Introductie, deel II

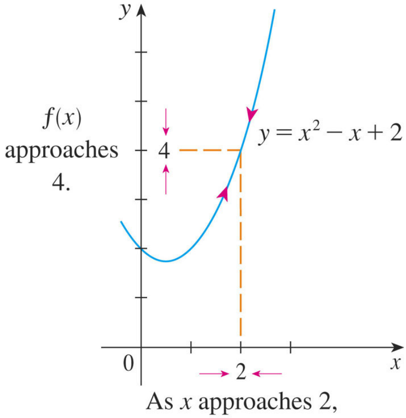
Dr. M. van Ee & Dr.ir. D.A.M.P. Blom

Analyse 1 (TAN1), collegejaar 2024-2025

24 april 2025

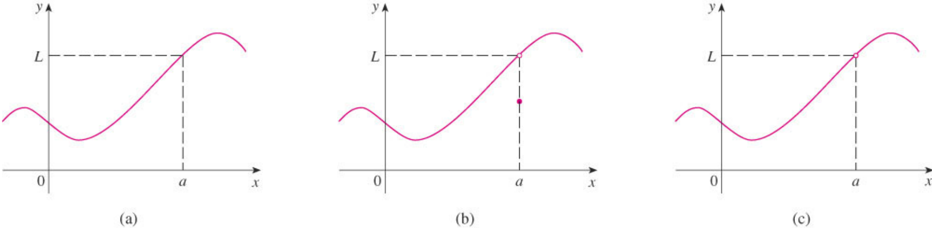
Wiskunde VWO m.b.t. Analyse

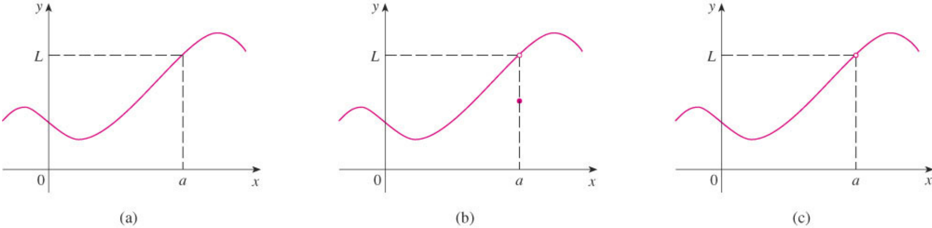
1. Functies en grafieken (Hoofdstuk 1 uit Stewart)
    - Wat is een functie?
    - Bijzondere functies
    - Het vormen van nieuwe functies uit bestaande functies
    - De inverse van een functie
2. Limieten (Hoofdstuk 2 en delen van Hoofdstuk 3 en 5 uit Stewart)
    - Wat is een limiet van een functie?
    - Linkerlimiet en rechterlimiet
    - Continuïteit
    - Limieten in oneindig
    - Differentiaal- en integraalrekening



"De limiet van $f(x)$ als x naar 2 gaat is 4."

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

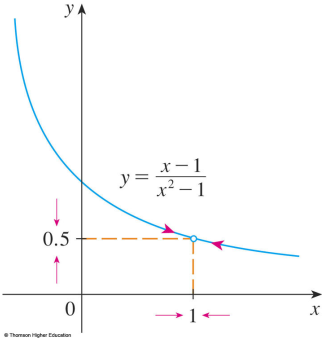

y
L
0
a
x
(a)
(b)
(c)



In alle gevallen is de limiet van $f(x)$ als x naar a gaat L.

De volgende functie $g(x)$ is niet gedefinieerd voor $x = -1$ en $x = 1$.

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

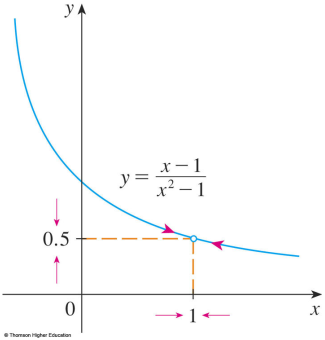


De volgende functie $g(x)$ is niet gedefinieerd voor $x = -1$ en $x = 1$.

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

De linkerlimiet is

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \frac{1}{2}$$



De volgende functie $g(x)$ is niet gedefinieerd voor $x = -1$ en $x = 1$.

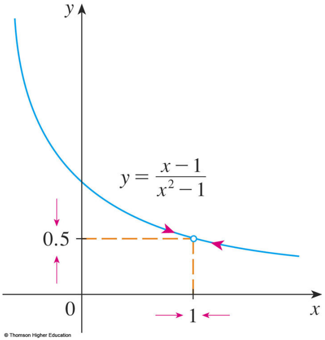
$$g(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

De linkerlimiet is

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \frac{1}{2}$$

en de rechterlimiet is

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \frac{1}{2}$$



De volgende functie $g(x)$ is niet gedefinieerd voor $x = -1$ en $x = 1$.

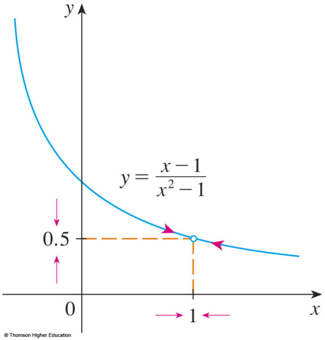
$$g(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

De linkerlimiet is

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \frac{1}{2}$$

en de rechterlimiet is

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \frac{1}{2}$$



De limiet van een functie $f(x)$ als x naar a gaat bestaat als de linker- en rechterlimiet bestaan en aan elkaar gelijk zijn. De gevraagde limiet is dan gelijk aan de linker- en rechterlimiet:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \frac{1}{2}$$

Een functie $f(x)$ is continu in het punt $x = a$ als $f(a)$ bestaat en

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Een functie $f(x)$ is linkscontinu in het punt $x = a$ als $f(a)$ bestaat en

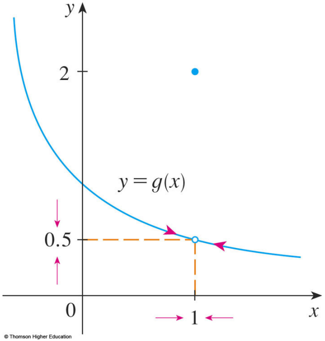
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Een functie $f(x)$ is rechtscontinu in het punt $x = a$ als $f(a)$ bestaat en

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

De volgende functie $g(x)$ is niet gedefinieerd voor $x = -1$ (maar wel voor $x = 1$).

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{als } x \neq 1 \\ 2 & \text{als } x = 1 \end{cases}$$



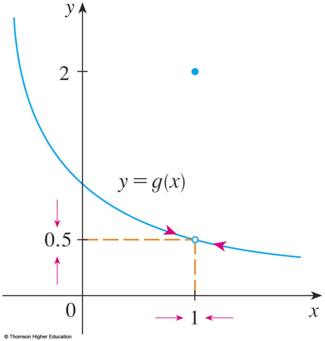
De volgende functie $g(x)$ is niet gedefinieerd voor $x = -1$ (maar wel voor $x = 1$).

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{als } x \neq 1 \\ 2 & \text{als } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \frac{1}{2}$$



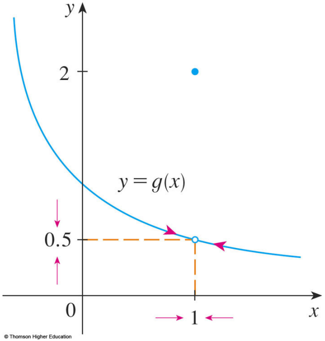
De volgende functie $g(x)$ is niet gedefinieerd voor $x = -1$ (maar wel voor $x = 1$).

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{als } x \neq 1 \\ 2 & \text{als } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \frac{1}{2}$$



De functie is niet continu in $x = 1$, want

$$\lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$$

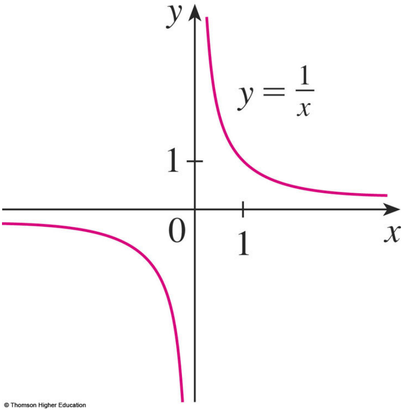
De volgende functie $g(x)$ is niet gedefinieerd voor $x = -1$ (maar wel voor $x = 1$).

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{als } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{als } x = 1 \end{cases}$$

Deze functie is wel continu in $x = 1$ (en in alle andere $x \neq -1$).

Maak opgave 52 op pagina 104, en opgave 43, 44 en 45 op pagina 125.

Limieten worden ook gebruikt bij horizontale en verticale assymptoten.



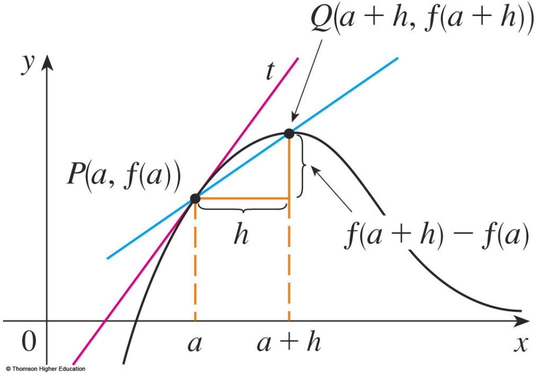
Voor $f(x) = \frac{1}{x}$ geldt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$$

Limieten zijn de grondslag voor de differentiaal- en integraalrekening.

De definitie van de afgeleide van een functie $f(x)$ in het punt $x = a$ is:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Voorbeeld: $f(x) = x^2$. De afgeleide van f in het punt $x = a$ is

Voorbeeld: $f(x) = x^2$. De afgeleide van f in het punt $x = a$ is

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a \end{aligned}$$

Voorbeeld: $f(x) = x^2$. De afgeleide van f in het punt $x = a$ is

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2a + h) = 2a \end{aligned}$$

Voorbeeld: $f(x) = x^3$. De afgeleide van f in het punt $x = a$ is

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2 \end{aligned}$$

In het algemeen geldt voor geheeltallige n:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

waarbij $\binom{n}{k}$ het aantal manieren is waarop er k elementen uit een verzameling van grootte n gekozen kunnen worden. Hierbij geldt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

In het algemeen geldt voor geheeltallige n:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

waarbij $\binom{n}{k}$ het aantal manieren is waarop er k elementen uit een verzameling van grootte n gekozen kunnen worden. Hierbij geldt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Voorbeeld: $f(x) = x^n$, met n geheeltallig. De afgeleide van f in het punt $x = a$ is

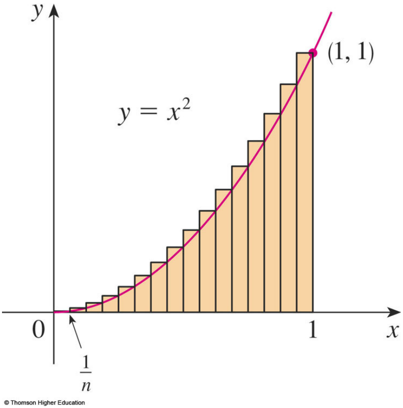
$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^n + na^{n-1}h + \ldots + h^n - a^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (na^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}) = na^{n-1}
\end{aligned}$$

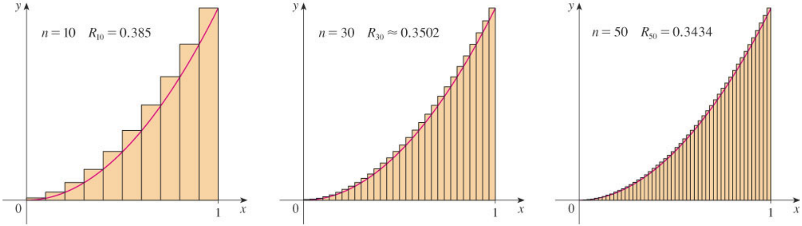
Voorbeeld: $f(x) = \sqrt{x}$. De afgeleide van f in het punt $x = a$ is

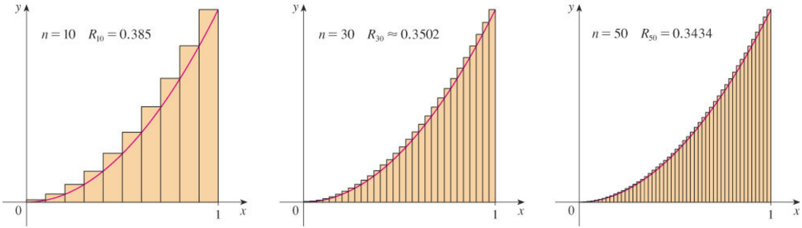
$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Bepaal de oppervlakte onder $f(x) = x^2$ tussen 0 en 1.

Stel dat we het interval $[0, 1]$ opknippen in n gelijke stukken met breedte Δx. Kies x_i^* in het interval $[(i-1)\Delta x, i\Delta x]$.




y
n = 10 R10 = 0.385
0
1
x
y
n = 30 R30 ≈ 0.3502
0
1
x
y
n = 50 R50 = 0.3434
0
1
x



We kunnen deze Riemann som exact bepalen.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3} i^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}
\end{aligned}$$

We kunnen deze Riemann som exact bepalen.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3} i^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\end{aligned}$$

We kunnen deze Riemann som exact bepalen.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3} i^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\end{aligned}$$

De oppervlakte onder $f(x) = x^2$ tussen 0 en 1 is:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

We kunnen deze Riemann som exact bepalen.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3} i^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\end{aligned}$$

De oppervlakte onder $f(x) = x^2$ tussen 0 en 1 is:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

Met deze definitie is het moeilijk om integralen uit te rekenen. Gelukkig hebben we de **Hoofdstelling van de Analyse**.

Hoofstelling van de Analyse, deel 1

Stel dat f continu is op het interval $[a, b]$, dan geldt voor de functie

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

dat $g'(x) = f(x)$.

Hoofstelling van de Analyse, deel 1

Stel dat f continu is op het interval $[a, b]$, dan geldt voor de functie

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

dat $g'(x) = f(x)$.

Bewijs:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt\right) \end{aligned}$$

Hoofstelling van de Analyse, deel 1

Stel dat f continu is op het interval $[a, b]$, dan geldt voor de functie

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

dat $g'(x) = f(x)$.

Bewijs: Op het interval zijn er waardes u en v met $f(u) = m$ en $f(v) = M$ zodanig dat:

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh$$

$$f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)$$

Als $h \to 0$, dan $u \to x$ en $v \to x$, en dus geldt $f(u) \to f(x)$ en $f(v) \to f(x)$. En dus geldt:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(t)dt \right) = f(x)$$

Hoofstelling van de Analyse, deel 2

Stel dat f continu is op het interval $[a,b]$, dan geldt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

waarbij $F' = f$.

Hoofstelling van de Analyse, deel 2

Stel dat f continu is op het interval $[a, b]$, dan geldt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

waarbij $F' = f$.

Bewijs: Laat

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Door deel 1 geldt $g'(x) = f(x) = F'(x)$. Hieruit volgt

$$F(x) = g(x) + C$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (g(b) + C) - (g(a) + C) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

Maak opgave 7, 10, 19, 31 en 34 op pagina 189, opgave 7 t/m 19 en 33 op pagina 206, en opgave 33, 34 en 37 op pagina 224. Lees verder Hoofdstuk 1 van de Maple-handleiding.