

6. AKSLER

I de fleste maskinkonstruksjoner inngår aksler i en eller annen form. I dette kapittelet angis hvilke typer aksler som finnes og hvordan man enkelt kan foreta overslagsberegninger både med hensyn på styrke og kritisk turtall

6.1. TYPER AKSLER OG DERES ANVENDELSESOMRÅDE

En vanlig inndeling av akslene er som følger:

- * **Bæreaksler** (på engelsk axle og på tysk Achse): Dette er en "rett" aksel og den opptar bøyespenning, men overfører ikke torsjonsmoment, se fig. 6.1.
- * **Transmisjonsaksler eller drivaksler** (på engelsk shaft og på tysk Welle): Dette er også "rette" aksler, men i forhold til bæreaksler opptar disse torsjonsspenning. Denne type aksel er vist i fig. 6.2.
- * **Spesielle aksler**: Her inngår alle aksler som ikke er "rette" slike som veivaksler, kamaksler, leddaksler og også "rette" aksler som bøyelige fleksible aksler. Eksempler på disse er vist i fig. 6.3 - 6.5.

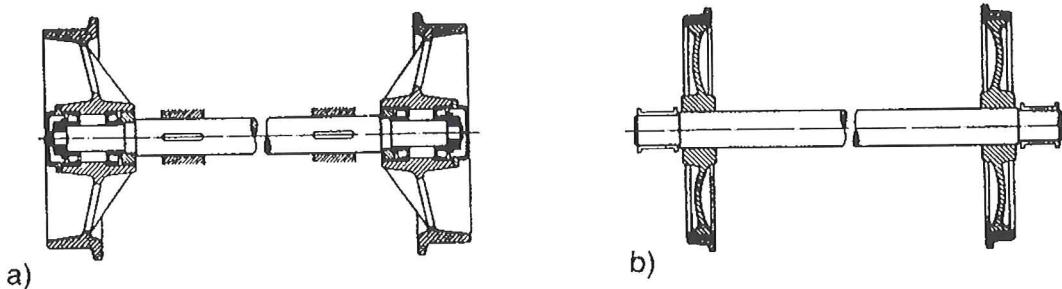


Fig. 6.1. Bæreaksler. a) Stillestående massiv aksel. b) Roterende massiv aksel.

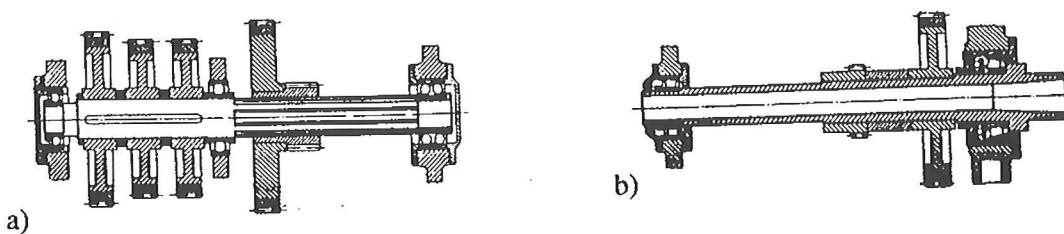


Fig. 6.2. Transmisjonsaksler. a) Massiv aksel. b) Hul aksel (spindel på dreiebenk)



Fig. 6.3. Veivaksel.

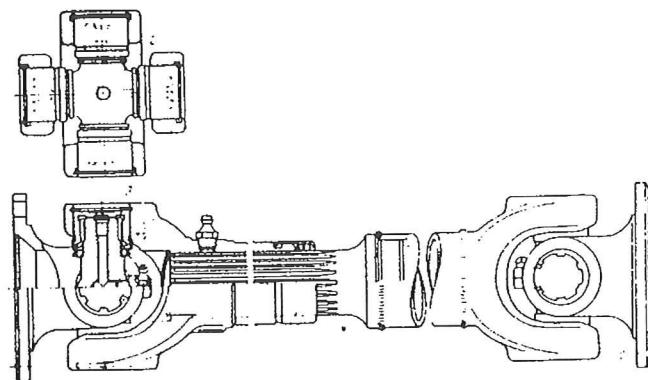


Fig. 6.4. Leddaksel.

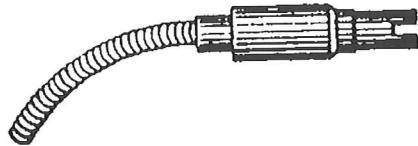
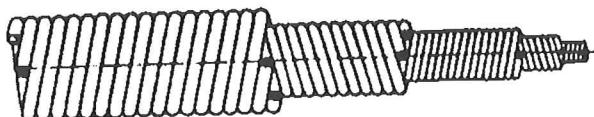


Fig. 6.5 Fleksibel aksel.

Dette er aksler som man observerer i praksis og i nær alle sammenhenger hvor noe skal rotere

6.2. MATERIALVALG OG BEARBEIDING

Valg av materiale er viktig ved konstruksjon av aksler. Følgende stål benyttes avhengig av bruksområde / maskinkonstruksjon:

- * Ulegerte stål benyttes når stivheten EI er avgjørende.
- * Legerte stål benyttes når det kreves stor slitestyrke.
- * Støpestål benyttes ved spesielle aksler med spesiell form som veivaksler og kamaksler.

Det kreves også god oversikt over belastninger, miljø osv for å kunne velge materiale.

En "rett" aksel vil normalt være smidd eller valset. Typisk tilvirkning blir da dreiling og evt. sliping. Dette er kjent teknologi og ikke noe problem. Noe man imidlertid skal være oppmerksom på er såkalte komprimerte aksler (også kalt "blankvals"): dette er halvfabrikata som er kaldvalset under høyt trykk (mekanisk herding) og leveres fra stålverkene. Under kaldvalsingen oppstår spenninger i stålet og ved evt. bearbeiding utløses disse spenningene og akselen kan slå seg. Lager og nav må derfor festes med krympeforbindelse eller med klemhylse, omtalt i hhv. kap. 4 og kap. 7.

6.3. FORMGIVNING

Formen på en aksel er avhengig av hvordan lager og nav festes til akslingen. Dette er vist i fig. 6.6.

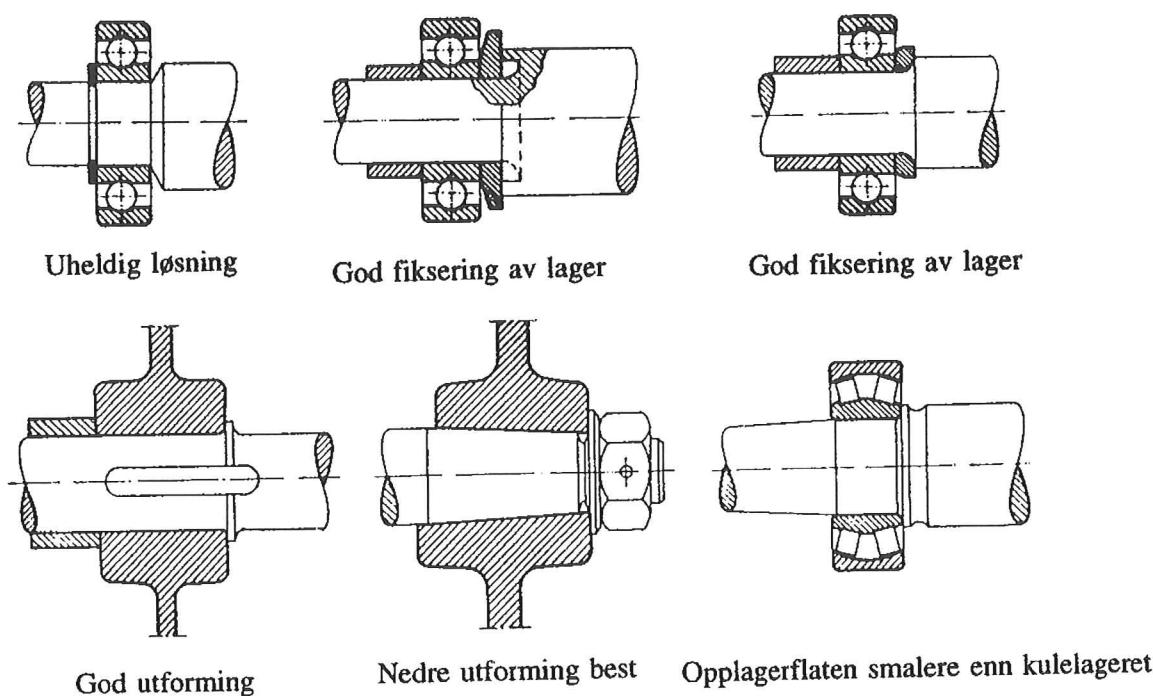


Fig. 6.6 Formgivning.

Nærmere detaljer om formgivning finnes i Norsk standard:

- Form og dimensjon: NS, emnegruppe 420, hvor de mest aktuelle standarder er:
 - NS 5165 - Akseltapper Oversikt
 - NS 5166 - Sylinderiske akseltapper Lang type
 - NS 5167 - Koniske akseltapper Lang type.
 - NS 5168 - Koniske akseltapper Lang type. Innvendige gjenger.
 - NS 5169 - Koniske akseltapper Kort type Utvendige gjenger
 - NS 5170 - Koniske akseltapper Kort type. Innvendige gjenger.
 - NS 5175 - Akselhulkiler
- Akseltoleranser: NS, emnegruppe 372, hvor de mest aktuelle er:
 - NS 1564 - Toleranser for konuser Konisitet 1:3 til 1:500 Lengde 6 til 630 mm

NS-ISO 268-2 - ISO-system for toleranser og pasninger. Del 2: Tabeller over standard toleransegrader og grenseavvik for boring og aksler
 NS-ISO 8062 - Toleranser for støpte deler av metalliske materialer.

Det overlates til den interesserte leser å gå nærmere inn på disse emnegrupper og standarder.

6.4. DIMENSJONERING AV AKSLER

Tidligere ble definert inndeling av typer aksler avhengig av opptrædende spenning; bæreaksler (bøyespenning) og transmisjonsaksler (torsjonsspenning). Men avhengig av den konstruktive utforming av akselen kan begge spenninger opptre selv om det fortsatt er en transmisjonsaksel, dette er typisk vist i fig. 6.7.

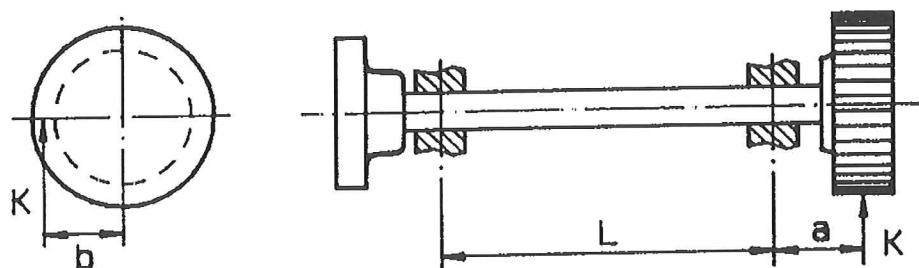


Fig. 6.7. En typisk konstruktiv utforming av en transmisjonsaksel hvor både bøyning og torsjon opptrer.

Det antas en sylinderisk form på akselen, og denne kan være hul eller massiv. Ettersom den konstruktive utforming av akselen gir både bøyning og torsjon blir spenningskomponentene som følger:

* Bøyespenning pga. armen a (avstand fra tannkraft til opplager):

$$\sigma_b = M_b / W \quad (6.1)$$

* Torsjonsspenning pga. armen b (tannhjulets radius):

$$\tau_b = T / W_p \quad (6.2)$$

Avhengig om akselen er hul eller massiv vil motstandsmomentet (W) selvfølgelig bli forskjellig, og for disse tilfellene gjelder:

* Hul aksel: $W = \pi(D^4 - d^4) / 32D$

* Massiv aksel: $W = \pi d^3 / 32$

Det polare motstandsmomentet: $W_p = 2 W$

Ettersom spenningskomponentene angriper normalt på hverandre kreves beregning av en jevnføringsspenning (ekvivalentspenning) for å sjekke om belastningen er akseptabel:

$$\sigma_j = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_v^2} = \frac{32\sqrt{M_b^2 + 0.75T^2}}{\pi d^3} \quad (6.3)$$

Likningen gjelder ved statisk belastning

Ved å sette σ_j lik σ_{till} og påkjenningene gitt ved momentene M_b og T er kjent, kan akseldiametren beregnes:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M_b^2 + 0.75T^2}}{\pi \sigma_{till}}} \quad (6.4)$$

For å ta hensyn til utmatningspåkjenningene benyttes følgende formel:

$$\sigma_j = \frac{32\sqrt{M_b^2 + 0.75(\alpha_0 T)^2}}{\pi d^3} \quad (6.5)$$

hvor

- $\alpha_0 = 1.0$; vekslende bøyning og vekslende torsjon
- $\alpha_0 = 0.75$; vekslende bøyning og pulserende torsjon
- $\alpha_0 = 0.6$; vekslende bøyning og hvilende torsjon

Fra tidligere huskes at ved vekslende påkjenning varieres mellom en positiv og en negativ verdi, ved pulserende påkjenning varieres mellom to positive eller to negative verdier og ved hvilende er påkjenningen konstant.

I maskinkonstruksjoner er vekslende bøyning og hvilende torsjon mest vanlig.

Ved beregning av diameteren på en aksel settes σ_j lik σ_{till} . Det tas hensyn til utmatning ved å velge lavere verdier på σ_{till} :

* Ved statisk belastning: $\sigma_{till} = \sigma_F / 3$ til $\sigma_F / 2$

* Ved dynamisk belastning: $\sigma_{till} = \sigma_F / 5$ til $\sigma_F / 4$

Ved jevntykke og glatte aksler benyttes høyeste verdi, mens ved aksler med avtrapninger (kjerv) benyttes laveste verdi

Fig. 6.8 viser en aksel som er belastet med en kraft F (for eksempel gjennom et tannhjul eller reimhjul) på midten av akselen. Reaksjonskraftene i hvert opplager blir dermed $F/2$. Den stiplete konturen med form av en "sigar" viser den teoretiske dimensjon / form på akselen for at akselen skal bli jevnsterk. Slik kan imidlertid ikke akselen utføres for feste av lager, tannhjul, reimhjul o.l. derfor blir akselen i praksis produsert som den ytre konturlinjen viser

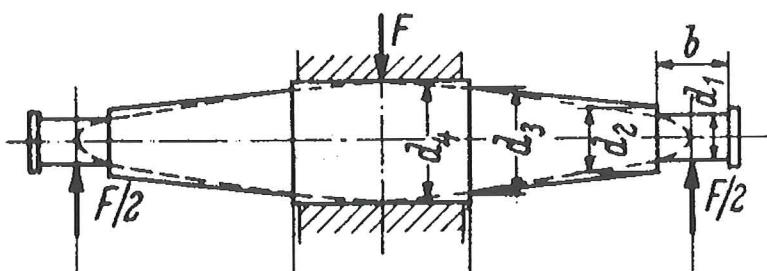


Fig. 6.8. Teoretisk akselform (stiplet), og praktisk utforming (ytterkontur).

Når en omtrentlig/tilnærmet riktig diameter er beregnet etter denne metoden, må dimensjonene kontrolleres med en nøyaktig utmatningsberegnning etter kap 3

6.5. DEFORMASJON AV AKSLER

Stivheten i akselen må være akseptabel slik at nedbøyning (utbøyning) og vinkeldeformasjon (vridning) holdes innenfor gitte empiriske grenser. For det første gjelder følgende erfaringsverdi for forholdet:

$$f / l = 1 / 3000$$

hvor

f : nedbøyning [mm]

l : akselens lengde [mm]

Ved stor utbøyning på akselen vil vinkelen α bli betydelig. Vinkelen setter begrensning for å unngå skjevbelastning og kantpress i lageret:

$$\tan \alpha < 0.001$$

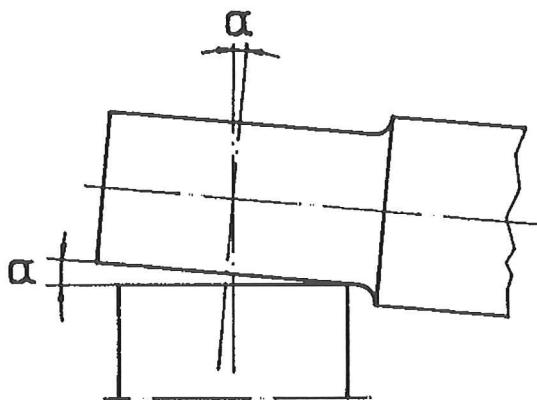


Fig. 6.9. Vinkelen α ved stor utbøyning på akselen

Et alternativ vil være å benytte selvinnstillende lagerskåler hvis kravet til α ikke kan oppnås.

I spesielle konstruksjoner må nedbøyningen beregnes nøyaktig, dette gjelder for elektriske rotorer, turbinhjul og innkapslede hjul og skiver. Ved beregning av nedbøyning gjelder det generelle uttrykket:

$$f = \text{konst } F l^3 / E I \quad (66)$$

hvor

k : konstant avhengig av opplagring og belastning

F : nedbøyningskraften [N]

l : lengden av akselen [mm]

E : elastisitetsmodul [N/mm^2]

I : treghetsmoment [mm^4]

Blir nedbøyningen for stor kan denne endres ved enkle konstruktive endringer. Ved å øke akselens diameter blir nedbøyningen mindre, det samme er tilfellet ved å gjøre akselens lengde mindre. Både økning av diameter og å gjøre lengden mindre er selv sagt også en mulighet. Endring av lengden kan medføre mer konstruksjonsarbeid og flytting av omkringliggende enheter.

Stilles det krav til torsjonsspenning og torsjonsvinkel gjelder: En sirkulær stang som påkjennes av et torsjonsmoment T , vist i fig. 6.10, vil vri seg vinkelen ϕ .

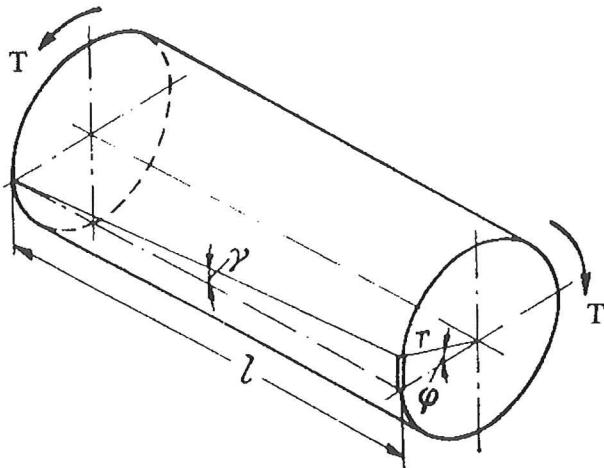


Fig. 6.10. Torsjonsvinkel ϕ .

For dette belastningstilfellet gjelder for skjærtøyning:

$$\gamma = \frac{\phi}{l} r \quad (6.7)$$

hvor

- ϕ : torsjonsvinkel
- l : lengde av stang
- r : radius på stang

Materialhypotesen, som sier at materialet er lineært elastisk, gir spennings-tøyningsrelasjonen:

$$\tau = G \gamma \quad (6.8)$$

hvor

- G : skjærmodul
- γ : skjærtøyning

Torsjonsspenningen i stavtverrsnittet:

$$\tau = \frac{G \phi}{l} r \quad (6.9)$$

Torsjonsvinkelen er gitt av formelen:

$$\varphi = \frac{T l}{G I_p} \quad (6.10)$$

hvor

T : torsjonsmomentet [Nmm]

I_p : polare treghetsmoment [mm⁴]

Ved bruk av kileforbindelser for overføring av torsjonsmoment benyttes følgende kiler i praksis:

* **Passkiler:** Disse benyttes sammen med drivpasning på aksel når momentet er jevnt og virker en vei. Kilen ligger i et fingerfrest spor, og navet må sikres mot aksiell forskyvning. Mellom kile og nav er det noen tids millimeter radiell klaring, mens kilen passer nøyaktig i sporene ved bruk av f.eks pasning H9/k9. Ved større kiler kan det benyttes festeskruer gjennom kilen, se fig 6.11-1 b).

* **Skivekiler:** De såkalte Woodruff-kilene benyttes i verktøymaskiner og motorer. Kilene stiller seg inn i riktig vinkel til navet (en fordel når aksel og nav er formet som konus). Benyttes når svekkelse av aksel ikke har betydning. Skivekile er vist i fig. 6.11-2

* **Drivkiler:** Disse kiler medfører at navet trekkes over og det oppstår kast i navet, og er vist i fig. 6.11-3. Ved tilgjengelig plass for inn- og utdriving av kile fra begge sider benyttes a), hakekile b) benyttes når kilens tynne ende ikke er tilgjengelig for utdriving med kilejager. Bruk av innleggskile c) medfører at navet må slås på og av kilen. Drivkiler blir mindre benyttet idag enn tidligere

* **Spesielle kiler:** Disse typer kiler er vist i fig. 6.11-4. Ved bruk av komprimerte aksler og overføring av små dreiemoment er det gunstig å benytte hul eller flat kile, hhv eI og eII. Ved flat kile øker flatetrykket ved en liten glidning. Forspenning både radielt og tangensielt oppnås ved bruk av eIII, kiletverrsnittets diagonal i radiell retning (gunstig ved vekslende påkjente svingarmer o.l.). Runde kiler eIV benyttes ved sikring ved pressforbindelser.

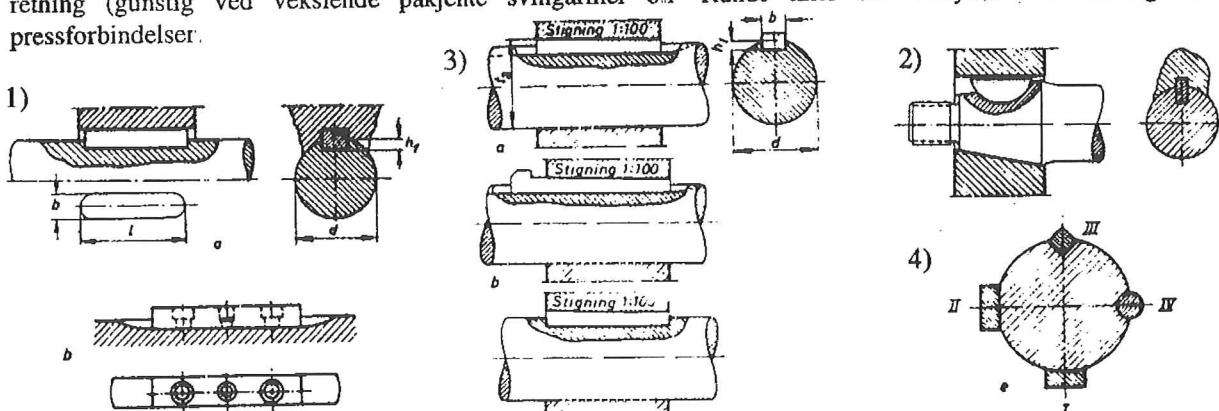


Fig. 6.11 1) Passkiler. a) Små kiler, b) Større kiler med skruer. 2) Skivekile 3) Eksempler på drivkiler
4) Spesielle kiler.

Beregningmessig antas hele torsjonsmomentet overført i kilen, og skjærspenningen i kilen sjekkes.

6.6. BEREGNING AV KRITISK TURTALL

Ved beregning av en aksel er det ikke bare styrken og deformasjoner som må ligge innenfor akseptable grenser. Det samme gjelder akselens turtall. Det skiller da mellom: bøyningskritiske turtall og torsionskritiske turtall.

* Bøyningskritiske turtall.

Tyngdepunktet i en roterende aksel (eller annen maskindel) vil sjeldent ligge i rotasjonsaksen. Dette skyldes at massen er ujevnt fordelt, klaring i lager osv. eller som for en horizontal aksel hvor også nedbøyningen bidrar til avviket

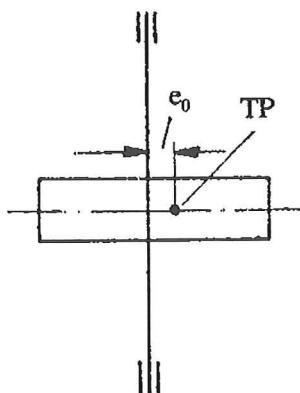


Fig. 6.12. Eksentrisitet og tyngdepunkt.

Avstanden fra maskindelens tyngdepunkt (TP) til rotasjonsaksen kalles **eksentrisiteten** og benevnes e_0 , vist i fig. 6.12. Når akselen settes i rotasjon opptrer en kraft som også virker i tyngdepunktet; **sentrifugalkraften**. Denne kraften gir utbøyningen y i akselen og eksentrisiteten økes til ($e_0 + y$):

$$C = m\omega^2(e_0 + y) \text{ [N]} \quad (6.12)$$

hvor

- m : massen [kg]
- ω : vinkelhastighet [rad/s]
- e_0 : eksentrisiteten [m]
- y : utbøyningen [m]

Når centrifugalkraften angriper midt på akselen gjelder formelen for utbøyning:

$$y = F l^3 / 48 E I \quad (6.13)$$

hvor

- F : fjærkraften i akselen [N]
- l : lengden på akselen [mm]
- E : elastisitetsmodulen [N/mm^2]
- I : treghetsmomentet [mm^4]

Ved å sette centrifugalkraften lik fjærkraften i akselen (likevekt) kan utbøyningen utledes:

$$y = (\omega^2 e_0) / (k/m - \omega^2) \quad (6.14)$$

hvor

- ω : vinkelhastighet
- e_0 : eksentrisitet
- k : en konstant ($= 48 E I / l^3$)
- m : massen

Ved inspeksjon av likningen for utbøyning observeres at økende turtall (økende ω) gir økende (større) utbøyning y . Når nevneren i likningen for utbøyning blir lik null, blir utbøyningen lik ∞ . Den kritiske vinkelhastighet blir da:

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.15)$$

Som en regel innføres:

Unngå turtall i nærheten av det kritiske, eller utfør konstruktive endringer som hindrer stor utbøyning og akselretur hurtig gjennom det kritiske (farlige) området.

Når $\omega > \omega_{kr}$ kalles dette for overkritisk rotasjon, og tilsvarende ved $\omega < \omega_{kr}$ for underkritisk rotasjon.

Driftsturtallet må IKKE ligge mellom 0.8 n_{kr} og 1.25 n_{kr} .

Sammenhengen mellom vinkelhastighet og turtall er gitt av følgende formel:

$$\omega_{kr} = n_{kr} 2\pi / 60 \quad (6.16)$$

For en horisontal aksel (maskindel) med tyngdepunktet midt mellom opplagringene kan det kritiske turtallet beregnes etter formelen:

$$n_{kr} = \frac{30\sqrt{g}}{\pi\sqrt{y}} \quad (6.17)$$

hvor

$$\begin{aligned} g &: \text{tyngdeakselerasjonen } [\text{m/s}^2] \\ y &: \text{nedbøyning pga. akselens tyngde } [\text{m}] \end{aligned}$$

* Torsjonskritiske turtall

Analogt med foranstående vil det også oppstå torsjonsspenninger (dreiemomentet varierer over en omdreining). Det kritiske turtall ved torsjon er gitt av formelen:

$$n_{kr} = 9.5 \sqrt{\frac{G I_p}{L I_z 10^3}} \quad (6.18)$$

hvor

$$\begin{aligned} G &: \text{Akselens skjærmodul } [\text{N/mm}^2] \\ I_p &: \text{Akselens polare treghetsmoment } [\text{mm}^4] \\ L &: \text{Lengden på akselen } [\text{mm}] \\ I_z &: \text{Akselens massetreghetsmoment } [\text{kg m}^2] \end{aligned}$$

Sammenhengen mellom materialets E-modul og skjærmodul er gitt av følgende likning:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.19)$$

For en aksel med konstant tykkelse og definert z-retning i akselens lengderetning blir massetreghetsmomentet:

$$I_z = m r^2 / 2$$

(6.20)

hvor

m: akselens masse
r: akselens radius

For akseler med forskjellige diameter må det integreres:

$$I_z = \int_m r^2 dm \quad (6.21)$$

6.7. KRITISK TURTALL - FLERE MASSER

Ved en masse system antas massen koncentrert i et punkt og akselen anses "masseløs", dette kalles en "idealisiert" rotor, og situasjonen er vist i figur 6.13. Utbøyningen pga. en eller flere masser gir henholdsvis en eller flere svingeformer.

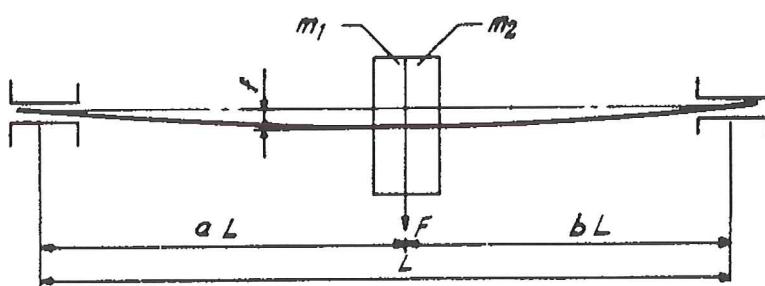


Fig. 6.12. "Idealisert" rotor.

For en aksel med flere masser blir antall kritiske turtall lik antall svingeformer. I fig. 6.14 er vist en aksel med to masser. Når massene svinger i fase (utsving i samme retning) oppnås svingeform av 1. orden. Og analogt når massene svinger i motfase (utsving i motsatt retning) oppnås 2. ordens svingeform.

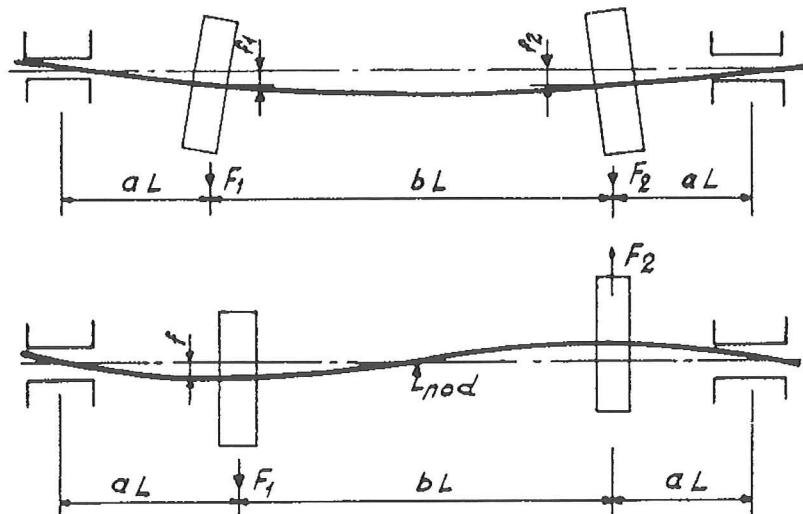


Fig. 6.14 Aksel med to masser gir to svingeformer.

For aksler med flere masser gjelder analogt, som fig. 6.15. viser, 5 masser gir 5 svingeformer

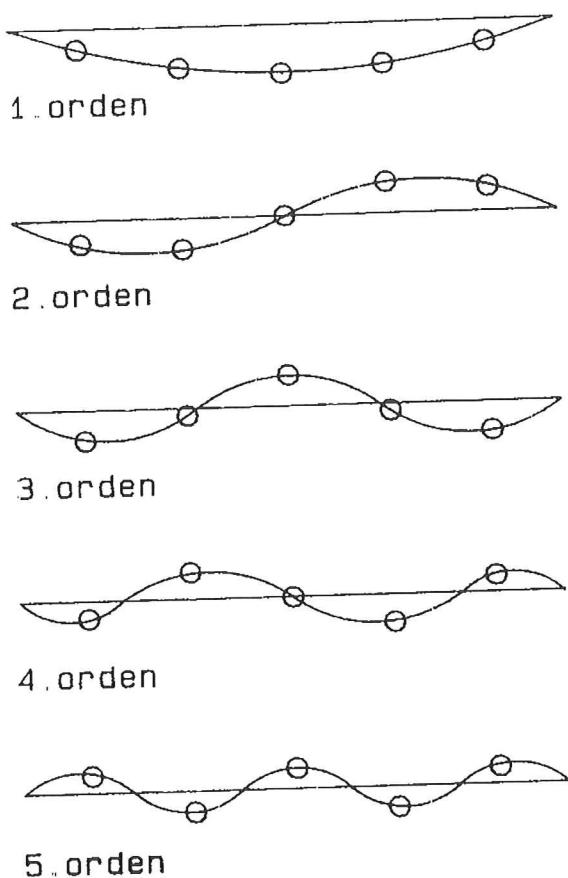


Fig. 6.15. Svingeformer ved aksler med 5 masser.

I praksis vil en aksel kunne tilnærmes et uendelig antall masser, og et uendelig antall svingeformer og kritiske turtall blir resultatet. I praksis nøyer en seg med å beregne det laveste turtall (1. ordens svingeform) når rotoren skal gå med underkritisk turtall.

Når en rotor består av flere masser og/eller akselen ikke kan anses "masseløs" finnes flere metoder for beregning av kritisk turtall. En av metodene er den såkalte **Dunkerleys metode**:

$$\frac{1}{n_{kr}^2} = \frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_3^2} + \dots \quad (6.22)$$

hvor

n_{kr} : kritisk turtall for aksel og samtlige masser.

n_1 : kritisk turtall for akselen hvis kun masse 1 er påfestet

n_2 : kritisk turtall for akselen hvis kun masse 2 er påfestet.

osv.

Dunkerleys metode tar hensyn til at massene innvirker på hverandre og på utbøyningen av akselen og dermed gir et annet turtall enn det ville gitt ved å beregne kun for den største massen.

Når det kritiske turtallet for 2. ordens svingeform ved et system med to like masser plassert mellom opplagerne, og slik at avstanden fra venstre opplager til masse 1, og fra høyre opplager og til masse 2 er lik 1/4 av den totale aksellengde, gir symmetri et infleksjonspunkt (vendepunkt) midt mellom massene hvor utbøyningen er lik null. Dette punktet kan oppfattes som om akselen er opplagret her, og for å beregne 2. ordens svingeform benyttes derfor kun halve aksellengden når den tilhørende utbøyningen skal beregnes.

NB! Det presiseres at det normalt er kun massen eller massene samt akselstivheten som påvirker kritisk turtall. Eksterne krefter gir også utbøyning, men de påvirker ikke kritisk turtall så lenge disse ikke endres med akselutbøyningen. I praksis vil tilleggsmasse pga. reim og belastningsendringer pga reimstramninger påvirke kritisk turtall minimalt

6.8. BEREGNINGSEKSEMPLER

I dette kapittel gjennomgås flere eksempler på beregning av akseldiameter under ulike betingelser.

* EKSEMPEL 1

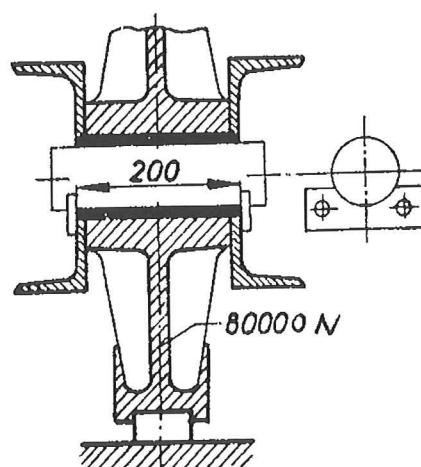


Fig. 6.16 Kranhjul med lagerføring

Fig. 6.16 viser et kranhjul med lagerføring som roterer om en fast aksel. Ved bruk av to låseplater hindres akselen i å rottere. Materiale i aksel: St60

Det forutsettes jevnt fordelt last på akselen. Dette er en glatt aksel og ingen kjervvirkning. Oppgitt: $\sigma_{\text{till}} = \sigma_p / 3$

Bestem akseldiametren

* LØSNING 1

$$M_b = P L / 8 = 2.0 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$d = 3 \sqrt{\frac{32 M_b 3}{\pi \sigma_F}}$$

Innsatt gir $d = 56.7$ mm og det velges da standard dimensjon: $d = 60$ mm

* EKSEMPEL 2

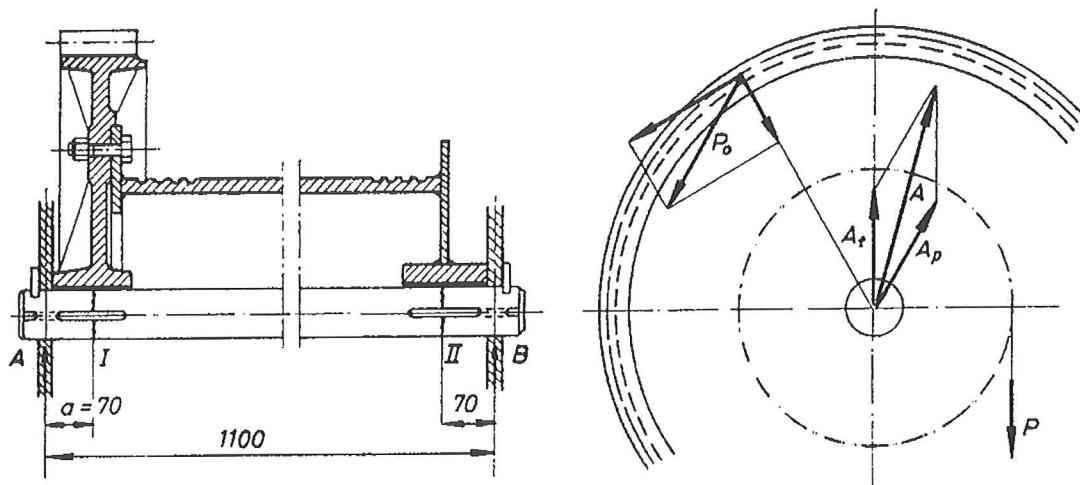


Fig. 6.17 Trommelaksel

Fig. 6.17. viser trommelakselen for en løpekran. På trommelen løper to ståltau med samlet kraft $P = 28000$ N (angriper alltid midt på trommelen pga. symmetrien). Opplagerkraftene pga. taukraften blir derfor like store. Tanntrykket er oppgitt: $P_0 = 15500$ N. Materiale i aksel: St50. $\sigma_{\text{till}} = \sigma_F / 3$

Beregn akseldiameters.

* LØSNING 2

Opplagerkraft pga. taukraft: $A_t = B_t = 14000$ N

Opplagerkraft pga. tanntrykket (ved A): $A_p = P_0 (100 - 70) / 1100 = 14500$ N

Resulterende opplagerkraft (se fig. 6.14.): $A = 26600$ N

Bøyemoment: $M_b = A a = 1862000$ N

$$d = 3 \sqrt{\frac{32 M_b 3}{\pi \sigma_F}}$$

Innsatt gir $d = 57.8$ mm og det velges da standard dimensjon: $d = 60$ mm.

*** EKSEMPEL 3**

En vifterotor med masse: $m = 100 \text{ kg}$ roterer med underkritisk rotasjon; $n = 0.7 n_{kr}$. Avstanden mellom stålakselens opplagringer er 10 m , og rotoren er plassert midt mellom opplagringene. Turtallet på rotoren oppgis til 650 o/min .

Beregn akseldiameteren og velg en standarddimensjon!

*** LØSNING**

Det kritiske turtallet er gitt:

$$n_{kr} = \frac{n}{0.7} = 929 \text{ o/min} = \frac{30\sqrt{g}}{\pi\sqrt{y}}$$

Dette gir nedbøyningen for akselen:

$$y = \frac{30^2 \cdot 9.81}{\pi^2 \cdot 929^2} = 1.04 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1.04 \text{ mm}$$

Nedbøyningen er også gitt av:

$$y = \frac{m \cdot g \cdot l^3 \cdot 64}{48 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4}$$

Fra denne likning kan videre akselens diameter beregnes:

$$d = 4 \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l^3 \cdot 64}{48 \cdot E \cdot \pi \cdot y}} = 37.2 \text{ mm}$$

Skal velge en standarddimensjon, og må da gå opp til 40 mm .

*** EKSEMPEL 4**

En motor yter 40 kW ved $n = 1350 \text{ o/min}$, og skal overføres med en flatereimsdrift, vist i fig. 6.18. Diameter på drivende skive $d = 200 \text{ mm}$, og på den drevne skive $D = 3d$. Materialet i motorakselen har $\sigma_F = 250 \text{ N/mm}^2$. Friksjonskoeffisient mellom skive og reim $\mu = 0.24$. Omslutningsvinkel for skiven som drives $\alpha = 170^\circ$.

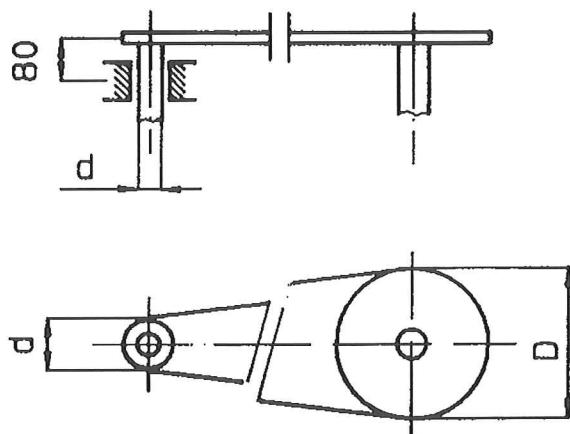


Fig. 6.18. Flatereimsdrift

- a) Hvor stort blir turtalet på den drevne skiva når slippet antas lik 4%?
- b) Beregn nødvendig forspenning i reima
- c) Beregn akseldiametren på motoren.

* LØSNING 4

$$a) n_2 = n_1 \frac{d}{D} 0.96 = 1350 \frac{1}{3} 0.96 = 432 \text{ o/min.}$$

$$b) F = (P 1000 60) / (\pi d n_1) = 2829 \text{ N}$$

$$F_1 = F_2 e^{\mu \alpha} = F_2 2.04$$

$$F = F_1 - F_2 = 1.04 F_2 \quad ; \quad F_2 = 2720 \text{ N}$$

$$F_1 = F + F_2 = 5549 \text{ N}$$

$$F_0 = (F_1 + F_2) / 2 = 4135 \text{ N}$$

$$c) F_a = (F_1 + F_2) \cos 5^\circ = 8239 \text{ N}$$

$$M_b = F_a 80 = 659120 \text{ Nmm}$$

$$M_v = F 100 = 282900 \text{ Nmm}$$

For vekslende bøyning og hvilende torsjon: $\alpha_0 = 0.6$

For jevntykk glatt aksel : $\sigma_{till} = \sigma_F / 4$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{M_b^2 + 0.75(\alpha_0 T)^2}}{\pi \sigma_{till}}}$$

Løsning gir $d = 47.9 \text{ mm}$, og for å velge en standard akseldimensjon velges $d = 50 \text{ mm}$.

*** EKSEMPEL 5**

Et viftehjul av stål med masse $m = 15 \text{ kg}$ er montert på en stålaksel med diameter 28 mm. Total lengden mellom akselens opplagringer er 1000 mm. Vifthjulet er plassert mellom opplagrene og slik at tyngdepunktet for systemet (viftehjul og aksel) blir liggende 300 mm fra venstre opplager.

- a) Beregn kritisk turtall for systemet.

Viften skal kjøres med turtallet $n = 2200 \text{ o/min}$ og i det underkritiske området; $n \leq 0.8n_{kr}$.

- b) Beregn akseldiameteren som gir $n_{kr} = n/0.8$. Velg nærmeste standard akseldiameter.

*** LØSNING 5**

- a) For å finne det kritiske turtallet, må først akselens nedbøyning bestemmes:

$$m_a = \rho (\pi d^2 / 4) l = 483 \text{ kg}$$

$$I = \pi d^4 / 64 = 30.2 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

Nedbøyning pga akselens vekt:

$$y_a = \frac{5 G_a l^3}{384 E I} = 0.1 \text{ mm}$$

Kritisk turtall:

$$n_{kra} = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y_a}} = 2991 \text{ o/min}$$

Nedbøyning pga viftens vekt og tilhørende turtall:

$$y_v = \frac{G c^2 c_1^2}{3 E I l} = 0.35 \text{ mm}$$

$$n_{krv} = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y_v}} = 1599 \text{ o/min}$$

Dunkerleys metode gir:

$$n_{kr} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{n_{kra}^2} + \frac{1}{n_{krv}^2}}} = 1410 \text{ o/min}$$

- b) Kritisk turtall: $n_{kr} = n / 0.8 = 2750 \text{ o/min}$

Løsning av Dunkerleys likning gir:

$$n_{kr} = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g \cdot 10^3}{y_a + y_v}}$$

som igjen medfører:

$$y_a + y_v = 0.118 \text{ mm}$$

Deformasjonene blir:

$$y_a = \frac{5 (\pi d^2 l \rho) g l^3 64}{384 4 E \pi d^4} = \frac{77.9}{d^2} \text{ mm}$$

$$y_v = \frac{G_v c^2 c_1^2 64}{3 E \pi d^4 l} = \frac{213.9 \cdot 10^3}{d^4} \text{ mm}$$

Likningen som må løses for å finne diameteren blir da:

$$\frac{77.9}{d^2} + \frac{213.9 \cdot 10^3}{d^4} = 0.118$$

Løsning gir diameteren:

$$d = 41.4 \text{ mm}$$

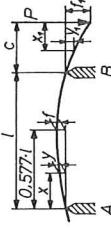
Her må negative løsninger forkastes og standarddimensjon velges $d = 45 \text{ mm}$.

Drager med forskjellig oppplagring og belastning ved bøyning

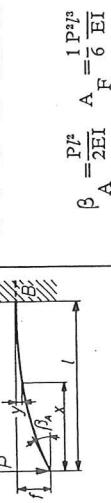
Tegnforklaring:

A, B = Opplakerkrefter
P = Belastning, koncentrisk
eller jevnt fordelt
M, maks M = Bøyemomenter
a, b, c, l, x = avstander

y = Nedbøyning ved x
 β_A, β_B = Nedbøyning
 $\beta_A = \beta_B$ = Vinkel ved A h.h.v. B
E = Elastisitetsmodul
I = Tregheitsmoment = konstant
A_F = Formforandringsarbeide

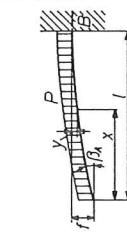


$$B=P \quad M=Px \quad \text{maks } M=P/l \quad y=\frac{1}{6} \frac{P l^3}{EI} \left(2 - 3 \frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} \right) \quad f=\frac{P}{EI} \frac{l^3}{3}$$



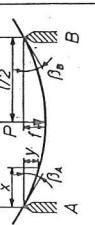
$$\beta_A = \frac{P l^2}{2 EI} \quad A = \frac{1}{6} \frac{P l^3}{EI}$$

$$B=P \quad M=\frac{Px^2}{2l} \quad \text{maks } M=\frac{Pl}{2} \quad y=\frac{Pl^3}{24EI} \left(3 - \frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} \right) \quad f=\frac{P}{EI} \frac{l^3}{8}$$



$$\beta_A = \frac{P l^2}{6 EI} \quad A = \frac{1}{40} \frac{P l^3}{EI}$$

$$A=B=\frac{P}{2} \quad \text{For } 0 < x < \frac{l}{2}: M=\frac{Px}{2} \quad \text{maks } M=\frac{Pl}{4} \quad \beta_A = \beta_B = \frac{P}{16EI} \\ \text{For } 0 < x < \frac{l}{2}: y=\frac{Pl^3}{16EI} \left(\frac{x}{l} - \frac{4x^3}{3l^3} \right) \quad f=\frac{P}{EI} \frac{l^3}{28} \quad A = \frac{1}{96} \frac{P l^3}{EI} = \frac{Pf}{2}$$

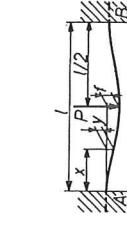


$$A=\frac{Pc_1}{l} \quad B=\frac{Pc}{l} \quad \text{For AC: } M=\frac{Pcx}{l} \quad \text{maks } M=\frac{Pcc_1}{l} \\ y=\frac{Pc^2 c_1^2}{6EI} \left(\frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c_1 c_1} \right) \quad y_1=\frac{Pc^2 c_1^2}{6EI} \left(\frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1 c_1} \right)$$

$$f=\frac{P}{EI} \frac{l^3}{3} \frac{c_1^2}{l^2} \quad A = \frac{Pf}{2} \\ \text{maks } f=c \sqrt{\frac{1+2c_1}{3+3c_1}} \quad \text{For } c < c_1; x_1 \text{ maks } f=c_1 \sqrt{\frac{1+2c}{3+3c}}$$

$$A=B=\frac{P}{2} \quad \text{For } 0 < x < \frac{l}{2}: M=\frac{Pl}{2} \left(\frac{x-1}{l-4} \right) \quad \text{For } \frac{l}{2} < x < l: M=\frac{Pl}{2} \left(\frac{3-x}{4-l} \right) \\ \text{maks } M=\frac{Pl}{8} \quad \text{For } x=\frac{l}{4} \text{ og } x=\frac{3l}{4}: M=0 \quad M_{x=0}=M_{x=l}=-\frac{Pl}{8}$$

$$y=\frac{P}{EI} \frac{l^3}{16} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{3l^3} \right) \quad f=\frac{P}{EI} \frac{l^3}{192} \quad A = \frac{1}{384} \frac{P l^3}{EI}$$

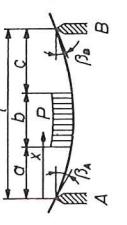


$$\text{For } a=b: \\ A=B=\frac{P}{2} \left(\frac{l-b}{2} \right) \quad \beta = \beta_A = \beta_B = \frac{P}{48EI} (3l^2 - b^2)$$

$$\text{maks } f=\frac{P}{384EI} (8l^3 - 4l^2 b^2 + b^3)$$

$$\text{For } x=a+b: \\ M=Ax-\frac{P(x-a)}{2b}$$

$$A=B=\frac{P}{2} \quad M=\frac{Px}{2} (1-\frac{x}{l}) \quad \text{maks } M=\frac{Pl}{8} \quad \beta_A = \beta_B = \frac{P}{EI} \frac{l^2}{24}$$



$$A=B=\frac{P}{2} \quad M=\frac{Px}{2} (1-\frac{x}{l}) \quad \text{maks } M=\frac{Pl}{8} \quad \beta_A = \beta_B = \frac{P}{EI} \frac{l^2}{24}$$

$$A=B=\frac{P}{2} \quad M=\frac{Px}{2} (1-\frac{x}{l}) \quad \text{maks } M=\frac{Pl}{8} \quad \beta_A = \beta_B = \frac{P}{EI} \frac{l^2}{24}$$

$$A=B=\frac{P}{2} \quad M=\frac{Px}{2} (1-\frac{x}{l}) \quad \text{maks } M=\frac{Pl}{8} \quad \beta_A = \beta_B = \frac{P}{EI} \frac{l^2}{24}$$

$$A=B=\frac{P}{2} \quad M=\frac{Px}{2} (1-\frac{x}{l}) \quad \text{maks } M=\frac{Pl}{8} \quad \beta_A = \beta_B = \frac{P}{EI} \frac{l^2}{24}$$



$$A = B = \frac{P}{2} \quad M = -\frac{P}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad \text{For } x = \frac{l}{2}; \text{ maks } M = \frac{Pl}{24}$$

For $x=0, 7887l \log x=0,2113l : M=0 \quad M_{x=0}=M_{x=l}=-\frac{Pl}{12}$

$$\dot{y} = \frac{P}{EI} \frac{l^3}{24} \left(\frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) \quad f = \frac{P}{EI} \frac{l^3}{384} \quad A = \frac{1}{1440} \frac{Pl^3}{EI}$$

$$A = \frac{5}{16}P \quad B = \frac{11}{16}P \quad M = -\frac{3}{16}Pl = \min M$$

For AC: $M = \frac{5}{16}Px$ For C:maks $M = \frac{5}{32}Pl$ For $x_1 = \frac{5}{22}l : M=0$

$$\text{For BC: } M = Pl \left(\frac{5}{32} - \frac{11x_1}{16l} \right) \quad y = \frac{P}{EI} \frac{l^3}{32} \left(\frac{x}{l} - \frac{5x^3}{3l^3} \right)$$

$$y_1 = \frac{P}{EI} \frac{l^3}{32} \left(\frac{1}{4} \frac{x_1}{l} + \frac{5}{2} \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3} \frac{x_1^3}{l^3} \right) \quad \beta_A = \frac{1}{32} \frac{Pl^2}{EI} \quad A = \frac{7}{1536} \frac{Pl^3}{EI}$$

$$f = \frac{P}{EI} \frac{7l^3}{768} \quad \text{For } x=l \sqrt{\frac{1}{5}} = 0,4472l : \text{maks } f = \sqrt{\frac{1}{5} \frac{Pl^3}{48EI}}$$

$$A = \frac{3}{8}P \quad B = \frac{5}{8}P \quad M = \frac{Px}{2} \left(\frac{3}{4} \frac{x}{l} \right) \quad \text{For } x=\frac{3}{4}l : M=0$$

$M_B = -\frac{Pl}{8} = \min M \quad \text{For C:maks } M = \frac{9}{128} \frac{Pl}{8}$

$$y = \frac{P}{EI} \frac{l^3}{48} \left(\frac{x}{l} - 3 \frac{x^3}{l^3} + 2 \frac{x^4}{l^4} \right) \quad \beta_A = \frac{1}{48} \frac{Pl^2}{EI} \quad A = \frac{1}{640} \frac{Pl^3}{EI}$$

$$\text{For } x' = \frac{1}{16}l \left(1 + \sqrt{33} \right) = 0,4215l : \text{maks } f = \frac{P}{EI} \frac{l^3}{185} \quad f = \frac{P}{EI} \frac{l^3}{187}$$

$$A = B = \frac{P}{2} \quad \text{For } x \leq c; M = \frac{Px^2}{2l} \quad \text{For AB: } M = \frac{Px}{2} \left(1 - \frac{c}{x} - \frac{x}{l} \right)$$

$$M_A = M_B = \frac{Pc^2}{2l} \quad M_C = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{4} - c \right) \quad \text{For } x = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - cl} : M=0$$

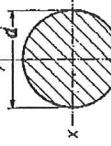
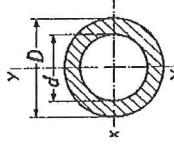
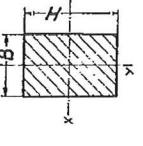
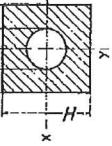
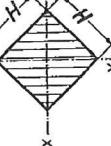
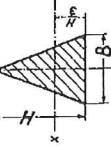
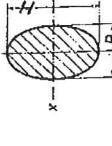
For $c = l \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) = 0,207l : M_A = M_C = \text{maks } M = 0,021447 Pl$

$$\beta_A = \beta_B = \frac{Pa^2}{24EI} \frac{a}{l} \left(1 - 6 \frac{c^2}{a^2} - 1 \right) \quad \text{For } c = 0,225l : \beta_A = \beta_B = 0$$

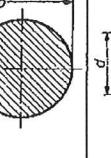
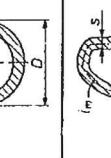
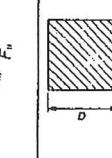
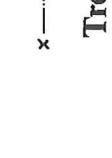
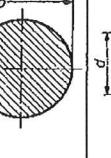
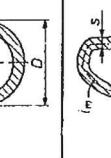
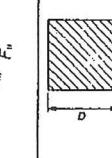
$$f = \frac{Pa^3}{24EI} \frac{c}{l} \left(3 \frac{c^3}{a^3} + 6 \frac{c^2}{a^2} - 1 \right) \quad f_1 = \frac{Pa^3}{384EI} \left(\frac{5}{l} - 24 \frac{c^2}{a^2} \right)$$



Tregheits- og motstandsmonenter ved bøyning

	Tregheitsmoment	Motstandsmoment
	$I_x = I_y = \frac{\pi}{64} d^4$	$W_x = W_y = \frac{\pi}{32} d^3$
	$I_x = I_y = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$W_x = W_y = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D}$
	$I_x = \frac{1}{12} B H^3$ $I_y = \frac{1}{12} H B^3$	$W_x = \frac{1}{6} B H^2$ $W_y = \frac{1}{6} H B^2$
	$I_x = I_y = \frac{1}{4} (\frac{H^4}{3} - \frac{\pi d^4}{16})$	$W_x = W_y = \frac{i}{2H} (\frac{H^4}{3} - \frac{\pi d^4}{16})$
	$I_x = I_y = \frac{i}{12} H^4$	$W_x = W_y = \frac{\sqrt{2}}{12} B H^3$ (for toppen)
	$I_x = \frac{i}{36} B H^3$ $I_y = \frac{1}{48} H B^3$	$W_x = \frac{1}{24} B H^2$ $W_y = \frac{1}{24} H B^2$
	$I_x = \frac{\pi}{64} B H^3$ $I_y = \frac{\pi}{64} H B^3$	$W_x = \frac{\pi}{32} B H^2$ $W_y = \frac{\pi}{32} H B^2$

Tregheits- og motstandsmonenter ved vridning

	Tregheits- og motstandsmoment	
	$I = \frac{B H^3 + b h^3}{12}$ $W = \frac{B H^3 + b h^3}{6H}$	
	$I = \frac{B H^3 - b h^3}{12}$ $W = \frac{B H^3 - b h^3}{6H}$	
	$I = \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$ $W = \frac{b}{6H} (H^3 - h^3)$	
	$I_x = I_y + F a^2$	
	Polare tregheitsmoment	Polaré motstandsmoment
	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$
	$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D}$
	$2(F_u + F_l) s \frac{F_m}{l_m}$ Far små vegtrykkkeiser: $\approx 2 F_m s$ (Bredts formel)	$4 F_m^2 \frac{s}{l_m}$

$$0,141 a^4 = \frac{a^4}{7,11}$$

$$0,208 a^3$$