Fjerde Hjemmeopgavesæt

01017 Diskret Matematik

af Daniel Brasholt **s214675**
og Rasmus Wiuff **s163977**

24. november 2022

Indhold

1 Induktionsbevis

a) Bevis

Følgende kongruens observeres:

$$10^n \equiv 1 \pmod 9 \tag{1.1}$$

for $n \in \mathbb{N}$. For at bevise denne ved induktion, vælges først basistilfældet $n_0 = 1$:

$$10^1 = 10 = 9 + 1 \equiv 1 \pmod 9 \tag{1.2}$$

Det antages nu, at $10^n = 9 \cdot k + 1$, hvor k er et heltal, altså at kongruensen i Ligning (1.1) gælder. Det skal da vises, at

$$10^{n+1} = 9l + 1, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

Først omskrives 10^{n+1}:

$$10^{n+1} = 10^n \cdot 10 \tag{1.4}$$

Her kan induktionsantagelsen indsættes, hvilket giver:

$$10^n \cdot 10 = (9k+1) \cdot 10 = 9 \cdot 10k + 10 \tag{1.5}$$

$$= 9 \cdot 10k + 9 + 1 = 9(10k+1) + 1 \tag{1.6}$$

Da k er et heltal, må $10k+1$ også være det. Dette kaldes da l, hvilket giver:

$$10^{n+1} = 9l + 1 \tag{1.7}$$

hvormed Ligning (1.1) er bevist.

b) Tværsum

Et tal, k, med cifrene $d_{n-1}, d_{n-2}, \ldots, d_0$, er givet ved

$$k = d_{n-1} \cdot 10^{n-1} + d_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + d_0 \cdot 10^0 \tag{1.8}$$

I Afsnit a blev det bevist, at $10^n \equiv 1 \pmod 9$. Ifølge Lemma 5.4, vil $a \equiv b \pmod n$ være ækvivalent med $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod n$. Da vil $d_n \cdot 10^n \equiv d_n \cdot 1 \pmod 9$ også gælde. Ligeså vil det gælde, at

$$d_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv d_{n-1} \pmod 9 \tag{1.9}$$

Ifølge Lemma 5.4, vil det da også gælde, at:

$$d_{n-1} \cdot 10^{n-1} + d_{n-2} \cdot 10^{n-2} \equiv d_{n-1} + d_{n-2} \pmod 9 \tag{1.10}$$

Dette kan da fortsættes med hele tallet, hvilket giver:

$$d_{n-1} \cdot 10^{n-1} + d_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + d_0 \cdot 10^0 \equiv d_{n-1} + d_{n-2} + \ldots + d_0 \pmod 9 \tag{1.11}$$

Da definitionen af tværsummen, a, er givet ved

$$a = d_{n-1} + d_{n-2} + \ldots + d_0 \tag{1.12}$$

Vil Ligning (1.11) kunne skrives som

$$d_{n-1} \cdot 10^{n-1} + d_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + d_0 \cdot 10^0 \equiv a \pmod 9 \tag{1.13}$$

Med definitionen af k givet i Ligning (1.8), kan dette omskrives til

$$k \equiv a \pmod 9 \tag{1.14}$$

2 Salgsautomaten

a) Første ligning

Problemet skrives op:

Variabel	Vægt	Kongruensligning
x	59 dg	$59x \equiv 7229 \pmod{92}$
y	92 dg	$92y \equiv 0 \pmod{92}$

Hvor der her skal redegøres for at

$$59x \equiv 7229 \pmod{92} \tag{2.1}$$

gælder. x og y ganges med konstanter for de individuelle mønters vægt. Hvis man satte modulo 59 vil man ikke betragte 5-kronerne, hvorfor modulo er sat til 92. 7229 bliver nødvendigvis sat ind for at tælle 2-kroner op til den givne vægt.

b) Omskrivning af Ligning (2.1)

Da Ligning (2.1) er en kongruens kan begge sidder reduceres med modulo:

$$59 \pmod{92} = 59 \tag{2.2}$$

$$7229 \pmod{92} = 53 \tag{2.3}$$

$$\Downarrow$$

$$59x \equiv 53 \pmod{92} \tag{2.4}$$

c) Løsningsmængde for x

Sætning 5.8 fra tekstbogen bruges til at finde løsningen. For at finde c bruges Euklids udvidede algoritme og *Sætning 5.6*:

k	r_k	s_k	t_k
0	92	1	0
1	59	0	1
2	33	1	-1
3	26	-1	2
4	7	2	-3
5	5	-7	11
6	2	9	-14
7	1	-25	39

Det ses at $-25 \cdot 92 + 39 \cdot 59 = 1$, hvorfor 39 er multiplikativ invers til $59 \pmod{92}$. Fra *Sætning 5.6* betyder det at:

$$39 \cdot 59 \equiv 1 \pmod{92} \tag{2.5}$$

Sætning 5.8 siger da igen at:

$$x \equiv 39 \cdot 53 \pmod{92} \tag{2.6}$$

Og løsningsmængden er:

$$39 \cdot 53 + n\mathbb{Z} \Rightarrow x = 2067 + 92\mathbb{Z} \tag{2.7}$$

Daniel Brasholt **s214675**
Rasmus Wiuff **s163977**

d) Løsningsmængde for y

Via *Sætning 5.7* reduceres $92y \equiv 0 \pmod{92}$:

$$d = \text{sfd}(92,92) = 92 \tag{2.8}$$

$$a' = \frac{92}{92} = 1 \tag{2.9}$$

$$b' = \frac{0}{92} = 0 \tag{2.10}$$

$$n' = \frac{92}{92} = 1 \tag{2.11}$$

$$\Downarrow$$

$$y \equiv 0 \pmod{1} \tag{2.12}$$

Det ses at løsningsmængden for y er:

$$y = 92\mathbb{Z} \tag{2.13}$$

3 Et system af kongruensligninger

Følgende system af kongruensligninger observeres:

$$x \equiv 250 \pmod{439} \tag{3.1}$$

$$118x \equiv 590 \pmod{1121} \tag{3.2}$$

Ligningen i Ligning (3.2) kan skrives således:

$$118 \cdot 1x \equiv 118 \cdot 5 \pmod{1121} \tag{3.3}$$

Ifølge bogens Lemma 5.4 er Ligning (3.3) da ækvivalent med:

$$x \equiv 5 \pmod{1121}$$

Den største fælles divisor mellem 439 og 1121 kan da findes med Euklids udvidede algoritme:

Tabel 1: *Euklids udvidede algoritme med* 439 *og* 1121

k	r_k	q_k	s_k	t_k
1	1121	-	1	0
2	439	-	0	1
3	243	2	1	-2
4	196	1	-1	3
5	47	1	2	-5
6	8	4	-9	23
7	7	5	47	-120
8	1	1	-56	143
9	0	7	-	-

Fra Tabel 1 kan det ses, at $sfd(439,1121) = 1 = -56 \cdot 1121 + 143 \cdot 439$. Da kan systemet af kongruensligninger løses med den kinesiske restklassesætning med parametrene $b_1 = 250$, $n_1 = 439$, $u_1 = 143$, $b_2 = 5$, $n_2 = 1121$ og $u_2 = -56$. Da vil systemet have de samme løsninger som kongruensligningen:

$$x \equiv 143 \cdot 439 \cdot 5 - 56 \cdot 1121 \cdot 250 \pmod{439 \cdot 1121}$$

$$x \equiv 367693 \pmod{492119}$$

hvilket er løsningsmængden:

$$367693 + 492119\mathbb{Z}$$