대학물리학 (4판) 연습문제 풀이 (11장) - by 송현석

1. 시각 $t=0$에 A만큼 압축된 용수철에 매달려 있는 물체가 단순조화진동을 한다. 물체의 위치 $x(t)$를 구하여라. 단, 용수철상수는 k이고 물체의 질량은 m이다.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = -A\cos\omega t = -A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \qquad <-\text{부호는 압축}>$$

2. 용수철상수가 $k=4.00\,N/m$인 용수철의 한쪽 끝은 벽에 고정되어 있고 다른 쪽 끝에는 질량 $1.00\,kg$의 물체가 연결되어 있다. $0.400\,N$의 힘으로 물체를 최대한 끌어당겼다가 시각 $t=0$에 물체를 가만히 놓았을 때 물체의 단순조화진동의 변위 $x(t)$를 구하라.

$$k=4.00\,N/m, \qquad m=1.00\,kg, \qquad F=0.400\,N$$

$$F=kx \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{F}{k}=\frac{0.400\,N}{4.00\,N/m}=0.100\,m$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{4.00\,N/m}{1.00\,kg}}\approx 2.00/s$$

$$x(t)=A\cos(\omega t)=(0.100\,m)\cos(2.00/s\times t)$$

3. 질량 $0.500\,kg$인 물체가 가벼운 용수철(용수철 상수 $2.40\times10^3\,N/m$)에 매달려 마루 위에 있다. 용수철을 평형 지점에서 $8.00\,cm$ 압축하였다가 놓았을 때

$$m=0.500\,kg, \qquad k=2.40\times10^3\,N/m, \qquad A=8.00\,cm=0.0800\,m$$

(1) 운동방정식을 세워라.

$$-kx=m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2.40\times10^3\,N/m}{0.500\,kg}x=0$$

(2) 초기 위상은 얼마인가?

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t)=A\sin(\omega t+\phi)$$

$$x(t=0s)=A\sin(\phi)=-A \qquad (\text{압축을 } -, \text{ 팽창을 } +)$$

$$\Rightarrow \qquad \sin(\phi)=\frac{-A}{A}=-1$$

$$\Rightarrow \qquad \phi=-\frac{\pi}{2} \quad \text{or} \quad \frac{3\pi}{2}$$

(3) $t = 0.25\,s$일 때 물체의 위치를 구하여라.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.40\times10^3\,N/m}{0.500\,kg}} \approx 69.28\ rad/s$$

$$x(t=0.25s) = A\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -A\cos(\omega t) = -(0.0800\,m)\cos(69.28rad/s\times0.25s)$$

$$\approx -0.00334\,m\ \ = -0.334\,cm$$

(4) 이 계의 총 에너지를 구하여라.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\times(2.40\times10^3\,N/m)\times(0.0800\,m)^2 = 7.68\,J$$

(5) $x = +5.0\,cm$ 와 $x = -5.0\,cm$ 일 때의 속도를 각각 구하여라.

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow\quad v = \pm\sqrt{\frac{k(A^2-x^2)}{m}} = \pm\sqrt{\frac{(2.40\times10^3N/m)\times((0.0800\,m)^2-(0.0500\,m)^2)}{0.500\,kg}}$$

$$\approx \pm4.33\,m/s$$

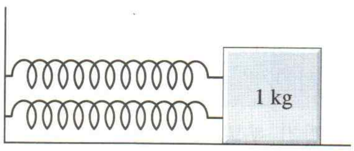
(6) 물체의 최대 속도를 구하여라. 어느 지점에서 나타나는가?

$$x(t) = A\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad\Rightarrow\quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow\quad v_{\max} = \omega A \approx 69.28\ rad/s\times(0.0800\,m) \approx 5.54\,m/s$$

$$\Rightarrow\quad \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = 1\ \text{(평형지점)}$$

4. 용수철 상수 $k = 1.00\times10^4\,N/m$인 용수철을 절반으로 잘라 얻게 되는 두 개의 용수철에 그림과 같이 질량 $1.00kg$의 물체를 연결하여 마찰이 없는 수평면 위에서 단순조화진동을 하게 하였을 때 각진동수는 얼마인가?



$$k = 1.00\times10^4\,N/m,\qquad m = 1.00\,kg$$

$$k' = 2k$$
$$k'' = k' + k' = 2k' = 2(2k) = 4k$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k''}{m}} = \sqrt{\frac{4k}{m}} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{\frac{1.00\times10^4\,N/m}{1.00\,kg}} = 2.00\times10^2/s$$

5. $10kg$의 물체가 용수철에 매달려서 단진동 하고 있다. 물체의 시간 t에 대한 평형점으로부터의 변위 x는 다음과 같이 주어진다.

$$x = (10.0\,cm)\cos\left[(10.0\ \ rad/s)t + \frac{\pi}{2}rad\right] \qquad\qquad x = A\cos[\omega t + \phi]$$

(1) 물체의 진동 주기는 얼마인가?

$$\omega = 10.0\ \ rad/s, \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10.0\ \ rad/s} = \frac{\pi}{5}s$$

(2) 물체의 최대 속력은 얼마인가?

$$A = 10.0\,cm = 0.100\,m, \qquad \Rightarrow \qquad v_{\max} = \omega A = 10.0\ \ rad/s \times 0.100\,m = 1.00\,m/s$$

6. 지표면으로부터 지구 반지름만큼 높이 올라가면 중력가속도의 크기가 지표면에서의 값의 $1/4$이 된다. 단진자의 주기는 지표면에서의 값의 몇 배가 되는가?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \Rightarrow \qquad T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{1}{4}g}} = 2\times 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2T$$

7. 단순조화운동하는 물체의 운동에너지와 위치에너지가 같게 되는 것은 물체의 변위가 진폭의 몇 배일 때인가?

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{2}}A = \frac{1}{\sqrt{2}}A$$

8. 단순조화진동의 최대 변위가 A이다.

(1) 물체가 최대 거리의 절반 위치에 있을 때 위치에너지와 운동에너지는 각각 총 에너지의 몇 %인가?

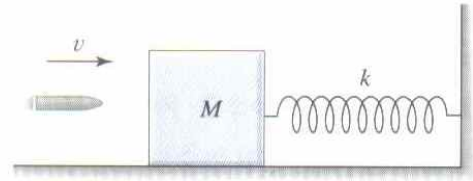
$$E = \frac{1}{2}kA^2 \qquad U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{4}E \qquad 25\%$$

$$K = E - U = E - \frac{1}{4}E = \frac{3}{4}E \qquad 75\%$$

(2) 위치에너지와 운동에너지가 같은 위치를 구하여라.

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{4}kA^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{\frac{A^2}{2}} = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

9. 그림과 같이 질량이 m인 총알이 용수철에 달려 있는 질량이 M인 나무토막에 속도 v로 날아와 박혔다. 용수철 상수는 k이며, 용수철 끝은 벽에 고정되어 있다.



(1) 총알이 박힌 직후 나무토막의 속도는 얼마인가?

$$mv = (m+M)v' \qquad \Rightarrow \qquad v' = \frac{m}{m+M}v$$

(2) 단순조화진동의 최대 진폭은 얼마인가?

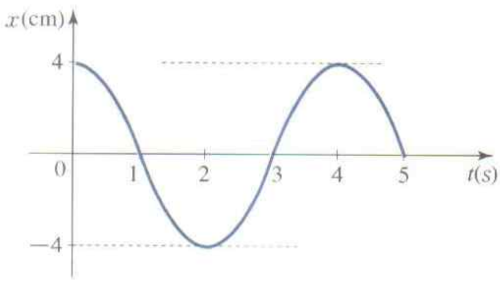
$$K = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 = \frac{m^2v^2}{k(m+M)} \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{m^2v^2}{k(m+M)}} = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}$$

10. 길이가 l이고 용수철상수가 k인 용수철의 한쪽 끝이 천장에 매달려 있다. 다른 쪽 끝에 질량 m인 물체를 연결하여 가만히 놓으면 위아래로 단순조화진동을 하게 된다. 단순조화진동의 진폭은 얼마인가?

$$\begin{cases} F_{s\max} = kA \\ F_g \quad = mg \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad kA = mg \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{mg}{k}$$

11. 용수철에 매달려 진동하는 물체의 시간에 따른 위치 변화가 그림과 같다.



(1) 이 진동의 진폭과 진동수는 각각 얼마인가?

$$A = 4\,cm, \qquad T = 4\,s, \qquad f = \frac{1}{T} = 0.25\,/s = 0.25\,Hz$$

(2) 이 물체의 질량이 $1kg$이라면 이 용수철의 용수철 상수는 얼마인가?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad k = m\frac{4\pi^2}{T^2} = 1kg \times \frac{(4\times\pi^2)}{(4\,s)^2} = \frac{1}{4}\pi^2$$

(3) 평형 위치로부터 진폭의 반의 변위에 있을 때, 이 진자의 위치에너지와 운동에너지의 비를 구하여라.

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{4}E$$

$$K = E - U = E - \frac{1}{4}E = \frac{3}{4}E$$

$$U : K = 1 : 3$$

12. 시계 분침의 운동을 등속원운동으로 보자. 분침의 x좌표 혹은 y좌표는 단순조화운동을 하게 된다. 이 단순조화운동의 각진동수 ω는 얼마인가?

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{3600\,s} \approx 1.745\times10^{-3}\,rad/s$$

13. 길이가 L이고 질량이 m인 가느다란 막대의 끝을 천장에 매달아 물리진자를 만들어, 단순조화진동을 시키고 있다.

(1) 이 막대 진자의 주기는 얼마인가?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad \left(I = \frac{1}{3}mL^2, \qquad d = \frac{L}{2}\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

(2) 막대 진자의 주기와 같도록 단순진자를 만들려고 한다. 단순진자에 달린 물체의 질량도 m이라면 실의 길이는 얼마이어야 하겠는가?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$$\Rightarrow \qquad l = \frac{2}{3}L$$

14. 길이가 l 이고 질량이 없는 막대의 한쪽 끝을 천장에 매달고 다른 쪽 끝에 질량이 있는 물체를 매달아 물리진자를 만든다. 질량 m, 반지름 R 인 원판을 매달았을 때의 진자의 주기 $T_{\text{원판}}$과, 같은 질량과 크기의 고리를 매달았을 때의 진자의 주기 $T_{\text{고리}}$의 비 $\frac{T_{\text{원판}}}{T_{\text{고리}}}$을 구하여라.

$I = I_{cm} + mh^2$ ＜평행축 정리＞

$$I_{\text{원판}} = \frac{1}{2}mR^2 + m(l+R)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_{\text{원판}} = \sqrt{\frac{mg(l+R)}{\frac{1}{2}mR^2 + m(l+R)^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad T_{\text{원판}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mR^2 + m(l+R)^2}{mg(l+R)}}$$

$$I_{\text{고리}} = mR^2 + m(l+R)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_{\text{고리}} = \sqrt{\frac{mg(l+R)}{mR^2 + m(l+R)^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad T_{\text{고리}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2 + m(l+R)^2}{mg(l+R)}}$$

$$\frac{T_{\text{원판}}}{T_{\text{고리}}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mR^2 + m(l+R)^2}{mg(l+R)}}}{2\pi\sqrt{\frac{mR^2 + m(l+R)^2}{mg(l+R)}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}mR^2 + m(l+R)^2}}{\sqrt{mR^2 + m(l+R)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}mR^2 + m(l+R)^2}{mR^2 + m(l+R)^2}}$$

15. $5.00\,m$의 진폭으로 수직으로 단순조화진동을 하고 있는 피스톤 위에 물체가 놓여 있다. 물체가 피스톤과 분리되지 않으려면 단순조화진동의 주기가 얼마 이상이어야 하는가?

$$A = 5.00\,m$$

$$\begin{cases} F_{s\max} = kA = ma & \Rightarrow \quad a = \dfrac{kA}{m} \\ F_g \quad = mg = ma & \Rightarrow \quad a = g \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g \geq \frac{kA}{m} \quad \Rightarrow \quad k \leq \frac{mg}{A}$$

$$T \geq \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/A}} = 2\pi\sqrt{\frac{A}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5.00\,m}{9.8\,m/s^2}} \approx 4.49\,s$$

16. 길이가 $1.00\,m$인 가느다란 줄에 질량이 $0.100\,kg$인 물체를 매달아 다음과 같은 곳에서 단순 진자운동을 하고 있을 때 주기를 구하여라.

(1) 정지해 있는 엘리베이터의 천장에 매달려 있다.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.00\,m}{9.8m/s^2}} \approx 2.01\,s$$

(2) 가속도 $1.0m/s^2$으로 올라가고 있는 엘리베이터의 천장에 매달려 있다.

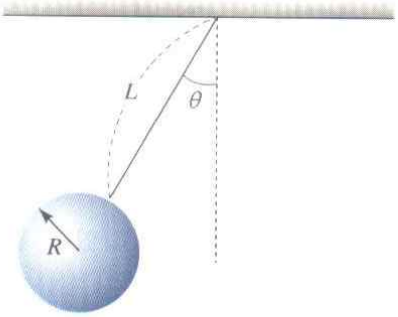
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.00\,m}{9.8m/s^2 + 1.0m/s^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.00\,m}{10.8m/s^2}} \approx 1.91\,s$$

(3) 자유낙하하는 엘리베이터의 천장에 매달려 있다.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.0m}{0m/s^2}} \approx \infty\,s$$

(왕복운동 하지 않고 정지한다)

17. 그림과 같이 반지름이 R이고 질량이 M인 원판, 링, 속이 꽉 찬 공, 속이 텅 빈 공을 길이 L인 질량을 무시할 수 있는 실에 매달아 각 θ까지 들어올렸다가 단진동을 시킨다.



원판	$I=\frac{1}{2}MR^2+M(L+R)^2$	$\omega=\sqrt{\frac{Mg(L+R)}{\frac{1}{2}MR^2+M(L+R)^2}}$	$T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}MR^2+M(L+R)^2}{Mg(L+R)}}$
링	$I=MR^2+M(L+R)^2$	$\omega=\sqrt{\frac{Mg(L+R)}{MR^2+M(L+R)^2}}$	$T=2\pi\sqrt{\frac{MR^2+M(L+R)^2}{Mg(L+R)}}$
속이 꽉 찬 공	$I=\frac{2}{5}MR^2+M(L+R)^2$	$\omega=\sqrt{\frac{Mg(L+R)}{\frac{2}{5}MR^2+M(L+R)^2}}$	$T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}MR^2+M(L+R)^2}{Mg(L+R)}}$
속이 텅 빈 공	$I=\frac{2}{3}MR^2+M(L+R)^2$	$\omega=\sqrt{\frac{Mg(L+R)}{\frac{2}{3}MR^2+M(L+R)^2}}$	$T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}MR^2+M(L+R)^2}{Mg(L+R)}}$

(1) 단진동의 주기가 가장 긴 것은 어느 것인가?

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mg(L+R)}} \quad \Rightarrow \quad T\sim\sqrt{I} \quad \text{링}$$

(2) 제일 아래 점에서 질량중심의 속력이 가장 큰 것은 어느 것인가?

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\sqrt{\frac{Mg(L+R)}{I}} \quad \Rightarrow \quad v\sim\omega\sim\frac{1}{\sqrt{I}} \quad \text{속이 꽉 찬 공}$$

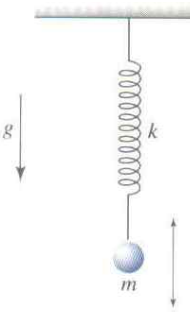
(3) 이러한 진자를 달로 가져가서 똑같은 실험을 하면 주기는 어떻게 되겠는가?

$$T'=\frac{2\pi}{\omega'}=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mg'(L+R)}} \quad \Rightarrow \quad T'\sim\frac{1}{\sqrt{g'}} \quad \Rightarrow \quad g'=\frac{1}{6}g, \quad T'=\sqrt{6}\,T$$

(4) 제일 아래 점에서 물체의 각속력을 ω라 할 때 실의 장력은?

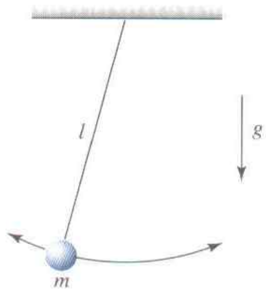
$$T=Mg+M(L+R)\omega^2$$

18. 아래 그림은 지구에서 사용하는 용수철 시계와 흔들이 시계의 개략적인 작동원리를 보여준다. 달에 가서도 사용할 수 있는(주기가 같은) 시계는 어떤 것인가 답하고 이유를 설명하여라.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

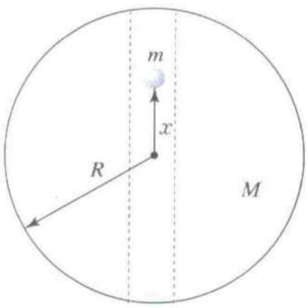
$O.K.$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

NO

19. 지구가 밀도가 균일한 고체로 이루어져 있다고 하자. 지구의 반지름은 R, 질량은 M으로 놓는다. 그림과 같이 중심을 지나도록 원통형으로 구멍을 뚫었다고 하자. 질량이 m인 물체가 중심으로부터 x만큼 떨어진 곳에 있다고 하자.



(1) 이 물체에 작용하는 중력을 구하여라.

$$\overrightarrow{F_g'} = -G\frac{M'm}{x^2} = -G\frac{\rho V'm}{x^2} = -G\frac{\dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\dfrac{4}{3}\pi x^3 m}{x^2} = -G\frac{Mxm}{R^3}$$

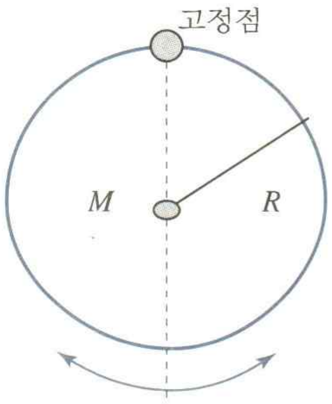
(2) 뉴턴의 제2법칙을 적용하여 운동방정식을 세워라.

$$-G\frac{Mxm}{R^3} = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{GM}{R^3}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

(3) 이 물체는 진동하게 된다. 진동 주기를 구하여라.

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

20. 그림과 같이 질량이 M이고 반지름이 R인 원판의 한 끝을 고정시키고 작은 진폭으로 진동하게 한다. 원판의 중심에 대한 회전관성은 $\frac{1}{2}MR^2$이다. 이 원판과 같은 질량을 갖고 같은 주기로 진동하는 단진자를 만든다면 그 길이는 얼마여야 하는가?



$$I_{고정점} = I_{중심} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$\begin{cases} T_{원판} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_{고정점}}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3R}{2g}} \\ T_{진자} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} \qquad \Rightarrow \qquad l = \frac{3}{2}R$$