Ministerie van Defensie

Faculteit Militaire Wetenschappen

Gegevens student	
Naam:	
Peoplesoftnummer:	
Klas:	
Handtekening:	

Algemeen			
Vak:	Statistiek (deel 1) -- eerste kans 2024, derde kans 2023	**Vakcode:**	STA#1
Datum:	5 juni 2025	**Tijdsduur:**	13:30-16:30
Examinator:	Dr. ir. D.A.M.P. Blom	**Aantal pagina's:**	4
Peer-review:	Dr. J.B.M. Melissen	**Aantal opgaven:**	4

Algemene instructies

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Indien u een deelopgave niet kunt oplossen en het antwoord in vervolgvragen nodig hebt, probeer uit te gaan van een redelijke fictieve waarde.
- U mag een grafische rekenmachine gebruiken zonder CAS (Computer Algebra Systeem).
- Antwoorden, in welke vorm dan ook, mogen de zaal niet verlaten.
- Vermeld op elk antwoordvel je naam, Peoplesoft-nummer en maak een nummering van je antwoordvellen.
- Iedere vorm van mobiele (potentiële) datadragers (telefoon, smartwatch, etc) of andere vormen om te frauderen (bv. communicatieapparatuur) zijn niet toegestaan gedurende de gehele duur van het tentamen en mogen ook niet in het lokaal meegebracht worden of zijn uitgeschakeld en ingeleverd.
- Schrijf leesbaar ter voorkoming van misverstanden bij de beoordeling van uw werk. Indien uw antwoord niet leesbaar is, wordt uw antwoord fout gerekend.
- Toiletbezoek tijdens het tentamen vindt enkel plaats na toestemming van de examinator.
- Lever bij het verlaten van de zaal, kladpapier, tentamenopgaven en andere tentamen-gerelateerde documenten in bij de examinator.

Cijferberekening / cesuur

- Het eindcijfer voor het vak Statistiek wordt voor 50% bepaald door dit tentamen.
- Het tentamen is opgebouwd uit 4 open vragen. Bij iedere (sub)vraag is het aantal te behalen punten tussen haakjes aangegeven. In totaal kunt u 100 punten verdienen.
- Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten te delen door 10. Het tentamencijfer moet minimaal een 5,0 zijn om de cursus Statistiek met succes af te ronden.

Procedure na het tentamen

- De cijfers van dit tentamenonderdeel worden in principe binnen 10 werkdagen na de afname bekend gemaakt.
- Met vragen over de beoordeling kunt u tot 10 werkdagen na bekendmaking van de cijfers terecht bij de cursuscoördinator.

Veel succes!

Formuleblad Statistiek deel 1 (2024-2025)

Gegeven is een steekproef met n uitkomsten $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Steekproefgemiddelde:

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_i x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Steekproefvariantie:

$$s^2 = \frac{\sum\limits_i (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2}{n} \qquad \text{(optie 1)}$$

$$s^2 = \frac{\left(\sum\limits_i x_i^2\right) - n \cdot \overline{x}^2}{n} = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n \cdot \overline{x}^2}{n} \qquad \text{(optie 2)}$$

Rekenregels kansrekening:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \qquad \text{(optelregel)}$$

$$P(B) = 1 - P(\text{niet } B) \qquad \text{(complementregel)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} \qquad \text{(conditionele kansen)}$$

Discrete en continue kansverdelingen:

	Discrete kansvariabelen	**Continue kansvariabelen**
Uitkomstenruimte:	Eindig / aftelbaar oneindig	Overaftelbaar oneindig
Toepassingen:	Tellen / categoriseren	Meten
Kansbegrip:	Kansfunctie $p(k) = P(X = k)$	Kansdichtheidsfunctie $f(x)$
CDF:	$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{\ell:\ell \leq k} p(\ell)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$
Verwachtingswaarde:	$E[X] = \sum_k k \cdot P(X = k)$	$E[X] = \int x \cdot f(x)\, dx$
Variantie:	$\text{Var}(X) = \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k)$	$\text{Var}(X) = \int (x - E[X])^2 \cdot f(x)\, dx$
Standaardafwijking:	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Verwachtingswaarde en variantie van veelgebruikte kansverdelingen:

Verdeling	Kans(dichtheids)functie	CDF	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Discreet				
Uniform(a,b)	$p(k) = \frac{1}{b-a+1}$ $(k = a, a+1, \ldots, b)$	$F(k) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{k-a+1}{b-a+1} & a \leq k < b \\ 1 & k \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomiaal(n,p)	$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	$F(k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ
Continuous				
Uniform(a,b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentieel(λ)	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

z-score:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Centrale limietstelling: Gegeven n kansvariabelen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben met een verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ, dan geldt (bij benadering) dat

- de som $\sum X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde $n \cdot \mu$ en standaardafwijking $\sqrt{n} \cdot \sigma$.
- het gemiddelde $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Opgave 1 (25 punten) Voor het vergaren van inlichtingen via de lucht worden zwermen van surveillance UAV's ingezet in vijandelijk gebied. De tijd T (in minuten) totdat een zwerm gedetecteerd wordt, is een kansvariabele met de volgende kansdichtheidsfunctie:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t), & \text{als } 0 \le t \le 3, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

1a [4pt] Toon met berekeningen (met de grafische rekenmachine) aan dat f inderdaad voldoet aan de twee voorwaarden voor een kansdichtheidsfunctie.

1b [8pt] Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van T. Laat hierbij je berekeningen zien zonder gebruik te maken van het statistische menu van de grafische rekenmachine.

1c [4pt] Bereken de mediaan van T.

Hint: de mediaan van een kansverdeling is de uitkomst m waarvoor geldt dat $P(T \le m) = P(T \ge m) = 0,5$.

1d [4pt] Bereken het percentage dronezwermen dat binnen één minuut wordt gedetecteerd.

1e [5pt] Stel dat op een gegeven moment zes dronezwermen tegelijkertijd naar het vijandelijke gebied worden doorgestuurd. De missie is succesvol als er tenminste een zwerm drones is die meer dan één minuut onopgemerkt blijft. Hoe groot is de kans op succes in deze surveillancemissie?

Opgave 2 (25 punten) Tijdens een militaire missie wordt een Panzerhaubitze 2000 ingezet voor langdurige operaties. Een kritisch onderdeel, de elevatiemotor van het kanon, heeft een gemiddelde uitvalfrequentie van 1,5 storingen per maand. Gedurende de missie wordt gebruik gemaakt van een logistiek transport voor het leveren van reserveonderdelen (spare parts) voor de Panzerhaubitze.

2a [3pt] Wat is de kans dat er in een periode van zes maanden precies tien storingen optreden, aangenomen dat de uitvallen volgens een Poissonproces plaatsvinden?

2b [3pt] De elevatiemotor van de Panzerhaubitze 2000 is precies één maand geleden vervangen. Hoe groot is de kans dat deze nog een maand zonder problemen blijft functioneren?

2c [3pt] De logistieke eenheid die verantwoordelijk is voor het transport heeft een transportcapaciteit van 12 reservemotoren per zes maanden. Wat is de kans dat er na aankomst van het logistieke transport een tekort aan benodigde reserveonderdelen blijkt te zijn?

2d [7pt] De eenheid overweegt twee opties om de kans op een tekort aan reserveonderdelen te minimaliseren:

1. het doorvoeren van technologische upgrades die de uitvalfrequentie met 10% verminderen.
2. een verhoging van de transportcapaciteit naar 13 reservemotoren per zes maanden.

Welke maatregel is het meest effectief in het verlagen van de kans op tekort? Beargumenteer je antwoord aan de hand van berekeningen.

2e [9pt] Stel nu dat de transportcapaciteit van twaalf reserveonderdelen per zes maanden bestaat uit drie transporten met vier reserveonderdelen waar steeds twee maanden tussen zit. Het aantal storingen volgt nog steeds een Poissonproces met gemiddelde $\lambda = 1,5$ per maand. Wat is het verwachte aantal reserveonderdelen van een enkel transport (dus na twee maanden) dat gebruikt wordt om storingen mee op te lossen? Ga hierbij er van uit dat huidige reservevoorraad leeg is.

Opgave 3 (29 punten) De chauffeurs van de Transportgroep Defensie rijden met busjes tussen verschillende kazernes om kantoorartikelen te verplaatsen. Een van de chauffeurs, meneer de Wolf, heeft de specifieke taak gekregen om wekelijks tussen de KMA en het KIM te pendelen om bibliotheekboeken en IT-apparatuur te vervoeren. Zijn reistijd in minuten (enkele reis) kan worden beschouwd als een normaal verdeelde kansvariabele T met een gemiddelde $\mu = 140$ minuten en standaardafwijking $\sigma = 16$ minuten.

3a [4pt] Bereken de kans dat hij in een willekeurige week er langer dan $2\frac{1}{2}$ uur over doet om van de KMA naar het KIM te rijden.

3b [5pt] Bereken (met behulp van je antwoord op vraag 2a) de kans dat hij in een half jaar (26 weken) minstens 10 keer langer dan $2\frac{1}{2}$ uur doet over zijn busrit.

3c [6pt] Hoe groot is de kans dat hij gedurende een jaar (52 weken) gemiddeld langer dan 2 uur en een kwartier doet over zijn busritten.

3d [8pt] Elke dinsdag vertrekt meneer de Wolf rond 8.00 uur 's ochtends vanaf de KMA. Om precies te zijn is zijn vertrektijd V normaal verdeeld met gemiddelde 7.59 en een standaardafwijking van 4 minuten. Hoe groot is de kans dat hij voor 10.00 uur aankomt op het KIM? **Hint:** de aankomsttijd is de som $A = V + T$ van twee normaal verdeelde kansvariabelen (de vertrektijd V en de reistijd T). Er geldt dat A dus ook normaal verdeeld is met $E[A] = E[V] + E[T]$ en $\sigma(A) = \sqrt{\sigma(V)^2 + \sigma(T)^2}$.

3e [6pt] Hoe laat moet meneer de Wolf 's ochtends uiterlijk vertrekken om te zorgen dat hij met kans $0,95$ vóór 10.00 uur op het KIM aankomt? Rond af op hele minuten.

Opgave 4 (21 punten) Tijdens een nachtelijke militaire oefening worden 20 parachutisten gedropt boven vijandelijke terrein. Elke parachutist heeft een kans van $0,76$ om veilig en correct te landen op het voorziene dropzonegebied, rekening houdend met wind, zicht en navigatie.

4a [4pt] Wat is de verwachtingswaarde en standaardafwijking van het aantal succesvolle parachutelandingen?

4b [4pt] Hoe groot is de kans dat minstens vijftien parachutisten succesvol landen?

4c [6pt] De oefening wordt een succes genoemd als minstens 18 parachutisten succesvol landen. Hoeveel parachutisten moeten er extra worden ingezet (bovenop de huidige 20) zodanig dat de kans dat de oefening een succes is, minstens 95% is?

4d [7pt] Bereken een 95%-voorspellingsinterval voor de fractie succesvolle landingen in het geval van 20 parachutisten.

Hint: bereken eerst een 95%-voorspellingsinterval voor het aantal succesvolle landingen met het twee-sigmagebied.