Statistiek voor MBW / KW
Uitwerkingen huiswerkopgaven

Dr. ir. D.A.M.P. Blom & Dr. J.B.M. Melissen

2025

Week 6: de Poissonverdeling

Hoofdstuk 7

Opdracht 7.m1: Welke van de volgende uitspraken over een kansvariabele X met een Poissonverdeling is waar?

(a) Het waargenomen aantal successen kan niet gelijk aan nul zijn.

(b) De verwachtingswaarde en de standaarddeviatie zijn aan elkaar gelijk.

(c) Er geldt $\mu = n \cdot \pi$.

(d) De variabele kan gehele waarden groter of gelijk aan nul aannemen.

Uitwerking

De uitkomstenruimte van een Poisson verdeelde kansvariabele is $0, 1, 2, 3, \ldots$. Het juiste antwoord is dus (d).

Opdracht 7.m2: Het aantal noodlandingen op een bepaalde luchthaven mag worden beschouwd als een kansvariabele met een Poissonverdeling waarbij $\mu = 0,5$ per maand. De kans dat in een willekeurige periode van zes maanden precies drie noodlandingen plaatsvinden, bedraagt dus ...

(a) $1,000$.

(b) $0,224$.

(c) $0,013$.

(d) ongeveer $0,455$.

Uitwerking

We bekijken een interval van zes maanden met een tijdseenheid van een maand, dus $t = 6$. Het aantal noodlandingen in zes maanden kan dus worden beschouwd als een Poisson verdeelde kansvariabele $X \sim$ Poisson$(\lambda = 0,5 \cdot 6) =$ Poisson$(\lambda = 3)$

De kans op precies drie noodlandingen in zes maanden is gelijk aan

$$P(X = 3) = \text{poissonpdf}(\lambda = 3; k = 3) \approx 0,2240.$$

Het juiste antwoord is dus (b). **Opdracht 7.m3:** Het aantal ongevallen per maand op een kruispunt kan worden beschreven door een Poissonverdeling met $\mu = 0,5$. De standaarddeviatie van het aantal ongelukken per jaar bedraagt daarom ...

(a) 6.

(b) $\sqrt{6}$.

(c) $\frac{0{,}5}{\sqrt{6}}$.

(d) $0,5 \times \sqrt{12}$.

Uitwerking

Het aantal ongevallen per jaar kan in dat geval worden beschreven door een Poissonverdeling met $\mu = 12 \cdot 0,5 = 6$. De standaarddeviatie is dan gelijk aan $\sqrt{\mu} = \sqrt{6}$. Het juiste antwoord is dus (b).

Opdracht 7.m5: Bij een landelijk bingospelletje is de kans op het winnen van een prijs $0,001$. In een zaal vanwaaruit een directe televisie-uitzending plaatsvindt, bevinden zich 1500 mensen. De kans dat zich in die zaal meer dan één prijswinnaar bevindt, is gelijk aan ...

(a) $0,592$.

(b) ongeveer $0,50$.

(c) $0,409$.

(d) $0,442$.

Uitwerking

Het aantal winnaars in de zaal kan worden beschreven door een binomiaal verdeelde kansvariabele X met $n = 1500$ en $p = 0,001$. Deze verdeling kan worden benaderd met de Poissonverdeling met $\mu = n \cdot p = 1500 \cdot 0,001 = 1,5$. De kans dat zich in de zaal meer dan é'én prijswinnaar bevindt is gelijk aan

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 1,5; k = 1) \approx 0,4422.$$

Het juiste antwoord is dus (d).

Opdracht 7.m6: De tijd (in minuten) die verstrijkt tussen de binnenkomst van twee opeenvolgende klanten bij een postkantoor, kan worden beschouwd als een kansvariabele T die een negatief exponentiële verdeling heeft met parameters $\lambda = 4$. De standaarddeviatie van de variabele T is dan gelijk aan ...

(a) 4 minuten.

(b) $0,25$ minuten.

(c) 2 minuten.

(d) $0,50$ minuten.

Uitwerking

De standaarddeviatie van een exponentieel verdeelde kansvariabele T met parameter λ is gelijk aan $\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$. Als $\lambda = 4$, is de standaarddeviatie dus gelijk aan $\frac{1}{4} = 0,25$. Het juiste antwoord is dus (b).

Opdracht 7.3: Het aantal lekke banden dat bij een garage dagelijks ter reparatie wordt aangeboden, mag worden beschouwd als een kansvariabele K met een Poissonverdeling met $\mu = 4$ per dag. Bepaal met de tabel van de Poissonverdeling voor een willekeurige dag de kans op het ter reparatie aanbieden van:

(a) precies één lekke band.

Uitwerking

We hebben aangenomen dat het aantal lekke banden dat op een dag ter reparatie wordt aangeboden bij een garage een Poisson-verdeelde kansvariabele K is met parameter $\mu = 4$ per dag. De kans op precies één lekke band is dan gelijk aan

$$P(K = 1) = \text{poissonpdf}(\lambda = 4; k = 1) \approx 0,0733.$$

(b) precies zes lekke banden.

Uitwerking

De kans op precies zes lekke banden is dan gelijk aan

$$P(K = 6) = \text{poissonpdf}(\lambda = 4; k = 6) \approx 0,1042.$$

(c) meer dan drie lekke banden.

Uitwerking

De kans op meer dan drie lekke banden is gelijk aan

$$P(K > 3) = 1 - P(K \leq 3) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 4; k = 3) \approx 0,5665.$$

(d) minder dan drie lekke banden.

Uitwerking

De kans op minder dan drie lekke banden is gelijk aan

$$P(K < 3) = P(K \leq 2) = \text{poissoncdf}(\lambda = 4; k = 2) \approx 0,2381.$$

(e) meer dan vier, maar minder dan tien lekke banden.

Uitwerking

De kans op meer dan vier, maar minder dan tien lekke banden is gelijk aan

$$\begin{aligned} P(4 < K < 10) &= P(5 \leq K \leq 9) \\ &= P(K \leq 9) - P(K \leq 4) \\ &= \text{poissoncdf}(\lambda = 4; k = 9) - \text{poissoncdf}(\lambda = 4; k = 4) \\ &\approx 0,3630. \end{aligned}$$

Opdracht 7.4: Voor een eerstehulpafdeling van een ziekenhuis geldt dat het aantal patiënten met brandwonden dat per dag binnenkomt, kan worden beschreven door een Poissonverdeling met $\mu = 0,35$. Bereken met de formule van de Poissonverdeling de kans dat het aantal van dergelijke patiënten per dag . . .

(a) precies nul bedraagt.

Uitwerking

Laat X de kansvariabele zijn die het aantal patiënten telt dat op een willekeurige dag met brandwonden binnenkomt op de eerstehulpafdeling van het ziekenhuis. Gegeven is dat $X \sim$ Poisson$(\lambda = 0,35)$. De Poissonformule geeft voor elke mogelijke uitkomst $k = 0, 1, 2, \ldots$ de kans op die uitkomst aan als

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

De kans dat het aantal van dergelijke patiënten per dag precies nul bedraagt is dus gelijk aan

$$P(X = 0) = e^{-0{,}35} \cdot \frac{(0,35)^0}{0!} \approx 0,7047.$$

(b) precies één is.

Uitwerking

De kans dat het aantal van dergelijke patiënten per dag precies één bedraagt is dus gelijk aan

$$P(X = 1) = e^{-0{,}35} \cdot \frac{(0,35)^1}{1!} \approx 0,2466.$$

(c) meer dan één bedraagt.

Uitwerking

De kans dat het aantal van dergelijke patiënten per dag meer dan één bedraagt kan met de complementregel berekend worden:

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &\approx 1 - 0,7047 - 0,2466 \\ &\approx 0,0487. \end{aligned}$$

Opdracht 7.6: In een containerhaven kunnen per dag drie schepen worden afgehandeld met laden en lossen. Bekend is dat het aantal binnenlopende schepen een variabele is met een Poissonverdeling met $\mu = 2$ per dag. Schepen die zich melden wanneer op een dag reeds drie schepen in behandeling zijn, worden doorverwezen naar een andere haven.

(a) Hoe groot is de kans dat op een willekeurige dag een of meer schepen moeten worden doorverwezen?

Uitwerking

Laat X de kansvariabele zijn die het aantal binnenlopende schepen telt op een willekeurige dag. Dan geldt dat X een Poissonverdeling volgt met parameter $\mu = 2$.
De situatie waarin een of meer schepen moeten worden doorverwezen vindt plaats als er meer dan drie schepen binnenlopen. Dit gebeurt met een kans van

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 2; k = 3) \approx 0,1429.$$

(b) Hoe groot is het verwachte aantal schepen dat zich per dag aanmeldt?

Uitwerking

De verwachtingswaarde van een Poisson-verdeelde kansvariabele met parameter μ is gelijk aan μ. In dit geval is het verwachte aantal schepen per dag dus simpelweg gelijk aan $\mu = 2$.

(c) Hoe groot is het verwachte aantal dat per dag kan worden afgehandeld?

Uitwerking

Merk op dat het aantal schepen dat per dag kan worden afgehandeld begrensd is van boven door 3, omdat in het geval van meer schepen er schepen naar andere havens moeten uitwijken. Laat Y het aantal schepen zijn dat op een willekeurige dag wordt afgehandeld, de kansverdeling hiervan wordt gegeven door

Aantal schepen k	$P(Y = k)$
0	$P(X = 0) = \text{poissonpdf}(\lambda = 2; k = 0) \approx 0,1353$
1	$P(X = 1) = \text{poissonpdf}(\lambda = 2; k = 1) \approx 0,2707$
2	$P(X = 2) = \text{poissonpdf}(\lambda = 2; k = 2) \approx 0,2707$
3	$P(X \geq 3) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 2; k = 2) \approx 0,3233$

Het verwachte aantal schepen dat wordt afgehandeld is gelijk aan verwachtingswaarde van deze kansvariabele Y, oftewel:

$$\begin{aligned} E[Y] &= 0 \cdot P(Y = 0) + 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(Y = 3) \\ &= 0 \cdot 0,1353 + 1 \cdot 0,2707 + 2 \cdot 0,2707 + 3 \cdot 0,3233 \\ &\approx 1,7820 \end{aligned}$$

(d) Wat is het verwachte aantal dat per dag wordt doorverwezen naar een andere haven?

Uitwerking

Het verwachte aantal dat per dag wordt doorverwezen naar een andere haven is gelijk aan het verwachte aantal schepen dat op een dag binnenkomt minus het verwachte aantal schepen dat kan worden afgehandeld. In andere woorden, dit aantal is gelijk aan $2 - 1,7820 = 0,2180$.

Opdracht 7.8: Op de luchthaven van Port Elizabeth is slechts één security-doorgang. Het aantal passagiers dat zich per minuut meldt bij de security kan worden beschreven door een Poissonverdeling met $\mu = 3$.

(a) Hoe groot is de kans dat in een bepaalde minuut geen passagiers arriveren bij het security-punt?

Uitwerking

Laat X de kansvariabele zijn die het aantal passagiers telt dat zich per minuut bij de security meldt. Gegeven is dat $X \sim$ Poisson($\lambda = 3$). De kans dat in een bepaalde minuut geen passagiers arriveren bij het security-punt is gelijk aan

$$P(X = 0) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!} = e^{-3} \approx 0,0498$$

(b) Hoe groot is de kans dat er meer dan 5 passagiers komen in een willekeurige minuut?

Uitwerking

De kans dat er meer dan 5 passagiers komen in een willekeurige minuut is gelijk aan

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 3; k = 5) \approx 0,0839.$$

(c) Hoe groot is de kans dat er meer dan 200 passagiers komen in een willekeurig uur?

Uitwerking

Laat nu X de kansvariabele zijn die het aantal passagiers telt dat in een willekeurig uur aankomt bij de security-doorgang. Nu geldt dat de waarde van de Poissonparameter gelijk is aan $\lambda = 3 \cdot 60 = 180$. De kans op meer dan 200 passagiers in een willekeurig uur is dan gelijk aan

$$P(X > 200) = 1 - P(X \leq 199) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 180; k = 199) \approx 0,0749.$$

Opdracht 7.10: Bij een bepaald soort chirurgische ingreep is de kans op het optreden van een bepaalde, zeer zeldzame complicatie gelijk aan $0,002$. In een ziekenhuis worden per jaar 400 van dergelijke ingrepen uitgevoerd.

(a) Hoe groot is de kans dat in een willekeurig jaar meer dan éénmaal een dergelijke complicatie wordt geconstateerd?

Uitwerking

Laat X de kansvariabele zijn die het aantal ingrepen telt waarbij de zeer zeldzame complicatie wordt geconstateerd. Deze kansvariabele is binomiaal verdeeld met $n = 400$ en $p = 0,002$. Aangezien de succeskans zeer klein is, kan deze kansvariabele X benaderd worden met een Poissonverdeling met $\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0,002 = 0,8$. De kans dat meer dan éénmaal in een willekeurig de complicatie wordt geconstateerd is gelijk aan

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 0,8; k = 1) \approx 0,1912$$

(b) Landelijk worden per jaar 18000 van dergelijke ingrepen uitgevoerd. Hoe groot is de kans dat in een willekeurig jaar minder dan 30 keer de bedoelde complicatie optreedt?

Uitwerking

In dit geval kunnen we de kansvariabele X benaderen met een Poissonverdeling met parameter $\mu = 18000 \cdot 0,002 = 36$. De kans dat in een willekeurig jaar minder dan 30 keer de bedoelde complicatie optreedt is dus gelijk aan

$$P(X < 30) = P(X \leq 29) = \text{poissoncdf}(\lambda = 36; k = 29) \approx 0,1379$$

Opdracht 7.12: Het aantal schepen K dat per dag in een bepaalde haven aankomt, is te beschouwen als een variabele met een Poissonverdeling waarvoor geldt $\mu = 2\frac{1}{2}$. Per dag kunnen vier schepen worden afgehandeld in de haven. Als zich meer dan vier schepen melden, dan worden de overige schepen doorgestuurd naar een andere haven.

(a) Hoe groot is de kans dat op een zekere dag één of meer schepen worden doorgestuurd?

Uitwerking

Laat K de kansvariabele zijn die het aantal binnenlopende schepen telt op een willekeurige dag. Dan geldt dat K een Poissonverdeling volgt met parameter $\mu = 2\frac{1}{2}$.
De situatie waarin een of meer schepen moeten worden doorverwezen vindt plaats als er meer dan vier schepen binnenlopen. Dit gebeurt met een kans van

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 2\frac{1}{2}; k = 4) \approx 0,1088.$$

(b) Wat is het verwachte aantal schepen dat per dag worden doorgestuurd?

Uitwerking

Merk op dat het aantal schepen dat per dag moet worden doorgestuurd gelijk is aan het verwachte aantal binnenkomende schepen ($\mu = 2\frac{1}{2}$) minus het verwachte aantal dat kan worden afgehandeld.
We berekenen eerst het verwachte aantal dat kan worden afgehandeld. Dit aantal is begrensd van boven door 4, omdat in het geval van meer schepen er schepen naar andere havens moeten uitwijken. Laat Y het aantal schepen zijn dat op een willekeurige dag wordt afgehandeld, de kansverdeling hiervan wordt gegeven door

Aantal schepen k	$P(Y = k)$
0	$P(X = 0) = \text{poissonpdf}(\lambda = 2\frac{1}{2}; k = 0) \approx 0,0821$
1	$P(X = 1) = \text{poissonpdf}(\lambda = 2\frac{1}{2}; k = 1) \approx 0,2052$
2	$P(X = 2) = \text{poissonpdf}(\lambda = 2\frac{1}{2}; k = 2) \approx 0,2565$
3	$P(X = 3) = \text{poissonpdf}(\lambda = 2\frac{1}{2}; k = 3) \approx 0,2138$
4	$P(X \geq 4) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 2\frac{1}{2}; k = 3) \approx 0,2424$

Het verwachte aantal schepen dat wordt afgehandeld is gelijk aan verwachtingswaarde van deze kansvariabele Y, oftewel:

$$\begin{aligned} E[Y] &= 0 \cdot P(Y = 0) + 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(Y = 3) + 4 \cdot P(Y = 4) \\ &\approx 0 \cdot 0,0821 + 1 \cdot 0,2052 + 2 \cdot 0,2565 + 3 \cdot 0,2138 + 4 \cdot 0,2424 \\ &\approx 2,3292 \end{aligned}$$

Het verwachte aantal schepen dat moet worden doorgestuurd is dus gelijk aan $2,3292 - 2 = 0,3292$.

(c) Hoe groot moet de capaciteit van de haven worden om een kans kleiner dan $0,01$ te hebben dat op een willekeurige dag een of meer schepen worden doorgestuurd?

Uitwerking

Om deze capaciteit C te bepalen, moeten we de volgende ongelijkheid oplossen:

$$P(X > C) = 1 - P(X \leq C) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 2,5; k = C) < 0,01.$$

Merk op dat zodra C groter wordt, de kans $P(X > C)$ steeds kleiner wordt. Via een tabel in de grafische rekenmachine, of trial-and-error, vinden we:

$$\begin{aligned} k = 6: &\quad 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 2,5; k = 6) \approx 0,0142 \\ k = 7: &\quad 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 2,5; k = 7) \approx 0,0042 \end{aligned}$$

De haven moet een capaciteit hebben om op een dag zeven schepen te kunnen afhandelen als de kans kleiner dan $0,01$ moet zijn dat schepen naar andere havens moeten worden doorgestuurd.

Opdracht 7.14: Op een werkdag van de dierenambulance komen oproepen binnen volgens een Poissonproces met $\mu = 0,50$ oproepen per uur. Men is 10 uur per dag bereikbaar.

(a) Bereken de kans dat op een dag minder dan 4 oproepen binnenkomen.

Uitwerking

Laat X de kansvariabele zijn die het aantal binnenkomende oproepen telt op een werkdag (10 werkuren met gemiddelde $0,50$ oproepen per uur) bij de dierenambulance. Gegeven is dat $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 10 \cdot 0,50 = 5)$.
De kans dat op een dag minder dan 4 oproepen binnenkomen is dan gelijk aan

$$P(X < 4) = P(X \leq 3) = \text{poissoncdf}(\lambda = 5; k = 3) \approx 0,2650.$$

(b) Hoe groot is de kans dat er meer dan 3 uur voorbijgaan zonder dat een enkele oproep is geweest?

Uitwerking

Stel nu dat X de kansvariabele is van het aantal binnenkomende oproepen in drie uur tijd. In dat geval is X Poisson verdeeld met parameter $\lambda = 3 \cdot 0,50 = 1,50$, aangezien er in drie uur gemiddeld $1,5$ oproepen gaan komen.
De kans dat er meer dan 3 uur voorbijgaan zonder dat een enkele oproep is geweest is gelijk aan de kans op geen oproepen in drie uur tijd, oftewel:

$$P(X = 0) = \text{poissonpdf}(\lambda = 1,5; k = 0) \approx 0,2231.$$

(c) De chauffeur van de dierenambulance wil met lunchpauze. Hij wil de tijdsduur van de pauze zodanig kiezen dat de kans hoogstens $0,25$ is dat binnen die periode een oproep binnenkomt. Hoelang mag hij pauzeren?

Uitwerking

Tijdens een lunchpauze van t uur lang is het aantal inkomende oproepen X Poisson verdeeld met parameter $0,5t$. Om de gevraagde tijdsduur t te bepalen, moeten we de ongelijkheid

$$P(X \geq 1) \leq 0,25 \quad \rightarrow \quad 1 - P(X \leq 0) \leq 0,25$$

oplossen. Gebruik hiervoor het functiescherm in de grafische rekenmachine en vul in

$$y_1 = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 0,5 \cdot X; k = 0)$$
$$y_2 = 0,25.$$

De optie “intersect” (2nd-TRACE-5) geeft ons in dit geval een waarde $x \approx 0.5754$ uur, oftewel ongeveer 34,5 minuten. De chauffeur zal dus ongeveer na 34,5 minuten terug moeten zijn van zijn pauze om hoogstens 25% kans te hebben een oproep te hebben gemist.

Opdracht 7.19: Een satelliet heeft vijf zonnepanelen. Ieder zonnepaneel heeft een levensduur die kan worden beschreven door een negatief-exponentiële verdeling met $\lambda = 0,5$. Dus de gemiddelde levensduur van een paneel is $\frac{1}{0,50} = 2$ jaar. Zodra drie zonnepanelen zijn uitgevallen, houdt de satelliet op te functioneren.

(a) Hoe groot is de kans dat een willekeurig zonnepaneel na vier jaar nog functioneert?

Uitwerking

Laat X de continue kansvariabele zijn die de levensduur van een zonnepaneel op een satelliet meet. Gegeven is dat $X \sim \text{Exponentieel}(\lambda = 0,5)$. We willen de kans bepalen dat de satelliet na vier jaar nog functioneert, oftewel

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) \\ &= 1 - (1 - e^{-0{,}5 \cdot 4}) \\ &= e^{-2} \\ &\approx 0{,}1353. \end{aligned}$$

Met ongeveer $13{,}53\%$ kans functioneert een willekeurig zonnepaneel van de satelliet nog na vier jaar.

(b) Hoe groot is de kans dat de satelliet na vier jaar nog functioneert? We gaan ervan uit dat de levensduren van de panelen onderling onafhankelijk zijn.

Uitwerking

Laat Y nu de kansvariabele zijn die telt hoeveel zonnepanelen van de satelliet na vier jaar nog functioneren. Gegeven de aanname dat de levensduren van de panelen onderling onafhankelijk zijn, kunnen we deze zien als onafhankelijke Bernoulli-experimenten. In andere woorden, Y is een binomiaal verdeelde kansvariabele met parameters $n = 5$ (aantal zonnepanelen op de satelliet) en $p = 0{,}1353$ (kans dat een willekeurig zonnepaneel na vier jaar nog functioneert). De satelliet functioneert na vier jaar nog zolang dat er drie zonnepanelen nog functioneren, dit gebeurt met kans

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y \leq 2) \\ &= 1 - \mathrm{binomcdf}(n = 5; p = 0{,}1353; k = 2) \\ &\approx 0{,}0200 \end{aligned}$$