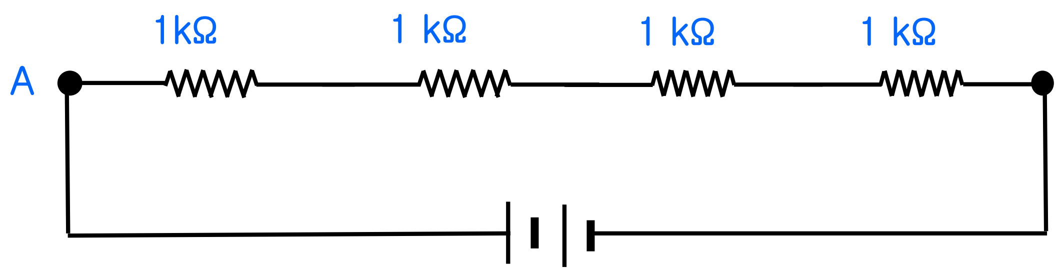
제 18 장 연습 문제 풀이 (2)

2, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22

연습 18-2. 1 kΩ 의 동일한 저항 4 개가 직렬로 연결되어 있는 곳에 기전력 장치를 통해 12 V 의 전위차를 가해주었다.



직렬연결의 경우에 각 저항에 흐르는 전류는 모두 일정하다.

병렬연결: $V =$ 일정
직렬연결: $i =$ 일정

풀이

(가) 각 저항에 흐르는 전류는 얼마인가?

직렬로 연결된 경우의 총 등가 저항은 각각의 저항을 모두 더하면 된다.

$$R_{eq} = R + R + R + R = 4k\Omega\,, \quad i = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12V}{4\times10^{3}\Omega} = 3\times10^{-3}A = 3mA$$

(나) 처음 두 개의 저항 전체에 걸리는 전위차는 얼마인가?

$$R_2 = R + R = 2k\Omega\,, \quad V = iR_2 = \left(3\times10^{-3}A\right)\times\left(2\times10^{3}\Omega\right) = 6V$$

(다) 이 회로를 이용해서 3 V, 9V 의 전위차를 얻어낼 수 있는 방법은 무엇인가?

저항 1 개의 양단에는 3 V, 3 개의 저항이 직렬로 연결되면 양단에 걸리는 전압은 9 V 이다.

18-6 RC 회로

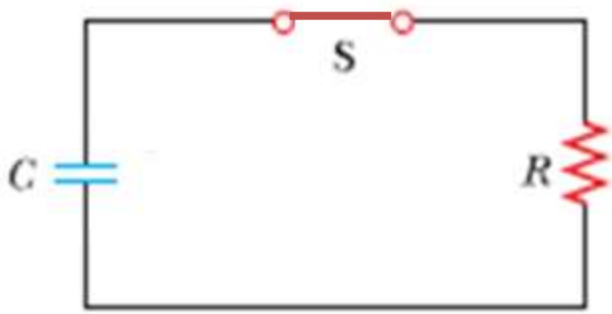
연습 18-14. 전위차가 220V 인 축전기와 저항이 달려 있는 회로의 스위치를 t=0 일 때 닫았다. t=10.0s 를 지났을 때 걸려 있는 전위차가 10.0 V 로 낮아졌다. 이 회로의 시간상수를 구하여라. t=20.0 s 를 지났을 때 축전기에 걸리는 전위차를 구하라.

풀이

(가) 방전되는 회로에서 축전기에 흐르는 전류의 양과 전압은 전하량이 방출됨에 따라 지수함수 적으로 감소한다.

$$q(t) = q_0\, e^{-t/RC} = c\varepsilon\, e^{-t/RC} \Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

- 축전기에 걸리는 전압 : $V = iR = \varepsilon e^{-t/RC}$ **(1)**



축전기에 대한 전압 V 에 대한 식(1) 의 양변에 로그를 취하고 t=10.0s 일 때 V=10.0 (v)을 대입하면 시간상수를 구할 수 있다.

$$\ln(V) = \ln(\varepsilon) - \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \tau = RC = \frac{t}{\ln(\varepsilon / V)} = \frac{10.0s}{\ln(220/10.0)} = 3.24s$$

(나) 전압 V 에 대한 식에 시상수를 대입하면

$$V = iR = \varepsilon e^{-t/RC} = 220 e^{-t/3.24}$$

이므로 t=20.0 s 를 지났을 때 축전기에 걸리는 전위차는

$$V_{t=20.0} = 220 e^{-t/3.24} = 220 e^{-20.0/3.24} = 0.458\,(\mathrm{v})$$ 이다.

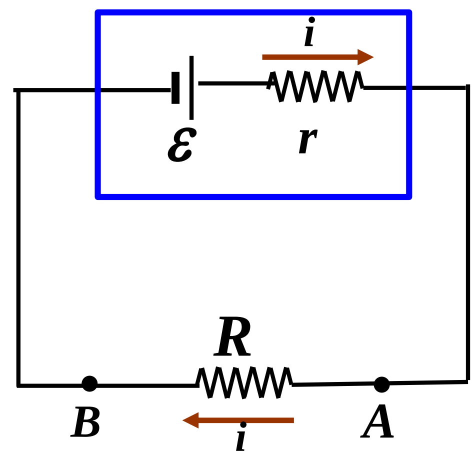
발전문제

연습 18-15. 실제적인 기전력 장치는 내부에 저항이 존재하며 이를 내부저항이라고 부른다. 9 V 의 기전력 장치의 내부에 3 Ω 의 내부저항이 존재하는 경우, 이 기전력장치를 6 Ω 의 저항에 연결하면 저항의 양끝에 걸리는 전위차는 얼마인가?

풀이

내부저항과 외부 저항이 직렬 연결되어 있으므로 전류의 크기는 일정하다.

I =일정



$\varepsilon = 9V$

$R = 6\Omega$

$r = 3\Omega$

저항이 직렬연결 되어 있으므로 총 저항은 $R_{total} = 3 + 6 = 9(\Omega)$ (직 렬)

이고 전류는 $i = \dfrac{\varepsilon}{R_{total}} = \dfrac{9V}{9\Omega} = 1A$ 이다.

6 Ω 저항에 의한 전압강하는 $V_{AB} = 6\Omega \times 1A = 6(V)$ 이므로

저항의 양끝에 걸리는 전위차는 6V 이다.

발전문제

연습 18-16. 위 문제의 기전력 장치 2 개를 직렬로 연결한 다음 여기에 6 Ω 의 저항을 연결하면 저항의 양끝에 걸리는 전위차는 얼마인가? 두 개를 병렬로 연결한 경우는?

(a) 기전력 장치가 직렬연결일 때

기전력이 직렬로 연결되면 기전력은 2 배로 커진다.
또한 직렬회로이므로 전류는 일정하다

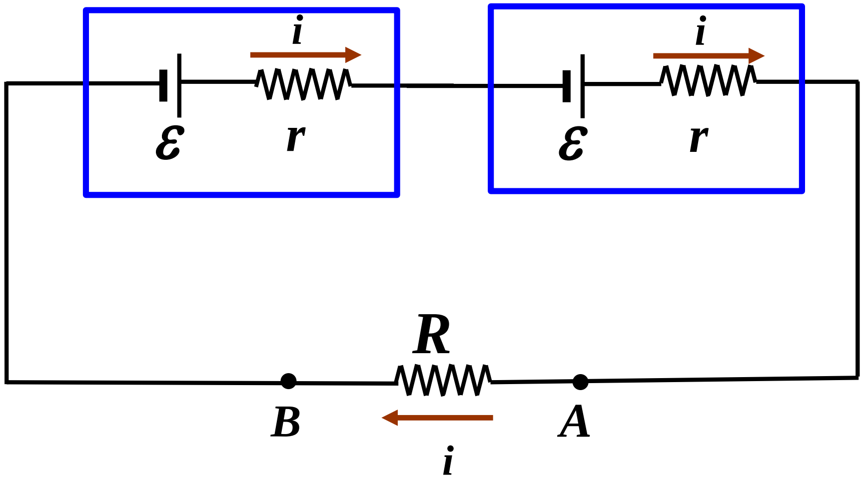
풀이

I =일정

$\varepsilon = 9V$

$R = 6\Omega$

$r = 3\Omega$



총기전력

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon + \varepsilon = 18(V)$$

저항이 직렬연결되어 있으므로 총 저항은 $R_{total} = 3 + 3 + 6 = 12(\Omega)$(직렬)

이고 전류는 $i = \dfrac{\varepsilon}{R_{total}} = \dfrac{18V}{12\Omega} = 1.5A$ 이다.

6 Ω 저항에 의한 전압강하는 $V_{AB} = 6\Omega \times 1.5A = 9(V)$ 이므로

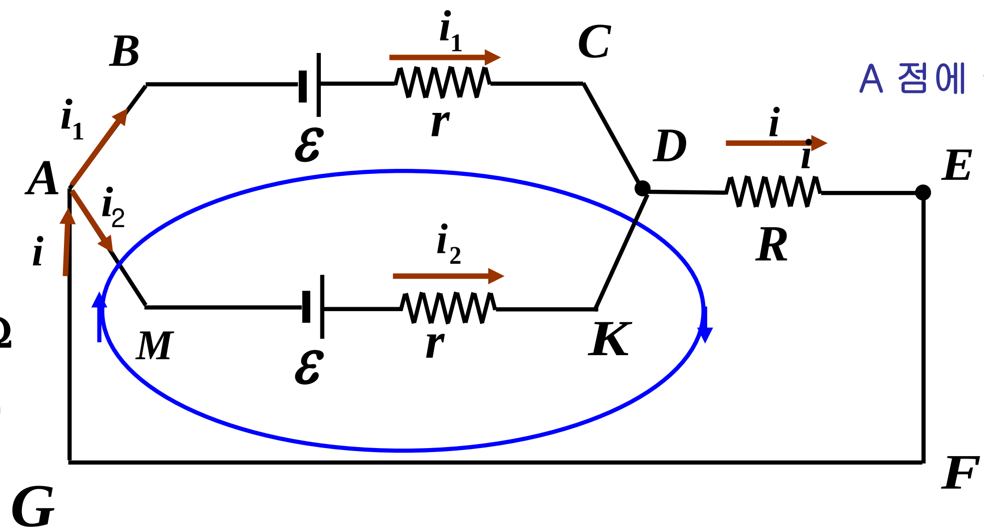
저항의 양끝에 걸리는 전위차는 9V 이다.

발전문제

연습 18-16. (b) 기전력 장치 두 개를 병렬로 연결한 경우

풀이

기전력이 병렬로 연결되면 기전력의 크기는 일정하며 전류의 양은 각각 다르다. 따라서 키르히호프 접합점 규칙을 이용하여 전류의 값을 구한다.



$\varepsilon = 9V$

$R = 6\Omega$

$r = 3\Omega$

A 점에 키르히호프 접합점 규칙을 적용하면

A 점에서 전류의 총합은 0 이 되어야 한다. (들어오는 전류의 양과 나가는 전류의 양은 같다.)

$$i - i_1 + i_2 = 0$$

한편 기전력 내부에서의 전류는 같으므로 저항이 같으므로 $i_1 = i_2$ 이며

따라서 기전력 내부에 흐르는 전류의 양은 전체전류의 ½ 이다. $i_1 = \frac{i}{2}$

키르히호프의 고리(A-B-C-D-E-F-G-A) 법칙을 이용하여 전체전류를 구하면 다음과 같다

$$\varepsilon - i_1 r - iR = 0 \Rightarrow 9 - \frac{i}{2} \times 3 - 6i = 0 \Rightarrow i = \frac{6}{5} = 1.2(A)$$

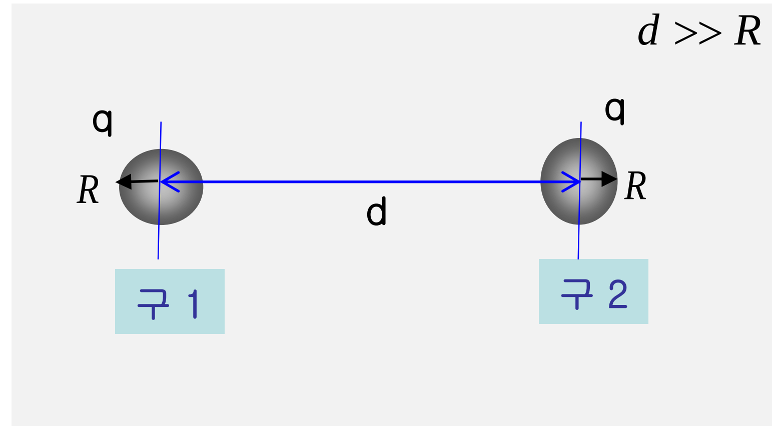
6 Ω 저항에 의한 전압강하는 $V_{DE} = 6i = 6 \times (1.2) = 7.2(V)$ 이다.

발전문제

연습 18-18. 빈 공간에 두 공이 반지름이 R 인 두 도체구가 있다. 두 도체 구 사이의 거리는 d 이다. d 가 R 보다 훨씬 더 크다고 할 때 이 계의 전기용량은 얼마인가?

풀이

두 공의 거리가 매우 멀리 떨어져 있고 각 구의 전하량을 q 라고 할 때 두 구에 의한 전위는 각각의 구에 의한 전위의 합과 같다.



구 1 의 전위는 구 2 를 기준으로 다음과 같다.

$$\Delta V = V_R - V_d = \left[-\int_d^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr \right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right)$$

한편, 구 2 의 전위도 같은 값을 갖는다

두 구 의 전위는 각각의 구의 전위의 합이다.

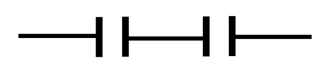
(구 1 의 전위) (구 2의 전위)

$$(\Delta V)_1 + (\Delta V)_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{R} - \frac{2}{d}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d-R}{dR}\right)$$

전기용량 :

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{d-R}{dR}\right]} = \frac{2\pi\varepsilon_0 dR}{d-R}$$

(검증) 만일 d 가 무한히 크면 두 도체구는 직렬 연결된 도체구의 전기용량과 같다.



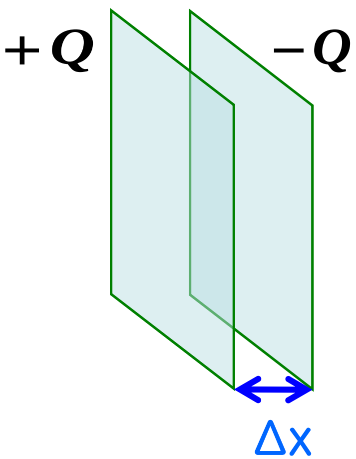
$$C = \lim_{d\to\infty} \frac{2\pi\varepsilon_0 dR}{d-R} = 2\pi\varepsilon_0 R$$

$$\left(\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C}{2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R}{2} = 2\pi\varepsilon_0 R \right)$$

발전문제

연습 18-19. 두 평행판 축전기는 서로 F= ½ QE 의 힘으로 당김을 보여라. 여기에서 Q, E 는 각각 축전기의 전하량과 내부 전기장 세기이다. (도움말: 축전기 판면 간격을 x 에서 x+ Δx 로 변화시킬 때 필요한 일을 계산하여라)

풀이



+Q 판과 −Q 판이 Δx 만큼의 간격으로 떨어져 있을 때 평행판 축전기 내부에 저장된 전기위치에너지는 ½ QV 이다.

$$U = \frac{1}{2}QV(x)$$

전위차 : $V = Ex = \frac{\sigma x}{\varepsilon_0}$

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}QV\right) = -\frac{1}{2}Q\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}QE \qquad \left(\because E = -\frac{dV}{dx}\right)$$

한편 +Q 축전기 판과 −Q 판은 부호가 반대이므로 항상 인력이다.

다른 방법

$+Q$ 판에 의한 전기장 $E_+ : \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 의 전기장에 속에서 $-Q$ 판에 작용되는 힘 (–부호:인력)

$$\therefore F = -QE_+ = -Q\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = -\frac{1}{2}Q\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{2}QE \quad \left(E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}:\text{축전기 내부전기장}\right)$$

발전문제

연습 18-21. 전기용량이 각각 4.0 μF 인 두 개의 평행판 축전기가 직렬로 연결되어 있고 전위차가 25V 인 배터리에 연결되어 있다. 여기서 두 축전기중 하나의 평행판 사이의 거리가 반으로 줄어들었다. 이 경우에 두 축전기에 축적되는 전체 전하량을 구하여라.

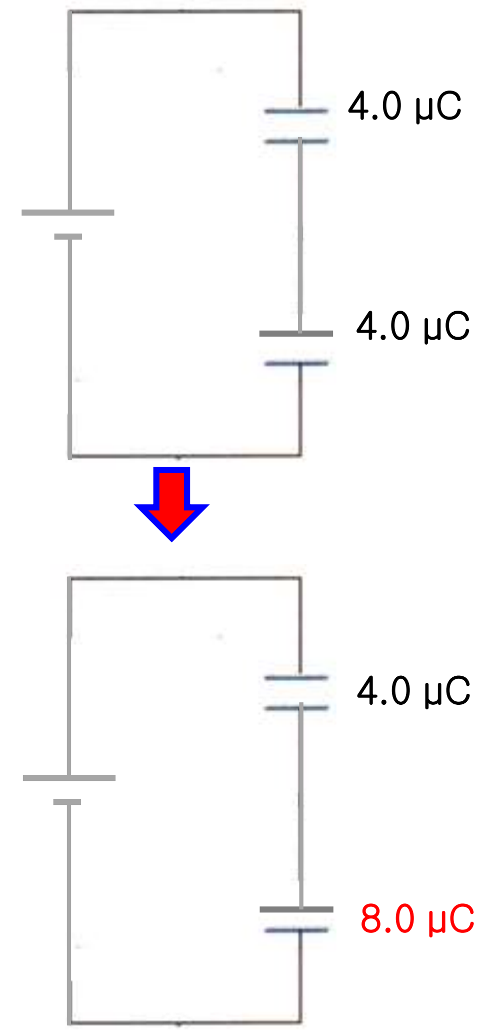
풀이

평행판사이의 거리가 반으로 줄면 그 축전기의 용량의 2 배로 늘게 된다. 따라서 이 문제는 4.0 μF 과 8.0 μF 의 두 축전기가 직렬로 연결된 아래의 회로에서의 총전하량을 구하는 것이다.
등가 전기용량은

$$C_{eq} = \frac{(4.0\mu F)\times(8.0\mu F)}{4.0\mu F + 8.0\mu F} = \frac{8}{3}\mu F \qquad \Leftarrow (\text{직 렬})\ \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$Q_{eq} = C_{eq}V = \left(\frac{8}{3}\mu F\right)(25V) = \frac{200}{3}\mu C$$

$$Q_{eq} = Q_1 = Q_2 = \frac{200}{3}\mu C$$



각 축전기에 축전되는 전하량은 직렬이므로 같은 양이 축적된다. 따라서 두 축전기에 축적되는 총 전하량은

$$\therefore Q_1 + Q_2 = \frac{200}{3}\mu C + \frac{200}{3}\mu C = \frac{400}{3}\mu C = 133.3\mu C$$

이다. 참고로 각각의 축전기는 직렬로 연결되었을 때 같은 전하량을 축적하지만 전기용량은 다르므로 걸리는 전압은 다르다. 즉, 전기용량이 작은 4.0 μF 가 8.0 μF 보다 2배 더 더 많은 전압과 에너지를 소모한다.

$$\left(V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{200}{3\times 4.0} = \frac{50}{3}V, \quad V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{200}{3\times 8.0} = \frac{25}{3}V\right)$$

$$\left(E_1 = \frac{1}{2}QV_1 = \frac{5000}{9}J, \quad E_2 = \frac{1}{2}QV_1 = \frac{2500}{9}V\right)$$

발전문제

연습 18-22. 앞에서 건전지가 제공하는 에너지 중 정확히 반은 축전기에 저장되고, 나머지 반은 저항에서 소모된다고 배웠다. 여기서 나머지 반이 저항에서 주울 열로 소모된다는 사실을 식 (18.43)과 전력의 정의를 이용하여 구체적으로 보여라.

풀이

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \qquad (18.43)$$

건전지에서 공급되는 전력 $P = i \cdot \varepsilon$ 이므로 모든 시간 공급되는 전체에너지 양은

$$U_{total}(t) = \int_{t=0}^{\infty} P dt = \int_{t=0}^{\infty} \varepsilon \cdot i \, dt = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-t/RC} dt$$

$$= \left(\frac{\varepsilon^2}{R}\right)(-RC) e^{-t/RC} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \left(-C\varepsilon^2\right)(0-1) = C\varepsilon^2$$

저항에서 소모되는 전력소모량 $P = i^2 R$ 이므로 저항에서 소모된 에너지의 양을 구하면

$$U_R(t) = \int_{t=0}^{\infty} P dt = \int_{t=0}^{\infty} i^2 R dt = \int_{t=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-2t/RC} dt$$

$$= \left(\frac{\varepsilon^2}{R}\right)\left(-\frac{RC}{2}\right) e^{-2t/RC} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \left(-\frac{1}{2} C\varepsilon^2\right)(0-1) = \frac{1}{2} C\varepsilon^2$$

이 되며 이것은 건전지에서 공급하는 전체 에너지의 반에 해당한다.