대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

1. 지구와 태양의 질량은 각각 $5.98\times10^{24}\,kg$, $1.99\times10^{30}\,kg$이다. 만약에 지구와 태양이 전기적으로 중성이 아니고 크기와 부호가 똑같은 전하량을 띠고 있다고 가정한다면, 이 둘 사이의 만유인력을 상쇄시키는 데 필요한 지구와 태양의 전하량의 크기는 얼마이어야 하는가? 그리고 이 전하량의 크기는 기본 전하량의 몇 배인가?
(지구와 태양의 질량 중심점 사이 거리는 약 $15\times10^{10}\,m$이다.)

$$F_{g,\ s\leftrightarrow e} = -G\frac{m_s m_e}{r_{s\leftrightarrow e}^2} = -(6.67\times10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2)\times\frac{(1.99\times10^{30}\,kg)\times(5.98\times10^{24}\,kg)}{(15\times10^{10}\,m)^2}$$

$$\approx -3.53\times10^{22}\,N$$

$$F_{E,\ s\leftrightarrow e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_s q_e}{r_{s\leftrightarrow e}^2} = (8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{q_s q_e}{(15\times10^{10}\,m)^2}\approx 3.53\times10^{22}\,N$$

$$\Rightarrow \quad q_s q_e = q^2 \approx \frac{(15\times10^{10}\,m)^2}{(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)}\times(3.53\times10^{22}\,N)$$

$$\Rightarrow \quad q\approx\sqrt{\frac{(15\times10^{10}\,m)^2}{(8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)}\times(3.53\times10^{22}\,N)}\approx 2.97\times10^{16}\,C$$

$$\frac{q}{e} = \frac{2.97\times10^{16}\,C}{1.60\times10^{-19}\,C}\approx 1.86\times10^{35}\text{ 배}$$

2. 전자와 양성자가 대략 보어 반지름, 즉 $0.530\times10^{-10}\,m$ 정도 떨어져 있다.
전자와 양성자 사이의 전기력과 중력을 각각 구하여라.
구한 전기력과 중력의 비를 구하여라.

$$F_{E,\ p\leftrightarrow e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_p q_e}{r_{p\leftrightarrow e}^2}$$

$$= (8.99\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(1.60\times10^{-19}\,C)\times(-1.60\times10^{-19}\,C)}{(0.530\times10^{-10}\,m)^2}$$

$$\approx -8.19\times10^8\,N$$

$$F_{g,\ p\leftrightarrow e} = -G\frac{m_p m_e}{r_{p\leftrightarrow e}^2}$$

$$= -(6.67\times10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2)\times\frac{(1.67\times10^{-27}\,kg)\times(9.11\times10^{-31}\,kg)}{(0.530\times10^{-10}\,m)^2}$$

$$\approx -3.61\times10^{-47}\,N$$

$$\frac{F_{E,\ p\leftrightarrow e}}{F_{g,\ p\leftrightarrow e}}\approx\frac{-8.19\times10^8\,N}{-3.61\times10^{-47}\,N}\approx 2.27\times10^{39}$$

대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

3. 일직선상에 세 점전하가 간격 d를 두고 놓여 있다. 전하량은 순서대로 $-q$, $+q$, $-q$ 이다. 각 전하에 작용하는 힘을 구하여라.

전기력(쿨롱력) $\vec{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}$ 중첩의 원리

$$\vec{F}_{(1)}=\vec{F}_{(1)\leftarrow(2)}+\vec{F}_{(1)\leftarrow(3)}=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{d^2}+\left(-\frac{1}{(2d)^2}\right)\right\}=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{3}{4d^2}$$ (+ 오른쪽으로)

$$\vec{F}_{(2)}=\vec{F}_{(2)\leftarrow(1)}+\vec{F}_{(2)\leftarrow(3)}=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left(-\frac{1}{d^2}\right)+\frac{1}{d^2}\right\}=0$$

$$\vec{F}_{(3)}=\vec{F}_{(3)\leftarrow(1)}+\vec{F}_{(3)\leftarrow(2)}=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{(2d)^2}\right)+\left(-\frac{1}{d^2}\right)\right\}=-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{3}{4d^2}$$ (-왼쪽으로)

4. 전하량이 각각 q인 두 점전하가 정삼각형 모양 물체의 두 꼭지점에 놓여 있고 나머지 한 꼭지점에는 전하량이 $-q$인 전하가 있다. 전하 $-q$에 작용하는 힘을 구하여라.

전기력(쿨롱력) $\vec{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}$ 중첩의 원리, 벡터합, 대칭성

$$\vec{F}=\vec{F}_{(3)\leftarrow(1)}+\vec{F}_{(3)\leftarrow(2)}=\begin{cases} x-axis=\vec{F}_{(3)\leftarrow(1)}\cos 60^\circ-\vec{F}_{(3)\leftarrow(2)}\cos 60^\circ=0 \\ y-axis=\vec{F}_{(3)\leftarrow(1)}\cos 30^\circ+\vec{F}_{(3)\leftarrow(2)}\cos 30^\circ \\ \qquad=2\times\vec{F}_{(3)\leftarrow(1)}\cos 30^\circ \\ \qquad=2\times\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \qquad=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{3}\,q^2}{d^2} \end{cases}$$

삼각형의 무게중심을 향하는 방향

5. 두 점전하의 전하량의 합이 $+10.0\,\mu C$ 이고 이 둘은 서로 $4.00\,m$ 떨어져 있다. 이때 두 점전하 사이에는 $12.0\,mN$ 의 척력이 작용한다. 이때 두 점전하의 전하량은 각각 얼마인가? 만약에 이 정전기력이 척력이 아니라 인력이면 두 점전하의 전하량은 각각 얼마인가?

<척력인 경우>

$$q_1 + q_2 = +10.0\,\mu C = +10.0\times 10^{-6}\,C \quad \Rightarrow \quad q_2 = (+10.0\times 10^{-6}\,C) - q_1$$

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = (8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{q_1 q_2}{(4.00\,m)^2} = 12.0\,mN = 12.0\times 10^{-3}\,N$$

$$\Rightarrow \quad q_1 q_2 = \frac{(4.00\,m)^2}{(8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)}\times(12.0\times 10^{-3}\,N) \approx 21.357\times 10^{-12}\,C^2$$

$$\Rightarrow \quad q_1 q_2 = q_1\left\{(+10.0\times 10^{-6}\,C) - q_1\right\} = (+10.0\times 10^{-6}\,C)q_1 - q_1^2 \approx 21.357\times 10^{-12}\,C^2$$

$$\Rightarrow \quad q_1^2 - (10.0\times 10^{-6}\,C)\,q_1 + 21.357\times 10^{-12}\,C^2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad q_1 = \frac{(+10.0\times 10^{-6}\,C)\pm\sqrt{(10.0\times 10^{-6}\,C)^2 - 4\times(21.357\times 10^{-12}\,C^2)}}{2}$$

$$\approx (+6.91\times 10^{-6}\,C) \quad \text{or} \quad (+3.09\times 10^{-6}\,C) \approx q_2$$

$$\approx (+6.91\,\mu C) \quad \text{or} \quad (+3.09\,\mu C) \approx q_2$$

<인력인 경우>

$$q_1 - q_2 = +10.0\,\mu C = +10.0\times 10^{-6}\,C \quad \Rightarrow \quad q_2 = q_1 - (10.0\times 10^{-6}\,C)$$

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = (8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)\times\frac{q_1 q_2}{(4.00\,m)^2} = 12.0\,mN = 12.0\times 10^{-3}\,N$$

$$\Rightarrow \quad q_1 q_2 = \frac{(4.00\,m)^2}{(8.99\times 10^9\,N\cdot m^2/C^2)}\times(12.0\times 10^{-3}\,N) \approx 21.357\times 10^{-12}\,C^2$$

$$\Rightarrow \quad q_1 q_2 = q_1\left\{q_1 - (10.0\times 10^{-6}\,C)\right\} = q_1^2 - (10.0\times 10^{-6}\,C)q_1 \approx 21.357\times 10^{-12}\,C^2$$

$$\Rightarrow \quad q_1^2 - (10.0\times 10^{-6}\,C)\,q_1 - 21.357\times 10^{-12}\,C^2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad q_1 = \frac{(+10.0\times 10^{-6}\,C)\pm\sqrt{(10.0\times 10^{-6}\,C)^2 - 4\times(-21.357\times 10^{-12}\,C^2)}}{2}$$

$$\approx (+11.81\times 10^{-6}\,C) \quad \text{or} \quad (-1.81\times 10^{-6}\,C) \approx q_2$$

$$\approx (+11.81\,\mu C) \quad \text{or} \quad (-1.81\,\mu C) \approx q_2$$

6. 수소원자에 대한 보어 모형은 $+e$의 전하를 갖고 있는 양성자의 주위를 $-e$의 전하를 갖는 전자가 원운동 하는 것이다. 양성자와 전자 간의 정전기적 인력은 전자가 원궤도를 유지하기 위한 구심력을 제공한다. 원운동의 반지름은 얼마인가?

구심력 $F_c = m\dfrac{v^2}{r}$

전기력 $F_E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}$

$$\Rightarrow \quad F_c = F_E \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mv^2} \quad \text{or} \quad v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mr}}$$

if $v = c$

$$then \quad r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mv^2} = (8.99\times10^9 N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(1.60\times10^{-19}C)^2}{(9.11\times10^{-31}kg)\times(3\times10^8 m/s)^2}$$

$$\approx 2.81\times10^{-15}m$$

if $r = 0.53\,\text{Å} = 0.53\times10^{-10}m$

$$then \quad v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mr}}$$

$$= \sqrt{(8.99\times10^9 N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(1.60\times10^{-19}C)^2}{(9.11\times10^{-31}kg)\times(0.53\times10^{-10}m)}}$$

$$\approx 2.18\times10^6 m/s$$

$\approx$ 광속 $(c = 3\times10^8 m/s)$ 의 약 0.73%

7. 질량이 $1.00\times10^{-3}kg$인 물방울이 떨어지지 않고 공중에 떠 있기 위해서는 얼마의 전하량이 있어야 하는가? 단, 이 물방울 위치의 전기장은 지표면을 향하며 $100N/C$의 세기를 가진다고 한다.

$m = 1.00\times10^{-3}kg$

$E = 100N/C$

중력 $F_g = mg$

전기력 $F_E = qE$

$$\Rightarrow \quad F_g + F_E = 0$$

$$\Rightarrow \quad mg + qE = 0$$

$$\Rightarrow \quad q = -\frac{mg}{E}$$

$$= -\frac{(1.00\times10^{-3})\times(9.8m/s^2)}{100N/C}$$

$$= -9.8\times10^{-5}C$$

(전기장과 반대 방향으로 힘을 받아야 하므로 음전하여야 한다.)

8. 전하량이 $+5.00\,\mu C$ 인 점전하가 원점에서부터 $(3.00\,i + 2.00\,j)\,m$ 위치에 놓여 있다. 원점에서부터 $(5.00\,i - 3.00\,j)\,m$만큼 떨어진 곳에 이 점전하가 만드는 전기장을 구하라.

$$\Delta\vec{r} = (5.00\,i - 3.00\,i)\,m + (-3.00\,j - 2.00\,j)\,m = (2.00\,i - 5.00\,j)m$$
$$r^2 = (2.00\,m)^2 + (5.00\,m)^2 = 29.00\,m^2$$

$$E = \frac{F_E}{q_0} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,q_0}{r^2}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = (8.99\times10^9 N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(+5.00\times10^{-6}\,C)}{29.00\,m^2}$$
$$= 1.55\times10^3\,N/C$$

9. $1.00\times10^4\,N/C$ 의 균일한 전기장 내에서 전자를 가만히 놓았다. 전자가 $1.00\,cm$를 진행하는 순간에 대해서,

(1) 진행속력은 얼마인가?

$$E = 1.00\times10^4\,N/C, \qquad d = 1.00\times10^{-2}\,m$$

전기력 $\begin{matrix} F_E = qE \\ F = ma \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad F_E = F \quad\Rightarrow\quad qE = ma \quad\Rightarrow\quad a = \frac{qE}{m}$

$$v^2 - v_0^2 = 2ad$$
$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2\frac{qE}{m}d}$$
$$= \sqrt{2\times\frac{(1.60\times10^{-19}\,C)\times(1.00\times10^4\,N/C)}{(9.11\times10^{-31}\,kg)}\times(1.00\times10^{-2}\,m)}$$
$$\approx 5.93\times10^6 m/s$$

(2) 얻은 운동에너지는 얼마인가?

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times(9.11\times10^{-31}\,kg)\times(5.93\times10^6\,m/s)^2 \approx 1.60\times10^{-17}\,J$$
$$W = qEd = (1.60\times10^{-19}\,C)\times(1.00\times10^4\,N/C)\times(1.00\times10^{-2}\,m) = 1.60\times10^{-17}\,J$$

(전기력은 보존력이므로 전자가 얻은 운동에너지는 받은 일의 양과 같다.)

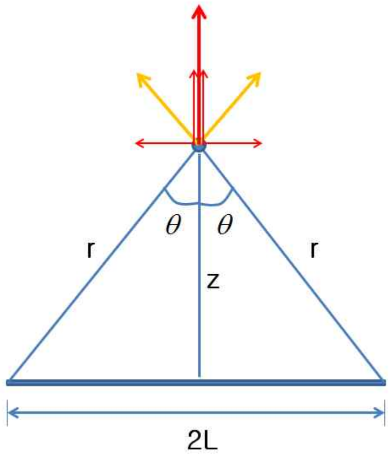
(3) 시간은 얼마나 걸리겠는가?

$$d = \frac{1}{2}at^2 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2dm}{qE}} = \sqrt{\frac{2\times(1.00\times10^{-2}\,m)\times(9.11\times10^{-31}\,kg)}{(1.60\times10^{-19}\,C)\times(1.00\times10^4\,N/C)}}$$
$$\approx 3.37\times10^{-9}s$$

10. 점 A에 점전하 $+Q$가 있고, 점 B에 점전하 $-Q$가 있다. 선분 AB를 수직 이등분하는 선상에 있는 점 P에서 전기장의 방향은?

아랫방향

11. 무한히 긴 도선이 선전하밀도 λ로 대전되어 있다. 이 도선에서 z만큼 떨어진 곳에서 전기장이 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}$와 같이 주어짐을 보여라. 이 전기장의 방향이 도선에 대해 수직임을 설명하여라.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{선}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{선}\frac{\lambda dx}{r^2}\hat{r} \qquad (\ dq = \lambda dx\ )$$

(좌우 대칭이므로 전기장의 수평(x)성분은 상쇄되고 수직(z)성분만 남는다.)

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{x=0}^{x=L}\frac{1}{r^2}\ \cos\theta\ dx\ \hat{z} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{x=0}^{x=L}\frac{1}{r^2}\ \frac{z}{r}\ dx\ \hat{z} \qquad (\ \cos\theta = \frac{z}{r}\ )$$

$$= \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0}\int_{x=0}^{x=L}\frac{1}{r^3}\ dx\ \hat{z} = \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0}\int_{x=0}^{x=L}\frac{1}{(z^2+x^2)^{3/2}}\ dx\ \hat{z} \qquad (\ r = \sqrt{z^2+x^2}\ )$$

$$= \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{x}{z^2\sqrt{z^2+x^2}}\right]_{x=0}^{x=L}\hat{z} \qquad \left(\ \int\frac{1}{(a^2+u^2)^{3/2}}du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C\ \right)$$

$$= \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{L}{z^2\sqrt{z^2+L^2}}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{L}{z\sqrt{z^2+L^2}}\right)\hat{z} \qquad (\ \text{if}\ \ L \to \infty,\ \ then\ \ z^2+L^2 \Rightarrow L^2\ )$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{L}{z\sqrt{L^2}}\right)\hat{z} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{z}\right)\hat{z} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}\ \hat{z}$$

12. 선전하밀도가 $\lambda = 1.20\,\mu C/m$인 무한히 긴 도선이 y축을 따라 놓여 있고 원점에서부터 $2.00\,m$ 떨어진 x축 위에 전하량이 $4.00\,\mu C$인 점전하가 놓여 있다. 원점에서부터 $10.0\,m$ 떨어져 있는 z축 위의 점에서 전기장을 구하여라.

<선전하에 의해 발생하는 전기장 - 11번 문제의 결과를 이용>

$$E_{\text{선전하}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}\hat{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda}{z}\hat{k} = (8.99\times 10^9 N\cdot m^2/C^2)\times\frac{2\times(1.20\times 10^{-6}\,C/m)}{10.0\,m}\hat{k}$$
$$= (2.1576\times 10^3\,N/C)\ \hat{k}$$

<점전하에 의해 발생하는 전기장>

$$\Delta\vec{r} = (0.00\,\hat{i} - 2.00\,\hat{i})\,m + (0.00\,\hat{j} - 0.00\,\hat{j})\,m + (10.00\,\hat{k} - 0.00\,\hat{k})\,m$$
$$= (-2.00\,\hat{i} + 10.00\,\hat{k})m$$

$$r^2 = (-2.00\,m)^2 + (10.00\,m)^2 = 104.00\,m^2$$

$$E_{\text{점전하}} = \frac{F_E}{q_0} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q q_0}{r^2}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = (8.99\times 10^9 N\cdot m^2/C^2)\times\frac{(4.00\times 10^{-6}\,C)}{104.00\,m^2}$$
$$= 3.4576\times 10^2\,N/C$$

$$E_{\text{점전하},\ x\text{성분}} = -E_{\text{점전하}}\times\sin\theta = -(3.4576\times 10^2\,N/C)\times\frac{2.00\,m}{\sqrt{104\,m^2}}$$
$$\approx (-0.6781\times 10^2\,N/C)\ \hat{i}$$
$$E_{\text{점전하},\ z\text{성분}} = E_{\text{점전하}}\times\cos\theta = (3.4576\times 10^2\,N/C)\times\frac{10.0\,m}{\sqrt{104\,m^2}}$$
$$\approx (3.3906\times 10^2\,N/C)\ \hat{k}$$

<선전하와 점전하에 의해 발생한 전기장의 합>

$$E_{x\text{성분}} \approx (-0.6781\times 10^2\,N/C)\ \hat{i}$$
$$E_{z\text{성분}} \approx \left\{(2.1576\times 10^3\,N/C) + (3.3906\times 10^2\,N/C)\right\}\ \hat{k} \approx (2.4967\times 10^3\,N/C)\ \hat{k}$$

$$E \approx \sqrt{(-0.6781\times 10^2\,N/C)^2 + (2.4967\times 10^3\,N/C)^2} \approx 2.4976\times 10^3\,N/C$$

13. 반지름이 R인 원판에 총 전하량이 Q인 전하가 일정한 면전하밀도 σ로 대전되어 있다.
(1) 이 원판의 중심에서 수직 방향으로 x만큼 떨어진 곳에서의 전기장을 구하여라.

예제 15.5의 결과 $E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\ x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ 에서 a를 r로, q를 dq로 바꿔서 이용하면

$$d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq\ x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\ \hat{x}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\ (2\pi\sigma r\ dr)\ \hat{x}=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\ (r\ dr)\ \hat{x}$$

$$(\ dq=\sigma dA=\sigma 2\pi r\ dr=2\pi\sigma r\ dr\ ) \qquad =\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\frac{r}{(x^2+r^2)^{3/2}}\ dr\ \hat{x}$$

$$\vec{E}=\int d\vec{E}\ =\int_{r=0}^{r=R}\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\frac{r}{(x^2+r^2)^{3/2}}\ dr\ \hat{x}\ =\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}\frac{r}{(x^2+r^2)^{3/2}}\ dr\ \hat{x}$$

$$(\ \text{치환}\quad r^2+x^2=s^2\quad \text{미분}\quad 2r\ dr=2s\ ds\quad\Rightarrow\quad dr=\frac{s}{r}ds\ )$$

$$=\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_{s=\sqrt{x^2}}^{s=\sqrt{R^2+x^2}}\frac{r}{s^3}\ \frac{s}{r}\ ds\ \hat{x}\ =\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_{s=\sqrt{x^2}}^{s=\sqrt{R^2+x^2}}\frac{1}{s^2}\ ds\ \hat{x}$$

$$=\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{s}\right]_{s=\sqrt{x^2}}^{s=\sqrt{R^2+x^2}}\ \hat{x}\ =\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)\hat{x}$$

$$=\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\hat{x}\ =\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\hat{x}$$

$$=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\hat{x}\ =\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\hat{x}$$

(2) 이 원판의 반지름이 무한히 클 경우에 전기장을 구하여라.

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\hat{x} \qquad (\ \text{if}\quad R\to\infty,\quad then\quad x^2+R^2\Rightarrow\infty\ )$$

$$=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\infty}\right)\hat{x}\ =\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}\right)\hat{x}\ =\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\ \hat{x} \qquad (\ \text{무한 평면이 만드는 전기장}\ )$$

(3) x가 R보다 훨씬 더 클 경우($x\gg R$), 원판을 점전하로 취급할 수 있음을 보여라.
(이항전개 $(1+R^2/x^2)^{-1/2}\approx 1-R^2/2x^2$을 이용하라.)

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\hat{x}=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{x\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}}\right)\hat{x}=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}}\right)\hat{x}$$

$$=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\left[1+\left(\frac{R}{x}\right)^2\right]^{-1/2}\right)\hat{x}=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\left\{1-\frac{R^2}{2x^2}\right\}\right)\hat{x}=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{R^2}{2x^2}\right)\hat{x}=\frac{\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}\right)\hat{x}$$

$$=\frac{A\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}\right)\hat{x}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2}\right)\hat{x} \qquad (\ Q=\sigma A\ )$$

(점전하 Q 가 거리 x만큼 떨어진 지점에 만드는 전기장과 같다.)

14. 점전하 Q로부터 거리 r 떨어진 곳에 쌍극자 p가 있다. 이 쌍극자가 전하에 끌리는 힘의 세기가 거리의 세제곱에 반비례함을 보여라. 쌍극자를 작은 간격 d만큼 떨어진 두 전하쌍 이라 하고 각 전하가 받는 힘을 계산한 후 근사적인 표현을 구하여라.

$$F_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{(r-\frac{d}{2})^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2 - rd + \frac{d^2}{4}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\frac{1}{1-\frac{d}{r}+\frac{d^2}{4r^2}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left(1-\frac{d}{2r}\right)^{-2} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left(1+\frac{d}{r}\right)$$

$$F_+ = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{(r+\frac{d}{2})^2} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2 + rd + \frac{d^2}{4}} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\frac{1}{1+\frac{d}{r}+\frac{d^2}{4r^2}}$$

$$= +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left(1+\frac{d}{2r}\right)^{-2} \approx +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left(1-\frac{d}{r}\right)$$

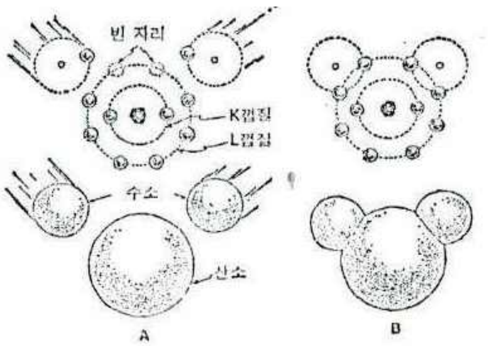
$$F = F_- + F_+$$

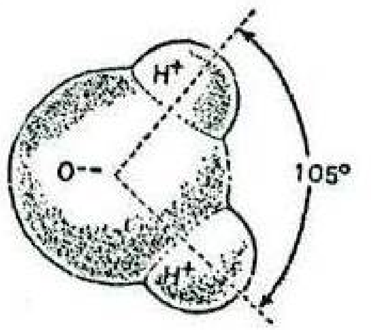
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left\{-\left(1+\frac{d}{r}\right)+\left(1-\frac{d}{r}\right)\right\} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\frac{2d}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Qqd}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Qp}{r^3}$$

(-인력)

15. 수증기 상태에서 물분자(H_2O)의 쌍극자 모멘트의 크기는 대략 $6.20\times10^{-30}\,C\cdot m$와 같다.

(1) 이 물분자의 중심에서 양전하와 음전하는 서로 얼마나 떨어져 있는지 구하여라.
(물분자에는 양성자 10개, 전자 10개가 있다.)





$$p = q\ d \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{p}{q} = \frac{p}{10\ e} = \frac{6.20\times10^{-30}\,C\cdot m}{10\times(1.60\times10^{-19}\,C)} \approx 3.875\times10^{-12}\,m$$

(2) 이 물분자를 세기가 $2.00\times10^4\,N/C$ 인 전기장 아래 두었다.
이 물분자가 받는 최대 돌림힘을 구하여라.

$$\tau = p\ E\ \sin\theta = (6.2\times10^{-30}\,C\cdot m)\times(2.00\times10^4\,N/C)\times(\sin 90^\circ) = 12.4\times10^{-26}\,N\cdot m$$

대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (15장) - by 송현석

16. 전기장이 균일한 영역에 있는 쌍극자의 쌍극자 모멘트는 전기장에 나란하게 나열하기 위하여 회전한다. 이때 전기장은 (양, 음)의 일을 하고 위치에너지는 (증가, 감소)한다. 괄호 안에서 옳은 답은?

양, 감소

17. 전기장이 $\vec{E}=E_0\hat{j}$로 균일한 평면에 q인 전하는 (a, a)에, -q인 전하는 (-a, a)에 놓여 있다.

(1) 두 전하가 이루는 쌍극자 모멘트 $\vec{p}$를 구하여라.

$$\vec{p}=2aq\hat{i}$$

(2) 전기장이 쌍극자에 작용하는 힘과 돌림힘을 구하여라.

$$\vec{F}=0$$

$$\vec{\tau}=(\vec{r}_q\times\vec{F}_{E\ q})+(\vec{r}_{-q}\times\vec{F}_{E\ -q})=(a\hat{i}\times qE_0\hat{j})+(-a\hat{i}\times(-qE_0\hat{j}))=2aqE_0\hat{k}$$

or

$$\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E}=(2aq\ \hat{i})\times(E_0\ \hat{j})=2aqE_0\ \hat{k}$$

18. 어떤 전하량 q가 q_1과 $q-q_1$의 두 전하로 나누어졌다. 나누어진 후 두 전하 간의 힘이 최대가 되려면 q_1은 q의 몇 배가 되어야 하는가?

$$F=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1(q-q_1)}{r^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}(q_1q-q_1^2)$$

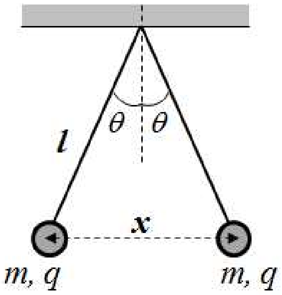
$$\frac{\partial F}{\partial q_1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial q_1}(q_1q-q_1^2)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}(q-2q_1)=0$$

$$\Rightarrow \qquad q-2q_1=0$$

$$\Rightarrow \qquad q_1=\frac{q}{2} \quad \text{(절반)}$$

19. 질량이 m인 작은 공 두 개가 각각 길이가 l이고 질량은 무시할 만한 두 선에 매달려 있다. 이 두 선은 천장의 한 점에 단단히 묶여 있다. 각각의 공은 똑같은 전하 q로 대전되어 있다.

(1) 평형상태에서 두 공이 떨어져 있는 거리가 x라면 줄이 수직선과 이루는 각 θ를 구하여라. (이때, θ는 아주 작다.)



(2) 두 전하 사이의 거리 x를 구하여라.

$$T\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$T\sin\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{T\sin\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{\frac{mg}{\cos\theta}sin\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{mg}\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{mg}\frac{2l}{x} \qquad \left(\theta \approx \tan\theta \approx \sin\theta = \frac{x/2}{l} = \frac{x}{2l}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = \frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$

20. n개의 양전하가 있다. 각각의 전하량은 q/n이고 이 전하들은 반지름이 a인 원의 둘레에 같은 간격으로 대칭적으로 놓여 있다.

(1) 이 원의 면과 수직하며 원의 중심을 통과하는 선을 따라 그 중심에서부터 x만큼 떨어진 곳에서 전기장을 구하여라.

예제 15.5에서 $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{(x^2+a^2)}$ 에서 dq를 $\frac{q}{n}$으로 바꿔서 이용하면

$$E = \sum_1^n dE\ \cos\theta = n\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q/n}{(x^2+a^2)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} \qquad \left(\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}\ \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

(2) 이 결과가 예제 15.5와 같음을 확인하고 그 이유를 설명하여라.

확인했음~!　　당연히 그래야 되지 않나~^^