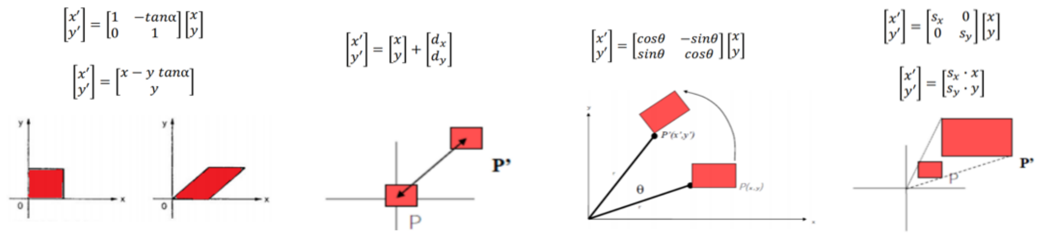
前置知识

要干的就是通过平移、旋转、缩放三个变换矩阵，构造物体的模型变换矩阵

1. 前置知识1：几何变换

1.1. 二维变换

从左到右依次为：错切，平移，旋转，缩放



1.2. 齐次变换

为了把所有几何变化转为矩阵乘，所以拓展一维

- 平移 $\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & d_x\\0 & 1 & d_y\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+d_x\\y+d_y\\1\end{bmatrix}$
- 旋转 $\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$
- 缩放 $\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0\\0 & s_y & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$

1.3. 三维齐次变换

1.3.1. 变换

- 平移变换 $T(d)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & d_x\\0 & 1 & 0 & d_y\\0 & 0 & 1 & d_z\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
- 缩放变换 $S(s)=\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0 & 0\\0 & s_y & 0 & 0\\0 & 0 & s_z & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
- 旋转变换 $R_x=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & cosA & -sinA & 0\\0 & sinA & cosA & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $R_y=\begin{bmatrix}cosB & 0 & sinB & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\-sinB & 0 & cosB & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $R_z=\begin{bmatrix}cosC & -sinC & 0 & 0\\sinC & cosC & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

1. 任意方向的旋转可分解为$R=R_xR_yR_z$
2. 平移变换只需要设置最右一列
3. 缩放变换只需要设置对角线

1.3.2. 逆变换

$$T(d)=\begin{bmatrix}1&0&0&d_x\\0&1&0&d_y\\0&0&1&d_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad T^{-1}(d)=T(-d)=\begin{bmatrix}1&0&0&-d_x\\0&1&0&-d_y\\0&0&1&-d_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$S(s)=\begin{bmatrix}s_x&0&0&0\\0&s_y&0&0\\0&0&s_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad S^{-1}(s)=S\left(\frac{1}{s}\right)=\begin{bmatrix}1/s_x&0&0&0\\0&1/s_y&0&0\\0&0&1/s_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta&0&0\\sin\theta&cos\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad R_z^{-1}(\theta)=R_z(-\theta)=\begin{bmatrix}cos(-\theta)&-sin(-\theta)&0&0\\sin(-\theta)&cos(-\theta)&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

注意对于旋转，不论xyz轴都只需要角度加个负号就行

1.4. 连续变换：多个矩阵相乘

1.4.1. 原理

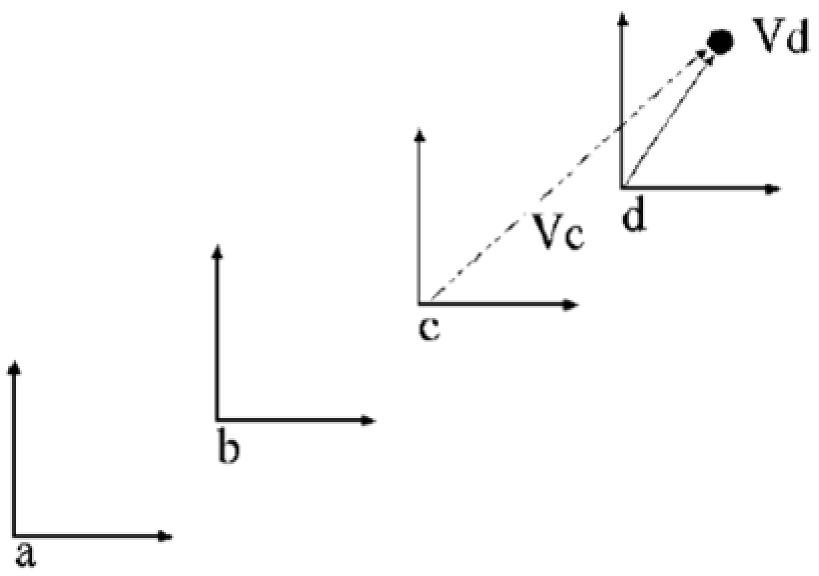
变换：$v^{'}=T\cdot S\cdot R_z\cdot R_x\cdot v$

逆变换：$v=(T\cdot S\cdot R_z\cdot R_x)^{-1}\cdot v^{'}$

其中：$(T\cdot S\cdot R_z\cdot R_x)^{-1}=T^{-1}\cdot S^{-1}\cdot R_z^{-1}\cdot R_x^{-1}$

1.4.2. 过程可视化：Vd相对于a的坐标

- $v_c = M_{c\leftarrow d}v_d$
- $v_b = M_{b\leftarrow c}v_c = M_{b\leftarrow c}M_{c\leftarrow d}v_d$
- $v_a = M_{a\leftarrow b}v_b = M_{a\leftarrow b}M_{b\leftarrow c}M_{c\leftarrow d}v_d$



三维空间中的变换是不可交换的，本实验中约定顺序为：缩放，旋转，平移

2. 前置知识2：欧拉角

用于描述一个物体在三维空间中的方向

2.1. 组成与表示

> 1. **三个角度**：欧拉角由三个角度组成，通常记作ϕ、θ、ψ，每个角度代表围绕一个特定轴的旋转。通过组合这三个旋转，可以达到空间中的任何方向
> 2. **旋转顺序**：不同的旋转顺序会产生不同的欧拉角表示。例如，ZYX表示首先围绕Z轴旋转，接着围绕Y轴，最后围绕X轴。

2.2. 坐标系与旋转轴

> 欧拉角可以基于两种坐标系进行定义：
>
> 1. **固定坐标系（世界坐标系）**：在整个旋转过程中保持不变的坐标系，小写字母表示
> 2. **旋转坐标系（模型坐标系）**：随物体旋转而旋转的坐标系。每次旋转后，下一个旋转是基于新的坐标系进行的，大写字母表示
>
> 举个例子：ZYX 欧拉角，也可以写作 z-y′-x″ 欧拉角，即先绕固定 z 轴旋转，再绕一次旋转后的自身 y 轴 (y′) 旋转，最后绕二次旋转后的自身 *x* 轴 (x″) 旋转

2.3. 欧拉角的分类

> 1. **经典欧拉角**：旋转顺序中有两个相同的轴，例如ZXZ
> 2. **泰特-布赖恩角**：旋转顺序中三个轴都是不同的，例如XYZ

2.4. 其它

> 1. **万向节锁**：在某些特定的姿态下，欧拉角可能会遇到数学上的歧义，导致我们不能唯一地确定物体的方向。这被称为"万向节锁"或"奇异点"问题
> 2. **多重表示**：同一物体姿态可能有多种不同的欧拉角表示