Formuleblad Statistiek (2024-2025)

Statistiek deel 1

Steekproefgemiddelde (gegeven een steekproef met n uitkomsten $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Steekproefvariantie:

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1} \qquad \text{(optie 1)}$$

Rekenregels kansrekening:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \qquad \text{(optelregel)}$$

$$P(B) = 1 - P(\text{niet } B) \qquad \text{(complementregel)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} \qquad \text{(conditionele kansen)}$$

Discrete en continue kansverdelingen:

	Discrete kansvariabelen	**Continue kansvariabelen**
Uitkomstenruimte:	Eindig / aftelbaar oneindig	Overaftelbaar oneindig
Toepassingen:	Tellen / categoriseren	Meten
Kansbegrip:	Kansfunctie $p(k) = P(X = k)$	Kansdichtheidsfunctie $f(x)$
CDF:	$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{\ell:\ell \leq k} p(\ell)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$
Verwachtingswaarde:	$E[X] = \sum_k k \cdot P(X = k)$	$E[X] = \int x \cdot f(x)\, dx$
Variantie:	$\text{Var}(X) = \sum_k (k - E[X])^2 \cdot P(X = k)$	$\text{Var}(X) = \int (x - E[X])^2 \cdot f(x)\, dx$
Standaardafwijking:	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Speciale kansverdelingen:

- $X \sim$ Binomiaal(n, p): tellen van aantal successen bij onafhankelijke kansexperimenten met twee uitkomsten (Bernoulli-experimenten): succes / mislukking.
  - n: aantal Bernoulli-experimenten
  - p: succeskans per experiment
- $X \sim$ Poisson$(\lambda \cdot t)$: tellen van aantal "gebeurtenissen" in een "interval" van tijd / ruimte.
  - λ: gemiddeld aantal gebeurtenissen per eenheid van tijd / ruimte.
  - t: aantal eenheden van tijd / ruimte van het interval → **Voorbeeld:** als "dag" de tijdseenheid is, dan bestaat "week" uit $t = 7$ tijdseenheden.
- $T \sim$ Exponentieel(λ): meten van de tijd / ruimte tot de volgende gebeurtenis.
  - λ: gemiddeld aantal gebeurtenissen per eenheid van tijd / ruimte.

Verwachtingswaarde en variantie van veelgebruikte kansverdelingen:

Verdeling	Kans(dichtheids)functie	CDF	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
		Discreet		
Uniform(a,b)	$p(k)=\frac{1}{b-a+1}$ $(k=a,a+1,\ldots,b)$	$F(k)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{k-a+1}{b-a+1} & a\le k<b\\ 1 & k\ge b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Binomiaal(n,p)	$p(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$F(k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	$p(k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$	$F(k)=\sum_{i=0}^{k}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ
		Continuous		
Uniform(a,b)	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{elders.}\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentieel(λ)	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\ge 0$	$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Veelgebruikte functies op de grafische rekenmachine

Type vraag	TI-84 Plus	Casio
	Continue kansverdeling (willekeurig)	
$P(a\le X\le b)$	$\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$
	$X\sim$ **Binomiaal**(n,p)	
$P(X=k)$	binompdf(n,p,k)	BinomialPD(k,n,p)
$P(X\le k)$	binomcdf(n,p,k)	BinomialCD(k,n,p)
	$X\sim N(\mu,\sigma)$	
$P(a\le X\le b)$	normalcdf(a,b,μ,σ)	NormalCD(a,b,σ,μ)
Grenswaarde g zodat $P(X\le g)=p$?	invNorm(p,μ,σ)	InvNormCD(tail=left$,p,\sigma,\mu)$
	$X\sim$ **Poisson**(λ)	
$P(X=k)$	poissonpdf(λ,k)	PoissonPD(k,λ)
$P(X\le k)$	poissoncdf(λ,k)	PoissonCD(k,λ)

z-score:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

Centrale limietstelling: Gegeven n kansvariabelen $X_1,X_2,\ldots,X_n$ die onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben met een verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ, dan geldt (bij benadering) dat

- de som $\sum X=X_1+X_2+\ldots+X_n$ normaal verdeeld is met $E[\sum X]=n\cdot\mu$ en $\sigma(\overline{X})=\sqrt{n}\cdot\sigma$.
- het gemiddelde $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ normaal verdeeld is met $E[\overline{X}]=\mu$ en $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Statistiek deel 2:

Betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde μ

Geval 1: σ bekend

$100 \cdot (1-\alpha)\%$-betrouwbaarheidsinterval (BI) voor μ:

$$z_{\alpha/2} = \text{InvNorm}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \mu = 0; \sigma = 1)$$

$$[\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Minimale steekproefomvang voor $100 \cdot (1-\alpha)\%$-BI als μ maximaal $\pm a$ mag afwijken:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{a}\right)^2$$

Geval 2: σ NIET bekend

$100 \cdot (1-\alpha)\%$-betrouwbaarheidsinterval (BI) voor μ:

$$t = \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 1)$$

$$[\overline{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}]$$

Minimale steekproefomvang voor $100 \cdot (1-\alpha)\%$-BI als μ maximaal $\pm a$ mag afwijken:

GR tabel (voor verschillende n): $\quad \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \text{InvT}(\text{opp} = 1 - \alpha/2; \text{df} = n - 1) \leq a$

NB: zodra $n \geq 30$, vallen de normale en de t-verdeling nagenoeg samen. Je mag dan de schatting s gebruiken als σ, zelfs als σ zelf niet bekend is.

Betrouwbaarheidsintervallen voor de binomiale succeskans p

Betrouwbaarheidsinterval voor p (Clopper-Pearson): Gegeven n Bernoulli-experimenten, waarvan k successen.

1. Bereken de succeskans p_1 zodat geldt $P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n; p; k) = \alpha/2$
2. Bereken de succeskans p_2 zodat geldt $P(X \geq k) = 1 - \text{binomcdf}(n; p; k-1) = \alpha/2$
3. De berekende waarden voor p_1 en p_2 zijn de grenzen van het Clopper-Pearson interval.

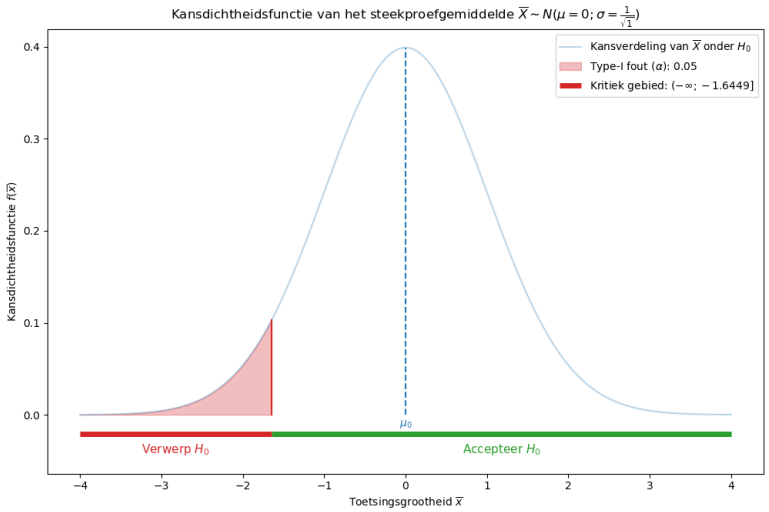
Hypothesetoetsen

Stappenplan hypothesetoetsen

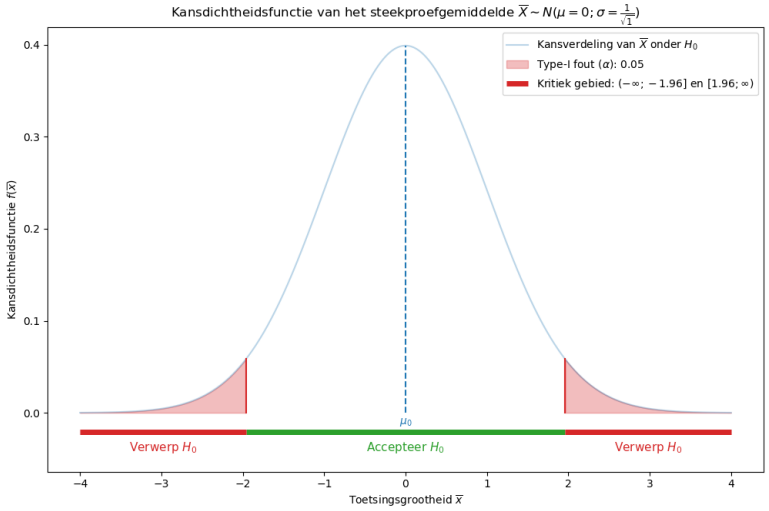
1. Definieer de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1.
2. Bepaal het significantieniveau α (kans op Type-I fout, onterecht H_0 verwerpen)
3. Verzamel data voor de toetsingsgrootheid
4. Bereken de toetsingsgrootheid
5. Geef een conclusie (met behulp van het kritieke gebied / p-waarde) en vertaal deze terug naar de originele probleemcontext.

Drie typen hypothesetoetsen: linkszijdig, tweezijdig, rechtszijdig

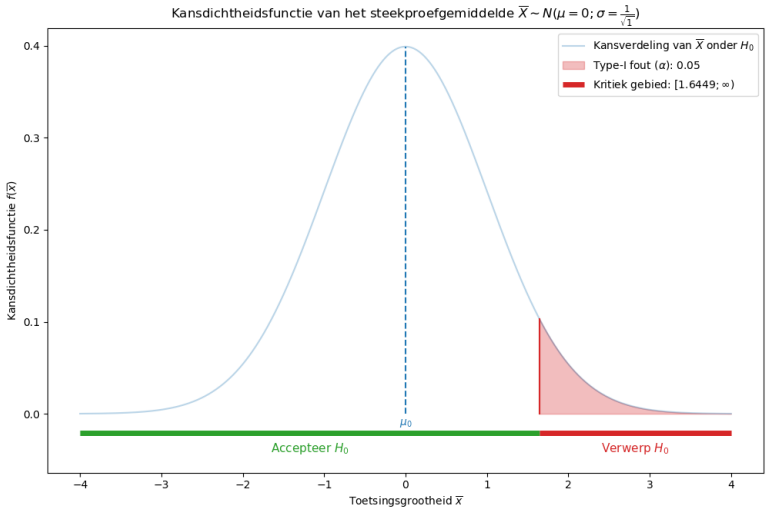
H_0: $\mu \geq 0$ vs. H_1: $\mu < 0$ (linkszijdige hypothesetoets)



H_0: $\mu = 0$ vs. H_1: $\mu \neq 0$ (tweezijdige hypothesetoets)



H_0: $\mu \leq 0$ vs. H_1: $\mu > 0$ (rechtszijdige hypothesetoets)

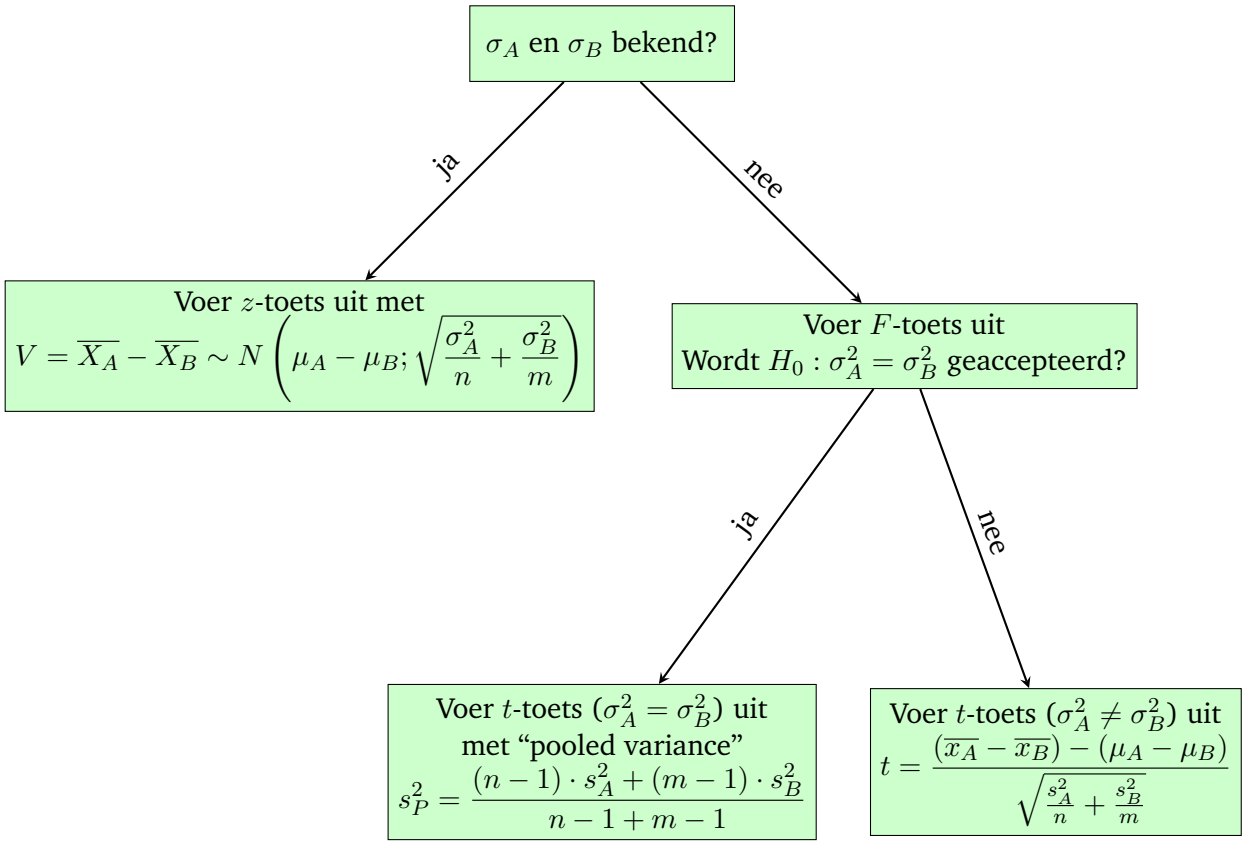


NB: *voor elke kansverdeling (normaal, t, χ^2, F) kun je het kritieke gebied berekenen door met de GR solver een vergelijking met α (links- of rechtszijdig) of twee vergelijkingen met $\alpha/2$ (tweezijdig) op te lossen. De p-waarde (overschrijdingskans) bepaal je met de CDF-functie van de desbetreffende kansverdeling.*

Soorten toetsen

Soort toets	Toetsingsgrootheid	Kansverdeling (onder H_0)
Toetsen voor het gemiddelde $\mu \leq \mu_0$ of $\mu = \mu_0$ of $\mu \geq \mu_0$		
z-toets (σ bekend)	$\overline{X}$	$N(\mu_0; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
t-toets (σ onbekend)	$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$t(\text{df} = n-1)$
Chikwadraattoetsen (χ^2)		
Onafhankelijkheid	$X^2 = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$	$\chi^2(\text{df} = (\#\text{rijen-1}) \cdot (\#\text{kolommen-1}))$
Aanpassing (goodness-of-fit)	$X^2 = \sum_i \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$	$\chi^2(\text{df} = (\#\text{categorieën-1}))$
Verschiltoetsen (op basis van twee populaties A en B)		
F-toets: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F(df1, df2)$
z-toets	$V = \overline{X_A} - \overline{X_B}$	$N\left(\mu_A - \mu_B; \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n} + \frac{\sigma_B^2}{m}}\right)$
t-toets ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$)	$T = \frac{(\overline{x_A}-\overline{X_B})-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_P^2}{n}+\frac{S_P^2}{m}}}$	$t(\text{df} = n+m-2)$
t-toets ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$)	$T = \frac{(\overline{X_A}-\overline{X_B})-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n}+\frac{S_B^2}{m}}}$	$t(\text{df} = \min(n-1; m-1))$

Beslisboom verschiltoetsen



Correlatie en regressie

Correlatiecoëfficiënt van Pearson:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \cdot (\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}$$

Correlatiecoëfficiënt van Spearman:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_i d_i^2}{n^3 - n}$$

Coëfficiënten van de lineaire regressielijn $Y = a + b \cdot X$:

$$b = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$$
$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}$$

Schatting van de variantie van de storingsterm ε:

$$s_\varepsilon = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{\sum \left(y_i - (a + b \cdot x_i)\right)^2}{n-2} = \sqrt{\frac{n}{n-2} \cdot \left(\overline{y^2} - a \cdot \overline{y} - b \cdot \overline{xy}\right)}$$

$100 \cdot (1-\alpha)\%$-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde Y bij gegeven $X = x_0$:

$$t = \mathrm{InvT}(\mathrm{opp} = 1 - \alpha/2; \mathrm{df} = n - 2)$$

$$s_\mu = s_\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\right)}$$

$$[a + b \cdot x_0 - t \cdot s_\mu; a + b \cdot x_0 + t \cdot s_\mu]$$

$100 \cdot (1-\alpha)\%$-betrouwbaarheidsinterval voor Y bij gegeven $X = x_0$:

$$t = \mathrm{InvT}(\mathrm{opp} = 1 - \alpha/2; \mathrm{df} = n - 2)$$

$$s_f = s_\varepsilon \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\right)}$$

$$[a + b \cdot x_0 - t \cdot s_f; a + b \cdot x_0 + t \cdot s_f]$$