

Tentamen Statistiek MBW/KW (deel 1, eerste kans)

Afdeling: Propedeuse MBW/KW 2020-2021

Examinator: Dr. J.B.M. Melissen

Datum: vrijdag 4 juni 2021 10:00 – 12:00, duur tentamen: 2 uur

1. Lever de antwoorden in op het geprinte antwoordformulier achterin dit tentamen en zet je naam erop. De berekeningen en uitleg graag op gelinieerd papier inleveren. Er is een reserveformulier aanwezig voor als je fouten hebt gemaakt.

2. Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden!

3. Rond eindantwoorden (kommagetallen) af op vier decimalen, tenzij anders vermeld.

4. Boeken, reader en aantekeningen mogen worden geraadpleegd.

5. De aanwezigheid van *communicatieapparatuur* is niet toegestaan.

6. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine met statistische programmatuur en het raadplegen van de bijbehorende handleiding is toegestaan. Het *statistische* gebruik van deze rekenmachine is bij een aantal onderdelen ingeperkt. Let op de aanwijzingen!

7. De opgaven dienen na afloop van het tentamen ingeleverd te worden.

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven (30, 25, 25, 20 punten). Score = Puntentotaal/10

Opgave 1 (Totaal 30 punten)



Sergeant Fabio is een flamboyante gast. Hoewel hij dol is op de militaire dienst, heeft hij een hekel aan de uniformiteit van de kleding. Sergeant Fabio houdt er namelijk erg van om een beetje op te vallen, met name wat sokken betreft. Elk weekend, wanneer hij geen dienst heeft, draagt hij een ander paar sokken. Hij bezit daartoe 52 verschillende paren sokken, één voor elk weekend van het jaar. Eén keer per jaar, op Nationale Sockendag, wast hij al zijn sokken.



Vervolgens trekt hij zich met een grote wasmand vol sokken terug in zijn slaapkamer om het Sok Sorteert Ritueel (SSR) uit te voeren. Tijdens dit ritueel neemt hij telkens een willekeurige sok uit de wasmand en legt deze ofwel (netjes in rijen) op zijn bed als er geen match is met een van de andere sokken die inmiddels al op het bed liggen, of als hij een bijpassende tweede sok vindt op het bed, vouwt hij de twee sokken samen als een paar en bergt ze vervolgens op in zijn sokkenkast. Hij gaat op deze manier door totdat alle 104 sokken zijn opgeborgen.



Sergeant Fabio heeft in de loop der jaren gemerkt dat tijdens het SSR het aantal ongepaarde sokken op het bed eerst min of meer toeneemt, om dan tegen het einde weer af te nemen. Dat gedrag is echter geenszins monotoon, er kunnen onderweg verschillende stijgingen en dalingen in het aantal sokken op het bed optreden.

Sergeant Fabio is geïnteresseerd in het gemiddeld aantal sokken op zijn bed tijdens het SSR.

1a. [4pt] Wat is het grootste aantal ongepaarde sokken dat tijdens SSR op een bepaald moment op zijn bed kan liggen? Bereken of schat de kans dat dit gebeurt.

Wat is het kleinste aantal ongepaarde sokken dat tijdens SSR op zijn bed kan liggen?

Voor elke keer dat sergeant Fabio een sok uit de wasmand pakt, wordt het aantal sokken op het bed ofwel met één verhoogd (er is dan geen bijpassende sok op het bed), of met één verminderd (als er een match is, het complete paar wordt dan opgeruimd).

Dit betekent dat elke keer dat Fabio een sok heeft geselecteerd en verwerkt, er een aantal sokken op het bed achterblijft waarbij dit aantal voldoet aan een bepaalde kansverdeling.

Laat \underline{k}_n de kansvariabele zijn die het aantal ongepaarde sokken op het bed beschrijft na verwerking van de n -de sok ($n = 0, 1, 2, \dots, 104$), en $f_n(k)$ is de bijbehorende kansfunctie die de kansen beschrijft waarmee de mogelijke waarden (k) van het overgebleven aantal sokken op bed optreden. Hieronder staan de kansfuncties voor $n = 0, 1$, en 2 .

k	0
$f_0(k) = P(\underline{k}_0 = k)$	1

k	1
$f_1(k) = P(\underline{k}_1 = k)$	1

k	0	2
$f_2(k) = P(\underline{k}_2 = k)$	$\frac{1}{103}$	$\frac{102}{103}$

Voor $n = 0$ zijn er nog geen sokken gekozen, dus ligt er geen sok ($k = 0$) op het bed. De kans daarop is 1.

De eerste sok die uit de wasmand wordt gepakt ($n = 1$) eindigt altijd op het bed ($k = 1$) met kans 1, omdat er nog geen sok op het bed ligt om een compleet paar te maken.

De tweede sok ($n = 2$) kan ofwel een paar vormen met de sok op het bed ($k = 0$ sokken blijven dan over op het bed. De kans hierop is $1/103$ omdat precies één van de 103 sokken waaruit gekozen kan worden bijpassend is), of er is geen bijpassende sok op het bed ($k = 2$ sokken blijven dan op het bed met kans $102/103$).

1b. [4pt] Bereken de tabel van de kansfunctie $f_3(k) = P(\underline{k}_3 = k)$ voor $n = 3$. Maak daarvoor gebruik van de tabel voor $n = 2$ en de 102 sokken in de wasmand waaruit sergeant Fabio de derde sok kan kiezen.

1c. [6pt] Bereken de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie voor \underline{k}_6 . De kansfunctie $f_6(k)$ van \underline{k}_6 is in de tabel hieronder gegeven. Gebruik voor je berekening het antwoordformulier.

k	0	2	4	6
$f_6(k)$	0,0000	0,0043	0,1370	0,8587

1d. [4pt] Leg uit hoe je aan de tabel van $f_6(k)$ hierboven kunt zien dat het inderdaad over een goedgedefinieerde kansfunctie gaat.

1e. [4pt] Bereken de verwachtingswaarden van $\underline{k}_0, \underline{k}_1, \underline{k}_2$, and \underline{k}_3 .

Na wat experimenteren heeft Fabio zich ervan overtuigd dat de algemene formule voor het gemiddeld aantal sokken dat na het kiezen van de n -de sok op het bed overblijft gelijk is aan

$$E(\underline{k}_n) = \frac{n(104 - n)}{103}$$

1f. [4pt] Bereken de minimale en de maximale waarde van het verwachte aantal sokken op het bed tijdens het SSR.

1g. [4pt] Bereken $P(\underline{k}_{53} = 0)$, $P(\underline{k}_{53} = 53)$, and $P(\underline{k}_{53} = 51 \mid \underline{k}_{52} = 52)$. (Hint: Geen berekeningen nodig, alleen logisch nadenken).

Opgave 2 (Totaal 25 punten)

2a. [4pt] De kansvariabele \underline{x} is uniform verdeeld op het interval $[-3, 7]$. Bepaal $\mu(\underline{x})$ en $\sigma(\underline{x})$.

2b. [4pt] De kansvariabele \underline{x} is normaal verdeeld met $\mu = 17$ en $\sigma = 2$. Bereken $E(\underline{y})$ als $\underline{y} = 30 + 2\underline{x}$.

2c. [4pt] De kansvariabelen \underline{x} en \underline{y} zijn normaal verdeeld met $\mu = 5$ en $\sigma = 2$. Bereken $P(\underline{x} + \underline{y} \geq 11)$.

2d. [4pt] De kansvariabele \underline{x} is normaal verdeeld met $\mu = 10$ en $\sigma = 3$ en de kansvariabele \underline{y} is normaal verdeeld met $\mu = 8$ en $\sigma = 4$. Bereken de kans dat \underline{x} groter is dan \underline{y} .

2e. [4pt] De kansvariabele \underline{k} is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en p is onbekend. Bereken p zodanig dat $P(\underline{k} > 80) = 0,31$.

2f. [5pt] De continue kansvariabele \underline{t} heeft als kansdichtheidsfunctie

$$f(t) = \begin{cases} a(t^3 + 1) & \text{als } 0 < t < 3 \\ 0 & \text{als } t \leq 0 \text{ of } t \geq 3 \end{cases}$$

Bereken de waarde van a .

Opgave 3 (Totaal 25 punten)

Bij een luchthaven wordt de paspoortcontrole verzorgd door de Koninklijke Marechaussee. Elke balie is bemand door twee marechaussees die beide controleren en de verwerkingscapaciteit per balie is gemiddeld 200 passagiers per uur.

De passagiers dienen zich aan volgens een Poisson-verdeling met $\mu = 14$ passagiers per minuut.

3a. [4pt] Bereken hoeveel balies er minimaal open moeten zijn om te voorkomen dat de wachtrijen structureel gaan oplopen.



Marechaussee tijdens inwendig onderzoek bij verdachte van drugssmokkel (1963).

3b. [6pt] Bereken in de situatie van opgave 3a de kans dat er zich bij een willekeurige balie in een bepaald kwartier meer dan 55 passagiers aandienen.

De verwerkingscapaciteit van een balie is gesteld op gemiddeld 200 passagiers per uur. Dat betekent dat als er zich 200 passagiers mooi verspreid over een uur aandienen er normaal gesproken geen filevorming optreedt. Nu blijkt in de praktijk dat er zich door onregelmatigheden in het aanbodpatroon (Poissonverdeling) wel opstoppen kunnen voordoen. Die worden vaak over de loop van een uur gedeeltelijk weer opgelost, maar ze kunnen toch leiden tot wachttijden voor individuele passagiers.

In samenspraak met de commandant is afgesproken om het volgende model te gaan hanteren: De kans dat zich in een willekeurig kwartier meer dan 60 passagiers aanbieden bij de balie (dat is 10 meer dan het gemiddelde van $200/4 = 50$ passagiers) moet kleiner zijn dan 5%.

3c. [6pt] Bereken hoeveel passagiers zich gemiddeld per uur volgens een Poissonverdeling per balie mogen aanbieden zodat de kans dat zich in een willekeurig kwartier meer dan 60 passagiers aanbieden bij de balie steeds kleiner is dan 5%.

3d. [4pt] Is er onder de voorwaarden van opgave 3c ruimte dat de marechaussees 5 minuten pauze per uur kunnen houden zonder dat de ontstane file in het volgende uur weggewerkt kan worden?

3e. [5pt] Bereken de kans dat er zich gedurende een minuut geen passagiers bij een balie aandienen.

Opgave 4 (totaal 20 punten)

Mortiergranaat ongeval Mali spontaan op scherp: minister overweegt juridische stappen tegen fabrikant

Het ministerie van Defensie stelt na eigen onderzoek dat de mortiergranaat die in Mali een fataal ongeval veroorzaakte, onbedoeld eerder kon ontploffen. Bij het ongeluk kwamen twee Nederlandse militairen om het leven en raakte één militair gewond.



Nieuw, eigen onderzoek werpt volgens de krijgsmacht nieuw licht op de oorzaak van het ongeluk in de zomer van 2016. Daaruit blijkt dat er bij onderdelen van de mortiergranaat sprake was van ‘on nauwkeurige maatvoering’. Het probleem zit in de ontsteker, het puntje van de mortiergranaat. Daarin zit een mechaniek dat op scherp wordt gezet als de mortiergranaat de buis waaruit die wordt afgeschoten verlaat. „Maar bij deze partij blijkt dat de ontsteker onbedoeld al eerder op scherp kan worden gesteld, waardoor de munitie kan ontploffen voor het doel bereikt is”, legt een woordvoerder van het ministerie van Defensie uit.

Defensie deed het onderzoek omdat het na een vernietigend rapport van de Onderzoeksraad voor de Veiligheid (OVV) werd opgedragen om de elfduizend resterende 60 millimeter mortiergranaten te vernietigen. De OVV deed destijds ook onderzoek naar eventuele productiefouten. Daarin werd wel geconcludeerd dat het ontbreken van een ‘dwarspin’ kan leiden tot ‘voortijdige wapening’. (Algemeen Dagblad 22-08-2019)

Uit nader onderzoek door de fabrikant blijkt dat de partij verdachte mortiergranaten van Nederland uit 112 verschillende productiebatches kan komen, waarbij in één productiebatch soms dwarspinnen kunnen ontbreken. Volgens de fabrikant is het niet nodig om alle 11.000 granaten te vernietigen, maar kan op grond van gewicht worden vastgesteld welke granaten mogelijk defect zijn. Hiertoe levert de fabrikant de onderstaande gegevens over het gemiddelde gewicht van een granaat en van de mogelijk ontbrekende dwarspin, met de standaarddeviaties daarin:

Gewicht mortiergranaat met dwarspin (gram):	1314
Standaarddeviatie daarin (gram):	0,13
Gewicht dwarspin (gram)	0,5454
Standaarddeviatie daarin (gram):	0,05

4a. [4pt] Bereken het gemiddelde gewicht van een mortiergranaat zonder dwarspin. Bereken ook de standaarddeviatie daarin.

Defecte granaten missen een pin en zijn lichter, dus het idee is om alle granaten onder een bepaald gewicht g te vernietigen. Gebruik voor g het gewicht precies midden tussen dat van een gemiddelde defecte granaat zonder dwarspin (zie **4a**) en dat van een gemiddelde niet-defecte granaat met dwarspin.

4b. [4pt] Bereken de kans dat met deze g een **niet-defecte** granaat ten onrechte wordt vernietigd.

4c. [4pt] Bereken ook de kans dat met deze g een **defecte** granaat ten onrechte **niet** wordt vernietigd.

4d. [4pt] Volgens de leverancier bevat de Nederlandse voorraad met zekerheid niet meer dan 100 mogelijk defecte granaten. De worst case situatie is dus dat er 100 defecte granaten zijn. Bereken hiervoor de kans dat met de bovenstaande procedure minstens één defecte granaat over het hoofd wordt gezien.

4e. [4pt] De kans die berekend is in **4d** wordt door de OVV veel te groot gevonden. Zij vinden een kans van hoogstens 0,001 acceptabel omdat het om levens kan gaan. Reken bij deze foutkans uit wat de kans om een defecte granaat over het hoofd te zien maximaal mag zijn.

4f. [5pt BONUS] De veel hogere veiligheidseis uit **4e** zal leiden tot een hogere grenswaarde g en dus ook tot het vernietigen van meer niet-defecte granaten. Bereken g . Reken uit hoeveel granaten naar verwachting onterecht vernietigd gaan worden.

=== EINDE TENTAMEN ===