Hjemmeopgavesæt 4

Daniel Brasholt s214675

November 2021

Opgave 3

3.a)

For at de tre vektorer skal udspænde et 3-dimensionelt underrum, kræves det, at de er lineært uafhængige. Dette kan man finde ud af ved brug af metode 11.40, hvor ligningssystemet $k_1a_1 + k_2a_2+k_3a_3 = 0$ løses; har det homogene ligningssystem 1 løsning, er vektorsættet lineært uafhængigt. Har det derimod uendeligt mange løsninger, må sættet være lineært afhængigt. Derfor findes rangen af matricen $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{bmatrix}$. Denne er fundet med Maple til at være 3 (se bilag). Qua metode 11.40, vil vektorsættet derfor være lineært uafhængigt og vil da udspænde et 3-dimensionelt underrum U.
Løser man i stedet det inhomogene ligningssystem $k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = a_4$, kan man finde den linearkombination af a_1, a_2 og a_3, som giver a_4. Til dette anvendes Maple's `ReducedRowEchelonForm` på matricen $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, hvilket giver følgende trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ud fra denne kan det da aflæses, at a_4 kan skrive som en følgende linearkombination: $4 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 - 1 \cdot a_3 = a_4$, og dermed vil $a_4 \in U$.

3.b)

Den ortonormale basis (q_1, q_2, q_3) findes ved hjælp af Gram-Schmidt ortonormalisering, som er beskrevet i metode 15.19. Da q_1 skal være proportional med a_1, vælges vektoren $\frac{a_1}{|a_1|}$ som første vektor i den ortonormale basis. Denne findes med Maple (se bilag) til at være:

$${}_eq_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dernæst konstrueres en hjælpevektor $w_2 = a_2 - (a_2 \cdot q_1)q_1$. Denne findes igen ved brug af Maple:

$$w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}_e q_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denne er proportional med $a_2 - a_1$, da $q_2 = \frac{1}{3} \cdot (a_2 - a_1)$. q_3 findes da ved at konstruere en hjælpevektor $w_3 = a_3 - (a_3 \cdot q_1)q_1 - (a_3 \cdot q_2)q_2$ (se bilag):

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_e q_3 = \frac{w_3}{|w_3|} = w_3$$

Dermed er den ortonormale basis (q_1, q_2, q_3) konstrueret med i forhold til standardbasis:

$$\begin{bmatrix} {}_e q_1 & {}_e q_2 & {}_e q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det er tidligere bestemt, at $q_1 = \frac{1}{3} a_1$ og $q_2 = \frac{1}{3}(a_2 - a_1)$. Med Maple findes løsningen til ligningssystemet med totalmatricen $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & q_3 \end{bmatrix}$ (se bilag), hvilket giver $q_3 = -1 \cdot a_1 - 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3$.

3.c)

Ved det ortogonale komplement $U^\perp$ forstås alle de vektorer, der er vinkelrette på U. Disse vektorer må da være vinkelrette på basisvektorerne for U. Da prikproduktet af to vektorer, der står vinkelrette på hinanden, er 0, må følgende gælde, hvis vektorerne a_5 og a_6 tilhører $U^\perp$:

$$q_1 \cdot a_5 = q_2 \cdot a_5 = q_3 \cdot a_5 = q_1 \cdot a_6 = q_2 \cdot a_6 = q_3 \cdot q_6 = 0$$

Disse 6 prikprodukter vil svare til produktet $\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix} a_5 & a_6 \end{bmatrix}$. Dette er fundet med Maple (se bilag):

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix} a_5 & a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da må de to vektorer a_5 og a_6 tilhøre $U^\perp$. Da disse to endda er vinkelrette på hinanden (se bilag), kan den i forrige spørgsmål omtalte basis for U udvides til en ortonormal basis $q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ for $\mathbb{R}^5$ ved blot at sætte q_4 og q_5 lig henholdsvis a_5 og a_6 normaliseret. Altså:

$$ {}_e q_4 = \frac{a_6}{|a_6|} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}_e q_5 = \frac{a_5}{|a_5|} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

3.d)

Afbildningsmatricen for f er billederne af basisvektorerne som søjler, altså

$$ {}_e F_q = \begin{bmatrix} f(q_1) & f(q_2) & f(q_3) & f(q_4) & f(q_5) \end{bmatrix} $$

Da $f(a_1) = a_1$ og q_1 er proportional med a_1, må $f(q_1) = q_1$. Derudover er det givet i opgaven, at $f(a_2 - a_1) = -(a_2 - a_1) = a_1 - a_2$. Da q_2 er proportional med $a_2 - a_1$, må $f(q_2) = -q_2$.
I opgave 3.b blev det bestemt, at $q_3 = -a_1 - a_2 + a_3$. Da vil $f(q_3) = f(-a_1 - a_2 + a_3)$. Med linearitetsbetingelserne samt informationen om, at $f(a_3) = a_4$, kan dette omskrives således:

$$ \begin{aligned} f(q_3) &= f(-a_1 - a_2 + a_3) = f(-a_1 - a_2) + f(a_3) = f(-a_1 - a_2) + a_4 \\ &= f(-a_2 + a_1 - 2a_1) + a_4 = f(-a_2 + a_1) - 2 \cdot f(a_1) + a_4 \\ &= -f(a_2 - a_1) - 2 \cdot a_1 + a_4 \\ &= a_2 - a_1 - 2 \cdot a_1 + a_4 \end{aligned} $$

I opgave 3.a blev det også bestemt, at $a_4 = 4 \cdot a_1 - a_3$. Indsættes dette, fås:

$$ \begin{aligned} f(q_3) &= a_2 - 3 \cdot a_1 + 4 \cdot a_1 - a_3 = a_2 + a_1 - a_3 \\ &= -(a_1 - a_2 + a_3) = -q_3 \end{aligned} $$

Til sidst er det tidligere bestemt, at $q_4 \in U^\perp$ og $q_5 \in U^\perp$. Da må disse to være i kernen for f og altså:

$$ f(q_4) = f(q_5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Dette giver den samlede afbildningsmatrix

$$ {}_q F_q = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

Hvis f skal være isometrisk, må det gælde, at afbildningen bevarer prikproduktet mellem to vektorer. Altså må det gælde, at $v \cdot w = f(v) \cdot f(w)$. Sættes ${}_q\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ og ${}_q\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$, må

$$ v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4 + v_5 w_5 $$

Foretages afbildningen af de to vektorer fås:

$$f(v) = (v_1, -v_2, -v_3, 0, 0)$$
$$f(w) = (w_1, -w_2, -w_3, 0, 0)$$

Da må prikproduktet af de afbillede vektorer være følgende:

$$f(v) \cdot f(w) = v_1w_1 + (-v_2) \cdot (-w_2) + (-v_3) \cdot (-w_3) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$$

Altså kan f kun være isometrisk, hvis $v \in U$ og $w \in U$, men afbildningen er ikke isometrisk, hvis $v_4w_4 + v_5w_5 \neq 0$.

3.e)

I opgaverne 3.b og 3.c er q-vektorerne fundet i standardkoordinater. Basisskiftematricen vil da bestå af disse vektorer, altså:

$$_eM_q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da vil basisskiftematricen $_qM_e = {}_eM_q^{-1}$. Denne findes med Maple (se bilag):

$$_qM_e = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$_eF_e$ vil da være lig $_eM_q \cdot {}_qF_q \cdot {}_qM_e$, hvilket er udregnet med Maple:

$$_eF_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 & \frac{8}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = {}_eF_e^{-1}$$

Da $_eF_e = {}_eF_e^{-1}$, må den være symmetrisk.

Bilag

```
> restart: with(LinearAlgebra):
> a[1] := <0,1,2,2,0>:
  a[2] := <1,1,4,0,0>:
  a[3] := <1,2,6,2,1>:
  a[4] := <-1,2,2,6,-1>:
> T := <a[1]|a[2]|a[3]|<0,0,0,0,0>>
```

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(T)
```

$$3$$

```
>
> T := <a[1]|a[2]|a[3]|a[4]>
```

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(T)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> ***GramSchmidt*:**

```
> q[1] := a[1] * 1/VectorCalculus[Norm](a[1])
```

$$q_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
>
> w[2] := a[2]-(a[2].q[1])*q[1]
```

$$w_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> q[2] := w[2] * 1/VectorCalculus[Norm](w[2])
```

$$q_2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> w[3] := a[3] - (a[3].q[1])*q[1] - (a[3].q[2])*q[2]
```

$$w_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> q[3] := w[3] * 1/VectorCalculus[Norm](w[3])
```

$$q_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> q_3 *som linearkombination af* a_1, a_2 *og* a_3 :

```
> A := <a[1]|a[2]|a[3]>
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(<A|q[3]>)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> -a[1]-a[2]+a[3]
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> *Udvidelse af basis og ortogonal komplement* :

```
> a[5] := <2,-2,0,1,0>;
  a[6] := <-2,-2,1,0,0>
```

$$a_5 := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_6 := \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> Transpose(<q[1]|q[2]|q[3]>).<a[5]|a[6]>
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> a[5].a[6]
```

$$0$$

```
> q[4] := a[5] * 1/VectorCalculus[Norm](a[5])
```

$$q_4 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> q[5] := a[6] * 1/VectorCalculus[Norm](a[6])
```

$$q_5 := \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> *Invers basisskiftematrix* :

```
> eMq := <0,1/3,0,2/3,-2/3;1/3,0,0,-2/3,-2/3;2/3,2/3,0,0,1/3;2/3,-2/3,0,1/3,0;0,0,1,0,0>
```

$$eMq := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> qMe := eMq^(-1)
```

$$qMe := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *Matrixprodukt af* ${}_eF_e$:

```
> qFq := <1,0,0,0,0;0,-1,0,0,0;0,0,-1,0,0;0,0,0,0,0;0,0,0,0,0>
```

$$qFq := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eFe := eMq.qFq.qMe
```

$$eFe := \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 & \frac{8}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> eFe = Transpose(eFe)
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 & \frac{8}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 & \frac{8}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$