<재택수업 13주차 2차 과제>

(1) $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ 의 $x=0$에서 테일러 4차 다항식을 구하여라.

$f(x)=(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$ $f(0)=1$

$f'(x)=-\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2=-(1+2x)^{-\frac{3}{2}}$ $f'(0)=-1$

$f''(x)=-(-\frac{3}{2})(1+2x)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2=3(1+2x)^{-\frac{5}{2}}$ $f''(0)=3$

$f^{(3)}(x)=3(-\frac{5}{2})(1+2x)^{-\frac{7}{2}}\cdot 2=-15(1+2x)^{-\frac{7}{2}}$ $f^{(3)}(0)=-15$

$f^{(4)}(x)=-15(-\frac{7}{2})(1+2x)^{-\frac{9}{2}}\cdot 2=105(1+2x)^{-\frac{9}{2}}$ $f^{(4)}(0)=105$

$P_4(x)=\frac{f(0)}{0!}\cdot x^0+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x^1+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4$

$=\frac{1}{0!}+\frac{(-1)}{1!}x+\frac{3}{2!}\cdot x^2+\frac{(-15)}{3!}x^3+\frac{105}{4!}\cdot x^4$

$=1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x^3+\frac{35}{8}x^4$

(2) 멱급수 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}(2x-1)^n$의 수렴 범위를 구하여라.

$a_n=\frac{1}{n\ln n}(2x-1)^n$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}(2x-1)^{n+1}}{\frac{1}{n\ln n}(2x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}(2x-1)\right|$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}\underset{\text{로피탈}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+1}{\ln(n+1)+1}\underset{\text{로피탈}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1=\rho=\frac{1}{R}$ $\rho|2x-1|<1$. $|2x-1|<1$이면 멱급수는 수렴한다.

$|2x-1|<1$, $-1<2x-1<1$, $0<2x<2$, $0<x<1$.

i) $x=0$, 즉 $2x-1=-1$일 때 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}(2x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ 이다.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ 는 교대급수판정법에 의해 수렴하므로 $x=0$에서 멱급수는 수렴한다.

ii) $x=1$, 즉 $2x-1=1$일때 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}(2x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}$ 이다.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}$은 P급수 판정법에 의해 발산하므로 $x=1$에서 멱급수는 발산한다.

따라서 수렴 범위는 $[0, 1)$ 이다.

(3) $e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$ 의 값을 구하여라.

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

$x=1$ 대입. $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 이다.

$e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}} = e^{\ln 2} = 2$ 이다.