计算机图形学作业二

一、名词解释

1 图形几何变换

图像几何变换又称为图像空间变换， 它将一幅图像中的坐标位置映射到另一幅图像中的新坐标位置。首先是空间变换所需的运算， 如平移、旋转和镜像等， 需要用它来表示输出图像与输入图像之间的〈像素〉映射关系：此外，还需要使用灰度插值算法， 因为按照这种变换关系进行计算， 输出图像的像素可能被映射到输入图像的非整数坐标上。

2 灭点和主灭点

不平行于投影平面的平行线，经过透视投影之后收敛于一点，称为灭点。主灭点则是平行于坐标轴的平行线产生的灭点。

3 插值、逼近、拟合的概念

插值：给定一组有序的数据点 Pi，i=0, 1, …, n，构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为对这些数据点进行插值，所构造的曲线称为插值曲线。（线性插值；抛物线插值）

逼近：型值点（插值点）比较多时，很难用低次函数进行内插，因此可选用一个低次函数尽量的逼近这些点。（最小二乘法）

拟合： 构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点（但未必通过这些点），所构造的曲线为拟合曲线。（可用插值和逼近实现）

4 齐次坐标

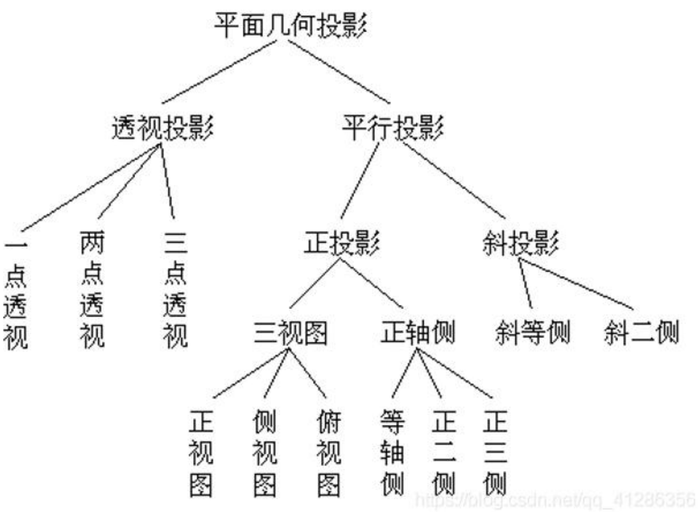
将一个原本是 n 维的向量用一个 n+1 维向量来表示，是指一个用于投影几何里的坐标系统，如同用于欧氏几何里的笛卡儿坐标一般。

二、简答题

1 计算机图形学中采用齐次坐标的好处?

1、提供了用矩阵运算进行图形变换的有效方法；
2、表达的一致性，便于硬件运算；
3、简化了复合图形变换的形式，提高了效率；
4、可以表达无穷远点。

2 平面几何投影的分类?



3 贝塞尔曲线的优缺点?

优点

1、是一种以逼近方法为基础的参数曲线方法

2、可以从多边形的形状来预测将要产生的曲线形状

3、设计者能够方便地通过控制、修改多边形贝点的位直.和个数，来改变曲线的形状和阶次

4、端点性质对称性、凸包性、不变性、变差缩减性。

缺点

1、缺少局部性；

2、曲线与控制多边形的逼近程度较差；

3、表示复杂形状较难

4 二次均匀 B 样条曲线的端点位置矢量？

空间n+1个顶点的位置矢量 P_i（i=0，1，…，n）定义n－1段二次（k＝0,1,2， n=2）均匀B样条曲线，每相邻三个点可构造一曲线段P_i（u）（i=1，…，n－1），其定义表达为：

$$P_i(u)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i-1}\\ \mathbf{P}_i\\ \mathbf{P}_{i+1}\end{bmatrix}\quad i=1,\ .\ n-1;\quad 0\le u\le 1$$

$$=\frac{1}{2!}(1-2u+u^2)P_{i-1}+\frac{1}{2!}(1+2u-2u^2)P_i+\frac{1}{2!}u^2P_{i+1}$$

$$=N_{0,2}(u)P_{i-1}+N_{1,2}(u)P_i+N_{2,2}(u)P_{i+1}$$

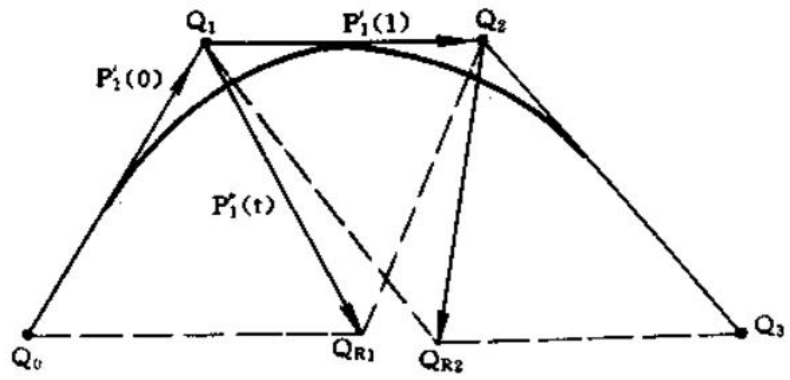


图 3-11　二次 B 样条曲线

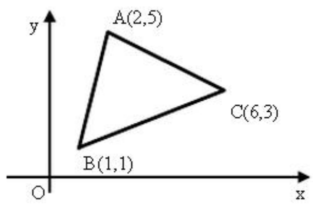
端点位置矢量：$P_i(0)=0.5(\mathbf{P}_{i-1}+\mathbf{P}_i)$，$P_i(1)=0.5(\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_{i+1})$，即曲线的起点和终点分别位于控制多边形$P_{i-1}P_i$和$P_iP_{i+1}$的中点。若$\boldsymbol{P}_{i-1}$、$\boldsymbol{P}_i$、$\boldsymbol{P}_{i+1}$三个顶点位于同一条直线上，$P_i(u)$蜕化成$\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}$直线边上的一段直线。

端点一阶导数矢量：$P_i(0)=\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_{i-1}$，$P_i(1)=\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i$，$P_i'(0)=\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i$，$P_i'(1)=\mathbf{P}_{i+2}-\mathbf{P}_{i+1}$，即曲线的起点切矢和终点切矢分别和二边重合，且相邻两曲线段在节点处具有一阶导数连续。

二阶导数矢量：$P_i''(0)=\mathbf{P}_{i-1}-2\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_{i+1}=P_i''(1)=P_i''(t)$，即曲线段内任何点处二阶导数相等，且相邻两曲线段在节点处二阶导数不连续。

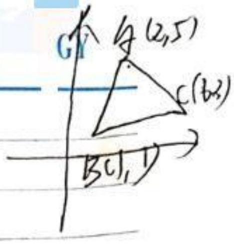
三、综合题

1 如图所示三角形 ABC，将其关于 C 点逆时针旋转 45°，请写出变换矩阵及和变换后图形顶点的规范化齐次坐标。



练二，

原坐标变为齐次坐标 $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$



C点进行平移到原点：

$$T_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

原点进行逆时针(为正)旋转45°

$$T_2=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

原点平移到C点

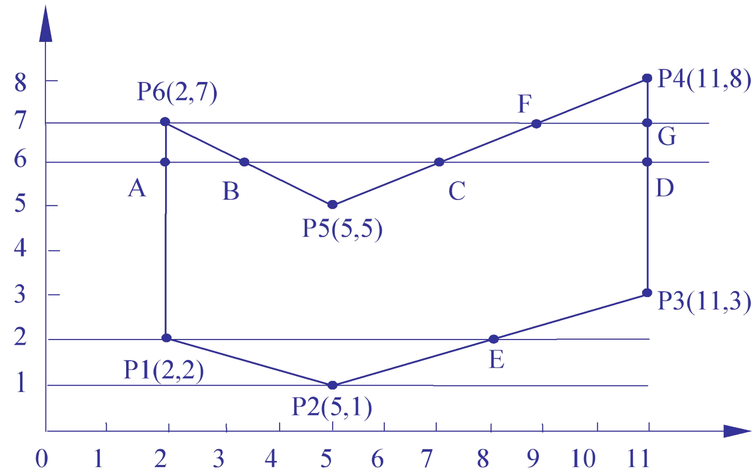
$$T_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

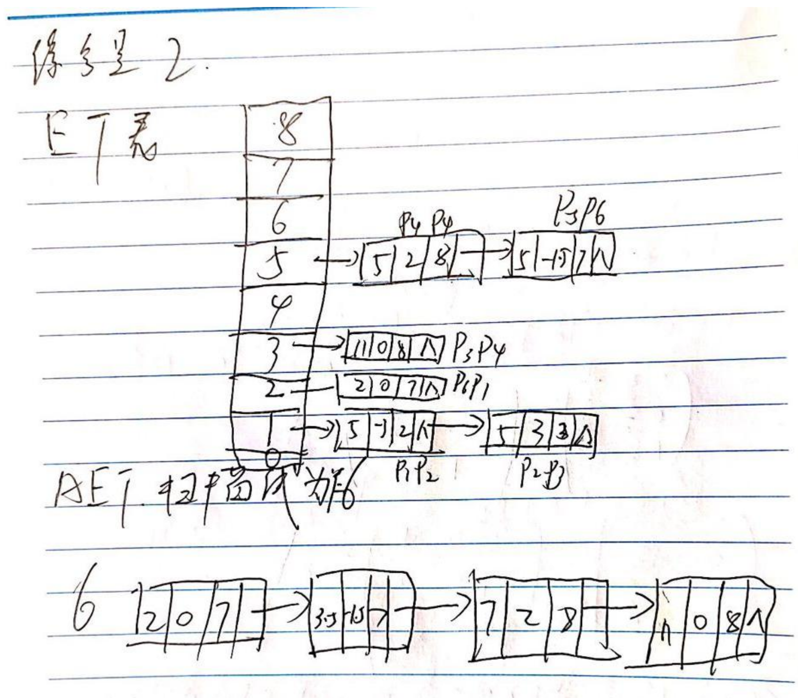
变换矩阵 $T=T_1 \cdot T_2 \cdot T_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ -\frac{3\sqrt2}{2}+6 & -\frac{9\sqrt2}{2}+3 & 1 \end{pmatrix}$

∴ 变换后的矩阵为 $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot T=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ -\frac{3\sqrt2}{2}+6 & -\frac{9\sqrt2}{2}+3 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ [illegible]+6 & [illegible]+3 & [illegible] \\ -3\sqrt2+6 & -\sqrt2+3 & 1 \end{pmatrix}$$

2 如下图所示多边形，若采用扫描线算法对多边形进行填充，试写出该多边形的 ET 表和当扫描线 Y=6 时的 AET 表





3 给定四点 P1（0,0,0）,P2(1,1,1),P3(2,-1,-1),P4(3,0,0),用其作为特征多边形来构造一条三次 Bezier 曲线，并计算参数为 0，1/3，2/3，1 的值。

解：三次 Bezier 曲线的一般式为： $P(t)=(1-t)^3P_1+3t(1-t)^2P_2+3t^2(1-t)P_3+t^3P_4 \quad t\in[0\ 1]$

$$P(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4 \quad t \in [0,1]$$

（公式要记住）

$t=0$ 为起始坐标，即 $P_1(0,0,0)$

$$t=\frac{1}{3},\ P\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1-\frac{1}{3}\right)^3 P_1 + 3\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 P_2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) P_3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 P_4$$

$$= \frac{8}{27}P_1 + \frac{12}{27}P_2 + \frac{6}{27}P_3 + \frac{1}{27}P_4$$

$$= \Big(\frac{8}{27}\cdot 0 + \frac{12}{27}\cdot 1 + \frac{6}{27}\cdot 2 + \frac{1}{27}\cdot 3,$$

$$\frac{8}{27}\cdot 0 + \frac{12}{27}\cdot 1 + \frac{6}{27}\cdot(-1) + \frac{1}{27}\cdot 0,$$

$$\frac{8}{27}\cdot 0 + \frac{12}{27}\cdot 1 + \frac{6}{27}\cdot(-1) + \frac{1}{27}\cdot 0\Big)$$

$$= \left(\frac{27}{27}, \frac{6}{27}, \frac{6}{27}\right) = \left(1, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

同理 $t=\frac{2}{3}$ 时，$P\left(\frac{2}{3}\right) = \left(2, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}\right)$

$t=1$ 时，即终止坐标 $(3,0,0)$