2021-하계계절-공수2(오후)-중간시험-문제지

단답형

1. (10pt) 참이면 T, 거짓이면 F로 쓰시오

(1) 구간 $[-1,1]$에서 두 함수 $f(x)=x$와 $g(x)=x+ax^2+\frac{5}{3}x^3$는 직교한다.

(2) 집합 $\{1,\cos(2nx),\sin(2mx)\}_{n,m=1}^{\infty}$은 구간 $[-\pi,0]$의 직교집합이다.

(3) $-\infty<x<\infty$ 에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 모든 유한구간에서 $f(x)$와 $f'(x)$가 구분연속이고, $2L$를 주기로 갖는 주기함수이면, $f(x)$는 푸리에 급수표현을 갖고, 푸리에 급수는 $f(x)$가 연속인 점에서는 $f(x)$에 수렴하고, $f(x)$가 불연속인 점에서는 좌극한값과 우극한값의 평균값에 수렴한다.

(4) $-\infty<x<\infty$ 에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 모든 유한구간에서 $f(x)$와 $f'(x)$가 구분연속이면, $f(x)$는 푸리에 적분표현을 갖고, 푸리에 적분은 $f(x)$가 연속인 점에서는 $f(x)$에 수렴하고, $f(x)$가 불연속인 점에서는 좌극한값과 우극한값의 평균값에 수렴한다.

(5) $F_s(f(x))$를 함수 $f(x)$의 푸리에 사인 변환이라 할 때, 공식 $F_s(f''(x))=-w^2F_s(f(x))-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,wf(0)$ 이 성립한다.

2. (30pt) 밑줄 친 부분을 완성하시오.

(1) 주기가 $\frac{2L}{3}$인 주기함수 $f(x)$가 우함수일 때, 푸리에 코사인 급수와 계수는 다음으로 주어진다.

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\underline{\qquad\qquad},\quad A_0=\underline{\qquad\qquad\qquad},\quad A_n=\underline{\qquad\qquad\qquad}\quad(n=1,2,\ldots)$$

(2) 함수 $f(x)=\begin{cases}x & (|x|\le 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$의 푸리에 적분표현은 다음으로 주어진다.

$$f(x)=\underline{\qquad}\int_0^{\infty}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\,dw$$

(3) $F_s(f(x))$는 $f(x)$의 푸리에 사인 변환이다. $F_s(e^{-3x})=\underline{\qquad\qquad}$ 이다.

(4) $F(f(x))$는 $f(x)$의 푸리에 변환이다. $F(e^{-ax^2})=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$을 이용하면 다음을 얻는다.

$$F(xe^{-x^2/8})=\underline{\qquad}F(e^{-x^2/8})=\underline{\qquad\quad}e^{\underline{\qquad}}.$$

(5) 초기조건 $xy=x+y,\ z=1$을 만족하는 일계 선형 편미분방정식 $x^2z_x+y^2z_y-z^2=0$의 해 $z=z(x,y)$는 다음과 같다.

$$z=z(x,y)=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

(6) 파동방정식 $\begin{cases}u_{tt}=4u_{xx} & \\ u(0,t)=0,\ u(4,t)=0 & (t\ge 0)\\ u(x,0)=x,\ u_x(x,0)=x & (0\le x\le 4)\end{cases}$ 의 D'Alembert의 해는 다음으로 주어진다.

$$u(x,t)=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

서술형

1.(15점) 함수 $f(x)=x^3\ (-1\le x\le 1)$; $f(x)=f(x+2)$에 대하여, 파르스발(Parseval) 항등식을 이용하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$임을 설명하시오. (단, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$과 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$을 이용)

2.(15점) $xy\ne 0$일 때, 2계 준선형 편미분방정식

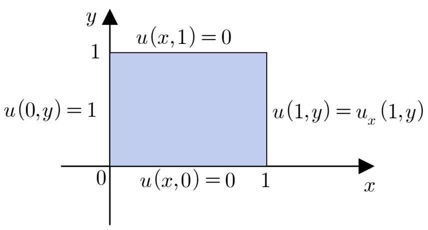
$$x\,u_{xx}-y\,u_{xy}=0$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오.
(1) 쌍곡선형, 포물선형, 타원형 중 어떤 유형인가?
(2) 특성방정식의 해를 구하시오.
(3) 주어진 편미분방정식을 정규형으로 바꾸어 일반해 $u=u(x,y)$를 구하시오.

3.(15점) 열방정식의 해 $u=u(x,t)$를 구하시오.

$$\begin{cases} u_t=3u_{xx} \\ u(0,t)=10,\ u(40,t)=50, & t\ge 0 \\ u(x,0)=40-2x, & 0<x<40 \end{cases}$$

4.(15점) 경계조건이 그림과 같이 주어진 직사각형 영역 R 위의 점 (x,y)에서의 온도를 $u=u(x,y)$라 하자.



변수 분리해 $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$가 존재한다고 가정하면, 두 개의 상미분방정식을 얻는다.

(a) $X''+kX=0$, k는 상수 (b) $Y''-kY=0$, k는 상수

이후의 과정을 논리적으로 서술하여 온도 $u=u(x,y)$를 구하시오.