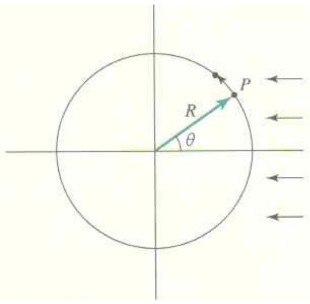
대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (7장) - by 송현석

1. 반지름이 $5.00\,cm$인 원기둥 표면에 줄이 감겨 있다. 원기둥이 축을 중심으로 자유롭게 회전한다면 줄을 원기둥 위에서 미끄러짐 없이 $10.0\,cm/s$의 일정한 속력으로 잡아당길 때 원기둥의 각속도는 얼마인가?

$$r = 5.00\,cm = 0.05\,m, \qquad v = 10.0\,cm/s = 0.10\,m/s$$

$$v = r\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{v}{r} = \frac{0.10\,m/s}{0.05m} = 2.00\,rad/s$$

2. 반지름이 R인 원 위를 등각속도 ω로 원운동 하는 물체가 있다. 이제 아래 그림과 같이 빛을 쪼여 스크린 상에 맺는 상의 운동을 생각하자. 상의 위치, 속도, 가속도를 구하여라.



$$v = \frac{s}{t}, \qquad \omega = \frac{\theta}{t}$$

$$y = R\sin\theta = R\sin\omega t, \qquad v_y = \omega R\cos\omega t, \qquad a_y = -\omega^2 R\sin\omega t$$

3. 컴퓨터의 하드디스크 안에는 '플래터'라 불리는 자성체를 입힌 원판이 들어 있다. 지름이 3.5인치인 플래터가 7200rpm(분당 회전수) 의 각속력으로 회전한다고 하자.
(1) 플래터가 한 바퀴 회전하는 데 걸리는 시간은 얼마인가?

$$T = \frac{1\min}{7200} = \frac{60s}{7200} = \frac{1}{120}s$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(7200\times 2\pi)/60\,s} = \frac{1}{7200/60\,s} = \frac{1}{120}\,s$$

(2) 플래터의 각속력을 rad/s로 나타내어라.

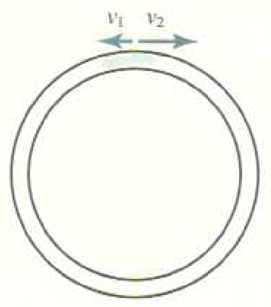
$$\omega = \frac{2\pi\ rad}{T} = \frac{2\pi\ rad}{\frac{1}{120}s} = 240\pi\ rad/s \qquad \text{or} \qquad \omega = \frac{7200\times 2\pi\ rad}{60s} = 240\pi\ rad/s$$

(3) 플래터 가장자리 한 점의 순간속력은 얼마인가?

$$D = 3.5inch = 3.5inch \times \frac{0.0254m}{1inch} \approx 0.089m \qquad \Rightarrow \qquad r \approx 0.0445m$$

$$v = r\omega = 0.0445m \times 240\pi\ /s \approx 33.5m/s$$

4. 원형 튜브 내부에 정지해 있던 물체가 내부압력으로 두 개로 쪼개지면서 서로 반대방향으로 운동하였다. 질량비 3 : 1로 두 물체가 갈라질 때, 두 물체의 각속도비와 다시 처음 만나는 지점을 구하시오. 튜브 내부의 마찰력을 무시한다.



$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad m_1 r\omega_1 = m_2 r\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \Rightarrow \quad m \sim \frac{1}{\omega}$$

$$m_1 : m_2 = 3 : 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 : \omega_2 = 1 : 3$$

$+x$축으로부터 $\frac{3}{2}\pi$ 지점(시계의 9시지점)에서 만난다.

5. 경주용 차가 $4\pi\, km$의 원형트랙 다섯 바퀴를 도는 데 10.0분이 걸렸다.
이때 다음을 구하여라.
(1) 주기와 각속도

$$2\pi r = 4\pi\, km \quad \Rightarrow \quad r = 2\, km, \qquad v = \frac{s}{t} = \frac{5\times 2\pi r}{t}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{s/t} = \frac{2\pi r}{(5\times 2\pi r)/t} = \frac{2\pi r}{10\pi r/t} = \frac{1}{5}t = \frac{1}{5}\times(10.0\times 60\, s) = \frac{1}{5}\times 600\, s = 120\, s$$

$$\omega = \frac{2\pi\ rad}{T} = \frac{2\pi\ rad}{120\, s} = \frac{1}{60}\pi\ rad/s \qquad \text{or} \qquad \omega = \frac{5\times 2\pi\ rad}{(10.0\times 60\, s)} = \frac{1}{60}\pi\ rad/s$$

(2) 접선속력과 구심가속도

$$v = r\omega = (2\times 10^3\, m)\times\frac{1}{60}\pi\ /s = \frac{100}{3}\pi\ m/s \approx 104.72\, m/s$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{100}{3}\pi\ m/s\right)^2}{2\times 10^3\, m} = \frac{5}{9}\pi^2\, m/s^2 \approx 5.48\, m/s^2$$

$$a_c = r\omega^2 = (2\times 10^3\, m)\times\left(\frac{1}{60}\pi\ /s\right)^2 = \frac{5}{9}\pi^2\, m/s^2 \approx 5.48\, m/s^2$$

$$a_c = v\omega = \frac{100}{3}\pi\ m/s\times\frac{1}{60}\pi\ /s = \frac{5}{9}\pi^2\, m/s^2 \approx 5.48\, m/s^2$$

6. 질량 $0.50\,kg$의 물체를 반지름이 $1.00\,m$인 줄에 매달아 각속도 $4\pi\ rad/s$로 돌리고 있을 때 줄에 걸리는 장력을 구하여라. 줄의 질량은 무시할 수 있을 정도로 가볍다.

$$F_c = ma_c = mr\omega^2 = 0.50\,kg \times 1.00\,m \times (4\pi\ \ rad/s)^2$$
$$= 8.00\pi^2\,kg \cdot m/s^2$$
$$= 8.00\pi^2\,N \approx 78.96\,N$$

7. 동일한 두 개의 바퀴 A, B가 있다. 바퀴 B는 A보다 2배 큰 각속도로 회전한다. 바퀴 A의 테두리 위 한 점에서의 구심가속도는 바퀴 B의 테두리 위 한 점에서의 구심가속도의 몇 배인가?

$$\omega_B = 2\omega_A$$
$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_{c_A} = \dfrac{v_A^2}{r_A} = r_A\omega_A^2 = r\omega_A^2 \\ a_{c_B} = \dfrac{v_B^2}{r_B} = r_B\omega_B^2 = r\omega_B^2 = r(2\omega_A)^2 = 4r\omega_A^2 = 4a_{c_A} \end{cases} \qquad (r_A = r, \quad \omega_B = 2\omega_A)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a_{c_A}}{a_{c_B}} = \frac{a_{c_A}}{4a_{c_A}} = \frac{1}{4}$$

8. (1) 지구 위도 30° 지점과 적도(위도 0°) 지점의 각속도를 각각 구하고 비교하여라.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi\ rad}{24 \times 60 \times 60\,s} \approx 7.2722 \times 10^{-5}\ rad/s$$

위도 30° 지점과 적도 지점의 각속도는 동일하다.

(2) 적도에 정지해 물체를 위도 30° 지점으로 즉시 옮겨 놓는다면 어떤 운동을 하겠는가? (단, 적도에서 지구의 반지름은 $6.4 \times 10^6 m$이고 지구는 완전한 구로 간주한다.)

적도 지점에서 $v = r\omega \approx (6.4 \times 10^6\,m) \times (7.2722 \times 10^{-5}\ rad/s) \approx 465\,m/s$

위도 30° 지점에서 $v' = r'\omega = r\cos 30^\circ\,\omega$

$$\approx (6.4 \times 10^6\,m) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (7.2722 \times 10^{-5}\ rad/s)$$
$$\approx 403\,m/s$$

$465\,m/s - 403\,m/s = 62\,m/s$ 속력으로 동쪽으로 운동

대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (7장) - by 송현석

9. 지구 표면에 있는 물체는 지구의 자전에 의한 원운동을 하게 된다.
지구의 적도상에 정지해 있는 물체의 구심가속도는 얼마인가?
(단, 적도에서 지구의 반지름은 $6.4\times10^6 m$이다.)

$$R = 6.4\times10^6 m$$

$$1\ day = 1\ day \times \frac{24\ hour}{1\ day}\times\frac{60\ \min}{1\ hour}\times\frac{60\ s}{1\ \min} = 86400\ s$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{86400s} \approx 7.27\times10^{-5} rad/s$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = 6.4\times10^6 m\times(7.27\times10^{-5} rad/s)^2 = 3.38\times10^{-2} m/s^2$$

10. (1) 어떤 사람이 인천(위도 약 37도)에 서 있다고 하자. 지구 자전에 의한 이 사람의 선속력은 몇 km/h인가? 또 구심가속도의 크기는 g(중력가속도의 크기)의 몇 배인가? (단, 지구 반지름은 대략 $6.4\times10^6 m$이다.)

$$r = 6.4\times10^6 m, \qquad r' = r\cos37^\circ \approx 5.11\times10^6 m$$

$$v' = r'\omega = 5110km\times\frac{2\pi}{24h} \approx 1338\,km/h = 372\,m/s$$

$$a'_c = \frac{v'^2}{r'} = \frac{(372\,m/s)^2}{5.11\times10^6 m} \approx 0.027\,m/s^2 \approx 0.00276\,g$$

(2) 지구 공전운동에 의한 지구의 선속력과 구심가속도의 크기를 구하여라.
(단, 지구와 태양의 질량 중심점 사이 거리는 약 $1.5\times10^{11} m$이다.)

$$r = 1.5\times10^8 km = 1.5\times10^{11} m$$

$$v'' = r''\omega = (1.5\times10^8 km)\times\frac{2\pi}{365\times24h} \approx 1.075\times10^5 km/h = 2.99\times10^4 m/s$$

$$a''_c = \frac{v''^2}{r''} = \frac{(2.99\times10^4 m/s)^2}{(1.5\times10^{11} m)} \approx 0.006\,m/s^2 \approx 0.000608\,g$$

11. 경사각이 θ인 원형 경주용 도로에서 자동차가 미끄러지지 않고 안전하게 달릴 수 있는 최대 속력은 얼마인가? 단, 이 원형 도로의 반지름은 r이다. (마찰은 없다고 가정하라.)

$$F_y = N\cos\theta - mg = ma_y \qquad \Rightarrow \qquad Ncos\theta - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$F_x = Nsin\theta = ma_x = ma_c = m\frac{v^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{mg}{\cos\theta}sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = rgtan\theta \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{rgtan\theta}$$

12. 처음에 정지해 있던 팽이를 돌려 5.00초 후에는 300rpm이 되었다. 처음 5.00초 동안 평균 각가속도와 회전횟수를 구하여라.

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{s/t}{r} = \frac{(300\text{회} \times 2\pi r)/60\,s}{r} = \frac{(300\text{회} \times 2\pi\ rad)}{60\,s} = \frac{600\pi\ rad}{60\,s} = 10\pi\ rad/s$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{10\pi\ rad/s - 0\ rad/s}{5\,s} = \frac{10\pi\ rad/s}{5\,s} = 2\pi\ rad/s^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \theta - \theta_0 = \frac{\omega - \omega_0}{2\alpha} = \frac{(10\pi\ rad/s)^2 - (0\ rad/s)^2}{2 \times 2\pi\ rad/s^2}$$

$$= \frac{100\pi^2\ rad^2/s^2}{4\pi\ rad/s^2}$$

$$= 25\pi\ rad$$

$$\text{회전횟수} = \frac{\Delta\theta}{2\pi\ rad} = \frac{25\pi\ rad}{2\pi\ rad} = 12.5\ \text{바퀴}$$

13. 질량을 무시할 수 있는 길이 L인 실 끝에 매달린 질량 m인 추가 수직축에 대해서 각이 θ_0일 때 속력이 v_0였다. 이때 이 추의 구심가속도와 접선가속도의 성분을 구하여라. 구심가속도가 최대가 될 때의 각과 구심가속도를 구하여라.

◎ -y축을 기준으로 풀 경우 (x축이 h=0)

$$F_c = T - mg\cos\theta_0 = ma_c = m\frac{v_0^2}{L} \qquad \Rightarrow \qquad a_c = \frac{T - mg\cos\theta_0}{m} = \frac{v_0^2}{L}$$

$$F_t = mg\sin\theta_0 = ma_t \qquad \Rightarrow \qquad a_t = g\sin\theta_0$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgL\cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgL\cos\theta$$

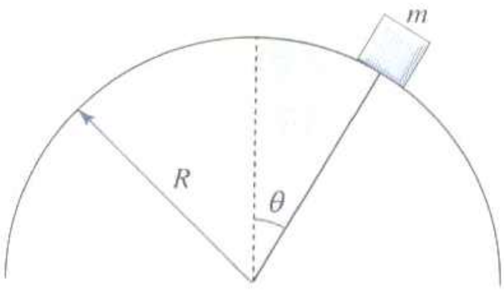
$$v^2 = v_0^2 + 2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$a_c(\theta) = \frac{v^2}{L} = \frac{v_0^2}{L} + 2g(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$\cos\theta = 1$ 즉 $\theta = 0^\circ$ 일때 최대값을 갖는다.

$$a_{c\,\max}(\theta = 0^\circ) = \frac{v^2}{L} = \frac{v_0^2}{L} + 2g(1 - \cos\theta_0)$$

14. 그림과 같이 반구 꼭대기 점에서 질량이 m인 물체가 정지해 있다가 미끄러져 내려오기 시작한다. 면과 물체 사이 마찰은 없고, 물체는 결국 반구로부터 분리되어 떨어지게 된다.



(1) 꼭대기 점에서 각 θ만큼 미끄러져 내려왔을 때, 물체의 속력을 구하여라.

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = (\frac{1}{2}mv^2 - 0) + (mgRcos\theta - mgR) = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR(\cos\theta - 1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

(2) 이 물체가 반구로부터 분리되려고 하는 점에서는 수직항력이 0이다. 이때의 각을 θ_0라 하면 $\cos\theta_0$는 얼마인가?

$$F_t = mgsin\theta = ma_t \qquad \Rightarrow \qquad a_t = gsin\theta$$

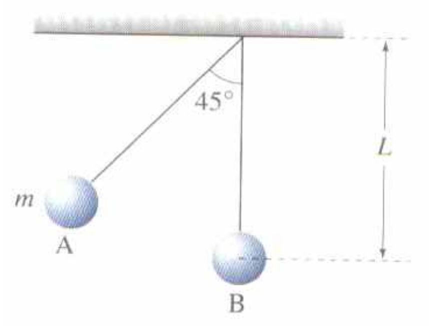
$$F_c = mgcos\theta - N = ma_c = m\frac{v^2}{R} = m\frac{2gR(1-\cos\theta)}{R} = 2mg(1-\cos\theta)$$

$$mgcos\theta - N = 2mg(1-\cos\theta)$$

$$N = mgcos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = 3mgcos\theta - 2mg = mg(3\cos\theta - 2)$$

$$mg(3\cos\theta_0 - 2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta_0 = \frac{2}{3}$$

15. 길이 L인(질량을 무시할 수 있는) 실 끝에 질량 m인 추가 매달려 진동한다. 수직축에 대해서 최대각이 45°(A점)이고 제일 밑(B점)에서 속력은 v_0이다.



$$F_t = mgsin\theta = ma_t \quad \Rightarrow \quad a_t = gsin\theta$$
$$F_c = T - mgcos\theta = ma_c = m\frac{v^2}{L} \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{v^2}{L}$$

(1) 45° 위치(A점)에서 가속도의 방향은?

$$\theta = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{v^2}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = a_t$$

접선방향

(2) 제일 밑(B점)에서 가속도의 방향은?

$$\theta = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad a_t = g\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = a_c$$

구심방향(윗방향)

(3) 제일 밑(B점)에서 실의 장력의 크기는?

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = (\frac{1}{2}mv^2 - 0) + (0 - mgL(1 - \cos 45^\circ)) = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgL(1 - \cos 45^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gL(1 - \cos 45^\circ) = gL(2 - \sqrt{2})$$

$$T - mgcos\theta = ma_c = m\frac{v^2}{L}$$

$$T - mgcos0^\circ = m\frac{v_0^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T = mgcos0^\circ + m\frac{v_0^2}{L}$$

$$= mg + m\frac{v_0^2}{L}$$
$$= mg + mg(2 - \sqrt{2})$$
$$= mg(3 - \sqrt{2})$$