4.1

#8. 2X2 invertible matrices(S)는 vector space?

V.S인지 확인하기 위해선 2X2 invertible matrices인 u와 v가 있을 때, u+v가 2X2 invertible matrices인지, 상수 k가 있을 때 ku도 2X2 invertible matrices인지 확인해야 한다. (둘 다 만족해야 V.S)

$u=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$ 이고 $u\in S$, $v\in S$이다.

$u+v=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 인데 $\det(u+v)=0$이므로

$(u+v)\in S$이 아니다. 따라서 2X2 invertible matrices는 vector space가 아니다.

#12. $u=a_0+a_1x$, $v=b_0+b_1x$이라하면.

$u, v\in S$ 이다. (S는 a_0+a_1x 형태의 polynomials의 집합)

$u+v=(a_0+a_1x)+(b_0+b_1x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x$

$ku=k(a_0+a_1x)=(ka_0)+(ka_1)x$이다.

$(u+v)$, $ku\in S$ 이므로 a_0+a_1x 형태의 다항식은 Vector space이다.

4.2

#2 (a) $x=\begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$

$y=\begin{bmatrix} y_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & y_{33} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$ 이라하면 $x, y\in V$이다.

(V는 diagonal nxn matrices의 Vector Space)

$x+y=\begin{bmatrix} x_{11}+y_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}+y_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_{33}+y_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{nn}+y_{nn} \end{bmatrix}$

이므로 $x+y\in V$.

→이어서

~#2.

$k\cdot u=\begin{bmatrix} kx_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & kx_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & kx_{nn} \end{bmatrix}$

$ku\in V$이다. 따라서 (a)는 M_{nn}의 subspace이다.

(b). V를 $\det(A)=0$인 nxn matrices라 하면,

$u=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 일 때.

$u, v\in V$이다.

$u+v=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 이고 $\det(u+v)=1\neq 0$이다.

따라서 V는 V.S가 아니다.

(c) $x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn}=0$인 행렬 x,

$y_{11}+y_{22}+\cdots+y_{nn}=0$인 행렬 y가 있을 때.

$x, y\in V$이고 ① $tr(x+y)=(x_{11}+y_{11})+(x_{22}+y_{22})+\cdots+(x_{nn}+y_{nn})$

$=(x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn})+(y_{11}+y_{22}+\cdots+y_{nn})=0$ 이므로.

$x+y\in V$이다.

② $tr(kx)=(kx_{11}+kx_{22}+\cdots+kx_{nn})$

$=k(x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn})=0$ 이므로

$kx\in V$이다. 따라서 V는 V.S이다.

(d). V: symmetric nxn matrices의 집합.

$x, y\in V$, $x_{ij}=x_{ji}$이고, $y_{ij}=y_{ji}$이므로

① $x+y$인 행렬에서 i행 j열 원소는 $x_{ij}+y_{ij}=x_{ji}+y_{ji}$이다. 따라서 $x+y\in V$.

② kx인 행렬에서 i행 j열 원소는 $kx_{ij}=kx_{ji}$이므로 $kx\in V$이다.

즉 V는 V.S이다.

(e) V: all $n\times n$ matrices A such that $A^T=-A$. 집합.

$x, y \in V$이면 $x_{ij}=-x_{ji}$, $y_{ij}=-y_{ji}$

① $x+y$일때 $x+y$의 i행 j열 원소 $(x+y)_{ij}=x_{ij}+y_{ij}$
$=-x_{ji}-y_{ji}=-(x_{ji}+y_{ji})=-(x+y)_{ji}$ 이다.

$x+y \in V$.

② kx일때 kx의 i행 j열 원소 $(kx)_{ij}=kx_{ij}=-kx_{ji}$
$=-(kx)_{ji}$ 이다.

$kx \in V$.

따라서 V는 V.S이다.

(f) V: the set of all $n\times n$ matrices A for which $Ax=0$ has only the trivial solution., $x, y \in V$.

$Ax=0$이 유일해를 가져야 하므로. $\det(x)$와 $\det(y)$는 0이 아니어야 한다.

$x=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$ 일 때.

$x+y=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 이므로 $\det(x+y)=0$이다.

$x+y$는 V의 원소가 아니다. 따라서 V는 V.S가 아니다.

(g) V: The set of all $n\times n$ matrices A such that $AB=BA$ for some fixed $n\times n$ matrix B.

$x, y \in V$일때. $xB=Bx$, $yB=By$이다.

① $x+y$, $(x+y)B=xB+yB=Bx+By=B(x+y)$ 이므로

$x+y \in V$.

② kx, $(kx)B=k(xB)=k(Bx)=B(kx)$ 이므로

$kx \in V$.

따라서 V는 V.S이다

9. (a)

$$\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \\ -2 & 0 & 5 & -17 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k_1=1$. $k_2=2$. $k_3=-3$.

따라서 (a)는 A+2B-3C로 나타낼 수 있다.

#10. (a)

$-9-7x-15x^2=k_1p_1+k_2p_2+k_3p_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & 5 & -15 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 7 & -3 & 13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k_1=-2$. $k_2=1$. $k_3=-2$.

$-9-7x-15x^2=-2p_1+p_2-2p_3$로 나타낼 수 있다.

#13. $p_4 = p_1 - p_2$로 $p_3 = 2p_1 + p_2$로

$span\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = span\{p_1, p_2\}$이다.

$\dim(P_2) = 3$인데 $span\{p_1, p_2\}$는 2linearly independent 식이다.

따라서 p_1, p_2, p_3, p_4는 P_2를 span하지 못한다.

#14. (a). $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= f - g$ 이다.

따라서 f와 g를 이용해 span이 가능하다.

(b) f와 g의 일차결합을 통해 $3 + x^2$을 만들어낼 수 없다. 따라서 span이 불가능하다.

(c) $1 = \cos^2 x + \sin^2 x = f + g$

따라서 span 가능하다.

(d) f와 g의 일차결합을 통해 $\sin x$를 만들어낼 수 없으므로, span이 불가능하다.

(e) $0 = 0 \cdot f + 0 \cdot g$이다. 따라서 span이 가능하다

#15
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0$. $x_1 = -\frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}t$

$2x_2 + 3x_3 = 0$. $x_2 = -\frac{3}{2}x_3 = -\frac{3}{2}t$

$x_3 = t$

와 같이 표현할 수 있다.

#16. nonhomogeneous system은 $Ax = b\ (b \neq 0)$인 형태를 뜻한다. $Ax = b\ (b \neq 0)$을 만족하는 x의 집합을 S라 할때. $x_1 \in S$, $x_2 \in S$ 이면

$Ax_1 = b$, $Ax_2 = b$이다.

$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = b + b = 2b$ 이므로 S에 포함되지 않는다. 따라서 S는 subspace가 아니다.

4.3 #1. (a) $u_2=-5u_1$이다. 따라서 선형 종속이다.

(b) $4B u_1=17u_2-19u_3$이다. 따라서 선형 종속이다

(c) $p_3=2p_1$이다. 따라서 선형 종속이다.

(d) $A=-B$이다. 따라서 선형 종속이다.

#4. 각각의 벡터가 선형독립인지 확인하기 위해서 $k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_rv_r=0$을 만족하는 $k_1, k_2, \cdots, k_r$이 유일한지 ($k_1=k_2=\cdots=k_r=0$) 확인하면 된다.

(a) $k_1(2-x+4x^2)+k_2(3+6x+2x^2)+k_3(2+10x-4x^2)=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7.5 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$이다. 따라서 linearly independent이다.

(b) $\underbrace{\text{식의 개수}}_{=n}$가 $\underbrace{\text{벡터의 개수}}_{r}$보다 작으면 leading 변수는 식 개수보다 작아야 하므로 $r-n>0$이 되어 free variable이 존재한다. 즉 선형결합의 계수가 유일하지 않으므로 linearly dependent이다.

6. $a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} a-b+2c&=0 \\ a+bk+c&=0 \\ ak+b+3c&=0 \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{=A}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=1\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix}$$

$=(3k-1)+(3-k)+2(1-k^2)$

$=3k-1+3-k+2-2k^2=-2k^2+2k+4$

$=-2(k^2-k-2)=-2(k-2)(k+1)$.

$\det(A)\neq 0$이어야 $a=b=c=0$으로 해가 유일하다.

$\therefore k\neq 2, k\neq -1$이면 선형 독립이다.

#7. 세 벡터가 한 평면 위에 있다는 것은 세 벡터가 선형 종속이라는 것이다

$av_1+bv_2+cv_3=0$

$$\begin{aligned} 2a+6b+2c&=0 \\ -2a+b\quad&=0 \\ 4b-4c&=0 \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=A}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-(1+8)=-9\neq 0$$

따라서 $\det(A)\neq 0$이므로 $a=b=c=0$으로 유일해가 존재. 즉 선형 독립이므로 한 평면에 존재X.

#11. $av_1+bv_2+cv_3=0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \lambda \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$=\lambda(\lambda^2-\frac{1}{4})+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4})-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda)$

$=\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda$ $\quad=\lambda^3-\frac{3}{4}\lambda-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}\lambda-\frac{1}{8}$

$-\frac{1}{4}\lambda-\frac{1}{8}$

세 벡터가 linearly dependent이려면 $\det=0$이어야 한다. 즉 $\lambda^3-\frac{3}{4}\lambda-\frac{1}{4}=0$.

$4\lambda^3-3\lambda-1=(\lambda-1)(4\lambda^2+4\lambda+1)$

$=(\lambda-1)(2\lambda+1)^2$이다.

따라서 $\lambda=1$, $\lambda=-\frac{1}{2}$이면 선형종속이다

#22 $a(u-v)+b(v-w)+c(w-u)=0$을 만족하는 a, b, c의 해가 $a=b=c=0$으로 유일한지를 보이면 선형독립이다.

$a=b=c$ 이면 항상 위의 식을 만족하므로 선형종속이 된다

$a=b=c=0$으로 유일 X

#24 $\{v_1, v_2, v_3\}$이 선형독립이라는 것은.

$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$을 만족시키는 각 k값이 $k_1=k_2=k_3=0$ 으로 유일하다는 것이다. 이 말은

$k_1v_1+k_2v_2=0$, $k_1v_1+k_3v_3=0$. $k_2v_2+k_3v_3=0$

$k_1v_1=0$. $k_2v_2=0$. $k_3v_3=0$을 만족하는 각 k_1, k_2, k_3의 값들도 $k_1=k_2=k_3=0$으로 유일하다는 것을 뜻하므로

$\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_3\}$도 일차독립(선형독립)임을 의미한다.

#26 $\{v_1, v_2, v_3\}$가 선형종속이라는 말은.

$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$을 만족하는 k_1, k_2, k_3가 $k_1=k_2=k_3=0$으로 유일하지 않다는 것을 의미한다.

그러면 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3+k_4v_4=0$을 만족시키는 k_1, k_2, k_3, k_4가 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$으로 유일하지 않은것이므로 ($k_4=0$이면 항상 성립). $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 또한 선형종속이다.