Mathématiques : Devoir maison n° 1

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Problème 1 - Logique de Lukasiewicz

1)

Soient P, Q, R trois assertions.

a) Commutativité du "et" :

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$
V	V	V	V
V	F	F	F
V	I	I	I
F	V	F	F
F	F	F	F
F	I	F	F
I	V	I	I
I	F	F	F
I	I	I	I

On observe bien que les colonnes $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ sont identiques, donc ces deux assertions sont équivalentes.

b) Associativité du "et" :

P	Q	R	$P \wedge Q$	$Q \wedge R$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	V	I	V	I	I	I
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
V	F	I	F	F	F	F
V	I	V	I	I	I	I
V	I	F	I	F	F	F
V	I	I	I	I	I	I
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	V	I	F	I	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F
F	F	I	F	F	F	F
F	I	V	F	I	F	F
F	I	F	F	F	F	F
F	I	I	F	I	F	F
I	V	V	I	V	I	I
I	V	F	I	F	F	F
I	V	I	I	I	I	I
I	F	V	F	F	F	F
I	F	F	F	F	F	F
I	F	I	F	F	F	F
I	I	V	I	I	I	I
I	I	F	I	F	F	F
I	I	I	I	I	I	I

On observe bien que les colonnes $(P \wedge Q) \wedge R$ et $P \wedge (Q \wedge R)$ sont identiques, donc ces deux assertions sont équivalentes.

c) Lois de Morgan :

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
V	I	V	F	I	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V
F	I	I	V	I	I	I
I	V	V	I	F	F	F
I	F	I	I	V	I	I
I	I	I	I	I	I	I

Les deux dernières colonnes sont identiques, donc $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
V	I	I	F	I	I	I
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V
F	I	F	V	I	V	V
I	V	I	I	F	I	I
I	F	F	I	V	V	V
I	I	I	I	I	I	I

Les deux dernières colonnes sont identiques, donc $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$. On a bien montré que les lois de Morgan restent vérifiées dans $\mathcal{L}_3$.

d) On a :

$$\begin{aligned} P \vee Q &\iff \neg(\neg P \wedge \neg Q) \\ &\iff \neg(\neg Q \wedge \neg P) \\ &\iff Q \vee P \end{aligned}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} (P \vee Q) \vee R &\iff \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg R) \\ &\iff \neg((\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \\ &\iff \neg(\neg P \wedge (\neg Q \wedge \neg R)) \\ &\iff P \vee (Q \vee R) \end{aligned}$$

L'associativité et la commutativité sont donc aussi vérifiées pour la disjonction.

2)

Soient P, Q, R trois assertions.

a)

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
V	I	F	I	I
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
F	I	V	V	V
I	V	I	V	V
I	F	I	I	I
I	I	I	V	I

Les deux dernières colonnes ne sont pas identiques, donc les assertions $(P \Rightarrow Q)$ et $((\neg P) \vee Q)$ ne sont pas équivalentes dans $\mathcal{L}_3$.

b)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
V	I	F	I	I	I
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V
F	I	V	I	V	V
I	V	I	F	V	V
I	F	I	V	I	I
I	I	I	I	V	V

Les deux dernières colonnes sont identiques, donc on a $(P \Rightarrow Q) \iff ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$. La méthode de démonstration par contraposition est donc toujours valable dans $\mathcal{L}_3$.

c)

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	V	I	V	I	I	I
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F
V	F	I	F	V	F	I
V	I	V	I	V	I	V
V	I	F	I	I	I	F
V	I	I	I	V	I	I
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	V	I	V	I	I	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V
F	F	I	V	V	V	V
F	I	V	V	V	V	V
F	I	F	V	I	I	V
F	I	I	V	V	V	V
I	V	V	V	V	V	V
I	V	F	V	F	F	I
I	V	I	V	I	I	V
I	F	V	I	V	I	V
I	F	F	I	V	I	I
I	F	I	I	V	I	V
I	I	V	V	V	V	V
I	I	F	V	I	I	I
I	I	I	V	V	V	V

3)

Soient P, Q deux assertions.

a)

P	Q	$\neg P$	$P \vee (\neg P)$
V	V	F	V
V	F	F	V
V	I	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V
F	I	V	V
I	V	I	I
I	F	I	I
I	I	I	I

On observe trois cas où l'assertion $P \vee (\neg P)$ a la valeur de vérité "I". Ce n'est donc pas une tautologie dans $\mathcal{L}_3$.

b)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
V	I	I	I	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V
F	I	V	F	V
I	V	V	I	V
I	F	I	I	I
I	I	V	I	V

On observe un cas où la valeur de vérité de $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ est "I". Le principe d'inférence ne vaut donc plus dans $\mathcal{L}_3$.

c)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$(\neg P) \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \Rightarrow Q)$	$((P \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
V	I	I	F	V	I	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V
F	I	V	V	I	I	V
I	V	V	I	V	V	V
I	F	I	I	I	I	I
I	I	V	I	V	V	I

Dans deux cas l'assertion $((P \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ prend la valeur de vérité "I". Ce n'est donc pas une tautologie dans $\mathcal{L}_3$.

Problème 2 - Triangles magiques

Partie A - Questions Préliminaires

On cherche à encadrer la somme $S = a + b + c$ quand a, b et c sont des entiers distincts entre 1 et 9. Sans perte de généralité, supposons que $a < b < c$: c'est possible, car les trois entiers sont distincts et peuvent être intervertis si l'ordre n'est pas respecté.

Borne inférieure pour S : On remarque que $6 \leq S$, en prenant $S = 1 + 2 + 3$. Prouvons que cette valeur est minimale. Pour minimiser S, on doit choisir $a = 1$, sinon $S' = (a - 1) + b + c$ serait plus petite. Par le même raisonnement, on doit choisir $b = 2$ et $c = 3$, car a, b, c sont distincts. Donc 6 est bien la plus petite valeur que peut prendre S.

Borne supérieure pour S : On raisonne de la même manière. Afin de maximiser S, on doit choisir $c = 9$, sinon $S' = a + b + (c + 1) > S$. Comme $b < c$, il s'ensuit qu'on a nécessairement $b = 8$ et enfin $a = 7$.

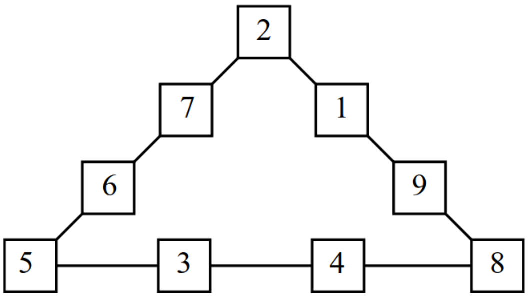
Ainsi la valeur maximale que peut prendre S est $S = 7 + 8 + 9 = 24$.

Conclusion : $6 \leq S \leq 24$.

Partie B - Les triangles magiques

1)

Le triangle suivant est 20-magique :



2)

a) Comme $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1$, on somme les trois valeurs pour trouver :

$$3S = (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9) + (n_1 + n_4 + n_7)$$

Comme les nombres $n_1, \ldots, n_9$ sont les nombres de 1 à 9 dans le désordre, leur somme vaut $1+2+\cdots+9 = 45$. De plus, n_1, n_4 et n_7 sont les nombres aux sommets du triangle. Donc $n_1 + n_4 + n_7 = T$. On trouve donc enfin :

$$3S = 45 + T \tag{1}$$

b) Avec la partie A, on sait que T, étant la somme de trois entiers entre 1 et 9, a l'encadrement $6 \leq T \leq 24$. Donc $\frac{6+45}{3} \leq S \leq \frac{24+45}{3}$, ce qui donne $17 \leq S \leq 23$.

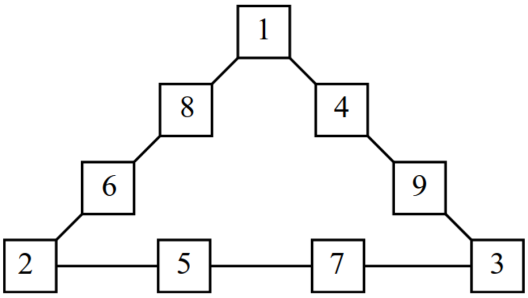
c) Les couples (S, T) possibles sont :

S	T
17	6
18	9
19	12
20	15
21	18
22	21
23	24

Où les valeurs de T sont calculées avec (1) en fonction de celles de S

3)

Comme le triangle recherché est 17-magique, alors $T = 6$. Donc $T = 1 + 2 + 3$ et les nombres sur les sommets doivent être 1, 2 et 3. On trouve donc le triangle 17-magique suivant :



4)

On prouve d'abord le lemme suivant, qui sera utile dans le reste du sujet.

Lemme. *Si un triangle est S-magique et que le nombre $n = S - T$ est compris entre 1 et 9, alors n est sur l'un des sommets du triangle.*

Démonstration. On se place dans les conditions de l'énoncé. Prouvons par l'absurde que n est sur le triangle, en supposant qu'il se trouve sur l'un des côtés mais pas sur les sommets. Notons a, b les extrémités du côté sur lequel se trouve n et x le dernier nombre de ce côté.

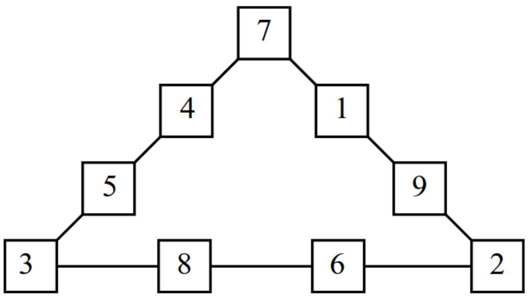
Par hypothèse, $a+b+x+n = S$. Donc $a+b+x = T$ car $n = S-T$. Comme a et b sont fixés, x doit être égal au nombre qui se trouve sur le 3e sommet du triangle. C'est une contradition, car tous les nombres d'un triangle S-magique sont distincts. Donc n est sur un sommet du triangle. □

Ainsi, si un triangle 18-magique existe, alors 9 doit se trouver sur l'un des sommets du triangle. Mais comme $T = 9$, la somme des deux autres nombres sur les sommets du triangle doit valoir 0, ce qui est impossible. Donc il n'existe pas de triangle 18-magique.

5)

a) Par le lemme ci-dessus, comme $19 - 12 = S - T = 7$, 7 doit se trouver sur l'un des sommets du triangle.

b) Le triangle suivant est 19-magique :



6)

Remplaçons chaque $n_i, i \in [\![1, 9]\!]$ par $n'_i = 10 - n_i$. Cette transformation est valide : les entiers n'_i sont toujours compris entre 1 et 9, et restent distincts. Si la somme des nombres d'un côté vaut S, la somme des n'_i de ce côté est $40-S$. Donc, si un triangle est S-magique, alors il existe un triangle $(40-S)$-magique.

7)

On a prouvé qu'il existe des triangles 20, 17 et 19-magiques. D'après 6), il existe donc des triangles 23 et 21-magiques. On a aussi prouvé qu'il n'existe pas de triangle 18-magique. Reste enfin le cas $S = 22$.

Par la contraposée de 6), s'il n'existe pas de triangle $40-22 = 18$-magique, alors il n'existe pas de triangle 22-magique. Comme il n'existe pas de triangle 18-magique, il n'existe pas de triangle 22-magique. " On résume donc les valeurs de S pour lesquelles il existe un triangle S-magique dans le tableau suivant :

S	T	Existe
<17	<6	Non
17	6	Oui
18	9	Non
19	12	Oui
20	15	Oui
21	18	Oui
22	21	Non
23	24	Oui
>23	>24	Non

Sources

- Le site de l'APMEP pour les images de triangles complétés, afin de ne pas avoir à les faire avec LaTeX
- `https://www.overleaf.com/latex/templates/template-for-rapid-homework-typesetting/rycccpxphchn` pour le template du devoir

Les tables de vérité de ce devoir maison ont été générées grâce à un programme de notre création disponible ici. (`https://github.com/DArtagnant/automatic-latex-truth-table-builder`) Celui est capable de générer les tables de vérité en LaTeXde toute assertion dans $\mathscr{L}_2$ ou $\mathscr{L}_3$.