

Maskinkonstruksjon - Konstruksjonsanalyse.

Kjell G. Robbersmyr

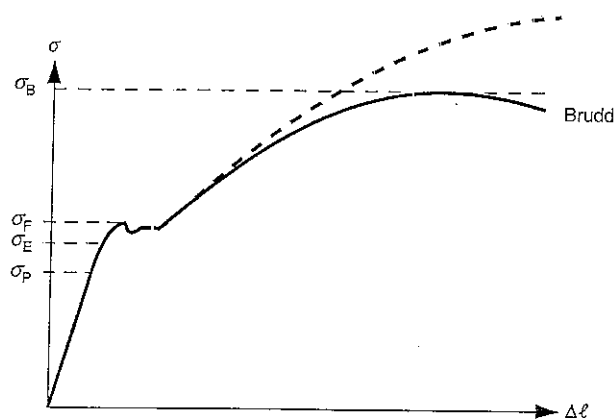
Innledning

Ved all maskinkonstruksjon er det viktig i starten å danne seg en oversikt over hvor maskinen skal plasseres, dvs. hvilket areal eller rom / volum som er til rådighet, og som gir maksimale dimensjoner på maskinen. Deretter bør flere konsepter utvikles, ett konsept velges og videreføres til prototype. Først nå kan analysen utføres og dimensjoneringen av de enkelte deler kan starte.

Det er helt nødvendig å vite hvilke krefter de enkelte elementer i den komplette maskin blir belastet med. Kreftene kan ha form av ytre krefter, maskindelens egen tyngde, og det kan være dynamiske krefter pga masser i bevegelse, eks. sentripetalkrefter. Når kreftene er kartlagt kan spenningene beregnes ved at man antar at Hooke's lov gjelder: spenningene er proporsjonal med forlengelsen eller med vinkeldeformasjonen. Etter at spenningene er beregnet, velges materiale og endelige dimensjoner på de enkelte maskindeler. Vær oppmerksom på at de enkelte maskindeler ofte skal monteres til en komplett konstruksjon. Da er det også under konstruksjonsarbeidet viktig å tenke på montasjen, og tenke helhet.

E-modulen.

Konstruksjonsmaterialer er karakterisert ved elastisitetsmodulen eller bare E-modulen. Denne bestemmes ved å strekkbelaste en stav av gitt materiale. Kan da tegne et såkalt spenning/tøyningsdiagram, vist i figur 1.



Figur 1. a) Strekkbelastet prøvestav b) Spenning/tøyningsdiagram.

Når staven strekkbelastes oppstår en spenning som er proporsjonal med kraften og avhengig av stavens tverrsnittsareal. Når strekkspenningen øker vil også stavens forlengelse øke. På figuren over er det vist flere punkter på kurven.

Punktene angir ulike tilstander i materialet og er definert som følger:

- σ_P : inntil dette punkt gjelder Hooke's lov.
- σ_E : elastisitetsgrense, inntil denne grense oppfører materialet seg elastisk, dvs. materialet går tilbake til sin opprinnelige form etter avlasting. Over denne grensen får materialet varig deformasjon, og materialet er i den plastiske sonen.
- σ_F : flytegrense, forlengelsen av materialet blir tydelig uten større spenningsøkning. Materialet flyter.
- σ_B : bruddfasthet, strekkfasthet, maksimal spenning stangen tåler før brudd. Forlengelsen blir stor.

I området det elastiske (rettlinjede) området av spenning-tøyningskurven gjelder:

- **Hooke's lov:** Spenningene er proporsjonal med forlengelsen eller med vinkeldeformasjonen.

Følgende parametere er definert:

- Absolutt forlengelse: Δl [mm]
- Relativ forlengelse: $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ [--]
- Spenning i staven: $\sigma = \frac{F}{A}$ [N/mm²]
- Hooke's lov: $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ [N/mm²]

Typiske gjennomsnittsverdier for E-modulen:

- Stål: 210 000 N/mm²
- Støpejern 100 000 N/mm²
- Aluminium 70 000 N/mm²
- Kobber: 120 000 N/mm²
- Messing: 90 000 N/mm²

For andre materialer henvises til litteraturen.

Poisson-tallet.

Poisson-tallet finnes også ved å strekkbelaste en stav med opprinnelig lengde l_0 og diameter b_0 . Når staven er strukket til en lengde l_1 er stavens diameter minnet til b_1 . Poisson-tallet er definert som relativ kontraksjon dividert på relativ forlengelse:

$$\nu = \frac{\Delta b / b_0}{\Delta l / l_0}$$

hvor

$\Delta b = b_0 - b_1$, diameterendring

$\Delta l = l_1 - l_0$, lengdeendring

Ved rom-temperatur kan følgende Poisson-tall benyttes:

- Stål: 0,27 – 0,33, vanligvis benyttes 0,3
- Støpejern: 0,25 – 0,29
- Aluminium og aluminiumslegeringer: 0,33
- Kobber: 0,35
- Messing: 0,35

For andre materialer henvises til litteraturen.

Belastninger

Opptredende krefter kan belaste maskinkonstruksjoner på ulike måter: kreftene kan ha forskjellige størrelser og retninger. Kreftene må dermed dekomponeres for å forenkle beregningene. Det er også nødvendig å skille mellom to typer belastninger (beregningsunderlaget er vesentlig forskjellig):

- Statisk belastning: Belastningen er konstant.
- Dynamisk belastning: Belastningen varierer mellom en maksimums last og en minimums last.

For å sjekke om maskindelen har tilstrekkelig kapasitet, kan følgende sikkerhetsfaktorer benyttes avhengig av type belastning:

- Sikkerhet mot flyt: benyttes ved statisk belastning og sikkerhetsfaktoren er definert som

$$n_F = \frac{\sigma_F}{\sigma_e}$$

hvor

σ_F : flytegrense [N/mm²]
 σ_e : ekvivalent spenning [N/mm²]

- Sikkerhet mot brudd: benyttes ved statisk belastning og sikkerhetsfaktoren er definert som

$$n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_e}$$

hvor

σ_B : bruddgrense [N/mm²]
 σ_e : ekvivalent spenning [N/mm²]

- Sikkerhet mot knekking: behandles ikke her!
- Sikkerhet mot utmatting: benyttes ved dynamisk belastning og sikkerhetsfaktoren er definert som

$$n_u = \frac{\sigma_{a(\text{red})}}{\sigma_{ea}}$$

hvor

$\sigma_{a(\text{red})}$:	reduisert amplitudespenning [N/mm ²]
σ_{ea}	:	opptredende ekvivalent amplitudespenning [N/mm ²]

Typiske verdier for sikkerhetsfaktoren kan være (må vurderes ved de enkelte tilfellene):

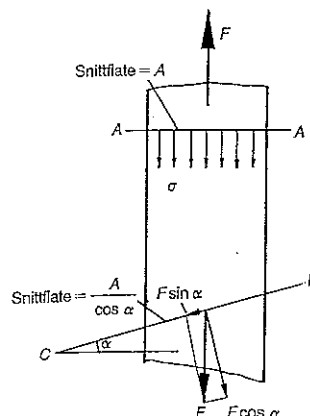
- mot flyting: $n_F = \begin{matrix} 1,3 - 1,8 & (\text{strekk og trykk}) \\ 1,0 - 1,8 & (\text{bøyning}) \end{matrix}$
- mot brudd: $n_B = 2,0 - 3,0$
- mot knekking: behandles ikke her!
- mot utmatting: $n_U = 1,3 - 2,0$

Spenningsanalyse

Spenninger av forskjellig type virker nesten alltid samtidig på en konstruksjonsdel. Ulike materialer kan oppføre seg veldig forskjellig når de utsettes for ulike spenninger. En viktig definisjon er:

- **Normalspenninger** er definert som de spenninger som opptrer vinkelrett på et snitt.

Opptrer normalspenningene i en maskindel i kun en retning har vi en-akset spenningstilstand, noe som opptrer svært sjelden i praksis. En rett strekkbelastet stang er vist i figur 2.



Figur 2 Strekkbelastet stang.

I normalsnittet (vinkelrett på kraftretningen) oppstår strekkspenningen (eller normalspenningen):

- $\sigma = \frac{F}{A}$

I dette snittet er det ingen skjærspenning. Men legger vi et snitt som danner vinkel α med normalsnittet vil det være både normalspenning (ligger vinkelrett på snittflaten) og skjærspenning (ligger parallelt med snittflaten):

- $\sigma_1 = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A / \cos \alpha} = \sigma \cos^2 \alpha$ (normalspenning)

- $\tau = \frac{F \cdot \sin \alpha}{A / \cos \alpha} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$ (skjærspenning)

Et av addisjonsteoremene er på formen: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$. Ved å sette $\alpha = \beta$ og sette inn i teoremet over får vi $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, og dermed overgangen som vist.

En enkel test viser følgende resultater:

Når $\alpha = 0$ følger $\sigma_1 = \sigma = \frac{F}{A}$ og $\tau = 0$

Når $\alpha = 45^\circ$ følger $\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma$ og $\tau = \frac{1}{2} \sigma = \tau_{\text{maks}}$

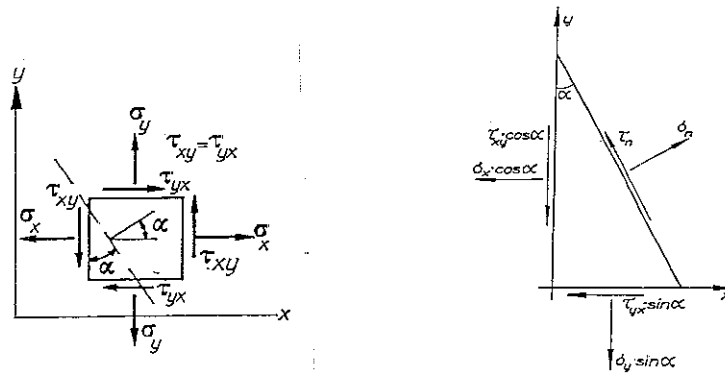
Når $\alpha = 90^\circ$ følger $\sigma_1 = 0$ og $\tau = 0$

Resultatene viser at når vinkelen på snittet er 0 opptrer kun strekkspenning. Ved en vinkel på 45° vil strekkspenningen dekomponeres i halv spenning i hver retning, hhv. Normalspenning og skjærspenning. Når vinkelen blir 90° ligger snittet i den strekkbelastede stangens lengderetning og både normalspenning og skjærspenning blir lik null.

To-akset spenningstilstand, dvs. at maskindelen har normalspenninger i to retninger, er mest vanlig i praksis, og overkommelig å behandle. Tre-akset spenningstilstand er heller ikke uvanlig i praksis, denne er vanskelig å behandle teoretisk, men som oftest er den ene komponenten så liten at den kan neglisjeres.

Hovedspenninger

I et element med to-akset spenningstilstand tenker vi oss at det finnes både normalspenninger og skjærspenninger. Figur 3 viser både et typisk element og et nytt snitt som danner vinkelen α med den ene sidekanten i elementet.



Figur 3 a) Et element ved to-akset spenningstilstand, b) tilhørende snitt ved vinkel α .

Snittet er i likevekt og det gir oss følgende normalspenning og skjærspenning:

- $$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$
- $$\tau_n = \tau_{xy} \cos 2\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha$$

Og skjærspenningen er 0 ($\tau_n=0$) når:

- $$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

En viktig definisjon er:

- **Hovedspenninger** er definert som de spenninger som opptrer i en spenningsretning hvor skjærspenningene er null. Hovedspenningene betegnes σ_1 og σ_2

Bruddhypoteser

Når en strekkprøvestav blir påkjent til flyting eller brudd, vil største normalspenning være σ_F eller σ_B . Vi har også kontroll på den maksimale skjærspenning τ_{maks} da denne er lik halvparten av σ og ligger i et plan som danner 45° med prøvestavens lengdeakse. Ved fler-akset spenningstilstand kan imidlertid spenningsbildet bli uoversiktlig, og vi må derfor arbeide etter såkalte bruddhypoteser. Da det ikke er mulig å si med sikkerhet hva slags påkjenning som fører til flyting eller brudd, forenkler vi behandlingen ved å innføre en sammensatt, såkalt ekvivalent eller jevnføringsspenning: σ_e . Denne sammensatte spenningen tenkes overført til en en-akset normalspenning som belaster materialet like sterkt. Blant flere bruddhypoteser nevner vi følgende:

- Deviashonshypotesen, også kalt formendringshypotesen. Denne stemmer best med virkeligheten når det gjelder konstruksjonsstål, og har vunnet størst utbredelse. Hypotesen bygger på at når en maskindell utsettes for deformasjoner blir det lagret en viss mengde energi i maskindelen. Lagringen kan skje på to måter: 1) Delens volum

blir endret. 2) Det skjer en vinkelendring. Særlig den siste kan nyttes som mål på belastningen av materialet. Følgende formel gjelder:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

- Skjærspenningshypotesen, forutsetter at største opptredende skjærspenning er farligst for materialet. Følgende formel gjelder:

$$\sigma_e = 2 \tau_{\text{maks}} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

- Hovedspenningshypotesen, er basert på at materialet ødelegges idet den maksimale hovedspenningen når flytegrensen σ_F eller bruddgrensen σ_B . Denne hypotesen passer bra for en del sprø materialer, som for eksempel støpejern. Følgende formel gjelder:

$$\sigma_e = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

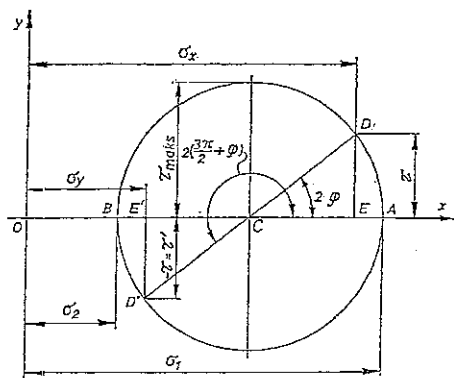
Devasjonshypotesen har som sagt vunnet størst utbredelse og bør benyttes ved konstruksjonsstål.

Mohr's spennings sirkel

Grafisk bestemmelse av hovedspenninger utføres ved å tegne den såkalte "Mohr's sirkel":

- Opptrødende spenninger, hhv. σ_x og σ_y avsettes langs x-aksen.
- Fra disse punktene avsettes opptredende skjærspenninger τ og τ' parallelt med y-aksen. Den ene går i positiv retning og den andre i negativ retning.
- Ved å trekke linjen mellom de to siste punktene finnes sentrum i den søkte spennings sirkelen i skjæringspunktet med x-aksen.
- Linjestykket omtalt over utgjør diameteren i sirkelen.
- Ved å slå sirkelen med diameter nevnt over finnes hovedspenningene σ_1 og σ_2 der hvor sirkelen skjærer x-aksen.
- Maksimal skjærspenning er sirkelens største y-verdi.

Eksempel på Mohr's spennings sirkel er vist i figur 4.



Figur 4. Mohr's spennings sirkel

Retningen på de opptredende spenningene er grei å tegne inn i sirkelen. Når det gjelder skjærspenningen derimot gjelder følgende konvensjon:

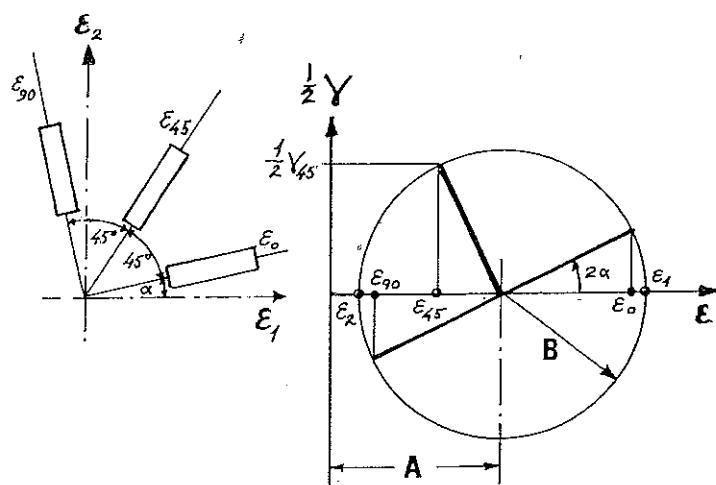
- + : mot urviseren,
- - : med urviseren,

Hovedspenningene (skjærspenningene er da null) kan også beregnes fra følgende formler:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \bullet \quad \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

Mohr's tøyningssirkel

Ved bruk av pålimte strekkklapper kan en måle tøyninger i et materiale. Strekkklapper finnes i flere varianter med hensyn på type filament, antall filament osv. En type strekkklapp er den såkalte "strekkklapprosetten" som benyttes når både hovedspenningene og spenningsretningene er ukjente. Rosetten har tre filamenter i tre ulike retninger (mest vanlig er lappene plassert i $0^\circ / 45^\circ / 90^\circ$, men $0^\circ / 120^\circ / 240^\circ$ finnes også), innebygd i en og samme lapp. For en strekkklapp med filamentene plassert i $0^\circ / 45^\circ / 90^\circ$ kan ved analysen benyttes den såkalte Mohr's tøyningssirkel, vist i figur 5.



Figur 5. Mohr's tøyningssirkel.

Tøyningene i de tre måleretningene er betegnet: ϵ_0 , ϵ_{45} og ϵ_{90} . Det er imidlertid hovedtøyningene ϵ_1 og ϵ_2 som er interessante. Disse kan beregnes fra følgende formler:

- $\varepsilon_1 = A + B = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} + \sqrt{\frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{45})^2}{2} + \frac{(\varepsilon_{45} - \varepsilon_{90})^2}{2}}$

- $\varepsilon_2 = A - B = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} - \sqrt{\frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{45})^2}{2} + \frac{(\varepsilon_{45} - \varepsilon_{90})^2}{2}}$

Vinkelen α mellom ε_0 og hovedspenning ε_1 finnes av følgende formel:

- $\tan 2\alpha = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90} - \varepsilon_{45}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{90}}$

Dersom likningen over ikke har løsning, kan teller og nevner regnes ut hver for seg, og kvadranten til 2α kan bestemmes ut fra tabellen under:

2α	$0 - 90^\circ$	$90 - 180^\circ$	$180 - 270^\circ$	$270 - 360^\circ$
Teller	+	+	-	-
Nevner	+	-	-	+

NB: Positiv tøyning tilsvarer strekk og negativ tøyning tilsvarer trykk.

Når hovedtøyningene er kjent kan hovedspenninger beregnes fra følgende formler:

- $\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2)$

- $\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1)$

hvor ν er poissons tall

E-modulen er gjerne oppgitt med en usikkerhet på i størrelsesorden 5%, og da er det ingen grunn til å korrigere for strekkklappens tverrfølsomhet som kanskje ligger på 1%.

Typiske bruddflater

Skiller mellom to typer belastninger (da disse gir helt forskjellige former for brudd):

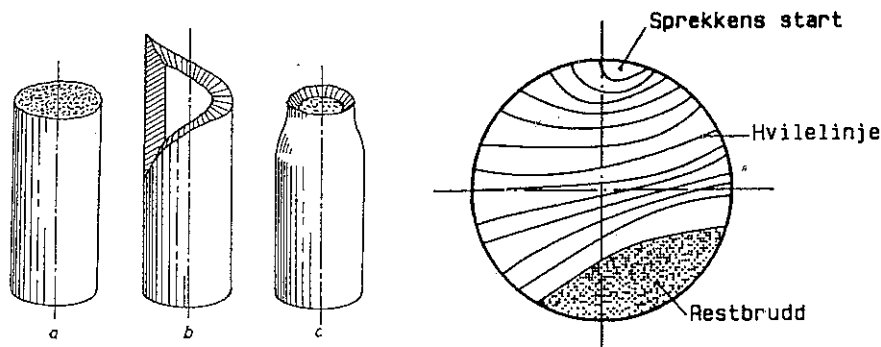
- Statisk belastning: Høye spenninger fører til flyting i materialet. Flyting utjevner spenningene over tverrsnittet, og materialet tåler høyere spenninger. Ved for høye spenninger oppstår brudd (glidebrudd). Ved strekkbelastning vil dette fortone seg som en innsnøring av tverrsnittet. Dette er typisk for brudd i seige materialer.

- Dynamisk belastning: Bruddet oppstår "plutselig", og har startet ved en uregelmessighet i materialet (som oftest i overflate), og har dannet en sprekk. Sprekken har blitt gradvis større, og til slutt er tverrsnittet for lite for kraften som skal overføres og brudd oppstår.

Typiske bruddflater er vist i figur 6. Følgende kjennetegn gjelder for bruddflaten:

- Slitebrudd: oppstår ved **sprø materialer** (støpejern, glass, stein, betong) ved strekkprøving. Bruddflaten ligger her vinkelrett på kraftretningen, det er ingen tverrkonsentrasjon i bruddsonen og bruddflaten er grovkornig.
- Glidebrudd: oppstår ved fullstendig **seige materialer**. Bruddet oppstår ved glidning langs det plan hvor skjærspenningen er størst, dvs i 45° med hovedaksen.
- Kombinert brudd: Strekkstav av et **seigt materiale** vil vanligvis gi brudd som er både slitebrudd og glidebrudd. Bruddflaten er finkornig og ligger ytterst i 45° med strekkretningen, og innerst normalt på denne.

Formen på delene virker også inn ved valg av materiale og dimensjoner. Og husk at tverrsnittsoverganger og kjerver medfører spenningskonsentrasjoner slik at maskindelens dimensjoner må økes.



Figur 6. a) Slitebrudd, b) Glidebrudd, c) Kombinert brudd, d) Utmatningsbrudd.

Maskinkonstruksjon - fremgangsmåte.

Fremgangsmåten ved konstruksjon kan være: 1) Skisser den aktuelle delen. 2) Tegn på de krefter som belaster delen, statisk belastning, dynamisk belastning, delens egen tyngde. Med andre ord: Etabler en beregningsmodell. 3) Beregn spenningene. 4) Velg materiale, ved tillatt spenning og nødvendig sikkerhet. 5) Fastlegg endelige dimensjoner. 6) Utfør tegning eller modellering.

Dimensjoneringskriterier

Flere dimensjoneringskriterier finnes, men de mest vanlige er:

- Dimensjonering med hensyn på flyting.
- Dimensjonering med hensyn på brudd.
- Dimensjonering med hensyn på knekking.
- Dimensjonering med hensyn på utmatting.