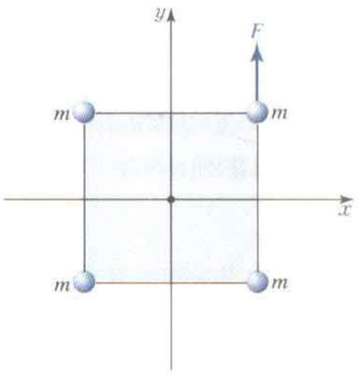
대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (9장) - by 송현석

1. 그림 같이 질량을 무시할 수 있는 한 변의 길이가 a인 정사각형 판의 각 꼭지점에 질량 m인 추가 달려 있다. 이 판의 중심은 원점에 고정되어 있고, 판은 z축을 회전축으로 회전할 수 있다.



(가) 이 계의 회전관성을 구하여라.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = 4 \times m \times \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2ma^2$$

(나) 그림과 같이 크기가 F인 힘을 가하면, 돌림힘의 크기는 얼마인가?

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF\sin\theta = rF\sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}} \times F \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}F\ \hat{k}$$

(다) 이때 각가속도의 크기는 얼마인가?

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} = \frac{\frac{a}{2}F\ \hat{k}}{2ma^2} = \frac{F}{4ma}\ \hat{k}$$

2. 질량이 M이고, 반지름이 R인 원반 모양의 도르래에 질량이 m인 물체가 매달려 있다. 실의 질량은 무시할 수 있고, 도르래와 고정 축 사이의 마찰은 무시할 수 있다. 물체의 가속도를 구하여라.

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = RT\sin\theta = RT = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{1}{2}MRa \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{2}Ma$$

$$mg - T = ma \qquad \Rightarrow \qquad mg - \frac{1}{2}Ma = ma$$

$$\left(\frac{1}{2}M + m\right)a = mg \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{mg}{\frac{1}{2}M + m} = \frac{2mg}{M + 2m}$$

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{2}M\left(\frac{2mg}{M+2m}\right) = \frac{Mmg}{M+2m}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (9장) - by 송현석

3. 어떤 벽시계의 분침은 질량이 $60.0\ \mathrm{g}$이고 길이가 $10.0\ \mathrm{cm}$이다.
이 분침의 각운동량은 얼마인가?

$$L = I\omega = \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \left(\frac{1}{3}\times 0.06\ \mathrm{kg}\times(0.10\ \mathrm{m})^2\right)\left(\frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{3600\ \mathrm{s}}\right) \approx 3.49\times 10^{-7}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

4. 피겨 스케이팅 선수는 제자리에서 빨리 회전하기 위해서 팔을 오무린다. 그 이유를 설명하여라.

$$\sum\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = I\vec{\omega} = I'\vec{\omega}' = constant \qquad \text{각운동량 보존}$$

팔을 오므리면 회전관성이 작아지고 각속력이 증가한다.

5. 일정한 각속도 ω로 회전하던 별이 붕괴하여 회전관성이 $1/3$로 줄어들었다. 붕괴된 후의 별의 각속도를 구하여라.

$$\sum\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = I\vec{\omega} = I'\vec{\omega}' = constant \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{I}{I'}\omega = \frac{I}{\frac{1}{3}I}\omega = 3\omega$$

6. (가) 달이 소행성 등과의 충돌에 의해 궤도 반지름이 줄어들어 결과적으로 지구와 달 사이의 거리가 현재의 $1/2$로 줄어들었다고 하자. 달의 공전주기는 몇 배가 되겠는가? 충돌에 의해 운동량이 변화하므로 각운동량은 보존되지 않는다.

$$F_g = G\frac{m_e m_m}{r_{em}^2} = m_m\frac{v^2}{r_{em}} = m_m a_c = F_c \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{m_e}{r_{em}}}$$

질량이 변하지 않으면서 공전 **반지름**과 **속력**이 변하는 상황이 발생한다.

$$T = \frac{2\pi r_{em}}{v} = \frac{2\pi r_{em}}{\sqrt{G\frac{m_e}{r_{em}}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_{em}^3}{Gm_e}} \quad \Rightarrow \quad T \sim \sqrt{r_{em}^3}$$

$$\Rightarrow \quad T' \sim \sqrt{r'^3_{em}} \sim \sqrt{\left(\frac{1}{2}r_{em}\right)^3} \sim \sqrt{\frac{1}{8}r_{em}^3} \sim \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{r_{em}^3} \sim \frac{1}{\sqrt{8}}T$$

[별해] Kepler의 제3법칙을 적용하면

$T^2 \sim \frac{r_{em}^3}{m_e}$ 이므로 **거리**가 반으로 줄어들면, **주기**는 $\frac{1}{\sqrt{8}}$배로 줄어든다.

(나) 지구의 질량이 점진적으로 증가하여 지구와 달 사이의 중력이 변한다고 하자. 지구와 달 사이의 거리가 현재의 $1/2$로 줄었다면 달의 공전주기는 지금의 몇 배가 되겠는가?

각운동량이 **보존**되는 경우이다.

$$F_g = G\frac{m_e m_m}{r_{em}^2} = m_m\frac{v^2}{r_{em}} = m_m a_c = F_c \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{m_e}{r_{em}}}$$

$$\Rightarrow \quad G\frac{m_e m_m}{r_{em}^2} = m_m\frac{v^2}{r_{em}} = m_m\frac{v^2}{r_{em}} \times \frac{m_m r_{em}^2}{m_m r_{em}^2} = \frac{m_m^2 v^2 r_{em}^2}{m_m r_{em}^3} = \frac{L^2}{m_m r_{em}^3}$$

$$\Rightarrow \quad r_{em} = \frac{L^2}{G m_e m_m^2} \qquad \left\langle r_{em} \sim \frac{1}{m_e} \right\rangle$$

질량이 변하면서 공전 **반지름**과 **속력**이 변하는 상황이 발생한다.

$$T = \frac{2\pi r_{em}}{v} = \frac{2\pi r_{em}}{\sqrt{G\frac{m_e}{r_{em}}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_{em}^3}{G m_e}} \quad \Rightarrow \quad T \sim \sqrt{\frac{r_{em}^3}{m_e}}$$

$$\Rightarrow \quad T' \sim \sqrt{\frac{r'^3_{em}}{m'_e}} \sim \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}r_{em}\right)^3}{(2m_e)}} \sim \sqrt{\frac{1}{16}\frac{r_{em}^3}{m_e}} \sim \frac{1}{4}\sqrt{\frac{r_{em}^3}{m_e}} \sim \frac{1}{4}T$$

[별해] Kepler의 제3법칙을 적용하면

$T^2 \sim \frac{r_{em}^3}{m_e}$ 이므로 **거리**가 반으로 줄어들면 **질량**은 두 배가 되고, **주기**는 $\frac{1}{4}$배가 된다.

7. 반지름이 r이고 회전관성이 I인 회전 놀이기구가 정지해 있다. 이때, 질량 m인 아이가 가장자리에서 접선을 따라 v의 속력으로 달려와 놀이기구에 올라탔다. 회전 놀이기구의 각속도는 얼마인가?

$$L = rp\sin\theta = rmv\sin\theta = rmv \qquad (\ \theta = 90^\circ\ ), \qquad I_t = I + mr^2$$

$$L = I_t\ \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{L}{I_t} = \frac{L}{I+mr^2} = \frac{mrv}{I+mr^2}$$

8. 길이가 l 이고 질량이 m인 길고 가는 막대가 단진자처럼 수직 평면에서 막대 끝을 중심으로 자유로이 회전하도록 걸려 있다. 이 막대의 전체 각운동량을 각속도 ω의 함수로 표현하라.

$$L = rp = rmv = rm(r\omega) = r^2 m\omega \qquad (\ \theta = 90^\circ \ \rightarrow\ \sin\theta = 1\ )$$

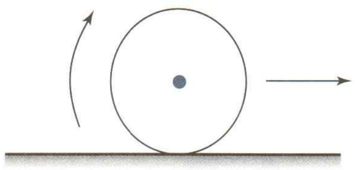
$$L_{cm} = \frac{l}{2}p_{cm} = \frac{l}{2}mv_{cm} = \frac{l}{2}m\frac{l}{2}\omega = \frac{l^2}{4}m\omega \quad \Rightarrow \quad L_{cm} = \frac{l^2}{4}m\omega$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (9장) - by 송현석

9. 회전하며 움직이는 반지름이 $0.500\ \mathrm{m}$인 바퀴의 중심부분의 병진속도의 크기는 $v_{cm} = 2.00\ \mathrm{m/s}$이고 회전각속도의 크기는 $\omega = 3.00\ /\mathrm{s}$이다. 바닥과 접촉하는 바퀴의 가장 아랫부분의 속력은 얼마인가?

$$
\begin{aligned}
v_{접촉점} = v_{cm} - v_{회전} = v_{cm} - (r\omega) &= 2.00\ \mathrm{m/s} - (0.500\ \mathrm{m} \times 3.00\ /\mathrm{s}) \\
&= 2.00\ \mathrm{m/s} - 1.50\ \mathrm{m/s} \\
&= 0.500\ \mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

10. 그림과 같이 반지름이 $0.500\ \mathrm{m}$인 바퀴가 수평면 위에서 미끄러짐 없이 굴러간다. 정지해 있다가 출발한 바퀴는 일정한 각가속도 $6.00\ \mathrm{rad/s^2}$을 가지고 움직인다. $t = 0\ \mathrm{s}$에서 $t = 3\ \mathrm{s}$까지 바퀴가 움직인 거리는 얼마인가?



$r = 0.500\ \mathrm{m}$, $v_0 = 0\ \mathrm{m/s}$, $\omega_0 = 0\ \mathrm{rad/s}$, $\alpha = 6.00\ \mathrm{rad/s^2}$, $\Delta t = 3\ \mathrm{s}$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (\ \omega_0 = 0\ \mathrm{rad/s},\quad \theta_0 = 0\ \mathrm{rad}\ )$$

$$\omega^2 = 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\omega^2}{2\alpha} \qquad (\ \omega = \omega_0 + \alpha\Delta t = \alpha\Delta t\ )$$

$$= \frac{(\alpha\Delta t)^2}{2\alpha} = \frac{\alpha^2\Delta t^2}{2\alpha} = \frac{\alpha\Delta t^2}{2} = \frac{6.00\ \mathrm{rad/s^2} \times (3\ \mathrm{s})^2}{2} = 27.0\ \mathrm{rad}$$

$$x = r\theta = 0.500\ \mathrm{m} \times 27.0\ \mathrm{rad} = 13.5\ \mathrm{m}$$

11. 구르고 있는 균일한 밀도의 고체구의 병진운동에너지는 질량중심에 대한 회전운동에너지의 몇 배인가?

$$K_{병진} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

$$K_{회전} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = \frac{1}{5}Mv_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K_{병진}}{K_{회전}} = \frac{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2}{\frac{1}{5}Mv_{cm}^2} = \frac{5}{2}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (9장) - by 송현석

12. 회전관성이 $4.5\times10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$이고 반지름이 $3.0\,\mathrm{cm}$인 도르래가 천장에 매달려 있다. 도르래에 걸쳐져 있는 줄은 양쪽 끝에 각각 $2.0\,\mathrm{kg}$, $4.0\,\mathrm{kg}$인 나무토막을 매달고 도르래 위에서 미끄러짐 없이 움직인다. 무거운 나무토막의 속도가 $2.0\,\mathrm{m/s}$일 때, 도르래와 두 나무토막의 전체 운동에너지는 얼마인가?

$$I = 4.5\times10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2},\qquad r = 3.0\,\mathrm{cm} = 0.03\,\mathrm{m}$$

$$m_1 = 2.0\,\mathrm{kg},\qquad m_2 = 4.0\,\mathrm{kg},\qquad v = v_1 = v_2 = 2.0\,\mathrm{m/s}$$

$$\begin{aligned} K_{병진} = K_{병진1} + K_{병진2} &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (\ v = v_1 = v_2\ ) \\ &= \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\ v^2 \\ &= \frac{1}{2}(2.0\,\mathrm{kg}+4.0\,\mathrm{kg})(2.0\,\mathrm{m/s})^2 = 12\,\mathrm{kg\cdot m^2/s^2} = 12\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{회전} &= \frac{1}{2}I\ \omega^2 \qquad \left(\ \omega = \frac{v}{r}\ \right) \\ &= \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\times(4.5\times10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2})\times\left(\frac{2.0\,\mathrm{m/s}}{0.03\,\mathrm{m}}\right)^2 \approx 10\,\mathrm{kg\cdot m^2/s^2} = 10\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

$$K_{총} = K_{병진} + K_{회전} = 12\,\mathrm{J} + 10\,\mathrm{J} = 22\,\mathrm{J}$$

13. 동일한 두 입자가 화학결합을 이룬 이원자 분자가 평면위에 놓여 있다. 이 분자는 결합축 중심에 수직한 방향을 회전축으로 하여 $4.80\times10^{12}\,\mathrm{rad/s}$의 각속력으로 회전한다. 각 입자의 질량은 $2.33\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$이며 화학결합 길이가 $1.24\times10^{-10}\,\mathrm{m}$이다.
(가) 분자의 회전관성을 구하여라.

$$\begin{aligned} I = mr^2 + mr^2 = 2mr^2 = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 &= 2\times(2.33\times10^{-26}\,\mathrm{kg})\times\left(\frac{1.24\times10^{-10}\,\mathrm{m}}{2}\right)^2 \\ &\approx 1.79\times10^{-46}\,\mathrm{kg\cdot m^2} \end{aligned}$$

(나) 분자의 회전운동에너지는 얼마인가?

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \approx \frac{1}{2}\times(1.79\times10^{-46}\,\mathrm{kg\cdot m^2})\times(4.80\times10^{12}\,\mathrm{rad/s})^2 \approx 2.06\times10^{-21}\,\mathrm{J}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (9장) - by 송현석

14. 오른손에 무거운 가방을 들고 갈 때 몸을 어느 쪽으로 기울이는가? 그 이유를 평형조건을 이용해서 설명하여라.

15. 질량이 $200\ \mathrm{g}$인 균일한 $100\ \mathrm{cm}$ 길이의 자가 있다. 자의 오른쪽 끝 지점에 질량이 $200\ \mathrm{g}$ 인 지우개가 올려져 있을 때 균형을 유지하려면 받침대는 어느 위치에 있어야 하는가?

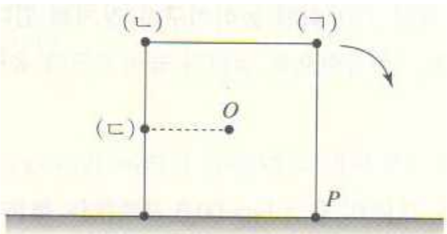
$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0.2\ \mathrm{kg} \times 0.5\ \mathrm{m}) + (0.2\ \mathrm{kg} \times 1.0\ \mathrm{m})}{0.2\ \mathrm{kg} + 0.2\ \mathrm{kg}} = \frac{0.1\ \mathrm{kg \cdot m} + 0.2\ \mathrm{kg \cdot m}}{0.4\ \mathrm{kg}}$$

$$= \frac{0.3\ \mathrm{kg \cdot m}}{0.4\ \mathrm{kg}} = \frac{3}{4}\ \mathrm{m} = 75.0\ \mathrm{cm}$$

16. 시소의 $1/3$ 되는 지점에 받침대가 놓여 있다. 받침대에서 먼 한쪽 끝에 $10\ \mathrm{kg}$의 아이가 앉을 때 가까운 쪽 끈에는 몇 kg의 질량을 놓아야 평형이 맞겠는가?

$$10\ \mathrm{kg} \times \frac{2}{3}\ \mathrm{m} = x \times \frac{1}{3}\ \mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad x = 3\ /\mathrm{m} \times 10\ \mathrm{kg} \times \frac{2}{3}\ \mathrm{m} = 20\ \mathrm{kg}$$

17. 그림과 같이 질량중심이 O에 위치한 상자가 일정한 최대 정지마찰계수를 갖는 지면에 놓여 있다. 들거나 밀어서 움직이기에는 상자가 너무 무거우므로, 이제 이 상자에 F의 크기를 갖는 힘을 가하여 점 P를 중심으로 하여 오른쪽으로 굴려(회전시켜) 움직이려고 움직이려고 한다.



(가) 힘의 크기 F를 최소로 하려면, 상자의 어느 곳에 힘을 작용하여야 하는가?

P점에서 가장 먼 (ㄴ)지점

(나) 만일 (ㄷ)에 힘을 작용한다면, 가장 효과적인 힘의 방향은?

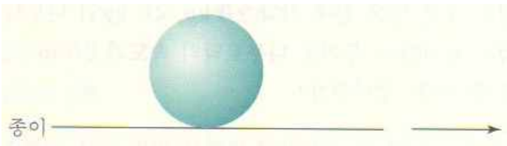
P점과 (ㄷ)지점을 연결하는 직선과 수직 윗 방향으로

(다) 상자를 굴려 움직이는 데 기여하지 않는 힘은 중력, 마찰력, 힘 F 중 어느 것인가?

작용선이 회전축(P점)을 지나는 힘인 마찰력

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (9장) - by 송현석

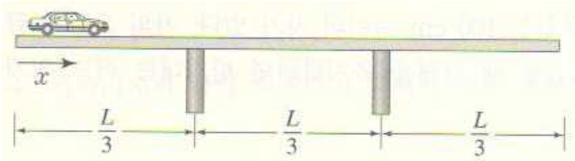
18. 그림과 같이 종이 위에 원통형의 물체가 정지하여 있다. 이제 종이를 오른쪽으로 잡아 당긴다. 물체와 종이 사이에는 마찰력이 작용하여 물체는 미끄러지지 않는다.



(가) 원통형 물체의 질량중심은 어느 방향으로 움직이는가? 오른쪽

(나) 원통형 물체는 질량중심에 대해 어느 방향으로 회전하는가? 시계 반대방향

19. 그림 같이 두 개의 동일한 기둥 위에 균일한 밀도를 갖는 콘크리트판을 얹어 놓은 다리가 있다. 이 다리 위를 자동차가 지나갈 때 왼쪽과 오른쪽 기둥이 받게 되는 힘은 다리에 수직하다. 그 세기를 각각 N_1과 N_2라 하자. 다리의 무게는 W_B, 자동차의 무게는 W_C, 자동차의 위치는 x로 표시한다. $0 \le x \le L/3$일 때, N_1, N_2를 구하여라.



$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 = W_C + W_B$

$\sum \vec{\tau} = 0$

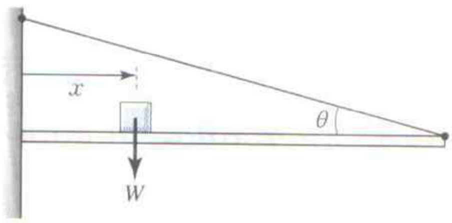
첫 번째 기둥 주위의 돌림힘

$$\left(\frac{L}{3} - x\right) W_C + \frac{L}{3} N_2 - \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) W_B = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{W_B}{2} + \left(\frac{3x}{L} - 1\right) W_C$$

두 번째 기둥 주위의 돌림힘

$$\left(\frac{2L}{3} - x\right) W_C - \frac{L}{3} N_1 + \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) W_B = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{W_B}{2} + \left(2 - \frac{3x}{L}\right) W_C$$

20. 길이 L인 무게를 무시할 수 있는 얇은 판의 한쪽 끝은 벽에 고정되어 있고, 다른쪽 끝은 실에 매여 있다. 실의 다른쪽 끝은 벽에 고정되어 있고, 실과 판 사이의 각도는 θ이다. 무게 W인 물체가 벽으로부터 x만큼 떨어져서 판 위에 놓여 있다. 실의 장력을 구하여라.



$$\sum \vec{\tau} = 0$$

$$TL\sin\theta - Wx = I\alpha$$

$$TL\sin\theta - Wx = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{Wx}{L\sin\theta}$$