[과제 19] 다음에 주어진 선형 편미분방정식의 해 $u = u(x, y)$를 구하여라.

(1) $u_x = x + y$ (2) $u_{xy} = 2x - y$ (3) $u_{xx} = 0$

(4) $u_{yy} = 0$ (5) $u_{xx} = 1$ (6) $u_y - u = y$

(여기서 f, g, h는 임의의 함수입니다.)

(풀이)

(1) $u = \int (x+y)\partial x + f(y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + f(y)$

(2) $u_x = \int (2x-y)\partial y + f(x) = 2xy - \frac{1}{2}y^2 + f(x)$

$u = \int (2xy - \frac{1}{2}y^2)\partial x + \int f(x)dx + g(y) = x^2y - \frac{1}{2}y^2x + h(x) + g(y)$

(3) $u_x = f(y), \quad u = xf(y) + g(y)$

(4) $u_y = f(x), \quad u = yf(x) + g(x)$

$$\boxed{\begin{gathered} y' + p(x)y = r(x) \\ y(x) = e^{-\int p dx}\left(\int e^{\int p dx} r dx + C\right) \end{gathered}}$$

(5) $u_x = x + f(y), \quad u = \frac{1}{2}x^2 + xf(y) + g(y)$

(6) $u = e^{-\int(-1)\partial y}\left(\int e^{\int(-1)\partial y} y\partial y + f(x)\right) = e^y\left(\int e^{-y}y\partial y + f(x)\right) = e^y\left(-ye^{-y} - e^{-y} + f(x)\right) = -y-1+e^{-y}f(x)$

[과제 20] 초기조건을 만족하는 일계 선형 편미분방정식의 해 $z = z(x, y)$를 구하여라.

(1) $2z_x + 3z_y + 8z = 0, \quad z(x,0) = \sin(x)$

(2) $3z_x - 4z_y + 2z = 7, \quad z(x,0) = e^x$

(3) $z_x + z_y - z = e^x, \quad z(x,0) = 0$

(풀이) (1)

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{-8z}$$

$$3x = 2y + c_1$$

$$-4x = \ln|z|, \quad z = c_2 e^{-4x}$$

$$3x = c_1, \quad \sin x = c_2 e^{-4x}$$

$$c_2 = \sin x e^{4x} = \sin \frac{c_1}{3} e^{\frac{4c_1}{3}}$$

$$ze^{4x} = \sin \frac{3x - 2y}{3} e^{\frac{4(3x-2y)}{3}}$$

$$z = e^{-\frac{8}{3}y} \sin\left(x - \frac{2}{3}y\right)$$

(풀이) (2)

$$\frac{dx}{3} = \frac{dy}{-4} = \frac{dz}{7 - 2z}$$

$$-4x = 3y + c_1, \quad \frac{1}{3}x = -\frac{1}{2}\ln|7 - 2z|$$

$$7 - 2z = c_2 e^{-\frac{2}{3}x}$$

$$-4x = c_1, \quad 7 - 2e^x = c_2 e^{-\frac{2}{3}x}$$

$$c_2 = 7e^{-\frac{c_1}{6}} - 2e^{-\frac{5c_1}{12}}$$

$$(7 - 2z)e^{\frac{2}{3}x} = 7e^{\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y} - 2e^{\frac{5}{3}x + \frac{5}{4}y}$$

$$7 - 2z = 7e^{\frac{1}{2}y} - 2e^x e^{\frac{5}{4}y}$$

$$z = \frac{7}{2} - \frac{7}{2}e^{\frac{1}{2}y} + e^x e^{\frac{5}{4}y}$$

(풀이) (3)

$$dx = dy = \frac{dz}{z + e^x}$$

$$x = y + c_1, \quad \frac{dz}{dx} - z = e^x$$

$$z = e^x(x + c_2)$$

$$z = ye^x$$

[과제 21] 초기조건을 만족하는 일계 선형 편미분방정식의 해 $z = z(x,y)$를 구하여라.

(1) $xz_x + z_y = 1, \quad z(1,y) = e^{-y}$
(2) $z_x + yz_y = z, \quad z(x,1) = xe^{-x}$
(3) $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2, \quad xy = x + y, \ z = 1$
(4) $(x-y)y^2 z_x + (y-x)x^2 z_y = (x^2+y^2)z, \quad z(x,0) = \frac{1}{x}$

(풀이) (1)

$$\frac{dx}{x} = dy = dz$$

$$x = c_1 e^y$$

$$y = z + c_2$$

$$1 = c_1 e^y, \quad y = e^{-y} + c_2$$

$$c_2 = y - e^{-y} = -\ln|c_1| - c_1$$

$$y - z = -\ln|xe^{-y}| - xe^{-y}$$

$$z = \ln|x| + xe^{-y}$$

(풀이) (2)

$$dx = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$y = c_1 e^x, \quad z = c_2 e^x$$

$$1 = c_1 e^x, \quad xe^{-x} = c_2 e^x$$

$$c_2 = xe^{-2x} = -c_1^2 \ln|c_1|$$

$$ze^{-x} = -(ye^{-x})^2 \ln|ye^{-x}|$$

$$z = y^2 e^{-x}(x - \ln|y|)$$

(풀이) (3)

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c_1, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = c_2$$

$$\frac{y-x}{xy} = c_1, \quad \frac{z-x}{xz} = c_2$$

$$\frac{\frac{x}{x-1} - x}{x + \frac{x}{x-1}} = c_1, \quad \frac{1-x}{x} = c_2$$

$$x = \frac{2}{1+c_1}, \quad c_2 = \frac{c_1 - 1}{2}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) - \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{2xy}{x + y + xy}$$

[과제 21] 초기조건을 만족하는 일계 선형 편미분방정식의 해 $z = z(x, y)$를 구하여라.

(1) $xz_x + z_y = 1, \quad z(1, y) = e^{-y}$
(2) $z_x + yz_y = z, \quad z(x, 1) = xe^{-x}$
(3) $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2, \quad xy = x + y, \ z = 1$
(4) $(x-y)y^2 z_x + (y-x)x^2 z_y = (x^2+y^2)z, \quad z(x, 0) = \frac{1}{x}$

(풀이) (4)

$$\frac{dx}{(x-y)y^2} = \frac{dy}{(y-x)x^2} = \frac{dz}{(x^2+y^2)z} = \frac{dx-dy}{(x-y)(x^2+y^2)}$$

$$x^2dx = -y^2dy, \quad \frac{1}{z}dz = \frac{1}{x-y}d(x-y)$$

$$x^3 + y^3 = c_1, \quad z = c_2(x-y)$$

$$c_1 = x^3, \quad \frac{1}{x} = c_x x$$

$$c_2 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{c_1^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{z}{x-y} = (x^3+y^3)^{-\frac{2}{3}} \qquad z = (x-y)(x^3+y^3)^{-\frac{2}{3}}$$

[과제 22] 다음 편미분방정식의 해 $u = u(x,t)$를 구하시오.
$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(0 < x < L, t > 0)$
$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$ $(t > 0)$
$u(x,0) = \frac{1}{4}x(L-x),\ u_t(x,0) = 0$ $(0 < x < L)$

(풀이) 파동방정식(Wave Equation)의 해:

$$(*) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & (t > 0, 0 \le x \le L) \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 & (t > 0) \\ u(x,0) = f(x) & (0 \le x \le L) \\ u_t(x,0) = g(x)\ (0 \le x \le L) & \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(*)$의 해:

$$u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos \frac{cn\pi t}{L} + B_n^* \sin \frac{cn\pi t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

여기서,

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

문제의 경우 : $g(x) = 0 \;\Rightarrow\; B_n^* = 0$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{4} x(L-x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= -\frac{L^2}{(n\pi)^3}[1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} 0, & n : \text{짝수} \\ -\frac{2L^2}{(n\pi)^3}, & n : \text{홀수} \end{cases} \end{aligned}$$

따라서, 해는

$$u(x,t) = -\sum_{n:\text{홀수}}^{\infty} \frac{2c^2}{(n\pi)^3} \cos \frac{cn\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

[과제 23] 다음 편미분방정식의 해 $u = u(x,t)$를 구하시오.

$u_{tt} = 9u_{xx}$

$u(0,t) = 0,\ u(5,t) = 0\ (t \geq 0)$

$u(x,0) = 4\sin(\pi x) - 3\sin(5\pi x),\ u_t(x,0) = 0\ (0 \leq x \leq 5)$

(풀이) 파동방정식(Wave Equation)의 해:

$$(*) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & (t > 0, 0 \leq x \leq L) \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 & (t > 0) \\ u(x,0) = f(x) & (0 \leq x \leq L) \\ u_t(x,0) = g(x)\ (0 \leq x \leq L) & \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(*)$의 해:

$$u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos\frac{cn\pi t}{L} + B_n^* \sin\frac{cn\pi t}{L} \right) \sin\frac{n\pi x}{L}$$

여기서,

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

문제의 경우 : $c = 3, L = 5, \lambda_n = \frac{3n\pi}{5}$

$g(x) = 0 \ \Rightarrow \ B_n^* = 0$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{5}\int_0^5 [4\sin(\pi x) - 3\sin(5\pi x)]\sin\frac{n\pi x}{5}dx \\ &= \begin{cases} 4, & n = 5 \\ -3, & n = 25 \\ 0, n \neq 5, 25 & \end{cases} \end{aligned}$$

따라서, 해는

$$u(x,t) = 4\cos(3\pi t)\sin(\pi x) - 3\cos(15\pi t)\sin(5\pi x)$$

[과제 24] 다음 편미분방정식의 해 $u = u(x,t)$를 구하시오.

$u_{tt} = u_{xx}$
$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0\ (t \ge 0)$
$u(x,0) = x(1-x),\ u_t(x,0) = x(1-x)\ (0 \le x \le 1)$

(풀이) 파동방정식(Wave Equation)의 해:

$$(*)\quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & (t > 0, 0 \le x \le L) \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 & (t > 0) \\ u(x,0) = f(x) & (0 \le x \le L) \\ u_t(x,0) = g(x)\ (0 \le x \le L) & \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(*)$의 해:

$$u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos \frac{cn\pi t}{L} + B_n^* \sin \frac{cn\pi t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

여기서,

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

문제의 경우 : $c = 1, L = 1, \lambda_n = n\pi$

$$\begin{aligned} B_n &= 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x dx \\ &= \frac{4}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n] \\ &= \begin{cases} 0, & n : \text{짝수} \\ \frac{8}{(n\pi)^3}, & n : \text{홀수} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n^* &= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x dx \\ &= \frac{4}{(n\pi)^4}[1-(-1)^n] \\ &= \begin{cases} 0, & n : \text{짝수} \\ \frac{8}{(n\pi)^4}, & n : \text{홀수} \end{cases} \end{aligned}$$

따라서, 해는

$$u(x,t) = \sum_{n:\text{홀수}}^{\infty} \left(\frac{8}{(n\pi)^3} \cos n\pi t + \frac{8}{(n\pi)^4} \sin n\pi t \right) \sin n\pi x$$

[과제 25] 다음 미분방정식을 정규형으로 변형하여 일반해를 구하시오.

$$(1) \quad y^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = \frac{1}{xy}\left(y^3u_x + x^3u_y\right)$$

$$y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{-xy}{y^2} = -\frac{x}{y}$$

$AC - B^2 = y^2x^2 - (-xy)^2 = 0$: Parabolic

특성방정식 $y^2y'^2 - 2(-xy)y' + x^2 = 0$

$ydy = -xdx \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 \;\Rightarrow\; \Phi = x^2 + y^2$

$v = x,\ w = \Phi = x^2 + y^2$

$u_x = u_v v_x + u_w w_x = u_v + 2xu_w,\ u_y = u_v v_y + u_w w_y = 2yu_w$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_v)_x v_x + u_v v_{xx} + (u_w)_x w_x + u_w w_{xx} \\ &= (u_{vv}v_x + u_{vw}w_x)v_x + u_v v_{xx} + (u_{wv}v_x + u_{ww}w_x)w_x + u_w w_{xx} \\ &= (u_{vv} + u_{vw}(2x)) + (u_{wv} + u_{ww}(2x))(2x) + u_w 2 \\ &= u_{vv} + 4xu_{vw} + 4x^2u_{ww} + 2u_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (u_v)_y v_x + u_v v_{xy} + (u_w)_y w_x + u_w w_{xy} \\ &= (u_{vv}v_y + u_{vw}w_y)v_x + u_v v_{xy} + (u_{wv}v_y + u_{ww}w_y)w_x + u_w w_{xy} \\ &= 2yu_{vw} + 4xyu_{ww} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= (u_v)_y v_y + u_v v_{yy} + (u_w)_y w_y + u_w w_{yy} \\ &= (u_{vv}v_y + u_{vw}w_y)v_y + u_v v_{yy} + (u_{wv}v_y + u_{ww}w_y)w_y + u_w w_{yy} \\ &= (u_{vv}0 + u_{vw}(2y))0 + u_v 0 + (u_{wv}0 + u_{ww}(2y))(2y) + u_w 2 \\ &= 4y^2u_{ww} + 2u_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{좌변} &= y^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} \\ &= y^2u_{vv} + (2y^2 + 2x^2)u_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{우변} &= \frac{1}{xy}\left(y^3u_x + x^3u_y\right) \\ &= \frac{y^2}{x}u_v + (2y^2 + 2x^2)u_w \end{aligned}$$

$$u_{vv} - \frac{1}{x}u_v = 0$$

$$u_{vv} - \frac{1}{v}u_v = 0$$

$$u_v = f(w)v$$

$$u = f(w)\frac{1}{2}v^2 + g(w)$$

$$= \frac{1}{2}f(x^2 + y^2)x^2 + g(x^2 + y^2)$$

[과제 25] 다음 미분방정식을 정규형으로 변형하여 일반해를 구하시오.

$$(2) \quad xu_{xx} - yu_{xy} = 0$$

$AC - B^2 = x \cdot 0 - (-\frac{y}{2})^2 < 0$: Hyperbolic

특성방정식 $x(y')^2 - 2(-\frac{y}{2})y' + 0 = x(y')^2 + yy' = 0$

$y' = 0, \quad xy' + y = 0 \;\Rightarrow\; y' = 0, \; \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx \;\Rightarrow\; y = c_1, \; xy = c_2$

$v = y, \; w = xy$

$u_x = u_v v_x + u_w w_x = yu_w, \; u_y = u_v v_y + u_w w_y = u_v + xu_w$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_v)_x v_x + u_v v_{xx} + (u_w)_x w_x + u_w w_{xx} \\ &= (u_{vv} v_x + u_{vw} w_x) v_x + u_v v_{xx} + (u_{wv} v_x + u_{ww} w_x) w_x + u_w w_{xx} \\ &= u_{ww} y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (u_v)_y v_x + u_v v_{xy} + (u_w)_y w_x + u_w w_{xy} \\ &= (u_{vv} v_y + u_{vw} w_y) v_x + u_v v_{xy} + (u_{wv} v_y + u_{ww} w_y) w_x + u_w w_{xy} \\ &= (u_{vw} + u_{ww} x) y + u_w \end{aligned}$$

좌변$= xy^2 u_{ww} - y^2(u_{vw} + u_{ww}x) - yu_w = -y^2 u_{vw} - yu_w = 0$

$$yu_{wv} + u_w = \boxed{vu_{wv} + u_w = 0}$$

$u_w = P$로 놓으면 $vP' + P = 0$

$$u_w = P = \frac{f(w)}{v},$$

$$u = u(x,y) = \frac{1}{v}\int f(w)dw + g(v)$$

$$= \frac{1}{v}h(w) + g(v)$$

$$u = u(x,y) = \frac{1}{y}h(xy) + g(y)$$

[과제 26] 다음 편미분 방정식의 해 $u = u(x,t)$를 구하시오.

563페이지 Example 4 참고
Bar with Insulated Ends

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xx} \ (t > 0, 0 < x < 1)$$
$$u_x(0,t) = 0, \ u_x(1,t) = 0 \ (t > 0)$$
$$u(x,0) = 100x(1-x) \ (0 < x < 1)$$

(풀이) 열방정식(Heat Equation)의 해:

$$(*) \quad \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & (t > 0, 0 < x < L) \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(L,t) = 0 & (t > 0) \\ u(x,0) = f(x) & (0 < x < L) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(*)$의 해:

$$u = u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

여기서,

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

문제의 경우 : $c = \frac{1}{2}, \ L = 1$

$$A_0 = \int_0^1 100x(1-x)dx = \frac{50}{3}$$

$$\begin{aligned} A_n &= 2\int_0^1 100x(1-x)\cos n\pi x dx \\ &= -\frac{200}{n^2\pi^2}[1 + (-1)^n] \\ &= \begin{cases} 0, & n : \text{홀수} \\ -\frac{400}{n^2\pi^2}, & n : \text{짝수} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \frac{50}{3} - \frac{200}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t} = \frac{50}{3} - \frac{100}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2n\pi x)e^{-(n\pi)^2 t}$$

[과제 27] 다음 편미분 방정식의 해 $u = u(x,t)$를 구하시오.

$$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}\ (t > 0, 0 < x < 5) \\ &u(0,t) = 5,\ u(5,t) = 20\ (t > 0) \\ &u(x,0) = 30 - 2x\ (0 < x < 5) \end{aligned}$$

(풀이) **(1)** $v(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x\ (0 < x < L)$라 하면

$$(*) \quad \begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} & (t > 0, 0 < x < L) \\ v(0) = T_1,\ v(L) = T_2 & \end{cases}$$ 를 만족하는 해가 된다.

(2) $$(**) \quad \begin{cases} w_t = c^2 w_{xx} & (t > 0, 0 < x < L) \\ w(0,t) = 0,\ w(L,t) = 0 & (t > 0) \\ w(x,0) = f(x) - v(x) & (0 < x < L) \end{cases}$$ 의 해는

$$w = w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \quad \text{여기서,} \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x) - v(x)) \sin\frac{n\pi x}{L} dx$$

(3) $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$라 하면 $u(x,t)$는

$$(***) \quad \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & (t > 0, 0 < x < L) \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 & (t > 0) \\ u(x,0) = f(x) & (0 < x < L) \end{cases}$$ 의 해가 된다.

$$(***)\quad \begin{cases} u_t = 4u_{xx} & (t>0, 0<x<5) \\ u(0,t)=5,\ u(5,t)=20 & (t>0) \\ u(x,0)=30-2x & (0<x<5) \end{cases}$$

문제의 경우 :

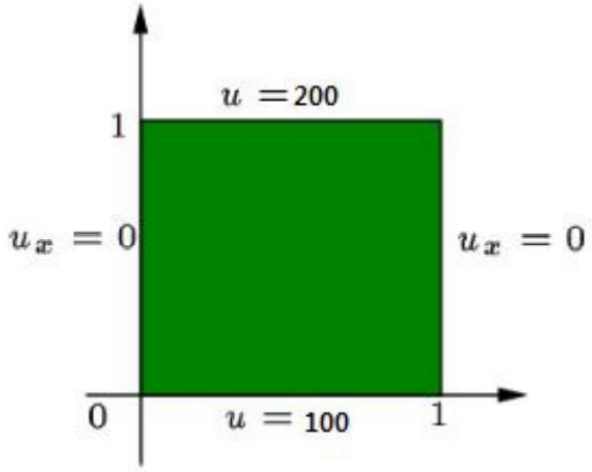
$c=2,\ T_1=5,\ T_2=20,\ L=5,\ v(x)=5+\frac{20-5}{5}x=5+3x\ (0<x<5)$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x)-v(x))dx = \frac{2}{5}\int_0^5 (25-5x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{50}{n\pi}$$

따라서, 해는

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x)+w(x,t) \\ &= 5+3x+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \\ &= 5+3x+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5} e^{-\left(\frac{2n\pi}{5}\right)^2 t} \end{aligned}$$

[과제 28] 아래 경계조건을 만족하는 라플라스방정식의 해를 구하시오.



(풀이) $(*)$ $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ 라플라스방정식

(Step I) 변수분리법을 이용하여 $(*)$의 해를 구하자.

$u = u(x,y) = F(x)G(y)$라 놓고 $(*)$식에 대입하면 다음과 같이 변형된다.

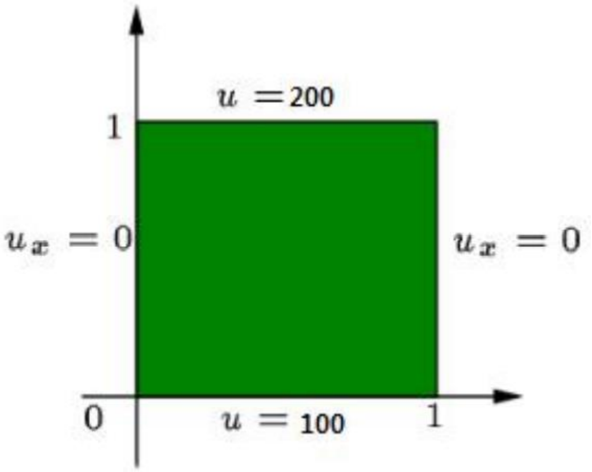
$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k = \text{상수}$$

따라서, 두 개의 상미분방정식을 얻을 수 있다.

(a) $F'' - kF = 0,$ (b) $G'' + kG = 0$

(Step II) 왼쪽과 오른쪽 경계조건을 만족하는 해를 구하자.

(a) $F'' - kF = 0$, (b) $G'' + kG = 0$



(1) $k = 0$인 경우 :

(a)의 해 : $F = F(x) = Ax + B,\ F'(x) = A$가 된다.

왼쪽과 오른쪽 경계조건을 만족하려면 $F'(0) = F'(1) = 0$를 만족해야한다.
즉 $A = 0$. 따라서 $F = F(x) = B \neq 0$

(b)의 해 : $G = G(y) = Cy + D$가 된다.

따라서, $u_0 = u_0(x, y) = F(x)G(y) = A_0 y + B_0,\ A_0, B_0$:상수

(2) $k = p^2 > 0$인 경우 :

(a)의 해 : $F = F(x) = Ae^{px} + Be^{-px},\ F'(x) = Ape^{px} - Bpe^{-px}$가 된다.

왼쪽과 오른쪽 경계조건을 만족하려면 $F'(0) = F'(1) = 0$를 만족해야한다. 즉 $Ap - Bp = 0,\ Ape^{p} - Bpe^{-p} = 0 \ \Rightarrow\ A = B = 0$. 즉, $u = 0$. 따라서 **이 경우는 원하는 해가 되지 않는다.**

(3) $k=-p^2<0$인 경우 : (a) $F''-kF=0$, (b) $G''+kG=0$

(a)의 해 : $F=F(x)=A\cos px+B\sin px$, $F'(x)=-Ap\sin px+Bp\cos px$가 된다.

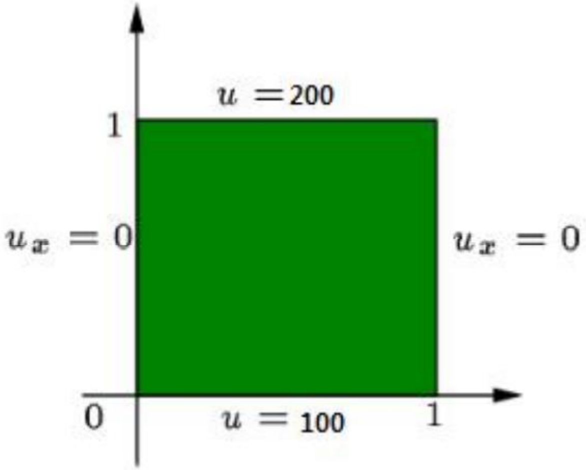
왼쪽과 오른쪽 경계조건을 만족하려면 $F'(0)=F'(1)=0$를 만족해야한다. 즉 $B=0,\ A\neq 0,\ \sin p=0\ \Rightarrow\ p=n\pi$. 따라서 $F_n=F_n(x)=\cos n\pi\ (n=1,2,\ldots)$

(b)의 해 : $G_n=G_n(y)=A_ne^{py}+B_ne^{-py}$가 된다.

그러므로, $u_n=u_n(x,y)=F_n(x)G_n(y)=\left(A_ne^{n\pi y}+B_ne^{-n\pi y}\right)\cos n\pi x\ (n=1,2,\ldots)$

(Step III) 아래와 위 경계조건을 만족하는 $(*)$의 해를 구하자.

$$\begin{aligned} u &= u(x,y)=u_0(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)\\ &= A_0y+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_ne^{n\pi y}+B_ne^{-n\pi y}\right)\cos n\pi x \end{aligned}$$



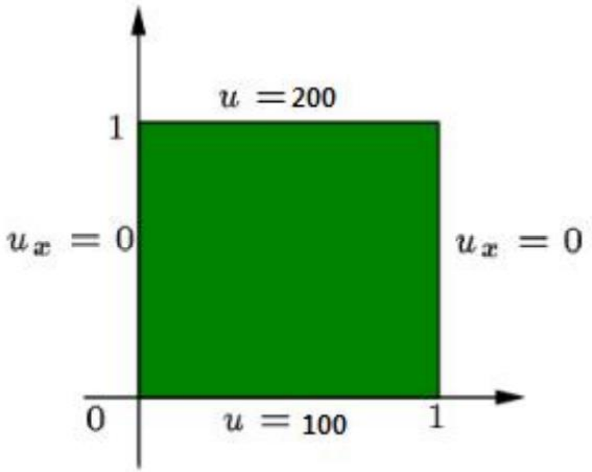
를 생각하자. (이 함수는 왼쪽과 오른쪽 경계조건을 만족한다.)

이제, 아래와 위 경계조건을 만족하는 상수를 구하자.

$$u(x,y) = A_0 y + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{n\pi y} + B_n e^{-n\pi y}\right) \cos n\pi x$$

$$u(x,0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \cos n\pi x = 100$$

$$u(x,1) = A_0 + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi}\right) \cos n\pi x = 200$$



를 만족해야 한다. 따라서, A_0, B_0, A_n, B_n는 상수함수 100, 200의 푸리에 코사인 급수의 계수가 된다. 즉

$$B_0 = \int_0^1 100 dx = 100,\ \ A_0 + B_0 = \int_0^1 200 dx = 200$$

$$A_n + B_n = 2\int_0^1 100 \cos n\pi x dx = 0 \qquad A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} = 2\int_0^1 200 \cos n\pi x dx = 0$$

그러므로, $A_0 = 100 = B_0$이고 $A_n = B_n = 0,\ \ n = 1, 2, \ldots$

따라서, 해는 $u(x,y) = 100y + 100$이다.

[과제 29] 푸리에 변환을 이용하여 다음 경계치 문제의 해 $u = u(x,t)$를 구하여라.

$$u_t = ku_{xx} \ (t > 0, -\infty < x < \infty)$$
$$u(x,0) = e^{-|x|} \ (-\infty < x < \infty)$$

(풀이) 이 문제는 무한히 긴 막대의 온도 분포 $u(x,t)$를 찾는 것으로 생각할 수 있다. 푸리에 변환을 이용하여 다음과 같이 그 변환을 정의한다.

$$F(u(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx}dx = U(w,t)$$

공식 $F(u_{xx}(x,t)) = -w^2F(u(x,t))$에 의해

$$F(u_t) = F(ku_{xx}) = -kw^2F(u(x,t))$$

$$F(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)e^{-iwx}dx$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx}dx\right\} = \frac{d}{dt}U(w,t)$$

이므로 다음 방정식과 해을 얻는다.

$$\frac{d}{dt}U(w,t) = -kw^2U(w,t) \ \Rightarrow \ U(w,t) = ce^{-kw^2t}$$

이제 초기 조건의 함수를 푸리에 변환을 하면 다음을 얻는다.

$$U(w,0)=F(u(x,0))=F_c(u(x,0))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\cos wx dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}L(\cos wx)|_{s=1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$$

이 조건을 적용하면 $U(w,0)=c=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$이다. 그러므로

$$U(w,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}e^{-kw^2t} \qquad (w\text{에 대하여 우함수})$$

이제 이것의 역 변환을 구하여 얻어지는 함수는 다음 식과 같다.

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty U(w,t)e^{iwx}dw=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}e^{-kw^2t}\cos wx dw$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos wx}{1+w^2}e^{-kw^2t}dw$$

[과제 30] 푸리에 코사인 변환을 이용하여 다음 경계치 문제로 주어지는 정상 상태의 온도 함수 $u = u(x, y)$를 구하여라.

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 \ (y > 0, 0 < x < \pi) \\ &u(0, y) = 0,\ u(\pi, y) = e^{-y} \ (y > 0) \\ &u_y(x, 0) = 0 \ (0 < x < \pi) \end{aligned}$$

(풀이) 변수 y의 범위와 $y = 0$의 조건은 주어진 문제를 푸리에 코사인 변환을 이용하여 푸는 것이 적절함을 보여주고 있다. 이제 다음과 같이 그 변환을 정의한다.

$$F_c(u(x, y)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x, y) \cos wy dy = U(x, w)$$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$의 양변에 푸리에 코사인 변환을 적용하면 다음을 얻는다.

$$F_c(u_{xx}(x, y)) + F_c(u_{yy}(x, y)) = F_c(0) = 0$$

그런데

$$F_c(u_{xx}(x, y)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_{xx}(x, y) \cos wy dy = \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x, y) \cos wy dy \right\} = \frac{d^2}{dx^2} U(x, w)$$

$F_c(u_{yy}(x, y)) = -w^2 F_c(u(x, y)) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_y(x, 0)$ 이므로, 이공식을 적용하면

다음 방정식을 얻는다.

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x,w) - w^2U(x,w) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}u_y(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2}{dx^2}U(x,w) - w^2U(x,w) = 0$$

변수 x의 영역은 유한 구간이므로 위 방정식의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$U(x,w) = Ae^{wx} + Be^{-wx} = c_1\cosh wx + c_2\sinh wx$$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ (y > 0, 0 < x < \pi)$
$u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = e^{-y} \ (y > 0)$
$u_y(x,0) = 0 \ (0 < x < \pi)$

그런데 $u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = e^{-y}$의 푸리에 코사인 변환은

$$U(0,w) = F_c(u(0,y)) = 0,\ \ U(\pi,w) = F_c(u(\pi,y)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-y}\cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$$

이다. 이 조건을 적용하면 $c_1 = 0$과 $c_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sinh(w\pi)(1+w^2)}$이다. 따라서

$$U(x,w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sinh wx}{\sinh(w\pi)(1+w^2)}$$

이제 역 푸리에 코사인 변환을 이용하여 다음과 같이 주어진 문제의 해를 얻는다.

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(x,w)\cos wy dw = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sinh wx}{\sinh(w\pi)(1+w^2)}\cos wy dw$$