대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (25장) - by 송현석

1. 빛의 속도가 항상 일정하다면 마이켈슨-몰리 실험의 결과가 당연해지는가?
그 이유를 설명하여라.

생략

2. 여러분이 빛을 타고 여행하고 있다가 집에 두고 온 시계를 지나쳤다.
이 시계의 빠르기를 계산하여 보아라.

시간의 지연 – 관측자에 대해서 움직이는 시계는 γ 배 만큼 느리게 간다.

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{0} \approx \infty$$

따라서, 시계가 멈춘것 처럼 느껴진다.

3. 정지길이가 $30.0\,cm$인 막대자가 진행방향인 x축에 대해 30.0° 기울어진 채 x 방향으로 $v = 0.990\,c$의 속도로 움직이고 있다.
정지해 있는 관측자가 측정한 이 자의 길이는 얼마인가?

$$L_x = L\cos 30^\circ = 30.0\,cm \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 25.98\,cm$$

$$L_y = L\sin 30^\circ = 30.0\,cm \times \frac{1}{2} = 15.0\,cm$$

길이의 수축
– 움직이는 물체의 길이는 운동 방향으로 $1/\gamma$ 배 만큼 수축된 것으로 관측된다.

$$L_x' = \frac{L_x}{\gamma} = L_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 25.98\,cm \times \sqrt{1-\frac{(0.990\,c)^2}{c^2}} = 25.98\,cm \times \sqrt{1-\frac{0.9801\,c^2}{c^2}}$$
$$= 25.98\,cm \times \sqrt{1-0.9801} = 25.98\,cm \times \sqrt{0.0199} \approx 25.98\,cm \times 0.1411 \approx 3.665\,cm$$

$$L' = \sqrt{L_x'^2 + L_y^2} = \sqrt{(3.665\,cm)^2 + (15.0\,cm)^2} \approx 15.44\,cm$$

4. 여러분이 두 배로 날씬해 보이고 싶다면 얼마나 빨리 달려야 할까?

$$L' = \frac{L}{\gamma} = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

$$v^2 = c^2\left(1-\frac{1}{4}\right) = c^2 \times \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0.866c$$

5. 지상의 관측자가 측정할 때, 일정한 속력 v로 지표면을 향해 떨어지는 뮤온 입자가 있다. 이 입자는 정지한 상태에서는 T_0 시간 후 붕괴한다.
$\dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=5$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.
(1) 지상에서 볼 때, 이 입자는 얼마 후 붕괴하겠는가?

$$\gamma = 5 \qquad \Delta t' = \gamma \Delta t \qquad \Rightarrow \qquad 5\,T_0$$

(2) 뮤온 입자가 볼 때, 지상이 다가오는 속력은 얼마인가?

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=5 \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{25} \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{c^2\left(1-\frac{1}{25}\right)}=\frac{\sqrt{24}}{5}c \approx 0.98\,c$$

(3) 붕괴할 때까지 입자가 운동한 거리를 지상에서 측정해 보니 L_0라 한다.
붕괴할 때까지 뮤온 입자가 측정한 지상의 이동거리는 얼마인가?

$$L' = \frac{L}{\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{L_0}{5}$$

6. 정지 상태에서 중간자는 생성 후 $2.0\,\mu s$ 만에 소멸된다. 이 중간자가 실험실에서 $0.990\,c$의 속력으로 움직이면, 실험실 시계로 중간자 수명은 얼마인가?

$$\Delta t = 2\,\mu s, \qquad v = 0.990\,c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.990\,c/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.990)^2}} \approx 7.089$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{(0.990\,c)^2}{c^2}}} \approx 14.18\,\mu s$$

7. 정지 상태에서 자동차의 길이가 L이다. 이 자동차가 빛의 속도의 몇 배로 달릴 때, 길이가 $4L/5$로 측정되겠는가?

$$L' = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{4}{5}L \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{16}{25}$$

$$v^2 = c^2\left(1-\frac{16}{25}\right) = c^2 \times \frac{9}{25} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{3}{5}c$$

8. Λ 중입자의 평균수명은 $2.63\times10^{-10}s$ 이다. 이 입자가 $0.990c$ 의 속력으로 움직이고 있다면 정지좌표계에서 이 입자를 관찰했을 때 붕괴하기 전 이 입자가 이동한 거리는 얼마인가?

$$\Delta t = 2.63\times10^{-10}s, \qquad v = 0.990c$$

$$\Delta t' = \gamma\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(2.63\times10^{-10}s)}{\sqrt{1-\frac{(0.990c)^2}{c^2}}} \approx 1.864\times10^{-9}s$$

$$d = v\Delta t' = (0.990c)\times\Delta t' = 0.990\times(3.00\times10^8 m/s)\times(1.864\times10^{-9}s) \approx 0.554m$$

9. 한 변의 길이가 $1.00cm$인 정육각형인 알루미늄의 질량은 대략 $3.00g$이다. 이 정육각형의 한 면이 x축 방향으로 향하여 $0.990c$의 속력으로 움직이고 있다. 정지된 관찰자가 이 정육각형을 측정할 때

(1) 이 정육각형의 부피를 구하여라.

$$L_x' = \frac{L_x}{\gamma} = L_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1.00cm\times\sqrt{1-\frac{(0.990c)^2}{c^2}} = 1.00cm\times\sqrt{1-\frac{0.9801c^2}{c^2}}$$
$$= 1.00cm\times\sqrt{1-0.9801} = 1.00cm\times\sqrt{0.0199} \approx 1.00cm\times0.1411 \approx 0.1411cm$$

$$V' = L_x'\times L_y\times L_z = \left(\frac{L_x}{\gamma}\right)\times L_y\times L_z \approx 0.1411cm\times1.00cm\times1.00cm \approx 0.1411cm^3$$

(2) 이 정육각형의 질량을 구하여라.

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3.00g}{\sqrt{1-\frac{(0.990c)^2}{c^2}}} = \frac{3.00g}{\sqrt{1-\frac{0.9801c^2}{c^2}}} = \frac{3.00g}{\sqrt{1-0.9801}}$$
$$= \frac{3.00g}{\sqrt{0.0199}} \approx \frac{3.00g}{0.1411} \approx 21.27g$$

(3) 이 정육각형의 밀도를 구하여라.

$$\rho' = \frac{m}{V'} = \frac{\gamma m_0}{\left(\frac{L_x}{\gamma}\right)\times L_y\times L_z} = \frac{\gamma^2 m_0}{L_x\times L_y\times L_z} \approx \frac{\left(\frac{1}{0.0199}\right)\times3.00g}{1.00cm^3} \approx 150.754g$$

10. 태양의 질량은 $1.99 \times 10^{30}\,kg$이고 $3.87 \times 10^{23}\,kW$의 비율로 에너지를 방출한다. 1시간 당 줄어드는 태양의 질량을 계산하고, 태양이 자기 질량의 1%를 태우는 데 소모되는 시간을 구하여라.

$$M = 1.99 \times 10^{30}\,kg, \qquad P = 3.87 \times 10^{23}\,kW = 3.87 \times 10^{26}\,W$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + (mc^2)^2} \quad \Rightarrow \quad E = mc^2 \quad < p = 0 > \quad \text{: 태양은 정지해 있다고 가정}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta W = P \times \Delta t = mc^2 = E$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{\Delta W}{c^2} = \frac{P \times \Delta t}{c^2} = \frac{(3.87 \times 10^{26}\,W) \times (3600\,s)}{(3.00 \times 10^8\,m/s)^2} \approx 1.548 \times 10^{13}\,kg$$

$$\Delta t = \frac{\Delta W}{P} = \frac{E}{P} = \frac{mc^2}{P} = \frac{(M/100)c^2}{P} = \frac{(1.99 \times 10^{30}\,kg/100) \times (3.00 \times 10^8\,m/s)^2}{3.87 \times 10^{26}\,W}$$

$$\approx 4.628 \times 10^{18}\,s \approx 1.286 \times 10^{15}\,h \approx 1.467 \times 10^{11}\,y$$

11. 입자의 운동에너지가 정지에너지와 같다면, 이 입자의 속력은 빛 속력의 몇 배인가?

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma mc^2 = 2mc^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2$$

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)c^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

12. $0.99999\,c$의 속력으로 움직이고 있는 전자가 있다.

(1) 전자의 상대론적 운동량을 구하여라.

$$p = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\,kg) \times 0.99999 \times (3.00 \times 10^8\,m/s)}{\sqrt{1 - (0.99999\,c)^2/c^2}}$$

$$\approx 6.111 \times 10^{-20}\,kg \cdot m/s$$

(2) 전자의 상대론적 운동에너지를 구하여라.

$$K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \gamma m_0c^2 - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)m_0c^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0.99999\,c)^2/c^2}} - 1\right) \times (9.11 \times 10^{-31}\,kg) \times (3.00 \times 10^8\,m/s)^2 \approx 1.825 \times 10^{-11}\,J$$

(3) 전자의 상대론적 질량을 구하여라.

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\,kg)}{\sqrt{1 - (0.99999\,c)^2/c^2}} \approx 2.037 \times 10^{-28}\,kg$$

13. 스위스와 프랑스 국경에 있는 유럽입자물리연구소(CERN)의 거대 강입자 충돌기(Large Hadron Collider, LHC)는 양성자를 운동에너지 7 TeV까지 가속시킨다.
이 가속된 양성자의 속력을 구하여라. 이 양성자의 운동량은 얼마인가?
이 가속된 양성자는 정지질량 $m_p = 938MeV/c^2$ 보다 얼마나 더 무거운가?

$$K = 7\,TeV = 7\times 10^{12} eV, \qquad E_0 = m_p c^2 = 938MeV = 938\times 10^6 eV$$

$$K = E - E_0 = \gamma E_0 - E_0 = \gamma m_p c^2 - m_p c^2$$

$$\Rightarrow \qquad \gamma = \frac{K}{m_p c^2} + \frac{m_p c^2}{m_p c^2} = \frac{K}{m_p c^2} + 1 = \frac{(7\times 10^{12}\ eV)}{(938\times 10^6\ eV)} + 1 \approx 7463.686567$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = c\sqrt{1-\frac{1}{(7463.686567)^2}} \approx 0.999999991c$$

$$\begin{aligned} E = \gamma E_0 = \gamma m_p c^2 = K + E_0 = K + m_p c^2 &= (7\times 10^{12} eV)\times(938\times 10^6 eV) \\ &= 7.000938\times 10^{12} eV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^2 = p^2c^2 + m_p^2c^4 \qquad \Rightarrow \qquad p &= \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(\frac{m_p c^2}{c}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(7.000938\times 10^{12} eV)^2}{(3\times 10^8 m/s)^2} - \left(\frac{938\times 10^6 eV}{3\times 10^8 m/s}\right)^2} \\ &\approx 23336.45979\ eV/(m/s) \\ &\approx (23336.45979\ eV)\times(3\times 10^8 m/s) \\ &\approx 7.000938\times 10^{12} eV/c \approx 7.000938\,T\ eV/c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = \gamma m_p v = \gamma\left(\frac{m_p c^2}{c^2}\right)v &= \gamma\left(\frac{m_p c^2}{c^2}\right)\times 0.999999991c \\ &= \gamma\left(\frac{m_p c^2}{c}\right)\times 0.999999991 \\ &= (7463.686567)\times\left(\frac{938\times 10^6 eV}{3\times 10^8 m/s}\right)\times 0.999999991 \\ &\approx 23336.45979\ eV/(m/s) \\ &\approx (23336.45979\ eV)\times(3\times 10^8 m/s) \\ &\approx 7.000938\times 10^{12} eV/c = 7.000938\,T\ eV/c \end{aligned}$$

$$\frac{E}{E_0} = \frac{7.000938\times 10^{12} eV}{938\times 10^6 eV} = 7463.686567 = \gamma$$ < γ 배 더무겁다. >

14. $0.900\,c$의 속력으로 움직이는 양성자와 질량이 같은 전자의 속력은 얼마인가?
(단, 전자의 정지질량은 $0.511\,MeV/c^2$, 양성자의 정지질량은 $938\,MeV/c^2$ 이라고 하자.)

$$v_p = 0.900\,c, \qquad m_p c^2 = 938\,MeV, \qquad m_e c^2 = 0.511\,MeV$$

$$\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1-(v_p/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.900\,c/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.900)^2}} \approx 2.294$$

$$\begin{cases} E_p = \gamma_p m_p c^2 \\ E_e = \gamma_e m_e c^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma_e = \frac{m_p c^2}{m_e c^2}\gamma_p = \frac{938\,MeV}{0.511\,MeV} \times \frac{1}{\sqrt{1-(0.900)^2}} \approx 4211$$

$$\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v_e/c)^2}} \quad \Rightarrow \quad v_e = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma_e^2}}$$

$$= c\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{m_p c^2}{m_e c^2}\gamma_p\right)^2}}$$

$$= c\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{938\,MeV}{0.511\,MeV} \times \frac{1}{\sqrt{1-(0.900)^2}}\right)^2}}$$

$$\approx 0.999999971\,c$$

15. (1) 자유 입자의 운동에너지가 정지에너지보다 매우 크다면, 운동에너지는 운동량의 몇 제곱에 비례하는가?

$$E = K + mc^2 \qquad < \; K \gg mc^2 \; >$$
$$\Rightarrow \qquad E \approx K$$

$$E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2 \qquad < \; p^2c^2 \gg (m_0c^2)^2 \; >$$
$$\Rightarrow \qquad E^2 \approx p^2c^2 \approx K^2 \qquad \Rightarrow \qquad K \approx pc \qquad \Rightarrow \qquad K \sim p \quad (\text{상대론적})$$

(2) 또한 운동에너지가 정지에너지보다 매우 작다면, 운동에너지는 운동량의 몇 제곱에 비례하는가?

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{p^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad K \sim p^2 \quad (\text{고전적})$$

16. $10.0\,kg$의 우라늄이 들어있는 핵폭탄이 터질 때 이 질량 중 0.100%만 에너지로 바뀐다.
(1) 이때 방출되는 에너지를 J 단위로 구하여라.

$$E_0 = m_0 c^2 = 10.0\,kg \times (3.00 \times 10^8\,m/s)^2 = 9.00 \times 10^{17}\,J$$

$$0.00100 \times E_0 = 0.00100 \times (9.00 \times 10^{17}\,J) = 9.00 \times 10^{14}\,J$$

(2) $0.19\,kg$의 다이너마이트(니트로글리세린)는 대략 $1.00\,MJ$의 에너지를 낸다.
이 핵폭탄의 위력은 몇 kg의 다이너마이트에 해당하는가?

$$(9.00 \times 10^{14}\,J) \times \frac{0.19\,kg}{1.00 \times 10^6\,J} = 1.71 \times 10^8\,kg$$