ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε $J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; W, b) = -y^{(i)} \ln \hat{y}^{(i)} - (1-y^{(i)}) \ln(1-\hat{y}^{(i)})$ (1)

και $J(Y, \hat{Y}; W, b) = \frac{1}{B} \sum_i \left(-y^{(i)} \ln \hat{y}^{(i)} - (1-y^{(i)}) \ln(1-\hat{y}^{(i)})\right)$ (2)

α) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) και θέτοντας $z^{(i)} = x^{(i)} \cdot W + b$ και $\hat{y}^{(i)} = f(z^{(i)})$ παίρνουμε.

$$J(Y, \hat{Y}; W, b) = \frac{1}{B} \sum_i -y^{(i)} \ln \frac{1}{1+e^{-z^{(i)}}} - (1-y^{(i)}) \ln \frac{e^{-z^{(i)}}}{1+e^{-z^{(i)}}}$$

$$= \frac{1}{B} \sum_i -y^{(i)} \left(\overset{0}{\cancel{\ln 1}} - \ln(1+e^{-z^{(i)}})\right) - (1-y^{(i)}) \left(\ln e^{-z^{(i)}} - \ln(1+e^{-z^{(i)}})\right)$$

$$= \frac{1}{B} \sum_i \cancel{y^{(i)} \ln(1+e^{-z^{(i)}})} - \ln e^{-z^{(i)}} + \ln(1+e^{-z^{(i)}}) + y^{(i)} \ln e^{-z^{(i)}} - \cancel{y^{(i)} \ln(1+e^{-z^{(i)}})}$$

$$\boxed{= \frac{1}{B} \sum_i z^{(i)} - y^{(i)} z^{(i)} + \ln(1+e^{-z^{(i)}})}$$

β) Θα παραγωγίσουμε τη σχέση (1)*, αφού πρώτα τη μετατρέψουμε συναρτήσει του $z^{(i)}$.

$$(1) \Rightarrow J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; w, b) = -y^{(i)} \ln \hat{y}^{(i)} - (1-y^{(i)}) \ln(1-\hat{y}^{(i)})$$

$$= -y^{(i)} \ln(f(z^{(i)})) - (1-y^{(i)}) \ln(1-f(z^{(i)}))$$

$$= y^{(i)} \ln \frac{1}{1+e^{-z^{(i)}}} - (1-y^{(i)}) \ln \frac{e^{-z^{(i)}}}{1+e^{-z^{(i)}}}$$

$$= -y^{(i)} \ln(1+e^{-z^{(i)}}) - (1-y^{(i)}) (\ln e^{-z^{(i)}} - \ln(1+e^{-z^{(i)}}))$$

$$\ldots = z^{(i)} - z^{(i)} y^{(i)} + \ln(1+e^{-z^{(i)}})$$

Άρα $$\frac{\partial J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; w, b)}{\partial z^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial z^{(i)}} \left(z^{(i)} - z^{(i)} y^{(i)} + \ln(1+e^{-z^{(i)}}) \right)$$

$$= 1 - y^{(i)} + \frac{1 \cdot (-e^{-z^{(i)}})}{1+e^{-z^{(i)}}}$$

$$= \boxed{\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}}$$

(*) Σημείωση: Η παραγώγιση έγινε με αυτόν τον τρόπο μιας και η εκφώνηση δεν ήθελε το αποτέλεσμα κανονικοποιημένο με το batch size B. Δουλεύαμε πάνω σε ένα sample.

γ) για $\frac{\partial J}{\partial w}$:

• για sample:

$$\frac{\partial J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; w, b)}{\partial w} = \frac{\partial J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; w, b)}{\partial z^{(i)}} \cdot \frac{\partial z^{(i)}}{\partial w}$$

$$= (\hat{y}^{(i)} - y^{(i)})\, x^{(i)}$$

• για batch B:

$$J(Y, \hat{Y}; w, b) = \frac{1}{B} \sum_{i} J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; w, b)$$

$$\frac{\partial J(Y, \hat{Y}; w, b)}{\partial w} = \frac{1}{B} \sum_{i} \frac{\partial J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; w, b)}{\partial w}$$

$$= \boxed{\frac{1}{B} \sum_{i} (\hat{y}^{(i)} - y^{(i)})\, x^{(i)}}$$

Η παραπάνω σχέση θα χρησιμοποιηθεί στον κώδικα για την υλοποίηση του αλγορίθμου gradient descent.

Για $\frac{\partial J}{\partial b}$:

• για sample:

$$\frac{\partial J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; W, b)}{\partial b} = \frac{\partial J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; W, b)}{\partial z^{(i)}} \cdot \frac{\partial z^{(i)}}{\partial b}$$

$$= \left(\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}\right) \cdot 1$$

$$= \underline{\underline{\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}}}$$

• για batch B:

$$J(Y, \hat{Y}; W, b) = \frac{1}{B} \sum_i J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; W, b)$$

$$\frac{\partial J(Y, \hat{Y}; W, b)}{\partial b} = \frac{1}{B} \sum_i \frac{\partial J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; W, b)}{\partial b}$$

$$= \boxed{\frac{1}{B} \left(\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}\right)}$$

Η παραπάνω σχέση θα χρησιμοποιηθεί στον κώδικα.