

Statistiek voor MBW / KW Uitwerkingen huiswerkopgaven

Dr. ir. D.A.M.P. Blom & Dr. J.B.M. Melissen

2025

Week 11: chikwadraatverdeling

Hoofdstuk 10

Opdracht 10.m1: Voor een kansvariabele die een theoretische chikwadraatsverdeling met vijf vrijheidsgraden volgt, geldt dat ...

- (a) deze symmetrisch rondom 0 ligt.
- (b) deze symmetrisch rondom 5 ligt.
- (c) de kansen hiervoor kunnen worden gevonden als het kwadraat wordt genomen van een normaal verdeelde variabele met $\mu = 5$.
- (d) deze kansvariabele waarden kan aannemen die groter zijn dan 15.

Uitwerking

Het juiste antwoord is (d).

Opdracht 10.m2: Bij een chikwadraattoets voor onafhankelijkheid moet worden gewerkt met de chikwadraatverdeling met 6 vrijheidsgraden. Er moet worden getoetst met $\alpha = 0,05$. De kritieke tabelwaarde is daarom ...

- (a) 1,64
- (b) 14,45
- (c) 12,59
- (d) 9,49

Uitwerking

Laat X de toetsingsgrootte zijn die chikwadraat verdeeld is met $df = 6$ vrijheidsgraden. In dit geval is de kritieke waarde de waarde x waarvoor geldt dat $P(X \geq x) = 0,05$. Deze kritieke waarde berekenen we met de solver optie als volgt:

$$y_1 = \chi^2 \text{cdf}(\text{lower} = x; \text{upper} = 10^{10}; df = 6)$$
$$y_2 = 0,05$$

De numerieke solver geeft (afgerond op twee decimalen) $x \approx 12,59$ Het juiste antwoord is dus (c).

Opdracht 10.m3: Bij een toets voor onafhankelijkheid geeft de tabel de waargenomen frequenties weer. De te verwachten of *expected* frequentie voor de cel waarin 80 waarnemingen vermeld zijn, bedraagt ...

- (a) $\frac{80}{250}$
 (b) 125
 (c) 0,2
 (d) 100

| | Man | Vrouw |
|--------|-----|-------|
| Links | 80 | 120 |
| Rechts | 170 | 130 |

Uitwerking

Bekijk nu een uitgebreidere versie van de tabel van *observed* frequenties hierboven, waarbij we ook de rij- en kolomtotalen hebben toegevoegd.

| | Man | Vrouw | Totaal |
|--------|-----|-------|--------|
| Links | 80 | 120 | 200 |
| Rechts | 170 | 130 | 300 |
| Totaal | 250 | 250 | 500 |

De te verwachten of *expected* frequentie E_{ij} voor de cel in rij i en kolom j is gelijk aan

$$E_{ij} = \frac{\text{Rijtotaal}_i \cdot \text{Kolomtotaal}_j}{\text{Totaal}}.$$

Dat wil zeggen dat de expected frequentie voor de cel linksboven, oftewel E_{11} , gelijk is aan

$$E_{11} = \frac{\text{Rijtotaal}_1 \cdot \text{Kolomtotaal}_1}{\text{Totaal}} = \frac{200 \cdot 250}{500} = 100.$$

Het juiste antwoord is dus (d).

Opdracht 10.m4: Men wenst te toetsen of het aantal aanvragen bij een helpdesk van een computermaatschappij gelijk is verdeeld over de vijf werkdagen van de week. In een bepaalde week worden de volgende aantallen waarnemingen gedaan tussen maandag en vrijdag: 48, 65, 57, 72, 58. De *expected* frequentie voor het aantal aanvragen op een willekeurige maandag is dus ...

- (a) 12
 (b) 60
 (c) 48
 (d) 5

Uitwerking

In totaal zijn er in deze week $48 + 65 + 57 + 72 + 58 = 300$ waarnemingen gedaan. Indien het aantal aanvragen uniform verdeeld is over de vijf werkdagen, dan verwachten we dat 20% van de aanvragen op maandag wordt gedaan. De expected frequentie van het

aantal aanvragen op maandag is dus gelijk aan $0,20 \cdot 300 = 60$ aanvragen. Het juiste antwoord is dus (b).

Opdracht 10.1: Bij een onderzoek naar de rookgewoonten van Nederlanders van 18 jaar en ouder werden door loting 200 proefpersonen gekozen die vervolgens werden ingedeeld naar leeftijd en naar rookgewoonte. De resultaten waren als volgt:

| | Leeftijd | | | Totaal |
|------------|----------|----------|-------------|--------|
| | 18– < 30 | 30– < 45 | 45 en ouder | |
| Roker | 25 | 35 | 20 | 80 |
| Niet-roker | 55 | 25 | 40 | 120 |
| Totaal | 80 | 60 | 60 | 200 |

We gaan met behulp van de chikwadraattoets onderzoeken of de indelingen naar leeftijd en rookgewoonte al dan niet afhankelijk van elkaar zijn. We toetsen met $\alpha = 0,01$. De nulhypothese luidt: H_0 : onafhankelijkheid.

(a) Bereken de *expected*-tabel.

Uitwerking

(b) Bereken de toetsingsgrootte χ^2 .

Uitwerking

(c) Hoeveel vrijheidsgraden heeft de chikwadraatverdeling die gebruikt moet worden?

Uitwerking

(d) Geef het kritieke gebied aan van de grootte χ^2 .

Uitwerking

(e) Wat is uw eindconclusie?

Uitwerking

Opdracht 10.5: Bij een onderzoek naar het gebruik van internet werden de respondenten onderverdeeld naar leeftijd en het wel of niet werken met internet. Voor 400 respondenten leverde dit de volgende tabel:

| Leeftijd | Internetgebruik | | Totaal |
|--------------------|-----------------|---------------|--------|
| | Wel internet | Geen internet | |
| Tot en met 44 jaar | 143 | 77 | 220 |
| 45 jaar en ouder | 97 | 83 | 180 |
| Totaal | 240 | 160 | 400 |

- (a) De vraag is of deze indelingen onafhankelijk zijn. Bereken de *expected*-tabel en voer de chikwadraattoets uit met behulp van de tabel (kies $\alpha = 0,01$).

Uitwerking

Opdracht 10.7: Bij een onderzoek naar de gevolgen van roken is gemeten hoe het gesteld is met de bloeddruk van 50-jarige mannen. In het onderzoek waren 200 mannen betrokken, waarvan 40 te kwalificeren zijn als stevige roker, 30 als gelegenheidsrokers en 130 als niet-rokers. Hun bloeddruk werd een van de volgende drie kwalificaties gegeven, namelijk normaal, licht verhoogd of ernstig verhoogd. Dat leverde de volgende tabel:

| Bloeddruk | Stevige roker | Matige roker | Niet-roker |
|------------------|---------------|--------------|------------|
| Normaal | 6 | 8 | 86 |
| Licht verhoogd | 10 | 8 | 22 |
| Ernstig verhoogd | 24 | 14 | 22 |

Toets of rookgedrag en bloeddrukniveau significant samenhangen (kies $\alpha = 0,01$).

Uitwerking

Opdracht 10.11: In een ziekenhuis worden dagelijks vijf orthopedische operaties uitgevoerd. Bekend is dat deze in 20% van de gevallen leiden tot complicaties waardoor de patiënt enige tijd moet verblijven op de afdeling intensive care. Voor een periode van 100 dagen leidde dit tot de volgende aantallen verwijzingen naar de afdeling intensive care:

| Aantal per dag (k) | Aantal dagen met k verwijzingen |
|------------------------|-----------------------------------|
| 0 | 15 |
| 1 | 25 |
| 2 | 36 |
| 3 | 12 |
| 4 | 10 |
| 5 | 2 |
| Totaal | 100 dagen |

Toets met $\alpha = 0,05$ of de waargenomen verdeling overeenstemt met een binomiale verdeling met $\pi = 0,20$.

Uitwerking

Opdracht 10.12: Soms wil men voor een getrokken steekproef beoordelen of die als representatief mag worden beschouwd met betrekking tot een bepaald kenmerk of een bepaalde variabele. Met de chikwadraattoets voor aanpassing kan worden getoetst of de waargenomen verdeling in dit opzicht voldoende gelijkenis vertoont met de populatieopbouw. Bij een opinieonderzoek over de toekomst van Europa worden 480 kiesgerechtigde Nederlanders ondervraagd. Van alle ondervraagden is het opleidingsniveau genoteerd. In de volgende tabel wordt dit opleidingsniveau vergeleken met de totale Nederlandse bevolking:

| | Laag | Matig | Redelijk | Hoog | Totaal |
|------------|------|-------|----------|------|--------|
| Steekproef | 134 | 144 | 129 | 73 | 480 |
| Populatie | 28% | 36% | 24% | 12% | 100% |

Toets met $\alpha = 0,05$ of de steekproef als representatief mag worden beschouwd.

Uitwerking

Opdracht 10.12: Het aantal brandmeldingen dat in een stad per week is geregistreerd gedurende een periode van 100 weken blijkt uit de tabel. Toets of het aantal branden per week is te beschouwen als een kansvariabele die een Poissonverdeling volgt met $\mu = 1$ (kies $\alpha = 0,05$).

| Aantal branden per week | Frequentie |
|-------------------------|------------|
| 0 | 48 |
| 1 | 24 |
| 2 | 16 |
| 3 | 8 |
| 4 of meer | 4 |
| Totaal | 100 weken |

Uitwerking