

일반수학2 기말고사

1번~10번(각 5점)은 단답형입니다. 단, 답안지에 계산 과정도 남기세요.

1. $\iiint_R (xy + yz + z) dV$, $R = \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2x\}$ 을 구하시오.
2. 적분 순서를 바꿔 $\int_0^1 \int_x^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{1+z^5} dz dy dx$ 를 구하시오.
3. 극좌표계를 이용하여 $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (2xy + 3y) dy dx$ 를 구하시오.
4. $\iint_D y(x^2 + 4y^2)^{3/2} dx dy$, $D = \{(x, y) | x, y \geq 0, 0 \leq x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ (Hint: $x = 2u$, $y = v$ 로 치환)
5. 매개방정식 $C(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $(0 \leq t \leq 3\pi)$ 로 표현되는 곡선 C 에 대하여 $\int_C (xy + z^2) ds$ 를 구하시오.
6. 포물면 $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$, $x \geq 0$ 를 S 라 할 때 $\iint_S (4x + 1) dS$ 를 구하시오.
7. 매개방정식 $X(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, 2 - \sin v)$ 으로 정의되는 곡면 S 가 있다. $u = \frac{3}{4}\pi$, $v = \frac{\pi}{4}$ 에서 S 의 접평면의 방정식을 구하시오.
8. 시작점이 $(1, 0, 1)$ 이고 끝점이 $(2, 1, 2)$ 인 공간 상의 C^1 매개변수 곡선 C 에 대하여 보존장 $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + 4y^2 + 3z^2} + 3y, \frac{4y}{x^2 + 4y^2 + 3z^2} + 3x, \frac{3z}{x^2 + 4y^2 + 3z^2} - 1 \right)$ 의 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오. (Hint: 닫힌 곡선에 대한 벡터장의 선적분 계산에 Green 정리를 적용)
9. 포물기둥 $x = 1 - y^2$ 과 평면 $x + z = 1$, $x = 0$, $z = 0$ 으로 유계된 입체도형 E 의 각 점에서의 밀도가 $\rho(x, y, z) = 1 - x + z$ 으로 정의될 때 E 의 질량을 구하시오. (Hint: 질량 $m = \iiint_E \rho dV$ 이다.)
10. $x, y, z \geq 0$ 이고 $2x + y + z = 2$ 인 곡면 S 를 통과하는 어떤 기체의 속도가 $\mathbf{v} = (-3z, y, -x)$ 이다. 이때 이 기체의 유량(즉, 단위 시간당 흐르는 기체의 양)을 구하시오.

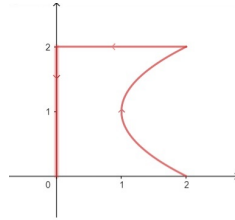
11번~15번(각 10점)은 서술형입니다. 풀이 과정을 수학적인 모순이 없도록 명확하게 기술하세요.

11. 원기둥면 $x^2 + y^2 = 1$, 포물면 $z = x^2 + y^2 + 1$ 과 평면 $z = 0$ 으로 둘러싸인 입체의 부피와 겉넓이를 구하여라.

12. Green 정리를 이용하여 곡선 $C(t) = (5 + 2 \cos t) \cos t \mathbf{i} + 5 \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 로 둘러싸인 xy 평면 상의 영역의 넓이를 구하시오.

13. 아래의 그림과 같이 곡선 C 가 $(0, 2)$ 에서 $(2, 2)$ 까지는 $x = (y - 1)^2 + 1$ 을 따라, $(2, 2)$ 에서 $(0, 2)$ 를 거쳐 원점까지는 선분으로 이루어져 있다.

곡선 C 에 대한 $\int_C (y \sec^2 x - y^2 + y + 1)dx + (\tan x + \tan^{-1}(y^2) - 4e^{y^3+y-1})dy$ 를 구하시오.



14. 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 의 아래와 원뿔면 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 위에 놓인 영역을 D 라 하자. 발산정리를 이용하여 D 의 경계곡면 S 와 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \tan^{-1}(z^2) - xy^2, e^{x+z} + y^3, 2x^2z + z^3)$ 에 대하여 $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ 를 구하시오.

15. Stokes 정리를 이용하여 $C(t) = (\cos t, \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 에 대한 아래의 선적분을 구하시오.

$$\int_C (x^2 + z)dx + (x + e^y)dy + z dz$$