제 16 장 연습 문제 풀이 (2)

연습문제 풀이

2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15, 16, 19,

혹시 정답에 잘못된 곳이 발견되면 연락 주세요.

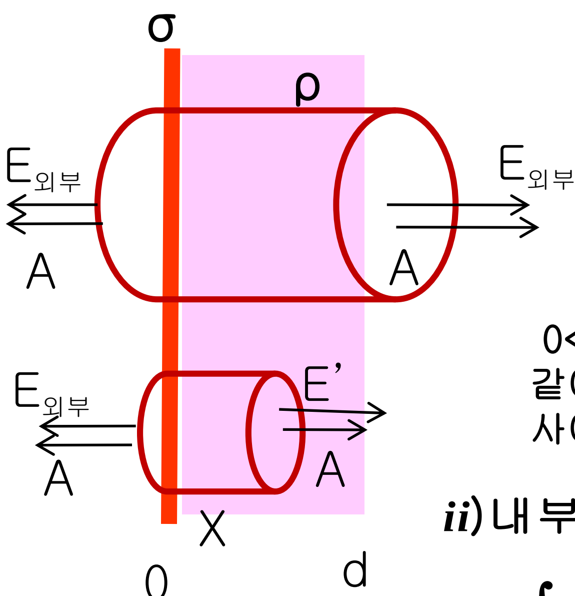
marzini@inha.ac.kr (오타가 있을 수 있으니 양해바랍니다.)

16-1 가우스 법칙

연습 16-2. 표면전하 밀도 σ 로 분포된 무한 평면이 있고 그 무한 평면에 두께 d 로 부피전하 밀도 ρ 인 전하 분포가 덧붙여져 있다. 모든 위치에서의 전기장을 구하여라.

풀이

가우스 법칙을 적용한다. 무한 평면을 x 축의 원점으로 하자. x<0, x>d 인 외부에서의 전기장을 구하기 위해 가우스 폐곡면을 그림과 같이 정한다 . 가우스 폐곡면 안에 있는 전하는 평면전하 $q_{평면}$ 와 거리 d 까지 분포된 전하들 q_d 가 있으므로



$i)$ 외부에서의 전기장 $(x<0,\ x>d\ )$

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 2EA = \frac{q_{평면}+q_d}{\varepsilon_0} = \frac{(\sigma A+\rho Ad)}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_{외부} = \frac{\sigma+\rho d}{2\varepsilon_0}$$

0< x < d 의 영역에서 전기장을 구하기 위해 가우스 폐곡면을 왼쪽 그림과 같이 정한다 . 가우스 폐곡면 내부의 전하는 평면전하 $q_{평면}$ 와 거리 x 까지 사이에 있는 전하들 q_x 가 존재하므로 가우스의 법칙을 적용하면

$ii)$ 내부에서의전기장 $(0<x<d)$

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = EA + E'A = \frac{q_{평면}+q_x}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A+\rho Ax}{\varepsilon_0}$$

E' :내부전기장

$$E_{외부} + E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\rho x}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\rho x}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma+\rho d}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho(2x-d)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

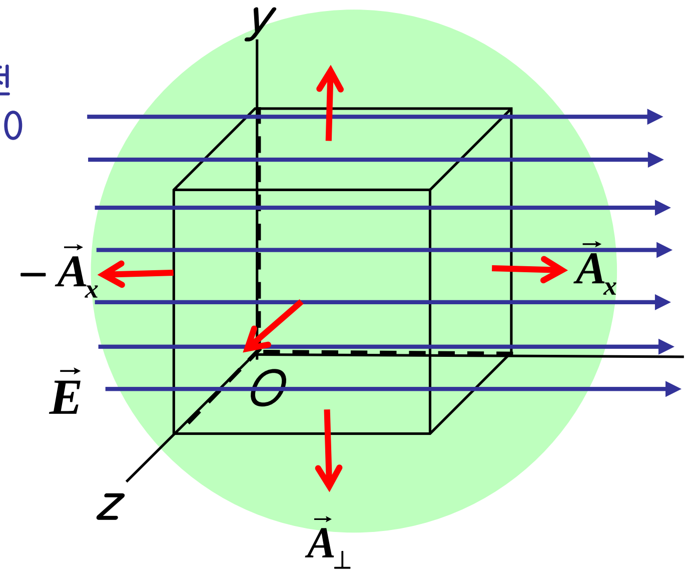
16-1 가우스 법칙

연습 16-3. 각 변이 원점을 기준으로 x, y, z 축을 따라 나란히 놓여 있고 그 길이가 L 인 정육면체가 놓여있다. 일정한 전기장이 x 방향으로 가해질 때 이 정육면체를 지나는 알짜 선속을 구하여라.

풀이

폐곡면을 통과하는 전체 선속은 가우스 법칙에 의해 내부의 전하량에 의해 결정된다. 정육면체 내부에 전하량이 없으므로 정육면체를 통과하는 알짜 선속은 0 이다.

$$\Phi_{total} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0 \qquad (\because q = 0)$$



전기장과 수직한 정육면체의 옆면을 통과하는 전기 선속을 구하면 0 이다. (전기장과 면벡터가 수직)

정육면체의 오른 면을 통과하는 전기선속은 , 전기장과 면벡터가 같은 + x 방향이므로 전기선속은 EA_x , 왼쪽 면은 면벡터가 반대방향이므로 전기선속의 크기가 음이 되고 크기는 같으므로 상쇄된다.

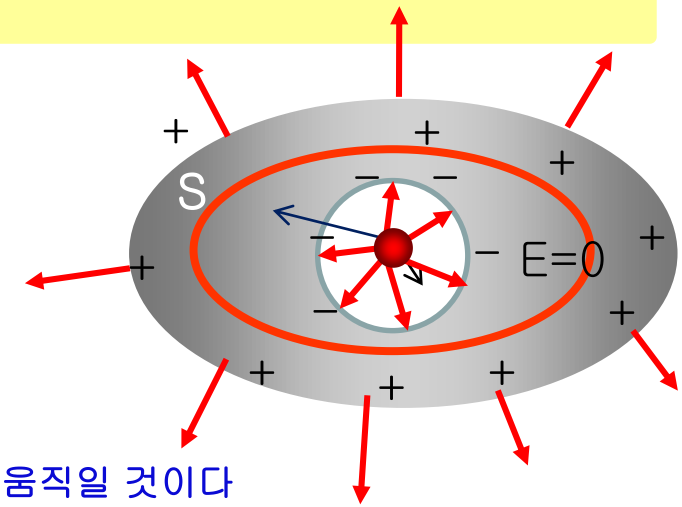
$$EA_x - EA_x = 0$$

즉, 정육면체를 통과하는 알짜 선속은 0 이다.

16-2 가우스 법칙의 응용

연습 16-6. 그림과 같이 속이 빈 도체가 있다. 이 도체 내부에 점전하 q 가 있다. 이 도체의 내부 벽면에 유도된 총 전하량은 -q 임을 보여라

풀이



도체의 내부 전기장은 항상 0 이다. 내부의 빈 공간에 점 전하가 있으면 빈 공간에서는 점 전하에 의한 전기장이 형성된다. 그러나 도체 내부에서는 도체의 안쪽 벽에 음전하가 유도되고 바깥쪽은 같은 크기의 양전하가 분포 됨으로써 도체 내부의 전기장을 0 으로 만든다.

실제 도체 내부의 전기장이 0 이 아니면 전하는 힘을 계속 받아 움직일 것이다

따라서 그림과 같이 도체 내부에 가우스 표면 (빨간선)을 잡으면
가우스 표면을 통해 나오는 전기장이 없으므로 (E=0) 전기선속이 0 이다. 따라서 가우스 폐곡면 내부의 알짜 전하량도 0 이 되어야 한다.

$$\Phi_s = \oint_S \vec{E}_{in} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{알짜}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \quad q_{알짜} = q + q_{in} = 0$$

$$\therefore q_{in} = -q$$

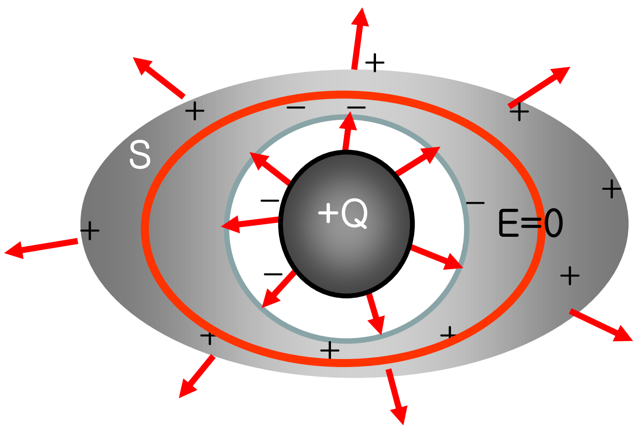
즉 도체의 안쪽 벽에는 −q 가 유도되고 도체의 바깥쪽에는 양전하 +q 가 대전된다.

16-2 가우스 법칙의 응용

연습 16-7. 전하량 Q로 대전된 도체 구를 다른 공 껍질 모양 도체가 둘러싸고 있다. 이 도체의 중심은 동일하다.

(가) 둘러싼 껍질 모양 도체의 내부 벽면에 유도된 총 전하량은 얼마인가?

풀이 5번의 설명과 같이 도체내부의 전기장은 0 이므로 둘러싼 도체의 안쪽 벽에 부호가 반대인 음전하 –Q 가 유도된다.
그러므로 가우스 법칙에 의해



$$\Phi_s = \oint_S \vec{E}_{in} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{total}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \quad q_{total} = Q + q_{in} = 0$$

$$\therefore q_{in} = -Q$$

이며 또한 둘러싼 도체의 바깥쪽에는 양전하가 +Q 가 유도된다

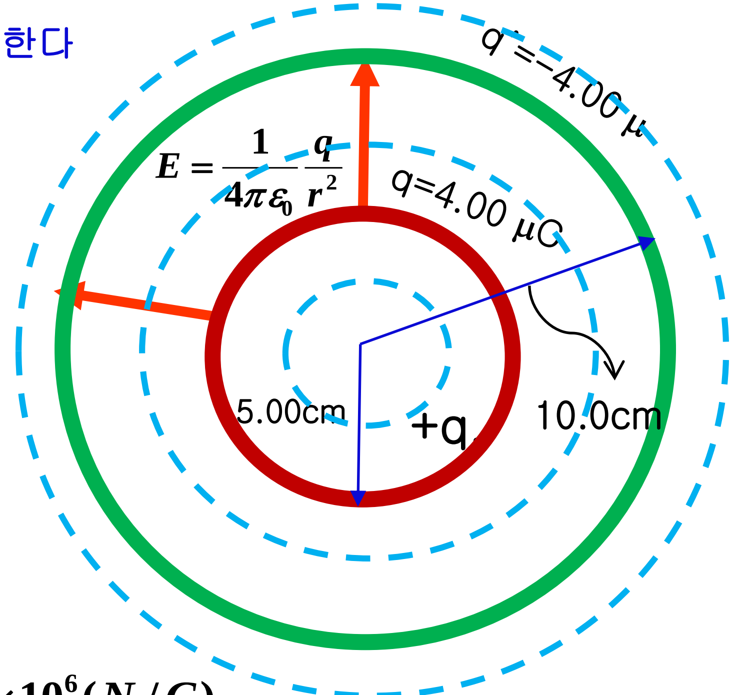
(나) 껍질모양 도체가 알짜 전하량 q 로 대전되었을 때 내부 표면에 유도된 총 전하량은?

풀이 도체 내부의 전기장이 0 이므로 바깥으로 나오는 전기선속도 없다. 따라서 둘러싼 도체의 바깥쪽에 알짜 전하량 +q 를 대전시켜도 도체 내부의 전기장은 여전히 0 이다. 즉, 외부에 있는 +q 전하에 영향을 받지 않는다. 그러므로 내부벽면의 전하량은 변함없이 –Q 이고 둘러싼 도체의 외부에 있는 전하량은 q+ Q 가 된다,

16-2 가우스 법칙의 응용

연습 16-8. 중심이 같고 반지름이 각각 5.00cm, 10.0cm 인 원형 도체 공 껍질이 놓여 있다. 이 도체 공 껍질 위에 각각 4.00 μC, −4.00 μC 의 전하량이 분포되어 있다. 이 공껍질의 중심에서 부터 3.00cm, 6.00cm, 12.0cm 위치에서 각각의 전기장을 구하여라.

풀이 가우스 법칙을 이용하여 각 영역에서 전기장을 구한다



$i)$ 내부의 전기장$(r = 3.00cm)$

$$q = 0 \Rightarrow E = 0$$

내부에는 전하량이 없으므로 전기장도 0 이다.

$ii)$ 도체 사이의 전기장 $(r = 6.00cm)$

반경이 6.00cm 인 구의 표면을 가우스 면으로 정하자.
가우스 면의 내부에는 4.00 μC의 전하량만 있으므로
전기장은 점 전하에 의한 전기장과 같다.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = 8.99\times10^9\left(\frac{4.00\times10^{-6}}{\left(6.00\times10^{-2}\right)^2}\right) = 9.99\times10^6 (N/C)$$

$ii)$ 외부의 전기장 $(r = 12.0cm)$

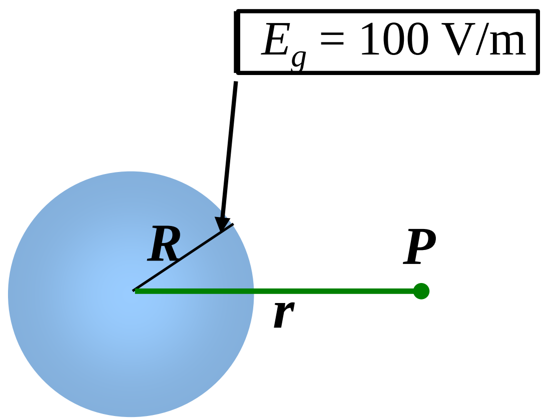
반경이 10.0cm 인 구의 표면을 가우스 면으로 정하자. 이 가우스 면의 내부에 있는 알짜 전하량은 q' 는 0 이므로 전기장은 0 이다.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{total}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q-q')}{r^2} = 0 \quad \Leftarrow \left(q_{total} = q - q' = 4.00 - 4.00 = 0\right)$$

16-2 전위

연습 16-11. 지표면 위치의 전기장은 보통 100V/m 정도가 된다고 한다. 지구 전체의 표면에 이런 전기장이 있다면 무한 위치를 기준점으로 할 때 지표면의 전위는 얼마인가?

풀이



무한대를 기준점으로 해서 반경이 R 이고 전하량 q 를 가진 구 모양의 지구 전기장은 지표면에서 (반경 R 의 위치에서)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

이고 지표면에서의 전위는 $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R}$

이다.

즉, 전기장과 전위 사이의 관계식은 지구 반경 R 배 차이가 나게 된다.

$$\left(E = 100\ V/m\right)$$

그러므로 지표면에서의 전위 값은 다음과 같다.

$$\therefore V = ER = 100\ V/m \times 6.37\times10^6 m = 6.37\times10^8 V$$

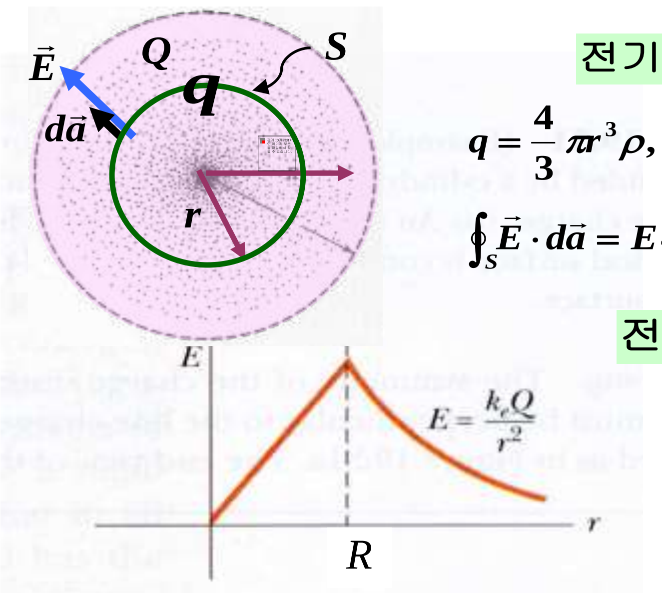
16-4 전위의 계산

연습 16-12. 반지름이 R= 12.0 cm인 원형부도체 공에 총 전하량 32. 0 μC 가 골고루 분포되어 있다. 이 때 공의 중심, 반지름의 절반 위치, 공의 표면에서 전기장과 정전 퍼텐셜을 구하여라. 공의 중심에서 50.0 cm 떨어진 곳에서 전기장과 정전 퍼텐셜을 구하여라. (단, $r \to \infty$ 에서 전기퍼텐셜은 0 으로 선택한다.)

풀이

전하 Q 가 전체부피에 고르게 분포된 유전체 구의 내부에서의 전기장은 거리에 비례한다.

(i) 공의 중심에서의 전기장과 전위



전기장 $E \quad (r < R)$

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \Rightarrow q = \frac{r^3}{R^3} Q$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E\,4\pi r^2 = q/\varepsilon_0 \qquad \therefore \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3} r$$

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r}$$

∴ r=0 에서의 전기장은 0 이다.

전위 $V \quad (r < R)$

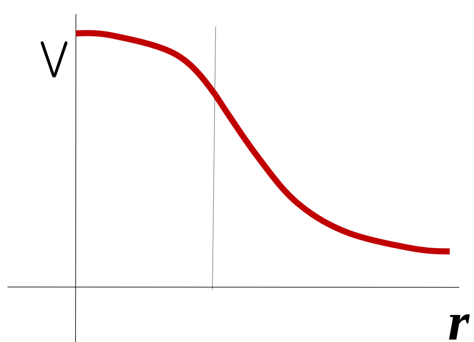
$$V_r - V_\infty = -\left[\int_\infty^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_R^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r\, dr\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_\infty^R - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r^2\bigg|_{r=R}^r$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(r^2 - R^2) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$V_r = \frac{Q}{2(4\pi\varepsilon_0)R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)\bigg|_{r=0} = \frac{3Q}{2(4\pi\varepsilon_0)R}$$

$$= \frac{3 \times 8.99 \times 10^9}{2}\,\frac{32.0 \times 10^{-6}}{12.0 \times 10^{-2}} = 3.60 \times 10^6 (V) = 3.60 MV$$



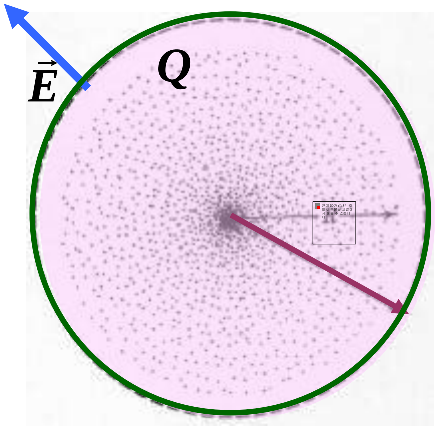
r =0 에서 전위가 최대이다.

16-4 전위의 계산

연습 16-12 번 계속 : 공의 표면에서의 전기장과 정전포텐셜(전위)을 구하여라

풀이

(ii) 공의 표면에서의 전기장과 전위



공의 표면 $(r = R)$ $R = 12.0cm$

전기장 E : (r = R)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} = 8.99\times10^9\left(\frac{32.0\times10^{-6}}{\left(12.0\times10^{-2}\right)^2}\right) = 20.0\times10^6(N/C)$$

$$= 20.0(MN/C) = 20.0MV/m$$

전위 : (r = R)

$$V_r = \frac{Q}{2(4\pi\varepsilon_0)R}(3-\frac{r^2}{R^2})\Big|_{r=R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{8.99\times10^9\times32.0\times10^{-6}}{12.0\times10^{-2}} = 2.40\times10^6(V) = 2.40MV$$

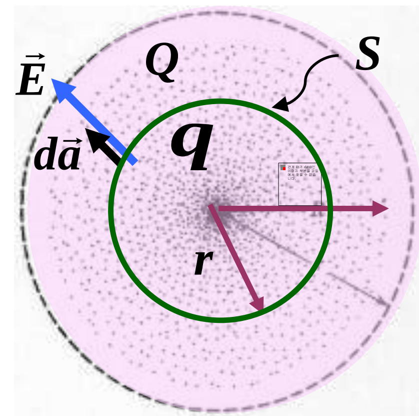
16-4 전위의 계산

연습 16-12 번 계속 : 반지름의 절반 위치에서의 전기장과 정전포텐셜(전위)을 구하여라

(iii) 반지름의 절 반 위치에서의 전기장과 전위

풀이

반지름의 절반 위치 $(r=\frac{R}{2})$ $R=12.0cm$



반경이 6.00cm 인 구의 표면을 가우스 면 S 로 정하자. 가우스 면의 내부에는 전하량 q' 는 전체전하량의 1/8 배 이므로 가우스 법칙을 사용하여 전기장을 구한다.

$$Q:q=\tfrac{4}{3}\pi R^3\rho:\tfrac{4}{3}\pi(\tfrac{R}{2})^3\rho \Rightarrow q=\frac{\tfrac{4}{3}\pi(\tfrac{R}{2})^3}{\tfrac{4}{3}\pi R^3}Q=\frac{Q}{8}$$

전기장 E : (r = R/2)

$$4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 E=\frac{Q}{8\varepsilon_0} \Rightarrow E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2R^2}=\frac{8.99\times10^9}{2}\left(\frac{32.0\times10^{-6}}{(12.0\times10^{-2})^2}\right)=9.99\times10^6(N/C)$$

$$=9.99(MN/C)=9.99MV/m$$

전위 : (r = R/2)

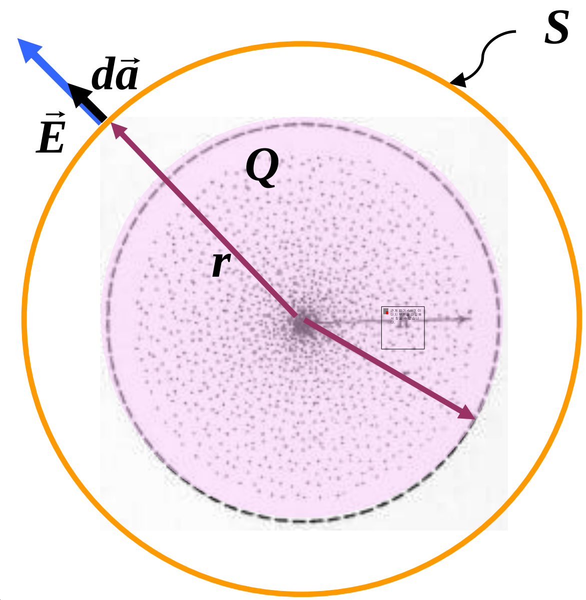
$$V_r=\frac{Q}{2(4\pi\varepsilon_0)R}(3-\frac{r^2}{R^2})\bigg|_{r=\frac{R}{2}}=\frac{11Q}{8(4\pi\varepsilon_0)R}=\frac{11\times8.99\times10^9\times32.0\times10^{-6}}{8\times12.0\times10^{-2}}=3.30\times10^6(V)=3.30MV$$

16-4 전위의 계산

연습 16-12 번 계속 : 공의 중심에서 50.0 cm 떨어진 곳에서 전기장과 정전퍼텐셜을 구하여라. (단, r→∞ 에서 전기퍼텐셜은 0 으로 선택한다.)

(iv) 공의 중심에서 50.0 cm 떨어진 곳에서 전기장과 정전퍼텐셜(전위)를 구하여라.

풀이 외부의 전기장 $E \quad (r > R)$



외부에서는 가우스 표면 s 를 정하고 가우스 법칙을 적용하면 가우스 면 내의 전하량은 Q 이므로 점 전하에 의한 전기장과 같다.

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad (r = 50cm)$$

전기장 E : (r =0.500 m)

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = 8.99\times10^9\left(\frac{32.0\times10^{-6}}{(5.00\times10^{-1})^2}\right) = 1.15\times10^6 (N/C)$$

$$= 1.15(MN/C) = 1.15MV/m$$

전위 : (r =0.500 m)

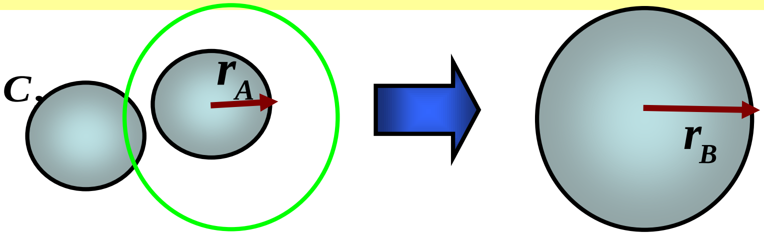
$$V_r = \frac{Q}{(4\pi\varepsilon_0)r}\bigg|_{r=0.500} = \frac{8.99\times10^9\times32.0\times10^{-6}}{5.00\times10^{-1}} = 5.75\times10^5 (V) = 0.575MV$$

16-4 전위의 계산

연습 16-13. 전하량이 30.0 pC(1pC= 10 $^{-12}$ C)인 전하량을 가진 어떤 물방울의 표면 전위는 500V 라고 한다.

풀이

$$q_A = 3.00 \times 10^{-11} C$$



(가) 이 물방울의 반지름은 얼마인가?

물방울은 구의 형태이므로 구의 전위가 를 이용하면 반지름을 알 수 있다

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A}{r_A} = 500V \Rightarrow r_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A}{V_A} = 8.99\times10^9\left(\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\frac{3.00\times10^{-11}C}{500V} = 5.39\times10^4 m$$

(나) 이런 물방울 2개가 뭉치면 그 표면 전위는 어떻게 되는가?

합쳐진 물방울의 전하량 : $q_B = 2q_A$

부피 : $부피_B = 2\times부피_A$

합쳐진 물방울의 반지름 :

물방울은 합쳐져도 표면장력 때문에 다시 구의 형태가 된다. 합쳐진 물방울은 처음 물방울의 체적의 2배가 되므로 이를 이용하여 반지름을 구할 수 있다. 한편 합쳐진 구의 전하량도 처음 물방울의 전하의 2배가 되므로 표면전위를 구할 수 있다.

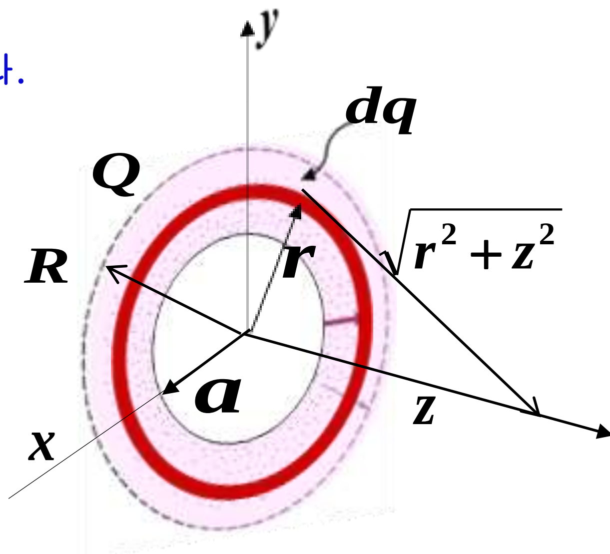
$$\frac{4\pi}{3}r_B{}^3 = 2\times\left(\frac{4\pi}{3}r_A{}^3\right) = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{2}r_A\right)^3 \Rightarrow r_B = \sqrt[3]{2}r_A$$

합쳐진 물방울의 전위

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B}{r_B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q_A}{\sqrt[3]{2}r_A} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A}{r_A}\right) = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}\times500V = 794V$$

16-4 전위의 계산

연습 16-15. 반지름이 R 인 부도체 원판 중심에 반지름이 a 인 원형구멍이 나 있다. 이 원판에는 총 전하량 Q 가 골고루 분포되어 있다. 이 원판 중심에서 부터 수직으로 r 만큼 떨어진 곳에서 전위를 구하라.



풀이

연속으로 분포된 전하의 전위는 전하의 미분소를 모두 적분하면 된다. 전하의 미분 요소 dq 는 σ (면 전하 밀도) 에 면적소(dA) 를 곱하여 얻을 수 있으므로 다음과 같다.

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r\, dr) = 2\pi\sigma r\, dr$$

한편, 면전하 밀도는 총 전하량으로 표시하면 다음과 같다.

$$Q = \int dq = \int_a^R 2\pi\sigma r\, dr = \pi\sigma\left(R^2 - a^2\right) \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{\pi\left(R^2 - a^2\right)}$$

즉, 전하의 미분소는 $dq = 2\pi\sigma r\, dr = \dfrac{2Qrdr}{\left(R^2 - a^2\right)}$ 이다.

따라서 전위는 $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^R \frac{dq}{r'} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(R^2 - a^2)}\int_a^R \frac{(r\,dr)}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(R^2 - a^2)}\int_a^R (r^2+z^2)^{-1/2} r\,dr$$

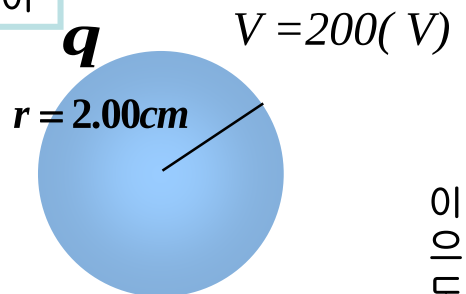
$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(R^2 - a^2)}\left[(R^2+z^2)^{1/2} - (a^2+z^2)^{1/2}\right]$$

$$\therefore V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}}{(R^2 - a^2)}$$

16-4 전위의 계산

연습 16-16. 반지름이 r = 2.00cm 인 원형 도체 공 위에 전하가 대전되어 있다. 이 공의 표면전위가 200V 라고 한다. 이 도체 공의 표면 전하밀도는 얼마인가? 이 대전된 도체공이 만드는 전위가 50.0 V 인 등 전위면의 반지름은 얼마인가?

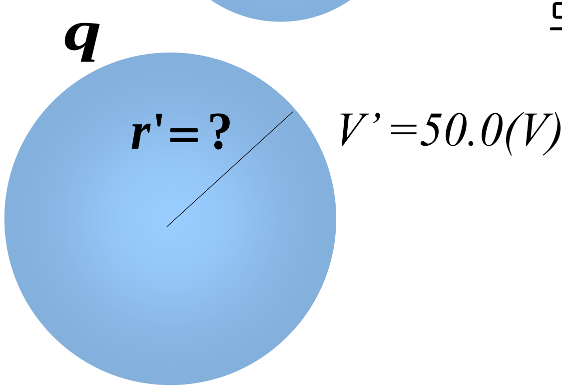
풀이



무한대를 기준점으로 한 반경이 R 의 도체구의 전위는

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

이다 . 도체의 전하는 반지름이 R 의 표면에 위치하게 된다. 따라서 위의 식으로 부터 전하량을 구하고 이를 구의 표면적($4\pi R^2$)으로 나누면 표면 전하밀도가 얻어진다.



$$q = 4\pi\varepsilon_0 rV = \frac{2.00\times10^{-2}\times(200)}{8.99\times10^{9}} = 4.45\times10^{-10}(C)$$

$$\sigma = \frac{4.45\times10^{-10}}{4\times\pi\times(2.00\times10^{-2})^2} = 8.85\times10^{-8}(C/m^2) = 88.5(nC/m^2)$$

그러므로 표면에서 이러한 전하량으로 50.0 V 의 등전위를 갖는 도체공의 반지름은

$$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \Rightarrow r' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{V} = 8.99\times10^{9}\left(\frac{4.45\times10^{-10}}{50.0}\right) = 0.08(m) = 8.00cm$$

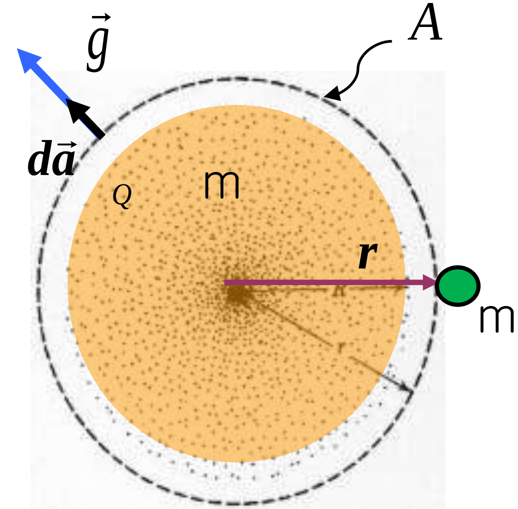
이다.

발전문제

연습 16-19. 중력장의 가우스 법칙은 다음과 같이 쓸 수 있다. 여기에서 Φ는 질량 m을 둘러싼 곡면을 지나는 중력장 벡터의 중력선속이다, 뉴턴의 만유인력으로 부터 이 관계를 유도하여라.

풀이

만유인력의 법칙: $\vec{F} = -G\dfrac{mm'}{r^2}\hat{r}$



m 에 의한 생긴 중력장을 쿨롱력에서의 전기장과 같이 단위질량

당의 만유인력이라고 정의하면 중력장 벡터는 다음과 같다

$$\left(\vec{g} = \lim_{m\to 0}\frac{\vec{F}}{m'} = -G\frac{m}{r^2}\hat{r}\right)$$

표면벡터는 $\hat{r}$ 의 방향이므로 : $d\vec{a} = (da)\hat{r}$

거리가 r 떨어진 곳에서의 중력 선속은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_s = \int_s \vec{g}\cdot d\vec{a} = \int_s -G\frac{m}{r^2}\hat{r}\cdot(da)\hat{r}$$

$$= \int_s -G\frac{m}{r^2}da = -G\frac{m}{r^2}\int_s da$$

$$= -G\frac{m}{r^2}(4\pi r^2) = -4\pi Gm$$

즉, 중력 선속은 그 질량을 둘러싼 폐곡면 내의 질량 m 에 4 π 배 가 된다.