대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (5장) - by 송현석

1. 인수와 하영 두 사람이 힘을 가해, 물체를 운동시키고 있다.
   다음 각각의 경우 한 일을 구하여라. (단, 마찰력은 무시한다.)
   (1) 인수는 오른쪽으로 $50.0\,N$, 하영은 왼쪽으로 $30.0\,N$의 힘을 가했을 때,
   물체가 오른쪽으로 $3\,m$ 진행한 경우

$$
\begin{aligned}
W = \vec{F}\cdot\vec{x} = Fx\cos\theta &= (50.0\,N - 30.0\,N)\times 3\,m \times \cos 0^\circ \\
&= 20.0\,N \times 3\,m \times 1 \\
&= 60.0\,N\cdot m \\
&= 60.0\,J
\end{aligned}
$$

   (2) 인수는 오른쪽으로 $50.0\,N$, 하영은 수직 위로 $30.0\,N$의 힘을 가했을 때,
   물체가 오른쪽으로 $3\,m$ 진행한 경우

$$
\begin{aligned}
W = \vec{F}\cdot\vec{x} = Fx\cos\theta &= 50.0\,N \times 3\,m \times \cos 0^\circ \\
&= 50.0\,N \times 3\,m \times 1 \\
&= 150.0\,N\cdot m \\
&= 150.0\,J
\end{aligned}
$$

   (3) 위 두 경우 모두 일이 끝난 후에 물체는 어떤 운동 상태인지 설명하여라.

   각각의 경우에 해당하는 에너지를 갖고 오른쪽으로 운동 중

2. 높은 빌딩에서 질량 m의 고무풍선을 자유낙하 시켰더니, 공기 저항력으로 인해 일정한 속도 v로 떨어졌다.
   (1) 중력과 공기 저항력의 크기와 방향을 구하여라.

   일정한 속력으로 떨어지므로 가속도는 0이고 알짜 힘도 0이다.
   따라서, 두 힘은 크기는 같고 방향은 서로 반대 방향이다.

$$\vec{F}_g = -mg \quad <\text{아랫방향}>$$
$$\vec{F}_d = +mg \quad <\text{윗방향}>$$

   (2) 중력이 한 일률과 공기 저항력이 한 일률을 구하고 비교하여라.

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad P_g = \vec{F}_g\cdot\vec{v} = F_g v\cos 0^\circ = mgv \quad <\text{중력은 일을 한다.}>$$

$$\Rightarrow \quad P_d = \vec{F}_d\cdot\vec{v} = F_d v\cos 180^\circ = -mgv \quad <\text{저항력은 일을 당한다.}>$$

대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (5장) - by 송현석

3. 긴 줄에 매달린 질량이 $100\,kg$인 물체가 등가속도 $a=g/2$로 올라가고 있다.
초기 지면에서의 속력을 $0.00\,m/s$라 하자. (단, 중력가속도는 $g=10.0\,m/s^2$이다.)
(1) 지면에서 출발하여 $h=10.0\,m$ 지점까지 물체가 이동하는 동안 장력에 의한 평균 일률은 얼마인가?

$$F = T - mg = ma = m\left(\frac{1}{2}g\right)$$

$$\Rightarrow \qquad T = \frac{3}{2}mg = \frac{3}{2}\times 100kg \times 10.0\,m/s^2 = 1500\,kg\cdot m/s^2 = 1500\,N$$

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\vec{x} = \vec{T}\cdot\vec{h} = Th\cos 0^\circ = 1500\,N\times 10.0\,m\times 1 = 15000\,N\cdot m = 15000\,J$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$h = 0+0+\frac{1}{2}\frac{g}{2}t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = t = \sqrt{\frac{4h}{g}} = \sqrt{\frac{4\times 10.0\,m}{10.0\,m/s^2}} = 2.00\,s$$

$$<P> = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{15000\,J}{2.00\,s} = 7500\,J/s = 7500\,W$$

(2) $h=10.0\,m$ 지점을 통과할 때 장력에 의한 순간 일률은 얼마인가?

$$v = v_0 + at \qquad \left(v_0 = 0, \quad a = \frac{g}{2} \right)$$

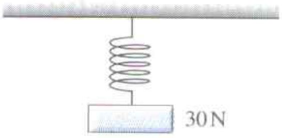
$$v = at = \frac{g}{2}t = \frac{10.0\,m/s^2}{2}\times 2.00\,s = 10.0\,m/s$$

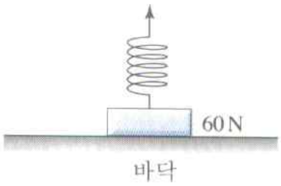
$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = \vec{T}\cdot\vec{v} = Tv\cos 0^\circ = 1500\,N\times 10.0\,m/s = 15000\,N\cdot m/s = 15000\,W$$

4. 어떤 순간에 한 입자의 속도가 $\vec{v} = -(4.00\,m/s)\hat{i} + (3.00\,m/s)\hat{k}$ 이고
이 입자에 힘 $\vec{F} = (2.00\,N)\hat{i} - (5.00\,N)\hat{j} + (3.00\,N)\hat{k}$ 가 작용하고 있다.
이 힘이 입자에 한 순간 일률은 얼마인가?

$$\begin{aligned}
P &= \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \\
&= \{(2.00\,N)\hat{i} - (5.00\,N)\hat{j} + (3.00\,N)\hat{k}\}\cdot\{-(4.00\,m/s)\hat{i} + (0.00\,m/s)\hat{j} + (3.00\,m/s)\hat{k}\} \\
&= \{(2.00\times(-4.00))N\cdot m/s + ((-5.00)\times 0.00)N\cdot m/s + (3.00\times 3.00)N\cdot m/s\} \\
&= -8.00\,N\cdot m/s + 0.00\,N\cdot m/s + 9.00\,N\cdot m/s \\
&= 1.00\,N\cdot m/s \\
&= 1.00\,W
\end{aligned}$$

5. 어떤 용수철에 무게가 $30.0\,N$ 인 물체를 매달았더니 용수철의 길이가 $10.0\,cm$ 늘어났다. 이 용수철을 바닥에 놓여 있는 무게가 $60.0\,N$ 인 물체 위에 연결하고 위로 잡아당겨 용수철의 길이가 $10.0\,cm$ 가 되었을 때 바닥이 물체에 작용하는 수직항력은 얼마인가?





$$W_1 = 30.0\,N \qquad x_1 = 0.1\,m$$
$$W_2 = 60.0\,N$$

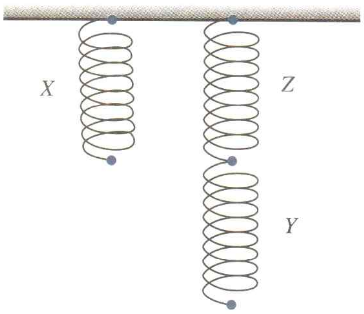
$$F_1 = kx_1 \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{F_1}{x_1} = \frac{W_1}{x_1} = \frac{30.0\,N}{0.1\,m} = 300\,kg/s^2$$
$$F_2 = kx_2 = 300\,kg/s^2 \times 0.1\,m = 30.0\,N$$

$$N + F_2 - W_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = W_2 - F_2 = 60.0\,N - 30.0\,N = 30.0\,N$$

6. 용수철 상수 k인 용수철을 같은 길이가 되도록 두 개로 잘랐다. 잘라진 반 쪽 용수철의 용수철 상수는 얼마인가?

$$F = kx \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{F}{x} \qquad\qquad k' = \frac{F}{x/2} = 2\frac{F}{x} = 2k$$

7. 동일한 스프링 X, Y, Z가 그림과 같이 매달려 있다. $3.00\,kg$의 물체를 스프링 X에 매달면 물체는 $4.00\,cm$만큼 내려온다. 스프링 Y에 $6.00\,kg$의 물체를 매달면 물체가 내려오는 길이는 얼마가 되겠는가?



$$\left(F' = 2F, \qquad k' = \frac{k}{2}\right)$$

$$F = kx \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{F}{k}$$
$$F' = k'x' \qquad \Rightarrow \qquad x' = \frac{F'}{k'} = \frac{2F}{k/2} = 4\frac{F}{k} = 4x = 4 \times 4.00\,cm = 16.0\,cm$$

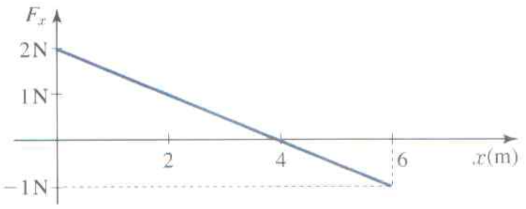
8. 기계식으로 된 컴퓨터 자판을 입력하고 있다. 각 자판 키 내부에는 용수철상수 k의 스프링이 설치되어 있고, 자판 키는 길이 L만큼 눌러지게 설계되어 있다.
(단, 자판 키의 질량은 무시하며, 용수철은 평형상태로 설치되어 있다고 하자.)
(1) 손가락으로 자판 키 하나를 눌렀을 때, 한 일은 얼마인가?

$$W = -W_s = \Delta U = \frac{1}{2}kL^2\,[J]$$

(2) 10.0초 동안 키를 300번 눌렀다. 이때 평균일률을 구하여라.

$$<P> = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}kL^2 \times 300}{10.0\,s} = 15.0\,kL^2\ \ [W]$$

9. 다음 그래프는 일직선상을 운동하는 질량이 $1.00\,kg$인 물체에 가해진 힘 F_x를 물체의 위치 x의 함수로 나타낸 것이다.



(1) 물체가 $x=0$에서 $x=6.00\,m$까지 움직였을 때, 힘 F_x가 한 일은?

$$F_x(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$
$$W = \int F_x(x)dx = \int (-\frac{1}{2}x + 2)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{4}x^2 + 2x\right]_0^{6.00}$$
$$= (-9.00 + 12.00) - 0$$
$$= 3.00\,N \cdot m$$
$$= 3.00\,J$$

(2) $x=0$에서 물체가 정지해 있었다면, $x=6.00\,m$에서 물체의 속도 v_x는?

$$W = K = \frac{1}{2}mv^2 = 3.00J$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2 \times 3.00\,J}{m}} = \sqrt{\frac{6.00\,J}{1.00\,kg}} = \sqrt{\frac{6.00\,kg \cdot m^2/s^2}{1.00\,kg}} = \sqrt{6}\ m/s$$

10. $3.00\,kg$의 물체에 어떤 힘을 가했더니 시간에 따른 위치의 변화가 $x = 3t - 4t^2 + t^3$ 으로 주어졌다. 여기서 x의 단위는 m이고, t의 단위는 s이다. 처음 4.00초 동안에(즉, $t = 0s$ 에서 $t = 4s$까지) 그 힘이 한 일을 구하여라.

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 3 - 8t + 3t^2$$

$t = 0s$ 일 때, $v_{x0} = v_x(t = 0s) = 3m/s$

$t = 4s$ 일 때, $v_x = v_x(t = 4s) = 3 - 8 \times 4 + 3 \times (4)^2 = 19m/s$

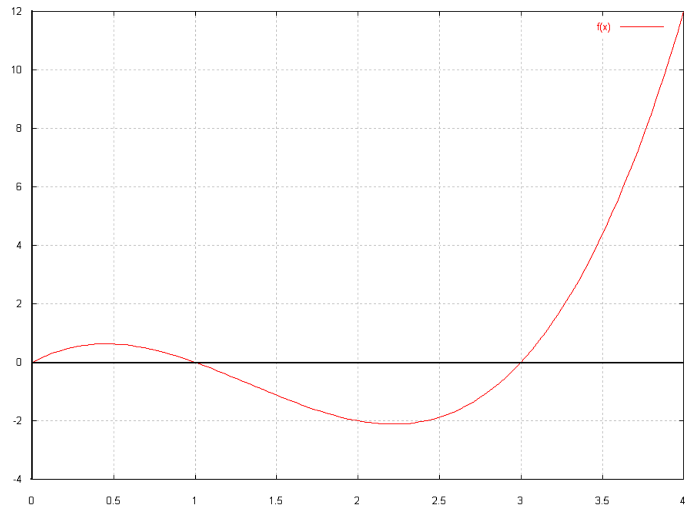
$$\begin{aligned} W = \Delta K = K - K_0 &= \frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{1}{2}mv_{x0}^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 3.00kg \times (19m/s)^2 - \frac{1}{2} \times 3.00kg \times (3m/s)^2 \\ &= 541.5J - 13.5J = 528J \end{aligned}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -8 + 6t \qquad\qquad \frac{dx}{dt} = 3 - 8t + 3t^2$$

$$\begin{aligned} W = \int_0^4 F_x dx = \int_0^4 m a_x dx = m\int_0^4 (-8 + 6t)dx &= m\int_0^4 (-8 + 6t)(3 - 8t + 3t^2)dt \\ &= m\int_0^4 (-24 + 82t - 72t^2 + 18t^3)dt \\ &= (3.00kg) \times \left[-24t + 41t^2 - 24t^3 + \frac{9}{2}t^4\right]_0^4 \\ &= (3.00kg) \times (-96 + 656 - 1536 + 1152) \\ &= (3.00kg) \times 176m^2/s^2 \\ &= 528\,kg \cdot m^2/s^2 \\ &= 528J \end{aligned}$$

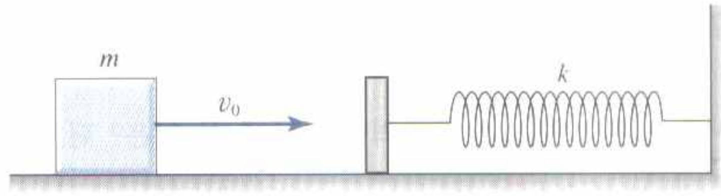
$$\overline{F_x} = m\overline{a_x} = m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = 3kg\frac{19m/s - 3m/s}{4s} = 3kg \times 4m/s^2 = 12N$$

$$W = \overline{F_x} \cdot d = \overline{F_x} d\cos 0^\circ = \overline{F_x} d = 12N \times d = 528J \quad \Rightarrow \quad d = \frac{528J}{12N} = 44m$$



대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (5장) - by 송현석

11. 질량이 m이며 속력이 v_0인 물체가 마찰이 없는 표면에서 미끄러지다가 용수철 상수가 k인 용수철에 부딪쳤다. 운동하던 물체에 의한 용수철의 최대 수축거리를 구하여라.



$$\Delta K = -\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \Delta U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0$$

12. 코르크를 발사하는 장난감 총의 용수철이 $5.00\,cm$ 압축되었다가 균형점을 지나 $1.00\,cm$가 더 늘어났을 때 코르크는 용수철에서 이탈하였다. 발사된 코르크의 속력은?
(단, 코르크의 질량은 $1.00\,g$, 용수철 상수는 $10.0\,N/m$이고 용수철의 질량은 무시한다.)

$$m = 1.00\,g = 0.001\,kg, \qquad k = 10.0\,N/m$$

$$\Delta U_s = -\int_{-0.05m}^{+0.01m} F\ dx = -\int_{-0.05m}^{+0.01m} (-kx)\ dx = k\int_{-0.05m}^{+0.01m} x\ dx = \frac{1}{2}k[x^2]_{-0.05m}^{+0.01m}$$

$$= \frac{1}{2}k(+0.01m)^2 - \frac{1}{2}k(-0.05m)^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 10.0\,N/m \times (+0.01m)^2 - \frac{1}{2}\times 10.0\,N/m \times (-0.05m)^2$$

$$= 0.0005\,N\cdot m - 0.0125\,N\cdot m$$

$$= 0.0005\,J - 0.0125\,J$$

$$= -0.012\,J$$

$$\Delta K + \Delta U = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta K = -\Delta U = -(-0.012\,J) = 0.012\,J$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0.012\,J \qquad (\ v_0 = 0\ )$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 = 0.012\,J$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2\times 0.012\,J}{0.001\,kg}} = \sqrt{24}\,m/s = 2\sqrt{6}\,m/s$$

13. x-축을 따라 움직이는 질량이 m인 물체에 거리에 따라 변하는 힘 $F=-ax^2$이 x-축 방향으로 작용한다. 물체의 위치 $x=x_1$ 에서의 속도가 v_1일 때 $x=x_2$ 에서의 속도는 얼마인가?

$$W=\int_{x_1}^{x_2}\vec{F}\cdot d\vec{x}=\int_{x_1}^{x_2}F\ dx\ \cos 0^\circ=\int_{x_1}^{x_2}F\ dx=\int_{x_1}^{x_2}(-ax^2)dx=-a\int_{x_1}^{x_2}x^2\ dx$$

$$=-a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x_1}^{x_2}=-\frac{a}{3}\left(x_2^3-x_1^3\right)$$

$$\Delta K=\frac{1}{2}m\left(v_2^2-v_1^2\right)=-W$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{1}{2}m\left(v_2^2-v_1^2\right)=\frac{a}{3}\left(x_2^3-x_1^3\right)\qquad\Rightarrow\qquad v_2=\sqrt{v_1^2+\frac{2a}{3m}\left(x_2^3-x_1^3\right)}$$

14. 고무줄 총을 만들어 발사한다. 고무줄의 용수철상수는 $k=50.0\,N/m$이고, 질량은 $1.00\,g$ $(=0.001\,kg)$이다. 고무줄을 $10.0\,cm$ 늘린 후, 수직 위로 발사할 경우 얼마나 높이 올라가겠는가?

$$U_g=mgh=\frac{1}{2}kx^2=U_s\qquad\Rightarrow\qquad h=\frac{kx^2}{2gm}=\frac{50.0\,N/m\times(0.1\,m)^2}{2\times 9.8\,m/s^2\times 0.001\,kg}\approx 25.51\,m$$

15. 높은 곳에서 떨어지는 물체는 가속도운동을 하므로 매우 위험하다.
아래 물음에 답하여라. (공기저항은 무시한다.)

(1) 물풍선 $1.00\,kg$이 높이 $40.0\,m$에서 떨어질 때, 지면에 닿기 전에 운동에너지와 속도를 구하여라.

$$U_g=mgh=1.00\,kg\times 9.8\,m/s^2\times 40.0\,m=392\,J$$

$$U_g=K=\frac{1}{2}mv^2\qquad\Rightarrow\qquad v=\sqrt{\frac{2U_g}{m}}=\sqrt{\frac{2\times 392\,J}{1.00\,kg}}=28.0\,m/s$$

(2) 물풍선 $2.00\,kg$이 (1)과 같은 높이에서 떨어졌을 때, 운동에너지와 속도를 구하여 비교하여라.

$$U_g=mgh=2.00\,kg\times 9.8\,m/s^2\times 40.0\,m=784\,J$$

$$U_g=K=\frac{1}{2}mv^2\qquad\Rightarrow\qquad v=\sqrt{\frac{2U_g}{m}}=\sqrt{\frac{2\times 784\,J}{2.00\,kg}}=28.0\,m/s$$

(3) 위에서 구한 물풍선의 속도와 $100\,km/h$를 비교하여라.

$$28.0\,m/s\qquad>\qquad 100\,km/h=100000\,m/h\times\frac{1h}{3600s}\approx 27.8\,m/s$$

16. 지면과 30° 각을 이룬 경사면 위에 질량이 무시되는 용수철이 놓여 있다. 이 용수철의 용수철 상수는 $1{,}960\,N/m$이다. 이 용수철은 $0.20m$압축된 상태에 있으며, 그 끝에는 질량 $2.00\,kg$인 물체가 놓여 있다. 압축된 용수철을 놓으면 물체는 경사면을 따라 얼마나 높이 올라가겠는가? (물체와 경사면 사이의 마찰은 무시한다.)

$$\Delta U_s = -\int_x^0 F\ dx = -\int_x^0 (-kx)\ dx = k\int_x^0 x\ dx = \frac{1}{2}k[x^2]_x^0 = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$\Delta U_g = -\int_0^h F\ dy = -\int_0^h (-mg)\ dy = mg\int_0^h dy = mg[y]_0^h = mgh$$

$$\Delta K = -\Delta U_s - \Delta U_g = 0$$

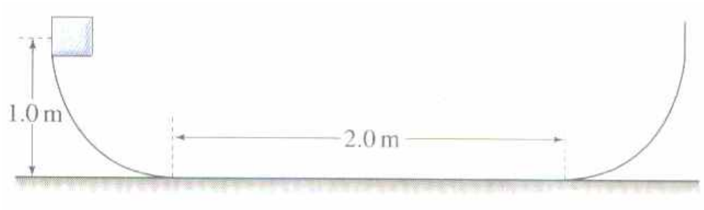
$$\frac{1}{2}kx^2 - mgh = 0$$

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \qquad h = \frac{kx^2}{2mg} = \frac{1{,}960\ \ N/m \times (0.20m)^2}{2\times 2.00kg \times 9.8m/s^2} = 2.00m$$

$$\Rightarrow \qquad d = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{2.00\,m}{1/2} = 4.00\,m$$

17. 양 끝에 경사진 부분을 가진 그릇이 있다. 이 그릇의 한쪽 면 높이 $1.00\,m$인 곳에 물체가 하나 있다. 그릇의 바닥면의 길이는 $2.00\,m$이고 마찰계수가 0.20이며, 경사면에서는 마찰이 없다. 이 물체를 놓으면, 미끄러진 물체는 결국 어디에서 멈추겠는가?



$$\Delta U_g = -\int_h^0 F\ dy = -\int_h^0 (-mg)\ dy = mg\int_h^0 dy = mg[y]_h^0 = -mgh$$

$$W_f = \int_0^d (-f_k)\ ds = \int_0^d (-\mu_k mg)\ ds = -\mu_k mg[s]_0^d = -\mu_k mgd \qquad (f_k = \mu_k N = \mu_k mg)$$

$$\Delta K = -\Delta U_g + W_f = 0$$

$$mgh - \mu_k mgd = 0$$

$$\Rightarrow \qquad d = \frac{mgh}{\mu_k mg} = \frac{h}{\mu_k} = \frac{1.00\,m}{0.20} = 5.00\,m$$

$$= 2.00\,m + 2.00\,m + 1.00\,m$$

바닥면의 중앙에서 멈춘다.

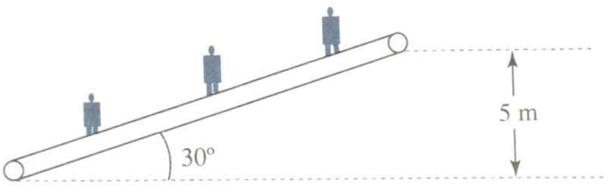
18. 높이가 H인 곳에서 자유낙하 시킨 질량이 m인 물체가 있다. 임의의 높이 h인 곳에서 이 물체의 속도를 구하고 그 결과를 이용하여 그 높이에서의 운동에너지를 구하여라. 이 경우 역학적 에너지는 높이 h에 상관없이 항상 일정함을 보여라.

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$$
$$v^2 = 0 - 2g(h - H)$$
$$v^2 = 2g(H - h) \qquad \Rightarrow \qquad v = -\sqrt{2g(H-h)} \quad (\text{아랫방향})$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m2g(H-h) = mg(H-h)$$

$$mgH + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$
$$mgH + 0 = mgh + mg(H-h)$$
$$mgH = mgh + mgH - mgh$$
$$mgH = mgH$$

19. 아래 그림 같이 1분 동안 체중이 $60.0\,kg$인 사람 20명이 에스컬레이터를 타고 1층에서 2층으로 올라간다. 에스컬레이터가 설치된 각도는 30°이고 1층에서 2층까지의 높이가 $5.00\,m$라면 에스컬레이터가 한 일률은 얼마인가? (단, 중력가속도는 $g = 10.0\,m/s^2$이다.)



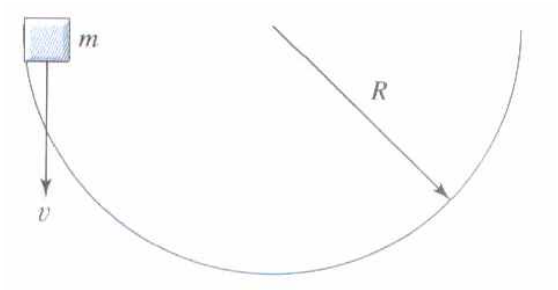
$$\Delta t = 1\text{min} = 60s, \qquad \theta = 30^\circ, \qquad h = 5m$$

$$m = 60.0\,kg, \qquad M = 20 \times m = 20 \times 60.0\,kg = 1200kg$$

$$\Delta W = \overrightarrow{F_d} \cdot \vec{d} = F_d\; d\cos\phi = (Mg\sin\theta)\left(\frac{h}{\sin\theta}\right)\cos\phi = Mgh\cos 0^\circ = Mgh$$
$$= 1200kg \times 10.0\,m/s^2 \times 5m = 60000\,kg \cdot m/s^2 = 60000\,J$$

$$<P> = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{60000J}{60s} = 1000J/s = 1000\,W = 1kW$$

20. 그림과 같이 반지름이 R인 반구 모양의 그릇에 질량이 m인 물체가 그릇의 한쪽 면 끝쪽에서 v의 속력으로 입사하여, 그릇의 안쪽 면을 따라 미끄러진다.



(1) 물체와 그릇 면 사이에 마찰이 없을 때, 그릇 바닥에서 물체의 속력은?

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR = \frac{1}{2}mv'^2 \qquad \Rightarrow \qquad v' = \sqrt{v^2 + 2gR}$$

(2) 물체와 그릇 면 사이에 마찰이 있는 경우, 물체는 그릇 바닥을 중심으로 진동하다가 정지한다. 정지할 때 까지 중력이 물체에 한 일은?

$$W_g = -\Delta U = -(-mgR) = mgR$$

(3) (2)의 경우에, 정지할 때 까지 그릇 면이 물체에 미치는 수직항력(법선력)이 물체에 한 일은?

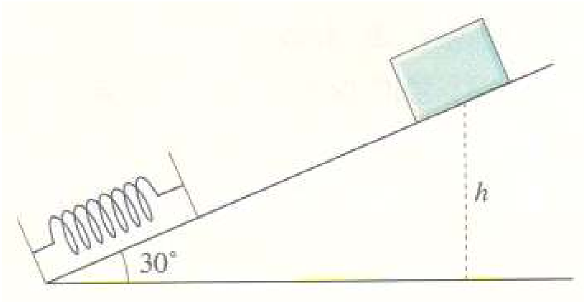
수직항력은 어느 지점에서나 물체의 이동방향과 항상 수직이므로 $W_N = 0$

(4) (2)의 경우에, 정지할 때 까지 마찰력이 물체에 한 일은? 단, 물체와 그릇 면 사이의 마찰계수는 μ_k이다.

$$W = W_g + W_N + W_f = \Delta K$$

$$mgR + 0 + W_f = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad W_f = -\frac{1}{2}mv^2 - mgR$$

21. 아래 그림과 같이 지면과 30° 각도를 갖는 비탈면의 바닥에 용수철 상수 k인 용수철이 놓여 있다. 이제 지면으로부터 수직거리 h인 비탈면상의 지점에서 벽돌을 가만히 놓는다. 비탈면과 벽돌 사이의 마찰계수는 μ_k이고, 용수철의 길이는 매우 작으며, k는 충분히 크다고 가정하자.



(1) 벽돌이 제일 아래에 도달할 때 까지 수직항력이 한 일은 얼마인가?

수직항력은 어느 지점에서나 물체의 이동방향과 항상 수직이므로 $W_N = 0$

(2) 벽돌이 용수철과 부딪친 후 다시 오르는 최고 수직거리는 얼마인가?

$$N = mg\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

$$f_k = \mu_k N = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k mg$$

$$D = d + d' = \frac{h}{\sin 30^\circ} + \frac{h'}{\sin 30^\circ} = \frac{h}{1/2} + \frac{h'}{1/2} = 2(h+h')$$

$$W_f = -f_k D = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k mg \times 2(h+h') = -\sqrt{3}\,\mu_k mg(h+h')$$

$$W_g = -\Delta U = -(mgh' - mgh) = mg(h-h')$$

$$W_N = 0$$

$$\Delta K = K' - K = 0$$

$$\Delta K = W = W_f + W_g + W_N = -\Delta U + W_{nc} = 0$$

$$-\Delta U + W_f + W_N = 0$$

$$mg(h-h') - \sqrt{3}\,\mu_k mg(h+h') + 0 = 0$$

$$mg(h-h') - \sqrt{3}\,\mu_k mg(h+h') = 0$$

$$(h-h') - \sqrt{3}\,\mu_k(h+h') = 0$$

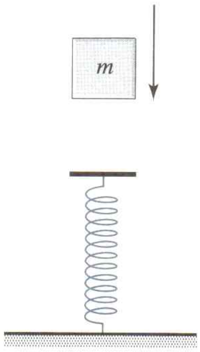
$$h - h' - \sqrt{3}\,\mu_k h - \sqrt{3}\,\mu_k h' = 0$$

$$-(1+\sqrt{3}\,\mu_k)h' + (1-\sqrt{3}\,\mu_k)h = 0$$

$$(1+\sqrt{3}\,\mu_k)h' = (1-\sqrt{3}\,\mu_k)h$$

$$h' = \frac{(1-\sqrt{3}\,\mu_k)}{(1+\sqrt{3}\,\mu_k)}h$$

22. 아래 그림과 같이 질량이 m인 물체가 용수철 상수가 k인 용수철에 수직으로 떨어진다. 이 물체가 순간적으로 정지할 때까지 용수철은 길이 x만큼 수축하였다. 이 물체가 용수철을 치기 직전 물체의 속력은 얼마이겠는가?
(단, 중력가속도는 g이고 용수철의 질량은 무시한다.)



압축되지 않은 용수철의 위쪽 받침의 높이를 기준으로 삼아 $h = 0m$라고 하자.
처음 질량이 m인 물체의 높이를 h라고 하면 물체의 에너지는 $U_g = mgh$이다.

물체가 떨어져 용수철의 위쪽 받침과 접촉하는 순간 물체의 속력을 v라 하자.
물체가 떨어져 용수철의 위쪽 받침과 접촉하는 순간 물체의 에너지는 $K = \frac{1}{2}mv^2$이다.

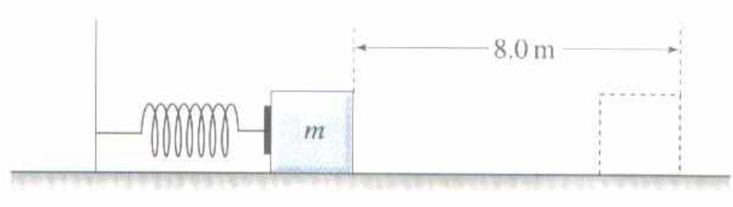
용수철이 길이 x만큼 수축하여 순간적으로 정지하는 순간 물체의 에너지는
$U_s + U_g' = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$이다.

역학적 에너지 보존 법칙에 따라 다음이 성립한다.

$$U_g = K = U_s + U_g' \qquad \Rightarrow \qquad mgh = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 - 2gx}$$

23. 용수철 상수가 120 N/m인 압축된 용수철의 끝에 질량이 $3.0kg$인 물체가 놓여 있다. 용수철을 압축하던 힘을 없애자 물체는 $8.0m$ 미끄러진 후 정지하였다. 물체는 용수철과 분리되었고, 물체와 바닥면의 마찰계수는 0.2 이라 한다. 용수철이 압축되었던 길이는 얼마인가?



$$\Delta U_s = -\int_x^0 F\,dx = -\int_x^0 (-kx)\,dx = k\int_x^0 x\,dx = \frac{1}{2}k[x^2]_x^0 = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$W_f = \int (-f_k)\,ds = \int (-\mu_k mg)\,ds = -\mu_k mg[s]_0^d = -\mu_k mgd \qquad (f_k = \mu_k N = \mu_k mg)$$

$$\Delta K = -\Delta U_s + W_f = 0$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - \mu_k mgd = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{2\mu_k mgd}{k}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\times 0.2\times 3.0kg\times 9.8m/s^2\times 8.0m}{120N/m}} \approx 0.885m$$