

Fakultet informatike i digitalnih tehnologija

Seminarski rad

# **Primjena integrala – određivanje površine lika omeđenog parabolom i kružnicom**

Autor: Dominik Bedenic

Kolegij: Matematika 3

# Sadržaj

1. UVOD	1
1.1. PROBLEM	1
1.2. TEORIJSKA PODLOGA ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA	1
1.2.1. INTEGRAL I PRIMJENE ODREĐENOG INTEGRALA	1
1.2.2. RAČUNANJE INTEGRALA	1
1.2.3. RAČUNANJE POVRŠINE IZMEĐU DVIJU KRIVULJA	2
2. RJEŠENJE PROBLEMA	3
2.1. RJEŠENJE NA PAPIRU	3
2.2. RJEŠENJE U GEOGEBRI	4
2.3. RJEŠENJE U PYTHONU	5
2.3.1. OBJAŠNJENJE PYTHON KODA	6
3. BIBLIOGRAFIJA	13
4. POPIS SLIKA	14

# 1. Uvod

## 1.1. Problem

Odredite površinu lika omeđenog kružnicom  $x^2 + y^2 = 2$  i parabolom  $y = x^2$  (unutar parabole). Nacrtajte graf funkcije i označite traženu površinu.

## 1.2. Teorijska podloga za rješavanje problema

### 1.2.1. Integral i primjene određenog integrala

„Integral je brojčana vrijednost jednaka površini ispod grafa funkcije za neki interval (određeni integral) ili nova funkcija čija je derivacija izvorna funkcija (neodređeni integral)“ (Augustyn, 2023). Najčešća primjena određenih integrala je u matematici i fizici. Neke od primjena su:

- računanje površine ravninskih likova,
- računanje duljine luka ravninskih krivulja,
- računanje volumena tijela koja nastaju rotacijom ravninskih krivulja oko zadane osi,
- računanje oplošja tijela koja nastaju rotacijom ravninskih krivulja oko zadane osi.

### 1.2.2. Računanje integrala

Postoji nekoliko metoda za izračunavanje integrala, uključujući:

1. Antiderivacija - Ova metoda uključuje pronalaženje antiderivacije ili neodređenog integrala funkcije, odnosno funkcije čija je derivacija izvorna funkcija. Na primjer, antiderivacija  $f(x) = x^2$  je  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ , gdje je  $C$  konstanta.
2. Supstitucija - Ova metoda uključuje promjenu varijabli radi pojednostavljenja integrala. Na primjer, ako je integral  $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ , zamjena  $t = 1 - x^2$  može pojednostaviti integral na  $\int \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ .

3. Metoda parcijalne integracije - Ova metoda sastoji se od povoljnog rastavljanja zadanog integrala u obliku:  $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ , pri čemu mora vrijediti slijedeći teorem: „Ako su funkcije  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilnena intervalu  $I$  onda vrijedi formula parcijalne integracije.
4. Tablica integrala - Ova metoda uključuje traženje integrala u tablici poznatih integrala.

Također je važno napomenuti da neki integrali možda nemaju rješenje te se moraju aproksimirati pomoću numeričkih metoda kao što je Simpsonovo pravilo ili trapezno pravilo.

### 1.2.3. Računanje površine između dviju krivulja

Površina između dviju krivulja može se izračunati pomoću integrala; pronalaženjem i oduzimanjem određenog integrala gornje krivulje i određenog integrala donje krivulje, s obzirom na istu varijablu i isti interval. Na primjer, ako je gornja krivulja predstavljena funkcijom  $y = f(x)$  i donja krivulja predstavljena funkcijom  $y = g(x)$ , a površinu treba izračunati između  $x = a$  i  $x = b$ , formula glasi:

$$\textbf{Površina} = \int_b^a [f(x) - g(x)] dx$$

Prikazana formula se također može predstaviti kao razlika određenog integrala jedne funkcije od  $a$  do  $b$  i određenog integrala druge funkcije od  $a$  do  $b$ :

$$\textbf{Površina} = \int_b^a f(x) dx - \int_b^a g(x) dx$$

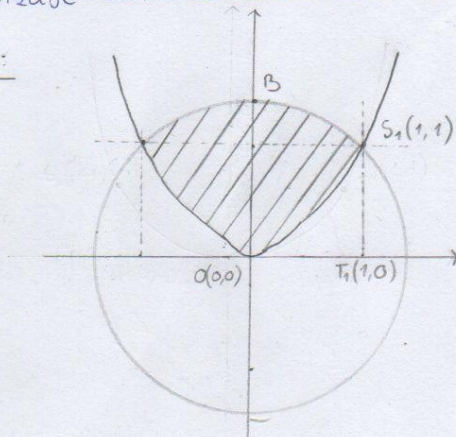
## 2. Rješenje problema

### 2.1. Rješenje na papiru

Odredite površinu lika omeđenog kružnicom  $x^2 + y^2 = 2$  i parabolom  $y = x^2$  (unutar parabole). Nacrtajte graf funkcije i označite traženu površinu.

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2 - x^2} \quad \text{Skica:}$$

$$y = x^2 \Rightarrow y \geq 0$$



Sjecišta

$$y + y^2 = 2$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow \boxed{y_1 = 1} \\ \rightarrow \cancel{y_2 = -2} \quad (y \geq 0)$$

$$x^2 = 1$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

$$\boxed{S_1(1,1)}$$

$$\boxed{S_2(-1,1)}$$

Površina

$$\text{Ukupna površina} = 2 \cdot OS_1BO$$

$$P = 2 \cdot \left[ \int_0^1 y \, dx - \int_0^1 y \, dx \right]$$

kružnica parabola

$$P = 2 \cdot \left[ \int_0^1 \sqrt{2-x^2} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx \right]$$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + C}$$

$$P = 2 \cdot \left[ \left( \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2-x^2} + \frac{2}{2} \sin^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \right] =$$

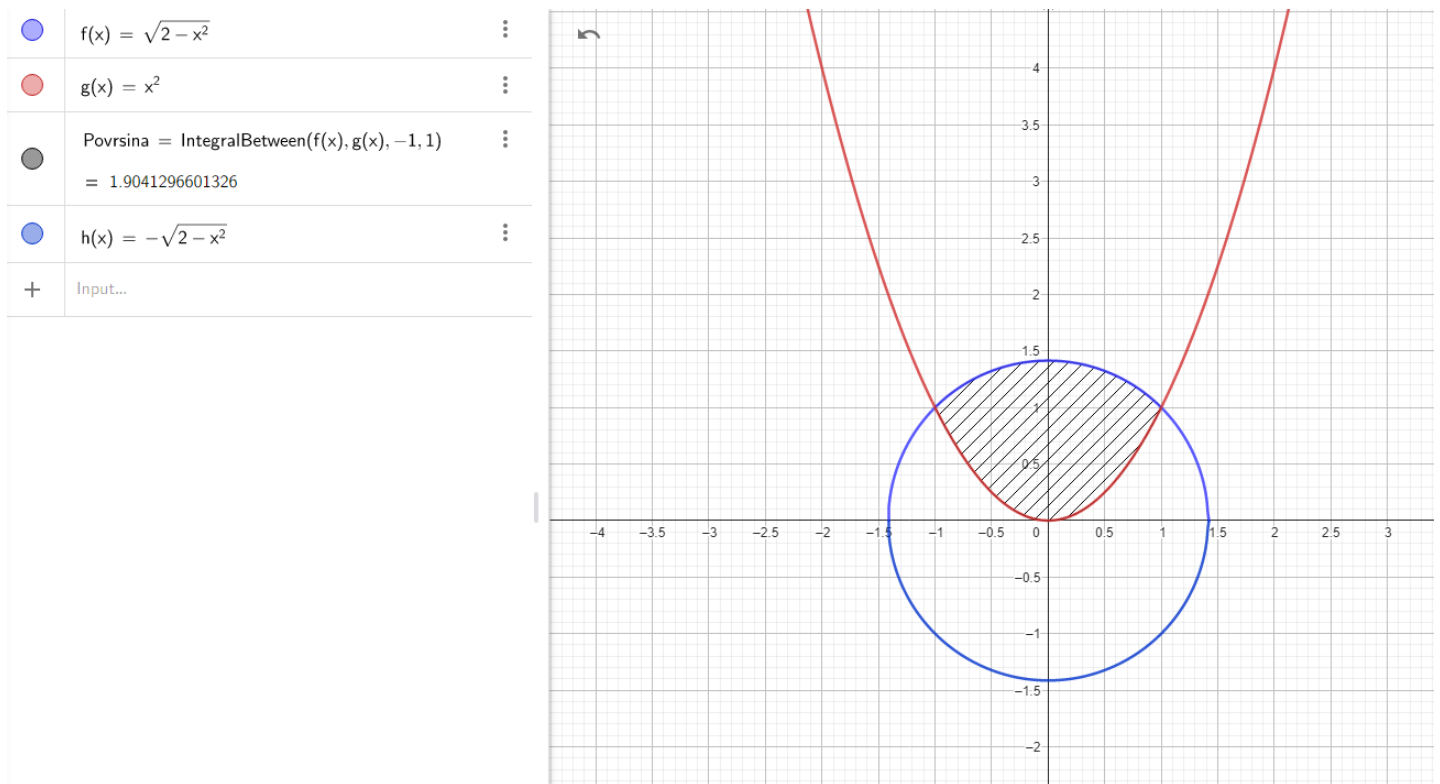
$$= 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{3} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left( \frac{1}{6} + \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{1}{3} + 2 \underbrace{\sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}_{2 \cdot \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} //$$

Slika 1 Rješenje problema na papiru

## 2.2. Rješenje u Geogebri

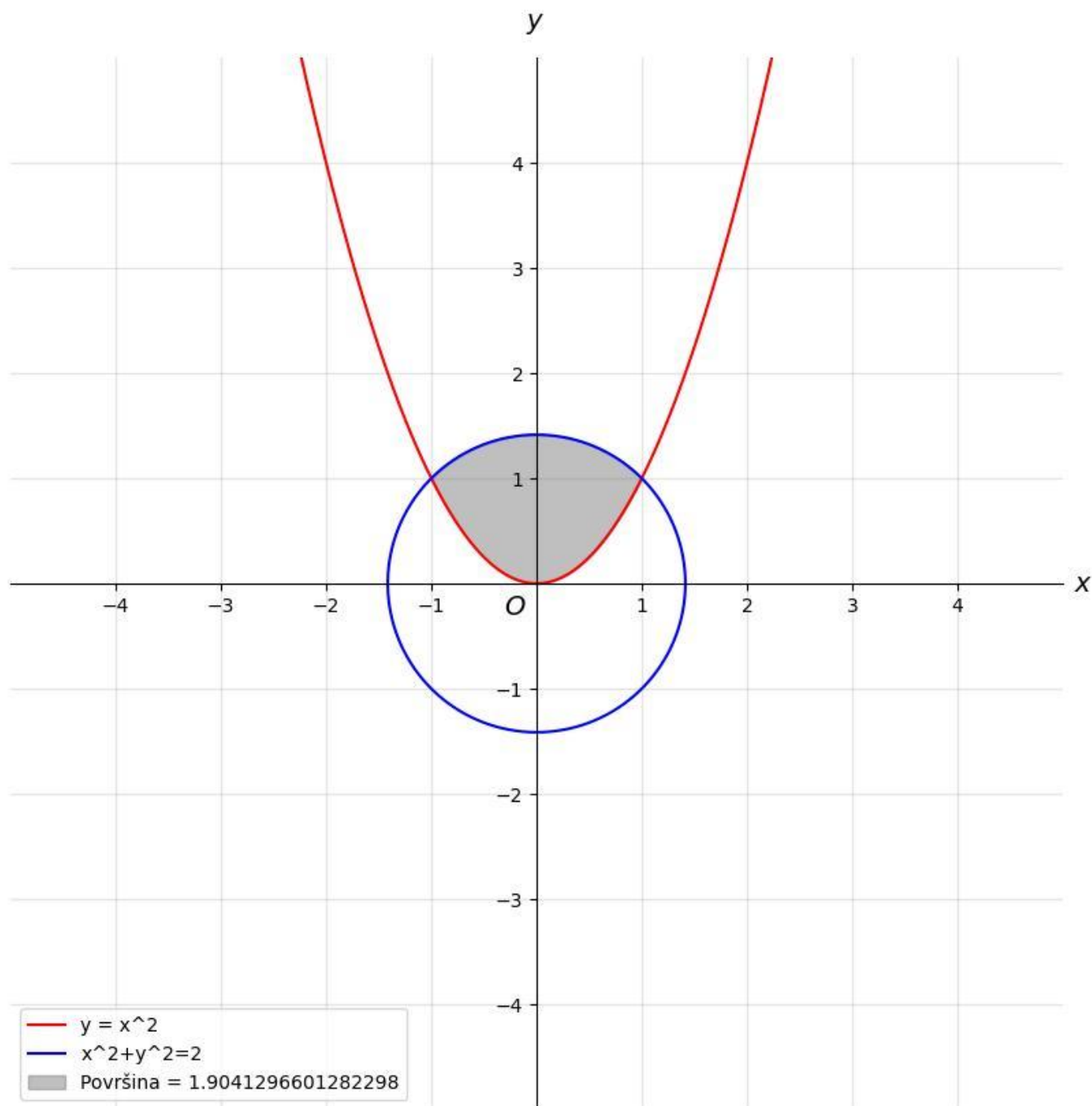


Slika 2 Prikaz rezultata i tražene površine u alatu Geogebra

## 2.3. Rješenje u Pythonu

```
PS D:\Fakultet\MAT3> py mat.py  
Površina između parabole (unutar parabole) i kružnice je: 1.9041296601282298
```

Slika 3 Ispis tražene površine



Slika 4 Prikaz rezultata i tražene površine u pythonu pomoću biblioteke "matplotlib"

## 2.3.1. Objašnjenje Python koda

### 2.3.1.1. Biblioteke

```
3 from sympy import *
4 from scipy import integrate
5 import numpy as np
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 import warnings
```

Slika 5 Objašnjenje koda - Biblioteke

Biblioteka	Informacije
SymPy (Verzija: 1.11.1)	„SymPy je Python biblioteka za simboličku matematiku. Cilj mu je postati potpuno opremljen računalni algebarski sustav (CAS), a da kod bude što jednostavniji kako bi bio razumljiv i lako proširiv.“ (SymPy, 2023)
Scipy (Verzija: 1.10.0)	„SciPy je znanstvena računalna biblioteka koja koristi NumPy. Omogućuje više korisnih funkcija za optimizaciju, statistiku i obradu signala.“ (W3Schools, 2023)
NumPy (Verzija: 1.24.1)	„NumPy je biblioteka koja se koristi za rad s nizovima. Također ima funkcije za rad u domeni linearne algebre, Fourierove transformacije i matrica.“ (W3Schools, 2023)
Matplotlib (Verzija: 3.6.3)	„Matplotlib je biblioteka niske razine za crtanje grafikona u pythonu.“ (W3Schools, 2023)
Warnings	„warnings je Python biblioteka koja omogućuje kontrolu nad upozorenjima.“ (Python, 2023)

**Instalacija potrebnih paketa: `pip install scipy numpy matplotlib sympy`**

Program je napisan u Python 3.11.



### 2.3.1.2. Definicije funkcija i skrivanje upozorenja

```
9  # Sakrivanje upozorenja koje nastaje zbog korijena iz negativnog broja
10 warnings.filterwarnings('ignore')
11
12 # Funkcija parabole
13 def parabola(x):
14     return x**2
15
16 # Funkcija kružnice
17 def kruzница(x):
18     return np.sqrt(2-x**2)
19
```

Slika 6 Objašnjenje koda - Definicije funkcija i skrivanje upozorenja

Komponenta	Linija	Informacije
warnings.filterwarnings('ignore')	10	Skrivanje svih upozorenja. Uvedeno jer Python ispisuje upozorenje za kružnicu kada se računa drugi korijen iz negativnog broja. (Ovaj dio se može maknuti, program će raditi kao i prije)
def parabola(x)	13-14	Funkcija parabole
def kruzница(x)	17-18	Funkcija kružnice
numpy.sqrt()	18	Funkcija iz biblioteke NumPy koja vraća drugi korijen iz proslijeđene varijable ili izraza

### 2.3.1.3. Računanje tražene površine

```

22 # Računanje sjecišta između parabole i kružnice
23 x, y = symbols('x y')
24 parabola_eq = Eq(x**2, y)
25 kruznica_eq = Eq(x**2 + y**2, 2)
26 sjecista = solve((parabola_eq, kruznica_eq), (x, y))
27
28 # Određeni integral (od -1 do 1 po x osi) od gornje krivulje.
29 integral_gornje_krivulje, _ = integrate.quad(kruznica, sjecista[0][0], sjecista[1][0])
30
31 # Određeni integral (od -1 do 1 po x osi) od donje krivulje.
32 integral_donje_krivulje, _ = integrate.quad(parabola, sjecista[0][0], sjecista[1][0])
33
34 # Za računanje površine trebamo razliku određenog integrala (od -1 do 1 po x osi) od gornje
35 površina = integral_gornje_krivulje - integral_donje_krivulje
36
37 print("Površina između parabole (unutar parabole) i kružnice je: ", površina)
38

```

Slika 7 Objašnjenje koda - Računanje tražene površine

Komponenta	Linija	Informacije
sympy.symbols()	21	Funkcija iz paketa sympy koja omogućuje pridruživanje simbola određenoj varijabli.
Sympy.Eq()	24, 25	Funkcija iz paketa sympy koja se koristi za inicijalizaciju funkcija. U ovom programu koristi se kod računanja presjeka parabole i kružnice.
Sympy.solve()	26	Funkcija iz paketa sympy koja se koristi za računanje proslijeđenih funkcija. Funkcije za parabolu i kružnicu se rješavanju i na kraju se dobivaju rješenja funkcija koja su ujedno i sjecišta navedenih funkcija.
scipy.integrate.quad()	29, 32	Funkcija iz biblioteke Scipy koja vraća rezultat definiranog integrala od dane funkcije. U nju se prosljeđuju funkcija i granice integrala. Rezultat se sprema u prikladne varijable (integral_gornje_krivulje i integral_donje_krivulje)
povrsina	35	Varijabla u koju se sprema tražena površina između dviju krivulja. Za računanje površine trebamo razliku određenog integrala (od -1 do 1 po x osi) od gornje krivulje odnosno kružnice i određenog integrala (od -1 do 1 po x osi) od donje krivulje odnosno parabole.
print()	37	Funkcija za ispis rezultata

### 2.3.1.4. Crtanje koordinatnog sustava

```
44 # Definiranje granica koordinatnog sustava
45 xmin, xmax, ymin, ymax = -4, 4, -4, 4
46
47 # Osnovna mjerna jedinica, razmak između pojedine definirane točke na x i y osi
48 ticks_frequency = 1
49
50 # Definicija koordinatnog sustava odnosno figure
51 fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 10))
52
53 # Definiranje osi x i osi y
54 ax.set(xlim=(xmin-1, xmax+1), ylim=(ymin-1, ymax+1), aspect='equal')
55
56 # Pozicioniranje osi i skrivanje krajnje gornje i desne crte obruba
57 ax.spines['bottom'].set_position('zero')
58 ax.spines['left'].set_position('zero')
59 ax.spines['top'].set_visible(False)
60 ax.spines['right'].set_visible(False)
61
62 # Dodavanje naslova za x i y osi
63 ax.set_xlabel('$x$', size=14, labelpad=-24, x=1.02)
64 ax.set_ylabel('$y$', size=14, labelpad=-21, y=1.02, rotation=0)
65
66 # Dodavanje "0" na graf
67 plt.text(0.49, 0.49, "0", ha='right', va='top',
68         transform=ax.transAxes,
69         horizontalalignment='center', fontsize=14)
70
71 # Određivanje broja i razmaka između pojedine točke na osima
72 x_ticks = np.arange(xmin, xmax+1, ticks_frequency)
73 y_ticks = np.arange(ymin, ymax+1, ticks_frequency)
74 ax.set_xticks(x_ticks[x_ticks != 0])
75 ax.set_yticks(y_ticks[y_ticks != 0])
76
77 # Dodavanje mreže u pozadini
78 ax.grid(which='both', color='grey', linewidth=1, linestyle='-', alpha=0.2)
```

Slika 8 Objašnjenje koda - Crtanje koordinatnog sustava

Komponenta	Linija	Informacije
xmin, xmax, ymin, ymax	45	Varijable u koje se spremaju granice koordinatnog sustava
ticks_frequency	48	Osnovna mjerna jedinica, razmak između pojedine definirane točke na x i y osi
fig, ax	51	Varijable u koje se spremaju figure koordinatnog sustava i osi. Varijable se odvajaju za lakšu manipulaciju
matplotlib.pyplot.subplots()	51	Wrapper funkcija iz biblioteke Matplotlib pogodna za stvaranje figura
.set()	54	Funkcija iz biblioteke Matplotlib koja omogućuje definiranje osi. U ovom programu to su x i y osi
.set_position()	57, 58	Funkcija iz biblioteke Matplotlib za pozicioniranje osi. U ovom programu se osi (donja i lijeva) pozicioniraju u sredinu koordinatnog sustava
.set_visible()	59, 60	Funkcija iz biblioteke Matplotlib za skrivanje pojedinih elemenata grafa. U ovom programu se koristi za skrivanje gornjeg i desnog ruba.
.set_xlabel() .set_ylabel()	63, 64	Funkcija iz biblioteke Matplotlib za dodavanje naslova za x i y osi
matplotlib.pyplot.text()	67-69	Funkcija iz biblioteke Matplotlib za manipulaciju teksta. U ovom programu koristi se za dodavanje „0“ na graf
numpy.arange()	72, 73	Funkcija iz biblioteke NumPy za stvaranje niza brojeva za definirani interval. U ovom programu koristi se za stvaranje jediničnih mjera duž osi x i y
.set_xticks() .set_yticks()	74, 75	Funkcija iz biblioteke Matplotlib za postavljanje jediničnih mjernih jedinica na x i y osi
.grid()	78	Funkcija iz biblioteke Matplotlib za konfiguraciju pozadinske mreže

### 2.3.1.5. Crtanje grafova i tražene površine

```
81 x = np.linspace(-4, 4, 10000)
82
83 # Spremanje rješenja funkcije u varijablu. Za kružnicu su posebno izračunate gornja i donja polutka jer gornja funkcija računa samo gornju polutku.
84 _polukružnica_gornja=kružnica(x)
85 _polukružnica_donja=-(kružnica(x))
86 _parabola=parabola(x)
87
88 # Određivanje granica površine koja se treba osjenčati. np.where vraća sve vrijednosti koje zadovoljavaju uvjet
89 presjek = np.where(_parabola <= _polukružnica_gornja)
90
91 # Crtanje parabole, gornje i donje polukružnice
92 plt.plot(x, _parabola, 'r', Label='y = x^2')
93 plt.plot(x, _polukružnica_gornja, 'b', Label='x^2+y^2=2')
94 plt.plot(x, _polukružnica_donja, 'b')
95
96 # Sjenčanje tražene površine i dodavanje u legendu
97 plt.fill_between(x[presjek], _parabola[presjek], _polukružnica_gornja[presjek], Label='Površina = {}'.format(povrsina), color='gray', alpha=0.5)
98
99 # Crtanje legende
100 plt.legend()
101
102 # Spremanje u sliku
103 # plt.savefig('graf.jpg', bbox_inches='tight')
104
105 # Prikaz koordinatnog sustava sa svim dodanim komponentama
106 plt.show()
107
```

Slika 9 Objašnjenje koda - Crtanje grafova i tražene površine

Komponenta	Linija	Informacije
<code>x = numpy.linspace()</code>	81	Funkcija iz biblioteke NumPy koja vraća ravnomjerno raspoređene brojeve u određenom intervalu i sprema ih u varijablu „x“ koja se kasnije koristi za računanje funkcija parabole i kružnice
<code>_polukružnica_gornja</code> <code>_polukružnica_donja</code> <code>_parabola</code>	84, 85, 86	Varijable u koje se sprema rezultat funkcije za kružnicu i parabolu. Za kružnicu su posebno izračunate gornja i donja polutka jer početna funkcija računa samo gornju polutku. To je zbog toga što <code>np.sqrt()</code> funkcija vraća praznu vrijednost za negativne brojeve
<code>numpy.where()</code>	89	Funkcija iz biblioteke NumPy koja vraća sve vrijednosti koje zadovoljavaju uvjet. U ovom programu se koristi za određivanje granica površine koja se treba osjenčati. Vrijednosti se spremaju u varijablu „presjek“
<code>matplotlib.pyplot.plot()</code>	92, 93, 94	Funkcija iz biblioteke Matplotlib koja stavlja definirane elemente na graf. U ovom programu crtaju se kružnica (svaka polutka posebno) i parabola
<code>matplotlib.pyplot.fill_between()</code>	97	Funkcija iz biblioteke Matplotlib koja, uz pomoć datih podataka, sjenča željeno područje. U ovom programu sjenča prostor između kružnice i (unutar) parabole
<code>matplotlib.pyplot.legend()</code>	100	Funkcija iz biblioteke Matplotlib koja stavlja legendu na crtež
<code>matplotlib.pyplot.savefig()</code>	103	Funkcija iz biblioteke Matplotlib koja omogućuje spremanje crtežu u zasebnu datoteku. Ova funkcija je zakomentirana kako se crtež ne bi spremao svaki put kod pokretanja koda
<code>matplotlib.pyplot.show()</code>	106	Funkcija iz biblioteke Matplotlib koja omogućuje prikaz crteža na ekranu

### 3. Bibliografija

- 6.1: *Areas between Curves*. (2023, January 25). Retrieved from Mathematics LibreTexts:  
[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A\\_Calculus\\_\(OpenStax\)/06%3A\\_Applications\\_of\\_Integration/6.01%3A\\_Areas\\_between\\_Curves](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/06%3A_Applications_of_Integration/6.01%3A_Areas_between_Curves)
- Augustyn, A. (2023, January 25). *Britannica*. Retrieved from Britannica:  
<https://www.britannica.com/science/integral-mathematics>
- Geogebra Calculator*. (2023, January 26). Retrieved from Geogebra:  
<https://www.geogebra.org/calculator>
- Matematika 2*. (2023, January 25). Retrieved from lavica.fesb.unist.hr:  
<http://lavica.fesb.unist.hr/matematika2/predavanja/node6.html>
- Matplotlib*. (2023, January 27). Retrieved from Matplotlib Documentation:  
<https://matplotlib.org/stable/index.html>
- NumPy*. (2023, January 27). Retrieved from NumPy Documentation:  
<https://numpy.org/doc/>
- Python*. (2023, January 27). Retrieved from Python Documentation:  
<https://docs.python.org/3/library/warnings.html>
- Rajesh, D. D. (2019, January 7). *YouTube*. Retrieved from YouTube:  
<https://www.youtube.com/watch?v=oVqTewA7fRo&t=197s>
- Scipy*. (2023, January 27). Retrieved from Scipy Documentation:  
<https://docs.scipy.org/doc/scipy/>
- SymPy*. (2023, January 29). Retrieved from SymPy:  
<https://www.sympy.org/en/index.html>
- Toppr*. (2023, January 26). Retrieved from Toppr:  
<https://www.toppr.com/ask/question/the-area-common-to-the-parabola-y2ax-and-the-circle-x2y24ax/>
- W3Schools*. (2023, January 27). Retrieved from W3Schools Matplotlib Tutorial:  
[https://www.w3schools.com/python/matplotlib\\_intro.asp](https://www.w3schools.com/python/matplotlib_intro.asp)
- W3Schools*. (2023, January 27). Retrieved from W3Schools NumPy Introduction:  
[https://www.w3schools.com/python/numpy/numpy\\_intro.asp](https://www.w3schools.com/python/numpy/numpy_intro.asp)
- W3Schools*. (2023, January 27). Retrieved from W3Schools SciPy Introduction:  
[https://www.w3schools.com/python/scipy/scipy\\_intro.php#gsc.tab=0](https://www.w3schools.com/python/scipy/scipy_intro.php#gsc.tab=0)

## 4. Popis slika

Slika 1 Rješenje problema na papiru .....	3
Slika 2 Prikaz rezultata i tražene površine u alatu Geogebra .....	4
Slika 3 Ispis tražene površine.....	5
Slika 4 Prikaz rezultata i tražene površine u pythonu pomoću biblioteke "matplotlib" .	5
Slika 5 Objašnjenje koda - Biblioteke.....	6
Slika 6 Objašnjenje koda - Definicije funkcija i skrivanje upozorenja .....	7
Slika 7 Objašnjenje koda - Računanje tražene površine .....	8
Slika 8 Objašnjenje koda - Crtanje koordinatnog sustava .....	9
Slika 9 Objašnjenje koda - Crtanje grafova i tražene površine.....	11