

Lista de Exercícios 1 - Cálculo 2

Débora D'Angelo Reina de Araujo

September 2, 2025

1. Resolver exercícios do 1 ao 11 do Apostol manualmente e usando CAS.
Compute the derivatives $F'(t)$ and $F''(t)$ for each of the vector-valued functions in Exercises 1 through 6.

1.1. $F(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$

$$F'(t) = (1, 2t, 3t^2, 4t^3)$$

$$F''(t) = (0, 2, 6t, 12t^2)$$

1.2. $F(t) = (\cos(t), \sin^2(t), \sin(2t), \tan(t))$

Vamos resolver por partes $F'(t)$:

- $(\cos(t))' = -\sin(t)$
- $(\sin^2(t))' = 2\sin(t) \cdot \cos(t)$
- $(\sin(2t))' = 2\cos(2t)$
- $(\tan(t))' = (\sin(t) \cdot \frac{1}{\cos(t)})' = \cos(t) \cdot \frac{1}{\cos(t)} + \sin(t) \cdot (\cos^{-1}(t))' =$
 $\frac{\cos(t)}{\cos(t)} + \sin(t) \cdot (-1)(\cos^{-2}(t))(-\sin(t)) = \frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)} + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} =$
 $\frac{1}{\cos^2(t)} = \sec^2(t)$

Agora, iremos por partes $F''(t)$:

- $(\cos(t))'' = (-\sin(t))' = -\cos(t)$
- $(\sin^2(t))'' = (2\sin(t) \cdot \cos(t))' = (2\sin(t))'(\cos(t)) + 2\sin(t)(\cos(t))' =$
 $2\cos^2(t) - 2\sin^2(t)$
- $(\sin(2t))'' = (2\cos(2t))' = 2(\cos(2t))' = 2(-\sin(2t)2) = -4\sin(2t)$
- $(\tan(t))'' = (\sec^2(t))' = (\cos^{-2}(t))' = -2\cos^{-3}(t)(-\sin(t)) =$
 $\frac{2\sin(t)}{\cos^3(t)} = 2\tan(t)(\sec^2(t))$

Portanto:

$$F'(t) = (-\sin(t), 2\sin(t) \cdot \cos(t), 2\cos(2t), \sec^2(t))$$

$$F''(t) = (-\cos(t), 2\cos^2(t) - 2\sin^2(t), 2(-\sin(2t)2) = -4\sin(2t), 2\tan(t)(\sec^2(t)))$$

1.3. $F(t) = (\arcsin(t), \arccos(t))$

$$F'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$F''(t) = \left(\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

1.4. $F(t) = 2e^t \mathbf{i} + 3e^t \mathbf{j}$

$$F'(t) = 2e^t \mathbf{i} + 3e^t \mathbf{j}$$

$$F''(t) = 2e^t \mathbf{i} + 3e^t \mathbf{j}$$

1.5. $F(t) = \cosh(t) \mathbf{i} + \sinh(2t) \mathbf{j} + e^{-3t} \mathbf{k}$

$$F'(t) = \sinh(t) \mathbf{i} + 2\cosh(2t) \mathbf{j} - 3e^{-3t} \mathbf{k}$$

$$F''(t) = \cosh(t) \mathbf{i} + 4\sinh(2t) \mathbf{j} + 9e^{-3t} \mathbf{k}$$

1.6. $F(t) = \log(1+t^2) \mathbf{i} + \arctan(t) \mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2} \mathbf{k}$

$$F'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \mathbf{i} + \frac{1}{1+t^2} \mathbf{j} - \frac{2t}{(1+t^2)^2} \mathbf{k}$$

Agora, por partes:

$$\bullet \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)' = (2t)'(1+t^2)^{-1} + 2t((1+t^2)^{-1})' = (2t)'(1+t^2)^{-1} +$$

$$2t(-1)(1+t^2)^{-2}(1+t^2)' = \frac{2}{1+t^2} - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$\bullet \left(\frac{1}{1+t^2} \right)' = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

$$\bullet \left(\frac{2t}{(1+t^2)^2} \right)' = \frac{2}{(1+t^2)^2} + \frac{2t(-2)(2t)}{(1+t^2)^3} = \frac{2}{(1+t^2)^2} - \frac{8t^2}{(1+t^2)^3}$$

$$F''(t) = \left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \right) \mathbf{i} + \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \mathbf{j} + \left(\frac{2}{(1+t^2)^2} - \frac{8t^2}{(1+t^2)^3} \right) \mathbf{k}$$

1.7. (**Importante!**) Let F be the vector-valued function given by

$$F(t) = \frac{2t}{1+t^2} \mathbf{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

. Prove that the angle between $F(t)$ and $F'(t)$ is constant, that is, independent of t .

$$F'(t) = ((2t)(1+t^2)^{-1})' \mathbf{i} + ((1-t^2)(1+t^2)^{-1})' \mathbf{j} + (1)' \mathbf{k}$$

$$F'(t) = (2(1+t^2)^{-1} + (2t)(-1)(1+t^2)^{-2}(2t)) \mathbf{i} + ((-2t)(1+t^2)^{-1} +$$

$$(1-t^2)(-1)(1+t^2)^{-2}(2t)) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

$$F'(t) = \left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{-2t}{1+t^2} + \frac{-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

$$F'(t) = \left(\frac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{2t(1+t^2)+2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

$$F'(t) = \left(2 \frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{2t+2t^3+2t-2t^3}{(1+t^2)^2} \right) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

$$F'(t) = \left(2 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{4t}{(1+t^2)^2} \right) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

Agora vamos calcular o produto escalar $F(t) \cdot F'(t)$:

$$F(t) \cdot F'(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) \left(2 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \right) + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2} \right) + (1)(0)$$

$$F(t) \cdot F'(t) = \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} - \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} + 0$$

$$F(t) \cdot F'(t) = 0$$

Logo $F(t)$ e $F'(t)$ são perpendiculares, ou seja, o ângulo entre eles é constante.

Compute the vector-valued integrals in Exercises 8 through 11.

1.8. $\int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t) dt$

$$\int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t) dt = \left(\frac{t^2}{2} \Big|_0^1, \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1, e^t \Big|_0^1 \right) + C$$

$$\int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t) dt = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, e - 1 \right) + C$$

1.9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(t), \cos(t), \tan(t)) dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(t), \cos(t), \tan(t)) dt = \left(-\cos(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}, \sin(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}, \log(\sec(t)) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(t), \cos(t), \tan(t)) dt = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\log(2)}{2} \right) + C$$

1.10. $\int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+e^t} \mathbf{i} + \frac{1}{1+e^t} \mathbf{j} \right) dt$

$$\int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+e^t} \mathbf{i} + \frac{1}{1+e^t} \mathbf{j} \right) dt = \log(e^t + 1) \mathbf{i} \Big|_0^1 + (t - \log(e^t + 1)) \mathbf{j} \Big|_0^1 + C$$

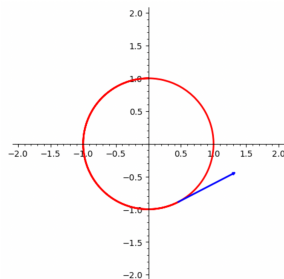
$$\int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+e^t} \mathbf{i} + \frac{1}{1+e^t} \mathbf{j} \right) dt = (\log(e+1) - \log(2)) \mathbf{i} + (1 - \log(e+1) + \log(2)) \mathbf{j} + C$$

1.11. $\int_0^1 (te^t \mathbf{i} + t^2 e^t \mathbf{j} + te^{-t} \mathbf{k}) dt$

$$\int_0^1 (te^t \mathbf{i} + t^2 e^t \mathbf{j} + te^{-t} \mathbf{k}) dt = ((t-1)e^t) \mathbf{i} \Big|_0^1 + ((t^2 - 2t + 2)e^t) \mathbf{j} \Big|_0^1 - ((t+1)e^{-1}) \mathbf{k} \Big|_0^1 + C$$

$$\int_0^1 (te^t \mathbf{i} + t^2 e^t \mathbf{j} + te^{-t} \mathbf{k}) dt = \mathbf{i} + (e-2) \mathbf{j} + (-2e^{-1} + 1) \mathbf{k} + C$$

2. (**Importante!**) Encontrar uma curva parametrizada $\alpha(t) : t \in I \rightarrow \mathbb{R}^2$; cujo traço seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$; de maneira que t percorra o círculo no sentido anti-horário e tenhamos $\alpha(0) = (0, 1)$. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva.

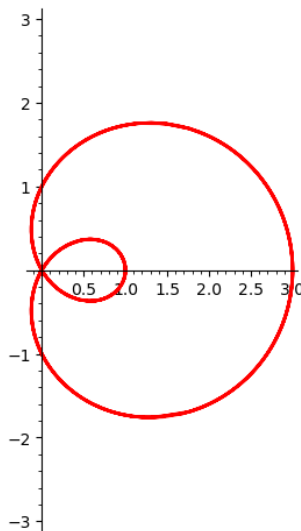


$$\alpha(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

3. (**Importante!**) A *limaçon* (ou caracol de Pascal) é a curva parametrizada

$$\gamma(t) = ((1 + 2\cos(t)) \cdot \cos(t); (1 + 2\cos(t)) \cdot \sin(t)); t \in \mathbb{R}$$

Faça o desenho desta curva em um sistema CAS. Observe que o ponto $(0, 0)$ pertence ao traço da curva, e ache o vetor tangente nesse ponto.



Perceba que $\gamma(\frac{2\pi}{3}) = ((1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3})) \cdot \cos(\frac{2\pi}{3}); (1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3})) \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}))$
 $\gamma(\frac{2\pi}{3}) = ((1 + 2 \cdot \frac{-1}{2}) \cdot \frac{-1}{2}, (1 + 2 \cdot \frac{-1}{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = (0, 0)$

4. A *Cissoide de Diocles* é a curva definida implicitamente pela equação

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$$

Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Busque informação para entender qual o fenômeno modelado por esta curva que a tornou famosa. (Dica: use $y = xt$ para encontrar uma parametrização da curva.)

Usando $y = xt$, temos:

$$x^3 + x^3t^2 - 2ax^2t^2 = 0$$

para $x \neq 0$, temos :

$$\frac{x^3 + x^3t^2 - 2ax^2t^2}{x^2} = \frac{0}{x^2}$$

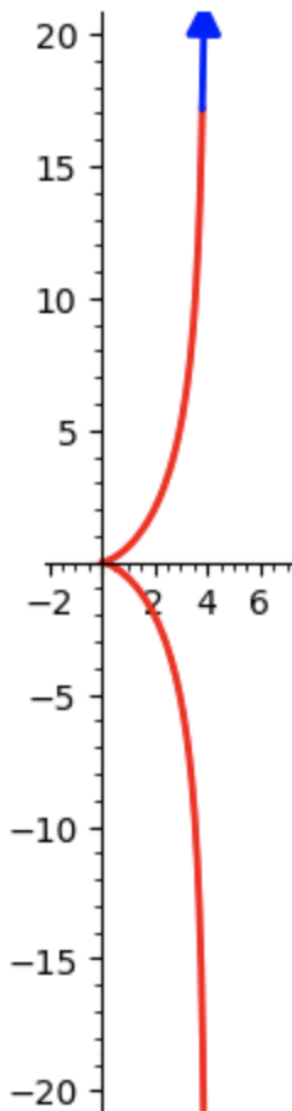
$$x = \frac{2at^2}{1 + t^2}$$

$$y = \frac{2at^3}{1+t^2}$$

Então temos:

$$\gamma(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right)$$

Observe a imagem da curva com $a = 2$.



5. o *Folium de Descartes* é definido implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. A descrição implícita desta curva da origem a uma família de curvas da forma

$$F_\epsilon(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - \epsilon$$

Usando $y = xt$, temos:

$$x^3 + x^3t^3 - 3x^2t = 0$$

para $x \neq 0$, temos:

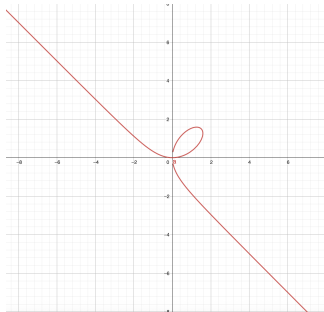
$$\frac{x^3 + x^3t^3 - 3x^2t}{x^2} = \frac{0}{x^2}$$

$$x = \frac{3t}{1 + t^3}$$

$$y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

Então temos:

$$\gamma(t) = \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3} \right)$$



6. Desenhe as seguintes parametrizações da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ em ambiente computacional, utilizando sistemas de computação simbólica. Inclua a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Mostre que α é curva regular e γ não é regular. **(Desafio:)** Qual seria a função naturalmente candidata a ser uma reparametrização entre as duas parametrizações? Porque falha?

$\alpha'(t) = (1, 2t)$, logo $\alpha'(t) \neq 0$ para qualquer valor de t , portanto α é regular.

$\gamma'(t) = (3t^2, 6t^5)$, logo $\gamma'(t=0) = 0$, ou seja, não é regular.

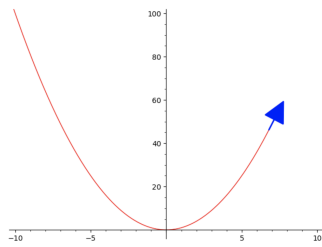


Figure 1: Curva α

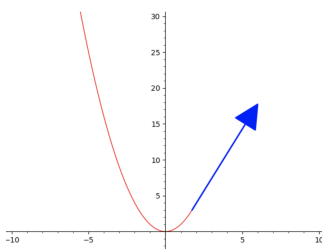
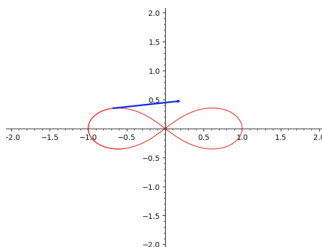


Figure 2: Curva γ

7. (**Importante!**) Escolha uma curva "famosa" de sua preferência, desenhe uma animação da curva e seus vetores tangentes para uma dada parametrização e discuta a conveniência de uma nova parametrização ao avaliar a maneira como a trajetória está sendo percorrida. Referência na web de curvas famosas: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/>

A curva escolhida foi a Lemniscata de Bernouli.



Podemos reparametrizar caso quisessemos que a imagem fosse traçada no sentido oposto, ou caso quisessemos que a velocidade fosse normalizada ou que o traço começasse de algum outro ponto, como é o caso do exercício 2.

8. Obtenha uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(0) = (2, 0)$ e $\alpha'(t) = (t^2, e^t)$.
 $\alpha(t) = (\frac{t^3}{3}, e^t) + C$

Para que $\alpha(0) = (2, 0)$, temos que $C = (2, -1)$, logo:

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^3}{3} + 2, e^t - 1\right)$$

E α é regular, pois $e^t \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

9. (**Importante!**) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Prove que $\|\alpha'(t)\|$ é constante se, e somente se, para cada $t \in I$, o vetor $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

Partindo de $\|\alpha'(t)\| = c$, onde c é uma constante, sabemos que $\|\alpha'(t)\|^2 = c^2$, ou seja, $\|\alpha'(t)\|^2$ também é constante.

$$\text{Vamos chamar } g(t) = \|\alpha'(t)\|^2 = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = c^2$$

Logo $g'(t) = 0$, portanto:

$$g'(t) = \alpha''(t) \cdot \alpha'(t) + \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 2\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$$

Portanto $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

Agora, partindo de $\alpha''(t)$ ortogonal a $\alpha'(t)$, temos que:

$$g'(t) = \alpha''(t) \cdot \alpha'(t) + \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 2\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$$

Logo:

$$g(t) = \int g'(t) = 0 + C$$

$$g(t) = \|\alpha'(t)\|^2 = C \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{C} \text{ Portanto } \|\alpha'(t)\| \text{ é constante.}$$

10. Considere a espiral logaritmica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cdot \cos(t), e^t \cdot \sin(t))$. Desenhe a curva em ambiente computacional e mostre o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vetor tangente em $\gamma(t)$ não depende de t . Considere

$$\cos(\theta) = \frac{\gamma(t) \cdot \gamma'(t)}{\|\gamma(t)\| \cdot \|\gamma'(t)\|}$$

$$\|\gamma(t)\|^2 = (e^t \cdot \cos(t))^2 + (e^t \cdot \sin(t))^2 = e^{2t}(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = e^{2t} \Rightarrow \|\gamma(t)\| = e^t$$

$$\gamma'(t) = (e^t \cos(t) - e^t \sin(t), e^t \sin(t) + e^t \cos(t))$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = (e^t \cos(t) - e^t \sin(t))^2 + (e^t \sin(t) + e^t \cos(t))^2 = 2e^{2t} \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = e^t \sqrt{2}$$

$$\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = e^{2t}(\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) + \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t)) = e^{2t}$$

Portanto:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{2t}}{e^t \cdot e^t \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Logo o ângulo entre $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ é constante e igual a 45° .

