04. VaR(Value at Risk)

VaR(Value at Risk)는 위험을 금액으로 표현하여 이해하기 쉬운 위험의 측정치이다. *VaR*의 측정을 위해서 필요한 것이 기간에 따른 기대수익률과 분산의 조정이 되므로, 이를 먼저 확인한 후 *VaR*의 측정에 관해 설명하도록 한다.

(1) 기간에 대한 조정

*VaR*를 측정하기 위해서는 목표기간(보유기간)의 변화에 따라 기대수익률과 분산을 변환할 필요가 있다. 시계열 상관관계가 없는 수익률의 경우 이러한 변환은 아주 간단하게 된다.

우선 기간을 조정하기 위하여 두가지의 중요한 가정을 하기로 한다.

① 연속된 기간의 수익률간에 상관관계가 없다(이 가정은 현재의 자산가격이 그 자산에 관련된 정보를 모두 포함하고 있다는 효율적 시장을 가정하는 것과 일치한다).

② 수익률이 시간의 흐름에 관계없이 동질적으로 분포되어 있다.

이러한 가정하에서 기대수익률과 분산은 시간에 대하여 선형으로 증가한다. 그리고, 분산이 선형으로 증가하므로 표준편차는 시간의 증가에 따라 체감적으로 증가하게 된다. 예를 들어 월간 기대수익률을 $E(R_{1개월})$, 일별수익률의 분산을 $\sigma^2_{1개월}$이라고 할 때, 이를 연간 기대수익률과 분산, 그리고 변동성으로 나타내면 다음과 같다.

$$E(R_{1년}) = E(R_{1개월}) \times 12 \quad \text{(식9)}$$

$$Var(R_{1년}) = Var(R_{1개월}) \times 12 \quad \text{(식10)}$$

$$\sigma_{1년} = \sigma_{1개월} \times \sqrt{12} \quad \text{(식11)}$$

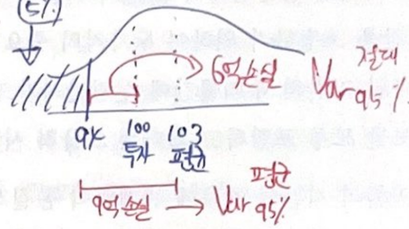
(2) VaR의 개념

*VaR*는 "c%의 확신을 가지고 정상적인 시장여건 하에서 어떤 개별 포지션 또는 포트폴리오 포지션의 N기간동안 발생할 수 있는 최대손실금액 X"로 정의된다. 여기에서 $X = VaR$이고 N =목표기간(보유기간)이며 c는 신뢰수준을 나타낸다. *VaR*는 무엇을 기준으로 손실금액을 측정하느냐에 따라 다음과 같이 2가지 방법으로 정의된다.

① 평균기준 *VaR*

평균기준 *VaR*에서는 포트폴리오의 기대수익률을 기준으로 기대수익률 이하를 손실로 보아 *VaR*를 구하게 된다. 예를 들어 현재 포트폴리오의 가치가 100억원, 1개월 후 예상수익률은 3%이며, 1개월 후 포트폴리오의 가치가 94억원 이하가 될 가능성이 5%라고 하자. 그러면 1개월 후 포트폴리오의 가치는 103억원이 될 것으로 예상이 된다. 그리고 포트폴리오의 가치가 103억원 이하가 되는 것을 손실이라고 볼 때, 1개월 후 포트폴리오의 가치가 94억원일 때 손실액은 9억원이 된다. 따라서 손실액이 9억원 이하가 될 가능성이 95%가 되는데, 이 때의 손실액을 신뢰수준 95%에서의 평균기준 *VaR*라고 한다.

1개월 후 포트폴리오의 가치가 94억원일 때 1개월간 수익률은 −6%가 되는데 이를 R^*이라고 할 때 평균기준 *VaR*는 다음과 같이 구할 수 있다. 5%



$$VaR^{평균}_{95\%} = W_0\left\{E(R) - R^*\right\} \quad \text{(식12)}$$

$$= 100억 \times \left\{3\% - (-6\%)\right\} = 9억원$$

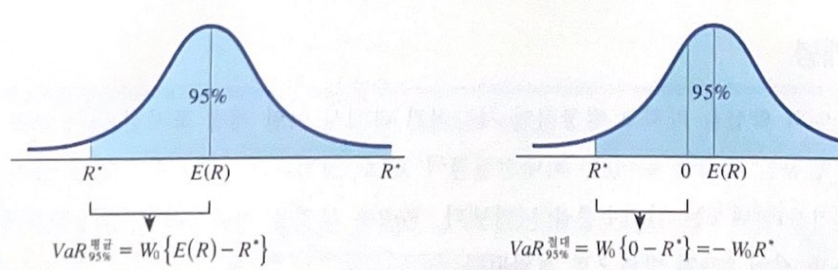
② 절대손실기준 *VaR*

절대손실기준 *VaR*에서는 원금을 기준으로 포트폴리오의 가치가 원금이하가 되는 경우를 손실로 보아 *VaR*를 구하게 된다. 따라서 절대손실기준 *VaR*는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$VaR^{절대}_{95\%} = W_0\left\{0 - R^*\right\} = -W_0R^* \quad \text{(식13)}$$

$$= 100억 \times \left\{0\% - (-6\%)\right\} = -100억 \times (-6\%) = 6억원$$

그림 4 ***VaR*의 측정**



(a) 평균기준 *VaR* (b) 절대손실기준 *VaR*

(3) 정규분포와 *VaR*의 측정

수익률분포가 정규분포를 이루는 경우 표준정규분포변수 또는 표준화계수(Z)를 이용하여 *VaR*를 구할 수 있다. 우선 정규분포변수는 다음과 같이 표준정규분포변수로 전환이 가능하다.

$$Z = \frac{R^{*} - E(R)}{\sigma} \qquad \text{(식14)}$$

이 때 표준정규분포 변수인 Z는 신뢰수준에 따라 다르게 설정된다. 예를 들어 표준정규분포에서 Z가 -1.64이하가 될 확률이 5%이므로, 신뢰수준이 95%인 경우 Z는 -1.64가 되어야 한다. (식14)를 (식12)에 대입하면 다음과 같이 평균기준 *VaR*를 구할 수 있다. 이 때 *VaR*는 손실금액을 나타내므로 Z를 대입할 때 (−)부호를 제외한 수치만을 대입하여야 한다. "얼마나 위험한 지" Z

$$VaR_{평균} = W_0\left\{E(R) - R^{*}\right\} = W_0 \cdot Z \cdot \sigma \qquad \text{(식15)}$$

원금 × 얼마나 위험한 × Z
W_0 σ Z

절대손실기준 *VaR*는 평균기준 *VaR*보다 기대수익만큼 작으므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$VaR_{절대} = W_0 \cdot \left\{Z \cdot \sigma - E(R)\right\} = W_0 \cdot Z \cdot \sigma - W_0 E(R) \qquad \text{(식16)}$$

예제 05 ●●● 중급

현재 시장에서 A주식이 거래되고 있는데, 주가를 분석한 결과 다음과 같은 자료를 얻을 수 있었다.

현재 주가	10,000
연간 기대수익률	10%
연간 표준편차	20%

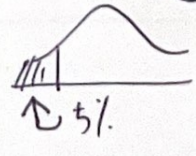
A주식의 수익률 확률분포가 정규분포를 따른다고 가정할 때 다음 물음에 답하라.

Z(표준정규분포 변수)	1	1.64	1.96	2
$\Pr(z \mid 0 \le z \le Z)$	0.3413	0.4500	0.4750	0.4772

물음 1 A주식의 연간 수익률이 −10%이하로 하락할 확률은 얼마인가?

물음 2 A주식의 1년 후 주가가 7,000원 이하가 될 확률은 얼마인가?

물음 3 투자자 甲이 현재 A주식에 1주를 투자하였을 경우, 신뢰수준 95%에서의 보유기간 1년의 평균기준 *VaR*는 얼마인가?



물음 4 (물음3)에서 절대손실기준 VaR는 얼마인가?

물음 5 보유기간이 6개월인 경우 (물음3)과 (물음4)에 답하라.

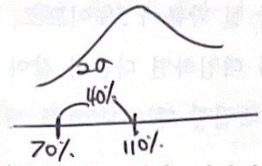
예제 해답

(1) $Z = \dfrac{R - E(R)}{\sigma} = \dfrac{(-10\%) - 10\%}{20\%} = -1$

$\Pr(R \leq 10\%) = \Pr(Z \leq 1) = 0.5 - 0.3413 = 15.87\%$

(2) $Z = \dfrac{R - E(R)}{\sigma} = \dfrac{(-30\%) - 10\%}{20\%} = -2$

$\Pr(R \leq 30\%) = \Pr(Z \leq 2) = 0.5 - 0.4772 = 2.28\%$



▶해설 1년 후 주가가 7,000원이 되었을 경우의 수익률은 -30%이다. 따라서 주가가 7,000원 이하가 될 확률은 수익률이 -30% 이하가 될 확률과 동일하다.

(3) 현재 투자자 甲이 보유하고 있는 A주식에 대한 VaR의 경우 신뢰수준이 95%이므로 표준화계수 Z는 -1.6가 된다. 이를 가지고 수익률을 역산하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Z = \frac{R^* - E(R)}{\sigma} \rightarrow -1.64 = \frac{R^* - 10\%}{20\%} \rightarrow R^* = -22.8\%$$

이는 1년 후 수익률이 -22.8%이하가 될 확률이 5%라는 의미가 된다. 이를 가지고 평균기준 VaR를 구하면 다음과 같다.

$$VaR^{평균}_{95\%} = W_0\{E(R) - R^*\} = 10{,}000 \times \{10\% - (-22.8\%)\}$$
$$= W_0 \cdot Z \cdot \sigma = 10{,}000 \times 1.64 \times 20\% = 3{,}280\text{원}$$

이것이 의미하는 바는 정상적인 시장여건하에서 A주식 1주는 95%의 확신으로 1년 후 발생할 수 있는 최대손실금액이 3,280원이라는 것이다.

(4) $VaR^{절대}_{95\%} = W_0 \cdot R^* = 10{,}000 \times (-22.8\%)$

$= VaR^{평균}_{95\%} - W_0 E(R) = 3{,}280 - 10{,}000 \times 10\% = 2{,}280\text{원}$

▶해설 절대손실기준 VaR는 원금을 기준으로 그 이하인 경우를 손실로 본 VaR이므로, 손실의 기준을 0%로 한 평균기준 VaR로 생각하면 된다.

(5) $E(R_{6개월}) = E(R_{1년}) \times 0.5 = 10\% \times 0.5 = 5\%$

$\sigma_{6개월} = \sigma_{1년} \times \sqrt{0.5} = 20\% \times \sqrt{0.5} = 14.14\%$

$VaR^{평균}_{95\%} = W_0 \cdot Z \cdot \sigma = 10{,}000 \times 1.64 \times 14.14\% = 2{,}329\text{원}$

$VaR^{절대}_{95\%} = VaR^{평균}_{95\%} - W_0 E(R) = 2{,}329 - 10{,}000 \times 5\% = 1{,}829\text{원}$

(4) 포트폴리오의 *VaR*

*VaR*는 위험을 금액으로 측정하므로 합산이 용이하다는 장점이 있다. 즉, 금융자산으로 포트폴리오를 구성한 경우 포트폴리오의 전체적인 위험을 측정하는 것이 쉽다는 것이다. 포트폴리오의 *VaR*는 단순합산하는 방식이 아니며, 마코위츠의 완전공분산 모형과 유사한 형태로 계산한다.

어느 자산의 수익률이 정규분포를 이룬다고 가정할 경우 평균기준 *VaR*는 다음의 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$VaR = W_0 \cdot Z \cdot \sigma \qquad \text{(식17)}$$

포트폴리오의 *VaR*를 구할 때에는 포트폴리오를 하나의 자산으로 보고 포트폴리오의 표준편차를 (식17)에 대입하면 된다.

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{AB} \qquad \text{(식18)}$$

$$VaR_p = W_p \cdot Z \cdot \sigma_p \qquad \text{(식19)}$$

이러한 포트폴리오 *VaR*는 개별자산들의 *VaR*를 이용하여 구할 수도 있다. W_A, W_B는 A주식과 B주식의 가치이고, W_{AB}는 A주식과 B주식가치의 합이라고 할 때, 이를 이용하여 (식18)을 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_p^2 = \frac{W_A^2}{W_{AB}^2}\sigma_A^2 + \frac{W_B^2}{W_{AB}^2}\sigma_B^2 + 2\frac{W_A}{W_{AB}}\frac{W_B}{W_{AB}}\sigma_A\sigma_B\rho_{AB} \qquad \text{(식20)}$$

양변에 W_{AB}^2과 Z^2을 곱하면 다음의 식이 도출된다.

$$W_{AB}^2Z^2\sigma_p^2 = W_A^2Z^2\sigma_A^2 + W_B^2Z^2\sigma_B^2 + 2W_AZ\sigma_A \times W_BZ\sigma_B \times \rho_{AB} \qquad \text{(식21)}$$

(식21)을 정리하면 다음과 같이 개별자산의 *VaR*와 포트폴리오의 *VaR*의 관계를 도출할 수 있다.

$$VaR_p^2 = VaR_A^2 + VaR_B^2 + 2 \times VaR_A \times VaR_B \times \rho_{AB} \qquad \text{(식22)}$$

포트폴리오의 *VaR*는 포트폴리오에 속한 개별자산별로 구분할 수 있는데, 이를 공헌 *VaR*라고 한다.

$$VaR_p = \text{A주식의 공헌 } VaR + \text{B주식의 공헌 } VaR \qquad \text{(식23a)}$$

$$= VaR_p \times \text{A주식의 공헌비율} + VaR_p \times \text{B주식의 공헌비율} \qquad \text{(식23b)}$$

$$= VaR_p \times w_A\frac{\sigma_{Ap}}{\sigma_p^2} + VaR_p \times w_B\frac{\sigma_{Bp}}{\sigma_p^2} \qquad \text{(식23c)}$$

V 17

예제 06 ●●● 고급

펀드매니저 甲은 A주식과 B주식으로 다음과 같이 포트폴리오를 구성하고 있다.

구분	A주식	B주식
투자금액	3억원	5억원
1개월 수익률의 표준편차	5%	8%
두 주식간 상관계수	0.7	

보유기간 1개월, 신뢰수준 95%(Z = 1.64)를 가정하고 다음 물음에 답하라.

물음 1 A주식에만 3억원을 투자한 경우의 평균기준 *VaR*를 구하라.

물음 2 B주식에만 5억원을 투자한 경우의 평균기준 *VaR*를 구하라.

물음 3 펀드매니저가 구성한 포트폴리오의 평균기준 *VaR*를 구하라.

물음 4 포트폴리오의 *VaR*를 A주식의 공헌 *VaR*와 B주식의 공헌 *VaR*로 구분하라.

예제 해답

(1) $VaR_A = 30{,}000 \times 1.64 \times 5\% = 2{,}460$만원

(2) $VaR_B = 50{,}000 \times 1.64 \times 8\% = 6{,}560$만원

(3) $\sigma_{AB} = 0.05 \times 0.08 \times 0.7 = 0.0028$

$w_A = \frac{3}{8} = 0.375,\ w_B = \frac{5}{8} = 0.625$

$\sigma_p^2 = 0.375^2 \times 0.05^2 + 0.625^2 \times 0.08^2 + 2 \times 0.375 \times 0.625 \times 0.0028 = 0.004164$

$\sigma_p = \sqrt{0.004164} = 6.4529\%$

$VaR_p = 80{,}000 \times 1.64 \times 6.4529\% = 8{,}466$만원

▶해설 개별주식의 *VaR*를 이용하여 다음과 같이 포트폴리오의 *VaR*를 구할 수도 있다.

$VaR_p^2 = 2{,}460^2 + 6{,}560^2 + 2 \times 2{,}460 \times 6{,}560 \times 0.7 = 71{,}677{,}840$

$VaR_p = \sqrt{71{,}677{,}840} = 8{,}466$만원

포트폴리오의 분산효과로 감소한 위험은 다음과 같이 측정가능하다.

위험감소효과 $= (VaR_A + VaR_B) - VaR_p = (2{,}460 + 6{,}560) - 8{,}466 = 554$만원

분산투자이득

(4) A주식의 공헌비율 $= w_A \dfrac{\sigma_{Ap}}{\sigma_p^2} = w_A \dfrac{w_A\sigma_A^2 + w_B\sigma_{AB}}{\sigma_p^2}$

$$= 0.375 \times \frac{0.375 \times 0.05^2 + 0.625 \times 0.0028}{0.004164} = 24.2\%$$

B주식의 공헌비율 $= w_B \dfrac{\sigma_{Bp}}{\sigma_p^2} = w_B \dfrac{w_A\sigma_{AB} + w_B\sigma_B^2}{\sigma_p^2}$

$$= 0.625 \times \frac{0.375 \times 0.0028 + 0.625 \times 0.08^2}{0.004164} = 75.8\%$$

A주식의 공헌 $VaR = VaR_p \times$ A주식의 공헌비율

$= 8{,}466 \times 24.2\% = 2{,}049$만원

B주식의 공헌 $VaR = VaR_p \times$ B주식의 공헌비율

$= 8{,}466 \times 75.8\% = 6{,}417$만원

(5) 채권의 *VaR*

채권의 *VaR*를 구하기 위해서는 먼저 채권가격의 변동성(price volatility)을 구해야 한다. 채권가격의 변동성은 만기수익률의 변동성(yield volatility)과 수정듀레이션을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta B = -\text{금액}D \cdot \Delta R \qquad \text{(식24a)}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta B}{B_0} = -\frac{\text{금액}D}{B_0} \cdot \Delta R = -\text{수정}D \cdot \Delta R \qquad \text{(식24b)}$$

$$\rightarrow \sigma_{\text{가격변동률}} = \text{수정}D \cdot \sigma_{\Delta R} \qquad \text{(식24c)}$$

채권가격의 변동성을 이용하여 다음과 같이 채권의 *VaR*를 구할 수 있다.

$$VaR_{bond} = W_0 \cdot Z \cdot \sigma_{\text{가격변동률}} = W_0 \cdot Z \cdot (\text{수정}D \cdot \sigma_{\Delta R}) \qquad \text{(식25)}$$

예제 07 ●●● 고급

펀드매니저 乙은 1억원의 채권을 보유하고 있다고 가정하자. 채권의 수정듀레이션은 3이고, 채권수익률의 월별 표준편차는 2%이다. 신뢰수준 95%, 보유기간 1개월을 기준으로 하는 채권의 *VaR*는 얼마인가?

V 17

예제 해답

$VaR = 1\text{억} \times 1.64 \times (3 \times 2\%) = 984\text{만원}$

▶해설 채권수익률의 표준편차가 2%이고 채권의 수정듀레이션은 3이므로, 채권가격의 변동률의 표준편차는 6%가 된다.

(6) *VaR*의 필요성

*VaR*는 다음과 같은 장점으로 인해 금융기관에서 주로 사용한다.

① *VaR*는 위험을 금액으로 측정하여 이해가능성이 높아서 위험을 비전문적 용어로 외부이해관계자에게 알리는 데 유용하다.

② 전통적 위험측정치는 합산이 불가능하다. 예를 들어 주식의 위험은 β로, 채권의 위험은 Duration으로 측정시 주식과 채권으로 구성된 포트폴리오의 위험은 측정할 수 없다. 그러나 *VaR*는 위험을 금액으로 측정하여 위험의 합산이 가능하다.

③ *VaR*는 위험을 금액으로 측정하므로 다양한 금융시장에서의 위험한 투자활동을 상호 비교할 수 있는 공통적인 기준치를 제공해 주며, 다양한 투자활동의 위험을 적절히 통제하는데 효과적이다.

④ 변동성(표준편차)은 기초변수의 불리한 움직임으로 발생하는 하향손실(Downside Risk)과 유리한 움직임으로 발생하는 상향이익(Upside Profit)을 모두 위험으로 간주하나 *VaR*는 하향손실만을 위험으로 간주한다.