Statistiek voor MBW / KW
Uitwerkingen huiswerkopgaven

Dr. ir. D.A.M.P. Blom & Dr. J.B.M. Melissen

2025

Week 11: chikwadraatverdeling

Hoofdstuk 10

Opdracht 10.m1: Voor een kansvariabele die een theoretische chikwadraatsverdeling met vijf vrijheidsgraden volgt, geldt dat ...

(a) deze symmetrisch rondom 0 ligt.

(b) deze symmetrisch rondom 5 ligt.

(c) de kansen hiervoor kunnen worden gevonden als het kwadraat wordt genomen van een normaal verdeelde variabele met $\mu = 5$.

(d) deze kansvariabele waarden kan aannemen die groter zijn dan 15.

Uitwerking

Het juiste antwoord is (d).

Opdracht 10.m2: Bij een chikwadraattoets voor onafhankelijkheid moet worden gewerkt met de chikwadraatverdeling met 6 vrijheidsgraden. Er moet worden getoetst met $\alpha = 0,05$. De kritieke tabelwaarde is daarom ...

(a) $1,64$

(b) $14,45$

(c) $12,59$

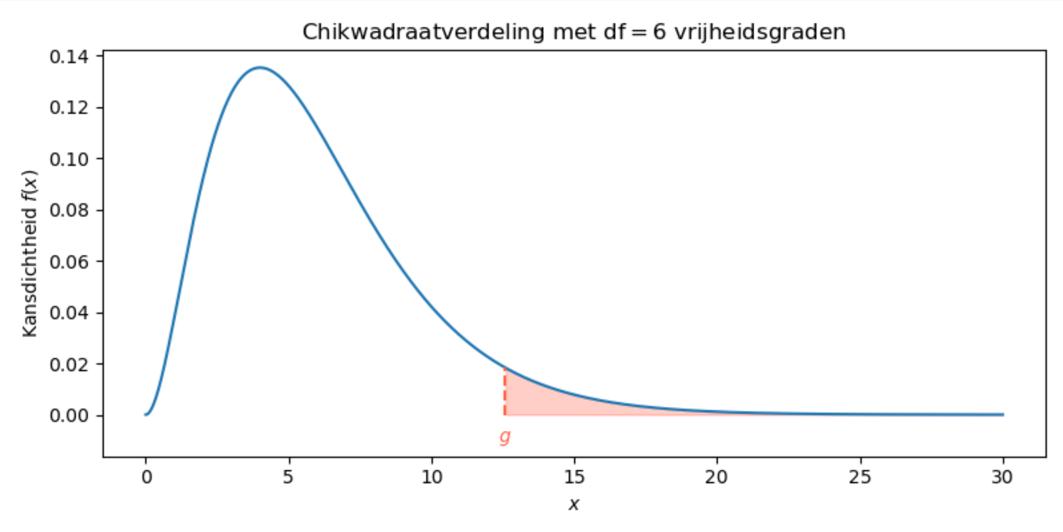
(d) $9,49$

Uitwerking

Laat X de toetsingsgrootheid zijn die chikwadraat verdeeld is met df$= 6$ vrijheidsgraden. In dit geval is de kritieke waarde de waarde x waarvoor geldt dat $P(X \geq x) = 0,05$. Deze kritieke waarde berekenen we met de solver optie als volgt:

$$y_1 = \chi^2\text{cdf}(\text{lower} = x; \text{upper} = 10^{10}; \text{df} = 6)$$
$$y_2 = 0,05$$

De numerieke solver geeft (afgerond op twee decimalen) $x \approx 12,59$. Het juiste antwoord is dus (c).



Opdracht 10.m3: Bij een toets voor onafhankelijkheid geeft de tabel de waargenomen frequenties weer. De te verwachten of *expected* frequentie voor de cel waarin 80 waarnemingen vermeld zijn, bedraagt ...

(a) $\frac{80}{250}$

(b) 125

(c) $0,2$

(d) 100

	Man	**Vrouw**
Links	80	120
Rechts	170	130

Uitwerking

Bekijk nu een uitgebreidere versie van de tabel van *observed* frequenties hierboven, waarbij we ook de rij- en kolomtotalen hebben toegevoegd.

	Man	**Vrouw**	**Totaal**
Links	80	120	200
Rechts	170	130	300
Totaal	250	250	500

De te verwachten of *expected* frequentie E_{ij} voor de cel in rij i en kolom j is gelijk aan

$$E_{ij} = \frac{\text{rijtotaal}_i \cdot \text{kolomtotaal}_j}{\text{totaal}}.$$

Dat wil zeggen dat de expected frequentie voor de cel linksboven, oftewel E_{11}, gelijk is aan

$$E_{11} = \frac{\text{rijtotaal}_1 \cdot \text{kolomtotaal}_1}{\text{totaal}} = \frac{200 \cdot 250}{500} = 100.$$

Het juiste antwoord is dus (d).

Opdracht 10.m4: Men wenst te toetsen of het aantal aanvragen bij een helpdesk van een computermaatschappij gelijk is verdeeld over de vijf werkdagen van de week. In een bepaalde week worden de volgende aantallen waarnemingen gedaan tussen maandag en vrijdag: 48, 65, 57, 72, 58. De *expected* frequentie voor het aantal aanvragen op een willekeurige maandag is dus ...

(a) 12

(b) 60

(c) 48

(d) 5

Uitwerking

In totaal zijn er in deze week $48+65+57+72+58 = 300$ waarnemingen gedaan. Indien het aantal aanvragen uniform verdeeld is over de vijf werkdagen, dan verwachten we dat 20% van de aanvragen op maandag wordt gedaan. De expected frequentie van het aantal aanvragen op maandag is dus gelijk aan $0,20 \cdot 300 = 60$ aanvragen. Het juiste antwoord is dus (b).

Opdracht 10.1: Bij een onderzoek naar de rookgewoonten van Nederlanders van 18 jaar en ouder werden door loting 200 proefpersonen gekozen die vervolgens werden ingedeeld naar leeftijd en naar rookgewoonte. De resultaten waren als volgt:

	Leeftijd			
	$18- < 30$	$30- < 45$	**45 en ouder**	**Totaal**
Roker	25	35	20	80
Niet-roker	55	25	40	120
Totaal	80	60	60	200

We gaan met behulp van de chikwadraattoets onderzoeken of de indelingen naar leeftijd en rookgewoonte al dan niet afhankelijk van elkaar zijn. We toetsen met $\alpha = 0,01$. De nulhypothese luidt: H_0 : onafhankelijkheid.

(a) Bereken de *expected*-tabel.

Uitwerking

Om de *expected*-tabel te bepalen, starten we vanuit een lege tabel waarin alleen de totalen (van de rijen en kolommen respectievelijk) gegeven zijn:

	Leeftijd			
	$18- < 30$	$30- < 45$	**45 en ouder**	**Totaal**
Roker				80
Niet-roker				120
Totaal	80	60	60	200

Voor iedere cel in de tabel bepalen we de expected frequentie met de formule:

$$E_{ij} = \frac{\text{rijtotaal}_i \cdot \text{kolomtotaal}_j}{\text{totaal}}$$

Dit geeft de volgende *expected*-tabel:

	Leeftijd			
	$18- < 30$	$30- < 45$	**45 en ouder**	**Totaal**
Roker	$\frac{80 \cdot 80}{200} = 32$	$\frac{80 \cdot 60}{200} = 24$	$\frac{80 \cdot 60}{200} = 24$	80
Niet-roker	$\frac{120 \cdot 80}{200} = 48$	$\frac{120 \cdot 60}{200} = 36$	$\frac{120 \cdot 60}{200} = 36$	120
Totaal	80	60	60	200

(b) Bereken de toetsingsgrootheid χ^2.

Uitwerking

De theoretische toetsingsgrootheid X bepalen we aan de hand van de volgende formule:

$$X = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}},$$

waarbij $i = 1, 2$ de index van de rij is, en $j = 1, 2, 3$ de index van de kolom is. Dit geeft in dit specifieke geval een geobserveerde toetsingsgrootheid

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i,j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \\ &= \frac{(O_{11} - E_{11})^2}{E_{11}} + \frac{(O_{12} - E_{12})^2}{E_{12}} + \ldots + \frac{(O_{23} - E_{23})^2}{E_{23}} \\ &= \frac{(25-32)^2}{32} + \frac{(35-24)^2}{24} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(55-48)^2}{48} + \frac{(25-36)^2}{36} + \frac{(40-36)^2}{36} \\ &\approx 12,0660\end{aligned}$$

(c) Hoeveel vrijheidsgraden heeft de chikwadraatverdeling die gebruikt moet worden?

Uitwerking

Bij een χ^2-toets voor onafhankelijkheid van twee nominale variabelen is het aantal vrijheidsgraden gelijk aan het aantal cellen waarvoor je een waarde vrij kunt kiezen. Dit is gelijk aan

$$\text{df} = (\#\text{rijen} - 1) \cdot (\#\text{kolommen} - 1) = (2-1) \cdot (3-1) = 2.$$

In deze hypothesetoets voor onafhankelijkheid heeft de toetsingsgrootheid een chikwadraatverdeling met $\text{df} = 2$ vrijheidsgraden.

(d) Geef het kritieke gebied aan van de grootheid X.

Uitwerking

Merk op dat onafhankelijkheid waarschijnlijker is als de toetsingsgrootheid dichter bij 0 ligt. Dit volgt uit de formule van de toetsingsgrootheid X, omdat in dat geval de observed frequenties dicht in de buurt van de expected frequenties liggen.
Het kritieke gebied is dus van de vorm $[g, \infty)$, waarbij g de grenswaarde is waarvoor geldt $P(X \geq g) = \alpha$. Dit kunnen we met de grafische rekenmachine bepalen aan de hand van

$$y_1 = \chi^2\text{cdf}(\text{lower} = x; \text{upper} = 10^{10}; \text{df} = 2)$$
$$y_2 = \alpha = 0,01$$

De numerieke solver geeft $x \approx 9,2103$. Dat betekent dat het kritieke gebied gelijk is aan $[9,2103; \infty)$.

(e) Wat is uw eindconclusie?

Uitwerking

De geobserveerde toetsingsgrootheid $\chi^2 \approx 12,0660$ ligt in het kritieke gebied, omdat $12,0660 > 9,2103$. Dit betekent dat de nulhypothese H_0 wordt verworpen. Er is voldoende bewijs om aan te nemen dat de twee nominale variabelen “leeftijd” en “rookgewoonte” afhankelijk zijn van elkaar.

Opdracht 10.5: Bij een onderzoek naar het gebruik van internet werden de respondenten onderverdeeld naar leeftijd en het wel of niet werken met internet. Voor 400 respondenten leverde dit de volgende tabel:

Internetgebruik

Leeftijd	Wel internet	Geen internet	Totaal
Tot en met 44 jaar	143	77	220
45 jaar en ouder	97	83	180
Totaal	240	160	400

(a) De vraag is of deze indelingen onafhankelijk zijn. Bereken de *expected*-tabel en voer de chikwadraattoets uit met behulp van de tabel (kies $\alpha = 0,01$).

Uitwerking

Om de *expected*-tabel te bepalen, starten we vanuit een lege tabel waarin alleen de totalen (van de rijen en kolommen respectievelijk) gegeven zijn:

Internetgebruik

Leeftijd	Wel internet	Geen internet	Totaal
Tot en met 44 jaar			220
45 jaar en ouder			180
Totaal	240	160	400

Voor iedere cel in de tabel bepalen we de expected frequentie met de formule:

$$E_{ij} = \frac{\text{rijtotaal}_i \cdot \text{kolomtotaal}_j}{\text{totaal}}$$

Dit geeft de volgende *expected*-tabel:

Internetgebruik

Leeftijd	**Wel internet**	**Geen internet**	**Totaal**
Tot en met 44 jaar	$\frac{220 \cdot 240}{400} = 132$	$\frac{220 \cdot 160}{400} = 88$	220
45 jaar en ouder	$\frac{180 \cdot 240}{400} = 108$	$\frac{180 \cdot 160}{400} = 72$	180
Totaal	240	160	400

De toetsingsgrootheid X bepalen we aan de hand van de volgende formule:

$$X = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}},$$

waarbij $i = 1, 2$ de index van de rij is, en $j = 1, 2$ de index van de kolom is. Dit geeft in dit specifieke geval een geobserveerde toetsingsgrootheid

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \sum_{i,j} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \\
&= \frac{(O_{11} - E_{11})^2}{E_{11}} + \frac{(O_{12} - E_{12})^2}{E_{12}} + \frac{(O_{21} - E_{21})^2}{E_{21}} + \frac{(O_{22} - E_{22})^2}{E_{22}} \\
&= \frac{(143 - 132)^2}{132} + \frac{(77 - 88)^2}{88} + \frac{(97 - 108)^2}{108} + \frac{(83 - 72)^2}{72} \\
&\approx 4,6402
\end{aligned}$$

Onder de nulhypothese volgt de toetsingsgrootheid X een chikwadraatverdeling met

$$\text{df} = (\#\text{rijen} - 1) \cdot (\#\text{kolommen} - 1) = (2 - 1) \cdot (2 - 1) = 1$$

vrijheidsgraad. De p-waarde (rechteroverschrijdingskans) die hoort bij deze geobserveerde toetsingsgrootheid χ^2 is gelijk aan

$$\begin{aligned}
p &= P(X \geq \chi^2) \\
&= \chi^2\text{cdf}(\text{lower} = \chi^2 \approx 4,6402; \text{upper} = 10^{10}; \text{df} = 1) \\
&\approx 0,0312
\end{aligned}$$

Aangezien de p-waarde groter is dan het significantieniveau $\alpha = 0,01$, wordt H_0 niet verworpen. Er is onvoldoende bewijs om de hypothese te verwerpen dat de twee nominale variabelen “leeftijd” en “Internetgebruik” onafhankelijk zijn van elkaar.

Opdracht 10.7: Bij een onderzoek naar de gevolgen van roken is gemeten hoe het gesteld is met de bloeddruk van 50-jarige mannen. In het onderzoek waren 200 mannen betrokken, waarvan 40 te kwalificeren zijn als stevige roker, 30 als gelegenheidsrokers en 130 als niet-rokers. Hun bloeddruk werd een van de volgende drie kwalificaties gegeven, namelijk normaal, licht verhoogd of ernstig verhoogd. Dat leverde de volgende tabel:

Bloeddruk	Stevige roker	Matige roker	Niet-roker
Normaal	6	8	86
Licht verhoogd	10	8	22
Ernstig verhoogd	24	14	22

Toets of rookgedrag en bloeddrukniveau significant samenhangen (kies $\alpha = 0,01$).

Uitwerking

Opdracht 10.11: In een ziekenhuis worden dagelijks vijf orthopedische operaties uitgevoerd. Bekend is dat deze in 20% van de gevallen leiden tot complicaties waardoor de patiënt enige tijd moet verblijven op de afdeling intensive care. Voor een periode van 100 dagen leidde dit tot de volgende aantallen verwijzingen naar de afdeling intensive care:

Aantal per dag (k)	Aantal dagen met k verwijzingen
0	15
1	25
2	36
3	12
4	10
5	2
Totaal	100 dagen

Toets met $\alpha = 0,05$ of de waargenomen verdeling overeenstemt met een binomiale verdeling met $\pi = 0,20$.

Uitwerking

Opdracht 10.12: Soms wil men voor een getrokken steekproef beoordelen of die als representatief mag worden beschouwd met betrekking tot een bepaald kenmerk of een bepaalde variabele. Met de chikwadraattoets voor aanpassing kan worden getoetst of de waargenomen verdeling in dit opzicht voldoende gelijkenis vertoont met de populatieopbouw. Bij een opinieonderzoek over de toekomst van Europa worden 480 kiesgerechtigde Nederlanders ondervraagd. Van alle ondervraagden is het opleidingsniveau genoteerd. In de volgende tabel wordt dit opleidingsniveau vergeleken met de totale Nederlandse bevolking:

	Laag	Matig	Redelijk	Hoog	Totaal
Steekproef	134	144	129	73	480
Populatie	28%	36%	24%	12%	100%

Toets met $\alpha = 0,05$ of de steekproef als representatief mag worden beschouwd.

Uitwerking

Opdracht 10.12: Het aantal brandmeldingen dat in een stad per week is geregistreerd gedurende een periode van 100 weken blijkt uit de tabel. Toets of het aantal branden per week is te beschouwen als een kansvariabele die een Poissonverdeling volgt met $\mu = 1$ (kies $\alpha = 0,05$).

Aantal branden per week	**Frequentie**
0	48
1	24
2	16
3	8
4 of meer	4
Totaal	100 weken

Uitwerking