제 23 장 연습 문제 풀이

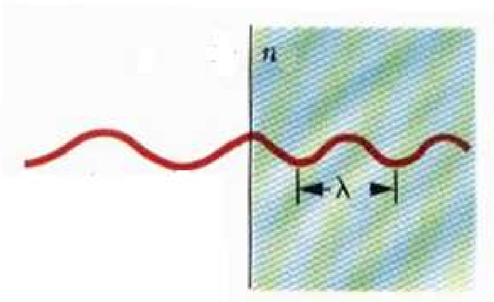
1, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 24, 25, 27

연습문제 19 ~ 23번은 심화과정으로 생략함

혹시 풀이에 오류가 있으면 연락 바랍니다. marzini@inha.ac.kr

23-1 반사와 굴절

연습 23-1. 다이아몬드의 굴절률은 2.50 이다. 이 다이아몬드 내부에서의 빛의 속도는 공기 중과 비교하여 어떻게 되는가?



풀이

매질의 굴절률은 진공에서의 빛의 속도와 매질 속에서의 빛의 속력의 비이다.

매질의 굴절률 (n) 은

$$n = \frac{c}{v} \quad \frac{(\text{진공에서의 빛의 속도})}{(\text{매질에서의 빛의 속도})}$$

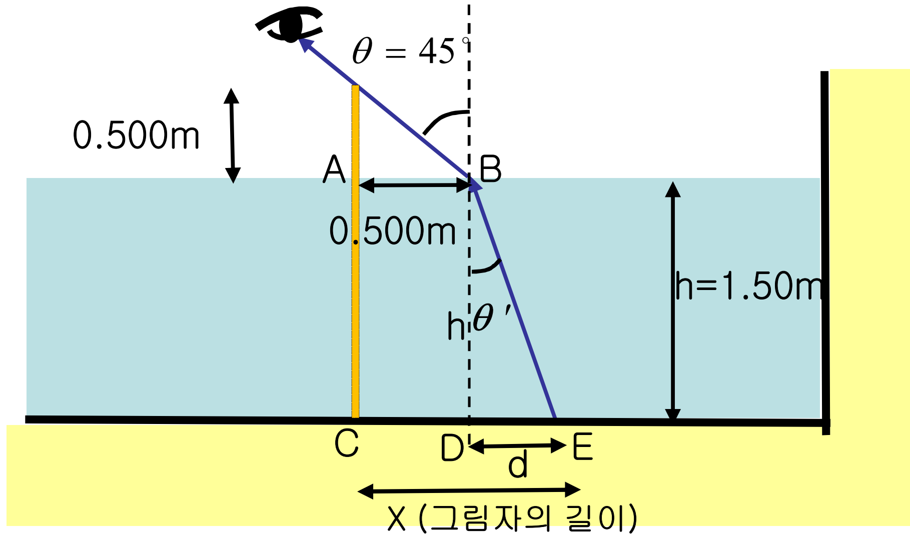
이므로 $$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{2.50} = 0.4c$$

즉, 다이아몬든 내부에서 빛의 속력은 공기 중에 비해 0.4배 느리다.

23-1 반사와 굴절

연습 23-3 수영장의 바닥에 박힌 2.00 m 의 막대가 있다. 막대 수면위로 0.500m 솟아나와 있다. 햇빛이 45˚ 의 각도로 막대에 비춘다. 수영장에 바닥에 드리운 막대의 그림자의 길이는 얼마인가 ?

풀이



n_1 : 공기의 굴절률 = 1.00

n_2 : 물의 굴절률 = 1.33

스넬의 법칙 : $n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta'$ $\Leftarrow (n_1 = 1.00,\ n_2 = 1.33,\ \theta = 45^\circ)$

$$\sin 45^\circ = 1.33 \sin\theta'$$

$$\theta' = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1.33 \times \sqrt{2}}\right) = 32.1^\circ$$

$$d = h\tan(32.1^\circ) = 1.50\tan(32.1^\circ) = 0.940(m)$$

$(\overline{AB} = \overline{CD} = 0.500)$ (∵45˚ 인 이등변삼각형의 한 변)

그림자의 길이 : $\because x = 0.500 + d = 0.500 + 0.940 = 1.440(m)$

23-1 반사와 굴절

연습 23-4 공기 중에서 녹색 레이저 포인터에서 나오는 빛의 파장은 533 nm이다.

(가) 이 빛의 진동수는 얼마인가?

풀이

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00\times10^{8}\,Hz}{533\times10^{-9}\,m} = 5.63\times10^{14}\,Hz = 563THz$$

(나) 이 빛이 굴절률이 1.5 인 유리를 지날 때 파장은 얼마인가?

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n} = \frac{533\times10^{-9}\,m}{1.5} = 3.55\times10^{-7}\,m = 355nm$$

(다) 유리를 지날 때 이 빛의 속력은 얼마인가?

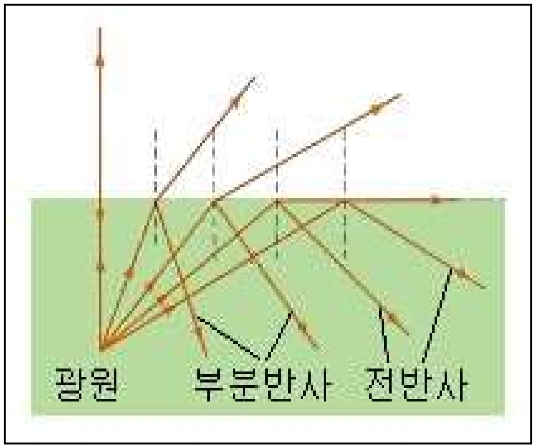
$$v = \frac{c}{n} = \frac{3.00\times10^{8}\,m/s}{1.5} = 2.0\times10^{8}\,m/s$$

23-2 전반사

연습 23-6. 물의 굴절률은 n=1.50 이고, 유리의 굴절률은 n=1.33 이다. 이 때 일어날 수 있는 전반사에 대해 옳은 설명은?

풀이

빛이 굴절률이 큰 매질(밀한 매질)에서 작은 매질(소한 매질)로 입사할 때 임계각보다 크게 입사되면 (빛이 투과되지 않는) 전반사가 일어난다..



(a) 유리에서 물로 빛이 진행할 때 항상 발생한다.

(b) 물에서 유리로 빛이 진행할 때 항상 발생한다.

(c) 유리에서 물로 빛이 진행할 때 입사각에 따라 발생할 수 있다.

(d) 물에서 유리로 빛이 진행할 때 입사각에 따라 발생할 수 있다.

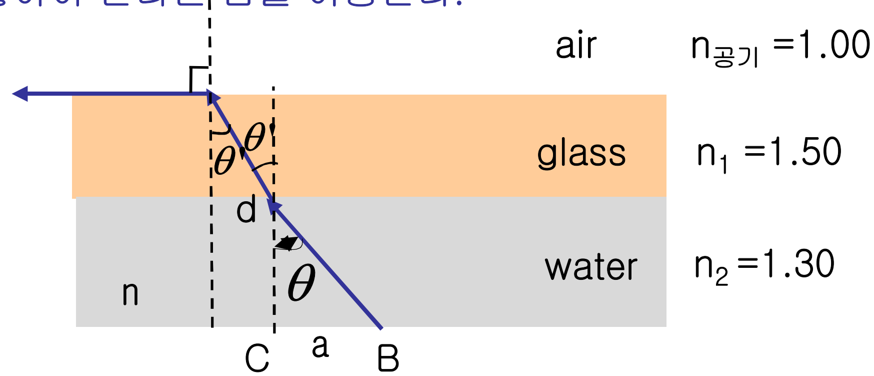
(e) 이 경우 전반사는 일어날 수 없다.

23-2 전반사

연습 23-9 그림과 같이 물 위에 유리판이 놓여 있다. 물 속에서 어떤 빛이 θ 의 각도로 유리판으로 입사한다. 이 빛이 유리판을 투과하여 공기 중으로 나오려면 sin θ 가 어떤 범위의 값이여야 하는가? (단, 물의 굴절률이 1.30 이고 유리의 굴절률이 1.50 이다.)

풀이

물 속에서 유리판에 입사된 빛이 유리를 통과한 다음 유리에서 공기 중으로 빛이 투과되려면 전 반사되지 않아야 한다는 점을 이용한다.



물에서 유리판으로 빛이 굴절될 때 스넬의 굴절 법칙을 적용하면

$$n_2 \cdot \sin\theta = n_1 \sin\theta' \Rightarrow \sin\theta = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta'$$

이다. 한편 유리에서 공기로 투과시키기 위해 유리에서 전반사 되지 않을 조건은

$$n_1 \cdot \sin\theta' \le 1 \Rightarrow \sin\theta' \le \frac{1}{n_1}$$

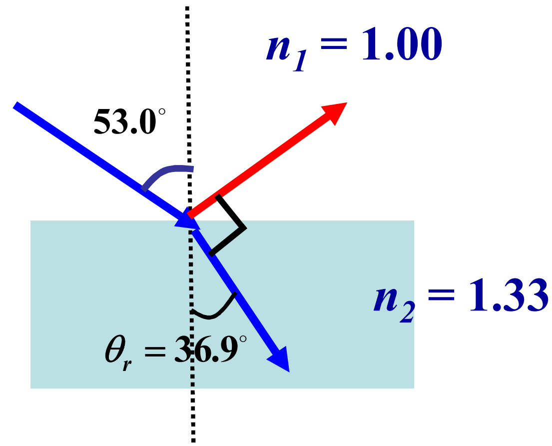
이며 sinθ 의 범위는 다음과 같다.

$$\sin\theta = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta' \le \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{1}{n_1}\right) \Rightarrow \sin\theta \le \frac{1}{n_2} = \frac{1}{1.30} \qquad \therefore \sin\theta \le 0.769$$

23-3 브루스터 각

연습 23-10 빛이 물의 표면에 53.0 ° 로 입사하였다. 물의 굴절률이 1.33일 때, 물 내부로 굴절된 빛의 굴절각은 얼마인가? 또 입사각과 굴절각의 합은 얼마인가? 이 경우 물의 표면에서 반사된 빛은 한 방향으로 편광되어 있음을 보여라.

풀이 스넬의 굴절 법칙을 이용하여 굴절 각을 구할 수 있다.



$$n_1 \cdot \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r \quad (n_1 = 1.00)$$

$$(1.00)\cdot \sin 53.0^{\circ} = (1.33)\sin\theta_r$$

$$\sin\theta_r = \left(\frac{1.00}{1.33}\right)\sin 53.0^{\circ} \Rightarrow \theta_r = 36.9^{\circ}$$

입사각과 굴절각의 합 : $\theta_i + \theta_r = 53.0° + 36.9° = 89.9° \cong 90°$

따라서 반사된 빛과 투과된 빛은 서로 직각이다. 즉, 투과된 빛이 수평성분 이라면 반사된 빛에는 수평성분이 없다고 할 수 있다. 즉 반사된 빛은 수직성분으로 편광된 빛이라고 볼 수 있다.

한편 브루스터 각은 편광된 반사 빛을 얻을 때 물체에 빛을 입사시키는 각도로 그 크기는

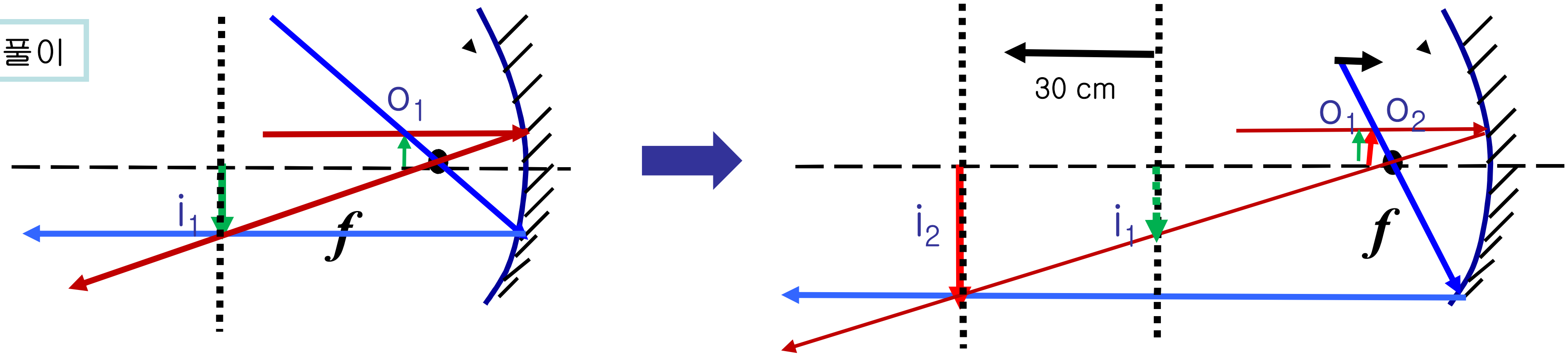
$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{1}{n_2}\right) = \tan^{-1}(1.33) = 53.1^{\circ}$$

이며 브루스터 각의 크기가 주어진 문제의 입사각 53.0 ° 과 거의 일치한다. 따라서 반사된 빛은 편광되었다고 할 수 있다.

23-4 거울

연습 23-13. 초점거리가 10.0cm 인 오목거울 앞에 물체를 두었더니 스크린의 5 배 크기의 실상을 얻었다. 이 물체를 조금 움직였더니 상이 선명하지 않아서 스크린을 30.0 cm 만큼 뒤로 이동하였더니 다시 선명한 상을 얻었다. 이 때 상의 배율을 구하여라.

풀이



1) 처음 물체가 거울 앞에 떨어진 거리(o_1)을 구한다. 배율이 5배이고 상의 위치가 실상이므로 i_1 의 부호는 + 임을 알 수 있으며 배율과 거울 공식을 이용하면 o_1 을 얻을 수 있다.

$$m = -\frac{i_1}{o_1} = -5 \Rightarrow i_1 = 5o_1, \quad \frac{1}{o_1} + \frac{1}{i_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{o_1} + \frac{1}{5o_1} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{6}{5o_1} = \frac{1}{10.0} \Rightarrow \therefore o_1 = 12.0cm$$

(– 부호는 도립을 나타냄)

$$i_1 = 5o_1 = 5\times 12.0 = 60.0cm,$$

2) 스크린을 뒤로 30cm 움직였으므로 물체의 상은 처음 상의 위치 보다 30cm 더 떨어진 지점이다.

$$i_2 = i_1 + 30.0 = 90.0cm$$

이 상이 맺어질 때 선명한 상을 얻으려면 물체와 거울과의 거리는 o_2 가 되어야 한다. 따라서 물체는 처음의 위치가 아니라 조금 움직여야 한다. 선명한 상을 얻기 위한 물체의 위치(o_2)는 다음과 같다.

$$\frac{1}{o_2} + \frac{1}{i_2} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{o_2} + \frac{1}{90.0} = \frac{1}{10.0} \Rightarrow \frac{1}{o_2} = \frac{1}{10.0} - \frac{1}{90.0} = \frac{8.00}{90.0} \Rightarrow o_2 = \frac{90.0}{8.00} = 11.25(cm)$$

즉, 물체를 처음 위치에서 0.75 cm 앞으로 옮기면 선명한 상을 얻게 되며 배율은 다음과 같다.

$$\therefore m = -\frac{i_2}{o_2} = -\frac{90.0}{(90.0/8.00)} = -8.00$$

(8배 확대된 실상이며 – 는 도립을 나타낸다)

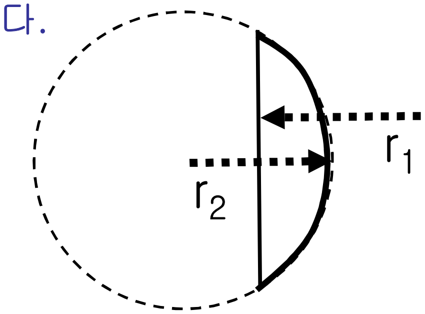
23-5 얇은 렌즈

연습 23-14. 다음과 같은 경우의 렌즈의 초점거리를 계산하여라.

(가) 한쪽 면이 평평하고 다른 쪽 면이 곡률반지름 40.0cm 인 얇은 볼록렌즈의 초점거리를 계산하라, 이때 굴절율은 1.50 으로 한다.

(나) 두 면이 모두 곡률 반지름 40.0 cm인 얇은 볼록렌즈의 초점거리를 계산하라.

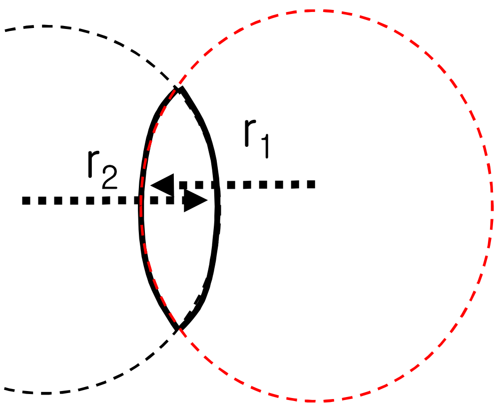
풀이 렌즈 제작 공식에 의하여 초점을 구한다. 렌즈의 오른편의 곡률은 양이고 왼쪽의 곡률은 음이다. 한편 평면의 곡률을 무한대이므로 초점거리는 각각 다음과 같다.



$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

n : 렌즈의 굴절률
r_1 : 앞면의 곡률반경
r_2 : 뒷면의 곡률반경

(가) $$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1.50-1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-40.0cm}\right) = \frac{\mathbf{0.500}}{\mathbf{40.0cm}} = +80.0cm$$



(나) $$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1.50-1)\left(\frac{1}{40.0} - \frac{1}{-40.0cm}\right) = \frac{\mathbf{0.500 \times 2}}{\mathbf{40.0cm}} = +40.0cm$$

23-5 얇은 렌즈

연습 23-15. 곡률반경이 12.0cm 이고 굴절률이 2 인 볼록렌즈로 입사하는 평행광은 어느 점에 모이겠는가?

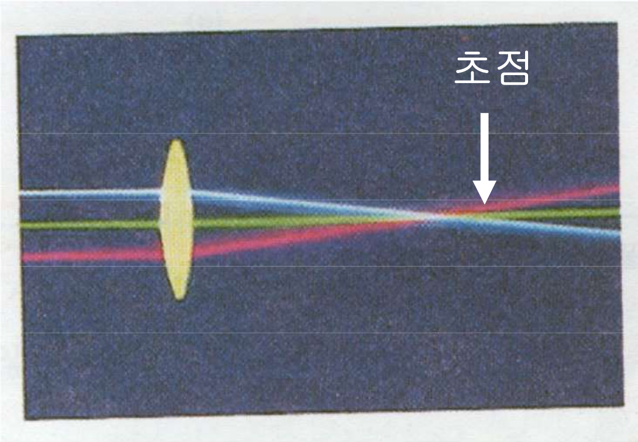
풀이

얇은 렌즈 초점 공식

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

n : 렌즈의 굴절률
r_1 : 앞면의 곡률반경
r_2 : 뒷면의 곡률반경

평행광선은 볼록렌즈의 초점에 모인다. 렌즈제작자공식에 의해 초점을 구한다



$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (2-1)\left(\frac{1}{12.0} - \frac{1}{-12.0}\right) = \frac{1}{6}$$

$$f = +6cm$$

23-5 얇은 렌즈

연습 23-16. 초점 거리가 f 인 볼록렌즈의 축 상에서 a 만큼 떨어진 곳에 물체가 놓여 있다. 다음 각 경우에서 이 볼록렌즈에 의해 생성된 상의종류와 크기는 어떻게 되는가?

(가) a < f (나) a = f (다) f < a < 2f (라) a = 2f (마) a > 2f

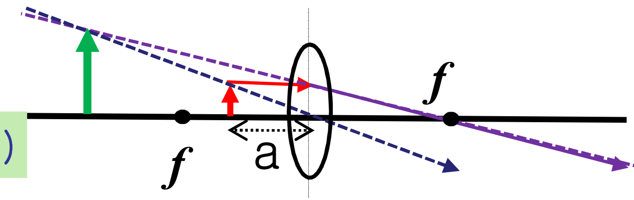
풀이

(가) a < f $$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}=\frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{i}=\frac{1}{(2a)} \Rightarrow i=-2a$$

예를 들어 a=f/2 점을 생각하면 f=2a 기 된다.

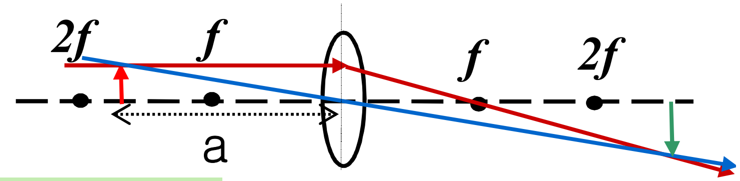
$$m=-\frac{i}{o}=-\frac{(-2a)}{a}=2$$

(확대된 정립허상)



(나) a = f $$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}=\frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{i}=\frac{1}{a} \Rightarrow i=\infty$$ (무한대 상)

(다) f < a < 2f $$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}=\frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{i}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}a\right)} \Rightarrow i=2a$$



예를 들어 a=3f/2 는 위의 영역에 있는 a 이므로 f=2a/3 기 된다.

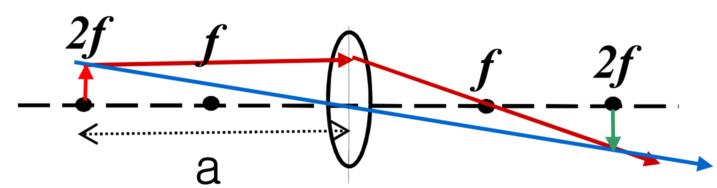
$$m=-\frac{i}{o}=-\frac{(2a)}{a}=-2$$

확대된 도립 실상

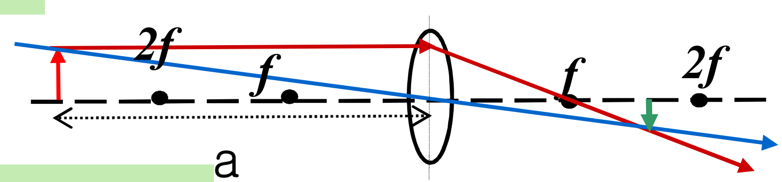
(라) a = 2f $$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{i}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}a\right)} \Rightarrow i=a$$

$$m=-\frac{i}{o}=-\frac{(a)}{a}=-1$$

실물과 같은 도립 실상



(마) a > 2f $$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{i}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}a\right)} \Rightarrow i=\frac{a}{2}$$



예를 들어 a=3f 는 위의 영역에 있는 a 이므로 f=a/3 가 된다.

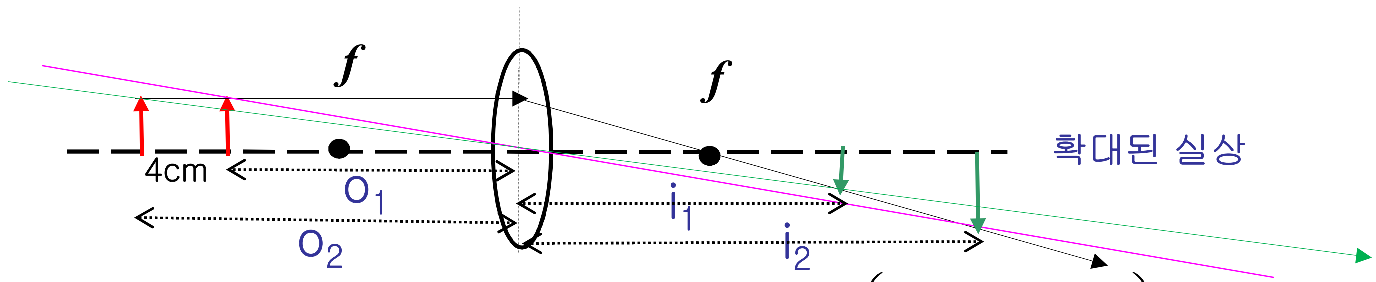
$$m=-\frac{i}{o}=-\frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a}=-\frac{1}{2}$$

축소 도립 실상

23-5 얇은 렌즈

연습 23-17. 어떤 렌즈 앞에 물체를 놓았더니 네 배 크기의 실상이 생겼고 이 물체를 렌즈에서 4.00cm 더 멀리하였더니 두 배 크기의 실상이 생겼다, 이 렌즈의 초점 거리는 얼마인가?

풀이



4 배 크기의 실상 이므로 실상의 위치는 $i_1 = 4o_1 \quad \Leftarrow \left(m_1 = -\dfrac{i_1}{o_1} = -4 \right)$

이고 렌즈공식에 i_1 을 대입하면 $\dfrac{1}{o_1} + \dfrac{1}{i_1} = \dfrac{1}{f} \Rightarrow \dfrac{1}{o_1} + \dfrac{1}{4o_1} = \dfrac{1}{f} = \dfrac{5}{4o_1}$ (1)

이다. 한편 렌즈와 물체 사이의 거리가 4cm 더 멀어졌을 때 2 배 크기의 새로운 실상이 생겼으므로 실상의 위치를 구하면

$$i_2 = 2o_2 = 2(o_1 + 4.00) \qquad \Leftarrow \left(m_2 = -\frac{i_2}{o_2} = -2 \right)$$

이다. 렌즈공식에 i_2 를 대입하면 $\dfrac{1}{o_2} + \dfrac{1}{i_2} = \dfrac{1}{f} \Rightarrow \dfrac{1}{o_2} + \dfrac{1}{2o_2} = \dfrac{1}{f} \Rightarrow \dfrac{1}{f} = \dfrac{3}{2o_2} = \dfrac{3}{2(o_1 + 4.00)}$ (2)

(1)=(2) 에서 $\dfrac{5}{4o_1} = \dfrac{3}{2(o_1 + 4.00)} \Rightarrow o_1 = 20.0cm$

$\therefore f = \dfrac{4o_1}{5} = \dfrac{4}{5} \times 20.0cm = 16.0cm$ 이 렌즈의 초점거리는 16.0cm 이다.

발전문제

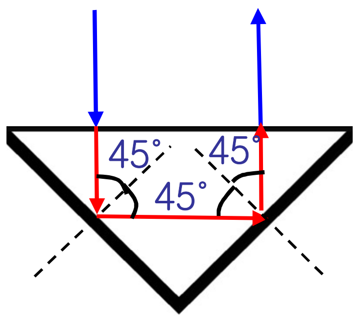
연습 23-24. 직각 모서리 프리즘

두 개의 거울을 직각으로 붙여 만든 그릇에 물을 담은 형태를 생각하자. 빛이 수면에 수직으로 입사하는 경우, 빛은 물을 지나 한 개의 거울 면에서 반사하고 다시 다른 거울 면에서 반사하여 물을 빠져 나올 것이다.

(가) 이 때 두 번 반사된 빛은 원래의 입사광과 평행하게 되돌아가게 된다는 것을 보여라.

풀이

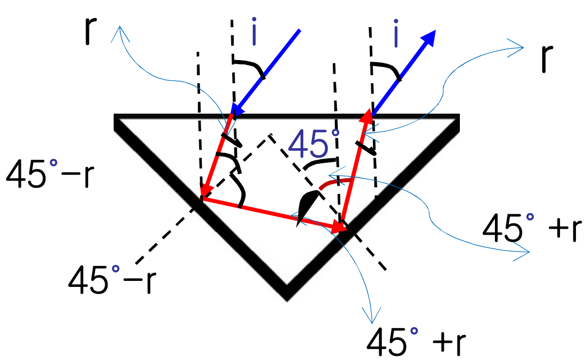
물에 수직으로 입사된 빛은 1차의 거울 면에서 45도 각도로 입사하며 같은 각으로 반사한다. 2차 거울 면에서도 45도 입사되며 반사각은 45도가 되므로 결국 수직으로 입사한 빛과 평행이 된다.



(나) 빛이 비스듬하게 입사하는 경우에도 반사된 빛은 항상 입사한 빛에 평행이 된다는 것을 보여라.

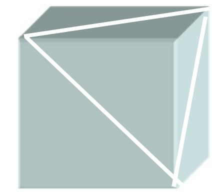
풀이

입사한 빛의 입사각을 i 라 하고 굴절각을 r 이라고 하자. 이렇게 r 의 각도로 굴절된 광선은 1 차의 거울 면에서 45 −r 의 각도로 입사하게 되며 같은 각으로 반사된다. 이 광선은 2차 거울 면에 45 + r 의 각으로 입사되고 같은 45 + r 의 각으로 반사하여 처음 수면으로 다시 입사될 때에는 그림에서와 같이 r 의 각으로 입사된다. 이 광선은 수면 밖으로 굴절될 때 i 의 각으로 굴절되므로 결국 입사 광과 평행이 된다.



발전문제

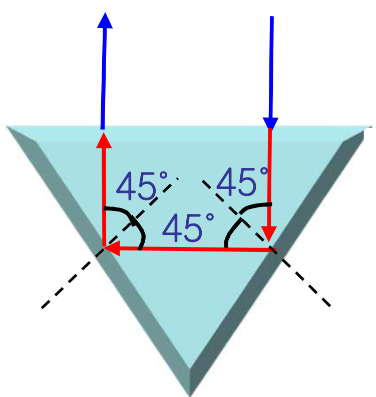
연습 23-24 계속 – (다) 정육면체 유리 덩어리의 모서리를 45도 각도로 잘라내어 만들어진 피라미드 형태의 유리에 대해서도 위의 관계가 성립되는 것을 보여라. 이 때 유리의 굴절률이 1.45 라고 가정하고 전반사 조건을 고려하라. 실제로 사고 예방을 위해서 자전거 등에는 밤에 다른 자동차의 불빛에 의해 빛나게 되는 물체를 부착하는데, 이 물체는 이와 같은 작은 피라미드 모양의 플라스틱을 여러 개 붙여 놓은 형태이다. 자동차 양끝의 방향 지시등 커버도 이와 같이 되어 있다.



풀이 유리에서 전반사 되려면 임계각 보다 커야 한다. 임계각을 구하면

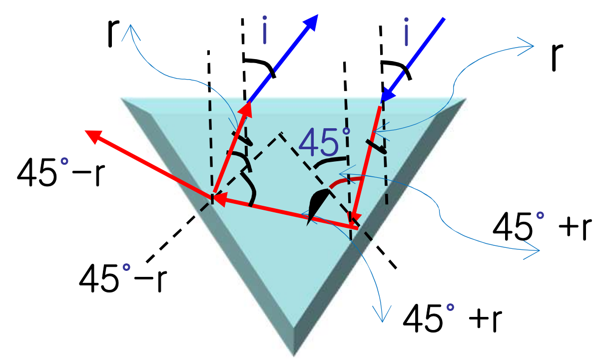
$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sin\theta_c = \frac{1}{1.45} \Rightarrow \theta_c = 43.6^\circ$$

이다. 즉, 굴절율이 1.45 인 유리에서는 전반사될 임계각 43도 이므로 각 면에 대해 수직으로 들어간 빛은 다른 면에서 입사될 때 45도로 입사되므로(임계각 보다 크다) 두 번 전반사가 되며 입사광과 평행하다.(그림 a) 비스듬히 입사된 빛 중에서는 유리의 1 차 면으로 45+r 의 각으로 입사되는 빛들은 입계각보다 큰 입사각이므로 1차 면에서 전반사 되며 2차 면에서 45−r 각의 입사하게 된다. 이 때는 45−r 의 각이 임계각(43.6°) 보다 큰 경우에만 전반사가 이루어지게 되며 전반사된 광은 입사광과 평행하게 굴절된다. (그림 b)



(그림 a)

(삼각뿔의 중간 단면을 그린 모양)



(그림 b)

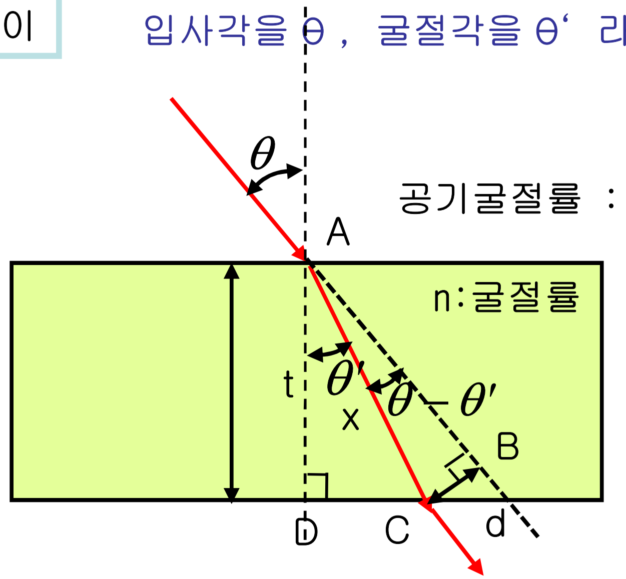
발전문제

연습 23-25. 두께가 t 이고 굴절률이 n 인 평행유리판에 빛살이 입사하는 경우, 입사각이 충분히 작으면 투과된 빛살은 입사된 빛살과 평행한 경로에서 아래 식에 나타낸 간격 d 만큼 벗어나 있게 된다는 것을 보여라.

$$d = t\theta \frac{n-1}{n}$$

풀이

입사각을 θ , 굴절각을 θ' 라 하자. 그리고 물속에서 굴절된 광선의 경로를 x 라고 하면



스넬의 굴절 법칙에 의해 $1 \cdot \sin\theta = n\sin\theta'$

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}$$

간격 d 는 빗변이 x 인 직각삼각형 ABC 에서

$$d = x\sin(\theta - \theta')$$

빗변이 x 인 직각삼각형 ABC 에서 두께 t 는

$$t = x\cos\theta' \Rightarrow x = \frac{t}{\cos\theta'}$$

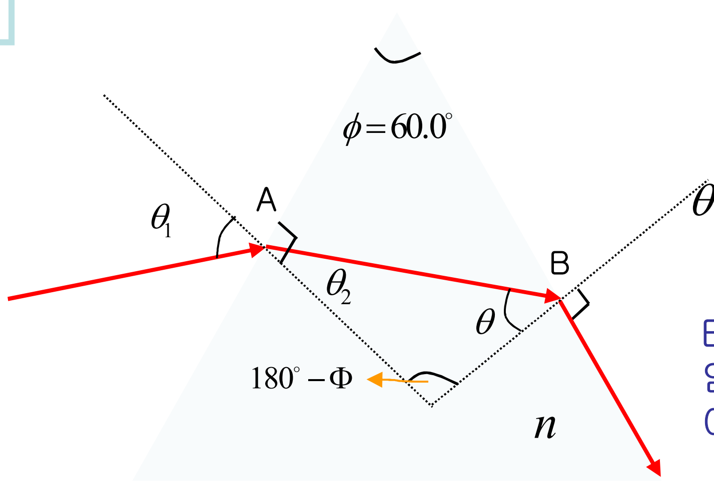
$$d = x\sin(\theta-\theta') = \frac{t}{\cos\theta'}(\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta'\cos\theta)$$

$$= t\sin\theta\left(1 - \frac{\cos\theta}{\cos\theta'}\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\right) = t\sin\theta\left(1 - \frac{\cos\theta}{\cos\theta'}\frac{1}{n}\right)$$

θ 와 θ' 가 매우 작다고 가정하면 $\left(\sin\theta \approx \theta, \quad \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} \approx 1\right)$ $\therefore d = t\theta\left(1 - \frac{1}{n}\right) = t\theta\frac{n-1}{n}$

연습 23-27 그림과 같이 꼭지각이 Φ (=60.0°) 이고 굴절률이 n 인 삼각형 모양의 유리프리즘이 있다. 광선이 프리즘의 다른 면을 투과해 나갈 수 있는 최소 입사각 θ$_1$ 은 얼마인가?

풀이



A 에서 입사한 광선이 유리 속에서 θ$_2$ 로 굴절되어 B 면에 다시 입사한 각을 θ 라 할 때 굴절각 θ$_2$ 는 다음과 같은 관계식을 만족하는 것을 그림에서 구할 수 있다.

$$\theta + \theta_2 + 180 - \phi = 180^{\circ} \Rightarrow \theta_2 = \phi - \theta \quad (1)$$

B 에서 유리에서 공기로 투과되려면 전반사 되는 임계각 보다 작아야 한다. θ 는 다음의 조건이 되어야 한다.

$$n \sin\theta \le 1.00 \sin 90^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \le \frac{1}{n}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$$

A 면에서 스넬의 법칙을 적용하여 굴절되어 투과할 수 있는 최소의 각을 얻을 수 있다.

$$\sin\theta_1 \le n\sin(\phi - \theta) = n\{\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta\} = n\left\{\sin\phi \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} - \cos\phi \cdot \frac{1}{n}\right\} = \left\{\sqrt{n^2 - 1}\sin\phi - \cos\phi\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta_1 \le \left\{\sqrt{n^2 - 1}\sin\phi - \cos\phi\right\} \quad \Rightarrow \quad \therefore \theta_{min} = \sin^{-1}\left\{\sqrt{n^2 - 1}\sin\phi - \cos\phi\right\}$$