Matière : Devoir maison n° 2

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Problème 1 - Équations fonctionnelles

Partie A.

$\forall m, n \in \mathbb{N}, g(m+n) = g(m) \times g(n)$

1)

On suppose qu'il existe une telle fonction g.

a) Comme n et m appartiennent à $\mathbb{N}$, l'unique manière d'avoir $n+m=0$ est que $n=0$ et $m=0$. On a donc :

$$\begin{aligned} g(m+n) &= g(m) \times g(n) \\ g(0) &= g(0) \times g(0) \qquad (1) \end{aligned}$$

Nous divisons deux cas :

Si $g(0) = 0$: Alors nous avons bien $g(0) = 0$.

Si $g(0) > 0$: Nous pouvons diviser (1) par $g(0)$ ce qui donne $g(0) = 1$.

Nous avons prouvé que $g(0) = 0$ ou $g(0) = 1$.

Problème 2 - Nombres Échangeables

1)

En prenant $a = 3, b = -2$, on a bien $f_{a,b}(2) = 3$ et $f_{a,b} = 3 - 1 = 2$.

2)

Supposons que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est échangeable. On exclut le cas trivial (x, x) qui est évidemment échangeable, et pour lequel $|x - x| = 0 \leq 1$. Sans perte de généralité, ordonnons donc par la suite $x < y$. On a le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{x+b} = y \\ a - \sqrt{y+b} = x \end{cases}$$

En faisant la différence des deux lignes, on trouve que $\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} = y - x = |x-y|$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} (\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b})(\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}) &= y - x = |x-y| \\ \iff \sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} &= \frac{|x-y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} = |x-y|$$

Et $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$.

Donc si (x, y) est échangeable, alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$.

Avant de prouver l'énoncé de la question, considérons la fonction $F : [-x; +\infty[$ définie par $F(b) = \sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}$. Celle-ci est croissante comme somme de deux fonctions croissantes (par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$). De plus, elle est continue sur son intervalle de définition, comme la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Pour prouver maintenant que si (x, y) est échangeable, alors $|x - y| \leq 1$, prouvons sa contraposée : si $|x - y| > 1$, alors (x, y) n'est pas échangeable. On procède par l'absurde.

Supposons que (x, y) est échangable. Alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $F(b) = 1$. Le minimum de F sur son intervalle de définition est atteint en $b = -x$, avec $F(-x) = \sqrt{y-x} = \sqrt{|x-y|}$. Mais $|x - y| > 1$ et $\sqrt{|x-y|} > 1$. Donc $F(b) > 1$ pour tout $b \in \mathcal{D}_F$ et b n'existe pas, ce qui est une contradiction.

3)

Prouvons que si $|x - y| \leq 1$, alors (x, y) est échangeable.

Dans ce cas, on peut trouver $b \in \mathbb{R}$ tels que $F(b) \leq 1$ et $F(b) > 1$. En effet, si $b = -x$, alors $F(-x) = \sqrt{y-x} \leq 1$ par hypothèse, et $F(2 - x) = \sqrt{2 + (y - x)} + \sqrt{(2)} > 1$ car $\sqrt{2} > 1$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme F est continue sur $\mathcal{D}_F$, il existe $b_0 \in \mathcal{D}_F$ tel que $F(b_0) = 1$. Donc on a :

$$\sqrt{y+b_0} - \sqrt{x+b_0} = \frac{|x-y|}{F(b_0)} = |x - y| = y - x$$

En particulier, en posant $a_0 = \sqrt{x+b_0} + y$, on a :

$$a_0 - \sqrt{x+b_0} = y$$

Et :

$$a_0 - \sqrt{y+b_0} = y - (\sqrt{y+b_0} - \sqrt{x+b_0}) = y - (y - x) = x$$

Donc (x, y) sont échangeables avec a_0, b_0.