Complexe Getallen: Inleiding

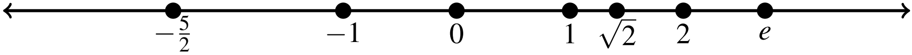
Dr. M. van Ee & Dr.ir. D.A.M.P. Blom

Analyse 1 (TAN1), collegejaar 2024-2025

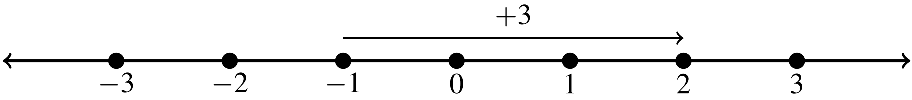
1 mei 2025

Getallenverzamelingen

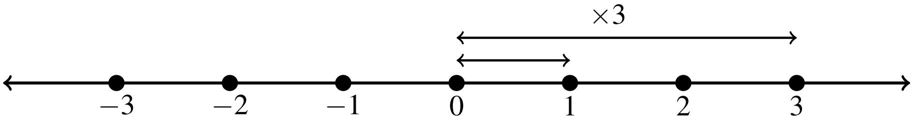
- Natuurlijke getallen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Gehele getallen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Rationale getallen: $\mathbb{Q} = \{p/q | p \text{ geheel getal}, q \text{ natuurlijk getal}\}$
- Reële getallen: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$



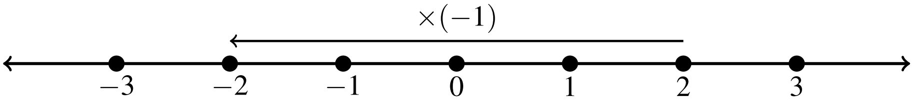
Optellen:



Vermenigvuldigen met $c > 0$:



Vermenigvuldigen met -1:



De vergelijking $x^2 = -1$ heeft geen reële oplossingen.

De vergelijking $x^2 = -1$ heeft geen reële oplossingen.

Introduceer het **imaginaire getal** i met eigenschap

$$i^2 = -1$$

Nu is $x = i$ een oplossing van de vergelijking $x^2 = -1$.

Complexe getallen zijn getallen van de vorm $a+bi$, waarbij a en b reële getallen zijn.

Stel $z = a + bi$ is een complex getal

- a heet het reële deel van z, notatie $a = \mathrm{Re}(z)$
- b heet het imaginaire deel van z, notatie $b = \mathrm{Im}(z)$

Opmerkingen:

- Ieder reëel getal kan geschreven worden als complex getal: $a = a + 0i$
- Twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ heten gelijk dan en slechts dan als $a = c$ en $b = d$

Stel a, b, c en d zijn reële getallen.

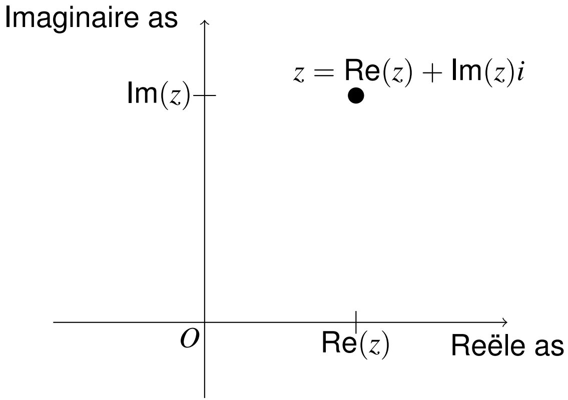
- Optelling: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
- Aftrekking: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
- Vermenigvuldiging:
  $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$
- Deling (als $c+di\neq 0+0i$):

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}\\&=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}\\&=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

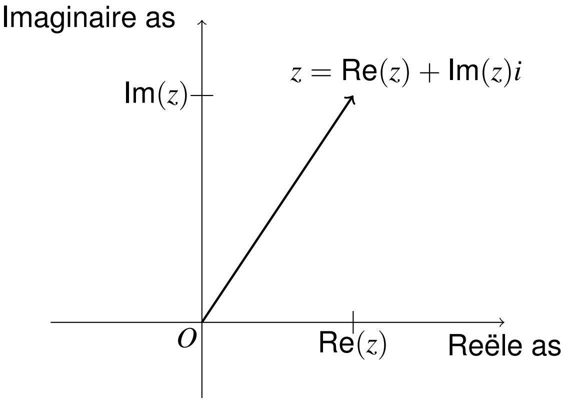
Stel $z = -1 + \sqrt{3}\, i$ en $w = \sqrt{2} - i$. Bereken:

1. $z + w$
2. zw
3. $\frac{z}{w}$
4. z^2
5. z^5
6. z^{23}

Maak opgaven 1, 3 en 7 van “Complex numbers” (pagina 7)

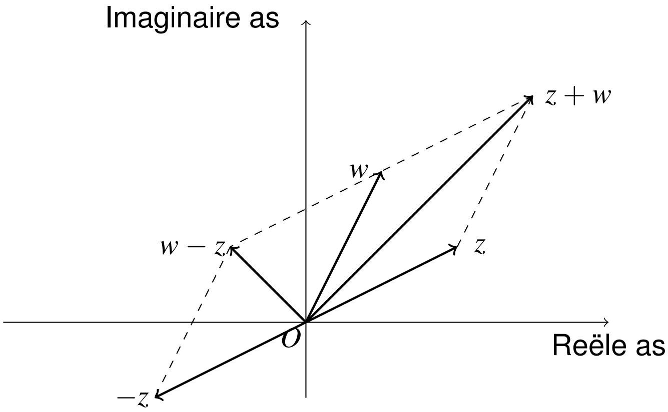


Voorstelling in het complexe vlak (getallenvlak i.p.v. getallenlijn)
Carthesische coördinaten: $(\mathsf{Re}(z), \mathsf{Im}(z))$

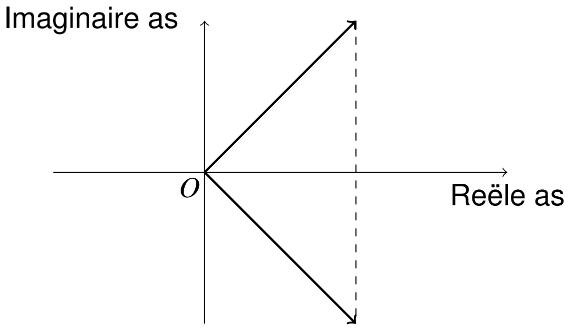


Voorstelling in het complexe vlak (getallenvlak i.p.v. getallenlijn)
Carthesische coördinaten: $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$

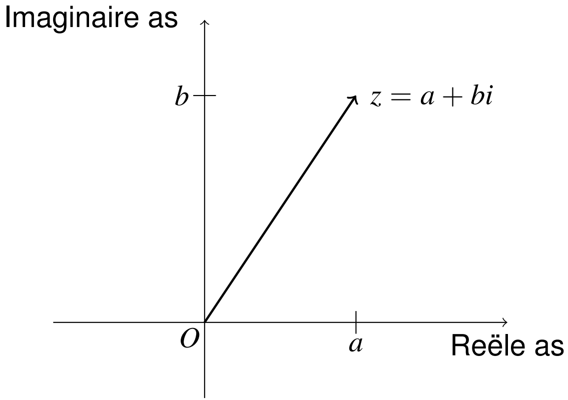
Visualisatie optelregel:



Optellen complexe getallen is optellen van bijbehorende vectoren



Als $z = a + bi$ (a, b reële getallen), dan heet $\bar{z} = a - bi$ de **complex geconjugeerde** van z.
"We verkrijgen $\bar{z}$ door z te spiegelen in de reële as".



De **modulus** (of absolute waarde) van z, notatie $|z|$, is gedefinieerd door

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Als $z = a + bi$ (a, b reële getallen), dan $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
"De modulus van z is afstand van z tot de oorsprong".

Oplossen tweedegraads vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met a, b en c reëele getallen.

Voorbeeld: $x^2 + x + 1 = 0$

Los op met

1. Kwadraat afsplitsen
2. abc-formule

Oplossen tweedegraads vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met a, b en c reëele getallen.

Voorbeeld: $x^2 + x + 1 = 0$

Los op met

1. Kwadraat afsplitsen
2. abc-formule

Merk op: oplossingen zijn complex geconjugeerde van elkaar.
Dit geldt in het algemeen.

Text-modus

```
> (3+2*I)*(6-7*I)/(8-13*I);
```

$$\frac{373}{233} + \frac{344}{233} I$$

```
> z:=2+2*I*sqrt(3): Re(z); Im(z); conjugate(z);
```

$$2$$

$$2\sqrt{3}$$

$$2 - 2 I \sqrt{3}$$

```
> abs(1+I);
```

$$\sqrt{2}$$

```
> solve(x^2+5*x+10=0,x);
```

$$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} I \sqrt{15}, -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} I \sqrt{15}$$

Math-modus

$$> \frac{(3+2\cdot I)\cdot(6-7\cdot I)}{(8-13\cdot I)};$$

$$\frac{373}{233}+\frac{344}{233}I$$

$$> z := 2+2\cdot I\cdot\sqrt{3} : \mathrm{Re}(z); \mathrm{Im}(z); conjugate(z);$$

$$2$$

$$2\sqrt{3}$$

$$2-2I\sqrt{3}$$

$$> \mathrm{abs}(1+I);$$

$$\sqrt{2}$$

$$> solve\left(x^2+5\cdot x+10=0, x\right);$$

$$-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{15}, -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{15}$$

Maak opgaven 5, 15 en 23 van “Complex numbers” (pagina 7)