

# Probabilidade

Fernando de Pol Mayer

Laboratório de Estatística e Geoinformação (LEG)  
Departamento de Estatística (DEST)  
Universidade Federal do Paraná (UFPR)



Este conteúdo está disponível por meio da Licença Creative Commons 4.0  
(Atribuição/NãoComercial/PartilhaIgual)

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## 1 Introdução

## 2 Experimentos e eventos

## 3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

#### Definições de probabilidade

#### Regra da adição

#### Probabilidade condicional

#### Regra da multiplicação

#### Independência de eventos

#### Exercícios

## 1 Introdução

## 2 Experimentos e eventos

## 3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

## Probabilidade

### Introdução

#### Experimentos e eventos

#### Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

*“A razão do número de todos os casos favoráveis à um acontecimento, para o de todos os casos possíveis é a probabilidade buscada, a qual é portanto uma fração [...].”*

— Pierre Simon Laplace  
**Ensaio Filosófico Sobre as Probabilidades**

## Probabilidade

### Introdução

#### Experimentos e eventos

#### Probabilidade

#### Definições de probabilidade

#### Regra da adição

#### Probabilidade condicional

#### Regra da multiplicação

#### Independência de eventos

#### Exercícios

A **Teoria das Probabilidades** é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e pesquisa **modelos** que podem ser utilizados para estudar **experimentos ou fenômenos aleatórios**

A **Inferência Estatística** é totalmente fundamentada na **Teoria das Probabilidades**

O modelo utilizado para estudar um fenômeno aleatório pode variar em complexidade, mas todos eles possuem ingredientes básicos comuns.

# Tipos de experimentos

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## Experimentos determinísticos

Dizemos que um experimento é determinístico quando repetido inúmeras vezes, **em condições semelhantes**, conduz a resultados *essencialmente* idênticos. Ex.:

- Aceleração da gravidade
- Leis da Física e da Química

## Experimentos aleatórios

Os experimentos que **repetidos sob as mesmas condições** geram resultados diferentes, são chamados de experimentos aleatórios. Ex.:

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de um dado
- Tempo de vida de um equipamento eletrônico

## Probabilidade

### Introdução

#### Experimentos e eventos

#### Probabilidade

#### Definições de probabilidade

#### Regra da adição

#### Probabilidade condicional

#### Regra da multiplicação

#### Independência de eventos

#### Exercícios

O objetivo é construir um modelo matemático para representar **experimentos aleatórios**. Isso o corre em duas etapas:

- 1 Descrever o **conjunto** de resultados possíveis
- 2 Atribuir *pesos* a cada resultado, refletindo suas chances de ocorrência

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

#### Definições de probabilidade

#### Regra da adição

#### Probabilidade condicional

#### Regra da multiplicação

#### Independência de eventos

#### Exercícios

## 1 Introdução

## 2 Experimentos e eventos

## 3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios



## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

#### Definições de probabilidade

#### Regra da adição

#### Probabilidade condicional

#### Regra da multiplicação

#### Independência de eventos

#### Exercícios

Um experimento, que ao ser realizado sob as mesmas condições não produz os mesmos resultados, é denominado um **experimento aleatório**. Exemplo: lançamento de uma moeda, medir altura, ...

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado **espaço amostral** ( $\Omega$ ). Pode conter um número finito ou infinito de pontos. Exemplo: {cara, coroa},  $\mathbb{R}$ , ...

Os elementos do espaço amostral (**pontos amostrais**) são denotados por  $\omega$ . Exemplo:  $\omega_1 = \text{cara}$ ,  $\omega_2 = \text{coroa}$ .

Todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório, é um **evento**. Exemplo:  $A = \text{"sair cara"}$ ,  $B = \text{"sair face par"}$ .

# Exemplos

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

**Experimento** lançar o dado e observar o resultado da face.

**Espaço amostral**  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Pontos amostrais**  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \dots, \omega_6 = 6$ .

**Eventos**  $A = \text{"sair face par"} , B = \{\omega : \omega \leq 4\}$ .

**Experimento** retirar uma carta de um baralho de 54 cartas.

**Espaço amostral**  $\Omega = \{\clubsuit A, \clubsuit 2, \dots, \heartsuit A, \dots, \spadesuit A, \dots, \diamondsuit J, \diamondsuit Q, \diamondsuit K\}$ .

**Pontos amostrais**  $\omega_1 = \clubsuit A, \omega_2 = \clubsuit 2, \dots, \omega_{54} = \diamondsuit K$ .

**Eventos**  $A = \text{"sair um ás"} , B = \text{"sair uma letra"} , C = \text{"sair carta de } \clubsuit \text{"}$ .

**Experimento** pesar um fruto ao acaso

**Espaço amostral**  $\Omega = \mathbb{R}^+$ .

**Pontos amostrais** espaço amostral é infinito.

**Eventos**  $A = \text{"peso menor que 50g"} , B = \{x : x \geq 100g\}$ .

**União** é o evento que consiste da união de **todos** os pontos amostrais dos eventos que a compõem. Denotamos a união do evento A com B por  $A \cup B$ .

$$A \cup B = \{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

**Interseção** é o evento composto pelos pontos amostrais **comuns** aos eventos que a compõem. Denotamos a interseção de A com B por  $A \cap B$ .

$$A \cap B = \{\omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$$

**Complemento** é o conjunto de pontos do espaço amostral que não estão no evento. Denotamos o complemento do evento A por  $A^c$ .

$$A^c = \{\omega \notin A\}$$

Probabilidade

Introdução

Experimentos  
e eventos

Probabilidade

Definições de  
probabilidade  
Regra da  
adição

Probabilidade  
condicional

Regra da  
multiplicação  
Independência  
de eventos  
Exercícios

**Disjuntos** (mutuamente exclusivos) são eventos que possuem interseção nula, ou seja,  $A \cap B = \{\emptyset\}$ .

**Complementares** são eventos que a união é o espaço amostral, ou seja,  $A \cup B = \Omega$ .

Considere o lançamento de um dado e os eventos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$ ,  $C = \text{"face par"}$ ,  $D = \text{"face primo"}$ .

- Uniões

- $A \cup B =$

- $A \cup C =$

- $A \cup D =$

- Interseções

- $A \cap B =$

- $A \cap C =$

- $A \cap D =$

- Complementos

- $A^c =$

- $B^c =$

- $D^c =$

Considere o lançamento de um dado e os eventos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$ ,  $C = \text{"face par"}$ ,  $D = \text{"face primo"}$ .

- Uniões

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- Interseções

- $A \cap B = \{1, 2, 3\}$
- $A \cap C = \{2, 4\}$
- $A \cap D = \{2, 3\}$

- Complementos

- $A^c = \{5, 6\}$
- $B^c = \{\omega : \omega > 3\}$
- $D^c = \{1, 4, 6\}$

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## 1 Introdução

## 2 Experimentos e eventos

## 3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## 1 Introdução

## 2 Experimentos e eventos

## 3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios



## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

As probabilidades podem ser definidas de diferentes maneiras:

- Definição **clássica**
- Definição **frequentista**
- Definição subjetiva
- Definição axiomática

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## Definição Clássica

Consideramos um espaço amostral  $\Omega$  com  $n(\Omega)$  eventos simples, supondo que sejam igualmente prováveis. Seja  $A$  um evento de  $\Omega$ , composto de  $n(A)$  eventos simples. A probabilidade de  $A$ ,  $P(A)$  será

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Exemplo: Lança-se um dados honesto e observa-se a face voltada para cima. Determine a probabilidade de ocorrer a face 4

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Exemplo: Lança-se um dados honesto e observa-se a face voltada para cima. Determine a probabilidade de ocorrer a face 4

- Experimento: lançar o dado e observar o resultado da face.
- Espaço amostral:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$
- Pontos amostrais:  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \dots, \omega_6 = 6$ .
- Evento: ocorrer face 4.  $A = \{4\} \Rightarrow n(A) = 1$ .

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} = 0,1667$$

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Com base nesse resultado, podemos afirmar que a cada 6 lançamentos de um dado, uma face será sempre 4?

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Com base nesse resultado, podemos afirmar que a cada 6 lançamentos de um dado, uma face será sempre 4?

**Não**, pois cada lançamento é aleatório!

No entanto, se repetissemos o lançamento de um dado **inúmeras vezes**, a proporção de vezes em que ocorre o 4 seria aproximadamente 0,1667  $\Rightarrow$  **frequência relativa**

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## Definição frequentista

Podemos então pensar em repetir o experimento aleatório  $n$  vezes, e contar quantas vezes o evento  $A$  ocorre,  $n(A)$ . Dessa forma a frequência relativa de  $A$  nas  $n$  repetições será

$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}$$

Para  $n \rightarrow \infty$  repetições sucessivas e independentes, a frequência relativa de  $A$  tende para uma constante  $p$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) = p$$

# Definições de probabilidade

Probabilidade

Introdução

Experimentos  
e eventos

Probabilidade

Definições de  
probabilidade

Regra da  
adição

Probabilidade  
condicional

Regra da  
multiplicação

Independência  
de eventos

Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **10** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 10

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 3

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.3
```



# Definições de probabilidade

Probabilidade

Introdução

Experimentos  
e eventos

Probabilidade

Definições de  
probabilidade

Regra da  
adição

Probabilidade  
condicional

Regra da  
multiplicação

Independência  
de eventos

Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **100** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 100

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 13

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.13
```

# Definições de probabilidade

Probabilidade

Introdução

Experimentos  
e eventos

Probabilidade

Definições de  
probabilidade

Regra da  
adição

Probabilidade  
condicional

Regra da  
multiplicação

Independência  
de eventos

Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **1000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 1000

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 146

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.146
```

# Definições de probabilidade

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **10000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 10000

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 1586

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.1586
```

# Definições de probabilidade

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **100000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 100000

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 16616

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.16616
```

# Definições de probabilidade

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Exemplo: Se um dado fosse lançado **1000000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 1000000

## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)

## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
  # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
  x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}

## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 166911

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.16691
```

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) \approx 0,1667$$

As probabilidades calculadas a partir de frequências relativas, são **estimativas** da verdadeira probabilidade

## Lei dos Grandes Números

A Lei dos Grandes Números nos diz que as estimativas dadas pelas frequências relativas tendem a ficar melhores com mais observações.

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## Axiomas de probabilidade

Vamos considerar **probabilidade** como sendo uma função  $P(\cdot)$  que associa valores numéricos à um evento  $A$  do espaço amostral, e que satisfaz as seguintes condições

- i)  $P(\Omega) = 1$ ;  $P(\emptyset) = 0$
- ii)  $0 \leq P(A) \leq 1$

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Para cada um dos casos abaixo, escreva o espaço amostral  $\Omega$  e conte seus elementos

- a) Uma urna contém 5 bolas brancas e 5 bolas azuis. Duas bolas são selecionadas ao acaso, **com reposição**, e as cores são anotadas.
- b) Dois dados são lançados simultaneamente, e estamos interessados na soma das faces observadas.
- c) Em uma cidade, famílias com 3 crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma delas, de acordo com a idade.



## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Sendo  $A$  e  $B$  dois eventos em um mesmo espaço amostral, “traduza” para a linguagem da Teoria dos Conjuntos as seguintes situações:

- a) Pelo menos um dos eventos ocorre
- b) O evento  $A$  ocorre, mas  $B$  não
- c) Nenhum deles ocorre

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Lançam-se 3 moedas. Determine o espaço amostral. Para cada um dos eventos abaixo, descreva os conjuntos e determine as probabilidades:

- a) Faces iguais
- b) Cara na 1<sup>a</sup> moeda
- c) Coroa na 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> moedas

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## 1 Introdução

## 2 Experimentos e eventos

## 3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- **Regra da adição**
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

## Notação: tabela de dupla entrada ou tabela de contingência

	A	B	Total
X	$P(A \cap X)$	$P(B \cap X)$	$P(X)$
Y	$P(A \cap Y)$	$P(B \cap Y)$	$P(Y)$
Total	$P(A)$	$P(B)$	1

- **Probabilidades marginais:** são as probabilidades individuais nas margens da tabela
- **Probabilidades conjuntas:** são as probabilidades de ocorrência de dois eventos simultâneos

# Regra da adição

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Considere a tabela de dupla entrada abaixo, que mostra o número de estudantes por sexo (F e M) e turma (A e B)

	F	M	Total
A	21	5	26
B	16	8	24
Total	37	13	50

Determine a probabilidade de um estudante selecionado ao acaso ser:

- Do sexo feminino,  $P(F)$
- Do sexo masculino,  $P(M)$
- Da turma A,  $P(A)$
- Da turma B,  $P(B)$

# Regra da adição

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Qual seria a probabilidade de escolhermos um estudante do sexo feminino ou da turma B?

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Qual seria a probabilidade de escolhermos um estudante do sexo feminino ou da turma B?

Queremos então  $P(F \cup B)$

$$\begin{aligned}P(F \cup B) &= P(F) + P(B) \\&= 0,74 + 0,48 \\&= 1,22\end{aligned}$$

o que não é possível pois a soma é superior a 1.

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Não é difícil ver que estamos somando alguns indivíduos 2 vezes, pois:

- Ao considerarmos apenas estudantes do sexo feminino, temos estudantes da turma A bem como da turma B
- Ao considerarmos estudantes da turma B, temos estudantes do sexo feminino e masculino

Assim, os estudantes do sexo feminino e da turma B, ou seja, o evento  $F \cap B$  está incluído no evento  $F$  e no evento  $B$

Logo precisamos subtrair uma vez  $P(F \cap B)$  para obter a probabilidade correta.



## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Nesse caso, pela tabela, vemos que a interseção  $F \cap B$  resulta na probabilidade

$$P(F \cap B) = \frac{16}{50} = 0,32$$

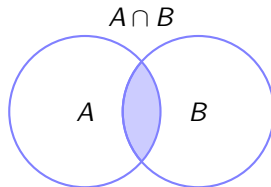
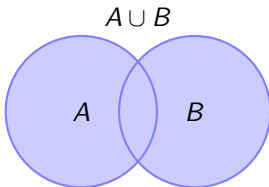
E o resultado correto para  $P(F \cup B)$  é

$$\begin{aligned} P(F \cup B) &= P(F) + P(B) - P(F \cap B) \\ &= 0,74 + 0,48 - 0,32 \\ &= 0,9 \end{aligned}$$

## Regra da adição

A probabilidade da união entre dois eventos quaisquer,  $A$  e  $B$ , é dada pela **regra da adição de probabilidades**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



# Regra da adição

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

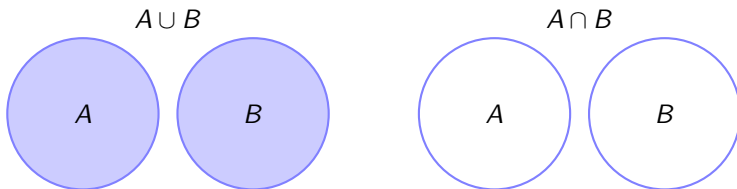
### Independência de eventos

### Exercícios

Note que a regra da adição pode ser simplificada, **se e somente se** os eventos  $A$  e  $B$  forem **disjuntos** (ou mutuamente exclusivos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

pois, neste caso,  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$



## Regra do complementar

Como consequência da regra da adição, obtemos que, para qualquer evento  $A$ ,

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Verifique através de  $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Considerando a tabela abaixo, identifique as probabilidades de um estudante:

	F	M	Total
A	21	5	26
B	16	8	24
Total	37	13	50

- a) ser do sexo feminino ou masculino
- b) ser do sexo masculino ou da turma A
- c) não ser do turma B
- d) ser da turma A ou da turma B
- e) não ser do sexo feminino
- f) ser da turma B ou do sexo masculino

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

- Independência de eventos
- Exercícios

## 1 Introdução

## 2 Experimentos e eventos

## 3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- **Probabilidade condicional**
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

# Probabilidade condicional

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

#### Definições de probabilidade Regra da adição

#### Probabilidade condicional

#### Regra da multiplicação Independência de eventos Exercícios

Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas.

A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Nestes casos, dizemos que **ganhamos informação**, e podemos *recalcular* as probabilidades de interesse.

Estas probabilidades *recalculadas* recebem o nome de **probabilidade condicional**.

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

- Independência de eventos
- Exercícios

Para entender a ideia de probabilidade condicional, considere o seguinte exemplo:

- Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4?
- Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saído face 4 com essa “nova” informação?



# Probabilidade condicional

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação Independência de eventos Exercícios

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n(\Omega) = 6$$

$$A = \text{face 4} = \{4\}, n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$B = \text{face par} = \{2, 4, 6\}, n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

$$C = \text{face 4, dado que ocorreu face par} = \{4\}, \\ n(C) = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

Dado que  $B$  tenha ocorrido, o espaço amostral fica **reduzido** para  $B$ , pois todos os resultados possíveis passam a ser os aqueles do evento  $B$ .

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

#### Definições de probabilidade

#### Regra da adição

#### Probabilidade condicional

#### Regra da multiplicação

#### Independência de eventos

#### Exercícios

## Definição

Para dois eventos  $A$  e  $B$  de um mesmo espaço amostral, o termo  $P(A|B)$  denota a probabilidade de  $A$  ocorrer, dado que  $B$  ocorreu, e é definido como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

da mesma forma que a probabilidade de  $B$  ocorrer, dado que  $A$  ocorreu é definida como

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

#### Definições de probabilidade

#### Regra da adição

#### Probabilidade condicional

#### Regra da multiplicação

#### Independência de eventos

#### Exercícios

Voltando ao exemplo e aplicando a definição de probabilidade condicional:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{1/6}{3/6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

- Independência de eventos
- Exercícios

Dessa forma, temos duas maneiras de calcular a probabilidade condicional  $P(A|B)$

- 1 Diretamente, pela consideração da probabilidade de  $A$  em relação ao espaço amostral reduzido  $B$
- 2 Empregando a definição acima, onde  $P(A \cap B)$  e  $P(B)$  são calculadas em relação ao espaço amostral original  $\Omega$

# Probabilidade condicional

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação Independência de eventos Exercícios

Considere a tabela abaixo com o número de estudantes por sexo (F e M) e turma (A e B):

	F	M	Total
A	21	5	26
B	16	8	24
Total	37	13	50

Qual a probabilidade de que um estudante selecionado ao acaso seja da turma A, dado que é uma mulher?

Qual a probabilidade de que um estudante selecionado ao acaso seja homem, dado que é da turma B?

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## 1 Introdução

## 2 Experimentos e eventos

## 3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- **Regra da multiplicação**
- Independência de eventos
- Exercícios

# Regra da multiplicação

Probabilidade

Introdução

Experimentos  
e eventos

Probabilidade

Definições de  
probabilidade  
Regra da  
adição

Probabilidade  
condicional

Regra da  
multiplicação

Independência  
de eventos  
Exercícios

A regra da multiplicação é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Com isso podemos obter a probabilidade de uma interseção pelo produto de uma probabilidade marginal com uma probabilidade condicional.

## Regra da multiplicação

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

# Regra da multiplicação

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Essa expressão permite calcular probabilidades em espaços amostrais que são realizados em sequência, onde a ocorrência da *segunda* etapa **depende** da ocorrência da *primeira* etapa.

**Exemplo:** Considere uma urna com 3 bolas brancas e 7 bolas vermelhas. Duas bolas são retiradas da urna, uma após a outra, **sem reposição**. Determine o espaço amostral e as probabilidades associadas a cada ponto amostral.



# Regra da multiplicação

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Probabilidade de saírem 2 bolas brancas  $\{B_1 B_2\}$

Probabilidade de sair branca e vermelha  $\{B_1 V_2\}$

Probabilidade de sair vermelha e branca  $\{V_1 B_2\}$

Probabilidade de saírem 2 bolas vermelhas  $\{V_1 V_2\}$

# Regra da multiplicação

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Probabilidade de saírem 2 bolas brancas  $\{B_1 B_2\}$

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{3}{10} \frac{2}{9} = \frac{2}{30}$$

Probabilidade de sair branca e vermelha  $\{B_1 V_2\}$

$$P(B_1 \cap V_2) = P(B_1)P(V_2|B_1) = \frac{3}{10} \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

Probabilidade de sair vermelha e branca  $\{V_1 B_2\}$

$$P(V_1 \cap B_2) = P(V_1)P(B_2|V_1) = \frac{7}{10} \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

Probabilidade de saírem 2 bolas vermelhas  $\{V_1 V_2\}$

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P(V_2|V_1) = \frac{7}{10} \frac{6}{9} = \frac{14}{30}$$

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

#### Definições de probabilidade

#### Regra da adição

#### Probabilidade condicional

#### Regra da multiplicação

#### Independência de eventos

#### Exercícios

## 1 Introdução

## 2 Experimentos e eventos

## 3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Vimos que para probabilidades condicionais,  $P(A|B)$ , saber que  $B$  ocorreu nos dá uma informação “extra” sobre a ocorrência de  $A$

Porém, existem algumas situações nas quais saber que o evento  $B$  ocorreu, não tem qualquer interferência na ocorrência ou não de  $A$

Nestes casos, podemos dizer que os eventos  $A$  e  $B$  são **independentes**

Os eventos A e B são **eventos independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e também que} \quad P(B|A) = P(B)$$

Com isso, e a regra da multiplicação, temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

Isso significa que se dois eventos são independentes, a probabilidade de ocorrência simultânea  $P(A \cap B)$  é o produto das probabilidades marginais,  $P(A)$  e  $P(B)$ .

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

Dessa forma, podemos verificar se dois eventos são independentes de duas formas

- 1 Pela definição intuitiva

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

**Observação:** se o evento A é independente do evento B, então nós esperamos que B também seja independente de A.

- 2 Pela definição formal

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

# Exemplo

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

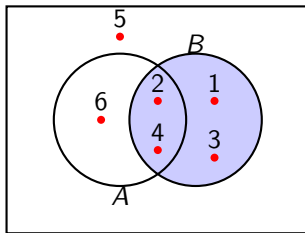
## Lançamento de um dado

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos

$A$  = “resultado é um número par”

$B$  = “resultado é um número menor ou igual a 4”

Os eventos  $A$  e  $B$  são independentes?



**Pela definição intuitiva:**

$$P(A) = 1/2, \quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2/6}{4/6} = 1/2$$

$$P(B) = 2/3, \quad P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3.$$

Portanto:  $P(A|B) = P(A)$  e  $P(B|A) = P(B)$

**Pela definição formal:**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1/3$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 1/3, \text{ assim } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Portanto, os eventos  $A$  e  $B$  são independentes. Saber que  $A$  ocorreu não muda a probabilidade de  $B$  ocorrer e vice-versa.



- ① As probabilidades de um estudante ser aprovado em exames de matemática, inglês, ou de ambos são

$$P(M) = 0,7 \quad P(I) = 0,8 \quad P(M \cap I) = 0,56$$

Verifique se os eventos M e I são independentes.

- ② As probabilidades de chover em determinada cidade nos dias de natal (N), no dia de ano-novo (A), ou em ambos os dias são

$$P(N) = 0,6 \quad P(A) = 0,6 \quad P(N \cap A) = 0,42$$

Verifique se os eventos N (“chover no natal”) e A (“chover no ano novo”) são independentes.

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## 1 Introdução

## 2 Experimentos e eventos

## 3 Probabilidade

- Definições de probabilidade
- Regra da adição
- Probabilidade condicional
- Regra da multiplicação
- Independência de eventos
- Exercícios

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

#### Definições de probabilidade

#### Regra da adição

#### Probabilidade condicional

#### Regra da multiplicação

#### Independência de eventos

### Exercícios

Exercícios 1–20, do capítulo 5 do livro (pgs. 135–141).

Pinto, SS; Silva, CS. **Estatística, Vol I**. Rio Grande: Editora da FURG, 2010. [Cap. 5]

## Probabilidade

### Introdução

### Experimentos e eventos

### Probabilidade

### Definições de probabilidade

### Regra da adição

### Probabilidade condicional

### Regra da multiplicação

### Independência de eventos

### Exercícios

## Referências Básicas

- Magalhães, MN; Lima, ACP. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: EDUSP, 2008. [Cap. 2]
- Pinto, SS; Silva, CS. **Estatística, Vol I**. Rio Grande: Editora da FURG, 2010. [Cap. 5]

## Referências Complementares

- Kazmier, LJ. **Estatística Aplicada à Administração e Economia**. Porto Alegre: Bookman. 2006. [Cap. 5]