Medidas resumo

Fernando de Pol Mayer

Laboratório de Estatística e Geoinformação (LEG)
Departamento de Estatística (DEST)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Plano de aula

Plano de aula

Introdução

Características importantes de qualquer conjunto de dados

- Centro
- Variação
- Distribuição
- Valores atípicos

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Plano de aula

Medidas de centro

Definição

É um valor no centro, ou meio, do conjunto de dados

Ferramentas para **resumo** e **análise** de dados

- Média
- Mediana
- Moda

Plano de aula

Moda

A **moda** é o valor que ocorre com **maior frequência** em um conjunto de dados

Dependendo do conjunto de dados, ele pode ser

- **Sem moda** quando nenhum valor se repete
- **Unimodal** quando existe apenas um valor repetido com maior frequência
- **Bimodal** quando existem dois valores com a mesma maior frequência
- **Multimodal** quando mais de dois valores se repetem com a mesma frequência

Moda

Qual é a moda?

A) 2 5 7 9 13 15 22

B) 16 19 19 21 21 21 23 27

C) 2 7 7 13 15 15 22

Moda

Qual é a moda?

ótimo	bom	bom	péssimo	bom	bom	ótimo
ótimo	bom	ótimo	bom	ótimo	bom	bom
ótimo	bom	péssimo	bom	péssimo	bom	péssimo
bom	bom	bom	bom	ótimo	bom	péssimo
ótimo	ótimo	bom	péssimo			

Moda

Vantagens

- **Resistente** à valores extremos
- É a única medida de centro que pode ser usada para dados **qualitativos**

Desvantagens

- É uma medida **viesada**

Plano de aula

Mediana

A **mediana** é uma medida de centro que é o **valor do meio**, quando os dados são arranjados de maneira **ordenada**

É o valor cuja posição separa o conjunto de dados em duas partes iguais

Quando as observações são ordenadas em ordem crescente, vamos denotar a menor observação por $x_{(1)}$, a segunda por $x_{(2)}$, e assim por diante, obtendo-se

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n-1)} \leq x_{(n)}$$

Estas observações odenadas são chamadas de **estatísticas de ordem**.

Mediana

Por exemplo, se cinco observações de uma variável forem $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 8$, $x_5 = 7$, então

$$3 \leq 4 \leq 7 \leq 8 \leq 8$$

E as estatísticas de ordem são: $x_{(1)} = 3$, $x_{(2)} = 4$, $x_{(3)} = 7$, $x_{(4)} = 8$, $x_{(5)} = 8$.

Nesse exemplo, a mediana (Md) é 7, pois é o valor que separa o conjunto de dados em duas partes iguais.

Mas note que o número de observações é par. Caso fosse ímpar, a mediana seria a média aritmética das duas observações centrais.

Mediana

De maneira geral, a mediana de uma variável X pode ser definida por:

$$Md(X) = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

Portanto, no exemplo anterior, se tívessemos

$$3 \leq 4 \leq 7 \leq 8 \leq 8 \leq 9$$

Então

$$Md = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = \frac{7+8}{2} = 7,5$$

Mediana

Número ímpar de elementos

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 7 \quad 11$$

Mediana

Número par de elementos

$$2 \quad 4 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13$$

Mediana

Vantagens

- Medida **resistente**
- Não é influenciada pela presença de valores extremos

Desvantagens

- É uma medida **viesada**

Plano de aula

Média

A **média aritmética** de um conjunto de dados é a medida de tendência central encontrada pela soma de todos os valores, dividida pelo número total de elementos, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

No exemplo anterior, temos então que a média de 3, 4, 7, 8, 8 é

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{5} \cdot (3 + 4 + 7 + 8 + 8) \\ &= \frac{1}{5} \cdot (30) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Média

Considere a nota das provas de 5 alunos em uma sala com 30 alunos

```
7,0 3,0 5,5 6,5 8,0
```

Note que a média é o **ponto de equilíbrio de massa** dos dados

Média

Considere o valor dos salários de todos os 6 empregados de uma pequena empresa

```
860,00 750,00 980,00 1.200,00 790,00 950,00
```

Calcule a média populacional

Média

Agora, se tivermos n observações da variável X, das quais f_1 são iguais a x_1, f_2 são iguais a x_2, ..., f_k são iguais a x_k, então a média pode ser definida por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

Note que, se as frequências relativas são $fr_i = f_i / n$, então a equação acima também pode ser escrita como

$$\bar{x} = x_1 fr_1 + x_2 fr_2 + \cdots + x_k fr_k = \sum_{i=1}^{k} x_i fr_i$$

Média

Como exemplo, considere a tabela de frequência abaixo:

Número	f_i	fr_i
0	4	0,20
1	5	0,25
2	7	0,35
3	3	0,15
5	1	0,05
Total	20	1

A média é calculada por:

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{20} \cdot (0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + \cdots + 5 \cdot 1) \\
&= \frac{1}{20} \cdot (33) \\
&= 1,65
\end{aligned}
$$

Média

No caso de variáveis contínuas resumidas em tabelas de frequência com intervalos de classe, a média pode ser aproximada, calculando-se o **ponto médio** de cada classe

$$PM = \frac{\lim_{inf} + \lim_{sup}}{2}$$

e supor que os valores dentro de cada classe sejam iguais ao ponto médio. Nesse caso, ficamos com amesma situação para o caso discreto, onde a média é calculada com pares (x_i, f_i) ou (x_i, fr_i).

Claramente isso é uma aproximação, pois estamos perdendo informação ao assumir que todos os valores de uma classe sejam iguais. Portanto, deverá haver alguma diferença entre esta média aproximada e e média que seria calculada com os valores originais.

Média

Considere a seguinte tabela de distribuição de frequência:

Classe	f_i	fr_i
$[4, 8)$	10	0,278
$[8, 12)$	12	0,333
$[12, 16)$	8	0,222
$[16, 20)$	5	0,139
$[20, 24)$	1	0,028
Total	36	1

Considerando os pontos médios de cada classe, a média é calculada por

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{36} \cdot (6 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + \cdots + 22 \cdot 1) \\ &= \frac{1}{36} \cdot (404) \\ &= 11,22\end{aligned}$$

Média

Vantagens

- Medida **não viesada**
- A média tende a ser mais **consistente** do que outras medidas de centro

Desvantagens

- Sensível à valores extremos
- Medida não **resistente**

Média, Mediana, e Moda

Você está procurando um estágio nas empresas A e B. Cada empresa oferece remuneração por 20 horas semanais com as seguintes característica (em salários mínimos)

	A	B
média	2,5	2,0
mediana	1,7	1,9
moda	1,5	1,9

Qual você escolheria?

Média e Mediana

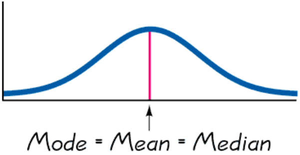
Para notar como a média é influenciada pela presença de valores extremos

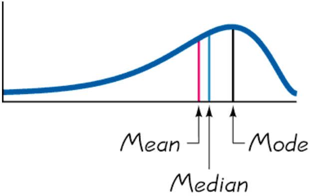
$$5 \quad 7 \quad 10 \quad 13 \quad 15 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 10 \text{ e } \mathrm{Me} = 10$$

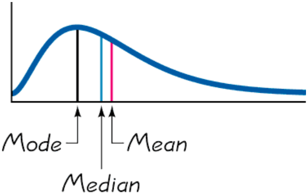
$$5 \quad 7 \quad 10 \quad 13 \quad 65 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 20 \text{ e } \mathrm{Me} = 10$$

Nos casos onde se deseja comparar bases de dados diferentes, normalmente a mediana é mais indicada, por ser uma medida mais **robusta**, *não influenciada por valores extremos*

Média, Mediana, e Moda







Média, Mediana, e Moda

Exemplo: Os dados abaixo se referem ao percentual de cobertura de vegetação em duas áreas de uma floresta.

Área A: 43 47 48 51 51 55 55 57 59

Área B: 20 22 45 46 53 54 56 57

a) Calcule a média, a mediana e a moda para a área A. Qual a medida de tendência central melhor representa esse conjunto de dados? Por quê?

b) Calcule a média, a mediana e a moda para a área B. Qual a medida de tendência central melhor representa esse conjunto de dados? Por quê?

Plano de aula

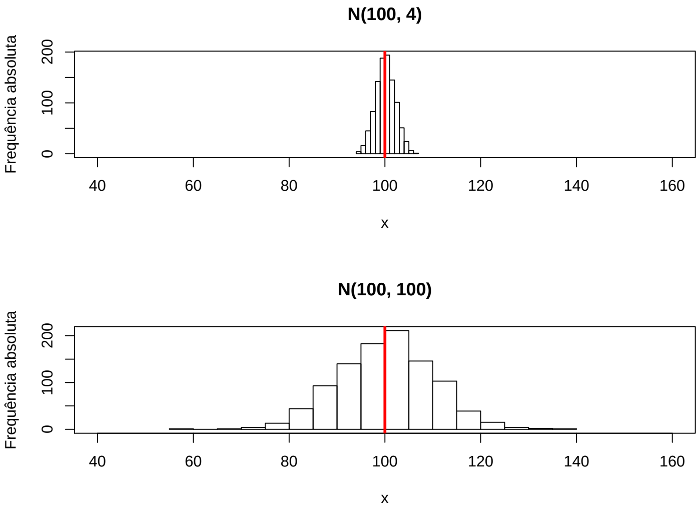
Introdução

O resumo de um conjunto de dados exclusivamente por uma medida de centro, **esconde** toda a informação sobre a variabilidade do conjunto de observações

Não é possível analisar um conjunto de dados apenas através de uma medida de tendência central

Por isso precisamos de medidas que resumam a **variabilidade** dos dados em relação à um valor central

Introdução



N(100, 4)
Frequência absoluta
0
100
200
40
60
80
100
120
140
160
x
N(100, 100)
Frequência absoluta
0
100
200
40
60
80
100
120
140
160
x

Cinco grupos de alunos se submeteram a um teste, obtendo as seguintes notas

Grupo	**Notas**	$\bar{x}$
A	3, 4, 5, 6, 7	5
B	1, 3, 5, 7, 9	5
C	5, 5, 5, 5, 5	5
D	3, 5, 5, 7	5
E	3, 5, 5, 6, 6	5

O que a média diz a respeito das notas quando comparamos os grupos?

Medidas de variação

Definição

São medidas estatísticas que caracterizam o quanto um conjunto de dados está disperso em torno de sua tendência central

Ferramentas para **resumo** e **análise** de dados

- Amplitude
- Desvio-médio
- Variância
- Desvio-padrão
- Coeficiente de Variação

Plano de aula

Amplitude

A **amplitude** de um conjunto de dados é a diferença entre o maior e o menor valor.

$$\text{AMP} = \max - \min$$

Como a amplitude usa **apenas** os valores máximo e mínimo, é muito **sensível** a valores extremos

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Amplitude

Calcule a média e a amplitude do número de acertos em uma prova com 50 questões

31 27 42 35 47 28 7 45 15 20

Calcule a média e a amplitude para a idade de um grupo de pessoas

4 3 4 3 4 3 21

Medidas de variação

Para melhorar a medida de variabilidade, devemos considerar **todos os dados disponíveis**

A melhor forma de se fazer isso é considerar o **desvio** de cada valor em relação à média

Como queremos um **resumo** da variabilidade, devemos fazer a **soma** dos desvios

Considere as notas do grupo A do exemplo acima ($\bar{x} = 5$)

Grupo A	$x_i - \bar{x}$
3	-2
4	-1
5	0
6	1
7	2
Soma	0

Medidas de variação

Como a soma dos desvios é **sempre** zero, temos duas alternativas

- Considerar o total dos desvios absolutos (em módulo)

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

- Considerar o total dos quadrados dos desvios

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

O uso destes totais pode causar dificuldades quando comparamos conjuntos de dados de tamanhos diferentes. Desse modo é mais conveniente exprimir estas medidas como **médias** (dividindo as somas por n). Assim teremos:

- Desvio médio
- Variância

Plano de aula

Desvio médio

O **desvio médio** é definido como a média aritmética dos desvios em módulo (valor absoluto)

$$\text{DM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

No exemplo anterior

Grupo A	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
3	-2	2
4	-1	1
5	0	0
6	1	1
7	2	2
Soma	0	6

$\text{DM} = \frac{6}{5} = 1,2$

Desvio médio

Mas, o desvio médio é baseado em uma operação **não algébrica** (módulo), o que cria dificuldades em análises posteriores

Além disso, é uma medida **viesada**

Uma alternativa melhor é a **soma dos quadrados dos desvios**

Plano de aula

Variância

A **variância** é definida como a *média aritmética* da soma dos quadrados dos desvios.

Variância amostral

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Uma fórmula alternativa da variância pode ser obtida desenvolvendo-se o quadrado no numerador da expressão anterior

$$s^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]$$

Variância

No exemplo anterior

Grupo A	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$
3	-2	2	4
4	-1	1	1
5	0	0	0
6	1	1	1
7	2	2	4
Soma	0	6	10

$s^2 = \frac{10}{5} = 2$

Variância

Assim como no caso da média, se tivermos n observações da variável X, das quais f_1 são iguais a x_1, f_2 são iguais a x_2, $\ldots$, f_k são iguais a x_k, então a variância pode ser definida por:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} fr_i (x_i - \bar{x})^2$$

Ou, pela fórmula alternativa

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot f_i - \frac{(\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i)^2}{n} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot fr_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot fr_i \right)^2 \end{aligned}$$

Onde $fr_i = f_i/n$, e $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

Variância

Como exemplo, considere a tabela de frequência abaixo ($\bar{x} = 1,65$):

Número	f_i	fr_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
0	4	0,20	-1,65	2,72
1	5	0,25	-0,65	0,42
2	7	0,35	0,35	0,12
3	3	0,15	1,35	1,82
5	1	0,05	3,35	11,22
Total	20	1		16,31

A variância pode ser calculada por:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{20} \cdot [4 \cdot 2,72 + 5 \cdot 0,42 + \cdots + 1 \cdot 11,22] \\
&= \frac{1}{20} \cdot (30,55) \\
&= 1,528
\end{aligned}
$$

Variância

Considere a seguinte tabela de distribuição de frequência ($\bar{x} = 11,22$):

Classe	**PM** $= x_i$	f_i	fr_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
$[4, 8)$	6	10	0,278	-5,222	27,272
$[8, 12)$	10	12	0,333	-1,222	1,494
$[12, 16)$	14	8	0,222	2,778	7,716
$[16, 20)$	18	5	0,139	6,778	45,938
$[20, 24)$	22	1	0,028	10, 778	116,160
Total		36	1		198,58

Considerando os pontos médios de cada classe, a variância pode ser calculada por

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{36} \cdot [10 \cdot 27,272 + 12 \cdot 1,494 + \cdots + 1 \cdot 116,160] \\
&= \frac{1}{36} \cdot (698,22) \\
&= 19,395
\end{aligned}
$$

Variância

A variância amostral s^2 é considerada um estimador **não viesado** da variância populacional σ^2

É utilizada em diversos métodos estatísticos e caracteriza todas as distribuições de probabilidade

No entanto, as *unidades da variância são diferentes das unidades dos dados originais* (são medidas ao quadrado, como notas ao quadrado ou cm^2)

Plano de aula

Desvio-padrão

O **desvio-padrão** é a raiz quadrada da variância

Desvio-padrão amostral

$$s = \sqrt{s^2}$$

Sendo que s^2 é calculada de qualquer uma das formas anteriores.

Propriedades do desvio-padrão

- É uma medida de variação de todos os dados em relação à **média**
- É sempre positivo ou nulo
  - Valores mais distantes da média tem desvio-padrão maior
  - Valores mais próximos da média tem desvio-padrão menor
- A unidade do desvio-padrão é a mesma dos dados originais (por exemplo notas ou cm)
- A inclusão de valores **extremos** pode afetar drasticamente o valor do desvio-padrão

Desvio-padrão

Exemplo: Os dados abaixo se referem ao percentual de cobertura de vegetação em duas áreas de uma floresta.

Área A: 43 47 48 51 51 55 55 57 59

Área B: 20 22 45 46 53 54 56 57

a) Calcule o desvio-padrão para as duas áreas.
b) Podemos comparar essas duas medidas? O que podemos concluir?

Plano de aula

Coeficiente de Variação

O **Coeficiente de Variação** (CV) mede a dispersão dos dados em relação à média (medido em %)

Coeficiente de variação amostral

$$\text{CV} = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

É utilizado para se comparar a variação de um ou mais conjuntos de dados

Coeficiente de Variação

Qual o Coeficiente de Variação para as duas áreas do exemplo anterior:

Área A: 43 47 48 51 51 55 55 57 59

Área B: 20 22 45 46 53 54 56 57

O que podemos concluir?

Coeficiente de Variação

O Coeficiente de Variação é muito útil também para se comparar dados medidos em escalas diferentes. Por exemplo

	Média	Desvio-padrão
Altura	174 cm	7 cm
Peso	78 kg	12 kg

Sópodemos comparar o desvio-padrão com unidades diferentes através do CV

$$\mathrm{CV}_A = \frac{7}{174} \cdot 100\% = 4\% \qquad \mathrm{CV}_P = \frac{12}{78} \cdot 100\% = 15,4\%$$

Plano de aula

Exerícios

Considere a tabela de frequência abaixo:

Classe	f_i
$1,0 \vdash 2,5$	3
$2,5 \vdash 4,0$	5
$4,0 \vdash 5,5$	3
$5,5 \vdash 7,0$	7
$7,0 \vdash 8,5$	9
$8,5 \vdash 10,0$	13

Calcule a média, a variância, o desvio-padrão, e o CV para este conjunto de dados.

Referências

- Magalhães, MN; Lima, ACP. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: EDUSP, 2008. [Cap. 1]
- Bussab, WO; Morettin, PA. **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva, 2006. 526 p. [Cap. 3]