대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

1. 지구와 태양의 질량은 각각 $5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg}$, $1.99\times10^{30}\,\mathrm{kg}$이다. 만약에 지구와 태양이 전기적으로 중성이 아니고 크기와 부호가 똑같은 전하량을 띠고 있다고 가정한다면, 이 둘 사이의 만유인력을 상쇄시키는 데 필요한 지구와 태양의 전하량의 크기는 얼마이어야 하는가? 그리고 이 전하량의 크기는 기본 전하량의 몇 배인가?

$$F_{g,\ s\leftrightarrow e}=F_{E,\ s\leftrightarrow e} \quad\Rightarrow\quad G\frac{m_s m_e}{r^2_{s\leftrightarrow e}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_s q_e}{r^2_{s\leftrightarrow e}}$$

$$\Rightarrow\quad Gm_s m_e=\frac{q_s q_e}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow\quad q_s q_e=4\pi\epsilon_0 G m_s m_e=q^2 \qquad < q_s=q_e=q >$$

$$\Rightarrow\quad q=\sqrt{q_s q_e}=\sqrt{4\pi\epsilon_0 G m_s m_e}$$
$$=\sqrt{\frac{(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2})}{(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})}\times(1.99\times10^{30}\,\mathrm{kg})\times(5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg})}$$
$$\approx 2.97\times10^{17}\,\mathrm{C}$$

$$\frac{q}{e}=\frac{2.97\times10^{17}\,\mathrm{C}}{1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}}\approx 1.86\times10^{36}\ \text{배}$$

2. 전자와 양성자가 대략 보어 반지름, 즉 $0.530\times10^{-10}\,\mathrm{m}$ 정도 떨어져 있다. 전자와 양성자 사이의 전기력과 중력을 각각 구하여라. 구한 전기력과 중력의 비를 구하여라.

$$F_{E,\ p\leftrightarrow e}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_p q_e}{r^2_{p\leftrightarrow e}}$$
$$=(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\times\frac{(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})\times(-1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})}{(0.530\times10^{-10}\,\mathrm{m})^2}$$
$$\approx -8.19\times10^{8}\,\mathrm{N}$$

$$F_{g,\ p\leftrightarrow e}=-G\frac{m_p m_e}{r^2_{p\leftrightarrow e}}$$
$$=-(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2})\times\frac{(1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg})\times(9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg})}{(0.530\times10^{-10}\,\mathrm{m})^2}$$
$$\approx -3.61\times10^{-47}\,\mathrm{N}$$

$$\frac{F_{E,\ p\leftrightarrow e}}{F_{g,\ p\leftrightarrow e}}\approx\frac{-8.19\times10^{8}\,\mathrm{N}}{-3.61\times10^{-47}\,\mathrm{N}}\approx 2.27\times10^{39}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

3. 일직선상에 세 점전하가 간격 d를 두고 놓여 있다. 전하량은 순서대로 $-q$, $+q$, $-q$ 이다. 각 전하에 작용하는 힘을 구하여라.

전기력(쿨롱력) $\vec{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}$ 중첩의 원리

$$\vec{F}_{(1)}=\vec{F}_{(1)\leftarrow(2)}+\vec{F}_{(1)\leftarrow(3)}=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{d^2}+\left(-\frac{1}{(2d)^2}\right)\right\}=+\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{3}{4d^2} \quad (+\text{오른쪽으로})$$

$$\vec{F}_{(2)}=\vec{F}_{(2)\leftarrow(1)}+\vec{F}_{(2)\leftarrow(3)}=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left(-\frac{1}{d^2}\right)+\frac{1}{d^2}\right\}=0$$

$$\vec{F}_{(3)}=\vec{F}_{(3)\leftarrow(1)}+\vec{F}_{(3)\leftarrow(2)}=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{(2d)^2}\right)+\left(-\frac{1}{d^2}\right)\right\}=-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{3}{4d^2} \quad (-\text{왼쪽으로})$$

4. 전하량이 각각 q인 두 점전하가 정삼각형 모양 물체의 두 꼭지점에 놓여 있고 나머지 한 꼭지점에는 전하량이 $-q$인 전하가 있다. 전하 $-q$에 작용하는 힘을 구하여라.

전기력(쿨롱력) $\vec{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}$ 중첩의 원리, 벡터합, 대칭성

$$\vec{F}=\vec{F}_{(3)\leftarrow(1)}+\vec{F}_{(3)\leftarrow(2)}$$

$$x-axis \quad \vec{F}_x=\vec{F}_{(3)\leftarrow(1)}\cos60^\circ-\vec{F}_{(3)\leftarrow(2)}\cos60^\circ=0$$

$$y-axis \quad \vec{F}_y=\vec{F}_{(3)\leftarrow(1)}\sin60^\circ+\vec{F}_{(3)\leftarrow(2)}\sin60^\circ=2\times\vec{F}_{(3)\leftarrow(1)}\sin60^\circ$$

$$=2\times\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{3}\,q^2}{d^2}$$

삼각형의 무게중심을 향하는 방향

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

5. 두 점전하의 전하량의 합이 $+10.0\,\mu\mathrm{C}$ 이고 이 둘은 서로 $4.00\,\mathrm{m}$ 떨어져 있다. 이때 두 점전하 사이에는 $12.0\,\mathrm{mN}$ 의 척력이 작용한다. 이때 두 점전하의 전하량은 각각 얼마인가? 만약에 이 정전기력이 척력이 아니라 인력이면 두 점전하의 전하량은 각각 얼마인가?

<척력인 경우>

$$q_1+q_2 = +10.0\,\mu\mathrm{C} = +10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C} \quad\Rightarrow\quad q_2=(+10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})-q_1$$

$$F_E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=(8.99\times10^9\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2)\times\frac{q_1q_2}{(4.00\,\mathrm{m})^2}=12.0\,\mathrm{mN}=12.0\times10^{-3}\,\mathrm{N}$$

$$\Rightarrow\quad q_1q_2=\frac{(4.00\,\mathrm{m})^2}{(8.99\times10^9\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2)}\times(12.0\times10^{-3}\,\mathrm{N})\approx 21.357\times10^{-12}\,\mathrm{C}^2$$

$$\Rightarrow\quad q_1q_2=q_1\left\{(+10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})-q_1\right\}=(+10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})q_1-q_1^2\approx 21.357\times10^{-12}\,\mathrm{C}^2$$

$$\Rightarrow\quad q_1^2-(10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})q_1+21.357\times10^{-12}\,\mathrm{C}^2\approx 0$$

$$\Rightarrow\quad q_1=\frac{(+10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})\pm\sqrt{(10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})^2-4\times(21.357\times10^{-12}\,\mathrm{C}^2)}}{2}$$

$$q_1\approx+6.91\times10^{-6}\,\mathrm{C}\quad \text{or}\quad +3.09\times10^{-6}\,\mathrm{C}\approx q_2$$

$$q_1\approx+6.91\,\mu\mathrm{C}\quad \text{or}\quad +3.09\,\mu\mathrm{C}\approx q_2$$

<인력인 경우>

$$q_1-q_2 = +10.0\,\mu\mathrm{C} = +10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C} \quad\Rightarrow\quad q_2=q_1-(10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})$$

$$F_E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=(8.99\times10^9\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2)\times\frac{q_1q_2}{(4.00\,\mathrm{m})^2}=12.0\,\mathrm{mN}=12.0\times10^{-3}\,\mathrm{N}$$

$$\Rightarrow\quad q_1q_2=\frac{(4.00\,\mathrm{m})^2}{(8.99\times10^9\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2)}\times(12.0\times10^{-3}\,\mathrm{N})\approx 21.357\times10^{-12}\,\mathrm{C}^2$$

$$\Rightarrow\quad q_1q_2=q_1\left\{q_1-(10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})\right\}=q_1^2-(10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})q_1\approx 21.357\times10^{-12}\,\mathrm{C}^2$$

$$\Rightarrow\quad q_1^2-(10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})q_1-21.357\times10^{-12}\,\mathrm{C}^2\approx 0$$

$$\Rightarrow\quad q_1=\frac{(+10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})\pm\sqrt{(10.0\times10^{-6}\,\mathrm{C})^2-4\times(-21.357\times10^{-12}\,\mathrm{C}^2)}}{2}$$

$$q_1\approx+11.81\times10^{-6}\,\mathrm{C}\quad \text{or}\quad -1.81\times10^{-6}\,\mathrm{C}\approx q_2$$

$$q_1\approx+11.81\,\mu\mathrm{C}\quad \text{or}\quad -1.81\,\mu\mathrm{C}\approx q_2$$

6. 수소원자에 대한 보어 모형은 $+e$의 전하를 갖고 있는 양성자의 주위를 $-e$의 전하를 갖는 전자가 원운동 하는 것이다. 양성자와 전자 간의 정전기적 인력은 전자가 원 궤도를 유지하기 위한 구심력을 제공한다. 원운동의 반지름은 얼마인가?

구심력 $F_c = m_e \dfrac{v^2}{r}$

전기력 $F_E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}$

$$\Rightarrow \quad F_c = F_E \quad \Rightarrow \quad m_e\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e v^2} \quad \text{or} \quad v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e r}}$$

if $\quad v = c$

$$then \quad r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e v^2} = (8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}) \times \frac{(1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg})\times(3\times10^8\ \mathrm{m/s})^2}$$

$$\approx 2.81\times10^{-15}\ \mathrm{m}$$

if $\quad r = 0.53\ \text{Å} = 0.53\times10^{-10}\ \mathrm{m}$

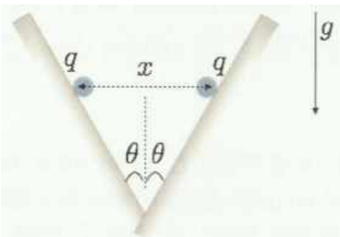
$$then \quad v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e r}}$$

$$= \sqrt{(8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}) \times \frac{(1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg})\times(0.53\times10^{-10}\ \mathrm{m})}}$$

$$\approx 2.18\times10^6\ \mathrm{m/s}$$

$\approx$ 광속 $(c = 3\times10^8\ \mathrm{m/s})$ 의 약 0.73%

7. 그림과 같이 연직선과 θ의 각을 이루고 밑에서 맞닿아 있는 두 경사면에 질량이 m이고 전하량 q가 대전된 두 동일한 물체가 평형 상태에 있을 때 수평거리 x를 구하시오. (중력가속도의 크기는 g라고 하자.)



$$F_g = mg = N\sin\theta \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\sin\theta}$$

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{x^2} = N\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{x^2} = \frac{mg}{\sin\theta}\cos\theta = \frac{mg}{\tan\theta}$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{q^2\tan\theta}{4\pi\epsilon_0 mg}} = q\sqrt{\frac{\tan\theta}{4\pi\epsilon_0 mg}}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

8. 질량이 $1.00\times10^{-3}\,\mathrm{kg}$인 물방울이 떨어지지 않고 공중에 떠 있기 위해서는 얼마의 전하량이 있어야 하는가? 단, 이 물방울 위치의 전기장은 지표면을 향하며 $100\,\mathrm{N/C}$의 세기를 가진다고 한다.

$$m = 1.00\times10^{-3}\,\mathrm{kg}, \qquad E = 100\,\mathrm{N/C}$$

$$\begin{array}{lll} \text{중력} & F_g = mg & \\ & & \Rightarrow \quad F_g + F_E = 0 \\ \text{전기력} & F_E = qE & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad mg + qE = 0$$

$$\Rightarrow \quad q = -\frac{mg}{E}$$

$$= -\frac{(1.00\times10^{-3}\,\mathrm{kg})\times(9.8\,\mathrm{m/s^2})}{100\,\mathrm{N/C}} = -9.8\times10^{-5}\,\mathrm{C}$$

(전기장과 반대 방향으로 힘을 받아야 하므로 음전하여야 한다.)

9. 전하량이 $+5.00\,\mu\mathrm{C}$인 점전하가 원점에서부터 $(3.00\,\hat{i}+2.00\,\hat{j})\,\mathrm{m}$ 위치에 놓여 있다. 원점에서부터 $(5.00\,\hat{i}-3.00\,\hat{j})\,\mathrm{m}$만큼 떨어진 곳에 이 점전하가 만드는 전기장을 구하라.

$$\Delta\vec{r} = (5.00\,\hat{i}-3.00\,\hat{i})\,\mathrm{m} + (-3.00\,\hat{j}-2.00\,\hat{j})\,\mathrm{m} = (2.00\,\hat{i}-5.00\,\hat{j})\,\mathrm{m}$$

$$r^2 = (2.00\,\mathrm{m})^2 + (5.00\,\mathrm{m})^2 = 29.00\,\mathrm{m}^2$$

$$E = \frac{F_E}{q_0} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = (8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\times\frac{(+5.00\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{29.00\,\mathrm{m}^2}$$

$$= 1.55\times10^3\,\mathrm{N/C}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

10. 1.00×10^4 N/C**의 균일한 전기장 내에서 전자를 가만히 놓았다. 전자가** 1.00 cm**를 진행하는 순간에 대해서,**

(가) 진행속력은 얼마인가?

$$E = 1.00 \times 10^4 \text{ N/C}, \qquad d = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{전기력} \quad \begin{matrix} F_E = qE \\ F = ma \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad F_E = F \quad \Rightarrow \quad qE = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{qE}{m} \qquad \text{(등가속도)}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ad$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2\frac{qE}{m}d}$$

$$= \sqrt{2 \times \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (1.00 \times 10^4 \text{ N/C})}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})} \times (1.00 \times 10^{-2} \text{ m})}$$

$$\approx 5.93 \times 10^6 \text{ m/s}$$

(나) 얻은 운동에너지는 얼마인가?

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times (5.93 \times 10^6 \text{ m/s})^2 \approx 1.60 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$W = qEd = (1.60 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (1.00 \times 10^4 \text{ N/C}) \times (1.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.60 \times 10^{-17} \text{ J}$$

(전기력은 보존력이므로 전자가 얻은 운동에너지는 받은 일의 양과 같다.)

(다) 시간은 얼마나 걸리겠는가?

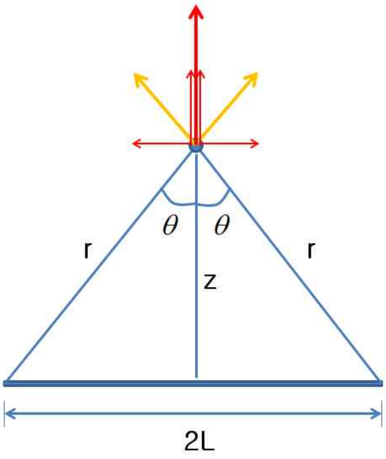
$$d = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2dm}{qE}} = \sqrt{\frac{2 \times (1.00 \times 10^{-2} \text{ m}) \times (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})}{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (1.00 \times 10^4 \text{ N/C})}}$$

$$\approx 3.37 \times 10^{-9} \text{ s}$$

11. 점 A**에 점전하** $+Q$**가 있고, 점** B**에 점전하** $-Q$**가 있다. 선분** AB**를 수직 이등분하는 선상에 있는 점** P**에서 전기장의 방향은?**

아랫방향

12. 무한히 긴 도선이 선전하밀도 λ로 대전되어 있다. 이 도선에서 z만큼 떨어진 곳에서 전기장이 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}$와 같이 주어짐을 보여라. 이 전기장의 방향이 도선에 대해 수직임을 설명하여라.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{선}} \frac{dq}{r^2}\,\hat{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{선}} \frac{\lambda dx}{r^2}\,\hat{r} \qquad (\ dq = \lambda dx\ )$$

(좌우 대칭이므로 전기장의 수평(x)성분은 상쇄되고 수직(z)성분만 남는다.)

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{r^2}\cos\theta\, dx\ \hat{k}$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{r^2}\frac{z}{r}\, dx\ \hat{k} \qquad (\ \cos\theta = \frac{z}{r}\ )$$

$$= \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0}\int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{r^3}\, dx\ \hat{k}$$

$$= \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0}\int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{(z^2+x^2)^{3/2}}\, dx\ \hat{k} \qquad (\ r = \sqrt{z^2+x^2}\ )$$

$$= \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{x}{z^2\sqrt{z^2+x^2}}\right]_{x=0}^{x=L}\hat{k} \qquad \left(\ \int \frac{1}{(a^2+u^2)^{3/2}}du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C\ \right)$$

$$= \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{L}{z^2\sqrt{z^2+L^2}}\right)\hat{k}$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{L}{z\sqrt{z^2+L^2}}\right)\hat{k} \qquad (\ \text{if}\ \ L \to \infty,\ \ then\ \ z^2+L^2 \Rightarrow L^2\ )$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{L}{z\sqrt{L^2}}\right)\hat{k}$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{z}\right)\hat{k}$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{z}\right)\hat{k} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}\ \hat{k}$$

13. 선전하밀도가 $\lambda = 1.20\,\mu\mathrm{C/m}$ 인 무한히 긴 도선이 y축을 따라 놓여 있고 원점에서부터 $2.00\,\mathrm{m}$ 떨어진 x축 위에 전하량이 $4.00\,\mu\mathrm{C}$ 인 점전하가 놓여 있다. 원점에서부터 $10.0\,\mathrm{m}$ 떨어져 있는 z축 위의 점에서 전기장을 구하여라.

<선전하에 의해 발생하는 전기장 - 12번 문제의 결과를 이용>

$$E_{\text{선전하}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}\hat{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda}{z}\hat{k} = (8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\times\frac{2\times(1.20\times10^{-6}\,\mathrm{C/m})}{10.0\,\mathrm{m}}\hat{k}$$
$$= (2.1576\times10^3\,\mathrm{N/C})\hat{k}$$

<점전하에 의해 발생하는 전기장>

$$\Delta\vec{r} = (0.00\,\hat{i} - 2.00\,\hat{i})\,\mathrm{m} + (0.00\,\hat{j} - 0.00\,\hat{j})\,\mathrm{m} + (10.00\,\hat{k} - 0.00\,\hat{k})\,\mathrm{m}$$
$$= (-2.00\,\hat{i} + 10.00\,\hat{k})\,\mathrm{m}$$

$$r^2 = (-2.00\,\mathrm{m})^2 + (10.00\,\mathrm{m})^2 = 104.00\,\mathrm{m}^2$$

$$E_{\text{점전하}} = \frac{F_E}{q_0} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,q_0}{r^2}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = (8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\times\frac{(4.00\times10^{-6}\,\mathrm{C})}{104.00\,\mathrm{m}^2}$$
$$= 3.4576\times10^2\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{\text{점전하, }x\text{성분}} = -E_{\text{점전하}}\times\sin\theta = -(3.4576\times10^2\,\mathrm{N/C})\times\frac{2.00\,\mathrm{m}}{\sqrt{104\,\mathrm{m}^2}}$$
$$\approx (-0.6781\times10^2\,\mathrm{N/C})\hat{i}$$

$$E_{\text{점전하, }z\text{성분}} = E_{\text{점전하}}\times\cos\theta = (3.4576\times10^2\,\mathrm{N/C})\times\frac{10.0\,\mathrm{m}}{\sqrt{104\,\mathrm{m}^2}}$$
$$\approx (3.3906\times10^2\,\mathrm{N/C})\hat{k}$$

<선전하와 점전하에 의해 발생한 전기장의 합>

$$E_{x\text{성분}} \approx (-0.6781\times10^2\,\mathrm{N/C})\hat{i}$$

$$E_{z\text{성분}} \approx \{(2.1576\times10^3\,\mathrm{N/C}) + (3.3906\times10^2\,\mathrm{N/C})\}\hat{k} \approx (2.4967\times10^3\,\mathrm{N/C})\hat{k}$$

$$E \approx \sqrt{(-0.6781\times10^2\,\mathrm{N/C})^2 + (2.4967\times10^3\,\mathrm{N/C})^2} \approx 2.4976\times10^3\,\mathrm{N/C}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

14. 반지름이 R인 원판에 총 전하량이 Q인 전하가 일정한 면전하밀도 σ로 대전되어 있다.

(가) 이 원판의 중심에서 수직 방향으로 x만큼 떨어진 곳에서의 전기장을 구하여라.

예제 15.5의 결과 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ 에서 a를 r로, q를 dq로 바꿔서 이용하면

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq\ x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}(2\pi\sigma r\ dr)\hat{i} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}(r\,dr)\hat{i}$$

$(\ dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r\ dr = 2\pi\sigma r\ dr\ )$
$$= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\frac{r}{(x^2+r^2)^{3/2}}dr\,\hat{i}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_{r=0}^{r=R}\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\frac{r}{(x^2+r^2)^{3/2}}dr\,\hat{i} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}\frac{r}{(x^2+r^2)^{3/2}}dr\,\hat{i}$$

$(\ $치환 $r^2+x^2=s^2$ 미분 $2r\,dr = 2s\,ds \quad\Rightarrow\quad dr = \frac{s}{r}ds\ )$

$$= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_{s=\sqrt{x^2}}^{s=\sqrt{R^2+x^2}}\frac{r}{s^3}\frac{s}{r}ds\,\hat{i} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_{s=\sqrt{x^2}}^{s=\sqrt{R^2+x^2}}\frac{1}{s^2}ds\,\hat{i}$$

$$= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{s}\right]_{s=\sqrt{x^2}}^{s=\sqrt{R^2+x^2}}\hat{i} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)\hat{i}$$

$$= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\hat{i} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\hat{i}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\hat{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\hat{i}$$

(나) 이 원판의 반지름이 무한히 클 경우에 전기장을 구하여라.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\hat{i} \qquad (\ \text{if}\quad R\to\infty,\quad then\quad x^2+R^2 \Rightarrow \infty\ )$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\infty}\right)\hat{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}\right)\hat{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i}$$
(무한 평면이 만드는 전기장)

(다) x가 R보다 훨씬 더 클 경우$(x \gg R)$, 원판을 점전하로 취급할 수 있음을 보여라.
(이항전개 $(1+R^2/x^2)^{-1/2} \approx 1 - R^2/2x^2$을 이용하라.)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\hat{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{x\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}}\right)\hat{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}}\right)\hat{i}$$

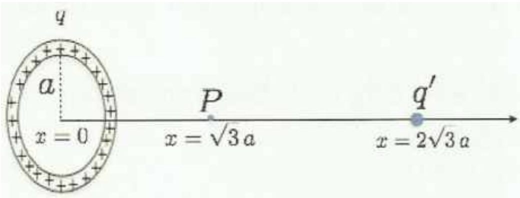
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\left[1+\left(\frac{R}{x}\right)^2\right]^{-1/2}\right)\hat{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\left\{1-\frac{R^2}{2x^2}\right\}\right)\hat{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{R^2}{2x^2}\right)\hat{i} = \frac{\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}\right)\hat{i}$$

$$= \frac{A\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}\right)\hat{i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}\right)\hat{i} \qquad (\ Q = \sigma A\ )$$

(점전하 Q가 거리 x만큼 떨어진 지점에 만드는 전기장과 같다.)

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

15. 전하량 q가 균일하게 대전된 반지름 a인 고리의 중심에서 거리 $2\sqrt{3}\,a$ 만큼 떨어진 곳에 점전하 q'이 놓여 있다. 고리 중심에서 $\sqrt{3}\,a$ 만큼 떨어진 P 지점에서 전기장의 세기가 0이 되려면 q'은 얼마여야 하는가?



고리 전하가 P 지점에 만드는 전기장

예제 15.5의 결과 $E=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q\ x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ 에서 $x=\sqrt{3}\,a$를 대입하면

$$E(x=P)=+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ \sqrt{3}\,a}{((\sqrt{3}\,a)^2+a^2)^{3/2}}=+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ \sqrt{3}\,a}{(3a^2+a^2)^{3/2}}=+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ \sqrt{3}\,a}{(4a^2)^{3/2}}$$

$$=+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ \sqrt{3}\,a}{8a^3}=+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{3}\,q}{8a^2}\qquad(+\text{오른쪽})$$

점전하가 P 지점에 만드는 전기장

$$E(x=P)=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{(\sqrt{3}\ a)^2}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{3\,a^2}\qquad(-\text{왼쪽})$$

두 전기장의 합

$$E(x=P)=+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{3}\,q}{8a^2}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{3\,a^2}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\sqrt{3}\,q}{8a^2}=\frac{q'}{3\,a^2}\quad\Rightarrow\quad q'=\frac{3\sqrt{3}\,q}{8}$$

16. 점전하 Q로부터 거리 r 떨어진 곳에 쌍극자 p가 있다. 이 쌍극자가 전하에 끌리는 힘의 세기가 거리의 세제곱에 반비례함을 보여라. 쌍극자를 작은 간격 d만큼 떨어진 두 전하 쌍 이라 하고 각 전하가 받는 힘을 계산한 후 근사적인 표현을 구하여라.

$$F_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{\left(r-\frac{d}{2}\right)^2}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2-rd+\frac{d^2}{4}}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\frac{1}{1-\frac{d}{r}+\frac{d^2}{4r^2}}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left(1-\frac{d}{2r}\right)^{-2}\approx-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left(1+\frac{d}{r}\right)\qquad(-\text{인력})$$

$$F_+ = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{\left(r+\frac{d}{2}\right)^2}=+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2+rd+\frac{d^2}{4}}=+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\frac{1}{1+\frac{d}{r}+\frac{d^2}{4r^2}}$$

$$=+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left(1+\frac{d}{2r}\right)^{-2}\approx+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left(1-\frac{d}{r}\right)\qquad(+\text{척력})$$

$F=F_-+F_+$

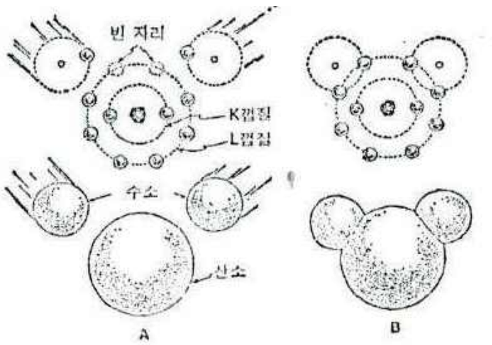
$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left\{-\left(1+\frac{d}{r}\right)+\left(1-\frac{d}{r}\right)\right\}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\frac{2d}{r}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Qqd}{r^3}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Qp}{r^3}$$

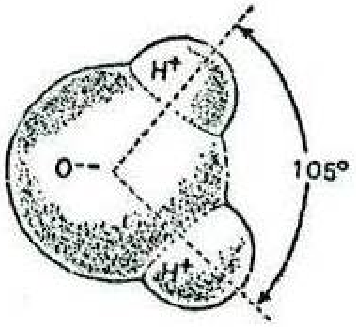
$(-\text{인력})$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

17. 수증기 상태에서 물분자(H_2O)의 쌍극자 모멘트의 크기는 대략 $6.20\times10^{-30}\,\mathrm{C\cdot m}$와 같다.

(가) 이 물분자의 중심에서 양전하와 음전하는 서로 얼마나 떨어져 있는지 구하여라.
(물분자에는 양성자 10개, 전자 10개가 있다.)





$$p=q\ d \qquad \Rightarrow \qquad d=\frac{p}{q}=\frac{p}{10\ e}=\frac{6.20\times10^{-30}\,\mathrm{C\cdot m}}{10\times(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})}\approx 3.875\times10^{-12}\,\mathrm{m}$$

(나) 이 물분자를 세기가 $2.00\times10^{4}\,\mathrm{N/C}$ 인 전기장 아래 두었다.
이 물분자가 받는 최대 돌림힘을 구하여라.

$$\tau=pE\sin\theta=(6.2\times10^{-30}\,\mathrm{C\cdot m})\times(2.00\times10^{4}\,\mathrm{N/C})\times(\sin90^\circ)=1.24\times10^{-25}\,\mathrm{N\cdot m}$$

18. 전기장이 균일한 영역에 있는 쌍극자의 쌍극자 모멘트는 전기장에 나란하게 나열하기 위하여 회전한다. 이때 전기장은 (양, 음)의 일을 하고 위치에너지는 (증가, 감소)한다. 괄호 안에서 옳은 답은?

19. 전기장이 $\vec{E}=E_0\,\hat{j}$로 균일한 평면에 q인 전하는 $(a,\ a)$에, -q인 전하는 $(-a,\ a)$에 놓여 있다.

(가) 두 전하가 이루는 쌍극자 모멘트 $\vec{p}$를 구하여라.

$$\vec{p}=2aq\,\hat{i}$$

(나) 전기장이 쌍극자에 작용하는 힘과 돌림힘을 구하여라.

$$\vec{F}=0 \qquad \vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E}=(2aq\,\hat{i})\times(E_0\,\hat{j})=2aqE_0\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}=(\vec{r}_q\times\vec{F}_{E\,q})+(\vec{r}_{-q}\times\vec{F}_{E\,-q})=(a\hat{i}\times qE_0\hat{j})+(-a\hat{i}\times(-qE_0\hat{j}))=2aqE_0\,\hat{k}$$

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

20. 어떤 전하량 q가 q_1과 $q-q_1$의 두 전하로 나누어졌다. 나누어진 후 두 전하 간의 힘이 최대가 되려면 q_1은 q의 몇 배가 되어야 하는가?

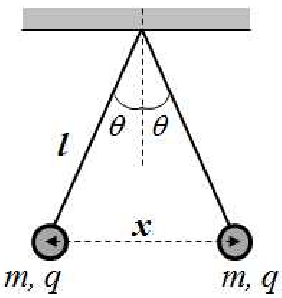
$$F=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1(q-q_1)}{r^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}(q_1q-q_1^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial q_1}(q_1q-q_1^2)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}(q-2q_1)=0$$

$$\Rightarrow \quad q-2q_1=0$$

$$\Rightarrow \quad q_1=\frac{q}{2} \quad \text{(절반)}$$

21. 질량이 m인 작은 공 두 개가 각각 길이가 l이고 질량은 무시할 만한 두 선에 매달려 있다. 이 두 선은 천장의 한 점에 단단히 묶여 있다. 각각의 공은 똑같은 전하 q로 대전되어 있다.



(가) 평형상태에서 두 공이 떨어져 있는 거리가 x라면 줄이 수직선과 이루는 각 θ를 구하여라. (이때, θ는 아주 작다.)

$$\text{if} \quad \theta \ll 1 \qquad then \quad \theta \approx \tan\theta \approx \sin\theta = \frac{x/2}{l}=\frac{x}{2l}$$

(나) 두 전하 사이의 거리 x를 구하여라.

$$T\cos\theta = mg \qquad \Rightarrow \qquad T=\frac{mg}{\cos\theta}$$

$$T\sin\theta=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad x^2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{T\sin\theta}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{mg}\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\Rightarrow \qquad x^2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{mg}\frac{2l}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad x^3=\frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \qquad \Rightarrow \qquad x=\left(\frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$

22. n**개의 양전하가 있다. 각각의 전하량은** q/n**이고 이 전하들은 반지름이** a**인 원의 둘레에 같은 간격으로 대칭적으로 놓여 있다.**

(1) 이 원의 면과 수직하며 원의 중심을 통과하는 선을 따라 그 중심에서부터 x**만큼 떨어진 곳에서 전기장을 구하여라.**

예제 15.5에서 $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{(x^2+a^2)}$ 에서 dq를 $\frac{q}{n}$으로 바꿔서 이용하면

$$E = \sum_1^n dE\ \cos\theta = n\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q/n}{(x^2+a^2)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} \qquad \left(\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

(2) 이 결과가 예제 15.5와 같음을 확인하고 그 이유를 설명하여라.

확인했음~!

당연히 그래야 되지 않나~^^

23. 질량이 m**이고 전하량이** q**로 대전된 두 부도체를 길이가** L_0**이고 용수철 상수가** k**인 용수철로 연결하였더니 용수철의 길이가** $\frac{4}{3}L_0$**로 늘어나 평형상태가 되었다.**
이제 대전된 두 부도체 중 하나를 $x=0$**에 고정시키고 용수철에 연결된 또 다른 부도체가 단순조화운동을 하게 한다면 각진동수** ω**는** $\sqrt{\frac{k}{m}}$**의 몇 배인가?**

< 평형상태에서 >

전하량이 q로 대전된 두 부도체 사이에 작용하는 전기력(척력) $F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}$

용수철 상수가 k인 용수철에 의해 작용하는 탄성력(인력) $F_s = -k\left(\frac{1}{3}L_0\right) = -\frac{1}{3}kL_0$

두 힘의 합력이 0인 상황이므로 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\Sigma F = F_E + F_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2} - \frac{1}{3}kL_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2} = \frac{1}{3}kL_0$$

이제

두 부도체 중 하나를 $x=0$에 고정시키고, $x=\frac{4}{3}L_0$에 위치한 또 다른 부도체 하나를 단순조화운동 시키기 위해 x만큼 잡아당겼다가 놓는다고 가정하자.

대학물리학 (제8판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

< $x=\frac{4}{3}L_0$에 위치한 또 다른 부도체 하나를 x만큼 잡아당긴 상태에서 >

용수철 상수가 k인 용수철에 의해 작용하는 탄성력의 변화량 $\Delta F_s=-kx$

전하량이 q로 대전된 두 부도체 사이에 작용하는 전기력의 변화량

$$\Delta F_E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0+x\right)^2}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2\left(1+\frac{3x}{4L_0}\right)^2}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}$$

< 이항전개 : 만일 $x \ll L_0$이면, $\left(1+\frac{3x}{4L_0}\right)^{-2}\approx 1-2\frac{3x}{4L_0}$으로 근사할 수 있다. >

$$\approx\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}\left(1-2\frac{3x}{4L_0}\right)-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}\left(-2\frac{3x}{4L_0}\right)$$

평형상태에서 얻은 $\left\langle\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\left(\frac{4}{3}L_0\right)^2}=\frac{1}{3}kL_0\ \right\rangle$의 관계를 이용하면

$$=\frac{1}{3}kL_0\left(-\frac{3x}{2L_0}\right)=-\frac{1}{2}kx$$

단순조화운동 시키기 위해

$x=\frac{4}{3}L_0$에 위치한 또 다른 부도체 하나를 x만큼 잡아당긴 상황에서

탄성력의 변화량과 전기력의 변화량의 총 합은 다음과 같다.

$$\Sigma\Delta F=\Delta F_s+\Delta F_E=-kx-\frac{1}{2}kx=-\frac{3}{2}kx$$

이 힘이 복원력의 역할을 하게 되므로 이 힘을 이용하여 운동방정식을 쓰면

$$\Sigma\Delta F=-\frac{3}{2}kx=ma=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{3}{2}kx=0$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{3k}{2m}x=0\qquad\qquad \left\langle\ \omega^2=\frac{3k}{2m},\quad \omega=\sqrt{\frac{3k}{2m}}\ \right\rangle$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

각진동수는 $\omega=\sqrt{\frac{3k}{2m}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}$ 이므로, 각진동수 ω는 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 의 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 배이다.