대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (2장) - by 송현석

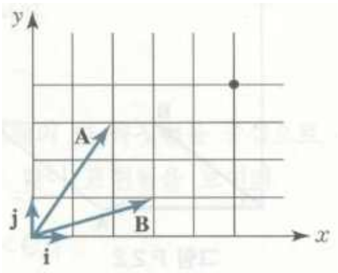
1. 주위 환경에서 (가) 이동경로보다 변위가 중요한 경우 (나) 변위보다 이동경로가 중요한 경우를 한 가지씩 제시해보아라.

2. 어떤 물고기가 인천 월미도에서 영종도를 직선경로로 왕복하였다. 이때 이 물고기의 변위(벡터)와 이동거리(스칼라)를 구하여라. 월미도와 영종도 간 직선거리는 $2.00\ \mathrm{km}$이다.

변위 : $2.00\ \mathrm{km} - 2.00\ \mathrm{km} = 0.00\ \mathrm{km}$

이동거리 : $2.00\ \mathrm{km} + 2.00\ \mathrm{km} = 4.00\ \mathrm{km}$

3. 그림 P.2.1의 두 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$를 단위벡터 $\hat{i}$, $\hat{j}$를 이용하여 나타내고, 두 벡터의 합 $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{B}+\vec{A}$를 구하여라. 벡터 합의 교환법칙이 성립함을 삼각형법을 이용하여 보여라.



$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{B} = 3\hat{i} + 1\hat{j}$

$\vec{A}+\vec{B} = (2\hat{i}+3\hat{j}) + (3\hat{i}+1\hat{j}) = (2+3)\hat{i} + (3+1)\hat{j} = 5\hat{i}+4\hat{j}$ 벡터

$\vec{B}+\vec{A} = (3\hat{i}+1\hat{j}) + (2\hat{i}+3\hat{j}) = (3+2)\hat{i} + (1+3)\hat{j} = 5\hat{i}+4\hat{j}$ 벡터

4. $\vec{A} = (2,\ 1,\ -1)$, $\vec{B} = (-1,\ 2,\ 1)$일 때 다음을 계산하여라.

(가) $|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

(나) $|\vec{A}| + |\vec{B}| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} + \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} + \sqrt{1+4+1}$

$= \sqrt{6} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

(다) $|\vec{A}+\vec{B}| = |(2,\ 1,\ -1) + (-1,\ 2,\ 1)| = |(2-1) + (1+2) + (-1+1)| = |(1,\ 3,\ 0)|$

$= \sqrt{1^2+3^2+0^2} = \sqrt{1+9+0} = \sqrt{10}$

(라) (나)와 (다)의 결과가 다름을 설명하여라.

(나)는 두 스칼라량의 합이고, (다)는 두 벡터의 합의 크기이다.

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (2장) - by 송현석

5. 세 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$가 다음과 같이 주어질 때 $\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}-\vec{D}=0$이 되는 벡터 $\vec{D}$를 구하여라.

$\vec{A}=-1.2\hat{i}+4.3\hat{j}-2.7\hat{k}$, $\vec{B}=2.6\hat{i}-2.9\hat{j}+1.7\hat{k}$, $\vec{C}=3.1\hat{i}-5.7\hat{j}-1.9\hat{k}$

$$\begin{aligned}
&\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}-\vec{D}=0\\
\Rightarrow\quad &\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}\\
&=(-1.2\hat{i}+4.3\hat{j}-2.7\hat{k})-(2.6\hat{i}-2.9\hat{j}+1.7\hat{k})+(3.1\hat{i}-5.7\hat{j}-1.9\hat{k})\\
&=(-1.2-2.6+3.1)\hat{i}+(4.3+2.9-5.7)\hat{j}+(-2.7-1.7-1.9)\hat{k}\\
&=-0.7\,\hat{i}+1.5\,\hat{j}-6.3\,\hat{k}
\end{aligned}$$

6. 벡터 $\vec{A}$의 크기는 8.50이고, 방향은 xy평면에서 x축 양의 방향으로부터 시계방향으로 280° 만큼 돌아가 있다. 벡터 $\vec{A}$의 x성분과 y성분을 구하여라.

x성분 : $-A\cos 100^\circ \approx -1.48$

y성분 : $-A\sin 100^\circ \approx -8.37$

7. 벡터 $\vec{A}$의 x성분은 $+30.00$이고 y성분은 -45.00이다. 벡터 $\vec{A}$의 (가) 크기와 (나) x축 양의 방향과 이루는 각도를 구하여라.

크기 : $\sqrt{(30.00)^2+(45.00)^2}\approx 54.08$

각도 : $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{45.00}{30.00}\right)\approx 56.31^\circ$

8. $\vec{A}=(a_1,\,a_2,\,a_3)$, $\vec{B}=(b_1,\,b_2,\,b_3)$일 때, $\vec{A}\cdot\vec{B}$와 $\vec{A}\times\vec{B}$를 구하고, 각 결과가 스칼라인지 벡터인지 구분하여라.

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B}&=(a_1,\,a_2,\,a_3)\cdot(b_1,\,b_2,\,b_3)\quad=(a_1,\,a_2,\,a_3)\cdot(b_1,\,b_2,\,b_3)\\
&=(a_1\times b_1)+(a_2\times b_2)+(a_3\times b_3)\\
&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\qquad \text{스칼라}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B}&=(a_1,\,a_2,\,a_3)\times(b_1,\,b_2,\,b_3)\quad=(a_1,\,a_2,\,a_3)\times(b_1,\,b_2,\,b_3)\\
&=(a_2\times b_3-a_3\times b_2)\hat{i}+(a_3\times b_1-a_1\times b_3)\hat{j}+(a_1\times b_2-a_2\times b_1)\hat{k}\\
&=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}\qquad \text{벡터}
\end{aligned}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (2장) - by 송현석

9. $\vec{A}=(1,-1,2)$, $\vec{B}=(-1,1,3)$**일 때에 다음을 계산하여라.**

(가) $\vec{A}+\vec{B}=(1,-1,2)+(-1,1,3)=(0,0,5)$ 벡터

(나) $\vec{A}-2\vec{B}=(1,-1,2)-2(-1,1,3)=(1,-1,2)-(-2,2,6)=(3,-3,-4)$ 벡터

(다) $\vec{A}\cdot\vec{B}=(1,-1,2)\cdot(-1,1,3)=\{1\times(-1)\}+\{(-1)\times 1\}+\{2\times 3\}$
$=(-1)+(-1)+6=4$ 스칼라

(라) $\vec{A}\times\vec{B}=\{(-1)\times 3-2\times 1\}\vec{i}+\{2\times(-1)-1\times 3\}\vec{j}+\{1\times 1-(-1)\times(-1)\}\vec{k}$
$=-5\vec{i}-5\vec{j}=(-5,-5,0)$ 벡터

10. 두 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$**가 다음과 같이 주어졌을 때 두 벡터** $\vec{A}$, $\vec{B}$**가 이루는 각도를 구하여라.**

$$\vec{A}=3.5\hat{i}-2.5\hat{j}+2.0\hat{k},\quad \vec{B}=-2.0\hat{i}-4.0\hat{j}+0.5\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B}&=(3.5\hat{i}-2.5\hat{j}+2.0\hat{k})\cdot(-2.0\hat{i}-4.0\hat{j}+0.5\hat{k})\\&=\{(3.5)\times(-2.0)\}+\{(-2.5)\times(-4.0)\}+\{(2.0)\times(0.5)\}\\&=-7.0+10+1.0\\&=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A=|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}&=\sqrt{(3.5\hat{i}-2.5\hat{j}+2.0\hat{k})\cdot(3.5\hat{i}-2.5\hat{j}+2.0\hat{k})}\\&=\sqrt{(3.5)^2+(-2.5)^2+(2.0)^2}\\&=\sqrt{22.5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B=|\vec{B}|=\sqrt{\vec{B}\cdot\vec{B}}&=\sqrt{(-2.0\hat{i}-4.0\hat{j}+0.5\hat{k})\cdot(-2.0\hat{i}-4.0\hat{j}+0.5\hat{k})}\\&=\sqrt{(-2.0)^2+(-4.0)^2+(0.5)^2}\\&=\sqrt{20.25}\end{aligned}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta=\sqrt{22.5\times 20.25}\cos\theta\approx 21.3\cos\theta\approx 4$$

$$\Rightarrow\qquad \theta\approx\cos^{-1}\left(\frac{4}{21.3}\right)\approx 79.2^\circ$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (2장) - by 송현석

11. 식 $(2.31a)$와 $(2.31b)$를 이용하여 식 (2.32)를 유도하라.

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0 \quad \cdots\cdots \quad (2.31a)$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \quad \cdots\cdots \quad (2.31b)$$

3×3 행렬을 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

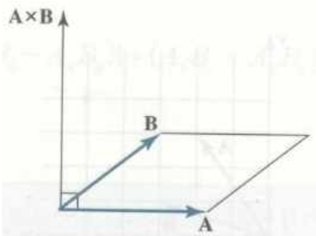
$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k} \quad \cdots\cdots \quad (2.32)$$

12. 크기가 0이 아닌 세 벡터가 다음의 관계식을 가질 때, 이들의 기하학적 배치를 구하라.
$\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}$

$$\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{C}-\vec{B}\cdot\vec{C}=0 \qquad \text{분배법칙}$$
$$\Rightarrow \quad (\vec{A}-\vec{B})\cdot\vec{C}=0$$

$\vec{A}=\vec{B}$ or $\vec{A}-\vec{B}$ 와 $\vec{C}$ 의 사잇각이 90° < 수직 >

13. 그림 P.2.2는 $\vec{A}\times\vec{B}$를 표현한 것이다. $\vec{A}\times\vec{B}$의 크기, 즉 $|\vec{A}\times\vec{B}|$가 두 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$가 이루는 평행사변형의 넓이가 됨을 보여라.



$|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\sin\theta$ (평행사변형의 넓이) 여기서 θ 는 $\vec{A}$ 와 $\vec{B}$ 의 사잇각

14. 두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$가 이루는 사잇각이 θ일 때, 합벡터 $\vec{S}(=\vec{A}+\vec{B})$의 크기가 다음과 같이 주어짐을 보여라. $S=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$

$$S=|\vec{S}|=\sqrt{\vec{S}\cdot\vec{S}}=\sqrt{(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})}$$
$$=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}}$$
$$=\sqrt{A^2+AB\cos\theta+BA\cos\theta+B^2} \qquad \text{교환법칙}$$
$$=\sqrt{A^2+2AB\cos\theta+B^2}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (2장) - by 송현석

15. 임의의 두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$에 대해서 다음을 보여라.

(가) $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

$\vec{A} \times \vec{B}$ 의 방향은 $\vec{A}$ 에도 수직이고 $\vec{B}$ 에도 수직이다.
수직인 벡터 사이의 스칼라곱은 0이다.

(나) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{A}$

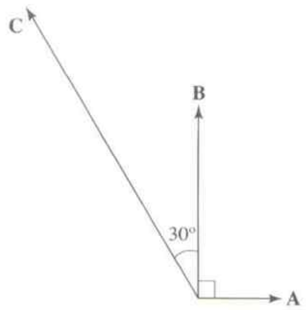
일반적으로 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ 이다.
그러나 $\vec{C}$ 를 $\vec{A}$ 로 대치할 경우에는 다음이 성립한다.
$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{A}$

16. 평면상에 있는 다섯 벡터의 합이 0일 때, 이들 벡터들의 사잇각을 모두 합치면 몇 도인가?

$(\pi - \theta_1) + (\pi - \theta_2) + (\pi - \theta_3) + (\pi - \theta_4) + (\pi - \theta_5) = 3\pi$ 5각형의 내각의 합

$\Rightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 5\pi - 3\pi = 2\pi$

17. 그림 P.2.3과 같이 크기가 각각 $1,\ 2,\ 4$인 세 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$가 같은 평면상에 놓여 있다. 벡터 $\vec{A}$와 벡터 $\vec{B}$는 서로 수직이고, 벡터 $\vec{B}$와 벡터 $\vec{C}$의 사잇각이 30° 일 때, 벡터 $\vec{C}$는 벡터 $\vec{A}$와 벡터 $\vec{B}$를 사용하여, $\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}$ 로 나타낼 수 있다. 두 상수 α와 β를 구하여라.



$4\sin 30^\circ = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha \times 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2$

$4\cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \beta \times 2 = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{3}$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (2장) - by 송현석

18. 두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$가 주어졌을 때, $\vec{C}=\vec{B}-\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A}$ 는 벡터 $\vec{A}$에 수직임을 보여라.

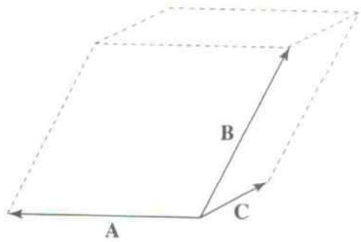
$$\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\left(\vec{B}-\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A} \qquad \text{교환법칙}$$

$$=\vec{A}\cdot\vec{B}-\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C}=0 \quad \Rightarrow \quad AC\cos\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \theta=90^\circ$$

19. 그림 P.2.4와 같이 평행육면체의 한 꼭지점을 중심으로 세 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$를 잡을 때, 평행육면체의 부피 V는 다음과 같이 표현됨을 보여라.

$$V=|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$$



$|\vec{A}\times\vec{C}|=AC\sin\theta$ (밑면의 면적) 여기서 θ 는 $\vec{A}$ 와 $\vec{C}$ 의 사잇각

$B\cos\phi$ (육면체의 높이) 여기서 ϕ 는 $\vec{B}$ 와 $\vec{A}\times\vec{C}$ 의 사잇각

$V=|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|=|\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})|=BAC\sin\theta\cos\phi$ (육면체의 부피)

20. 크기가 같은 두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$를 합한 벡터 $\vec{C}$의 크기가 벡터 $\vec{A}$ 또는 $\vec{B}$의 크기와 같을 때, 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$가 이루는 사잇각은 몇 도인가?

$\vec{A}$ 의 크기를 a 라 하고, $\vec{B}$ 의 크기를 b 라 하고, $\vec{C}$ 의 크기를 c 라 하자.

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})=a^2(=b^2=c^2) \qquad (a=b=c)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{A}+2\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{B}=a^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2+2ab\cos\theta+b^2=a^2$$

$$\Rightarrow \quad 2ab\cos\theta+b^2=0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta=-\frac{b^2}{2ab}=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta=120^\circ$$