



Faculteit Militaire Wetenschappen

Gegevens student	
Naam:	
Peoplesoftnummer:	
Klas:	
Handtekening:	

Algemeen			
Vak:	Statistiek (deel 2)	Vakcode:	STA#2
Datum:	25 juli 2025	Tijdsduur:	9:00-12:00
Examinator:	Dr. ir. D.A.M.P. Blom	Aantal pagina's:	4
Peer-review:	Dr. M.P. Roeling	Aantal opgaven:	4

Algemene instructies
<ul style="list-style-type: none">- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Indien u een deelopgave niet kunt oplossen en het antwoord in vervolgvragen nodig hebt, probeer uit te gaan van een redelijke fictieve waarde.- Rond je antwoorden waar nodig af op vier decimalen.- U mag een grafische rekenmachine gebruiken zonder CAS (Computer Algebra Systeem).- Antwoorden, in welke vorm dan ook, mogen de zaal niet verlaten.- Vermeld op elk antwoordvel je naam, Peoplesoft-nummer en maak een nummering van je antwoordvellen.- Iedere vorm van mobiele (potentiële) datadragers (telefoon, smartwatch, etc.) of andere vormen om te frauderen (bv. communicatieapparatuur) zijn niet toegestaan gedurende de gehele duur van het tentamen en mogen ook niet in het lokaal meegebracht worden of zijn uitgeschakeld en ingeleverd.- Schrijf leesbaar ter voorkoming van misverstanden bij de beoordeling van uw werk. Indien uw antwoord niet leesbaar is, wordt uw antwoord fout gerekend.- Toiletbezoek tijdens het tentamen vindt enkel plaats na toestemming van de examinerator.- Lever bij het verlaten van de zaal, kladpapier, tentamenopgaven en andere tentamen-gerelateerde documenten in bij de examinerator.

Cijferberekening / cesuur

- Het eindcijfer voor het vak Statistiek wordt voor 50% bepaald door dit tentamen.
- Het tentamen is opgebouwd uit 4 open vragen. Bij iedere (sub)vraag is het aantal te behalen punten tussen haakjes aangegeven. In totaal kunt u 100 punten verdienen.
- Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten te delen door 10. Het tentamencijfer moet minimaal een 5,0 zijn om de cursus Statistiek met succes af te ronden.

Procedure na het tentamen

- De cijfers van dit tentamenonderdeel worden in principe binnen 10 werkdagen na de afname bekend gemaakt.
- Met vragen over de beoordeling kunt u tot 10 werkdagen na bekendmaking van de cijfers terecht bij de cursuscoördinator.

Veel succes!

Formuleblad Statistiek (2024-2025)

Statistiek deel 1

Steekproefgemiddelde (gegeven een steekproef met n uitkomsten x_1, x_2, \dots, x_n)

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Steekproefvariantie en steekproefstandaardafwijking:

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$$
$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Rekenregels kansrekening:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \quad (\text{optelregel})$$

$$P(B) = 1 - P(\text{niet } B) \quad (\text{complementregel})$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} \quad (\text{conditionele kansen})$$

Discrete en continue kansverdelingen:

	Discrete kansvariabelen	Continue kansvariabelen
Uitkomstenruimte:	Eindig / aftelbaar oneindig	Overaftelbaar oneindig
Toepassingen:	Tellen / categoriseren	Metten
Kansbegrip:	Kansfunctie $p(k) = P(X = k)$	Kansdichtheidsfunctie $f(x)$
CDF:	$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{\ell: \ell \leq k} p(\ell)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$
Verwachtingswaarde:	$E[X] = \sum_k k \cdot P(X = k)$	$E[X] = \int x \cdot f(x) dx$
Variantie:	$\text{Var}(X) = \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k)$	$\text{Var}(X) = \int (x - E[X])^2 \cdot f(x) dx$
Standaardafwijking:	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Speciale kansverdelingen:

- $X \sim \text{Binomiaal}(n, p)$: tellen van aantal successen bij onafhankelijke kansexperimenten met twee uitkomsten (Bernoulli-experimenten): succes / mislukking.

Parameters: het aantal Bernoulli-experimenten n en de succeskans per experiment p .

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$: tellen van aantal “gebeurtenissen” in een “interval” van tijd / ruimte.

Parameters: het gemiddelde aantal gebeurtenissen λ per meeteenheid (tijd / ruimte) en het aantal meeteenheden t .

→ Voorbeeld: bij de meeteenheid van een dag bestaat een week uit $t = 7$ meeteenheden.

- $T \sim \text{Exponentieel}(\lambda)$: meten van de tijd / ruimte tot de volgende gebeurtenis.

Parameter: het gemiddelde aantal gebeurtenissen λ per meeteenheid (tijd / ruimte).

Verwachtingswaarde en variantie van veelgebruikte kansverdelingen:

Verdeling	Kans(dichtheids)functie	CDF	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Discreet				
Uniform(a, b)	$p(k) = \frac{1}{b-a+1}$ ($k = a, a+1, \dots, b$)	$F(k) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{k-a+1}{b-a+1} & a \leq k < b \\ 1 & k \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomiaal(n, p)	$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$F(k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	$F(k) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ
Continuous				
Uniform(a, b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentieel(λ)	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Veelgebruikte functies op de grafische rekenmachine

Type vraag	TI-84 Plus	Casio
Continue kansverdeling (willekeurig)		
$P(a \leq X \leq b)$	$\int_a^b f(x) dx$	$\int_a^b f(x) dx$
$X \sim \text{Binomiaal}(n, p)$		
$P(X = k)$	binompdf(n, p, k)	BinomialPD(k, n, p)
$P(X \leq k)$	binomcdf(n, p, k)	BinomialCD(k, n, p)
$X \sim N(\mu, \sigma)$		
$P(a \leq X \leq b)$	normalcdf(a, b, μ, σ)	NormalCD(a, b, σ, μ)
Grenswaarde g zodat $P(X \leq g) = p$?	invNorm(p, μ, σ)	InvNormCD(tail=left, p, σ, μ)
$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$		
$P(X = k)$	poissonpdf(λ, k)	PoissonPD(k, λ)
$P(X \leq k)$	poissoncdf(λ, k)	PoissonCD(k, λ)

z -score:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Centrale limietstelling: Gegeven n kansvariabelen X_1, X_2, \dots, X_n die onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben met een verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ , dan geldt (bij benadering) dat

- de som $\sum X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde $n \cdot \mu$ en standaardafwijking $\sqrt{n} \cdot \sigma$.
- het gemiddelde $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Statistiek deel 2:

Betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde μ (σ bekend)

- $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ -betrouwbaarheidsinterval (BI) voor μ :

$$z_{\alpha/2} = \text{InvNorm}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \mu = 0; \sigma = 1)$$

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- Minimale steekproefomvang voor $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ -BI als μ maximaal $\pm a$ mag afwijken:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{a} \right)^2$$

Betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde μ (σ onbekend)

- $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ -betrouwbaarheidsinterval (BI) voor μ :

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 1)$$

$$\left[\bar{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

- Minimale steekproefomvang voor $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ -BI als μ maximaal $\pm a$ mag afwijken:

$$\text{GR tabel (voor verschillende } n): \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 1) \leq a$$

NB: zodra $n \geq 30$, vallen de normale en de t -verdeling nagenoeg samen. Je mag dan rekenen met de schatting s in plaats van de daadwerkelijke (onbekende) σ .

- Onderscheidend vermogen (toets met $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$, en gegeven $\mu = \mu_1$)

$$1 - \beta = P(\bar{X} \text{ neemt waarde aan in het kritieke gebied} \mid \mu = \mu_1)$$

Betrouwbaarheidsintervallen voor de binomiale succeskans p

Betrouwbaarheidsinterval voor p (Clopper-Pearson): Gegeven een binomiale verdeling met n Bernoulli-experimenten en onbekende p , en uitkomst k .

1. Bereken de succeskans p_1 zodat geldt $P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n; p; k) = \alpha/2$
2. Bereken de succeskans p_2 zodat geldt $P(X \geq k) = 1 - \text{binomcdf}(n; p; k - 1) = \alpha/2$
3. De berekende waarden voor p_1 en p_2 zijn de grenzen van het Clopper-Pearson interval.

Hypothesetoetsen

Stappenplan hypothesetoetsen

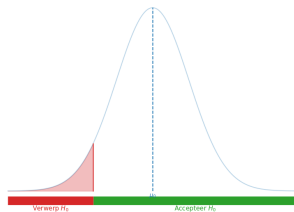
1. Definieer de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 .
2. Bepaal het significantieniveau α (kans op verwerpen van H_0 terwijl H_0 waar is \rightarrow type-I fout)
3. Verzamel data voor de toetsingsgrootte
4. Bereken de toetsingsgrootte
 - Uitgaande van de nulhypothese H_0 maken we aannames over de kansverdeling van de toetsingsgrootte!
5. Geef een conclusie (met behulp van het kritieke gebied / p -waarde) en vertaal deze terug naar de originele probleemcontext.

Drie typen hypothesetoetsen: linkszijdig, tweezijdig, rechtszijdig

Linkszijdige toets

Kritiek gebied:

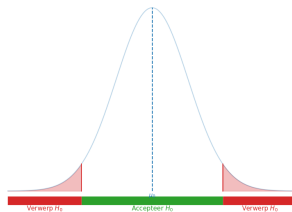
$$(-\infty; g]$$



Tweezijdige toets

Kritiek gebied:

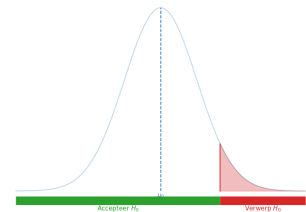
$$(-\infty; g_1] \text{ en } [g_2; \infty)$$



Rechtszijdige toets

Kritiek gebied:

$$[g; \infty)$$



Kansverdeling (onder H_0)	Linkszijdig	Tweezijdig	Rechtszijdig
$N(\mu; \sigma)$	$g = \text{InvNorm}(\alpha; \mu; \sigma)$	$g_1 = \text{InvNorm}(\text{opp} = \frac{\alpha}{2}; \mu; \sigma)$ $g_2 = \text{InvNorm}(\text{opp} = 1 - \frac{\alpha}{2}; \mu; \sigma)$	$g = \text{InvNorm}(1 - \alpha; \mu; \sigma)$
$t(\text{df})$	$g = \text{InvT}(\alpha; \text{df})$	$g_1 = \text{InvT}(\text{opp} = \frac{\alpha}{2}; \text{df})$ $g_2 = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \frac{\alpha}{2}; \text{df})$	$g = \text{InvT}(1 - \alpha; \text{df})$
Grenzen die met de solver functie moeten worden opgelost:			
$\chi^2(\text{df})$ (chikwadraat)	$\chi^2\text{cdf}(0; g; \text{df}) = \alpha$	$\chi^2\text{cdf}(0; g_1; \text{df}) = \frac{\alpha}{2}$ $\chi^2\text{cdf}(g_2; 10^{99}; \text{df}) = \frac{\alpha}{2}$	$\chi^2\text{cdf}(g; 10^{99}; \text{df}) = \alpha$
$F(\text{df}_A; \text{df}_B)$	$\text{Fcdf}(0; g; \text{df}_A; \text{df}_B) = \alpha$	$\text{Fcdf}(0; g_1; \text{df}_A; \text{df}_B) = \frac{\alpha}{2}$ $\text{Fcdf}(g_2; 10^{99}; \text{df}_A; \text{df}_B) = \frac{\alpha}{2}$	$\text{Fcdf}(g; 10^{99}; \text{df}_A; \text{df}_B) = \alpha$

p -waardes uitrekenen (gegeven een theoretische en geobserveerde toetsingsgrootheid T en t)

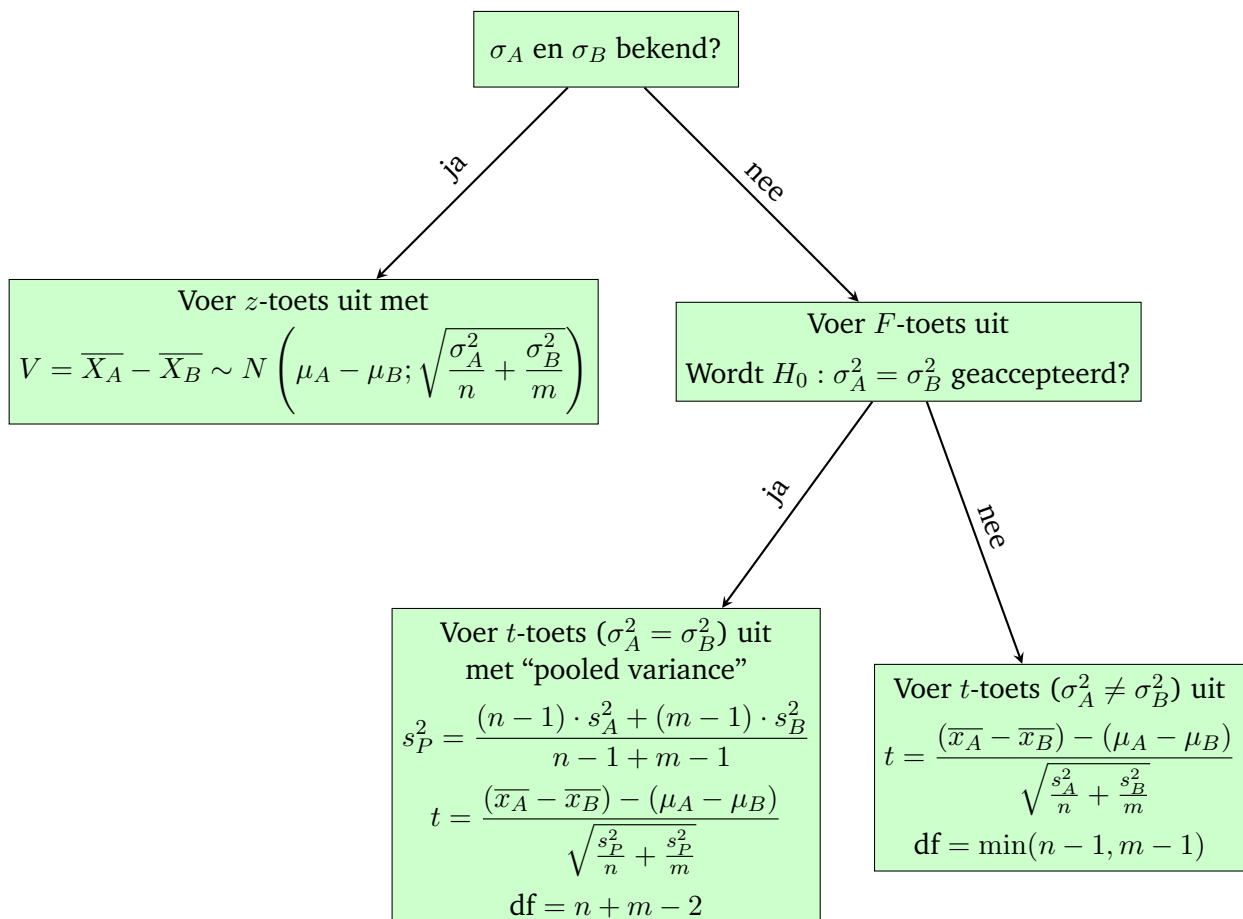
Kansverdeling (onder H_0)	Linkszijdig ($P(T \leq t)$)	Rechtszijdig ($P(T \geq t)$)
$N(\mu; \sigma)$	$p = \text{normalcdf}(-10^{99}; t; \mu; \sigma)$	$p = \text{normalcdf}(t; 10^{99}; \mu; \sigma)$
$t(\text{df})$	$p = \text{tcdf}(-10^{99}; t; \text{df})$	$p = \text{tcdf}(t; 10^{99}; \text{df})$
$\chi^2(\text{df})$	$p = \chi^2\text{cdf}(0; t; \text{df})$	$p = \chi^2\text{cdf}(t; 10^{99}; \text{df})$
$F(\text{df}_A; \text{df}_B)$	$p = \text{Fcdf}(0; t; \text{df}_A; \text{df}_B)$	$p = \text{Fcdf}(t; 10^{99}; \text{df}_A; \text{df}_B)$

NB: Om met de p -waarde een conclusie te trekken uit een hypothesetoets vergelijken we de p -waarde met het significantieniveau α . Let op: bij tweezijdige toetsen neem je het minimum van de linkszijdige en rechtszijdige p -waarde en vergelijk je deze met $\alpha/2$!

Soorten toetsen

Soort toets	Toetsingsgrootheid	Kansverdeling (onder H_0)
Toetsen voor het gemiddelde $\mu \leq \mu_0$ of $\mu = \mu_0$ of $\mu \geq \mu_0$		
z -toets (σ bekend)	\bar{X}	$N(\mu_0; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
t -toets (σ onbekend)	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$t(df = n - 1)$
Chikwadraattoetsen (χ^2)		
Onafhankelijkheid	$X^2 = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$	$\chi^2(df = (\#rijen-1) \cdot (\#kolommen-1))$
Aanpassing (goodness-of-fit)	$X^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$	$\chi^2(df = (\#categorien-1))$
Verschiltoetsen (op basis van twee populaties A en B)		
F -toets: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$	$F = \frac{S_A^2}{S_B^2}$	$F(df_A, df_B)$
z -toets	$V = \bar{X}_A - \bar{X}_B$	$N\left(\mu_A - \mu_B; \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n} + \frac{\sigma_B^2}{m}}\right)$
t -toets ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$)	$T = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{s_P^2}{n} + \frac{s_P^2}{m}}}$	$t(df = n + m - 2)$
t -toets ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$)	$T = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n} + \frac{s_B^2}{m}}}$	$t(df = \min(n - 1; m - 1))$

Beslisboom verschiltoetsen



Correlatie en regressie

Correlatiecoëfficiënt van Pearson:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) \cdot (\overline{y^2} - \bar{y}^2)}}$$

Correlatiecoëfficiënt van Spearman:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_i d_i^2}{n^3 - n}$$

Coëfficiënten van de lineaire regressielijn $Y = a + b \cdot X$:

$$b = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$$
$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

Schatting van de variantie van de storingsterm ε :

$$s_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - 2} = \frac{\sum (y_i - (a + b \cdot x_i))^2}{n - 2} = \frac{n}{n - 2} \cdot (\overline{y^2} - a \cdot \bar{y} - b \cdot \overline{xy})$$

$100 \cdot (1 - \alpha)\%$ -betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde Y bij een gegeven $X = x_0$:

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 2)$$

$$s_\mu = s_\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\right)}$$

$$[a + b \cdot x_0 - t \cdot s_\mu; a + b \cdot x_0 + t \cdot s_\mu]$$

$100 \cdot (1 - \alpha)\%$ -betrouwbaarheidsinterval voor Y bij een gegeven $X = x_0$:

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 2)$$

$$s_f = s_\varepsilon \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\right)}$$

$$[a + b \cdot x_0 - t \cdot s_f; a + b \cdot x_0 + t \cdot s_f]$$

Opgave 1 (20 punten) Een onderzoeksteam van het Maritime Warfare Center (MWC) onderzoekt de signaalsterkte (in decibel) van sonarpulsen die worden gereflecteerd door een nieuw type onderzeeboot. Het huidige (oude) ontwerp heeft een gemiddelde gereflecteerde signaalsterkte van $\mu = \mu_0 = 65$ decibel.

Het MWC wil toetsen of bij het nieuwe ontwerp de gemiddelde signaalsterkte significant verschilt van het oude ontwerp. In een steekproef van tien onafhankelijke metingen met het nieuwe ontwerp is de gereflecteerde signaalsterkte gemiddeld 63,75 decibel met een standaardafwijking van 0,78. Je mag aannemen dat de signaalsterktes normaal verdeeld zijn met onbekende standaardafwijking σ .

Gebruik voor de hypothesetoets een significantieniveau van $\alpha = 0,05$.

- 1a [5pt]** Definieer de nulhypothese en de alternatieve hypothese van de hypothesetoets. Verklaar het gekozen type (tweezijdig, linkszijdig of rechtszijdig) van de toets.

Uitwerking

Aangezien we willen toetsen of de gemiddelde gereflecteerde signaalsterkte significant afwijkt van $\mu = \mu_0 = 65$, kunnen we de hypothesetoets als volgt definiëren:

$$H_0 : \mu = 65 \quad (\text{geen significant verschil})$$

(2pt)

$$H_1 : \mu \neq 65 \quad (\text{wel een significant verschil})$$

(1pt)

Dit is een tweezijdige toets, omdat de nulhypothese uitgaat van een status-quo (geen verschil) en de alternatieve hypothese juist wel een verschil aanduidt.

(2pt)

- 1b [9pt]** Voer de bijbehorende hypothesetoets uit met behulp van het kritieke gebied.

Uitwerking

We mogen uitgaan van een significantieniveau van $\alpha = 0,05$ en verder is gegeven uit de steekproefdata dat $\bar{x} = 63,75$ en $s = 0,78$. Uit de centrale limietstelling volgt onder H_0 dat de toetsingsgrootte \bar{X} normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu = \mu_0 = 65$ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

(1pt)

Aangezien de steekproefgrootte $n = 10 < 30$ en de (populatie)standaardafwijking σ onbekend is, moeten we de t -verdeling gebruiken.

(1pt)

Deze t -verdeling heeft $df = n - 1 = 9$ vrijheidsgraden.

(1pt)

De bijbehorende t -waarde (tweezijdig toetsen) is gelijk aan

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 1) = \text{InvT}(\text{opp} = 0.975; \text{df} = 9) \approx 2,2622. \quad (2\text{pt})$$

Hieruit volgt een voorspellingsinterval voor \bar{X} op basis van deze steekproef gelijk aan

$$\begin{aligned} & [\mu_0 - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \mu_0 + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}] \\ & = [65 - 2,2622 \cdot \frac{0,78}{\sqrt{10}}; 65 + 2,2622 \cdot \frac{0,78}{\sqrt{10}}] \\ & \approx [64,4420; 65,5580] \end{aligned} \quad (2\text{pt})$$

Het gemeten steekproefgemiddelde $\bar{x} = 63,75$ ligt niet in dit voorspellingsinterval – dus wel in het kritieke gebied – dus verwerpen we de nulhypothese. Er is voldoende reden om aan te nemen dat de gemiddelde gereflecteerde signaalsterkte significant afwijkt van het nieuwe ontwerp. (1pt)
(1pt)

1c [6pt] Bereken de kans op een type-II fout β als geldt dat het daadwerkelijke populatiegemiddelde van het nieuwe ontwerp gelijk is aan $\mu = 64,5$ decibel, en dat de standaardafwijking σ gelijk is aan 0,8.

Uitwerking

Bij een type-II fout wordt H_0 aangenomen, terwijl H_1 waar is. In dit geval geldt dat H_1 waar is, omdat $\mu = 64,5 \neq 65$. We willen dus de kans bepalen dat de toetsingsgrootte een waarde in het acceptatiegebied van H_0 aanneemt (oftewel $[64,4420; 65,5580]$), gegeven $\mu = 64,5$. (1pt)
(1pt)
(1pt)

In andere woorden:

$$\begin{aligned} \beta &= P(64,4420 \leq \bar{X} \leq 65,5580 \mid \mu = 64,5) \\ &= \text{normalcdf}(\text{lower} = 64,4420; \text{upper} = 65,5580; \mu = 64,5; \sigma = \frac{0,8}{\sqrt{10}}) \\ &\approx 0,5907. \end{aligned} \quad (2\text{pt})$$

De kans op een type-II fout is dus gelijk aan $\beta \approx 0,5907$, oftewel 59% kans dat de nulhypothese wordt aangenomen terwijl deze in werkelijkheid fout is. (1pt)

Opgave 2 (28 punten) Bij een onderzoek binnen de Koninklijke Luchtmacht wordt gekeken naar de effectiviteit van de training van piloten van gevechtsvliegtuigen. Tijdens de training neemt een piloot plaats in een speciale centrifuge, waarbij hij of zij aan hoge G-krachten wordt blootgesteld. Hierbij wordt geoefend met de *Anti-G Straining Maneuver (AGSM)*, een speciale ademhalingstechniek die helpt om langer weerstand te kunnen bieden aan de hoge G-krachten.

De focus van het onderzoek ligt op het bepalen van de maximale G-belasting totdat een piloot verstoringen ervaart in het gezichtsveld, zoals tunnelvisie of tijdelijke blackouts. Hierbij zijn voor twee populaties steekproeven genomen, namelijk voor de populatie F-16 vliegers (populatie *A*) en voor de populatie F-35 vliegers (populatie *B*).

G-belasting F-16 vliegers (in G)	7,4	8,1	8,3	7,8	7,9	8,0	7,7	8,2	7,6	8,0
G-belasting F-35 vliegers (in G)	8,3	8,7	8,9	8,2	8,5	8,4	8,8	8,6	8,3	8,5

Het doel van het onderzoek is om te toetsen of de gemiddelde maximale G-belasting significant hoger is voor F-35 vliegers. Voor beide populaties wordt aangenomen dat de maximale G-belasting van een willekeurige vlieger normaal verdeeld is met onbekende verwachtingswaarde en standaardafwijking.

2a [10pt] Bepaal voor beide populaties de steekproefgemiddeldes en de steekproefvarianties.

Uitwerking

We berekenen het steekproefgemiddelde \bar{x} voor de steekproef uit populatie *A* als volgt. De steekproefgrootte is gelijk aan $n = 10$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{7,4 + 8,1 + \dots + 8,0}{10} \approx 7,9. \quad (2\text{pt})$$

We berekenen de steekproefvariantie s_A^2 als volgt:

$$\begin{aligned} s_A^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1} \\ &= \frac{(7,4 - 7,9)^2 + (8,1 - 7,9)^2 + \dots + (8,0 - 7,9)^2}{10 - 1} \\ &\approx 0,0778. \end{aligned} \quad (3\text{pt})$$

Op eenzelfde manier berekenen we het steekproefgemiddelde \bar{y} voor de steekproef uit populatie *B* en de steekproefvariantie s_B^2 . De steekproefgrootte is gelijk aan $m = 10$.

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_m}{m} = \frac{8,3 + 8,7 + \dots + 8,5}{10} \approx 8,52. \quad (2\text{pt})$$

We berekenen de steekproefvariantie s^2 als volgt:

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_m - \bar{y})^2}{m - 1} \\&= \frac{(8,3 - 8,52)^2 + (8,7 - 8,52)^2 + \dots + (8,5 - 8,52)^2}{10 - 1} \\&\approx 0,0529.\end{aligned}$$

(3pt)

2b [10pt] Voer een F -toets uit en bepaal met behulp van de p -waarde of de varianties in de maximale G-belasting gelijk zijn voor beide populaties. Kies voor het significantieniveau $\alpha = 0,05$.

Uitwerking

We noteren de populaties F-16 en F-35 vliegtuigen respectievelijk met A en B . In de vraag staat dat we aan mogen nemen dat $X_A \sim N(\mu_A = ?; \sigma_A = ?)$ en $X_B \sim N(\mu_B = ?; \sigma_B = ?)$.

We toetsen op gelijke varianties, oftewel

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$

$$H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

(2pt)

Verder is gegeven dat we mogen werken met een significantieniveau $\alpha = 0,05$, en data is al verzameld voor beide populaties. De toetsingsgrootte voor een F -toets is gelijk aan

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2},$$

en volgt een $F(n - 1, m - 1)$ -verdeling, oftewel een $F(9, 9)$ -verdeling.

(2pt)

De geobserveerde toetsingsgrootte is gelijk aan

$$f = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{0,0778}{0,0529} \approx 1,4707.$$

(2pt)

In dit geval is de p -waarde gelijk aan de rechteroverschrijdingskans van deze toetsingsgrootte f (deze is kleiner dan de linkeroverschrijdingskans):

$$p = P(F \geq f) = \text{Fcdf}(\text{lower} = 1,4707; \text{upper} = 10^{99}; \text{df1} = 9; \text{df2} = 9) \approx 0,2874.$$

(2pt)

Aangezien de p -waarde groter is dan $\alpha/2$ (tweezijdige toets!), wordt de nulhypothese H_0 aangenomen. Er is onvoldoende bewijs om op basis van deze steekproef de aanname van gelijke varianties te verwerpen.

(1pt)

(1pt)

2c [10pt] Bepaal met behulp van een onafhankelijke t -toets of gemiddeld de maximale G-belasting significant hoger is voor F-35 vliegers. Kies opnieuw voor het significantieniveau $\alpha = 0,05$.

Uitwerking

We toetsen of het gemiddelde μ_B voor F-35 vliegers significant hoger is dan het gemiddelde μ_A voor F-16 vliegers. De hypothesen kunnen we daarom als volgt definiëren:

$$H_0 : \mu_A \geq \mu_B \text{ (niet significant hoger)}$$

$$H_1 : \mu_A < \mu_B \text{ (wel significant hoger)}$$

(2pt)

Verder is gegeven dat we mogen werken met een significantieniveau $\alpha = 0,05$, en data is al verzameld voor beide populaties.

Op basis van ons antwoord bij vraag (b) mogen we aannemen dat $\sigma = \sigma_A = \sigma_B$. Dat betekent dat we met de pooled variance mogen werken als schatting voor de gemeenschappelijke onbekende σ .

$$s_P^2 = \frac{(n-1) \cdot s_A^2 + (m-1) \cdot s_B^2}{n-1+m-1} = \frac{9 \cdot 0,0778 + 9 \cdot 0,0529}{18} \approx 0,0653.$$

(3pt)

De toetsingsgrootte van de bijbehorende t -toets is gelijk aan

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{s_P^2}{n} + \frac{s_P^2}{m}}} \approx -5,4239,$$

en komt uit een t -verdeling met $df = 18$ vrijheidsgraden. Omdat we linkszijdig toetsen, is het kritieke gebied van de vorm $(-\infty; g]$. Deze kritieke grens kunnen we met de t -verdeling bepalen, namelijk

(2pt)

$$g = \text{InvT}(\text{opp} = \alpha; df = n + m - 2) = \text{InvT}(\text{opp} = 0,05; df = 18) \approx -1,7341$$

(1pt)

De toetsingsgrootte t ligt in het kritieke gebied, dus H_0 moet worden verworpen. Er is op basis van deze steekproeven voldoende reden om aan te nemen dat de maximale G-belasting van F-35 vliegers significant hoger is dan die van F-16 vliegers.

(2pt)

Opgave 3 (20 punten) Bij de sollicitatiegesprekken voor cadetten en adelborsten wordt door de aanstellingscommissie aan de aspirant-officier gevraagd naar zijn of haar primaire motivatie om officier te willen worden. De meest genoemde antwoorden van de aspiranten zijn ruwweg in te delen in drie categorieën: leiderschap, avontuur en dienen aan het vaderland.

Naar aanleiding van de sollicitatiegesprekken kunnen de antwoorden als volgt worden samengevat:

	Cadetten	Adelborsten	Totaal
Leiderschap	52	22	74
Avontuur	23	9	32
Vaderland dienen	38	28	66
Totaal	113	59	172

C-NLDA wil inzicht krijgen in of de primaire motivatie van cadetten significant afwijkt van die van adelborsten.

3a [4pt] Welk type hypothesetoets dienen we hiervoor uit te voeren? Formuleer de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 van de bijbehorende hypothesetoets.

Uitwerking

Omdat we willen weten of de primaire motivatie van cadetten significant afwijkt van die van de adelborsten, dienen we een χ^2 -toets (chikwadraat) voor onafhankelijkheid uit te voeren. Dit kan ook omdat we te maken hebben met twee categorische variabelen!

(2pt)

De bijbehorende nul- en alternatieve hypothese zijn in dit geval gelijk aan

H_0 : de verdeling van de primaire motivaties van cadetten
is onafhankelijk van het type aspirant-officier.

(1pt)

H_1 : de verdeling van de primaire motivaties van cadetten
is WEL afhankelijk van het type aspirant-officier.

(1pt)

3b [11pt] Bepaal de p -waarde van de desbetreffende hypothesetoets.

Uitwerking

Om een chi-kwadraattoets voor onafhankelijkheid uit te voeren, moeten we eerst de verwachte frequenties uitrekenen. Onder de aanname dat H_0 waar is, is deze voor elk van de negen cellen te berekenen als $\frac{\text{rijtotaal}_i \cdot \text{kolomtotaal}_j}{\text{totaal}}$. De verwachte frequenties zijn te berekenen met behulp van de formule:

$$E_{ij} = \frac{\text{rijtotaal}_i \cdot \text{kolomtotaal}_j}{\text{totaal}}$$

Tabel 1: “Observed” frequenties

	C	A	Totaal
Leiderschap	52	22	74
Avontuur	23	9	32
Vaderland dienen	38	28	66
Totaal	113	59	172

Tabel 2: “Expected” frequenties

	C	A	Totaal
Leiderschap	48,6163	25,3837	74
Avontuur	21,0233	10,9767	32
Vaderland dienen	43,3605	22,6395	66
Totaal	113	59	172

(4pt)

We berekenen de toetsingsgrootte χ^2 als volgt, waarbij O_{ij}/E_{ij} de geobserveerde / verwachte frequentie is in rij i , kolom j :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(O_{1,1} - E_{1,1})^2}{E_{1,1}} + \frac{(O_{1,2} - E_{1,2})^2}{E_{1,2}} + \dots + \frac{(O_{3,2} - E_{3,2})^2}{E_{3,2}} \\ &= \frac{(52 - 48,6163)^2}{48,6163} + \frac{(22 - 25,3837)^2}{25,3837} + \dots + \frac{(28 - 22,6395)^2}{22,6395} \\ &\approx 3,1603. \end{aligned}$$

(2pt)

De bijbehorende p -waarde is de rechteroverschrijdingskans $P(X > \chi^2)$, waarbij X^2 de toetsingsgrootte van de chikwadraattoets voor onafhankelijkheid. De toetsingsgrootte X^2 volgt onder de nulhypothese een χ^2 -verdeling met $df = (\#rijen - 1) \cdot (\#kolommen - 1) = (3 - 1) \cdot (2 - 1) = 2$ vrijheidsgraden.

(1pt)

(1pt)

$$\begin{aligned} p &= P(\chi^2 > 3.1603) \\ &= \chi^2\text{cdf}(\text{lower} = 3.1603; \text{upper} = 10^{99}; df = 2) \\ &\approx 0.0759. \end{aligned}$$

(2pt)

Omdat $p > \alpha$, wordt de nulhypothese H_0 aangenomen. Er is onvoldoende reden om de aanname te verwerpen dat de twee variabelen onafhankelijk zijn van elkaar.

(1pt)

3c [5pt] Geef de conclusie van de hypothesetoets (op basis van een significantieniveau $\alpha = 0,05$) met behulp van de berekende p -waarde.

Uitwerking

Uit de hypothesetoets volgt een redelijk grote rechteroverschrijdingskans $p \approx 0,2059$. Omdat $p > \alpha = 0,05$, geldt dat H_0 wordt aangenomen. We kunnen dus de conclusie trekken dat de verdeling van primaire motivaties om officier te worden niet significant verschilt tussen cadetten en adelborsten.

(2pt)

(1pt)

Als we kijken naar de tabel van geobserveerde en verwachte frequenties, dan zien we dat deze redelijk dichtbij elkaar in de buurt liggen. Er zijn geen grote uitschieters te bekennen in de verwachte frequenties ten opzichte van de daadwerkelijk geobserveerde frequenties.

(2pt)

Opgave 4 (30 punten) In een gezamenlijk project van sportinstructeurs van de KMA en de geneeskundige dienst wordt het verband onderzocht tussen de gemiddelde slaaptijd van een cadet (in uren) en de hersteltijd na een zware inspanning (in uren). Voor de hersteltijd wordt gekeken naar een spierpijn-index, en een cadet is volledig hersteld wanneer de spierpijn-index onder een gegeven drempelwaarde komt.

Van negen cadetten wordt gemeten hoe lang ze gemiddeld hebben geslapen en hoe lang hun hersteltijd is na een zware inspanning.

Slaaptijd (in uren)	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0
Hersteltijd (in uren)	66	61	63	62	65	64	57	59	60

4a [2pt] Als we een regressie-analyse willen uitvoeren, welke variabele zou dan de afhankelijke variabele Y zijn en welke variabele zou de onafhankelijke variabele X zijn?

Uitwerking

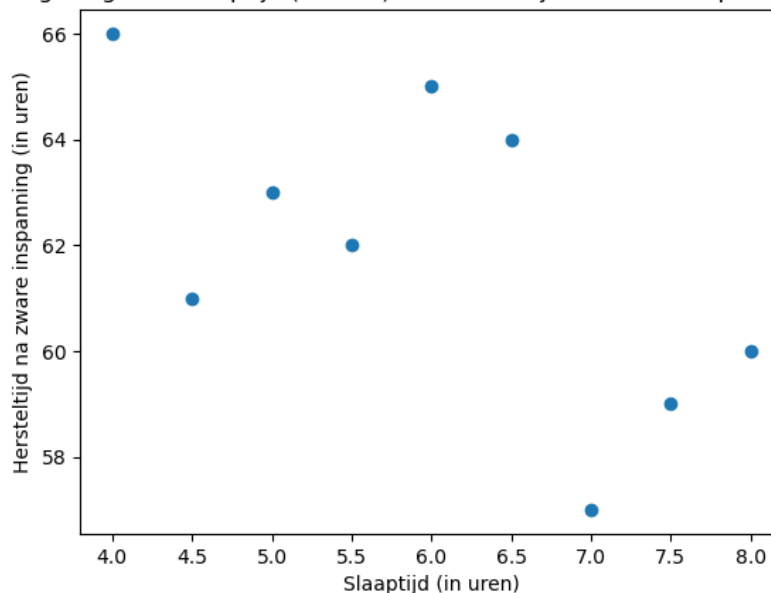
Bij een regressie-analyse is de meest logische keuze om slaaptijd als onafhankelijke variabele X te kiezen, en de hersteltijd als afhankelijke variabele Y . Een langere hersteltijd verklaart niet waarom iemand langer slaapt, terwijl dat andersom wellicht wel het geval kan zijn.

(2pt)

4b [5pt] Teken het bijbehorende spreidingsdiagram op basis van je antwoord op vraag (a).

Uitwerking

Spreidingsdiagram: Slaaptijd (in uren) vs. Hersteltijd na zware inspanning (in uren)



4c [8pt] Bereken Pearson's correlatiecoëfficiënt $r(x, y)$. Wat kun je concluderen over de samenhang van de twee variabelen?

Uitwerking

We beginnen met het uitrekenen van Pearson's correlatiecoëfficiënt

$$r(x, y) = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) \cdot (\overline{y^2} - \bar{y}^2)}}$$

Hiervoor hebben we dus de waardes van \bar{x} , \bar{y} , \overline{xy} , $\overline{x^2}$ en $\overline{y^2}$ nodig. Deze bepalen we aan de hand van de volgende rekentabel:

x	y	xy	x^2	y^2
4	66	264	16	4356
4,5	61	274,5	20,25	3721
5	63	315	25	3969
5,5	62	341	30,25	3844
6	65	390	36	4225
6,5	64	416	42,25	4096
7	57	399	49	3249
7,5	59	442,5	56,25	3481
8	60	480	64	3600

$$\bar{x} = 6 \quad \bar{y} = 61,8889 \quad \overline{xy} = 369,1111 \quad \overline{x^2} = 37,6667 \quad \overline{y^2} = 3837,8889$$

De correlatiecoëfficiënt van Pearson is dus gelijk aan

$$\begin{aligned}
 r(x, y) &= \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) \cdot (\overline{y^2} - \bar{y}^2)}} \\
 &= \frac{369,1111 - 6 \cdot 61,8889}{\sqrt{(6^2 - 37,6667) \cdot (61,8889^2 - 3837,8889)}} \\
 &= \frac{-2,2222}{3,5717} \\
 &\approx -0,6222.
 \end{aligned}$$

De correlatiecoëfficiënt ligt redelijk ver van 0 en is negatief. Dit houdt in dat er een vrij duidelijke dalende trend zichtbaar is, maar dat er toch onzekerheid zit in hoe het exacte lineaire verband eruit zal zien.

4d [7pt] Bereken de regressielijn $Y = a + b \cdot X$ door berekening van de coëfficiënten a en b .

Bepaal aan de hand van de regressielijn een statistisch verantwoorde voorspelling voor de hersteltijd van een cadet die gemiddelde 6 uur en 45 minuten heeft geslapen.

Uitwerking

Om de coëfficiënten a en b van de regressielijn te berekenen, gaan we de rekentabel van vraag (a) hergebruiken. Er volgt namelijk dat

$$\begin{aligned} b &= \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \\ &= \frac{369,1111 - 6 \cdot 61,8889}{37,6667 - (6)^2} \\ &= \frac{-2,2222}{1,6667} \approx -1,3333 \end{aligned}$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} \quad (2\text{pt})$$

$$\begin{aligned} &= 61,8889 - (-1,3333 \cdot 6) \\ &\approx 69,8889. \end{aligned} \quad (2\text{pt})$$

De formule van de regressielijn is dus gelijk aan $Y = 69,8889 - 1,3333 \cdot X$. Een statistisch verantwoorde voorspelling voor de hersteltijd van een cadet die gemiddelde 6 uur en 45 minuten heeft geslapen vinden we door $X = 6,75$ in te vullen: Dit geeft een waarde van $Y = 69,8889 - 1,3333 \cdot 6,75 = 60,88887$ uur, oftewel iets minder dan 61 uur. (1pt)
(2pt)

4e [8pt] Bereken een 90%-voorspellingsinterval voor de hersteltijd van een willekeurige cadet die 6 uur en 45 minuten heeft geslapen.

Uitwerking

DIIn opdracht (d) hebben we een puntschatting van $y_0 = 69,8889 - 1,3333 \cdot 6,75 \approx 60,8889$ bepaald. Daarnaast kunnen we de standaardafwijking σ van de storings-term ε schatten:

$$\begin{aligned} s_\varepsilon &= \sqrt{\frac{n}{n-2} \cdot \left(\overline{y^2} - a \cdot \bar{y} - b \cdot \overline{xy} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{9}{7} \cdot (3837,8889 - 69,8889 \cdot 61,8889 - (-1,3333 \cdot 369,1111))} \\ &\approx 2,456. \end{aligned} \quad (3\text{pt})$$

Vervolgens kunnen we een puntschatting berekenen van de standaardafwijking

van Y voor gegeven $X = x_0$:

$$\begin{aligned}s_f &= s_\varepsilon \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2}\right)} \\&= 2,456 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9} \cdot \left(1 + \frac{(6,75 - 6)^2}{37,6667 - 6^2}\right)} \\&\approx 2,6321.\end{aligned}$$

(2pt)

Omdat we de standaardafwijkingen geschat hebben en de storingstermen normaal verdeeld zijn, moeten we werken met de t -verdeling met $df = n - 2 = 7$ vrijheidsgraden. De t -waarde die hoort bij een betrouwbaarheidsniveau $\alpha = 0,1$ is gelijk aan

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 2) = \text{InvT}(\text{opp} = 0,95; \text{df} = 7) \approx 1,8946.$$

(1pt)

Het 90 %-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde Y voor gegeven $X = x_0$ kan dus worden beschreven door

$$\begin{aligned}&[y_0 - t \cdot s_f; y_0 + t \cdot s_f] \\&= [60,8889 - 1,8946 \cdot 2,6321; 60,8889 + 1,8946 \cdot 2,6321] \\&\approx [55,9021; 65,8757].\end{aligned}$$

(2pt)

Met 90 % zekerheid zal de hersteltijd van een willekeurige cadet die 6 uur en 45 minuten heeft geslapen tussen ongeveer 56 en 66 uur liggen.