

# Matière : Devoir maison n° 2

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois  
1E1

## Problème 1 - Équations fonctionnelles

### Partie A.

1)

*Analyse.*

On suppose qu'il existe une telle fonction  $g$ .

a)

Soient  $n$  et  $m$  appartenant à  $\mathbb{N}$ . L'unique manière d'obtenir  $n + m = 0$  est que  $n = 0$  et  $m = 0$ . Cela donne :

$$\begin{aligned}g(m + n) &= g(m) \times g(n) \\g(0) &= g(0)^2\end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont  $\{0, 1\}$ .

Nous avons prouvé que  $g(0) = 0$  ou  $g(0) = 1$ .

b)

Par définition,  $g(m + n) = g(m) \times g(n)$ , avec  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Pour que  $g(m + n) = g(0)$ , il faut déjà que  $m = 0$ .

$$\begin{aligned}g(n) &= g(n) * 0 \\g(n) &= 0\end{aligned}$$

Si  $g(0) = 0$ , alors  $g$  est la fonction nulle.

c)

Nous raisonnons par récurrence. On suppose que  $g(n) = g(1)^n$ .

*Initialisation* : Nous sommes entrain de tester le cas où  $g(0) = 1$ .

*Hérédité* :

$$\begin{aligned}g(n + 1) &= g(n) \times g(1) \\&= g(1)^n \times g(1) \quad \text{D'après la supposition de départ.} \\&= g(1)^{(n+1)}\end{aligned}$$

Nous avons prouvé par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g(n) = a^n$  où  $a = g(1)$ .

2)

*Synthèse.*

Nous avons deux candidats :

- La fonction nulle :  $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = 0$
- Une fonction puissance :  $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = g(1)^n$

Nous devons vérifier la condition :  $\forall m, n \in \mathbb{N}, g(m + n) = g(m) \times g(n)$ .

Vérifions pour la fonction nulle :

Pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}\forall m, n \in \mathbb{N}, \\ g(m+n) &= 0 \\ &= 0 \times 0 \\ &= g(m) \times g(n)\end{aligned}$$

La condition est bien vérifiée.

Vérifions pour la fonction puissance : Pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}\forall m, n \in \mathbb{N}, \\ g(m+n) &= g(1)^{(m+n)} \\ &= g(1)^m \times g(1)^n \\ &= g(m) \times g(n)\end{aligned}$$

La condition est bien vérifiée.

La fonction nulle et  $g(n) = g(1)^n$  sont donc les deux seules fonctions qui respectent  $\forall m, n \in \mathbb{N}, g(m+n) = g(m) \times g(n)$ .

## Problème 2 - Nombres Échangeables

1)

En prenant  $a = 3, b = -2$ , on a bien  $f_{a,b}(2) = 3$  et  $f_{a,b} = 3 - 1 = 2$ .

2)

Supposons que  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est échangeable. On exclut le cas trivial  $(x, x)$  qui est évidemment échangeable, et pour lequel  $|x - y| = 0 \leq 1$ . Sans perte de généralité, ordonnons donc par la suite  $x < y$ . On a le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{x+b} = y \\ a - \sqrt{y+b} = x \end{cases}$$

En faisant la différence des deux lignes, on trouve que  $\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} = y - x = |x - y|$ . De plus, on a :

$$\begin{aligned}(\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b})(\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}) &= y - x = |x - y| \\ \iff \sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} &= \frac{|x - y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}}\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{|x - y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} = |x - y|$$

Et  $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$ .

Donc si  $(x, y)$  est échangeable, alors il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$ .

Avant de prouver l'énoncé de la question, considérons la fonction  $F : [-x; +\infty[$  définie par  $F(b) = \sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}$ . Celle-ci est croissante comme somme de deux fonctions croissantes (par croissance de  $x \mapsto \sqrt{x}$ ). De plus, elle est continue sur son intervalle de définition, comme la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Pour prouver maintenant que si  $(x, y)$  est échangeable, alors  $|x - y| \leq 1$ , prouvons sa contraposée : si  $|x - y| > 1$ , alors  $(x, y)$  n'est pas échangeable. On procède par l'absurde.

Supposons que  $(x, y)$  est échangeable. Alors il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $F(b) = 1$ . Le minimum de  $F$  sur son intervalle de définition est atteint en  $b = -x$ , avec  $F(-x) = \sqrt{y-x} = \sqrt{|x-y|}$ . Mais  $|x-y| > 1$  et  $\sqrt{|x-y|} > 1$ . Donc  $F(b) > 1$  pour tout  $b \in \mathcal{D}_F$  et  $b$  n'existe pas, ce qui est une contradiction.

### 3)

Prouvons que si  $|x-y| \leq 1$ , alors  $(x, y)$  est échangeable. On suppose toujours que  $x \leq y$ .

Dans ce cas, on peut trouver  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $F(b) \leq 1$  et  $F(b) > 1$ . En effet, si  $b = -x$ , alors  $F(-x) = \sqrt{y-x} \leq 1$  par hypothèse, et  $F(2-x) = \sqrt{2+(y-x)} + \sqrt{2} > 1$  car  $\sqrt{2} > 1$ .

Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme  $F$  est continue sur  $\mathcal{D}_F$ , il existe  $b_0 \in \mathcal{D}_F$  tel que  $F(b_0) = 1$ . Ainsi, on a :

$$\sqrt{y+b_0} - \sqrt{x+b_0} = \frac{|x-y|}{F(b_0)} = |x-y| = y-x$$

En particulier, en posant  $a_0 = \sqrt{x+b_0} + y$ , on a :

$$a_0 - \sqrt{x+b_0} = y$$

Et :

$$a_0 - \sqrt{y+b_0} = y - (\sqrt{y+b_0} - \sqrt{x+b_0}) = y - (y-x) = x$$

Donc  $(x, y)$  sont échangeables avec  $a_0, b_0$ .