대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (25장) - by 송현석

1. 빛의 속도가 항상 일정하다면 마이켈슨-몰리 실험의 결과가 당연해지는가? 그 이유를 설명하여라.

생략

2. 여러분이 빛을 타고 여행하고 있다가 집에 두고 온 시계를 지나쳤다. 이 시계의 빠르기를 계산하여 보아라.

시간의 지연 – 관측자에 대해서 움직이는 시계는 γ 배 만큼 느리게 간다.

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{0} \approx \infty$$

따라서, 시계가 멈춘것 처럼 느껴진다.

3. 정지길이가 $30.0\ \mathrm{cm}$인 막대자가 진행방향인 x 축에 대해 30.0° 기울어진 채 x 방향으로 $v = 0.990\,c$의 속도로 움직이고 있다. 정지해 있는 관측자가 측정한 이 자의 길이는 얼마인가?

$$L_x = L\cos 30^\circ = 30.0\ \mathrm{cm} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 26.0\ \mathrm{cm}$$

$$L_y = L\sin 30^\circ = 30.0\ \mathrm{cm} \times \frac{1}{2} = 15.0\ \mathrm{cm}$$

길이의 수축

– 움직이는 물체의 길이는 운동 방향으로 $1/\gamma$ 배 만큼 수축된 것으로 관측된다.

$$L_x{}' = \frac{L_x}{\gamma} = L_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 26.0\ \mathrm{cm} \times \sqrt{1-\frac{(0.990\,c)^2}{c^2}} = 26.0\ \mathrm{cm} \times \sqrt{1-\frac{0.9801\,c^2}{c^2}}$$

$$= 26.0\ \mathrm{cm} \times \sqrt{1-0.980} = 26.0\ \mathrm{cm} \times \sqrt{0.0200} \approx 26.0\ \mathrm{cm} \times 0.141 \approx 3.66\ \mathrm{cm}$$

$$L' = \sqrt{L_x{}'^2 + L_y^2} = \sqrt{(3.66\ \mathrm{cm})^2 + (15.0\ \mathrm{cm})^2} \approx 15.4\ \mathrm{cm}$$

4. 여러분이 두 배로 날씬해 보이고 싶다면 얼마나 빨리 달려야 할까?

$$L' = \frac{L}{\gamma} = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

$$v^2 = c^2\left(1-\frac{1}{4}\right) = c^2 \times \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0.866c$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (25장) - by 송현석

5. 지상의 관측자가 측정할 때, 일정한 속력 v로 지표면을 향해 떨어지는 뮤온 입자가 있다. 이 입자는 정지한 상태에서는 T_0 시간 후 붕괴한다.
$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=5$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.
(가) 지상에서 볼 때, 이 입자는 얼마 후 붕괴하겠는가?

$$\gamma=5 \qquad \Delta t'=\gamma\Delta t \qquad \Rightarrow \qquad 5\,T_0$$

(나) 뮤온 입자가 볼 때, 지상이 다가오는 속력은 얼마인가?

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=5 \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{25} \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{c^2\left(1-\frac{1}{25}\right)}=\frac{\sqrt{24}}{5}c\approx 0.98\,c$$

(다) 붕괴할 때까지 입자가 운동한 거리를 지상에서 측정해 보니 L_0라 한다.
붕괴할 때까지 뮤온 입자가 측정한 지상의 이동거리는 얼마인가?

$$L'=\frac{L}{\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{L_0}{5}$$

6. 정지 상태에서 중간자는 생성 후 $2.0\,\mu\mathrm{s}$ 만에 소멸된다. 이 중간자가 실험실에서 $0.990\,c$의 속력으로 움직이면, 실험실 시계로 중간자 수명은 얼마인가?

$$\Delta t=2\,\mu\mathrm{s}, \qquad v=0.990\,c$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(0.990\,c/c)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(0.990)^2}}\approx 7.09$$

$$\Delta t'=\gamma\Delta t=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t'=\gamma\Delta t=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{(0.990\,c)^2}{c^2}}}\approx 14.2\,\mu\mathrm{s}$$

7. 정지 상태에서 자동차의 길이가 L이다. 이 자동차가 빛의 속도의 몇 배로 달릴 때, 길이가 $4L/5$로 측정되겠는가?

$$L'=L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{4}{5}L \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad 1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{16}{25}$$

$$v^2=c^2\left(1-\frac{16}{25}\right)=c^2\times\frac{9}{25} \qquad \Rightarrow \qquad v=\frac{3}{5}c$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (25장) - by 송현석

8. Λ **중입자의 평균수명은** $2.63\times 10^{-10}\ \mathrm{s}$**이다. 이 입자가** $0.990\,c$ **의 속력으로 움직이고 있다면 정지좌표계에서 이 입자를 관찰했을 때 붕괴하기 전 이 입자가 이동한 거리는 얼마인가?**

$$\Delta t = 2.63\times 10^{-10}\ \mathrm{s}, \qquad v = 0.990\,c$$

$$\Delta t' = \gamma\Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{(2.63\times 10^{-10}\ \mathrm{s})}{\sqrt{1-\dfrac{(0.990\,c)^2}{c^2}}} \approx 1.864\times 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

$$d = v\Delta t' = (0.990\,c)\times\Delta t' = 0.990\times(3.00\times 10^8\ \mathrm{m/s})\times(1.864\times 10^{-9}\ \mathrm{s}) \approx 0.554\ \mathrm{m}$$

9. 한 변의 길이가 $1.00\ \mathrm{cm}$ **인 정육면체인 알루미늄의 질량은 대략** $3.00\ \mathrm{g}$**이다. 이 정육면체의 한 면이** x**축 방향으로 향하여** $0.990\,c$**의 속력으로 움직이고 있다. 정지된 관찰자가 이 정육면체를 측정할 때**

(가) 이 정육면체의 부피를 구하여라.

$$L_x' = \frac{L_x}{\gamma} = L_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1.00\ \mathrm{cm}\times\sqrt{1-\frac{(0.990\,c)^2}{c^2}} = 1.00\ \mathrm{cm}\times\sqrt{1-\frac{0.9801\,c^2}{c^2}}$$
$$= 1.00\ \mathrm{cm}\times\sqrt{1-0.9801} = 1.00\ \mathrm{cm}\times\sqrt{0.0199} \approx 1.00\ \mathrm{cm}\times 0.141 \approx 0.141\ \mathrm{cm}$$

$$V' = L_x'\times L_y\times L_z = \left(\frac{L_x}{\gamma}\right)\times L_y\times L_z \approx 0.141\ \mathrm{cm}\times 1.00\ \mathrm{cm}\times 1.00\ \mathrm{cm} \approx 0.1411\ \mathrm{cm}^3$$

(나) 이 정육면체의 질량을 구하여라.

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{3.00\ \mathrm{g}}{\sqrt{1-\dfrac{(0.990\,c)^2}{c^2}}} = \frac{3.00\ \mathrm{g}}{\sqrt{1-\dfrac{0.9801\,c^2}{c^2}}} = \frac{3.00\ \mathrm{g}}{\sqrt{1-0.9801}}$$
$$= \frac{3.00\ \mathrm{g}}{\sqrt{0.0199}} \approx \frac{3.00\ \mathrm{g}}{0.141} \approx 21.3\ \mathrm{g}$$

(다) 이 정육면체의 밀도를 구하여라.

$$\rho' = \frac{m}{V'} = \frac{\gamma m_0}{\left(\dfrac{L_x}{\gamma}\right)\times L_y\times L_z} = \frac{\gamma^2 m_0}{L_x\times L_y\times L_z} \approx \frac{\left(\dfrac{1}{0.0199}\right)\times 3.00\ \mathrm{g}}{1.00\ \mathrm{cm}^3} \approx 151\ \mathrm{g/cm}^3$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (25장) - by 송현석

10. 태양의 질량은 $1.99\times 10^{30}\ \mathrm{kg}$이고 $3.87\times 10^{23}\ \mathrm{kW}$의 비율로 에너지를 방출한다. 1시간 당 줄어드는 태양의 질량을 계산하고, 태양이 자기 질량의 1%를 태우는 데 소모되는 시간을 구하여라.

$$M = 1.99\times 10^{30}\ \mathrm{kg}, \qquad P = 3.87\times 10^{23}\ \mathrm{kW} = 3.87\times 10^{26}\ \mathrm{W}$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + (mc^2)^2} \quad \Rightarrow \quad E = mc^2 \quad < p = 0 > \quad \text{: 태양은 정지해 있다고 가정}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta W = P\times \Delta t = mc^2 = E$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{\Delta W}{c^2} = \frac{P\times \Delta t}{c^2} = \frac{(3.87\times 10^{26}\ \mathrm{W})\times(3600\ \mathrm{s})}{(3.00\times 10^8\ \mathrm{m/s})^2} \approx 1.548\times 10^{13}\ \mathrm{kg}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta W}{P} = \frac{E}{P} = \frac{mc^2}{P} = \frac{(M/100)c^2}{P} = \frac{(1.99\times 10^{30}\ \mathrm{kg}/100)\times(3.00\times 10^8\ \mathrm{m/s})^2}{3.87\times 10^{26}\ \mathrm{W}}$$

$$\approx 4.628\times 10^{18}\ \mathrm{s} \approx 1.286\times 10^{15}\ \mathrm{h} \approx 1.467\times 10^{11}\ \mathrm{y}$$

11. 입자의 운동에너지가 정지에너지와 같다면, 이 입자의 속력은 빛 속력의 몇 배인가?

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma mc^2 = 2mc^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2$$

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)c^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

12. $0.99999\,c$의 속력으로 움직이고 있는 전자가 있다.

(가) 전자의 상대론적 운동량을 구하여라.

$$p = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(9.11\times 10^{-31}\ \mathrm{kg})\times 0.99999\times(3.00\times 10^8\ \mathrm{m/s})}{\sqrt{1-(0.99999\,c)^2/c^2}}$$

$$\approx 6.111\times 10^{-20}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

(나) 전자의 상대론적 운동에너지를 구하여라.

$$K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)m_0c^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-(0.99999\,c)^2/c^2}} - 1\right)\times(9.11\times 10^{-31}\ \mathrm{kg})\times(3.00\times 10^8\ \mathrm{m/s})^2 \approx 1.825\times 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

(다) 전자의 상대론적 질량을 구하여라.

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(9.11\times 10^{-31}\ \mathrm{kg})}{\sqrt{1-(0.99999\,c)^2/c^2}} \approx 2.037\times 10^{-28}\ \mathrm{kg}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (25장) - by 송현석

13. 스위스와 프랑스 국경에 있는 유럽입자물리연구소(CERN)의 거대 강입자 충돌기(Large Hardron Collider, LHC)는 양성자를 운동에너지 $7\ \mathrm{TeV}$ 까지 가속시킨다. 이 가속된 양성자의 속력을 구하여라. 이 양성자의 운동량은 얼마인가? 이 가속된 양성자는 정지질량 $m_p = 938\ \mathrm{MeV}/c^2$ 보다 얼마나 더 무거운가?

$$K = 7\ \mathrm{TeV} = 7 \times 10^{12}\ \mathrm{eV}, \qquad E_0 = m_p c^2 = 938\ \mathrm{MeV} = 938 \times 10^6\ \mathrm{eV}$$

$$K = E - E_0 = \gamma E_0 - E_0 = \gamma m_p c^2 - m_p c^2$$

$$\Rightarrow \qquad \gamma = \frac{K}{m_p c^2} + \frac{m_p c^2}{m_p c^2} = \frac{K}{m_p c^2} + 1 = \frac{(7 \times 10^{12}\ \mathrm{eV})}{(938 \times 10^6\ \mathrm{eV})} + 1 \approx 7463.686567$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = c\sqrt{1-\frac{1}{(7463.686567)^2}} \approx 0.999999991c$$

$$E = \gamma E_0 = \gamma m_p c^2 = K + E_0 = K + m_p c^2 = (7 \times 10^{12}\ \mathrm{eV}) \times (938 \times 10^6\ \mathrm{eV})$$
$$= 7.000938 \times 10^{12}\ \mathrm{eV}$$

$$E^2 = p^2c^2 + m_p^2 c^4 \qquad \Rightarrow \qquad p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(\frac{m_p c^2}{c}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{(7.000938 \times 10^{12}\ \mathrm{eV})^2}{(3 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^2} - \left(\frac{938 \times 10^6\ \mathrm{eV}}{3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}}\right)^2}$$
$$\approx 23336.45979\ \mathrm{eV/(m/s)}$$
$$\approx (23336.45979\ \mathrm{eV}) \times (3 \times 10^8\ \mathrm{m/s})$$
$$\approx 7.000938 \times 10^{12}\ \mathrm{eV}/c \approx 7.000938\ \mathrm{TeV}/c$$

$$p = \gamma m_p v = \gamma\left(\frac{m_p c^2}{c^2}\right)v = \gamma\left(\frac{m_p c^2}{c^2}\right) \times 0.999999991c$$
$$= \gamma\left(\frac{m_p c^2}{c}\right) \times 0.999999991$$
$$= (7463.686567) \times \left(\frac{938 \times 10^6\ \mathrm{eV}}{3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}}\right) \times 0.999999991$$
$$\approx 23336.45979\ \mathrm{eV/(m/s)}$$
$$\approx (23336.45979\ \mathrm{eV}) \times (3 \times 10^8\ \mathrm{m/s})$$
$$\approx 7.000938 \times 10^{12}\ \mathrm{eV}/c = 7.000938\ \mathrm{TeV}/c$$

$$\frac{E}{E_0} = \frac{7.000938 \times 10^{12}\ \mathrm{eV}}{938 \times 10^6\ \mathrm{eV}} \approx 7464 = \gamma \qquad < \gamma \text{ 배 더무겁다.} >$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (25장) - by 송현석

14. $0.900\,c$**의 속력으로 움직이는 양성자와 질량이 같은 전자의 속력은 얼마인가?**
(단, 전자의 정지질량은 $0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$**, 양성자의 정지질량은** $938\,\mathrm{MeV}/c^2$ **이라고 하자.)**

$$v_p = 0.900\,c, \qquad m_p c^2 = 938\,\mathrm{MeV}, \qquad m_e c^2 = 0.511\,\mathrm{MeV}$$

$$\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1-(v_p/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.900\,c/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.900)^2}} \approx 2.294$$

$$\begin{cases} E_p = \gamma_p m_p c^2 \\ E_e = \gamma_e m_e c^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma_e = \frac{m_p c^2}{m_e c^2}\gamma_p = \frac{938\,\mathrm{MeV}}{0.511\,\mathrm{MeV}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(0.900)^2}} \approx 4211$$

$$\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v_e/c)^2}} \quad \Rightarrow \quad v_e = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma_e^2}}$$

$$= c\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{m_p c^2}{m_e c^2}\gamma_p\right)^2}}$$

$$= c\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{938\,\mathrm{MeV}}{0.511\,\mathrm{MeV}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(0.900)^2}}\right)^2}}$$

$$\approx 0.99999997\,c$$

15. (가) 자유 입자의 운동에너지가 정지에너지보다 매우 크다면, 운동에너지는 운동량의 몇 제곱에 비례하는가?

$$E = K + mc^2 \qquad < \ K \gg mc^2 \ >$$
$$\Rightarrow \qquad E \approx K$$

$$E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2 \qquad < \ p^2c^2 \gg (m_0c^2)^2 \ >$$
$$\Rightarrow \qquad E^2 \approx p^2c^2 \approx K^2 \qquad \Rightarrow \qquad K \approx pc \qquad \Rightarrow \qquad K \propto p \quad \text{(상대론적)}$$

(나) 또한 운동에너지가 정지에너지보다 매우 작다면, 운동에너지는 운동량의 몇 제곱에 비례하는가?

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{p^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad K \propto p^2 \quad \text{(고전적)}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (25장) - by 송현석

16. $10.0\ \mathrm{kg}$**의 우라늄이 들어있는 핵폭탄이 터질 때 이 질량 중** 0.100% **만 에너지로 바뀐다.**

(가) 이때 방출되는 에너지를 J **단위로 구하여라.**

$$E_0 = m_0 c^2 = 10.0\ \mathrm{kg} \times (3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^2 = 9.00 \times 10^{17}\ \mathrm{J}$$

$$0.00100 \times E_0 = 0.00100 \times (9.00 \times 10^{17}\ \mathrm{J}) = 9.00 \times 10^{14}\ \mathrm{J}$$

(나) $0.19\ \mathrm{kg}$**의 다이너마이트(니트로글리세린)는 대략** $1.00\ \mathrm{MJ}$**의 에너지를 낸다.**
이 핵폭탄의 위력은 몇 kg**의 다이너마이트에 해당하는가?**

$$(9.00 \times 10^{14}\ \mathrm{J}) \times \frac{0.19\ \mathrm{kg}}{1.00 \times 10^6\ \mathrm{J}} = 1.71 \times 10^8\ \mathrm{kg}$$

17. Δ^+**중입자는 대부분 양성자와 파이 중간자(**π^0**), 또는 중성자와 파이 중간자(**π^+**)로 붕괴한다. 그러나** 0.6% **남짓 양성자와 광자(감마선:** γ**)로도 붕괴한다. 이 붕괴를 방사붕괴라고 부른다. 이 붕괴 과정은** $\Delta^+ \to p+\gamma$ **라고 표현한다. 정지상태에 있던** Δ^+**중입자가 방사붕괴하는 경우에 (**Δ^+**, 양성자의 질량은 각각** $1232\ \mathrm{MeV}/c^2$**,** $938.3\ \mathrm{MeV}/c^2$ **이다.)**

(나) 광자의 운동에너지를 MeV **의 단위로 나타내어라.** 답안지 답 : $188.7\ \mathrm{MeV}$

방사붕괴 전 선운동량 = 방사붕괴 후 선운동량 <선 운동량 보존>

$$\vec{p}_{\Delta^+} = 0 = \vec{p}_p + \vec{p}_\gamma$$

$$\vec{p}_\gamma = -\vec{p}_p \qquad \langle\ - : \text{방향은 반대},\quad p_\gamma = p_p : \text{크기는 동일}\ \rangle$$

방사붕괴 전 에너지 = 방사붕괴 후 에너지 <에너지 보존>

$$\begin{aligned} E_{\Delta^+,0} &= E_p + E_\gamma \\ &= (K_p + E_{p,0}) + E_\gamma && \langle\ E_p = K_p + E_{p,0}\ \rangle \\ &= \sqrt{E_{p,0}^2 + p_p^2c^2} + p_\gamma c && \langle\ E_p = \sqrt{E_{p,0}^2 + p_p^2c^2},\quad E_\gamma = K_\gamma = p_\gamma c\ \rangle \\ &= \sqrt{E_{p,0}^2 + p_\gamma^2c^2} + p_\gamma c && \langle\ p_\gamma = p_p\ \rangle \end{aligned}$$

$$E_{\Delta^+,0} - p_\gamma c = \sqrt{E_{p,0}^2 + p_\gamma^2c^2}$$

$$(E_{\Delta^+,0} - p_\gamma c)^2 = E_{p,0}^2 + p_\gamma^2c^2$$

$$E_{\Delta\ +,0}^2 - 2E_{\Delta^+,0}\,p_\gamma c + p_\gamma^2c^2 = E_{p,0}^2 + p_\gamma^2c^2$$

$$E_{\Delta^+,0}^2 - 2E_{\Delta^+,0}\,p_\gamma c = E_{p,0}^2$$

$$2E_{\Delta^+,0}\,p_\gamma c = E_{\Delta^+,0}^2 - E_{p,0}^2$$

$$p_\gamma c = \frac{E_{\Delta^+,0}^2 - E_{p,0}^2}{2E_{\Delta^+,0}}$$

$$E_\gamma = K_\gamma = p_\gamma c = \frac{(1232\ \mathrm{MeV})^2 - (938.3\ \mathrm{MeV})^2}{2(1232\ \mathrm{MeV})} \approx 258.3\ \mathrm{MeV}$$

답안지 답과 다르네~?

(가) 양성자의 운동에너지를 MeV **의 단위로 나타내어라.** 답안지 답 : $105.0\ \mathrm{MeV}$

방사붕괴 전 에너지 = 방사붕괴 후 에너지 <에너지 보존>

$$\begin{aligned} E_{\Delta^+,0} &= E_p + E_\gamma \\ &= (K_p + E_{p,0}) + E_\gamma && \langle\ E_p = K_p + E_{p,0}\ \rangle \\ K_p &= E_{\Delta^+,0} - E_{p,0} - E_\gamma \\ &\approx 1232\ \mathrm{MeV} - 938.3\ \mathrm{MeV} - 258.3\ \mathrm{MeV} \approx 35.00\ \mathrm{MeV} \end{aligned}$$

답안지 답과 다르네~?

18. 전하가 q인 입자가 일정한 전기장 아래에 u의 속력으로 직선 운동을 하고 있다. 이때 이 입자가 전기장 때문에 받는 힘은 $q\vec{E}$이다. 이 입자의 속도와 전기장의 방향은 모두 x 방향이다.

(가) 이 입자가 x 방향으로 받는 가속도는 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{qE}{m}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right] = \frac{d}{dt}\left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right] = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{(-2u)}{c^2}\frac{du}{dt}$$

$$= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{u}{c^2}\frac{du}{dt} = \gamma^3\frac{u}{c^2}\frac{du}{dt}$$

상대론적인 운동량 : $p = \gamma m u$

상대론적인 힘 : $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m u) = m\frac{d}{dt}(\gamma u)$

$$\Rightarrow \quad \frac{F}{m} = \frac{d}{dt}(\gamma u) = \frac{d\gamma}{dt}u + \gamma\frac{du}{dt} = \left(\gamma^3\frac{u}{c^2}\frac{du}{dt}\right)u + \gamma\frac{du}{dt} = \gamma\left(\gamma^2\frac{u^2}{c^2} + 1\right)\frac{du}{dt}$$

$$= \gamma\left(\gamma^2\frac{u^2}{c^2} + 1\right)\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\left(\frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}}\frac{u^2}{c^2} + 1\right)\frac{du}{dt} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{du}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{du}{dt} = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} = \frac{qE}{m}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

상대론적인 가속도 : $a = \frac{du}{dt} = \frac{1}{\gamma^3}\frac{F}{m}$

$a \propto \frac{1}{\gamma^3} \propto \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$ 이므로, $u \rightarrow c$ 이면 $\left\{\begin{array}{l}\gamma \rightarrow \infty \\ a \rightarrow 0\end{array}\right.$ 이 된다.

고전적으로는
일정한 힘을 받으면 가속도도 일정해서 속도가 무한히 증가해야 하지만,

상대론적으로는
일정한 힘을 받으면 가속도는 감소해서 속력이 빛의 속력 c를 넘어설 수 없다.
즉, 한계 속력이 존재한다.

(나) 시간 $t=0$일 때, 입자에 x 방향으로 일정한 전기장을 가했다. 그리고 그 순간에 입자는 $x=0$, $t=0$에서 정지해 있었다. 시간 t 후에 이 입자의 위치와 속력을 구하여라.

$$a=\frac{du}{dt}=\frac{qE}{m}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}=\frac{qE}{m}dt \qquad \left\langle \int\frac{du}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}=\frac{u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}+\mathrm{C} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^u\frac{du}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}=\frac{qE}{m}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right]_0^u=\frac{qE}{m}[t]_0^t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}=\frac{qEt}{m}$$

$$\Rightarrow \quad u=\frac{qEt}{m}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad u^2=\frac{q^2E^2t^2}{m^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\frac{q^2E^2t^2}{m^2}-\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}u^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}\right)u^2=\frac{q^2E^2t^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow \quad (m^2c^2+q^2E^2t^2)u^2=q^2E^2c^2t^2$$

$$\Rightarrow \quad u^2=\frac{q^2E^2c^2t^2}{m^2c^2+q^2E^2t^2}$$

$$\Rightarrow \quad u=\frac{qEct}{\sqrt{m^2c^2+q^2E^2t^2}}$$

$$u=\frac{dx}{dt}=\frac{qEct}{\sqrt{m^2c^2+q^2E^2t^2}}$$

$$\Rightarrow \quad dx=\frac{qEct}{\sqrt{m^2c^2+q^2E^2t^2}}dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^x dx=\int_0^t\frac{qEct}{\sqrt{m^2c^2+q^2E^2t^2}}dt$$

$$\Rightarrow \quad [x]_0^x=\left[\frac{c}{qE}\sqrt{m^2c^2+q^2E^2t^2}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{c}{qE}\left(\sqrt{m^2c^2+q^2E^2t^2}-mc\right)$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (25장) - by 송현석

19. 질량이 m인 입자가 있다. 이 입자의 운동량은 p, 운동에너지는 K로 표현한다.

(가) 이 입자의 질량 m은 다음과 같이 쓸 수 있음을 보여라.

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}$$

$$E = K + E_0 = K + mc^2 = \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4}$$

$$\Rightarrow \quad K^2 + 2Kmc^2 + m^2c^4 = (pc)^2 + m^2c^4$$

$$\Rightarrow \quad K^2 + 2Kmc^2 = (pc)^2$$

$$\Rightarrow \quad 2Kmc^2 = (pc)^2 - K^2$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}$$

(나) 이 입자의 속력이 아주 작을 때, 위 식의 오른쪽 표현이 m이 됨을 보여라.

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2} = \frac{p^2}{2K} - \frac{K}{2c^2} = \frac{m^2v^2}{2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)} - \frac{\frac{1}{2}mv^2}{2c^2} = m - \frac{mv^2}{4c^2} \approx m$$

$$\langle \ if \quad v \ll 1, \quad then \quad v^2 \to 0 \ \rangle$$

(다) 만약에 이 입자의 운동량이 $p = 154\ \mathrm{MeV}/c$이고, 운동에너지는 $K = 81\ \mathrm{MeV}$ 라면, 이 입자의 질량을 구하여라.

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2} = \frac{(154\ \mathrm{MeV})^2 - (81\ \mathrm{MeV})^2}{2 \times (81\ \mathrm{MeV})c^2} = \frac{17155}{162}\ \mathrm{MeV}/c^2 \approx 105.9\ \mathrm{MeV}/c^2$$