Statistiek voor MBW / KW
Uitwerkingen huiswerkopgaven

Dr. ir. D.A.M.P. Blom & Dr. J.B.M. Melissen

2025

Week 3: continue kansvariabelen

Hoofdstuk 4

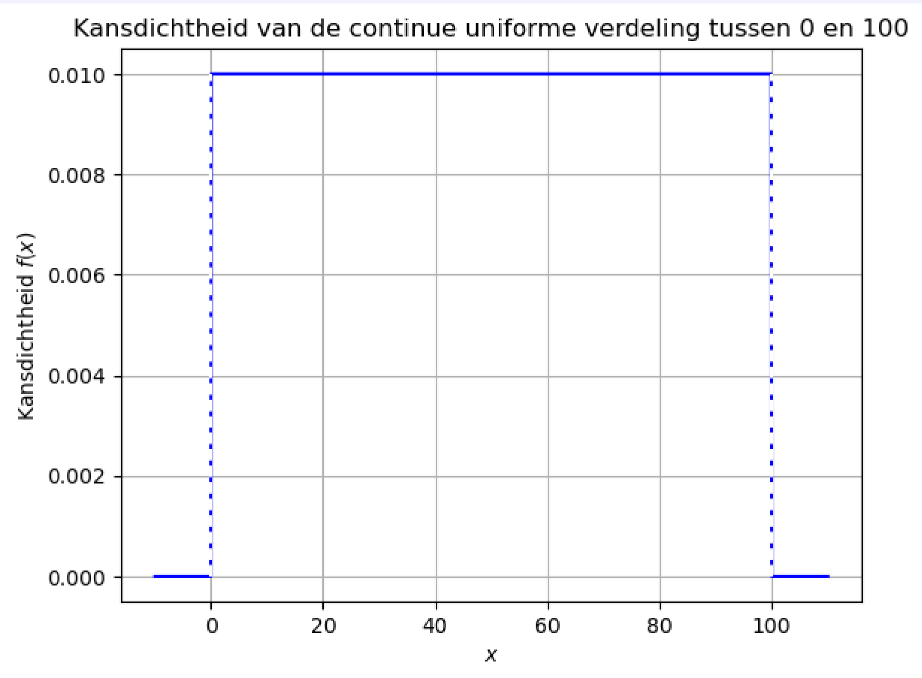
Opdracht 4.14: Bij een loterij wordt een ronddraaiend rad gebruikt om een winnend nummer te loten. Op het rad is een indeling gemaakt in centimeters lopend van $0,00$ tot $100,00$ (wat weer gelijk valt met $0,00$, want de cirkel is dan rond). De uitkomst van één draai met het rad kan men beschouwen als een willekeurige trekking uit de uniforme verdeling tussen $0,00$ en $100,00$.

(a) Hoe groot is de kans dat een willekeurige draai een uitkomst oplevert tussen $40,00$ en $75,00$?

Uitwerking

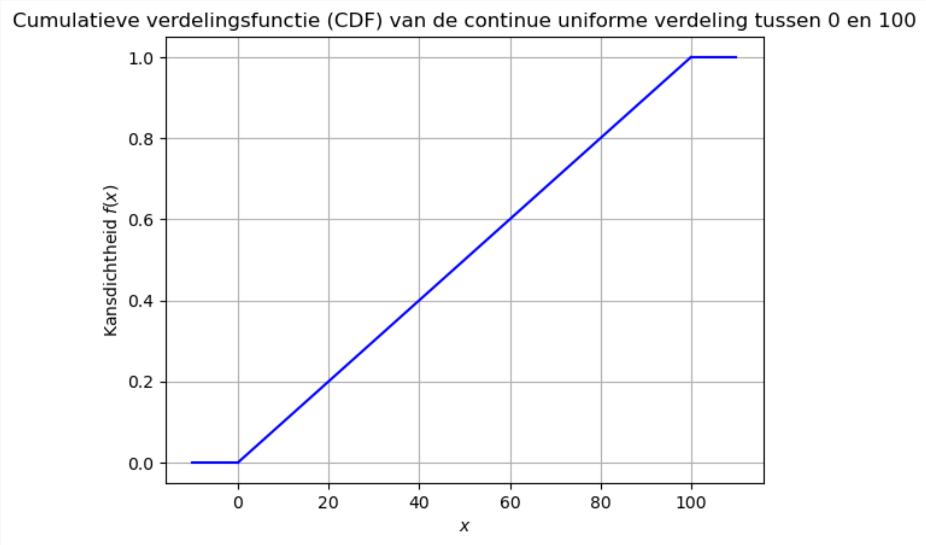
Bij het rad hebben we te maken met een uniforme verdeling tussen linkergrens $a = 0,00$ en rechtergrens $b = 100,00$. Laat X de kansvariabele zijn die de waarde beschrijft van een draai aan het rad. Een uitkomst van deze kansvariabele is een getal x tussen a en b. Deze uitkomst komt uit een continue kansverdeling, met een kansdichtheidsfunctie (PDF) van

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{100,00-0,00} = 0,01, & \text{als } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$



De cumulatieve verdelingsfunctie (CDF) van de uniforme verdeling tussen a en b laat zich beschrijven door

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{als } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{als } a \leq x < b \\ 1, & \text{als } x \geq b \end{cases}$$



De kans op een uitkomst tussen $40,00$ en $75,00$ is dus

$$\begin{aligned} P(40,00 \leq X \leq 75,00) &= F(75,00) - F(40,00) \\ &= \frac{75,00 - 0,00}{100,00 - 0,00} - \frac{40,00 - 0,00}{100,00 - 0,00} \\ &= 0,75 - 0,40 \\ &= 0,35 \end{aligned}$$

(b) Hoe groot is de kans dat drie draaien achter elkaar alle drie een uitkomst opleveren tussen $80,00$ en $100,00$?

Uitwerking

De kans dat een draai een uitkomst oplevert tussen $80,00$ en $100,00$ is gelijk aan

$$\begin{aligned} P(80,00 \leq X \leq 100,00) &= F(100,00) - F(80,00) \\ &= 1 - \frac{80,00 - 0,00}{100,00 - 0,00} \\ &= 1 - 0,80 = 0,20 \end{aligned}$$

Aangezien afzonderlijke draaien onafhankelijk zijn van elkaar (de uitkomst van de eerste draai beinvloedt niet de kansen van latere draaien) is de kans op drie keer een draai tussen $80,00$ en $100,00$ gelijk aan $0,20 \cdot 0,20 \cdot 0,20 = 0,008$.

(c) We doen twee draaien met het rad. Hoe groot is de kans dat de eerste draai een uitkomst kleiner dan 20,00 oplevert en de tweede draai een uitkomst groter dan $20,00$?

Uitwerking

Deze kans is gelijk aan

$$P(X < 20,00) \cdot P(X > 20,00) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16.$$

(d) Gegeven is dat de eerste draai 60 oplevert, hoe groot is dan de kans dat de tweede draai een groter getal oplevert?

Uitwerking

Omdat de uitkomsten van opeenvolgende draaien onafhankelijk zijn van elkaar, is de kans dat de tweede draai een groter getal oplevert gelijk aan

$$P(X \geq 60) = P(60 \leq X \leq 100,00) = F(100,00) - F(60) = 1 - 0,6 = 0,4$$

(e) Gegeven is dat de eerste draai A oplevert, hoe groot is dan de kans dat de tweede draai meer dan A oplevert?

Uitwerking

Als de eerste draai de waarde A oplevert, dan is de kans dat de tweede draai meer oplevert gelijk aan

$$\begin{aligned} P(X > A) &= P(A \leq X \leq 100,00) \\ &= F(100,00) - F(A) \\ &= 1 - \frac{A - 0,00}{100,00 - 0,00} \\ &= \frac{100,00 - A}{100,00} \end{aligned}$$

Opdracht 4.15: Gegeven is een continue kansvariabele X die alleen waarden kan aannemen op een bepaald gedeelte van de x-as.

(a) Verifieer voor de volgende twee gevallen of de geformuleerde functie f als kansdichtheid kan dienen?

(a) $f(x) = \begin{cases} 0,20, & \text{voor } 5 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x - 2, & \text{voor } 5 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$

Uitwerking

Een functie f kan dienen als kansdichtheid als aan twee voorwaarden is voldaan:

- $f(x) \geq 0$ voor alle waarden van x.
- De oppervlakte ingesloten door de grafiek van f en de x-as is gelijk aan 1: $\int_{\infty}^{\infty} f(x) = 1$

Voor het eerste geval zien we direct aan de definitie van de functie dat aan de eerste voorwaarde is voldaan, aangezien $f(x) = 0$ of $f(x) = 0,20$ voor elke waarde van x. Met de grafische rekenmachine checken we dat verder geldt:

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{5}^{10} 0,20\ dx = \text{fnInt}(0.20; X; 5; 10) = 1$$

Omdat de eerste functie aan beide voorwaarden voldoet, zou deze als kansdichtheidsfunctie kunnen dienen.
Voor het tweede geval geldt dat het een stijgende lineaire functie is (de richtingscoëfficiënt $\frac{2}{5}$ is groter dan 0), dus de minimale waarde op het interval $5 \leq x \leq 10$ wordt aangenomen in $x = 5$: hier is de functiewaarde $f(5) = \frac{2}{5} \cdot 5 - 2 = 0$. Er volgt dus dat aan de eerste voorwaarde is voldaan, aangezien $f(x) = 0$ (voor $x < 5$ en $x > 10$) of $f(x) \geq 0$ (voor $5 \leq X \leq 10$). Met de grafische rekenmachine checken we dat verder geldt:

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{5}^{10} \frac{2}{5}x - 2\ dx = \text{fnInt}(\frac{2}{5}X - 2; X; 5; 10) = 5$$

Omdat niet aan de tweede voorwaarde is voldaan, zou dit tweede geval niet als kansdichtheidsfunctie kunnen dienen.

(b) Bereken voor de gegevens bij vraag (a) de verdelingsfunctie $F(x)$ van de betreffende variabele.

Uitwerking

De kansverdelingsfunctie behorend bij functie 1 uit (a) is

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{y} f(y)\ dy.$$

de oppervlakte onder de grafiek van f, tot en met de waarde x Als $x \leq 5$ is dat 0, omdat $f(x) = 0$ voor $x \leq 5$. Als $5 \leq x \leq 10$ is dit en rechthoek met breedte $x - 5$ en hoogte $0,2$, dus $F(x) = 0,2(x - 5)$. Als $x \geq 10$ is dat de oppervlakte van de rechthoek van 5 tot 10 met hoogte $0,2$, en daarboven komt er niets bij, dus dan is $F(x) = 1$ Met primitiveren:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{y} f(y)\ dy = \begin{cases} 0, & \text{als } x < 5 \\ 0,2(x-5), & \text{als } 5 \leq x \leq 10 \\ 1, & \text{als } x > 10 \end{cases}$$

Opdracht 4.16: Gegeven is de volgende kansdichtheid:

$$f(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{voor } 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Bereken $E[X]$ en Var(X).

Uitwerking

De verwachtingswaarde berekenen met de algemene formule voor continue kansverdelingen, namelijk:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^5 x \cdot 0,2\, dx = \text{fnInt}(0.2 \cdot X; X; 0; 5) = 2,5.$$

Ook voor de variantie gebruiken we de algemene formule voor continue kansverdelingen, namelijk:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f(x)\, dx \\ &= \int_0^5 (x - 2,5)^2 \cdot 0,2\, dx \\ &= \text{fnInt}(0.2(X - 2.5)^2; X; 0; 5) \\ &\approx 2,0833. \end{aligned}$$

(b) We doen twee trekkingen uit deze verdeling. Hoe groot is de kans dat beide uitkomsten groter dan 4 zijn?

Uitwerking

De kans op één keer een trekking groter dan 4 is gelijk aan

$$P(X \geq 4) = \int_4^{\infty} f(x)\, dx = \int_4^5 0,2\, dx = \text{fnInt}(0.2; X; 4; 5) = 0.2$$

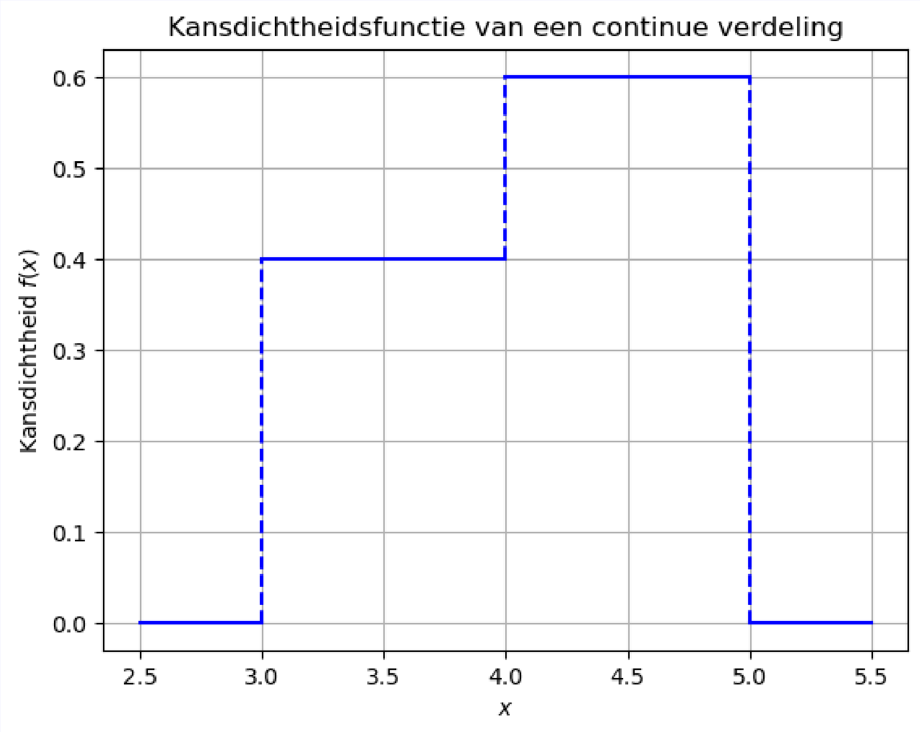
De kans op tweemaal een trekking groter dan 4 is dan gelijk aan $0,2 \cdot 0,2 = 0,04$.

Opdracht 4.17: Een conservatoriumstudent oefent per dag tussen 180 en 300 minuten. Het aantal oefenuren op een willekeurige dag kan worden weergegeven door een continue kansvariabele X (in uren) met de volgende kansdichtheid:

$$f(x) = \begin{cases} 0,40, & \text{voor } 3,00 \leq x < 4,00 \\ 0,60, & \text{voor } 4,00 \leq x < 5,00 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Geef de kansdichtheid grafisch weer.

Uitwerking



(b) Hoe groot is de kans dat de student op een willekeurige dag minder dan 210 minuten oefent? Hoe groot is de kans dat hij tussen 200 en 260 minuten oefent?

Uitwerking

De kans dat een student op een willekeurige dag minder dan 210 minuten, oftewel 3,5 uur oefent, is gelijk aan

$$P(X \leq 3,5) = \int_{-\infty}^{3,5} f(x)dx = \int_{3,00}^{3,5} 0,40dx = \text{fnInt}(0.40; X; 3.00; 3.5) = 0,2.$$

De kans dat een student op een willekeurige dag tussen 200 en 260 minuten oefent, oftewel tussen $\frac{10}{3}$ en $\frac{13}{3}$ uur oefent, is gelijk aan

$$\begin{aligned} P(\frac{10}{3} \leq X \leq \frac{13}{3}) &= \int_{\frac{10}{3}}^{\frac{13}{3}} f(x)\ dx \\ &= \int_{\frac{10}{3}}^{4,00} 0,40\ dx + \int_{4,00}^{\frac{13}{3}} 0,6\ dx \\ &= \text{fnInt}(0.40; X; 10/3; 4.00) + \text{fnInt}(0.60; X; 4.00; 13/3) \\ &\approx 0,4667 \end{aligned}$$

(c) Wat is de verwachtingswaarde van de dagelijkse studietijd?

Uitwerking

De verwachtingswaarde van de dagelijkse studietijd berekenen we met de algemene formule voor continue kansverdelingen:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx \\ &= \int_{3,00}^{4,00} x \cdot 0,40\, dx + \int_{4,00}^{5,00} x \cdot 0,60\, dx \\ &= \text{fnInt}(0.40X; X; 3.00; 4.00) + \text{fnInt}(0.60X; X; 4.00; 5.00) \\ &= 4,1 \end{aligned}$$

De verwachte dagelijkse studietijd is 4,1 uur, oftewel 246 minuten.

Opdracht 4.18: Antiekhandelaar Lauwen overweegt op een veiling een fraaie Friese staartklok te kopen. Bekend is dat deze klok een bedrag zal moeten opleveren tussen €20 000 en €30 000. Een concurrent van Lauwen wil eveneens een (onbekend) bod X doen, waarvan de hoogte mag worden beschouwd als een trekking uit een rechthoekige kansverdeling tussen 20 000 en 30 000. Gelet op het veronderstelde continue karakter van de kansvariabele, mogen we ervan uitgaan dat beide partijen nooit exact hetzelfde bod zullen doen.

(a) Veronderstel dat Lauwen €23 000 biedt. Hoe groot is de kans dat hij daarmee in het bezit komt van de klok?

Uitwerking

Lauwen komt enkel en alleen in bezit van de klok als het bod $X \sim \text{Uniform}(20000; 30000)$ van zijn concurrent lager is dan €23 000. De kans hierop is gelijk aan

$$P(X \leq 23000) = \frac{23000 - 20000}{30000 - 20000} = \frac{3000}{10000} = 0,3$$

(b) Veronderstel Lauwen biedt €28 000 respectievelijk €30 000. Hoe groot is dan de kans op aankoop van de klok?

Uitwerking

Als Lauwen een bod van €28 000 doet, is de kans op aankoop gelijk aan

$$P(X \leq 28000) = \frac{28000 - 20000}{30000 - 20000} = \frac{8000}{10000} = 0,8$$

Als Lauwen een bod van €30 000 doet, is de kans op aankoop gelijk aan 1, want dit is de bovengrens van het bod X wat de concurrent gaat uitbrengen.

(c) Er is een klant aan wie Lauwen de klok voor een bedrag van €31 000 onmiddellijk kan verkopen. Hoeveel bedraagt de verwachte winst voor Lauwen bij de biedingen die bij de vragen a en b worden overwogen?

Uitwerking

Als Lauwen een bod van €23 000 doet, is de kans op aankoop gelijk aan $0,3$. In het geval dat hij de concurrent overtreft ($X < 23000$), is de winst gelijk aan $31000 - 23000 = 8000$ euro. In het geval dat hij de concurrent niet overtreft ($X > 23000$), is de winst gelijk aan 0, want dan kan hij de klok niet doorverkopen. Je kunt dus de winst W zien als een discrete kansvariabele met twee mogelijke uitkomsten:

winst k (in euro)	0	8000
$f(k) = P(W = k)$	$0,7$	$0,3$

De verwachte winst is in dat geval gelijk aan

$$\begin{aligned} E[W] &= 0 \cdot P(W = 0) + 8000 \cdot P(W = 8000) \\ &= 0 \cdot 0,7 + 8000 \cdot 0,3 \\ &= 2400 \end{aligned}$$

Op een zelfde manier kun je de verwachte winst bepalen in het geval van boden van respectievelijk €28 000 en €30 000:

- Wanneer het bod gelijk is aan €28 000, is de kans op aankoop gelijk aan $P(X < 28000) = 0,8$. In dat geval is de winst gelijk aan $31000 - 28000 = 3000$ euro, en anders 0 euro. Je kunt dus de winst W zien als een discrete kansvariabele met twee mogelijke uitkomsten:

winst k (in euro)	0	3000
$f(k) = P(W = k)$	$0,2$	$0,8$

  De verwachte winst (in euro) is in dat geval gelijk aan

  $$\begin{aligned} E[W] &= 0 \cdot P(W = 0) + 3000 \cdot P(W = 3000) \\ &= 0 \cdot 0,2 + 3000 \cdot 0,8 \\ &= 2400 \end{aligned}$$

- Wanneer het bod gelijk is aan €30 000, is de kans op aankoop gelijk aan $P(X < 30000) = 1$. Als hij de concurrent overtreft ($X < 30000$), is de winst, en dus ook de verwachte winst, gelijk aan $31000 - 30000 = 1000$ euro.

(d) Noem het bedrag dat Lauwen gaat bieden B. Bij welke bieding B is de verwachte verkoopwinst zo hoog mogelijk?

Uitwerking

Stel dat Lauwen een bedrag van B euro gaat bieden. We kunnen aannemen dat $20000 \leq B \leq 30000$. Als $B < 20000$, dan wordt Lauwen altijd overboden door zijn concurrent. Als $B > 30000$, dan is zijn winst kleiner dan bij $B = 30000$, terwijl in dat geval de concurrent al sowieso wordt overboden. De kans op aankoop is altijd gegeven door $P(X < B)$, de kans dat het concurrerende bod X wordt overtroffen. Deze kans – in termen van B – is gelijk aan

$$P(X < B) = \frac{B - 20000}{30000 - 20000} = \frac{B - 20000}{10000}$$

Als $X < B$, dan koopt Lauwen de klok aan, en kan daar dan $31000 - B$ euro winst op maken. Als $X > B$, dan wordt Lauwen overtroffen en is zijn winst 0 euro. Dit gebeurt met kans $P(X > B) = 1 - P(X < B) = 1 - \frac{B-20000}{10000} = \frac{30000-B}{10000}$. Je kunt dus de winst W zien als een discrete kansvariabele met twee mogelijke uitkomsten:

winst k (in euro)	0	$31000 - B$
$f(k) = P(W = k)$	$\frac{30000-B}{10000}$	$\frac{B-20000}{10000}$

De verwachte winst (in euro) is in dat geval gelijk aan

$$\begin{aligned}
E[W] &= 0 \cdot P(W = 0) + (31000 - B) \cdot P(W = 31000 - B) \\
&= 0 \cdot \left(\frac{30000 - B}{10000}\right) + (31000 - B) \cdot \left(\frac{B - 20000}{10000}\right) \\
&= \frac{(31000 - B) \cdot (B - 20000)}{10000} \\
&= \frac{-620000000 + 51000 \cdot B - B^2}{10000} \\
&= -62000 + 5,1 \cdot B - \frac{1}{10000} \cdot B^2
\end{aligned}$$

We vinden de optimale waarde voor B door de afgeleide naar B te nemen (exponent naar voren halen en exponent met 1 verminderen) en gelijk te stellen aan 0:

$$\frac{d}{dB}(E[W]) = 5,1 - \frac{2}{10000} \cdot B = 0 \to B = 5,1 \cdot \frac{10000}{2} = 25500$$

Invullen van $B = 25500$ geeft een verwachte winst (in euro) van

$$E[W] = -62000 + 5,1 \cdot 25500 - \frac{1}{10000} \cdot (25500)^2 = 3025.$$

(e) Veronderstel dat de klant niet €31 000 maar €Y wenst te betalen. Geef aan hoe het optimale bod B afhangt van de gekozen Y.

Uitwerking

In dat geval is bij aankoop de winst niet gelijk aan $31000 - B$, maar gelijk aan $Y - B$. Je kunt dus de winst W zien als een discrete kansvariabele met twee mogelijke uitkomsten:

winst k (in euro)	0	$Y-B$
$f(k)=P(W=k)$	$\frac{30000-B}{10000}$	$\frac{B-20000}{10000}$

De verwachte winst (in euro) is in dat geval gelijk aan

$$\begin{aligned}
E[W] &= 0\cdot P(W=0)+(31000-B)\cdot P(W=Y-B)\\
&= 0\cdot\frac{30000-B}{10000}+(Y-B)\cdot\frac{B-20000}{10000}\\
&= \frac{(Y-B)\cdot(B-20000)}{10000}\\
&= \frac{20000Y+(Y+20000)B-B^2}{10000}\\
&= 2Y+\frac{Y+20000}{10000}B-\frac{1}{10000}B^2
\end{aligned}$$

We vinden de optimale waarde voor B door de afgeleide naar B te nemen (zie in dit geval Y als een vaststaand getal, niet een variabele) en gelijk te stellen aan 0:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dB}(E[W]) &= \frac{Y+20000}{10000}-\frac{2}{10000}B=0\\
\rightarrow B &= \frac{Y+20000}{10000}\cdot\frac{10000}{2}=\frac{Y+20000}{2}
\end{aligned}$$

Merk op dat deze optimale waarde voor B precies in het midden tussen 20000 en Y ligt. Invullen van $B=\frac{Y+20000}{2}$ geeft een verwachte winst (in euro) van

$$\begin{aligned}
E[W] &= \frac{(Y-B)\cdot(B-20000)}{10000}\\
&= \frac{\frac{Y-20000}{2}\cdot\frac{Y-20000}{2}}{10000}\\
&= \frac{(Y-20000)^2}{40000}
\end{aligned}$$

Als $Y>40000$, dan kun je in plaats van $B=\frac{Y+20000}{2}>30000$ beter kiezen voor een bod van $B=30000$, omdat je dan toch al verzekerd bent van de aankoop.