대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (16장) - by 송현석

1. 반지름이 $1.00\,m$인 원형공의 중심에 전하량 $2.00\,\mu C$인 점전하가 놓여 있다. 이 원형공을 지나는 전기선속을 구하여라. 만약 반지름이 절반으로 줄어든다면, 그때 그 공을 지나는 전기선속은 얼마인가?

가우스 법칙 (전기선속은 반지름과 무관하다.)

$$\Phi_S = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{(2.00\times 10^{-6}\,C)}{(8.85\times 10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2)} \approx 2.26\times 10^5\,N\cdot m^2/C$$

2. 표면전하밀도 σ로 분포된 무한 평면이 있고 그 무한 평면에 두께 d로 부피전하밀도 ρ인 전하분포가 덧붙여져 있다. 모든 위치에서의 전기장을 구하여라.

◎ 두께 d이고, 부피전하밀도 ρ인 부피전하에 의한 전기장

$x > \frac{d}{2}$ 인 영역

$$\Phi_S = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E_{\rho(in)}2S, \quad \Phi_S = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho Sd}{\epsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E_{\rho(in)}2S = \frac{\rho Sd}{\epsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E_{\rho(in)} = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}$$

$x < \frac{d}{2}$ 인 영역

$$\Phi_S = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E_{\rho(out)}2S, \quad \Phi_S = \frac{q_{\in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho S2x}{\epsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E_{\rho(out)}2S = \frac{\rho S2x}{\epsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E_{\rho(out)} = \frac{\rho 2x}{2\epsilon_0}$$

◎ 표면전하밀도 σ인 표면전하에 의한 전기장

$$\Phi_S = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E_\sigma 2S, \quad \Phi_S = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E_\sigma 2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E_\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

◎ 두께 d이고, 부피전하밀도 ρ인 부피전하의 우측면에
표면전하밀도 σ인 표면전하가 붙어있는 경우
부피전하의 중심을 $x=0$으로 잡으면

$$x > \frac{d}{2} \quad\Rightarrow\quad E = E_{\rho(out)} + E_\sigma = +\frac{\rho d}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{(\rho d + \sigma)}{2\epsilon_0}$$

$$0 < x < \frac{d}{2} \quad\Rightarrow\quad E = E_{\rho(in)} - E_\sigma = +\frac{\rho\ 2x}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{(\rho\ 2x - \sigma)}{2\epsilon_0}$$

$$-\frac{d}{2} < x < 0 \quad\Rightarrow\quad E = -E_{\rho(in)} - E_\sigma = -\frac{\rho\ 2|x|}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\rho\ 2x}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{(\rho\ 2x - \sigma)}{2\epsilon_0}$$

$$x < -\frac{d}{2} \quad\Rightarrow\quad E = -E_{\rho(out)} - E_\sigma = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{(\rho d + \sigma)}{2\epsilon_0}$$

3. 각 변이 원점을 기준으로 x, y, z축을 따라 나란히 놓여 있고 그 길이가 L인 정육면체가 놓여 있다. 일정한 전기장이 x방향으로 가해질 때 이 정육면체를 지나는 알짜 선속을 구하여라.

0 (알짜 선속은 없다.)

4. 무한히 길면서 속이 빈, 반지름이 R인 원통 모양 도체가 있다. 이 원통은 단위 길이당 λ의 선전하밀도로 대전되어 있다. 원통 내부와 외부에서의 전기장을 구하여라. 이 계의 전위도 구할 수 있겠는가? (도움말: 이 계의 전위를 구하려면, 무한히 먼 위치를 전위의 기준점으로 취하면 곤란하게 된다.)

◎ 무한히 길면서 속이 빈 반지름이 R인 원통 모양 도체에 의한 전기장

$r > R$ 인 영역에서의 전기장

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_{(out)} 2\pi r L, \quad \Phi_S = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{(out)} 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{(out)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

$r < R$ 인 영역에서의 전기장

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_{(in)} 2\pi r L, \quad \Phi_S = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{(in)} 2\pi r L = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{(in)} = 0$$

무한히 길면서 속이 빈 반지름이 R인 원통 모양 도체에 의한 전위

$r > R$ 인 영역에서의 전위

$$V(r) = -\int_{r_{(V=0)}}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{r}{r_{(V=0)}}\right)$$

$r < R$ 인 영역에서의 전위

$$V(r) = -\int_{r_{(V=0)}}^{R} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} dr - \int_R^r 0 \ dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{R}{r_{(V=0)}}\right) - 0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{R}{r_{(V=0)}}\right)$$

$r_{(V=0)} = \infty$ 이면 $\ln(0)$ 이 되어 수학적으로 정의가 되지 않는다.

◎ 무한히 길면서 속이 고르게 찬 반지름이 R인 원통 모양에 의한 전기장

$r > R$ 인 영역에서의 전기장

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_{(out)} 2\pi r L, \quad \Phi_S = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{(out)} 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{(out)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

$r < R$ 인 영역에서의 전기장

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_{(in)} 2\pi r L, \quad \Phi_S = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L \frac{r^2}{R^2}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{(in)} 2\pi r L = \frac{\lambda L \frac{r^2}{R^2}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{(in)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^2}$$

무한히 길면서 속이 고르게 찬 반지름이 R인 원통 모양 도체에 의한 전위

$r > R$ 인 영역에서의 전위

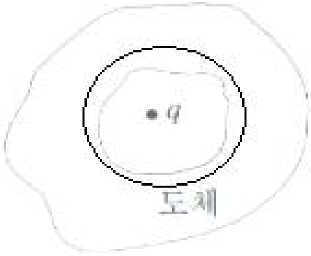
$$V(r) = -\int_{r_{(V=0)}}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{r}{r_{(V=0)}}\right)$$

$r < R$ 인 영역에서의 전위

$$V(r) = -\int_{r_{(V=0)}}^{R} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} dr - \int_R^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^2} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{R}{r_{(V=0)}}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}\frac{1}{2}(r^2 - R^2)$$

대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (16장) - by 송현석

5. 그림과 같이 속이 빈 도체가 있다. 이 도체 내부에 점전하 q가 있다. 이 도체의 내부 벽면에 유도된 총 전하량은 $-q$임을 보여라.



도체 내부에 가우스면을 그리면 도체 내부에서는 전기장이 0이므로 그린 가우스면을 지나는 전기선속은 0이다. 따라서 그린 가우스면 내부의 총 전하도 0이어야 한다.
속이 빈 도체 내부에 전하 q가 있으므로 그린 가우스면 내부의 총 전하량이 0이려면 그린 가우스면 안쪽의 도체 표면에는 전하량이 -q가 되는 전하가 존재해야 한다.

6. 전하량 Q로 대전된 도체구를 다른 공 껍질 모양 도체가 둘러싸고 있다. 두 도체의 중심은 동일하다.

(1) 둘러싼 껍질 모양 도체의 내부 벽면에 유도된 총 전하량은 얼마인가?

둘러싼 껍질 모양 도체 내부에 가우스면을 그리면 도체 내부에서는 전기장이 0이므로 그린 가우스면을 지나는 전기선속은 0이다. 따라서 그린 가우스면 내부의 총 전하량도 0이어야 한다. 내부 도체구에 전하량 Q가 있으므로 그린 가우스면 내부의 총 전하량이 0이려면 그린 가우스면 안쪽 둘러싼 껍질 모양 도체의 내부 벽면에 -Q의 전하량이 유도되야 한다.

(2) 이제 껍질 모양 도체를 알짜전하량 q로 대전시켰다. 이때 문제 (1)의 답은 어떻게 변하는가?

알짜전하량 q는 둘러싼 껍질 모양 도체 내부 벽면에 유도된 전하에는 아무런 영향을 미치지 않는다. 따라서 둘러싼 껍질 모양 도체의 내부 벽면에 그대로 -Q의 전하량이 유도된다. 둘러싼 껍질 모양 도체의 알짜전하가 0이었다면 둘러싼 껍질 모양 도체의 외부 벽면에 유도된 전하량은 Q이고, 알짜전하 q로 대전되었다면 둘러싼 껍질 모양 도체의 외부 벽면에 유도된 전하량은 Q+q가 된다.

7. 중심이 같고 반지름이 각각 $5.00\,cm$, $10.0\,cm$인 원형 도체 공껍질이 놓여 있다.
이 두 도체 공껍질 위에 각각 $4.00\,\mu C$, $-4.00\,\mu C$ 의 전하량이 분포되어 있다.
이 공껍질의 중심에서부터 $3.00\,cm$, $6.00\,cm$, $12.0\,cm$위치에서 전기장을 각각 구하여라.

$r = 3.00\,cm$ 인 위치

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\,4\pi r^2 \\ \Phi_S &= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

$r = 6.00\,cm$ 인 위치

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\,4\pi r^2 \\ \Phi_S &= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{q_{5.00\,cm}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = \frac{q_{5.00\,cm}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{5.00\,cm}}{r^2} = (8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(4\times 10^{-6}\,C)}{(0.06\,m)^2}$$

$$\approx 9.988\times 10^6\,N/C$$

$r = 12.0\,cm$ 인 위치

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\,4\pi r^2 \\ \Phi_S &= \frac{q_{\in}}{\epsilon_0} = \frac{q_{5.00\,cm}+q_{10.0\,cm}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = \frac{q_{5.00\,cm}+q_{10.0\,cm}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{5.00\,cm}+q_{10.0\,cm}}{r^2}$$

$$= (8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(4\times 10^{-6}\,C)+(-4\times 10^{-6}\,C)}{(0.06\,m)^2}$$

$$= 0$$

8. 도체의 내부에 반지름이 R인 공 모양의 빈 공간을 만들고, 그 공간의 중심점에 점전하 q를 두었다.
(1) 점전하로부터 거리 $R/2$ 떨어진 점의 전기장 세기는 얼마인가?

반지름 $R/2$인 가우스면 안에 점전하 q가 있으므로 가우스법칙으로 전기장을 계산하면

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\times 4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \\ \Phi_S &= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E\times 4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(R/2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

(2) 이때 도체의 빈 공간 표면, 즉 도체 내부면에 매우 가까운 점의 전기장 세기는 얼마인가?

점전하 q에서 거리 R만큼 떨어진 곳의 전기장과 같다.

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E \times 4\pi R^2$$
$$\Phi_S = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow \quad E \times 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

(3) (2)로부터 알 수 있는 도체 내부면에 유도된 면전하밀도는 얼마인가?

중심에 점전하 q가 있으므로 도체의 내부면에는 $-q$의 전하량이 유도된다.

도체 내부면의 면적 $A = 4\pi R^2$ 이므로 면전하밀도는 $\sigma = \frac{-q}{A} = \frac{-q}{4\pi R^2} = -\frac{q}{4\pi R^2}$ 이다.

도체 표면의 면전하밀도가 σ이면 도체 표면에서 매우 가까운 점에서의 전기장은 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 이다.

$\sigma = E\epsilon_0$ 이므로 $\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{R^2} \times \epsilon_0 = \frac{-q}{4\pi R^2} = -\frac{q}{4\pi R^2}$ 임을 알 수 있다.

9. 지표면 위치의 전기장은 보통 $100\,V/m$ 정도가 된다고 하자. 지구 전체의 표면에 이런 전기장이 있다면 무한 위치를 기준점으로 할 때 지표면의 전위는 얼마인가?
(단, 지구반지름은 $R = 6.37 \times 10^6 m$라 하자.)

전기장 E를 발생시키는데 필요한 전하 q가 지구 중심에 있다면, 지구 반지름을 R이라 할 때, 지표면에서의 전기장은 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$ 이고 전위는 $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$ 이다.

전위와 전기장 사이에는 $V = -\int_\infty^R E\, dr$ 의 관계가 있다.

따라서 지표면의 전위는

$$\begin{aligned} V = -\int_\infty^R E\, dr = -\int_\infty^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^R &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2} \times R \\ &= E \times R \\ &= (10^2\,V/m) \times (6.37 \times 10^6 m) \\ &= 6.37 \times 10^8\,V \text{ 이다.} \end{aligned}$$

10. 반지름이 $R = 12.0\,cm$인 원형 부도체 공에 총 전하량 $32.0\,\mu C$이 골고루 분포되어 있다.
이때 공의 중심, 반지름의 절반 위치, 공의 표면에서 전기장과 정전퍼텐셜을 구하여라.
공의 중심에서 $50.0\,cm$ 떨어진 곳에서 전기장과 정전퍼텐셜을 구하여라.
(단, $r \to \infty$에서 전기퍼텐셜은 0으로 선택한다.)

◎ $r > R$ 인 경우

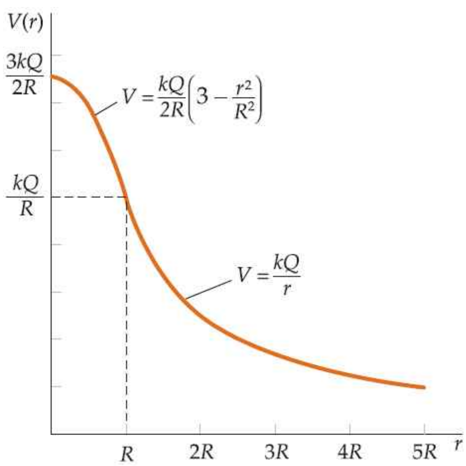
$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E\,4\pi r^2 \\ \Phi_S &= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$V = -\int_\infty^r E\ dr = -\int_\infty^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

◎ $r < R$ 인 경우

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E\,4\pi r^2 \\ \Phi_S &= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r$$

$$\begin{aligned} V &= -\int_\infty^R E\ dr - \int_R^r E\ dr = -\int_\infty^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr - \int_R^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r\,dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^R - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^3}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_R^r \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\infty}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{R}\right)\right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \end{aligned}$$



$r=0.00\,cm$ 에서 $E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r=0$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q}{2R} \qquad < r=0.00\,m \text{ 이므로} >$$

$$=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{3\times(32.0\times10^{-6}\,C)}{2\times(0.120\,m)}\approx 3.60\times10^6\,V$$

$r=6.00\,cm$ 에서 $E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(32.0\times10^{-6}\,C)}{(0.120\,m)^3}\times0.06\,m$

$$\approx 9.99\times10^6\,N/C$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(32.0\times10^{-6}\,C)}{2\times(0.120\,m)}\times\left(3-\frac{(0.06\,m)^2}{(0.120\,m)^2}\right)$$

$$\approx 3.30\times10^6\,V$$

$r=12.0\,cm$ 에서 $E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(32.0\times10^{-6}\,C)}{(0.120\,m)^2}$

$$\approx 20.0\times10^6\,N/C$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(32.0\times10^{-6}\,C)}{(0.120\,m)}$$

$$\approx 2.40\times10^6\,V$$

$$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(32.0\times10^{-6}\,C)}{(0.120\,m)^3}\times0.120\,m$$

$$\approx 20.0\times10^6\,N/C$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} \qquad < r=R \text{ 이므로} >$$

$$=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(32.0\times10^{-6}\,C)}{(0.120\,m)}\approx 2.40\times10^6\,V$$

$r=50.0\,cm$ 에서 $E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(32.0\times10^{-6}\,C)}{(0.500\,m)^2}$

$$\approx 1.15\times10^6\,N/C$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}=(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(32.0\times10^{-6}\,C)}{(0.500\,m)}$$

$$\approx 0.575\times10^6\,V$$

11. 전하량 $30.0\,pC\,(1\,pC = 10^{-12}\,C)$인 전하량을 가진 어떤 물방울의 표면 전위는 $500\,V$라 한다.

(1) 이 물방울의 반지름은 얼마인가?

전하 q가 반지름 r인 구의 표면에 만드는 전위는 $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$ 이므로 반지름은

$$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{V} = (9\times 10^9 Nm^2/C^2)\times\frac{(30.0\times 10^{-12}C)}{500\,V} = 5.4\times 10^{-4}m$$

(2) 이런 물방울 두 개가 뭉치면 그 표면 전위는 어떻게 되는가?

물방울 두 개가 뭉치면 전하량은 2 배가 되고 반지름은 $\sqrt[3]{2}$ 배가 되므로 전위는

$$V' = V\times\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 500\,V\times\frac{2}{1.26} \approx 794\,V$$

12. 두 도체판 사이의 간격은 $1.00\,cm$이다. 한 도체판을 기준점으로 할 때, 두 도체판 중간 위치의 전위가 $5.00\,V$라면 도체판 내부 전기장 세기는 얼마인가?

중간 위치의 전위가 $5.0\,V$ 이므로 두 도체판 사이의 전위차는 $\Delta V = 10.0\,V$ 이다.
두 도체판 사이에는 균일한 전기장이 존재하므로 전기장은 전위차를 간격으로 나누어

$E = -\frac{dV}{dr} \approx \frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{10.0\,V}{1.00\times 10^{-2}m} = 1000\,V/m$ 이다.

13. 반지름이 R인 부도체 원판 중심에 반지름이 a인 원형구멍이 나 있다.
이 원판에는 총 전하량 Q가 골고루 분포되어 있다.
이 원판 중심에서부터 수직으로 z만큼 떨어진 곳에서 전위를 구하라.

〈 r을 원판의 중심으로부터 원판 위의 어느 한 지점까지의 반지름 거리라 하고,
r'을 원판 위의 어느 한 지점으로부터 원판 중심에서부터 수직으로 z만큼 떨어진 지점까지의 거리라고 한다면 $\rightarrow$ $r'^2 = r^2 + z^2$ 〉

$$V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r'} \qquad \left\langle\ dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r'}\ \right\rangle$$

$$= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{(r^2+z^2)^{1/2}} \qquad \langle\ r' = (r^2+z^2)^{1/2}\ \rangle$$

〈 $A = \pi r^2 \quad \rightarrow \quad dA = 2\pi r\, dr$ 〉
〈 $Q = \sigma A \quad \rightarrow \quad dq = \sigma\, dA \quad \rightarrow \quad dq = \sigma\, 2\pi r\, dr$ 〉

$$= \int_{r=a}^{r=R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\, 2\pi r}{(r^2+z^2)^{1/2}} dr$$

$$= \frac{\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{r=a}^{a=R} \frac{2a}{(r^2+z^2)^{1/2}} dr$$

〈 원판 위의 어느 지점에 대해서도 z는 상수 〉
〈 치환 $u = r^2 + z^2 \quad \rightarrow \quad du = 2r\, dr$ 〉
〈 구간 $r = a \quad \rightarrow \quad u = a^2 + z^2$ 〉
〈 구간 $r = R \quad \rightarrow \quad u = R^2 + z^2$ 〉

$$= \frac{\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{u=a^2+z^2}^{u=R^2+z^2} u^{-1/2}\, du$$

$$= \frac{\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left[2\ u^{1/2}\right]_{u=a^2+z^2}^{u=R^2+z^2}$$

$$= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right)$$

$$\left\langle\ Q = \sigma A \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi(R^2-a^2)}\ \right\rangle$$

$$= \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{\pi(R^2-a^2)}\right)\left(\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right)$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\frac{\left(\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right)}{(R^2-a^2)}$$

14. 반지름이 $r = 2.00\,cm$인 원형도체공 위에 전하가 대전되어 있다.
이 공의 표면전위가 $200\,V$ 라고 하면, 이 도체공의 표면전하밀도는 얼마인가?
이 대전된 도체공이 만드는 전위가 $50.0\,V$인 등전위면의 반지름은 얼마인가?
(10번 문제를 참고한다.)

◎ $r > R$ 인 경우

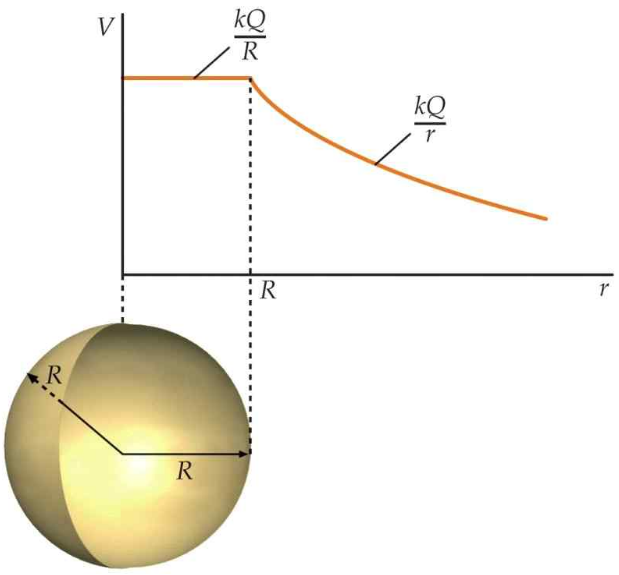
$$\begin{aligned}\Phi_S &= \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\,4\pi r^2 \\ \Phi_S &= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$V = -\int_\infty^r E\;dr = -\int_\infty^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

◎ $r < R$ 인 경우

$$\begin{aligned}\Phi_S &= \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E\,4\pi r^2 \\ \Phi_S &= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

$$\begin{aligned}V &= -\int_\infty^R E\;dr - \int_R^r E\;dr = -\int_\infty^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr - \int_R^r 0\,dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^R - 0 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\end{aligned}$$



$r = 2.00\,cm$ 에서 $V = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r} = (8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\dfrac{Q}{(0.0200\,m)} = 200\ V$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} = (8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{Q}{(0.0200\,m)} = 200\ V$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{(0.0200\,m)}{(8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)}\times 200\ V \approx 0.445\times 10^{-9}\ C$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{\left(\dfrac{(0.0200\,m)}{(8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)}\times 200\ V\right)}{4\pi\times(0.0200\,m)^2}$$
$$= \frac{200\ V}{4\pi\times(0.0200\,m)\times(8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)}$$
$$\approx 88.5\times 10^{-9}\ C/m^2$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} = (8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(0.445\times 10^{-9}\ C)}{r} = 50\ V$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{(8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times(0.445\times 10^{-9}\ C)}{50\ V}$$
$$= 0.0800\,m = 8.00\,cm$$

15. 한 변의 길이가 a인 정사각형의 네 꼭지점에 전하량이 각각 $+q$, $-q$, $+q$, $-q$인 네 점전하가 순서대로 배치되어 있다. 이 점전하계를 만드는 데 외부에서 한 일은 얼마인가?

전기력은 보존력이므로 이 점전하계를 만드는 데 외부에서 한 일은
이 점전하계의 전기 위치에너지와 같다.
전하를 차례로 가져온다고 할 때 필요한 일은 다음과 같다.

$$W = W_{2\leftarrow 1} + W_{3\leftarrow 1} + W_{3\leftarrow 2} + W_{4\leftarrow 1} + W_{4\leftarrow 2} + W_{4\leftarrow 3}$$

이 중 $W_{2\leftarrow 1} = W_{3\leftarrow 2} = W_{4\leftarrow 1} = W_{4\leftarrow 3} = -\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q^2}{a}$,

$$W_{3\leftarrow 1} = W_{4\leftarrow 2} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\sqrt{2}\,a}$$

따라서 $W = W_{2\leftarrow 1} + W_{3\leftarrow 1} + W_{3\leftarrow 2} + W_{4\leftarrow 1} + W_{4\leftarrow 2} + W_{4\leftarrow 3}$

$$= 4\times\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a}\right) + 2\times\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\sqrt{2}\,a}\right) = \frac{(\sqrt{2}-4)}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a}$$

16. 중력장의 가우스 법칙은 다음과 같이 쓸 수 있다. $\Phi_g = \int_s \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi GM$

여기에서 Φ_g는 질량 m을 둘러싼 곡면을 지나는 중력장 벡터의 '중력선속'이다. 뉴턴의 만유인력 법칙으로부터 이 관계를 유도하여라.

만유인력 $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$

$F = mg$

$$\Rightarrow \quad mg = G\frac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad g = G\frac{M}{r^2}$$

$$\Phi_g = \int_s \vec{g} \cdot d\vec{a} = -g \times 4\pi r^2 = -G\frac{M}{r^2} \times 4\pi r^2 = -4\pi GM$$

17. 다이오드(diode)라 알려진 진공관 내부에는 두 개의 전극이 들어 있다. 음극(cathode)의 전극은 높은 온도로 유지되어 표면으로부터 전자들을 방출한다. 양극(anode)의 전극은 높은 전위 상태에 있으며, 음극과 양극 사이에 수백 볼트의 전위차가 유지된다.
어떤 다이오드에서 두 극간의 전위차가 V_0라 할 때, 음극으로부터 방출된 전자들이 양극에 도달할 때의 속력을 전자의 질량 m, 전하량 e로 나타내어라.

$K = \dfrac{1}{2}mv^2$

$W = eV_0$

$$\Rightarrow \quad K = W \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = eV_0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$$

18. 반지름이 각각 R, $R/2$인 두 도체구가 서로 도선으로 연결된 채로 매우 먼 거리 L만큼 떨어져 있다. 계의 총 전하량이 Q라면 각 도체구의 전하량은 얼마인가? 또 도선에 작용하는 장력은 얼마인가?

도체가 서로 연결되어 있으므로 도체 표면은 모두 등전위면이어야 한다.

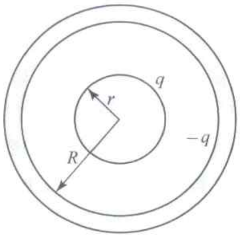
만일 반지름 r인 도체구에 전하량이 q라면 그 도체구의 전위는 $V = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{r}$이다.

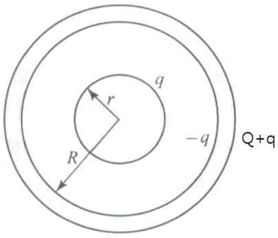
반지름이 각각 R과 $R/2$인 도체구가 동일한 전위이려면 각 도체구의 전하량은 2:1로 분포되어야 한다.
즉, 총 전하량 Q 중에 반지름이 R인 도체구에는 $\dfrac{2}{3}Q$가 반지름이 $R/2$인 도체구에는 $\dfrac{1}{3}Q$가 대전되어야 두 도체구 표면의 전위가 $V = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2Q}{3R}$로 동일해진다.

도선에 작용하는 장력 F는 두 점전하 $\dfrac{2}{3}Q$와 $\dfrac{1}{3}Q$가 거리 L만큼 떨어져 있을 때

작용하는 전기력과 같으므로 장력은 $F = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{(\frac{2}{3}Q)\times(\frac{1}{3}Q)}{L^2} = \dfrac{2}{9}\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q^2}{L^2}$이 된다.

19. 반지름이 r인 도체구를 더 큰 반지름 R인 공껍질 모양의 도체가 그림과 같이 감싸고 있다. 두 도체구의 중심은 같다.





(1) 두 도체가 각각 $\pm q$의 전하량으로 대전되었다면 두 도체 간의 전위차는 얼마인가?

안쪽 도체구와 바깥쪽 도체 공 껍질 사이의 전기장은 안쪽 도체구에 대전된 전하 q에 의해 정해진다. $r < x < R$ 인 영역에서 중심에서 거리 x인 위치의 전기장의 세기는 $E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}$ 이고,

$x = r$과 $x = R$인 위치 사이의 전위차는

$$\begin{aligned} V(r) - V(R) &= -\int_R^r E(x)\ dx \\ &= -\int_R^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2}\ dx \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{x}\right]_R^r \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r} - \left(-\frac{1}{R}\right)\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \end{aligned}$$

(2) 작은 도체구의 전하량은 q이지만, 공껍질 모양 도체의 전하량은 Q라고 하면 그때의 전위차는 얼마인가?

이 결과는 바깥쪽 공 껍질에 대전된 전하량이 얼마인가에 무관하게 안쪽 공에 대전된 전하량으로만 결정된다. 따라서, 결과는 같다.

20. 길이가 L이고 반지름이 a인 원통 도체가 전하 Q로 대전되어 있다.
길이가 L로 같고 반지름이 $b(b>a)$인 원통 도체는 전하 $-Q$로 대전되어 있고 반지름 a인 원통 도체를 감싸고 있다.

(1) 모든 영역에서 전기장을 구하여라.

가우스 법칙 $\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$

$$\Phi_S = E\ 2\pi rL = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E\ 2\pi rL = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0 \qquad \text{for} \quad r < a$$

$$\Phi_S = E\ 2\pi rL = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E\ 2\pi rL = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL} \qquad \text{for} \quad a < r < b$$

$$\Phi_S = E\ 2\pi rL = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q-Q}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E\ 2\pi rL = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0 \qquad \text{for} \quad r > b$$

(2) 이 두 원통 도체 사이에 걸리는 전위차를 구하여라.

$$\begin{aligned}
\Delta V = V(b) - V(a) &= -\int_a^b E(r)\ dr \\
&= -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL}\ dr \\
&= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_a^b \frac{1}{r}\ dr \\
&= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\left[\ln r\right]_a^b \\
&= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}(\ln b - \ln a) \\
&= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}(\ln a - \ln b) \\
&= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} ln\frac{a}{b}
\end{aligned}$$