제 15 장 기출_연습문제 풀이 (1)

연습문제 풀이 : (2007년 이후 중간고사에 출제된 연습문제 모음)

+ 기출문제

기출 2017년 1번　기출 2015년 1번

[기출문제] 전기력 및 전기장에 관한 실험적 사실 중 맞는 것을 모두 고르시오.

① 전하에는 양과 음의 두 종류가 있다.

② 두 전하 사이에는 전하를 잇는 선의 방향으로 인력 혹은 척력이 작용한다.

③ 전하 사이의 힘의 크기는 둘 사이의 거리의 제곱에 반비례한다.

④ 두 전하 사이의 힘은 두 전하의 전하량의 곱에 비례한다.

⑤ 둘 이상의 전하 있는 경우 전하에 작용하는 힘은 각각의 두 전하 사이의 전기력 벡터를 더해서 얻은 합력과 같다.

⑥ 전기장의 방향은 항상 등전위선의 접선에 평행하다.

풀이

①~ ⑤ 까지는 전하와 전기력에 대한 설명을 잘 나타내고 있다.
⑥ 의 등전위선은 (16장 내용) 같은 전위를 이은 선을 말하는데 등전위선과 평행한 방향으로는 힘이 작용하지 않으므로 등전위선과 전기장의 방향은 항상 수직이 된다.

기출 2014년 1번

[기출문제] 전하량이 각각 q_1, q_2 인 두 점 전하가 거리 r 만큼 떨어져 있을 때, 두 전하 간에 미치는 힘의 크기를 구하시오 (진공의 유전율 ε_0 를 사용)

풀이

전하 사이의 힘의 크기는 둘 사이의 거리의 제곱에 반비례하고 두 전하의 전하량의 곱에 비례한다.(쿨롱의 법칙)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q_1 q_2}{r^2}\right)$$

기출 2014년 2번

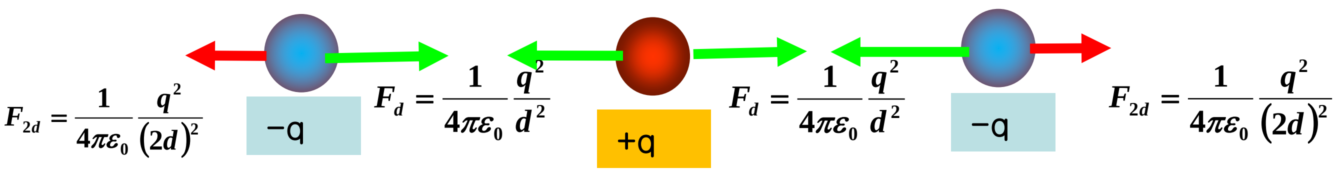
[기출문제] 전하량의 단위는 프랑스 물리학자인 쿨롱(Charles Augustin de Coulomb)의 이름을 따서 C로 표시한다. 원자를 구성하고 있는 전자 하나의 전하량은 얼마인가? (유효숫자 두 개 이상으로 표시)

풀이

$e = 1.6\times10^{-19}C$,　$e = 1.60\times10^{-19}C$　또는　$e = 1.602\times10^{-19}C$

연습 15-3. 일직선 사이에 세 점 전하가 간격 d 를 두고 놓여 있다. 전하량은 순서대로 −q, +q, −q 이다. 각 전하에 작용하는 힘을 구하여라.

풀이 각각의 전하에 작용하는 쿨롱의 법칙을 적용하고 알짜 힘(합력)을 구한다.



왼쪽 – q 전하 에 작용하는 합력:

+q 전하에 의한 힘 F_d (오른쪽) 과 –q 전하에 의한 힘 F_{2d} (왼쪽 방향) 의 합력은 오른쪽 방향이다.

$$F_{-q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{d^2} - \frac{q^2}{(2d)^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q^2}{4d^2}$$

+q 전하 에 작용하는 합력:

양쪽의 –q 전하가 서로 반대방향으로 같은 크기의 힘 F_d 로 잡아당기므로 힘의 합력은 0 이다.

$$F_{+q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{d^2} - \frac{q^2}{d^2}\right) = 0$$

오른쪽 – q 전하 에 작용하는 합력:

+q 전하에 의한 힘 F_d (왼쪽방향)과 –q 전하에 의한 힘 F_{2d} 로(오른쪽 빙향)의 합력은 왼쪽 방향 이다.

$$F_{-q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{d^2} - \frac{q^2}{(2d)^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q^2}{4d^2}$$

15-2 쿨롱의 법칙 연습 15-3과 유사 기출 2012년 1번

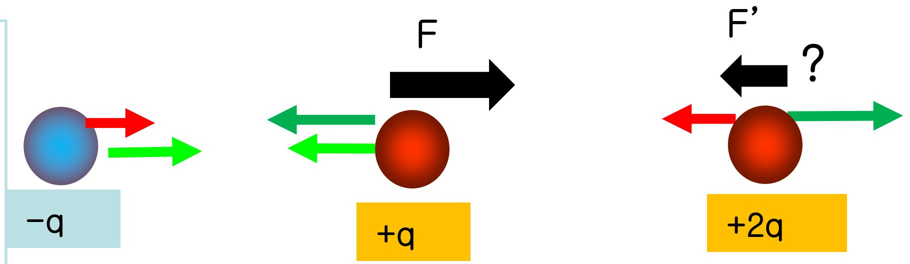
[기출문제] 일전선 위에 세 개의 점 전하 간격 d 를 두고 놓여 있다. 각 전하의 전하량은 순서대로 전하량이 −q, +q, 2q 이다. 전하량이 +q 인 전하가 받는 힘의 크기를 F 라고 하면, 전하량이 +2q 인 전하가 받는 힘의 크기는 F의 몇 배 인가?

풀이 쿨롱의 법칙을 적용하여 +q 가 받는 합력의 크기 F 와 +2q 가 받는 합력을 구한다. $\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k\right)$

$$F_{-q,+2q} = k\frac{2q^2}{(2d)^2} = k\frac{q^2}{2d^2}$$

$$F_{-q,+q} = k\frac{q^2}{d^2}$$

$$F_{q,2q} = k\frac{2q^2}{d^2}$$



중심에 있는 + q 전하 에 작용하는 합력 F:

-q 전하와 작용하는 힘 $F_{-q,+q}$ (왼쪽) 과 +2q 전하와 작용하는 힘 $F_{q,2q}$ (왼쪽 방향) 의 합력은 왼쪽 방향이므로 F 는 다음과 같다.

$$F = F_{-q,+q} + F_{-q,+q} = k\left(\frac{q^2}{d^2} + \frac{2q^2}{d^2}\right) = k\frac{3q^2}{d^2}$$

오른쪽 2q 전하 가 받는 힘의 크기 :

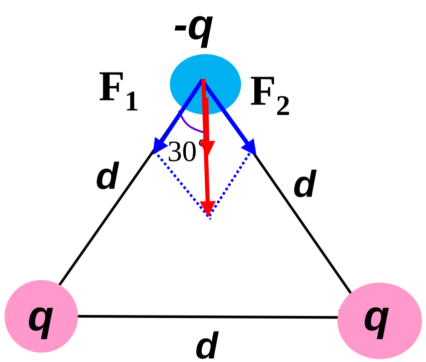
+q 전하에 의한 힘 $F_{q,2q}$ (오른쪽방향)과 –q 전하에 의한 힘 $F_{-q,2q}$ 로(왼쪽 빙향)의 합력은 왼쪽 방향 이고 그 크기는 다음과 같 다.

$$\therefore F' = F_{q,+2q} + F_{-q,+2q} = k\left(\frac{2q^2}{d^2} - \frac{2q^2}{(2d)^2}\right) = k\frac{3q^2}{2d^2} = \frac{1}{2}\left(k\frac{3q^2}{d^2}\right) = \frac{1}{2}F$$

15-2 쿨롱의 법칙 기출 2016년 1번

연습 15-4. 전하량이 각각 q 인 두 점전하가 정삼각형 모양 물체의 두 꼭지점에 놓여 있고 나머지 한 꼭지점에는 전하량이 −q 인 전하가 있다. 전하 −q 에 작용하는 힘을 구하여라

풀이 반대부호의 전하가 -q 의 전하를 아래로 같은 힘으로 당기게 되므로 두 힘의 합력을 구한다.



꼭지점의 –q 에 작용하는 힘은 +q 에 의한 전기력 F_1과 F_2 이며 그 크기는 같다. 즉,

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q^2}{d^2}\right)$$

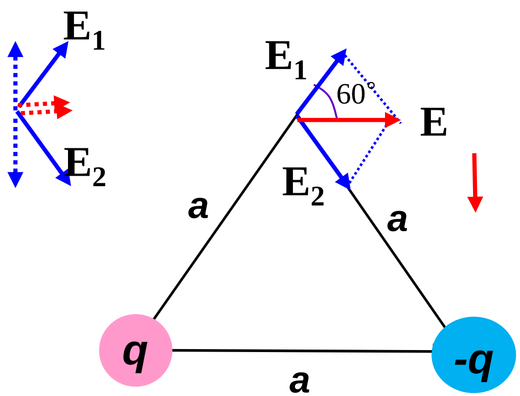
이다. 이 두 힘을 성분 별로 더하면 x 성분은 서로 상쇄되고 y 방향(아래 방향)의 성분만 남는다. 정삼각형의 각은 60° 이므로(사이각은 30°) y 성분의 힘을 구한다.

$$F = 2F_1 \cos 30 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\cos 30 \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}$$ (아래쪽 방향)

15-3 전기장의 세기 연습 15-4 와 유사 기출 2008년 2번

[기출문제] 한 변의 길이가 a 인 정삼각형 의 두 꼭지점에 전하 q 와 −q 가 놓여 있다. 이 두 전하에 의해 나머지 꼭지점에 만들어지는 전기장의 세기는 얼마인가?

풀이 +q 에 의한 전기장과 -q 에 의한 전기장을 중첩시킨다.



맨 꼭대기 위치에서의 전기장은 E_1 과 E_2 의 크기는 거리가 같고 전하량의 크기가 같으므로 같다.

$$|E_1| = |E_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{a^2}\right)$$

한편 맨꼭대기 위치에서의 전기장을 성분 별로 각각 더하면 y 성분은 서로 상쇄되고 x 방향(오른쪽 방향)의 성분만 남는다. 정삼각형의 각은 60° 이므로 x 성분의 전기장의 크기는 다음과 같다.

$$E_y = E_{1y} - E_{2y} = 0$$

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = 2E_1\cos 60^\circ = 2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}\cos 60^\circ\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2} \quad \text{(오른쪽 방향)}$$

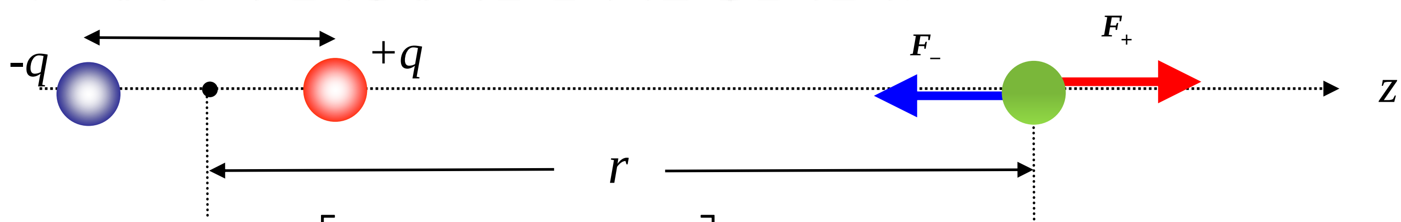
$$\therefore |E| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}$$

15-2 쿨롱의 법칙 기출 2016년 2번 기출 2008년 1번

[기출문제] 전기 쌍극자의 축 위에 전하가 놓여 있다. 쌍극자의 중앙으로 부터 전하 까지의 거리가 r 이라고 할 때, 전하가 받는 힘의 크기는 다음 중 어느 것에 비례하는가? (단 거리 r 은 쌍극자의 전하 간격보다 훨씬 더 크다.)

① $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ② $\frac{1}{r}$ ③ $\frac{1}{r^2}$ ④ $\frac{1}{r^3}$ ⑤ $\frac{1}{r^4}$

풀이 거리 r 에서의 각 전하량에 의한 전기력을 중첩시킨다.



$$F = F_+ + F_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{qQ}{(r-d/2)^2}+\frac{-qQ}{(r+d/2)^2}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{qQ}{r^2(1-d/2r)^2}+\frac{-qQ}{(1+d/2r)^2}\right]$$

for $r >> d$

$$=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o r^2}\left[\left(1-\frac{d}{2r}\right)^{-2}-\left(1+\frac{d}{2r}\right)^{-2}\right]\approx\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o r^2}\left[\left(1+\frac{d}{r}\right)-\left(1-\frac{d}{r}\right)\right]$$

$x=\frac{d}{2r}<<$

$(1+x)^n \cong 1+nx$

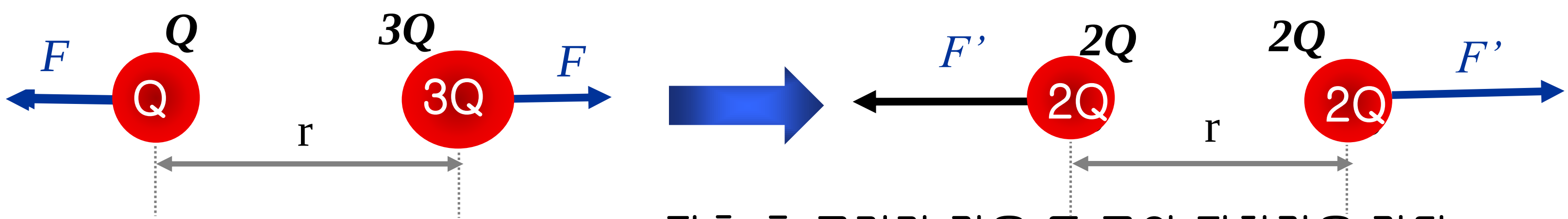
$$=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o r^2}\left(\frac{2d}{r}\right)=\frac{2(qd)Q}{4\pi\varepsilon_o r^3}=\frac{2pQ}{4\pi\varepsilon_o r^3}\qquad (p=qd)$$

$$\boxed{F \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2pQ}{r^3} \propto \frac{1}{r^3}}$$

15-2 쿨롱의 법칙 기출 2011년 1번

[기출문제] 전하량이 각각 +Q, +3Q인 같은 크기의 두 금속 구를 진공 중에서 거리 r 만큼 떼어 놓았을 때 크기 F 의 반발력이 작용하였다. 두 금속 구를 접촉시킨 후 다시 같은 거리만큼 떼어 놓았을 때 반발력의 크기는 F 의 몇 배인가?

풀이 거리 r 에서의 각 전하량에 의한 전기력을 쿨롱의 법칙에 의하여 구한다. 두 금속 구를 접촉시키면 같은 크기이므로 두 금속 구의 전하량은 같아지므로 다시 전기력을 구하여 비교한다



접촉 후 크기가 같은 두 구의 전하량은 같다.

두 구사이의 전기력(반발력) : F

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q^2}{r^2}$$

두 구사이의 전기력 F’

$$F' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2Q)^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q^2}{r^2}$$

두 힘의 비를 구하면 다음과 같다.

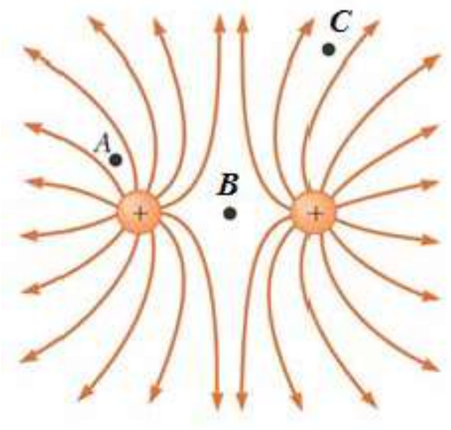
$$\frac{F'}{F} = \frac{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{4q^2}{r^2}}{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{3q^2}{r^2}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore F' = \frac{4}{3}F$$

그러므로 접촉 후 반발력 F’ 는 접촉 전 반발력 F 보다 4/3 배 크다.

15-3 전기장 기출 2013년 1번

[기출문제] 오른 쪽 그림과 같이 전기력선이 그려져 있는 곳에서 점 A 와 점 B, 점 C 에서 전기장의 크기가 큰 곳의 위치 부터 순서대로 나타내어라.



풀이

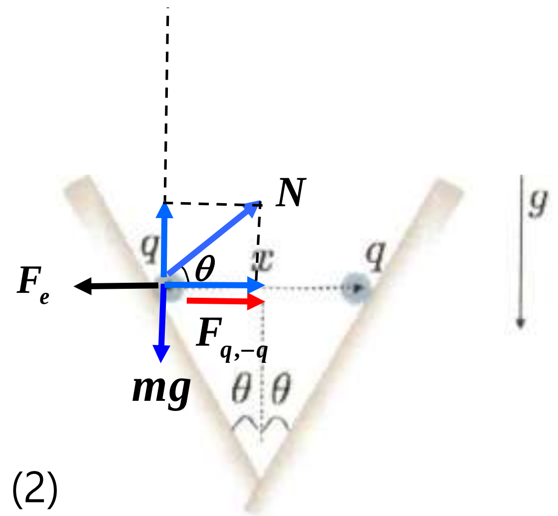
전기장의 크기는 전기력선이 밀도가 클수록 크다. 전하에 가까울수록 전기장은 크지만 두 전하량 사이의 B 점은 각각의 전하량에 의한 전기장이 서로 상쇄되어 0 이 된다. 따라서 가장 전기장이 큰 위치는 A 점이고, 전기장이 제일 작은 위치는 B가 된다.

$$A \rightarrow C \rightarrow B$$

연습 15-7. 그림과 같이 연직선과 θ 각을 이루고 밑에서 맞닿아 있는 두 경사면에 질량이 m 이고 전하 q 가 대전된 두 동일한 물체가 평형 상태에 있을 때 수평거리 x 를 구하시오 (중력가속도의 크기는 g 라고 하자.)

풀이

그림에서 양전하는 평형상태가 되려면 x 성분의 힘과 y 성분의 합력이 각각 0 이 되어야 한다.



x 성분: $\sum F_x = N\cos\theta - F_e = 0$

전기력: $\left(F_e = k\dfrac{q^2}{x^2}\right)$

$$\Rightarrow N\cos\theta = \frac{kq^2}{x^2} \qquad (1) \qquad \leftarrow \left(F_e = k\frac{q^2}{x^2}\right)$$

y 성분: $\sum F_y = N\sin\theta - mg = 0 \rightarrow N\sin\theta = mg \qquad (2)$

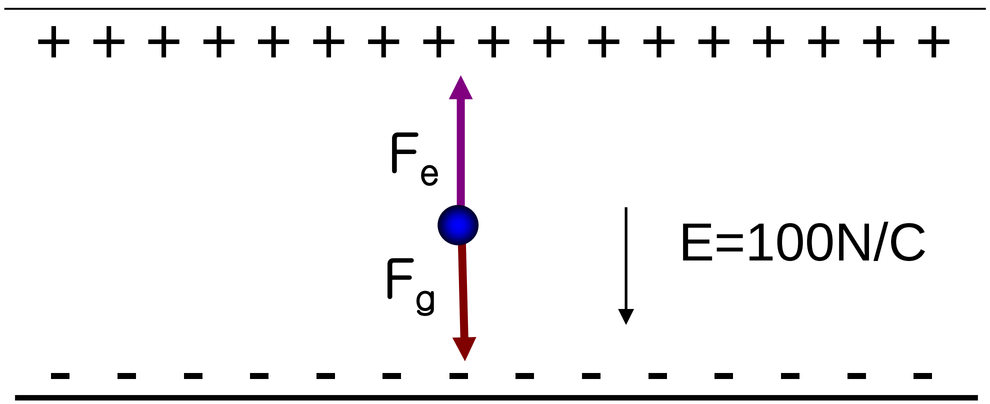
(2) 를 (1) 로 나누면 수평거리를 구할 수 있다.

$$\frac{(2)}{(1)} = \tan\theta = \frac{mgx^2}{kq^2} \quad \Rightarrow \quad \therefore x = q\sqrt{\frac{\tan\theta}{4\pi\varepsilon_0 mg}}$$

15-3 전기장 **기출 2007년 2번**

연습 15-8. 질량이 1.00 x 10^{-3} kg 인 물방울이 떨어지지 않고 공중에 떠 있기 위해서는 얼마의 전하량이 있어야 하는가? 단, 이 물방울 위치의 전기장은 지표면을 향하며 100N/C 의 세기를 가진다고 한다.

풀이



중력은 아래로 작용하므로 전하가 공중에 떠 있으려면 중력과 같은 힘의 전기력이 윗방향으로 작용해야 한다. (전기장이 아래 방향이므로 힘이 위로 작용되려면 전하량이 음전하이다.)

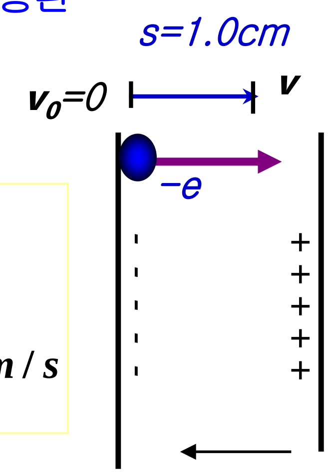
$$F_g = F_e \Leftrightarrow mg = -qE$$

$$q = -\frac{mg}{E} = \frac{-\left(1.00\times10^{-3}kg\right)\cdot\left(9.80m/s^2\right)}{100N/c} = -9.80\times10^{-5}C$$

15-3 전기장

연습 15-10. 1.0 x 10^4 N/C 의 균일한 전기장내에서 전자를 가만히 놓았다. 전자가 1.0 cm 을 진행하는 순간에 대해서 (가) 진행속력 (나) 얻은 운동에너지 (다) 시간은 얼마가 되겠는가?

풀이 정전기적 힘인 F= qE (전기장이 일정한 값이므로 일정한 크기의 힘이 전자에 작용된다) 에 의해 전자는 등가속도 운동을 하게 된다. 우선 가속도를 구한다.



(가) 진행속력

$$F_e = ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} \qquad v^2 - v_0^2 = 2as \qquad (\text{처음속력}:\ v_0 = 0)$$

$$\therefore v = \sqrt{2as} = \sqrt{2\left(\frac{qE}{m}\right)s} = \sqrt{\frac{2\times(1.6\times10^{-19}C)\cdot(1.0\times10^{4}N/C)\times10^{-2}m}{9.1\times10^{-31}kg}} = 5.9\times10^{6}m/s$$

E=1.0x10^4N/C

(나) 얻은 운동에너지는? (운동 에너지의 변화량)

$$\Delta\text{KE} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(9.1\times10^{-31}kg)(5.9\times10^{6}m/s)^2 = 1.6\times10^{-17}J$$

(또는 운동에너지의변화량 = 일)

$$\Delta KE = W = Fs = qEs = (1.6\times10^{-19}C)\cdot(1.0\times10^{4}N/C)\cdot(10^{-2}m) = 1.6\times10^{-17}J)$$

등가속도 운동에서 거리와 시간의 관계식에 의해 시간을 구하면 다음과 같다.

$$(\text{다})\ s = \tfrac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{\left(\frac{qE}{m}\right)}} = \sqrt{\frac{2sm}{qE}} = \sqrt{\frac{2\cdot(10^{-2}m)\cdot(9.1\times10^{-31}kg)}{(1.6\times10^{-19}C)\cdot(1.0\times10^{4}N/C)}} = 3.4\times10^{-9}s$$

15-3 전기장 연습 15-9와 유사 기출 2012년 주관식 1번 기출 2009년 1번

[기출문제] 아래 그림과 같이 질량이 m 이고 전하량이 q 인 입자를 균일한 전기장 E 가 작용하고 있는 공간에 가만히 놓으면 이 입자는 전기장에 의해 가속운동을 한다. 이 때 다음 질문에 답하여라. (단, q> 0 이고 중력의 영향은 무시한다.)

(가) 이 입자가 거리 d 만큼 이동하였을 때 걸린 시간을 구하여라.

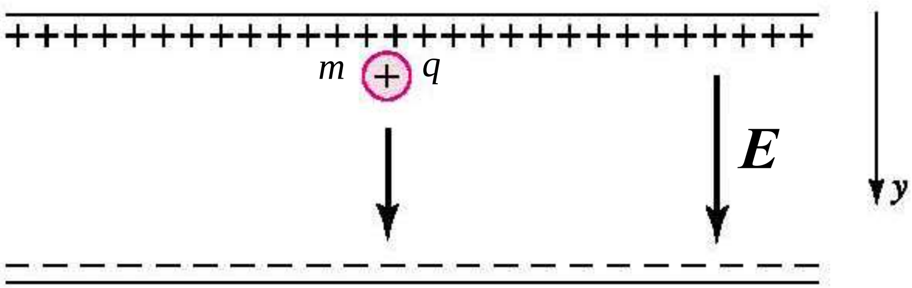


그림 15.3 균일한 전기장 안에서의 입자의 운동

풀이 전기장 내의 전하가 받는 전기력 : $F = qE$

입자의 가속도 $a = \frac{F_E}{m} = \frac{qE}{m}$

입자는 아래방향으로 등가속도 운동을 하며
처음 속력이 0 이고 움직인 이동거리 y=d 이므로
등가속도 식에 대입하여 시간을 얻을 수 있다,

$$y = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow d = \frac{qEt^2}{2m} \qquad \therefore t = \sqrt{\frac{2md}{qE}}$$

- 초기속력 : $v_0 = 0$
- 초기 위치: $y_0 = 0$

$$v = v_0 + at,$$
$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v^2 - v_0^2 = 2ay$$

(나) 이 입자가 거리 d 만큼 이동하였을 때 운동에너지를 구하여라.

풀이 $v^2 - v_0{}^2 = 2ad \Rightarrow v = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} \quad \left(v_0 = 0,\ a = \frac{qE}{m}\right)$

$$\therefore K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{2qEd}{m} = qEd$$

15-3 전기장 예제 15-4와 유사 기출 2011년 2번

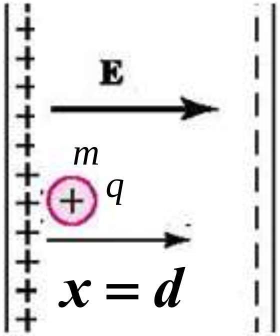
[기출문제] 전기장의 크기가 E 인 균일한 전기장 E 내에서 전하량이 q 이고 질량 이 m 인 입자를 가만히 놓았다, 이 입자가 정지 상태에서 부터 거리 d 인 만큼 진했을 때 속력은 얼마인가?

풀이

전기장 내의 전하가 받는 전기력 : $F = qE$

입자의 가속도 $a = \frac{F_E}{m} = \frac{qE}{m}$

입자는 아래방향으로 등가속도 운동을 하며 처음 속력이 0 이고
움직인 이동거리 x=d 이므로 등가속도 공식에서 속력을 얻을 수 있다,



초기속력 : $v_0 = 0$

$$v^2 - v_0^2 = 2ad \Rightarrow v = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} \quad \left(v_0 = 0, \ \ a = \frac{qE}{m}\right)$$

기출 2010년 1번

[기출문제] 일정한 전기장이 있는 어느 공간에 질량 이 m 이고 전하량이 e 인 양성자를 놓았더니 가속도 a 로 운동을 시작했다. 이공간에 질량이 4 m 이고 전하량이 2 e 인 알파입자를 놓으면 알파 입자의 가속도는 a 의 몇 배가 되는가?

풀이 전기장 내의 전하가 받는 전기력 (qE)= 뉴턴의 제2법칙(ma)의 식에서 구한 가속도의 식에 대입한다 :

양성자의 가속도: $a = \frac{qE}{m} = \frac{eE}{m}$ 알파입자의 가속도: $a' = \frac{q_\alpha E}{m_\alpha} = \frac{(2e)E}{(4m)} = \frac{eE}{2m} = \frac{1}{2}a$

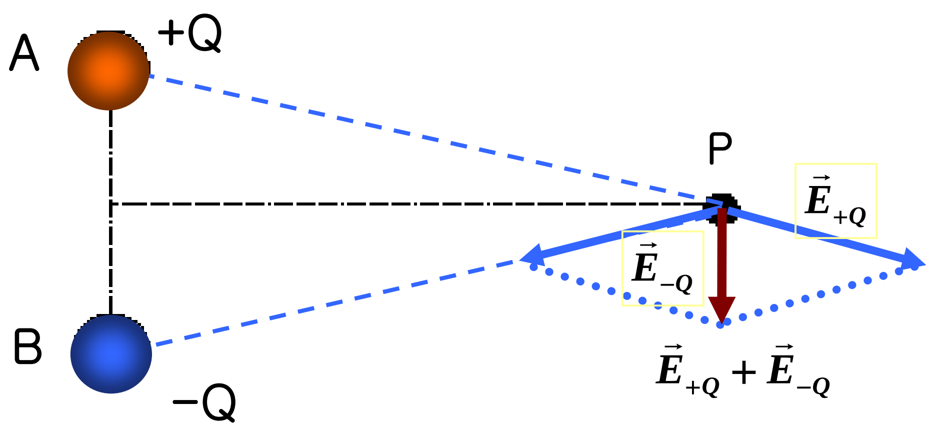
알파입자의 가속도는 양성자의 가속도의 ½ 에 해당한다.

15-3 전기장 기출 2007년 1번

연습 15-11. 점 A 에 점전하 +Q가 있고 점 B에 점전하 _Q 가 있다. 선분 AB 를 수직 이등분하는 선 상에 있는 점 P 에서 전기장의 방향은?

풀이

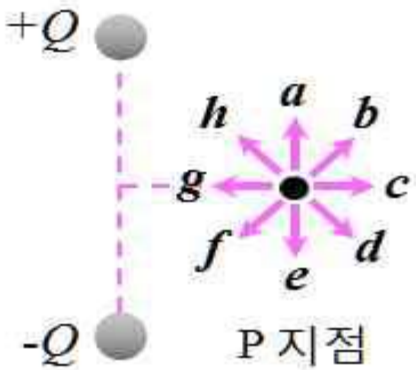
P 점에서의 전기장의 방향은 각각의 점전하들에 의한 전기장 벡터의 합을 구하면 된다. (중첩의 원리)

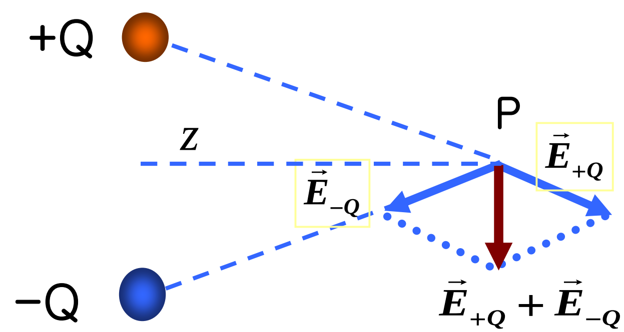


15-3 전기장 연습 15-10과 유사 기출 2014년 3번

[기출문제] 다음 그림과 같이 두 점 전하 +Q와 −Q가 위치하고 있을 때, 검은 점으로 표시된 P 지점의 전기장의 방향을 a~h 기호를 이용해 순서대로 답하시오. (ㄱ) +Q로 인해 형성되는 전기장의 방향, (ㄴ) −Q로 인해 형성되는 전기장의 방향, (ㄷ) +Q 와 −Q로 인해 형성되는 전기장의 방향

풀이





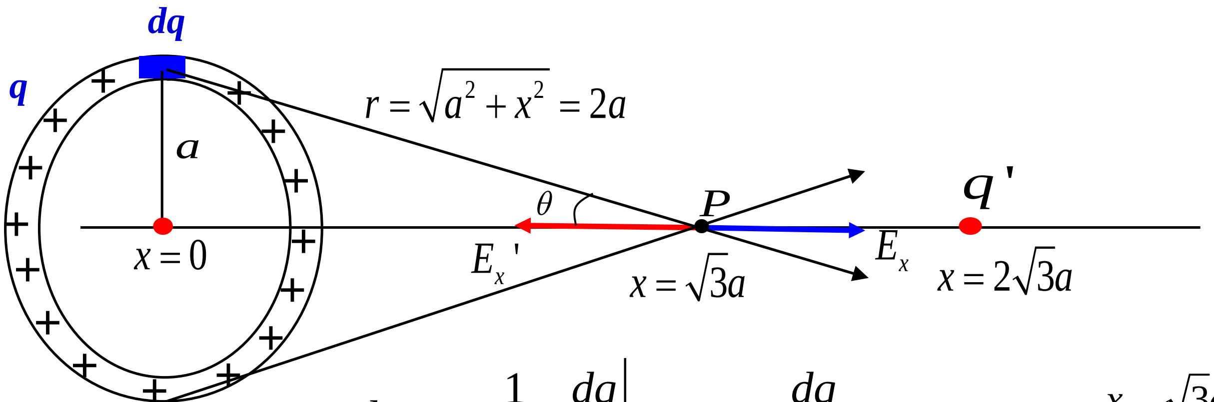
(ㄱ) +Q로 인해 형성되는 전기장의 방향 : P 점에 + 단위 전하량이 놓여 있다고 생각하면 서로 척력이 작용하므로 d 의 방향이 된다. (d)

(ㄴ) −Q로 인해 형성되는 전기장의 방향 : P 점에 + 단위 전하량이 놓여 있다고 생각하면 −Q 와는 서로 인력이 작용하므로 f 의 방향이 된다. (f)

(ㄷ) +Q 와 −Q로 인해 형성되는 전기장의 방향 : 위의 두 전기장을 서로 중첩하면 x 방향은 소거되고 아래 방향의 y 방향만 남게 되므로 e 방향이 된다. (e)

연습 15- 15. 전하량 q 가 균일하게 대전된 반지름 a 인 고리의 중심에서 거리 $2\sqrt{3}a$ 만큼 떨어진 곳에 점전하 q 가 놓여 있다. 고리 중심에서 $\sqrt{3}$ 만큼 떨어진 P 점에서 전기장의 세기가 0 이 되려면, q′ 는 얼마여야 하는가?

풀이 고리에 의한 전기장과 점전하 q′ 에 대한 전기장의 합이 0 이 되는 q′ 를 찾으면 된다.



$$dE_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\bigg|_{r=2a}=\frac{dq}{16\pi\varepsilon_0 a^2},\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

P 점에서 고리에 의한 전기장 :

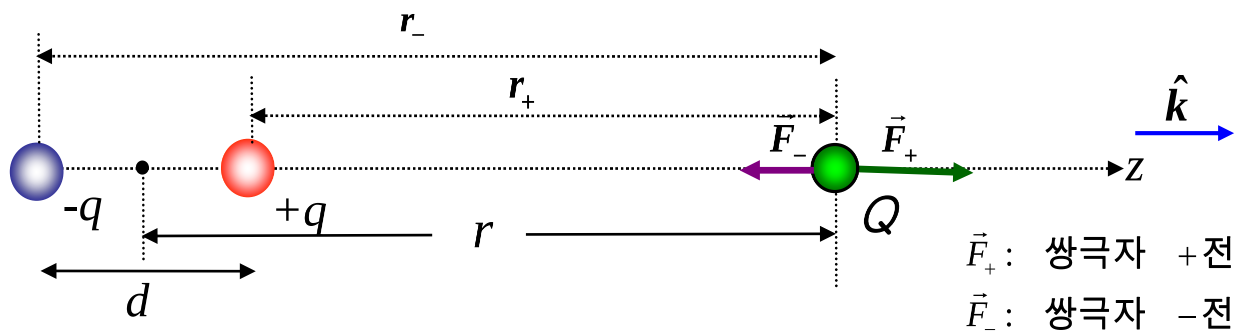
$$E_x=\int dE\cos\theta=\int\frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}q}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\oint dq=\frac{\sqrt{3}q}{32\pi\varepsilon_0 a^2}$$

P 점에서 점전하 q ' 에 의한 전기장 :

$$E_x{}'=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2a^2}=\frac{q'}{12\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$E_x=E_x{}' \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{3}q}{32\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{q'}{12\pi\varepsilon_0 a^2} \qquad \therefore q'=\frac{3\sqrt{3}q}{8}$$

연습 15-16. 점 전하 Q 로 부터 거리 r 떨어진 곳에 쌍극자 P 가 있다. 이 쌍극자가 전하에 끌리는 힘의 세기가 세제곱에 반비례함을 보여라. 쌍극자를 작은 간격 d 만큼 떨어진 두 전자쌍이라 하고 각 전하가 받는 힘을 계산한 후 근사적 표현을 구하여라.



$\vec{F}_+$: 쌍극자 +전하에 의해 받는 힘

$\vec{F}_-$: 쌍극자 −전하에 의해 받는 힘

풀이

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{qQ}{(r-\frac{d}{2})^2} + \frac{-qQ}{(r+\frac{d}{2})^2}\right]\hat{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{qQ}{r^2(1-\frac{d}{2r})^2} + \frac{-qQ}{r^2(1+\frac{d}{2r})^2}\right]\hat{k}$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o r^2}\left[(1-\frac{d}{2r})^{-2} - (1+\frac{d}{2r})^{-2}\right]\hat{k} \cong \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o r^2}\left[(1+\frac{d}{r}) - (1-\frac{d}{r})\right]\hat{k}$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o r^2}\left(\frac{2d}{r}\right)\hat{k} = \frac{2(qd)Q}{4\pi\varepsilon_o r^3}\hat{k} = \frac{2pQ}{4\pi\varepsilon_o r^3}\hat{k}$$

x가 작을 때 근사식

$(1+x)^n \cong 1+nx$

$(1+x)^{-2} \cong 1-2x$

$$\boxed{\vec{F} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Qp}{r^3}\hat{k}}$$

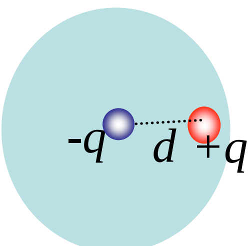
for $r >> d$

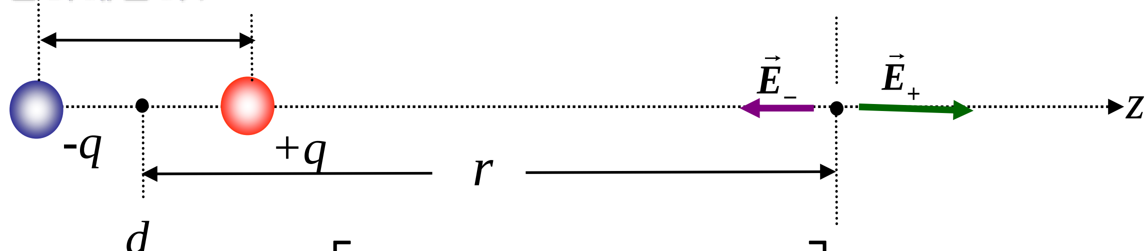
15-4 쌍극자와 전기장 기출 2013년 2번

[기출문제] 수소 원자가 균일한 전기장 속에 들어 있게 되면 수소 원자에서 양전하와 음전하의 질량중심점이 서로 반대 방향으로 이동하게 되어 전기 쌍극자 모멘트가 발생한다. 이 수소 원자로 부터 거리 r 만큼 떨어진 곳에서 수소 원자의 쌍극자 모멘트에 의한 전기장의 세기를 E 라고 하면 거리 2r 만큼 떨어진 곳에서 전기장의 세기는 얼마인가? (단, r 은 수소 원자 보다 매우 크다고 가정한다.)

풀이

쌍극자에 의한 전기장의 크기는 다음과 같이 중첩에 의해 계산할 수 있으며 그 크기는 거리의 세제곱에 반비례한다.





$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q}{(r-d/2)^2} + \frac{-q}{(r+d/2)^2}\right]$$

for $r >> d$

$x = \frac{d}{2r} <<$

$(1+x)^n \cong 1+nx$

$$E \cong \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{p}{r^3}$$

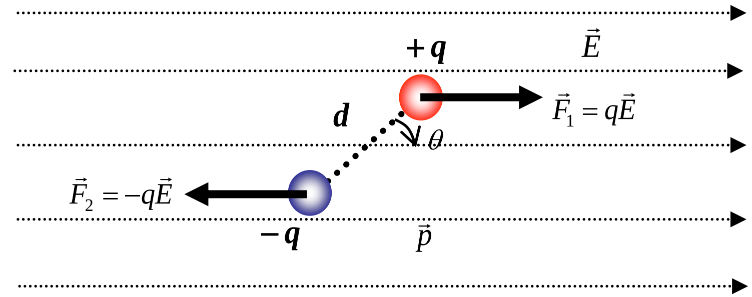
쌍극자에 의한 전기장의 크기가 거리의 세제곱에 반비례하므로 r 의 2 배에 해당하는 거리에서 전기장의 크기는 r 위치 보다 1/8 배로 줄어들게 된다.

$$E = \frac{상수}{r^3} \Rightarrow E' = \frac{상수}{(2r)^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{상수}{r^3}\right) = \frac{1}{8}E$$

15-4 쌍극자와 전기장 기출 2014년 11번

[기출문제] 일정한 세기의 전기장 $\vec{E}$ 가 고르게 분포되어 있는 어떤 공간에 전하량 +q 와 −q, 사이 거리 d로 이루어진 전기 쌍극자가 그림과 같이 위치해 있다. 이 때 (a) 전기쌍극자의 크기와 (b)쌍극자에 작용하는 돌림 힘의 크기를 순서대로 쓰시오.

풀이



(a) 두 전하가 이루는 쌍극자 P 는 정의에 의해 크기는 전하량과 사이의 거리의 곱이다.

$$\left|\vec{P}\right| = qd$$

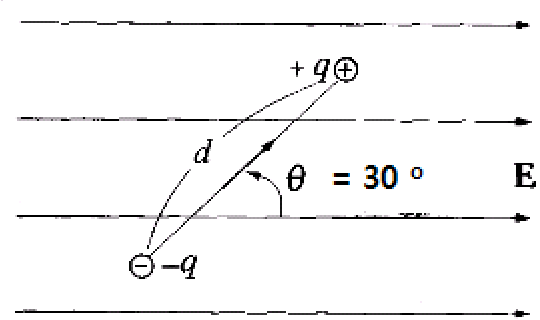
(b) 쌍극자의 돌림 힘의 크기는 다음과 같다. $\left|\vec{\tau}\right| = \left|\vec{p}\times\vec{E}\right| = pE\sin\theta = qdE\sin\theta$

기출 2010년 2번 기출 2007년 3번

[기출문제] 아래 그림에서와 같이 전기 쌍극자가 100 n/C 의 균일한 전기장과 30 ° 의 각도를 이루고 있다. 전기 쌍극자의 전하량 q 와 거리 d 는 각각 1.0 μC 과 10nm 이다. 이 때 전기장이 전기 쌍극자에 미치는 돌림 힘의 크기는 얼마인가?

풀이 쌍극자의 크기 P :

$$p = qd = \left(1.0\times10^{-6}C\right)\times\left(10\times10^{-9}m\right) = 1.0\times10^{-14}(C\cdot m)$$



쌍극자에 미치는 돌림 힘의 크기 :

$$\tau = pE\sin\theta = \left(1.0\times10^{-14}\ \mathrm{C\cdot m}\right)\times\left(1.0\times10^{2}\,\mathrm{N/C}\right)\times\sin30^{\circ}$$

$$= 5.0\times10^{-13}\,N\cdot\mathrm{m}$$

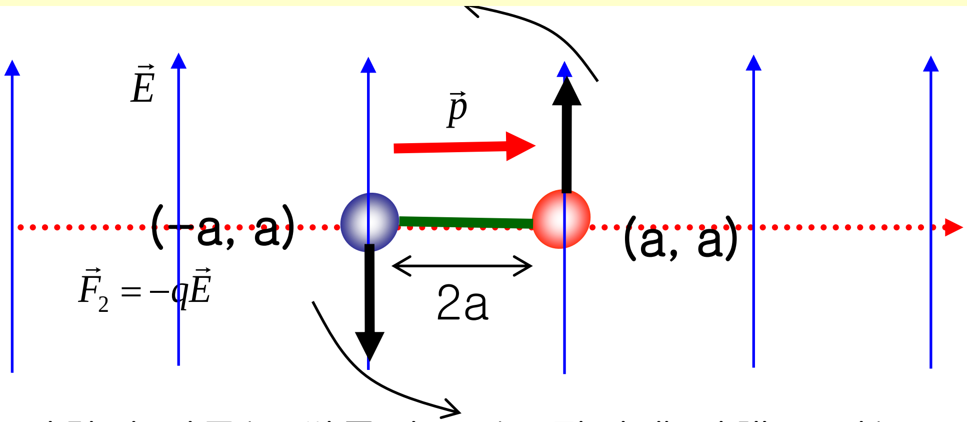
15-4 쌍극자와 전기장

연습 15-19. 전기장이 E= E_0 j 로 균일한 평면에 q 인 전하는 (a, a)에 놓여 있다.

(가) 두 전하가 이루는 쌍극자 P를 구하여라 .

(나) 전기장이 쌍극자에 작용하는 힘과 돌림 힘을 구하여라

풀이



$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

(가) 두 전하가 이루는 쌍극자 P 는 정의에 의해 크기는 2aq 이고 방향은 + 축 방향이다.

$$\vec{P} = 2aq\,\hat{i}$$

(나) 전기장이 쌍극자에 작용하는 힘 :

+q 전하에 작용하는 힘 $\vec{F}_+ = q\vec{E} = +qE_0\hat{j}$

−q 전하에 작용하는 힘 $\vec{F}_- = q\vec{E} = -qE_0\hat{j}$ 이므로 알짜 힘은 0 이 된다.

돌림 힘 : $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = (2aq)\hat{i} \times E_0\hat{j} = 2aqE_0(\hat{i} \times \hat{j}) = 2aqE_0\hat{k}$

$(\because \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k})$ (지면에서 나오는 방향)

15-4 쌍극자와 전기장 연습 15-17과 유사 기출 2015년 주관식 3번

[기출문제] 전기장이 $\mathbf{E} = E_0\hat{j}$ 로 균일한 평면 위에 전하량이 q인 전하는 (a, a) 에, 전하량이 – q 인 전하는 (−a, a) 놓여 있다. 이때 $\hat{j}$ 는y 축 방향의 단위벡터이다.

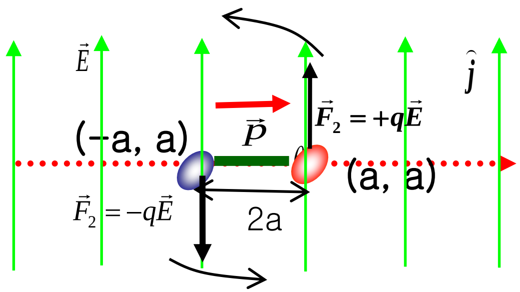
(가) 두 전하가 이루는 전기쌍극자 모멘트를 구하시오.

(나) 전기장이 쌍극자에 작용하는 힘과 돌림 힘을 구하시오.

(다) 전기장이 균일한 영역에 있는 전기쌍극자의 쌍극자 모멘트는 전기장에 나란하게 나열하기 위하여 회전한다. 이때 전기장이 한 일과, 전기쌍극자의 위치에너지의 변화량을 구하시오.

풀이

(가) 전기 쌍극자의 쌍극자 모멘트는 두 전하 사이의 거리를 d 라 하면 , 크기는 $|P|$ =qd 이고, 방향은 – 전하에서 + 전하를 향하는 방향이다.



$$\therefore \vec{P} = 2aq\,\hat{i}$$

(나) 전기장이 쌍극자에 작용하는 힘 : $\vec{F}_+ + \vec{F}_- = +qE_0\hat{j} - qE_0\hat{j} = 0$

돌림 힘 : $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E} = (2aq)\hat{i}\times E_0\hat{j} = 2aqE_0(\hat{i}\times\hat{j}) = 2aqE_0\hat{k}$

$(\because \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k})$ (지면에서 나오는 방향)

(다) 쌍극자 모멘트와 전기장이 이루는 θ 라고 하면, 처음 상태가 90° 의 각의 위치에서 0° 로 변하는 동안 전기장이 한 일을 구하면 다음과 같다.

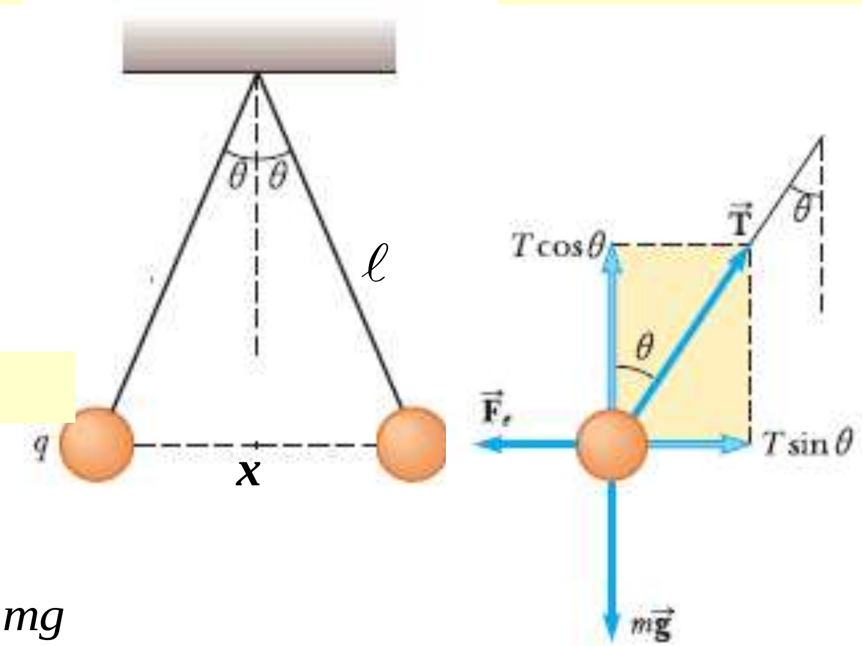
$$W = \int dW = \int_{\circ} \tau(-d\theta) = -\int_{\circ} PE\sin\theta d\theta = -\int_{\theta_0=90^\circ}^{\theta=0^\circ} 2aqE_0\sin\theta d\theta = 2aqE_0\cos\theta\Big|_{\theta_0=90^\circ}^{\theta=0^\circ} = 2aqE_0$$

$$\therefore \Delta U = -W = -2aqE_0$$

발전문제 **기출 2015년 주관식 3번**

연습 15-21. 질량이 m 인 작은 공 두 개가 각각 길이가 ℓ 이고 질량은 무시할 만한 두 선에 매달려 있다. 이 두선은 천장의 한 점에 단단히 묶여 있다. 각각의 공은 똑같은 전하 q 로 대전되어 있다.

(가) 평형상태에 줄이 수직선과 이루는 각 Θ 를 구하여라. (이 때 Θ 는 아주 작다)



풀이

그림에서 Θ 는 아주 작으므로

$$\frac{x}{2} = \ell \sin\theta \rightarrow \theta \approx \sin\theta = \frac{x}{2\ell}$$

(나) 두 전하 사이의 거리 x 를 구하여라.

(1) $\sum F_x = T\sin\theta - F_e = 0 \rightarrow T\sin\theta = F_e$

(2) $\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \rightarrow T\cos\theta = mg$

두 공 사이에 작용하는 힘은 쿨롱력이므로

$$\tan\theta = \frac{F_e}{mg} \quad \rightarrow \quad F_e = mg\tan\theta \quad \leftarrow \quad \left(F_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \right)$$

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{F_e}{mg} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgx^2}, \quad \text{그리고} \quad \theta \approx \frac{x}{2\ell} \quad \text{이므로} \quad \therefore x = \left(\frac{q^2\ell}{2\pi\varepsilon_0 mg} \right)^{1/3}$$

발전문제

연습 15-22. n 개의 양전하가 있다. 각각의 전하량은 q/n 이고 이 전하들은 반지름이 a 인 원의 둘레에 같은 간격으로 대칭적으로 놓여 있다.

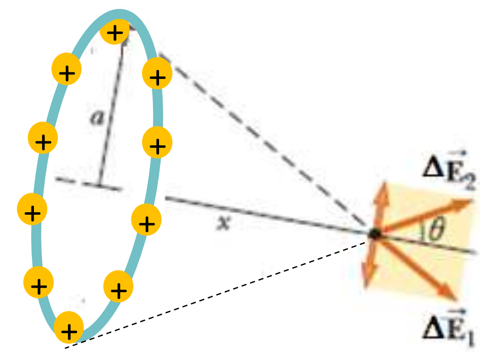
(가) 이 원의 면과 수직하며 원의 중심을 통과하는 선을 따라 그 중심에서 부터 x 만큼 떨어진 곳에서 전기장을 구하여라.

풀이

한 개의 양전하에 의한 전기장은 $\Delta E = \dfrac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

이고 중첩의 원리에 의하여 모두 더하면 전하들이 대칭적으로 놓여 있으므로 y 성분의 전기장은 상쇄되고 중심축에 수평한 성분만 남는다

$$\Delta q = q/n$$



$$\Delta E_x = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\Delta q\, x}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}} \Leftarrow \left(\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right)$$

$$E_x = \sum \frac{\Delta q\, x}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}} n\Delta q$$

$$= \frac{x}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}} n\left(\frac{q}{n}\right) = \frac{q\, x}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{q\, x}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+x^2)^{3/2}}$$

(나) 이 결과가 예제 15.5 와 같음을 확인하고 그 이유를 설명하여라

전하들이 대칭적으로 놓여 있으므로 중심축에 수직인 성분이 상쇄되어 연속적으로 분포된 예제 15.5 의 경우와 일치한다.