Lista de Exercícios 1 - Cálculo 2

Débora D'Angelo Reina de Araujo

September 7, 2025

1. Resolver exercícios do 1 ao 11 do Apostol manualmente e usando CAS. Compute the derivatives $F'(t)$ and $F''(t)$ for each of the vector-valued functions in Exercises 1 through 6.

   1.1. $F(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$

   $F'(t) = (1, 2t, 3t^2, 4t^3)$
   $F''(t) = (0, 2, 6t, 12t^2)$

   1.2. $F(t) = (cos(t), sin^2(t), sin(2t), tan(t))$

   Vamos resolver por partes $F'(t)$:

   - $(cos(t))' = -sin(t)$
   - $(sin^2(t))' = 2sin(t) \cdot cos(t)$
   - $(sin(2t))' = 2cos(2t)$
   - $(tan(t))' = (sin(t) \cdot \frac{1}{cos(t)})' = cos(t) \cdot \frac{1}{cos(t)} + sin(t) \cdot (cos^{-1}(t)) = \frac{cos(t)}{cos(t)} + sin(t) \cdot (-1)(cos^{-2}(t))(-sin(t)) = \frac{cos^2(t)}{cos^2(t)} + \frac{sin^2(t)}{cos^2(t)} = \frac{1}{cos^2(t)} = sec^2(t)$

   Agora, iremos por partes $F''(t)$:

   - $(cos(t))'' = (-sin(t))' = -cos(t)$
   - $(sin^2(t))'' = (2sin(t) \cdot cos(t))' = (2sin(t))'(cos(t)) + 2sin(t)(cos(t))' = 2cos^2(t) - 2sin^2(t)$
   - $(sin(2t))'' = (2cos(2t))' = 2(cos(2t))' = 2(-sin(2t)2) = -4sin(2t)$
   - $(tan(t))'' = (sec^2(t))' = (cos^{-2}(t))' = -2cos^{-3}(t)(-sin(t)) = \frac{2sin(t)}{cos^3(t)} = 2tan(t)(sec^2(t))$

   Portanto:
   $F'(t) = (-sin(t), 2sin(t) \cdot cos(t), 2cos(2t), sec^2(t))$
   $F''(t) = (-cos(t), 2cos^2(t) - 2sin^2(t), 2(-sin(2t)2) = -4sin(2t), 2tan(t)(sec^2(t)))$

   1.3. $F(t) = (arcsin(t), arccos(t))$

$F'(t) = (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}})$
$F''(t) = (\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}})$

1.4. $F(t) = 2e^t\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}$

$F'(t) = 2e^t\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}$
$F''(t) = 2e^t\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}$

1.5. $F(t) = cosh(t)\mathbf{i} + sinh(2t)\mathbf{j} + e^{-3t}\mathbf{k}$

$F'(t) = sinh(t)\mathbf{i} + 2cosh(2t)\mathbf{j} + -3e^{-3t}\mathbf{k}$
$F''(t) = cosh(t)\mathbf{i} + 4sinh(2t)\mathbf{j} + 9e^{-3t}\mathbf{k}$

1.6. $F(t) = log(1+t^2)\mathbf{i} + arctan(t)\mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{k}$

$F'(t) = \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{j} - \frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathbf{k}$
Agora, por partes:

- $(\frac{2t}{1+t^2})' = (2t)'(1+t^2)^{-1} + 2t((1+t^2)^{-1})' = (2t)'(1+t^2)^{-1} + 2t(-1)(1+t^2)^{-2}(1+t^2)' = \frac{2}{1+t^2} - \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2}$
- $(\frac{1}{1+t^2})' = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$
- $(\frac{2t}{(1+t^2)^2})' = \frac{2}{(1+t^2)^2} + \frac{2t(-2)(2t)}{(1+t^2)^3} = \frac{2}{(1+t^2)^2} - \frac{8t^2}{(1+t^2)^3}$

$F''(t) = (\frac{2}{1+t^2} - \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2})\mathbf{i} + \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\mathbf{j} + (\frac{2}{(1+t^2)^2} - \frac{8t^2}{(1+t^2)^3})\mathbf{k}$

1.7. (**Importante!**) Let F be the vector-valued function given by

$$F(t) = \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

. Prove that the angle between $F(t)$ and $F'(t)$ is constant, that is, independent of t.

$F'(t) = ((2t)(1+t^2)^{-1})'\mathbf{i} + ((1-t^2)(1+t^2)^{-1})'\mathbf{j} + (1)'\mathbf{k}$
$F'(t) = (2(i+t^2)^{-1} + (2t)(-1)(1+t^2)^{-2}(2t))\mathbf{i} + ((-2t)(1+t^2)^{-1} + (1-t^2)(-1)(1+t^2)^{-2}(2t))\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$
$F'(t) = (\frac{2}{1+t^2} - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2})\mathbf{i} + (\frac{-2t}{1+t^2} + \frac{-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2})\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$
$F'(t) = (\frac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2})\mathbf{i} - (\frac{2t(1+t^2)+2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2})\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$
$F'(t) = (2\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2})\mathbf{i} - (\frac{2t+2t^3+2t-2t^3)}{(1+t^2)^2})\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$
$F'(t) = (2\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2})\mathbf{i} - (\frac{4t}{(1+t^2)^2})\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

Agora vamos calcular o produto escalar $F(t) \cdot F'(t)$:
$F(t) \cdot F'(t) = (\frac{2t}{1+t^2})(2\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}) + (\frac{1-t^2}{1+t^2})(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}) + (1)(0)$

$F(t) \cdot F'(t) = \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} - \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} + 0$
$F(t) \cdot F'(t) = 0$

Logo $F(t)$ e $F'(t)$ são perpendiculares, ou seja, o ângulo entre eles é constante.

Compute the vector-valued integrals in Exercises 8 through 11.

1.8. $\int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t)dt$

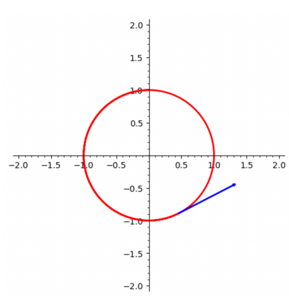
$\int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t)dt = (\frac{t^2}{2}|_0^1, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}|_0^1, e^t|_0^1) + C$
$\int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t)dt = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, e - 1) + C$

1.9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(t), cos(t), tan(t))dt$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(t), cos(t), tan(t))dt = (-cos(t)|_0^{\frac{\pi}{4}}, sin(t)|_0^{\frac{\pi}{4}}, log(sec(t))|_0^{\frac{\pi}{4}}) + C$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(t), cos(t), tan(t))dt = (\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{log(2)}{2}) + C$

1.10. $\int_0^1 (\frac{e^t}{1+e^t}\mathbf{i} + \frac{1}{1+e^t}\mathbf{j})dt$
$\int_0^1 (\frac{e^t}{1+e^t}\mathbf{i} + \frac{1}{1+e^t}\mathbf{j})dt = log(e^t + 1)\mathbf{i}|_0^1 + (t - log(e^t + 1))\mathbf{j}|_0^1 + C$
$\int_0^1 (\frac{e^t}{1+e^t}\mathbf{i} + \frac{1}{1+e^t}\mathbf{j})dt = (log(e+1) - log(2))\mathbf{i} + (1 - log(e+1) + log(2))\mathbf{j} + C$

1.11. $\int_0^1 (te^t\mathbf{i} + t^2e^t\mathbf{j} + te^{-t}\mathbf{k})dt$
$\int_0^1 (te^t\mathbf{i} + t^2e^t\mathbf{j} + te^{-t}\mathbf{k})dt = ((t-1)e^t)\mathbf{i}|_0^1 + ((t^2 - 2t + 2)e^t)\mathbf{j}|_0^1 - ((t + 1)e^{-1})\mathbf{k}|_0^1 + C$
$\int_0^1 (te^t\mathbf{i} + t^2e^t\mathbf{j} + te^{-t}\mathbf{k})dt = 1\mathbf{i} + (e-2)\mathbf{j} + (-2e^{-1} + 1)\mathbf{k} + C$

2. (**Importante!**) Encontrar uma curva parametrizada $\alpha(t) : t \in I \to \mathbb{R}^2$; cujo traço seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$; de maneira que t percorra o círculo no sentido anti-horário e tenhamos $\alpha(0) = (0, 1)$. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva.

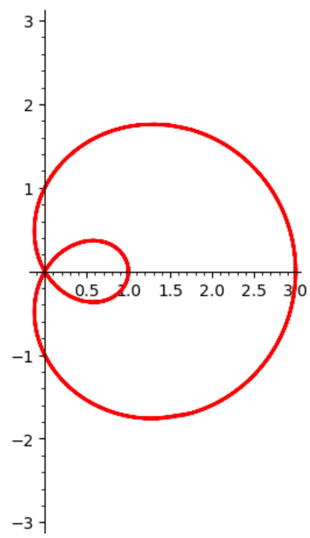


$\alpha(t) = (-sin(t), cos(t))$

3. (**Importante!**) A *limaçon* (ou caracol de Pascal) é a curva parametrizada

$$\gamma(t) = ((1 + 2cos(t)) \cdot cos(t); (1 + 2cos(t)) \cdot sin(t)); t \in \mathbb{R}$$

Faça o desenho desta curva em um sistema CAS. Observe que o ponto (0, 0) pertence ao traço da curva, e ache o vetor tangente nesse ponto.



Perceba que $\gamma(\frac{2\pi}{3}) = ((1 + 2cos(\frac{2\pi}{3})) \cdot cos(\frac{2\pi}{3}); (1 + 2cos(\frac{2\pi}{3})) \cdot sin(\frac{2\pi}{3}))$
$\gamma(\frac{2\pi}{3}) = ((1 + 2 * \frac{-1}{2}) \cdot \frac{-1}{2}, (1 + 2 * \frac{-1}{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = (0, 0)$

4. A *Cissoide de Diocles* é a curva definida implicitamente pela equação

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$$

Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Busque informação para entender qual o fenomeno modelado por esta curva que a tornou famosa. (Dica: use $y = xt$ para encontrar uma a parametrização da curva.)

Usando $y = xt$, temos:

$$x^3 + x^3t^2 - 2ax^2t^2 = 0$$

para $x \neq 0, temos:$

$$\frac{x^3 + x^3t^2 - 2ax^2t^2}{x^2} = \frac{0}{x^2}$$

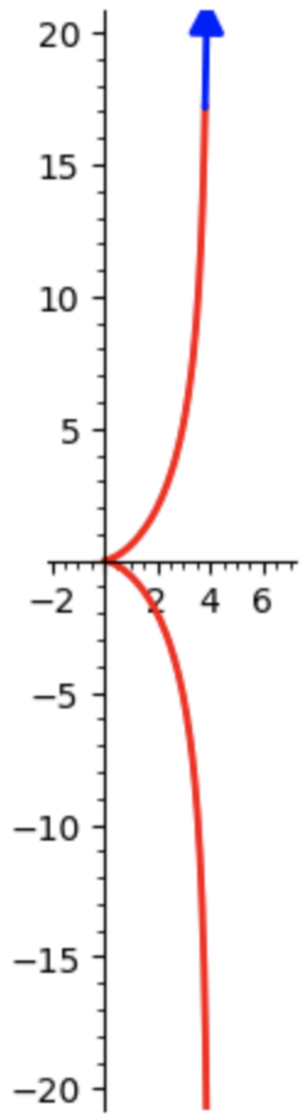
$$x = \frac{2at^2}{1 + t^2}$$

$$y = \frac{2at^3}{1+t^2}$$

Então temos:

$$\gamma(t) = (\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2})$$

Observe a imagem da curva com $a = 2$.



5. o *Folium de Descartes* é definido implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. A descrição implicita desta curva da origem a uma familia de curvas da forma

$$F_\epsilon(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - \epsilon$$

Usando $y = xt$, temos:

$$x^3 + \hat{x}3t^3 - 3x^2t = 0$$

para $x \neq 0$, temos:

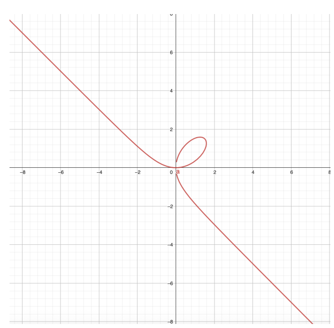
$$\frac{x^3 + x^3t^3 - 3x^2t}{x^2} = \frac{0}{x^2}$$

$$x = \frac{3t}{1+t^3}$$

$$y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

Então temos:

$$\gamma(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$$



6. Desenhe as seguintes parametrizações da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ em ambiente computacional, utilizando sistemas de computação simbólica. Inclua a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Mostre que α é curva regular e γ não é regular. (**Desafio:**) Qual seria a função naturalmente candidata a ser uma reparametrização entre as duas parametrizações? Porque falha?

   $\alpha'(t) = (1, 2t)$, logo $\alpha'(t) \neq 0$ para qualquer valor de t, portanto α é regular.
   $\gamma'(t) = (3t^2, 6t^5)$, logo $\gamma'(t = 0) = 0$, ou seja, não é regular.

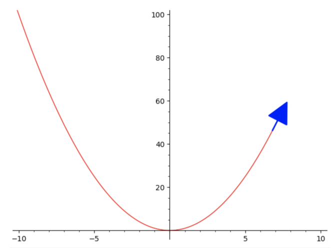


Figure 1: Curva α

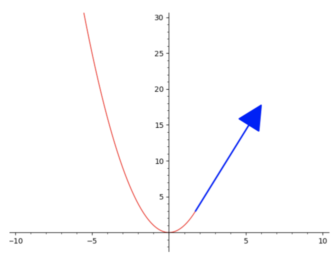
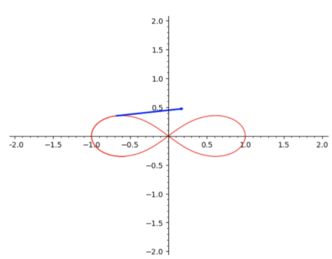


Figure 2: Curva γ

7. (**Importante!**) Escolha uma curva "famosa" de sua preferência, desenhe uma animação da curva e seus vetores tangentes para uma dada parametrização e discuta a conveniência de uma nova parametrização ao avaliar a maneira como a trajetória está sendo percorrida. Referência na web de curvas famosas: **https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/**

   A curva escolhida foi a Leminiscata de Bernouli.

   Podemos reparametrizar caso quisessemos que a imagem fosse traçada no sentido oposto, ou caso quisessemos que a velocidade fosse normalizada ou que o traço começasse de algum outro ponto, como é o caso do exercício 2.

8. Obtenha uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(0) = (2, 0)$ e $\alpha'(t) = (t^2, e^t)$.
   $\alpha(t) = (\frac{t^3}{3}, e^t) + C$

Para que $\alpha(0) = (2, 0)$, temos que $C = (2, -1)$, logo:
$\alpha(t) = (\frac{t^3}{3} + 2, e^t - 1)$
E α é regular, pois $e^t \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

9. (**Importante!**) Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Prove que $||\alpha'(t)||$ é constante se, e somente se, para cada $t \in I$, o vetor $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

   Partindo de $||\alpha'(t)|| = c$, onde c é uma constante, sabemos que $||\alpha'(t)||^2 = c^2$, ou seja, $||\alpha'(t)||^2$ também é constante.
   Vamos chamar $g(t) = ||\alpha'(t)||^2 = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = c^2$
   Logo $g'(t) = 0$, portanto:
   $g'(t) = \alpha''(t)\alpha'(t) + \alpha'(t)\alpha''(t) = 2\alpha'(t)\alpha''(t) = 0$
   Portanto $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

   Agora, partindo de $\alpha''(t)$ ortogonal a $\alpha'(t)$, temos que:
   $g'(t) = \alpha''(t)\alpha'(t) + \alpha'(t)\alpha''(t) = 2\alpha'(t)\alpha''(t) = 0$
   Logo:
   $g(t) = \int g'(t) = 0 + C$
   $g(t) = ||\alpha'(t)||^2 = C \Rightarrow ||\alpha'(t)|| = \sqrt{C}$ Portanto $||\alpha'(t)||$ é constante.

10. Considere a espiral logaritmica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cdot cos(t), e^t \cdot sin(t))$. Desenhe a curva em ambiente computacional e mostre o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vetor tangente em $\gamma(t)$ não depende de t.
    Considere
    $$cos(\theta) = \frac{\gamma(t) \cdot \gamma'(t)}{||\gamma(t)|| \cdot ||\gamma'(t)||}$$
    $$||\gamma(t)||^2 = (e^t \cdot cos(t))^2 + (e^t \cdot sin(t))^2 = e^{2t}(cos^2(t) + sin^2(t)) = e^{2t} \Rightarrow ||\gamma(t)|| = e^t$$
    $$\gamma'(t) = (e^t cos(t) - e^t sin(t), e^t sin(t) + e^t cos(t))$$
    $$||\gamma'(t)||^2 = (e^t \cdot cos(t) - e^t \cdot sin(t))^2 + (e^t \cdot sin(t) + e^t \cdot cos(t))^2 = 2e^{2t} \Rightarrow ||\gamma'(t)|| = e^t\sqrt{2}$$
    $$\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = e^{2t}(cos^2(t) - cos(t)sin(t) + cos(t)sin(t) + sin^2(t)) = e^{2t}$$
    Portanto:
    $$cos(\theta) = \frac{e^{2t}}{e^t \cdot e^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{pi}{4}$$
    Logo o angulo entre $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ é constante e igual a 45^o.