

## 중간고사 문제지 모범답안

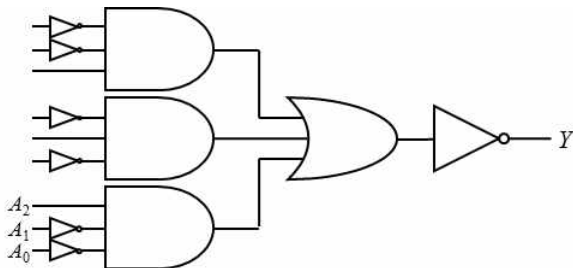
2018/05/01

1. 0부터 6까지의 십진수를 이진수로 변환한 후, 변환된 이진수에서 bit 값이 '1'인 bit가 짝수 개인지 홀수 개인지를 구분하는 **효율적인** 논리회로를 구현하라. '1'인 bit가 전혀 존재하지 않는 경우는 짝수 개로 취급하며, 구현된 회로는 '1'인 bit가 짝수 개일 때 1을 출력한다. (십진수를 이진수로 변환하는 회로는 필요하지 않음) [20]

(sol 1) 0부터 6까지의 십진수를 이진수로 변환하기 위해서는 3bit가 필요하므로, 구현될 논리회로는 3가지 input를 가진다. 우선 이들 input에 대해 원하는 출력(bit 값이 '1'인 bit가 짝수 개인지 홀수 1)을 가지는 진리표를 작성하자.

십진수	A <sub>2</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>0</sub>	출력 Y	비고
0	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	0	
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	0	
5	1	0	1	1	
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	X	Don't care

수업시간에 배운 방법에 따라 Don't care 경우를 제외하면, 진리표 출력이 1인 경우는 4회, 0인 경우는 3회가 된다. 만일 Don't case 경우를 출력 1로 간주한다면, 출력이 0인 경우가 상대적으로 더 적으므로 이를 기준으로 논리회로를 구성할 수 있다.



위의 논리회로에서 좌측에 있는 AND gate는 위에서부터 아래로 가면서 십진수 1, 2, 4에 대한 회로에 해당한다.

더 효율적인 논리회로를 찾기 위해 위 결과를 논리 방정식으로 표현해 보자.

$$Y = \overline{A_2} \cdot \overline{A_1} \cdot A_0 + \overline{A_2} \cdot A_1 \cdot \overline{A_0} + A_2 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_0}$$

de Morgan's law를 적용하더라도 더 이상 간략화되지 않으므로 더 이상 효율적인 회로를 찾을 수 없다고 판단된다.

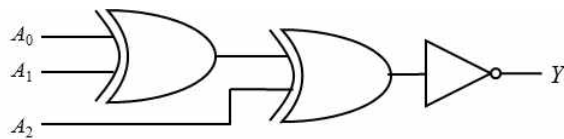
- (sol 2) 0부터 6까지의 십진수는 3bit 이진수로 변환된다. 변환된 이진수의 3가지 bit 값 중에서 '1'의 개수가 짝수 개인지를 확인해야 하는데, 이 과정은 exclusive OR gate 동작과 유사한 면이 있다. 2-input exclusive OR gate는 입력이 0,0이거나 1,1일 때 즉 '1'의 개수가 짝수일 때 출력 0을 가지며, 입력이 1,0이거나 0,1일 때 즉 '1'의 개수가 홀수일 때 출력 1을 갖는다. 이러한 동작 특성을 고려하여 다음과 같이 진리표를 재구성해 볼 수 있다.

풀이 1에 제시된 진리표와 함께 두가지 입력(A<sub>0</sub>, A<sub>1</sub>)의 exclusive OR operation결과와 이 결과

와 나머지 입력(A2)의 exclusive OR operation결과를 함께 제시하였다.

십진수	A <sub>2</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>0</sub>	출력 Y	A <sub>1</sub> ⊕A <sub>0</sub>	A <sub>2</sub> ⊕(A <sub>1</sub> ⊕A <sub>0</sub> )
0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
2	0	1	0	0	1	1
3	0	1	1	1	0	0
4	1	0	0	0	0	1
5	1	0	1	1	1	0
6	1	1	0	1	1	0

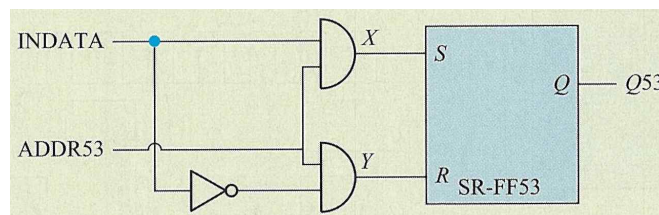
이 결과로부터 문제에서 요구하는 출력 Y는  $A_2 \oplus (A_1 \oplus A_0)$  연산결과의 반전과 동일하다. 이를 회로로 구현하면, 아래와 같다



$A_2 \oplus (A_1 \oplus A_0) = A_2 \oplus A_1 \oplus A_0$ 이므로, 위의 회로는 아래와 같이 간략화될 수도 있다.



## 2. 아래 그림은 1-bit random-access digital memory input의 논리회로이다. [20]



SR-FF의 동작 특성을 활용하여 호출주소가 일치할 때 input이 '0'인 경우와 '1'일 경우의 동작을 각각 설명하라. 초기에 digital memory에는 '0'이 저장( $Q_{53} = 0$ )되어 있다고 가정한다.

(sol) SR-FF 회로는 Reset (R)에 0 → 1 transition이 입력되지 않는 한, Set (S)에 0 → 1 transition이 입력될 때 출력 Q가 0에서 1로 반전된다는 특징을 갖고 있다. 이 점을 이용하여 문제에서 지정한 두 가지 경우에 대해 메모리 소자가 어떻게 동작하는지를 설명할 수 있다.

### 1) INDATA에 '0'이 입력되는 경우 (ADDR53은 1),

Set의 입력인 X는 0, Reset의 입력인 Y는 1

초기 상태에서 출력 Q53은 0

--> 동작 결과

Reset에 1이 입력되므로,  $Q_{53} = 1$ 인 상태이라면, 0으로 반전,

$Q_{53} = 0$ 인 상태이라면, 그대로 0을 유지

결과적으로 메모리에 0이 저장됨.

### 2) INDATA에 '1'이 입력되는 경우 (ADDR53은 1),

Set의 입력인 X는 1, Reset의 입력인 Y는 0

이전 동작으로 결과로 출력 Q53은 0

--> 동작 결과

Reset = 0인 상태에서

Set이 0에서 1로 transition하므로 Q53은 0에서 1로 반전 그리고 그대로 유지  
결과적으로 메모리에 1이 저장됨.

3. 다음과 같은 analog waveform을 적절하게 Analog-to-Digital 변환을 하고자 한다. [25]

$$f(t) = 5 \sin(12\pi t + 0.5\pi) + 3 \sin(30\pi t - \pi)$$

- Nyquist sampling criterion을 이용하여 적절한 sampling frequency  $f_s$  를 결정하라.
- Waveform을 sampling한 후 얻은 결과를 양자화 과정에서 clipping error가 발생하지 않도록 적절한  $V_{\min}$ 과  $V_{\max}$ 를 결정하라.
- 64 level로 양자화할 경우에 양자화 오차(quantization error)의 최대값은 얼마인가?
- 입력되는 analog waveform이 1분 분량이라면, 샘플링과 양자화 후에 얻어지는 digital data의 용량 구하라. (단, bit로 표시할 것)

(sol)

- 문제에서 주어진 analog waveform은 주파수가 6 Hz와 15 Hz인 두가지 사인파가 결합된 것이므로, 최대 주파수는 15 Hz이다.

Nyquist sampling criterion에 의해 sampling frequency는 최대 주파수의 2배 이상이 되어야 하므로,  $f_s = 30$  Hz

- Clipping error가 발생하지 않도록 하기 위해 analog waveform의 최대 전압과 최소 전압을 구해야 한다. 미분 개념을 도입하여 정확하게 함수의 최대, 최소를 구할 수도 있지만, 다음과 같이 간단하게 결정할 수도 있다.

파형을 구성하는 첫 번째 사인파는  $\pm 5$  V, 두 번째 사인파는  $\pm 3$  V의 전압값을 가지므로, 파형의 최대 전압은 8 V, 최소 전압은 -8 V가 된다.

따라서 입력된 analog waveform의 전압을 양자화하기 위해  $V_{\min}$ 과  $V_{\max}$ 는 각각 -8, +8 V가 되어야 한다.

- 8 ~ +8V 구간을 64 level로 양자화하므로 구간 전압  $\Delta$ 은

$$\Delta = \frac{8 - (-8)}{64 - 1} = 0.254 \text{ (V)}$$

이다. 따라서 양자화 오차(quantization error)의 최대값은 0.254 V

- 문항 (a)에서 waveform을 1초당 30회 샘플링하며, sample value를 6 bit (64 level)의 이진수로 양자화하므로 1분 분량의 analog waveform을 디지털화 한 후 data 용량 M은

$$M = 60 \text{ (sec)} \times 30 \text{ (samples)} \times 6 \text{ (bits/sample)} = 10,800 \text{ (bits)}$$

4. 아래 제시된 bit sequence를 8-bit boxcar DAC를 통해 analog waveform으로 출력하고자 한다. 이때 boxcar DAC의 전압 출력 구간은 0~5 V이며,  $T_s = 0.1$  ms이다. 출력되는 waveform을 그래프로 그려라. [15]

**1010 0000 0110 0111 0000 0111**

- (sol) 8-bit boxcar DAC이므로 주어진 bit sequence에서 왼쪽부터 8개 bits 묶음이 각각 양자화된 값을 의미한다.

$$1\text{번째 } 8\text{-bit: } 1010 \ 0000 \implies 1 \times 2^7 + 1 \times 2^5 = 128 + 32 = 160_{10}$$

$$2\text{번째 } 8\text{-bit: } 0110 \ 0111 \implies 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 = 64 + 32 + 4 + 2 + 1 = 103_{10}$$

$$3\text{번째 } 8\text{-bit: } 0000 \ 0111 \implies 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7_{10}$$

DAC의 출력 전압 범위는 0~5 V이고 계단 전압은 총 256 level이므로 계단 전압 값  $\Delta$ 는

$$\Delta = \frac{5-0}{256-1} = 0.0196 \text{ (V)}$$

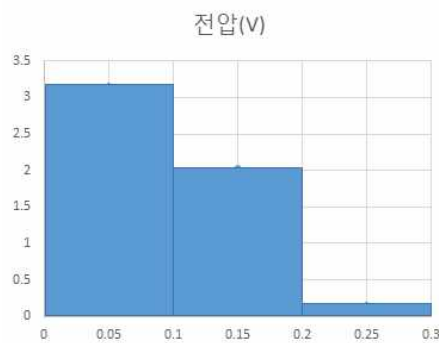
따라서 첫 번째 8-bit 이진수에 대응하는 전압  $V_1$ 은

$$V_1 = V_{\min} + 160 \times \Delta = 0 + 160 \times 0.0196 = 3.14 \text{ (V)}$$

두 번째 세 번째 8-bit 이진수에 대응하는 전압  $V_2, V_3$ 는

$$V_2 = 0 + 103 \times 0.0196 = 2.02 \text{ (V)}, \quad V_3 = 0 + 7 \times 0.0196 = 0.14 \text{ (V)}$$

이상의 결과를 종합하여 digital value로부터 boxcar 방식의 analog waveform을 재현하면 아래와 같다. 이때 각 막대의 가로 폭은 0.1 ms, 막대의 높이는 전압값  $V_1, V_2, V_3$ 가 된다.



5. Gaussian 확률변수를 생성하는 Pseudo-Random Number Generator (PRNG)를 이용하여 다음과 같은 10개의 확률변수 값을 생성하였다. 이들을 이용하여 다음을 구하라. [20]

1.6, 1.5, -8.0, 1.7, 5.6, 14.6, 13.4, -8.2, -12.0, -3.9

- (a) sample mean
- (b) sample variance (교재에 나와 있는 근사적 방법을 활용해도 좋음)
- (c) Probability density function (PDF) 표현 (정규화하지 않아도 됨)
- (d) 제시된 확률변수 값이 10배 커진다면, sample mean과 sample variance는 얼마가 되는가?

(sol)

- (a) Sample mean은 생성된 확률변수의 평균을 취하는 것이므로,

$$\begin{aligned} Ave(X) &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i \\ &= (1.6 + 1.5 - 8.0 + 1.7 + 5.6 + 14.6 + 13.4 - 8.2 - 12.0 - 3.9) / 10 = 0.63 \end{aligned}$$

- (b) Sample variance는 아래 정의식에 따라 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Var(X) &= Ave(X^2) - (Ave(X))^2 \\ Var(X) &= 72.22 - (0.63)^2 = 71.83 \end{aligned}$$

그러나 이 계산 과정이 복잡하므로 Gaussian 분포가 같은 특성을 활용하여 구하는 것이 편리하다. 생성되는 확률변수 값의 99.7%는 구간  $[-3\sigma_N, 3\sigma_N]$  내에 존재하므로, 제시된 확률변수 값 중에서 최대값과 최소값으로부터  $\sigma_N$ 을 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} 6\sigma_N &= 14.6 - (-12.0) \\ \sigma_N &= (14.6 + 12.0) / 6 = 4.43 \end{aligned}$$

따라서 variance는  $Var(X) = \sigma_N^2 = (4.43)^2 = 19.65$

(참고) 제시된 확률변수 개수가 작아 두 가지 방법으로 구한 variance는 큰 차이를 보인다.

(c) Sample mean과 sample variance를 알고 있으므로, PDF,  $p_X(x)$ 는

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(4.43)} e^{-\frac{(x-0.63)^2}{2 \times 19.65}}$$

위 식에서 우변의 지수 함수에 곱해져 있는 값은 PDF의 면적분 결과가 1이 되도록 하는 정규화 인자이다.

(d) 제시된 확률변수 값이 10배 커진다면,

Sample mean도 10배 커지므로,  $Ave(X) = 6.3$

Sample variance는  $10^2$ 배 커지므로,  $Var(X) = 7183$ , (또는 1965)