Complexe Getallen: Binomiaalvergelijking

Dr. M. van Ee & Dr.ir. D.A.M.P. Blom

Analyse 1 (TAN1), collegejaar 2024-2025

6/7 mei 2025

Vorige keer:

Formule van Euler

Voor alle reële getallen θ geldt:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Gevolg: ieder complex getal z is te schrijven in de vorm

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) = |z|e^{i\arg z}$$

Stel w is gegeven complex getal en n een positief geheel getal, dan heet

$$z^n = w$$

een **binomiaalvergelijking**

Voorbeeld: $z^2 = -1$
Oplossing: $z = i \vee z = -i$

Stel w is gegeven complex getal en n een positief geheel getal, dan heet

$$z^n = w$$

een **binomiaalvergelijking**

Voorbeeld: $z^2 = -1$
Oplossing: $z = i \vee z = -i$

Voorbeeld: $z^2 = i$
Oplossing: ?

Stel w is gegeven complex getal en n een positief geheel getal, dan heet

$$z^n = w$$

een **binomiaalvergelijking**

Voorbeeld: $z^2 = -1$
Oplossing: $z = i \vee z = -i$

Voorbeeld: $z^2 = i$
Oplossing: ?

Stelling

De binomiaalvergelijking heeft n verschillende oplossingen.

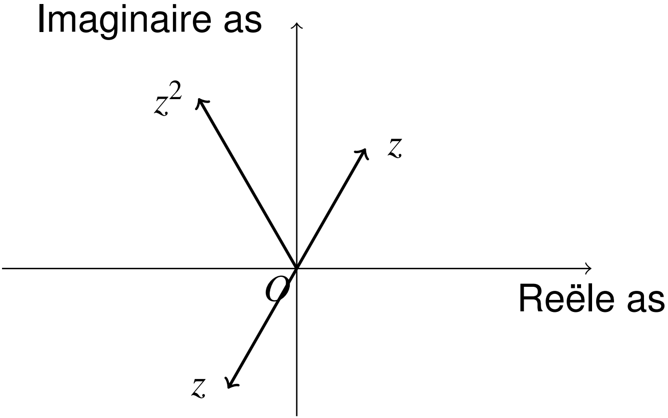
Strategie voor oplossen $z^n = w$.

1. Schrijf w in de vorm $w = |w|e^{i \arg w}$, $0 \leq \arg w < 2\pi$.
2. Schrijf w in de vorm $w = |w|e^{i(\arg w + 2k\pi)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
3. Schrijf z in de vorm $z = |z|e^{i \arg z}$, en herschrijf binomiaalvergelijking.
4. Los stelsel op.
5. Schrijf $z = |z|e^{i \arg z}$ in de vorm $a + bi$.

Los op: $z^2 = -1 + \sqrt{3}\, i$

$$z^2 = -1+\sqrt{3}\,i$$

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6}\,i \quad \vee \quad z = -\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{6}\,i$$



Maak opgaven 39 en 40 van “Complex numbers” (pagina 7).

NB: het is op het tentamen niet toegestaan om direct vergelijking 3 uit het dictaat toe te passen. De behandelde methode dient toegepast te worden om een binomiaalvergelijking op te lossen. Dit zal ook expliciet op het tentamen vermeld staan.

Als $p(x)$ een polynoom is van de graad $n \geq 1$, dan heet de vergelijking $p(x) = 0$ een algebraïsche vergelijking van de n^{de} graad.

Hoofdstelling van de algebra

Iedere algebraïsche vergelijking van de graad $n \geq 1$ heeft ten minste één (complexe) oplossing.

Hoofdstelling van de algebra

Een algebraïsche vergelijking van de n^{de} graad heeft precies n oplossingen. Hierbij worden k-voudige oplossingen k keer geteld.

Gevolg:

Iedere polynoom $p(x)$ van de graad $n \geq 1$ is te schrijven als

$$p(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

voor zeker complexe getallen $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_n$.