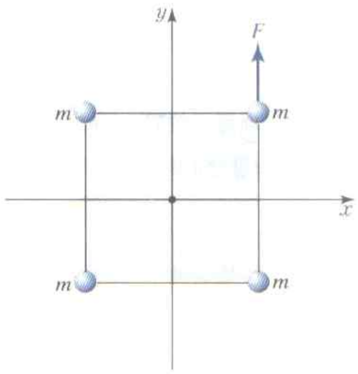
대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (8장) - by 송현석

1. 그림 같이 질량을 무시할 수 있는 한 변의 길이가 a인 정사각형 판의 각 꼭지점에 질량 m인 추가 달려 있다. 이 판의 중심은 원점에 고정되어 있고, 판은 z축을 회전축으로 회전할 수 있다.



(1) 이 계의 회전관성을 구하여라.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = 4 \times m \times \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2ma^2$$

(2) 그림과 같이 크기가 F인 힘을 가하면, 돌림힘의 크기는 얼마인가?

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF\sin\theta = rF\sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}} \times F \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{a}{2} F \right) \hat{k}$$

(3) 이때 각가속도는 얼마인가?

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} = \frac{\left(\frac{a}{2} F \right) \hat{k}}{2ma^2} = \left(\frac{F}{4ma} \right) \hat{k}$$

2. 질량 m인 입자가 xy평면에서 $y = 5.0cm$인 축을 따라서 일정한 속력 v로 x축의 양의 방향으로 움직인다. 원점에 대한 이 입자의 각운동량이 운동하는 동안 일정함을 보여라.

$$\vec{r}(t) = (x_0 + vt)\hat{i} + (y_0)\hat{j}$$
$$\vec{p}(t) = (mv)\hat{i}$$
$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \{(x_0 + vt)\hat{i} + (y_0)\hat{j}\} \times \{(mv)\hat{i}\}$$
$$= \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_0 + vt & y_0 & 0 \\ mv & 0 & 0 \end{pmatrix} = -mvy_0 \hat{k}$$

(t와 무관)

3. 평면 위에서 질량 m일 물체가 반지름 r의 원을 그리며 속력 v로 등속원운동 하고 있다. 이때 물체에 작용하는 구심력에 의한 돌림힘은 얼마인가?

$\tau = 0$

< 구심력은 원의 중심방향을 향하는 힘으로 돌림힘을 발생시킬 수 없다. >

4. (1) 지구에 작용하는 달에 의한 중력의 크기와 태양에 의한 중력의 크기를 비교하여라. 지구와 달 사이의 질량 중심점 사이 거리는 대략 $19.2 \times 10^7 m$이고 지구와 태양의 질량 중심점 사이 거리는 약 $15 \times 10^{10} m$이다. 달과 태양의 질량은 이 책 뒷부분의 부록을 참조하여라.

$$F_{m \to e} = G\frac{m_m m_e}{r_{me}^2}, \qquad F_{s \to e} = G\frac{m_s m_e}{r_{se}^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F_{m \to e}}{F_{s \to e}} = \frac{G\frac{m_m m_e}{r_{me}^2}}{G\frac{m_s m_e}{r_{se}^2}} = \frac{m_m}{m_s}\frac{r_{se}^2}{r_{me}^2} = \frac{7.36 \times 10^{22} kg}{1.99 \times 10^{30} kg} \times \frac{(15 \times 10^{10} m)^2}{(19.2 \times 10^7 m)^2} \approx 0.02257$$

(2) 달에 작용하는 태양에 의한 중력과 지구에 의한 중력의 비 $F_{태양}/F_{지구}$를 구하여라. 달과 태양의 평균 거리는 지구와 태양의 평균 거리와 거의 같다.

$$F_{s \to m} = G\frac{m_s m_m}{r_{sm}^2}, \qquad F_{e \to m} = G\frac{m_e m_m}{r_{em}^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F_{s \to m}}{F_{e \to m}} = \frac{G\frac{m_s m_m}{r_{sm}^2}}{G\frac{m_e m_m}{r_{em}^2}} = \frac{m_s}{m_e}\frac{r_{em}^2}{r_{sm}^2} \approx \frac{1.99 \times 10^{30} kg}{5.98 \times 10^{24} kg} \times \frac{(19.2 \times 10^7 m)^2}{(15 \times 10^{10} m)^2} \approx 0.545$$

5. 달의 질량은 $M = 7.36 \times 10^{22} kg$이고, 달의 반지름은 $r = 1.74 \times 10^6 m$이다. 달의 표면에서 달의 중력가속도를 구하여라.

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = mg$$

$$\Rightarrow \quad g = G\frac{M}{r^2} = (6.67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2) \times \frac{7.36 \times 10^{22} kg}{(1.74 \times 10^6 m)^2}$$

$$\approx 1.62 m/s^2$$

6. 지구 표면에서부터 지구 반지름만큼의 고도를 갖는 지점에서 물체가 정지상태에 있다가 떨어진다. 지구의 질량이 M이고 반지름이 R이라면, 물체가 지구에 부딪치기 직전의 속도는 얼마인가?

$$\Delta U = -\int_{2R}^{R} F\ dr = -\int_{2R}^{R} -G\frac{Mm}{r^2}\ dr = GMm\int_{2R}^{R}\frac{1}{r^2}\ dr$$

$$= GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{2R}^{R} = GMm\left(-\frac{1}{R}-\left(-\frac{1}{2R}\right)\right) = -\frac{GMm}{2R}$$

$$\Delta U = -\Delta K = -\frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2R} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

7. 질량 m인 물체가 지구 중력장을 벗어나 탈출하려면 이 입자의 역학적 에너지가 적어도 $E \geq 0$ 이어야 한다. 공기 저항을 무시할 때 이 입자가 지구를 탈출하는 데 필요한 최소 속력은 얼마인가? (도움말: 무한대의 거리에 도달했을 때 속력이 0일 조건을 생각하여라.)

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} F\ dr = -\int_{\infty}^{r} -G\frac{Mm}{r^2}\ dr = GMm\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}\ dr$$

$$= GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = GMm\left(-\frac{1}{r}-(-0)\right) = -\frac{GMm}{r}$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \geq 0$$

$$\Rightarrow \qquad v \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2\times(6.67\times10^{-11}Nm^2/kg^2)\times(6.0\times10^{24}kg)}{6.38\times10^{6}m}}$$

$$\approx 11200m/s$$

$$= 11.2km/s$$

이 결과는 물체의 질량 m과 무관하다.

8. 발사체를 지구 탈출속력의 $1/2$배의 속력으로 지표면에서 연직 위로 발사한다. 지구의 반경이 R이라면 발사체가 도달하는 최고 높이는 얼마인가?

$$v = \frac{1}{2}v_{탈출} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$\begin{aligned}
\Delta K &= -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}\frac{2GM}{R}\right) = -\frac{1}{4}\frac{GMm}{R} \\
&= -\Delta U = \int_R^{R+h} F\ dr = \int_R^{R+h} -G\frac{Mm}{r^2}\ dr = -GMm\int_R^{R+h}\frac{1}{r^2}\ dr \\
&= -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+h} = -GMm\left(-\frac{1}{R+h} - (-\frac{1}{R})\right) = GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{4}\frac{GMm}{R} = GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\frac{GMm}{R} = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4R} = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} - \frac{1}{4R} = \frac{3}{4R}$$

$$\Rightarrow \quad R+h = \frac{4R}{3}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{4R}{3} - R = \frac{4R}{3} - \frac{3R}{3} = \frac{R}{3}$$

9. 달이 지구를 중심으로 원운동 한다고 가정하자. 케플러의 주기법칙은 "행성운동 주기의 제곱은 원궤도 반지름의 세제곱에 비례한다."이다. 이것을 식으로 쓰면 $T^2 = 4\pi^2 r^3 / GM_e$ 이다. 여기서 M_e는 지구의 질량이고, r은 지구 중심과 달 중심 사이의 거리이다. 달에 작용하는 구심력이 거리의 제곱에 역비례하는 힘임을 증명하라. (도움말: 힘의 표현과 $v = 2\pi r / T$ 를 사용하라.)

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \qquad F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r} = m\frac{(2\pi r/T)^2}{r} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = m\frac{4\pi^2 r}{4\pi^2 r^3/GM} = G\frac{Mm}{r^2}$$

10. 질량 m인 물체가 지면에 대해서 각 θ이고 초속력 v_0로 발사되었다.

$$x(t)=v_0\cos\theta\ t \qquad y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\ t$$

$$\vec{r}(t)=(v_0\cos\theta\ t)\hat{i}+(-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\ t)\hat{j}$$

$$v_x(t)=v_0\cos\theta \qquad v_y(t)=-gt+v_0\sin\theta$$

$$\vec{v}(t)=(v_0\cos\theta)\hat{i}+(-gt+v_0\sin\theta)\hat{j}$$

(1) 입자의 처음 위치에 대해서 각운동량을 시간의 함수로 구하여라.

$$\vec{L}(t)=\vec{r}(t)\times\vec{p}(t)$$

$$=\left\{(v_0\cos\theta\ t)\hat{i}+(-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\ t)\hat{j}\right\}\times\left\{mv_0\cos\theta)\hat{i}+m(-gt+v_0\sin\theta)\hat{j}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}mv_0g\cos\theta\ t^2\ \hat{k}$$

(2) 시간 변화에 대한 각운동량의 변화를 구하여라.

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left((-\frac{1}{2}mv_0g\cos\theta\ t^2)\hat{k}\right)=(-mv_0g\cos\theta\ t)\hat{k}$$

(3) 중력에 의한 돌림힘을 계산하여라.

$$\vec{F}_g=(-mg)\hat{j}$$

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}_g=\left\{(v_0\cos\theta\ t)\hat{i}+(-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\ t)\hat{j}\right\}\times(-mg)\hat{j}=(-mgv_0\cos\theta\ t)\hat{k}$$

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}(t)}{dt}=(-mv_0g\cos\theta\ t)\hat{k}$$ …… (2) 의 답과 같다

11. 초기에 질량이 m_1인 물체와 질량이 m_2인 물체가 마주 보고 우주 공간에 정지해 있다. 두 물체의 질량 중심점 사이의 거리는 R이다.
(1) 각각의 물체가 중력에 의해 받게 되는 가속력의 비를 질량의 비로 나타내어라.

$$F_{1\to 2} = m_2 a_2 = -G\frac{m_1 m_2}{R} = m_1 a_1 = F_{2\to 1} \qquad < 작용-반작용 >$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2} \qquad < a \sim \frac{1}{m} >$$

(2) 두 물체의 거리가 $R/2$이 되었을 때 중력위치에너지는 처음의 몇 배가 되는가?

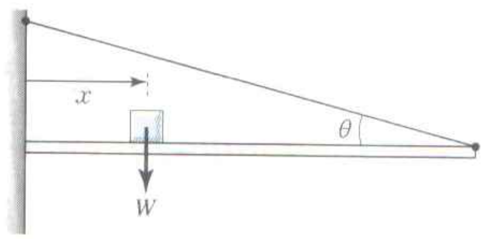
$$U_g = -G\frac{m_1 m_2}{R}, \qquad U_g{}' = -G\frac{m_1 m_2}{R/2} = -2G\frac{m_1 m_2}{R} = 2U_g$$

(3) 이때 두 물체의 운동에너지의 합은 얼마인가?

$$E = K + U_g = 0 + \left(-G\frac{m_1 m_2}{R}\right) = -G\frac{m_1 m_2}{R}$$

$$E = E' = K' + U_g{}' \quad \Rightarrow \quad K' = E - U_g{}' = -G\frac{m_1 m_2}{R} - \left(-2G\frac{m_1 m_2}{R}\right) = G\frac{m_1 m_2}{R}$$

12. 길이 L인 무게를 무시할 수 있는 얇은 판의 한쪽 끝은 벽에 고정되어 있고, 다른쪽 끝은 실에 매여 있다. 실의 다른쪽 끝은 벽에 고정되어 있고, 실과 판 사이의 각도는 θ이다. 무게 W인 물체가 벽으로부터 x만큼 떨어져서 판 위에 놓여 있다. 실의 장력을 구하여라.



$$\sum \vec{\tau} = 0$$

$$TL\sin\theta - Wx = I\alpha$$

$$TL\sin\theta - Wx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{Wx}{L\sin\theta}$$