Tentamen Statistiek MBW/KW (deel 1, eerste kans)

Afdeling: Propedeuse MBW/KW 2020-2021
Examinator: Dr. J.B.M. Melissen
Datum: vrijdag 4 juni 2021, duur tentamen: 2 uur

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven (30, 25, 25, 20 punten). Score = Puntentotaal/10

Opgave 1 (Totaal 30 punten)

Sergeant Fabio is een flamboyante gast. Hoewel hij dol is op de militaire dienst, heeft hij een hekel aan de uniformiteit van de kleding, vooral wat betreft de sokken. Sergeant Fabio houdt er namelijk erg van om een beetje op te vallen, met name wat sokken betreft. Elk weekend, wanneer hij geen dienst heeft, draagt hij een ander paar sokken om te kunnen genieten van het gevoel van individualiteit dat het hem geeft. Hij bezit daartoe 52 verschillende paar sokken, één voor elk weekend van het jaar.

Eén keer per jaar, op Nationale Sokkendag, wast hij al zijn sokken. Na wassen en drogen trekt hij zich met een grote wasmand vol sokken terug in zijn slaapkamer om het Sok Sorteer Ritueel (SSR) uit te voeren. Tijdens dit ritueel neemt hij telkens een willekeurige sok uit de wasmand en legt deze ofwel (netjes in rijen) op het bed als er geen match is met een van de andere sokken die al op het bed liggen, of als hij een passende tweede sok vindt op het bed, vouwt hij de twee sokken samen als een paar en bergt ze vervolgens op in zijn sokkenkast. Hij gaat door met deze procedure totdat alle 104 sokken zijn opgeborgen.
Sergeant Fabio heeft in de loop der jaren gemerkt dat tijdens het SSR het aantal ongepaarde sokken op het bed eerst min of meer toeneemt, om dan tegen het einde weer af te nemem. Dat gedrag is echter geenszins monotoon, er kunnen onderweg verschillende stijgingen en dalingen in het aantal sokken op het bed optreden.
Sergeant Fabio is geïnteresseerd in het gemiddeld aantal sokken op zijn bed tijdens het SSR.

1a. [4pts] Wat is het grootste aantal ongepaarde sokken dat tijdens het SSR op een bepaald moment op zijn bed kan liggen?
De worst-case is als hij telkens een sok van een paar pakt dat hij nog niet eerder had. Dat kan maximaal 52 keer gebeuren, want er zijn 52 verschillende paren. **2pt**

Bereken de kans dat dit gebeurt.

De eerste sok kan hij willekeurig pakken, dus op 104 manieren. De tweede sok mag niet passen bij de eerste sok, dus er blijven 102 mogelijke sokken over om te pakken. Voor de derde sok is dat 100 mogelijkheden, want er zijn nog 102 sokken over waarvan de twee die matchen met de twee al gekozen sokken niet mogen worden gepakt, etc.

Het totale aantal manieren om 52 verschillende sokken te pakken is dus

$$104 \times 102 \times 100 \times \cdots \times 4 \times 2.$$

Het aantal manieren om de eerste 52 sokken te pakken (zonder deze beperking) is

$$104 \times 103 \times 102 \times \cdots \times 54 \times 53.$$

De kans dat dit gebeurt is $\frac{104 \times 102 \times 100 \times \cdots \times 4 \times 2}{104 \times 103 \times 102 \times \cdots \times 54 \times 53}$. Het gaat om dit antwoord. **1pt**

Het uitrekenen ervan is niet helemaal eenvoudig, omdat 104! te groot is om op de rekenmachine uit te rekenen. Het kan wel, maar als volgt (dit hoef je niet te kunnen):

$$\frac{104 \times 102 \times 100 \times \cdots \times 4 \times 2}{104 \times 103 \times 102 \times \cdots \times 54 \times 53} = \frac{(2 \cdot 52) \times (2 \cdot 50) \times \cdots \times (2 \cdot 1) \times 52!}{104!} =$$

$$= \frac{52! \times 2^{52} \times 52!}{104!} = \frac{2^{52}}{\binom{104}{52}} = \frac{4{,}5036 \cdot 10^{15}}{1{,}5831 \cdot 10^{30}} = 2{,}845 \cdot 10^{-15}.$$

Wat is het kleinste aantal ongepaarde sokken dat tijdens het SSR op zijn bed kan liggen?

Het kleinste aantal sokken op het bed is 0, als bijvoorbeeld na elke sok telkens de bijpassende wordt gepakt (op bed: 0-1-0-1-0-1…). **1pt**

Voor elke keer dat sergeant Fabio een sok uit de wasmand pakt, wordt het aantal sokken op het bed ofwel met één verhoogd (er is dan geen match tussen de geselecteerde sok en de sokken die al op het bed liggen), of met één verminderd (als er een match is; het complete paar wordt dan opgeruimd).

Dit betekent dat elke keer dat Fabio een sok heeft geselecteerd en verwerkt, er een aantal sokken op het bed achterblijft waarbij dit aantal voldoet aan een bepaalde kansverdeling. Laat $\underline{k}_n$ de kansvariabele zijn die het aantal ongepaarde sokken op het bed beschrijft na verwerking van de n-de sok ($n = 0, 1, 2, \dots, 104$), en $f_n(k)$ is de bijbehorende kansfunctie die de kansen beschrijft waarmee de mogelijke waarden (k) van het overgebleven aantal sokken op bed optreden. Hieronder staan de kansfuncties voor $n = 0$, 1, en 2.

k	0
$f_0(k) = P(\underline{k}_0 = k)$	1

k	1
$f_1(k) = P(\underline{k}_1 = k)$	1

k	0	2
$f_2(k) = P(\underline{k}_2 = k)$	$\frac{1}{103}$	$\frac{102}{103}$

Voor $n = 0$ zijn er nog geen sokken gekozen, dus ligt er geen sok ($k = 0$) op het bed met kans 1.

De eerste sok die uit de wasmand wordt gepakt ($n = 1$) eindigt altijd op het bed ($k = 1$) met kans 1, omdat er nog geen sok op het bed ligt om een paar compleet te maken.
De tweede sok ($n = 2$) kan ofwel een paar vormen met de sok op het bed ($k = 0$ sokken blijven dan over op het bed met kans 1/103 omdat 1 sok van de 103 sokken waaruit gekozen kan worden past), of er is geen bijpassende sok op het bed ($k = 2$ sokken blijven dan op het bed met kans 102/103).

1b. [4pts] Bereken de tabel van de kansfunctie $f_3(k) = P(\underline{k}_3 = k)$ voor $n = 3$. Maak daarvoor gebruik van de tabel voor $n = 2$ en de 102 sokken in de wasmand waaruit Fabio de derde sok kan kiezen.

k	1	3
$f_3(k) = P(\underline{k}_3 = k)$	$\frac{1}{103} + \frac{102}{103} \cdot \frac{2}{102} = \frac{3}{103}$	$\frac{102}{103} \cdot \frac{100}{102} = \frac{100}{103}$

Na de vorige stap ($n = 2$) liggen er 0 of 2 sokken op bed met kansen resp. $\frac{1}{103}$ en $\frac{102}{103}$ (zie de tabel voor $f_2(k)$).
Als er 0 sokken op het bed liggen (kans $\frac{1}{103}$) kan er door het kiezen van een nieuwe sok geen paar ontstaan dus de derde sok uit de wasmand belandt altijd op het bed (kans $\frac{1}{103}$).
Als er 2 sokken op het bed liggen (kans $\frac{102}{103}$) kan er door het kiezen van een nieuwe sok een paar ontstaan (kans $\frac{2}{103}$), of juist niet. Dat resulteert respectievelijk in 2-1=1 sok op het bed (kans $\frac{102}{103} \cdot \frac{2}{102}$) of 2+1=3 sokken op het bed (kans $\frac{102}{103} \cdot \frac{100}{102}$). Eén sok op het bed kan dus op twee manieren ontstaan. Dit levert de tabel hierboven.

$k = 1$ 2pt, $k = 3$ 2pt, rekenfout -1pt)

1c. [6pts] Bereken de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie voor $\underline{k}_6$. De kansfunctie $f_6(k)$ van $\underline{k}_6$ is in de tabel hieronder gegeven. Gebruik voor je berekening het antwoordformulier.

k	0	2	4	6
$f_6(k)$	0,0000	0,0043	0,1370	0,8587

k	0	2	4	6	Totaal
$f_6(k)$	0,0000	0,0043	0,1370	0,8587	1,0000
$kf_6(k)$	0	0,0086	0,548	5,1522	5,7088
$k^2 f_6(k)$	0	0,0172	2,192	30,9132	33,1224

$$E(\underline{k}_6) = 5{,}7988$$

$$\sigma(\underline{k}_6) = \sqrt{33{,}1224 - 5{,}7088^2} = 0{,}7294.$$

(Tabel 4pt, $E(\underline{k}_6)$ en $\sigma(\underline{k}_6)$ elk 1pt)

1d. [4pt] Leg uit hoe je aan de tabel van $f_6(k)$ hierboven kunt zien dat het inderdaad over een goedgedefinieerde kansfunctie gaat.

De kansen zijn allemaal ≥ 0 (ofwel: allemaal tussen 0 en 1) **2pt**
en de som van alle kansen is gelijk aan 1 (reken na) **2pt**

1e. [4pt] Bereken de verwachtingswaarden van $\underline{k}_0, \underline{k}_1, \underline{k}_2$, and $\underline{k}_3$.

$$E(\underline{k}_0) = 0 \cdot 1 = 0$$
$$E(\underline{k}_1) = 1 \cdot 1 = 1$$
$$E(\underline{k}_2) = 0 \cdot \frac{1}{103} + 2 \cdot \frac{102}{103} = \frac{2 \cdot 102}{103} = 1{,}9806$$
$$E(\underline{k}_3) = 1 \cdot \frac{3}{103} + 3 \cdot \frac{100}{103} = \frac{3 \cdot 101}{103} = 2{,}9417$$

(elk 1pt, rekenfout -1pt)

Na wat experimenteren heeft Fabio zich ervan overtuigd dat de algemene formule voor het gemiddeld aantal sokken dat na het kiezen van de n-de sok op het bed overblijft gelijk is aan

$$E(\underline{k}_n) = \frac{n(104 - n)}{103}$$

1f. [4pt] Bereken de minimale en de maximale waarde van het verwachte aantal sokken op het bed tijdens het SSR.

Als functie van n is dit een bergparabool met top in $n = 52$ (of gebruik differentiëren naar n)

Minimum is 0, als $n = 0$ of $n = 104$. **2pt**

Maximum (bergparabool) is $\frac{52^2}{103} = 26{,}2524$ als $n = 52$ **2pt**

1g. [4pt] Bereken $P(\underline{k}_{53} = 0)$, $P(\underline{k}_{53} = 53)$, and $P(\underline{k}_{53} = 51 \mid \underline{k}_{52} = 52)$. (Hint: Geen berekeningen nodig, alleen logisch nadenken).

$P(\underline{k}_{53} = 0)$ is de kans dat er na 53 sokken pakken geen sok op het bed ligt. Maar na een oneven aantal sokken pakken ligt er altijd minstens één sok op het bed, omdat sokken alleen per paar van het bed afgaan, dus $P(\underline{k}_{53} = 0) = 0$ **2pt**

Als er na 53 keer pakken 53 sokken op het bed liggen moet er minstens één passend paar bij zijn, want er zijn maar 52 verschillende sokken. Dit kan dus niet voorkomen:

$P(\underline{k}_{53} = 53) = 0$ **1pt**

$P(\underline{k}_{53} = 51 \mid \underline{k}_{52} = 52)$ is de kans dat er na het trekken van de 53^e sok er 51 sokken op het bed liggen, terwijl je weet dat er na de 52^e sok 52 sokken op het bed liggen. Dit laatste betekent dat je na 52 keer trekken telkens verschillende sokken hebt gepakt ander zouden er inmiddels sokken van het bed weg zijn. Van alle soorten (52) ligt er dus één op het bed. De volgende sok die gepakt wordt vormt dus altijd een paar met een sok op het bed, dus er moet dan gelden dat $\underline{k}_{53} = 51$. Dat betekent

$(\underline{k}_{53} = 51 \mid \underline{k}_{52} = 52) = 1$ **1pt**

Opgave 2 (Totaal 25 punten)

2a. [4pt] De kansvariabele $\underline{x}$ is uniform verdeeld op het interval $[-3{,}7]$. Bepaal $\mu(\underline{x})$ en $\sigma(\underline{x})$.

Voor de uniforme verdeling heb je formules voor μ en σ (formuleblad). Invullen ($a = -3, b = 7$) levert:

$$\mu = \frac{-3+7}{2} = 2$$
$$\sigma = \frac{7-(-3)}{\sqrt{12}} = \frac{10}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{3} = 2{,}8868$$

2+2pt, rekenfout -1pt

2b. [4pt] De kansvariabele $\underline{x}$ is normaal verdeeld met $\mu = 17$ en $\sigma = 2$. Bereken $E\left(\underline{y}\right)$ als $\underline{y} = 30 + 2\underline{x}$.

De kansvariabele $\underline{y} = 30 + 2\underline{x}$ is ook normaal verdeeld **1pt**
met $\mu = 30 + 2 \cdot 17 = 64$ **3pt, rekenfout -1pt**
en $\sigma = 2 \cdot 2 = 4$. Alleen de eerste heb je nodig: $E\left(\underline{y}\right) = \mu = 64$.

2c. [4pt] De kansvariabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn normaal verdeeld met $\mu = 5$ en $\sigma = 2$. Bereken $P\left(\underline{x} + \underline{y} \geq 11\right)$.

Het gaat vier over de som van twee kansverdelingen, dat is lastig, want zo'n kans kun je niet uitrekenen met de middelen die je nu hebt (daarvoor zou je een tweedimensionale integraal moeten uitrekenen). De truuk is dat je naar één kansvariabele zoekt, in dit geval de kansvariabele $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$. Die is ook normaal verdeeld met (rekenregels)
met $\mu = 5 + 5 = 10$ **1pt, rekenfout -1pt**
en $\sigma = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. **1pt, rekenfout -1pt**
$P\left(\underline{x} + \underline{y} \geq 11\right) = P\left(\underline{z} \geq 11\right) = \text{normalcdf}\left(11, 10^{10}, 10, \sqrt{8}\right) = 0{,}3618$

2pt, rekenfout -1pt

2d. [4pt] De kansvariabele $\underline{x}$ is normaal verdeeld met $\mu = 10$ en $\sigma = 3$ en de kansvariabele $\underline{y}$ is normaal verdeeld met $\mu = 8$ en $\sigma = 4$. Bereken de kans dat $\underline{x}$ groter is dan $\underline{y}$.

De kans dat $\underline{x}$ groter is dan $\underline{y}$ is lastig om uit te rekenen omdat het over twee kansverdelingen gaat. De truuk is weer om te proberen er één kansverdeling van te maken. De kans dat $\underline{x}$ groter is dan $\underline{y}$ is gelijk aan de kans dat $\underline{z} = \underline{x} - \underline{y}$ groter is dan 0. Het dus eigenlijk om één kansvariabele $\underline{z}$. De eigenschappen hiervan volgen uit die van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ m.b.v. de rekenregels:
De kansvariabele $\underline{z}$ is ook normaal verdeeld met
met $\mu = 10 - 8 = 2$ **1pt, rekenfout -1pt**
en $\sigma = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Let op, hier altijd een + teken **1pt, rekenfout -1pt**
$P\left(\underline{x} > \underline{y}\right) = P\left(\underline{z} > 0\right) = \text{normalcdf}(0, 10^{10}, 2, 5) = 0{,}6554$ **2pt, rekenfout -1pt**

2e. [4pt] De kansvariabele $\underline{k}$ is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en p is onbekend. Bereken p zodanig dat $P\left(\underline{k} > 80\right) = 0{,}31$.

$$P\left(\underline{k} > 80\right) = 1 - P\left(\underline{k} \leq 80\right) = 1 - \text{binomcdf}(n = 100, p?, k = 80) = 0{,}31$$

dus $\text{binomcdf}(n = 100, p?, k = 80) = 1 - 0{,}31 = 0{,}69$ **2pt, rekenfout -1pt**
Oplossen met de solver levert $p = 0{,}7839$. **2pt, rekenfout -1pt**

2f. [5pt] De continue kansvariabele $\underline{t}$ heeft als kansdichtheidfunctie

$$f(t) = \begin{cases} a(t^3+1) & \text{als} \quad 0 < t < 3 \\ 0 & \text{als} \quad t \leq 0 \text{ of } t \geq 3 \end{cases}$$

Bereken de waarde van a.

De waarde van a kun je halen uit het gegeven dat het om een kansdichtheidsverdeling gaat, dat betekent dat de oppervlakte onder de grafiek gelijk moet zijn aan 1: **2pt**

$$a \cdot \text{fnInt}(t^3+1\,, t=0\,, t=3) = 1$$

dus

$$a = \frac{1}{\text{fnInt}(t^3+1\,, t=0\,, t=3)} = \frac{1}{23{,}25} = 0{,}04301$$ **3pt, rekenfout -1pt**

Opgave 3 (Totaal 25 punten)

Bij een luchthaven wordt de paspoortcontrole verzorgd door de Koninklijke Marechaussee. Elke balie is bemand door twee marechaussees die beide controleren en de verwerkingscapaciteit per balie is gemiddeld 200 passagiers per uur.

De passagiers dienen zich aan volgens een Poisson-verdeling met $\mu = 14$ passagiers per minuut.

3a. [4pt] Bereken hoeveel balies er minimaal open moeten om te voorkomen dat de wachtrijen structureel gaan oplopen.

Marechaussee tijdens inwendig onder-zoek bij verdachte van drugssmokkel (1963).

Gemiddeld 14 passagiers per minuut, dat is 840 per uur. **1pt**
De capaciteit per balie is 200 passagiers per uur, dus 840/200 = 4,2 teams nodig, dus minimaal 5 balies moeten open zijn. **3pt**
Vier balies is niet genoeg, dan heb je 840/4 = 210 passagiers per uur per balie, dat is boven de capaciteit.

3b. [6pt] Bereken in de situatie van opgave **3a** de kans dat er zich bij een willekeurige balie in een bepaald kwartier meer dan 55 passagiers aandienen.

Voor elk van de vijf balies bieden zich per kwartier $\mu = 15 \cdot 14/5 = 42$ passagiers aan. **1pt**
Volgens de Poissonverdeling is de kans op meer dan 55 passagiers

$$P(\underline{k} > 55) = 1 - P(\underline{k} \leq 55) = 1 - \text{poissoncdf}(\mu = 42\,, k = 55) = 0{,}02228$$ **1+2+2pt**

De verwerkingscapaciteit van een balie is gesteld op gemiddeld 200 passagiers per uur. Dat betekent dat als er zich 200 passagiers mooi verspreid over een uur aandienen er normaal gesproken geen filevorming optreedt. Nu blijkt in de praktijk dat er zich door onregelmatigheden in het aanbodpatroon (Poissonverdeling) wel opstoppingen kunnen

voordoen. Die worden vaak over de loop van een uur gedeeltelijk weer opgelost, maar ze kunnen toch leiden tot wachttijden voor individuele passagiers.
In samenspraak met de commandant is afgesproken om het volgende model te gaan hanteren: De kans dat zich in een willekeurig kwartier meer dan 60 passagiers aandienen bij de balie (dat is 10 meer dan het gemiddelde van 200/4 = 50 passagiers) moet kleiner zijn dan 5%.

3c. [6pt] Bereken hoeveel passagiers zich gemiddeld per uur volgens een Poissonverdeling per balie mogen aanbieden zodat de kans dat zich in een willekeurig kwartier meer dan 60 passagiers aanbieden bij de balie steeds kleiner is dan 5%.
De worst-case is dan

$$P(\underline{k} > 60) = 1 - (\underline{k} \leq 60) = 1 - \text{poissoncdf}(\mu?\ , 60) = 0{,}05 \qquad \textbf{(2pt)}$$

Oplossen met de GR levert $\mu = 48{,}7464$ passagiers per kwartier per balie. **(4pt)**

3d. [4pt] Is er onder de voorwaarden van opgave 3c ruimte dat de marechaussees 5 minuten pauze per uur kunnen houden zonder dat de ontstane file in het volgende uur weggewerkt kan worden?
Volgens 3c komen er per uur per balie gemiddeld $48{,}7464 \times 4$ =194,9856 passagiers. **(1pt)**
Dit is 194,9856/200 = 0,9749 deel van de capaciteit. **(1pt)**
Gemiddeld blijven in een uur (1 - 0,9749)*60 = 1,5043 minuten onbenut. **(1pt)**
Dat is dus niet genoeg voor 5 minuten pauze. **(1pt)**

3e. [5pt] Bereken de kans dat er zich gedurende een minuut geen passagiers bij een balie aandienen.
Het verwachte aantal passagiers in een minuut per balie is $\mu = \frac{1}{5} \cdot 14 = 2{,}8$ (er zijn 5 balies open).
De kans dat er in 1 minuut 0 passagiers binnenkomen is dus

$$\text{Poissonpdf}(\mu = 2.8\,, k = 0) = 0{,}06081$$

Andere manier: De tijd tussen twee passagiers wordt beschreven door exp(λ), waarbij de tijd in minuten is en λ het aantal verwachte passagiers per minuut voor een balie, dus

$$\lambda = \frac{1}{5} \cdot 14 = 2{,}8$$

De kansfunctie is

$$F(t) = P(\underline{t} \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

De kans dat de eerstvolgende passagier minstens 1 minuut aankomt na de huidige is

$$P(\underline{t} > 1) = 1 - P(\underline{t} \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-2{,}8 \cdot 1}) = e^{-2{,}8} = 0{,}06081 \ldots$$

Opgave 4 (totaal 20 punten)

Mortiergranaat ongeval Mali spontaan op scherp: minister overweegt juridische stappen tegen fabrikant

Het ministerie van Defensie stelt na eigen onderzoek dat de mortiergranaat die in Mali een fataal ongeval veroorzaakte, onbedoeld eerder kon ontploffen. Bij het ongeluk kwamen twee Nederlandse militairen om het leven en raakte één militair gewond.

Nieuw, eigen onderzoek werpt volgens de krijgsmacht nieuw licht op de oorzaak van het ongeluk in de zomer van 2016. Daaruit blijkt dat er bij onderdelen van de mortiergranaat sprake was van 'onnauwkeurige maatvoering'. Het probleem zit in de ontsteker, het puntje van de mortiergranaat. Daarin zit een mechaniek dat op scherp wordt gezet als de mortiergranaat de buis waaruit die wordt afgeschoten verlaat. „Maar bij deze partij blijkt dat de ontsteker onbedoeld al eerder op scherp kan worden gesteld, waardoor de munitie kan ontploffen voor het doel bereikt is", legt een woordvoerder van het ministerie van Defensie uit.

Defensie deed het onderzoek omdat het na een vernietigend rapport van de Onderzoeksraad voor de Veiligheid (OVV) werd opgedragen om de elfduizend resterende 60 millimeter mortiergranaten te vernietigen. De OVV deed destijds ook onderzoek naar eventuele productiefouten. Daarin werd wel geconcludeerd dat het ontbreken van een 'dwarspin' kan leiden tot 'voortijdige wapening'. (Algemeen Dagblad 22-08-2019)

Uit nader onderzoek door de fabrikant blijkt dat de partij verdachte voorraad mortiergranaten van Nederland uit 112 verschillende productiebatches kan komen, waarbij in één productiebatch soms dwarspinnen kunnen ontbreken. Volgens de fabrikant is het niet nodig om alle 11.000 granaten te vernietigen, maar kan op grond van gewicht worden vastgesteld welke granaten mogelijk defect zijn. Hiertoe levert de fabrikant de onderstaande gegevens over het gemiddelde gewicht van een granaat en van de mogelijk ontbrekende dwarspin, met de standaarddeviaties daarin:

Gewicht mortiergranaat met dwarspin (gram):	**1314**
Standaarddeviatie daarin (gram):	**0,13**
Gewicht dwarspin (gram)	**0,5454**
Standaarddeviatie daarin (gram):	**0,05**

4a. [4pt] Bereken het gemiddelde gewicht van een mortiergranaat zonder dwarspin. Bereken ook de standaarddeviatie daarin.

Gemiddeld gewicht van een defecte granaat is $1314 - 0{,}5454 = 1313{,}4546$ gram. **2pt**

Standaarddeviatie $\sqrt{0{,}13^2 + 0{,}05^2} = 0{,}1393$ gram. **2pt**

Defecte granaten missen een pin en zijn lichter, dus het idee is om alle granaten onder een bepaald gewicht *g* te vernietigen. Gebruik voor *g* het gewicht precies midden tussen dat van een defecte en dat van een niet-defecte granaat, dus *g* is het gemiddelde van het gegeven gemiddelde gewicht van een granaat met dwarspin en het in **4a** berekende gemiddelde gewicht van een defecte granaat zonder dwarspin.

4b. [4pt] Bereken de kans dat met deze ***g*** een **niet-defecte** granaat ten onrechte wordt vernietigd.

De waarde van g is $g = (1314 + 1313{,}4546)/2 \; = \; 1313{,}7273$ gram. **1pt**

Een niet-defecte granaat heeft een gewicht van 1314 gram met een standaarddeviatie van 0,13. Zo'n granaat wordt ten onrechte vernietigd als hij een gewicht heeft onder de 1313,7273 gram. **1pt**

De kans daarop is $\mathrm{normalcdf}(-10^{10}\,, 1313.7273\,, 1314\,, 0.13) = 0{,}01797$. **2pt**

4c. [4pt] Bereken ook de kans dat met deze ***g*** een **defecte** granaat ten onrechte **niet** wordt vernietigd.

Een defecte granaat heeft een gemiddeld gewicht van 1313,4546 gram met een standaarddeviatie van 0,139. Zo'n granaat wordt ten onrechte niet vernietigd als hij een gewicht heeft boven de 1314,2727 gram. **1pt**

De kans daarop is $\mathrm{normalcdf}(1313.7273\,, 10^{10}\,, 1313.4546\,, 0.1393) = 0{,}02514$. **3pt**

4d. [4pt] Volgens de leverancier bevat de Nederlandse voorraad met zekerheid niet meer dan 100 mogelijk defecte granaten. De worst case situatie is dus dat er 100 defecte granaten zijn. Bereken hiervoor de kans dat met de bovenstaande procedure minstens één defecte granaat over het hoofd wordt gezien.

De kans dat een defecte granaat over het hoofd wordt gezien is 0,02514 (zie 4c) **1pt**

$$1 - (1 - 0{,}02514)^{100} = 0{,}9216$$ **3pt**

4e. [4pt] De kans die berekend is in **4d** wordt door de OVV veel te groot gevonden. Zij vinden een kans van hoogstens 0,001 acceptabel omdat het om levens kan gaan. Reken bij deze foutkans uit wat de kans om een defecte granaat over het hoofd te zien maximaal mag zijn.

Doe dezelfde berekening als in 4c, maar vervang de verkregen kans 0,9216 door de gevraagde kans 0,001, en de kans op over het hoofd zien van een defecte granaat 0,02514 door een onbekende p:

$$1 - (1 - p?)^{100} = 0{,}001$$ **1pt**

$$p = 1 - (1 - 0.001)^{\frac{1}{100}} = 1.0005 \cdot 10^{-5}$$ (of gebruik de solver) **3pt**

4f. [5pt BONUS] De veel hogere veiligheidseis uit **4e** zal leiden tot een hogere grenswaarde *g* en dus ook tot het vernietigen van meer niet-defecte granaten. Bereken *g*.

$\mathrm{normalcdf}(g?\,, 10^{10}\,, 1313.4546\,, 0.1393) = 1.0005 \cdot 10^{-5}$.

Dit levert op: $g = 1314{,}0487$

Reken uit hoeveel granaten naar verwachting onterecht vernietigd gaan worden.

De kans dat met deze waarde een intacte granaat wordt vernietigd is

$$\mathrm{normalcdf}(-10^{10}\,, 1314{,}0487\,, 1314\,, 0.13) = 0{,}6460$$

Naar verwachting worden $11.00 \times 0{,}6460 = 7106$ granaten onterecht vernietigd.

=== EINDE TENTAMEN ===