Uitwerkingen voor "Integratietechnieken: Substitutieregel"

Dr. ir. D.A.M.P. Blom

22 mei 2025

$\int x^4 \sin(x^5+3)\,dx$

We gebruiken substitutie op basis van de binnenfunctie die in de sinus staat:

$$u = x^5 + 3 \quad \Rightarrow \quad du = 5x^4\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}du = x^4\,dx$$

Substitueren in de integraal geeft ons:

$$\begin{aligned}
\int x^4 \sin(x^5+3)\,dx &= \int \frac{1}{5}\sin(u)\,du \\
&= -\frac{1}{5}\cos(u) + C \\
&\boxed{= -\frac{1}{5}\cos(x^5+3) + C}
\end{aligned}$$

$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

We gebruiken substitutie op basis van de noemer (merk op dat de afgeleide van $1+x^2$ gelijk is aan $2x$, oftewel 2 keer de teller):

$$u = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}du = x\,dx$$

Substitueren in de integraal geeft ons:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{x\,dx}{1+x^2} \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}\,du}{u} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\
&\boxed{= \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C}
\end{aligned}$$

3. $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

Deze integraal is al iets lastiger. Merk echter op dat de afgeleide van $\ln(x)$ gelijk is aan $\frac{1}{x}$. Gebruik nu de volgende substitutie:

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

Substitueren in de integraal geeft ons:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx &= \int \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
&= \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \ln|u| + C \\
&\boxed{= \ln|\ln(x)| + C}
\end{aligned}$$

4. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

We substitueren opnieuw $u = 1 + x^2$, omdat de afgeleide van $1 + x^2$ gelijk is aan $2x$, oftewel 2 keer de x die buiten de wortel staat:

$$u = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}du = x\,dx$$

Substitueren in de integraal geeft ons:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du \\
&= \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}u^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{3}u\sqrt{u} + C \\
&\boxed{= \frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C}
\end{aligned}$$

5. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

Dit is de lastigste integraal, omdat de x^3 buiten de wortel niet lijkt op de afgeleide van $1+x^2$. De truc in dit geval is om $x^3\sqrt{1+x^2}$ te lezen als $x \cdot x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}$. In dit geval is x te relateren aan $\frac{1}{2}$ keer de afgeleide van $1+x^2$, en x^2 is gelijk aan $(1+x^2) - 1$.

We gebruiken de substitutie

$$u = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}du = x\,dx$$

Aangezien geldt dat $u = 1 + x^2$, kunnen we x^2 herschrijven als $x^2 = u - 1$. Dit geeft ons:

$$
\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int x\cdot x^2\sqrt{1+x^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{2}(u-1)\sqrt{u}\,du \\
&= \int (\frac{1}{2}u\sqrt{u}-\frac{1}{2}\sqrt{u})\,du \\
&= \int (\frac{1}{2}u^{3/2}-\frac{1}{2}u^{1/2})\,du \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}u^{5/2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C \\
&= \frac{1}{5}u^2\sqrt{u}-\frac{1}{3}u\sqrt{u}+C \\
&\boxed{= \frac{1}{5}(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}+C}
\end{aligned}
$$