# Statistiek voor MBW / KW
# Uitwerkingen huiswerkopgaven

Dr. ir. D.A.M.P. Blom & Dr. J.B.M. Melissen

2025

# Week 12: verschiltoetsen

## Hoofdstuk 11

**Opdracht 11.m1:** Voor een tweetal normale verdelingen is gegeven dat hun standaarddeviatie respectievelijk $\sigma_1 = 4$ en $\sigma_2 = 6$ bedragen. Men wil toetsen $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Een steekproef van negen waarnemingen uit de eerste verdeling leverde een gemiddelde uitkomst op van $48$, en een steekproef van zestien waarnemingen uit de tweede verdeling leverde een gemiddelde op van $42$. De toetsingsgrootheid bij deze toets levert een $z$-waarde op van …

(a) $6$.

(b) $2,99$.

(c) $6,63$.

(d) $2,67$.

**Uitwerking**

We hebben te maken met twee normaal verdeelde kansvariabelen, namelijk $X_1 \sim N(\mu_1 =?; \sigma_1 = 4)$ en $X_2 \sim N(\mu_2 =?; \sigma_2 = 6)$. Aangezien we respectievelijk steekproeven hebben van groottes $n = 9$ en $m = 16$, geldt voor de theoretische steekproefgemiddeldes $\overline{X_1} \sim N(\mu = \mu_1; \sigma = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}})$ en $\overline{X_2} \sim N(\mu = \mu_2; \sigma = \frac{\sigma_2}{\sqrt{m}})$, oftewel

$$\overline{X_1} \sim N(\mu_1 =?; \sigma = \frac{4}{3})$$
$$\overline{X_2} \sim N(\mu_2 =?; \sigma = \frac{3}{2})$$

De verschilvariabele $V = \overline{X_1} - \overline{X_2}$ is dan normaal verdeeld met verwachtingswaarde $\mu_V = \mu_1 - \mu_2$ en standaardafwijking $\sigma_V = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{4}} \approx 2,0069$. Onder de nulhypothese geldt $\mu_1 = \mu_2$, oftewel de verschilvariabele heeft verwachtingswaarde $\mu_1 - \mu_2 = 0$. De geobserveerde waarde $v = \overline{x_1} - \overline{x_2} = 48 - 42 = 6$.
De $z$-waarde die bij deze uitkomst hoort is gelijk aan

$$z = \frac{v - \mu_V}{\sigma_V} = \frac{6 - 0}{2,0069} \approx 2,99$$

Het juiste antwoord is dus (b).

**Opdracht 11.m3:** Voor twee populaties mag worden verondersteld dat deze allebei een normale verdeling volgen en dezelfde onbekende variantie hebben. Men wil toetsen of deze populaties hetzelfde gemiddelde hebben. Daartoe neemt men uit beide populaties een steekproef van tien waarnemingen. Bij de toets is het aantal vrijheidsgraden van de toetsingsgrootheid gelijk aan …

(a) $9$.

(b) $18$.

(c) $19$.

(d) $-$ (er is bij deze toetsingsgrootheid geen sprake van vrijheidsgraden).

**Uitwerking**

We hebben te maken met twee normaal verdeelde kansvariabelen $X_1 \sim N(\mu_1 =?; \sigma_1 = ?)$ en $X_2 \sim N(\mu_2 =?; \sigma_2 =?)$ met dezelfde onbekende variantie, dat wil zeggen $\sigma = sigma_1 = \sigma_2$. In dat geval mogen de twee steekproefschattingen $s_1$ en $s_2$ voor de standaardafwijking (op basis van steekproeven van grootte $n = m = 10$ respectievelijk) worden gecombineerd tot één schatter (de zogenaamde "pooled variance").
De kansverdeling die de bijbehorende toetsingsgrootheid volgt is de $t$-verdeling met $df = n + m - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$ vrijheidsgraden. Het juiste antwoord is dus (b).

**Opdracht 11.m6:** Voor een tweetal normale verdelingen willen we toetsen of ze dezelfde waarde van de variantie hebben. Voor de eerste variabele werd met een steekproef van twaalf waarnemingen de waarde $s^2 = 240$ gevonden. Bij de tweede variabele leverde de steekproef van tien waarnemingen de waarde $s^2 = 160$. De toetsingsgrootheid krijgt hier dan de waarde ...

(a) $80$.

(b) $1,50$.

(c) $4$.

(d) $1,25$.

**Uitwerking**

We hebben te maken met twee normaal verdeelde kansvariabelen $X_1 \sim N(\mu_1 =?; \sigma_1 = ?)$ en $X_2 \sim N(\mu_2 =?; \sigma_2 =?)$ waarvan we willen toetsen of ze dezelfde standaardafwijking hebben. In andere woorden, we willen toetsen met $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tegen $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ .
Dit kunnen we doen met behulp van een $F$-toets. We hebben voor beide kansvariabelen een schatting $s_1^2 = 240$ en $s_2^2 = 160$ bepaald van de variantie, op basis van steekproeven van grootte respectievelijk $n = 12$ en $m = 10$. De bijbehorende toetsingsgrootheid is $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ volgt de $F(12, 10)$-verdeling. De geobserveerde toetsingsgrootheid is $f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{240}{160} = 1,5$.
Het juiste antwoord is dus (b).

**Opdracht 11.1:** Een instantie die toezicht houdt op de mate van luchtverontreiniging doet regelmatig metingen op diverse plaatsen in het land. De gemeten verontreiniging wordt uitgedrukt in een bepaalde index, die op alle werkdagen wordt bepaald. In 2018 werden enkele nieuwe richtlijnen voor de industrie afgekondigd met als doel het niveau van luchtverontreiniging te verlagen. Om het effect van deze maatregelen te bestuderen, werd een onderzoek gedaan. Hierbij werden $20$ waarden $(x_i)$ die bepaald zijn in februari 2017 vergeleken met $20$ waarden $(y_i)$ die zijn gemeten in februari 2018. Voor deze waarden werd berekend:

$$\overline{x} = 164,6 \text{ en } s_X = 17,2; \text{ en } \overline{y} = 143,2 \text{ en } s_Y = 15,9$$

Met een verschiltoets gaan we bepalen of er een significante verbetering is opgetreden.

Uitwerking