

# Mathématiques : Devoir maison n° 3

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois  
1E1

## Problème 1 - Partie entière

1)

$$\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$$

$$\lfloor -\pi \rfloor = -4$$

$$\lfloor \frac{2\pi}{7} \rfloor = 0$$

Version originale :

```
1 def partent(x):
2     n = 0
3     # Quand x est negatif, cette condition est fausse des le depart
4     while n+1 <= x:
5         n += 1
6     return n
7
8 from math import pi
9 print(partent(5/2)) # 2
10 print(partent(-pi)) # 0 FAUX
11 print(partent(2*pi/7)) # 0
```

Version corrigée :

```
1 def partent(x):
2     n = 0
3     while n+1 <= abs(x):
4         n += 1
5     if x >= 0:
6         return n
7     else:
8         return -n-1
9
10 from math import pi
11 print(partent(5/2)) # 2
12 print(partent(-pi)) # -4
13 print(partent(2*pi/7)) # 0
```

Versions optimisées :

```

1 def partent1(x):
2     n = 0
3     abs_x = abs(x)
4     while (n := n+1) <= abs_x: pass
5     return n-1 if x >= 0 else -n
6
7 def partent2(x):
8     return int(x) - (1 if x <= 0 else 0)

```

2)

a) Soit  $x$  un réel et  $p$  un entier naturel.

Un nombre décimal s'écrit sous la forme  $\frac{a}{10^b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N}$ .

Par définition,  $\lfloor 10^p x \rfloor$  est un entier relatif et  $p \in \mathbb{N}$  donc :

$$\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} \in \mathbb{D}$$

Par définition,

$$\forall c \in \mathbb{R}, c - 1 < \lfloor c \rfloor \leq c < \lfloor c \rfloor + 1$$

Donc avec  $c = 10^p x$  :

$$\lfloor 10^p x \rfloor \leq 10^p x < \lfloor 10^p x \rfloor + 1$$

Or  $10^p > 0$  donc

$$\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} \leq x < \frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} + \frac{1}{10^p}$$

Nous avons prouvé que  $\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p}$  est un nombre décimal et que  $\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} \leq x < \frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} + \frac{1}{10^p}$  pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

b)

## Problème 2 - Notion de densité

1)

a)

**Théorème** (Grenouille généralisée). Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ . Soit  $l = |x - y|$  et  $0 < \delta < l$ . Alors il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n\delta \in ]x; y[$ .

*Démonstration.* On procède par l'absurde en supposant que  $n\delta \notin ]x; y[$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $p \in \mathbb{Z}$  le plus petit entier tel que  $p\delta > y$ . Son existence est assurée par l'existence de parties entières, en prenant  $p = \lfloor \frac{y}{\delta} \rfloor + 1$ , ou par la propriété archimédienne de  $\mathbb{R}$ . Par hypothèse,  $(p-1)\delta \notin ]x; y[$ . Par minimalité de  $p$ ,  $(p-1)\delta \leq y$ . Donc  $(p-1)\delta < x$ .

Ainsi, on trouve que  $(p-1)\delta < x < y < p\delta$ . Donc  $]x; y[ \subseteq ](p-1)\delta; p\delta[$ , et  $|p\delta - (p-1)\delta| = \delta \geq |x - y| = l$ , ce qui est une contradiction.

Donc il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n\delta \in ]x; y[$ . □

b) Si  $0 \leq x < y$ , alors  $n\delta > x$  est équivalent à ce que  $n > \frac{x}{\delta}$ . En particulier, si  $n$  est le plus petit tel entier, alors  $n\delta \in ]x; y[$ . En effet, si  $n\delta \geq y$ , alors  $m \geq n$  implique que  $m\delta \geq y$  et  $m < n$  implique par hypothèse que  $m\delta \leq x$ , et  $m\delta \notin ]x; y[$  pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , ce qui contredit le théorème de la Grenouille.

Or,  $n = \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor + 1$  est le plus petit entier tel que  $n\delta > x$ , et  $n\delta \in ]x; y[$ . Donc la grenouille tombe dans la mare après  $\lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor + 1$  sauts.

2)

a)  $\frac{1}{n} < y - x$  si et seulement si  $\frac{1}{y-x} < n$ . Donc  $n = \lfloor \frac{1}{y-x} \rfloor + 1$  fonctionne.

b) Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ . Prouvons qu'il existe  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $a \in ]x; y[$ . Par la question précédente, il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{q} < y - x$ . Par le théorème de la Grenouille, il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $p\frac{1}{q} = \frac{p}{q} \in ]x; y[$ . Comme  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

c) Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe  $\frac{p}{q} \in ]\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{y}{\sqrt{2}}[$ . On peut choisir  $\frac{p}{q} \neq 0$ , soit si  $0 \notin ]x; y[$ , soit en prenant  $\frac{p}{q}$  dans  $]0; \frac{y}{\sqrt{2}}[ \subseteq ]\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{y}{\sqrt{2}}[$ . Dans ces deux cas,  $\frac{p}{q}\sqrt{2} \in ]x; y[$ .

Montrons maintenant par l'absurde que  $\frac{p}{q}\sqrt{2}$  est irrationnel. Supposons que  $\frac{p}{q}\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , avec  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ . Alors  $\sqrt{2} = \frac{aq}{bp} \in \mathbb{Q}$ , ce qui est impossible car  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Donc  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Updated upstream =====

3)

a) Prouvons par récurrence que  $(1+a)^n \geq 1+an$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $P(n)$  l'assertion  $(1+a)^n \geq 1+an$ .

Initialisation :  $P(1) \iff (1+a)^1 = 1+a \geq 1+1a = 1+a$ . Donc  $P(1)$  est vraie.

Hérédité : Supposons que  $P(n)$  est vraie pour  $n \in \mathbb{N}$ . Prouvons  $P(n+1)$ .

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+an) = 1+a(n+1)+a^2n \\ &\geq 1+a(n+1) \end{aligned}$$

Donc si  $P(n)$ , alors  $P(n+1)$ . Par le principe de récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) TODO : Quelqu'un trouve la preuve avec déduction de l'exo d'avant ?

Trouver  $C \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $b^n \leq \frac{C}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  revient à trouver un majorant de la fonction  $f : n \mapsto nb^n$ . On dit que  $f$  est croissante en  $n \in \mathbb{N}^*$  si  $f(n+1) \geq f(n)$ . Montrons donc qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f$  est croissante avant  $p$  et strictement décroissante après  $p$ , de manière à ce que  $f$  soit au moins majorée par  $f(p)$ .

On procède par équivalence :

$$\begin{aligned}
 f \text{ strictement décroissante en } p &\iff f(p) > f(p+1) \\
 &\iff pb^p > (p+1)b^{p+1} \\
 &\iff \frac{p}{p+1} > b \\
 &\iff 1 - \frac{1}{p+1} > b \\
 &\iff 1 - b > \frac{1}{p+1} \\
 &\iff p+1 > \frac{1}{1-b} \\
 &\iff p+1 \geq \left\lfloor \frac{1}{1-b} \right\rfloor + 1 \\
 &\iff p \geq \left\lfloor \frac{1}{1-b} \right\rfloor
 \end{aligned}$$

Donc  $f$  est croissante avant  $\left\lfloor \frac{1}{1-b} \right\rfloor$  et strictement décroissante après  $\left\lfloor \frac{1}{1-b} \right\rfloor$ . Donc  $f$  est majorée (en particulier, par  $f\left(\left\lfloor \frac{1}{1-b} \right\rfloor\right) \in \mathbb{R}_+^*$ ).

#### 4)

a) On prouve l'assertion suivante, plus générale : si  $x < y$ , alors il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{10^n} < |y - x|$ .

Par la question précédente, il existe  $C \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\left(\frac{1}{10}\right)^n \leq \frac{C}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . En prenant  $n > \frac{C}{|y-x|}$  (celui-ci existe par existence des parties entières), on a :

$$\frac{1}{10^n} < \frac{C}{\frac{C}{|y-x|}} = |y - x|$$

Donc il existe bien  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{10^n} < |y - x|$ .

b) Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ . Par définition  $\mathbb{D} = \left\{ \frac{m}{10^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ . On choisit  $n \in \mathbb{N}^*$  de manière à ce que  $\frac{1}{10^n} < |x - y|$ . Par le théorème de la Grenouille, il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $\frac{m}{10^n} \in ]x; y[$ . Comme  $\frac{m}{10^n} \in \mathbb{D}$ ,  $\mathbb{D}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

#### 5)

a) On pose  $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  avec  $x = a + b\sqrt{2}$  et  $y = c + d\sqrt{2}$ . Alors :

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

Et :

$$xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

Donc  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  est stable par addition et multiplication.

b) On prouve encore l'assertion suivante, plus générale : si  $x < y$ , alors il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p < |y-x|$ .

Soit  $u = \sqrt{2} - 1$ . Montrons que  $0 < u < 1$ . Comme  $\sqrt{2} > 1$ ,  $u > 0$ . Si  $u \geq 1$ , alors  $\sqrt{2} \geq 2$  et  $2 \geq 4$ , ce qui est absurde. Donc  $u \in ]0; 1[$ .

Donc il existe  $C \in \mathbb{R}_+^*$  tel que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $u^p \leq \frac{C}{p}$ . En prenant  $p > \frac{C}{|x-y|}$ ,  $u^p < |x-y|$ .

Donc il existe bien  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $u^p < |x-y|$ .

c) Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ . Choisissons  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p < |x-y|$ . Par le théorème de la Grenouille, il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $nu^p \in ]x; y[$ . Comme  $n, u \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ,  $nu^p \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .

Donc  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .