ΘΕΜΑ 7°: Singular Value Decomposition

1) $X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$

• Ιδιοτιμές $X^T X$: $\quad |X^T X - \lambda I_2| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & 7 \\ 7 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (6-\lambda)(14-\lambda) - 49 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 20\lambda + 35 = 0$$

$\Delta = 400 - 4 \cdot 35 = 260 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{260} = \underline{2\sqrt{65}}$

Άρα $\lambda_{1,2} = \dfrac{20 \pm 2\sqrt{65}}{2}$ $\quad \boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 10 + \sqrt{65} \\ \lambda_2 &= 10 - \sqrt{65} \end{aligned}}$

• Ιδιοδιανύσματα $X^T X$

$$(X^T X - \lambda_i I_2) v_i = 0 \quad \text{με} \quad v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix}$$

-> για $\lambda_1 = 10 + \sqrt{65}$

$$(X^T X - \lambda_1 I_2) v_1 = 0$$

επαυξημένος με στοιχεία του v_1

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4-\sqrt{65} & 7 & v_{11} = 0 \\ 7 & 4-\sqrt{65} & v_{12} = 0 \end{array}\right)$$

Θα λύσουμε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων με απαλοιφή Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4-\sqrt{65} & 7 & 0 \\ 7 & 4-\sqrt{65} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{R_1}{(-4-\sqrt{65})}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4-\sqrt{65}}{7} & 0 \\ 7 & 4-\sqrt{65} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 7R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4-\sqrt{65}}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα έχουμε
$$\left.\begin{array}{l} V_{11} + \frac{(4-\sqrt{65})}{7} V_{12} = 0 \\ \text{και} \quad V_{12} = V_{12} \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ για $V_{12} = 1$ έχουμε $V_{11} = \frac{-4+\sqrt{65}}{7}$

Άρα $V_1 = \begin{pmatrix} \frac{-4+\sqrt{65}}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ για $\lambda_2 = 10 - \sqrt{65}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4+\sqrt{65} & 7 & V_{21} = 0 \\ 7 & 4+\sqrt{65} & V_{22} = 0 \end{array}\right)$$ ✓ επαναλμβάνουμε τα στοιχεία V_2

Απαλοιφή Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4+\sqrt{65} & 7 & 0 \\ 7 & 4+\sqrt{65} & 0 \end{array}\right) \overset{R_1 = \frac{R_1}{-4+\sqrt{65}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4+\sqrt{65}}{7} & 0 \\ 7 & 4+\sqrt{65} & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_2 \leftarrow R_2 - 7R_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4+\sqrt{65}}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} V_{12} + \frac{4+\sqrt{65}}{7} V_{22} = 0 \\ \text{και} \\ V_{22} = V_{22} \end{array}$$

για $V_{22} = 1$ έχουμε $V_{21} = \frac{-4-\sqrt{65}}{7}$

Άρα $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{-4-\sqrt{65}}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$

Για να φτιάξουμε τον πίνακα V, θα χρειαστεί να κανονικοποιήσουμε τα V_1 και V_2 έτσι ώστε $|V_1| = |V_2| = 1$

$$|V_1| = \sqrt{\left(\frac{-4+\sqrt{65}}{7}\right)^2 + 1} = 1,15$$

$$|V_2| = \sqrt{\left(\frac{-4-\sqrt{65}}{7}\right)^2 + 1} = 1,99$$

Άρα

$$V_{1,norm} = \frac{V_1}{|V_1|} = \frac{1}{1,15} \begin{pmatrix} \frac{-4+\sqrt{65}}{7} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,86 \end{pmatrix}$$

$$V_{2,norm} = \frac{V_2}{|V_2|} = \frac{1}{1,99} \begin{pmatrix} \frac{-4-\sqrt{65}}{7} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,86 \\ 0,50 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$V = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}86 \\ 0{,}86 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

2) Υπολογισμός singular values

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{10+\sqrt{65}} = 4{,}24 \\ s_2 &= \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{10-\sqrt{65}} = 1{,}39 \end{aligned}\right\} \Sigma = \begin{pmatrix} 4{,}24 & 0 \\ 0 & 1{,}39 \end{pmatrix}$$

3) Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων XX^T (πίνακας U).

$$u_1 = \frac{1}{s_1} \cdot X \cdot v_{1,norm} = \frac{1}{4{,}24} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}52 \\ 0{,}43 \\ 0{,}72 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{s_2} X\, v_{2,norm} = \frac{1}{1{,}39} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}86 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}87 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$X \overset{\circledast}{=} U \cdot \Sigma V^T = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}10 \\ 0{,}43 & -0{,}87 \\ 0{,}72 & 0{,}46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}24 & 0 \\ 0 & 1{,}39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}86 \\ -0{,}86 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

⊛ Δεν θα είναι ακριβώς ίσα καθώς έγιναν κάποιες στρογγυλοποιήσεις στα δεκαδικά ψηφία.

4)

$$\hat{X} = s_1 \cdot u_1 \cdot v_{1,norm}^T = 4{,}24 \begin{pmatrix} 0{,}52 \\ 0{,}43 \\ 0{,}72 \end{pmatrix} (0{,}5 \quad 0{,}86)$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}10 & 1{,}89 \\ 0{,}91 & 1{,}56 \\ 1{,}52 & 2{,}62 \end{pmatrix}$$