Før i læser mine kommentarer:

Det er en virkelig veludført og flot aflevering!
de få kommentarer jeg har givet er derfor petitesser som ikke rigtig trækker ned. Blot for at give jer lidt andet feedback end flueben.

Andet Hjemmeopgavesæt

01017 Diskret Matematik

af Daniel Brasholt **s214675**
og Rasmus Wiuff **s163977**

26. oktober 2022

Indhold

A Oversættelse til første-orden logiske formler

Fortolkningen $\mathcal{F}$ er givet ved:

$$\operatorname{dom}(\mathcal{F}) = \{x \mid x \text{ er menneske}\}$$
$$S^{\mathcal{F}} = \{x \mid x \text{ er studerende}\}$$
$$Æ^{\mathcal{F}} = \{x \mid x \text{ er ærlig}\}$$

(a)	"Alle studerende er ærlige."	$\forall x(S(x) \to Æ(x))$
(b)	"Alle studerende er uærlige."	$\forall x(S(x) \to \neg Æ(x))$
(c)	"Ikke alle studerende er ærlige."	$\neg\forall x(S(x) \to Æ(x))$
(d)	"Ikke alle studerende er uærlige."	$\neg\forall x(S(x) \to \neg Æ(x))$
(e)	"Nogen studerende er ærlige."	$\exists x(S(x) \wedge Æ(x))$
(f)	"Nogen studerende er uærlige."	$\exists x(S(x) \wedge \neg Æ(x))$
(g)	"Ingen studerende er ærlige."	$\neg\exists x(S(x) \wedge Æ(x))$
(h)	"Ingen studerende er uærlige."	$\neg\exists x(S(x) \wedge \neg Æ(x))$

B Oversættelse til naturligt sprog

Fortolkningen $\mathcal{R}$ er givet ved:

$$\operatorname{dom}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}$$
$$\cdot^{\mathcal{R}} = \text{Sædvanlig multiplikationsoperator på de reelle tal.}$$
$$\text{Desuden gælder: } x^2 = x \cdot x, x^3 = x \cdot x \cdot x$$
$$+^{\mathcal{R}} = \text{Sædvanlig additionsoperator på de reelle tal.}$$
$$=^{\mathcal{R}}, <^{\mathcal{R}}, >^{\mathcal{R}}, \leq^{\mathcal{R}}, \geq^{\mathcal{R}}, \neq^{\mathcal{R}} = \text{Sædvanlige lig- og ulighedstegn}$$
$$\mathbf{0}^{\mathcal{R}} = 0$$

Vi betragter formlerne:

$$\forall x(x = x^2 \to x < \mathbf{0}) \tag{B.1}$$
$$\forall x(x > \mathbf{0} \to x^2 > x) \tag{B.2}$$
$$\forall x(x = \mathbf{0} \vee \neg(x + x = x)) \tag{B.3}$$
$$\exists x \forall y(x > y) \tag{B.4}$$
$$\forall x \forall y(x > y \to \exists z(x > z \wedge z > y)) \tag{B.5}$$

Ligning (B.1)

Ligning (B.1) oversættes til "Alle reelle tal der er lig med sit kvadrat, er negative".
Dette er falsk. Modmodel:

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 1^2, 1 > 0 \tag{B.6}$$

Ligning (B.2)

Ligning (B.2) oversættes til "Kvadratet af alle positive reelle tal er større end tallet selv".
Dette er falsk. Modmodel:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \not> \frac{1}{2} \tag{B.7}$$

Ligning (B.3)

Ligning (B.3) oversættes til "Det eneste reelle tal x som opfylder $x + x = x$ er 0".
Den er sand. Oversættelsen er netop beskrivelsen af 0 ud fra den additive identitet.

cool

"Alle reelle tal x er enten lig 0 eller også gælder x = 2x."

skriv så herefter hvorfor det må betyde at " Det eneste reelle tal x som opfylder x+x=x er 0" hvis det skal være sandt

Daniel Brasholt **s214675**
Rasmus Wiuff **s163977**

Ligning (B.4)

Ligning (B.4) oversættes til "Der findes et ~~vilkårligt~~ tal x som er større end alle andre tal". (✓)
Dette er falsk. Den reelle talmængde er uendelig, hvorfor at hvis man vælger et vilkårligt tal x, vil der altid være et tal som er større. Hvis man bytter om på alkvantoren og eksistenskvantoren bliver Ligning (B.4) sand. ✓ ✓

Ligning (B.5)

Ligning (B.5) oversættes til "For alle reelle tal x større end y, findes et tal z mellem x og y". ✓
Det er sandt. Definer f.eks. z ud fra ligningen

$$z = \frac{x+y}{2} \tag{B.8}$$ ✓

C Formalisering under fortolkningen $\mathcal{R}$

Fortolkningen $\mathcal{R}$ er givet ved:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(\mathcal{R}) &= \mathbb{R} \\
\cdot^{\mathcal{R}} &= \text{Sædvanlig multiplikationsoperator på de reelle tal.} \\
&\quad \text{Desuden gælder: } x^2 = x \cdot x, x^3 = x \cdot x \cdot x \\
+^{\mathcal{R}} &= \text{Sædvanlig additionsoperator på de reelle tal.} \\
=^{\mathcal{R}}, <^{\mathcal{R}}, >^{\mathcal{R}}, \leq^{\mathcal{R}}, \geq^{\mathcal{R}}, \neq^{\mathcal{R}} &= \text{Sædvanlige lig- og ulighedstegn} \\
\mathbf{0}^{\mathcal{R}} &= 0 \\
\mathbf{1}^{\mathcal{R}} &= 1 \\
\mathbf{I}^{\mathcal{R}} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ er heltal}\}
\end{aligned}$$

Betragt de tre natursproglige udsagn:

1. "Der findes et reelt tal som ikke er et heltal."
2. "Der findes et reelt tal som er større end alle heltal."
3. "Ethvert positivt heltal er kvadratet af et negativt reelt tal."

Deres første-ordens logiske udtryk fremgår i Ligninger (C.1) til (C.3):

$$\exists x(\neg \mathbf{I}(x)) \tag{C.1}$$ ✓

$$\exists x \forall y(\mathbf{I}(y) \to x > y) \tag{C.2}$$ ✓

$$\forall x((\mathbf{I}(x) \land x > \mathbf{0}) \to \exists y(y < \mathbf{0} \to x = y^2)) \tag{C.3}$$ ✓

Ligning (C.1)

Formlen er sand under $\mathcal{R}$. Hvis $\mathcal{R}$ indeholder multiplikation må den nødvendigvis indeholde division, da denne er den inverse operation. Dermed kan man altid for et heltal x sige:

$$x' = x + \frac{\mathbf{1}}{2} \tag{C.4}$$

x' vil aldrig være et heltal. ✓

Den MÅ nødvendigvis ikke indeholde division. Men da domænet er de reelle tal, har alle elementer i domænet en invers (tallene fra 0 til 1). At gange med et elements inverse svarer da til at dividerer med elementet selv. I kan også bare skrive at 0,5 findes i R og at i derfor må adderer med den. I behøves ikke at argumentere for at division findes

---

Ligning (C.2)

Formlen er falsk. Vi vælger vilkårligt x først og kan altid finde et y i det uendelige rum af heltal som er større. ✓

Ligning (C.3)

Formlen er sand. For $x > 0$ og y er et reelt tal, gælder $\sqrt{x} = \pm y$, hvor et y altid vil være negativt. ✓

Daniel Brasholt **s214675**
Rasmus Wiuff **s163977**

D Gyldighed

Vi betragter de to formler:

$$\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x) \tag{D.1}$$

$$\forall x (P(x) \vee \neg P(x)) \tag{D.2}$$

Ligning (D.1)

Ligning (D.1) er ikke gyldig. Vi betragter modmodellen hvor domænet er de naturlige tal og P fortolkes som mængden af lige tal. Ligning (D.1) siger da hvis der findes et lige, naturligt tal, er alle naturlige tal lige tal. Da dette er forkert holder modmodellen og Ligning (D.1) er ikke gyldig.

Ligning (D.2)

Ligning (D.2) er gyldig. Betragt en vilkårlig fortolkning af P:

1. $P(x) \vee \neg P(x)$ gælder for alle x.
2. $P(x)$ er en vilkårlig term for alle vilkårlige x.
3. Hvis $P(x)$ er sand er $\neg P(x)$ falsk, eller omvendt.
4. Dermed bliver $P(x) \vee \neg P(x)$ til $A \vee \neg A$

Betragt sandhedstabellen:

A	A	$\vee$	$\neg A$
T	T	T	F
F	F	T	T

Da $A \vee \neg A$ er gyldig, er Ligning (D.2) gyldig.

E Logiske konsekvenser: Tableau-metoden

Betragt de tre påstande:

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x P(x) \models \forall x Q(x) \tag{E.1}$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \tag{E.2}$$

$$\exists x \forall y P(x,y) \models \forall y \exists x P(x,y) \tag{E.3}$$

Ligning (E.1)

Påstanden er korrekt hvis $\forall x Q(x)$ er en logisk konsekvens af $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ og $\forall x P(x)$:

$$(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \wedge (\forall x P(x)) \rightarrow \forall x Q(x) \tag{E.4}$$

Gyldigheden af Ligning (E.4) afgøres med tableau-metoden i Figur 1. Ved at bruge dekompositionsreglen for implikation, og konjunktion fås de tre første formler.

Figur 1: *Tableau for Ligning* (E.4)

$$
\begin{array}{c}
1\ \forall x(P(x)\to Q(x)) : \mathtt{T} \\
2\ \forall x P(x) : \mathtt{T} \\
3\ \forall x Q(x) : \mathtt{F} \\
\mid \forall\text{F på } 3 \\
4\ Q(c) : \mathtt{F} \\
\mid \forall\text{T på } 2 \\
5\ P(c) : \mathtt{T} \\
\mid \forall\text{T på } 1 \\
6\ P(c)\to Q(c) : \mathtt{T} \\
\to\text{T på } 6 \\
7\ P(c) : \mathtt{F} \qquad\qquad 8\ Q(c) : \mathtt{T} \\
\times \qquad\qquad\qquad \times
\end{array}
$$

Fra Figur 1 kan det ses at Ligning (E.4) er gyldig, hvorfor påstanden Ligning (E.1) holder.

Ligning (E.2)

Påstanden er korrekt hvis $\forall x P(x)\vee\forall x Q(x)$ er logisk konsekvente af $\forall x(P(x)\vee Q(x))$:

$$\forall x(P(x)\vee Q(x))\to(\forall x P(x)\vee\forall x Q(x)) \tag{E.5}$$

Igen bruges tableau-metoden til at afgøre gyldigheden af Ligning (E.5). Tableauet kan ses i Figur 2.

Figur 2: *Tableau for Ligning* (E.5)

$$
\begin{array}{c}
1\ \forall x(P(x)\vee Q(x))\to(\forall x P(x)\vee\forall x Q(x)) : \mathtt{F} \\
\mid \to\text{F på } 1 \\
2\ \forall x(P(x)\vee Q(x)) : \mathtt{T} \\
3\ \forall x P(x)\vee\forall x Q(x) : \mathtt{F} \\
\mid \vee\text{F på } 3 \\
4\ \forall x P(x) : \mathtt{F} \\
5\ \forall x Q(x) : \mathtt{F} \\
\mid \forall\text{T på } 2 \\
6\ P(x)\vee Q(x) : \mathtt{T} \\
\vee\text{T på } 6 \\
7\ P(x) : \mathtt{T} \qquad\qquad 8\ Q(x) : \mathtt{T} \\
\mid \forall\text{F på } 4 \\
9\ P(c_0) : \mathtt{F} \\
\mid \forall\text{F på } 5 \\
10\ Q(c_1) : \mathtt{F} \\
\bigcirc
\end{array}
$$

Her er en reel fejl. Grenen er ikke mættet endnu. Da x er erstattelig med både c0 og c1 i (2) skal i også evaluerer disse formler.

Som det kan ses er der en åben mættet gren i Figur 2, hvorfor påstanden Ligning (E.2) ikke holder.

Ligning (E.3)

Påstanden er korrekt hvis $\forall y\exists x P(x,y)$ er en logisk konsekvens af $\exists x\forall y P(x,y)$:

$$\exists x\forall y P(x,y)\to\forall y\exists x P(x,y) \tag{E.6}$$

Gyldigheden af Ligning (E.6) testes i Figur 3.

Figur 3: *Tableau for Ligning* (E.6)

$$
\begin{array}{rl}
1 & \exists x \forall y P(x,y) : \mathtt{T} \\
2 & \forall y \exists x P(x,y) : \mathtt{F} \\
 & \quad | \; \forall\mathtt{F} \text{ på } 2 \\
3 & \exists x P(x,c_0) : \mathtt{F} \\
 & \quad | \; \exists\mathtt{T} \text{ på } 1 \\
4 & \forall y P(c_1,y) : \mathtt{T} \\
 & \quad | \; \forall\mathtt{T} \text{ på } 4 \\
5 & P(c_1,c_0) : \mathtt{T} \\
 & \quad | \; \exists\mathtt{F} \text{ på } 3 \\
6 & P(c_1,c_0) : \mathtt{F} \\
 & \quad \times
\end{array}
$$

I Figur 3 er grenen lukket hvorfor påstanden i Ligning (E.3) holder.

F Barberens paradoks

F.1. Opfyldelighed med Tableau-metoden

I tableau metoden forsøger mand at vise at en lukket formel er falsk. Hvis alle grene er lukkede kan det ikke lade sig gøre, hvorimod hvis der er en lukket og mættet gren, findes der en fortolkning hvor formlen er falsk. Dette fortæller os dog ikke om formlen er opfyldelig eller en kontradiktion. Man kan derimod forsøge at vise at formlen er sand. Hvis man her finder en åben og mættet gren, findes en fortolkning som gør formlen opfyldelig. Hvis alle grene er lukkede er formlen derimod en kontradiktion. Se Tabel 1:

Tabel 1: *Betydning af tableau-metoden i forhold til rodformlens sandhedsstilling*

Rodformlens sandhedsstilling	En åben og mættet gren	Alle grene er lukkede
`Falsk`	Ikke gyldig	Gyldig
`Sand`	Opfyldelig	Kontradiktion

F.2. Barberens historie

Barberens regel: “Barberen barberer netop de som ikke barberer sig selv”. Hvem barberer barberen?

1. Barberen barberer dem som ikke barberer sig selv.
2. Han skal barberer sig selv.
3. Pga. 1 skal han nu ikke barberer sig selv.
4. Nu skal han, igen, pga. 1 barberer sig selv.

Heraf paradokset.

F.3. Formalisering af barberens raison d'être

Fortolkningen $\mathcal{F}$ er givet ved:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(\mathcal{F}) &= \{x \mid x \text{ er en mand i byen}\} \\
b^{\mathcal{F}} &= \text{ byens barber} \\
B^{\mathcal{F}} &= \{(x,y) \mid x \text{ barberer } y\}
\end{aligned}
$$

Daniel Brasholt **s214675**
Rasmus Wiuff **s163977**

"Barberen barberer netop de som ikke barberer sig selv" formaliseres:

$$\forall x(\neg B(x,x) \leftrightarrow B(b,x)) \tag{F.1}$$

F.4. Tableau-metoden

For at vise opfyldelighed eller kontradiktion bruges tableau-metoden på Ligning (F.1) i Figur 4.

Figur 4: *Tableau for at vise opfyldelighed eller kontradiktion af Ligning* (F.1)

1 $\forall x(\neg B(x,x) \leftrightarrow B(b,x))$: T

| $\forall$T på 1

2 $\neg B(b,b) \leftrightarrow B(b,b)$: T

$\leftrightarrow$T på 2

3 $\neg B(b,b)$: T	5 $\neg B(b,b)$: F
4 $B(b,b)$: T	6 $B(b,b)$: F
¬T på 3	¬F på 5
7 $B(b,b)$: F	8 $B(b,b)$: T
$\times$	$\times$

Begge grene lukker i Figur 4, hvorfor Ligning (F.1) ikke er opfyldelig.

Skønt at rette en så nydelig rapport!

4/4

Frederikke