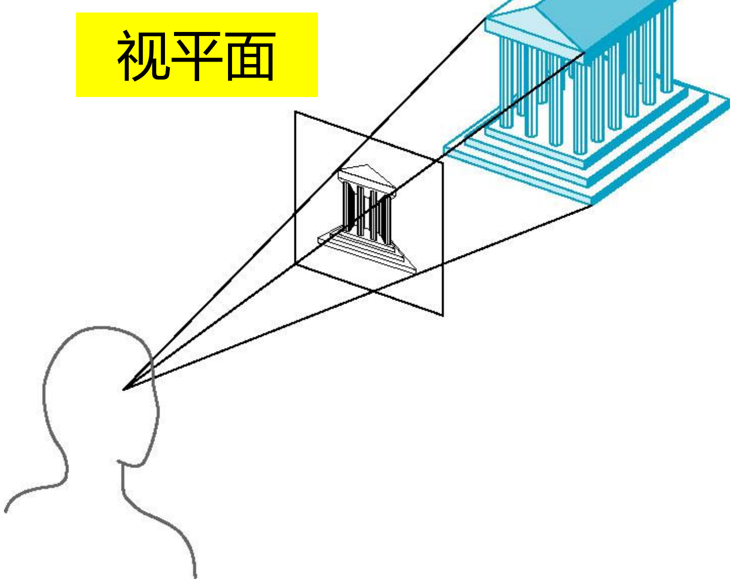
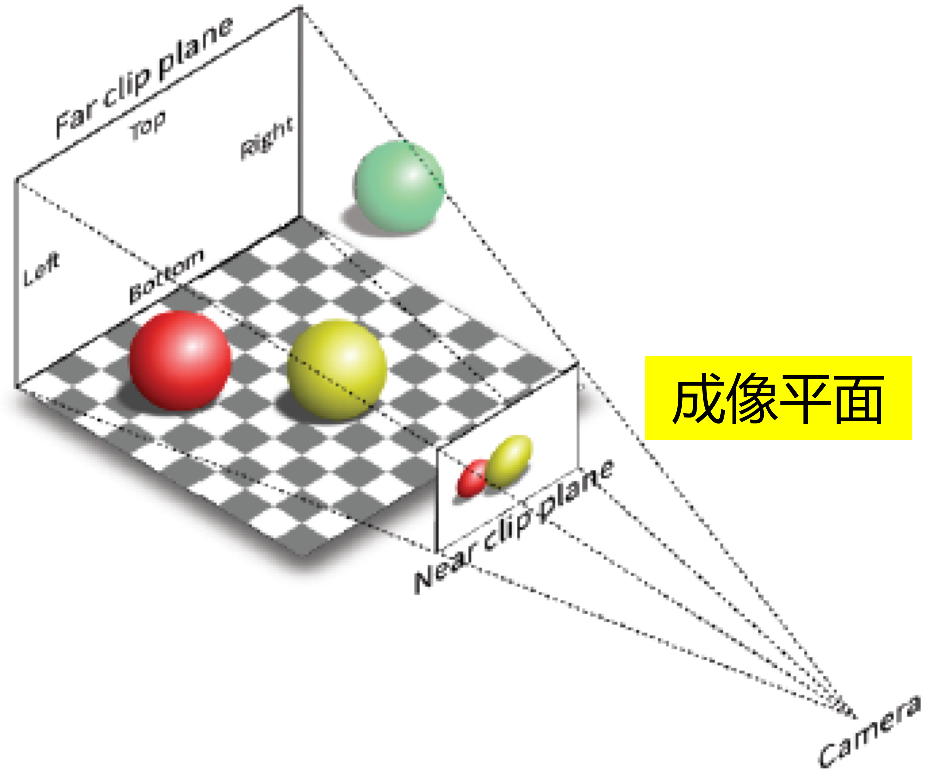
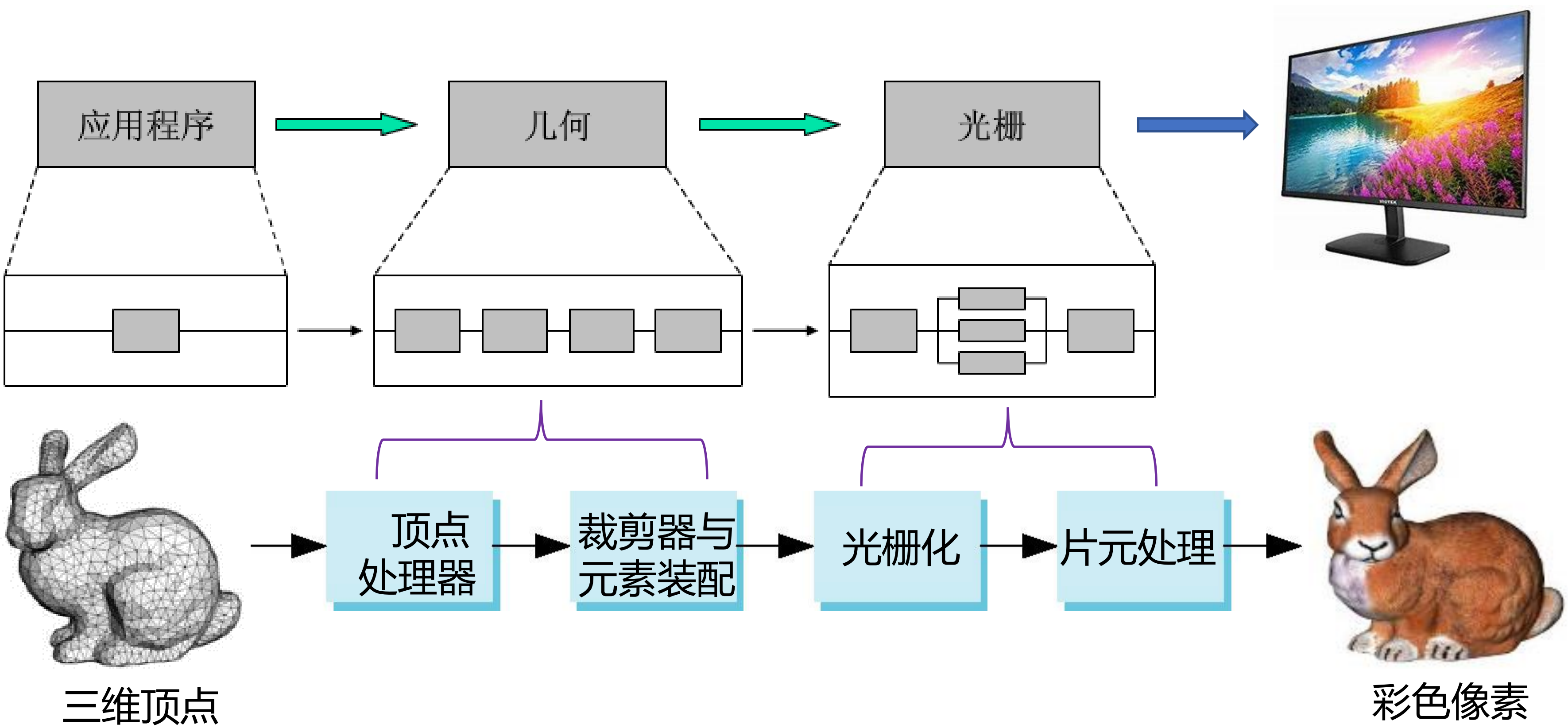
渲染流水线/管线
Rendering Pipeline

渲染：3D场景→2D图像


视平面


Far clip plane
Top
Right
Left
Bottom
成像平面
Near clip plane
Camera

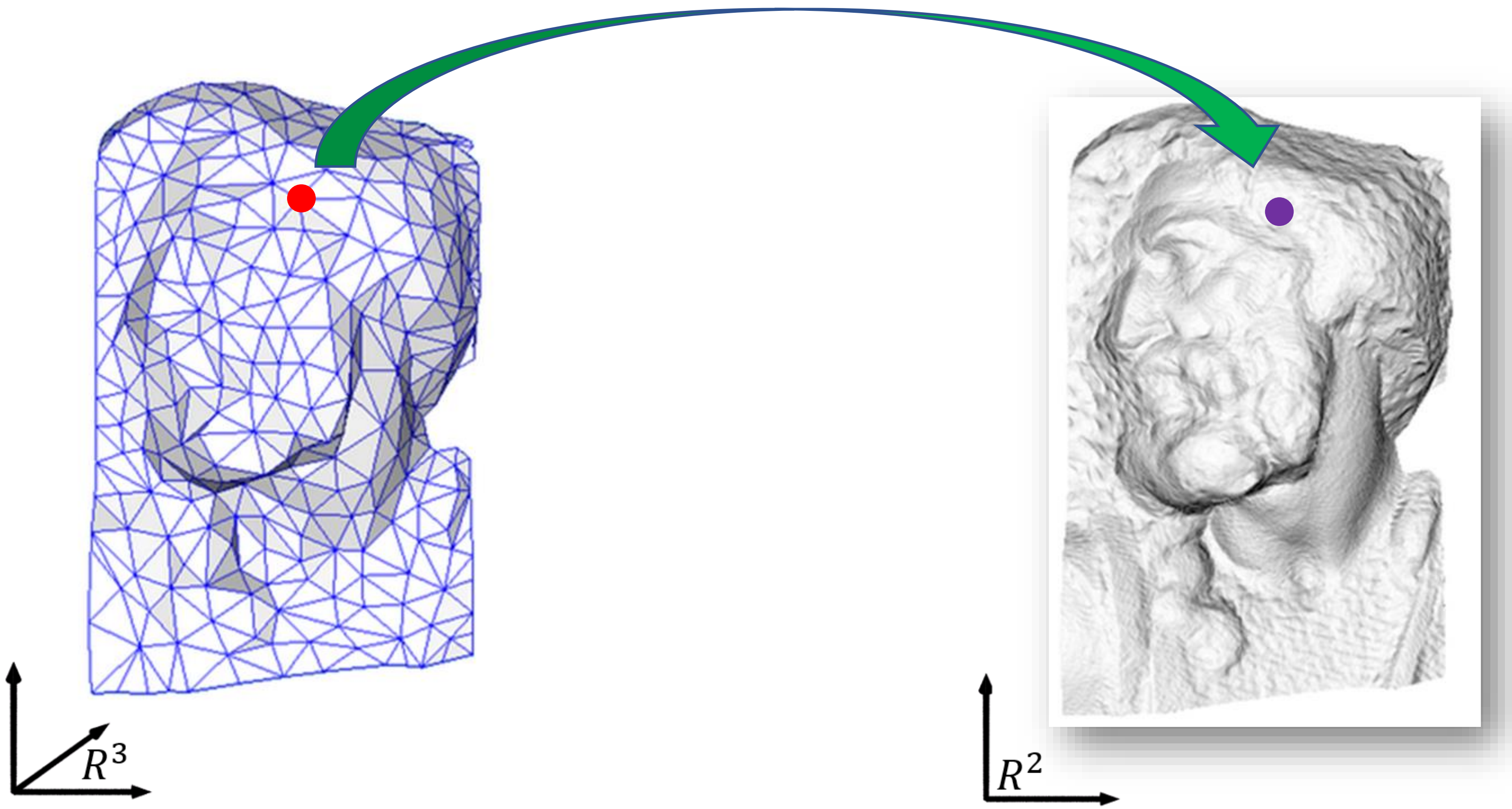
渲染管线：渲染计算的流水线



渲染的两个主要阶段

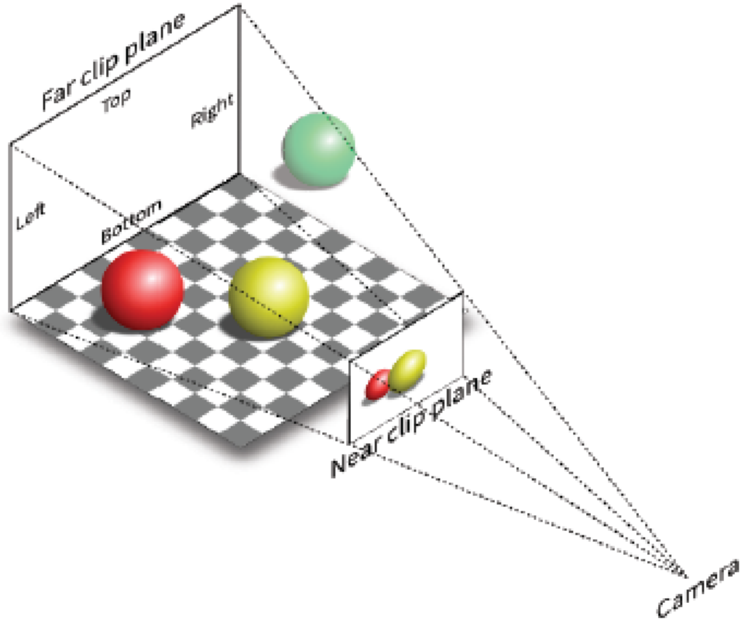
- 几何阶段
  - 将3D模型投影变换到图像平面
  - 决定可见的图元（图形元素）
- 光栅阶段
  - 决定可见的片元 (fragment)
  - 决定片元的颜色成为彩色像素

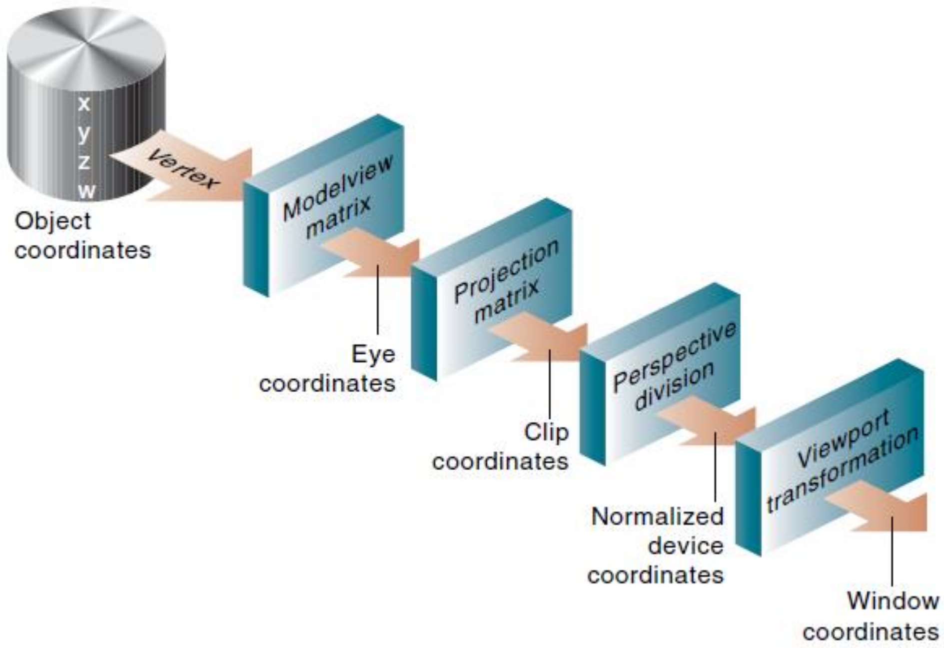
几何变换
逐顶点计算屏幕坐标



各种坐标系

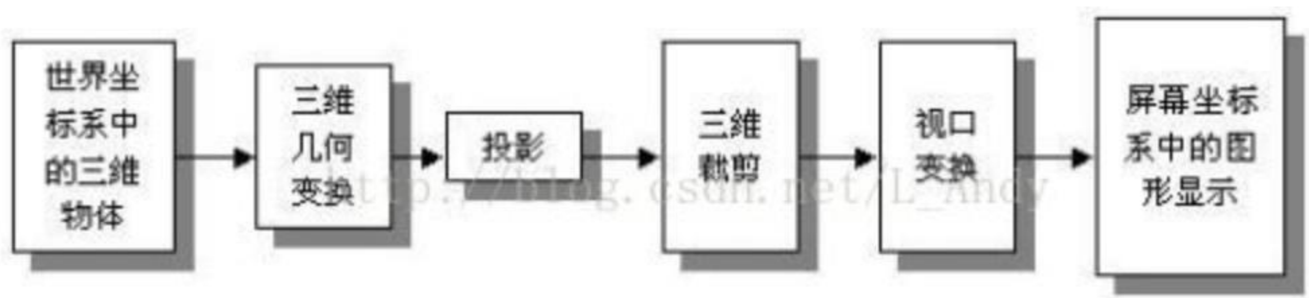
- 对象坐标系或建模坐标系
- 世界坐标系
- 视点坐标系或照相机坐标系
- 裁剪坐标系
- 规范化的设备坐标系（NDC）
- 窗口坐标系或屏幕坐标系



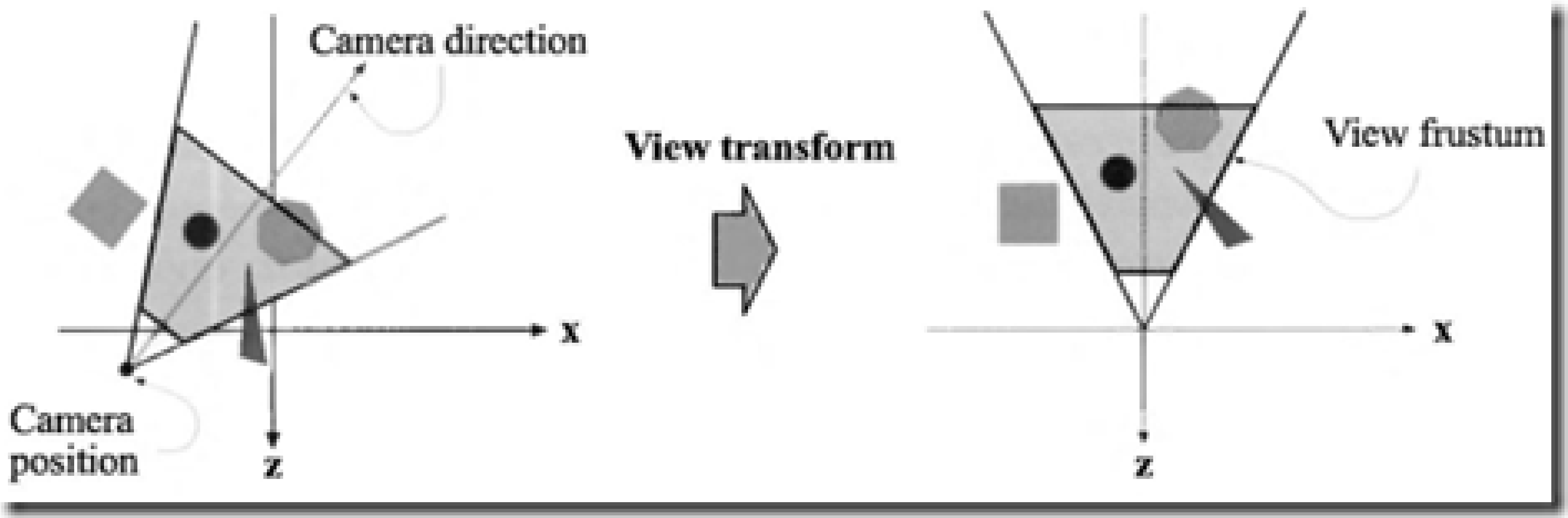


顶点处理

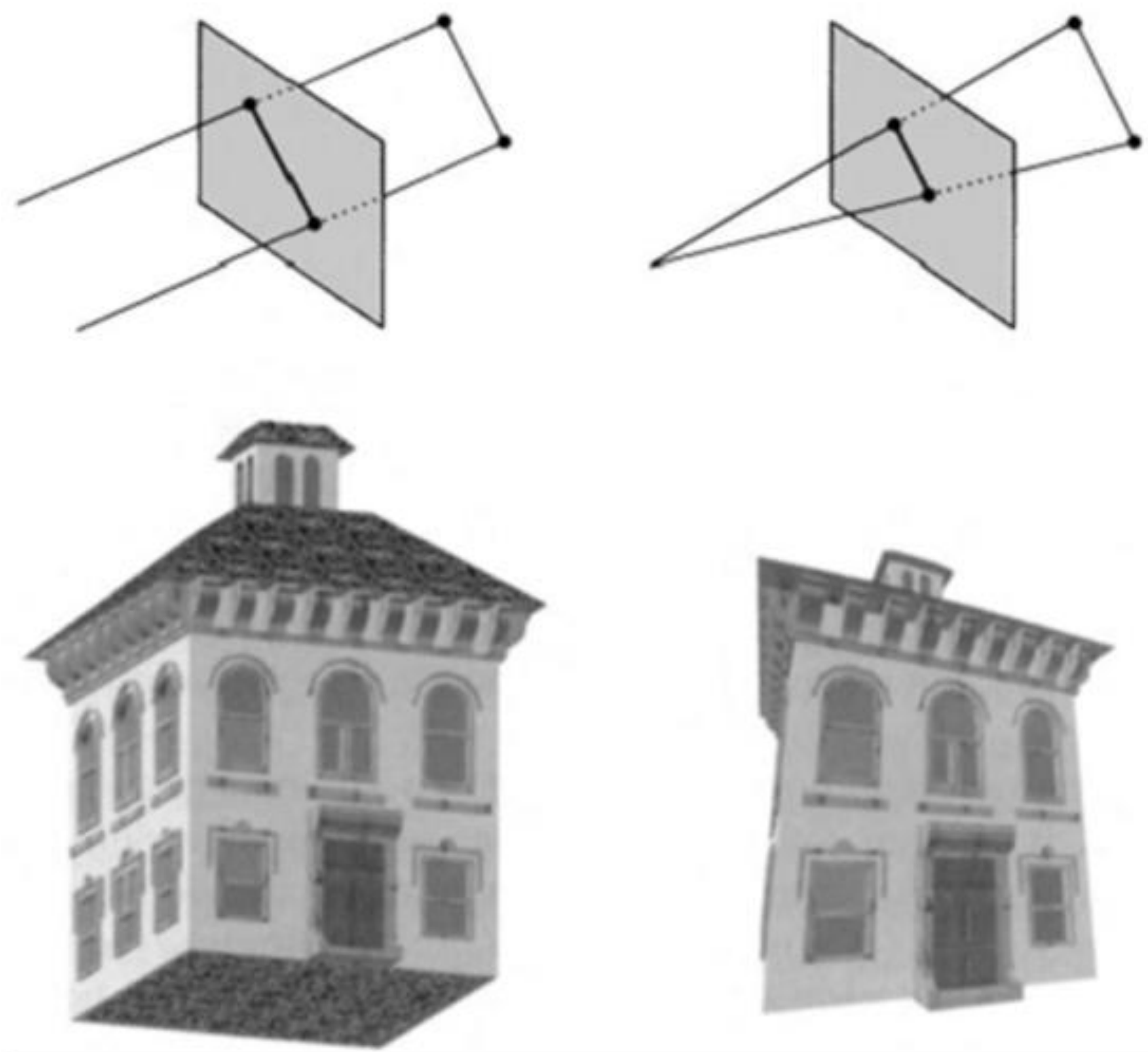
- 流水线中大部分工作是把对象在一个坐标系中表示转化为另一坐标系中的表示:
  - 世界坐标系
  - 照相机(眼睛)坐标系
  - 屏幕坐标系
- 坐标的每个变换相当于一次矩阵乘法
  - 最终的顶点变换为多个矩阵的乘法：MVP （model,view, project matrix）
  - 窗口变换



模型及视点变换

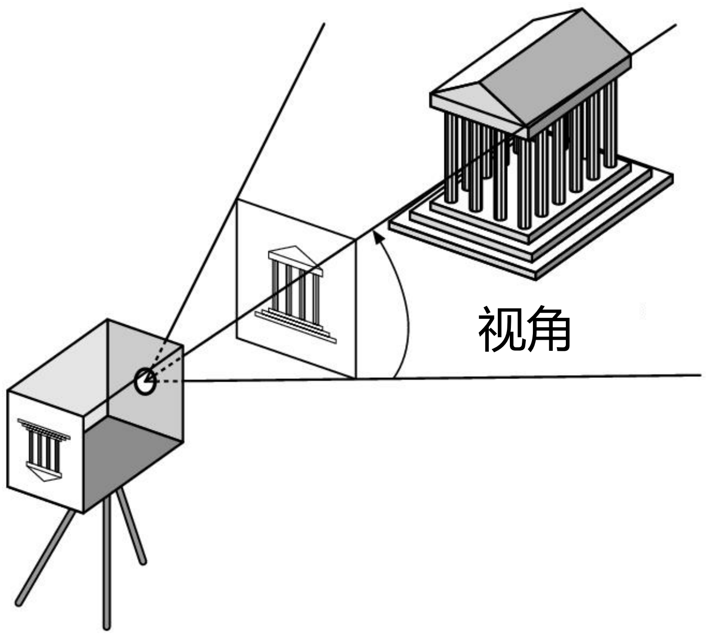

Camera direction
Camera position
x
z
View transform
View frustum
x
z

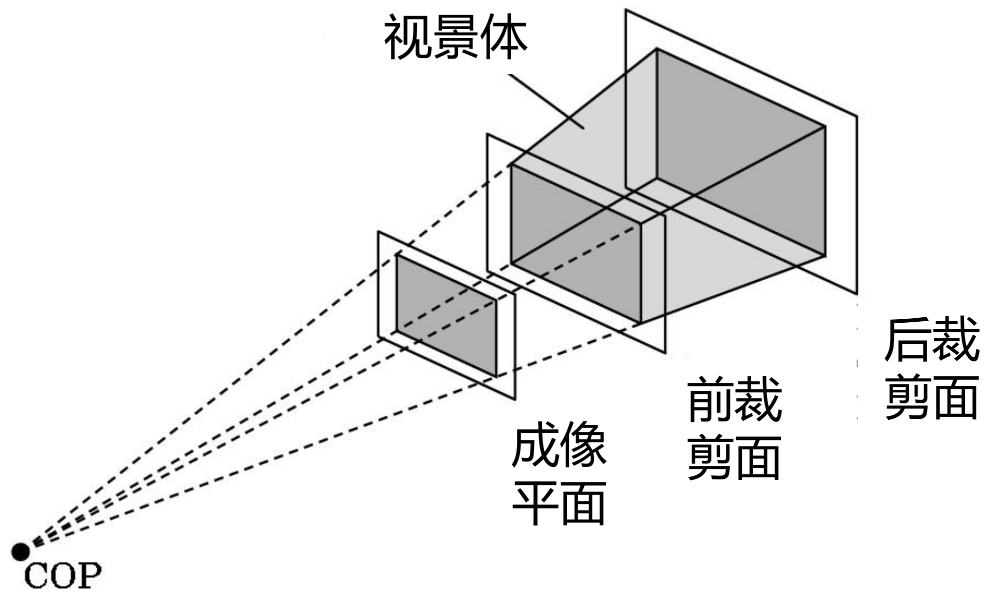
投影变换



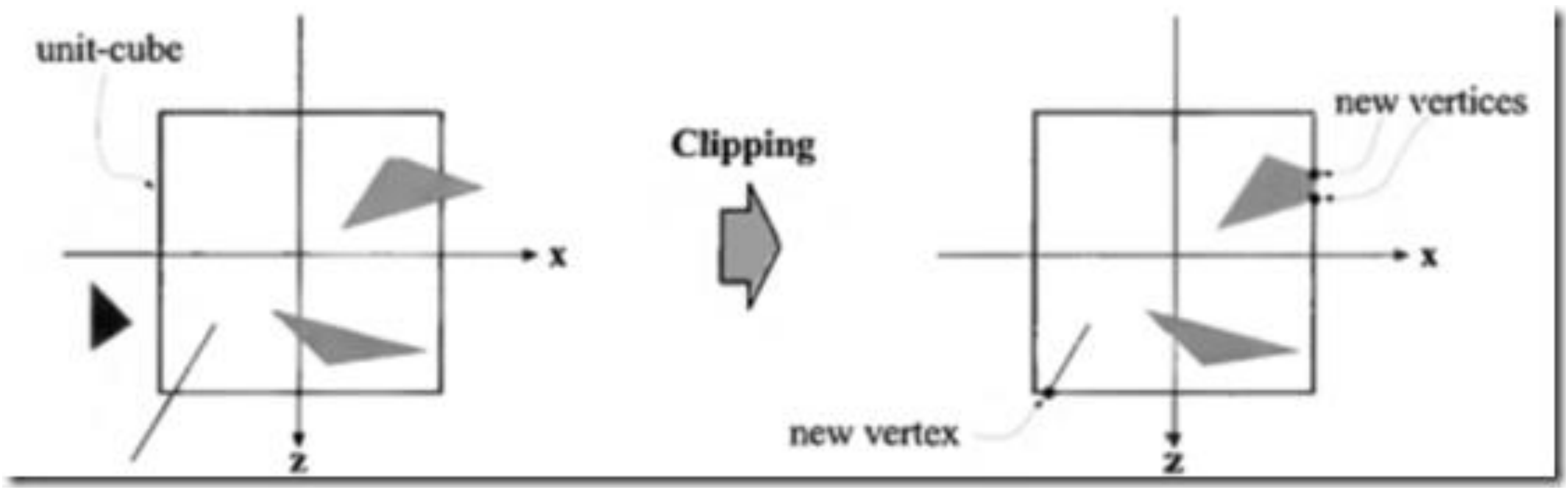
裁剪：视景体裁剪

- 超出可视范围的几何元素需要裁剪掉，不参加后面的计算
  - 视景体范围

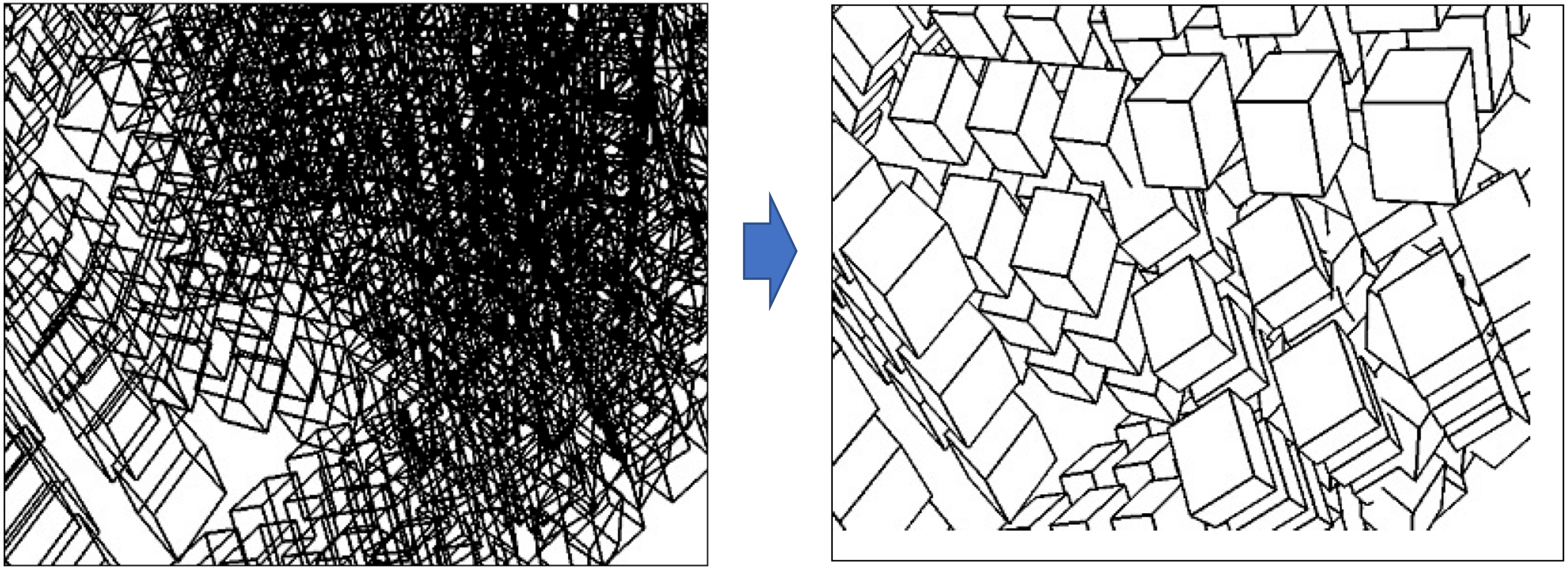




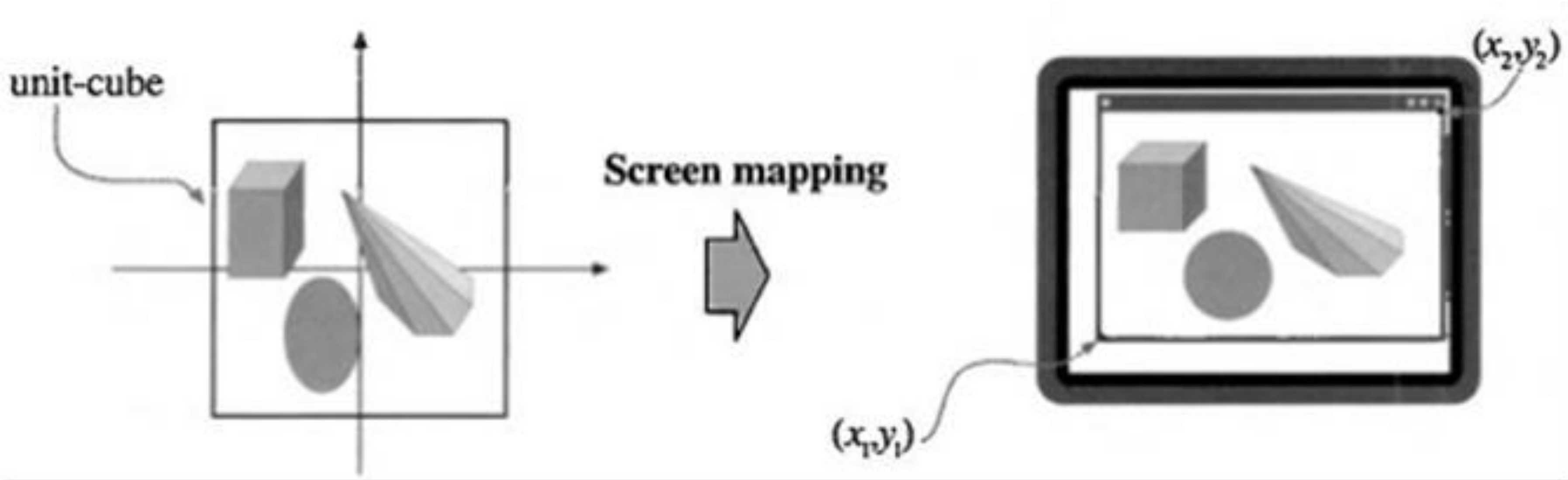
裁剪： 窗口裁剪



消隐：消除隐藏面



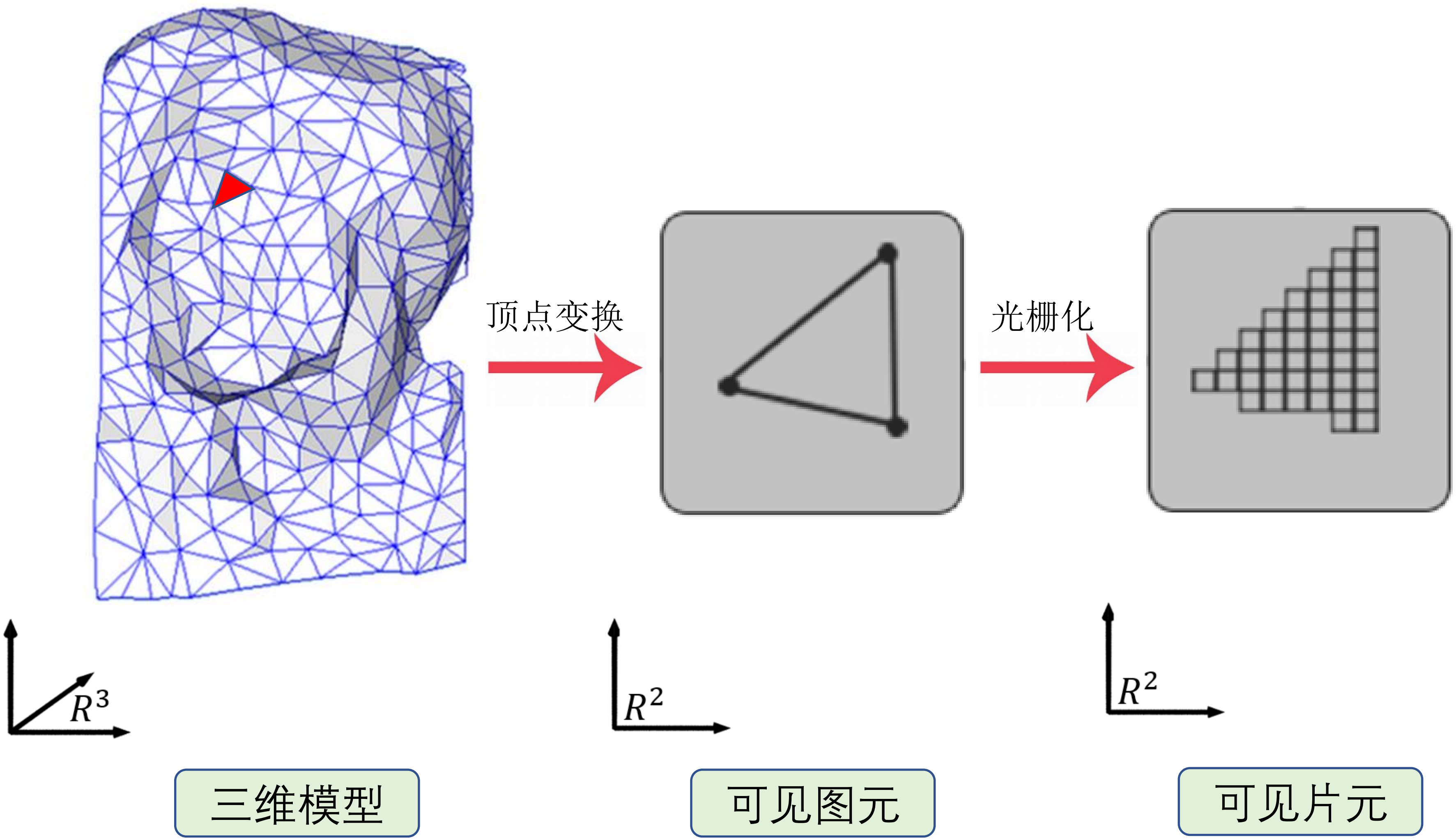
屏幕映射变换



光栅化：找到所有片元

- 如果一个对象不被裁掉，那么在帧缓冲区中相应的像素就必须被赋予颜色
- 光栅化程序为每个对象生成一组片段
- **片元**是“潜在的像素”（未着色的像素）
  - 在帧缓冲区中有一个位置
  - 具有颜色和深度属性
- 光栅化程序在对象上对顶点属性进行插值（重心坐标）

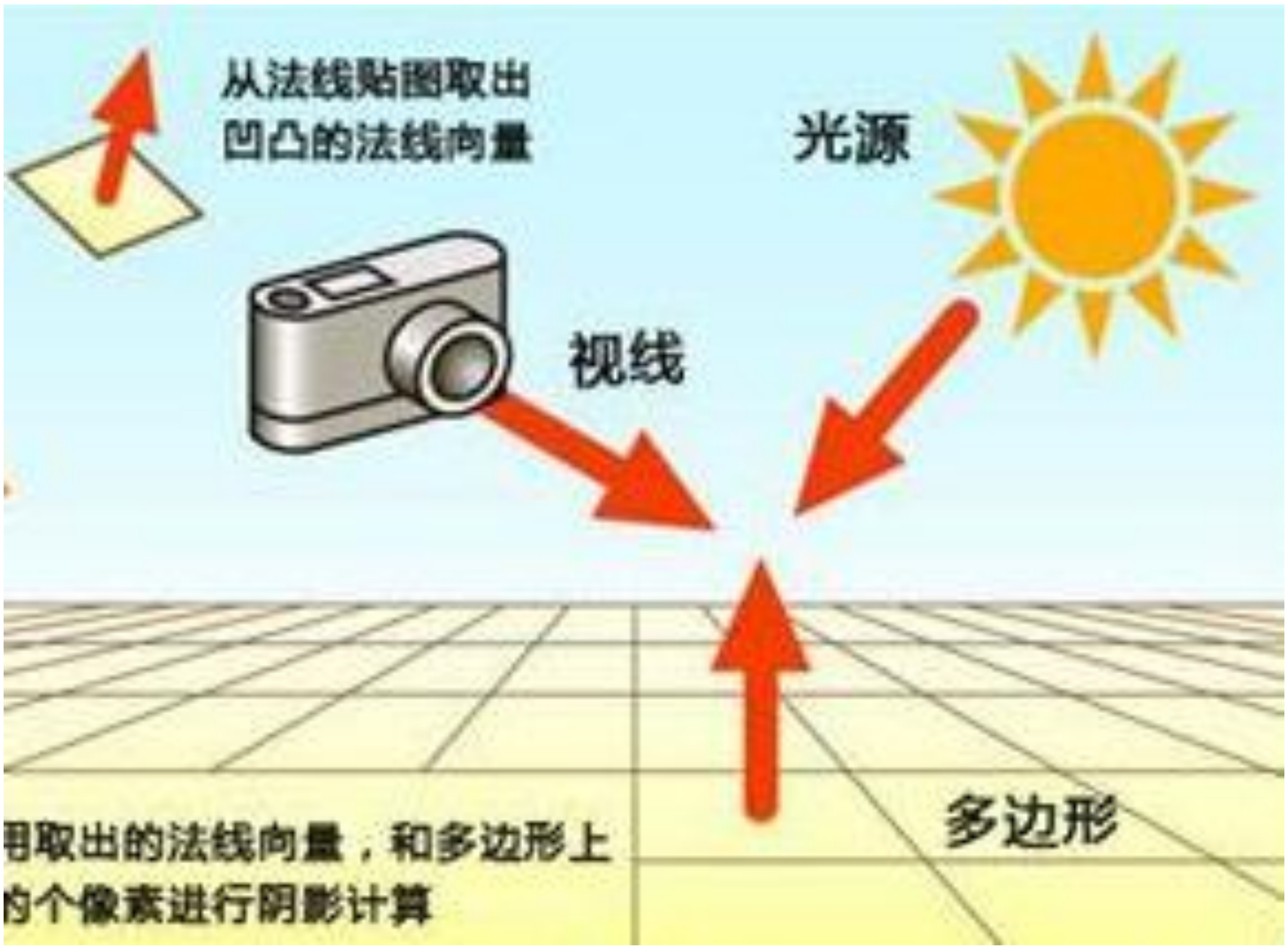
过程1：几何变换 逐顶点计算屏幕坐标
过程2：像素着色 逐片元计算颜色



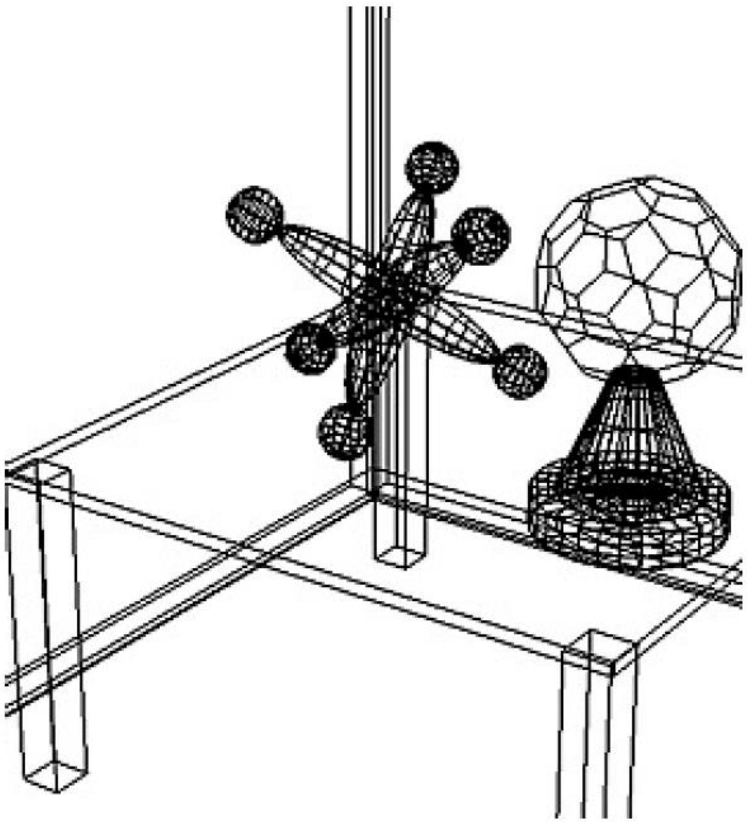
着色：让3D物体更有空间感

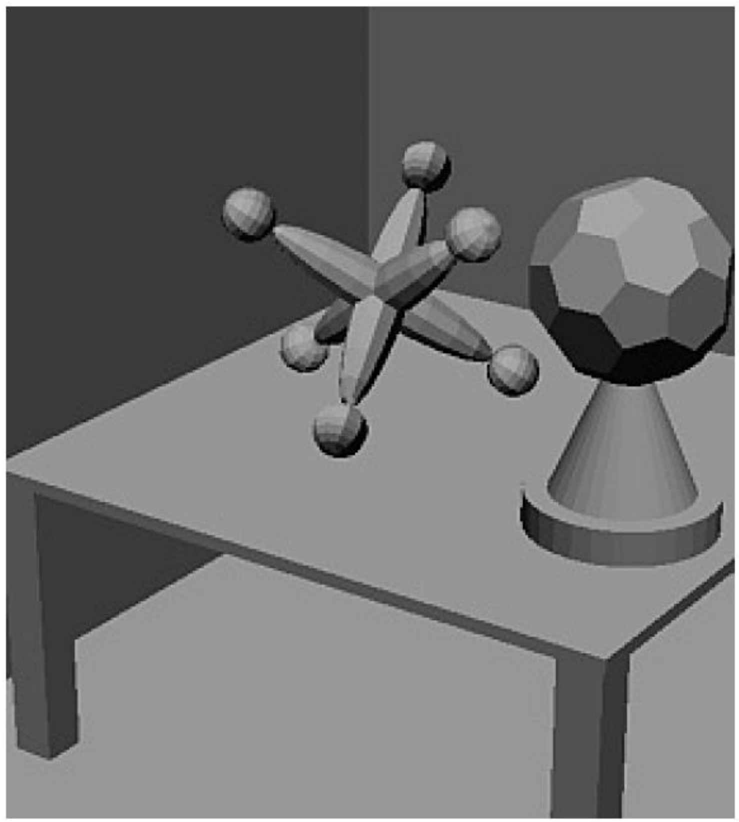
- 光：产生物体的不同部分的明暗变化
- 需模拟光对顶点的明暗（颜色）计算

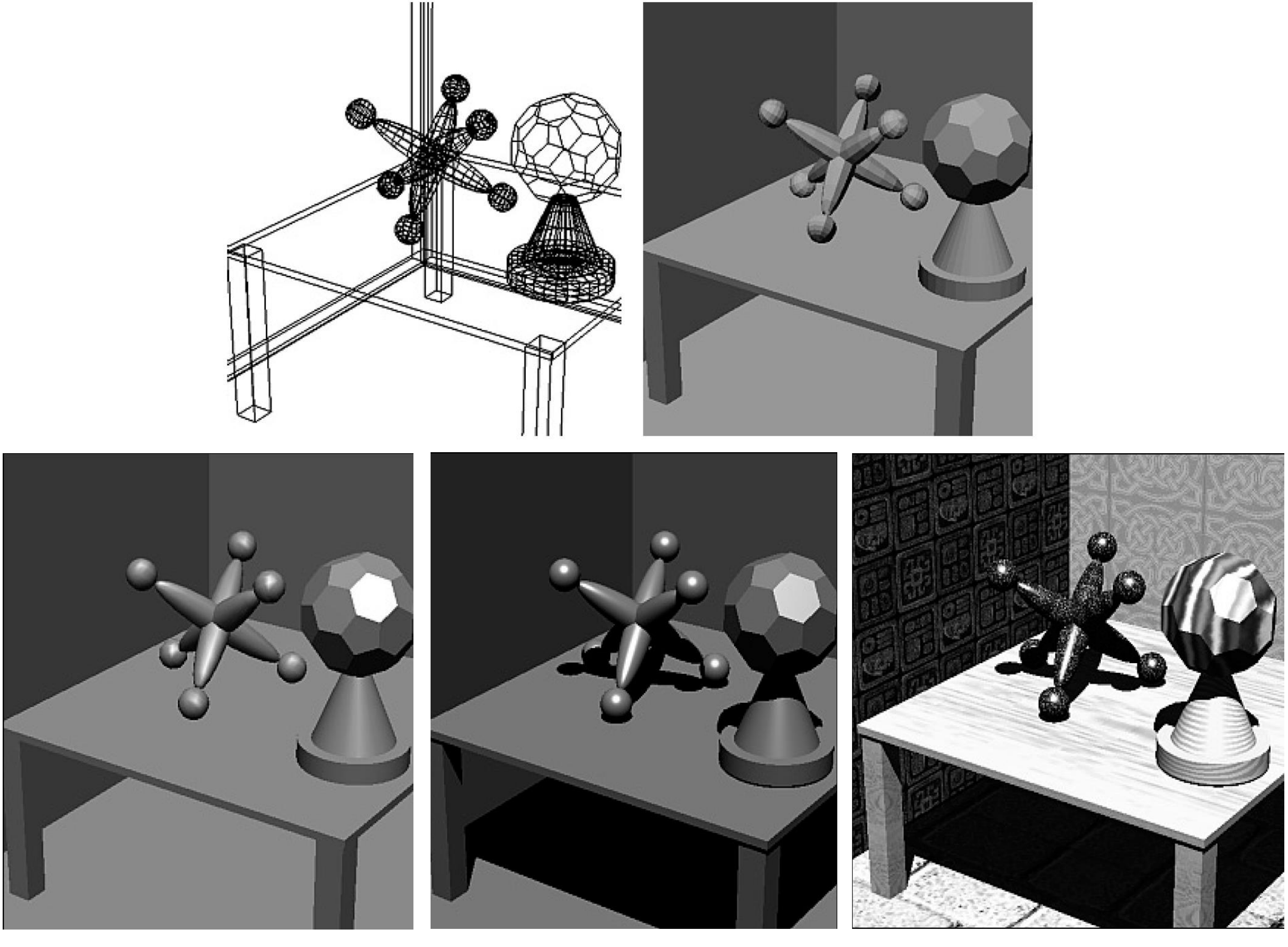
着色：光的物理性质及计算



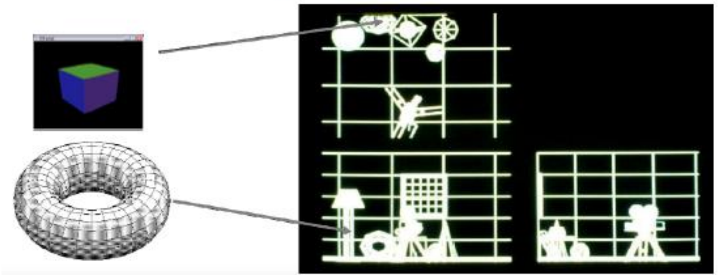
片元着色

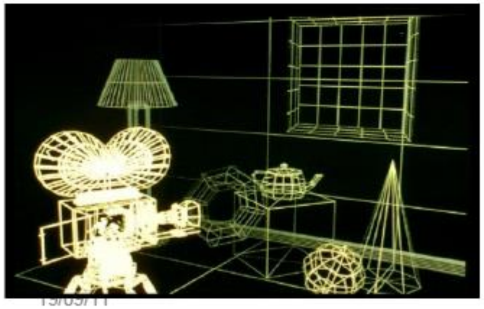


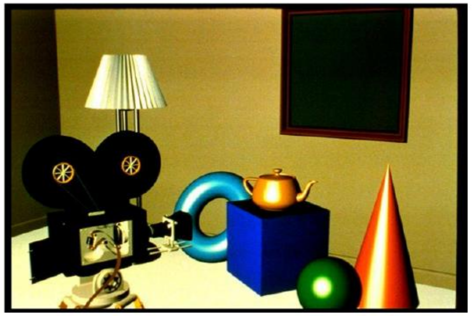


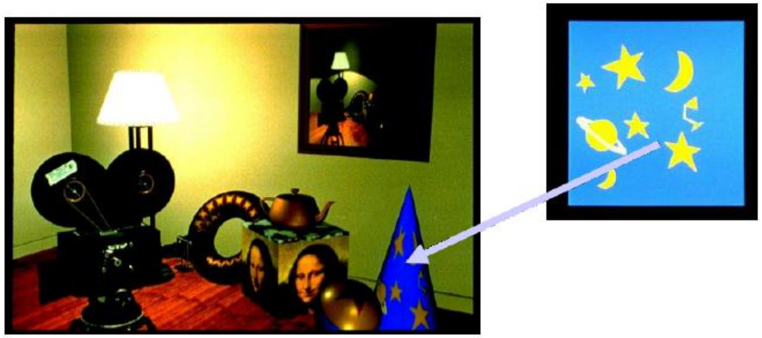


transformation









第二章 传统图形学基础

2. 1 几何变换

2.1.1 二维变换

2.1.2 齐次变换

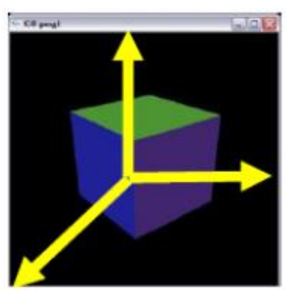
2.1.3 三维变换

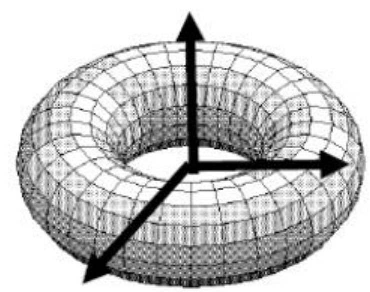
2.1.4 连续的变换及应用

2.1.5 向量与法向量的变换

为什么需要变换?

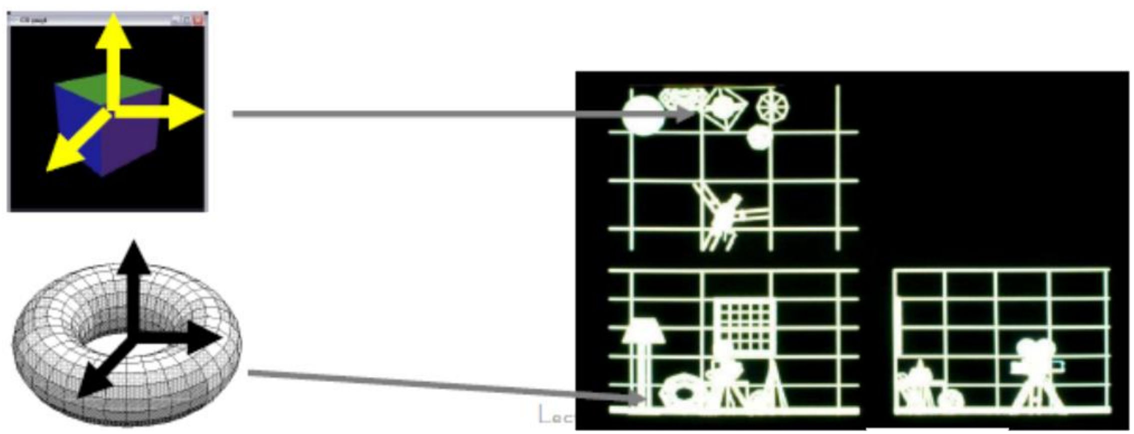
- 有了三维模型，我们需要将模型放入环境中
- 需要求出模型中的顶点在世界坐标系中的位置
- 但是模型最初都是在各自的局部坐标系下建模的





变换 Transformations

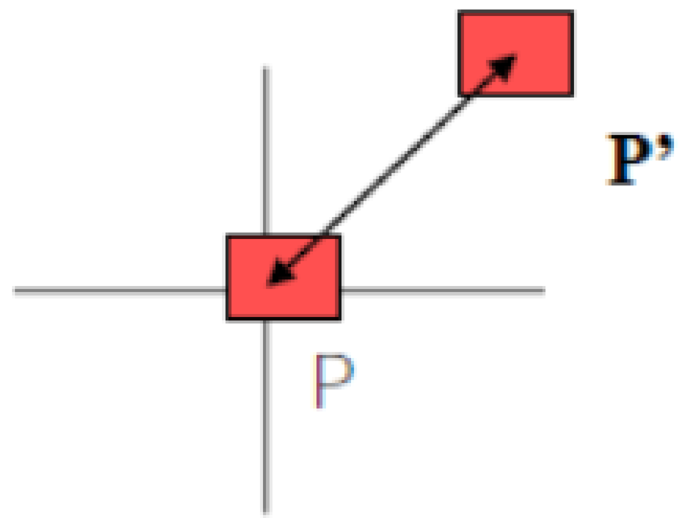
- 我们对物体进行平移、旋转和缩放，将其放入世界坐标系中



2.1.1 二维变换

- 平移

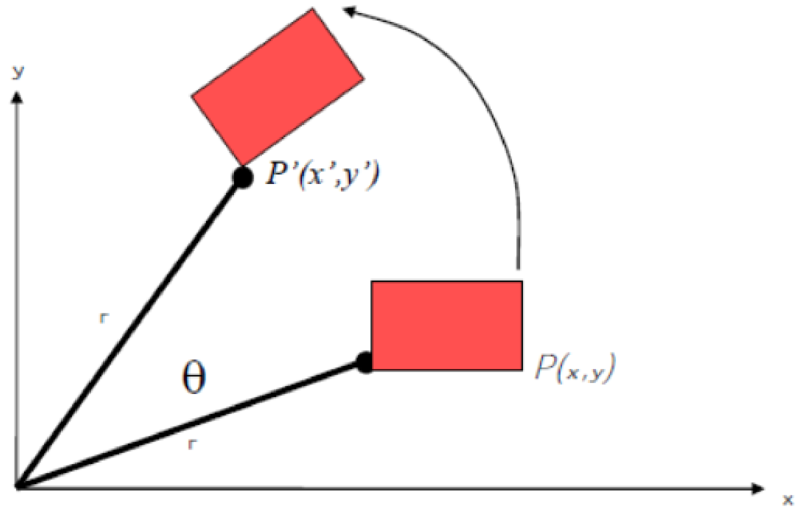
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$



2.1.1 二维变换

- 旋转

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

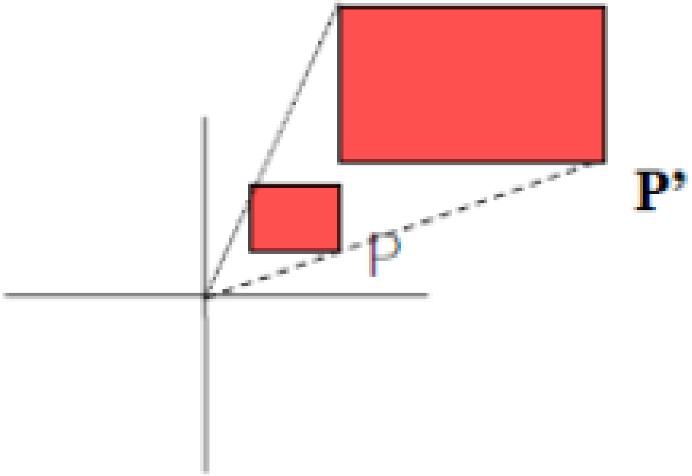


2.1.1 二维变换

- 缩放

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{bmatrix}$$

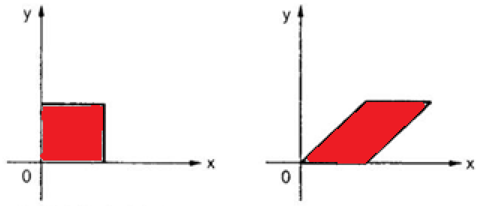


2.1.1 二维变换

- 错切

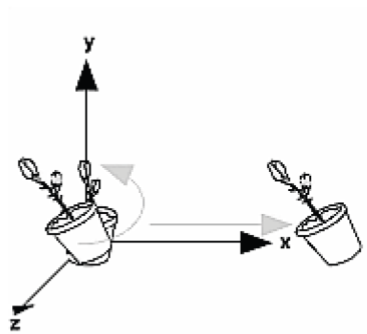
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -tan\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y\ tan\alpha \\ y \end{bmatrix}$$

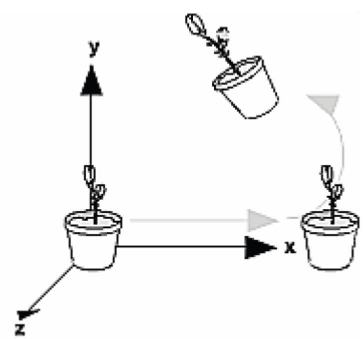


2.1.1 变换先后顺序的影响

- 旋转和平移的例子



旋转 –> 平移



平移 –> 旋转

2.1.2 齐次变换的提出

- 基本的变换
  - 平移: $P'=T+P$
  - 缩放: $P'=S\cdot P$
  - 旋转: $P'=R\cdot P$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

平移的形式与众不同!

如何使得三种基本变换在形式上一致?

齐次变换

2.1.2 齐次变换

- 平移

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 旋转

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 缩放

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.1.3 三维变换

- 平移变换

$$T(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 缩放变换

$$S(s) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

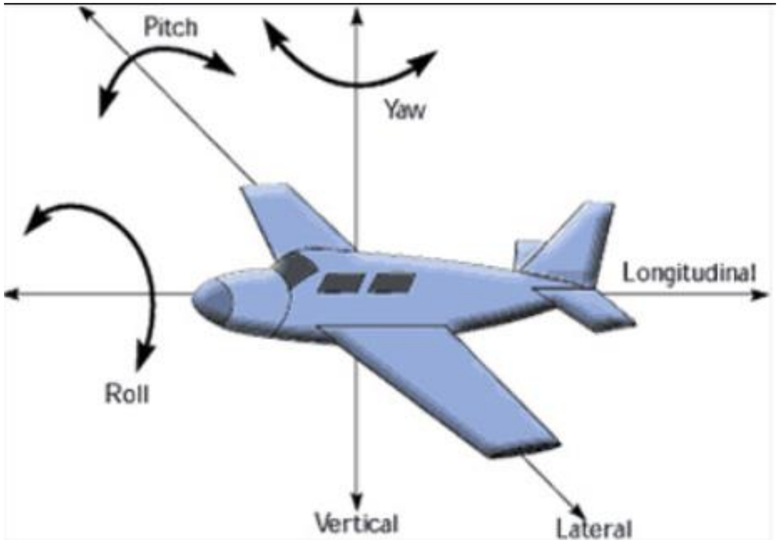
- 旋转变换

$$R_z = \begin{bmatrix} cosC & -sinC & 0 & 0 \\ sinC & cosC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{R_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cosA & -sinA & 0 \\ 0 & sinA & cosA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} cosB & 0 & sinB & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sinB & 0 & cosB & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.3 三维变换

旋转变换

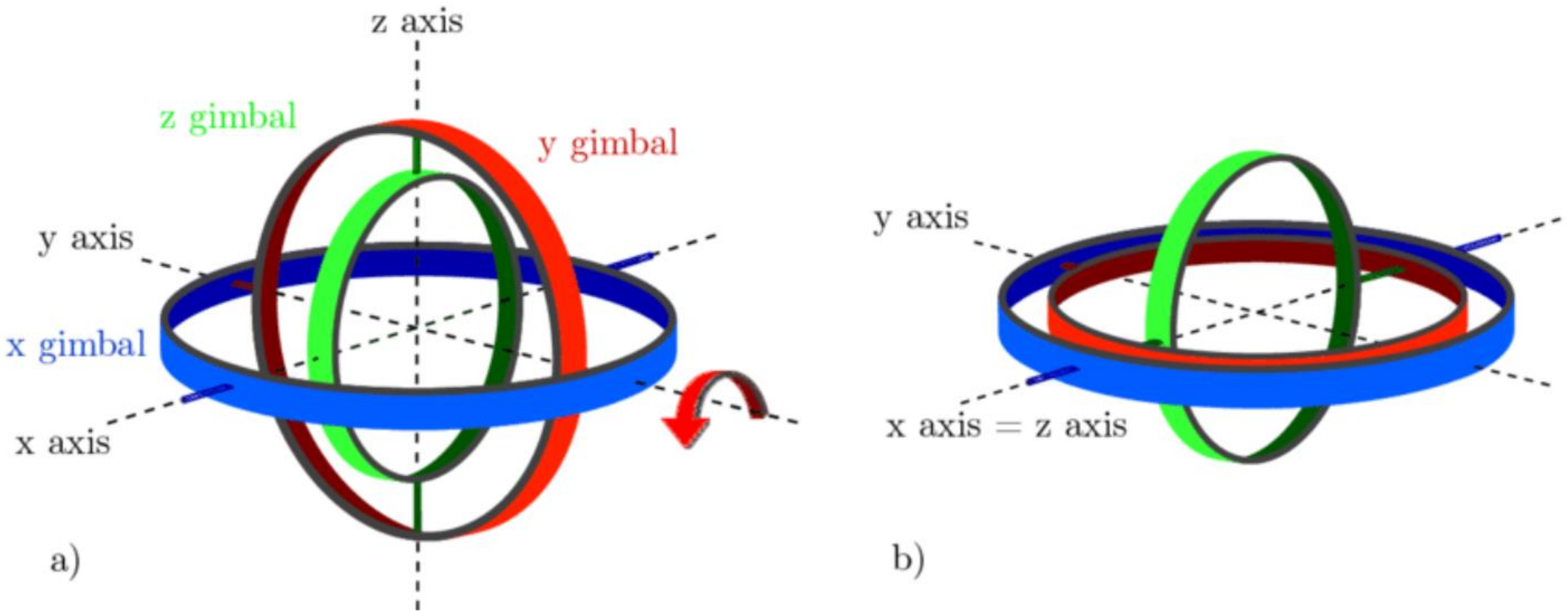


$$
\begin{aligned}
&R_X R_Y R_Z \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ 0 & \sin A & \cos A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos B & 0 & \sin B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin B & 0 & \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C & 0 \\ \sin C & \cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos B & 0 & \sin B \\ \sin A \sin B & \cos A & -\sin A \cos B \\ -\cos A \sin B & \sin A & \cos A \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C & 0 \\ \sin C & \cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos B \cos C & -\cos B \sin C & \sin B \\ \sin A \sin B \cos C + \cos A \sin C & -\sin A \sin B \sin C + \cos A \cos C & -\sin A \cos B \\ -\cos A \sin B \cos C + \sin A \sin C & \cos A \sin B \sin C + \sin A \cos C & \cos A \cos B \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

参考：http://www.songho.ca/opengl/gl_anglestoaxes.html

2.1.3 三维变换

- Gimbal lock （万向锁）



视频

2.1.3 三维变换

- 推导逆变换

$$T(d)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & d_x\\ 0 & 1 & 0 & d_y\\ 0 & 0 & 1 & d_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(d)=T(-d)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -d_x\\ 0 & 1 & 0 & -d_y\\ 0 & 0 & 1 & -d_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$S(s)=\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & s_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$S^{-1}(s)=S\left(\frac{1}{s}\right)=\begin{bmatrix}1/s_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/s_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/s_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta & 0 & 0\\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_z^{-1}(\theta)=R_z(-\theta)=\begin{bmatrix}cos(-\theta) & -sin(-\theta) & 0 & 0\\ sin(-\theta) & cos(-\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2.1.4 连续的变换及应用

- 连续的变换可以表示为多个矩阵相乘

$$v' = T \cdot S \cdot R_z \cdot R_x \cdot T \cdot v$$

- 逆变换

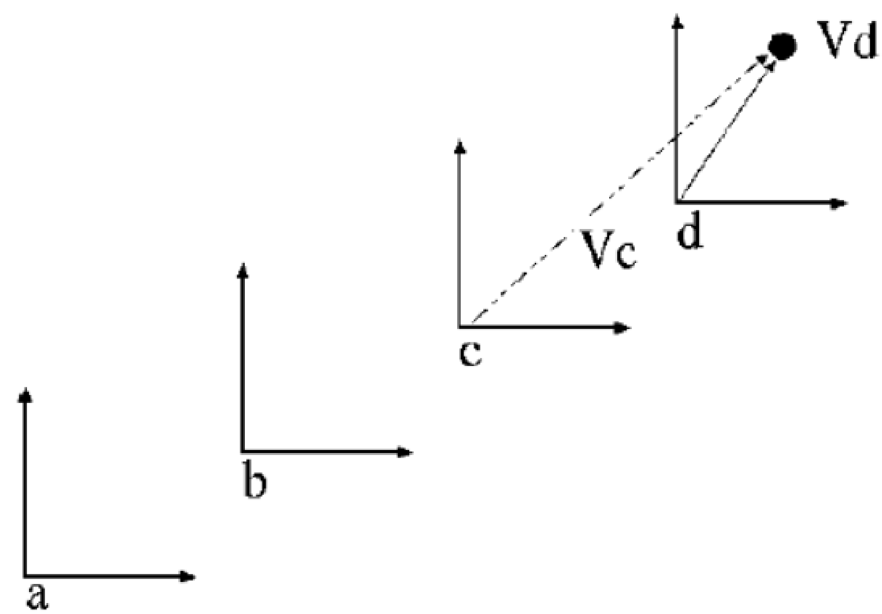
$$\begin{aligned} v &= (T \cdot S \cdot R_z \cdot R_x \cdot T)^{-1} \cdot v' \\ &= T^{-1} \cdot R_x^{-1} \cdot R_z^{-1} \cdot S^{-1} \cdot T^{-1} \cdot v' \end{aligned}$$

- 注意：我们得益于齐次变换

2.1.4 连续的变换及应用

坐标系间的连续变换

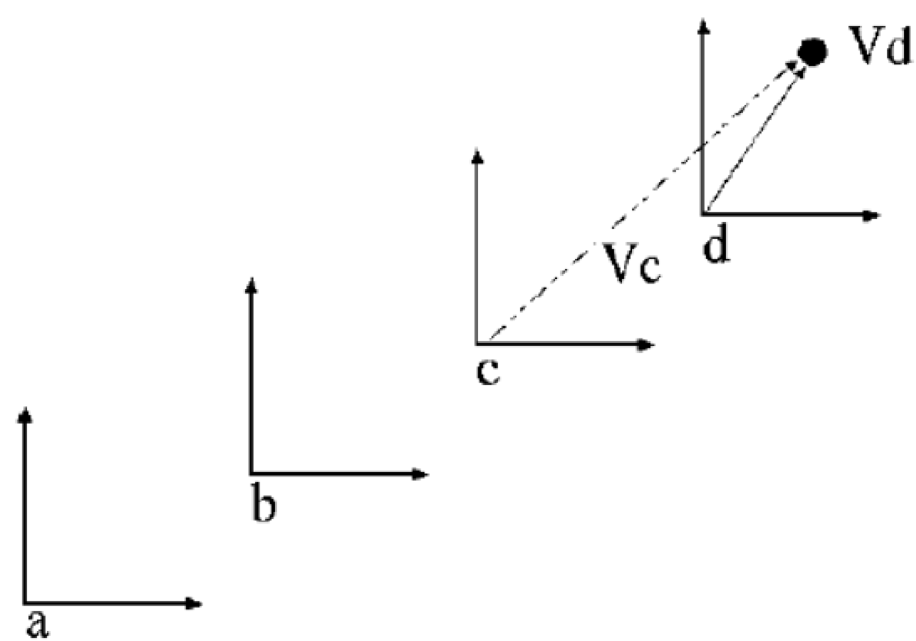
- Vd点相对于c坐标系的坐标怎么求?
  - $v_c = M_{c \leftarrow d} v_d$



2.1.4 连续的变换及应用

坐标系间的连续变换

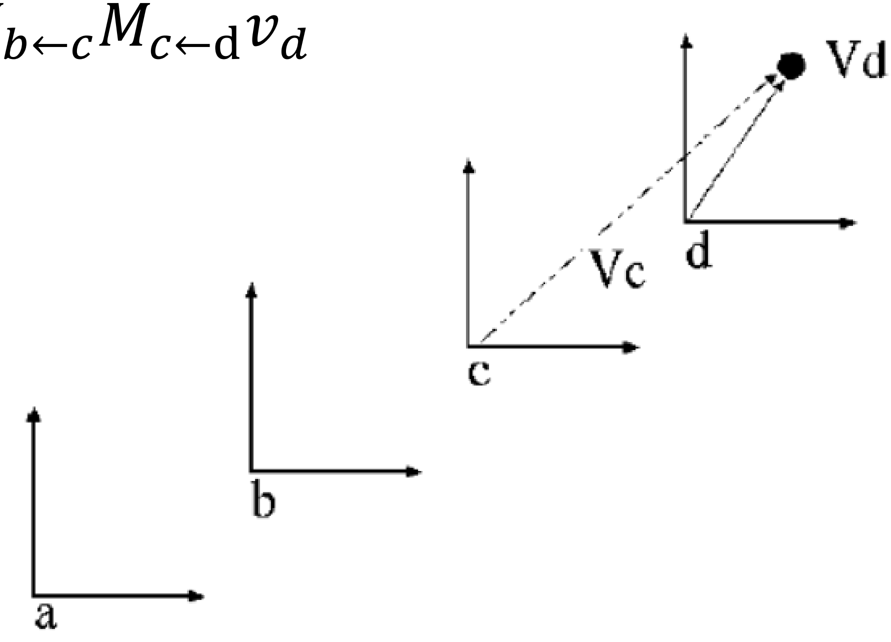
- Vd点相对于b坐标系的坐标怎么求?
  - $\mathrm{v_c} = M_{c\leftarrow d}v_d$
  - $\mathrm{v_b} = M_{b\leftarrow c}v_c = M_{b\leftarrow c}M_{c\leftarrow d}\mathrm{v_d}$



2.1.4 连续的变换及应用

坐标系间的连续变换

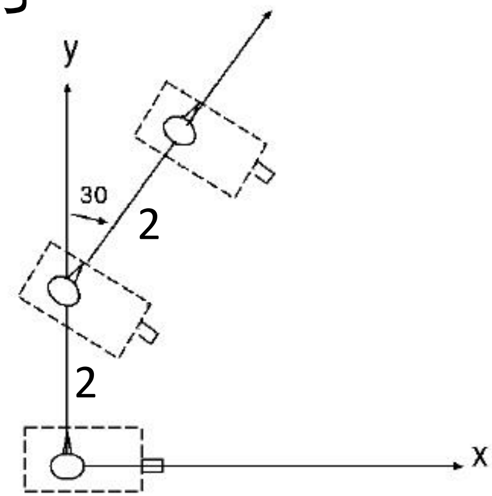
- Vd点相对于a坐标系的坐标怎么求?
  - $\mathrm{v_c} = M_{c\leftarrow d} v_d$
  - $\mathrm{v_b} = M_{b\leftarrow c} v_c = M_{b\leftarrow c} M_{c\leftarrow d} \mathrm{v_d}$
  - $\mathrm{v_a} = M_{a\leftarrow b} v_b = M_{a\leftarrow b} M_{b\leftarrow c} M_{c\leftarrow \mathrm{d}} v_d$



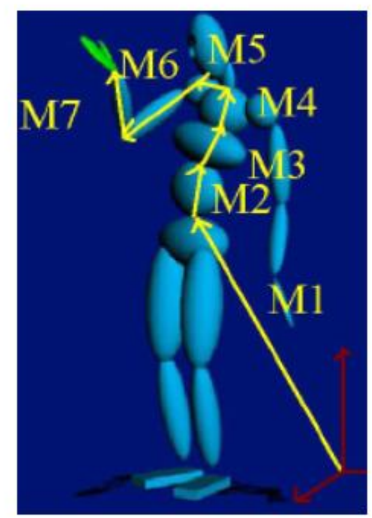
2.1.4 连续的变换及应用

实例

- 开车的例子：
  - 向前再右转后车的位置？

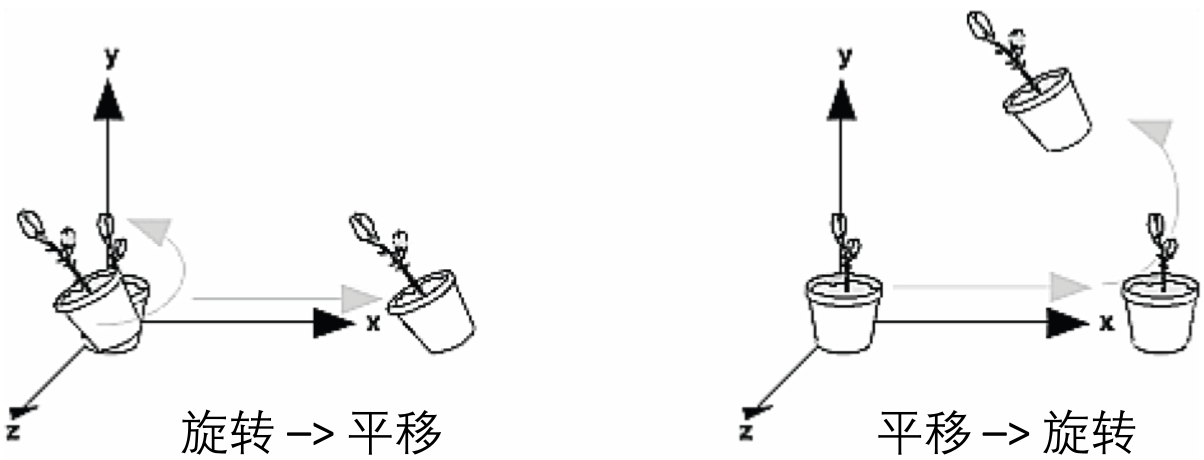


- 机器人的例子：
  - 身体结构、姿态固定的情况下机器人的右手在哪里？



2.1.4 连续的变换及应用

- 变换的顺序:
  - 旋转和平移的例子
  - 顺序产生的影响: 为什么?

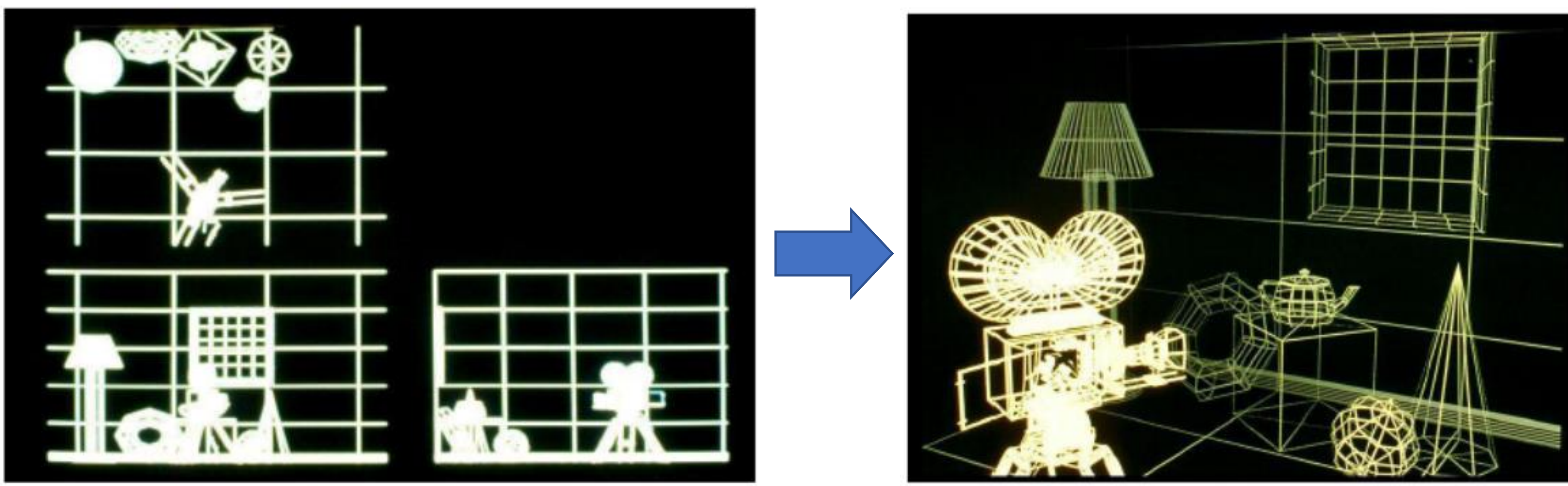


以花盆上的某以固定点为例子，说明在不同顺序的变换之后，花盆的局部坐标系相对于全局坐标系的变换“变化了”，所以变换后在世界坐标系中的最终位置必然不同。

2.1.4 连续的变换及应用

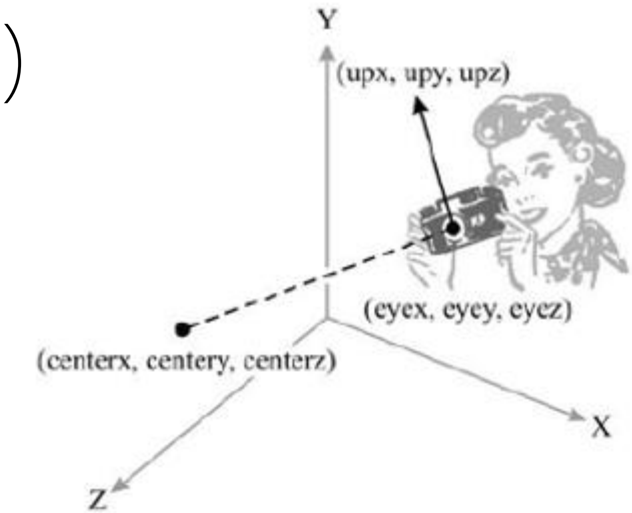
视点变换（View transform）

世界坐标系 -> 眼睛坐标系



2.1.4 连续的变换及应用

视点变换（View transform）



- 摄像机的参数

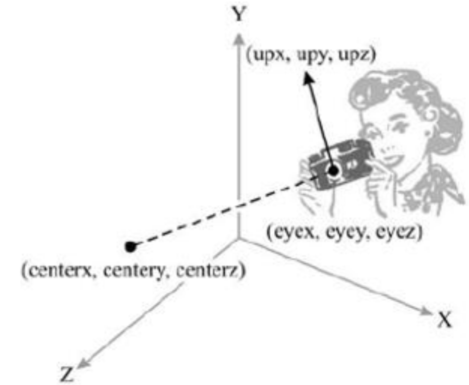
- Eye position $\text{eye} = \begin{bmatrix} eye_x \\ eye_y \\ eye_z \end{bmatrix}$

- Reference position $\text{ceneter} = \begin{bmatrix} center_x \\ center_y \\ center_z \end{bmatrix}$

- Up vector $\text{up} = \begin{bmatrix} up_x \\ up_y \\ up_z \end{bmatrix}$

2.1.4 连续的变换及应用

视点变换（View transform）



摄像机参数

- Eye position $\mathrm{eye} = \begin{bmatrix} eye_x \\ eye_y \\ eye_z \end{bmatrix}$

- Reference position $\mathrm{ceneter} = \begin{bmatrix} center_x \\ center_y \\ center_z \end{bmatrix}$

- Up vector $\mathrm{up} = \begin{bmatrix} up_x \\ up_y \\ up_z \end{bmatrix}$

计算三个向量:

$$\mathrm{z^c} = \frac{eye - center}{\|eye - center\|}$$

$$\mathrm{x^c} = \frac{up \times z^c}{\|up \times z^c\|}$$

$$\mathrm{y^c} = z^c \times x^c$$

2.1.4 连续的变换及应用

视点变换（View transform）

- **先平移到视点的位置**
- 再旋转

$$\mathrm{T}(-\mathrm{eye}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -eye_x \\ 0 & 1 & 0 & -eye_y \\ 0 & 0 & 1 & -eye_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.4 连续的变换及应用

视点变换（View transform）

- 先平移到视点的位置
- **再旋转**
- $$R\begin{bmatrix} x_x^c & y_x^c & z_x^c & 0 \\ x_y^c & y_y^c & z_y^c & 0 \\ x_z^c & y_z^c & z_z^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- $$\mathrm{M}=\mathrm{R}\cdot\mathrm{T}(-\mathrm{eye})=\begin{bmatrix} x_x^c & x_y^c & x_z^c & 0 \\ y_x^c & y_y^c & y_z^c & 0 \\ z_x^c & z_y^c & z_z^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -eye_x \\ 0 & 1 & 0 & -eye_y \\ 0 & 0 & 1 & -eye_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算三个向量

$$\mathrm{z^c}=\frac{eye-center}{\|eye-center\|}$$

$$\mathrm{x^c}=\frac{up\times z^c}{\|up\times z^c\|}$$

$$\mathrm{y^c}=z^c\times x^c$$

2.1.4 连续的变换及应用

视点变换（View transform）

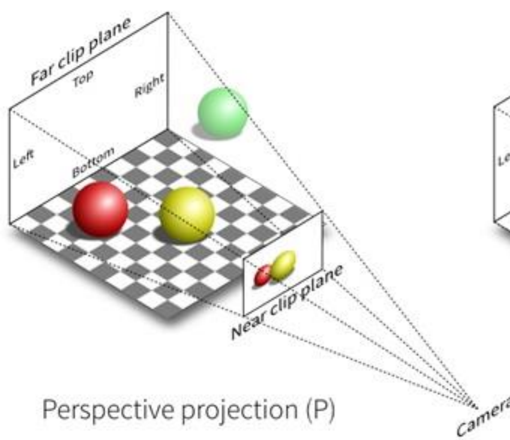
- 最终变换

- $\mathrm{M} = \mathrm{R} \cdot \mathrm{T}(-\mathrm{eye}) = \begin{bmatrix} x_x^c & x_y^c & x_z^c & -(x_x^c eye_x + x_y^c eye_y + x_z^c eye_z) \\ y_x^c & y_y^c & y_z^c & -(y_x^c eye_x + y_y^c eye_y + y_z^c eye_z) \\ z_x^c & z_y^c & z_z^c & -(z_x^c eye_x + z_y^c eye_y + z_z^c eye_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

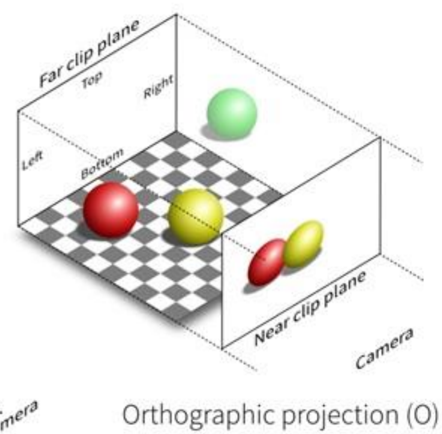
2.1.4 连续的变换及应用

投影变换

- 眼睛坐标系 ⟶ 图像坐标系
  - 将眼睛坐标系中的物体模型投影到成像平面，形成二维图像。



透视投影



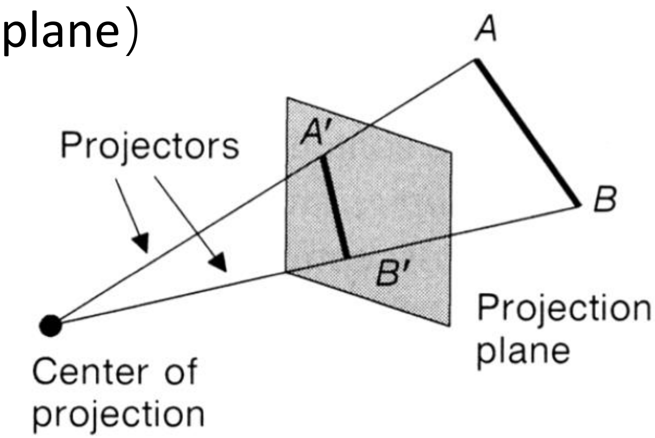
正视投影

2.1.4 连续的变换及应用

投影变换

投影：从投影中心发出的直线，穿过物体的每一个点，然后与投影面相交形成映像

- 投影中心（COP）
- 投影平面（Projection plane）
- 投影线（Projectors）

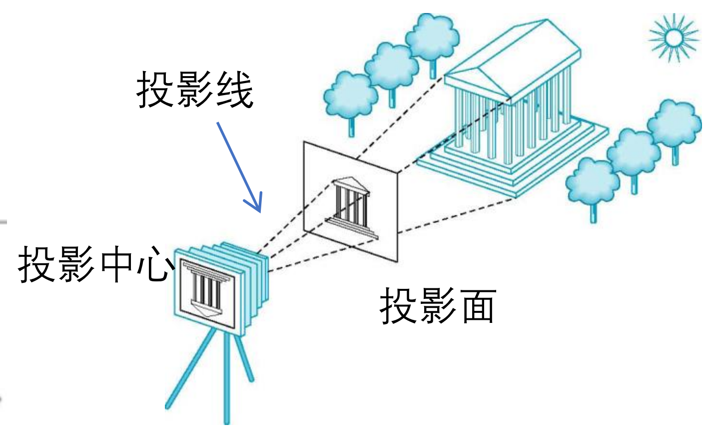


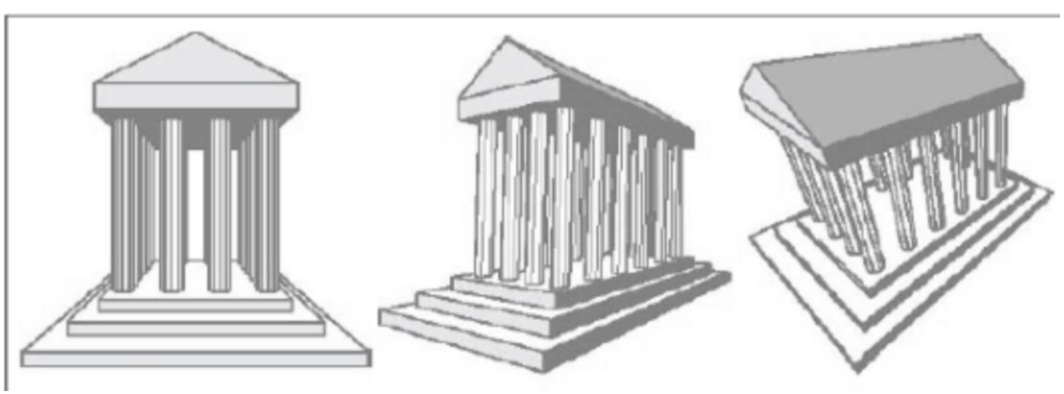
2.1.4 连续的变换及应用

投影变换

透视投影：投影中心到图像平面的距离是有限的

- **单点透视**
- 两点透视
- 三点透视



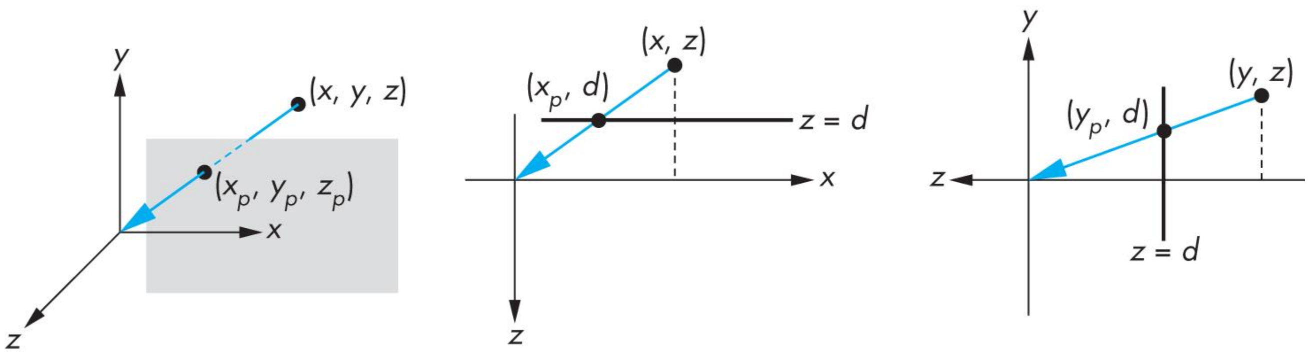


单点透视　　两点透视　　三点透视

2.1.4 连续的变换及应用

投影变换

- 透视投影：简单模型
  - (x,y,z)沿着投影线投影为点(x_p,y_p,z_p)，所有的投影线都经过原点



(a) 三维视图　(b) 前视图　(c) 侧视图

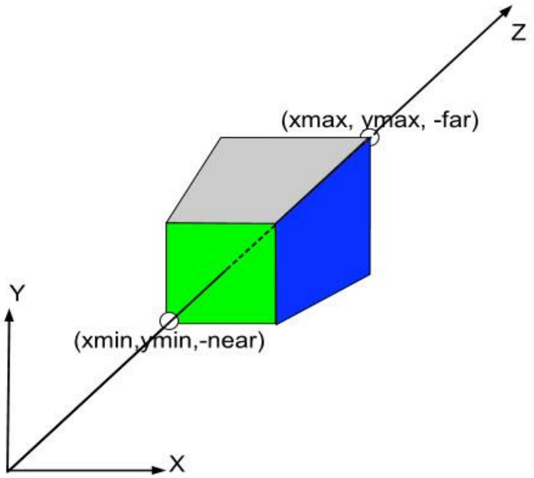
$$\frac{x}{z}=\frac{x_p}{d} \qquad x_p=\frac{x}{z/d} \qquad y_p=\frac{y}{z/d}$$

2.1.4 连续的变换及应用

投影变换

- 透视投影：一般模型

$$
\begin{pmatrix}
\frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\
0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\
0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\
0 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix}
$$

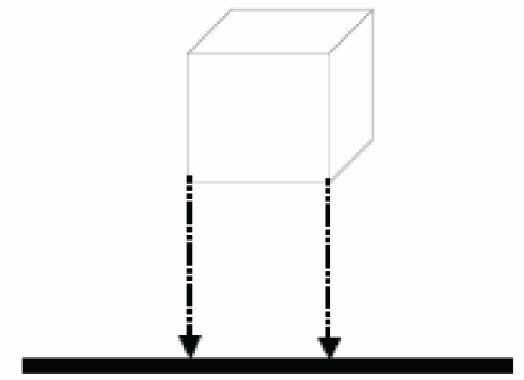


2.1.4 连续的变换及应用

投影变换

正视投影：投影中心到图像平面的距离是无穷远

- 投影中心是在无穷远处
- 投影线是平行的
- 三维平行线映射为二维平行线

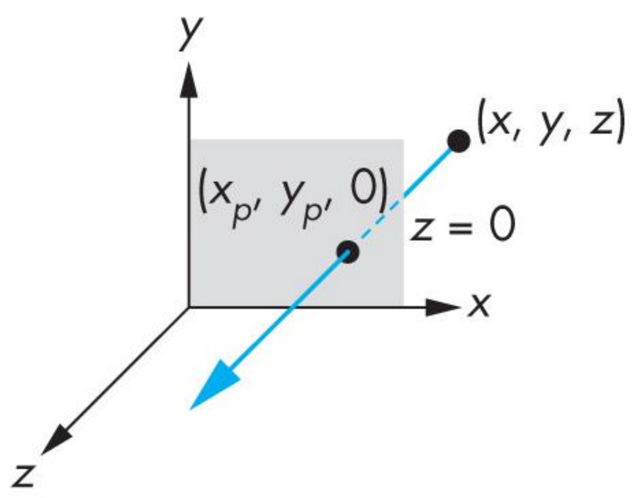


2.1.4 连续的变换及应用

投影变换

- 正视投影
  - $z=0$

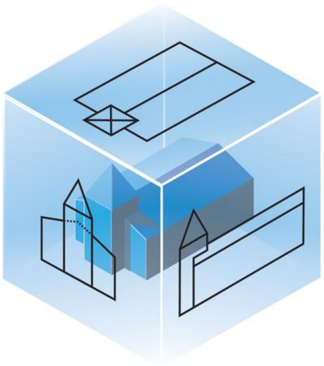
$$\mathbf{M}_{\text{orth}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2.1.4 连续的变换及应用

投影变换

- 透视投影
  - 视觉效果与人类视觉系统相似
  - “透视缩短”
    - 物体的大小与投影中心的距离成反比
    - 平行于投影面的面的角度保持不变
- 正视投影
  - 因为没有透视，不现实的视图
  - 只有平行于投影面的角度保持不变



2.1.5 向量与法向量的变换

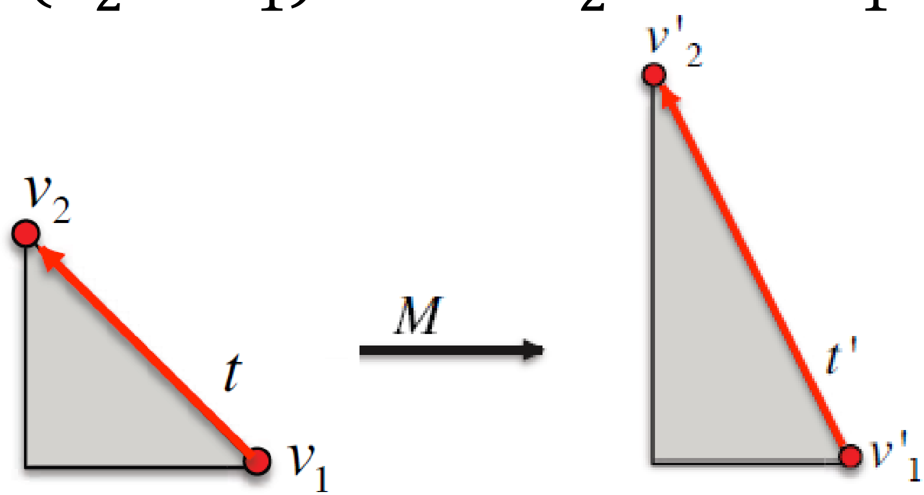
- 齐次向量表示:

$$t = \begin{bmatrix} (v_2 - v_1)_x \\ (v_2 - v_1)_y \\ (v_2 - v_1)_z \\ (1 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 对该向量进行变换:

$$t' = M \cdot t = M \cdot (v_2 - v_1) = M \cdot v_2 - M \cdot v_1$$

- 变换结果:



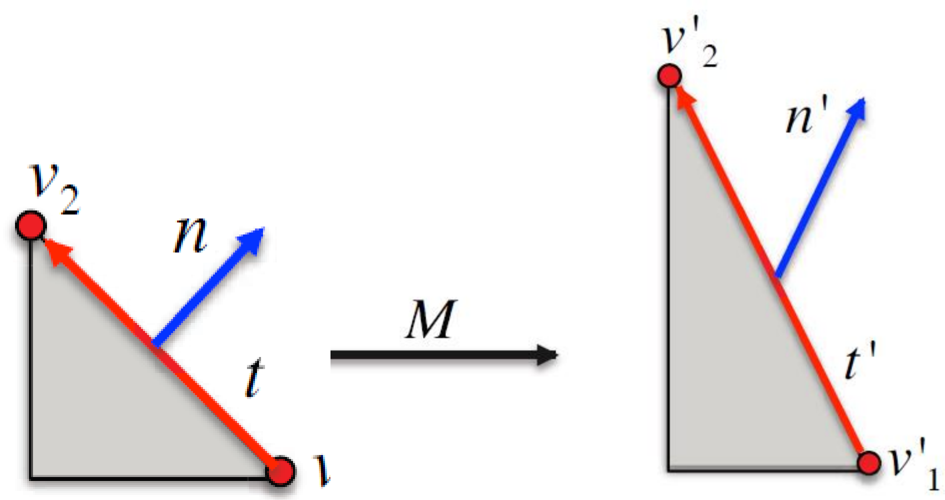
2.1.5 向量与法向量的变换

- 法向量的齐次表示：
  - 单位长度
  - 与向量垂直

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 对法向量进行变换：$n' = M \cdot n$

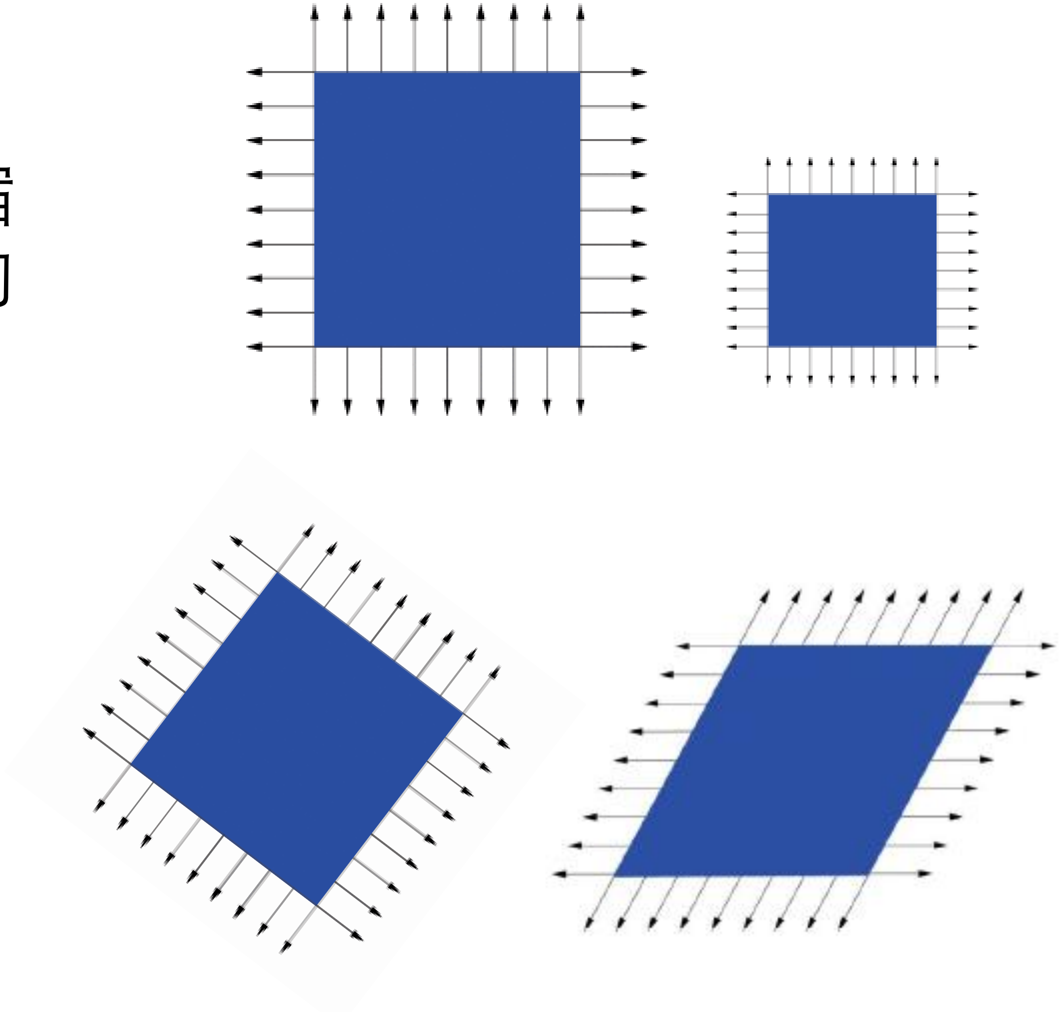
- 变换结果
  - 错误！
  - 为什么？



2.1.5 向量与法向量的变换

- 平移、旋转、均匀缩放能够保持法向量的正确性

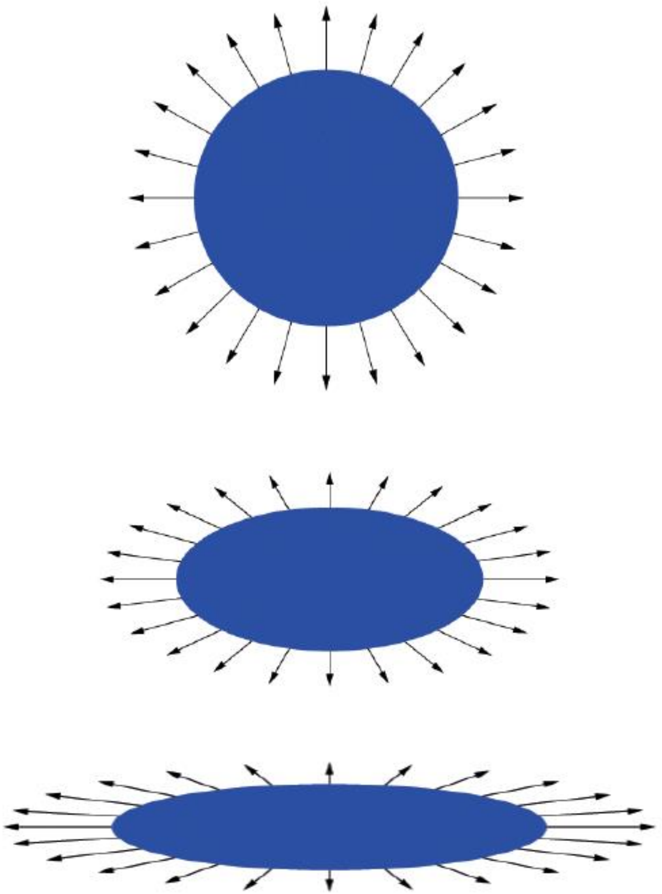
- 而错切不行



*https://cg.cs.tsinghua.edu.cn/course/resource.htm

2.1.5 向量与法向量的变换

- 另一个例子
  - 我们缩放一个球（但不是各向同比例缩放）
  - 变换后的法向量也错了

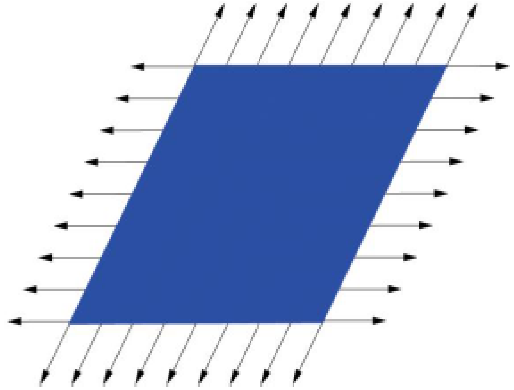


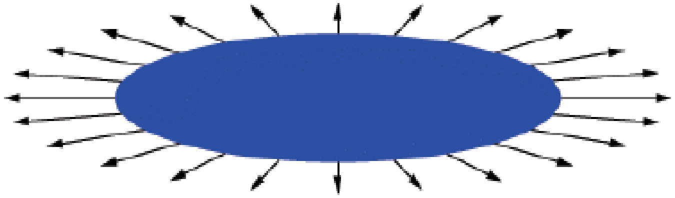
*https://cg.cs.tsinghua.edu.cn/course/resource.htm

2.1.5 向量与法向量的变换

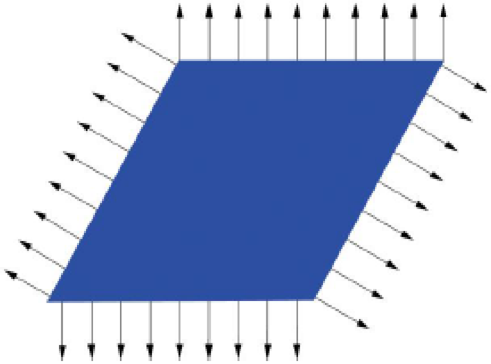
错切和缩放导致的法向量错误

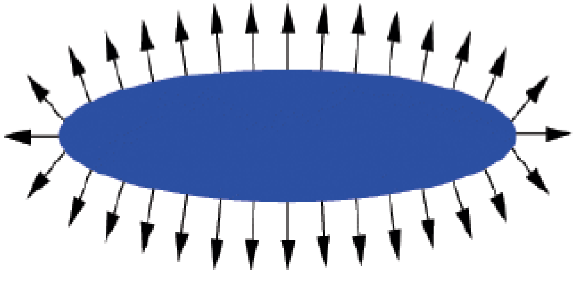
- 不正确的法向





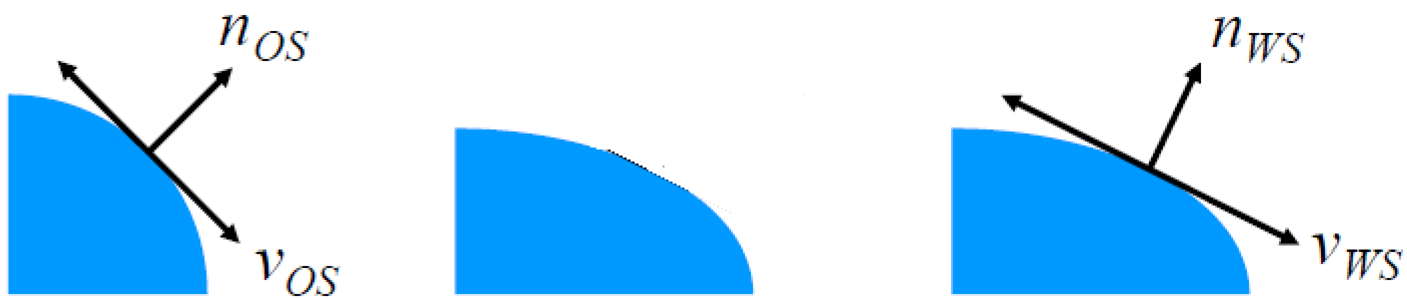
- 正确的法向





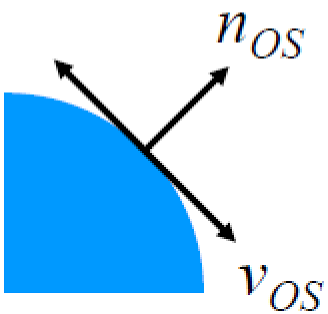
2.1.5 向量与法向量的变换

- 正确的变换法向的方法
  - 变换切平面后计算法向，而不是直接变换法向



$$v_{WS} = \mathbf{M}\ v_{OS}$$

2.1.5 向量与法向量的变换



$$v_{WS} = \mathbf{M}\ v_{OS}$$

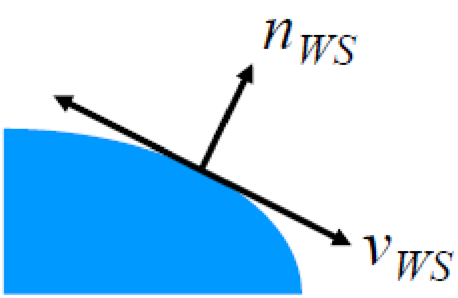
Dot product $\quad n_{OS}^{\mathbf{T}}\ v_{OS} = 0$

$$n_{OS}^{\mathbf{T}}\ (\mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{M})\ v_{OS} = 0$$

$$(n_{OS}^{\mathbf{T}}\ \mathbf{M}^{-1})\ (\mathbf{M}\ \ v_{OS}) = 0$$

$$(n_{OS}^{\mathbf{T}}\ \mathbf{M}^{-1})\ v_{WS} = 0$$

$$n_{WS}^{\mathbf{T}}\ v_{WS} = 0$$



（n_{ws}与v_{ws}垂直）

$$n_{WS}^{\mathbf{T}} = n_{OS}^{\mathbf{T}}\,(\mathbf{M}^{-1})$$

$$\boxed{n_{WS} = (\mathbf{M}^{-1})^{\mathbf{T}}\ n_{OS}}$$

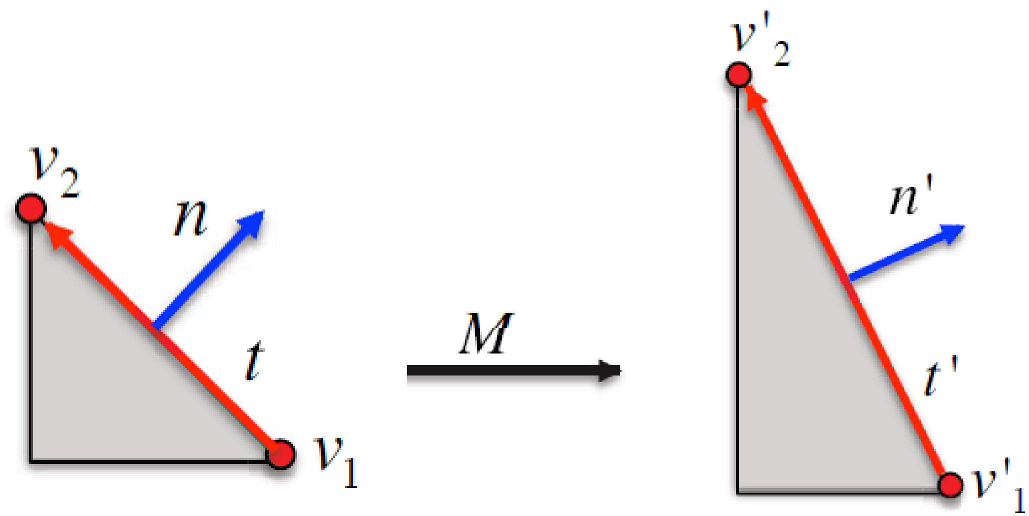
2.1.5 向量与法向量的变换

- 法向量的齐次表示：
  - 单位长度
  - 与向量垂直

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 对法向量进行变换： $n' = \boxed{(M^{-1})^T} \cdot n$

- 变换结果



总结

2.1.1 二维变换
2.1.2 齐次变换
2.1.3 三维变换
2.1.4 连续的变换及应用
2.1.5 向量与法向量的变换