Statistiek 2

Week 5 χ^2-verdeling

Homogeniteitstoetsen

Aanpassingstoetsen

Schattingsinterval voor σ

χ^2-verdeling (Boek/reader 10.1)

Een aantal belangrijke toetsen maakt gebruik van de **χ^2-verdeling** (chi-kwadraat).

Deze verdeling heeft één parameter: n, het aantal vrijheidsgraden (vg, *degrees of freedom*, *dof*, *df*)
Je krijgt deze verdeling door n onafhankelijke kansvariabelen $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ te nemen die allemaal standaard normaal verdeeld $N(0,1)$ zijn en daarvan de som van de kwadraten te bekijken:

$$\underline{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{2}} = \underline{x}_1{}^{\mathbf{2}} + \underline{x}_2{}^{\mathbf{2}} + \cdots + \underline{x}_n{}^{\mathbf{2}}$$

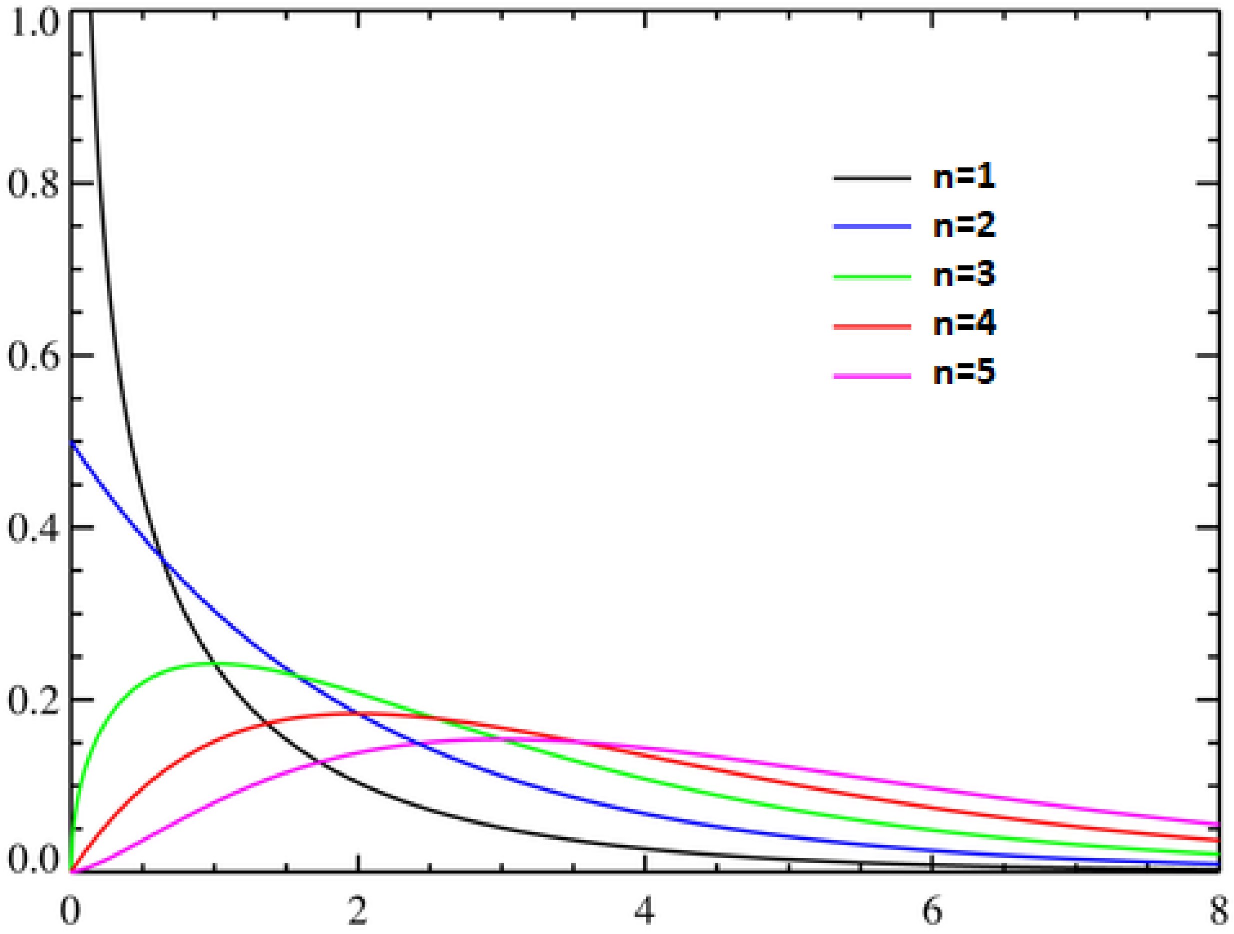
De kansverdeling voor die grootheid heet de

χ^2-verdeling met $\boldsymbol{n}$ vrijheidsgraden

De verdeling is ontwikkeld als beschrijving van de steekproefvariantie van n waarden uit $N(\mu, \sigma)$:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{x} \left(\underline{x}_1 - \underline{\bar{\boldsymbol{x}}}\right)^{\mathbf{2}}$$

Deze steekproefvariantie is verdeeld als $\frac{\sigma^2}{n-1} \boldsymbol{\chi}^2_{n-1}$.



Kansdichtheidfunctie van de χ^2-verdeling met n vrijheden

$$\boldsymbol{f_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (x \geq 0)}$$

$$\boldsymbol{\mu = n}$$

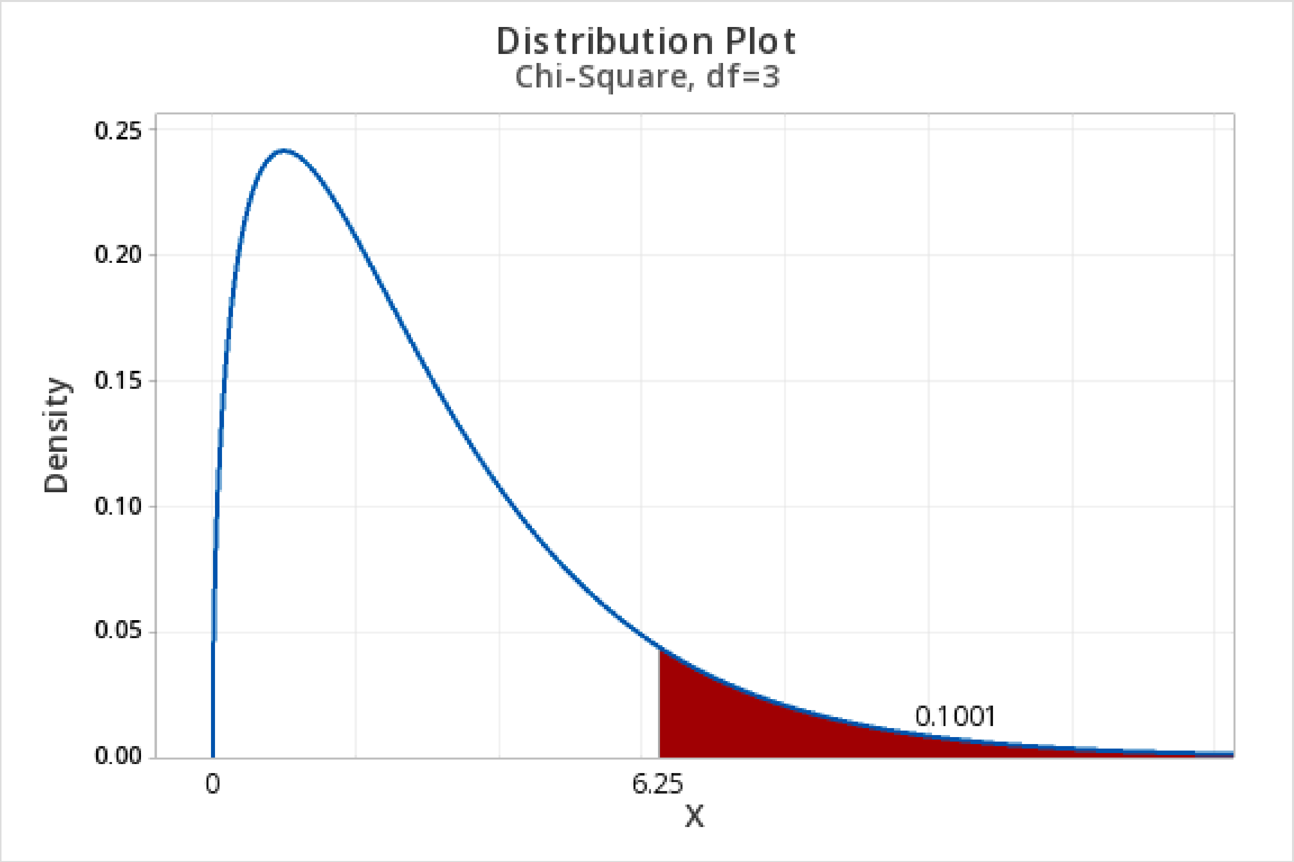
$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{2n}}$$

χ^2-verdeling (Boek/reader 10.1)

De χ^2**-verdeling** is een continue verdeling, dus alleen de χ^2cdf is van belang.

$$\chi^2\text{cdf}(\text{LOWER} = 6.25\,, \text{UPPER} = 10^{10}, \text{df} = 3) =$$

$$= 0.1000608333$$



χ^2-verdeling. Toetsen van homogeniteit

Het toetsen van **homogeniteit** ofwel **onafhankelijkheid** is aan de orde als je twee kansvariabelen hebt die elk twee (of meer) mogelijke waarden hebben en waarvan je wilt weten of ze afhankelijk van elkaar zijn of niet.

Voorbeeld: Je hebt 400 willekeurige Nederlanders gevraagd of ze vertrouwen hebben in het nieuwe kabinet. Je weet van de ondervraagden ook of ze man of vrouw zijn. Deze resultaten kunnen worden verwerkt in een **kruistabel** (*contingency table*):

	Vertrouwen	Geen vertrouwen	Totaal
Vrouw	**111**	**69**	180
Man	**119**	**101**	220
Totaal	230	170	400

Vraag: Is het vertrouwen in de nieuwe regering onder mannen en vrouwen even groot?
Er zijn twee variabelen: *V*(vertrouwen in kabinet?) en *G*(vrouw?), beide met waarden 0 of 1.
Onafhankelijkheid van *V* en *G* zou betekenen

$$P(V|G) = P(V)$$

Omdat

$$P(V|G) = \frac{P(V \text{ én } G)}{P(G)} \text{ is dat hetzelfde als } P(V \text{ én } G) = P(V|G) \cdot P(G) = P(V) \cdot P(G)$$

χ^2-verdeling. Toetsen van homogeniteit

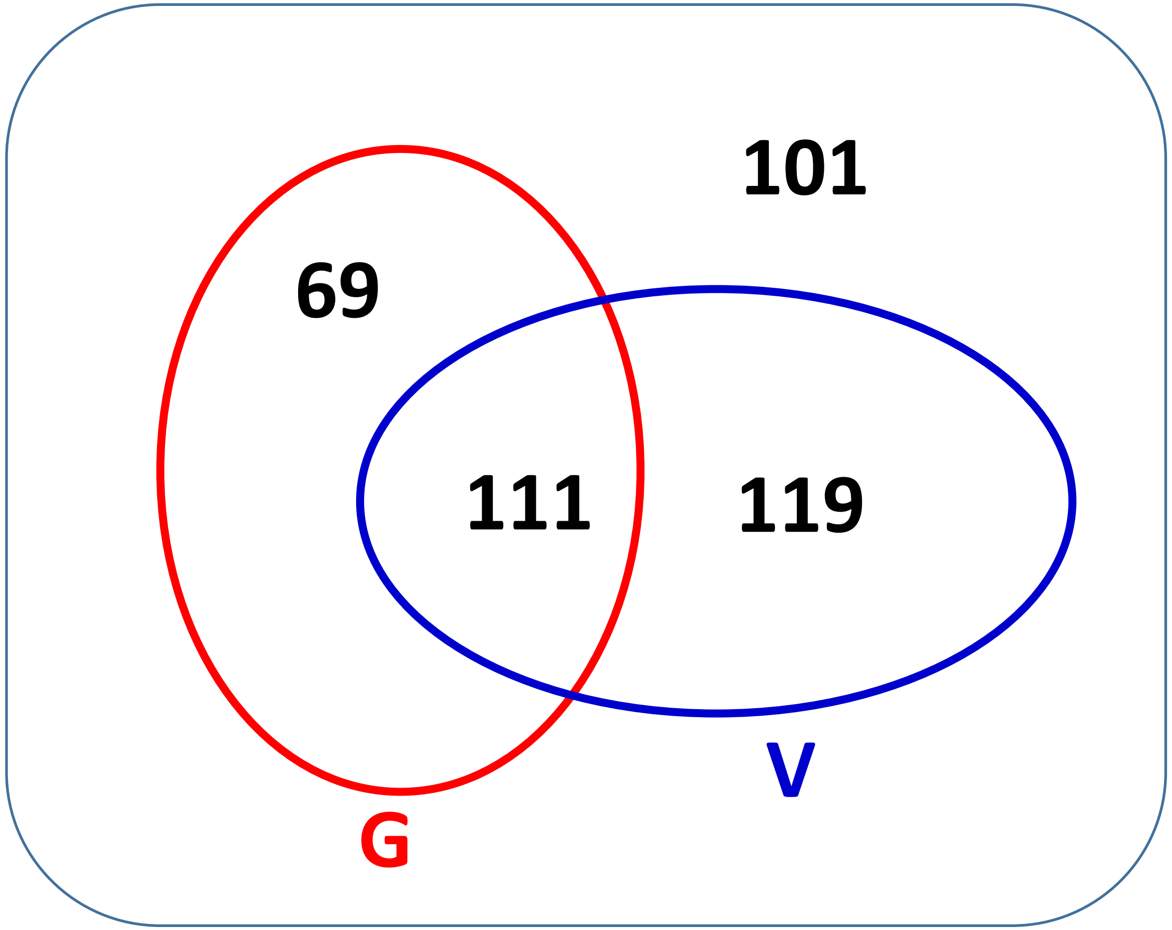
Onder de 230 fans van Rutte is $\frac{119}{230} = 51{,}7\%$ man, dus iets meer mannelijke dan vrouwelijke fans.

Maar:

De kans dat een vrouw vertrouwen heeft, is $\frac{111}{180} = 61{,}7\%$. De kans dat een man vertrouwen heeft, is $\frac{119}{220} = 54{,}1\%$. Dus toch meer vrouwelijke ondervraagden met vertrouwen?

Zijn de percentages $61{,}7\%$ en $54{,}1\%$ voldoende verschillend om te zeggen dat er een verschil is tussen vrouwen en mannen als het om mensen met vertrouwen in het kabinet gaat?

	Vertrouwen	Geen vertrouwen	Totaal
Vrouw	111	69	180
Man	119	101	220
Totaal	230	170	400



χ^2-verdeling. Toetsen van homogeniteit

Observed	Vertrouwen	Geen vertrouwen	Totaal
Vrouw	111	69	180
Man	119	101	220
Totaal	230	170	400

Bereken de verwachte (*Expected*) scores bij onafhankelijkheid uit de (marginale) totalen.
Bv. Man, geen vertrouwen. Kans man is 220/400 maal aantal geen vertrouwen 170 is 93,5. Je verwacht 93,5 mannen zonder vertrouwen.
De **toetsgrootheid** voor de χ^2 toets is altijd:

$$\underline{\chi}^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$\underline{\chi}^2 = \frac{(111-103{,}5)^2}{103{,}5} + \frac{(69-76{,}5)^2}{76{,}5} + \frac{(119-126{,}5)^2}{126{,}5} + \frac{(101-93{,}5)^2}{93{,}5} = 2{,}3250$$

Met de $\underline{\chi}^2$-verdeling bepalen we of deze waarde groot is of klein.

Expected	Vertrouwen	Geen vertrouwen	Totaal
Vrouw	103,5	76,5	180
Man	126,5	93,5	220
Totaal	230	170	400

P(Man, geen vertr.)= P(Man) · P(Geen vertr.) $= \frac{220}{400} \cdot \frac{170}{400}$

E(Man, geen vertr.)= $\frac{220}{400} \cdot \frac{170}{400} \cdot 400 = \frac{220 \cdot 170}{400}$

Expected = marginaal rechts × marginaal onder / totaal

Het aantal vrijheidsgraden is $(n-1)(m-1)$, met n en m het aantal mogelijke waarden van de variabelen.
In dit geval $(2-1)(2-1) = 1$.
De toets is:

H_0: Er is onafhankelijkheid tussen geslacht en vertrouwen in kabinet hebben.
H_1: Er is significante afhankelijkheid tussen de variabelen.

χ^2-verdeling. Toetsen van homogeniteit

De toetsingsgrootheid is

$$\underline{\chi}^2 = \frac{(111-103{,}5)^2}{103{,}5} + \frac{(69-76{,}5)^2}{76{,}5} + \frac{(119-126{,}5)^2}{126{,}5} + \frac{(101-93{,}5)^2}{93{,}5}$$

$$= 0{,}5435 + 0{,}7353 + 0{,}4447 + 0{,}6016 = \mathbf{2{,}3250}$$

H_0: Er is onafhankelijkheid

H_1: Er is geen onafhankelijkheid

We kiezen $\alpha = 0{,}05$ en we doen een enkelzijdige toets. De kritieke waarde vinden we door op te lossen

$$P\left(\underline{\chi}^2 \geq g?\right) = \chi^2\text{cdf}\,(g?\ , 10^{10}, 1) = 0{,}05$$

Dit levert $g = 3{,}8414$. Het kritieke gebied is het interval $(3{,}8414\ , \infty)$.

De uitgerekende waarde $\underline{\chi}^2 = 2{,}3250$ zit daar behoorlijk niet in, dus H_o wordt niet verworpen:

Conclusie: Bij een betrouwbaarheid van 95% is er op grond van deze steekproef en deze toets geen afhankelijkheid geconstateerd tussen vertrouwen in het kabinet en het geslacht van de ondervraagde.

De p-waarde is $p = \chi^2\text{cdf}(2.3250\ , 10^{10}, 1) = 0{,}1273$, is niet klein, dus inderdaad H_0 niet verwerpen.

χ^2-verdeling. Toetsen van homogeniteit

Voorbeeld Buijs 10.3 Na een enquête zijn 860 mannen en Vrouwen ingedeeld naar politieke issues van eerste interesse.

Zijn de keuzes afhankelijk van het geslacht van de bevraagde?

H_0: Keuzes en geslacht zijn onafhankelijk.

H_1: Er is afhankelijkheid.

De toetsingsgrootheid is

Onderwerp 1e keuze	Mannen	Vrouwen	Totaal
Gezonde overheidsfinanciën	154	96	250
Gezondheidszorg	38	84	122
Onderwijs	100	106	206
Veiligheid	128	154	282
Totaal	420	440	860

Expected	Mannen	Vrouwen	Totaal
Gezonde overheidsfinanciën	122,1	127,9	250
Gezondheidszorg	59,6	62,7	122
Onderwijs	100,6	105,4	206
Veiligheid	137,7	144,3	282
Totaal	420	440	860

$$\underline{\chi}^2 = \frac{(154-122{,}1)^2}{122{,}1} + \frac{(38-59{,}6)^2}{59{,}6} + \ldots = 8{,}33 + 7{,}83 + 0{,}004 + 0{,}68 + 7{,}96 + 7{,}48 + 0{,}003 + 0{,}65 = 32{,}94$$

Het aantal vrijheidsgraden is $(2-1)(4-1) = 3$.

χ^2-verdeling. Toetsen van homogeniteit

$\underline{\chi}^2 = 32{,}94$ en het aantal vrijheidsgraden is 3.

We kiezen nu $\alpha = 0{,}0001$ (andere waarde dan in het boek). De kritieke waarde vinden we door op te lossen

$$P\left(\underline{\boldsymbol{\chi}}^{\mathbf{2}} \geq g?\right) = \chi^2\mathrm{cdf}(g?\ , 10^{10}, 3) = 0{,}0001.$$

Dit levert $g = 21{,}1075$. Het kritieke gebied is dus $\mathrm{Z} = 21{,}11\ , \infty)$.
De uitgerekende waarde $\underline{\chi}^2 = 32{,}94$ zit in dit kritieke gebied, dus H_o wordt verworpen:

Conclusie: Bij een betrouwbaarheid van 99,99% is er op grond van deze steekproef een significante afhankelijkheid tussen voorkeur voor politiek issue en het geslacht van de ondervraagde.

De overschrijdingskans is $\chi^2\mathrm{cdf}(32{,}94\ , 10^{10}, 3) = 3{,}32 \cdot 10^{-7}$, dat is extreem klein.

χ^2-verdeling. Toetsen van homogeniteit

De grootste bijdragen in de waarde van toetsingsgrootheid komen van **Gezonde overheidsfinanciën (vinden mannen belangrijker)** en **Gezondheidszorg (belangrijker voor vrouwen)**:

$$\underline{\chi}^2 = \frac{(154-122{,}1)^2}{122{,}1} + \frac{(38-59{,}6)^2}{59{,}6} + \dots = \mathbf{8{,}33} + \mathbf{7{,}83} + 0{,}004 + 0{,}68 + \mathbf{7{,}96} + \mathbf{7{,}48} + 0{,}003 + 0{,}65 =$$

$$= 32{,}94$$

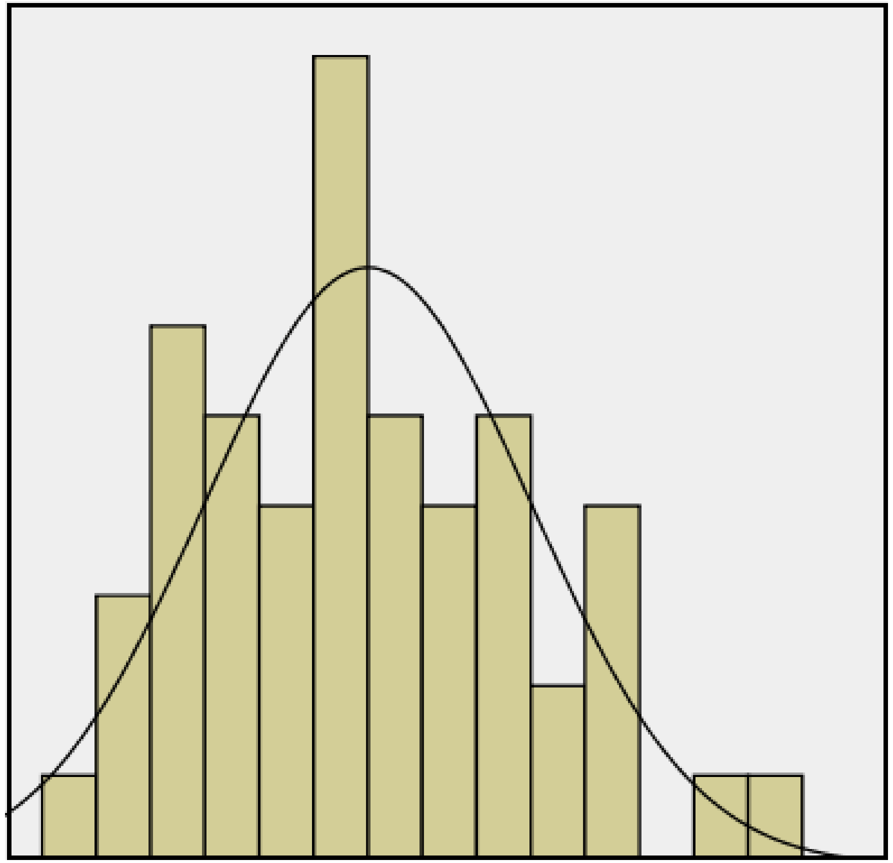
Onderwerp 1e keuze	Mannen	Vrouwen	Totaal
Gezonde overheidsfinanciën	**154**	**96**	250
Gezondheidszorg	38	84	122
Onderwijs	100	106	206
Veiligheid	128	154	282
Totaal	420	440	860

Expected	Mannen	Vrouwen	Totaal
Gezonde financiën	122,1	127,9	250
Gezondheidszorg	59,6	62,7	122
Onderwijs	100,6	105,4	206
Veiligheid	137,7	144,3	282
Totaal	420	440	860

χ^2-toets Aanpassingstoetsen

We hebben gezien dat de **χ^2-toets** kan worden gebruikt voor homogeniteitsproblemen. Daar gaat het om het toetsen of twee (of meer) variabelen afhankelijk van elkaar zijn of niet.

Een andere belangrijke toepassing is in **aanpassingsvraagstukken**. De vraag is dan of een gemeten frequentieverdeling genoeg lijkt op een bepaalde theoretische verdeling.
Je kunt zo bijvoorbeeld bepalen of een frequentieverdeling zich voldoende gedraagt als een normale verdeling, een Poissonverdeling, of als een uniforme verdeling (zijn de waarden als ongeveer constant op te vatten?)



χ^2-toets. Aanpassingstoetsen Voorbeeld 1

Met een speelgoeddobbelsteen wordt 99 keer gegooid, de waargenomen frequenties staan in de eerste tabel. We toetsen

H_0: De dobbelsteen is zuiver.

H_1: De dobbelsteen is niet zuiver.

De verwachte frequentie is voor elk aantal ogen 99/6 = 16,5.
Dat is een discrete uniforme verdeling. De toetsingsgrootheid is

$$\underline{\chi}^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Observed	
1	11
2	27
3	14
4	16
5	17
6	14

Expected	
1	16,5
2	16,5
3	16,5
4	16,5
5	16,5
6	16,5

$$\underline{\chi}^2 = \frac{(11-16,5)^2}{16,5} + \frac{(28-16,5)^2}{16,5} + \frac{(14-16,5)^2}{16,5} + \frac{(16-16,5)^2}{16,5} + \frac{(17-16,5)^2}{16,5} + \frac{(14-16,5)^2}{16,5} = 9,3030$$

De toetsingsgrootheid voldoet aan de $\underline{\chi}^2$-verdeling, hiermee bepalen we of deze waarde groot of klein is.
We nemen een betrouwbaarheid van 95% en vinden de kritieke waarde door

$$P\left(\underline{\chi}^2 \geq g?\right) = \chi^2\text{cdf}(g?\ , 10^{10}, 6-1) = 0{,}05$$

op te lossen met de GR solver. Het aantal vrijheidsgraden is 6 – 1 = 5.
Dit levert $g = 11{,}0705$. Het kritieke gebied is (11,0705 , ∞). De berekende waarde ligt daar niet in, dus we kunnen H_0 niet verwerpen. De frequentie van 2 ogen lijkt een behoorlijke uitschieter, maar de steekproef is niet groot genoeg om met deze toets en 95% betrouwbaarheid een significante afwijking te concluderen .

χ^2-toets. Voorbeeld 1

Een eenvoudigere manier (als er geen kritiek gebied wordt gevraagd!) is om de p-waarde te berekenen:

$$p = P\left(\underline{\chi}^2 \geq 9{,}3030 \mid H_0\right) = \chi^2\text{cdf}(9{,}3030\,, 10^{10}, 6-1) = 0{,}0976.$$

Deze waarde is niet kleiner dan de gekozen onbetrouwbaarheid van $\alpha = 0{,}05$, dus we kunnen H_0 inderdaad niet verwerpen.

Andere toets: We kunnen ook op de manier van het vorige hoofdstuk toetsen of de dobbelsteen te vaak een 2 oplevert. We zien dat erg vaak een twee wordt gegooid, dus we toetsen

H_0: De kans op het gooien van een 2 is $\leq \frac{1}{6}$,

H_1: De kans op het gooien van een 2 is $> \frac{1}{6}$.

Het aantal keer dat je 2 ogen gooit in 99 worpen wordt beschreven door een binomiale verdeling met succeskans 1/6. De p-waarde is dus

$$p = P(\underline{k} \geq 27) = 1 - P(\underline{k} \leq \mathbf{26}) = 1 - \text{binomcdf}\left(99\,, \frac{1}{6}\,, 26\right) = 0{,}0054.$$

Deze waarde is kleiner dan $\alpha = 0{,}05$, dus in dit geval kunnen we H_0 **wel** verwerpen! Deze toets is wel sterk genoeg om (met 95% betrouwbaarheid) de dobbelsteen vals te noemen.

χ^2-toets. Voorbeeld 1

Derde manier. Je kunt ook kijken naar het **totaal aantal ogen** dat je hebt gegooid. Als je alle ogen uit de tabel optelt, dan krijg je 340 ogen uit de 99 worpen. Het gemiddeld aantal ogen dat je met een zuivere dobbelsteen gooit is 3,5, dus na 99 worpen is het totaal aantal ogen gemiddeld 99·3,5 = 346,5. We hebben dus minder ogen gegooid dan verwacht. Is dat zo weinig, dat de dobbelsteen wel vals moet zijn? We toetsen hiermee

H_0: De dobbelsteen is zuiver.
H_1: De dobbelsteen is niet zuiver.

Het aantal ogen dat je gooit is voor een zuivere dobbelsteen (aanname H_0) telkens een trekking uit een (discrete) uniforme verdeling met mogelijke waarden 1, 2, 3, 4, 5, 6, allemaal met kans 1/6. Hiervoor geldt:

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+(6-3{,}5)^2}{6} = \frac{35}{12}, \text{dus}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1{,}7078.$$

χ^2-toets. Aanpassingstoetsen

Uit de centrale limietstelling volgt nu dat de som van de ogen van 99 worpen zich gedraagt al een normale verdeling met $\mu = 99 \cdot 3{,}5 = 346{,}5$ en $\sigma = \sqrt{99} \cdot 1{,}7078 = 16{,}9926$.
De p-waarde is (gebruik continuïteitscorrectie: $\underline{k} \leq 340$ correspondeert met $\underline{x} \leq 340{,}5$)

$$p = P(\underline{k} \leq 340) = P(\underline{x} \leq 340{,}5) = \text{normalcdf}(10^{10}, 340.5\,, 346.5\,, 16.9926) = 0{,}3620.$$

Deze waarde is veel te groot om H_0 te kunnen verwerpen, dus deze toets is lang niet sterk genoeg om aan te tonen dat de dobbelsteen vals is.

We hebben nu drie verschillende toetsen gezien om met deze steekproef te toetsen of de dobbelsteen eerlijk is. Met twee toetsen lukt het niet om onzuiverheid aan te tonen, maar met één ervan wel. Er geldt geen democratie binnen de wiskunde, dus dat twee van de toetsen niet sterk genoeg zijn is jammer, maar de dobbelsteen is onzuiver (met 95% betrouwbaarheid) vanwege de toets die wel sterk genoeg is.

Belangrijke conclusie over toetsen

We hebben nu drie verschillende toetsen gezien om met een steekproef te toetsen of een bepaalde dobbelsteen eerlijk is. Met twee toetsen lukt het niet om onzuiverheid aan te tonen, maar met één ervan wel. De conclusie is dan dat de dobbelsteen is onzuiver (met 95% betrouwbaarheid).

Je ziet hieruit meteen dat als een toets H_0 niet kan verwerpen, H_0 niet automatisch waar hoeft te zijn.
Het betekent alleen dat het met deze steekproef en deze toets niet lukt om H_0 te ontkrachten. Dat maakt het wel aannemelijker dat H_0 waar is dan vóór het uitvoeren van de toets, maar niet persé zeker.

Vergelijk het militaire analogon: Je staat voor een heideveld en H_0 is dat er zich geen vijand in het heideveld bevindt. Je gaat dit toetsen door met je verrekijker het heideveld af te speuren, maar je ziet geen vijand. Kun je nu concluderen dat er geen vijand is (H_0)?

Je doet een stap naar rechts en je speurt weer het heideveld af, maar vanuit je nieuwe positie zie je ineens aan de zijkant van een struik een stuk van een rode helm (de vijand!).

Je conclusie hangt dus af van hoe goed je methode is (hoe sterk je toets is).

χ^2-toets. Voorbeeld 10.7

Om te toetsen of het gewicht van pruimen uit een bepaalde boomgaard zich gedraagt volgens een normale verdeling zijn 80 willekeurige pruimen gewogen. Hiervan is het gemiddelde gewicht bepaald: 72 gram, en ook een schatting van de standaarddeviatie: 25 gram.
Er is een verdeling in klassen gekozen, en daarbij geldt de tabel van hiernaast.

TABEL 10.11 Gewicht van 80 pruimen

Gewicht	Waargenomen frequentie	Kans volgens normale tabel	Theoretische frequentie (kans ×80)	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
Minder dan 40	16	0,1003	8,0	8,0
40 - < 50	5	0,0891	7,2	0,67
50 - < 60	6	0,1262	10,1	1,66
60 - < 70	4	0,1525	12,2	5,51
70 - < 80	10	0,1574	12,6	0,54
80 - < 90	14	0,1387	11,1	0,76
90 - < 100	10	0,1044	8,3	0,35
100 en meer	15	0,1314	10,5	1,93
Totaal	80	1	80	19,42

Toets met 95% betrouwbaarheid of deze verdeling zich als een normale verdeling gedraagt.

Bv. Kans volgens de normale verdeling: P(40 - < 50) = $\text{normalcdf}(40\,, 50\,, 72\,, 25) = 0{,}089157 = 0{,}08916.$
Theoretische frequentie (expected): $E_2 = 0{,}8916 * 80 = 7{,}13$, dus $\frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} = \frac{(5 - 7{,}13)^2}{7{,}13} = 0{,}64.$
P.S. Hier is geen continuïteitscorrectie nodig omdat gewicht een continue grootheid is).

χ^2-toets. Voorbeeld 10.7

Eigenlijk moet je voor het toetsen de t-verdeling gebruiken omdat σ is geschat, maar de steekproefgrootte is minstens 30 dus kun je toch de normale verdeling gebruiken.

TABEL 10.11 Gewicht van 80 pruimen

Gewicht	Waargenomen frequentie	Kans volgens normale tabel	Theoretische frequentie (kans ×80)	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
Minder dan 40	16	0,1003	8,0	8,0
40 - < 50	5	0,0891	7,2	0,67
50 - < 60	6	0,1262	10,1	1,66
60 - < 70	4	0,1525	12,2	5,51
70 - < 80	10	0,1574	12,6	0,54
80 - < 90	14	0,1387	11,1	0,76
90 - < 100	10	0,1044	8,3	0,35
100 en meer	15	0,1314	10,5	1,93
Totaal	80	1	80	19,42

We gaan toetsen:

H_0: de gegevens zijn normaal verdeeld.

H_1: de gegevens zijn niet normaal verdeeld.

We toetsen met de χ^2-toets. De toetsgrootheid heeft als waarde (reken uit) χ^2 = 19,42.
Het aantal vrijheidsgraden is 8 (klassen) – 3 (parameters μ, σ en n zijn bekend) = 5.
De kritieke waarde g bij $\alpha = 0{,}05$ vind je door op te lossen $\chi^2\text{cdf}(g?\ , 10^{10}, 5) = 0{,}05$.
Dit levert $g = 11{,}0705$ met kritiek gebied $\chi^2 > 11{,}0705$. De berekende χ^2 = 19,42 ligt hierin, dus H_0 wordt verworpen en de verdeling kan niet als een normale verdeling worden beschouwd.
Alternatief: Je kunt ook de p-waarde uitrekenen: $p = \chi^2\text{cdf}(19.42\ , 10^{10}, 5) = 0{,}001604$ is kleiner dan $\alpha = 0{,}05$, dus H_0 verwerpen.

χ^2-toets Kleine frequenties.

LET OP: De toetsingsgrootheid wordt beschreven door een χ^2-verdeling met een geschikt aantal vrijheidsgraden, maar dat is slechts bij benadering. **De verwachte frequenties moeten minstens 5 zijn.** Als dat niet zo is geeft χ^2 mogelijk onbetrouwbare antwoorden.

Dit probleem kun je vaak oplossen door naburige klassen samen te voegen.

Maar door samenvoegen wordt de conclusie wel gebaseerd op een aangepaste tabel.

Een ander manier om het probleem van kleine frequenties op te lossen is door **Fisher's exacte toets** te gebruiken. Dat is een reken-intensievere toets die exact is en dus geen beperkingen kent wat betreft groottes van frequenties. Deze toets wordt verder niet behandeld.

Voorbeeld Opgave 10.13 (met aangepaste waarden)

Branden per week	Frequentie
0	39
1	25
2	15
3	8
≥ 4	4
Totaal:	91

Het aantal brandmeldingen per week in een bepaalde stad is gedurende 91 weken geregistreerd (zie Tabel 1 rechts).
Toets of het aantal branden per week een Poissonverdeling volgt. Kies als betrouwbaarheid 98%.

Een Poissonverdeling beschrijft verschijnselen die niet vaak, maar wel geregeld en onafhankelijk van elkaar optreden per vaste periode. Dat geldt waarschijnlijk/meestal wel voor branden, als er geen pyromanen actief zijn of seizoenseffecten zijn (bos-, schoorsteen- en barbecue-branden).
Het aantal branden in 100 weken is 0x39 + 1x25 + 2x15 + 3x8 + 4x4 = 95, dus gemiddeld $\mu = \frac{95}{91} = 1{,}044$ per week (hiervoor hebben we aangenomen dan het aantal branden per week maximaal 4 is). We berekenen eerst de frequenties zoals ze uit de Poissonverdeling met deze μ zouden volgen:

$P(\underline{k} = 0) = \text{poissonpdf}(1.044\,, 0) = 0{,}4025, \quad E_0 = 0{,}3520 \cdot 91 = 33{,}03$

$P(\underline{k} = 1) = \text{poissonpdf}(1.044\,, 1) = 0{,}3675, \quad E_1 = 0{,}3675 \cdot 91 = 33{,}44$

$P(\underline{k} = 2) = \text{poissonpdf}(1.044\,, 2) = 0{,}1919, \quad E_2 = 0{,}1919 \cdot 91 = 17{,}46$

$P(\underline{k} = 3) = \text{poissonpdf}(1.044\,, 3) = 0{,}0506, \quad E_3 = 0{,}0668 \cdot 91 = 6{,}08$

$P(\underline{k} \geq 4) = 1 - \text{poisson}\mathbf{cdf}(1.044\,, \mathbf{3}) = 0{,}022, \quad E_4 = 0{,}022 \cdot 91 = 1{,}98$

Branden /week	Freq. Observed	Freq. Expected
0	39	32,03
1	25	33,44
2	15	17,46
3	8	6,08
≥ 4	4	1,98
Totaal:	91	91

Branden /week	Freq. Observed	Freq. Expected
0	39	32,03
1	25	33,44
2	15	17,46
≥ 3	12	8,06
Totaal:	91	91

De verwachte frequenties E_4 zijn te klein voor toepassing van χ^2 (want < 5), dus nemen we de laatste twee categorieën samen (zie Tabel hiernaast).

Kijken of E_i en O_i voldoende op elkaar lijken doen we met een χ^2 aanpassingstoets. De toetsgrootheid is

$$\chi^2 = \sum_{i=0,1,2,3} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 1{,}5167 + 2{,}1302 + 0{,}3466 + 1{,}9260 = 5{,}9195.$$

We toetsen hiermee:

H_0: De waargenomen frequenties kunnen worden verklaard met een Poissonverdeling met $\mu = 1{,}044$.
H_1: De waargenomen frequenties kunnen niet zo worden verklaard.

Dat kan het snelst door de p-waarde uit te rekenen (met $(4-1)(2-1) = 3$ vrijheidsgraden):

$$p = P\left(\underline{\chi}^2 > 5{,}9195\right) = \chi^2\text{cdf}(5.9195\,, 10^{10}\,, 3) = 0{,}1156.$$

Dit is niet kleiner dan $\alpha = 0{,}02$, dus H_0 kan met deze toets niet worden verworpen. Dat betekent dat de tabel waarschijnlijk wel goed kan worden verklaard met de Poissonverdeling met $\mu = 1{,}044$, maar preciezer geformuleerd lukt het niet om met deze toets en een betrouwbaarheid van 98% te ontkrachten dat de waargenomen frequenties met deze Poissonverdeling kunnen worden verklaard.

Je kunt ook met een kritiek gebied en grenswaarde werken, dan moet je met de GR oplossen:

$$\chi^2\mathrm{cdf}(g?\ , 10^{10}\ , 3) = 0{,}02$$

Dat levert $g = 9{,}8374$. De waarde 3,0197 ligt niet in het kritieke gebied $Z = \left(\underline{\chi}^2 > 9{,}8374\right)$, dus H_0 wordt ook niet verworpen.

Het feit dat we twee rijen in de tabel hebben moeten samenvoegen maakt het er niet beter op. Samenvoegen maakt het resulaat van de toets sterker bij verwerpen, maar niet als je niet kunt verwerpen

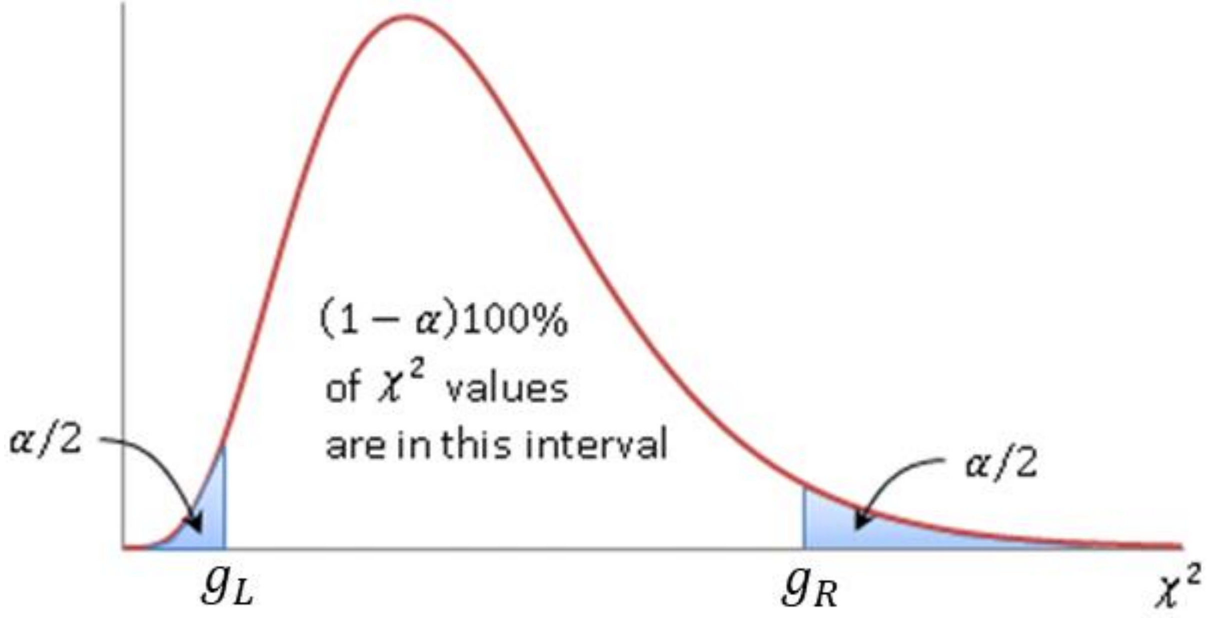
χ^2-toets: Betrouwbaarheidsinterval voor σ (boek H.10⁺).

We hebben eerder gezien hoe je voor de normale verdeling steekproefschatters $\bar{x}$ en s kunt geven voor μ en σ, en hoe je met deze waarden en de t-waarde van de t-verdeling een betrouwbaarheidsinterval kunt berekenen voor μ bij een steekproefgrootte van n waarden.
Voor σ kun je ook een betrouwbaarheidssinterval berekenen, maar nu gebaseerd op de χ^2-verdeling.
Bij een gekozen onbetrouwbaarheid α bepalen we met de χ^2-verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden een linker grenswaarde g_L waarvoor geldt $P(\chi^2 \leq g_L) = \frac{\alpha}{2}$ en een
rechter grenswaarde g_R waarvoor geldt $P(\chi^2 \geq g_R) = \frac{\alpha}{2}$, waardoor het gebied tussen g_L en g_R een onbetrouwbaarheid α. Het $(1-\alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor σ is dan

$$s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{g_R}} < \sigma < s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{g_L}}$$

Hierin is s de steekproefstandaarddeviatie

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$



χ^2-toets: Betrouwbaarheidsinterval voor σ (boek H.10+).

$$s\sqrt{\frac{n-1}{g_R}} < \sigma < s\sqrt{\frac{n-1}{g_L}}$$

Voorbeeld: Bij het pruimenvoorbeeld 10.7 hadden we $n = 80$, $\bar{x} = 72$ en $s = 25$. We kiezen $\alpha = 0{,}05$.
We lossen op $P(\chi^2 \leq g_L) = \chi^2\mathrm{cdf}(0\,, g_L?\,, 80-1) = \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ en vinden $g_L = 56{,}3089$.
We lossen op $P(\chi^2 \geq g_R) = \chi^2\mathrm{cdf}(g_R?\,, 10\hat{}10, 79) = \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ en vinden $g_R = 105{,}4728$.
Hiermee kunnen we met de formules het 95% betrouwbaarheidsinterval berekenen:

$$21{,}64 < \sigma < 29{,}61$$

Let op: de schatter $s = 25$ ligt niet precies midden in dit interval zoals wel geldt bij het interval voor μ.

Voor de volledigheid berekenen we ook het betrouwbaarheidsinterval voor μ: Omdat $n \geq 30$ hoeven we niet de t-verdeling te gebruiken, maar kunnen we met z-waarden werken. De z-waarde die hoort bij 95% betrouwbaarheid is $z = \mathrm{invNorm}(0.975) = 1{,}9600$, dus het 95% betrouwbaarheidsinterval is

$$\bar{x} - \frac{zs}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{zs}{\sqrt{n}},$$

ofwel:

$$66{,}52 < \mu < 77{,}48.$$

De t-waarde is trouwens $t = \mathrm{invT}(0.975\,, 80-1) = 1{,}9904$, dat zou geven: $66{,}44 < \mu < 77{,}56$.