Statistiek voor MBW / KW
Uitwerkingen huiswerkopgaven

Dr. ir. D.A.M.P. Blom & Dr. J.B.M. Melissen

2025

Week 4: de binomiale verdeling

Hoofdstuk 6

Opdracht 6.4: Een multiplechoice-examen bestaat uit tien vragen die elk drie antwoordmogelijkheden kennen, waarvan er precies één correct is. Een kandidaat die volstrekt niet weet wat hij moet antwoorden, kruist naar willekeur bij elk van de tien vragen een antwoord aan.

(a) Bereken de kans op respectievelijk nul, één of twee antwoorden goed.

Uitwerking

Laat X de kansvariabele zijn die het aantal juiste antwoorden telt. Dan geldt dat X binomiaal verdeeld is met parameters $n = 10$ (aantal "kansexperimenten", oftewel aantal examenvragen) en $p = \frac{1}{3}$ (succeskans / kans op het juiste antwoord) De kansen op respectievelijk nul, één of twee antwoorden goed zijn gelijk aan

$$P(X = 0) = \text{binompdf}(n = 10; p = \frac{1}{3}; k = 0) \approx 0,0174$$
$$P(X = 1) = \text{binompdf}(n = 10; p = \frac{1}{3}; k = 1) \approx 0,0870$$
$$P(X = 2) = \text{binompdf}(n = 10; p = \frac{1}{3}; k = 2) \approx 0,1955$$

(b) Bereken de kans dat hij minstens zes antwoorden goed heeft.

Uitwerking

De kans dat hij minstens zes antwoorden goed heeft is gelijk aan

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \text{binomcdf}(n = 10; p = \frac{1}{3}; k = 5) \approx 0,0762$$

(c) Bereken de verwachtingswaarde van het aantal goede antwoorden.

Uitwerking

De verwachtingswaarde van een binomiaal verdeelde kansvariabele $X \sim \text{Bin}(n; p)$ is gelijk aan $E[X] = n \cdot p$. Aangezien in dit geval geldt dat $n = 10$

en $p = \frac{1}{3}$, is de verwachtingswaarde van het aantal correcte antwoorden gelijk aan $E[X] = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

Opdracht 6.5: Bekend is dat van de volwassen Nederlanders thans 70% over een of meer creditcards beschikt. We kiezen een steekproef van vijftien personen. Bepaal met behulp van de tabel van de binomiale verdeling de kans dat de volgende aantallen mensen in deze steekproef over een of meer creditcards beschikken:

(a) precies 10

Uitwerking

Het aantal mensen in een steekproef van 15 personen met een of meer creditcards is een binomiaal verdeelde kansvariabele X met parameters $n = 15$ (aantal personen) en $p = 0,7$ (succeskans / kans dat we iemand hebben gekozen die een of meer creditcards heeft). De kans dat precies 10 van de 15 mensen een of meer creditcards heeft is gelijk aan

$$P(X = 10) = \text{binompdf}(n = 15; p = 0,7; k = 10) \approx 0,2016$$

(b) precies 15

Uitwerking

De kans dat alle 15 mensen in de steekproef een of meer creditcards heeft is gelijk aan

$$P(X = 15) = \text{binompdf}(n = 15; p = 0,7; k = 15) \approx 0,0047$$

(c) meer dan 9

Uitwerking

De kans dat meer dan 9 (dus minstens 10) van de 15 mensen in de steekproef een of meer creditcards heeft is gelijk aan

$$\begin{aligned} P(X > 9) = P(X \geq 10) &= 1 - P(X \leq 9) \\ &= 1 - \text{binomcdf}(n = 15; p = 0,7; k = 9) \\ &\approx 0,7216 \end{aligned}$$

(d) minder dan 12

Uitwerking

De kans dat minder dan 12 (dus hoogstens 11) van de 15 mensen in de steekproef een of meer creditcards heeft is gelijk aan

$$P(X < 12) = P(X \leq 11) = \text{binomcdf}(n = 15; p = 0,7; k = 11) \approx 0,7031$$

Opdracht 6.6: Bij een aangeboren afwijking blijkt bij 25% van de baby's een bepaalde complicatie op te treden. In een jaar worden twintig baby's geboren met de afwijking. Bepaal met de tabel van de binomiale verdeling de volgende kansen:

(a) de kans dat twee of minder baby's de complicatie vertonen.

Uitwerking

Het aantal baby's waarbij bij een aangeboren afwijking een bepaalde complicatie optreedt is een binomiaal verdeelde kansvariabele X met parameters $n = 20$ (aantal baby's met een aangeboren afwijking) en $p = 0,25$ (kans op complicatie, het is in deze context vreemd om het een "succeskans"te noemen...). De kans dat twee of minder baby's de complicatie vertonen is gelijk aan

$$P(X \leq 2) = \text{binomcdf}(n = 20; p = 0,25; k = 2) \approx 0,0913$$

(b) de kans dat precies twee baby's de complicatie vertonen.

Uitwerking

De kans dat precies twee baby's de complicatie vertonen is gelijk aan

$$P(X = 2) = \text{binompdf}(n = 20; p = 0,25; k = 2) \approx 0,0670$$

(c) de kans dat meer dan twee baby's de complicatie vertonen.

Uitwerking

De kans dat meer dan twee baby's de complicatie vertonen is gelijk aan

$$\begin{aligned} P(X > 2) = P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - \text{binompdf}(n = 20; p = 0,25; k = 2) \\ &\approx 0,9087 \end{aligned}$$

(d) de kans dat het aantal baby's met de complicatie minstens 4 maar hoogstens 7 is.

Uitwerking

De kans dat minstens 4 maar hoogstens 7 baby's de complicatie vertonen is gelijk aan

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 7) &= P(X \geq 7) - P(X \leq 3) \\ &= \text{binomcdf}(n = 20; p = 0,25; k = 7) \\ &\qquad - \text{binomcdf}(n = 20; p = 0,25; k = 3) \\ &\approx 0,89819 - 0,41484 \approx 0,4834 \end{aligned}$$

Opdracht 6.7: De Bloedbank is een organisatie waar burgers bloed kunnen laten aftappen. Dit donorbloed kan worden gebruikt bij patiënten die dit nodig hebben. In

Nederland heeft 44% van de bevolking bloedgroep A. Deze groep is onderverdeeld in 36% met bloedgroep $A+$ en 8% met bloedgroep $A-$. Er komen op een bepaalde dag 30 donoren om bloed te geven.

(a) Hoe groot is de kans dat hiervan precies 8 donoren bloedgroep A hebben?

Uitwerking

Het aantal bloeddonoren met bloedgroep A uit een groep van 30 donoren is een binomiaal verdeelde kansvariabele X met parameters $n = 30$ (aantal donoren) en $p = 0,44$ (succeskans / kans op bloedgroep A). De kans dat precies 8 van de 30 donoren bloedgroep A hebben is gelijk aan

$$P(X = 8) = \text{binompdf}(n = 30; p = 0,44; k = 8) \approx 0,0237$$

(b) Hoe groot is de kans dat *binnen* de groep van 8 mensen met bloedgroep A er twee zijn met bloedgroep $A-$?

Uitwerking

Het aantal donoren met bloedgroep $A-$ binnen een groep van 8 donoren met bloedgroep A is een binomiaal verdeelde kansvariabele Y met parameters $n = 8$ en $p = \frac{36}{36+8} = \frac{36}{44}$. De kans dat precies twee donoren binnen deze groep bloedgroep $A-$ heeft is gelijk aan

$$P(Y = 2) = \text{binompdf}(n = 8; p = \frac{36}{44}; k = 2) \approx 0,0007$$

Opdracht 6.8: De kans dat een willekeurig gekozen student slaagt bij een bepaald tentamen is $0,6$. Hoe groot is de kans dat van 150 willekeurig gekozen studenten er meer dan 100 voor het tentamen slagen?

Uitwerking

Het aantal studenten dat slaagt bij een bepaald tentamen is een binomiaal verdeelde kansvariabele X met parameters $n = 150$ (aantal willekeurig gekozen studenten) en $p = 0,6$ (de succeskans, kans op slagen). De kans dat meer dan 100 studenten voor het tentamen slagen is gelijk aan

$$\begin{aligned} P(X > 100) = P(X \geq 101) &= 1 - P(X \leq 100) \\ &= 1 - \text{binomcdf}(n = 150; p = 0,6; k = 100) \\ &\approx 0,0389. \end{aligned}$$

Opdracht 6.10: Een viermotorig vliegtuig kan nog blijven doorvliegen als tijdens de vlucht twee van de vier motoren uitvallen. Voor een willekeurige motor is de kans $0,005$ dat deze tijdens de vlucht defect raakt.

(a) Hoe groot is de kans dat na een vlucht alle vier de motoren nog functioneren? En drie van de vier?

Uitwerking

Het aantal motoren dat tijdens een vlucht uitvalt is een binomiaal verdeelde kansvariabele met parameters $n = 4$ (aantal motoren) en $p = 0,005$ (in dit geval is het opnieuw vreemd om van een "succeskans" te spreken, kans op uitval van een motor). De kans dat alle vier de motoren nog functioneren – oftewel dat er geen een is uitgevallen – is gelijk aan

$$P(X = 0) = \text{binompdf}(n = 4; p = 0,005; k = 0) \approx 0,9801.$$

(b) Bereken de kans dat het vliegtuig neerstort?

Uitwerking

Een vliegtuig stort neer als strikt meer dan twee van de vier motoren uitvallen. De kans dat meer dan twee motoren uitvallen tijdens een vlucht is gelijk aan

$$\begin{aligned} P(X > 2) = P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - \text{binomcdf}(n = 4; p = 0,005; k = 2) \\ &\approx 4,9813 * 10^{-7} \end{aligned}$$

(c) Van de motoren zijn er twee bevestigd aan de linkervleugel en twee aan de rechtervleugel. Als drie of vier motoren uitvallen, stort het vliegtuig neer. Als echter twee motoren uitvallen die zich aan dezelfde kant van het vliegtuig bevinden, dan stort het vliegtuig ook neer. Bereken opnieuw de kans dat vliegtuig neerstort. Geef commentaar op het verschil met het antwoord op vraag b.

Uitwerking

We kunnen in dit geval de situatie het best opsplitsen in twee binomiaal verdeelde kansvariabelen X_L en X_R die het aantal uitgevallen motoren telt aan respectievelijk de linker- en rechtervleugel. Deze binomiaal verdeelde kansvariabelen hebben parameters $n = 2$ en $p = 0,005$. Een vliegtuig stort neer als minstens één van beide kansvariabelen de waarde van 2 aanneemt (beide motoren aan deze vleugel vallen uit). Dit gebeurt met kans

$$\begin{aligned} P(X_L = 2 \text{ of } X_R = 2) &= 1 - P(X_L \leq 1 \text{ en } X_R \leq 1) \\ &= 1 - P(X_L \leq 1) \cdot P(X_R \leq 1) \\ &= 1 - \text{binomcdf}(n = 2; p = 0,005; k = 1)^2 \\ &\approx 4,9999 * 10^{-5} \end{aligned}$$

Zoals je ziet is deze kans groter dan de kans die we bij (b) hebben berekend. De reden hiervoor is dat bij (b) het geval op twee uitvallende motoren aan eenzelfde vleugel niet is meegenomen als scenario waarbij het vliegtuig zal neerstorten.

Opdracht 6.12: In de binnenstad van Utrecht worden door de politie op een gegeven dag 800 parkeerbonnen uitgeschreven, elk met een boetebedrag van 40 euro per parkeerbon. Het is een bekend gegeven dat 75% van de ontvangers van zo'n bekeuring het bedrag overmaakt. 25% doet dat niet.

(a) Bereken voor de dag met 800 parkeerbonnen de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van het aantal directe betalers. Stel dat voor deze specifieke dag op de uiterste betaaldatum 520 bekeurden hun boete hebben voldaan, is dat dan uitzonderlijk gegeven de betaalkans van 75%?

Uitwerking

Het aantal directe betalers kan worden geïnterpreteerd als een binomiaal verdeelde kansvariabele met parameters $n = 800$ (aantal parkeerbonnen) en $p = 0,75$ (kans op directe betaling). De verwachtingswaarde $E[X]$ en standaarddeviatie $\sigma(X)$ van deze kansvariabele zijn gelijk aan

$$E[X] = n \cdot p = 800 \cdot 0,75 = 600$$
$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{800 \cdot 0,75 \cdot (1-0,75)} \approx 12,2474$$

Om te bepalen om 520 directe betalers een uitzonderlijk aantal is, bepalen we de kans op hoogstens 520 directe betalers (merk op dat 520 een aantal standaarddeviaties onder de verwachtingswaarde ligt).

$$P(X \leq 520) = \text{binomcdf}(n = 800; p = 0,75; k = 520) = 1,9170 * 10^{-10}$$

Aangezien deze kans extreem klein is, is een aantal van 520 directe betalers uitzonderlijk laag.

(b) Wat is het verwachte bedrag dat binnenkomt van een dag met 800 bekeurden en wat is de standaarddeviatie?

Uitwerking

Het bedrag dat binnenkomt op een dag met 800 bekeurden is een kansvariabele $B = 40 \cdot X$. Het verwachte bedrag dat binnenkomt is dus gelijk aan

$$E[B] = E[40 \cdot B] = 40 \cdot E[B] = 40 \cdot 600 = €24000,$$

en de standaarddeviatie is dus gelijk aan

$$\sigma(B) = \sigma(40 \cdot B) = 40 \cdot \sigma(B) = 40 \cdot 12,2474 \approx €489,90$$

(c) De gemeente besluit extra invorderingsmaatregelen te nemen voor de niet- betalers van de boete. Zo'n actie kost 5 euro per niet-betaalde parkeerbon. De boete is nu verhoogd naar 52 euro. Bekend is dat van deze groep 60% daarna betaalt. Maak een kosten-batenanalyse van de extra maatregel.

Uitwerking

Stel dat deze extra maatregel ingevoerd zou worden. Naar verwachting zijn er 600 directe betalers en dus 200 niet-directe betalers die deze maatregel gaan ervaren. Het aantal betalers in tweede instantie, na intreding van de maatregel, is een binomiaal verdeelde kansvariabele Y met parameters $n = 200$ en $p = 0,60$. De verwachte opbrengst van deze groep is dus $200 \cdot 0,6 \cdot €52 = €6240$. De verwachte kosten van deze maatregel zijn gelijk aan $200 \cdot €5 = €1000$. Naar verwachting is het dus financieel zeer aantrekkelijk om de maatregel door te voeren.

Opdracht 6.14: Bij een keukenbedrijf weet men dat van alle klanten die een catalogus aanvragen, 15% daadwerkelijk een bestelling zal plaatsen in de maand volgend op de toezending van de catalogus. Daarna, dus méér dan een maand later, blijken er nooit bestellingen te worden gedaan.

(a) In een bepaalde maand worden 120 catalogi verzonden. Bereken de kans dat meer dan twintig klanten een bestelling gaan plaatsen.

Uitwerking

Laat X de kansvariabele zijn die het aantal klanten telt dat daadwerkelijk een bestelling zal plaatsen. Er geldt dat $X \sim$ Binomiaal$(n; p)$, met parameters $n = 120$ (aantal klanten die een catalogus aangevraagd hebben) en $p = 0,15$ (kans dat een klant die een catalogus aanvraagt daadwerkelijk een bestelling plaatst) We willen de kans $P(X > 20)$ bepalen (“meer dan"betekent “>"):

$$\begin{aligned} P(X > 20) = P(X \geq 21) &= 1 - P(X \leq 20) \\ &= 1 - \text{binomcdf}(n = 120; p = 0,15; k = 20) \\ &\approx 0,2557 \end{aligned}$$

Met 25,57% kans zullen meer dan twintig klanten een bestelling gaan plaatsen.

(b) In een bepaald jaar worden 1 200 catalogi aangevraagd. Hoe groot is het verwachte aantal bestellingen? Bereken een voorspellingsinterval (symmetrisch) waarvoor geldt dat hierin met 95% kans het aantal waar te nemen bestellingen ligt.

Uitwerking

De kansvariabele $X \sim$ Binomiaal$(n; p)$ telt het aantal klanten dat daadwerkelijk een bestelling zal plaatsen, met nu $n = 1200$ (aantal klanten die een catalogus aangevraagd hebben) en $p = 0,15$ (kans dat een klant die een catalogus aanvraagt daadwerkelijk een bestelling plaatst). We vinden nu dat

$$E[X] = n \cdot p = 1200 \cdot 0,15 = 180,$$

en

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 12,3693.$$

Het 95%-voorspellingsinterval worden dan gegeven door

$$E[X] - 2 \cdot \sigma(X) = 180 - 2 \cdot 12,3693 \approx 155,2614$$
$$E[X] + 2 \cdot \sigma(X) = 180 + 2 \cdot 12,3693 \approx 204,7386$$

Met 95% kans zal het aantal waar te nemen bestellingen tussen 155 en 205 liggen (merk op: naar buiten afronden om 95% zekerheid te behouden).

(c) In een bepaalde periode werden 800 catalogi verzonden. Hoe groot is de kans dat de fractie bestellers minder is dan 10% voor deze groep aanvragers?

Uitwerking

De kansvariabele $X \sim \text{Binomiaal}(n; p)$ telt het aantal klanten dat daadwerkelijk een bestelling zal plaatsen, met nu $n = 800$ (aantal klanten die een catalogus aangevraagd hebben) en $p = 0,15$ (kans dat een klant die een catalogus aanvraagt daadwerkelijk een bestelling plaatst). Laat F de fractie van het totaal aantal klanten zijn dat daadwerkelijk een bestelling zal plaatsen. We willen de kans $P(F < 0,1)$ bepalen ("minder dan" betekent "<"):

$$\begin{aligned} P(F < 0,1) &= P(X < 0,1 \cdot n) \\ &= P(X < 80) \\ &= P(X \leq 79) \\ &= \text{binomcdf}(n = 800; p = 0,15; k = 79) \\ &\approx 1,2317 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Het is zeer onwaarschijnlijk dat minder dan 10% van de groep aanvragers een bestelling plaatst.