

Statistiek voor MBW / KW

Uitwerkingen huiswerkopgaven

Dr. ir. D.A.M.P. Blom & Dr. J.B.M. Melissen

2025

Week 2: discrete kansvariabelen

Hoofdstuk 3

Opdracht 3.11: Bij een exameninstituut voor rijexamens zijn drie examinatoren in dienst: Dirk, Judith en Ilse. Van alle kandidaten doet 40% examen bij Dirk, 40% doet examen bij Judith en 20% bij Ilse. Bekend is dat het slagingspercentage voor de drie examinatoren verschilt. Dat is 40% bij Dirk, 60% bij Judith en 70% bij Ilse.

- (a) Kandidaat Peter van der Meer gaat rijexamen doen bij een van de drie examinatoren. Hoe groot is de kans dat hij slaagt?

Uitwerking

Definieer de gebeurtenissen

- $S = \{\text{Peter slaagt}\}$
- $J = \{\text{Peter doet examen bij Judith}\}$
- $I = \{\text{Peter doet examen bij Ilse}\}$

Uit de vraag volgt dan dat $P(D) = 0,4$, $P(J) = 0,4$ en $P(I) = 0,2$, evenals de conditionele kansen $P(S|D) = 0,4$, $P(S|J) = 0,6$ en $P(S|I) = 0,7$. In dat geval is de kans dat Peter slaagt gelijk aan

$$\begin{aligned}P(S) &= P(S|D) \cdot P(D) + P(S|J) \cdot P(J) + P(S|I) \cdot P(I) \\&= 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,2 \\&= 0,54\end{aligned}$$

Peter slaagt dus met 54% kans voor zijn rijexamen.

- (b) Kandidaat Peter blijkt geslaagd te zijn. Hoe groot is de kans dat hij examen heeft afgelegd bij Ilse?

Uitwerking

In dit geval willen we de kans $P(I|S)$ bepalen. Uit de regel van Bayes volgt dan:

$$P(I|S) = \frac{P(S|I) \cdot P(I)}{P(S)} = \frac{0,7 \cdot 0,2}{0,54} \approx 0,2593$$

Met 25,93% kans heeft Peter zijn examen afgelegd bij Ilse, gegeven dat hij

is geslaagd.

Sommige gezakte kandidaten dienen een klacht in over het examen. Op basis van ervaring weten we dat 10% van de gezakten van examinator Dirk een klacht indient. Bij Judith is dat 6% en bij Ilse is dat 3%.

- (d) Er komt een klacht binnen over het examen zonder vermelding van de naam van de examinator. Hoe groot is de kans dat de klacht over Dirk gaat?

Uitwerking

De relatieve frequenties van combinaties van examinatoren en al dan niet geslaagd zijn als volgt:

Examinator	wel geslaagd	niet geslaagd	Totaal
Dirk	40% van 40% = 16%	60% van 40% = 24%	40%
Judith	60% van 40% = 24%	40% van 40% = 16%	40%
Ilse	70% van 20% = 14%	30% van 20% = 6%	20%
Totaal	54%	46%	100%

Het percentage deelnemers dat zakt en een klacht over Dirk instuurt is dus 10% van 24% = 2,4%. Daarnaast is het percentage deelnemers dat zake en een klacht instuurt (over alle examinatoren) gelijk aan

$$0,1 \cdot 0,24 + 0,06 \cdot 0,16 + 0,03 \cdot 0,06 = 0,0354 \rightarrow 3,54\%$$

De kans dat een klacht over Dirk gaat is dus gelijk aan $\frac{2,4}{3,54} \approx 0,68 \rightarrow 68\%$.

Opdracht 3.24: In een fabriek wordt de kwaliteit gecontroleerd van de uitgaande producten. De employé die de controle verrichtte, blijkt 1% van alle goede producten af te keuren en verder keurt hij 5% van alle slechte producten goed. De totale productie bestaat voor 90% uit goede producten.

- (a) Bereken de kans dat een willekeurig product goed is en wordt goedgekeurd.

Uitwerking

We zetten de relatieve frequenties even in een tabel:

	Goedgekeurd	Afgekeurd	Totaal
Goed product	99% van 90% = 89,1%	1% van 90% = 0,9%	90%
Slecht product	5% van 10% = 0,5%	95% van 10% = 9,5%	10%
Totaal	89,6%	10,4%	100%

Aflezen uit de cel voor “goed product” en “goedgekeurd” geeft een kans van 89,1% $\rightarrow 0,891$.

- (b) Hoe groot is de kans dat de controleur voor een willekeurig product de verkeerde beslissing neemt?

Uitwerking

Deze kans kunnen we opnieuw aflezen uit de tabel, namelijk de som van de cellen (“goed product”, “afgekeurd”) en (“slecht product”, “goedgekeurd”). Dit geeft een kans van $0,9\% + 0,5\% = 1,4\% \rightarrow 0,014$.

- (c) Hoe groot is het percentage goedgekeurde producten dat de fabriek verlaat?

Uitwerking

Deze kans kunnen we opnieuw aflezen uit de tabel, namelijk het kolomtotaal voor de kolom “goedgekeurd”. Hieruit volgt dat 89,6% van de producten wordt goedgekeurd.

Hoofdstuk 4

Opdracht 4.m1: We besluiten driemaal een muntstuk op te gooien en we tellen het aantal malen dat de uitkomst “kop” verschijnt. Dit aantal malen “kop” ...

- (a) is geen kansvariabele, omdat de uitkomsten “kop” en “munt” geen getallen zijn.
- (b) is een continue kansvariabele, omdat dit spelletje eindeloos vaak kan worden herhaald.
- (c) laat altijd een waarde tussen 1 en 3 zien.
- (d) is een discrete variabele, omdat slechts eindig veel uitkomsten hiervoor mogelijk zijn.

Uitwerking

Het juiste antwoord is (d)

Opdracht 4.m2: Voor de populatie Nederlandse hbo-studenten is vastgesteld dat het aantal verschillende statistiekboeken waaruit zij wel eens hebben gestudeerd, kan worden beschreven door een kansvariabele X die in de volgende tabel is weergegeven

Aantal boeken (k)	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05

De kans dat een willekeurige student heeft gestudeerd uit minstens twee statistiekboeken is daardoor gelijk aan ...

- (a) 0,30
- (b) 0,85
- (c) 0,45
- (d) 0,15

Uitwerking

Het juiste antwoord is (c)

Opdracht 4.m3: Een kansvariabele X kan n verschillende waarden aannemen, namelijk k_1, k_2, \dots, k_n . Voor de kansfunctie van de variabele X moet dan gelden:

$$\sum f(k) = \sum P(X = k) = \dots$$

- (a) 0
- (b) 1
- (c) $\frac{1}{n}$
- (d) n

Uitwerking

Het juiste antwoord is (b)

Opdracht 4.m4: Van de kansvariabele X is de verdelingsfunctie als volgt:

Uitkomst k	10	11	12	13	14	15	16
$F(k)$	0,16	0,28	0,46	0,66	0,84	0,94	1,00

Bereken $P(X = 14)$. Wat is de uitkomst?

- (a) 0,18
- (b) 0,84
- (c) 0,10
- (d) 0,16

Uitwerking

Het juiste antwoord is (a)

Opdracht 4.m5: Het aantal koelkasten dat wekelijks wordt verkocht op de afdeling “witgoed” van een supermarkt, kan worden weergegeven door de kansvariabele X waarvan de kansfunctie is weergegeven in de volgende tabel:

Aantal uitkomsten k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,25	0,40	0,20	0,10	0,05

De standaarddeviatie van de variabele X bedraagt dus ...

- (a) 1,3 koelkasten
- (b) 1,1 koelkasten
- (c) 0,93 koelkasten
- (d) 1,21 koelkasten

Uitwerking

Het juiste antwoord is (b)

Opdracht 4.3: Gegeven is dat een kansvariabele X alleen de waarden 10, 20, 30 en 40 kan aannemen.

(a) Verifieer voor de volgende vier gevallen of de geformuleerde waarden van $f(k)$ zodanig zijn dat f als een kansfunctie kan worden beschouwd.

(A) $f(10) = 0,30$; $f(20) = 0,40$; $f(30) = 0,10$ en $f(40) = 0,10$.

(B) $f(10) = 0,50$; $f(20) = 0,30$; $f(30) = 0,30$ en $f(40) = 0,10$.

(C) $f(10) = 0,05$; $f(20) = 0,05$; $f(30) = 0,10$ en $f(40) = 0,80$.

(D) $f(10) = 0,00$; $f(20) = 0,00$; $f(30) = 1,00$ en $f(40) = 0,00$.

Uitwerking

Om een kansfunctie te zijn moeten alle waarden voor $f(k)$ kansen zijn, dus getallen tussen 0 en 1. Verder moet de som van alle kansen gelijk zijn aan 1. Dit is alleen het geval voor C en D.

(b) Kansen kunnen ook worden weergegeven door de cumulatieve kansfunctie (verdelingsfunctie) $F(k)$. Geef voor de kansfunctie zoals beschreven bij punt C de verstrekte informatie weer door middel van $F(k)$.

Uitwerking

We beschreven F , de cumulatieve verdelingsfunctie (CDF), door middel van een tabel:

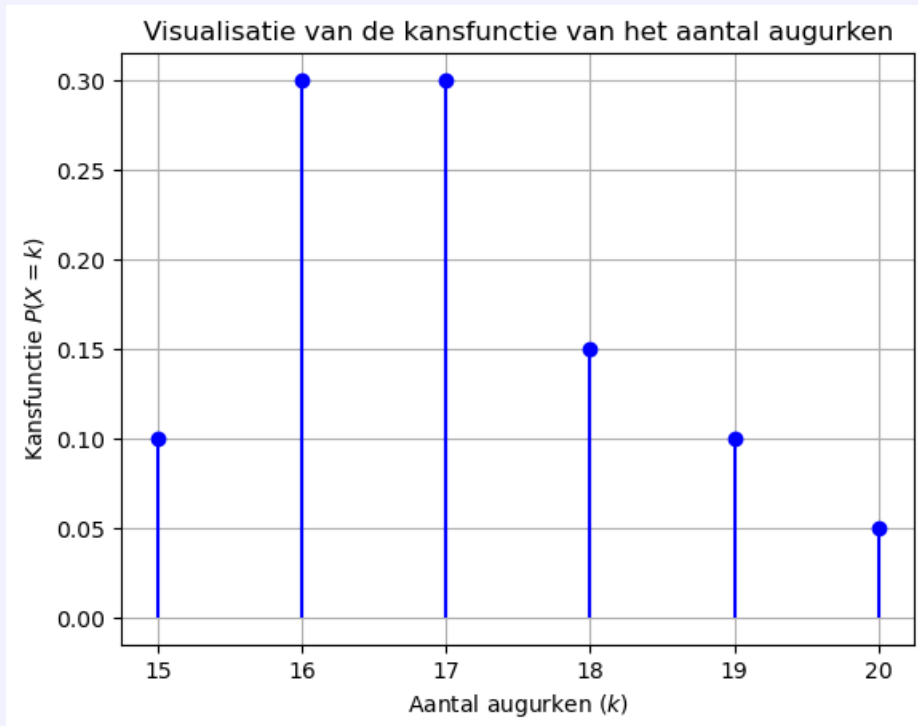
Uitkomst k	10	20	30	40
$F(k) = P(X \leq k)$	0,05	0,10	0,20	1,00

Opdracht 4.4: Het aantal augurken dat in een halveliterpot zit, blijkt enigszins te variëren. Uitvoerig onderzoek heeft aangetoond dat dit aantal tussen 15 en 20 ligt, waarbij de volgende kansen van toepassing zijn:

Aantal augurken k	15	16	17	18	19	20
$P(X = k)$	0,10	0,30	0,30	0,15	0,10	0,05

(a) Teken de kansfunctie

Uitwerking



(b) Bereken en teken de cumulatieve kansfunctie.

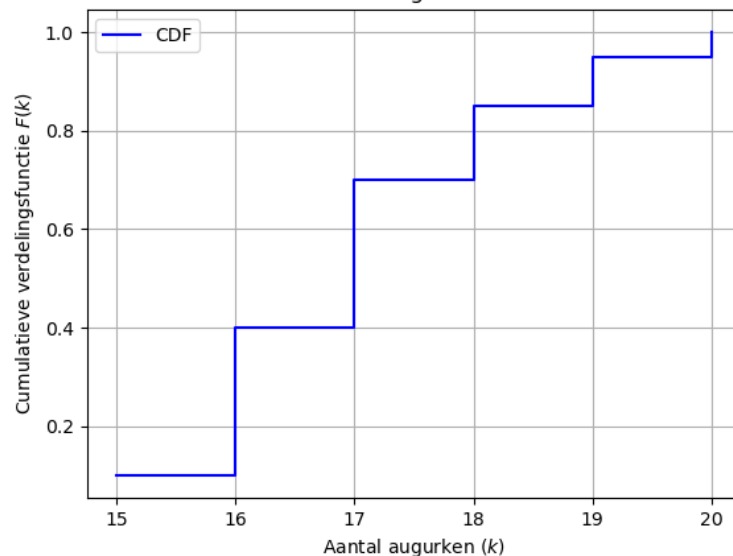
Uitwerking

We beschreven F , de cumulatieve verdelingsfunctie (CDF), door middel van een tabel:

Aantal augurken k	15	16	17	18	19	20
$F(k) = P(X \leq k)$	0,10	0,40	0,70	0,85	0,95	1,00

In een grafiekvorm ziet dit er als volgt uit:

Visualisatie van de cumulatieve verdelingsfunctie van het aantal augurken



- (c) Hoe groot is de kans om in een willekeurige pot meer dan 16 maar minder dan 20 augurken aan te treffen?

Uitwerking

We willen de kans $P(16 < X < 20)$ bepalen. Omdat we met een discrete verdeling werken, kunnen we die als volgt berekenen:

$$P(16 < X < 20) = P(17 \leq X \leq 19) = F(19) - F(16) = 0,95 - 0,40 = 0,55.$$

- (d) Er worden twee willekeurige potten augurken geselecteerd. Hoe groot is de kans dat beide potten meer dan 18 augurken bevatten?

Uitwerking

Als er twee willekeurige potten geselecteerd zijn, dan geldt dat beide met kans $P(X > 18) = 1 - P(X \leq 18) = 1 - 0,85 = 0,15$ meer dan 18 augurken bevatten. Omdat de potten onafhankelijk van elkaar gevuld zijn, is de totale kans gelijk aan $0,15 \cdot 0,15 = 0,0225$.

- (e) Hoe groot is de kans dat twee willekeurige potten augurken in totaal 38 augurken bevatten.

Uitwerking

Laat nu X_1 het aantal augurken zijn in pot 1, en X_2 het aantal augurken in

pot 2. We willen de kans $P(X_1 + X_2 = 38)$ bepalen. Dit doen we als volgt:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 38) &= P(X_1 = 18, X_2 = 20) + P(X_1 = 19, X_2 = 19) \\ &\quad + P(X_1 = 20, X_2 = 18) \\ &= 0,15 \cdot 0,05 + 0,10 \cdot 0,10 + 0,05 \cdot 0,15 \\ &= 0,025. \end{aligned}$$

Met 2,5% kans is het totaal aantal augurken in twee willekeurige potten samen gelijk aan 38.

Opdracht 4.6: Bij een schoolreisje worden vier bussen gebruikt met elk een eigen chauffeur. Van de in totaal 130 leerlingen hebben deze bussen respectievelijk 45, 35, 30 en 20 leerlingen vervoerd.

- (a) Op basis van toeval kiest men één van de vier chauffeurs. Men vraagt aan de chauffeur hoe groot X is, het aantal leerlingen in zijn bus. Bereken $E[X]$.

Uitwerking

X is het aantal leerlingen in de bus van een willekeurige chauffeur. De onderliggende kansverdeling is dan

Aantal leerlingen k	20	30	35	45
$P(X = k)$	0,25	0,25	0,25	0,25

Het is immers zo dat ieder van de vier chauffeurs gekozen wordt met kans $\frac{1}{4}$. De verwachtingswaarde $E[X]$ is dan

$$E[X] = \sum_k k \cdot P(X = k) = 20 \cdot 0,25 + 30 \cdot 0,25 + 35 \cdot 0,25 + 45 \cdot 0,25 = 32,5.$$

- (b) Op basis van toeval kiest men één van de 130 leerlingen en vraagt aan hem of haar hoeveel leerlingen Y er in de bus zaten waarmee deze leerling werd vervoerd. Bereken $E[Y]$.

Uitwerking

X is het aantal leerlingen in de bus van een willekeurige leerling. Het totaal aantal leerlingen is $20 + 30 + 35 + 45 = 130$. De onderliggende kansverdeling is dan

Aantal leerlingen k	20	30	35	45
$P(Y = k)$	$\frac{20}{130}$	$\frac{30}{130}$	$\frac{35}{130}$	$\frac{45}{130}$

Het is immers zo dat de kans op een uitkomst evenredig is met het aantal leerlingen dat in een bus met een aantal leerlingen zit. De verwachtings-

waarde $E[Y]$ is dan

$$E[Y] = \sum_k k \cdot P(Y = k) = 20 \cdot \frac{20}{130} + 30 \cdot \frac{30}{130} + 35 \cdot \frac{35}{130} + 45 \cdot \frac{45}{130} = 35.$$

Opdracht 4.7: Het aantal personen dat in een willekeurig uur opbelt naar de klantenservice van een groot bedrijf, wordt beschreven door de kansvariabele X , waarvan de gegevens zijn geplaatst in de volgende tabel:

Aantal k	0	1	2	3	4	5
$f(k) = P(X = k)$	0,20	0,30	0,20	0,15	0,10	0,05

(a) Hoe groot is $P(X \geq 3)$ en $P(X \leq 3)$

Uitwerking

We berekenen deze kansen als volgt:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0,15 + 0,10 + 0,05 = 0,30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= 1 - P(X \geq 4) \\ &= 1 - (P(X = 4) + P(X = 5)) \\ &= 1 - (0,10 + 0,05) \\ &= 1 - 0,15 = 0,85 \end{aligned}$$

(b) Bereken de verwachtingswaarde van X .

Uitwerking

We berekenen de verwachtingswaarde van X als volgt:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_k k \cdot P(X = k) \\ &= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + \dots + 5 \cdot P(X = 5) \\ &= 0 \cdot 0,20 + 1 \cdot 0,30 + \dots + 5 \cdot 0,05 \\ &= 1,8 \end{aligned}$$

(c) Bereken de standaarddeviatie van X .

Uitwerking

We berekenen de standaarddeviatie van X door eerst de variantie te bere-

kenen:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k) \\ &= (0 - 1,8)^2 \cdot P(X = 0) + (1 - 1,8)^2 \cdot P(X = 1) + \dots \\ &\quad + (5 - 1,8)^2 \cdot P(X = 5) \\ &= (0 - 1,8)^2 \cdot 0,20 + (1 - 1,8)^2 \cdot 0,30 + \dots + (5 - 1,8)^2 \cdot 0,05 \\ &= 2,06\end{aligned}$$

De standaarddeviatie vinden we dan door de wortel uit de variantie te nemen:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{2,06} \approx 1,4353$$

Opdracht 4.9: Een huiseigenaar in Amsterdam besluit drie kamers te huur aan te bieden via Airbnb. Het dagelijks aantal verhuurde kamers op een willekeurige dag kan worden weergegeven door de kansvariabele X , zoals weergegeven in de tabel:

Aantal boekingen	$P(X = k)$
0	0,50
1	0,25
2	0,15
3	0,10
Totaal	1,00

- (a) Hoe groot is de kans dat op een willekeurige dag minstens twee kamers zijn verhuurd.

Uitwerking

We berekenen deze kans als volgt:

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0,15 + 0,10 \\ &= 0,25\end{aligned}$$

- (b) De aantallen boekingen op twee opeenvolgende dagen kan men beschouwen als onderling onafhankelijke kansvariabelen. Maak een kanstabel voor de variabele X_{som} waarmee het totaal aantal boeking per twee dagen wordt aangegeven. Hoe groot is de kans dat in twee dagen meer dan 3 boekingen plaatsvinden?

Uitwerking

De kanstabel voor de somvariabele X_{som} ziet er als volgt uit:

Aantal boekingen	$P(X_{\text{som}} = k)$
0	0,25
1	0,25
2	0,2125
3	0,175
4	0,0725
5	0,03
6	0,01
Totaal	1,00

De kans dat er in twee dagen meer dan 3 boekingen plaatsvinden is dus gelijk aan:

$$\begin{aligned}
 P(X_{\text{som}} > 3) &= P(X_{\text{som}} = 4) + P(X_{\text{som}} = 5) + P(X_{\text{som}} = 6) \\
 &= 0,0725 + 0,03 + 0,01 \\
 &= 0,1125
 \end{aligned}$$

Opdracht 4.12: Een doe-het-zelfzaak verhuurt apparaten waarmee oud behang van een muur kan worden afgestoomd. De vraag per dag naar dergelijke apparaten kan worden weergegeven door een kansvariabele X die de volgende waarden aanneemt:

Aantal gevraagde machines (k)	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,20	0,35	0,25	0,20

(a) Bereken de verwachtingswaarde van het aantal gevraagde machines.

Uitwerking

We berekenen deze verwachtingswaarde van het aantal gevraagde machines X als volgt:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_k k \cdot P(X = k) \\
 &= 0 \cdot P(X = 0) + \dots + 3 \cdot P(X = 3) \\
 &= 0 \cdot 0,20 + 1 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,20 \\
 &= 1,45
 \end{aligned}$$

(b) De bedrijfsleiding vraagt zich af hoeveel machines in voorraad moeten worden gehouden om aan de (onzekere) vraag te kunnen voldoen. Het beschikbaar hebben van zo'n apparaat kost 4 euro per dag, terwijl de huurprijs 6 euro per dag bedraagt. Bereken de opbrengst per dag Y indien twee apparaten beschikbaar zijn bij de verschillende waarden van X . Doe dit ook bij drie beschikbare apparaten. Bereken voor beide gevallen de verwachtingswaarde van Y . Welke beslissing levert de hoogste verwachtingswaarde.

Uitwerking

Indien er twee apparaten beschikbaar zijn, beschrijft de volgende tabel de opbrengsten per dag. De opbrengsten zijn berekend op basis van opbrengst is huurinkomsten minus beschikbaarheidskosten.

Aantal gevraagde machines (k)	0	1	2	3
Opbrengst ℓ	-8	-2	4	4
$P(X = k)$	0,20	0,35	0,25	0,20

De verwachte opbrengst bij twee beschikbare apparaten is dus

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{\ell} \ell \cdot P(X = k) \\ &= -8 \cdot P(X = 0) + \dots + 4 \cdot P(X = 3) \\ &= -8 \cdot 0,20 + -2 \cdot 0,35 + 4 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,20 \\ &= -0,5 \end{aligned}$$

Indien er drie apparaten beschikbaar zijn, beschrijft de volgende tabel de opbrengsten per dag.

Aantal gevraagde machines (k)	0	1	2	3
Opbrengst ℓ	-12	-6	0	6
$P(X = k)$	0,20	0,35	0,25	0,20

De verwachte opbrengst bij twee beschikbare apparaten is dus

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{\ell} \ell \cdot P(X = k) \\ &= -12 \cdot P(X = 0) + \dots + 6 \cdot P(X = 3) \\ &= -12 \cdot 0,20 + -6 \cdot 0,35 + 0 \cdot 0,25 + 6 \cdot 0,20 \\ &= -3,3 \end{aligned}$$

De beslissing om twee apparaten beschikbaar te hebben levert dus naar verwachting de hoogste opbrengst op.

Opdracht 4.13: In een bedrijf staat een aantal machines opgesteld die soms vanwege een storing moeten worden stilgelegd. Op grond van ervaring is vastgesteld dat het aantal storingen X per week in de kanstabel wordt beschreven.

Aantal storingen (k)	$P(X = k)$
0	0,50
1	0,26
2	0,12
3	0,08
4	0,04
Totaal	1,00

- (a) Bereken het verwachte aantal storingen per week.

Uitwerking

Het verwachte aantal storingen per week berekenen we als volgt:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_k k \cdot P(X = k) \\
 &= 0 \cdot P(X = 0) + \dots + 4 \cdot P(X = 4) \\
 &= 0 \cdot 0,50 + 1 \cdot 0,26 + 2 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,08 + 4 \cdot 0,04 \\
 &= 0,9
 \end{aligned}$$

- (b) Bereken de variantie van het aantal storingen per week.

Uitwerking

Het variantie van het aantal storingen per week berekenen we als volgt:

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k) \\
 &= (0 - 0,9)^2 \cdot P(X = 0) + \dots + (4 - 0,9)^2 \cdot P(X = 4) \\
 &= (0 - 0,9)^2 \cdot 0,50 + \dots + (4 - 0,9)^2 \cdot 0,04 \\
 &= 0,81 \cdot 0,50 + \dots + 9,61 \cdot 0,04 \\
 &\approx 1,29
 \end{aligned}$$

- (c) Bereken het verwachte aantal storingen per jaar (=50 weken).

Uitwerking

We kunnen het aantal storingen in 50 weken zien als de som X_{som} van 50 onderling onafhankelijke kansvariabelen X_1, X_2, \dots, X_{50} . Aangezien de verwachtingswaarde een lineaire functie is, geldt er dat:

$$\begin{aligned}
 E[X_{\text{som}}] &= E[X_1 + X_2 + \dots + X_{50}] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_{50}] \\
 &= 0,9 + 0,9 + \dots + 0,9 \\
 &= 50 \cdot 0,9 = 45
 \end{aligned}$$

- (d) Een storing kost het bedrijf aan reparatie en gemiste productie €500 per geval. Bereken de verwachte storingskosten per jaar.

Uitwerking

De verwachte storingskosten per jaar berekenen we simpelweg door het verwachte aantal storingen per jaar te vermenigvuldigen met de kosten per storing, oftewel $45 \cdot €500 = €22500$.

(e) Bereken de standaarddeviatie van het aantal storingen per jaar.

Uitwerking

Aangezien de wekelijkse aantallen storingen onderling onafhankelijke kansvariabelen zijn, geldt

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_{\text{som}}) &= \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_{50}) \\ &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_{50}) \\ &= 1,29 + 1,29 + \dots + 1,29 \\ &= 50 \cdot 1,29 \\ &= 64,5\end{aligned}$$

De standaarddeviatie van het aantal storingen per jaar vinden we door de wortel hiervan te nemen:

$$\sigma(X_{\text{som}}) = \sqrt{\text{Var}(X_{\text{som}})} = \sqrt{64,5} \approx 8,03$$