1.1

12. $2x-3y=a$, $4x-6y=b$를 Augmented 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & a \\ 4 & -6 & b \end{array}\right)$에서 1행에 2배를 하면

$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & 2a \\ 4 & -6 & b \end{array}\right)$이 된다.

이때 $2a=b$이면 $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & 2a \\ 4 & -6 & 2a \end{array}\right)$가 되고

2행에서 1행을 빼주면 $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & 2a \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$이 된다.

따라서 2행의 식이 $0=0$이 되므로 $4x-6y=2a$, 즉, $2x-3y=a$만 만족하면 되므로 $2a=b$일 때 해는 무수히 많다.

$2a\neq b$이면 $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & 2a \\ 4 & -6 & b \end{array}\right)$에 모순이 발생한다. 따라서 이때 해는 존재하지 않는다.

$2a=b$인 경우와 $2a\neq b$인 경우 외에는 다른 경우가 존재하지 않으므로 하나의 해만을 갖게 되는 경우는 존재하지 않는다.

15

(a) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 6x-9y=3 \end{cases}$ 이다.

첫번째 식을 3배 한후 두번째 식에서 빼주면 매개변수 식으로 나타내기 위해

$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 0=0 \end{cases}$ 이 된다.

$2x-3y=1$를 x에 대해 정리하면

$x=\dfrac{3y+1}{2}$이다. 이때 $y=t$로 두면 $x=\dfrac{3t+1}{2}$이므로

$(x,y)=\left(\dfrac{3t+1}{2}, t\right)$가 된다.

(b) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=-4 \\ 3x_1+9x_2-3x_3=-12 \\ -x_1-3x_2+x_3=4 \end{cases}$ 이다.

첫번째 식에 3배한후 두번째 식에서 빼주고, 첫번째 식에 -1배한후 세번째 식에서 빼주면,

$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=-4 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$ 이 된다.

따라서 $x_1=-3x_2+x_3-4$가 되고, $x_2=r$, $x_3=s$라 하면 $x_1=-3r+s-4$가 된다.

따라서 $(x_1,x_2,x_3)=(-3r+s-4, r, s)$이다.

19 (a) 문제의 조건에 만족하기 위해선 (consistent) 해가 없는 경우의 k값을 배제시켜야 한다.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & -4 \\ 4 & 8 & 2 \end{array}\right]$$ 에서 1행에 4를 곱하면

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4k & -16 \\ 4 & 8 & 2 \end{array}\right]$$ 이 된다.

또 첫행에서 두번째 행을 빼면

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 4k-8 & -18 \\ 4 & 8 & 2 \end{array}\right]$$ 이다

$(4k-8)y=-18$이고 $k\neq2$이면 $y=\frac{-18}{4k-8}=-\frac{9}{2k-4}$

이다. $4x+8y=2$, $x+2y=\frac{1}{2}$이고 $x=\frac{1}{2}-2y$

$=\frac{1}{2}+\frac{9}{k-2}$가 된다

$k=2$이면 $0=-18$이므로 모순이 된다. 즉 해가 없게 된다

따라서 $k\neq2$ 이면 제시된 식은 항상 consistent하다.

(b) 문제의 조건에 만족하기 위해선 (consistent) 해가 없는 경우의 k값을 배제시켜야 한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$ 이므로 1행을 4배 해주고

$$\begin{bmatrix} 4 & 4k & -4 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$ 1행에서 2행을 빼면

$$\begin{bmatrix} 0 & 4k-8 & 0 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$ 이 된다.

$(4k-8)y=0$ 이고 $4x+8y=-4$, $x+2y=-1$ 이므로

$k=2$가 되면 $(x,y)=(-1-2t, t)$ 가 성립해 무수히 많은 해가 존재하게 되고, (consistent)

$k\neq2$이면 $y=0$이어야 하므로 $x=-1$이 된다.

즉, 유일해 (consistent)가 된다.

따라서 k에 관계없이 항상 Consistent 하다.

21. $y=ax^2+bx+c$는 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)를 지나므로

$$\begin{cases} y_1=ax_1^2+bx_1+c \\ y_2=ax_2^2+bx_2+c \\ y_3=ax_3^2+bx_3+c \end{cases}$$ 가 된다.

여기서 (a, b, c)를 하나의 열벡터로 다루면

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$ 이다.

따라서 이를 augmented 행렬로 바꾸면

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$ 가 된다. 따라서

열벡터 (a, b, c)는 위 augmented 행렬의 해가 된다.

23. $x_1+kx_2=c$, $x_1+lx_2=d$

두 개의 방정식에서 $x_1=c-kx_2$, $x_1=d-lx_2$이다. 두 방정식의 해는 동일하므로 $x_1=c-kx_2=d-lx_2$ 이다.

$c-kx_2=d-lx_2$, $(l-k)x_2=d-c$

모든 실수 x_2에 대해 해당 식이 성립해야 하므로 $x_2=0$이면 $0=d-c$, 즉 $d=c$가 돼야 한다. 이를 위의 식에 대입하면 $(l-k)x_2=0$이 되므로 모든 실수 x_2에 대해 성립하기 위해서는 $l=k$가 돼야 한다.

따라서 $c=d$, $k=l$ 이 된다.

23. 모든 열벡터의 해를 (x, y, z)라 하자.

(a) 3행에 의해 $z=*$가 된다.
2행에 의해 $y+*z=*$이고 z는 3행에 의해 정해진 값이므로 y도 유일한 값을 갖는다.
1행에 의해 $x+*y+*z=*$이고 y, z는 유일한 값이므로 x도 유일한 값이 된다.
따라서 제시된 행렬은 consistent이며 유일해를 갖는다.

(b) 구하려는 변수의 개수가 식의 개수(영벡터인 3행 제외)보다 많으므로 무수히 많은 해를 가진다.
즉 consistent이지만 유일해를 갖지 않는다.

(c) 3행에서 $0=1$이라는 모순이 있으므로 consistent가 아니다.

(d) 만약 3행의 $*$가 0이면 $z=0$이어야 한다.
그러면 2행은 만족하게 되고 $(*z=0)$
$x+*y+*z=x+*y=*$이므로 무수히 많은 해를 갖게 된다. (consistent)
하지만 3행의 $*$가 0이 아니라면 $z=*$이 되고 2행에서 $*z=0$이 된다. 따라서 z와 $*$가 0이 아닌 경우 모순이 발생한다. (consistent X)
따라서 해당 system은 3행의 $*$에 따라 consistent가 결정된다.

24.

(a) 3행에서 $z=1$이다.
2행에서 $y+*z=*$이므로 y는 유일한 값이고,
1행에서 $x+*y+*z=*$이므로 x 또한 유일한 값을 갖게 된다.
따라서 consistent이고, 유일해를 갖는다.

(b) 1행에서 $x=*$이다.
2행에서 $*x+y=*$이고, 3행에서 $*x+*y+z=*$이므로 y와 z는 유일한 값을 가지게 된다.
따라서 consistent이고 유일해를 갖는다.

(c) 1행에서 $x=0$인데 2행에서는 $x=1$이다.
따라서 모순이 발생했으므로 해가 없다.
즉 consistent가 아니다.

(d) 2행과 3행에서 $x=1$이다.
1행에서 $x+*y+*z=*$이므로 무수히 많은 해를 갖게 된다.
즉 consistent이고 유일해를 갖지 않는다.

26. 3개의 식을 augmented 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{pmatrix}$$ 이다. 가우스 소거법을 이용하자.

$$\xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{7R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{pmatrix}$$ 이다.

따라서 3행에서 $(a^2-16)z=a-4$, $(a+4)(a-4)z=a-4$ 이고 $a=4$이면 $0=0$이 되므로 1행, 2행에 의해 무수히 많은 해를 가지고, $a=-4$이면 $0=-8$이므로 모순이 발생해 해가 존재하지 않는다. $a\neq4$이고 $a\neq-4$이면 유일해를 갖게 된다.

$a=4$: 무수히 많은 해

$a=-4$: 해가 없다

$a\neq4$, $a\neq-4$ 외 다른 실수 : 유일해.

30. 제시된 3개의 식을 augmented 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 & b \\ 0 & 3 & 3 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & b-2a \\ 0 & 3 & 3 & c \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a-\frac{b}{2} \\ 0 & 3 & 3 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a-\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 3 & c-3a+\frac{3}{2}b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a-\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{3}-a+\frac{b}{2} \end{pmatrix}$$ 이므로

$z=-a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}$

$y=a-\frac{b}{2}$ 이고, $x+y+z=a$에서 $x=a-y-z$이므로

$x=a-\frac{c}{3}$ 이다.

$\therefore x=a-\frac{c}{3},\ y=a-\frac{b}{2},\ z=-a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}$

33. $\sin\alpha=x$, $\cos\beta=y$, $\tan\gamma=z$라 하자.

제시된 식을 augmented 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$ 이다. 가우스 소거법을 이용하면.

$$\xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ 이다.

따라서 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 이어야 하고,

$\sin\alpha=0 \rightarrow \alpha=0, \pi, 2\pi$

$\cos\beta=0 \rightarrow \beta=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

$\tan\gamma=0 \rightarrow \gamma=0, \pi, 2\pi$ 이므로

총 $3\times2\times3=18$개의 해가 존재한다.

36. $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$, $\frac{1}{z}=c$ 라고 하면

$$\begin{cases} a+2b-4c=1 \\ 2a+3b+8c=0 \\ -a+9b+10c=5 \end{cases}$$ 으로 나타낼 수 있다. 이를 augmented 행렬로 나타내고 가우스 소거법을 이용하면,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 0 \\ -1 & 9 & 10 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 16 & -2 \\ 0 & 11 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[11R_2+R_3]{2R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 28 & -3 \\ 0 & -1 & 16 & -2 \\ 0 & 0 & 182 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{182}R_3]{-R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 28 & -3 \\ 0 & 1 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{91} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{54}{91} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{91} \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $a=-\frac{7}{13}$, $b=\frac{54}{91}$, $c=-\frac{8}{91}$ 이다.

$x=\frac{1}{a}=-\frac{13}{7}$, $y=\frac{1}{b}=\frac{91}{54}$, $z=\frac{1}{c}=-\frac{91}{8}$ 이다.

37. $y=ax^3+bx^2+cx+d$는 $(0,10)$, $(1,7)$, $(3,-11)$, $(4,-14)$를 지나므로

$d=10$, $7=a+b+c+d \Rightarrow a+b+c=-3$

$27a+9b+3c=-21$, $64a+16b+4c=-24$

$\Rightarrow 16a+4b+c=-6$ 이 된다. 이를 augmented 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 9 & 3 & 1 & -7 \\ 16 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2'=R_2-9R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & -8 & 20 \\ 0 & -12 & -15 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ 이다. 따라서

$c=2$, $-6b-8c=20$. $6b=-8c-20=-36$

$b=-6$. $a+b+c=-3$; $a=-3-b-c=-3+6-2$
$=1$.

즉, $a=1$, $b=-6$, $c=2$ 이다.

41.(a) reduced echelon form의 조건은 다음과 같다

① 모두 0이 아닌 row의 첫번째 non-zero number =1.

② 모두 0인 row는 행렬의 바닥으로 보낸다

③ 둘 이상의 row가 모두 0이 아닌경우 위의 row의 leading 1이 아래 row의 leading 1보다 왼쪽에 있다.

④ leading 1을 포함하는 column에서 leading 1이외에는 모두 0이다.

즉 위의 4가지 조건을 만족하는 형태를 찾으면 된다.

따라서 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 총 6개가 있다.

1.3

7(a) AB의 첫 행을 구하려면 A의 1행과 B를 곱하면 된다.

즉 $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ 이다.

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 18+49 & -6-2+49 & 12-6+35 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 67 & 41 & 41 \end{bmatrix}$ 이다.

(c) AB의 두번째 열을 구하려면 A와 B의 두번째 열을 곱하면 된다.

즉 $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6-2+49 \\ -12+5+28 \\ 4+63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix}$ 이다.

16. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+4 & 4+3k & 6+k \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 4+3k & 6+k \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 6 & 3k+4 & k+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$

$= 12+6k+8+k^2+6k=0$.

$k^2+12k+20=0$.

$(k+10)(k+2)=0$. $k=-2$ or $k=-10$ 이다.

25. (a) AB를 곱하고 난 후 i행 j열에 있는 원소 $(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$이다.

만약 A의 n번째 행이 영벡터라면

$a_{n1} = a_{n2} = a_{n3} = \cdots = a_{nr} = 0$이다. 따라서

$(AB)_{nj} = a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + \cdots + a_{nr}b_{rj} = 0$이 되므로

AB의 n번째 행도 영벡터가 발생한다.

(b) 만약 B의 n번째 열이 영벡터라면

$b_{1n} = b_{2n} = \cdots = b_{rn} = 0$이다. 따라서

$(AB)_{in} = a_{i1}b_{1n} + a_{i2}b_{2n} + \cdots + a_{ir}b_{rn} = 0$이

되므로 AB의 n번째 열도 영벡터가 발생한다.