Ministerie van Defensie

Faculteit Militaire Wetenschappen

Gegevens student	
Naam:	
Peoplesoftnummer:	
Klas:	
Handtekening:	

Algemeen			
Vak:	Statistiek (deel 1) -- eerste kans 2024, derde kans 2023	**Vakcode:**	STA#1
Datum:	5 juni 2025	**Tijdsduur:**	13:30-16:30
Examinator:	Dr. ir. D.A.M.P. Blom	**Aantal pagina's:**	4
Peer-review:	Dr. J.B.M. Melissen	**Aantal opgaven:**	4

Algemene instructies

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Indien u een deelopgave niet kunt oplossen en het antwoord in vervolgvragen nodig hebt, probeer uit te gaan van een redelijke fictieve waarde.
- U mag een grafische rekenmachine gebruiken zonder CAS (Computer Algebra Systeem).
- Antwoorden, in welke vorm dan ook, mogen de zaal niet verlaten.
- Vermeld op elk antwoordvel je naam, Peoplesoft-nummer en maak een nummering van je antwoordvellen.
- Iedere vorm van mobiele (potentiële) datadragers (telefoon, smartwatch, etc) of andere vormen om te frauderen (bv. communicatieapparatuur) zijn niet toegestaan gedurende de gehele duur van het tentamen en mogen ook niet in het lokaal meegebracht worden of zijn uitgeschakeld en ingeleverd.
- Schrijf leesbaar ter voorkoming van misverstanden bij de beoordeling van uw werk. Indien uw antwoord niet leesbaar is, wordt uw antwoord fout gerekend.
- Toiletbezoek tijdens het tentamen vindt enkel plaats na toestemming van de examinator.
- Lever bij het verlaten van de zaal, kladpapier, tentamenopgaven en andere tentamen-gerelateerde documenten in bij de examinator.

Cijferberekening / cesuur

- Het eindcijfer voor het vak Statistiek wordt voor 50% bepaald door dit tentamen.
- Het tentamen is opgebouwd uit 4 open vragen. Bij iedere (sub)vraag is het aantal te behalen punten tussen haakjes aangegeven. In totaal kunt u 100 punten verdienen.
- Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten te delen door 10. Het tentamencijfer moet minimaal een 5,0 zijn om de cursus Statistiek met succes af te ronden.

Procedure na het tentamen

- De cijfers van dit tentamenonderdeel worden in principe binnen 10 werkdagen na de afname bekend gemaakt.
- Met vragen over de beoordeling kunt u tot 10 werkdagen na bekendmaking van de cijfers terecht bij de cursuscoördinator.

Veel succes!

Opgave 1 (25 punten) Voor het vergaren van inlichtingen via de lucht worden zwermen van surveillance UAV's ingezet in vijandelijk gebied. De tijd T (in minuten) totdat een zwerm gedetecteerd wordt is een kansvariabele met de volgende kansdichtheidsfunctie:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t), & \text{als } 0 \leq t \leq 3, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

1a [4pt] Toon met berekeningen (met de grafische rekenmachine) aan dat f inderdaad voldoet aan de twee voorwaarden voor een kansdichtheidsfunctie.

Uitwerking

Een functie f kan dienen als een kansdichtheidsfunctie als geldt:

Voorwaarde 1: de functie f is niet-negatief voor alle waarden van t, oftewel

$$f(t) \geq 0.$$

Op het interval $0 \leq t \leq 3$ geldt dat $f(t) = \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t)$. In dat geval geldt dat $t^2 \geq 0$ en $3 - t \geq 0$, en we hebben te maken met een vermenigvuldiging van niet-negatieve termen, dus $f(t) \geq 0$. Buiten het interval $0 \leq t \leq 3$ is $f(t) = 0$, dus is ook voldaan aan $f(t) \geq 0$. (2pt)

Voorwaarde 2: de oppervlakte onder de grafiek van f is gelijk aan 1, oftewel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1.$$

Voor de tweede voorwaarde moeten we dus checken of de oppervlakte onder de grafiek van f daadwerkelijk gelijk is aan 1:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt &= \int_0^3 \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t)\, dt \\ &= \text{fnInt}(\frac{4}{27} \cdot x^2 \cdot (3-x); x; 0; 3) \\ &= 1. \end{aligned}$$ (2pt)

Hiermee is aangetoond dat de gegeven functie f voldoet aan de twee voorwaarden voor kansdichtheidsfuncties.

1b [8pt] Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van T. Laat hierbij je berekeningen zien zonder gebruik te maken van het statistische menu van de grafische rekenmachine.

Uitwerking

De verwachtingswaarde $E[T]$ berekenen we door middel van

$$\begin{aligned} E[T] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\,dt &= \int_0^3 t \cdot \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t)\,dt \\ &= \int_0^3 \frac{4}{27} \cdot t^3 \cdot (3-t)\,dt \\ &= \text{fnInt}(\frac{4}{27} \cdot t^3 \cdot (3-t); t; 0; 3) \\ &= 1,8. \end{aligned}$$

(3pt)

De standaardafwijking $\sigma(T)$ berekenen we door eerst de variantie $\text{Var}(T)$ te bepalen, en van het resultaat de wortel te nemen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E[T])^2 \cdot f(t)\,dt &= \int_0^3 (t-1,8)^2 \cdot \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t)\,dt \\ &= \text{fnInt}(\frac{4}{27} \cdot (t-1,8)^2 \cdot t^2 \cdot (3-t); t; 0; 3) \\ &= 0,36. \end{aligned}$$

(3pt)

$$\sigma(T) = \sqrt{\text{Var}(T)} = \sqrt{0,36} = 0,6.$$

(2pt)

1c [4pt] Bereken de mediaan van T.

Hint: de mediaan van een kansverdeling is de uitkomst m waarvoor geldt dat $P(T \leq m) = P(T \geq m) = 0,5$.

Uitwerking

Om de mediaan van T te vinden moeten we een grenswaarde m bepalen waarvoor geldt $P(T \leq m) = \int_{-\infty}^{m} f(t)\,dt = 0,5$. Deze vergelijking kunnen we oplossen door het functiemenu te openen en in te voeren: (1pt)

$$\begin{aligned} y_1 &= \text{fnInt}(\frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t); t; 0; m) \\ y_2 &= 0,5 \end{aligned}$$

(2pt)

De optie "intersect" geeft een waarde van $m \approx 1,8428$. (1pt)

1d [4pt] Bereken het percentage dronezwermen dat binnen één minuut wordt gedetecteerd.

Uitwerking

We starten door de kans $P(T < 1)$ te berekenen:

$$P(T<1) = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{4}{27}\cdot t^2\cdot(3-t)\,dt = \text{fnInt}(\frac{4}{27}\cdot t^2\cdot(3-t); t; 0; 1) \approx 0,1111.$$

Omrekenen naar percentages geeft dat $11,11\%$ van de dronezwermen binnen één (3pt)
minuut wordt gedetecteerd. (1pt)

1e [5pt] Stel dat op een gegeven moment zes dronezwermen tegelijkertijd naar het vijandelijke gebied worden doorgestuurd. De missie is succesvol als er tenminste een zwerm drones is die meer dan één minuut onopgemerkt blijft. Hoe groot is de kans op succes in deze surveillancemissie?

Uitwerking

Laat Y nu het aantal dronezwermen zijn dat meer dan één minuut onopgemerkt blijft. In dat geval is Y een binomiaal verdeelde kansvariabele met parameters $n = 6$ (aantal dronezwermen) en $p \approx 0,1111$ (kans dat een dronezwerm langer dan een minuut onopgemerkt blijft). De kans op een succesvolle missie is gelijk (2pt) aan de kans dat minstens een zwerm drones langer dan één minuut onopgemerkt blijft, oftewel

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \text{binompdf}(n = 6; p = 0,1111; k = 0) = 0,5067.$$ (3pt)

Opgave 2 (25 punten) Tijdens een militaire missie wordt een Panzerhoubitze 2000 ingezet voor langdurige operaties. Een kritisch onderdeel, de elevatiemotor van het kanon, heeft een gemiddelde uitvalfrequentie van 1,5 storingen per maand. Gedurende de missie wordt gebruik gemaakt van een logistiek transport voor het leveren van reserveonderdelen (spare parts) voor de Panzerhaubitze.

2a [3pt] Wat is de kans dat er in een periode van zes maanden precies tien storingen optreden, aangenomen dat de uitvallen volgens een Poissonproces plaatsvinden?

Uitwerking

Laat X het aantal storingen aan de elevatiemotor van het kanon zijn in een periode van zes maanden. De tijdseenheid is in maanden, dus $t = 6$ en $\lambda = 1,5$, oftewel $\mu = \lambda \cdot t = 9$. (1pt)

Er geldt dus dat $X \sim \text{Poisson}(\mu = 9)$. (1pt)

De kans dat er in die zes maanden precies tien storingen plaatsvinden is dus gelijk aan

$$P(X = 10) = \text{poissoncdf}(\mu = 9; k = 9) \approx 0,1318.$$ (1pt)

2b [3pt] De elevatiemotor van de Panzerhaubitze 2000 is precies één maand geleden vervangen. Hoe groot is de kans dat deze nog een maand zonder problemen blijft functioneren?

Uitwerking

Laat T de tijd meten vanaf de vervanging van de motor tot de eerste storing. Aangezien storingen plaatsvinden volgens een Poissonproces, geldt dat

$$P(T > 2 \mid T > 1) = \frac{P(T > 2 \text{ en } T > 1)}{P(T > 1)} = \frac{P(T > 2)}{P(T > 1)} = \frac{e^{-1.5 \cdot 2}}{e^{-1,5 \cdot 1}} = \frac{1}{e\sqrt{e}} \approx 0,2231.$$ (3pt)

Alternatief: aangezien T een exponentieel verdeelde kansvariabele is, hebben we te maken met geheugenloosheid. De kans dat deze nog een maand zonder problemen blijft functioneren is (1pt)

$$P(T > 1) = e^{-\lambda \cdot 1} = e^{-1,5 \cdot 1} = e^{-1,5} \approx 0,2231.$$ (2pt)

2c [3pt] De logistieke eenheid die verantwoordelijk is voor het transport heeft een transportcapaciteit van 12 reservemotoren per zes maanden. Wat is de kans dat er in deze periode een tekort aan reserveonderdelen blijkt te zijn?

Uitwerking

Er gaat een tekort aan reserveonderdelen zijn als geldt dat er meer storingen optreden dan het aantal reserveonderdelen dat kan worden getransporteerd? We willen dus de kans $P(X > 12)$ bepalen, oftewel (1pt)

$$P(X > 12) = P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - \text{poissoncdf}(\mu = 9; k = 12) \approx 0,1242. \quad \text{(2pt)}$$

2d [7pt] De eenheid overweegt twee opties om de kans op een tekort aan reserveonderdelen te minimaliseren:

Optie 1: het doorvoeren van technologische upgrades die de uitvalfrequentie met 10% verminderen.

Optie 2: een verhoging van de transportcapaciteit naar 13 reservemotoren per zes maanden.

Welke maatregel is het meest effectief in het verlagen van de kans op tekort. Beargumenteer je antwoord aan de hand van berekeningen.

Uitwerking

Zodra optie 1 wordt doorgevoerd, wordt de uitvalfrequentie met 10% vermindert, oftewel de gemiddelde uitvalfrequentie per maand daalt van $1,5$ naar $0,9 \cdot 1,5 = 1,35$ storingen. Per zes maanden geeft dit $\mu = \lambda \cdot t = 1,35 \cdot 6 = 8,1$. De kans op een tekort aan reserveonderdelen is in dat geval: (1pt)

$$P(X > 12) = P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - \text{poissoncdf}(\mu = 8,1; k = 12) \approx 0,0687. \quad \text{(2pt)}$$

Zodra optie 2 wordt doorgevoerd, wordt de transportcapaciteit verhoogt tot 13 reservemotoren per zes maanden. De kans op een tekort aan reserveonderdelen is in dat geval:

$$P(X > 13) = P(X \geq 14) = 1 - P(X \leq 13) = 1 - \text{poissoncdf}(\mu = 9; k = 13) \approx 0,0739. \quad \text{(2pt)}$$

Aangezien de kans op een tekort kleiner is als optie 1 wordt doorgevoerd

$(0,0687 < 0,0739)$, is deze optie ook een effectievere maatregel om het tekort te minimaliseren. (2pt)

2e [9pt] De militaire eenheid wil het risico op een tekort aan reserveonderdelen beperkt houden om de slaagkans van de missie te verhogen. Hierbij wordt een beroep gedaan op de transportcapaciteiten van de logistieke eenheid. Hoe groot moet de transportcapaciteit worden zodat met hoogstens 5% kans de militaire eenheid met een tekort aan reserveonderdelen komt te zitten.

Uitwerking

Opgave 3 (29 punten) De chauffeurs van de Transportgroep Defensie rijden met busjes tussen verschillende kazernes om kantoorartikelen te verplaatsen. Een van de chauffeurs, meneer de Wolf, heeft de specifieke taak gekregen om wekelijks tussen de KMA en het KIM te pendelen om bibliotheekboeken en IT-apparatuur te vervoeren. Zijn reistijd in minuten (enkele reis) kan worden beschouwd als een normaal verdeelde kansvariabele T met een gemiddelde $\mu = 140$ minuten en standaardafwijking $\sigma = 16$ minuten.

3a [4pt] Bereken de kans dat hij in een willekeurige week er langer dan $2\frac{1}{2}$ uur over doet om van de KMA naar het KIM te rijden.

Uitwerking

3b [5pt] Bereken (met behulp van je antwoord op vraag 2a) de kans dat hij in een half jaar (26 weken) minstens 3 keer langer dan $2\frac{1}{2}$ uur doet over zijn busrit.

Uitwerking

3c [6pt] Hoe groot is de kans dat hij gedurende een jaar (52 weken) gemiddeld langer dan 2 uur en een kwartier doet over zijn busritten.

Uitwerking

3d [8pt] Elke dinsdag vertrekt meneer de Wolf rond 8.00 uur 's ochtends vanaf de KMA. Om precies te zijn is zijn vertrektijd V normaal verdeeld met gemiddelde 7:59 en een standaardafwijking van 4 minuten. Hoe groot is de kans dat hij voor 10.00 uur aankomt op het KIM?

Uitwerking

3e [6pt] Hoe laat moet meneer de Wolf 's ochtends uiterlijk vertrekken om te zorgen dat hij met kans $0,95$ vóór 10.00 uur op het KIM aankomt? Rond af op hele minuten.

Uitwerking