ETH zürich
Departement Informatik

Theoretical Computer Science

Prof. Dr. Juraj Hromkovič,
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18

Second Midterm Exam

Zurich, December 11th, 2018

Exercise 1

We consider the languages

$$L_\lambda = \{\mathrm{Kod}(M) \mid \lambda \in L(M)\}$$

and

$$L_{\mathrm{all}} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid L(M) = \Sigma_{\mathrm{bool}}^*\}\,.$$

(a) Prove that $L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{EE}} L_\lambda$.

(b) Prove that $L_{\mathrm{all}} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$.

You may use all results from the lecture and from the exercise sheets. **7+3 points**

Exercise 2

We consider the language

$$L_{\cap\neq\emptyset} = \{\mathrm{Kod}(M_1)\#\mathrm{Kod}(M_2) \mid L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}\,.$$

(a) Prove that $L_{\cap\neq\emptyset} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$.

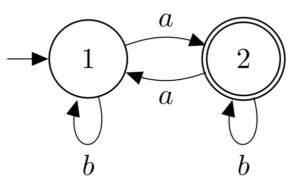
(b) Prove that $L_{\cap\neq\emptyset} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$.

You may use all results from the lecture and from the exercise sheets. **5+5 points**

(please turn the page)

Exercise 3

(a) We consider the finite automaton A as shown below.



Use the dynamic-programming method from the lecture to derive a regular expression α with $L(\alpha) = L(A)$.

(b) Give a regular grammar G satisfying

$$L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid 2|w|_b \bmod 3 = 2 \text{ or } w \text{ contains the subword } bba\}\,.$$

Give a brief and informal explanation of the idea behind your construction.

5+5 points

Exercise 4

(a) Let $G = (V, E)$ be an undirected graph with vertex set $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ and edge set $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Give a construction that transforms G into a 3CNF formula Φ that is satisfiable if and only if G contains a vertex cover of size 2.

(b) Let TRIPLE-SAT denote the set of all CNF formulas having *at least* three satisfying assignments. Prove that TRIPLE-SAT is NP-complete.

You may use all results from the lecture and from the exercise sheets.

4+6 points

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič

1. Zwischenklausur

Zürich, 4. November 2011

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten, der die Sprache

$$L_1 = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid (|w|_0 + 3 \cdot |w|_1 + 4 \cdot |w|_2) \bmod 4 = 2\}$$

akzeptiert und geben Sie für jeden Zustand q Ihres konstruierten Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

(b) Konstruieren Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten für die Sprache

$$L_1 \cap \{w = x11y \mid x, y \in \{0,1,2\}^*\}.$$

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{u11u \mid u \in \{0,1\}^+\}$,

(b) $L_2 = \{1^i 0^{i^2} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas, oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Sei $n_1, n_2, n_3, \ldots$ eine aufsteigende unendliche Folge von natürlichen Zahlen mit $K(n_i) \geq \lceil \log_2 n_i \rceil / 2$. Sei für alle $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ die Zahl q_i die grösste Primzahl, die die Zahl n_i teilt. Zeigen Sie, dass dann die Menge $Q = \{q_i \mid i \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ unendlich ist. **10 Punkte**

Aufgabe 4

Seien G_1 und G_2 zwei beliebige reguläre Grammatiken. Geben Sie eine formale Konstruktion an, wie man aus G_1 und G_2 eine reguläre Grammatik für $L(G_1) \cdot L(G_2)$ erhalten kann und erläutern Sie kurz informell die Korrektheit Ihrer Konstruktion. **4 Punkte**

Aufgabe 5

Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei w_i das i-te Wort über $\{0, 1\}$ in kanonischer Reihenfolge und M_i die i-te Turingmaschine in kanonischer Reihenfolge. Wir betrachten die folgenden zwei Sprachen:

(a) $L_{\text{diagA}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N} \text{ und } M_{2i+5} \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$,

(b) $L_{\text{diagB}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w_{2i+5} \text{ für ein } i \in \mathbb{N} \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$.

Zeigen Sie für die eine der beiden Sprachen (analog zum Beweis für die Diagonalsprache), dass sie nicht rekursiv aufzählbar ist, und begründen Sie, warum für die andere Sprache ein derartiger Beweis nicht möglich ist. **6 Punkte**

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf15`

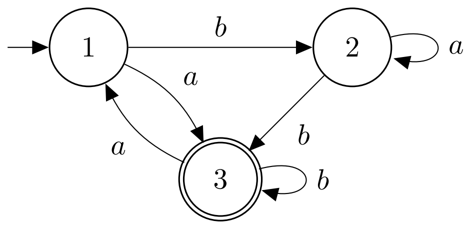
2. Zwischenklausur

Zürich, 11. Dezember 2015

Aufgabe 1

(a) Sei $R = ((a + bb^*) + a)^*$ ein regulärer Ausdruck. Geben Sie einen λ-NEA A mit $L(A) = L(R)$ an.

(b) Geben Sie für den folgenden endlichen Automaten A einen äquivalenten regulären Ausdruck an. Verwenden Sie hierfür entweder eines der Verfahren aus dem Selbststudium oder begründen Sie informell die Korrektheit Ihrer Konstruktion.



4+6 Punkte

Aufgabe 2

Wir betrachten die Sprachen

$$L_{\text{full}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM und } L(M) = \Sigma^*\}$$

und

$$L_{\text{U},\lambda} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM und } \lambda \in L(M)\}\,.$$

(a) Zeigen Sie $L_{\text{U},\lambda} \leq_{\text{EE}} L_{\text{full}}$.

(b) Zeigen Sie $L_{\text{H},\lambda} \leq_{\text{R}} L_{\text{U},\lambda}$.

(c) **Bonusaufgabe:** Zeigen Sie, dass $(L_{\text{full}})^{\complement} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

5+5 Punkte + 5 Bonus-Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Wir betrachten die Sprache

$$L_{0,1} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM und } 0 \in L(M) \text{ und } 1 \in L(M)\}\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe einer konkreten EE-Reduktion (also insbesondere ohne den Satz von Rice zu verwenden), dass $L_{0,1} \notin \mathcal{L}_\mathrm{R}$ gilt. **10 Punkte**

Aufgabe 4

Wir betrachten die Sprache

$$\begin{aligned}\text{LARGE-CLIQUE} = \{G \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit } 3k \text{ Knoten für ein } k \in \mathbb{N},\\ \text{der eine } k\text{-Clique enthält}\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass LARGE-CLIQUE NP-vollständig ist.

Hinweis: Sie dürfen hierfür voraussetzen, dass die in der Vorlesung oder in den Übungen betrachteten Probleme SAT, 3SAT, DOPPEL-SAT, E3SAT, CLIQUE und VC NP-schwer sind. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

Sessionsprüfung

Zürich, 25. Januar 2011

Aufgabe 1

Für ein Wort $w = a_n a_{n-1} \dots a_0$ mit $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ für $i \in \{0, \dots, n\}$ sei $\text{Nummer}_{10}(w)$ definiert als die natürliche Zahl $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$ mit der Dezimaldarstellung w.
Wir betrachten die Sprache

$$L = \{w \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^* \mid \text{Nummer}_{10}(w) = 0 \pmod 6\}.$$

(a) Konstruieren Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten, der L akzeptiert.

(b) Beschreiben Sie die Klassen $\text{Kl}[q]$ für alle Zustände q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{0^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ ist eine Primzahl}\}$$

nicht regulär ist. **5 Punkte**

Aufgabe 3

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus um festzustellen, ob das Wort $w = abab$ in der Sprache der kontextfreien Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ enthalten ist, wobei

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \to AB, S \to AC, S \to BC, A \to AA, A \to CB, A \to a, \\ & B \to BA, B \to AS, B \to BS, B \to CC, C \to a, C \to b\}. \end{aligned}$$

10 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 4

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(b) Wenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen an, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, k = \max\{i, j\}\}$$

nicht kontextfrei ist.

3+7 Punkte

Aufgabe 5

(a) Definieren Sie die Diagonalsprache L_{diag}.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{diag}} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

2+3 Punkte

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass das Problem, für jedes $x \in \{0,1\}^*$ die Kolmogorov-Komplexität $K(x)$ von x zu berechnen, algorithmisch unlösbar ist. **10 Punkte**

Aufgabe 7

Wir betrachten die beiden Sprachen

$$\text{SAT} = \{\Phi \mid \Phi \text{ ist eine erfüllbare Formel in KNF}\}$$

und

$$\text{CLIQUE} = \{(G, k) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph, der eine } k\text{-Clique enthält}\}.$$

Zeigen Sie, dass SAT $\leq_p$ CLIQUE gilt. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. E. Welzl

1. Klausur (Midterm 1)

Zürich, 15. November 2007

Aufgabe 1

Betrachten Sie für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ alle Wörter der Länge k. Beweisen Sie für $i \in \mathbb{N}, 0 < i \leq k$, dass es mindestens $2^k - 2^i + 2$ Wörter w der Länge k gibt, für die gilt:

$$K(w) \geq i.$$

Dabei dürfen Sie *nicht* auf irgendwelche in den Übungen bewiesenen Aussagen zurückgreifen.
Hinweis: Falls es Ihnen nicht gelingt, die angegebene Schranke zu beweisen, können Sie auch den Beweis für einen niedrigeren Wert als $2^k - 2^i + 2$ führen. Die derart erreichbaren Punkte hängen (ausser von der Korrektheit des Beweises) von der Höhe der von Ihnen bewiesenen Schranke ab. **10 Punkte**

Aufgabe 2

(a) Entwerfen Sie einen deterministischen endlichen Automaten für die Sprache

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a \text{ ist gerade und } x = ybbaz \text{ für irgendwelche } y, z \in \{a,b\}^*\}$$

und erläutern Sie Ihren Entwurf.

(b) Geben Sie die Klassen für den Anfangszustand und alle akzeptierenden Zustände Ihres Automaten an.

7+3 Punkte

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass die nachstehenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_a = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = 0^{n^2} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ (also die Menge aller Wörter, die nur aus Nullen bestehen und deren Länge eine Quadratzahl ist);

(b) $L_b = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = s1t \text{ für } s,t \in \{0,1\}^* \text{ mit } |s| = |t|\}$ (also die Menge aller Wörter mit einer 1 genau in der Mitte).

Sie dürfen sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) mithilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3. oder direkt über den Automaten),

(ii) mittels des Pumping-Lemmas,

(iii) unter Verwendung von Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass Lösungen, die dieser Vorgabe nicht entsprechen, *nicht bewertet* werden. Insbesondere wird bei zwei Lösungen mit derselben Methode nur die erste bewertet.

5+5 Punkte

Aufgabe 4

Entwerfen Sie eine reguläre Grammatik für die Sprache L_3. Diese enthält alle Wörter über $\{a, b\}$, deren drittletzter Buchstabe ein a ist, formal:

$$L_3 = \{uav \mid u, v \in \{a,b\}^* \text{ und } |v| = 2\}.$$

Beweisen Sie, dass für Ihre Grammatik G_3 auch tatsächlich $L(G_3) = L_3$ gilt. **10 Punkte**

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf15`

1. Zwischenklausur

Zürich, 10. November 2015

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{w1a \mid a \in \{0,1\}, w \in \{0,1\}^*\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}(q)$ für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten an.

(c) Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der L akzeptiert, mindestens 4 Zustände hat.

4+3+3 Punkte

Aufgabe 2

Geben Sie eine reguläre Grammatik für die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid |w|_0 + 2|w|_1 \bmod 3 = 1\}$$

an und erklären Sie kurz die Idee Ihrer Konstruktion. **5 Punkte**

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass mindestens die Hälfte aller Wörter in $\{0,1\}^{\leq n}$ zufällig ist. **5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{0^{n \cdot \lceil \sqrt{n} \rceil} \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R$ oder $|w|_0$ ist Quadratzahl$\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{EE}} L_{\mathrm{H}}$ gilt. **5 Punkte**

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass $|[0,1]| \geq |\mathcal{P}(\{0,1\}^*)|$ gilt. **5 Punkte**

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer

Sessionsprüfung

Zürich, 6. Februar 2020

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält genau einmal das Teilwort } 001\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie mit einer der drei in der Vorlesung vorgestellten Methoden (Lemma 3.3, Pumping-Lemma oder Kolmogorov-Komplexität), dass die Sprache

$$L = \{0^m 1^n \mid m, n \geq 1 \text{ und } m \text{ teilt } n\}$$

nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a + 2|w|_b) \bmod 3 = 1 \text{ oder } w \text{ endet mit } b\}$$

akzeptiert, mindestens 5 Zustände hat.

5+5 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(b) Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache
$$L = \{a^n b^m c^{n \cdot m} \mid m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 1\}$$
über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ nicht kontextfrei ist.

3+7 Punkte

Aufgabe 4

Wir betrachten die Sprache
$$L_{\text{len2}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM über dem Eingabealphabet } \{0,1\} \text{ und } M \text{ akzeptiert mindestens ein Wort der Länge } 2\}\,.$$
Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(i) $L_{\text{len2}} \in \mathcal{L}_{\text{R}}$,

(ii) $L_{\text{len2}} \in \mathcal{L}_{\text{RE}} - \mathcal{L}_{\text{R}}$,

(iii) $L_{\text{len2}} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$.

Beweisen Sie die von Ihnen als korrekt erkannte Behauptung. **10 Punkte**

Aufgabe 5

(a) Erklären Sie, wie man alle positiven rationalen Zahlen nummerieren kann, d. h. zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}^+$ abzählbar ist.

(b) Verwenden Sie die Diagonalisierungsmethode, um eine positive reelle Zahl zu konstruieren, die nicht in $\mathbb{Q}^+$ enthalten ist.

(c) Erklären Sie, warum es reelle Zahlen gibt, die keine endliche Dezimaldarstellung haben.

4+3+3 Punkte

Aufgabe 6

Wir betrachten die Sprachen
$$\text{LARGE-CLIQUE} = \{(G, k) \mid G = (V, E) \text{ ist ein ungerichteter Graph, der eine Clique der Grösse } k \geq |V|/3 \text{ enthält}\}$$
und
$$\text{VERY-LARGE-CLIQUE} = \{(G, k) \mid G = (V, E) \text{ ist ein ungerichteter Graph, der eine Clique der Grösse } k \geq |V| - 3 \text{ enthält}\}\,.$$

Zeigen Sie für jede der beiden Sprachen entweder, dass sie NP-vollständig ist oder dass sie in P liegt. **10 Punkte**

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18`

Sessionsprüfung

Zürich, 7. Februar 2019

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{awb \mid w \in \{a,b\}^* \text{ und } |w|_a \bmod 3 = |w|_b \bmod 3\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität, dass die Sprache

$$L_1 = \{1^{n^3}0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache $L_2 = L(G)$, die von der kontextfreien Grammatik $G = (\{S\}, \{[,]\}, P, S\}$, wobei

$$P = \{S \to SS, S \to [S], S \to \lambda\}\,,$$

erzeugt wird, nicht regulär ist.

(c) Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der die Sprache

$$L_3 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid (|w|_a + |w|_b) \bmod 3 = |w|_c \bmod 3 \text{ und } w \text{ endet mit } c\}$$

akzeptiert, mindestens 4 Zustände hat.

5+5+5 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(b) Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ nicht kontextfrei ist.

(c) Entwerfen Sie eine allgemeine Grammatik über dem Terminalalphabet $\{a, b, c\}$, die die Sprache L aus Aufgabenteil (b) erzeugt, und beschreiben Sie informell die Idee Ihrer Konstruktion.

2+4+4 Punkte

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie $(L_{\text{diag}})^{\complement} \leq_{\text{EE}} L_{\text{U}}$, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

(b) Für zwei beliebige Wörter $w_1, w_2 \in \{0,1\}^*$ mit $w_1 \neq w_2$ sei die Sprache L_{w_1,w_2} definiert als

$$L_{w_1,w_2} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM und } w_1 \in L(M) \text{ und } w_2 \notin L(M)\}\,.$$

Zeigen Sie, dass für alle Wörter $w_1, w_2 \in \{0,1\}^*$ mit $w_1 \neq w_2$ gilt, dass $L_{\text{U}} \leq_{\text{EE}} L_{w_1,w_2}$, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

(c) Wir betrachten die Sprache

$$L_{\text{not-all-length-2}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist TM und } \Sigma^2 \not\subseteq L(M)\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L_{\text{not-all-length-2}} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt. Sie dürfen hierfür alle aus der Vorlesung bekannten Ergebnisse verwenden.

(d) Kann es zwei Sprachen $L_1 \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$ und $L_2 \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ geben, so dass $L_1 \leq_{\text{R}} L_2$ gilt? Begründen Sie Ihre Behauptung.

3+5+5+2 Punkte

Aufgabe 5

Das *Subset-Sum-Problem* (kurz SUBSET-SUM) ist das folgende Entscheidungsproblem: Gegeben eine endliche Menge $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ von natürlichen Zahlen, und eine natürliche Zahl t, ist zu entscheiden, ob es eine Teilmenge $U \subseteq S$ gibt, so dass $\sum_{x \in U} x = t$.

Das *Mengen-Partitions-Problem* (kurz PARTITION) ist das folgende Entscheidungsproblem: Gegeben ist eine Menge $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ von natürlichen Zahlen. Die Frage ist, ob sich S so in zwei Mengen U_1 und U_2 aufteilen lässt, dass $U_1 \cup U_2 = S$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $\sum_{x \in U_1} x = \sum_{y \in U_2} y$ gelten.

(a) Zeigen Sie, dass PARTITION $\in$ NP.

(b) Zeigen Sie SUBSET-SUM $\leq_{\text{p}}$ PARTITION.

2+8 Punkte

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

Sessionsprüfung

Zürich, 26. Januar 2010

Aufgabe 1

(a) Entwerfen Sie einen (deterministischen) EA für die Sprache

$$L = \{x1y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ und } |y| = 2\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass jeder (deterministische) EA, der die Sprache L aus Aufgabenteil (a) akzeptiert, mindestens 8 Zustände hat.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache $L = \{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

3+7 Punkte

Aufgabe 3

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus, um festzustellen, ob das Wort $w = abaa$ in der Sprache der Grammatik $G = (\{a,b\}, \{S,A,B,C\}, P, S)$ liegt, wobei

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \to AA, S \to BB, S \to AB, S \to BS, \\ & A \to AC, A \to CB, A \to AB, A \to a, \\ & B \to BC, B \to CA, B \to BB, B \to b, \\ & C \to SA, C \to SB, C \to a, C \to b\}. \end{aligned}$$

Geben Sie hierbei die vollständige Tabelle der Zwischenergebnisse an. **10 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Sei L eine rekursive Sprache über dem Alphabet $\{0, 1\}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$|L \cap \{0,1\}^n| \leq 1.$$

Zeigen Sie, dass es dann eine Konstante c gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$K(w_n) \leq \log_2(|w_n|) + c,$$

wobei w_n das n-te Wort aus L in kanonischer Reihenfolge sei. **10 Punkte**

Aufgabe 5

(a) Zeigen Sie, dass $(L_{\text{empty}})^{\complement}$ rekursiv aufzählbar ist.

(b) Zeigen Sie $L_H \leq_R L_{\text{empty}}$.

3+7 Punkte

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass SAT $\leq_p$ CLIQUE gilt. **10 Punkte**

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretical Computer Science

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer

Final Exam

Zurich, February 6th, 2020

Exercise 1

(a) Construct a deterministic finite automaton (in graphical representation) that accepts the language

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contains the subword 001 exactly once}\}.$$

(b) For each state q of your automaton as constructed in exercise part (a), give the class $\text{Kl}[q]$.

5+5 points

Exercise 2

(a) Prove that the language

$$L = \{0^m 1^n \mid m, n \geq 1 \text{ and } m \text{ divides } n\}$$

is not regular using one of the three methods presented in the lecture (Lemma 3.12 (called Lemma 3.3 in the German version of the book), pumping lemma or Kolmogorov complexity).

(b) Prove that every deterministic finite automaton accepting the language

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a + 2|w|_b) \bmod 3 = 1 \text{ or } w \text{ ends with } b\}$$

has at least 5 states.

5+5 points

(please turn the page)

Exercise 3

(a) Formulate the pumping lemma for context-free languages.

(b) Use the pumping lemma for context-free languages to prove that the language

$$L = \{a^n b^m c^{n \cdot m} \mid m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 1\}$$

over the alphabet $\{a, b, c\}$ is not context-free.

3+7 points

Exercise 4

We consider the language

$$L_{\text{len2}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ is a TM over the input alphabet } \{0,1\} \text{ and } M \text{ accepts at least one word of length } 2\}.$$

Which of the following statements is true?

(i) $L_{\text{len2}} \in \mathcal{L}_{\text{R}}$,

(ii) $L_{\text{len2}} \in \mathcal{L}_{\text{RE}} - \mathcal{L}_{\text{R}}$,

(iii) $L_{\text{len2}} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$.

Prove the statement you have recognized to be true. **10 points**

Exercise 5

(a) Describe how to enumerate all positive rational numbers, i. e., prove that $\mathbb{Q}^+$ is countable.

(b) Use the diagonalization method to construct a positive real number that is not contained in $\mathbb{Q}^+$.

(c) Argue why there exist real numbers that do not have a finite decimal representation.

4+3+3 points

Exercise 6

We consider the languages

$$\text{LARGE-CLIQUE} = \{(G, k) \mid G = (V, E) \text{ is an undirected graph containing a clique of size } k \geq |V|/3\}$$

and

$$\text{VERY-LARGE-CLIQUE} = \{(G, k) \mid G = (V, E) \text{ is an undirected graph containing a clique of size } k \geq |V| - 3\}.$$

Prove, for each of the two languages, either that it is NP-complete or that it is contained in P. **10 points**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

2. Zwischenklausur

Zürich, 13. Dezember 2013

Aufgabe 1

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$L = \{sct \in \{a, b, c\}^* \mid s, t \in \{a, b\}^* \text{ und } s \text{ ist Suffix von } t\}$$

nicht kontextfrei ist.

2+8 Punkte

Aufgabe 2

Wir betrachten die Sprache

$$L_{\text{ungleich}} = \{\text{Kod}(M)\#\text{Kod}(M') \mid L(M) \neq L(M')\}.$$

Zeigen Sie, dass $L_{\text{U}} \leq_{\text{R}} L_{\text{ungleich}}$ gilt. **10 Punkte**

Aufgabe 3

Die Klasse DLOG ist definiert als die Menge aller Sprachen, die von einer deterministischen MTM mit logarithmischem Platzbedarf entschieden werden können, also DLOG = SPACE($\log_2 n$).

Zeigen Sie, dass DLOG $\subseteq$ P gilt, indem Sie explizit angeben, wie man für eine beliebige Sprache $L \in$ DLOG eine deterministische Polynomzeit-MTM konstruieren kann. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion. **10 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Wir betrachten die Sprache

$$\text{LARGE-CLIQUE} = \{G \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit } 3k \text{ Knoten für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \text{der eine } k\text{-Clique enthält}\}.$$

Zeigen Sie, dass LARGE-CLIQUE NP-vollständig ist.
Hinweis: Sie dürfen hierfür voraussetzen, dass die in der Vorlesung oder in den Übungen betrachteten Probleme SAT, 3SAT, TRIPEL-SAT, E3SAT, CLIQUE, INDEPENDENT-SET und SUBSET-SUM NP-schwer sind. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

1. Zwischenklausur

Zürich, 2. November 2010

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten, der die Sprache

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid (2 \cdot |x|_1 + 3 \cdot |x|_0) \bmod 3 = 0 \text{ und } |x|_0 \geq 2\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

6+4 Punkte

Aufgabe 2

(a) Sei $w_n = 0^{2^{2^{n^3}}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorov-Komplexität von w_n an, gemessen in der Länge von w_n.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ mehr als die Hälfte aller Wörter $x \in (\Sigma_{\text{bool}})^n$ eine Kolmogorov-Komplexität $K(x) \geq n - 1$ hat.

5+5 Punkte

Aufgabe 3

Es seien die regulären Grammatiken $G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P_1, S)$ und $G_2 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P_2, S)$ gegeben, wobei

$$\begin{aligned} P_1 &= \{S \to bS, S \to aA, A \to aB, A \to b, B \to bB, B \to aS, B \to \lambda\}, \\ P_2 &= \{S \to aA, S \to bS, A \to aA, A \to bB, B \to a, B \to bC, C \to \lambda\}. \end{aligned}$$

Sei weiter $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$.
Konstruieren Sie aus G_1 und G_2 eine reguläre Grammatik für die Sprache $L_1 L_2 \cup L_2 \cdot \{\#\}$ und erläutern Sie kurz informell die Korrektheit Ihrer Konstruktion. **10 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$,

(b) $L_2 = \{u1uv \mid u, v \in \{0,1\}^*\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas, oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. E. Welzl

1. Klausur

Zürich, 30. Oktober 2008

Aufgabe 1

Entwerfen Sie einen deterministischen endlichen Automaten für die Sprache

$$\begin{aligned} L &= \{w \in \{a,b\}^* \mid w = xaay \text{ für irgendwelche } x,y \in \{a,b\}^*\} \\ &\cup \{w \in \{a,b\}^* \mid w = zbb \text{ für irgendein } z \in \{a,b\}^*\} \end{aligned}$$

und erläutern Sie Ihren Entwurf.
Hinweis: Sie haben dabei die Wahl, wie Sie Ihren Automaten entwerfen: direkt, über einen NEA als Zwischenschritt oder über zwei (deterministische) Teilautomaten für die beiden Teilsprachen als Zwischenschritt. **10 Punkte**

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass die nachstehenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_a = \{w10w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$;

(b) $L_b = \{0^n 1^{\lceil \sqrt{n} \rceil} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Sie dürfen sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) mithilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3. oder direkt über den Automaten),

(ii) mittels des Pumping-Lemmas,

(iii) unter Verwendung von Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass Lösungen, die dieser Vorgabe nicht entsprechen, *nicht bewertet* werden. Insbesondere wird bei zwei Lösungen mit derselben Methode nur die erste bewertet.
5+5 Punkte

Aufgabe 3

(a) Gegeben seien die regulären Grammatiken

$$G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to aA, S \to bB, A \to aA, A \to aB, A \to a, B \to bb\}, S)$$

und

$$G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to bA, S \to B, A \to aB, A \to b, B \to aA, B \to bb\}, S).$$

Konstruieren Sie hieraus eine reguläre Grammatik für die Sprache $L(G_1)L(G_2)$, die Konkatenation der von den Grammatiken erzeugten Sprachen.

(b) Geben Sie eine reguläre Grammatik für die folgende Sprache an:

$$L_3 = \{ubbcv \mid u \in \{a, b, c\}^*, v \in \{a, b\}^*\}.$$

Beweisen Sie, dass Ihre Grammatik L_3 erzeugt.

3+7 Punkte

Aufgabe 4

Betrachten Sie für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ alle Wörter der Länge *höchstens* k. Beweisen Sie, dass wenigstens die Hälfte davon zufällig ist, d.h. dass mindestens für die Hälfte aller Wörter w der Länge $\leq k$ gilt:

$$K(w) \geq k.$$

10 Punkte

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretical Computer Science

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer

First Midterm Exam

Zurich, November 8th, 2019

Exercise 1

(a) Construct a deterministic finite automaton in graphical representation that accepts the language

$$L = \Big\{ w \in \{0,1\}^* \mid w = a_1 a_2 \dots a_n \text{ for some } n \in \mathbb{N} \text{ and } a_1, \dots, a_n \in \{0,1\} \\ \text{and } \Big(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ odd}}} \text{Number}(a_i) \Big) \bmod 3 = 0 \Big\}.$$

(b) For each state q of your automaton as constructed in exercise part (a), give the class $\text{Kl}[q]$.

5+5 points

Exercise 2

(a) Prove, using the method of Kolmogorov complexity, that the language

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = uvu \text{ and } |u| = |v| \}$$

is not regular.

(b) Prove that the language

$$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w = aub \text{ for some } u \in \{a,b\}^* \text{ and } |w|_a \text{ divides } |w|_b \}$$

is not regular.

For your proof, you may choose among the following two proof methods.

(i) Using Lemma 3.12 from the English book (i. e., Lemma 3.3 from the German book) or a direct argumentation about the automaton, or

(ii) using the pumping lemma.

4+6 points

(please turn the page)

Exercise 3

We consider the language

$$L = \{x00y \mid x \in \{0,1\}^* \text{ and } y \in \{0,1\}\}\,.$$

(a) Construct a nondeterministic finite automaton with at most 4 states that accepts L.

(b) Prove that every deterministic finite automaton accepting L needs at least 5 states.

4+6 points

Exercise 4

(a) Prove that the language $(L_{\text{empty}})^{\complement}$ is recursively enumerable.

(b) Prove that $(L_{\text{empty}})^{\complement}$ is not recursive by giving a concrete reduction from L_{U} and showing the correctness of this reduction.

4+6 points

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič,
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18`

2. Zwischenklausur

Zürich, 11. Dezember 2018

Aufgabe 1

Wir betrachten die Sprachen

$$L_\lambda = \{\mathrm{Kod}(M) \mid \lambda \in L(M)\}$$

und

$$L_{\mathrm{all}} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid L(M) = \Sigma_{\mathrm{bool}}^*\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{EE}} L_\lambda$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{all}} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ gilt.

Sie dürfen alle Resultate aus der Vorlesung oder den Übungsaufgaben verwenden. **7+3 Punkte**

Aufgabe 2

Wir betrachten die Sprache

$$L_{\cap\neq\emptyset} = \{\mathrm{Kod}(M_1)\#\mathrm{Kod}(M_2) \mid L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $L_{\cap\neq\emptyset} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$ gilt.

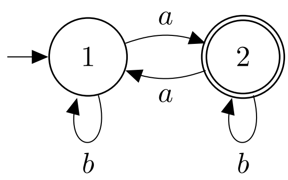
(b) Zeigen Sie, dass $L_{\cap\neq\emptyset} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ gilt.

Sie dürfen alle Resultate aus der Vorlesung oder den Übungsaufgaben verwenden. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Wir betrachten den nachfolgend abgebildeten endlichen Automaten A.



Verwenden Sie die in der Vorlesung präsentierte Methode der dynamischen Programmierung, um einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(A)$ herzuleiten.

(b) Geben Sie eine reguläre Grammatik G an, für die

$$L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid 2|w|_b \bmod 3 = 2 \text{ oder } w \text{ enthält das Teilwort } bba\}$$

gilt. Erläutern Sie die Idee Ihrer Konstruktion kurz und informell.

5+5 Punkte

Aufgabe 4

(a) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und Kantenmenge $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Geben Sie eine Konstruktion an, die aus G eine 3KNF-Formel Φ erzeugt, die genau dann erfüllbar ist, wenn G ein Vertex-Cover der Grösse höchstens 2 hat.

(b) Sei TRIPEL-SAT die Menge aller KNF-Formeln, die *mindestens* drei erfüllende Belegungen haben. Zeigen Sie, dass TRIPEL-SAT NP-vollständig ist.

Sie dürfen alle Resultate aus der Vorlesung oder den Übungsaufgaben verwenden.

4+6 Punkte

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

1. Klausur
Gruppe A

Zürich, 16. Dezember 2004

Aufgabe 1

a) Es sei $(w_j)_{j=0}^{\infty}$ die durch

$$w_j := b^{j^3}$$

gegebene (unendliche) Folge von Wörtern. Zeigen Sie, dass es eine Konstante c gibt, so dass für alle j gilt:

$$K(w_j) \leq \frac{1}{3} \log |w_j| + c.$$

Hinweis: Vergessen Sie nicht, dass diese Aufgabe auch das Aufschreiben von Programmen, die die w_j generieren, fordert.

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Konzeptes der Kolmogorov-Komplexität, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Hinweis: Beweise, die sich nicht auf ein die Kolmogorov-Komplexität nutzendes Argument beziehen, werden nicht akzeptiert.

2 × 5 Punkte

Aufgabe 2

a) Entwerfen Sie einen endlichen Automaten für die reguläre Sprache

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a \text{ ist gerade und es gibt } u,v \in \{a,b\}^* \text{ mit } x = uabbv\}.$$

(Die Angabe eines Diagramms genügt hier.)

b) Geben Sie zu allen Zuständen q Ihres Automaten die zugehörigen Klassen $\text{Kl}[q]$ explizit an.

4 + 6 Punkte

Aufgabe 3

In der Vorlesung haben wir drei Methoden vorgestellt, mit Hilfe derer man beweisen kann, dass eine Sprache nicht regulär ist. Suchen Sie sich für diese Aufgabe eine davon aus.

a) Erklären Sie mit wenigen Sätzen die Idee der Methode.

b) Formulieren Sie eine Behauptung, auf der die Methode beruht.

c) Beweisen Sie diese Behauptung.

d) Wenden Sie Ihre Methode an, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^*,\ |x|_a = |y|_b\}$$

über $\Sigma = \{a, b, c\}$ nicht regulär ist.

2 + 3 + 5 + 5 Punkte

Aufgabe 4

Definieren Sie die aus der Vorlesung bekannten Sprachen L_U und L_H.
Beweisen Sie:

$$L_U \leq_R L_H.$$

Hinweise:

- Womöglich fällt es Ihnen leichter, einen anderen Reduktionstyp zu verwenden. Dies ist erlaubt, wenn Sie zunächst beschreiben, *welchen* Reduktionstyp Sie verwenden, und wenn Sie (kurz) beschreiben, an welcher Stelle die zu zeigende Aussage folgt.
- Eine Reduktion besteht immer aus der Beschreibung eines geeigneten Mechanismus und aus dem Beweis, warum dadurch das Gewünschte geleistet wird.

10 Punkte

Frohe Weihnachten!

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer

1. Zwischenklausur

Zürich, 8. November 2019

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten in graphischer Darstellung, der die Sprache

$$L = \Big\{ w \in \{0,1\}^* \mid w = a_1a_2 \ldots a_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\} \\ \text{und } \Bigg(\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \text{ ungerade}}} \text{Nummer}(a_i) \Bigg) \bmod 3 = 0 \Big\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten die Klasse $\text{Kl}[q]$ an.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität, dass die Sprache

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = uvu \text{ und } |u| = |v| \}$$

nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w = aub \text{ für ein } u \in \{a,b\}^* \text{ und } |w|_a \text{ teilt } |w|_b \}$$

nicht regulär ist.

Hierfür dürfen Sie sich eine der beiden folgenden Beweismethoden aussuchen.

(i) Mit Hilfe von Lemma 3.3 aus dem Buch (oder direkt über den Automaten) oder
(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas.

4+6 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{x00y \mid x \in \{0,1\}^* \text{ und } y \in \{0,1\}\}\,.$$

(a) Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten mit höchstens 4 Zuständen, der L akzeptiert.

(b) Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der L akzeptiert, mindestens 5 Zustände braucht.

4+6 Punkte

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache $(L_{\text{empty}})^{\complement}$ rekursiv aufzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(L_{\text{empty}})^{\complement}$ nicht rekursiv ist, indem Sie eine konkrete Reduktion von L_{U} angeben und die Korrektheit dieser Reduktion beweisen.

4+6 Punkte

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf17`

1. Zwischenklausur

Zürich, 10. November 2017

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{xa \mid x \in \{a,b\}^* \text{ und } (|x|_a + 2|x|_b) \bmod 3 = 1\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}[q]$ für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten an.

6+4 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } |w|_0 = k^2 \text{ oder } |w|_1 = k^3\}$,

(b) $L_2 = \{0^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe von Lemma 3.3 aus dem Buch (oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Sei für alle $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ die natürliche Zahl x_i definiert durch

$$x_i = 2^i \cdot 3^i \cdot 5^i \, .$$

Zeigen Sie, dass eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ gilt, dass

$$K(x_i) \leq c + \lceil \log_2 \log_2 x_i \rceil \, .$$

(b) Konstruieren Sie eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots$, so dass die folgenden Bedingungen gelten:

(i) $n_i < n_{i+1}$,

(ii) die Menge aller Primfaktoren, die in mindestens einer der Zahlen n_i vorkommen, ist unendlich und

(iii) es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, so dass

$$K(n_i) \leq c + \lceil \log_2 \log_2 n_i \rceil \, .$$

Weisen Sie nach, dass die von Ihnen konstruierte Zahlenfolge tatsächlich die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt.

4+6 Punkte

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{R}} (L_{\mathrm{H}})^{\complement}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und argumentieren Sie, warum Ihre Reduktion korrekt ist. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič

Sessionsprüfung

Zürich, 8. August 2012

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten, der die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_1 \geq 2 \text{ und } w \text{ enthält das Teilwort } 00\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

6+4 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$,

(b) $L_2 = \{0^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ ist eine Primzahl}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas, oder

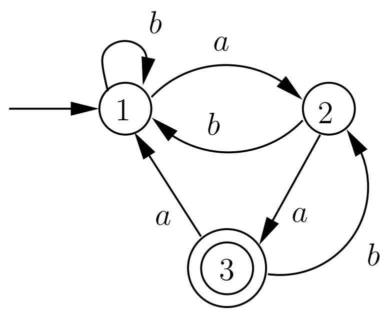
(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Verwenden Sie eines der im Selbststudium erlernten Verfahren, um den folgenden endlichen Automaten in einen äquivalenten regulären Ausdruck umzuwandeln:



10 Punkte

Aufgabe 4

Wir betrachten die Sprachen

$$L_1 = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM, die auf } \lambda \text{ hält}\},$$
$$L_2 = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM, die 0011 akzeptiert}\}.$$

Zeigen Sie, dass $L_1 \leq_R L_2$ gilt. **10 Punkte**

Aufgabe 5

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass mindestens die Hälfte aller nichtleeren Wörter x der Länge $\leq n$ nicht komprimierbar ist, also für diese $K(x) \geq |x|$ gilt. **10 Punkte**

Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie, dass SAT $\leq_p$ 3-SAT gilt, indem Sie explizit eine Polynomzeitreduktion angeben und deren Korrektheit nachweisen.

(b) Wenden Sie Ihre Konstruktion aus Aufgabenteil (a) auf die folgende Formel an:

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_5 \vee x_7 \vee \overline{x_8}) \wedge (x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_5 \vee x_6 \vee \overline{x_7} \vee x_8)$$

7+3 Punkte

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf17`

2. Zwischenklausur

Zürich, 15. Dezember 2017

Aufgabe 1

(a) Wir betrachten die Sprache

$$L_{\cap=\emptyset} = \{\text{Kod}(M_1)\#\text{Kod}(M_2) \mid M_1 \text{ und } M_2 \text{ sind TM und } L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset\} .$$

Zeigen Sie, dass $L_{\cap=\emptyset} \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion von einer der in der Vorlesung betrachteten Sprachen angeben und die Korrektheit dieser Reduktion nachweisen.

(b) Zeigen Sie, dass $(L_{\text{empty}})^{\complement} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $L_{\text{U}} \leq_{\text{R}} L_{\text{H},\lambda}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und die Korrektheit dieser Reduktion beweisen. **10 Punkte**

Aufgabe 3

Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{0^n 1^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

nicht kontextfrei ist. **10 Punkte**

Aufgabe 4

Wir nennen eine Klausel einer KNF-Formel *monoton*, wenn sie entweder keine negierten Variablen oder nur negierte Variablen enthält. Wir betrachten die Menge non-3-monotone-3SAT aller erfüllbaren KNF-Formeln, die aus Klauseln der Länge höchstens 3 bestehen und keine monotonen Klauseln der Länge genau 3 enthalten. (Monotone Klauseln der Längen 2 und 1 sind somit erlaubt).

Zeigen Sie, dass non-3-monotone-3SAT NP-vollständig ist.

Hinweis: Sie dürfen für Ihren Beweis voraussetzen, dass die in der Vorlesung oder in den Übungen betrachteten Probleme SAT, 3SAT, E3SAT, VIERFACH-SAT, CLIQUE, VC, SCP und DS NP-schwer sind. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

1. Zwischenklausur

Zürich, 5. November 2013

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten, der die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid (|w|_0 + 2 \cdot |w|_1) \bmod 3 = 0 \text{ und } |w|_1 \leq 1\}$$

akzeptiert. Es reicht aus, die graphische Darstellung des Automaten anzugeben.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres konstruierten Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

6+4 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{0^n 1^m 0^m 1^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$,

(b) $L_2 = \{0^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas, oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Sei $n_1, n_2, n_3, \ldots$ eine steigende unendliche Folge von natürlichen Zahlen mit $K(n_i) \geq \lceil \log_2 n_i \rceil / 2$. Sei für $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ die Zahl q_i die grösste Primzahl, die n_i teilt.
Zeigen Sie, dass die Menge $Q = \{q_i \mid i \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ unendlich ist. **10 Punkte**

Aufgabe 4

(a) Geben Sie eine formale Definition der Sprachen L_{diag} und L_{H} an.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{diag}} \leq_{\text{R}} L_{\text{H}}$ gilt, indem Sie explizit eine Reduktion angeben.

(c) Erläutern Sie, wie man aus $L_{\text{H}} \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$ schliessen kann, dass $(L_{\text{H}})^{\complement} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

2+6+2 Punkte

Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf16`

Sessionsprüfung

Zürich, 3. Februar 2017

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält genau einmal das Teilwort } 100\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}[q]$ für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten an.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie mit einer der drei in der Vorlesung vorgestellten Methoden (Lemma 3.3, Pumping-Lemma oder Kolmogorov-Komplexität), dass die Sprache

$$L_1 = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m \neq n^2\}$$

nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der die Sprache

$$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ ist gerade oder } w \text{ endet mit } bbb\}$$

akzeptiert, mindestens 5 Zustände hat.

5+5 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Entwerfen Sie eine kontextfreie Grammatik, die die Sprache

$$L_1 = \{uvu^{\mathsf{R}} \mid u, v \in \{a, b\}^* \text{ und } (|u|_a - |u|_b) \bmod 3 = 2\}$$

erzeugt und beschreiben Sie informell die Idee Ihrer Konstruktion.

(b) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(c) Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L_2 = \{sct \in \{a, b, c\}^* \mid s, t \in \{a, b\}^* \text{ und } s \text{ ist Suffix von } t\}$$

nicht kontextfrei ist.

4+2+4 Punkte

Aufgabe 4

(a) Sei $w_n = 0^{2^{2^{3n}}} \in \{0\}^*$ für alle $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorov-Komplexität von w_n an, gemessen in der Länge von w_n, und begründen Sie die Korrektheit Ihrer Schranke.

(b) Sei $f\colon \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$ eine beliebige injektive Funktion zur Kodierung von Binärwörtern. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie, dass für mindestens die Hälfte aller Wörter $w \in \{0, 1\}^*$ mit $|w| \leq n$ gilt, dass $|f(w)| \geq |w|$.

4+6 Punkte

Aufgabe 5

Wir betrachten die Sprache

$$L_{\cap\text{nonempty}} = \{\text{Kod}(M')\#\text{Kod}(M'') \mid L(M') \cap L(M'') \neq \emptyset\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $L_{\cap\text{nonempty}} \leq_{\text{R}} L_{\text{U}}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und die Korrektheit Ihrer Reduktion begründen.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{U}} \leq_{\text{EE}} L_{\cap\text{nonempty}}$ gilt.

4+6 Punkte

Aufgabe 6

Sei $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine platzkonstruierbare Funktion mit $s(n) \geq \log_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $\text{NTIME}(s(n)) \subseteq \text{SPACE}(s(n))$ gilt. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. E. Welzl

2. Klausur

Zürich, 11. Dezember 2008

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass die folgenden zwei Sprachen nicht kontextfrei sind:

(i) $L_1 = \{a^n b^{2n} a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $L_2 = \{waw \mid w \in \{a,b\}^*\}$.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Wir setzen die folgende kontextfreie Grammatik G_{ge} aus der Vorlesung als gegeben voraus sowie die Tatsache, dass $L(G_{ge}) = L_{ge}$ mit $L_{ge} = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$.

$$\begin{aligned} G_{ge} &= (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S) \text{ mit} \\ P &= \{S \to \lambda, S \to aB, S \to bA, A \to a, A \to aS, \\ &\qquad B \to b, B \to bS, A \to bAA, B \to aBB\}. \end{aligned}$$

(a) Konstruieren Sie daraus eine kontextfreie Grammatik G_a für die Sprache

$$L_a = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b + 1\}.$$

(b) Beweisen Sie $L(G_a) = L_a$. Sie dürfen hierbei $L(G_{ge}) = L_{ge}$ voraussetzen.

4+6 Punkte

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass $L_{U,\lambda} \notin \mathcal{L}_R$ ist, mit

$$L_{U,\lambda} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM mit } \lambda \in L(M)\}.$$

$L_{U,\lambda}$ enthält also die Kodierungen aller TM, welche das leere Wort akzeptieren. Das Verhalten auf anderen Eingaben spielt keine Rolle.
Sie dürfen für den Beweis nur eine Reduktion von einer der drei Sprachen $L_U, L_{H,\lambda}$ oder L_H verwenden. Andere Beweise werden nicht als Lösung akzeptiert. **10 Punkte**

Aufgabe 4

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:
Für jede platzkonstruierbare Funktion s mit $s(n) \geq \log_2 n$ gilt

$$\text{SPACE}(s(n)) \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{TIME}(c^{s(n)}).$$

Hinweis: Bedenken Sie, dass man sich bei der Platzbeschränkung auf 1-Band-TM einschränken kann, dass man also für $L \in \text{SPACE}(s(n))$ voraussetzen kann, dass man eine $s(n)$-platzbeschränkte 1-MTM hat, die L akzeptiert. **10 Punkte**

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer

Sessionsprüfung

Zürich, 29. Januar 2021

NAME: .... VORNAME: ....

LEGINUMMER: ....

Lesen Sie die folgenden Hinweise aufmerksam durch, bevor Sie fortfahren.

- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, nur ein dokumentenechter Stift in blauer oder schwarzer Farbe.
- Versehen Sie jedes Blatt oben mit Ihrem vollständigen Namen.
- Die Prüfung besteht aus diesem Deckblatt und 14 nummerierten Seiten mit 7 Aufgaben sowie einem Extrablatt, das Sie verwenden können, wenn der Platz auf den Aufgabenblättern nicht ausreicht. Weitere Extrablätter können jederzeit während der Prüfung angefordert werden.
- Falls Sie die Extrablätter verwenden, verweisen Sie auf dem entsprechenden Aufgabenblatt deutlich darauf und geben Sie auf den Extrablättern klar an, welche Aufgabe Sie hier bearbeiten.
- Sie haben 180 Minuten zur Bearbeitung der Aufgaben.
- Unterschreiben Sie die folgende Eigenständigkeitserklärung:

  Ich versichere, die Prüfung selbstständig bearbeitet zu haben und dass mir bekannt ist, dass bei einem Täuschungsversuch die Klausur als "nicht bestanden" bewertet werden wird.

....
(Unterschrift)

Aufgabe	1(a)	1(b)	1(c)	2(a)	2(b)	3(a)	3(b)
Punkte	4	4	4	4	4	4	4
erreicht							

Aufgabe	4	5(a)	5(b)	6(a)	6(b)	7(a)	7(b)
Punkte	8	6	2	4	4	4	4
erreicht							

Punkte: ...... Note: ......

Name:

Aufgabe 1

4 + 4 + 4 Punkte

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten in graphischer Darstellung, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \geq 2 \text{ und } w \text{ endet mit } aa\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

Aufgabe 1 **4 + 4 + 4 Punkte**

(c) Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \geq 2 \text{ und } w \text{ endet mit } aa\}$$

aus Aufgabenteil (a) akzeptiert, mindestens 5 Zustände hat.

Aufgabe 2

4 + 4 Punkte

(a) Geben Sie eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots$ an, so dass eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $i \geq 1$

$$K(y_i) \leq \log_2 \log_2 \log_2(y_i) + c$$

eine obere Schranke für die Kolmogorov-Komplexität ist.

Aufgabe 2 **4 + 4 Punkte**

(b) Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $i < n$ mindestens $2^n - 2^{n-i}$ unterschiedliche Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gibt mit $K(x) \geq n - i$.

Aufgabe 3 **4 + 4 Punkte**

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{0^i 1^j 0^{i \cdot j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}\,.$$

(a) Verwenden Sie die Methode der Kolmogorov-Komplexität, um zu zeigen, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 3

4 + 4 Punkte

(b) Verwenden Sie eine der anderen in der Vorlesung vorgestellten Methoden, um zu zeigen, dass

$$L = \{0^i 1^j 0^{i \cdot j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Aufgabe 4 **8 Punkte**

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{\text{Kod}(M_1)\#\text{Kod}(M_2)\#k \mid M_1 \text{ und } M_2 \text{ sind TM über dem Eingabealphabet } \Sigma \\ \text{und } \Sigma^k \not\subseteq L(M_1) \cup L(M_2)\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

Aufgabe 5

6 + 2 Punkte

(a) Sei s eine platzkonstruierbare Funktion mit $s(n) \geq \log_2 n$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mathrm{SPACE}(s(n)) \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(c^{s(n)})\,.$$

Aufgabe 5 **6 + 2 Punkte**

(b) Zeigen Sie, dass DLOG $\subseteq$ P $\subseteq$ PSPACE gilt.

Aufgabe 6

4 + 4 Punkte

(a) Sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ das Problem kSAT definiert als das Teilproblem von SAT eingeschränkt auf KNF-Formeln, die nur Klauseln der Länge höchstens k enthalten.

Zeigen Sie, dass 3SAT NP-schwer ist. Sie dürfen für den Beweis verwenden, dass 4SAT NP-schwer ist.

Aufgabe 6

4 + 4 Punkte

(b) Wir nennen eine Klausel einer KNF-Formel *monoton*, wenn sie entweder keine negierten Variablen oder nur negierte Variablen enthält. Wir betrachten die Menge monotone-3SAT aller erfüllbaren KNF-Formeln, die ausschliesslich aus monotonen Klauseln der Länge höchstens 3 bestehen.

Zeigen Sie, dass monotone-3SAT NP-vollständig ist.

Sie dürfen für Ihren Beweis voraussetzen, dass das in Aufgabenteil (a) betrachtete Problem 3SAT NP-schwer ist.

Aufgabe 7

4 + 4 Punkte

(a) Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, X_0, X_1, X_2\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{ & S \to X_0aa, \\ & X_0 \to aX_0 \mid bX_1, \\ & X_1 \to aX_1 \mid bX_2, \\ & X_2 \to aX_2 \mid bX_0 \mid \lambda\}\,. \end{aligned}$$

Geben Sie die von G erzeugte Sprache an und begründen Sie ihre Behauptung informell.

Aufgabe 7 **4 + 4 Punkte**

(b) Geben Sie eine reguläre Grammatik für die Sprache

$$L = \{xcy \mid x, y \in \{a,b\}^* \text{ und } |x|_a + |y|_a \bmod 2 = 1\}$$

an und begründen Sie informell die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Weiterer Raum für Lösungen

Bitte Aufgabennummer angeben und von der entsprechenden Aufgabe hierher verweisen.

Weiterer Raum für Lösungen

Bitte Aufgabennummer angeben und von der entsprechenden Aufgabe hierher verweisen.

Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer

Sessionsprüfung

Zürich, 10. August 2021

NAME: .... VORNAME: ....

LEGINUMMER: ....

Lesen Sie die folgenden Hinweise aufmerksam durch, bevor Sie fortfahren.

- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt ausser einem dokumentenechten Stift in blauer oder schwarzer Farbe.
- Versehen Sie jedes Blatt oben mit Ihrem vollständigen Namen.
- Die Prüfung besteht aus diesem Deckblatt und 11 nummerierten Seiten mit 6 Aufgaben sowie drei Extraseiten, das Sie verwenden können, wenn der Platz auf den Aufgabenblättern nicht ausreicht. Weitere Extrablätter können jederzeit während der Prüfung angefordert werden.
- Falls Sie die Extraseiten verwenden, verweisen Sie auf dem entsprechenden Aufgabenblatt deutlich darauf und geben Sie auf den Extraseiten klar an, welche Aufgabe Sie hier bearbeiten.
- Sie haben 180 Minuten zur Bearbeitung der Aufgaben.
- Unterschreiben Sie die folgende Eigenständigkeitserklärung:

Ich versichere, die Prüfung selbstständig bearbeitet zu haben und dass mir bekannt ist, dass bei einem Täuschungsversuch die Klausur als "nicht bestanden" bewertet werden wird.

....
(Unterschrift)

Aufgabe	1(a)	1(b)	1(c)	2(a)	2(b)	3(a)	3(b)	4	5(a)	5(b)	5(c)	6
Punkte	4	4	4	5	5	5	5	8	4	2	4	10
erreicht												

Punkte: ...... Note: ......

Name:

Aufgabe 1

4 + 4 + 4 Punkte

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten in graphischer Darstellung, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } aba \text{ oder } |w|_a \text{ ist ungerade}\}$$

akzeptiert.

Aufgabe 1

4 + 4 + 4 Punkte

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

Aufgabe 1

4 + 4 + 4 Punkte

(c) Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält } aba \text{ als Teilwort oder } |w|_a \text{ ist ungerade}\}$$

aus Aufgabenteil (a) akzeptiert, mindestens 7 Zustände hat.

Aufgabe 2 **5 + 5 Punkte**

(a) Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten mit höchstens 9 Zuständen in graphischer Darstellung, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } aa \text{ oder } w \text{ endet mit } ab \text{ oder } |w| = 2 \bmod 3\}$$

akzeptiert und begründen Sie kurz die Korrektheit Ihres Automaten.

Aufgabe 2

5 + 5 Punkte

(b) Konstruieren Sie eine reguläre Grammatik für die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } aa \text{ oder } w \text{ endet mit } ab \text{ oder } |w| = 2 \bmod 3\}$$

aus Aufgabenteil (a) und begründen Sie kurz die Korrektheit Ihres Entwurfs.

Aufgabe 3

5 + 5 Punkte

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{0^i 1^j 0^l \mid i, j, l \in \mathbb{N} \text{ und } l \geq i + j\}$$

(a) Verwenden Sie die Methode der Kolmogorov-Komplexität, um zu zeigen, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 3

5 + 5 Punkte

(b) Verwenden Sie eine der anderen in der Vorlesung vorgestellten Methoden, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{0^i 1^j 0^l \mid i, j, l \in \mathbb{N} \text{ und } l \geq i + j\}$$

aus Aufgabenteil (a) nicht regulär ist.

Aufgabe 4 **8 Punkte**

Zeigen Sie, dass $(L_{\text{empty}})^{\complement} \leq_{\text{EE}} (L_{\text{diag}})^{\complement}$ gilt.

Hinweis: Es gilt $L_{\text{empty}} = \{\text{Kod}(M) \mid L(M) = \emptyset\}$ und L_{diag} ist die aus der Vorlesung bekannte Diagonalsprache.

Aufgabe 5

4 + 2 + 4 Punkte

(a) Beschreiben Sie eine Polynomzeitreduktion zum Beweis von 5SAT $\leq_p$ 3SAT.

(b) Wenden Sie Ihre Reduktion aus Aufgabenteil (a) auf die folgende 5SAT-Formel an:

$$\Phi = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_5} \vee x_6) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_6}) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee \overline{x_6})\,.$$

(c) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktion aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 5

4 + 2 + 4 Punkte

Zusätzlicher Platz für die Lösung

Aufgabe 6 **10 Punkte**

Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{A^i \mathrm{Bin}(i) \in \{A, 0, 1\}^* \mid i \in \mathbb{N}\}$$

nicht kontextfrei ist, wobei $\mathrm{Bin}(i)$ die binäre Darstellung der Zahl i bezeichnet, wie sie in der Vorlesung definiert wurde.

Weiterer Raum für Lösungen

Bitte Aufgabennummer angeben und von der entsprechenden Aufgabe hierher verweisen.

Weiterer Raum für Lösungen

Bitte Aufgabennummer angeben und von der entsprechenden Aufgabe hierher verweisen.

Weiterer Raum für Lösungen

Bitte Aufgabennummer angeben und von der entsprechenden Aufgabe hierher verweisen.

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf16`

2. Zwischenklausur

Zürich, 13. Dezember 2016

Aufgabe 1

Wir betrachten die Sprache

$$L_{\text{nohalt}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM, die auf keiner Eingabe hält}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(L_{\text{nohalt}})^{\complement} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{nohalt}} \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$ gilt.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Wir betrachten die Sprache

$$L_{\cap} = \{\text{Kod}(M)\#\text{Kod}(M') \mid M \text{ und } M' \text{ sind TM und } L(M) \cap L(M') \neq \emptyset\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $L_{\cap} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{diag}} \leq_{\text{R}} L_{\cap}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

5+5 Punkte

Aufgabe 3

Wir bezeichnen mit 4SAT das Problem, zu bestimmen, ob eine gegebene Formel in 4KNF erfüllbar ist. Wir wollen zeigen, dass 4SAT $\leq_p$ 3SAT gilt.

(a) Geben Sie eine Konstruktion an, die eine beliebige Formel Φ in 4KNF in polynomieller Zeit in eine 3KNF-Formel Ψ umwandelt, so dass Φ genau dann erfüllbar ist, wenn Ψ erfüllbar ist.

(b) Wenden Sie Ihre Konstruktion aus Aufgabenteil (a) auf die folgende Formel an:

$$\Phi_1 = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_6}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_5) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\overline{x_6}).$$

(c) Beweisen Sie, dass die von Ihnen in Aufgabenteil (a) konstruierte 3KNF-Formel Ψ genau dann erfüllbar ist, wenn die gegebene 4KNF-Formel Φ erfüllbar ist.

4+2+4 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Sei M eine TM mit Arbeitsalphabet $\Gamma = \{X_1, \ldots, X_m\}$ und Zustandsmenge $Q = \{q_0, \ldots, q_s\}$ für geeignete $m, s \in \mathbb{N}$. Wir können eine Konfiguration von M schreiben als uqv für $u \in \Gamma^*$, $v \in \Gamma^+$ und $q \in Q$, mit der Bedeutung, dass M im Zustand q ist, $uv\sqcup\sqcup\ldots$ der Bandinhalt ist und der Kopf von M auf dem ersten Symbol von v steht.

Wir betrachten nun ein $(2 \times n)$-Array A, in dessen zwei Zeilen wir zwei Konfigurationen von M darstellen und diese durch eine SAT-Formel beschreiben wollen.

(a) Definieren Sie eine Menge von Variablen, mit deren Hilfe Sie für jedes Feld des $(2 \times n)$-Arrays beschreiben können, welche Teilmenge von Symbolen aus $\Gamma \cup Q$ auf dem Feld stehen darf.

(b) Geben Sie eine Formel Φ_1 über den in Aufgabenteil (a) definierten Variablen an, die genau dann erfüllbar ist, wenn auf jedem Feld von A genau ein Symbol aus $\Gamma \cup Q$ steht.

(c) Geben Sie eine Formel Φ_2 über den in Aufgabenteil (a) definierten Variablen an, die genau dann erfüllbar ist, wenn jede der zwei Zeilen von A eine syntaktisch korrekte Konfiguration von M darstellt.

(d) Geben Sie eine Formel Φ_3 über den in Aufgabenteil (a) definierten Variablen an, die genau dann erfüllbar ist, wenn

  (i) die erste Zeile von A eine Konfiguration C_1 beschreibt, in der sich M im Zustand q_1 befindet, mit dem Kopf auf dem zweiten Feld des Bandes, auf dem sich das Symbol X_3 befindet, und

  (ii) die zweite Zeile eine Nachfolgekonfiguration von C_1 nach Ausführung der Transition $\delta(q_1, X_3) = (q_2, X_2, \mathrm{R})$ beschreibt.

2+2+2+4 Punkte

Bonus-Aufgabe 5

(a) Wir betrachten die Sprache

$$L_{001} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM und } L(M) = \{001\}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{H},\lambda} \leq_{\mathrm{EE}} L_{001}$ gilt, indem Sie eine konkrete EE-Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

(b) Wir betrachten die Sprache

$$L_{\mathrm{all}} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM mit Eingabealphabet } \Sigma \text{ und } L(M) = \Sigma^*\}\,.$$

Aus dem Satz von Rice folgt unmittelbar, dass L_{all} und $(L_{\mathrm{all}})^{\complement}$ nicht rekursiv sind. Zeigen Sie, dass sogar $(L_{\mathrm{all}})^{\complement} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$.

5+5 Bonus-Punkte

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. E. Welzl

2. Klausur (Midterm 2)

Zürich, 25. Januar 2007

Aufgabe 1

Entscheiden Sie für jede der beiden folgenden Sprachen, ob diese kontextfrei ist oder nicht. Falls die Sprache kontextfrei ist, geben Sie eine kontextfreie Grammatik dafür an (ohne die Korrektheit der Grammatik zu beweisen). Falls nicht, beweisen Sie, dass die Sprache nicht kontextfrei ist.

(i) $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq j \leq k\}$

(ii) $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, k \geq i + j\}$

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die universelle Sprache L_U rekursiv aufzählbar ist, indem Sie ein Programm oder eine Turingmaschine beschreiben, die sie akzeptiert. **10 Punkte**

Aufgabe 3

Wir definieren die Sprache Acc_λ als die Menge der Kodierungen aller Turingmaschinen, die das Wort Lambda akzeptieren, d.h. $Acc_\lambda = \{Kod(M) \mid M \text{ ist eine TM, die } \lambda \text{ akzeptiert}\}$. Sie sollen mittels Reduktion zeigen, dass diese Sprache nicht rekursiv ist.
Für die Reduktion $L \leq Acc_\lambda$ darf eine beliebige Sprache L verwendet werden, für die wir in der Vorlesung oder in der Übungen gezeigt haben, dass sie nicht rekursiv ist. **10 Punkte**

Aufgabe 4

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache mit $L \in \text{SPACE(f(n))}$, wobei $f(n) \in \Omega(n)$ ist (d.h., f wächst mindestens linear).
Beweisen Sie, dass die Sprache $L' := \{ww \mid w \in L\}$ in $\text{SPACE}(f(n))$ liegt. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič

2. Zwischenklausur

Zürich, 13. Dezember 2011

Aufgabe 1

Wir betrachten die Sprachen

$$L_{\mathrm{H},001} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM, die auf 001 hält}\} \quad \text{und}$$
$$L_{\mathrm{A},001} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM, die 001 akzeptiert}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{H}} \leq_{\mathrm{EE}} L_{\mathrm{H},001}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{A},001} \leq_{\mathrm{R}} L_{\mathrm{H},001}$ gilt.

7+7 Punkte

Aufgabe 2

(a) Wandeln Sie die 5-KNF-Formel

$$\Phi = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5} \vee x_6) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_6})$$

in eine äquivalente Formel Ψ in 3-KNF um.

Hinweis: Zwei Formeln Φ und Ψ sind *äquivalent*, falls Φ genau dann erfüllbar ist, wenn auch Ψ erfüllbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass 5SAT $\leq_p$ 3SAT gilt. Dabei ist 5SAT die Einschränkung von SAT auf Eingaben, die nur Klauseln der Länge höchstens 5 enthalten.

3+7 Punkte

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass aus $L_{\mathrm{H}} \in \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ die Existenz eines Algorithmus folgt, der für jedes $x \in \{0,1\}^*$ die Kolmogorov-Komplexität $K(x)$ berechnet. **10 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Das *Independent-Set-Problem* (kurz IS) ist das Problem, für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k zu entscheiden, ob G eine unabhängige Menge der Grösse mindestens k besitzt, d. h. eine Teilmenge $U \subseteq V$, so dass $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in U$.

Zeigen Sie, dass IS NP-vollständig ist.

Hinweis: Sie können eine Reduktion von CLIQUE verwenden. **6 Punkte**

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf16`

1. Zwischenklausur

Zürich, 11. November 2016

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{w = 01x \in \{0,1\}^* \mid (|w|_0 + 2|w|_1) \bmod 3 = 0\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}(q)$ für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten an.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Wir betrachten wieder die Sprache L aus Aufgabe 1.

(a) Beweisen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat für L mindestens 6 Zustände haben muss.

Hinweis: Falls ihr Beweis nur eine untere Schranke von $i \in \{3,4,5\}$ Zuständen zeigt, erhalten Sie i Punkte für diesen Aufgabenteil.

(b) Geben Sie eine reguläre Grammatik für L an.

6+4 Punkte

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{ww^{\mathsf{R}}w \mid w \in \{0,1\}^*\}$,

(b) $L_2 = \{0^{n\lceil \log_2 n \rceil} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(bitte wenden)

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

Aufgabe 4

Wir betrachten eine unendliche streng monoton steigende Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ von natürlichen Zahlen mit $n_1 \geq 2$ und

$$K(n_i) \geq (1+\varepsilon)\log_2 \log_2 n_i$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und eine beliebig kleine Konstante $\varepsilon > 0$. Sei ferner

$$P = \{p \in \mathrm{PRIM} \mid p \text{ ist ein Faktor von } n_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N}\}$$

die Menge aller Primzahlen, die Primfaktor mindestens eines n_i der obigen Folge sind.

(a) Beweisen Sie $|P| > 1$.

(b) Was könnte man über $|P|$ beweisen, falls für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$K(n_i) \geq f(n_i)\log_2 \log_2 n_i\ ,$$

wobei $f(n)$ eine beliebig kleine unbeschränkt in n wachsende Funktion ist? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

5+5 Punkte

Bonus-Aufgabe 5

(a) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Pumping-Lemmas:

> Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und jedes $a \in \Sigma$ existiert eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w|_a \geq n_0$ zerlegen lässt als $w = yxz$ mit den Eigenschaften
>
> (i) $|xz|_a \leq n_0$,
>
> (ii) $|x|_a \geq 1$ und
>
> (iii) $\{yx^iz \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^iz \mid i \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$.

(b) Finden Sie eine nichtreguläre Sprache L, für die ein Beweis der Nichtregularität mit dem Pumping-Lemma aus der Vorlesung unmöglich oder sehr aufwändig ist, für die man aber mit der Variante aus Aufgabenteil (a) einfach $L \notin \mathcal{L}_{\mathrm{EA}}$ beweisen kann.

5+5 Bonus-Punkte

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

2. Zwischenklausur

Zürich, 14. Dezember 2012

Aufgabe 1

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache

$$L = \{a^n b^m c^k \mid m, n, k \in \mathbb{N}, n = k \text{ oder } m = k\}$$

an und begründen Sie informell die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

(b) Verwenden Sie das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren, um die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$P = \{S \to aAB, A \to aAB, A \to aB, B \to bB, B \to b\}$$

in einen äquivalenten Kellerautomaten umzuwandeln.

Hinweis: Wenn Sie sich genau an die Konstruktion aus der Vorlesung halten, müssen Sie nicht die Korrektheit Ihrer Lösung zeigen, weil die Korrektheit des Verfahrens bereits in der Vorlesung bewiesen wurde.

6+4 Punkte

Aufgabe 2

Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{t \in \{a, b, c\}^* \mid |t|_a = |t|_b \geq |t|_c\}$$

nicht kontextfrei ist. **10 Punkte**

Aufgabe 3

Sei $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{SPACE}(s(n)) \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(n \cdot c^{s(n)})$$

gilt.

Hinweis: Beachten Sie, dass wir für s insbesondere nicht voraussetzen, dass $s(n) \geq \log_2(n)$ gilt. **10 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Sei die Sprache DOPPEL-CLIQUE definiert durch

$$\text{DOPPEL-CLIQUE} = \{(G, k) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph, der zwei disjunkte Cliquen der Grösse } k \text{ enthält}\}.$$

Zeigen Sie, dass DOPPEL-CLIQUE NP-vollständig ist.
Sie dürfen hierfür alle aus der Vorlesung oder aus den Übungen bekannten Ergebnisse zur NP-Vollständigkeit konkreter Probleme voraussetzen. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

Sessionsprüfung

Zürich, 3. Februar 2015

Aufgabe 1

(a) Entwerfen Sie einen deterministischen endlichen Automaten für die Sprache

$$L = \{x01y \mid x \in \{0,1\}^* \text{ und } y \in \{0,1\}\}.$$

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres Automaten aus Aufgabenteil (a) die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

(c) **Bonusaufgabe:** Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat A mit $L(A) = L$ mindestens 5 Zustände hat.

Hinweis: Diese Bonusaufgabe ist nicht ganz einfach, wir empfehlen Ihnen, sie erst am Ende der Klausur zu bearbeiten.

6+4 Punkte + 4 Bonuspunkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$,

(b) $L_2 = \{0^{3n^2+5} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas, oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die aufsteigend sortierte Folge aller Primzahlen. Zeigen Sie, dass eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass

$$K(p_n) < \log_2(p_n) - 2\,.$$

Hinweis: Aus dem Primzahlsatz folgt, dass $p_n \in \Theta(n \cdot \ln n)$. **10 Punkte**

Aufgabe 4

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(b) Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid k \leq \min\{i, j\}\}$$

nicht kontextfrei ist.

2+8 Punkte

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\mathrm{Kod}(M)\#\mathrm{Kod}(M') \mid L(M) \nsubseteq L(M')\}$$

nicht rekursiv ist. **10 Punkte**

Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie, dass 3-SAT $\leq_p$ VC gilt, indem Sie explizit eine Polynomzeitreduktion angeben und deren Korrektheit nachweisen.

(b) Wenden Sie Ihre Reduktion auf die Formel $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_4})$ an.

8+2 Punkte

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. E. Welzl

Sessionsprüfungs-Klausur

Zürich, 17. März 2006

Aufgabe 1

(a) Geben Sie eine unendliche Folge von Wörtern $y_1, y_2, y_3, \ldots$ über Σ_{bool} mit folgenden Eigenschaften an:

- $|y_i| < |y_{i+1}|$ für alle $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, und
- es existiert eine Konstante c, so dass

$$K(y_i) \leq \lceil \log_2 \log_2 \log_2 |y_i| \rceil + c$$

für alle $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ gilt.

(b) Beweisen Sie mittels Kolmogorov-Komplexität, dass die Sprache $L = \{0^{n^2}1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ keine reguläre Sprache ist.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Betrachten Sie $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \mod 3 \in \{0,2\}\}$ und $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = x011y \text{ und } x, y \in \{0,1\}^*\}$.

(a) Geben Sie für L_1 und L_2 EA in Form eines Diagramms an. (Beachten Sie, dass damit deterministische Automaten gemeint sind.)

(b) Konstruieren Sie aus den Automaten aus Teil (a) einen EA M mit $L(M) = L_1 \cap L_2$.

(c) Geben Sie für den Anfangszustand und alle Endzustände von M die zugehörigen Wortklassen genau an.

3+4+3 Punkte

Aufgabe 3

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache

$$S_1 := \{a^k b^\ell a^m b^n \mid k \geq \ell \text{ und } m \geq n, \text{ sowie } k, \ell, m, n \in \mathbb{N}\}$$

an.

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$S_2 := \{a^k b^\ell a^m b^n \mid k \geq \ell \geq m \geq n, \text{ sowie } k, \ell, m, n \in \mathbb{N}\}$$

nicht kontextfrei ist.

4+6 Punkte

Aufgabe 4

(a) Gegeben seien die Grammatiken

$$G' = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aaA, A \to bB, B \to bB, B \to aaa\}, A)$$

und

$$G'' = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{B \to bbB, B \to aA, A \to aA, A \to bbb\}, B).$$

Konstruieren Sie hieraus eine reguläre Grammatik für die Sprache

$$L(G') \cdot \{abba, baaa\} \cdot L(G'').$$

(b) Zu folgender kontextfreien Grammatik

$$G = (\{A, B, S\}, \{a, b\}, P, S)$$

mit

$$P = \{S \to aB, S \to bA, A \to a, A \to aS, A \to bAA, B \to b, B \to bS, B \to aBB\}$$

konstruieren Sie einen äquivalenten NPdA.

5+5 Punkte

Aufgabe 5

Beweisen Sie $L_U \leq_R L_H$, in dem Sie eine Reduktion von L_U auf L_H angeben. **10 Punkte**

Aufgabe 6

Sei M eine 1-Band-Turingmaschine mit Speicherplatzbedarf $\text{Space}_M(n) \in O(n)$, die immer hält. Das Arbeitsalphabet von M enthält nebst Randsymbol ¢ und Blanksymbol ␣ nur ein weiteres Symbol 1, und der Inhalt des Arbeitsbandes ist in allen Berechnungen von M stets von der Form $¢1^i␣␣␣\ldots$ für $i \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $L(M) \in \text{TIME}(n^c)$ für ein $c \in \mathbb{N}$ (d.h. $L(M) \in \mathbf{P}$). Geben Sie ein explizites c an, für das die Aussage auf Grund Ihres geführten Arguments gilt. **10 Punkte**

Zusatzaufgabe 7

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von SAT auf VC (vertex cover) an. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič

Sessionsprüfung

Zürich, 25. Januar 2012

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten, der die Sprache

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \text{ ist gerade und das vorletzte Zeichen ist } 1\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie für vier Zustände q Ihres Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

6+4 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{0^{2 \cdot i^2 - 5} \mid i \in \mathbb{N}\}$,

(b) $L_2 = \{1^i 0^j 1^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } i < j < k\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas, oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache
$$L = \{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$$
nicht kontextfrei ist. **10 Punkte**

Aufgabe 4

Wir betrachten die Sprache
$$L_{\text{all}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM mit } L(M) = \{0,1\}^*\}.$$
Geben Sie eine Reduktion von einer der Sprachen L_{H}, L_{diag}, L_{U} oder L_{empty} an, um zu zeigen, dass $L_{\text{all}} \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$ gilt. **10 Punkte**

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass das Problem, für jedes $x \in \{0,1\}^*$ die Kolmogorov-Komplexität $K(x)$ zu berechnen, algorithmisch unlösbar ist. **10 Punkte**

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass 3-SAT $\leq_p$ VC gilt, indem Sie explizit eine Polynomzeitreduktion angeben und deren Korrektheit nachweisen. **10 Punkte**

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer

2. Zwischenklausur

Zürich, 10. Dezember 2019

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{R}} L_{\mathrm{H}}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

(b) Wir betrachten die Sprache

$$L = \{\mathrm{Kod}(M_1)\#\mathrm{Kod}(M_2)\#\mathrm{Kod}(M_3) \mid M_1, M_2, M_3 \text{ sind TM und } (L(M_1) \cup L(M_2)) \cap L(M_3) \neq \emptyset\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$ gilt.

6+4 Punkte

Aufgabe 2

Wir betrachten die Sprache

$$L_{\leq 10} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM, die höchstens 10 Wörter akzeptiert}\}\,.$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(i) $L_{\leq 10} \in \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$.

(ii) $L_{\leq 10} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}} - \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$.

(iii) $L_{\leq 10} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$.

Beweisen Sie die von Ihnen als korrekt erkannte Behauptung. **10 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Sei E3SAT die Menge aller KNF-Formeln mit genau drei Literalen (von paarweise verschiedenen Variablen) pro Klausel, die eine erfüllende Belegung haben. Zeigen Sie, dass E3SAT NP-schwer ist.

(b) Wir nennen eine Klausel einer KNF-Formel *monoton*, wenn sie entweder keine negierten Variablen oder nur negierte Variablen enthält. Wir betrachten die Menge non-3-monotone-3SAT aller erfüllbaren KNF-Formeln, die aus Klauseln der Länge höchstens 3 bestehen und keine monotonen Klauseln der Länge genau 3 enthalten. (Monotone Klauseln der Längen 2 und 1 sind somit erlaubt).

Zeigen Sie, dass non-3-monotone-3SAT NP-vollständig ist.

Hinweis: Sie dürfen für Ihre Beweise voraussetzen, dass die in der Vorlesung oder in den Übungen betrachteten Probleme SAT, 3SAT, CLIQUE, VC, SCP, DS, MONO-SAT und SUBSET-SUM NP-schwer sind. **4+6 Punkte**

Aufgabe 4

Sei $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $s(n) \geq \log_2(n)$ zeit- und platzkonstruierbar.
Zeigen Sie, dass $\text{NTIME}(s(n)) \subseteq \text{SPACE}(s(n))$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, dass für jede zeitkonstruierbare Funktion $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und für jede nichtdeterministische MTM M mit $\text{Time}_M(n) \leq t(n)$ eine äquivalente nichtdeterministische MTM M' und eine Konstante $d \in \mathbb{N}$ existieren, so dass alle Berechnungen von M' auf beliebigen Eingaben der Länge n höchstens die Länge $d \cdot t(n)$ haben. **10 Punkte**

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretical Computer Science

Prof. Dr. Juraj Hromkovič,
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18`

First Midterm Exam

Zurich, November 6th, 2018

Exercise 1

We consider the language

$$L = \{1x \mid x = y1 \text{ for some } y \in \{0,1\}^* \text{ or } x = z00 \text{ for some } z \in \{0,1\}^*\} .$$

(a) Construct a nondeterministic finite automaton (in graphical representation) with at most 4 states that accepts L, and describe the idea of your construction informally.

(b) Construct a (deterministic) finite automaton (in graphical representation) with at most 6 states that accepts L.

To this end, you may either apply the power set construction to your NFA from exercise part (a) or you may construct the automaton directly and informally describe the idea of your construction.

5+5 points

Exercise 2

Prove that the following languages are not regular.

(a) $L = \{u\#v \mid u, v \in \{0,1\}^* \text{ and } \mathrm{Number}(v) = 2 \cdot \mathrm{Number}(u)\}$,

(b) $L = \{0^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

For your proof, you may choose among the following three proof methods, but you are *not* allowed to use the same method for both languages.

(i) Using Lemma 3.12 from the English book (i. e., Lemma 3.3 from the German book, or a direct argumentation about the automaton),

(ii) using the pumping lemma, or

(iii) using the method of Kolmogorov complexity.

Note that, for solutions using the same method for both exercise parts, only exercise part (a) will be graded. **5+5 points**

(please turn the page)

Exercise 3

Let, for all $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, the language L_n be defined by

$$L_n = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x|_1 \geq n\}\,.$$

(a) Give a (deterministic) finite automaton (in graphical representation) for L_4 that has at most 5 states. For each state q of your automaton, give the class $\mathrm{Kl}[q]$.

(b) Prove that every (deterministic) finite automaton accepting L_n has at least $n+1$ states.

4+6 points

Exercise 4

Let $n_1, n_2, n_3, \ldots$ be a strictly increasing infinite sequence of positive natural numbers such that, for all $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, we have

$$K(n_i) \geq \lceil \log_2 n_i \rceil / 2\,.$$

For each $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, let q_i denote the largest prime number dividing the number n_i. Prove that the set $Q = \{q_i \mid i \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ is infinite. **10 points**

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretical Computer Science

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18

Final Exam

Zurich, February 7, 2019

Exercise 1

(a) Construct a deterministic finite automaton (in graphical representation) that accepts the language

$$L = \{awb \mid w \in \{a,b\}^* \text{ and } |w|_a \bmod 3 = |w|_b \bmod 3\}\,.$$

(b) For each state q of your automaton as constructed in exercise part (a), give the class $\mathrm{Kl}[q]$.

5+5 points

Exercise 2

(a) Prove, using the method of Kolmogorov complexity, that the language

$$L_1 = \{1^{n^3}0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

is not regular.

(b) Prove that the language $L_2 = L(G)$ that is generated by the context-free grammar $G = (\{S\}, \{[,]\}, P, S\}$, where

$$P = \{S \to SS, S \to [S], S \to \lambda\}\,,$$

is not regular.

(c) Prove that every deterministic finite automaton accepting the language

$$L_3 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid (|w|_a + |w|_b) \bmod 3 = |w|_c \bmod 3 \text{ and } w \text{ ends with } c\}$$

has at least 4 states.

5+5+5 points

(please turn the page)

Exercise 3

(a) Formulate the pumping lemma for context-free languages.

(b) Use the pumping lemma for context-free languages to prove that the language

$$L = \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

over the alphabet $\{a, b, c\}$ is not context-free.

(c) Construct a general grammar over the terminal alphabet $\{a, b, c\}$, that generates the language L from exercise part (b) and informally describe the idea behind your construction.

2+4+4 points

Exercise 4

(a) Show that $(L_{\text{diag}})^{\complement} \leq_{\text{EE}} L_{\text{U}}$ by giving a concrete reduction and proving that your reduction is correct.

(b) For any two words $w_1, w_2 \in \{0,1\}^*$ with $w_1 \neq w_2$ let L_{w_1,w_2} be the language defined as

$$L_{w_1,w_2} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ is a TM and } w_1 \in L(M) \text{ and } w_2 \notin L(M)\}\,.$$

Show that, for all words $w_1, w_2 \in \{0,1\}^*$ with $w_1 \neq w_2$, we have $L_{\text{U}} \leq_{\text{EE}} L_{w_1,w_2}$ by giving a concrete reduction and proving that your reduction is correct.

(c) We consider the language

$$L_{\text{not-all-length-2}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ is a TM and } \Sigma^2 \not\subseteq L(M)\}\,.$$

Prove that $L_{\text{not-all-length-2}} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$. To this end, you may use all results known from the lecture.

(d) Can there exist two languages $L_1 \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$ and $L_2 \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ such that $L_1 \leq_{\text{R}} L_2$? Justify your answer.

3+5+5+2 points

Exercise 5

The *subset sum problem* (SUBSET-SUM, for short) is the following decision problem: Given a finite set $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ of natural numbers and a natural number t, decide whether there exists a subset $U \subseteq S$ such that $\sum_{x \in U} x = t$.

The *set partition problem* (PARTITION, for short) is the following decision problem: Given is a set $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ of natural numbers. The question is whether S can be partitioned into two sets U_1 and U_2 such that $U_1 \cup U_2 = S$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, and $\sum_{x \in U_1} x = \sum_{y \in U_2} y$.

(a) Prove that PARTITION $\in$ NP.

(b) Prove that SUBSET-SUM $\leq_{\text{p}}$ PARTITION.

2+8 points

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič,
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf18`

1. Zwischenklausur

Zürich, 6. November 2018

Aufgabe 1

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{1x \mid x = y1 \text{ für ein } y \in \{0,1\}^* \text{ oder } x = z00 \text{ für ein } z \in \{0,1\}^*\}\,.$$

(a) Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung) mit höchstens 4 Zuständen, der L akzeptiert, und beschreiben Sie informell die Idee Ihrer Konstruktion.

(b) Konstruieren Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten (in graphischer Darstellung) mit höchstens 6 Zuständen, der L akzeptiert.

Sie dürfen hierfür entweder die Potenzmengenkonstruktion auf Ihren NEA aus Aufgabenteil (a) anwenden oder den Automaten direkt konstruieren und informell die Idee Ihrer Konstruktion beschreiben.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L = \{u\#v \mid u, v \in \{0,1\}^* \text{ und Nummer}(v) = 2 \cdot \text{Nummer}(u)\}$,

(b) $L = \{0^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe von Lemma 3.3 aus dem Buch (oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Sei für alle $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ die Sprache L_n definiert durch

$$L_n = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x|_1 \geq n\}\,.$$

(a) Geben Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten (in graphischer Darstellung) für L_4 an, der höchstens 5 Zustände hat, und geben Sie für jeden Zustand q Ihres Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

(b) Zeigen Sie, dass jeder (deterministische) endliche Automat, der L_n akzeptiert, mindestens $n+1$ Zustände hat.

4+6 Punkte

Aufgabe 4

Sei $n_1, n_2, n_3, \ldots$ eine streng monoton steigende unendliche Folge positiver natürlicher Zahlen, so dass für alle $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ gilt, dass

$$K(n_i) \geq \lceil \log_2 n_i \rceil / 2\,.$$

Für jedes $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ sei q_i die grösste Primzahl, die die Zahl n_i teilt.
Zeigen Sie, dass dann die Menge $Q = \{q_i \mid i \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ unendlich ist. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

1. Zwischenklausur

Zürich, 6. November 2012

Aufgabe 1

(a) Sei $w \in \{0,1\}^*$. Definieren Sie die Kolmogorov-Komplexität $K(w)$ von w.

(b) Zeigen Sie, dass für mindestens $\frac{3}{4}$ aller Wörter w aus $\{0,1\}^n$ gilt, dass $K(w) \geq n-2$.

(c) Geben Sie eine unendliche Folge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Wörtern über $\{0,1\}$ an, so dass eine Konstante c existiert mit

$$K(y_n) \leq \sqrt{\log_2 |y_n|} + c$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

2+4+4 Punkte

Aufgabe 2

(a) Konstruieren Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten, der die Sprache

$$L = \{1x0 \mid x \in \{0,1\}^* \text{ und } (|x|_0 + 4 \cdot |x|_1) \bmod 3 = 0\}$$

akzeptiert. Es reicht aus, die graphische Darstellung des Automaten anzugeben.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres konstruierten Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

5+5 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{0^k 1^l 0^m \mid k, l, m \in \mathbb{N} \text{ und } k + m \leq l\}$,

(b) $L_2 = \{0^{\lceil \sqrt{i} \rceil} 1^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas, oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

Aufgabe 4

Wir betrachten die Sprache

$$L_{\text{nohalt}} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ hält auf keiner Eingabe}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(L_{\text{nohalt}})^{\complement} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{H}} \leq_{\text{EE}} (L_{\text{nohalt}})^{\complement}$ gilt.

5+5 Punkte

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl
http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf15

Sessionsprüfung

Zürich, 25. Januar 2016

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{wy \in \{0,1\}^* \mid y \in \{00, 10, 11\}\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}(q)$ für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten an.

(c) **Bonusaufgabe:** Bestimmen Sie die Anzahl k der Zustände eines minimalen EA für L und zeigen Sie, dass jeder EA, der L akzeptiert, mindestens k Zustände haben muss.

6+4 Punkte + 5 Bonus-Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m > 2n\}$,

(b) $L_2 = \{0^n \mid n \text{ ist keine Quadratzahl}\}$.

In der Vorlesung haben wir drei Methoden zum Beweis der Nichtregularität kennengelernt:

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Für diese Aufgabe dürfen Sie beliebige Beweistechniken verwenden, jedoch *nicht* dieselbe der drei genannten Methoden für beide Aufgabenteile.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Entwerfen Sie eine kontextfreie Grammatik, die die Sprache

$$L_1 = \{a^n w(ba)^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \{a,b\}^* \text{ und } |w|_a \text{ ist ungerade}\}$$

erzeugt und beschreiben Sie informell die Idee Ihrer Konstruktion.

(b) Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L_2 = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n \leq \min\{l, m\}\}$$

nicht kontextfrei ist.

4+6 Punkte

Aufgabe 4

(a) Geben Sie eine steigende unendliche Folge natürlicher Zahlen an, so dass bei der Faktorisierung aller dieser Zahlen insgesamt nur endlich viele Primfaktoren vorkommen.

(b) Sei $n_1, n_2, n_3, \ldots$ eine steigende unendliche Folge natürlicher Zahlen mit Kolmogorov-Komplexität $K(n_i) \geq \left\lceil \sqrt{\log_2 n_i} \right\rceil$ für alle $i \geq 1$.

Zeigen Sie, dass bei der Faktorisierung aller Zahlen n_i insgesamt unendlich viele Primfaktoren vorkommen.

1+9 Punkte

Aufgabe 5

(a) Geben Sie eine formale Definition der Sprachen L_{diag} und $(L_{\text{empty}})^{\complement}$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{diag}} \leq_{\text{R}} (L_{\text{empty}})^{\complement}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben.

2+8 Punkte

Aufgabe 6

Sei 5SAT die Menge aller KNF-Formeln mit höchstens 5 (paarweise verschiedenen) Literalen pro Klausel, die eine erfüllende Belegung haben. Zeigen Sie, dass 5SAT $\leq_p$ E3SAT gilt, indem Sie eine konkrete Polynomzeit-Reduktion angeben und ihre Korrektheit zeigen.

10 Punkte

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik
Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

2. Klausur
Gruppe A

Zürich, 3. Februar 2005

Aufgabe 1
Gegeben sei eine deterministische Mehrband-Turingmaschine M, die $O(n^2)$ platzbeschränkt ist. Konstruieren Sie eine deterministische Mehrband-Turingmaschine N mit $L(N) = L(M)$, die $O(c^{n^2})$ zeitbeschränkt ist für eine Konstante c. Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion, d.h. weisen Sie nach, dass tatsächlich $L(N) = L(M)$ gilt und dass N die geforderte Zeitschranke einhält. **10 Punkte**

Aufgabe 2
Das Problem SETCOVER ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\text{SETCOVER} = \{((X,\mathcal{F}),k) \mid\ & X \text{ ist eine endliche Menge und } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X), \text{ und} \\ & \text{es existiert ein } C \subseteq \mathcal{F} \text{ mit } X = \textstyle\bigcup_{S\in C} S \text{ und } |C| \leq k\},\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X bezeichnet.
Konstruieren Sie einen Polynomialzeit-Verifizierer für SETCOVER. Beweisen Sie dessen Korrektheit, und analysieren Sie dessen Laufzeit. **10 Punkte**

Bitte wenden!

Aufgabe 3

MAX-CLIQUE ist folgendes Optimierungsproblem:
Gegeben die Kodierung eines Graphs $G = (V, E)$, finde eine möglichst große Teilmenge $T \subseteq V$, so dass alle Paare von Knoten $u, v \in T$ mit einer Kante in G verbunden sind, d.h. $\{u, v\} \in E$.

a) Wie sieht die Sprache L der zulässigen Eingaben, die Menge $\mathcal{M}(x)$ der zulässigen Lösungen zu einer zulässigen Eingabe $x \in L$ und die Kostenfunktion (bzw. Preisfunktion) *cost* aus. Weisen Sie nach, dass L, $\mathcal{M}$ und *cost* die Eigenschaften eines Optimierungsproblems in NPO erfüllen.

b) Zeigen Sie: MAX-CLIQUE ist NP-schwer.

c) Das Problem HITTING-SET ist wie folgt definiert:

$$\text{HITTING-SET} = \{((X, \mathcal{F}), k) \mid \begin{array}{l} X \text{ ist eine endliche Menge und } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X), \text{ und} \\ \text{es existiert ein } C \subseteq X \text{ mit} \\ C \cap S \neq \emptyset \text{ für alle } S \in \mathcal{F} \text{ und } |C| \leq k.\}, \end{array}$$

wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X bezeichnet.

Zeigen Sie: SETCOVER (Definition siehe Aufgabe 2) ist polynomiell reduzierbar auf HITTING-SET.

5 + 5 + 5 Punkte

Aufgabe 4

a) Wie sieht die Sprache der zulässigen Eingaben des Traveling Salesman Problems mit Dreiecksungleichung (Δ-TSP) aus.

b) In der Vorlesung haben Sie den Approximationsalgorithmus SB für das Δ-TSP kennengelernt. Beschreiben Sie dessen Arbeitsweise.

c) Beweisen Sie, dass SB die Approximationsgüte 2 besitzt.

1 + 3 + 6 Punkte

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf17`

Sessionsprüfung

Zürich, 30. Januar 2018

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \bmod 2 = 1 \text{ oder } w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$$

akzeptiert.

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres in Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie mit einer der drei in der Vorlesung vorgestellten Methoden (Lemma 3.3, Pumping-Lemma oder Kolmogorov-Komplexität), dass die Sprache

$$L_1 = \{0^{\binom{2n}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der die Sprache

$$L_2 = \{aaw \mid w \in \{a,b\}^* \text{ und } (|w|_a - |w|_b) \bmod 3 = 0\}$$

akzeptiert, mindestens 6 Zustände hat.

5+5 Punkte

Aufgabe 3

(a) Entwerfen Sie eine kontextfreie Grammatik über dem Terminalalphabet $\{a, b, \#\}$, die die Sprache

$$L_1 = \{u\#v \mid u, v \in \{a,b\}^* \text{ und } |u|_a = 2 \cdot |v|_b\}$$

erzeugt und beschreiben Sie informell die Idee Ihrer Konstruktion.

(b) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(c) Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L_2 = \{s\#t \mid s, t \in \{a,b\}^* \text{ und } s = tt\}$$

über dem Alphabet $\{a, b, \#\}$ nicht kontextfrei ist.

3+2+5 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 4

(a) Wir betrachten die Sprache

$$L_{2,\mathrm{U},\lambda} = \{\mathrm{Kod}(M')\#\mathrm{Kod}(M'') \mid \lambda \in L(M') \cap L(M'')\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L_{2,\mathrm{U},\lambda} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ gilt. Sie dürfen hierfür alle aus der Vorlesung bekannten Resultate verwenden.

(b) Wir betrachten die Sprache

$$L_{\exists,\mathrm{H}} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid \text{es gibt ein Wort } w, \text{ auf dem } M \text{ hält}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{R}} L_{\exists,\mathrm{H}}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben und die Korrektheit Ihrer Reduktion begründen.

(c) Zeigen Sie, dass $L_{\exists,\mathrm{H}} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$ gilt.

2+4+4 Punkte

Aufgabe 5

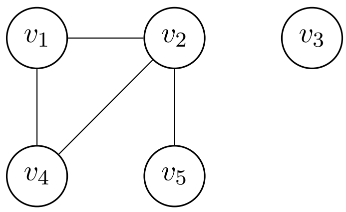
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine *dominierende Menge* (*dominating set*) ist eine Teilmenge $D \subseteq V$ der Knoten, so dass jeder Knoten von G in D liegt oder mindestens einen Nachbarn in D hat. Das *Dominating-Set-Problem* (DS) als Entscheidungsproblem wird beschrieben durch die Sprache aller Paare (G, k), bestehend aus einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und einer natürlichen Zahl k, so dass G eine dominierende Menge der Grösse k hat.

(a) Geben Sie eine Polynomzeit-Reduktion vom Vertex-Cover-Problem VC auf DS an, die für jede VC-Instanz (G, k) mit $G = (V, E)$ eine DS-Instanz (G', k') konstruiert, so dass

$$(G, k) \in \mathrm{VC} \iff (G', k') \in \mathrm{DS}\,.$$

Hinweis: Es ist hilfreich, in G' alle Knoten aus V zu übernehmen und zusätzlich für jede Kante $e \in E$ einen neuen Knoten hinzuzufügen und geeignet zu verbinden.

(b) Wenden Sie Ihre Reduktion auf den folgenden Graphen G und $k = 2$ an. Stellen Sie dabei G' graphisch dar.



(c) Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktion.

4+2+4 Punkte

Aufgabe 6

Sei s eine platzkonstruierbare Funktion mit $s(n) \geq \log_2 n$. Zeigen Sie

$$\mathrm{NSPACE}(s(n)) \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(c^{s(n)})\,.$$

10 Punkte

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretical Computer Science

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer

Second Midterm Exam

Zurich, December 10th, 2019

Exercise 1

(a) Show that $L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{R}} L_{\mathrm{H}}$ by giving a concrete reduction and proving its correctness.

(b) We consider the language

$$L = \{\mathrm{Kod}(M_1)\#\mathrm{Kod}(M_2)\#\mathrm{Kod}(M_3) \mid M_1, M_2, M_3 \text{ are TM and } (L(M_1) \cup L(M_2)) \cap L(M_3) \neq \emptyset\}.$$

Prove that $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$.

6+4 points

Exercise 2

We consider the language

$$L_{\leq 10} = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ is a TM accepting at most 10 words}\}.$$

Which of the following statements is true?

(i) $L_{\leq 10} \in \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$.

(ii) $L_{\leq 10} \in \mathcal{L}_{\mathrm{RE}} - \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$.

(iii) $L_{\leq 10} \notin \mathcal{L}_{\mathrm{RE}}$.

Prove the statement you found out to be true. **10 points**

(please turn the page)

Exercise 3

(a) Let E3SAT denote the set of all CNF formulas with exactly three literals (of pairwise different variables) per clause that have a satisfying assignment. Prove that E3SAT is NP-hard.

(b) We call a clause of a CNF formula *monotone* if it either does not contain any negated variables or if it contains only negated variables. We consider the set non-3-monotone-3SAT of all satisfiable CNF formulas that consist of clauses of length at most 3 and do not contain monotone clauses of length exactly 3 (monotone clauses of length 2 or 1 are still allowed).

Prove that non-3-monotone-3SAT is NP-complete.

Hint: For your proofs, you may assume that the problems SAT, 3SAT, CLIQUE, VC, SCP, DS, MONO-SAT und SUBSET-SUM, as considered in the lecture or in the exercises, are NP-hard. **4+6 points**

Exercise 4

Let $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ with $s(n) \geq \log_2(n)$ be time- and space-constructible.
Prove that $\mathrm{NTIME}(s(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(s(n))$.

Hint: You may assume that, for any time-constructible function $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ and for every nondeterministic MTM M with $\mathrm{Time}_M(n) \leq t(n)$, there exist an equivalent nondeterministic MTM M' and a constant $d \in \mathbb{N}$ such that all computations of M' on arbitrary inputs of length n are of length at most $d \cdot t(n)$. **10 points**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

2. Klausur
Gruppe B

Zürich, 3. Februar 2005

Aufgabe 1

Gegeben sei eine deterministische Mehrband-Turingmaschine M, die $O(n^3)$ platzbeschränkt ist. Konstruieren Sie eine deterministische Mehrband-Turingmaschine N mit $L(N) = L(M)$, die $O(c^{n^3})$ zeitbeschränkt ist für eine Konstante c. Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion, d.h. weisen Sie nach, dass tatsächlich $L(N) = L(M)$ gilt und dass N die geforderte Zeitschranke einhält. **10 Punkte**

Aufgabe 2

Das Problem HITTING-SET ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\text{HITTING-SET} = \{((X, \mathcal{F}), k) \mid\ & X \text{ ist eine endliche Menge und } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X), \text{ und} \\ & \text{es existiert ein } C \subseteq X \text{ mit} \\ & C \cap S \neq \emptyset \text{ für alle } S \in \mathcal{F} \text{ und } |C| \leq k.\},\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X bezeichnet.
Konstruieren Sie einen Polynomialzeit-Verifizierer für HITTING-SET. Beweisen Sie dessen Korrektheit, und analysieren Sie dessen Laufzeit.

10 Punkte

Bitte wenden!

Aufgabe 3

MAX-CLIQUE ist folgendes Optimierungsproblem:
Gegeben die Kodierung eines Graphs $G = (V, E)$, finde eine möglichst große Teilmenge $T \subseteq V$, so dass alle Paare von Knoten $u, v \in T$ mit einer Kante in G verbunden sind, d.h. $\{u, v\} \in E$.

a) Wie sieht die Sprache L der zulässigen Eingaben, die Menge $\mathcal{M}(x)$ der zulässigen Lösungen zu einer zulässigen Eingabe $x \in L$ und die Kostenfunktion (bzw. Preisfunktion) *cost* aus. Weisen Sie nach, dass L, $\mathcal{M}$ und *cost* die Eigenschaften eines Optimierungsproblems in NPO erfüllen.

b) Zeigen Sie: MAX-CLIQUE ist NP-schwer.

c) Das Problem SETCOVER ist wie folgt definiert:

$$\text{SETCOVER} = \{((X, \mathcal{F}), k) \mid X \text{ ist eine endliche Menge und } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X), \text{ und es existiert ein } C \subseteq \mathcal{F} \text{ mit } X = \bigcup_{S \in C} S \text{ und } |C| \leq k\},$$

wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X bezeichnet.

Zeigen Sie: SETCOVER ist polynomiell reduzierbar auf HITTING-SET (Definition siehe Aufgabe 2).

5 + 5 + 5 Punkte

Aufgabe 4

a) Wie sieht die Sprache der zulässigen Eingaben des Traveling Salesman Problems mit Dreiecksungleichung (Δ-TSP) aus.

b) In der Vorlesung haben Sie den Approximationsalgorithmus SB für das Δ-TSP kennengelernt. Beschreiben Sie dessen Arbeitsweise.

c) Beweisen Sie, dass SB die Approximationsgüte 2 besitzt.

1 + 3 + 6 Punkte

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

2. Zwischenklausur

Zürich, 14. Dezember 2010

Aufgabe 1

Wir betrachten den nichtdeterministischen Kellerautomaten

$$M = (\{q_0\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z_0)$$

mit

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \lambda, Z_0) &= \{(q_0, Z_0Y), (q_0, Z_0Z), (q_0, \lambda)\}, \\
\delta(q_0, a, Y) &= \{(q_0, XY)\}, \\
\delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, XXZ)\}, \\
\delta(q_0, b, Y) &= \{(q_0, \lambda)\}, \\
\delta(q_0, b, Z) &= \{(q_0, \lambda)\} \text{ und} \\
\delta(q_0, c, X) &= \{(q_0, \lambda)\}.
\end{aligned}$$

(a) Verwenden Sie das in der Vorlesung beschriebene Verfahren, um M in eine äquivalente kontextfreie Grammatik umzuwandeln.

(b) Beschreiben Sie die von M akzeptierte Sprache informell.

Hinweis: Beachten Sie, dass die in der Vorlesung verwendete Notation davon ausgeht, dass die Kellerspitze rechts steht. In der ersten Transition in der obenstehenden Liste wird also zum Beispiel ein Y oben auf dem Keller hinzugefügt. **6+4 Punkte**

Aufgabe 2

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(b) Beweisen Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

3+7 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass $(L_{\text{empty}})^{\complement} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt, indem Sie die Arbeitsweise einer Turingmaschine beschreiben, die $(L_{\text{empty}})^{\complement}$ akzeptiert.

(b) Geben Sie eine Reduktion an, um zu zeigen, dass $L_{\text{H}} \leq_{\text{R}} L_{\text{U}}$ gilt.

5+5 Punkte

Aufgabe 4

Wir betrachten die Sprache

$$L_{2\Sigma} = \{\text{Kod}(M)\#\text{Kod}(M') \mid L(M) \cup L(M') = \Sigma_{\text{bool}}^*\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe einer Reduktion, dass $L_{\text{U}} \leq_{\text{R}} L_{2\Sigma}$ gilt. **10 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

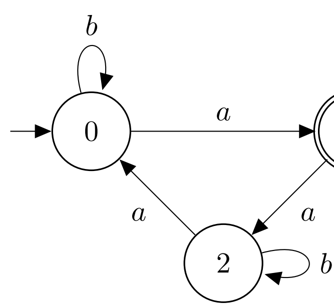
2. Zwischenklausur

Zürich, 12. Dezember 2014

Aufgabe 1

(a) Sei $R = ((a + bb)^*b)^*$ ein regulärer Ausdruck. Geben Sie einen λ-NEA A mit $L(A) = L(R)$ an.

(b) Geben Sie für den folgenden endlichen Automaten A einen äquivalenten regulären Ausdruck an. Verwenden Sie hierfür entweder eines der Verfahren aus dem Selbststudium oder begründen Sie informell die Korrektheit Ihrer Konstruktion.



4+6 Punkte

Aufgabe 2

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(b) Verwenden Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } k = \min\{i, j\}\}$$

nicht kontextfrei ist.

3+7 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Seien die beiden Sprachen

$$L_{011} = \{\text{Kod}(M) \mid \text{die TM } M \text{ akzeptiert das Wort } 011\}$$

und

$$L_{110} = \{\text{Kod}(M) \mid \text{die TM } M \text{ akzeptiert das Wort } 110\}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $L_{011} \leq_{\mathrm{R}} L_{110}$ gilt, indem Sie eine konkrete Reduktion angeben.

10 Punkte

Aufgabe 4

Sei $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine aussagenlogische Formel mit den Klauseln $C_1, C_2, \ldots, C_m$, wobei jede Klausel $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3})$ genau 3 Literale besitzt. Für jede solche Klausel C_i kann man eine Formel $\Phi(C_i)$ in 2-KNF wie folgt konstruieren:

$$\begin{aligned}\Phi(C_i) = {} & (l_{i,1}) \wedge (l_{i,2}) \wedge (l_{i,3}) \\ & \wedge (\overline{l_{i,1}} \vee \overline{l_{i,2}}) \wedge (\overline{l_{i,1}} \vee \overline{l_{i,3}}) \wedge (\overline{l_{i,2}} \vee \overline{l_{i,3}}) \\ & \wedge (y_i) \wedge (l_{i,1} \vee \overline{y_i}) \wedge (l_{i,2} \vee \overline{y_i}) \wedge (l_{i,3} \vee \overline{y_i}),\end{aligned}$$

wobei y_i eine neue Variable ist, die nur in $\Phi(C_i)$ vorkommt.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Belegung, die die Klausel C_i nicht erfüllt, jede mögliche Ergänzung der Belegung um einen Wahrheitswert für y_i zu höchstens 6 erfüllten Klauseln von $\Phi(C_i)$ führt.

(b) Zeigen Sie, dass jede Belegung, die die Klausel C_i erfüllt, sich so zu einer Belegung von $\Phi(C_i)$ ergänzen lässt (durch die Angabe eines Wahrheitswertes für y_i), dass dadurch 7 Klauseln von $\Phi(C_i)$ erfüllt werden.

Man kann zeigen, dass zusätzlich gilt:

$$\text{Es gibt keine Belegung, die mehr als 7 Klauseln von } \Phi(C_i) \text{ erfüllt.} \tag{1}$$

(c) Wir betrachten das Entscheidungsproblem Schwellenwert-2Sat, das aus allen Paaren (Φ, k) besteht, so dass Φ eine Formel in 2-KNF ist, für die eine Belegung existiert, die mindestens k der Klauseln von Φ erfüllt. Zeigen Sie mit Hilfe der Aussagen aus (a), (b) und (1), dass Schwellenwert-2Sat NP-schwer ist, indem Sie eine Polynomzeitreduktion von 3Sat angeben.

(d) **Zusatzaufgabe für 3 Zusatzpunkte:** Zeigen Sie (1).

2+4+4 Punkte

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Department of Computer Science

Theory of Computing

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

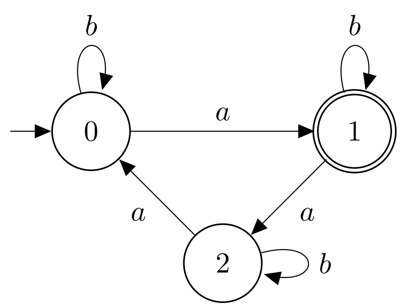
Second Midterm Exam

Zürich, December 12th, 2014

Exercise 1

(a) Let $R = ((a+bb)^*b)^*$ be a regular expression. Construct a λ-NFA A with $L(A) = L(R)$.

(b) Construct an equivalent regular expression for the following finite automaton A. Either use one of the construction methods from the self study or give an informal justification for the correctness of your construction.



4+6 points

Exercise 2

(a) Formulate the pumping lemma for context-free languages.

(b) Use the pumping lemma for context-free languages to prove that the language

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ and } k = \min\{i, j\}\}$$

is not context-free.

3+7 points

(please turn the page)

Exercise 3

Consider the two languages

$$L_{011} = \{\text{Code}(M) \mid \text{the TM } M \text{ accepts the word } 011\}$$

and

$$L_{110} = \{\text{Code}(M) \mid \text{the TM } M \text{ accepts the word } 110\}\,.$$

Prove by a concrete reduction that $L_{011} \leq_{\mathrm{R}} L_{110}$. **10 points**

Exercise 4

Let $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ be a Boolean formula with clauses $C_1, C_2, \ldots, C_m$, where each clause $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3})$ contains exactly 3 literals. For each such clause C_i, one can construct a formula $\Phi(C_i)$ in 2-CNF as follows:

$$\begin{aligned}\Phi(C_i) = {} & (l_{i,1}) \wedge (l_{i,2}) \wedge (l_{i,3}) \\ & \wedge (\overline{l_{i,1}} \vee \overline{l_{i,2}}) \wedge (\overline{l_{i,1}} \vee \overline{l_{i,3}}) \wedge (\overline{l_{i,2}} \vee \overline{l_{i,3}}) \\ & \wedge (y_i) \wedge (l_{i,1} \vee \overline{y_i}) \wedge (l_{i,2} \vee \overline{y_i}) \wedge (l_{i,3} \vee \overline{y_i})\,,\end{aligned}$$

where y_i is a new variable that appears only in $\Phi(C_i)$.

(a) Prove that, for each assignment not satisfying the clause C_i, every possible extension of the assignment by a truth value for y_i leads to at most 6 satisfied clauses in $\Phi(C_i)$.

(b) Prove that every assignment that satisfies the clause C_i can be extended to an assignment for $\Phi(C_i)$ (by defining a truth value for y_i) such that 7 clauses of $\Phi(C_i)$ are satisfied.

It is possible to additionally prove the following:

$$\text{There does not exist any assignment satisfying more than 7 clauses of } \Phi(C_i). \qquad (1)$$

(c) We consider the decision problem Threshold-2Sat that consists of all pairs (Φ, k) such that Φ is a formula in 2-CNF for which there exists an assignment satisfying at least k clauses of Φ. Prove, using the claims from (a), (b), and (1), that Threshold-2Sat is NP-hard by showing a polynomial-time reduction from 3Sat.

(d) **Bonus exercise for 3 bonus points:** Prove (1).

2+4+4 points

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

Sessionsprüfung

Zürich, 4. Februar 2014

Aufgabe 1

(a) Entwerfen Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten für die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } aba \text{ und } |w|_a \bmod 2 = 1\}.$$

(b) Geben Sie für jeden Zustand q Ihres im Aufgabenteil (a) konstruierten Automaten die Klasse $\mathrm{Kl}[q]$ an.

6+4 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für alle $i, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ mit $i \leq n$ mindestens $2^n - 2^{n-i}$ unterschiedliche Wörter $x \in (\Sigma_{\text{bool}})^n$ existieren, so dass $K(x) \geq n - i$. **10 Punkte**

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ und } n \leq m \leq 2n\}$$

nicht regulär ist.

(b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für L an und begründen Sie Ihren Entwurf informell.

5+5 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 4

(a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

(b) Verwenden Sie das Pumping-Lemma, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L = \{a^l b^m c^r \mid l, m, r \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ und } l \cdot r = m\}$$

nicht kontextfrei ist.

2+8 Punkte

Aufgabe 5

(a) Zeigen Sie, dass $(L_{\text{empty}})^{\complement} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$ gilt, indem Sie die Arbeitsweise einer deterministischen TM M mit $L(M) = (L_{\text{empty}})^{\complement}$ beschreiben.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{empty}} \notin \mathcal{L}_{\text{R}}$ gilt, indem Sie eine Reduktion von einer der Sprachen L_{U}, L_{H} oder L_{diag} auf L_{empty} angeben.

5+5 Punkte

Aufgabe 6

(a) Sei E3SAT die Menge aller KNF-Formeln mit genau drei Literalen (von paarweise verschiedenen Variablen) pro Klausel, die eine erfüllende Belegung haben. Zeigen Sie, dass E3SAT NP-vollständig ist.

(b) Wir nennen eine Klausel *monoton*, wenn sie nur positive oder nur negative Literale enthält. Wir betrachten die Menge non-3-monotone-3SAT aller Formeln bestehend aus Klauseln der Länge höchstens 3, die keine monotonen Klauseln der Länge genau 3 enthalten (monotone 2-Klauseln und 1-Klauseln sind erlaubt).

Zeigen Sie, dass non-3-monotone-3SAT NP-schwer ist.

Hinweis: Sie dürfen für Ihre Beweise voraussetzen, dass die in der Vorlesung oder in den Übungen betrachteten Probleme SAT, 3SAT, TRIPEL-SAT, CLIQUE, INDEPENDENT-SET und SUBSET-SUM NP-schwer sind. **5+5 Punkte**

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Prof. Dr. Emo Welzl

1. Zwischenklausur

Zürich, 4. November 2014

Aufgabe 1

(a) Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (in graphischer Darstellung), der die Sprache

$$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid (|w|_a + 2|w|_b - 4|w|_c) \bmod 4 = 0\}$$

akzeptiert und geben Sie die Zustandsklasse $\mathrm{Kl}(q)$ für jeden Zustand q Ihres Automaten an.

(b) Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten mit höchstens 7 Zuständen (in graphischer Darstellung) für die Sprache

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } abb \text{ oder } |w|_a \text{ ist durch 3 teilbar}\}$$

und erläutern Sie kurz informell die Idee Ihrer Konstruktion.

5+5 Punkte

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $L_1 = \{www \mid w \in \{0, 1\}^*\}$,

(b) $L_2 = \{0^{n \cdot \lceil \log_2 n \rceil} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hierfür dürfen Sie sich jeweils eine der folgenden drei Beweismethoden aussuchen, jedoch *nicht* dieselbe für beide Aufgabenteile.

(i) Mit Hilfe eines angenommenen endlichen Automaten (Verwendung von Lemma 3.3 aus dem Buch oder direkt über den Automaten),

(ii) mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder

(iii) mit der Methode der Kolmogorov-Komplexität.

Bitte beachten Sie, dass bei Lösungen, die dieselbe Methode für beide Teilaufgaben verwenden, nur Teilaufgabe (a) bewertet wird. **5+5 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Definieren Sie die Sprache L_{empty} und beschreiben Sie die Arbeit einer deterministischen Turingmaschine A mit $L(A) = (L_{\text{empty}})^{\complement}$.

(b) Zeigen Sie $L_{\text{U}} \leq_{\text{EE}} (L_{\text{empty}})^{\complement}$, indem Sie eine EE-Reduktion angeben und ihre Korrektheit beweisen.

5+5 Punkte

Aufgabe 4

(a) Sei $w_n = 1^{2^{2n}}$ ein Wort über dem Alphabet $\{0,1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorov-Komplexität von w_n an, gemessen in der Länge von w_n.

(b) Wir betrachten das folgende Komprimierungsverfahren: Jedes Wort $w \in \{0,1\}^*$ mit

$$w = 0^{j_1} 1^{j_2} 0^{j_3} 1^{j_4} \ldots 0^{j_{2k-1}} 1^{j_{2k}}$$

für irgendwelche $k, j_1, j_2, \ldots, j_{2k} \in \mathbb{N}$ wird zunächst dargestellt als

$$\text{Count}(w) = \text{Bin}(j_1)\#\text{Bin}(j_2)\# \ldots \#\text{Bin}(j_{2k-1})\#\text{Bin}(j_{2k})\,.$$

Dann wird darauf der Homomorphismus h mit $h(0) = 00$, $h(1) = 11$ und $h(\#) = 01$ angewendet, um die Komprimierung $\text{Compress}(w) = h(\text{Count}(w)) \in \{0,1\}^*$ zu erhalten.

Sei $l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für mindestens die Hälfte aller Wörter w aus $\{0,1\}^l$ gilt, dass $|\text{Compress}(w)| \geq l - 2$.

5+5 Punkte