Hjemmeopgavesæt 5

Daniel Brasholt s214675

Februar 2022

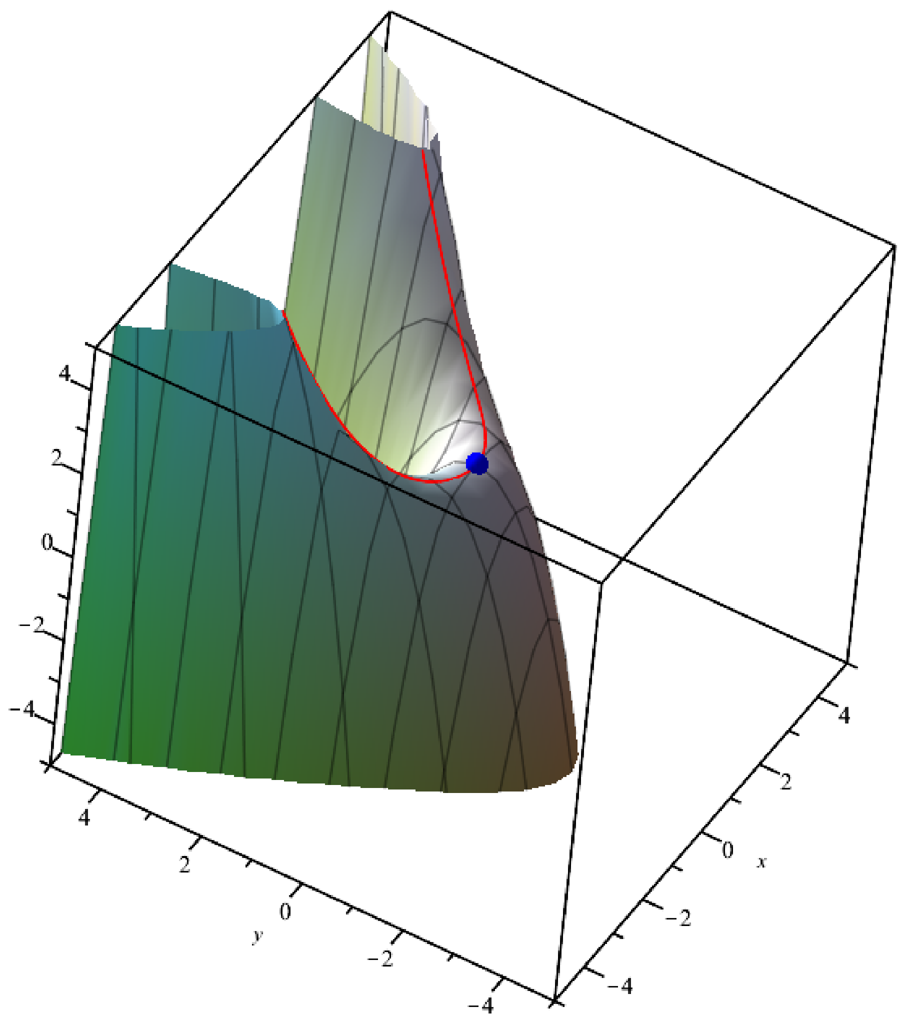
Opgave 3

a)

Den sammensatte funktion $h(u) = f(r(u))$ fås ved at finde $f(u, \frac{1}{2}u^2)$. Med Maple fås (se bilag):

$$h(u) = f(r(u)) = f(u, \frac{1}{2}u^2) = \frac{u^4}{8} + 1 \tag{1}$$

Ved hjælp af denne kan kurven K løftes op på grafen for f. Dette ser således ud:



Figur 1: Kurven K løftet op på grafen for f

På figuren er punktet $(0, 0, f(0, 0))$ også indtegnet.

Det kan direkte ud fra (1) ses, at ligningen $h(u) = 1$ kun har løsningen $u = 0$. Ligeledes har ligningen $h'(u) = 0$ også kun løsningen $u = 0$, da:

$$h'(u) = \frac{u^3}{2} = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Da vil hældningen for $h(u)$ vende i dette punkt. Fra udtrykket for $h'(u)$ kan det ses, at $h'(u)$ vil være negativ for $u < 0$ og positiv for $u > 0$.

b)

Hessematricen er bestemt med Maple (se bilag) til følgende:

$$H_{f(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{5y}{2} - 3x^2 & \frac{5x}{2} \\ \frac{5x}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Da punkt $A = (0, -1)$ indsættes $x = 0$ og $y = -1$ i matricen og denne evalueres:

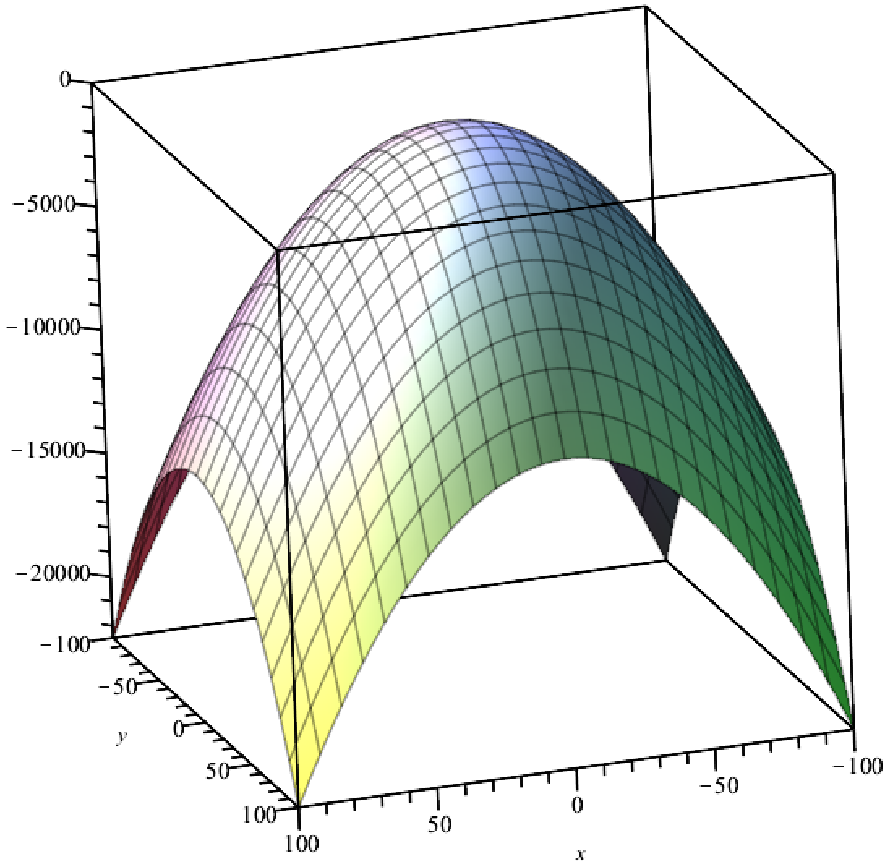
$$H_{f(0,-1)} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Da Hessematricens egenværdier begge er negative i punktet, kan det konkluderes, at f ved punktet A opnår et lokalt maksimum - dette fremgår af hjælpesætning 21.17 (eNote 21).

Det approksimerende andengradspolynomium, P_2, bestemmes med Maple (se bilag) til:

$$P_2(x,y) = 2y + 2 - \frac{5x^2}{4} - (y+1)^2$$

Denne kan efterfølgende plottes med Maple. Dette giver følgende figur:



Figur 2: Illustration af det approksimerende andengradspolynomium P_2

Sammenlignes figur 2 med de eksemplariske keglesnit i eNote 22, side 14, må arten af det approksimerende andengradspolynomium for f i punktet A være en elliptisk paraboloide.

For at bestemme den største fejl man begår, hvis man benytter P_2 i stedet for f på det afsluttede kvadrat, opstilles funktionen $g(x,y) = f(x,y) - P_2(x,y)$, som beskriver forskellen mellem de to funktioners værdier i et givent punkt. Denne er da givet ved:

$$g(x,y) = f(x,y) - P_2(x,y) = \frac{5}{4}x^2y - \frac{x^4}{4} - y^2 - 1 - 2y + \frac{5}{4}x^2 + (y+1)^2$$

Gradienten af denne kan dernæst findes med Maple:

$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{5}{2}xy - x^3 + \frac{5}{2}x\ ,\ \frac{5}{4}x^2\right)$$

Af dette kan det direkte aflæses, at alle punkter, hvor $x = 0$, er løsninger til ligningen. Da må alle punkter $(0, y)$ have samme funktionsværdi og fejlen, man begår ved de punkter, må være lige stor. Denne fejl kan da findes med Maple:

$$g(0,-1) = 0$$

Her er $y = -1$ blot valgt, da det ligger indenfor kvadratets grænser. Da fejlen er 0, må den største fejl kunne findes ved randpunkterne. Da undersøges fejlen, når de fire grænser for det afsluttede kvadrat indsættes i $g(x,y)$. Med dette fås (se bilag):

$$g(-\frac{1}{10},y) = g(\frac{1}{10},y) = \frac{y}{80} + \frac{499}{40000}$$
$$g(x,-\frac{11}{10}) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^4$$
$$g(x,-\frac{9}{10}) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^4$$

Da $g(-\frac{1}{10},y) = g(\frac{1}{10},y)$ er af første grad, må der ikke være et ekstremum for fejlen for disse randpunkter. Dog vil værdien i kvadratets hjørnepunkter være forskellig. Disse kan da udregnes:

$$g(-\frac{1}{10},-\frac{11}{10}) = g(\frac{1}{10},-\frac{11}{10} = -\frac{51}{40000}$$
$$g(-\frac{1}{10},-\frac{9}{10}) = g(\frac{1}{10},-\frac{9}{10} = \frac{49}{40000}$$

Dernæst kan det tjekkes, om fejlen ved $g(x,-\frac{11}{10})$ og $g(x,-\frac{9}{10})$ opnår et maksimum mellem hjørnerne af kvadratet. For at gøre dette, løses ligningerne $g'(x,-\frac{11}{10}) = 0$ og $g'(x,-\frac{9}{10}) = 0$. Disse giver løsningerne:

$$g'(x,-\frac{11}{10}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$g'(x,-\frac{9}{10}) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

Da $x = -\frac{1}{2}$ og $x = \frac{1}{2}$ ligger uden for kvadratet samt at fejlen ved $x = 0$ allerede er undersøgt, kan det konkluderes, at den største fejl, man begår, hvis man benytter P_2 i stedet for f på det afsluttede kvadrat, må være af størrelsen $\frac{51}{40000}$.

c)

For at B skal være et stationært punkt for f, må gradienten for f i B være lig nulvektoren. Gradienten udregnes med Maple til at være følgende:

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{5}{2}xy - x^3\ , \frac{5x^2}{4} - 2y\Big)$$
$$\nabla f(0,0) = \Big(\frac{5}{2}\cdot 0 \cdot 0 - 0^3\ , \frac{5\cdot 0^2}{4} - 2\cdot 0\Big) = (0,0)$$

Da må punktet B være et stationært punkt for f. Værdien af Hessematricen i dette punkt er

$$H_{f(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Egenværdierne for denne matrix må da være:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -2$$

Da produktet $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, kan Hessemetoden ikke umiddelbart anvendes til at afgøre, om punktet B er sted for et lokalt ekstremum.

d)

Da punktet $B = (0,0)$, må alle linjer af formen $y = ax$ være rette linjer, der går gennem punktet. Indsættes dette i f fås (se bilag):

$$f(x,ax) = \frac{5}{4}x^3a - \frac{1}{4}x^4 - a^2x^2 + 1 \tag{2}$$

For at der kan være et lokalt ekstremumspunkt i B, må funktionens restriktion til alle rette linjer have hældningen 0 i punktet. Altså:

$$\frac{d}{dx}f(x,ax) = \frac{15}{4}x^2a - x^3 - 2a^2x = 0$$

Fra dette kan det ses, at hældningen i punktet $(0,0)$ altid vil være 0. Er punktet et lokalt maksimum, skal den dobbelt afledede funktion i punktet være negativ. Den dobbelt afledede er givet som følger:

$$\frac{d^2}{d^2x}f(x,ax) = \frac{15}{2}ax - 3x^2 - 2a^2$$

Indsættes $x = 0$ i ovenstående, må værdien af udtrykket blot være lig $-2a^2$, hvilket for ethvert a vil være negativt. Da må der være et lokalt maksimum i punktet B for restriktionen af f på rette linjer af formen $y = ax$.

Dog mangler linjen $x = 0$ i denne argumentation. Indsættes denne værdi $x = 0$ i $f(x,y)$ fås:

$$f(0,y) = \frac{5}{4} \cdot 0^2 \cdot y - \frac{1}{4} \cdot 0^4 - y^2 + 1 = -y^2 + 1$$

Hældningen i dette punkt vil da være:

$$\frac{d}{dy}f(0,y) = -2y$$
$$\frac{d}{dy}f(0,0) = 0$$

Igen kan denne differentieres to gange for at identificere arten af dette punkt:

$$\frac{d^2}{d^2y}f(0,y) = -2$$

Da denne altid er negativ, må funktionens restriktion til den rette linje $x = 0$ have et lokalt maksimum i punktet B.

Ud fra eksempel 21.23 (eNote 21), kan det ses, at man ikke nødvendigvis kan konkludere, at en funktion har et lokalt maksimum i et punkt, bare fordi funktionens restriktion til alle rette linjer har. Da kan man heller ikke for denne funktion konkludere, at funktionen har et lokalt maksimum i punktet B. Derudover er det i opgave *3.a* vist, at den sammensatte funktion $h(u) = f(r(u))$ har et minimum ved punktet B. Dette kan ses fra grafen og løsningen til ligningen $h'(u) = 0$. Da har f ikke et lokalt maksimum i punktet B.

Bilag

Sammensat funktion $h(u)$:

```
>
> h := f(u,1/2*u^2)
```

$$f := (x,y) \mapsto \frac{5}{4} \cdot x^2 \cdot y - \frac{1}{4} \cdot x^4 - y^2 + 1$$

$$h := \frac{u^4}{8} + 1$$

Plot af kurve på funktion samt punkt:

```
> space := spacecurve([u,1/2*u^2,h(u)], u=-5..5, color=red):
> fplot := plot3d(f(x,y)):
> pplot := pointplot3d([0,0,f(0,0)], symbolsize=20, color=blue, symbol=solidcircle):
> display(space, fplot, pplot, view=[-5..5, -5..5, -5..5])
```

Fund af Hessematrix:

```
> H := <diff(f(x,y),x,x), diff(f(x,y),x,y) ; diff(f(x,y),x,y) , diff(f(x,y),y,y)>
```

$$H := \begin{bmatrix} \frac{5y}{2} - 3x^2 & \frac{5x}{2} \\ \frac{5x}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Værdi af Hessematrix ved $(0,0)$:

```
> subs({x=0,y=0}, H)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Fund af approksimerende polynomie:

```
> mtaylor(f(x,y), [x=0,y=-1],3)
```

$$2y + 2 - \frac{5x^2}{4} - (y+1)^2$$

Plot af approksimerende polynomie:

```
> plot3d(P2(x,y), x=-100..100, y=-100..100)
```

Udregning af og fund af gradient for $g(x,y) = f(x,y) - P_2(x,y)$:

```
> f(x,y)-P2(x,y)
```

$$\frac{5x^2y}{4} - \frac{x^4}{4} - y^2 - 1 - 2y + \frac{5x^2}{4} + (y+1)^2$$

```
> eq1 := diff(g(x,y),x)=0;
  eq2 := diff(g(x,y),y)=0
```

$$eq1 := \frac{5}{2}xy - x^3 + \frac{5}{2}x = 0$$

$$eq2 := \frac{5x^2}{4} = 0$$

Udregning af $g(0,-1)$:

```
> g(0,-1)
```

$$0$$

Undersøgelse af randpunkter:

```
> simplify(g(-1/10,y));
  simplify(g(1/10,y));
  simplify(g(x,-11/10));
  simplify(g(x,-9/10));
```

$$\frac{y}{80} + \frac{499}{40000}$$
$$\frac{y}{80} + \frac{499}{40000}$$
$$-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^4$$
$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^4$$

Fejl i kvadratets hjørner:

```
> g(-1/10,-11/10);
  g(-1/10,-9/10)
```

$$-\frac{51}{40000}$$
$$\frac{49}{40000}$$

Undersøgelse af minimum og maksimum af fejlfunktion på randen:

```
> fsolve(diff(g(x,-11/10),x)=0);
  fsolve(diff(g(x,-9/10),x)=0);
```

$$0.$$
$$-0.5000000000, 0., 0.5000000000$$

Gradient af $f(x,y)$:

```
> diff(f(x,y),x);
  diff(f(x,y),y)
```

$$\frac{5}{2}xy - x^3$$
$$\frac{5x^2}{4} - 2y$$

Udregning og differentiering af $f(x,ax)$:

```
> f(x,a*x)
```

$$\frac{5}{4}x^3a - \frac{1}{4}x^4 - a^2x^2 + 1$$

```
> diff(f(x,a*x),x)
```

$$\frac{15}{4}x^2a - x^3 - 2a^2x$$