

Probabilidade

Fernando de Pol Mayer

Laboratório de Estatística e Geoinformação (LEG)
Departamento de Estatística (DEST)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)



Este conteúdo está disponível por meio da Licença Creative Commons 4.0
(Atribuição/NãoComercial/PartilhaIgual)

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

1 Introdução

2 Experimentos e eventos

3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

1 Introdução

2 Experimentos e eventos

3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

“A razão do número de todos os casos favoráveis à um acontecimento, para o de todos os casos possíveis é a probabilidade buscada, a qual é portanto uma fração [...].”

“A teoria da probabilidade nada mais é do que o senso comum reduzido à cálculo.”

— Pierre Simon Laplace
Ensaio Filosófico Sobre as Probabilidades (1812)

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

A **Teoria das Probabilidades** é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e pesquisa **modelos** que podem ser utilizados para estudar **experimentos ou fenômenos aleatórios**

A **Inferência Estatística** é totalmente fundamentada na **Teoria das Probabilidades**

O **modelo** utilizado para estudar um fenômeno aleatório pode variar em complexidade, mas todos eles possuem ingredientes básicos comuns.

Tipos de experimentos

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Experimentos determinísticos

Dizemos que um experimento é determinístico quando repetido inúmeras vezes, **em condições semelhantes**, conduz a resultados *essencialmente* idênticos. Ex.:

- Aceleração da gravidade
- Leis da Física e da Química

Experimentos aleatórios

Os experimentos que **repetidos sob as mesmas condições** geram resultados diferentes, são chamados de experimentos aleatórios. Ex.:

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de um dado
- Tempo de vida de um equipamento eletrônico

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

O objetivo é construir um modelo matemático para representar **experimentos aleatórios**. Isso o corre em duas etapas:

- 1 Descrever o **conjunto** de resultados possíveis
- 2 Atribuir *pesos* a cada resultado, refletindo suas chances de ocorrência

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação Independência de eventos Exercícios

1 Introdução

2 Experimentos e eventos

3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Um experimento, que ao ser realizado sob as mesmas condições não produz os mesmos resultados, é denominado um **experimento aleatório**. Exemplo: lançamento de uma moeda, medir altura, ...

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado **espaço amostral** (Ω). Pode conter um número finito ou infinito de pontos. Exemplo: {cara, coroa}, \mathbb{R} , ...

Os elementos do espaço amostral (**pontos amostrais**) são denotados por ω . Exemplo: $\omega_1 = \text{cara}$, $\omega_2 = \text{coroa}$.

Todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório, é um **evento**. Exemplo: $A = \text{"sair cara"}$, $B = \text{"sair face par"}$.

Exemplos

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Experimento lançar o dado e observar o resultado da face.

Espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Pontos amostrais $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \dots, \omega_6 = 6$.

Eventos $A = \text{"sair face par"} , B = \{\omega : \omega \leq 4\}$.

Experimento retirar uma carta de um baralho de 54 cartas.

Espaço amostral $\Omega = \{\clubsuit A, \clubsuit 2, \dots, \heartsuit A, \dots, \spadesuit A, \dots, \diamondsuit J, \diamondsuit Q, \diamondsuit K\}$.

Pontos amostrais $\omega_1 = \clubsuit A, \omega_2 = \clubsuit 2, \dots, \omega_{54} = \diamondsuit K$.

Eventos $A = \text{"sair um ás"} , B = \text{"sair uma letra"} , C = \text{"sair carta de } \clubsuit \text{"}$.

Experimento pesar um fruto ao acaso

Espaço amostral $\Omega = \mathbb{R}^+$.

Pontos amostrais espaço amostral é infinito.

Eventos $A = \text{"peso menor que 50g"} , B = \{x : x \geq 100g\}$.

Exemplo 1: Considere um experimento em que você seleciona uma peça plástica moldada, e mede sua espessura.

- 1 Qual o espaço amostral?
- 2 Se é sabido que as peças só podem variar entre 10 e 11 mm de espessura, qual o espaço amostral?
- 3 Se o objetivo da análise for considerar apenas o fato de uma peça ter espessura baixa, média ou alta, qual o espaço amostral?
- 4 Se o objetivo for considerar o fato de uma peça obedecer ou não às especificações, qual o espaço amostral?

Exemplo 2: Duas peças plásticas são selecionadas e medidas.

- 1 Se o objetivo é verificar se cada peça obedece ou não às especificações, qual o espaço amostral?
- 2 Se o objetivo for somente o número de peças não conformes na amostra, qual o espaço amostral?
- 3 Considere que a espessura é medida até que se encontre a primeira peça fora das especificações. Qual o espaço amostral?

Usamos a **Teoria dos conjuntos** para definir operações com eventos

União é o evento que consiste da união de **todos** os pontos amostrais dos eventos que a compõem. Denotamos a união do evento A com B por $A \cup B$.

$$A \cup B = \{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

Interseção é o evento composto pelos pontos amostrais **comuns** aos eventos que a compõem. Denotamos a interseção de A com B por $A \cap B$.

$$A \cap B = \{\omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$$

Complemento é o conjunto de pontos do espaço amostral que não estão no evento. Denotamos o complemento do evento A por A^c .

$$A^c = \{\omega \notin A\}$$

Probabilidade

Introdução

Experimentos
e eventos

Probabilidade

Definições de
probabilidade
Regra da
adição

Probabilidade
condicional

Regra da
multiplicação
Independência
de eventos
Exercícios

Disjuntos (mutuamente exclusivos) são eventos que possuem interseção nula, ou seja, $A \cap B = \{\emptyset\}$.

Complementares são eventos que a união é o espaço amostral, ou seja, $A \cup B = \Omega$.

Considere o lançamento de um dado e os eventos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C = \text{"face par"}$, $D = \text{"face primo"}$.

- Uniões

- $A \cup B =$
- $A \cup C =$
- $A \cup D =$

- Interseções

- $A \cap B =$
- $A \cap C =$
- $A \cap D =$

- Complementos

- $A^c =$
- $B^c =$
- $D^c =$

Considere o lançamento de um dado e os eventos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C = \text{"face par"}$, $D = \text{"face primo"}$.

- Uniões

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- Interseções

- $A \cap B = \{1, 2, 3\}$
- $A \cap C = \{2, 4\}$
- $A \cap D = \{2, 3\}$

- Complementos

- $A^c = \{5, 6\}$
- $B^c = \{\omega : \omega > 3\}$
- $D^c = \{1, 4, 6\}$

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Sendo A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral, “traduza” para a linguagem da Teoria dos Conjuntos as seguintes situações:

- a) Pelo menos um dos eventos ocorre
- b) O evento A ocorre, mas B não
- c) Nenhum deles ocorre

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

1 Introdução

2 Experimentos e eventos

3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

1 Introdução

2 Experimentos e eventos

3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

As probabilidades podem ser definidas de diferentes maneiras:

- Definição **clássica**
- Definição **frequentista**
- Definição subjetiva
- Definição axiomática

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Definição Clássica

Consideramos um espaço amostral Ω com $n(\Omega)$ eventos simples, supondo que sejam igualmente prováveis. Seja A um evento de Ω , composto de $n(A)$ eventos simples. A probabilidade de A , $P(A)$ será

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Exemplo: Lança-se um dados honesto e observa-se a face voltada para cima. Determine a probabilidade de ocorrer a face 4

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Exemplo: Lança-se um dados honesto e observa-se a face voltada para cima. Determine a probabilidade de ocorrer a face 4

- Experimento: lançar o dado e observar o resultado da face.
- Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$
- Pontos amostrais: $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \dots, \omega_6 = 6$.
- Evento: ocorrer face 4. $A = \{4\} \Rightarrow n(A) = 1$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} = 0,1667$$

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Com base nesse resultado, podemos afirmar que a cada 6 lançamentos de um dado, uma face será sempre 4?

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Com base nesse resultado, podemos afirmar que a cada 6 lançamentos de um dado, uma face será sempre 4?

Não, pois cada lançamento é aleatório!

No entanto, se repetissemos o lançamento de um dado **inúmeras vezes**, a proporção de vezes em que ocorre o 4 seria aproximadamente 0,1667 \Rightarrow **frequência relativa**

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Definição frequentista

Podemos então pensar em repetir o experimento aleatório n vezes, e contar quantas vezes o evento A ocorre, $n(A)$. Dessa forma a frequência relativa de A nas n repetições será

$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}$$

Para $n \rightarrow \infty$ repetições sucessivas e independentes, a frequência relativa de A tende para uma constante p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) = p$$

Definições de probabilidade

Probabilidade

Introdução

Experimentos
e eventos

Probabilidade

Definições de
probabilidade

Regra da
adição

Probabilidade
condicional

Regra da
multiplicação

Independência
de eventos

Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **10** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 10

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 3

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.3
```

Definições de probabilidade

Probabilidade

Introdução

Experimentos
e eventos

Probabilidade

Definições de
probabilidade

Regra da
adição

Probabilidade
condicional

Regra da
multiplicação

Independência
de eventos

Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **100** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 100

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 13

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.13
```

Definições de probabilidade

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **1000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 1000

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 146

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.146
```

Definições de probabilidade

Probabilidade

Introdução

Experimentos
e eventos

Probabilidade

Definições de
probabilidade

Regra da
adição

Probabilidade
condicional

Regra da
multiplicação

Independência
de eventos

Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **10000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 10000

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 1586

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.1586
```

Definições de probabilidade

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **100000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 100000

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 16616

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.16616
```

Definições de probabilidade

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **1000000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 1000000

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 166911

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.16691
```

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) \approx 0,1667$$

As probabilidades calculadas a partir de frequências relativas, são **estimativas** da verdadeira probabilidade

Lei dos Grandes Números

A Lei dos Grandes Números nos diz que as estimativas dadas pelas frequências relativas tendem a ficar melhores com mais observações.

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Axiomas de probabilidade

Vamos considerar **probabilidade** como sendo uma função $P(\cdot)$ que associa valores numéricos à um evento A do espaço amostral, e que satisfaz as seguintes condições

- i) $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$
- ii) $0 \leq P(A) \leq 1$
- iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se, e somente se $A \cap B = \emptyset$

Os axiomas asseguram que as probabilidades podem ser interpretadas como **frequências relativas**.

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Lançam-se 3 moedas. Determine o espaço amostral. Para cada um dos eventos abaixo, descreva os conjuntos e determine as probabilidades:

- a) Faces iguais
- b) Cara na 1^a moeda
- c) Coroa na 2^a e 3^a moedas

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

1 Introdução

2 Experimentos e eventos

3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- **Regra da adição**
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

Notação: tabela de dupla entrada ou tabela de contingência

| | A | B | Total |
|-------|---------------|---------------|--------|
| X | $P(A \cap X)$ | $P(B \cap X)$ | $P(X)$ |
| Y | $P(A \cap Y)$ | $P(B \cap Y)$ | $P(Y)$ |
| Total | $P(A)$ | $P(B)$ | 1 |

- **Probabilidades marginais:** são as probabilidades individuais nas margens da tabela
- **Probabilidades conjuntas:** são as probabilidades de ocorrência de dois eventos simultâneos

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Considere a tabela de dupla entrada abaixo, que mostra o número de estudantes por sexo (F e M) e turma (A e B)

| | F | M | Total |
|-------|----|----|-------|
| A | 21 | 5 | 26 |
| B | 16 | 8 | 24 |
| Total | 37 | 13 | 50 |

Determine a probabilidade de um estudante selecionado ao acaso ser:

- Do sexo feminino, $P(F)$
- Do sexo masculino, $P(M)$
- Da turma A, $P(A)$
- Da turma B, $P(B)$

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Qual seria a probabilidade de escolhermos um estudante do sexo feminino ou da turma B?

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Qual seria a probabilidade de escolhermos um estudante do sexo feminino ou da turma B?

Queremos então $P(F \cup B)$

$$\begin{aligned}P(F \cup B) &= P(F) + P(B) \\&= 0,74 + 0,48 \\&= 1,22\end{aligned}$$

o que não é possível pois a soma é superior a 1.

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Não é difícil ver que estamos somando alguns indivíduos 2 vezes, pois:

- Ao considerarmos apenas estudantes do sexo feminino, temos estudantes da turma A bem como da turma B
- Ao considerarmos estudantes da turma B, temos estudantes do sexo feminino e masculino

Assim, os estudantes do sexo feminino e da turma B, ou seja, o evento $F \cap B$ está incluído no evento F e no evento B

Logo precisamos subtrair uma vez $P(F \cap B)$ para obter a probabilidade correta.

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Nesse caso, pela tabela, vemos que a interseção $F \cap B$ resulta na probabilidade

$$P(F \cap B) = \frac{16}{50} = 0,32$$

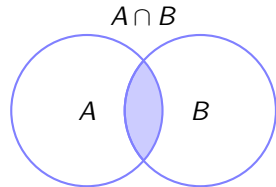
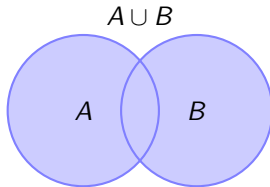
E o resultado correto para $P(F \cup B)$ é

$$\begin{aligned} P(F \cup B) &= P(F) + P(B) - P(F \cap B) \\ &= 0,74 + 0,48 - 0,32 \\ &= 0,9 \end{aligned}$$

Regra da adição

A probabilidade da união entre dois eventos quaisquer, A e B , é dada pela **regra da adição de probabilidades**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Regra da adição

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

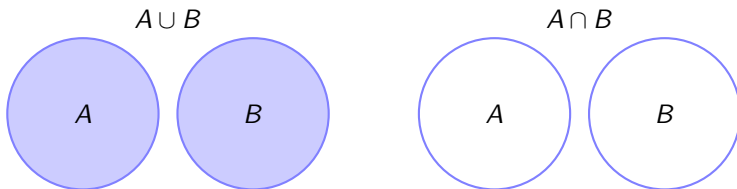
Independência de eventos

Exercícios

Note que a regra da adição pode ser simplificada, **se e somente se** os eventos A e B forem **disjuntos** (ou mutuamente exclusivos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

pois, neste caso, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$



Regra do complementar

Como consequência da regra da adição, obtemos que, para qualquer evento A ,

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Verifique através de $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Considerando a tabela abaixo, identifique as probabilidades de um estudante:

| | F | M | Total |
|-------|----|----|-------|
| A | 21 | 5 | 26 |
| B | 16 | 8 | 24 |
| Total | 37 | 13 | 50 |

- a) ser do sexo feminino ou masculino
- b) ser do sexo masculino ou da turma A
- c) não ser do turma B
- d) ser da turma A ou da turma B
- e) não ser do sexo feminino
- f) ser da turma B ou do sexo masculino

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

1 Introdução

2 Experimentos e eventos

3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- **Probabilidade condicional**
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação Independência de eventos Exercícios

Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas.

A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Nestes casos, dizemos que **ganhamos informação**, e podemos *recalcular* as probabilidades de interesse.

Estas probabilidades *recalculadas* recebem o nome de **probabilidade condicional**.

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Para entender a ideia de probabilidade condicional, considere o seguinte exemplo:

- Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4?
- Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saído face 4 com essa “nova” informação?

Probabilidade condicional

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação Independência de eventos Exercícios

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n(\Omega) = 6$$

$$A = \text{face 4} = \{4\}, n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$B = \text{face par} = \{2, 4, 6\}, n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

$$C = \text{face 4, dado que ocorreu face par} = \{4\}, \\ n(C) = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

Dado que B tenha ocorrido, o espaço amostral fica **reduzido** para B , pois todos os resultados possíveis passam a ser os aqueles do evento B .

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

- Independência de eventos
- Exercícios

Definição

Para dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral, o termo $P(A|B)$ denota a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu, e é definido como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

da mesma forma que a probabilidade de B ocorrer, dado que A ocorreu é definida como

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Probabilidade condicional

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Voltando ao exemplo e aplicando a definição de probabilidade condicional:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{1/6}{3/6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação Independência de eventos Exercícios

Dessa forma, temos duas maneiras de calcular a probabilidade condicional $P(A|B)$

- 1 Diretamente, pela consideração da probabilidade de A em relação ao espaço amostral reduzido B
- 2 Empregando a definição acima, onde $P(A \cap B)$ e $P(B)$ são calculadas em relação ao espaço amostral original Ω

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação Independência de eventos Exercícios

Considere a tabela abaixo com o número de estudantes por sexo (F e M) e turma (A e B):

| | F | M | Total |
|-------|----|----|-------|
| A | 21 | 5 | 26 |
| B | 16 | 8 | 24 |
| Total | 37 | 13 | 50 |

Qual a probabilidade de que um estudante selecionado ao acaso seja da turma A, dado que é uma mulher?

Qual a probabilidade de que um estudante selecionado ao acaso seja homem, dado que é da turma B?

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

1 Introdução

2 Experimentos e eventos

3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- **Regra da multiplicação**
- Independência de eventos
- Exercícios

Regra da multiplicação

Probabilidade

Introdução

Experimentos
e eventos

Probabilidade

Definições de
probabilidade
Regra da
adição

Probabilidade
condicional

Regra da
multiplicação

Independência
de eventos
Exercícios

A regra da multiplicação é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Com isso podemos obter a probabilidade de uma interseção pelo produto de uma probabilidade marginal com uma probabilidade condicional.

Regra da multiplicação

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

Regra da multiplicação

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Essa expressão permite calcular probabilidades em espaços amostrais que são realizados em sequência, onde a ocorrência da *segunda* etapa **depende** da ocorrência da *primeira* etapa.

Exemplo: Considere uma urna com 3 bolas brancas e 7 bolas vermelhas. Duas bolas são retiradas da urna, uma após a outra, **sem reposição**. Determine o espaço amostral e as probabilidades associadas a cada ponto amostral.

Regra da multiplicação

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Probabilidade de saírem 2 bolas brancas $\{B_1 B_2\}$

Probabilidade de sair branca e vermelha $\{B_1 V_2\}$

Probabilidade de sair vermelha e branca $\{V_1 B_2\}$

Probabilidade de saírem 2 bolas vermelhas $\{V_1 V_2\}$

Regra da multiplicação

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Probabilidade de saírem 2 bolas brancas $\{B_1 B_2\}$

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{3}{10} \frac{2}{9} = \frac{2}{30}$$

Probabilidade de sair branca e vermelha $\{B_1 V_2\}$

$$P(B_1 \cap V_2) = P(B_1)P(V_2|B_1) = \frac{3}{10} \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

Probabilidade de sair vermelha e branca $\{V_1 B_2\}$

$$P(V_1 \cap B_2) = P(V_1)P(B_2|V_1) = \frac{7}{10} \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

Probabilidade de saírem 2 bolas vermelhas $\{V_1 V_2\}$

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P(V_2|V_1) = \frac{7}{10} \frac{6}{9} = \frac{14}{30}$$

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

1 Introdução

2 Experimentos e eventos

3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Vimos que para probabilidades condicionais, $P(A|B)$, saber que B ocorreu nos dá uma informação “extra” sobre a ocorrência de A

Porém, existem algumas situações nas quais saber que o evento B ocorreu, não tem qualquer interferência na ocorrência ou não de A

Nestes casos, podemos dizer que os eventos A e B são **independentes**

Os eventos A e B são **eventos independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e também que} \quad P(B|A) = P(B)$$

Com isso, e a regra da multiplicação, temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

Isso significa que se dois eventos são independentes, a probabilidade de ocorrência simultânea $P(A \cap B)$ é o produto das probabilidades marginais, $P(A)$ e $P(B)$.

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Dessa forma, podemos verificar se dois eventos são independentes de duas formas

- 1 Pela definição intuitiva

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

Observação: se o evento A é independente do evento B, então nós esperamos que B também seja independente de A.

- 2 Pela definição formal

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

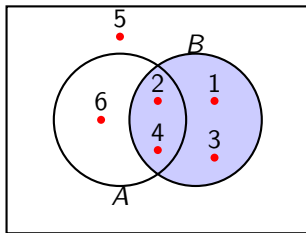
Lançamento de um dado

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos

A = “resultado é um número par”

B = “resultado é um número menor ou igual a 4”

Os eventos A e B são independentes?



Pela definição intuitiva:

$$P(A) = 1/2, \quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2/6}{4/6} = 1/2$$

$$P(B) = 2/3, \quad P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3.$$

Portanto: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$

Pela definição formal:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1/3$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 1/3, \text{ assim } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Portanto, os eventos A e B são independentes. Saber que A ocorreu não muda a probabilidade de B ocorrer e vice-versa.

- ① As probabilidades de um estudante ser aprovado em exames de matemática, inglês, ou de ambos são

$$P(M) = 0,7 \quad P(I) = 0,8 \quad P(M \cap I) = 0,56$$

Verifique se os eventos M e I são independentes.

- ② As probabilidades de chover em determinada cidade nos dias de natal (N), no dia de ano-novo (A), ou em ambos os dias são

$$P(N) = 0,6 \quad P(A) = 0,6 \quad P(N \cap A) = 0,42$$

Verifique se os eventos N (“chover no natal”) e A (“chover no ano novo”) são independentes.

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade

Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

1 Introdução

2 Experimentos e eventos

3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

Probabilidade

Introdução

Experimentos e eventos

Probabilidade

Definições de probabilidade Regra da adição

Probabilidade condicional

Regra da multiplicação

Independência de eventos

Exercícios

Exercícios 1–20, do capítulo 5 do livro (pgs. 135–141).

Pinto, SS; Silva, CS. **Estatística, Vol I**. Rio Grande: Editora da FURG, 2010. [Cap. 5]

Referências Básicas

- Magalhães, MN; Lima, ACP. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: EDUSP, 2008. [Cap. 2]
- Pinto, SS; Silva, CS. **Estatística, Vol I**. Rio Grande: Editora da FURG, 2010. [Cap. 5]

Referências Complementares

- Kazmier, LJ. **Estatística Aplicada à Administração e Economia**. Porto Alegre: Bookman. 2006. [Cap. 5]