

# 目 录

<b>第一章 捷联惯导系统概述</b> .....	(1)
§ 1-1 捷联惯性技术的发展过程.....	(1)
§ 1-2 捷联惯导系统与平台惯导系统的对比.....	(6)
<b>第二章 惯导系统的基本工作原理</b> .....	(9)
§ 2-1 常用坐标系.....	(9)
§ 2-2 舒勒摆原理.....	(12)
§ 2-3 惯导基本方程.....	(19)
§ 2-4 惯性导航的方向余弦法.....	(35)
§ 2-5 惯导系统的高度通道.....	(54)
<b>第三章 捷联矩阵的即时修正</b> .....	(61)
§ 3-1 捷联矩阵与飞行器的姿态角.....	(61)
§ 3-2 四元数理论及其在刚体定点转动中的应用.....	(66)
§ 3-3 捷联矩阵的即时修正算法.....	(82)
<b>第四章 捷联矩阵的正交化与算法误差</b> .....	(86)
§ 4-1 捷联矩阵正交化问题的提出.....	(86)
§ 4-2 导致捷联矩阵成为不正交矩阵的原因.....	(87)
§ 4-3 捷联矩阵的最佳正交化.....	(97)
§ 4-4 以漂移误差为标准比较三种即时修正算法.....	(106)
<b>第五章 捷联惯导系统的初始对准</b> .....	(109)
§ 5-1 向量及其反对称矩阵的相似变换定理.....	(110)
§ 5-2 初始对准的误差传播方程.....	(114)
§ 5-3 捷联惯导系统的初始对准技术.....	(128)
<b>第六章 捷联惯导系统的数学模型</b> .....	(143)
§ 6-1 系统的数学模型编排.....	(143)

§ 6-2	初始条件的给定与初始数据的计算·····	(150)
§ 6-3	系统的机上执行算法·····	(153)
§ 6-4	捷联计算不同迭代周期的划分及主程序框图·····	(161)
<b>第七章</b>	<b>捷联敏感元件的余度技术·····</b>	<b>(165)</b>
§ 7-1	系统的可靠性与余度技术·····	(165)
§ 7-2	双自由度陀螺的最佳配置·····	(170)
§ 7-3	单自由度陀螺的最佳配置·····	(185)
<b>第八章</b>	<b>系统误差分析·····</b>	<b>(194)</b>
§ 8-1	系统误差的分类·····	(194)
§ 8-2	捷联敏感元件的误差模型及补偿方法·····	(195)
§ 8-3	系统误差的传播特性·····	(203)
§ 8-4	捷联系统的数字仿真·····	(206)
<b>第九章</b>	<b>捷联系统的实验研究·····</b>	<b>(212)</b>
§ 9-1	捷联系统实验研究的意义及实验系统的构成·····	(212)
§ 9-2	捷联系统对陀螺的要求及其性能的测试·····	(215)
§ 9-3	惯性敏感元件误差模型的测试·····	(222)
§ 9-4	系统实验及数据采集·····	(223)
<b>附录一</b>	<b>地球参考椭球体的主曲率半径·····</b>	<b>(228)</b>
<b>附录二</b>	<b>无限小转动的向量性定理·····</b>	<b>(237)</b>
<b>附录三</b>	<b>复合数量函数对向量的导数·····</b>	<b>(240)</b>
<b>参考文献</b>	<b>·····</b>	<b>(243)</b>

# 第一章 捷联惯导系统概述

本章将概括地介绍捷联系统的发展过程，并与平台系统相对比地介绍捷联系统的特点，以便使读者在学习捷联系统的基本原理之前就对它的概况有个粗略的了解。

## § 1-1 捷联惯性技术的发展过程

“捷联(Strapdown)”这一术语的英文原义就是“捆绑”的意思。因此，所谓捷联惯性系统也就是将惯性敏感元件(陀螺与加速度计)直接“捆绑”在飞行器的机体上，从而完成制导和导航任务的系统。

追溯捷联惯性技术的发展历程，要从二次大战末期德国研制的 V-2 导弹说起。在 V-2 导弹上采用了最原始的捷联惯性制导系统，即在导弹上安装了两个位置陀螺和一个积分加速度计，用以解决导弹基本参数的测量问题。当时德国就是利用了这种导弹飞越英吉利海峡，对英国进行了突然袭击。

五十年代以来，捷联惯性技术与平台惯性技术都在以很高的速度并行地发展着。

为了给飞行器(特别是飞机与舰船)提供足够的导航参数(如飞行器的姿态角、位置与速度等)，发展了平台惯导系统，其简化原理图如图 1-1 所示。图中平台台体通过平台轴与载体隔离。通过平台稳定回路可以使平台跟踪某个给定的坐标

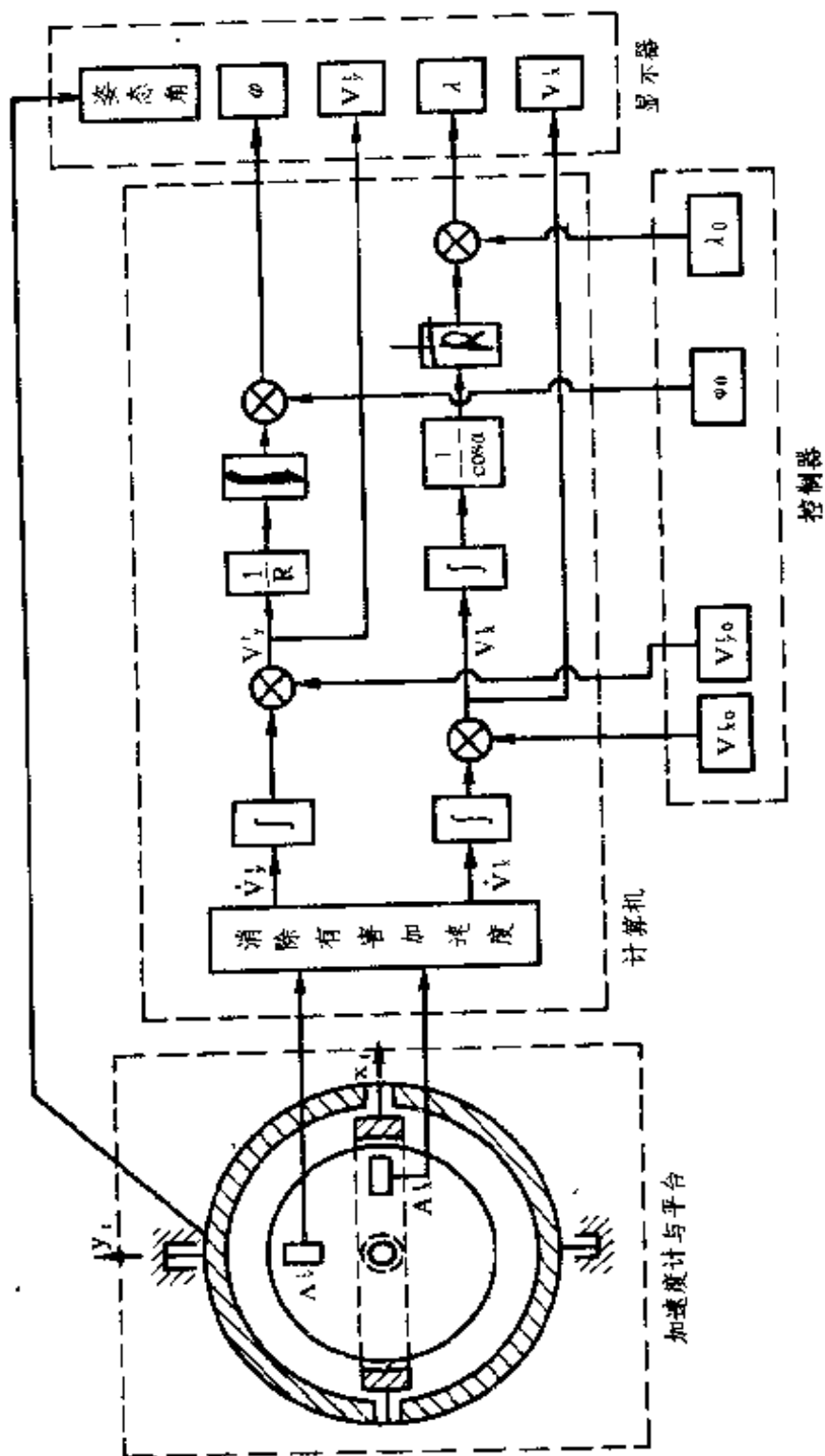


图 1-1 平台惯导系统简化原理图

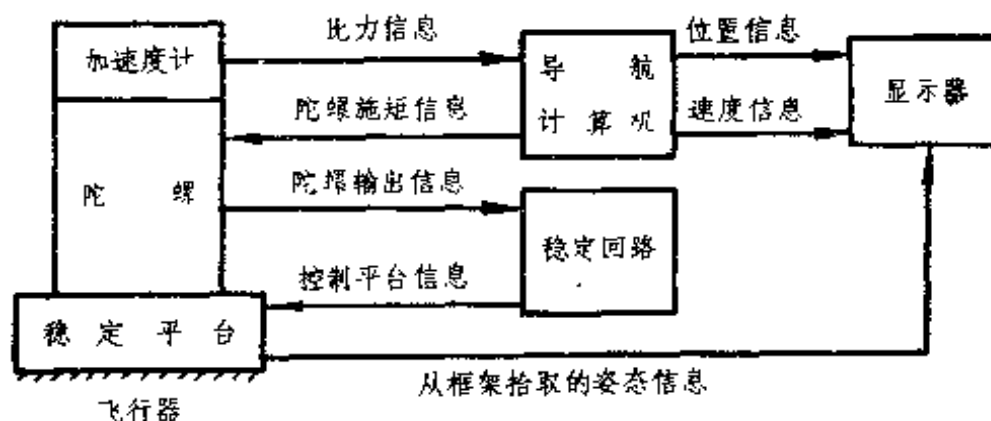


图 1-2 平台惯导系统的原理方块图

由于平台的上述作用，促进了平台惯导系统的发展和应用。1953 年，美国德雷珀实验室首次进行了飞机平台惯导系统的试飞。当时在一架 B-29 轰炸机上进行了一次长达 10 小时的横贯美国大陆的飞行，证实了纯惯性技术的可行性，为惯性技术的发展奠定了良好的基础。1958 年，在改进性能的基础上，美国又进行了第二次横贯美国大陆的飞行。1960 年美国利顿公司制造的 LN-3 飞机惯导系统在西德的 F-104G 飞机上试飞成功。在此以后的二十多年中，平台惯导系统已普遍应用于军用及民用的各种运载器上，成为一种成熟的导航装置。

就在平台惯导系统迅速发展的同时，捷联系统也处于研制的过程中。五十年代中期，美国首先致力于航天飞行器的捷联方案。这样的考虑是很自然的，因为这些飞行器所承受的角速率很小，这可以使捷联系统的设计大为简化。到了六十年代，捷联技术得到了比较成熟的探索。美国在“阿波罗-13”宇宙飞船上成功地应用了捷联技术。1969 年，在“阿波罗-13”飞向月球的途中，服务舱的氧气系统爆炸，使指令舱的电源遭到破坏。在危急的情况下，正是靠了德雷珀实验室设计的低功耗备份捷联惯导系统 LM/ASA 才将飞船从离地 36 万公里

的空间引导到返回地球的轨道上，安全地降落在太平洋上。此后，美国又成功地设计了“德耳塔”助推火箭惯性制导系统、“海盗”火星降落器惯性测量装置，以及“捕鲸叉”反舰导弹的捷联制导系统等。这一时期的捷联系统的研制为以后高性能的飞机捷联系统的发展和应用开辟了道路。

飞机捷联惯导系统与其它飞行器的捷联系统相比最突出的特点是要求它能适应较宽的动态范围。一架歼击机可以绕其横滚轴以 400 度/秒的速率旋转，而陀螺至少应能感受到 0.01 度/小时的速率，其动态范围在  $10^8 \sim 10^9$  之间。另外在恶劣的机动环境下，由于捷联系统的敏感元件是直接“捆绑”在机体上的，陀螺与加速度计将直接承受机体角运动干扰的影响，其误差是十分严重的。在捷联技术的发展中必须突破两个主要的技术关键，即：

1. 陀螺必须既能获得低漂移率特性，又不至于受到载体的大角速率的限制；
2. 计算机和有关软件必须能实现由飞行器到某一导航坐标系的坐标转换，并能实现对系统误差的补偿。

由于计算机技术的发展，以及捷联敏感元件的进展（例如液浮速率陀螺、挠性陀螺、静电陀螺及激光陀螺等），使上述两个技术关键得到了突破，促进了捷联惯导技术的日趋成熟。

图 1-3 示出了捷联惯导系统的原理方块图。对比图 1-2 和图 1-3 可以看出，平台的作用已由计算机及其软件的作用代替了，因此又可将这一作用叫做“数学平台”。由于用计算机软件所实现的“数学平台”取代了复杂的机械平台，这就大大降低了惯导系统的成本。

由于捷联技术的飞速发展，捷联惯导系统在 80 年代已逐渐由试飞阶段进入应用阶段。以美国的利顿公司为例，它生



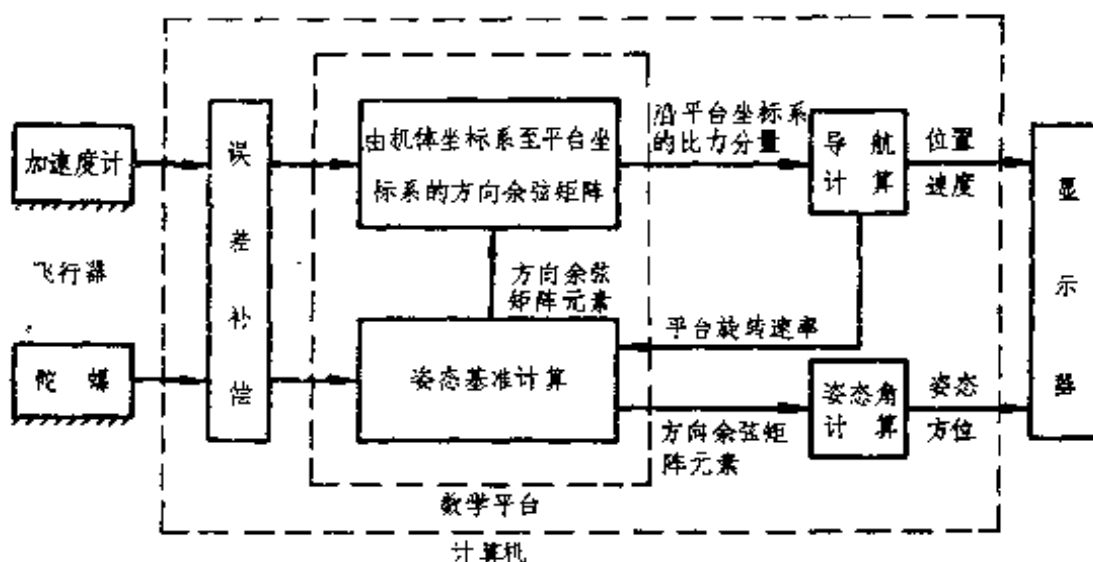


图 1-3 捷联惯导系统原理方块图

产的第四代惯导系统 LN-50, LN-80, RLN-50, LR-80, LTN-80, LTN-90, 以及 AAH 系统等均采用了捷联方案。捷联系统已经并将在飞船、导弹、飞机、直升飞机、鱼雷、炮兵测量等不同的领域中获得广泛的应用。在捷联技术中, 由于飞机惯导系统的主要特点就是中等精度和低成本, 所以飞机捷联系统的发展更为迅速。近年来, 捷联系统在民用领域中的应用为捷联技术的应用与发展开辟了更广阔的前景。例如加拿大 Shell Canada Resources 公司研制的采用激光陀螺的捷联系统——费伦梯惯性陆用测量仪 FILS——就广泛地应用于地震、地籍、水册、河流的测量, 以及油田测量、摄影、绘图和重力测量等多种用途之中。

## § 1-2 捷联惯导系统与平台惯导系统的对比

从捷联技术的发展过程中我们已经看到捷联系统的优越

性已越来越突出地显示出来，并在许多方面已日渐代替平台系统。为什么会出现这种情况呢？为了回答这一问题，本节从生产与使用的角度将捷联系统与平台系统做一对比。

### 1. 硬件和软件的复杂程度

由于捷联系统没有平台框架及相连的伺服装置，因而简化了硬件；代价是增加了计算机的负担，需要一个比较复杂的实时程序。

### 2. 可靠性

捷联系统的可靠性要比平台系统高，其原因是它的机械构件少，加之容易采用多敏感元件配置，实现冗余技术。

### 3. 成本与可维护性

由于平台系统在机械结构上要复杂得多，而对于捷联系统只是算法复杂些，因而从制造成本上看捷联系统的成本要比平台系统低。从市场供应的情况来看，数字计算机的价格一直在下降，而平台系统的价格一直在上升。

此外，捷联系统比平台系统具有较长的平均故障间隔时间，加之模块设计简化了维修，从而捷联系统的可维护性比平台系统大为提高了。

### 4. 初始对准精度与系统精度

决定系统精度的重要因素之一是惯导系统的初始基准建立的准确性。平台系统的陀螺安装在台体上以后还可以相对重力加速度和地球自转轴方向任意定位，还可以根据需要标定惯性敏感元件的误差；而捷联系统的敏感元件在载体上安装以后就不能再标定，因此要求捷联敏感元件有较高的参数稳定性。

在系统的精度方面，由于捷联系统是靠计算机来实现“平台”作用的，所以其算法误差比平台系统要大些。一般要求软



## 第二章 惯导系统的基本工作原理

不论是捷联惯导系统还是平台惯导系统，其基本工作原理都是相同的，只不过实现这一基本工作原理所采用的手段有所不同而已。本章不涉及具体类型的惯导系统的特殊性问题，而只讨论两种惯导系统所共同遵循的基本工作原理。这样，在以后的章节中便可集中精力讨论捷联惯导系统所特有的问题。

### §2-1 常用坐标系

在数学与力学中我们都遇到过坐标系的概念。那么在惯性导航中为什么要引入各种不同的坐标系呢？这些坐标系又是怎样定义的？本节就来回答这些问题。

#### 一、在惯性导航中采用各种坐标系的必要性

惯性导航中所采用的坐标系可分为惯性坐标系与非惯性坐标系两类。惯性导航区别于其它类型的导航方案（如无线电导航、天文导航等）的根本不同之处就在于其导航原理是建立在牛顿力学定律——又可称为惯性定律——的基础上的，“惯性导航”也因此而得名。然而牛顿力学定律是在惯性空间内成立的，这就首先有必要引入惯性坐标系，作为讨论惯导基本原理的坐标基准。我们知道，对飞行器进行导航的主要目的就是实时地确定其导航参数，如飞行器的姿态、位置、速

度等。飞行器的导航参数就是通过各个坐标系之间的关系来确定的,这些坐标系是区别于惯性坐标系、并根据导航的需要而选取的。我们将它们统称为非惯性坐标系,如地球坐标系、地理坐标系、导航坐标系、平台坐标系及机体坐标系等。

## 二、几种常用的坐标系

在惯性导航中常用的坐标系有以下几种。

### 1. 地心惯性坐标系(下标为 $i$ )—— $O_i x_i y_i z_i$

惯性坐标系是符合牛顿力学定律的坐标系,即是绝对静止或只做匀速直线运动的坐标系。由于宇宙空间中的万物都处于运动之中,因此想寻找绝对的惯性坐标系是不可能的,我们只能根据导航的需要来选取惯性坐标系。对于在地球附近运动的飞行器选取地心惯性坐标系是合适的。地心惯性坐标系不考虑地球绕太阳的公转运动,当然更略去了太阳相对宇宙空间的运动。地心惯性坐标系的原点  $O_i$  选在地球的中心,它不参于地球的自转。惯性坐标系是惯性敏感元件测量的基准。由于在进行导航计算时无需在这个坐标系中分解任何向量,因此惯性坐标系的坐标轴的定向本无关紧要,但习惯上我们可以将  $z_i$  轴选在沿地轴指向北极的方向上,而  $x_i, y_i$  轴则在地球的赤道平面内,并指向空间的两颗恒星。

### 2. 地球坐标系(下标为 $e$ )—— $O_e x_e y_e z_e$

地球坐标系是固连在地球上的坐标系,它相对惯性坐标系以地球自转角速率  $\omega_e$  旋转,  $\omega_e = 15.04107^\circ/\text{小时}$ 。地球坐标系的原点在地球中心  $O_e$ ,  $O_e z_e$  轴与  $O_i z_i$  轴重合,  $O_e x_e y_e$  在赤道平面内,  $x_e$  轴指向格林威治经线,  $y_e$  轴指向东经  $90^\circ$  方向。

### 3. 地理坐标系(下标为 $g$ )—— $O_g x_g y_g z_g$

地理坐标系是在飞行器上用来表示飞行器所在位置的东

向、北向和垂线方向的坐标系。地理坐标系的原点 $O$ 选在飞行器重心处， $x_i$ 指向东， $y_i$ 指向北， $z_i$ 沿垂线方向指向天(东北天)。对于地理坐标系，在不同的惯导文献中往往有不同的取法。所不同之处仅在于坐标轴的正向的指向不同，如还有北西天、北东地等取法。坐标轴指向不同仅使向量在坐标系中取投影分量时的正负号有所不同，并不影响导航基本原理的阐述及导航参数计算结果的正确性。

#### 4. 导航坐标系(下标为 $n$ )—— $O x_n y_n z_n$

导航坐标系是在导航时根据导航系统工作的需要而选取的作为导航基准的坐标系。当把导航坐标系选得与地理坐标系相重合时，可将这种导航坐标系称为指北方位系统；为了适应在极区附近导航的需要往往将导航坐标系的 $z_n$ 轴仍选得与 $z_i$ 轴重合，而使 $x_n$ 与 $x_i$ 及 $y_n$ 与 $y_i$ 之间相差一个自由方位角或游动方位角( $\alpha$ )。这种导航坐标系可称为自由方位系统或游动自由方位系统。这一点本章下面还要详细讨论。

#### 5. 平台坐标系(下标为 $p$ )—— $O x_p y_p z_p$

平台坐标系是用惯导系统来复现导航坐标系时所获得的坐标系。平台坐标系的坐标原点 $O$ 位于飞行器的重心处。当惯导系统不存在误差时，平台坐标系与导航坐标系相重合；当惯导系统出现误差时，平台坐标系就要相对导航坐标系出现误差角。对于平台惯导系统，平台坐标系是通过平台台体来实现的；对于捷联惯导系统，平台坐标系则是通过存储在计算机中的方向余弦矩阵来实现的，因此又叫做“数学平台”。对于平台惯导系统，平台坐标系与导航坐标系之间的误差是由平台的加工、装配工艺不完善、敏感元件误差以及初始对准误差等因素造成的；而对于捷联惯导系统，该误差则是由算法误差、敏感元件误差以及初始对准误差等造成的。

## 6. 机体坐标系(下标为 $b$ )—— $O x_b y_b z_b$

机体坐标系是固连在机体上的坐标系。机体坐标系的坐标原点 $O$ 位于飞行器的重心处， $x_b$ 沿机体横轴指向右， $y_b$ 沿机体纵轴指向前， $z_b$ 垂直于 $Ox_b y_b$ ，并沿飞行器的竖轴指向上。

图 2-1 为上述各种坐标系的示意图。图中 $D$ 为飞行器所在位置沿 $z_i$ 轴投影在地球表面上的一点。显然 $DO$ 为飞行器的高度。为了表示方便起见，图中将机体系的 $z_b$ 轴取在与 $z_i$ 轴相重合的位置上。

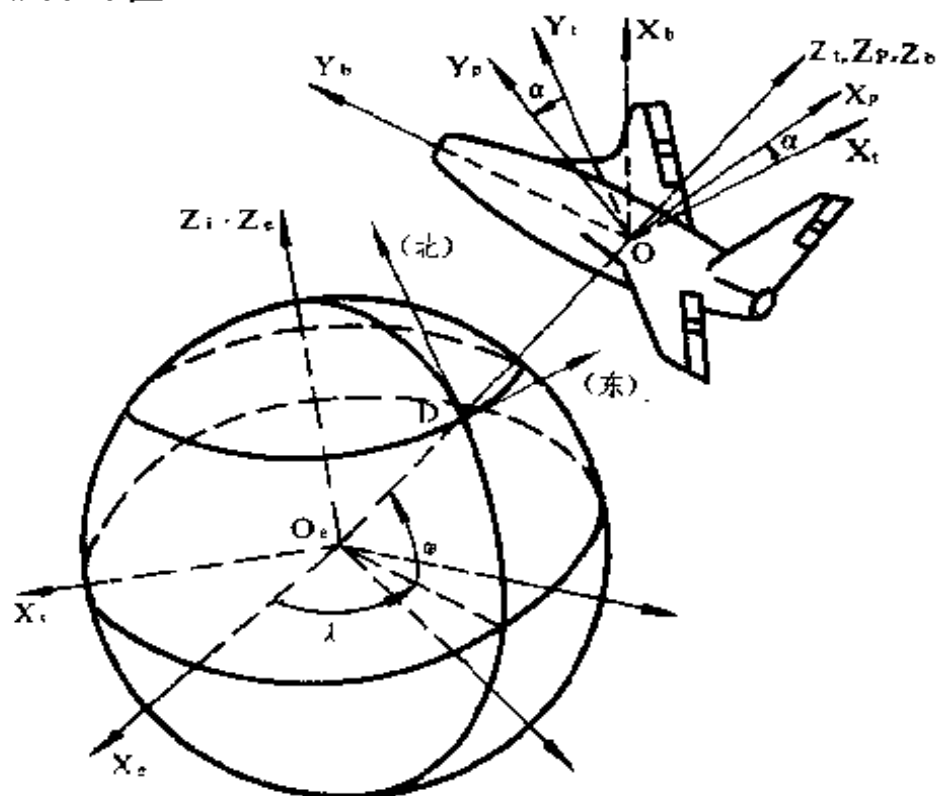


图 2-1 各种坐标系的示意图

## § 2-2 舒勒摆原理

为了进行导航，往往需要给出一个导航基准。在地球附

近导航所常用的导航基准就是水平面（或与其垂直的地垂线方向）。我们知道，一个数学摆就可以给出地垂线的方向，地平仪中的液体开关就是仿照这一原理制成的。但是当受到飞行器加速度的作用时，这种数学摆就会偏离地垂线的方向。那么不受机体加速度干扰的摆是否存在呢？这就是德国科学家舒勒（Schuler）在1923年提出的舒勒摆。

### 一、用物理摆(复摆)实现舒勒摆的原理

图 2-2 中示出了物理摆的工作原理示意图。为了简化分析，设地球为球体，其半径为  $R$ ，且不转动。飞行器沿子午面

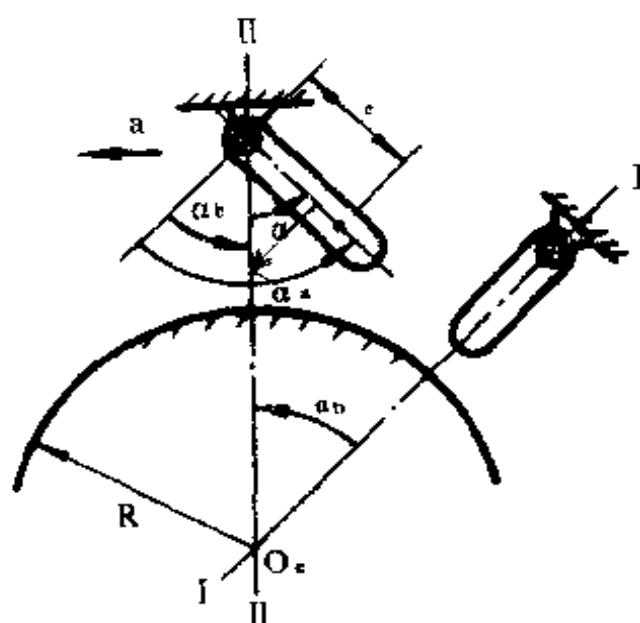


图 2-2 物理摆的工作原理图

飞行，加速度为  $a$ ，略去飞行器的高度。设飞行器的起始垂线为  $II$ ，经过一小段飞行后到达新位置的垂线为  $II$ 。由于飞行器加速度的存在使摆线偏离  $II$  线  $\alpha$  角，而  $II$  线偏离  $II$  线  $\alpha_b$  角。并有

$$\begin{aligned}\alpha_s &= \alpha_b + \alpha \\ \ddot{\alpha}_s &= \ddot{\alpha}_b + \ddot{\alpha}\end{aligned}\tag{2-1}$$



式中  $\omega_s$  为舒勒频率,  $T_s$  为舒勒周期。将  $R = 6370$  公里,  $g = 9.8$  米/秒<sup>2</sup> 代入上式, 可得  $T_s = 84.4$  分。

下面我们来讨论一下舒勒摆的物理意义。由于  $\ddot{\alpha}_b = a/R$  代表由飞行器线运动 ( $a$ ) 而引起的地垂线变化的角加速度, 而  $\frac{ml}{J} a$  则为物理摆在加速度  $a$  作用下绕其悬挂点运动的角加速度。当二者相等时, 物理摆对加速度  $a$  不敏感。若物理摆初始时指向地垂线, 则不论飞行器怎样运动, 物理摆将永远指向地垂线; 若物理摆初始时偏离地垂线  $\alpha_0$  角, 则它就围绕地垂线以舒勒周期做不衰减的振荡。

物理摆的原理方块图如图 2-3(a) 所示, 对它进行简化可得图 2-3(b), 再进一步简化可得图 2-3(c)。由图 2-3(c) 中可进一步看出舒勒调整条件的物理意义, 当物理摆满足舒勒调整条件后即变成一个与加速度无关而只与初始条件有关的二阶自由振荡系统。

## 二、实现舒勒调整的可能性

### 1. 用物理摆实现舒勒调整

由式 (2-6) 可知

$$l = \frac{J}{mR}$$

由于  $R$  很大, 则要求物理摆的摆长  $l$  应非常小。设物理摆为一个半径  $r = 0.5$  米的圆环, 并忽略圆环的厚度, 认为环的质量集中在圆环上。此时

$$l = \frac{mr^2}{mR} = \frac{r^2}{R} = 0.04 \mu\text{m}$$

这样的摆长在当前的工艺水平条件下是无法实现的。

### 2. 用数学摆实现舒勒调整



如上所述,舒勒摆原理虽然早在二十年代就已被发现,但在很长时间内一直未能实现。计算机的发展使得舒勒调整成为可能。

以飞行器在子午面内的飞行为例,图 2-4 示出了单自由度平台惯导系统的原理方块图。图中  $a_N$  为北向加速度。加速度计的标度因数为  $K_a$ ,它感受  $a_N$ ,并将输出输至积分器。积分器的标度因数为  $K_u$ ,它完成一次积分的运算。积分器的输出到下一环节进行  $\frac{1}{R}$  的运算,再将信号输至陀螺力矩器。力矩器的标度因数为  $K_m$ ,它的输出用以操纵平台的稳定回路。陀螺以及平台的整个特性可简化为  $\frac{1}{HS}$  的环节。稳定回路带动平台转动  $\alpha_s$  角。而地垂线改变的角度为  $\alpha_b = a_N \frac{1}{R_s^2}$ ,于是有  $\alpha = \alpha_s - \alpha_b$ ,其中  $\alpha$  为平台偏离地垂线的角度。由于平台偏离地垂线  $\alpha$  角,则加速度计还感受一个与重力加速度  $g$  的分量相反的加速度  $-g\alpha$ 。对图 2-4 进行结构变换可得图 2-5。由图 2-5(a) 所示的方块图可知,当满足舒勒调整条件

$$\frac{K_a K_u K_m}{H} = 1 \quad (2-10)$$

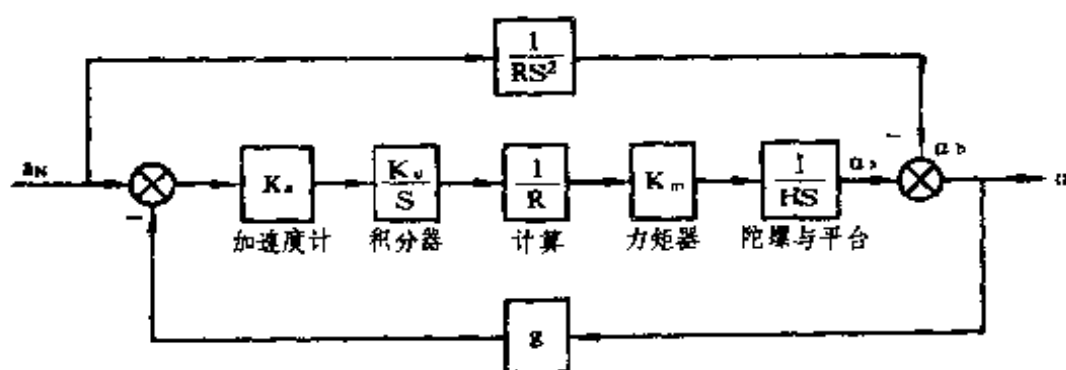


图 2-4 单自由度平台惯导系统原理方块图

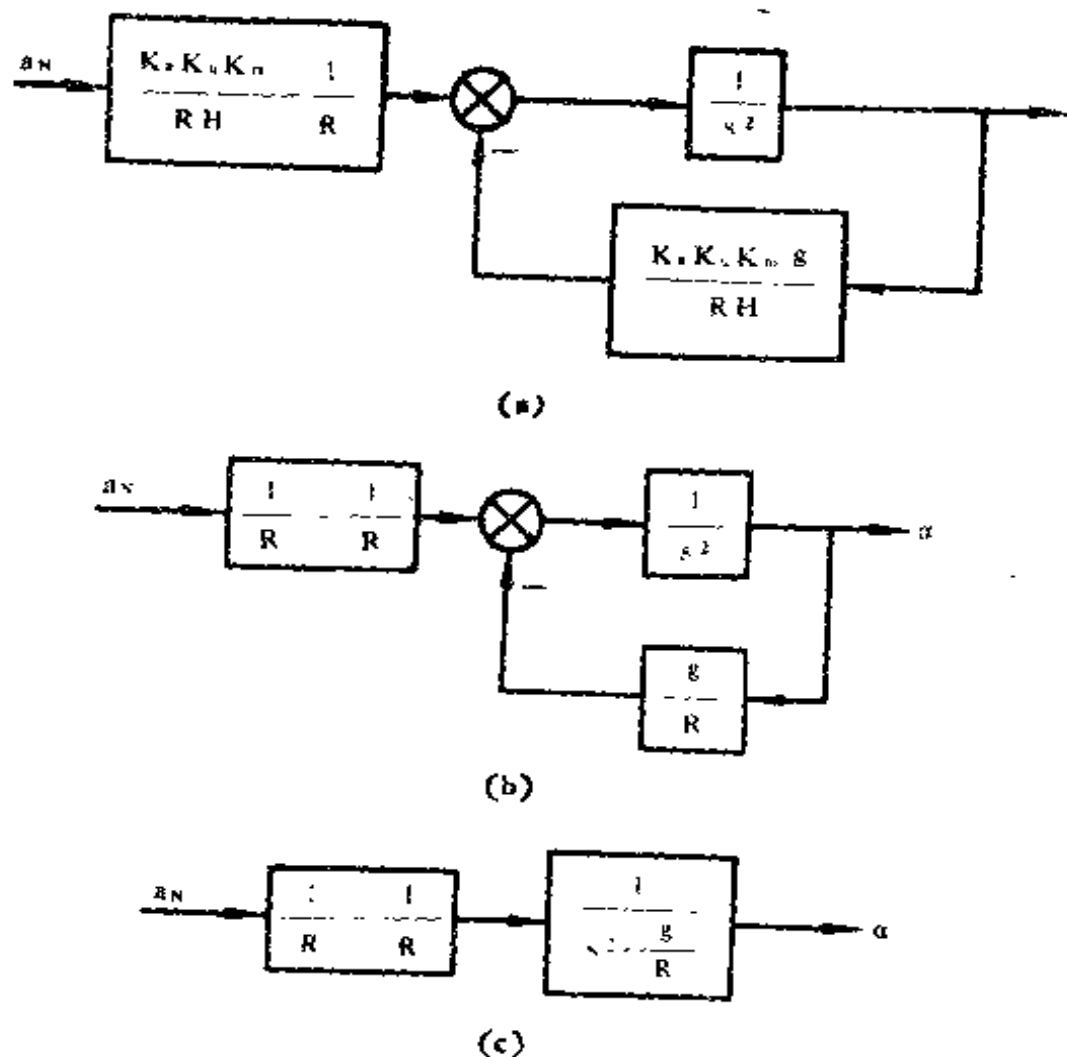


图 2-5 由图 2-4 到舒勒摆的结构变换

(a) 图 2-4 的结构变换；(b) 满足舒勒调整条件时的结构形式；  
(c) 舒勒摆形式。

时，图 2-5(a) 就简化为图 2-5(b)形式。对图 2-5(b)再进行一次结构变换就可得到舒勒摆的原理方块图。此时惯导系统的特征方程为

$$s^2 + \frac{g}{R} = 0$$

它表示了以舒勒周期为自振周期的二阶无阻尼运动。式 (2-10) 所表示的舒勒调整条件可以通过计算机来实现，这才真

正使得用舒勒摆构成惯性导航系统具有现实可能性。

在满足舒勒调整条件的理想情况下，图 2-4 所示的惯导系统可以简化为理想条件下的惯导系统原理方块图，如图 2-6 所示。

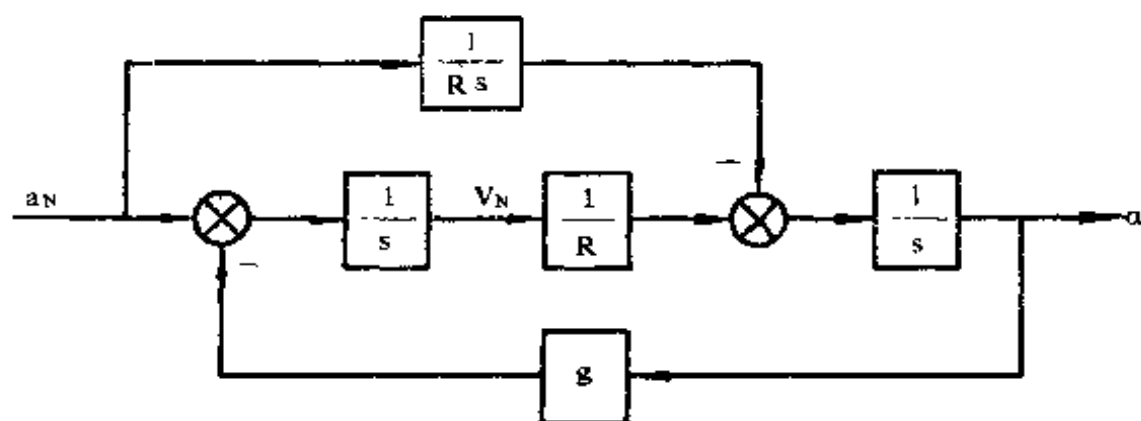


图 2-6 理想条件下的惯导系统原理方块图

以上讨论的是由北向加速度计构成的一个水平通道的惯导系统。对于东向加速度计所构成的另一个水平通道，可以仿照以上的原理得出。

舒勒摆的原理及实现方法对于平台惯导系统比较形象与直观；而对于捷联惯导系统，由于加速度计与陀螺都是沿机体坐标系安装的，数学平台的作用要靠计算机来完成，因此舒勒摆的原理也全部隐含在计算机之中了，这一点在讨论捷联系统的初始对准与误差分析时便可进一步看出。

## § 2-3 惯导基本方程

不论采用何种类型的惯导系统，都要遵循共同的惯导基本方程。本节就来引出惯导基本方程，并讨论其在惯导系统

对这两个坐标系的变化率是不相同的。设向量的绝对变率以  $\left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_i$  表示, 其相对变率以  $\left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_r$  表示。由于向量往往是要在某个运动着的坐标系(如地球坐标系, 机体坐标系)中观测的, 于是向量  $\vec{a}$  及  $\vec{\omega}$  需要沿动系取分量, 即

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3 \quad (2-11)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_1 + \omega_y \vec{e}_2 + \omega_z \vec{e}_3 \quad (2-12)$$

由于式(2-11)中的  $a_x, a_y, a_z$  及  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  相对定系都在随时间变化, 所以向量  $\vec{a}$  的绝对变率为

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_i &= \frac{d}{dt} (a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3) \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{e}_1 + \frac{da_y}{dt} \vec{e}_2 + \frac{da_z}{dt} \vec{e}_3 \\ &\quad + a_x \frac{d\vec{e}_1}{dt} + a_y \frac{d\vec{e}_2}{dt} + a_z \frac{d\vec{e}_3}{dt} \end{aligned} \quad (2-13)$$

式(2-13)中的前三项与动系的运动无关, 只表示向量  $\vec{a}$  相对动系随时间的变化率, 称之为相对变率, 即

$$\left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_r = \frac{da_x}{dt} \vec{e}_1 + \frac{da_y}{dt} \vec{e}_2 + \frac{da_z}{dt} \vec{e}_3 \quad (2-14)$$

式(2-13)的后三项与动系转动的角速度  $\vec{\omega}$  有关。为了求这三项, 首先要求  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  的变率。由于动系的基  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  可以看成在定系中运动的向径。而以角速率  $\vec{\omega}$  运动的向径  $\vec{r}$  的速度向量可以表示为

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2-15)$$

对向径  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  应用上式, 可得

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_1$$

$$\frac{d\bar{e}_2}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{e}_2, \quad (2-16)$$

$$\frac{d\bar{e}_3}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{e}_3,$$

将上式代入式(2-13)的后三项,得

$$\begin{aligned} a_x \frac{d\bar{e}_1}{dt} + a_y \frac{d\bar{e}_2}{dt} + a_z \frac{d\bar{e}_3}{dt} \\ = a_x \bar{\omega} \times \bar{e}_1 + a_y \bar{\omega} \times \bar{e}_2 + a_z \bar{\omega} \times \bar{e}_3 \\ = \bar{\omega} \times (a_x \bar{e}_1 + a_y \bar{e}_2 + a_z \bar{e}_3) \\ = \bar{\omega} \times \bar{a} \end{aligned} \quad (2-17)$$

将式(2-14)与(2-17)代入式(2-13),得

$$\left. \frac{d\bar{a}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\bar{a}}{dt} \right|_r + \bar{\omega} \times \bar{a} \quad (2-18)$$

式(2-18)表示了向量的绝对变率与相对变率的关系。

## 二、惯导基本方程

当研究飞行器(我们将飞行器看成刚体)的运动时,为了导航的需要,我们选取一个平台系(用下标“ $p$ ”来表示),其原点取在飞行器的重心上。设  $\bar{R}$  为平台系的原点在惯性坐标系内的向径,如图 2-8 所示。

由于研究飞行器的运动通常要相对地球确定飞行器的速度与位置,所以可取地球坐标系(用下标“ $e$ ”来表示)为动系。而地球坐标系相对惯性坐标系的角速率为  $\bar{\omega}_{ie}$ ,其中下标“ $ie$ ”表示“地球坐标系相对惯性坐标系”的意思。于是以地球坐标系为动系来求向量  $\bar{R}$  的绝对变率,并根据式(2-18)可得

$$\left. \frac{d\bar{R}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\bar{R}}{dt} \right|_e + \bar{\omega}_{ie} \times \bar{R} \quad (2-19)$$

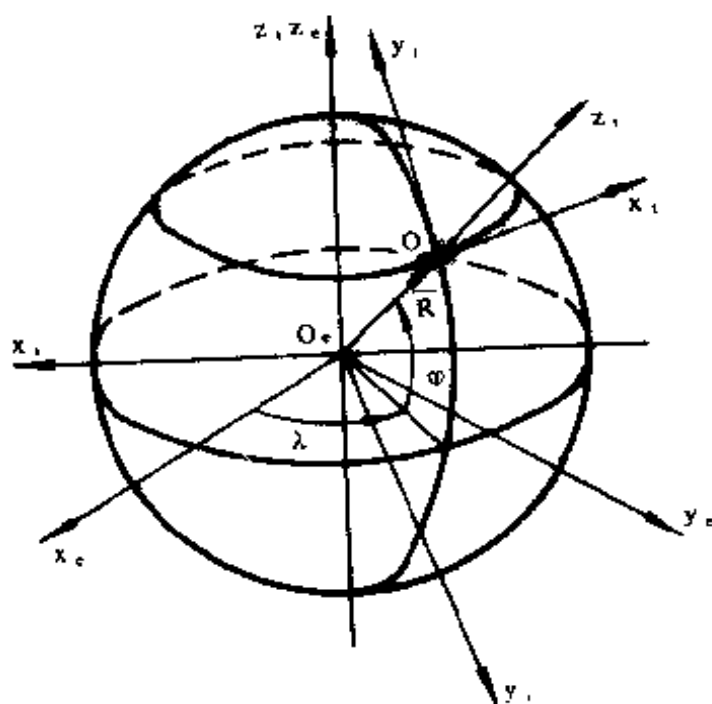


图 2-8 平台坐标系原点的向径

上式中设

$$\bar{V}_{ep} = \left. \frac{d\bar{R}}{dt} \right|_e \quad (2-20)$$

为平台坐标系原点相对地球坐标系的速度向量——即地速向量。将上式代入式 (2-19) 可得

$$\left. \frac{d\bar{R}}{dt} \right|_i = \bar{V}_{ep} + \bar{\omega}_{ie} \times \bar{R} \quad (2-21)$$

对式 (2-21) 再次求绝对变率, 可得

$$\left. \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\bar{V}_{ep}}{dt} \right|_i + \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) \Big|_i \quad (2-22)$$

由于地球自转角速率可近似地看为常量, 则

$$\left. \frac{d\bar{\omega}_{ie}}{dt} \right|_i = 0$$

于是式 (2-22) 可写成



$$\left. \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\bar{V}_{cp}}{dt} \right|_i + \omega_{ie} \times \left. \frac{d\bar{R}}{dt} \right|_i \quad (2-23)$$

将式(2-21)代入式(2-23), 得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right|_i &= \left. \frac{d\bar{V}_{cp}}{dt} \right|_i + \omega_{ie} \times (\bar{V}_{cp} + \omega_{ie} \times \bar{R}) \\ &= \left. \frac{d\bar{V}_{cp}}{dt} \right|_i + \omega_{ie} \times \bar{V}_{cp} \\ &\quad + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \bar{R}) \end{aligned} \quad (2-24)$$

在求上式中的  $\left. \frac{d\bar{V}_{cp}}{dt} \right|_i$  时, 由于  $\bar{V}_{cp}$  要在平台坐标系上取投影 (即地速的各分量是在平台坐标系上给出的), 因此这次取绝对变率时应取平台坐标系为动系, 则有

$$\left. \frac{d\bar{V}_{cp}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\bar{V}_{cp}}{dt} \right|_p + \omega_{ip} \times \bar{V}_{cp} \quad (2-25)$$

而上式中

$$\omega_{ip} = \omega_{ie} + \omega_{cp} \quad (2-26)$$

式中  $\omega_{cp}$  为平台坐标系相对地球坐标系的角速率, 它取决于平台坐标系的取法。将式(2-25)、(2-26)代入式(2-24), 可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right|_i &= \left. \frac{d\bar{V}_{cp}}{dt} \right|_p + (2\omega_{ie} + \omega_{cp}) \times \bar{V}_{cp} \\ &\quad + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \bar{R}) \end{aligned} \quad (2-27)$$

由于平台惯导方程的实现与加速度计有着密切的联系, 我们就来研究加速度计与式(2-27)的关系。设在平台上或机体上装有加速度计, 其示意图如图 2-9 所示。设加速度计中的质量块的质量为  $m$ , 根据牛顿第二定律, 有

$$\bar{F} = m \left. \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right|_i \quad (2-28)$$

式中  $\bar{F}$  为作用于加速度计质量块上的外力。进一步可得

$$\bar{F} = \bar{F}_s + m\bar{g}_m \quad (2-29)$$

式中  $\bar{F}_s$  表示作用在质量块上的弹簧拉力, 它与弹簧的变形成正比; 而  $m\bar{g}_m$  为作用在质量块上的万有引力。将式 (2-29) 代入式 (2-28) 可得

$$\bar{F}_s + m\bar{g}_m = m \left. \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right|_i \quad (2-30)$$

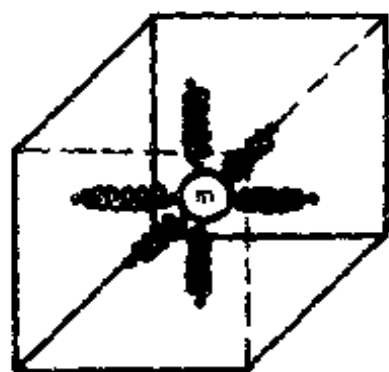


图 2-9 加速度计示意图

进而由上式可得

$$\left. \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right|_i = \frac{\bar{F}_s}{m} + \bar{g}_m \quad (2-31)$$

上式中  $\left. \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right|_i$  为加速度计的质量块所承受的绝对加速度, 也即飞行器或平台坐标系原点的绝对加速度;  $\bar{g}_m$  为万有引力加速度;  $\frac{\bar{F}_s}{m}$  为非引力加速度。设  $\bar{f} = \frac{\bar{F}_s}{m}$ , 它表示单位质量块质量所承受的弹簧拉力, 将它定义为比力。因为比力  $\bar{f}$  的大小与弹簧变形成正比, 而加速度计的输出正是与弹簧变形成正比。因此加速度计实质上测量的并非是机体加速度, 而是比力, 这是惯导理论中的最重要的基本概念之一。

将式 (2-31) 代入式 (2-27), 得

$$\begin{aligned} \bar{f} + \bar{g}_m = & \left. \frac{d\bar{V}_{cp}}{dt} \right|_p + (2\bar{\omega}_{ic} + \bar{\omega}_{cp}) \times \bar{V}_{cp} \\ & + \bar{\omega}_{ic} \times (\bar{\omega}_{ic} \times \bar{R}) \end{aligned} \quad (2-32)$$

设

$$\dot{\bar{V}}_{cp} = \left. \frac{d\bar{V}_{cp}}{dt} \right|_p \quad (2-33)$$

它表示在平台坐标系上观测的地速向量的导数, 它也正是惯导中所要求的量。考虑到式 (2-33), 式 (2-32) 可写成

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{V}}_{ep} = & \vec{f} - (2\vec{\omega}_{ie} + \vec{\omega}_{ep}) \times \vec{V}_{ep} \\ & + \vec{g}_m - \vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{R})\end{aligned}\quad (2-34)$$

设

$$\vec{g} = \vec{g}_m - \vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{R}) \quad (2-35)$$

上式中  $\vec{g}$  为重力加速度。下面我们简要地来讨论一下重力加速度的物理意义。图 2-10 示出了地球表面上的一个质点  $M$ ，其质量为  $m$ 。它可以放在另一个物体上，这时它受到了物体的约束反力  $\vec{T}$ ；它也可以悬挂在一根细线上，这时它受到的是线的拉力  $\vec{T}$ 。质点  $M$  还受到万有引力  $m\vec{g}_m$ 。在这两个力的作用下质点随地球以向心加速度  $\vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{R})$  运动，即

$$\vec{T} + m\vec{g}_m = m\vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{R})$$

由上式可得

$$\frac{\vec{T}}{m} = \vec{\omega}_{ie} \times (\vec{\omega}_{ie} \times \vec{R}) - \vec{g}_m$$

再取  $\vec{g} = -\frac{\vec{T}}{m}$ ，则有

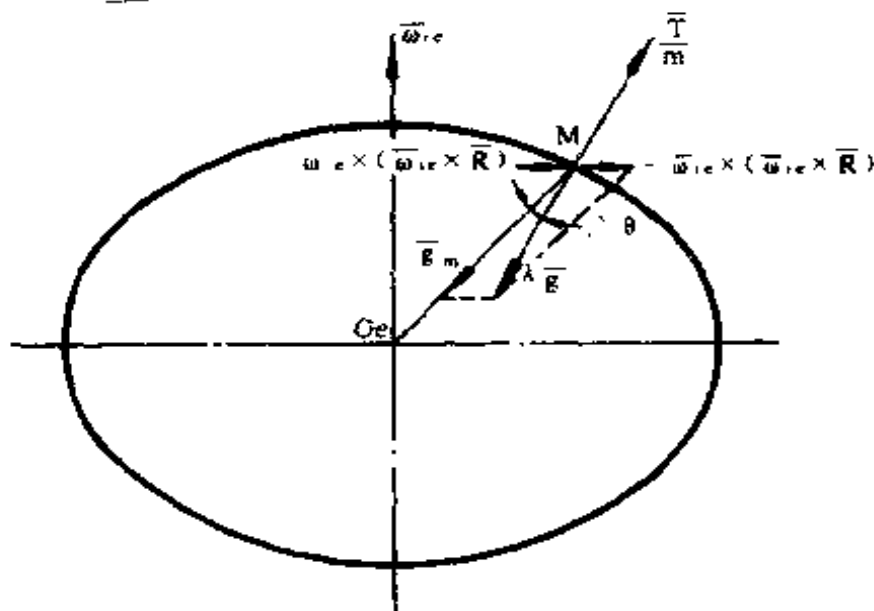


图 2-10 重力加速度的物理意义

$$\underline{g} = \underline{g}_m - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \underline{R})$$

即得到式(2-35)。由图2-10可以看出,重力加速度沿着地球上的质点所受到的约束反力或拉力的方向,并与其反向,它又可看成地球引力加速度  $\underline{g}_m$  与向量  $-\omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \underline{R})$  的合向量。地垂线的方向正是沿着  $\underline{g}$  的方向;而水平面则与  $\underline{g}$  垂直。 $\underline{g}$  与  $\underline{g}_m$  之间有个很小的夹角  $\Delta\theta$ 。 $\Delta\theta$  与地理纬度  $\varphi$  有关。当  $\varphi = 45^\circ$  时,  $\Delta\theta \approx 10$  角分。

我们再回到惯导基本方程的推导上。将式(2-35)代入式(2-34)可得

$$\dot{\underline{V}}_{ep} = \underline{f} - (2\omega_{ie} + \omega_{ep}) \times \underline{V}_{ep} + \underline{g} \quad (2-36)$$

式(2-36)就是向量形式的惯导基本方程。惯导基本方程中各项的物理意义可简述如下:  $\dot{\underline{V}}_{ep}$  为进行导航计算需要获得的载体(也即平台系)相对地球的加速度向量;  $\underline{f}$  为加速度计所测量的比力向量;  $-(2\omega_{ie} + \omega_{ep}) \times \underline{V}_{ep}$  是由地球自转和载体相对地球运动而产生的加速度,它没有明显的物理意义,而又被加速度表所感受,为计算  $\dot{\underline{V}}_{ep}$  需要把它从  $\underline{f}$  中消除掉,因此称之为有害加速度;  $\underline{g}$  为重力加速度向量。惯导基本方程也可写成沿平台坐标系的投影形式。平台系的取法不同,惯导基本方程沿平台坐标系的具体投影形式也不同。

### 三、向量乘积的矩阵表示法

对惯导基本方程式(2-36)进行分析可以看出,在方程中出现了向量叉积项。为了便于应用矩阵这一数学工具进行分析与计算,需要将向量的乘积(包括点积与叉积)用矩阵形式表示出来。

设两个向量  $\underline{a}$  与  $\underline{b}$ , 将其表示成在同一坐标系  $Oxyz$  中的投影形式(坐标系的基为  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ), 为

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

下面来求向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的乘积。

1.  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的点积  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

因为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

又因为

$$\begin{aligned} [a_x \quad a_y \quad a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} &= [b_x \quad b_y \quad b_z] \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= [a_x \quad a_y \quad a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \\ &= [b_x \quad b_y \quad b_z] \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-38)$$

2.  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的叉积  $\vec{a} \times \vec{b}$

设

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (2-39)$$

且有

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3 \\ \vec{b} &= b_x \vec{e}_1 + b_y \vec{e}_2 + b_z \vec{e}_3 \\ \vec{c} &= c_x \vec{e}_1 + c_y \vec{e}_2 + c_z \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2-40)$$

将式 (2-40) 代入式 (2-39) 可得

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

#### 四、三类惯导系统的基本原理

##### 1. 惯导基本方程在平台坐标系的投影

首先将平台坐标系  $O x_p y_p z_p$  的  $z_p$  轴的正向选为沿  $-g$  的方向, 即指向天(若取  $z_p$  指向地则只要将向量沿  $z_p$  轴的投影变号即可)。至于  $x_p$ 、 $y_p$  轴在水平面中的指向, 这里先暂不做具体规定。下面我们就来讨论惯导基本方程在平台系的投影形式。为了书写方便, 我们将  $V_{cp_x}^p, V_{cp_y}^p, V_{cp_z}^p$  简写为  $V_x^p, V_y^p, V_z^p$ , 表示向量  $\bar{V}_{cp}$  在平台坐标系的  $x_p, y_p, z_p$  轴的投影。考虑到向量叉乘的矩阵表示法, 惯导基本方程 (2-36) 可写成如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_x^p \\ \dot{V}_y^p \\ \dot{V}_z^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x^p \\ f_y^p \\ f_z^p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -(2\omega_{icx}^p + \omega_{cpz}^p) & 2\omega_{icy}^p + \omega_{cpx}^p \\ 2\omega_{icx}^p + \omega_{cpz}^p & 0 & -(2\omega_{icz}^p + \omega_{cpy}^p) \\ -(2\omega_{icy}^p + \omega_{cpx}^p) & 2\omega_{icx}^p + \omega_{cpz}^p & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x^p \\ V_y^p \\ V_z^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

##### 2. 三类不同的惯导系统

上面我们已将平台坐标系的  $z_p$  轴向选定, 而  $x_p$  轴、 $y_p$  轴可以有三种不同的选法。根据平台坐标系的选法的不同, 我们可将惯导系统分成指北方位系统、自由方位系统和游动自由方位系统三种。



### (1) 指北方位系统

对于指北方位系统,平台坐标系  $Ox_p, y_p, z_p$  与地理坐标系  $Ox, y, z$  相重合。因  $y_p$  指北,这种惯导系统便由此而得名。指北方位系统平台坐标系的取法如图 2-11 所示。

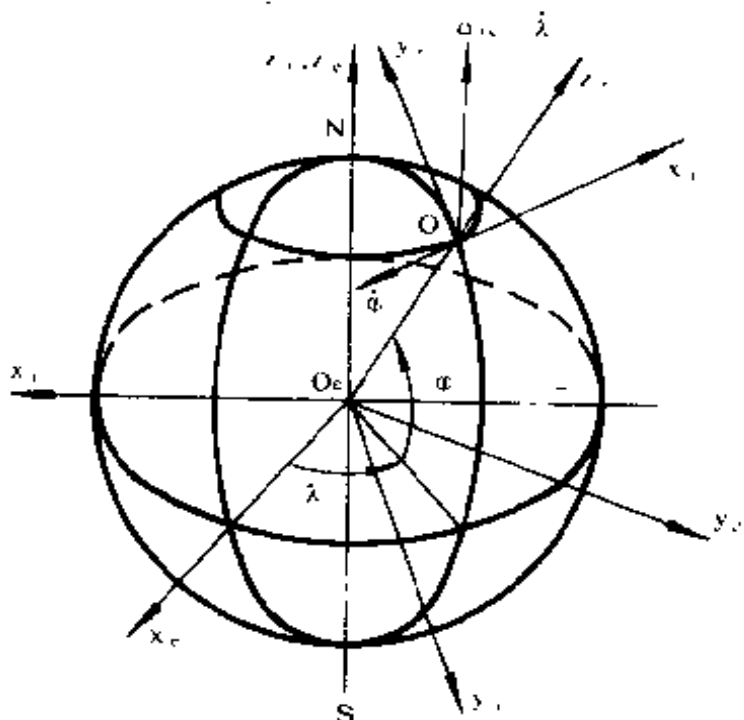


图 2-11 指北方位系统的平台坐标系

在图 2-11 中,我们将地球画为圆球体。事实上,地球可近似为一个椭球体。设地球的椭球度为

$$e = \frac{R_e - R_p}{R_e}$$

式中  $R_e$  为地球的赤道半径;  $R_p$  为地球的极轴半径;  $e = 1/297$ 。当飞行器沿北向飞行时,即飞行器在子午面内飞行,这时地球的曲率半径为  $R_M$ ; 当飞行器沿东向飞行时,这时飞行器在与子午面垂直的平面内运动,这时地球的曲率半径为  $R_N$ 。附录一的式(附 1-24)给出了  $R_M$  (即  $R_M$ ) 及  $R_N$  (即  $R_N$ ) 的计算公式,该公式可表示成

$$\Delta \begin{cases} \omega'_{ity} = \omega_{ie} \cos \varphi + \frac{V'_x}{R_{xt}} \\ \omega'_{itz} = \omega_{ie} \sin \varphi + \frac{V'_x}{R_{xt}} \operatorname{tg} \varphi \end{cases} \quad (2-48)$$

式(2-48)表示了指北方位系统平台的跟踪角速率。

将式(2-48)代入式(2-44),并将惯导基本方程写成投影形式,从而可得

$$\Delta \begin{cases} \dot{\varphi}'_x = f'_x + \left( 2\omega_{ie} \sin \varphi + \frac{V'_x}{R_{xt}} \operatorname{tg} \varphi \right) V'_y \\ \quad - \left( 2\omega_{ie} \cos \varphi + \frac{V'_x}{R_{xt}} \right) V'_z \\ \quad - f'_x - a'_{ix} \\ \dot{\varphi}'_y = f'_y - \left( 2\omega_{ie} \sin \varphi + \frac{V'_x}{R_{xt}} \operatorname{tg} \varphi \right) V'_z \\ \quad - \frac{V'_x}{R_{yt}} V'_y = f'_y - a'_{iy} \\ \dot{\varphi}'_z = f'_z + \left( 2\omega_{ie} \cos \varphi + \frac{V'_x}{R_{xt}} \right) V'_y \\ \quad + \frac{V'_x}{R_{yt}} V'_y - g \\ \quad = f'_z - a'_{iz} - g \end{cases} \quad (2-49)$$

上式中  $f'_x, f'_y, f'_z$  为比力  $\bar{f}$  在地理坐标系上的三个投影。对于平台惯导系统,它可以通过沿平台轴安装的三个加速度计直接测得;对于捷联系统,沿机体系安装的三个加速度测量的沿机体系的比力分量需经过坐标转换才可获得  $f'_x, f'_y, f'_z$ 。而上式中的  $a'_{ix}, a'_{iy}, a'_{iz}$  为进行导航计算所必须消除的有害加速度分量,它们可由计算机算出。按式(2-49)确定  $\dot{\varphi}'_x, \dot{\varphi}'_y, \dot{\varphi}'_z$ , 便可按照第一章所介绍的基本原理,参照式(1-1)求出

在选取平台坐标系时,取

$$\omega_{pz}^f = 0$$

即平台相对惯性坐标系  $z_p$  轴不转动, 这样控制平台  $z_p$  轴转动的陀螺就不需要加矩, 从而克服了指北方位系统在极区使用的困难。然而由于平台相对惯性空间绕  $z_p$  轴不转动, 则相对地理坐标系就存在着表观运动, 即  $y_p$  不再指北, 而与  $y_e$  轴之间存在着自由方位角  $\alpha$ , 如图 2-13 所示。

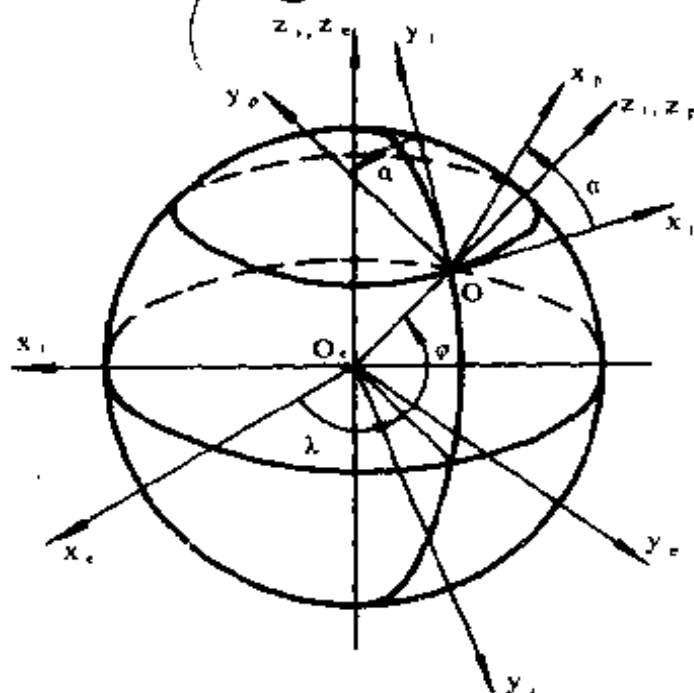


图 2-13 自由方位系统的平台坐标系

仿照指北方位系统的导航原理, 我们可以求出平台坐标系相对惯性坐标系的角速率分量。沿平台轴测量的比力可以通过由自由方位角构成的方向余弦矩阵转换为沿地理系的比力分量, 进而便可进行导航计算, 自由方位系统的导航原理方块图如图 2-14 所示, 读者可自行推导。

### (3) 游动自由方位系统

在选取平台坐标系时取

$$\omega_{ps}^p = 0$$

则得到的是游动自由方位系统。这时平台的方位既不稳定在北向，也不稳定在惯性坐标系方向，而是相对地球没有绕  $z_p$  轴的运动。 $y_p$  轴与北向的夹角不为零，而是一个随时间变化的游动方位角  $\alpha_0$ 。

对于游动自由方位系统，也可以得到与图 2-14 相类似的惯导原理方块图。由于对于游动自由方位系统的导航一般多采用方向余弦法，因此这里就不再赘述。

## § 2-4 惯性导航的方向余弦法

上一节介绍的导航原理是基于求得沿地理坐标系的  $\dot{V}_x^g$ 、 $\dot{V}_y^g$ ，进行两次积分，从而进行导航参数的计算。对于自由方位系统或游动自由方位系统则首先要将沿平台坐标系测量的比力转换到地理坐标系上。本节介绍一种适用于上述两种系统的方向余弦法。对于方向余弦法，可以由  $\dot{V}^p$  经一次积分求得  $\bar{V}^p$ ，再经过求解方向余弦矩阵微分方程等计算求得导航参数。由于采用方向余弦法为导航计算带来许多方便，所以对于自由方位系统或游动自由方位系统多采用方向余弦法。本节就以游动自由方位系统为对象来讨论方向余弦法。

### 一、直角坐标系的坐标变换是正交变换

设直角坐标系  $O x_i y_i z_i$  的单位向量为  $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ ，即三者互相垂直，且模为 1；而另一直角坐标系  $O x y z$  的单位向量为  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ，同样三者互相垂直，模为 1。矩阵  $C$  将坐标系  $O x_i y_i z_i$  转换到坐标系  $O x y z$ ，即

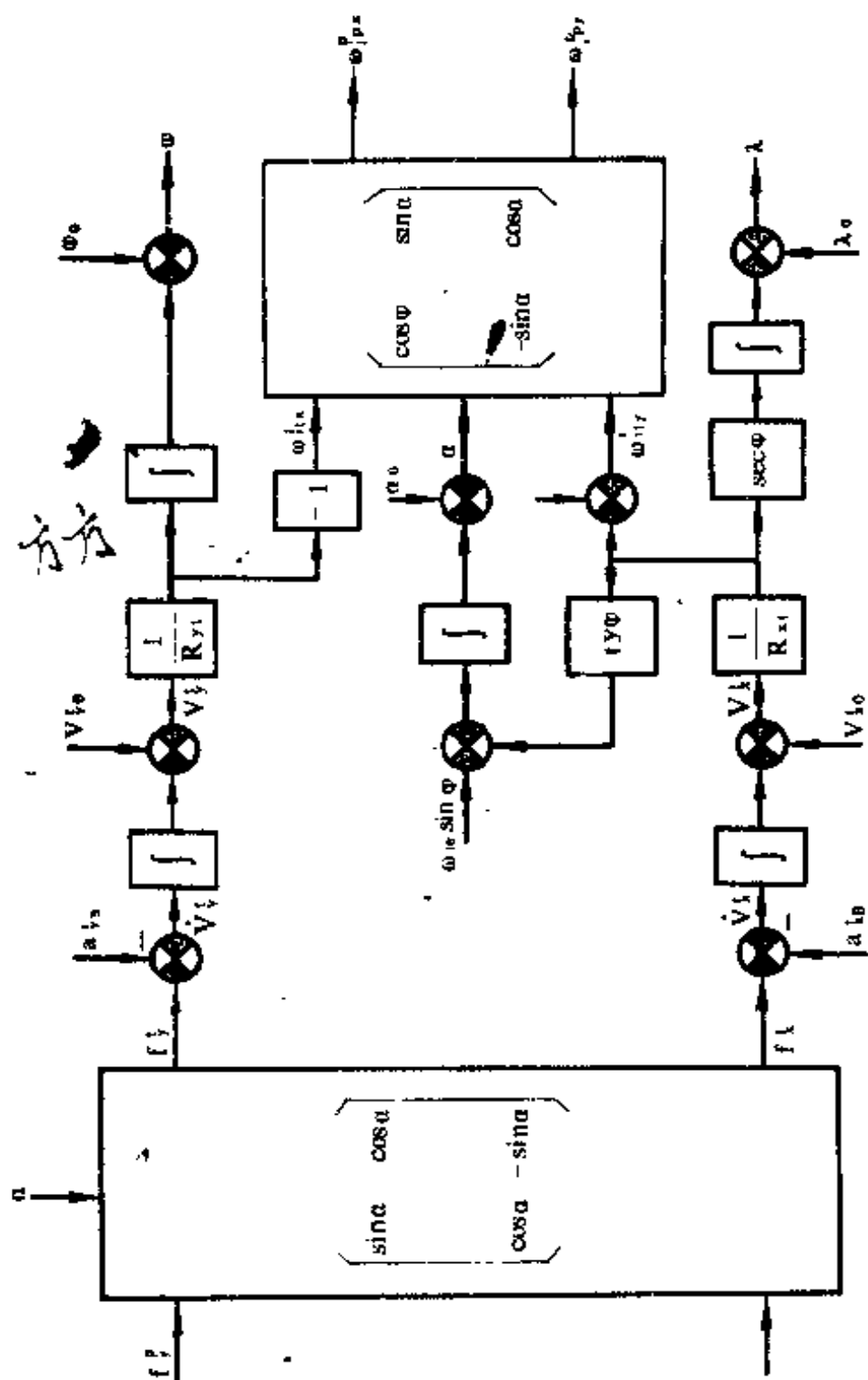


图 2-14 自由方位系统的导航原理方块图

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

式中

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

式(2-50)可写成

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= C_{11}\bar{i}_1 + C_{12}\bar{i}_2 + C_{13}\bar{i}_3 \\ \bar{e}_2 &= C_{21}\bar{i}_1 + C_{22}\bar{i}_2 + C_{23}\bar{i}_3 \\ \bar{e}_3 &= C_{31}\bar{i}_1 + C_{32}\bar{i}_2 + C_{33}\bar{i}_3 \end{aligned} \quad (2-52)$$

因为  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  为互相垂直的单位向量, 即有

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 &= \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 &= \bar{e}_1 \\ \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 &= \bar{e}_2 \end{aligned} \quad (2-53)$$

将式(2-52)代入式(2-53), 可得

$$\begin{aligned} (C_{11}\bar{i}_1 + C_{12}\bar{i}_2 + C_{13}\bar{i}_3) \times (C_{21}\bar{i}_1 + C_{22}\bar{i}_2 + C_{23}\bar{i}_3) \\ &= (C_{31}\bar{i}_1 + C_{32}\bar{i}_2 + C_{33}\bar{i}_3) \\ (C_{21}\bar{i}_1 + C_{22}\bar{i}_2 + C_{23}\bar{i}_3) \times (C_{31}\bar{i}_1 + C_{32}\bar{i}_2 + C_{33}\bar{i}_3) \\ &= (C_{11}\bar{i}_1 + C_{12}\bar{i}_2 + C_{13}\bar{i}_3) \\ (C_{31}\bar{i}_1 + C_{32}\bar{i}_2 + C_{33}\bar{i}_3) \times (C_{11}\bar{i}_1 + C_{12}\bar{i}_2 + C_{13}\bar{i}_3) \\ &= (C_{21}\bar{i}_1 + C_{22}\bar{i}_2 + C_{23}\bar{i}_3) \end{aligned}$$

对以上三个公式的左边进行向量运算, 令对应单位向量的系数相等, 可得如下九个方程

$$\begin{aligned} C_{31} &= C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22} \\ C_{32} &= C_{13}C_{21} - C_{11}C_{23} \\ C_{33} &= C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32} \\
C_{12} &= C_{23}C_{31} - C_{21}C_{33} \\
C_{13} &= C_{21}C_{32} - C_{22}C_{31} \\
C_{21} &= C_{32}C_{13} - C_{33}C_{12} \\
C_{22} &= C_{33}C_{11} - C_{31}C_{13} \\
C_{23} &= C_{31}C_{12} - C_{32}C_{11}
\end{aligned}
\tag{2-54}$$

式(2-54)的关系表明, 式(2-51)所表示的矩阵  $C$  的任一元素都等于其代数余子式, 这是正交变换所必须满足的条件。同理有

$$\begin{aligned}
\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 &= \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 = 1 \\
\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 &= \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 = 0
\end{aligned}$$

上式给出了另一组正交变换需满足的条件。将式(2-52)代入以上公式并展开后, 可得以下六个方程:

$$\begin{aligned}
C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2 &= 1 \\
C_{21}^2 + C_{22}^2 + C_{23}^2 &= 1 \\
C_{31}^2 + C_{32}^2 + C_{33}^2 &= 1 \\
C_{11}C_{21} + C_{12}C_{22} + C_{13}C_{23} &= 0 \\
C_{21}C_{31} + C_{22}C_{32} + C_{23}C_{33} &= 0 \\
C_{31}C_{11} + C_{32}C_{12} + C_{33}C_{13} &= 0
\end{aligned}
\tag{2-55}$$

式(2-55)也是正交变换所必须满足的条件。

由以上给出的正交条件可以证明,  $C$  的行列式为 1, 即

$$|C| = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = C_{11}A_{11} + C_{12}A_{12} + C_{13}A_{13}$$

式中  $A_{11}, A_{12}, A_{13}$  分别为  $C_{11}, C_{12}, C_{13}$  的代数余子式。由式(2-54)可将上式写成

$$|C| = C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2$$

起的。设向径  $\vec{r}$  在动系与定系的投影分量分别为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

则向径  $\vec{r}$  在动系与定系之间的投影存在着下面的关系:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

显然,  $S = C^{-1}$ , 于是  $M$  点的速度向量  $\vec{v}$  可表示为列矩阵, 即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left\{ S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\}$$

因为  $M$  点在动系上的投影保持不变, 于是上式可写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \dot{S} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \dot{S} S^{-1} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

将  $\vec{v} = \omega \times \vec{r}$  写成矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = Q_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2-61)$$

式中  $Q_i$  是  $\omega$  在定系投影的反对称矩阵, 即

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zi} & \omega_{yi} \\ \omega_{zi} & 0 & -\omega_{xi} \\ -\omega_{yi} & \omega_{xi} & 0 \end{bmatrix}$$

比较式 (2-60) 与 (2-61) 可得

$$Q_i = \dot{S} S^{-1} \quad (2-62)$$

上式中的  $Q_i$  使用起来不方便, 需要将上式化成在动系上的投影形式。

将  $\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}$  写成沿动系投影的矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-63)$$

式中  $Q$  是  $\bar{\omega}$  在动系上的投影的反对称矩阵, 即

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

利用方向余弦矩阵  $C = S^{-1}$  进行坐标转换可将式 (2-63) 的左端写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix}$$

将式 (2-61) 代入上式, 再考虑到式 (2-59) 的变换可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = S^{-1} Q_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = S^{-1} Q_i S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-64)$$

比较式 (2-63) 与 (2-64), 可得

$$Q = S^{-1} Q_i S \quad (2-65)$$

将式 (2-62) 代入上式, 得

$$Q = S^{-1} \dot{S} S^{-1} S$$

将上式等式两边左乘以  $S$ , 于是可得

$$\underline{\dot{S}} = S Q \quad (2-66)$$

上式可写成

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{21} & \dot{C}_{31} \\ \dot{C}_{12} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{32} \\ \dot{C}_{13} & \dot{C}_{23} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & \omega_y \\ \omega_x & 0 & -\omega_z \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2-67)$$

它代表 9 个微分方程

$$\begin{aligned} \dot{C}_{11} &= C_{21}\omega_x - C_{31}\omega_y \\ \dot{C}_{12} &= C_{22}\omega_x - C_{32}\omega_y \\ \dot{C}_{13} &= C_{23}\omega_x - C_{33}\omega_y \\ \dot{C}_{21} &= C_{31}\omega_x - C_{11}\omega_z \\ \dot{C}_{22} &= C_{32}\omega_x - C_{12}\omega_z \\ \dot{C}_{23} &= C_{33}\omega_x - C_{13}\omega_z \\ \dot{C}_{31} &= C_{11}\omega_y - C_{21}\omega_z \\ \dot{C}_{32} &= C_{12}\omega_y - C_{22}\omega_z \\ \dot{C}_{33} &= C_{13}\omega_y - C_{23}\omega_z \end{aligned} \quad (2-68)$$

式 (2-68) 的结果与以下矩阵微分方程的结果也是一致的:

$$\dot{\underline{C}} = -\underline{\Omega}\underline{C} \quad (2-69)$$

式 (2-66) 与式 (2-69) 是同一方向余弦矩阵微分方程的不同表示形式, 在惯导中都有应用。

### 三、游动自由方位系统的方向余弦法

#### 1. 方向余弦矩阵(位置矩阵) $C_c^p$

平台坐标系  $O x_p y_p z_p$  与地球坐标系  $O_e x_e y_e z_e$  之间的转动关系(虽然两个坐标系的坐标原点不重合, 但可以通过平移使它们重合, 从而得到其转动关系)可用下式来表示:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = C_c^p \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \quad (2-70)$$

式中  $C_c^p$  为由地球坐标系转换到平台坐标系的方向余弦矩阵, 它是纬度  $\varphi$ 、经度  $\lambda$  与游动方位角  $\alpha$  的函数, 并可由下面顺序

的转动来实现:

$$\begin{aligned} x_c y_c z_c &\xrightarrow[\lambda]{\text{绕 } x_c \text{ 轴}} x'_c y'_c z'_c \xrightarrow[90^\circ - \varphi]{\text{绕 } y'_c \text{ 轴}} x''_c y''_c z''_c \\ &\xrightarrow[0^\circ]{\text{绕 } z''_c \text{ 轴}} x_i y_i z_i \xrightarrow[\alpha]{\text{绕 } z_i \text{ 轴}} x_p y_p z_p \end{aligned}$$

上述的转动关系可由图 2-16 (a) 来表示; 为清楚起见, 将绕  $y'_c$  轴转动  $90^\circ - \varphi$  的坐标关系, 在子午面内表现出来, 如图 2-16(b) 所示。图 2-16(c) 示出了将这些坐标系平移至 O 点时的坐标转换关系。上述的转动关系可以写成下面的矩阵方程:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \alpha \sin \varphi \cos \lambda - \cos \alpha \sin \lambda \\ -\cos \alpha \sin \varphi \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda \\ \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \alpha \sin \varphi \sin \lambda + \cos \lambda \cos \alpha \\ -\cos \alpha \sin \varphi \sin \lambda - \sin \alpha \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = C_c^p \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (2-71) \end{aligned}$$

式中

$$C_c^p = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

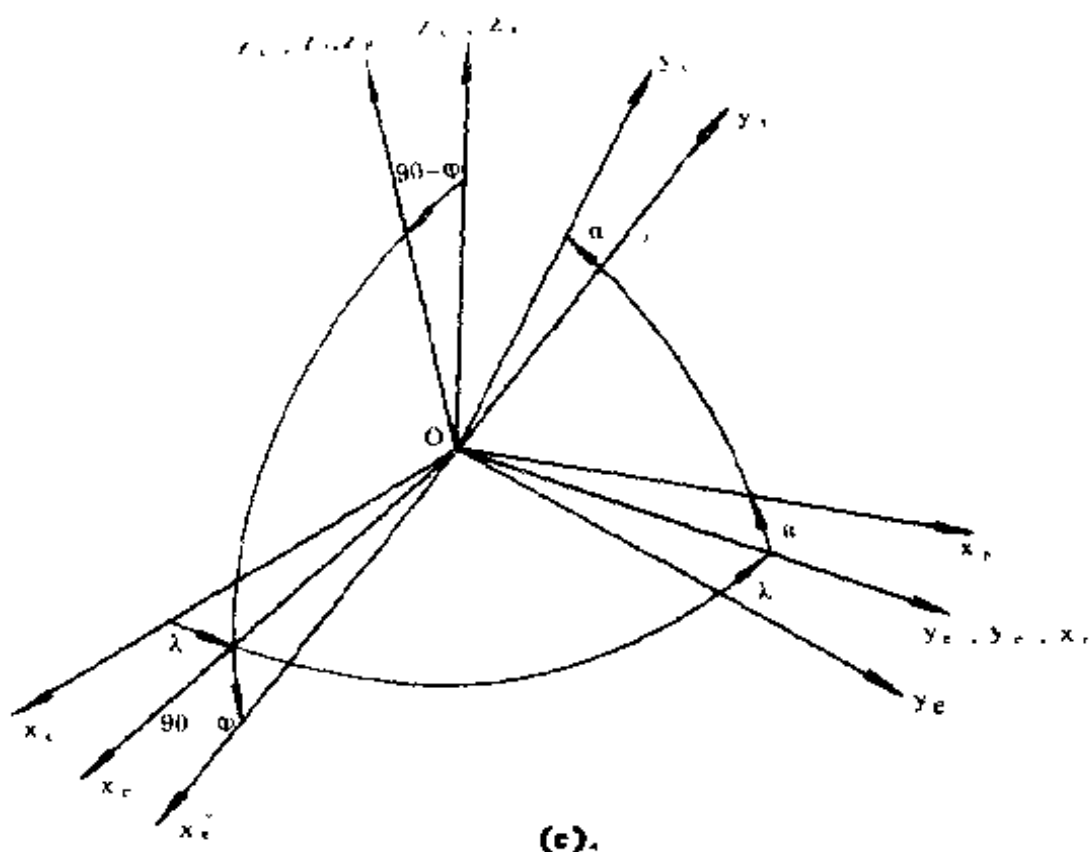


图 2-16 地球坐标系与平台坐标系的转换关系

(a) 由地球坐标系到平台坐标系的转换；(b) 在子午面内表示绕  $y_c$  轴的转动；  
(c) 将各坐标系平移至  $O$  点时的坐标转换关系。

$$= \begin{bmatrix} -\sin \alpha \sin \varphi \cos \lambda - \cos \alpha \sin \lambda \\ -\cos \alpha \sin \varphi \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda \\ \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \alpha \sin \varphi \sin \lambda + \cos \lambda \cos \alpha & \sin \alpha \cos \varphi \\ -\cos \alpha \sin \varphi \sin \lambda - \sin \alpha \cos \lambda & \cos \alpha \cos \varphi \\ \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2-72)$$

因为由方向余弦矩阵  $C^p$  可以确定飞行器的位置 (经度  $\lambda$  和纬度  $\varphi$ )，所以通常又将  $C^p$  称为位置矩阵，当然由  $C^p$  还可确定游动方位角  $\alpha$ 。这一问题将在下面讨论。

2. 由方向余弦矩阵  $C^p$  的元素确定纬度  $\varphi$ 、经度  $\lambda$  和游动方位角  $\alpha$

由矩阵  $C^p$  的元素便可以单值地确定  $\varphi$ 、 $\lambda$ 、 $\alpha$  的真值。为了达到这一目的首先要规定  $\varphi$ 、 $\lambda$ 、 $\alpha$  的定义域。 $\varphi$  的定义域为  $(-90^\circ, 90^\circ)$ ； $\lambda$  的定义域为  $(-180^\circ, 180^\circ)$ ， $\alpha$  的定义域为  $(0^\circ, 360^\circ)$ 。这样，对于平台坐标系的任一位置，都有唯一的  $\varphi$ 、 $\lambda$ 、 $\alpha$  与之相对应。进而可根据  $C^p$  的元素值进行反三角函数运算来确定  $\varphi$ 、 $\lambda$ 、 $\alpha$ 。由于反三角函数是多值函数，所以应先求其主值

$$\begin{aligned}\varphi_{\pm} &= \sin^{-1} C_{33} \\ \lambda_{\pm} &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{C_{32}}{C_{31}} \\ \alpha_{\pm} &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{C_{13}}{C_{23}}\end{aligned}\quad (2-73)$$

当反三角函数的主值确定后，应根据反三角函数的主值域与  $\varphi$ 、 $\lambda$ 、 $\alpha$  的定义域及  $C^p$  的有关元素的正负号来确定  $\varphi$ 、 $\lambda$ 、 $\alpha$  的真值。

#### (1) 求纬度的真值 $\varphi$

由于反正弦函数的主值域与  $\varphi$  的定义域是一致的，因此有

$$\varphi = \varphi_{\mp} \quad (2-74)$$

#### (2) 求经度的真值 $\lambda$

由于反正切函数的主值域是  $(-90^\circ, 90^\circ)$ ，它与  $\lambda$  的定义域不一致，因此需要在  $\lambda$  的定义域内确定经度的真值  $\lambda$ 。

由式 (2-72) 可得到  $C_{32}$  与  $C_{31}$ ，代入  $\lambda_{\pm}$  的公式可得

$$\lambda_{\pm} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{C_{32}}{C_{31}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \varphi \cos \lambda}$$

由于在  $\varphi$  的定义域  $(-90^\circ, 90^\circ)$  内  $\cos \varphi$  永远为正，则  $\cos \lambda$  与  $C_{31}$  同号。利用  $C_{31}$  与  $\lambda_{\pm}$  的正负值可在  $\lambda$  的定义域内



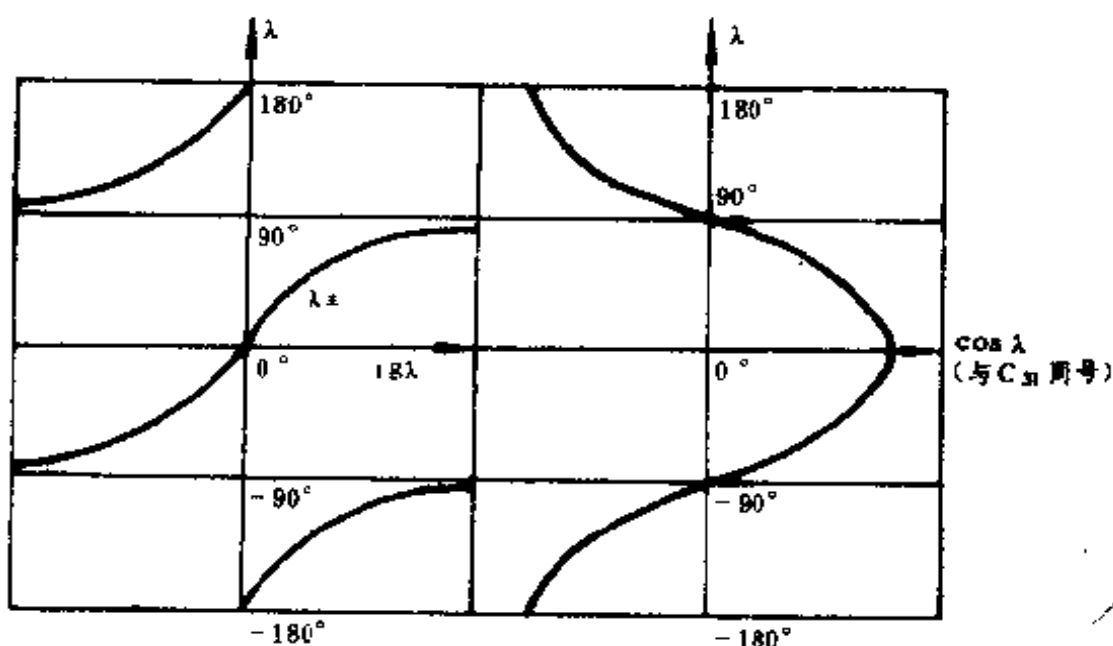


图 2-17 经度的真值  $\lambda$  与  $\cos \lambda$  的关系

确定经度的真值  $\lambda$ ，参见图 2-17。由图可以得出

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_{\pm} & \text{当 } C_M > 0 \text{ 时} \\ \lambda_{\pm} + 180^\circ & \text{当 } C_M < 0 \text{ 时} \\ \lambda_{\pm} - 180^\circ & \text{当 } C_M < 0 \text{ 时} \end{cases} \begin{cases} \lambda_{\pm} < 0 \\ \lambda_{\pm} > 0 \end{cases} \quad (2-75)$$

由式 (2-75) 可以通过计算机的软件程序计算出经度的真值  $\lambda$ 。

### (3) 求游动方位角的真值 $\alpha$

同理，有

$$\alpha_{\pm} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{C_{13}}{C_{23}} = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\cos \alpha \cos \varphi}$$

显然  $C_{23}$  与  $\cos \alpha$  同号。图 2-18 示出了游动方位角的真值  $\alpha$  与  $\cos \alpha$  的关系。由图可以得出

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{\pm} & \text{当 } C_{23} > 0 \text{ 时} \\ \alpha_{\pm} + 360^\circ & \text{当 } C_{23} > 0 \text{ 时} \\ \alpha_{\pm} + 180^\circ & \text{当 } C_{23} < 0 \text{ 时} \end{cases} \begin{cases} \alpha_{\pm} > 0 \\ \alpha_{\pm} < 0 \end{cases} \quad (2-76)$$

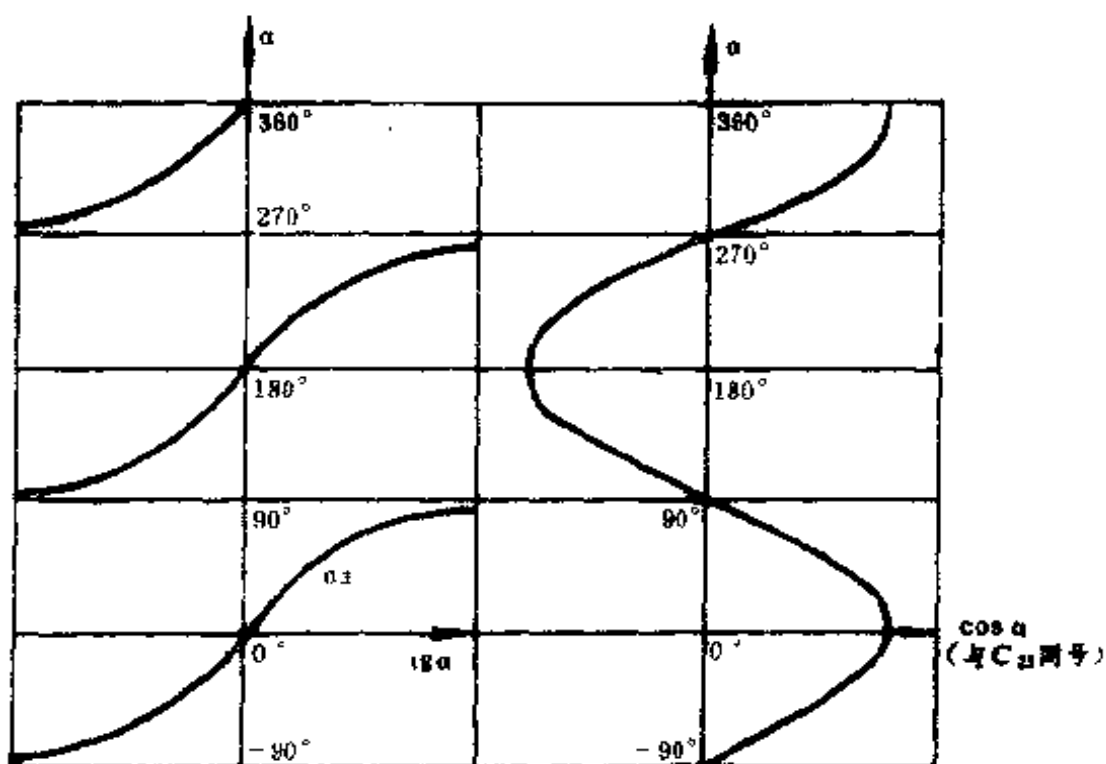


图 2-18 游动方位角的真值  $\alpha$  与  $\cos \alpha$  的关系

由式 (2-76) 可以通过计算机的软件程序计算出游动方位角的真值  $\alpha$ 。

式 (2-75) 中当  $C_{31} = 0$  时与  $\lambda_{\pm} = 0$  时  $\lambda$  的计算以及式 (2-76) 中当  $C_{13} = 0$  时与  $\alpha_{\pm} = 0$  时的计算可仿照参考文献 [12] 中介绍的方法进行。

### 3. 方向余弦矩阵 $C^p$ 的即时修正

方向余弦矩阵  $C^p$  的改变是由平台坐标系相对地球坐标系运动的角速率 (又称为位置速率)  $\omega_{cp}^p$  所引起的。参照式 (2-69) 所给出的方向余弦矩阵微分方程形式可得

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{cpz}^p & \omega_{cpx}^p \\ \omega_{cpz}^p & 0 & -\omega_{cpx}^p \\ -\omega_{cpx}^p & \omega_{cpz}^p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

对于游动方位系统, 上式中  $\omega_{cpz}^p = 0$ , 于是上式可简化为

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_{cpz}^p \\ 0 & 0 & -\omega_{cpx}^p \\ -\omega_{cpy}^p & \omega_{cpx}^p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

由上式可以看出采用方向余弦法的游动方位系统的特殊优点。

#### 4. 位置速率 $\omega_{cp}^p$

由上面的分析可以看出，要求解方向余弦矩阵微分方程(2-77)需要提供位置速率  $\omega_{cp}^p$ 。下面就来给出位置速率的计算公式。

位置速率  $\omega_{cp}^p$  是由飞行器的地速的水平分量所引起的。通过惯导方程求得  $\dot{V}_x^p$ 、 $\dot{V}_y^p$ ，进行一次积分后可得  $V_x^p$ 、 $V_y^p$ 。由于平台坐标系与地理坐标系之间相差一个游动方位角  $\alpha$ ，于是通过坐标转换，可得

$$\begin{bmatrix} V_x^i \\ V_y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x^p \\ V_y^p \end{bmatrix}$$

进而

$$\begin{aligned} V_x^i &= V_x^p \cos \alpha - V_y^p \sin \alpha \\ V_y^i &= V_x^p \sin \alpha + V_y^p \cos \alpha \end{aligned} \quad (2-78)$$

考虑到  $\omega_{cpz}^p \approx 0$ ，则  $\omega_{cp}^p$  可写成

$$\begin{bmatrix} \omega_{cpx}^p \\ \omega_{cpy}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{cx}^i \\ \omega_{cy}^i \end{bmatrix} \quad (2-79)$$

将式(2-78)代入地理坐标系的运动角速率公式(2-47)，再代入式(2-79)，得

$$\begin{bmatrix} \omega_{cpx}^p \\ \omega_{cpy}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-V_x^p \sin \alpha - V_y^p \cos \alpha}{R_{yy}} \\ \frac{V_x^p \cos \alpha - V_y^p \sin \alpha}{R_{xx}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_{yt}} - \frac{1}{R_{xt}}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\left(\frac{\cos^2 \alpha}{R_{yt}} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_{xt}}\right) \\ \frac{\sin^2 \alpha}{R_{yt}} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_{xt}} & \left(\frac{1}{R_{yt}} - \frac{1}{R_{xt}}\right) \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x^p \\ V_y^p \end{bmatrix} \quad (2-80)$$

令

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{yp}} &= \frac{\cos^2 \alpha}{R_{yt}} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_{xt}} \\ \frac{1}{R_{xp}} &= \frac{\sin^2 \alpha}{R_{yt}} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_{xt}} \\ \frac{1}{\tau_a} &= \left(\frac{1}{R_{yt}} - \frac{1}{R_{xt}}\right) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (2-81)$$

式中  $R_{xp}$  与  $R_{yp}$  称为自由曲率半径；当  $\alpha = 0$  时， $R_{yp} = R_{yt}$ ， $R_{xp} = R_{xt}$ 。 $\frac{1}{\tau_a}$  称为扭转挠率；当  $\alpha = 0$  时  $\frac{1}{\tau_a} = 0$ 。将式 (2-81) 代入式 (2-80)，得

$$\begin{bmatrix} \omega_{xp}^p \\ \omega_{yp}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_a} & -\frac{1}{R_{yp}} \\ \frac{1}{R_{xp}} & \frac{1}{\tau_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x^p \\ V_y^p \end{bmatrix} \quad (2-82)$$

由于  $C^p$  的元素可以在方向余弦矩阵的即时修正中获得，而式 (2-81) 中的三角函数均可表示为方向余弦矩阵  $C^p$  的元素的函数关系，这将使计算机的运算大为简化。

由方向余弦矩阵  $C^p$  的公式 (2-72) 可知

$$\begin{aligned} C_{21} &= \sin \alpha \cos \varphi \\ C_{23} &= \cos \alpha \cos \varphi \\ C_{33} &= \sin \varphi \end{aligned} \quad (2-83)$$

考虑到式 (2-83)，可将  $R_{yt}$  与  $R_{xt}$  的计算公式 (2-45) 表示成

$$\omega_{ip}^p = \omega_{ic} \cos \varphi \cos \alpha + \omega_{cp}^p = \omega_{ic} C_{33} + \omega_{cp}^p \quad (2-87)$$

$$\omega_{ip}^p = \omega_{ic} \sin \varphi = \omega_{ic} C_{32}$$

对于平台惯导系统,  $\omega_{ip}^p$  用来控制平台, 使之以给定的角速率转动; 对于捷联系统,  $\omega_{ip}^p$  要输送至“数学平台”的计算程序中, 进行捷联计算。

## 6. 游动方位系统的惯导基本方程

对于游动方位系统, 惯导基本方程可写成

$$\dot{\vec{V}}^p = \vec{f}^p + \vec{g}^p - (2\vec{\omega}_{ic}^p + \vec{\omega}_{cp}^p) \times \vec{V}^p \quad (2-88)$$

式中

$$\begin{aligned} 2\vec{\omega}_{ic}^p + \vec{\omega}_{cp}^p &= 2C_c^p \vec{\omega}_{ic} + \vec{\omega}_{cp}^p \\ &= 2 \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ic} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{cp}^p \\ \omega_{cp}^p \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\omega_{ic}C_{13} + \omega_{cp}^p \\ 2\omega_{ic}C_{23} + \omega_{cp}^p \\ 2\omega_{ic}C_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-89)$$

将式(2-89)代入式(2-88)可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{V}_x^p \\ \dot{V}_y^p \\ \dot{V}_z^p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_x^p \\ f_y^p \\ f_z^p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} 0 & -2\omega_{ic}C_{33} \\ 2\omega_{ic}C_{33} & 0 \\ -(2\omega_{ic}C_{13} + \omega_{cp}^p) & 2\omega_{ic}C_{13} + \omega_{cp}^p \\ 2\omega_{ic}C_{23} + \omega_{cp}^p & -(2\omega_{ic}C_{23} + \omega_{cp}^p) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x^p \\ V_y^p \\ V_z^p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-90)$$

上式可进一步写成

$$\Delta \begin{cases} \dot{V}_x^p = f_x^p + 2\omega_{ie}C_{33}V_y^p - (2\omega_{ie}C_{23} + \omega_{epx}^p)V_z^p \\ \dot{V}_y^p = f_y^p - 2\omega_{ie}C_{33}V_x^p + (2\omega_{ie}C_{13} + \omega_{epy}^p)V_z^p \\ \dot{V}_z^p = f_z^p - g + (2\omega_{ie}C_{23} + \omega_{epx}^p)V_x^p \\ \quad - (2\omega_{ie}C_{13} + \omega_{epy}^p)V_y^p \end{cases} \quad (2-91)$$

式(2-91)为进行精确计算的公式。在做简化分析时,认为 $V_x^p$ 很小,略去与它有关的项,可得简化惯导基本方程,即

$$\begin{aligned} \dot{V}_x^p &= f_x^p + 2\omega_{ie}C_{33}V_y^p \\ \dot{V}_y^p &= f_y^p - 2\omega_{ie}C_{33}V_x^p \end{aligned} \quad (2-92)$$

综上所述,最后可以画出采用方向余弦法的游动方位系统惯导原理方块图,如图2-19所示。

综合本节的讨论可以看出,当采用方向余弦法进行导航时,全部导航计算都可以化成代数运算。即全部三角函数均可由方向余弦矩阵 $C^p$ 的元素的代数运算来表示;而 $C^p$ 的元素可在即时修正中获得,不必在计算出 $\varphi$ 及 $\alpha$ 后获得,与上一节介绍的方法相比较,则大大减少了计算量,提高了计算精度。而在采用方向余弦法时,由于游动自由方位系统的 $\omega_{epx}^p = 0$ ,所以游动方位系统比起自由方位系统更有优越性。目前的平台惯导系统及捷联惯导系统中均较多地采用了游动自由方位系统。本书以后章节的内容也多以游动自由方位系统作为研究的对象。

## §2-5 惯导系统的高度通道

在本章的§2-1中我们已经得知,惯导系统的水平通道在实现舒勒调整以后,就以舒勒周期振荡,因此其误差不会发散。本节要指出惯导系统高度通道的误差是发散的,为了解决这一问题,需要在高度通道中引入外部信息进行阻尼。

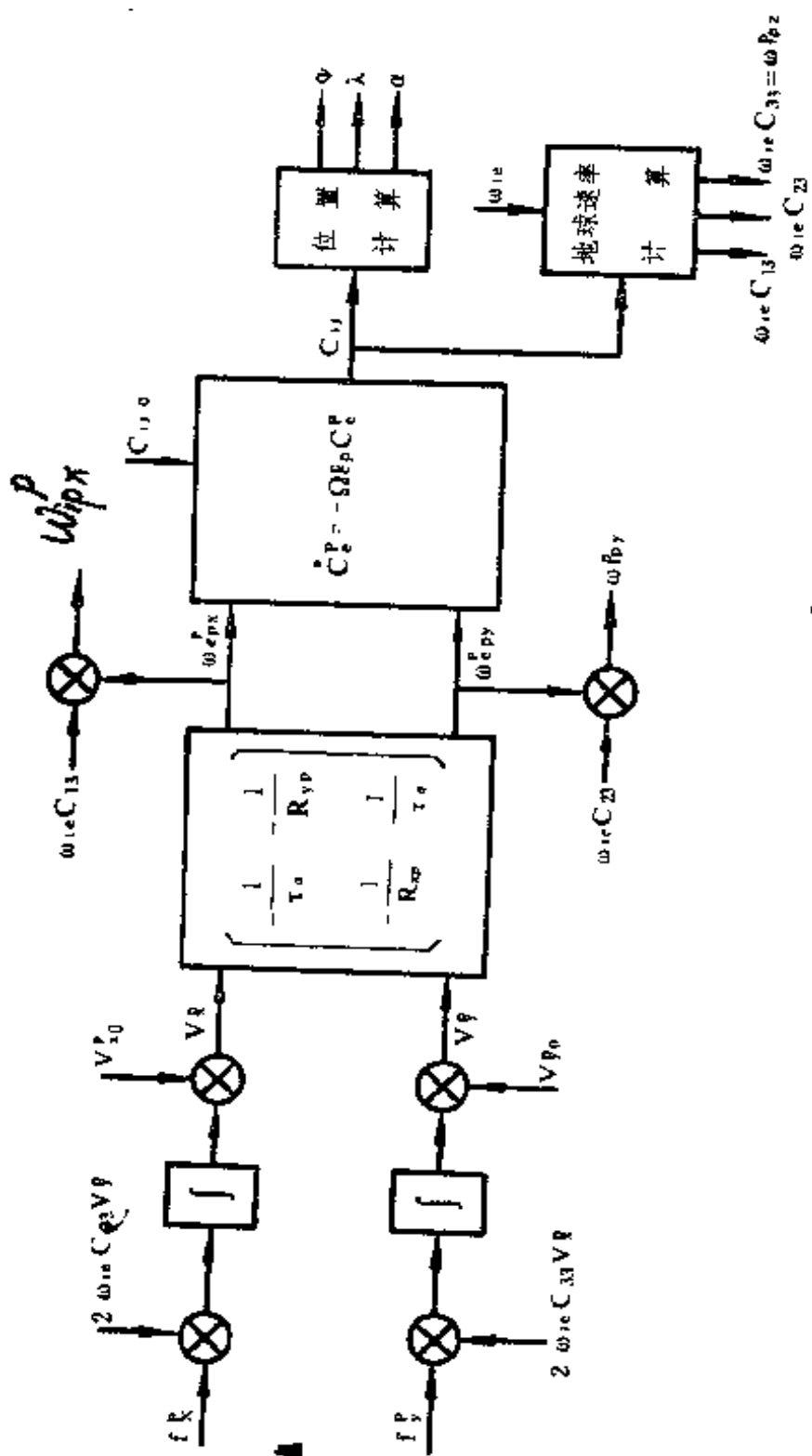


图 2-19 采用方向余弦法的游动方位系统惯导原理方块图



## 一、惯导系统高度通道的不稳定性

当飞行器沿垂线方向飞行时,其高度  $h$  就要发生变化。根据万有引力定律,可以写出在地球表面处的重力加速度  $g_0$  的近似值,为

$$g_0 = K \frac{M}{R^2}$$

式中  $K$  为单位质量的引力系数,  $M$  为地球的质量。同理可得高度为  $h$  处的重力加速度,为

$$g = K \frac{M}{(R+h)^2} = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

当  $h \ll R$  时,略去  $\frac{h}{R}$  二阶以上的小量,则有

$$g = g_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \quad (2-93)$$

考虑到式 (2-91) 的第三个公式及式 (2-93), 惯导系统的高度通道可以表示成图 2-20 的形式, 图中  $a_{zB}$  为有害加速度的  $z_B$  轴分量, 为

$$a_{zB} = -(2\omega_{ie}C_{23} + \omega_{ep}^2)V_y^p + (2\omega_{ie}C_{31} + \omega_{ep}^2)V_x^p \quad (2-94)$$

并有

$$\ddot{h} = \dot{V}_z^p \quad (2-95)$$

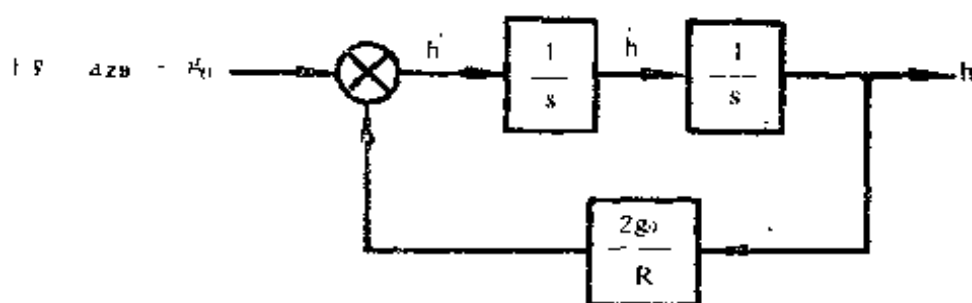


图 2-20 惯导高度通道的原理方块图

显然

$$\begin{aligned} \dot{h} &= f_z^p - a_{zB} - g \\ &= f_z^p - a_{zB} - g_0 + \frac{2g_0}{R} h \end{aligned} \quad (2-96)$$

对图 2-20 进行两步结构变换可得图 2-21。由图 2-21(a) 可以看出高度通道为正反馈，所以该通道为不稳定的；由图 2-21(b) 可以写出高度通道的特征方程，即

$$\left(s^2 - \frac{2g_0}{R}\right) = \left(s + \sqrt{\frac{2g_0}{R}}\right)\left(s - \sqrt{\frac{2g_0}{R}}\right) = 0$$

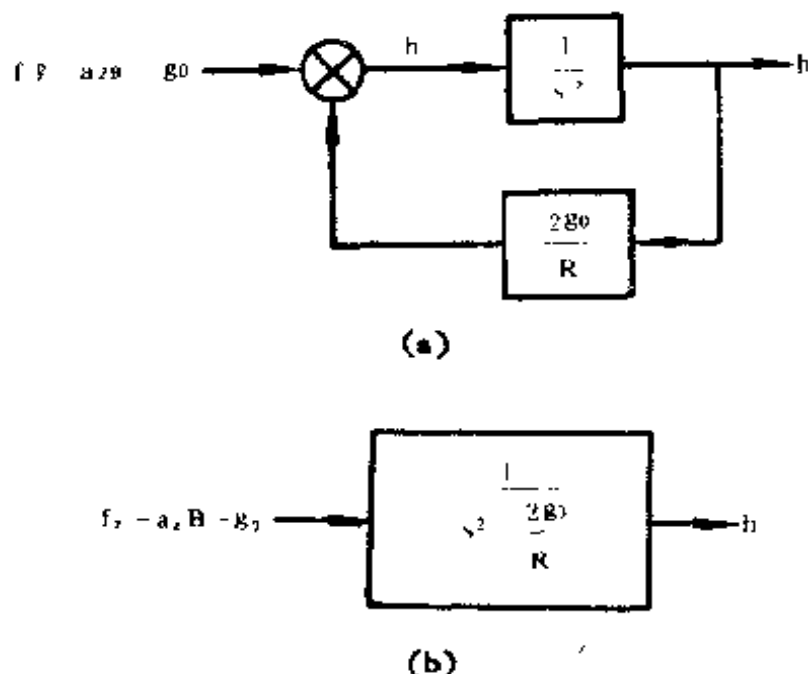


图 2-21 图 2-20 的结构变换  
(a) 第一步结构变换；(b) 第二步结构变换。

可见特征方程具有一个正根  $s = \sqrt{\frac{2g_0}{R}}$ 。在高度通道的误差传播中具有与  $e^{\sqrt{\frac{2g_0}{R}}t}$  成比例的随时间按指数规律增长

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \ddot{h} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 & 1 - K_1 K_4 & 0 \\ -K_2 + 2\omega_i^2 & -K_1 K_4 & -1 \\ K_3 & K_3 K_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \dot{h} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_1 \\ -K_3 \end{bmatrix} h_B + \begin{bmatrix} 0 \\ f_z^p - a_{xB} - g_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_s^2 = \frac{g}{R} \quad (2-97)$$

对上式进行拉氏变换,考虑到零初始条件,可得

$$\begin{bmatrix} s + K_1 & K_1 K_4 - 1 & 0 \\ K_2 - 2\omega_i^2 & s + K_2 K_4 & 1 \\ -K_3 & -K_3 K_4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \dot{h} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ -K_3 \end{bmatrix} h_B + \begin{bmatrix} 0 \\ f_z^p - a_{xB} - g_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-98)$$

由上式可求出系统的特征方程,即

$$\Delta(s) = s^3 + (K_1 + K_1 K_4)s^2 + (K_3 K_4 + K_2 + 2\omega_i^2 K_1 K_4 - 2\omega_i^2)s + K_3 = 0 \quad (2-99)$$

将  $K_4$  取为  $0.5 \sim 0.8$ ,  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$  按等根条件设计,即使高度通道具有下面形式的特征方程:

$$\Delta(s) = \left(s + \frac{1}{\tau}\right)^3 = 0 \quad (2-100)$$

比较式 (2-99) 与式 (2-100) 的系数,可得

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{-2\omega_i^2 K_4 \tau^3 + 3\tau^2 - 3K_4 \tau + K_4^2}{(1 - 2\omega_i^2 K_4^2) \tau^3} \\ K_2 &= \frac{2\omega_i^2 (\tau^3 - 3K_4 \tau^2) + 3\tau - K_4}{(1 - 2\omega_i^2 K_4^2) \tau^3} \\ K_3 &= \frac{1}{\tau^3} \end{aligned} \quad (2-101)$$

选定  $K_1$  的数值,由式 (2-101) 便可设计出有阻尼高度通道的具体形式。

应当指出,关于惯导高度通道的加阻尼方案可以有多种取法,这里只是给出一个具体的例子帮助读者理解基本概念。

轴分别沿飞机的横轴、纵轴与竖轴，如图 3-1 所示。根据 § 2-4 中的分析，这里选取游动自由方位系统作为理想的平台坐标系。于是实现由机体坐标系至平台坐标系的坐标转换的捷联矩阵  $T$  应满足如下的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

式中

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

当矩阵  $T$  求得后，沿机体坐标系测量的比力  $\bar{f}^b$  就可以转换到平台坐标系上，得到  $\bar{f}^p$ 。从而便可以进行第二章中所介绍的导航计算。显然有

$$\bar{f}^p = T \bar{f}^b \quad (3-3)$$

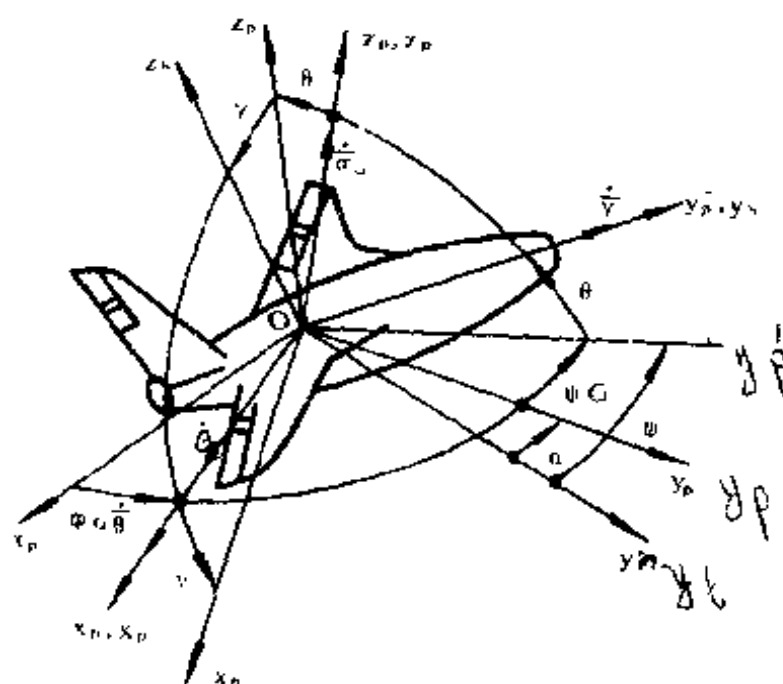


图 3-1 平台坐标系与机体坐标系的关系



图 3-1 中还示出了由平台坐标系至机体坐标系的转换关系,它可以通过下述顺序的三次旋转来表示:

$$x_p y_p z_p \xrightarrow[\phi_G]{\text{绕 } x_p' \text{ 轴}} x_p' y_p' z_p' \xrightarrow[\theta]{\text{绕 } y_p' \text{ 轴}} x_p'' y_p'' z_p'' \xrightarrow[\gamma]{\text{绕 } z_p'' \text{ 轴}} x_b y_b z_b$$

其中  $\phi_G$ 、 $\theta$ 、 $\gamma$  分别为飞行器的格网航向角、俯仰角和倾斜角。对于游动方位系统,  $y_p$  (格网北) 和  $y_b$  (真北) 的夹角为游动方位角  $\alpha$ 。则飞行器的纵轴在水平面上的投影(沿  $y_p'$  轴)与真北(沿  $y_b$  轴)的夹角即为航向角  $\psi$ , 且有

$$\psi = \phi_G + \alpha \quad (3-4)$$

根据上述的旋转顺序,可以得到由平台坐标系到机体坐标系的转换关系,即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi_G & \sin \phi_G & 0 \\ -\sin \phi_G & \cos \phi_G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \\ T^{-1} = C_p^b &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \phi_G - \sin \gamma \sin \theta \sin \phi_G & -\cos \theta \sin \phi_G & \sin \gamma \cos \phi_G + \cos \gamma \sin \theta \sin \phi_G & \cos \gamma \sin \phi_G + \sin \gamma \sin \theta \cos \phi_G & -\sin \gamma \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \phi_G + \cos \gamma \sin \theta \sin \phi_G & \cos \theta \cos \phi_G & \sin \gamma \sin \phi_G - \cos \gamma \sin \theta \cos \phi_G & \cos \gamma \cos \phi_G - \sin \gamma \sin \theta \cos \phi_G & \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-5)$$

由式 (3-1) 可得

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

对比式 (3-5) 和 (3-6), 并考虑到矩阵  $T$  为正交矩阵,  $T^{-1} = T'$ , 于是

$$T = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \phi_G - \sin \gamma \sin \theta \sin \phi_G & -\cos \theta \sin \phi_G \\ \cos \gamma \sin \phi_G + \sin \gamma \sin \theta \cos \phi_G & \cos \theta \cos \phi_G \\ -\sin \gamma \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \phi_G + \cos \gamma \sin \theta \sin \phi_G \\ \sin \gamma \sin \phi_G - \cos \gamma \sin \theta \cos \phi_G \\ \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

## 二、由捷联矩阵确定飞行器的姿态角

由式 (3-7) 可以看出捷联矩阵(或姿态矩阵)  $T$  是  $\phi_G, \theta, \gamma$  的函数。由  $T$  的元素可以单值地确定  $\phi_G, \theta, \gamma$ , 然后再由式 (3-4) 确定  $\phi$ , 从而求得飞行器的姿态角。下面我们就来讨论这个问题。

为了单值地确定  $\phi_G, \theta, \gamma$  的真值, 首先应给出它们的定义域。俯仰角  $\theta$  的定义域为  $(-90^\circ, 90^\circ)$ , 倾斜角  $\gamma$  的定义域为  $(-180^\circ, 180^\circ)$ , 格网航向角  $\phi_G$  的定义域为  $(0^\circ, 360^\circ)$ 。根据式 (3-7) 示出的矩阵  $T$  的元素, 可以确定  $\phi_G, \theta, \gamma$  的主值, 即

$$\begin{aligned} \theta_{\pm} &= \sin^{-1}(T_{32}) \\ \gamma_{\pm} &= \lg^{-1}\left(\frac{-T_{31}}{T_{33}}\right) \\ \phi_{G\pm} &= \lg^{-1}\left(\frac{-T_{12}}{T_{22}}\right) \end{aligned} \quad (3-8)$$



由以上的分析可以看出，捷联惯导系统可以精确地计算出飞行器的姿态角，而平台惯导系统只能由平台框架之间的同步器拾取近似的姿态角，这是捷联系统的一大优点。

综上所述可以看出，捷联矩阵  $T$  有两个作用：其一是用它来实现坐标转换，将沿机体系安装的加速计测量的比力转换到平台坐标系上；其二是根据捷联矩阵的元素确定飞行器的姿态角。

## § 3-2 四元数理论及其在刚体定点转动中的应用

由理论力学的知识可知，绕定点转动的刚体的角位置可以通过依次转过三个欧拉角的三次转动获得，也可以通过绕某一瞬时轴转过某个角度的一次转动获得。对于前者可采用方向余弦法解决定点转动的刚体的定位问题，对于后者可采用四元数法来解决定位问题。B. P. 哈密尔顿早在 1843 年就在数学中引入了四元数，但由于这种数学工具的优越性尚未显示出来，所以直到本世纪六十年代末这种方法还未获得实际应用。随着空间技术、计算技术、特别是捷联惯导技术的发展，四元数的优越性才日渐引起人们的重视。在最近十几年中，四元数理论才真正得到应用。本节仅扼要地介绍在捷联惯导中所必需的最基本的四元数知识。

### 一、四元数的定义和性质

#### 1. 四元数的定义

四元数 (Quaternion)  $Q$  定义为

$$Q = q_0 1 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3 \quad (3-11)$$

式中  $q_0, q_1, q_2, q_3$  为四个实数，1 是实数部分的基，以后可

以略去不写； $i_1, i_2, i_3$  为四元数的另三个基，四元数的基具有双重性质，即向量代数中的向量性质及复数运算中的虚数的性质，因此有些文献中又将四元数称为超复数。关于四元数及其基  $i_1, i_2, i_3$  相乘的表示方法，为了区别向量运算中的点积符号“ $\cdot$ ”和叉积符号“ $\times$ ”，可以不用乘号或用“ $\circ$ ”来表示四元数乘积。例如两个四元数  $Q_1, Q_2$  的乘积可表示为  $Q_1 Q_2$  或  $Q_1 \circ Q_2$ 。于是  $i_1, i_2, i_3$  的双重性质可表示为

$$\begin{aligned} i_1^2 &= i_2^2 = i_3^2 = -1 \\ i_1 i_2 &= i_3, & i_2 i_1 &= -i_3 \\ i_2 i_3 &= i_1, & i_3 i_2 &= -i_1 \\ i_3 i_1 &= i_2, & i_1 i_3 &= -i_2 \end{aligned} \quad (3-12)$$

## 2. 四元数的性质

设两个四元数为

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_0 + q_{11}i_1 + q_{21}i_2 + q_{31}i_3 \\ Q_2 &= q_0 + q_{12}i_1 + q_{22}i_2 + q_{32}i_3 \end{aligned} \quad (3-13)$$

则四元数具有如下性质：

(1) 两个四元数相等的条件是其对应的四个元都相等，即

$$q_{01} = q_{02}, \quad q_{11} = q_{12}, \quad q_{21} = q_{22}, \quad q_{31} = q_{32}$$

(2) 两个四元数的和或差为另一四元数，其四个元分别为两个四元数的对应元的和或差，即

$$\begin{aligned} Q_1 \pm Q_2 &= q_0 \pm q_0 + (q_{11} \pm q_{12})i_1 \\ &\quad + (q_{21} \pm q_{22})i_2 + (q_{31} \pm q_{32})i_3 \end{aligned}$$

(3) 四元数乘以标量  $a$  得另一四元数，其四个元分别为原四元数对应元乘以该标量  $a$ ，即

$$aQ = aq_0 + aq_{11}i_1 + aq_{21}i_2 + aq_{31}i_3$$

(4) 四元数的负数为另一四元数，其各元分别为原四元数的对应元取负号，即

$$-Q = -q_0 - q_1 i_1 - q_2 i_2 - q_3 i_3$$

(5) 零四元数的各元均为零，即

$$Q = 0 + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 = 0$$

(6) 两个四元数相乘的结果是

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= (q_{01} + q_{11}i_1 + q_{21}i_2 + q_{31}i_3)(q_{02} \\ &\quad + q_{12}i_1 + q_{22}i_2 + q_{32}i_3) \\ &= q_{01}q_{02} - q_{11}q_{12} - q_{21}q_{22} - q_{31}q_{32} \\ &\quad + q_{01}(q_{12}i_1 + q_{22}i_2 + q_{32}i_3) + q_{02}(q_{11}i_1 \\ &\quad + q_{21}i_2 + q_{31}i_3) + \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3-14)$$

## 二、四元数的哈密尔顿表示法

把四元数分成标量部分和向量部分两部分，可表示为  $Q = q_0 + \bar{q}$  或  $Q = (q_0, \bar{q})$ 。其中

$q_0$ ——四元数  $Q$  的标量部分；

$\bar{q}$ ——四元数  $Q$  的向量部分。

于是用式 (3-14) 表示的两个四元数的乘积可以表示为

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= q_{01}q_{02} - \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 + q_{01}\bar{q}_2 + q_{02}\bar{q}_1 \\ &\quad + \bar{q}_1 \times \bar{q}_2 \end{aligned} \quad (3-15)$$

比较式 (3-14) 与式 (3-15) 可以看出，采用哈密尔顿表示法形式简单，且易于记忆。在哈密尔顿表示法中采用了向量乘积的表示方法，即它们有点积“ $\cdot$ ”和叉积“ $\times$ ”；然而作为四元数的特殊情况(只有向量部分的四元数)，它们还有四元数乘积，即

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 \bar{q}_2 = & - (q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22} + q_{31}q_{32}) \\ & + \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3-16)$$

式(3-16)表明,两个四元数的向量部分的四元数乘积为另一四元数。它不同于向量的点积和叉积,它既有标量部分,又有向量部分。

### 三、四元数的运算法则

四元数的运算法则可由上面给出的四元数性质得出。其运算法则有以下各项:

加法交换律:  $Q + M = M + Q$ ;

加法结合律:  $(Q + M) + P = Q + (M + P)$ ;

$aQ = Qa$ ,  $(ab)Q = a(bQ)$ ;

$(a + b)Q = aQ + bQ$ ,  $a(Q + M) = aQ + aM$ ;

$(QM)P = Q(MP)$ ;

$Q(M + P) = QM + QP$ ,  $(Q + M)P = QP + MP$ 。

特别应强调的是,四元数的乘法无交换律,但其标量部分与各因子相乘的顺序无关,即

$$(Q_1 Q_2)_0 = (Q_2 Q_1)_0 = q_{01}q_{02} - q_{11}q_{12} - q_{21}q_{22} - q_{31}q_{32}$$

式中  $(\quad)_0$  表示括号内的四元数的标量部分;进而可得

$$(QMP)_0 = (PQM)_0 = (MPQ)_0 \quad (3-17)$$

### 四、四元数的共轭数和模方

#### 1. 四元数的共轭数的定义

设四元数  $Q = q_0 + \bar{q}$ , 则  $Q$  的共轭数  $Q^*$  定义为

$$Q^* = q_0 - \bar{q} \quad \text{或} \quad Q^* = (q_0, -\bar{q})$$

#### 2. 四元数之和的共轭数

两四元数之和的共轭数等于其共轭之和,即

$$\begin{aligned}(Q_1 + Q_2)^* &= (q_{01} + q_{02} + \bar{q}_1 + \bar{q}_2)^* \\ &= q_{01} - \bar{q}_1 + q_{02} - \bar{q}_2 = Q_1^* + Q_2^*\end{aligned}$$

### 3. 四元数乘积的共轭数

两四元数乘积的共轭数等于这两个四元数的共轭数改变相乘顺序的乘积,即

$$\begin{aligned}(Q_1 Q_2)^* &= [(q_{01} + q_1)(q_{02} + q_2)]^* \\ &= (q_{01}q_{02} - \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 + q_{11}\bar{q}_2 + q_{02}q_1 + \bar{q}_1 \times \bar{q}_2)^* \\ &= q_{01}q_{02} - q_1 \cdot \bar{q}_2 - q_{01}\bar{q}_2 - q_{02}q_1 + \bar{q}_2 \times \bar{q}_1 \\ &= (q_{02} - \bar{q}_2)(q_{01} - \bar{q}_1) = Q_2^* Q_1^*\end{aligned}\quad (3-18)$$

### 4. 四元数向量部分的共轭数

四元数向量部分的共轭数等于其变号,即

$$\bar{q}^* = -\bar{q}$$

### 5. 四元数的模方 $N$

四元数的模方  $N$  定义为

$$N = QQ^* = Q^*Q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (3-19)$$

由上式可见,当  $N = 0$  时,应满足  $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$ , 则  $Q = 0$ 。

当  $N = 1$  时,称  $Q$  为单位四元数。

### 6. 两个四元数的乘积的模方

两四元数乘积的模方等于其模方的乘积,即

$$\begin{aligned}N_{QM} &= (QM)(QM)^* = QMM^*Q^* \\ &= QN_MQ^* = QQ^*N_M \\ &= N_QN_M\end{aligned}\quad (3-20)$$

## 五、四元数的逆和四元数的除法

设  $Q$  为非零四元数,则  $Q$  的模方  $N \neq 0$ , 且存在其逆。

### 1. 四元数的逆的定义

四元数的逆  $Q^{-1}$  定义为四元数的共轭数  $Q^*$  除以  $Q$  的模

方  $N$ , 即

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{N}$$

由模方的定义可得

$$QQ^* = Q^*Q = N = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

则有

$$Q\left(\frac{Q^*}{N}\right) = \left(\frac{Q^*}{N}\right)Q = 1$$

即

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1$$

可见  $Q$  的逆  $Q^{-1}$  起着  $Q$  的倒数的作用。

因为两四元数乘积的模方等于其模方的乘积, 于是可得

$$N_{Q^{-1}Q} = N_{Q^{-1}}N_Q = 1$$

则有

$$N_{Q^{-1}} = \frac{1}{N_Q} \quad (3-21)$$

即四元数的逆的模方等于其模方的倒数。

显然, 单位四元数的逆等于其共轭数, 即

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{N} = Q^*$$

从而, 单位四元数向量(无标量部分的单位四元数)的共轭数为其负数; 其逆也等于它的负数。

## 2. 四元数的除法

四元数  $Q$  除以另一个四元数  $M (M \neq 0)$ , 其商有两种情况。

### (1) 情况一

若

$$P_1M = Q$$

则有

$$P_1 M M^{-1} = Q M^{-1}$$

于是

$$P_1 = Q M^{-1}$$

(2) 情况二

若

$$M P_2 = Q$$

则有

$$M^{-1} M P_2 = M^{-1} Q$$

于是

$$P_2 = M^{-1} Q$$

对比上述两种情况可以看出,四元数  $Q$  除以  $M$  不能以  $\frac{Q}{M}$  表示,而要用  $Q M^{-1}$  或  $M^{-1} Q$  的不同情况加以区分,即分为右乘以  $M^{-1}$  或左乘以  $M^{-1}$  的两种情况。

### 3. 四元数的商的模方

由式 (3-21) 可知,四元数的逆的模方等于其模方的倒数,显然有

$$\begin{aligned} N_{P_1} &= N_{P_2} = N_Q N_{M^{-1}} = N_{M^{-1}} N_Q \\ &= \frac{N_Q}{N_M} \end{aligned} \quad (3-22)$$

## 六、四元数的三角表示法

为了用四元数来表示刚体的定点转动,需要采用四元数的三角表示法。

设四元数

$$Q = q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3$$

四元数  $Q$  的模可定义为

$$h = \sqrt{N} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$



四元数的模又可称为四元数的范数,它可表示为  $\text{Norm } Q$ 。

设三角函数

$$\cos \theta = \frac{q_0}{h}$$

则有

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{h} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

对于四元数  $Q$  的向量部分  $q$ , 设其单位向量为  $\bar{i}$ , 显然

$$\bar{i} = \frac{q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

于是四元数  $Q$  可以表示为

$$\begin{aligned} Q &= h \left( \frac{q_0}{h} + \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{h} \cdot \frac{q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \right) \\ &= h (\cos \theta + \bar{i} \sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned}$$

当  $Q$  为单位四元数时记为  $\bar{Q}$ , 此时  $h = 1$ , 且有

$$\cos \theta = q_0$$

$$\sin \theta = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

如根号取正,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , 则

$$\bar{Q} = \cos \theta + \bar{i} \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

对于非单位四元数, 则有

$$Q = h \bar{Q}$$

## 七、转动的四元数变换

### 1. 定理

设  $Q$  与  $R$  为两个非标量四元数, 设

$$\begin{aligned} Q &= q_0 + \bar{q} = \sqrt{N_Q} (\cos \theta + \bar{i} \sin \theta) \\ R &= r_0 + \bar{r} = \sqrt{N_R} (\cos \Phi + \bar{e} \sin \Phi) \end{aligned} \quad (3-23)$$

则

$$R' = QRQ^{-1} = r'_0 + \bar{r}'$$

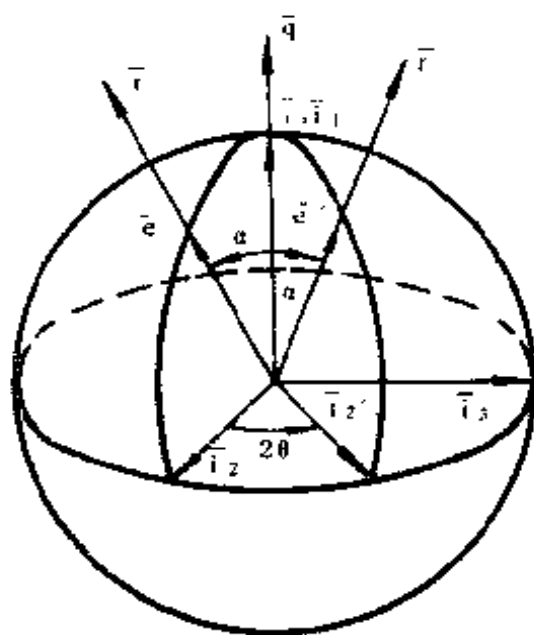


图 3-2 转动的四元数表示法

$$\vec{r} = \vec{i}_1 \cos \alpha + \vec{i}_2 \sin \alpha$$

将上式代入式 (3-25), 得

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= Q(\vec{i}_1 \cos \alpha + \vec{i}_2 \sin \alpha)Q^{-1} \\ &= (Q\vec{i}_1Q^{-1})\cos \alpha + (Q\vec{i}_2Q^{-1})\sin \alpha \end{aligned} \quad (3-26)$$

因为  $\vec{q}$  与  $\vec{i}_1$  同方向, 故  $Q$  与  $\vec{i}_1$  可交换, 即

$$Q\vec{i}_1 = \vec{i}_1Q$$

于是式 (3-26) 中的  $Q\vec{i}_1Q^{-1}$  为

$$Q\vec{i}_1Q^{-1} = \vec{i}_1QQ^{-1} = \vec{i}_1$$

又因为

$$Q = \sqrt{N_Q} (\cos \theta + \vec{i} \sin \theta)$$

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{N_Q} = \frac{\sqrt{N_Q}}{N_Q} (\cos \theta - \vec{i} \sin \theta)$$

所以式 (3-26) 中的  $Q\vec{i}_2Q^{-1}$  为

$$\begin{aligned}
\vec{i}_1 &= Q\vec{i}_2Q^{-1} \\
&= (\cos\theta + \vec{i}_1\sin\theta)\vec{i}_2(\cos\theta - \vec{i}_1\sin\theta) \cdot \frac{\sqrt{N_Q} \cdot \sqrt{N_Q}}{N_Q} \\
&= (\vec{i}_2\cos\theta + \vec{i}_3\sin\theta)(\cos\theta - \vec{i}_1\sin\theta) \\
&= \vec{i}_2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \vec{i}_3(2\sin\theta\cos\theta)
\end{aligned}$$

进而

$$\vec{i}_1 = \vec{i}_2\cos 2\theta + \vec{i}_3\sin 2\theta$$

将上式与图 3-2 相对照可以看出,  $\vec{i}_1$  是位于  $\vec{i}_2, \vec{i}_3$  平面内的单位向量, 并与  $\vec{i}_2$  的夹角为  $2\theta$ 。于是

$$\vec{e}' = \vec{i}_1\cos\alpha + \vec{i}_2\sin\alpha$$

显然  $\vec{e}'$  在  $\vec{i}_1, \vec{i}_2$  平面内, 并与  $\vec{i}_1$  成  $\alpha$  角。从而

$$R' = \sqrt{N_R}(\cos\Phi + \vec{e}'\sin\Phi)$$

而  $\vec{e}'$  就是  $\vec{e}$  绕  $\vec{i}$  沿圆锥角为  $\alpha$  的锥面转过  $2\theta$  角而得的单位向量。

## 2. 转动的四元数变换

由上述定理可以看出, 一次转动可以用四元数表示, 即

$$R' = QRQ^{-1}$$

式中  $Q$  为转动四元数, 而  $Q(\quad)Q^{-1}$  是由转动四元数  $Q$  给出的转动算子, 它确定了将向量  $\vec{r}$  绕向量  $\vec{q}$  转过  $2\theta$  角的转动。这样就可以用四元数进行坐标变换或向量变换。通常可用单位四元数  $Q$  来表示转动, 且将转动角度取为  $\theta$ , 于是有

$$Q = \cos\frac{\theta}{2} + \xi\sin\frac{\theta}{2} \quad (3-27)$$

式 (3-27) 表示绕  $\xi$  轴转过  $\theta$  角的转动。

## 3. 相继转动的四元数变换及其不可交换性

设有两个转动四元数  $Q, M$ , 且有

$$Q = \cos\frac{\alpha}{2} + \xi\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$M = \cos \frac{\beta}{2} + \eta \sin \frac{\beta}{2}$$

则转动算子  $Q(\quad)Q^{-1}$  表示绕  $\xi$  轴转过  $\alpha$  角的转动, 而  $M(\quad)M^{-1}$  表示绕  $\eta$  轴转过  $\beta$  角的转动, 并将它们分别称之为  $Q$  转动和  $M$  转动。若刚体先做  $Q$  转动再做  $M$  转动, 那么这个总的转动可以表示为

$$M[Q(\quad)Q^{-1}]M^{-1} = MQ(\quad)(MQ)^{-1}$$

将这个总的转动的转动四元数用  $P$  表示, 则有

$$P = MQ = \cos \frac{\gamma}{2} + \xi \sin \frac{\gamma}{2}$$

将上述原则推广至一般, 即刚体的  $n$  个相继的转动  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  等效于一个一次转动  $P$ , 即  $P = Q_n Q_{n-1} \dots Q_2 Q_1$ 。

除了  $Q$  与  $M$  的向量部分  $\xi$  与  $\eta$  同方向的特殊情况以外, 一般  $QM \neq MQ$ , 即相继转动具有不可交换性。

### 八、转动四元数与转动方向余弦矩阵的关系

在 § 3-1 中我们讨论了机体坐标系相对平台坐标系的转动可以用方向余弦矩阵  $T$  来表示, 上面我们又讨论了用四元数也可以表示转动。那么转动四元数与转动方向余弦矩阵之间又存在什么关系呢? 下面我们就来解决这个问题。

图 3-3 示出了动系  $Oxyz$  相对定系  $Ox_i y_i z_i$  的关系, 其单位向量分别为  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ 。设某向量  $\overline{OM}$ , 它在定系和动系的投影分别为

$$\overline{OM} = x_i \bar{i}_1 + y_i \bar{i}_2 + z_i \bar{i}_3$$

$$\overline{OM} = x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2 + z \bar{e}_3$$

而坐标系  $Oxyz$  可以看成绕  $\bar{q}$  轴转动  $\theta$  角而获得的。根据向量投影的相对关系可知, 当向量  $\overline{OM}$  不动而动系  $Oxyz$  相对定系  $Ox_i y_i z_i$  绕  $\bar{q}$  转动  $\theta$  角以后  $\overline{OM}$  在两个坐标系上

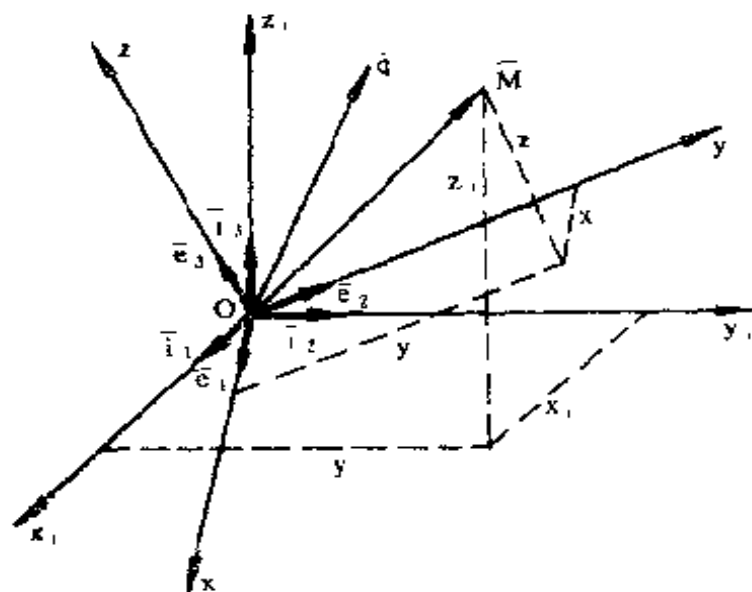


图 3-3 向量  $\overline{OM}$  在定系  $Ox, y, z$  及动系  $Oxyz$  中的投影

的投影(如图 3-3 所示),与坐标系  $Ox, y, z_i$  不动而向量  $\overline{OM}$  绕  $\bar{q}$  轴转动  $-\theta$  角度其转动前后的向量  $\bar{R}_1, \bar{R}$  在同一坐标系的投影(如图 3-4 所示)是相等的。显然  $\bar{R}$  的投影可以表示动系的位置,  $\bar{R}_1$  的投影可以表示定系的位置。这两个向径的四元

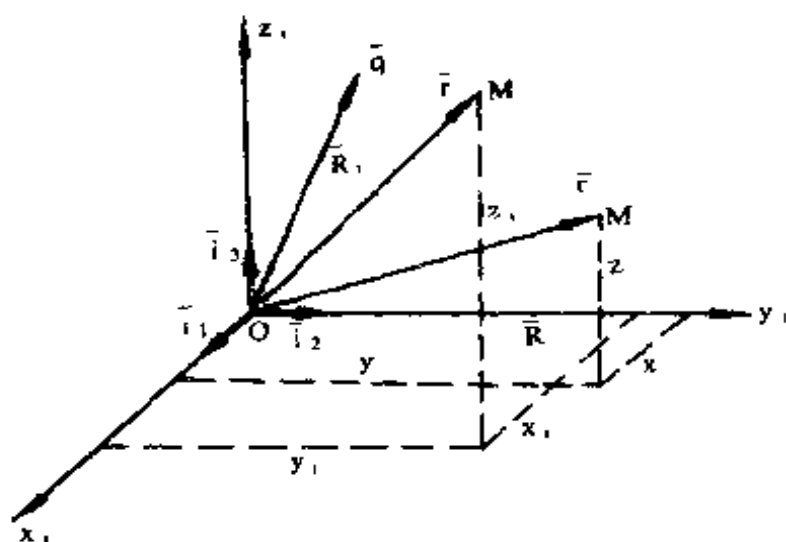


图 3-4 向径转动前后在同一坐标系中的两次投影

将上式与式(2-59)对比可以看出,转动四元数 $Q$ 与转动方向余弦矩阵 $S$ 有着对应的关系。当 $q_0, q_1, q_2, q_3$ 确定后,根据式(3-31)的关系便可唯一地确定方向余弦矩阵 $S = C^{-1}$ 的各个元素。

### 九、转动四元数的微分方程

在第二章§2-4中我们讨论了方向余弦矩阵的微分方程,通过对方向余弦矩阵进行即时修正便可实时地确定方向余弦矩阵。同样四元数的实时值也可通过求解四元数微分方程而得到。下面就来讨论四元数微分方程。

设在 $t$ 时刻动系 $Ox_1y_1z_1$ 相对定系 $Ox_0y_0z_0$ 的转动为 $Q_1$ 转动,即

$$R_1(t) = Q_1 R(t) Q_1^{-1}$$

那么在 $t + \Delta t$ 时刻,由于动系角速率 $\omega$ 的存在而使两坐标系的相对位置发生变化,此时动系相对定系的转动为 $Q_2$ 转动,即

$$R_1(t + \Delta t) = Q_2 R(t + \Delta t) Q_2^{-1}$$

于是,在 $t$ 至 $t + \Delta t$ 期间,动系位置变化可用转动四元数 $Q_2^{-1}Q_1$ 来表示,它们的相互关系如图3-5所示。因为 $\Delta t$ 很小,

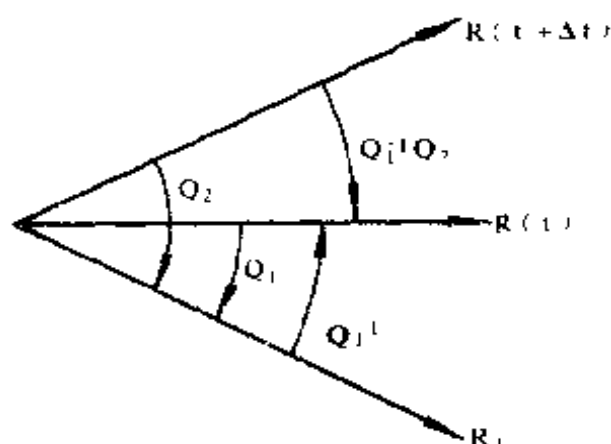


图 3-5 转动四元数的变化

动系的角速率  $\bar{\omega}$  可以看成常向量，因此动系的角位移可写成

$$\Delta\theta = |\bar{\omega}| \Delta t$$

上式中  $|\bar{\omega}|$  表示  $\bar{\omega}$  的模， $\Delta\theta$  的方向由  $\bar{\omega}$  的方向决定。设单位向量

$$\xi = \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}$$

于是有

$$Q_1^{-1} Q_2 = \cos \frac{|\bar{\omega}| \Delta t}{2} + \xi \sin \frac{|\bar{\omega}| \Delta t}{2}$$

由上式可得

$$Q_2 = Q_1 \left( \cos \frac{|\bar{\omega}| \Delta t}{2} + \xi \sin \frac{|\bar{\omega}| \Delta t}{2} \right)$$

从而，四元数  $Q(t)$  对时间的导数  $\dot{Q}(t)$  可写成

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_1}{\Delta t} \left( \cos \frac{|\bar{\omega}| \Delta t}{2} \right. \\ &\quad \left. - 1 + \xi \sin \frac{|\bar{\omega}| \Delta t}{2} \right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_1}{\Delta t} \left[ 1 - \left( \frac{|\bar{\omega}| \Delta t}{2} \right)^2 - \dots \right. \\ &\quad \left. - 1 + \xi \left( \frac{|\bar{\omega}| \Delta t}{2} \right) - \dots \right] \end{aligned}$$

于是可得

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} Q \xi |\bar{\omega}| = \frac{1}{2} Q \bar{\omega}$$

式中  $\bar{\omega}$  为四元数，它只有向量部分，所以上式也可写成

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} Q \bar{\omega} \quad (3-32)$$

式 (3-32) 即为四元数的微分方程。

### § 3-3 捷联矩阵的即时修正算法

§ 3-1 中已指出,捷联矩阵的即时修正就是实时地给出捷联矩阵  $T$ , 而这要通过一定的算法来完成。进行捷联矩阵即时修正的算法很多。文献[4]中给出了方向余弦算法、欧拉角变换算法、欧拉四参数算法、四元数算法、凯利-克莱恩参量算法及矢量表示算法等。其它的文献中也给出一些其它的算法。由于本书不是讨论算法的专著,所以本节只给出其中最典型的三种算法,即欧拉角法(三参数法)、四元数法(四参数法)及方向余弦法(九参数法)。

#### 一、欧拉角法(三参数法)

由图 3-1 可以看出,从平台坐标系依次转过  $\phi_G, \theta, \gamma$  角可得机体坐标系。这样, 机体坐标系相对平台坐标系的角速度向量  $\bar{\omega}$  可以表示为

$$\bar{\omega}_{pb} = \bar{\omega} = \dot{\phi}_G + \dot{\theta} + \dot{\gamma} \quad (3-33)$$

参照图 3-1 可将  $\bar{\omega}$  写成沿机体系的投影形式(省去机体系的上标“b”),即

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{matrix} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_G \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \gamma \cos \theta & \cos \gamma & 0 \\ \sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \gamma \cos \theta & \sin \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_G \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



对上式实施矩阵求逆的运算便可得到

$$\begin{bmatrix} \phi_G \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \\ \cos \gamma \cos \theta & 0 & \sin \gamma \cos \theta \\ \sin \theta \sin \gamma & \cos \theta & -\sin \theta \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

式(3-34)便是欧拉角微分方程。解方程(3-34)便可求得  $\phi_G$ 、 $\theta$ 、 $\gamma$  三个参数,将它们代入式(3-7)便可得到捷联矩阵  $T$ 。

对式(3-34)进行初步分析可以看出,求解欧拉角微分方程只需要解三个微分方程,与其它的算法相比要解的方程数少些。但在用计算机进行数值积分时要进行超越函数的运算,这反而加大了计算的工作量。此外,当  $\theta = 90^\circ$  时,式(3-34)将出现奇点。因此,欧拉角法的应用有一定的局限性。

## 二、四元数法(四参数法)

机体坐标系相对平台坐标系的转动可用转动四元数  $Q$  来表示,即

$$Q = q_0 + q_1 i_b + q_2 j_b + q_3 k_b$$

式中四元数的基  $i_b, j_b, k_b$  取得与机体坐标系的基  $\bar{i}_b, \bar{j}_b, \bar{k}_b$  相一致。从而四元数微分方程为

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} Q \omega$$

式中

$$\omega = 0 + \omega_x i_b + \omega_y j_b + \omega_z k_b$$

将上式写成矩阵形式,得

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

上面介绍了求解捷联矩阵的三种算法。由于在捷联矩阵的即时修正中存在着正交化问题，而这三种算法的正交化问题又各有不同。因此，目前来全面地评价算法的优劣尚为时过早。本节仅在求解捷联矩阵时要解的微分方程的类型方面进行了初步的分析和比较，进一步的分析要在下一章进行。

## 第四章 捷联矩阵的正交化与 算法误差

平台惯导系统的加速度计直接沿平台坐标系的坐标轴安装,可直接测量沿平台坐标系的比力,无需进行坐标转换,因此也不存在着正交化问题;而捷联系统的加速度计是沿机体坐标系安装的,为了获得沿平台坐标系的比力,需要通过捷联矩阵  $T$  进行坐标变换,而捷联矩阵是通过计算机计算而得的,而在捷联矩阵的计算中就存在着正交化问题。本章就来讨论捷联矩阵的正交化问题。

### § 4-1 捷联矩阵正交化问题的提出

在第二章 § 2-4 中已经指出,直角坐标系的坐标变换是正交变换,即实现这一变换的矩阵为正交矩阵。对于捷联惯导系统这就提出了一个问题,即计算出的捷联矩阵  $T$  是否还是正交矩阵?这就提出了捷联矩阵  $T$  的正交化问题。如果捷联矩阵不是正交矩阵,则通过  $T$  进行转换后得到的向量的大小与方向都会出现误差。事实上由于计算机算法误差的存在,捷联矩阵往往不再是正交矩阵,即

$$\hat{T}\hat{T}^T \approx I$$

式中  $I$  为单位矩阵,符号“ $\wedge$ ”表示“计算”的意思, $\hat{T}$  表示计算出来的捷联矩阵,它与理想的捷联矩阵之间存在着误差。为了减少捷联矩阵的不正交所造成的误差,需要将非正交矩阵

当陀螺与加速度计的输出进入计算机时要进行量化。不论量化单位  $r$  选取得多么小,它总是个有限量,从而会导致量化误差。下面以陀螺的输出  $\omega$  为例作一说明。量化器按量化单位  $r$  进行量化时所得到的量化数  $U_r$  可表示为

$$U_r = \left( \frac{\omega_r}{r} \right)_0 + R_r = N + R_r$$

式中

$$N = \left( \frac{\omega_r}{r} \right)_0$$

表示量化的整数部分;而  $R_r$  为量化的余数部分,并有  $R_r < 1$ 。于是计算机实施计算所依据的陀螺输入是量化值  $\hat{\omega} = Nr$ ,而不是真正值  $\omega$ 。显然,量化误差为  $\Delta\omega = \omega - \hat{\omega} = R_r r$ 。

减小量化单位  $r$  的量值可以减小量化误差的大小。

## 2. 舍入 (Round-off) 误差

由于计算机的计算总是以有限的字长进行的,计算机计算结果有效数字后面的数要四舍五入,经积累后就会出现舍入误差。

增加计算机的有效字长或采用双精度进行计算可以减小舍入误差的大小。

## 3. 截断 (Truncation) 误差

由于求捷联矩阵要解连续型微分方程,在计算机中它是通过一定的数值积分方法来完成的。例如参考文献 [5] 中就介绍了解微分方程常用的一阶欧拉法,二阶龙格-库塔法以及四阶龙格-库塔法等。这种由数值积分算法造成的误差叫做截断误差,相当于台劳展开式的余项。

由于算法的阶次越高,截断误差就越小,因此采用高阶算法可以减小截断误差。对于中等导航精度的捷联矩阵即时修正可采用四阶龙格-库塔法。

#### 4. 交换性 (Commutation) 误差

计算机在进行即时修正时, 每次都要依次采集速率陀螺输出的角增量, 借此提取角速率  $\omega_b^h$ 。三个角增量采集的顺序与飞行器实际转动的历程并不相同。当角增量为非常小的小角度时可以将小角度看成向量(参见附录二), 从而与转动的顺序无关。由于角增量总是个有限量, 于是就产生了交换性误差。

显然加大角速率采集的频率可以减小交换性误差。

以上只简要地介绍了四种算法误差源, 感兴趣的读者可以参阅有关专著。

### 二、捷联矩阵算法误差的分类

由于计算机在进行计算时存在着上述四种误差源, 从而使计算得到的捷联矩阵  $\hat{T}$  与理想的精确捷联矩阵  $T$  之间存在着算法误差。捷联矩阵的算法误差可分为正交化误差与漂移误差两种。

#### 1. 正交化误差

当捷联矩阵将正交的机体坐标系(它的三个基  $\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b$  互相垂直, 且模为 1) 转换为正交的平台坐标系(它的三个基  $\vec{i}_p, \vec{j}_p, \vec{k}_p$  仍然互相垂直, 且模为 1) 时, 即

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_p \\ \vec{j}_p \\ \vec{k}_p \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \vec{i}_b \\ \vec{j}_b \\ \vec{k}_b \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

则矩阵  $T$  为正交矩阵, 即  $TT' = I$ 。于是有

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

它表示了平台坐标系的基的模与 1 偏离的程度。

## (2) 歪斜误差

歪斜误差可定义为

$$\begin{aligned} S_1 &= \hat{T}_{11}\hat{T}_{21} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{22} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{23} \\ S_2 &= \hat{T}_{11}\hat{T}_{31} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{32} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{33} \\ S_3 &= \hat{T}_{21}\hat{T}_{31} + \hat{T}_{22}\hat{T}_{32} + \hat{T}_{23}\hat{T}_{33} \end{aligned} \quad (4-5)$$

它表示平台坐标系的基相互不正交的程度。

将不正交矩阵  $\hat{T}$  化为正交矩阵  $\hat{\hat{T}}$  的处理方法叫做正交化技术。显然矩阵  $\hat{\hat{T}}$  满足正交矩阵的条件,即

$$\hat{\hat{T}}\hat{\hat{T}}^T = I \quad (4-6)$$

## 2. 漂移误差

由以上分析可知,对矩阵  $\hat{T}$  进行正交化处理可以获得正交矩阵  $\hat{\hat{T}}$ ,但矩阵  $\hat{\hat{T}}$  并不就是理想的精确矩阵  $T$ ,在这两个正交矩阵之间还存在着误差。换句话说,假设客观上存在着理想的精确矩阵  $T$ ,它对应一个理想平台坐标系,那么在这个理想的矩阵  $T$  的周围存在着无穷多个矩阵  $\hat{\hat{T}}$ ,它们都对应于在理想平台坐标系周围的无穷多个正交的平台坐标系,在这些平台坐标系与理想平台坐标系之间存在着误差。我们将这种误差称为漂移误差。

我们知道,由理想矩阵  $T$  进行坐标转换时可得

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_p \\ \bar{j}_p \\ \bar{k}_p \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \bar{i}_b \\ \bar{j}_b \\ \bar{k}_b \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

而由矩阵  $\hat{\hat{T}}$  进行坐标转换时可得

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_{\hat{\hat{p}}} \\ \bar{j}_{\hat{\hat{p}}} \\ \bar{k}_{\hat{\hat{p}}} \end{bmatrix} = \hat{\hat{T}} \begin{bmatrix} \bar{i}_b \\ \bar{j}_b \\ \bar{k}_b \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

式中  $\bar{i}_p, \bar{j}_p, \bar{k}_p$  分别为由矩阵  $\hat{T}$  转换得到的平台坐标系的基。将式 (4-7) 代入式 (4-8) 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_p \\ \bar{j}_p \\ \bar{k}_p \end{bmatrix} = \hat{T} T' \begin{bmatrix} \bar{i}_p \\ \bar{j}_p \\ \bar{k}_p \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

显然, 当  $\hat{T} T' = I$  时, 由  $\hat{T}$  得到的平台坐标系即理想平台系。我们将漂移误差矩阵  $E$  定义为

$$E = \hat{T} T' - I \quad (4-10)$$

综上所述可以看出, 使捷联矩阵成为正交矩阵并不是目的, 我们希望得到的是漂移误差最小的正交矩阵。因此捷联矩阵的不正交误差应与漂移误差联系起来进行分析。

### 三、三种即时修正算法的算法误差

通过下面的分析我们将看到, 即时修正的算法不同, 算法误差的性质与大小也不同。这对于我们正确地选择即时修正算法是很重要的。

求解捷联矩阵  $T$  要解的方程数  $n$  因即时修正算法的不同而异。由于捷联矩阵  $T$  只有三个独立的自由度(如  $\phi_0, \theta, \gamma$ ), 则约束方程的数目为  $n - 3$ 。显然, 对于欧拉角法  $n = 3$ , 无约束方程; 对于四元数法  $n = 4$ , 约束方程数为 1; 对于方向余弦法  $n = 9$ , 约束方程数为 6。约束方程的存在导致算法误差中非正交化误差的存在。它也可用来进行正交化处理, 从而重新获得正交化矩阵  $\hat{T}$ 。

下面我们分别对三种即时修正算法讨论其算法误差的种类与大小。

#### 1. 欧拉角法

欧拉角法是通过即时修正获得  $\hat{\phi}_0, \hat{\theta}, \hat{\gamma}$  的实时值, 代入式 (3-7) 后便可获得矩阵  $\hat{T}$  的元素  $\hat{T}_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1,$



2, 3)。根据式 (3-7) 可得

$$\begin{aligned} \hat{T}_{11}^2 + \hat{T}_{12}^2 + \hat{T}_{13}^2 &= (\cos \hat{\gamma} \cos \hat{\phi}_G - \sin \hat{\gamma} \sin \hat{\theta} \sin \hat{\phi}_G)^2 \\ &\quad + (-\cos \hat{\theta} \sin \hat{\phi}_G)^2 + (\sin \hat{\gamma} \cos \hat{\phi}_G \\ &\quad + \cos \hat{\gamma} \sin \hat{\theta} \cos \hat{\phi}_G)^2 \end{aligned}$$

将上式展开并简化可得

$$\hat{T}_{11}^2 + \hat{T}_{12}^2 + \hat{T}_{13}^2 = 1$$

同理可证明

$$\hat{T}_{21}^2 + \hat{T}_{22}^2 + \hat{T}_{23}^2 = 1$$

$$\hat{T}_{31}^2 + \hat{T}_{32}^2 + \hat{T}_{33}^2 = 1$$

由根据式 (3-7) 确定的  $\hat{T}_{ij}$  可得

$$\begin{aligned} \hat{T}_{11}\hat{T}_{21} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{22} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{23} &= (\cos \hat{\gamma} \cos \hat{\phi}_G - \sin \hat{\gamma} \sin \hat{\theta} \sin \hat{\phi}_G)(\cos \hat{\gamma} \sin \hat{\phi}_G \\ &\quad + \sin \hat{\gamma} \sin \hat{\theta} \cos \hat{\phi}_G) + (-\cos \hat{\theta} \sin \hat{\phi}_G)(\cos \hat{\theta} \cos \hat{\phi}_G) \\ &\quad + (\sin \hat{\gamma} \cos \hat{\phi}_G + \cos \hat{\gamma} \sin \hat{\theta} \sin \hat{\phi}_G)(\sin \hat{\gamma} \sin \hat{\phi}_G \\ &\quad - \cos \hat{\gamma} \sin \hat{\theta} \cos \hat{\phi}_G) \end{aligned}$$

将上式展开并化简后可得

$$\hat{T}_{11}\hat{T}_{21} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{22} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{23} = 0$$

同理可证明

$$\hat{T}_{11}\hat{T}_{31} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{32} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{33} = 0$$

$$\hat{T}_{21}\hat{T}_{31} + \hat{T}_{22}\hat{T}_{32} + \hat{T}_{23}\hat{T}_{33} = 0$$

上面证明了矩阵  $\hat{T}$  永远为正交矩阵, 即  $\hat{T} = \hat{T}^T$ 。事实上矩阵  $\hat{T}$  是通过三次转动而得的旋转矩阵, 因而必为正交矩阵。显然不论  $\hat{\phi}_G, \hat{\theta}, \hat{\gamma}$  的计算误差有多大, 都不会改变  $\hat{T}$  为正交矩阵的性质。因此, 用欧拉角法进行即时修正时没有约束方程, 也无需进行正交化处理。这从表面上看似乎是这种算法的优点, 但事实上恰恰相反, 因为在进行正交化处理时导致



非正交化误差的误差源对漂移误差的影响可以借此得以减小之。由于欧拉角法不进行正交化，那么全部的算法误差都以漂移误差的形式出现，而且无法予以修正。此外，正如本章 § 4-1 中所指出的那样，用欧拉角法进行即时修正时要遇到计算超越函数——正、余弦函数——的问题。若采用连分式展开式形式，则可用以下公式计算  $\sin x$  和  $\cos x^{(6)}$ ：

$$\sin x = \frac{2xf(-x^2)}{f^2(-x^2) + x^2}$$

$$\cos x = \frac{f^2(-x^2) - x^2}{f^2(-x^2) + x^2}$$

式中

$$f(x^2) = 2[F(x^2) + 1]$$

而

$$F(x^2) = \frac{x^2/4 \times 3}{1 + \frac{x^2/4 \times 15}{1 + \dots \frac{x^2/4(4n^2 - 1)}{1 + \dots}}}$$

在实际的计算中可将上式中的  $n$  取为有限数，即用  $F_n(x^2)$  来代替  $n$  为无限数的  $F(x^2)$ ，并有

$$F_n(x^2) = \frac{x^2/4 \times 3}{1 + \frac{x^2/4 \times 15}{1 + \dots \frac{x^2/4(4n^2 - 1)}{1 + \dots}}}$$

采用以上各公式就用代数运算代替了超越函数  $\sin x$  及  $\cos x$  的计算。为使  $F_n(x^2)$  得到 12 位小数的精度，当  $x = 1$  时应取  $n = 6$ 。由以上公式可以看出，当  $n = 6$  时由  $x^2$  计算  $F(x^2)$  要做 11 次乘法，5 次加法；进而计算  $\sin x$ ，则要做 16 次乘法，8 次加法；若再做  $\cos x$  的计算，则还要再做 1 次乘法，1 次加法。下面进行近似估算，即只统计乘法的次数，来估算欧拉角法的

计算工作量。当由式(3-34)利用数值积分算法求一次导数时,需要做44次乘法。而采用四元数法由式(3-35)求一次导数只需要做16次乘法;采用方向余弦法由式(3-37)求一次导数则需要做18次乘法。可见欧拉角法所费的计算机时要比其它两种算法约多一倍半。当分配给即时修正的机时给定以后,用欧拉角法则必须采用较低阶的算法或较低的即时修正频率,从而导致较大的计算机算法误差,并以漂移误差的形式体现出来。

## 2. 四元数法

四元数法是将即时修正求得的 $\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$ 代入式(3-36)来获得捷联矩阵 $\hat{T}$ 的。通过式(3-36)可求得矩阵 $\hat{T}$ 的有关元素,并可得

$$\begin{aligned} \hat{T}_{11} + \hat{T}_{12} + \hat{T}_{13} = & (\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2) + 4(\hat{q}_1\hat{q}_2 \\ & - \hat{q}_0\hat{q}_3)^2 + 4(\hat{q}_1\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_2)^2 \end{aligned}$$

将上式展开并化简,可得

$$\hat{T}_{11} + \hat{T}_{12} + \hat{T}_{13} = (\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2)^2$$

同理可得

$$\hat{T}_{21} + \hat{T}_{22} + \hat{T}_{23} = (\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2)^2$$

$$\hat{T}_{31} + \hat{T}_{32} + \hat{T}_{33} = (\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2)^2$$

当采用四元数 $Q$ 来表示转动时,若在起始时刻取 $Q_0$ 为单位四元数,则根据第三章§3-2中的转动的四元数变换定理可知, $Q$ 应恒为单位四元数,即应满足以下的约束方程

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (4-11)$$

由于计算误差的存在,破坏了式(4-11)所示的约束条件,使得

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \neq 1$$

从而使得归一化条件不再存在。

再由式(3-36)求得 $\hat{T}$ 的有关元素,从而可得

$$\begin{aligned}\hat{T}_{11}\hat{T}_{21} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{22} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{23} = & 2(\hat{q}_1\hat{q}_2 + \hat{q}_0\hat{q}_3)(\hat{q}_0^2 \\ & + \hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2) + 2(\hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2)(\hat{q}_1\hat{q}_2 \\ & - \hat{q}_0\hat{q}_3) + 2(\hat{q}_1\hat{q}_3 + \hat{q}_0\hat{q}_2) \times 2(\hat{q}_2\hat{q}_3 - \hat{q}_0\hat{q}_1)\end{aligned}$$

将上式展开并化简,可得

$$\hat{T}_{11}\hat{T}_{21} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{22} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{23} = 0$$

同理可证

$$\hat{T}_{11}\hat{T}_{31} + \hat{T}_{12}\hat{T}_{32} + \hat{T}_{13}\hat{T}_{33} = 0$$

$$\hat{T}_{21}\hat{T}_{31} + \hat{T}_{22}\hat{T}_{32} + \hat{T}_{23}\hat{T}_{33} = 0$$

以上三个公式表明,对于四元数法,不论计算误差有多大,正交性条件永远成立。

综上所述可以看出,对于四元数法正交性条件永远成立,由于式(4-11)的约束方程受到破坏,从而使归一化条件不再成立。通过归一化处理,得到 $\hat{q}_0$ 、 $\hat{q}_1$ 、 $\hat{q}_2$ 、 $\hat{q}_3$ ,使之重新满足归一化条件,即

$$\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 = 1 \quad (4-12)$$

于是归一化条件就重又成立。显然对于四元数法,正交化问题就简化为归一化问题。而对于四元数进行归一化处理时,只要使一个被破坏了的约束方程得到恢复,因而归一化的计算较简单。在归一化处理中,可以消除一部分即时修正时的算法误差的影响,又不引入更多的新计算误差,因而其漂移误差也较小。

### 3. 方向余弦法

方向余弦法通过式(3-37)可直接求出捷联矩阵 $\hat{T}$ 。式(4-2)和式(4-3)为方向余弦法的6个约束方程。由于计算误差的存在使6个约束方程不复成立,从而导致式(4-4)的刻度误差及式(4-5)的歪斜误差。因此,对于方向余弦法进行正

交化就要使 6 个被破坏了的约束条件重新得到满足，因而其正交化方法与四元数法相比将要复杂得多。

总之，方向余弦法的即时修正算法与四元数法的即时修正算法相比，其计算工作量相类似，但其正交化方法则要复杂得多。因此虽然在正交化过程中可以消除一部分即时修正算法误差的影响，但在进行正交化的计算时又引入了新的漂移误差。因此，通过上面的初步分析可以看出四元数法的优越性。

应该指出，本节只初步分析了三种即时修正算法的算法误差的类型与大小，最后评价三种即时修正算法的优劣还要在研究了捷联式矩阵的正交化方法以后进行。

### § 4-3 捷联矩阵的最佳正交化

在上一节的分析中已经指出，计算机的算法误差导致捷联矩阵成为非正交矩阵（当然，对于欧拉角法不存在这一问题），对捷联矩阵进行正交化处理可以消除引起不正交的算法误差源的影响。然而实现正交化本身不是最终目的，获得漂移误差最小的正交化矩阵才具有实际意义，因为不好的正交化方法往往以加大漂移误差为代价。那么用什么来衡量正交化方法的优劣呢？本节就来讨论以漂移误差最小为指标的捷联矩阵最佳正交化问题。

由于欧拉角法不存在正交化问题，所以下面只讨论四元数法及方向余弦法的最佳正交化问题。

#### 一、四元数法的最优归一化

##### 1. 四元数的归一化

设即时修正获得的四元数  $Q$  为

$$\hat{Q} = \hat{q}_0 + \hat{q}_1 i_t + \hat{q}_2 j_b + \hat{q}_3 k_b \quad (4-13)$$

$\hat{Q}$  的模为

$$\sqrt{N_{\hat{Q}}} = \sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2} \quad (4-14)$$

将四元数  $\hat{Q}$  除以它的模  $\sqrt{N_{\hat{Q}}}$  可得

$$\begin{aligned} \check{Q} &= \frac{\hat{Q}}{\sqrt{N_{\hat{Q}}}} = \frac{\hat{q}_0 + \hat{q}_1 i_t + \hat{q}_2 j_b + \hat{q}_3 k_b}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}} \\ &= \check{q}_0 + \check{q}_1 i_b + \check{q}_2 j_b + \check{q}_3 k_b \end{aligned} \quad (4-15)$$

式中

$$\check{q}_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{N_{\hat{Q}}}} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (4-16)$$

求式 (4-15) 所表示的四元数的模方, 可得

$$\check{q}_0^2 + \check{q}_1^2 + \check{q}_2^2 + \check{q}_3^2 = 1$$

显然,  $\check{q}$  满足四元数的归一化条件。利用式 (4-15) 可实现四元数的归一化, 也就是完成了捷联矩阵  $T$  的正交化。

## 2. 四元数的最佳归一化

式 (4-15) 实现了四元数的归一化, 下面来证明它也就是在欧几里德范数最小意义下的最佳归一化。

首先应明确“最佳”的含义, 即在进行归一化时取什么作为最佳指标。由于归一化所依据的原始数据是  $\hat{Q}$ , 而理想的四元数  $Q$  虽然客观上是存在的, 但在计算时则无法获得, 只能尽可能地接近它。根据最小二乘拟合的原则, 我们取四元数  $\hat{Q}$  与  $\check{Q}$  之间的欧几里德范数  $D$  最小做为最佳归一化的指标,  $D$  最小的含义是使正交化后获得的  $\check{Q}$  与作为正交化依据的  $\hat{Q}$  之间的欧几里德距离最小, 从而达到使漂移误差最小的目的, 并定义

$$D = \left[ \sum_{i=0}^3 (\hat{q}_i - \check{q}_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4-17)$$

下面我们给出一个定理, 来给出最佳归一化的方法。

由上式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^3 \hat{q}_i^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}}\end{aligned}\quad (4-23)$$

将式(4-23)代入式(4-21),可得

$$\hat{q}_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}}$$

上式即式(4-16)。这就证明了通过式(4-15)进行的归一化就是使欧几里德范数 $D$ 为最小的最佳归一化。

由上述分析可以看出,对于四元数法,捷联矩阵的最佳正交化(即归一化)只要通过式(4-15)的计算便可完成。这种归一化方法简单,计算工作量小。它既可消除即时修正时算法误差的影响,又不至于引入明显的漂移误差。

## 二、方向余弦法的最佳正交化

### 1. 方向余弦法的正交化概念

对于方向余弦法,在即时修正时可直接获得捷联矩阵 $\hat{T}$ ,但正交化条件公式(4-2)、(4-3)均被破坏。要使正交化后得到的 $\hat{T}$ 重新满足式(4-2)、(4-3),不是通过代入一个或几个公式进行直接计算就可以完成的,而要进行反复的迭代计算。而在迭代计算中还存在着收敛性问题。参考文献[7]、[8]讨论了方向余弦矩阵的正交化及其收敛性问题。由于四元数法的优越性十分突出,目前在捷联矩阵的即时修正中已大都采用四元数法,因此这里就不再花费过多的篇幅来讨论方向余弦法的正交化与收敛性问题,而仅对这种方法做一简要的定性说明。



由于计算得到的平台坐标系的基互不垂直，模也不为 1，故与之对应的捷联矩阵  $\hat{T}$  也为非正交矩阵，为了实现正交化，我们取

$$\begin{aligned}\bar{\hat{T}}_3 &= \hat{T}_1 \times \hat{T}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i}_b & \bar{j}_b & \bar{k}_b \\ \hat{T}_{11} & \hat{T}_{12} & \hat{T}_{13} \\ \hat{T}_{21} & \hat{T}_{22} & \hat{T}_{23} \end{vmatrix} \\ &= A_{31}\bar{i}_b + A_{32}\bar{j}_b + A_{33}\bar{k}_b \\ \bar{\hat{T}}_1 &= \hat{T}_2 \times \hat{T}_3 = A_{11}\bar{i}_b + A_{12}\bar{j}_b + A_{13}\bar{k}_b \\ \bar{\hat{T}}_2 &= \hat{T}_3 \times \hat{T}_1 = A_{21}\bar{i}_b + A_{22}\bar{j}_b + A_{23}\bar{k}_b\end{aligned}$$

式中  $A_{ij}(i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$  为  $T_{ij}$  的代数余子式。这样便获得了新的坐标系的基  $\bar{\hat{T}}_1, \bar{\hat{T}}_2, \bar{\hat{T}}_3$ 。如按同样的方法继续进行下去，即再由  $\bar{\hat{T}}_1 \times \bar{\hat{T}}_2, \bar{\hat{T}}_2 \times \bar{\hat{T}}_3, \bar{\hat{T}}_3 \times \bar{\hat{T}}_1$  去获得下一个坐标系的基，这样就会产生振荡，永远也不能达到正交化的目的。为了定性地说说明这一问题，我们通过图 4-2 的平面坐标系的简化情况加以说明。图 4-2(a) 在平面上示出了平面坐标系的基  $\hat{i}_p, \hat{j}_p$ ，两者互不正交。做  $\bar{\hat{i}}_p \perp \hat{i}_p, \bar{\hat{j}}_p \perp \hat{j}_p$ 。这样获得了新的基  $\bar{\hat{i}}_p, \bar{\hat{j}}_p$ 。若按同法继续处理，又回到了原来的  $\hat{i}_p, \hat{j}_p$ 。如此进行下去就会出现振荡，永远得不到正交的  $\bar{\hat{i}}_p, \bar{\hat{j}}_p$ （因为基的互相垂直的问题已无法解决，因此更谈不上对新的基进行归一化，使其模为 1 的处理了）。为了解决正交化的收敛问题，如图 4-2(b) 所示，取  $\hat{i}_p$  与  $\bar{\hat{i}}_p$  的和向量的一半作为新的基  $\bar{\bar{i}}_p$ ；取  $\hat{j}_p$  与  $\bar{\hat{j}}_p$  的和向量的一半作为另一个新的基  $\bar{\bar{j}}_p$ 。可见  $\bar{\bar{i}}_p$  与  $\bar{\bar{j}}_p$  的不正交程度有所改善。这样重复地进行下去就可以获得互相正交的基  $\bar{\bar{i}}_p, \bar{\bar{j}}_p$ 。当然在每一步还要注意除以新的基的模，使新的基的模变为 1。

仿照以上的原理，取

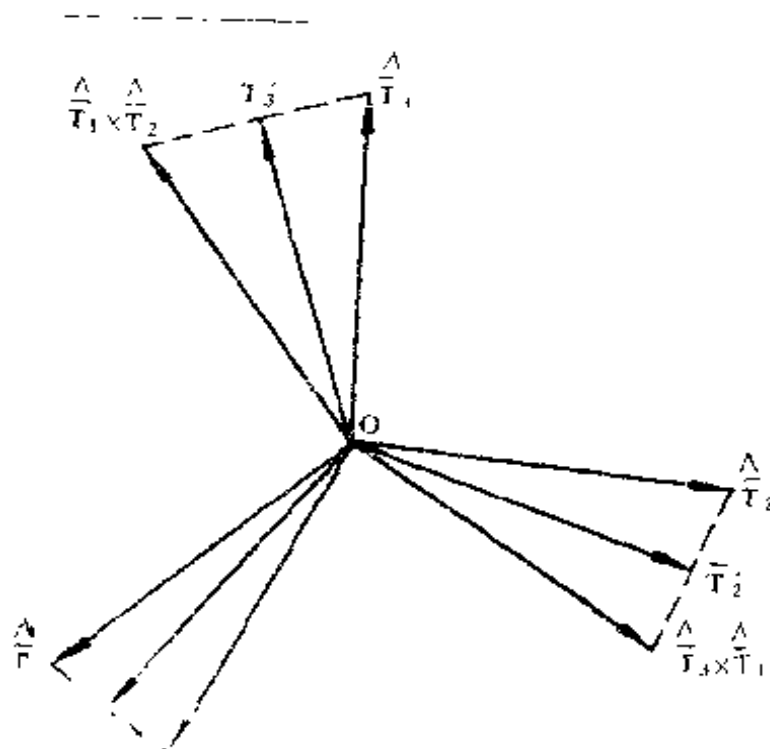


图 4-3 正交化的向量法示意图

式中  $|\vec{T}_i|$  为向量  $\vec{T}_i$  的模, 并可由下式计算:

$$|\vec{T}_i| = \sqrt{T_{i1}^2 + T_{i2}^2 + T_{i3}^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

显然  $\vec{T}_i'$  与  $\vec{T}_i$  的方向一致, 只是模已处理为 1。将上述的迭代步骤继续下去就可得到满足正交化条件的基  $\vec{T}_1', \vec{T}_2', \vec{T}_3'$ 。这种正交化方法的收敛性较好。文献 [7] 指出, 按上述方法在 IBM-7040 上进行迭代计算, 对于  $\varepsilon = 10^{-8}$  的不正交度, 5 次的正交化迭代就可以满足要求。文献 [7] 将这种正交化方法叫做向量法。

文献 [7] 除了介绍上述的向量法以外, 还介绍了其它的几种正交化方法。其它的一些参考文献也介绍了各种进行方向余弦矩阵正交化的方法, 这里就不再赘述。

由上面的分析可以看出, 一般的正交化方法只能保证获得的矩阵  $\vec{T}$  为正交矩阵, 而在进行正交化的过程中造成的与



$\hat{T}$  阵的偏离程度并未考虑在内。因此，与四元数的最佳归一化问题相类似，对于方向余弦法也存在着最佳正交化问题。

### ③ 方向余弦法的最佳正交化

对于方向余弦法，在进行正交化时所依据的原始数据是  $\hat{T}_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ 。与四元数的最佳归一化相类似，对于方向余弦法，同样可以定义欧几里德范数

$$D = \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\hat{T}_{ij} - \tilde{T}_{ij})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

式中  $\tilde{T}_{ij}$  是以  $D$  最小为指标获得的。文献 [9] 证明了使  $D$  为最小的正交矩阵应满足

$$\tilde{T} = \pm \hat{T}(\hat{T}'\hat{T})^{-\frac{1}{2}}$$

由于对上式直接求解很困难，因此可用迭代法求解。设  $T_0$  为初始的矩阵  $\hat{T}$ ， $T_n$  为第  $n$  次迭代所得的矩阵。迭代的过程可描述如下：

$$\begin{aligned} T_0 &= \hat{T} \\ T_{n+1} &= T_n - 0.5(T_n \hat{T}' T_n - \hat{T}) \end{aligned}$$

若在第  $n+1$  次迭代能使测距函数

$$f_n = D_n^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\hat{T}_{ij} - T_{ijn})^2$$

满足

$$|f_{n+1} - f_n| \leq \varepsilon$$

则可将  $T_{n+1}$  作为  $\tilde{T}$  而停止迭代计算，式中  $\varepsilon$  为根据正交化的精度而选取的小量（如  $\varepsilon = 10^{-6}$ ）。按以上迭代过程编制好正交化的迭代程序便可根据  $\varepsilon$  的精度自动地确定迭代次数  $n$ ，从而避免了迭代的盲目性。对于  $\varepsilon = 10^{-8}$  的精度，一般只需迭代 3~5 次即可满足要求。

## § 4-4 以漂移误差为标准比较 三种即时修正算法

通过以上各节的讨论可知,评价即时修正算法的优劣不仅与捷联矩阵  $T$  的即时修正的难易程度有关,还与捷联矩阵的正交化方法有关。但评价算法优劣的最终标准应归结为在总计算量相同的条件下,经过捷联矩阵正交化以后存在的漂移误差为最小。本节就来进行这一比较并最后评价三种算法的优劣。

由于漂移误差的大小难以用分析的方法给出,通常可在计算机上进行数字仿真而得出。文献 [10] 给出了在 FELIX 256 上以单精度对三种即时修正算法进行数字仿真的结果。下面就对数字仿真的内容做一简要介绍。

由漂移误差的计算公式 (4-10) 可知,要得到漂移误差阵  $E$  必须先求得正交化矩阵  $\hat{T}$  和理想的精确矩阵  $T$ 。理想的精确矩阵  $T$  在实时捷联惯导系统中是无法获得的,但在用计算机进行算法研究时,它可以采用高阶数值积分算法(如采用四阶龙格-库塔法)及小步长(如取  $\Delta t = 0.01$  秒),并以漂移误差最小的四元数即时修正算法及四元数的最佳归一化进行估算。将这样求得的高精度的  $\hat{T}$  来代替理想精确矩阵  $T$ 。这里分别对三种即时修正算法采用一阶欧拉法的数值积分算法及大步长 ( $\Delta t = 0.1$  秒) 计算  $\hat{T}$ 。对于欧拉角法无需进行正交化;而对于四元数法和方向余弦则分别按上一节介绍的方法进行最佳正交化处理。最后由式 (4-10) 分别求出三种即时修正算法的漂移矩阵  $E$ 。

由于在计算近似矩阵  $\hat{T}$  时采用了一阶欧拉积分算法及较

大的步长,即有意夸大了算法误差,因此可以在较短的时间( $t = 2$  秒)内获得明显的效果。模拟时的姿态角速率  $\omega_{b_b}^b$  取为常数,即  $\omega_{b_b}^b = 0.5$  1/秒,  $\omega_{b_b}^b = 0.4$  1/秒,  $\omega_{b_b}^b = 0.1$  1/秒,初始姿态角  $\phi_{c0} = 0.2$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\gamma_0 = 0.3$ 。在比较三种算法的漂移矩阵时,可以计算出漂移矩阵  $E$  的范数,即取  $D = \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 E_{ij}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ ,根据  $D$  的大小来比较漂移误差的大小。但当漂移误差的大小处于不同的数量级时,由于  $D$  的数量级的大小主要决定于矩阵  $E$  中的绝对值最大的元素。所以也可以用矩阵  $E$  中绝对值最大的元素大小来表征漂移误差的大小。表 4-1 中示出了三种即时修正算法的漂移误差矩阵  $E$  以及矩阵  $E$  中绝对值最大的元素。表 4-1 中示出的数据表明,以漂移误差最小为指标,四元数法的精度比方向余弦法约高一个量级,比欧拉角法约高两个量级。为了精确地评价漂移误差的大小,表 4-1 中还列出了矩阵  $E$  的范数值,即

$$\text{Norm } E = \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (E_{ij})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

应该指出,在上述的数字仿真中,三种算法不是在相同的计算机机时内完成的。显然欧拉角法耗费的机时最多,方向余弦法耗费的机时较少,而四元数法耗费的机时最少。若三种算法要在相同的计算机机时内完成即时修正及正交化,若三种算法采用相同阶次的数值积分算法,那么欧拉角法就要选取最长的步长,方向余弦法的步长较短四元数法的步长最短。从而三种即时修正算法的漂移误差的差距将会相差得更大。

综上所述可以得出结论,以算法误差——即正交化后的漂移误差——最小为指标的捷联矩阵即时修正的最佳算法是四元数法,而四元数的归一化又是以欧几里德范数最小为指

标获得的。

表 4-1 三种即时修正算法的漂移误差

算 法	漂 移 误 差 矩 阵 E	绝对值最大的元素	Norm E
欧 拉 角 法	$\begin{bmatrix} -0.00044 & 0.010 & 0.023 \\ -0.019 & -0.00028 & 0.015 \\ -0.023 & -0.015 & -0.0003 \end{bmatrix}$	0.019	0.047
四 元 数 法	$\begin{bmatrix} 0.00000095 & 0.000035 & 0.00034 \\ -0.000035 & 0.00000095 & -0.00029 \\ -0.00034 & 0.00029 & 0.00000095 \end{bmatrix}$	0.00034	0.00063
方向余 弦 法	$\begin{bmatrix} -0.00000048 & 0.00014 & -0.0014 \\ -0.00014 & -0.00000006 & -0.0012 \\ -0.0014 & -0.0012 & -0.00000083 \end{bmatrix}$	-0.0014	0.0026

## 第五章 捷联惯导系统的 初始对准

惯导系统是一种自主式导航系统。它不需要任何人为的外部信息，只要给定导航的初始条件（例如初始速度、位置等），便可根据系统中的惯性敏感元件测量的比力和角速率通过计算机实时地计算出各种导航参数。由于“平台”是测量比力的基准，因此“平台”的初始对准就非常重要。对于平台惯导系统，初始对准的任务就是要将平台调整在给定的导航坐标系的方向上。若采用游动方位系统，则需要将平台调水平——称为水平对准，并将平台的方位角调至某个方位角处——称为方位对准。对于捷联惯导系统，由于捷联矩阵  $T$  起到了平台的作用，因此导航工作一开始就需要获得捷联矩阵  $T$  的初始值，以便完成导航的任务。显然捷联惯导系统的初始对准就是确定捷联矩阵的初始值。在静基座条件下，捷联惯导系统的加速度计的输入量为  $-g^b$ ，陀螺的输入量为地球自转角速率  $\omega_{ie}^b$ 。因此  $-g^b$  与  $\omega_{ie}^b$  就成为初始对准的基准。将陀螺与加速度计的输出引入计算机，通过计算机就可计算出捷联矩阵  $T$  的初始值。

由以上的分析可以看出，陀螺与加速度计的误差会导致对准误差；对准时飞行器的干扰运动也是产生对准误差的重要因素。因此滤波技术对捷联系统尤其重要。由于初始对准的误差将会对捷联惯导系统的工作造成难以消除的影响，因此研究初始对准时的误差传播方程也是非常必要的。

本章只讨论在静基座条件下的初始对准问题。飞行器在

飞行过程中仍可进行对准，感兴趣的读者可以参阅有关参考文献。

## § 5-1 向量及其反对称矩阵的相似变换定理

在推导初始对准的误差传播方程时要用到相似变换定理。本节就来讨论这一定理。

### 一、相似变换的定义

设空间的列向量  $\bar{x}$  通过矩阵  $A$  变换为列向量  $\bar{y}$ ，即

$$\bar{y} = A\bar{x} \quad (5-1)$$

若有一个满秩矩阵  $C$  (即  $C$  的行列式  $|C| \neq 0$ )，列向量  $\bar{r}$ 、 $\bar{s}$  通过矩阵  $C$  分别变换为列向量  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$ ，即

$$\begin{aligned} \bar{x} &= C\bar{r} \\ \bar{y} &= C\bar{s} \end{aligned} \quad (5-2)$$

由式(5-1)，(5-2)可得

$$\begin{aligned} \bar{s} &= C^{-1}\bar{y} = C^{-1}A\bar{x} \\ &= C^{-1}AC\bar{r} \end{aligned} \quad (5-3)$$

若将式(5-3)写成

$$\bar{s} = B\bar{r} \quad (5-4)$$

则可以看出矩阵  $A$  本身也受到了变换。比较式(5-3)与式(5-4)可得

$$B = C^{-1}AC \quad (5-5)$$

式(5-5)所代表的变换就叫做相似变换。我们称矩阵  $B$  与矩阵  $A$  相似，记为

$$B \sim A$$

### 二、矩阵相似的二个规律



### 1. 反射律

对于矩阵  $A$ , 因为

$$A = I^{-1}AI$$

所以有  $A \sim A$ , 即矩阵  $A$  与它自己相似, 这一规律称为矩阵相似的反射律。

### 2. 对称律

如果  $B \sim A$ , 则有  $A \sim B$ 。这是因为, 如果  $B \sim A$ , 即  $B = C^{-1}AC$ , 将其左乘以  $C$  和右乘以  $C^{-1}$ , 可得

$$A = CBC^{-1}$$

若令

$$C^{-1} = D, \quad C = D^{-1}$$

则有

$$A = D^{-1}BD$$

这就证明了  $A \sim B$ 。

## 三、相似变换定理

在运动学中, 角速度矩阵从一个直角坐标系转换到另一个直角坐标系后, 所获得的新角速度矩阵与原角速度矩阵相似。

定理 设角速度向量  $\bar{\omega}$  及其反对称矩阵分别为

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

设实施相似变换的矩阵  $C$  为

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

且  $C$  为正交矩阵。则反对称矩阵  $Q$  的相似变换仍为一反对称

矩阵  $Q^*$ ，且  $Q^*$  的元与列向量  $\bar{\omega}$  通过  $C^{-1}$  的变换得到的向量  $\bar{\omega}^*$  的各元相对应，即  $Q^*$  是  $\bar{\omega}^*$  的反对称矩阵。写成公式的形式即

$$Q^* = C^{-1}QC = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^* & \omega_y^* \\ \omega_z^* & 0 & -\omega_x^* \\ -\omega_y^* & \omega_x^* & 0 \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

$$\bar{\omega}^* = \begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} = C^{-1}\bar{\omega} \quad (5-9)$$

证明

(1) 展开  $\bar{\omega}$  的变换式

将式(5-9)展开，并考虑  $C$  为正交矩阵，即  $C^{-1} = C'$ ，于是有

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^* = C^{-1}\bar{\omega} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_{11}\omega_x + C_{21}\omega_y + C_{31}\omega_z \\ C_{12}\omega_x + C_{22}\omega_y + C_{32}\omega_z \\ C_{13}\omega_x + C_{23}\omega_y + C_{33}\omega_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-10)$$

(2) 展开  $Q$  的相似变换式

由式(5-8)可得

$$\begin{aligned} Q^* &= C^{-1}QC \\ &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 \\ (C_{21}C_{32} - C_{22}C_{31})\omega_x + (C_{12}C_{31} - C_{11}C_{32})\omega_y \\ (C_{21}C_{33} - C_{23}C_{31})\omega_x + (C_{13}C_{31} - C_{11}C_{33})\omega_y \\ + (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})\omega_z \\ + (C_{11}C_{23} - C_{13}C_{21})\omega_y \\ (C_{22}C_{31} - C_{32}C_{11})\omega_x + (C_{32}C_{11} - C_{12}C_{31})\omega_y \\ 0 \\ (C_{22}C_{33} - C_{32}C_{23})\omega_x + (C_{13}C_{32} - C_{12}C_{33})\omega_y \\ + (C_{12}C_{21} - C_{22}C_{11})\omega_z \\ + (C_{12}C_{23} - C_{22}C_{13})\omega_x \\ (C_{23}C_{31} - C_{11}C_{33})\omega_x + (C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31})\omega_y \\ (C_{23}C_{32} - C_{12}C_{33})\omega_x + (C_{12}C_{33} - C_{13}C_{32})\omega_y \\ 0 \\ + (C_{13}C_{21} - C_{23}C_{11})\omega_z \\ + (C_{13}C_{22} - C_{23}C_{12})\omega_x \end{bmatrix} \quad (5-11)
\end{aligned}$$

再利用正交矩阵的性质，即矩阵  $C$  中的各元素均等于其代数余子式，即

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32} \\
C_{21} &= C_{13}C_{32} - C_{12}C_{33} \\
C_{31} &= C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22} \\
C_{13} &= C_{21}C_{12} - C_{22}C_{31} \\
C_{23} &= C_{12}C_{31} - C_{11}C_{32} \\
C_{33} &= C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \\
C_{12} &= C_{23}C_{31} - C_{21}C_{33}
\end{aligned} \quad (5-12)$$

$$C_{22} = C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}$$

$$C_{32} = C_{21}C_{13} - C_{11}C_{23}$$

将上式代入式 (5-11), 可得

$$Q^* = \begin{bmatrix} 0 \\ (C_{13}\omega_x + C_{23}\omega_y + C_{33}\omega_z) \\ -(C_{12}\omega_x + C_{22}\omega_y + C_{32}\omega_z) \\ -(C_{13}\omega_x + C_{23}\omega_y + C_{33}\omega_z) \\ 0 \\ (C_{11}\omega_x + C_{21}\omega_y + C_{31}\omega_z) \\ (C_{12}\omega_x + C_{22}\omega_y + C_{32}\omega_z) \\ -(C_{11}\omega_x + C_{21}\omega_y + C_{31}\omega_z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-13)$$

考虑到式 (5-10) 上式可写成

$$Q^* = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^* & \omega_y^* \\ \omega_z^* & 0 & -\omega_x^* \\ -\omega_y^* & \omega_x^* & 0 \end{bmatrix}$$

定理证毕。

## § 5-2 初始对准的误差传播方程

本节将从初始对准的原理方块图出发, 来讨论初始对准的误差传播方程。

### 一、初始平台坐标系的选取

初始对准是通过确定初始的捷联矩阵将初始平台坐标系选定在一定的导航坐标系上。若导航坐标系选为游动方位系统, 即  $O x_p y_p$  位于水平面内, 而  $O y_p$  相对北向  $O y_i$  存在一个游动方位角  $\alpha$ 。由于初始游动方位角  $\alpha_0$  可任意选取, 通常可

取  $\alpha_0 = 0$ , 这表明在初始时刻平台坐标系与地理坐标系重合, 这将为初始对准带来方便。在此基础上来确定平台坐标系与机体坐标系之间的转换矩阵的初始值  $T_{00}$ 。

## 二、初始对准的原理方块图

图 5-1 示出了初始对准的原理方块图。首先看图 5-1 中加速度计的输入和输出。由惯导基本方程 (2-36) 可知, 在静

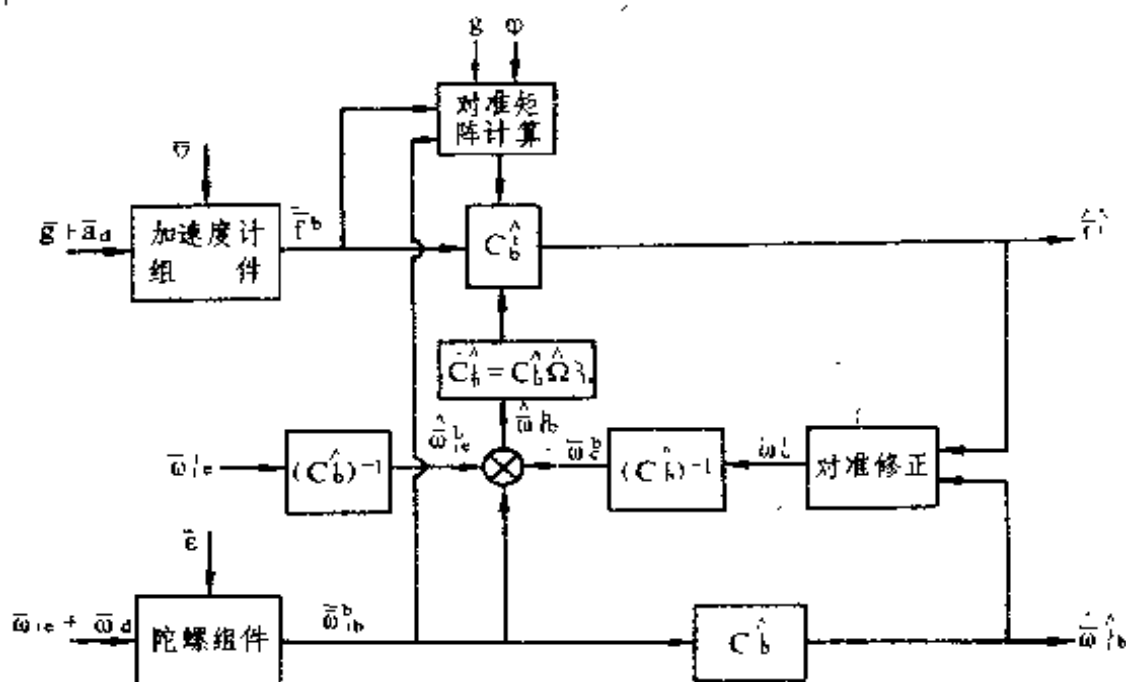


图 5-1 初始对准原理方块图

基座条件下  $\dot{\bar{v}}_{cp} = \dot{\hat{v}}_{cp} = 0$ , 因此加速度计所输出的比力  $\bar{f}$  的理想值应为

$$\bar{f} = -g \quad (5-14)$$

式中  $-g$  的物理意义是指约束反力所引起的加速度计的输 (即弹簧变形), 其方向与  $g$  的方向相反, 由于  $g$  的方向指向下, 所以  $-g$  指向天。事实上由于加速度计测量误差  $\bar{v}$  及飞行器干扰加速度  $\bar{a}_d$  的存在, 加速度计的输已不是  $-g$  而是  $\bar{f}^b$ 。符号“ $\sim$ ”表示“测量”的意思。同样, 由于陀螺的测量误差  $\bar{\epsilon}$

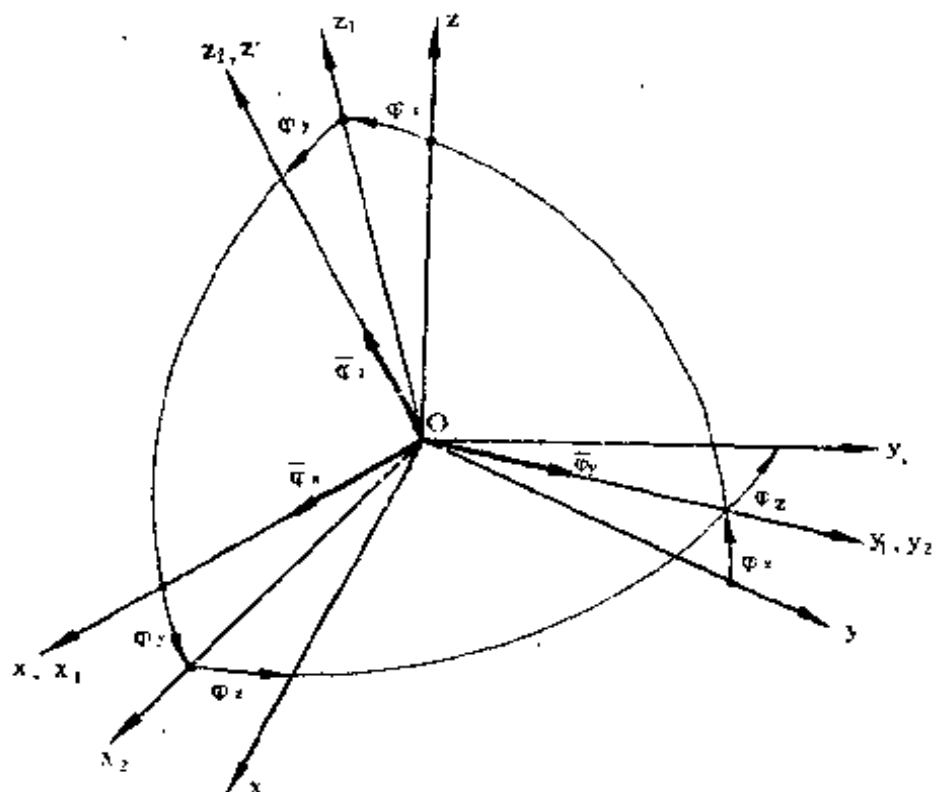


图 5-2 坐标系  $Oxyz$  与坐标系  $Ox'y'z'$  的小角度转动关系

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & \sin \varphi_x \\ 0 & -\sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

由于  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  为小角度, 上式可近似为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_x & 0 \\ -\varphi_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \varphi_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi_z \\ 0 & -\varphi_z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

对上式进行矩阵相乘, 并略去二阶小量, 可得

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_x & -\varphi_y \\ -\varphi_x & 1 & \varphi_z \\ \varphi_y & -\varphi_z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

在式 (5-17) 的推导中采用了近似计算。显然, 当  $\varphi_x$  沿  $x, x_1, x_1, x'$  的任意方向时, 由于  $\varphi_y, \varphi_z$  是小角度, 因此可以认

为  $\bar{\varphi}_x$  沿这些方向时均可互相近似; 同样,  $\bar{\varphi}_y$  可以沿  $y, y_1, y_2, y'$  的任意方向;  $\bar{\varphi}_z$  可以沿  $z, z_1, z_2, z'$  的任意方向。根据小角度是向量的原理, 可以将  $Ox'y'z'$  相对  $Oxyz$  的微小位置变化以小角度向量  $\bar{\varphi}$  来表示,  $\bar{\varphi}$  可以写成

$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

式中  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  可看成沿  $x, y, z$  轴的投影分量。向量  $\bar{\varphi}$  的反对称矩阵  $\Phi$  可写成

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

根据式 (5-19) 可以将式 (5-17) 写成

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = (I - \Phi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

式 (5-20) 就是坐标系转动小角度  $\bar{\varphi}$  的矩阵表示法。

#### 四、初始对准的误差传播方程

设计算地理坐标系 ( $i$ ) 与地理坐标系 ( $t$ ) 的夹角为  $\bar{\varphi}'$ , 并可表示为

$$\bar{\varphi}' = \begin{bmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

向量  $\bar{\varphi}'$  的反对称矩阵为

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi'_z & \varphi'_y \\ \varphi'_z & 0 & -\varphi'_x \\ -\varphi'_y & \varphi'_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

对于理想情况有  $\bar{\omega}_{ib}^b = \bar{\omega}_{ib}^b$ , 故  $\dot{C}_b^i = 0$ 。于是

$$C_i^i \dot{C}_b^i = 0 \quad (5-37)$$

将式 (5-37) 代入式 (5-36), 然后再代入式 (5-34), 可得

$$\dot{C}_i^i C_b^i = C_b^i (\delta \bar{Q}_{ib}^b - Q_c^b - \delta Q_{ic}^b)$$

将上式等式两边右乘以  $C_i^b$ , 可得

$$\dot{C}_i^i = C_b^i (\delta \bar{Q}_{ib}^b - Q_c^b - \delta Q_{ic}^b) C_i^b \quad (5-38)$$

由式 (5-23) 可知  $C_i^i = I - \Phi^i$ , 对它进行微分可得

$$\dot{C}_i^i = -\dot{\Phi}^i \quad (5-39)$$

将式 (5-39) 代入式 (5-38) 可得

$$-\dot{\Phi}^i = C_i^i C_b^i (\delta \bar{Q}_{ib}^b - Q_c^b - \delta Q_{ic}^b) C_i^b$$

于是

$$\dot{\Phi}^i = (I - \Phi^i) (C_i^b)^{-1} (-\delta \bar{Q}_{ib}^b + Q_c^b + \delta Q_{ic}^b) C_i^b \quad (5-40)$$

考虑到矩阵相似变换的表示法, 有

$$\begin{aligned} & (-\delta \bar{Q}_{ib}^b + Q_c^b + \delta Q_{ic}^b)^* \\ &= (C_i^b)^{-1} (-\delta \bar{Q}_{ib}^b + Q_c^b + \delta Q_{ic}^b) C_i^b \end{aligned} \quad (5-41)$$

将式 (5-41) 代入式 (5-40), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}^i &= (I - \Phi^i) (-\delta \bar{Q}_{ib}^b + Q_c^b + \delta Q_{ic}^b)^* \\ &\approx (-\delta \bar{Q}_{ib}^b + Q_c^b + \delta Q_{ic}^b)^* \end{aligned} \quad (5-42)$$

根据 § 5-1 的相似变换定理, 由式 (5-42) 所示的反对称矩阵的相似变换, 可得出与之相对应的向量形式, 即

$$\dot{\bar{\Phi}}^i = C_b^i (-\delta \bar{\omega}_{ib}^b + \bar{\omega}_c^b + \Phi^b \bar{\omega}_{ic}^b)$$

考虑到  $\bar{\varphi}^b = C_b^i \bar{\varphi}^i$ , 上式可写成

$$\dot{\bar{\Phi}}^i = -\delta \bar{\omega}_{ib}^i + \bar{\omega}_c^i + \Phi^i \bar{\omega}_{ic}^i \quad (5-43)$$

式 (5-43) 又可写成投影形式, 即

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\Phi}}_x^i \\ \dot{\bar{\Phi}}_y^i \\ \dot{\bar{\Phi}}_z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta \bar{\omega}_{ibx}^i \\ -\delta \bar{\omega}_{iby}^i \\ -\delta \bar{\omega}_{ibz}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\omega}_{cx}^i \\ \bar{\omega}_{cy}^i \\ \bar{\omega}_{cz}^i \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z^i & \varphi_y^i \\ \varphi_z^i & 0 & -\varphi_x^i \\ -\varphi_y^i & \varphi_x^i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ieN} \\ \omega_{ieV} \end{bmatrix} \quad (5-44)$$

式中  $\omega_{ieN}$  与  $\omega_{ieV}$  分别为地球速率  $\omega_{ie}$  的北向分量和垂直分量, 并有

$$\begin{aligned} \omega_{ieN} &= \omega_{ie} \cos \varphi \\ \omega_{ieV} &= \omega_{ie} \sin \varphi \end{aligned} \quad (5-45)$$

进而式 (5-44) 可写成

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_x^i = -\delta\tilde{\omega}_{ibx}^i + \omega_{ex}^i - \omega_{ieN}\varphi_z^i + \omega_{ieV}\varphi_y^i \\ \dot{\varphi}_y^i = -\delta\tilde{\omega}_{iby}^i + \omega_{ey}^i - \omega_{ieV}\varphi_x^i \\ \dot{\varphi}_z^i = -\delta\tilde{\omega}_{ibz}^i + \omega_{ez}^i - \omega_{ieN}\varphi_x^i \end{cases} \quad (5-46)$$

加速度计所测的比力经坐标转换可得

$$\begin{aligned} \bar{f}^i &= C_b^i \bar{f}^b = C_b^i C_b^b \bar{f}^b \\ &= C_b^i \bar{f}^b = (I - \Phi') \bar{f}^b \end{aligned} \quad (5-47)$$

当飞机处于静止状态时有

$$\bar{f}^i = \delta\bar{f}^i - \bar{g} = \begin{bmatrix} \delta\bar{f}_x^i \\ \delta\bar{f}_y^i \\ \delta\bar{f}_z^i + g \end{bmatrix} \quad (5-48)$$

将式 (5-48) 代入式 (5-47) 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_x^i \\ \bar{f}_y^i \\ \bar{f}_z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_z^i & -\varphi_y^i \\ -\varphi_z^i & 1 & \varphi_x^i \\ \varphi_y^i & -\varphi_x^i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\bar{f}_x^i \\ \delta\bar{f}_y^i \\ \delta\bar{f}_z^i + g \end{bmatrix} \quad (5-49)$$

为了便于做进一步的分析, 下面做以下几点说明。

(1) 为简化符号, 将角速率下标 “ib” 去掉, 但符号的意义不变。

(2) 在陀螺的测量误差  $\delta\tilde{\omega}^i$  中包括陀螺漂移  $\varepsilon^i$  和飞机干扰运动角速率  $\omega_d^i$ , 即

$$\delta \vec{\omega}^i = \vec{\varepsilon}^i + \vec{\omega}_d^i \quad (5-50)$$

而在加速度计的测量误差中包括加速度计的零点漂移  $\vec{\nabla}^i$  及飞机干扰加速度  $\vec{a}_d^i$ , 即

$$\delta \vec{f}^i = \vec{\nabla}^i + \vec{a}_d^i \quad (5-51)$$

式(5-50)与(5-51)所表示的测量误差在图 5-1 中均已示出。对于捷联系统, 由于陀螺与加速度计直接固连在机体上, 因此飞机干扰运动的影响比平台系统要严重得多。至于干扰函数的形式, 需针对具体情况做具体分析。

(3) 在静基座条件下的修正角速率可根据速度误差  $\delta \dot{\varphi}_x^i$  及  $\delta \dot{\varphi}_y^i$  计算出, 并有

$$\begin{aligned} \omega_{cx}^i &= -\frac{\delta \dot{\varphi}_y^i}{R} \\ \omega_{cy}^i &= \frac{\delta \dot{\varphi}_x^i}{R} \end{aligned} \quad (5-52)$$

式中

$$\begin{aligned} \delta \dot{\varphi}_x^i &= \int \dot{f}_x^i dt \\ \delta \dot{\varphi}_y^i &= \int \dot{f}_y^i dt \end{aligned} \quad (5-53)$$

这样, 式(5-44)所表示的捷联式“平台”的误差方程可表示为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x^i \\ \dot{\varphi}_y^i \\ \dot{\varphi}_z^i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_x^i & \varphi_y^i \\ \varphi_x^i & 0 & -\varphi_z^i \\ -\varphi_y^i & \varphi_z^i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{icN} \\ \omega_{icV} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\frac{\delta \dot{\varphi}_y^i}{R} \\ \frac{\delta \dot{\varphi}_x^i}{R} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_x^i + \omega_{dx}^i \\ \varepsilon_y^i + \omega_{dy}^i \\ \varepsilon_z^i + \omega_{dz}^i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-54)$$



而加速度计输出的比力在计算坐标系的分量为

$$\begin{bmatrix} f_x^i \\ f_y^i \\ f_z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_x^i & -\varphi_y^i \\ -\varphi_x^i & 1 & \varphi_z^i \\ \varphi_y^i & -\varphi_z^i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_x^i + a_{dx}^i \\ \nabla_y^i + a_{dy}^i \\ \nabla_z^i + a_{dz}^i + g \end{bmatrix} \quad (5-55)$$

对式 (5-55) 只取比力的水平分量, 并略去式 (5-55) 中的二阶小量, 式 (5-54) 与 (5-55) 可写成

$$\begin{cases} \ddot{f}_x^i = -\varphi_y^i g + \nabla_x^i + a_{dx}^i \\ \ddot{f}_y^i = \varphi_x^i g + \nabla_y^i + a_{dy}^i \\ \dot{\varphi}_x^i = -\varphi_z^i \omega_{ieN} + \varphi_y^i \omega_{ieV} - \frac{\delta \hat{V}_y^i}{R} - (s_x^i + \omega_{dx}^i) \\ \dot{\varphi}_y^i = -\varphi_x^i \omega_{ieV} + \frac{\delta \hat{V}_x^i}{R} - (s_y^i + \omega_{dy}^i) \\ \dot{\varphi}_z^i = \varphi_x^i \omega_{ieN} - (s_z^i + \omega_{dz}^i) \end{cases} \quad (5-56)$$

由式 (5-56) 可以画出捷联系统初始对准等效误差方块图, 如图 5-3 所示。

将式 (5-56) 写成矩阵形式, 并考虑到式 (5-53), 可得初始对准误差方程的拉氏变换式, 即

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & s & -g & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & s & -\omega_{ieV} & \omega_{ieN} \\ -\frac{1}{R} & 0 & \omega_{ieV} & s & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_{ieN} & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{V}_x^i(s) \\ \delta \hat{V}_y^i(s) \\ \varphi_x^i(s) \\ \varphi_y^i(s) \\ \varphi_z^i(s) \end{bmatrix}$$

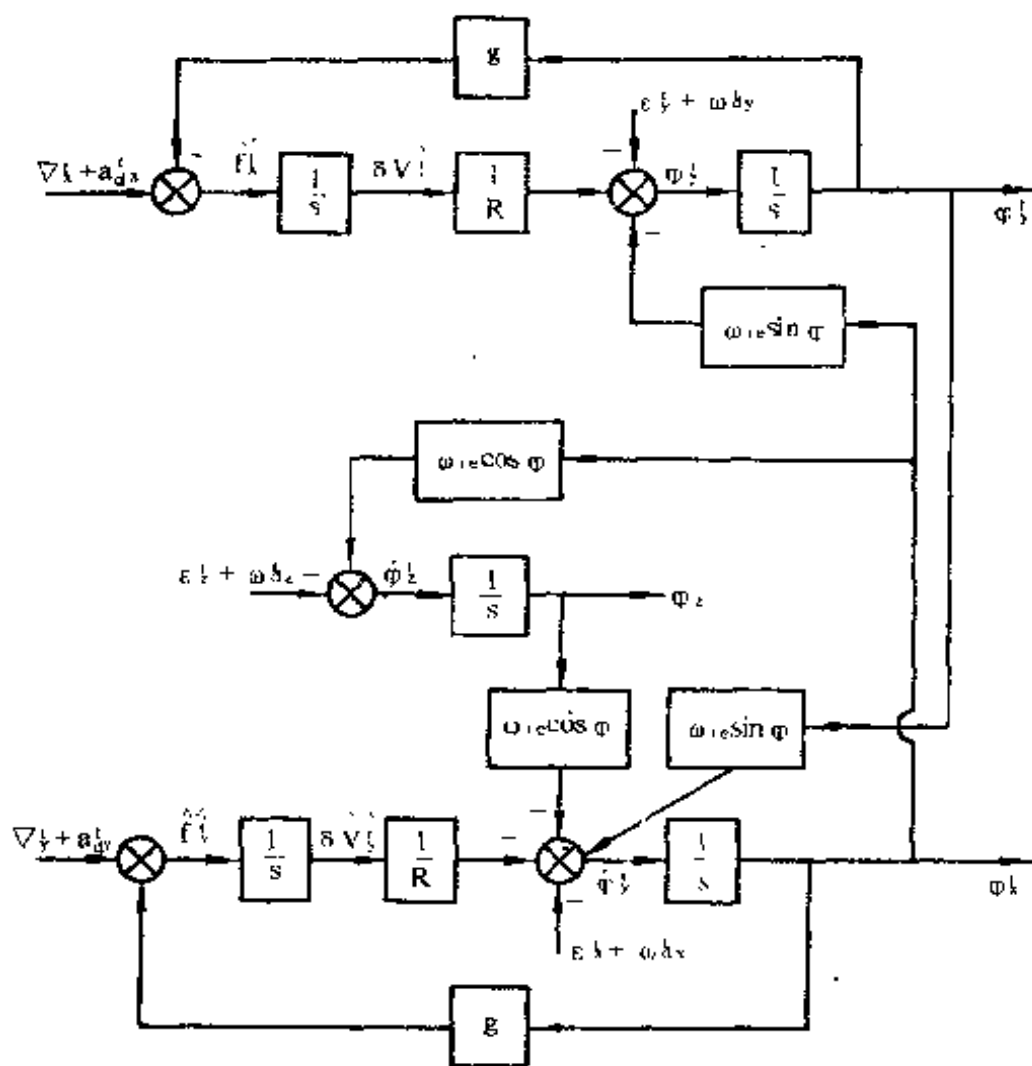


图 5-3 捷联系统初始对准等效误差方块图

$$= \begin{bmatrix} \nabla_x^t(s) \\ \nabla_y^t(s) \\ -s_x^t(s) \\ -s_y^t(s) \\ -s_z^t(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a'_{dx}(s) \\ a'_{dy}(s) \\ -\omega'_{dx}(s) \\ -\omega'_{dy}(s) \\ -\omega'_{dz}(s) \end{bmatrix} \quad (5-57)$$

为了分析捷联系统初始对准误差传播的特点，我们不必求解式 (5-57)，而只要分析式 (5-57) 的特征式  $\Delta(s)$  即可。显然

$$\begin{aligned}
\Delta(s) &= \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & s & -g & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & s & -\omega_{ieV} & \omega_{ieN} \\ -\frac{1}{R} & 0 & \omega_{ieV} & s & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_{ieN} & 0 & s \end{vmatrix} \\
&= s^2(s^3 + \omega_{ieN}^2 s + \omega_{ieV}^2 s) + \frac{g}{R} s^3 \\
&\quad + \frac{g}{R} \left( s^3 + \frac{g}{R} s + \omega_{ieN}^2 s \right) \quad (5-58)
\end{aligned}$$

对于上式,有

$$\begin{aligned}
\omega_{ieN}^2 + \omega_{ieV}^2 &= \omega_{ie}^2 \cos^2 \varphi + \omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi \\
&= \omega_{ie}^2 \quad (5-59)
\end{aligned}$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

于是式 (5-58) 可写成

$$\begin{aligned}
\Delta(s) &= s[s^4 + \omega_{ie}^2 s^2 + \omega_{ie}^2 s^2 + \omega_{ie}^2 s^2 + \omega_{ie}^2 (\omega_{ie}^2 + \omega_{ieN}^2)] \\
&= s[s^4 + (2\omega_{ie}^2 + \omega_{ie}^2) s^2 + \omega_{ie}^2 (\omega_{ie}^2 + \omega_{ieN}^2)] \quad (5-60)
\end{aligned}$$

由式 (5-60) 可以看出, 系统中含有舒勒频率  $\omega_i$  及地球频率  $\omega_{ie}$ , 即系统的误差传播包含有 84.4 分和 24 小时的周期的误差。对式 (5-60) 再做简化分析, 即考虑到

$$\omega_i^2 \gg \omega_{ie}^2 > \omega_{ieN}^2$$

略去与  $\omega_{ie}^2$  及  $\omega_{ieN}^2$  有关的项, 可得

$$\begin{aligned}
\Delta(s) &\approx s(s^4 + 2\omega_{ie}^2 s^2 + \omega_{ie}^4) \\
&= s(s^2 + \omega_i^2)^2 \quad (5-61)
\end{aligned}$$

由式 (5-61) 可知, 简化的捷联系统具有以舒勒周期传播的误差。

我们在第一章的分析中已得知, 平台系统的水平通道当初始时刻不存在初始误差角时, 平台就永远处于水平面内; 而当存在初始误差角时, 误差则以舒勒周期传播。通过本章的分析我们可以看出, 捷联系统虽然没有平台, 但系统初始对准的误差也以舒勒周期在系统中传播。可见舒勒摆的原理不论是对平台惯导系统还是对捷联惯导系统都同样适用。

为了对式 (5-56) 做进一步简化, 设  $\varphi_x^i$ ,  $\varphi_y^i$  与  $\varphi_z^i$  相比为较小的量 (因为平台的水平精度通常高于方位精度),  $\omega_{ie}$  也是较小的量, 从而略去它们的相乘项  $\varphi_y^i \omega_{ieV}$ 、 $\varphi_x^i \omega_{ieV}$ 、 $\varphi_x^i \omega_{ieN}$ , 于是可得两组独立的方程组

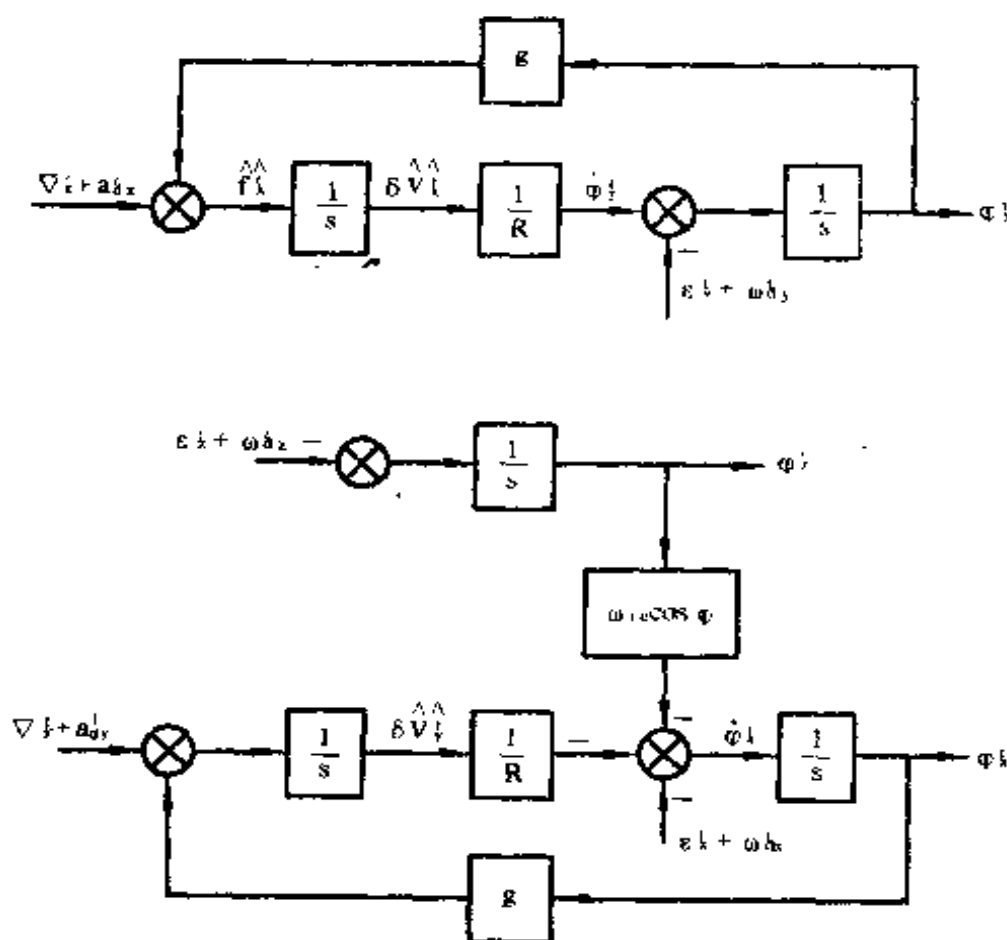


图 5-4 简化误差方块图

$$\begin{cases} \dot{f}_y^i = \varphi_x^i g + \nabla_y^i + a_{ay}^i \\ \dot{\phi}_x^i = -\varphi_z^i \omega_{ieN} - \frac{\delta \hat{V}_y^i}{R} - (\varepsilon_x^i + \omega_{ax}^i) \\ \dot{\phi}_z^i = -(\varepsilon_z^i + \omega_{az}^i) \\ \dot{f}_x^i = -\varphi_y^i g + \nabla_x^i + a_{ax}^i \\ \dot{\phi}_y^i = \frac{\delta \hat{V}_x^i}{R} - (\varepsilon_y^i + \omega_{ay}^i) \end{cases} \quad (5-62)$$

$$\begin{cases} \dot{f}_x^i = -\varphi_y^i g + \nabla_x^i + a_{ax}^i \\ \dot{\phi}_y^i = \frac{\delta \hat{V}_x^i}{R} - (\varepsilon_y^i + \omega_{ay}^i) \end{cases} \quad (5-63)$$

由式(5-62)、(5-63)可将图 5-3 所示的初始对准等效误差方块图简化为图 5-4 所示的简化误差方块图。由图 5-4 可以看出,由于图 5-1 中的对准修正采用了由式(5-52)、(5-53)所表示的修正角速率形式,致使初始对准的误差以舒拉周期的形式传播。为了使以舒拉周期振荡的误差得到阻尼,在设计对准修正时应适当地获取  $\omega_c^i$ , 从而保证对准过程的性能指标。下一节介绍的一阶数字滤波对准就可以解决这个问题。

### § 5-3 捷联惯导系统的初始对准技术

捷联惯导系统初始对准的目的是确定捷联矩阵  $C_b^i$ 。而  $C_b^i$  只有通过计算机算出,计算得到的捷联矩阵为  $C_b^j$ 。由上一节的分析可知,当  $C_b^j$  求得以后,若能求得误差角矩阵  $\Phi^i$ ,则根据式(5-23)及(5-35)的关系可得

$$C_b^i = C_b^j C_b^i = (I - \Phi^i) C_b^j \quad (5-64)$$

利用上式的关系便可对  $C_b^j$  修正,从而获得更准确的  $C_b^i$ ,即

$$\begin{aligned} C_b^i &= (I - \Phi^i)^{-1} C_b^j \\ &= (I + \Phi^i) C_b^j \end{aligned} \quad (5-65)$$

#### 一、解析式相对准

矩阵  $C_b^j$  可以通过加速度计与陀螺的测量值来计算。在

$$\begin{bmatrix} (\bar{g}^b)^t \\ (\bar{\omega}_{ie}^b)^t \\ (\bar{\gamma}^b)^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{g}^t)^t \\ (\bar{\omega}_{ie}^t)^t \\ (\bar{\gamma}^t)^t \end{bmatrix} C_b^t$$

由上式可得

$$C_b^t = \begin{bmatrix} (\bar{g}^t)^t \\ (\bar{\omega}_{ie}^t)^t \\ (\bar{\gamma}^t)^t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\bar{g}^b)^t \\ (\bar{\omega}_{ie}^b)^t \\ (\bar{\gamma}^b)^t \end{bmatrix} \quad (5-70)$$

在测得  $\bar{g}^b$  和  $\bar{\omega}_{ie}^b$  的基础上, 计算出  $\bar{\gamma}^b$ 、 $\bar{\gamma}^t$ , 然后就可以按上式计算出初始矩阵  $C_b^t$ 。故由式 (5-70) 表示的矩阵叫做“对准矩阵”。

由式 (5-68) 可知

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^t &= \bar{g}^t \times \bar{\omega}_{ie}^t \\ &= \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ie} \cos \varphi \\ \omega_{ie} \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g \omega_{ie} \cos \varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

而式 (5-70) 中的  $\bar{\gamma}^b$  为

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^b &= \bar{g}^b \times \bar{\omega}_{ie}^b \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -g_x^b & g_y^b \\ g_z^b & 0 & -g_x^b \\ -g_y^b & g_x^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{ie}^b \\ \omega_{ie}^b \\ \omega_{ie}^b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_{ie}^b g_y^b - \omega_{ie}^b g_x^b \\ \omega_{ie}^b g_z^b - \omega_{ie}^b g_x^b \\ \omega_{ie}^b g_x^b - \omega_{ie}^b g_y^b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-71)$$

将  $\bar{\gamma}^t$ 、 $\bar{g}^t$ 、 $\bar{\omega}_{ie}^t$  代入式 (5-70) 右式中左边的逆矩阵:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} (\vec{g}^b)^t \\ (\vec{\omega}_{ie}^b)^t \\ (\vec{r}^b)^t \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \\ 0 & \omega_{ie} \cos \varphi & \omega_{ie} \sin \varphi \\ g \omega_{ie} \cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{g \omega_{ie}} \sec \varphi \\ \frac{1}{g} \operatorname{tg} \varphi & \frac{1}{\omega_{ie}} \sec \varphi & 0 \\ -\frac{1}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-72)
 \end{aligned}$$

将测量得到的  $\vec{g}^b$ 、 $\vec{\omega}_{ie}^b$  及按式 (5-71) 计算的  $\vec{r}^b$  和式 (5-72) 代入式 (5-70) 便可计算出  $C_i^t$ , 即

$$\begin{aligned}
 C_i^t &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{g \omega_{ie}} \sec \varphi \\ \frac{1}{g} \operatorname{tg} \varphi & \frac{1}{\omega_{ie}} \sec \varphi & 0 \\ -\frac{1}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \\
 &\quad \begin{bmatrix} g_x^b & g_y^b & g_z^b \\ \omega_{ie x}^b & \omega_{ie y}^b & \omega_{ie z}^b \\ \omega_{ie x}^b g_y^b - \omega_{ie y}^b g_x^b & \omega_{ie x}^b g_z^b - \omega_{ie z}^b g_x^b & \omega_{ie y}^b g_z^b - \omega_{ie z}^b g_y^b \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

设  $C_i^t$  的元素为  $C_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ), 将上式相乘后可求得  $C_i^t$  的九个元素, 即

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{\sec \varphi}{g \omega_{ie}} (\omega_{ie x}^b g_y^b - \omega_{ie y}^b g_x^b) \\
 C_{12} &= \frac{\sec \varphi}{g \omega_{ie}} (\omega_{ie x}^b g_z^b - \omega_{ie z}^b g_x^b) \\
 C_{13} &= \frac{\sec \varphi}{g \omega_{ie}} (\omega_{ie y}^b g_z^b - \omega_{ie z}^b g_y^b)
 \end{aligned}$$

将上式写成投影形式,并考虑到式(5-50),有

$$\begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x^i \\ \tilde{\omega}_y^i \\ \tilde{\omega}_z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{ieN} \\ \omega_{ieV} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x^i + \omega_{dx}^i \\ \varepsilon_y^i + \omega_{dy}^i \\ \varepsilon_z^i + \omega_{dz}^i \end{bmatrix} \quad (5-76)$$

将式(5-76)代入式(5-75),并写成投影形式,有

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega}_x^i \\ \hat{\omega}_y^i \\ \hat{\omega}_z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_x^i & -\varphi_y^i \\ -\varphi_x^i & 1 & \varphi_z^i \\ \varphi_y^i & -\varphi_z^i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^i + \omega_{dx}^i \\ \varepsilon_y^i + \omega_{dy}^i + \omega_{ieN} \\ \varepsilon_z^i + \omega_{dz}^i + \omega_{ieV} \end{bmatrix} \quad (5-77)$$

上式中略去二阶小量可得

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_x^i &= \varphi_x^i \omega_{ieN} - \varphi_y^i \omega_{ieV} + \varepsilon_x^i + \omega_{dx}^i \\ \hat{\omega}_y^i &= \omega_{ieN} + \varphi_x^i \omega_{ieV} + \varepsilon_y^i + \omega_{dy}^i \\ \hat{\omega}_z^i &= -\varphi_x^i \omega_{ieN} + \omega_{ieV} + \varepsilon_z^i + \omega_{dz}^i \end{aligned} \quad (5-78)$$

若略去陀螺的测量误差,即取  $\delta\tilde{\omega}^i = 0$ ,则式(5-78)可简化为

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_x^i &= \varphi_x^i \omega_{ieN} - \varphi_y^i \omega_{ieV} \\ \hat{\omega}_y^i &= \omega_{ieN} + \varphi_x^i \omega_{ieV} \\ \hat{\omega}_z^i &= \omega_{ieV} - \varphi_x^i \omega_{ieN} \end{aligned} \quad (5-79)$$

由于一次修正对准的目的就是求  $\varphi_x^i$ , 即  $\varphi_x^i, \varphi_y^i, \varphi_z^i$  的大小, 而这三个角度可以由式(5-74)和式(5-79)的第一个公式估算出, 即

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_x^i = \frac{\hat{f}_y^i}{g} \\ \hat{\varphi}_y^i = -\frac{\hat{f}_x^i}{g} \\ \hat{\varphi}_z^i = \frac{\hat{\omega}_x^i}{\omega_{ieN}} + \frac{\omega_{ieV}}{\omega_{ieN}} \varphi_y^i \\ \quad = \frac{\hat{\omega}_x^i}{\omega_{ieN}} - \frac{\lg \varphi}{g} \hat{f}_x^i \end{cases} \quad (5-80)$$



上式中的  $g$  与  $\lg \varphi$  在初始对准时可以精确地给出。只要提供  $\dot{f}_x^i, \dot{f}_y^i$  及东向角速率的计算值  $\dot{\omega}_x^i$  便可估算出  $\hat{\varphi}_x^i, \hat{\varphi}_y^i, \hat{\varphi}_z^i$ 。

若将陀螺与加速度计的误差及飞行器的干扰考虑在内, 根据式(5-56)及式(5-78)的第一个公式可将式(5-80)进一步写成

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_x^i &= \frac{\dot{f}_y^i}{g} = \varphi_x^i + \frac{\nabla_y^i}{g} + \frac{a_{dy}^i}{g} \\ \hat{\varphi}_y^i &= -\frac{\dot{f}_x^i}{g} = \varphi_y^i - \frac{\nabla_x^i}{g} - \frac{a_{dx}^i}{g} \\ \hat{\varphi}_z^i &= \frac{\dot{\omega}_x^i}{\omega_{icN}} - \frac{\lg \varphi}{g} \dot{f}_x^i \\ &= \varphi_z^i - \varphi_y^i \frac{\omega_{icV}}{\omega_{icN}} + \frac{\varepsilon_x^i + \omega_{dx}^i}{\omega_{icN}} \\ &\quad - \frac{\lg \varphi}{g} (-\varphi_y^i g + \nabla_x^i + a_{dx}^i) \\ &= \varphi_z^i + \frac{\varepsilon_x^i + \omega_{dx}^i}{\omega_{icN}} - \frac{\lg \varphi}{g} (\nabla_x^i + a_{dx}^i)\end{aligned}\quad (5-81)$$

令  $\hat{\varphi}_x^i, \hat{\varphi}_y^i, \hat{\varphi}_z^i$  的估计误差为  $\delta\hat{\varphi}_x^i, \delta\hat{\varphi}_y^i, \delta\hat{\varphi}_z^i$ , 即

$$\begin{aligned}\delta\hat{\varphi}_x^i &= \hat{\varphi}_x^i - \varphi_x^i \\ \delta\hat{\varphi}_y^i &= \hat{\varphi}_y^i - \varphi_y^i \\ \delta\hat{\varphi}_z^i &= \hat{\varphi}_z^i - \varphi_z^i\end{aligned}\quad (5-82)$$

考虑到式(5-82)可将式(5-81)写成

$$\left\{\begin{aligned}\delta\hat{\varphi}_x^i &= \frac{\nabla_y^i}{g} + \frac{a_{dy}^i}{g} \\ \delta\hat{\varphi}_y^i &= -\frac{\nabla_x^i}{g} - \frac{a_{dx}^i}{g} \\ \delta\hat{\varphi}_z^i &= \frac{\varepsilon_x^i}{\omega_{icN}} + \frac{\omega_{dx}^i}{\omega_{icN}} - \frac{\lg \varphi}{g} (\nabla_x^i + a_{dx}^i)\end{aligned}\right.\quad (5-83)$$

式(5-83)就是用式(5-80)来估算  $\hat{\varphi}_x^i, \hat{\varphi}_y^i, \hat{\varphi}_z^i$  的估算

误差。为了减小估算误差,在用式(5-80)进行估算时可在适当的计算周期 $\tau$ 内取平均,即取

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_x^i = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{\dot{f}_y^i}{g} dt \\ \hat{\varphi}_y^i = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left( -\frac{\dot{f}_x^i}{g} \right) dt \\ \hat{\varphi}_z^i = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left( \frac{\dot{\omega}_x^i}{\omega_{1:N}} - \frac{\lg \varphi}{g} \dot{f}_x^i \right) dt \end{cases} \quad (5-84)$$

### 三、采用一阶数字滤波器的精对准原理

对于平台惯导系统,在初始对准时可加进阻尼环节,使对准误差得以衰减;而对于捷联惯导系统,为了减小对准误差也可以在系统中设置一阶数字滤波环节,从而获得合适的修正角速率 $\omega_c^i$ 。图5-5示出了一阶数字滤波器的原理方块图。由图示关系可得到数字滤波器的输入与输出的关系:

$$\begin{aligned} \omega_{cx}^i &= -K_y d_y \\ \omega_{cy}^i &= K_x d_x \\ \omega_{cz}^i &= K_z d_z \end{aligned} \quad (5-85)$$

和

$$\dot{d}_x = -K_{dx} d_x + K_{dx} \dot{f}_x^i$$

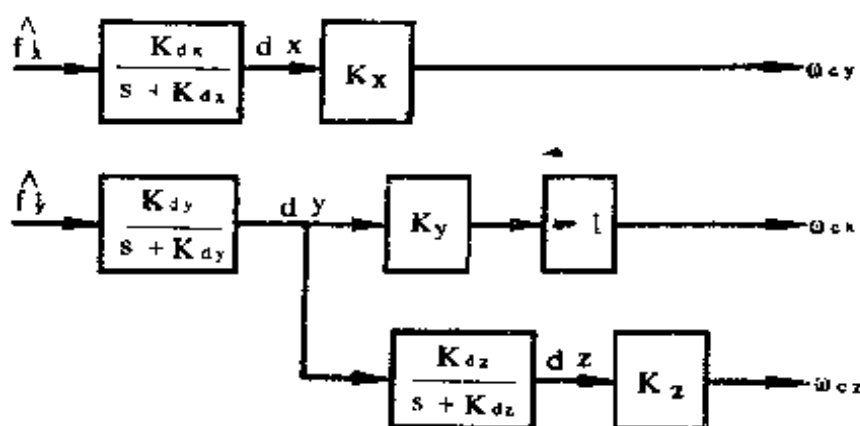


图 5-5 一阶数字滤波器的原理方块图

$$\begin{aligned} \dot{d}_y &= -K_{dy}d_y + K_{dy}\dot{f}_y^i \\ \dot{d}_z &= -K_{dz}d_z + K_{dz}d_y \end{aligned} \quad (5-86)$$

将式(5-50), (5-85)代入式(5-46), 并略去较小的相乘项  $\varphi_y^i\omega_{ieN}$ 、 $\varphi_x^i\omega_{ieN}$  和  $\varphi_z^i\omega_{ieN}$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_x^i &= -K_y d_y - \omega_{ieN} \varphi_x^i - (\varepsilon_x^i + \omega_{dx}^i) \\ \dot{\varphi}_y^i &= K_x d_x - (\varepsilon_y^i + \omega_{dy}^i) \\ \dot{\varphi}_z^i &= K_z d_z - (\varepsilon_z^i + \omega_{dz}^i) \end{aligned} \quad (5-87)$$

将式(5-51)代入式(5-49), 取前两个投影式, 并略去二阶小量可得

$$\begin{aligned} \dot{f}_x^i &= -\dot{\varphi}_y^i g + \nabla_x^i + a_{dx}^i \\ \dot{f}_y^i &= \varphi_x^i g + \nabla_y^i + a_{dy}^i \end{aligned} \quad (5-88)$$

将式(5-88)代入式(5-86)可得

$$\begin{aligned} \dot{d}_x &= -K_{dx}d_x - K_{dx}g\varphi_y^i + K_{dx}(\nabla_x^i + a_{dx}^i) \\ \dot{d}_y &= -K_{dy}d_y + K_{dy}g\varphi_x^i + K_{dy}(\nabla_y^i + a_{dy}^i) \\ \dot{d}_z &= -K_{dz}d_z + K_{dz}d_y \end{aligned} \quad (5-89)$$

将式(5-87)及式(5-89)写成以  $\varphi_y^i, d_x, \varphi_x^i, \varphi_z^i, d_y, d_z$  为状态变量的状态方程, 可得以下两组独立的状态方程:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_y^i \\ \dot{d}_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & K_x \\ -gK_{dx} & -K_{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_y^i \\ d_x \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -(\varepsilon_y^i + \omega_{dy}^i) \\ K_{dx}(\nabla_x^i + a_{dx}^i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-90)$$

及

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x^i \\ \dot{\varphi}_z^i \\ \dot{d}_y \\ \dot{d}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ieN} & -K_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_z \\ gK_{dy} & 0 & -K_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{dz} & -K_{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_x^i \\ \varphi_z^i \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -(\sigma'_x + \omega'_{dx}) \\ -(\sigma'_y + \omega'_{dy}) \\ K_{dy}(\nabla'_y + a'_{dy}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-91)$$

显然式(5-90)与(5-91)所对应的二阶系统与四阶系统可独立地进行设计。式(5-90)与式(5-91)所对应的一阶数字滤波修正对准的原理方块图如图5-6所示。

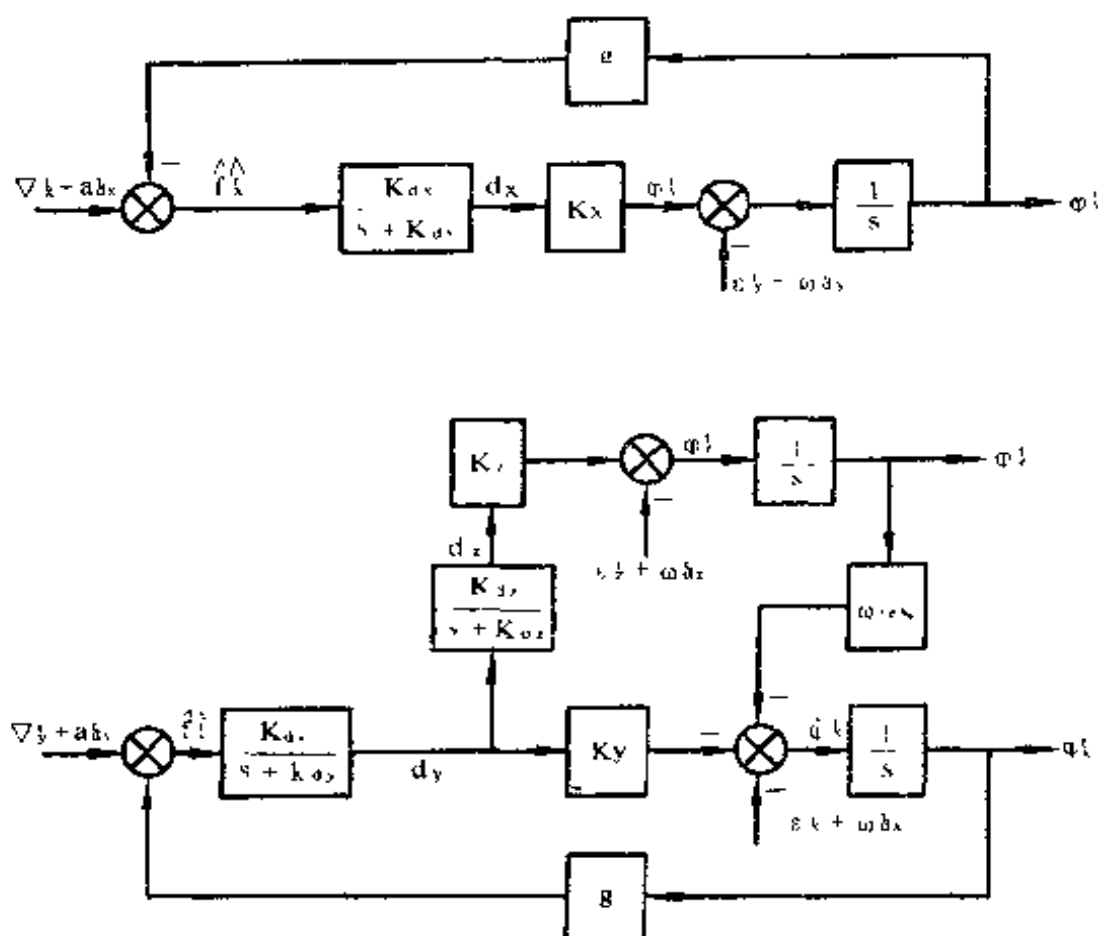


图 5-6 一阶数字滤波修正对准的原理方块图

下面分别对式(5-90)所对应的二阶系统及式(5-91)所对应的四阶系统进行设计。

首先对式(5-90)的二阶系统进行设计。对式(5-90)求

拉氏变换,得

$$\begin{bmatrix} \varphi_y'(s) \\ d_x(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -K_x \\ gK_{dx} & s + K_{dx} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \varphi_y'(0) \\ d_x(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[\varepsilon_y'(s) + \omega_{dy}'(s)] \\ K_{dx}[\nabla_x'(s) + a_{dx}'(s)] \end{bmatrix} \right\} \quad (5-92)$$

二阶系统的特征方程为

$$\Delta_1(s) = \begin{vmatrix} s & -K_x \\ gK_{dx} & s + K_{dx} \end{vmatrix} = s^2 + K_{dx}s + gK_xK_{dx} \quad (5-93)$$

式(5-92)中的逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} s & -K_x \\ gK_{dx} & s + K_{dx} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta_1(s)} \begin{bmatrix} s + K_{dx} & K_x \\ -gK_{dx} & s \end{bmatrix} \quad (5-94)$$

将式(5-93), (5-94)代入式(5-92)可得

$$\begin{bmatrix} \varphi_y'(s) \\ d_x(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + K_{dx}s + gK_xK_{dx}} \begin{bmatrix} s + K_{dx} & K_x \\ -gK_{dx} & s \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varphi_y'(0) \\ d_x(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[\varepsilon_y'(s) + \omega_{dy}'(s)] \\ K_{dx}[\nabla_x'(s) + a_{dx}'(s)] \end{bmatrix} \right\} \quad (5-95)$$

当陀螺、加速度计的误差及飞行器的扰动均为常值时,  $\varphi_y'$  的稳态误差  $\varphi_y'(ss)$  可表示为

$$\varphi_y'(ss) = - \frac{\varepsilon_y' + \omega_{dy}'}{gK_x} + \frac{\nabla_x' + a_{dx}'}{g} \quad (5-96)$$

显然,适当地设计  $K_x$  可使北向陀螺引起的对准误差减小到满足设计要求的程度,而东向加速度计所引起的对准误差则为常数

$$\frac{\nabla_x' + a_{dx}'}{g}$$

当对二阶系统进行动态设计时,可将系统的特征根取为  $-\sigma_1 \pm j\omega_1$ , 则

$$\Delta_1(s) = s^2 + 2\sigma_1 s + (\sigma_1^2 + \omega_1^2) \quad (5-97)$$

对比式 (5-93) 与式 (5-97) 的对应项系数, 可得

$$\begin{aligned} K_{dx} &= 2\sigma_1 \\ K_x &= \frac{\sigma_1^2 + \omega_1^2}{2\sigma_1 g} \end{aligned} \quad (5-98)$$

根据对准的动态性能要求选定  $\sigma_1$ ,  $\omega_1$  以后便可由式 (44) 计算一阶数字滤波器的参数  $K_x$ ,  $K_{dx}$ 。

然后再对式 (5-91) 的四阶系统进行设计。对式 (5-91) 求拉氏变换, 可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varphi_x^i(s) \\ \varphi_x^i(s) \\ d_y(s) \\ d_x(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s & \omega_{icN} & K_y & 0 \\ 0 & s & 0 & -K_x \\ -gK_{dy} & 0 & s + K_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{dx} & s + K_{dx} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\cdot \left\{ \begin{bmatrix} \varphi_x^i(0) \\ \varphi_x^i(0) \\ d_y(0) \\ d_x(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[\varepsilon_x^i(s) + \omega_{dx}^i(s)] \\ -[\varepsilon_x^i(s) + \omega_{dx}^i(s)] \\ K_{dy}[\nabla_y^i(s) + a_{dy}^i(s)] \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (5-99)$$

四阶系统的特征方程为

$$\begin{aligned} \Delta_2(s) &= \begin{vmatrix} s & \omega_{icN} & K_y & 0 \\ 0 & s & 0 & -K_x \\ -gK_{dy} & 0 & s + K_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{dx} & s + K_{dx} \end{vmatrix} \\ &= s^2(s + K_{dy})(s + K_{dx}) - gK_{dy}[-K_{dx}K_x\omega_{icN} \\ &\quad - s(s + K_{dx})K_y] \\ &= s^4 + (K_{dy} + K_{dx})s^3 + (K_{dy}K_{dx} + gK_{dy}K_y)s^2 \\ &\quad + gK_yK_{dy}K_{dx}s + gK_{dy}K_{dx}K_x\omega_{icN} \end{aligned} \quad (5-100)$$

式 (5-99) 中的逆矩阵为

$$= \frac{1}{\Delta_2(s)} \begin{bmatrix} s & \omega_{ieN} & K_y & 0 \\ 0 & s & 0 & -K_z \\ -gK_{dy} & 0 & s + K_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{dx} & s + K_{dx} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\Delta_2(s)} \begin{bmatrix} s(s + K_{dy})(s + K_{dx}) & -\omega_{ieN}(s + K_{dy})(s + K_{dx}) & & \\ gK_{dy}K_{dx}K_z & s(s + K_{dy})(s + K_{dx}) + gK_yK_{dy}(s + K_{dx}) & & \\ gK_{dy}(s + K_{dx})s & -gK_{dy}\omega_{ieN}(s + K_{dy}) & & \\ gK_{dy}K_{dx}s & -gK_{dy}K_{dx}\omega_{ieN} & & \\ -K_y(s + K_{dx})s - \omega_{ieN}K_zK_{dx} & -K_z(s + K_{dy})\omega_{ieN} & & \\ K_zK_{dx}s & gK_yK_zK_{dy} + K_z(s + K_y)s & & \\ s^2(s + K_{dx}) & -\omega_{ieN}gK_zK_{dy} & & \\ K_{dx}s^2 & s^2(s + K_{dy}) + gK_yK_{dy}s & & \end{bmatrix} \quad (5-101)$$

由式(5-99), (5-100), (5-101)可以求出各项误差源所引起的误差。当陀螺、加速度计的误差及飞机扰动均为常值时,  $\varphi_x^i$  与  $\varphi_z^i$  的稳态误差  $\varphi_x^i(ss)$  与  $\varphi_z^i(ss)$  为

$$\begin{aligned} \varphi_x^i(ss) &= \frac{\varepsilon_z^i + \omega_{dz}^i}{gK_x} - \frac{\nabla_y^i + a_{dy}^i}{g} \\ \varphi_z^i(ss) &= -\frac{\varepsilon_x^i + \omega_{dx}^i}{\omega_{ieN}} - \frac{K_y(\varepsilon_z^i + \omega_{dz}^i)}{K_x\omega_{ieN}} \end{aligned} \quad (5-102)$$

由上式可以看出, 方位陀螺引起的误差可通过适当地设计  $K_x$  和  $K_z$  而减小之, 东向陀螺引起的误差比较严重, 为

$$-\frac{\varepsilon_x^i + \omega_{dx}^i}{\omega_{ieN}}$$

而北向加速度计引起的误差则为常数

$$K_r = \frac{\sigma_1^2}{4g\omega_{ieN}}$$

综上所述可以看出，初始对准的精度可根据对准的稳态误差获得，而初始对准时间的要求则根据系统的特征根的设置而满足。

根据本章 § 5-2 及本节所介绍的原理，将图 5-1 中的对准修正用图 5-5 的一阶数字滤波器来代替便可得到完整的初始对准原理方块图。对上述的方块图编制成初始对准的软件程序，装入系统的软件之中。这样，当捷联系统进入初始对准的工作状态时，便可将陀螺与加速度计的测量值输入计算机，由计算机完成初始对准，最后给出满足一定对准要求的方向余弦矩阵  $C_i$  (即捷联矩阵  $T$ ) 的初始值。

本节我们只讨论了一阶数字滤波方案。在上面的分析中将飞行器的干扰取为常值，实际上飞行器的干扰运动是随机的。在捷联环境下进行初始对准的主要问题之一就是消除飞行器干扰运动引起的误差，而解决这个问题的理想方案就是采用卡尔曼滤波技术。实现卡尔曼滤波的关键就是合理地建立惯性敏感元件的误差模型及飞行器干扰运动的统计数学模型。对于干扰运动的模型要针对具体飞行器在对准时的工作条件来研究；而惯性敏感元件的误差模型则要在元件的制造工艺水平达到一定稳定水平时才有意义。为解决捷联条件下初始对准的技术问题，还要做大量的分析与测试工作。



## 第六章 捷联惯导系统的数学模型

通过前几章的分析我们已经对捷联惯导系统的工作机理有了较全面的认识,在此基础上我们就有可能获得整个系统的数学模型及其机上执行算法。本章就来讨论捷联惯导系统的数学模型、机上执行算法、以及系统的数字仿真等问题。

### § 6-1 系统的数学模型编排

在前几章的分析的基础上,我们可以画出捷联惯导系统的原理方块图,如图 6-1 所示。图中示出的所有方块所对应的计算公式在前几章中都已推导给出,本节除了将它们汇总给出以外,还在此基础上进一步讨论与捷联计算有关的一些问题。

#### 一、四元数 $Q$ 的即时修正

基于第三章及第四章所得出的结论,我们选择四元数法作为捷联矩阵即时修正的算法。

设机体坐标系相对平台坐标系的转动四元数为

$$Q = q_0 + q_1 i_b + q_2 j_b + q_3 k_b \quad (6-1)$$

$Q$  的即时修正可通过解下面的四元数微分方程来实现:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{pbx}^b & -\omega_{pby}^b & -\omega_{pbz}^b \\ \omega_{pbx}^b & 0 & \omega_{pbz}^b & -\omega_{pby}^b \\ \omega_{pby}^b & -\omega_{pbz}^b & 0 & \omega_{pbx}^b \\ \omega_{pbz}^b & \omega_{pby}^b & -\omega_{pbx}^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

ST-start

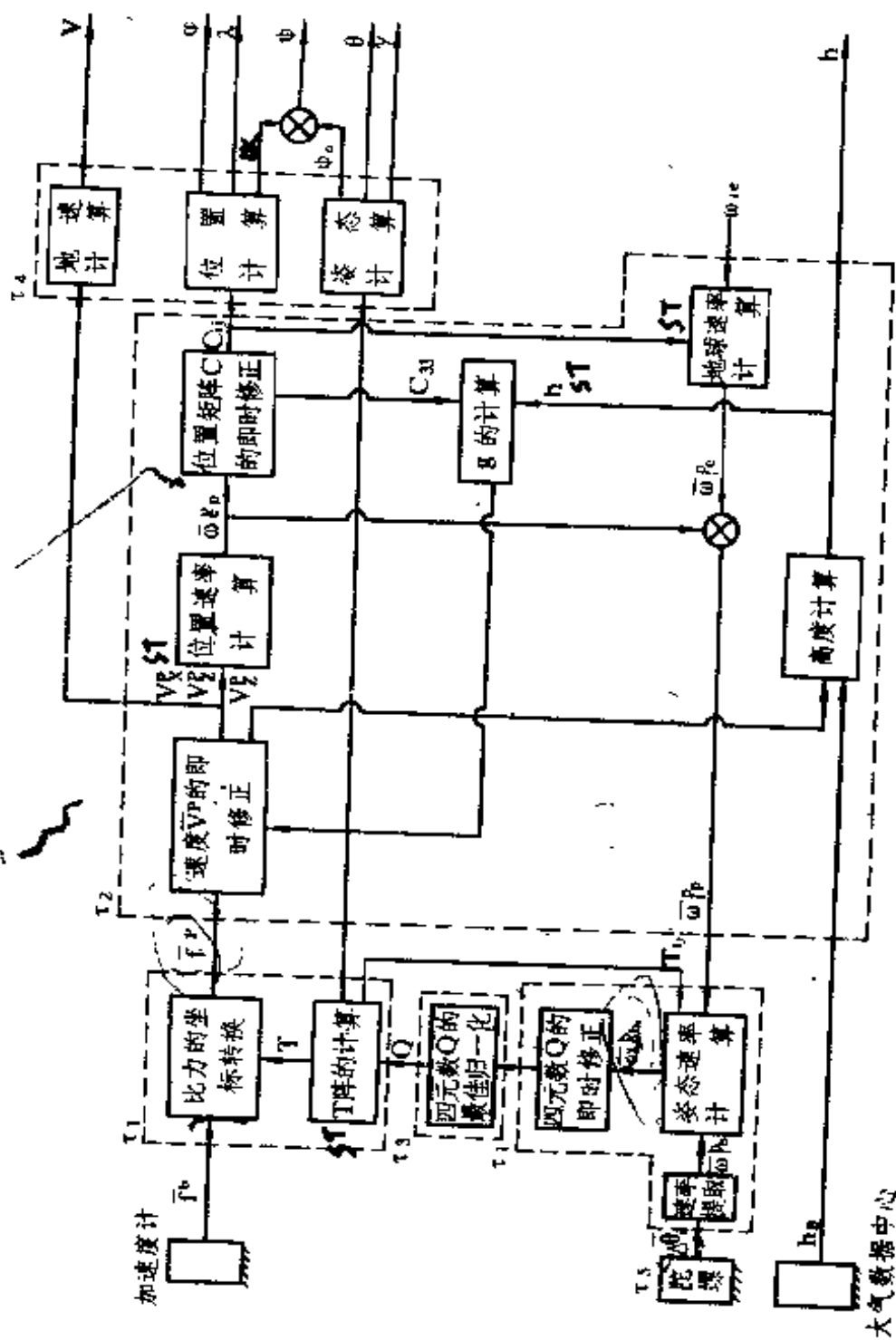


图 6-1 捷联惯导系统原理方块图

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 2\omega_{icx}^p & -(2\omega_{icy}^p + \omega_{cpz}^p) \\ -2\omega_{icx}^p & 0 & 2\omega_{icx}^p + \omega_{cpz}^p \\ 2\omega_{icy}^p + \omega_{cpz}^p & -(2\omega_{icx}^p + \omega_{cpz}^p) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

## 六、地速计算

通常将飞行器相对地球的运动速度在水平面的投影称为地速  $V$ ，它可由下式计算：

$$V_g = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad \sqrt{p} \quad (6-7)$$

## 七、位置矩阵的即时修正

位置矩阵  $C = C^p$  可以通过求解下列的矩阵微分方程而获得：

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega_{cpz}^p \\ \omega_{cpz}^p & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{cpz}^p & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

将位置矩阵  $C$  与姿态矩阵（即捷联矩阵） $T$  的即时修正相比较可以看出，由于位置矩阵的变化比姿态矩阵慢得多，所以它要求的即时修正的频率也要慢得多，而且不存在明显的非正交化误差，勿需进行正交化处理。于是用方向余弦法进行即时修正与用四元数法进行即时修正所费的机时相差不多，而且又可直接求出位置矩阵  $C$ ，免去了四元数法用类似于式 (6-3) 的公式计算矩阵  $T$  的麻烦。因此对于位置矩阵的即时修正往往采用方向余弦法。

## 八、位置速率计算

对于游动方位系统, 由于  $\omega_{px}^p = 0$ , 因此

$$\begin{bmatrix} \omega_{px}^p \\ \omega_{py}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_a} & -\frac{1}{R_{yp}} \\ \frac{1}{R_{xp}} & \frac{1}{r_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \quad (6-9)$$

式中的  $r_a$ 、 $R_{xp}$ 、 $R_{yp}$  可通过下式计算:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{yp}} &= \frac{1}{R_e} (1 - eC_{33}^2 + 2eC_{23}^2) \\ \frac{1}{R_{xp}} &= \frac{1}{R_e} (1 - eC_{33}^2 + 2eC_{13}^2) \\ \frac{1}{r_a} &= \frac{2e}{R_e} C_{13}C_{23} \end{aligned} \quad (6-10)$$

式中位置矩阵  $C$  的元素在位置矩阵的即时修正中获得; 式中

取  $R_e = 6378.393$  公里,  $\frac{1}{R_e} = 0.15678 \times 10^{-6}$  1/米,  $e = \frac{1}{297}$   
 $= 0.3367 \times 10^{-3}$ .

## 九、地球速率的计算

地球速率  $\omega_{ie}^e$  经矩阵  $C$  转换为  $\omega_{ie}^p$ , 即

$$\omega_{ie}^p = \begin{bmatrix} \omega_{ie}^{px} \\ \omega_{ie}^{py} \\ \omega_{ie}^{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ie} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{ie}C_{13} \\ \omega_{ie}C_{23} \\ \omega_{ie}C_{33} \end{bmatrix} \quad (6-11) \text{ long}$$

sing

## 十、姿态速率的计算

姿态速率  $\omega_{pb}^b$  可通过下式计算:

$$\omega_{pb}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{ip}^b = \omega_{ib}^b - T^{-1}(\omega_{cp}^p + \omega_{ie}^p) \quad (6-12)$$

## 十一、姿态角的计算

姿态矩阵可以表示为  $\phi_G$ 、 $\theta$ 、 $\gamma$  的关系, 即

$$T = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \phi_G - \sin \gamma \sin \theta \sin \phi_G & -\cos \theta \sin \phi_G \\ \cos \gamma \sin \phi_G + \sin \gamma \sin \theta \cos \phi_G & \cos \theta \cos \phi_G \\ -\sin \gamma \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \gamma \cos \phi_G + \cos \gamma \sin \theta \sin \phi_G \\ \sin \gamma \sin \phi_G - \cos \gamma \sin \theta \cos \phi_G \\ \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6-13)$$

由式 (6-13) 中所表示的矩阵  $T$  的元素  $T_{12}$ ,  $T_{22}$ ,  $T_{32}$ ,  $T_{31}$ ,  $T_{33}$  可由下式计算  $\phi_G$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$  的主值:

$$\begin{aligned} \theta_{\pm} &= \sin^{-1} T_{32} \\ \gamma_{\pm} &= \tan^{-1} \frac{-T_{31}}{T_{33}} \\ \phi_{G\pm} &= \tan^{-1} \frac{-T_{12}}{T_{22}} \end{aligned} \quad (6-14)$$

由  $\theta_{\pm}$ ,  $\gamma_{\pm}$ ,  $\phi_{G\pm}$  判断其真值  $\theta$ ,  $\gamma$ ,  $\phi_G$  的公式是

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_{\pm} \\ \gamma &= \begin{cases} \gamma_{\pm} & \text{当 } T_{33} > 0 \text{ 时} \\ \gamma_{\pm} + 180^\circ & \text{当 } T_{33} < 0 \text{ 且 } \begin{cases} \gamma_{\pm} < 0 \\ \gamma_{\pm} > 0 \end{cases} \text{ 时} \\ \gamma_{\pm} - 180^\circ & \end{cases} \\ \phi_G &= \begin{cases} \phi_{G\pm} & \text{当 } T_{22} > 0 \text{ 且 } \begin{cases} \phi_{G\pm} > 0 \\ \phi_{G\pm} < 0 \end{cases} \text{ 时} \\ \phi_{G\pm} + 360^\circ & \\ \phi_{G\pm} + 180^\circ & \text{当 } T_{22} < 0 \text{ 时} \end{cases} \end{aligned} \quad (6-15)$$

注意由上式求出的  $\theta$ ,  $\gamma$  为飞行器的姿态角, 而  $\phi_G$  为格网航向角, 飞行器的航向角还有待于求出平台坐标系的游动方位角  $\alpha$  后才能计算。

在由矩阵  $T$  的元素求  $\phi_G$ ,  $\gamma$  的过程中, 当反正切函数的自变量的分子或分母趋于零时将会产生较大的误差, 甚至导致计算机溢出。特别是当俯仰角  $\theta \rightarrow \pm 90^\circ$  时, 飞行器的三

个转动自由度将退化为两个转动自由度，这时姿态角的定义与计算方法应做相应的改变。详见参考文献[11]。

## 1.2 十二、位置计算

位置矩阵  $C$  可以表示成  $\lambda, \varphi, \alpha$  的关系，即

$$C = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \sin \varphi \cos \lambda - \cos \alpha \sin \lambda & -\sin \alpha \sin \varphi \sin \lambda + \cos \alpha \cos \lambda & \sin \alpha \cos \varphi \\ -\cos \alpha \sin \varphi \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda & \cos \alpha \sin \varphi \sin \lambda - \sin \alpha \cos \lambda & \cos \alpha \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (6-16)$$

根据位置矩阵  $C$  的元素  $C_{13}, C_{23}, C_{33}, C_{31}, C_{32}$  可以用下式计算  $\varphi, \lambda, \alpha$  的主值，即

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm} &= \sin^{-1} C_{33} \\ \lambda_{\pm} &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{C_{32}}{C_{31}} \\ \alpha_{\pm} &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{C_{13}}{C_{23}} \end{aligned} \quad (6-17)$$

由  $\varphi_{\pm}, \lambda_{\pm}, \alpha_{\pm}$  判断其真值  $\varphi, \lambda, \alpha$  的公式是

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{\pm} \\ \lambda &= \begin{cases} \lambda_{\pm} & \text{当 } C_{31} > 0 \text{ 时} \\ \lambda_{\pm} + 180^\circ & \text{当 } C_{31} < 0 \text{ 且 } \lambda_{\pm} < 0 \text{ 时} \\ \lambda_{\pm} - 180^\circ & \text{当 } C_{31} < 0 \text{ 且 } \lambda_{\pm} > 0 \text{ 时} \end{cases} \\ \alpha &= \begin{cases} \alpha_{\pm} & \text{当 } C_{23} > 0 \text{ 且 } \alpha_{\pm} > 0 \text{ 时} \\ \alpha_{\pm} + 360^\circ & \text{当 } C_{23} > 0 \text{ 且 } \alpha_{\pm} < 0 \text{ 时} \\ \alpha_{\pm} + 180^\circ & \text{当 } C_{23} < 0 \text{ 时} \end{cases} \end{aligned} \quad (6-18)$$

由  $T$  的元素求  $\lambda, \alpha$  时也会遇到与求  $\phi_G, \gamma$  相类似的问题。文献[12]给出了解决这一问题的方法。

### 十三、飞机航向角的计算

飞机的航向角  $\psi$  可由下式计算

$$\psi = \psi_G + \alpha \quad (6-19)$$

为了使  $\psi$  不超出航向角的定义域还应做如下判断

$$\psi \leftarrow \begin{cases} \psi & \text{当 } \psi < 360^\circ \text{ 时} \\ \psi - 360^\circ & \text{当 } \psi \geq 360^\circ \text{ 时} \end{cases} \quad (6-20)$$

### 十四、高度计算

对于捷联惯导系统的高度通道, 应按照不同的方案进行具体计算。例如对于图 2-21 所示的引入外部高度信息进行阻尼的方案, 应首先设计出  $K_1, K_2, K_3, K_4$  的值, 然后采用积分算法进行二次积分便可实时地算出高度。捷联系统的高度通道同样是用计算机软件程序来实现的。

### 十五、重力加速度 $g$ 的计算

在以上给出的公式 (6-6) 中包含有重力加速度  $g$ 。而  $g$  并非常数。式 (2-93) 给出了计算  $g$  的近似公式, 即

$$g = g_0 \left( 1 - \frac{2h}{R} \right)$$

式中  $g$  随高度  $h$  而变。当考虑到地球的椭球度时,  $g$  还与纬度  $\varphi$  有关。文献 [13] 给出了  $g$  的计算公式, 经换算后可得

$$g = 9.7803 + 0.051799 C_{33}^I - 0.94114 \times 10^{-6} h \text{ (米/秒}^2\text{)} \quad (6-21)$$

式中  $C_{33} = \sin^2 \varphi$ , 其值在矩阵  $C$  的即时修正时给出。

## § 6-2 初始条件的给定与 初始数据的计算

为了进行上一节所列举的各种计算, 需要事先知道两类

数据,一类是开始计算时给定的初始条件,另一类是通过计算获得的初始数据。

### 一、初始条件的给定

飞行器在从静止状态进入飞行状态以前,需要给定起飞前的初始条件。

#### 1. 初始位置 $\lambda_0, \varphi_0, h_0$

$\lambda_0, \varphi_0$  是起飞地点的经度和纬度。 $h_0$  为起飞时的高度,通常取  $h_0 = 0$ 。

#### 2. 初始速度

对于从静止状态开始起飞的情况可取  $V_{x0} = V_{y0} = V_{z0} = 0$ 。

#### 3. 初始游动方位角 $\alpha_0$

通常可将初始游动方位角选为  $\alpha_0 = 0$ 。

### 二、初始数据的计算

#### 1. 捷联矩阵初始值 $T_0 = C_b^p$ 的确定

当初始游动方位角  $\alpha_0 = 0$  时,  $C_b^p = C_b^i$ 。 $C_b^i$  可在初始对准中确定,如第五章所述。

#### 2. 初始姿态角的计算

飞行器的初始姿态角可根据初始对准时获得的  $T = C_b^p = C_b^i$  的初始值由式(6-14)与(6-15)计算。由于初始游动方位角  $\alpha_0 = 0$ ,  $\phi_0$  即  $\psi_0$ 。

#### 3. 初始四元数 $Q$ 的计算

由式(6-3)的对角线元素及四元数约束方程可得

$$\begin{aligned} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 &= T_{11} \\ q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 &= T_{22} \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 &= T_{33} \\ q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (6-22)$$



$\omega_{cp}^p$  的初始值可根据式 (6-9), (6-10) 计算出。在初始时因  $V_x = V_y = 0$ , 故  $\omega_{cp}^p = 0$ 。

### 7. 重力加速度 $g$ 的初始值的计算

$g$  的初始值可根据  $C_u$  与  $h$  的初始值, 由式 (6-21) 计算, 起飞时取  $h = 0$ 。

### 8. 地速 $V$ 的初始值的计算

地速  $V$  的初始值可由式 (6-7) 计算。当初值的  $V_x = V_y = 0$  时,  $V = 0$ 。

以上各项初值的计算可调用预先编好的子程序进行。

## § 6-3 系统的机上执行算法

捷联计算所涉及的算法问题很多, 前两节介绍的各种计算公式都要在计算机上通过一定的算法来完成。本节只介绍捷联计算中最基本两个机上执行算法问题。

### 一、微分方程的数值积分算法

在捷联系统的计算中要解三组微分方程, 或称为进行三种即时修正, 即速度的即时修正, 位置矩阵的即时修正及四元数的即时修正。对这些方程无法求得解析解或精确解, 而只能求数值解。由于用数字计算机求解微分方程是在每个步长  $\tau$  内根据  $t$  时刻的值对  $t + \tau$  时刻的值进行修正, 因此不管微分方程的个数有多少, 求解的方法都相同。下面仅就一个微分方程的数值解法来介绍数值积分算法的概念。

#### 1. 微分方程数值解法的含义

设有微分方程

$$\dot{y}(t) = f[\omega(t), y, t] \quad (6-25)$$

式中  $t$  是自变量, 这里是时间,  $\omega$  为随时间变化的量, 即变系

数。给定  $\omega(t)$  在一系列的时间离散点

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

的值

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$$

及  $y(t)$  的初始条件

$$y(t_0) = y_0$$

求解  $y = y(t)$  在下述一系列时间离散点的值:

$$y(t_1) = y_1, \quad y(t_2) = y_2, \cdots, \quad y(t_n) = y_n$$

设进行数值积分的步长为  $\tau$ , 它可以是定步长, 也可以是变步长。本节只讨论定步长的情况。图 6-2 中示出了数值解法的几何意义。根据微分中值定理可知, 积分算法的实质就是求

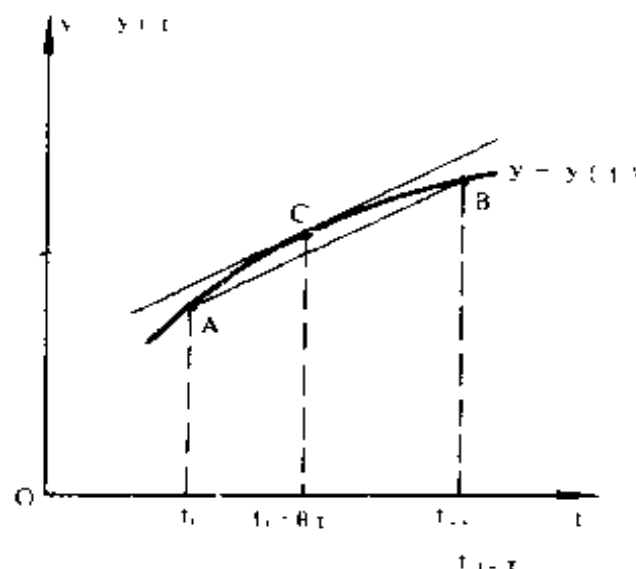


图 6-2 微分方程数值解法的几何意义

平均斜率, 即图中与  $AB$  线平行的  $y = y(t)$  的切线(切点为  $C$ )的斜率, 该平均斜率为

$$\dot{y}(t_i + \theta\tau) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{\tau} = K$$

式中  $0 < \theta < 1$ ,  $i$  为  $0, 1, 2, \cdots, n-1$  中的一个数, 且  $A$

点的坐标为 $(t_i, y_i)$ ,  $B$ 点的坐标为 $(t_{i+1}, y_{i+1})$ ,  $C$ 点的坐标为 $(t_i + \theta\tau, y(t_i + \theta\tau))$ 。由图可以看出,  $y(t_{i+1})$  的数值为

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \tau K \quad (6-26)$$

显然平均斜率 $K$ 求得越准确, 式(6-26)的计算精度也就越高。不同的数值积分算法就是求平均值 $K$ 的不同方法。

## 2. 求解微分方程的数值积分算法

### (1) 一阶欧拉算法

图 6-3 中示出了一阶欧拉算法的几何意义。由图可知,  $(t_i, y_i)$  点的斜率就被近似地当作平均斜率。由式(6-25)可知

$$y_{i+1} = y_i + \tau f(\omega_i, y_i, t_i)$$

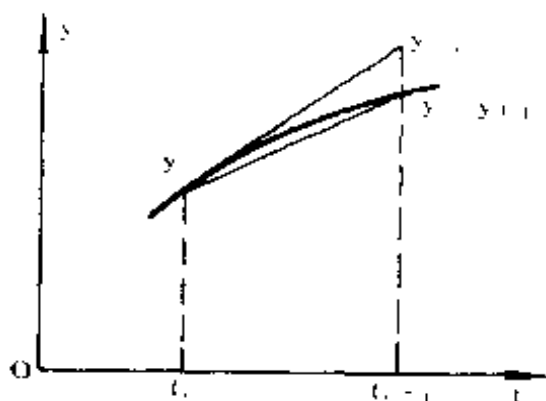


图 6-3 一阶欧拉算法的几何意义

### (2) 二阶龙格-库塔法

对于一阶欧拉法进行改进, 使求得的平均斜率更精确一些, 则可得二阶龙格-库塔法。

在用一阶欧拉法求得点 $(x_i, y_i)$ 点的斜率 $K_i = f(\omega_i, y_i, t_i)$ 的基础上, 可得 $t_{i+1}$ 点处 $y$ 的预报值, 即

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \tau f(\omega_i, y_i, t_i)$$

及 $t_i$ 点的斜率值

$$K_i = f(\omega_i, y_i, t_i)$$

再由  $t_{i+1}$  点的预报值  $\tilde{y}_{i+1}$  求  $t_{i+1}$  点的斜率值

$$K_2 = f(\omega_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}, t_{i+1})$$

然后求平均斜率

$$K = \frac{1}{2} (K_1 + K_2)$$

该平均斜率比一阶欧拉法所求的斜率更接近于真实的平均斜率。从而

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\tau}{2} (K_1 + K_2)$$

由以上论述可以看出,二阶龙格-库塔法比一阶欧拉法的计算工作量增加了一倍,但计算的精度提高了。

### (3) 四阶龙格-库塔法

四阶龙格-库塔法的实质就是在  $(t_i, t_{i+1})$  之间多求几个斜率值,予以加权求平均,从而得到更精确的平均斜率。如图 6-4 所示,四阶龙格-库塔法在  $t_i$  与  $t_{i+1}$  的中点  $t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{\tau}{2}$  处增加一个计算点,在这点求两次预报值与斜率值。仿照二阶龙格-库塔法可将四阶龙格-库塔法的求解步骤归纳如下。

首先第一次求斜率  $K_1$ 。根据  $t_i$  点的  $y_i$  值可计算点  $(t_i,$

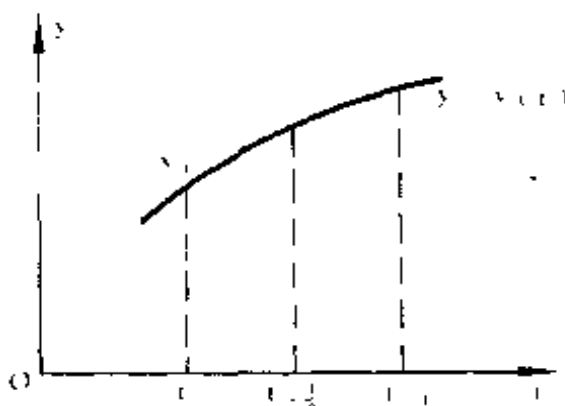


图 5-4 四阶龙格-库塔法的几何意义

$y_i$  处的斜率

$$K_1 = f(\omega_i, y_i, t_i)$$

然后根据  $K_1$  对  $t_{i+\frac{1}{2}}$  点的值进行一次预报

$$\tilde{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{\tau}{2} K_1$$

然后第二次求  $t_{i+\frac{1}{2}}$  点的斜率  $K_2$ , 即

$$K_2 = f\left(\omega_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{\tau}{2} K_1, t_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

然后利用  $K_2$  再次对  $t_{i+\frac{1}{2}}$  点的值进行预报, 即

$$\tilde{y}'_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{\tau}{2} K_2$$

再第三次求  $t_{i+\frac{1}{2}}$  处的斜率  $K_3$

$$K_3 = f\left(\omega_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{\tau}{2} K_2, t_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

并以斜率  $K_3$  对  $t_{i+1}$  点的值进行预报, 即

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \tau K_3$$

最后, 第四次求  $t_{i+1}$  处的斜率  $K_4$

$$K_4 = f(\omega_{i+1}, y_i + \tau K_3, t_{i+1})$$

在取平均斜率时, 我们认为  $K_2, K_3$  对平均斜率的影响较强, 因此将  $K_2, K_3$  的加权系数取为 2, 而将  $K_1, K_4$  的加权系数取为 1。从而可得四阶龙格-库塔法斜率的加权平均值, 即平均斜率

$$K = \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (6-27)$$

最后可得  $t_{i+1}$  时的即时值

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\tau}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (6-28)$$

6-5(a) 中, 由  $t_i$  至  $t_i + \frac{\tau}{2}$  积累的角增量为  $\Delta\theta_{i1}$ , 由  $t_i$  至  $t_i + \tau$  积累的角增量为  $\Delta\theta_{i2}$ 。当周期  $\tau$  足够小时, 我们认为  $\omega$

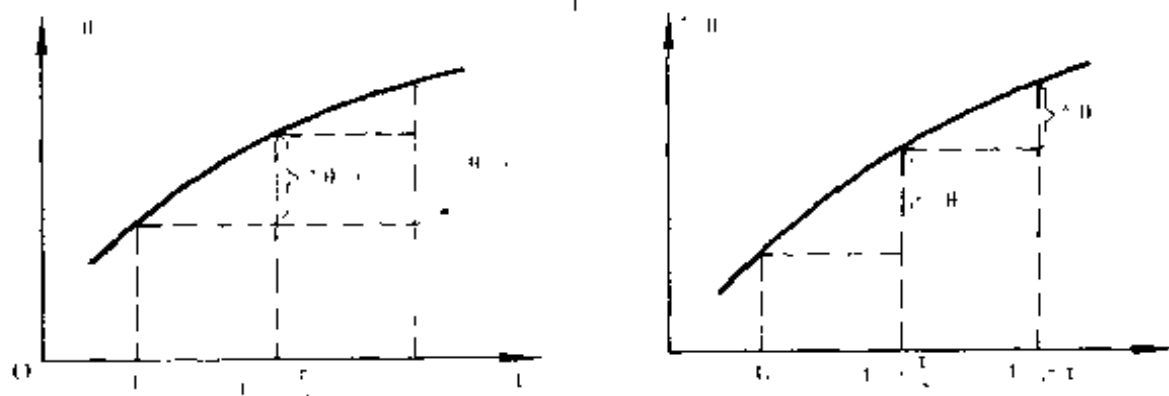


图 6-5 二阶速率的提取  
(a) 方法一; (b) 方法二

在时间区间  $(t_i, t_i + \tau)$  之间是线性增长的, 即有

$$\omega_i(t_i + \xi) = \alpha + \beta\xi \quad (6-29)$$

式中  $\alpha$  为  $\omega(t_i)$  的初值,  $\beta$  表示角加速度, 在周期  $\tau$  内为常值,  $\xi$  表示由  $t_i$  开始积累的一段时间。于是由  $t_i$  至  $t_i + \xi$  的角增量为

$$\begin{aligned} \Delta\theta_i(t_i + \xi) &= \int_{t_i}^{t_i + \xi} \omega_i(t_i + \xi) d\xi \\ &= \int_{t_i}^{t_i + \xi} (\alpha + \beta\xi) d\xi = \alpha\xi + \frac{1}{2}\beta\xi^2 \quad (6-30) \end{aligned}$$

由式 (6-30) 可求出  $\Delta\theta_{i1}$ ,  $\Delta\theta_{i2}$  的表达式, 即

$$\Delta\theta_{i1} = \alpha \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\beta \left(\frac{\tau}{2}\right)^2$$

$$\Delta\theta_{i2} = \alpha\tau + \frac{1}{2}\beta\tau^2$$

对上述二式联立求解可得

$t_1$  和  $t_2$

#### (4) 比力的坐标转换

沿机体坐标系测量的比力要通过矩阵  $T$  转换到平台坐标系上。由于矩阵  $T$  的变化很快, 该转换也应以较快的周期  $\tau_1$  进行。

事实上加速度计测量的是沿机体坐标系的速度增量。每  $\tau_1$  秒将该增量向平台坐标系转换一次, 与前个  $\tau_1$  周期所得的速度增量相累加。由于平台坐标系的变化速度较慢, 转换到平台坐标系的速度增量最后求和以后再以较慢的迭代周期  $\tau_2$  进行以后的导航计算。

##### 2. 周期为 $\tau_2$ 的部分

图 6-1 中速度  $\bar{V}^p$  的即时修正、位置速率计算、位置矩阵的即时修正、 $g$  的计算、高度计算及地球速率的计算都以较长的迭代周期  $\tau_2$  进行(因为这些参数的变化比较慢)。取  $\tau_2 = m\tau_1$ , 其中  $m$  为正整数。例如可取  $m = 4$ 。

##### 3. 周期为 $\tau_3$ 的部分

对四元数进行即时修正是以迭代周期  $\tau_1$  进行的。但由于捷联矩阵的刻度误差往往要经过几个  $\tau_1$  周期的计算后才会表现出来, 因此四元数的归一化可以较长的周期  $\tau_3$  计算。取  $\tau_3 = k\tau_1$ , 其中  $k$  为正整数。例如取  $k = 8$ 。 $k$  取多少为佳可根据精度的要求通过数字仿真而定。

##### 4. 周期为 $\tau_4$ 的部分

图 6-1 中的地速、位置、姿态等导航参数可以根据导航参数显示频率的需要而选取, 通常以更长的迭代周期  $\tau_4$  来计算。选取  $\tau_4 = n_1\tau_2$ , 其中  $n_1$  为正整数。例如取  $n_1 = 2$ , 即可以在完成一次  $\tau_1$  周期的导航计算后计算位置和地速, 而在完成下一次  $\tau_1$  周期的导航计算后计算姿态。

##### 5. 周期为 $\tau_5$ 的部分

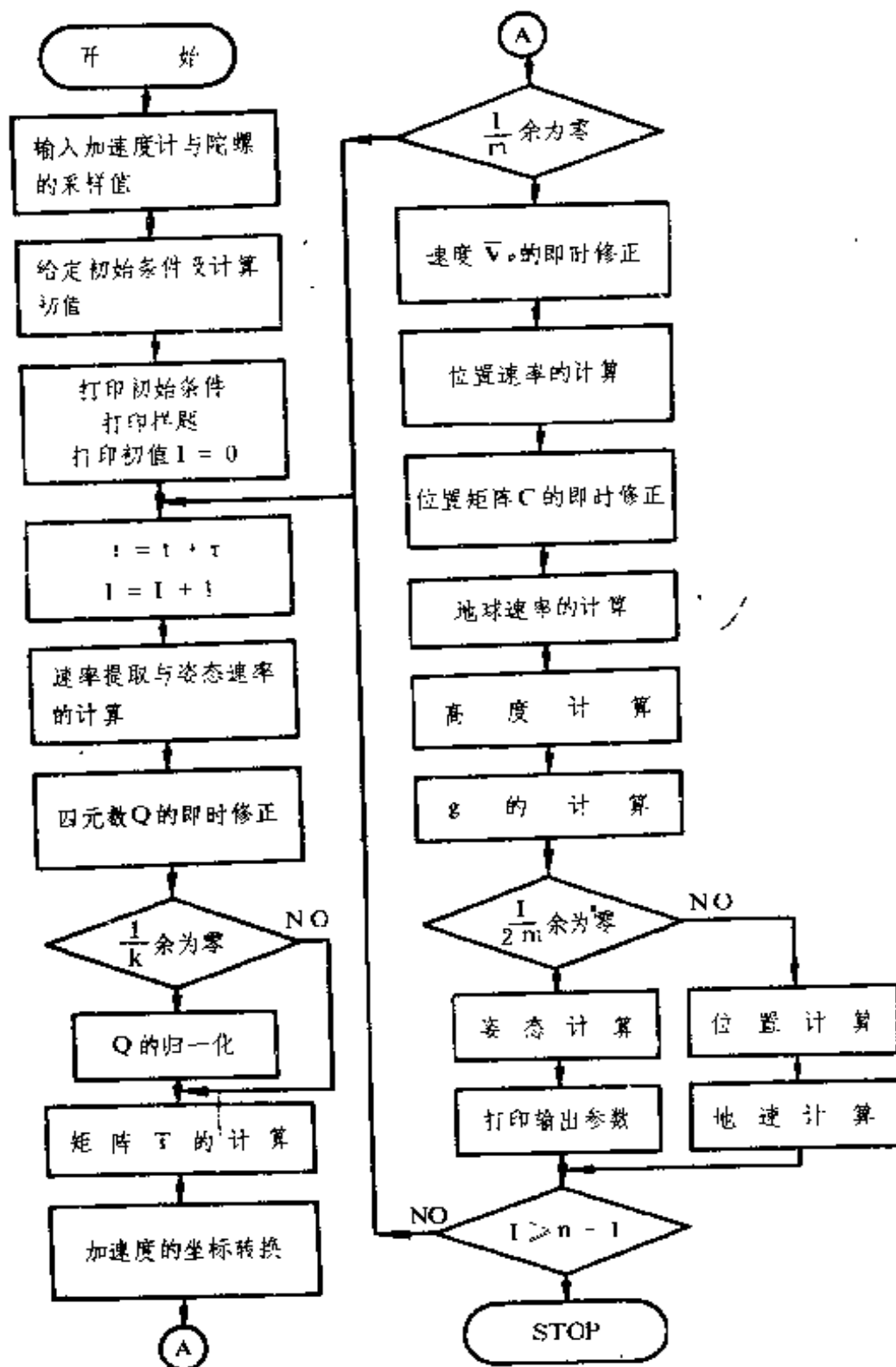


图 6-6 捷联系统基本算法的主程序框图



当采用四阶龙格-库塔法进行四元数的即时修正时要求陀螺的输出应以  $\tau_s = \tau_1/2$  的迭代周期进行采集。将采集到的  $\Delta\bar{\theta}_i$  在  $t_i, t_i + \tau_1/2, t_i + \tau$  的数值输入计算机, 然后每  $\tau$  秒计算一次  $\omega_{ib}^t$  在相应时刻的值。显然  $\tau_s = \tau_1/2$  仅为采集周期, 而不是计算周期, 图中将  $\tau_s$  注在陀螺方框的上角。

## 二、捷联系统基本算法的主程序框图

综上所述可以得出捷联系统基本算法的主程序框图, 如图 6-6 所示。为了便于计算迭代次数取基本迭代周期  $\tau_1$ , 并用正整数  $l$  表示累积迭代次数。当  $t = 0$  时,  $l = 0$ ; 当  $t = \tau_1$  时,  $l = 1$ ; 当  $t = 2\tau_1$  时,  $l = 2$ ;  $\dots\dots$ 。每  $\tau_2 = m\tau_1$  秒进行一次周期为  $\tau_2$  的计算, 可由  $l/m$  的余数是否为零来判断。其余的迭代周期的处理方法与  $\tau_2$  相同。在图 6-6 所进行的导航参数计算中取  $\tau_2 = n_2 m \tau_1$ , 取  $n_2 = 2$ 。总的计算时间为  $t_1$ , 则总的迭代次数为  $n = INT[t_1/\tau_1]$ , 式中  $INT$  表示对方括弧内的实型数取整数的意思。 $t_1$  可根据需要输入至计算机中。应该指出, 图 6-6 所表示的框图只是表示基本算法的程序, 而不是机上使用的实时程序。

## 第七章 捷联敏感元件 的余度技术

捷联系统优于平台系统的最突出的特点就是便于采用余度技术来提高系统的可靠性与精度。本章就来讨论余度技术在捷联系统中的应用。由于对于陀螺与加速度计采用余度技术的原则均相同，因此本章仅以陀螺为对象来展开讨论。至于加速度计的余度方案完全可以依此而类推。

### § 7-1 系统的可靠性与余度技术

#### 一、系统的可靠性

随着科学技术的发展，人们对系统可靠性的重视程度越来越提高了。系统的可靠性不仅直接反映着系统的质量指标，而且关系到整个系统运转过程的成败，是系统价值的判断基准之一（判断基准包括性能、时间、费用、可靠性及适应性等），同时也是管理工作最重要的问题之一<sup>[14]</sup>。

在平台惯导系统中，通常惯性敏感元件（陀螺与加速度计）是沿着三个互相正交的轴设置在平台上的。这时，如果有一个敏感元件失效，系统就不能正常工作，也不能再继续执行导航任务了。实际上，在惯性敏感元件中陀螺是可靠性比较低的元件。下面我们就以由三个单自由度陀螺构成的平台惯导系统为例来认识一下系统可靠性的概念。我们把可靠性定义为有效工作的概率。假定三个陀螺具有相同的可靠性，且

每个陀螺的可靠性表示为

$$r = e^{-\lambda t} \quad (7-1)$$

式中  $\lambda$  为正实数,  $1/\lambda$  为一个元件的平均故障间隔时间,  $t$  表示时间<sup>[4][15]</sup>。可见当  $1/\lambda \rightarrow \infty$  时  $r \rightarrow 1$ 。若平台系统中各陀螺出现故障的事件为互相独立的事件, 那么系统的可靠性  $R$  就是单个陀螺可靠性的乘积。于是系统的可靠性可表示为

$$R = e^{-\lambda t} \quad (7-2)$$

由式(7-2)可给出一个分析的实例: 为了使系统在一年时间内的可靠性达到 0.95, 则一个陀螺的平均故障间隔时间应为 58 年。如果再考虑到加速度计和平台结构元件的可靠性, 那么为了提高整个系统的可靠性, 对元件的可靠性要求就更高了。因此只靠提高元件的可靠性来提高系统的可靠性不是最有效的途径。

## 二、提高可靠性的重要方法——采用余度技术

提高可靠性的方法很多, 如比较后备设计、采用大安全系数、使用余度技术(或冗余法)和过应力试验等, 其中采用余度技术是最重要的方法。在一百多条国际航线上使用的民用惯导系统 LTN-51 就是采用了两套惯导系统来提高惯导系统的可靠性的。“阿罗波-13”宇宙飞船正是采用了捷联系统 LM/ASA 做备份才得以平安地返回地球。对于平台惯导系统, 采用余度技术就意味着增加整个系统(包括计算机在内)的套数; 而对于捷联惯导系统, 采用余度技术可以通过采用多个敏感元件并对它们实现最佳配置来完成。

## 三、敏感元件的最佳配置原则

敏感元件的最佳配置是在确定了敏感元件数目的前提下进行配置的。一般说来, 敏感元件个数多的方案优于个数少的方案, 但增加敏感元件的个数又相应地增加了系统的体积、

重量与成本等。对于不同数目的敏感元件都能够按最佳配置的原则实现最佳配置。

在确定敏感元件个数的前题下实现最佳配置的原则一般有以下三条。

第一,具有最高的可靠性。

可靠性高是多余度最佳配置的首要条件。下面举一个例子来说明这一问题。图 7-1 示出了四个双自由度陀螺  $A, B, C, D$  组成的多余度系统。由于每个陀螺有两个敏感轴,可以测量沿两个互相正交的轴的角速率。这样,为了测量飞行器全姿态的角运动只需要三个相互正交的测量轴,从原理上说只要有二个双自由度陀螺即可,显然采用四个陀螺时就有二个多余度陀螺。若采用图 7-1 所示的配置方案,陀螺  $A$  的两

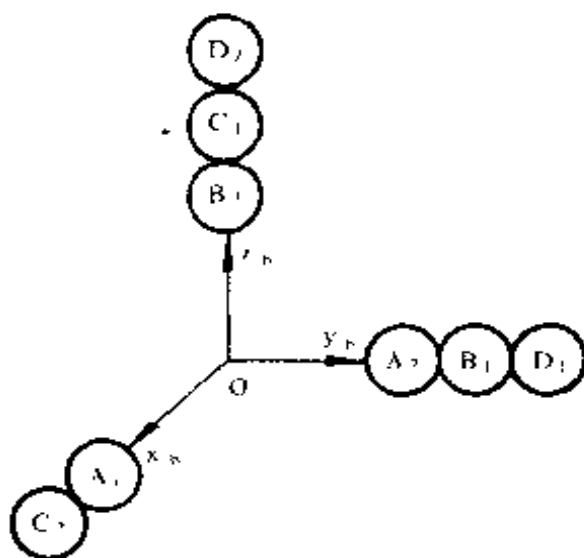


图 7-1 非最佳配置方案

个敏感轴  $A_1, A_2$  分别沿机体坐标系的  $x_b, y_b$  轴配置,陀螺  $B, C, D$  的配置情况也如图中所示。对图 7-1 进行分析可以看出,四个陀螺中的任一陀螺出了故障,系统还能正常工作。若有二个陀螺出了故障,从原理上说还有二个陀螺工作,

系统本应能正常工作。但若是陀螺  $A$ 、 $C$  同时发生故障，剩下的陀螺  $B$ 、 $D$  就不能测量沿  $x_b$  轴的角运动，从而系统就不能提供全姿态信息，满足不了对系统高可靠性的要求。因此图 7-1 所示的敏感元件配置为非最佳配置。然而，若采用图 7-2 所示的配置方案，那么当陀螺  $A$ 、 $C$  失效时，陀螺  $D$  仍能提供沿  $x_b$  轴的测量信息。如果陀螺  $A$ 、 $B$  发生故障，沿  $y_b$  轴的测量信息将由陀螺  $D$  的  $D_2$  敏感轴来承担。总之，只要任意两个陀螺不出故障，系统就仍能正常工作，从而可以提供全姿态信息。由于图 7-2 所示的配置情况能满足最高的可靠性要求，因此是最佳配置。

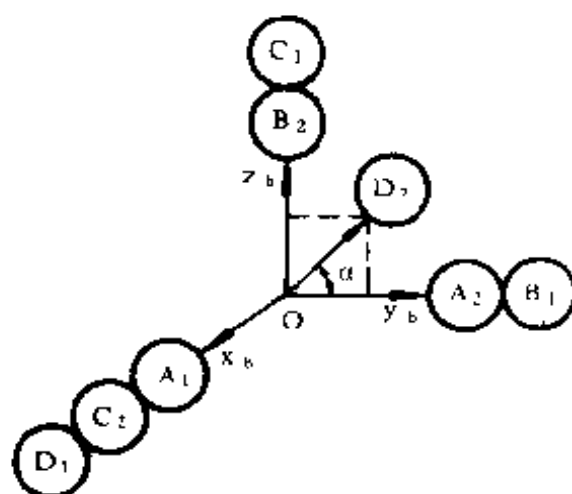


图 7-2 最佳配置方案

第二，由敏感元件的不精确性而引起的测量误差为最小。

为了提高系统的可靠性，我们将图 7-1 中  $D_2$  敏感轴的位置改变为图 7-2 所示的位置，使  $D_2$  敏感轴可以同时敏感  $y_b$  与  $z_b$  轴的角速率分量，即起到一个敏感轴同时敏感两个轴的作用。那么这种配置方案的精度又怎样呢？下面来回答这一问题。

设  $\omega_y$  为待测的飞行器角速率  $\omega$  沿机体坐标系  $y_b$  轴的分

量。而  $D_1$  敏感轴与  $\omega_y$  之间的夹角为  $\alpha$ ，如图 7-3 所示。设由于测量的不精确而引起的测量误差为  $e$ ，则实测的角速率为

$$m = \omega_y \cos \alpha + e \quad (7-3)$$

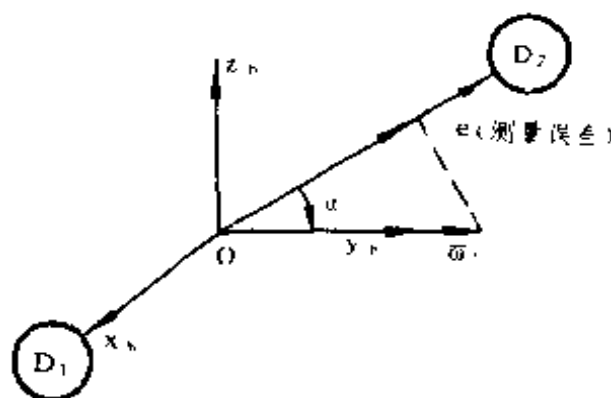


图 7-3  $D_1$  敏感轴的测量误差

若将测量误差  $e$  与精确值  $\omega_y \cos \alpha$  的比值(即误差在精确值中所占的比例)定义为标称误差  $e_N$ ，即

$$e_N = \frac{e}{\omega_y \cos \alpha} \quad (7-4)$$

由式(7-4)可知,当  $\alpha = 0$  时,测量误差最小,即当要测量飞行器沿三个机体轴的角速率时,只有当所有的陀螺敏感轴均沿机体坐标系的坐标轴设置时测量误差才为最小。从测量精度而言,图 7-2 或图 7-3 的  $D_1$  敏感轴不是最佳配置。但若不采用将一个敏感轴斜置的方案(即不与机体坐标系的坐标轴重合),那么由于四个陀螺共有八个敏感轴,因此总有一个敏感轴上只配置有两个陀螺敏感轴,那么当这两个陀螺出故障时系统不能正常工作。由于与可靠性相比精度处于较次要的地位。因而在给定四个双自由度陀螺的条件下,其中至少有一个敏感轴应处于测量精度较低的位置。因此图 7-2 所示的



配置可认为是最佳配置。由图 7-2 可以看出,沿  $y_b$  轴与  $z_b$  轴均只配置有两个陀螺敏感轴,故  $D_2$  敏感轴要同时测量沿  $y_b$  轴与  $z_b$  轴的角速率。为使  $D_2$  敏感轴测量  $\omega_y$  与  $\omega_z$  时都不具有太差的测量精度,可取  $\alpha = 45^\circ$ 。

第三,尽量使计算简化

简化计算的目的是减少计算误差及缩短计算时间。在捷联系统中,陀螺用于测量飞行器的角速率。当敏感轴沿机体坐标系的坐标轴安装时,陀螺可直接输出飞行器沿该坐标轴的角速率,不需要做附加的计算。而采用图 7-3 的配置方案时,为获取飞行器沿  $y_b$  轴的角速率需要根据  $D_2$  敏感轴的测量值做如下的计算才能获取  $\omega_y$  的计算值  $\hat{\omega}_y$ ,即

$$\hat{\omega}_y = \frac{m}{\cos \alpha} \quad (7-5)$$

显然式 (7-5) 的计算要耗费机时并引起新的计算误差。

以上所论述的最佳配置的三条要求是考虑敏感元件的多余度最佳配置方案的主要依据。

## § 7-2 双自由度陀螺的最佳配置

双自由度陀螺是捷联系统中常用的陀螺,例如目前尚在广泛使用着的动力调谐陀螺就是双自由度陀螺。本节就来讨论双自由度陀螺的最佳配置问题。

### 一、关于敏感元件性能管理的概念

这里就以图 7-2 所示的四个双自由度陀螺的最佳配置方案引出敏感元件性能管理的概念。在设置  $D_2$  敏感轴时,取  $\alpha = 45^\circ$ 。

我们将四个陀螺的敏感轴方向及测量结果示于表 7-1 中。

表 7-1 四个陀螺的敏感轴方向及测量结果

陀 螺	敏 感 轴 方 向	测 量 结 果
A	$A_1$ — 沿 $x_b$ 方向	$m_1 = \omega_x$
	$A_2$ — 沿 $y_b$ 方向	$m_2 = \omega_y$
B	$B_1$ — 沿 $y_b$ 方向	$m_3 = \omega_y$
	$B_2$ — 沿 $z_b$ 方向	$m_4 = \omega_z$
C	$C_1$ — 沿 $z_b$ 方向	$m_5 = \omega_z$
	$C_2$ — 沿 $x_b$ 方向	$m_6 = \omega_x$
D	$D_1$ — 沿 $x_b$ 方向	$m_7 = \omega_x$
	$D_2$ — 在 $y_b z_b$ 平面内, 且 $\alpha = 45^\circ$	$m_8 = 0.707\omega_y + 0.707\omega_z$

根据表 7-1 所示的测量结果, 可以将四个双自由度陀螺的测量方程表示为

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (7-6)$$

上式又可表示为

$$\bar{m} = H\bar{\omega} \quad (7-7)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \\ \bar{m} &= [m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4 \ m_5 \ m_6 \ m_7 \ m_8]^T \end{aligned} \quad (7-8)$$



$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.707 \end{bmatrix}^T$$

由表 7-1 与式 (7-6) 可以看出, 每个角速率分量  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  都可以同时被三个陀螺敏感轴所测得。这就提出一个问题: 在三个敏感轴信息中究竟用哪一个敏感轴的信息? 如果其中某个陀螺因发生故障而失效, 那么究竟是哪个陀螺出了故障? 如果已确定是某个陀螺出了故障, 那又将采用什么方法获得输出? 这一系列的问题都需要通过相应的技术措施来解决。因此采用最佳配置的多余度捷联系统必须具有故障检测、故障识别、系统的重构以及数据处理和元件校准等功能。

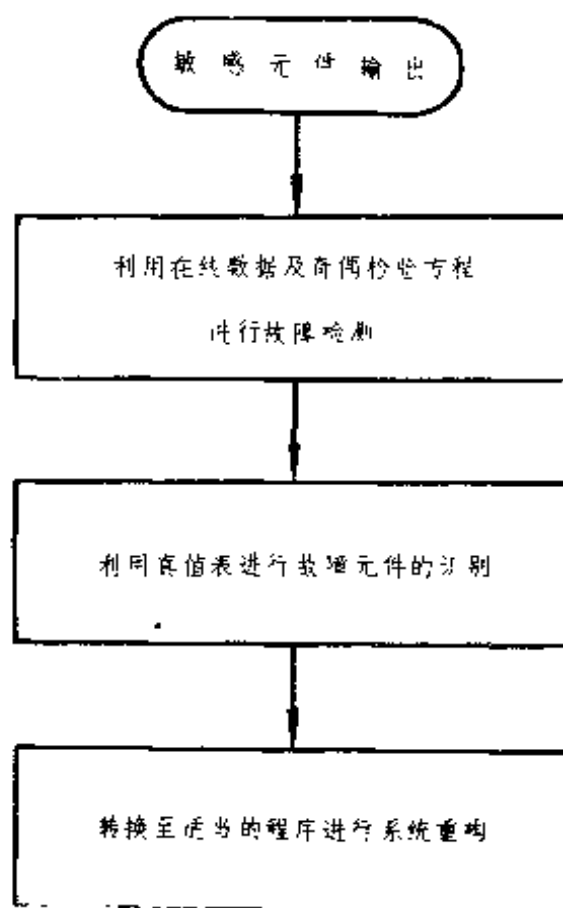


图 7-4 敏感元件性能管理的第一种方案

所有这些功能可以通过一个称之为“敏感元件性能管理”的软件来实现。

敏感元件性能管理的方案可分为以下两种：第一种方案包括故障检测、故障元件的识别以及系统的重构等功能，图 7-4 示出的是最起码的性能管理方案；第二种方案除了第一种方案的功能外还包括确定故障是否是软故障（即通过对测量结果的比较来检测元件的性能是否下降，偏差是否过大等），以及在软故障条件下重新校准元件的能力，如图 7-5 所示。显然第二种方案比第一种方案的管理更完善，但计算机的负担要加重。

下面对敏感元件性能管理的各项功能分别给予介绍。

## 二、故障检测与识别

故障检测的目的在于发现系统中是否有某个元件出现了故障；而故障识别的目的是在于将出故障的元件识别出来并加以隔离。当四个陀螺都正常工作时，从测量方程 (7-6) 可以看出下面的六个奇偶方程必然成立：

$$m_6 - m_7 \approx 0$$

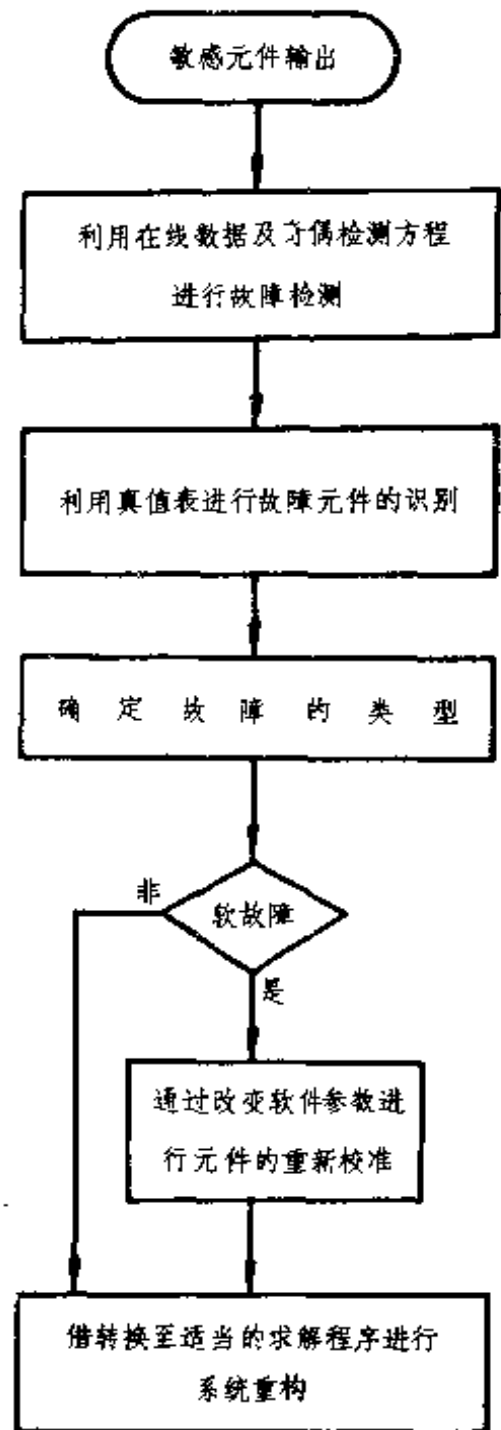


图 7-5 敏感元件性能管理的第二种方案

种工作状态包括失效陀螺超过两个的五种情况，此时只能进行故障检测而不能进行故障识别。实际上，当三个或四个陀螺失效时系统已无法正常工作，这时识别的功能已失去了实际意义。

表 7-2 四陀螺系统的故障检测和识别的真值表

失效陀螺	奇 偶 检 测 值	系统重构的 解算程序元	元 件 性 能 管 理 条 件
	$K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$		
没有	0 0 0 0 0 0	$P_0$	可 以 进 行 故 障 陀 螺 的 检 测 和 失 效 陀 螺 的 识 别
A	0 0 0 1 1 1	$P_1$	
B	0 1 1 0 0 1	$P_2$	
C	1 0 1 0 1 0	$P_3$	
D	1 1 0 1 0 0	$P_4$	
A, B	0 1 1 1 1 1	$P_5$	
A, C	1 0 1 1 1 1	$P_6$	
A, D	1 1 0 1 1 1	$P_7$	
B, C	1 1 1 0 1 1	$P_8$	
B, D	1 1 1 1 0 1	$P_9$	
C, D	1 1 1 1 1 0	$P_{10}$	
A, B, C A, B, D A, C, D B, C, D A, B, C, D	$K_i = 1$ $i = 1 \sim 6$	$P_{11}$ 系统失效，报 告出故障	仅 能 检 测 故 障

### 三、数据处理与系统重构

采用余度技术除了能提高系统的可靠性以外，还可以提供重复的测量数据，并借助于数据处理技术来减小单个陀螺误差的影响。所用的数据处理方法为最小二乘法。

## (2) 复合数量函数对向量的导数

设数量函数  $f$  是向量  $\bar{x}$  的函数, 而向量  $\bar{x}$  又是向量  $\bar{y}$  的函数, 即

$$\begin{aligned} f &= f(\bar{x}) \\ \bar{x} &= \bar{x}(\bar{y}) \end{aligned}$$

则有(证明见附录三)

$$\frac{df}{d\bar{y}} = \frac{d\bar{x}'}{d\bar{y}} \cdot \frac{df}{d\bar{x}} \quad (7-12)$$

## 2. 数据处理方程

对于式(7-7)所示的方程

$$\bar{m} = H\bar{w}$$

设  $\bar{w}$  的计算值用  $\hat{\bar{w}}$  来表示, 而敏感元件的测量值用  $\bar{m}$  来表示。当用最小二乘法求取估计值  $\hat{\bar{w}}$  时, 应使  $\hat{\bar{w}}$  满足如下的等式:

$$(H\hat{\bar{w}} - \bar{m})'(H\hat{\bar{w}} - \bar{m}) = \min \quad (7-13)$$

由式(7-13)我们可以构成如下的复合函数

$$\begin{aligned} f &= f(\bar{x}) = \bar{x}'\bar{x} \\ \bar{x} &= \bar{x}(\hat{\bar{w}}) = H\hat{\bar{w}} - \bar{m} \end{aligned} \quad (7-14)$$

将式(7-14)的  $f$  对  $\hat{\bar{w}}$  求导数, 根据式(7-12)所示的关系可得

$$\frac{df(\bar{x})}{d\hat{\bar{w}}} = \frac{d\bar{x}'}{d\hat{\bar{w}}} \cdot \frac{df(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \quad (7-15)$$

式中

$$\frac{d\bar{x}'}{d\hat{\bar{w}}} = \frac{d}{d\hat{\bar{w}}} (H\hat{\bar{w}} - \bar{m})'$$

根据附录三中的定义式(附 3-5), 可将上式写成

$$\frac{d\bar{x}'}{d\hat{\bar{w}}} = \frac{d}{d\hat{\bar{w}}} (H\hat{\bar{w}})' = H'$$

下面对上式给予证明。由式(7-6)及(7-7)可将  $H\hat{\omega}$  写成一般形式,即

$$\begin{aligned} H\hat{\omega} &= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{n3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_x \\ \hat{\omega}_y \\ \hat{\omega}_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{11}\hat{\omega}_x + h_{12}\hat{\omega}_y + h_{13}\hat{\omega}_z \\ h_{21}\hat{\omega}_x + h_{22}\hat{\omega}_y + h_{23}\hat{\omega}_z \\ \vdots \\ h_{n1}\hat{\omega}_x + h_{n2}\hat{\omega}_y + h_{n3}\hat{\omega}_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由附录三的定义式(附 3-5)可得

$$\frac{d(H\hat{\omega})'}{d\hat{\omega}} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{n1} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{n2} \\ h_{31} & h_{32} & \cdots & h_{n3} \end{bmatrix} = H'$$

由式(7-11)可得

$$\frac{df(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{d}{d\bar{x}} (\bar{x}'\bar{x}) = 2\bar{x}$$

于是式(7-15)可写成

$$\begin{aligned} \frac{df(\bar{x})}{d\hat{\omega}} &= H'(2\bar{x}) \\ &= 2H'(H\hat{\omega} - \bar{m}) = 0 \end{aligned}$$

从而

$$H'H\hat{\omega} = H'\bar{m} \quad (7-16)$$

由上式可得

$$\hat{\omega} = (H'H)^{-1}H'\bar{m} \quad (7-17)$$

式(7-17)就是最佳估计值的数据处理方程。

### 3. 系统的重构

我们在建立数据处理方程(7-17)时,是从所有陀螺的工作均为正常的情况出发。当在系统工作过程中识别出某个陀螺失效时,则测量方程(7-17)中的测量阵 $H$ 及测量值 $\bar{m}$ 中所包含的与该陀螺相对应的行应删去,这样相当于把失效的陀螺隔离了。因此,只要剩下的元件数仍能保证系统正常工作,对于任一组元件都可以按式(7-17)求得最小二乘的最佳估计值 $\hat{\omega}$ 。

例如当陀螺 $A$ 发生故障时,测量值 $m_1$ 及 $m_2$ 已不能再用于数据处理,只要消去测量方程(7-6)中含有 $m_1$ 及 $m_2$ 的行,即可得到

$$\begin{bmatrix} m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (7-18)$$

设 $\bar{m}_1$ 表示消去 $m_1$ 、 $m_2$ 二个元素后的测量向量,用 $H_1$ 表示陀螺 $A$ 失效后的测量阵,即

$$\bar{m}_1 = [m_3 \ m_4 \ m_5 \ m_6 \ m_7 \ m_8]^T$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.707 \end{bmatrix}^T$$

则新的最小二乘数据处理方程为

$$\hat{\omega} = (H_1^T H_1)^{-1} H_1^T \bar{m}_1 \quad (7-19)$$

通常,对于表 7-2 中的程序元 $P_1 \sim P_{10}$ 均可进行系统重构。只要在数据处理方程中选用适当的测量向量 $\bar{m}_i$ 和测量

矩阵  $H_i$  即可完成。重构的程序元  $P_i$  与相对应的测量方程可用下式表示:

$$P_i: \quad \hat{\omega} = (H_i' H_i)^{-1} H_i' \bar{m}_i, \quad i = 1 \sim 10 \quad (7-20)$$

显然,当系统中的某个陀螺失效后,系统要进行重构,这种重构不需改变硬件,只要计算机转去执行相应的程序元即可完成。对于表 7-2 中的最后五种情况,系统不能进行重构,这时计算机应报告整个系统的故障。

为清楚起见,现将四个双自由度陀螺系统在各种故障条件下的程序元  $P_i$  所对应的  $\bar{m}_i$  及  $H_i$  列举如下。

$P_0$ :

$$\bar{m}_0 = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

$P_1$ :

$$\bar{m}_1 = \begin{bmatrix} m_2 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

$P_2$ :

$$\bar{m}_2 = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_7 \\ m_8 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

$P_3$ :

$$\bar{m}_3 = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_7 \\ m_8 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

$P_4$ :

$$\bar{m}_4 = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$P_5$ :

$$\bar{m}_5 = \begin{bmatrix} m_3 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \end{bmatrix}, \quad H_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$



螺误差的统计特性了解得比较清楚时,还可以采用更先进的估计理论。

最后简述一下陀螺元件的重新校准问题。如果陀螺存在软故障(如零偏差,刻度因数等参数变化,或在平均值附近不稳定等),可对陀螺进行重新校准。令软故障陀螺处于检测状态,将故障陀螺输出与正常陀螺输出进行比较,以便对陀螺故障的种类和需要校准的量进行识别。这种校准只需要改变软件参数,对系统进行一次重构即可。采用敏感元件的重新校准可提高系统的性能,但增加了计算机的负担。

上面我们以四个双自由度陀螺为例讨论了由双自由度陀螺所组成的多余度系统的最佳配置问题。显然,三个双自由度陀螺的最佳配置要简单得多;而多于四个双自由度陀螺的多余度系统的最佳配置方案也可仿照上面所介绍的原则进行分析。图 7-6 示出了三陀螺系统、四陀螺系统、五陀螺系统、六陀螺系统的最佳配置方案,读者可自行进行有关多余度系统的分析。

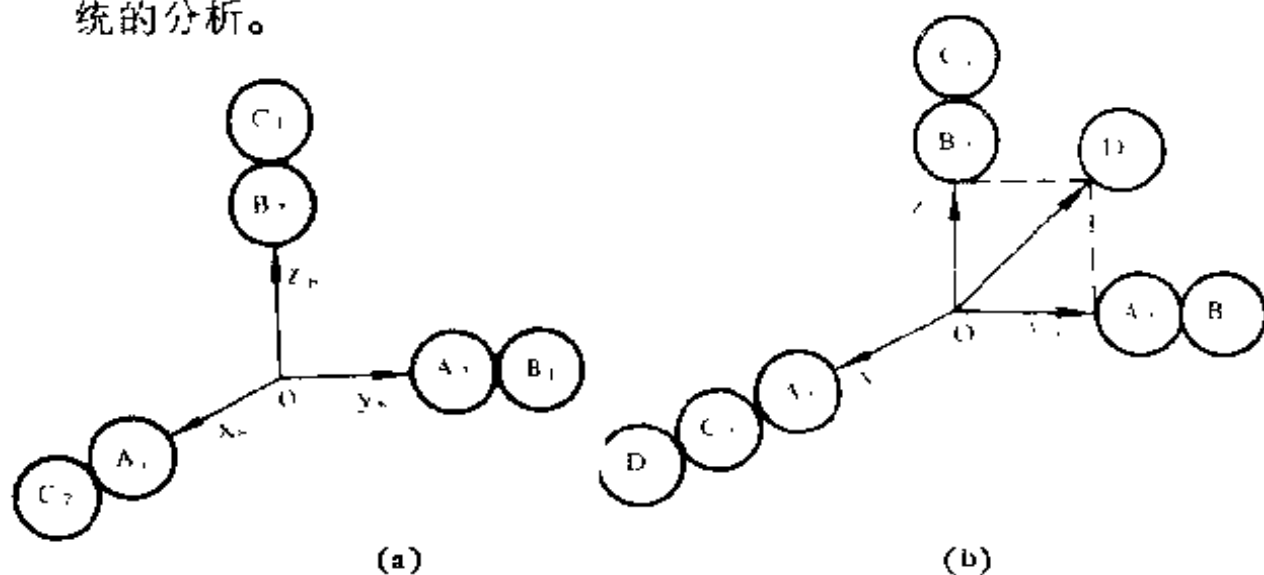
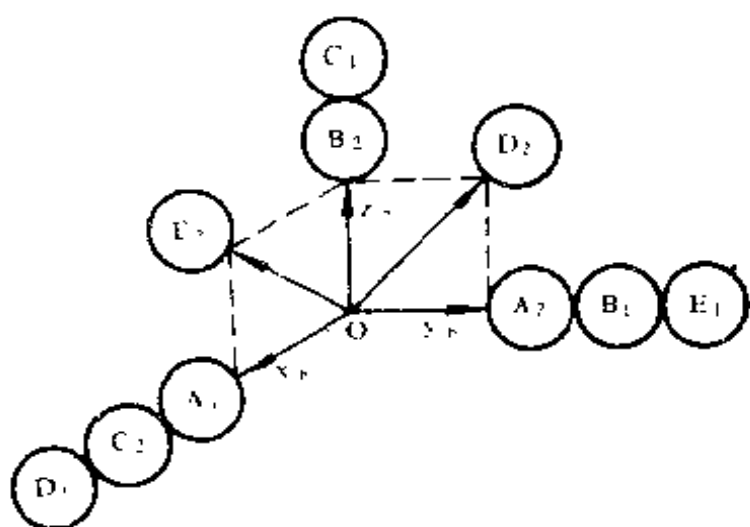


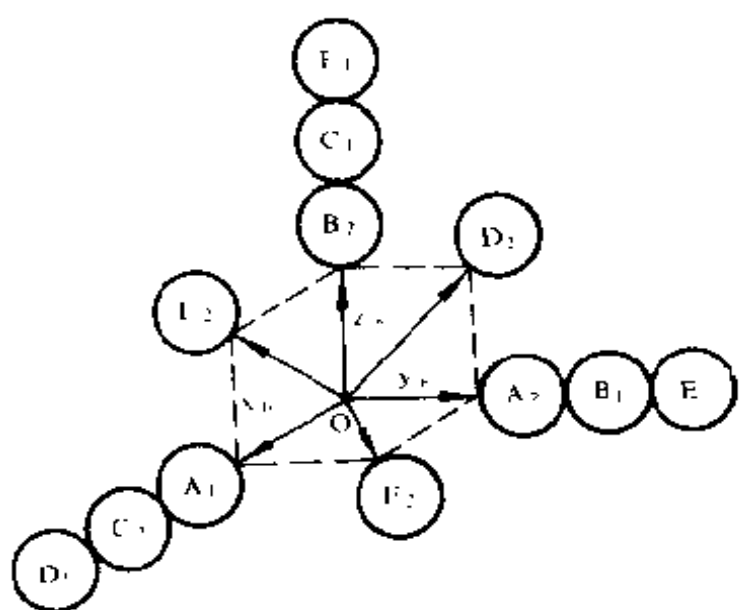
图 7-6 多余度系统的最佳配置

(a) 三陀螺系统;

(b) 四陀螺系统;



(c)



(d)

图 7—6 (续)

(c) 五陀螺系统；(d) 六陀螺系统

### § 7-3 单自由度陀螺的最佳配置

单自由度陀螺也是捷联系统中常用的元件,例如在捷联技术中最有发展前途的激光陀螺就是单自由度陀螺。由六个单自由度陀螺组成的多余度系统的最佳配置方案是目前较理想的方案。本节不准备详细地论述这个方案,而仅针对它的特点进行介绍。显然,要想得到全姿态信息至少应有三个单自由度陀螺。从原理上讲,只要三个单自由度陀螺不共面,就可以获得全姿态信息。为了从原理上讲清六个单自由度陀螺的最佳配置方案,首先应搞清有关敏感元件斜置布局的概念,因为对于六个单自由度陀螺的最佳配置方案陀螺相对机体轴均为斜置布局。

#### 一、四个测量向量之间的线性相关性

在三维几何空间中设有三个不共面的向量  $\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k$ 。任何一个向量  $\bar{e}$  都是由平行于这三个向量的向量构成的平行六面体的对角线。 $\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k$  可以看成三个不正交的基,于是任意向量  $\bar{e}$  可表示为

$$\bar{e} = m\bar{e}_i + n\bar{e}_j + p\bar{e}_k \quad (7-21)$$

其几何关系如图 7-7 所示。式中  $m, n, p$  为任意比例系数。推而广之,任何四个向量之间存在着如下的关系:

$$a\bar{e}_i + b\bar{e}_j + c\bar{e}_k + d\bar{e}_l = 0 \quad (7-22)$$

式 (7-22) 说明了任意四个空间向量的线性相关性,即第四个向量与其它三个向量线性相关。当四个向量为角速率向量时,式 (7-22) 同样适用。也就是说如果用四个陀螺来感测这四个角速率向量,略去陀螺的测量误差,设这四个陀螺的测量值分别为  $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4$ , 则它们应满足下面的线性相关方程:

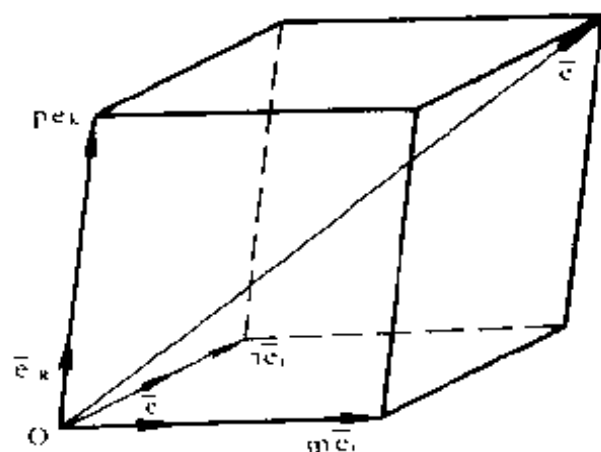


图 7-7 四个向量的线性相关性

$$\alpha \bar{m}_a + \beta \bar{m}_b + \gamma \bar{m}_c + \delta \bar{m}_d = 0 \quad (7-23)$$

式 (7-23) 可用来判断四个陀螺的工作是否正常。若四个陀螺的测量结果满足式 (7-23), 则可以认为四个陀螺的工作均正常; 否则至少有一个陀螺发生故障。敏感元件的斜置布局就是利用四个向量之间的线性相关原理来完成故障的检测与识别的。

## 二、六个单自由度陀螺的最佳配置方案

六个单自由度陀螺的一组最佳配置方案如图 7-8 所示。

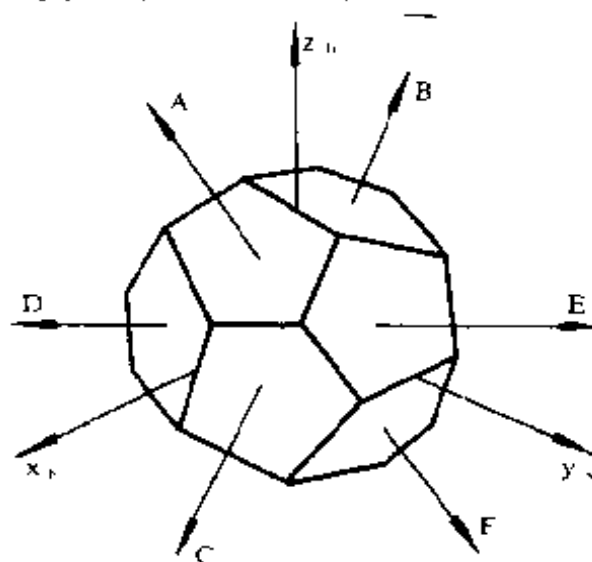


图 7-8 陀螺敏感轴相对机体坐标系及正十二面体的关系

$$\bar{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \quad (7-24)$$

根据图 7-9 所示的几何关系不难得出六个陀螺的测量值,即

$$\begin{aligned} m_a &= \omega_x \sin \alpha + \omega_z \cos \alpha \\ m_b &= -\omega_x \sin \alpha + \omega_z \cos \alpha \\ m_c &= \omega_x \cos \alpha + \omega_y \sin \alpha \\ m_d &= \omega_x \cos \alpha - \omega_y \sin \alpha \\ m_e &= \omega_y \cos \alpha + \omega_z \sin \alpha \\ m_f &= \omega_y \cos \alpha - \omega_z \sin \alpha \end{aligned} \quad (7-25)$$

设

$$C = \cos \alpha, \quad S = \sin \alpha, \quad \alpha = 31^\circ 43' 2.9''$$

则式 (7-25) 可表示为

$$\begin{aligned} \bar{m} &= H\bar{\omega} \\ &= \begin{bmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-26)$$

式中

$$H = \begin{bmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{bmatrix} \quad (7-27)$$

式 (7-25) 或 (7-26) 表示六个陀螺的测量值  $\bar{m}$  与姿态角速率  $\bar{\omega}$  的关系, 称为测量方程。从上述测量方程不难看出, 每

个陀螺可同时测量沿两个机体轴的姿态角速率。而陀螺  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  都能感受姿态角速率沿  $x_b$  轴的分量。从任意三个陀螺的测量值都可以得到沿三个坐标轴的全姿态信息。

### 三、敏感元件的性能管理

上一节所介绍的敏感元件性能管理的原理同样可适用于六个单自由度陀螺的最佳配置方案。下面简要地介绍敏感元件性能管理的几个问题。

#### 1. 陀螺故障的检测与识别

根据正十二面体布局中六轴斜置的对称特性,应用四个测量向量之间的线性相关关系,可以列出 15 个奇偶检测方程,如表 7-3 所示。表中的近似等号“ $\approx$ ”考虑到正常的测量

表 7-3 六个单自由度陀螺最佳配置的奇偶检测方程

序 号	陀螺组合	奇 偶 检 测 方 程
1	$ABCD$	$(m_c - m_b)C - (m_c + m_d)S \approx 0$
2	$ABCE$	$(m_b + m_c)C - (m_a + m_e)S \approx 0$
3	$ABCF$	$(m_c - m_a)C + (m_b - m_f)S \approx 0$
4	$ABDE$	$(m_d - m_a)C + (m_b + m_e)S \approx 0$
5	$ABDF$	$(m_b + m_d)C - (m_e - m_f)S \approx 0$
6	$ABEF$	$(m_a - m_f)C - (m_d + m_e)S \approx 0$
7	$ACDE$	$(m_d + m_e)C - (m_a + m_c)S \approx 0$
8	$ACDF$	$(m_f - m_c)C + (m_d + m_e)S \approx 0$
9	$ACEF$	$(m_e + m_f)C - (m_c + m_d)S \approx 0$
10	$ADEF$	$(m_e - m_d)C + (m_a - m_f)S \approx 0$
11	$BCDE$	$(m_e - m_c)C + (m_d - m_b)S \approx 0$
12	$BCDF$	$(m_f + m_d)C + (m_b - m_c)S \approx 0$
13	$BCEF$	$(m_b - m_e)C + (m_c + m_f)S \approx 0$
14	$BDEF$	$(m_b + m_f)C + (m_d - m_e)S \approx 0$
15	$CDEF$	$(m_d - m_c)C + (m_e + m_f)S \approx 0$
$\alpha = 31^\circ 43' 2.9'', C = \cos \alpha = 0.85065, S = \sin \alpha = 0.52574$		

误差。如果所有的陀螺都能正常工作，则全部奇偶检测方程都能满足。如果某个陀螺出现故障，则相应的奇偶检测方程不成立。若其中有三个陀螺失效，则所有的奇偶检测方程均不成立。

如果把上述每个奇偶检测方程等式右边设置一个二进制的量  $K_i$ ,  $i=1\sim 15$ , 即当第  $i$  个奇偶检测方程满足时,  $K_i=0$ , 反之  $K_i=1$ , 则根据  $K_i$  的值可建立故障识别的真值表, 列于表 7-3 之中。如果所有的陀螺工作都正常, 则  $K_1\sim K_{15}$  均为零, 系统重构的程序元为  $P_0$ 。若陀螺  $A$  失效, 则与陀螺  $A$  的测量值  $m_a$  有关的方程均不成立,  $K_1\sim K_{10}$  均等于 1, 而其它与  $m_a$  无关的奇偶方程  $K_{11}\sim K_{15}$  均等于零, 系统重构的程序元为  $P_1$ , 从而可将陀螺  $A$  进行故障隔离。如果陀螺  $A$ 、 $B$  失效, 则  $K_1\sim K_{14}$  均等于 1, 而  $K_{15}=0$ , 系统可将陀螺  $A$ 、 $B$  进行故障隔离, 系统重构的程序元为  $P_7$ 。对于一个或两个陀螺失效的情况均可依此类推, 并示于表 7-4 中。若三个或三个以上的陀螺失效, 则奇偶检测方程全部为 1, 这种情况下只能进行故障检测, 而不能进行故障识别, 更谈不上故障隔离了。然而从原理上说, 六个单自由度陀螺中有三个出故障, 仍有三个陀螺正常工作, 系统应该能继续工作。但仅靠表 7-4 的真值表却不能解决这个问题。借助于辅助诊断程序, 利用上述奇偶检测方程的剩余值进行比较可得到相对数值及极性, 而第三个陀螺的失效则与这些相对数值及极性有关, 借此可对第三个陀螺进行隔离, 并进行系统重构。

上述的六轴斜置余度系统的可靠性与具有四套平台系统并行工作的余度系统具有相同的可靠性。可见对于捷联系统实现余度技术和提高可靠性要比平台系统优越得多。

## 2. 数据处理

这种六个单自由度陀螺系统除了具有高可靠性以外，还可以利用多余度元件提供重复测量值，通过数据处理方法来减少单个陀螺测量误差的影响。根据测量方程，利用上一节介绍的最小二乘原理，可以给出最佳估值  $\hat{\omega}$ ，其计算公式与式(7-17)具有相同的形式，即

$$\hat{\omega} = (H'H)^{-1}H'\bar{m} \quad (7-28)$$

仅  $H$  与  $\bar{m}$  的内容有所不同。

### 3. 系统的重构

若某个陀螺发生故障，则应进行系统重构。系统重构的方法与四个双自由度陀螺的系统重构方法相类似。当系统重构时可由下列的数据处理方程求解  $\hat{\omega}$ ，即

$$\hat{\omega} = (H_i'H_i)^{-1}H_i'\bar{m}_i \quad (7-29)$$

式中  $i = 1 \sim 21$ ，表示系统重构的程序元。

例如，若陀螺  $A$  失效，对应于程序元  $P_1$  的  $\bar{m}_1$  与  $H_1$  分别为

$$\bar{m}_1 = \begin{bmatrix} m_b \\ m_c \\ m_d \\ m_e \\ m_f \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{bmatrix}$$

若陀螺  $A$ 、 $B$  失效，对应于程序元  $P_7$  的  $\bar{m}_7$  及  $H_7$  分别为

$$\bar{m}_7 = \begin{bmatrix} m_c \\ m_d \\ m_e \\ m_f \end{bmatrix}, \quad H_7 = \begin{bmatrix} C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{bmatrix}$$

若陀螺  $C$ 、 $D$  失效，对应于程序元  $P_{16}$  的  $m_{16}$  和  $H_{16}$  分别为



$$\bar{m}_{15} = \begin{bmatrix} m_a \\ m_b \\ m_c \\ m_f \end{bmatrix}, \quad H_{15} = \begin{bmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{bmatrix}$$

除此之外的其余程序元  $P_i$  所对应的  $m_i$  和  $H_i$  均可仿照上述原理写出。

总之，多余度敏感元件的最佳配置不仅能显著提高系统的可靠性，还可以通过最小二乘数据处理技术提高系统的测量精度，充分显示出多余度捷联系统的优越性。

## 第八章 系统误差分析

本书在前面的章节中已涉及到系统误差的部分内容,如捷联矩阵的非正交化误差、以及初始对准误差等。本章的目的是从系统的角度对捷联系统的误差做一较全面的分析,进而对在捷联惯导系统误差分析中常用的数字仿真方法做一简要的介绍。

### § 8-1 系统误差的分类

捷联惯导系统的误差可分为以下四类。

#### 1. 数学模型的近似性所引起的误差

当捷联系统的数学模型建立得不够精确时会引起系统误差。数学模型的选取应达到其近似性可以忽略的程度,否则就应探讨更精确的数学模型。例如作为惯导基本方程基础的牛顿第二定律,对于运动速度很高的运载器就不够精确;计算地球曲率半径的公式(2-45)也是将地球的几何形状近似为地球参考椭球体而获得的(参见附录一)。对于中等精度的捷联惯导系统,采用第六章所介绍的数学模型是足够精确的,即由于数学模型的近似性所造成的系统误差可以忽略不计。

#### 2. 惯性敏感元件的误差

惯性敏感元件(包括陀螺与加速度计)由于原理、加工与装配工艺的不完善等均可造成敏感元件输出的误差,从而导致系统的误差。由于惯性敏感元件的误差比较难以控制,通常这项误差约占系统误差的90%左右。

### 3. 计算机的算法误差

对于捷联惯导系统，当加速度计与陀螺的输出采集至计算机中以后，其它的全部工作全由计算机承担。除了在第四章中讨论的捷联矩阵即时修正的算法误差以外，所有的捷联计算都存在着算法误差，从而导致系统的误差。由于算法误差在很大程度上可由程序设计者控制，通常将这项误差限制在系统误差的10%左右。

### 4. 初始对准误差

由第五章的分析可知，系统初始对准的误差是由惯性敏感元件的误差及初始对准过程中的算法误差等所造成。一旦出现初始对准误差，它将在系统中传播。因此对初始对准误差应严加限制。

## § 8-2 捷联敏感元件的误差模型及补偿方法

捷联系统中的惯性敏感元件(陀螺与加速度表)是系统中的主要硬件，此外还有个硬件即计算机。由于计算机的误差是以算法误差的形式出现，所以在谈到硬件误差时一般是指惯性敏感元件的误差。本节的重点不在于讨论各种不同类型的陀螺(如液浮速率陀螺、动力调谐陀螺、静电陀螺、激光陀螺等)及加速度计(如液浮摆式加速度计、挠性加速度计等)的结构与误差特点，而是将这些元件抽象为误差模型，从系统的角度给以讨论。

### 一、惯性敏感元件误差模型的分类

在惯性技术中通常将惯性敏感元件的误差模型分为静态误差模型、动态误差模型及随机误差模型三类。

### 1. 静态误差模型

惯性敏感元件的静态误差模型是指在全部的元件误差中与机体的线运动（即线加速度）有关的那部分误差的数学模型，通常也称为与  $g$  有关的误差模型。对于平台惯导系统和捷联惯导系统，线运动对敏感元件的影响基本相同，因此这部分误差模型的形式也基本相同，对于平台系统而言，静态误差就是元件的主要误差，对其研究也比较成熟。

### 2. 动态误差模型

惯性敏感元件的动态误差模型是指在全部的元件误差中与机体的角运动（包括角速率和角加速率等）有关的那部分误差的数学模型。由于平台惯导系统的惯性敏感元件是装在平台上的，平台隔离了机体的角运动，因此可以认为平台惯导系统的惯性敏感元件的误差中不存在这部分误差；然而对于捷联系统，由于惯性敏感元件直接固连在飞行器上，因此惯性敏感元件的动态误差模型对于捷联惯导系统尤其重要，而对这部分误差模型的研究目前尚不十分充分。

### 3. 随机误差模型

惯性敏感元件的随机误差模型是指在全部的元件误差中随机变化的那部分误差的数学模型。同样，对于平台惯导系统，由于平台隔离了机体的角运动，因此在随机误差中与随机线运动有关的干扰作用在敏感元件上，而与随机角运动有关的随机干扰则被隔离了；而对于捷联系统，与线运动及角运动有关的随机干扰均作用于敏感元件上。因此捷联系统的随机误差也比平台系统严重得多。

由于惯性敏感元件的动静态误差模型可以比较容易地用代数方程来表示，因而也更容易补偿。而随机误差模型则要用统计规律来描述，其误差要通过滤波的方法来减少。下面

$K_{ii}, K_{iii}$ ——二阶与三阶非线性误差系数,  $\mu g/g^2, \mu g/g^3$ ;

$K_{io}, K_{ip}, K_{op}$ ——交叉耦合系数,  $\mu g/g^2$ ;

$K_i, K_p$ ——交叉轴误差灵敏度,  $\mu g/g$ ;

$K_{prr}, K_{ppp}, K_{ooo}, K_{ooo}$ ——交叉轴误差灵敏度的二阶、三阶非线性系数,  $\mu g/g^2, \mu g/g^3$ ;

$A_i, A_o, A_p$ ——沿加速度计的输入轴、输出轴和摆轴作用的比力,  $g_0$ 。

## (2) 动态误差模型

在角运动的环境中,加速度计的误差  $E_a$  与机体绝对角速率  $\bar{\omega}$  之间的依赖关系可表示为

$$E_a = f(\bar{\omega}) \quad (8-2)$$

式(8-2)就叫做加速度计的动态误差模型。根据  $E_a = f(\bar{\omega})$  的不同形式也可以写出不同形式的动态误差模型。下面给出动态误差模型的一种形式:

$$\begin{aligned} E_a = & D_1 \dot{\omega}_i + D_2 \dot{\omega}_o + D_3 \dot{\omega}_p + D_4 \dot{\omega}_i^2 \\ & + D_5 \dot{\omega}_p^2 + D_6 \omega_i \omega_o + D_7 \omega_i \omega_p \\ & + D_8 \omega_o \omega_p + D_9 \dot{\omega}_o \omega_i^2 + \dots \end{aligned}$$

式中  $\omega_i, \omega_o, \omega_p, \dot{\omega}_i, \dot{\omega}_o, \dot{\omega}_p$  分别为机体相对惯性空间沿其输入轴、输出轴及摆轴的角速率和角加速率,弧度/秒或弧度/秒<sup>2</sup>;  $D_1, D_2, \dots, D_9$  均为误差系数。

## 2. 陀螺的动、静态误差模型

### (1) 静态误差模型

用于捷联系统的陀螺有单自由度和双自由度之分,这里只给出一个输出轴的误差模型,它可适用于单自由度及双自由度陀螺的两种情况。

陀螺的输出  $E_o$  与比力之间的依赖关系

$$E_{\omega} = f(\bar{A}) \quad (8-3)$$

称为陀螺的静态误差模型。 $E_{\omega} = f(\bar{A})$ 的关系可表示为

$$\begin{aligned} E_{\omega} = & E_0 + K_x A_x + K_y A_y + K_z A_z + K_{xx} A_x^2 \\ & + K_{yy} A_y^2 + K_{zz} A_z^2 + K_{xy} A_x A_y \\ & + K_{yz} A_y A_z + K_{zx} A_x A_z \end{aligned}$$

式中

$E_{\omega}$ ——陀螺的漂移速率误差,度/小时;

$E_0$ ——固定常值漂移,度/小时;

$K_x, K_y, K_z$ ——与比力成正比的漂移系数,度/小时/g;

$K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}$ ——与比力平方成正比的漂移系数,度/小时/ $g^2$ ;

$K_{xy}, K_{yz}, K_{zx}$ ——与交叉项比力乘积成正比的漂移系数,度/小时/g;

$A_x, A_y, A_z$ ——分别为沿陀螺相应轴的比力,  $g$ 。

## (2) 动态误差模型

同样这里只讨论陀螺一个输出轴的误差模型。

陀螺的输出误差  $E_{\omega}$  与机体角速率  $\bar{\omega}$  的依赖关系

$$E_{\omega} = f(\bar{\omega}) \quad (8-4)$$

称为陀螺的动态误差模型。它可以表示为

$$\begin{aligned} E_{\omega} = & D_1 \dot{\omega}_i + D_2 \dot{\omega}_o + D_3 \dot{\omega}_r + D_4 \omega_i \\ & + D_5 \omega_o + D_6 \omega_r + D_7 \omega_i^2 + D_8 \omega_o^2 \\ & + D_9 \omega_r^2 + D_{10} \omega_i \omega_o + D_{11} \omega_i \omega_r \\ & + D_{12} \omega_o \omega_r + \dots \end{aligned}$$

式中  $\omega_i, \omega_o, \omega_r, \dot{\omega}_i, \dot{\omega}_o, \dot{\omega}_r$  分别为机体相对惯性空间沿陀螺输入轴、输出轴、自旋轴的角速率和角加速率,弧度/秒或弧度/秒<sup>2</sup>;  $D_1, D_2, \dots, D_{12}$  均为相应的误差系数,其中  $D_1$  为



陀螺的刻度因数误差。

### 三、惯性敏感元件的动静态误差补偿

上面我们给出了惯性敏感元件的动、静态误差模型的数学表达式。要建立惯性敏感元件的误差模型通常要做以下两种类型的工作：第一种工作是确定误差模型的形式、系数与惯性敏感元件的结构、设计参数的关系，从而在进行元件的设计与进行加工、装配和调试时有针对性地去减小元件误差，这需要大量的理论分析工作；第二种工作是通过实验的方法确定已有的敏感元件所对应的各项误差系数的具体数值，这需要大量的测试与数据处理工作。上述的两种工作都不属于本书要讨论的内容。下面所进行的讨论是在通过实验已确定了某个元件的误差模型（即确定了各项误差系数的具体数值）的前题条件下，从系统的角度来对元件的误差进行补偿。

为了简化分析，我们将惯性敏感元件的动、静态误差模型统称为加速度计的误差模型或陀螺的误差模型。当敏感元件的误差模型建立以后，这部分误差就已成为规律性的误差，就可在计算机中通过软件进行误差补偿，并将补偿后的信息作为进行捷联计算的精确信息。误差补偿的原理图如图 8-1 所示，图中

$\bar{\omega}_b, \bar{f}$ ——飞行器运动的绝对角速率及加速度计测量的比力；

$\hat{\bar{\omega}}_b^b, \hat{\bar{f}}^b$ ——陀螺与加速度计的原始测量值；

$\hat{\bar{\omega}}_b^b, \hat{\bar{f}}^b$ ——误差补偿后的陀螺与加速度计的测量值；

$\delta\bar{\omega}_b^b, \delta\bar{f}^b$ ——由误差模型软件输出的陀螺测量误差及加速度计测量误差的估计值。

通过误差补偿绝大部分误差可以得到补偿。文献[16]指出，通过误差补偿陀螺的稳态漂移可由  $4^\circ/\text{小时}$  减至  $0.01^\circ/\text{小}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t w(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (8-5)$$

式中的  $w(t, \tau)$  为系统的加权函数，它相当于在时刻  $\tau$  加给系统的单位脉冲所引起的在时刻  $t$  的脉冲响应。

若系统在  $t = 0$  之前是静止的，则积分下限可取为零。此外，若系统是定常的，则加权函数仅与时间差  $t - \tau$  有关。于是上式可写成

$$y(t) = \int_0^t w(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (8-6)$$

设系统的传递函数为  $G(s)$ ，则有

$$w(t - \tau) = \mathcal{L}^{-1}G(s)$$

而输出  $y(t)$  的自相关函数等于时刻  $t = t_1$  的输出乘以时刻  $t = t_2$  的输出并取集合平均值，即

$$\phi_{yy}(t_1, t_2) = \overline{\int_0^{t_1} w(t_1 - \tau_1)x(\tau_1)d\tau_1 \int_0^{t_2} w(t_2 - \tau_2)x(\tau_2)d\tau_2} \quad (8-7)$$

式中相乘项上面的横线代表取平均值的意思。由于集合平均与加权函数无关，这样便可在积分号下取集合平均值，即

$$\phi_{yy}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} w(t_1 - \tau_1)w(t_2 - \tau_2) \overline{x(\tau_1)x(\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (8-8)$$

如果输入量的统计特性是平稳过程，则

$$\overline{x(\tau_1)x(\tau_2)} = \phi_{xx}(\tau_2 - \tau_1) \quad (8-9)$$

于是

$$\phi_{yy}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} w(t_1 - \tau_1)w(t_2 - \tau_2)\phi_{xx}(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1 d\tau_2 \quad (8-10)$$

将上式的积分上限改为  $t$ ，则可得到在任意时刻  $t$  的输出的均方值，即



捷联系统的特征方程式可表示成下列形式:

$$\Delta(s) = R^2(\cos \varphi)s(s^2 + \omega_{ie}^2)[s^4 + 2(\omega_i^2 + 2\omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi)s^2 + \omega_i^4] = 0 \quad (8-14)$$

式中

$$\omega_i^2 = \frac{R}{R} \quad (8-15)$$

$\omega_i$  称为舒勒频率。为求解式 (8-14) 的根, 可将它写成

$$(s^2 + \omega_{ie}^2)[s^4 + 2(\omega_i^2 + 2\omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi)s^2 + \omega_i^4] = 0 \quad (8-16)$$

由

$$s^2 + \omega_{ie}^2 = 0$$

可得

$$s_{1,2} = \pm i\omega_{ie} \quad (8-17)$$

式中  $i$  表示虚数。由

$$s^4 + 2(\omega_i^2 + 2\omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi)s^2 + \omega_i^4 = 0$$

又可解得一组特征根。为此, 可通过二项式公式进行分解, 其近似因式为

$$\left[ s^2 + \omega_i^2 \left( 1 + 2 \frac{\omega_{ie}}{\omega_i} \sin \varphi \right) \right] \left[ s^2 + \omega_i^2 \left( 1 - 2 \frac{\omega_{ie}}{\omega_i} \sin \varphi \right) \right] = 0 \quad (8-18)$$

由于  $\omega_i = 1.24 \times 10^{-3} \text{1/秒}$ , 而  $\omega_{ie} = 7.29 \times 10^{-5} \text{1/秒}$ , 可以认为  $\omega_i \gg \omega_{ie}$ 。因此式 (8-18) 可用下式近似地代替:

$$[s^2 + (\omega_i + \omega_{ie} \sin \varphi)^2][s^2 + (\omega_i - \omega_{ie} \sin \varphi)^2] = 0 \quad (8-19)$$

由上式可以解出

$$\begin{aligned} s_{3,4} &= \pm i(\omega_i + \omega_{ie} \sin \varphi) \\ s_{5,6} &= \pm i(\omega_i - \omega_{ie} \sin \varphi) \end{aligned} \quad (8-20)$$

式(8-17)及式(8-20)为六阶特征方程(8-16)的六个特征根。显然六个特征根都为虚根,因此系统误差方程的解是正余弦函数的线性组合,这表明系统是振荡的,其振荡频率有三个,即  $\omega_{ie}$ ,  $\omega_i + \omega_{ie} \sin \varphi$ , 和  $\omega_i - \omega_{ie} \sin \varphi$ 。对应于  $\omega_{ie}$  这个振荡的固有振荡周期是 24 小时。而  $\omega_i + \omega_{ie} \sin \varphi$  和  $\omega_i - \omega_{ie} \sin \varphi$  是两个很接近的角频率(在初始对准的误差分析中就将其近似为  $\omega_i$ , 即舒勒频率,对应于 84.4 分的固有振荡周期)。这两个频率相近的正弦分量合在一起就形成差拍,利用和差化积的公式可得

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 \sin [(\omega_i + \omega_{ie} \sin \varphi)t] \\ &\quad + \alpha_0 \sin [(\omega_i - \omega_{ie} \sin \varphi)t] \\ &= 2\alpha_0 \cos [(\omega_{ie} \sin \varphi)t] \sin \omega_i t \end{aligned} \quad (8-21)$$

上式表明,这两个频率相近的正弦分量合成以后形成了差拍,产生了  $\sin \omega_i t$  的正弦振荡,而其幅值(或以  $\omega_i$  频率振荡的振幅的包络线)为  $2\alpha_0 \cos [(\omega_{ie} \sin \varphi)t]$ 。这个调制波的周期为

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_{ie} \sin \varphi} \quad (8-22)$$

式中  $T_f$  为傅科周期,它是观察者在地面上所看到的单摆的振荡平面的旋转周期(在北京天文馆中就展出了显示傅科振荡的傅科摆)。显然傅科周期与地理纬度有关。当  $\varphi = 45^\circ$  时,  $T_f = 34$  小时。在惯导系统中,傅科周期是由于哥氏加速度补偿得不完全所产生的。

综上所述可以看出,在捷联惯导系统中存在着三种振荡周期,即舒勒周期、地球周期和傅科周期。这一误差传播的特点是与平台惯导系统相类似的。

## 二、系统的误差方程及误差传播

捷联惯导系统与平台惯导系统的分析方法一样,可根据

其平台误差方程及速度误差方程建立起系统误差方程。对系统误差方程可用拉氏变换法求其解析解，从而得出各项导航参数的误差传播特性。由于其分析过程与结果十分烦琐，而且其分析方法与平台惯导系统相类似，并与第五章的初始对准的误差分析相类似，因此本书就不再花过多的篇幅来讨论这一问题。参考文献[17]，[18]中给出了部分的讨论内容。

## § 8-4 捷联系统的数字仿真

由于捷联惯导系统的大部分工作要在计算机中完成，因此在整个系统误差中，很多方面的误差难以用解析的方法给出，而需要用数字仿真的方法给出。计算技术的飞速发展使得捷联系统的设计与分析工作（特别是系统的误差分析工作）可以首先在计算机上进行，在此基础上再进行系统的硬件（包括陀螺、加速度计与计算机等）及软件（包括各种计算机算法及不同迭代周期的选择等）的设计或选择。本节就来讨论与捷联系统数字仿真有关的一些问题。

### 一、捷联系统数字仿真的分类

本章 § 8-1 中讨论了系统误差的分类。根据系统误差的特点，按照数字仿真的功用可将数字仿真分为以下几类。

#### 1. 检验数学模型的正确性

在进行数字仿真时，首先要对系统的数学模型选择机上执行算法，编制好相应的主程序与子程序，并进行数字仿真。当数学模型有错误时，仿真的结果就会出现异常。当所选用的数学模型不够精确时，系统的误差将不能满足要求，从而应探讨更精确的数学模型。

#### 2. 系统软件的仿真

这时可将惯性敏感元件看成无误差的理想元件，单独研究由于计算机算法所造成的误差，其中包括对数值积分算法的选取、各种迭代周期的选取、字长的选取、以及单精度或双精度的选取(当两个相近的数相减时，或计算较小的增量时可根据精度的要求选取双精度进行计算<sup>[31]</sup>)等。

### 3. 系统硬件的选取

这时可在计算机中人为地设置惯性敏感元件的误差，而通过采用高精度的算法来减小算法误差的影响，从而确定硬件对系统误差的影响。这样就可以根据导航精度的要求对惯性敏感元件提出适宜的要求，进而设计或选用适当的惯性敏感元件。并在系统软件仿真的基础上，确定所选用的敏感元件的类型与输出形式，选用适宜的计算机，以满足系统对计算机实时接口、计算速度及计算机字长等方面的要求。对于中等精度的飞机捷联惯导系统，计算机的平均计算速度一般为50万次/秒，字长为16~24 Bit。

### 4. 捷联系统的仿真

在上述仿真的基础上，进而可对整个系统进行数字仿真。数字仿真可以采用以下几种方式进行。

(1) 对于给定的巡航任务条件，对于一次完整的飞行过程进行全数字仿真，确定总的系统误差。

(2) 对于典型的工作状态(包括最不利的工作状态)进行仿真，确定系统在典型工作状态下的误差。典型的工作状态包括有静止状态、等角速率运动状态、圆锥运动状态、振动状态等。

#### (3) 系统的初始对准仿真

根据选用惯性敏感元件及计算机的性能对初始对准误差进行仿真，从而判断系统的初始对准是否满足给定的要求。

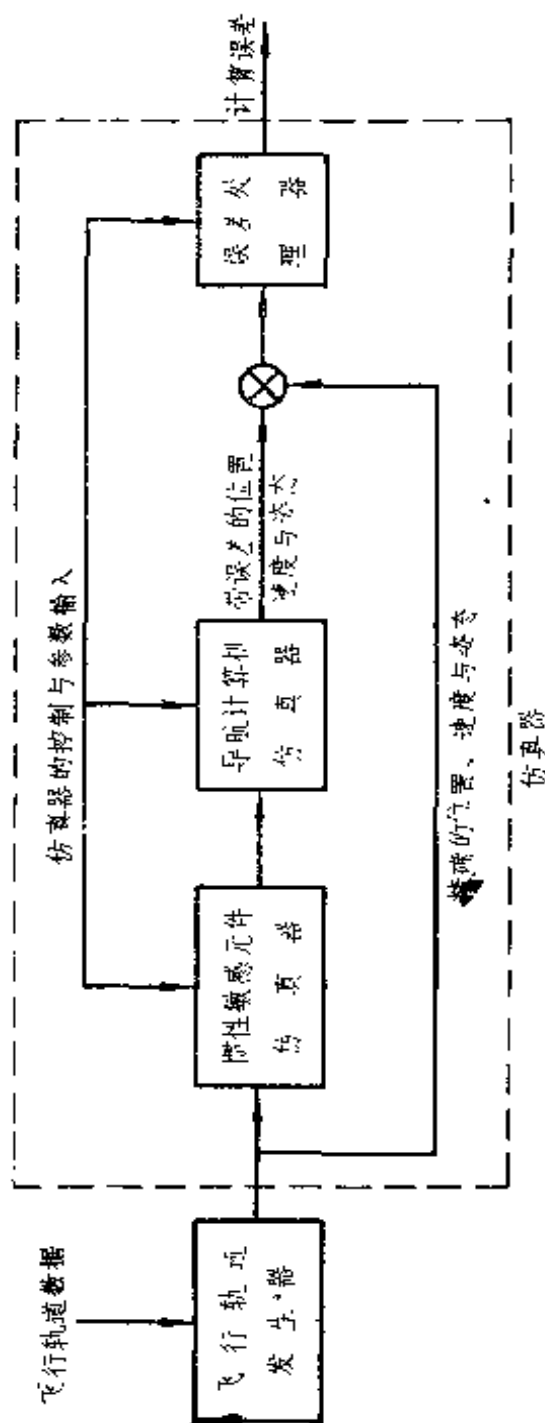


图 8-2 数字仿真器原理方块图

#### (4) 与初步的飞行试验配合进行的数字仿真

当捷联系统的惯性敏感元件已经获得以后，可以将它们安装在飞机上进行飞行试验。而陀螺与加速度计的输出可通过机载的记录装置记录下来，然后到地面上再进行离线的数字仿真，为机载捷联系统的飞行试验打下基础。文献[19](第8~38页)介绍了利用军用运输机进行战术导弹飞行试验的情况。每次飞行持续1~1.3小时，在此期间完成了几次导航飞行试验，每次几分钟，从而获取较充分的导航数据。

### 二、捷联系统数字仿真的原理

#### 1. 数字仿真器的原理方块图<sup>[20]</sup>

图 8-2 示出了捷联系统数字仿真器的原理方块图。由图可见，数字仿真器可由飞行轨迹发生器及仿真器两大部分组成。而仿真器包括惯性敏感元件仿真器、导航

计算机仿真器及误差处理器三个组成部分。误差处理器的输出为位置、速度与姿态的计算误差。

## 2. 数字仿真器各部分的功能

### (1) 飞行轨迹发生器

对于给定的巡航任务可预先计算出给定的飞行轨迹、不同的时刻的比力、角速率及姿态、位置、速度等导航参数的精确值，贮存在飞行轨迹发生器中。在仿真器进行数字仿真的过程中，飞行轨迹发生器可根据需要给出作为导航误差计算基准的精确的位置、速度与姿态信息及捷联系统的比力与角速率输入。

### (2) 惯性敏感元件仿真器

惯性敏感元件仿真器给出陀螺与加速度计的仿真模型。当只研究计算机的算法误差时，则不考虑敏感元件的误差；当研究敏感元件的误差时，其误差也通过仿真器给出。

### (3) 导航计算机仿真器

导航计算机的仿真可以根据系统对计算机的要求及现有的机载计算机的性能进行仿真。在仿真中可以对计算精度、计算时间、计算字长及单精度与双精度计算等方面取得必要的参数，以便选择合适的机载计算机及计算机算法。

### (4) 误差处理器

由导航计算机仿真器计算出的带误差的导航参数与飞行轨迹发生器产生的精确导航参数进行比较，得出计算的位置、姿态、地速、高度等参数的导航误差。这些误差中往往包含有噪声。对这些带有噪声的导航误差进行处理后可得到计算误差。当这些噪声的数学模型尚未精确获知时，可采用最小二乘法进行误差处理。图 8-3 给出了用最小二乘法进行误差处理的示意图<sup>[20]</sup>。图中每隔 0.5 秒给出北向速度误差  $\delta V_N$  的瞬



时值，将这些瞬时值连起来可得一条瞬时误差曲线。对瞬时误差进行最小二乘误差处理可获得一条最小二乘误差曲线。误差的均方根值  $\sigma_v = 0.007$  米/秒，北向速度误差的瞬时值在 0.017 米/秒的范围内无秩序地变化。由图 8-3 可以得出结论：简单的最小二乘处理是对噪音数据很有效的滤波。从而，在进行系统误差分析时，比较最小二乘误差值比较瞬时误差值更有意义。

## 第九章 捷联系统的实验研究

捷联系统的实验研究,是捷联系统的研究和应用中不可缺少的一个重要组成部分。近年来捷联系统在国外已有了飞速的发展,并正在由研究阶段进入应用阶段,对捷联系统实验方法的研究也日臻完善与成熟。由于捷联系统的实验研究涉及到系统与敏感元件的数学模型的建立、参数辨识以及数据处理等众多方面的课题。涉及到理论研究及实验方法等许多问题,因此本章不可能全面深入地讨论这些问题,而只能根据我们所掌握的部分资料、结合研究工作的粗浅体会,对捷联系统的实验方法进行概述性的探讨。

### § 9-1 捷联系统实验研究的意义 及实验系统的构成

本书的前八章都侧重于原理方面的分析,然而这距离构成一个真实的捷联系统,并对其进行研究尚存在着较大的差距。本节就来讨论捷联系统实验研究的意义并简述实验系统的构成。

#### 一、捷联系统实验研究的意义

捷联系统的实验研究是整个捷联系统研制工作中不可缺少的组成部分,对它进行研究具有相当重要的意义。国外在进行捷联系统的试飞前总是先在实验室条件下,利用三轴转台提供的动态环境,对惯性仪表及整个系统进行测试与检验,为建立实验室样机,进而进行飞行试验打下基础。捷联系统实验



实例之一是西德宇航研究院 (DFVLR) 研制的实验性捷联系统 MOSY<sup>[22]</sup>。该系统采用了三个 Lites 公司生产的 B-250 加速度计。系统采用了三个 Hamilton 公司生产的标准 RI-1010 单自由度液浮陀螺, 其随机漂移为  $0.02^{\circ}/\text{小时}$ , 最大加矩速率为  $400^{\circ}/\text{秒}$ , 并采用脉冲调宽再平衡回路。系统采用了 ISI-11/2 微计算机系统, 它包括三个微计算机及可逆计数器, 其中第一个计算机完成实时数据采集、控制与误差补偿工作, 第二个计算机进行高速计算 (约  $20 \sim 100$  周/秒), 第三个计算机进行导航信息的计算。系统采用了 PDP-11 计算机进行惯性敏感元件的误差模型估算 (即进行多元回归分析)。系统采用了三轴空气支承试验转台。

实例之二是德国标准捷联系统 MSS<sup>[23]</sup>。该系统采用了两个特里达因公司生产的 SDG-5 型动力调谐陀螺, 其随机漂移为  $0.001^{\circ}/\text{小时}$ , 最大加矩速率为  $100^{\circ}/\text{秒}$  (长时间) 及  $400^{\circ}/\text{秒}$  (短时间)。系统采用了三个西斯特朗-唐纳加速度计, 采用了 MIDI 2 型计算机 (16 Bit), 以及 Contraves-Georgz 公司生产的三轴转台。

表 9-1 中列出了 Contraves-Georgz 公司生产的 53W 精密

**表 9-1 Contraves-Georgz 公司生产的 53W 转台的性能指标**

项 目	角 速 率 (度/秒)			角 加 速 率 (度/秒 <sup>2</sup> )		
	横 滚	俯 仰	航 向	横 滚	俯 仰	航 向
性 能	400	200	200	500	300	200
项 目	角 度 精 度 (度)			位 移 范 围		
	分辨率	绝对定位精度	正交度	横 滚	俯 仰	航 向
性 能	0.0001	0.003	0.0001	$\pm 360^{\circ}$ (连转)		

三轴转台的主要性能指标，它代表了当前精密三轴转台的精度水平。文献[28]指出，由于测试设备要求精度高、价格昂贵、复杂、研制周期长，西方一些国家都是从美国引进测试设备。例如在英国除克兰菲尔德理工学院研制速率台外，对于高精度陀螺测试设备主要靠美国提供。我国在研制高精度的伺服台与速率台方面已取得了一些可喜的成绩，虽然距离世界先进水平尚有不小的差距，但利用目前现有的测试设备对捷联系统开展初步的实验研究工作还是有意义的。

图 9-1 示出了实验系统的原理图，由图可以看出实验系统的几个组成部分。

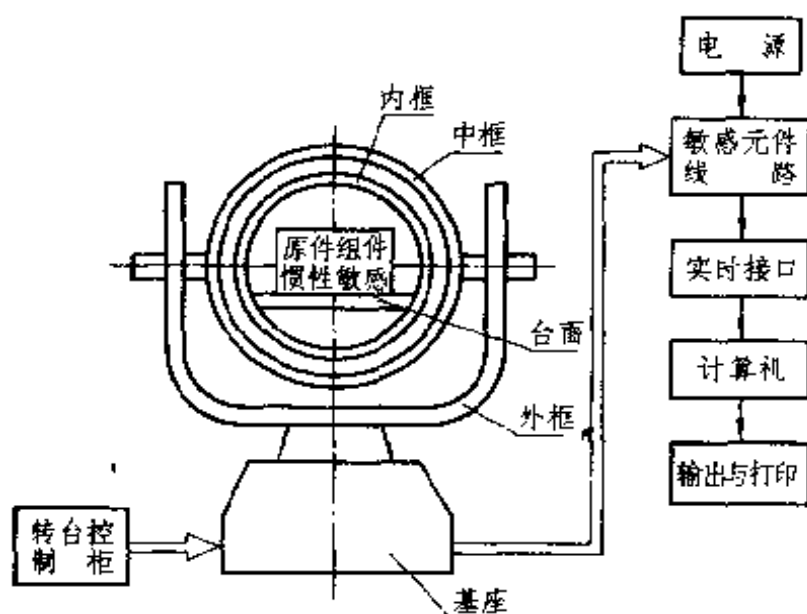


图 9-1 实验系统原理图

## § 9-2 捷联系统对陀螺的要求 及其性能的测试

捷联系统对所用的陀螺的性能指标的要求包括静态、动态精度以及随机误差等方面，对于其测试方法的讨论涉及的

有二阶无静差度。参考文献 [25] 中就设计了一种具有二阶无静差度的陀螺。

陀螺的无静差度可通过在陀螺上施加输入角速率，测量信号器输出电压，观测它随输入角速率的增加是否变化，从而判断系统是否有静差。

### 三、捷联式陀螺的解耦问题

由于目前的捷联系统尚较多地采用动力调谐陀螺，而动力调谐陀螺是双输入—双输出系统，系统中存在着交叉耦合，从而提出了解耦问题。

#### 1. 陀螺解耦问题的提出

图 9-2 示出了包括再平衡回路在内的陀螺闭环系统方块图<sup>[26]</sup>。图中

$\omega_x, \omega_y$ ——陀螺所测量的沿机体轴的输入角速率；  
 $\theta_x, \theta_y$ ——信号器的转子相对壳体(即机体)的转角。

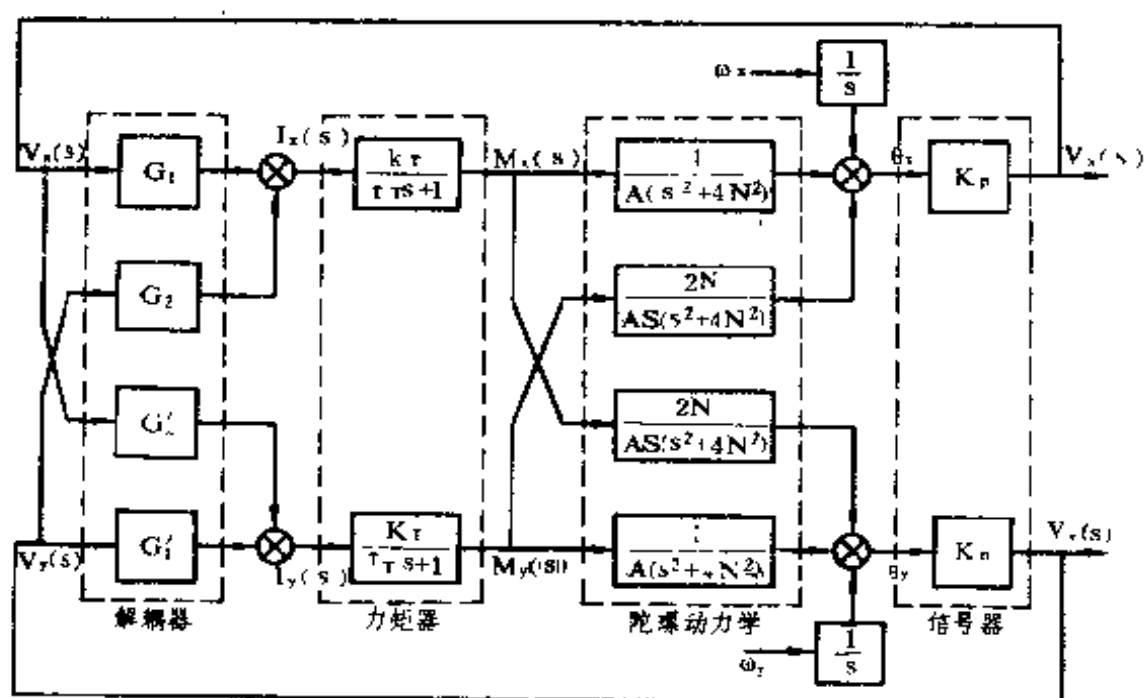


图 9-2 陀螺闭环系统方块图

$K_p$ ——信号器的传递系数；  
 $V_x, V_y$ ——信号器的输出；  
 $G_1, G_2, G'_1, G'_2$ ——解耦器的传递函数；  
 $I_x, I_y$ ——力矩器电流；  
 $K_T$ ——力矩器的力矩系数；  
 $\tau_T$ ——力矩器时间常数；  
 $N$ ——陀螺转子旋转频率(弧度/秒)，  
 陀螺章动频率约为  $2N$ ；

$A = H/2N$ ，其中  $H$  为陀螺角动量。

由图 9-2 可以看出，陀螺动力学部分不仅有交叉轴的进动作用，还有直接轴的章动作用。因此信号器的输出  $V_x(s)$ ， $V_y(s)$  与输入角速率  $\omega_x, \omega_y$  之间实际上是一个有交连的双输入-双输出系统。为了使陀螺沿一个轴的输入只在一个轴上有输出(即实现解耦)，需要设计一个解耦器。图 9-2 中示出了解耦器、力矩器、陀螺动力学、信号器等组成部分及各部分的输入、输出和传递函数。其中解耦器的具体形式有待于进一步推导。

## 2. 解耦条件的推导

由图 9-2 可得

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = K_p \begin{bmatrix} G_1 & -G_3 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} + \frac{K_p}{s} \begin{bmatrix} -\omega_x \\ -\omega_y \end{bmatrix} \quad (9-2)$$

式中

$$\begin{aligned} G_3 &= \frac{2N}{As(s^2 + 4N^2)} \\ G_4 &= \frac{1}{A(s^2 + 4N^2)} \end{aligned} \quad (9-3)$$

设解耦器的传递矩阵为

$$G_c = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G'_1 & G'_2 \end{bmatrix} \quad (9-4)$$

则可得力矩器的输出  $M_x, M_y$  与信号器的输出  $V_x, V_y$  的关系,即

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \frac{K_T}{\tau_T s + 1} \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G'_1 & G'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \quad (9-5)$$

将式(9-5)代入式(9-2),设  $\tau_T = 0$ , 经整理可得

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \frac{1}{P_1 P_4 - P_2 P_3} \begin{bmatrix} P_1 & -P_2 \\ -P_3 & P_4 \end{bmatrix} \frac{K_p}{s} \begin{bmatrix} -\omega_x \\ -\omega_y \end{bmatrix} \quad (9-6)$$

式中

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - K_p K_T (G_1 G_1 - G_2 G'_2) \\ P_2 &= -K_p K_T (G_1 G_2 - G_3 G'_1) \\ P_3 &= -K_p K_T (G_1 G_3 + G_4 G'_2) \\ P_4 &= 1 - K_p K_T (G_3 G_2 + G_4 G'_1) \end{aligned} \quad (9-7)$$

由式(9-6)可以看出,要达到解耦须满足

$$P_2 = 0, \quad P_3 = 0$$

由于  $K_p \neq 0, K_T \neq 0$ , 则可得解耦条件

$$G_1 G_2 - G_3 G'_1 = 0 \quad (9-8)$$

$$G_1 G_3 + G_4 G'_2 = 0 \quad (9-9)$$

式(9-8), (9-9)中的  $G_1, G_2, G'_1, G'_2$  待定, 但只有上述两个约束方程, 显然须做两个假设。考虑到解耦器的对称性, 设

$$G_1 = G'_1 \quad (9-10)$$

则由式(9-8), (9-9)可得

$$G_2 = -G'_2 \quad (9-11)$$

将式(9-10), (9-11)代回式(9-8), (9-9), 得

$$G_2 = \frac{G_3}{G_4} G_1 \quad (9-12)$$

再将式(9-3)代入上式,可得

$$G_2 = \frac{2N}{s} G_1 \quad (9-13)$$

于是式(9-4)所表示的  $G_r$  可写成

$$G_r = \begin{bmatrix} G_1 & \frac{2N}{s} G_1 \\ -\frac{2N}{s} G_1 & G_1 \end{bmatrix} \quad (9-14)$$

$G_1$  可由系统的动静态品质而定,如取为微积分校正,可得

$$G_1 = K \frac{\tau_i + 1}{T_i + 1} \quad (9-15)$$

将上述关系式代入式(9-7)中的  $P_1$  与  $P_4$ , 可得

$$P_1 = P_4 = 1 - K_p K_T \frac{1}{As^2} G_1 \quad (9-16)$$

将式(9-16)及关系式  $P_2 = P_3 = 0$  代入式(9-6)可得

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \frac{K_p}{1 - \frac{K_p K_T G_1}{As^2}} & 0 \\ 0 & \frac{K_p}{1 - \frac{K_p K_T G_1}{As^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_x \\ -\omega_y \end{bmatrix} \quad (9-17)$$

可见达到了解耦的目的。

下面来求满足解耦条件时陀螺的输出与输入之间的关系。由图 9-2 可得

$$\begin{bmatrix} I_x(s) \\ I_y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & \frac{2N}{s} G_1 \\ -\frac{2N}{s} G_1 & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x(s) \\ V_y(s) \end{bmatrix}$$

将式(9-17)代入上式可得

$$\begin{bmatrix} I_x(s) \\ I_y(s) \end{bmatrix} = \frac{K_p G_1}{As^2 - K_p K_T G_1} \begin{bmatrix} As & 2NA \\ -2NA & As \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_x \\ -\omega_y \end{bmatrix}$$

考虑到  $A = H/2N$ , 上式可写成

$$\begin{aligned} I_x(s) &= \frac{K_p G_1}{As^2 - K_p K_T G_1} (-As\omega_x - H\omega_y) \\ I_y(s) &= \frac{K_p G_1}{As^2 - K_p K_T G_1} (H\omega_x - As\omega_y) \end{aligned} \quad (9-18)$$

由上式可知,  $I_x$  包括与  $\omega_y$  成正比的项, 与  $\omega_x$  无关;  $I_y$  包括与  $\omega_x$  成正比的项, 与  $\omega_y$  无关。但陀螺的输出中存在有与输入角加速度成正比的误差, 即  $I_x$  包括与  $\omega_x$  成正比的误差,  $I_y$  包括与  $\omega_y$  成正比的误差。

### 3. 解耦试验的原理

由式(9-6)可以看出, 当两个输入  $\omega_x$  与  $\omega_y$  同时加入时, 将使试验变得复杂。为了单轴地进行试验, 在式(9-6)中只加入  $\omega_x$ , 令  $\omega_y = 0$ , 则得

$$\begin{bmatrix} V_z \\ V_y \end{bmatrix} = \frac{K_p}{s(P_1 P_4 - P_2 P_3)} \begin{bmatrix} P_4 \\ -P_3 \end{bmatrix} (-\omega_x)$$

由上式可见解耦条件变为  $P_3 = 0$ , 即

$$G_1 G_3 + G_4 G_2' = 0$$

在进行解耦器的调试时, 只要调整  $G_1$ 、 $G_2'$  即可获得解耦条件。同理, 当只加  $\omega_y$  时另一个轴的解耦条件可简化为  $P_2 = 0$ , 并可单独地进行试验。

根据上述原理, 在解耦的条件下可以分别地对陀螺的输入轴单独进行测试。这就使得在只有单轴速率台的情况可以对捷联系统进行初步的实验研究。



### 三、陀螺动态误差模型的建立——速率试验

文献[21]介绍了速率试验的方案及数据处理方法。图9-3示出了速率试验的三个基本位置。将陀螺以精确给定的角速率，绕自身的三个轴旋转。在每一个基本位置上，陀螺均以稳定的角速率围绕三轴转台的垂直轴做顺时针和反时针的旋转。旋转角速率可取为 0, 0.1, 0.3, 1, 3, 10 度/秒。在每一种情况下，测试时间都是 36 秒。为了避免动态效应，旋转的起动和停止是在测试时间以外进行的。按照选定的陀螺动态误差模型的具体形式，对记录下的陀螺输出数据进行回归分析，便可求出误差模型中的各项误差系数值。

关于陀螺动态误差模型的研究要涉及到许多方面的知识，这早已超出了本教材的内容范围，这里就不再多做介绍。

### 四、陀螺的随机误差模型

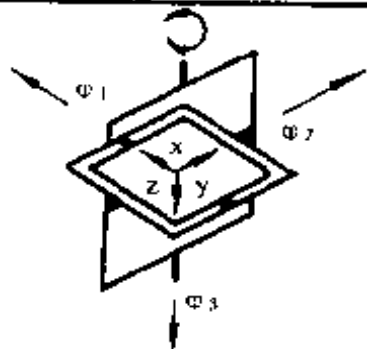
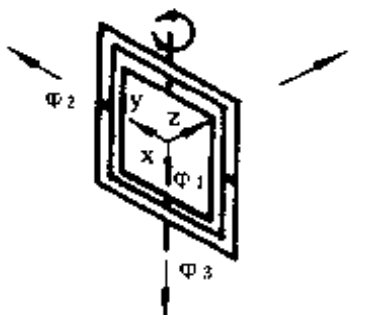
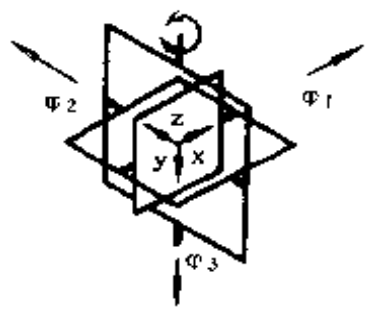
对于平台式陀螺，随机误差模型仅在转台静止的状态下进行；对于捷联式陀螺，除了上述的状态外，还应在系统的各种工作状态下进行。对在系统的工作状态下，记录下陀螺输出的全部数据，并做较长时间的实验，然后对数据进行统计分析，从而建立陀螺的随机误差模型。文献[19]对某动力调谐陀螺做了 48 小时的长时间静态实验，取 1 小时的数据进行统计分析。分析结果表明，采用 AR(2) 模型比 AR(1) 模型要好得多。

应该指出，对于随机误差模型的研究，尚属正在进行中的课题，这里只能做个简单介绍。

## § 9-4 系统实验及数据采集

本节仅简要地介绍与系统实验及数据采集有关的几方面



基本位置号	三轴测试台的惯性位置	惯性敏感元件姿态		
		$\varphi_1$ (横滚)	$\varphi_2$ (俯仰)	$\varphi_3$ (航向)
1		$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$
		$0^\circ$	$0^\circ$	$\pm \varphi_{12}$
		$0^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ \pm \varphi_{12}$
		$0^\circ$	$0^\circ$	$\mp \varphi_{12}$
2		$0^\circ$	$-90^\circ$	$-90^\circ$
		$0^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ \pm \varphi_{12}$
		$0^\circ$	$-90^\circ$	$-180^\circ - \varphi_{12}$
		$0^\circ$	$-90^\circ$	$-90^\circ \pm \varphi_{12}$
3		$90^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ$
		$90^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ - \varphi_{12}$
		$90^\circ$	$0^\circ$	$\mp \varphi_{12}$
		$90^\circ$	$0^\circ$	$90^\circ \pm \varphi_{12}$
测量：增量信号的总和； 测量时间：10分； 稳定的角速度：0.1 0.3 1.3、10度/秒。				

$\varphi_{12}$ — $\varphi_1$ 与 $\varphi_2$ 所在平面的旋转角度。

图 9-3 速率试验的位置

问题。

### **一、惯性敏感元件的误差补偿实验**

第八章中已经讨论了惯性敏感元件的动静态误差的补偿问题。当捷联系统所实际采用的陀螺与加速度计的动静态误差模型建立以后,可根据误差模型编制出补偿的软件程序,存入计算机中以便进行误差补偿。补偿实验可分两步进行。第一步是进行静态误差模型的补偿实验。使系统处于静止的工作状态,这时惯性敏感元件处于重力场之中,从而可以补偿与 $g$ 有关的误差项。第二步是进行动态误差模型的补偿实验,使系统处于速率工作状态,从而可以补偿与角速率有关的误差。通过动静态误差补偿实验可检验惯性敏感元件误差模型的精确性,并确定经补偿后剩余的陀螺随机漂移。

当用单轴速率台进行陀螺动态误差模型的补偿实验时,可以使陀螺的测量轴依次处于与速率台旋转轴相重合或相垂直的位置上,从而检验沿测量轴与交叉轴的误差的补偿效果。

### **二、系统的典型工作状态**

将惯性敏感元件组件、计算机及全部测试与记录系统连同三轴转台一起组成实验性捷联系统,如图 9-1 所示。用三轴转台提供系统的典型工作状态,并将系统输出的导航参数记录下来,以便进行系统误差分析。可由转台提供的系统典型工作状态包括以下三种:

1. 静止工作状态;
2. 速率工作状态;
3. 圆锥运动工作状态。

应该指出,当捷联系统的实时计算能力尚不完全具备的条件下仍可进行上述实验。这时可将陀螺与加速度计的输出记录下来,然后离线地进行全部捷联计算,同样可以达到系统

仅为 0.13 赫芝), 它会降低陀螺的动态响应, 因此不能采用阻容滤波器。通常是在计算机中采用具有实时性的数字滤波器。不少文献中探讨了应用卡尔曼滤波器进行陀螺漂移的实时估计与滤波的问题。在这方面还有许多工作要做。

本章对捷联系统的实验仅做了概念性的介绍, 很多方面的工作都正处于研究阶段。由于捷联系统的实验研究是一项非常重要的工作, 因此本书在最后做一简介, 以便读者在此基础上进行更深入的探讨。



## 附录一 地球参考椭球体的主曲率半径

### 一、地球参考椭球体

怎样用数学形式来表达地球曲面的几何形状呢？我们知道，当将地球近似看成一个半径为  $R$  的理想圆球体时，地球曲面的几何形状可用如下的方程来描述：

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

式中  $R$  即为地球半径。事实上，地球表面的形状起伏不平，很不规则，由理想圆球体来描述地球表面的几何形状误差太大。由于地球表面上有山、水、陆地，加之太阳、月亮等天体运动的影响，地球表面的形状不仅十分复杂，而且还处于不断变化之中，因此不可能对真实的地球表面形状做精确的数学描述。对于在地球附近的导航，将地球的几何形状近似为理想的椭球体是比较适宜的，即采用地球参考椭球体作为地球几何形状的数学描述。

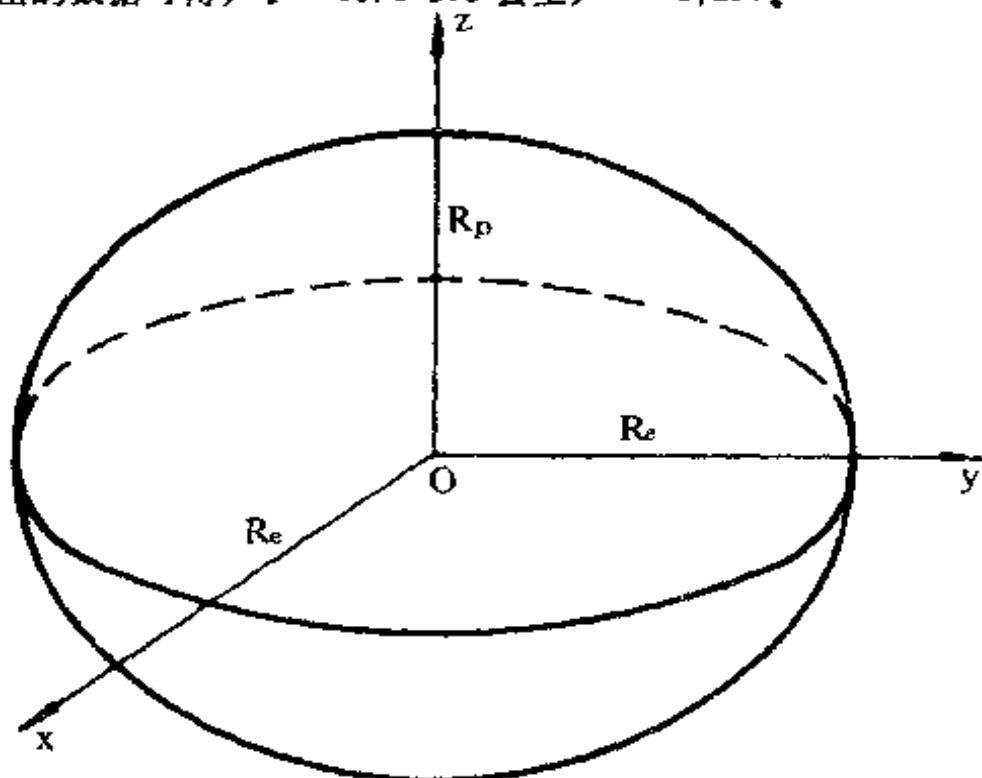
什么叫做地球参考椭球体？我们将海平面延伸到全部陆地便形成一个表面，称为“大地水准面”。大地水准面所包围的几何体就是一个近似的椭球体，称之为地球参考椭球体，附图 1-1 示出了地球参考椭球体的几何形状。如附图 1-1 所示，地球是一个绕地球极轴对称的旋转椭球体，垂直于极轴的平面与椭球体均相交为圆。赤道平面的半径为  $R_e$ ，地球极轴的半径为  $R_p$ ，赤道半径  $R_e$  比极轴半径  $R_p$  要长。取坐标系  $Oxyz$ ，原点  $O$  在地球中心， $Ox$  轴与  $Oy$  轴在赤道平面内， $Oz$  轴与地球极轴重合。根据立体几何的知识可得地球参考椭球体的曲面方程，即

$$\frac{x^2 + y^2}{R_e^2} + \frac{z^2}{R_p^2} = 1 \quad (\text{附 1-1})$$

由赤道半径  $R_e$  和极轴半径  $R_p$  可求得地球扁率  $e$ , 即

$$e = \frac{R_e - R_p}{R_e} \quad (\text{附 1-2})$$

地球的赤道半径  $R_e$  和极轴半径  $R_p$  可由大地测量确定。根据文献 [13] 给出的数据可得,  $R_e = 6378.393$  公里,  $e = 1/297$ 。

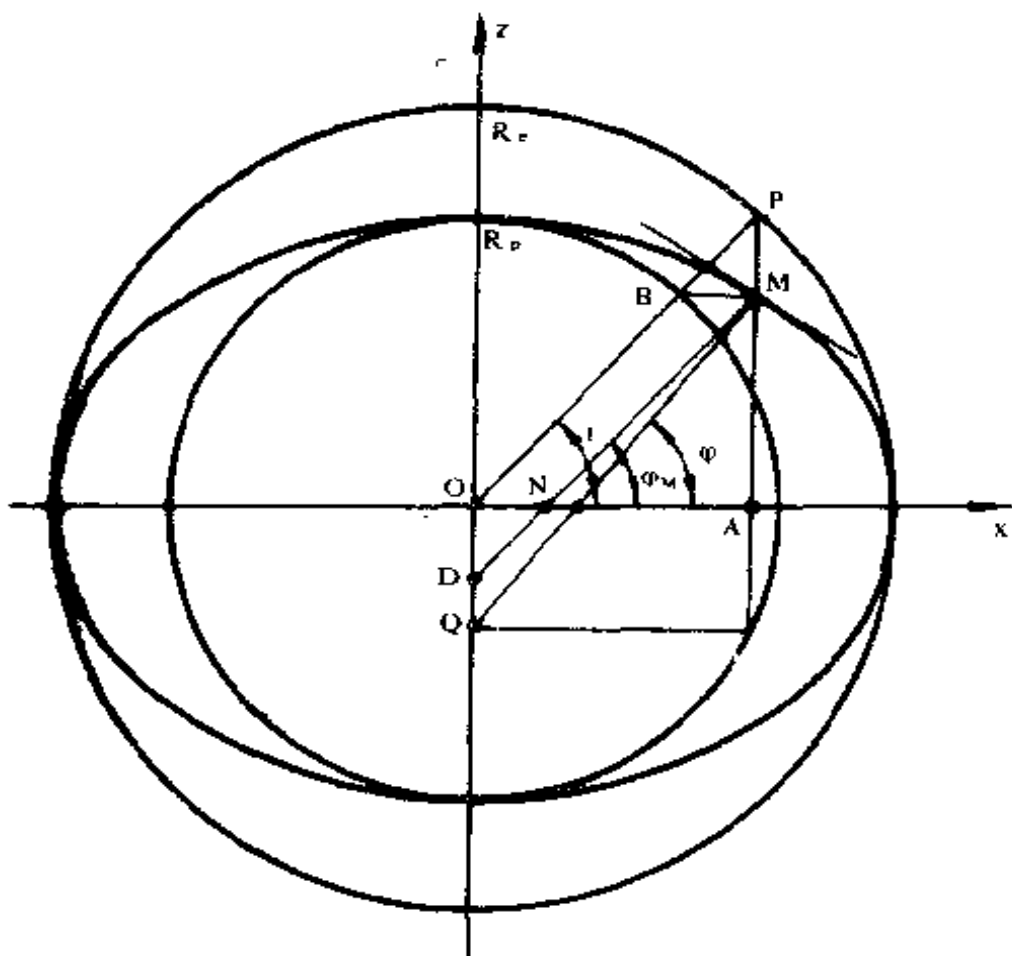


附图 1-1 地球参考椭球体的几何形状

## 二、地球参考椭球体的主曲率半径

由于将地球近似为椭球体, 于是在地球表面上任意点  $M$  的曲率半径就不是常值了。为了分析方便起见, 这里只讨论主曲率半径。如附图 1-2 所示, 过地球表面上任意点  $M$  做椭球体的切平面  $G$  及其法线  $\bar{n}$ 。法线  $\bar{n}$  沿  $OM$  方向, 它垂直于大地水准面, 也即沿地垂线方向。由于在地球表面上位置的微小变化可分解为沿南北向的位置变化和东西向的位置变化的两个分量, 在切平面上沿南北向做地球的切线  $AB$ , 沿东西向做地球的切线  $CD$ 。过切线  $AB$  与法线  $\bar{n}$  的平面与地球表面相交于地球子午面  $NMS$ , 过切线  $CD$  与法线  $\bar{n}$  的平面与地球表面交于平面  $EMF$ 。在地球子午面  $NMS$  及平面  $EMF$  内确定的点  $M$  的曲率半径称为





附图 1-3 曲线轨迹在当地子午面内的几何图形

$x_M = MA = R_p \sin i$ 。这样式(附 1-3)所表示的椭圆方程可等效地表示成椭圆参数方程,即

$$\begin{aligned} x_M &= R_e \cos i \\ z_M &= R_p \sin i \end{aligned} \quad (\text{附 1-4})$$

(1) 求证参变量  $i = \varphi_M$

证明

四边形  $PODM$  的一对边平行 ( $PM \parallel OD$ ), 一对边相等 ( $PO = MD = R_e$ ), 所以为平行四边形, 于是  $MD \parallel PO$ 。由此可知  $i = \varphi_M$ 。

这样, 式(附 1-4)所表示的椭圆参数方程又可写成

$$\begin{aligned} x_M &= R_e \cos \varphi_M \\ z_M &= R_p \sin \varphi_M \end{aligned} \quad (\text{附 1-5})$$

(2) 求曲率半径  $R_M$

椭圆在点  $M$  处的曲率半径  $R_M$  可表示为

$$R_M = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{\sqrt{dx_M^2 + dz_M^2}}{d\varphi}$$

式中  $dS$  为点  $M$  处椭圆曲线的微分,  $dx_M$  与  $dz_M$  分别为  $dS$  在  $x$  轴与  $z$  轴的分量。对式(附 1-5)求微分,并由式(附 1-2)得  $R_p = R_e(1 - e)$ , 代入之可得

$$\begin{aligned} dx_M &= -R_e \sin \varphi_M d\varphi_M \\ dz_M &= R_e(1 - e) \cos \varphi_M d\varphi_M \end{aligned} \quad (\text{附 1-6})$$

则

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{(-R_e \sin \varphi_M d\varphi_M)^2 + [R_e(1 - e) \cos \varphi_M d\varphi_M]^2} \\ &= R_e \sqrt{\sin^2 \varphi_M + (1 - e)^2 \cos^2 \varphi_M} d\varphi_M \end{aligned} \quad (\text{附 1-7})$$

为求  $R_M$ , 需将  $dS$  中的  $\sin^2 \varphi_M$ ,  $\cos^2 \varphi_M$ ,  $d\varphi_M$  均表示为  $\varphi$  的函数。因为  $MQ$  为椭圆在点  $M$  处的法线, 则有

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dz_M}{dx_M} = \frac{1}{1 - e} \operatorname{tg} \varphi_M \quad (\text{附 1-8})$$

由式(附 1-8)可得

$$\operatorname{tg} \varphi_M = (1 - e) \operatorname{tg} \varphi$$

于是有

$$\sin^2 \varphi_M = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_M}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_M} = \frac{(1 - e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + (1 - e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad (\text{附 1-9})$$

$$\cos^2 \varphi_M = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_M} = \frac{1}{1 + (1 - e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad (\text{附 1-10})$$

为求  $d\varphi_M$ , 将式(附 1-8)两边取微分, 得

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{1 - e} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi_M} d\varphi_M$$

将式(附 1-10)代入上式, 得

$$d\varphi_M = \frac{1 - e}{1 + (1 - e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \quad (\text{附 1-11})$$

将式(附 1-9), (附 1-10), (附 1-11)代入式(附 1-7), 并考虑到  $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = 1/\cos^2 \varphi$ , 得



$$dS = R_e \sqrt{\frac{(1-e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + (1-e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} + \frac{(1-e)^2}{1 + (1-e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \\ \cdot \frac{1-e}{[1 + (1-e)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi] \cos^2 \varphi} d\varphi$$

最后可得

$$R_M = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{R_e(1-e)^2}{[\cos^2 \varphi + (1-e)^2 \sin^2 \varphi]^{3/2}} \quad (\text{附 1-12})$$

下面来求  $R_M$  的一阶近似式。对式(附 1-12)略去二阶小量可得

$$R_M \approx R_e(1-2e)(1-2e \sin^2 \varphi)^{-3/2} \\ \approx R_e(1-2e+3e \sin^2 \varphi) \quad (\text{附 1-13})$$

或

$$\frac{1}{R_M} = \frac{[\cos^2 \varphi + (1-e)^2 \sin^2 \varphi]^{3/2}}{R_e(1-e)^2} \\ \approx \frac{1}{R_e} (1-e)^{-2} (1-2e \sin^2 \varphi)^{3/2} \\ \approx \frac{1}{R_e} (1+2e)(1-3e \sin^2 \varphi) \\ \approx \frac{1}{R_e} (1+2e-3e \sin^2 \varphi) \quad (\text{附 1-14})$$

## (2) 在平面 $EMF$ 内的主曲率半径 $R_N$

当曲线的轨迹在附图 1-2 所示的  $EMF$  平面内时,曲线  $\widehat{EMF}$  在点  $M$  处的曲率半径记为  $R_N$ 。过点  $M$  做地球极轴的垂面,与地球表面交于纬度圈  $KML$ ,与极轴  $ON$  交于  $O'$ 。由附图 1-2 可知,东西向的切线  $CD$  是  $\widehat{EMF}$  和  $\widehat{KML}$  的公共切线,平面  $EMF$  与平面  $KML$  的夹角为  $\varphi$  (可参照附图 1-3 的几何关系得出)。根据微分几何中求任意平截线的曲率半径的定理<sup>[13]</sup>可知,曲线  $\widehat{EMF}$  在点  $M$  处的曲率半径  $R_N$  与纬度圈  $KML$  在点  $M$  处的半径存在着下列关系:

由式(附 1-18), (附 1-19) 可得

$$x = -\frac{R_p^2}{R_e^2} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dz}} x = -\frac{R_p^2}{R_e^2} (\operatorname{tg} \varphi) x$$

将上式代入式(附 1-17)可得

$$\frac{x^2}{R_e^2} + \frac{\left(-\frac{R_p^2}{R_e^2} x \cdot \operatorname{tg} \varphi\right)^2}{R_p^2} = 1$$

由上式可解得

$$x = \frac{R_e}{\sqrt{1 + \frac{R_p^2}{R_e^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{R_e \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{R_p^2}{R_e^2} \sin^2 \varphi}}$$

考虑到  $e = \frac{R_e - R_p}{R_e}$ , 因而  $1 - e = \frac{R_p}{R_e}$ , 则

$$O'M = x = \frac{R_e \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - e)^2 \sin^2 \varphi}} \quad (\text{附 1-20})$$

将式(附 1-20)代入式(附 1-16)可得

$$R_N = R_e \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - e)^2 \sin^2 \varphi}} \approx R_e \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - 2e) \sin^2 \varphi}} \quad (\text{附 1-21})$$

与  $R_M$  的求法类似, 可求出  $R_N$  的一阶近似式, 得

$$R_N \approx R_e (1 + e \sin^2 \varphi) \quad (\text{附 1-22})$$

或

$$\frac{1}{R_N} \approx \frac{1}{R_e} (1 - e \sin^2 \varphi) \quad (\text{附 1-23})$$

将式(附 1-14), (附 1-23) 合在一起可得地球参考椭球体的主曲率半径, 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_M} &= \frac{1}{R_e} (1 + 2e - 3e \sin^2 \varphi) \\ \frac{1}{R_N} &= \frac{1}{R_e} (1 - e \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (\text{附 1-24})$$

由附图 1-2 可见,  $R_M$  与  $R_N$  均沿法线  $QM$  的方向, 但  $R_M \neq R_N$ 。由

以下推导可知

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R_M} &= \frac{1}{R_s} (1 + 2e - 3e \sin^2 \varphi) \\
 &= \frac{1}{R_s} (1 + 2e - 2e \sin^2 \varphi - e \sin^2 \varphi) \\
 &= \frac{1}{R_s} (1 - e \sin^2 \varphi + 2e \cos^2 \varphi) \\
 &= \frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_s} 2e \cos^2 \varphi > \frac{1}{R_N}
 \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{R_M} > \frac{1}{R_N} \quad \text{或} \quad R_N > R_M \quad (\text{附 1-25})$$

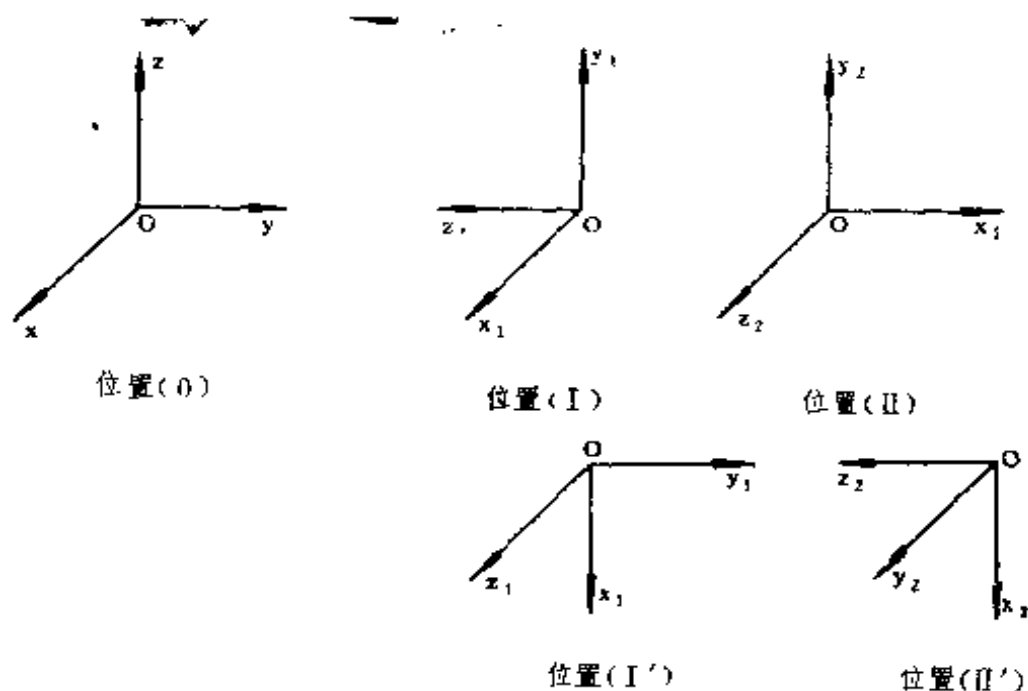
式(附 1-25)表明, 地球子午面内的曲率半径恒小于与子午面垂直的平面内的曲率半径。

## 附录二 无限小转动的 向量性定理

本附录中将讨论刚体定点转动的一个重要定理，即无限小转动的向量性定理。下面首先举例说明有限转动不是向量，然后再讨论无限小转动的向量性。

### 一、有限转动不是向量

附图 2-1 中用  $Oxyz$  代表一个刚体，刚体的初始位置为位置 (I)，设刚体从位置 (I) 出发分别绕  $Ox$  轴正向及  $Oy$  轴正向各转  $90^\circ$ 。如果先绕  $Ox$  轴转，再绕  $Oy$  轴转，则刚体经过位置 (I') 最后达到位置 (II)；反之，如果先绕  $Oy$  轴转，再绕  $Ox$  轴转，则刚体经位置 (I'') 最后达到位置 (II')。显然，位置 (II) 与位置 (II') 并不重合，这说明两个相同的转动



附图 2-1 有限转动不是向量的举例

仅仅由于先后次序的不同就可导致不同的结果。因此，有限转动的合成不符合向量相加的交换法则。换言之，在定点转动中，有限转动不是向量。

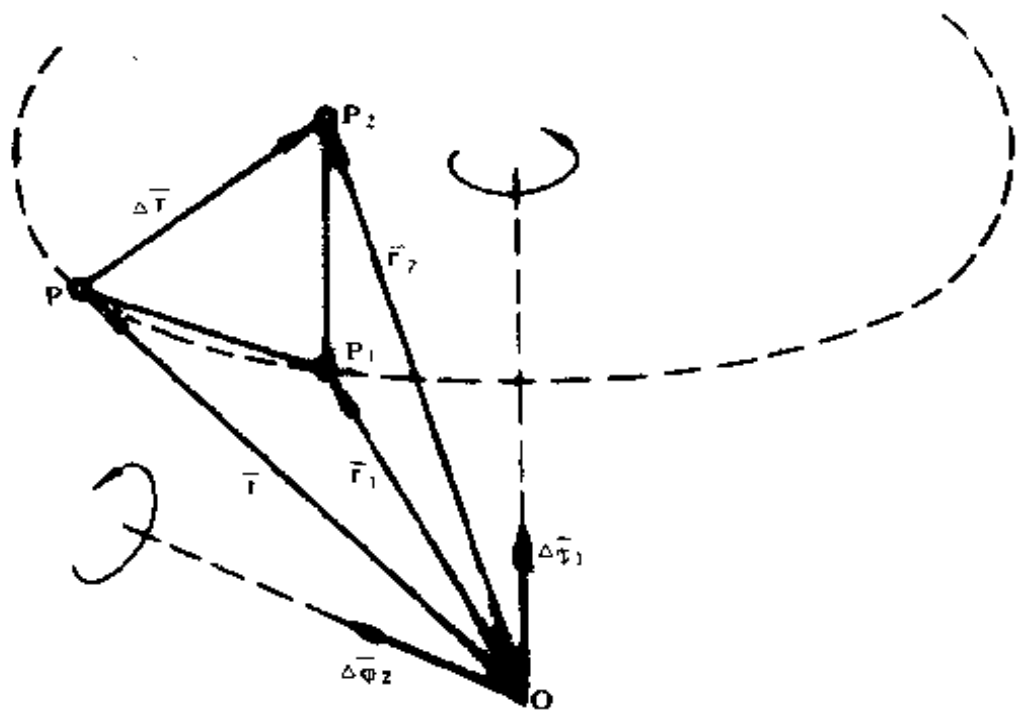
## 二、无限小转动是向量

现在要证明的定理是：向量加法适用于绕定点的诸无限小转动。为此可将无限小转动改写成无限小位移的形式：

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{\varphi} \times \vec{r}$$

式中  $\vec{r}$  为刚体上一点的向径， $\Delta \vec{\varphi}$  沿刚体瞬时转轴的方向。

证明 令  $\Delta \vec{\varphi}_1$  及  $\Delta \vec{\varphi}_2$  为绕定点  $O$  的二无限小转动，刚体中任一点  $P$  依次经过两次转动后的位移为  $\Delta \vec{r}$ ，如附图 2-2 所示（图中未画出刚体）。假设：



附图 2-2 无限小转动的合成

第一次转动：刚体做  $\Delta \vec{\varphi}_1$  转动后，点  $P$  位移到  $P_1$ ，位置向量由  $\vec{r}$  变为  $\vec{r}_1$ 。在该瞬时刚体绕与  $\Delta \vec{\varphi}_1$  相重合的轴做定轴转动。显然  $PP_1$  垂直于由点  $P$  与  $\Delta \vec{\varphi}_1$  所确定的平面。于是

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{\varphi}_1 \times \vec{r}$$

## 附录三 复合数量函数对向量的导数

设  $f$  代表数量函数，它是  $n$  维列向量  $\bar{x}$  的函数， $f = f(\bar{x})$ ，而向量  $\bar{x}$  又是  $m$  维列向量  $\bar{y}$  的函数， $\bar{x} = x(\bar{y})$ ，则复合数量函数  $f$  对向量  $\bar{y}$  的导数有以下两个公式：

$$\frac{df}{d\bar{y}} = \frac{d\bar{x}'}{d\bar{y}} \cdot \frac{df}{d\bar{x}} \quad (\text{附 3-1})$$

$$\frac{df}{d\bar{y}'} = \frac{df}{d\bar{x}'} \cdot \frac{d\bar{x}}{d\bar{y}'} \quad (\text{附 3-2})$$

式(附 3-1) 与式(附 3-2) 中的  $df/d\bar{y}$ ， $df/d\bar{y}'$ ， $df/d\bar{x}$ ， $df/d\bar{x}'$ ， $d\bar{x}'/d\bar{y}$ ， $d\bar{x}/d\bar{y}'$  可分别定义如下：

$$\frac{df}{d\bar{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m} \end{bmatrix} \quad (\text{附 3-3})$$

$$\frac{df}{d\bar{y}'} = \left[ \frac{\partial f}{\partial y_1} \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial y_m} \right] = \left( \frac{df}{d\bar{y}} \right)' \quad (\text{附 3-4})$$

$$\frac{df}{d\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{附 3-5})$$

$$\frac{df}{d\bar{x}} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] = \left( \frac{df}{d\bar{x}} \right)^t \quad (\text{附 3-6})$$

$$\frac{d\bar{x}^t}{d\bar{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_m} & \frac{\partial x_2}{\partial y_m} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{bmatrix} \quad (\text{附 3-7})$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}^t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{bmatrix} = \left( \frac{d\bar{x}^t}{d\bar{y}} \right)^t \quad (\text{附 3-8})$$

证明

根据式(附 3-3), (附 3-4), (附 3-5), (附 3-6), (附 3-7) 及 (附 3-8) 所给出的定义式可给出式(附 3-1) 及 (附 3-2) 的证明。

(1) 式(附 3-1) 的证明

$$\frac{df}{d\bar{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{bmatrix}$$

## 参 考 文 献

- [1] 许国楨, 国外军用飞机惯导系统的发展概况, 航空动态第 136 期, 1983 年 9 月 30 日。
- [2] 关肇直主编, 线性控制系统理论在惯性导航系统中的应用, 科学出版社, 1984。
- [3] 崔中兴, 惯性导航系统, 国防工业出版社, 1982。
- [4] J. C. 洪编(汪开远译), 捷联式导航平台, 科学出版社, 1979。
- [5] 华中工学院数学教研室软件教研室编, 算法语言·计算方法, 人民教育出版社, 1978。
- [6] 中国科学院沈阳计算技术研究所等编, 电子计算机常用算法, 科学出版社, 1976。
- [7] I. Y. Bar-Itzhack, Orthogonalization Techniques of a Direction Cosine Matrix, IEEE Trans. AES-5 Sept. 1969.
- [8] I. Y. Bar-Itzhack, J. Meyer, On the Convergence of Iterative Orthogonalization Processes, IEEE Trans. AES-12, March 1976.
- [9] I. Y. Bar-Itzhack, Iterative Optimal Orthogonalization of the Strapdown Matrix, IEEE Trans. AES-11, Jan. 1975.
- [10] 陈哲, 以算法误差最小为指标的捷联式矩阵最佳正交化, 中国航空科技文献 HJB 830077, 1983。
- [11] 陈哲, 全姿态飞机捷联式系统姿态角的计算, 航空学报, 1984 年第 4 卷第 3 期。
- [12] 陈哲, 飞机捷联系统基本算法的数学模拟, 惯性导航与仪表, 1984 年第 1 期。
- [13] S. Maybeck, Wander Azimuth Implimentation Algorithm for a Strapdown Inertial System, AFFDL-TR-73-80, Oct. 1973.
- [14] 沈泰昌、谷宝贵、谢秉兰编著, 系统工程基础, 国防工业出版社, 1981。
- [15] [美] B. L. 阿姆斯特塔特著, 可靠性数学, 科学出版社, 1978。
- [16] P. J. Donoghue and R. Holdsworth, 应用静态与动态陀螺补偿改进捷联系统性能, 动力调谐陀螺译文集(第三集), 国外航空编辑部, 1978·11。
- [17] 西北工业大学九〇五教研室, 捷联式惯性导航系统, 1981。
- [18] 304 教研室编, 捷联式惯导原理, 南京航空学院, 1981. 9。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

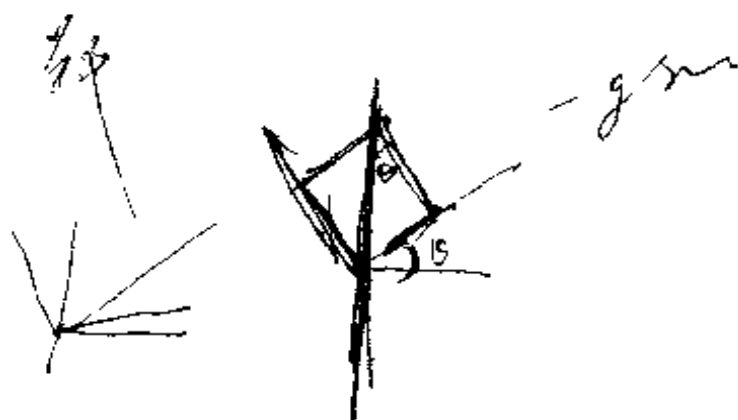
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

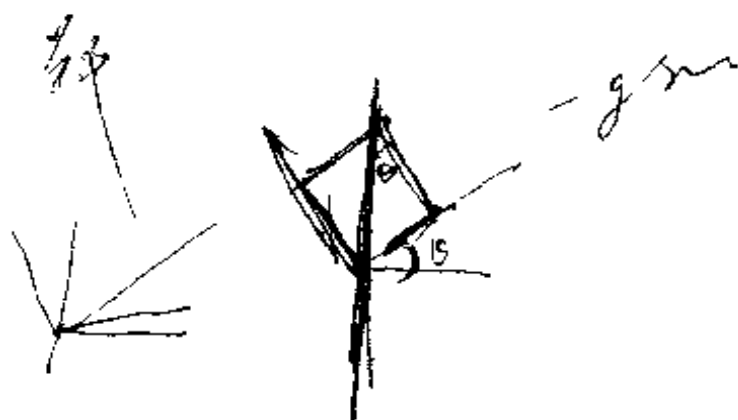
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

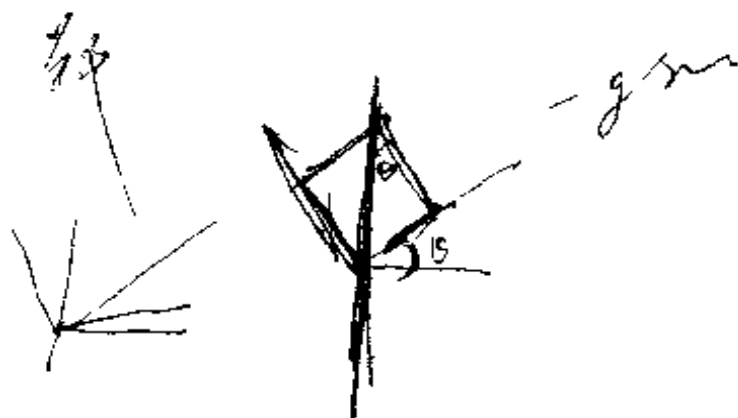
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

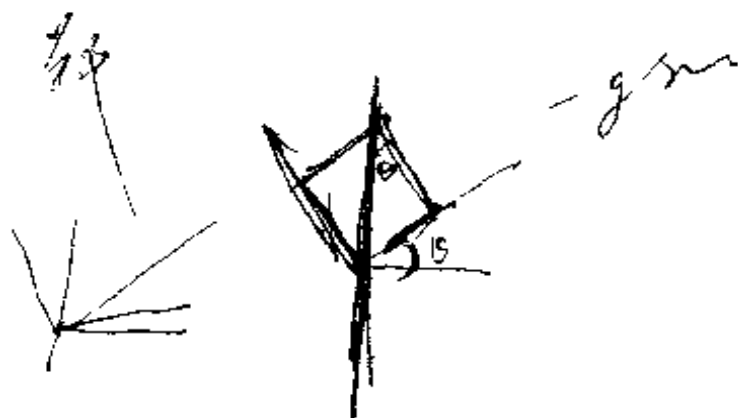
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

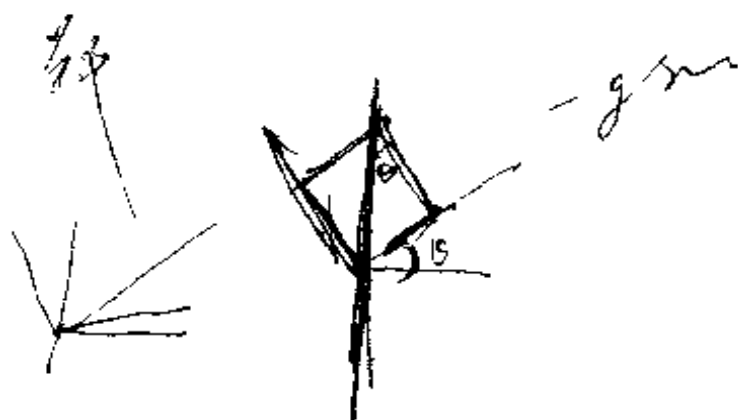
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

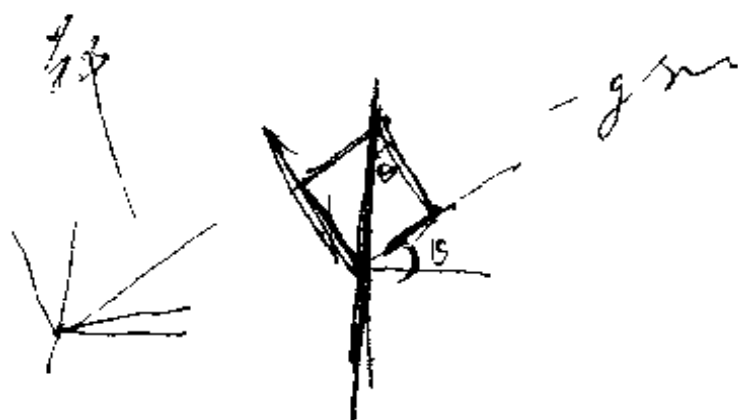
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

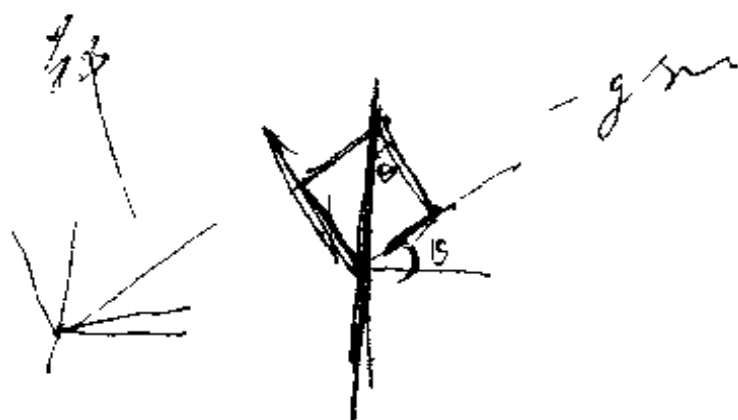
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

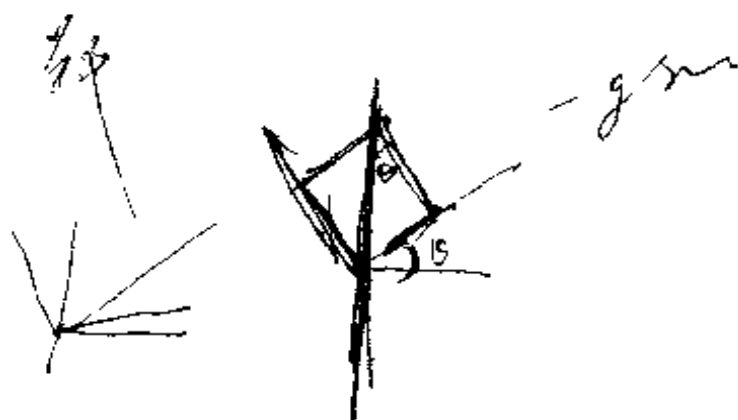
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

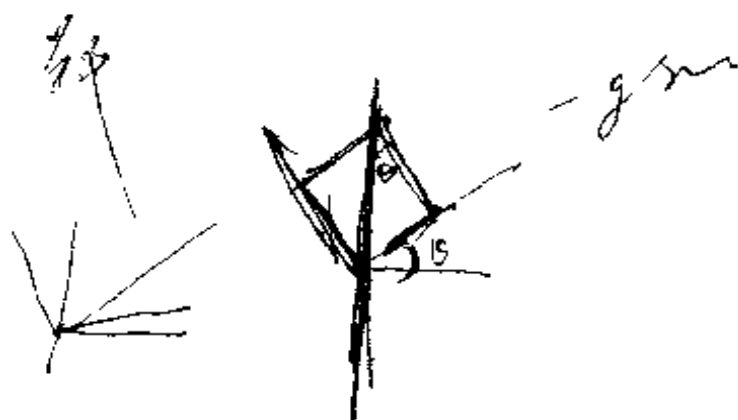
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

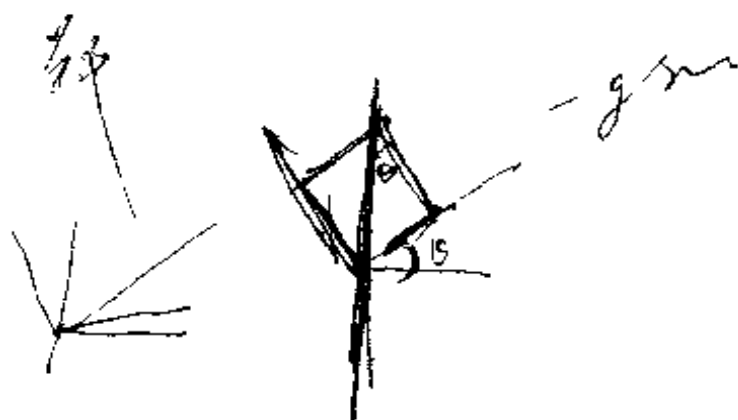
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

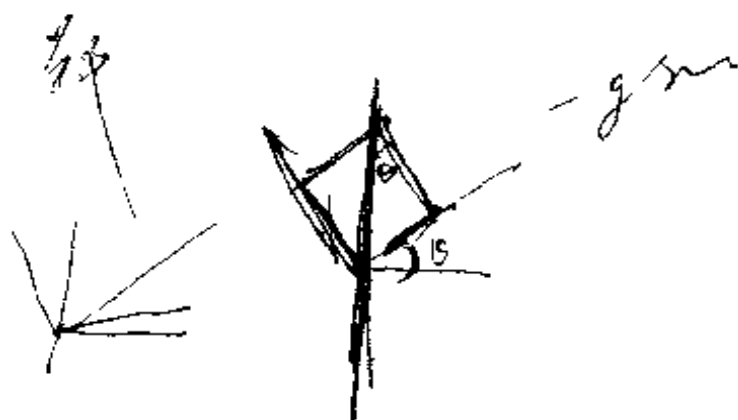
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

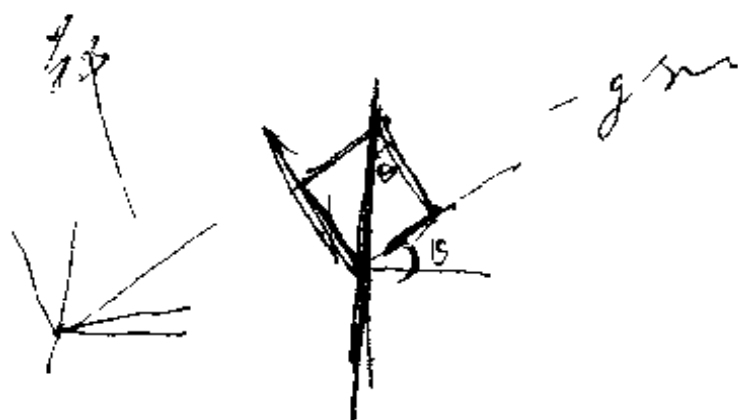
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

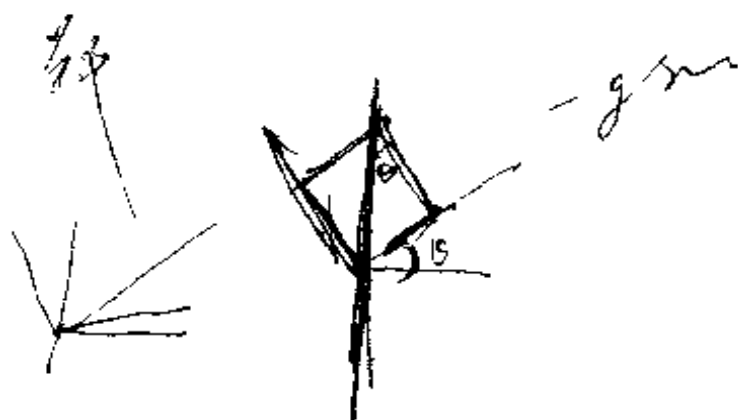
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

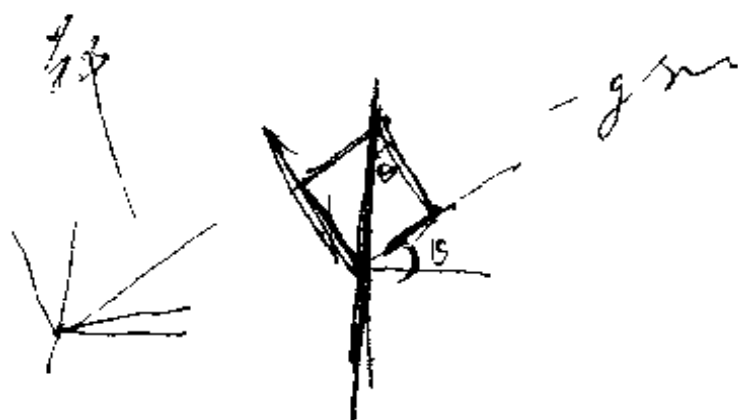
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

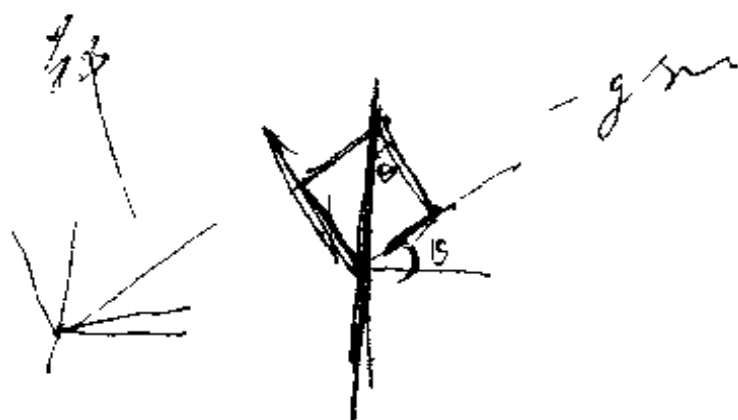
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

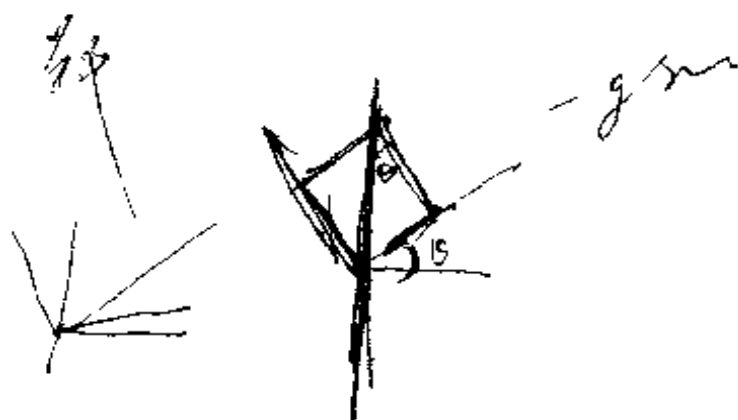
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

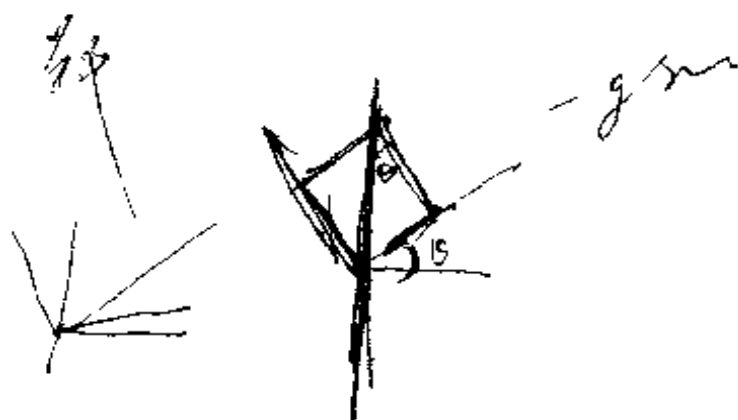
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

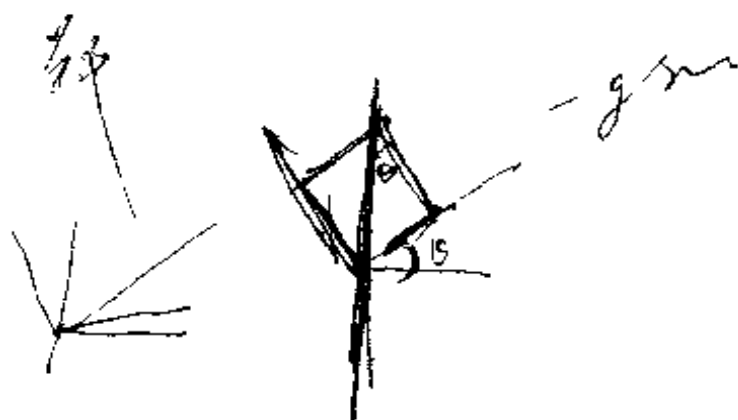
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

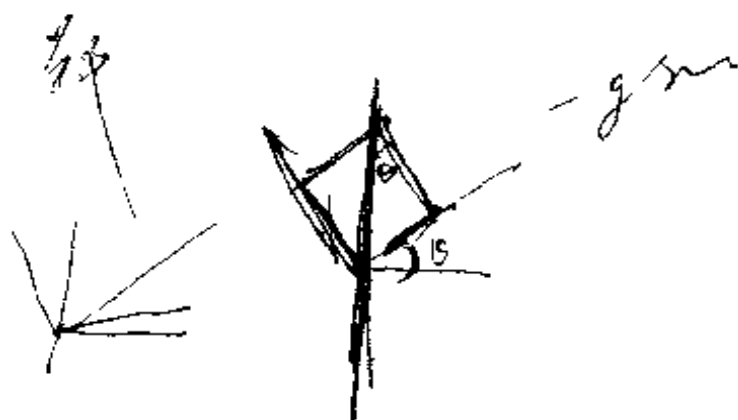
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

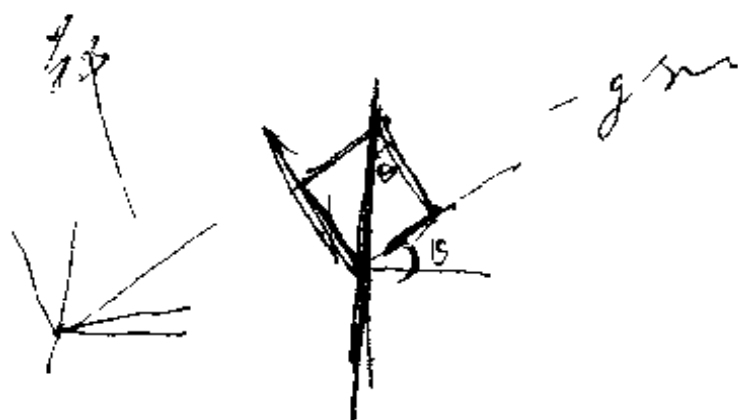
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

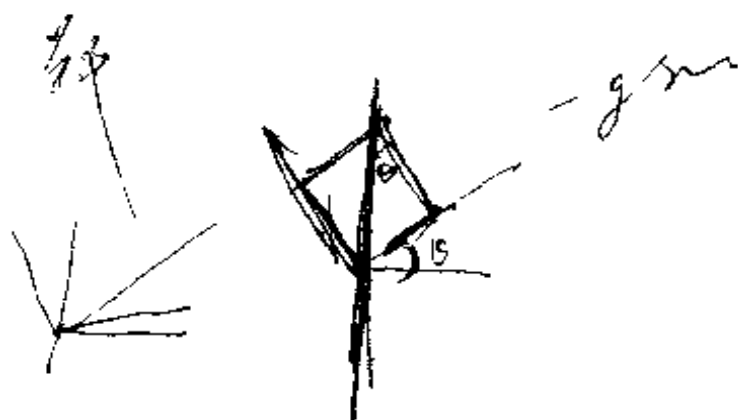
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

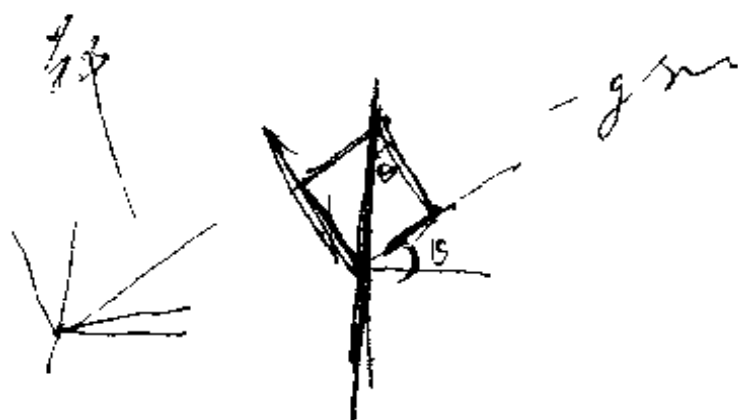
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

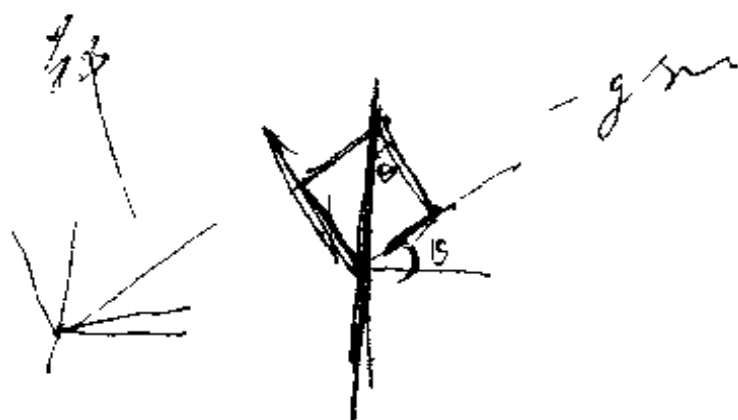
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

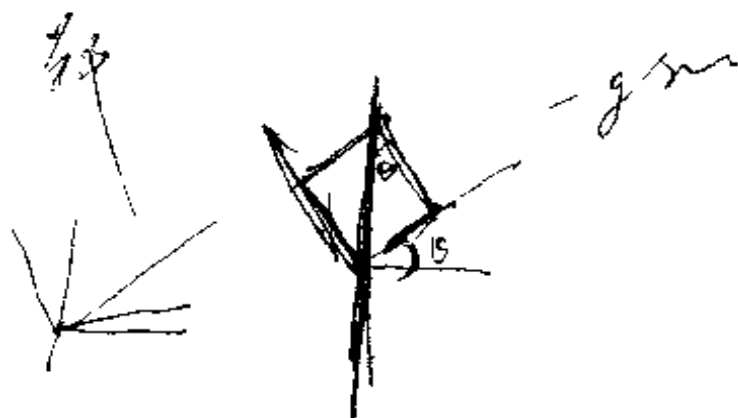
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

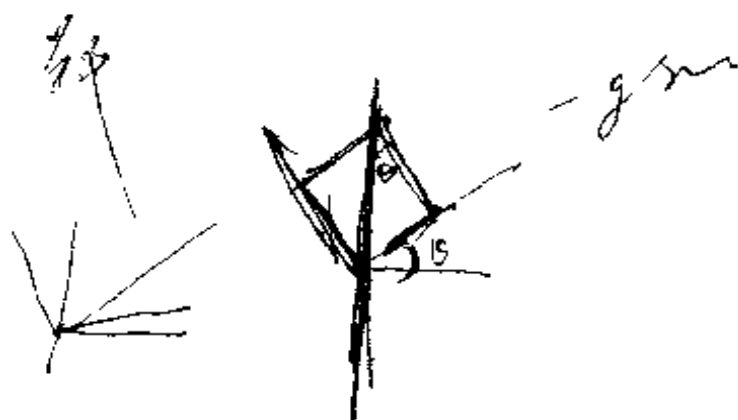
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

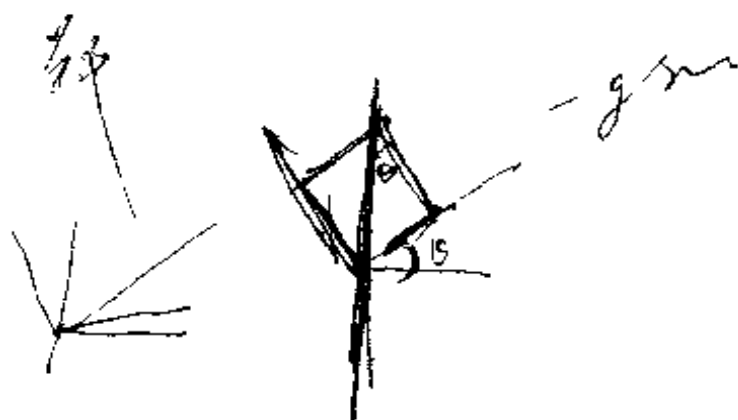
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

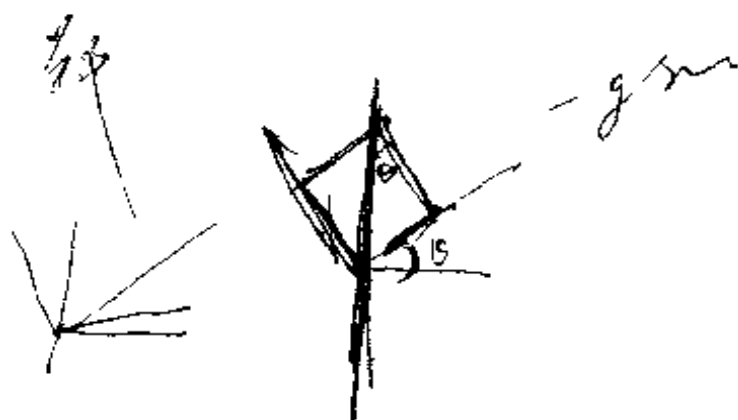
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

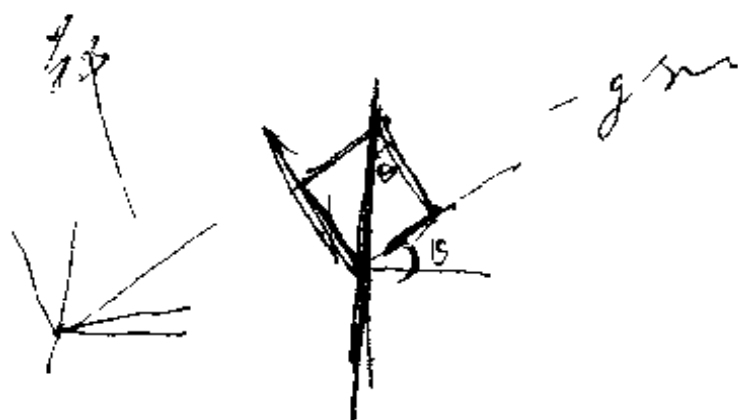
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

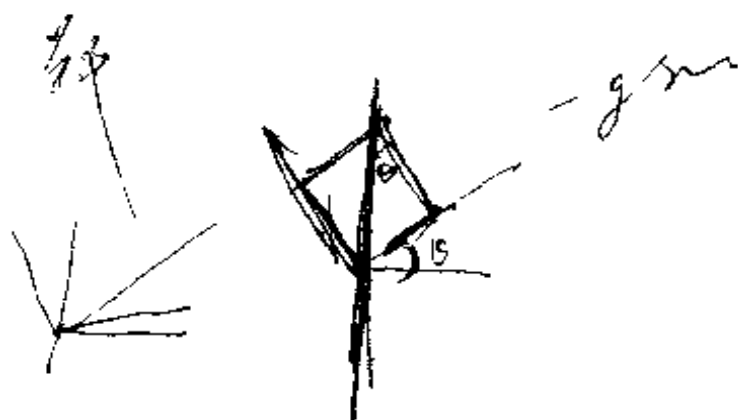
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

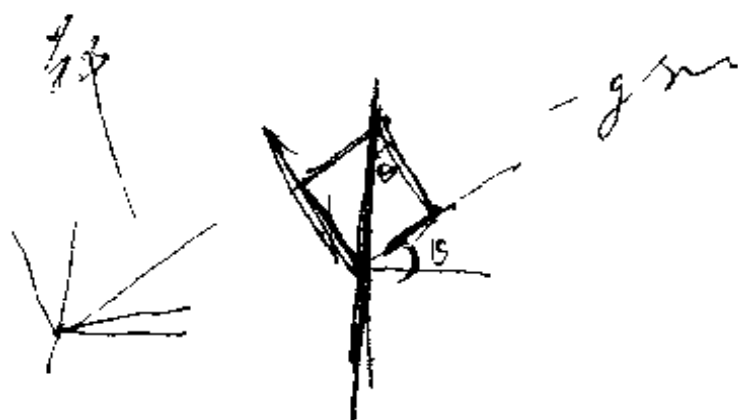
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

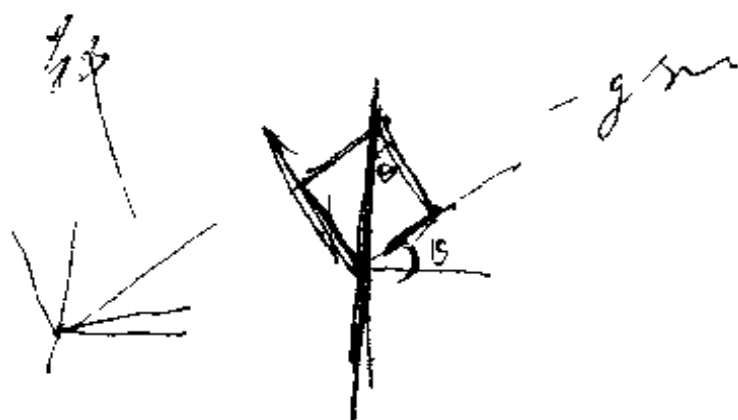
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

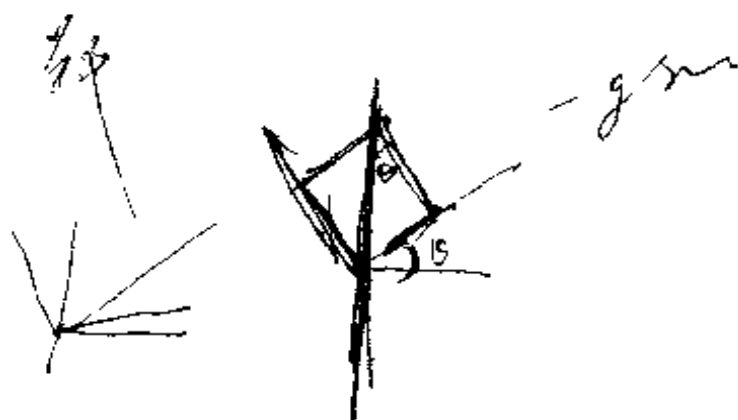
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

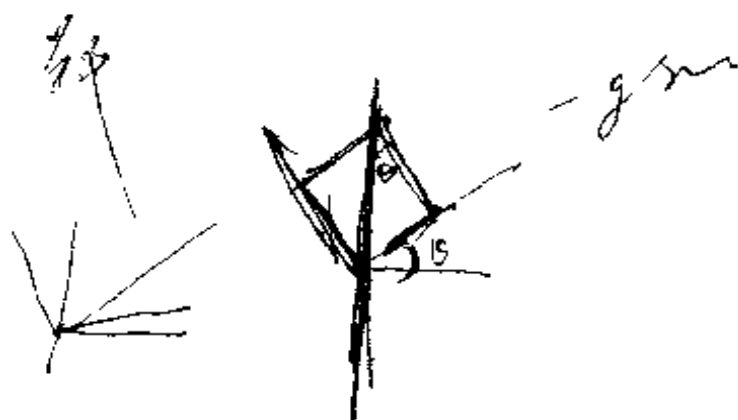
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

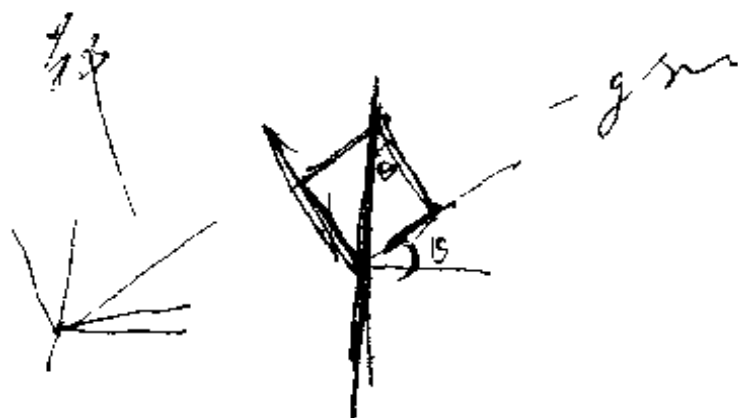
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

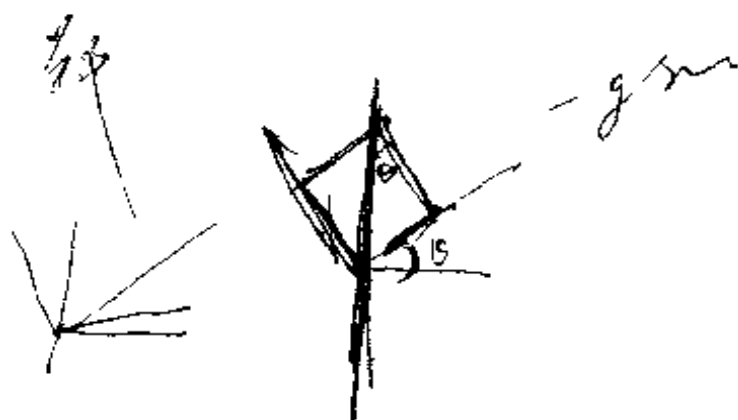
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

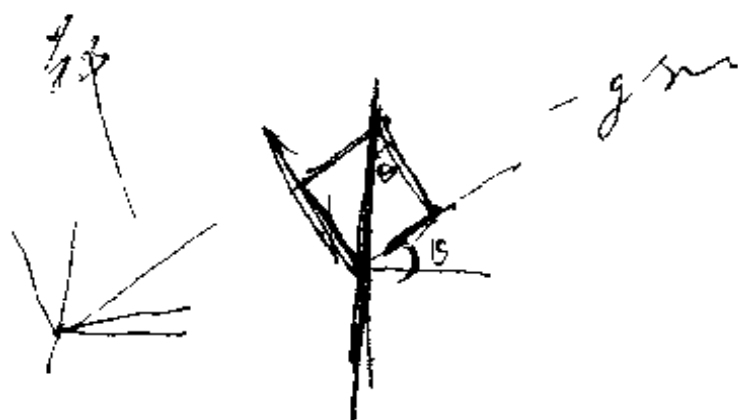
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

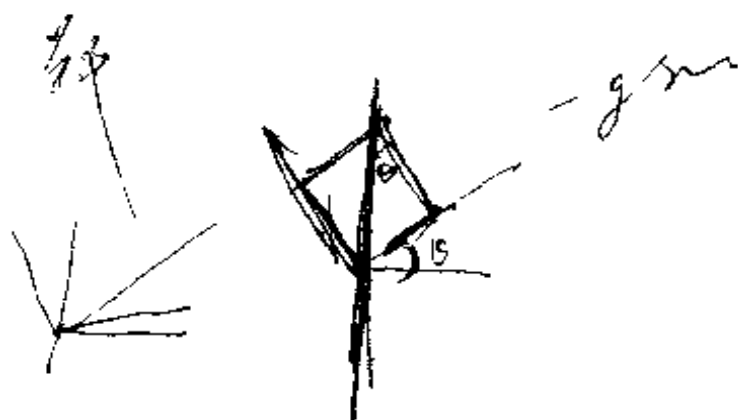
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

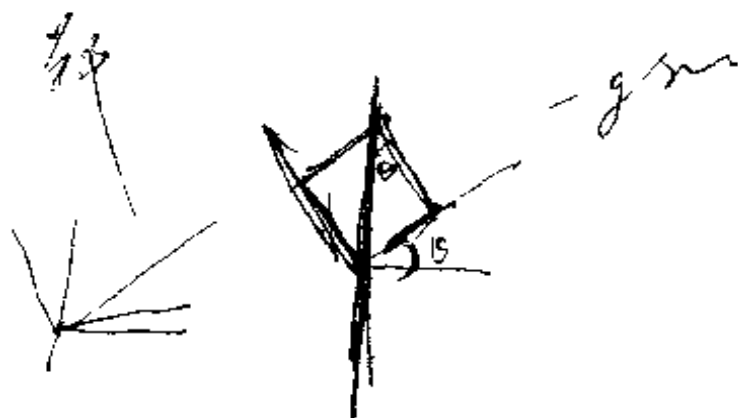
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

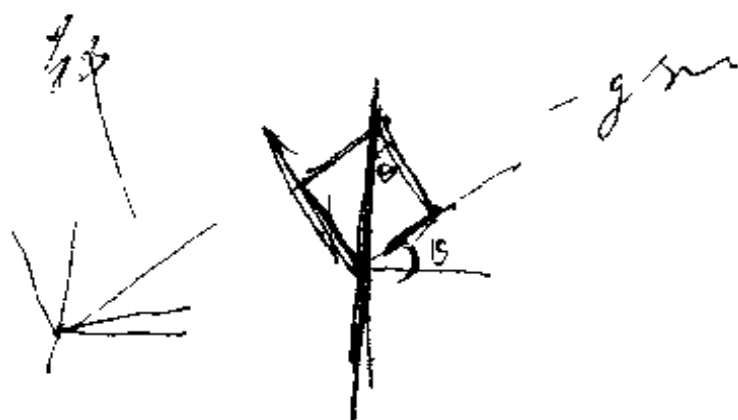
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

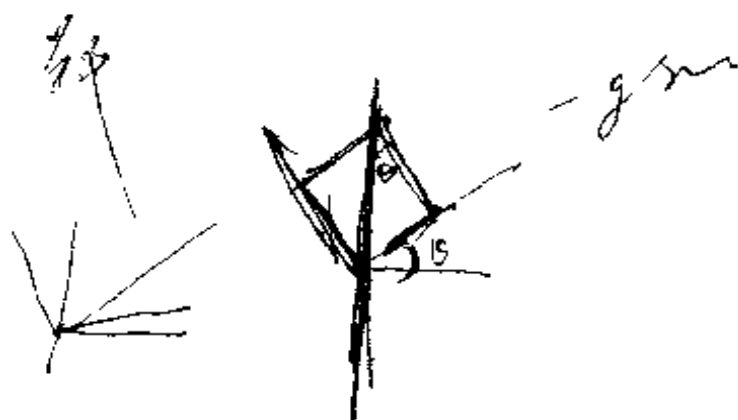
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

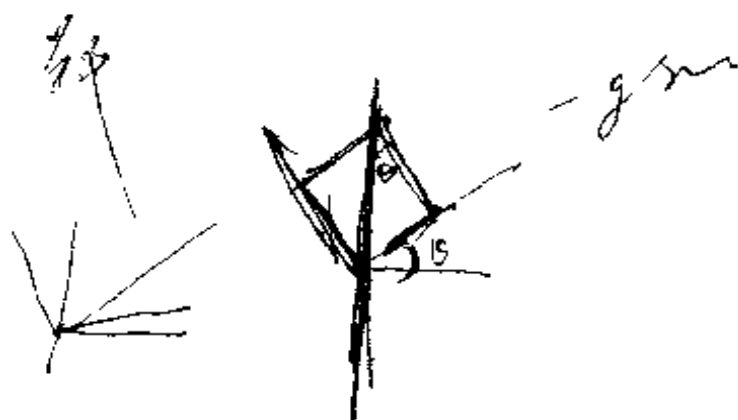
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

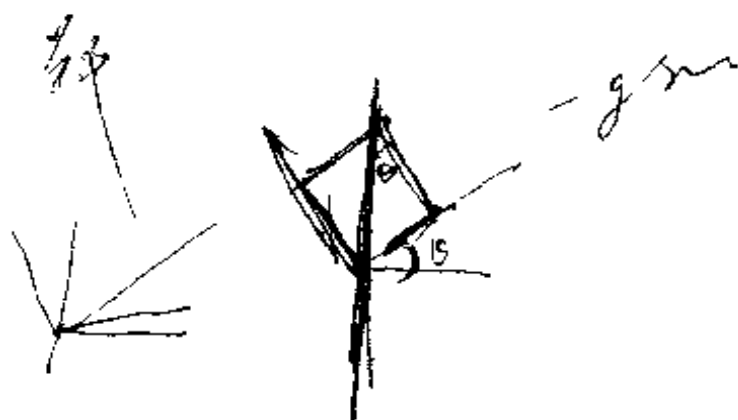
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

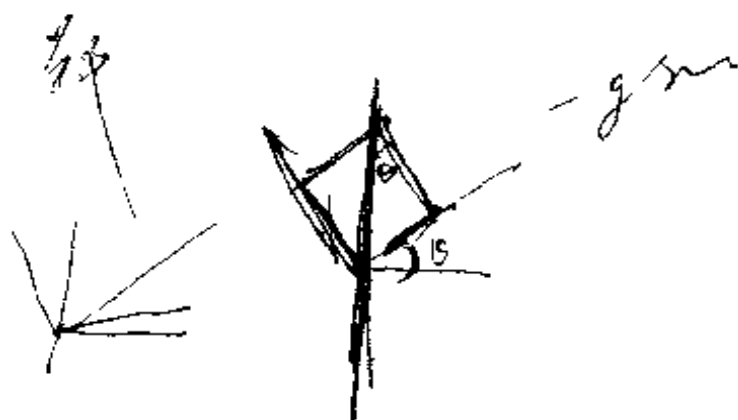
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

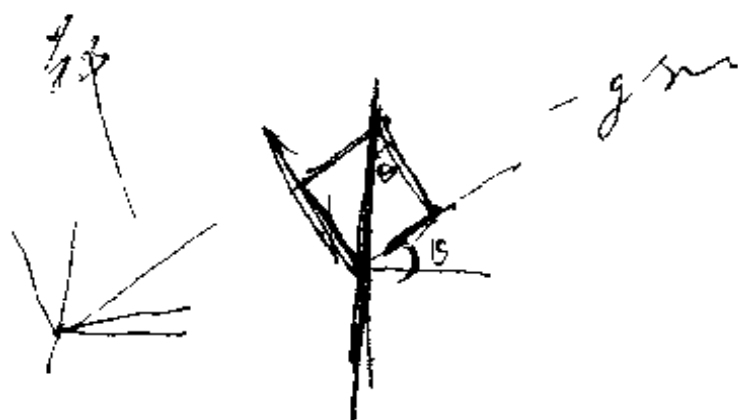
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

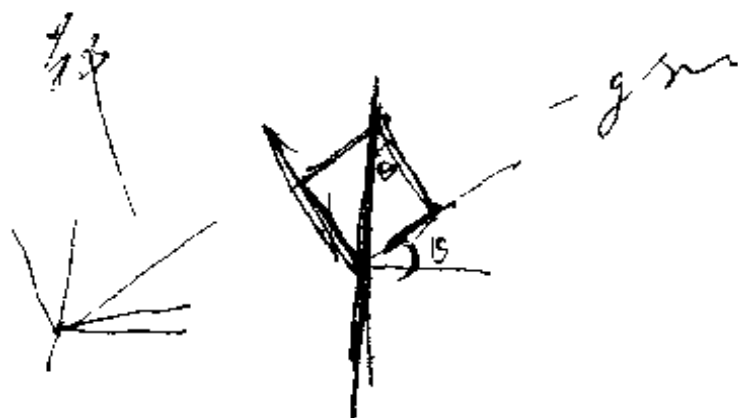
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

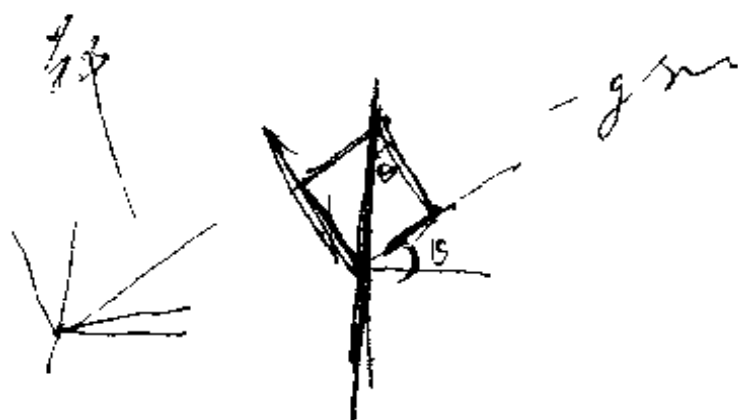
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

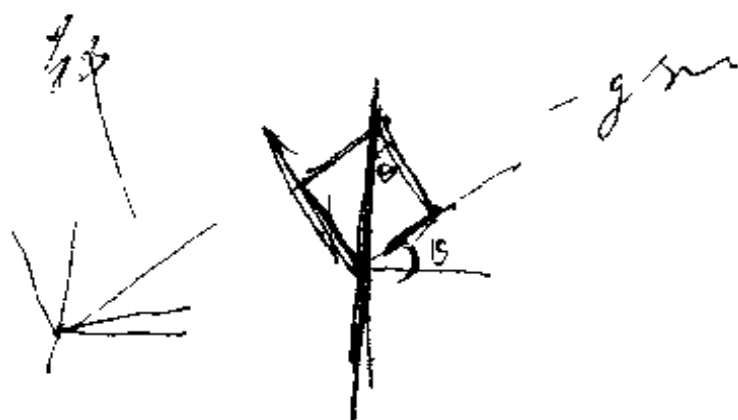
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

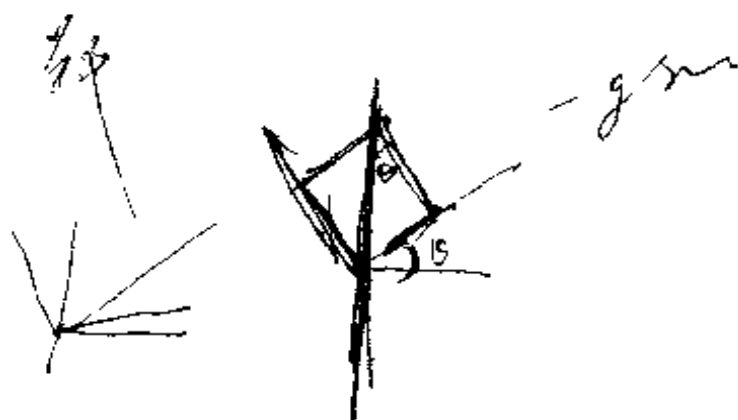
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。





[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

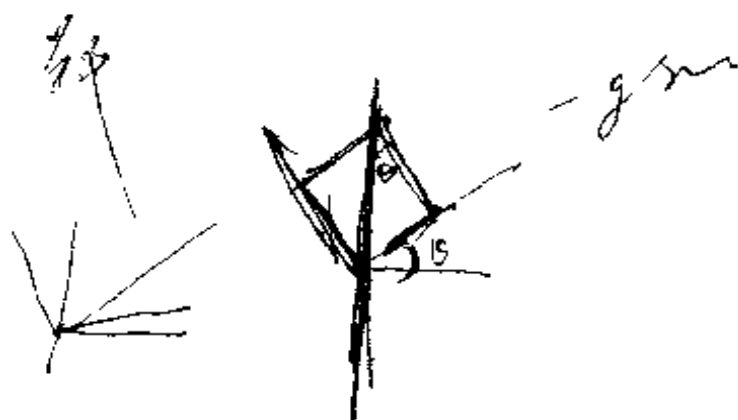
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

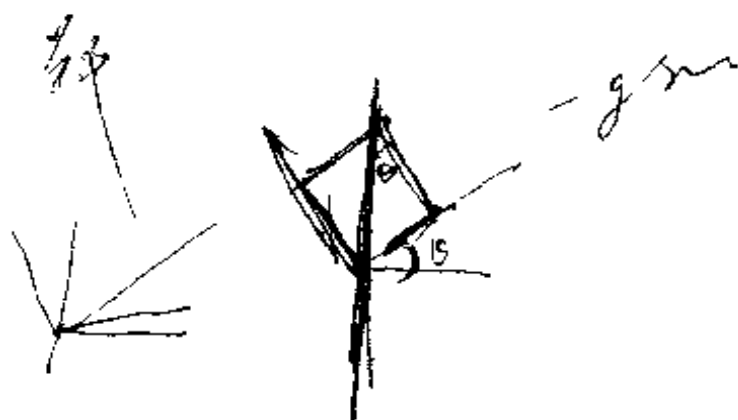
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

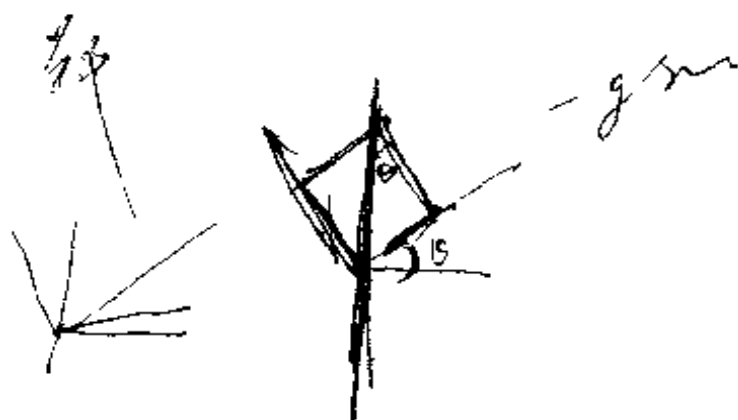
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

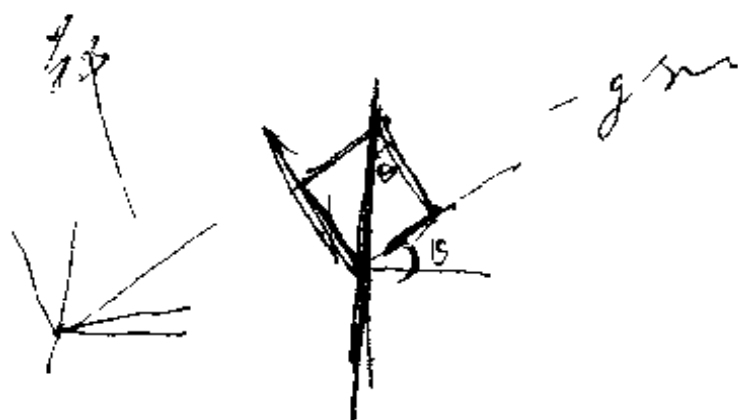
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

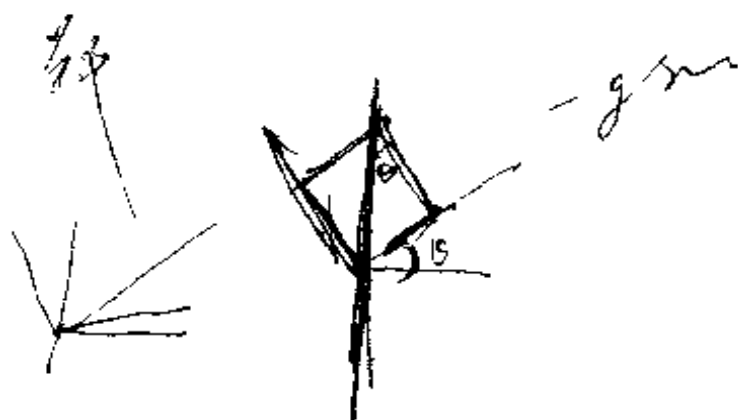
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

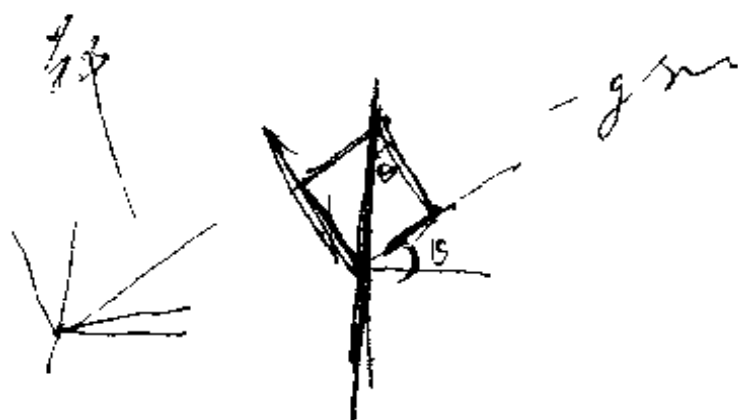
[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。



[19] AGARD-LS-95, Strapdown Inertial System, Guidance and Control Panel and the Consultant and Exchange Programme in Copenhagen, Denmark, 12-13 June 1978 in Bolkesjø Norway; 15-16 June 1978.

[20] R. Nurse-G. Schmidh & D. Kaiser (陈哲译), 惯性导航系统算法的估计技术, 国外惯导与器件, 1980年第3期。

[21] 陈哲, 实时捷联系统的实验设计, 仪器仪表学报, 1985年第6卷第4期。

[22] D. Rahls, Development and Testing of an Experimental Strapdown System, Lecture Series on Inertial Navigation System, Sian, April 1981.

[23] D. K. Joos (张增奎译), 根据系统——测试——数据对捷联式敏感元件参数的确定和计算, 国外惯导与器件, 1982年第1期。

[24] NASA CR 132410, Investigation of Application of Two-Degree-Freedom Dry Tuned-Gimbal Gyroscopes to Strapdown Navigation System, P. 181—209.

[25] D. F. Collman (郑丽珠译), 二自由度干式调谐陀螺仪数字再平衡回路的现实性研究, NASA-CR-144089, 惯导与器件(动力调谐仪专辑), 1978(增刊)。

[26] 郝吉臣, 动力调谐陀螺仪捷联应用锁定回路的设计, 北航技术总结 BH-F528, 1983年4月。

[27] C. S. Edwards and R. J. Chaplin, Smart Inertial Measurement Units and the Compensation of Dynamically Tuned Gyroscopes for Strapdown Inertial Systems, The 31st Symposium of the AGARD Guidance and Control Panel, London, Oct. 1980.

[28] 《陀螺仪与惯性导航专业情报网》编, 国外惯性技术手册, 国防工业出版社, 1983年5月。

[29] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979。

