

习题 5.1 设计 CFG 识别下列语言:

(1)  $\{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ 或 } j \neq k\}$ .

(2) 字母表  $\{a, b\}$  上的非  $ww$  形式的串集合, 其中  $w$  是  $\{a, b\}$  上的符号串。

(3) 所有 0 的个数是 1 的个数 2 倍的 0-1 串的集合。

(1) 不妨按  $i \neq j$  或  $j \neq k$  分别构造, 然后分为  $i < j, i > j, j < k, j > k$

则可得  $S \rightarrow S_1 \mid S_2$

$S_1 \rightarrow A_1 C \mid A_2 C$

$A_1 \rightarrow a A_1 \mid a A_1 b \mid a$

$A_2 \rightarrow A_2 b \mid a A_2 b \mid b$

$C \rightarrow c C \mid \varepsilon$

$S_2 \rightarrow A B_1 \mid A B_2$

$B_1 \rightarrow b B_1 \mid b B_1 c \mid b$

$B_2 \rightarrow B_2 c \mid b B_2 c \mid c$

$A \rightarrow a A \mid \varepsilon$

习题 5.4 假设有 CFG  $G$ , 它的任何候选式都不为  $\varepsilon$ 。如果  $w \in L(G)$ ,  $w$  有一个  $m$  步直接推导, 证明  $w$  有一个包含  $|w|+m$  个节点的语法树。

证: 每次直接推导, 都会将 1 个非终结符替换或产生式右部,

对应语法树的一个内部节点展开

$\therefore$  共  $m$  步直接推导  $\therefore$  有  $m$  个内部节点,

且在  $m$  步推导后得到了  $|w|$  个叶子节点,

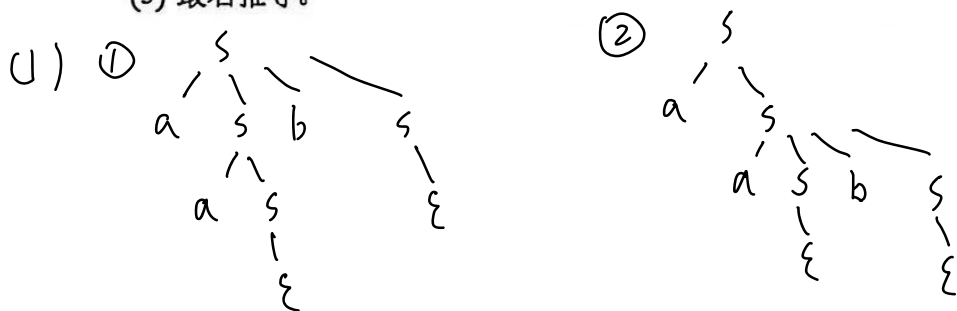
$\therefore w$  有一个包含  $|w|+m$  个节点的语法树

习题 5.6 考虑一个歧义性的文法  $S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \varepsilon$ , 试验证串  $aab$  有两个:

(1) 语法树;

(2) 最左推导;

(3) 最右推导。



(2) ①  $S \rightarrow aSbS \rightarrow a aS bS \rightarrow aa \varepsilon bS \rightarrow aab \varepsilon \rightarrow aab$

②  $S \rightarrow aS \rightarrow a aSbS \rightarrow aa \varepsilon bS \rightarrow aab \varepsilon \rightarrow aab$

(3) ①  $S \rightarrow aSbS \rightarrow aSb \varepsilon \rightarrow aSb \rightarrow a aS b \rightarrow aa \varepsilon b \rightarrow aab$

②  $S \rightarrow aS \rightarrow a aSbS \rightarrow aaSb \varepsilon \rightarrow aaSb \rightarrow aa \varepsilon b \rightarrow aab$

习题 5.7 证明习题 5.6 中的文法识别的语言是串的任何前缀所包含  $a$  的个数不少于所包含  $b$  的个数。

基础: 若  $S \rightarrow \varepsilon$ ,  $S$  为空串, 的确满足

假设: 若对于  $S$  的子串, 已有  $\forall w \in L(G)$  时,  $a(w) \geq b(w)$ ,

分别为  $w$  中的  $a$  与  $b$  个数,

则 ①  $S \rightarrow aS$  时,  $S \rightarrow aS \rightarrow aW_1$ ,

则此时  $w = aW_1$ ,  $a(w) = 1 + a(W_1)$ ,  $b(w) = b(W_1)$

由归纳假设已有  $a(W_1) \geq b(W_1)$   $\therefore a(w) = 1 + a(W_1) > b(w) = b(W_1)$

②  $S \rightarrow aSbS$  时,  $S \rightarrow aW_1 bW_2$ ,  $w = aW_1 bW_2$

有  $a(W_1) \geq b(W_1)$ ,  $a(W_2) \geq b(W_2)$

$\therefore a(w) = 1 + a(W_1) + a(W_2) \geq 1 + b(W_1) + b(W_2) = b(w)$

综上, 证毕

习题 5.8 消除习题 5.6 中的文法的歧义性。

$$S \rightarrow aSbS \mid aT \mid \epsilon$$

$$T \rightarrow aT \mid \epsilon$$

习题 5.10 对 CFG  $G: S \rightarrow ASB \mid \epsilon \quad A \rightarrow aAS \mid a \quad B \rightarrow SbS \mid A \mid bb$ , 分别完成:

(1) 写出  $\bar{e} \cdot G$ ;

(2) 写出  $\bar{u}\bar{e} \cdot G$ ;

(3) 写出  $ag\bar{u}\bar{e} \cdot G$ .

(1) 可发现另有  $S$  可空

$$\begin{aligned} \therefore \bar{e} \cdot G \text{ 为: } & S \rightarrow ASB \mid AB \mid \epsilon \\ & A \rightarrow aAS \mid aA \mid a \\ & B \rightarrow SbS \mid bS \mid b \mid SbS \mid A \mid bb \end{aligned}$$

(2) 可找到单位产生式有  $B \rightarrow A$ ,

$$\begin{aligned} \therefore \bar{u}\bar{e} \cdot G \text{ 为 } & S \rightarrow ASB \mid AB \mid \epsilon \\ & A \rightarrow aAS \mid aA \mid a \\ & B \rightarrow SbS \mid bS \mid Sb \mid b \mid aAS \mid aA \mid a \mid bb \end{aligned}$$

(3) 由于  $A \rightarrow a$ ,  $B \rightarrow b \mid bb$   $\therefore$  没有无产生变元,  $g\bar{u}\bar{e} \cdot G = \bar{u}\bar{e} \cdot G$

$\therefore S, A, B$  均可达  $\therefore$  无不可达符号

$$\begin{aligned} \therefore ag\bar{u}\bar{e} \cdot G = \bar{u}\bar{e} \cdot G \text{ 为 } & S \rightarrow ASB \mid AB \mid \epsilon \\ & A \rightarrow aAS \mid aA \mid a \\ & B \rightarrow SbS \mid bS \mid Sb \mid b \mid aAS \mid aA \mid a \mid bb \end{aligned}$$

习题 5.13 对文法  $S \rightarrow aAa | bBb | \varepsilon$   $A \rightarrow C | a$   $B \rightarrow C | b$   $C \rightarrow CDE | \varepsilon$   $D \rightarrow A | B |$

$ab$ , 要求同习题 5.10。

(1) 求  $\bar{e} \cdot G$ : 有  $S \rightarrow \varepsilon$ ,  $C \rightarrow \varepsilon$ ,  $A \rightarrow C \rightarrow \varepsilon$ ,

$B \rightarrow C \rightarrow \varepsilon$ ,  $D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow \varepsilon$

$\therefore S, A, B, C, D$  都闭包

$\therefore S \rightarrow aAa | aa | bBb | bb | \varepsilon$

$A \rightarrow C | a$

$B \rightarrow C | b$

$C \rightarrow CDE | CE | DE | E$

$D \rightarrow A | B | ab$

(2) 求  $\bar{u} \bar{e} \cdot G$ : 单位产生式有  $A \rightarrow C$ ,  $B \rightarrow C$ ,  $D \rightarrow A$ ,  $D \rightarrow B$ ,  $C \rightarrow E$

$\therefore S \rightarrow aAa | bBb | \varepsilon | aa | bb$

$A \rightarrow CDE | CE | DE | E | a$

$B \rightarrow CDE | CE | DE | E | b$

$C \rightarrow CDE | CE | DE | E$

$D \rightarrow CDE | CE | DE | E | a | b | ab$

(3) 先求  $\bar{u} \bar{e} \cdot G$ :

可以发现,  $C, E$  都是无产出变元

$\therefore S \rightarrow aAa | bBb | aa | bb | \varepsilon$

$A \rightarrow a$   $B \rightarrow b$

$D \rightarrow a | b | ab$

再求  $ag\bar{u}\bar{e}-G$ :

可以发现:  $D$ 是不可达变元

$\therefore$  最终结果为  $S \rightarrow aA/a/aA/bBb/bb/\epsilon$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$