1. $T(n) = 4\cdot T\left(\frac{n}{2}\right)+8 =$ // $i=1$

$* \; T\left(\frac{n}{2}\right) = 4\cdot T\left(\frac{n}{2^2}\right)+8$

$4\cdot\left[4\cdot T\left(\frac{n}{2^2}\right)+8\right]+8 =$ // $i=2$

$** \; T\left(\frac{n}{2^2}\right) = 4\cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right)+8$

$4^2\cdot T\left(\frac{n}{2^2}\right)+4\cdot 8+8$ // פתיחת סוגריים

$*** \; T\left(\frac{n}{2^3}\right) = 4\cdot T\left(\frac{n}{2^4}\right)+8$

$4^2\cdot\left[4\cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right)+8\right]+4\cdot 8+8 =$ // $i=3$

$4^3\cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right)+4^2\cdot 8+4\cdot 8+8 =$ // פתיחת סוגריים

$4^3\cdot\left[4\cdot T\left(\frac{n}{2^4}\right)+8\right]+4^2\cdot 8+4\cdot 8+8 =$ // $i=4$

$4^4\cdot T\left(\frac{n}{2^4}\right)+4^{3}\cdot 8+4^{2}\cdot 8+4^{1}\cdot 8+4^{0}\cdot 8 =$ // פתיחת סוגריים

איבר כללי

$$\boxed{4^i\cdot T\left(\frac{n}{2^i}\right)+\sum_{1}^{i} 4^i\cdot 8}$$

נבצע עצירה:

$T(1) = \Theta 1$

$T(1) = T\left(\frac{n}{2^i}\right)$

$1 = \frac{n}{2^i} \rightarrow \boxed{i = \log(n)}$

$$4^{\log(n)}\cdot 1+\sum_{1}^{\log n} 4^{\log(n)}\cdot 8 =$$

$$4^{\log(n)}+8\cdot\underbrace{\sum_{1}^{\log n} 4^{\log(n)}}_{\text{טור הנדסי}} = 4^{\log n}+8\cdot\left(\frac{4^{\log n+1}-1}{4-1}\right) =$$

$$4^{\log n}+8\cdot\frac{4\cdot 4^{\log n}-1}{3} = 4^{\log(n)}+\frac{32\cdot 4^{\log n}-8}{3} =$$

$$n^{\log 4}+\frac{32\cdot n^{\log 4}-8}{3} = n^2+\frac{32n^2-8}{3}$$ // מסקנה:

$$\boxed{T(n) = \Theta n^2}$$

2. $T(n) = 8T(\frac{n}{3}) + 3n \quad \| \quad a=8,\ b=3,\ f(n)=3n$

$n^{\log_b a} = n^{1<} < 2$ (חזקה קטנה מ-3.)

לכן קיים קבוע ε שיקיים את מקרה א' של משפט מאסטר.

$\underline{\underline{n^{\log_b a - \varepsilon} \gg 3n}}$, וכן:

$T(n) = \Theta\, n^{\log_3 8}$

---

3. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n^3}{\log n} \quad \| \quad a=2,\ b=2,\ f(n) = \frac{n^3}{\log n}$

$n^{\log_2 2} = n^1 \ll f(n) = \frac{n^3}{\log(n)}$ (קטן ממש)

במקרה זה קיים קבוע $\varepsilon > 0$ שיקיים $n^{1+\varepsilon} \ll \frac{n^3}{\log n}$

זהו מקרה ג' של משפט מאסטר, לכן $T(n) = \Theta f(n) = \Theta \frac{n^3}{\log(n)}$

---

4. $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n^2 \quad \| \quad a=16,\ b=4,\ f(n) = n^{2}$

$n^{\log_b a} = n^{\log_4 16} = n^{2} = f(n)$

לכן, זהו מקרה ב' של משפט מאסטר:

$T(n) = \Theta\, n^{\log_b a} \cdot \log n = \underline{\Theta\, n^2 \cdot \log n}$

5. $T(n) = \underline{T(n-1)} + n^2$ // נציב

$T(n-1) = T(n-1-1) + (n-1)^2$

$= T(n-2) + (n-1)^2 + n^2$ // נציב

$T(n-2) = T(n-2-1) + (n-2)^2$

$= T(n-3) + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2$

נגיע לעצירה:

$T(1) = T(n-i)$

$\underline{n = i+1}$

מקרה כללי:

$$T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} (n-j)^2 =$$

$$\underbrace{T(i+1-i)}_{\text{תנאי עצירה! } (\Theta(1))} + \sum_{j=1}^{i} (n-j)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 =$$

משוקף:

$$\left((n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots \underbrace{(n-(n-1))^2}_{1^2}\right)$$

$$\Theta\,\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} =$$

$$\Theta\,\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} = \boxed{\Theta\, n^3}$$