Første Hjemmeopgavesæt

01017 Diskret Matematik

af Daniel Brasholt **s214675**
og Rasmus Wiuff **s163977**

28. september 2022

A Tableau-metoden

To formler betragtes:

$$((p \to r) \vee (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r) \tag{A.1}$$

$$p \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \tag{A.2}$$

Figur 1 Indeholder de to tableaux for Ligninger (A.1) og (A.2). Figur 1a viser at Ligning (A.1) er falsk i sandhedstilskrivningen p:F,q:T,r:F. Figur 1b viser at Ligning (A.2) er gyldig.

***Figur 1:** De to tableaux*

***(a)** Falsk i sandhedstilskrivning p:F,q:T,r:F*

1 $((p \to r) \vee (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$: F

$\to$F på 1

2 $(p \to r) \vee (q \to r)$: T

3 $(p \vee q) \to r$: F

$\to$F på 3

4 $p \vee q$: T

5 r : F

$\vee$T på 2

6 $p \to r$: T

7 $q \to r$: T

$\to$T på 6

8 p : F

9 r : T

$\times$

$\vee$T på 4

10 p : T

$\times$

11 q : T

$\bigcirc$

Daniel Brasholt **s214675**
Rasmus Wiuff **s163977**

***(b)** Gyldig*

1 $p \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$: F

$\to$F på 1

2 p : T

3 $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$: F

$\to$F på 3

4 $q \to r$: T

5 $(p \to q) \to (p \to r)$: F

$\to$F på 5

6 $p \to q$: T

7 $p \to r$: F

$\to$F på 7

8 p : T

9 r : F

10 q : F | $\to$T på 4 — 11 r : T ×

12 p : F × | $\to$T på 6 — 13 q : T ×

B Logiske slutninger

Vi betragter slutningen:
Hvis Per flytter sin løber, vil René smadre skakbrættet.
René vil flytte sit tårn hvis og kun hvis Per flytter sin dronning.
Det er ikke tilfældet, at Per vil flytte sin dronning og ikke flytte sin løber.

Hvis Per flytter sin dronning, vil René flytte sit tårn og smadre skakbrættet.

Udsagnene formaliseres:

Udsagnsvariabel	Udsagn
l	Per flytter sin løber
s	René smadrer skakbrættet
t	René vil flytte sit tårn
d	Per flytter sin droning

Den logiske slutningsregel bliver til:

$$\begin{array}{l} l \to s \\ t \leftrightarrow d \\ \neg(d \wedge \neg l) \\ \hline d \to t \wedge s \end{array}$$

Påstanden er:

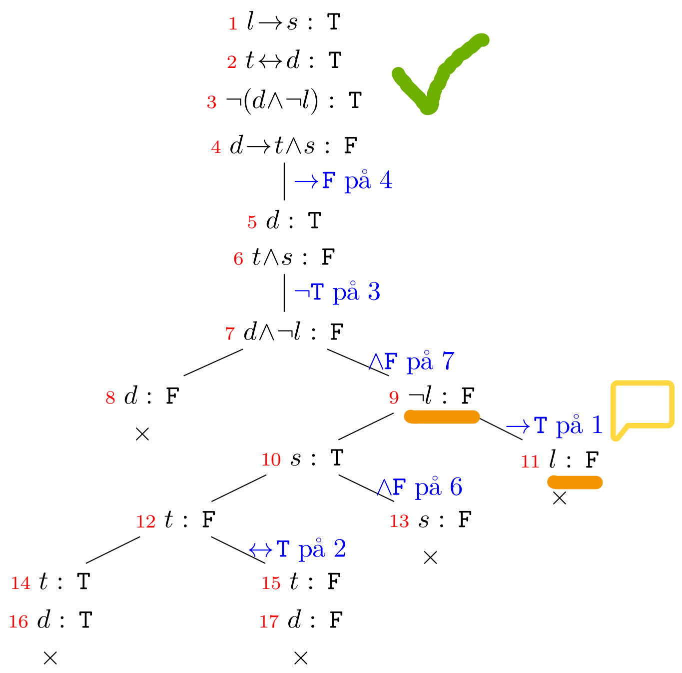
$$l \to s, \quad t \leftrightarrow d, \quad \neg(d \wedge \neg l), \quad \models \quad d \to t \wedge s \tag{B.1}$$

$$\Updownarrow$$

$$(l \to s) \wedge (t \leftrightarrow d) \wedge (\neg(d \wedge \neg l)) \to (d \to t \wedge s) \tag{B.2}$$

Gyldigheden af Ligning (B.2) kontrolleres med tableau-metoden. Da man først vil sandhedstilskrive Ligning (B.2) falsk, kan man springe de første skridt over ved først at behandle implikationen, og herefter konjunktionerne. Resultatet ses som de første fire formler i Figur 2.

Figur 2: *Tableau-metoden for Ligning* (B.2)



Fra Figur 2 kan det ses at Ligning (B.2) er gyldig. Hermed er slutningen logisk korrekt.

C Tuborg-notation

Fire mængder defineres:

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x = 4\} \tag{C.1}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x < 3\} \tag{C.2}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x < 3 \wedge x^2 - 3x = 4\} \tag{C.3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x < 3 \wedge x^2 - 3x \neq 4\} \tag{C.4}$$

Mængden i Ligning (C.1) findes ved at løse $x^2 - 3x = 4$ for x.

$$x^2 - 3x = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \tag{C.5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \tag{C.6}$$

$$x_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \tag{C.7}$$

$$x_2 = \frac{3-5}{2} = -1 \tag{C.8}$$

Mængden i Ligning (C.1) er altså:

$$A = \{4, -1\} \tag{C.9}$$

Mængden i Ligning (C.2) er alle heltal mellem -3 (inklusiv) til 3 (eksklusiv):

$$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \tag{C.10}$$

Mængden i Ligning (C.3) er fællesmængden mellem A og B:

$$C = \{-1\} \tag{C.11}$$

Mængden i Ligning (C.4) er mængdedifferensen mellem B og A:

$$D = \{-3, -2, 0, 1, 2\} \tag{C.12}$$

Fra Ligninger (C.1), (C.2), (C.4) og (C.9) til (C.12) kan det ses at:

$$C = A \cap B \tag{C.13}$$

$$D = B - A \tag{C.14}$$

Dette fordi at:

1. Elementerne i Ligninger (C.1) og (C.2) er heltal

2. Ligning (C.3) siger at heltalene både skal findes i C og A
3. Ligning (C.4) indeholder mængden B, men elementerne i A ikke må optræde i D

D Lighed mellem mængder

3 mængdeligheder defineres:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{D.1}$$
$$A - (A \cap B) = A - B \tag{D.2}$$
$$A \cap (A \cup B) = A \tag{D.3}$$

Oversat til udsagnslogiske formler:

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{D.4}$$
$$A \wedge \neg(A \wedge B) \leftrightarrow A \wedge \neg B \tag{D.5}$$
$$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A \tag{D.6}$$

Venstresiden i Ligning (D.4) er logisk ækvivalent med højresiden via reglen "distributivitet af $\vee$ over $\wedge$"[1]:

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{D.7}$$

Derfor er mængdeligheden Ligning (D.1) korrekt.
For at bevise mængdeligheden Ligning (D.2) opstilles Ligning (D.5) i en sandhedstabel:

A	B	$A \wedge \neg(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\leftrightarrow$	$A \wedge \neg B$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	F

Ud fra $\leftrightarrow$-kolonnen ses det at Ligning (D.2) er gyldig.
For at bevise mængdeligheden Ligning (D.3) bruges tableau-metoden på Ligning (D.6):

Figur 3: *Tableau for Ligning* (D.6)

- 1 $A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$: F
  - ($\leftrightarrow$F på 1)
  - 2 $A \wedge (A \vee B)$: T
    - 3 A : F
    - ($\wedge$T på 2)
    - 6 $A \vee B$: T
    - 7 A : T
    - ×
  - 4 $A \wedge (A \vee B)$: F
    - 5 A : T
    - ($\wedge$F på 4)
      - 8 $A \vee B$: F
        - ($\vee$F på 8)
        - 10 B : F
        - 11 A : F
        - ×
      - 9 A : F
        - ×

Figur 3 viser at mængdeligheden Ligning (D.3) er gyldig.

[1] "Lecture notes on Classical Logic", *Valentin Goranko*, side 26

E "And Then There Were None"

To typer af mennesker:

1. Sandsigere
2. Løgnere

E.1. Peter & Signe

Først formaliseres nogle udsagn:

Udsagnsvariabel	Udsagn
p	Peter er sandsiger
s	Signe er sandsiger

Udsagnet "mindst en af dem er løgner" kan forstås som: "Peter er sandsiger og Signe er ikke sandsiger, eller Signe er sandsiger og Peter er ikke sandsiger, eller Peter er ikke sandsiger og Signe er ikke sandsiger".

$$(p \wedge \neg s) \vee (s \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg s) \tag{E.1}$$

Sandhedstabellen for Ligning (E.2)

p	s	$(p \wedge \neg s)$	$\vee$	$(s \wedge \neg p)$	$\vee$	$(\neg p \wedge \neg s)$
T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T

Det kan aflæses fra $\vee$ kolonnerne at udsagnet Ligning (E.1) er sandt hvis "mindst en af dem er løgner". Dette er kun sandt hvis Peter er sandsiger da han sagde udsagnet:

$$\Big((p \wedge \neg s) \vee \big((s \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg s)\big)\Big) \leftrightarrow p \tag{E.2}$$

Sandhedstabellen for Ligning (E.2) er da:

p	s	$\big((p \wedge \neg s)$	$\vee$	$\big((s \wedge \neg p)$	$\vee$	$(\neg p \wedge \neg s)\big)\big)$	$\leftrightarrow p$
T	T	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	T	F

Som det kan aflæses fra $\leftrightarrow p$ kolonnen er Peter sandsiger, mens Signe lyver.

E.2. Anne & Bob

Først formaliseres nogle udsagn:

Udsagnsvariabel	Udsagn
a	Anne er sandsiger
b	Bob er sandsiger

Udsagnet "hvis Bob er en løgner, så er jeg også en løgner" kan skrives således:

$$\neg b \rightarrow \neg a$$

Dette er dog kun sandt, hvis Anne er sandsiger, da hun siger udsagnet:

$$a \leftrightarrow (\neg b \rightarrow \neg a) \tag{E.3}$$

Udtrykket i Ligning (E.3) kan da opstilles i en sandhedstabel:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$(\neg b \rightarrow \neg a)$	$\leftrightarrow a$
F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	T	F
T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	T	T

Det kan da aflæses fra $\leftrightarrow a$-kolonnen i sandhedstabellen, at udtrykket kun er opfyldt, når både a og b er sande, hvorfor både Anne og Bob må være sandsigere.

Daniel Brasholt **s214675**
Rasmus Wiuff **s163977**

E.3. Carsten, Diana & Erik

Først formaliseres nogle udsagn:

Udsagnsvariabel	Udsagn
c	Carsten er sandsiger
d	Diana er sandsiger
e	Erika er sandsiger

Udtrykket "kun én" kan skrives således:

$$(c\wedge\neg d\wedge\neg e)\vee(\neg c\wedge d\wedge\neg e)\vee(\neg c\wedge\neg d\wedge e) \tag{E.4}$$

Sandhedstabellen for dette kan da opstilles:

c	d	e	$(c\wedge\neg d\wedge\neg e)$	$\vee$	$(\neg c\wedge d\wedge\neg e)$	$\vee$	$(\neg c\wedge\neg d\wedge e)$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F	F
T	T	F	F	F	F	F	F
T	T	T	F	F	F	F	F

Udsagnet i Ligning (E.4) kommer fra Carsten, men er oversat fra Diana. Altså er udsagnet kun sandt, hvis og kun hvis Diana er sandsiger. Udtrykket vil også kun være sandt, hvis og kun hvis Carsten er sandsiger. Til sidst er Erika kun sandsiger, hvis og kun hvis Diana er en løgner. Dette kan da tilføjes til Ligning (E.4), hvilket giver:

$$\Big(c\leftrightarrow d\leftrightarrow\big((c\wedge\neg d\wedge\neg e)\vee(\neg c\wedge d\wedge\neg e)\vee(\neg c\wedge\neg d\wedge e)\big)\Big)\wedge(\neg d\leftrightarrow e) \tag{E.5}$$

Sandhedstabellen for dette kan da opskrives:

c	d	e	$\big(c\leftrightarrow d$	$\leftrightarrow$	$\big((c\wedge\neg d\wedge\neg e)\vee(\neg c\wedge d\wedge\neg e)\vee(\neg c\wedge\neg d\wedge e)\big)\big)$	$\wedge$	$(\neg d\leftrightarrow e)$
F	F	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	T	T	T	F	F	F	F

Der er da to sandhedstildelinger, der opfylder denne formel; c:`F`,d:`F`,e:`T` og c:`T`,d:`F`,e:`T`. Det kan da ikke afgøres, hvorvidt Carsten er sandsiger eller løgner. Det kan dog siges, at Diana er løgner og at Erika er sandsiger. Den fremmede bør da følge Erika, da hun ikke er kannibal.