

Oefenopgaven: verschiltoetsen

Dr. ir. D.A.M.P. Blom & Dr. J.B.M. Melissen

2025

Opdracht 1: Defensie onderzoekt de stressbestendigheid van vrouwelijke en mannelijke militairen in potentieel levensbedreigende situaties. Tijdens een realistische simulatie van een hinderlaag in vijandelijk gebied wordt de hartslag gemeten van negen vrouwelijke en negen mannelijke militairen. De gemiddelde hartslag tijdens het 10 minuten durende scenario wordt per militair vastgelegd.

De resultaten zijn als volgt:

Gemiddelde hartslag (vrouwen, A)	80	81	80	70	72	69	65	74	80
Gemiddelde hartslag (mannen, B)	80	74	73	72	78	75	70	74	69

Het hoofd van de medische dienst wil weten of mannelijke militairen in deze setting een hogere stressrespons vertonen dan hun mannelijke collega's. Voor beide populaties wordt aangenomen dat de gemiddelde hartslag normaal verdeeld is met onbekende verwachtingswaarden μ_A en μ_B , en standaardafwijkingen σ_A en σ_B .

- (a) Bereken de steekproefgemiddeldes \bar{x}_A en \bar{x}_B , en de steekproefvarianties s_A^2 en s_B^2 .

Uitwerking

Populatie A: vrouwelijke militairen. We berekenen het steekproefgemiddelde \bar{x}_A als volgt:

$$\bar{x}_A = \frac{80 + 81 + \dots + 80}{9} \approx 74.5556$$

We berekenen de steekproefvariantie s_A^2 als volgt:

$$s_A^2 = \frac{(80 - 74.5556)^2 + (81 - 74.5556)^2 + \dots + (80 - 74.5556)^2}{9 - 1} \approx 35.0278$$

Populatie B: mannelijke militairen.

We berekenen het steekproefgemiddelde \bar{x}_B als volgt:

$$\bar{x}_B = \frac{80 + 74 + \dots + 69}{9} \approx 73.8889$$

We berekenen de steekproefvariantie s_B^2 als volgt:

$$s_B^2 = \frac{(80 - 73.8889)^2 + (74 - 73.8889)^2 + \dots + (69 - 73.8889)^2}{9 - 1} \approx 12.3611$$

- (b) Bepaal met behulp van een F -toets of de varianties in de gemiddelde hartslag gelijk zijn voor de populaties van vrouwelijke en mannelijke militairen. Gebruik de p -waarde in je conclusie. Kies voor het significantieniveau $\alpha = 0,05$.

Uitwerking

We noteren de populaties vrouwelijke en mannelijke militairen respectievelijk met A en B . In de vraag staat dat we aan mogen nemen dat $X_A \sim N(\mu_A = ?; \sigma_A = ?)$ en $X_B \sim N(\mu_B = ?; \sigma_B = ?)$.

We toetsen op gelijke varianties, oftewel de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 worden als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}H_0 : \quad & \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\H_1 : \quad & \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2\end{aligned}$$

Verder is gegeven dat we mogen werken met een significantieniveau $\alpha = 0,05$, en data is al verzameld voor beide populaties. De toetsingsgrootte voor een F -toets is gelijk aan

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2},$$

en volgt een $F(n-1, m-1)$ -verdeling, oftewel een $F(8, 8)$ -verdeling.

De geobserveerde toetsingsgrootte is gelijk aan

$$f = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{35,0278}{12,3611} \approx 2,8337.$$

In dit geval is de p -waarde gelijk aan de rechteroverschrijdingskans van deze toetsingsgrootte f (deze is kleiner dan de linkeroverschrijdingskans):

$$p = P(F \geq f) = \text{Fcdf}(\text{lower} = 2,8337; \text{upper} = 10^{99}; \text{df1} = 9; \text{df2} = 9) \approx 0,081.$$

Aangezien de p -waarde groter is dan $\alpha/2 = 0,025$ (tweezijdige toets!), wordt de nulhypothese H_0 aangenomen. Er is onvoldoende bewijs om op basis van deze steekproef de aanname van gelijke varianties te verwerpen. We mogen dus uitgaan van gelijke varianties.

- (c) Bepaal met behulp van een onafhankelijke t -toets of de gemiddelde hartslag in stress-situaties bij mannelijke militairen significant hoger ligt dan bij vrouwelijke militairen. Baseer je conclusie op het kritieke gebied. Kies opnieuw voor het significantieniveau $\alpha = 0,05$.

Uitwerking

We toetsen of de gemiddelde hartslag μ_B voor mannelijke militairen significant hoger is dan de gemiddelde hartslag μ_A voor vrouwelijke militairen. De hypothesen kunnen we daarom als volgt definiëren:

$$\begin{aligned}H_0 : \quad & \mu_A \geq \mu_B \text{ (niet significant hoger)} \\H_1 : \quad & \mu_A < \mu_B \text{ (wel significant hoger)}\end{aligned}$$

Verder is gegeven dat we mogen werken met een significantieniveau $\alpha = 0,05$, en data is al verzameld voor beide populaties.

Op basis van ons antwoord bij vraag (b) mogen we aannemen dat $\sigma = \sigma_A = \sigma_B$. Dat betekent dat we met de pooled variance mogen werken als schatting voor de gemeenschappelijke onbekende σ .

$$s_P^2 = \frac{(n-1) \cdot s_A^2 + (m-1) \cdot s_B^2}{n-1+m-1} = \frac{9 \cdot 0,0778 + 9 \cdot 0,0529}{18} \approx 0,0653.$$

De toetsingsgrootheid van de bijbehorende t -toets is gelijk aan

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{s_P^2}{n} + \frac{s_P^2}{m}}} \approx -5,4239,$$

en komt uit een t -verdeling met $df = 18$ vrijheidsgraden. Omdat we linkszijdig toetsen, is het kritieke gebied van de vorm $(-\infty; g]$. Deze kritieke grens kunnen we met de t -verdeling bepalen, namelijk

$$g = \text{InvT}(\text{opp} = \alpha; \text{df} = n + m - 2) = \text{InvT}(\text{opp} = 0,05; \text{df} = 18) \approx -1,7341$$

De toetsingsgrootheid t ligt in het kritieke gebied, dus H_0 moet worden verworpen. Er is op basis van deze steekproeven voldoende reden om aan te nemen dat de maximale G-belasting van F-35 vliegtuigen significant hoger is dan die van F-16 vliegtuigen.