분반번호: 학과: 학번: 이름:

※ 풀이와 답을 적으시오.

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&5&0\\7&2&4\end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (과정도 적으시오.)

가. 전치 행렬 A^T를 구하시오.

나. 행렬식 $\det(A^T)$를 구하시오.

다. 역행렬 $(A^T)^{-1}$를 구하시오.

라. $\det(A)$를 구하시오.

마. A^{-1}를 구하시오.

바. $(A^{-1})^T$를 구하고, 위에서 구한 $(A^T)^{-1}$와 비교하시오.

2. M_4는 4차 정사각행렬 전체의 집합으로 벡터공간이다. 이것의 부분집합 S_4, K_4, D_4, U_4가 각각 대칭행렬, 반대칭행렬, 대각행렬, 위삼각행렬 전체의 집합이라고 할 때, 이들 각각에 대해 벡터공간임을 보이고 차원과 기저를 구하여라.

3. 3×3 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\4&2&3\\9&6&7\end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

가. $\det(A)$를 구하시오.

나. A^{-1}를 구하시오.

다. 나.에서 구한 A^{-1}에 대해, AA^{-1}를 직접 계산하시오.

4. 다음 행렬에 대해 (1) 특성방정식, (2) 고유값과 그에 따른 고유벡터 (3) 기하학적 중복도를 구하시오.

가. $A=\begin{pmatrix}17&-15\\-15&17\end{pmatrix}$

나. $B=\begin{pmatrix}7.3&0.2&-3.7\\-11.5&1&5.5\\17.7&1.8&-9.3\end{pmatrix}$

다. $C=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x-3y-4z=1 \\ -x+y-3z=14 \\ \quad y-3z=5 \end{cases}$를 Cramer 법칙으로 풀어라.

6. 정사각행렬 A, B가 각각 r, s차 행렬이라 하자. 또 O, C는 각각 적당한 크기의 영행렬, 행렬이라고 하자. 이들로 구성된 $r+s$차 행렬 $E=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$에 대해 다음 물음에 답하여라.

(1) $\det(E)=\det(A)\det(B)$임을 보여라.

(2) $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 9 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

7. 다음 명제에 대해, 맞으면 증명하고, 틀리면 반례를 들어라. (행렬은 모두 n차 정사각행렬이다)

가. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$는 닮았다.

나. $A^4=O$이면, $A+I$는 가역행렬이고, 그 역행렬은 $I-A+A^2-A^3$이다. (단, $I=I_n$는 n차 단위행렬)

다. $tr(AB)=tr(A)tr(B)$, $tr(A)$는 A의 대각합(trace)이다.

라. A가 직교행렬이면, $|\det(A)|=1$이다.

마. $\det(4A)=4\det(A)$이다.

바. $AB=AC$이고 $A\neq 0$이면, $B=C$이다.

사. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$과 닮은 대각행렬이 있다.

아. 닮은 두 행렬의 특성다항식은 같다.

자. $A=\{(x,y,z)|3x-4y+5z=0\}$는 벡터공간이다.

차. 주어진 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대해, $f(x)y''+g(x)y'+h(x)y=0$을 만족하는 두 번 미분가능한 함수 $y=y(x)$를 전부 모은 집합은, 벡터공간이다.

8. 노트북 구입을 고민하는 철수의 마음을 분석하니 재밌는 결과가 나왔다. 하루 뒤에 보면, 사려는 마음은 95%의 확률로 유지되고, 안 사려는 마음은 90%의 확률로 유지된다. 구입하려는 마음이 40%였던 날로부터 1000일 후에는, 구입하려는 마음은 몇 %인가? 또 시간이 충분히 지나서 마음의 변화가 거의 없을 때, 구입하려는 마음은 몇 %인가?

분반번호: 학과: 학번: 이름:

※ 풀이와 답을 적으시오.

1. 다음 미분방정식에 대해, 추가조건이 있으면 특수해를, 그렇지 않으면 일반해를 구하시오.

가. $dx+(x-e^{y})dy=0$; $y(1)=0$

나. $y(y+\sin x)dx-\left(\dfrac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)dy=0$

다. $(y^2+xy^3)dx+(5y^2-xy+y^3\sin y)dy=0$, $y>0$

라. $x^2y'+2xy-y^3=0$, $x>0$ (양함수로 나타내어라)

마. $(x^2+3xy+y^2)dx-x^2dy=0$, $x>0$

바. $xy'-2xy=x\sin x$, $y(0)=0$ (양함수로 나타내어라)

사. $\cos(x+y)dx-dy=0$의 일반해를 구하시오.

아. $(\sin y\cos y+x\cos^2 y)dx+xdy=0$의 일반해를 구하시오.

자. $(1-\sin y)dx+\sqrt{4+x^2}\,dy=0$

차. $y'=\sin(x+y)$

카. $(3y^4+18y^{-1})dx+(5xy^3+2x^{-2})dy=0$ (적분인자가 x^ny^m 형태일 수도 있다)

2. 80g의 소금이 녹아있는 500리터의 물이 물탱크에 들어 있다. 20g의 소금이 녹아있는 20리터의 물이 1분마다 들어와서 잘 섞인다. 물탱크의 물은 1분마다 20리터씩 빠진다. 시간이 충분히 흘렀을 때($t\to\infty$) 물탱크에 있는 소금의 양을 구하여라.

3. 온도가 20도인 금속봉을 끓는 물에 넣고 1분 후에 금속봉의 온도를 재니 51.5도였다. 금속봉이 99.9도가 될 때의 시간을, 계산기를 사용해 구하여라. (단, 물은 계속 끓이고 있다)

분반번호: 학과: 학번: 이름:

※ 풀이와 답을 적으시오.

※ 다음 미분방정식에 대해, 초기조건이 없으면 일반해를, 있으면 특수해를 구하시오.

1) $y'' - 2y' - 3y = 0\ ;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 14$

2) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$ (3차 이하의 다항식을 해로 갖는다)

3) $y'' - 4y = (x^2 - 2)\cos x$

4) $y'' - 2y' - 3y = 0\ ;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 5$

5) $y'' - 4y = 2x - 5 + e^{-2x}$

6) $xy'' = y' + (y')^2$

7) $2x^2y'' + 4xy' + 5y = 0$

8) $(3x - 2)^2y'' + (3x - 2)y' + y = 0$

9) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0;\ y(0) = -1,\ y'(0) = 30,\ y''(0) = 28$

10) $x^3y''' - x^2y'' - 7xy' + 16y = 9x\ln x\ :\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = 3$

11) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$

12) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3\ln x$

1) (sol)

상수계수를 갖는 재차상미분방정식이므로 먼저, 특성방정식을 구하면,

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3,\ -1$

따라서, 제차방정식의 일반해는

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

초기조건을 만족하는 상수를 구하면,

(a) $y(0) = 2;\ 2 = c_1 + c_2$

(b) $y'(0) = 14;\ y' = 3c_1 e^{3x} - c_2 e^{-x} \Rightarrow 14 = 3c_1 - c_2$

이므로 $c_1 = 4,\ c_2 = -2$

따라서, 초기조건을 만족하는 해는 $y = 4e^{3x} - 2e^{-x}$

2) (sol) $y = ax + b$ 형태의 해를 구하자!

준식을 만족하도록 상수 a, b 의 조건을 구하면 $a = b$

따라서, $y_1 = x + 1$ 이라 하자.

계수축소법을 이용하여 y_1 과 일차독립인 해 y_2 를 구하면,

$$u = \int \frac{e^{\int \frac{-2(1+x)}{1-2x-x^2}dx}}{(x+1)^2}dx = \int \frac{e^{\ln(1-2x-x^2)}}{(x+1)^2}dx$$
$$= \int \frac{1-2x-x^2}{(x+1)^2}dx = \int \left(\frac{2}{(x+1)^2} - 1\right)dx = \frac{-2}{x+1} - x$$

따라서, $y_2 = uy_1 = -x^2 - x - 2$

그러므로 일반해는 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1(x+1) + c_2(x^2 + x + 2)$

3) (sol)

미정계수법에 의해 특수해를 구하자;

$y_p = (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x$ 라 놓고

준식에 대입하여 계수를 구하면,

$$\begin{aligned} y_p' &= \{Dx^2 + (2A+E)x + B + F\}\cos x \\ &\quad + \{-Ax^2 + (2D-B)x + E - C\}\sin x \\ y_p'' &= \{-Ax^2 + (4D-B)x + 2A - C + 2E\}\cos x \\ &\quad + \{-Dx^2 + (-4A-E)x - 2B + 2D - F\}\sin x \end{aligned}$$

이므로 준식에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p' &= \{-5Ax^2 + (4D-5B)x + 2A - 5C + 2E\}\cos x \\ &\quad + \{-5Dx^2 + (-4A-5E)x + 2D - 2B - 5F\}\sin x \\ &= (x^2 - 2)\cos x \end{aligned}$$

계수를 비교해서 상수를 구하면,

$A=-\frac{1}{5}$, $B=0$, $C=\frac{48}{125}$, $D=0$, $E=\frac{4}{25}$, $F=0$

따라서, 특수해는 $y_p=\left(-\frac{1}{5}x^2+\frac{48}{125}\right)\cos x+\frac{4}{25}x\sin x$

4) (sol) 상수계수를 갖는 재차상미분방정식이므로
먼저, 특성방정식을 구하면,

$$\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=3,\ -1$$

따라서, 제차방정식의 일반해는 $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$ 이다.

초기조건을 만족하는 상수를 구하면,

(a) $y(0)=2;\ 2=c_1+c_2$

(b) $y'(0)=5;\ y'=3c_1e^{3x}-c_2e^{-x} \Rightarrow 5=3c_1-c_2$

이므로 $c_1=\frac{7}{4}$, $c_2=\frac{1}{4}$ 이다.

따라서, 초기조건을 만족하는 해는 $y=\frac{7}{4}e^{3x}+\frac{1}{4}e^{-x}$ 이다.

5) (sol) (a) 제차의 일반해 y_h : 특성방정식을 구하면,

$\lambda^2-4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2$ 따라서, $y_h=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}$ 이다.

(b) 비제차의 특수해 y_p : (변형규칙을 이용)

$y_p=Ax+B+Cxe^{-2x}$ 라 놓고 준식에 대입하여 미정계수를 구하면,

$A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{5}{4}$, $C=-\frac{1}{4}$ 를 얻는다.

따라서, 일반해는 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}xe^{-2x}$ 이다.

6) (sol) $u=y'$ 라 놓으면 $y''=u'$ 이므로 주어진 식은 다음과 같이 변형된다;

$$xu'=u+u^2 \Rightarrow xu'-u=u^2 \text{ : Bernoulli 방정식}$$

$t=u^{-1}$ 로 치환하고 x 에 관해 미분하면

$t'=-u^{-2}u'=-u^{-2}\left(\frac{1}{x}u+\frac{1}{x}u^2\right)=-\frac{1}{x}u^{-1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}t-\frac{1}{x}$ 이다.

즉, $t'+\frac{1}{x}t=-\frac{1}{x}$: 선형미분방정식을 얻는다.

따라서,

$$t=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(-\frac{1}{x}\right)dx+c_1\right]$$
$$=\frac{1}{x}\left[-\int dx+c_1\right]=\frac{c_1-x}{x}$$

즉, $u = \dfrac{x}{c_1 - x} = y'$ 이 된다.

$$\Rightarrow y = \int \frac{x}{c_1 - x} dx + c_2$$
$$= -c_1 \ln|c_1 - x| - x + c_2$$

따라서, 일반해는 $y = c_2 - c_1 \ln|c_1 - x| - x$ 이다.

7) **(풀이)**

보조방정식

$$2m(m-1) + 4m + 5 = 0 \ \Rightarrow \ 2m^2 + 2m + 5 = 0$$
$$\therefore \ m = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} i$$

따라서, 일반해는

$$y_h = c_1 x^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{3}{2}\ln x\right) + c_2 x^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{3}{2}\ln x\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ c_1 \cos\left(\frac{3}{2}\ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{3}{2}\ln x\right) \right\}$$

8) **(풀이)** $u = 3x - 2$ 로 치환하고 연쇄율을 이용하자!

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3\frac{dy}{du}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3\frac{dy}{du}\right) = \frac{d}{du}\left(3\frac{dy}{du}\right)\frac{du}{dx} = 9\frac{d^2y}{du^2}$$

이것을 준식에 대입하면,

$$9u^2 \frac{d^2y}{du^2} + 3u\frac{dy}{du} + y = 0 \ : \text{Euler-Cauchy 방정식}$$

(보조방정식) $9m(m-1) + 3m + 1 = 0$

$$\Rightarrow 9m^2 - 6m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow m = \frac{1}{3} \ (\text{중근})$$

따라서, 일반해는

$$y_h = c_1 u^{\frac{1}{3}} + c_2 u^{\frac{1}{3}} \ln u$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 (3x-2)^{\frac{1}{3}} + c_2 (3x-2)^{\frac{1}{3}} \ln(3x-2)$$

9) **(풀이)** (i) 제차의 일반해 y_h : 특성방정식을 구하면,

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0 \ \Rightarrow \ (\lambda - 2)(\lambda^2 + 4) = 0$$

따라서, 일반해는 $y_h = Ae^{2x} + B\cos 2x + C\sin 2x$ 이다.

(ii) 초기조건을 만족하는 해 :

주어진 조건을 만족하는 상수를 구하면 $A = 3,\ B = -4,\ C = 12$ 를 얻는다.

따라서, 해는 $y=3e^{2x}-4\cos 2x+12\sin 2x$ 이다.

10) **(풀이)** (a) 제차의 일반해 y_h: 보조방정식

$$m(m-1)(m-2)-m(m-1)-7m+16=0 \Rightarrow (m+2)(m-2)(m-4)=0$$

따라서, $y_h=c_1x^{-2}+c_2x^2+c_3x^4$

(b) 비제차의 특수해 y_p : 매개변수변화법을 이용하여 구하자.

(표준형을 생각하자. $r(x)=\dfrac{9\ln x}{x^2}$)

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} x^{-2} & x^2 & x^4 \\ -2x^{-3} & 2x & 4x^3 \\ 6x^{-4} & 2 & 12x^2 \end{vmatrix}=48x$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^4 \\ 0 & 2x & 4x^3 \\ \dfrac{9\ln x}{x^2} & 2 & 12x^2 \end{vmatrix}=18x^3\ln x$$

$$W_2=\begin{vmatrix} x^{-2} & 0 & x^4 \\ -2x^{-3} & 0 & 4x^3 \\ 6x^{-4} & \dfrac{9\ln x}{x^2} & 12x^2 \end{vmatrix}=-\frac{54\ln x}{x}$$

$$W_3=\begin{vmatrix} x^{-2} & x^2 & 0 \\ -2x^{-3} & 2x & 0 \\ 6x^{-4} & 2 & \dfrac{9\ln x}{x^2} \end{vmatrix}=\frac{36\ln x}{x^3}$$

따라서,

$$u_1=\int\frac{W_1}{W}dx=\frac{3}{8}\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{8}x^3\ln x-\frac{1}{24}x^3$$

$$u_2=\int\frac{W_2}{W}dx=-\frac{9}{8}\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{9\ln x}{8x}+\frac{9}{8x}$$

$$u_3=\int\frac{W_3}{W}dx=\frac{3}{4}\int\frac{\ln x}{x^4}dx=-\frac{\ln x}{4x^3}-\frac{1}{12x^3}$$

그러므로, 일반해는

$$y=c_1x^{-2}+c_2x^2+c_3x^4+u_1x^{-2}+u_2x^2+u_3x^4 \quad \text{이다.}$$
$$=c_1x^{-2}+c_2x^2+c_3x^4+x\ln x+x$$

초기조건을 만족하는 상수 c_1, c_2, c_3 를 구하자:

$$\begin{aligned} y(1)=1;&\quad c_1+c_2+c_3=0 \\ y'(1)=2;&\quad -c_1+c_2+2c_3=0 \\ y''(1)=3;&\quad 3c_1+c_2+6c_3=1 \end{aligned}$$

이 식을 구하면 $c_1=\dfrac{1}{12}, c_2=-\dfrac{1}{4}, c_3=\dfrac{1}{6}$ 이다.

따라서, 초기조건을 만족하는 해는

$y=\frac{1}{12}x^{-2}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^4+x\ln x+x$ 이다.

11) **(풀이)** (i) 제차의 일반해 y_h : 특성방정식을 구하면,

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3=0 \Rightarrow \lambda=1\,(3중근)$$

따라서, $y_h=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$ 이다.

(ii) 비제차의 특수해 y_p : (변형규칙을 적용)

$y_p=Ax+B+Cx^3e^x$ 라 놓고 준식에 대입하여

미정계수를 구하면,

$A=-1,\ B=-3,\ C=-\frac{2}{3}$ 를 얻는다.

즉, 특수해 $y_p=-x-3-\frac{2}{3}x^3e^x$ 이다.

따라서, 일반해는

$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x-x-3-\frac{2}{3}x^3e^x$

12) **(풀이)** (i) 제차의 일반해 y_h: 보조방정식

$$m(m-1)(m-2)+m(m-1)-2m+2=0 \Rightarrow (m+1)(m-1)(m-2)=0$$

따라서, $y_h=c_1x^{-1}+c_2x+c_3x^2$ 이다.

(ii) 비제차의 특수해 y_p : 매개변수변화법을 이용하여 구하자.

(표준형을 생각하자. $r(x)=\ln x$)

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} x^{-1} & x & x^2 \\ -x^{-2} & 1 & 2x \\ 2x^{-3} & 0 & 2 \end{vmatrix}=\frac{6}{x}$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ \ln x & 0 & 2 \end{vmatrix}=x^2\ln x$$

$$W_2=\begin{vmatrix} x^{-1} & 0 & x^2 \\ -x^{-2} & 0 & 2x \\ 2x^{-3} & \ln x & 2 \end{vmatrix}=-3\ln x$$

$$W_3=\begin{vmatrix} x^{-1} & x & 0 \\ -x^{-2} & 1 & 0 \\ 2x^{-3} & 0 & \ln x \end{vmatrix}=\frac{2}{x}\ln x$$

따라서,

$$u_1=\int\frac{W_1}{W}dx=\frac{1}{6}\int x^3\ln x\,dx=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4\right]$$

$$u_2=\int\frac{W_2}{W}dx=-\frac{1}{2}\int x\ln x\,dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]$$

$$u_3 = \int \frac{W_3}{W} dx = \frac{1}{3} \int \ln x dx = \frac{1}{3}(x \ln x - x)$$

특수해 $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = \frac{1}{8} x^3 \ln x - \frac{7}{32} x^3$ 이다.

따라서, 일반해

$$y = y_p + y_h = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{1}{8} x^3 \ln x - \frac{7}{32} x^3$$