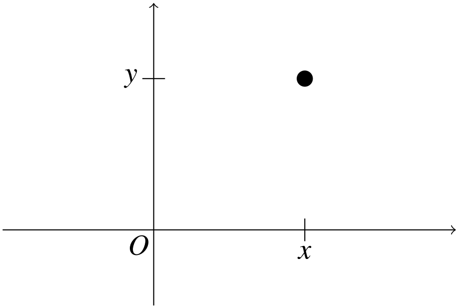
Complexe Getallen: Machten

Dr. M. van Ee & Dr.ir. D.A.M.P. Blom

Analyse 1 (TAN1), collegejaar 2024-2025

2 mei 2025

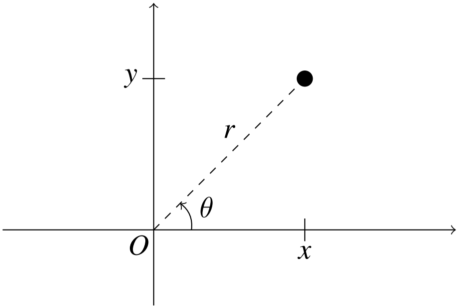
“Gewone” vlakke meetkunde



Een punt in het vlak kan worden weergegeven met

- Cartesische coördinaten: (x, y)

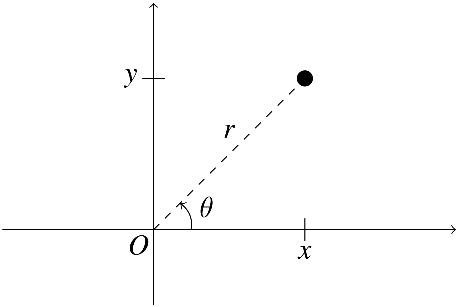
“Gewone” vlakke meetkunde



Een punt in het vlak kan worden weergegeven met

- Cartesische coördinaten: (x, y)
- Poolcoördinaten: (r, θ)

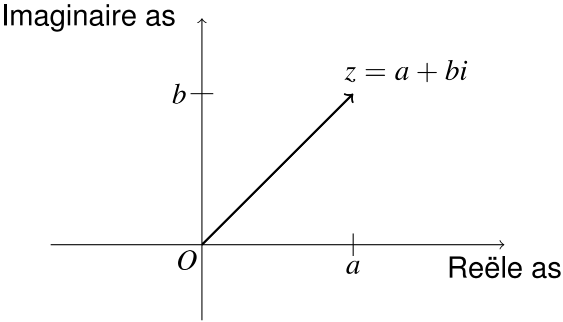
r heet de voerstraal, θ heet de poolhoek.

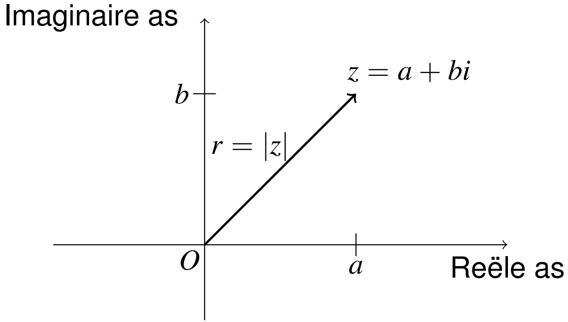


Het verband tussen de Cartesische coördinaten (x, y) en de poolcoördinaten (r, θ) is gegeven door

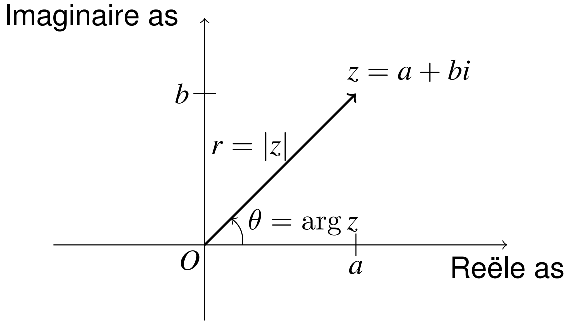
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$


Imaginaire as
$z = a + bi$
b
O
a
Reeële as



Straal is gelijk aan **modulus**, i.e., $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Straal is gelijk aan **modulus**, i.e., $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Voor $z \neq 0$ is het **argument** van z, notatie $\arg z$, de hoek die gedefinieerd is door:

$$\cos(\arg z) = \frac{a}{|z|}\ ,\ \sin(\arg z) = \frac{b}{|z|} \quad \text{en} \quad 0 \leq \arg z < 2\pi.$$

Ieder complex getal $z \neq 0$ kan worden geschreven in de vorm

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)),$$

Herschrijf $z = -1 + \sqrt{3}\, i$ in de vorm $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$.

Maak opgaven 25 en 26 van “Complex numbers” (pagina 7).

Text-modus

```
> argument(1+I);
```

$$\frac{1}{4}\pi$$

```
> readlib(polar): polar(1+I);
```

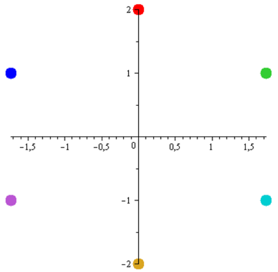
$$\mathrm{polar}\left(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi\right)$$

```
> evalc(polar(4,Pi/3));
```

$$2 + 2\,I\sqrt{3}$$

Text-modus

```
> with(plots): complexplot({polar(2,1/6*Pi),
  polar(2,3/6*Pi), polar(2,5/6*Pi), polar(2,7/6*Pi),
  polar(2,9/6*Pi), polar(2,11/6*Pi)},x=-3..3,
  style=point, symbol = solidcircle, symbolsize =
  32);
```



Math-modus

> $\mathrm{argument}(1 + I);$

$$\frac{1}{4}\pi$$

> $\mathit{readlib}(\mathrm{polar}) : \mathrm{polar}(1 + I);$

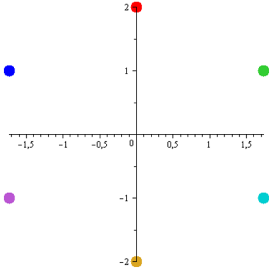
$$\mathrm{polar}\left(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi\right)$$

> $\mathit{evalc}\left(\mathrm{polar}\left(4, \frac{\pi}{3}\right)\right);$

$$2 + 2I\sqrt{3}$$

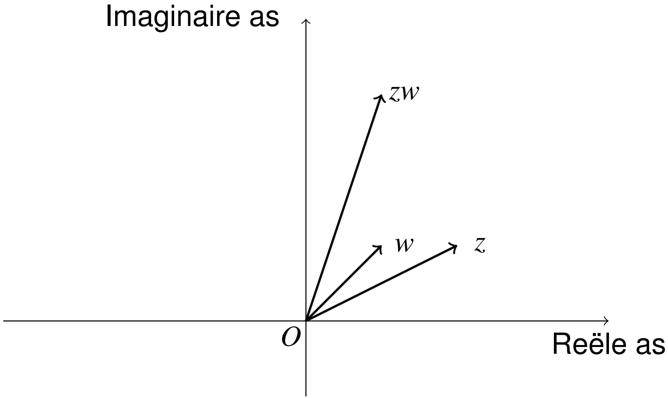
Math-modus

$$> with(plots):complexplot\left(\left\{\operatorname{polar}\left(2,\frac{1}{6}\cdot\pi\right),\operatorname{polar}\left(2,\frac{3}{6}\cdot\pi\right),\operatorname{polar}\left(2,\frac{5}{6}\cdot\pi\right),\operatorname{polar}\left(2,\frac{7}{6}\cdot\pi\right),\operatorname{polar}\left(2,\frac{9}{6}\cdot\pi\right),\operatorname{polar}\left(2,\frac{11}{6}\cdot\pi\right)\right\},x=-3..3,style=point,symbol=solidcircle,symbolsize=32\right);$$



Stel $z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$ en $w = |w|(\cos(\arg w) + i\sin(\arg w))$, dan is

$$zw = |z||w|(\cos(\arg z + \arg w) + i\sin(\arg z + \arg w)).$$



Formule van De Moivre

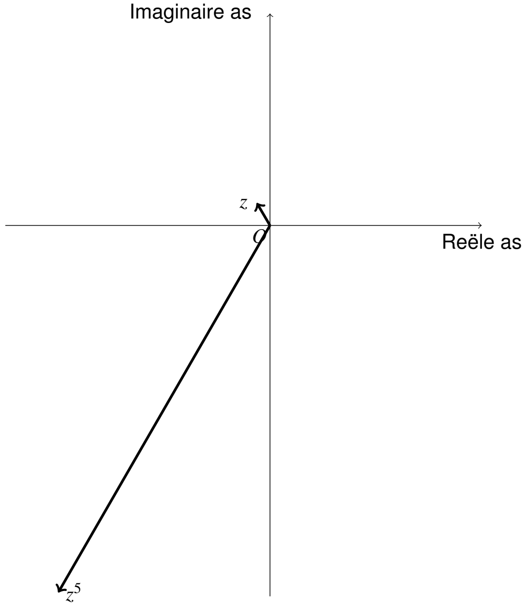
Voor alle gehele getallen $n \geq 0$ en alle reële getallen θ geldt:

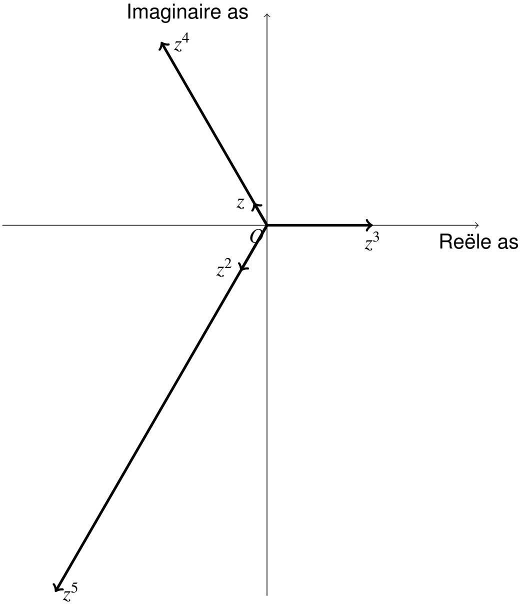
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Gevolg: als $z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$, en n is geheel getal, dan

$$z^n = |z|^n(\cos(n\arg z) + i\sin(n\arg z))$$

Opdracht: gegeven is $z = -1 + \sqrt{3}\,i$. Schrijf z^5 in de vorm $a + bi$.


Imaginaire as
z
O
Reële as
z^5


Imaginaire as
z^4
z
O
z^3
Reeële as
z^2
z^5

Maak opgaven 33 en 35 van “Complex numbers” (pagina 7).

Kun je getallen ook tot een complexe macht verheffen?

Kun je getallen ook tot een complexe macht verheffen?

Later in dit vak gaan we aantonen dat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Deze gelijkheid gebruiken we ook voor complexe e-machten.

Kun je getallen ook tot een complexe macht verheffen?

Later in dit vak gaan we aantonen dat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Deze gelijkheid gebruiken we ook voor complexe e-machten.

Stel z en w zijn complexe getallen, dan geldt

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

Gevolg: als a en b reële getallen zijn, dan geldt

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$$

Formule van Euler

Voor alle reële getallen θ geldt:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Formule van Euler

Voor alle reële getallen θ geldt:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Gevolgen:

- Ieder complex getal z is the schrijven in de vorm: $z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) = |z|e^{i\arg z}$.
- Vermenigvuldigen: $zw = (|z|e^{i\arg z})(|w|e^{i\arg w}) = |z||w|e^{i(\arg z + \arg w)}$.
- Formule van De Moivre: $(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))^n = (e^{i\arg z})^n = e^{in\arg z} = \cos(n\arg z) + i\sin(n\arg z)$.
- Machtsverheffen: $z^n = (|z|e^{i\arg z})^n = |z|^n e^{in\arg z}$.

Maak opgaven 43 en 45 van “Complex numbers” (pagina 7).