1. 질량 m인 입자가 xy평면에서 $y=5.0\ \mathrm{cm}$인 축을 따라서 일정한 속력 v로 x축의 양의 방향으로 움직인다. 원점에 대한 이 입자의 각운동량이 운동하는 동안 일정함을 보여라.

$$\vec{r}(t)=(x_0+vt)\hat{i}+(y_0)\hat{j}$$

$$\vec{p}(t)=(mv)\hat{i}$$

$$\begin{aligned}\vec{L}(t)=\vec{r}(t)\times\vec{p}(t)&=\{(x_0+vt)\hat{i}+(y_0)\hat{j}\}\times\{(mv)\hat{i}\}\\&=\begin{pmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\x_0+vt&y_0&0\\mv&0&0\end{pmatrix}\\&=-mvy_0\,\hat{k}\end{aligned}$$

($\vec{L}$이 t와 무관한 상수이다.)

2. 평면 위에서 질량 m일 물체가 반지름 r의 원을 그리며 속력 v로 등속원운동 하고 있다. 이때 물체에 작용하는 구심력에 의한 돌림힘 $\vec{r}\times\vec{F}$는 얼마인가?

$\tau=0$ < 구심력은 원의 중심방향을 향하는 힘으로 돌림힘을 발생시킬 수 없다. >

3. 길이 $1.0\ \mathrm{m}$인 질량을 무시할 만큼 가벼운 강체막대에 질량이 $4.0\ \mathrm{kg}$ 및 $2.0\ \mathrm{kg}$인 두 금속공이 막대 양 끝에 연결되어 있다. 마찰이 없는 평면 위에서 강체 막대를 중심축으로 회전운동하고 있고 이 때 금속공의 순간 속력이 $5.0\ \mathrm{m/s}$일 때 총 각운동량을 구하여라.

$$I=mr^2 \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}I=I_1+I_2&=m_1r_1^2+m_2r_2^2\\&=(4.0\ \mathrm{kg})\times(0.5\ \mathrm{m})^2+(2.0\ \mathrm{kg})\times(0.5\ \mathrm{m})^2\\&=1.0\ \mathrm{kg\cdot m^2}+0.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}\\&=1.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}\end{aligned}$$

$$v=r\omega \quad\Rightarrow\quad \omega=\frac{v}{r}=\frac{5.0\ \mathrm{m/s}}{0.5\ \mathrm{m}}=10\ \mathrm{rad/s}$$

$$L=I\omega=(1.5\ \mathrm{kg\cdot m^2})\times(10\ \mathrm{rad/s})=15\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

4. (가) 지구에 작용하는 달에 의한 중력의 크기와 태양에 의한 중력의 크기를 비교하여라. 지구와 달 사이의 질량 중심점 사이 거리는 대략 $19.2\times10^{7}\ \mathrm{m}$ 이고 지구와 태양의 질량 중심점 사이 거리는 약 $15.0\times10^{10}\ \mathrm{m}$ 이다. 달과 태양의 질량은 이 책 뒷부분의 부록을 참조하여라.

$$F_{m\to e}=G\frac{m_m m_e}{r_{me}^2},\qquad F_{s\to e}=G\frac{m_s m_e}{r_{se}^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{F_{m\to e}}{F_{s\to e}}=\frac{G\dfrac{m_m m_e}{r_{me}^2}}{G\dfrac{m_s m_e}{r_{se}^2}}=\frac{m_m}{m_s}\frac{r_{se}^2}{r_{me}^2}=\frac{7.36\times10^{22}\ \mathrm{kg}}{1.99\times10^{30}\ \mathrm{kg}}\times\frac{(15.0\times10^{10}\ \mathrm{m})^2}{(19.2\times10^{7}\ \mathrm{m})^2}\approx 0.0226$$

(나) 달에 작용하는 태양에 의한 중력과 지구에 의한 중력의 비 $F_{태양}/F_{지구}$ 를 구하여라. 달과 태양의 평균 거리는 지구와 태양의 평균 거리와 거의 같다.

$$F_{s\to m}=G\frac{m_s m_m}{r_{sm}^2},\qquad F_{e\to m}=G\frac{m_e m_m}{r_{em}^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{F_{s\to m}}{F_{e\to m}}=\frac{G\dfrac{m_s m_m}{r_{sm}^2}}{G\dfrac{m_e m_m}{r_{em}^2}}=\frac{m_s}{m_e}\frac{r_{em}^2}{r_{sm}^2}\approx\frac{1.99\times10^{30}\ \mathrm{kg}}{5.98\times10^{24}\ \mathrm{kg}}\times\frac{(19.2\times10^{7}\ \mathrm{m})^2}{(15.0\times10^{10}\ \mathrm{m})^2}\approx 0.545$$

5. 달의 질량은 $M=7.36\times10^{22}\ \mathrm{kg}$이고, 달의 반지름은 $r=1.74\times10^{6}\ \mathrm{m}$ 이다. 달의 표면에서 달의 중력가속도를 구하여라.

$$F=G\frac{Mm}{r^2}=mg$$

$$\Rightarrow\quad g=G\frac{M}{r^2}=(6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})\times\frac{7.36\times10^{22}\ \mathrm{kg}}{(1.74\times10^{6}\ \mathrm{m})^2}\approx 1.62m/s^2$$

6. 지구 표면에서부터 지구 반지름만큼의 고도를 갖는 지점에서 물체가 정지상태에 있다가 떨어진다. 지구의 질량이 M이고 반지름이 R이라면, 물체가 지구에 부딪치기 직전의 속도는 얼마인가?

$$\Delta U=-\int_{2R}^{R}Fdr=-\int_{2R}^{R}-G\frac{Mm}{r^2}dr=GMm\int_{2R}^{R}\frac{1}{r^2}dr$$

$$=GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{2R}^{R}=GMm\left(-\frac{1}{R}-\left(-\frac{1}{2R}\right)\right)=-\frac{GMm}{2R}$$

$$\Delta U=-\Delta K=-\frac{1}{2}mv^2\qquad\Rightarrow\qquad\frac{1}{2}mv^2=\frac{GMm}{2R}\qquad\Rightarrow\qquad v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

7. 질량 m인 물체가 지구 중력장을 벗어나 탈출하려면 이 입자의 역학적 에너지가 적어도 $E \geq 0$ 이어야 한다. 공기 저항을 무시할 때 이 입자가 지구를 탈출하는 데 필요한 최소 속력은 얼마인가? (도움말: 무한대의 거리에 도달했을 때 속력이 0일 조건을 생각하여라.)

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} F dr = -\int_{\infty}^{r} -G\frac{Mm}{r^2} dr = GMm\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = GMm\left(-\frac{1}{r} - (-0)\right) = -\frac{GMm}{r}$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad v \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \times (6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}) \times (6.0 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{6.38 \times 10^6\ \mathrm{m}}}$$

$$\approx 11200\ \mathrm{m/s}$$

$$= 11.2\ \mathrm{km/s}$$

< 이 결과는 물체의 질량 m과 무관하다. >

8. 발사체를 지구 탈출속력의 $1/2$배의 속력으로 지표면에서 연직 위로 발사한다. 지구의 반경이 R이라면 발사체가 도달하는 최고 높이는 얼마인가?

$$v = \frac{1}{2}v_{\text{탈출}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$\Delta K = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}\frac{2GM}{R}\right) = -\frac{1}{4}\frac{GMm}{R}$$

$$-\Delta U = \int_{R}^{R+h} F dr = \int_{R}^{R+h} -G\frac{Mm}{r^2} dr = -GMm\int_{R}^{R+h} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{R}^{R+h} = -GMm\left(-\frac{1}{R+h} - \left(-\frac{1}{R}\right)\right) = GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Delta K = -\Delta U$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{4}\frac{GMm}{R} = GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\frac{GMm}{R} = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4R} = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} - \frac{1}{4R} = \frac{3}{4R}$$

$$\Rightarrow \quad R + h = \frac{4R}{3}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{4R}{3} - R = \frac{4R}{3} - \frac{3R}{3} = \frac{R}{3}$$

9. 질량 m인 인공위성이 지구 표면으로부터 $h = 1000\ \mathrm{km}$ 높이에서 일정한 속력 v로 지구를 중심으로 원궤도로 운동하고 있다. 지구의 반지름은 $6.37 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$이고 지구의 질량은 $5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$이다. 인공위성의 속력 v를 구하여라.

$$F_g = G\frac{M_e m}{r^2} = G\frac{M_e m}{(R_e + h)^2} = m\frac{v^2}{(R_e + h)} = m\frac{v^2}{r} = F_c$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{G\frac{M_e}{(R_e + h)}}$$

$$= \sqrt{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})\frac{(5.96 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{(6.37 \times 10^{6}\ \mathrm{m}) + (1 \times 10^{6}\ \mathrm{m})}}$$

$$= 7.34 \times 10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

10. 달이 지구를 중심으로 원운동 한다고 가정하자. 케플러의 주기법칙은 "행성운동 주기의 제곱은 원궤도 반지름의 세제곱에 비례한다."이다. 이것을 식으로 쓰면 $T^2 = 4\pi^2 r^3 / GM_e$이다. 여기서 M_e는 지구의 질량이고, r은 지구 중심과 달 중심 사이의 거리이다. 달에 작용하는 구심력이 거리의 제곱에 역비례하는 힘임을 증명하라. (도움말: 힘의 표현과 $v = 2\pi r / T$ 를 사용하라.)

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \qquad F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r} = m\frac{(2\pi r/T)^2}{r} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = m\frac{4\pi^2 r}{4\pi^2 r^3 / GM} = G\frac{Mm}{r^2}$$

11. 태양계의 한 행성 주위를 공전하고 있는 위성의 공전주기는 5시간이며 평균 공전궤도 반지름은 $8200\ \mathrm{km}$이다. 행성의 질량을 구하여라.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_s} \qquad \Rightarrow \qquad M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 (8.2 \times 10^{6}\ \mathrm{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5 \times 60 \times 60\ \mathrm{s})^2}$$

$$= 1.01 \times 10^{23}\ \mathrm{kg}$$

12. 질량 m인 물체가 지면에 대해서 각 θ이고 초속력 v_0로 발사되었다.

$$x(t) = v_0\cos\theta \ t \qquad\qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta \ t$$

$$\vec{r}(t) = (v_0\cos\theta \ t)\hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta \ t\right)\hat{j}$$

$$v_x(t) = v_0\cos\theta \qquad\qquad v_y(t) = -gt + v_0\sin\theta$$

$$\vec{v}(t) = (v_0\cos\theta)\hat{i} + (-gt + v_0\sin\theta)\hat{j}$$

(가) 입자의 처음 위치에 대해서 각운동량을 시간의 함수로 구하여라.

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$$

$$= \left\{(v_0\cos\theta \ t)\hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta \ t\right)\hat{j}\right\} \times \left\{mv_0\cos\theta)\hat{i} + m(-gt + v_0\sin\theta)\hat{j}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}mv_0g\cos\theta \ t^2 \ \hat{k}$$

(나) 시간 변화에 대한 각운동량의 변화를 구하여라.

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(-\frac{1}{2}mv_0g\cos\theta \ t^2\right)\hat{k}\right] = -mv_0g\cos\theta \ t \ \hat{k}$$

(다) 중력에 의한 돌림힘을 계산하여라.

$$\vec{F}_g = (-mg)\hat{j}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_g = \left\{(v_0\cos\theta \ t)\hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta \ t\right)\hat{j}\right\} \times (-mg)\hat{j} = -mv_0g\cos\theta \ t \ \hat{k}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}(t)}{dt} = -mv_0g\cos\theta \ t \ \hat{k} \qquad \cdots\cdots \text{ (나) 의 답과 같다}$$

13. 초기에 질량이 m_1인 물체와 질량이 m_2인 물체가 마주 보고 우주 공간에 정지해 있다. 두 물체의 질량 중심점 사이의 거리는 R이다.

(가) 각각의 물체가 중력에 의해 받게 되는 가속력의 비를 질량의 비로 나타내어라.

$$F_{1\to 2} = m_2 a_2 = -G\frac{m_1 m_2}{R} = m_1 a_1 = F_{2\to 1} \qquad < \text{작용} - \text{반작용} >$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2} \qquad \left\langle a \sim \frac{1}{m} \right\rangle$$

(나) 두 물체의 거리가 $R/2$이 되었을 때 중력위치에너지는 처음의 몇 배가 되는가?

$$U_g = -G\frac{m_1 m_2}{R}, \qquad U_g{}' = -G\frac{m_1 m_2}{R/2} = -2G\frac{m_1 m_2}{R} = 2U_g \qquad \text{2배}$$

(다) 이때 두 물체의 운동에너지의 합은 얼마인가?

$$E = K + U_g = 0 + \left(-G\frac{m_1 m_2}{R}\right) = -G\frac{m_1 m_2}{R}$$

$$E = E' = K' + U_g{}' \quad \Rightarrow \quad K' = E - U_g{}' = -G\frac{m_1 m_2}{R} - \left(-2G\frac{m_1 m_2}{R}\right) = G\frac{m_1 m_2}{R}$$