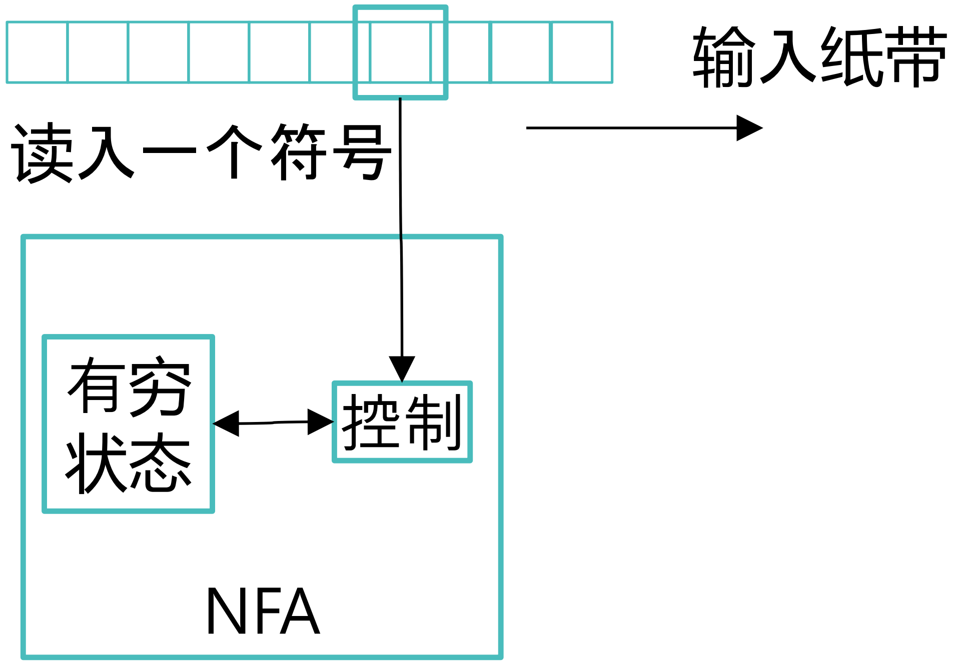
# 下推自动机
# Pushdown Automata

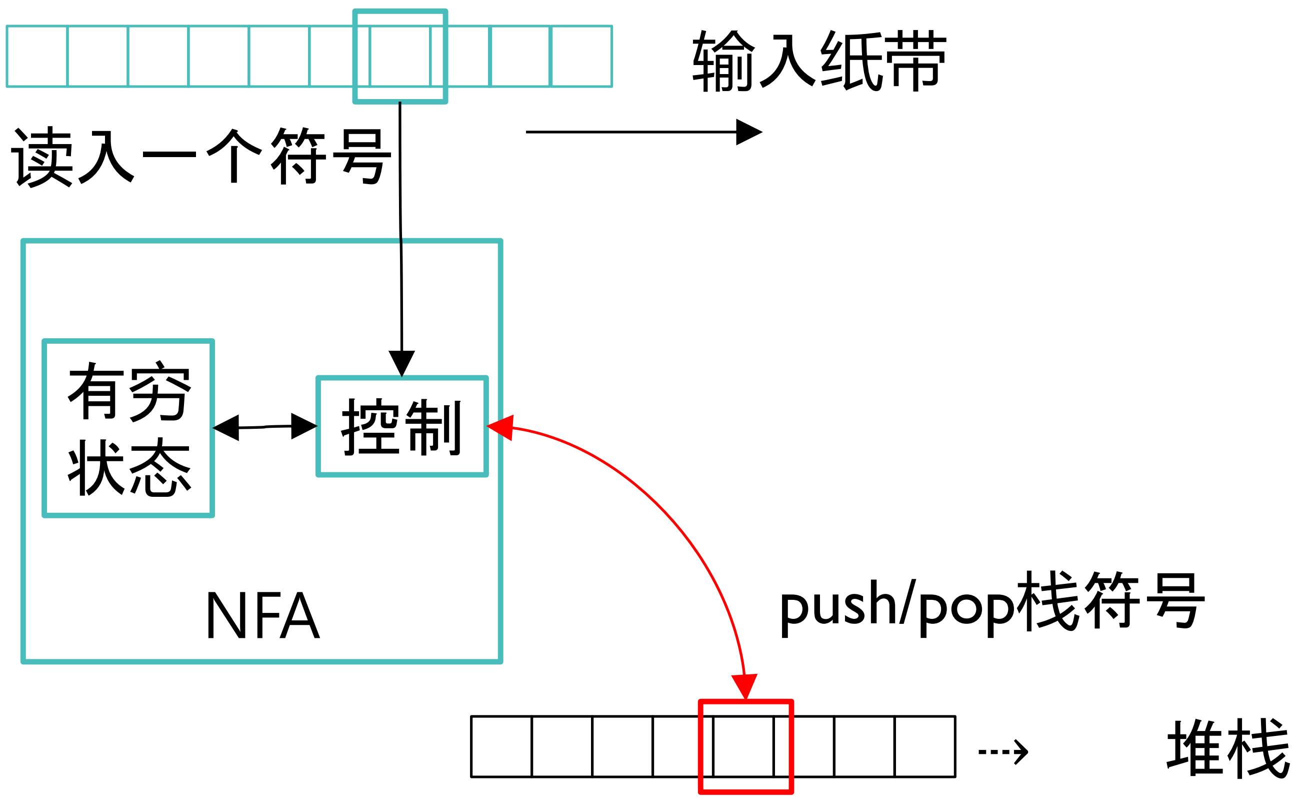
赵银亮

2025

# 回顾NFA

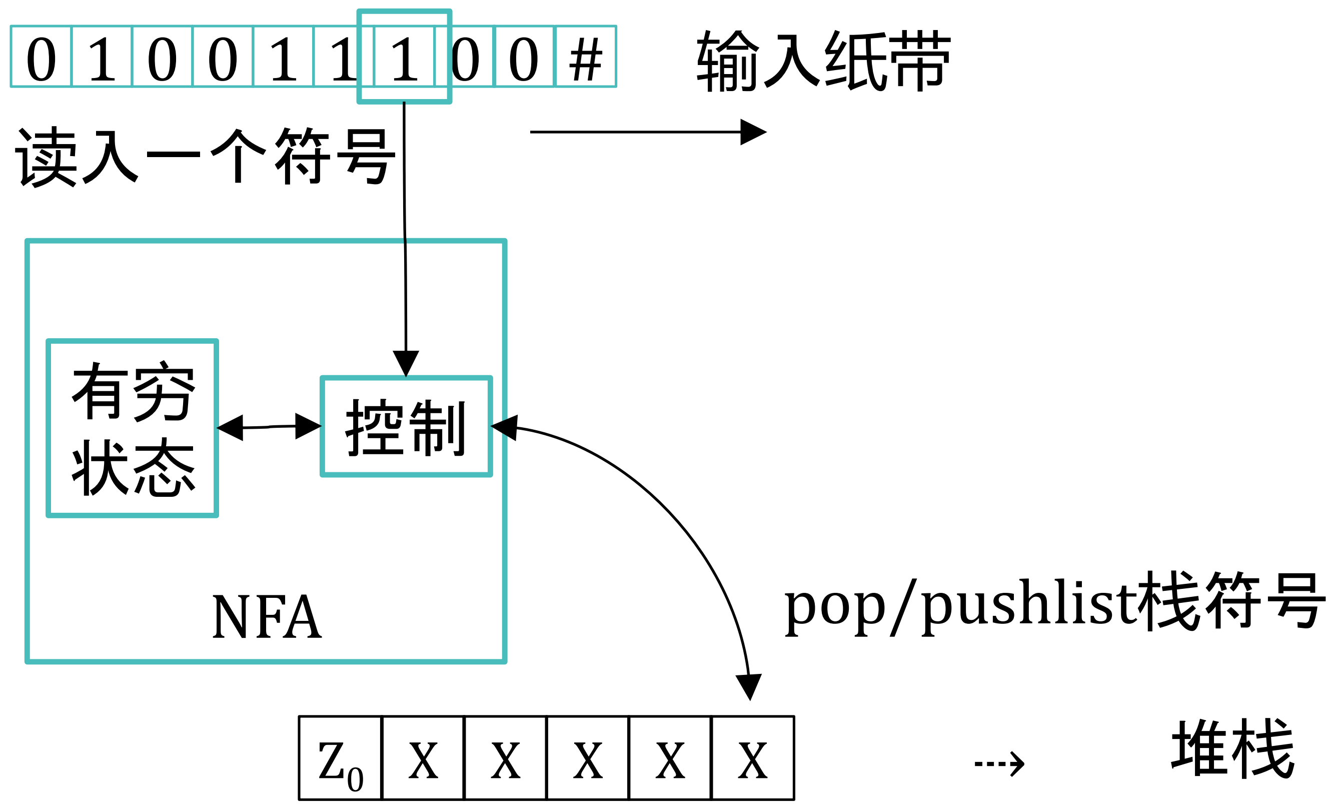


# 下推自动机（pushdown automata PDA）




一个PDA类似于一个NFA外带有一个无穷栈，
依赖于输入符号和栈顶是什么来进行状态转移。
PDA的记忆能力无穷但只能受限访问。PDA定义CFL。

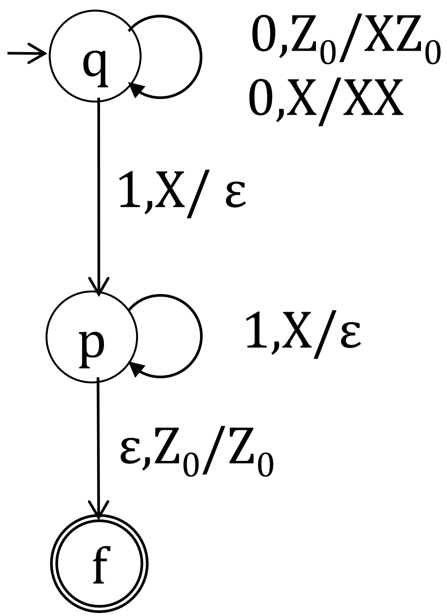
# 下推自动机




随着PDA读入输入串中当前输入符号，
它能够与NFA一样地进行状态转移但同步要求按指定替换栈顶，
可看作pop零或一个指定的栈符号并push指定的零到多个栈符号。

# 构建 PDA

$L_{7\text{-}1}=\{0^n1^n: n \geqslant 1\}$




初始化用$Z_0$做栈底

通过给栈上压入$X$ 来记住每个0

当遇见一个1时,则从栈顶上弹出一个$X$

输入串消耗完且栈顶为$Z_0$时表示接受。

弧上的标记:读入;弹出一个/压入多个(看作替换);
其中可以消耗一个输入符号,也可以不消耗输入符号;
默认$Z_0$在栈上。

# PDA的定义

**定义7.1** 一个PDA是一个七元组$(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$，其中：

$Q$为状态的有穷集合；

$\Sigma$为字母表；

$\Gamma$为栈符号的有穷集合；

$\delta: Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times(\Gamma\cup\{\varepsilon\})\rightarrow 2\hat{}(Q\times\Gamma^*)$是转移函数；

$q_0$为初始状态；

$Z_0$为栈开始符号；

$F$为接受状态集合。

从转移函数$(p, \xi)\in\delta(q, a, Z)$认识不确定性：

$q\in Q$;

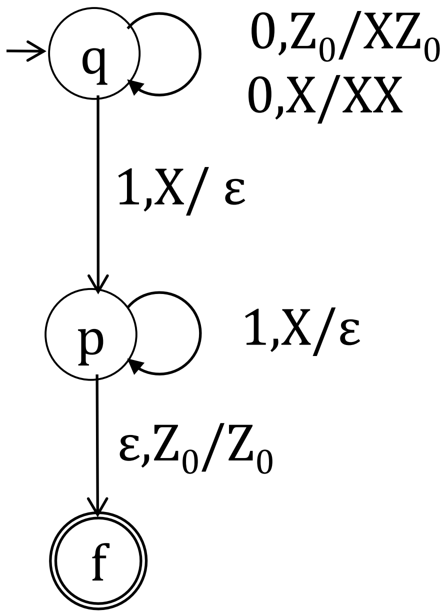
$a\in\Sigma, Z\in\Gamma$； $a=\varepsilon, Z\in\Gamma$； $a\in\Sigma, Z=\varepsilon$； $a=\varepsilon, Z=\varepsilon$

$p\in Q$； $\xi\in\Gamma^*$

$\delta(q, a, X)\subseteq\{(p, \xi) \mid p\in Q, \xi\in\Gamma^*\}, q\in Q, a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}, X\in\Gamma\cup\{\varepsilon\}$

q到$p$箭弧标记为$a, Z/\xi$, 当且仅当$(p, \xi)\in\delta(q, a, Z)$

# $L_{7\text{-}1}=\{0^n1^n: n \geqslant 1\}$的一个PDA




$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

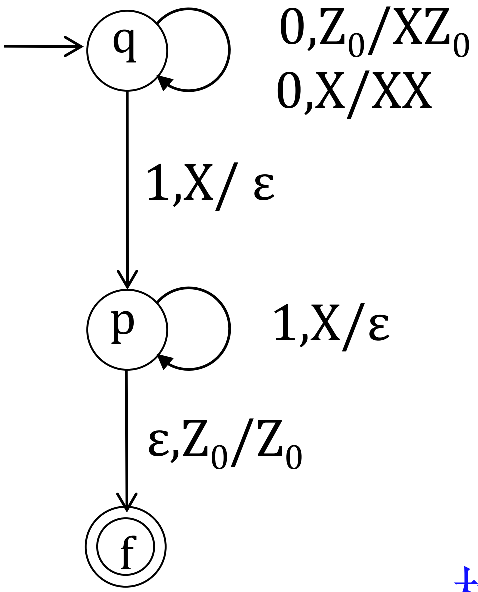
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

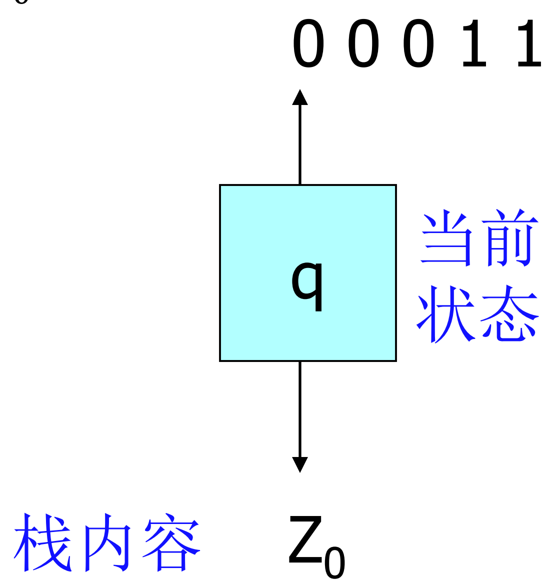
$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

PDA $(\{q, p, f\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X\}, \delta, q, Z_0, \{f\})$

# 例：PDA运行（移动）




剩余串

$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

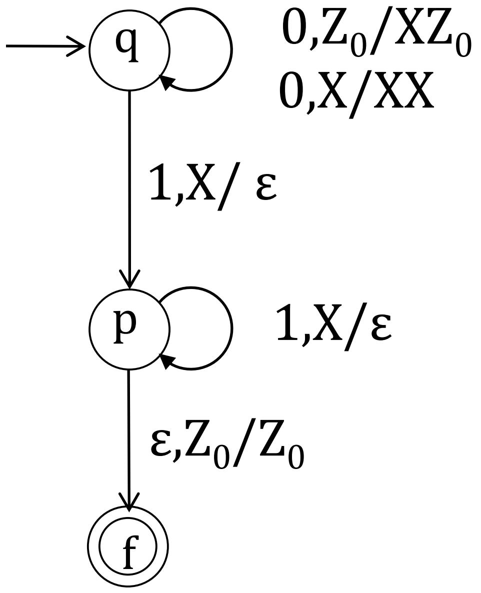
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

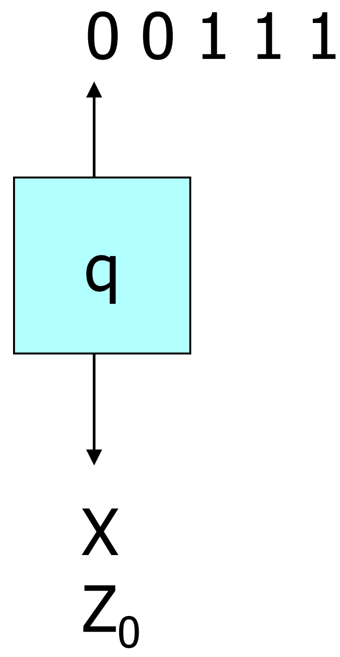
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

# 例：PDA运行（移动）




$\delta(q,0,Z_0) = \{(q,XZ_0)\}$

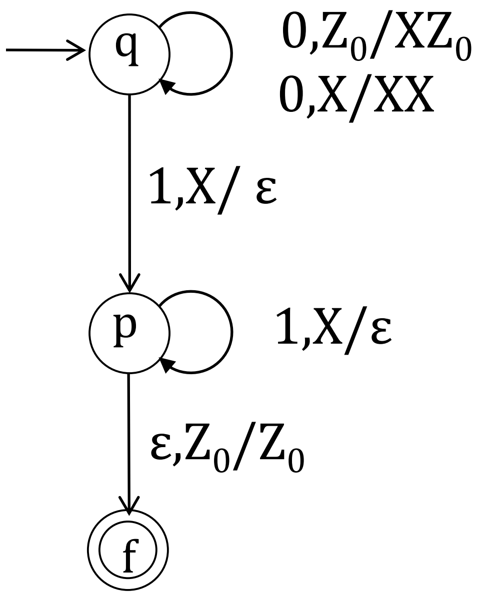
$\delta(q,0,X) = \{(q,XX)\}$

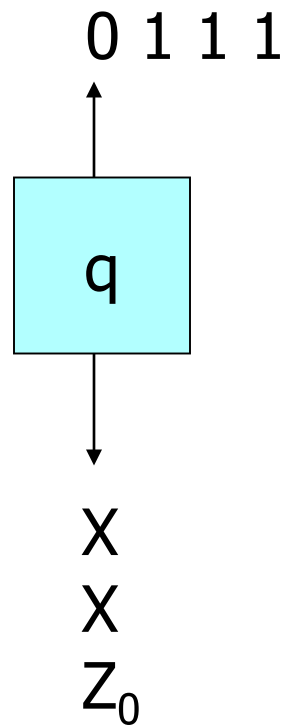
$\delta(q,1,X) = \{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X) = \{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0) = \{(f,Z_0)\}$

# 例：PDA运行（移动）




$\delta(q,0,Z_0\ )=\{(q,XZ_0)\}$

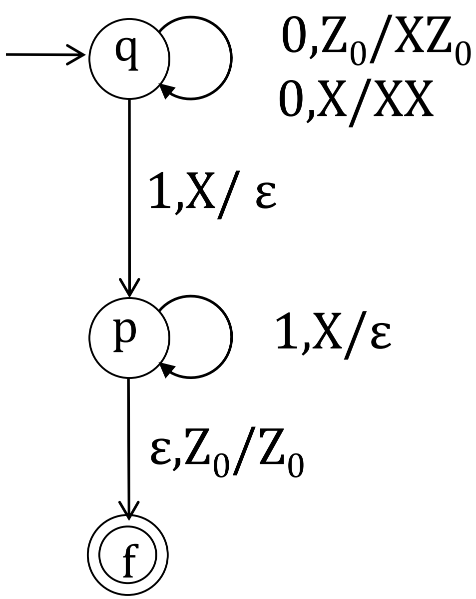
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

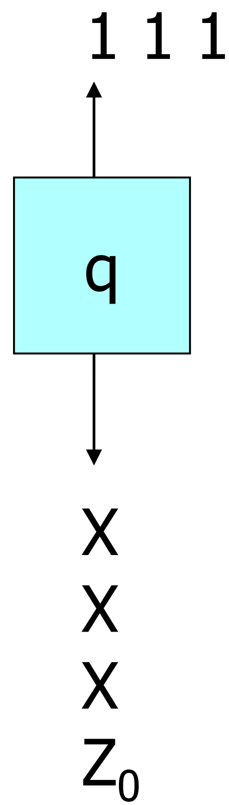
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

# 例：PDA运行（移动）




$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

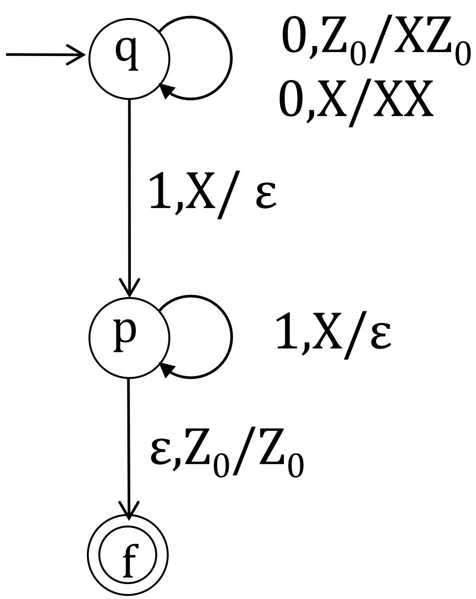
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

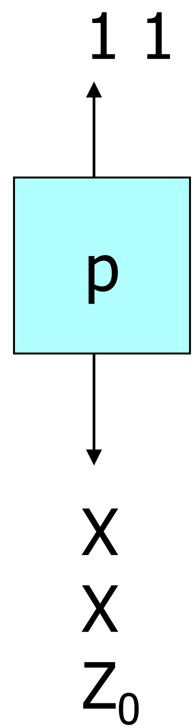
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

# 例：PDA运行（移动）




$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

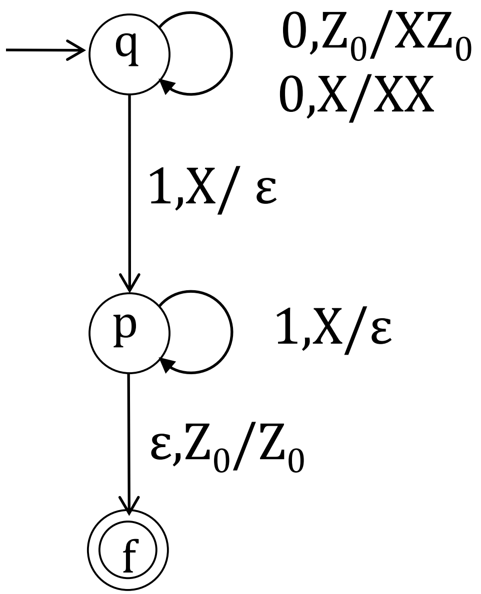
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

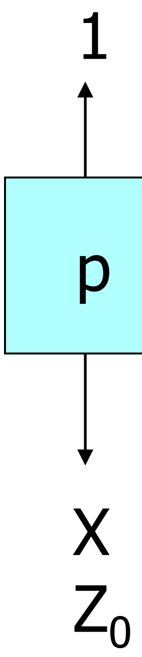
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

# 例：PDA运行（移动）




$\delta(q,0,Z_0\ )=\{(q,XZ_0)\}$

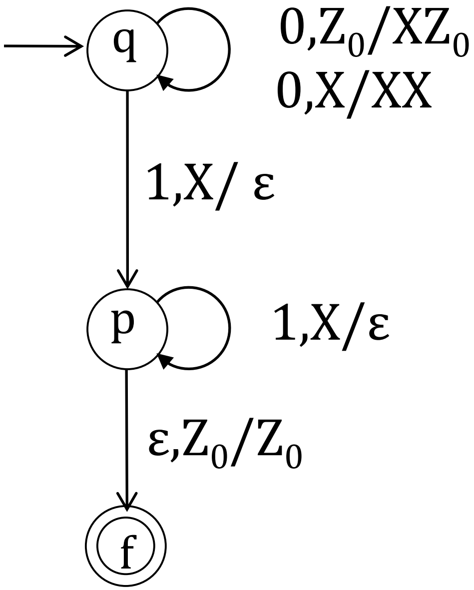
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

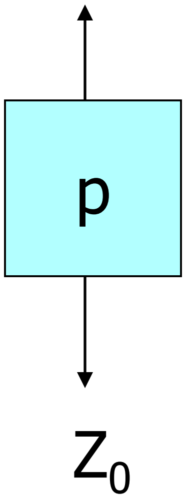
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

# 例：PDA运行（移动）




$\delta(q,0,Z_0) = \{(q,XZ_0)\}$

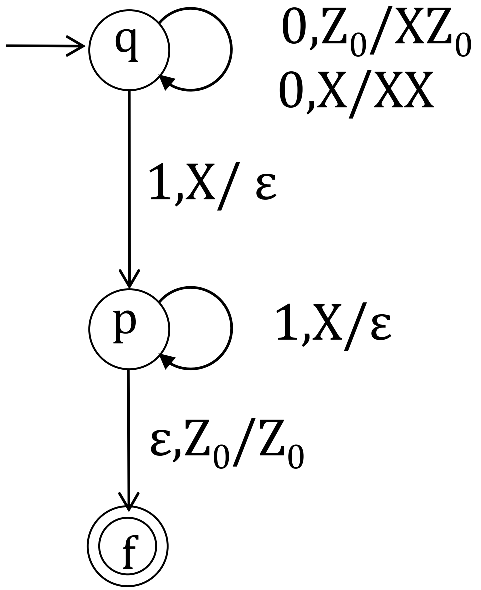
$\delta(q,0,X) = \{(q,XX)\}$

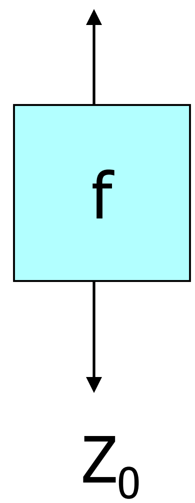
$\delta(q,1,X) = \{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X) = \{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0) = \{(f,Z_0)\}$

# 例：PDA运行（移动）




$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

PDA的配置：(当前状态, 剩余串, 栈内容)

# 例1、中心对称

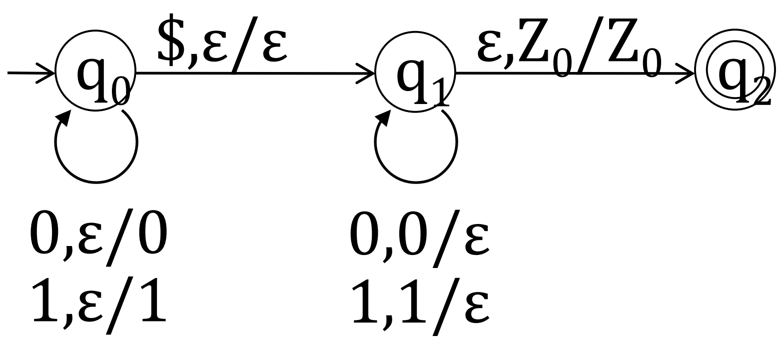
$L=\{w\$w^R: w\in\{0,1\}^*\}$

$\Sigma=\{0,1,\$\}$

$\Gamma=\{Z_0,0,1\}$

$\$,0\$0,01\$10 \in L$

$\varepsilon,01\$1,0\$\$0 \notin L$




将w写到栈上　从栈上读出$w^R$

# 例 2、镜面对称

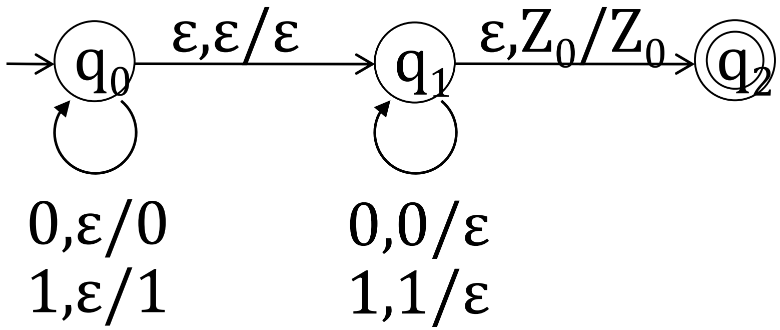
$L=\{ww^R: w\in\Sigma^*\}$

$\Sigma=\{0,1\}$

$\Gamma=\{Z_0,0,1\}$

$\varepsilon,00,0110 \in L$

$1,011,010 \notin L$




猜测 串的中间部分

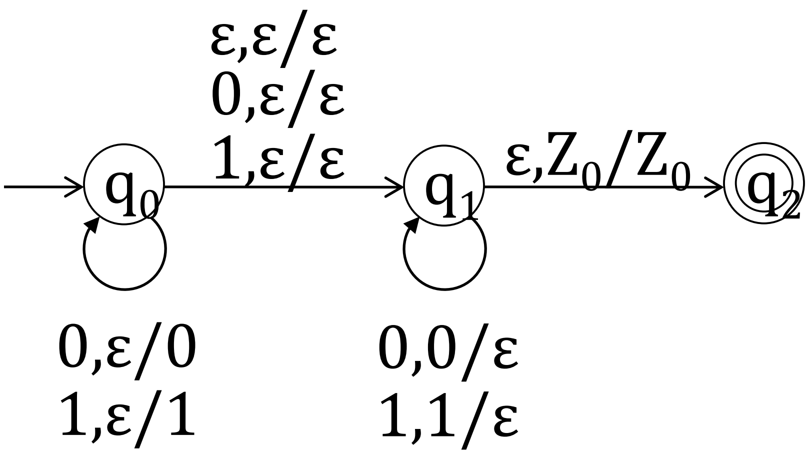
# 例 3、回文

$L=\{w: w=w^R, w\in\{0,1\}^*\}$

$\varepsilon,1,00,010,0110 \in L$

$011 \notin L$

$\underbrace{01101}_{x}\underbrace{10110}_{x^R}$ or $\underbrace{0110}_{x}1\underbrace{0110}_{x^R}$

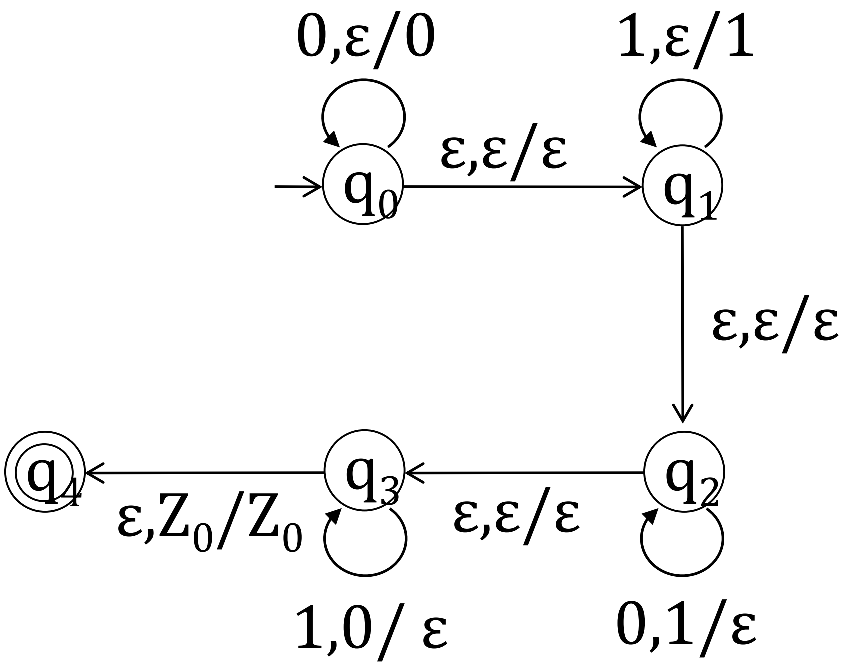



中间的符号可能是ε,0,或1

# 例 4

$L=\{0^n1^m0^m1^n \mid n\geq 0, m\geq 0\}$

$\Sigma=\{0,1\}$




输入: $0^n\ 1^m\ 0^m\ 1^n$

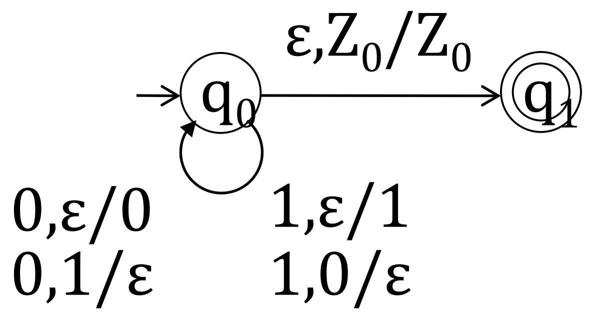
栈: $0^n\ 1^m$

# 例 5

L={w: w 有相同个数的0和1}

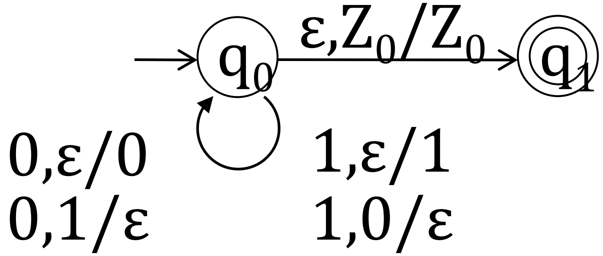
策略: 栈保持跟踪那些超出的 0或者1

若在最后,栈是空的,则数目相等



# 演示例 5

L={w: w有相同个数的0和1}




w=001110

| 输入 | 栈 |
|---|---|
| 0 | $Z_0 0$ |
| 0 | $Z_0 00$ |
| 1 | $Z_0 0$ |
| 1 | $Z_0$ |
| 1 | $Z_0 1$ |
| 0 | $Z_0$ |

# 例 6

L={w: w 有两个0-块且各块的0的个数相同

01011,001011001,10010101001 允许

01001000,01111 不允许

策略: 检测第一个0-块的开始

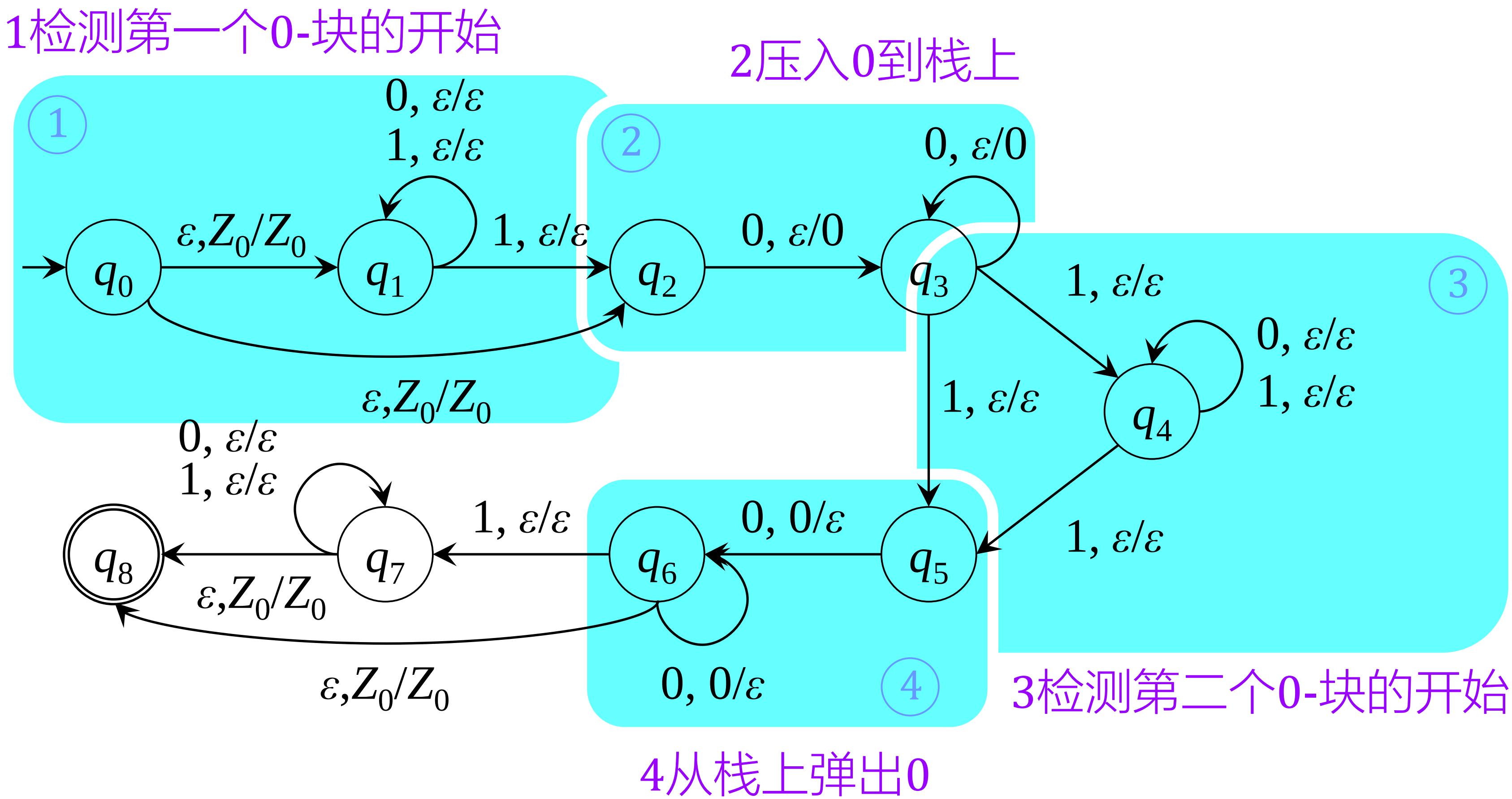
压入0到栈上

检测第二个0-块的开始

从栈上弹出0

# 例 6

$L=\{w$: $w$至少有两个等长的0块



# PDA的瞬时描述与直接移动

- PDA 运行过程中的当前状态、剩余输入串、栈内容反映了运行过程每一步的PDA配置，称为PDA的瞬时描述(ID)。
- 一个ID 是一个三元组(q, y, β)，其中q是状态、y是剩余串、β是栈内容。注意，β的前缀位于栈顶部分。

PDA初始化为ID($q_0$,w,$Z_0$)，比如ID(q,000111,$Z_0$)

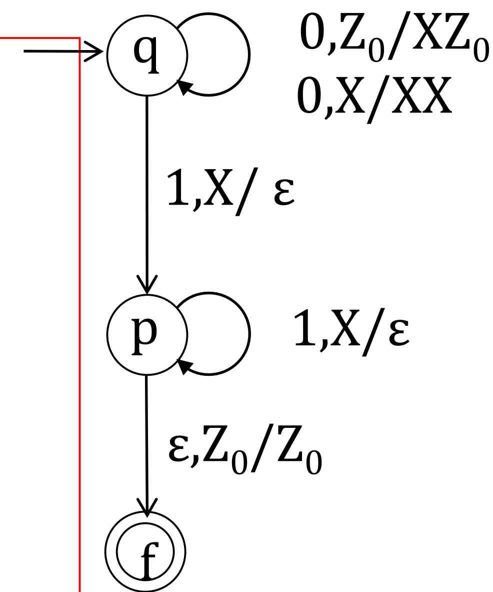
PDA 运行结束时可能是：ID(f,ε,$Z_0$)或 ID(f,y,$Z_0$) 或

ID(f,ε,β)或ID(f, y, ε)或 ID(f,ε,ε) ，

还有可能是：ID(p, ε, $Z_0$)或ID(p, y, $Z_0$)或 ID(p,ε,β)或

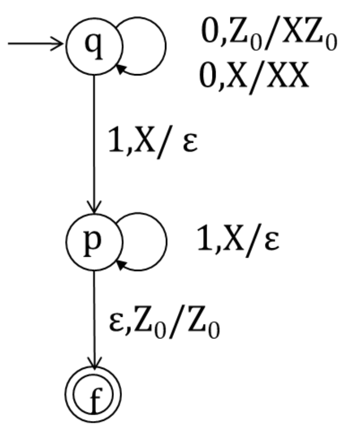
ID(p, y, ε)或ID(p,ε,ε)。

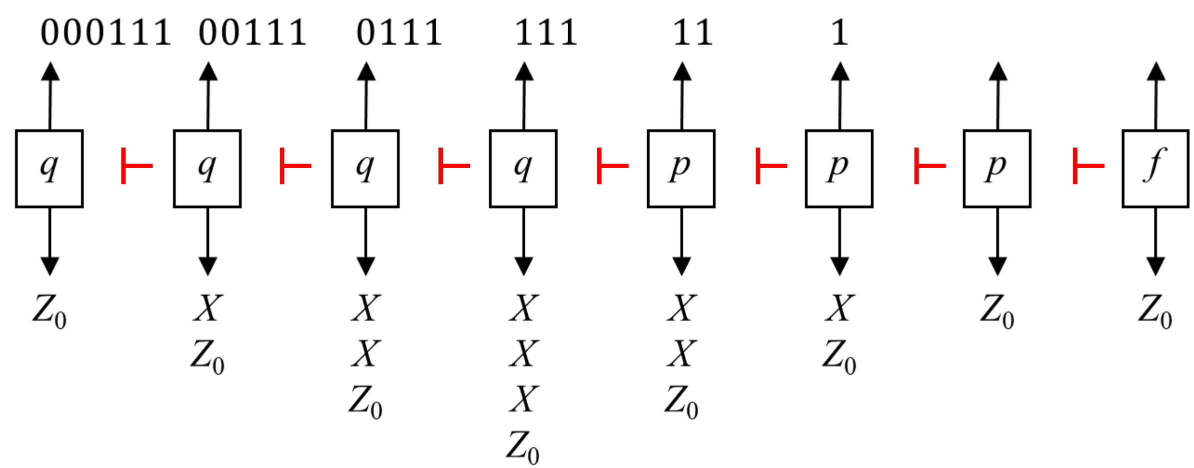
其中红色的特别为接受ID。



# PDA的直接移动

- 定义直接移动，符号为⊢。对任意$w \in \Sigma^*$和$\beta \in \Gamma^*$，若$(p,\alpha) \in \delta(q,a,X)$，则有$(q,aw,X\beta) \vdash (p,w,\alpha\beta)$。
- 对于一个PDA，若有ID$(q,aw,X\beta)$并且有$(p,\alpha) \in \delta(q,a,X)$，那么该PDA运行过程中会出现这种直接移动：
$(q,aw,X\beta) \vdash (p,w,\alpha\beta)$, $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $X \in \Gamma$, $w \in \Sigma^*$, $\beta \in \Gamma^*$

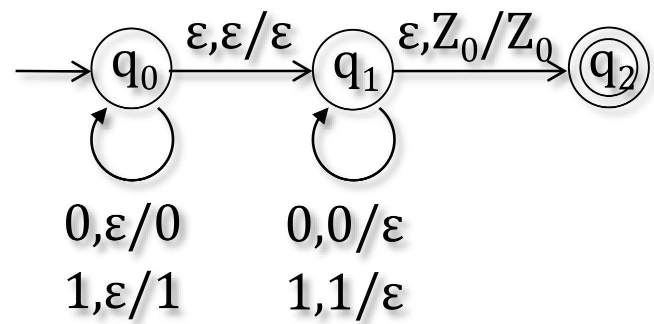



$ID(q,0001111,Z_0) \vdash ID(q,00111,XZ_0) \vdash ID(q,0111,XXZ_0)$
$\vdash ID(q,111,XXXZ_0) \vdash ID(p,11,XXZ_0) \vdash ID(p,1,XZ_0)$
$\vdash ID(p,\varepsilon,Z_0) \vdash ID(f,\varepsilon,Z_0)$

# PDA的移动线索

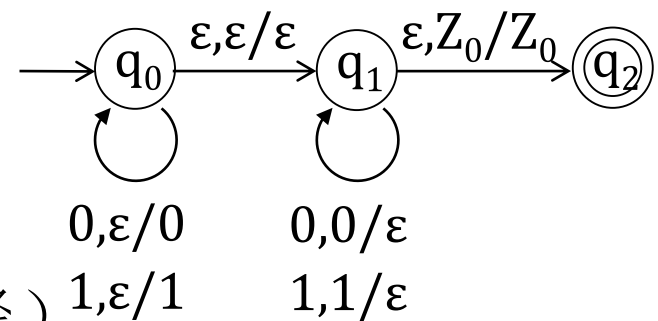
- 若$(p,\alpha)\in\delta(q,a,X)$ 则有$(q,aw,X\beta)\vdash(p,w,\alpha\beta)$




$$
\begin{tikzcd}
(q_0,1001,Z_0) \arrow[r] \arrow[d] & (q_1,1001,Z_0) \arrow[r] & (q_2,1001,Z_0) \\
(q_0,001,1Z_0) \arrow[r] \arrow[d] & (q_1,001,1Z_0) & \\
(q_0,01,01Z_0) \arrow[r] \arrow[ddd] & (q_1,01,01Z_0) \arrow[d] & \\
 & (q_1,1,1Z_0) \arrow[d] & \\
 & (q_1,\varepsilon,Z_0) \arrow[r] & (q_2,\varepsilon,Z_0) \\
(q_0,1,001Z_0) \arrow[r] \arrow[d] & (q_1,1,001Z_0) & \\
(q_0,\varepsilon,1001Z_0) \arrow[r] & (q_1,\varepsilon,1001Z_0) &
\end{tikzcd}
$$

# PDA的移动与移动路径

- 定义移动$\vdash^*$为“0到多步直接移动”:
  - ✓基础: $I\vdash^* I$。
  - ✓归纳: 若$I\vdash^* J$ 且$J\vdash K$,则$I\vdash^* K$。




- 移动的自反性、传递性
- 关注移动中的直接移动序列（路径）
  - ✓一个移动包含多个直接移动路径（简写为移动路径）
  - ✓一条成功的移动路径是指它的末端ID为一个接受ID

$ID(q_0,1001w,\beta)\vdash^* ID(q_0,001w,1\ \beta)\vdash^* ID(q_0,01w,01\ \beta)$

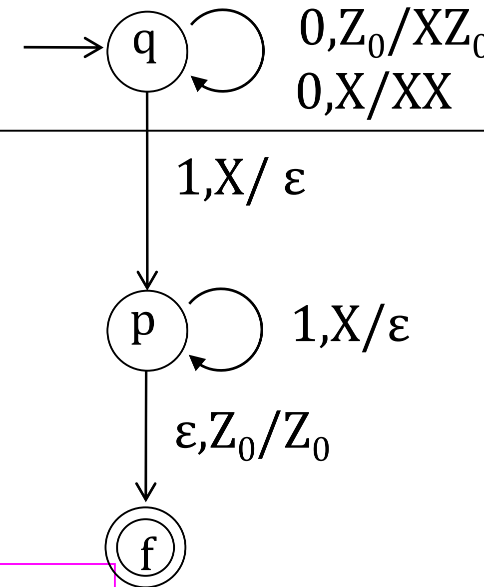
$ID(q_0,1001w,\beta)\vdash^* ID(q_1,01w,01\ \beta)$

$ID(q_0,01w,01\ \beta)\vdash^* ID(q_1,1w,1\ \beta)\vdash^* ID(q_2,w,\beta)$

$ID(q_0,1001,Z_0)\vdash^* ID(q_0,001,1Z_0)\vdash^* ID(q_0,01,01Z_0)$

$ID(q_0,1001,Z_0)\vdash^* ID(q_2,\varepsilon,Z_0)$

# 例: 移动




- 例子中的移动序列为:
  - ✓ $(q,000111,Z_0)\vdash(q,00111,XZ_0)\vdash(q,0111,XXZ_0)\vdash(q,111,XXXZ_0)\vdash(p,11,XXZ_0)\vdash(p,1,XZ_0)\vdash(p,\varepsilon,Z_0)\vdash(f,\varepsilon,Z_0)$
  - 因此,$(q,000111,Z_0)\vdash^*(f,\varepsilon,Z_0)$。

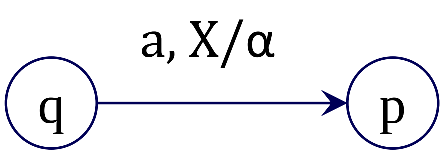
$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$
$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

- ✓ $(q,0001111,Z_0)\vdash(q,001111,XZ_0)\vdash(q,01111,XXZ_0)\vdash(q,1111,XXXZ_0)\vdash(p,111,XXZ_0)\vdash(p,11,XZ_0)\vdash(p,1,Z_0)\vdash(f,1,Z_0)$
- ✓ 注意最后一个移动，在剩余输入串还有情况下也能不消耗输入符号进行移动。0001111 不被接受因为输入串没消耗完（即使到达接受状态）。
- ✓ $(q,0000111,Z_0)\vdash(q,000111,XZ_0)\vdash(q,00111,XXZ_0)\vdash(q,0111,XXXZ_0)\vdash(q,111,XXXXZ_0)\vdash(p,11,XXXZ_0)\vdash(p,1,XXZ_0)\vdash(p,\varepsilon,XZ_0)$
- ✓ 0000111 不接受因为没达到接受状态（即使输入串已经消耗完了）。

# 与PDA直接移动有关的3个性质

- 直接移动：若$(p,\alpha)\in\delta(q,a,X)$则$ID(q,aw,X\eta)\vdash ID(p,w,\alpha\eta)$
- 若$(q,a,X)\vdash(p,\varepsilon,\alpha)$则$(q,aw,X)\vdash(p,w,\alpha)$
- 若$(q,a,X)\vdash(p,\varepsilon,\alpha)$则$(q,a,X\eta)\vdash(p,\varepsilon,\alpha\eta)$
- 若$(q,ay,\alpha)\vdash(p,y,\beta)$，那么$(q,a,\alpha)\vdash^*(p,\varepsilon,\beta)$




$(q,a,X)\vdash(p,\varepsilon,\alpha)$

$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$
$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$
$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

$(q,0,Z_0)\vdash(q,\varepsilon,XZ_0)$
$(q,0,X)\vdash(q,\varepsilon,XX)$
$(q,1,X)\vdash(p,\varepsilon,\varepsilon)$
$(p,1,X)\vdash(p,\varepsilon,\varepsilon)$
$(p,\varepsilon,Z_0)\vdash(f,\varepsilon,Z_0)$

$ID(q,000111,Z_0)\vdash ID(q,00111,XZ_0)\vdash ID(q,0111,XXZ_0)$
$\vdash ID(q,111,XXXZ_0)\vdash ID(p,11,XXZ_0)\vdash ID(p,1,XZ_0)$
$\vdash ID(p,\varepsilon,Z_0)\vdash ID(f,\varepsilon,Z_0)$

# 关于PDA移动的3个性质

如果对于一个PDA来说，一个ID序列（计算）是合法的，

- 那么把一个同样的串加到该序列中所有ID的剩余串的末尾所得到的计算也同样是合法的；（定理7.1）

$$\boxed{\text{若}(q,x,\alpha)\vdash^{*}(p,y,\beta)\ \text{则}(q,xw,\alpha)\vdash^{*}(p,yw,\beta)}$$

- 那么把一个同样的串加到该序列中所有ID的栈内容的末尾所得到的计算也同样是合法的；（定理7.1）

$$\boxed{\text{若}(q,x,\alpha)\vdash^{*}(p,y,\beta)\ \text{则}(q,x,\alpha\eta)\vdash^{*}(p,y,\beta\eta)}$$

- 并且剩余串未消耗完，那么从该序列中每个ID的剩余串中都去掉那个未消耗完的后缀所得到的计算也同样是合法的（定理7.2）

$$\boxed{\text{若}(q,x,\alpha)\vdash^{*}(p,z,\beta)\text{且}x=yz\text{，那么}(q,y,\alpha)\vdash^{*}(p,\varepsilon,\beta)}$$

若$(p,\alpha)\in\delta(q,a,X)$，则有$(q,aw,X\eta)\vdash(p,w,\alpha\eta)$。 --直接移动

# 定理7.1

若$(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$，则$(q, xz, \alpha\eta) \vdash^* (p, yz, \beta\eta)$，其中，$x, y, z \in \Sigma^*, \alpha, \beta, \eta \in \Gamma^*$。

**证明：**对$(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$的直接移动的步数进行归纳。

**基础：**0步$(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$有$(q, x, \alpha) = (p, y, \beta)$，即$q = p$，$x = y$，$\alpha = \beta$，那么$(q, xz, \alpha\eta) \vdash^* (q, xz, \alpha\eta) = (p, yz, \beta\eta)$。

**归纳：**设小于$n$步成立，即若$(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$，则$(q, xz, \alpha\eta) \vdash^* (p, yz, \beta\eta)$

那么$n$步时，必有$(q_1, \alpha_2) \in \delta(q, a, X)$使得有第一步直接移动，即

$$(q, x, \alpha) = (q, ax_1, X\alpha_1) \vdash (q_1, x_1, \alpha_2\alpha_1) \vdash^* (p, y, \beta)$$

那么根据直接移动的定义，有$(q, ax_1z, X\alpha_1\eta) \vdash (q_1, x_1z, \alpha_2\alpha_1\eta)$，另外由归纳假设和小于n步的移动$(q_1, x_1, \alpha_2\alpha_1) \vdash^* (p, y, \beta)$有$(q_1, x_1z, \alpha_2\alpha_1\eta) \vdash^* (p, yz, \beta\eta)$。

因此，$(q, xz, \alpha\eta) = (q, ax_1z, X\alpha_1\eta) \vdash (q_1, x_1z, \alpha_2\alpha_1\eta) \vdash^* (p, yz, \beta\eta)$。

# 定理7.2

若$(q, xz, \alpha) \vdash^* (p, yz, \beta)$，则$(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$，其中$x, y, z \in \Sigma^*$, $\alpha, \beta \in \Gamma^*$。

**证明：** 对$(q, xz, \alpha) \vdash^* (p, yz, \beta)$的直接移动的步数进行归纳。

**基础：** 0步$(q, xz, \alpha) \vdash^* (p, yz, \beta)$有$(q, xz, \alpha) = (p, yz, \beta)$，即$q = p$，$xz = yz$，$\alpha = \beta$，那么$(q, x, \alpha) = (p, y, \beta)$，所以$(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$。

**归纳：** 设小于$n$步成立，即若$(q, xz, \alpha) \vdash^* (p, yz, \beta)$，则$(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$。

那么$n$步时，必有$(q_1, \alpha_2) \in \delta(q, a, X)$使得有第一步直接移动，即，

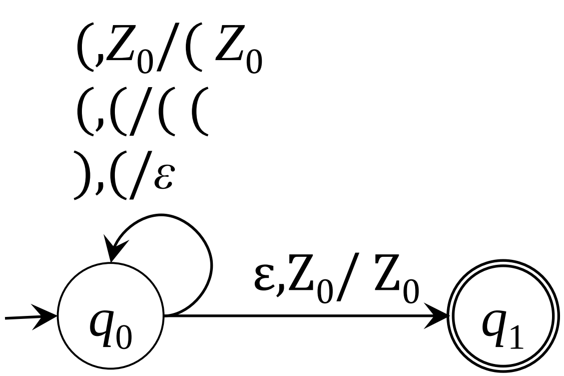
$$(q, xz, \alpha) = (q, ax_1z, X\alpha_1) \vdash (q_1, x_1z, \alpha_2\alpha_1) \vdash^* (p, yz, \beta)$$

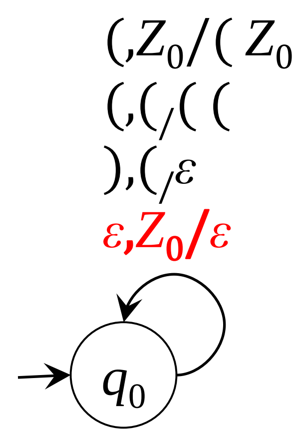
那么由归纳假设有$(q_1, x_1, \alpha_2\alpha_1) \vdash^* (p, y, \beta)$，另由$(q_1, \alpha_2) \in \delta(q, a, X)$有$(q, ax_1, X\alpha_1) \vdash (q_1, x_1, \alpha_2\alpha_1)$，所以$(q, x, \alpha) = (q, ax_1, X\alpha_1) \vdash (q_1, x_1, \alpha_2\alpha_1) \vdash^* (p, y, \beta)$。

# PDA的语言

- 通过 终结状态接受方式定义PDA的语言。
- 若$P$ 是一个 PDA那么$L(P)$是串$w$ 的集合，对于终结状态 $f$ 和任意$\alpha$满足 $(q_0, w, Z_0)\vdash^*(f, \varepsilon, \alpha)$。
- 通过空栈 接受方式定义PDA的语言。
- 若$N$ 是一个PDA那么$L(N)$是串$w$的集合且 $(q_0, w, Z_0)\vdash^*(q, \varepsilon, \varepsilon)$ 对任意状态$q$。

PDA *P*: *平衡括号的语言* PDA *N*:



# 两种语言定义方式的等价性

- 对于空栈方式接受的PDA $N$，存在终结状态方式接受的 PDA $P$， 满足$L(P)=L(N)$。
  - ✓定理7.4 $L(P)=L(N)$

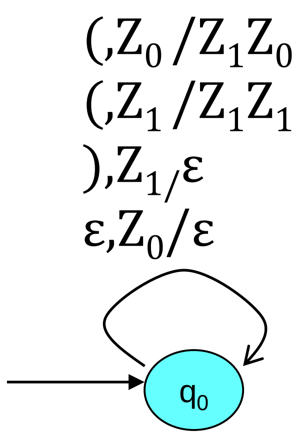
- 对于终结状态方式接受的 PDA $P$，存在空栈方式接受的PDA $N$，满足$L(N)=L(P)$。
  - ✓定理7.5 $L(N)=L(P)$

- 注意到七元组PDA $N$的第七个元不起作用，故可省略之从而简化为为六元组表示。

# 例: 平衡括号语言

PDA $(\{q_0\}, \{(,)\}, \{Z_0,Z_1\}, \delta', q_0, Z_0)$

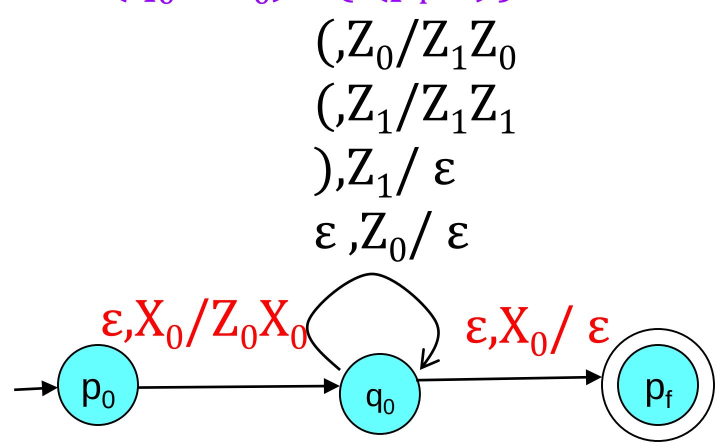
$\delta'$：
$\delta'(q_0,(,Z_0)=\{ (q_0,Z_1Z_0)\}$
$\delta'(q_0,(,Z_1)=\{ (q_0,Z_1Z_1)\}$
$\delta'(q_0,),Z_1)=\{ (q_0,\varepsilon)\}$
$\delta'(q_0,\varepsilon,Z_0)=\{ (q_0,\varepsilon)\}$




空栈方式接受

PDA
$(\{p_0,q_0,p_f\}, \{(,)\}, \{X_0,Z_0,Z_1\}, \delta, p_0, X_0, \{p_f\})$

$\delta$：
$\delta(p_0,\varepsilon,X_0)=\{ (q_0,Z_0X_0)\}$
$\delta(q_0,(,Z_0)=\{ (q_0,Z_1Z_0)\}$
$\delta(q_0,(,Z_1)=\{ (q_0,Z_1Z_1)\}$
$\delta(q_0,),Z_1)=\{ (q_0,\varepsilon)\}$
$\delta(q_0,\varepsilon,Z_0)=\{ (q_0,\varepsilon)\}$
$\delta(q_0,\varepsilon,X_0)=\{ (p_f,\varepsilon )\}$



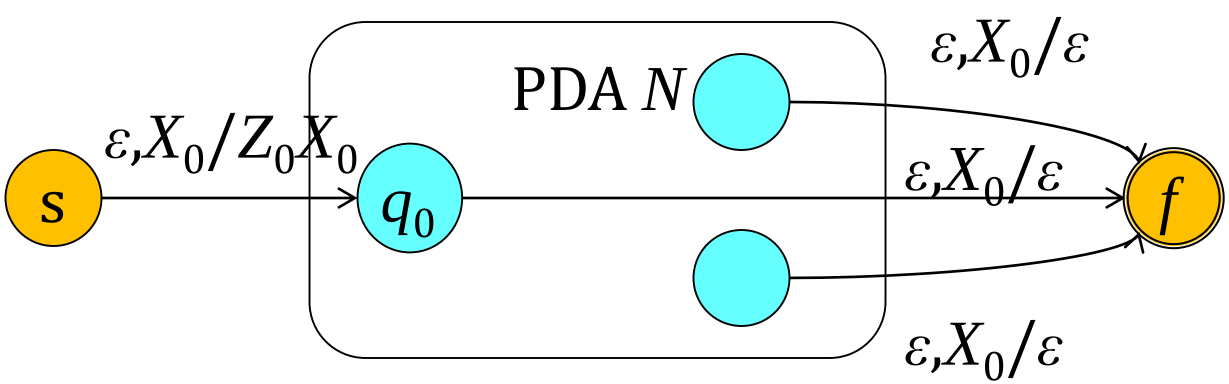

接受状态方式接受

# 定理7.4 对于PDA $N$，存在等价的PDA $P$。

- PDA $P$ 模拟PDA $N$。
- $P$ 有一个特定的栈底标记，用于俘获$N$清空其栈的情形。
- 若是，则$P$ 接受。

# 由PDA *N*构造等价PDA *P*的NP规则

1. 将$N$所有状态、栈符号、转移函数均作为$P$的。
2. 增加一个非PDA $N$栈符号$X_0$作为PDA $P$的开始符号。
3. 增加两个非$N$状态$s$和$f$，分别作为$P$初始状态和终结状态。
4. $P$增加转移$\delta(s, \varepsilon, X_0)=\{(q_0, Z_0X_0)\}$，$Z_0$是$N$的开始符号。
5. 对$N$的每一状态$q$，为$P$增加转移$\delta(q, \varepsilon, X_0)=\{(f, \varepsilon)\}$。



# 定理7.4 对于PDA N，存在等价的PDA *P*。

- 定理7.4 如果对于PDA $N=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, Z_0)$有$L=L(N)$，那么存在一个PDA $P$使得$L=L(P)$。
- （当）已知$(q_0, w, Z_0)\vdash_N^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$，
- 由定理7.1有$(q_0, w, Z_0X_0)\vdash_N^* (q, \varepsilon, X_0)$，
- 根据NP规则1，有$(q_0, w, Z_0X_0)\vdash_P^* (q, \varepsilon, X_0)$，
- 根据NP规则4，$\delta(s, \varepsilon, X_0)=\{(q_0, Z_0X_0)\}$，有$(s, w, X_0)\vdash_P (q_0, w, Z_0X_0)\vdash_P^* (q, \varepsilon, X_0)$，
- 由NP规则5有$\delta(q, \varepsilon, X_0)=\{(f, \varepsilon)\}$，
- 则$(q, \varepsilon, X_0)\vdash_P(f, \varepsilon, \varepsilon)$。那么$w$为$P$接受。

# 定理7.4 对于PDA $N$，存在等价的PDA $P$。

- 定理7.4 如果对于PDA $N=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, Z_0)$有$L=L(N)$，那么存在一个PDA $P$使得$L=L(P)$。
- （**仅当**）已知$(s, w, X_0)\vdash_P{}^* (f, \varepsilon, \alpha)$，
- 那么根据NP规则4，有$(s, w, X_0)\vdash_P (q_0, w, Z_0X_0)$，
- 现在要$P$能移动到$(f, \varepsilon, \alpha)$，根据规则5，必须到达ID$(q, \varepsilon, X_0)$，
- 即$(q_0, w, Z_0X_0)\vdash_P{}^* (q, \varepsilon, X_0)$，
- 根据规则1，这就要求$(q_0, w, Z_0)\vdash_N{}^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$，而且过程中不会把$X_0$弹掉，因为它不是PDA $N$的栈符号。
- 所以$N$接受$w$。

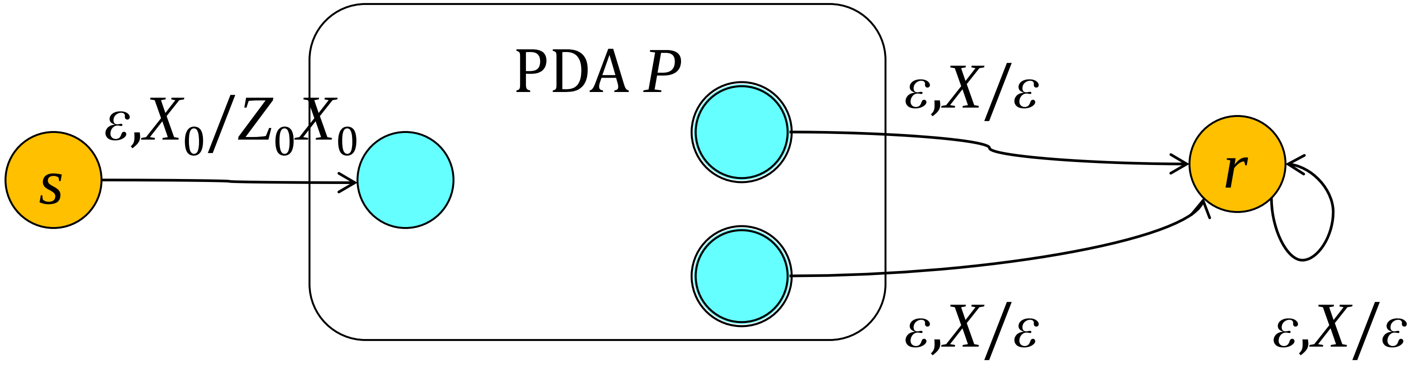
# 定理7.5 对于PDA *P*，存在等价PDA *N*。

- $N$ 能模拟$P$。
  - $P$： $(q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (f, \varepsilon, \alpha)$
  - $N$： $(q_0, w, Z_0) \vdash_N^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$

- 若$P$ 接受，$N$ 会清空其栈。
- $N$ 必须避免意外清空其栈，所以它使用一个特殊栈底标记来俘获非接受但$P$已清空其栈的情况。

# 由PDA *P*构造等价PDA *N*的PN规则

1. 将$P$所有状态、栈符号、转移函数均作为$N$的。
2. 增加一个非$P$栈符号$X_0$作为$N$的开始符号。
3. 增加两个非$P$状态$s$和$r$，分别作为$N$初始状态和新状态。
4. $N$增加转移$\delta'(s,\varepsilon,X_0)=\{(q_0,Z_0X_0)\}$。 $q_0$和$Z_0$分别为$P$初始状态和开始符号。
5. 对$P$的每个终结状态$q$，任意栈符号$X$，给$N$增加转移 $\delta'(q,\varepsilon,X)=\delta(r,\varepsilon,X)=\{(r,\varepsilon)\}$。



# 定理7.5　若有PDA *P*则有等价PDA *N*

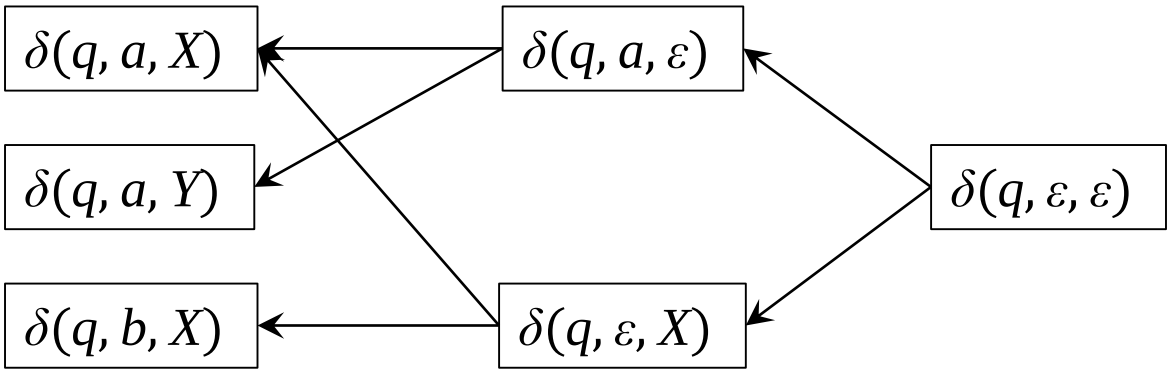
- 定理7.5　如果对于PDA $P=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta_P, q_0, Z_0, F)$有$L=L(P)$，那么存在一个PDA $N$使得$L=L(N)$。
- （当）已知$(q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \varepsilon, \alpha)$，
- 那么由定理7.1和PN规则1有$(q_0, w, Z_0X_0) \vdash_N^* (q, \varepsilon, \alpha X_0)$，
- 由PN规则4有$(s, w, X_0) \vdash_N (q_0, w, Z_0X_0) \vdash_N^* (q, \varepsilon, \alpha X_0)$
- 由PN规则5有$(q, \varepsilon, \alpha X_0) \vdash_N^* (r, \varepsilon, \varepsilon)$
- 因此，$w$为P接受则为N接受

- （仅当）类似思路。

# 7.4 确定型PDA

- PDA的不确定性：　（1）转移函数值是多元素集合，即$|\delta(\bullet)| \geqslant 2$

（2）有$\varepsilon$参数的转移函数的值之间有相关性时，它们可能同时存在




如果$|\delta(q, a, X)|=1$，那么$|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)|=0$且$|\delta(q, a, \varepsilon)| + |\delta(q, \varepsilon, X)| = 0$

如果$|\delta(q, a, \varepsilon)|=1$，那么$|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)|=0$且$(\sum X \in \Gamma \cdot |\delta(q, a, X)| + |\delta(q, \varepsilon, X)|) = 0$

如果$|\delta(q, \varepsilon, X)|=1$，那么$|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)|=0$且$(\sum a \in \Sigma \cdot |\delta(q, a, X)| + |\delta(q, a, \varepsilon)|) = 0$

如果$|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)|=1$，那么$(\sum a \in \Sigma, X \in \Gamma \cdot |\delta(q, a, X)| + |\delta(q, \varepsilon, X)| + |\delta(q, a, \varepsilon)|) = 0$

# 7.4 DPDA

**定义7.4** PDA $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$是确定型的，当且仅当下列条件被满足：

（1）$\forall q \in Q, a \in \Sigma, X \in \Gamma \cdot (|\delta(q, a, X)| + |\delta(q, a, \varepsilon)| + |\delta(q, \varepsilon, X)| = 1 \wedge \delta(q, \varepsilon, \varepsilon) = \emptyset)$

（2）$\forall q \in Q \cdot (|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)| = 1 \rightarrow (\forall a \in \Sigma, X \in \Gamma \cdot \delta(q, a, X) = \delta(q, \varepsilon, X) = \delta(q, a, \varepsilon) = \emptyset))$

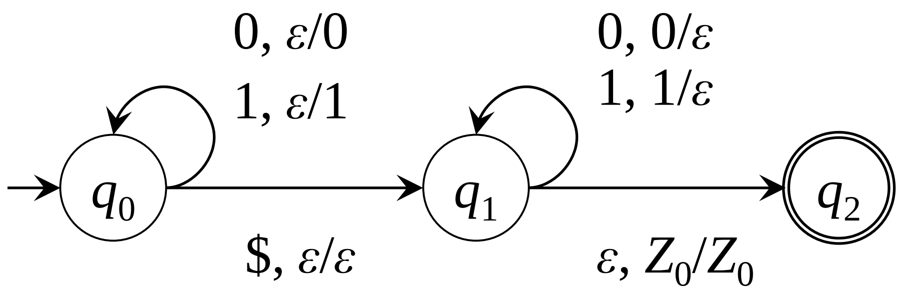
如果$|\delta(q, a, X)|=1$，那么$|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)|=0$且$|\delta(q, a, \varepsilon)| + |\delta(q, \varepsilon, X)| = 0$

如果$|\delta(q, a, \varepsilon)|=1$，那么$|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)|=0$且$(\sum X \in \Gamma \cdot |\delta(q, a, X)| + |\delta(q, \varepsilon, X)|) = 0$

如果$|\delta(q, \varepsilon, X)|=1$，那么$|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)|=0$且$(\sum a \in \Sigma \cdot |\delta(q, a, X)| + |\delta(q, a, \varepsilon)|) = 0$

如果$|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)|=1$，那么$(\sum a \in \Sigma, X \in \Gamma \cdot |\delta(q, a, X)| + |\delta(q, \varepsilon, X)| + |\delta(q, a, \varepsilon)|) = 0$

# 例7.2的图7-4为DPDA




$\delta(q_0, \$, \varepsilon) = \{q_1, \varepsilon\}$

$\delta(q_0, 0, \varepsilon) = \{q_0, 0\}$

$\delta(q_0, 1, \varepsilon) = \{q_0, 1\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{q_2, Z_0\}$

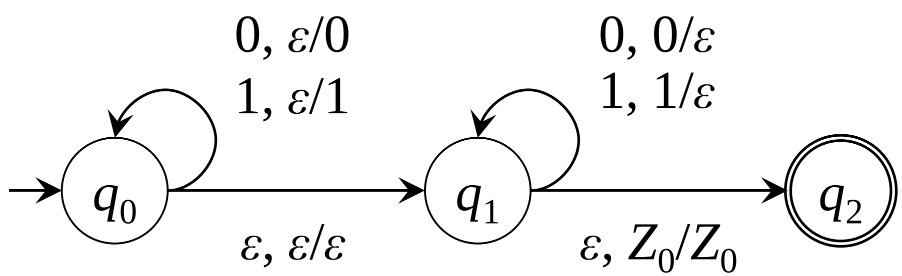
$\delta(q_1, 0, 0) = \{q_1, \varepsilon\}$

$\delta(q_1, 1, 1) = \{q_1, \varepsilon\}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall q{\in}Q, a{\in}\Sigma, X{\in}\Gamma \cdot \\ (|\delta(q, a, X)|+|\delta(q, a, \varepsilon)|+|\delta(q, \varepsilon, X)| = 1 \\ \wedge\ \delta(q, \varepsilon, \varepsilon) = \emptyset)\end{array}}$$

$$\forall q{\in}Q \cdot (|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)| = 1 \rightarrow$$
$$(\forall a{\in}\Sigma, X{\in}\Gamma \cdot \delta(q, a, X) =$$
$$\delta(q, \varepsilon, X) = \delta(q, a, \varepsilon) = \emptyset))$$

# 例7.3的图7-5不是DPDA




$\forall q{\in}Q, a{\in}\Sigma, X{\in}\Gamma \cdot$
$(|\delta(q, a, X)|+|\delta(q, a, \varepsilon)|+|\delta(q, \varepsilon, X)| = 1$
$\wedge\ \delta(q, \varepsilon, \varepsilon) = \emptyset)$

$\delta(q_0, 0, \varepsilon) = \{q_0, 0\}$

$\delta(q_0, 1, \varepsilon) = \{q_0, 1\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{q_1, \varepsilon\}$

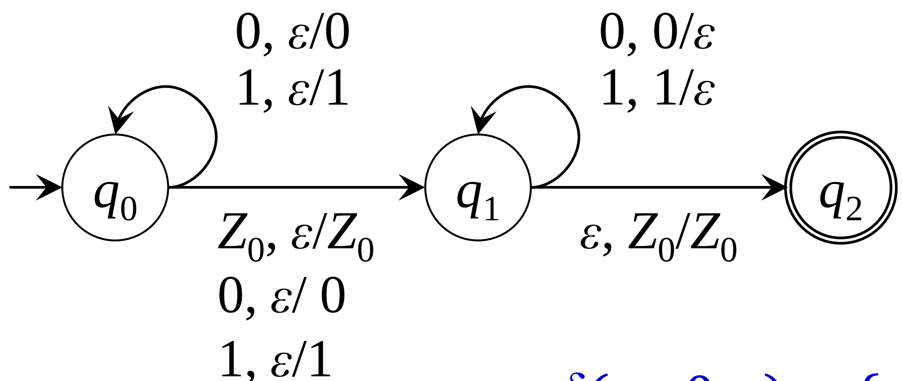
$\delta(q_1, 0, 0) = \{q_1, \varepsilon\}$

$\delta(q_1, 1, 1) = \{q_1, \varepsilon\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{q_2, Z_0\}$

$\forall q{\in}Q \cdot (|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)| = 1 \rightarrow$
$(\forall a{\in}\Sigma, X{\in}\Gamma \cdot \delta(q, a, X) =$
$\delta(q, \varepsilon, X) = \delta(q, a, \varepsilon) = \emptyset))$

# 将例7.3的图7-5确定化




$\forall q \in Q, a \in \Sigma, X \in \Gamma \cdot$
$(|\delta(q, a, X)| + |\delta(q, a, \varepsilon)| + |\delta(q, \varepsilon, X)| = 1$
$\wedge\, \delta(q, \varepsilon, \varepsilon) = \emptyset)$

$\forall q \in Q \cdot (|\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)| = 1 \rightarrow$
$(\forall a \in \Sigma, X \in \Gamma \cdot \delta(q, a, X) =$
$\delta(q, \varepsilon, X) = \delta(q, a, \varepsilon) = \emptyset))$

$\delta(q_0, 0, \varepsilon) = \{q_0, 0\}$

$\delta(q_0, 1, \varepsilon) = \{q_0, 1\}$

$\delta(q_0, Z_0, \varepsilon) = \{q_1, Z_0\}$

$\delta(q_0, 0, \varepsilon) = \{q_1, 0\}$

$\delta(q_0, 1, \varepsilon) = \{q_1, 1\}$

$\delta(q_1, 0, 0) = \{q_1, \varepsilon\}$

$\delta(q_1, 1, 1) = \{q_1, \varepsilon\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{q_2, Z_0\}$

# DPDA的语言

- 定理7.7 如果$L$是正则语言，则存在DPDA $P$有$L=L(P)$。
- DPDA可以模拟DFA，只需要栈不起作用即可。
- DPDA的语言包含正则语言，但包含于CFL。
- 定理7.8　DPDA的以终结状态方式接受的语言没有固有歧义性。
- 这个定理告诉我们，对任意一个DPDA，总存在一个无歧义的上下文无关文法。证明略。

# 小结

- PDA定义、转移函数
- PDA的瞬时描述、直接移动、移动
- PDA的语言、两种接受方式
- DPDA

- 作业：

习题7.1、7.2(2)、7.7(1)

注意，对习题7.1题目有扩充如下所示：

- 把习题7.1的“（不包括死亡线索）”删除掉。
- 把(1)010和(2)101分别扩充为 (1)010010和(2)100101001。
- 该习题中提到的图7-8应按照ppt上的例6所示。