Mathématiques : Devoir maison n° 2

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Problème 1 - Équations fonctionnelles

Partie A.

1)

Analyse.

On suppose qu'il existe une telle fonction g.

a)
Soient n et m appartenant à $\mathbb{N}$. L'unique manière d'obtenir $n+m=0$ est que $n=0$ et $m=0$. Cela donne :

$$\begin{aligned} g(m+n) &= g(m) \times g(n) \\ g(0) &= g(0)^2 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont $S = \{0, 1\}$.

Nous avons prouvé que $g(0) = 0$ ou $g(0) = 1$.

b)
Soit n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g(n) &= g(n+0) \\ &= g(n) \times g(0) \\ &= 0 \quad \text{Puisque on est dans le cas où } g(0) = 0 \end{aligned}$$

Si $g(0) = 0$, alors g est la fonction nulle.

c)
Nous raisonnons par récurrence. On suppose que $g(0) = 1$ et $g(n) = g(1)^n$.

Initialisation : Par hypothèse, $g(0) = 1$.

Hérédité :

$$\begin{aligned} g(n+1) &= g(n) \times g(1) \\ &= g(1)^n \times g(1) \quad \text{D'après la supposition de départ.} \\ &= g(1)^{(n+1)} \end{aligned}$$

Nous avons prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) = a^n$ où $a = g(1)$.

2)

Synthèse.

Nous avons deux candidats :
- La fonction nulle : $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = 0$
- Une fonction puissance : $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = g(1)^n$

Nous devons vérifier la condition : $\forall m, n \in \mathbb{N}, g(m+n) = g(m) \times g(n)$.

Vérifions pour la fonction nulle :

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} g(m+n) &= 0 \\ &= 0 \times 0 \\ &= g(m) \times g(n) \end{aligned}$$

La condition est bien vérifiée.

Vérifions pour la fonction puissance : Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} g(m+n) &= g(1)^{(m+n)} \\ &= g(1)^m \times g(1)^n \\ &= g(m) \times g(n) \end{aligned}$$

La condition est bien vérifiée.

La fonction nulle et $g(n) = g(1)^n$ sont donc les deux seules fonctions qui respectent $\forall m, n \in \mathbb{N}, g(m+n) = g(m) \times g(n)$.

Partie B.

1)

Analyse. Supposons que :

$$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, (f(m+n) = f(m) \times f(n) + f(m) + f(n)) \wedge (f(1) = 1).$$

a) On a :

$$\begin{aligned} & f(0) = f(0+0) \\ \iff & f(0) = f(0) \times f(0) + f(0) + f(0) \\ \iff & f(0) = f(0)^2 + 2f(0) \\ \iff & f(0)^2 + f(0) = 0 \\ \iff & f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = -1. \end{aligned}$$

Donc $f(0) = 0$ puisque $f(0) \in \mathbb{N}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$.

b) Pour $f(2)$:

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1+1) \\ &= f(1) \times f(1) + f(1) + f(1) \\ &= 1 + 2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Pour $f(3)$:

$$\begin{aligned} f(3) &= f(2+1) \\ &= f(2) \times f(1) + f(2) + f(1) \\ &= 3 \times 1 + 3 + 1 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Pour $f(6)$:

$$\begin{aligned} f(6) &= f(3+3) \\ &= f(3) \times f(3) + f(3) + f(3) \\ &= 7^2 + 14 \\ &= 63. \end{aligned}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) \times f(1) + f(n) + f(1) \\ &= f(n) + f(n) + 1 \\ &= 2f(n) + 1. \end{aligned}$$

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(n+1) = 2f(n) + 1$.

d) Soit $g : n \mapsto f(n) + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.
Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} g(m+n) &= f(m+n) + 1 \\ &= f(m) \times f(n) + f(m) + f(n) + 1 \\ &= (f(m)+1)(f(n)+1) \\ &= g(m) \times g(n). \end{aligned}$$

On a montré que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $g(m+n) = g(m) \times g(n)$.

e)

2)

Synthèse. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = 2^n - 1$.
Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On a, d'une part :

$$f(m+n) = 2^{m+n} - 1$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} f(m) \times f(n) + f(n) + f(m) &= (2^n - 1)(2^m - 1) + 2^n - 1 + 2^m - 1 \\ &= 2^{m+n} - 2^n - 2^m + 1 + 2^n + 2^m - 2 \\ &= 2^{m+n} - 1. \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tous $m, n \in \mathbb{N}, f(m+n) = f(m) \times f(n) + f(m) + f(n)$.
Aussi, $f(1) = 2^1 - 1 = 1$.
Cette fonction répond donc bien au problème.

Problème 2 - Nombres Échangeables

1)

En prenant $a = 3, b = -2$, on a bien $f_{a,b}(2) = 3$ et $f_{a,b} = 3 - 1 = 2$.

2)

Supposons que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est échangeable. On exclut le cas trivial (x, x) qui est évidemment échangeable, et pour lequel $|x - x| = 0 \leq 1$. Sans perte de généralité, ordonnons donc par la suite $x < y$. On a le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{x + b} = y \\ a - \sqrt{y + b} = x \end{cases}$$

En faisant la différence des deux lignes, on trouve que $\sqrt{y + b} - \sqrt{x + b} = y - x = |x - y|$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} (\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b})(\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}) &= y - x = |x - y| \\ \iff \sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} &= \frac{|x-y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} = |x - y|$$

Et $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$.

Donc si (x, y) est échangeable, alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$.

Avant de prouver l'énoncé de la question, considérons la fonction $F : [-x; +\infty[$ définie par $F(b) = \sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}$. Celle-ci est croissante comme somme de deux fonctions croissantes (par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$). De plus, elle est continue sur son intervalle de définition, comme la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Pour prouver maintenant que si (x, y) est échangeable, alors $|x - y| \leq 1$, prouvons sa contraposée : si $|x - y| > 1$, alors (x, y) n'est pas échangeable. On procède par l'absurde.

Supposons que (x, y) est échangable. Alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $F(b) = 1$. Le minimum de F sur son intervalle de définition est atteint en $b = -x$, avec $F(-x) = \sqrt{y - x} = \sqrt{|x - y|}$. Mais $|x - y| > 1$ et $\sqrt{|x - y|} > 1$. Donc $F(b) > 1$ pour tout $b \in \mathcal{D}_F$ et b n'existe pas, ce qui est une contradiction.

3)

Prouvons que si $|x - y| \leq 1$, alors (x, y) est échangeable. On suppose toujours que $x \leq y$.

Dans ce cas, on peut trouver $b \in \mathbb{R}$ tels que $F(b) \leq 1$ et $F(b) > 1$. En effet, si $b = -x$, alors $F(-x) = \sqrt{y - x} \leq 1$ par hypothèse, et $F(2 - x) = \sqrt{2 + (y - x)} + \sqrt{(2)} > 1$ car $\sqrt{2} > 1$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme F est continue sur $\mathcal{D}_F$, il existe $b_0 \in \mathcal{D}_F$ tel que $F(b_0) = 1$. Ainsi, on a :

$$\sqrt{y + b_0} - \sqrt{x + b_0} = \frac{|x - y|}{F(b_0)} = |x - y| = y - x$$

En particulier, en posant $a_0 = \sqrt{x + b_0} + y$, on a :

$$a_0 - \sqrt{x + b_0} = y$$

Et :

$$a_0 - \sqrt{y + b_0} = y - (\sqrt{y + b_0} - \sqrt{x + b_0}) = y - (y - x) = x$$

Donc (x, y) sont échangeables avec a_0, b_0.