Tredje Hjemmeopgavesæt

01017 Diskret Matematik

af Daniel Brasholt **s214675**
og Rasmus Wiuff **s163977**

10. november 2022

Indhold

Daniel Brasholt **s214675**
Rasmus Wiuff **s163977**

1 Skuffeprincippet

Skuffeprincippet siger:

> "Hvis der ligger n genstande i m skuffer, og $n > m$,
> så vil mindst en skuffe indeholde mere end en genstand."

a) Opvarmning

Vi betragter de syv terninger således: En terning er en genstand som skal tildeles en værdi (lægges i en skuffe). Derfor, i skuffeanalogien, er antallet af genstande, terningerne. Antallet af skuffer er antallet af forskelige værdier på en terning:

$$n = 7,\ m = 6 \tag{1.1}$$

Derfor gælder,

$$n > m \tag{1.2}$$

og der må nødvendigvis være mindst to terninger som deler værdi.

b) Børnesudoku og skuffeprincippet

Ifølge skuffeprincippet vil der være mere end én genstand i hver skuffe, hvis der er flere genstande end skuffer. Når en børnesudoku udfyldes, er der dog præcist lige så mange skuffer som genstande. Da hvert tal kun må bruges én gang per (fx. søjle, vil en udfyldt søjle indeholde ét af hvert tal 1-4. Da der er 4 søjler i sudokuen og dette princip gælder for dem alle, vil der være 4 forekomster af hvert tal 1-4, når sudokuen er helt udfyldt, såfremt reglen overholdes. Samme argumentation kan bruges til de to resterende regler.

c) Antal mulige udfyldninger

Hver underkvadrat kan udfyldes således:

$$\underset{1}{\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}}\quad \underset{2}{\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{bmatrix}}\quad \underset{3}{\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}}\quad \underset{4}{\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}}$$

Som hver kan indsættes som underkvadrat. Der er altså fire muligheder i første kvadrat, for hver af disse er der fire muligheder i andet kvadrat, ligeledes for tredje og fjerde:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256 \tag{1.3}$$

d) Ækvivalente udsagn

p	"man bryder søjlereglen i en søjle"
q	"man bryder søjlereglen i mindst to søjler"
r	"man bryder rækkereglen"

Med ovenstående udsagnssymboler, kan udsagnene A og B formaliseres således:

$$A:\quad p \to (q \lor r) \tag{1.4}$$

$$B:\quad (p \land \neg r) \to q \tag{1.5}$$

Opstilles sandhedstabellerne for disse to udtryk fås:

Daniel Brasholt **s214675**
Rasmus Wiuff **s163977**

Tabel 1: *A*

p	q	r	p	$\rightarrow$	$(q \vee r)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Tabel 2: *B*

p	q	r	$(p \wedge \neg r)$	$\rightarrow$	q
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Som det kan ses, er sandhedsværdien af udsagnene A og B ens ved de samme sandhedstilskrivninger, hvorfor udsagnene A og B er ækvivalente.

e) Brud på søjlereglen

Udsagnet fra opgaven deles op i tre tilfælde:

1. "Hvis man bryder søjlereglen i en bestemt søjle, så gælder at man bryder søjlereglen i en anden søjle"
2. "Hvis man bryder søjlereglen i en bestemt søjle, så gælder at man bryder rækkereglen"
3. "Hvis man bryder søjlereglen i en bestemt søjle, så gælder at man bryder søjlereglen i en anden søjle og rækkereglen"

Betragt et uddrag af sandhedstabellen for Ligning (1.5) hvori søjlereglen er brudt (sandhedstilskrivning $\{p\!:\!\mathtt{T}\}$):

p	q	r	$(p \wedge \neg r) \rightarrow q$
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Først bemærk at man ikke kan bryde søjlereglen alene (sandhedstilskrivning: $\{p\!:\!\mathtt{T}, q\!:\!\mathtt{F}, r\!:\!\mathtt{F}\}$)

- Sandhedstilskrivningen $\{p\!:\!\mathtt{T}, q\!:\!\mathtt{T}, r\!:\!\mathtt{F}\}$ gør udsagn 1 sandt.
- Sandhedstilskrivningen $\{p\!:\!\mathtt{T}, q\!:\!\mathtt{F}, r\!:\!\mathtt{T}\}$ gør udsagn 2 sandt.
- Sandhedstilskrivningen $\{p\!:\!\mathtt{T}, q\!:\!\mathtt{T}, r\!:\!\mathtt{T}\}$ gør udsagn 3 sandt.

Daniel Brasholt **s214675**
Rasmus Wiuff **s163977**

2 Gruppeinddelinger

a) Mulige gruppeinddelinger

I basistilfældet $n=1$, er der naturligvis kun én mulig gruppeinddeling, da vi er ligeglade med rækkefølgen af personer i hver gruppe. Når der er flere grupper, kan den næste gruppe laves ved at udvælge én af de $3n$ mulige. Dernæst kan vi vælge ét gruppemedlem blandt de resterende $(3n-1)$ personer. Det sidste medlem kan vælges mellem $(3n-2)$ muligheder. Da vi også her er ligeglade med rækkefølgen, skal vi dele med antallet af mulige måder at fordele de to valgte personer på, hvilket er 2. Da får vi $\frac{(3n-1)(3n-2)}{2}$. Det var dog kun den ene gruppe og der er nu $n-1$ grupper tilbage, der skal dannes, hvorfor det samlede udtryk bliver:

$$f(n)=\frac{(3n-1)(3n-2)}{2}f(n-1) \tag{2.1}$$

når $n>1$.

b) Induktionsbevis

Ligning (2.1) skrives op:

$$f(n)=\begin{cases}1 & \text{for } n=1\\ \frac{(3n-1)(3n-2)}{2}f(n-1) & \text{for } n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\end{cases} \tag{2.2}$$

Det skal bevises at:

$$f(n)=\frac{(3n)!}{6^n n!} \quad \text{for } n\in\mathbb{N} \tag{2.3}$$

Først bestemmes basistilfældet $n=1$:

$$\overbrace{1}^{\text{Venstreside: Ligning (2.2)}} = \overbrace{\frac{(3\cdot 1)!}{6^1 1!}=1}^{\text{Højreside: Ligning (2.3)}} \tag{2.4}$$

Venstresiden findes for $n+1$:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \frac{(3(n+1)-1)(3(n+1)-2)}{2}\cdot f(n)=\frac{(3n+3-1)(3n+3-2)}{2}\cdot f(n)\\ &= \frac{(3n+2)(3n+1)}{2}\cdot f(n) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Højresiden findes for $n+1$:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \frac{(3(n+1))!}{6^{n+1}(n+1)!}=\frac{(3n+3)!}{6^{n+1}(n+1)!}=\frac{(3n!)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{6^n n! 6(n+1)}\\ &= \frac{(3n!)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{6^n n! 2(3n+3)}=\frac{(3n!)(3n+2)(3n+1)}{6^n n! 2}=\frac{(3n+2)(3n+1)}{2}\cdot\frac{3n!}{6^n n!}\\ &= \frac{(3n+2)(3n+1)}{2}\cdot f(n) \end{aligned} \tag{2.6}$$

I Ligning (2.6) indsættes induktionsantagelsen:

$$f(n)=\frac{3n!}{6^n n!} \tag{2.7}$$

Og Ligning (2.3) er dermed korrekt. □

3 Polynomier fra rekursionsformel

a) Opskrivning af polynomier

Rekursionsformlen er givet som:

$$P_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 1 - xP_{n-1}(x) & \text{for } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases} \tag{3.1}$$

Fra Ligning (3.1) er det givet, at:

$$P_0(x) = 1 \tag{3.2}$$

Dernæst kan vi finde $P_1(x)$ ved at indsætte Ligning (3.2):

$$P_1(x) = 1 - x \cdot P_0(x) = 1 - x \cdot 1 = 1 - x \tag{3.3}$$

Ligeledes kan $P_2(x)$ findes ved at anvende Ligning (3.3):

$$P_2(x) = 1 - x \cdot (1 - x) = 1 - x + x^2 = x^2 - x + 1 \tag{3.4}$$

b) Induktionsbevis

Det skal bevises at:

$$(1+x)P_n(x) = 1 + (-1)^n x^{n+1}, \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

Basistilfældet findes for $n = 0$:

$$\overbrace{1+x}^{\text{Venstreside}} = \overbrace{1 + (-1)^0 x^{0+1} = 1 + x}^{\text{Højreside}} \tag{3.6}$$

Venstresiden i Ligning (3.5) evalueres for $n+1$:

$$\begin{aligned} (1+x)P_{n+1}(x) &= (1+x)(1 - xP_n(x)) \\ &= 1 + x - xP_n(x)(1+x) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Induktionsantagelsen indsættes i Ligning (3.7):

$$\begin{aligned} (1+x)P_{n+1}(x) &= 1 + x - x(1 + (-1)^n x^{n+1}) \\ &= 1 + x - x - x(-1)^n x^{n+1} \\ &= 1 + x - x + (-1)^{n+1} x^{n+2} \\ &= 1 + (-1)^{n+1} x^{n+2} \quad \square \end{aligned} \tag{3.8}$$