

제 22 장 연습 문제 풀이 (2)

1, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15, 16,
18, 20, 21, 22, 23, 24

혹시 풀이에 잘못된 곳이 발견되면 카톡이나 문자 메일로 연락해
주면 좋겠습니다.

010-3188-2909 marzini@inha.ac.kr

22-1 저항회로

연습 22-1. 사인함수 형태의 전압 $V(t)$ 의 유효전압이 100V 이다. 최대 전압은 얼마인가?

풀이

전압이 사인함수와 같이 변하는 교류에서 유효전압과 최대전압의 관계식은 다음과 같다.

$$V_{rms} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} = 0.707V_o = 100(V)$$

즉 최대전압은 유효전압을 $\sqrt{2}$ 배 한 값이므로

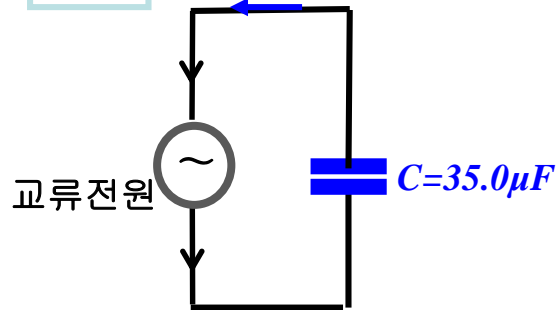
$$V_o = \sqrt{2}V_{rms} = 1.41 \times 100 = 141(V)$$

이다.

22-2 축전기 회로와 전기용량 리액턴스

연습 22-3. $35.0\ \mu\text{F}$ 축전기가 각 진동수 400Hz 이고 최대 전압이 20.0V 인 교류전원에 연결되었다면 이 회로의 최대 전류는 얼마인가?

풀이



$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(400\ \text{sec}^{-1})(3.50 \times 10^{-5}\ \text{F})} = 71.4\ \Omega$$

$$i_0 = \frac{V_0}{X_C} = \frac{20.0\text{V}}{71.4\ \Omega} = 0.280\text{A}$$

22-3 인덕터 회로와 유도 리액턴스

연습 22-5. $45.0\ \text{mH}$ 인덕터가 진동수 400Hz 이고 최대 전압이 20.0V 인 교류전원에 연결되었다면 이 회로의 최대 전류는 얼마인가?

풀이



$$X_L = \omega L = (2 \times \pi \times 400\ \text{sec}^{-1})(4.50 \times 10^{-2}\ \text{H}) = 113\ \Omega$$

$$i_0 = \frac{V_0}{X_L} = \frac{20.0\text{V}}{113\ \Omega} = 0.177\text{A}$$

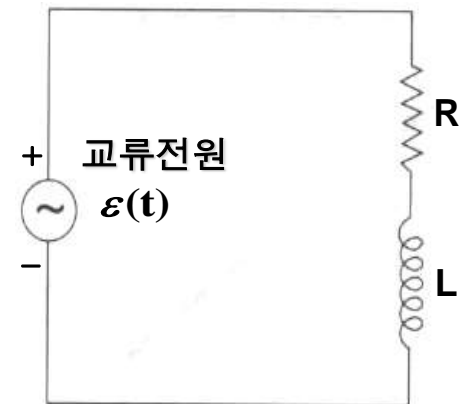
22-3 인덕터 회로와 유도 리액턴스

연습 22-6. 그림과 같이 400 Ω 의 저항선과 인덕턴스가 0.500 H 인 코일이 교류전원에 직렬로 연결되어 있는 RL 회로가 있다. 교류전원의 유효 전압이 100 V 이고 각주파수가 600 rad/s 일 때 이 회로의 유효전류와 저항에서 소비되는 평균 전력을 구하여라.

풀이 인덕터에 의한 리액턴스와 전체 임피던스를 구한다.

$$\omega = 600 \text{ rad / sec}$$

$$R = 400 \Omega, \quad L = 0.500 \text{ H}$$



$$X_L = \omega L = (600 \text{ rad / sec})(0.500 \text{ H}) = 300 \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 [\Omega]$$

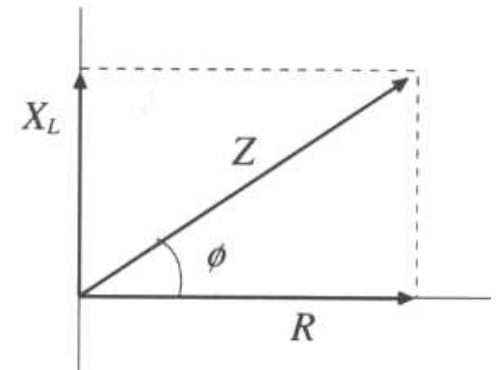
회로에 흐르는 유효전류는 옴의 법칙에 의해

$$\therefore i_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{100 \text{ V}}{500 \Omega} = 0.200 \text{ A}$$

이고 평균소비 전력은

$$\langle P \rangle = i_{rms}^2 R = (0.200 \text{ A})^2 \cdot 400 \Omega = 16.0 \text{ W}$$

이다.

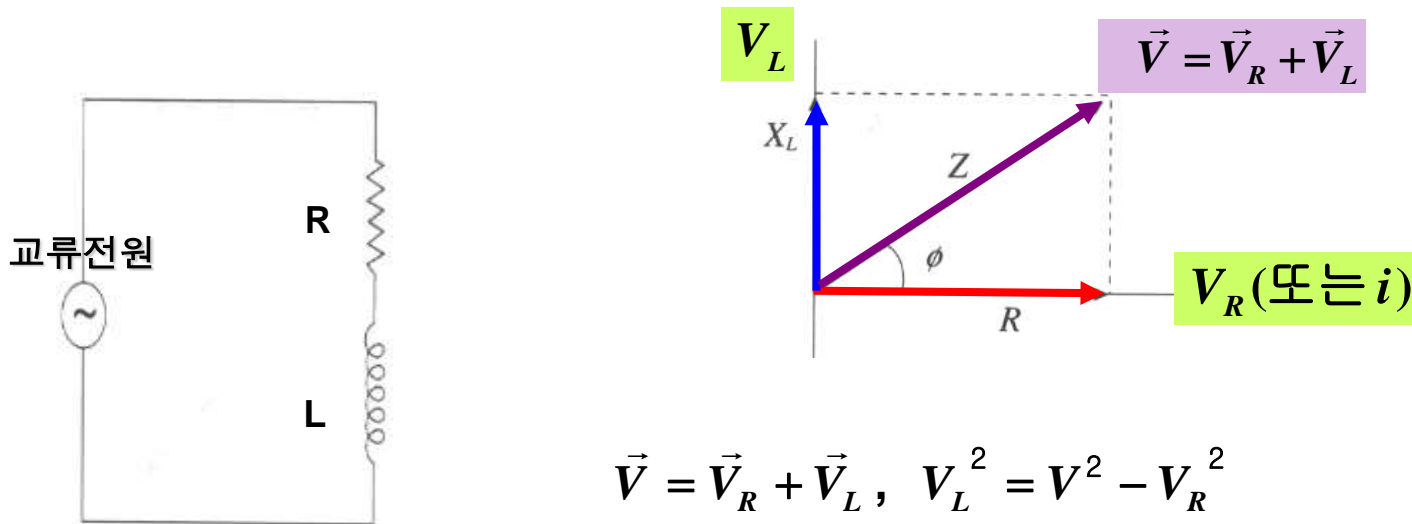


22-3 인덕터 회로와 유도 리액턴스

연습 22-7. RL 회로가 교류 회로에 연결되어 있다. 최대전압이 $V_0=20.0\text{ V}$ 이고 저항에 걸리는 최대 전압이 16.0 V 라면 인덕터 양단에 걸리는 최대 전압은 얼마인가?

풀이

직류와 달리 교류에서는 전압이 일정한 값이 아니며 진폭과 위상이 포함된 sin 함수 이므로 대수적으로 더할 수 없다. 따라서 아래와 같이 위상도를 통해 구하면 된다. 위상도에서 전체 최대전압은 V 는 빗면방향으로 20 V , V_R 의 최대전압은 전류방향으로 16.0 V 이므로 위상이 90° 앞서는 수직 성분의 V_L 을 구할 수 있다.



$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{V}_R + \vec{V}_L, \quad V_L^2 = V^2 - V_R^2 \\ \Rightarrow V_L &= \sqrt{V^2 - V_R^2} \\ &= \sqrt{20^2 - 16^2} = 12\text{V}\end{aligned}$$

22-4 RLC 회로의 임피던스

연습 22-10. $R=4.00\ \Omega$, $X_C=3.00\ \Omega$, $X_L=6.00\ \Omega$ 인 RLC 회로의 임피던스는 얼마인가?

풀이 총 임피던스에 대한 식은 다음과 같이 주어진다.

$$\Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{4.00^2 + (6.00 - 3.00)^2} = 5.00[\Omega]$$

연습 22-11. 30.0 V, 60.0 Hz 의 교류전류가 90.0 Ω 의 저항, 50.0 μ F 의 축전기, 60.0 mH 의 인덕턴스로 이루어진 직렬회로에 연결되어 있다. 교류회로의 전압에 대한 전류 위상의 탄젠트값을 구하여라.

풀이 전류와 전압에 대한 위상각 ϕ 는 $\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$ 로 주어진다.

유도 리액턴스 $X_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi \times 60.0 \times (60.0 \times 10^{-3}) = 22.6\Omega \quad (\omega = 2\pi f)$

용량 리액턴스 $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \times 60.0 \times (50.0 \times 10^{-6})} = 53.1\Omega$

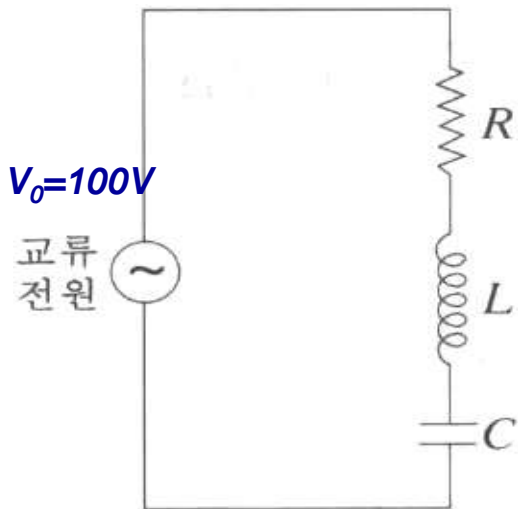
탄젠트 값 $\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{22.6 - 53.1}{90.0} = -0.338$

22-4 RLC 회로와 임피던스

연습 22-13. RLC 회로가 (최대전압) $V_0 = 100\text{V}$ 에 연결되어 있다. $V_{R,0}$, $V_{C,0}$, $V_{L,0}$ 이 모두 같다면 $V_{R,rms}$ (유효전압) 은 얼마인가?

풀이

V_L, V_R 의, V_C 가 모두 같다면 V_L, V_C 는 위상이 반대이므로 서로 상쇄되고 회로에 걸리는 전압 V 는 V_R 과 같다. 그러므로 V_R 의 최대전압은 100V 이고 유효전압은 최대전압을 $\sqrt{2}$ 로 나눈 값이 된다.



$$V_{R,0} = V_{L,0} = V_{C,0}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{V_{R,0}^2 + (V_{L,0} - V_{C,0})^2} = V_{R,0}$$

V_R 의 최대값과 V 의 최대값과 같으므로 $V_{R,rms}$ 는 다음과 같다,

$$\therefore V_{R,rms} = \frac{V_{R,0}}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70.7(\text{V})$$

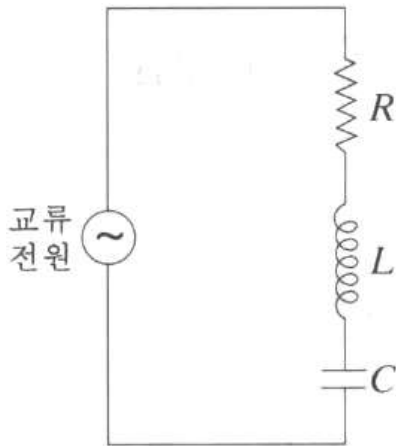
22-4 RLC 회로와 임피던스

연습 22-15. RLC 회로에서 공급되는 교류 전원의 유효전압 이 E , 유효전류가 i 이고 전류가 전압보다 위상이 ϕ 만큼 느리다면 공급되는 전력은 ?

풀이

RLC 교류에서의 평균전력은

$$\langle P \rangle = i_{rms} V_{rms} \cos \phi$$



이며 ϕ 는 유효전류와 유효전압 사이의 위상이다.

즉, 공급되는 평균전력을 주어진 기호로 표시하면

$$\langle P \rangle = i \cdot E \cdot \cos \phi$$

이다. 여기서 $\cos \phi$ 는 전력인자이다.)

22-5 교류회로와 공명현상

연습 22-16. \sqrt{LC} 의 차원은 시간임을 보여라

풀이

L과 C에 관한 식으로 부터 LC의 차원을 알 수 있다.

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow L = -\frac{\varepsilon}{\left(\frac{di}{dt}\right)}, \quad C = \frac{Q}{V}$$

$$[L] = \left[\frac{V}{A/s} \right], \quad [C] = \left[\frac{A \cdot s}{V} \right]$$

$$\therefore [LC] = \left[\frac{V}{A/s} \frac{A \cdot s}{V} \right] = s^2$$

s : 시간의 단위
A : 전류의 단위
V : 전압의 단위
(volt)

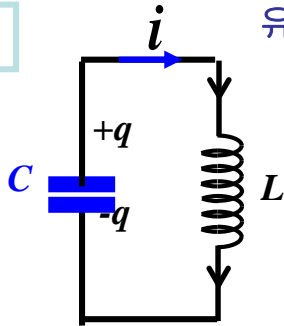
$\therefore \sqrt{LC}$ 의 단위 : s \Rightarrow 차원: 시간 (Time)

22-5 교류회로와 공명현상

연습 22-18. 6.00 mH의 인덕터와 10.0 μ F의 축전기가 있다.

(가) 진동수가 얼마일 때 이 인덕터와 축전기의 리액턴스가 동일한가?

풀이



유도 리액턴스와 용량성 리액턴스를 같게 놓으면

$$X_L = X_C$$

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\omega = 2\pi f)$$

$$\Rightarrow \therefore f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(6.0 \times 10^{-3} H) \times (10 \times 10^{-6} F)}} = 650 \text{ Hz}$$

(나) 위에서 구한 진동수는 이들을 연결한 LC 회로의 자연 진동수와 같음을 보여라.

풀이

처음에 전기에너지 $\frac{1}{2} CV^2$ 인 축전기를 인덕터 L에 연결하면 전기에너지가 인덕터의 자기에너지($\frac{1}{2} Li^2$)로 전환되고 이 에너지는 다시 전기에너지로 변환을 하면서 주기적으로 전자기적 진동을 하게 된다. 이 진동수를 자연진동수라고 하며 키르히호프의 고리법칙을 이용하여 식을 구하면 오른쪽과 같이 자연진동수가 얻어진다.

(LC 회로) $L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (\because i = \frac{dq}{dt})$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad \left(\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \right)$$

단조화운동 (해) $q = q_0 \cos \omega_0 t$

자연진동수 $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

22-5 교류회로와 공명 현상

연습 22-20. 저항이 없는 LC 회로에서 인덕터의 인덕턴스는 6.00 mH, 축전기의 전기용량은 0.200 μF 이다. 축전기의 최대 전위차는 10.0 V 였는데 전위차가 5.00 V 가 되었을 때 이 회로의 전류는 얼마인가?

풀이

축전기의 최대전위차가 V_0 이므로 이 회로의 최대에너지는 처음 상태에 축전기에 저장된 전기에너지이며 에너지는 형태는 변하더라도 전체 에너지의 크기는 보존된다

$$(V_0 = 10 \text{ V}) \quad U = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} \times (2.00 \times 10^{-7}) \times 10.0^2 = 1.00 \times 10^{-5} (\text{J})$$

축전기의 전기에너지와 인덕터의 자기에너지는 합해서 일정해야 하므로 축전기의 전압이 줄어 ($V = 5 \text{ (V)}$) 전기위치에너지가 줄어들면 그 만큼 인덕터에 자기에너지가 증가하게 되며 전류의 양도 커진다.

$$U = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C V^2 = 1.00 \times 10^{-5} (\text{J})$$

$$(V = 5 \text{ V}) \quad \frac{1}{2} L i^2 = U - \frac{1}{2} C V^2 = 1.00 \times 10^{-5} - \frac{1}{2} (2.00 \times 10^{-7}) \cdot 5.00^2$$

$$\therefore i = \sqrt{\frac{2.00 \times 7.50 \times 10^{-6}}{6.00 \times 10^{-3}}} = 0.0500 \text{ A} = 50.0 \text{ mA}$$

22-5 교류회로와 공명 현상

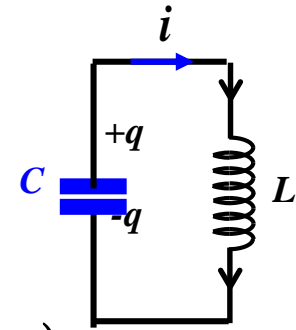
연습 22-21. 파장이 100 m 인 전자기파를 인덕턴스가 20.0 mH 인 LC 회로에서 공진이 일어나게 하려면 축전기의 전기용량을 얼마로 하여야 하는가?

풀이 전자기파의 파장과 진동수는

$$\lambda = 100m,$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8 m/s}{100m} = 3.00 \times 10^6 s^{-1}$$

$$(L = 20mH)$$



축전기의 진동수를 전자기파의 진동수와 같게 해주면 최대 공진이 일어나게 된다.

$$f_{LC\text{회로}} = f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$

$$\therefore C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot (3.00 \times 10^6)^2 \cdot (2.00 \times 10^{-2})} = 1.40 \times 10^{-13} F = 0.140 pF$$

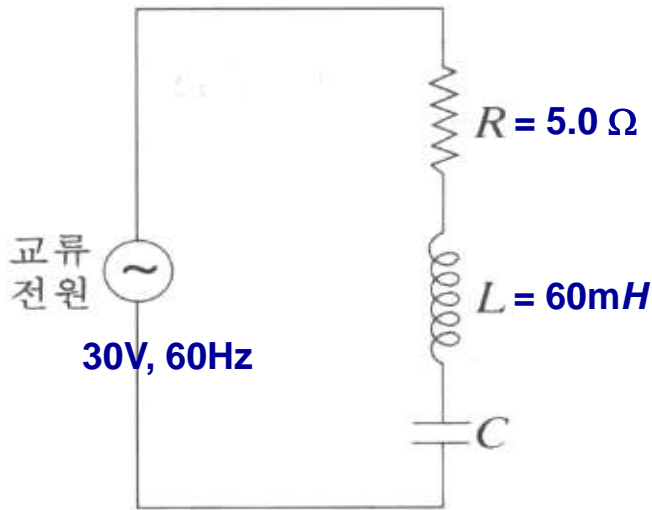
발전문제

연습 22-22. 그림 22.5 에 보인 것과 같은 RLC 회로가 있다. 여기서 $R=5.00\Omega$, $L=60.0\text{ mH}$ 이고 이 회로에 흐르는 전류의 진동수는 60.0 Hz 이고 기전력은 30.0V 라고 하자 .

(가) 축전기의 전기용량이 얼마일 때 저항을 통해 방출되는 평균 일률이 최대가 되는가?

풀이

평균 일률에 대한 식은 다음과 같다. 즉 전류가 최대가 되는 때, 즉 $X_L = X_C$ 일 때 일률이 최대값을 갖게 된다.



$$\langle P \rangle = i_{rms}^2 R = \frac{V_{rms}^2}{Z^2} R = \frac{V_{rms}^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\left(i_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \right)$$

일률 최대 : $X_L = X_C$ 일때 $(Z = R)$

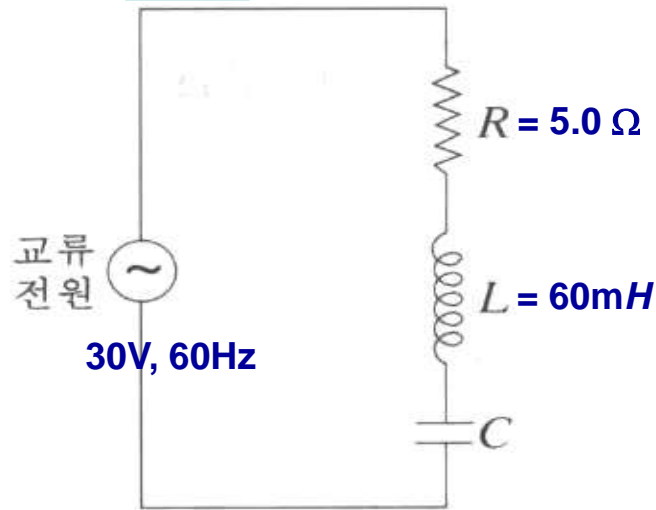
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L}$$

$$\therefore C = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = \frac{1}{(2\pi \times 60.0\text{Hz})^2 \times (60.0 \times 10^{-3}\text{H})} = 1.17 \times 10^{-4}\text{F} = 117\mu\text{F}$$

발전문제

연습 22-22 (나) 이 경우의 최대 전력을 구하고 위상차도 구하여라.

풀이



전력이 최대인 $X_L = X_C$ 일 때 위상각이 0 이다.

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} = 0 \quad \Leftarrow (X_L = X_C)$$

$$\therefore \text{위상각 } \phi = 0^\circ$$

일률이 최대일 때 전력값 : $X_L = X_C \Rightarrow (Z = R)$

$$\langle P \rangle = i_{rms}^2 R = \frac{V_{rms}^2}{Z^2} R = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{(30.0V)^2}{5.00\Omega} = 180W$$

참고: 전력이 최소일 때

전력이 최소가 될 때는 총 임피던스 Z 가 가장 클 때이며 만일 C 를 조정할 수 있다면 C 가 0 에 가까울 때 (또는 X_C 가 무한히 클 때) 전류는 거의 0 에 도달하게 되어 전력이 0 으로 최소가 된다. 이 때의 위상각은 90° 일 때이다.

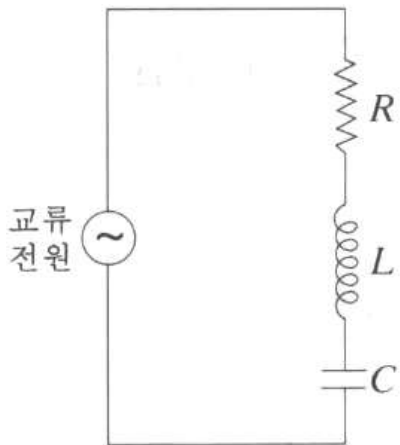
$$X_C \rightarrow \infty \text{ (또는 } C \rightarrow 0) \text{ 이면 } \tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} = -\infty \quad \therefore \phi = \pm 90^\circ$$

$$\text{위상각 } \phi = 90^\circ \text{ 일 때 } \therefore \langle P \rangle = i_{rms}^2 \cdot Z \cos \phi = i_{rms}^2 \cdot Z \cos 90^\circ = 0$$

발전문제

연습 22-23. RLC 직렬회로에 교류전원을 연결하고 출력 전압은 R 과 L을 연결한 조합의 양단에서 얻는다. 출력전압과 입력전압의 비를 각진동수 ω 의 함수로 구하라. 매우 높은 진동수에서는 이 값이 1 에 가까워짐을 보여라.

풀이



입력 전압 :

$$V_{\text{최대입력}} = i_0 Z_{R,L,C} = i_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

출력 전압 :

$$V_{\text{최대출력}} = i_0 Z_{R,L} = i_0 \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

비율 :

$$\Rightarrow \text{ratio} = \frac{i_0 \sqrt{R^2 + X_L^2}}{i_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 1$$

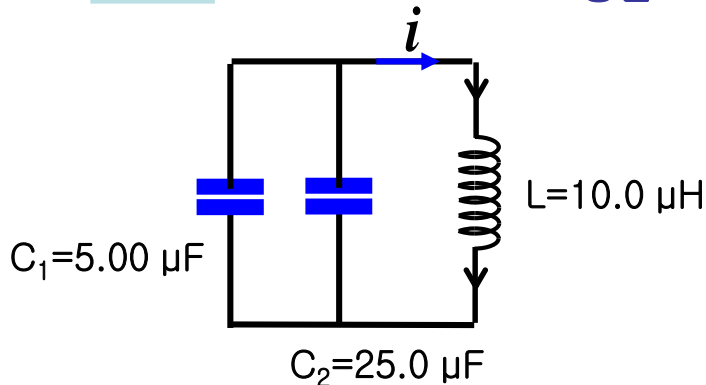
발전 문제

연습 22-24. $10.0\ \mu\text{H}$ 의 인덕턴스와 $5.00\ \mu\text{F}$, $25.0\ \mu\text{F}$ 의 두 개의 축전기를 모두 병렬로 연결한 진동 회로가 있다. 이 회로의 고유 진동수를 구하여라.

풀이

병렬로 연결된 축전기의 합성 전기용량을 구하면

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 5.00\ \mu\text{F} + 25.0\ \mu\text{F} = 30.0\ \mu\text{F}$$



이며 LC 공진회로의 고유 각 진동수는

$$\omega_{LC\text{회로}} = \frac{1}{\sqrt{LC_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{\sqrt{(10.0 \times 10^{-6}) \cdot (5.00 + 25.0) \times 10^{-6}}} = 57735(\text{rad} / \text{s})$$

이다. 따라서 LC 공진회로의 고유 진동수를 구하면 다음과 같다.

$$\therefore f_{LC\text{회로}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{2\pi \times \sqrt{(10.0 \times 10^{-6}) \cdot (30.0 \times 10^{-6})}} = 9.19 \times 10^3 \text{ s}^{-1} = 9.19 \text{ kHz}$$