \cdots \times Un} (\mu_{A_1}(u_1) \wedge \mu_{A_2}(u_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_n}(u_n)) / (u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

为$A_1,A_2,\ldots,A_n$的笛卡儿乘积，它是$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$上的一个模糊集。

- 定义4.8 在$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$上一个n元模糊关系R是指以$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$为论域的一个模糊集，记为

$$R = \int_{U_1 \times U_2 \times \cdots \times Un} \mu_R(u_1, u_2, \cdots, u_n) / (u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

- 当U和V都是有限论域时，其模糊关系R可用一个矩阵表示。

$$U=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$$

$$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$$

则U×V上的模糊关系可以表示为

$$R=\begin{bmatrix} \mu_R(u_1,v_1) & \mu_R(u_1,v_2) & \cdots & \mu_R(u_1,v_n) \\ \mu_R(u_2,v_1) & \mu_R(u_2,v_2) & \cdots & \mu_R(u_2,v_n) \\ \cdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_R(u_m,v_1) & \mu_R(u_m,v_2) & \cdots & \mu_R(u_m,v_n) \end{bmatrix}$$

例 设$U=V=\{u_1,u_2,u_3\}$,R是“信任关系”，则可有

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 \\ 0.9 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

定义4.9 设R_1与R_2分别是U×V与V×W上的两个模糊关系，则R_1与R_2的合成是指U×W上的一个模糊关系，记为

$$R_1 \circ R_2$$

其隶属函数为

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(u,w) = \vee\{\mu_{R_1}(u,v) \wedge \mu_{R_2}(v,w)\}$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(u,w) = \vee\{\mu_{R_1}(u,v) \wedge \mu_{R_2}(v,w) : v \in V\}$$

例　设有两个模糊关系

$$R_1=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}\quad R_2=\begin{bmatrix}0.2 & 0.8\\ 0.4 & 0.6\\ 0.6 & 0.4\end{bmatrix}$$

则R_1与R_2的合成是

$$R=R_1\circ R_2=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\\ 0.3 & 0.5\end{bmatrix}$$

合成法则类似与矩阵乘法。　　(0.2　0.4　0.1)

4. 模糊逻辑

- 含有模糊概念、模糊数据的语句称为模糊命题。它的一般表示形式为:

x　　is　　A

其中，A是一个模糊概念，用相应的模糊集及隶属函数表示；　x用以指代所论述的对象。例如，

张三　　is　　年轻的

此时x为“张三”，“年轻的”即模糊集A。

5、模糊匹配：

（1）模糊产生式规则的一般形式是：

IF E THEN H

其中，E是用模糊命题表示的模糊条件；H是用模糊命题表示的模糊结论；因此模糊产生式规则可具体表示为：

IF x is A THEN y is B

（2）推理中所用的证据也用模糊命题表示，一般形式为

x is A’

（3）模糊推理要解决的问题：证据与知识的条件是否匹配；如果匹配，如何利用模糊规则及证据推出结论。

- 在模糊推理中，知识前提条件中的A与证据中的A′不一定完全相同，因此首先必须考虑匹配问题。例如：

  IF x is 小 THEN y is 大

  x is 较小

- 两个模糊集或模糊概念的相似程度称为匹配度。常用的计算匹配度的方法主要有贴近度、语义距离及相似度等。

（1）贴近度

设A与B分别是论域$U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$上的两个模糊集，则它们的贴近度定义为：

$$(A,B)= [A\cdot B+(1-A\odot B)] /2$$

其中

$$A\bullet B=\bigvee_U(\mu_A(u_i)\wedge\mu_B(u_i))$$

$$A\odot B=\bigwedge_U(\mu_A(u_i)\vee\mu_B(u_i))$$

(2) 语义距离

海明距离

$$d(A,B)=\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|$$

$$d(A,B)=\frac{1}{b-a}\int_a^b|\mu_A(u)-\mu_B(u)|\,du$$

欧几里得距离

$$d(A,B)=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i))^2}$$

明可夫斯基距离

$$d(A,B)=[\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|^q]^{\frac{1}{q}},\quad q\geq 1$$

切比雪夫距离

$$d(A,B)=\max_{1\leq i\leq n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|$$

匹配度为：1-d(A,B)

(3) 相似度

最大最小法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n}\max\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}$$

算术平均法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\frac{1}{2}\times\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)+\mu_B(u_i))}$$

几何平均最小法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mu_A(u_i)\times\mu_B(u_i)}}$$

复合条件的模糊匹配

(1) 分别计算出每一个子条件与其证据的匹配度

例如对复合条件

$$E=x_1 \text{ is } A_1 \text{ AND } x_2 \text{ is } A_2 \text{ AND } x_3 \text{ is } A_3$$

及相应证据E’:

$$x_1 \text{ is } A'_1 \text{ , } x_2 \text{ is } A'_2 \text{ , } x_3 \text{ is } A'_3$$

分别算出A_i与A'_i的匹配度$\delta_{match}(A_i,A'_i),i=1,2,3$。

(2) 求出整个前提条件与证据的总匹配度。常用的方法有“取极小”和“相乘”等。

$$\delta_{match}(E,E')=\min\{\delta_{match}(A_1,A'_1),\delta_{match}(A_2,A'_2), \delta_{match}(A_3,A'_3)\}$$

$$\delta_{match}(E,E')=\delta_{match}(A_1,A'_1)\times\delta_{match}(A_2,A'_2)\times\delta_{match}(A_3,A'_3)$$

(3) 检查总匹配度是否满足阈值条件，如果满足就可以匹配，否则为不可匹配。

6. 模糊推理的基本模式

(1) 模糊假言推理

知识：IF x is A THEN y is B

证据：x is A'

结论：y is B'

对于复合条件有：

知识：IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND…AND x_n is A_n THEN y is B

证据：x_1 is A'_1，x_2 is A'_2，…，x_n is A'_n

结论：y is B'

(2) 模糊拒取式推理

知识：IF x is A THEN y is B

证据： y is B’

结论： x is A’

(3) 模糊推理方法：

我们主要讨论扎德等人的方法。这种方法的基本思想是：首先由模糊知识

IF x is A THEN y is B

求出A与B之间的模糊关系R；然后再通过R与相应证据的合成求出模糊结论。

4.5.2 简单模糊推理

- 知识中只含有简单条件，且不带可信度因子的模糊推理称为简单模糊推理。
- 推理方法：对于知识

IF x is A THEN y is B

首先构造出A与B之间的模糊关系R，然后通过R与证据的合成求出结论。

如果已知证据是

x is A’

且A与A’可以模糊匹配，则通过下述合成运算求取B’：

$$B' = A' \circ R$$

如果已知证据是

y is B’

且B与B’可以模糊匹配，则通过下述合成运算求出A’：

$$A' = R \circ B'$$

构造模糊关系R的方法

1. 扎德方法

- 扎德提出了两种方法：一种称为条件命题的极大极小规则；另一种称为条件命题的算术规则，由它们获得的模糊关系分别记为R_m和R_a。

设$A\in\mathfrak{F}(U),B\in\mathfrak{F}(V)$，其表示分别为

$$A=\int_U \mu_A(u)/u \quad ,B=\int_V \mu_B(u)/u$$

且用×，∪，∩，¬, ⊕ 分别表示模糊集的笛卡儿乘积、并、交、补及有界和运算，则扎德把R_m和R_a分别定义为：

$$R_m=(A\times B)\bigcup(\neg A\times V)=\int_{U\times V}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))/(u,v)$$

$$R_a=(\neg A\times V)\oplus(U\times B)=\int_{U\times V}1\wedge(1-\mu_A(u)+\mu_B(v))/(u,v)$$

IF x is A THEN y is B

对于模糊假言推理，若已知证据为

x is A’

则：

$$B'_m = A' \circ R_m$$

$$B'_a = A' \circ R_a$$

对于模糊拒取式推理，若已知证据为

y is B’

则：

$$A'_m = R_m \circ B'$$

$$A'_a = R_a \circ B'$$

例 设U=V={1,2,3,4,5}, A=1/1+0.5/2, B=0.4/3+0.6/4+1/5

并设模糊知识及模糊证据分别为：

IF x is A THEN y is B   x is A’

其中，A’的模糊集为：A’=1/1+0.4/2+0.2/3

则由模糊知识可分别得到R_m与R_a：

$$R_m=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_a=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

IF x is A THEN y is B

$B'_m = A' \circ R_m$

$$= \{1, 0.4, 0.2, 0, 0\} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$= \{0.4, 0.4, 0.4, 0.6, 1\}$

$B'_a = A' \circ R_a = \{0.4, 0.4, 0.4, 0.6, 1\}$

若已知证据为:y is B’,且B’=0.2/1+0.4/2+0.6/3+0.5/4+0.3/5,则:

$A'_m = R_m \circ B'$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \{0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.6\}$$

$A'_a = R_a \circ B' = \{0.5, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6\}$

2. Mamdani方法

IF x is A THEN y is B

$$R_c = A \times B = \int_{U \times V} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) / (u,v)$$

对于模糊假言推理，

$$B'_c = A' \circ R_c$$

对于模糊拒取式推理，

$$A'_c = R_c \circ B'$$

3. Mizumoto方法

- 提出了一组构造模糊关系的方法，分别记为R_s,R_g,R_{sg},R_{gs},R_{gg},R_{ss}等等。其定义分别为：

$$R_s = A\times V \underset{s}{\Rightarrow} U\times B = \int_{U\times V}[\mu_A(u) \xrightarrow[s]{} \mu_B(v)]/(u,v)$$

$$\mu_A(u) \xrightarrow[s]{} \mu_B(v) = \begin{cases} 1, \mu_A(u) \le \mu_B(v) \\ 0, \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

$$R_g = A\times V \underset{g}{\Rightarrow} U\times B = \int_{U\times V}[\mu_A(u) \xrightarrow[g]{} \mu_B(v)]/(u,v)$$

$$\mu_A(u) \xrightarrow[g]{} \mu_B(v) = \begin{cases} 1, \mu_A(u) \le \mu_B(v) \\ \mu_B(v), \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

$$\cdots$$

设U=V={1,2,3,4,5}, A=1/1+0.5/2, B=0.4/3+0.6/4+1/5

模糊知识:　　IF x is A THEN y is B

模糊证据:　　　x is A’

其中，A’的模糊集为：A’=1/1+0.4/2+0.2/3

$$R_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$B'_s = A' \circ R_s = \{0.2,0.2,0.2,0.4,1\}$

$B'_g = A' \circ R_g = \{0.2,0.2,0.4,0.6,1\}$

4. 各种模糊关系的性能分析

比较模糊关系性能所依据的基本原则：

原则1：

知识：IF x is A THEN y is B

证据：x is A

结论：y is B

原则2：

知识：IF x is A THEN y is B

证据：x is very A

结论：y is very B

y is B

原则3：

知识：IF　　x is A　THEN　y is B

证据：　　　x is more or less A

结论：　　　　　　　　　　y is more or less B

　　　　　　　　　　　　　y is B

原则4：

知识：IF　　x is A　THEN　y is B

证据：　　　x is not A

结论：　　　　　　　　　　y is unknown

　　　　　　　　　　　　　y is not B

以上原则是针对模糊假言推理的。

各种模糊关系的性能分析(3)

原则5：

知识：IF x is A THEN y is B

证据： y is not B

结论： x is not A （该结论必须满足）

原则6：

知识：IF x is A THEN y is B

证据： y is not very B

结论： x is not very A

各种模糊关系的性能分析(4)

原则7：

知识：IF x is A THEN y is B

证据： y is not more or less B

结论： x is not more or less A

原则8：

知识：IF x is A THEN y is B

证据： y is B

结论： x is unknown

x is A

模糊关系评测实例

设U=V={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

A=1/1+0.8/2+0.6/3+0.4/4+0.2/5 （小）

B=0.2/4+0.4/5+0.6/6+0.8/7+1/8+1/9+1/10 （大）

$$R_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{sg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 根据基本概念扩充法，由A可得：

very A=$\int_U \mu_A^2(u)/u$

$=\{1,0.64,0.36,0.16,0.04,0,0,0,0,0\}$

more or less A=$\int_U \mu_A^{0.5}(u)/u$

$=\{1,0.89,0.77,0.63,0.45,0,0,0,0,0\}$

not A= $\int_U 1-\mu_A(u)/u$

$=\{0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1,1,1,1\}$

not very A=$\int_U 1-\mu_A^2(u)/u$

$=\{0,0.36,0.64,0.84,0.96,1,1,1,1,1\}$

not more or less A=$\int_U 1-\mu_A^{0.5}(u)/u$

$=\{0,0.11,0.23,0.37,0.55,1,1,1,1,1\}$

由B可得：

very B= $\int_V \mu_B^2(v)/v$

={0,0,0,0.04,0.16,0.36,0.64,1,1,1}

more or less B= $\int_V \mu_B^{0.5}(v)/v$

={0,0,0,0.45,0.63,0.77,0.89,1,1,1}

not B= $\int_V 1-\mu_B(v)/v$

={1,1,1,0.8,0.6,0.4,0.2,0,0,0}

not very B= $\int_V 1-\mu_B^2(v)/v$

={1,1,1,0.96,0.84,0.64,0.36,0,0,0}

not more or less B= $\int_V 1-\mu_B^{0.5}(v)/v$

={1,1,1,0.55,0.37,0.23,0.11,0,0,0}

各种模糊关系符合推理原则情况一览表

原则	A’	B’	R_m	R_a	R_c	R_s	R_g	R_{sg}	R_{gg}	R_{gs}	R_{ss}	R_b	$R_\triangle$	$R_\blacktriangle$	R_*	$R_\#$	$R_\square$
1	A	B	×	×	v	v	v	v	v	v	v	×	×	×	×	×	×
2	Very A	Very B	×	×	×	v	×	v	×	×	v	×	×	×	×	×	×
	Very A	B	×	×	v	×	v	×	v	v	×	×	×	×	×	×	×
3	more or less A	More or less B	×	×	×	v	v	v	v	v	v	×	×	×	×	×	×
	More or less A	B	×	×	v	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
4	Not A	Unknown	v	v	×	v	v	×	×	×	×	v	v	v	v	v	v
	Not A	Not B	×	×	×	×	×	v	v	v	v	×	×	×	×	×	×
5	Not A	Not B	×	×	×	v	×	v	×	×	v	×	×	×	×	×	×
6	Not very A	Not very B	×	×	×	v	×	v	×	×	v	×	×	×	×	×	×
7	Not more or less A	Not more or less B	×	×	×	v	×	v	×	×	v	×	×	×	×	×	×
8	Unknown	B	×	v	×	v	v	×	×	×	×	v	v	v	v	v	v
	A	B	×	×	v	×	×	×	×	v	v	×	×	×	×	×	×

4.5.3 模糊三段论推理

R1: IF x is A THEN y is B

R2: IF y is B THEN z is C

R3: IF x is A THEN z is C

其中A、B、C分别是论域U、V、W上的模糊集。

设R(A,B),R(B,C)与R(A,C)分别是根据上述模糊知识得到的模糊关系，它们分别定义在U×V,V×W,U×W上，如果

$$R(A,B)\circ R(B,C)=R(A,C)$$

则称模糊三段论成立(即模糊关系R满足三段论)。

$$B'= A'\circ R(A,B),\ \ C'=B'\circ R(B,C)= A'\circ R(A,B)\circ R(B,C)= A'\circ R(A,C)$$

满足模糊三段论的模糊关系

- 在前面讨论的15种模糊关系中，有一些能满足模糊三段论，有一些不能满足。

设U=V=W={1,2,3,4,5}

A=1/1+0.6/2+0.2/3

B=0.3/3+0.7/4+1/5

C=0.09/3+0.49/4+1/5

对R_m由R1，R2，R3分别得到：

$$R_m(A,B)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_m(B,C)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.49 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.49 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_m(A,C)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.09 & 0.49 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.49 & 0.6 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_m(A,B)\circ R_m(B,C)=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.49 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.49 & 0.6 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

显然，$R_m(A,B)\circ R_m(B,C)\neq R_m(A,C)$。

这说明R_m不满足模糊三段论。

$$R_g(A,B)=\begin{bmatrix}0&0&0.3&0.7&1\\0&0&0.3&1&1\\0&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},R_g(B,C)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&0.09&1&1\\0&0&0.09&0.49&1\\0&0&0.09&0.49&1\end{bmatrix}$$

$$R_g(A,C)=\begin{bmatrix}0&0&0.09&0.49&1\\0&0&0.09&0.49&1\\0&0&0.09&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},R_g(A,B)\circ R_g(B,C)=\begin{bmatrix}0&0&0.09&0.49&1\\0&0&0.09&0.49&1\\0&0&0.09&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

显然，$R_g(A,B)\circ R_g(B,C)=R_g(A,C)$

这说明R_g满足模糊三段论。

各种模糊关系满足模糊三段论情况

模糊关系	R_m	R_a	R_c	R_s	R_g	R_{sg}	R_{gg}	R_{gs}	R_{ss}	R_b	$R_{\triangle}$	$R_{\blacktriangle}$	R_*	$R_{\#}$	$R_{\square}$
模糊三段论	×	×	v	v	v	v	v	v	v	×	×	×	×	×	v

表中，“v”表示满足，“×”表示不满足。

4.5.4 多维模糊推理

- 多维模糊推理是指知识的前提条件是复合条件的一类推理。其一般模式为：

知识：IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND…AND x_n is A_n THEN y is B

证据： x_1 is A'_1 x_2 is A'_2 … x_n is A'_n

结论： y is B'

其中，A_i，$A'_i \in \mathfrak{F}(U_i)$;$B,B' \in \mathfrak{F}(V)$;$U_i$及V是论域，i=1,2,…,n。

对于多维模糊推理，目前主要有三种处理方法。

1. 扎德方法 (U_i=U)

该方法的基本思想是：

(1)求出$A_1,A_2,\ldots,A_n$的交集，并记为A。

(2)求出A与B之间的模糊关系R(A,B)，也可记为$R(A_1,A_2,\ldots,A_n,B)$。

(3)求出证据中$A'_1,A'_2,\ldots,A'_n$的交集，并记为A'。

(4)由A'与R(A,B)的合成求出B'。（该方法要求A_i定义在相同的论域）

多维模糊推理举例

例 设U=V=W={1,2,3,4,5}

A_1={1,0.6,0,0,0}, A_2={0,1,0.5,0,0}, B={0,0,1,0.8,0}

A'_1={0.8,0.5,0,0,0}, A'_2={0,0.9,0.5,0,0}

由此可得:

$A_1 \cap A_2$={0,0.6,0,0,0}， $A'_1 \cap A'_2$={0,0.5,0,0,0}

$$R_a(A_1, A_2, B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 1 & 1 & 0.4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$B'_a = (A'_1 \cap A'_2) \circ R_a(A_1, A_2, B)$={0.4,0.4,0.5,0.5,0.4}

2. 祖卡莫托(Tsukamoto)方法

知识：IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND…AND x_n is A_n THEN y is B

证据： x_1 is A'_1 x_2 is A'_2 … x_n is A'_n

结论： y is B'

（1）首先构造各个子条件与结论之间的模糊关系

$R(A_i,B),i=1,2,\ldots,n$

（2）根据复合条件中的每一个子条件求出相应的B'_i:

$B'_i=A'_i \circ R(A_i,B),i=1,2,\ldots,n$

（3） 对各B'_i取交集，从而得到B'：

$B'=B'_1 \cap B'_2 \cap \ldots \cap B'_n$

3. 苏更诺(Sugeno)方法

4.5.5 多重模糊推理

- 所谓多重模糊推理，一般是指知识具有如下表示形式的一种推理：

IF x is A_1 THEN y is B_1 ELSE

IF x is A_2 THEN y is B_2 ELSE

…

IF x is A_n THEN y is B_n

其中，$A_i \in \mathfrak{F}(U), B_i \in \mathfrak{F}(V), i=1,2,\ldots,n$。

这里只讨论它的一种简单形式：

IF x is A THEN y is B ELSE y is C

其中$A \in \mathfrak{F}(U), B, C \in \mathfrak{F}(V)$。

知识：IF x is A THEN y is B ELSE y is C

证据 x is A’

结论： y is D

其中A, A’$\in\mathfrak{F}$(U); B,C,D$\in\mathfrak{F}$(V)。

推理方法：通过A、B、C构造U×V上的一个模糊关系R，然后，通过A’与R的合成得到结论D，即

$$D=A'\circ R$$

多重模糊推理中的模糊关系

$$R_m^{'} = (A \times B) \bigcup (\neg A \times C)$$

$$= \int_{U \times V} [\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] \vee [(1 - \mu_A(u)) \wedge \mu_C(v)] / (u, v)$$

$$R_a^{'} = (\neg A \times V \oplus U \times B) \bigcap (A \times V \oplus U \times C)$$

$$= \int_{U \times V} 1 \wedge [1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)] \wedge [\mu_A(u) + \mu_C(v)] / (u, v)$$

$$R'_{gg} = [A \times V \underset{g}{\Rightarrow} U \times B] \bigcap [\neg A \times V \underset{g}{\Rightarrow} U \times C]$$

$$= \int_{U \times V} [\mu_A(u) \underset{g}{\rightarrow} \mu_B(v)] \wedge [(1 - \mu_A(u)) \underset{g}{\rightarrow} \mu_C(v)] / (u, v)$$

$$\mu_A(u) \underset{g}{\rightarrow} \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \mu_A(u) \le \mu_B(v) \\ \mu_B(v) & \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

$$D_{gg} = A' \circ R'_{gg} = A' \circ [(A \times V \underset{g}{\Rightarrow} U \times B) \bigcap (\neg A \times V \underset{g}{\Rightarrow} U \times C)]$$

$$\mu_{D_{gg}}(v) = \bigvee_{u \in U} \left\{ \mu_{A'}(u) \wedge [(\mu_A(u) \underset{g}{\rightarrow} \mu_B(v)) \wedge ((1 - \mu_A(u)) \underset{g}{\rightarrow} \mu_C(v))] \right\}$$

4.5.6 带有可信度因子的模糊推理

知识：IF	x is A	THEN	y is B	CF_1
证据：	x is A’			CF_2

结论：	y is B’	CF

结论可信度的计算：

$CF=\delta_{match}(A,A')\times CF_1\times CF_2$

$CF=\delta_{match}(A,A')\times \min\{CF_1,CF_2\}$

$CF=\delta_{match}(A,A')\times \max\{0,CF_1+CF_2-1\}$

$CF=\min\{\delta_{match}(A,A'),CF_1,CF_2\}$

组合证据

知识：IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND…AND x_n is A_n THEN y is B CF_0

证据： x_1 is A'_1 CF_1

x_2 is A'_2 CF_2

… …

x_n is A'_n CF_n

结论： y is B' CF

组合证据的匹配度：

$$\delta_{match}(E,E')=\min\{\delta_{match}(A_1,A'_1),\delta_{match}(A_2,A'_2), \delta_{match}(A_3,A'_3)\}$$

$$\delta_{match}(E,E')=\delta_{match}(A_1,A'_1)\times\delta_{match}(A_2,A'_2)\times\delta_{match}(A_3,A'_3)$$

组合证据的可信度：

$$CF'_1 = CF_1 \wedge CF_2 \wedge \ldots \wedge CF_n$$

$$CF'_1 = CF_1 \times CF_2 \times \ldots \times CF_n$$

结论的可信度： $CF=\delta_{match}(E,E')\times CF_0\times CF'_1$

结论不确定性的合成

- 结论不确定性的合成：假设根据两组证据及相关知识分别推出了如下两个结论：

$$y \text{ is } B'_1 \ CF_1$$

$$y \text{ is } B'_2 \ CF_2$$

则可用如下方法得到它们的合成结论和可信度因子：

$$B' = B'_1 \cap B'_2$$

$$CF = CF_1 + CF_2 - CF_1 \times CF_2$$

完

谢谢