제 26 장 연습 문제 풀이 (2)

연습문제 풀이 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,
14, 19, 20

(16*, 17*, 18* 은 시험범위에서 제외)

26-1 흑체 복사

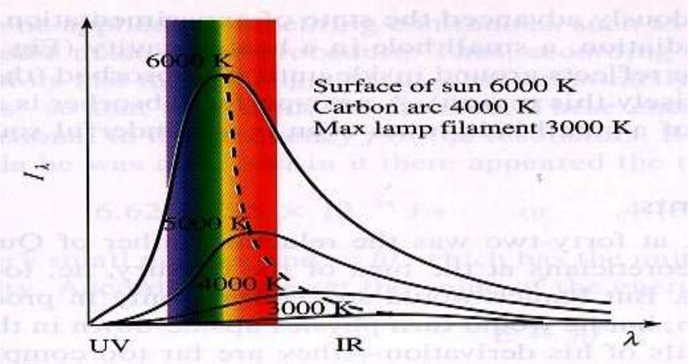
연습 26-1. 태양의 표면 온도가 6,000 K 라고 한다. 태양이 흑체 복사를 한다고 가정을 할 경우, 복사스펙트럼의 최대값을 가지는 파장 λ_{max} 를 구하고, 이 결과를 맨 눈에 보이는 태양의 색깔과 비교 설명하여라. (단, 빈의 계수는 2.898 x 10^{-3} m. K 이다.)

풀이 복사 스펙트럼의 최대 세기의 파장은 빈의 변위 법칙에 의해서 구할 수 있다.

$$\lambda_{max} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{m.K}$$

$$\lambda_{max} = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{m.K}}{T}$$

$$= \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{m.K}}{6000 K} = 4.83 \times 10^{-7} \text{m} = 0.483\ \mu\text{m}$$

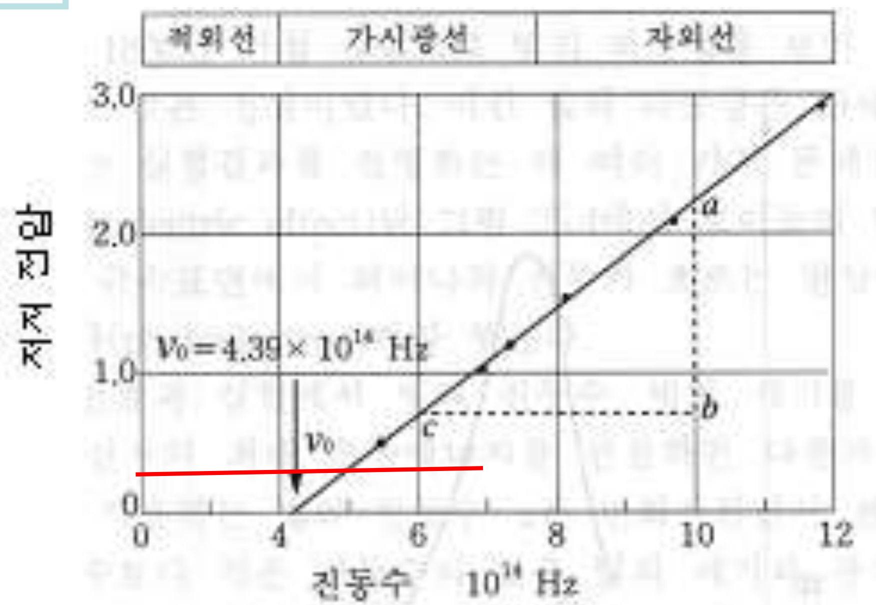


최대파장의 480 nm 의 복사선 파장은 태양의 가시광선 영역 (400nm-700nm) 의 파랑 색에 해당하는 파장이다.

26-2 광전 효과

연습 26-2. (가) 아래 그림 (교과서의 그림 26.6) 에서 일함수와 임계파장을 구하여라.

풀이



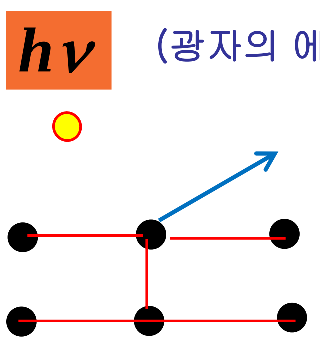
빛을 금속에 쪼이면 금속에서 전자가 방출되는 광전효과는 빛이 입자라는 증거로 빛의 입자 (광자)가 가진 에너지가 충돌하여 전자를 방출 시키고 전자가 운동에너지를 갖도록 한 것으로 해석할 수 있다.

$$h\nu = \Phi + KE$$

a) 일함수 : 금속으로 부터 전자의 방출이 시작될 때의 광자의 진동수를 임계진동수, 그때의 파장을 임계파장이라고 하며 전자의 운동에너지가 0 일 때이다. (KE=0)

$$\nu_0 = \frac{\Phi}{h} = 4.39 \times 10^{14}\, Hz$$

$$\Phi = h\nu_0$$
$$= (6.626 \times 10^{-34}\, J \cdot s)(4.39 \times 10^{14}\, Hz)$$
$$= 2.91 \times 10^{-19}\, J$$



(광자의 에너지)

(전자가 방출됨)

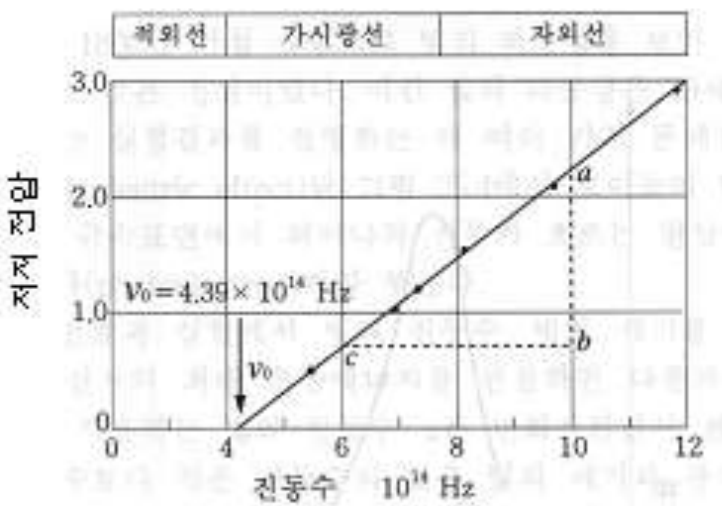
b) 임계파장 :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3.00 \times 10^{8}\, m/s}{4.39 \times 10^{14}\, Hz}$$
$$= 6.83 \times 10^{-7}\, m = 0.683\, \mu m$$

26-2 광전 효과

연습 26-2 (나) 파장이 3.0 0 x 10^{-7} m 인 빛을 쪼였을 때 방출되는 전자의 운동에너지를 구하여라.

풀이



파장이 3.0 x 10^{-7} m 인 빛의 진동수를 구하면

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^{8}\, m/s}{3.00 \times 10^{-7}\, m} = 1.00 \times 10^{15}\, s^{-1}$$

이므로 이 진동수를 광전효과의 식에 대입하여 전자의 운동에너지를 얻는다.

$$h\nu = \Phi + K$$

$$(\Phi = 2.91 \times 10^{-19}\, J) \leftarrow (가)$$

운동에너지 : $K = h\nu - \Phi$

$$= (6.626 \times 10^{-34}\, J \cdot s)(1.00 \times 10^{15}\, s^{-1}) - 2.91 \times 10^{-19}\, J$$

$$= 3.716 \times 10^{-19}\, J$$

$$= \frac{3.716 \times 10^{-19}\, J}{1.6 \times 10^{-19}\, J/eV} = 2.32\, eV$$

26-2 광전 효과

연습 26-3. 어떤 금속의 일함수가 0.80 eV 이다. 이 금속에 파장이 500nm 인 빛을 쪼였을 때 튀어나오는 전자에 대한 저지전압을 구하여라. 이 때 튀어나오는 전자의 최대속력은 얼마인가?

풀이

$h\nu = \Phi + KE$ 을 이용하여 푼다. (일함수) $\Phi = 0.80eV$

금속에 쪼인 빛의 진동수 $\nu = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3.00\times10^{8}\,m/s}{5.00\times10^{-7}\,m} = 6.00\times10^{14}\,s^{-1}$

플랑크 상수 $h = 6.626\times10^{-34}\,J\cdot s$ or $h = 6.626\times10^{-34}\,J\cdot s\left(\dfrac{1\,eV}{1.602\times10^{-19}\,J}\right) = 4.136\times10^{-15}\,eV\cdot s$

(a) 전자의 운동에너지 $KE = h\nu - \Phi = (4.136\times10^{-15}\,eV)(6.00\times10^{14}\,/s) - (0.80\,eV)$

$= 1.68eV (= 2.69\times10^{-19}\,J)$

전자의 운동에너지는 전자가 저지전압에 의해 가속되는 일의 크기와 같다.

$$KE = eV \quad\Rightarrow\quad V = \frac{1.68eV}{e} = 1.68(V) \qquad \therefore V = 1.68\,(V)$$

(b) 전자의 최대속력

$$KE = \frac{1}{2}mv^{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2KE}{m}} = \sqrt{\frac{2\times(2.69\times10^{-19})}{9.11\times10^{-31}}} \Rightarrow v = 7.69\times10^{5}(m/s)$$

26-2 광전 효과

연습 26-4. 어떤 샘플에 6.80 x 10^{14} Hz의 빛을 비추어 방출되는 광전자의 저지 전압이 1.80 V 라면, 광전자의 (a) 운동에너지와 (b) 일 함수는 각각 얼마인가?

풀이

연습 2 번 과 같은 방법으로 풀면 된다. 광전자란 빛을 쪼였을 때 금속에서 방출되는 전자를 말한다.

(a) 전자의 운동에너지는 전자가 저지전압에 의해 가속되는 일의 크기와 같다.

$$KE = eV = e(1.80V) = 1.80eV$$
$$= (1.60\times10^{-19}C)(1.80\ V) = 2.88\times10^{-19}J$$

(b) 광전자의 일 함수는 입사된 빛의 광자에너지에서 운동에너지를 빼주면 된다

$$h\nu = \Phi + K$$

$$\Phi = h\nu - K = (6.626\times10^{-34}J\cdot s)(6.80\times10^{14}/s) - (2.88\times10^{-19}J)$$
$$= 1.63\times10^{-19}J = 1.02\ eV$$

26-3 콤프턴 산란

연습 26-5. 파장이 1 Å 인 엑스선이 자유전자에 의해서 산란되었다.

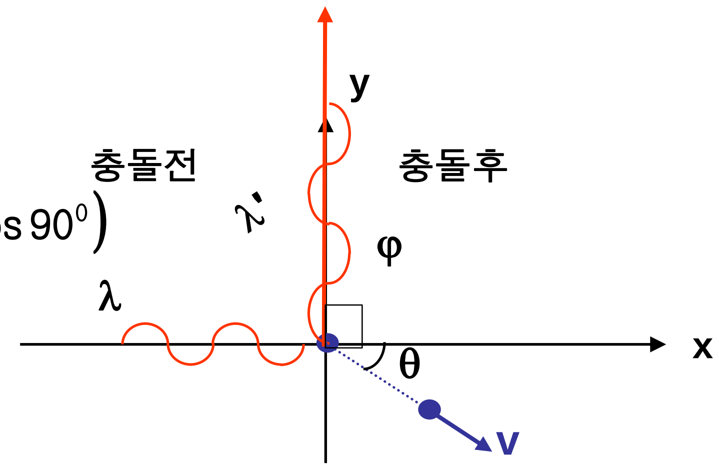
(가) 산란각이 90° 인 경우에 대해서 컴프턴 이동을 구하라.

(나) 이 때 자유 전자의 충돌 후 운동량과 운동에너지를 구하라.

풀이

빛이 광자라는 알갱이로 되어 있어 전자와 탄성충돌을 한다고 가정하고 운동량보존과 에너지 보존 식을 통해 컴프턴 파장의 이동을 구한다

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\varphi)}$$



(가) $\Delta\lambda = \dfrac{h}{m_0 c}(1-\cos\phi) = \dfrac{6.626\times10^{-34}\,J\cdot s}{(9.11\times10^{-31}kg)(3.00\times10^{8}\,m/s)}\left(1-\cos 90^0\right)$

$$= 2.43\times10^{-12}m = 0.00243nm = 0.0243\,\overset{o}{A}$$

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 1 + 0.0243 = 1.0243\,\overset{o}{A}$$

(나) 이 때 자유 전자의 충돌 후 운동량과 운동에너지를 구하라.

에너지가 보존되는 식을 상대론적으로 쓰면 다음과 같다. $\dfrac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \dfrac{hc}{\lambda'} + \gamma m_0 c^2$

위 식에서 전자의 총 에너지와 정지에너지의 차이는 충돌 후 전자의 운동에너지에 해당한다.

$$KE = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$$

$$\therefore KE = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = (6.626\times10^{-34}J\cdot s)(3\times10^{8}\,m/s)\left(1-\frac{1}{1.024}\right)\times10^{10}/m = 4.71\times10^{-17}J = 294\,eV$$

26-3 콤프턴 산란

연습 26-5 (나)-계속 충돌 후 운동량을 구하라. $(\varphi = 90^\circ)$

풀이

(x축- 운동량의 식) $\dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{h}{\lambda'}\cos\varphi + p\cos\theta \xrightarrow{\varphi=90^\circ} \dfrac{h}{\lambda} = p\cos\theta$

(y축- 운동량의 식) $0 = \dfrac{h}{\lambda'}\sin\varphi - p\sin\theta \longrightarrow \dfrac{h}{\lambda'} = p\sin\theta$

$$\therefore\ p = \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6.626\times10^{-34}}{1.00\times10^{-10}}\right)^2 + \left(\frac{6.626\times10^{-34}}{1.0243\times10^{-10}}\right)^2} = 9.26\times10^{-24}\,kg\cdot m/s$$

[참고] 충돌 후 전자의 산란 각을 λ 와 λ’ 로 나타내시오.

(x축- 운동량의 식) $\dfrac{h}{\lambda} = p\cos\theta,$ (y축- 운동량의 식) $\dfrac{h}{\lambda'} = p\sin\theta$

두 식을 서로 나누면 파장의 비를 알 수 있다.

$$\frac{p\sin\theta}{p\cos\theta} = \frac{\frac{h}{\lambda'}}{\frac{h}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda'} \quad\Rightarrow\quad \tan\theta = \frac{\lambda}{\lambda'} \qquad \therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{\lambda}{\lambda'}$$

26-3 콤프턴 산란

연습 26-6. 그림 26.9 에서 산란각이 0° 가 아닌 경우 두가지 파장에서 엑스선이 강하게 산란됨을 알 수 있다. 이 중 입사한 엑스선과 파장이 다른 엑스선은 자유전자에 의한 컴프턴 산란으로 이해 될 수 있음을 보였다. 그러면 파장이 같은 엑스선은 어떻게 이해 될 수 있을 까? 이에 대한 설명을 제시하여라.

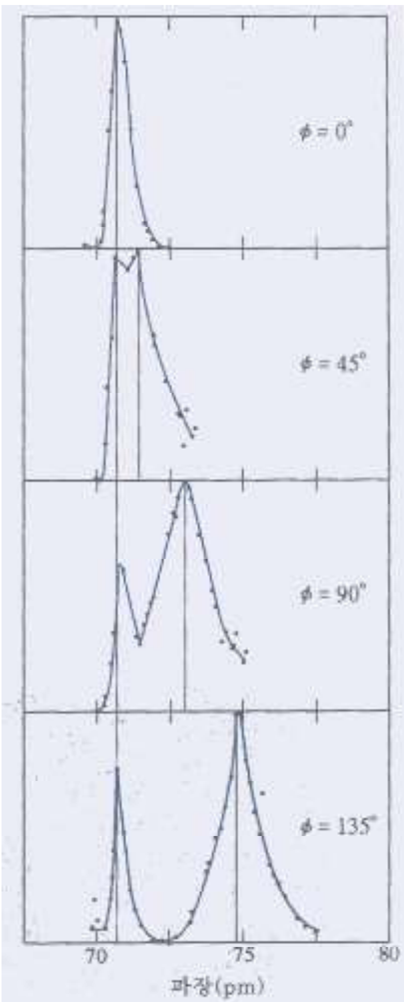


그림 26.9

풀이

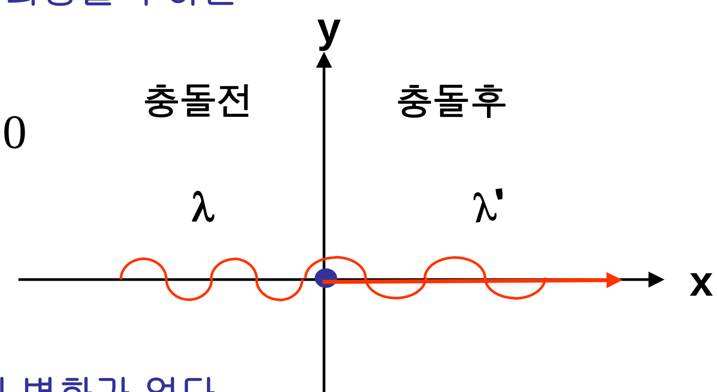
컴프턴 파장의 이동에 대한 식에서

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\varphi)}$$

산란각이 0 도 일 때 산란된 파장을 구하면

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\phi)\Big|_{\phi=0} = 0$$

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda$$



이다 , 따라서 충돌 후 파장의 변화가 없다.

입사된 X 선이 에너지를 거의 잃지 않았다는 것인데 이것은 표적원자에 전자가 강하게 속박되어 있어서 빛의 입자인 광자가 전자와 충돌하지 않고 그냥 투과하여 파장의 변화가 없다고 할 수 있다.

26-3 콤프턴 산란

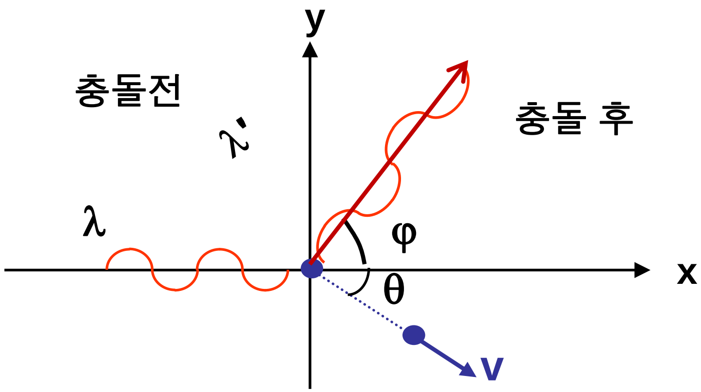
연습 26-7. 콤프턴 산란을 생각하자.

(가) 파장이 5.70×10^{-12}m 인 전자기파가 정지해 있는 전자에 입사하여 산란되었다. 산란각이 50^{o} 이면 충돌 후 전자기파의 파장은 얼마가 되는가?

(나) 파장이 5.70×10^{-12}m 인 전자기파가 정지해 있는 전자에 입사하여 산란되었다. 산란된 광자가 50^{o} 에서 검출되었다면 이 광자에 의해 산란된 전자의 운동에너지와 에너지는 얼마인가?

풀이 연습 5 번 과 같은 방법으로 풀면 된다. 여기서 컴프턴 파장은 다음과 같다.

$$\frac{h}{m_0 c} = \frac{6.626 \times 10^{-34} J \cdot s}{(9.11 \times 10^{-31} kg)(3 \times 10^{8} m/s)} = 2.424 \times 10^{-12} m$$



가) 충돌 후의 전자기파의 파장

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\phi) = 2.424 \times 10^{-12} \times (1 - \cos 50^{0})$$

$$= 8.66 \times 10^{-13} (m)$$

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 5.70 \times 10^{-12} m + 8.66 \times 10^{-13} m = 6.57 \times 10^{-12} m$$

나) 에너지 보존 식에서 전자의 운동에너지와 에너지를 구한다

전자의 정지에너지 $(E_0 = 0.511 \times 10^{6} eV)$

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \longrightarrow KE = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$$

운동에너지 $$KE = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = (6.626 \times 10^{-34} J \cdot s)(3.00 \times 10^{8} m/s)\left(\frac{1}{5.70 \times 10^{-12} m} - \frac{1}{6.57 \times 10^{-12} m}\right) = 4.57 \times 10^{-15} J$$

$$= 4.6 \times 10^{-15} J = 28800 eV = 29 keV$$

에너지 $$E = KE + E_0 = 28800 eV + 511000 eV = 5.39 \times 10^{5} eV$$

26-4 물질파

연습 26-8. 1.00 x 10^7 m/s로 움직이는 전자의 드 브로이 파장을 구하여라. 그리고 드 브로이 파장이 1.00 cm 인 전자의 속력을 구하여라. 단, 전자의 질량은 9.11 x 10^{-31} kg 이다.

풀이

입자인 운동량과 파장과 관계식을 나타낸 드 브로이의 파장 식 $\lambda = \dfrac{h}{p}$ 으로 부터 전자의 파장을 구할 수 있다.

(a) 전자의 파장

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma m_0 \mathbf{v}} = \frac{6.626\times10^{-34}\,J\cdot s}{(9.11\times10^{-31}kg)(1.00\times10^{7}\,m/s)}$$
$$= 7.27\times10^{-11}m = 0.727\ \mathring{\mathrm{A}} = 0.0727\ nm$$

$$\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1.00\times10^{7}}{3.00\times10^{8}}\right)^2}} \approx 1 \right)$$

(b) 파장이 1cm 에 해당하는 입자인 전자의 운동량 또는 속력의 값도 드브로이 파장의 식에서 얻을 수 있다. 즉,

$$p = mv = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6.626\times10^{-34}\,J\cdot s}{(9.11\times10^{-31}kg)(1.00\times10^{-2}m)}$$
$$= 0.0727 m/s$$

이 된다.

26-4 물질파

연습 26-9. 우주배경복사는 온도 3.00 K 에서 흑체 복사스펙트럼으로 이루어져 있다. 이 복사를 이루고 있는 광자의 운동에너지는 $k_B T$ 로 주어진다. 이 광자의 파장을 구하여라.

풀이

광자는 질량이 없으므로 운동에너지는 광자의 에너지이다

$$E = hv = h\frac{c}{\lambda} \qquad E = K_B T$$

T=3.00 K 에서 광자의 파장 :

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{hc}{k_B T} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} J \cdot s) \cdot 3.0 \times 10^{8} m/s}{(1.38 \times 10^{-23} J/K) \times 3.00 K} = 4.80 \times 10^{-3} m = 4.80 mm$$

즉, 광자의 파장은 4.80 mm 이다.

26-4 물질파

연습 26-10. 미국 제퍼슨 연구소의 가속기는 전자를 12 GeV 까지 가속시킬 수 있다. 이렇게 높은 에너지의 전자는 양성자의 안을 들여다 볼 수 있을 만큼 드 브로이 파장이 짧을 뿐만 아니라 상대론적인 관계식을 근사적으로 $p \approx E/c$ 를 만족한다.

풀이

12 GeV =1.2 x 10^{10} eV, 1 fm= 1.1x10^{-15} m 을 드 브로이 파장의 식에 대입하여 구하면 된다.

(가) 이 전자의 드 브로이 파장을 구하여라.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\left(\frac{E}{c}\right)} = \frac{4.14 \times 10^{-15} eV \cdot s \times \left(3.00 \times 10^{8}\right)}{12 \times 10^{9} eV} = 1.035 \times 10^{-16} (m)$$

(나) 양성자의 반지름은 대략 1 fm 정도이다. 이 반지름 r 과 드 브로이 파장의 비를 구하라.

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{1.035 \times 10^{-16} m}{\left(1.0 \times 10^{-15} m\right)} = 0.1035$$

불확정성 원리

연습 26-11. 질량이 100 g 인 야구공이 시속 140 km/h 로 날아온다. 타자가 속력을 1.00%의 정확도로 측정할 경우 그가 측정할 수 있는 거리의 최소 오차를 구하여라. 그리고 이 문제를 플랑크 상수가 10.0 J·s 인 경우에 대해서도 구하고 이렇게 구한 결과를 토의하라

풀이

불확정성 원리에 의하면 운동량과 위치는 동시에 정확하게 측정할 수 없고 다음과 같은 오차범위 안에서만 측정이 가능하다. 따라서 운동량의 오차범위를 다음의 식에 대입하여 거리의 오차를 구할 수 있다.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

운동량이 1 % 의 오차범위일 때

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1.00}{100} \Rightarrow \Delta p = 0.0100\,p = 0.0100 \times mv$$

거리의 최소 오차는

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi \cdot \Delta p} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\, J \cdot s}{4\pi\left(0.0100 \times 0.100\, kg \times 140\, km/h \times \frac{1000\, m}{1\, km} \times \frac{1h}{3600\, s}\right)}$$

$$= 1.356 \times 10^{-33}\, m$$

플랑크 상수가 10 J·s 인 경우

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi \cdot \Delta p} = \frac{10 J \cdot s}{4\pi\left(0.0100 \times 0.100\, kg \times 140\, km/h \times \frac{1000\, m}{1\, km} \times \frac{1h}{3600\, s}\right)} = 20.46\, m$$

거시적인 상태의 야구공은 플랑크 상수가 작을 때는 야구공의 운동량과 위치를 동시에 정확히 측정할 수 있지만 플랑크 상수가 큰 경우에는 야구공의 경우도 운동량과 위치를 동시에 정확히 알 수 없다. 즉 운동량을 1.00%의 범위 일 때 위치의 불확정도가 20.5m 범위가 된다.

불확정성 원리

연습 26-12. 질량이 m_e=9.11x10^{-31} kg 인 전자와 m_b=2.00 x10^{-2} kg 인 총알이 0.100 % 의 정확도로 속력이 모두 1200 m/s 로 측정되었다. 전자와 총알의 위치는 어느 정도로 정확히 측정할 수 있는가?

풀이

불확정성 원리에 의하면 운동량과 위치는 동시에 정확하게 측정할 수 없고 다음과 같은 오차 범위 안에서만 측정이 가능하다.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

(a) 전자의 속력이 0.100 % 의 오차범위일 때 $\frac{\Delta p}{p} = \frac{0.100}{100} \Rightarrow \Delta p = 0.00100\,p = 0.00100 \times m_e v$

$$\Delta x_{\text{전자}} \geq \frac{h}{4\pi \cdot \Delta p} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\, J \cdot s}{4\pi\left(0.00100 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1200\, m/s\right)}$$
$$= 4.82 \times 10^{-5}\, m$$

(b) 총알의 속력이 0.100 % 의 오차범위일 때 $\frac{\Delta p}{p} = \frac{0.100}{100} \Rightarrow \Delta p = 0.00100\,p = 0.00100 \times m_b v$

$$\Delta x_{\text{총알}} \geq \frac{h}{4\pi \cdot \Delta p} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\, J \cdot s}{4\pi\left\{0.00100 \times \left(2.00 \times 10^{-2}\, kg\right) \times 1200\, m/s\right\}} = 2.197 \times 10^{-33}\, m$$

거시적인 상태의 총알의 속력은 0.100% 의 정확도로 측정해도 위치를 정확하게 측정할 수 있다. 그러나 미시적인 상태에서 전자와 같은 경우에는 0.100% 의 정확도로 속력(또는 운동량)을 측정하게 되면 위치 불확정도는 원자반지름의 100만 배에 해당하는 만큼 커져 위치를 정확하게 측정할 수가 없게 된다.

26-5 보어의 수소원자 모형

연습 26-14. 보어의 수소 원자 모델을 생각하자

(가) 플랑크 상수 h 를 증가시킬 수 있다면 원자의 반지름은 어떻게 되겠는가?

(나) 수소 원자 내부의 전자를 물질파라고 기술하고 이 파동이 정상파를 이룬다는 조건에서 보어의 각운동량 양자화를 유도하라

풀이

수소내의 전자는 쿨롱력에 의해 원운동을 한다고 가정하고 궤도 각운동량의 양자조건을 이용하여 원자의 반지름을 계산할 수 있다. 수소 원자이므로 n=1 인 경우를 원자 반지름으로 하여 계산한다.

(가)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = \frac{(mvr)^2}{mr^3} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{1}{mr^3}\frac{n^2h^2}{4\pi^2}$$

(각운동량 양자조건)

$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

$$(n = 1,2,3\cdots)$$

$$r = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi me^2}n^2 \quad \Rightarrow \quad r \propto h^2$$

즉 원자반지름은 h가 커질수록 더 증가하게 된다

(나) 수소원자 내부의 전자를 물질파라고 하면 이 파동은 정상파를 이루어야 안정된 궤도를 유지할 수 있으므로 정상파의 경계조건은 파장의 정 수배이어야 한다.

$$2\pi r = n\lambda \ \Rightarrow r = \frac{n\lambda}{2\pi}$$

$$L = pr = \left(\frac{h}{\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{2\pi}\right) = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

그러므로 각 운동량이 $\hbar$ 의 정수 배로 양자화됨

26-8 원자의 구조*

연습 26-16* 어떤 전자가 궤도 양자수 ℓ =3 인 상태에 있다.

(가) 이 때 궤도각운동량 L 은 $\hbar$ 의 몇 배인가?

(나) 이 전자의 자기모멘트는 얼마인가?

(다) 가능한 L_z 의 값은 무엇인가?

풀이 (가) 각운동량의 크기는 $L=\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$ 에 의하여 구한다.

$$\therefore L=\sqrt{3(3+1)}\hbar=2\sqrt{3}\hbar \qquad (2\sqrt{3}\text{배}) \qquad \left(\hbar=\frac{h}{2\pi}\right)$$

(나) 전자의 자기모멘트 :

$$\mu=-\frac{e}{2m}L=-\frac{\left(-1.60\times10^{-19}C\right)\times2\sqrt{3}\times\left(6.626\times10^{-34}J\cdot s\right)}{2\times\left(9.11\times10^{-31}kg\right)\times2\pi}=3.20\times10^{-23}C\cdot m^2/s$$

(다) 전자의 z 축 각운동량 성분 (L_z) $\quad L_Z=m_l\hbar \qquad (m_l=\text{자기양자수})$

$(\ell=3)$ 일 때 가능한 자기양자수: $m_e=-\ell,\ -\ell+1,\ \cdots,\ -1, 0, 1,\ \cdots,\ \ell-1,\ \ell$

$$L_Z=-3\hbar,\ -2\hbar,\ -\hbar,\ 0,\ \hbar,\ 2\hbar,\ 3\hbar \qquad \left(\hbar=\frac{h}{2\pi}\right)$$

$$\therefore L_Z=0,\pm\frac{h}{2\pi},\pm\frac{2h}{2\pi},\pm\frac{3h}{2\pi}$$

26-9 배타원리와 주기율표*

연습 26-17*. 수소 원자에서 전자가 n=5 인 상태에 있다,

(가) 가능한 궤도 양자수 ℓ 의 값은 얼마인가?

(나) 각각의 ℓ 에 대해 가능한 자기 양자수 m_e 는 ?

풀이 (가) 주양자수에 대해 가능한 궤도 양자수는 $\ell = n-1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 이다

n=5 이므로 가능한 궤도 양자수 : $\therefore \ell = 0, 1, 2, 3, 4$

(나) 자기 양자수 $m_e = -\ell,\ -\ell+1,\ \cdots,\ -1, 0, 1,\ \cdots, \ell-1,\ \ell$

$$(\ell = 0) \quad m_e = 0$$

$$(\ell = 1) \quad m_e = -1, 0, 1$$

$$(\ell = 2) \quad m_e = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$(\ell = 3) \quad m_e = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$(\ell = 4) \quad m_e = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

26-9 배타원리와 주기율표*

연습 26-18*. Z=7 인 질소에는 전자가 7 개 있다. 각각의 전자의 양자수 n, l, m_l, m_s 를 구하라.

풀이 전자가 7 개 이므로 각 껍질에 들어가는 전자의 경우는 다음과 같다.

주양자수 n=1 일 때 가능한 궤도양자수 l = 0 이고 자기양자수 m_l =0 , 스핀 양자수 m_s 는 +1/2 와 −1/2 이다. (n=1 주 껍질에 들어가는 전자의 수는 2 개)

주양자수 n=2 에서 가능한 궤도양자수 l = 0, 1 이다.

- 궤도 양자수 l = 0 일 때 : 가능한 자기 양자수는 0 이고 스핀양자수는 +1/2, −1/2 이다 . (n=2 , l=0 의 궤도에 들어가는 전자의 수도 2 개이다)
- 궤도 양자수 l =1 일 때 가능한 자기 양자수는 1, 0, −1 이며 각각에 해당하는 스핀양자 수는 +1/2 와 −1/2 가 있다. 즉, (n=2, l =1 m_l =0)일 때 스핀 양자수가 다르게 2 개의 전자가 배치되고 나머지는 (n=2, l=1 m_l =1 이나 −1) 상태에 1 개의 전자가 배치될 것이다. (따라서 질소의 에너지 준위는 $1s^2$ $2s^2$ $2p^3$ 이다.)

* 질소의 전자 궤도에 배치되는 전자를 표로 정리하면 다음과 같다.

n	l	m_l	m_s
1	0	0	$+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$
2	0	0	$+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$
2	1	0	$+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$
2	1	1 또는 −1	$\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}$

발전 문제

연습 26-19. 처음 에너지가 E_0인 광자가 질량이 m_e 인, 정지해 있는 전자와 산란각 θ 로 컴프턴 산란을 했다. 산란된 광자의 나중 에너지가 다음과 같음을 보여라

$$E' = \frac{E_0}{1+\left(\frac{E_0}{m_e c^2}\right)(1-\cos\theta)}$$

풀이

컴프턴 산란 식과 광자의 운동량과 에너지의 관계식을 이용한다. $\left(p_{광자} = \frac{h}{\lambda} = \frac{E_0}{c}\right)$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\lambda'}{h} - \frac{\lambda}{h} = \frac{1}{m_0 c}(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\left(\frac{h}{\lambda'}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{h}{\lambda}\right)} = \frac{1}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{E'}{c}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{E_0}{c}\right)} = \frac{1}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E'} = \frac{1}{E_o} + \frac{1-\cos\theta}{m_0 c^2} \Rightarrow \frac{1}{E'} = \frac{m_0 c^2 + E_o(1-\cos\theta)}{E_o m_0 c^2}$$

$$\Rightarrow E' = \frac{E_o m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_o(1-\cos\theta)} = \frac{E_o}{1+\frac{E_o}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)}$$

발전 문제

연습 26-20. 수소 원자에서 전자 대신에 뮤온이 양성자와 서로 끌어당겨 원자를 이룬 걸 뮤온 수소 원자라고 부른다. 뮤온의 질량은 전자의 질량 보다 207배 더 무겁다. 뮤온 수소 원자가 바닥상태에 있을 때 에너지와 보어 반지름을 구하여라.

풀이 뮤온도 전자와 같은 전하량이고 질량만 207배 무겁기 때문에 같은 식에 적용할 수 있다.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m_\mu \frac{v^2}{r} = \frac{(m_\mu vr)^2}{m_\mu r^3} = \frac{L^2}{m_\mu r^3} = \frac{1}{m_\mu r^3}\frac{n^2h^2}{4\pi^2}$$

(각운동량 양자조건)

$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

$$(n = 1, 2, 3\cdots)$$

$$r = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_\mu e^2}n^2 = \frac{1}{207}\left(\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}\right)n^2$$

$$(m_\mu = 207m_e) \qquad \therefore r_1 = \frac{1}{207}\left(\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}\right) = \frac{1}{207}\left(0.53 \times 10^{-10} m\right) = 2.56\times10^{-13}(m)$$

에너지 양자화 조건

$$K = \frac{1}{2}m_\mu v^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}, \qquad U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (m_\mu = 207m_e)$$

$$E_n = K + U = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{m_\mu e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -207\left(\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right)\frac{1}{n^2} = 207E_1\frac{1}{n^2} = -\frac{2815.2\ \text{eV}}{n^2}$$

$$\therefore E_1 = -2820\ \text{eV} = -2.82keV$$