Ministerie van Defensie

Faculteit Militaire Wetenschappen

Gegevens student	
Naam:	
Peoplesoftnummer:	
Klas:	
Handtekening:	

Algemeen			
Vak:	Statistiek deel 1 (tweede kans)	**Vakcode:**	STA#1
Datum:	17 oktober 2025	**Tijdsduur:**	9:00-12:00
Examinator:	Dr. ir. D.A.M.P. Blom	**Aantal pagina's:**	4
Peer-review:	Dr. M.P. Roeling	**Aantal opgaven:**	4

Algemene instructies

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Indien u een deelopgave niet kunt oplossen en het antwoord in vervolgvragen nodig hebt, probeer uit te gaan van een redelijke fictieve waarde.
- Rond je antwoorden waar nodig af op vier decimalen.
- U mag een grafische rekenmachine gebruiken zonder CAS (Computer Algebra Systeem).
- Antwoorden, in welke vorm dan ook, mogen de zaal niet verlaten.
- Vermeld op elk antwoordvel je naam, Peoplesoft-nummer en maak een nummering van je antwoordvellen.
- Iedere vorm van mobiele (potentiële) datadragers (telefoon, smartwatch, etc.) of andere vormen om te frauderen (bv. communicatieapparatuur) zijn niet toegestaan gedurende de gehele duur van het tentamen en mogen ook niet in het lokaal meegebracht worden of zijn uitgeschakeld en ingeleverd.
- Schrijf leesbaar ter voorkoming van misverstanden bij de beoordeling van uw werk. Indien uw antwoord niet leesbaar is, wordt uw antwoord fout gerekend.
- Toiletbezoek tijdens het tentamen vindt enkel plaats na toestemming van de examinator.
- Lever bij het verlaten van de zaal, kladpapier, tentamenopgaven en andere tentamen-gerelateerde documenten in bij de examinator.

Cijferberekening / cesuur

- Het eindcijfer voor het vak Statistiek wordt voor 50% bepaald door dit tentamen.
- Het tentamen is opgebouwd uit 4 open vragen. Bij iedere (sub)vraag is het aantal te behalen punten tussen haakjes aangegeven. In totaal kunt u 100 punten verdienen.
- Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten te delen door 10. Het tentamencijfer moet minimaal een 5,0 zijn om de cursus Statistiek met succes af te ronden.

Procedure na het tentamen

- De cijfers van dit tentamenonderdeel worden in principe binnen 10 werkdagen na de afname bekend gemaakt.
- Met vragen over de beoordeling kunt u tot 10 werkdagen na bekendmaking van de cijfers terecht bij de cursuscoördinator.

Veel succes!

Formuleblad Statistiek (2024-2025)

Statistiek deel 1

Steekproefgemiddelde (gegeven een steekproef met n uitkomsten $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Steekproefvariantie en steekproefstandaardafwijking:

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$
$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Rekenregels kansrekening:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \qquad \text{(optelregel)}$$
$$P(B) = 1 - P(\text{niet } B) \qquad \text{(complementregel)}$$
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} \qquad \text{(conditionele kansen)}$$

Discrete en continue kansverdelingen:

	Discrete kansvariabelen	**Continue kansvariabelen**
Uitkomstenruimte:	Eindig / aftelbaar oneindig	Overaftelbaar oneindig
Toepassingen:	Tellen / categoriseren	Meten
Kansbegrip:	Kansfunctie $p(k) = P(X = k)$	Kansdichtheidsfunctie $f(x)$
CDF:	$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{\ell : \ell \leq k} p(\ell)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$
Verwachtingswaarde:	$E[X] = \sum_k k \cdot P(X = k)$	$E[X] = \int x \cdot f(x)\, dx$
Variantie:	$\text{Var}(X) = \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k)$	$\text{Var}(X) = \int (x - E[X])^2 \cdot f(x)\, dx$
Standaardafwijking:	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Speciale kansverdelingen:

- $X \sim$ Binomiaal(n, p): tellen van aantal successen bij onafhankelijke kansexperimenten met twee uitkomsten (Bernoulli-experimenten): succes / mislukking.

  Parameters: het aantal Bernoulli-experimenten n en de succeskans per experiment p.

- $X \sim$ Poisson$(\lambda \cdot t)$: tellen van aantal "gebeurtenissen" in een "interval" van tijd / ruimte.

  Parameters: het gemiddelde aantal gebeurtenissen λ per meeteenheid (tijd / ruimte) en het aantal meeteenheden t.

  $\rightarrow$ *Voorbeeld: bij de meeteenheid van een dag bestaat een week uit $t = 7$ meeteenheden.*

- $T \sim$ Exponentieel(λ): meten van de tijd / ruimte tot de volgende gebeurtenis.

  Parameter: het gemiddelde aantal gebeurtenissen λ per meeteenheid (tijd / ruimte).

Verwachtingswaarde en variantie van veelgebruikte kansverdelingen:

Verdeling	Kans(dichtheids)functie	CDF	$E(X)$	Var(X)
Discreet				
Uniform(a,b)	$p(k)=\frac{1}{b-a+1}$ $(k=a,a+1,\ldots,b)$	$F(k)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{k-a+1}{b-a+1} & a\le k<b\\ 1 & k\ge b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomiaal(n,p)	$p(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$F(k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$p(k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$	$F(k)=\sum_{i=0}^{k}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ
Continuous				
Uniform(a,b)	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{elders.}\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentieel(λ)	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\ge 0$	$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Veelgebruikte functies op de grafische rekenmachine

Type vraag	TI-84 Plus	Casio
Continue kansverdeling (willekeurig)		
$P(a\le X\le b)$	$\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$
$X\sim$ **Binomiaal**(n,p)		
$P(X=k)$ $P(X\le k)$	binompdf(n,p,k) binomcdf(n,p,k)	BinomialPD(k,n,p) BinomialCD(k,n,p)
$X\sim N(\mu,\sigma)$		
$P(a\le X\le b)$ Grenswaarde g zodat $P(X\le g)=p$?	normalcdf(a,b,μ,σ) invNorm(p,μ,σ)	NormalCD(a,b,σ,μ) InvNormCD(tail=left, p,σ,μ)
$X\sim$ **Poisson**(λ)		
$P(X=k)$ $P(X\le k)$	poissonpdf(λ,k) poissoncdf(λ,k)	PoissonPD(k,λ) PoissonCD(k,λ)

z-score:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

Centrale limietstelling: Gegeven n kansvariabelen $X_1,X_2,\ldots,X_n$ die onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben met een verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ, dan geldt (bij benadering) dat

- de som $\sum X = X_1+X_2+\ldots+X_n$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde $n\cdot\mu$ en standaardafwijking $\sqrt{n}\cdot\sigma$.
- het gemiddelde $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Opgave 1 (25 punten) De dreiging van verstoringen van onze kritieke infrastructuur op zee is een reeël en urgent probleem. De Nederlandse defensie wil deze dreiging het hoofd bieden door het inzetten van patrouilleschepen om spionageschepen van vijandelijke mogendheden te detecteren op een populaire vaarroute in de Noordzee.

Uit historische data is de volgende kansfunctie op te maken voor het aantal te detecteren spionageschepen X per dag:

Aantal spionageschepen per dag

k	0	1	2	3	4	5	6
$f(k) = P(X = k)$	0.06	0.11	0.17	0.18	0.22	0.12	0.14

1a [4pt] Teken het naalddiagram van deze discrete kansfunctie.

1b [4pt] Toon aan dat deze kansfunctie inderdaad goed gedefinieerd is, dat wil zeggen, dat aan de twee voorwaarden van een kansfunctie wordt voldaan.

1c [7pt] Bereken de verwachtingswaarde $E[X]$ en de standaardafwijking $\sigma(X)$ van het aantal spionageschepen per dag.

1d [3pt] Bereken de kans dat er op een willekeurige dag minstens 4 spionageschepen worden gedetecteerd.

1e [7pt] Het probleem met spionageschepen is dat we aan het begin van de dag niet weten hoeveel spionageschepen er die dag zullen passeren. Voor ieder spionageschip geldt dat er minstens één patrouilleschip nodig is om het terug te begeleiden naar internationale wateren, maar het inzetten van een patrouilleschip is duur. Er wordt besloten om het aantal patrouilleschepen Y per dag in te zetten volgens een binomiale verdeling met $n = 8$ en $p = 0.5$. Met hoeveel procent kans zijn er op een willekeurige dag voldoende patrouilleschepen aanwezig om alle spionageschepen die dag te kunnen detecteren en terug te begeleiden?

Opgave 2 (25 punten) Binnenkort starten enkele nieuwe pelotons reservisten aan hun Algemene Militaire Opleiding. Voordat ze beginnen, moeten ze zich melden bij het KPU-bedrijf in Soesterberg om hun nieuwe gevechtstenues aan te vragen. Hierbij wordt aangenomen dat het aantal aanvragen X per dag van reservisten voor een gevechtstenue een Poissonverdeling volgt met parameter $\lambda = 4.2$.

2a [5pt] Bereken de kans dat er in een willekeurige week precies 30 reservisten een aanvraag doen voor een nieuw gevechtstenue.

2b [3pt] De huidige productie van nieuwe gevechtstenues ligt op 5 gevechtstenues per dag (er wordt in deze opgave vanuit gegaan dat er een speciale productie is alleen voor reservisten). Op drukke dagen kan het dus zijn dat er meer gevechtstenues worden aangevraagd dan dat er kunnen worden geproduceerd. Wat is de kans dat er na een dag een tekort is op de productie?

2c [4pt] De aanvragen voor een nieuw gevechtstenue dienen zich aan volgens een Poissonproces met parameter $\lambda = 4.2$. Dat betekent dat zodra een aanvraag worden geplaatst, de tijd tot de volgende aanvraag exponentieel verdeeld is met parameter $1/\lambda$. Stel dat de laatste aanvraag een uur geleden plaatsvond. Wat is de kans dat er binnen het volgende uur een aanvraag binnenkomt?

2d [6pt] Met welk aantal zal de productie moeten worden opgeschroefd om met $95\,\%$ kans te kunnen voldoen aan de vraag naar een nieuw gevechtstenue?

2e [7pt] Binnen afzienbare tijd start echter ook een nieuwe lichting cadetten en adelborsten aan de langmodelopleiding. Ook dit aantal aanvragen Y per dag volgt een Poissonverdeling, dit keer met gemiddeld 8.7 aanvragen per dag. Het bleek echter niet mogelijk om de productiecapaciteit te verhogen. De afdeling werkt een tijdje vooruit om alvast genoeg gevechtstenues klaar te hebben liggen voor de grote drukte.

Uitgaande van de productiecapaciteit van 5 gevechtstenues per dag, hoe lang van tevoren moet de productie worden opgestart om met $95\,\%$ kans genoeg gevechtstenues klaar te hebben liggen voor de reservisten én langmodellers om de eerste dag door te komen?

Opgave 3 (30 punten) Bij een grenscontrole in de buurt van Enschede doet de Koninklijke Marechaussee doorzoekingen in auto's op basis van een steekproef om drugssmokkel per auto te detecteren. Hierbij wordt op een dag uit de voorbijgaande auto's een steekproef van $n = 29$ auto's aselect gekozen. De doorzoektijd T van deze auto's is uniform verdeeld tussen 11 en 17 minuten.

3a [5pt] Wat zijn de verwachtingswaarde $E[T]$ en de standaardafwijking $\sigma(T)$ van de doorzoektijd van een willekeurige auto?

3b [3pt] Wat is de kans dat de doorzoeking van een willekeurige auto langer dan 15 minuten duurt?

3c [6pt] Bereken de kans dat minstens driekwart van de doorzoekingen sneller is afgerond dan 15 minuten. Je mag aannemen dat de doorzoekingen onafhankelijk van elkaar plaatsvinden.

3d [8pt] Wat is de kans dat de totale doorzoektijd over de $n = 29$ geselecteerde auto's langer is dan zeven uur?

3e [8pt] De Marechaussee kan de doorzoeking van auto's mogelijk verkorten door gebruik te maken van drugshonden. Hierbij wordt ervanuit gegaan dat de doorzoektijd nog steeds uniform verdeeld zal zijn, maar verschoven naar links (oftewel van $[11, 17]$ naar $[11 - x, 17 - x]$ voor een bepaalde waarde van x). Voor welke waarde van x geldt dat de kans dat de $n = 29$ geselecteerde auto's binnen zes uur kunnen worden gedetecteerd groter is dan $90\,\%$.

Opgave 4 (20 punten) Sanquin houdt een reclamecampagne onder de burgerbevolking om bloed te komen doneren voor gewonde soldaten. Historisch gezien komen er tijdens zo'n campagne per uur 3 donaties binnen. Het aantal donaties per uur kan worden gemodelleerd aan de hand van een Poissonproces.

De bloedgroepen die vóórkomen onder de burgerbevolking zijn als volgt:

O	**A**	**B**	**AB**
$46\,\%$	$40\,\%$	$10\,\%$	$4\,\%$

Aangenomen wordt dat de donaties die binnenkomen ook deze verdeling van bloedgroepen volgt.

4a [4pt] Wat is het verwachte aantal donaties van universele donors (bloedgroep O) in het komende uur?

4b [6pt] In het veldhospitaal liggen nu twee gewonde soldaten met bloedgroep A. Deze soldaten kunnen bloed ontvangen van bloedgroep O of bloedgroep A. Wat is de kans dat beide soldaten bloed kunnen ontvangen binnen de komende twee uur?

4c [4pt] Soldaten van bloedgroep B kunnen bloed ontvangen van mensen met bloedgroep O of bloedgroep B. Leg zonder berekening uit of de kans dat twee gewonde soldaten met bloedgroep B binnen twee uur bloed kunnen ontvangen groter of kleiner is dan je antwoord bij vraag 4b.

4d [6pt] Na hoeveel donaties is de kans groter dan $95\,\%$ dat twee gewonde soldaten met bloedgroep A een bloeddonatie kunnen ontvangen?