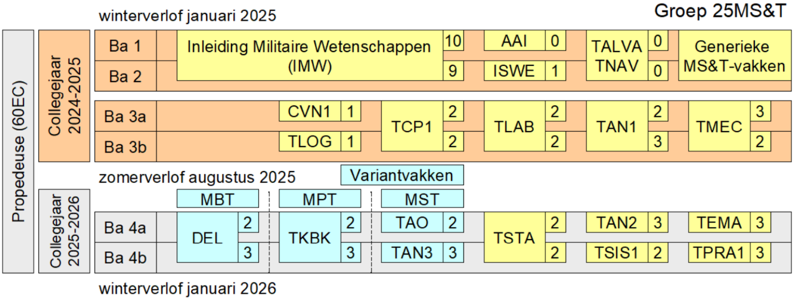
Overzicht TAN1 & Introductie

Dr. M. van Ee & Dr.ir. D.A.M.P. Blom

Analyse 1 (TAN1), collegejaar 2024-2025

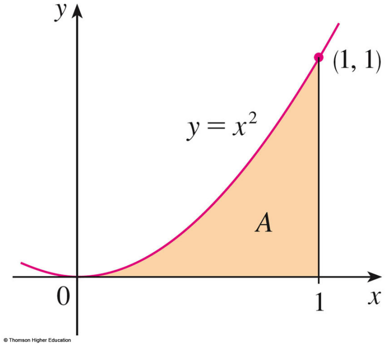
22/23 april 2025

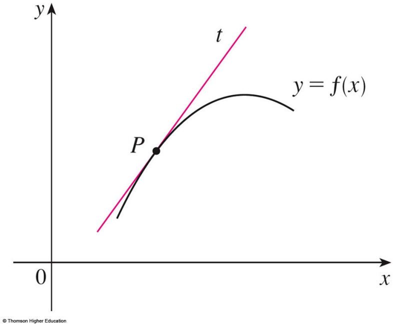
Wiskunde binnen MS&T



Figuur 3.10: Overzicht van de vakken in de propedeuse voor de drie varianten voor 25MS&T. Geel = generieke vakken, blauw = variant vakken. De vakken in het oranje vlak worden dit collegejaar gegeven.

Analyse (TAN1: 5 EC, TAN2: 3 EC, TAN3: 3 EC) is een tak van de wiskunde waarin functies van reële en complexe getallen worden bestudeerd. Het middelpunt van de analyse vormen de afgeleiden, integralen en limieten. “Analyse” wordt ook wel aangeduid met de Engelse term “Calculus” of met de term “differentiaal- en integraalrekening”.





Met het vak Analyse is reeds een begin gemaakt op het VWO en in TALVA. Het vak Analyse 1 richt zich op functies f waarvan het domein 1-dimensionaal is. Naast de introductie zijn dit de onderwerpen:

Analyse 1 deel 1: (DH: Van Ee, Br: Blom)

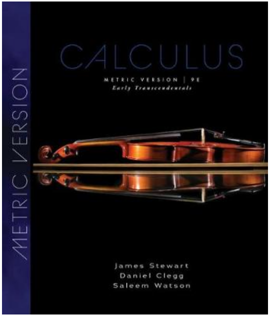
- Complexe getallen
- 2e orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten
- Integratietechnieken

Analyse 1 deel 2: (DH: Van Ee/Van Oers)

- Taylorreeksen
- Numerieke integratie
- Vectorfuncties en lijnintegralen

Leermiddelen

1. Calculus, Early Transcendentals (Metric Version 9th ed.) door James Stewart
2. Dictaat met aanvullende hoofdstukken
3. Handleiding Maple 16. Snel aan de slag met computeralgebra. Door M. Kamminga-van Hulsen



Maple is een computeralgebrapakket. Het bijzondere aan deze symbolische software is dat het programma bij het berekenen van bijvoorbeeld integralen op zoek gaat naar exacte primitieve functies. Andere software zou twee grenzen opvragen en dan via numerieke benadering een getal teruggeven.

Er is één Maple-opdracht die met een voldoende moet worden afgevinkt. Het eerste deel van de opdracht komt online op 28 april (voor het eerste practicum). Het tweede deel van de opdracht komt 12 mei online. De opdracht moet 30 mei worden ingeleverd. Details volgen.

Uitsluitend het gebruik van niet-grafische rekenmachines is toegestaan.

Bij het tentamen is er geen formuleblad aanwezig.

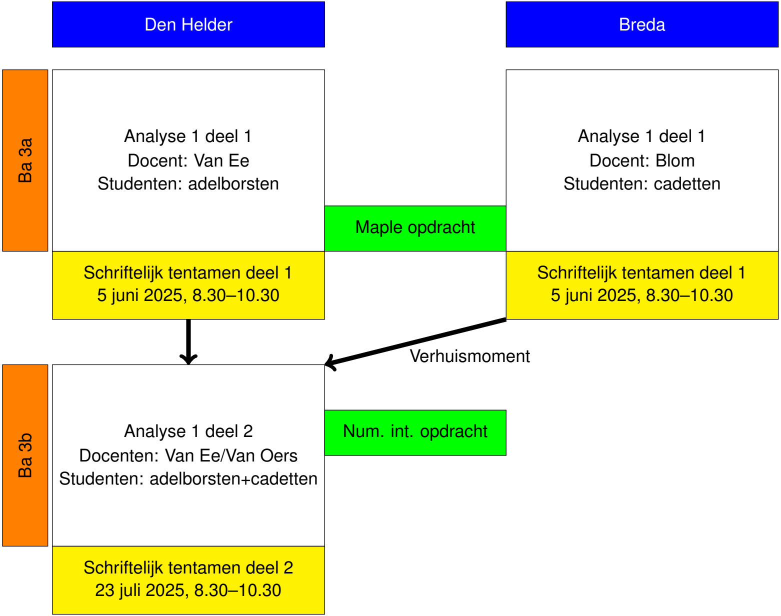
Alle informatie, inclusief rooster en oude tentamens, is te vinden op de ELO.

Toetsmomenten:

- Schriftelijk tentamen Analyse 1 deel 1 (50%)
- Schriftelijk tentamen Analyse 1 deel 2 (50%)
- Maple opdracht (o/v)
- Numeriek integreren opdracht (o/v)

De student haalt het vak als aan alle onderstaande eisen is voldaan:

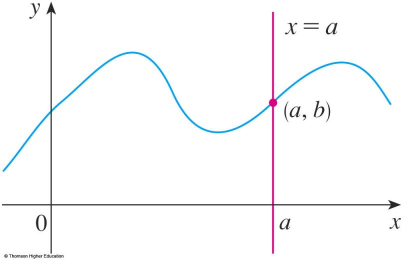
- Aantal punten gescoord op schriftelijk tentamen Analyse 1 deel 1 is minstens 50.
- Aantal punten gescoord op schriftelijk tentamen Analyse 1 deel 2 is minstens 50.
- Het gemiddelde van de twee tentamens is minstens 55 punten.
- De opdrachten zijn met een voldoende afgevinkt.

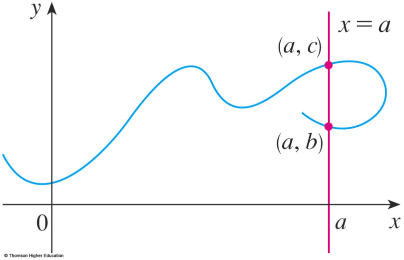

Den Helder
Breda
Ba 3a
Analyse 1 deel 1
Docent: Van Ee
Studenten: adelborsten
Maple opdracht
Analyse 1 deel 1
Docent: Blom
Studenten: cadetten
Schriftelijk tentamen deel 1
5 juni 2025, 8.30–10.30
Schriftelijk tentamen deel 1
5 juni 2025, 8.30–10.30
Verhuismoment
Ba 3b
Analyse 1 deel 2
Docenten: Van Ee/Van Oers
Studenten: adelborsten+cadetten
Num. int. opdracht
Schriftelijk tentamen deel 2
23 juli 2025, 8.30–10.30

Introductie:

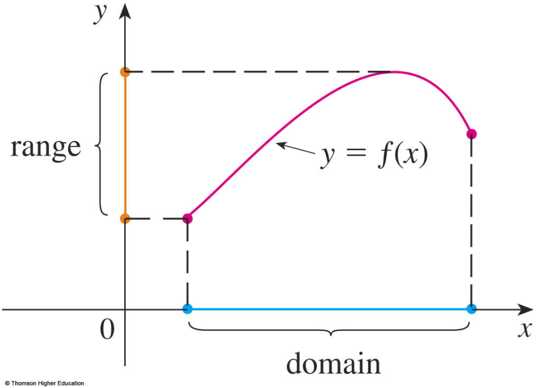
1. Functies en grafieken (Hoofdstuk 1 uit Stewart)
    - Wat is een functie?
    - Bijzondere functies
    - Het vormen van nieuwe functies uit bestaande functies
    - De inverse van een functie
2. Limieten (Hoofdstuk 2 en delen van Hoofdstuk 3 en 5 uit Stewart)
    - Wat is een limiet van een functie?
    - Linkerlimiet en rechterlimiet
    - Continuïteit
    - Limieten in oneindig
    - Differentiaal- en integraalrekening

Een functie is een relatie waarbij aan ieder origineel x precies één beeld y verbonden is.





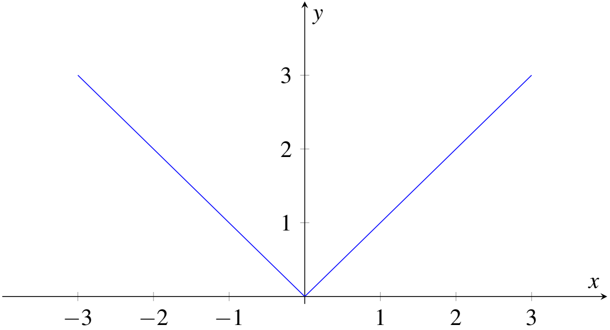
Functies hebben een **domein** en een **bereik.**



Wat is het domein en bereik van

$$f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \frac{1}{x} \text{ en } h(x) = \ln x?$$

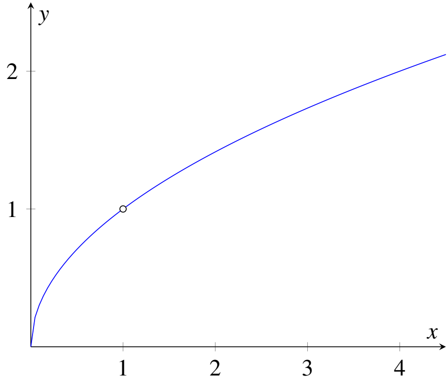
Een functie is niet altijd een “mooie” vloeiende kromme. Bijvoorbeeld: $f(x) = |x|$.



Deze functie kan m.b.v. een **gescheiden functievoorschrift** beschreven worden.

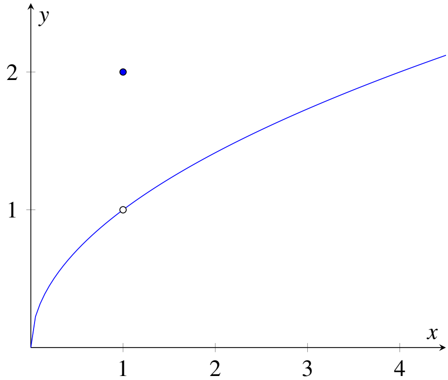
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Een functie kan **perforaties** hebben. Bijvoorbeeld $f(x) = \sqrt{x}$ met domein $[0, 1) \cup (1, \infty)$, oftewel alle niet-negatieve x ongelijk aan 1.



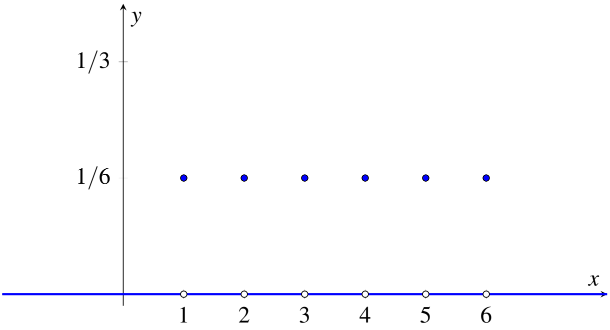
Een functie kan **perforaties** hebben. Bijvoorbeeld:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{als } x \geq 0 \wedge x \neq 1 \\ 2 & \text{als } x = 1 \end{cases}$$



Een functie hoeft niet gedefinieerd te zijn op een interval.

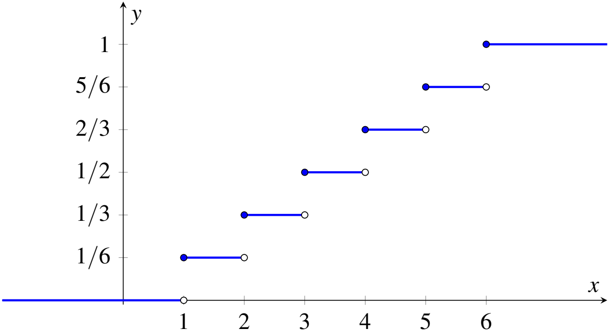
$$f(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{als } x \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$



Deze functie geeft de kans dat de uitkomst van het werpen van een dobbelsteen gelijk aan x ogen is.

Deze functie geeft de kans dat de uitkomst van het werpen van een dobbelsteen hoogstens x ogen is.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 1 \\ 1/6 & \text{als } 1 \leq x < 2 \\ 1/3 & \text{als } 2 \leq x < 3 \\ 1/2 & \text{als } 3 \leq x < 4 \\ 2/3 & \text{als } 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & \text{als } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{als } x \geq 6 \end{cases}$$



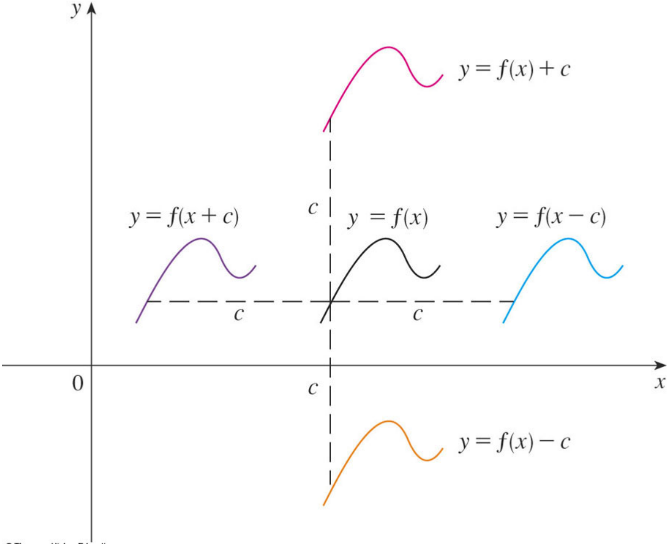
Er is een aantal elementaire functies:

- Polynomen
- Machtfuncties (incl. wortelfuncties/reciproke functies)
- Rationale functies
- Goniometrische functies
- Exponentiële functies
- Logaritmische functies

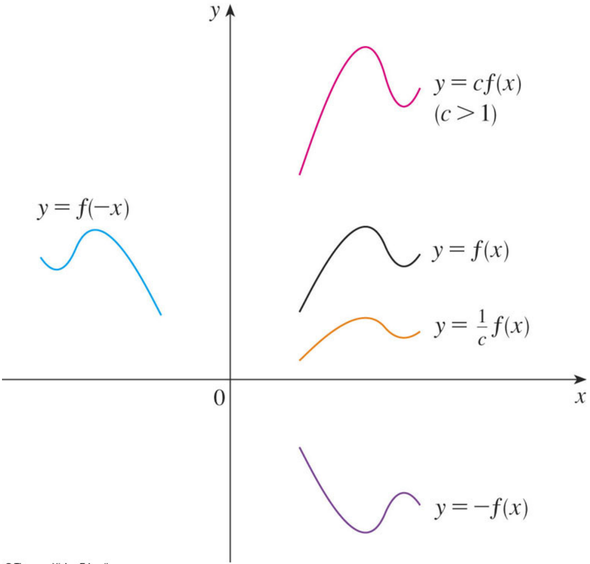
Je kunt nieuwe functies uit bestaande functies vormen. Wij bekijken:

- Transformaties
- Samenstellingen

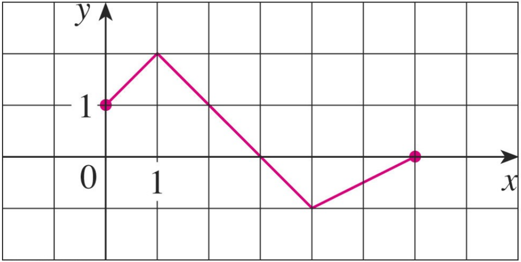
Transformaties van functies: verticale en horizontale verschuivingen/translaties



Transformaties van functies: verticaal en horizontaal samendrukken of uittrekken en spiegelen



Maak opgave 4, 5 en 31 op pagina 43.



Samenstellingen van functies

Uitgaande van de functies $f(x)$ en $g(x)$ kunnen de samengestelde functies $f \circ g$ (uitspraak f na g) en $g \circ f$ (uitspraak g na f) gevormd worden:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Bijvoorbeeld:

$$f(x) = x^2 \quad \text{en} \quad g(x) = x - 3$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

Opgave: laat $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{2-x}$. Bepaal

$$f \circ g,\ g \circ f,\ f \circ f \text{ en } g \circ g,$$

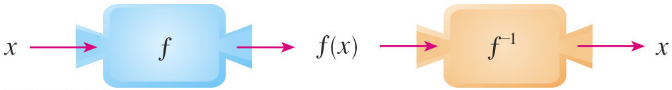
en het domein van deze functies.

Inverse van een functie f: notatie f^{-1}

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

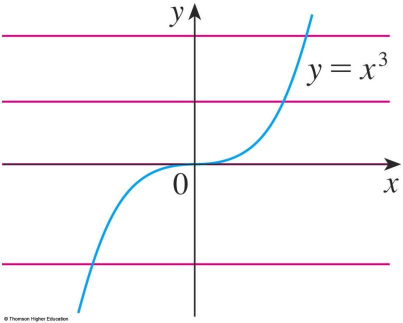
Er geldt:

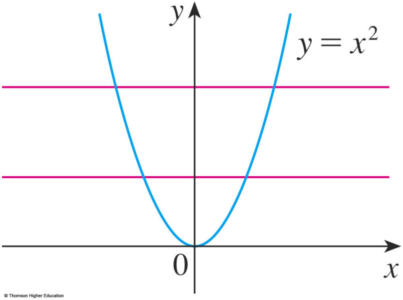
$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$



Een functie is inverteerbaar als het nooit tweemaal dezelfde waarde aanneemt, i.e.,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ voor alle } x_1 \neq x_2$$





Bepaling van f^{-1}

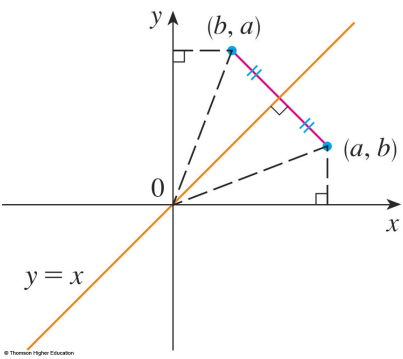
- Analytisch: verwissel x en y in het functievoorschrift $y = f(x)$ en herschrijf in de vorm $y = \ldots$

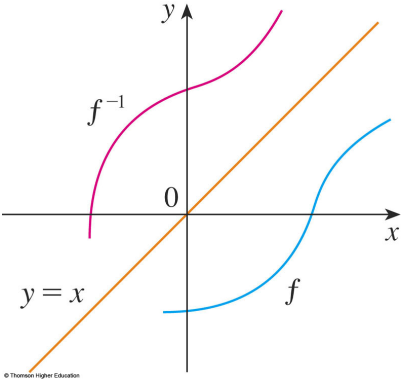
Voorbeeld: bepaal de inverse functie van $f(x) = x^3 + 2$

Bepaling van f^{-1}

- Analytisch: verwissel x en y in het functievoorschrift $y = f(x)$ en herschrijf in de vorm $y = \ldots$
- Grafisch: spiegel de grafiek van de functie f in de lijn $y = x$

Voorbeeld: bepaal de inverse functie van $f(x) = x^3 + 2$

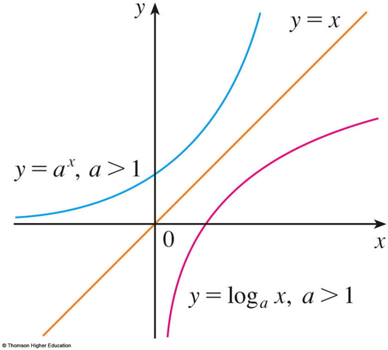




Bijzondere inverse functies

De inverse van de functie $f(x) = a^x$ is de functie $\log_a(x)$

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a(x)$$



In het bijzonder geldt voor $a = e$, dat

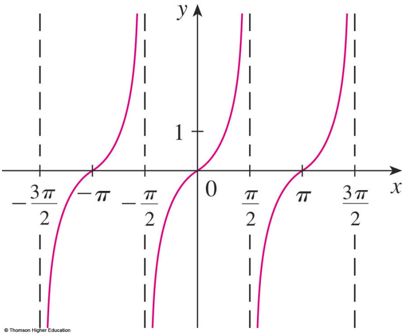
$$e^{\ln(x)} = x \quad x > 0$$

$$\ln(e^x) = x \quad x \in \mathbb{R}$$

Bijzondere inverse functies

De inverse van de functie $f(x) = \tan x$ is de functie $\arctan x$

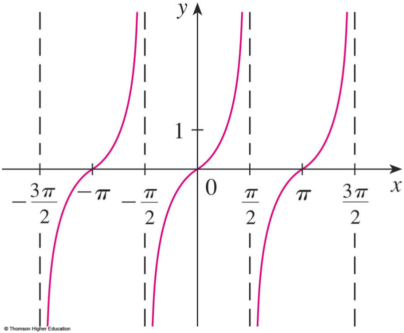
$$\tan y = x \Leftrightarrow y = \arctan x$$

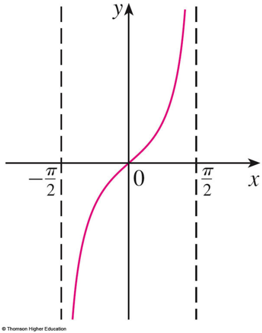


Bijzondere inverse functies

De inverse van de functie $f(x) = \tan x$ is de functie $\arctan x$

$$\tan y = x \Leftrightarrow y = \arctan x$$

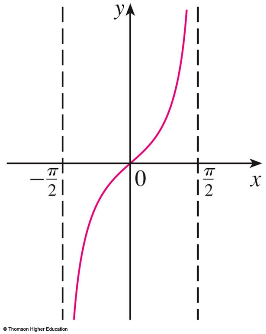




Bijzondere inverse functies

De inverse van de functie $f(x) = \tan x$ is de functie $\arctan x$

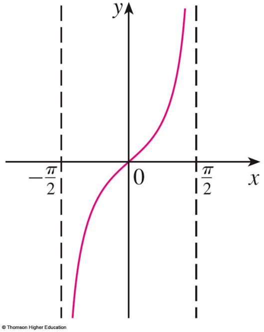
$$\tan y = x \Leftrightarrow y = \arctan x$$

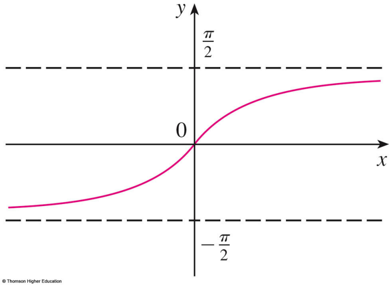


Bijzondere inverse functies

De inverse van de functie $f(x) = \tan x$ is de functie $\arctan x$

$$\tan y = x \Leftrightarrow y = \arctan x$$

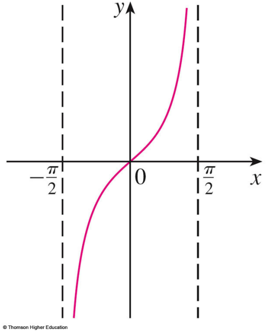


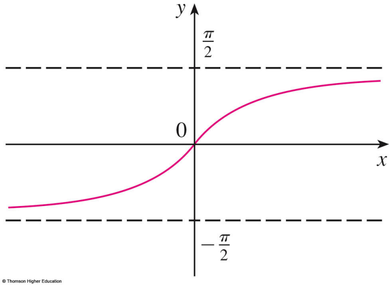


Bijzondere inverse functies

De inverse van de functie $f(x) = \tan x$ is de functie $\arctan x$

$$\tan y = x \Leftrightarrow y = \arctan x$$





N.B.: het bereik van $f(x) = \arctan x$ is $(-\pi/2, \pi/2)$.

Maak opgave 25, 26, 27, 45, 46, 57, 58, 59, 61 en 62 op pagina 65 en 66.