대학물리학 (제4판) 연습문제 풀이 (2장) - by 송현석

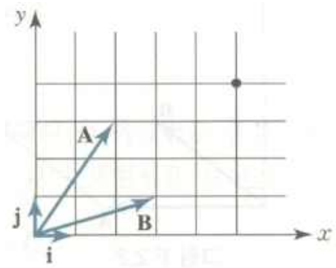
1. 주위 환경에서 (가) 이동경로보다 변위가 중요한 경우 (나) 변위보다 이동경로가 중요한 경우를 한 가지씩 들어보아라.

2. 어떤 물고기가 인천 월미도에서 영종도를 직선경로로 왕복하였다. 이때 이 물고기의 변위(벡터)와 이동거리(스칼라)를 구하여라. 월미도와 영종도 간 직선거리는 $2.00\,km$이다.

변위 $2.00\,km - 2.00\,km = 0.00\,km$

이동거리 $2.00\,km + 2.00\,km = 4.00\,km$

3. 그림 P.2.1의 두 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$를 단위벡터 $\hat{i}$, $\hat{j}$를 이용하여 나타내고, 두 벡터의 합 $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{B}+\vec{A}$를 구하여라. 벡터 합의 교환법칙이 성립함을 삼각형법을 이용하여 보여라.



$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$, $\quad \vec{B} = 3\hat{i} + 1\hat{j}$

$$\vec{A}+\vec{B} = (2\hat{i}+3\hat{j}) + (3\hat{i}+1\hat{j}) = (2+3)\hat{i} + (3+1)\hat{j} = 5\hat{i}+4\hat{j} \qquad \text{벡터}$$
$$\vec{B}+\vec{A} = (3\hat{i}+1\hat{j}) + (2\hat{i}+3\hat{j}) = (3+2)\hat{i} + (1+3)\hat{j} = 5\hat{i}+4\hat{j} \qquad \text{벡터}$$

4. $\vec{A} = (2, 1, -1)$, $\vec{B} = (-1, 2, 1)$일 때 다음을 계산하여라.

(가) $|\vec{A}| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

(나) $|\vec{A}| + |\vec{B}| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} + \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} + \sqrt{1+4+1}$
$= \sqrt{6} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

(다) $|\vec{A}+\vec{B}| = |(2, 1, -1) + (-1, 2, 1)| = |(2-1)+(1+2)+(-1+1)| = |(1, 3, 0)|$
$= \sqrt{1^2+3^2+0^2} = \sqrt{1+9+0} = \sqrt{10}$

(라) (나)와 (다)의 결과가 다름을 설명하여라.

(나)는 두 스칼라량의 합이고, (다)는 두 벡터의 합의 크기이다.

5. $\vec{A}=(a_1,\,a_2,\,a_3)$, $\vec{B}=(b_1,\,b_2,\,b_3)$일 때, $\vec{A}\cdot\vec{B}$와 $\vec{A}\times\vec{B}$를 구하고, 각 결과가 스칼라인지 벡터인지 구분하여라.

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (a_1,\,a_2,\,a_3)\cdot(b_1,\,b_2,\,b_3)\\ &= (a_1\times b_1)+(a_2\times b_2)+(a_3\times b_3)\\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \qquad \text{스칼라}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (a_1,\,a_2,\,a_3)\times(b_1,\,b_2,\,b_3)\\ &= (a_2\times b_3-a_3\times b_2)\hat{i}+(a_3\times b_1-a_1\times b_3)\hat{j}+(a_1\times b_2-a_2\times b_1)\hat{k}\\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k} \qquad \text{벡터}\end{aligned}$$

6. $\vec{A}=(1,-1,2)$, $\vec{B}=(-1,1,3)$일 때에 다음을 계산하여라.

(1) $\vec{A}+\vec{B}=(1,-1,2)+(-1,1,3)=(0,0,5)$ 벡터

(2) $\vec{A}-2\vec{B}=(1,-1,2)-2(-1,1,3)=(1,-1,2)-(-2,2,6)=(3,-3,-4)$ 벡터

(3) $\vec{A}\cdot\vec{B}=(1,-1,2)\cdot(-1,1,3)=\{1\times(-1)\}+\{(-1)\times1\}+\{2\times3\}$
$=(-1)+(-1)+6=4$ 스칼라

(4) $\vec{A}\times\vec{B}=\{(-1)\times3-2\times1\}\vec{i}+\{2\times(-1)-1\times3\}\vec{j}+\{1\times1-(-1)\times(-1)\}\vec{k}$
$=-5\vec{i}-5\vec{j}=(-5,-5,0)$ 벡터

7. 식 $(2.31a)$와 $(2.31b)$를 이용하여 식 (2.32)를 유도하라.

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0 \quad \cdots\cdots \quad (2.31a)$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \quad \cdots\cdots \quad (2.31b)$$

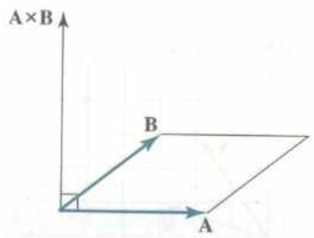
$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k} \quad \cdots\cdots \quad (2.32)$$

8. 크기가 0이 아닌 세 벡터가 다음의 관계식을 가질 때, 이들의 기하학적 배치를 구하라.
$\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}$

$\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{C}-\vec{B}\cdot\vec{C}=0$ 분배법칙
$\Rightarrow \quad (\vec{A}-\vec{B})\cdot\vec{C}=0$

$\vec{A}=\vec{B}$ or $\vec{A}-\vec{B}$ 와 $\vec{C}$ 의 사잇각이 90° < 수직 >

9. 그림 P.2.2는 $\vec{A}\times\vec{B}$를 표현한 것이다. $\vec{A}\times\vec{B}$의 크기, 즉 $|\vec{A}\times\vec{B}|$가 두 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$가 이루는 평행사변형의 넓이가 됨을 보여라.



$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta$ (평행사변형의 넓이) 여기서 θ 는 $\vec{A}$ 와 $\vec{B}$ 의 사잇각

10. 두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$가 이루는 사잇각이 θ일 때, 합벡터 $\vec{S}$ $(=\vec{A}+\vec{B})$의 크기가 다음과 같이
주어짐을 보여라. $S=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$

$$
\begin{aligned}
S = |\vec{S}| = \sqrt{\vec{S}\cdot\vec{S}} &= \sqrt{(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})} \\
&= \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}} \\
&= \sqrt{A^2+AB\cos\theta+BA\cos\theta+B^2} \qquad \text{교환법칙} \\
&= \sqrt{A^2+2AB\cos\theta+B^2}
\end{aligned}
$$

11. 임의의 두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$에 대해서 다음을 보여라.

(1) $\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0$

$\vec{A}\times\vec{B}$ 의 방향은 $\vec{A}$ 에도 수직이고 $\vec{B}$ 에도 수직이다.
수직인 벡터 사이의 스칼라곱은 0이다.

(2) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{A})=(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{A}$

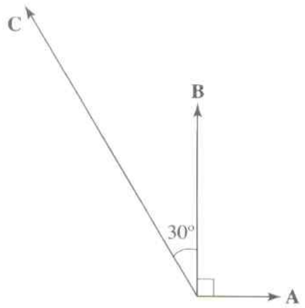
일반적으로 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ 이다.
그러나 $\vec{C}$ 를 $\vec{A}$ 로 대치할 경우에는 다음이 성립한다.
$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{A})=(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{A}$

12. 평면상에 있는 다섯 벡터의 합이 0일 때, 이들 벡터들의 사잇각을 모두 합치면 몇 도인가?

$(\pi-\theta_1)+(\pi-\theta_2)+(\pi-\theta_3)+(\pi-\theta_4)+(\pi-\theta_5)=3\pi$ 5각형의 내각의 합

$\Rightarrow \quad \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5=5\pi-3\pi=2\pi$

13. 그림 P.2.3과 같이 크기가 각각 1, 2, 4인 세 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$가 같은 평면상에 놓여 있다. 벡터 $\vec{A}$와 벡터 $\vec{B}$는 서로 수직이고, 벡터 $\vec{B}$와 벡터 $\vec{C}$의 사잇각이 30°일 때, 벡터 $\vec{C}$는 벡터 $\vec{A}$와 벡터 $\vec{B}$를 사용하여, $\vec{C}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}$ 로 나타낼 수 있다. 두 상수 α와 β를 구하여라.



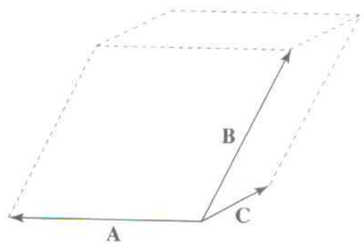
$$4\sin 30^\circ = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha\times 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2$$
$$4\cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \beta\times 2 = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{3}$$

14. 두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$가 주어졌을 때, $\vec{C}=\vec{B}-\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A}$ 는 벡터 $\vec{A}$에 수직임을 보여라.

$$\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\left(\vec{B}-\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A} \qquad \text{교환법칙}$$
$$=\vec{A}\cdot\vec{B}-\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C}=0 \quad \Rightarrow \quad AC\cos\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \theta=90^\circ$$

15. 그림 P.2.4와 같이 평행육면체의 한 꼭지점을 중심으로 세 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$를 잡을 때, 평행육면체의 부피 V는 다음과 같이 표현됨을 보여라.
$V=|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$



$|\vec{A}\times\vec{C}|=AC\sin\theta$ (밑면의 면적) 여기서 θ 는 $\vec{A}$ 와 $\vec{C}$ 의 사잇각
$B\cos\phi$ (육면체의 높이) 여기서 ϕ 는 $\vec{B}$ 와 $\vec{A}\times\vec{C}$ 의 사잇각
$V=|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|=|\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})|=BAC\sin\theta\cos\phi$ (육면체의 부피)

16. 크기가 같은 두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$를 합한 벡터 $\vec{C}$의 크기가 벡터 $\vec{A}$ 또는 $\vec{B}$의 크기와 같을 때, 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$가 이루는 사잇각은 몇 도인가?

$\vec{A}$ 의 크기를 a 라 하고, $\vec{B}$ 의 크기를 b 라 하고, $\vec{C}$ 의 크기를 c 라 하자.

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = a^2 (= b^2 = c^2) \qquad (a = b = c)$$
$$\Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{A}+2\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{B} = a^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 + 2ab\cos\theta + b^2 = a^2$$
$$\Rightarrow \quad 2ab\cos\theta + b^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{b^2}{2ab} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 120^\circ$$