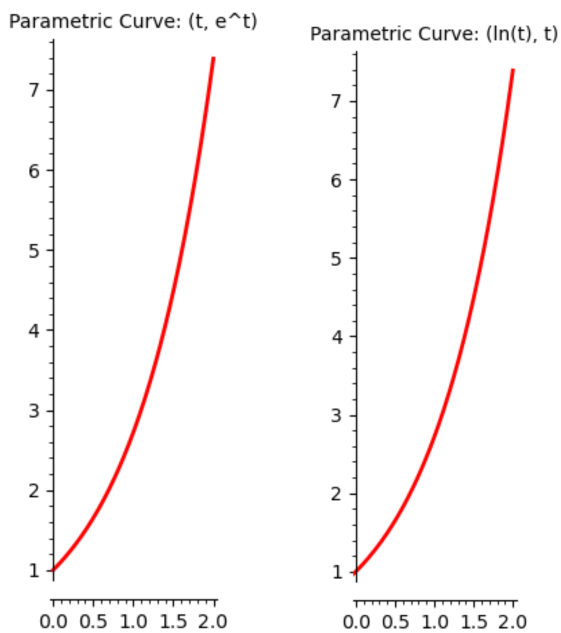
Lista de Exercícios 1 - Cálculo 2

Débora D'Angelo Reina de Araujo

September 7, 2025

1. Mostre que as curvas regulares $\alpha(t) = (t, e^t), t \in \mathbb{R}$ e $\beta(s) = (log(s), s), s \in (0, \infty)$ têm o mesmo traço.



   Podemos reparametrizar *alpha* para *beta* usando a função $\phi(t) = ln(s)$.

   Assim $\alpha(\phi(t)) = \beta(s) = (ln(s), s)$.

   Analogamente temos $\psi(s) = e^t$ tal que $\beta(\psi(s)) = \alpha(t) = (t, e^t)$.

   Sendo ϕ bijetora $((0, \infty)) \to \mathbb{R}$ e ψ bijetora $(\mathbb{R} \to (0, \infty))$, deriváveis e com derivadas sempre não nulas.

   Logo, possuem o mesmo traço.

2. **(Importante!)** Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

(a) $\alpha(t) = (3cosh2t, 3sinh2t, 6t), t \in [0, pi]$

$\alpha'(t) = (6sinh(2t), 6cosh(2t), 6)$
$||\alpha'(t)|| = 6\sqrt{cosh^2(2t) + sinh^2(2 * t) + 1} = 6\sqrt{cosh4t + 1}$
$\int_0^\pi ||\alpha'(t)||dt = \int_0^\pi 6\sqrt{cosh4t + 1}dt$
$\int_0^\pi ||\alpha'(t)||dt = \frac{3}{2}(\sqrt{2}e^{2t} - \sqrt{2}e^{-2*t})|_0^{pi} \approx 1135,945$

(b) Catenária: $\gamma(t) = (t, cosh(t))$, a partir do ponto (0, 1).

$\alpha'(t) = (1, sinh(t))$
$||\alpha'(t)|| = \sqrt{sinh(t)^2 + 1}$
$\int_0^1 ||\alpha'(t)||dt = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})|_0^(1) \approx 1.175$

3. **(Importante!)** Mudanças de parâmetro:

(a) Demonstrar que $s(\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2+1}$ é uma mudança de parâmetro diferenciável que transforma o intervalo $(0, \infty)$ no intervalo $(0, 1)$

A função $s(\theta)$ é um polinômio com denominador e numerador diferenciáveis, e denominador maior que 0 para qualquer $\theta \geq 0$. Logo é diferenciável.
$s'(\theta) = \frac{2t}{/}(t^2 + 1) - \frac{2t^3}{/}(t^2 + 1)^2$

$\lim_{\theta \to 0} s(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta^2}{\theta^2+1} = \frac{0^2}{0^2+1} = 0$
$\lim_{\theta \to \infty} s(\theta) = \lim_{\theta \to \infty} \frac{\theta^2}{\theta^2+1} = \lim_{\theta \to \infty} \frac{\frac{\theta^2}{\theta^2}}{\frac{\theta^2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}} = \frac{1}{1+0} = 1$
Portanto s leva o intervalo $(0, \infty)$ para $(0, 1)$.

(b) Mostrar que a função $\lambda : (-1, 1) \to (-\infty, +\infty)$ definita por $\lambda(t) := tan(\pi t/2)$ é uma mudança de parâmetro.

A função λ é derivável com valor $\lambda'(t) = \frac{\pi}{2} sec^2(\frac{\pi t}{2})$.

$\lim_{t \to -1} \lambda(t) = \lim_{t \to -1} tan(\pi t/2) = -\infty$
$\lim_{t \to 1} \lambda(t) = \lim_{t \to 1} tan(\pi t/2) = +\infty$
Portanto λ leva o intervalo $(-1, 1)$ para $(-\infty, + - \infty)$.

(c) Provar que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma tal que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.

Vamos chamar de L o cumprimento de uma curva regular $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$$L = \int_a^b ||\alpha'(t)||dt$$

Vamos criar uma função de reparametrização ϕ de modo que $\phi(t)$ mede a proporção de comprimento percorrido de $[a,t]$, com $a \leq t \leq b$.

$$\phi(t) = \frac{1}{L}\int_a^t ||\alpha'(t)||dt$$

A funçao ϕ é diferenciável porque é a integral de funções contínuas, $\phi(0) = 0$ e $\phi(b) = 1$ logo ϕ leva o intervalo $[a,b]$ para $[0,1]$.

4. Provar que a curva

$$\gamma(t) = (2t, \frac{2}{1+t^2})$$

com $t > 0$ é regular e é uma reparametrização de

$$\alpha(t) = (\frac{2cos(t)}{1+sin(t)}, 1 + sin(t)), \qquad t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

A funçao γ é derivável, sendo $\gamma'(t) = (2, -\frac{4t}{(t^2+1)^2})$, ou seja, $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$. Sendo assim, regular.

Para que γ seja uma reparametrização de α, precisamos de uma função $f(t) : \mathbb{R}_+^* \to [-\pi/2, \pi/2]$ de modo que.

$$\frac{2cos(f(t))}{1+sin(f(t))} = 2t \qquad \wedge \qquad 1 + sin(f(t)) = \frac{2}{1+t^2}$$

Partindo da direita, temos:

$$\Rightarrow 1+sin(f(t)) = \frac{2}{1+t^2} \Rightarrow sin(f(t)) = \frac{2}{1+t^2} - \frac{1+t^2}{1+t^2} \Rightarrow sin(f(t)) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

E substituindo na esquerda:

$$\Rightarrow \frac{2cos(f(t))}{1+sin(f(t))} = 2t \Rightarrow \frac{2cos(f(t))}{\frac{2}{1+t^2}} = 2t \Rightarrow cos(f(t)) = \frac{2t}{1+t^2}$$

E podemos confirmar os valores encontrados usando a identidade trigonométrica:

$$sin^2(f(t)) + cos^2(f(t)) = 1 \Rightarrow \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(2t)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{1+2t^2+t^4} = \frac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} = 1 \qquad \square$$

Logo

$$f(t) = arcsin(\frac{1-t^2}{1+t^2}) \qquad ou \qquad f(t) = arccos(\frac{2t}{1+t^2})$$

Usando

$$f(t) = arcsin(\frac{1-t^2}{1+t^2})$$

Vamos analisar o polinômio dentro da função $arcsin$ e chama-lo de $g(t)$.

$$g'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

Assim podemos perceber que temos apenas um ponto de inflexão para g, que é quando $t = 0$ e que nossa função é estritamente decrescente para $t > 0$. E podemos analisar os pontos críticos da nossa função, lembrando que $t > 0$:

$$lim_{t\to 0}\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-0^2}{1+0^2} = 1$$

$$lim_{t\to\infty}\frac{1-t^2}{1+t^2} = lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^2}-\frac{t^2}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Portanto, o domínio de g é $[-1, 1]$, aplicando na nossa função $f(t)$ temos:

$f(t) : [-1, 1] \to (arcsin(-1), arcsin(1)) = f(t) : [-1, 1] \to (-\pi/2, \pi/2)$ $\square$

Então sim, γ é uma reparametrização de α.