대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (13장) - by 송현석

1. 부피가 일정한 기체 온도계를 드라이아이스($-80.0\,^\circ C$)온도에 맞추었더니 압력이 $0.900\,atm$이었다. 에틸알코올의 끓는 온도($78.0\,^\circ C$)와 물이 끓는 온도($100\,^\circ C$)에서 이 기체 온도계의 압력은 각각 얼마인가?

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V = nR\dfrac{T}{P} \\ V^* = nR\dfrac{T^*}{P^*} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V = V^* \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{P} = \frac{T^*}{P^*} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T = \dfrac{P}{P^*}T^* \\ P = \dfrac{T}{T^*}P^* \end{cases}$$

$$P = \frac{T}{T^*}P^* = \frac{273.16K + 78.0K}{273.16K - 80.0K} \times 0.900\,atm = \frac{351.16K}{193.16K} \times 0.900\,atm \approx 1.636\,atm$$

$$P = \frac{T}{T^*}P^* = \frac{273.16K + 100K}{273.16K - 80.0K} \times 0.900\,atm = \frac{373.16K}{193.16K} \times 0.900\,atm \approx 1.739\,atm$$

2. 섭씨온도와 선형 관계에 있는 온도 척도 Z에 대해 물은 $-100\,^\circ Z$에서 얼고 $300\,^\circ Z$에서 끓는다고 한다. $50.0\,^\circ Z$는 섭씨 몇 도 인가?

$$0\,^\circ C = -100\,^\circ Z, \qquad\qquad 100\,^\circ C = 300\,^\circ Z$$

$$T_Z = 4\,T_C - 100 \quad [\,^\circ Z\,]$$

$$\Rightarrow \qquad T_C = \frac{1}{4}T_Z + 25 = \left(\frac{1}{4} \times 50.0\right) + 25.0 = 12.5 + 25.0 = 37.5 \quad [\,^\circ C\,]$$

3. 열전도도가 $1.366\,W/(m \cdot K)$인 콘크리트로 만들어진 길이 $5.00\,m$, 높이 $2.50\,m$, 두께 $20.0\,cm$인 벽이 있다. 벽의 안쪽은 $24.0\,^\circ C$, 바깥쪽은 $10.0\,^\circ C$로 온도가 유지된다고 한다. 12시간 동안 이 벽을 통하여 얼마만큼의 열량이 빠져 나가겠는가?

$$A = 5.00\,m \times 2.50\,m = 12.5\,m^2, \qquad d = 0.20\,m$$

$$\Delta T = 24.0\,^\circ C - 10.0\,^\circ C = 14.0\,^\circ C = 14.0K$$

$$t = 12h = 12 \times 3600\,s = 43200\,s$$

$$H = \frac{Q}{t} = k\left(\frac{A}{d}\right)\Delta T$$

$$\Rightarrow \qquad Q = k\left(\frac{A}{d}\right)\Delta T \times t = 1.366\,W/(m \cdot K) \times \left(\frac{12.5\,m^2}{0.20\,m}\right) \times 14.0K \times 43200\,s$$

$$\approx 5.16 \times 10^7 J$$

4. 물의 밀도는 $0^\circ C$에서는 약 $0.99985 g/cm^3$이며, $4^\circ C$에서는 약 $0.99997 g/cm^3$이다. 이 온도 범위에서 물의 부피팽창계수를 근사적으로 계산하여라.

$$V_{0^\circ C} = \frac{m}{\rho_{0^\circ C}} = \frac{1g}{0.99985 g/cm} \approx 1.00015 cm^3$$

$$V_{4^\circ C} = \frac{m}{\rho_{4^\circ C}} = \frac{1g}{0.99997 g/cm} \approx 1.00003 cm^3$$

$$\Delta V = V_{4^\circ C} - V_{0^\circ C} = 1.00003 cm^3 - 1.00015 cm^3 = -0.00012 cm^3$$

$$\Delta T = 4^\circ C - 0^\circ C = 4^\circ C = 4K$$

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{1.00015 cm^3}\frac{(-0.00012 cm^3)}{4K} \approx -3.00 \times 10^{-5}/K$$

5. 추운 환경에서 두꺼운 털옷을 입으면 몸의 열 손실은 주로 전도에 의해서만 일어난다. 털옷의 열전도율은 $3.60 \times 10^{-3} \frac{cal}{m \cdot hr \cdot {}^\circ C}$라 할 때 1시간 동안 $1.00 m^2$의 면적을 통해 $30^\circ C$ 의 피부에서 $-30^\circ C$ 의 주변 공기로 $1.00 cm$ 두께의 털옷을 통해 전달되는 열은 얼마인가?

$$\Delta t = 1 \ h = 3.6 \times 10^3 \ s, \qquad A = 1.00 \ m^2, \qquad \Delta T = 60^\circ C, \qquad d = 1.00 \ cm = 0.0100 m$$

$$k = 3.60 \times 10^{-3} \frac{cal}{m \cdot h \cdot {}^\circ C} \times \frac{1 \ h}{3600 \ s} = 1.00 \times 10^{-6} \frac{cal}{m \cdot s \cdot {}^\circ C}$$

$$H = \frac{Q}{t} = k\left(\frac{A}{d}\right)\Delta T$$

$$\Rightarrow \qquad Q = k\left(\frac{A}{d}\right)\Delta T \times t = 1.00 \times 10^{-6} \ \frac{cal}{m \cdot s \cdot {}^\circ C} \times \left(\frac{1.00 \ m^2}{0.0100 \ m}\right) \times 60 \ {}^\circ C \times 3600 \ s$$

$$= 21.6 \ cal$$

6. 길이가 $12.0 m$이고 철로 만들어진 선로가 $0.00^\circ C$에서 설치되었다. $40.0^\circ C$에서 선로들끼리 닿지 않기 위한 최소 간격은 얼마인가?

$\alpha = 12.5 \times 10^{-6}/K$ (from 표 13.2)

$$\alpha = \frac{1}{L}\frac{\Delta L}{\Delta T}$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta L = \alpha L \Delta T = 12.5 \times 10^{-6}/K \times 12.0 m \times 40.0 K = 6.00 \times 10^{-3} m = 6.00 mm$$

7. 부피 V가 온도에 의존한다면 질량밀도 ρ 역시 온도에 의존한다. 온도 변화량 ΔT에 의한 질량밀도의 변화량 $\Delta\rho$는 $\Delta\rho = -\beta\rho\Delta T$가 되는 것을 보여라. 여기서 β는 부피팽창 계수이다. 음의 부호(-)를 설명하여라.

$$\alpha = \frac{1}{L}\frac{\Delta L}{\Delta T} \qquad \text{(등방성)} \qquad \beta = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T}$$

$$\rho = \frac{M}{V} \qquad \text{(질량은 상수)}$$

$$\Rightarrow \qquad d\rho = d\left(\frac{M}{V}\right) = Md\left(\frac{1}{V}\right) = -\frac{M}{V^2}dV = -\frac{M}{V^2}\beta V dT = -\beta\frac{M}{V}dT = -\beta\rho dT$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\rho = -\beta\rho\Delta T \qquad \text{(- 부호는 온도와 밀도가 반비례한다는 의미)}$$

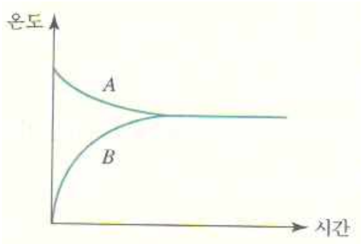
8. 밀도가 ρ이고 비열이 c인 금속으로 만든 막대의 단면적이 A이다. 이 막대의 열팽창계수가 α라면 이 막대에 Q만큼의 열을 가해줄 때 길이가 얼마나 늘어날 것인지 구하여라.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{LA} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{m}{\rho A}$$

$$Q = cm\Delta T \qquad \Rightarrow \qquad \Delta T = \frac{Q}{cm}$$

$$\alpha = \frac{1}{L}\frac{\Delta L}{\Delta T} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta L = \alpha\Delta T\ L = \alpha\left(\frac{Q}{cm}\right)\left(\frac{m}{\rho A}\right) = \frac{\alpha Q}{c\rho A}$$

9. 온도가 다른 두 물체를 접촉시켰더니 두 물체 A와 B의 온도가 그림과 같이 시간에 따라 변하였다. 비열이 큰 물체는 둘 중 어느 것인가?



A 의 비열이 더 크다.

10. 이상기체 1몰의 압력 P, 부피 V, 온도 T는 상태방정식 $PV = RT$를 만족한다. (R은 기체상수). 1기압, $T = 400K$에서 이 이상기체의 부피팽창계수는 얼마인가?

$$PV = RT \qquad \Rightarrow \qquad P\Delta V = R\Delta T \qquad \Rightarrow \qquad \Delta V = \frac{R\Delta T}{P}$$

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{P}{RT}\frac{\left(\frac{R\Delta T}{P}\right)}{\Delta T} = \frac{P}{RT}\frac{R\Delta T}{P\Delta T} = \frac{1}{T} = \frac{1}{400K} = \frac{1}{400}/K$$

대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (13장) - by 송현석

11. 어떤 이상기체를 부피에 따른 압력이 $P = \alpha V^2$을 만족시키도록 하면서 팽창시킨다. 부피가 두 배로 팽창했다면 온도는 몇 배가 되었겠는가?

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{PV}{nR} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{(\alpha V^2)V}{nR} = \frac{\alpha}{nR}V^3 \quad \Rightarrow \quad T \sim V^3$$

$$T_i \sim V_i^3 \quad == \ (\ V_f = 2V_i \ ) \ ==\Rightarrow \quad T_f \sim V_f^3 \sim (2V_i)^3 \sim 8V_i^3 \sim 8T_i$$

부피가 V에서 $2V$로 두 배 팽창하는 동안 이 기체가 외부에 한 일은 얼마인가?

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P\ dV = \int_V^{2V} \alpha V^2\ dV = \alpha\left[\frac{1}{3}V^3\right]_V^{2V} = \frac{1}{3}\alpha\{(2V)^3 - (V)^3\} = \frac{7}{3}\alpha V^3$$

12. 동일한 종류의 이상기체가 두 상자 A, B에 담겨 있다. 상자 A의 부피는 B의 두 배이고 두 기체의 압력은 서로 같다. A에 담겨 있는 기체분자의 평균속력은 B에 있는 기체의 평균속력의 몇 배인가?

$$PV = Nk_BT = nRT \quad \Rightarrow \quad V \sim T \quad (P\text{가 일정할 때})$$

$$K = \frac{1}{2}mv_{rms}^2 = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}Nk_BT = \frac{3}{2}nRT$$

$$\Rightarrow \quad v_{rms} \sim \sqrt{V} \sim \sqrt{T} \quad (P\text{가 일정할 때}) \quad \Rightarrow \quad v_{rms,A} = \sqrt{2}\,v_{rms,B}$$

13. 기체 입자의 평균속력이 $500\,m/s$이고 다른 입자들과의 충돌 사이의 시간 간격이 평균 $1.00 \times 10^{-10}\,s$라면 평균 자유거리는 얼마인가?

$$v = \frac{r}{t} \quad \Rightarrow \quad \lambda = r = vt = 500\,m/s \times (1.00 \times 10^{-10}\,s) = 5.00 \times 10^{-8}\,m$$

14. 지름이 $2.00 \times 10^{-10}m$인 입자들이 이상기체의 상태방정식을 따른다고 하자. 이 입자들이 $1.00 \times 10^{-3}N/m^2$의 압력에서 $20.0\,m$ 이상의 평균 자유거리를 가지려면 온도가 얼마 이상이어야 하는가?

$$d = 2.00 \times 10^{-10}\ m, \quad P = 1.00 \times 10^{-3}\ N/m^2, \quad k_B = 1.38 \times 10^{-23}\ J/K$$

$$\lambda \geq 20.0\ m, \quad PV = Nk_BT = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{V} = \frac{P}{k_BT}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \frac{N}{V}} \geq 20\,m \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \frac{P}{k_BT}} \geq 20\,m \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{k_BT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} \geq 20\,m$$

$$T \geq 20\,m \times \frac{\sqrt{2}\pi d^2 P}{k_B} = 20\,m \times \frac{\sqrt{2}\pi(2.0 \times 10^{-10}\ m)^2 \times (1.0 \times 10^{-3}\ N/m^2)}{(1.38 \times 10^{-23}\ J/K)} \approx 258\ K$$

15. 식 (13.19)로부터 부분율이 최대가 되는 속력 v_p와 단순 평균속력 v를 구하여라.

$$P(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}dv \quad \cdots\cdots \quad \text{식 (13.19)}$$

◎ $\dfrac{\partial P(v)}{\partial v} = 0$ 을 만족하는 속력이 부분률이 최대가 되는 속력 v_p 이다.

$$\frac{\partial P(v)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left[4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\right] = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\right) = 2v\ e^{-mv^2/2k_BT} - \frac{mv^3}{k_BT}e^{-mv^2/2k_BT} = \left(2v - \frac{mv^3}{k_BT}\right)e^{-mv^2/2k_BT} = 0$$

$$2v - \frac{mv^3}{k_BT} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2 - \frac{mv^2}{k_BT} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_p = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$$

◎ $v = \int_0^\infty v\ P(v)dv$ 가 단순 평균 속력 v 이다.

$$v = \int_0^\infty v\ 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\ dv$$

(치환 $x = \dfrac{m}{2k_BT}\ v^2 \ \Rightarrow\ v^2 = \dfrac{2k_BT}{m}\ x$)

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\ v\ dv$$

(미분 $dx = \dfrac{m}{k_BT}\ v\ dv \ \Rightarrow\ vdv = \dfrac{k_BT}{m}dx$)

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\int_0^\infty \left(\frac{2k_BT}{m}\ x\right)\ e^{-x}\ \left(\frac{k_BT}{m}dx\right) = 8\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\left(\frac{k_BT}{m}\right)^2\int_0^\infty x\ e^{-x}\ dx$$

$$= \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}\int_0^\infty x\ e^{-x}\ dx$$

($\int_0^\infty x\ e^{-x}\ dx = \left[-x\ e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\ dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$)

$$= \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

$$\begin{cases} v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3k_BT}{m}} = 1.73\sqrt{\dfrac{k_BT}{m}} \\ v \quad\ = \sqrt{\dfrac{8k_BT}{\pi m}} = 1.60\sqrt{\dfrac{k_BT}{m}} \\ v_p \quad = \sqrt{\dfrac{2k_BT}{m}} = 1.41\sqrt{\dfrac{k_BT}{m}} \end{cases}$$

16. 상온($300K$) 1기압에서 공기 중의 질소분자와 산소분자의 제곱평균제곱근 속력을 각각 구하여라.

$$T = 300K, \qquad P = 1atm = 1\times(1013\times 10^2 Pa)$$
$$k_B = 1.38\times 10^{-23} J/K,$$
$$N_A = 6.022\times 10^{23}$$

$$K = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{M/N_A}} = \sqrt{3k_BT\times\frac{N_A}{M}}$$

$$\text{분자 1개의 질량} \quad m = \frac{M\ (\text{몰질량})}{N_A\ (\text{아보가드로수})}$$

$$\begin{cases}\text{질소분자 } N_2\text{의 몰질량} = 28g = 0.028kg \\ \text{산소분자 } O_2\text{의 몰질량} = 32g = 0.032kg\end{cases}$$

$$\text{질소분자} \qquad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3k_BT\times\frac{N_A}{M}} = \sqrt{3\times(1.38\times10^{-23}J/K)\times(300K)\times\frac{6.022\times10^{23}}{0.028kg}}$$
$$\approx 0.517\times 10^3 m/s = 517 m/s$$

$$\text{산소분자} \qquad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3k_BT\times\frac{N_A}{M}} = \sqrt{3\times(1.38\times10^{-23}J/K)\times(300K)\times\frac{6.022\times10^{23}}{0.032kg}}$$
$$\approx 0.483\times 10^3 m/s = 483 m/s$$

17. $1{,}000K$ 에서 수소분자들의 평균 병진운동에너지는 몇 J 인가?

$$k_B = 1.38\times 10^{-23} J/K, \qquad T = 1000\ K$$

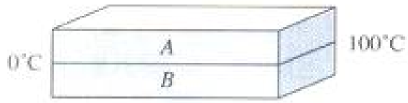
$$K = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}Nk_BT = \frac{3}{2}\times(1\text{개})\times(1.38\times10^{-23}\ J/K)\times(1000\ K)$$
$$= 2.07\times 10^{-20}\ J$$

18. 온도가 다른 두 물체 사이에 기체가 있을 경우 두 물체 사이를 움직이는 기체 분자들에 의해 열이 전달된다. 평균 자유거리가 큰 기체와 평균 자유거리가 작은 기체 중 어느 쪽의 열전도도가 더 높겠는가?

평균 자유거리가 작은 기체의 열전도도가 더 높다.

19. 그림과 같이 크기와 모양은 같고 서로 다른 종류의 금속으로 만들어진 막대 A와 B를 두 가지 방식으로 붙인다. A의 열전도도는 B의 열전도도의 3배이다. $100\,cal$가 전달되는 데에 그림 (a)와 같이 붙였을 때에 2분이 걸렸다면, 그림 (b)와 같이 붙이면 얼마나 걸리겠는가?

(a)



(b)

$$H = \frac{Q}{t}$$
$$H = k\left(\frac{A}{d}\right)\Delta T$$

$$\begin{cases} H_A = k_A\left(\frac{A_A}{d_A}\right)\Delta T_A = 3k\left(\frac{A}{d}\right)(T_{center} - 0) \\ H_B = k_B\left(\frac{A_B}{d_B}\right)\Delta T_B = \ k\left(\frac{A}{d}\right)(100 - T_{center}) \end{cases} \qquad \begin{cases} H_A = k_A\left(\frac{A_A}{d_A}\right)\Delta T_A = 3k\left(\frac{A}{d}\right)(100 - 0) \\ H_B = k_B\left(\frac{A_B}{d_B}\right)\Delta T_B = \ k\left(\frac{A}{d}\right)(100 - 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H_A &= H_B \\ 3k\left(\frac{A}{d}\right)(T_{center} - 0) &= k\left(\frac{A}{d}\right)(100 - T_{center}) \\ 3T_{center} &= 100 - T_{center} \\ 4T_{center} &= 100 \\ T_{center} &= 25^\circ C \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H_A = 3k\left(\frac{A}{d}\right)(25 - 0) = 75k\left(\frac{A}{d}\right) \\ H_B = \ k\left(\frac{A}{d}\right)(100 - 25) = 75k\left(\frac{A}{d}\right) \end{cases}$$

$$H_{직} = H_A = H_B = 75k\left(\frac{A}{d}\right)$$

$$\begin{aligned} H_{병} &= H_A + H_B \\ &= 300k\left(\frac{A}{d}\right) + 100k\left(\frac{A}{d}\right) \\ &= 400k\left(\frac{A}{d}\right) \end{aligned}$$

$$H_{직} = \frac{Q}{t_{직}} \quad \Rightarrow \quad Q = H_{직}t_{직} = 100cal \qquad H_{병} = \frac{Q}{t_{병}} \quad \Rightarrow \quad Q = H_{병}t_{병} = 100cal$$

$$H_{직}t_{직} = H_{병}t_{병}$$

$$t_{병} = \frac{H_{직}}{H_{병}}t_{직} = \frac{75k\left(\frac{A}{d}\right)}{400k\left(\frac{A}{d}\right)} \times 2분 = \frac{3}{16} \times 2분 = \frac{3}{8}분$$

20. 모래알 하나의 질량이 $2.00\times10^{-3}\,g$이라고 하자. 모래알을 $1.00\,m$ 높이에서 떨어뜨리고, 떨어진 모래알은 정지한다고 한다. 1초에 50개의 모래알이 $1.00\,cm^2$ 면적의 바닥에 떨어진다고 할 때, 모래가 바닥에 가하는 압력은 얼마인가?

$$m = 2.00\times10^{-3}\,g = 2.00\times10^{-6}\,kg,\qquad h = 1.00\,m,\qquad A = 1.00\,cm^2 = 1.00\times10^{-4}\,m^2$$

$$\begin{cases} K = \dfrac{1}{2}m\overline{v^2} \\ U = mgh \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}m\overline{v^2} = mgh \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{2gh}$$

모래알 한알이 벽에 가하는 충격량

$$J = m\sqrt{\overline{v^2}} = m\sqrt{2gh}$$

1초 동안 바닥에 가해지는 평균 힘

$$\begin{aligned}\overline{F} = \frac{50\times J}{\Delta t} = \frac{50\times m\sqrt{2gh}}{1s} &= 50/s\times m\sqrt{2gh} \\ &= 50/s\times(2.00\times10^{-6}\,kg)\times\sqrt{2\times(9.8\,m/s^2)\times(1.00\,m)} \\ &\approx 4.43\times10^{-4}\,kg\cdot m/s^2 \\ &\approx 4.43\times10^{-4}\,N\end{aligned}$$

모래가 바닥에 가하는 평균 압력

$$\overline{P} = \frac{\overline{F}}{A} = \frac{4.43\times10^{-4}\,N}{1.00\times10^{-4}\,m^2} = 4.43\,N/m^2 = 4.43\,Pa$$