Lista de Exercícios 1 - Resolvido - Cálculo 2

Débora D'Angelo Reina de Araujo

August 17, 2025

1. Resolver exercícios do 1 ao 11 do Apostol manualmente e usando CAS.
   Compute the derivatives $F'(t)$ and $F''(t)$ for each of the vector-valued functions in Exercises 1 through 6.

   1.1. $F(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$

   1.2. $F(t) = (cos(t), sin^2(t), sin(2t), tan(t))$

   1.3. $F(t) = (arcsin(t), arccos(t))$

   1.4. $F(t) = 2e^t\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}$

   1.5. $F(t) = cosh(t)\mathbf{i} + sinh(2t)\mathbf{j} + e^{-3t}\mathbf{k}$

   1.6. $F(t) = log(1+t^2)\mathbf{i} + arctan(t)\mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{k}$

   1.7. Let F be the vector-valued function given by

   $$F(t) = \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

   . Prove that the angle between $F(t)$ and $F'(t)$ is constant, that is, independent of t.

   Compute the vector-valued integrals in Exercises 8 through 11.

   1.8. $\int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t)dt$

   1.9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(t), cos(t), tan(t))dt$

   1.10. $\int_0^1 (\frac{e^t}{1+e^t}\mathbf{i} + \frac{1}{1+e^t}\mathbf{j})dt$

   1.11. $\int_0^1 (te^t\mathbf{i} + t^2e^t\mathbf{j} + te^{-t}k)dt$

2. Encontrar uma curva parametrizada $\alpha(t) : t \in I \to \mathbb{R}^2$; cujo traço seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$; de maneira que t percorra o círculo no sentido anti-horário e tenhamos $\alpha(0) = (0, 1)$. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva.

3. A limaçon (ou caracol de Pascal) é a curva parametrizada

   $$\gamma(t) = ((1 + 2cos(t)) \cdot cos(t); (1 + 2cos(t)) \cdot sin(t)); t \in \mathbb{R}$$

   Faça o desenho desta curva em um sistema CAS. Observe que o ponto (0, 0) pertence ao traço da curva, e ache o vetor tangente nesse ponto.

4. A *Cissoide de Diocles* é a curva definida implicitamente pela equação

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$$

Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Busque informação para entender qual o fenomeno modelado por esta curva que a tornou famosa. (Dica: use $y = xt$ para encontrar uma aprametrização da curva.)

5. o *Folium de Descartes* é definido implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. A descrição implicita desta curva da origem a uma familia de curvas da forma

$$F_\epsilon(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - \epsilon$$

6. Desenhe as seguintes parametrizações da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ em ambiente computacional, utilizando sistemas de computação simbólica. Inclua a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Mostre que α é curva regular e γ não é regular. Qual seria a função naturalmente candidata a ser uma reparametrização entre as duas parametrizações? Porque falha?

7. Escolha uma curva "famosa" de sua preferência, desenhe uma animação da curva e seus vetores tangentes para uma dada parametrização e discuta a conveniência de uma nova parametrização ao avaliar a maneira como a trajetória está sendo percorrida. Referência na web de curvas famosas: **https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/**

8. Obtenha uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(0) = (2, 0)$ e $\alpha'(t) = (t^2, e^t)$.

9. (**Importante!**) Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Prove que $||\alpha'(t)||$ é constante se, e somente se, para cada $t \in I$, o vetor $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

10. Considere a espiral logaritmica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cdot cos(t), e^t \cdot sin(t))$. Desenhe a curva em ambiente computacional e mostre o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vetor tangente em $\gamma(t)$ não depende de t.