ΘΕΜΑ 5ο

A) 1) Τα ~~...~~ support vectors είναι τα

$x_1 = (1,0)^T$, $x_2 = (3,1)^T$ και $x_3 = (3,-1)^T$.

2) Θέλω να κάνω min τη συνάρτηση

$$J(w, w_0) = \frac{1}{2}\|w\|^2 \quad , \text{ όπου } w = (w_1, w_2)^T$$

$$\text{s.t} \quad y_i(w^T x_i + w_0) \geq 1 \ , \ i = 1, 2 \ldots N$$

όπου y_i ~~η~~ το label της κλάσης του διανύσματος x_i.

Langrangian:

$$\mathcal{L}(w, w_0, \lambda) = \frac{1}{2} w^T w - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i [y_i(w^T x_i + w_0) - 1]$$

K.K.T

$$\frac{\partial}{\partial w} \mathcal{L}(w, w_0, \lambda) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_0} \mathcal{L}(w, w_0, \lambda) = 0 \qquad (2)$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (3)$$

$$\lambda_i [y_i(w^T x_i + w_0) - 1] = 0 \qquad (4)$$

~~[illegible]~~

Για (2)

$$\frac{\partial}{\partial w_0} L(w, w_0, \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial w_0}\left(\frac{1}{2} w^T w\right) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial w_0}\left(\lambda_i y_i w^T x_i + \lambda_i y_i w_0 - \lambda_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow 0 - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial w_0}\left(\lambda_i y_i w_0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i = 0}$$

Για (1)

$$\frac{\partial}{\partial w} L(w, w_0, \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{2}\|w\|^2\right) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial w}\left(\lambda_i y_i w^T x_i + \lambda_i y_i w_0 - \lambda_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow w - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i x_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i x_i} \quad (5)$$

Απο τη σχεση (5) παρατηρουμε οτι στον υπολογισμο του w συμμετεχουν μονο διανυσματα x_i που σχετιζονται με $\lambda_i \neq 0$. Απο την θεωρια γνωριζουμε οτι $\lambda_i \neq 0$ εχουν μονο τα support vectors.

Επομένως από εδώ και πέρα στους υπολογισμούς μας θα συμμετέχουν μόνο τα SVs x_1, x_2, x_3 με

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$$

Άρα από σχέση (3) K.K.T.

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1 \left[-\left((w_1\ w_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w_0 \right) - 1 \right] = 0 \\
&\lambda_2 \left[(w_1, w_2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + w_0 - 1 \right] = 0 \\
&\lambda_3 \left[(w_1, w_2) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + w_0 - 1 \right] = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$$

$$\left\{\begin{aligned}
&-w_1 - w_0 - 1 = 0 \quad (6) \\
&3w_1 + w_2 + w_0 - 1 = 0 \quad (7) \\
&3w_1 - w_2 + w_0 - 1 = 0 \quad (8)
\end{aligned}\right.$$

Από (7) + (8) $\Rightarrow \quad 6w_1 + 2w_0 - 2 = 0$

$$\overset{\text{με } (6)}{\Rightarrow} \quad 6w_1 + 2(-w_1 - 1) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6w_1 - 2w_1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4w_1 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{w_1 = 1}$$

Από (6) $\quad w_0 = -w_1 - 1 \Rightarrow w_0 = -1 - 1 \Rightarrow \boxed{w_0 = -2}$

Από (7) $\quad 3w_1 + w_2 + w_0 - 1 = 0 \Rightarrow 3 + w_2 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{w_2 = 0}$

Άρα $w = (1 \; 0)^T$ και $w_0 = -2$

Έστω $X = (x_1, x_2)^T$

Το υπερεπίπεδο διαχωριστού είναι:

$$w^T \cdot x + w_0 = 0 \Rightarrow (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

Το οποίο συνάδει με την εκτίμησή μας.

B) $L(w, w_0, \lambda) = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) - \sum \lambda_i [y_i (w^T x_i + w_0) - 1]$

$$= \frac{w_1^2 + w_2^2}{2} - \lambda_1 \left(- (-10w_1 - 10w_2 + w_0) - 1 \right)$$

$$- \lambda_2 ((-7w_1 - 7w_2 + w_0) - 1)$$

Από $\frac{\partial}{\partial w} L(w, w_0, \lambda)$ έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_1} L = 0 &\Rightarrow w_1 = 10\lambda_1 - 7\lambda_2 \\ \frac{\partial}{\partial w_2} L = 0 &\Rightarrow w_2 = 10\lambda_1 - 7\lambda_2 \end{aligned}\right\} \boxed{w_1 = w_2 \; (1)}$$

~~Από~~ Αφού 2. s.v

$$\lambda_1 \left(- \left((w_1 \; w_2) \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} + w_0 \right) - 1 \right) = 0$$

$$\lambda_2 \left((w_1 \; w_2) \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} + w_0 - 1 \right) = 0$$

$$10w_1 + 10w_2 - w_0 - 1 = 0 \quad (3)$$

και

$$-7w_1 - 7w_2 + w_0 - 1 = 0 \quad (4)$$

(3) τε (1) $\rightarrow$ $20w_1 - w_0 - 1 = 0$

(4) τε (1) $\rightarrow$ $-14w_1 + w_0 - 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 20w_1 - w_0 - 1 = 0 \\ -14w_1 + w_0 - 1 = 0 \end{array}\right\} (+)$$

$$6w_1 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{w_1 = 1/3}$$

$$\boxed{w_2 = w_1 = 1/3}$$

Άρα $w_0 = 20w_1 - 1$

$$\Rightarrow w_0 = \frac{20}{3} - \frac{3}{3} \Rightarrow \boxed{w_0 = \frac{17}{3}}$$

Άρα $w^T x + w_0 = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{17}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{17}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = -x_2 - 17}$$