Ministerie van Defensie

Faculteit Militaire Wetenschappen

Gegevens student	
Naam:	
Peoplesoftnummer:	
Klas:	
Handtekening:	

Algemeen			
Vak:	Statistiek deel 1 (tweede kans)	**Vakcode:**	STA#1
Datum:	17 oktober 2025	**Tijdsduur:**	9:00-12:00
Examinator:	Dr. ir. D.A.M.P. Blom	**Aantal pagina's:**	4
Peer-review:	Dr. M.P. Roeling	**Aantal opgaven:**	4

Algemene instructies

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Indien u een deelopgave niet kunt oplossen en het antwoord in vervolgvragen nodig hebt, probeer uit te gaan van een redelijke fictieve waarde.
- Rond je antwoorden waar nodig af op vier decimalen.
- U mag een grafische rekenmachine gebruiken zonder CAS (Computer Algebra Systeem).
- Antwoorden, in welke vorm dan ook, mogen de zaal niet verlaten.
- Vermeld op elk antwoordvel je naam, Peoplesoft-nummer en maak een nummering van je antwoordvellen.
- Iedere vorm van mobiele (potentiële) datadragers (telefoon, smartwatch, etc.) of andere vormen om te frauderen (bv. communicatieapparatuur) zijn niet toegestaan gedurende de gehele duur van het tentamen en mogen ook niet in het lokaal meegebracht worden of zijn uitgeschakeld en ingeleverd.
- Schrijf leesbaar ter voorkoming van misverstanden bij de beoordeling van uw werk. Indien uw antwoord niet leesbaar is, wordt uw antwoord fout gerekend.
- Toiletbezoek tijdens het tentamen vindt enkel plaats na toestemming van de examinator.
- Lever bij het verlaten van de zaal, kladpapier, tentamenopgaven en andere tentamen-gerelateerde documenten in bij de examinator.

Cijferberekening / cesuur

- Het eindcijfer voor het vak Statistiek wordt voor 50% bepaald door dit tentamen.
- Het tentamen is opgebouwd uit 4 open vragen. Bij iedere (sub)vraag is het aantal te behalen punten tussen haakjes aangegeven. In totaal kunt u 100 punten verdienen.
- Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten te delen door 10. Het tentamencijfer moet minimaal een 5,0 zijn om de cursus Statistiek met succes af te ronden.

Procedure na het tentamen

- De cijfers van dit tentamenonderdeel worden in principe binnen 10 werkdagen na de afname bekend gemaakt.
- Met vragen over de beoordeling kunt u tot 10 werkdagen na bekendmaking van de cijfers terecht bij de cursuscoördinator.

Veel succes!

Formuleblad Statistiek (2024-2025)

Statistiek deel 1

Steekproefgemiddelde (gegeven een steekproef met n uitkomsten $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Steekproefvariantie en steekproefstandaardafwijking:

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Rekenregels kansrekening:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \qquad \text{(optelregel)}$$

$$P(B) = 1 - P(\text{niet } B) \qquad \text{(complementregel)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} \qquad \text{(conditionele kansen)}$$

Discrete en continue kansverdelingen:

	Discrete kansvariabelen	**Continue kansvariabelen**
Uitkomstenruimte:	Eindig / aftelbaar oneindig	Overaftelbaar oneindig
Toepassingen:	Tellen / categoriseren	Meten
Kansbegrip:	Kansfunctie $p(k) = P(X = k)$	Kansdichtheidsfunctie $f(x)$
CDF:	$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{\ell : \ell \leq k} p(\ell)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$
Verwachtingswaarde:	$E[X] = \sum_k k \cdot P(X = k)$	$E[X] = \int x \cdot f(x)\, dx$
Variantie:	$\text{Var}(X) = \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k)$	$\text{Var}(X) = \int (x - E[X])^2 \cdot f(x)\, dx$
Standaardafwijking:	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Speciale kansverdelingen:

- $X \sim \text{Binomiaal}(n, p)$: tellen van aantal successen bij onafhankelijke kansexperimenten met twee uitkomsten (Bernoulli-experimenten): succes / mislukking.

  Parameters: het aantal Bernoulli-experimenten n en de succeskans per experiment p.

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$: tellen van aantal "gebeurtenissen" in een "interval" van tijd / ruimte.

  Parameters: het gemiddelde aantal gebeurtenissen λ per meeteenheid (tijd / ruimte) en het aantal meeteenheden t.

  $\rightarrow$ *Voorbeeld: bij de meeteenheid van een dag bestaat een week uit $t = 7$ meeteenheden.*

- $T \sim \text{Exponentieel}(\lambda)$: meten van de tijd / ruimte tot de volgende gebeurtenis.

  Parameter: het gemiddelde aantal gebeurtenissen λ per meeteenheid (tijd / ruimte).

Verwachtingswaarde en variantie van veelgebruikte kansverdelingen:

Verdeling	Kans(dichtheids)functie	CDF	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Discreet				
Uniform(a,b)	$p(k) = \frac{1}{b-a+1}$ $(k = a, a+1, \ldots, b)$	$F(k) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{k-a+1}{b-a+1} & a \le k < b \\ 1 & k \ge b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomiaal(n,p)	$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	$F(k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ
Continuous				
Uniform(a,b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentieel(λ)	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Veelgebruikte functies op de grafische rekenmachine

Type vraag	TI-84 Plus	Casio
Continue kansverdeling (willekeurig)		
$P(a \le X \le b)$	$\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$
$X \sim$ **Binomiaal**(n,p)		
$P(X = k)$	binompdf(n,p,k)	BinomialPD(k,n,p)
$P(X \le k)$	binomcdf(n,p,k)	BinomialCD(k,n,p)
$X \sim N(\mu,\sigma)$		
$P(a \le X \le b)$	normalcdf(a,b,μ,σ)	NormalCD(a,b,σ,μ)
Grenswaarde g zodat $P(X \le g) = p$?	invNorm(p,μ,σ)	InvNormCD(tail=left, p,σ,μ)
$X \sim$ **Poisson**(λ)		
$P(X = k)$	poissonpdf(λ,k)	PoissonPD(k,λ)
$P(X \le k)$	poissoncdf(λ,k)	PoissonCD(k,λ)

z-score:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Centrale limietstelling: Gegeven n kansvariabelen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben met een verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ, dan geldt (bij benadering) dat

- de som $\sum X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde $n \cdot \mu$ en standaardafwijking $\sqrt{n} \cdot \sigma$.
- het gemiddelde $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Opgave 1 (25 punten) De dreiging van verstoringen van onze kritieke infrastructuur op zee is een reeël en urgent probleem. De Nederlandse defensie wil deze dreiging het hoofd bieden door het inzetten van patrouilleschepen om spionageschepen van vijandelijke mogendheden te detecteren op een populaire vaarroute in de Noordzee.

Uit historische data is de volgende kansfunctie op te maken voor het aantal te detecteren spionageschepen X per dag:

Aantal spionageschepen per dag

k	0	1	2	3	4	5	6
$f(k) = P(X = k)$	0.06	0.11	0.17	0.18	0.22	0.12	0.14

1a [4pt] Toon aan dat deze kansfunctie inderdaad goed gedefinieerd is, dat wil zeggen, dat aan de twee voorwaarden van een kansfunctie wordt voldaan.

Uitwerking

Een functie f kan dienen als een kansfunctie als geldt:

Voorwaarde 1: de functie f is niet-negatief voor alle waarden van k, oftewel

$$f(k) \geq 0.$$

Hier is voor alle mogelijke uitkomsten $k = 0, 1, \ldots, 6$ duidelijk aan voldaan. (2pt)

Voorwaarde 2: de som van kansen over de uitkomstenruimte is gelijk aan 1, oftewel

$$\sum_k f(k) = 1$$

Voor de tweede voorwaarde moeten we dus checken of de kansen op de uitkomsten $k = 0, 1, \ldots, 6$ sommeren tot 1. De som van kansen is gelijk aan

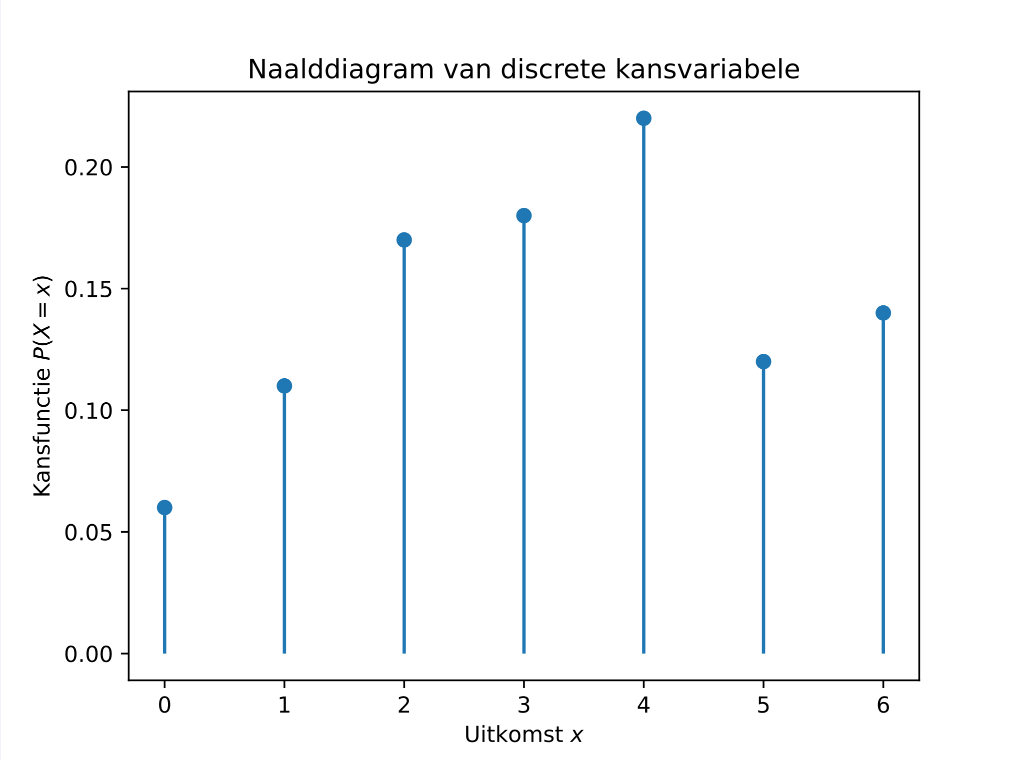
$$\sum_k f(k) = 0.06 + 0.11 + 0.17 + 0.18 + 0.22 + 0.12 + 0.14 = 1$$

Er is dus ook aan de tweede voorwaarde voldaan. Dit betekent dat de kansfunctie zoals beschreven in de tabel inderdaad goed gedefinieerd is. (2pt)

1b [4pt] Teken het naalddiagram van deze discrete kansfunctie.

Uitwerking

Het naalddiagram dat hoort bij deze kansfunctie ziet er als volgt uit:



(4pt)

1c [7pt] Bereken de verwachtingswaarde $E[X]$ en de standaardafwijking $\sigma(X)$ van het aantal spionageschepen per dag.

Uitwerking

De verwachtingswaarde $E[X]$ berekenen we door middel van

$$\begin{aligned} E[X] = \sum_k \cdot f(k) = \sum_{k=0}^{6} k \cdot f(k) \\ &= 0 \cdot 0.06 + 1 \cdot 0.11 + \ldots + 6 \cdot 0.14 \\ &= 3.31 \end{aligned}$$

(2pt)

De standaardafwijking $\sigma(X)$ berekenen we door eerst de variantie $\text{Var}(X)$ te bepalen, en van het resultaat de wortel te nemen:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) = \sum_k (k - E[X])^2 \cdot f(k) = \sum_{k=0}^{6} (k - 3.31)^2 \cdot f(k) \\ &= (0 - 3.31)^2 \cdot 0.06 + \ldots + (6 - 3.31)^2 \cdot 0.14 \\ &\approx 3.0139.\end{aligned}$$ (3pt)

$$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{3.0139} \approx 1.7361.$$ (2pt)

1d [3pt] Bereken de kans dat er op een willekeurige dag minstens 4 spionageschepen worden gedetecteerd.

Uitwerking

Om de kans te berekenen dat er op een willekeurige dag minstens 4 spionageschepen worden gedetecteerd, moeten we de kansen op tellen van uitkomsten groter dan of gelijk aan 4. Dit betekent dus: (1pt)

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0.22 + 0.14 + 0.12 = 0.48.$$ (1pt)

Met kans 0.48 worden minstens 4 spionageschepen gedetecteerd. (1pt)

1e [7pt] Het probleem met spionageschepen is dat we aan het begin van de dag niet weten hoeveel spionageschepen er die dag zullen passeren. Voor ieder spionageschip geldt dat er minstens één patrouilleschip nodig is om het terug te begeleiden naar internationale wateren, maar het inzetten van een patrouilleschip is duur. Er wordt besloten om het aantal patrouilleschepen Y per dag in te zetten volgens een binomiale verdeling met $n = 8$ en $p = 0.5$. Met hoeveel procent kans zijn er op een willekeurige dag voldoende patrouilleschepen aanwezig om alle spionageschepen die dag te kunnen detecteren en terug te begeleiden?

Uitwerking

Merk op dat er zodra er k spionageschepen aanwezig zijn, dan kan ieder spionageschip terugbegeleid worden als er minstens k patrouilleschepen zijn ingezet. Dit (1pt) betekent dat in het geval van k spionageschepen, de kans dat alle schepen kunnen

worden terugbegeleid gelijk is aan $P(Y \geq k)$.
Gegeven is dat Y binomiaal verdeeld is met $n = 8$ en $p = 0.5$. In andere woorden, deze kansen kunnen worden berekend met

$$P(Y \geq 0) = 1$$
$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - \text{binomcdf}(n = 8, p = 0.5, k = 0) \approx 0.9961$$
$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - \text{binomcdf}(n = 8, p = 0.5, k = 1) \approx 0.9648$$
$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \text{binomcdf}(n = 8, p = 0.5, k = 2) \approx 0.8555$$
$$P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - \text{binomcdf}(n = 8, p = 0.5, k = 3) \approx 0.6367$$
$$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - \text{binomcdf}(n = 8, p = 0.5, k = 4) \approx 0.3633$$
$$P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - \text{binomcdf}(n = 8, p = 0.5, k = 5) \approx 0.1445$$

(3pt)

Om nu de totale kans te berekenen dat er op een willekeurige dag voldoende patrouilleschepen zijn om alle spionageschepen die dag te kunnen detecteren en terug te begeleiden, moeten we ieder van deze uitkomsten vermenigvuldigen met de kans op dat betreffende aantal spionageschepen:

$$P(X = 0) \cdot P(Y \geq 0) + P(X = 1) \cdot P(Y \geq 1) + \ldots + P(X = 6) \cdot P(Y \geq 6)$$
$$= 0.06 \cdot 1 + 0.11 \cdot 0.9961 + \ldots + 0.14 \cdot 0.1445$$
$$= 0.6915$$

(2pt)

Met ruim 69 procent kans zijn er voldoende patrouilleschepen aanwezig om alle spionageschepen terug te begeleiden naar internationale wateren. (1pt)

Opgave 2 (25 punten) Binnenkort starten enkele nieuwe pelotons reservisten aan hun Algemene Militaire Opleiding. Voordat ze beginnen, moeten ze zich melden bij het KPU-bedrijf in Soesterberg om hun nieuwe gevechtstenues aan te vragen. Hierbij wordt aangenomen dat het aantal aanvragen X per dag van reservisten voor een gevechtstenue een Poissonverdeling volgt met parameter $\lambda = 4.2$.

2a [5pt] Bereken de kans dat er in een willekeurige week precies 30 reservisten een aanvraag doen voor een nieuw gevechtstenue.

Uitwerking

Laat X het aantal aanvragen voor een nieuw gevechtstenue in een periode van een week. De tijdseenheid is in dagen, dus $t = 7$ en $\lambda = 4.2$, oftewel $\mu = \lambda \cdot t = 29.4$. (2pt)

Er geldt dus dat X Poisson verdeeld is met parameter $\mu = 29.4$.

De kans dat er in die zeven dagen precies 30 aanvragen worden geplaatst is dus gelijk aan

$$P(X = 30) = \text{poissonpdf}(\mu = 29.4; k = 30) \approx 0.0722. \quad (2\text{pt})$$

2b [3pt] De huidige productie ligt op 5 nieuwe gevechtstenues per dag (er wordt in deze opgave vanuit gegaan dat er een speciale productie is alleen voor reservisten). Op drukke dagen kan het dus zijn dat er meer gevechtstenues worden aangevraagd dan dat er kunnen worden geproduceerd. Wat is de kans dat er na een dag een tekort is op de productie?

Uitwerking

Er zal een tekort aan gevechtstenues zijn als er op een dag meer aanvragen zijn dan dat er gevechtstenues geproduceerd worden. We willen dus de kans $P(X > 5)$ bepalen, oftewel (1pt)

$$\begin{aligned} P(X > 5) = P(X \geq 6) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - \text{poissoncdf}(\mu = 4.2; k = 5) \\ &\approx 0.2469. \quad (2\text{pt}) \end{aligned}$$

2c [4pt] De aanvragen voor een nieuw gevechtstenue dienen zich aan volgens een Poissonproces met parameter $\lambda = 4.2$. Dat betekent dat – zodra een aanvraag worden geplaatst –

de tijd tot de volgende aanvraag exponentieel verdeeld is met λ. Stel dat de laatste aanvraag een uur geleden plaatsvond. Wat is de kans dat er binnen het volgende uur een aanvraag binnenkomt?

Uitwerking

Merk op dat de exponentiële verdeling *geheugenloos* is. Dit houdt in dat het niet uitmaakt wanneer de laatste aanvraag heeft plaatsgevonden. (1pt) (1pt)

Noteer met T de kansvariabele die de tijd (in uren) meet tot de volgende aanvraag. Er geldt dat T exponentieel verdeeld is met parameter $\frac{\lambda}{24}$ (let op dat de originele λ over aanvragen per dag ging!). (1pt)

De kans dat binnen het volgende uur een aanvraag binnenkomt is dan

$$P(T < 1) = F(1) = 1 - e^{-\lambda/24 \cdot 1} \approx 0.1605. \qquad \text{(1pt)}$$

2d [6pt] Met welk aantal zal de productie moeten worden opgeschroefd om met $95\,\%$ kans te kunnen voldoen aan de vraag naar een nieuw gevechtstenue?

Uitwerking

We willen in deze vraag dus bepalen voor welke productiegrootte per dag k geldt dat de kans op hoogstens k aanvragen op een willekeurige dag groter dan of gelijk aan $95\,\%$. In andere woorden, voor welke k geldt dat (1pt)

$$P(X \leq k) = \text{poissoncdf}(\mu = 4.2, k?) \geq 0.95. \qquad \text{(1pt)}$$

Om deze vergelijking op te lossen, gebruik de tabel optie op de grafische rekenmachine en voer in:

$y_1:$ poissoncdf$(\mu = 4.2, k = X)$

$y_2:$ 0.95 (2pt)

(Merk op dat de solver optie niet werkt, omdat hetgeen wat we willen uitrekenen een geheel getal moet zijn, en er dus discrete stappen zijn tussen uitkomsten).

Hieruit volgt dat:

$k = 7:$ poissoncdf$(\mu = 4.2, k = 7) \approx 0.9361$

$k = 8:$ poissoncdf$(\mu = 4.2, k = 8) \approx 0.9721$ (1pt)

Dit betekent dat om met $95\,\%$ kans genoeg gevechtstenues te hebben er minstens

8 gevechtstenues moeten worden geproduceerd, oftewel de productie moet met minstens $8 - 5 = 3$ worden opgeschroefd. (1pt)

2e [7pt] Binnen afzienbare tijd start echter ook een nieuwe lichting cadetten en adelborsten aan de langmodelopleiding. Ook dit aantal aanvragen Y per dag volgt een Poissonverdeling, dit keer met gemiddeld 8.7 aanvragen per dag. Het bleek echter niet mogelijk om de productiecapaciteit te verhogen. De afdeling werkt een tijdje vooruit om alvast genoeg gevechtstenues klaar te hebben liggen voor de grote drukte.

Uitgaande van de productiecapaciteit van 5 gevechtstenues per dag, hoe lang van tevoren moet de productie worden opgestart om met $95\,\%$ kans genoeg gevechtstenues klaar te hebben liggen voor de reservisten én langmodellers om de eerste dag door te komen?

Uitwerking

Merk op dat de populaties van reservisten en langmodellers twee onafhankelijke populaties zijn. Aangezien het aantal aanvragen X en Y beide Poisson verdeelde kansvariabelen zijn, is het totale aantal aanvragen $Z = X+Y$ ook Poisson verdeeld met parameter $4.2 + 8.7 = 12.9$. (1pt) (1pt)

We berekenen eerst de waarde k waarvoor geldt dat de kans dat het totale aantal aanvragen hoogstens k is gelijk is aan 0.95, oftewel:

$$P(Z \leq k) = \text{poissoncdf}(\mu = 12.9, k?) \geq 0.95. \qquad \text{(1pt)}$$

Om deze vergelijking op te lossen, gebruik de tabel optie op de grafische rekenmachine en voer in:

$y_1 : \text{poissoncdf}(\mu = 12.9, k = X)$ (1pt)

(Merk op dat we niet met de solver optie kunnen werken, omdat hetgeen wat we willen uitrekenen (k) een geheel getal moet zijn, en er dus discrete stappen zijn tussen uitkomsten).

Uit de tabel volgt dat:

$k = 18 : \text{poissoncdf}(\mu = 12.9, k = 18) \approx 0.9341$

$k = 19 : \text{poissoncdf}(\mu = 12.9, k = 19) \approx 0.9600$ (1pt)

Dit betekent dat er minstens 19 gevechtstenues moeten klaarliggen om met $95\,\%$

kans genoeg gevechtstenues te hebben op de eerste dag. Er moet dus $\frac{19}{5} = 3.8$ (1pt)
dagen van te voren begonnen worden met het produceren van gevechtstenues. (1pt)

Opgave 3 (30 punten) Bij een grenscontrole in de buurt van Enschede doet de Koninklijke Marechaussee doorzoekingen in auto's op basis van een steekproef om drugssmokkel per auto te detecteren. Hierbij wordt op een dag uit de voorbijgaande auto's een steekproef van $n = 29$ auto's aselect gekozen. De doorzoektijd T van deze auto's is uniform verdeeld tussen 11 en 17 minuten.

3a [5pt] Wat zijn de verwachtingswaarde $E[T]$ en de standaardafwijking $\sigma(T)$ van de doorzoektijd van een willekeurige auto?

Uitwerking

Gegeven is dat de doorzoektijd T is uniform verdeeld tussen $a = 11$ en $b = 17$. (1pt)
De verwachtingswaarde $E[T]$ van een uniform verdeelde kansvariabele T is gelijk aan

$$E[T] = \frac{a+b}{2} = \frac{11+17}{2} = 14. \qquad \text{(1pt)}$$

Vervolgens is de variantie Var(T) van een uniform verdeelde kansvariabele T gelijk aan

$$\text{Var}(T) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(17-11)^2}{12} = 3 \qquad \text{(2pt)}$$

De standaardafwijking $\sigma(T)$ is gelijk aan de wortel van de variantie, oftewel $\sigma(T) = \sqrt{3} \approx 1.7321.$ (1pt)

3b [3pt] Wat is de kans dat de doorzoeking van een willekeurige auto langer dan 15 minuten duurt?

Uitwerking

De kans dat de doorzoektijd van een willekeurige auto langer dan 15 minuten is, is gelijk aan

$$\begin{aligned} P(T > 15) = P(T \geq 15) &= 1 - P(T < 15) \\ &= 1 - \frac{15 - a}{b - a} \\ &= 1 - \frac{15 - 11}{17 - 11} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$ (3pt)

3c [6pt] Bereken de kans dat minstens driekwart van de doorzoekingen sneller is afgerond dan 15 minuten. Je mag aannemen dat de doorzoekingen onafhankelijk van elkaar plaatsvinden.

Uitwerking

We kunnen aannemen dat de verschillende doorzoekingen onafhankelijk van elkaar plaatsvinden, oftewel dat de lengte van de doorzoekingen niet van elkaar afhangen. Introduceer de variabele X die het aantal doorzoekingen telt dat binnen 15 minuten is afgerond. (1pt) Omdat de doorzoekingen onafhankelijk zijn, is X binomiaal verdeeld met $n = 29$ en een succeskans $p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. (2pt) We willen de kans bepalen dat minstens driekwart van de doorzoekingen, oftewel minstens $\frac{3}{4} \cdot 29 \to 22$ doorzoekingen binnen 15 minuten is afgerond. Deze kans is gelijk aan (1pt)

$$P(X \geq 22) = 1 - P(X \leq 21) = 1 - \text{binomcdf}(n = 29, p = \frac{2}{3}, k = 21) \approx 0.1986.$$ (2pt)

3d [8pt] Wat is de kans dat de totale doorzoektijd over de $n = 29$ geselecteerde auto's langer is dan zeven uur?

Uitwerking

De doorzoektijden $T_1, \ldots, T_{29}$ van de $n = 29$ auto's in de steekproef volgen dezelfde kansverdeling met verwachtingswaarde $\mu = 14$ en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{3}$. Daarnaast vinden ze onafhankelijk van elkaar plaats. (1pt)

Volgens de centrale limietstelling is de som van de doorzoektijden $\sum T = T_1 + T_2 + \ldots + T_{29}$ bij benadering normaal verdeeld met verwachtingswaarde $n \cdot \mu = 29 \cdot 14 = 406$ en standaardafwijking $\sqrt{n} \cdot \sigma \approx 9.3274$. (3pt)

De kans dat de totale doorzoektijd langer is dan zeven uur, oftewel $7 \cdot 60 = 420$

minuten is gelijk aan (1pt)

$$P(\sum T \geq 420) = \text{normalcdf}(a = 420, b = 10^{99}, \mu = 406, \sigma = 9.3274) \approx 0.0667.$$ (3pt)

3e [8pt] De Marechaussee kan de doorzoeking van auto's mogelijk verkorten door gebruik te maken van drugshonden. Hierbij wordt ervanuit gegaan dat de doorzoektijd nog steeds uniform verdeeld zal zijn, maar verschoven (oftewel van $[11, 17]$ naar $[11-x, 17-x]$ voor een bepaalde waarde van x). Voor welke waarde van x geldt dat de kans dat de $n = 29$ geselecteerde auto's binnen zes uur kunnen worden gedetecteerd groter is dan $90\,\%$.

Uitwerking

In dit geval hebben we nog steeds te maken met de centrale limietstelling, alleen zal de verwachtingswaarde afhangen van de nog onbekende x. Merk op dat de variantie hetzelfde blijft, omdat de spreiding tussen mogelijke uitkomsten hetzelfde blijft. (1pt)

De verwachtingswaarde $E[T]$ van de nieuwe doorzoektijd T is gelijk aan

$$E[T] = \frac{a+b}{2} = \frac{11 - x + 17 - x}{2} = 14 - x.$$ (1pt)

Volgens de centrale limietstelling is de som van de doorzoektijden $\sum T = T_1 + T_2 + \ldots + T_{29}$ bij benadering normaal verdeeld met verwachtingswaarde $n \cdot \mu = 29 \cdot (14 - x) = 406 - 29x$ en standaardafwijking $\sqrt{n} \cdot \sigma \approx 9.3274$. (2pt)

We willen de waarde x bepalen zodanig dat geldt dat:

$$P(\sum T \geq 360) = \text{normalcdf}(a = 360, b = 10^{99}, \mu = 406 - 29x, \sigma = 9.3274) \geq 0.90$$ (1pt)

Om deze vergelijking op te te lossen, gebruik de solver optie op de grafische rekenmachine en voer in:

$$\begin{aligned} y_1 &: \quad \text{normalcdf}(a = 360, b = 10^{99}, \mu = 406 - 29X, \sigma = 9.3274) \\ y_2 &: \quad 0.90 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $x \approx 1.1740$. De doorzoektijd moet met minstens 1 minuut en 10 seconden versnellen om met $90\,\%$ zekerheid binnen zes uur de 29 doorzoekingen (2pt) af te ronden. (1pt)

Opgave 4 (20 punten) Sanquin houdt een reclamecampagne onder de burgerbevolking om bloed te komen doneren voor gewonde soldaten. Historisch gezien komen er tijdens zo'n campagne per uur 3 donaties binnen. Het aantal donaties per uur kan worden gemodelleerd aan de hand van een Poissonproces.

De bloedgroepen die vóórkomen onder de burgerbevolking zijn als volgt:

O	**A**	**B**	**AB**
$46\,\%$	$40\,\%$	$10\,\%$	$4\,\%$

Aangenomen wordt dat de donaties die binnenkomen ook deze verdeling van bloedgroepen volgt.

4a [2pt] Wat is het verwachte aantal donaties van universele donors (bloedgroep O) in het komende uur?

Uitwerking

Gegeven is dat het aantal donaties per uur tijdens de campagne gemiddeld op 3 ligt. Als we mogen aannemen dat de donaties proportioneel binnenkomen volgens de verdeling van bloedgroepen, dan houdt dat in dat er gemiddeld $0.46 \cdot 3 = 1.38$ donaties per uur binnenkomen. (2pt)

4b [6pt] In het veldhospitaal liggen nu vijf gewonde soldaten met bloedgroep A. Deze soldaten kunnen bloed ontvangen van bloedgroep O of bloedgroep A. Wat is de kans dat alle soldaten bloed kunnen ontvangen binnen de komende twee uur?

Uitwerking

Opnieuw geldt dat de donaties volgens een Poissonproces aankomen. Merk op dat de respectievelijk $46\,\%$ en $40\,\%$ van de donaties van bloedgroepen O en A komen, oftewel $86\,\%$ van de donaties. In andere woorden, de donaties van bloed (1pt) van bloedgroepen O en A komen aan volgens een Poissonproces met gemiddelde $\lambda = 0.86 \cdot 3 = 2.58$ donaties per uur. Alle soldaten kunnen bloed ontvangen indien (1pt) er minstens zoveel donaties de komende twee uur binnenkomen. Stel nu dat X (1pt) het aantal donaties van bloedgroepen O en A samen is in de komende twee uur. Dan geldt dat X Poisson verdeeld is met parameter $\mu = \lambda \cdot t = 2.58 \cdot 2 = 5.16$. De (1pt) kans dat er genoeg donaties binnenkomen om alle gewonde soldaten te helpen is dus gelijk aan

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \text{poissoncdf}(\mu = 5.16, k = 4) \approx 0.5871.$$ (2pt)

4c [4pt] Soldaten van bloedgroep B kunnen bloed ontvangen van mensen met bloedgroep O of bloedgroep B. Leg zonder berekening uit of de kans dat vijf gewonde soldaten met bloedgroep B binnen twee uur bloed kunnen ontvangen groter of kleiner is dan je antwoord bij vraag 4b.

Uitwerking

Merk op dat de bloedgroep B minder vaak voorkomt dan bloedgroep A ($10\,\%$ $< 40\,\%$). Dit houdt dus in, indien de donaties proportioneel zijn over de bloedgroepen, dat er minder donaties binnenkomen om mensen met bloedgroep B te bedienen. De kans dat er genoeg donaties binnenkomen om vijf gewonde soldaten met bloedgroep B te helpen is dan dus ook kleiner dan de kans dat er genoeg donaties binnenkomen voor vijf gewonde soldaten met bloedgroep A. (1pt) (1pt) (2pt)

4d [8pt] Na hoeveel donaties is de kans groter dan $95\,\%$ dat vijf gewonde soldaten met bloedgroep O een bloeddonatie kunnen ontvangen? Patiënten met bloedgroep O kunnen alleen bloed ontvangen van bloedgroep O. (Hierbij bekijken we donaties van alle bloedgroepen, dus ook onbruikbare bloedgroepen A, B en AB)

Uitwerking

In deze situatie hebben we te maken met een discrete kansvariabele X die het aantal bruikbare donaties telt voor patiënten met bloedgroep O. Merk op dat $46\,\%$ van de donaties van bloedgroep O zijn, en dus bruikbaar voor patiënten van bloedgroep O. (1pt)

De kansvariabele X dus binomiaal verdeeld is met als parameters een nader te bepalen n en een succeskans $p = 0.46$. (2pt)

We willen nu de waarde van n bepalen zodanig dat

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \text{binomcdf}(n?, p = 0.46, k = 4) \geq 0.95.$$ (2pt)

Voer deze vergelijking in in de tabel optie van de grafische rekenmachine (merk op: n moet een geheel getal zijn):

$y_1 : 1 - \text{binomcdf}(n?, p = 0.86, k = 4)$

$y_2 : 0.95$ (1pt)

Uit de tabel volgt dan dat:

$n = 17 : P(X \geq 5) = 0.94953$

$n = 18 : P(X \geq 5) = 0.96581$ (1pt)

Er moeten dus minstens 18 donaties binnenkomen om minstens $95\,\%$ kans te hebben op minstens vijf donaties van bloedgroep O. (1pt)