Hjemmeopgavesæt 1

Daniel Brasholt s214675

September 2021

Opgave 1

Et reelt polynomium P er givet ved

$$P(z) = \left(z^2 - 2z + \frac{5}{4}\right)(4z^4 - 12z^3 + 5z^2 + 11z - 10), z \in \mathbb{C}$$

a)

Udvider man udtrykket for $P(z)$ ved at gange paranteserne ud, vil den maksimale eksponent af z være z^6. Dette fås ved $z^2 \cdot 4z^4$. Altså må polynomiet P være af 6. grad.

b)

Ser man på figuren for udsnittet af grafen for P's restriktion til realaksen, kan man gætte på to rødder til P, nemlig -1 og 2. Disse to efterprøves:

$$\begin{aligned} P(-1) &= \left((-1)^2 - 2 \cdot (-1) + \frac{5}{4}\right)\left(4 \cdot (-1)^4 - 12 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 11 \cdot (-1) - 10\right) \\ &= \left(1 + 2 + \frac{5}{4}\right)(4 + 12 + 5 - 11 - 10) = \left(3 + \frac{5}{4}\right) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2) &= \left(2^2 - 2 \cdot 2 + \frac{5}{4}\right)\left(4 \cdot 2^4 - 12 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 10\right) \\ &= \left(4 - 4 + \frac{5}{4}\right)(4 \cdot 16 - 12 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 22 - 10) \\ &= \frac{5}{4} \cdot (64 - 96 + 20 + 22 - 10) = \frac{5}{4} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Altså må både -1 og 2 være rødder i P.
Ifølge Nedstigningssætningen (eNote 2 Hjælpesætning 2.6), kan et polynomie af formen

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{1}$$

skrives som

$$P(z) = (z - z_0) \cdot Q(z) \tag{2}$$

hvor $Q(z)$ er et polynomium af $(n-1)$'te grad og z_0 er rod i $P(z)$. $Q(z)$ vil have koefficienterne

$$\begin{gathered} b_{n-1} = a_n \\ b_k = a_{k+1} + b_{k+1} \cdot z_0 \quad for\ k = n-2, ..., 0 \end{gathered} \tag{3}$$

$P(z)$ (1) er opbygget af to af polynomierne af formen fra (1). De to fundne rødder, -1 og 2, er rødder i polynomiet $4z^4 - 12z^3 + 5z^2 - 11z - 10$. Nedstigningnssætningen kan anvendes på den del af polynomiet med en af disse rødder. Ved brug af formlen fra (3) og roden $z_0 = 2$ fås

$$\begin{array}{ll} a_4 = 4 & b_3 = 4 \\ a_3 = -12 & b_2 = -12 + 2 \cdot 4 = -4 \\ a_2 = 5 & b_1 = 5 + 2 \cdot (-4) = -3 \\ a_1 = 11 & b_0 = 11 + 2 \cdot (-3) = 5 \end{array}$$

Med (2) giver dette følgende forskrifter for $Q(z)$ og $P(z)$:

$$
\begin{aligned}
Q(z) &= 4z^3 - 4z^2 - 3z + 5 \\
P(z) &= \left(z^2 - 2z + \frac{5}{4}\right)(z-2) \cdot Q(z) \\
&= \left(z^2 - 2z + \frac{5}{4}\right)(4z^3 - 4z^2 - 3z + 5)(z-2)
\end{aligned}
$$

Det kan ses, at -1 stadig er rod i polynomiet $P(z)$:

$$
\begin{aligned}
P(-1) &= \left((-1)^2 - 2\cdot(-1) + \frac{5}{4}\right)\left(4\cdot(-1)^3 - 4\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1) + 5\right)\left(-1-2\right) \\
&= \left(1 + 2 + \frac{5}{4}\right)\left(-4 - 4 + 3 + 5\right)\left(-3\right) = 0
\end{aligned}
$$

Altså kan nedstigningssætningen igen anvendes, denne gang med roden -1, hvor a_3, a_2 og a_1 er de tidligere b_3, b_2 og b_1:

$$
\begin{aligned}
a_3 &= 4 & b_2 &= 4 \\
a_2 &= -4 & b_1 &= -4 + (-1)\cdot 4 = -8 \\
a_1 &= -3 & b_0 &= -3 + (-1)\cdot(-8) = 5
\end{aligned}
$$

Dette giver forskriften for $P(z)$:

$$
P(z) = \left(z^2 - 2x + \frac{5}{4}\right)(4z^2 - 8z + 5)(z-2)(z+1)
$$

Det kan nu ses, at polynomiet P indeholder to andengradspolynomier, der udover en faktor 4 er ens. $P(z)$ kan altså skrives således:

$$
P(z) = 4 \cdot \left(z^2 - 2x + \frac{5}{4}\right)^2 (z-2)(z+1)
$$

Rødderne i andengradspolynomiet kan nu findes ved løsningsformlen for en andengradsligning:

$$
az^2 + bz + c = 0
$$

$$
z = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2\cdot a} \quad , \quad d = b^2 - 4\cdot a\cdot c
$$

Værdierne fra udtrykket af $P(z)$ indsættes i løsningsformlen, hvilket giver værdierne for z:

$$
d = (-2)^2 - 4\cdot 1 \cdot \frac{5}{4} = -1
$$

$$
z = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-1}}{2\cdot 1} = 1 \pm \frac{1}{2}i
$$

Dette giver den fuldstændigt faktoriserede form af $P(z)$:

$$
\begin{aligned}
P(z) &= 4 \cdot \left((1 - \frac{1}{2}i)\cdot(1 + \frac{1}{2}i)\right)^2 (z-2)(z+1) \\
&= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}i\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}i\right)^2 (z-2)(z+1)
\end{aligned}
$$

Fra dette udtryk kan en tabel over polynomiet P's rødder og deres multiplicitet opstilles:

Rod	Multiplicitet
$1 + \frac{1}{2}i$	2
$1 - \frac{1}{2}i$	2
2	1
-1	1

Her kan det også ses, at hvis et tal, z_0, er rod i et polynomie, er $\overline{z_0}$ også rod i polynomiet.

Opgave 2

a)

De tre komplekse tal er givet ved polære koordinater således:

$$z_1 = \left(1, -\frac{7\pi}{4}\right),\ z_2 = \left(8, 7\pi\right),\ z_3 = \left(2, \frac{7\pi}{6}\right) \tag{4}$$

Et komplekst tals hovedargument er defineret ved det argument til tallet, der ligger i intervallet $]-\pi;\pi]$. Da argumentet er vinklen mellem punktet og realaksen, må et argument a være lig med $a + 2\cdot\pi\cdot p$, hvor $p \in \mathbb{Z}$. Ser man på z_1, kan argumentet omskrives således:

$$arg(z_1) = -\frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\cdot\pi\cdot(-1) \Rightarrow Arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$$

Samme udregning kan laves på z_2 og z_3:

$$arg(z_2) = 7\pi = \pi + 2\cdot\pi\cdot 3 \Rightarrow Arg(z_2) = \pi$$

$$arg(z_3) = \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2\cdot\pi \Rightarrow Arg(z_3) = \frac{-5\pi}{6}$$

Et komplekst tal med de polære koordinater $(|z|, Arg(z))$ har den eksponentielle form

$$|z|e^{i\cdot Arg(z)}$$

Anvendes Eulers formel (eNote 1 sætning 1.46), kan den eksponentielle form omskrives til

$$|z|\cdot(cos(Arg(z)) + i\cdot sin(Arg(z))) \tag{5}$$

For z_1 indsættes $|z_1|$ fra (4) samt $Arg(z_1)$ i formlen (5), hvilket giver den rektangulære form:

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} = 1\cdot\left(cos(\frac{\pi}{4}) + i\cdot sin(\frac{\pi}{4})\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Lignende udregninger kan laves for z_2 og z_3:

$$z_2 = 8e^{\pi i} = 8\cdot\left(cos(\pi) + i\cdot sin(\pi)\right) = 8\cdot(-1 + i\cdot 0) = -8$$

$$z_3 = 2e^{-\frac{5\pi}{6}i} = 2\cdot\left(cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\cdot sin(-\frac{5\pi}{6})\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

b)

For et komplekst tal, $z = a + ib$, gælder det, at

$$cos(arg(z)) = \frac{a}{|z|}$$
$$sin(arg(z)) = \frac{b}{|z|}$$

Disse udregninger udføres med A:

$$|A| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4$$
$$cos(arg(A)) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow arg(A) = \frac{\pi}{3} \vee arg(A) = -\frac{\pi}{3}$$
$$sin(arg(A)) = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow arg(A) = -\frac{\pi}{3} \vee arg(A) = -\frac{2\pi}{3}$$

Da må $arg(A) = -\frac{\pi}{3}$, da det er den fælles løsning. A kan da skrives på eksponentiel form således:

$$A = 4e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

Ligeledes kan disse udregninger udføres for at finde den eksponentielle form af B:

$$|B| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$cos(arg(B)) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow arg(B) = \frac{\pi}{6} \vee arg(B) = -\frac{\pi}{6}$$
$$sin(arg(B)) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow v = \frac{\pi}{6} \vee v = \frac{5\pi}{6}$$

Her er den fælles løsning $arg(B) = \frac{\pi}{6}$. Dermed kan B opstilles på eksponentiel form således:

$$B = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$$

For at finde den eksponentielle form af C anvendes de eksponentielle udtryk for A og B:

$$C = \frac{A^6}{B^8} = \frac{\left(4e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^6}{\left(2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^8} = \frac{4^6 e^{6\cdot\frac{-\pi}{3}i}}{2^8\cdot(\sqrt{2})^8\cdot e^{8\cdot\frac{\pi}{6}i}} = \frac{(2^2)^6\cdot e^{-\frac{6\pi}{3}i}}{2^{12}\cdot e^{\frac{8\pi}{6}i}}$$
$$= \frac{2^{12}\cdot e^{-\frac{6\pi}{3}i}}{2^{12}\cdot e^{\frac{4\pi}{3}i}} = \frac{e^{-\frac{6\pi}{3}i}}{e^{\frac{4\pi}{3}i}} = e^{-\frac{6\pi}{3}i}\cdot e^{-\frac{4\pi}{3}i} = e^{-\frac{10\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

Opgave 3

a)

Givet et komplekst tal, w, med formen $w = |w|e^{iv}$ i en binom ligning af formen $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$, har ligningen n løsninger, som kan findes ved formlen

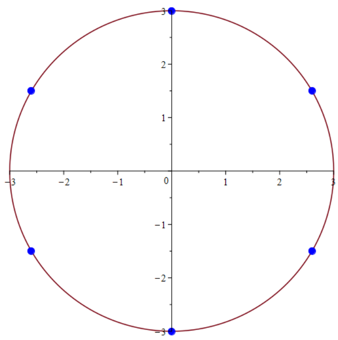
$$z = \sqrt[n]{|w|}\cdot e^{i(\frac{v}{n}+p\frac{2\pi}{n})},\ p = 0,1,...,n-1$$

(eNote 1. sætning 1.52). I dette tilfælde er $w = -729 = 729e^{\pi i}$ og $n = 6$. Dermed bliver løsningerne

$$z = \sqrt[6]{729}\cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+p\frac{2\pi}{6})} = 3\cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+p\frac{2\pi}{6})},\ p = 0,1,2,3,4,5$$

$$z_0 = 3\cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+0\cdot\frac{2\pi}{6})} = 3e^{\frac{\pi}{6}i}$$
$$z_1 = 3\cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+1\cdot\frac{2\pi}{6})} = 3e^{\frac{3\pi}{6}i} = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$$
$$z_2 = 3\cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+2\cdot\frac{2\pi}{6})} = 3e^{\frac{5\pi}{6}i}$$
$$z_3 = 3\cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+3\cdot\frac{2\pi}{6})} = 3e^{\frac{7\pi}{6}i} = 3e^{-\frac{5\pi}{6}i}$$
$$z_4 = 3\cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+4\cdot\frac{2\pi}{6})} = 3e^{\frac{9\pi}{6}i} = 3e^{-\frac{\pi}{2}i}$$
$$z_5 = 3\cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+5\cdot\frac{2\pi}{6})} = 3e^{\frac{11\pi}{6}i} = 3e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

Disse kan illustreres på det komplekse talplan således:



Figur 1: Løsningerne afbilledet på den komplekse talplan sammen med cirkel.

Det kan ses på figur 1, at løsningerne ligger på en cirkel i den komplekse talplan med centrum i 0 og $r = 3$.

b)

Først opstilles ligningen således:

$$e^z - ie^\pi = 0 \Leftrightarrow e^z = ie^\pi$$

Dernæst tages den naturlige logaritme af hver side:

$$\ln(e^z) = z = \ln(ie^\pi) = \ln(i) + \ln(e^\pi) = \ln(i) + \pi$$

Da $\ln(x)$ er den modsatte funktion af e^x, må $\ln(i)$ være lig det tal, man skal opløfte e i, for at det giver i. Dette må være

$$i\big(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\big)\ , \quad p \in \mathbb{Z}$$

Indsættes dette i ovenstående udtryk fås

$$z = \pi + i\big(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\big)\ , \quad p \in \mathbb{Z}$$

Da absolutværdien af z skal være mindre end 2π, må følgende gælde:

$$\sqrt{\pi^2 + \big(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\big)^2} < 2\pi \Leftrightarrow \pi^2 + \big(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\big)^2 < 4\pi^2$$
$$\Leftrightarrow \big(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\big)^2 < 3\pi^2$$

Denne betingelse er kun sand, hvis $p = -1$ eller $p = 0$. Da må der være 2 løsninger til ligningen, nemlig

$$z_0 = \pi + i\big(\frac{\pi}{2} - 2\pi\big) = \pi - \frac{3\pi}{2}i$$
$$z_1 = \pi + i\big(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi\big) = \pi + \frac{\pi}{2}i$$

Opgave 4

a)

Sætter man $\cosh(v) = f(v)$ og $\sinh(v) = g(v)$ får man følgende:

$$\cosh(v) = f(v) = \frac{e^v + e^{-v}}{2} = \frac{1}{2}\Big(e^v + e^{-v}\Big)$$

Da $(e^{kx})' = ke^x$ kan $\cosh(v)$ differentieres således:

$$f'(v) = \frac{1}{2}\Big(e^v - e^{-v}\Big) = \frac{e^v - e^{-v}}{2} = \sinh(v) = g(v)$$

Ligeledes kan $g(v)$ differentieres:

$$g(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{2} = \frac{1}{2}\Big(e^v - e^{-v}\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$g'(v) = \frac{1}{2}\Big(e^v - (-e^{-v})\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^v + e^{-v}\Big) = \frac{e^v + e^{-v}}{2} = f(v)$$

Dernæst kan begyndelsesværdierne $f(0)$ og $g(0)$ udregnes, hvilket giver

$$f(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$
$$g(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Dermed er det vist, at cosh og sinh opfylder det minimalistiske differentialligningssystem:

$$f'(v) = g(v)$$
$$g'(v) = f(v)$$
$$f(0) = 1$$
$$g(0) = 0$$

b)

Først bestememes det, at $-\cosh(v) + i\sinh(v)$ og $\cosh(v) + i\sinh(v)$ for ethvert $v \in \mathbb{R}$ ligger på enhedshyperblen med ligningen $x^2 - y^2 = 1$. Dette gøres ved at indsætte udtrykkene i ligningen for enhedshyperblen, hvor $\cosh(x)$ svarer til x og $\sinh(x)$ til y:

$$
\begin{aligned}
x &= \cosh(v) \\
y &= \sinh(v) \\
x^2 - y^2 = \cosh^2(v) - \sinh^2(v) &= \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2v} + e^{-2v} + 2e^v e^{-v}}{4} - \frac{e^{2v} + e^{-2v} - 2e^v e^{-v}}{4} = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}
$$

Ligeledes kan udregningen for $-\cosh(v) + i\sinh(v)$ laves:

$$
\begin{aligned}
x &= -\cosh(v) \\
y &= \sinh(v) \\
x^2 - y^2(-\cosh)^2(v) - \sinh^2(v) &= \left(\frac{-e^v - e^{-v}}{-2}\right)^2 - \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2v} + e^{-2v} + 2e^v e^{-v}}{4} - \frac{e^{2v} + e^{-2v} - 2e^v e^{-v}}{4} = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}
$$

Da må både $-\cosh(v) + i\sinh(v)$ og $\cosh(v) + i\sinh(v)$ ligge på enhedshyperblen.
For at bestemme hvilken gren af enhedshyperblen, de to komplekse tal ligger på, indsættes 0 i begge udtryk:

$$
\begin{aligned}
\cosh(0) + i\sinh(0) &= \frac{e^0 + e^0}{2} + i\frac{e^0 - e^0}{2} = 1 \\
-\cosh(0) + i\sinh(0) &= -\frac{e^0 + e^0}{2} + i\frac{e^0 - e^0}{2} = -1
\end{aligned}
$$

Da $\cosh(0) + i\sinh(0) = 1$, må denne ligge på højre gren af enhedshyperblen, da denne gren skærer x-aksen i $x = 1$. Ligeledes må $-\cosh(0) + i\sinh(0)$ ligge på venstre gren, da denne skærer x-aksen ved $x = -1$.

c)

Det approksimerende polynomium af n'te grad for funktionen $f(x)$ med udviklingspunkt x_0 er

$$
P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n
$$

Differentierer man $f(x)$ 1 og 2 gange fås

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{10}\cosh(x^2 - x) \cdot (2x - 1) \\
f''(x) &= \frac{1}{10}(\sinh(x^2 - x)(2x - 1)^2) + \frac{1}{10}\cos(x^2 - x) \cdot 2 \\
&= \frac{1}{10}\sinh(x^2 - x)(2x - 1)^2 + \frac{1}{5}\cos(x^2 - x)
\end{aligned}
$$

Dernæst indsættes $x_0 = 0$ i $f(x), f'(x)$ og $f''(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{10}\sinh(0^2 - 0) = 0 \\
f'(0) &= \frac{1}{10}\cosh(0^2 - 0) \cdot (2 \cdot 0 - 1) = \frac{1}{10} \cdot (-1) = -\frac{1}{10} \\
f''(0) &= \frac{1}{10}(\sinh(0^2 - 0)(2 \cdot 0 - 1)^2) + \frac{1}{5}\cosh(0^2 - 0) = \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

Disse værdier anvendes til at bestemme det approksimerende polynomium, $P_2(x)$ med udviklingspunktet $x_0 = 0$:

$$P_{2,0}(x) = 0 - \frac{1}{10}(x-0) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{5}(x-0)^2 = -\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}x^2$$

For at finde $P_3(x)$, kan man blot lægge $\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3$ til $P_2(x)$. Først findes $f^{(3)}(x)$:

$$\begin{aligned}
f^{(3)} = (f''(x))' &= \Big(\frac{1}{10}\sinh(x^2-x)(2x-1)^2 + \frac{1}{5}\cosh(x^2-x)\Big)' \\
&= \frac{1}{10}\Big(\sinh(x^2-x)(2x-1)^2\Big)' + \frac{1}{5}\sinh(x^2-x)(2x-1) \\
&= \frac{1}{10}\Big(\cosh(x^2-x)(2x-1)^3 + 4\sinh(x^2-x)(2x-1)\Big) + \frac{1}{5}\sinh(x^2-x)(2x-1) \\
&= \frac{\cosh(x^2-x)(2x-1)^3}{10} + \frac{2\sinh(x^2-x)(2x-1)}{5} + \frac{\sinh(x^2-x)(2x-1)}{5} \\
&= \frac{\cosh(x^2-x)(2x-1)^3}{10} + \frac{3\sinh(x^2-x)(2x-1)}{5}
\end{aligned}$$

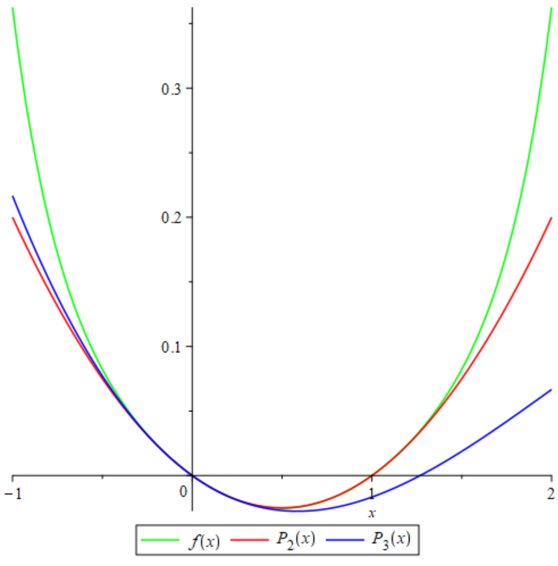
Dernæst kan $f^{(3)}(0)$ findes:

$$\begin{aligned}
f^{(3)}(0) &= \frac{\cosh(0^2-0)(2\cdot 0-1)^3}{10} + \frac{3\sinh(0^2-0)(2\cdot 0-1)}{5} \\
&= \frac{1\cdot(-1)}{10} + \frac{3\cdot 0\cdot(-1)}{5} = -\frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Til sidst kan $P_3(x)$ bestemmes:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= P_2(x) + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 \\
&= -\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 \\
&= -\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{6}\cdot\Big(-\frac{1}{10}\Big)x^3 = -\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{60}x^3
\end{aligned}$$

$f(x), P_2(x)$ og $P_3(x)$ er plottet således:



Figur 2: $f(x), P_2(x)$ og $P_3(x)$ plottet i samme koordinatsystem.