Ministerie van Defensie

Faculteit Militaire Wetenschappen

Gegevens student	
Naam:	
Peoplesoftnummer:	
Klas:	
Handtekening:	

Algemeen			
Vak:	Statistiek (deel 1) -- eerste kans 2024, derde kans 2023	**Vakcode:**	STA#1
Datum:	5 juni 2025	**Tijdsduur:**	13:30-16:30
Examinator:	Dr. ir. D.A.M.P. Blom	**Aantal pagina's:**	4
Peer-review:	Dr. J.B.M. Melissen	**Aantal opgaven:**	4

Algemene instructies

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Indien u een deelopgave niet kunt oplossen en het antwoord in vervolgvragen nodig hebt, probeer uit te gaan van een redelijke fictieve waarde.
- U mag een grafische rekenmachine gebruiken zonder CAS (Computer Algebra Systeem).
- Antwoorden, in welke vorm dan ook, mogen de zaal niet verlaten.
- Vermeld op elk antwoordvel je naam, Peoplesoft-nummer en maak een nummering van je antwoordvellen.
- Iedere vorm van mobiele (potentiële) datadragers (telefoon, smartwatch, etc) of andere vormen om te frauderen (bv. communicatieapparatuur) zijn niet toegestaan gedurende de gehele duur van het tentamen en mogen ook niet in het lokaal meegebracht worden of zijn uitgeschakeld en ingeleverd.
- Schrijf leesbaar ter voorkoming van misverstanden bij de beoordeling van uw werk. Indien uw antwoord niet leesbaar is, wordt uw antwoord fout gerekend.
- Toiletbezoek tijdens het tentamen vindt enkel plaats na toestemming van de examinator.
- Lever bij het verlaten van de zaal, kladpapier, tentamenopgaven en andere tentamen-gerelateerde documenten in bij de examinator.

Cijferberekening / cesuur
- Het eindcijfer voor het vak Statistiek wordt voor 50% bepaald door dit tentamen. - Het tentamen is opgebouwd uit 4 open vragen. Bij iedere (sub)vraag is het aantal te behalen punten tussen haakjes aangegeven. In totaal kunt u 100 punten verdienen. - Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten te delen door 10. Het tentamencijfer moet minimaal een 5,0 zijn om de cursus Statistiek met succes af te ronden.

Procedure na het tentamen
- De cijfers van dit tentamenonderdeel worden in principe binnen 10 werkdagen na de afname bekend gemaakt. - Met vragen over de beoordeling kunt u tot 10 werkdagen na bekendmaking van de cijfers terecht bij de cursuscoördinator.

Veel succes!

Formuleblad Statistiek deel 1 (2024-2025)

Steekproefgemiddelde (gegeven een steekproef met n uitkomsten $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Steekproefvariantie:

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} \qquad \text{(optie 1)}$$

$$s^2 = \frac{\left(\sum_i x_i^2\right) - n \cdot \overline{x}^2}{n} = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - n \cdot \overline{x}^2}{n} \qquad \text{(optie 2)}$$

Rekenregels kansrekening:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \qquad \text{(optelregel)}$$

$$P(B) = 1 - P(\text{niet } B) \qquad \text{(complementregel)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} \qquad \text{(conditionele kansen)}$$

Discrete en continue kansverdelingen:

	Discrete kansvariabelen	**Continue kansvariabelen**
Uitkomstenruimte:	Eindig / aftelbaar oneindig	Overaftelbaar oneindig
Toepassingen:	Tellen / categoriseren	Meten
Kansbegrip:	Kansfunctie $p(k) = P(X = k)$	Kansdichtheidsfunctie $f(x)$
CDF:	$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{\ell : \ell \leq k} p(\ell)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$
Verwachtingswaarde:	$E[X] = \sum_k k \cdot P(X = k)$	$E[X] = \int x \cdot f(x)\, dx$
Variantie:	$\text{Var}(X) = \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k)$	$\text{Var}(X) = \int (x - E[X])^2 \cdot f(x)\, dx$
Standaardafwijking:	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Speciale kansverdelingen:

- $X \sim$ Binomiaal(n, p): tellen van aantal successen bij onafhankelijke kansexperimenten met twee uitkomsten (Bernoulli-experimenten): succes / mislukking.
  - n: aantal Bernoulli-experimenten
  - p: succeskans per experiment
- $X \sim$ Poisson$(\lambda \cdot t)$: tellen van aantal "gebeurtenissen" in een "interval" van tijd / ruimte.
  - λ: gemiddeld aantal gebeurtenissen per eenheid van tijd / ruimte.
  - t: aantal eenheden van tijd / ruimte van het interval
    $\rightarrow$ **Voorbeeld:** als "dag" de tijdseenheid is, dan bestaat "week" uit $t = 7$ tijdseenheden.
- $T \sim$ Exponentieel(λ): meten van de tijd / ruimte tot de volgende gebeurtenis.
  - λ: gemiddeld aantal gebeurtenissen per eenheid van tijd / ruimte.

Verwachtingswaarde en variantie van veelgebruikte kansverdelingen:

Verdeling	Kans(dichtheids)functie	CDF	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Discreet				
Uniform(a,b)	$p(k) = \frac{1}{b-a+1}$ $(k = a, a+1, \ldots, b)$	$F(k) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{k-a+1}{b-a+1} & a \leq k < b \\ 1 & k \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomiaal(n,p)	$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	$F(k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ
Continuous				
Uniform(a,b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentieel(λ)	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Veelgebruikte functies op de grafische rekenmachine

Type vraag	TI-84 Plus	Casio
Continue kansverdeling (willekeurig)		
$P(a \leq X \leq b)$	$\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$
$X \sim$ **Binomiaal**(n,p)		
$P(X = k)$	binompdf(n,p,k)	BinomialPD(k,n,p)
$P(X \leq k)$	binomcdf(n,p,k)	BinomialCD(k,n,p)
$X \sim N(\mu, \sigma)$		
$P(a \leq X \leq b)$	normalcdf(a,b,μ,σ)	NormalCD(a,b,σ,μ)
Grenswaarde g zodat $P(X \leq g) = p$?	invNorm(p,μ,σ)	InvNormCD(tail=left, p,σ,μ)
$X \sim$ **Poisson**(λ)		
$P(X = k)$	poissonpdf(λ,k)	PoissonPD(k,λ)
$P(X \leq k)$	poissoncdf(λ,k)	PoissonCD(k,λ)

z-score:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Centrale limietstelling: Gegeven n kansvariabelen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben met een verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ, dan geldt (bij benadering) dat

- de som $\sum X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ normaal verdeeld is met $E[\sum X] = n \cdot \mu$ en $\sigma(\overline{X}) = \sqrt{n} \cdot \sigma$.
- het gemiddelde $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ normaal verdeeld is met $E[\overline{X}] = \mu$ en $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Opgave 1 (25 punten) Voor het vergaren van inlichtingen via de lucht worden zwermen van surveillance UAV's ingezet in vijandelijk gebied. De tijd T (in minuten) totdat een zwerm gedetecteerd wordt, is een continue kansvariabele met de volgende kansdichtheidsfunctie:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t), & \text{als } 0 \leq t \leq 3, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

1a [4pt] Toon met berekeningen en een schets van de grafiek van f aan dat f inderdaad voldoet aan de twee voorwaarden voor een kansdichtheidsfunctie.

1b [8pt] Bereken de verwachtingswaarde $E[T]$ en de standaardafwijking $\sigma(T)$ met behulp van de algemene formules op het formuleblad.

1c [3pt] Bereken de mediaan van T.

Hint: de mediaan van een kansverdeling is de uitkomst m waarvoor geldt dat $P(T \leq m) = P(T \geq m) = 0,5$.

1d [5pt] Bereken het percentage dronezwermen dat binnen één minuut wordt gedetecteerd.

1e [5pt] Stel dat op een gegeven moment zes dronezwermen, onafhankelijk van elkaar, tegelijkertijd naar het vijandelijke gebied worden doorgestuurd. De missie is succesvol als er tenminste een zwerm drones is die meer dan één minuut onopgemerkt blijft. Hoe groot is de kans op succes in deze surveillancemissie?

Opgave 2 (25 punten) Tijdens een militaire missie worden Panzerhaubitzes 2000 ingezet voor langdurige operaties. Een kritisch onderdeel, de elevatiemotoren van de kanonnen, heeft een gemiddelde uitvalfrequentie van 1,5 storingen per maand. Gedurende de missie wordt gebruik gemaakt van een logistiek transport voor het leveren van reserveonderdelen (spare parts) voor de Panzerhaubitzes.

2a [5pt] Wat is de kans dat er in een periode van zes maanden precies tien storingen optreden, aangenomen dat de uitvallen volgens een Poissonproces plaatsvinden?

2b [4pt] De logistieke eenheid die verantwoordelijk is voor het transport heeft een transportcapaciteit van 12 reservemotoren per zes maanden. Wat is de kans dat er na aankomst van het logistieke transport een tekort aan benodigde reserveonderdelen blijkt te zijn?

2c [7pt] De eenheid overweegt twee opties om de kans op een tekort aan reserveonderdelen te minimaliseren:

1. het doorvoeren van technologische upgrades die de uitvalfrequentie met 10% verminderen.
2. een verhoging van de transportcapaciteit naar 13 reservemotoren per zes maanden.

Welke maatregel is het meest effectief in het verlagen van de kans op een tekort aan reserveonderdelen? Beargumenteer je antwoord aan de hand van berekeningen.

2d [9pt] Stel nu dat er niet elke zes maanden een transport is van 12 reserveonderdelen, maar elke maand een transport van twee onderdelen. Het aantal storingen volgt nog steeds een Poissonproces met gemiddelde $\lambda = 1,5$ per maand. Wat is het verwachte aantal reserveonderdelen van een enkel transport (dus na een maand) dat gebruikt moet worden om storingen mee op te lossen? Ga hierbij er van uit dat de huidige reservevoorraad leeg is.

Opgave 3 (29 punten) De chauffeurs van de Transportgroep Defensie rijden met busjes tussen verschillende kazernes om kantoorartikelen te verplaatsen. Een van de chauffeurs, meneer de Wolf, heeft de specifieke taak gekregen om wekelijks tussen de KMA en het KIM te pendelen om bibliotheekboeken en IT-apparatuur te vervoeren. Zijn reistijd in minuten (enkele reis) kan worden beschouwd als een normaal verdeelde kansvariabele T met een gemiddelde $\mu = 140$ minuten en standaardafwijking $\sigma = 16$ minuten.

3a [4pt] Bereken de kans dat hij in een willekeurige week er langer dan $2\frac{1}{2}$ uur over doet om van de KMA naar het KIM te rijden.

3b [6pt] Bereken (met behulp van je antwoord op vraag 2a) de kans dat hij in een half jaar (26 weken) minstens 10 keer langer dan $2\frac{1}{2}$ uur doet over zijn busrit.

3c [8pt] Wat is de kans dat in een jaar (52 weken) het gemiddelde van de reistijden van de 52 busritten groter is dan 2 uur en een kwartier?

3d [7pt] Elke dinsdag vertrekt meneer de Wolf rond 8.00 uur 's ochtends vanaf de KMA. Om precies te zijn is zijn vertrektijd V (gemeten in minuten na middernacht) normaal verdeeld met gemiddelde $\mu = 479$ minuten (oftewel 7.59 uur) en standaardafwijking $\sigma = 4$ minuten. Hoe groot is de kans dat hij voor 10.00 uur aankomt op het KIM, gegeven dat zijn busrit 127 minuten duurt?

3e [4pt] Hoe laat moet meneer de Wolf 's ochtends uiterlijk vertrekken om te zorgen dat hij met kans $0,95$ vóór 10.00 uur op het KIM aankomt? Rond af op hele minuten.

Opgave 4 (21 punten) Tijdens een nachtelijke militaire oefening worden 20 parachutisten gedropt boven vijandelijke terrein. Elke parachutist heeft een kans van $0,76$ om veilig en correct te landen op de voorziene dropzone, rekening houdend met wind, zicht en navigatie.

4a [8pt] Wat is de verwachtingswaarde en standaardafwijking van het aantal succesvolle parachutelandingen?

4b [5pt] Hoe groot is de kans dat minstens vijftien parachutisten succesvol landen?

4c [8pt] De oefening wordt een succes genoemd als minstens 18 parachutisten succesvol landen. Hoeveel parachutisten moeten er extra worden ingezet (bovenop de huidige 20) zodanig dat de kans dat de oefening een succes is, minstens 95% is?