Hjemmeopgavesæt 6

Daniel Brasholt s214675

Marts 2022

Opgave 3

a)

For at lave et plot af Rundetårns ydre fremtoning, skal 4 parametriseringer laves; to omdrejningscylindre, en cirkelskive og en halvkugle. Den første omdrejninscylinder dækker over hovedtårnet og den anden over observatoriets underdel. Omdrejningscylindre med radius r og højde h har følgende parameterfremstilling:

$$r(\theta, h) = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \geq \theta \geq 2\pi \\ 0 \geq z \geq h \end{matrix}$$

På `rundetaarn.dk` står der, at hovedtårnet er $34,8m$ fra gade til platform. Derudover er det givet på siden, at sneglegangens radius er $7.68m$. Eftersom en bestemt radius for hele tårnet ikke er opgivet, antages det blot, at dette også, at dette mål gælder for tårnet. Da må hovedtårnet kunne parametriseres således:

$$hovedtårn(\theta, h) = \begin{bmatrix} 7.68 \cdot \cos(\theta) \\ 7.68 \cdot \sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \geq \theta \geq 2\pi \\ 0 \geq z \geq 34.8 \end{matrix}$$

Den nedre del af observatoriet må også kunne parametriseres på samme form. På hjemmesiden er det opgivet, at observatoriet i alt er 7 meter højt. Da der på toppen af observatoriet er en halvkugle med samme radius som observatoriet selv ($3m$), må observatoriets cylindriske del være 4 meter høj. Denne cylinder ligger ovenpå platformen, altså $34.8m$ over gaden; dette skal da lægges til observatoriets højde. Dette giver:

$$observatorie(\theta, h) = \begin{bmatrix} 3 \cdot \cos(\theta) \\ 3 \cdot \sin(\theta) \\ 34.8 + z \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \geq \theta \geq 2\pi \\ 0 \geq z \geq 4 \end{matrix}$$

Parametriseringen af en kugleskal med radius a ser således ud:

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} a \cdot \sin(u)\cos(u) \\ a \cdot \sin(u)\sin(v) \\ a\cos(u) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \geq u \geq 2\pi \\ 0 \geq v \geq 2\pi \end{matrix}$$

Dog er kugleskallen på toppen af observatoriet blot en halvkugle med radius 3. Derudover er den løftet $34.8m + 4m = 38.8m$ op over gaden. Da skal z-koordinatet tillægges 38.8. Derudover skal z-koordinatet ændres således, at $\cos(u)$ ikke bliver negativt, da man så får den øvre halvkugle. Derfor ser fremstillingen således ud:

$$halvkugle(u, v) = \begin{bmatrix} 3 \cdot \sin(u)\cos(u) \\ 3 \cdot \sin(u)\sin(v) \\ 3\cos(u) + 38.8 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \geq u \geq \frac{\pi}{2} \\ 0 \geq v \geq 2\pi \end{matrix}$$

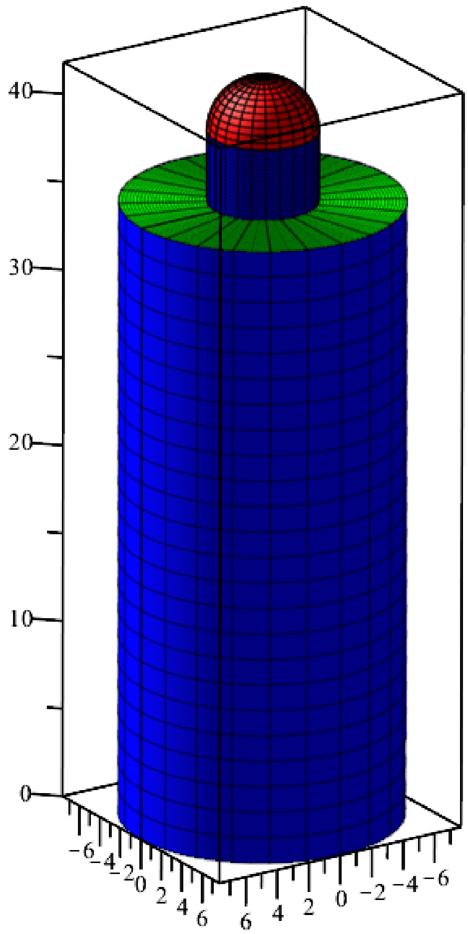
Til sidst skal platformen parametriseres. En cirkelskive med radius R og højde over grundflade h kan parametriseres således:

$$r(a,\theta) = \begin{bmatrix} a \cdot \cos(\theta) \\ a \cdot \sin(\theta) \\ h \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \geq \theta \geq 2\pi \\ 0 \geq a \geq R \end{matrix}$$

Dog er platformen ikke helt udfyldt, da observatoriet står i midten. Derfor skal a ikke gå fra 0 til R, men fra 3 (observatoriets radius) til 7.68. Dette giver den færdige parametrisering:

$$platform(a,\theta) = \begin{bmatrix} a \cdot \cos(\theta) \\ a \cdot \sin(\theta) \\ 34.8 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \geq \theta \geq 2\pi \\ 3 \geq a \geq 7.68 \end{matrix}$$

Disse 4 kan da plottes i Maple (se bilag), hvilket giver følgende:



Figur 1: Maple-plot af Rundetaarn

b)

Hvis Sneglegangen er en regulær flade, der opfylder, at snitkurverne mellem fladerne og en vilkårlig halvplan, som udgår fra tårnets omdrejninsakse, er vandrette linjestykker, må gangen kunne parametriseres lidt på samme måde som platformen; denne gang skal fladen dog hæves i takt med, at gangen drejer rundt. Ifølge hjemmesiden når Sneglegangen 7.3 omdrejninger inden den når toppen. Den må altså på $34.8m$ nå at dreje 7.3 omgange. Dette må betyde, at $a \cdot \cos(\phi)$ i parametriseringen må erstattes med:

$$a \cdot \cos(h \cdot \frac{7.3}{34.8} \cdot \pi \cdot 2)$$

Og ligeledes med $a \cdot \sin(\phi)$. Det er desuden opgivet, at sneglegangen fra centrum til kernens ydervæg er $1.95m$. Da må a i parametriseringen gå fra 1.95 til gangens radius, 6.10. Da bliver den færdige parametrisering for Sneglegangen:

$$sneglegang(a,h) = \begin{bmatrix} a\cos(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ a\sin(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ h \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 1.95 \geq a \geq 6.10 \\ 0 \geq h \geq 34.8 \end{matrix}$$

Kaldes denne flade F, kan arealet findes ved at bestemme integralet:

$$\int_F 1 d\mu$$

For at gøre dette, bestemmes Jacobi-funktionen, som er givet ved

$$|r'_a(a,h) \times r'_h(a,h)|$$

Med Maple (se bilag) bestemmes dette til:

$$r'_a(a,h) = \begin{bmatrix} \cos(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ \sin(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r'_h(a,h) = \begin{bmatrix} -(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi)\sin(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ (h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi)\cos(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r'_a(a,h) \times r'_h(a,h) = \begin{bmatrix} \sin(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ -\cos(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ (h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi)\cos(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi)^2 a + (h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi)\sin(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi)^2 a \end{bmatrix}$$

Da Jacobifunktionen er uoverskuelig, er denne blot anført i Maple-bilaget. Alt i alt bestemmes arealet til:

$$\int_0^{34.8} \int_{1.95}^{6.1} Jacobi(a,h) = 780.9955005 \, \mathrm{d}a \, \mathrm{d}h$$
$$Areal \approx 781m^2$$

c)

Længden af midten af Sneglegangen må være kurveintegralet med tæthedsfunktionen 1 af den i opgave 3.b bestemte kurve for gangen, hvor parameteren a fastholdes midt mellem grænserne; altså

$$a = \frac{1.95 + 6.1}{2} = 4.025$$

Dette giver kurven:

$$r(h) = \begin{bmatrix} 4.025\cos(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ 4.025\sin(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ h \end{bmatrix} \qquad 0 \geq h \geq 34.8$$

Den til $r(h)$ tilhørende Jacobi-funktion findes ved længden af $r'(h)$, altså:

$$
\begin{aligned}
jacobi(h) = |r'(h)| &= | \begin{bmatrix} 4.025 \cdot (\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \cdot (-\sin(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi)) \\ 4.025 \cdot (\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \cdot \cos(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ 1 \end{bmatrix} | \\
&\approx | \begin{bmatrix} -5.305\sin(1.318h) \\ 5.305\cos(1.318h) \\ 1 \end{bmatrix} | \\
&= \sqrt{(-5.305\sin(1.318h))^2 + (5.305\cos(1.318h))^2 + 1} \\
&= \sqrt{28.143\sin^2(1.318h) + 28.143\cos^2(1.318h) + 1} \\
&= \sqrt{28.143(\sin^2(1.318h) + \cos^2(1.318h)) + 1} \\
&= \sqrt{28.143 + 1} = \sqrt{29.143}
\end{aligned}
$$

Da vil længden af midten af Senglegangen blot være:

$$\int_0^{34.8} \sqrt{29.143}\mathrm{d}h = \sqrt{29.143} \cdot 34.8 = 187.87$$

(Obs: med Maple fås værdien af dette integral til næsten det samme; fejlen lavet med afrundingerne er mindre end én centimeter, hvilket fremgår af bilagene). Da vil længden af midten af Sneglegangen - og dermed turen ned - være ca. $188m$. Dette ligger godt indenfor intervallet, som hjemmesiden opstiller, nemlig mellem $93.5m$ og $281m$.

d)

Når tykkelsen aftager proportionelt med afstanden fra grundniveau, må denne kunne beskrives som en funktion af typen

$$f(h) = ah + b$$

Her er b naturligvis 0.5, da dette er startværdien. For at finde a, løses ligningen:

$$f(34.8) = 34.8a + 0.5 = 0.4 \Leftrightarrow a = -\frac{0.1}{34.8}$$

Denne funktion skal da lægges til z-koordinatet i parameterfremstillingen for sneglegangen, mens den ganges med en parameter, w, som går fra 0 til 1. Altså:

$$r(a,h,w) = \begin{bmatrix} a\cos(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ a\sin(h\frac{7.3}{34.8} \cdot 2\pi) \\ h + w(-\frac{0.1}{34.8}h + 0.5) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 1.95 \geq a \geq 6.10 \\ 0 \geq h \geq 34.8 \\ 0 \geq w \geq 1 \end{matrix}$$

For at finde massen af dette, findes først rumfanget af Sneglegangen. Dette gøres med rumintegralet $\int_R 1d\mu$. Til dette skal Jacobi-funktionen findes. Denne er givet ved:

$$jacobi(a,h,w) = | \begin{bmatrix} r'_a(a,h,w) & r'_h(a,h,w) & r'_w(a,h,w) \end{bmatrix} |$$

Rumfanget vil da være givet ved:

$$\int_0^1 \int_0^{34.8} \int_{1.95}^{6.1} jacobi \ \mathrm{d}a \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}w = 344.7698053$$

Da integralet og Jacobifunktionen er meget uoverskuelige, er de ikke anført her; de kan dog findes i bilagene. Da rumfanget er ca. $345m^3$ og massefylden for brændt ler og sten er ca. $2t/m^3$, må massen af sneglegangen være

$$2 \cdot 344.7698053t = 689.5396106t \approx 690t$$

Sneglegangen udgør da $\frac{690t}{5914t} \approx 11.7\%$ af Rundetaarns samlede masse.

Bilag

Udregninger til opgave a:

a

```
> hovedtårn_plot := plot3d([7.68*cos(p), 7.68*sin(p), h], p=0..2*Pi, h=0..34.8, color=blue):
> observatorie_plot := plot3d([3*cos(p), 3*sin(p), h+34.8], p=0..2*Pi, h=0..4, color=blue):
> observatorie_kugle_plot := plot3d([3*sin(u)*cos(v), 3*sin(u)*sin(v), 3*cos(u)+38.8], u=-Pi/2..Pi/2, v=0..2*Pi, color=red):
> platform_plot := plot3d([r*cos(p), r*sin(p), 34.8], r=3..7.68, p=0..2*Pi, color=green):
> display(hovedtårn_plot, observatorie_plot, observatorie_kugle_plot, platform_plot, scaling=constrained)
```

Udregninger til opgave b:

b

```
> r := (R, h) -> <R*cos(h*7.3/34.8*2*Pi), R*sin(h*7.3/34.8*2*Pi), h>:
  r(R,h)
```

$$\begin{bmatrix} R\cos(1.318024504\,h) \\ R\sin(1.318024504\,h) \\ h \end{bmatrix}$$

```
> d_r_R := diff(r(R,h), R);
  d_r_h := diff(r(R,h), h);
  cross := CrossProduct(d_r_R, d_r_h);
  jacobi := abs(sqrt(cross[1]^2 + cross[2]^2 + cross[3]^2))
```

$$d\_r\_R := \begin{bmatrix} \cos(1.318024504\,h) \\ \sin(1.318024504\,h) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d\_r\_h := \begin{bmatrix} -1.318024504\,R\sin(1.318024504\,h) \\ 1.318024504\,R\cos(1.318024504\,h) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$cross := \begin{bmatrix} \sin(1.318024504\,h) \\ -\cos(1.318024504\,h) \\ 1.318024504\cos(1.318024504\,h)^2 R + 1.318024504\sin(1.318024504\,h)^2 R \end{bmatrix}$$

$$jacobi := \sqrt{\left|\sin(1.318024504\,h)^2 + \cos(1.318024504\,h)^2 + \left(1.318024504\cos(1.318024504\,h)^2 R + 1.318024504\sin(1.318024504\,h)^2 R\right)^2\right|}$$

```
> int(jacobi, R=1.95..6.1, h=0..34.8)
```

$$780.9955005$$

Udregninger til opgave c:

c

```
> (1.95+6.1)/2
```

$$4.025000000$$

```
> r := h -> <4.025*cos(h*7.3/34.8*2*Pi), 4.025*sin(h*7.3/34.8*2*Pi), h>
```

$$r := h \mapsto \left\langle 4.025\cos\left(\frac{h\,7.3\,2\,\pi}{34.8}\right), 4.025\sin\left(\frac{h\,7.3\,2\,\pi}{34.8}\right), h\right\rangle$$

```
> r(h)
```

$$\begin{bmatrix} 4.025\cos(1.318024504\,h) \\ 4.025\sin(1.318024504\,h) \\ h \end{bmatrix}$$

```
> d_r := diff(r(h),h)
```

$$d\_r := \begin{bmatrix} -5.305048629\sin(1.318024504\,h) \\ 5.305048629\cos(1.318024504\,h) \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> jac := abs(sqrt(d_r[1]^2 + d_r[2]^2 + d_r[3]^2))
```

$$jac := \sqrt{\left|28.14354096\sin(1.318024504\,h)^2 + 28.14354096\cos(1.318024504\,h)^2 + 1\right|}$$

```
> int(jac, h=0..34.8)
```

$$187.8669578$$

```
> 5.305^2
```

$$28.143025$$

```
> evalf(sqrt(29.143)*34.8)
```

$$187.8652142$$

Udregninger til opgave d:

d

```
> r := (a,h,w) -> <a*cos(h*7.3/34.8*2*Pi),  a*sin(h*7.3/34.8*2*Pi), h+w*(-0.1/34.8*h+0.5)>
```

$$r := (a, h, w) \mapsto \left\langle a\cos\left(\frac{h\cdot 7.3\cdot 2\cdot\pi}{34.8}\right), a\sin\left(\frac{h\cdot 7.3\cdot 2\cdot\pi}{34.8}\right), h + w\cdot(-0.002873563218\cdot h + 0.5)\right\rangle$$

```
> r(a,h,w)
```

$$\begin{bmatrix} a\cos(1.318024504\,h) \\ a\sin(1.318024504\,h) \\ h + w\,(-0.002873563218\,h + 0.5) \end{bmatrix}$$

```
> mat := <diff(r(a,h,w),a) | diff(r(a,h,w),h) | diff(r(a,h,w),w)>
```

$$mat := \begin{bmatrix} \cos(1.318024504\,h) & -1.318024504\,a\sin(1.318024504\,h) & 0 \\ \sin(1.318024504\,h) & 1.318024504\,a\cos(1.318024504\,h) & 0 \\ 0 & 1 - 0.002873563218\,w & -0.002873563218\,h + 0.5 \end{bmatrix}$$

```
> jacobi := Determinant(mat)
```

$$jacobi := -0.003787426735\cos(1.318024504\,h)^2\,a\,h + 0.6590122520\cos(1.318024504\,h)^2\,a - 0.003787426735\sin(1.318024504\,h)^2\,a\,h + 0.6590122520\sin(1.318024504\,h)^2\,a$$

```
> R := int(jacobi, a=1.95..6.1, h=0..34.8, w=0..1)
```

$$R := 344.7698053$$

```
> M := 2*R
```

$$M := 689.5396106$$

```
> evalf(690/5914)
```

$$0.1166723030$$