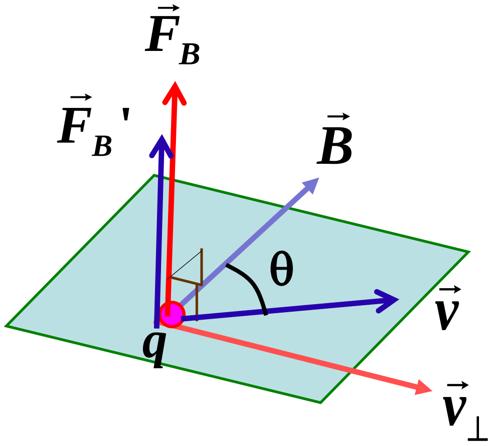
제 19 장 연습 문제 풀이 (2)

연습문제 풀이 : 1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22

19-2 자기장과 자기선속

연습 19-1. 균일한 자기장 내에서 움직이는 전하는 힘을 받는다. 이 힘이 최대가 되려면 전하는 어느 방향으로 움직여야 하는 가? 또 힘이 최소가 되려면 어느 방향으로 움직여야 하는가?

풀이



자기력의 크기는 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$\left|\vec{F}_B\right| = q\left|\vec{v} \times \vec{B}\right| = qvB\sin\theta$$

즉 자기력의 크기는 sin θ 가 최대가 되는 각도, 즉 90 도 일 때 자기력은 최대이며 0 도 일 때 자기력은 최소값이 0 이 된다. 따라서 전하가 움직이는 방향과 자기장과의 방향이 수직일 때 자기력은 최대가 되고, 전하가 움직이는 방향과 자기장이 같은 방향일 때 자기력은 최소값이며 자기력의 크기는 0 이다.

19-2 자기장과 자기선속

연습 19-3. 전하량이 q 인 대전된 입자들이 속도 v 로 균일한 자기장 B 로 들어간다. 이 때 자기장이 대전된 입자에 미치는 영향으로 옳지 않은 것은 ?

풀이 자기력은 대전된 입자들이 운동할 때 변위에 수직하게 작용하므로(자기력과 속도방향은 수직 관계이다) 속력을 변하게 만들지 않으며 운동에너지도 변화시키지 않는다. 다만 입자가 운동방향에 수직한 방향으로 힘을 작용하므로 방향을 전환시키는 구심력 역할을 한다. 따라서 균일한 자기장 속에 수직으로 입사된 대전입자는 원운동을 한다.

(a) 입자에 자기력을 발생시킨다.

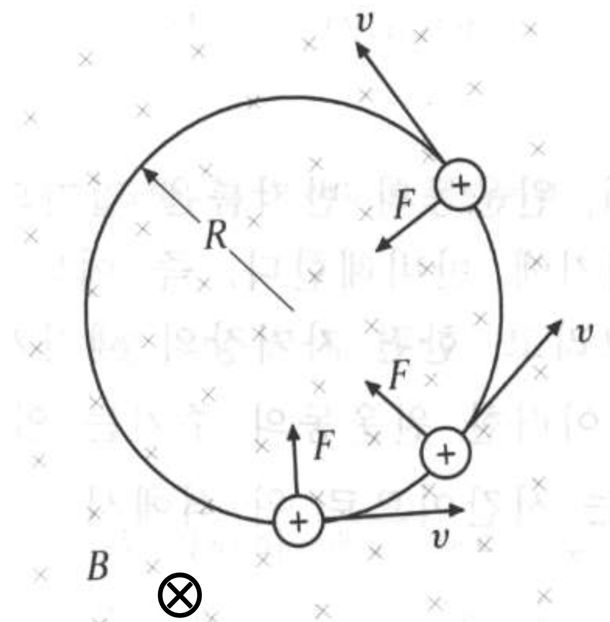
자기력은 대전된 입자들이 움직이면 자기력을 발생시킨다.

(b) 입자를 가속시킨다.

자기력은 대전된 입자들이 속력은 변화시키지 않지만 방향을 전환시키므로 가속된다.

(c) 입자가 원운동 하도록 구심력을 발생시킨다

자기력은 대전된 입자들의 움직이는 속도에 수직으로 작용하므로 방향을 전환하는 구심력으로 작용된다.



(d) 입자의 운동량을 변화시킨다.

자기력은 속력 변화는 없지만 속도(방향)는 변화시키므로 운동량의 변화를 만든다.

(e) 입자의 운동에너지를 변화시킨다.

속력변화를 시키지 않으므로 운동에너지의 변화량이 0 이며 따라서 일도 0 이 된다.

19-2 자기장과 자기선속

연습 19-5. 전자가 균일한 자기장 $\vec{B} = \left(0.2\hat{i} + 0.5\hat{j}\right)$ T 와 전기장 $\vec{E} = \left(-0.1\hat{k}\right)$ N/C 속에서 움직이고 있다. 전자의 속력이 $\vec{v} = \left(0.2\hat{i} - 3.0\hat{j}\right)$ m/s 일 때 전자가 받는 로렌츠의 힘의 크기와 방향을 구하여라. 전자의 질량과 전하량은 각각 m 과 − e 이다.

풀이

전자가 받는 총 힘

$$\boxed{\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}}$$

[로렌츠의 법칙]

전자가 전기장에 의해 받는 전기력

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} = -e\mathbf{E} = -\left(1.6\times10^{-19}\right)\cdot\left(-0.1\hat{z}\right) = 1.6\times10^{-19}\,\hat{k}$$

전자가 자기장에 의해 받는 자기력(두 벡터의 크로스 곱-(외적)에 의해 계산할 것

$$\mathbf{F_B} = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} = -e\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

$$= -\left(1.6\times10^{-19}\right)\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.2 & -3.0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 \end{vmatrix} = -\left(1.6\times10^{-19}\right)\cdot\left(1.0+0.6\right)\hat{k}$$

$$= -2.56\times10^{-19}\,\hat{k}$$

전자가 받는 로렌츠의 힘 :

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} = \left(1.6\times10^{-19} - 2.56\times10^{-19}\right)\hat{k} = -9.6\times10^{-20}\,\hat{k}\ \ (N)$$

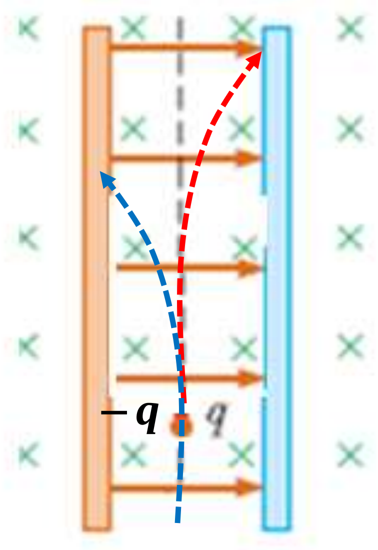
(음의 z 축 방향)

19-3 자기장 내의 전하의 운동

연습 19-6. 균일한 자기장이 있는 공간으로 전자와 양성자가 자기장에 수직인 방향으로 같은 속도를 가지고 입사한다. 두 입자가 받는 자기력의 크기와 방향을 비교하여라. 또, 두 입자가 그리는 원운동 궤적의 반지름 비율은 얼마인가?

풀이

자기장에 수직인 방향으로 입사된 전자와 양성자의 전하량을 각각 q , + q 라 하고 질량은 m, M 이라고 하자.
각각의 입자에 작용한 자기력은 구심력으로 작용된다.



같은 속력으로 입사된 전자와 양성자는 서로 부호만 다르고 같은 전하량이므로 두 입자에 작용하는 자기력의 크기는 같고 방향만 반대이다.

$$F_e = -qvB\sin 90^\circ = -qvB \qquad \text{(왼쪽 방향)}$$

$$F_p = qvB\sin 90^\circ = qvB \qquad \text{(오른쪽 방향)}$$

한편 입자들에 작용한 자기력은 구심력으로 작용되어 두 입자를 원운동 하게 만든다. 구심력과 자기력을 같다고 조건으로 부터 원 운동하는 전자의 반지름(r_e)과 양성자의 반지름 (r_p) 은 얻을 수 있다.

$$qvB = m_e \frac{v^2}{r_e} \Rightarrow r_e = \frac{m_e v}{qB} \qquad qvB = m_p \frac{v^2}{r_p} \Rightarrow r_p = \frac{m_p v}{qB}$$

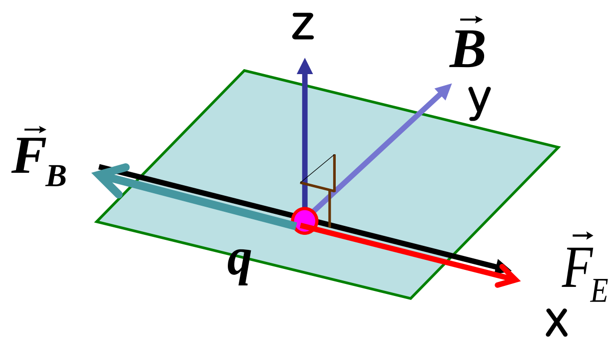
두 입자의 반지름 비율은 질량 비와 관계된다. 전자의 원운동 궤적의 반지름이 1/1830 정도 작다.

$$\therefore \frac{r_e}{r_p} = \frac{m_e}{m_p}$$

19-2 자기장과 자기선속

연습 19-8. 초기 속도 4.00 x 10^{-6} m/s 인 어떤 입자를 크기가 자기장과 전기장이 있는 공간에 입사시켰더니 경로가 휘어지지 않고 직선운동을 하였다. 입자의 전하는 0.400 x 10^{-8} C 이고 자기장은 0.6 T 일 때 전기장의 크기와 방향을 구하여라.

풀이



전기력과 자기력이 같아지게 전기장과 자기장을 걸어 주면 이 공간에서는 입자가 휘어지지 않고 등속 직선 운동을 하게 된다.

$$\vec{F}_E = \vec{F}_B \rightarrow q\vec{E} = -q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

E 의 방향은 $\vec{v}$, $\vec{B}$ 에 수직이다

크기: $E = vB = \left(4.00\times10^{3}\,m/s\right)\left(0.6T\right) = 2.40\times10^{3}\,N/C$

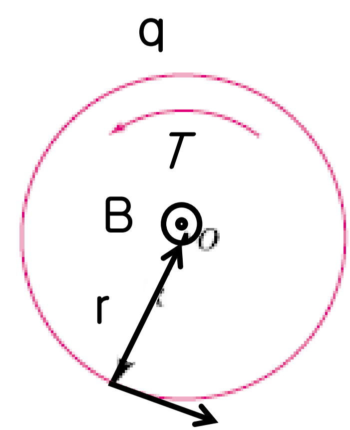
방향 : 자기장을 y 축 , 입자의 운동 방향을 z 축으로 놓으면 전기장과 자기장은 x 축의 방향이 된다.

19-3 자기장 내의 전하의 운동

연습 19-10. 균일한 자기장 B 속에서 등속 원 운동하는 질량이 m 이고 전하량이 q 인 입자가 있다. 이 입자의 원궤도상에서 이 입자에 의한 전류의 크기를 구하여라.

풀이 q 의 전하량이 원 궤도 상에서 돌고 있으므로 일정한 시간(주기: T)동안 전하량 q 가 흐르는 전류로 볼 수 있다. 즉, 전히량 q 를 원운동의 주기로 나누면 전류 값을 얻을 수 있다.

자기력에 의해 전하량 q 를 가진 입자가 원운동을 하므로



$$F = qvB = m\frac{v^2}{r}$$

이고 이 식으로 부터 주기 T 를 구한다.

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v}\left(\frac{mv}{qB}\right) = \frac{2\pi m}{qB}$$

원 궤도 상의 전류(단위시간당의 전하량) = [전하량]/[주기] 이므로 크기는 다음과 같다.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q}{T} = \frac{q^2 B}{2\pi m}$$

19-3 자기장 내의 전하의 운동

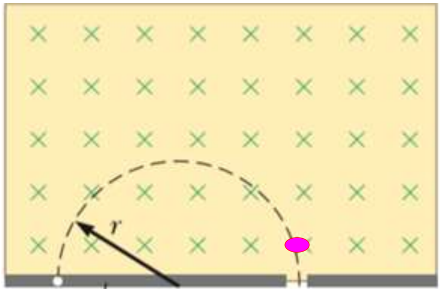
연습 19-11. 진공 튜브 안에서 전자가 정지 상태로 부터 20.0 kV 의 전위차로 가속된 다음 진행 방향에 수직한 균일한 자기장에 의해 원호를 그리며 운동한다. 원호의 반지름이 0.150 m 라고 한다면 자기장의 크기는 얼마인가?

풀이 입자는 전위차 ΔV 에 의해 가속되므로 입자의 위치에너지 q ΔV 는 자기장에 입사될 때 모두 운동에너지로 전환되므로 입자의 속력은

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

이다. 전자가 원궤도에 구속시키려면 자기력이 구심력과 같아야 한다.

$$\frac{mv^2}{r} = qvB\sin 90^\circ \Rightarrow mv = qBr$$



자기장의 크기는 $B = \dfrac{mv}{qr} = \dfrac{m}{qr}\sqrt{\dfrac{2qV}{m}} = \sqrt{\dfrac{2mV}{qr^2}}$

이므로 주어진 값을 대입하여 자기장의 크기를 구한다.

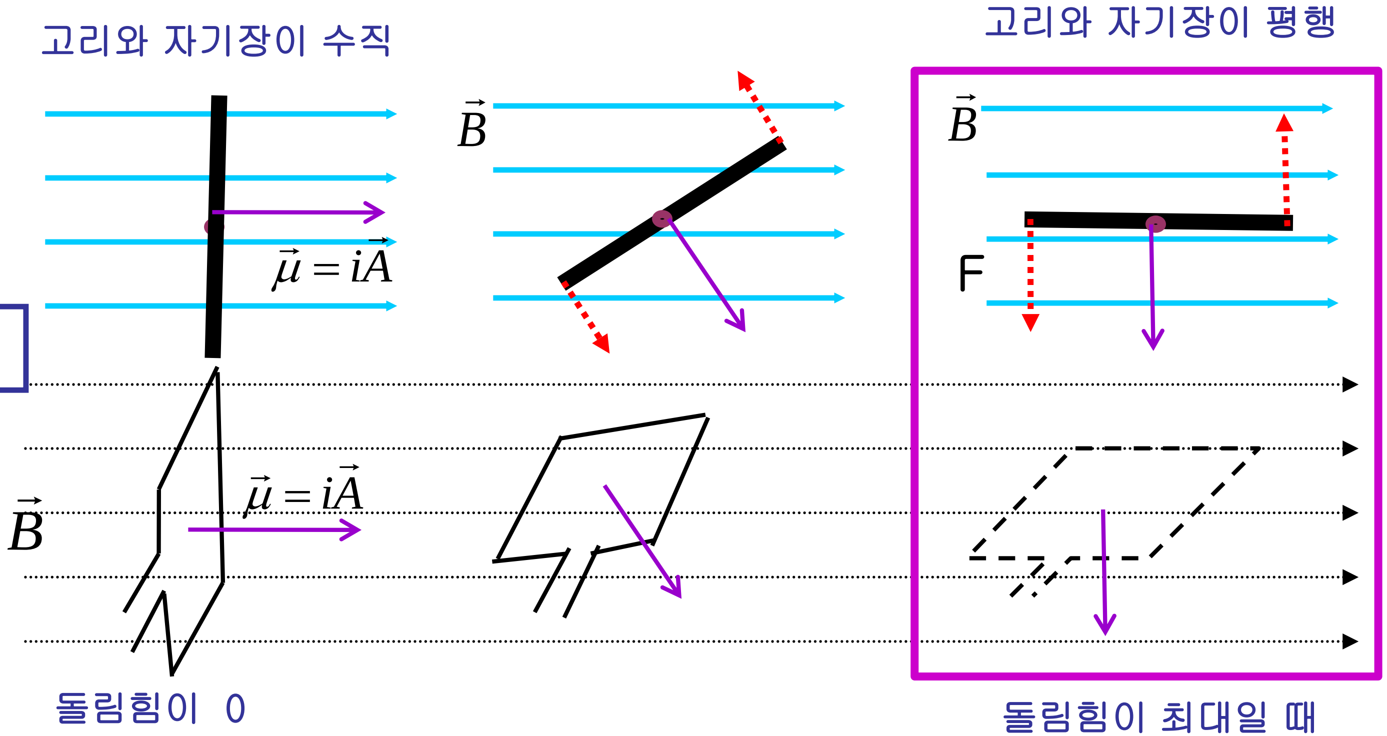
$$B = \sqrt{\frac{2mV}{qr^2}} = \sqrt{\frac{2\left(9.11\times10^{-31}kg\right)\left(2.00\times10^{4}V\right)}{\left(1.6\times10^{-19}C\right)\left(0.150m\right)^2}} = 3.18\times10^{-3}\,(T)$$

19-4 전류도선에 작용하는 힘과 돌림힘

연습 19-13 균일한 자기장 내에서 전류가 흐르는 평면고리는 돌림 힘을 받는다. 이 돌림이 최대가 되기 위한 고리의 방향은?

풀이

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$



돌림 힘의 크기는 자기모멘트와 자기장의 벡터곱이다. $\tau = \mu B \sin\theta$ $(\theta = 90^\circ, 270^\circ$ 일 때 최대$)$

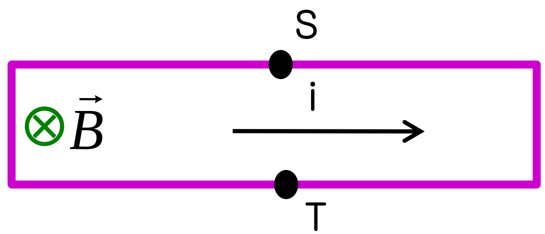
이 값이 최대가 되려면 자기모멘트 방향과 자기장의 방향이 90도 , 270도 일 때이다.

그러나 자기모멘트의 방향은 그림과 같이 고리의 면에 수직이므로
돌림 힘이 최대가 될 때는 고리의 방향이 자기장과 평행 (또는 수평) 해야 한다.

19-4 전류도선에 작용하는 힘과 돌림힘

연습 19-14. 다음 그림과 같이 도체 내 전류가 왼쪽에서 오른 쪽으로 흐른다. 자기장은 지면으로 들어가는 방향이고 점 S 의 전위가 점 T 의 전위보다 높다. 전하 운반자의 부호를 결정하여라.

풀이



(a) 전하운반자가 양전하라고 가정한 경우

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

양전하가 오른쪽으로 움직인다면 자기장에 의해 위 쪽으로 힘을 받아 +전하가 도체의 위판으로 올라가므로 S 의 전위가 T 의 전위 보다 높게 된다.

S 전위 > T 전위

(b) 전하운반자가 음전하라고 가정한 경우

$$\vec{F} = -e\vec{v}\times\vec{B}$$

음전하가 실체라고 하면 전류의 반대방향(왼쪽으로) 전자가 움직이게 되는데 이 때 전자들이 자기장에 의해 받는 힘은 위 쪽이다. 따라서 전자가 윗 판에 모이게 되므로 – 가 모인 S 의 전위가 T 의 전위 보다 낮다. 즉 ,

S 전위 < T 전위

이 문제에서 s 전위가 높다고 가정했으므로 답은 양전하가 된다

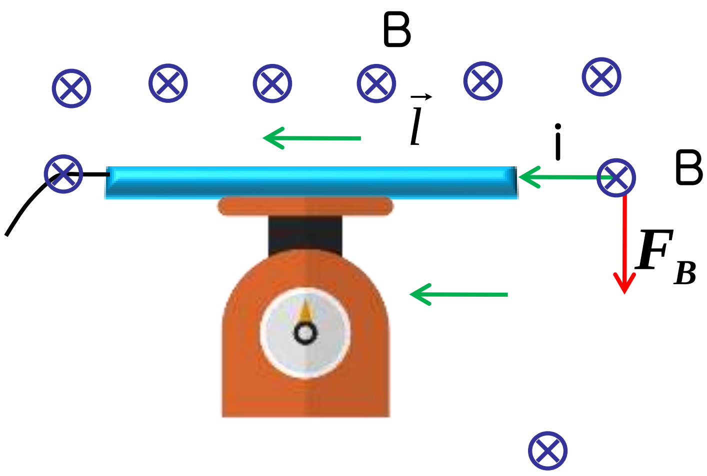
(그러나 실제적으로 실험을 하면 T 의 전위가 높게 나온다. 실제로 전하 운반자는 전자이기 때문이다.)

19-4 전류도선에 작용하는 힘과 돌림힘

연습 19-15. 길이가 0.200 m 인 구리 막대가 저울 위에 놓여 있고 이 막대에는 전류가 흐르고 있다. 막대에는 이 막대와 수직한 방향으로 크기 0.0700 T 의 균일한 수평방향의 자기장이 걸려 있다, 이 막대에 작용하는 자기력을 저울로 측정한 값은 0.240 N 이다. 이 막대에 흐르는 전류는 얼마인가?

풀이

자기장이 지면으로 들어가는 방향이고 전류가 수평방향으로 왼쪽으로 흐르는 경우로 보자. 도선에 미치는 자기력의 방향은 아래 방향이다. 문제에서 자기력의 크기를 0.240N 이라고 하였으므로 자기력의 식으로 부터 자기장을 구할 수 있다.(이 문제에서는 도선에 작용하는 중력으로 무시하는 것으로 본다,)



자기력 $\boxed{F_B = i\,l \times B}$

$$F = i\,l\,B\sin\theta = i\,l\,B\sin 90 = i\,l\,B$$

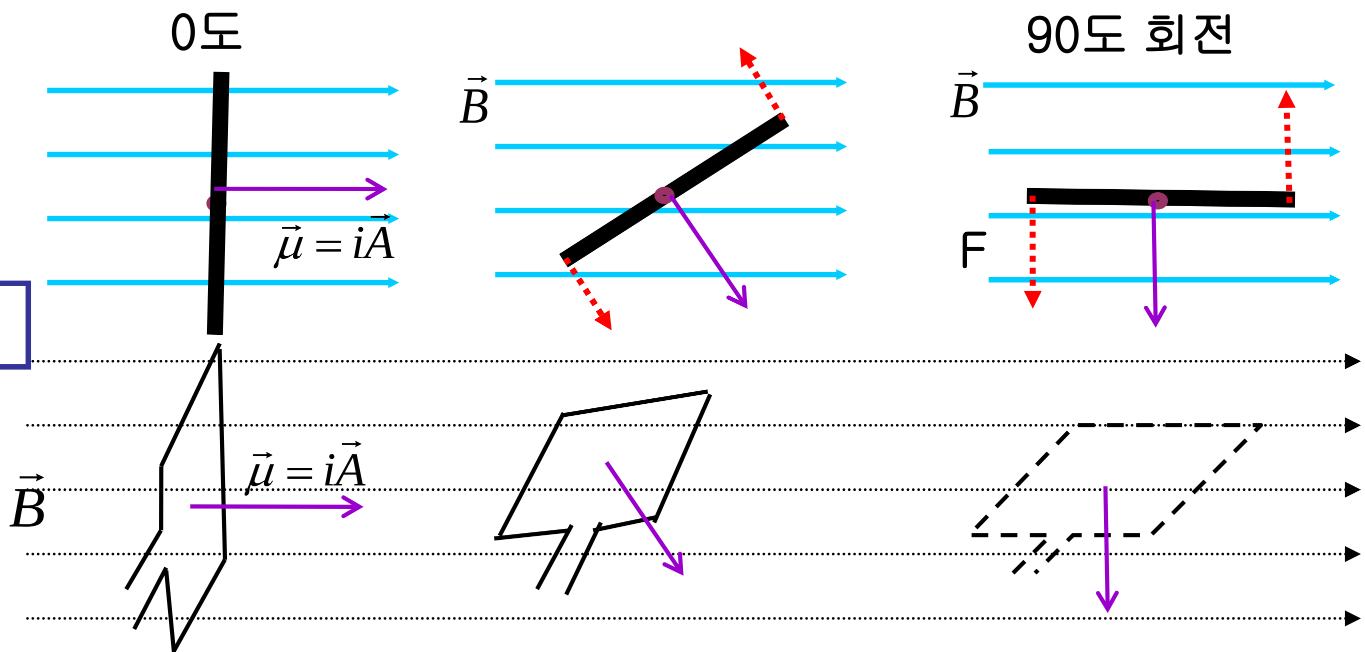
$$\therefore i = \frac{F}{BL} = \frac{0.240N}{0.200m \times 0.0700T} = \frac{120}{7}(A)$$

19-4 전류도선에 작용하는 힘과 돌림힘

연습 19-16. 자기모멘트가 1.30 A m² 인 네모회로가 처음에 0.750 T 의 균일한 자기장에 평행한 방향으로 자기 모멘트의 방향을 갖고 있다. 이 네모 회로를 90도 회전시킨 경우 위치에너지의 변화는 얼마인가?

풀이

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$



위치 에너지의 변화량: $U_\theta - U_{\theta_0} = -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau\,(-d\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau\, d\theta$

$$\Delta U = U_\theta - U_{\theta_0} = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau\, d\theta = \int_{\theta_0=0^\circ}^{\theta=90^\circ} \mu B \sin\theta\, d\theta = \mu B\left[-\cos\theta\right]_{\theta_0=0^\circ}^{\theta=90^\circ} = -\mu B\left(\cos 90^\circ - \cos 0^\circ\right) = \mu B$$

$$= \left(1.30 A \cdot m^2\right)\left(0.750 T\right) = 0.975 J > 0$$

즉 $\Delta U = U_{90} - U_0 > 0 \Rightarrow U_{90} > U_0$ (0도에서 90도 회전시키려면 외부에서 양의 에너지를 주어야 한다.)

19-4 전류도선에 작용하는 힘과 돌림힘 기출 2016년 주관식 3번

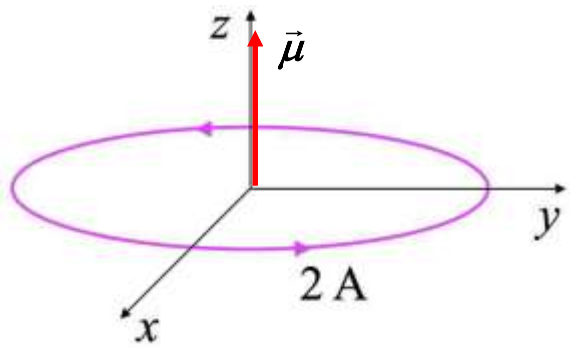
연습 19-17. 반지름이 20.0cm 이고 xy 평면상에 놓여 있는 원형도선에 2.00A 의 전류가 z 축 꼭대기 위에서 내려다 보았을 때 반 시계 방향이 흐른다.

(가) 자기 쌍극자 모멘트의 크기와 방향은 얼마인가?

풀이

자기 쌍극자 모멘트의 크기(전류와 면적의 곱)

$$\mu = iA$$ [방향: 오른손법칙]



(가) 자기 쌍극자 모멘트의 크기(전류와 면적의 곱)

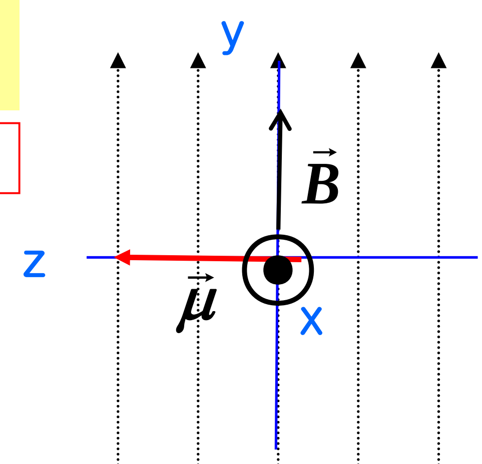
$$\mu = iA = (2.00A)\cdot(\pi \times 0.20^2 m^2) = 0.250(A \cdot m^2)$$

방향 : $+z$축 방향

(나) 균일한 자기장을 +y 방향으로 0.100 T 의 크기로 가했을 때 이 원형 도선의 자기위치에너지와 돌림힘의 크기를 구하여라.

풀이 돌림 힘의 크기

돌림 힘 : $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B}$



$$\tau = \mu B \sin\theta = \mu B \sin 90^\circ = \mu B = (0.250A \cdot m^2)(0.100T) = 0.0250(N \cdot m)$$

자기 쌍극자 모멘트의 방향(z 방향) 이 자기장(y 방향)과 수직일 때 토크 (돌림힘의 크기)는 최대이다

자기 위치 에너지의 식(자기장과 90도 일 때를 기준으로 할 때)

$$U = -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau\,(-d\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau\, d\theta = \int_{\theta_0=90^\circ}^{\theta} \mu B \sin\theta\, d\theta = -\mu B \cos\theta$$ ⇨ 자기 쌍극자 에너지: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

이므로 θ=90° 이면 자기위치에너지는 0 이 된다. $-\mu B \cos\theta = -\mu B \cos 90^\circ = 0$

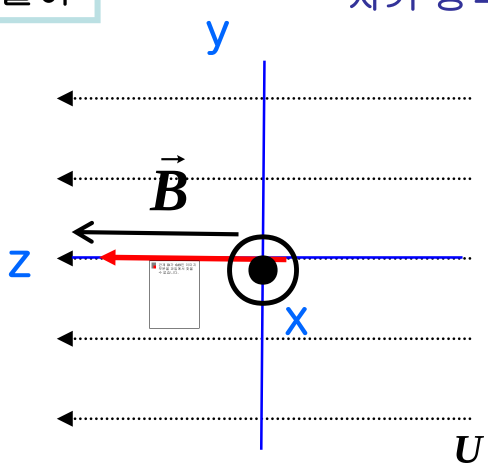
19-4 전류도선에 작용하는 힘과 돌림힘

연습 19-17 계속

(다) 균일한 자기장을 +Z 방향으로 0.100 T 의 크기로 가했을 때 이 원형도선의 자기위치에너지와 돌림힘의 크기를 구하여라.

풀이

자기 쌍극자 에너지: $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$　　돌림 힘 : $\tau = \vec{\mu}\times\vec{B}$



자기 쌍극자 모멘트의 방향과 자기장의 방향이 평행하므로 토크 (돌림힘의 크기)는 0 이 된다.

$$\tau = \mu B\sin\theta = \mu B\sin 0^\circ = 0$$

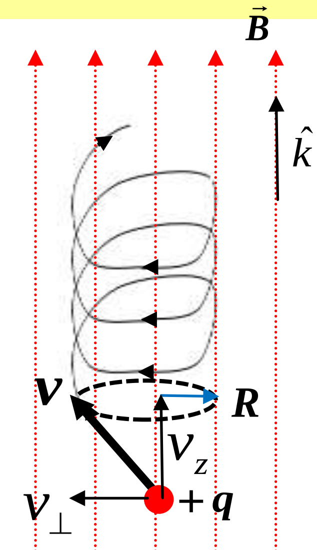
자기 쌍극자 에너지는 자기쌍극자와 자기장이 평행할 때 가장 작은 최소값을 갖게 된다.

$$U = -\mu B\cos\theta\big|_{\theta=0^\circ} = -(0.250\,A\cdot m^2)(0.100T) = -0.0250(J)$$

발전 문제

연습 19-20. 질량이 속도 1.50 x 10^{-15} kg 인 양전하가 균일한 자기장 B= − 0.200(T) $\hat{k}$ 로 주어진 공간에 진입하였다. 진입할 때 입자의 속도는 v=1.00 x 10^6 m/s)($4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}+6\hat{k}$) 이고 이 때 자기력에 의한 힘의 크기는 2.00 N 이다. (가) 양전하의 전하량을 구하라

풀이 자기장 속에서 움직이는 전하가 받는 자기력의 식에 의해 구한다.



$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} = q\left(1.00\times10^6\right)\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & -3 & 6\\ 0 & 0 & -0.200\end{vmatrix} = q\left(0.600\hat{i}+0.800\,\hat{j}\right)\times10^6$$

$$\left|\vec{F}_B\right| = q\left(\sqrt{0.600^2+0.800^2}\right)\times10^6 = 2.00(N)$$

$$\therefore q = 2.00\times10^{-6}(C) = 2.00\left(\mu C\right)$$

(나) 입자의 가속도를 구하라.

$$\left|\vec{F}_B\right| = ma = 2.00(N)$$

$$\therefore a = \frac{F_B}{m} = \frac{2.00N}{1.50\times10^{-15}kg} = 1.33\times10^{15}(m/s^2)$$

(다) 입자의 운동 경로가 나선형이 됨을 설명하고 원형 운동 성분의 반지름을 구하라.

자기장에 수직 방향의 속도에 의해 입자는 원운동을 하며 z 축 방향으로는 등속운동을 한다 .

$$|v_\perp| = \left|v_x\hat{i}+v_y\hat{i}\right| = \left|4.00\hat{i}-3\hat{i}\right|\times10^6 = \left(\sqrt{4.00^2+(-3.00)^2}\right)\times10^6 = 5.00\times10^6(m/s)$$

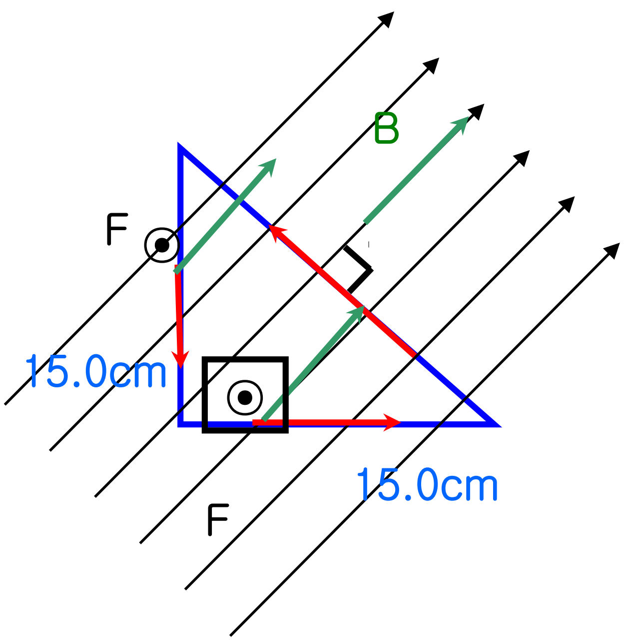
(Z 축에 수직인 방향) 자기력= 구심력이므로 반지름을 구할 수 있다.

$$qv_\perp B = m\frac{v_\perp^{\ 2}}{R} \Rightarrow R = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{\left(1.50\times10^{-15}kg\right)\left(5.00\times10^6 m/s\right)}{\left(2.00\times10^{-6}C\right)\left(0.200T\right)} = 0.0188(\text{m})=1.88(\text{cm})$$

발전 문제

연습 19-22. 한 변의 길이가 15.0cm 인 직각 이등변 삼각형에 2.00 A 의 전류가 흐른다 직각 삼각형의 빗변에 수직하고 삼각형의 면과 나란하며 세기가 0.700 T 인 균일한 자기장에 의해 삼각형의 두 등변에 작용하는 자기력의 세기는 얼마인가?

풀이



자기장 속에서 도선이 받는 힘의 공식은

$$\boxed{\vec{F} = i\,\vec{l} \times \vec{B} = i\ell B\sin\theta}$$

이고 두 힘은 모두 같은 방향으로 지면에서 나오는 방향이다.

$$F = i\,l\,B\sin 45^\circ + i\,l\,B\sin\left(135^\circ\right) \qquad \left(\sin 45^\circ = \sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\times(2.00A)(0.150m)(0.700T)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 0.300N$$ (방향: $\odot$)