METHODE D'EULER

Table des matières

Hormis quelques cas d'école simples, on ne sait pas déterminer d'expressions analytiques pour les solutions d'équations différentielles. Le but de ce chapitre est de présenter la méthode d'Euler, qui sert à en calculer des approximations.

De nombreux phénomènes physiques se modélisent à l'aide d'équations différentielles pour lesquelles on ne dispose pas de solutions analytiques : un pendule amorti nous amène à étudier l'équation $\ddot{\theta} = -k_1 \sin\theta - k_2\dot{\theta}$, les problèmes de cinétique chimique conduisent à des systèmes différentiels non linéaires décrivant les évolutions de différents réactifs au cours du temps, et les phénomènes qu'on observe en mécanique des fluides sont en partie décrits par les équations aux dérivées partielles non linéaires de type Navier-Stokes.

En mathématiques, ces équations ont leur intérêt propre et étudier le comportement qualitatif de solutions est nettement plus aisé si on peut visualiser une approximation raisonnable de celles-ci.

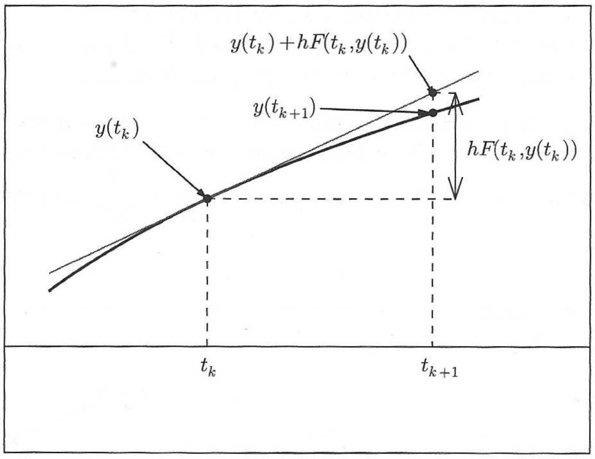
I Principe de la méthode d'Euler

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure[1] que sous des conditions raisonnables, il existe une unique application y de classe C^1 sur $[a, b]$ dont la valeur est imposée en a et qui vérifie une équation de la forme $y'(t) = F(t, y(t))$ pour tout $t \in [a, b]$. L'objet des schémas numériques est d'obtenir des approximations de ces solutions dont la théorie donne l'existence de façon non constructive. En pratique, on tente en général d'approcher y en un certain nombre de points répartis sur l'intervalle $[a, b]$.

Il s'agit de calculer une approximation y_k des $y(t_k)$, avec $t_k = a+kh$, où $h = \dfrac{b-a}{n}$ est un pas qu'il conviendra d'ajuster. De façon très simple, si on écrit :

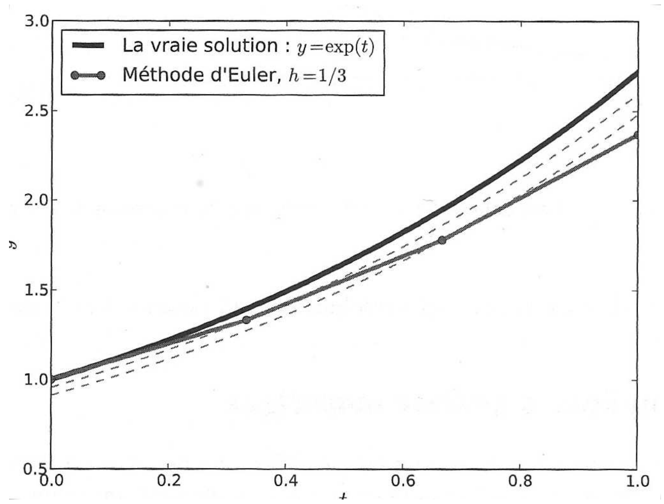
$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(u)du = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(u, y(u))du \approx hF(t_k, y(t_k))$$

alors on obtient la méthode d'Euler : les approximations sont calculées de proche en proche via la formule suivante : $y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k)$ (voir figure ci-dessous). On initialise bien entendu avec $y_0 = y(a)$, qui sera la seule valeur « exacte » calculée.



1. Comme vu en cours de mathématiques, c'est évidemment plus compliqué. Par exemple, si F n'est pas linéaire vis-à-vis de y, on est juste assuré de l'existence d'une solution dont la valeur en a est imposée, mais on ne sait pas si elle est définie jusqu'en b.

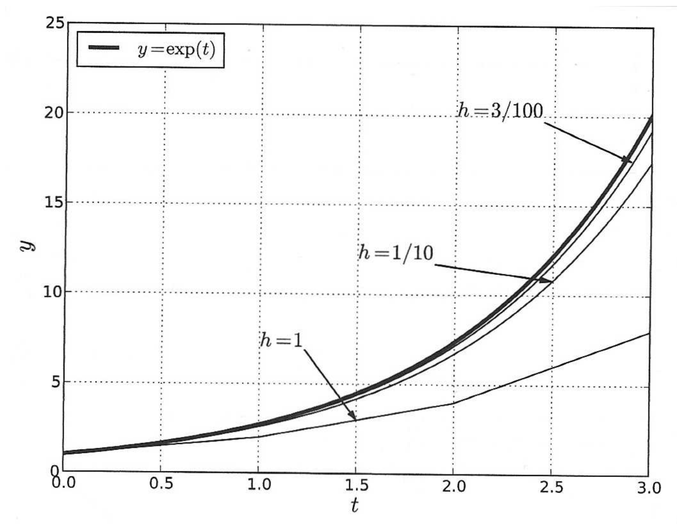
Graphiquement, cela revient à faire des approximations successives de courbes par des tangentes. On va prendre pour exemple l'équation différentielle $y'(t) = y(t)$ (dont les solutions sont les $t \mapsto Ke^t$) et on va approcher sur $[0, 1]$ l'unique solution telle que $y(0) = 1$, autrement dit la fonction exponentielle. Pour $n = 3$, c'est-à-dire un pas de $\frac{1}{3}$, on obtient la figure suivante :



On peut facilement se convaincre que :

- Quand le pas va diminuer, l'approximation va s'améliorer.
- Dans une situation convexe comme ici, la méthode d'Euler conduit irrémédiablement à s'écarter de la solution au fur et à mesure qu'on s'éloigne de a.

Le deuxième point sera partiellement amélioré avec des schémas moins élémentaires. Pour le premier point, on peut visualiser sur la figure ci-dessous les solutions de l'équation précédente avec des pas de 1, $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{100}$ sur l'intervalle $[0, 3]$.

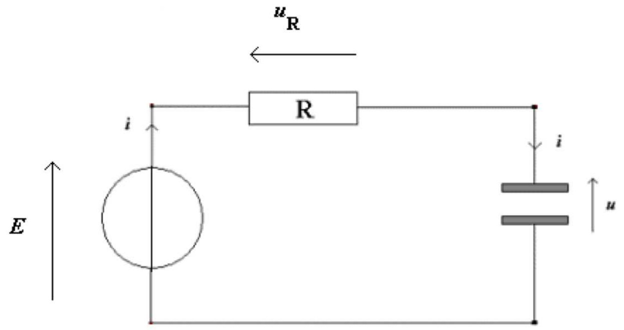


De fait, la méthode d'Euler donne des résultats très satisfaisants dans beaucoup de situations pratiques.

II Mise en oeuvre : tension dans un circuit RC

II.1 Problématique et Travail Préliminaire

On cherche à déterminer numériquement l'évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps[2].



La tension aux bornes du condensateur est donnée ci-dessous :

$$E(t) = U_R(t) + U_c(t)$$

avec :
- E : la tension d'alimentation,
- U_R : la tension aux bornes de la résistance et $U_R(t) = R.i(t)$,
- U_C : la tension aux bornes du condensateur et $U_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt$.

Ce qui conduit à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$E(t) = R.C.\frac{dU_C}{dt}(t) + U_C(t)$$

Avec les paramètres ou conditions initiales :
- $E(t) = U_0$: la tension,
- $U_C(0) = 0$: condensateur initialement déchargé,
- R : valeur de la résistance,
- C : capacité du condensateur.

On a donc :

$$\frac{dU_C}{dt}(t) = \frac{E(t) - U_C(t)}{R.C} \quad \text{et } U_C(0) = U_0$$

Pour la suite on posera :

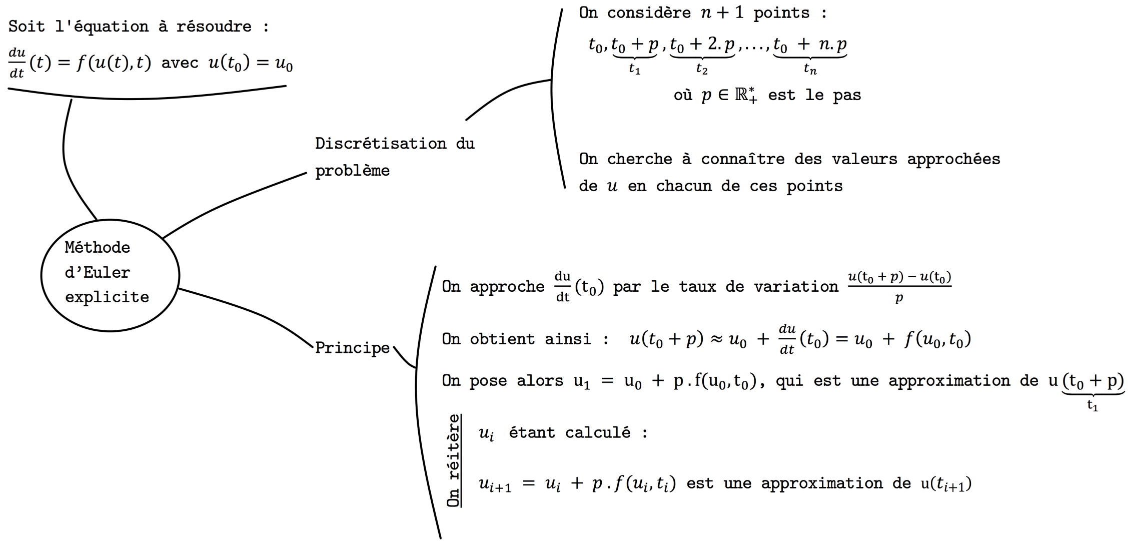
$$f(U_C(t), t) = \frac{E(t) - U_C(t)}{R.C}$$

EXERCICE(S)
Ecrire la fonction `derivee_UC(Uc_t,t,U0,C,R)` qui renvoie la valeur de la dérivée de la tension aux bornes du condensateur en fonction de :
- la tension aux bornes du condensateur `Uc_t`,
- le temps `t`,
- la condition initiale `U0=5V`,
- la valeur de la résistance `R=1kΩ`,
- la capacité du condensateur `C=1μF`.

2. Largement inspiré par le travail de la CPGE Brizeux.

II.2 Codage

Principe de la méthode d'Euler (explicite) :



EXERCICE(S)

Ecrire la fonction `euler(derivee,y0,pas,nb_iterations)` qui prend comme argument :

- Une fonction derivee comme par exemple : `derivee_UC`
- La condition initiale : `y0`
- Le pas : `pas`
- Le nombre d'itérations : `N`

II.3 Influence du pas de discretisation

Ecrire la fonction `influence_pas()` qui trace la tension aux bornes du condensateur pour une durée constante de 10 ms avec un nombre d'itérations de 5,10,50,100,500 et 1000 (pas = durée/nb_iteration)

III Généralisation : Euler-Cauchy

Soit l'équation différentielle $f'(x) = \phi(x, f(x))$ où ϕ est définie sur $I \times \mathbb{R}$ avec I un intervalle ouvert non-vide de $\mathbb{R}$.
Soit un intervalle $[a, b]$ inclus dans I et la condition initiale $(x_0, y_0) = (a, f(a))$. La méthode d'Euler-Cauchy consiste à considérer une subdivision régulière de $[a, b]$ en n segments, soit $n+1$ points $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et à calculer de proche en proche une valeur approchée de $y_k = f(x_k)$ en approchant la fonction f par sa tangente au point d'abscisse x_k.
La suite $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est ce que l'on entend par une résolution approchée du problème de Cauchy. C'est à dire, une fois y_k déterminé, on trouve y_{k+1} par :

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)dx = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(t, f(t))dt \approx y_k + \phi(x_k, y_k).\frac{b-a}{n}$$

EXERCICE(S)

1. Modifier votre fonction `euler(a,b,phi,y0,n)` pour qu'elle correspondent à la définition précédente, de plus les valeurs renvoyées devront être un tableau d'abscisses et d'ordonnées de la représentation graphique de la solution approchée de la solution de l'équation différentielle.
2. En utilisant l'aide sur `matplotlib` dans votre dossier, tracer la courbe représentative de la solution de l'équation différentielle.