2021-하계계절-공수2(오후)-중간시험-문제 및 채점 기준

단답형

1. (10pt) 참이면 T, 거짓이면 F로 쓰시오

(1) 구간 $[-1,1]$에서 두 함수 $f(x)=x$와 $g(x)=x+ax^2+\frac{5}{3}x^3$는 직교한다.

(2) 집합 $\{1, \cos(2nx), \sin(2mx)\}_{n,m=1}^{\infty}$은 구간 $[-\pi, 0]$의 직교집합이다.

(3) $f(x)$가 $2L$를 주기로 갖고, 임의의 폐구간에서 구분연속이고, 또한 $f'(x)$도 구분연속이면, $f(x)$의 푸리에 급수는 $f(x)$가 불연속인 점에서는, $f(x)$의 좌극한값과 우극한값의 평균값에 수렴한다.

(4) $-\infty < x < \infty$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 모든 유한구간에서 $f(x)$와 $f'(x)$가 구분연속이면 $f(x)$는 푸리에 적분표현을 갖는다.

(5) $F_s(f(x))$를 함수 $f(x)$의 푸리에 사인 변환이라 할 때, 공식 $F_s(f''(x))=-w^2F_s(f(x))-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,wf(0)$ 이 성립한다.

정답:

1	2	3	4	5
F	T	T	F	F

(각 2점)

2. (30pt) 밑줄 친 부분을 완성하시오.

(1) 주기가 $\frac{2L}{3}$인 주기함수 $f(x)$가 우함수일 때, 푸리에 코사인 급수와 계수는 다음으로 주어진다.

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\underline{\qquad\qquad},\quad A_0=\underline{\qquad\qquad\qquad},\quad A_n=\underline{\qquad\qquad\qquad}\quad (n=1,2,\ldots)$$

정답: $\frac{3n\pi}{L}x$/ $\frac{3}{2L}\int_{-\frac{L}{3}}^{\frac{L}{3}}f(x)dx$ 또는 $\frac{3}{L}\int_0^{\frac{L}{3}}f(x)dx$ (1점, 2점)

$\frac{3}{L}\int_{-\frac{L}{3}}^{\frac{L}{3}}f(x)\cos\frac{3n\pi x}{L}dx$ 또는 $\frac{6}{L}\int_0^{\frac{L}{3}}f(x)\cos\frac{3n\pi x}{L}dx$ (2점)

(2) 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (|x|\le 1) \\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$의 푸리에 적분표현은 다음으로 주어진다.

$$f(x)=\underline{\qquad}\int_0^{\infty}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\,dw$$

정답: $\frac{2}{\pi}$, $\frac{(\sin w-w\cos w)\sin wx}{w}$ (2점, 3점)

(3) $F_s(f(x))$는 $f(x)$의 푸리에 사인 변환이다. $F_s(e^{-3x})=\underline{\qquad\qquad}$이다.

정답: $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{9+w^2}$ (5점)

(4) $F(f(x))$는 $f(x)$의 푸리에 변환이다. $F(e^{-ax^2})=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$을 이용하면 다음을 얻는다.

$$F(xe^{-x^2/8})=\underline{\qquad\quad}F(e^{-x^2/8})=\underline{\qquad\qquad}e^{\underline{\qquad}}.$$

정답: $-4iw$, $-8iw$, $-2w^2$ (2점, 2점, 1점)

(5) 초기조건 $xy=x+y$, $z=1$을 만족하는 일계 선형 편미분방정식 $x^2z_x+y^2z_y-z^2=0$의 해 $z=z(x,y)$는 다음과 같다.

$$z=z(x,y)=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

정답: $z = z(x,y) = \dfrac{2xy}{x+y+xy}$ (5점)

(6) 파동방정식 $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & \\ u(0,t) = 0,\ u(4,t) = 0 & (t \ge 0) \\ u(x,0) = x,\ u_x(x,0) = x & (0 \le x \le 4) \end{cases}$ 의 D'Alembert의 해는 다음으로 주어진다.

$u(x,t) =$ ______________ .

정답: $x + xt$ (5점)

서술형

1.(15점) 함수 $f(x) = x^3\ (-1 \le x \le 1);\ f(x) = f(x+2)$에 대하여, 파르스발(Parseval) 항등식을 이용하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$임을 설명하시오. (단, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$과 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$을 이용)

정답: $f(x)$는 기함수, $2L = 2,\ L = 1,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 2\int_0^1 x^3 \sin(n\pi x)dx = 2\left[x^3 \frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{6}{n\pi}\int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)dx$$
$$= -\frac{(-1)^n 2}{n\pi} + \frac{6}{n\pi}\left\{\left[x^2 \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx\right\}$$
$$= -\frac{(-1)^n 2}{n\pi} - \frac{12}{n^2\pi^2}\left\{\left[x\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx\right\}$$
$$= -\frac{(-1)^n 2}{n\pi} + \frac{12}{n^2\pi^2}\frac{(-1)^n}{n\pi} = (-1)^n \frac{2}{n\pi}\left\{\frac{6}{n^2\pi^2} - 1\right\} = (-1)^n \frac{2(6-n^2\pi^2)}{n^3\pi^3} \quad \text{(5점)}$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^6\,dx = 2\int_0^1 x^6\,dx = \frac{2}{7} \quad \text{(2점)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \frac{2(6-n^2\pi^2)}{n^3\pi^3}\right)^2 = \frac{4}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36 - 12n^2\pi^2 + n^4\pi^4}{n^6}$$
$$= \frac{144}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} - \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{(3점)}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{144}{\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} - \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{(2점)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{144}\left(\frac{2}{7} + \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{(3점)}$$
$$= \frac{\pi^6}{144}\left(\frac{2}{7} + \frac{48}{\pi^4}\frac{\pi^4}{90} - \frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi^6}{144}\left(\frac{2}{7} + \frac{24}{45} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi^6}{144}\frac{48}{315} = \frac{\pi^6}{945}$$

2.(15점) $xy \ne 0$일 때, 2계 준선형 편미분방정식

$$x u_{xx} - y u_{xy} = 0$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(1) 쌍곡선형, 포물선형, 타원형 중 어떤 유형인가?

(2) 특성방정식의 해를 구하시오.

(3) 주어진 편미분방정식을 정규형으로 바꾸어 일반해 $u = u(x,y)$를 구하시오.

정답: (1) $A = x,\ B = -\frac{1}{2}y,\ C = 0;\ AC - B^2 = -\frac{1}{4}y^2$이므로 주어진 PDE는 **쌍곡선형**이다. (3점)

(2) $A(y')^2 - 2By' + C = 0;\ x(y')^2 + yy' = y'(xy' + y) = 0,\ y' = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{y}{x} \end{cases}$

따라서 두 해는 $y = C,\ y = \dfrac{C}{x}$이다. (3점)

(3) $xy \neq 0$일 때, 주어진 편미분방정식은 쌍곡선형이므로 $v = y,\ w = xy$ (3점)로 치환하면

$$u_x = u_v v_x + u_w w_x = y u_w = v u_w$$
$$u_{xx} = (v u_w)_x = v_x u_w + v(u_w)_x = v(u_{wv} v_x + u_{ww} w_x) = v y u_{ww} = v^2 u_{ww}$$
$$u_{xy} = (v u_w)_y = v_y u_w + v(u_w)_y = u_w + v(u_{wv} v_y + u_{ww} w_y) = u_w + v(u_{wv} + x u_{ww}) = u_w + v u_{wv} + w u_{ww}$$

주어진 식에 대입하면 $\dfrac{w}{v} v^2 u_{ww} - v(u_w + v u_{wv} + w u_{ww}) = 0,\ v w u_{ww} - v u_w - v^2 u_{wv} - v w u_{ww} = 0$

$$v u_w + v^2 u_{wv} = 0,\ v u_{wv} + u_w = 0 \ \text{(3점)}$$

$z = u_w$로 치환하면 $v z_v + z = 0,\ \dfrac{1}{z} z_v = -\dfrac{1}{v},\ z = u_w = \dfrac{f(w)}{v},\ u = \dfrac{1}{v}\displaystyle\int f(w)dw + g(v)$

$$u = \frac{1}{v} h(w) + g(v) = \frac{1}{y} h(xy) + g(y)$$ 여기서 h, g는 임의의 함수이다. (3점)

3.(15점) 열방정식의 해 $u = u(x,t)$를 구하시오.

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} \\ u(0,t) = 10,\ u(40,t) = 50, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 40 - 2x, & 0 < x < 40 \end{cases}$$

정답: $c^2 = 3,\ c = \sqrt{3},\ L = 40,\ v(x) = 10 + \dfrac{50-10}{40} x = 10 + x$ (3점)

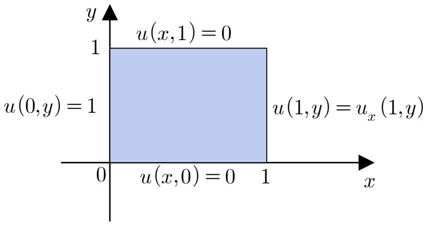
$f(x) - v(x) = 40 - 2x - 10 - x = 30 - 3x$ (3점)

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x) - v(x)) \sin\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{20}\int_0^{40} (30 - 3x)\sin\frac{n\pi x}{40} dx$$
$$= \frac{1}{20}\left\{ \left[(30 - 3x)\frac{-40}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{40} \right]_0^{40} - \int_0^{40} (-3)\frac{-40}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{40} dx \right\}$$
$$= \frac{-40}{20}\frac{1}{n\pi}\left\{ -90(-1)^n - 30 - \frac{120}{n\pi}\int_0^{40}\cos\frac{n\pi x}{40} dx \right\} = \frac{2}{n\pi}\{90(-1)^n + 30\} \ \text{(3점)}$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\{90(-1)^n + 30\}\sin\frac{n\pi x}{40} e^{-\left(\frac{\sqrt{3}n\pi}{40}\right)^2 t} \ \text{(3점)}$$

$$\therefore\ u(x,t) = v(x) + w(x,t) = 10 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\{90(-1)^n + 30\}\sin\frac{n\pi x}{40} e^{-\left(\frac{\sqrt{3}n\pi}{40}\right)^2 t} \ \text{(3점)}$$

4.(15점) 경계조건이 다음과 같이 주어진 직사각형 R의 점 (x,y)에서의 온도를 $u = u(x,y)$라 하자.



변수 분리해 $u(x,y) = X(x)Y(y)$가 존재한다고 가정하면, 두 개의 상미분방정식을 얻는다.

(a) $X'' + kX = 0,\ k$는 상수　　(b) $Y'' - kY = 0,\ k$는 상수

이후의 과정을 논리적으로 서술하여 $u = u(x,y)$를 구하시오.

정답: 경계조건 $Y(0) = Y(\pi) = 0$을 만족하는 (a)와 (b)의 해를 구하자.

$k = -p^2 < 0$인 경우: (b)의 해는 $Y(y) = C\cos py + D\sin py$이고 경계조건으로부터

$Y(0)=0:\ C=0,\ \ Y(1)=0:D\neq 0, p=n\pi\ (n=1,2,3,\ldots)$

따라서 $Y_n(y)=\sin(n\pi y), n=1,2,3,\ldots,$ (3점)

(a)의 해 $X_n(x)=A_n e^{n\pi x}+B_n e^{-n\pi x}$

경계조건 $X_n(1)=X_n{}'(1)$을 만족하려면 $X_n{}'(x)=n\pi A_n e^{n\pi x}-n\pi B_n e^{-n\pi x}$

$A_n e^{n\pi}+B_n e^{-n\pi}=n\pi A_n e^{n\pi}-n\pi B_n e^{-n\pi}$, 즉 $B_n=\dfrac{n\pi-1}{n\pi+1}A_n e^{2n\pi}$ (3점)

따라서 $u_n(x,y)=A_n\left(e^{n\pi x}+\dfrac{n\pi-1}{n\pi+1}e^{-n\pi(x-2)}\right)\sin(n\pi y), n=1,2,3,\ldots$ (2점)

경계조건(왼쪽)을 만족하는 해를 구하자.

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(e^{n\pi x}+\frac{n\pi-1}{n\pi+1}e^{-n\pi(x-2)}\right)\sin(n\pi y)$$ (2점)

$$u(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(1+\frac{n\pi-1}{n\pi+1}e^{2n\pi}\right)\sin(n\pi y)=1$$

$$A_n\left(1+\frac{n\pi-1}{n\pi+1}e^{2n\pi}\right)=\frac{2}{1}\int_0^1\sin(n\pi y)\,dy=\frac{2}{n\pi}((-1)^n-1)$$ (3점)

따라서 구하는 해는 $u(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{2}{n\pi}((-1)^n-1)}{\left(1+\frac{n\pi-1}{n\pi+1}e^{2n\pi}\right)}\left(e^{n\pi x}+\frac{n\pi-1}{n\pi+1}e^{-n\pi(x-2)}\right)\sin(n\pi y).$ (2점)