제 25 장 기출_연습문제 풀이 (1)

연습문제 풀이 : (2007년 이후 중간고사에 출제된 연습문제 모음)

5, 6, 7, 11, 16

+ 기출문제

2008년 기출 7번

[기출문제] 다음은 아인슈타인의 특수 상대성 이론의 기본 가정 두 가지를 나타내고 있다. 빈 칸에 들어갈 말을 순서대로 쓰라.

(가) 모든 (관성계) 에서는 똑 같은 물리법칙이 적용된다.

(나) (빛의 속력)은 모든 좌표계에서 동일하며 이 값은 관측자나 광원이 상대적 운동에 무관하다.

25-2 특수 상대론

연습 25-5. 지상의 관측자가 측정할 때 일정한 속력 v로 지표면을 향해 떨어지는 뮤온 입자가 있다. 이 입자는 정지한 상태에서는 T_0 시간 후 붕괴한다.

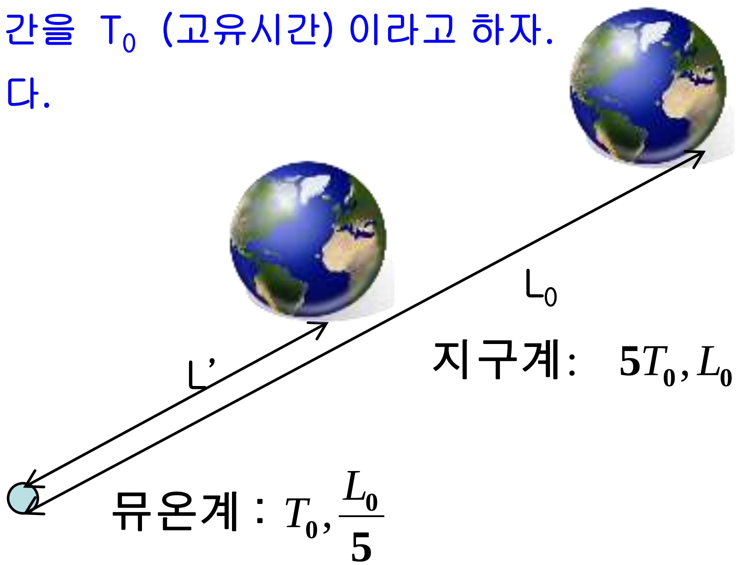
$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{C}\right)^2}} = 5$$ 라 할 때 다음 물음에 답하여라. $(\gamma = 5)$

풀이

(가) 지상에서 볼 때 이 입자는 얼마 후에 붕괴하겠는가?

뮤온이 정지해 있는 계(움직이는 계)에서 뮤온 입자의 수명시간을 T_0 (고유시간) 이라고 하자.
그러므로 지상에서 관측한 뮤온의 수명시간은 더 길게 관측된다.

$$t = \gamma t' \Rightarrow \frac{t'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{C}\right)^2}} = 5T_0 \qquad (t' = T_0)$$



(나) 뮤온입자가 볼 때 지상이 다가오는 속력은 얼마인가?

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 5 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{24}}{5}c = 0.98C$$

(다) 붕괴할 때까지 입자가 운동한 거리를 지상에서 측정하니 L_0 (고유거리) 라 한다. 붕괴할 때까지 뮤온 입자가 측정한 지상의 이동거리는 얼마인가?

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{L_0}{5}$$

2012년 기출 주관식 3번

[기출문제] 지상의 관측자가 측정할 때 0.8 c 의 속력으로 지표면을 향해 떨어지는 뮤온 입자가 있다. 이 입자의 정지 상태에서 수명은 T 이고 정지 질량은 m_0 라고 할 때 다음 물음에 답하여라.

풀이

(가) 지상에서 볼 때 이 입자는 얼마 후에 붕괴하겠는가?

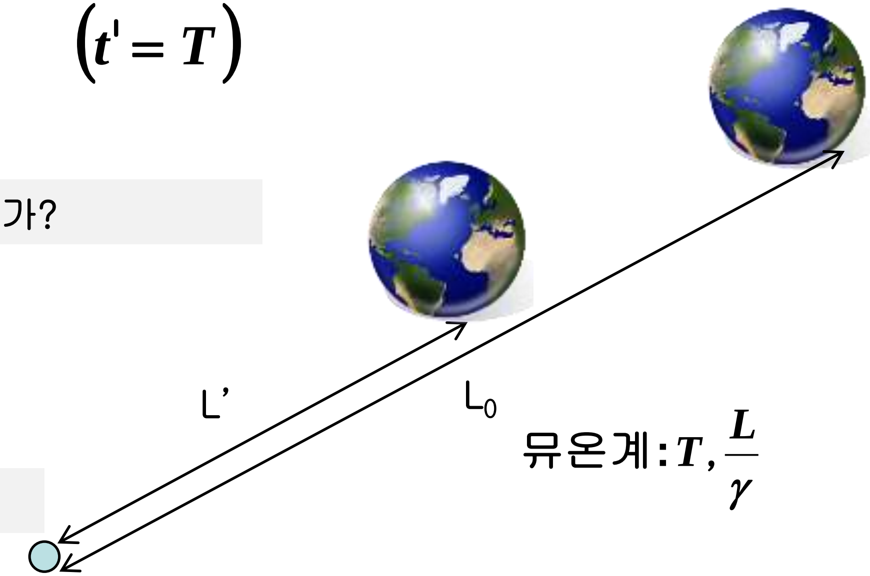
뮤온이 정지해 있는 계(움직이는 계)에서 뮤온입자의 수명시간은 T (고유시간) 이다.

지상에서 관측한 뮤온의 수명시간은 더 길게 관측된다.

$$t = \gamma t' \Rightarrow t = \frac{t'}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{5}{3}T \qquad (t' = T)$$

(나) 뮤온 입자가 볼 때 붕괴 전에 이동거리는 얼마인가?

$$L' = vt' = (0.8c) \times T = 0.8cT$$



(다) 뮤온입자의 운동에너지는 얼마인가?

$$KE = (\gamma - 1)m_0c^2 = \left(\frac{5}{3} - 1\right)m_0c^2 = \frac{2}{3}m_0c^2$$

2008년 기출 주관식 1번

[기출문제] 지상의 관측자가 측정할 때 일정한 속력 v (v >0) 로 지표면을 향해 떨어지는 뮤온 입자가 있다. 이 입자의 정지 상태에서는 수명은 T_0 시간 후 붕괴한다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

풀이

(가) 지상에서 볼 때 이 입자의 수명은 얼마인가?

뮤온이 정지해 있는 계(움직이는 계)에서 뮤온 입자의 수명시간은 T (고유시간) 이다.

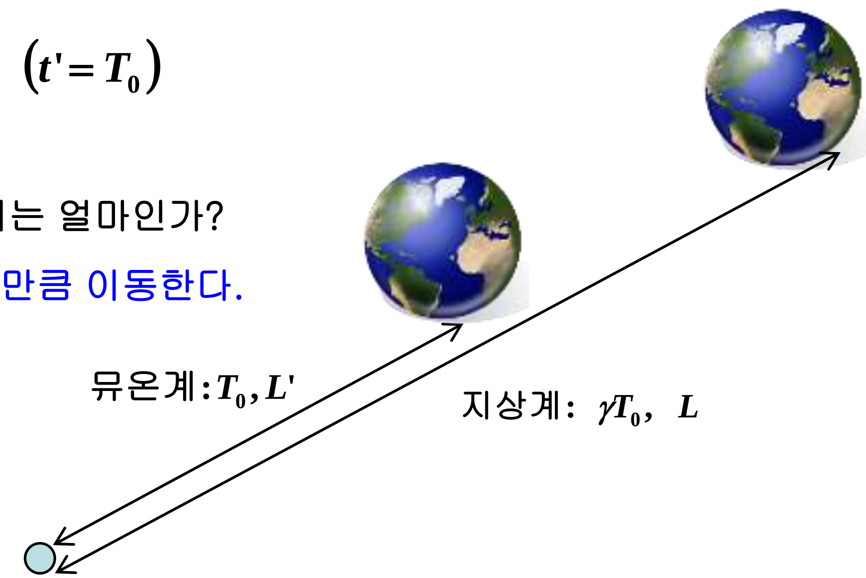
지상에서 관측한 뮤온의 수명시간은 더 길게 관측된다.

$$t = \gamma t' \Rightarrow t = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (t' = T_0)$$

(나) 지상에서 볼 때 이 입자가 붕괴 전에 이동한 거리는 얼마인가?

지상에서 관측한 뮤온의 속력과 시간을 곱한 양만큼 이동한다.

$$L = vt = \frac{vT_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$



(다) 뮤온 입자가 볼 때 붕괴 전에 이동한 거리는 얼마인가?

뮤온은 수명시간에 해당하는 T_0 의 시간 동안 자신의 속력 v 로 움직인다.(실제 지구와 뮤온 사이의 거리는 수축되어 있어 수명시간 동안에 지표면에 도달할 수 있다.)

$$L' = vt' = vT_0$$

2017년 기출 9번 2011년 기출 9번

[기출문제] 정지 상태에서 뮤온은 t 초 후에 붕괴한다. 관찰자에 대해서 뮤온이 0.8 c의 속력으로 움직일 때 이 관찰자는 뮤온이 생성 후 붕괴하기 전까지 거리 d 를 진행한 것으로 측정하였다. 이 때 d 를 t 와 c 를 이용하여 나타내어라.

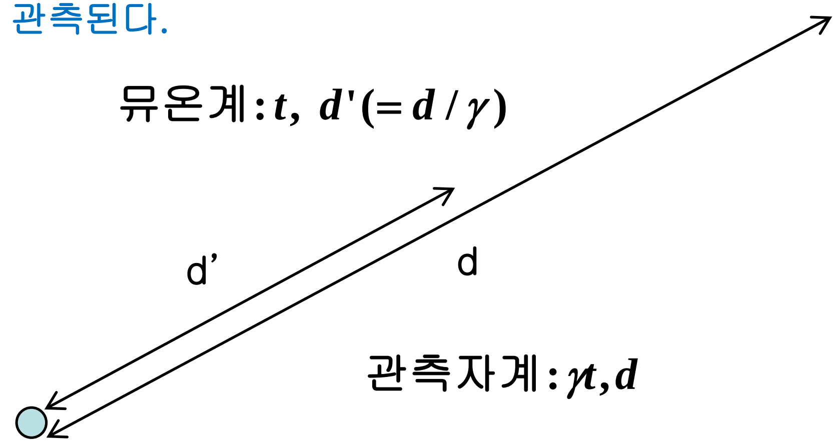
풀이 0.8 c 로 움직이므로 ɣ 를 구한다,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{5}{3}$$

뮤온이 정지해 있는 계(움직이는 계)에서 뮤온입자의 수명시간은 고유시간 이다. 따라서 이 문제에서는 고유시간을 t 라 표시한다.

따라서 지상의 관측자는 뮤온의 수명시간을 더 길게 관측된다.

$$t_{관측자} = \gamma t \Rightarrow t_{관측자} = \frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{5}{3}t$$



관측자가 측정한 뮤온의 거리 d 는

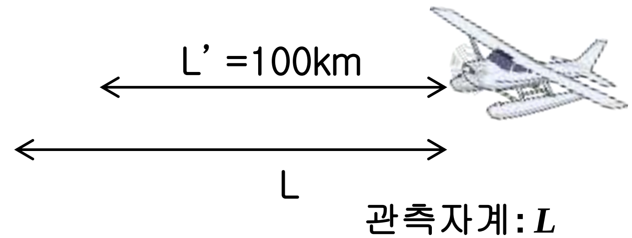
$$d = vt_{관측자} = (0.8c)\times(\gamma t) = \left(\frac{4}{5}c\right)\times\left(\frac{5}{3}t\right) = \frac{4}{3}ct$$ 이다.

2016년 기출 주관식 2번　　2009년 기출 7번

[기출문제] 제트기가 지상에 대해 관속의 3/5 배의 속력으로 움직이고 있다. 이 때 다음 질문에 답하시오. (가) 제트기 안의 관측자가 측정한 제트기의 이동거리가 100km 라면 지상에 있는 관측자가 측정한 제트기의 이동거리는 몇 km 인가?

풀이　0.6 c 로 움직이므로 ɣ 를 구한다,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{5}{4}$$



움직이는 관측자는 고유길이를 볼 수 없고 수축된 길이를 관측하므로 L’=100km 이다.
따라서 지상 관측자가 본 길이는 더 길다.

$$L = \gamma L' = \left(\frac{5}{4}\right) \times 100 = 125(km)$$

(나) 제트기의 정지질량을 M 이라고 할 때, 이 제트기의 운동에너지를 M 과 광속 c 를 이용하여 나타내어라.

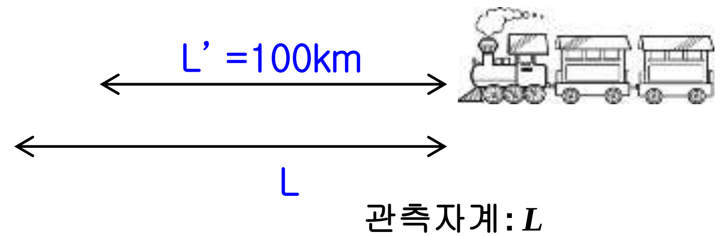
$$KE = (\gamma - 1)Mc^2 = \left(\frac{5}{4} - 1\right)Mc^2 = \frac{1}{4}Mc^2$$

2010년 기출 주관식 2번 2008년 기출 8번 2007년 기출 10번

[기출문제] 기차가 지상에 대해 광속의 3/5 배의 속력으로 움직이고 있다. 이 때 다음 질문에 답하여라. (가) 기차 안의 관측자가 지상에 대해 100km 이동했다고 측정하는 동안 지상에서 관측한 기차의 이동거리는 몇 km 인가?

풀이 0.6 c 로 움직이므로 γ 를 구한다,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{5}{4}$$



움직이는 관측자는 고유길이를 볼 수 없고 수축된 길이를 관측하므로 L’=100km 이다.
따라서 지상 관측자가 본 길이는 더 길다.

$$L = \gamma L' = \left(\frac{5}{4}\right) \times 100 = 125(km)$$

(나) 기차의 정지질량을 M 이라고 할 때, 이 기차의 운동에너지를 M 과 광속 c 를 이용하여 나타내어라.

$$KE = (\gamma - 1)Mc^2 = \left(\frac{5}{4} - 1\right)Mc^2 = \frac{1}{4}Mc^2$$

(다) 정지질량 m 인 입자가 지상에 정지해 있다. 기차에서 보았을 때 이 입자의 물질파의 파장은 얼마로 측정되겠는가? m 과 광속 c, 플랑크 상수 h 를 이용하여 나타내어라.

운동량 : $p = \gamma m_0 v = \frac{5}{4} m_0 \times \left(\frac{3}{5}c\right) = \frac{3}{4} mc$ 물질파의 파장 $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\left(\frac{3mc}{4}\right)} = \frac{4h}{3mc}$

25-2 특수 상대론 연습 25-6 과 유사 2016년 기출 10번 2013년 기출 7번

[기출문제] 뮤온 입자는 정지한 상태에서 2.2 μs 후에 붕괴한다. 지상에서 뮤온 입자를 관측하면 얼마의 시간이 지난 후에 붕괴하는가? 단, 지상에서 관측한 뮤온의 속도는 v 이고, $\sqrt{1-c^2/v^2}$=0.2 이다. (단위 포함)

풀이

뮤온의 수명은 뮤온 계에서 측정하면 고유시간 (같은 장소에서 두 사건이 일어나는 간격)이 되며 이 값은 t'= 2.2 μs 이다. 지상의 관측자 (뮤온계에 대해 상대적으로 일정한 속력을 갖는 관성계에 있는 관측자)는 이 고유시간을 감마(ɣ) 만큼 더 긴 시간 (t) 으로 관측한다. (시간지연)

$$t=\gamma\, t' \quad \Rightarrow \quad t=\frac{t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{2.2\mu s}{0.2}=11\mu s$$

25-2 특수 상대론

연습 25-6 . 정지상태에서 중간자는 생성 후 2.0 μs 만에 소멸된다. 이 중간자가 실험실에서 0.990 c 의 속력으로 움직이면, 실험실 시계로 중간자 수명은 얼마인가?

풀이

중간자가 정지상태로 있는 계(실험실에서 관측하면 0.990 c로 움직이는 계)에서 중간자는 같은 장소에서 생성되고 소멸되므로 여기서의 수명시간은 고유시간(Δt') 에 해당한다. 이렇게 움직이는 중간자를 실험실 계(정지한 관측자의 시점)에서 관측하게 되면 중간자의 수명이 γ 배 더 길게 관측된다.

(실험실 시계= 정지한 상태의 관측자 시계)

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{2.0\mu s}{\sqrt{1-\left(\frac{0.99c}{c}\right)^2}} = 14.2\mu s$$

2014년 기출 8번

[기출문제] 아인슈타인은 특수상대성 이론에서 빛의 속력 c 는 모든 좌표계에서 동일하며 이 값은 관측자나 광원의 상대적 운동에 무관하다라고 하였다. 따라서 정지계에서 t 초가 흘렀을 때 속도 v 로 움직이는 관성계에서는 시간 t' 초가 흐르게 된다. 이 움직이는 관성계의 시간 t' 를 t, c, v 를 활용하여 나타내시오.

풀이

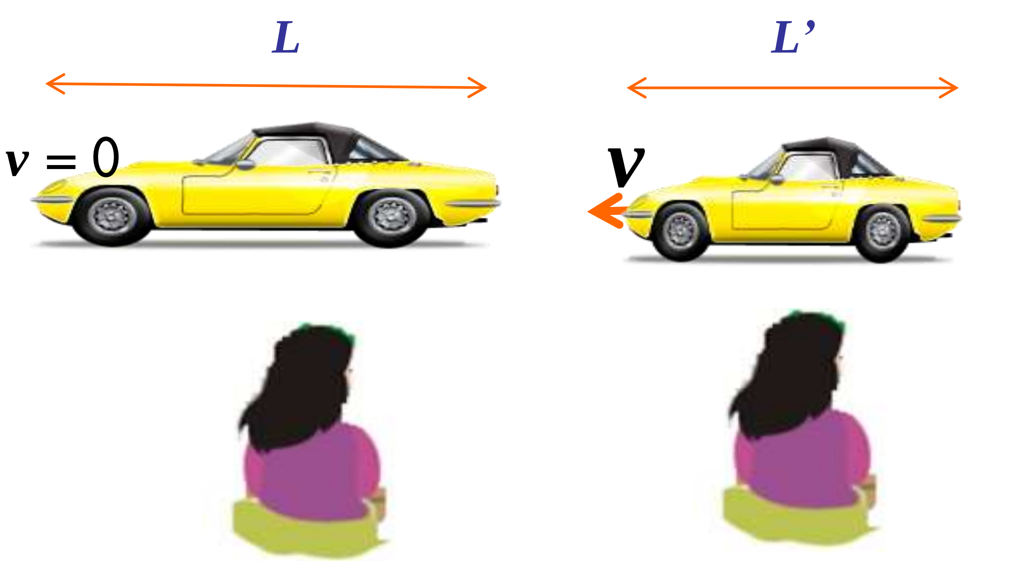
정지계(t)에서 움직이는 계의 시계(t')를 관측하면 느리게 관측된다.
(즉, 움직이는 계의 시간 t' 는 고유시간으로 항상 t' 시간이 t 보다 작다.-시간지연 효과)

$$t' = \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

연습 25-7. 정지 상태에서 자동차의 길이가 L 이다. 이 자동차가 빛 속도의 몇 배로 달릴 때, 길이가 $4L/5$ 로 측정되겠는가?

풀이

정지계에서 정지한 물체의 길이는 고유길이 L 이며 가장 길게 관측된다.
만일 자동차가 움직이면 정지계의 관측자는 자동차의 길이를 $L' = L/\gamma$ 로 짧아진 것으로 관찰한다. 여기서 γ 를 계산하여 움직이는 자동차(움직이는 계)의 속력을 구한다.



정지계의 관측자 가 정지한 물체를 보았을 때 물체의 길이를 고유길이(L)로 관측한다.

정지계의 관측자가 움직이는 물체를 보면 물체의 길이를 수축된 길이(L')로 관측한다.

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{4L}{5} \quad \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore v = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\, c$$

$$= \sqrt{1-\frac{16}{25}}\, c = \sqrt{\frac{9}{25}}\, c = \frac{3}{5} c$$

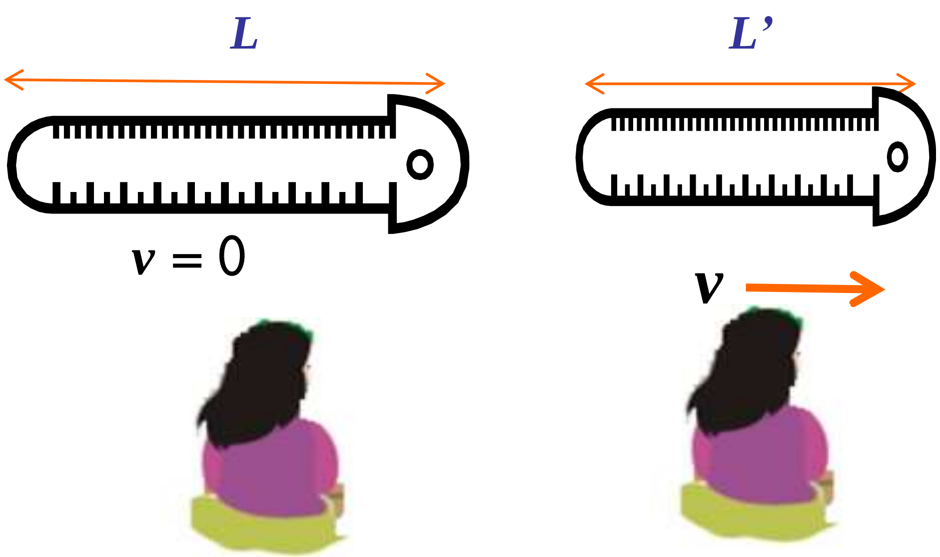
2015년 기출 8번

[기출문제] 기준계 S 에서 x 축에 평행한 막대가 0.8c 의 속력으로 길이 방향으로 움직이고 있다. 막대의 고유길이는 2m 이다. 기준계 S 에서 측정한 막대 길이는 얼마인가? c 는 빛의 속력이고 고유 길이는 그 물체가 정지한 좌표계에서의 길이다 (단위 포함)

풀이

정지계에서 정지한 물체의 길이는 고유길이 L 이며 가장 길게 관측된다.
만일 막대가 움직이면 정지계의 관측자는 막대의 길이를 $L' = L/\gamma$ 로 짧아진 것으로 관찰한다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{3}{5}$$



정지계의 관측자가 정지한 물체를 보았을 때 물체의 길이를 고유길이(L)로 관측한다.

움직이는 계의 관측자(일정한 속력의 비행기를 탄 관측자)는 물체의 길이를 수축된 길이(L')로 관측한다.

$$\therefore L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{L}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{3}{5}L = \frac{3}{5}\times(2) = 1.2(m)$$

(예제 25.2) 2007년 기출 8번

[기출문제] 일정한 속도 v = (4/5)c 로 달리는 기차가 있다. 기차 속의 사람이 100m 갔다고 보는 동안 지상에서 볼 때 기차는 몇 m 이동했는가?

풀이

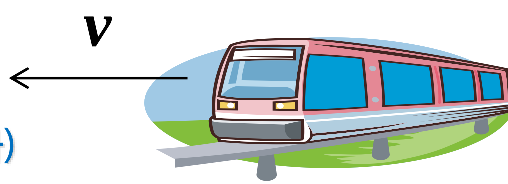
움직이는 관측자가 측정한 길이는 정지한 관측자가 측정한 길이인 고유 길이보다 항상 작다

$$\boxed{L' = L/\gamma}$$

$$v = (4/5)c \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{3}{5}$$

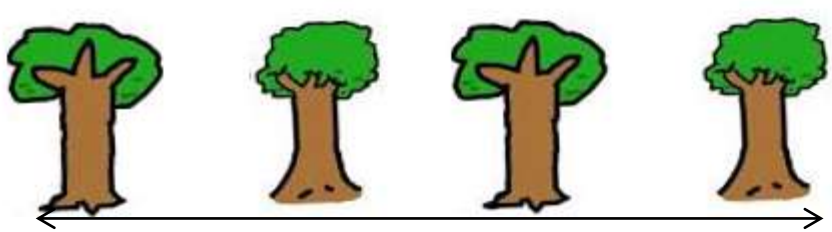
기차에서 관측한 길이 : (L’: 100 m)

지상에서 정지한 관측한 기차의 이동거리: $L = L'\gamma = (100\,\mathrm{m})\frac{5}{3} = \frac{500}{3}(\mathrm{m})$

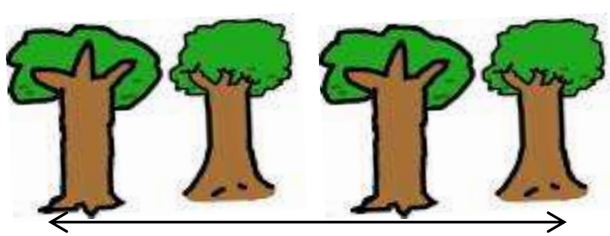


고유 길이(지상 관측자)

수축된 길이(기차 안 관측자)



L (정지한 관측자가 측정한 길이)



L' (움직이는 우주선 상의 관측자가 측정한 길이)

2013년 기출 8번

[기출문제] 어떤 우주인이 광속의 0.8 배의 속력으로 가까운 별까지 여행하였다. 지구에서 측정한 별까지의 거리는 10광년이라고 할 때, 우주인이 측정한 별까지의 도달시간은 몇 년인가? (답은 소수 첫째 자리까지 나타내어라.)

풀이

우주인의 속력 v=0.8 c 로 움직이므로 ɣ 를 구한다,

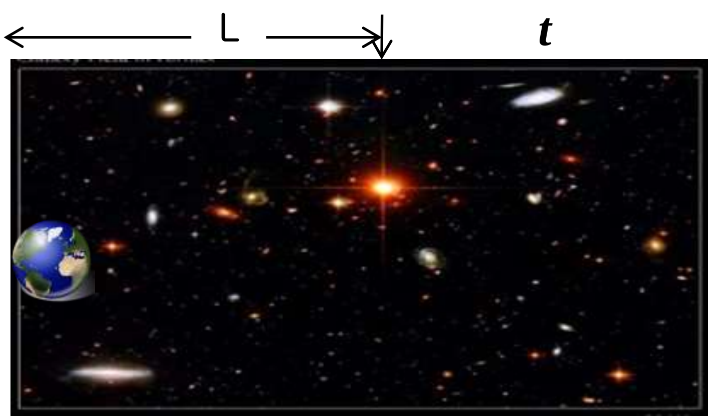
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{5}{3}$$

지구에서 보는 고유거리 (L) 은 10광년이다. 여행하려면 t 가 걸린다. 그러나 우주인은 움직이고 있으므로 우주인이 측정하는 여행거리는 수축된 길이를 관측한다. (L') 따라서 도달하는 데 걸린 시간은 속력으로 나누어 주면 된다.

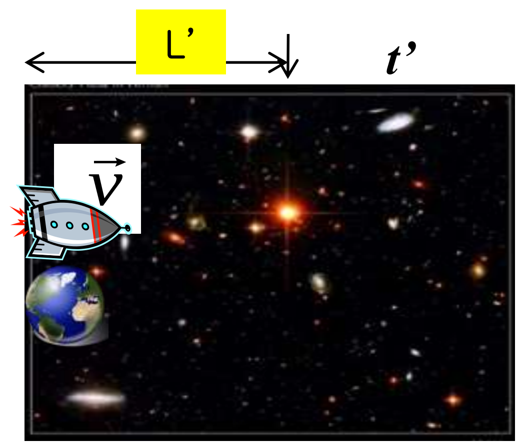
우주인이 측정한 거리 $\Rightarrow L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{10\text{광년}}{\left(\frac{5}{3}\right)} = 6\text{광년}$

우주인이 측정하는 도달 시간 :

$$\therefore t' = \frac{L'}{v} = \frac{6\text{광년}}{\left(\frac{4c}{5}\right)} = \frac{6\text{년}\times c}{\left(\frac{4c}{5}\right)} = 7.5(\text{년})$$



정지계의 관측자가 정지한 물체를 보았을 때 물체의 길이를 고유길이(L)로 관측한다.



움직이는 관측자가 보는 여행 거리는 정지한 계가 보는 고유길이 보다 더 수축된 길이(L')로 관측한다.

25-4 상대론적 운동량과 에너지

2014년 기출 9번(수치는 다름) 2011년 기출 8번 2009년 기출 8번 2007년 기출 9번

연습 11. 입자의 운동에너지가 정지에너지와 같다면 이 입자의 속력은 빛 속력의 몇 배인가?

풀이 운동에너지와 정지에너지의 관계식으로 부터 γ 를 구하면 입자의 속력을 얻을 수 있다.

$$KE = (\gamma - 1)m_0c^2 = m_0c^2$$

$$\Rightarrow \gamma = 2$$

한편 γ 의 식에서

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \therefore v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \quad (= 0.87c)$$

[기출문제] 입자의 상대론적인 운동량을 m_0 와 빛의 속력 c 를 이용하여 나타내어라.

$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$ 의 식에서 운동량은 $p = \sqrt{\frac{(\gamma^2 - 1)m_0{}^2c^4}{c^2}} = \sqrt{3m_0{}^2c^2} = \sqrt{3}m_0c$ 이다.

25-4 상대론적 운동량과 에너지 2006년 기출 12번

[기출문제] 입자의 총 에너지가 정지에너지와 같다면 이 입자의 속력은 빛 속력의 몇 배인가?

풀이

총 에너지 식에서 정지에너지가 총에너지가 같다는 조건으로 부터 운동에너지를 구할 수 있다. 운동에너지가 0 이므로 물체의 속력은 0 이 된다.

$$E = KE + E_0 \quad \Rightarrow KE = 0 \qquad (\because E = E_0)$$

$$KE = (\gamma - 1)E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \gamma = 1$$

한편 γ 의 식에서

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \therefore v = 0$$

입자의 속력은 0 이다.

25-4 상대론적 운동량과 에너지 2017년 기출 8번 2013년 기출 10번

[기출문제] 정지질량이 m_0 인 어떤 입자의 운동에너지가 정지에너지의 두 배라고 할 때 이 입자의 운동량을 m_0 와 광속 c 를 이용하여 나타내어라.

풀이 운동에너지와 정지에너지의 관계식으로 부터 γ 를 구하면 입자의 속력을 얻을 수 있다.

$$KE = (\gamma - 1)m_0c^2 = 2m_0c^2$$
$$\Rightarrow \gamma = 3$$

한편 γ 의 식에서 v 를 구한다.

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 3 \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3} \qquad \therefore v = \frac{\sqrt{8}}{3}c$$

운동량은 $$p = \gamma m_0 v = 3m_0\frac{\sqrt{8}}{3} = 2\sqrt{2}m_0$$ 이다.

25-4 상대론적 운동량과 에너지 2015년 기출 9번

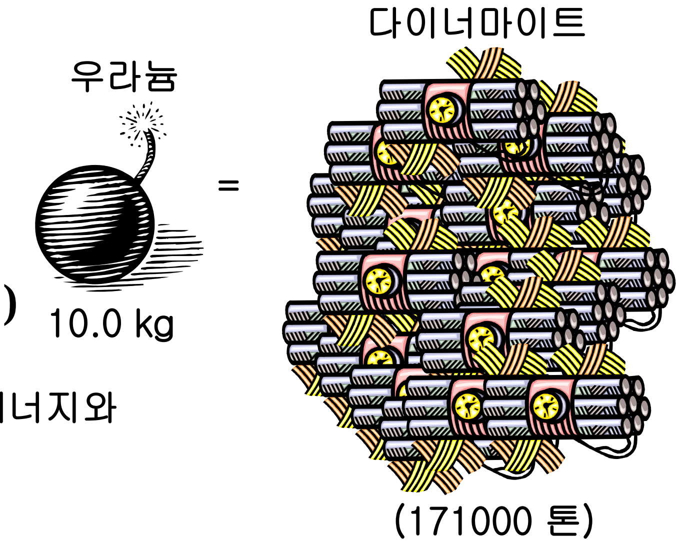
연습 25-16 10.0 kg의 우라늄이 들어 있는 핵폭탄이 터질 때 이 질량 중 0.100 % 만 에너지로 바뀐다. (가) 이 때 방출되는 에너지를 J 단위로 구하여라. (나) 0.19 kg 의 다이너마이트(니트로글리세린)는 대략 1MJ 의 에너지를 낸다. 이 핵 폭탄의 위력은 몇 kg 의 다이너마이트에 해당하는가?

풀이 특수상대론에 의하면 질량은 에너지로 변할 수 있다. 그 에너지의 크기는 $E_0=m_0c^2$ 이다.

(가) 우라늄 10.0 kg 의 0.100 % (Δm_0) 의 질량에너지

$$\Delta m_0 = \frac{0.1}{100} m_0 = 0.001 \times 10.0kg = 0.0100kg$$

$$E_{우라늄} = (\Delta m_0)c^2 = 0.0100kg \times (3.00 \times 10^8 m/s)^2 = 9.00 \times 10^{14} (J)$$



(나) 이 핵폭탄이 내는 에너지를 0.19 kg 다이너마이트가 내는 에너지와 비교하면 다음과 같다.

$$9.00 \times 10^{14} J \left(\frac{0.19kg}{1.00 \times 10^6 J} \right) = 1.71 \times 10^8 kg$$

즉, 핵폭탄(10.0kg)이 내는 에너지는 다이너마이트 171000000 kg (171000 톤)이 내는 에너지와 같다.