Ministerie van Defensie

Faculteit Militaire Wetenschappen

Gegevens student	
Naam:	
Peoplesoftnummer:	
Klas:	
Handtekening:	

Algemeen			
Vak:	Statistiek deel 2 (vierde kans)	**Vakcode:**	STA#2
Datum:	6 oktober 2025	**Tijdsduur:**	13:00-16:00
Examinator:	Dr. ir. D.A.M.P. Blom	**Aantal pagina's:**	4
Peer-review:	Dr. M.P. Roeling	**Aantal opgaven:**	4

Algemene instructies

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Indien u een deelopgave niet kunt oplossen en het antwoord in vervolgvragen nodig hebt, probeer uit te gaan van een redelijke fictieve waarde.
- Rond je antwoorden waar nodig af op vier decimalen.
- U mag een grafische rekenmachine gebruiken zonder CAS (Computer Algebra Systeem).
- Antwoorden, in welke vorm dan ook, mogen de zaal niet verlaten.
- Vermeld op elk antwoordvel je naam, Peoplesoft-nummer en maak een nummering van je antwoordvellen.
- Iedere vorm van mobiele (potentiële) datadragers (telefoon, smartwatch, etc.) of andere vormen om te frauderen (bv. communicatieapparatuur) zijn niet toegestaan gedurende de gehele duur van het tentamen en mogen ook niet in het lokaal meegebracht worden of zijn uitgeschakeld en ingeleverd.
- Schrijf leesbaar ter voorkoming van misverstanden bij de beoordeling van uw werk. Indien uw antwoord niet leesbaar is, wordt uw antwoord fout gerekend.
- Toiletbezoek tijdens het tentamen vindt enkel plaats na toestemming van de examinator.
- Lever bij het verlaten van de zaal, kladpapier, tentamenopgaven en andere tentamen-gerelateerde documenten in bij de examinator.

Cijferberekening / cesuur

- Het eindcijfer voor het vak Statistiek wordt voor 50% bepaald door dit tentamen.
- Het tentamen is opgebouwd uit 4 open vragen. Bij iedere (sub)vraag is het aantal te behalen punten tussen haakjes aangegeven. In totaal kunt u 100 punten verdienen.
- Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten te delen door 10. Het tentamencijfer moet minimaal een 5,0 zijn om de cursus Statistiek met succes af te ronden.

Procedure na het tentamen

- De cijfers van dit tentamenonderdeel worden in principe binnen 10 werkdagen na de afname bekend gemaakt.
- Met vragen over de beoordeling kunt u tot 10 werkdagen na bekendmaking van de cijfers terecht bij de cursuscoördinator.

Veel succes!

Formuleblad Statistiek (2024-2025)

Statistiek deel 1

Steekproefgemiddelde (gegeven een steekproef met n uitkomsten $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Steekproefvariantie en steekproefstandaardafwijking:

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Rekenregels kansrekening:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \qquad \text{(optelregel)}$$

$$P(B) = 1 - P(\text{niet } B) \qquad \text{(complementregel)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} \qquad \text{(conditionele kansen)}$$

Discrete en continue kansverdelingen:

	Discrete kansvariabelen	**Continue kansvariabelen**
Uitkomstenruimte:	Eindig / aftelbaar oneindig	Overaftelbaar oneindig
Toepassingen:	Tellen / categoriseren	Meten
Kansbegrip:	Kansfunctie $p(k) = P(X = k)$	Kansdichtheidsfunctie $f(x)$
CDF:	$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{\ell:\ell \leq k} p(\ell)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$
Verwachtingswaarde:	$E[X] = \sum_k k \cdot P(X = k)$	$E[X] = \int x \cdot f(x)\, dx$
Variantie:	$\text{Var}(X) = \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k)$	$\text{Var}(X) = \int (x - E[X])^2 \cdot f(x)\, dx$
Standaardafwijking:	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Speciale kansverdelingen:

- $X \sim$ Binomiaal(n, p): tellen van aantal successen bij onafhankelijke kansexperimenten met twee uitkomsten (Bernoulli-experimenten): succes / mislukking.

  Parameters: het aantal Bernoulli-experimenten n en de succeskans per experiment p.

- $X \sim$ Poisson$(\lambda \cdot t)$: tellen van aantal “gebeurtenissen” in een “interval” van tijd / ruimte.

  Parameters: het gemiddelde aantal gebeurtenissen λ per meeteenheid (tijd / ruimte) en het aantal meeteenheden t.

  $\rightarrow$ *Voorbeeld: bij de meeteenheid van een dag bestaat een week uit $t = 7$ meeteenheden.*

- $T \sim$ Exponentieel(λ): meten van de tijd / ruimte tot de volgende gebeurtenis.

  Parameter: het gemiddelde aantal gebeurtenissen λ per meeteenheid (tijd / ruimte).

Verwachtingswaarde en variantie van veelgebruikte kansverdelingen:

Verdeling	Kans(dichtheids)functie	CDF	$E(X)$	Var(X)
		Discreet		
Uniform(a,b)	$p(k) = \frac{1}{b-a+1}$ $(k = a, a+1, \ldots, b)$	$F(k) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{k-a+1}{b-a+1} & a \leq k < b \\ 1 & k \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomiaal(n,p)	$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	$F(k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ
		Continuous		
Uniform(a,b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentieel(λ)	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Veelgebruikte functies op de grafische rekenmachine

Type vraag	TI-84 Plus	Casio
	Continue kansverdeling (willekeurig)	
$P(a \leq X \leq b)$	$\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$
	$X \sim$ **Binomiaal**(n,p)	
$P(X = k)$ $P(X \leq k)$	binompdf(n,p,k) binomcdf(n,p,k)	BinomialPD(k,n,p) BinomialCD(k,n,p)
	$X \sim N(\mu, \sigma)$	
$P(a \leq X \leq b)$ Grenswaarde g zodat $P(X \leq g) = p$?	normalcdf(a,b,μ,σ) invNorm(p,μ,σ)	NormalCD(a,b,σ,μ) InvNormCD(tail=left, p,σ,μ)
	$X \sim$ **Poisson**(λ)	
$P(X = k)$ $P(X \leq k)$	poissonpdf(λ,k) poissoncdf(λ,k)	PoissonPD(k,λ) PoissonCD(k,λ)

z-score:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Centrale limietstelling: Gegeven n kansvariabelen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben met een verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ, dan geldt (bij benadering) dat

- de som $\sum X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde $n \cdot \mu$ en standaardafwijking $\sqrt{n} \cdot \sigma$.
- het gemiddelde $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Statistiek deel 2:

Betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde μ (σ bekend)

- **$100 \cdot (1-\alpha)$%-betrouwbaarheidsinterval (BI) voor μ:**

$$z_{\alpha/2} = \text{InvNorm}(\text{opp} = 1-\alpha/2; \mu = 0; \sigma = 1)$$
$$[\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

- **Minimale steekproefomvang voor $100 \cdot (1-\alpha)$%-BI als μ maximaal $\pm a$ mag afwijken:**

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{a}\right)^2$$

Betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde μ (σ onbekend)

- **$100 \cdot (1-\alpha)$%-betrouwbaarheidsinterval (BI) voor μ:**

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1-\alpha/2; \text{df} = n-1)$$
$$[\overline{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}]$$

- **Minimale steekproefomvang voor** $100 \cdot (1-\alpha)$%**-BI als** μ **maximaal $\pm a$ mag afwijken:**

  GR tabel (voor verschillende n): $\frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \text{InvT}(\text{opp} = 1-\alpha/2; \text{df} = n-1) \leq a$

  NB: zodra $n \geq 30$, vallen de normale en de t-verdeling nagenoeg samen. Je mag dan rekenen met de schatting s in plaats van de daadwerkelijke (onbekende) σ.

- **Onderscheidend vermogen (toets met** $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs.** $H_1 : \mu \neq \mu_0$**, en gegeven** $\mu = \mu_1$**)**

$$1 - \beta = P(\overline{X} \text{ neemt waarde aan in het kritieke gebied} \mid \mu = \mu_1)$$

Betrouwbaarheidsintervallen voor de binomiale succeskans p

Betrouwbaarheidsinterval voor p (Clopper-Pearson): Gegeven een binomiale verdeling met n Bernoulli-experimenten en onbekende p, en uitkomst k.

1. Bereken de succeskans p_1 zodat geldt $P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n; p; k) = \alpha/2$
2. Bereken de succeskans p_2 zodat geldt $P(X \geq k) = 1 - \text{binomcdf}(n; p; k-1) = \alpha/2$
3. De berekende waarden voor p_1 en p_2 zijn de grenzen van het Clopper-Pearson interval.

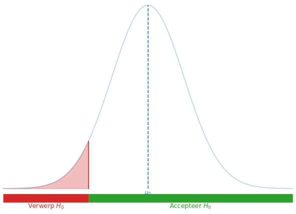
Hypothesetoetsen

Stappenplan hypothesetoetsen

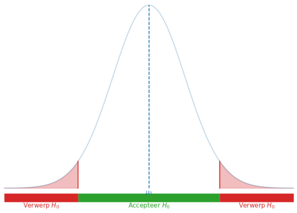
1. Definieer de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1.
2. Bepaal het significantieniveau α (kans op verwerpen van H_0 terwijl H_0 waar is $\rightarrow$ type-I fout)
3. Verzamel data voor de toetsingsgrootheid
4. Bereken de toetsingsgrootheid
   - Uitgaande van de nulhypothese H_0 maken we aannames over de kansverdeling van de toetsingsgrootheid!
5. Geef een conclusie (met behulp van het kritieke gebied / p-waarde) en vertaal deze terug naar de originele probleemcontext.

Drie typen hypothesetoetsen: linkszijdig, tweezijdig, rechtszijdig

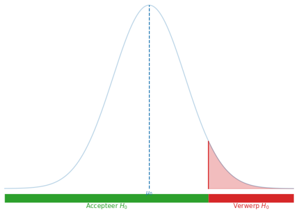
Linkszijdige toets
Kritiek gebied:
$(-\infty; g]$



Tweezijdige toets
Kritiek gebied:
$(-\infty; g_1]$ en $[g_2; \infty)$



Rechtszijdige toets
Kritiek gebied:
$[g; \infty)$



Kansverdeling (onder H_0)	**Linkszijdig**	**Tweezijdig**	**Rechtszijdig**
$N(\mu;\sigma)$	$g = \text{InvNorm}(\alpha;\mu;\sigma)$	$g_1 = \text{InvNorm}(\text{opp} = \frac{\alpha}{2};\mu;\sigma)$ $g_2 = \text{InvNorm}(\text{opp} = 1 - \frac{\alpha}{2};\mu;\sigma)$	$g = \text{InvNorm}(1-\alpha;\mu;\sigma)$
$t(\text{df})$	$g = \text{InvT}(\alpha;\text{df})$	$g_1 = \text{InvT}(\text{opp} = \frac{\alpha}{2};\text{df})$ $g_2 = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \frac{\alpha}{2};\text{df})$	$g = \text{InvT}(1-\alpha;\text{df})$
Grenzen die met de solver functie moeten worden opgelost:			
$\chi^2(\text{df})$ (chikwadraat)	$\chi^2\text{cdf}(0;g;\text{df}) = \alpha$	$\chi^2\text{cdf}(0;g_1;\text{df}) = \frac{\alpha}{2}$ $\chi^2\text{cdf}(g_2;10^{99};\text{df}) = \frac{\alpha}{2}$	$\chi^2\text{cdf}(g;10^{99};\text{df}) = \alpha$
$F(\text{df}_A;\text{df}_B)$	$\text{Fcdf}(0;g;\text{df}_A;\text{df}_B) = \alpha$	$\text{Fcdf}(0;g_1;\text{df}_A;\text{df}_B) = \frac{\alpha}{2}$ $\text{Fcdf}(g_2;10^{99};\text{df}_A;\text{df}_B) = \frac{\alpha}{2}$	$\text{Fcdf}(g;10^{99};\text{df}_A;\text{df}_B) = \alpha$

p-waardes uitrekenen (gegeven een theoretische en geobserveerde toetsingsgrootheid T en t)

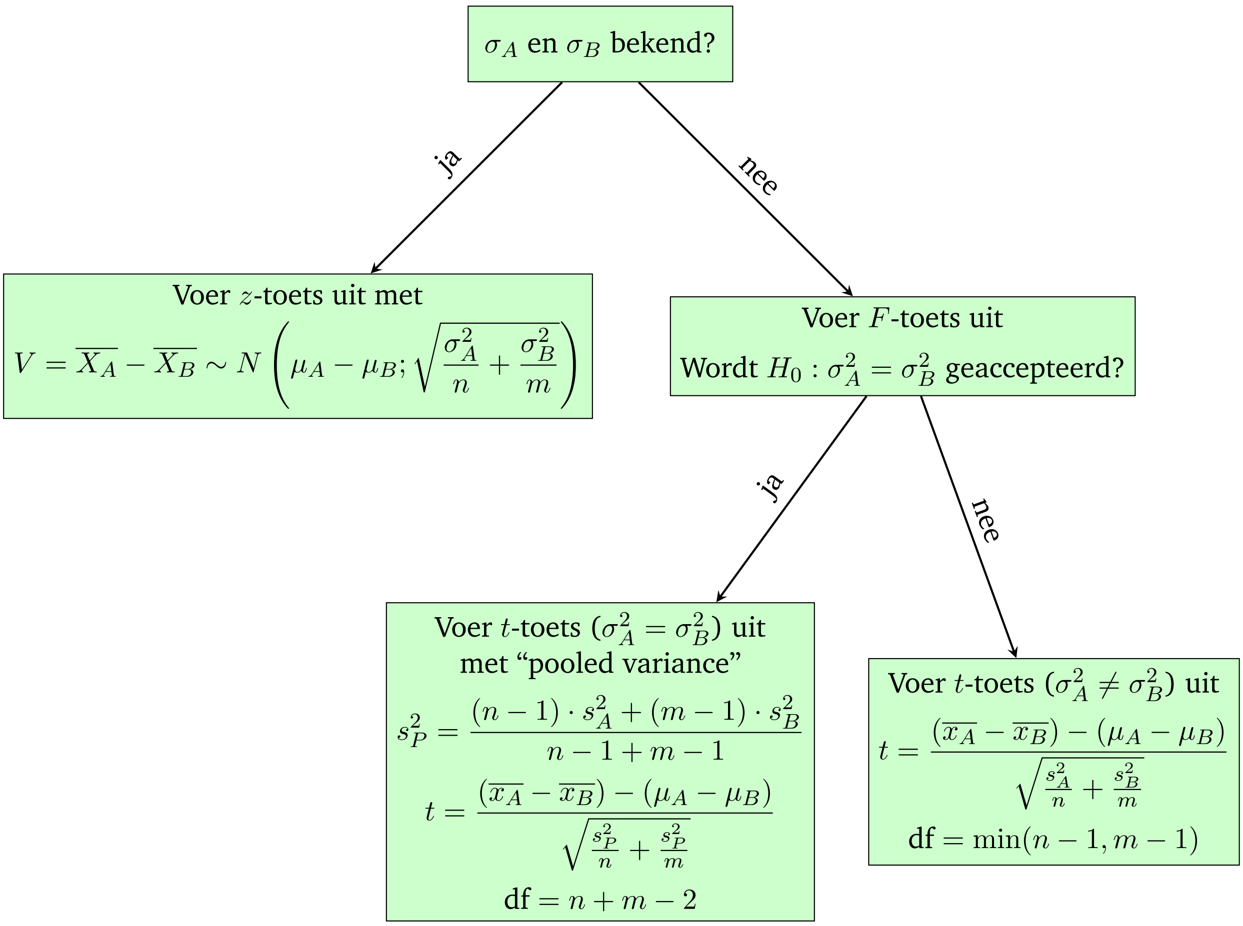
Kansverdeling (onder H_0)	**Linkszijdig ($P(T \leq t)$)**	**Rechtszijdig ($P(T \geq t)$)**
$N(\mu;\sigma)$	$p = \text{normalcdf}(-10^{99};t;\mu;\sigma)$	$p = \text{normalcdf}(t;10^{99};\mu;\sigma)$
$t(\text{df})$	$p = \text{tcdf}(-10^{99};t;\text{df})$	$p = \text{tcdf}(t;10^{99};\text{df})$
$\chi^2(\text{df})$	$p = \chi^2\text{cdf}(0;t;\text{df})$	$p = \chi^2\text{cdf}(t;10^{99};\text{df})$
$F(\text{df}_A;\text{df}_B)$	$p = \text{Fcdf}(0;t;\text{df}_A;\text{df}_B)$	$p = \text{Fcdf}(t;10^{99};\text{df}_A;\text{df}_B)$

NB: Om met de p-waarde een conclusie te trekken uit een hypothesetoets vergelijken we de p-waarde met het significantieniveau α. Let op: bij tweezijdige toetsen neem je het minimum van de linkszijdige en rechtszijdige p-waarde en vergelijk je deze met $\alpha/2$!

Soorten toetsen

Soort toets	**Toetsingsgrootheid**	**Kansverdeling (onder H_0)**
Toetsen voor het gemiddelde $\mu \leq \mu_0$ of $\mu = \mu_0$ of $\mu \geq \mu_0$		
z-toets (σ bekend)	$\overline{X}$	$N(\mu_0; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
t-toets (σ onbekend)	$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$t(\text{df} = n-1)$
Chikwadraattoetsen (χ^2)		
Onafhankelijkheid	$X^2 = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$	$\chi^2(\text{df} = (\text{\#rijen-1}) \cdot (\text{\#kolommen-1}))$
Aanpassing (goodness-of-fit)	$X^2 = \sum_{i} \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$	$\chi^2(\text{df} = (\text{\#categorieën-1}))$
Verschiltoetsen (op basis van twee populaties A en B)		
F-toets: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$	$F = \frac{S_A^2}{S_B^2}$	$F(\text{df}_A, \text{df}_B)$
z-toets	$V = \overline{X_A} - \overline{X_B}$	$N\left(\mu_A - \mu_B; \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n} + \frac{\sigma_B^2}{m}}\right)$
t-toets ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$)	$T = \frac{(\overline{X_A}-\overline{X_B})-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_P^2}{n}+\frac{S_P^2}{m}}}$	$t(\text{df} = n+m-2)$
t-toets ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$)	$T = \frac{(\overline{X_A}-\overline{X_B})-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n}+\frac{S_B^2}{m}}}$	$t(\text{df} = \min(n-1; m-1))$

Beslisboom verschiltoetsen



Correlatie en regressie

Correlatiecoëfficiënt van Pearson:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \cdot (\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}$$

Correlatiecoëfficiënt van Spearman:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_i d_i^2}{n^3 - n}$$

Coëfficiënten van de lineaire regressielijn $Y = a + b \cdot X$:

$$b = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}$$

Schatting van de variantie van de storingsterm ε:

$$s_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{\sum (y_i - (a + b \cdot x_i))^2}{n-2} = \frac{n}{n-2} \cdot \left(\overline{y^2} - a \cdot \overline{y} - b \cdot \overline{xy}\right)$$

$100 \cdot (1 - \alpha)$%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde Y bij een gegeven $X = x_0$:

$$t = \mathrm{InvT}(\mathrm{opp} = 1 - \alpha/2; \mathrm{df} = n - 2)$$

$$s_\mu = s_\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\right)}$$

$$[a + b \cdot x_0 - t \cdot s_\mu; a + b \cdot x_0 + t \cdot s_\mu]$$

$100 \cdot (1 - \alpha)$%-betrouwbaarheidsinterval voor Y bij een gegeven $X = x_0$:

$$t = \mathrm{InvT}(\mathrm{opp} = 1 - \alpha/2; \mathrm{df} = n - 2)$$

$$s_f = s_\varepsilon \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\right)}$$

$$[a + b \cdot x_0 - t \cdot s_f; a + b \cdot x_0 + t \cdot s_f]$$

Opgave 1 (20 punten) Om het hoofd te kunnen bieden aan toekomstige dreigingen, wordt onderzoek gedaan naar high-performance materialen voor het materieel van de toekomst. Onderdeel van dit onderzoek is een test van een nieuwe metaallegering, die beter bestand zou moeten zijn tegen zware explosies. Voor deze test worden een aantal samples gemaakt van de legering waarvan de treksterkte wordt gemeten (in N/mm^2). De waargenomen aantallen zijn als volgt:

$$931, 978, 954, 962, 984, 976, 923, 940, 988, 937$$

Neem aan dat de treksterkte een normale verdeling volgt.

1a [5pt] Bereken van de gemeten waarden het steekproefgemiddelde en de steekproefstandaardafwijking.

Uitwerking

We berekenen het steekproefgemiddelde $\overline{x}$ als volgt:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{931 + 978 + \ldots + 937}{10} \approx 957.3. \qquad \text{(2pt)}$$

We berekenen de steekproefvariantie s^2 als volgt:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1} \\ &= \frac{(931 - 957.3)^2 + (978 - 957.3)^2 + \ldots + (937 - 957.3)^2}{10 - 1} \\ &\approx 560.6778. \end{aligned} \qquad \text{(2pt)}$$

We berekenen de steekproefstandaardafwijking s door te wortel van de steekproefvariantie s^2 te nemen:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{560.6778} \approx 23.6786. \qquad \text{(1pt)}$$

1b [7pt] Bereken een $90\,\%$-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde treksterkte μ van de nieuwe metaallegering, op grond van de bovengenoemde steekproefresultaten. Laat hierbij duidelijk je berekeningen zien en maak geen gebruik van de optie TESTS/Interval op de grafische rekenmachine. Rond het interval af op gehele getallen zodanig dat de betrouwbaarheid gewaarborgd blijft.

Uitwerking

Gegeven is dat de treksterkte van de metaallegering een normale verdeling volgt met een onbekende verwachtingswaarde μ en een onbekende standaardafwijking σ. Volgens de centrale limietstelling geldt dat de gemiddelde treksterkte van de metaallegering dan normaal verdeeld is met parameters μ en $\frac{\sigma}{\sqrt{10}}$. Omdat σ onbekend is en de steekproefgrootte $n = 10 < 30$ is, moeten we gebruik maken van de t-verdeling. De t-waarde die hoort bij $90\,\%$ betrouwbaarheid, oftewel $\alpha = 0.1$, is (in het geval van tweezijdige intervallen) gelijk aan (1pt) (1pt)

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \frac{\alpha}{2}; \text{df} = n - 1) = \text{InvT}(\text{opp} = 0.95; \text{df} = 9) \approx 1.8331. \quad \text{(2pt)}$$

Het $90\,\%$-betrouwbaarheidsinterval wordt dan gegeven door

$$\begin{aligned}
&[\overline{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}] \\
&\qquad = [957.3 - 1.8331 \cdot \frac{23.6786}{\sqrt{10}}; 957.3 + 1.8331 \cdot \frac{23.6786}{\sqrt{10}}] \\
&\qquad = [943.574; 971.026]. \quad \text{(2pt)}
\end{aligned}$$

Om de betrouwbaarheid te waarborgen, moeten we het interval naar buiten afronden, oftewel de ondergrens naar beneden afronden en de bovengrens naar boven. In andere woorden, het $90\,\%$-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde treksterkte μ loopt van 943 tot 972. (1pt)

1c [6pt] De onderzoekers beweren dat de nieuwe metaallegering een gemiddelde treksterkte heeft van minstens $940 N/mm^2$. Toets deze bewering met een geschikte hypothesetoets. Bepaal de toetsuitslag aan de hand van het kritieke gebied op basis van bovenstaande steekproef. Kies in dit geval voor een significantieniveau van $\alpha = 0.05$.

Uitwerking

In deze hypothesetoets hebben we te maken met een t-toets met nul- en alternatieve hypothese als volgt:

$$\begin{aligned}
&H_0 : \mu \geq 940 && \text{(gemiddelde voldoet aan de bewering)} \\
&H_1 : \mu < 940 && \text{(gemiddelde voldoet NIET aan de bewering)} \quad \text{(1pt)}
\end{aligned}$$

In dit geval werken we met een linkszijdige toets (alternatieve hypothese heeft vorm $<$), dus het kritieke gebied is van de vorm $(-\infty, g]$. We willen de grens g bepalen zodanig dat de kans op een type-I fout (H_0 verwerpen terwijl deze juist waar is) gelijk is aan $\alpha = 0,05$. (1pt)

Onder de nulhypothese is de gemiddelde treksterkte $\overline{X}$ van 10 willekeurige monsters van de metaallegering normaal verdeeld met verwachtingswaarde $\mu = 940$ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{10}}$. Omdat σ onbekend is en $n = 10 < 30$, gebruiken we opnieuw de t-verdeling en $s = 23.6786$. Er geldt dus, omdat we eenzijdig toetsen, dat (1pt)

$$t = \text{InvT}(\mathit{opp} = 1 - \alpha; \mathit{df} = n - 1) = \text{InvT}(\mathit{opp} = 0.95; \mathit{df} = 9) \approx 1.8331.$$ (1pt)

(merk op dat de t-waarde anders is, omdat we met een ander betrouwbaarheidsniveau werken!).

De bijbehorende grenswaarde vinden we nu met

$$g = \mu - t \cdot \frac{s}{\sqrt{10}} = 940 - 1.8331 \cdot \frac{23.6786}{\sqrt{10}} \approx 926.2741.$$ (1pt)

Het steekproefgemiddelde $\overline{x} \approx 957.3$ is groter dan deze bovengrens $g \approx 926.2741$ van het kritieke gebied, dus H_0 wordt niet verworpen. (1pt)

1d [2pt] Leg in eigen woorden uit wat de toetsuitslag betekent voor de gemiddelde treksterkte van het nieuwe materiaal.

Uitwerking

De toetsuitslag betekent dus dat H_0 niet wordt verworpen. In andere woorden, op basis van de steekproef is er onvoldoende bewijs om de bewering van de onderzoekers (dat de gemiddelde treksterkte minstens $940\ N/mm^2$ is) te ontkrachten. (1pt)

(1pt)

Opgave 2 (20 punten) Een Oekraïens militaire inlichtingencentrum heeft het vermoeden dat er een bepaald patroon zit in het aantal Shahed-drones dat gebruikt wordt in Russische drone-aanvallen. Om dit te onderzoeken, hebben ze de gegevens verzameld over het aantal drones dat gebruikt werd in 171 aanvallen.

Aantal drones	**Frequentie**
1	18
2	23
3	34
4	27
5	31
≥ 6	38

2a [10pt] Toets of de verdeling van het aantal drones significant afwijkt van een uniforme verdeling over deze zes categorieën. Bepaal de toetsuitslag aan de hand van de p-waarde en kies als significantieniveau $\alpha = 0.02$.

Uitwerking

We voeren een chikwadraat toets voor aanpassing met een significantieniveau van $\alpha = 0.02$.

We beginnen met het definiëren van de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1:

H_0: het aantal drones in Russische drone-aanvallen is uniform verdeeld (1pt)

H_1: het aantal drones in Russische drone-aanvallen is NIET uniform verdeeld (1pt)

Allereerst berekenen we op basis van de discrete uniforme kansverdeling (evenveel kans op iedere mogelijke categorie) de verwachte frequenties:

Categorie	Observed	Expected
1	18	30.1667
2	23	30.1667
3	34	30.1667
4	37	30.1667
5	31	30.1667
≥ 6	38	30.1667

(2pt)

Vervolgens berekenen we de geobserveerde toetsingsgrootheid χ^2 als volgt:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} + \ldots + \frac{(O_{\geq 6} - E_{\geq 6})^2}{E_{\geq 6}} \\ &= \frac{(18 - 30.1667)^2}{30.1667} + \frac{(23 - 30.1667)^2}{30.1667} + \ldots + \frac{(38 - 30.1667)^2}{30.1667} \\ &\approx 10.7017\end{aligned}$$

(2pt)

De theoretische toetsingsgrootheid X^2 volgt onder de nulhypothese een χ^2-verdeling met df $= 6 - 1 - 0 = 5$ vrijheidsgraden. De p-waarde berekenen we als de rechteroverschrijdingskans van onze geobserveerde toetsingsgrootheid χ^2 op basis van de chikwadraatverdeling met 5 vrijheidsgraden: (1pt)

$$\begin{aligned}p = P(X^2 \geq \chi^2 > 10.7017) &= \chi^2\text{cdf}(\text{lower} = 10.7017; \text{upper} = 10^{99}; \text{df} = 5) \\ &\approx 0.0576.\end{aligned}$$

(2pt)

Omdat $p > \alpha = 0.02$, wordt de nulhypothese H_0 aangenomen. Er is onvoldoende reden om de aanname te verwerpen dat de geobserveerde data tot stand zijn gekomen als trekkingen van de uniforme kansverdeling. (1pt)

2b [5pt] Voer de toets opnieuw uit, maar bepaal nu de toetsuitslag aan de hand van het kritieke gebied.

Uitwerking

Deze toets heeft veelal dezelfde elementen als het antwoord bij vraag a. Het verschil zit hem in de manier waarop tot de conclusie wordt gekomen. (1pt) Bij een chikwadraattoets is het kritieke gebied altijd van de vorm $[g, \infty)$, oftewel de toets is altijd rechtszijdig. (1pt)

Deze grens g voldoet aan de volgende vergelijking:

$$P(X^2 \geq g) = \chi^2\text{cdf}(\text{lower} = g; \text{upper} = 10^{99}; \text{df} = 5) = \alpha = 0.02$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen door gebruik te maken van de solver optie op de grafische rekenmachine:

$$y_1 : \quad \chi^2\text{cdf}(\text{lower} = X; \text{upper} = 10^{99}; \text{df} = 5)$$

$$y_2 : \quad 0.02$$ (1pt)

De oplossing voor deze vergelijking is $g \approx 13.3882$. De geobserveerde toetsingsgrootheid $\chi^2 = 10.7017$ ligt dus niet in het kritieke gebied, waardoor de nulhypothese H_0 wordt aangenomen. Er is onvoldoende reden om de aanname te verwerpen dat de geobserveerde data tot stand zijn gekomen als trekkingen van de uniforme kansverdeling. (1pt) (1pt)

2c [5pt] Verklaar de toetsuitslag aan de hand van de frequenties in de bovenstaande tabel en de verwachte frequenties volgens een uniforme verdeling.

Uitwerking

Als we kijken naar de geobserveerde frequenties, dan zien we dat deze in de buurt liggen van de verwachte frequenties volgens de uniforme verdeling. (2pt) Het is dus niet zo gek dat de nulhypothese H_0 wordt aangenomen, omdat de toetsingsgrootheid χ^2 kleiner is naarmate de observed en expected frequenties meer op elkaar lijken. (3pt)

Opgave 3 (30 punten) Het Ministerie van Defensie wil onderzoeken of er een verband is tussen het OPCO waar een militair deel van uitmaakt en de mate waarin hij/zij tevreden is met zijn/haar huidige gevechtstenue. De tevredenheid met de uitrusting wordt gemeten met een enquête en kan twee waarden aannemen: "tevreden" en "niet tevreden".

	Tevreden	**Niet tevreden**
CLAS	250	150
CLRS	200	200
CZSK	220	180
KMAR	180	220

3a [4pt] Welk type hypothesetoets dienen we uit te voeren om aan te tonen of er een verband is tussen OPCO en mate van tevredenheid? Formuleer de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 van de bijbehorende hypothesetoets.

Uitwerking

Omdat we willen weten of de mate van tevredenheid significant afwijkt tussen militairen van verschillende OPCO's, dienen we een chikwadraattoets voor onafhankelijkheid uit te voeren. Dit kan ook omdat we te maken hebben met twee categorische variabelen! (2pt)

De bijbehorende nul- en alternatieve hypothese zijn in dit geval gelijk aan

H_0: de verdeling van de mate van tevredenheid is onafhankelijk van het OPCO van de militairen. (1pt)

H_1: de verdeling van de mate van tevredenheid is WEL afhankelijk van het OPCO van de militairen. (1pt)

3b [11pt] Bepaal de p-waarde van de desbetreffende hypothesetoets.

Uitwerking

We voeren een chikwadraat toets voor onafhankelijkheid uit om de bovenstaande hypotheses te toetsen. Allereerst berekenen we op basis van de aanname van onafhankelijkheid de verwachte frequenties:

Geobserveerde frequenties (observed)

	T	NT	Totaal
CLAS	250	150	400
CLRS	200	200	400
CZSK	220	180	400
KMAR	180	220	400
Totaal	850	750	1600

Verwachte frequenties (expected)

	T	NT	Totaal
CLAS	212.5	187.5	400
CLRS	212.5	187.5	400
CZSK	212.5	187.5	400
KMAR	212.5	187.5	400
Totaal	850	750	1600

Vervolgens berekenen we de toetsingsgrootheid X^2 als volgt:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(O_{1,1} - E_{1,1})^2}{E_{1,1}} + \frac{(O_{1,2} - E_{1,2})^2}{E_{1,2}} + \ldots + \frac{(O_{4,2} - E_{4,2})^2}{E_{4,2}} \\ &= \frac{(250 - 212.5)^2}{212.5} + \frac{(150 - 187.5)^2}{187.5} + \ldots + \frac{(220 - 187.5)^2}{187.5} \\ &\approx 26.8549.\end{aligned}$$

De toetsingsgrootheid X^2 volgt onder de nulhypothese een χ^2-verdeling met df $=$ $(\#\text{rijen} - 1) \cdot (\#\text{kolommen} - 1) = (4-1) \cdot (2-1) = 3$ vrijheidsgraden.

$$\begin{aligned}p &= P(\chi^2 > 26.8549) \\ &= \chi^2\text{cdf}(\text{lower} = 26.8549; \text{upper} = 10^{99}; \text{df} = 3) \\ &\approx 0.\end{aligned}$$

3c [5pt] Geef de conclusie van de hypothesetoets (op basis van een significantieniveau $\alpha = 0.05$) met behulp van de berekende p-waarde.

Uitwerking

Uit de hypothesetoets volgt een bizar kleine p-waarde van nagenoeg 0, oftewel rechteroverschrijdingskans. grote rechteroverschrijdingskans $p \approx 0.2059$. Omdat $p << \alpha = 0.05$, geldt dat H_0 wordt verworpen. We kunnen dus de conclusie (2pt) trekken dat de categorische variabelen OPCO en mate van tevredenheid niet onafhankelijk zijn van elkaar. (1pt)

Als we kijken naar de tabel van geobserveerde frequenties, dan zien we dat de verdeling tevreden-niet tevreden erg verschilt tussen de verschillende OPCO's. Dat (1pt) duidt erop dat bijvoorbeeld militairen van de KMAR vaker ontevreden zijn dan bijvoorbeeld landmachters. Hierdoor zijn er ook grote verschillen tussen de geobserveerde en verwachte frequenties. (1pt)

3d [10pt] Naast de vraag of de mate van tevredenheid afhangt van het OPCO, is het ministerie ook geïnteresseerd in het percentage tevreden militairen. Bepaal een $95\,\%$-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage tevreden militairen (over alle OPCO's samen).

Uitwerking

Om een betrouwbaarheidsinterval te bepalen van een fractie (of percentage) gebruiken we de Clopper-Pearson methode. Laat X het aantal tevreden militairen zijn in de steekproef. Aangezien de steekproefomvang gelijk is aan 1600 militairen, is X binomiaal verdeeld met $n = 400$ en een onbekende succeskans p. De steekproefuitkomst is dat er $k = 850$ tevreden militairen zijn. Omdat de gewenste betrouwbaarheid $95\,\%$ is, geldt dat $\alpha = 0.05$. (1pt) (1pt) (1pt)

De Clopper-Pearson methode werkt als volgt:

1. Bepaal de succeskans p_1 waarvoor geldt dat de linkeroverschrijdingskans van de uitkomst $k = 850$ gelijk is aan $\alpha/2$, oftewel $P(X \leq 850) = \alpha/2 = 0.025$. Voer hiervoor in het solver menu van de grafische rekenmachine in:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \mathrm{binomcdf}(n = 1600; p_1 = X; k = 850) \\
y_2 &= 0.025
\end{aligned}
\qquad \text{(2pt)}
$$

   De solver optie geeft een waarde van $p_1 \approx 0.5559$. (1pt)

2. Bepaal de succeskans p_2 waarvoor geldt dat de rechteroverschrijdingskans van de uitkomst $k = 850$ gelijk is aan $\alpha/2$, oftewel $P(X \geq 850) = 1 - P(X \leq 849) = \alpha/2 = 0.025$. Voer hiervoor in het solver menu van de grafische rekenmachine:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1 - \mathrm{binomcdf}(n = 1600; p_1 = X; k = 849) \\
y_2 &= 0.025
\end{aligned}
\qquad \text{(2pt)}
$$

   De solver optie geeft een waarde van $p_2 \approx 0.5064$. (1pt)

We vinden het Clopper-Pearson interval door de twee gevonden waarden als grenzen te nemen, oftewel het $90\,\%$-betrouwbaarheidsinterval voor de fractie tevreden militairen loopt van $50{,}64\,\%$ tot $55{,}59\,\%$. (1pt)

Opgave 4 (30 punten) In een gezamenlijk project van sportinstructeurs van de KMA en de geneeskundige dienst wordt het verband onderzocht tussen de gemiddelde slaaptijd van een cadet (in uren) en de hersteltijd na een zware inspanning (in uren). Voor de hersteltijd wordt gekeken naar een spierpijn-index, en een cadet is volledig hersteld wanneer de spierpijn-index onder een gegeven drempelwaarde komt.

Van negen cadetten wordt gemeten hoe lang ze gemiddeld hebben geslapen en hoe lang hun hersteltijd is na een zware inspanning.

Slaaptijd (in uren)	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
Hersteltijd (in uren)	66	61	63	62	65	64	57	59	60

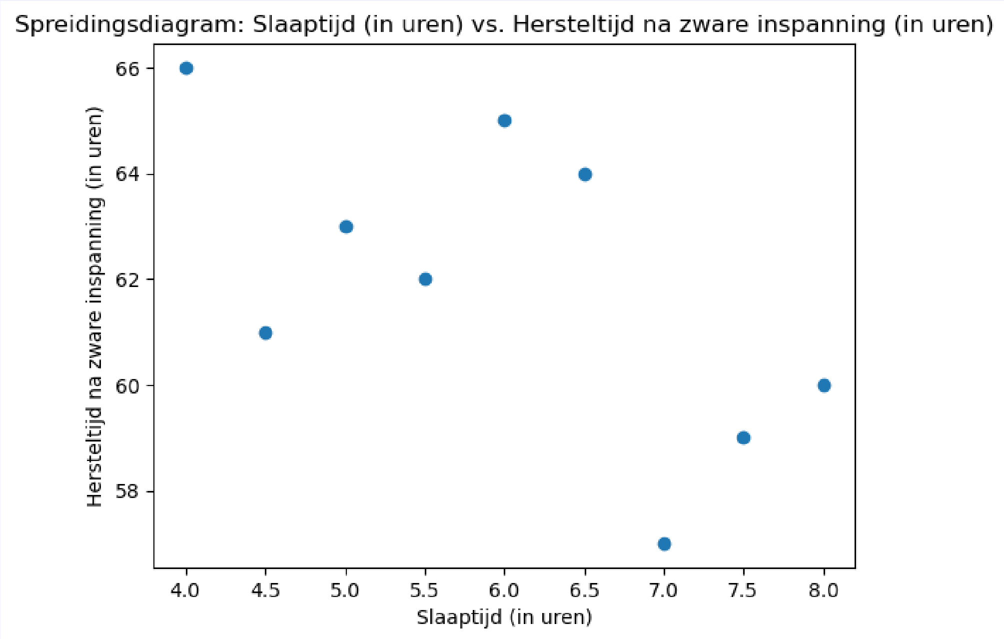
4a [2pt] Als we een regressie-analyse willen uitvoeren, welke variabele zou dan de afhankelijke variabele Y zijn en welke variabele zou de onafhankelijke variabele X zijn?

Uitwerking

Bij een regressie-analyse is de meest logische keuze om slaaptijd als onafhankelijke variabele X te kiezen, en de hersteltijd als afhankelijke variabele Y. Een langere hersteltijd verklaart niet waarom iemand langer slaapt, terwijl dat andersom wellicht wel het geval kan zijn. (2pt)

4b [5pt] Teken het bijbehorende spreidingsdiagram op basis van je antwoord op vraag a.

Uitwerking



4c [8pt] Bereken Pearson's correlatiecoëfficiënt $r(x, y)$. Wat kun je concluderen over de samenhang van de twee variabelen?

Uitwerking

We beginnen met het uitrekenen van Pearson's correlatiecoëfficiënt

$$r(x, y) = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \cdot (\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}$$

Hiervoor hebben we dus de waardes van $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{xy}$, $\overline{x^2}$ en $\overline{y^2}$ nodig. Deze bepalen we aan de hand van de volgende rekentabel:

x	y	xy	x^2	y^2
4	66	264	16	4356
4.5	61	274.5	20.25	3721
5	63	315	25	3969
5.5	62	341	30.25	3844
6	65	390	36	4225
6.5	64	416	42.25	4096
7	57	399	49	3249
7.5	59	442.5	56.25	3481
8	60	480	64	3600
$\overline{x} = 6$	$\overline{y} = 61.8889$	$\overline{xy} = 369.1111$	$\overline{x^2} = 37.6667$	$\overline{y^2} = 3837.8889$

(4pt)

De correlatiecoëfficiënt van Pearson is dus gelijk aan

$$\begin{aligned} r(x,y) &= \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x}^2 - \overline{x^2}) \cdot (\overline{y}^2 - \overline{y^2})}} \\ &= \frac{369.1111 - 6 \cdot 61.8889}{\sqrt{(6^2 - 37.6667) \cdot (61.8889^2 - 3837.8889)}} \\ &= \frac{-2.2222}{3.5717} \\ &\approx -0.6222. \end{aligned}$$

(3pt)

De correlatiecoëfficiënt ligt redelijk ver van 0 en is negatief. Dit houdt in dat er een vrij duidelijke dalende trend zichtbaar is, maar dat er toch onzekerheid zit in hoe het exacte lineaire verband eruit zal zien. (1pt)

4d [7pt] Bereken de regressielijn $Y = a + b \cdot X$ door berekening van de coëfficiënten a en b. Bepaal aan de hand van de regressielijn een statistisch verantwoorde voorspelling voor de hersteltijd van een cadet die 6 uur en 45 minuten heeft geslapen.

Uitwerking

Om de coëfficiënten a en b van de regressielijn te berekenen, gaan we de rekentabel van vraag (a) hergebruiken. Er volgt namelijk dat

$$\begin{aligned} b &= \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \\ &= \frac{369.1111 - 6 \cdot 61.8889}{37.6667 - (6)^2} \\ &= \frac{-2.2222}{1.6667} \approx -1.3333 \\ a &= \overline{y} - b \cdot \overline{x} && \text{(2pt)} \\ &= 61.8889 - (-1.3333 \cdot 6) \\ &\approx 69.8889. && \text{(2pt)} \end{aligned}$$

De formule van de regressielijn is dus gelijk aan $Y = 69.8889 - 1.3333 \cdot X$. Een (1pt) statistisch verantwoorde voorspelling voor de hersteltijd van een cadet die gemiddelde 6 uur en 45 minuten heeft geslapen vinden we door $X = 6.75$ in te vullen: Dit geeft een waarde van $Y = 69.8889 - 1.3333 \cdot 6.75 = 60.88887$ uur, oftewel iets minder dan 61 uur. (2pt)

4e [8pt] Bereken een 90%-voorspellingsinterval voor de hersteltijd van een willekeurige cadet die 6 uur en 45 minuten heeft geslapen.

Uitwerking

In opdracht (d) hebben we een puntschatting van $y_0 = 69.8889 - 1.3333 \cdot 6.75 \approx 60.8889$ bepaald. Daarnaast kunnen we de standaardafwijking σ van de storingsterm ε schatten:

$$\begin{aligned} s_\varepsilon &= \sqrt{\frac{n}{n-2} \cdot \left(\overline{y^2} - a \cdot \overline{y} - b \cdot \overline{xy}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{9}{7} \cdot (3837.8889 - 69.8889 \cdot 61.8889 - (-1.3333 \cdot 369.1111))} \\ &\approx 2.456. && \text{(3pt)} \end{aligned}$$

Vervolgens kunnen we een puntschatting berekenen van de standaardafwijking van Y voor gegeven $X = x_0$:

$$\begin{aligned} s_f &= s_\varepsilon \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\right)} \\ &= 2.456 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9} \cdot \left(1 + \frac{(6.75 - 6)^2}{37.6667 - 6^2}\right)} \\ &\approx 2.6321. \end{aligned} \qquad \text{(2pt)}$$

Omdat we de standaardafwijkingen geschat hebben en de storingstermen normaal verdeeld zijn, moeten we werken met de t-verdeling met $df = n - 2 = 7$ vrijheidsgraden. De t-waarde die hoort bij een betrouwbaarheidsniveau $\alpha = 0.1$ is gelijk aan

$$t = \mathrm{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 2) = \mathrm{InvT}(\text{opp} = 0.95; \text{df} = 7) \approx 1.8946. \qquad \text{(1pt)}$$

Het $90\,\%$-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde Y voor gegeven $X = x_0$ kan dus worden beschreven door

$$\begin{aligned} &[y_0 - t \cdot s_f; y_0 - t \cdot s_f] \\ &= [60.8889 - 1.8946 \cdot 2.6321; 60.8889 + 1.8946 \cdot 2.6321] \\ &\approx [55.9021; 65.8757]. \end{aligned} \qquad \text{(2pt)}$$

Met $90\,\%$ zekerheid zal de hersteltijd van een willekeurige cadet die 6 uur en 45 minuten heeft geslapen tussen ongeveer 56 en 66 uur liggen.