

Matière : Devoir maison n° 2

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Problème 2 - Nombres Échangeables

1)

En prenant $a = 3, b = -2$, on a bien $f_{a,b}(2) = 3$ et $f_{a,b} = 3 - 1 = 2$.

2)

Supposons que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est échangeable. On exclut le cas trivial (x, x) qui est évidemment échangeable, et pour lequel $|x - x| = 0 \leq 1$. Sans perte de généralité, ordonnons donc par la suite $x < y$. On a le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{x+b} = y \\ a - \sqrt{y+b} = x \end{cases}$$

En faisant la différence des deux lignes, on trouve que $\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} = y - x = |x - y|$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} (\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b})(\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}) &= y - x = |x - y| \\ \iff \sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} &= \frac{|x - y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{|x - y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} = |x - y|$$

Et $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$.

Donc si (x, y) est échangeable, alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$.

Avant de prouver l'énoncé de la question, considérons la fonction $F : [-x; +\infty[$ définie par $F(b) = \sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}$. Celle-ci est croissante comme somme de deux fonctions croissantes (par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$). De plus, elle est continue sur son intervalle de définition, comme la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Pour prouver maintenant que si (x, y) est échangeable, alors $|x - y| \leq 1$, prouvons sa contraposée : si $|x - y| > 1$, alors (x, y) n'est pas échangeable. On procède par l'absurde.

Supposons que (x, y) est échangeable. Alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $F(b) = 1$. Le minimum de F sur son intervalle de définition est atteint en $b = -x$, avec $F(-x) = \sqrt{y-x} = \sqrt{|x-y|}$. Mais $|x - y| > 1$ et $\sqrt{|x-y|} > 1$. Donc $F(b) > 1$ pour tout $b \in \mathcal{D}_F$ et b n'existe pas, ce qui est une contradiction.

3)

Prouvons que si $|x - y| \leq 1$, alors (x, y) est échangeable.

Dans ce cas, on peut trouver $b \in \mathbb{R}$ tels que $F(b) \leq 1$ et $F(b) > 1$. En effet, si $b = -x$, alors $F(-x) = \sqrt{y-x} \leq 1$ par hypothèse, et $F(2-x) = \sqrt{2+(y-x)} + \sqrt{2} > 1$ car $\sqrt{2} > 1$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme F est continue sur \mathcal{D}_F , il existe $b_0 \in \mathcal{D}_F$ tel que $F(b_0) = 1$. Donc on a :

$$\sqrt{y+b_0} - \sqrt{x+b_0} = \frac{|x-y|}{F(b_0)} = |x-y| = y-x$$

En particulier, en posant $a_0 = \sqrt{x + b_0} + y$, on a :

$$a_0 - \sqrt{x + b_0} = y$$

Et :

$$a_0 - \sqrt{y + b_0} = y - (\sqrt{y + b_0} - \sqrt{x + b_0}) = y - (y - x) = x$$

Donc (x, y) sont échangeables avec a_0, b_0 .