***Hjemmeaflevering* 7**

Daniel Brasholt s214675

d. 09/05/2022

Opgave 1

a)

Ud fra udtrykket for punktmængden kan man se, at den betegner en kvart cylinder med radius a og højde b. Den er kun kvart, da $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Da kan den parametriseres således:

$r(u, v, w) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), w)$

hvor $0 \leq u \leq a$, $0 \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}$ og $0 \leq w \leq b$

b)

Af Gauss' Divergenssætning fremgår det, at

$Flux(\boldsymbol{V}, \partial\Omega) = \int_{\Omega} Div(\boldsymbol{V}) d\mu$

Da kan fluxen ud gennem overfladen blot bestemmes ved først at finde divergensen for vektorfeltet:

```
> V := (x,y,z) -> <x^2-2*x*z, 5*y*z, 2*y*exp(x)>
```

$$V := (x, y, z) \mapsto \langle x^2 - 2 \cdot x \cdot z, 5 \cdot y \cdot z, 2 \cdot y \cdot e^x \rangle \quad \textbf{(1.2.1)}$$

```
> VectorCalculus[Divergence](V)
```

$$(x, y, z) \mapsto 2 \cdot x + 3 \cdot z \quad \textbf{(1.2.2)}$$

Indsættes parameterfremstillingen for kvartcylinderen i denne, fås

$Div(r(u, v, w)) = 2 \cdot u \cdot \cos(v) + 3 \cdot w$

Dernæst kan Jacobi-funktionen for parameterfremstillingen bestemmes som determinanten af følgende matrix:

```
> r := (u,v,w) -> <u*cos(v), u*sin(v), w>
```

$$r := (u, v, w) \mapsto \langle u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), w \rangle \quad \textbf{(1.2.3)}$$

```
> M := <diff(r(u,v,w),u) | diff(r(u,v,w),v) | diff(r(u,v,w),w)>
```

$$M := \begin{bmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & u\cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.4)}$$

```
> LinearAlgebra[Determinant](M)
```

$$\cos(v)^2 u + \sin(v)^2 u \quad \textbf{(1.2.5)}$$

Dette kan simplificeres til u. Det bør være absolutværdien, men da u kun går fra

0 til 1, vil denne altid være positivDa kan fluxen gennem overfladen bestemmes som

$$Flux(\boldsymbol{V}, \partial\Omega) = \int_0^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a Jacobi \cdot Div(\boldsymbol{V})\, du\, dv\, dw$$

```
> Flux = int(u*(2*u*cos(v)+3*w),u=0..a, v=0..Pi/2, w=0..b)
```

$$Flux = \frac{3}{8}\pi a^2 b^2 + \frac{2}{3} a^3 b \qquad (1.2.6)$$

Fluxen ud gennem overfladen vil da være en funktion af radus og højden af kvartcylinderen.

Opgave 2

a)

For at parametrisere trekanten, kan først stykket mellem punkterne B og C. Da dette blot er et linjestykke, der går fra $(0, 2, 0)$til $(1, 0, 0)$, kan det parametriseres således:

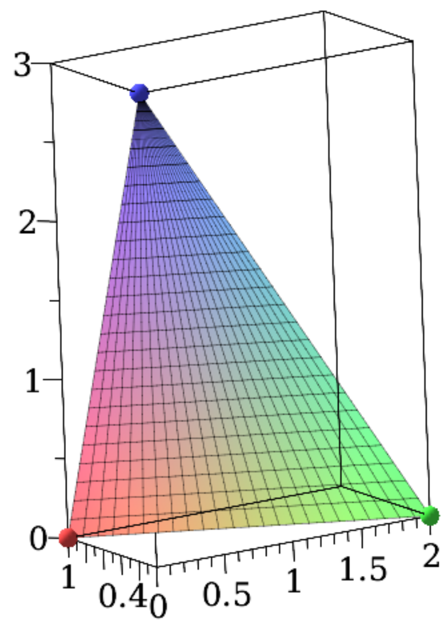
$l(u) = (u, -2u + 2, 0)$ hvor $u \in [0; 1]$

Dernæst kan trekanten parametriseres ved at parametrisere linjestykkerne, der går fra punkt $A = (0, 0, 3)$til linje l. På både x- og y-koordinatet skal denne linje da gå fra 0 til værdien af l - dette kan gøres ved at multiplicere koordinatsættet for linjen med en variabel, der går fra 0 til 1. Linjestykkes z-koordinat skal gå fra 3 til 0. Dette kan gøres ved brug af den førnævnte parameter såldes:

$r(u, v) = (v \cdot u, v \cdot (-2u + 2), 3 - 3v)$ hvor $u \in [0; 1]$ og $v \in [0; 1]$

Dette kan da plottes således:

```
> with(plots):
> pplot := pointplot3d({[0,0,3],[0,2,0],[1,0,0]}, symbol=
  solidcircle, symbolsize=20):
> tplot := plot3d([v*u,v*(-2*u+2),3-3*v],u=0..1,v=0..1):
> display(pplot, tplot, scaling=constrained)
```



b)

Ifølge Stokes sætning, vil følgende gælde (formel 29-4 eNote 29):

$$Flux\left(\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{V}), F_r\right) = Cirk(\boldsymbol{V}, \partial F)$$

Da kan først enhedsnormalvektorfeltet bestemmes som krydsproduktet af parameterfremstillingen differentieret med hensyn til u og med hensyn til v:

```
> r := (u,v) -> <v*u, v*(-2*u+2), 3-3*v>
```

$$r := (u, v) \mapsto \langle v \cdot u, v \cdot (-2 \cdot u + 2), 3 - 3 \cdot v \rangle \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

```
> ru := diff(r(u,v),u):
  rv := diff(r(u,v),v):
  VectorCalculus[CrossProduct](ru,rv):
  simplify(%)
```

$$(6\,v)e_x + (3\,v)e_y + (2\,v)e_z \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

Det kan dog ses, at dette enhedsnormalvektorfelt ikke følger højrekonventionen. Når for eksempel $v = 1$, vil normalvektoren pege i udelukkende positiv retning, hvilket er det modsatte af det ønskede. Da skal krydsproduktet tages omvendt, hvorefter integralet kan bestemmes:

```
> VectorCalculus[CrossProduct](rv,ru):
  simplify(%)
```

$$(-6\,v)e_x + (-3\,v)e_y + (-2\,v)e_z \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

```
> V := <z,x,y>
```

$$V := \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2.4)}$$

```
> rot := <diff(V[3],y)-diff(V[2],z), diff(V[1],z)-diff(V[3],x),
  diff(V[2],x)-diff(V[1],y)>
```

$$rot := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.2.5)}$$

```
> int(rot.<-6*v,-3*v,-2*v>, u=0..1, v=0..1)&PartialD;
```

$$-\frac{11}{2} \quad \textbf{(2.2.6)}$$

Da må $Flux(\boldsymbol{Rot}(\mathbf{V}), \boldsymbol{F}_r) = Cirk(\mathbf{V}, \partial F) = -\frac{11}{2}$

Opgave 3

$V(x, y, z) = (2x + 3y, 2y + 3x, -4z)$
$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy$

a)

Da førstekoordinatet i vektorfeltet $V(x, y, z)$ er $2x + 3y$, må $a = 1$ og $d = 3$, da F så kan differentieres med hensyn til x og give $2x + 3y$.
På samme måde må $b = 1$ og $c = -2$.Dette kan eftervises:

```
> a := 1: b := 1: c := -2: d := 3:
> F := (x,y,z) -> a*x^2+b*y^2+c*z^2+d*x*y
```

$$F := (x, y, z) \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot x \cdot y \quad \textbf{(3.1.1)}$$

```
> V := <diff(F(x,y,z), x), diff(F(x,y,z), y), diff(F(x,y,z), z)>
```

$$V := \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 2y \\ -4z \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1.2)}$$

b)

En enhedscirkel i (y, z)-planen og centrum i$(0, 0, 1)$ må have parameterfremstillingen:

$r(u) = (0, \cos(u) + 1, \sin(u) + 1)$hvor $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$. Da V er et gradientfelt, følger det af sætning **25.10**, at det tangentielle kurveintegral er givet ved:
$Tan(\mathbf{V}, K_r) = F(q) - F(p)$
hvor F er den i opgave a bestemte stamfunktion, q endtepunktet for kurven og p

udgangspunktet. Disse kan da findes:

```
> r := u -> <0, cos(u)+1, sin(u)+1>:
  r(-Pi/2);
  r(Pi/2)
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

```
> F(0,1,2)-F(0,1,0)
```

$$-8 \quad (3.2.2)$$

Det tangentielle kurveintegral af **V** langs den højre halvdel af enhedscirklen med centrum i $(0, 1, 1)$ er da fundet til -8.

c)

I opgavesættet til forårets uge 9, er det angivet, at hvis et glat vektorfelt $\boldsymbol{V}$ er divergensfrit, har vektorfeltet et stamvektorfelt $\boldsymbol{W}$ hvorom det gælder, at:
$\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{W})(x, y, z) = V(x, y, z)$
Da kan først divergensen af $\boldsymbol{V}$ bestemmes:

```
> Div = diff(V[1],x) + diff(V[2],y) + diff(V[3],z)
```

$$Div = 0 \quad (3.3.1)$$

Da må et stamvektorfelt til $\boldsymbol{V}$ eksistere. Rotationen af $\boldsymbol{W}$ kan da bestemmes:

```
> W := <2*y*z + x*z - x^2, -2*x*z - y*z + y^2, y^2 - x^2 + z^2>:
  W
```

$$\begin{bmatrix} -x^2 + x z + 2 y z \\ -2 x z + y^2 - y z \\ -x^2 + y^2 + z^2 \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

```
> Rot = <diff(W[3],y) - diff(W[2],z) , diff(W[1],z) - diff(W[3],x)
  , diff(W[2],x) - diff(W[1],y)>
```

$$Rot = \begin{bmatrix} 2 x + 3 y \\ 3 x + 2 y \\ -4 z \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

Dette er netop $\boldsymbol{V}$, hvorfor det er bestemt, at $\boldsymbol{W}$ er stamvektorfelt for $\boldsymbol{V}$.

d)

Da den åbne flade angivet i opgaven forestiller en paraboloide, kan denne parametriseres som en halv parabel roteret om z-aksen. Den halve parabel vil være givet således:

$s(u) = (u, 0, 4 - u^2)$ hvor $u \in [0; 2]$

u går fra 0 til 2, da z skal være over 0. Denne kan da roteres om z-aksen, hvilket giver:

$r(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 4 - u^2)$ hvor $u \in [0; 2]$ og $v \in [0; 2\pi]$

Normalvektoren kan da bestemmes:

```
> r := (u,v) -> <u*cos(v), u*sin(v), 4-u^2>
```

$$r := (u, v) \mapsto \langle u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 4 - u^2 \rangle \quad \textbf{(3.4.1)}$$

```
> VectorCalculus[CrossProduct](diff(r(u,v),u) , diff(r(u,v),v))
```

$$(2 u^2 \cos(v)) e_x + (2 u^2 \sin(v)) e_y + (\cos(v)^2 u + \sin(v)^2 u) e_z \quad \textbf{(3.4.2)}$$

```
> simplify(%)
```

$$(2 u^2 \cos(v)) e_x + (2 u^2 \sin(v)) e_y + (u) e_z \quad \textbf{(3.4.3)}$$

```
> Nf := <2*u^2*cos(v), 2*u^2*sin(v), u>
```

$$Nf := \begin{bmatrix} 2 u^2 \cos(v) \\ 2 u^2 \sin(v) \\ u \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.4.4)}$$

Disse normalvektorer vil netop følge højrekonventionen, da de peger udad og vektorfeltet vil passere ud gennem fladen i stedet for ind gennem fladen. Da kan fluxen gennem fladen F bestemmes som det tangentielle kurveintegral:

```
> V := <2*x+3*y, 2*y+3*x, -4*z>
```

$$V := \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 2y + 3x \\ -4z \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.4.5)}$$

```
> subs({x=u*cos(v), y=u*sin(v), z=4-u^2}, V)
```

$$\begin{bmatrix} 2 u \cos(v) + 3 u \sin(v) \\ 2 u \sin(v) + 3 u \cos(v) \\ 4 u^2 - 16 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.4.6)}$$

```
> integrand := Nf.%
```

$$integrand := 2 \left(u^2 \cos(v)\right) (2 u \cos(v) + 3 u \sin(v)) + 2 \left(\overline{u^2 \sin(v)}\right) (2 u \sin(v) + 3 u \cos(v)) + \overline{u} (4 u^2 - 16) \quad \textbf{(3.4.7)}$$

```
> int(integrand, u=0..2, v=0..2*Pi)
```

$$0 \quad \textbf{(3.4.8)}$$

Da vil fluxen af vektorfeltet $\boldsymbol{V}$ gennem fladen F være lig 0.

Opgave 4

a)

Kuglefladen kan blot forstås som en punktmængde, der da kan indsættes i flowkurven for vektorfeltet - førstekoordinatet i stedet for x_0, andenkoordinatet i stedet for y_0 og tredjekoordinatet i stedet for z_0. Da fås følgende parameterfremstilling for F_t:

```
> r := t -> <exp(t)*(x__0*cos(t) - z__0*sin(t)) , y__0*exp(-t) ,
  exp(t)*(x__0*sin(t) + z__0*cos(t))>:
  r(t)
```

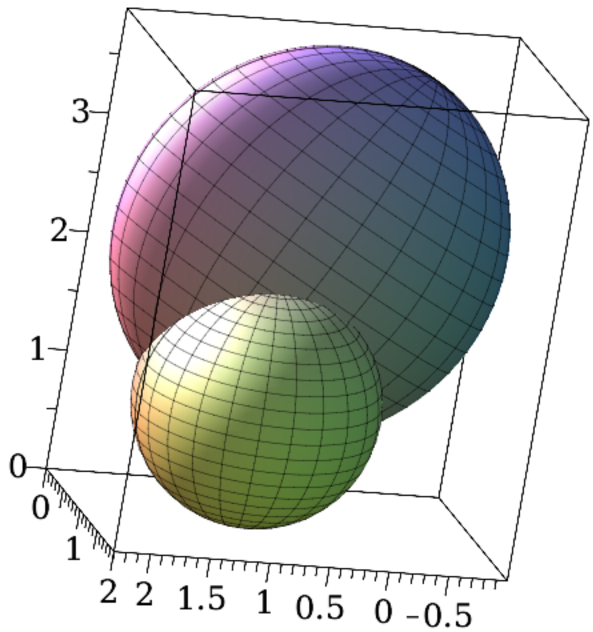
$$\begin{bmatrix} e^{t}\left(x_0 \cos(t) - z_0 \sin(t)\right) \\ y_0\, e^{-t} \\ e^{t}\left(x_0 \sin(t) + z_0 \cos(t)\right) \end{bmatrix} \tag{4.1.1}$$

```
> F := t -> subs({x__0 = sin(u)*cos(v)+1, y__0=sin(u)*sin(v)+1,
  z__0=cos(u)+1}, r(t)):
  F(t)
```

$$\begin{bmatrix} e^{t}\left(\left(\sin(u)\cos(v)+1\right)\cos(t) - \left(\cos(u)+1\right)\sin(t)\right) \\ \left(\sin(u)\sin(v)+1\right) e^{-t} \\ e^{t}\left(\left(\sin(u)\cos(v)+1\right)\sin(t) + \left(\cos(u)+1\right)\cos(t)\right) \end{bmatrix} \tag{4.1.2}$$

Dernæst kan disse plottes med $t = 0$ og $t = \frac{1}{2}$:

```
> with(plots):
> F0plot := plot3d(F(0), u=0..Pi, v=0..2*Pi):
> Fhalfplot := plot3d(F(1/2), u=0..Pi, v=0..2*Pi):
> display(F0plot, Fhalfplot, scaling=constrained)
```



b)

For at bestemme K_t kan parameterfremstillingen for den massive kugle indsættes i vektorfeltetes flowkurve. Dette giver følgende:

```
> r := <exp(t)*(x__0*cos(t)-z__0*sin(t)), y__0*exp(-t), exp(t)*(x__0*sin(t)+z__0*cos(t))>
```

$$r := \begin{bmatrix} e^{t}\left(x_0 \cos(t) - z_0 \sin(t)\right) \\ y_0\, e^{-t} \\ e^{t}\left(x_0 \sin(t) + z_0 \cos(t)\right) \end{bmatrix} \tag{4.2.1}$$

```
> Kt := subs({x__0=w*sin(u)*cos(v)+c__1, y__0=w*sin(u)*sin(v)+c__2, z__0=w*cos(u)+c__3},r)
```

$$Kt := \begin{bmatrix} e^{t}\left(\left(w \sin(u) \cos(v) + c_1\right) \cos(t) - \left(w \cos(u) + c_3\right) \sin(t)\right) \\ \left(w \sin(u) \sin(v) + c_2\right) e^{-t} \\ e^{t}\left(\left(w \sin(u) \cos(v) + c_1\right) \sin(t) + \left(w \cos(u) + c_3\right) \cos(t)\right) \end{bmatrix} \tag{4.2.2}$$

For at bestemme volumenet af kuglen, kan integralet

$\int_{Kt} 1\, d\mu$ løses. Først findes Jacobi-funktionen:

```
> M := <diff(Kt,u) | diff(Kt,v) | diff(Kt,w)>
```

$$M := \left[\left[\mathrm{e}^{t}\left(w\cos(u)\cos(v)\cos(t)+w\sin(u)\sin(t)\right),\right.\right.$$
$$-\mathrm{e}^{t}w\sin(u)\sin(v)\cos(t),\ \mathrm{e}^{t}\left(\sin(u)\cos(v)\cos(t)-\cos(u)\sin(t)\right)\Big],$$
$$\left[w\cos(u)\sin(v)\,\mathrm{e}^{-t},\ w\sin(u)\cos(v)\,\mathrm{e}^{-t},\ \sin(u)\sin(v)\,\mathrm{e}^{-t}\right],$$
$$\Big[\mathrm{e}^{t}\left(w\cos(u)\cos(v)\sin(t)-w\sin(u)\cos(t)\right),\ -\mathrm{e}^{t}w\sin(u)\sin(v)\sin(t),$$
$$\left.\left.\mathrm{e}^{t}\left(\sin(u)\cos(v)\sin(t)+\cos(u)\cos(t)\right)\right]\right] \quad \textbf{(4.2.3)}$$

```
> LinearAlgebra[Determinant](M)
```

$$\mathrm{e}^{-t}\sin(u)^3\cos(v)^2\cos(t)^2\left(\mathrm{e}^{t}\right)^2w^2+\mathrm{e}^{-t}\sin(u)^3\cos(v)^2\sin(t)^2\left(\mathrm{e}^{t}\right)^2w^2$$
$$+\mathrm{e}^{-t}\sin(u)^3\cos(t)^2\sin(v)^2\left(\mathrm{e}^{t}\right)^2w^2+\mathrm{e}^{-t}\sin(u)^3\sin(v)^2\sin(t)^2\left(\mathrm{e}^{t}\right)^2w^2$$
$$+\mathrm{e}^{-t}\sin(u)\cos(v)^2\cos(t)^2\cos(u)^2\left(\mathrm{e}^{t}\right)^2w^2$$
$$+\mathrm{e}^{-t}\sin(u)\cos(v)^2\cos(u)^2\sin(t)^2\left(\mathrm{e}^{t}\right)^2w^2$$
$$+\mathrm{e}^{-t}\sin(u)\cos(t)^2\cos(u)^2\sin(v)^2\left(\mathrm{e}^{t}\right)^2w^2$$
$$+\mathrm{e}^{-t}\sin(u)\cos(u)^2\sin(v)^2\sin(t)^2\left(\mathrm{e}^{t}\right)^2w^2 \quad \textbf{(4.2.4)}$$

```
> jacobi := simplify(%)
```

$$jacobi := w^2\,\mathrm{e}^{t}\sin(u) \quad \textbf{(4.2.5)}$$

Til sidst løses integralet $\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} jacobi\, du\, dv\, dw$:

```
> int(%, u=0..Pi, v=0..2*Pi, w=0..a)
```

$$\frac{4\,\mathrm{e}^{t}\pi a^3}{3} \quad \textbf{(4.2.6)}$$

Da kan det ses, at volumnet af kuglen afhænger af radius og tiden, men ikke af c_1, c_2 og c_3.

Fra Gauss' sætning (28-90, eNote 28) er det givet, at ændringen i volumen af et rumligt område Ω_r til en bestemt tid er givet ved integralet $\int_{\Omega_r} Div(v)d\mu$. Ser man på udtrykket for volumen **(4.2.6)** kan man se, at den er lig sin egen afledede i forhold til tiden t. Da må divergensen være lig 1, da integralet af divergensen over det rumlige område da vil være det samme som volumenet af kuglen - integralet af Jacobi-funktionen med hensyn til $d\mu$.