Mathématiques : Devoir maison n° 3

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Problème 1 - Partie entière

1)

$\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$

$\lfloor -\pi \rfloor = -4$

$\lfloor \frac{2\pi}{7} \rfloor = 0$

Version originale :

```python
def partent(x):
    n = 0
    # Quand x est negatif, cette condition est fausse des le depart
    while n+1 <= x:
        n += 1
    return n

from math import pi
print(partent(5/2)) # 2
print(partent(-pi)) # 0 FAUX
print(partent(2*pi/7)) # 0
```

Version corrigée :

```python
def partent(x):
    n = 0
    while n+1 <= abs(x):
        n += 1
    if x >= 0:
        return n
    else:
        return -n-1

from math import pi
print(partent(5/2)) # 2
print(partent(-pi)) # -4
print(partent(2*pi/7)) # 0
```

Versions optimisées :

```python
def partent1(x):
    n = 0
    abs_x = abs(x)
    while (n := n+1) <= abs_x: pass
    return n-1 if x >= 0 else -n

def partent2(x):
    return int(x) - (1 if x <= 0 else 0)
```

Problème 2 - Notion de densité

1)

a)

Théorème (Grenouille généralisée)**.** Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Soit $l = |x - y|$ et $0 < \delta < l$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\delta \in \,]x; y[$.

Démonstration. On procède par l'absurde en supposant que $n\delta \notin \,]x; y[$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $p \in \mathbb{Z}$ le plus petit entier tel que $p\delta > y$. Son existence est assurée par l'existence de parties entières, en prenant $p = \left\lfloor \frac{y}{\delta} \right\rfloor + 1$, ou par la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$. Par hypothèse, $(p - 1)\delta \notin \,]x; y[$. Par minimalité de p, $(p - 1)\delta \leq y$. Donc $(p - 1)\delta < x$.

Ainsi, on trouve que $(p-1)\delta < x < y < p\delta$. Donc $]x; y[\,\subseteq\,](p-1)\delta; p\delta[$, et $|p\delta - (p-1)\delta| = \delta \geq |x - y| = l$, ce qui est une contradiction.

Donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\delta \in \,]x; y[$. $\square$

b) Si $0 \leq x < y$, alors $n\delta > x$ est équivalent à ce que $n > \frac{x}{\delta}$. En particulier, si n est le plus petit tel entier, alors $n\delta \in \,]x; y[$. En effet, si $n\delta \geq y$, alors $m \geq n$ implique que $m\delta \geq y$ et $m < n$ implique par hypothèse que $m\delta \leq x$, et $m\delta \notin \,]x; y[$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, ce qui contredit le théorème de la Grenouille.

Donc $n = \left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor + 1$ est le plus petit entier tel que $n\delta > x$, et $n\delta \in \,]x; y[$. Donc la grenouille tombe dans la mare après $\left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor + 1$ sauts.

2)

a) $\frac{1}{n} < y - x$ si et seulement si $\frac{1}{y-x} < n$. Donc $n = \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1$ fonctionne.

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Prouvons qu'il existe $a \in \mathbb{Q}$, $a \in \,]x; y[$. Par la question précédente, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q} < y - x$. Par le théorème de la Grenouille, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p\frac{1}{q} = \frac{p}{q} \in \,]x; y[$. Comme $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\frac{p}{q} \in \,]\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{y}{\sqrt{2}}[$. On peut choisir $\frac{p}{q} \neq 0$, soit si $0 \notin \,]x; y[$, soit en prenant $\frac{p}{q}$ dans $]0; \frac{y}{\sqrt{2}}[\,\subseteq\,]\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{y}{\sqrt{2}}[$. Dans ces deux cas, $\frac{p}{q}\sqrt{2} \in \,]x; y[$.

Montrons maintenant par l'absurde que $\frac{p}{q}\sqrt{2}$ est irrationel. Supposons que $\frac{p}{q}\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \frac{aq}{bp} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible car $\sqrt{} \notin \mathbb{Q}$.

Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.