Tentamen Statistiek MBW/KW (deel 1, tweede kans)

Afdeling: Propedeuse MBW/KW 2020-2021
Examinator: Dr. J.B.M. Melissen
Datum: vrijdag 15 oktober 2021, duur tentamen: 2 uur

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven (30, 25, 25, 20 punten). Score = Puntentotaal/10

Opgave 1 (Totaal 30 punten)

De luitenant Vergaar (LD) is (onder andere) verantwoordelijk voor het op orde houden van de voorraad T-shirts voor het militaire personeel van de Landmacht. Deze T-shirts worden op voorraad gehouden in de kleur NATO Legergroen en in de maten: M, L en XL. Op grond van gegevens uit het verleden mag de luitenant Vergaar ervan uitgaan dat de maandelijks uitgegeven hoeveelheden normaal verdeeld zijn met gemiddelde waarden en standaarddeviaties die in de onderstaande tabel staan vermeld

Type artikel	Gemiddeld Aantal/mnd	Standaarddeviatie per maand
T-shirt Legergroen Maat M	1205	320
T-shirt Legergroen Maat L	1947	436
T-shirt Legergroen Maat XL	455	112

De gewenste servicegraad is 98%. De servicegraad is de kans dat het gevraagde aantal T-shirts in een maand ook daadwerkelijk kan worden geleverd uit voorraad.

1a. [6pts] Op het moment (de eerste van de maand) is de voorraad van de maat M 1882 stuks. Bereken de servicegraad voor de komende maand als er niet zou worden bijbesteld. Moet er voor de komende maand worden bijbesteld?

1b. [6pts] Het is de eerste van de maand en de voorraad van de maat L is 735 stuks. Bereken hoeveel stuks maat L voor de komende maand moeten worden bijbesteld.

1c. [10pts] De luitenant wil gaan uitrekenen hoeveel T-shirts hij voor een maand zou moeten bestellen als er geen voorraad was. Hij gaat dat op de volgende manier doen:

1. Bereken het totale aantal t-shirts dat gemiddeld nodig is in één maand.
2. Bereken de standaarddeviatie die hiervoor geldt.
3. Bereken met de antwoorden van 1. en 2. het totale aantal t-shirts dat nodig is om een servicegraad van 98% te garanderen voor het totale aantal t-shirts in één maand.
4. Bereken de percentages van de benodigde maten M, L en XL in een maand.
5. Bereken met het totale aantal uit punt 3 en de percentages uit punt 4 de maandelijks benodigde hoeveelheden van de maten M, L en XL.

Voer nu zelf het programma van luitenant Vergaar uit en bereken hoeveel stuks van maten M, L en XL hij dan zou moeten bestellen.

1d. [8pts] Stel dat je bij 1c was uitgekomen op een totaal aantal te bestellen T-shirts van 4729,233 (dit is niet het juiste antwoord). Bereken dan de bijbehorende aantallen voor de maten M, L en XL. Bereken ook de bijbehorende servicegraden. Welke conclusie kun je hieruit trekken?

Opgave 2 (Totaal 25 punten)

2a. [5pt] De <u>discrete</u> kansvariabele $\underline{k}$ is uniform verdeeld op de verzameling $\{0,1,2\}$, m.a.w.

$$P(\underline{k}=0) = P(\underline{k}=1) = P(\underline{k}=2) = \frac{1}{3}$$

Bereken $\mu(\underline{k})$ en $\sigma(\underline{k})$. Let op: gebruik niet de formules voor een continue uniforme verdeling!

2b. [5pt] We kunnen van de discrete verdeling uit opgave 2a een continue maken door elk van de drie punten te vervangen door een interval van 1 breed ($\underline{k} = 1$ ligt dan precies in het midden van een interval van $\frac{1}{2}$ tot $\frac{3}{2}$). De drie intervallen sluiten precies aan tot een interval $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ waarop je dan een uniforme continue verdeling kunt nemen.
Bereken voor deze continue uniforme verdeling de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie (bijvoorbeeld met het formuleblad) en vergelijk deze waarden met de berekende waarde van 2a. Wat kun je hieruit concluderen over de mate waarin je de discrete verdeling kunt benaderen met een continue?

2c. [5pt] De kansvariabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn normaal verdeeld met $\mu = 5$ en $\sigma = 2$. Bereken $P\left(\underline{x} + 2\underline{y} \geq 15\right)$.

2d. [5pt] De kansvariabele $\underline{k}$ is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en p is onbekend. Bereken p zodanig dat $P(\underline{k} < 30) = 0{,}25$.

2e. [5pt] De continue kansvariabele $\underline{t}$ heeft als kansdichtheidfunctie

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{13}t^2 - \frac{1}{6} & \text{als} \quad 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{als} \quad t < 1 \text{ of } t < 3 \end{cases}$$

Ga na of deze functie inderdaad een kansverdeling kan zijn en, zo ja, bereken de verwachtingswaarde $E(\underline{t})$ van $\underline{t}$.

Opgave 3 (Totaal 25 punten)

In verband met verscherpte grensbewaking door stijgende aantallen vluchtelingen uit het Midden-Oosten voert de Koninklijke Marechaussee op lokale wegen in de grensregio's 100%-controles uit. Voor een bepaalde dag wordt een inzet gepland waarbij gedurende tweeënhalf uur alle voertuigen op een geselecteerde locatie gecontroleerd moeten worden. Gebaseerd op gegevens van de RDW is de verwachting dat zich gedurende deze controle gemiddeld 36,7 voertuigen per uur aandienen en er wordt aangenomen dat dit volgens een Poissonverdeling zal gebeuren. Uit eerdere inzetten is gebleken dat de benodigde tijd per voertuig uniform is verdeeld tussen 5 en 17 minuten. Elke controle wordt uitgevoerd door een team van twee marechaussees.

3a. [5pt] Bereken hoeveel marechaussees er gemiddeld nodig zijn om deze controles uit te voeren.

3b. [7pt] Bereken de kans dat zich gedurende de controletijd van 2,5 uur meer dan 80 voertuigen aandienen.

3c. [8pt] Neem aan dat elk team direct van start kan gaan en vervolgens continu bezig is met controles. Bereken hoeveel tijd een team nodig heeft om met 95% zekerheid 20 controles te kunnen uitvoeren. Maak hiervoor gebruik van een geschikte benadering op grond van de centrale limietstelling en de parameters van de uniforme verdeling.

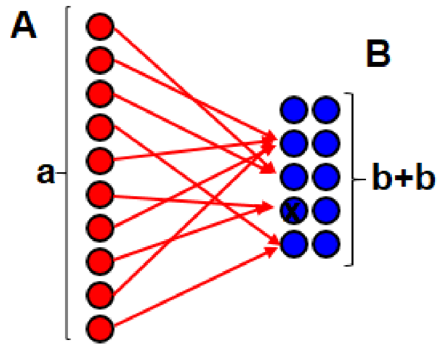
3d. [5pt] Hoe groot is de kans dat het, na het aanhouden van een voertuig, minimaal 3 minuten duurt voordat het volgende voertuig arriveert? Maak gebruik van de negatief exponentiële verdeling.

Opgave 4 (totaal 20 punten)

Een populair tijdverdrijf voor legers tot en met de Napoleontische tijd was het salvoschieten. Onder luide tambourbegeleiding stelden twee legers zich in linie tegenover elkaar op. Op commando vuurden de fuseliers een salvo af op de vijand. We gaan twee strategieën met elkaar vergelijken. Hiervoor gelden de volgende aannamen:

Aanname 1: Elke fuselier richt zijn wapen op een willekeurige vijandelijke fuselier die zichtbaar is (in de eerste linie).
Aanname 2: Zijn schot schakelt de vijand uit waarop zijn wapen is gericht met kans $p = 0{,}1$.
Aanname 3: Hij raakt nooit een andere vijand waar zijn wapen niet op is gericht.
Aanname 4: Leger A stelt een compagnie van 100 fuseliers in één linie op. Ze vuren op commando en gaan dan hun wapen herladen. Na twee minuten zijn de (dan overgebleven) fuseliers gereed voor het volgende salvo. Leger A geeft dus elke twee minuten één salvo van (hoogstens) 100 schoten af.
Aanname 5: Leger B stelt 100 fuseliers in twee linies van elk 50 fuseliers achter elkaar op. De eerste linie staat klaar voor een salvo, de tweede linie brengt zijn wapen in gereedheid. Na het salvo van de eerste linie trekt deze zich terug achter de tweede linie en de tweede linie neemt nu de rol van de eerste linie over en vuren op commando. Fuseliers in de tweede linie worden door de eerste linie afgeschermd en kunnen niet worden uitgeschakeld. Leger B geeft elke twee minuten twee salvo's van elk (maximaal) 50 schoten af.
Aanname 6: Na elke inslag van een vijandelijk salvo hergroeperen de niet-uitgeschakelde fuseliers zich weer tot een nette linie. Neem aan dat het aantal overgebleven fuseliers gelijk is aan de waarde die je op grond van de gegeven kansen verwacht (de verwachtingswaarde). Dit aantal wordt niet afgerond op een gehele waarde. Reken door met verwachte aantallen in twee decimalen.

Bekijk nu een willekeurige soldaat X die staat in een (eerste) linie met b soldaten waar net een salvo van a vijandelijke kogels binnen is gekomen. De kansvariabele $\underline{d}$ is het aantal dodelijke kogels waardoor soldaat X tijdens dit salvo is getroffen. De kansverdeling van $\underline{d}$ is een binomiale verdeling met $n = a$ trekkingen en een slaagkans van $p = \frac{0{,}1}{b}$.



4a. [4pt] Leg uit waarom de binomiale verdeling met dit aantal trekkingen en deze slaagkans van toepassing is, m.a.w. leg uit wat een "trekking" in dit geval precies is, welke twee uitslagen zo'n trekking kan hebben, wat "slagen" in dit geval betekent, waarom het aantal trekkingen $n = a$ is en hoe je tot een slaagkans van $p = \frac{0{,}1}{b}$ komt. Gebruik eventueel de analogie met n keer een munt werpen met een bepaalde slaagkans.

De soldaat X is uitgeschakeld als hij door minstens één kogel wordt getroffen:

$$P(\underline{d} \geq 1) = 1 - P(\underline{d} = 0) = 1 - \left(1 - \frac{0,1}{b}\right)^a \qquad \textbf{(Formule 1)}$$

4b. [4pt] Leg uit waarom Formule 1 correct is.

Het verwachte aantal overlevende soldaten uit de linie van b soldaten na een salvo met a kogels is

$$b\left(1 - \frac{0,1}{b}\right)^a \qquad \textbf{(Formule 2)}$$

4c. [4pt] Leg uit waarom Formule 2 correct is. Maak hierbij gebruik van Formule 1.

4d. [8pt] Gebruik Formule 1 om uit te rekenen hoeveel fuseliers elk van de legers naar verwachting over heeft na twee minuten salvo's uitwisselen: Neem aan dat leger B het eerste salvo afvuurt en de linies wisselt, het tweede salvo komt van leger A en het laatste weer van leger B. Gebruik de aantallen en de kansen uit de aannames.

Let op: Leger B gebruikt twee linies, dus houd daar per linie bij wat er gebeurt. Je kunt telkens Formule 2 gebruiken, maar moet wel steeds de a en b juist kiezen.
Welke strategie is voor dit deel van de veldslag het beste?

=== EINDE TENTAMEN ===