제 25 장 연습 문제 풀이 (2)

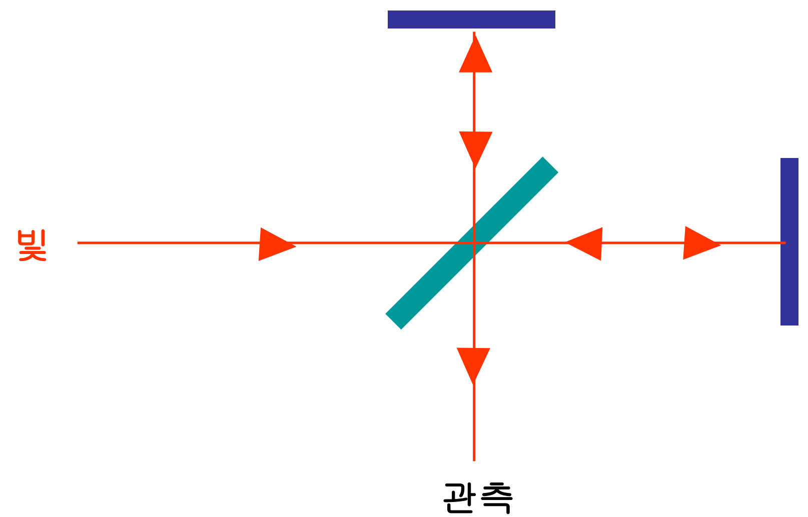
연습문제 풀이 : 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19

25-1 빛의 속도와 마이켈슨-몰리 실험

연습 25-1. 빛의 속도가 항상 일정하다면 마이켈슨-모올리 실험의 결과가 당연해지는가? 그 이유를 설명하라.

풀이

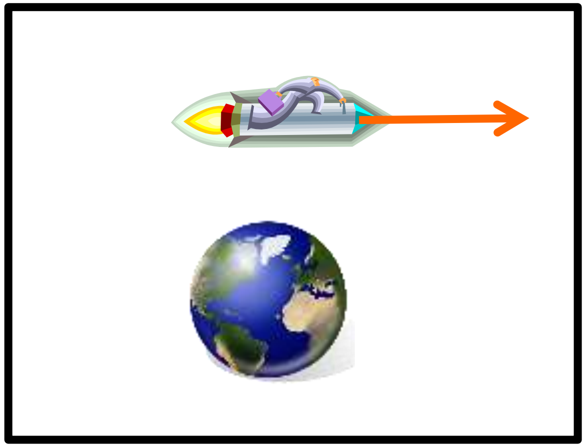
- 빛의 속도는 어떤 관성계에서 측정해도 항상 일정하므로 간섭계의 두 경로 사이에 시간차가 생기지 않는다. 따라서 간섭 현상의 변화를 볼 수 없다. (고전적인 갈릴레이 변환에서는 지구 공전의 속도가 간섭계의 수평방향의 빛의 속력에 영향을 미쳐서 수직방향의 빛의 속력과 다르게 되므로 시간차가 발생하는 것으로 계산된다.) 빛은 정지한 관성계에서 측정하든 일정한 속도로 움직이는 관성계에서 측정하든 항상 속력이 일정하다)
- 또한 마이켈슨 모올리 실험에 의해 에테르는 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다. 빛은 매질이 없더라도 진공 중에서 전파가 가능하다.

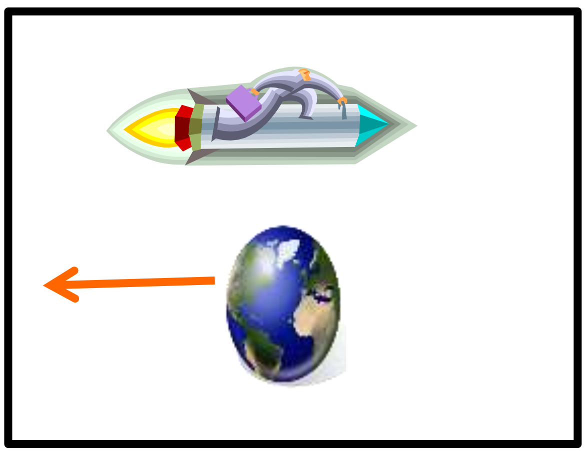


25-2 특수 상대론

연습 25-2. 여러분이 빛을 타고 여행하다가 집에 두고 온 시계를 지나쳤다. 이 시계의 빠르기를 계산하여라

풀이





정지계(t)에서 움직이는 계의 시계(t')를 관측하면 느리게 관측된다. (즉, 움직이는 계의 시간 t' 는 고유시간으로 항상 t' 시간이 t 보다 작다.-시간지연 효과)

이 문제를 입장을 바꿔서 생각해 보자
우리(우주선)가 정지해 있고 지구가 빛의 속도 (v=c) 로 움직인다고 가정하자. 그러면 지구의 시계는 정지(t'=0)한 것처럼 보일 것이다. (물론 지구에 있는 관측자도 상대적으로 지구가 정지하고 있고 우리(우주선)가 움직인다고 생각하기 때문에 우리(우주선)의 시계가 멈춰있다고(t'=0) 말할 것이다.)

t' : 움직이는 계의 시계(고유시간)
t : 정지한 관측자의 시간

지구의 시계
t'=0

$$t' = \frac{t}{\gamma} = \frac{t}{\infty} = \mathbf{0}$$

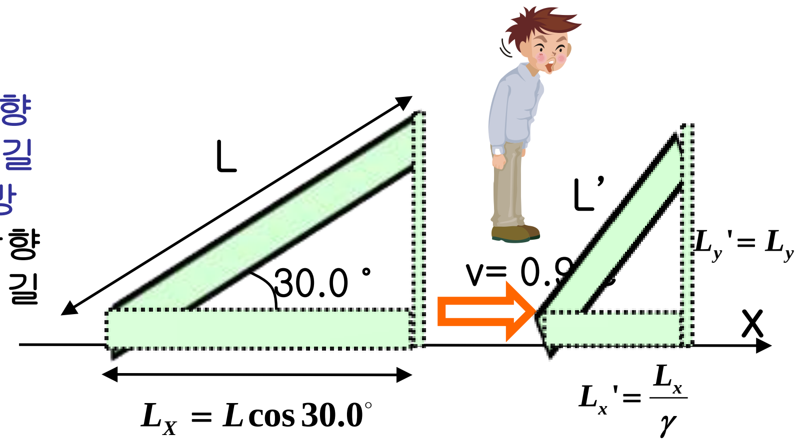
$\boldsymbol{v = c}$ 일 때

$$\gamma = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

연습 25-3. 정지길이가 30.0 cm 인 막대자가 진행방향인 x 축에 대해 30.0 ˚ 기울어진 채 x 방향으로 v= 0.99c 의 속도로 움직이고 있다. 정지해 있는 관찰자가 측정한 이 자의 길이는 얼마인가?

풀이

정지한 상태의 자의 길이가 L 이라 할 때 움직이는 방향으로는 길이 수축 현상이 일어나지만 수직방향으로는 길이수축 효과가 나타나지 않는다. 정지한 상태에서 x 방향으로 자의 길이는 L cos 30.0 ˚ 이며 이 자가 x 축 방향으로 움직이므로 정지해 있는 관찰자는 x 방향으로만 길이가 수축된 것을 관찰할 것이다.



L : 정지계에서의 고유길이

L ': 움직이는 좌표계에서의 길이

우선 움직이는 속도에 의한 γ 를 구하면

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0.99)^2}} = 7.088$$

정지한 관찰자가 x 방향으로 관측된 자의 길이는 $L_x' = \dfrac{L_x}{\gamma} = \dfrac{30.0\cos 30.0^\circ}{7.088} = 3.67(cm)$ 로 수축되고

정지한 관찰자가 y 방향으로 관측된 자의 길이는 $L_y' = L_y = 30.0\sin 30.0^\circ = 15.0(cm)$ 으로 변화가 없다.

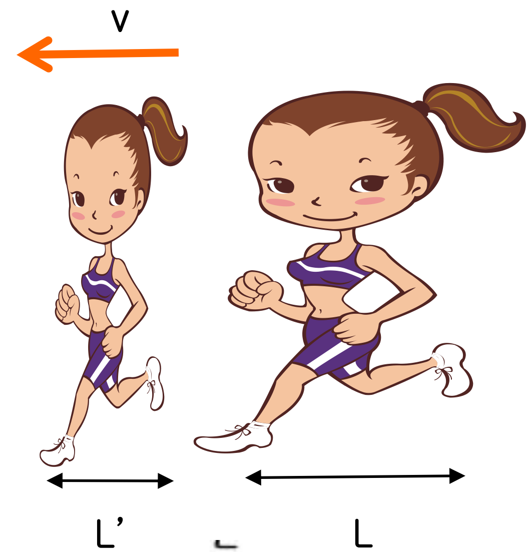
따라서 자의 길이는 $L' = \sqrt{(L_x')^2 + (L_y')^2} = \sqrt{3.67^2 + 15.0^2} = 15.4(cm)$ 이다.

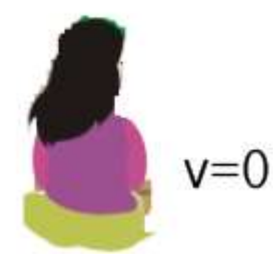
연습 25-4. 당신이 두 배로 날씬해 보이고 싶다면 얼마나 빨리 달려야 할까?

L : 정지계에서의 고유길이

L': 움직이는 좌표계에서의 길이

$$L' = \frac{L}{\gamma}$$





풀이

날씬한 것을 관측하는 사람은 정지계에 있는 관측자이다. 정지계에서 움직이는 물체를 관측하게 되면 물체는 고유 길이(L) 보다 $L'=L/\gamma$ 로 짧아진다, 두 배나 날씬하다는 것은 원래의 옆쪽 길이보다 ½ 배로 줄어들 때 이므로

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 2 \Rightarrow \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0.866\ c$$

연습 25-8. Λ 중입자의 평균수명은 2.63 x 10^{-10} s 이다. 이 입자가 0.990 c 의 속력으로 움직이고 있다면 정지 좌표계에서 이 입자를 관찰했을 때 붕괴하기 전 이 입자가 이동한 거리는 얼마인가?

풀이

정지한 관측자는 움직이는 중입자의 수명을 늘어난 것으로 관측한다. 따라서 늘어난 수명만큼 중입자는 더 멀리 이동한 것으로 관측될 것이다.

중입자의 평균 수명을 τ 라고 하자. 정지한 관측계에서 입자의 수명 t 는

$$t = \gamma\,\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{2.63\times10^{-10}\,s}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0.990c}{c}\right)^2}} = 1.864\times10^{-9}\,s$$

0.99c 의 속력으로 움직이는 중입자는 정지계에서 더 늘어난 수명만큼 이동하게 된다. 따라서 이동한 거리는 다음과 같다.

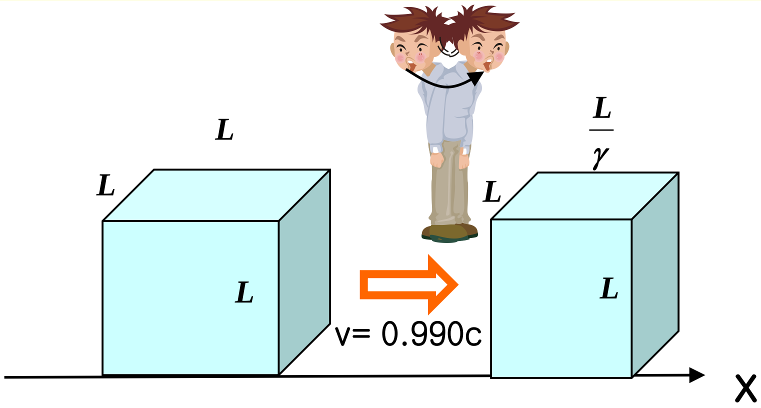
$$L = (0.990c)\times t = 0.990\times(3\times10^{8}\,m/s)\times(1.864\times10^{-9}\,s) = 0.554m \;\;(55.4cm)$$

25-2 특수 상대론

연습 25-9. 한 변의 길이가 1.00cm 인 정육면체인 알루미늄의 질량은 대략 3.00g 이다. 이 정육각형의 한 면이 x 축 방향으로 향하여 0.990c 의 속력으로 움직이고 있다. 정지된 관찰자가 이 정육면체를 측정할 때 (가) 이 정육면체의 부피를 구하여라. (나) 이 정육면체의 질량을 구하여라. (다) 이 정육면체의 밀도를 구하여라.

풀이

정육면체의 x 축 방향으로는 길이 수축 효과가 나타나지만 수직방향인 y 축과 x 축으로 길이 수축이 나타나지 않으므로 정지한 관찰자는 정육면체가 아닌 직육면체로 관측하게 된다.



우선 움직이는 속도에 의한 γ 를 구한다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0.99)^2}} = 7.088$$

x 방향으로 관측된 정육면체의 변의 길이는 $L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{1.00}{7.088} = 0.141(cm)$ 로 수축되고

y , z 방향으로 관측된 변의 길이는 $L = 1.00(cm)$ 으로 변화가 없다.

(가) 부피 : $V' = L' \cdot L^2 = \frac{L^3}{\gamma} = \frac{1.00^3}{7.088} = 0.141(cm^3)$ (나) 질량 : $m = \gamma m_0 = 7.088 \times 3.00 = 21.3(g)$

(다) 밀도 : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{21.3g}{0.141cm^3} = 151(g/cm^3)$

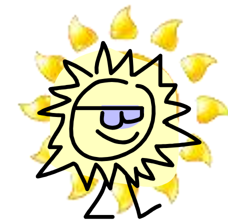
정지해 있을 때 정육면체의 밀도는 3,00 g/cm^3 이었는데 정지한 관측자는 이 움직이는 물체의 밀도를 151 g/cm^3 으로 측정한다.

25-4 상대론적 운동량과 에너지

연습 25-10. 태양의 질량은 m=1.989x10^{30} kg 이고 P=3.872x10^{23} kW 의 비율로 에너지를 방출한다. 1시간당 줄어드는 태양의 질량을 계산하고 태양이 그 질량의 1 % 를 태우는데 소모되는 시간을 구하여라.

풀이

태양은 핵융합반응에 의해 질량의 일부가 결손되면서 이 질량에너지가 P=3.872x10^{23} kW 의 비율로 방출되어 서서히 질량이 소모되어 간다.



(가) 1시간당 줄어드는 태양의 질량에너지

질량에너지 방출비율(일률)

$$P = \frac{\Delta E_0}{\Delta t} = \frac{\Delta (m_0 c^2)}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta m_0}{\Delta t} = \frac{P}{c^2} = \frac{3.872\times 10^{26} W}{(3\times 10^8 m/s)^2} = 4.30\times 10^9 \left(\frac{kg}{s}\right) = 1.5488\times 10^{13} (kg/hr)$$

$$\text{단위환산 :} \left\{ \frac{W}{(m/s)^2} = \frac{kg\cdot\left(\frac{m^2}{s^3}\right)}{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{kg}{s} = \frac{kg}{s}\left(\frac{3600 s}{1 hr}\right) = \frac{3600 kg}{1 hr} \right\}$$

(나) 질량의 1 % 를 태우는데 소모되는 시간

$$\frac{\Delta m_0}{\Delta t} = \frac{m_0 \times 0.01}{\Delta t'}$$

(질량 (m_0)의 1 % : $\Delta m_0 = \frac{1}{100} m_0 = 0.01 m_0$)

$$\therefore \Delta t = \frac{m_0\times 0.01}{\left(\frac{\Delta m_0}{\Delta t}\right)} = \frac{1.989\times 10^{28} kg}{1.5488\times 10^{13} (kg/hr)} = 1.284\times 10^{15} hr$$

25-4 상대론적 운동량과 에너지

연습 25-12. 0.99999 c 의 속력으로 움직이고 있는 전자가 있다.

(가) 전자의 상대론적 운동량을 구하여라.

풀이

속력이 주어졌으므로 우선 γ 를 구한다. 그리고 상대론적 운동량과 운동에너지의 식을 이용한다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0.99999c}{c}\right)^2}} = 223.607$$

$$p = \gamma m_0 v = 223.607 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 0.99999 \times \left(3.00 \times 10^{8}\right) = 6.111 \times 10^{-20} kg \cdot m/s$$

(나) 전자의 상대론적인 운동에너지를 구하여라.(전자의 정지에너지는 0.511MeV 이다.

풀이

$$KE = (\gamma - 1)m_0 c^2 = (223.607 - 1) \times 0.511 = 113.752(MeV) \quad (= 1.82 \times 10^{-11}(J))$$

(다) 전자의 상대론적 질량을 구하여라.

풀이

γ 배 만큼 커졌으므로 223.607 배 커졌다.

$$m = \gamma m_0 = 223.607 \times 9.11 \times 10^{-31} = 2.037 \times 10^{-28}(kg)$$

25-4 상대론적 운동량과 에너지

연습 25-13. 스위스와 프랑스 국경에 있는 유럽입자물리연구소(CERN) 의 거대 강 입자 충돌기(Large Hadron Collider, LHC) 는 양성자를 운동에너지 7 TeV 까지 가속시킨다. 이 가속된 양성자의 속력을 구하여라. 이 양성자의 운동량은 얼마인가? 이 가속된 양성자는 정지질량 $m_p = 938\text{MeV}/c^2$ 보다 얼마나 더 무거운가?

풀이

상대론적 운동에너지에 대한 식 $E = (\gamma - 1)E_0$ 에서 γ 값을 구한 다음 γ 의 식에서 입자의 속력을 구할 수 있다.

가)

$$KE = (\gamma - 1)E_0 = 7 \times 10^{12} eV \qquad (E_0 = 9.39 \times 10^8 eV)$$

$$\gamma - 1 = \frac{7 \times 10^{12}}{9.38 \times 10^8} = 7462.6865 \qquad \therefore \gamma = 7463.6865$$

한편 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow 1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2 = \dfrac{1}{\gamma^2}$ 이므로

$$\therefore v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = c\sqrt{1 - \frac{1}{(7463.6865)^2}} = 0.999999991c$$

나) 운동량의 식에 양성자의 정지질량과 속력을 대입하여 운동량을 구한다.

$$p = \gamma m_p v = (7463.6865) \times (9.38 \times 10^8 eV/c^2) \times (0.999999991c) = 7.000938 \times 10^{12}(eV/c)$$

$$= 7.000938(TeV/c)$$

다) 물체의 운동량이나 상대론적인 질량은 속도가 증가할 수록 커지게 되며 그 비율은 γ 에 비례한다.

$$(p = \gamma m_p v = mv) \Rightarrow \quad m = \gamma m_p$$

즉, 가속된 양성자는 7464 배 만큼 무거워진다.

25-4 상대론적 운동량과 에너지

연습 25-14. 0.900c 의 속력으로 움직이는 양성자와 질량이 같은 전자의 속력은 얼마인가? (단, 전자의 정지질량은 0.5 MeV/c^2 , 양성자의 정지질량은 938 MeV/c^2 라고 하자)

풀이 양성자의 정지질량은 전자보다 2000배나 크다. 이러한 양성자와 전자의 상대론적 질량이 같으려면 전자의 속력이 0.900 C 의 속력으로 움직이는 양성자 보다 매우 커야 한다. 따라서 전자가 양성자와 같은 운동량을 갖는다는 조건으로 부터 전자의 속력을 구한다.

V= 0.900 c 로 움직일 때 $\gamma_P = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0.900c}{c}\right)^2}} \Rightarrow \gamma_P = 2.294$

양성자의 상대론적인 운동량과 전자의 상대론적 운동량은 같다는 조건에서

$$p_p = p_e \quad \Rightarrow \quad \gamma m_P v_P = \gamma_e m_e v_e \qquad \left(\begin{array}{l} m_P, m_P : \text{양성자의 정지질량, 속력} \\ m_e,\ m_e : \text{전자의 정지질량, 속력} \end{array}\right)$$

$$\gamma_e v_e = \frac{\gamma m_P v_P}{m_e} = \frac{2.294 \cdot \left(938\,MeV/c^2\right)\cdot\left(0.900c\right)}{0.511\,MeV/c^2} = 3790c \quad \Rightarrow \quad \gamma_e v_e = 3790c$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{v_e}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v_e}{c}\right)^2}} = 3790c}$$

(이 식을 v_e 에 대해서 정리한다.)

$$\therefore v_e = \frac{3790c}{\sqrt{1+(3790)^2}} = 0.99999997c$$

즉, 전자가 0.99999997c 의 속력일 때 양성자와 같은 상대론적인 질량을 (또는 운동량) 을 갖게 된다.

25-4 상대론적 운동량과 에너지

연습 25-15.

(가) 자유입자의 운동에너지가 정지에너지 보다 매우 크다면, 운동에너지는 운동량의 몇 제곱에 비례하는가?

(나) 또한 운동에너지가 정지에너지 보다 매우 작다면, 운동에너지는 운동량의 몇 제곱에 비례하는가?

풀이 $E = KE + E_0 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = \sqrt{p^2c^2 + E_0^2}$ 의 식에서 각각 근사식을 구한다.

가) $KE >> E_0$ 인 경우

좌변: $E = KE\left(1 + \dfrac{E_0}{KE}\right) \cong KE \qquad (\because KE >> E_0)$

우변: $E = \left(p^2c^2 + E_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} = pc\left(1 + \dfrac{E_0^{\,2}}{p^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = pc\left(1 + \dfrac{E_0^{\,2}}{2p^2c^2}\right) \approx pc \qquad (\because E_0 << pc)$

$\therefore\ KE \propto p$ 운동에너지가 큰 경우에는 운동에너지와 운동량은 서로 비례한다.

나) 운동에너지가 정지에너지 보다 매우 작다면 $\left(\text{if}\quad x \rightarrow \text{small},\quad (1+x)^p \approx 1 + px\right)$ 을 이용

$$E = KE + m_0c^2, \quad E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = m_0c^2\left(1 + \frac{p^2c^2}{m_0^2c^4}\right)^{1/2} \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0^2c^2}\right)$$

$$[\text{좌변} = \text{우변}] \Rightarrow KE + \cancel{m_0c^2} \approx \cancel{m_0}c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0^2c^2}\right)$$

$$\therefore KE = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0} \quad \Rightarrow \quad \therefore KE \propto p^2$$

운동에너지가 작은 경우에는 운동에너지는 운동량의 제곱, 즉 고전적인 표현과 같다.

25-4 상대론적 운동량과 에너지

연습 25-17 Δ^+ 중입자는 대부분 양성자와 파이 중간자(π^0), 또는 중성자와 파이 중간자(π^+)로 붕괴 한다. 그러나 0.6% 남짓 양성자와 광자(감마선: ɣ)로도 붕괴한다. 이 붕괴를 방사붕괴라고 부른다. 이 붕괴 과정은 $\Delta^+ \rightarrow p + \gamma$ 라고 표현한다. 정지상태에 있던 Δ^+ 중입자가 방사 붕괴하는 경우에 (Δ^+ 의 질량 :1232MeV, 양성자의 질량: 938.3 MeV/c^2)

(나) 광자의 운동에너지를 MeV 의 단위로 나타내어라.

풀이 반응식 $\mathbf{\Delta^+ \rightarrow p + \gamma}$

운동량 보존법칙 $p_P + p_\gamma = 0, \qquad p_P = -p_\gamma = -\dfrac{K_\gamma}{c}$ (1) $\because K_\gamma = p_\gamma c$ (광자의 질량은 0 이다.)

에너지보존 $E_{\Delta+} \rightarrow \mathbf{E_p + E_\gamma}$ $\quad E_{\Delta^+,0} = \left(K_p + E_{p,0}\right) + K_\gamma = \left(p_P{}^2c^2 + E_{p,0}\right)^{1/2} + p_\gamma c$
(질량에너지를 포함한 에너지 보존)

$$K_p + K_\gamma = E_{\Delta^+,0} - E_{p,0} = 1231 - 938.3 = 297.3(MeV) \qquad (2)$$

$$\left(p_P{}^2c^2 + E_{p,0}{}^2\right)^{1/2} = E_{\Delta^+,0} - p_\gamma c \quad \Rightarrow \quad \cancel{p_P{}^2c^2} + E_{p,0}{}^2 = E_{\Delta^+,0}{}^2 - 2E_{\Delta^+,0}p_\gamma c + \cancel{p_\gamma{}^2c^2} \qquad (3) \qquad \left(p_P = -p_\gamma\right)$$

$$\Rightarrow p_\gamma = \frac{E_{\Delta^+,0}{}^2 - E_{p,0}}{2E_{\Delta^+,0}c} = \frac{1232^2 - 938.3^2}{2 \times 1232 \times c} = 258.7MeV / c$$

광자의 운동에너지 : $\therefore K_\gamma = p_\gamma c = 258.7MeV$

(가) 양성자의 운동에너지를 MeV 의 단위로 나타내어라.

풀이 양성자의 운동에너지 : (1) 식에서 구한다

$$K_P = E_{\Delta^+,0} - E_{p,0} - K_\gamma = (1232 - 938.3 - 258.7)MeV = 35.0\left(MeV\right)$$

발전문제

연습 25-18 전하가 q 인 입자가 일정한 전기장 아래에 u의 속력으로 직선 운동을 하고 있다. 이 때 이 입자가 전기장 때문에 받는 힘은 $q\vec{E}$ 이다. 이 입자의 속도와 전기장의 방향은 모두 x 방향이다.

(가) 이 입자가 x 방향으로 받는 가속도는 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{qE}{m}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

풀이

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)\frac{du}{dt}$$

$$= \left\{\frac{m\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-u^2/c^2} + \frac{\frac{1}{2}mu\left(1-u^2/c^2\right)^{-1/2}\left(2u/c^2\right)}{1-u^2/c^2}\right\}\frac{du}{dt} = \left\{\frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{mu^2/c^2}{\left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}}\right\}\frac{du}{dt}$$

$$F = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(1 + \frac{u^2/c^2}{1-u^2/c^2}\right)\frac{du}{dt} = \frac{m}{\left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}}\frac{du}{dt}$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = \frac{F\left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}}{m} = \frac{qE\left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}}{m}$$

고전적으로는 일정한 전기력을 받으면 가속도도 일정해서 속도가 무한히 증가해야 하지만, 상대론적으로는 속력이 증가할수록 가속도의 크기는 감소해서 빛의 속력 근처에서는 가속도가 0 이 된다. 따라서 빛의 속력을 넘어설 수 없다. 즉, 한계 속력이 존재한다.

발전문제

연습 25-18 계속

(나) 시간 t=0 일 때, 입자에 x 방향으로 일정한 전기장을 가했다. 그리고 그 순간에 입자는 x=0, t=0 에서 정지해 있었다. 시간 t 후에 이 입자의 위치와 속력을 구하여라.

풀이

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{qE}{m}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} \Rightarrow \boxed{\int_0^u \frac{du}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}} = \int_0^t \frac{qE}{m}dt$$

$$\left[\int_0^u \frac{du}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{qE}{m}t \Rightarrow \frac{uc}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{qE}{m}t \Rightarrow \frac{c^2u^2}{c^2-u^2} = \left(\frac{qE}{m}\right)^2 t^2$$

$$\Rightarrow c^2u^2 = \left(\frac{qE}{m}\right)^2 t^2\left(c^2-u^2\right) = \left(\frac{qE}{m}\right)^2 c^2t^2 - \left(\frac{qE}{m}\right)^2 t^2u^2$$

$$\Rightarrow \left(c^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2 t^2\right)u^2 = \left(\frac{qE}{m}\right)^2 c^2t^2$$

입자의 속력

$$\therefore u = \sqrt{\frac{\left(\frac{qE}{m}\right)^2 c^4t^2}{c^2+\left(\frac{qE}{m}\right)^2 t^2}} = \frac{qEct}{\sqrt{mc^2+(qEt)^2}}$$

발전문제

연습 25-18 (나) -계속

시간 t 후에 이 입자의 위치 :

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{qEct}{\sqrt{mc^2 + (qEt)^2}}$$

$$x = \int udt = \int_0^t \frac{qEct}{\sqrt{m^2c^2 + (qEt)^2}}dt$$

$$= \int_{y_0=mc}^{y=\sqrt{mc^2+(qEt)^2}} \frac{c}{qE}dy \qquad (t=0,\ y_0 = mc)$$

$$= \frac{c}{qE}\left(\sqrt{mc^2 + (qEt)^2} - mc\right)$$

$$y = \sqrt{mc^2 + (qEt)^2} \qquad (t=0,\ y = mc)$$

$$dy = \frac{q^2E^2t}{\sqrt{mc^2 + (qEt)^2}}dt$$

$$\Rightarrow \left[dt = \frac{\sqrt{mc^2 + (qEt)^2}}{q^2E^2t}dy\right]$$

발전문제

연습 25-19 질량이 m인 입자가 있다. 이 입자의 운동량은 p, 운동에너지는 K로 표현한다.

(가) 이 입자의 질량 m은 다음과 같이 쓸 수 있음을 보여라.

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}$$

풀이

상대론적 에너지 식을 이용하여 ,질량 m 에 대하여 푼다.

$$E = K + mc^2 = \left(p^2c^2 + m^2c^4\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(K + mc^2\right)^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow K^2 + 2Kmc^2 + m^2c^4 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\therefore m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}$$

(나) 입자의 속력이 아주 작을 때 위 식의 오른쪽 표현이 m 이 됨을 보여라.

$$\left(\because c >> v \text{ 일 때} \quad \Rightarrow \quad K \cong \frac{1}{2}mv^2 \cong \frac{p^2}{2m}\right) \qquad \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2} = \frac{p^2}{2K} - \frac{K}{2c^2} \cong \frac{p^2}{2\left(\frac{p^2}{2m}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{2c^2} = m\left(1 - \frac{v^2}{4c^2}\right) \cong m$$

(다) 만약에 이 입자의 운동량이 p= 154 MeV/c2 이고 운동에너지는 81 MeV 라면 이 입자의 질량은 얼마인가?

$$\therefore m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2} = \frac{(154MeV)^2 - (81MeV)^2}{2(81MeV)c^2} = 105.9MeV / c^2$$