Matière : Devoir maison n° 2

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Problème 1 - Équations fonctionnelles

Partie A.

1)

Analyse.

On suppose qu'il existe une telle fonction g.

a)
Soient n et m appartenant à $\mathbb{N}$. L'unique manière d'obtenir $n + m = 0$ est que $n = 0$ et $m = 0$. Cela donne :

$$g(m+n) = g(m) \times g(n)$$
$$g(0) = g(0)^2$$

Les solutions de cette équation sont $\{0, 1\}$.

Nous avons prouvé que $g(0) = 0$ ou $g(0) = 1$.

b)
Par définition, $g(m + n) = g(m) \times g(n)$, avec $m, n \in \mathbb{N}$.
Pour que $g(m + n) = g(0)$, il faut déjà que $m = 0$.

$$g(n) = g(n) \cdot 0$$
$$g(n) = 0$$

Si $g(0) = 0$, alors g est la fonction nulle.

c)
Nous résonnons par récurrence. On suppose que $g(n) = g(1)^n$.

Initialisation : Nous sommes entrain de tester le cas où $g(0) = 1$.

Hérédité :

$$\begin{aligned} g(n+1) &= g(n) \times g(1) \\ &= g(1)^n \times g(1) \quad \text{D'après la supposition de départ.} \\ &= g(1)^{(n+1)} \end{aligned}$$

Nous avons prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) = a^n$ où $a = g(1)$.

2)

Synthèse.

Nous avons deux candidats :
- La fonction nulle : $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = 0$
- Une fonction puissance : $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = g(1)^n$

Nous devons vérifier la condition : $\forall m, n \in \mathbb{N}, g(m + n) = g(m) \times g(n)$.

Vérifions pour la fonction nulle :

Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\forall m, n \in \mathbb{N}, \\
&g(m+n) = 0 \\
&\qquad\qquad = 0 \times 0 \\
&\qquad\qquad = g(m) \times g(n)
\end{aligned}$$

La condition est bien vérifiée.

Vérifions pour la fonction puissance : Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\forall m, n \in \mathbb{N}, \\
&g(m+n) = g(1)^{(m+n)} \\
&\qquad\qquad = g(1)^m \times g(1)^n \\
&\qquad\qquad = g(m) \times g(n)
\end{aligned}$$

La condition est bien vérifiée.

La fonction nulle et $g(n) = g(1)^n$ sont donc les deux seules fonctions qui respectent $\forall m, n \in \mathbb{N}, g(m+n) = g(m) \times g(n)$.

Problème 2 - Nombres Échangeables

1)

En prenant $a = 3, b = -2$, on a bien $f_{a,b}(2) = 3$ et $f_{a,b} = 3 - 1 = 2$.

2)

Supposons que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est échangeable. On exclut le cas trivial (x, x) qui est évidemment échangeable, et pour lequel $|x - x| = 0 \leq 1$. Sans perte de généralité, ordonnons donc par la suite $x < y$. On a le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{x+b} = y \\ a - \sqrt{y+b} = x \end{cases}$$

En faisant la différence des deux lignes, on trouve que $\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} = y - x = |x - y|$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b})(\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}) &= y - x = |x-y| \\
\iff \sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} &= \frac{|x-y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} = |x-y|$$

Et $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$.

Donc si (x, y) est échangeable, alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$.

Avant de prouver l'énoncé de la question, considérons la fonction $F : [-x; +\infty[$ définie par $F(b) = \sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}$. Celle-ci est croissante comme somme de deux fonctions croissantes (par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$). De plus, elle est continue sur son intervalle de définition, comme la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Pour prouver maintenant que si (x, y) est échangeable, alors $|x - y| \leq 1$, prouvons sa contraposée : si $|x - y| > 1$, alors (x, y) n'est pas échangeable. On procède par l'absurde.

Supposons que (x, y) est échangable. Alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $F(b) = 1$. Le minimum de F sur son intervalle de définition est atteint en $b = -x$, avec $F(-x) = \sqrt{y-x} = \sqrt{|x-y|}$. Mais $|x-y| > 1$ et $\sqrt{|x-y|} > 1$. Donc $F(b) > 1$ pour tout $b \in \mathcal{D}_F$ et b n'existe pas, ce qui est une contradiction.

3)

Prouvons que si $|x-y| \leq 1$, alors (x, y) est échangeable. On suppose toujours que $x \leq y$.

Dans ce cas, on peut trouver $b \in \mathbb{R}$ tels que $F(b) \leq 1$ et $F(b) > 1$. En effet, si $b = -x$, alors $F(-x) = \sqrt{y-x} \leq 1$ par hypothèse, et $F(2-x) = \sqrt{2 + (y-x)} + \sqrt{(2)} > 1$ car $\sqrt{2} > 1$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme F est continue sur $\mathcal{D}_F$, il existe $b_0 \in \mathcal{D}_F$ tel que $F(b_0) = 1$. Ainsi, on a :

$$\sqrt{y+b_0} - \sqrt{x+b_0} = \frac{|x-y|}{F(b_0)} = |x-y| = y - x$$

En particulier, en posant $a_0 = \sqrt{x+b_0} + y$, on a :

$$a_0 - \sqrt{x+b_0} = y$$

Et :

$$a_0 - \sqrt{y+b_0} = y - (\sqrt{y+b_0} - \sqrt{x+b_0}) = y - (y-x) = x$$

Donc (x, y) sont échangeables avec a_0, b_0.