제 24 장 연습 문제 풀이 (2)

1, 3, 5, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23

혹시 풀이에 오류가 있으면 연락 바랍니다. marzini@inha.ac.kr

24-1 빛의 간섭 현상

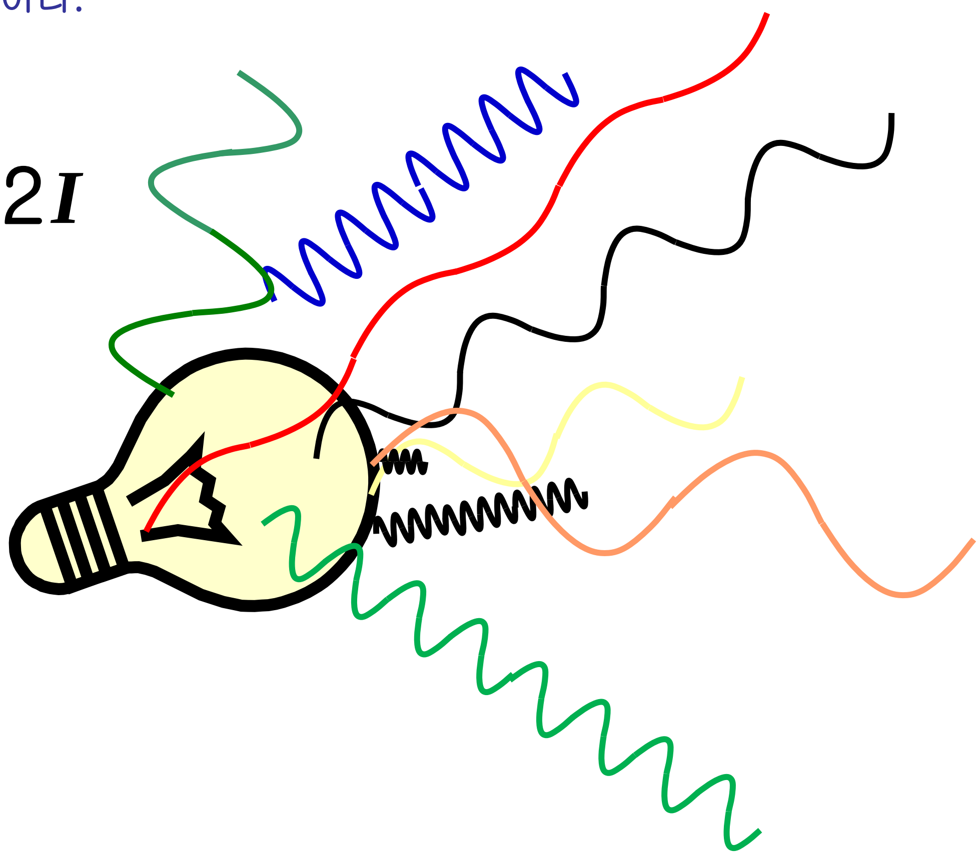
연습 24-1. 두 개의 백열전구로부터 나오는 빛의 세기가 각각 I 라면, 두 빛이 결합되었을 때 표면을 비추는 빛의 세기는 얼마인가?

풀이

백열전구와 같은 빛은 단일 파장이 아니고 여러 파장이 섞여 있으며 서로 결 맞는 시간이 너무 짧아 간섭을 일으키지 못한다. 따라서 빛의 세기는 간섭 현상이 없으므로 단순히 더해 주면 된다. 답은 2 배이다.

$$I + I = 2I$$

답 : $2I$



24-2 영의 이중 슬릿 실험

연습 24-3. 이중 슬릿 실험에서 파장이 546nm 이고 슬릿 간격이 0.100 mm 이고 슬릿과 스크린 사이 거리는 20.0cm 인 경우, 3 번째 밝은 무늬(최대점)에서 5 번째의 어두운 무늬 (최소점) 까지의 거리를 구하라.

풀이

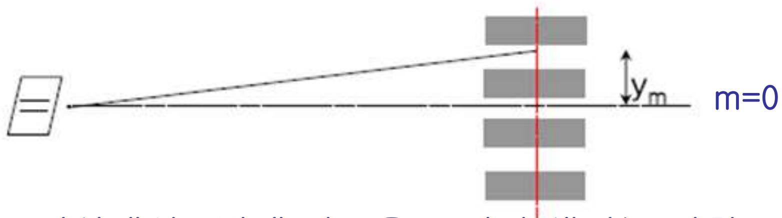
이중 슬릿 실험에서 빛의 경로차가 파장의 정수배일 때 보강간섭무늬가 나타나며 (m=0 일 때의 보강무늬는 항상 중앙에 놓인다.) 세 번째 보강무늬가 생기는 위치는 m=3 일 때이다. 한편 어두운 무늬는 m=0 일 때가 첫 번째가 무늬가 되며 5 번째 어두운 무늬는 m= 4 일 때 생긴다.

보강간섭 무늬의 위치

$$y_m^{bright} = D\frac{m\lambda}{d}\,(m = 0,1,2\cdots)$$

상쇄간섭 무늬의 위치

$$y_m^{dark} = D\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}{d}\,(m = 0,1,2,)$$



스크린상에서 5번째 어두운 무늬가 생기는 위치

$$y_{m=4}^{dark} = D\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}{d} = (0.200)\frac{\left(4+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(5.46\times10^{-7}\right)}{0.100\times10^{-3}} = 0.004914(m) = 4.914(mm)$$

스크린상에서 3번째 밝은 무늬가 생기는 위치

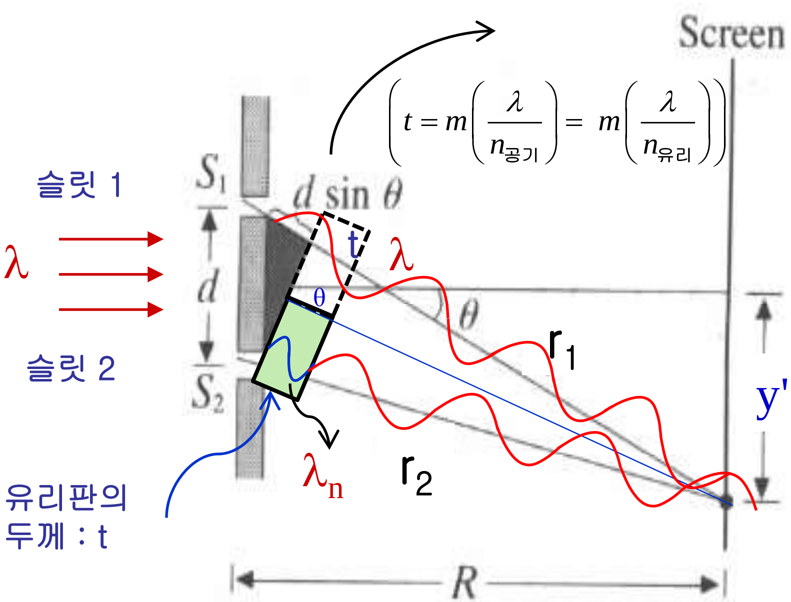
$$y_{m=3}^{bright} = D\frac{m\lambda}{d} = (0.200)\frac{3\cdot\left(5.46\times10^{-7}\right)}{0.100\times10^{-3}} = 0.003276(m) = 3.276(m)$$

-두 간섭 무늬 사이의 거리 : $y_{m=4}^{dark} - y_{m=3}^{bright} = 4.914 - 3.276 = 1.64(mm)$

24-2 영의 이중 슬릿 실험

연습 24-5. 이중 슬릿에서 한 슬릿을 두께가 0.300 mm 이고 굴절률이 1.50 인 얇은 유리판으로 덮었다. 이 때 유리판을 덮기 전 중앙 극대였던 지점은 스크린에서 얼마만큼 이동하겠는가? 단, 슬릿에서 스크린 까지의 거리는 2.00 m 이고 슬릿 사이의 간격은 0.400 mm 이다.

풀이 양쪽 슬릿에서 온 빛의 경로차를 구한다. 슬릿 1 의 경로는 슬릿 2 보다 dsinθ 이 더 길다. 또한 슬릿 1 에서 공기 중에서 t 의 두께에서 공기를 통과하므로 파장의 변화가 없지만 슬릿 2 에서는 유리판이므로 빛의 파장이 매질인 유리 굴절률에 따라 작아져($\lambda_n = \lambda/n$) 위상차가 나타난다.



두께 t 를 통과하는 동안 두 빛이 같은 위상이 되기 위한 조건:

$$n_{공기}t = m\lambda, \quad n_{유리}t = m\lambda \Rightarrow \therefore \left|n_{공기}t - n_{유리}t\right| = m\lambda,$$

따라서 두 슬릿 사이의 경로차에 의한 보강간섭 조건은 다음과 같다.:

$$r_1 - r_2 = d\sin\theta + \left(\left|n_{공기}t - n_{유리}t\right|\right) = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \ldots)$$

$$\Rightarrow d\sin\theta + \left(\left|1-n\right|\right)t = m\lambda \qquad \left(n_{공기} = 1, \quad n_{유리} = n\right)$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{(n-1)t + m\lambda}{d} \qquad (1)$$

한편 그림에서 $\tan\theta \approx \sin\theta = \frac{y'}{R} \Rightarrow y' = R\sin\theta$

이므로 (1) 을 대입하면 간섭무늬 식이 얻어진다. $y' = R\left(\frac{(n-1)t + m\lambda}{d}\right)$

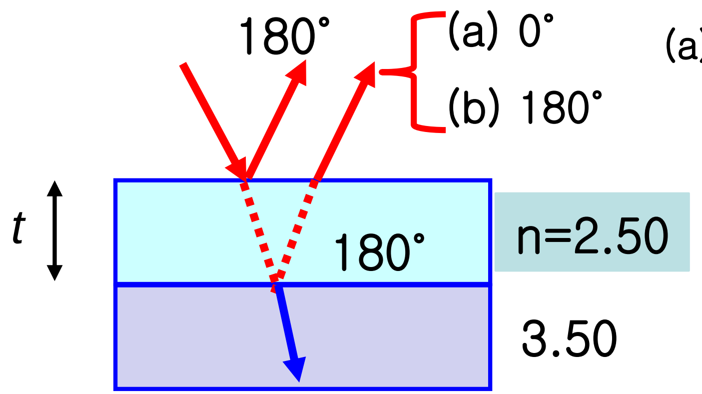
중앙 극대는 m=0 일 때 이므로 무늬 이동 : $\Delta y = y' - y = \frac{R(n-1)t}{d} = \frac{(2.00)(1.50-1)(3.00\times 10^{-3})}{4.00\times 10^{-3}} = 0.750m$

24-3 박막에서의 간섭

연습 24-8. 굴절률이 3.50 인 기판 위에 굴절률이 2.50 인 물질로 박막을 만들었다. 이 박막에 수직으로 빛을 비추었을 때, 파장이 6000 Å 일 때 소멸간섭이 일어나고 7000 Å 일 때 보강간섭이 일어났다. 이 박막의 최소 두께를 구하여라.

풀이

박막의 표면에서 반사된 광선은 박막에서 180도 위상이 바뀌고,
박막을 투과하여 박막 아랫면에서 반사한 광선도 굴절률이 더 큰 유리의 경계 면에서 반사되므로 위상이 180도 이다.



$n_{air} < n_{film} < n_{substrate}$

(a) 파장이 6000 Å 일 때 소멸간섭이 일어나므로 경로차는 파장의 반정수배가 되어야 위상이 180도에서 0 도로 바뀐다.

$$\text{경로차} = 2t = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_n = \left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{n}\right) \Rightarrow 2nt = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$\Rightarrow \therefore t = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}{2n} = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)6000\,\mathring{A}}{2\times(2.50)} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\times 1200\,\mathring{A} \quad (1)$$

(b) 파장이 7000 Å 일 때 보강간섭이 일어나므로 경로차가 파장의 정수배가 되어야 위상 180도가 변하지 않게 되어 보강간섭이 일어나게 된다.

$$\text{경로차} = 2t = m\lambda_n \Rightarrow 2nt = m\lambda \qquad \Rightarrow t = \frac{m\lambda}{2n} = \frac{m\times 7000\,\mathring{A}}{2\times(2.50)} = m\times 1400\,\mathring{A} \quad (2)$$

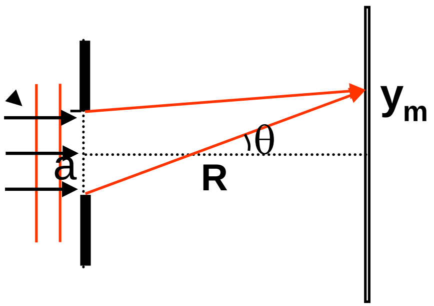
$\boxed{(2) = (1)}$

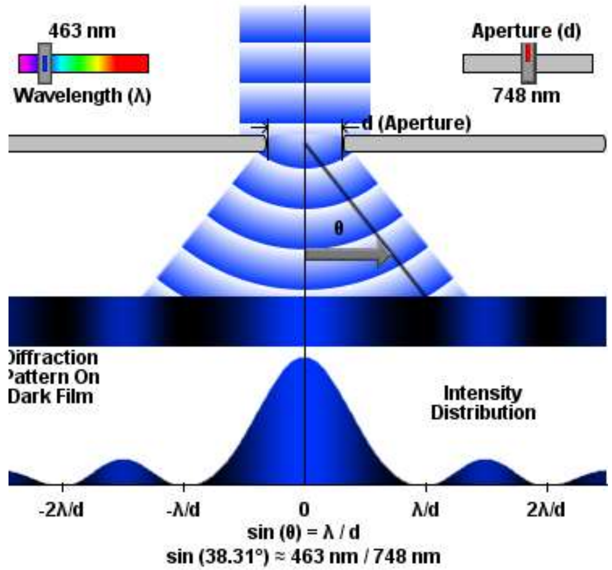
$$\Rightarrow m\times 1400 = \left(m+\frac{1}{2}\right)\times 1200 \quad \Rightarrow \quad 7m = 6\left(m+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow m = 3$$

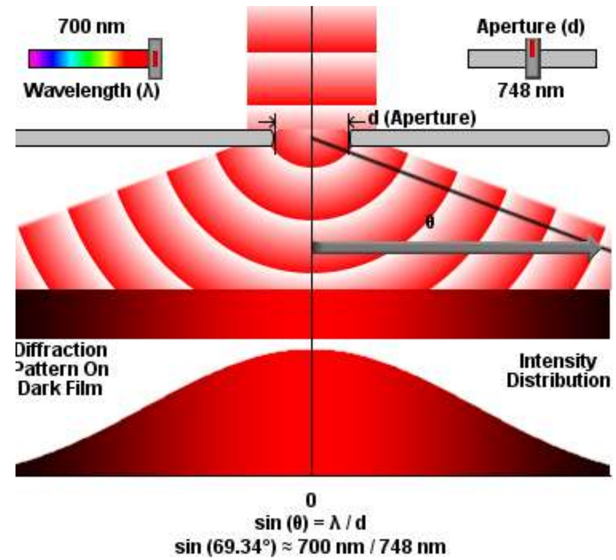
박막의 최소 두께는 (2)식에서 얻을 수 있다 : $\therefore t = m\times 1400\,\mathring{A}\Big|_{m=3} = 3\times 1400\,\mathring{A} = 4200\,\mathring{A}$

24-4 빛의 회절

연습 24-11. 라디오 파가 건물 모서리에서 가시광선에 비해 잘 회절되는 이유는 무엇인가?







풀이

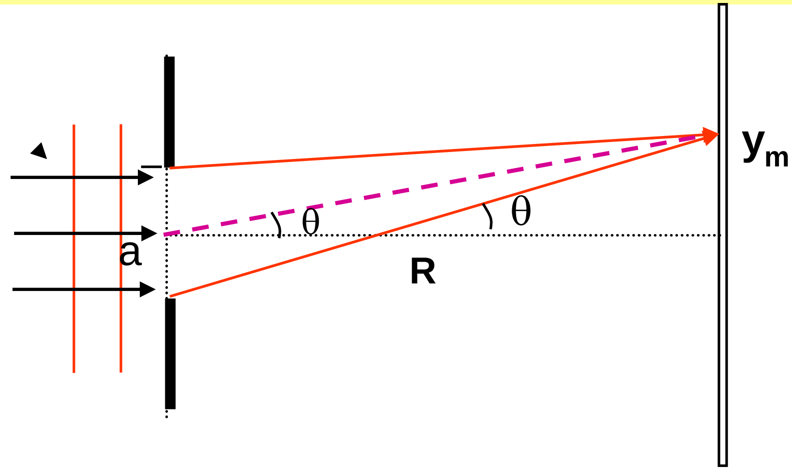
단일 슬릿 회절에서 광원과 스크린 사이의 거리**(R)**이 멀수록, 슬릿의 구멍의 폭**(a)** 가 작을수록, 그리고 빛의 **파장(λ)가 클수록 회절이 크게** 나타난다.

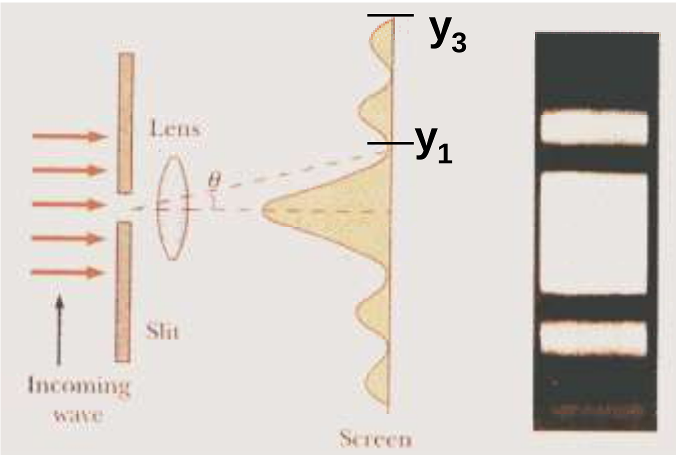
$$y_m = R\frac{m\lambda}{a}$$

건물 모서리나 장애물 앞에서 라디오 파가 가시광선 보다 회절이 잘 되는 이유도 라디오 파의 파장이 가시광선 보다 크기 때문이라고 할 수 있다.

24-4 빛의 회절

연습 24-12. 단일 슬릿에서 600nm 파장의 빛이 입사한다. 슬릿에서 1.00 m 떨어져 있는 스크린에 첫 번째와 세 번째 어두운 지점 사이의 거리가 3.00 mm 일 때 슬릿의 폭은 얼마인가?





풀이

단일간섭에서는 어두운 무늬 위치가 나타나려면 경로차가 파장의 정수배가 되어야 한다.

상쇄간섭 (극소값) 조건 $\frac{a}{2}\sin\theta = m\frac{\lambda}{2} \Rightarrow a\sin\theta = m\lambda$

스크린 상의 무늬의 위치 : $y_m = R\tan\theta_m \approx R\sin\theta_m \approx R\frac{m\lambda}{a}$

첫 번째 어두운 무늬는 **m=1** 일 때이고 세 번째 어두운 무늬는 **m=3** 일 때이다.

세 번째 어두운 무늬와 첫 번째 무늬 사이의 간격은 $y_3 - y_1 = \frac{2R\lambda}{a} = 3.00\times10^{-3}m$

이고 위의 식으로 부터 슬릿의 폭 **(a)**을 구하면 다음과 같다

$$\therefore a = \frac{2\times1.00\times\left(6.00\times10^{-7}\right)}{3.00\times10^{-3}} = 4.00\times10^{-4}m = 0.400mm$$

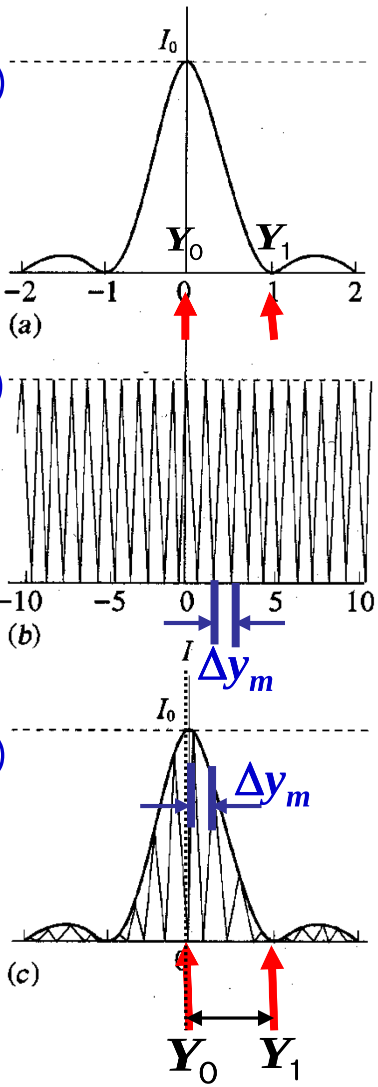
24-4 빛의 회절

연습 24-15. 파장이 480 nm 인 빛을 슬릿의 폭이 0.0200 mm 이고 슬릿 사이의 간격이 0.100mm 인 이중 슬릿을 통해 회절시켰을 때 50.0cm 떨어진 곳에 있는 스크린에 나타나는 회절 무늬의 간격을 구하고 또 회절에 의한 싸개선의 최대점에서 첫번째의 최소점 까지의 거리를 구하여라

그림(a)

그림(b)

그림(c)



풀이

그림(b) 에서 이중 슬릿의 간섭 무늬의 간격은 다음과 같다.

$$\boxed{\Delta y_m = \frac{R\lambda}{d}}$$

$$\Delta y_m = \frac{0.500m \times 4.80 \times 10^{-7}}{0.100 \times 10^{-3}} = 2.40 \times 10^{-3} m$$

슬릿의 폭에 의해 생기는 회절 무늬는 (a) 극대점(보강간섭)이 원점에서 생기고 첫번째 극소점(상쇄간섭)의 위치는 Y_1 이다.

첫 번째 극대점 : 중앙점 $Y_0 = 0$

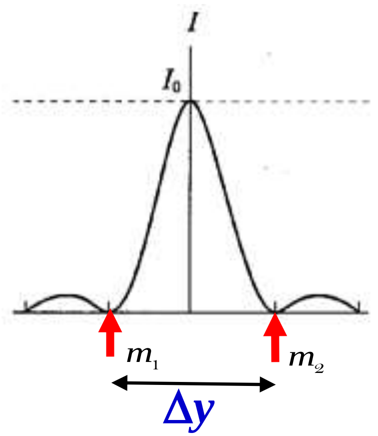
첫 번째 극소점 : $Y_1 \approx R\dfrac{\lambda}{a}$

첫 번째 극대점과 극소점 사이의 거리 :

$$Y_1 - Y_0 \approx R\frac{\lambda}{a} = \frac{0.500 \times 4.80 \times 10^{-7}}{2.00 \times 10^{-5}} = 1.20 \times 10^{-2} (m)$$

24-4 빛의 회절

연습 24-16. 폭이 a 인 단일슬릿에서부터 L 만큼 떨어진 곳에 스크린을 두었다. 단일슬릿 앞에서 파장이 λ 인 빛을 쪼였다. 여기서 a ≪ L이라고 하자. 만약에 회절 무늬에서 어두운 부분을 나타내는 두 최소점 $m=m_1$ 과 $m=m_2$ 사이의 거리를 Δy 라고 둔다면, 이 슬릿의 폭 a 는 얼마인가?



풀이

슬릿의 폭에 의해 생기는 번째 두 최소점(상쇄간섭)의 위치

$$Y_{m_1} = \frac{m_1 L\lambda}{a} \qquad Y_{m_2} = \frac{m_2 L\lambda}{a}$$

두 최소점 사이의 거리 : $\Delta Y = Y_{m_2} - Y_{m_1} = \dfrac{(m_2 - m_1)R\lambda}{a}$

a ≪ L $\quad \sin\theta \cong \tan\theta,$

상쇄간섭의 위치 $\quad a\sin\theta = m\lambda$

$$\Rightarrow a\frac{y}{L} \cong m\lambda$$

$$\Rightarrow y = \frac{m\lambda L}{a}$$

∴ 슬릿의 폭: $\quad a = \dfrac{|m_2 - m_1| R\lambda}{\Delta Y}$

24-4 빛의 회절

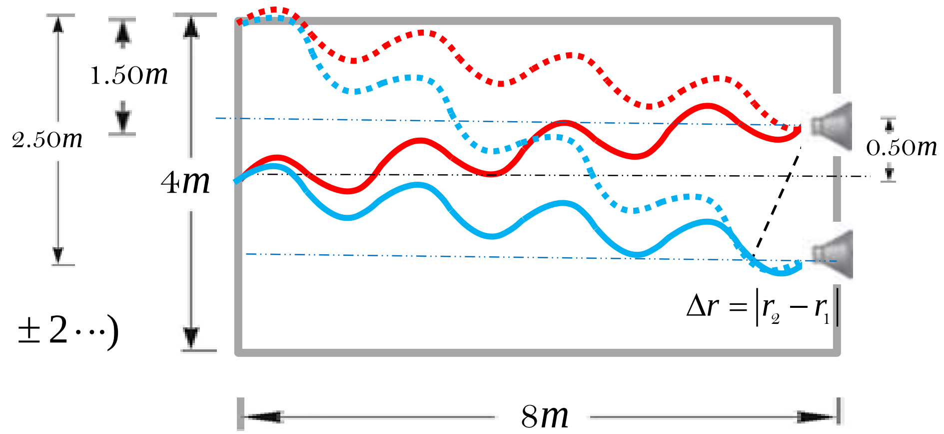
연습 24-17. 길이가 8 m, 폭이 4 m인 방이 있다. 이 방의 한쪽 벽에는 벽의 중심에서부터 각각 50 cm 떨어져 있는 스피커가 두 대 놓여 있다. 이 두 스피커에서는 주기가 서로 같고 일정한 소리가 흘러나오고 있다. 앞쪽 벽에서부터 8 m 떨어진 뒤쪽 벽 중심에서 소리의 크기가 최대로 들렸다. 뒤쪽 벽에서 중심 외에는 최대 크기의 소리가 들리는 곳이 없다고 하자. 이 경우에 뒤쪽 벽 중심에서 듣는 소리의 가능한 최대 진동수는 얼마인가? 소리의 속력은 343 m/s 라고 하자.

풀이

음원에서 두 스피커까지의 각각의 경로를 구한다:

$$r_1 = \sqrt{8^2 + 2.5^2} = 8.382\ (m)$$

$$r_2 = \sqrt{8^2 + 1.5^2} = 8.139\ (m)$$



보강(극대) 간섭 조건 :

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = 0.243 \le m\lambda \qquad (m = 0,\ \pm1,\ \pm2\cdots)$$

1차 극대의 파장:

$$\lambda \ge \Delta r = |r_2 - r_1| = 0.243\ (m)$$

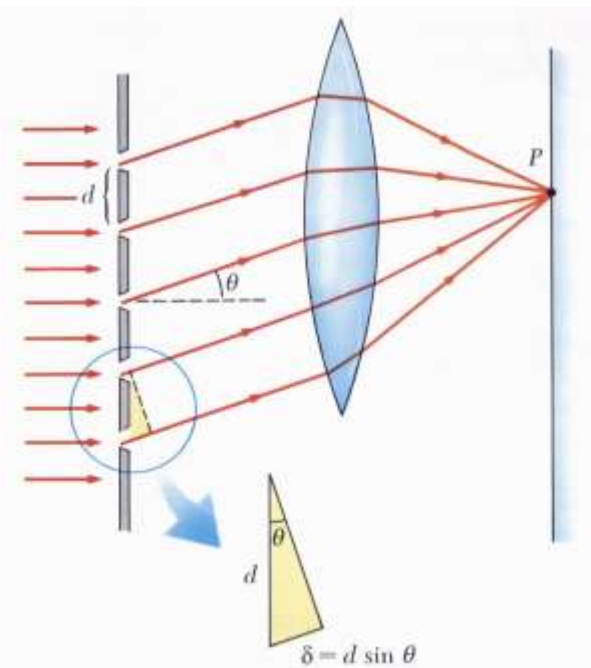
음원의 가능한 최대 진동수: $$f \cong \frac{v}{\lambda} = \frac{343m/s}{0.243} = 1410Hz$$

24-5 회절격자 분광기와 분해능*

연습 24-18. 파장이 650nm 인 레이저를 회절격자에 수직으로 입사하였다. 회절격자에는 1.00cm 당 6000 개의 선이 그어져 있다.밝은 무늬가 관찰되는 각 차수에 대한 각도를 구하여라. 몇 차의 밝은 무늬가 관찰되는가?

풀이

회절격자를 통해 입사되는 빛의 보강 간섭되는 조건을 이용해 밝은 무늬의 각도를 구한다.



1cm 당 6000 개의 선이 있으므로 격자 사이의 간격은

$$d = \frac{10^{-2}m}{6000} = \frac{1}{6}\times 10^{-5}m$$

밝은 무늬 생기는 보강간섭의 조건

$$d\sin\theta = m\lambda, (m = 0, \pm 1, \ldots)$$

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d}, (m = 0, \pm 1, \ldots)$$

각 차수에서 관찰되는 밝은 무늬의 각도는

$(m = 0$ 일 때$)$ $\sin\theta = 0$ $\therefore\ \theta = 0^\circ$

$(m = 1$ 일 때$)$ $\sin\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{6.50\times 10^{-7}}{\frac{1}{6}\times 10^{-5}} = 0.390$ $\therefore\ \theta = 23.0^\circ$

$(m = 2$ 일 때$)$ $\sin\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{2\times 6.50\times 10^{-7}}{\frac{1}{6}\times 10^{-5}} = 0.780$ $\therefore\ \theta = 51.3^\circ$

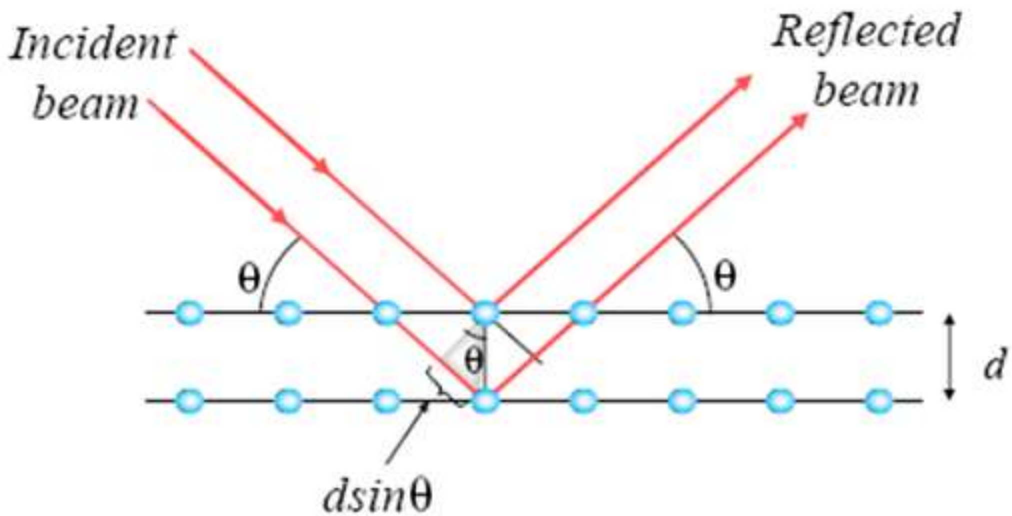
이고 $0 \le \sin\theta \le 1$ 을 만족하는 회절차수는 m =0, 1, 2 이고 최대 2 차의 밝은 무늬가 형성된다.

24-6 x-선 회절

연습 24-19. 격자 층 간격이 0.282 nm 인 결정에 의해 회절될 수 있는 x 선의 최대 파장은 얼마인가?

풀이

격자 사이의 거리 d =0.282 nm 인 결정에서 위 격자에서 반사되는 빛과 아래 격자에서 반사되는 빛의 경로차는 2dsinθ 이다. 보강간섭이 일어나는 브라그 회절 조건으로 부터 최대 파장을 구할 수 있다.



경로차: $2d\sin\theta = m\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2d}{m}\sin\theta$

따라서 최대파장은 m=1 인 경우에 sin θ =1 인 경우에 나타난다.

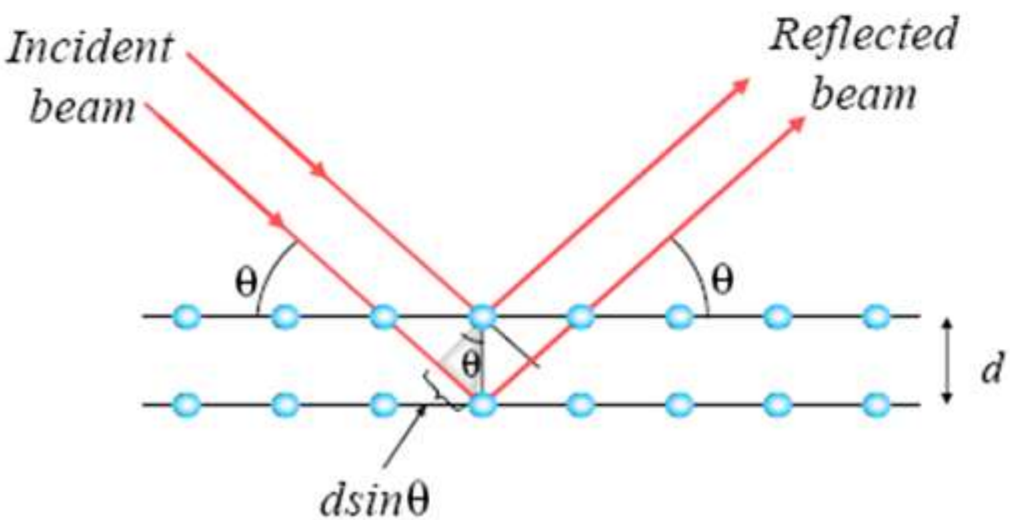
$$\lambda = \frac{2d}{m}\sin\theta \xrightarrow[m=1]{\sin\theta=1} \lambda = 2d = 0.564(nm)$$

24-6 x-선 회절

연습 24-20. 단일 파장의 X 선이 소금 결정에 입사한 X 선이 소금 결정 면 (d= 0.300 nm)의 수직방향에서 60° 돌아간 경우 첫번째의 브라그 반사가 관측되었다. X 선의 파장은 얼마인가?

풀이

결정 면 사이의 거리 d 인 소금 결정에서 위 격자에서 반사되는 빛과 아래 격자에서 반사되는 빛의 경로차는 2dsinθ 이다. 경로차가 파장의 정수배일 때 보강간섭이 일어나는 브라그 조건에서 첫 번째 브라그 반사가 관측되었으므로 경로차는 파장의 1배가 된다.



경로차: $2d\sin\theta = m\lambda$

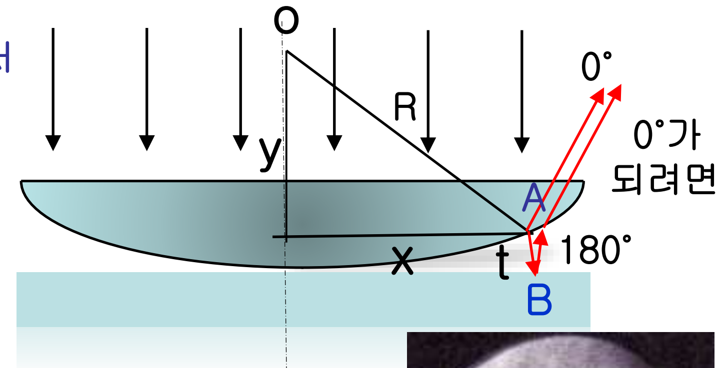
$$= 2\times(0.300nm)\times\sin 60^{\circ} = \lambda \qquad (m=1)$$

$$\therefore \lambda = 0.520nm$$

발전문제

연습 24-21. 아래 그림과 같이 뉴턴의 원 무늬 장치에 파장이 600nm 인 단색광을 수직하게 위에서 입사시켰더니 동심원의 간섭무늬가 관측되었다. 렌즈의 구면 반지름이 10.0m 일 때 중심에서 두 번째 밝은 무늬의 반지름은 얼마인가?

풀이



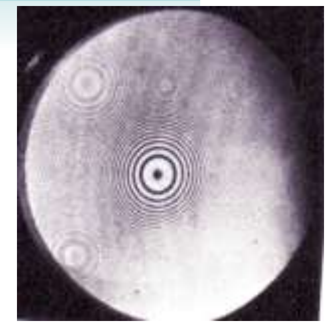
(A) 점에서 반사된 빛의 위상은 굴절률이 더 큰 매질에서 반사했으므로 위상이 변하지 않는다. 반면에 B 점에서 반사한 파는 위상이 180° 의 위상을 갖는다. 이 두 파동이 보강 간섭할 조건을 통하여 무늬반지름을 구한다.

그림에서 A 점은 원의 중심을 원점으로 하였을 때 원의 궤적상의 한 점이므로

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad t = R - y$$

이 성립한다. 따라서 이 두 식을 이용해 t 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Rightarrow t = R - \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = R - R\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cong R - R\left(1 - \frac{x^2}{2R^2}\right) = \frac{x^2}{2R} \qquad (\because R >> x)$$



위에서 본 모양

(B) 에서 반사된 파의 위상은 180° 인데 경로차가 반정수배가 될 경우에는 위상이 0° 로 나오게 되어 A 에서 반사된 파와 보강간섭이 된다.)

따라서 보강간섭 조건은 경로차가 반정수배 일 때 $2t = \frac{x^2}{R} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \Rightarrow \quad x^2 = R\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

이며 2번째 밝은 무늬이므로 m= 1 을 대입하면 무늬의 반지름 x 는

$$x^2 = \frac{3R\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{3R\lambda}{2}} = \sqrt{\frac{3\times10.0\times\left(6.00\times10^{-7}\right)}{2}} = 3.00\times10^{-3}m = 3.00mm$$

이다. 즉, 밝은 무늬의 반지름은 3.00 mm 이다.

발전문제

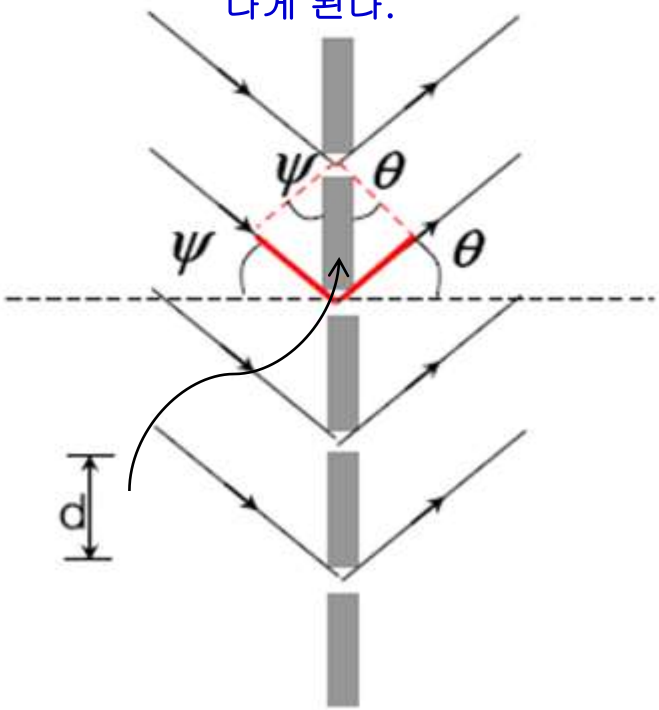
연습 24-22. 회절 격자 일반적인 조건 – 그림에서처럼 회절격자에 빛이 입사하는 경우 밝은 무늬가 나타나는 조건은 아래 식과 같이 결정됨을 증명하라.

$$d\left(\sin\Psi+\sin\theta\right)=m\lambda \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

본문에서는 Ψ = 0 인 경우만 다룬 것이다.

풀이

회절 격자(에돌이발) 사이의 거리는 d 이며 두 광선의 간섭을 만드는 것은 빨간 선 만큼의 경로차이다. 이 경로차가 파장의 정수 배이면 보강간섭인 밝은 무늬가 나타나게 된다.



$$\text{경로차} := d\sin\Psi + d\sin\theta = m\lambda$$

$$d\left(\sin\Psi+\sin\theta\right)=m\lambda \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

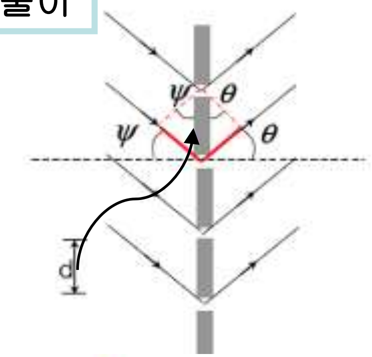
발전문제

연습 24-23. 파장이 λ, λ+Δλ, (Δλ << λ) 인 두 빛을 회절 격자에 수직으로 비쳤다. 이 때 m 차 스펙트럼에서 스펙트럼 선 사이의 분리각이

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{(d/m)^2 - \lambda^2}}$$

이을 보여라. 여기서 d 는 슬릿 사이의 간격이다.

풀이



빛을 수직으로 비추었으므로 $(\Psi = 0^\circ)$

경로차 : $d\sin\Psi + d\sin\theta = m\lambda \Rightarrow d\sin 0^\circ + d\sin\theta = m\lambda$

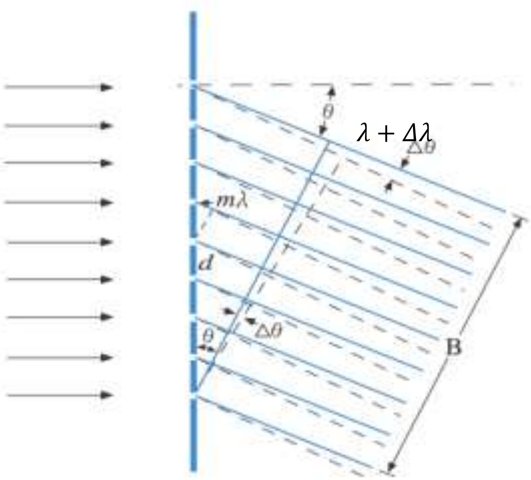
$$d\sin\theta = m\lambda \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

λ+Δλ 의 파장이 들어 올 때 보강 무늬 조건

$$d\sin(\theta + \Delta\theta) = m(\lambda + \Delta\lambda)$$

$$d\left[\sin\theta\cos\Delta\theta + \sin\Delta\theta\cos\theta\right] = m(\lambda + \Delta\lambda) \qquad \because \cos\Delta\theta \cong 1 \quad (\Delta\theta <<)$$

$$d\sin\theta + d\Delta\theta\cos\theta = m\lambda + m\Delta\lambda \qquad \because d\sin\theta = m\lambda$$



분리각 $\therefore \Delta\theta = \dfrac{m\Delta\lambda}{d\cos\theta} = \dfrac{m\Delta\lambda}{d\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \dfrac{m\Delta\lambda}{\sqrt{d^2 - (m\lambda)^2}} = \dfrac{\Delta\lambda}{\sqrt{\left(\dfrac{d}{m}\right)^2 - \lambda^2}}$