Ministerie van Defensie

Faculteit Militaire Wetenschappen

Gegevens student	
Naam:	
Peoplesoftnummer:	
Klas:	
Handtekening:	

Algemeen			
Vak:	Statistiek (deel 1) -- eerste kans 2024, derde kans 2023	**Vakcode:**	STA#1
Datum:	5 juni 2025	**Tijdsduur:**	13:30-16:30
Examinator:	Dr. ir. D.A.M.P. Blom	**Aantal pagina's:**	4
Peer-review:	Dr. J.B.M. Melissen	**Aantal opgaven:**	4

Algemene instructies

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Indien u een deelopgave niet kunt oplossen en het antwoord in vervolgvragen nodig hebt, probeer uit te gaan van een redelijke fictieve waarde.
- U mag een grafische rekenmachine gebruiken zonder CAS (Computer Algebra Systeem).
- Antwoorden, in welke vorm dan ook, mogen de zaal niet verlaten.
- Vermeld op elk antwoordvel je naam, Peoplesoft-nummer en maak een nummering van je antwoordvellen.
- Iedere vorm van mobiele (potentiële) datadragers (telefoon, smartwatch, etc) of andere vormen om te frauderen (bv. communicatieapparatuur) zijn niet toegestaan gedurende de gehele duur van het tentamen en mogen ook niet in het lokaal meegebracht worden of zijn uitgeschakeld en ingeleverd.
- Schrijf leesbaar ter voorkoming van misverstanden bij de beoordeling van uw werk. Indien uw antwoord niet leesbaar is, wordt uw antwoord fout gerekend.
- Toiletbezoek tijdens het tentamen vindt enkel plaats na toestemming van de examinator.
- Lever bij het verlaten van de zaal, kladpapier, tentamenopgaven en andere tentamen-gerelateerde documenten in bij de examinator.

Cijferberekening / cesuur

- Het eindcijfer voor het vak Statistiek wordt voor 50% bepaald door dit tentamen.
- Het tentamen is opgebouwd uit 4 open vragen. Bij iedere (sub)vraag is het aantal te behalen punten tussen haakjes aangegeven. In totaal kunt u 100 punten verdienen.
- Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten te delen door 10. Het tentamencijfer moet minimaal een 5,0 zijn om de cursus Statistiek met succes af te ronden.

Procedure na het tentamen

- De cijfers van dit tentamenonderdeel worden in principe binnen 10 werkdagen na de afname bekend gemaakt.
- Met vragen over de beoordeling kunt u tot 10 werkdagen na bekendmaking van de cijfers terecht bij de cursuscoördinator.

Veel succes!

Formuleblad Statistiek deel 1 (2024-2025)

Gegeven is een steekproef met n uitkomsten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Steekproefgemiddelde:

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_i x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Steekproefvariantie:

$$s^2 = \frac{\sum\limits_i (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} \qquad \text{(optie 1)}$$

$$s^2 = \frac{\left(\sum\limits_i x_i^2\right) - n \cdot \overline{x}^2}{n} = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - n \cdot \overline{x}^2}{n} \qquad \text{(optie 2)}$$

Rekenregels kansrekening:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \qquad \text{(optelregel)}$$

$$P(B) = 1 - P(\text{niet } B) \qquad \text{(complementregel)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} \qquad \text{(conditionele kansen)}$$

Discrete en continue kansverdelingen:

	Discrete kansvariabelen	**Continue kansvariabelen**
Uitkomstenruimte:	Eindig / aftelbaar oneindig	Overaftelbaar oneindig
Toepassingen:	Tellen / categoriseren	Meten
Kansbegrip:	Kansfunctie $p(k) = P(X = k)$	Kansdichtheidsfunctie $f(x)$
CDF:	$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{\ell : \ell \leq k} p(\ell)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$
Verwachtingswaarde:	$E[X] = \sum_k k \cdot P(X = k)$	$E[X] = \int x \cdot f(x)\, dx$
Variantie:	$\text{Var}(X) = \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k)$	$\text{Var}(X) = \int (x - E[X])^2 \cdot f(x)\, dx$
Standaardafwijking:	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Verwachtingswaarde en variantie van veelgebruikte kansverdelingen:

Verdeling	Kans(dichtheids)functie	CDF	$E(X)$	Var(X)
Discreet				
Uniform(a, b)	$p(k) = \frac{1}{b-a+1}$ $(k = a, a+1, \ldots, b)$	$F(k) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{k-a+1}{b-a+1} & a \leq k < b \\ 1 & k \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomiaal(n, p)	$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	$F(k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ
Continuous				
Uniform(a, b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentieel(λ)	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

z-score:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Centrale limietstelling: Gegeven n kansvariabelen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben met een verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ, dan geldt (bij benadering) dat

- de som $\sum X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde $n \cdot \mu$ en standaardafwijking $\sqrt{n} \cdot \sigma$.
- het gemiddelde $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Opgave 1 (25 punten) Voor het vergaren van inlichtingen via de lucht worden zwermen van surveillance UAV's ingezet in vijandelijk gebied. De tijd T (in minuten) totdat een zwerm gedetecteerd wordt, is een kansvariabele met de volgende kansdichtheidsfunctie:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t), & \text{als } 0 \leq t \leq 3, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

1a [4pt] Toon met berekeningen (met de grafische rekenmachine) aan dat f inderdaad voldoet aan de twee voorwaarden voor een kansdichtheidsfunctie.

Uitwerking

Een functie f kan dienen als een kansdichtheidsfunctie als geldt:

Voorwaarde 1: de functie f is niet-negatief voor alle waarden van t, oftewel

$$f(t) \geq 0.$$

Op het interval $0 \leq t \leq 3$ geldt dat $f(t) = \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t)$. In dat geval geldt dat $t^2 \geq 0$ en $3 - t \geq 0$, en we hebben te maken met een vermenigvuldiging van niet-negatieve termen, dus $f(t) \geq 0$. Buiten het interval $0 \leq t \leq 3$ is $f(t) = 0$, dus is ook voldaan aan $f(t) \geq 0$. (2pt)

Voorwaarde 2: de oppervlakte onder de grafiek van f is gelijk aan 1, oftewel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1.$$

Voor de tweede voorwaarde moeten we dus checken of de oppervlakte onder de grafiek van f daadwerkelijk gelijk is aan 1:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt &= \int_0^3 \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t)\, dt \\ &= \text{fnInt}(\frac{4}{27} \cdot x^2 \cdot (3-x); x; 0; 3) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(2pt)

Hiermee is aangetoond dat de gegeven functie f voldoet aan de twee voorwaarden voor kansdichtheidsfuncties.

1b [8pt] Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van T. Laat hierbij je berekeningen zien zonder gebruik te maken van het statistische menu van de grafische rekenmachine.

Uitwerking

De verwachtingswaarde $E[T]$ berekenen we door middel van

$$\begin{aligned} E[T] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt &= \int_0^3 t \cdot \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t)\, dt \\ &= \int_0^3 \frac{4}{27} \cdot t^3 \cdot (3-t)\, dt \\ &= \text{fnInt}(\frac{4}{27} \cdot t^3 \cdot (3-t); t; 0; 3) \\ &= 1,8. \end{aligned}$$ (3pt)

De standaardafwijking $\sigma(T)$ berekenen we door eerst de variantie $\text{Var}(T)$ te bepalen, en van het resultaat de wortel te nemen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E[T])^2 \cdot f(t)\, dt &= \int_0^3 (t-1,8)^2 \cdot \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t)\, dt \\ &= \text{fnInt}(\frac{4}{27} \cdot (t-1,8)^2 \cdot t^2 \cdot (3-t); t; 0; 3) \\ &= 0,36. \end{aligned}$$ (3pt)

$$\sigma(T) = \sqrt{\text{Var}(T)} = \sqrt{0,36} = 0,6.$$ (2pt)

1c [4pt] Bereken de mediaan van T.

Hint: de mediaan van een kansverdeling is de uitkomst m waarvoor geldt dat $P(T \leq m) = P(T \geq m) = 0,5$.

Uitwerking

Om de mediaan van T te vinden moeten we een grenswaarde m bepalen waarvoor geldt $P(T \leq m) = \int_{-\infty}^{m} f(t)\, dt = 0,5$. Deze vergelijking kunnen we oplossen door het functiemenu te openen en in te voeren: (1pt)

$$\begin{aligned} y_1 &= \text{fnInt}(\frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t); t; 0; m) \\ y_2 &= 0,5 \end{aligned}$$ (2pt)

De optie "intersect" geeft een waarde van $m \approx 1,8428$. (1pt)

1d [4pt] Bereken het percentage dronezwermen dat binnen één minuut wordt gedetecteerd.

Uitwerking

We starten door de kans $P(T < 1)$ te berekenen:

$$P(T < 1) = \int_{-\infty}^{1} f(t)\, dt = \int_0^1 \frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t)\, dt = \text{fnInt}(\frac{4}{27} \cdot t^2 \cdot (3-t); t; 0; 1) \approx 0,1111.$$

Omrekenen naar percentages geeft dat $11,11\%$ van de dronezwermen binnen één (3pt)
minuut wordt gedetecteerd. (1pt)

1e [5pt] Stel dat op een gegeven moment zes dronezwermen tegelijkertijd naar het vijandelijke gebied worden doorgestuurd. De missie is succesvol als er tenminste een zwerm drones is die meer dan één minuut onopgemerkt blijft. Hoe groot is de kans op succes in deze surveillancemissie?

Uitwerking

Laat Y nu het aantal dronezwermen zijn dat meer dan één minuut onopgemerkt blijft. In dat geval is Y een binomiaal verdeelde kansvariabele met parameters $n = 6$ (aantal dronezwermen) en $p \approx 0,1111$ (kans dat een dronezwerm langer dan een minuut onopgemerkt blijft). De kans op een succesvolle missie is gelijk (2pt) aan de kans dat minstens een zwerm drones langer dan één minuut onopgemerkt blijft, oftewel

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \text{binompdf}(n = 6; p = 0,1111; k = 0) = 0,5067.$$ (3pt)

Opgave 2 (25 punten) Tijdens een militaire missie wordt een Panzerhaubitze 2000 ingezet voor langdurige operaties. Een kritisch onderdeel, de elevatiemotor van het kanon, heeft een gemiddelde uitvalfrequentie van 1,5 storingen per maand. Gedurende de missie wordt gebruik gemaakt van een logistiek transport voor het leveren van reserveonderdelen (spare parts) voor de Panzerhaubitze.

2a [3pt] Wat is de kans dat er in een periode van zes maanden precies tien storingen optreden, aangenomen dat de uitvallen volgens een Poissonproces plaatsvinden?

Uitwerking

Laat X het aantal storingen aan de elevatiemotor van het kanon zijn in een periode van zes maanden. De tijdseenheid is in maanden, dus $t = 6$ en $\lambda = 1,5$, oftewel $\mu = \lambda \cdot t = 9$. (1pt)

Er geldt dus dat $X \sim \text{Poisson}(\mu = 9)$. (1pt)

De kans dat er in die zes maanden precies tien storingen plaatsvinden is dus gelijk aan

$$P(X = 10) = \text{poissoncdf}(\mu = 9; k = 9) \approx 0,1318. \quad \text{(1pt)}$$

2b [3pt] De elevatiemotor van de Panzerhaubitze 2000 is precies één maand geleden vervangen. Hoe groot is de kans dat deze nog een maand zonder problemen blijft functioneren?

Uitwerking

Laat T de tijd meten vanaf de vervanging van de motor tot de eerste storing. Aangezien storingen plaatsvinden volgens een Poissonproces, geldt dat

$$P(T > 2 \mid T > 1) = \frac{P(T > 2 \text{ en } T > 1)}{P(T > 1)} = \frac{P(T > 2)}{P(T > 1)} = \frac{e^{-1.5 \cdot 2}}{e^{-1,5 \cdot 1}} = \frac{1}{e\sqrt{e}} \approx 0,2231. \quad \text{(3pt)}$$

Alternatief: aangezien T een exponentieel verdeelde kansvariabele is, hebben we te maken met geheugenloosheid. De kans dat deze nog een maand zonder problemen blijft functioneren is (1pt)

$$P(T > 1) = e^{-\lambda \cdot 1} = e^{-1,5 \cdot 1} = e^{-1,5} \approx 0,2231. \quad \text{(2pt)}$$

2c [3pt] De logistieke eenheid die verantwoordelijk is voor het transport heeft een transportcapaciteit van 12 reservemotoren per zes maanden. Wat is de kans dat er na aankomst van het logistieke transport een tekort aan benodigde reserveonderdelen blijkt te zijn?

Uitwerking

Er gaat een tekort aan reserveonderdelen zijn als geldt dat er meer storingen optreden dan het aantal reserveonderdelen dat kan worden getransporteerd? We willen dus de kans $P(X > 12)$ bepalen, oftewel (1pt)

$$P(X > 12) = P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - \text{poissoncdf}(\mu = 9; k = 12)$$
$$\approx 0,1242.$$ (2pt)

2d [7pt] De eenheid overweegt twee opties om de kans op een tekort aan reserveonderdelen te minimaliseren:

1. het doorvoeren van technologische upgrades die de uitvalfrequentie met 10% verminderen.
2. een verhoging van de transportcapaciteit naar 13 reservemotoren per zes maanden.

Welke maatregel is het meest effectief in het verlagen van de kans op tekort? Beargumenteer je antwoord aan de hand van berekeningen.

Uitwerking

Zodra optie 1 wordt doorgevoerd, wordt de uitvalfrequentie met 10% vermindert, oftewel de gemiddelde uitvalfrequentie per maand daalt van $1,5$ naar $0,9 \cdot 1,5 = 1,35$ storingen. Per zes maanden geeft dit $\mu = \lambda \cdot t = 1,35 \cdot 6 = 8,1$. De kans op een tekort aan reserveonderdelen is in dat geval: (1pt)

$$P(X > 12) = P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - \text{poissoncdf}(\mu = 8,1; k = 12)$$
$$\approx 0,0687.$$ (2pt)

Zodra optie 2 wordt doorgevoerd, wordt de transportcapaciteit verhoogt tot 13 reservemotoren per zes maanden. De kans op een tekort aan reserveonderdelen is in dat geval:

$$P(X > 13) = P(X \geq 14) = 1 - P(X \leq 13) = 1 - \text{poissoncdf}(\mu = 9; k = 13)$$
$$\approx 0,0739.$$ (2pt)

Aangezien de kans op een tekort kleiner is als optie 1 wordt doorgevoerd ($0,0687 < 0,0739$), is deze optie ook een effectievere maatregel om het tekort te minimaliseren. (2pt)

2e [9pt] Stel nu dat de transportcapaciteit van twaalf reserveonderdelen per zes maanden bestaat uit drie transporten met vier reserveonderdelen waar steeds twee maanden tussen zit. Het aantal storingen volgt nog steeds een Poissonproces met gemiddelde $\lambda = 1,5$ per maand. Wat is het verwachte aantal reserveonderdelen van een enkel transport (dus na twee maanden) dat gebruikt wordt om storingen mee op te lossen? Ga hierbij er van uit dat huidige reservevoorraad leeg is.

Uitwerking

Laat Y het aantal reserveonderdelen zijn dat gebruikt moet worden op storingen mee op te lossen. De uitkomstenruimte van Y bestaat uit $0, 1, 2, 3, 4$, aangezien er maximaal 4 reservemotoren gebruikt kunnen worden als een transport bestaat uit vier reservemotoren. Deze kansvariabele Y heeft de volgende kansfunctie: (2pt)

Uitkomst k	$P(Y = k)$
0	$P(X = 0) = \text{poissonpdf}(\lambda = 1,5 \cdot 2; k = 0) \approx 0,0498$
1	$P(X = 1) = \text{poissonpdf}(\lambda = 1,5 \cdot 2; k = 1) \approx 0,1494$
2	$P(X = 2) = \text{poissonpdf}(\lambda = 1,5 \cdot 2; k = 2) \approx 0,2240$
3	$P(X = 3) = \text{poissonpdf}(\lambda = 1,5 \cdot 2; k = 3) \approx 0,2240$
4	$P(X \geq 4) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda = 1,5 \cdot 2; k = 3) \approx 0,3528$

(3pt)

Het verwachte aantal reservemotoren dat wordt gebruikt om storingen mee te verhelpen is dan gelijk aantal de verwachtingswaarde van deze kansvariabele Y, oftewel:

$$\begin{aligned} E[Y] &= 0 \cdot P(Y = 0) + 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(Y = 3) + 4 \cdot P(Y = 4) \\ &\approx 0 \cdot 0,0498 + 1 \cdot 0,1494 + 2 \cdot 0,2240 + 3 \cdot 0,2240 + 4 \cdot 0,3528 \\ &\approx 2,6806 \end{aligned}$$ (3pt)

Het verwachte aantal reservemotoren dat moet worden gebruikt om storingen te verhelpen is dus gelijk aan $2,6806$. (1pt)

Opgave 3 (29 punten) De chauffeurs van de Transportgroep Defensie rijden met busjes tussen verschillende kazernes om kantoorartikelen te verplaatsen. Een van de chauffeurs, meneer de Wolf, heeft de specifieke taak gekregen om wekelijks tussen de KMA en het KIM te pendelen om bibliotheekboeken en IT-apparatuur te vervoeren. Zijn reistijd in minuten (enkele reis) kan worden beschouwd als een normaal verdeelde kansvariabele T met een gemiddelde $\mu = 140$ minuten en standaardafwijking $\sigma = 16$ minuten.

3a [4pt] Bereken de kans dat hij in een willekeurige week er langer dan $2\frac{1}{2}$ uur over doet om van de KMA naar het KIM te rijden.

Uitwerking

In een willekeurige week is zijn reistijd T normaal verdeeld met gemiddelde $\mu = 140$ en standaardafwijking $\sigma = 12$ minuten. De grenswaarde van $2\frac{1}{2}$ uur is omgerekend naar minuten gelijk aan 150 minuten. (1pt)

De kans dat meneer de Wolf langer dan $2\frac{1}{2}$ uur erover doet om van de KMA naar het KIM te rijden is dus gelijk aan

$$P(T > 150) = \text{normalcdf}(a = 150; b = 10^{99}; \mu = 140; \sigma = 16) \approx 0,2660. \quad \text{(3pt)}$$

3b [5pt] Bereken (met behulp van je antwoord op vraag 2a) de kans dat hij in een half jaar (26 weken) minstens 10 keer langer dan $2\frac{1}{2}$ uur doet over zijn busrit.

Uitwerking

Reistijden in verschillende werken kunnen we als onafhankelijk van elkaar beschouwen, omdat de reistijd in de ene week niets zegt over hoe lang je de week erna onderweg bent. Het aantal keer N dat meneer de Wolf in een half jaar meer (1pt) dan $2\frac{1}{2}$ uur erover doet om van de KMA naar het KIM te rijden is binomiaal verdeeld met $n = 26$ en $p = 0,2660$. Dit geeft een kans voor minstens 10 keer langer (1pt) dan $2\frac{1}{2}$ uur van

$$P(N \geq 10) = 1 - P(N \leq 9) = 1 - \text{binomcdf}(n = 26; p = 0,2660; k = 9)$$
$$\approx 0,1272. \quad \text{(2pt)}$$

Met $12,72\%$ kans zal hij in een half jaar minstens 3 keer langer dan $2\frac{1}{2}$ uur over zijn busrit doen. (1pt)

3c [6pt] Hoe groot is de kans dat hij gedurende een jaar (52 weken) gemiddeld langer dan 2 uur en een kwartier doet over zijn busritten.

Uitwerking

Zoals gezegd zijn de reistijden in verschillende weken onafhankelijk van elkaar. Omdat de reistijden onafhankelijk zijn en normaal verdeeld met dezelfde μ en σ, kunnen we volgens de centrale limietstelling zeggen dat de gemiddelde reistijd $\overline{T}$ over 52 weken ook normaal verdeeld is, met verwachtingswaarde $\mu = 130$ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{52}} = \frac{12}{\sqrt{52}}$. (2pt)

De grenswaarde van 2 uur en een kwartier is omgerekend naar minuten gelijk aan 135 minuten. (1pt)

De kans dat de gemiddelde reistijd in 52 weken langer dan 2 uur en een kwartier is, is dus gelijk aan

$$P(\overline{T} \geq 135) = \text{normalcdf}(a = 135; b = 10^{99}; \mu = 140; \sigma = \frac{16}{\sqrt{52}}) \approx 0,9879$$ (2pt)

Met $98,79\%$ kans zal hij in een jaar gemiddeld langer dan 2 uur en een kwartier doen over zijn busrit. (1pt)

3d [8pt] Elke dinsdag vertrekt meneer de Wolf rond 8.00 uur ‘s ochtends vanaf de KMA. Om precies te zijn is zijn vertrektijd V normaal verdeeld met gemiddelde 7.59 en een standaardafwijking van 4 minuten. Hoe groot is de kans dat hij voor 10.00 uur aankomt op het KIM? **Hint:** de aankomsttijd is de som $A = V + T$ van twee normaal verdeelde kansvariabelen (de vertrektijd V en de reistijd T). Er geldt dat A dus ook normaal verdeeld is met $E[A] = E[V] + E[T]$ en $\sigma(A) = \sqrt{\sigma(V)^2 + \sigma(T)^2}$.

Uitwerking

De aankomsttijd A is de som van twee kansvariabelen, namelijk $A = V + T$, waarbij V is de vertrektijd en T is de reistijd. (1pt)

We bepalen de tijden in minuten na middernacht. De vertrektijd heeft verwachtingswaarde $E[V] = 7 \cdot 60 + 59 = 479$ minuten en standaardafwijking $\sigma(V) = 4$

minuten. (1pt)

De reistijd heeft verwachtingswaarde $E[T] = 140$ minuten en standaardafwijking $\sigma(T) = 14$ minuten. Er geldt dus dat de aankomsttijd A normaal verdeeld is met verwachtingswaarde $E[A] = E[V] + E[T] = 479 + 140 = 619$ minuten en standaardafwijking $\sigma(A) = \sqrt{\sigma(V)^2 + \sigma(T)^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} \approx 16,4924$ minuten. (3pt)

De kans dat hij vóór 10.00 uur, oftewel $A < 600$ minuten, is gelijk aan

$$P(A < 600) = \text{normalcdf}(a = -10^{99}; b = 600; \mu = 619; \sigma = 16,4924) \approx 0,1247 \qquad \text{(2pt)}$$

Met kans $12,47\%$ komt meneer de Wolf vóór 10.00 uur aan op het KIM. (1pt)

3e [6pt] Hoe laat moet meneer de Wolf 's ochtends uiterlijk vertrekken om te zorgen dat hij met kans $0,95$ vóór 10.00 uur op het KIM aankomt? Rond af op hele minuten.

Uitwerking

We hebben een gegeven aankomsttijd $a = 10 \cdot 60 = 600$, dus de enige factor die er nu toe doet om een uiterste vertrektijd te berekenen is de reistijd T. (1pt)

Hiervoor berekenen we eerst de waarde t van de reistijd dusdanig dat $P(T \leq t) = 0,95$. (1pt)

Dit kunnen we doen met behulp van de "invNorm" functie op de grafische rekenmachine.

$$t = \text{InvNorm}(opp = 0,95; \mu = 140; \sigma = 16) \approx 166,3177.$$

Met 95% kans duurt de reis korter dan 167 minuten (naar boven afgerond op hele minuten). De uiterste vertrektijd v vinden we aan de hand van $v = a - t = 600 - 167 = 433$ minuten. (2pt) Omgerekend naar uren geeft dit een tijdstip van 7.13 uur. (2pt)

Opgave 4 (21 punten) Tijdens een nachtelijke militaire oefening worden 20 parachutisten gedropt boven vijandelijke terrein. Elke parachutist heeft een kans van $0,76$ om veilig en correct te landen op het voorziene dropzonegebied, rekening houdend met wind, zicht en navigatie.

4a [4pt] Wat is de verwachtingswaarde en standaardafwijking van het aantal succesvolle parachutelandingen?

Uitwerking

Laat X het aantal succesvolle landingen zijn van de twintig parachutisten. In dit geval geldt dat X een binomiaal verdeelde kansvariabele is met $n = 20$ (aantal parachutisten) en $p = 0,76$ (kans op een succesvolle landing voor een willekeurige parachutist). De verwachtingswaarde en standaardafwijking van X zijn daarom gelijk aan (1pt)

$$E[X] = n \cdot p = 20 \cdot 0,76 = 15,2.\sigma(X) \qquad = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$
$$= \sqrt{20 \cdot 0,76 \cdot (1-0,76)}$$
$$\approx 1,9100.$$
(3pt)

4b [4pt] Hoe groot is de kans dat minstens vijftien parachutisten succesvol landen?

Uitwerking

Omdat X een binomiaal verdeelde kansvariabele is, en we rekenen met "minstens vijftien", moeten we gebruik maken van de functie "binomcdf". De kans dat minstens vijftien parachutisten succesvol zullen landen is gelijk aan (1pt)

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - \text{binomcdf}(n = 20; p = 0,76; k = 14) \approx 0,6573.$$
(3pt)

Met $65,73\%$ kans zullen minstens vijftien van de twintig parachutisten succesvol landen.

4c [6pt] De oefening wordt een succes genoemd als minstens 18 parachutisten succesvol landen. Hoeveel parachutisten moeten er extra worden ingezet (bovenop de huidige 20) zodanig dat de kans dat de oefening een succes is, minstens 95% is?

Uitwerking

We hebben in dit geval opnieuw te maken met een binomiaal verdeelde kansvariabele X, maar nu is de parameter n nader te bepalen. De vraag is dus eigenlijk voor welke waarde van n geldt dat (1pt)

$$P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17) \geq 0,95. \quad \text{(1pt)}$$

Merk op dat we dit kunnen oplossen met een tabel gegeven de functies:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \text{binomcdf}(n = X; p = 0,76; k = 17) \\ y_2 &= 0,95 \end{aligned} \quad \text{(2pt)}$$

In dat geval zien we dat:

$$\begin{aligned} n = 28 &: 1 - \text{binomcdf}(n = 28; p = 0,76; k = 17) \approx 0,9476 \\ n = 29 &: 1 - \text{binomcdf}(n = 29; p = 0,76; k = 17) \approx 0,9710 \end{aligned} \quad \text{(1pt)}$$

We hebben dus minstens 29 parachutisten nodig zodat met 95% zekerheid minstens 18 parachutisten succesvol gaan landen. (1pt)

4d [7pt] Bereken een 95%-voorspellingsinterval voor de fractie succesvolle landingen in het geval van 20 parachutisten.

Hint: bereken eerst een 95%-voorspellingsinterval voor het aantal succesvolle landingen met het twee-sigmagebied.

Uitwerking

In het college hebben we een vuistregel besproken waarin staat dat het 95%-voorspellingsinterval benaderd kan worden door het twee-sigmagebied: (1pt)

$$\begin{aligned} [E[X] - 2 \cdot \sigma(X); E[X] + 2 \cdot \sigma(X)] &= [15,2 - 2 \cdot 1,9100; 15,2 + 2 \cdot 1,9100] \\ &\approx [11,3801; 19,0199] \end{aligned} \quad \text{(3pt)}$$

Het 95%-voorspellingsinterval vinden we dan door beide grenzen te delen door

20:

$$[\frac{11,3801}{20}; \frac{19,0199}{20}] = [0,5690; 0,9510] \qquad \text{(1pt)}$$

Dit houdt in dat met 95% kans, de fractie succesvolle landingen van de twintig parachutisten tussen de $56,9\%$ en $95,1\%$ zal liggen. (2pt)