

# Mathématiques : Devoir maison n° 2

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois  
1E1

## Problème 1 - Équations fonctionnelles

### Partie A.

1)

*Analyse.*

On suppose qu'il existe une telle fonction  $g$ .

a)

Soient  $n$  et  $m$  appartenant à  $\mathbb{N}$ . L'unique manière d'obtenir  $n + m = 0$  est que  $n = 0$  et  $m = 0$ . Cela donne :

$$\begin{aligned}g(m + n) &= g(m) \times g(n) \\g(0) &= g(0)^2\end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont  $S = \{0, 1\}$ .

Nous avons prouvé que  $g(0) = 0$  ou  $g(0) = 1$ .

b)

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}g(n) &= g(n + 0) \\&= g(n) \times g(0) \\&= 0 \quad \text{Puisque on est dans le cas où } g(0) = 0\end{aligned}$$

Si  $g(0) = 0$ , alors  $g$  est la fonction nulle.

c)

Nous raisonnons par récurrence. On suppose que  $g(0) = 1$  et  $g(n) = g(1)^n$ .

*Initialisation* : Par hypothèse,  $g(0) = 1$ .

*Hérédité* :

$$\begin{aligned}g(n + 1) &= g(n) \times g(1) \\&= g(1)^n \times g(1) \quad \text{D'après la supposition de départ.} \\&= g(1)^{(n+1)}\end{aligned}$$

Nous avons prouvé par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g(n) = a^n$  où  $a = g(1)$ .

2)

*Synthèse.*

Nous avons deux candidats :

- La fonction nulle :  $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = 0$
- Une fonction puissance :  $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = g(1)^n$

Nous devons vérifier la condition :  $\forall m, n \in \mathbb{N}, g(m + n) = g(m) \times g(n)$ .

Vérifions pour la fonction nulle :

Pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}g(m+n) &= 0 \\&= 0 \times 0 \\&= g(m) \times g(n)\end{aligned}$$

La condition est bien vérifiée.

Vérifions pour la fonction puissance : Pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}g(m+n) &= g(1)^{(m+n)} \\&= g(1)^m \times g(1)^n \\&= g(m) \times g(n)\end{aligned}$$

La condition est bien vérifiée.

La fonction nulle et  $g(n) = g(1)^n$  sont donc les deux seules fonctions qui respectent  $\forall m, n \in \mathbb{N}, g(m+n) = g(m) \times g(n)$ .

## Partie B.

1)

*Analyse.* Supposons que :

$$\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, (f(m+n) = f(m) \times f(n) + f(m) + f(n)) \wedge (f(1) = 1).$$

a) On a :

$$\begin{aligned}f(0) &= f(0+0) \\&\iff f(0) = f(0) \times f(0) + f(0) + f(0) \\&\iff f(0) = f(0)^2 + 2f(0) \\&\iff f(0)^2 + f(0) = 0 \\&\iff f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = -1.\end{aligned}$$

Donc  $f(0) = 0$  puisque  $f(0) \in \mathbb{N}$  et  $-1 \notin \mathbb{N}$ .

b) Pour  $f(2)$  :

$$\begin{aligned}f(2) &= f(1+1) \\&= f(1) \times f(1) + f(1) + f(1) \\&= 1 + 2 \\&= 3.\end{aligned}$$

Pour  $f(3)$  :

$$\begin{aligned}f(3) &= f(2+1) \\&= f(2) \times f(1) + f(2) + f(1) \\&= 3 \times 1 + 3 + 1 \\&= 7.\end{aligned}$$

Pour  $f(6)$  :

$$\begin{aligned}f(6) &= f(3+3) \\&= f(3) \times f(3) + f(3) + f(3) \\&= 7^2 + 14 \\&= 63.\end{aligned}$$

c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) \times f(1) + f(n) + f(1) \\ &= f(n) + f(n) + 1 \\ &= 2f(n) + 1. \end{aligned}$$

On a montré que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n+1) = 2f(n) + 1$ .

d) Soit  $g : n \mapsto f(n) + 1$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ .

Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} g(m+n) &= f(m+n) + 1 \\ &= f(m) \times f(n) + f(m) + f(n) + 1 \\ &= (f(m) + 1)(f(n) + 1) \\ &= g(m) \times g(n). \end{aligned}$$

On a montré que pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $g(m+n) = g(m) \times g(n)$ .

e)

## 2)

*Synthèse.* Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f(n) = 2^n - 1$ .

Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . On a, d'une part :

$$f(m+n) = 2^{m+n} - 1$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} f(m) \times f(n) + f(n) + f(m) &= (2^m - 1)(2^n - 1) + 2^n - 1 + 2^m - 1 \\ &= 2^{m+n} - 2^n - 2^m + 1 + 2^n + 2^m - 2 \\ &= 2^{m+n} - 1. \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $f(m+n) = f(m) \times f(n) + f(m) + f(n)$ .

Aussi,  $f(1) = 2^1 - 1 = 1$ .

Cette fonction répond donc bien au problème.

## Problème 2 - Nombres Échangeables

1)

En prenant  $a = 3, b = -2$ , on a bien  $f_{a,b}(2) = 3$  et  $f_{a,b} = 3 - 1 = 2$ .

2)

Supposons que  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est échangeable. On exclut le cas trivial  $(x, x)$  qui est évidemment échangeable, et pour lequel  $|x - x| = 0 \leq 1$ . Sans perte de généralité, ordonnons donc par la suite  $x < y$ . On a le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{x+b} = y \\ a - \sqrt{y+b} = x \end{cases}$$

En faisant la différence des deux lignes, on trouve que  $\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} = y - x = |x - y|$ . De plus, on a :

$$\begin{aligned} (\sqrt{y+b} - \sqrt{x+b})(\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}) &= y - x = |x - y| \\ \iff \sqrt{y+b} - \sqrt{x+b} &= \frac{|x - y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{|x - y|}{\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}} = |x - y|$$

Et  $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$ .

Donc si  $(x, y)$  est échangeable, alors il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $\sqrt{y+b} + \sqrt{x+b} = 1$ .

Avant de prouver l'énoncé de la question, considérons la fonction  $F : [-x; +\infty[$  définie par  $F(b) = \sqrt{y+b} + \sqrt{x+b}$ . Celle-ci est croissante comme somme de deux fonctions croissantes (par croissance de  $x \mapsto \sqrt{x}$ ). De plus, elle est continue sur son intervalle de définition, comme la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Pour prouver maintenant que si  $(x, y)$  est échangeable, alors  $|x - y| \leq 1$ , prouvons sa contraposée : si  $|x - y| > 1$ , alors  $(x, y)$  n'est pas échangeable. On procède par l'absurde.

Supposons que  $(x, y)$  est échangeable. Alors il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $F(b) = 1$ . Le minimum de  $F$  sur son intervalle de définition est atteint en  $b = -x$ , avec  $F(-x) = \sqrt{y-x} = \sqrt{|x-y|}$ . Mais  $|x - y| > 1$  et  $\sqrt{|x-y|} > 1$ . Donc  $F(b) > 1$  pour tout  $b \in \mathcal{D}_F$  et  $b$  n'existe pas, ce qui est une contradiction.

3)

Prouvons que si  $|x - y| \leq 1$ , alors  $(x, y)$  est échangeable. On suppose toujours que  $x \leq y$ .

Dans ce cas, on peut trouver  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $F(b) \leq 1$  et  $F(b) > 1$ . En effet, si  $b = -x$ , alors  $F(-x) = \sqrt{y-x} \leq 1$  par hypothèse, et  $F(2-x) = \sqrt{2+(y-x)} + \sqrt{(2-x)} > 1$  car  $\sqrt{2} > 1$ .

Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme  $F$  est continue sur  $\mathcal{D}_F$ , il existe  $b_0 \in \mathcal{D}_F$  tel que  $F(b_0) = 1$ . Ainsi, on a :

$$\sqrt{y+b_0} - \sqrt{x+b_0} = \frac{|x-y|}{F(b_0)} = |x-y| = y-x$$

En particulier, en posant  $a_0 = \sqrt{x+b_0} + y$ , on a :

$$a_0 - \sqrt{x+b_0} = y$$

Et :

$$a_0 - \sqrt{y+b_0} = y - (\sqrt{y+b_0} - \sqrt{x+b_0}) = y - (y-x) = x$$

Donc  $(x, y)$  sont échangeables avec  $a_0, b_0$ .