

Mathématiques : Devoir maison n° 3

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Problème 1 - Partie entière

1)

$$\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$$

$$\lfloor -\pi \rfloor = -4$$

$$\lfloor \frac{2\pi}{7} \rfloor = 0$$

Version originale :

```
1 def partent(x):
2     n = 0
3     # Quand x est negatif, cette condition est fausse des le depart
4     while n+1 <= x:
5         n += 1
6     return n
7
8 from math import pi
9 print(partent(5/2)) # 2
10 print(partent(-pi)) # 0 FAUX
11 print(partent(2*pi/7)) # 0
```

Version corrigée :

```
1 def partent(x):
2     n = 0
3     while n+1 <= abs(x):
4         n += 1
5     if x >= 0:
6         return n
7     else:
8         return -n-1
9
10 from math import pi
11 print(partent(5/2)) # 2
12 print(partent(-pi)) # -4
13 print(partent(2*pi/7)) # 0
```

Versions optimisées :

```

1 def partent1(x):
2     n = 0
3     abs_x = abs(x)
4     while (n := n+1) <= abs_x: pass
5     return n-1 if x >= 0 else -n
6
7 def partent2(x):
8     return int(x) - (1 if x <= 0 else 0)

```

Problème 2 - Notion de densité

1)

a)

Théorème (Grenouille généralisée). Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Soit $l = |x - y|$ et $0 < \delta < l$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\delta \in]x; y[$.

Démonstration. On procède par l'absurde en supposant que $n\delta \notin]x; y[$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $p \in \mathbb{Z}$ le plus petit entier tel que $p\delta > y$. Son existence est assurée par l'existence de parties entières, en prenant $p = \lfloor \frac{y}{\delta} \rfloor + 1$, ou par la propriété archimédienne de \mathbb{R} . Par hypothèse, $(p-1)\delta \notin]x; y[$. Par minimalité de p , $(p-1)\delta \leq x$. Donc $(p-1)\delta < x$.

Ainsi, on trouve que $(p-1)\delta < x < y < p\delta$. Donc $]x; y[\subseteq](p-1)\delta; p\delta[$, et $|p\delta - (p-1)\delta| = \delta \geq |x - y| = l$, ce qui est une contradiction.

Donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\delta \in]x; y[$. □

b) Si $0 \leq x < y$, alors $n\delta > x$ est équivalent à ce que $n > \frac{x}{\delta}$. En particulier, si n est le plus petit entier, alors $n\delta \in]x; y[$. En effet, si $n\delta \geq y$, alors $m \geq n$ implique que $m\delta \geq y$ et $m < n$ implique par hypothèse que $m\delta \leq x$, et $m\delta \notin]x; y[$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, ce qui contredit le théorème de la Grenouille.

Donc $n = \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor + 1$ est le plus petit entier tel que $n\delta > x$, et $n\delta \in]x; y[$. Donc la grenouille tombe dans la mare après $\lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor + 1$ sauts.

2)

a) $\frac{1}{n} < y - x$ si et seulement si $\frac{1}{y-x} < n$. Donc $n = \lfloor \frac{1}{y-x} \rfloor + 1$ fonctionne.

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Prouvons qu'il existe $a \in \mathbb{Q}$, $a \in]x; y[$. Par la question précédente, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q} < y - x$. Par le théorème de la Grenouille, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p\frac{1}{q} = \frac{p}{q} \in]x; y[$. Comme $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe $\frac{p}{q} \in]\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{y}{\sqrt{2}}[$. On peut choisir $\frac{p}{q} \neq 0$, soit si $0 \notin]x; y[$, soit en prenant $\frac{p}{q}$ dans $]0; \frac{y}{\sqrt{2}}[\subseteq]\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{y}{\sqrt{2}}[$. Dans ces deux cas, $\frac{p}{q}\sqrt{2} \in]x; y[$.

Montrons maintenant par l'absurde que $\frac{p}{q}\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons que $\frac{p}{q}\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \frac{aq}{bp} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} .

En bas

$$\pi = 4$$

$$\pi = 4$$