12201856 김다영

나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다.

1.

(1). 거짓

반례: $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}0&3\\1&0\end{bmatrix}$

$AB=AC=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ 이지만 $B\neq C$이다.

(2). 참 A가 Symmetric이면. $A=-A^T$이다.

$A^{-1}=(-A^T)^{-1}=\frac{1}{-1}(A^T)^{-1}=-(A^T)^{-1}=-(A^{-1})^T$ 이므로.

A^{-1}도 Symmetric이다.

(3) 거짓 반례: $A=$ ~~1 0 0~~ $\cancel{A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}$ $=$ $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{matrix}a&b\\d&e\\g&h\end{matrix}$

$\det(A)=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi).$ $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$인 경우.

$=2$이다. $\det(A)=1\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=1-1(-1)=2.$

(4). ~~↗~~. 거짓

반례: leading 변수의 개수는 A의 행 개수보다 작다. (leading의 최대개수는 행의개수와 동일하므로)

따라서 5이하여야 한다.

2. $\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&0&1&2\\0&0&a^2-4&a-2\end{pmatrix}$ ~~(2) $a\neq2$이고. $a=-\frac{3}{2}$이면 유일해~~

$a\neq2$

2행에서 $x_3=2$이므로. $(a^2-4)2=a-2$. $(a+2)\cancel{(a-2)}\cdot2=\cancel{a-2}$. $2a+4=1$. $2a=-3$. $a=-\frac{3}{2}$.

→ $a\neq2$ $\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&0&1&2\\0&0&a+2&1\end{pmatrix}$ ~~(2) $a\neq2$이고~~

$2(a+2)$ 2

-4. -2.

~~$a\neq\pm2$~~ $a\neq2$이고,

(1) 해X ~~$a\neq-\frac{3}{2}$일 때~~. ~~$a\neq2$이고~~. ~~$a\neq2$, $a\neq-\frac{3}{2}$인 경우~~. $a\neq-\frac{3}{2}$인 경우. ~~(2행, 3행이 모순)~~.

(2) 유일해 해당 없음.

(3) 무수히 多 ~~$a=\frac{3}{2}$인 경우 모두 해당~~. $a=2$이거나 $a=\frac{3}{2}$인 경우.

12201856 김다명

3. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+w \\ 1+2w \\ w \end{bmatrix}$ → ~~1+w~~ 0 0

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$\underset{2\times3}{A}\underset{3\times1}{x} = \underset{2\times1}{b}$

$x_1 =$

$x_1 = 1+x_3 \rightarrow x_1 - x_3 = 1$

$x_2 = 1+2x_3 \quad x_2 - 2x_3 = 1$

$x_3 = x_3$

따라서 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 이다.

$x_1 \quad b_1 =$

x_2

$x_3 \quad b_2$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

4. $A^{-1} = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$A^2x = b \rightarrow x = (A^{-1})^2 b$

$(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 & 0 & 0 \\ 0 & k+4 & 2 \\ 0 & 2k & k \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} h^2 & 0 & 0 \\ 0 & k+4 & 2 \\ 0 & 2k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3h^2 \\ k+4+4 \\ 2k+2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3h^2 \\ k+8 \\ 4k \end{bmatrix}$ 이다.

5. (1). A. B $n\times n$.

B의 i행은 A의 i행에 i를 곱한 값.

$b_{ij} = i * a_{ij}$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1a_{11} & 1a_{12} & \cdots & 1a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ na_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$

즉. B는 A의 1행에 1배. 2행에 2배, ... n행에 n배 된것이므로,

한행에 k배 곱해주는 기본행연산을 진행하면, det의 크기도 k배가 된다.

따라서. $\det(B) = \det(A) \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$을 한것이다.

즉 $\square = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ 이다.

~~(2)~~.

12201856 김다영

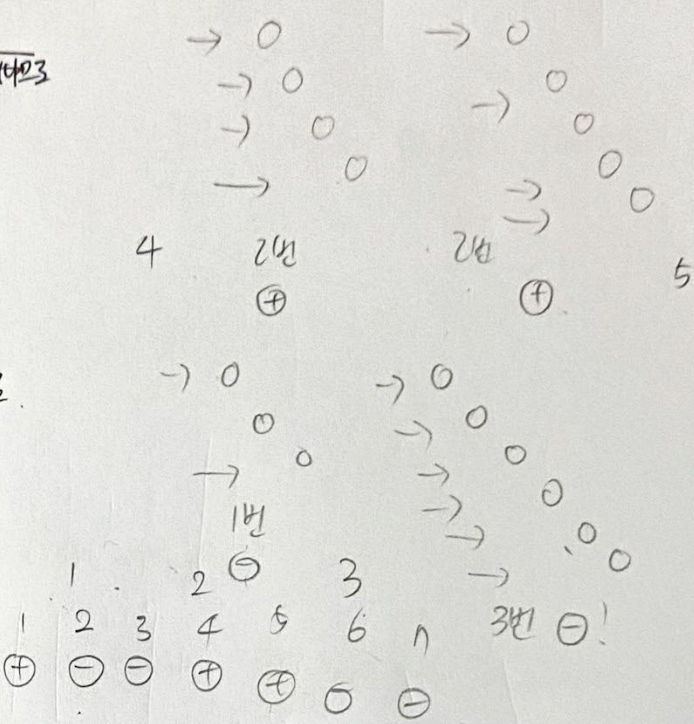
6. ~~n이 짝수일때는~~.

~~한행~~ 두 행을 서로 바꾸는 연산을 하면 det의 값이 원래값에서 (-1)을 곱해준 값으로 바뀐다.

따라서, n번째행과 1번째행, n-1번째행과 2번째행 ··· 을 모두 서로 바꿔 대각행렬로 만들어주면,

대각행렬의 det의 값은 각 원소들의 곱과 동일하므로.

~~ㄱ) n이 짝수면 행을바꾸는 연산이 $\frac{n}{2}$번 일어나므로~~ 두



~~ㄴ) n이 홀수면~~. 몫이.

n을 2로 나눈 값의 몫이 홀수면.

두 행을 바꾸는 행연산을 홀수번 해주는 것이므로

$\det(A) = -(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n)$이 되고.

n을 2로 나눈 값의 몫이 짝수면

두 행을 바꾸는 행연산을 짝수번 해준것이므로

$\det(A) = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$이 된다.

~~7.~~ ↳ 즉 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \rightarrow (-1)^{[\frac{n}{2}]} \begin{vmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & a_2 & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 0 & a_1 \end{vmatrix}$ 가 된다.

2로 나눈값.

7. $A\ (n \times 2)$.

$$\det(A^TA) = \det(A^T)\det(A)$$
$$= \{\det(A)\}^2.$$

$\underset{n\times 2}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix}$

$V = [a_{11} \ \ a_{12}]$ $\qquad \|V\| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}$

$W = [\cancel{a_{12}}\ a_{21} \ \ a_{22}]$ $\qquad \|W\| = \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}$

$V \cdot W = a_{11}a_{21} + a_{12} \cdot a_{22}$.

$\underset{2\times n}{A^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \end{bmatrix}$

$\underbrace{A \cdot A^T}_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \cdots \\ a_{21}a_{11} + a_{22}^2 & \\ & \end{bmatrix}$

12201856 김다영

8.

B의 1행 = A의 1행 + k(A의 2행). ($k \neq 0$) 이라는 것은

A의 2행에 k를 곱해 1행에 더해주는 ~~행~~ 기본행연산을 진행한 행렬이 B라는 것이다.

이때 $det(A) = det(B)$는 참이다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{25} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{51} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{55} \end{bmatrix} \text{이면 } B = \begin{bmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} & a_{14}+ka_{24} & a_{15}+ka_{25} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{25} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{51} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{55} \end{bmatrix}$$

$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{15}C_{15}$

$det(B) = (a_{11}+ka_{21})C_{11} + (a_{12}+ka_{22})C_{12} + \cdots + (a_{15}+ka_{25})C_{15}$

$= \cancel{(a_{11}+a_{12}+\cdots} \; (a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{15}C_{15}) + k(a_{21}C_{11} + \cancel{a_{22}} \; a_{22}C_{12} + \cdots + a_{25}C_{15})$이다.

$\underbrace{\quad}_{= det(A)} + k(a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + \cancel{a} \cdots + a_{25}C_{15})$

~~$a_{21}C_{11} = a_{22}C_{12} = \cdots = a_{25}C_{15} = 0$이다.~~ ~~$a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + 0$~~ $a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + \cdots + a_{25}C_{15} = 0$이므로.

따라서 $det(B) = det(A) + 0 = det(A)$가 된다.

5(2). $A\,adj(A) = det(A)\,I$.

$\cancel{=}$ $adj(A) = det(A) \cdot A^{-1}$.

$det(adj(A)) = det(det(A) \cdot A^{-1})$

$= \{det(A)\}^n \cdot det(A^{-1})$

$= \{det(A)\}^n \cdot \dfrac{1}{det(A)} = \{det(A)\}^{n-1}$ 이다

즉 $\underline{2^{n-1}}$이 된다.