

Sombra de agujeros negros rotantes

Rotating black holes shadow

Uriel Chavez¹

¹Universidad de Guanajuato. Campus León. División de Ciencias e Ingenierías
u.chavezflores@ugto.mx

Alvaro G. de la Torre ²

¹Universidad de Guanajuato. Campus León. División de Ciencias e Ingenierías
ag.delatorrenavarro@ugto.mx

Ana T. Raygoza³

¹Universidad de Guanajuato. Campus León. División de Ciencias e Ingenierías
At.raygozaaguirre@ugto.mx³

Resumen

En el presente artículo se estudia la forma de la sombra de agujeros negros rotantes axialmente simétricos, en coordenadas Boyer-Lindquist, y sin discos de acreción, vistos por un observador lejano. La apariencia óptica del agujero negro iluminado por fuentes externas, o por los discos de acreción de materia super caliente en su vecindad, se caracterizan por una región oscura, la sombra, rodeada por un fondo brillante. El contorno de dicha sombra es dependiente de la métrica, la cual codifica la geometría del espacio-tiempo al rededor del objeto celestial masivo compacto. Las métricas que se abordan en este trabajo son las soluciones de Kerr (agujero rotante), Kerr-Newman (con carga eléctrica), y Bardeen (solución magnética acoplada a electrodinámica no lineal). Para cada una de estas soluciones de agujero negro rotante se estudian las geodésicas nulas, se obtienen los parámetros de impacto asociados a la esfera de fotones, se calculan los potenciales efectivos y los contornos de las sombras. Los comportamientos correspondientes, y la forma del contorno; tamaño, deformación, desplazamiento, se hayan en función de variaciones en los parámetros propios de las soluciones y el momento angular que llevan los agujeros.

Palabras clave: Agujeros negros rotantes, geodésicas nulas, geometría aparente.

Marco Teórico

¿Qué es un agujero negro?

En la física clásica se estudia el concepto de velocidad de escape, que es la velocidad necesaria para que un cuerpo escape del campo gravitacional de otro, esta velocidad depende solamente de la distancia inicial entre los cuerpos y sus masas.

A finales del siglo XVIII John Michell y Pierre Laplace se preguntaron por la posibilidad de la existencia de estrellas cuya velocidad de escape fuera superior a la velocidad de la luz. Entendieron que, si en la naturaleza existiera alguna forma de compactar la materia lo suficiente, esto sucedería. [1]

La primera consecuencia evidente de esto es que dicha estrella sería oscura, pues la luz emitida no podría salir y viajar por el espacio, sería retenida por el campo gravitacional tan intenso.

Si el radio de la estrella cumple que $R < 2GM/c^2$, donde G es la constante de gravitación universal, M la masa de la estrella y c la velocidad de la luz, entonces ningún rayo de luz emitido por la estrella podrá escapar del campo gravitacional.

Por el hecho de que ni siquiera la luz puede escapar del campo gravitacional, ninguna otra partícula puede, los átomos que componen dicha estrella serían atraídos al centro por la fuerza gravitatoria tan intensa y terminarían por acumularse en un solo punto que llamamos singularidad. Esta concentración de materia y energía es lo suficientemente densa para que, en una región del espacio, el campo gravitatorio no permita escapar a ninguna partícula, dicha región es llamada agujero negro.

Descripción física de un agujero negro

La mejor forma que tenemos de entender la gravedad es la teoría de la Relatividad General de Albert Einstein, por ello los agujeros negros son estudiados con esta teoría. La manera más simple de modelar un agujero negro con la Relatividad General es asumiendo que es estático, bajo esta condición, la métrica (forma de medir las distancias espaciales y temporales) que describe el espacio tiempo alrededor del agujero negro es la métrica de Schwarzschild.

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Esta solo depende de la masa M del agujero negro. Esta métrica describe, en general, objetos masivos estáticos con simetría esférica, es decir, también podemos describir con ella estrellas, planetas, etc.

Se sabe que los agujeros negros reales no se pueden describir de la mejor forma con la métrica de Schwarzschild, ya que no son estáticos y existen otras cantidades físicas que los caracterizan. Para tomar en cuenta estas otras características de los agujeros negros se puede usar la siguiente métrica.

$$ds^2 = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(dt - \frac{a^2 + r^2}{a} d\phi\right)^2 + \frac{\rho^2}{Q} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 - \frac{Q}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2$$

Donde $\rho = \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$ y Q depende de la cantidad física que queramos incluir al modelo. Esta métrica está escrita en unidades naturales, estas satisfacen $G = c = 1$. Las posibles formas de Q son las siguientes:

Tabla 1. Listado de métricas rotantes con descripción y forma de Q . [1]

Nombre de métrica	Descripción	Forma de Q
Kerr	Toma en cuenta la rotación del agujero negro mediante el parámetro $a = J/M$ donde J es el momento angular total.	$Q = r^2 - 2Mr + a^2$
Kerr-Newmann	Agujeros negros rotantes con carga eléctrica neta $q \neq 0$.	$Q = r^2 - 2Mr + a^2 + q^2$
Bardeen	Agujeros negros rotantes con momento de monopolio magnético $g \neq 0$ (carga magnética).	$Q = r^2 + a^2 - \frac{2Mr^4}{(r^2 + g^2)^{3/2}}$

Objetivos

1. El producto final de este trabajo es graficar los contornos de las sombras de agujeros negros con las tres métricas rotantes antes mostradas.
2. Las gráficas obtenidas servirán para visualizar cuantitativamente la influencia de los parámetros que caracterizan un agujero negro.
3. Podremos comparar cualitativamente con las fotografías de las sombras de agujeros negros realizadas en los últimos años.

4. Como objetivo secundario, los conocimientos adquiridos a través del proceso de elaboración de este artículo servirán para nuestra formación como físicos y profesionistas en general.

Metodología

Cálculo del contorno de la sombra de un agujero negro

Dada la métrica general, se estudiará el movimiento geodésico mediante la teoría de Hamilton-Jacobi, luego sustituyendo Q podemos obtener la solución para cada una de las métricas rotantes antes mostradas. Después se obtienen los parámetros de impacto asociados a la esfera de fotones y se calculan los contornos de las sombras.

El movimiento geodésico en un espacio-tiempo con métrica $g_{\mu\nu}$ es:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}$$

Conociendo la métrica, se propone que la función principal de Hamilton S sea de la siguiente forma

$$S = \frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + Lz\varphi + Sr(r) + S\theta(\theta),$$

Esta forma de escribir S incluye la información de que las coordenadas t y ϕ son cíclicas, es decir, hay una constante de movimiento asociada a cada una. [1]

Considerando el ansatz de la función S se obtiene:

$$2 \frac{\partial S}{\partial \lambda} = g^{00} E^2 - 2g^{0\varphi} ELz + g^{\varphi\varphi} L^2 z + g^{rr} \left(\frac{dSr}{dr} \right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{dS\theta}{d\theta} \right)^2$$

Sustituyendo los componentes de la métrica $g_{00}, g_{rr}, g_{\theta\theta}, g_{\varphi\varphi}, g_{t\varphi}$ con los siguientes valores:

$$\begin{aligned} g^{00} &= -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Delta \Sigma} \\ g^{rr} &= \frac{\Delta}{\Sigma} \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\Sigma} \\ g^{\varphi\varphi} &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta \Sigma \sin^2 \theta} \\ g^{t\varphi} &= -\frac{2Mra}{\Delta \Sigma} \end{aligned}$$

se obtiene la siguiente ecuación:

$$m^2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aLz]^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (aE \sin^2 \theta - Lz)^2 - \Delta \left(\frac{dSr}{dr} \right)^2 - \left(\frac{dS\theta}{d\theta} \right)^2$$

Usamos la siguiente identidad:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} (a \sin^2 \theta E - L)^2 = \left(\frac{L^2 z}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right) \cos^2 \theta + (Lz - aE)^2$$

Se separa la ecuación en dos ecuaciones diferentes, una que involucra la coordenada r y la otra involucra a la coordenada θ :

$$Q \left(\frac{dSr}{dr} \right)^2 = \frac{1}{Q} [(r^2 + a^2)E - aLz]^2 - m^2 r^2 - [K + (Lz - aE)^2]$$

$$\left(\frac{dS\theta}{d\theta} \right)^2 = K - (L^2 z \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta - m^2 a^2 \cos^2 \theta$$

Donde la constante de separación es la constante de Carter

$$k = Q - (Lz - aE)^2$$

Definiendo las siguientes funciones:

$$R = [(r^2 + a^2)E - aLz]^2 - Q[m^2 r^2 + K + (Lz - aE)^2]$$

$$\Theta = K + \cos^2 \theta [a^2(E^2 - m^2) - L^2 z \csc^2 \theta]$$

La solución de la función principal de Hamilton es:

$$S = -\frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + Lz\phi + \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{R(r)}}{Q} dr + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta$$

La forma integral de las ecuaciones geodésicas puede obtenerse a partir de que las derivadas parciales de jacobí respecto a las cantidades E, Lz, K y m son constantes que representan el valor inicial de las coordenadas, con lo cual llegamos a las ecuaciones de movimiento para la luz:

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{Q} [(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta] E - 2MarLz$$

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R}$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta}$$

$$\rho^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{1}{Q} [2MarE + (\rho^2 - 2Mr)Lz \csc^2 \theta]$$

Movimiento de fotones

Teniendo las ecuaciones de movimiento geodésico, podemos calcular las trayectorias de la luz haciendo que la masa de la partícula de prueba $m=0$. Es conveniente redefinir parámetros $\xi=Lz/E$ y $\eta=K/E^2$, con estos cambios ahora R y Θ son

$$R = [(r^2 + a^2 - a\xi)^2 - Q[n + (\xi - a)^2]$$

$$\Theta = n + \cos^2 \theta [a^2 - \xi^2 \csc^2 \theta] = n + (a - \xi)^2 - (a \sin \theta - \xi \csc \theta)^2$$

Los rayos de luz que nos interesan son aquellos que se encuentran en la órbita inestable del potencial R, por lo que la condición que deben cumplir las trayectorias que observaremos como el contorno de la sombra del agujero negro es

$$R = \frac{dR}{dr} = 0$$

Tras resolver el sistema de ecuaciones encontramos las dos formas de la función de ξ y dos de η de los fotones que observamos. Solo una de las dos soluciones es la que realmente describe los fotones que llegan al observador en el infinito.

$$\xi = \frac{(a^2 + r^2)Q' - 4rQ}{aQ'}$$

$$\eta = r^2 \frac{(16Q(a-Q) + 8rQQ' - r^2Q'^2)}{a^2Q'^2}$$

Los parámetros α y β son coordenadas sobre la bóveda celeste de los rayos de luz que llegan al observador en el infinito, dependen de las cantidades conservadas M , L_z , K y E y parametrizadas en función de r . Al variar el parámetro r , obtenemos $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ que describen una región en el espacio (α, β) y corresponde a las órbitas inestables de fotones

$$\alpha = -\frac{\zeta}{\sin\theta_0}$$

$$\beta = \mp \sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta_0 - \zeta^2 \cot^2 \theta_0}$$

Con estas funciones ya podemos graficar el contorno de la sombra de un agujero negro.

Resultados

En esta sección se muestran las gráficas que obtuvimos al variar los parámetros de cada métrica que se mostró en secciones anteriores.

Métrica de Kerr

Para esta métrica graficamos la variación de los parámetros a y θ_0 , que son los que caracterizan a esta métrica. Podemos observar cómo se va deformando el contorno de la sombra a medida que ambos parámetros aumentan. El parámetro a es una medida del momento angular máximo, siendo $a = 0$ el caso estático y $a = 1$ la rotación más rápida posible dada la masa del agujero negro, por ello $a = 0.99$ es el valor máximo en la gráfica. Recordemos que el ángulo θ_0 mide la inclinación del eje de rotación del agujero negro con respecto a nuestra línea de visión, por ello las variaciones se consideraron desde 0 hasta el mayor ángulo posible, que es $\pi/2$.

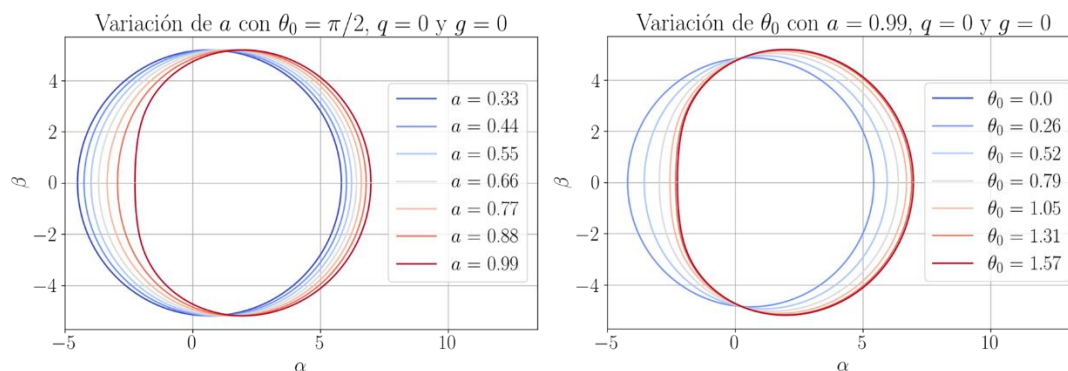


Figura 2. Variaciones de los parámetros a y θ_0 para la métrica de Kerr.

Métrica de Kerr-Newman

Para la métrica de Kerr Newman, se grafica para variaciones de el parámetro de rotación a y el parámetro de carga eléctrica q que caracteriza a esta métrica. En la primera gráfica se varía a teniendo fijado $q = 0.5$, este valor de la carga restringe los posibles valores de a , por ello ahora su valor máximo es $a = 0.86$, y si comparamos con la gráfica pasada, podemos ver las mismas formas solamente que ahora con menor rotación. Por otro lado, en la segunda gráfica los cambios en el contorno de la sombra son diferentes a las gráficas anteriores, el aumento de q disminuye el área de la sombra y en los valores más altos se hace notorio un achatamiento del lado izquierdo.

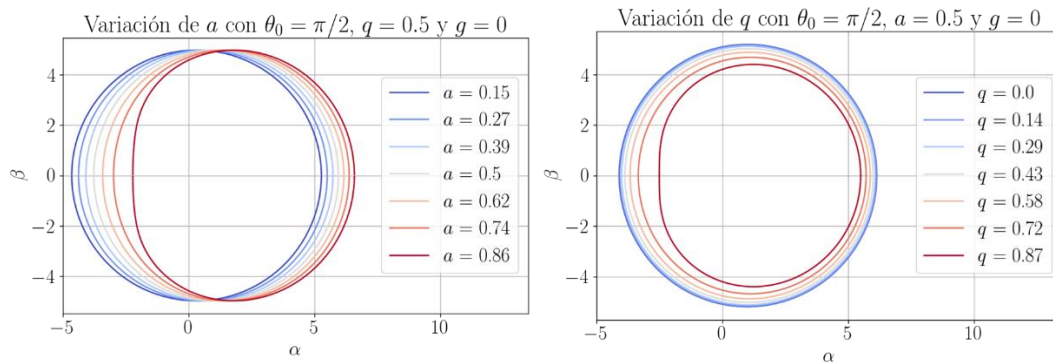


Figura 3. Variaciones de los parámetros a y q para la métrica de Kerr-Newman.

Métrica de Bardeem

Para esta última métrica, las variaciones de parámetros son análogas a las de la métrica de Kerr-Newman, se varió el parámetro de rotación a limitándolo por el valor fijo de $g = 0.5$ y también se varió el parámetro característico de la métrica g . En ambas variaciones, se observa una modificación de la sombra similar al visto en la métrica anterior, pero sin llegar a hacer notorio el achatamiento pronunciado del lado izquierdo de la sombra.

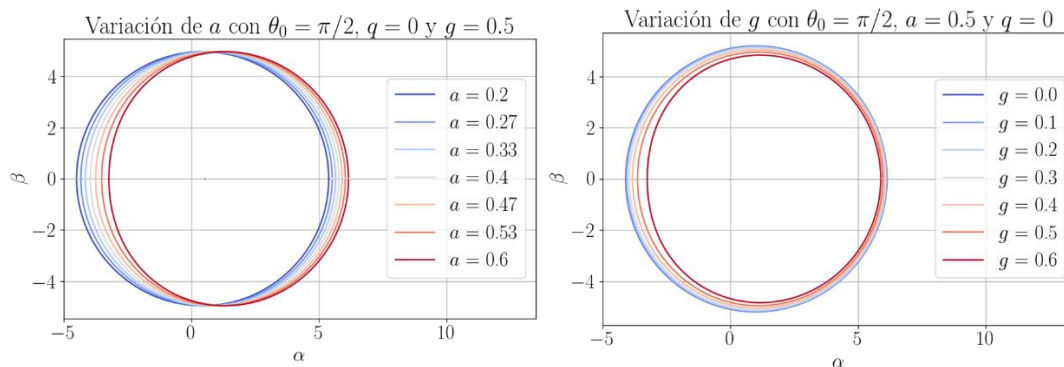


Figura 4. Variaciones de los parámetros a y g para la métrica de Bardeem.

Bibliografía/Referencias

- [1] Schutz, B. F. (2018). A first course in general relativity. Cambridge University Press.
- [2] Amarilla, Leonardo. (2013). Sombras de agujeros negros en teorías alternativas de gravitación. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
- [3] Carter, B. (1968). Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. Physical Review, 174(5), 1559–1571.