Hjemmeopgavesæt 3

Daniel Brasholt s214675

November 2021

Opgave 3

3.a)

For at gøre rede for, at F er lineær, anvendes L_1 og L_2 (definition 12.5, eNote 12). Først testes L_1 ved at indsætte $f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4)$, hvilket giver følgende:

$$f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4) = \begin{bmatrix} x_1+y_1+x_3+y_3-x_4+y_4 \\ -(x_1+y_1)+x_2+y_2-2(x_3+y_3)-(x_4+y_4) \\ x_1+y_1-2(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)+2(x_4+y_4) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (x_1+x_3-x_4)+(y_1+y_3-y_4) \\ (-x_1+x_2-2x_3-x_4)+(-y_1+y_2-2y_3-y_4) \\ (x_1-2x_2+3x_3+2x_4)+(y_1-2y_2+3y_3+2y_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_3-x_4 \\ -x_1+x_2-2x_3-x_4 \\ x_1-2x_2+3x_3+2x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1+y_3-y_4 \\ -y_1+y_2-2y_3-y_4 \\ y_1-2y_2+3y_3+2y_4 \end{bmatrix}$$
$$= f(x_1,x_2,x_3,x_4)+f(y_1,y_2,y_3,y_4)$$

Da overholder afbildningen L_1. For at vise, at den også overholder L_2, reduceres udtrykket for $f(kx_1, kx_2, kx_3, kx_4)$:

$$f(kx_1,kx_2,kx_3,kx_4) = \begin{bmatrix} kx_1+kx_3-kx_4 \\ -kx_1+kx_2-2kx_3-kx_4 \\ kx_1-2kx_2+3kx_3+2kx_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(x_1+x_3-x_4) \\ k(-x_1+x_2-2x_3-x_4) \\ k(x_1-2x_2+3x_3+2x_4) \end{bmatrix}$$
$$= k\cdot \begin{bmatrix} x_1+x_3-x_4 \\ -x_1+x_2-2x_3-x_4 \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4 \end{bmatrix} = k\cdot f(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

Da må afbildningen være lineær.
Fra definition 12.17, eNote 12, fremgår det, at afbildningsmatricens søjler består af billederne af basisvektorerne. Disse basisvektorer er ifølge opgaven standardbaserne, altså $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Dermed kan følgende udtryk for afbildningsmatricen, ${}_eF_e$, udregnes:

$${}_eF_e = [{}_cf(e_1)\ {}_cf(e_2)\ {}_cf(e_3)\ {}_cf(e_4)]$$
$${}_ef(e_1) = \begin{bmatrix} 1+0-0 \\ -1+0-2\cdot 0-0 \\ 1-2\cdot 0+3\cdot 0+2\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$${}_ef(e_2) = \begin{bmatrix} 0+0-0 \\ 0+1-2\cdot 0-0 \\ 0-2\cdot 1+3\cdot 0+2\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$${}_ef(e_3) = \begin{bmatrix} 0+1-0 \\ 0+0-2\cdot 1-0 \\ 0-2\cdot 0+3\cdot 1+2\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$${}_ef(e_4) = \begin{bmatrix} 0+0-1 \\ 0+0-2\cdot 0-1 \\ 0-2\cdot 0+3\cdot 0+2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$${}_eF_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Billedvektoren $y = f(2,-1,0,-1)$ kan da findes ved matrix-vektor-produkt mellem ${}_eF_e$ og vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.b)

For at bestemme en basis for kernen, skal ligningen ${}_eF_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ løses. Trappematricen af følgende matrix findes da med Maple (se bilag):

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow trap(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da må følgende ligninger gælde:

$$x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_3$$
$$x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_3$$
$$x_4 = 0$$

En basis for kernen for f kan da opstilles på parameterform således, hvis man sætter $x_3 = t$:

$$ker(f) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ifølge Dimensionssætningen (eNote 12), gælder følgende:

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(f(V))$$

Hvor V er definitionsrummet. Her kan vi se, at $\dim(V) = 4$ og at $\dim(\ker(f)) = 1$. Da vil dimensionen af billedrummet være

$$4 = 1 + \dim(f(V)) \Leftrightarrow \dim(f(V)) = 3$$

3.c)

Fra sætning 11.29 (eNote 11) fremgår det, at 3 lineært uafhængige vektorer vil udgøre en basis for $\mathbb{R}^3$. Da antalskravet er opfyldt, er det kun nødvendigt at vise, at vektorsættet $w = (w_1, w_2, w_3)$ er lineært uafhængigt. Dette gøres ved at finde trappeformen af w (igen ved brug af Maple; se bilag):

$$w = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$trap(w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da rangen af matricen er 3, må vektorsættet w være lineært uafhængigt. Da må w være en basis for $\mathbb{R}^3$.
Matricen vist ovenfor er basisskiftematricen ${}_eM_w$. For at finde vektoren y med koordinaterne fra basis w, skal den inverse matrix, ${}_wM_e$, findes. Dette gøres ved hjælp af Maple, hvilket giver følgende:

$$
{}_wM_e = {}_eM_w^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}
$$

Da kan ${}_wy$ findes som matrix-vektorprodukt af ${}_wM_e$ og ${}_ey$:

$$
{}_wy = {}_wM_e \cdot {}_ey = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

3.d)

Da en afbilidningsmatrix er givet ud fra billederne af basisvektorerne, må afbildningsmatricen for g være givet ved

$$
{}_eG_w = \begin{bmatrix} {}_eg(w_1) & {}_eg(w_2) & {}_eg(w_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$g(y)$ må da være matrix-vektorproduktet af ${}_eG_w$ og ${}_wy$, da denne er i basis w. Gør man dette, fås:

$$
{}_eG_w \cdot {}_wy = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

3.e)

Da både $g(x)$ og $f(x)$ er lineære (som vist tidligere eller bestemt i opgaveformuleringen), må følgende test af L_1 og L_2 gælde:

$$
h(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = h(x) + h(y)
$$
$$
h(kx) = g(f(kx)) = g(kf(x) = kg(f(x)) = kh(x)
$$

Da må $h(x) = g(f(x))$ også være lineær.

Da $h(x) = g(f(x))$, må afbildningsmatricen ${}_eH_e$ være lig med produktet af de to afbildnings-matricer ${}_eG_w$ og eFe. Dog skal der imellem disse være en basisskiftematrix, ${}_wMe$, da G afbilder fra basen w til standardbasen i $\mathbb{R}^4$. Da vil afbildningsmatricen for h se således ud:

$$
{}_eH_e = {}_eG_w \cdot {}_wM_e \cdot {}_eF_e
$$
$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Denne udregning blev udført i Maple; se bilag.
For at se, hvordan h afbilder underrummet U, laves følgende matrix-matrixmultiplikation:

$$
{}_eH_e \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U
$$

Da er det vist, at h afbilder U på sig selv. h vil da ikke have en effekt på vektorer udspændt af U. Dette er det samme som vektoren y, der ved $g(y)$ giver det samme, som man indsatte i f.

Bilag

```
> T := <1,0,1,-1,0;-1,1,-2,-1,0;1,-2,3,2,0>
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra):
> ReducedRowEchelonForm(T)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 3.b

```
> w := <1,0,-1;-1,1,-1;1,-2,2>
```

$$w := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(w)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 3.c

```
> eMw := <1,0,-1;-1,1,-1;1,-2,2>
```

$$eMw := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> wMe := eMw^(-1)
```

$$wMe := \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> ey := <3,-2,2>
```

$$ey := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> wy := wMe.ey
```

$$wy := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Opgave 3.c