Opgave 1 (20 punten) Een onderzoeksteam van het Maritime Warfare Center (MWC) onderzoekt de signaalsterkte (in decibel) van sonarpulsen die worden gereflecteerd door een nieuw type onderzeeboot. Het huidige (oude) ontwerp heeft een gemiddelde gereflecteerde signaalsterkte van $\mu = \mu_0 = 65$ decibel.

Het MWC wil toetsen of bij het nieuwe ontwerp de gemiddelde signaalsterkte significant verschilt van het oude ontwerp. In een steekproef van tien onafhankelijke metingen met het nieuwe ontwerp is de gereflecteerde signaalsterkte gemiddeld 63,75 decibel met een standaardafwijking van 0,78. Je mag aannemen dat de signaalsterktes normaal verdeeld zijn met onbekende standaardafwijking σ .

Gebruik voor de hypothesetoets een significantieniveau van $\alpha = 0,05$.

1a [5pt] Definieer de nulhypothese en de alternatieve hypothese van de hypothesetoets. Verklaar het gekozen type (tweezijdig, linkszijdig of rechtszijdig) van de toets.

Uitwerking

Aangezien we willen toetsen of de gemiddelde gereflecteerde signaalsterkte significant afwijkt van $\mu=\mu_0=65$, kunnen we de hypothesetoets als volgt definiëren:

 $H_0: \mu = 65$ (geen significant verschil)

 $H_1: \mu \neq 65$ (wel een significant verschil)

Dit is een tweezijdige toets, omdat de nulhypothese uitgaat van een status-quo (geen verschil) en de alternatieve hypothese juist wel een verschil aanduidt.

1b [9pt] Voer de bijbehorende hypothesetoets uit met behulp van het kritieke gebied.

Uitwerking

We mogen uitgaan van een significantieniveau van $\alpha=0,05$ en verder is gegeven uit de steekproefdata dat $\overline{x}=63,75$ en s=0,78. Uit de centrale limietstelling volgt onder H_0 dat de toetsingsgrootheid \overline{X} normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu=\mu_0=65$ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Aangezien de steekproefgrootte n=10<30 en de (populatie)standaardafwijking σ onbekend is, moeten we de t-verdeling gebruiken.

(1pt)

(1pt)

(2pt)

(1pt)

Deze t-verdeling heeft df = n - 1 = 9 vrijheidsgraden.

De bijbehorende t-waarde (tweezijdig toetsen) is gelijk aan

$$t = \text{InvT}(\mathsf{opp} = 1 - \alpha/2; \mathsf{df} = n - 1) = \text{InvT}(\mathsf{opp} = 0.975; \mathsf{df} = 9) \approx 2,2622.$$
 (2pt)

(1pt)

(2pt)

(1pt)

(1pt)

(1pt)

(1pt)

(1pt)

(2pt)

(1pt)

Hieruit volgt een voorspellingsinterval voor \overline{X} op basis van deze steekproef gelijk aan

$$[\mu_0 - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \mu_0 + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}]$$

$$= [65 - 2, 2622 \cdot \frac{0, 78}{\sqrt{10}}; 65 + 2, 2622 \cdot \frac{0, 78}{\sqrt{10}}]$$

$$\approx [64, 4420; 65, 5580]$$

Het gemeten steekproefgemiddelde $\overline{x}=63,75$ ligt niet in dit voorspellingsinterval – dus wel in het kritieke gebied – dus verwerpen we de nulhypothese. Er is voldoende reden om aan te nemen dat de gemiddelde gereflecteerde signaalsterkte significant afwijkt van het nieuwe ontwerp.

1c [6pt] Bereken de kans op een type-II fout β als geldt dat het daadwerkelijke populatiegemiddelde van het nieuwe ontwerp gelijk is aan $\mu = 64, 5$ decibel, en dat de standaardafwijking σ gelijk is aan 0, 8.

Uitwerking

Bij een type-II fout wordt H_0 aangenomen, terwijl H_1 waar is. In dit geval geldt dat H_1 waar is, omdat $\mu=64,5\neq65$. We willen dus de kans bepalen dat de toetsingsgrootheid een waarde in het acceptatiegebied van H_0 aanneemt (oftewel [64,4420;65,5580]), gegeven $\mu=64,5$.

In andere woorden:

$$\beta = P(64, 4420 \le \overline{X} \le 65, 5580 \mid \mu = 64.5)$$
 = normalcdf(lower = 64, 4420; upper = 65, 5580; $\mu = 64.5$; $\sigma = \frac{0.8}{\sqrt{10}}$) $\approx 0,5907$.

De kans op een type-II fout is dus gelijk aan $\beta \approx 0,5907$, oftewel 59% kans dat de nulhypothese wordt aangenomen terwijl deze in werkelijkheid fout is.

2

Opgave 2 (28 punten) Bij een onderzoek binnen de Koninklijke Luchtmacht wordt gekeken naar de effectiviteit van de training van piloten van gevechtsvliegtuigen. Tijdens de training neemt een piloot plaats in een speciale centrifuge, waarbij hij of zij aan hoge G-krachten wordt blootgesteld. Hierbij wordt geoefend met de *Anti-G Straining Maneuver (AGSM)*, een speciale ademhalingstechniek die helpt om langer weerstand te kunnen bieden aan de hoge G-krachten.

De focus van het onderzoek ligt op het bepalen van de maximale G-belasting totdat een piloot verstoringen ervaart in het gezichtsveld, zoals tunnelvisie of tijdelijke blackouts. Hierbij zijn voor twee populaties steekproeven genomen, namelijk voor de populatie F-16 vliegers (populatie A) en voor de populatie F-35 vliegers (populatie B).

Het doel van het onderzoek is om te toetsen of de gemiddelde maximale G-belasting significant hoger is voor F-35 vliegers. Voor beide populaties wordt aangenomen dat de maximale G-belasting van een willekeurige vlieger normaal verdeeld is met onbekende verwachtingswaarde en standaardafwijking.

2a [10pt] Bepaal voor beide populaties de steekproefgemiddeldes en de steekproefvarianties.

Uitwerking

We be rekenen het steekproefgemiddelde \overline{x} voor de steekproef uit populatie A als volgt. De steekproefgrootte is gelijk aan n=10.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{7, 4 + 8, 1 + \ldots + 8, 0}{10} \approx 7, 9.$$

(2pt)

(3pt)

We berekenen de steekproefvariantie s_A^2 als volgt:

$$s_A^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2}{n - 1}$$

$$= \frac{(7, 4 - 7, 9)^2 + (8, 1 - 7, 9)^2 + \dots + (8, 0 - 7, 9)^2}{10 - 1}$$

$$\approx 0.0778.$$

Op eenzelfde manier berekenen we het steekproefgemiddelde \overline{y} voor de steekproef uit populatie B en de steekproefvariantie s_B^2 . De steekproefgrootte is gelijk aan

m = 10.

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{m} = \frac{8, 3 + 8, 7 + \ldots + 8, 5}{10} \approx 8, 52.$$

(2pt)

(3pt)

(2pt)

We berekenen de steekproefvariantie s^2 als volgt:

$$s^{2} = \frac{(y_{1} - \overline{y})^{2} + (y_{2} - \overline{y})^{2} + \dots + (y_{m} - \overline{y})^{2}}{m - 1}$$

$$= \frac{(8, 3 - 8, 52)^{2} + (8, 7 - 8, 52)^{2} + \dots + (8, 5 - 8, 52)^{2}}{10 - 1}$$

$$\approx 0,0529.$$

2b [10pt] Voer een *F*-toets uit en bepaal met behulp van de *p*-waarde of de varianties in de maximale G-belasting gelijk zijn voor beide populaties. Kies voor het significantieniveau

 $\alpha = 0,05$.

Uitwerking

We noteren de populaties F-16 en F-35 vliegers respectievelijk met A en B. In de vraag staat dat we aan mogen nemen dat $X_A \sim N(\mu_A =?; \sigma_A =?)$ en $X_B \sim N(\mu_B =?; \sigma_A =?)$.

We toetsen op gelijke varianties, oftewel

$$H_0: \quad \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$

$$H_1: \quad \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$
 (2pt)

Verder is gegeven dat we mogen werken met een significantieniveau $\alpha=0,05$, en data is al verzameld voor beide populaties. De toetsingsgrootheid voor een F-toets is gelijk aan

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2},$$

en volgt een F(n-1,m-1)-verdeling, oftewel een F(9,9)-verdeling.

De geobserveerde toetsingsgrootheid is gelijk aan

$$f = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{0,0778}{0,0529} \approx 1,4707.$$
 (2pt)

In dit geval is de p-waarde gelijk aan de rechteroverschrijdingskans van deze toetsingsgrootheid f (deze is kleiner dan de linkeroverschrijdingskans):

$$p = P(F \ge f) = \text{Fcdf}(\text{lower} = 1,4707; \text{upper} = 10^{99}; \text{df1} = 9; \text{df2} = 9) \approx 0,2874.$$
 (2pt)

Aangezien de p-waarde groter is dan $\alpha/2$ (tweezijdige toets!), wordt de nulhypothese H_0 aangenomen. Er is onvoldoende bewijs om op basis van deze steekproef de aanname van gelijke varianties te verwerpen.

(1pt)

(1pt)

2c [10pt] Bepaal met behulp van een onafhankelijke t-toets of gemiddeld de maximale G-belasting significant hoger is voor F-35 vliegers. Kies opnieuw voor het significantieniveau $\alpha = 0,05$.

Uitwerking

We toetsen of het gemiddelde μ_B voor F-35 vliegers significant hoger is dan het gemiddelde μ_A voor F-16 vliegers. De hypotheses kunnen we daarom als volgt definiëren:

$$H_0: \mu_A \ge \mu_B$$
 (niet significant hoger)

$$H_1: \mu_A < \mu_B$$
 (wel significant hoger)

(2pt)

(2pt)

Verder is gegeven dat we mogen werken met een significantieniveau $\alpha=0,05$, en data is al verzameld voor beide populaties.

Op basis van ons antwoord bij vraag (b) mogen we aannemen dat $\sigma = \sigma_A = \sigma_B$. Dat betekent dat we met de pooled variance mogen werken als schatting voor de gemeenschappelijke onbekende σ .

$$s_P^2 = \frac{(n-1) \cdot s_A^2 + (m-1) \cdot s_B^2}{n-1+m-1} = \frac{9 \cdot 0,0778 + 9 \cdot 0,0529}{18} \approx 0,0653.$$
 (3pt)

De toetsingsgrootheid van de bijbehorende t-toets is gelijk aan

$$t = \frac{(\overline{x} - \overline{y}) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{s_P^2}{n} + \frac{s_P^2}{m}}} \approx -5,4239,$$

en komt uit een t-verdeling met df = 18 vrijheidsgraden. Omdat we linkszijdig toetsen, is het kritieke gebied van de vorm $(-\infty; g]$. Deze kritieke grens kunnen we met de t-verdeling bepalen, namelijk

$$g = \text{InvT}(\text{opp} = \alpha; \text{df} = n + m - 2) = \text{InvT}(\text{opp} = 0, 05; \text{df} = 18) \approx -1,7341$$
 (1pt)

De toetsingsgrootheid t ligt in het kritieke gebied, dus H_0 moet worden verworpen. Er is op basis van deze steekproeven voldoende reden om aan te nemen dat

de maximale G-belasting van F-35 vliegers significant hoger is dan die van F-16 vliegers.

Opgave 3 (20 punten) Bij de sollicitatiegesprekken voor cadetten en adelborsten wordt door de aanstellingscommissie aan de aspirant-officier gevraagd naar zijn of haar primaire motivatie om officier te willen worden. De meest genoemde antwoorden van de aspiranten zijn ruwweg in te delen in drie categorieën: leiderschap, avontuur en dienen aan het vaderland.

Naar aanleiding van de sollicitatiegesprekken kunnen de antwoorden als volgt worden samengevat:

	Cadetten	Adelborsten	Totaal
Leiderschap	52	22	74
Avontuur	23	9	32
Vaderland dienen	38	28	66
Totaal	113	59	172

C-NLDA wil inzicht krijgen in of de primaire motivatie van cadetten significant afwijkt van die van adelborsten.

3a [4pt] Welk type hypothesetoets dienen we hiervoor uit te voeren? Formuleer de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 van de bijbehorende hypothesetoets.

Uitwerking

Omdat we willen weten of de primaire motivatie van cadetten significant afwijkt van die van de adelborsten, dienen we een χ^2 -toets (chikwadraat) voor onafhankelijkheid uit te voeren. Dit kan ook omdat we te maken hebben met twee categorische variabelen!

De bijbehorende nul- en alternatieve hypothese zijn in dit geval gelijk aan

 H_0 : de verdeling van de primaire motivaties van cadetten is onafhankelijk van het type aspirant-officieren.

 H_1 : de verdeling van de primaire motivaties van cadetten is WEL afhankelijk van het type aspirant-officieren.

(1pt)

(1pt)

3b [11pt] Bepaal de *p*-waarde van de desbetreffende hypothesetoets.

Om een chi-kwadraattoets voor onafhankelijkheid uit te voeren, moeten we eerst de verwachte frequenties uitrekenen. Onder de aanname dat H_0 waar is, is deze voor elk van de negen cellen te berekenen als $\frac{\text{rijtotaal} \cdot \text{kolomtotaal}}{\text{totaal}}$. De verwachte frequenties zijn te berekenen met behulp van de formule:

$$E_{ij} = \frac{\text{rijtotaal}_i \cdot \text{kolomtotaal}_j}{\text{totaal}}$$

Tabel 1: "Observed" frequenties

Tabel 2: "Expected" frequenties

	С	A	Totaal	С	A	Totaal
Leiderschap	52	22	74	48,6163	25, 3837	74
Avontuur	23	9	32	21,0233	10,9767	32
Vaderland dienen	38	28	66	43,3605	22,6395	66
Totaal	113	59	172	113	59	172

We berekenen de toetsingsgrootheid χ^2 als volgt, waarbij O_{ij}/E_{ij} de geobserveerde / verwachte frequentie is in rij i, kolom j:

$$\chi^{2} = \frac{(O_{1,1} - E_{1,1})^{2}}{E_{1,1}} + \frac{(O_{1,2} - E_{1,2})^{2}}{E_{1,2}} + \dots + \frac{(O_{3,2} - E_{3,2})^{2}}{E_{3,2}}$$

$$= \frac{(52 - 48,6163)^{2}}{48,6163} + \frac{(22 - 25,3837)^{2}}{25,3837} + \dots + \frac{(28 - 22,6395)^{2}}{22,6395}$$

$$\approx 3,1603.$$

De bijbehorende p-waarde is de rechteroverschrijdingskans $P(X > \chi^2)$, waarbij X^2 de toetsingsgrootheid van de chikwadraattoets voor onafhankelijkheid. De toetsingsgrootheid X^2 volgt onder de nulhypothese een χ^2 -verdeling met df = $(\#\text{rijen} - 1) \cdot (\#\text{kolommen} - 1) = (3 - 1) \cdot (2 - 1) = 2 \text{ vrijheidsgraden.}$

$$p = P(\chi^2 > 3.1603)$$

$$= \chi^2 \text{cdf(lower} = 3.1603; \text{upper} = 10^{99}; \text{df} = 2)$$

$$\approx 0.2059.$$
 (2pt)

(4pt)

(3pt)

(1pt)

(1pt)

3c [5pt] Geef de conclusie van de hypothesetoets (op basis van een significantieniveau $\alpha=0,05$) met behulp van de berekende p-waarde.

Uitwerking

Uit de hypothesetoets volgt een redelijk grote rechteroverschrijdingskans $p \approx 0,2059$. Omdat $p > \alpha = 0,05$, geldt dat H_0 wordt aangenomen. We kunnen dus de conclusie trekken dat de verdeling van primaire motivaties om officier te worden niet significant verschilt tussen cadetten en adelborsten.

Als we kijken naar de tabel van geobserveerde en verwachte frequenties, dan zien we dat deze redelijk dichtbij elkaar in de buurt liggen. Er zijn geen grote uitschieters te bekennen in de verwachte frequenties ten opzichte van de daadwerkelijk geobserveerde frequenties.

(2pt)

(1pt)

Opgave 4 (30 punten) In een gezamenlijk project van sportinstructeurs van de KMA en de geneeskundige dienst wordt het verband onderzocht tussen de gemiddelde slaaptijd van een cadet (in uren) en de hersteltijd na een zware inspanning (in uren). Voor de hersteltijd wordt gekeken naar een spierpijn-index, en een cadet is volledig hersteld wanneer de spierpijn-index onder een gegeven drempelwaarde komt.

Van negen cadetten wordt gemeten hoe lang ze gemiddeld hebben geslapen en hoe lang hun hersteltijd is na een zware inspanning.

Slaaptijd (in uren)	4,0	4, 5	5,0	5, 5	6,0	6, 5	7,0	7, 5	8,0
Hersteltijd (in uren)	66	61	63	62	65	64	57	59	60

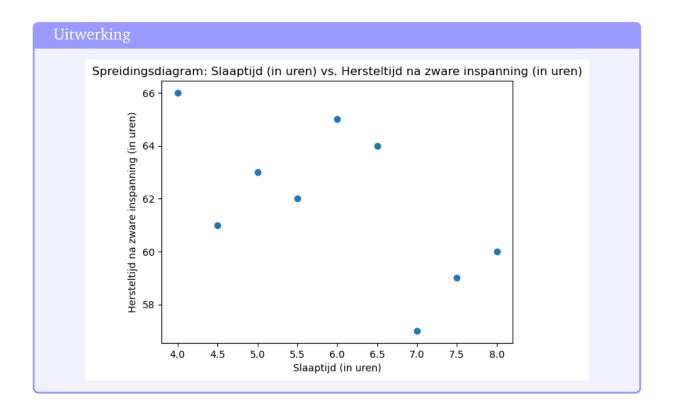
4a [2pt] Als we een regressie-analyse willen uitvoeren, welke variabele zou dan de afhankelijke variabele Y zijn en welke variabele zou de onafhankelijke variabele X zijn?

Uitwerking

Bij een regressie-analyse is de meest logische keuze om slaaptijd als onafhankelijke variabele X te kiezen, en de hersteltijd als afhankelijke variabele Y. Een langere hersteltijd verklaart niet waarom iemand langer slaapt, terwijl dat andersom wellicht wel het geval kan zijn.

(2pt)

4b [5pt] Teken het bijbehorende spreidingsdiagram op basis van je antwoord op vraag (a).



4c [8pt] Bereken Pearson's correlatiecoëfficiënt r(x,y). Wat kun je concluderen over de samenhang van de twee variabelen?

Uitwerking

We beginnen met het uitrekenen van Pearson's correlatiecoëfficiënt

$$r(x,y) = \frac{\overline{x}\overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \cdot (\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}$$

Hiervoor hebben we dus de waardes van \overline{x} , \overline{y} , \overline{xy} , $\overline{x^2}$ en $\overline{y^2}$ nodig. Deze bepalen we aan de hand van de volgende rekentabel:

x	y	xy	x^2	y^2
4	66	264	16	4356
4,5	61	274, 5	20, 25	3721
5	63	315	25	3969
5, 5	62	341	30, 25	3844
6	65	390	36	4225
6, 5	64	416	42, 25	4096
7	57	399	49	3249
7,5	59	442, 5	56, 25	3481
8	60	480	64	3600
$\overline{x} = 6$	$\overline{y} = 61,8889$	$\overline{xy} = 369,1111$	$\overline{x^2} = 37,6667$	$\overline{y^2} = 3837,88$

De correlatiecoëfficiënt van Pearson is dus gelijk aan

$$r(x,y) = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \cdot (\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}$$

$$= \frac{369,1111 - 6 \cdot 61,8889}{\sqrt{(37,6667 - 6^2) \cdot (3837,8889 - 61,8889^2)}}$$

$$= \frac{-2,2222}{3,5717}$$

$$\approx -0,6222.$$

De correlatiecoëfficiënt ligt redelijk ver van 0 en is negatief. Dit houdt in dat er een vrij duidelijke dalende trend zichtbaar is, maar dat er toch onzekerheid zit in hoe het exacte lineaire verband eruit zal zien.

4d [7pt] Bereken de regressielijn $Y = a + b \cdot X$ door berekening van de coëfficiënten a en b. Bepaal aan de hand van de regressielijn een statistisch verantwoorde voorspelling voor de hersteltijd van een cadet die 6 uur en 45 minuten heeft geslapen.

Om de coëfficiënten a en b van de regressielijn te berekenen, gaan we de rekenta-

(4pt)

(3pt)

(1pt)

bel van vraag (a) hergebruiken. Er volgt namelijk dat

$$b = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$$

$$= \frac{369,1111 - 6 \cdot 61,8889}{37,6667 - (6)^2}$$

$$= \frac{-2,2222}{1,6667} \approx -1,3333$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}$$

$$= 61,8889 - (-1,3333 \cdot 6)$$

$$\approx 69,8889.$$

(2pt)

(2pt)

(1pt)

(2pt)

(3pt)

De formule van de regressielijn is dus gelijk aan $Y=69,8889-1,3333\cdot X$. Een statistisch verantwoorde voorspelling voor de hersteltijd van een cadet die gemiddelde 6 uur en 45 minuten heeft geslapen vinden we door X=6,75 in te vullen: Dit geeft een waarde van $Y=69,8889-1,3333\cdot 6,75=60,88887$ uur, oftewel iets minder dan 61 uur.

4e [8pt] Bereken een 90%-voorspellingsinterval voor de hersteltijd van een willekeurige cadet die 6 uur en 45 minuten heeft geslapen.

Uitwerking

In opdracht (d) hebben we een puntschatting van $y_0 = 69,8889 - 1,3333 \cdot 6,75 \approx 60,8889$ bepaald. Daarnaast kunnen we de standaardafwijking σ van de storingsterm ε schatten:

$$s_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{n}{n-2} \cdot \left(\overline{y^2} - a \cdot \overline{y} - b \cdot \overline{xy}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{7} \cdot (3837, 8889 - 69, 8889 \cdot 61, 8889 - (-1, 3333 \cdot 369, 1111))}$$

$$\approx 2,456.$$

Vervolgens kunnen we een puntschatting berekenen van de standaardafwijking

van Y voor gegeven $X = x_0$:

$$s_f = s_{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\right)}$$

$$= 2,456 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9} \cdot \left(1 + \frac{(6,75 - 6)^2}{37,6667 - 6^2}\right)}$$

$$\approx 2,6321.$$

(2pt)

Omdat we de standaardafwijkingen geschat hebben en de storingstermen normaal verdeeld zijn, moeten we werken met de t-verdeling met df=n-2=7 vrijheidsgraden. De t-waarde die hoort bij een betrouwbaarheidsniveau $\alpha=0,1$ is gelijk aan

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 2) = \text{InvT}(\text{opp} = 0, 95; \text{df} = 7) \approx 1,8946.$$
 (1pt)

Het $90\,\%$ -betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde Y voor gegeven $X=x_0$ kan dus worden beschreven door

$$[y_0 - t \cdot s_f; y_0 - t \cdot s_f]$$

$$= [60, 8889 - 1, 8946 \cdot 2, 6321; 60, 8889 + 1, 8946 \cdot 2, 6321]$$

$$\approx [55, 9021; 65, 8757].$$
(2pt)

Met 90% zekerheid zal de hersteltijd van een willekeurige cadet die 6 uur en 45 minuten heeft geslapen tussen ongeveer 56 en 66 uur liggen.