De Poissonverdeling

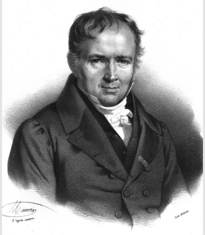
Faculteit Militaire Wetenschappen

dr. ir. Danny Blom

15 april 2024

“Het leven is goed voor maar twee dingen: wiskunde leren en wiskunde onderwijzen.”

“Het leven is goed voor maar twee dingen: wiskunde leren en wiskunde onderwijzen.”



Siméon Poisson (1781 - 1840)

Inhoud

Inhoud

De Poissonverdeling

- tellen van “events” in een gegeven interval (tijd / ruimte)
- volgens gemiddelde regelmaat, onafhankelijk van elkaar

Bijv. het aantal

- raketaanvallen in een oorlog op een dag
- storingen aan militair materieel in een jaar
- onontplofte explosieven op een km^2

De Poissonverdeling

Een toevalsvariabele X is *Poisson verdeeld* met parameter μ als voor alle $k = 0, 1, 2, \ldots$ geldt dat

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!},$$

waarbij

- $\mu = \lambda t$: verwacht aantal “events” (in een gegeven interval van t meeteenheden),
- $e \approx 2.718...$: grondtal van de natuurlijke logaritme, en
- $k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$.

Notatie: $X \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$

De Poissonverdeling: voorbeeld

Een team van de Explosieve Opruimingsdienst Defensie (EOD) werkt in een uitzendgebied aan het ruimen van zogenaamde “improvised explosive devices” (IED’s). Het gemiddeld aantal IED’s per hectare wordt geschat op 0.5.

Het team scant een gebied van 5 hectare, wat is de kans dat minstens 2 IED’s worden gedetecteerd?

De Poissonverdeling: voorbeeld

Uit het voorbeeld blijkt dat

- $\mu = \lambda t = 0.5 \cdot 5 = 2.5$ (5 hectares à 0.5 IED's per hectare)
- $k = 2$

Stel X is de toevalsvariabele die het aantal gedetecteerde IED's telt.

Er volgt dat $X \sim \mathrm{Poisson}(\mu) = \mathrm{Poisson}(2.5)$, dus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) \\ &= 1 - (e^{-2.5} \cdot \frac{(2.5)^0}{0!} + e^{-2.5} \cdot \frac{(2.5)^1}{1!}) \\ &\approx 0.713.\end{aligned}$$

Inhoud

Connectie met andere kansverdelingen

Binomiale verdeling

- n: aantal experimenten
- p: succeskans

De toevalsvariabele Y is *binomiaal verdeeld* met parameters n en p als voor alle $k = 0, 1, \ldots, n$ geldt dat:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \left(\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\right) p^k (1-p)^{n-k}$$

Notatie: $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

Connectie met andere kansverdelingen

De Poissonverdeling met parameter μ is een goede benadering voor de binomiale verdeling met parameters n en $p = \frac{\mu}{n}$ als het aantal experimenten n groot genoeg is:

Voor alle $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\text{Als } n \to \infty : \qquad \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \approx e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$$

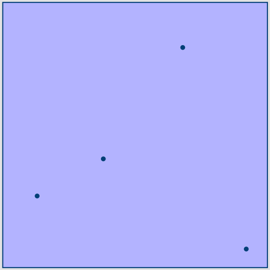
Zie Python simulatie!

Connectie met andere kansverdelingen

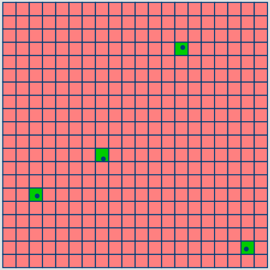
Stel we bekijken een hectare van het conflictgebied en delen het op in veel kleine gebiedjes (bv. 1 meter bij 1 meter).

- Experiment: inspecteer een specifiek gebiedje
- “Succes”: er ligt een IED in het gebiedje

Poissonverdeling



$\approx$ Binomiale verdeling



Connectie met andere kansverdelingen

Exponentiële verdeling

Tot nu toe: “events” tellen in een gegeven interval.

Nu: afstand meten tot het volgende “event”.

- Hoe lang tot de volgende storing aan militair materieel?
- Hoeveel hectare moet worden gescand tot de volgende IED wordt gedetecteerd?

Connectie met andere kansverdelingen

Deze twee beweringen zijn equivalent:

1. De afstand T tot het volgende “event” is groter dan $t > 0$ meeteenheden
2. In de komende t meeteenheden worden geen “events” waargenomen.

In andere woorden:

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow$ T is *exponentieel* verdeeld met parameter λ

Connectie met andere kansverdelingen: voorbeeld

We bekijken opnieuw het voorbeeld van het EOD team. Naar schatting is het gemiddelde aantal IED's per hectare gelijk aan 0.5.

Wat is de kans dat het EOD team na het scannen van 3 hectare geen IED heeft gedetecteerd?

Connectie met andere kansverdelingen: voorbeeld

Uit het voorbeeld blijkt dat

- $\lambda = 0.5$ (gemiddeld aantal IED's per hectare)
- $t = 3$ (aantal meeteenheden (hectares))

Er volgt dat:

$$\mathbb{P}(T > 3) = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda t} = e^{-0.5 \cdot 3} \approx 0.223$$

Inhoud

De Poissonverdeling

Connectie met andere kansverdelingen

Samenvatting

Samenvatting

- **Poisson**: “events” tellen in een interval (tijd / ruimte)
- Binomiale verdeling met grote n en kleine p
- Exponentiële verdeling: afstand tot het volgende “event”
- Handige statistische tool voor o.a. militaire besluitvorming

Samenvatting

- **Poisson**: “events” tellen in een interval (tijd / ruimte)
- Binomiale verdeling met grote n en kleine p
- Exponentiële verdeling: afstand tot het volgende “event”
- Handige statistische tool voor o.a. militaire besluitvorming

Vragen?

Samenvatting

- **Poisson**: “events” tellen in een interval (tijd / ruimte)
- Binomiale verdeling met grote n en kleine p
- Exponentiële verdeling: afstand tot het volgende “event”
- Handige statistische tool voor o.a. militaire besluitvorming

Vragen?

Dank jullie wel!