

Matière : Devoir maison n° 2

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Problème 2 - Nombres Échangeables

1)

En prenant $a = 3, b = -2$, on a bien $f_{a,b}(2) = 3$ et $f_{a,b} = 3 - 1 = 2$.

2)

Supposons que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est échangeable. On exclut le cas trivial (x, x) qui est évidemment échangeable, et pour lequel $|x - x| = 0 \leq 1$. Sans perte de généralité, ordonnons donc par la suite $x < y$. Montrons que $|x - y| \leq 1$. On a le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{x+b} = y \\ a - \sqrt{y+b} = x \end{cases}$$

En faisant la différence des deux lignes, on trouve que $\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} = y - x = |x - y|$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} (\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b})(\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}) &= y + b - x - b = y - x \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

$$\iff \sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} = \frac{|x - y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}}$$

Donc :

$$\frac{|x - y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} = |x - y|$$

Et $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$.

Considérons la fonction