1 f는 구간 $[a, b]$ $(0 \leq a < b)$에서 미분가능한 실함수이다. xz평면에서 곡선 $z = f(x)$를 z축 둘레로 2π만큼 회전하여 얻은 곡면의 방정식을 쓰시오.

2 $\mathbb{R}^3$에서 방정식 $(x^2+y^2)^3 = z^2$으로 주어진 곡면은 어떤 곡면인지 회전면의 관점에서 설명하고, 이를 스케치하시오.

3 $\mathbb{R}^3$의 곡면 $z = xy$에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) xy평면과 평행한 평면 $z = c$와 이 곡면의 공통부분을 몇 개 스케치하시오.

(b) 어떤 상수 c_1이 존재하여 $c > c_1$, $c = c_1$, $c < c_1$인 경우에 공통부분의 모양이 달라진다. c_1의 값을 구하고, 각각의 경우에 공통부분이 어떤 집합인지 설명하시오.

(이 문제는 11.1절의 등위선과 관련된 문제입니다.)

4 다음의 방정식으로 서술된 2차곡면이 타원주면(타원기둥면), 타원체면, 타원포물면, 타원추면(타원뿔면), 일엽쌍곡면, 이엽쌍곡면, 쌍곡포물면 중 어디에 해당하는지 답하고 그 이유를 설명하시오.

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - z = 3$

(b) $x^2 - 2z^2 + x - 2y + 3z = -1$

(c) $x^2 - y^2 - z^2 + 3x - 4y + 5z = 1$

(d) $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 2y + 6z = 4$

(e) $z = xy$

((e)의 힌트: $\mathbb{R}^3$의 점 (x, y, z)를 z축 둘레로 θ만큼 회전하여 얻은 점은 (X, Y, z)이고, 여기에서 X, Y는 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족한다. 필요하면 $X = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$, $Y = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$로 치환하고 회전변환을 이용하시오.)

5 $\mathbb{R}^3$에서 원기둥면 $x^2 + y^2 = 1$과 평면 $z = ax + by$의 공통부분은 타원임을 보이시오. 여기에서 $a, b \in \mathbb{R}$는 $a^2 + b^2 \neq 0$을 만족하는 상수이다.
(힌트: 필요하면 공통부분의 점을 두 단위벡터 $\mathbf{v}_1 = \dfrac{\mathbf{i} + a\mathbf{k}}{\sqrt{1+a^2}}$과 $\mathbf{v}_2 = \dfrac{\mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{1+b^2}}$를 이용하여 나타내시오.)