분반	겨울	이름	오승환	학번	12171657	1

문제 1

[질문 1] 답 $\frac{5}{9}$

[질문 2] 답 $\frac{3}{10}$

[질문 3] 답 $\frac{1}{2}$

[질문 4] 답 $\frac{1}{8}$

[질문 5] 답 $\frac{1}{2}$

문제 2

[질문 1] 답 $\frac{1}{2}$

[질문 2] 답 $-\frac{12}{25}$

[질문 3] 답 $\frac{1}{2}$

[질문 4] 답 $4e^{-\frac{3}{2}}$

[질문 5] 답 $\frac{1}{2}e^{t-2}(t-2)^2 \cdot u(t-2)$

문제 3

[질문 1] 답 $\frac{2}{3}$

[질문 2] 답 25

[질문 3] 답 -1

[질문 4] 답 $e^{-\frac{\pi}{3}}(\sqrt{3}-1)$

[질문 5] 답 $e^{4(t-2)}u(t-2)$

문제 4

답 $-\ln\frac{1}{2}$

풀이

$f(t)=1-e^t \quad \mathcal{L}(f(t))=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}$

$F(s)=\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^\infty \frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\,ds$

$=\left[\ln s-\ln|s-1|\right]_s^\infty$

$=-\ln\frac{s}{s-1}=F(s)$

$F(2)=-\ln 2$

나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다.

분반	겨울	이름	유한성	학번	12171657	2

문제 5

답 $\frac{1}{2}$

풀이 $f(2)=?$

$f(t)=\int_0^\infty \tau e^{(1-t)\tau}\sin\tau\, d\tau$

$\Rightarrow f(2)=\int_0^\infty \tau e^{-\tau}\sin\tau\, d\tau$

$f(2)=\left[-\frac{1}{2}e^{-\tau}(\tau\sin\tau+(\tau+1)\cos\tau\right]_0^\infty$

$=\frac{1}{2}$

문제 7

답 $\frac{3}{2}$

풀이 $f(2)=?$

$F(s)=\ln\frac{s^2+1}{s^2}$ $F'(s)=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s}$

$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$

$F'(s)=-\mathcal{L}(tf(t))=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s}$

$\Rightarrow tf(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{2s}{s^2+1}\right)$

$tf(t)=1-2\cos t$

$f(t)=\frac{1}{t}-\frac{2}{t}\cos t$

$f(2)=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{3}{2}$

문제 6

답 $\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$

풀이

$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(s^2+1)^2}\right)$

$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(\sin t)\mathcal{L}(4\sin t)\right)$

$=\sin t * 4\sin t$

$=4\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)\,d\tau$

$=-2\int_0^t \cos t-\cos(2\tau-t)\,d\tau$

$=-2\left[\tau\cos t-\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)\right]_0^t$

$=-2\left(t\cos t-\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}\sin(-t)\right)$

$=-2(t\cos t-\sin t)$

$=-2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

문제 8

답 3

풀이 $F(4)=?$

$\mathcal{L}(ty'')+\mathcal{L}(y')-\mathcal{L}(ty')+\mathcal{L}(y)=0$

$\Rightarrow -2sF-s^2F'+sF-y(0)+sF-y(0)$

$+F+sF'+F=0$

$\Rightarrow (s-s^2)F'=sF-2F$

$\Rightarrow \frac{F'}{F}=\frac{s-2}{s-s^2}=-\frac{2}{s}-\frac{1}{1-s}$

$\ln|F|=-2\ln s+\ln|1-s|$

$F=\left(\frac{1-s}{s^2}\right)C$ $(C=-16)$

$F=-16\left(\frac{1-s}{s^2}\right)$

나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다.

분반	거울	이름	유한성	학번	12171617	3

문제 9

답 $\frac{1}{3}$

풀이 $y(0)=1$ $y(2)=?$

$y' = y^2(1-2x)$

$\frac{y'}{y^2} = y^{-2}$

$-y^{-2}y' = (1-2x)$

$-y^{-1} = x - x^2 + C$

$y^{-1} = -x + x^2 + C$ $(C=1)$

$y^{-1} = -x + x^2 + 1$

$\frac{1}{y} = -2 + 4 + 1$

$\frac{1}{y} = 3$

$y = \frac{1}{3}$

문제 10

[질문 1] 답

$(0,2)$, $(4,-2)$

[질문 2] 답

$(0,2)$ 불안정한 마디점 $(4,-2)$: 불안정한 안장점

풀이

y_1', y_2'이 이루는 임계점은 $(0,2)$, $(4,-2)$

$(0,2)$일때, 불안정한 마디점

$\begin{cases} u_1 = y_1 \\ u_2 = y_2 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1' = 4u_1 \\ u_2' = u_1 + u_2 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $p = 5 > 0$, $q = 3 > 0$, $\Delta > 0$

$(4,-2)$일때 불안정 안장점

$\begin{cases} u_1 = y_1 - 4 \\ u_2 = y_2 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1' = -4u_1 \\ u_2' = u_1 + u_2 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $p = -3 < 0$, $q = -4 < 0$, $\Delta > 0$

문제 11

답 $-\frac{13}{3}$

풀이

$\mathcal{L}(y'') + 9\mathcal{L}(y) = e^{-\frac{\pi}{2}s}$

$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) + 9\mathcal{L}(y) = e^{-\frac{\pi}{2}s}$

$(s^2+9)\mathcal{L}(y) = 2s + e^{-\frac{\pi}{2}s}$

$\mathcal{L}(y) = \frac{2s}{s^2+9} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+9}$

$y = 2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3(t-\frac{\pi}{2})\,u(t-\frac{\pi}{2})$

$y(\frac{\pi}{3}) = -1 + 0 = -1$

$y(\pi) = -2 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$

나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다.

분반	거울	이름	우한성	학번	12171657	4

문제 12

답

$2e^x + e^x \ln x$

풀이

$y'' + \frac{1-2x}{x} y' + \frac{x-1}{x} y = 0$ ($x=0$에서 해석적이지 않음)

$b(x) = 1-2x$ $c(x) = x(x-1)$ $b(0)=1$, $c(0)=0$

$r(r-1)+r=0$, $r=0$

$r=0$일 때

$y_1 = \sum_{m=0} a_m x^m$

$\rightarrow \sum_{m=1} (m+1)m\, a_{m+1} x^m + \sum_{m=0} (m+1) a_{m+1} x^m$

$-2\sum_{m=1} m a_m x^m + \sum_{m=1} a_{m-1} x^m - \sum_{m=0} a_m x^m = 0$

$\rightarrow a_1 - a_0 + \sum_{m=1} x^m \left(m(m+1)a_{m+1} + (m+1)a_{m+1} - 2m a_m + a_{m-1} - a_m \right) = 0$

$a_0 = 0$,

$y_1 = a_0 \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) = a_0 e^x$

$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p\,dx\right) dx$

$= e^x \ln x$

$y = c_1 e^x + c_2 e^x \ln x$ ($2e = c_1 e + c_1 = 2$)

$y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 e^x \ln x$ ($2e = 2e + c_2 e$, $c_2 = 1$)

$y = 2e^x + e^x \ln x$

문제 13

답

6

풀이

$y' = \frac{y}{x} + x$

$\frac{y}{x} = t$, $y = tx$, $y' = t'x + t$

$y' = t + x = t'x + t$

$t'x = x \rightarrow t' = 1$ $t = x + C$

$\frac{y}{x} = x + C \rightarrow 2 = 1 + C$ ($C = 1$)

$y = x^2 + x$

$y(2) = 4 + 2 = 6$

나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다.