Lista de Exercícios 1 - Resolvido - Cálculo 2

Débora D'Angelo Reina de Araujo

August 17, 2025

Compute the derivatives F'(t) and F''(t) for each of the vector-valued functions in Exercises 1 through 6.

- 1. Resolver exercícios do 1 ao 11 do Apostol manualmente e usando CAS.
 - 1.1. $F(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$
 - 1.2. $F(t) = (\cos(t), \sin^2(t), \sin 2t, \tan t)$
 - 1.3. F(t) = (arcsint, arccost)
 - 1.4. $F(t) = 2e^t \mathbf{i} + 3e^t \mathbf{j}$
 - 1.5. $F(t) = cos(h)t\mathbf{i} + sin(h)2t\mathbf{j} + e^{-3t}\mathbf{k}$
 - 1.6. $F(t) = log(1+t^2)\mathbf{i} + arctan(t)\mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{k}$
 - 1.7. Let F be the vector-valued function given by

$$F(t) = \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

. Prove that the angle between F(t) and $F^{\prime}(t)$ is constant, that is, independent of t.

Compute the vector-valued integrals in Exercises 8 through 11.

- 1.8. $\int_0^1 (t, \sqrt{t}), e^t dt$
- 1.9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(t), \cos(t), \tan(t)) dt$
- 1.10. $\int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+e^t}\mathbf{i} + \frac{1}{1+e^t}\mathbf{j}\right) dt$
- 1.11. $\int_0^1 (te^t \mathbf{i} + t^2 e^t \mathbf{j} + te^{-t} k) dt$
- 2. Encontrar uma curva parametrizada $\alpha(t): t \in I \to \mathbb{R}^2$; cujo traço seja o círculo $x^2+y^2=1$; de maneira que t percorra o círculo no sentido antihorário e tenhamos $\alpha(0)=(0,1)$. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva.
- 3. A limaçon (ou caracol de Pascal) é a curva parametrizada

$$\gamma(t) = ((1 + 2cos(t)) \cdot cos(t); (1 + 2cos(t)) \cdot sin(t)); t \in \mathbb{R}$$

Faça o desenho desta urva em um sistema CAS. Observe que o ponto (0, 0) pertence ao traço da curva, e ache o vetor tangente nesse ponto.

4. A Cissoide de Diocles é a curva definida implicitamente pela equação

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$$

Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Busque informação para entender qual o fenomeno modelado por esta curva que a tornou famosa. (Dica: use y=xt para encontrar uma aprametrização da curva.)

5. o Folium de Descartes é definido implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em um sistema CAS, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. A descrição implicita desta curva da origem a uma familia de curvas da forma

$$F_{\epsilon}(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - \epsilon$$

- 6. Desenhe as seguintes parametrizações da parábola $\alpha(t)=(t,t^2)$ e $\gamma(t)=(t^3,t^6)$ em ambiente computacional, utilizando sistemas de computação simbólica. Inclua a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Mostre que α é curva regular e γ não é regular. Qual seria a função naturalmente candidata a ser uma reparametrização entre as duas parametrizações? Porque falha?
- 7. Escolha uma curva "famosa" de sua preferência, desenhe uma animação da curva e seus vetores tangentes para uma dada parametrização e discuta a conveniência de uma nova parametrização ao avaliar a maneira como a trajetória está sendo percorrida. Referência na web de curvas famosas: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/
- 8. Obtenha uma curva regular $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(0)=(2,0)$ e $\alpha'(t)=(t^2,e^t).$
- 9. (Importante!) Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Prove que $||\alpha'(t)||$ é constante se, e somente se, para cada $t \in I$, o vetor $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.
- 10. Considere a espiral logaritmica $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^t \cdot cos(t), e^t \cdot sin(t))$. Desenhe a curva em ambiente computacional e mostre o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vetor tangente em $\gamma(t)$ não depende de t.