제 15 장 연습 문제 풀이 (2)

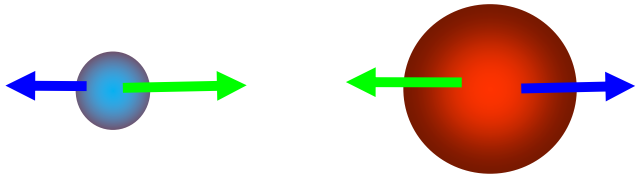
15-1 전하

연습 15-1. 지구와 태양의 질량은 각각 5.98 x 10^24 kg, 1.99 x 10^30 kg 이다. 만약에 지구와 태양이 전기적으로 중성이 아니고 크기와 부호가 똑같은 전하량을 띠고 있다고 가정한다면 이 둘 사이의 만유인력을 상쇄시키는 데 필요한 지구와 태양의 전하량의 크기는 얼마이어야 하는가? 그리고 이 전하량의 크기는 기본 전하량의 몇 배인가?

풀이

태양과 지구 사이의 만유인력을 상쇄시키기 위한 전기력은 만유인력과 크기가 같은 반발력이어야 한다.

$$F_{\text{만유인력}} = F_{\text{전기력}}$$



$$G\frac{M_s M_E}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = \underline{k}\frac{q^2}{r^2} \qquad \left(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99\times10^9\, N\cdot m^2/C^2\right)$$

$$q = \sqrt{\frac{GM_sM_E}{k}} = \sqrt{\frac{(6.67\times10^{-11}\, N\cdot m^2/kg^2)(1.99\times10^{30}\, kg)(5.98\times10^{24}\, kg)}{8.99\times10^9\, N\cdot m^2/C^2}}$$

$$= 2.97\times10^{17}\, C$$

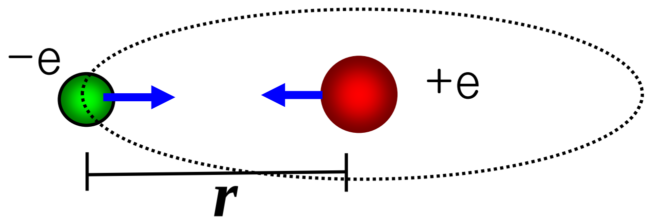
전하량 q 를 기본전하량(1.60 x 10^-19 C)으로 나누어 주면 기본 전하량의 몇 배인지 알 수 있다.

$$\frac{q}{e} = \frac{2.97\times10^{17}\, C}{1.60\times10^{-19}\, C} = 1.85\times10^{36} \qquad \Rightarrow \therefore q = (1.85\times10^{36})e$$

15-2 쿨롱의 법칙

연습 15-2. 전자와 양성자가 대략 보어 반지름, 즉 0.530 x 10^{-10} m 정도 떨어져 있다, 전자와 양성자 사이의 전기력과 중력을 각각 구하여라. 구한 전기력과 중력의 비를 구하여라.

풀이 만유인력과 쿨롱력의 크기를 각각 구하여 비교한다.



$$F_{만유인력} = G\frac{M_p M_e}{r^2} = \frac{(6.67\times10^{-11} N\cdot m^2/kg^2)(1.67\times10^{-27} kg)(9.11\times10^{-31} kg)}{(5.30\times10^{-11} m)^2} = 3.61\times10^{-47} N$$

$$F_{전기력} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = \frac{(8.99\times10^{9} N\cdot m^2/C^2)(1.60\times10^{-19} C)^2}{(5.30\times10^{-11} m)^2} = 8.19\times10^{-8} N$$

전기력과 중력의 비 : $\frac{F_{전기력}}{F_{만유인력}} = \frac{8.19\times10^{-9} N}{3.61\times10^{-47} N} = 2.27\times10^{39}$

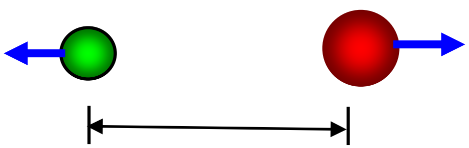
연습 15-5. 두 점전하의 전하량의 합이 +10.0 μC 이고 이 둘은 서로 4.00 m 떨어져 있다. 이 때 두 점전하 사이에는 12.0 mN 의 척력이 작용한다. 이 때 두 점전하의 전하량은 각각 얼마인가? 만약에 이 정전기력이 척력이 아니라 인력이면 두 점전하의 전하량은 각각 얼마인가 ?

풀이

한 개의 전하량을 q라 하면 다른 전하량은 10-q (단위 : μC) 이므로 쿨롱의 법칙에 대입하여 전하량을 구할 수 있다.

$q\ x10^{-6}$ $(10.0 - q)\ x10^{-6}$

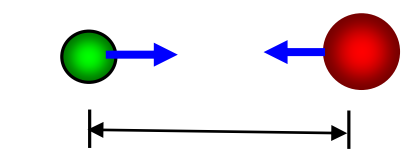
$$F = k\frac{(10-q)q \times 10^{-12}}{r^2} \qquad \left(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99\times10^{9}\ N\cdot m^2/C^2\right)$$



$$q^2 - 10q - \frac{Fr^2}{k} = 0 \qquad \left(\frac{Fr^2}{k} = \frac{12.0\times10^{-3}\times4.00^2\times10^{12}}{8.99\times10^{9}} = 21.4\right)$$

$r = 4.00m$

$$\text{(i)} \quad q^2 - 10q + 21.36 = 0 \quad (\text{척력})$$



위의 이차 방정식의 근이 전하량이 되며 같은 부호가 되어야 한다.

$$q = 5 \pm \sqrt{25-21.36} = 3.09(\mu C) \qquad q' = 6.91(\mu C)$$

만일 인력이라면 $\text{(ii)} \quad q^2 - 10q - 21.4 = 0$ (인력) 에서 근을 구하며 다른 부호가 된다

$$q = 5 \pm \sqrt{25+21.36} = 11.8(\mu C) \qquad q' = -1.80(\mu C)$$

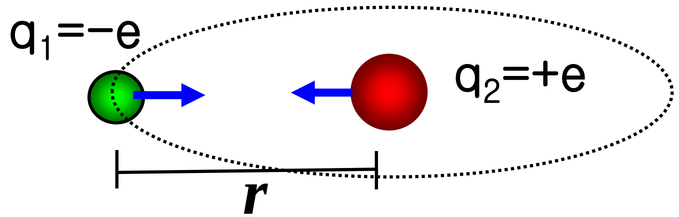
연습 15-6. 수소 원자에 대한 보어 모형은 +e 의 전하를 갖고 있는 양성자 주위를 −e의 전하를 갖는 전자가 원운동을 하는 것이다. 양성자와 전자 간의 정전기적 인력은 전자가 원궤도를 유지하기 위한 구심력을 제공한다, 원운동의 반지름은 얼마인가?

풀이

구심력 = 정전기적 인력

구심력 : $F_r = m\dfrac{v^2}{r}$

정전기력: $F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}$



$$\therefore m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2}$$

정전기적 인력에 의해 전자가 핵에 구속되어 멀리 달아나지 못하고 핵 주위에서 원운동을 한다. 정전기적 인력은 전자가 핵 주위에서 원운동을 할 수 있는 구심력을 제공한다.

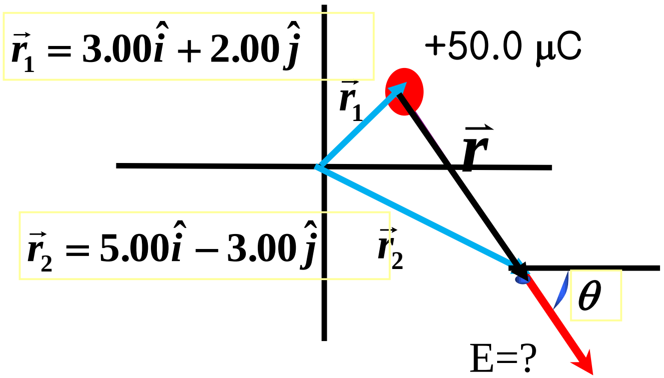
15-3 전기장

연습 15-9. 전하량이 +50.0 μC 인 점전하가 원점에서 부터 $(3.00\hat{i} + 2.00\hat{j})$ m 위치에 놓여 있다. 원점에서 부터 $(5.00\hat{i} - 3.00\hat{j})$ m 만큼 떨어진 곳에서 이 점전하가 만드는 전기장을 구하여라.

풀이 점 전하로 부터 전기장을 구하려는 위치까지 떨어진 거리를 구하여 점 전하의 전기장의 식에 대입한다.

$$\left(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \, N \cdot m^2 / C^2 \right)$$

점 전하에 의한 전기장의 크기 : $\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$



$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (5.00 - 3.00)\hat{i} - (3.00 + 2.00)\hat{j}$$
$$= 2.00\hat{i} + (-5.00)\hat{j}$$
$$\therefore r = \sqrt{2.00^2 + 5.00^2} = \sqrt{29}(m)$$

전기장의 크기 :

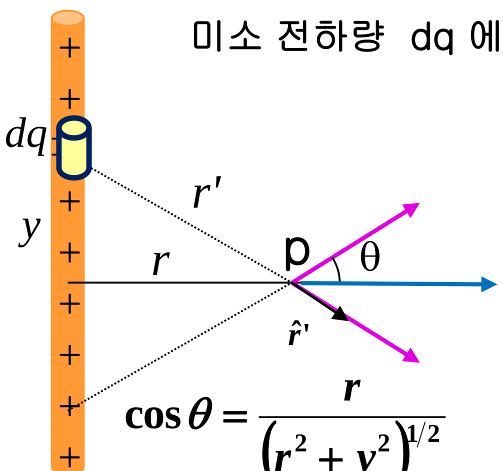
$$E = k \frac{q}{r^2} = (8.99 \times 10^9 \, N \cdot m^2 / C^2) \frac{50.0 \times 10^{-6} C}{(\sqrt{29} m)^2} = 1.55 \times 10^3 \, N / C$$

전기장의 방향 : x 축과 이루는 각 : $\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{2.00} \right) = 68.2^\circ$

연습 15-12. 무한히 긴 도선이 선전하밀도 λ로 대전되어 있다. 이 도선에서 r 만큼 떨어진 곳에서 전기장이 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 와 같이 주어짐을 보여라.

풀이

전하계가 연속적으로 분포되어 있으면 연속적으로 분포된 모든 전하에 의한 전기장의 효과를 더한다.(적분) 이 때 y 방향의 전기장 성분은 모두 상쇄되므로 전기장의 방향은 r 방향, 즉 도선에 수직이다



$$\cos\theta = \frac{r}{\left(r^2+y^2\right)^{1/2}}$$

미소 전하량 dq 에 의한 점 p에서의 전기장

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r'^2}\hat{r}'$$

전기장성분 중에 r 방향 성분

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r'^2}\cos\theta$$

선 전하 밀도 (linear charge density) $\lambda \equiv \dfrac{q}{\ell}$ ➡ $dq = \lambda dy$

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r'^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2+y^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda r dy}{\left(r^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} E_r dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+y^2\right)^{3/2}}dy \;\Rightarrow\; \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

($y = r\tan\theta,\;\; dy = r\sec^2\theta$ 로 치환하여 정리)

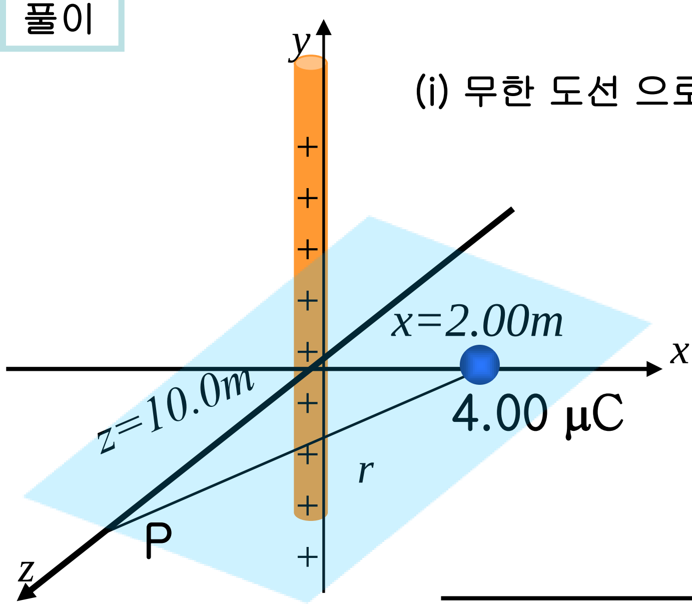
15-3 전기장

연습 15-13. 선 전하 밀도가 $\lambda = 1.20\ \mu C/m$ 인 무한히 긴 도선이 y 축을 따라 놓여 있고 원점으로 부터 2.00m 떨어진 x 축 위에 전하량이 4.00 μC 인 점 전하가 놓여 있다. 원점으로 부터 10.0 m 떨어져 있는 z 축 위의 점의 점에서 전기장을 구하여라.

무한도선에 의한 전기장과 점 전하에 의한 전기장이 중첩되므로 p 점에서의 전기장은 두 전기장을 더하여 얻는다.

$$\left(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99\times10^{9}\ N\cdot m^2/C^2 \right)$$

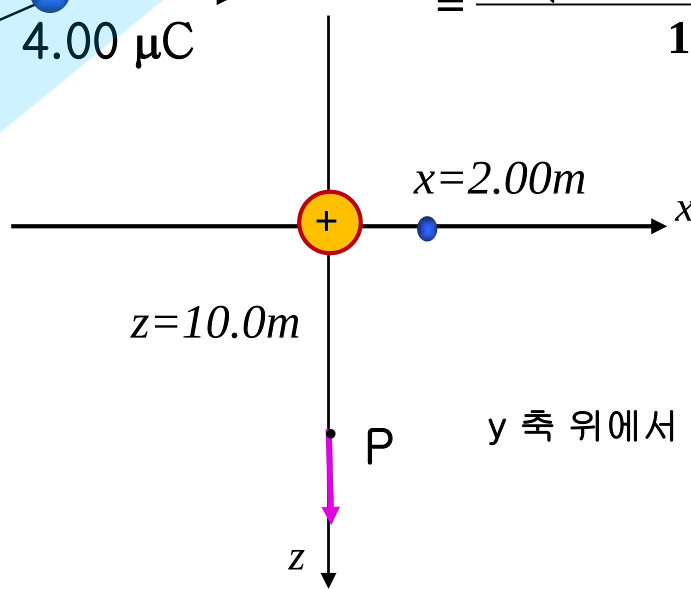
풀이



(i) 무한 도선 으로 부터 수직거리 z =10.0 m 만큼 떨어진 위치에서의 전기장의 크기는

$$E_{\text{무한도선}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} = 2k\frac{\lambda}{r}$$

$$= \frac{2\times\left(8.99\times10^{9}\right)\times1.20\times10^{-6}}{10.0m} = 2.1576\times10^{3}(N/C)$$

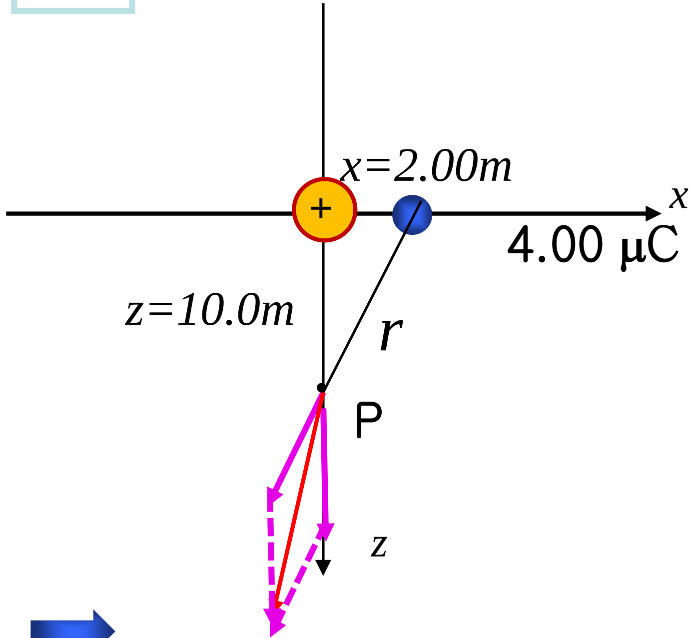


이고 방향은 z 축 방향이다.

y 축 위에서 본 그림

연습 15-13. 계속.

풀이 p 점에서의 전기장은 x 성분과 z 성분을 각각 구하여 얻는다.



점 전하로 부터 P 점 사이의 거리 r 은

$$r = \sqrt{z^2 + x^2} = \sqrt{10.0^2 + 2.00^2} = 10.198(m)$$

이므로 점 전하에 의한 p 점에서의 전기장은

$$E_{점전하} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{q}{r^2} = \frac{8.99\times10^9\times4.00\times10^{-6}}{10.2^2}$$

$$= 3.457\times10^2 (N/C)$$

P 점에서의 전기장의 z 성분:

$$E_z = E_{무한도선} + E_{점전하}\cos\theta = E_{무한도선} + E_{점전하}\frac{z}{r} = 2157.6 + 345.7\frac{10}{\sqrt{10^2+2^2}} \approx 2.50\times10^3 (N/C)$$

P 점에서의 전기장의 x 성분: $E_x = -E_{점전하}\sin\theta = -E_{점전하}\frac{x}{r} = -345.7\frac{2}{\sqrt{10^2+2^2}} \approx -67.8(N/C)$

$$\therefore \vec{E} = -67.8\hat{i} + 2.50\times10^3\hat{k} \quad (N/C)$$

15-3 전기장

연습 15-14. 반지름이 R 인 원판에 총 전하량이 Q 인 전하가 일정한 면전하 밀도 σ 로 대전되어있다.
(가) 이 원판의 중심에서 수직방향으로 x 만큼 떨어진 곳에서 전기장을 구하여라.

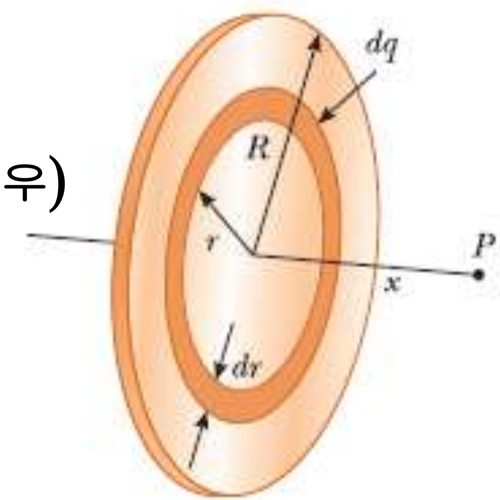
풀이 대칭성에 의해 중심축에 전기자의 수평 성분(x 성분)만 남는다.

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)} \cos\theta = \frac{(2\pi\sigma r\, dr)x}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr) = 2\pi\sigma r dr \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\left(r^2 + x^2\right)^{1/2}} \end{cases}$$

$$E_x = \frac{x\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^R \frac{2rdr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^R (r^2 + x^2)^{-3/2} d(r^2)$$

$$= \frac{x\sigma}{4\varepsilon_0}\left[\frac{(r^2 + x^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}\right] \quad (x > 0 \text{인 경우})$$



(나) 이 원판의 반지름이 무한히 큰 경우에 전기장을 구하여라

원판으로부터 가까운 축에서는($R \gg x$)

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}\right]_R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{\frac{x}{R}}{\left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{1/2}}\right]_{\frac{x}{R}\approx 0} \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

무한원판에 의한 전기장

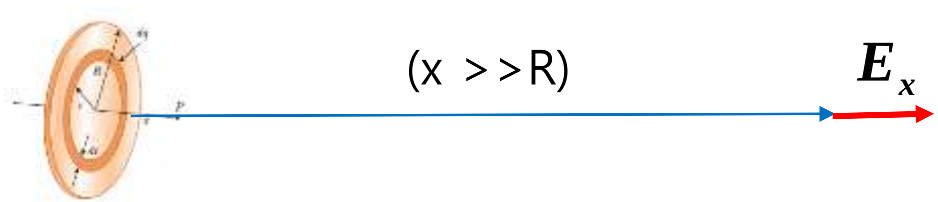
15-3 전기장

연습 15-14. (다) x 가 R 보다 훨씬 더 클 경우 (x >>R) , 원판을 점 전하로 취급할 수 있음을 보여라

이항전개 $\left\{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\left(\frac{R^2}{2x^2}\right)$ 을 이용한다.

풀이

전하량 Q= $(\pi R^2)\sigma$



$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\left\{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\right] \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-(1-\left(\frac{R^2}{2x^2}\right))\right]$$

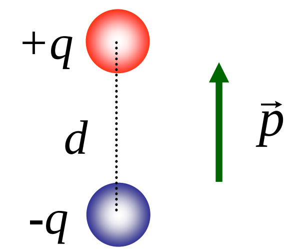
$$= \frac{R^2\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{1}{x^2} = \frac{(\pi R^2)\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}$$

15-4 쌍극자와 전기장

연습 15-17. 수증기 상태에서 물 분자(H_2O) 의 쌍극자 모멘트의 크기는 대략 6.20 x 10^{-30} C· m 와 같다.
(가) 이 물분자의 중심에서 양전하와 음전하는 서로 얼마나 떨어져 있는지 구하여라. (물 분자에는 양성자 10개, 전자가 10개 있다)

풀이 물 분자가 가진 전하량은

$$q = 10 \times \left(1.60 \times 10^{-19} C\right) = 1.60 \times 10^{-18} C$$



이고 쌍극자모멘트 $p = qd$ 이므로

$$d = \frac{p}{q} = \frac{6.20 \times 10^{-30} C \cdot m}{1.60 \times 10^{-18} C} = 3.90 \times 10^{-12} m$$ 이다.

(나) 이 물분자를 세기가 2.00 x 10^4 N/C 인 전기장 아래 두었다. 이 물분자가 받는 최대 돌림 힘을 구하여라.

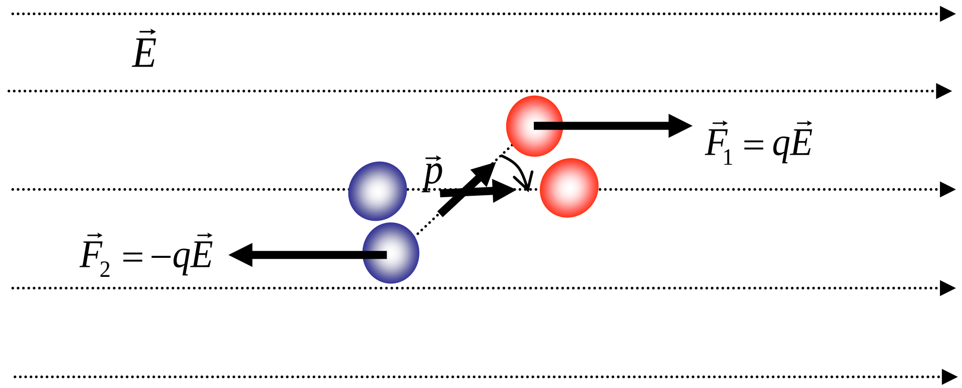
- 돌림 힘 $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

최대돌림힘은 전기장과 쌍극자와의 각이 90°, 270° 일 때 이다.

$$|\vec{\tau}|_{\max} = pE \sin 90^\circ = pE = \left(6.20 \times 10^{-30} C \cdot m\right) \cdot \left(2.00 \times 10^4 N/C\right) = 1.24 \times 10^{-25} N \cdot m$$

연습 15-18. 전기장이 균일한 영역에 있는 쌍극자 모멘트는 전기장에 나란하게 나열하기 위하여 회전한다. 이 때 전기장은 양의 일을 하고 위치에너지는 감소한다.

풀이



(회전에 의한) 위치에너지의 차이 :

$$U(0)-U(\theta) = -W_{\theta\to 0^\circ} = -\int_\theta^0 \tau(-\,d\theta) = \int_\theta^0 \left(pE\sin\theta\right)d\theta = -\,pE\cos\theta\Big|_\theta^0 = -pE\left(1-\cos\theta\right) \le 0$$

$$\therefore U(0) \le U(\theta)$$

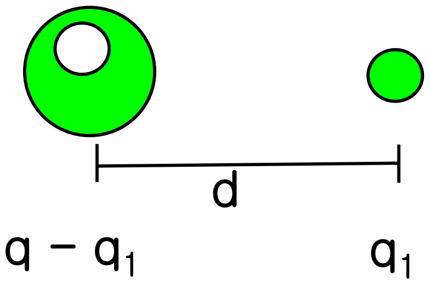
$\boldsymbol{\theta}$ 가 0 일 때 (쌍극자가 전기장과 같은 방향) 최소의 위치에너지가 된다. 따라서 쌍극자가 어떤 각도에서 $\mathbf{0^\circ}$ 로 회전할 때 외력을 주지 않아도 저절로 일어나게 된다. 이 때 전기장은 양의 일을 한다.

발전문제

연습 15-20. 어떤 전하량 q 가 q_1 과 $q - q_1$ 의 두 전하로 나누어졌다. 나누어진 후 두 전하 간 힘이 최대가 되려면 q_1 은 q 의 몇 배가 되어야 하는가?

풀이

Coulomb법칙으로 부터 q_1 과 $q - q_1$ 사이에 작용하는 힘은



$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q-q_1)q_1}{d^2}$$

힘 F 가 최대이려면 q_1에 대해 미분한 도함수가 0 이 되어야 한다.

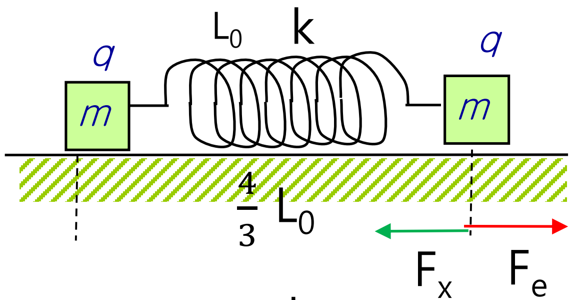
$$\frac{dF}{dq_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(q-2q_1\right) = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{q}{2}$$

발전문제

연습 15-23. 질량이 m이고 전하 q 로 대전된 두 부도체를 길이가 L_0 이고 용수철 상수가 k 인 용수철로 연결하였더니 용수철의 길이가 $\frac{4}{3}L_0$ 로 늘어나 평형상태가 되었다. 이제 두 대전된 부도체 중 하나를 x=0 에 고정시키고 용수철에 연결된 또 다른 부도체가 단순 조화운동을 하게 한다면 각진동수 ω 는 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 의 몇 배인가?

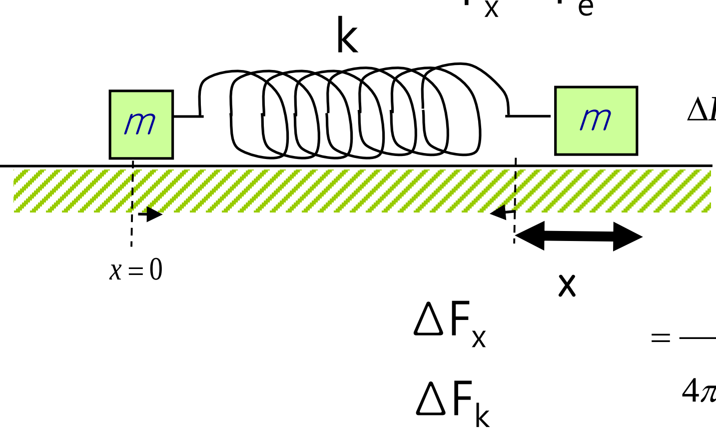
풀이

길이가 $\frac{4}{3}L_0$ 일 때 평형을 이루므로 용수철의 탄성력과 두 입자 사이의 전기력의 크기는 같다.



$$\left(F_E = F_k\right) \Rightarrow \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2} = \frac{k}{3}L_0$$

평형 상태에 x 만큼 늘어났을 때 전기력의 변화량



$$\Delta F_E = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{4}{3}L_0 + x\right)^2} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2\left(1+\frac{3x}{4L_0}\right)^2} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}$$

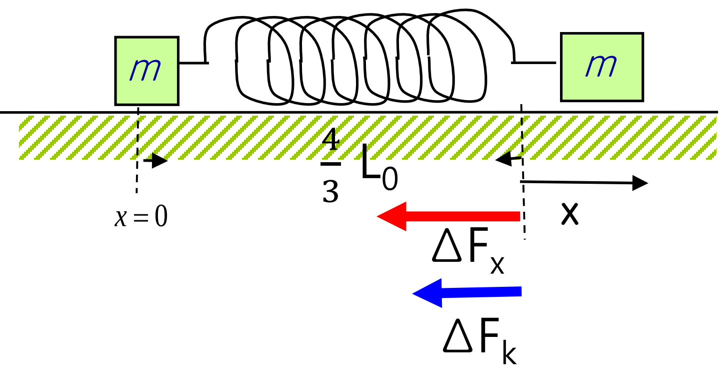
$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}\left(\left(1+\frac{3x}{4L_0}\right)^{-2} - 1\right) \cong \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}\left(\left(1-\frac{3x}{2L_0}\right) - 1\right) = -\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}\right)\frac{3x}{2L_0}$$

$$= -\left(\frac{kL_0}{3}\right)\frac{3x}{2L_0} = -\frac{kx}{2}$$

발전문제

연습 15-23(계속). 질량이 m이고 전하 q 로 대전된 두 부도체를 길이가 L_0 이고 용수철 상수가 k인 용수철로 연결하였더니 용수철의 길이가 $\frac{4}{3}L_0$ 로 늘어나 평형상태가 되었다. 이제 두 대전된 부도체 중 하나를 x=0 에 고정시키고 용수철에 연결된 또 다른 부도체가 단순 조화운동을 하게 한다면 각진동수 ω 는 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 의 몇 배인가?

풀이



평형 상태에 x 만큼 늘어났을 때 탄성력의 크기

$$F_k = -kx$$

평형 상태에 x 만큼 늘어났을 때 전기력과 탄성력의 합은 복원력에 해당한다.

$$\Delta F_E + \Delta F_k = -\frac{kx}{2} - kx = -\frac{3kx}{2}$$

이 뉴턴 제 2법칙에 대입하면

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{3kx}{2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3k}{2m}x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{3k}{2m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\therefore \omega$ 는 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 의 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 배