2.1

#35. $d_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix} = gC_{31} + 0\cdot C_{32} + 1\cdot C_{33}$

$= g\begin{vmatrix} b & c \\ 1 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ d & 1 \end{vmatrix} = g(bf-c)+(a-bd)$

$d_2 = \begin{vmatrix} a+\lambda & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix} = gC_{31}+0\cdot C_{32}+1\cdot C_{33}$

$= g\begin{vmatrix} b & c \\ 1 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+\lambda & b \\ d & 1 \end{vmatrix} = g(bf-c)+(a+\lambda-bd)$

$\therefore$ $d_1+\lambda=d_2$의 관계를 가지고 있다.

#36. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $tr(A)=a+d$.

$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$

$tr(A^2)=a^2+2bc+d^2$.

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} tr(A) & 1 \\ tr(A^2) & tr(A) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+d & 1 \\ a^2+2bc+d^2 & a+d \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left((a+d)^2-(a^2+2bc+d^2)\right)$

$= \frac{1}{2}(2ad-2bc) = ad-bc = det(A)$이다.

#38. $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$

$det(A)$

$= a\cdot e\cdot i + b\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h - (c\cdot e\cdot g + a\cdot f\cdot h + b\cdot d\cdot i)$

따라서 3X3 행렬의 determinant가 0이 되지 않는 가장 많은 0의 수는 $a\cdot e\cdot i$, $b\cdot f\cdot g$, $c\cdot d\cdot h$, $c\cdot e\cdot g$, $a\cdot f\cdot h$, $b\cdot d\cdot i$의 요소만 제외한 값이 0일 때의 수이다.

즉 $a\cdot e\cdot i \neq 0$일 때를 예로 들면 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$일때 이므로 0의 최대 개수는 6개이다.

#40. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = C_{13}+C_{23}+C_{33}$

$= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

$= (x_2y_3-x_3y_2)-(x_1y_3-x_3y_1)+(x_1y_2-x_2y_1)=0$

$\Rightarrow x_2y_3-x_1y_3-x_2y_1+x_1y_1 = x_3y_2-x_1y_2-x_3y_1+x_1y_1=0$

$(x_2-x_1)(y_3-y_1)=(x_3-x_1)(y_2-y_1)$이므로

$\underbrace{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$로 나타낼 수 있다.
세 점의 선형성을 나타내는 식

따라서 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$이면. (x_1,y_1), (x_2,y_2) (x_3,y_3)는 collinear points이다.

#42. A는 upper triangular 이므로

A의 i행, j열 요소를 a_{ij}라 하면

$a_{ij}=\begin{cases} 0 & (i>j) \\ a(\in\mathbb{R}) & (i\leq j) \end{cases}$ 이다.

(A는 $n\times n$ 행렬). 이때 A에서 i행 j열을 $(i<j)$ 지운 행렬을 B라 하면. B는 $(n-1)\times(n-1)$행렬이고, B의 i행 j열 요소를 b_{ij}라 하면

$b_{ij}=\begin{cases} 0 & (i>j) \\ a(\in\mathbb{R}) & (i\leq j) \end{cases}$ 이다. 따라서.

주대각선 아래 성분이 모두 0이므로 B 또한 upper triangular이다.

2.2 #23.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix} \quad R_2 \leftarrow R_2 - aR_1,\ R_3 \leftarrow R_3 - a^2R_1$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix} \quad R_3 \leftarrow R_3-(b+a)R_1$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&0&c^2-a^2-(c-a)(a+b)\end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\left(c^2-a^2-(c-a)(a+b)\right)$$

$$= (b-a)\left(c^2-a^2-(ac+bc-a^2-ab)\right)$$

$$= (b-a)(c^2-\cancel{a^2}-ac-bc+\cancel{a^2}+ab)$$

$$= (b-a)(c^2-(a+b)c+ab) = \underline{(b-a)(c-a)(c-b)}$$

#25. 한 행 또는 열에 k배를 한후 다른 행에 더해줘도 determinant는 동일하다.

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&a_1+b_1+c_1\\a_2&b_2&a_2+b_2+c_2\\a_3&b_3&a_3+b_3+c_3\end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3-(C_1+C_2)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$ 이다. 따라서

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&a_1+b_1+c_1\\a_2&b_2&a_2+b_2+c_2\\a_3&b_3&a_3+b_3+c_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$ 이다.

#34.

$$\begin{bmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{bmatrix} \quad R_4 \leftarrow R_4-R_3,\ R_3 \leftarrow R_3-R_2,\ R_2 \leftarrow R_2-R_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a&b&b&b\\b-a&a-b&0&0\\0&b-a&a-b&0\\0&0&b-a&a-b\end{bmatrix}$$ 이다.

한행에 k배한후 다른 행에 더해줘도 determinant는 불변하므로,

$$\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a&b&b&b\\b-a&a-b&0&0\\0&b-a&a-b&0\\0&0&b-a&a-b\end{vmatrix}$$ 이다.

$$\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b-a&a-b&0&0\\0&b-a&a-b&0\\0&0&b-a&a-b\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}a-b&0&0\\b-a&a-b&0\\0&b-a&a-b\end{vmatrix} - (b-a)\begin{vmatrix}b&b&b\\b-a&a-b&0\\0&b-a&a-b\end{vmatrix}$$

$$= a(a-b)^3-(b-a)\left(b(a-b)^2+b(b-a)^2-b(b-a)(a-b)\right)$$

$$= a(a-b)^3-(b-a)(3b(a-b)^2)$$

$$= a(a-b)^3+3b(a-b)^3 = \underline{(a-b)^3(a+3b)}$$

#30.

$$A = \begin{bmatrix}-4&1&1&1&1\\1&-4&1&1&1\\1&1&-4&1&1\\1&1&1&-4&1\\1&1&1&1&-4\end{bmatrix}$$

$R_1 \leftarrow R_1+R_2+R_3+R_4+R_5$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&-4&1&1&1\\1&1&-4&1&1\\1&1&1&-4&1\\1&1&1&1&-4\end{bmatrix} = A'$$ 이다

어떠한 행에 k배한후 다른 행에 더해도 그 행렬의 determinant는 동일하므로 $\det(A)=\det(A')$ 이다.

한 행이 모두 0인 행렬의 determinant는 0이므로 $\det(A')=0$이고 $\det(A)=\det(A')$이므로 $\det(A)=0$ 이다.

2.3. #30. $\det(A) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= C_{33} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$\det(A) = 1 \neq 0$이므로 A^{-1}가 존재한다.

Theorem 2.3.6에 의해 $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A)$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$C_{11} = \cos\theta \quad C_{12} = \sin\theta \quad C_{13} = 0$

$C_{21} = -\sin\theta \quad C_{22} = \cos\theta \quad C_{23} = 0$

$C_{31} = 0 \quad C_{32} = 0 \quad C_{33} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 이므로

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#31. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -12 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -12 & -6 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & -12 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 0 & -4 & -12 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

#31 이어서...

$$\det(A) = 3\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}\right) + 7\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -4 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 3\{(6+24) - (-42+8)\} + 7(-84-4)$$

$$= 3(30+34) + 7(-88) = -424$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -3 & -7 \\ 0 & -8 & -4 & -5 \\ 0 & -24 & -12 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 0.$

cramer's rule에 의해 $y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{0}{-424} = 0.$

$\therefore y = 0$ 이다

#39. Theorem 2.3.6 에 의해

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$ 이고, $\det(A) = 1$이므로

$A^{-1} = \operatorname{adj}(A)$이다.

A의 모든 요소가 integer이므로 A의 모든 cofactor도 항상 integer이다. 따라서

$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$ 의 요소도 모두

integer인 것이고, $A^{-1} = \operatorname{adj}(A)$ 이므로 A^{-1}의 모든 요소 또한 integer인 것이다.

#38. $\det(A)=1\neq 0$이므로 A는 가역행렬이다.

$Ax=b \Rightarrow A^{-1}Ax=A^{-1}b \Rightarrow x=A^{-1}b$이고

Theorem 2.3.6에 의해 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$

이므로 $x=\dfrac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)b=\operatorname{adj}(A)b$이다.

coefficients와 constants가 모두 integer이므로

A의 모든 cofactor와 b의 모든 요소들 또한 integer이다

따라서 $\operatorname{adj}(A)$의 각 요소는 A의 cofactor이므로

$\operatorname{adj}(A)$의 요소 또한 모두 integer이다. 따라서

$x=\operatorname{adj}(A)b$는 모든 요소가 integer인 행렬의 곱이므로

x의 요소 또한 모두 integer이다.

#33. (a) A는 3x3행렬이다. $(n=3)$

$\det(3A)=3^n\det(A)=3^3\det(A)=27\cdot(-7)$

$=-189$

(b) $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}=-\dfrac{1}{7}$

(c) $\det(2A^{-1})=2^n\det(A^{-1})=2^3\det(A^{-1})$

$=-\dfrac{8}{7}$

(d) $\det((2A)^{-1})=\dfrac{1}{\det(2A)}=\dfrac{1}{2^3\det(A)}=-\dfrac{1}{56}$

(e) $B=\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$ 는 A를 transpose 한 후

$\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

2열과 3열을 바꾼 것이다. $\det(A)=\det(A^T)$이고

두 행이나 두 열을 교환 하면 (-1)이 곱해진다.

따라서 $\det(B)=-\det(A^T)=-\det(A)=7$

#36. A가 invertible이면 $\det(A)\neq 0$이다.

A는 정방행렬이므로

$\det(A^TA)=\det(A^T)\det(A)$, $\det(A)=\det(A^T)$

이므로 $\det(A^TA)=\{\det(A)\}^2$이다.

$\det(A)\neq 0 \rightarrow \{\det(A)\}^2\neq 0$ 이므로

$\det(A^TA)\neq 0$이다. 따라서 A^TA도 invertible이다.

#37. $\det(A^TA)=\det(A^T)\det(A)$

$=\det(A)\det(A^T)$

$=\det(AA^T)$ 이다.

Supplemental exercises.

#15. $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1열, 5열을 바꾼 행렬의 determinant는

$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-\det(A)$ 이다. 여기서 2열, 4열을

바꾼 행렬의 determinant는

$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-(-\det(A))=\det(A)$이다.

대각행렬의 determinant는 각 요소들의 곱과 같다.

따라서 $\det(A)=(-3)(-4)(-1)\cdot 2\cdot 5=-120$

#26.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},\quad A_x = \begin{bmatrix} x & -\sin\theta \\ y & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & x \\ \sin\theta & y \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

$$\det(A_x) = x\cos\theta + y\sin\theta.$$

$$\det(A_y) = y\cos\theta - x\sin\theta.$$

$$x' = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = y\cos\theta - x\sin\theta$$

#27. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

$$= (1-\beta^2) - (1-\alpha\beta) + \alpha(\beta - \alpha)$$

$$= \cancel{1} - \beta^2 - \cancel{1} + \alpha\beta + \alpha\beta - \alpha^2 = -(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$= -(\alpha-\beta)^2$ 이므로 $\alpha=\beta$ 이면. $\det(A)=0$이다.

$\det(A)=0$이면 A는 비가역행렬이다.

A가 invertible인 것과 $Ax=b$가 유일해를 가지는 것은 동치이므로, A가 invertible이 아니면 $Ax=b$는 유일해를 가지지 않는다.

따라서 $\alpha=\beta$이면 $\det(A)=0$이므로 X는 nontrivial solution을 갖는다.

#28.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$\det(A)$가 최댓값을 가지기 위해선 $aei+bfg+cdh$가 최대가 되고 $ceg+afh+bdi$가 최소가 되어야한다.

$aei+bfg+cdh$가 가질수 있는 최댓값은 3인데. 이렇게 되면 모든 요소가 1이되므로 $ceg+afh+bdi$ 또한 3이 된다. 따라서 $\det(A)=0$이므로 최댓값이 아니다.

$aei+bfg+cdh$가 2일 때를 확인하자

$aei+bfg+cdh=2$이고, $aei=bfg=1$, $cdh=0$이라하자

이때 $ceg+afh+bdi=c+d+h$ 가 된다

만약 c, d, h 중 하나라도 0이 아닌 것이 있다면

$\det(A) = 2-(c+d+h) < 2$ 가 된다. 따라서 $c=d=h=0$일 때 $\det(A)=2$로 최댓값을 가진다.

따라서 $\det(A)$의 최댓값은 2이다

#29. (a). $A=\begin{pmatrix}0&c&b\\c&0&a\\b&a&0\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\cos\beta\\\cos\gamma\end{pmatrix}$

$b=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, 로 두면 다음 선형연립방정식은

$Ax=b$와 같이 나타낼 수 있다

Cramer's rule에 의해 $\cos\alpha=\dfrac{\det(A_\alpha)}{\det(A)}$ 이다.

이때 $A_\alpha=\begin{pmatrix}a&c&b\\b&0&a\\c&a&0\end{pmatrix}$ 이다.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}0&c&b\\c&0&a\\b&a&0\end{vmatrix}=-c\begin{vmatrix}c&a\\b&0\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}c&0\\b&a\end{vmatrix}$$

$$=-c(-ab)+b(ac)=2abc$$

$$\det(A_\alpha)=b\begin{vmatrix}b&0\\c&a\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&c\\c&a\end{vmatrix}$$

$$=b(ab)-a(a^2-c^2)$$

$$=a(b^2-a^2+c^2)$$

$$\cos\alpha=\frac{\det(A_\alpha)}{\det(A)}=\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2abc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$ 이다.

(b) $A_\beta=\begin{pmatrix}0&a&b\\c&b&a\\b&c&0\end{pmatrix}$ $A_\gamma=\begin{pmatrix}0&c&a\\c&0&b\\b&a&c\end{pmatrix}$

$$\det(A_\beta)=-a\begin{vmatrix}c&a\\b&0\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}c&b\\b&c\end{vmatrix}$$

$$=-a(-ab)+b(c^2-b^2)$$

$$=b(a^2+c^2-b^2)$$

$$\cos\beta=\frac{\det(A_\beta)}{\det(A)}=\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2abc}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\det(A_\gamma)=-c\begin{vmatrix}c&b\\b&c\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}c&0\\b&a\end{vmatrix}$$

$$=-c(c^2-b^2)+a(ac)$$

$$=c(a^2+b^2-c^2)$$

#29 이어서...

$$\cos\gamma=\frac{\det(A_\gamma)}{\det(A)}=\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2abc}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

#30. $(1-\lambda)x-2y=0$

$x-(1+\lambda)y=0$.

$A=\begin{pmatrix}1-\lambda&-2\\1&-(1+\lambda)\end{pmatrix}$ 이므로

$$\det(A)=-(1-\lambda)(1+\lambda)+2$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-1)+2=\lambda^2+1\neq 0$$ 이므로

A는 가역행렬이다.

$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 주어진 방정식은 $Ax=b=0$이다.

A가 invertible인 것과 $Ax=0$이 유일해를 가지는 것은 동치이다. 즉. $Ax=0$에서 $A^{-1}Ax=A^{-1}0=0$이고 $X=0$. 즉 $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 이므로 $x=0,\ y=0$ 이라는 유일해를 갖는다.

#31. A가 invertible 이므로 $\det(A)\neq 0$.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot adj(A)\rightarrow \det(A)A^{-1}=adj(A)$$

$$\det[\det(A)A^{-1}]=\det[adj(A)]$$

$$\{\det(A)\}^n\cdot\det(A^{-1})=\det[adj(A)]\neq 0.$$

(A가 $n\times n$ 행렬이라 가정)

$$\Rightarrow \{\det(A)\}^n\cdot\frac{1}{\det(A)}=\{\det(A)\}^{n-1}\neq 0.$$

따라서 $\det[adj(A)]\neq 0$ 이므로 $adj(A)$도 invertible

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)\rightarrow AA^{-1}=I=\frac{1}{\det(A)}A\,adj(A)$$

$$\rightarrow I\cdot[adj(A)]^{-1}=[adj(A)]^{-1}=\frac{1}{\det(A)}AI=\frac{1}{\det(A)}A$$

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}adj(A) \Leftarrow A$에 A^{-1} 대입하면

$$A=\frac{1}{\det(A^{-1})}adj(A^{-1})\Rightarrow adj(A^{-1})=\det(A^{-1})\cdot A=\frac{1}{\det(A)}\cdot A$$

따라서 $[adj(A)]^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}A=adj(A^{-1})$ 이 된다.

#32. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$ 이고

$\det(A) \cdot A^{-1} = adj(A)$이다

$\det(\det(A) \cdot A^{-1}) = \det(adj(A))$ 이고

$\det(A)$는 상수이므로

$\{\det(A)\}^{n} \det(A^{-1}) = \det(adj(A))$

$\Rightarrow \{\det(A)\}^{n} \cdot \frac{1}{\det(A)} = \det(adj(A))$

$\Rightarrow [\det(A)]^{n-1} = \det[adj(A)]$ 이다.

#33. 가정에서 각 행의 요소를 모두 더하면 0이라고

했으므로 $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ (X는 $n \times 1$행렬)은

$Ax=0$을 만족시키는 해이다

즉 $Ax=0$은 non trivial solution을

가지므로 A는 비가역행렬이고 $\det(A)=0$이다.

($Ax=0$가 trivial solution을 갖는 것과

$\det(A) \neq 0$은 동치이므로).