(1) 벡터 $\vec{a}=(4,-4,1)$를 벡터 $\vec{c}$와 $\vec{d}$의 합으로 나타내었다. 이때 $\vec{c}$는 $\vec{b}=(1,2,-2)$와 평행한 벡터이고

$\vec{d}$는 $\vec{b}$와 수직인 벡터이다. 이때 $\vec{c}$와 $\vec{d}$를 구하여라.

$\vec{c}=k\vec{b}$이므로 $\vec{c}=(k,2k,-2k)$이다. $\vec{a}=\vec{c}+\vec{d}$이므로 $\vec{d}=\vec{a}-\vec{c}=(4-k,-4-2k,1+2k)$이다.

$\vec{c}$는 $\vec{b}$와 평행하며 $\vec{d}$는 $\vec{b}$와 수직이므로 $\vec{c}$와 $\vec{d}$도 수직이다. 따라서 $\vec{c}\cdot\vec{d}=0$이므로

$k(4-k)+2k(-4-2k)-2k(1+2k)=4k-k^2-8k-4k^2-2k-4k^2=-9k^2-6k=0$. $k(9k+6)=0$

$k=-\frac{2}{3}$이다. 따라서 $\vec{c}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, $\vec{d}=\left(\frac{14}{3},-\frac{8}{3},-\frac{1}{3}\right)$이다.

(2) 원점과 원기둥좌표로 표현된 두 점 $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1)$과 $(2, -\frac{\pi}{3}, 3)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

각 두점을 직교 좌표계로 바꾸면 $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1)$은 $(-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}, 1)$이므로 $(-1, -1, 1)$이고,

$(2, -\frac{\pi}{3}, 3)$은 $(2\cos(-\frac{\pi}{3}), 2\sin(-\frac{\pi}{3}), 3)$이므로 $(1, -\sqrt{3}, 3)$이다

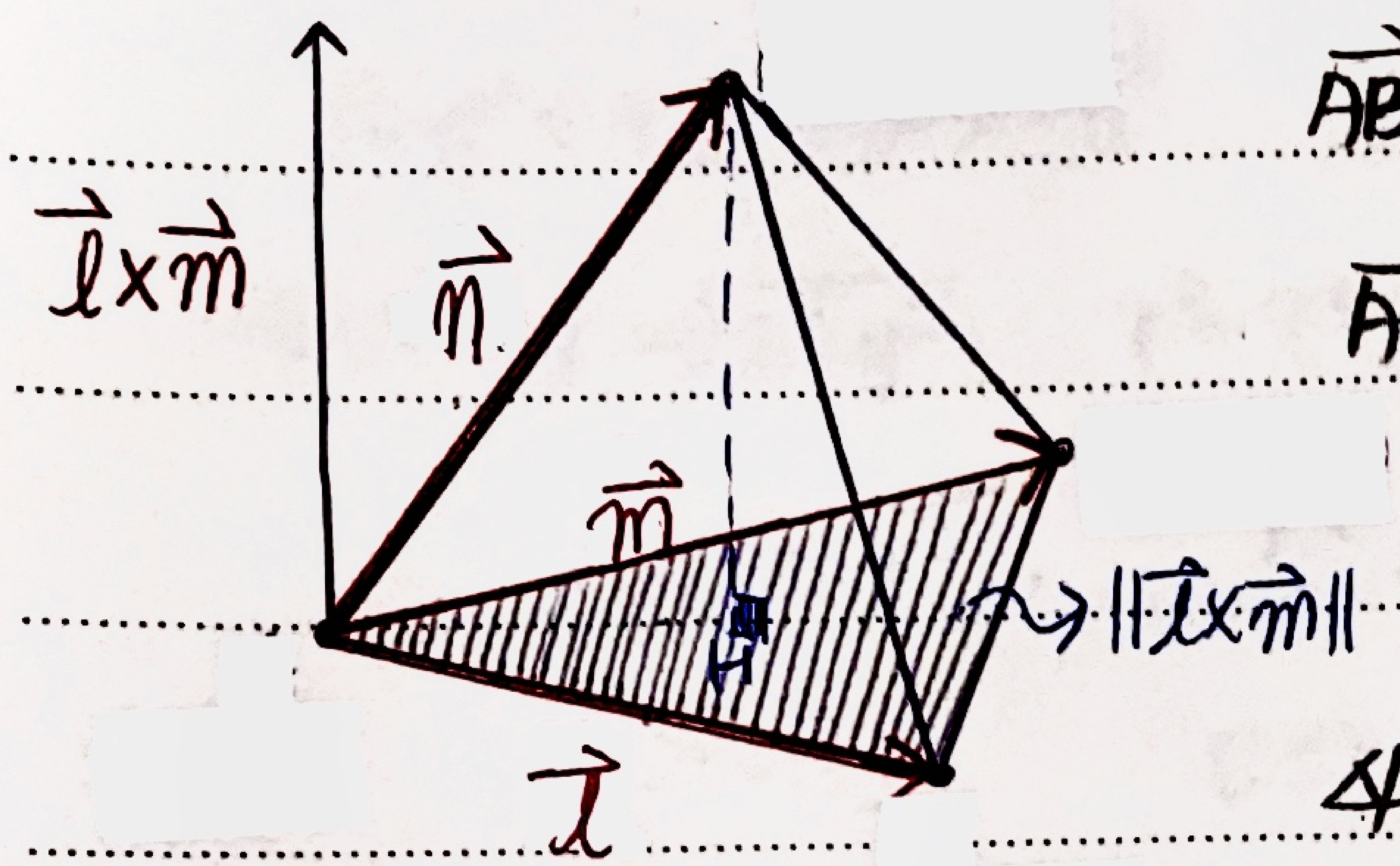
$O(0, 0, 0)$, $A(-1, -1, 1)$ $B(1, -\sqrt{3}, 3)$ $\overrightarrow{OA} = (-1, -1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (1, -\sqrt{3}, 3)$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})$는 O, A, B를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이이다.

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}|(-1, -1, 1) \times (1, -\sqrt{3}, 3)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-(-\sqrt{3}))^2 + (-3-1)^2 + (\sqrt{3}-(-1))^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-3+\sqrt{3})^2 + 4^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9-6\sqrt{3}+3+16+3+2\sqrt{3}+1} = \frac{1}{2}\sqrt{32-4\sqrt{3}} = \sqrt{8-\sqrt{3}}$$

(3) 네 점 $A(1,-2,3)$, $B(3,2,-1)$, $C(-2,5,1)$, $D(2,1,-5)$를 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피를 구하여라.




$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (3-1, 2+2, -1-3) = (2,4,-4)$

$\overrightarrow{AC} = \vec{b} = (-2-1, 5+2, 1-3) = (-3,7,-2)$

$\overrightarrow{AD} = \vec{c} = (2-1, 1+2, -5-3) = (1,3,-8)$

$\triangle ABC$의 넓이는 $\frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|$와 같다.

$V = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\vec{l}\times\vec{m})\cdot\vec{n}$

$\frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})$와 $\vec{c}$를 내적한 값의 절댓값은 사면체 밑넓이($\triangle ABC$) X 사면체의 높이($\overline{DH}$)의 값과 동일하므로 사면체의 부피는 $\left|\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$와 같다.

$\vec{a}\times\vec{b} = (-8+28, 12+4, 14+12) = (20,16,26)$

$\vec{c} = (1,3,-8)$ $\quad |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = |20+48-208| = 140$ 이므로 사면체의 부피는 $\frac{140}{6} = \frac{70}{3}$ 이다.