Statistiek voor MBW / KW
Uitwerkingen huiswerkopgaven

Dr. ir. D.A.M.P. Blom & Dr. J.B.M. Melissen

2025

Week 10: hypothesetoetsen

Hoofdstuk 9

Opdracht 9.m1: Een kritiek gebied Z ...

(a) bestaat uit alle hypothesen die moeten worden verworpen.

(b) mag geen waarneming bevatten.

(c) geeft voor de toetsingsgrootheid aan welke uitkomsten daarvan tot verwerping van de nulhypothese zullen leiden.

(d) heeft een kans van $1 - \alpha$.

Uitwerking

Het juiste antwoord is (c).

Opdracht 9.m2: Een fout van de eerste soort fout wordt gemaakt als ...

(a) de nulhypothese wordt verworpen indien deze toch juist is.

(b) reeds bij het nemen van de steekproef fouten worden gemaakt.

(c) een onjuiste toetsingsprocedure wordt gevolgd.

(d) de alternatieve hypothese wordt verworpen.

Uitwerking

Het juiste antwoord is (a).

Opdracht 9.m3: Het verwerpen van een juiste alternatieve hypothese ...

(a) heet een fout van de eerste soort.

(b) heet een fout van de tweede soort.

(c) heet een steekproeffout.

(d) kan alleen als de toetsingsgrootheid een waarde in het kritieke gebied heeft laten zien.

Uitwerking

Het juiste antwoord is (b).

Opdracht 9.m4: Als bij een toetsingsprocedure wordt gewerkt met de zogeheten overschrijdingskansen μ, dan ...

(a) dient de nulhypothese te worden verworpen als μ groter is dan α.

(b) dient de nulhypothese te worden verworpen als bij tweezijdige toetsing de p-waarde kleiner is dan $\frac{1}{2}\alpha$.

(c) is $1-p$ het onderscheidingsvermogen.

(d) mag p niet groter zijn van $0,05$.

Uitwerking

Het juiste antwoord is (b).

Opdracht 9.m5: Een vulmachine is zodanig ingesteld dat deze verpakking vult met een vulgewicht X dat een normale verdeling volgt met $\mu = 1510$ gram en $\sigma = 20$ gram. Regelmatig wordt met een steekproef gecontroleerd of de instelling (μ) van de machine nog correct is. We nemen dan een steekproef van zestien verpakkingen en we toetsen tweezijdig met $\alpha = 0,05$. We veronderstellen dat σ niet is veranderd. De grenzen van het kritieke gebied zijn dan:

(a) $1500,2$ en $1519,8$

(b) 1477 en 1543

(c) $1507,55$ en $1512,45$

(d) 1461 en 1559

Uitwerking

In deze vraag wordt tweezijdig getoetst met de volgende nulhypothese en alternatieve hypothese:

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \mu = 1510 \\ H_1 : &\quad \mu \neq 1510 \end{aligned}$$

Gegeven is dat $X \sim N(\mu = ?; \sigma = 20)$, want we mochten veronderstellen dat σ niet was veranderd. Onder de nulhypothese H_0 geldt, dankzij de centrale limietstelling dat het steekproefgemiddelde $\overline{X} \sim N(\mu = ?; \frac{\sigma}{\sqrt{16}})$ Omdat $\alpha = 0,05$, gebruiken we $z_{\alpha/2} = \text{InvNorm}(opp = 1 - \alpha/2) = \text{InvNorm}(opp = 0,975) \approx 1,9600$.
Het acceptatiegebied is dan gegeven door

$$\begin{aligned} &[\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{16}}; \mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{16}}] \\ &= [1510 - 1,9600 \cdot \frac{20}{\sqrt{16}}; 1510 - 1,9600 \cdot \frac{20}{\sqrt{16}}] \\ &= [1500,2; 1519,8] \end{aligned}$$

Het kritieke gebied Z wordt gevormd door alle waardes die buiten het acceptatiegebied liggen, oftewel:

$$(-\infty; 1500,2) \text{ en } (1519,8,\infty).$$

Het juiste antwoord is (a).

Opdracht 9.m6: Voor een normaal verdeelde variabele met onbekende μ en σ wordt een toets voor μ verricht. De volgende gegevens zijn van belang: $H_0 : \mu = 60$; $H_1 : \mu < 60$; $\alpha = 0,05$; $s^2 = 16$; $n = 25$; het steekproefgemiddelde is 62. Bij deze toets vinden we dus een berekende t^*-waarde of z^*-waarde die gelijk is aan ...

(a) $2,50$

(b) $0,625$

(c) $1,568$

(d) $1,316$

Uitwerking

Omdat $\alpha = 0,05$ en $n = 25$ gebruiken we de t-verdeling. De formule voor de t^*-waarde is gegeven door

$$t^* = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Omdat geldt dat $s^2 = 16$, weten we dat $s = 4$. Verder kunnen we onder de nulhypothese aannemen dat $\mu = 60$ en is het steekproefgemiddelde $\overline{x} = 62$. De bijbehorende t^*-waarde is gelijk aan

$$t^* = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{62 - 60}{\frac{4}{\sqrt{25}}} = 2,5.$$

Het juiste antwoord is (a).

Opdracht 9.3: Een variabele X is normaal verdeeld met standaarddeviatie 10. We toetsen $H_0 : \mu = 50$ tegen $H_1 : \mu > 50$.

(a) Bereken het kritieke gebied als er één waarneming wordt gedaan bij een kans op een fout van de eerste soort $\alpha = 0,05$ en ook bij $\alpha = 0,01$.

Uitwerking

Gegeven is dat we te maken hebben met een kansvariabele $X \sim N(\mu =?; \sigma = 10)$. We willen toetsen of er geldt dat $\mu = 50$.

- Stel verder eerst dat $\alpha = 0,05$. Omdat we rechtszijdig toetsen, berekenen we de z-waarde

$$z_\alpha = \text{InvNorm}(opp = 1 - \alpha) = \text{InvNorm}(opp = 0,95) \approx 1,6449$$

De toetsingsgrootheid is in dit geval het (theoretische) steekproefgemiddelde $\overline{X}$. Uit de centrale limietstelling volgt dat $\overline{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Onder de aanname dat H_0 waar is, geldt dat het gemiddelde $\mu = 50$. Omdat verder de standaardafwijking $\sigma(X) = 10$ bekend is en we een enkele waarneming doen, oftewel $n = 1$, volgt dat $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{1}} = 10$, oftewel $\overline{X} \sim N(\mu = 50; \sigma = 10)$. Merk op dat hoe hoger de waarneming is, hoe waarschijnlijker dat de alternatieve hypothese waar is. Het kritieke gebied is dus van de vorm $[g; \infty)$, waarbij g kan worden berekend als volgt:

$$\begin{aligned} g &= \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 50 + 1,6449 \cdot \frac{10}{\sqrt{1}} \\ &\approx 66,4485 \end{aligned}$$

Het kritieke gebied is dus gelijk aan $[66,4485; \infty)$.

- Stel nu dat $\alpha = 0,01$. Omdat we rechtszijdig toetsen, berekenen we de z-waarde

$$z_\alpha = \text{InvNorm}(opp = 1 - \alpha) = \text{InvNorm}(opp = 0,99) \approx 2,3263$$

Het kritieke gebied is opnieuw van de vorm $[g; \infty)$, waarbij g kan worden berekend als volgt:

$$\begin{aligned} g &= \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 50 + 2,3263 \cdot \frac{10}{\sqrt{1}} \\ &\approx 73,2635 \end{aligned}$$

Het kritieke gebied is dus gelijk aan $[73,2635; \infty)$.

(b) We doen 100 waarnemingen van de betrokken variabele. Bereken het kritieke gebied bij $\alpha = 0,10$ en $\alpha = 0,001$.

Uitwerking

- Stel eerst dat $\alpha = 0,10$. Omdat we rechtszijdig toetsen, berekenen we de z-waarde

$$z_\alpha = \text{InvNorm}(opp = 1 - \alpha) = \text{InvNorm}(opp = 0,9) \approx 1,2816$$

De toetsingsgrootheid is in dit geval het (theoretische) steekproefgemiddelde $\overline{X}$. Uit de centrale limietstelling volgt dat $\overline{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Onder de aanname dat H_0 waar is, geldt dat het gemiddelde $\mu = 50$. Omdat verder de standaardafwijking $\sigma(X) = 10$ bekend is en we nu 100 waarnemingen, oftewel $n = 100$, volgt dat $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1$, oftewel $\overline{X} \sim N(\mu = 50; \sigma = 1)$. Merk op dat hoe hoger het steekproefgemiddelde is, hoe waarschijnlijker dat de alternatieve hypothese waar is. Het kritieke gebied is dus van de vorm $[g; \infty)$, waarbij g kan worden berekend als volgt:

$$\begin{aligned} g &= \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 50 + 1,2816 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} \\ &\approx 51,2816 \end{aligned}$$

Het kritieke gebied is dus gelijk aan $[51,2816;\infty)$.

- Stel nu dat $\alpha = 0,001$. Omdat we rechtszijdig toetsen, berekenen we de z-waarde

$$z_\alpha = \text{InvNorm}(opp = 1-\alpha) = \text{InvNorm}(opp = 0,999) \approx 3,0902$$

Het kritieke gebied is opnieuw van de vorm $[g;\infty)$, waarbij g kan worden berekend als volgt:

$$\begin{aligned} g &= \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 50 + 3,0902 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} \\ &\approx 53,0902 \end{aligned}$$

Het kritieke gebied is dus gelijk aan $[53,0902;\infty)$.

Opdracht 9.5: Een broodjeszaak langs een drukke provinciale weg heeft al een aantal jaren bijgehouden hoeveel klanten er komen tijdens de lunchperiode. Dat leverde een tamelijk stabiel patroon op met een gemiddelde van $\mu = 42$ klanten per dag en een standaarddeviatie $\sigma = 5$. Twee maanden geleden is er bij een dichtbij gelegen benzinestation een voorziening gekomen waar klanten snacks kunnen verkrijgen. De eigenaar van de broodjeszaak maakt zich zorgen en heeft gedurende 50 dagen het aantal klanten geteld dat bij hem komt tijdens de lunchperiode. Dat leverde een gemiddelde op van $37,8$ klanten. Toets eenzijdig of hier sprake is van een significante daling ($\alpha = 0,05$).

Uitwerking

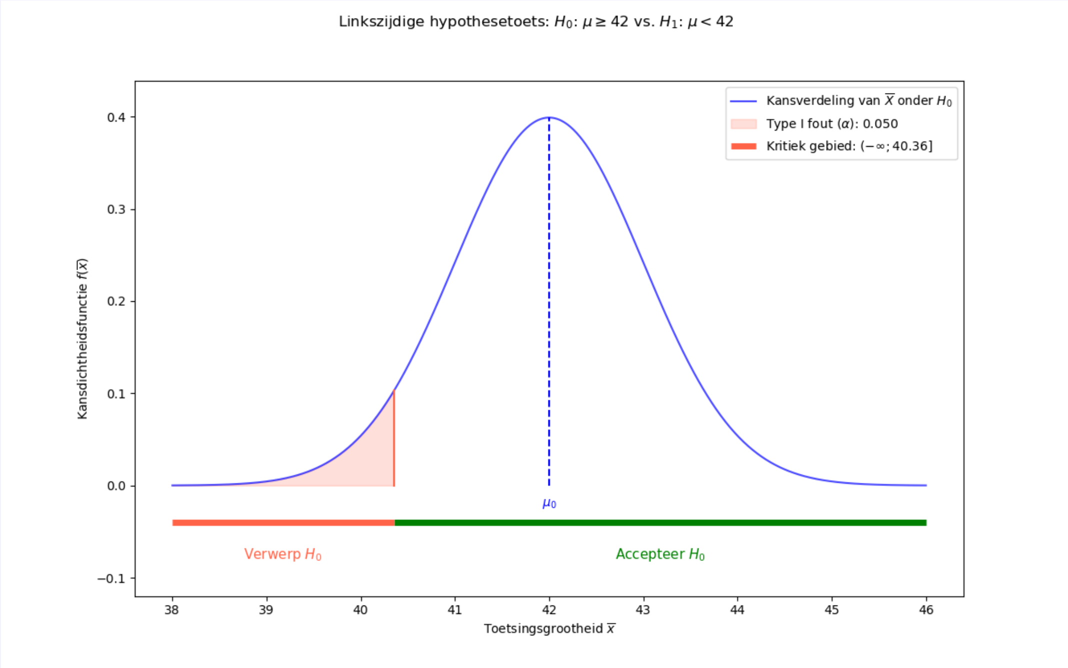
In deze hypothesetoets geldt dat de nulhypothese $H_0 : \mu \geq 42$ (geen daling) getest wordt tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \mu < 42$ (wel een daling).
Omdat we linkszijdig toetsen, berekenen we de z-waarde

$$z_\alpha = \text{InvNorm}(opp = 1-\alpha) = \text{InvNorm}(opp = 0,95) \approx 1,6449$$

De toetsingsgrootheid is in dit geval het (theoretische) steekproefgemiddelde $\overline{X}$. Uit de centrale limietstelling volgt dat $\overline{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Onder de aanname dat H_0 waar is, geldt dat het gemiddelde $\mu = 42$. Verder geldt dat de standaardafwijking $\sigma = 5$ bekend is en de eigenaar 50 waarnemingen doet, oftewel $n = 50$. Er volgt dus dat $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{50}}$, oftewel $\overline{X} \sim N(\mu = 50; \sigma = \frac{5}{\sqrt{50}})$. Merk op dat hoe lager het steekproefgemiddelde is, hoe waarschijnlijker dat de alternatieve hypothese waar is. Het kritieke gebied is dus van de vorm $(-\infty, g]$, waarbij g kan worden berekend als volgt:

$$\begin{aligned} g &= \mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 42 - 1,6449 \cdot \frac{5}{\sqrt{50}} \\ &\approx 40,8369 \end{aligned}$$

Het kritieke gebied is dus gelijk aan $(-\infty; 40,8369)$. Het geobserveerde steekproefgemiddelde $\overline{x} = 37,8$ ligt in het kritieke gebied, dus we verwerpen H_0. Er is voldoende reden om aan te nemen dat het gemiddelde aantal klanten per dag in de broodjeszaak significant is gedaald.



Opdracht 9.7: Capsules die zijn gevuld met een bepaald medicijn, moeten 5 mg werkzaam bestanddeel bevatten. Het is bekend dat door onnauwkeurigheden met de machine die de capsules vult de hoeveelheid werkzaam bestanddeel te beschouwen is als een normaal verdeelde kansvariabele X met verwachtingswaarde $5,0$ mg en standaarddeviatie $0,15$ mg. Geëist wordt dat de hoeveelheid werkzaam bestanddeel per capsule tussen $4,6$ en $5,4$ mg ligt.

(a) Hoeveel procent van de capsules heeft een inhoud buiten de gestelde normen als de vulmachine correct is ingesteld?

Uitwerking

Gegeven is dat de hoeveelheid (in mg) werkzaam bestanddeel $X \sim N(\mu = 5,0; \sigma = 0,15)$. De norm is dat deze hoeveelheid tussen de $4,6$ en $5,4$ mg ligt. De kans hierop kunnen we uitrekenen als volgt:

$$P(4,6 \leq X \leq 5,4) = \text{normalcdf}(a = 4,6; b = 5,4; \mu = 5,0; \sigma = 0,15) \approx 0,9923$$

Met $99,23\%$ kans wordt een willekeurige capsule gevuld met een hoeveelheid werkzaam bestanddeel dat binnen de norm valt, oftewel $0,77\%$ van de capsules heeft een inhoud buiten de gestelde normen.

(b) De instelling van de machine kan tijdens het gebruik veranderen. Daarom wordt er regelmatig een aantal capsules gecontroleerd in het laboratorium. Een steekproef van 25 capsules levert een gemiddeld gehalte van het werkzame bestanddeel van $4,70$ mg. Toets of hieruit mag worden geconcludeerd dat de instelling van de machine is gewijzigd. Toets hierbij tweezijdig, kies $\alpha = 0,01$ en ga ervan uit dat de standaarddeviatie niet is veranderd.

Uitwerking

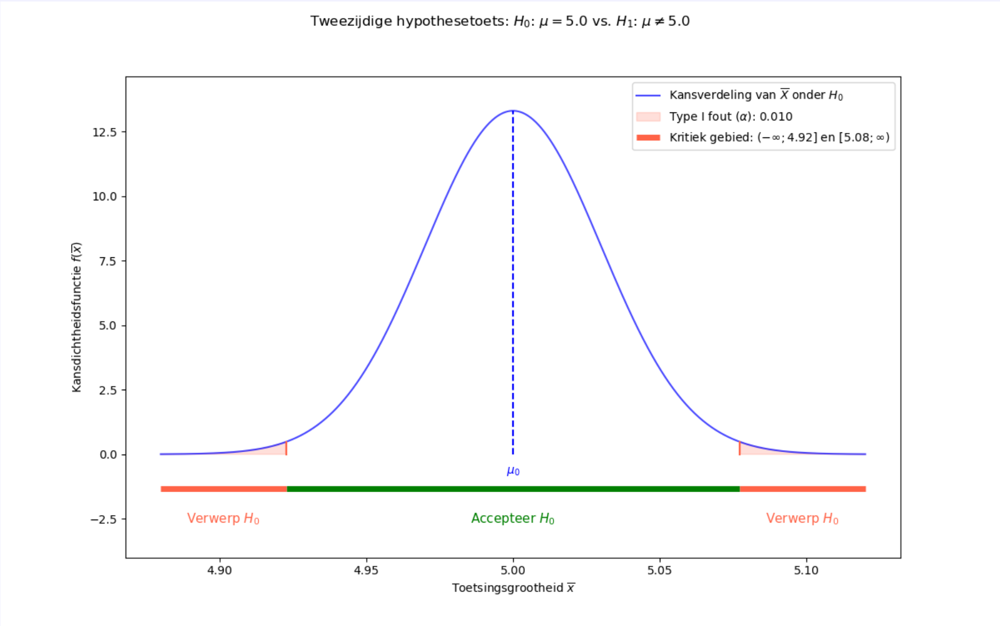
In deze hypothesetoets geldt dat de nulhypothese $H_0 : \mu = 5,0$ (geen verandering in de instelling) getest wordt tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \mu \neq 5,0$ (wel een verandering in het gemiddelde).
Omdat we tweezijdig toetsen, berekenen we de z-waarde

$$z_{\alpha/2} = \text{InvNorm}(opp = 1 - \alpha/2) = \text{InvNorm}(opp = 0,995) \approx 2,5758$$

De toetsingsgrootheid is weer het (theoretische) steekproefgemiddelde $\overline{X}$. Uit de centrale limietstelling volgt dat $\overline{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Onder de aanname dat H_0 waar is, geldt dat het gemiddelde $\mu = 5,0$. Verder geldt dat de standaardafwijking $\sigma = 0,15$ bekend is en dat er 25 capsules worden getest, oftewel de steekproefomvang $n = 50$. Er volgt dus dat $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,15}{\sqrt{25}} = 0,03$, oftewel $\overline{X} \sim N(\mu = 50; \sigma = 0,03)$. Merk op dat hoe verder het steekproefgemiddelde afligt van $5,0$ (zowel ver daaronder als ver daarboven), hoe waarschijnlijker dat de alternatieve hypothese waar is. Het kritieke gebied is dus van de vorm $(-\infty, g_1]$ en $[g_2, \infty)$, waarbij g_1 en g_2 kunnen worden berekend als volgt:

$$\begin{aligned}
g_1 &= \mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
&= 5,0 - 2,5758 \cdot \frac{0.15}{\sqrt{25}} \\
&\approx 4,9227 \\
g_2 &= \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
&= 5,0 + 2,5758 \cdot \frac{0.15}{\sqrt{25}} \\
&\approx 5,0773
\end{aligned}$$

Het kritieke gebied is dus gelijk aan $(-\infty; 4,9227]$ en $[5,0773, \infty)$. Het geobserveerde steekproefgemiddelde $\overline{x} = 4,70$ ligt in het kritieke gebied, dus we verwerpen H_0. Er is voldoende reden om aan te nemen dat de instelling van de machine is gewijzigd.



(c) Als de capsules worden gevuld met gemiddelde $4,70$ mg werkzaam bestanddeel (σ is nog steeds gelijk aan $0,15$ mg), hoeveel procent van de capsules voldoet dan niet meer aan de norm?

Uitwerking

Stel nu dat het gemiddelde $\mu = 4,70$ mg, en de standaarddeviatie is nog steeds $\sigma = 0,15$, oftewel $X \sim N(\mu = 4,70; \sigma = 0,15)$. In dat geval is de kans dat een willekeurige capsule niet meer voldoet aan de norm gelijk aan

$$P(4,6 \leq X \leq 5,4) = \text{normalcdf}(a = 4,6; b = 5,4; \mu = 4,7; \sigma = 0,15) \approx 0,7475$$

$74,75\%$ van de capsules zal nu een hoeveelheid werkzaam bestanddeel bevatten dat voldoet aan de norm, oftewel $25,25\%$ van de capsules voldoen niet aan de norm.

Opdracht 9.11: Een zelfbedieningsrestaurant verkoopt hamburgers van het type Big-Smak. Het vleesgewicht van deze hamburgers bedraagt volgens het restaurant gemiddeld minstens 160 gram met een standaarddeviatie van 5 gram. Om de bewering van het restaurant te onderzoeken, kopen zes studenten een Big-Smak en bepalen het vleesgewicht. Dat leverde: 140, 148, 162, 146, 152 en 152 gram op. We gaan ervan uit dat de gewichten van hamburgers mogen worden beschouwd als trekkingen uit een normale verdeling met (nog steeds) $\sigma = 5$ gram. Toets door berekening van de p-waarde of de bewering van het restaurant staande kan worden gehouden (kies $\alpha = 0,05$).

Uitwerking

In deze hypothesetoets geldt dat de nulhypothese $H_0 : \mu \geq 160$ (gemiddeld minstens 160 gram) getest wordt tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \mu < 160$ (gemiddeld minder dan 160 gram).
Omdat we linkszijdig toetsen, berekenen we de z-waarde

$$z_\alpha = \text{InvNorm}(opp = 1 - \alpha) = \text{InvNorm}(opp = 0,95) \approx 1,6449$$

De toetsingsgrootheid is in dit geval het (theoretische) steekproefgemiddelde $\overline{X}$. Uit de centrale limietstelling volgt dat $\overline{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Onder de aanname dat H_0 waar is, geldt dat het gemiddelde $\mu = 160$. Verder geldt dat de standaardafwijking $\sigma = 5$ bekend is en zes studenten een hamburger wegen, oftewel $n = 6$. Er volgt dus dat $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$, oftewel $\overline{X} \sim N(\mu = 160; \sigma = \frac{5}{\sqrt{6}})$. Merk op dat hoe lager het steekproefgemiddelde is, hoe waarschijnlijker dat de alternatieve hypothese waar is.
Het geobserveerde steekproefgemiddelde is gelijk aan $\overline{x} = \frac{140+148+162+146+152+152}{6} = 150$. Omdat we linkszijdig toetsen, is de p-waarde gelijk aan de linkeroverschrijdingskans

$$\begin{aligned} p &= P(\overline{X} \leq \overline{x} = 150) \\ &= \text{normalcdf}(a = -10^{99}; b = 150; \mu = 160; \sigma = \frac{5}{\sqrt{6}}) \\ &\approx 0,000000482 \end{aligned}$$

De p-waarde is extreem laag, en omdat $p < \alpha$, verwerpen we de nulhypothese H_0. Er is voldoende reden om aan te nemen dat het gemiddelde vleesgewicht van een hamburger bij Big-Smak significant lager is dan 160 gram.

Opdracht 9.18: Een bedrijf voert een administratie van het aantal klachten van afnemers. In acht weken werden de volgende aantallen klachten per week geregistreerd:

Week	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Aantal klachten	30	45	46	50	52	34	35	28

We gaan ervan uit dat het aantal klachten per week kan worden beschouwd als een variabele met een normale verdeling. In het verleden bleek het aantal klachten gemiddeld 51 per week te zijn. Toets of dit gemiddelde nog houdbaar is in het licht van verzamelde uitkomsten (kies $\alpha = 0,05$).

Uitwerking

In deze hypothesetoets geldt dat de nulhypothese $H_0 : \mu = 51$ (gemiddeld 51 klachten per week) getest wordt tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \mu \neq 51$ (gemiddeld iets anders dan 51 klachten per week). In acht weken wordt het aantal klachten geteld, oftewel $n = 8$ Het geobserveerde steekproefgemiddelde is gelijk aan

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{30 + 45 + \ldots + 28}{8} = 40.$$

Verder is de standaarddeviatie σ niet gegeven, dus moeten we die schatten aan de hand van de gegevens. De schatting s^2 van de steekproefvariantie vinden we als volgt

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(x_n - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1} \\ &= \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_8 - \overline{x})^2}{8-1} \\ &= \frac{(30-40)^2 + \ldots + (28-40)^2}{8-1} \\ &\approx 87,1429 \end{aligned}$$

Hierdoor volgt een schatting van de standaarddeviatie $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{87,1429} \approx 9,3350$. De steekproefomvang $n = 8 < 30$ en de standaardafwijking σ onbekend is, dus we moeten een t-waarde bepalen. Omdat we tweezijdig toetsen, berekenen we die als volgt

$$t = \text{InvT}(opp = 1 - \alpha/2; df = n-1) = \text{InvT}(opp = 0,975; df = 7) \approx 2,3646$$

De toetsingsgrootheid is in dit geval het (theoretische) steekproefgemiddelde $\overline{X}$, die dus een t-verdeling volgt. Onder de aanname dat H_0 waar is, geldt dat het gemiddelde $\mu = 51$. Merk op dat hoe verder het steekproefgemiddelde afligt van 51 (zowel ver daaronder als ver daarboven), hoe waarschijnlijker dat de alternatieve hypothese waar is.
Het kritieke gebied is dus van de vorm $(-\infty, g_1]$ en $[g_2, \infty)$, waarbij g_1 en g_2 kunnen

worden berekend als volgt:

$$\begin{aligned} g_1 &= \mu - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \\ &= 51 - 2,3646 \cdot \frac{9,3350}{\sqrt{8}} \\ &\approx 43,1957 \\ g_2 &= \mu + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \\ &= 51 + 2,3646 \cdot \frac{9,3350}{\sqrt{8}} \\ &\approx 58,8043 \end{aligned}$$

Het kritieke gebied is dus gelijk aan $(-\infty; 43,1957]$ en $[58,8043, \infty)$.
Het geobserveerde steekproefgemiddelde $\overline{x} = 40$ ligt in het kritieke gebied, dus verwerpen we de nulhypothese H_0. Er is voldoende reden om aan te nemen dat het gemiddelde aantal klachten per week significant anders is dan 51.

Opdracht 9.23: Een autofabriek heeft een nieuw mode, de XGT, op de markt gebracht. In de folder staat dat het benzinegebruik laag is, namelijk gemiddeld hoogstens 7 liter voor 100 kilometer op de buitenweg. Om deze bewering te controleren, werden met zestien XGT's proefritten gemaakt van 100 kilometer. Voor deze zestien proefritten werd een gemiddeld verbruik van $7,32$ liter gevonden. Wegens verschillen in rijstijl en rijomstandigheden mag worden aangenomen dat het benzineverbruik per 100 kilometer wordt beschreven door een kansvariabele X die normaal verdeeld is met $\sigma = 0,5$ liter.

(a) Toets (volgens de gebruikelijke procedure) of de bewering van de fabrikant staande kan worden gehouden op basis van de uitkomsten van de proefritten (kies $\alpha = 0,05$).

Uitwerking

In deze hypothesetoets geldt dat de nulhypothese $H_0 : \mu \leq 7$ (gemiddeld hoogstens 7 liter per 100 km) getest wordt tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \mu > 7$ (gemiddeld meer dan 7 liter per 100 km). In acht weken wordt het aantal klachten geteld, oftewel $n = 8$ Het geobserveerde steekproefgemiddelde is gelijk aan $\overline{x} = 7,32$ liter per 100 km, op basis van een steekproef van $n = 16$ proefritten. Verder is de standaarddeviatie $\sigma = 0,5$.
Omdat we rechtszijdig toetsen, berekenen we de z-waarde als volgt

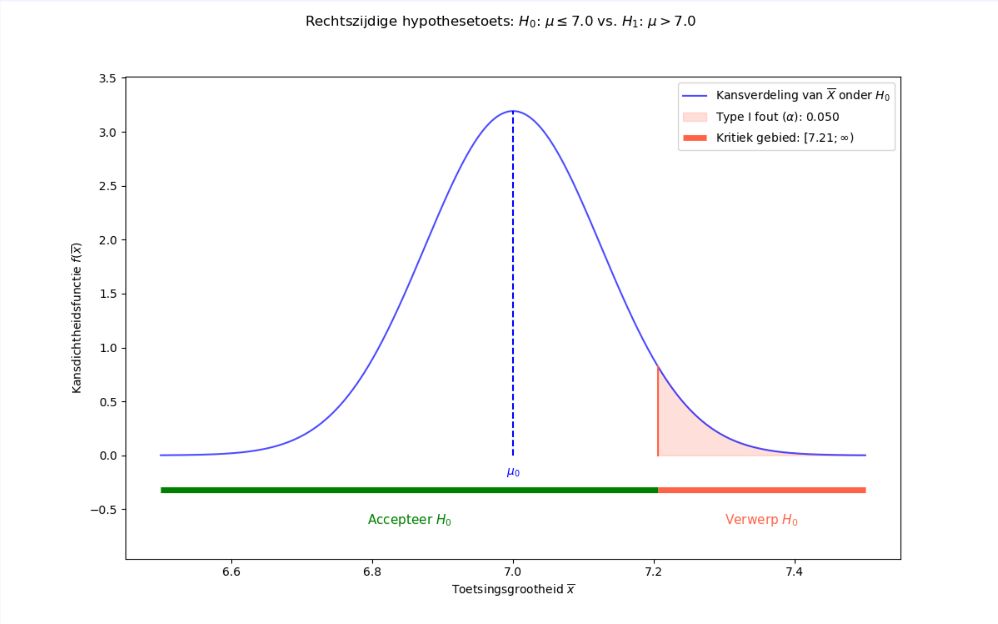
$$z_{\alpha/2} = \text{InvNorm}(opp = 1 - \alpha) = \text{InvNorm}(opp = 0,95) \approx 1,64499600$$

De toetsingsgrootheid is in dit geval het (theoretische) steekproefgemiddelde $\overline{X}$. Uit de centrale limietstelling volgt dat $\overline{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Onder de aanname dat H_0 waar is, geldt dat het gemiddelde $\mu = 7$. Merk op dat hoe hoger het steekproefgemiddelde, hoe waarschijnlijker dat de alternatieve hypothese waar is.
Het kritieke gebied is dus van de vorm $[g, \infty)$, waarbij g kan worden berekend als

volgt:

$$\begin{aligned} g &= \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 7 + 1,6449 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{16}} \\ &\approx 7,2056 \end{aligned}$$

Het kritieke gebied is dus gelijk aan $[7,2056, \infty)$.
Het geobserveerde steekproefgemiddelde $\overline{x} = 7,32$ ligt in het kritieke gebied, dus verwerpen we de nulhypothese H_0. Er is voldoende reden om aan te nemen dat het gemiddelde verbruik meer dan 7 liter per 100 km is, en dat de bewering in de folder niet klopt met de werkelijkheid.



(b) Bereken het onderscheidingsvermogen van de toets als in werkelijkheid zou gelden dat het gemiddeld benzineverbruik 7,30 liter per 100 kilometer is.

Uitwerking

Het onderscheidingsvermogen van een hypothesetoets is gelijk aan de kans $1 - \beta$ dat de nulhypothese H_0 wordt verworpen zodra de alternatieve hypothese H_1 waar is. In dit geval is H_1 waar, omdat $\mu_1 = 7,3$ voldoet aan $\mu > 7$.
Stel nu dat $\mu = 7,3$. Dan zou gelden dat het gemiddelde benzineverbruik (in liters per 100 km) bij 16 willekeurige proefritten $\overline{X} \sim N(\mu = 7,3; \sigma = \frac{0,5}{\sqrt{16}})$. Deze kans kunnen we berekenen als de kans dat Het onderscheidingsvermogen is gelijk aan de kans dat $\overline{X}$ een waarde aanneemt in het kritieke gebied dat we bij (a) hebben berekend, oftewel

$$
\begin{aligned}
1 - \beta &= P(\overline{X} \geq 7,2056) \\
&= \text{normalcdf}(a = 7,2056; b = 10^{99}; \mu = 7,3; \sigma = \frac{0,5}{\sqrt{16}}) \\
&\approx 0,7749
\end{aligned}
$$