Ministerie van Defensie

Faculteit Militaire Wetenschappen

Gegevens student	
Naam:	
Peoplesoftnummer:	
Klas:	
Handtekening:	

(Her)Tentamen

Algemeen			
Vak:	Statistiek (deel 2) -- derde kans	**Vakcode:**	STA#2
Datum:	23 mei 2025	**Tijdsduur:**	10:00-13:00
Examinator:	Dr. ir. D.A.M.P. Blom	**Aantal pagina's:**	4
Peer-review:	Dr. J.B.M. Melissen	**Aantal opgaven:**	4

Algemene instructies

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Indien u een deelopgave niet kunt oplossen en het antwoord in vervolgvragen nodig hebt, probeer uit te gaan van een redelijke fictieve waarde.
- U mag een grafische rekenmachine gebruiken zonder CAS (computer algebra systeem) gebruiken.
- Antwoorden, in welke vorm dan ook, mogen de zaal niet verlaten.
- Vermeld op elk antwoordvel je naam, Peoplesoft-nummer en maak een nummering van je antwoordvellen.
- Iedere vorm van mobiele (potentiële) datadragers (telefoon, smartwatch, etc) of andere vormen om te frauderen (bv. communicatieapparatuur) zijn niet toegestaan gedurende de gehele duur van het tentamen en mogen ook niet in het lokaal meegebracht worden of zijn uitgeschakeld en ingeleverd.
- Schrijf leesbaar ter voorkoming van misverstanden bij de beoordeling van uw werk. Indien uw antwoord niet leesbaar is, wordt uw antwoord fout gerekend.
- Toiletbezoek tijdens het tentamen vindt enkel plaats na toestemming van de examinator.
- Lever bij het verlaten van de zaal, kladpapier, tentamenopgaven en andere tentamen gerelateerde documenten in bij de examinator.

Opgave 1 (25 punten) Op de Koninklijke Militaire Academie wordt onderzocht of een nieuw type gevechtstraining op basis van virtual reality de reactietijd van soldaten onder crisisomstandigheden significant verbetert. Soldaten worden ondergedompeld in een realistische VR-simulatie waarin ze snel moeten reageren en vijandelijke dreigingen moeten zien te identificeren.

Om de effectiviteit te testen, meten instructeurs de reactietijd (in milliseconden) van 18 cadetten na 6 weken VR-training en vergelijken dit met de gemiddelde reactietijd van 420 ms bij conventionele trainingsmethoden. Uit de steekproef blijkt dat de gemiddelde reactietijd na de VR-training gelijk is aan 390 milliseconden met een standaardafwijking van 40 milliseconden. Er wordt aangenomen dat de reactietijd van een willekeurige cadet een normaal verdeelde kansvariabele is.

1a [5pt] Bereken op grond van deze steekproef een 98%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde reactietijd van een cadet. Rond de grenzen van dit interval af op gehele milliseconden, zodanig dat de betrouwbaarheid gewaarborgd blijft.

Uitwerking

Laat $X \sim N(\mu = ?; \sigma = ?)$ de reactietijd zijn van een willekeurige cadet. Volgens de centrale limietstelling is de gemiddelde reactietijd $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_{18}}{18}$ van 18 cadetten ook normaal verdeeld, met verwachtingswaarde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{18}}$. Omdat naast de verwachtingswaarde μ ook de standaardafwijking σ onbekend is (1pt) (en bovendien de steekproefgrootte $n = 18 < 30$), moet de t-verdeling worden gebruikt. De t-waarde die hoort bij 98% betrouwbaarheid, oftewel $\alpha = 0.02$, is (in (1pt) het geval van tweezijdige intervallen) gelijk aantal

$$t = \mathrm{InvT}(opp = 1 - \frac{\alpha}{2}; df = n-1) = \mathrm{InvT}(opp = 0.99; df = 17) \approx 2.5669. \quad \text{(1pt)}$$

Omdat σ dus onbekend is, gebruiken we de steekproefstandaardafwijking $s = 40$ als schatter. Het betrouwbaarheidsinterval worden dan gegeven door

$$[\overline{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}] = [390 - 2.5669 \cdot \frac{40}{\sqrt{18}}; 390 + 2.5669 \cdot \frac{40}{\sqrt{18}}]$$
$$= [365.7990; 414.2010] \quad \text{(2pt)}$$

Om de betrouwbaarheid te waarborgen, mag het interval niet kleiner worden, dus naar buiten afronden: $[365; 415]$.

1b [3pt] Een van de instructeurs die verantwoordelijk is voor de VR-training beweert dat de gemiddelde reactietijd van cadetten daalt tot hoogstens 380 milliseconden. De overige instructeurs willen dit niet meteen voor waar aannemen en willen dit graag statistisch verantwoord toetsen. Formuleer de bijbehorende nul- en alternatieve hypothese van een geschikte hypothesetoets.

Uitwerking

In deze hypothesetoets gaan we uit van een gegeven gemiddelde van 420 milliseconden voor het conventionele trainingsregime. In dat geval hebben we te maken met een t-toets met nul- en alternatieve hypothese als volgt: (1pt)

$$H_0 : \mu \leq 380 \qquad \text{(nulhypothese)}$$
$$H_1 : \mu > 380 \qquad \text{(alternatieve hypothese)}$$ (1pt)

1c [8pt] Voer de hypothesetoets uit. Bepaal de toetsuitslag door het berekenen van een kritiek gebied op basis van de gegeven steekproef van 18 cadetten met significantieniveau $\alpha = 0,05$.

Uitwerking

In dit werken we met een rechtszijdige toets (alternatieve hypothese heeft vorm $>$), dus het kritieke gebied is van de vorm (g, ∞). We willen de (kleinste) grens g zoeken zodanig dat de kans op een type-I fout (H_0 verwerpen terwijl die waar is) kleiner is dan $\alpha = 0.05$. (1pt)

Onder de nulhypothese is de gemiddelde reactietijd $\overline{X}$ van 18 willekeurige gekozen cadetten normaal verdeeld met verwachtingswaarde 380 en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Omdat σ onbekend is en $n = 18 < 30$, gebruiken we opnieuw de t-verdeling en $s = 40$. Er geldt dus, omdat we eenzijdig toetsen, dat (1pt) (1pt)

$$t = \mathrm{InvT}(opp = 1 - \alpha; df = n - 1) = \mathrm{InvT}(opp = 0.95; df = 17) \approx 1.7396.$$ (1pt)

De bijbehorende grenswaarde vinden we nu met

$$g = \mu + t \cdot \frac{s}{\sqrt{18}} = 380 + 1.7396 \cdot \frac{40}{\sqrt{18}} \approx 396.4012. \qquad \text{(1pt)}$$

De gemeten waarde van 390 is kleiner dan deze ondergrens $g \approx 396.4012$ van het kritieke gebied, dus H_0 wordt niet verworpen. Dit betekent dat met deze toets niet kan worden aangetoond dat de gemiddelde reactietijd hoger wordt door de VR-gevechtstraining. (2pt)

1d [4pt] Bepaal opnieuw de toetsuitslag, nu door middel van berekening van de p-waarde.

Uitwerking

Nog steeds geldt dat onder de nulhypothese geldt dat de gemiddelde reactietijd $\overline{X}$ van 18 willekeurige gekozen cadetten normaal verdeeld met verwachtingswaarde 380 en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Omdat σ onbekend is en $n = 18 < 30$, gebruiken we opnieuw de t-verdeling en $s = 40$. De t-waarde die hoort we een uitkomst van $\overline{x} = 390$ is gelijk aan (1pt)

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{390 - 380}{\frac{40}{\sqrt{18}}} \approx 1.0607. \qquad \text{(1pt)}$$

Er geldt dus, omdat we eenzijdig toetsen, dat we de rechteroverschrijdingskans willen bepalen:

$$p = P(\overline{X} > t) = \text{tcdf}(\mathit{lower} = 1.0607; \mathit{upper} = 10^{99}; \mathit{df} = 17) \approx 0.1518. \qquad \text{(1pt)}$$

Aangezien deze overschrijdingskans p groter is dan α, zal H_0 opnieuw niet worden verworpen. (1pt)

1e [5pt] Stel nu dat de instructeurs niet de reactietijd van een individuele cadet willen meten, maar van een team van zes cadetten. De teamscore wordt bepaald door de som te nemen van de reactietijden van de zes cadetten in het team. Elk team wil dus een zo laag mogelijke teamscore bereiken.

Op dit moment staat het record op x milliseconden. Voor welke waarde van x is de kans op verbreking van het record gelijk aan 5%?

Uitwerking

We noemen nu Y de totale som van reactietijden van de zes cadetten in een team, dat is volgens de centrale limietstelling normaal verdeeld met verwachtingswaarde $6 \cdot \mu$ en standaardafwijking $\sqrt{6} \cdot \sigma$. We gebruiken hiervoor de schattingen $6 \cdot \overline{x} = 6 \cdot 390 = 2340$ ms en $\sqrt{6} \cdot s = \sqrt{6} \cdot 40 \approx 97.9796$ ms. We willen nu de waarde x vinden waarvoor geldt: (1pt)

$$P(Y \leq x) = 0.05.$$ (1pt)

Omdat $n = 6 < 30$, werken we nog steeds met de t-verdeling, de t-waarde die daarbij hoort is

$$t = \text{InvT}(opp = 0.05; df = n - 1) = \text{InvT}(opp = 0.05; df = 5) \approx -2.0150.$$ (1pt)

De grenswaarde van het interval is dan gelijk aan

$$g = \mu + t \cdot s = 2340 - 2.0150 \cdot 97.9796 \approx 2142.5664$$ (1pt)

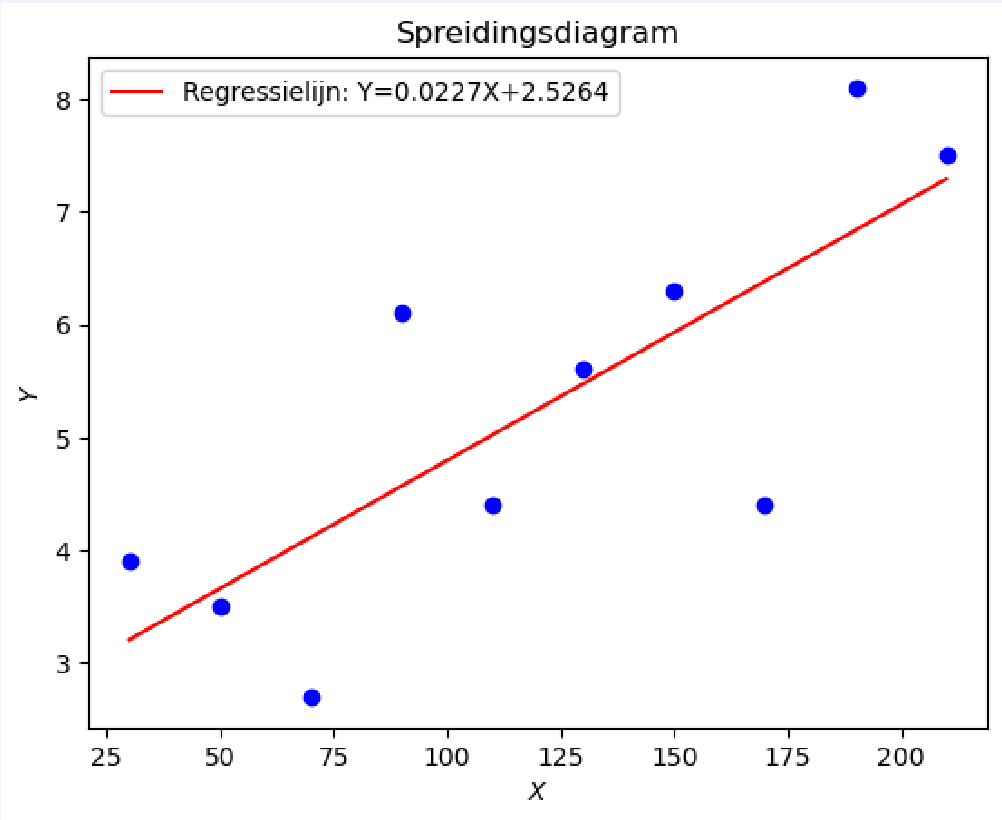
Dit betekent dat het huidige record op deze grenswaarde $g = 2142.5664$ ms staat, dan zal een team van zes cadetten met 5% kans het record kunnen breken. (1pt)

Opgave 2 (30 punten) Een luchtmacht onderzoekt de nauwkeurigheid van GPS-geleide raketten in een omgeving van elektronische oorlogsvoering. De raketten worden gericht op een vijandelijke luchtmachtbasis. Tijdens de vlucht worden de raketten "gedesoriënteerd" omdat de vijandelijke troepen gebruik maken van GPS jammers om precisiewapens te verstoren. Onderzocht wordt nu wat het verband is tussen de afstand (in km) tussen de eerste locatie waar de raket gejamd wordt en het doelwit (X) en de afstand (in km) tussen het doelwit en het daadwerkelijke inslagpunt van de raket (Y). Van tien raketten worden data verzameld over deze twee variabelen.

X	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210
Y	3.9	3.5	2.7	6.1	4.4	5.6	6.3	4.4	8.1	7.5

2a [4pt] Teken de gegevens uit bovenstaande tabel in een spreidingsdiagram.

Uitwerking



(4pt)

2b [8pt] Bereken met behulp van de tabel hierboven Pearson's correlatiecoëfficiënt. Bepaal of er sprake is van een lineaire correlatie en leg in woorden uit wat de betekenis is van de grootte en het teken van de correlatiecoëfficiënt.

Uitwerking

Hiervoor moeten we eerst een tabel uitschrijven met de grootheden $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{XY}$, $\overline{X^2}$ en $\overline{Y^2}$.

X	Y	XY	X^2	Y^2
30	3.9	117	900	15.21
50	3.5	175	2500	12.25
70	2.7	189	4900	7.29
90	6.1	549	8100	37.21
110	4.4	484	12100	19.366
130	5.6	728	16900	31.36
150	6.3	945	22500	39.69
170	4.4	748	28900	19.36
190	8.1	1539	36100	65.61
210	7.5	1575	44100	56.25
$\overline{X} = 120$	$\overline{Y} = 5.25$	$\overline{XY} = 704.9$	$\overline{X^2} = 17700$	$\overline{Y^2} = 30.3590$

De correlatiecoëfficient van Pearson is gelijk aan (4pt)

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sqrt{(\overline{X}^2 - \overline{X^2}) \cdot (\overline{Y}^2 - \overline{Y^2})}} \\
&= \frac{704.9 - 120 \cdot 5.25}{\sqrt{(120^2 - 17700) \cdot (5.25^2 - 30.359)}} \\
&= \frac{74.9}{96.065} \\
&\approx 0.7797.
\end{aligned}
$$

(3pt)

Deze correlatiecoëfficient duidt op een sterk positieve correlatie, oftewel wanneer een raket van grotere afstand gejamd wordt zal de raket ook verder van zijn doelwit inslaan. (1pt)

2c [8pt] Bereken de regressielijn $Y = aX + b$ met behulp van de tabel hierboven, en geef de interpretatie van a en b aan in dit scenario.

Uitwerking

De coëfficiënten a en b van de regressielijn kunnen worden berekend aan de hand van twee vergelijkingen. Allereerst hebben we

$$a = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = \frac{704.9 - 120 \cdot 5.25}{17700 - 120^2} \approx 0.0227 \qquad \text{(3pt)}$$

Vervolgens geldt dan dat

$$b = \overline{Y} - a \cdot \overline{X} = 5.25 - 0.0227 \cdot 120 \approx 2.5264 \qquad \text{(2pt)}$$

De regressielijn behorende bij deze steekproef is dus gelijk aan $Y = 0.0227X + 2.5264$. (1pt)

Je kunt deze regressielijn interpreteren als volgt: voor elke km dat de raket verder van het doelwit af jamming ervaart, zal de afwijking van de raket ten opzicht van het doelwit stijgen met 0.0227 km. Verder is in het geval van geen jamming de afstand tussen doelwit en inslagpunt 2.5264 km (bijvoorbeeld door weersfenomenen of rekenfouten tijdens lancering). (2pt)

2d [2pt] Geef een statistisch verantwoorde voorspelling van de afstand tot het doelwit waarop een raket inslaat die op 45 kilometer van het doelwit voor het eerst GPS jamming ondervindt.

Uitwerking

Je kunt de zojuist uitgerekend regressielijn gebruiken om een voorspelling te vinden. Vul in $X = 45$, dit geeft $Y = 0.0227 \cdot 45 + 2.5264 \approx 3.5477$ km. De raket zal naar verwachting zo ongeveer op iets meer dan 3.5 km van het doelwit inslaan. (1pt)

2e [8pt] Bepaal een 95%-voorspellingsinterval voor de afstand tussen doelwit en inslagpunt als die op 120 kilometer van het doelwit voor het eerst GPS-jamming ondervindt.

Uitwerking

Het voorspellingsinterval is $[Y_0 - t \cdot s_f; Y_0 + t \cdot s_f]$, waarbij $Y_0 = 3.5477$ de puntschatting gemaakt bij de vorige opgave. Verder geldt dat t de t-waarde is die hoort bij een betrouwbaarheid van 95% met $df = n - 2 = 10 - 2 = 8$ vrijheidsgraden. Bij een betrouwbaarheid van 95% is de linkeroverschrijdingskans $0.95 + 0.05/2 = 0.975$ en (1pt)

$$t = \mathrm{InvT}(opp = 0.975; df = 8) \approx 2.3060$$

Verder geldt voor de standaardafwijking van de errorterm: (1pt)

$$\begin{aligned} s_\epsilon &= \sqrt{\frac{n}{n-2} \cdot (\overline{Y^2} - a \cdot \overline{XY} - b \cdot \overline{Y})} \\ &= \sqrt{\frac{10}{8} \cdot (30.3590 - 0.0227 \cdot 704.9 - 2.5264 \cdot 5.25)} \\ &\approx 1.0963 \end{aligned}$$

Verder geldt (2pt)

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\overline{X^2} - \overline{X}^2}) \\ &= \frac{1}{10} \cdot (1 + \frac{(45 - 120)^2}{17700 - 120^2}) \\ &\approx 0.2705 \end{aligned}$$

De standaardafwijking van de forecasting term is dan (2pt)

$$s_f = s_\epsilon \cdot \sqrt{u + 1} \approx 1.2357$$

Dit levert een interval op van $[Y_0 - t \cdot s_f; Y_0 + t \cdot s_f] = [0.6982; 6.3972]$. Merk op dat dit interval zeer onnauwkeurig is en laat zien dat de voorspellende waarde van de regressielijn zeer beperkt is. (1pt)

Opgave 3 (20 punten) Binnen het NAVO-bondgenootschap worden over een periode van zes maanden door een internationaal team van cyberexperts inlichtingen uitgewisseld over cyberaanvallen gericht op de Baltische staten: Estland, Letland en Litouwen. Hierbij worden de drie meest voorkomende types cyberaanvallen gemonitord, namelijk phishing, injecties van malware en DDoS-aanvallen (Distributed Denial-of-Service). De verzamelde data ziet er als volgt uit:

Land	Phishing	Malware	DDoS	**Totaal**
Estland	120	200	140	460
Letland	150	170	180	500
Litouwen	100	220	160	480
Totaal	370	590	480	1440

Het team van cyberspecialisten wil toetsen of de verdeling van het type inkomende cyber-aanvallen significant verschilt tussen de drie Baltische staten.

3a [3pt] Formuleer de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 van de bijbehorende hypothesetoets.

Uitwerking

Omdat we te maken hebben met een toets van onafhankelijkheid van twee nominale variabelen, gaan we een chi-kwadraattoets voor onafhankelijkheid uitvoeren. De bijbehorende nul- en alternatieve hypothese zijn in dit geval gelijk aan

H_0 : de verdeling van types cyberaanvallen is onafhankelijk van het land waarop deze gericht is. (2pt)

H_1 : de verdeling van types cyberaanvallen is wel afhankelijk van het land waarop deze gericht is. (1pt)

3b [2pt] Bepaal voor elk van de drie scenario's (alledrie dezelfde verdeling van cyberaanvallen, twee van de drie landen dezelfde verdeling, alledrie verschillende verdelingen) of het een correcte beslissing zou zijn om de nulhypothese aan te nemen? Leg uit.

Uitwerking

De nulhypothese van onafhankelijkheid wordt enkel en alleen aangenomen als alledrie de landen dezelfde verdeling van type cyberaanvallen hebben gericht op hun land. Dat betekent dat de nulhypothese alleen correct is in het geval van het eerste scenario. (1pt) (1pt)

3c [10pt] Voer een chi-kwadraattoets voor onafhankelijkheid uit met significantieniveau $\alpha = 0,05$ en bereken de bijbehorende p-waarde.

Uitwerking

Om een chi-kwadraattoets voor onafhankelijkheid uit te voeren, moeten we eerst de verwachte frequenties uitrekenen. Onder de aanname dat H_0 waar is, is deze voor elk van de negen cellen te berekenen als $\frac{\text{rijtotaal}\cdot\text{kolomtotaal}}{\text{totaal}}$. De verwachte frequenties zijn nu te geven als:

Waargenomen frequenties (observed)

Land	Phishing	Malware	DDoS	**Totaal**
Estland	120	200	140	460
Letland	150	170	180	500
Litouwen	100	220	160	480
Totaal	370	590	480	1440

Verwachte frequenties (expected)

Land	Phishing	Malware	DDoS	**Totaal**
Estland	118.1944	188.4722	153.3333	460
Letland	128.4722	204.8611	166.6667	500
Litouwen	123.3333	196.6667	160	480
Totaal	370	590	480	1440

(4pt)

We berekenen de toetsingsgrootheid χ^2 als volgt, waarbij O_{ij}/E_{ij} de geobserveerde / verwachte frequentie is in rij i, kolom j:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(O_{11}-E_{11})^2}{E_{11}} + \frac{(O_{12}-E_{12})^2}{E_{12}} + \dots + \frac{(O_{33}-E_{33})^2}{E_{33}} \\ &= \frac{(120-118.1944)^2}{118.1944} + \frac{(150-128.4722)^2}{128.4722} + \dots + \frac{(160-160)^2}{160} \\ &\approx 19.6812.\end{aligned}$$

(3pt)

De bijbehorende p-waarde is de overschrijdingskans $P(X > \chi^2)$, waarbij X de toetsingsgrootheid van de chikwadraattoets voor onafhankelijkheid. Deze toetsingsgrootheid heeft $df = (\#\text{rijen} - 1)\cdot(\#\text{kolommen} - 1) = (3-1)\cdot(3-1) = 4$

vrijheidsgraden. (1pt)

$$p = P(X > \chi^2 = 19.6812) = \chi^2\text{cdf}(lower = 19.6812; upper = 10^{99}; df = 4)$$
$$\approx 5.7721 \cdot 10^{-4}.$$
(2pt)

3d [5pt] Geef een conclusie voor deze hypothesetoets en ondersteun deze met behulp van gegevens uit de tabel.

Uitwerking

Uit de hypothesetoets volgt een extreem kleine overschrijdingskans $p = 5.7721 \cdot 10^{-4}$. Omdat $p < \alpha = 0.05$, geldt dat H_0 wordt verworpen. (2pt) We kunnen dus de conclusie trekken dat de verdeling van types cyberaanvallen significant verschilt over de drie Baltische staten. (1pt)

Als we kijken naar de tabel van waargenomen frequenties, dan zien we dat de verdeling van cyberaanvallen redelijk gelijk verdeeld is in het geval van Letland $(150 - 170 - 180)$. We zien echter in Estland en Litouwen dat aanvallen met malware veel vaker voorkomen dat phishingaanvallen, tot soms wel twee keer zo vaak. (2pt)

Opgave 4 (25 punten) Een marinefregat opereert in een gebied waar regelmatig vijandelijke onderzeeboten actief zijn. Het fregat gebruikt hiervoor sonar en magnetische sensoren om onderzeeboten te detecteren. De bemanning wil analyseren hoe vaak ze per dag succesvolle detecties uitvoeren en of hun waarnemingen een Poisson-verdeling volgen.

Gedurende een periode wordt het aantal gedetecteerde vijandelijke onderzeeboten geteld.

Aantal gedetecteerde onderzeeboten	**Aantal dagen**
0	40
1	80
2	100
3	85
4	35
5	15
6	7
7	3

4a [5pt] Bereken met behulp van de gegevens uit de tabel het aantal dagen waarop er data is verzameld en het gemiddelde aantal gedetecteerde vijandelijke onderzeeboten per dag.

Uitwerking

Het aantal dagen n waarop er data is verzameld is gelijk aan

$$n = 40 + 80 + 100 + 85 + 35 + 15 + 7 + 3 = 365$$ (1pt)

Het totaal aantal detecties is gelijk aan

$$\#\text{detecties} = 0 \cdot 40 + 1 \cdot 80 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 85 + 4 \cdot 35 + 5 \cdot 15 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 3 = 813$$ (2pt)

Het gemiddelde aantal detecties is dus gelijk aan

$$\text{gemiddelde} = \frac{\#\text{detecties}}{n} = \frac{813}{365} \approx 2.2274.$$ (2pt)

4b [12pt] Toets of het aantal gedetecteerde onderzeeboten per dag X is te beschouwen als een Poisson-verdeelde kansvariabele. Schrijf hierbij specifiek de nul- en alternatieve hypothese uit en bepaal de toetsuitslag aan de hand van het berekenen van een p-waarde. Kies als betrouwbaarheid 95% en gebruik in je berekening je antwoord op vraag 4a.

Uitwerking

Om deze bewering te toetsen, moeten we werken met de volgende hypothesen:

$$H_0: \text{ de kansvariabele } X \text{ volgt een Poissonverdeling.}$$
$$H_1: \text{ de kansvariabele } X \text{ volgt NIET een Poissonverdeling.}$$ (2pt)

Omdat we een toets willen uitvoeren om te testen of een kansvariabele een bepaalde kansverdeling volgt, moeten we een chi-kwadraattoets voor aanpassing gebruiken. Om de toetsingsgrootheid χ^2 te berekenen, hebben we allereerst de verwachte frequenties nodig als we zouden werken met een Poissonverdeling met parameter $\lambda = \frac{813}{365}$. (1pt)

Aantal gedetecteerde onderzeeboten	Aantal dagen (observed)	Aantal dagen (expected)
0	40	$365 \cdot \text{poissonpdf}(\lambda = \frac{813}{365}; k = 0) = 39.3502$
1	80	$365 \cdot \text{poissonpdf}(\lambda = \frac{813}{365}; k = 1) = 87.6484$
2	100	$365 \cdot \text{poissonpdf}(\lambda = \frac{813}{365}; k = 2) = 97.6140$
3	85	$365 \cdot \text{poissonpdf}(\lambda = \frac{813}{365}; k = 3) = 72.4750$
4	35	$365 \cdot \text{poissonpdf}(\lambda = \frac{813}{365}; k = 4) = 40.3577$
5	15	$365 \cdot \text{poissonpdf}(\lambda = \frac{813}{365}; k = 5) = 17.9785$
6	7	$365 \cdot \text{poissonpdf}(\lambda = \frac{813}{365}; k = 6) = 6.6742$
7	3	$365 \cdot (1 - \text{poissoncdf}(\lambda = \frac{813}{365}; k = 6)) = 2.9020$

(3pt)

Omdat er verwachte frequenties zijn die kleiner dan 5 zijn (vuistregel), moeten we rijen gaan samenvoegen, namelijk de laatste twee rijen:

Aantal gedetecteerde onderzeeboten	Aantal dagen (observed)	Aantal dagen (expected)
0	40	39.3502
1	80	87.6484
2	100	97.6140
3	85	72.4750
4	35	40.3577
5	15	17.9785
≥ 6	10	9.5763

(1pt)

De toetsingsgrootheid kunnen we nu bepalen als volgt:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(O_0 - E_0)}{E_0} + \frac{(O_1 - E_1)}{E_1} + \ldots + \frac{(O_{\geq 6} - E_{\geq 6})}{E_{\geq 6}} \\ &= \frac{(40 - 39.3502)}{39.3502} + \frac{(80 - 87.6484)}{87.6484} + \ldots + \frac{(10 - 9.5763)}{9.5763} \\ &\approx 4.1245\end{aligned}$$ (2pt)

Aangenomen dat de nulhypothese waar zou zijn, is deze toetsingsgrootheid getrokken uit een chi-kwadraatverdeling met aantal vrijheidsgraden

$$df = \#\text{categorieën} - 1 - \#\text{geschatte parameters} = 7 - 1 - 1 = 5.$$

De p-waarde die hoort bij deze uitkomst is

$$p = P(\chi^2 > 4.1245) = \chi^2\text{cdf}(4.1245; 10^{99}; 5) \approx 0.5316.$$ (2pt)

Tevens is er voor een betrouwbaarheidsniveau van 95% ($\alpha = 0.05$) gekozen. Omdat $p > \alpha$, wordt H_0 niet verworpen. Er is onvoldoende bewijs om de bewering te verwerpen dat de kansvariabele een Poissonverdeling zou volgen. (1pt)

4c [8pt] De marine definieert een dag met hoge vijandelijke onderzeese activiteit als een dag waarop minstens vier onderzeeboten worden gedetecteerd. Bereken met de methode van Clopper-Pearson een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de kans p dat er op een willekeurige dag hoge vijandelijke activiteit is.

Uitwerking

Volgens de gegevens van de marine zijn op $35 + 15 + 7 + 3 = 60$ van de 365 dagen minstens vier onderzeeboten gedetecteerd. (1pt) Een puntschatting voor de kans dat er op een willekeurige dag hoge vijandelijke onderzeese activiteit is, is gelijk aan $\hat{p} = \frac{60}{365} = 0.1644$. (1pt)

Voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval (dus $\alpha = 0.05$) berekenen we de grenzen aan de hand van

1. We berekenen p_1 door de vergelijking $P(X \leq 60) = \frac{\alpha}{2} = 0.025$ op te lossen.

Hieruit volgt:

$$\text{binomcdf}(n = 365; p_1 =?; k = 60) = 0.025 \to p_1 = 0.2065$$ (2pt)

2. We berekenen p_2 door de vergelijking $P(X \geq 60) = 1 - P(X \leq 59) = \frac{\alpha}{2} = 0.025$ op te lossen. Hieruit volgt:

$$1 - \text{binomcdf}(n = 365; p_2 =?; k = 59) = 0.025 \to p_2 = 0.1278$$ (3pt)

Dit levert het 95% Clopper-Pearson betrouwbaarheidsinterval $[0.1278; 0.2065]$ voor de kans p dat er op een willekeurige dag hoge vijandelijke onderzeese activiteit is.

(1pt)