Conditional VaR 모형을 사용한 최적자산배분에 관한 연구: 평균-분산 모형과 비교

김 진 호(이화여자대학교)*
김 윤 전(알리안츠생명)**

<요 약>

본 논문의 목적은 CVaR를 활용한 최적자산배분 전략을 도출하고 이를 전통적 평균-분산 모형에 의한 자산배분 전략과 비교하는 것이다. 이를 위해 포트폴리오를 구성하는 각 자산별로 수익률의 정규분포 여부를 살펴보았다. 수익률이 정규분포를 따르는 경우 Markowitz 모형이 좀더 지지를 받아 실제적으로 두 모형간 차이가 존재하지 않을 수도 있기 때문이다. Jarque-Berra 검정 결과, KOSPI 수익률에서는 정규분포 가정이 기각되지 않았던 반면 국고채와 회사채에서는 각각 기각되었다.

다음으로 subsampling 방법과 bootstrap 시뮬레이션 방법을 통해 CVaR 모형과 평균-분산 모형 간 최적자산배분 비율의 차이가 유의적으로 존재하는지 여부를 살펴본 결과, 최적자산배분 비율에 있어서 두 모형은 약간의 차이를 보이지만 이는 유의하지 않은 것으로 나타났다. 정규분포라는 제약적 가정을 부과한 평균-분산 모형과 분포에 대한 제약적 가정 없이 행해진 CVaR 모형의 최적자산배분 결과가 유의한 차이를 보이지 않았다는 것은 중요한 시사점을 갖는다.

CVaR 모형의 경우 이론적으로 표준편차나 VaR가 갖는 한계를 보완한다는 평가를 받음에도 불구하고 이를 사용한 최적자산배분 전략과 통상적 평균-분산 모형간 차이가 유의하지 않다는 사실은, 평균-분산 모형에 비해 상대적으로 많은 시간과 노력을 요하는 보다 복잡한 CVaR 모형의 사용이 적어도 자산배분전략 차원에서는 비용/편익 측면에서 굳이 바람직하지 않을 수도 있다는 점을 시사한다.

핵심단어: 최적자산배분, conditional Value-at-Risk, 평균-분산 모형, subsampling 방법, bootstrap 시뮬레이션

---

* 연락담당저자. 이화여자대학교 경영대학 부교수, 주소: 서울시 서대문구 대현동11-1, 120-750; E-mail: jhkim@ewha.ac.kr; Tel.: 02)3277-2800; Fax; 02)3277-2835.
** 알리안츠 생명, 리스크관리본부, ALM부. E-mail: yjkim@allianzlife.co.kr
본 논문 내용 중 일부가 두 번째 저자의 이화여자대학교 대학원 학위 논문으로 발표되었음을 밝혀둡니다.

Abstract

Conditional Value-at-Risk Approach in the Portfolio Optimization

JinHo Kim*
Ewha Womans University, Seoul, Korea
Yoon-Jeon Kim**
Allianz Life Insurance Co., Ltd. Seoul, Korea

Traditional measure of risk such as variance may not provide proper metrics of risk when asset returns exhibit non-standard normal distributions. The lack of convexity in Value-at-Risk (VaR) as a measure of risk makes it also unsuitable for portfolio optimization problems. Therefore, portfolio asset allocation choices derived under such risk measures, may not provide optimal risky portfolios. Conditional value-at-risk (CVaR), defined as a conditional expectation of loss beyond the threshold given by VaR. on the other hand, is shown to be a coherent and convex measure of risk even under wide sets of non-standard distributions. This study explores an application of CVaR as a measure of risk in portfolio management.

First, we set up an optimal asset allocation model by minimizing the CVaR as a risk measure under the given portfolio target return, and compared its asset allocation results with those of the traditional Mean-Variance portfolio optimization. Under the asset return's normal distribution, these two approaches may induce the same portfolio, however, the normality test conducted in this paper on the concerned assets' return gives only the mixed results on the normality.

In this study, we applied the simulation method to construct test statistics and performed hypothesis testing. Under the null hypothesis there exists no difference between the minimum-variance and minimum-CVaR portfolio weights. We executed simulations in order to induce the distribution of the test statistic and to examine whether the difference between two different asset allocation approaches lies within a statistically reliable confidence interval range. For this purpose, we used two simulation methods to test both null hypothesis: bootstrap and sub-sampling.

The bootstrap method relies on the characteristics of historical data of asset returns. Using the data of asset returns, we first constructed the vector

* Corresponding Author. Address: 11-1 Daehyun-Dong, Seodaemun-Gu, Seoul,120-750, Korea; E-mail: jhkim@ewha.ac.kr; Tel.: +82-2-3277-2800; Fax: +82-2-3277-2835.
** Allianz Life Insurance Co., Ltd. (Korea), Risk Management Division, ALM Department; E-mail: yjkim@allianzlife.co.kr

auto-regression model of asset returns as a parametric model. Then, we chose the vector auto-regression model with two lags for parsimony, but the choice of lags in the vector auto-regression model later turned out to have no effect on the major findings of this study. Given the estimated model of asset returns, we then randomly selected i.i.d. error terms of the vector auto-regression to simulate asset returns. We repeated the process several times and tabulated the results. The process is repeated for a given level of VaR confidence level, and each assumed required portfolio returns. For each set of asset returns thus determined, we then computed the minimum-variance and minimum-CVaR portfolio weights, respectively, and formed the test statistic distribution model.

We also used the sub-sampling method for a similar simulation test (See Whang and Kim (2003)) for a theoretical treatment and some applications of this method. Instead of using the asset returns data from the entire sample period all at once, we selected sub-samples of asset returns data, and compute the minimum-variance and minimum-CVaR portfolios weights respectively from each sub-sample of returns data. Thus, the estimates of portfolio weights difference from each sub-sample would form distributions for the test statistic.

The hypothesis testing results of these two different simulation methods show the same conclusion that the point estimation difference between Mean-CVaR and Mean-Variance model's asset allocation, are not statistically significant. The fact that two different asset allocation approaches in the portfolio optimization is not statistically distinguishable should have the important interpretation, both academically and practically.

How one measures and manages risks is one of the central tenets of financial management. From the perspective of risk management, any coherent risk measure should not only provide a proper risk metric per se but also a consistent and applicable risk management paradigm in which portfolio risks can be correctly addressed and optimal risk allocation rules can be properly determined and acted upon. In this regard, this paper offers a practical application of CVaR as an alternative risk measure for portfolio choice problems and assess the applicability and usefulness of CVaR as a risk measure in a real life portfolio decision. Although CVaR concept has recently received much positive attention as a better risk measure in overcoming the shorts that standard deviation and VaR are constrained to, its theoretical complexity together with lengthy computational time, especially in simulation testing, has been quite burdensome.

In conclusion, this paper shows that CVaR is not significantly different from or better than the traditional Mean-Variance approach in the portfolio optimization, and hence it does not seem to be efficient at least as the optimal asset allocation strategy.

Keywords: Portfolio optimization; Conditional Value-at-Risk; Mean-variance approach; Sub-sampling; Bootstrapping simulation

1. 서론

Value-at-Risk(이하 VaR)는 전통적 위험측정지표인 표준편차와 달리 비정규분포 및 비선형 모형에서도 유용한 정보를 제공하여 주며, 상대적으로 이해하기 쉽다는 장점에 따라 새로운 위험측정지표로서 자리잡았다. 금융위험관리의 국제 기준으로 준비되고 있는 Basel II에서도 VaR는 시장위험 및 신용위험 측정 기준으로 사용될 예정이다. 그러나 이렇듯 VaR 개념이 학문 영역과 실무 영역에서 지난 수년간 누려온 광범위하고 깊은 관심에도 불구하고, VaR가 갖는 본질적 한계점들은 이 새로운 위험측정지표가 단순한 위험의 측정에서 나아가 최적자산 및 위험자본 배분, 위험조정 성과평가, 위험자산의 가치평가 등 실제 위험관리 차원에서 활용됨에 있어 일부 한계를 갖는다는 지적을 받고 있다.

VaR의 대표적 한계로서 지적되는 것은 sub-additivity 및 convexity의 특성을 충족시키지 못하고 있다는 점이다(Artzner et al.(1999)). sub-additivity의 결여는 포트폴리오를 구성하는 자산이 3개 이상인 경우 비체계적 위험의 제거를 통한 분산효과를 제대로 측정할 수 없게 하며, convexity가 충족되지 않을 경우 위험조정 수익률 극대화를 통한 최적위험자산배분 전략을 추구할 때 최적 해를 얻는 것이 원천적으로 불가능할 수도 있게된다.

이러한 한계점들에 대해 VaR의 대안으로서 제시된 개념이 Conditional VaR (이하 CVaR)이다[1]. 이는 일정한 신뢰수준 하에서 발생 가능한 기대손실 또는 VaR를 초과하는 손실 부분의 조건부 기대값을 나타내는데, CVaR는 VaR가 갖지 못하는 sub-additivity 및 convexity의 특성을 충족시킨다. 따라서 CVaR는 위험측정지표가 갖추어야 할 여러 조건들을 충족시킬 뿐 아니라, VaR가 고려하지 못하는 부분, 즉 신뢰수준을 벗어난 극단적 손실 영역까지를 추가적으로 고려할 수 있다는 장점으로 인해 VaR의 한계를 극복하는 적절한 대안적 개념으로 평가받고 있는 것이다.

위험측정지표가 단순히 위험을 측정하는 데 그친다면 실무적 효용성이 크지 않을 것이다. 위험관리의 의미는 적절한 수준의 위험과 기대수익률에 대한 목표

1) Expected Shortfall 이라고도 한다.

를 설정하고 현재 위험 수준을 측정한 다음, 이들을 비교하여 필요한 위험조정 과정을 수행하는 것이다. 이때 위험측정지표들은 목표 수준의 포트폴리오를 구성하는 데 필수적이다.

자산배분에 관한 기존 연구들은 시장상황 변화에 대한 대응에 따라 분류할 경우 전략적 자산배분(Strategic Asset Allocation), 전술적 자산배분(Tactical Asset Allocation) 및 보장된 자산배분(Insured Asset Allocation)으로 나누어지며, 위험측정방법에 따라 분류할 경우 평균-분산 모형, 하방(下方)위험(Downside Risk) 통제 모형 및 확률적 지배(Stochastic Dominance) 모형 등으로 구분할 수 있다(김진호(2002)). 이중에서 특히 VaR 개념을 최적자산배분에 활용한 연구로서 Mausser and Rosen(1998), Gourierroux, Laurent and Scaillet(2000), Campbell, Huisman and Koedijk(2001), Gaivoronski and Pflug(1999), 신성환(1998), 김진호(2002) 등을 들 수 있다.

한편 VaR가 갖는 한계점을 인식하고 새로운 위험측정지표를 사용하여 최적자산배분을 다룬 연구들도 최근 많이 등장하고 있다. Grootveld and Hallerbach(2000)는 위험 측정치로서 반분산(semi-variance)을 사용한 최적위험자산배분이 전통적 평균-분산 모형과 차이를 보이는가를 bootstrap 시뮬레이션 기법을 사용하여 다루었으며, Emmer, Kluppelberg and Korn(2000)은 평균-quantile 모형에서의 최적자산배분전략을 이론적으로 분석하였다. CVaR 개념을 사용한 최적자산배분을 다룬 연구로서는 Rockafellar and Uryasev(2000), Artzner et al.(1999), Embrechts(1999), Pflug(2000) 등을 들 수 있다.

그러나 새로운 위험측정지표가 갖는 개념적 우월성에도 불구하고 이를 사용한 최적자산배분이 과연 전통적 평균-분산 모형에 따른 자산배분전략과 유의한 차이를 보일 것인가에 관한 관심 또한 제기되었다. 새로운 개념들의 계산이 상대적으로 복잡하고 많은 계산시간을 요구하는데 반해, 자산배분 결과가 전통적 방법과 큰 차이를 보이지 않는다면 새로운 개념을 채택하는 것이 비용/편익 분석 측면에서 바람직하지 않을 수도 있기 때문이다. Rockafellar and Uryasev(2000)는 수익률 분포가 정규분포에서 멀어져 fat tail 이나 skewed 특성을 보일수록 CVaR 및 평균-분산 모형은 서로 다른 최적자산배분 형태를 보일 것이라고 주장한다. 이에 대해 Mausser and Rosen(1999), Gaivoronski and Pflug(2000), Larsen et al.(2002) 등은 CVaR 모형이 VaR 모형 또는 평균-분산 모형과 서로 다른 최적자산배분을 달성하는 경우들을 예시하고 있다. 한편, 김진호(2002)는 2자산으로 구성된 포트폴리오를 대상으로 평균-분산 모형과 평균-VaR 모형간 최적자산배분 전략간 차이를 부트스트랩 기법을 사용하여 분석한 결과, 차이가 유의적이지 않음을 보였다. 그러나 이 연구는 2가지 자산만으로 포트폴리오를 구성함으로써 sub-additivity 및 convexity 특성의 결여로 인한 VaR의 문제점을 고려하지 못했다는 한계를 갖는다.

따라서 본 논문은 VaR의 한계를 보완할 수 있는 새로운 위험측정지표로서 CVaR를 활용하여 최적자산배분 구성비를 도출하고, 이를 전통적 평균-분산 모형에 따른 배분 결과와 비교하는 것을 연구 목적으로 한다. 본 연구에서는 sub-additivity 및 convexity 특성의 결여로 인해 VaR의 경우에 있어서는 포트폴리오 최적화가 불가능한 3가지 자산으로 구성된 포트폴리오를 구성함으로써, 2가지 자산에 국한했던 김진호(2002)의 연구를 보완하고자 하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 다음 2절에서는 VaR의 한계에 대한 대안으로서 CVaR 개념을 소개하고 이를 사용한 최적자산배분을 다룬 기존 연구에 관해 정리한다. 3절에서는 수익률 자료의 기초 통계 제시 및 정규분포 검증 결과를 제시하고, 4절에서는 CVaR 모형 및 평균-분산 모형을 사용한 최적자산배분 전략 간 차이가 유의적으로 존재하는지를 실증 분석한 결과를 보인다. 마지막으로 5절에서 연구 결과를 종합하고 향후 연구방향을 제시한다.

2. CVaR를 사용한 최적자산배분

2.1 기존 연구

Artzner(1999)는 coherent 위험측정기법이 충족시켜야할 조건들을 4가지로 나누어 제시하였다[2]. 이중 특히 위험조정수익률의 극대화를 통한 최적자산배분 전

2) 아래 식에서 ρ(X)는 기대수익률 X에 대한 위험측정값을 나타낸다.

1. Monotonicity

$$X \le Y \Rightarrow \rho(X) \le \rho(Y)$$

략을 수행하기 위해서는 위험측정지표가 볼록성(convexity)을 띄어야 한다. 그런데 제시된 요건들 가운데 positive homogeneity와 sub-additivity가 충족되면 위험측정지표는 볼록(convex)하게 된다(Artzner et al.(1999), Acerbi and Tasche(2002)). 이때 VaR는 sub-additivity의 결여로 인해 볼록성을 갖지 못하는 반면, CVaR는 4가지 필요 요건 모두를 갖춤으로 인해 볼록성을 갖게 된다(Hans Rau-Bredow(2002), Gourieroux, Laurent and Scaillet(2000)). 따라서 이는 VaR 보다는 CVaR가 최적자산배분 전략 측면에서 보다 바람직한 위험측정지표임을 나타내어준다. Acerbi and Tasche(2002), Acerbi, Nordio and Sirtori(2001) 역시 이러한 측면에서 CVaR 또는 Expected Shortfall의 사용을 지지한다.

Acerbi and Tasche(2002)는 Expected Shortfall이 연속적인 손실분포 하에서는 위험측정의 다른 지표들(Worst Conditional Expectation, Tail Conditional Expectation)과 일치하는 결과를 보이지만, 비연속적 분포에서 결과가 각각 다를 수 있음을 보이고, 결론적으로 Expected Shortfall이 가장 적합한(coherent) 위험측정기법이라고 밝혔다. 또한 Szego(2002)는 Markowitz의 평균-분산 모형이 두 가지 확률변수만으로 분포를 완벽하게 설명할 수 있기 때문에 편리하지만, fat-tail, skewed 된 분포의 경우 분명한 한계점을 가지므로 VaR가 등장하게 되었다고 밝혔다. 그러나 VaR 또한 sub-additivity의 결여로 적절한 위험측정방법이 될 수 없으므로 대안 개념으로서 CVaR를 소개하고 있다.

한편 CVaR를 이용하여 최적자산배분을 시도한 연구로는 Rockafellar and Uryasev(2000), Krokhmal, Palmquist and Uryasev(2002), Topaloglou, Vladimirou and Zenios(2002), Andersson, Mausser, Rosen and Uryasev(2001) 등이 있다. 이들은 대부분 기대수익률 제약 하의 CVaR 최소화, 또는 CVaR 제약하의 기대수익률 극대화를 통해 최적화를 수행하고 있다. 특히 Rockafellar and Uryasev(2000)은 여러 개 자산으로 구성된 포트폴리오의 경우 CVaR가 상

2. Positive homogeneity (모든 $\lambda \geq 0$ 에 대해)
$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
3. Translation invariance (모든 실수 α에 대해)
$\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha$
4. Sub-additivity
$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$

품들간의 상관관계를 고려하여 위험을 보다 정확하게 측정한다는 것을 보였다.

Topaloglou, Vladimirou and Zenios(2002)는 CVaR 모형과 MAD(Mean Absolute Deviation) 모형을 비교한 후, 정적 테스트(static backtesting)에서는 두 모형이 유사한 결과를 갖는 반면, 실제 데이터에 기초한 연속적인 기간에 따른 분석을 실시하는 동적 테스트(dynamic backtesting)에서는 CVaR 모형 헷징을 통한 사후(ex post) 실현수익률이 MAD 모형에 의한 수익률보다 높으므로 CVaR 모형이 상대적으로 우월하다고 결론지었다. Andersson, Mausser, Rosen and Uryasev(2001)는 포트폴리오 신용위험을 CreditMetrics 모형을 통해 구하고, 신용위험 포트폴리오 최적화를 위한 접근방법으로서 CVaR를 사용하였다.

또한 Rockafellar and Uryasev(2002)는 Conditional VaR, Upper Conditional VaR, Lower Conditional VaR를 구분하였는데, 연속적 손실분포 하에서 이들은 동일한 값을 갖지만, 비연속 분포에서는 이들 값이 달라질 수 있음을 보였다. Krokhmal, Palmquist and Uryasev(2002)는 CVaR 이외에도 거래비용, 유동성(포지션제약) 등을 제약조건으로 하여 선형계획법(LP)을 통해 기대수익률을 극대화시키고, 결과를 평균-분산 모형과 비교하였다. 그래프 비교 결과, 두 모형은 뚜렷한 차이를 보이지 않았는데, 이들은 논문에서 사용된 수익률 분포가 정규분포와 유사하기 때문이었다고 해석하고 있다. 더불어 만일 skewed 분포를 갖는 데이터를 가지고 분석을 했다면 두 모형은 다른 결과를 보였을 것이라고 해석하였다. 그러나 아직까지 CVaR 모형과 평균-분산 모형간 최적자산배분 비율의 차이를 엄밀하게 계량 검증한 연구는 부족한 현실로서 본 논문은 이에 대해 다루고자 한다.

2.2 CVaR의 개념

$f(x,y)$를 자산배분비율 벡터 x, 수익률 벡터 y에 관한 손실함수로 정의한다. $f(x,y)$가 특정값(α)을 초과하지 않을 확률을 $\Psi(x,\alpha)$라고 정의하면 손실누적분포함수로서 $\Psi(x,\alpha)$는 다음과 같이 나타내어진다. 이때 $p(y)$는 수익률 벡터의 확률밀도함수를 나타낸다.

$$\Psi(x, \alpha) = \int_{f(x, y) \le \alpha} p(y)dy$$

(1)

이에 따라 VaR(=$\alpha(x,\beta)$)는 다음과 같이 정의될 수 있다.(β: 신뢰수준)

$$\alpha(x,\beta)=\min\{\alpha \in R : \Psi(x,\alpha) \ge \beta\} \quad (2)$$

이때 VaR를 초과하는 부분에 대한 조건부 기대값으로 정의되는 CVaR를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$CVaR_{\beta}(x) = \frac{E(f(x, y); f(x, y) \ge VaR_{\beta}(x))}{1-\beta}$$
$$= (1-\beta)^{-1} \int_{f(x, y) \ge VaR_{\beta}(x)} f(x, y)p(y)dy$$

(3)

그러나 이렇게 정의되는 CVaR 식은 VaR 값을 사전적으로 알아야 하는 불편함이 있으므로, 보다 간편하게 CVaR를 구할 수 있도록 하기 위해 Uryasev(2000) 및 Rockafellar and Uryasev(2000)는 식 (4)를 정의한 뒤, 이를 α에 대해 최소화시킬 경우 식 (5)와 같이 CVaR를 구할 수 있음을 보였다.

$$F_{\beta}(x, \alpha) = \alpha + (1-\beta)^{-1} \int_{y \in R^{m}} [f(x, y) - \alpha]^{+} p(y)dy$$

(4)

$$CVaR_{\beta}(x) = \min_{\alpha} F_{\beta}(x, \alpha) \quad (5)$$

한편 VaR의 경우 sub-additivity가 결여된 상태가 발생 가능하여 볼록성을 갖지 못함에 비해, CVaR의 경우는 항상 sub-additivity가 달성되므로 다수의 자산으로 구성되는 포트폴리오 최적화에 사용 가능함은 다음 식으로 표현 가능하다[3].

3) 간결한 증명은 Acerbi and Tasche(2002), pp. 1501-1502 참조.

$$VaR_\beta(a*X+(1-a)*Y) > a*VaR_\beta(X)+(1-a)*VaR_\beta(Y) \tag{6}$$

$$CVaR_\beta(a*X+(1-a)*Y) \le a*CVaR_\beta(X)+(1-a)*CVaR_\beta(Y)$$

(7)

2.3 CVaR를 사용한 최적자산배분 모형

본 논문의 목적은 CVaR를 이용하여 최적자산배분을 실시하고 그 결과를 평균-분산(Mean-Variance) 모형의 결과와 비교함으로써 두 모형간 결과에 유의한 차이가 존재하는지 살펴보고자 하는데 있다. 구체적으로 본 연구에서는 Uryasev(2000)의 연구를 바탕으로 포트폴리오 기대수익률을 제약조건으로 하고 CVaR를 최소화함으로써 포트폴리오 최적화를 수행하고자 한다. Uryasev(2000)는 구체적으로 이산분포에서 식 (5)의 추정을 위한 구체적 방법으로 선형계획법을 다음과 같이 제시하였다.

$$\underset{X,\alpha}{Min} \quad F_\beta(X,\alpha) = \alpha + q^{-1}(1-\beta)^{-1}\sum_{k=1}^{q} z_k$$

(8)

s.t. 1) X · 1 = 1 (where 1 = vector of ones)

2) $z_k \ge -Y^k X^T - \alpha$ (k=1,....q)

3) $\mu X^T \ge R_0$

4) $z_k \ge 0$ (k=1,....q)

위의 식에서 X는 자산배분 비율, Y^k는 자산수익률 벡터를 의미한다. 또한 z_k는 식 (4)에서 $[f(x,y)-\alpha]^+$ 부분을 나타내는 대용변수로서 항상 0 이상의 값을 갖게 된다. 이때 f(x,y) = $-Y^k X^T$ 가 된다. μ는 Y의 기대수익률 벡터가 되며, 과거 평균수익률로 이를 추정할 경우 $\mu = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} Y^k$ 이 된다. 마지막으로 R_0

는 목표요구수익률을 의미한다. 이때 흥미로운 것은 최적화된 α 값이 곧 VaR가 된다는 것이다(Uryasev(2000)). 따라서 최적자산배분 비율($= X^*$), CVaR($= F_\beta(X^*, \alpha^*)$) 및 VaR($= \alpha^*$)은 동시에 결정된다.

한편 CVaR와 비교하기 위한 Markowitz의 평균-분산모형은 자산수익률의 정규분포를 전제로 하므로, 금융자산 수익률의 분포가 fat tail 또는 skewed 특성을 가질 경우 위험을 왜곡 측정하여 그릇된 자산배분을 할 수 있음은 이미 지적된 바 있다. 또한 분산의 경우 손실(왼쪽 꼬리) 뿐 아니라 이득(오른쪽 꼬리)에 의해서도 영향을 받기 때문에 손실에 대한 위험을 제대로 측정하는데 한계를 가질 수 있다. 그럼에도 불구하고 평균-분산 모형은 계산의 용이성, 간편성 등으로 인해 일부 한계에도 불구하고 널리 이용되고 있는 것이 사실이다. 따라서 CVaR가 최적자산배분을 위한 위험측정지표로서 보다 안정적이고 적절한 도구가 될 수 있는지 여부를 판단하기 위해 이를 전통적 평균-분산 모형과 비교해 보는 것은 분명 의미 있는 일일 것이다.

수익률의 정규분포를 가정할 경우, VaR 값은 표준편차에 일정 계수를 곱한 값으로 나타나므로, 사실상 이때 평균-분산 모형과 평균-VaR 모형은 자산배분 결과에서 일치하게 된다[4]. 따라서 편의상 본 논문의 이하 내용에서는 CVaR 모형과 구분하여 평균-분산 모형과 평균-VaR 모형을 종종 같은 의미로 사용한다.

3. 자료의 기초 통계분석 및 정규성 검증

본 논문에서 포트폴리오 구성 자산으로 한국종합주가지수(KOSPI), 3년 만기 국고채와 무보증 회사채의 세 가지를 사용한다. 분석의 편의상 본 논문에서는 KOSPI를 완전 추적(track)하는 실시간 주가지수 상품이 존재한다고 가정을 하며, 이때 채권들은 만기 보유 목적의 투자유가증권 계정이 아니라 시세 차익을 겨냥하는 상품유가증권 계정에 속한 것이라고 본다.

4) 평균-분산 모형에 의한 최적자산배분 전략은 Campbell, Lo and McKinley(1997), pp. 184-185 참조.

이를 위해 사용한 자료는 1998년 9월 2일부터 1999년 8월 17일까지의 250개 일별 수익률 자료와 1998년 9월 9일부터 2003년 9월 3일까지의 265개 주별 자료이다. 이때 (보유기간) 수익률은 각 자산가격의 자연로그 차분으로 계산하였다.

<표 1>은 KOSPI, 3년 만기 국고채 및 회사채 수익률의 평균, median, 최대, 최소값, 표준편차를 각각 보여준다. 일별 자료에서 주식은 평균 수익률 0.415%, 표준편차 2.683%로서 채권들보다 고위험-고수익의 성향을 띄고 있으며, 채권들 중에서는 국고채가 회사채에 비해 미미한 차이이기는 하지만 보다 고위험-고수익을 나타내고 있음을 알 수 있다. 다만 주별 자료에서 주식은 여전히 고위험-고수익을 보였으나, 국고채가 회사채에 비해 고위험-저수익의 성향을 보였다[5].

<표 1> 수익률의 기초 통계

(단위:%)

1) 1998년 9월 2일부터 1999년 8월 17일까지 일별 자료

	KOSPI	국고채	회사채
평균	0.415	0.047	0.045
median	0.381	0.020	0.026
최대값	7.515	3.161	1.790
최소값	−7.625	−1.178	−1.951
표준편차	2.683	0.454	0.404

2) 1998년 9월 9일부터 2003년 9월 3일까지 주별 자료

5) 통상 회사채가 국고채보다 위험하고 따라서 위험프리미엄 만큼 수익률이 높다는 것은 신용위험을 말하는 것이다. 금리 변동에 따른 시장위험을 부담하는 시세 차익 겨냥 거래의 경우 국고채가 회사채보다 안전해야 할 이유는 없다. 다만 주별 자료에서 국고채가 회사채에 비해 고위험-저수익의 특성을 보인 것은 이례적 현상으로 추후 연구될 필요가 있다고 본다. 본 논문에서는 익명의 논평자의 제안에 따라 가장 최근까지의 자료를 분석한다는 입장에서 주별 자료의 결과를 포함시켰다. 비록 최근 자료는 아니지만 일별 자료는 각 자산이 고위험일수록 고수익을 보여 이론에 부합하고 있다.

	KOSPI	국고채	회사채
평균	0.337	0.197	0.210
median	0.278	0.195	0.198
최대값	16.519	2.838	3.327
최소값	-14.881	-2.109	-1.851
표준편차	4.988	0.654	0.630

<표 2>는 수익률들간 공분산을 나타낸다. 일별 및 주별 자료 각각의 분석기간 중에 대상 자산 수익률들은 陽의 상관관계를 갖음을 알 수 있다. 이는 금리 하락이 주가 상승과 함께 나타남을 의미한다.

<표 2> 수익률들간 공분산 행렬

1) 1998년 9월 2일부터 1999년 8월 17일까지 일별 자료

	KOSPI	국고채	회사채
KOSPI	7.198	0.411	0.398
국채	0.411	0.206	0.130
회사채	0.398	0.130	0.163

2) 1998년 9월 9일부터 2003년 9월 3일까지 주별 자료

	KOSPI	국고채	회사채
KOSPI	24.883	0.317	0.441
국고채	0.317	0.427	0.351
회사채	0.441	0.351	0.397

다음으로는 분석 대상 자산수익률들이 정규분포를 따르는지 여부를 살펴볼 필요가 있다. 이론적으로 실제 수익률이 fat tail의 특성을 가질 경우 이를 무시하고 정규분포라고 가정하고 위험을 측정하게 되면 이는 실제 위험을 과소 평가할 우려가 있다. 그러나 보다 중요한 것은 Krokhmal, Palmquist and Uryasev(2002)가 CVaR 모형과 평균-분산 모형 결과의 자산배분 결과가 뚜렷한 차이를 보이지 않은 것이 그들이 자료로 사용한 수익률 분포가 정규분포와 유사하기 때문이었다고 해석하고 있음에 비추어, 당연히 본 논문에서 두 모형간 자산배분비율 차이를

비교하기 위해서는 사전 정규성 검증이 필요하다.

<표 3>은 수익률들에 대한 skewness, kurtosis 값과 더불어 Jarque-Berra 정규성 검증 결과를 각각 보여준다. Jarque-Berra 검정통계량을 사용한 결과 일별 및 주별 자료에서 공통적으로 KOSPI에서는 정규분포 가정을 기각할 수 없었지만, 채권들의 경우는 정규분포를 따르지 않는 것으로 나타났다. 따라서 이들 자산의 결합으로 구성된 포트폴리오 수익률은 결합 비율에 따라 정규성 여부가 결정될 가능성이 크므로, 개별 수익률들의 정규성 여부가 논문의 결과에 미치는 영향에 대해서는 현재로서 단정짓기 어렵다.

<표 3> 수익률의 정규성 검증: Jarque-Berra test

1) 1998년 9월 2일부터 1999년 8월 17일까지 일별 자료

	KOSPI	국고채	회사채
skewness	0.058	1.725	-0.082
(t 값)	0.155	0.155	0.155
Kurtosis	3.214	13.264	8.099
(t 값)	0.310	0.310	0.310
Jarque-Berra	0.617	1221.478	271.101
(p 값)	0.735	0.000	0.000

2) 1998년 9월 9일부터 2003년 9월 3일까지 주별 자료

	KOSPI	국고채	회사채
skewness	0.120	0.075	0.225
(t 값)	0.151	0.151	0.151
Kurtosis	2.949	5.326	6.864
(t 값)	0.302	0.302	0.302
Jarque-Berra	0.663	59.741	166.511
(p 값)	0.718	0.000	0.000

4. CVaR 모형과 평균-분산 모형간 최적자산배분비율 차이 분석

4.1 1998년 9월 2일부터 1999년 8월 17일까지 일별 자료

분석기간 전체에 대해 CVaR 모형, 식 (8)을 최적화한 포트폴리오 자산배분 비율과 Markowitz 평균-분산 모형에 따른 배분 비율을 <표 4>에 비교하였다. 본 논문에서는 일일 목표 수익률로서 0.05%에서 0.50%까지 10개를 제시하고[6], 이들 각각에 대해 99% 및 95% 신뢰수준 CVaR 모형과 Markowitz 모형 각각의 최적 자산배분 비율을 계산하였다. 더불어 이때 해당 포트폴리오의 CVaR 값과 VaR 값을 계산하여 함께 보고하였다.

<표 4> CVaR 모형과 평균-분산 모형의 자산배분 결과 (일별 자료)

(단위: 목표수익률, VaR, CVaR: %, 자산배분비율: 소숫점)

99% VaR (CVaR)	target ret.		0.050			0.100			0.150			0.200			0.250	
	VaR		0.931			1.411			2.103			2.856			3.633	
	weight	0.011	0.312	0.677	0.146	0.290	0.563	0.282	0.269	0.450	0.417	0.247	0.336	0.553	0.225	0.223
	CVaR		1.145	1.057		1.679	1.434		2.414	1.992		3.157	2.698		3.927	3.435
	weight	0.008	0.908	0.084	0.143	1.158	−0.301	0.281	0.564	0.155	0.417	0.301	0.282	0.553	0.117	0.330
	target ret.		0.300			0.350			0.400			0.450			0.500	
	VaR		4.421			5.215			6.013			6.813			7.615	
	weight	0.688	0.203	0.109	0.824	0.181	−0.004	0.959	0.159	−0.118	1.095	0.137	−0.231	1.230	0.115	−0.345
	CVaR		4.760	4.221		5.593	5.007		6.426	5.794		7.260	6.580		8.093	7.366
	weight	0.689	0.061	0.250	0.824	0.005	0.171	0.960	−0.051	0.091	1.096	−0.108	0.012	1.231	−0.164	−0.068

95% VaR (CVaR)	target ret.		0.050			0.100			0.150			0.200			0.250	
	VaR		0.657			0.996			1.485			2.017			2.565	
	weight	0.011	0.312	0.677	0.146	0.290	0.563	0.282	0.269	0.450	0.417	0.247	0.336	0.553	0.225	0.223
	CVaR		0.846	0.582		1.225	0.859		1.782	1.475		2.376	1.775		2.997	2.133
	weight	0.009	0.760	0.231	0.143	1.139	−0.282	0.278	1.073	−0.352	0.413	1.247	−0.660	0.547	1.478	−1.025
	target ret.		0.300			0.350			0.400			0.450			0.500	
	VaR		3.121			3.682			4.245			4.810			5.376	
	weight	0.688	0.203	0.109	0.824	0.181	−0.004	0.959	0.159	−0.118	1.095	0.137	−0.231	1.230	0.115	−0.345
	CVaR		3.632	2.575		4.276	3.102		4.921	3.629		5.566	4.118		6.213	4.588
	weight	0.682	1.648	−1.330	0.818	1.526	−1.344	0.954	1.404	−1.358	1.089	1.343	−1.432	1.225	1.315	−1.540

표에서 윗 부분은 (VaR) 신뢰수준 99%, 아래 부분은 95%의 경우를 각각 나타낸다. 표의 해석을 위한 예를 들면, <표 4>에서 (VaR) 신뢰수준 99%의 경우 왼쪽 상단 부분은 일일 목표 수익률 0.05%를 달성하기 위한 평균-분산 모형과 CVaR 모형에서의 CVaR, VaR 값 및 각각의 최적 자산배분 비율을 보여준다. 즉, 목표수익률 밑의 첫 번째 줄에 표시된 Markowitz 모형에 따르면(VaR로 표기된 칼럼) KOSPI 1.1%, 국고채 31.2%, 회사채 67.7%가 최적자산배분이 되며,

6) 목표수익률을 일별수익률 0.05%에서 0.50% 범위에서 제시한 것은 KOSPI, 국고채, 회사채 각각의 분석기간 중 평균수익률의 최소값과 최대값에서 근사값으로 취한 결과이다.

이때 포트폴리오 VaR 값은 그 위에 표기된 0.931%가 된다[7]. 다음 두 번째 줄의 CVaR 모형에 따를 경우 최적자산배분 비율은 KOSPI 0.8%, 국고채 90.8%, 회사채 8.4%가 되며, 이때 포트폴리오의 CVaR 값은 그 윗줄 왼편의 1.145%, 그리고 그 바로 오른쪽에 표시된 것이 VaR 값으로서 1.057%가 된다.

한편 모든 포트폴리오에서 예외 없이 CVaR 값이 VaR 값보다 큰 것으로 나타나 이론에 부합하였으며, Markowitz 모형으로 계산한 VaR 값과 CVaR 모형에서 계산된 VaR 값들 간에는 일부 예외를 제외하고는 정규분포를 가정한 Markowitz 모형의 값이 더 큰 것으로 나타났다. 일반적으로 fat-tail을 갖는 비정규분포 수익률에 대해 정규분포 가정 하에서 VaR를 계산할 경우 값이 과소평가된다는 점을 고려한다면, 이상의 결과는 수익률의 fat-tail 특성과는 직접 상관이 없음을 알 수 있다.

다양한 목표수익률과 신뢰수준에서 CVaR 모형과 평균-분산 모형에 따른 최적자산배분비율은 비슷하면서도 눈 여겨 볼만한 차이를 보여준다. 특히 주식의 비율은 두 모형에서 대부분 비슷하게 나타난 반면, 채권 내에서 국고채와 회사채의 상대적 비율은 종종 두 모형간에 차이를 보인다. 이 경우 두 채권 수익률들간 다중공선성(multicollinearity)을 우선 의심해볼 수 있으나, 상관관계가 0.711로 충분히 큰 것이 아니어서 이에 관해서는 추후 연구가 필요할 것으로 본다.

그러나 <표 4>에 나타난 차이는 특정 기간에 한정된 점 추정(point estimation) 결과에 불과하다. 따라서 두 모형간 자산배분 비율 결과가 유의한 차이를 보이는가를 밝히기 위해서는 보다 엄밀한 검증이 필요하다. 본 논문에서는 CVaR 모형과 평균-분산 모형에 의한 최적자산배분 결과를 비교하기 위해서, 동일한 정보를 기초로 하여 구성된 각 모형간 자산배분비율 차이의 분포를 구하고 이를 바탕으로 두 배분비율간에 차이가 존재하지 않는다(즉, 배분비율간 차이가 0 이다)는 가설을 구체적으로 검증하는 방법을 택하였다. 이때 두 모형별 자산배

7) 평균-분산 모형을 표에서 VaR로 표기한 이유는 2절에서 설명한 바 있다. 즉, 수익률의 정규분포를 가정할 경우, VaR 값은 표준편차에 일정 계수를 곱한 값으로 나타나므로, 사실상 이때 평균-분산 모형과 평균-VaR 모형은 자산배분 결과에서 일치하게 되며, 본 논문에서는 이때 VaR 값과 CVaR 모형에서 계산된 VaR를 비교하고자 의도적으로 이와 같은 표현을 사용하였다. 한편, 통상 VaR 값은 수익률 %가 아닌 금액 단위로 나타내어지지만, 본 논문에서는 간결한 표현을 위해 투자원금을 1이라 두고 CVaR 및 VaR의 표시 단위를 %로 나타내었다.

분비율 차이의 분포를 구하기 위해 subsampling 방법과 bootstrap 시뮬레이션 방법을 함께 사용하였다.

4.1.1 subsampling 방법에 의한 실증분석 결과.

subsampling 방법은 분석기간 동안의 전체 수익률 데이터로부터 일정 숫자의 데이터를 앞에서부터 순차적으로 추출하여 연속적 sub-data set을 만든 후, 각 sub-data set을 대상으로 CVaR 모형과 평균-분산 모형에 따른 최적자산배분 비율을 각각 구한 뒤 차이를 계산한다[8]. 즉, 전체 데이터 수를 N이라 하고 sub-data set의 데이터 수를 n이라고 하면, 첫 번째 sub-data set은 (1, 2, ... n 번째 데이터)로 구성되며 두 번째 set은 (2, 3, ... n+1번째 데이터), ... i 번째 set은 (i, i+1, ... i+n-1번째 데이터)로 각각 구성되는 방식이다. 본 논문에서 각 sub-data set에 포함되는 데이터의 개수는 51개씩이고, 따라서 전체 수익률 데이터로부터 200개의 sub-data set을 만들어 이를 분석하였다[9]. 이 경우 각 sub-data set별로 CVaR 모형과 평균-분산 모형에 따른 최적자산배분 비율의 차이 관측치가 1개씩 나오므로, 결과적으로는 두 모형간 배분 비율 차이는 200개의 관측치를 갖는 분포를 구성하게된다.

다음은 이렇게 구한 자산배분비율 차이 분포를 이용하여 일정한 신뢰수준 하에서 ‘두 모형간 최적자산배분 비율에 차이가 없다’ 라는 가설을 검증한다. subsampling 이론에 따르면 위에서 구한 분포로부터 주어진 신뢰수준 하에 임계치를 구하고 이를 가설검정에 이용할 수 있다(Whang and Kim(2003)). 본 연구에서는 99%, 95% 각각의 (VaR) 신뢰수준에서 CVaR 및 평균-분산의 두 모형으로부터 산출된 3개 자산 각각의 최적자산배분 비율간 차이 분포로부터 (검정) 신뢰수준 95% 및 90% 상하위 임계치를 각각 계산하여 0 값이 그 사이에 놓이게 되는가를 검증한다[10]. 이때 0 값이 상하 임계치 사이에 놓이게 되는 경우, ‘95%

8) subsampling 에 관한 구체적 내용은 Whang and Kim(2003) 참조.

9) sub-data set 데이터 수의 적정한 값에 관해서는 아직까지 뚜렷한 결론 없이 연구가 진행중이다. Whang and Kim(2003) 에서는 2.5*N^0.3에서 3.5*N^0.6 사이의 값에서 양호한 결과를 얻었기에, 본 논문에서는 그중 한 값인 51을 택하였다. 다만 익명의 논평자의 지적에 따라 다양한 값의 sub-data set 데이터 수를 사용하여 보았으나, 논문의 주요 결론에는 별다른 차이를 보이지 않았음을 밝혀둔다.

또는 90% 신뢰수준에서 두 모형간 최적자산배분 비율의 차이가 존재하지 않는다'라는 가설을 기각하지 못하게 된다. 이에 대한 결과는 <표 5>에 나타나있다.

10) 이때 신뢰수준이 서로 다른 의미로 두 번 등장함에 유의할 필요가 있다. (VaR) 신뢰수준이라 함은 VaR 값을 산출하기 위해 필요한 신뢰수준을 의미하며, 뒤에 쓰인 95% 또는 90% (검정) 신뢰수준은 두 모형간 자산배분비율에 차이가 없다는 가설을 검정하기 위한 신뢰수준을 각각 의미한다.

<표 5> subsampling 시뮬레이션 결과 (일별 자료)

	target ret.		0.050			0.100			0.150			0.200			0.250	
99%	평균	−0.031	−0.245	0.276	−0.020	−0.099	0.119	−0.030	0.059	−0.030	−0.043	0.157	−0.114	−0.053	0.159	−0.107
VaR	표준편차	0.093	0.553	0.601	0.135	0.694	0.754	0.187	0.958	1.040	0.241	1.248	1.350	0.296	1.533	1.654
CVaR	90% U	0.047	0.574	1.247	0.071	0.988	1.001	0.100	1.323	1.518	0.131	1.575	2.148	0.153	1.651	2.722
	90% L	−0.202	−1.156	−0.615	−0.191	−0.956	−1.040	−0.279	−1.442	−1.435	−0.361	−2.268	−1.748	−0.432	−2.565	−1.978
	95% U	0.056	0.719	1.569	0.087	1.080	1.736	0.115	1.548	1.974	0.142	1.898	2.900	0.166	2.104	3.571
	95% L	−0.246	−1.618	−0.780	−0.395	−1.908	−1.208	−0.578	−2.899	−1.706	−0.762	−3.608	−2.147	−0.945	−4.318	−2.508
	target ret.		0.300			0.350			0.400			0.450			0.500	
	평균	−0.060	0.121	−0.061	−0.064	0.023	0.041	−0.068	−0.080	0.148	−0.072	−0.174	0.246	−0.077	−0.247	0.324
	표준편차	0.350	1.793	1.934	0.403	2.049	2.209	0.456	2.311	2.489	0.508	2.596	2.787	0.561	2.892	3.096
	90% U	0.161	1.856	3.188	0.174	2.226	3.550	0.183	2.403	3.912	0.192	2.648	4.274	0.204	3.007	4.654
	90% L	−0.502	−3.016	−2.047	−0.581	−3.358	−2.383	−0.697	−3.701	−2.578	−0.792	−4.170	−2.722	−0.864	−4.713	−3.170
	95% U	0.204	2.253	4.168	0.241	2.600	4.766	0.278	2.787	5.364	0.315	3.067	5.962	0.352	3.298	6.559
	95% L	−1.121	−5.027	−2.638	−1.277	−5.737	−2.768	−1.433	−6.447	−2.987	−1.589	−7.156	−3.259	−1.746	−7.866	−3.484
	target ret.		0.050			0.100			0.150			0.200			0.250	
95%	평균	−0.045	−0.505	0.549	−0.022	−0.406	0.428	−0.012	−0.336	0.348	−0.014	−0.316	0.331	−0.022	−0.312	0.334
VaR	표준편차	0.077	0.657	0.707	0.061	0.642	0.663	0.070	0.760	0.769	0.093	0.909	0.918	0.115	1.095	1.103
CVaR	90% U	0.038	0.343	1.800	0.049	0.481	1.543	0.050	0.762	1.605	0.064	0.906	1.711	0.049	1.019	1.965
	90% L	−0.163	−1.697	−0.352	−0.142	−1.437	−0.548	−0.125	−1.500	−0.741	−0.161	−1.896	−0.815	−0.200	−2.014	−0.917
	95% U	0.051	0.497	2.114	0.058	0.662	1.720	0.080	0.914	1.935	0.084	1.047	2.219	0.084	1.205	2.488
	95% L	−0.337	−1.996	−0.446	−0.200	−1.641	−0.597	−0.201	−1.882	−0.848	−0.232	−2.149	−1.071	−0.313	−2.454	−1.195
	target ret.		0.300			0.350			0.400			0.450			0.500	
	평균	−0.025	−0.350	0.376	−0.031	−0.360	0.391	−0.037	−0.377	0.414	−0.043	−0.395	0.438	−0.047	−0.424	0.471
	표준편차	0.140	1.299	1.303	0.166	1.527	1.529	0.193	1.784	1.784	0.220	2.035	2.032	0.247	2.280	2.276
	90% U	0.070	1.194	2.093	0.084	1.298	2.212	0.101	1.569	2.570	0.115	1.738	2.927	0.128	2.022	3.285
	90% L	−0.240	−2.247	−1.014	−0.280	−2.374	−1.178	−0.350	−2.732	−1.407	−0.379	−3.226	−1.563	−0.409	−3.581	−1.800
	95% U	0.095	1.286	2.732	0.114	1.499	3.025	0.142	1.752	3.349	0.176	2.035	3.837	0.221	2.312	4.303
	95% L	−0.406	−2.694	−1.285	−0.500	−2.935	−1.348	−0.594	−3.406	−1.490	−0.687	−3.908	−1.987	−0.781	−4.274	−2.208

<표 5>의 상단 부분은 99% (VaR) 신뢰수준에서 구한 CVaR 및 평균-분산 모형 결과를 비교한 것이며, 하단 부분은 95% 신뢰수준에서의 결과를 비교한 것이다. 각각의 모형에서 최적자산배분을 위한 목표수익률은 앞에서와 마찬가지로 0.05%에서 0.50%까지 10개가 각각 주어졌으며, 목표수익률 밑의 각종 수치들은 CVaR 및 평균-분산 모형간 최적자산배분 비율 차이에 관한 각종 통계들이다.

예를 들어 하단부의 95% VaR/CVaR 모형에서 왼쪽 상단부의 목표수익률 0.05%의 경우를 보자. 이때 평균-분산 모형과 CVaR 모형간 자산배분비율 차이의 평균은 KOSPI가 -0.45%, 국고채가 -50.5%, 회사채가 54.9%가 되며, 이때 차이의 표준편차는 각각 7.7%, 65.7%, 70.7%가 된다. <표 5>에서 제시된 거의 대부분 경우에서 배분비율 차이의 평균값보다 표준편차가 상대적으로 훨씬 큰 것으로 보아 두 모형간 배분비율의 차이가 유의하지 않음을 짐작할 수 있다. 그러나 subsampling에서 평균과 표준분포를 이용한 이른바 t 검정 등에 관해서는 좀 더 연구가 필요하다. 따라서 평균과 표준편차는 이 경우 단지 참고자료로서만 제시되었을 뿐, subsampling 이론에 따른 엄밀한 검증은 앞에서 설명한 바대로 밑에 제시하는 상하 임계치를 사용한다.

따라서 앞에서 살펴보았던 <표 5>의 하단부 (VaR) 신뢰수준 95%에서 목표수

익률 0.05%의 경우를 계속 보면 (검정) 신뢰수준 90%에서 KOSPI, 국고채, 회사채 각각 자산배분비율의 두 모형간 차이 분포의 상하 임계치는 셋째 및 넷째줄에 표기된대로 각각 (0.038, -0.163), (0.343, -1.697), (1.800, -0.352) 인 것으로 나타났다. 이는 자산배분비율 차이가 0 이라는, 즉, 두 모형간 최적자산배분 결과에 차이가 없다는 가설을 90% 신뢰수준에서 유의적으로 기각할 수 없음을 보여준다. 당연한 결과로서 90% 밑에 제시된 95% 신뢰수준에서도 귀무가설을 기각하지 못하였다(다섯째 및 여섯째 줄에 표기). 또한 이뿐만 아니라 (VaR) 신뢰수준이 99%이든 95%이든 상관없이, 최적자산배분을 위한 목표수익률이 0.05%에서 0.50% 까지 거의 대부분의 경우에 있어서 <표 5>는 CVaR 모형과 평균-분산 모형간 최적자산배분 비율에 유의한 차이가 발견되지 않았음을 보여주고 있다. 이는 결국 두 모형간 이론적 배경이 뚜렷한 차이를 보임에도 불구하고 적어도 최적자산배분 결과에 있어서는 두 모형이 유의한 차이를 보여주지 못한다는 증거이다.

4.1.2 bootstrap 시뮬레이션에 의한 실증분석 결과.

본 논문에서 사용한 또 다른 방법은 bootstrap 시뮬레이션 방법으로서, 이는 과거 수익률 데이터의 특성을 모사한 새로운 수익률 자료의 생성을 통해 CVaR 모형과 평균-분산 모형에 따른 각각의 최적자산배분 비율을 구하고 그 차이를 비교하는 것이다. 정확한 bootstrap 시뮬레이션이 이루어지기 위해서는 무작위 복원 추출 대상이 되는 시계열 자료가 $i.i.d.$ 특성을 지녀야하므로, 이를 위해 분석 대상 자료의 모수(parametric) 모형 추정이 선행되어야 한다. 본 논문에서는 분석기간 중 포트폴리오를 구성하는 자산수익률간 VAR(2) 모형을 추정하고, 결과를 <표 6>에 정리하였다[11].

11) 자산수익률들간 모수 모형의 추정은 자체로서도 중요한 연구주제이겠으나, 본 논문의 전체 맥락 속에서 크게 중요하지 않다고 보아 자세한 논의를 생략하였다. 다만, 모수 모형의 변화, 즉 VAR 모형의 차수를 변화시키거나 오차수정(error-correction)을 포함시키는 여부 등은 논문의 주요 결론에 영향을 주지 않았다.

<표 6> 자산수익률간 VAR(2) 모형 추정 (일별 자료)

$$r_{j,t} = \alpha_{0,j} + \alpha_{1,j} \times r_{KOSPI,t-1} + \alpha_{2,j} \times r_{KOSPI,t-2}$$
$$+ \alpha_{3,j} \times r_{국고채,t-1} + \alpha_{4,j} \times r_{국고채,t-2}$$
$$+ \alpha_{5,j} \times r_{회사채,t-1} + \alpha_{6,j} \times r_{회사채,t-2}$$

j = KOSPI, 국고채, 회사채

	추정계수	t 값
a0_KOSPI	0.360	2.060
a1_KOSPI	0.009	0.126
a2_KOSPI	0.205	0.381
a3_KOSPI	0.619	0.987
a4_KOSPI	-0.027	-0.382
a5_KOSPI	0.932	1.732
a6_KOSPI	-0.494	-0.793
a0_국고채	0.036	1.232
a1_국고채	0.000	-0.035
a2_국고채	0.003	0.034
a3_국고채	0.242	2.307
a4_국고채	0.006	0.514
a5_국고채	-0.032	-0.351
a6_국고채	0.032	0.312
a0_회사채	0.030	1.198
a1_회사채	-0.013	-1.306
a2_회사채	0.050	0.642
a3_회사채	0.268	2.984
a4_회사채	0.016	1.581
a5_회사채	-0.040	-0.516
a6_회사채	0.091	1.018

다음 단계로서 윗 식에서 추정된 오차항 $\{\varepsilon_{KOSPI,t}, \varepsilon_{국고채,t}, \varepsilon_{회사채,t}\}$ (t=1,...,N) 행렬로부터 무작위 복원추출을 하고, 이를 추정 VAR(2) 모형에 대입하여 원래 수익률 행렬을 모사한 새로운 수익률 시계열 $\{r_{KOSPI,t}, r_{국고채,t}, r_{회사채,t}\}$ (t=1,...,M)을 만들어낸다. 이렇게 새로운 수익률 시계열 자료가 생성될 때마다 이를 토대로 CVaR 모형 및 평균-VaR 모형간 최적 자산배분 비율의 차

이를 구한다. 이러한 과정을 필요한 수만큼 반복 시행하면 두 모형간 배분 비율의 차이가 갖는 분포를 구할 수 있게된다. 본 논문에서는 이와 같은 시뮬레이션 작업을 500번 반복하였다12).

이와 같이 bootstrap 시뮬레이션 경우에서 3개 자산 각각의 두 모형간 배분비율 차이의 분포를 도출하고, 앞서 subsampling의 경우에서와 마찬가지로 이들 분포의 평균, 표준편차 및 상하 임계치를 계산한 결과를 <표 7>에 보고하였다.

<표 7> bootstrap 시뮬레이션 결과 (일별 자료)

	target ret.		0.050			0.100			0.150			0.200			0.250	
99%	평균	−0.010	−0.321	0.331	−0.009	−0.509	0.518	−0.013	−0.697	0.710	−0.018	−0.852	0.870	−0.023	−0.993	1.016
VaR	표준편차	0.049	0.463	0.464	0.074	0.704	0.712	0.111	1.022	1.031	0.148	1.346	1.359	0.186	1.686	1.702
CVaR	90% U	0.038	0.383	0.840	0.056	0.374	1.329	0.083	0.474	1.919	0.104	0.646	2.567	0.119	0.800	3.084
	90% L	−0.084	−0.822	−0.366	−0.095	−1.347	−0.361	−0.128	−1.948	−0.445	−0.176	−2.525	−0.576	−0.213	−3.140	−0.745
	95% U	0.047	0.578	0.979	0.078	0.520	1.524	0.108	0.745	2.237	0.144	1.029	2.937	0.177	1.313	3.840
	95% L	−0.128	−0.948	−0.564	−0.134	−1.505	−0.493	−0.186	−2.225	−0.703	−0.271	−2.929	−0.806	−0.358	−3.652	−1.095
	target ret.		0.300			0.350			0.400			0.450			0.500	
	평균	−0.028	−1.131	1.158	−0.032	−1.275	1.307	−0.037	−1.422	1.458	−0.041	−1.570	1.611	−0.046	−1.718	1.764
	표준편차	0.225	2.039	2.059	0.264	2.393	2.418	0.303	2.748	2.777	0.342	3.103	3.136	0.381	3.458	3.496
	90% U	0.147	0.968	3.654	0.173	1.216	4.348	0.202	1.466	4.913	0.222	1.772	5.600	0.241	2.021	6.233
	90% L	−0.278	−3.734	−0.963	−0.335	−4.330	−1.205	−0.386	−4.870	−1.437	−0.434	−5.422	−1.695	−0.478	−6.056	−1.984
	95% U	0.207	1.598	4.361	0.240	1.882	5.095	0.279	2.258	5.934	0.318	2.639	6.804	0.357	2.965	7.617
	95% L	−0.440	−4.403	−1.463	−0.512	−5.154	−1.790	−0.583	−5.969	−2.255	−0.655	−6.876	−2.545	−0.745	−7.575	−2.822
	target ret.		0.050			0.100			0.150			0.200			0.250	
95%	평균	−0.011	−0.256	0.267	0.001	−0.393	0.392	0.000	−0.522	0.522	0.000	−0.636	0.636	−0.001	−0.748	0.749
VaR	표준편차	0.042	0.343	0.339	0.036	0.397	0.395	0.053	0.550	0.547	0.072	0.739	0.731	0.092	0.936	0.924
CVaR	90% U	0.041	0.285	0.736	0.049	0.229	0.985	0.069	0.307	1.373	0.090	0.348	1.771	0.104	0.494	2.197
	90% L	−0.095	−0.726	−0.284	−0.045	−1.015	−0.235	−0.064	−1.357	−0.311	−0.089	−1.798	−0.386	−0.101	−2.144	−0.485
	95% U	0.048	0.475	0.841	0.061	0.333	1.238	0.087	0.479	1.606	0.123	0.682	2.166	0.140	0.796	2.969
	95% L	−0.128	−0.894	−0.463	−0.062	−1.250	−0.388	−0.097	−1.617	−0.484	−0.147	−2.179	−0.691	−0.187	−3.067	−0.807
	target ret.		0.300			0.350			0.400			0.450			0.500	
	평균	−0.002	−0.865	0.867	−0.002	−0.990	0.992	−0.003	−1.116	1.118	−0.003	−1.240	1.243	−0.004	−1.355	1.358
	표준편차	0.113	1.148	1.133	0.133	1.356	1.338	0.153	1.562	1.541	0.174	1.766	1.742	0.194	1.971	1.944
	90% U	0.128	0.594	2.523	0.153	0.646	2.967	0.180	0.749	3.435	0.206	0.869	3.906	0.231	1.029	4.236
	90% L	−0.135	−2.590	−0.572	−0.158	−2.984	−0.676	−0.184	−3.485	−0.765	−0.217	−3.900	−0.851	−0.242	−4.293	−1.036
	95% U	0.180	0.991	3.539	0.214	1.191	4.127	0.251	1.397	4.679	0.287	1.644	5.271	0.311	1.778	5.784
	95% L	−0.229	−3.711	−1.008	−0.271	−4.147	−1.164	−0.320	−4.624	−1.368	−0.358	−5.278	−1.527	−0.399	−5.869	−1.669

<표 7>의 상단 부분은 (VaR) 신뢰수준 99%에서 구한 CVaR 및 평균-분산 모형 결과를 비교한 것이며, 하단 부분은 신뢰수준 95%에서의 결과를 비교한 것이다. <표 7>의 내용은 앞서 subsampling의 경우에서와 동일하다. 즉, 각각의 모형에서 최적자산배분을 위한 목표수익률은 0.05%에서 0.50%까지 10개가 각각 주어졌으며, 역시 목표수익률 밑의 각종 수치들은 CVaR 및 평균-분산 모형간 최적자산배분 비율 차이에 관한 각종 통계들이다.

예를 들어 살펴보자. 하단부 (VaR) 신뢰수준 95%에서 목표수익률 0.05%의 경

12) 500번의 시뮬레이션을 수행하는데 펜티엄 3 컴퓨터 (900 Mhz)에서 대략 5-6일 정도 걸렸다. 여러 번의 다양한 실험을 해본 결과 시뮬레이션 수를 늘리는 것이 논문의 결론에 거의 영향을 주지 않는다는 결론을 얻을 수 있었다.

우 평균-분산 모형과 CVaR 모형간 최적자산배분 비율 차이의 분포 내 평균은 KOSPI가 -1.1%, 국고채가 -25.6%, 회사채가 26.7%가 되며, 이때 차이의 표준편차는 각각 4.2%, 34.3%, 33.9%가 된다. 앞서 subsampling 결과에서와 비슷하게 <표 7>에서도 제시된 거의 대부분 경우에서 배분비율 차이의 평균값보다 표준편차가 상대적으로 훨씬 큰 것으로 보아 두 모형간 배분비율의 차이가 유의하지 않음을 짐작할 수 있다.

보다 구체적으로 (VaR) 신뢰수준 95%, (검정) 신뢰수준 90%에서 KOSPI, 국고채, 회사채 각각 자산배분비율의 두 모형간 차이 분포의 상하 임계치는 각각 (0.041, -0.095), (0.285, -0.726), (0.736, -0.284) 인 것으로 나타났다. 이는 bootstrap 시뮬레이션 결과에서도 앞서 subsampling 경우와 마찬가지로, 두 모형간 자산배분비율 차이가 0 (즉, 두 모형간 최적자산배분 결과에 차이가 없다)이라는 가설을 90% 신뢰수준에서 유의적으로 기각할 수 없음을 보여준다. 역시 이 경우뿐만 아니라 (VaR) 신뢰수준이 99%이든 95%이든 상관없이, (검정) 신뢰수준이 95%이든 90%이든 상관없이, 또한 최적자산배분을 위한 목표수익률이 0.05%에서 0.50% 까지 거의 대부분의 경우에 있어서 <표 7>은 CVaR 모형과 평균-분산 모형간 최적자산배분 비율에 유의한 차이가 발견되지 않았음을 보여주고 있다. 결론적으로 bootstrap 시뮬레이션 결과에서도 역시 CVaR 모형과 평균-분산 모형이 최적자산배분 결과에 있어서 유의한 차이를 보여주지 못한다.

4.2 1998년 9월 9일부터 2003년 9월 3일까지 주별 자료

주별 자료를 사용한 CVaR 모형 포트폴리오 자산배분 비율과 Markowitz 평균-분산 모형에 따른 배분 비율 및 해당 포트폴리오의 CVaR 값과 VaR 값들을 <표 8>에서 비교하였다. 이때 주별 목표 수익률로서는 0.210%에서 0.323%까지 10개를 제시하였다[13].

---

13) 목표수익률 범위를 이와 같이 제시한 것은 일별 자료 분석에서와 마찬가지로 KOSPI, 국고채, 회사채 각각의 분석기간 중 평균수익률의 최소값과 최대값에서 근사값으로 취한 결과이다.

<표 8> CVaR 모형과 평균-분산 모형의 자산배분 결과 (주별 자료)

(단위: 목표수익률, VaR, CVaR: %, 자산배분비율: 소숫점)

99% VaR (CVaR)	target ret.		0.210			0.223			0.235			0.248			0.260	
	VaR		1.457			1.690			2.103			2.611			3.170	
	weight	0.011	0.125	0.864	0.041	−0.524	1.484	0.071	−1.174	2.103	0.100	−1.823	2.722	0.130	−2.472	3.342
	CVaR		1.815	1.752		2.164	2.130		2.558	2.439		3.214	2.749		4.000	3.194
	weight	−0.003	−0.005	1.008	0.081	−0.146	1.065	0.156	−0.364	1.208	0.231	−0.581	1.350	0.323	−0.646	1.323
	target ret.		0.273			0.285			0.298			0.310			0.323	
	VaR		3.755			4.358			4.971			5.590			6.215	
	weight	0.160	−3.121	3.961	0.190	−3.770	4.580	0.220	−4.419	5.200	0.249	−5.068	5.819	0.279	−5.718	6.438
	CVaR		4.808	3.934		5.617	4.680		6.425	5.426		7.266	6.099		8.116	6.784
	weight	0.391	−0.927	1.536	0.459	−1.213	1.754	0.528	−1.499	1.972	0.587	−1.863	2.276	0.643	−2.269	2.626

95% VaR (CVaR)	target ret.		0.210			0.223			0.235			0.248			0.260	
	VaR		1.028			1.193			1.485			1.844			2.238	
	weight	0.011	0.125	0.864	0.041	−0.524	1.484	0.071	−1.174	2.103	0.100	−1.823	2.722	0.130	−2.472	3.342
	CVaR		1.322	0.791		1.550	0.995		1.895	1.157		2.292	1.431		2.799	1.808
	weight	0.013	0.146	0.841	0.088	−0.075	0.987	0.132	−0.591	1.459	0.169	−1.174	2.005	0.197	−1.836	2.639
	target ret.		0.273			0.285			0.298			0.310			0.323	
	VaR		2.651			3.077			3.509			3.947			4.388	
	weight	0.160	−3.121	3.961	0.190	−3.770	4.580	0.220	−4.419	5.200	0.249	−5.068	5.819	0.279	−5.718	6.438
	CVaR		3.336	2.212		3.903	2.636		4.477	3.103		5.052	3.576		5.633	3.950
	weight	0.243	−2.334	3.091	0.307	−2.659	3.352	0.360	−3.092	3.733	0.410	−3.541	4.131	0.447	−4.125	4.678

표의 각 수치들을 읽는 방법은 앞서 <표 4>의 일별 자료에 해당하는 내용과 같아 여기서는 생략하도록 한다. 주별 자료에서도 모든 포트폴리오에서 예외 없이 CVaR 값이 VaR 값보다 큰 것으로 나타나 이론에 부합하였다. 다만 (VaR) 신뢰수준 99%에서는 Markowitz 모형으로 계산한 VaR 값이 CVaR 모형에서 계산된 VaR 값들보다 작게 나타난 반면, 신뢰수준 95%에서는 이와 반대로 나타났다. 이는 실제 수익률 분포의 왼쪽 꼬리에 가까워질수록 정규분포와는 달리 fat tail 특성을 보여주고 있음을 시사한다.

한편 앞서 일별 자료에 대해서와 마찬가지로 주별 자료에 대해서도 두 모형별 자산배분비율 차이의 분포를 구하기 위해 subsampling 방법과 bootstrap 시뮬레이션 방법을 사용하였다.

4.2.1 subsampling 방법에 의한 실증분석 결과.

주별 자료에서 각 sub-data set에 포함되는 데이터의 개수는 51개씩이고, 따라서 전체 수익률 데이터로부터 214개의 sub-data set을 만들어 이를 분석하였다[14]. 이 경우 각 sub-data set별로 CVaR 모형과 평균-분산 모형에 따른 최적자산배분 비율의 차이 관측치가 1개씩 나오므로, 결과적으로 두 모형간 배분 비율 차이는 214개의 관측치를 갖는 분포를 구성하게된다.

14) 일별 자료에서와 마찬가지로 주별 자료에 대해서도 다양한 값의 sub-data set 데이터 수를 사용하여 보았으나, 논문의 주요 결론에는 별다른 차이를 보이지 않았음을 밝혀둔다.

다음은 이렇게 구한 자산배분비율 차이 분포를 이용하여 99%, 95% 각각의 (VaR) 신뢰수준에서 CVaR 및 평균-분산의 두 모형으로부터 산출된 3개 자산 각각의 최적자산배분 비율간 차이 분포로부터 (검정) 신뢰수준 95% 및 90% 상하위 임계치를 각각 계산하여 0 값이 그 사이에 놓이게 되는가를 검증한다. 이에 대한 결과는 <표 9>에 나타나있다.

<표 9> subsampling 시뮬레이션 결과 (주별 자료)

	target ret.		0.210			0.223			0.235			0.248			0.260	
99% VaR CVaR	평균	0.030	0.067	−0.097	0.027	0.052	−0.079	0.024	0.023	−0.047	0.020	−0.011	−0.009	0.016	−0.027	0.011
	표준편차	0.079	1.111	1.134	0.074	1.084	1.108	0.070	1.071	1.095	0.066	1.084	1.109	0.064	1.108	1.133
	90% U	0.189	1.408	2.631	0.174	1.337	2.194	0.161	1.133	1.787	0.146	1.055	1.835	0.130	0.985	1.929
	90% L	−0.070	−2.742	−1.488	−0.071	−2.580	−1.391	−0.069	−2.404	−1.252	−0.068	−2.228	−1.169	−0.065	−2.052	−1.132
	95% U	0.203	1.654	2.755	0.186	1.913	2.809	0.168	2.227	2.862	0.153	2.331	2.916	0.139	2.436	2.969
	95% L	−0.104	−2.778	−2.294	−0.095	−2.836	−2.005	−0.088	−2.908	−2.877	−0.083	−2.977	−3.531	−0.091	−3.046	−3.635
	target ret.		0.273			0.285			0.298			0.310			0.323	
	평균	0.013	−0.030	0.017	0.010	−0.033	0.024	0.007	−0.028	0.021	0.005	−0.023	0.018	0.003	−0.013	0.010
	표준편차	0.063	1.137	1.162	0.063	1.171	1.196	0.063	1.203	1.228	0.065	1.236	1.261	0.067	1.266	1.292
	90% U	0.115	1.197	2.023	0.101	1.231	2.118	0.086	1.333	2.058	0.076	1.449	2.144	0.068	1.635	2.235
	90% L	−0.066	−2.121	−1.343	−0.063	−2.163	−1.545	−0.065	−2.239	−1.674	−0.069	−2.338	−1.804	−0.074	−2.438	−1.980
	95% U	0.120	2.541	3.023	0.119	2.584	3.076	0.122	2.774	3.130	0.136	2.964	3.183	0.156	3.155	3.237
	95% L	−0.095	−3.115	−3.715	−0.094	−3.184	−3.781	−0.095	−3.253	−3.847	−0.109	−3.322	−3.914	−0.124	−3.390	−3.980
	target ret.		0.210			0.223			0.235			0.248			0.260	
95% VaR CVaR	평균	0.035	0.213	−0.248	0.031	0.200	−0.231	0.027	0.192	−0.220	0.024	0.190	−0.214	0.021	0.194	−0.215
	표준편차	0.068	0.774	0.796	0.063	0.781	0.804	0.060	0.779	0.802	0.057	0.783	0.805	0.055	0.818	0.839
	90% U	0.173	1.312	0.802	0.158	1.244	0.695	0.145	1.157	0.641	0.128	1.057	0.808	0.110	1.143	0.953
	90% L	−0.035	−0.837	−1.496	−0.034	−0.736	−1.399	−0.036	−0.650	−1.314	−0.033	−0.790	−1.186	−0.032	−1.004	−1.191
	95% U	0.188	1.764	1.550	0.170	1.802	0.982	0.152	1.856	1.253	0.144	2.215	1.335	0.120	2.118	1.115
	95% L	−0.052	−1.642	−1.861	−0.064	−1.186	−2.120	−0.079	−1.278	−2.415	−0.090	−1.323	−2.274	−0.096	−1.296	−2.288
	target ret.		0.273			0.285			0.298			0.310			0.323	
	평균	0.017	0.188	−0.205	0.013	0.176	−0.189	0.010	0.174	−0.184	0.008	0.170	−0.177	0.005	0.162	−0.168
	표준편차	0.054	0.844	0.863	0.053	0.893	0.911	0.054	0.963	0.979	0.055	1.045	1.060	0.057	1.116	1.131
	90% U	0.095	1.144	1.054	0.082	1.299	1.106	0.069	1.185	1.218	0.055	1.273	1.533	0.042	1.350	1.714
	90% L	−0.032	−1.099	−1.285	−0.034	−1.185	−1.441	−0.037	−1.367	−1.476	−0.041	−1.710	−1.344	−0.044	−1.848	−1.499
	95% U	0.102	1.896	1.426	0.086	1.723	1.498	0.073	2.171	1.737	0.077	2.529	2.010	0.083	2.506	2.256
	95% L	−0.104	−1.435	−2.387	−0.115	−1.622	−2.561	−0.128	−1.758	−2.564	−0.142	−2.025	−2.800	−0.156	−2.334	−3.055

표의 각 수치가 나타내는 의미는 앞서 <표 5>의 일별 자료에서와 같으므로 생략한다. 한 예를 들어 하단부 (VaR) 신뢰수준 95%에서 목표수익률 0.210%의 경우를 보면 (검정) 신뢰수준 90%에서 KOSPI, 국고채, 회사채 각각 자산배분비율의 두 모형간 차이 분포의 상하 임계치는 각각 (0.173, -0.035), (1.312, -0.837), (0.802, -1.496) 인 것으로 나타났다. 이는 자산배분비율 차이가 0 이라는, 즉, 두 모형간 최적자산배분 결과에 차이가 없다는 가설을 90% 신뢰수준에서 유의적으로 기각할 수 없음을 보여준다. 당연한 결과로서 90% 밑에 제시된 95% 신뢰수준에서도 귀무가설을 기각하지 못하였다. 또한 이뿐만 아니라 (VaR) 신뢰수준이 99%이든 95%이든 상관없이, 최적자산배분을 위한 목표수익률이 0210%에서 0.323% 까지 대부분의 경우에 있어서 <표 9>는 CVaR 모형과 평균-분산 모형간 최적자산배분 비율에 유의한 차이가 발견되지 않았음을 보여주고 있다. 이러한

결과는 앞서 일별 자료에 대한 결과와 일치하며, 결국 두 모형간 이론적 배경이 뚜렷한 차이를 보임에도 불구하고 적어도 최적자산배분 결과에 있어서는 두 모형이 유의한 차이를 보여주지 못한다는 증거이다.

4.2.2 bootstrap 시뮬레이션에 의한 실증분석 결과.

본 논문에서는 주별 자산수익률간 VAR(2) 모형을 추정하고, 결과를 <표 10>에 정리하였다[15].

<표 10> 자산수익률간 VAR(2) 모형 추정 (주별 자료)

$$r_{j,t} = \alpha_{0,j} + \alpha_{1,j} \times r_{KOSPI,t-1} + \alpha_{2,j} \times r_{KOSPI,t-2} + \alpha_{3,j} \times r_{국고채,t-1} + \alpha_{4,j} \times r_{국고채,t-2} + \alpha_{5,j} \times r_{회사채,t-1} + \alpha_{6,j} \times r_{회사채,t-2}$$

j = KOSPI, 국고채, 회사채

	추정계수	t 값
a0_KOSPI	0.026	0.078
a1_KOSPI	−0.021	−0.342
a2_KOSPI	0.920	1.019
a3_KOSPI	−0.280	−0.291
a4_KOSPI	0.006	0.089
a5_KOSPI	−1.098	−1.225
a6_KOSPI	1.988	2.114
a0_국고채	0.158	3.610
a1_국고채	−0.013	−1.624
a2_국고채	−0.001	−0.005
a3_국고채	0.149	1.185
a4_국고채	−0.003	−0.419
a5_국고채	−0.002	−0.013
a6_국고채	0.093	0.756
a0_회사채	0.165	4.018
a1_회사채	−0.011	−1.369
a2_회사채	0.029	0.258
a3_회사채	0.185	1.559
a4_회사채	−0.006	−0.773
a5_회사채	−0.027	−0.241
a6_회사채	0.090	0.776

15) 역시 일별 자료에 대한 분석에서와 비슷하게 모수 모형의 변화, 즉 VAR 모형의 차수를 변화시키거나 오차수정(error-correction)을 포함시키는 여부 등은 논문의 주요 결론에 영향을 주지 않았다.

본 논문에서는 이상의 모수 모형 추정에 기초하여 bootstrap 시뮬레이션 작업을 500번 반복하였다[16]. 이를 통해 3개 자산 각각의 두 모형간 배분비율 차이의 분포를 도출하고, 앞서 subsampling의 경우에서와 마찬가지로 이들 분포의 평균, 표준편차 및 상하 임계치를 계산한 결과를 <표 11>에 보고하였다.

<표 11> bootstrap 시뮬레이션 결과 (주별 자료)

	target ret.		0.210			0.223			0.235			0.248			0.260	
99%	평균	−0.001	−0.027	0.028	−0.003	−0.069	0.072	−0.004	−0.108	0.112	−0.006	−0.140	0.146	−0.009	−0.176	0.185
VaR	표준편차	0.116	1.689	1.725	0.113	1.658	1.699	0.121	1.740	1.787	0.136	1.909	1.962	0.156	2.129	2.188
CVaR	90% U	0.138	1.989	1.640	0.127	1.553	1.548	0.137	1.233	1.541	0.151	1.215	1.698	0.166	1.119	1.818
	90% L	−0.166	−1.702	−1.933	−0.165	−1.444	−1.579	−0.178	−1.425	−1.339	−0.181	−1.577	−1.262	−0.199	−1.756	−1.207
	95% U	0.205	3.162	2.355	0.190	2.913	2.184	0.196	2.308	2.167	0.211	2.134	2.425	0.242	1.905	2.737
	95% L	−0.261	−2.268	−3.076	−0.248	−1.961	−2.774	−0.248	−1.991	−2.235	−0.257	−2.145	−2.257	−0.297	−2.556	−1.899
	target ret.		0.273			0.285			0.298			0.310			0.323	
	평균	−0.012	−0.210	0.222	−0.014	−0.238	0.252	−0.016	−0.265	0.281	−0.019	−0.286	0.305	−0.021	−0.314	0.335
	표준편차	0.178	2.376	2.440	0.202	2.641	2.710	0.227	2.917	2.994	0.252	3.202	3.285	0.275	3.488	3.578
	90% U	0.186	1.219	2.047	0.207	1.430	2.272	0.233	1.543	2.505	0.278	1.695	2.844	0.287	1.778	3.042
	90% L	−0.216	−1.965	−1.282	−0.232	−2.114	−1.488	−0.258	−2.286	−1.557	−0.281	−2.697	−1.719	−0.301	−2.986	−1.893
	95% U	0.274	2.144	3.147	0.315	2.214	3.329	0.333	2.569	3.490	0.377	3.027	3.741	0.394	3.337	3.991
	95% L	−0.328	−2.858	−2.051	−0.344	−3.312	−2.104	−0.373	−3.241	−2.611	−0.419	−3.379	−2.992	−0.470	−3.640	−3.528
	target ret.		0.210			0.223			0.235			0.248			0.260	
95%	평균	−0.014	0.065	−0.051	−0.013	0.021	−0.008	−0.011	−0.011	0.023	−0.011	−0.022	0.033	−0.011	−0.040	0.052
VaR	표준편차	0.110	1.885	1.932	0.104	1.981	2.039	0.107	2.180	2.249	0.117	2.449	2.528	0.131	2.761	2.850
CVaR	90% U	0.090	1.914	1.391	0.073	1.395	1.280	0.074	1.065	1.158	0.077	1.103	1.096	0.079	0.780	1.289
	90% L	−0.126	−1.438	−1.929	−0.111	−1.247	−1.344	−0.104	−1.133	−1.066	−0.111	−1.158	−1.022	−0.114	−1.307	−0.733
	95% U	0.148	2.755	2.085	0.140	2.454	1.914	0.119	1.958	1.742	0.106	1.406	1.572	0.127	1.564	1.580
	95% L	−0.248	−2.175	−2.726	−0.202	−1.937	−2.327	−0.165	−1.665	−1.914	−0.138	−1.546	−1.461	−0.144	−1.545	−1.590
	target ret.		0.273			0.285			0.298			0.310			0.323	
	평균	−0.014	−0.057	0.071	−0.016	−0.077	0.093	−0.018	−0.085	0.103	−0.021	−0.097	0.117	−0.023	−0.107	0.130
	표준편차	0.149	3.092	3.190	0.167	3.438	3.547	0.186	3.793	3.912	0.206	4.153	4.282	0.225	4.513	4.653
	90% U	0.082	0.682	1.306	0.096	0.702	1.459	0.093	0.807	1.624	0.100	0.762	1.751	0.109	0.829	1.879
	90% L	−0.123	−1.298	−0.737	−0.130	−1.494	−0.724	−0.144	−1.599	−0.804	−0.157	−1.714	−0.797	−0.174	−1.873	−0.835
	95% U	0.143	1.331	1.733	0.154	1.259	2.000	0.170	1.128	2.180	0.180	1.201	2.347	0.199	1.293	2.549
	95% L	−0.157	−1.749	−1.354	−0.171	−1.994	−1.285	−0.173	−2.141	−1.033	−0.191	−2.210	−1.083	−0.205	−2.421	−1.273

표의 각 수치가 나타내는 의미는 앞서 <표 7>의 일별 자료에서와 같으므로 생략한다. 한 예를 들어 살펴보자. 목표수익률 0.210%의 경우 (VaR) 신뢰수준 95%, (검정) 신뢰수준 90%에서 KOSPI, 국고채, 회사채 각각 자산배분비율의 두 모형간 차이 분포의 상하 임계치는 각각 (0.090, −0.126), (1.914, −1.438), (1.391, -1.929) 인 것으로 나타났다. 이는 bootstrap 시뮬레이션 결과에서도 앞서 subsampling 경우와 마찬가지로, 두 모형간 자산배분비율 차이가 0 (즉, 두 모형간 최적자산배분 결과에 차이가 없다) 이라는 가설을 90% 신뢰수준에서 유의적으로 기각할 수 없음을 보여준다. 역시 이 경우뿐만 아니라 (VaR) 신뢰수준이 99%이든 95%이든 상관없이, (검정) 신뢰수준이 95%이든 90%이든 상관없이 <표 11>은 CVaR 모형과 평균-분산 모형간 최적자산배분 비율에 유의한 차이가 발견되지 않았음을 보여주고 있다. 이러한 결과는 앞서 일별 자료에 대한 것과 일

16) 역시 일별 자료 분석에서와 마찬가지로 시뮬레이션 수를 늘리는 것은 논문의 결론에 거의 영향을 주지 않았다.

치하며, 결론적으로 bootstrap 시뮬레이션 결과에서도 역시 CVaR 모형과 평균-분산 모형이 최적자산배분 결과에 있어서 유의한 차이를 보여주지 못하였다.

이상의 결과를 종합하면 본 논문에서는 두 개의 서로 다른 기간에 대해 각각 일별 및 주별 자료에 대해, 서로 다른 두 가지 방법(subsampling 방법, bootstrap 시뮬레이션 방법)을 통한 분석을 시행한 결과, 자산배분 전략에 있어 CVaR 모형과 평균-분산 모형이 점추정 결과에서는 약간의 차이를 보이나 그 차이가 유의하지 않은 것으로 나타났다. 분석 대상 수익률이 정확한 정규분포를 따르지 않는 상황에서 이를 정규분포라고 제약적 가정을 부과한 평균-분산 모형과 분포에 대한 제약적 가정 없이 행해진 CVaR 모형의 최적자산배분 결과가 유의한 차이를 보이지 않았다는 것은 중요한 시사점을 갖는다.

금융자산 수익률이 대부분 정규분포를 따르지 않는 상황에서 Markowitz의 평균-분산 모형에 따라 포트폴리오 최적화를 시도하는 경우에 그릇된 결과를 택하기 쉽다는 것이 통상적으로 알려진 바이다. 그러나 CVaR의 경우 이론적으로 표준편차나 VaR가 갖는 한계를 보완한다는 평가를 받음에도 불구하고, 이를 사용한 최적자산배분 전략과 통상적 평균-분산 모형 전략 간 최적자산배분 차이가 유의하지 않다는 사실은, 평균-분산 모형에 비해 상대적으로 많은 시간과 노력을 요하는 보다 복잡한 CVaR 모형의 사용이 적어도 자산배분전략 차원에서는 비용/편익 측면에서 굳이 바람직하지 않을 수도 있다는 점을 시사한다. 물론 이러한 결론이 CVaR 모형이 갖는 유용성을 전면적으로 부정하는 것은 결코 아니다.

이상의 결론은 비정규분포하에서의 평균-VaR 모형과 Markowitz 평균-분산 모형간 자산배분 결과를 비교한 김진호(2002) 및 CVaR 모형과 평균-분산 모형간 자산배분전략 차이를 엄밀한 가설검정 없이 단순 비교한 Krokhmal, Palmquist and Uryasev(2002)의 결과들과 일치한다. 특히 Krokhmal, Palmquist and Uryasev(2002)가 두 모형간 차이가 뚜렷하지 않은 이유를 사용된 수익률 분포가 정규분포와 유사하기 때문이었다고 해석하고 있는데 반해, 본 논문에서는 3자산 중 두 개 자산이 뚜렷한 비정규분포를 보였음에도 불구하고 유사한 결론에 이르렀다는 차이점이 있다. 그러나 Rockafellar and Uryasev(2000)는 수익률 분포가 정규분포에서 멀어져 fat tail 이나 skewed 특성을 보일수록 CVaR 및 평균

-분산 모형은 서로 다른 최적자산배분 형태를 보일 것이라고 주장하였는 바, 본 논문의 결론이 수익률들의 정규분포 근접 여부에 연관되어 있는가에 대한 정확한 결론은 보다 엄밀한 계량검증 분석 방법을 필요로 한다고 본다. 한편 Mausser and Rosen(1999), Gaivoronski and Pflug(2000), Larsen et al.(2002) 등 기존연구에 비해 본 논문의 중요한 기여점은 두 모형간 자산배분 결과의 차이를 보다 정교한 통계적 방법을 통해 입증하고자 했다는 점일 것이다.

5. 결론 및 향후 연구과제

VaR 개념은 표준편차에 비해 이해하기 쉽고 수익률이 비정규분포를 따르거나 비선형성(nonlinearity)을 갖는 자산의 경우에 보다 정확한 위험 측정이 가능하다는 등의 이유에 따라 표준편차보다 보다 유용한 위험측정지표로 평가받고 있다. 그럼에도 불구하고 VaR 역시 sub-additivity 및 convexity 결여로 인해 포트폴리오를 구성하는 자산의 수가 2개를 초과하는 경우 이를 이용한 최적자산배분이 어렵다는 한계를 갖는다. 이에 대해 대안적 개념으로 등장한 CVaR는 VaR가 갖지 못하는 sub-additivity 및 convexity의 특성을 충족시킬 뿐 아니라 신뢰수준을 벗어난 극단치까지 고려할 수 있다는 점에서 보다 적절한 위험측정지표로 평가받는다.

본 논문의 목적은 CVaR를 활용한 최적자산배분 전략을 도출하고 이를 전통적 평균-분산 모형에 의한 자산배분 전략과 비교하는 것이다. 이를 위해 포트폴리오를 구성하는 각 자산별로 정규분포 여부를 먼저 살펴보았다. 수익률이 정규분포를 따르는 경우 Markowitz 모형이 좀더 지지를 받아 실제적으로 두 모형간 차이가 존재하지 않을 수도 있기 때문이다. Jarque-Berra 검정 결과, KOSPI 수익률에서는 정규분포 가정이 기각되지 않았던 반면 국고채와 회사채에서는 기각되었다.

다음으로 subsampling 방법과 bootstrap 시뮬레이션 방법을 통해 CVaR 모형과 평균-분산 모형 간 최적자산배분 비율의 차이가 유의적으로 존재하는지 여부를 살펴본 결과, 최적자산배분 비율에 있어서 두 모형은 약간의 차이를 보이지만 이는 유의하지 않은 것으로 나타났다. 정규분포라는 제약적 가정을 부과한 평균-분산 모형과 분포에 대한 제약적 가정 없이 행해진 CVaR 모형의 최적자산배분

결과가 유의한 차이를 보이지 않았다는 것은 중요한 시사점을 갖는다. CVaR 모형의 경우 이론적으로 표준편차나 VaR가 갖는 한계를 보완한다는 긍정적 평가를 받음에도 불구하고 이를 사용한 최적자산배분 전략과 통상적 평균-분산 모형 간 차이가 유의하지 않다는 사실은, 평균-분산 모형에 비해 상대적으로 많은 시간과 노력을 요하는 보다 복잡한 CVaR 모형의 사용이 적어도 자산배분전략 차원에서는 비용/편익 측면에서 굳이 바람직하지 않을 수도 있다는 점을 시사한다. 이러한 결론은 김진호(2002) 및 Krokhmal, Palmquist and Uryasev(2002)와 일치한다.

본 연구는 sub-additivity 및 convexity 특성의 결여로 인해 VaR의 경우에 최적화가 어려운 3개 이상 자산의 수로 구성된 포트폴리오를 대상으로, 새로운 대안으로 등장한 CVaR 모형을 통해 위험을 측정하고 최적자산배분전략을 시도하였으며, 결과를 평균-분산 모형과 비교하여 차이가 유의적으로 존재하는지 여부를 통계적으로 검증하고자 시도하였다는데 학술적 기여점이 있다고 할 수 있을 것이다.

그러나 본 논문에서 미진했던 점을 고려하여 향후 연구방향으로는 세 가지를 제시해볼 수 있다. 첫째, 분석기간을 늘이고 파생상품 등 비선형적(nonlinear)이며 skewed한 분포를 갖는 보다 다양한 투자자산을 대상으로 자산배분 전략에 대한 광범위한 분석이 흥미로울 것이다. 둘째, 원래 Markowitz 모형은 주어진 목표수익률에서의 최적자산배분 비율 추정을 넘어서 다양한 경우에서 최적위험자산배분(Optimal Risky Portfolio)까지 구하는 것을 제시한다. 본 논문에서 사용된 CVaR 모형을 확장하면 역시 이를 구할 수 있으나, 현 단계에서는 계산시간의 부담이 한계로 작용한다. 이를 효율적으로 추정할 수 있는 방법의 개발은 이론적으로나 실무적으로 흥미로운 과제가 될 것이다. 마지막으로 지적할 수 있는 것은 본 논문에서 사용된 검증방법의 power 문제이다. 계량경제학적으로 보다 큰 power를 갖는 새로운 검증방법의 개발은 논점에 대해 보다 정확한 결론에 다다를 수 있게 해줄 것이다[17].

17) 이와 관련하여 익명의 논평자는 두 모형간 배분비율 차이가 0인가를 검증하는 데 있어 차이의 표준편차가 큰 것이 상대적으로 평균이 0과 유의적으로 다르지 않다 하더라도 질적으로 크게 다르다는 반증일수 있음을 지적하였다. 이는 본 논문에서 사용된 검증방법의 power와 관련한 유익한 지적이지만, 이에 관한 본격적 논의는 계량경제학적으로 보다 깊은 연구가 필요할 것으로 보아 추후 연구에 맡긴다. 이와 관련하여 같은 논평자는 특정기간에는 양의 큰 차이가 있고 특정기간에 음의 큰 차이가 있었을 가능성도 지적하였다. 이러한 지적에 대해 본 논문에서는 다양한 sub-period에 대해 동일한 분석을 시행하였으나, 기간에 따른 별다른 차이를 발견하지 못하였다.

<참 고 문 헌>

김진호, “평균-분산 모형과 평균-VaR 모형간 최적위험자산배분 전략 비교”, 재무연구 제 15권 제 2호, 한국재무학회(2002).

신성환, “우리나라 은행의 최적자산배분과 VaR”, 경영연구 제 23집, 홍익대학교 경영연구소(1998), pp. 439-452.

Acerbi, C. and Tasche, D., “Expected Shortfall: a natural coherent alternative to VaR”, Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA. 31(2)(2002), pp. 379-388.

Acerbi, C. and Tasche, D., "Expected Shortfall and Beyond", *Journal of Banking & Finance* 26(2002), pp. 1519-1533.

Acerbi, C. and Tasche, D., "On the Coherence of Expected Shortfall", *Journal of Banking & Finance* 26(2002), pp. 1487-1503.

Acerbi, C., Nordio, C. and Sirtori, C., "Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management", working paper(2001), pp. 1-10.

Andersson, F., Mausser, H. Rosen, D. and Uryasev, S., “Credit Risk Optimization with Conditional VaR Criterion”, *Mathematical Programming*, Series B, Volume 89, Issue 2(2001), pp. 273-291.

Artzner, P. et al., "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance* 9(1999), pp. 203-228.

Artzner, P., Delbaen, F., Elber, J. M. and Heath, D., "Thinking Coherently", *Risk*, 10, November(1997), pp. 68-71.

Campbell, R., Huisman, R. and Koedijk, K., "Optimal Portfolio Selection in a Value-at-Risk Framework", *Journal of Banking & Finance* 25(2001), pp.1789-1804.

Campbell, Lo and McKinley, *The Econometrics of Financial Markets*(1997).

Embrechts, P., "Extreme Value Theory as a Risk Management Tool", *North American Actuarial Journal*, 3(2), April(1999), pp. 1-22.

Emmer, S., Kluppelberg, C. and Korn, R., "Optimal Portfolios with Bounded Downside Risks", *Mathematical Finance,* Vol. 11, Issue 4(2001), pp. 365-385.

Gaivoronski, A. and Pflug, G., "Finding Optimal Portfolios with Constraints on Value-at-Risk", in Proceedings of Stockholm Seminar on Risk Behavior and Risk management, Stockholm(1999), pp. 1-11.

Gaivoronski, A. and Pflug, G., "Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach", Norwegian University of Science and Technology, working paper 00/2(2000), pp. 1-27.

Gourierroux, C., Laurent, J. P., and Scaillet, O., "Sensitivity Analysis of Value at Risk", *Journal of Empirical Finance* 7(2000), pp. 225-245.

Grootveld, H. and Hallerbach, W. G., "Upgrading VaR from Diagnostic Metric to Decision Variable: A Wise Thing to Do?", working paper(2000), pp. 1-30.

Hans Rau-Bredow, "Value at Risk, Expected Shortfall and Marginal Risk Contribution", working paper(2002), pp. 1-12.

Krokhmal, P., Palmquist, J. and Uryasev, S., "Portfolio Optimization with Conditional VaR Objective and Constraints", *Journal of Risk*, Vol.4, No.2, Winter 2001/02(2002).

Larsen, N. and Mausser, H. and Uryasev, S., "Algorithm for Optimization of Value-at-Risk," in: P. Pardalos and V. K. Tsitsiringos (eds.) *Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain*, Kluwer Academic Publishers(2002), pp. 129-157.

Mausser, H., and Rosen, D., "Beyond VaR: From Measuring Risk to Managing Risk", *Algo Research Quarterly* Vol. 1, No. 2, December(1998), pp. 5-20.

Mausser, H. and Rosen, D., “Efficient Risk/Return Frontiers for Credit Risk," *ALGO Reserch Quarterly*, 2(4)(1999), pp. 35-48.

Pflug, G. C., "Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk", in *Probabilistic Constrained Optimization : Methodology and Applications*, ed. S. Uryasev, Kluwer Academic Publishers(2000).

Rockafellar, R. T. and Uryasev, S., "Optimization of Conditional VaR", *Journal of Risk*, Vol.12, No.3(2000), pp. 21-41.

Rockafellar, R. T. and Uryasev, S., "Conditional VaR for General Loss Distribution", *Journal of Banking & Finance* 26(2002), pp. 1443-1471.

Szego, G., "Measures of Risk", *Journal of Banking & Finance* 26(2002), pp. 1253-1272.

Topaloglou, N., Vladimirou H. and Zenios, S. A., "Conditional VaR Models with Selective Hedging for International Asset Allocation", *Journal of Banking and Finance* 26(2002), pp. 1537-1563.

Whang, Y-J. and J. Kim, "A Multiple Variance Ratio Test using Subsampling", *Economics Letters* 79(2003), pp. 225-230.

Uryasev, S., "Conditional VaR: Optimization Algorithms and Applications", *Financial Engineering News*, Issue 14(2000).