**[과제 31]** 다음 복소 함수는 어떤 점에서도 해석적이지 않음을 보여라.

(1) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ (2) $f(z) = \mathrm{Re}(z^2)$ (3) $f(z) = y + ix$

(4) $f(z) = z - \bar{z}$ (5) $f(z) = \bar{z}^2$ (6) $f(z) = x^2 + y^2$

**(풀이)** (1) $u = x,\ v = 0$이고 $u_x = 1 \neq v_y = 0,\ u_y = 0 = -v_x = 0$이므로 모든 점에서 코시-리만 방정식을 만족하지 않는다.

(2) $u = x^2 - y^2,\ v = 0$이고 $u_x = 2x \neq v_y = 0,\ u_y = -2y \neq -v_x = 0$이므로 $(0,0)$을 제외한 모든 점에서는 코시-리만 방정식을 만족하지 않는다.

(3) $u = y,\ v = x$이고 $u_x = 0 = v_y = 0,\ u_y = 1 \neq -v_x = -1$이므로 모든 점에서 코시-리만 방정식을 만족하지 않는다.

(4) $u = 0,\ v = 2y$이고 $u_x = 0 \neq v_y = 2,\ u_y = 0 = -v_x = 0$이므로 모든 점에서 코시-리만 방정식을 만족하지 않는다.

(5) $u = x^2 - y^2,\ v = -2xy$이고 $u_x = 2x \neq v_y = -2x,\ u_y = -2y \neq -v_x = 2y$이므로 $(0,0)$을 제외한 모든 점에서는 코시-리만 방정식을 만족하지 않는다.

(6) $u = x^2 + y^2,\ v = 0$이고 $u_x = 2x \neq v_y = 0,\ u_y = 2y \neq -v_x = 0$이므로 $(0,0)$을 제외한 모든 점에서는 코시-리만 방정식을 만족하지 않는다.

**[과제 32]** 다음 복소 함수는 적당한 영역에서 해석적임을 보여라.

(1) $f(z) = z^2 + z$ (2) $f(z) = z^3$ (3) $f(z) = z + \frac{1}{z}$

(4) $f(z) = \frac{1}{1-z}$ (5) $f(z) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} - i\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$

**(풀이)** (1) $u = x^2 + x - y^2,\ v = 2xy + y,\ u_x = 2x + 1 = v_y,\ u_y = -2y = -v_x$ 이므로 모든 $z$에 대해 해석적이다.

(2) $u = x^3 - 3xy^2,\ v = 3x^2y - y^3,\ u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y,\ u_y = -6xy = -v_x$ 이므로 모든 $z$에 대해 해석적이다.

(3) $u = x + \frac{x}{x^2+y^2},\ v = y - \frac{y}{x^2+y^2},\ u_x = 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = v_y,\ u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x$ 이므로 모든 $z$에 대해 해석적이다.

(4) $u = \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2},\ v = \frac{y}{(1-x)^2+y^2},\ u_x = \frac{(1-x)^2-y^2}{((1-x)^2+y^2)^2} = v_y,\ u_y = \frac{-2(1-x)y}{(1-x)^2+y^2)^2} = -v_x$이므로 모든 $z$에 대해 해석적이다.

(5) $u = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2},\ v = -\frac{y}{(x-1)^2+y^2},\ u_x = \frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2} = v_y,\ u_y = \frac{-2(x-1)y}{(x-1)^2+y^2)^2} = -v_x$이므로 모든 $z$에 대해 해석적이다.

**[과제 33]** 다음 함수가 조화 함수임을 밝히고, 각 경우의 켤레 조화 함수를 구하여라.
(1) $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$ (2) $u(x,y) = ax + by$ ($a, b$는 상수)
(3) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ (4) $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ $(x^2 + y^2 \neq 0)$
(5) $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

**(풀이)** (1) $u_x = 2x - 1,\ u_{xx} = 2,\ u_y = -2y,\ u_{yy} = -2,\ u_{xx} + u_{yy} = 0$
$v_y = u_x = 2x - 1,\ v = 2xy - y + g(x),\ v_x = 2y + g'(x) = -u_y = 2y,\ g(x) = C,\ \bullet\ v = 2xy - y + C$

**(풀이)** (2) $u_x = a,\ u_{xx} = 0,\ u_y = b,\ u_{yy} = 0,\ u_{xx} + u_{yy} = 0$
$v_y = u_x = a,\ v = ay + g(x),\ v_x = g'(x) = -u_y = -b,\ g(x) = -bx + C,\ \bullet\ v = ay - bx + C$

**(풀이)** (3) $u_x = 3x^2 - 3y^2,\ u_{xx} = 6x,\ u_y = -6xy,\ u_{yy} = -6x,\ u_{xx} + u_{yy} = 0$
$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2,\ v = 3x^2y - y^3 + g(x),\ v_x = 6xy + g'(x) = -u_y = 6xy,\ g(x) = C,\ \bullet\ v = 3x^2y - y^3 + C$

**[과제 33]** 다음 함수가 조화 함수임을 밝히고, 각 경우의 켤레 조화 함수를 구하여라.

(1) $u(x,y)=x^2-y^2-x$ (2) $u(x,y)=ax+by$ ($a,b$는 상수)

(3) $u(x,y)=x^3-3xy^2$ (4) $u(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2\neq 0)$

(5) $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

**(풀이)** (4) $u_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\ u_{xx}=\frac{-2y(x^2+y^2)^2+2xy(2(x^2+y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-2y^3+6yx^2}{(x^2+y^2)^3},\ u_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ u_{yy}=\frac{-2y(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)2(x^2+y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{2y^3-6yx^2}{(x^2+y^2)^3},\ u_{xx}+u_{yy}=0$

$v_y=u_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\ v=\frac{x}{x^2+y^2}+g(x),\ v_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+g'(x)=-u_y=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ g(x)=C,\ \bullet\ v=\frac{x}{x^2+y^2}+C$

**(풀이)** (5) $u_x=\frac{2x}{x^2+y^2},\ u_{xx}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2},\ u_y=\frac{2y}{x^2+y^2},\ u_{yy}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2},\ u_{xx}+u_{yy}=0$

$v_y=u_x=\frac{2x}{x^2+y^2},\ v=2\tan^{-1}\frac{y}{x}+g(x),\ v_x=2\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+g'(x)=\frac{-2y}{x^2+y^2}+g'(x)=-u_y=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},\ g(x)=C,\ \bullet\ v=2\tan^{-1}\frac{y}{x}+C$

**[과제 34]** 복소 함수 $f(z)$가 영역 $D$에서 해석적이고 $\mathrm{Re}(f(z)) =$(상수)이면 $f(z) =$(상수)임을 보여라.

**(풀이)** $f(z) = u + iv$라 하면 $\mathrm{Re}(f(z)) = u = k$(상수). 코시-리만 방정식에 의해 $u_x = v_y = 0,\ u_y = -v_x = 0$이므로 $u$와 $v$ 모두 상수이다. 따라서 $f(z) = u + iv$는 상수함수이다.

**[과제 35]** 극형식을 사용하여 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$라 하면, 코시-리만 방정식은 다음과 같음을 보여라.

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

**(풀이)** $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$rv_r = r(v_x x_r + v_y y_r) = r(v_x\cos\theta + v_y\sin\theta) = xv_x + yv_y = -xu_y + yu_x$$

$$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = u_x(-r\sin\theta) + u_y(r\cos\theta) = -yu_x + xu_y$$

$$ru_r = r(u_x x_r + u_y y_r) = r(u_x\cos\theta + u_y\sin\theta) = xu_x + yu_y = xv_y - yv_x$$

$$v_\theta = v_x x_\theta + v_y y_\theta = v_x(-r\sin\theta) + v_y(r\cos\theta) = -yv_x + xv_y$$

따라서 $rv_r = -u_\theta$, $ru_r = v_\theta$이 성립한다.

[**과제 36**] 원 $C : |z| = 2$에 대하여 다음 선적분의 절댓값의 위로 유계를 구하여라.

(1) $\int_C \frac{e^z}{z+1} dz$
**(답)** $C$는 반지름이 2인 원이므로 $C$의 길이는 $4\pi$이다. 또, 삼각 부등식에 의해 $C$ 상의 모든 복소수 $z$에 대해서 $|z+1| \ge |z| - 1 = 2 - 1 = 1$이므로 피적분 함수는 부등식 $\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \le \frac{|e^z|}{|z|-1} = e^x \le e^2$. 따라서 **ML-부등식**에 의해 $\left|\int_C \frac{e^z}{z+1} dz\right| \le 4\pi e^2$

(2) $\int_C \frac{dz}{3+5z^2}$
**(답)** $C$는 반지름이 2인 원이므로 $C$의 길이는 $4\pi$이다. 또, 삼각 부등식에 의해 $C$ 상의 모든 복소수 $z$에 대해서 $|3+5z^2| \ge 5|z|^2 - 3 = 5(4) - 1 = 19$이므로 피적분 함수는 부등식 $\left|\frac{1}{3+5z^2}\right| \le \frac{1}{19}$. 따라서 **ML-부등식**에 의해 $\left|\int_C \frac{1}{3+5z^2} dz\right| \le \frac{4\pi}{19}$

(3) $\int_C \frac{2z+1}{5+z^2} dz$
**(답)** $C$는 반지름이 2인 원이므로 $C$의 길이는 $4\pi$이다. 또, 삼각 부등식에 의해 $C$ 상의 모든 복소수 $z$에 대해서 $|5+z^2| \ge 5-|z|^2 = 5-4 = 1$이므로 피적분 함수는 부등식 $\left|\frac{2z+1}{5+z^2}\right| \le \frac{2|z|+1}{|5+z^2|} \le 5$. 따라서 **ML-부등식**에 의해 $\left|\int_C \frac{2z+1}{5+z^2} dz\right| \le 4\pi(5) = 20\pi$

[**과제 37**] 다음 각 경우에 선적분 $\int_C f(z)dz$의 값을 구하여라.

(1) $f(z) = \frac{1+z}{z}$, $C$는 $z = -i$부터 $z = i$까지 반시계방향의 반원 $|z| = 1$.
**(답)** $z(t) = e^{it},\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$,

$$\int_C \frac{1+z}{z} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+e^{it}}{e^{it}} ie^{it} dt = i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+e^{it}) dt = i\left[t + \frac{1}{i}e^{it}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = i(\pi+2)$$

(2) $f(z) = Im(z)$, $C$는 반시계방향의 원 $|z| = r$
**(답)** $z(t) = re^{it} = r(\cos t + i\sin t),\ 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_C Im(z)dz = \int_0^{2\pi} r\sin t(rie^{it})dt = r^2 i\int_0^{2\pi} \sin t(\cos t + i\sin t)dt$$

$$= r^2 i\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2t dt - r^2\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -r^2\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = -r^2\pi$$

**[과제 37]** 다음 각 경우에 선적분 $\int_C f(z)dz$의 값을 구하여라.

(3) $f(z) = |z|^2$, $C : z(t) = t^2 + \frac{i}{t}$ $(1 \le t \le 2)$

**(답)**

$$\int_C |z|^2 \, dz = \int_1^2 (t^4 + \frac{1}{t^2})(2t - \frac{i}{t^2})dt = \int_1^2 (2t^5 - it^2 + \frac{2}{t} - \frac{i}{t^4})dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^6 - \frac{i}{3}t^3 + 2\ln|t| + \frac{i}{3t^3}\right]_1^2 = 21 + 2\ln 2 - \frac{21}{8}i$$

(4) $f(z) = \bar{z}$, $C : z(t) = 2e^{it} + 1$ $(0 \le t \le \pi)$

**(답)**

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^\pi (2e^{-it} + 1)(2ie^{it})dt = \int_0^\pi (4i + 2ie^{it})dt = \left[4it + 2e^{it}\right]_0^\pi = -4 + 4\pi i$$

**[과제 38]** 다음 곡선의 길이를 구하여라.

(1) $z(t) = 3e^{2it} + 2 \ (0 \leq t \leq 2\pi)$

**(답)**

$$\int_C |dz| = \int_0^{2\pi} |z'(t)|dt = \int_0^{2\pi} |6ie^{2it}|dt = 6(2\pi) = 12\pi$$

(2) $z(t) = e^t \cos t + ie^t \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$

**(답)**

$$\int_C |dz| = \int_0^{2\pi} |z'(t)|dt = \int_0^{2\pi} |e^t \cos t - e^t \sin t + i(e^t \sin t + e^t \cos t)|dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}} dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^t dt = \sqrt{2} \left[e^t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$$

**[과제 39]** 다음 적분값을 구하여라.

(1) $\int_0^{\pi+i} e^{iz}dz$

**(답)**

$$\int_0^{\pi+i} e^{iz}dz = \left[\frac{1}{i}e^{iz}\right]_0^{\pi+i} = -i\left(e^{i(\pi+i)} - 1\right) = -i\left(e^{-1}e^{i\pi} - 1\right) = i(e^{-1}+1)$$

(2) $\int_{-1}^{1} z\cosh z^2 dz$

**(답)**

$$\int_{-1}^{1} z\cosh z^2 dz = \left[\frac{1}{2}\sinh z^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

$$\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$$

(3) $\int_{-i}^{i} \sin z dz$

**(답)**

$$\int_{-i}^{i} \sin z dz = [-\cos z]_{-i}^{i} = -\cos(i) + \cos(-i) = -\cosh(1) + \cosh(-1) = 0$$

**[과제 40]** 복소평면에서 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 위의 점 $1-i$에서 $1+i$로의 오른쪽 경로를 $C$라 할 때, $\int_C \frac{1}{z}dz$의 값을 구하여라.

**(풀이)**

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \int_{1-i}^{1+i} \frac{1}{z}dz = [\mathrm{Ln} z]_{1-i}^{1+i} = \mathrm{Ln}(1+i) - \mathrm{Ln}(1-i)$$
$$= \ln|1+i| + i\frac{\pi}{4} - \ln|1-i| - i\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}i$$