제 21 장 연습 문제 풀이 (2)

연습문제 풀이 : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 17, 18, 21

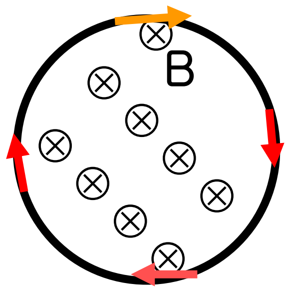
혹시 풀이에 잘못된 곳이 발견되면 카톡이나 문자 메일로 연락해 주면 좋겠습니다.
010-3188-2909   marzini@inha.ac.kr

21-1 패러데이 유도법칙

연습 21-1 원형 고리 형태의 도선이 지면 위에 놓여 있다. 지면 안으로 들어가는 자기장이 감소하고 있다면 유도되는 전류의 방향은?

풀이

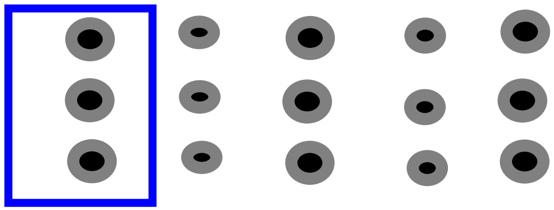
렌쯔의 법칙에 의하면 원형회로의 면적을 통과하는 자기선속(원형도선의 면적을 통과하는 자기장 다발) 이 감소하면 변화를 방해하는 방향으로 유도기전력이 생긴다.



렌쯔의 법칙에 의하여, 지면 안으로 향하는 자기장이 감소하므로 이를 증가시키는 방향으로 유도기전력이 생긴다. 즉 유도전류는 시계방향이 된다.

21-1 패러데이 유도법칙

연습 21-2 저항이 10.0Ω 인 회로가 균일하지 않는 자기장 공간을 움직일 때 운동에너지가 일정한 비율 1.00 mJ/s 로 감소한다. 회로에 유도된 전류는 얼마인가?



$$\frac{\Delta KE}{\Delta t} = 1.0\, mJ/s$$ (운동에너지 감소비율)

풀이

[일-에너지 정리]운동에너지의 변화량은 일의 양과 같음을 이용한다. 일과 운동에너지 변화량은 같으므로 운동에너지(일)의 시간 변화율은 일률($p=iv=i^2R$)과 같다.

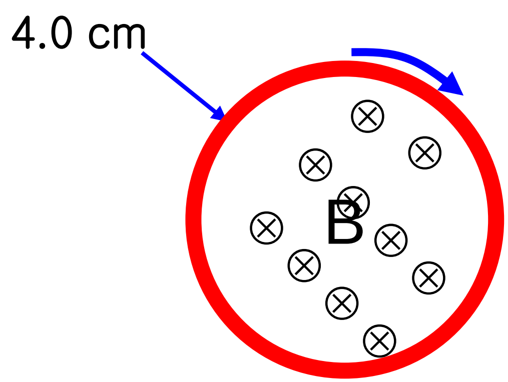
$$\Delta KE = W(\text{일}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta KE}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = i^2 R$$ (일률)

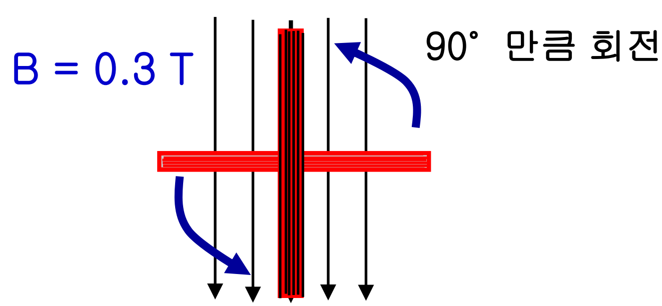
$$\frac{\Delta KE}{\Delta t} = i^2 R \Rightarrow i = \sqrt{\frac{\left(\frac{\Delta KE}{\Delta t}\right)}{R}} = \sqrt{\frac{1.00\times 10^{-3}\, J/s}{10.0\Omega}} = 0.01A$$

21-1 패러데이 유도법칙

연습 21-3 크기가 0.300 T 인 균일한 자기장이 존재하는 공간이 있다. 반지름이 4.00 cm인 원형 회로를 회로의 면에 자기장이 수직으로 통과하도록 놓았다. 이 원형회로를 0.0100 초 동안에 90° 만큼 회전하여 원형회로의 면이 자기장과 평행하게 되었다. 이 시간 동안에 원형 회로에 유도되는 평균 유도 기전력을 구하여라.

풀이





원형회로의 면적을 통과하는 자기선속(원형도선의 면적을 통과하는 자기장 다발) 은 $\vec{B}\cdot\vec{S}$ 로 처음에는 원형도선의 면적 전체에 자기장이 통과하지만 0.01 초 후에는 원형도선이 수직으로 바뀌어 (면적을 통과하는) 자기 선속이 0 이다. 평균 유도 기전력은 단위시간 동안의 선속의 시간변화율이다.

유도기전력 $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} = -\dfrac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{dt}$

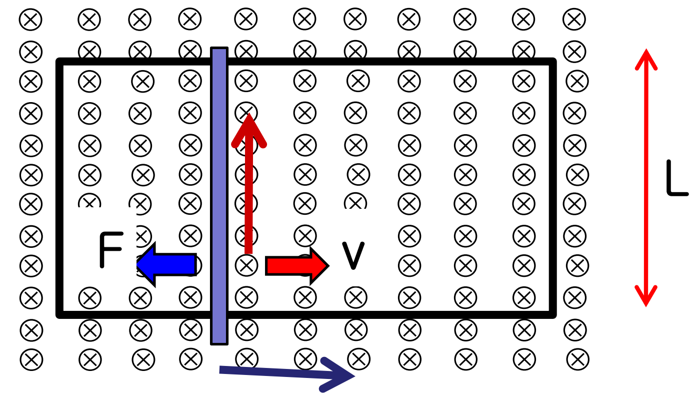
$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{BS\cos 90^\circ - BS\cos 0}{\Delta t} = +\frac{BS}{\Delta t} = \frac{B\left(\pi r^2\right)}{\Delta t} = \frac{(0.300T)[\pi\times(0.0400m)^2]}{0.0100s} = 0.150V$$

한편, 유도기전력을 방향은 시간에 따라 자기선속이 감소하므로 렌쯔의 법칙에 의해 자기선속의 감소를 막기 위한 방향이 되므로 시계방향으로 유도기전력이 생긴다.

21-1 패러데이 유도법칙

연습 21-5. 저항이 없는 직사각형 도선이 있고 세기가 B로 일정한 자기장이 모든 영역에서 지면에 수직하게 존재한다, 저항이 R 이고 길이가 L 인 금속막대를 일정한 속력 v 로 잡아당기면 금속막대를 통해 흐르는 전류의 세기는 얼마인가?

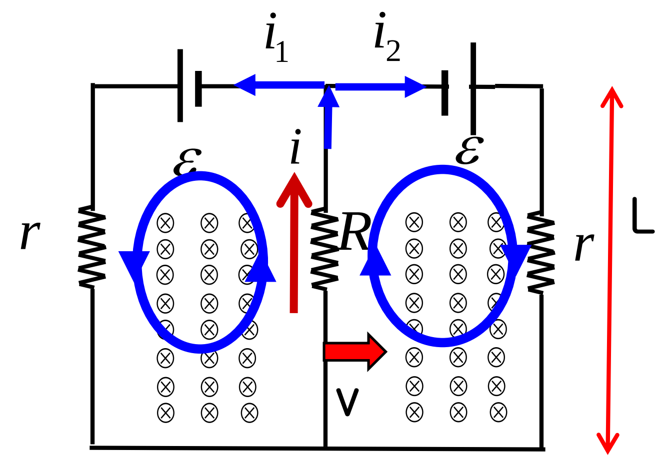
풀이 금속막대가 오른쪽으로 움직이면 좌측의 폐회로는 자속의 증가를 막기 위해 반시계 방향으로 기전력이 생기고 오른쪽의 회로는 자속이 감속하므로 반대로 기전력이 생긴다. 이에 해당하는 회로를 다음과 같이 그리고 직사각형의 도선의 저항을 r, 속막대의 저항을 R 이라고 가정하고 키르히호프 법칙을 적용한다.



$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\frac{d(S)}{dt} = B\frac{v\Delta tL}{dt} = BvL$$

키르히 호프 고리법칙으로 얻은 세 식을 연립하면

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ \varepsilon - i_1 r - iR = 0 \\ \varepsilon - i_2 r - iR = 0 \end{cases} \qquad i = \frac{2\varepsilon}{2R + r}$$



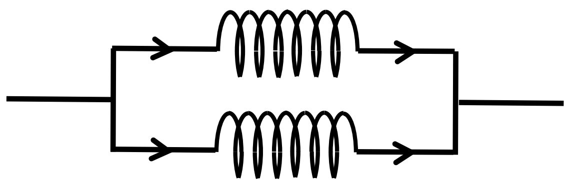
한편 조건에서 직사각형의 도선의 저항 r 은 0 이므로 금속막대를 통한 전류의 세기는 다음과 같다.

전류의 세기 : $\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BvL}{R}}$

금속막대를 오른쪽으로 v 의 속도로 잡아당기면 이 일률만큼 회로에서는 유도전류에 의한 자기력이 반대방향으로 생겨 같은 양의 일률이 소비된다.

21-2 인덕터와 인덕턴스

연습 21-6. 인덕턴스가 L 인 두 개의 코일이 서로 떨어져 평행으로 연결되어 있다. 이 병렬 연결의 총 인덕턴스는 얼마인가?



인덕턴스에 의해 유도되는 기전력

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

풀이

병렬연결에서는 두 인덕턴스에 걸리는 전압이 일정하고 자체인덕턴스 값이 각각 같은 코일이므로 두 코일에 흐르는 전류의 크기는 같다.

$$V_L = V_L \Rightarrow -L\frac{dI_1}{dt} = -L\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow \quad \therefore I_1 = I_2$$

각 코일에 흐르는 전류의 합은 전체 전류와 같으므로 각 코일에 흐르는 전류는 전체 전류의 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{I}{2}$$

전체 전압과 각 코일에 걸리는 전압은 같다(병렬연결이므로) 는 것과 각 코일에 흐르는 전류가 전체 전류의 $\frac{1}{2}$ 임을 이용하면 두 코일의 총 (등가) 인덕턴스를 얻을 수 있다.

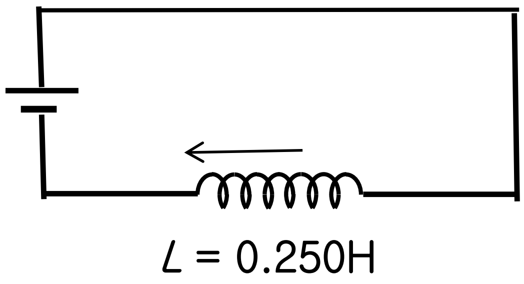
$$-L_{eq}\frac{dI}{dt} = -L\frac{dI_1}{dt} = -L\frac{dI_1}{dt} \Rightarrow -L_{eq}\frac{dI}{dt} = -L\frac{d}{dt}\left(\frac{I}{2}\right) \Rightarrow \therefore L_{eq} = \frac{L}{2}$$

21-2 인덕터와 인덕턴스

연습 21-7. 1/16 초 동안 솔레노이드에 흐르는 전류가 2.00 A 에서 0 A 로 일정하게 감소하고 있다. 이 솔레노이드의 인덕턴스가 0.250 H 일 때, 유도기전력의 크기를 구하여라.

풀이 인덕턴스 L 에 의한 유도기전력

유도기전력 $\varepsilon = -L\dfrac{dI}{dt}$

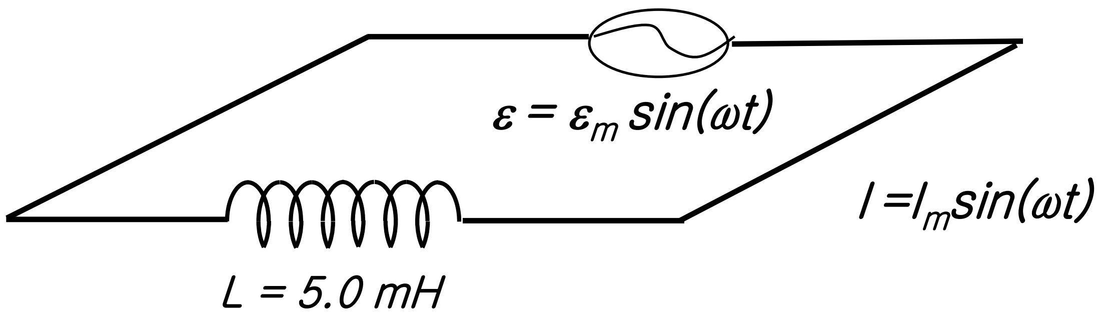


인덕턴스에 의한 역기전력으로 전류의 양이 감소하여 결국은 전류가 0 으로 되는 경우이므로 인덕턴스 L 에 의한 유도 기전력의 크기를 구하면 된다.

$$\varepsilon = \left| L\frac{dI}{dt} \right| = (0.250H)\frac{0-2.00}{1/16} = 8.00(V)$$

연습 21-10 인덕턴스가 5.00 mH 인 인덕터에 $I = I_m \sin(\omega t)$ 로 주어지는 전류가 흐른다. I_m = 0.200A 이고 교류전류의 진동수가 60.0 Hz 일 때, t =10.0ms 에서 유도기전력의 크기는 얼마인가?

풀이



인덕턴스 L 에 의한 유도기전력에 전류의 식을 넣어 계산한다.

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon = \left|L\frac{dI}{dt}\right| = L\frac{d}{dt}(I_m \sin \omega t) = LI_m\omega(\cos \omega t)$$

$$= (5.00 \times 10^{-3} H)(0.200 A)(2\pi \times 60.0 s^{-1})\cos(2\pi \times 60.0 s^{-1} \times 10^{-2} \times t) = 0.376V$$

기전력의 크기 : 0.376 V

21-3 RL 회로

연습 21-11 어떤 솔레노이드의 저항은 5.00Ω 이고 인덕턴스는 0.200 H 이다. 이 솔레노이드의 양단에 기전력이 1.50 V 인 전지를 연결하였다. 이 때 다음 물음에 답하여라.

(가) 평형상태에 이르렀을 때 전류는 얼마인가?

(나) 평형상태의 전류의 반에 해당하는 전류가 흐르게 되는 시간을 구하여라.

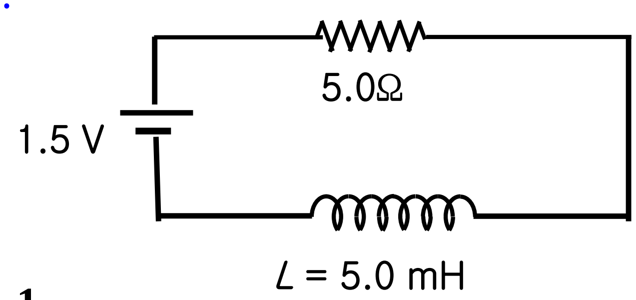
풀이 (가) 평형상태의 전류 :

RL 회로에 키르히호프 법칙을 적용하여 미분방정식의 해를 구한다. (RC회로와 거의 비슷하다)

- 해 : $I = \frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L}) = \frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-t/\tau_L})$ $\Leftarrow$ (미분방정식: $\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = 0$)

평형상태란 시간이 어느 정도 흘러서 전류가 정상상태인 경우이다.

$$(t \to \infty) \quad I_0 = \frac{\varepsilon}{R}(1-0) = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1.50V}{5.00\Omega} = 0.300A = 300mA$$



(나) 평형상태의 전류의 반에 도달하는 시간 : :

$$\frac{I_0}{2} = \frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L}) = I_0(1-e^{-Rt/L}) \quad \Rightarrow \quad e^{-Rt/L} = \frac{1}{2}$$

양 변에 로그를 걸어 시간 t 를 구한다. $\Rightarrow -\frac{Rt}{L} = -\ln 2$

$$\therefore t = \ln 2 \times \frac{L}{R} = 0.693 \times \frac{0.200}{5.00} = 0.0280s = 28.0ms$$

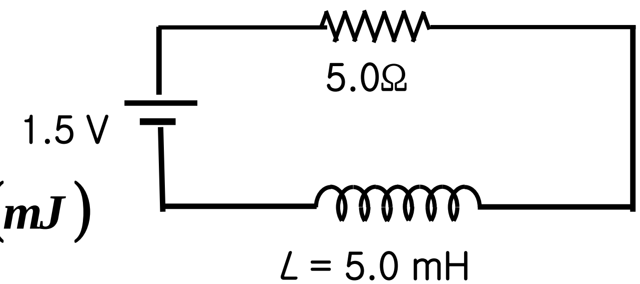
21-3 RL 회로

연습 21-11 계속

(다) 평형 상태에 도달한 후에 자기장에 저장된 에너지는 얼마인가?

(라) 자기장에 저장된 에너지가 평형 상태 에너지의 반에 도달하게 되는 시간을 구하여라.

풀이



(다) 평형상태의 자기장 저장 에너지:

$$U_0 = \frac{1}{2}LI_0^{\,2} = \frac{1}{2}\times 0.200\times(0.300)^2 = 9.00\times 10^{-3} = 9.00(mJ)$$

(라) 자기장의 에너지가 전체의 $\frac{1}{2}$ 에 도달하는 시간 : :

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}U_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}LI_0^{\,2}\left(1-e^{-Rt/L}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}LI_0^{\,2}\right)$$

$$\left(1-e^{-Rt/L}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1-e^{-Rt/L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(양 변에 로그를 걸어 시간 t 를 구한다.)

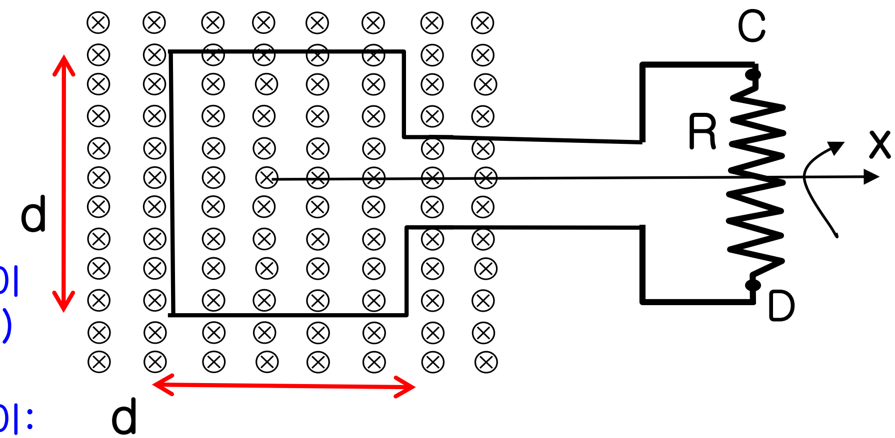
$$e^{-Rt/L} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{L}{R}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore t = -\frac{0.200}{5.00}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4.90\times 10^{-2}s = 49.0(ms)$$

21-4 발전기의 원리

연습 21-13. 균일한 자기장 내에 면적이 S= d² 인 사각형 도선에 연결된 그림과 같은 폐회로 전체 저항이 R 이다. 자기장의 방향은 지면을 향하고 크기는 B 이다. 이 도선을 x 축에 대해서 시계 방향으로 90° 회전시켜서 t 초 만에 도선의 면과 자기장이 이루는 각이 0 이 되도록 한다. (가) t 초 동안 저항을 통하여 흐르는 전류의 방향은? (나) 이 회로에 t 초 동안 유도되는 평균 기전력을 구하고 회로에 흐르는 평균 전류의 크기를 구하여라.

풀이 (가) 도선의 면을 통과하는 자기선속이 감소하므로 이를 복원하는 방향으로 유도전류가 발생하므로 시계방향의 유도전류가 된다



처음상태 : 도선의 면 벡터와 자기장이 이루는 각이 0° 일 때 (또는 자기장과 도선이 의 면이 90° 일 때)

나중상태 : 도선의 면 벡터와 자기장이 이루는 각이: 90° 일 때 (또는 자기장과 도선의 면이 서로 0° 일 때)

(나) 평균 기전력

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta}{\Delta t}(BNS\cos\omega t) = BNS\frac{\Delta(\cos\omega t)}{\Delta t}$$

$$= BNS\frac{(\cos 90^\circ - \cos 0^\circ)}{t} = \frac{BS}{t} = \frac{Bd^2}{t}$$

(유도코일은 1 개 이므로 N=1이다.)

평균 전류

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bd^2}{tR}$$

21-6 맥스웰 방정식과 전자기파

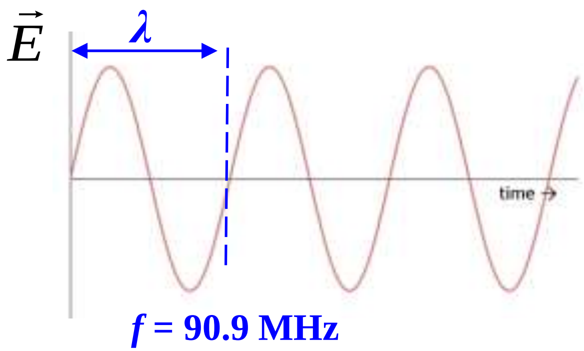
연습 21-17. 한 라디오 방송국에 방출하는 전자기파의 진동수가 90.9 M Hz 이다, 이 전자기파의 파장은 얼마인가?

풀이 전자기파는 일정한 속력 c 를 갖는 횡파이다.

- 진동수

$$f = 90.9\times10^{6}\ Hz = 9.09\times10^{7}\, s^{-1}$$

- 전자기파의 속력 $c = \dfrac{\lambda}{T} = f\lambda$



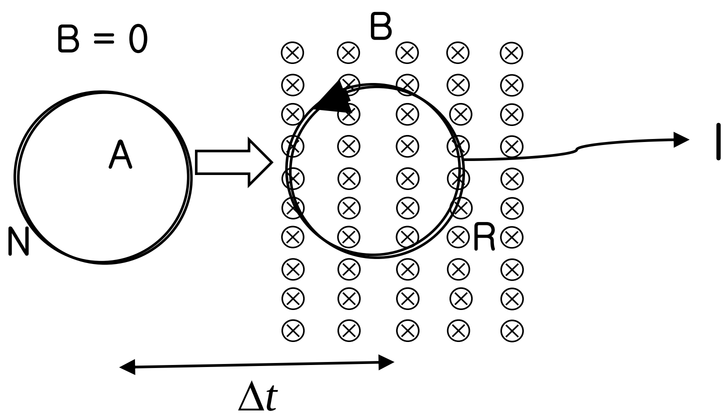
- 전자기파의 파장

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00\times10^{8}\ Hz}{9.09\times10^{7}\, Hz} = 3.30\ (m)$$

발전 문제

연습 21-18. 자기장 B 가 있는 곳에 탐지 코일을 빠르게 가져 왔다. 이 탐지 코일은 솔레노이드 형태로 면적이 A 이고 감은 수는 N 이다. 이 코일의 저항은 R 이며 코일을 통과하는 자기선속은 시간 Δt 동안 0 에서 최대로 증가한다. 이 코일에 유도되는 평균전류를 I 라고 할 때, 전류에 의해 이동한 총 전하량과 자기장과의 관계를 구하라.

풀이



솔레노이드에 유도되는 기전력

$$\varepsilon = -N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{N\Delta(\vec{B}\cdot\vec{A})}{\Delta t} = -\frac{NA(\Delta B)}{\Delta t} = -\frac{NA(B-0)}{\Delta t} = -\frac{NAB}{\Delta t}$$

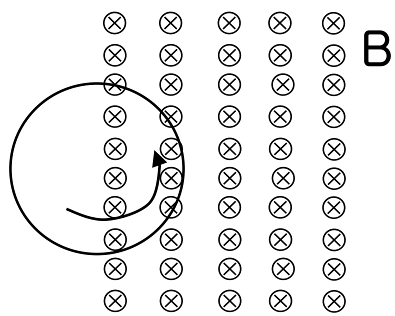
평균전류 : $I = \dfrac{\varepsilon}{R}$ $\quad$ $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t} = \dfrac{(Q-0)}{\Delta t} = \dfrac{Q}{\Delta t}$

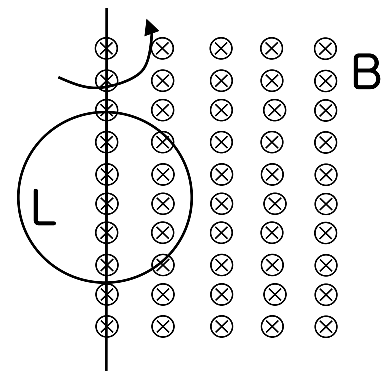
$$I = \frac{NAB}{R\Delta t} = \frac{Q}{\Delta t} \Rightarrow \qquad \therefore Q = \frac{NAB}{R}$$

발전문제

연습 21-21 그림 처럼 일부 영역에 자기장이 존재한다, 자기장 영역의 가장자리 한 점을 중심으로 원형 도선이 있다, 이제 이 도선을 (ㄱ)도선의 중심을 지나고 지면에 수직인 축을 중심으로 (ㄴ) 도선의 중심을 지나고 지면에 놓여 있는 가장자리와 나란한 축을 중심으로 일정한 각속도 ω 로 회전시키는 경우를 생각하자. (가) (ㄱ)의 경우 일정한 자기장 속에서 유도되는 최대 전류값은 ω 가 증가함에 따라 어떠한가? (나) (ㄴ)의 경우 일정한 자기장 속에서 유도되는 최대 전류 값은 ω 가 증가함에 따라 어떠한가?(다) (ㄱ)의 경우 일정한 비율로 증가하는 자기장 속에서 유도되는 최대 전류값은 ω 가 증가함 따라 어떠한가?

풀이





(가) (ㄱ)의 경우

자속의 변화가 없으므로 유도기전력이 0 이 되며 유도전류도 0 이다. 최대전류는 변화 없다

(나) (ㄴ)의 경우 $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} = -\dfrac{d}{dt}(BA\cos\omega t) = BA\omega\sin\omega t$

최대전류값 $I_{\max} = \dfrac{BA\omega}{R} \Rightarrow I_{\max} \propto \omega$ (ω에 비례하여 최대전류가 증가)

(다) (ㄱ)의 경우

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA) = -A\frac{dB}{dt} = a \qquad \left(\because \frac{dB}{dt} = a = \text{일정상수}\right)$$

전류 $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{a}{R} = \text{일정상수}$ ∴ 최대전류($I_{\max}$)는 변화하지 않음.