Ministerie van Defensie

Faculteit Militaire Wetenschappen

Gegevens student	
Naam:	
Peoplesoftnummer:	
Klas:	
Handtekening:	

Algemeen			
Vak:	Statistiek deel 2 (tweede kans)	**Vakcode:**	STA#2
Datum:	13 november 2025	**Tijdsduur:**	9:00-12:00
Examinator:	Dr. ir. D.A.M.P. Blom	**Aantal pagina's:**	4
Peer-review:	Dr. M.P. Roeling	**Aantal opgaven:**	4

Algemene instructies

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Indien u een deelopgave niet kunt oplossen en het antwoord in vervolgvragen nodig hebt, probeer uit te gaan van een redelijke fictieve waarde.
- Rond je antwoorden waar nodig af op vier decimalen.
- U mag een grafische rekenmachine gebruiken zonder CAS (Computer Algebra Systeem).
- Antwoorden, in welke vorm dan ook, mogen de zaal niet verlaten.
- Vermeld op elk antwoordvel je naam, Peoplesoft-nummer en maak een nummering van je antwoordvellen.
- Iedere vorm van mobiele (potentiële) datadragers (telefoon, smartwatch, etc.) of andere vormen om te frauderen (bv. communicatieapparatuur) zijn niet toegestaan gedurende de gehele duur van het tentamen en mogen ook niet in het lokaal meegebracht worden of zijn uitgeschakeld en ingeleverd.
- Schrijf leesbaar ter voorkoming van misverstanden bij de beoordeling van uw werk. Indien uw antwoord niet leesbaar is, wordt uw antwoord fout gerekend.
- Toiletbezoek tijdens het tentamen vindt enkel plaats na toestemming van de examinator.
- Lever bij het verlaten van de zaal, kladpapier, tentamenopgaven en andere tentamen-gerelateerde documenten in bij de examinator.

Cijferberekening / cesuur

- Het eindcijfer voor het vak Statistiek wordt voor 50% bepaald door dit tentamen.
- Het tentamen is opgebouwd uit 4 open vragen. Bij iedere (sub)vraag is het aantal te behalen punten tussen haakjes aangegeven. In totaal kunt u 100 punten verdienen.
- Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten te delen door 10. Het tentamencijfer moet minimaal een 5,0 zijn om de cursus Statistiek met succes af te ronden.

Procedure na het tentamen

- De cijfers van dit tentamenonderdeel worden in principe binnen 10 werkdagen na de afname bekend gemaakt.
- Met vragen over de beoordeling kunt u tot 10 werkdagen na bekendmaking van de cijfers terecht bij de cursuscoördinator.

Veel succes!

Formuleblad Statistiek (2024-2025)

Statistiek deel 1

Steekproefgemiddelde (gegeven een steekproef met n uitkomsten $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Steekproefvariantie en steekproefstandaardafwijking:

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Rekenregels kansrekening:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \qquad \text{(optelregel)}$$

$$P(B) = 1 - P(\text{niet } B) \qquad \text{(complementregel)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} \qquad \text{(conditionele kansen)}$$

Discrete en continue kansverdelingen:

	Discrete kansvariabelen	**Continue kansvariabelen**
Uitkomstenruimte:	Eindig / aftelbaar oneindig	Overaftelbaar oneindig
Toepassingen:	Tellen / categoriseren	Meten
Kansbegrip:	Kansfunctie $p(k) = P(X = k)$	Kansdichtheidsfunctie $f(x)$
CDF:	$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{\ell:\ell \leq k} p(\ell)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$
Verwachtingswaarde:	$E[X] = \sum_k k \cdot P(X = k)$	$E[X] = \int x \cdot f(x)\, dx$
Variantie:	$\text{Var}(X) = \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k)$	$\text{Var}(X) = \int (x - E[X])^2 \cdot f(x)\, dx$
Standaardafwijking:	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Speciale kansverdelingen:

- $X \sim$ Binomiaal(n, p): tellen van aantal successen bij onafhankelijke kansexperimenten met twee uitkomsten (Bernoulli-experimenten): succes / mislukking.

  Parameters: het aantal Bernoulli-experimenten n en de succeskans per experiment p.

- $X \sim$ Poisson$(\lambda \cdot t)$: tellen van aantal "gebeurtenissen" in een "interval" van tijd / ruimte.

  Parameters: het gemiddelde aantal gebeurtenissen λ per meeteenheid (tijd / ruimte) en het aantal meeteenheden t.

  $\rightarrow$ *Voorbeeld: bij de meeteenheid van een dag bestaat een week uit $t = 7$ meeteenheden.*

- $T \sim$ Exponentieel(λ): meten van de tijd / ruimte tot de volgende gebeurtenis.

  Parameter: het gemiddelde aantal gebeurtenissen λ per meeteenheid (tijd / ruimte).

Verwachtingswaarde en variantie van veelgebruikte kansverdelingen:

Verdeling	Kans(dichtheids)functie	CDF	$E(X)$	Var(X)
Discreet				
Uniform(a,b)	$p(k)=\frac{1}{b-a+1}$ $(k=a,a+1,\ldots,b)$	$F(k)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{k-a+1}{b-a+1} & a\le k<b\\ 1 & k\ge b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomiaal(n,p)	$p(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$F(k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$p(k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$	$F(k)=\sum_{i=0}^{k}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ
Continuous				
Uniform(a,b)	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{elders.}\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentieel(λ)	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\ge 0$	$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Veelgebruikte functies op de grafische rekenmachine

Type vraag	TI-84 Plus	Casio
Continue kansverdeling (willekeurig)		
$P(a\le X\le b)$	$\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$
$X\sim$ **Binomiaal**(n,p)		
$P(X=k)$ $P(X\le k)$	binompdf(n,p,k) binomcdf(n,p,k)	BinomialPD(k,n,p) BinomialCD(k,n,p)
$X\sim N(\mu,\sigma)$		
$P(a\le X\le b)$ Grenswaarde g zodat $P(X\le g)=p$?	normalcdf(a,b,μ,σ) invNorm(p,μ,σ)	NormalCD(a,b,σ,μ) InvNormCD(tail=left, p,σ,μ)
$X\sim$ **Poisson**(λ)		
$P(X=k)$ $P(X\le k)$	poissonpdf(λ,k) poissoncdf(λ,k)	PoissonPD(k,λ) PoissonCD(k,λ)

z-score:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

Centrale limietstelling: Gegeven n kansvariabelen $X_1,X_2,\ldots,X_n$ die onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben met een verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ, dan geldt (bij benadering) dat

- de som $\sum X = X_1+X_2+\ldots+X_n$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde $n\cdot\mu$ en standaardafwijking $\sqrt{n}\cdot\sigma$.
- het gemiddelde $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Statistiek deel 2:

Betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde μ (σ bekend)

- **$100 \cdot (1-\alpha)$%-betrouwbaarheidsinterval (BI) voor μ:**

$$z_{\alpha/2} = \text{InvNorm}(\text{opp} = 1-\alpha/2; \mu = 0; \sigma = 1)$$

$$[\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

- **Minimale steekproefomvang voor $100 \cdot (1-\alpha)$%-BI als μ maximaal $\pm a$ mag afwijken:**

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{a}\right)^2$$

Betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde μ (σ onbekend)

- **$100 \cdot (1-\alpha)$%-betrouwbaarheidsinterval (BI) voor μ:**

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1-\alpha/2; \text{df} = n-1)$$

$$[\overline{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}]$$

- **Minimale steekproefomvang voor** $100 \cdot (1-\alpha)$%**-BI als** μ **maximaal $\pm a$ mag afwijken:**

$$\text{GR tabel (voor verschillende } n\text{):} \quad \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \text{InvT}(\text{opp} = 1-\alpha/2; \text{df} = n-1) \leq a$$

  NB: zodra $n \geq 30$, vallen de normale en de t-verdeling nagenoeg samen. Je mag dan rekenen met de schatting s in plaats van de daadwerkelijke (onbekende) σ.

- **Onderscheidend vermogen (toets met** $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs.** $H_1 : \mu \neq \mu_0$**, en gegeven** $\mu = \mu_1$**)**

$$1 - \beta = P(\overline{X} \text{ neemt waarde aan in het kritieke gebied} \mid \mu = \mu_1)$$

Betrouwbaarheidsintervallen voor de binomiale succeskans p

Betrouwbaarheidsinterval voor p (Clopper-Pearson): Gegeven een binomiale verdeling met n Bernoulli-experimenten en onbekende p, en uitkomst k.

1. Bereken de succeskans p_1 zodat geldt $P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n; p; k) = \alpha/2$
2. Bereken de succeskans p_2 zodat geldt $P(X \geq k) = 1 - \text{binomcdf}(n; p; k-1) = \alpha/2$
3. De berekende waarden voor p_1 en p_2 zijn de grenzen van het Clopper-Pearson interval.

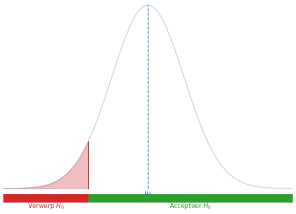
Hypothesetoetsen

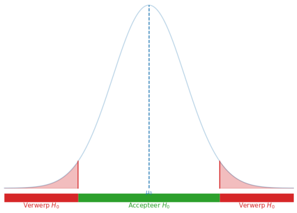
Stappenplan hypothesetoetsen

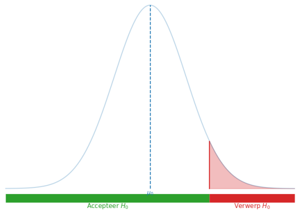
1. Definieer de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1.
2. Bepaal het significantieniveau α (kans op verwerpen van H_0 terwijl H_0 waar is $\rightarrow$ type-I fout)
3. Verzamel data voor de toetsingsgrootheid
4. Bereken de toetsingsgrootheid
   - Uitgaande van de nulhypothese H_0 maken we aannames over de kansverdeling van de toetsingsgrootheid!
5. Geef een conclusie (met behulp van het kritieke gebied / p-waarde) en vertaal deze terug naar de originele probleemcontext.

Drie typen hypothesetoetsen: linkszijdig, tweezijdig, rechtszijdig

Linkszijdige toets	**Tweezijdige toets**	**Rechtszijdige toets**
Kritiek gebied:	Kritiek gebied:	Kritiek gebied:
$(-\infty; g]$	$(-\infty; g_1]$ en $[g_2; \infty)$	$[g; \infty)$







Kansverdeling (onder H_0)	**Linkszijdig**	**Tweezijdig**	**Rechtszijdig**
$N(\mu; \sigma)$	$g = \text{InvNorm}(\alpha; \mu; \sigma)$	$g_1 = \text{InvNorm}(\text{opp} = \frac{\alpha}{2}; \mu; \sigma)$ $g_2 = \text{InvNorm}(\text{opp} = 1 - \frac{\alpha}{2}; \mu; \sigma)$	$g = \text{InvNorm}(1 - \alpha; \mu; \sigma)$
$t(\text{df})$	$g = \text{InvT}(\alpha; \text{df})$	$g_1 = \text{InvT}(\text{opp} = \frac{\alpha}{2}; \text{df})$ $g_2 = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \frac{\alpha}{2}; \text{df})$	$g = \text{InvT}(1 - \alpha; \text{df})$
		Grenzen die met de solver functie moeten worden opgelost:	
$\chi^2(\text{df})$ (chikwadraat)	$\chi^2\text{cdf}(0; g; \text{df}) = \alpha$	$\chi^2\text{cdf}(0; g_1; \text{df}) = \frac{\alpha}{2}$ $\chi^2\text{cdf}(g_2; 10^{99}; \text{df}) = \frac{\alpha}{2}$	$\chi^2\text{cdf}(g; 10^{99}; \text{df}) = \alpha$
$F(\text{df}_A; \text{df}_B)$	$\text{Fcdf}(0; g; \text{df}_A; \text{df}_B) = \alpha$	$\text{Fcdf}(0; g_1; \text{df}_A; \text{df}_B) = \frac{\alpha}{2}$ $\text{Fcdf}(g_2; 10^{99}; \text{df}_A; \text{df}_B) = \frac{\alpha}{2}$	$\text{Fcdf}(g; 10^{99}; \text{df}_A; \text{df}_B) = \alpha$

p-waardes uitrekenen (gegeven een theoretische en geobserveerde toetsingsgrootheid T en t)

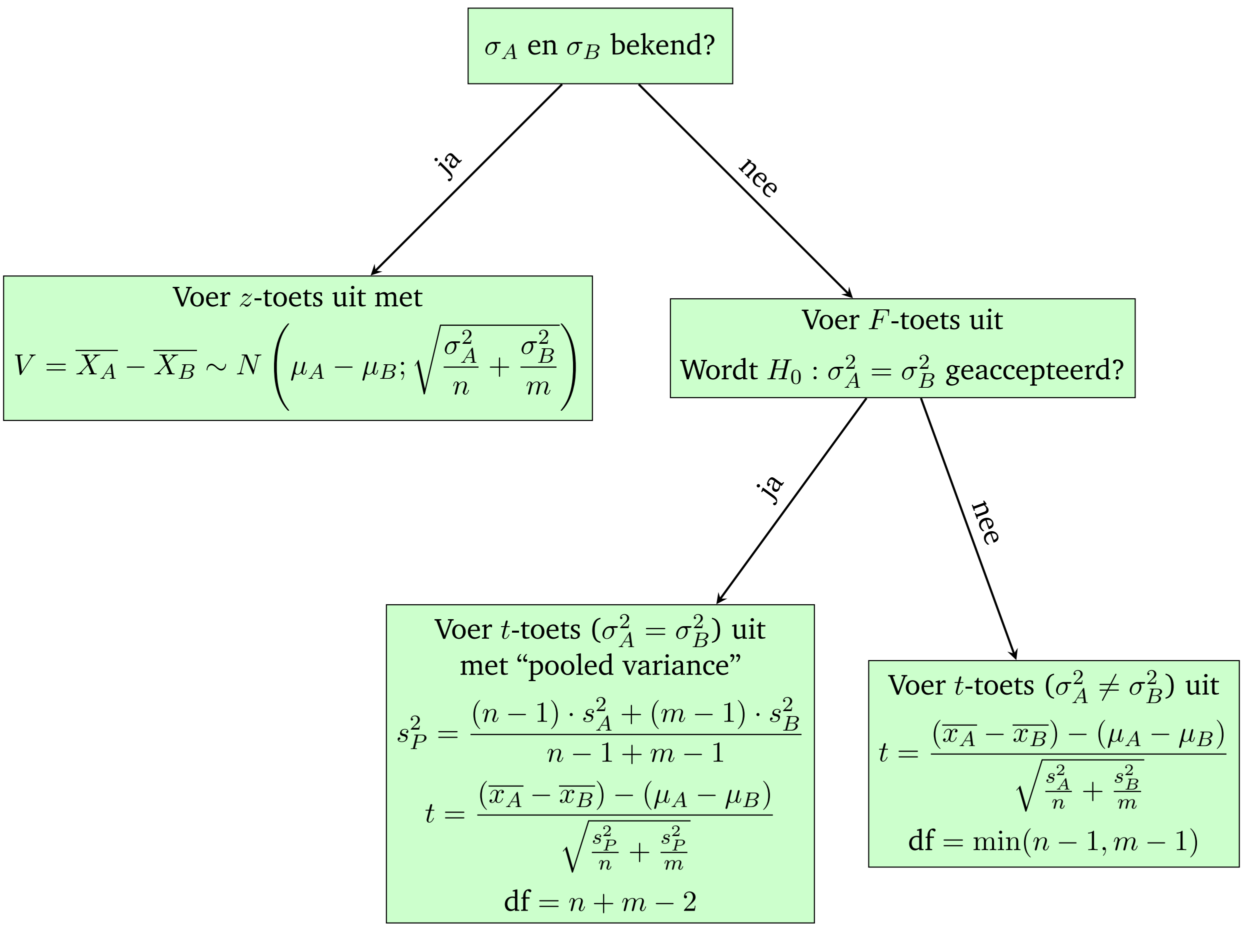
Kansverdeling (onder H_0)	**Linkszijdig ($P(T \leq t)$)**	**Rechtszijdig ($P(T \geq t)$)**
$N(\mu; \sigma)$	$p = \text{normalcdf}(-10^{99}; t; \mu; \sigma)$	$p = \text{normalcdf}(t; 10^{99}; \mu; \sigma)$
$t(\text{df})$	$p = \text{tcdf}(-10^{99}; t; \text{df})$	$p = \text{tcdf}(t; 10^{99}; \text{df})$
$\chi^2(\text{df})$	$p = \chi^2\text{cdf}(0; t; \text{df})$	$p = \chi^2\text{cdf}(t; 10^{99}; \text{df})$
$F(\text{df}_A; \text{df}_B)$	$p = \text{Fcdf}(0; t; \text{df}_A; \text{df}_B)$	$p = \text{Fcdf}(t; 10^{99}; \text{df}_A; \text{df}_B)$

NB: Om met de p-waarde een conclusie te trekken uit een hypothesetoets vergelijken we de p-waarde met het significantieniveau α. Let op: bij tweezijdige toetsen neem je het minimum van de linkszijdige en rechtszijdige p-waarde en vergelijk je deze met $\alpha/2$!

Soorten toetsen

Soort toets	Toetsingsgrootheid	Kansverdeling (onder H_0)
Toetsen voor het gemiddelde $\mu \leq \mu_0$ of $\mu = \mu_0$ of $\mu \geq \mu_0$		
z-toets (σ bekend)	$\overline{X}$	$N(\mu_0; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
t-toets (σ onbekend)	$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$t(\text{df} = n-1)$
Chikwadraattoetsen (χ^2)		
Onafhankelijkheid	$X^2 = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$	$\chi^2(\text{df} = (\#\text{rijen-1}) \cdot (\#\text{kolommen-1}))$
Aanpassing (goodness-of-fit)	$X^2 = \sum_i \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$	$\chi^2(\text{df} = (\#\text{categorieën-1}))$
Verschiltoetsen (op basis van twee populaties A en B)		
F-toets: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$	$F = \frac{S_A^2}{S_B^2}$	$F(\text{df}_A, \text{df}_B)$
z-toets	$V = \overline{X_A} - \overline{X_B}$	$N\left(\mu_A - \mu_B; \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n} + \frac{\sigma_B^2}{m}}\right)$
t-toets ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$)	$T = \frac{(\overline{X_A}-\overline{X_B})-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_P^2}{n}+\frac{S_P^2}{m}}}$	$t(\text{df} = n+m-2)$
t-toets ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$)	$T = \frac{(\overline{X_A}-\overline{X_B})-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n}+\frac{S_B^2}{m}}}$	$t(\text{df} = \min(n-1; m-1))$

Beslisboom verschiltoetsen



Correlatie en regressie

Correlatiecoëfficiënt van Pearson:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \cdot (\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}$$

Correlatiecoëfficiënt van Spearman:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_i d_i^2}{n^3 - n}$$

Coëfficiënten van de lineaire regressielijn $Y = a + b \cdot X$:

$$b = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}$$

Schatting van de variantie van de storingsterm ε:

$$s_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{\sum (y_i - (a + b \cdot x_i))^2}{n-2} = \frac{n}{n-2} \cdot \left(\overline{y^2} - a \cdot \overline{y} - b \cdot \overline{xy}\right)$$

$100 \cdot (1 - \alpha)\%$-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde Y bij een gegeven $X = x_0$:

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 2)$$

$$s_\mu = s_\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\right)}$$

$$[a + b \cdot x_0 - t \cdot s_\mu; a + b \cdot x_0 + t \cdot s_\mu]$$

$100 \cdot (1 - \alpha)\%$-betrouwbaarheidsinterval voor Y bij een gegeven $X = x_0$:

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 2)$$

$$s_f = s_\varepsilon \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\right)}$$

$$[a + b \cdot x_0 - t \cdot s_f; a + b \cdot x_0 + t \cdot s_f]$$

Opgave 1 (30 punten) Een luchtmachteenheid is een nieuw type radar aan het testen voor het detecteren van vijandelijke drones. Fabrikant Thales claimt dat de radar een succeskans van $70\,\%$ heeft om een drone te detecteren (onafhankelijk van andere drones). Om deze claim te testen, worden er 1000 onafhankelijke tests uitgevoerd. In elke test worden vier drones op het systeem afgestuurd en geteld hoeveel van de vier drones gedetecteerd worden. De gegevens zijn weergegeven in onderstaande frequentietabel:

Aantal drones	**Frequentie**
0	15
1	105
2	290
3	360
4	230

Om de claim van de fabrikant te toetsen, wordt een chikwadraat aanpassingstoets uitgevoerd.

1a [4pt] Welke kansverdeling volgt het aantal gedetecteerde drones in één enkele test met een radar? Geef daarnaast specifieke waardes van de bijbehorende parameters.

Uitwerking

Laat X het aantal gedetecteerde drones zijn in één enkele test met de radar. Omdat we een "aantal successen" (detecties) tellen uit een eindig aantal onafhankelijke Bernoulli-experimenten (aantal drones), betreft het een binomiale kansverdeling. (2pt)

Het aantal Bernoulli-experimenten $n = 4$, want er doen vier drones mee per test. (1pt)

Verder is de succeskans $p = 0.7$ ($70\,\%$ detectiekans) per drone. (1pt)

Noot: de waarde van n is NIET gelijk aan 1000. Dit getal geeft alleen aan hoe vaak een realisatie van een Binomiaal$(n = 4, p = 0.7)$ verdeelde kansvariabele wordt gemeten.

1b [4pt] Formuleer de nulhypothese H_0 en de alternatieve H_1 van deze hypothesetoets. Wat zou in deze context de betekenis zijn van het verwerpen van de nulhypothese?

Uitwerking

De nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothesetoets H_1 kunnen als volgt worden geformuleerd:

H_0: het aantal gedetecteerde drones X volgt een binomiale verdeling met parameters $n = 4$ en $p = 0.7$ (1pt)

H_1: het aantal gedetecteerde drones X volgt NIET een binomiale verdeling met parameters $n = 4$ en $p = 0.7$ (1pt)

Het verwerpen van de nulhypothese H_0 betekent in dit geval dat X niet binomiaal verdeeld met parameters $n = 4$ en $p = 0.7$. Het is echter nog steeds mogelijk dat (1pt) X binomiaal verdeeld is, maar dan moet gelden dat de succeskans $p \neq 0.7$. (1pt)

1c [3pt] Bereken de verwachte ("expected") frequenties van het aantal gedetecteerde drones uitgaande van de nulhypothese H_0.

Uitwerking

Om de verwachte frequenties te bepalen, moeten we gebruik maken van het feit dat er 1000 onafhankelijke tests zijn uitgevoerd. Onder de nulhypothese H_0 is het aantal gedetecteerde drones X binomiaal verdeeld met parameters $n = 4$ en $p = 0.7$. (1pt)

Aantal drones	Observed	Expected
0	15	$1000 \cdot \text{binompdf}(n = 4, p = 0.7, k = 0) = 8.1$
1	105	$1000 \cdot \text{binompdf}(n = 4, p = 0.7, k = 1) = 75.6$
2	290	$1000 \cdot \text{binompdf}(n = 4, p = 0.7, k = 2) = 264.6$
3	360	$1000 \cdot \text{binompdf}(n = 4, p = 0.7, k = 3) = 411.6$
4	230	$1000 \cdot \text{binompdf}(n = 4, p = 0.7, k = 4) = 240.1$

(2pt)

1d [6pt] Bereken de toetsingsgrootheid en de p-waarde op basis van de gegeven frequenties.

Uitwerking

We berekenen de toetsingsgrootheid χ^2 als volgt:

$$
\begin{aligned}
\chi^2 &= \frac{(O_0 - E_0)^2}{E_0} + \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \ldots + \frac{(O_4 - E_4)^2}{E_4} \\
&= \frac{(15 - 8.1)^2}{8.1} + \frac{(105 - 75.6)^2}{75.6} + \ldots + \frac{(230 - 240.1)^2}{240.1} \\
&\approx 26.643
\end{aligned}
$$

De theoretische toetsingsgrootheid X^2 volgt onder de nulhypothese een χ^2-

verdeling met df $= \#\text{categorieën} - 1 = 4$ vrijheidsgraden. De p-waarde behorende bij onze toetsingsgrootheid is daarom gelijk aan

$$p = P(\chi^2 > 26.643) = \chi^2\text{cdf}(\text{lower} = 26.643; \text{upper} = 10^{99}; \text{df} = 4)$$
$$\approx 0.$$

1e [5pt] Formuleer een conclusie voor deze hypothesetoets (op basis van een significantieniveau $\alpha = 0.05$) in de originele context van het probleem, en verklaar deze aan de hand van de geobserveerde en verwachte frequenties.

Uitwerking

De p-waarde is extreem klein. Omdat $p < \alpha$, wordt de nulhypothese H_0 verworpen. Er is voldoende reden om aan te nemen dat het aantal gedetecteerde drones (1pt) niet binomiaal verdeeld is met $n = 4$ en $p = 0.7$. (2pt)

Als we kijken naar de geobserveerde en verwachte frequenties, dan zijn lage uitkomsten (0 t/m 2) vaker geobserveerd dan verwacht, en hoge uitkomsten (3 of 4) juist minder vaak dan verwacht. Het is dus waarschijnlijk dat de succeskans (1pt) kleiner is dan de geclaimde $p = 0.7$. (1pt)

1f [8pt] Bereken een 95 %-betrouwbaarheidsinterval voor de succeskans p met de Clopper-Pearson methode. Wat zegt dit over de claim van Thales van 70 % kans op detectie?

Hint: *gebruik dat* 1000 *onafhankelijke realisaties van een binomiale kansvariabele met* $n = 4$ *in feite neerkomt op* 4000 *onafhankelijke Bernoulli-experimenten.*

Uitwerking

Om het totaal aantal successen te tellen bij 1000 onafhankelijke waarnemingen van een binomiale kansvariabele met $n = 4$ en $p = ?$ kijken we eigenlijk naar een binomiale kansvariabele met $n = 4000$ en $p = ?$. Op basis van de tabel van geobserveerde frequenties vinden we dat het totaal aantal detecties (uit 4000) gelijk is aan

$$0 \cdot 15 + 1 \cdot 105 + 2 \cdot 290 + 3 \cdot 360 + 4 \cdot 230 = 2685.$$ (1pt)

Omdat de gewenste betrouwbaarheid 95 % is, geldt dat $\alpha = 0.05$.

De Clopper-Pearson methode werkt als volgt:

1. Bepaal de succeskans p_1 waarvoor geldt dat de linkeroverschrijdingskans van de uitkomst $k = 2685$ gelijk is aan $\alpha/2$, oftewel $P(X \leq 2685) = \alpha/2 = 0.025$. Voer hiervoor in het solver menu van de grafische rekenmachine in:

$$y_1 = \text{binomcdf}(n = 4000; p_1 = X; k = 2685)$$
$$y_2 = 0.025$$ (1pt)

   De solver optie geeft een waarde van $p_1 \approx 0.6858$. (1pt)

2. Bepaal de succeskans p_2 waarvoor geldt dat de rechteroverschrijdingskans van de uitkomst $k = 850$ gelijk is aan $\alpha/2$, oftewel $P(X \geq 2685) = 1 - P(X \leq 2684) = \alpha/2 = 0.025$. Voer hiervoor in het solver menu van de grafische rekenmachine:

$$y_1 = 1 - \text{binomcdf}(n = 4000; p_1 = X; k = 2684)$$
$$y_2 = 0.025$$ (2pt)

   De solver optie geeft een waarde van $p_2 \approx 0.6564$. (1pt)

We vinden het Clopper-Pearson interval door de twee gevonden waarden als grenzen te nemen, oftewel het $95\,\%$-betrouwbaarheidsinterval voor de detectiekans p van een drone door de nieuwe radar is gelijk aan $[0.6564, 0.6858]$. (1pt)

We zien dat de geclaimde succeskans $p = 0.7$ niet in dit interval ligt. We kunnen dus met $95\,\%$ betrouwbaarheid concluderen dat de succeskans lager ligt dan de geclaimde $70\,\%$. (1pt)

Opgave 2 (28 punten) De Koninklijke Marine is geïnteresseerd in het bepalen van een betrouwbare onderhoudsstrategie voor de maritieme NH90-gevechtshelikopters. Hiervoor is het belangrijk om data te verzamelen van de *mean time between failures* (MTBF), oftewel de gemiddelde tijd tussen twee faalmomenten van een helikopteronderdeel. Om te onderzoeken wat kritieke onderdelen zijn, worden de *time between failures* (TBF) van de motor (X) en rotorbladen (Y) van tien NH90-gevechtshelikopters gemeten.

De volgende data zijn verzameld over de time between failures van motoren en rotorbladen van NH90-gevechtshelikopters.

TBF motoren (uren)	1185	1175	1195	1180	1195	1190	1185	1215	1175	1205
TBF rotorbladen (uren)	1180	1205	1190	1210	1175	1200	1225	1195	1185	1215

De centrale vraag is nu om te toetsen of de MTBF van de motor significant lager is dan die van de rotorbladen, oftewel dat de motor sneller faalt dan de rotorbladen. Voor beide steekproeven kan worden aangenomen dat de tijden tussen faalmomenten normaal verdeeld zijn.

2a [8pt] Bepaal voor beide populaties de steekproefgemiddelden (x en y) en de steekproefvarianties (s_X^2 en s_Y^2).

Uitwerking

Time between failures voor motoren:

We berekenen het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ als volgt:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1185 + 1175 + \ldots + 1205}{10} = 1190. \qquad \text{(2pt)}$$

We berekenen de steekproefvariantie s_X^2 als volgt:

$$\begin{aligned} s_X^2 &= \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1} \\ &= \frac{(1185 - 1190)^2 + (1175 - 1190)^2 + \ldots + (1205 - 1190)^2}{10 - 1} \\ &\approx 166.6667. \end{aligned} \qquad \text{(2pt)}$$

Time between failures voor rotorbladen:

We berekenen het steekproefgemiddelde $\overline{y}$ als volgt:

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = \frac{1180 + 1205 + \ldots + 1215}{10} = 1198. \qquad \text{(2pt)}$$

We berekenen de steekproefvariantie s_x^2 als volgt:

$$\begin{aligned} s_Y^2 &= \frac{(y_1 - \overline{y})^2 + (y_2 - \overline{y})^2 + \ldots + (y_n - \overline{y})^2}{n-1} \\ &= \frac{(1180 - 1198)^2 + (1205 - 1198)^2 + \ldots + (1215 - 1198)^2}{10-1} \\ &\approx 256.6667. \end{aligned}$$ (2pt)

2b [10pt] Voer een F-toets uit om te bepalen of de varianties van de MTBF's van de twee populaties als gelijk kunnen worden beschouwd ($\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$). Gebruik hiervoor een significantieniveau van $\alpha = 0.05$ en bepaal de toetsuitslag op basis van het kritieke gebied.

Uitwerking

In de vraag staat dat we aan mogen nemen dat voor de time between failures X en Y voor respectievelijk motoren en rotorbladen geldt dat $X \sim N(\mu_X = ?; \sigma_X = ?)$ en $Y \sim N(\mu_Y = ?; \sigma_Y = ?)$.

We toetsen op gelijke varianties, oftewel

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 &: \quad \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \end{aligned}$$ (2pt)

Verder is gegeven dat we mogen werken met een significantieniveau $\alpha = 0.05$, en data is al verzameld voor beide populaties. De toetsingsgrootheid voor een F-toets is gelijk aan

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2},$$

en volgt een $F(n-1, m-1)$-verdeling, oftewel een $F(9, 9)$-verdeling. (1pt)

De geobserveerde toetsingsgrootheid is gelijk aan

$$f = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{166.6667}{256.6667} = 0.6494.$$ (2pt)

Omdat een F-toets altijd tweezijdig toetst, is het kritieke gebied van de vorm $(-\infty; g_1]$ en $[g_2; \infty)$, waarbij de grenzen g_1 en g_2 bepaald kunnen worden met de $F(9, 9)$-verdeling.

$$\begin{aligned} &\text{Fcdf}(\text{lower} = 0; \text{upper} = g_1; \text{df1} = 9; \text{df2} = 9) = \alpha/2 = 0.025 \rightarrow g_1 \approx 0.2484 \\ &\text{Fcdf}(\text{lower} = g_2; \text{upper} = 10^{99}; \text{df1} = 9; \text{df2} = 9) = \alpha/2 = 0.025 \rightarrow g_2 \approx 4.0260 \end{aligned}$$ (2pt)

Het kritieke gebied is dus $(-\infty; 0.2484]$ en $[4.0260; \infty)$. De berekende $f = 0.6494$ ligt dus niet in het kritieke gebied, dus we kunnen de nulhypothese H_0 niet verwerpen. Er is onvoldoende bewijs om op basis van deze steekproef de aanname van gelijke varianties te verwerpen. (1pt) (1pt) (1pt)

2c [10pt] Bepaal met behulp van een onafhankelijke t-toets of de MTBF van de motor significant lager is dan die van de rotorbladen. Gebruik hiervoor opnieuw een significantieniveau van $\alpha = 0.05$, en bepaal de toetsuitslag op basis van de p-waarde.

Uitwerking

We toetsen of de gemiddelde time to failure μ_X voor de motoren significant lager is dan de gemiddelde time to failure μ_Y voor de rotorbladen. De hypotheses kunnen we daarom als volgt definiëren:

$$H_0: \quad \mu_X \geq \mu_Y \text{ (niet significant lager)}$$
$$H_1: \quad \mu_X < \mu_Y \text{ (wel significant lager)} \qquad \text{(2pt)}$$

Verder is gegeven dat we mogen werken met een significantieniveau $\alpha = 0.05$, en data is al verzameld voor beide populaties.
Op basis van ons antwoord bij vraag (b) mogen we nu aannemen dat $\sigma^2 = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Dat betekent dat we met de pooled variance mogen werken als schatting voor de gemeenschappelijke onbekende variantie σ^2. (1pt)

$$s_P^2 = \frac{(n-1)\cdot s_X^2 + (m-1)\cdot s_Y^2}{n-1+m-1} = \frac{9\cdot 166.6667 + 9\cdot 256.6667}{18} \approx 211.6667. \qquad \text{(1pt)}$$

De toetsingsgrootheid van de bijbehorende t-toets is gelijk aan

$$t = \frac{(\overline{x}-\overline{y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{s_P^2}{n} + \frac{s_P^2}{m}}} = \frac{(1190-1198)-0}{\sqrt{\frac{211.6667}{10} + \frac{211.6667}{10}}} \approx -1.2296,$$

en komt uit een t-verdeling met $\text{df} = 18$ vrijheidsgraden. Omdat we linkszijdig toetsen, is de p-waarde gelijk aan de linkeroverschrijdingskans van deze geobserveerde toetsingsgrootheid t: (2pt)

$$\begin{aligned} p = P(T \leq t) &= \text{tcdf}(\text{lower} = -10^{99}, \text{upper} = t; \text{df} = n+m-2) \\ &= \text{tcdf}(-10^{99}; -1.2296, 18) \\ &\approx 0.1173 \end{aligned} \qquad \text{(2pt)}$$

Deze p-waarde is groter dan het significantieniveau $\alpha = 0.05$, dus H_0 wordt geaccepteerd. Er is op basis van deze steekproeven onvoldoende reden om (1pt) aan te nemen dat de MTBF van motoren significant lager is dan de MTBF van rotorbladen. (1pt)